



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

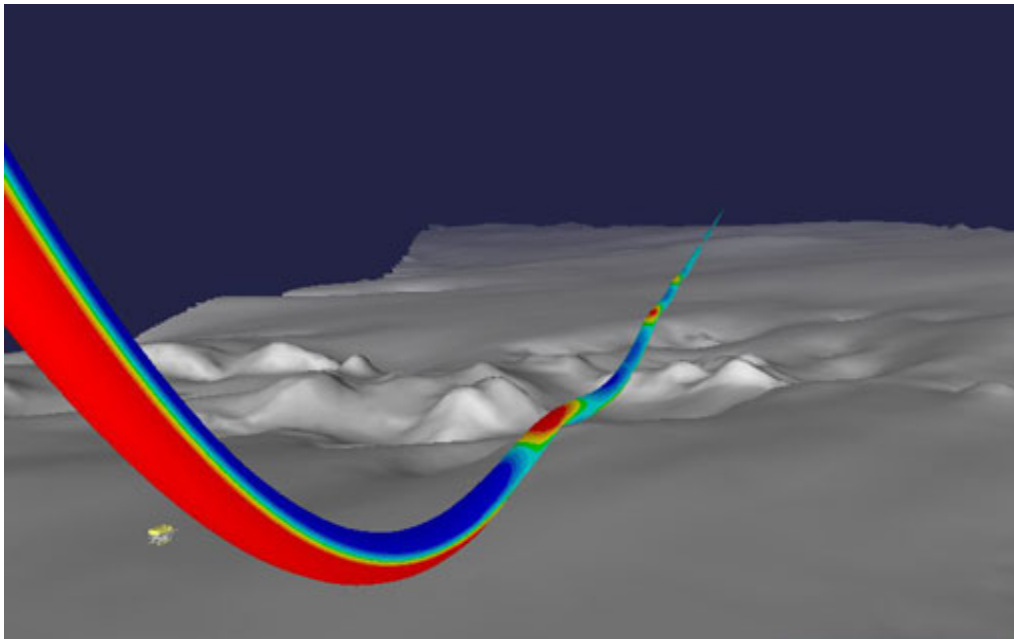
ΤΟΜΕΑΣ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δ.Π.Μ.Σ. «Ναυτική και Θαλάσσια Τεχνολογία και Επιστήμη»

**ΤΡΙΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΥΣΘΕΙΔΩΝ
ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ**

ΚΑΡΜΠΑΔΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗΣ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | |
|---------------------------------------|--------|
| Περίληψη | σελ-2 |
| Abstract | σελ-3 |
| 1.Εισαγωγή | σελ-4 |
| 2.Σύστημα μαθηματικών εξισώσεων | σελ-6 |
| 3.Ανάπτυξη σε σειρά διαταραχών | σελ-11 |
| 4.Προσέγγιση στο πεδίο των συχνοτήτων | σελ-17 |
| 5.Αριθμητική Επίλυση | σελ-23 |
| 6.Αποτελέσματα | σελ-26 |
| 7.Συμπεράσματα | σελ-49 |
| Βιβλιογραφία | σελ-50 |
| Παράρτημα | σελ-52 |

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της μεταπτυχιακής εργασίας είναι η διερεύνηση της μη-γραμμικής δυναμικής απόκρισης αγωγών με αλυσοειδή διαμόρφωση, στο πεδίο των συχνοτήτων. Η κατασκευή που εξετάζεται αποτελείται από αλυσοειδή αγωγό με σταθερές φυσικές και μηχανικές ιδιότητες. Ο αγωγός θεωρείται αρθρωμένος στον πυθμένα, ενώ στην κορυφή ασκείται μονοχρωματική διέγερση. Εφαρμόζεται η μέθοδος της ανάπτυξης σε σειρά διαταραχών για τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος και τα τρία διακριτά συστήματα που προκύπτουν αντιμετωπίζονται ξεχωριστά και αλληλοδιαδοχικά. Επίσης, για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών. Τέλος, παρουσιάζεται η συνεισφορά των πρωτοτάξιων και δευτεροτάξιων όρων στο πρόβλημα τρίτης τάξης που μελετάται και αξιολογούνται τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τη συμπεριφορά του αγωγού.

ABSTRACT

This Master Thesis attempts to investigate the nonlinear dynamics of catenary shaped pipelines using a frequency domain technique. The study emphasizes on marine applications modeling the structure as a top tensioned riser with constant physical and mechanical properties. The pipeline is considered to be pinned at the bottom-end point and a monochromatic excitation is forced at the top-end. The dynamic components of the original system are treated using the perturbation series expansion technique. This method leads to the derivation of three discrete systems, which are being solved separately and successively. Moreover, the Finite Difference Method is being employed to obtain the numerical solution. Lastly, the contribution of the first- and second-order components on the third-order problem is studied and the results on the dynamic response of the structure are evaluated.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυναμική συμπεριφορά των αλυσοειδών κατασκευών έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας για αρκετά χρόνια. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συνεισφορά των μη-γραμμικών φαινομένων στη συνολική απόκριση μιας τέτοια κατασκευής, όπως για παράδειγμα οι υψίσυχνες ταλαντώσεις λόγω αποκόλλησης φύλλων στροβιλότητας (vortex-shedding effects) και τα φαινόμενα δυναμικού λυγισμού (buckling) που οφείλονται στις γεωμετρικές μη-γραμμικότητες και την αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής.

Ένας προφανής τρόπος προσέγγισης της μη-γραμμικής συμπεριφοράς μιας τέτοιας κατασκευής είναι η ανάλυση στο πεδίο των χρόνων. Ωστόσο, αυτή παρέχει μόνο ένα χρονικό σήμα των συνιστωσών της απόκρισης. Αν θέλει κανείς να διερευνήσει περαιτέρω τις λεπτομέρειες της απόκρισης χρειάζεται βαθύτερη ανάλυση. Χαρακτηριστικά αναφέρεται η τεχνική Fast Fourier Transformation (FFT), που «προβάλλει» τις χρονικές ιστορίες της απόκρισης στο πεδίο των συχνοτήτων. Ακόμα, όμως, και για τις πιο απλές διεγέρσεις, π.χ. μονοχρωματικές, η ανάλυση Fourier επιστρέφει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη μιας σειράς αρμονικών με διαφορετικά πλάτη [1].

Κατ' επέκταση έχουν παρατηρηθεί αριθμητικοί υπολογισμοί που φαινομενικά δεν συνάδουν με την θεωρητική επίλυση του υπόψη προβλήματος. Παραδείγματος χάριν, το πλήρες τρισδιάστατο (3D) δυναμικό σύστημα με όρους ως την Τρίτη τάξη που αναπτύχθηκε από τον Chatjigeorgiou [2, 3]. Συνεπώς, το ερώτημα που τίθεται, αφορά τον μηχανισμό που διεγείρει τις, υποθετικά, άπειρες αρμονικές υπό τη μορφή ακέραιων πολλαπλάσιων μιας βασικής αρμονικής. Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, γίνεται μια προσπάθεια να δοθεί μια αξιόπιστη απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα.

Οι πιο δημοφιλείς αριθμητικές μέθοδοι για τη διερεύνηση της δυναμικής των αλυσοειδών κατασκευών και αγωγών βασίζονται στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Elements Method). Με την πάροδο του χρόνου έχει δημιουργηθεί μια σειρά προγραμμάτων που εξειδικεύονται στις θαλάσσιες εφαρμογές, όπως τα Deeplines [4], Flexcom[5], Riflex [6] και Orcaflex [7]. Σύγχρονα παραδείγματα αποτελούν τα έργα των Athisacul et al. [8] και Hosseini Kordkheili et al. [9]. Εναλλακτικές μέθοδοι που εφαρμόζονται είναι τα μοντέλα συγκεντρωμένων μαζών (Lumped mass models) [10, 11] και των πεπερασμένων διαφορών (Finite difference models) [2, 3, 12].

Αναμφισβήτητα, οι τεχνικές προσέγγισης τέτοιων προβλημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων δεν είναι τόσο διαδεδομένες όσο στο πεδίο των χρόνων. Παρόλα αυτά, έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα αποτελεσματικές στην επίλυση της δυναμικής των καλωδίων και των γραμμών αγκύρωσης (π.χ. [13, 14]), ενώ έχουν χρησιμοποιηθεί και στην ανάλυση της δυναμικής των κατασκευών με σημαντική καμπτική ακαμψία, όπως δοκοί,

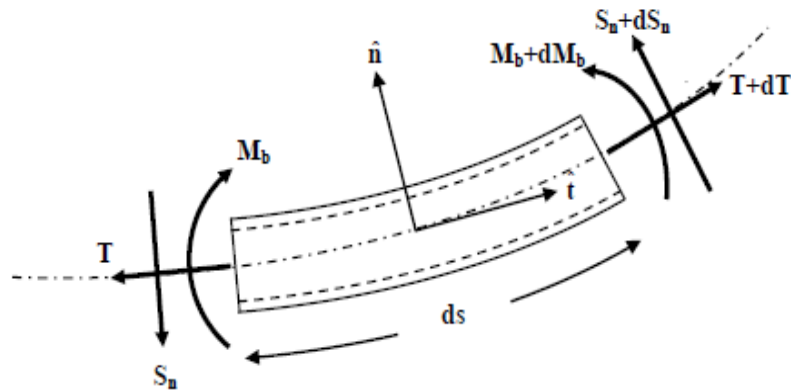
αγωγοί κ.α. [10, 11, 15-18]. Εξελιγμένες τεχνικές όπως η μέθοδος harmonic balance [19], ή η incremental harmonic balance [20] και οι μέθοδοι shooting [21], είναι στην πραγματικότητα βασισμένες στην προσέγγιση στο πεδίο των συχνοτήτων. Οι παραπάνω τεχνικές χρησιμοποιούνται συχνά για να εξετάσουν τις λεπτομέρειες της περιοδικής απόκρισης μη- γραμμικών συστημάτων.

Η παρούσα εργασία στοχεύει στην ανάπτυξη μιας εξελιγμένης μεθοδολογίας στο πεδίο των συχνοτήτων για τη μελέτη της τρίτης τάξεως μη-γραμμικής απόκρισης αλυσοειδών κατασκευών για μεταφορά ρευστών. Έμφαση δίνεται στις θαλάσσιες εφαρμογές όπου η διανεμημένη δύναμη drag είναι σημαντικού μεγέθους. Η ανάλυση που γίνεται, δίνει πληροφορίες για τον μηχανισμό που προκαλεί τις αρμονικές υψηλότερης τάξης της απόκρισης, όταν η κατασκευή υφίσταται μονοχρωματική διέγερση. Το βασικό μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα αναπτύσσεται σε σειρά διαταραχών. Η ανάπτυξη γίνεται για τη n -οστή τάξη, αλλά στην παρούσα φάση η επίλυση περιορίζεται μέχρι την τρίτη τάξη του.

Η μέθοδος αυτή οδηγεί στη δημιουργία τριών διακριτών συστημάτων που λύνονται ξεχωριστά και διαδοχικά. Το τρίτης τάξης πρόβλημα απαιτεί τη λύση της δεύτερης τάξης και αντίστοιχα αυτό απαιτεί τη λύση του πρωτοτάξιου. Κατ' επέκταση το n -οστής τάξης σύστημα χρειάζεται τη λύση όλων των προηγούμενων συστημάτων μέχρι τη $(n-1)$ τάξη.

2. ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η κατασκευή προσομοιάζεται ως καμπύλη δοκός Euler-Bernoulli στον χώρο των δύο διαστάσεων. Η δυναμική ισορροπία της καμπύλης δοκού δείχνεται στην Εικόνα 1. Η μάζα, η υδροδυναμική μάζα, το βάρος στο νερό, η εξωτερική διάμετρος, η εσωτερική διάμετρος, το εμβαδόν της διατομής και η ροπή αδράνειας συμβολίζονται αντιστοίχως με m , m_w , w_0 , d_o , d_i , A , I . Τα παραπάνω στοιχεία αναφέρονται στην αρχική (μη παραμορφωμένη) κατάσταση. Η πυκνότητα του αγωγού συμβολίζεται με ρ_s και το μέτρο ελαστικότητας του Young με E . Αντίστοιχα η ελαστική και η καμπτική ακαμψία συμβολίζονται με EA και EI αντίστοιχα. Γίνεται η υπόθεση ότι ο αγωγός μεταφέρει υγρό που κινείται με σταθερή ταχύτητα V . Επίσης, η πυκνότητα του υγρού συμβολίζεται με ρ_f και έχει μάζα ανά μονάδα μη παραμορφωμένου μήκους του αγωγού ίση με M . Η εσωτερική ροή στον αγωγό ακολουθεί το μοντέλο “plug flow” [22]. Η επιρροή των φαινομένων στρέψης αμελούνται ενώ η σχέση τάσεων-τροπών λαμβάνεται ως γραμμική. Η ελαστική παραμόρφωση κατά μήκος του αγωγού είναι μηδαμινή ($e \approx 0$). Εισάγεται σύστημα συντεταγμένων Lagrange που ορίζεται από τα μοναδιαία διανύσματα \vec{t} και \vec{n} . Το \vec{t} είναι κάθετο στο άξονα του αγωγού, και το \vec{n} κάθετο στο \vec{t} . Τέλος, η Lagrangian συντεταγμένη που παίρνει τιμές κατά το απαραμόρφωτο μήκος του αγωγού συμβολίζεται με s .



Εικόνα 1. Ισορροπία τμήματος καμπλωμένου αγωγού.

Η μη-γραμμική δυναμική συμπεριφορά του σώματος περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων [2-3]:

$$\frac{\partial T}{\partial s} - S_n \Omega_3 - w \sin \varphi - m \frac{\partial u}{\partial t} + (m + M)v \frac{\partial \varphi}{\partial t} + MV \Omega_3 v = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial s} + \Omega_3 T + w \cos \varphi + R_{dn} - (m + m_a + M) \frac{\partial v}{\partial t} - m \frac{\partial \varphi}{\partial t} u - MV \frac{\partial v}{\partial s} - MV^2 \Omega_3 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \Omega_3 v - \frac{1}{EA} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \Omega_3 u - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

$$EI \frac{\partial \Omega_3}{\partial s} + S_n = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} - \Omega_3 = 0 \quad (6)$$

Όπου το R_{dn} είναι η δύναμη drag (αντίστασης) κάθετη διεύθυνση, $w=w_0+Mg$ και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Εδώ, οι δυναμικές συνιστώσες στο επίπεδο αναφοράς θεωρούνται ανεξάρτητες από τις δυναμικές συνιστώσες εκτός επιπέδου, π.χ. τις κάθετες στο επίπεδο αναφοράς. Οι συνθήκες που οδηγούν στην παραπάνω υπόθεση βρίσκονται αναλυτικά στο [18]. Οι εξισώσεις (1)-(2) είναι οι εξισώσεις κίνησης στην αξονική και την κάθετη διεύθυνση, αντίστοιχα. Οι (3)-(4) είναι οι εξισώσεις συμβιβαστού και η εξίσωση (5) είναι η ισορροπία ροπών. Οι άγνωστες συνιστώσες γράφονται σε πινακοποιημένη μορφή ως:

$$\mathbf{Y} \equiv \mathbf{Y}(s,t) = [T \quad S_n \quad u \quad v \quad \Omega_3 \quad \varphi]^T \quad (7)$$

Όπου $T \equiv T(s,t)$ είναι η τάση, $S_n \equiv S_n(s,t)$ η διατμητική δύναμη, $u \equiv u(s,t)$ και $v \equiv v(s,t)$ η αξονική και η κάθετη ταχύτητα αντίστοιχα, $\Omega_3 \equiv \Omega_3(s,t)$ η καμπυλότητα και $\varphi \equiv \varphi(s,t)$ είναι η γωνία που σχηματίζει μεταξύ της εφαπτομένης στον αγωγό και της οριζοντίου. Προφανώς, όλοι αυτοί οι όροι αναφέρονται στο σύστημα συντεταγμένων Lagrange και είναι συνάρτηση του s και του χρόνου t . Σημειώνεται ότι τα $T, S_n, \Omega_3, \varphi$ αναφέρονται σε συνολικά μεγέθη δηλαδή στο άθροισμα του στατικού και δυναμικού τμήματος. Ο πίνακας που περιγράφει τη στατική διαμόρφωση του αγωγού και προκύπτει από τη στατική του επίλυση είναι:

$$\mathbf{Y}_0 \equiv \mathbf{Y}_0(s,t) = [T_0 \quad S_{n0} \quad 0 \quad 0 \quad \Omega_{30} \quad \varphi_0]^T \quad (8)$$

Με $T_0 \equiv T_0(s), S_{n0} \equiv S_{n0}(s), \Omega_{30} \equiv \Omega_{30}(s)$ και $\varphi_0 \equiv \varphi_0(s)$. Αντίστοιχα, οι δυναμικοί όροι είναι στοιχεία του πίνακα:

$$\mathbf{Y}_1 \equiv \mathbf{Y}_1(s,t) = [T_1 \quad S_{n1} \quad u \quad v \quad \Omega_{31} \quad \varphi_1]^T \quad (9)$$

Όπου $T_1 \equiv T_1(s,t), S_{n1} \equiv S_{n1}(s,t), \Omega_{31} \equiv \Omega_{31}(s,t)$ και $\varphi_1 \equiv \varphi_1(s,t)$. Τα σύμβολα 0 και 1 χρησιμοποιούνται για να διαχωρίσουν τους στατικούς από τους δυναμικούς όρους. Επίσης, ισχύει ότι το \mathbf{Y} είναι το άθροισμα του \mathbf{Y}_0 με το \mathbf{Y}_1 .

Στη συνέχεια, εισάγοντας τις εξισώσεις (7)-(9) στο σύστημα (1)-(6) και αφαιρώντας τους στατικούς όρους προκύπτει το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα που θα επεξεργαστούμε. Σε πινακοποιημένη μορφή το δυναμικό σύστημα γράφεται:

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial t} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial s} + \mathbf{B} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{S} = 0 \quad (10)$$

Όπου,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m & 0 & 0 & (m+M)v \\ 0 & 0 & 0 & -(m+m_a+M) & 0 & -mu \\ \frac{-1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -MV & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{30} & 0 & MV\Omega_{30} & -S_{n0} & -w\cos\varphi_0 \\ \Omega_{30} & 0 & 0 & 0 & T_0 - MV^2 & w\sin\varphi_0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -S_{n1}\Omega_{31} + MV\Omega_{31}v \\ \Omega_{31}T_1 + R_{d1} \\ -\Omega_{31}v \\ \Omega_{31}u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Η εξίσωση (10) αποτελεί την εξίσωση μέσω της οποίας θα διερευνηθεί, στο πεδίο των συχνοτήτων, η συνεισφορά των τριτοτάξιων μη-γραμμικών όρων στη δυναμική συμπεριφορά του αγωγού. Η επεξεργασία αυτής της εξίσωσης στο πεδίο των συχνοτήτων απαιτεί μια υψηλών απαιτήσεων προσέγγιση, καθώς περιλαμβάνει χρονικά εξαρτώμενους όρους. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της ανάπτυξης σε σειρά διαταραχών [23-24].

3. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΕ ΣΕΙΡΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

Έστω ε είναι ένας αυθαίρετα επιλεγμένος αριθμός ο οποίος ορίζεται ως μέτρο του πλάτους της κίνησης. Ακολούθως, υποτίθεται ότι όλοι οι χρονικά μεταβαλλόμενοι όροι μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά διαταραχών σύμφωνα με την

$$\mathbf{Y}_1 = \varepsilon \mathbf{Y}_1^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{Y}_1^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{Y}_1^{(3)} + \dots + \varepsilon^{(n)} \mathbf{Y}_1^{(n)} \quad (15)$$

Εάν ορίζουμε ως $k=1,2,3$

$$\mathbf{Y}_1^{(k)} \equiv \mathbf{Y}_1^{(k)}(s, t) = [T_1^{(k)} \quad S_{n1}^{(k)} \quad u^{(k)} \quad v^{(k)} \quad \Omega_{31}^{(k)} \quad \varphi_1^{(k)}] \quad (16)$$

Το ίδιο ισχύει και για τη δύναμη drag. Επομένως,

$$\mathbf{R}_{dn1} = \varepsilon \mathbf{R}_{dn1}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{R}_{dn1}^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{R}_{dn1}^{(3)} + \dots + \varepsilon^{(n)} \mathbf{R}_{dn1}^{(n)} \quad (17)$$

Η ανάπτυξη σε σειρά διαταραχών χωρίζει το πρόβλημα σε μια σειρά προβλημάτων διαδοχικών τάξεων. Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι οι όροι των πινάκων $\varepsilon \mathbf{Y}_1^{(1)}$, $\varepsilon^2 \mathbf{Y}_1^{(2)}$, $\varepsilon^3 \mathbf{Y}_1^{(3)}$, ... που υπολογίζονται ακολούθως. Στη συνέχεια, για την αποφυγή επαναλήψεων και για την απλοποίηση των συμβολισμών τα ε θα παραλείπονται.

Τα στοιχεία των πινάκων $\mathbf{Y}_1^{(k)}$ και οι συνιστώσες της ανάπτυξης σε σειρά διαταραχών της δύναμης drag, είναι συναρτήσεις των s και t . Δηλαδή, $T_1^{(k)} \equiv T_1^{(k)}(s, t)$, $S_{n1}^{(k)} \equiv S_{n1}^{(k)}(s, t)$, $u^{(k)} \equiv u^{(k)}(s, t)$, $v^{(k)} \equiv v^{(k)}(s, t)$, $\Omega_{31}^{(k)} \equiv \Omega_{31}^{(k)}(s, t)$, $\varphi_1^{(k)} \equiv \varphi_1^{(k)}(s, t)$ και $R_{dn1}^{(k)} \equiv R_{dn1}^{(k)}(s, t)$. Η δύναμη drag εκφράζεται σύμφωνα με τον τύπο του Morison και επομένως αναπτύσσεται ως εξής:

$$R_{dn1}^{(k)} = -b|v|v^{(k)} \quad (18)$$

Όπου $b = \frac{1}{2} C_{dn} d_o$, ρ είναι η πυκνότητα του νερού και C_{dn} είναι ο συντελεστής της δύναμης drag στην κάθετη διεύθυνση. Δεδομένου του γεγονότος ότι οι δευτεροτάξιοι και τριτοτάξιοι όροι αναμένεται να είναι αρκετά μικρότεροι από τους γραμμικούς όρους, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μέτρο της κάθετης ταχύτητας προσεγγίζεται επαρκώς από το γραμμικό μέρος της μόνο, ήτοι $|v| = |v^{(1)}|$.

Στη συνέχεια, εισάγοντας τις εξισώσεις (15)-(17) στο σύστημα του πίνακα της εξίσωσης (10), αμελώντας τους όρους πάνω από την 4^η τάξη, $O(\varepsilon^4)$, και εξισώνοντας τους όρους στις αντίστοιχες δυνάμεις του ε , προκύπτουν τα παρακάτω συστήματα:

3.1 Πρώτο-τάξιο Σύστημα

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial s} - \Omega_{30} S_{n1}^{(1)} - S_{n0} \Omega_{31}^{(1)} - w \cos \varphi_0 \varphi_1^{(1)} - m \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + MV \Omega_{30} v^{(1)} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial S_{n1}^{(1)}}{\partial s} + \Omega_{30} T_1^{(1)} + T_0 \Omega_{31}^{(1)} + w \sin \varphi_0 \varphi_1^{(1)} + R_{dn1}^{(1)} - (m + m_a + M) \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} - MV \frac{\partial v^{(1)}}{\partial s} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial s} - \Omega_{30} v^{(1)} - \frac{1}{EA} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial s} + \Omega_{30} u^{(1)} - \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

$$EI \frac{\partial \Omega_{31}^{(1)}}{\partial s} + S_{n1}^{(1)} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial s} - \Omega_{31}^{(1)} = 0 \quad (24)$$

3.2 Δευτερο-τάξιο Σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial s} - \Omega_{30} S_{n1}^{(2)} - S_{n0} \Omega_{31}^{(2)} - w \cos \varphi_0 \varphi_1^{(2)} - m \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + MV \Omega_{30} v^{(2)} = \\ = S_{n1}^{(1)} \Omega_{31}^{(1)} - (m + M) v^{(1)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial t} - MV \Omega_{31}^{(1)} v^{(1)} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{n1}^{(2)}}{\partial s} + \Omega_{30} T_1^{(2)} + T_0 \Omega_{31}^{(2)} + w \sin \varphi_0 \varphi_1^{(2)} + R_{dn1}^{(2)} - (m + m_a + M) \frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} - MV \frac{\partial v^{(2)}}{\partial s} \\ - MV^2 \Omega_{31}^{(2)} = -\Omega_{31}^{(1)} T_1^{(1)} + mu^{(1)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial s} - \Omega_{30} v^{(2)} - \frac{1}{EA} \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial t} = v^{(1)} \Omega_{31}^{(1)} \quad (27)$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial s} + \Omega_{30} u^{(2)} - \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial t} = -\Omega_{31}^{(1)} u^{(1)} \quad (28)$$

$$EI \frac{\partial \Omega_{31}^{(2)}}{\partial s} + S_{n1}^{(2)} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial s} - \Omega_{31}^{(2)} = 0 \quad (30)$$

3.3 Τριτο-τάξιο Σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(3)}}{\partial s} - \Omega_{30} S_{n1}^{(3)} - S_{n0} \Omega_{31}^{(3)} - w \cos \varphi_0 \varphi_1^{(3)} - m \frac{\partial u^{(3)}}{\partial t} + MV \Omega_{30} v^{(3)} = S_{n1}^{(1)} \Omega_{31}^{(2)} + \\ + S_{n1}^{(2)} \Omega_{31}^{(1)} - (m+M)v^{(1)} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial t} - (m+M)v^{(2)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial t} - MV \Omega_{31}^{(1)} v^{(2)} - MV \Omega_{31}^{(2)} v^{(1)} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{n1}^{(3)}}{\partial s} + \Omega_{30} T_1^{(3)} + T_0 \Omega_{31}^{(3)} + w \sin \varphi_0 \varphi_1^{(3)} + R_{dn1}^{(3)} - (m+m_a+M) \frac{\partial v^{(3)}}{\partial t} - MV \frac{\partial v^{(3)}}{\partial s} \\ - MV^2 \Omega_{31}^{(3)} = -\Omega_{31}^{(1)} T_1^{(2)} - \Omega_{31}^{(2)} T_1^{(1)} + mu^{(1)} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial t} + mu^{(2)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{\partial u^{(3)}}{\partial s} - \Omega_{30} v^{(3)} - \frac{1}{EA} \frac{\partial T_1^{(3)}}{\partial t} = v^{(1)} \Omega_{31}^{(2)} + v^{(2)} \Omega_{31}^{(1)} \quad (33)$$

$$\frac{\partial v^{(3)}}{\partial s} + \Omega_{30} u^{(3)} - \frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial t} = -\Omega_{31}^{(1)} u^{(2)} - \Omega_{31}^{(2)} u^{(1)} \quad (34)$$

$$EI \frac{\partial \Omega_{31}^{(3)}}{\partial s} + S_{n1}^{(3)} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial s} - \Omega_{31}^{(3)} = 0 \quad (36)$$

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην συνεισφορά των όρων που προκύπτουν από τα αναπτύγματα μέχρι την τρίτη τάξη. Ωστόσο, παρατηρώντας το μαθηματικό πρότυπο κατά την ανάπτυξη των μη-γραμμικών όρων επετεύχθη η διαμόρφωση του γενικού τύπου, δηλαδή του συστήματος ν-οστής τάξης.

3.4 Σύστημα ν-οστής Τάξης

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(n)}}{\partial s} - \Omega_{30} S_{n1}^{(n)} - S_{n0} \Omega_{31}^{(n)} - w \cos \varphi_0 \varphi_1^{(n)} - m \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} + MV \Omega_{30} v^{(n)} = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} S_{n1}^{(i)} \Omega_{31}^{(n-i)} - (m+M) \sum_{i=1}^{n-1} v^{(i)} \frac{\partial \varphi_1^{(n-i)}}{\partial t} - MV \sum_{i=1}^{n-1} \Omega_{31}^{(i)} v^{(n-i)} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{n1}^{(n)}}{\partial s} + \Omega_{30} T_1^{(n)} + T_0 \Omega_{31}^{(n)} + w \sin \varphi_0 \varphi_1^{(n)} + R_{dn1}^{(n)} - (m+m_a+M) \frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} - MV \frac{\partial v^{(n)}}{\partial s} \\ - MV^2 \Omega_{31}^{(n)} = - \sum_{i=1}^{n-1} \Omega_{31}^{(i)} T_1^{(n-i)} + m \sum_{i=1}^{n-1} u^{(i)} \frac{\partial \varphi_1^{(n-i)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial s} - \Omega_{30} v^{(n)} - \frac{1}{EA} \frac{\partial T_1^{(n)}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n-1} v^{(i)} \Omega_{31}^{(n-i)} \quad (39)$$

$$\frac{\partial v^{(n)}}{\partial s} + \Omega_{30} u^{(n)} - \frac{\partial \varphi_1^{(n)}}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{n-1} \Omega_{31}^{(i)} u^{(n-i)} \quad (40)$$

$$EI \frac{\partial \Omega_{31}^{(n)}}{\partial s} + S_{n1}^{(n)} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^{(n)}}{\partial s} - \Omega_{31}^{(n)} = 0 \quad (42)$$

Οι εξισώσεις (19)-(24), (25)-(30) και (31)-(36) συνθέτουν 3 διακριτά συστήματα που επιλύονται ξεχωριστά για τα προβλήματα πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης, αντίστοιχα. Η λύση του δευτεροτάξιου συστήματος προϋποθέτει τη γνώση της λύσης του πρωτοτάξιου, και κατ' επέκταση το τριτοτάξιο προϋποθέτει τη γνώση των λύσεων του δευτεροτάξιου και του πρωτοτάξιου. Υποθέτοντας ότι η κατασκευή διεγείρεται στο ένα άκρο της από μονοχρωματική διέγερση, συνάγεται ότι η κίνηση αυτή είναι η συνοριακή

συνθήκη για το πρωτοτάξιο (γραμμικό) πρόβλημα. Αναμφίβολα, η λύση του προβλήματος θα δώσει ένα κοινό εύρος συχνοτήτων για τις κινήσεις, τις στροφές και τις εσωτερικές φορτίσεις. Ταυτόχρονα, η συχνότητα της απόκρισης της κατασκευής θα συμπίπτει με τη συχνότητα διέγερσης. Αντίθετα, για το δευτεροτάξιο και το τριτοτάξιο πρόβλημα δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπόκεινται σε εξωτερική φόρτιση. Επομένως, η ερώτηση που προκύπτει αφορά στη φύση της διέγερσης των δύο αυτών συστημάτων. Για να παρέχουμε μια αξιόπιστη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, οφείλουμε πρώτα να διερευνήσουμε τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (25)-(28) και (31)-(34). Ο μηχανισμός που προκαλεί την τετραγωνική και κυβική απόκριση του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια κατανομή γενικευμένων μη-γραμμικών ελατηρίων σε όλο το μήκος της κατασκευής, που προέρχονται από τις γεωμετρικές μη-γραμμικότητες.

4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Αναφορικά με το γραμμικό πρόβλημα, ο πίνακας των αγνώστων γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{Y}_1^{(1)} = \text{Re}\{\mathbf{y}_1^{(1)} e^{i\omega t}\} \quad (43)$$

Όπου $\mathbf{y}_1^{(1)} \equiv \mathbf{y}_1^{(1)}(s, \omega) = [\tilde{T}_1^{(1)} \quad \tilde{S}_{n1}^{(1)} \quad \tilde{u}^{(1)} \quad \tilde{v}^{(1)} \quad \tilde{\Omega}_{31}^{(1)} \quad \tilde{\varphi}^{(1)}]^T$ πίνακας που εξαρτάται από τη συχνότητα ω και τη χωρική συντεταγμένη s . Για την ακρίβεια, τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{y}_1^{(1)}$: $\tilde{T}_1^{(1)} \equiv \tilde{T}_1^{(1)}(s, \omega)$, $\tilde{S}_{n1}^{(1)} \equiv \tilde{S}_{n1}^{(1)}(s, \omega)$, $\tilde{u}^{(1)} \equiv \tilde{u}^{(1)}(s, \omega)$, $\tilde{v}^{(1)} \equiv \tilde{v}^{(1)}(s, \omega)$, $\tilde{\Omega}_{31}^{(1)} \equiv \tilde{\Omega}_{31}^{(1)}(s, \omega)$, $\tilde{\varphi}^{(1)} \equiv \tilde{\varphi}^{(1)}(s, \omega)$ παρέχουν τις γραμμικές συναρτήσεις μεταφοράς των δυναμικών όρων σε κάθε σημείο του αγωγού. Για το διαχωρισμό των στοιχείων αυτών από τα στοιχεία της εξίσωσης (16), έχει εισαχθεί το σύμβολο της περισπωμένης. Εναλλακτικά, η εξίσωση (43), μας δίνει ότι:

$$\mathbf{Y}_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1^{(1)} e^{i\omega t} + \bar{\mathbf{y}}_1^{(1)} e^{-i\omega t}) \quad (44)$$

Όπου $\bar{\mathbf{y}}$ ο συζυγής.

Στη συνέχεια η εξίσωση (44) εισάγεται στο σύστημα εξισώσεων (19)-(24). Έτσι, λαμβάνεται:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{y}_1^{(1)} e^{i\omega t}) + cc = \mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{y}_1^{(1)} e^{i\omega t}) + cc \quad (45)$$

όπου cc συμβολίζει τη συζυγή παράσταση. Το μητρώο 6×6 για το γραμμικό πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{30} & i\omega m & -MV\Omega_{30} & S_{n0} & w \cos \varphi_0 \\ -\Omega_{30} & 0 & -MV\Omega_{30} & i\omega(m + m_a + M) + b|\tilde{v}^{(1)}| & -T_0 + MV^2 & -w \sin \varphi_0 + i\omega MV \\ i\omega/EA & 0 & 0 & \Omega_{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_{30} & 0 & 0 & i\omega \\ 0 & -1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Εξετάζοντας το δευτεροτάξιο σύστημα των εξισώσεων (25)-(30), επιβεβαιώνεται ότι οι σχετιζόμενες μεταβλητές θα αποκριθούν στη διπλάσια από την συχνότητα διέγερσης. Είναι, επίσης, εμφανές ότι τα τετραγωνικά παράγωγα των δεξιών μελών των εξισώσεων (25)-(30), μας δίνουν κάποιους σταθερούς όρους που συνεισφέρουν στην δευτεροτάξια (2ω) απόκριση. Η λύση του δευτεροτάξιου προβλήματος $\mathbf{Y}_1^{(2)}$ είναι:

$$\mathbf{Y}_1^{(2)} = \text{Re} \left\{ \mathbf{y}_c^{(2)} + \mathbf{y}_1^{(2)} e^{2i\omega t} \right\} \quad (47)$$

Όπου $\mathbf{y}_c^{(2)}$ και $\mathbf{y}_1^{(2)}$ συμβολίζουν αντίστοιχα τους σταθερούς και τετραγωνικούς αγνώστους:

$$\mathbf{y}_c^{(2)} \equiv \mathbf{y}_c^{(2)}(s, \omega) = \left[\tilde{T}_c^{(2)} \quad \tilde{S}_{nc}^{(2)} \quad \tilde{u}_c^{(2)} \quad \tilde{v}_c^{(2)} \quad \tilde{\Omega}_{3c}^{(2)} \quad \tilde{\varphi}_c^{(2)} \right]^T \quad (48)$$

$$\mathbf{y}_1^{(2)} \equiv \mathbf{y}_1^{(2)}(s, \omega) = \left[\tilde{T}_1^{(2)} \quad \tilde{S}_{n1}^{(2)} \quad \tilde{u}^{(2)} \quad \tilde{v}^{(2)} \quad \tilde{\Omega}_{31}^{(2)} \quad \tilde{\varphi}^{(2)} \right]^T \quad (49)$$

Πάλι ισχύει:

$\tilde{T}_c^{(2)} \equiv \tilde{T}_c^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{T}_1^{(2)} \equiv \tilde{T}_1^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{S}_{nc}^{(2)} \equiv \tilde{S}_{nc}^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{S}_{n1}^{(2)} \equiv \tilde{S}_{n1}^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{u}_c^{(2)} \equiv \tilde{u}_c^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{u}^{(2)} \equiv \tilde{u}^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{v}_c^{(2)} \equiv \tilde{v}_c^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{v}^{(2)} \equiv \tilde{v}^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{\Omega}_{3c}^{(2)} \equiv \tilde{\Omega}_{3c}^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{\Omega}_{31}^{(2)} \equiv \tilde{\Omega}_{31}^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{\varphi}_c^{(2)} \equiv \tilde{\varphi}_c^{(2)}(s, \omega)$, $\tilde{\varphi}^{(2)} \equiv \tilde{\varphi}^{(2)}(s, \omega)$. Το γεγονός, ότι κάποια από τα στοιχεία του $\mathbf{y}_c^{(2)}$ μπορεί να είναι μηδέν δεν επηρεάζει τη γενικότερη ανάλυση. Σε κάθε περίπτωση, οι τιμές τους εξαρτώνται από το εκάστοτε μοντέλο και δίνονται από της επίλυση του δευτεροτάξιου προβλήματος.

Η εξίσωση (47) γράφεται εναλλακτικά:

$$\mathbf{Y}_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{y}_c^{(2)} + \bar{\mathbf{y}}_c^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{y}_1^{(2)} e^{2i\omega t} + \bar{\mathbf{y}}_1^{(2)} e^{-2i\omega t} \right) \quad (50)$$

Η εξίσωση (50) εισάγεται στο σύστημα εξισώσεων (25)-(30), το οποίο μετά από μαθηματικές πράξεις μας δίνει:

$$\frac{d}{ds} \left(\mathbf{y}_c^{(2)} \right) + \frac{d}{ds} \left(\mathbf{y}_1^{(2)} e^{2i\omega t} \right) + cc = \mathbf{K}^{(2)} \left(\mathbf{y}_1^{(2)} e^{2i\omega t} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{N}^{(2)} e^{2i\omega t} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}}^{(2)} + cc \quad (51)$$

Τα μητρώα 6×6 και 6×1 του δεξιού μέλους της εξίσωσης (51) γράφονται ως εξής:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{30} & 2i\omega m & -MV\Omega_{30} & S_{n0} & w \cos \varphi_0 \\ -\Omega_{30} & 0 & -MV\Omega_{30} & 2i\omega(m + m_a + M) + b|\tilde{v}^{(1)}| & -T_0 + MV^2 & -w \sin \varphi_0 + 2i\omega MV \\ 2i\omega / EA & 0 & 0 & \Omega_{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_{30} & 0 & 0 & 2i\omega \\ 0 & -1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{N}^{(2)} = \begin{bmatrix} S_{n1}^{(1)}\tilde{\Omega}_{31}^{(1)} - i\omega(m + M)\tilde{v}^{(1)}\tilde{\varphi}_1^{(1)} - MV\tilde{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{v}^{(1)} \\ -\tilde{T}_1^{(1)}\tilde{\Omega}_{31}^{(1)} - MV\tilde{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{u}^{(1)} + i\omega m\tilde{u}^{(1)}\tilde{\varphi}_1^{(1)} \\ \tilde{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{v}^{(1)} \\ -\tilde{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{u}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^{(2)} = \begin{bmatrix} S_{n1}^{(1)}\bar{\Omega}_{31}^{(1)} + i\omega(m + M)\tilde{v}^{(1)}\bar{\varphi}_1^{(1)} - MV\bar{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{v}^{(1)} \\ -\bar{\tilde{T}}_1^{(1)}\bar{\Omega}_{31}^{(1)} - MV\bar{\Omega}_{31}^{(1)}\bar{u}^{(1)} + i\omega m\bar{u}^{(1)}\bar{\varphi}_1^{(1)} \\ \bar{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{v}^{(1)} \\ -\bar{\Omega}_{31}^{(1)}\bar{u}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Στη συνέχεια διαχωρίζουμε τους σταθερούς από τους δυναμικούς όρους. Συνεπώς, η εξίσωση (51) χωρίζεται σε δύο συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Το πρώτο σύστημα εκφράζει την δευτεροτάξια σταθερή μετατόπιση και εσωτερική φόρτιση, ενώ το δεύτερο σύστημα τα αντίστοιχα χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη. Στην παρούσα εργασία μελετάται η δυναμική συμπεριφορά του μοντέλου, επομένως παραλείπονται οι σταθεροί όροι. Θα πρέπει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι η ύπαρξη των στοιχείων του πίνακα $\tilde{\mathbf{N}}^{(2)}$ δηλαδή χρονικά αμετάβλητων όρων στη γενική λύση του δευτεροτάξιου προβλήματος,

υποδηλώνει ότι οι δευτεροτάξιοι όροι ταλαντεύονται γύρω από μία μη μηδενική μέση τιμή. Πιο συγκεκριμένα, το σύστημα στο οποίο οδηγούμαστε είναι:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{y}_1^{(2)} e^{2i\omega t}) + cc = \mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{y}_1^{(2)} e^{2i\omega t}) + \frac{1}{2}\mathbf{N}^{(2)} e^{2i\omega t} + cc \quad (55)$$

Προχωρώντας στην επεξεργασία του τριτοτάξιου συστήματος των εξισώσεων (31)-(36), παρατηρούμε ότι η κατασκευή αποκρίνεται στο τριπλάσιο της συχνότητας διέγερσης (3ω). Ταυτόχρονα, στα δεξιά μέλη των εξισώσεων, παράγονται όροι που μεταβάλλουν τους κυβικούς όρους κατά μια χρονικά μεταβαλλόμενη ποσότητα, εξαρτώμενη από τη συχνότητα διέγερσης (ω). Συνεπώς, η λύση του προβλήματος τρίτης τάξης, θα είναι:

$$\mathbf{Y}_1^{(3)} = \text{Re}\left\{\mathbf{y}_f^{(3)} e^{i\omega t} + \mathbf{y}_1^{(3)} e^{3i\omega t}\right\} \quad (56)$$

Όπου $\mathbf{y}_f^{(3)}$ και $\mathbf{y}_1^{(3)}$ είναι, αντίστοιχα, οι πίνακες των αγνώστων ποσοτήτων του τριτοτάξιου προβλήματος που αποκρίνονται με τη βασική (ω) και την τριπλάσια (3ω) συχνότητα

$$\mathbf{y}_f^{(3)} \equiv \mathbf{y}_f^{(3)}(s, \omega) = \left[\tilde{T}_f^{(3)} \quad \tilde{S}_{nf}^{(3)} \quad \tilde{u}_f^{(3)} \quad \tilde{v}_f^{(3)} \quad \tilde{\Omega}_{3f}^{(3)} \quad \tilde{\varphi}_f^{(3)} \right]^T \quad (57)$$

$$\mathbf{y}_1^{(3)} \equiv \mathbf{y}_1^{(3)}(s, \omega) = \left[\tilde{T}_1^{(3)} \quad \tilde{S}_{n1}^{(3)} \quad \tilde{u}^{(3)} \quad \tilde{v}^{(3)} \quad \tilde{\Omega}_{31}^{(3)} \quad \tilde{\varphi}_1^{(3)} \right]^T \quad (58)$$

Επίσης $\tilde{T}_f^{(3)} \equiv \tilde{T}_f^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{T}_1^{(3)} \equiv \tilde{T}_1^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{S}_{nf}^{(3)} \equiv \tilde{S}_{nf}^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{S}_{n1}^{(3)} \equiv \tilde{S}_{n1}^{(3)}(s, \omega)$,
 $\tilde{u}_f^{(3)} \equiv \tilde{u}_f^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{u}^{(3)} \equiv \tilde{u}^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{v}_f^{(3)} \equiv \tilde{v}_f^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{v}^{(3)} \equiv \tilde{v}^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{\Omega}_{3f}^{(3)} \equiv \tilde{\Omega}_{3f}^{(3)}(s, \omega)$,
 $\tilde{\Omega}_{31}^{(3)} \equiv \tilde{\Omega}_{31}^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{\varphi}_f^{(3)} \equiv \tilde{\varphi}_f^{(3)}(s, \omega)$, $\tilde{\varphi}_1^{(3)} \equiv \tilde{\varphi}_1^{(3)}(s, \omega)$.

Η εξίσωση (56) γράφεται:

$$\mathbf{Y}_1^{(3)} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_f^{(3)} e^{i\omega t} + \bar{\mathbf{y}}_f^{(3)} e^{-i\omega t}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1^{(3)} e^{3i\omega t} + \bar{\mathbf{y}}_1^{(3)} e^{-3i\omega t}) \quad (59)$$

Την οποία εισάγουμε στο σύστημα (31)-(36) και λαμβάνουμε:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{y}_f^{(3)} e^{i\omega t}) + \frac{d}{ds}(\mathbf{y}_1^{(3)} e^{3i\omega t}) + cc = \mathbf{K}^{(3)}(\mathbf{y}_1^{(3)} e^{3i\omega t}) + \frac{1}{2}\mathbf{N}^{(3)} e^{3i\omega t} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{N}}^{(3)} e^{i\omega t} + cc \quad (60)$$

Όπου ο πίνακας 6×6 $\mathbf{K}^{(3)}$ και οι πίνακες-στήλες 6×1 $\mathbf{N}^{(3)}$ και $\tilde{\mathbf{N}}^{(3)}$ γράφονται ως εξής:

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{30} & 3i\omega m & -MV\Omega_{30} & S_{n0} & w \cos \varphi_0 \\ -\Omega_{30} & 0 & -MV\Omega_{30} & 3i\omega(m + m_a + M) + b|\tilde{v}^{(1)}| & -T_0 + MV^2 & -w \sin \varphi_0 + 3i\omega MV \\ 3i\omega / EA & 0 & 0 & \Omega_{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_{30} & 0 & 0 & 3i\omega \\ 0 & -1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{N}^{(3)} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{n1}^{(1)}\tilde{\Omega}_{31}^{(2)} + \tilde{S}_{n1}^{(2)}\tilde{\Omega}_{31}^{(1)} - 2i\omega(m + M)\tilde{v}^{(1)}\tilde{\varphi}_1^{(2)} - i\omega(m + M)\tilde{v}^{(2)}\tilde{\varphi}_1^{(1)} - MV\tilde{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{v}^{(2)} - MV\tilde{\Omega}_{31}^{(2)}\tilde{v}^{(1)} \\ -\tilde{T}_1^{(1)}\tilde{\Omega}_{31}^{(2)} - \tilde{T}_1^{(2)}\tilde{\Omega}_{31}^{(1)} - MV\tilde{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{u}^{(2)} - MV\tilde{\Omega}_{31}^{(2)}\tilde{u}^{(1)} + 2i\omega m\tilde{u}^{(1)}\tilde{\varphi}_1^{(2)} + i\omega m\tilde{u}^{(2)}\tilde{\varphi}_1^{(1)} \\ \tilde{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{v}^{(2)} + \tilde{\Omega}_{31}^{(2)}\tilde{v}^{(1)} \\ -\tilde{\Omega}_{31}^{(1)}\tilde{u}^{(2)} - \tilde{\Omega}_{31}^{(2)}\tilde{u}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{S}}_{n1}^{(1)} \tilde{\Omega}_{31}^{(2)} + \tilde{\mathcal{S}}_{n1}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31}^{(1)} - 2i\omega(m+M) \tilde{v}^{(1)} \tilde{\varphi}_1^{(2)} - i\omega(m+M) \tilde{v}^{(2)} \tilde{\varphi}_1^{(1)} - MV \tilde{\Omega}_{31}^{(1)} \tilde{v}^{(2)} - MV \tilde{\Omega}_{31}^{(2)} \tilde{v}^{(1)} \\ -\tilde{\mathcal{T}}_1^{(1)} \tilde{\Omega}_{31}^{(2)} - \tilde{\mathcal{T}}_1^{(2)} \tilde{\Omega}_{31}^{(1)} - MV \tilde{\Omega}_{31}^{(1)} \tilde{u}^{(2)} - MV \tilde{\Omega}_{31}^{(2)} \tilde{u}^{(1)} + 2i\omega m \tilde{u}^{(1)} \tilde{\varphi}_1^{(2)} + i\omega m \tilde{u}^{(2)} \tilde{\varphi}_1^{(1)} \\ \tilde{\Omega}_{31}^{(1)} \tilde{v}^{(2)} + \tilde{\Omega}_{31}^{(2)} \tilde{v}^{(1)} \\ -\tilde{\Omega}_{31}^{(1)} \tilde{u}^{(2)} - \tilde{\Omega}_{31}^{(2)} \tilde{u}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Στη συνέχεια, χωρίζουμε το παραπάνω σε δύο συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με βάση τη συχνότητα τους. Στην παρούσα εργασία μελετάται η συνεισφορά των υψίσυχνων φαινομένων, αμελώντας τους όρους που διεγείρουν την κατασκευή με συχνότητα ω . Κατά συνέπεια

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{y}_1^{(3)} e^{3i\omega t}) + cc = \mathbf{K}^{(3)} (\mathbf{y}_1^{(3)} e^{3i\omega t}) + \frac{1}{2} \mathbf{N}^{(3)} e^{3i\omega t} + cc \quad (64)$$

5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Τα συστήματα πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης επιλύονται ξεχωριστά ως τρία διακριτά προβλήματα συνοριακών στοιχείων. Οι διαφορικές εξισώσεις (45), (55) και (64) αφαιρώντας τις συζυγείς παραστάσεις γίνονται:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{y}_1^{(1)}) = \mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{y}_1^{(1)}) \quad (65)$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{y}_1^{(2)}) = \mathbf{K}^{(2)}(\mathbf{y}_1^{(2)}) + \frac{1}{2}\mathbf{N}^{(2)} \quad (66)$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{y}_1^{(3)}) = \mathbf{K}^{(3)}(\mathbf{y}_1^{(3)}) + \frac{1}{2}\mathbf{N}^{(3)} \quad (67)$$

Η λύση του δευτεροτάξιου συστήματος εξαρτάται από την λύση του πρωτοτάξιου. Ταυτόχρονα, η λύση του τριτοτάξιου συστήματος εξαρτάται από τη λύση των δύο προηγούμενων. Μια επισκόπηση του πίνακα της εξ. (46) δείχνει ότι το μητρώο $\mathbf{K}^{(1)}$ περιλαμβάνει έναν από τους αγνώστους του γραμμικού προβλήματος, εν προκειμένω τη κάθετη ταχύτητα $\tilde{v}^{(1)}$. Συνεπώς, αναφορικά με το γραμμικό πρόβλημα καθίσταται προφανές ότι η αριθμητική επίλυση θα πρέπει να περιλαμβάνει μια επαναληπτική διαδικασία, η οποία θα τερματίζεται όταν επιτυγχάνεται η επιθυμητή ακρίβεια. Για το δευτεροτάξιο και το τριτοτάξιο πρόβλημα, δηλαδή για τους πίνακες των εξισώσεων (52) και (61), δεν χρειάζεται να ακολουθηθεί αντίστοιχη επαναληπτική διαδικασία, καθώς η ταχύτητα $\tilde{v}^{(1)}$ έχει βρεθεί από το πρωτοτάξιο πρόβλημα. Η αριθμητική διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων (65), (66) και (67) για όλα τα s του αγωγού περιγράφεται στις επόμενες παραγράφους.

Τα συστήματα μετασχηματίζονται, έτσι ώστε να περιλαμβάνουν όρους μετατοπίσεων αντί για ταχύτητες. Δηλαδή, $\tilde{u}^{(1)}e^{i\omega t} = i\omega\tilde{p}^{(1)}e^{i\omega t}$, $\tilde{u}^{(2)}e^{2i\omega t} = 2i\omega\tilde{p}^{(2)}e^{2i\omega t}$, $\tilde{u}^{(3)}e^{3i\omega t} = 3i\omega\tilde{p}^{(3)}e^{3i\omega t}$, $\tilde{v}^{(1)}e^{i\omega t} = i\omega\tilde{q}^{(1)}e^{i\omega t}$, $\tilde{v}^{(2)}e^{2i\omega t} = 2i\omega\tilde{q}^{(2)}e^{2i\omega t}$, $\tilde{v}^{(3)}e^{3i\omega t} = 3i\omega\tilde{q}^{(3)}e^{3i\omega t}$, όπου βέβαια ισχύει $\tilde{p}^{(k)} \equiv \tilde{p}^{(k)}(s, \omega)$ και $\tilde{q}^{(k)} \equiv \tilde{q}^{(k)}(s, \omega)$ με $k = 1, 2, 3$. Τα $\tilde{p}^{(k)}$ και $\tilde{q}^{(k)}$ εκφράζουν αντίστοιχα την οριζόντια και κάθετη μετατόπιση σε κάθε σημείο. Η δύναμη drag στην κάθετη διεύθυνση, $R_{dn}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, γραμμικοποιείται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ανάπτυξης σε σειρά Fourier. Βάσει αυτής της διαδικασίας, βρίσκεται ότι οι συντελεστές για την πρώτη, δεύτερη και τρίτη τάξη είναι αντίστοιχα $8/(3\pi)$, $112/(60\pi)$ και $216/(35\pi)$.

Επομένως,

$$R_{dn1}^{(1)} = -ib^{(1)}\omega^2 \left| \tilde{q}^{(1)} \right| \tilde{q}^{(1)}, \text{ με } b^{(1)} = 4 / (3\pi)\rho d_o C_{dn} \quad (68)$$

$$R_{dn1}^{(2)} = -ib^{(2)}\omega^2 \left| \tilde{q}^{(1)} \right| \tilde{q}^{(2)}, \text{ με } b^{(2)} = 112 / (60\pi)\rho d_o C_{dn} \quad (69)$$

$$R_{dn1}^{(3)} = -ib^{(3)}\omega^2 \left| \tilde{q}^{(1)} \right| \tilde{q}^{(3)}, \text{ με } b^{(3)} = 216 / (35\pi)\rho d_o C_{dn} \quad (70)$$

Ακολουθώντας, αφού χωρίσουμε τους όρους σε πραγματικό και φανταστικό μέρος, προκύπτει ένα σύστημα 12 συνήθων διαφορικών εξισώσεων με ίδιο αριθμό αγνώστων. Οι συμβολισμοί R και I , εισάγονται για να διαχωρίσουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δυναμικών όρων.

$$\mathbf{F}^{(k)} = \left[\tilde{T}_{1_R}^{(k)} \quad \tilde{T}_{1_I}^{(k)} \quad \tilde{S}_{n1_R}^{(k)} \quad \tilde{S}_{n1_I}^{(k)} \quad \tilde{u}_R^{(k)} \quad \tilde{u}_I^{(k)} \quad \tilde{v}_R^{(k)} \quad \tilde{v}_I^{(k)} \quad \tilde{\Omega}_{31_R}^{(k)} \quad \tilde{\Omega}_{31_I}^{(k)} \quad \tilde{\varphi}_{1_R}^{(k)} \quad \tilde{\varphi}_{1_I}^{(k)} \right]^T \quad (71)$$

Για $k = 1, 2, 3$. Οι εξισώσεις (45), (55) και (64) ξαναγράφονται, ως εξής:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{F}^{(k)}) = \mathbf{P}^{(k)}\mathbf{F}^{(k)} + \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{(k)} \quad (72)$$

Με το $\mathbf{Q}^{(1)} = 0$. Τα μητρώα $P^{(k)}$ για $k = 1, 2, 3$ καθώς και τα $\mathbf{Q}^{(2)}$ και $\mathbf{Q}^{(3)}$ παρατίθενται παρακάτω.

Τα συστήματα της εξίσωσης (72) επιλύονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο centered differences [25]. Το μήκος της κατασκευής διακριτοποιείται με τη χρήση n κόμβων $l = (1, 2, \dots, n)$ και όλοι οι όροι υπολογίζονται στο $l - 1/2$. Δηλαδή,

$$\mathbf{F}_l^{(k)} - \mathbf{F}_{l-1}^{(k)} = \frac{\Delta s}{2}(\mathbf{P}_l^{(k)}\mathbf{F}_l^{(k)} + \mathbf{P}_{l-1}^{(k)}\mathbf{F}_{l-1}^{(k)}) + \frac{\Delta s}{4}(\mathbf{Q}_l^{(k)} + \mathbf{Q}_{l-1}^{(k)}) \quad (73)$$

Το l υποδεικνύει τον κόμβο που γίνεται ο υπολογισμός. Για n κόμβους, η εξίσωση (73) ορίζει ένα σύστημα $12 \times (n-1)$ εξισώσεων που πρέπει να επιλυθούν με $12 \times n$ εξαρτημένες μεταβλητές. Οι υπόλοιπες εξισώσεις που χρειάζονται λαμβάνονται από τις συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες που ισχύουν στο άνω άκρο της κατασκευής, $l = n, s = L$, δηλαδή στο σημείο που εφαρμόζεται η φόρτιση είναι:

$$p^{(1)} = p_a(t), \quad q^{(1)} = q_a(t), \quad \Omega_{31}^{(1)} = 0. \text{ Και } p^{(2)} = 0, \quad q^{(2)} = 0, \quad \Omega_{31}^{(2)} = 0, \quad p^{(3)} = 0, \quad q^{(3)} = 0, \\ \Omega_{31}^{(3)} = 0 \quad (74)$$

Με άλλα λόγια, θεωρούμε απλή στήριξη στο υπόψη σημείο. Αυτό σημαίνει ότι η καμπυλότητα σε όλες τις τάξεις θα είναι μηδενική. Για μονοχρωματική διέγερση, οι μετακινήσεις θα είναι γνωστές συναρτήσεις που εξαρτώνται από το χρόνο ($p_a(t)$ και $q_a(t)$). Παράλληλα, η εφαρμοζόμενη διέγερση επιτάσσει οι δευτεροτάξιες και τριτοτάξιες μετακινήσεις να είναι μηδέν. Αυτό συνάδει με την παρατήρηση ότι το δευτεροτάξιο και τριτοτάξιο σύστημα προκύπτει από μη-γραμμικά ελατήρια των οποίων η συμπεριφορά εξαρτάται από τα παράγωγα του γραμμικού συστήματος. Οι έξι συνοριακές συνθήκες για κάθε μια τάξη του δυναμικού προβλήματος είναι:

$$\tilde{p}_R^{(1)} = \tilde{p}_{a0}, \quad \tilde{p}_I^{(1)} = 0, \quad \tilde{q}_R^{(1)} = \tilde{q}_{a0}, \quad \tilde{q}_I^{(1)} = 0, \quad \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} = 0, \quad \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} = 0 \quad (75)$$

$$\tilde{p}_R^{(2)} = \tilde{p}_I^{(2)} = \tilde{q}_R^{(2)} = \tilde{q}_I^{(2)} = \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} = \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} = 0 \quad (76)$$

$$\tilde{p}_R^{(3)} = \tilde{p}_I^{(3)} = \tilde{q}_R^{(3)} = \tilde{q}_I^{(3)} = \tilde{\Omega}_{31_R}^{(3)} = \tilde{\Omega}_{31_I}^{(3)} = 0 \quad (77)$$

Όπου \tilde{p}_{a0} και \tilde{q}_{a0} είναι οι εφαρμοζόμενες μετακινήσεις με συχνότητα ω στην οριζόντια και κάθετη διεύθυνση, αντίστοιχα.

Οι έξι τελευταίες συνοριακές συνθήκες, για κάθε τάξη, προκύπτουν από την αλληλεπίδραση του εδάφους με την κατασκευή. Στην παρούσα εργασία θεωρείται ότι η κατασκευή είναι αρθρωμένη (pinned) στο έδαφος, επομένως στον κόμβο 1 έχουμε:

$$\tilde{p}_R^{(k)} = \tilde{p}_I^{(k)} = \tilde{q}_R^{(k)} = \tilde{q}_I^{(k)} = \tilde{\Omega}_{31_R}^{(k)} = \tilde{\Omega}_{31_I}^{(k)} = 0 \text{ για } k = 1, 2, 3.$$

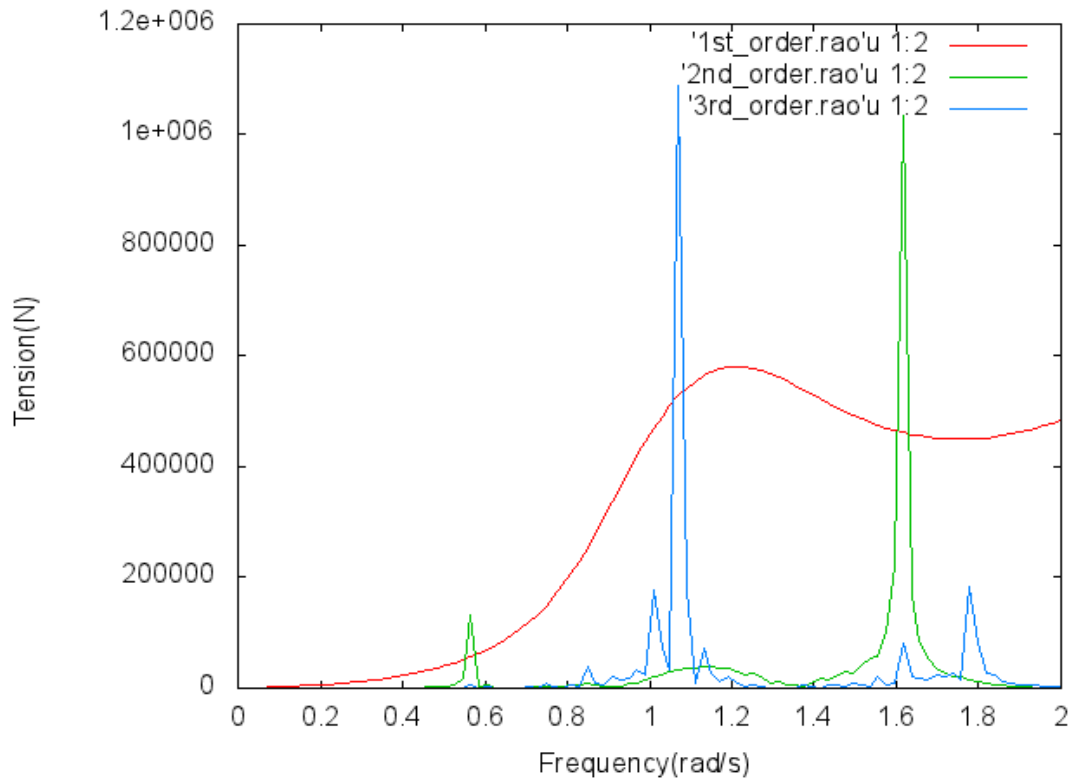
Τα $12 \times n$ αλγεβρικά συστήματα λύνονται επαναληπτικά με τη μέθοδο Relaxation [26].

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

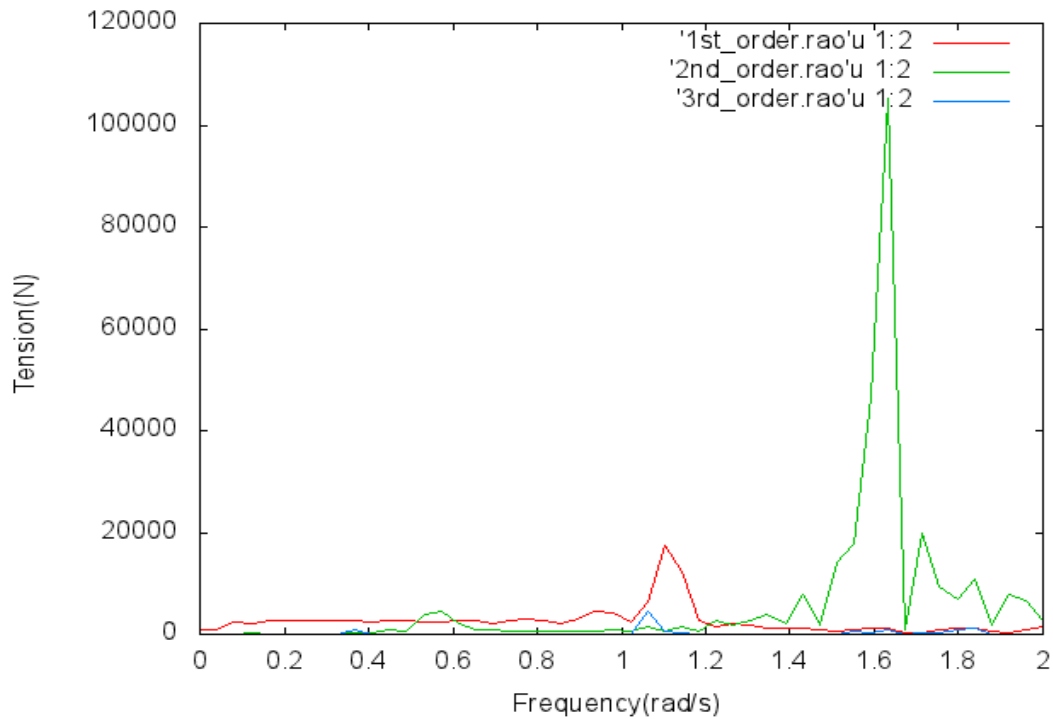
Η αριθμητική επίλυση του παραπάνω μοντέλου έγινε για έναν αγωγό με αλυσοειδή διαμόρφωση και με τα παρακάτω χαρακτηριστικά: πυκνότητα αγωγού $\rho_s = 7800 \text{ kg / m}^3$, εξωτερική διάμετρος αγωγού $d_o = 0.429 \text{ m}$, εσωτερική διάμετρος $d_i = 0.385 \text{ m}$ και εμβαδόν διατομής $A = 0.0281 \text{ m}^2$. Όλες οι ποσότητες αναφέρονται στο απαραμόρφωτο μήκος του αγωγού. Η μάζα ανά μονάδα μήκους λήφθηκε ίση με $m = 219.41 \text{ kg / m}$ και η πρόσθετη μάζα ανά μονάδα μήκους $m_a = 148.16 \text{ kg / m}$. Το μέτρο ελαστικότητας E του Young για το χάλυβα είναι 207 GPa και επομένως η καμπτική ακαμψία $EI = 0.1209 * 10^9 \text{ Nm}^2$. Η πυκνότητα του υγρού εντός του αγωγού είναι $\rho_f = 200 \text{ kg / m}^3$ και αντιστοιχεί στην πυκνότητα του φυσικού αερίου. Συνεπώς, η μάζα του περιεχόμενου ρευστού ανά μονάδα μήκους είναι: $M = 23.2 \text{ kg / m}$ και το συνολικό βάρος ανά μονάδα μήκους στο νερό: $w_0 = 927.36 \text{ N / m}$. Το συνολικό μήκος του αγωγού ελήφθη $L = 2024 \text{ m}$, το βάθος εγκατάστασης $D = 1800 \text{ m}$, η προέκταση στην κορυφή $H = 1860 \text{ kN}$. Για λείους κυλίνδρους ο συντελεστής της δύναμης drag στην κάθετη διεύθυνση είναι $C_{dn} = 1$. Το στατικό μοντέλο που διερευνήθηκε είναι αυτό των Passano και Larsen [27].

Η παρούσα εργασία στοχεύει στην εύρεση των συναρτήσεων μεταφοράς για τους χρονικά εξαρτημένους όρους του δυναμικού προβλήματος. Οι γραμμικές συναρτήσεις μεταφοράς (Linear Transfer Functions (LTFs)), Οι δευτεροτάξιες συναρτήσεις μεταφοράς (Quadratic Transfer Functions (QTFs)) και οι τριτοτάξιες συναρτήσεις μεταφοράς (Triple Transfer Functions (TTFs)) των δυναμικών όρων προκύπτουν από την επίλυση των προβλημάτων πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω.

Μελετώντας την στατική διαμόρφωση του αγωγού προκύπτει ότι είναι σχεδόν κατακόρυφος, και πιο συγκεκριμένα η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του αγωγού και της οριζοντίου στο επιφανειακό σημείο σύνδεσης είναι περίπου 84° . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι κατακόρυφες (heave) διεγέρσεις να είναι αξονικές για τον αγωγό και να προκαλούν, μεταξύ άλλων, δυναμικό λυγισμό (buckling). Για το λόγο αυτό, η καταπόνηση λόγω κόπωσης ενός riser έχει συνδεθεί άμεσα με τις κατακόρυφες (heave) διεγέρσεις. Οι Εικόνες 2 και 3 αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις φόρτισης και δείχνουν ότι η αξονική δύναμη που αναπτύσσεται όταν εφαρμόζεται κατακόρυφη διέγερση (δηλαδή αξονική για τον αγωγό) είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη οριζόντια διέγερση. Στην Εικόνα 2 απεικονίζονται οι συναρτήσεις μεταφοράς της αξονικής δύναμης για τις τρεις τάξεις του δυναμικού μη-γραμμικού προβλήματος, όταν η διέγερση είναι αξονική στον αγωγό. Η Εικόνα 3 απεικονίζει τις ίδιες συναρτήσεις μεταφοράς για την ίδια διέγερση, αλλά κάθετα στον άξονα του αγωγού. Το εύρος των συχνοτήτων που διερευνήθηκε είναι $0-2 \text{ rad/s}$.



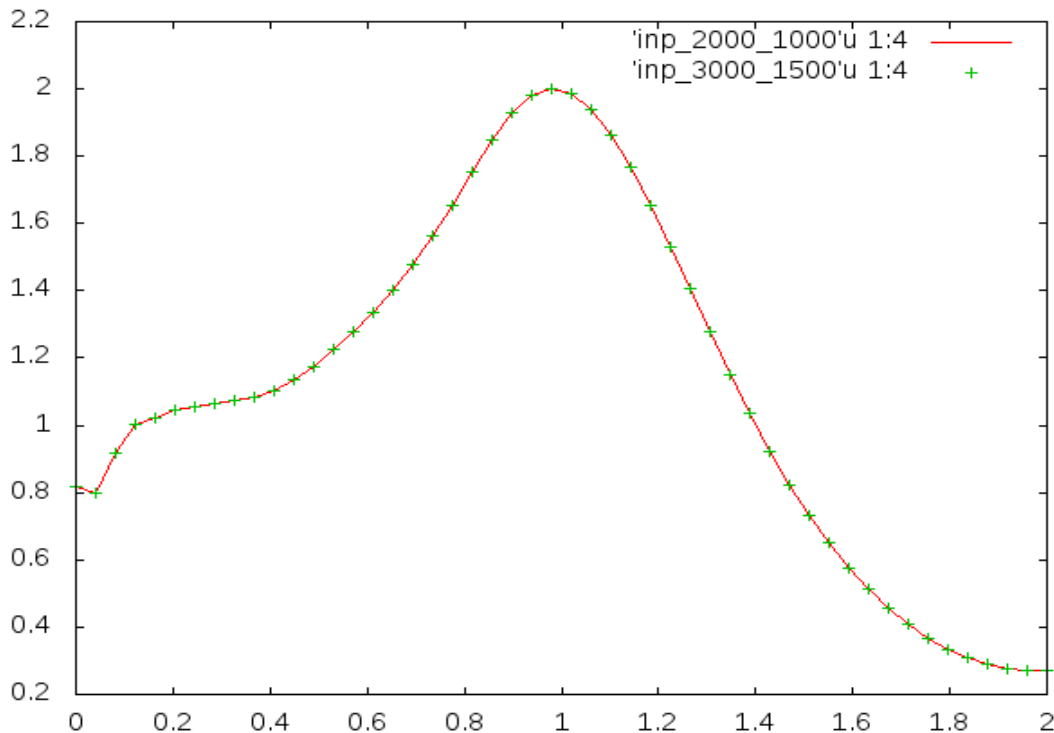
Εικόνα 2: Συναρτήσεις μεταφοράς της αξονικής δύναμης στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για αξονική διέγερση 1m



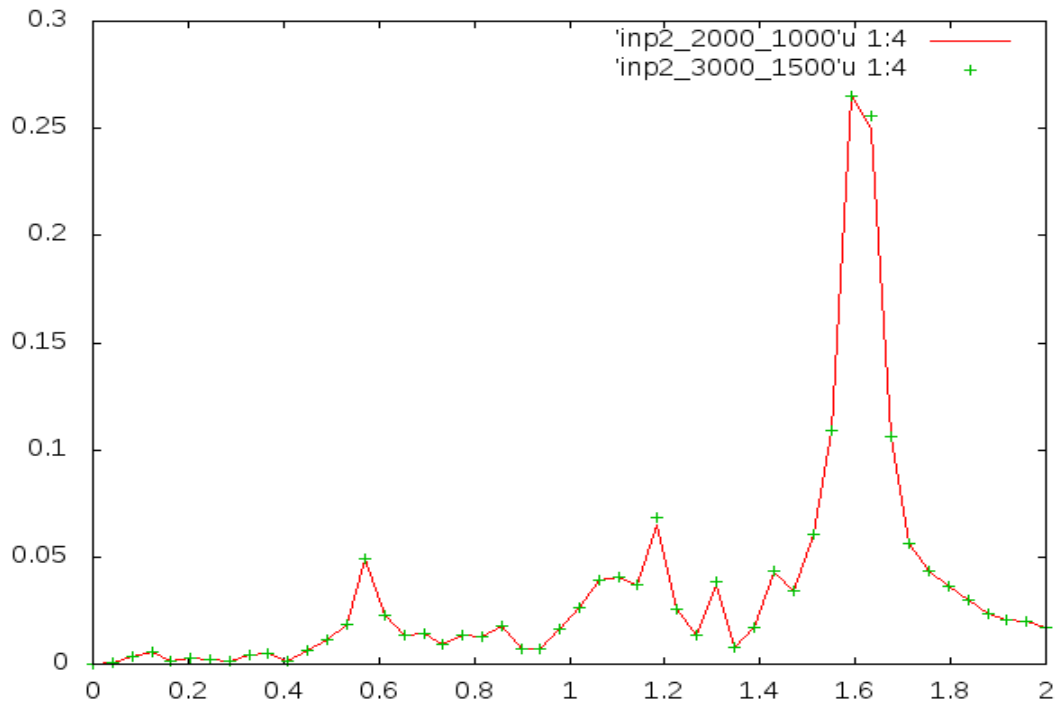
Εικόνα 3: Συναρτήσεις μεταφοράς για την αξονική δύναμη στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για κάθετη στον άξονα του αγωγού διέγερση 1m

Προτού γίνει περαιτέρω ανάλυση των αποτελεσμάτων των περιπτώσεων που διερευνήθηκαν παρατίθενται οι λεπτομέρειες σύγκλισης του αριθμητικού μοντέλου. Στις Εικόνες 4, 5 και 6 φαίνονται οι συναρτήσεις μεταφοράς που προκύπτουν για δυο διαφορετικά πλέγματα, το ένα πυκνότερο από το άλλο. Οι υπολογισμοί έγιναν για τον μεσαίο κόμβο, δηλαδή στο μέσο του μήκους του αγωγού. Διερευνήθηκε ένα εύρος συχνοτήτων 0-2 rad/s. Συγκρίνονται 2 διακριτοποιήσεις, η μία με 2000 κόμβους (συνεχής κόκκινη γραμμή) και η άλλη με 3000 κόμβους (πράσινα σταυρόνηματα). Ενδεικτικά, παρατίθενται τα διαγράμματα για τις κατακόρυφες μετατοπίσεις. Έτσι, στην Εικόνα 4 έχουμε τις LTFs, στην Εικόνα 5 τις QTFs και στην Εικόνα 6 τις TTFs, που προκύπτουν από την επίλυση του δυναμικού μη-γραμμικού προβλήματος για την 1^η, τη 2^η και την 3^η τάξη αντίστοιχα.

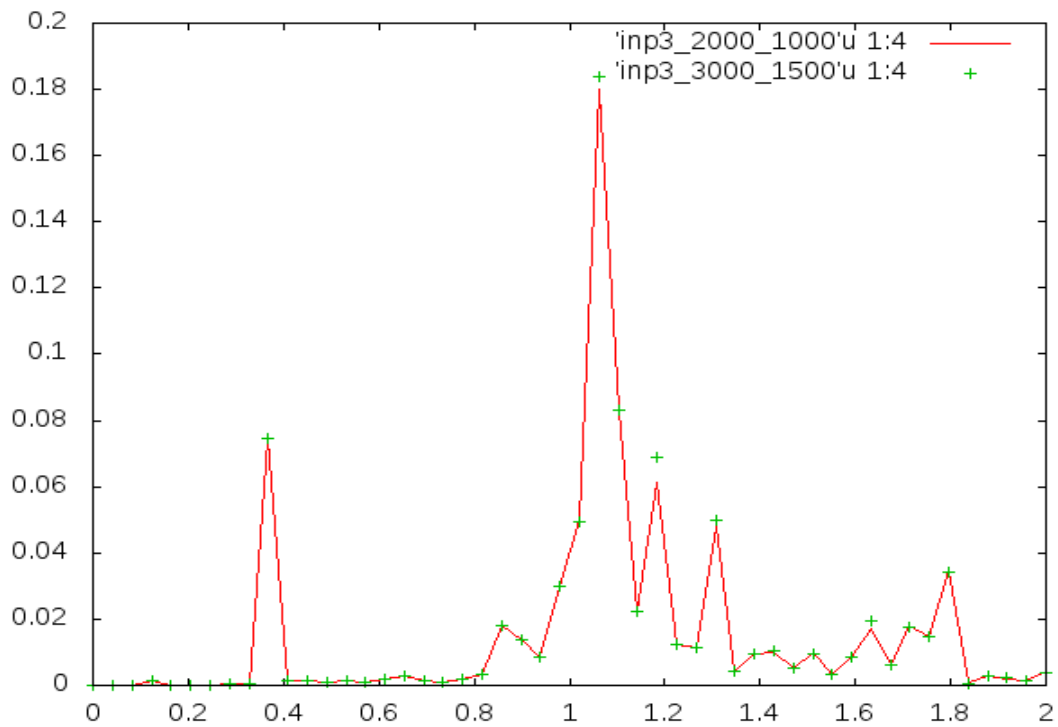
Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι το μοντέλο συγκλίνει, με βάση το γεγονός ότι για τις διαφορετικές διακριτοποιήσεις δεν έχουμε αποκλίσεις. Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών επιτρέπει τη γρήγορη σύγκλιση στη λύση, ακόμα και για σχετικά αραιά πλέγματα με λίγους κόμβους. Το γραμμικό σύστημα συγκλίνει με πλέγμα της τάξης των 500 κόμβων. Το δευτεροτάξιο και τριτοτάξιο σύστημα χρειάστηκαν πυκνότερα πλέγματα και μια επίλυση με αραιό πλέγμα θα έδινε αντιφατικά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, μετά από δοκιμές βρέθηκε ότι χρειάζονται 1500 κόμβοι για το πρόβλημα δεύτερης τάξης και 2000 κόμβοι για το τριτοτάξιο. Για τη μελέτη του προβλήματος επιλέχθηκε, τελικά, η χρήση μιας διακριτοποίησης 3000 κόμβων, που αντιστοιχεί σε $\Delta s=0.8\text{m}$ στο απαραμόρφωτο μήκος του αγωγού.



Εικόνα 4: Σύγκλιση μοντέλου-Κάθετες μετακινήσεις του γραμμικού συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



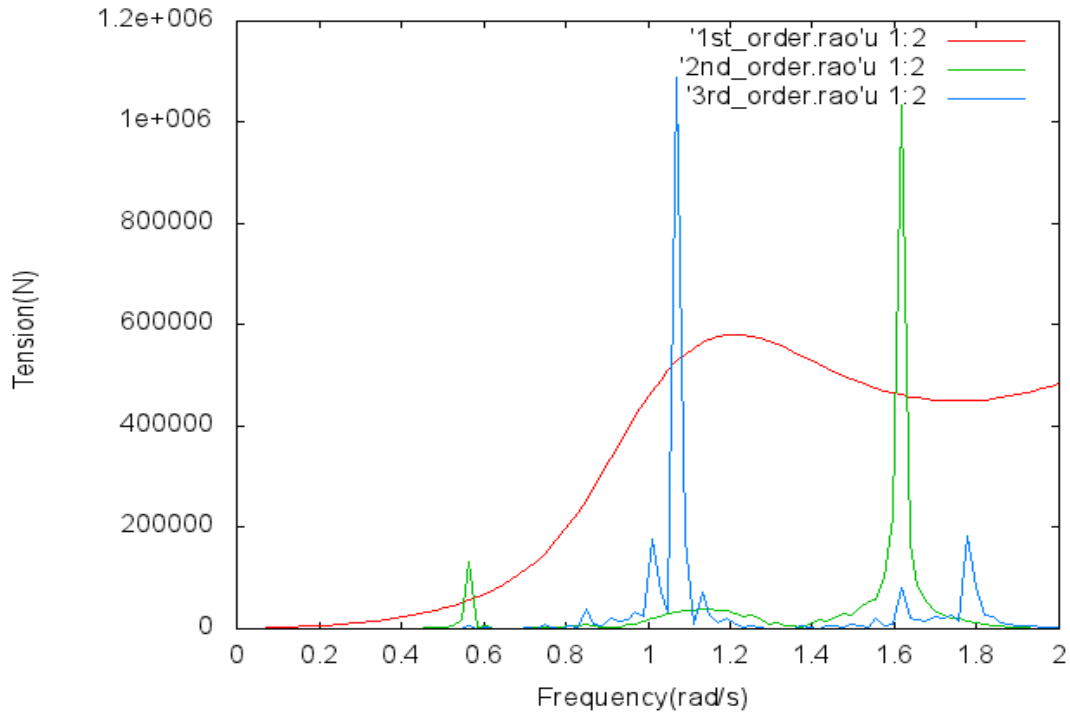
Εικόνα 5: Σύγκλιση μοντέλου-Κάθετες μετακινήσεις του δευτεροτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



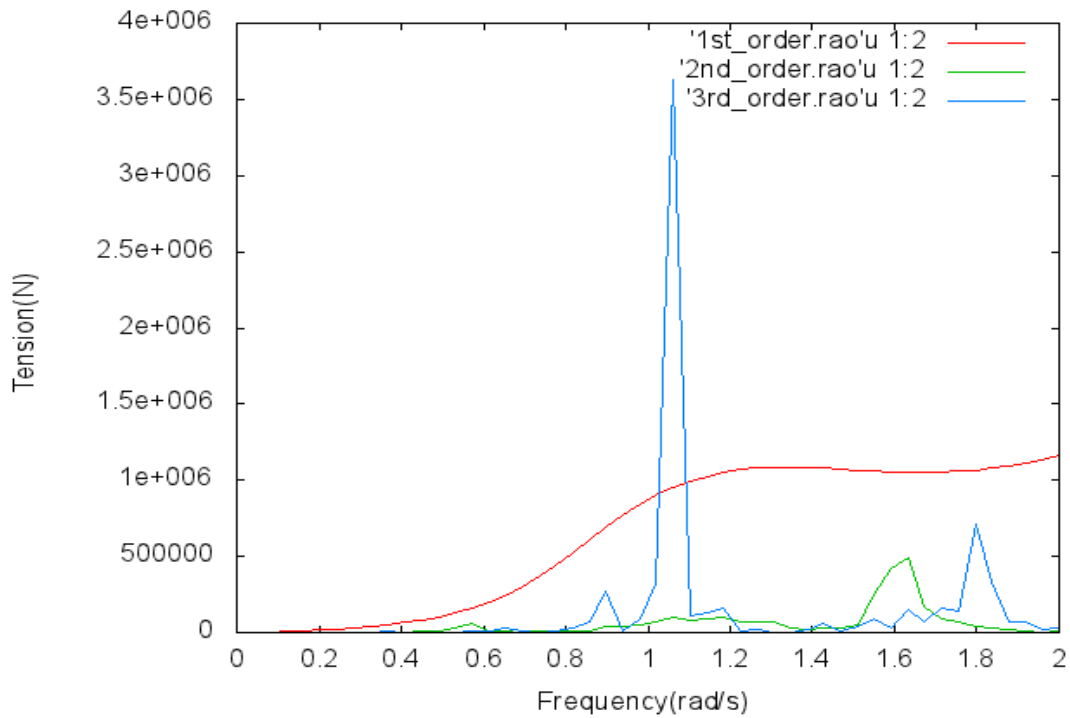
Εικόνα 6: Σύγκλιση μοντέλου-Κάθετες μετακινήσεις του τριτοτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, η αξονική φόρτιση του αγωγού είναι αυτή που τον καταπονεί περισσότερο. Με βάση αυτό, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από δυο περιπτώσεις φόρτισης με μονοχρωματική διέγερση, που στην πρώτη περίπτωση προκαλεί αξονική μετακίνηση του επιφανειακού κόμβου 1m και στη δεύτερη 2m. Η θέση η οποία εξετάστηκε είναι αυτή της μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής, δηλαδή ο κόμβος 136 από τη διακριτοποίηση των 3000 κόμβων. Οι συχνότητες που αναλύθηκαν βρίσκονται στο φάσμα 0-2 rad/s με ένα βήμα 0.2 rad/s. Μια γρήγορη επισκόπηση των αποτελεσμάτων, δείχνει ότι κάποια από τα δευτεροτάξια και τριτοτάξια μεγέθη έχουν σημαντική συνεισφορά στην απόκριση του συστήματος σε σχέση με τα πρωτοτάξια. Μάλιστα, σε κάποιες περιπτώσεις οι τιμές τους, υπερβαίνουν αυτές της γραμμικής θεώρησης.

Αναφορικά με την αξονική δύναμη που αναπτύσσεται στον αγωγό, φαίνεται να υπάρχει μικρή συνεισφορά των φαινομένων 2^{ης} και 3^{ης} τάξης. Συνεπώς, το μεγαλύτερο τμήμα της δύναμης που αναπτύσσεται οφείλεται στο γραμμικό κομμάτι της. Ωστόσο, για κάποιες συγκεκριμένες συχνότητες, τόσο τα δευτεροτάξια όσο και τα τριτοτάξια φαινόμενα παρουσιάζουν απότομη και μεγάλη αύξηση. Η συνεισφορά τους στις συχνότητες αυτές αγγίζει το 50% της πρωτοτάξιας δύναμης και σε κάποιες περιπτώσεις την ξεπερνά. Πιο συγκεκριμένα, στις περιοχές των 0.6 rad/s και των 1.6 rad/s τα δευτεροτάξια φαινόμενα παρουσιάζουν αιχμή. Ταυτόχρονα, στις περιοχές γύρω από το 1.1 rad/s και το 1.8 rad/s τα τριτοτάξια φαινόμενα παρουσιάζουν τις δικές τους αιχμές. Η ποιοτική αυτή συμπεριφορά εμφανίζεται και στα δύο γραφήματα των Εικόνων 7 και 8. Παράλληλα, είναι φανερό ότι στην περίπτωση της φόρτισης με 1m (Εικόνα 7) η δύναμη που αναπτύσσεται συνολικά είναι μικρότερη από την περίπτωση της φόρτισης με 2m (Εικόνα 8), όπως αναμενόταν. Η σύγκριση όμως αυτή μας δείχνει και ότι η συνεισφορά των δευτεροτάξιων και τριτοτάξιων φαινομένων είναι στην πρώτη περίπτωση σε σχέση με τα πρωτοτάξια. Δηλαδή, όσο μεγαλώνει η φόρτιση τόσο μεγαλώνει και η συνεισφορά των ανώτερων τάξεων σε σχέση με την πρώτη τάξη.

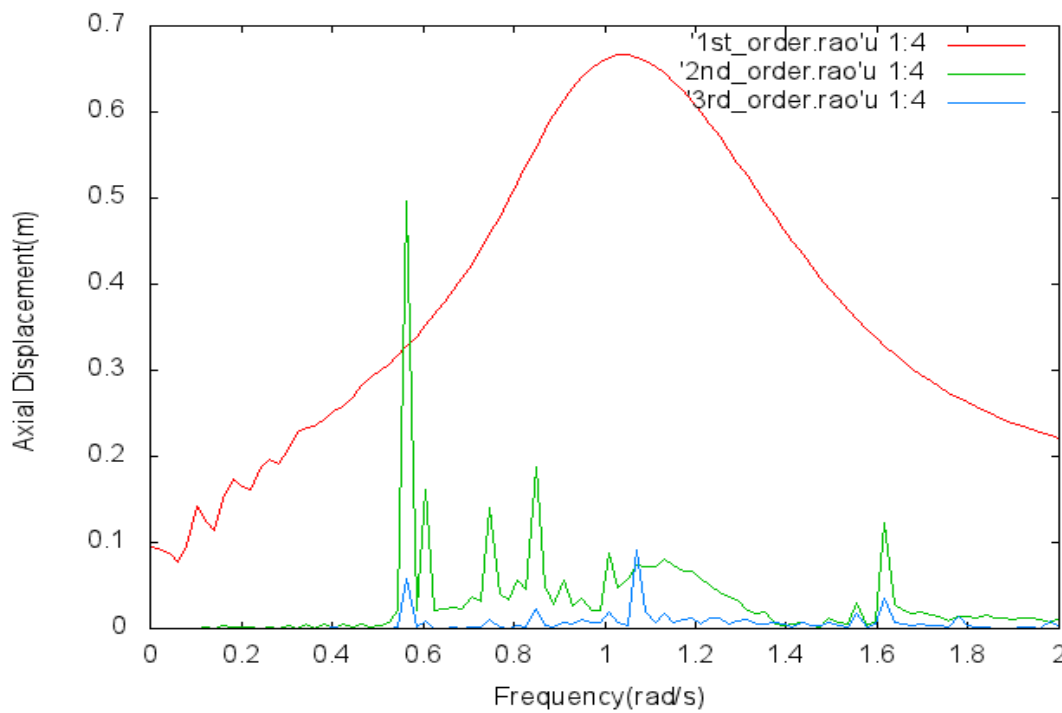


Εικόνα 7: Αξονική δύναμη στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για αξονική μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

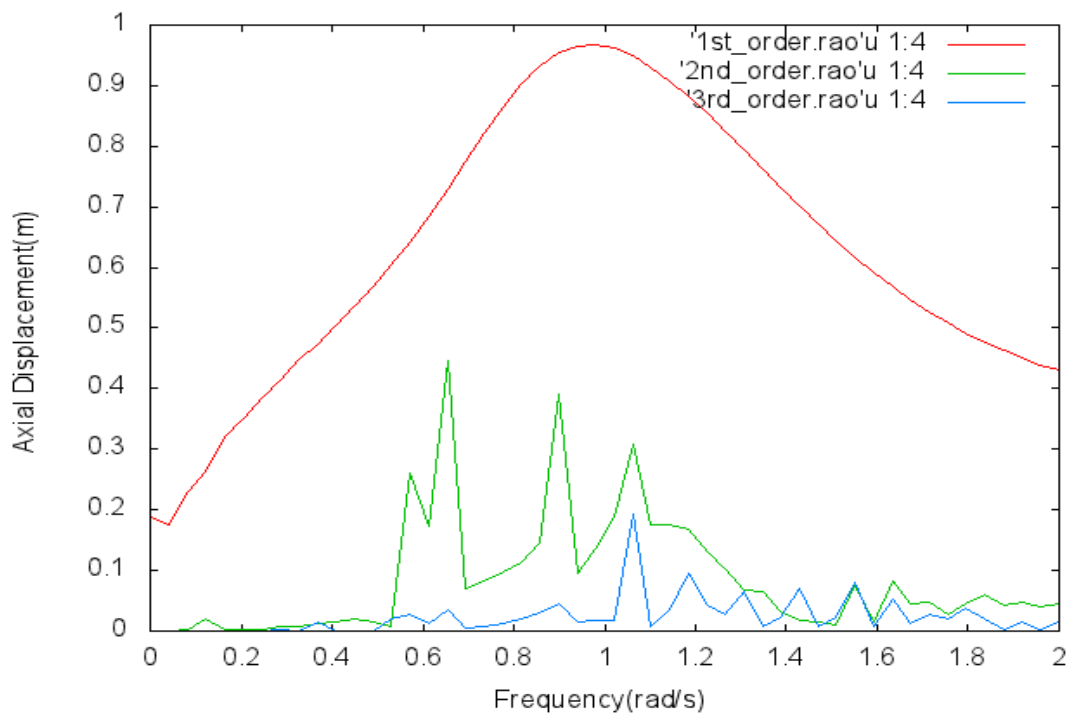


Εικόνα 8: Αξονική δύναμη στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για αξονική μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Εξετάζοντας τις αξονικές μετακινήσεις του κόμβου με τη μεγαλύτερη στατική ροπή ($n=136$), διαφαίνεται ότι οι μετατοπίσεις λόγω του πρωτοτάξιου συστήματος υπερσχύουν των μετατοπίσεων από τις άλλες τάξεις. Οι μετακινήσεις που προκύπτουν από το δευτεροτάξιο σύστημα παρουσιάζουν σημαντική συνεισφορά για ένα εύρος συχνοτήτων από τα 0.6 rad/s μέχρι τα 1.2 rad/s. Η συνεισφορά αυτή φτάνει στο 50% των πρωτοτάξιων μετακινήσεων, γεγονός που τις καθιστά σημαντικές. Παράλληλα, οι τριτοτάξιες μετακινήσεις παρουσιάζουν μια έξαρση για ένα εύρος συχνοτήτων από τα 1.1 rad/s μέχρι τα 1.8 rad/s. Η συνεισφορά τους είναι περίπου στο 20% των πρωτοτάξιων μετακινήσεων και στο 50% των δευτεροτάξιων. Στα διαγράμματα των Εικόνων 9 και 10, φαίνονται οι παραπάνω αξονικές μετακινήσεις για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης που έχουν περιγραφεί. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι ο διπλασιασμός της φόρτισης οδηγεί σε μεγαλύτερες μετακινήσεις σε όλες τις τάξεις, όχι όμως σε διπλασιασμό τους. Επίσης, οι μεγαλύτερες αξονικές μετακινήσεις για κάθε τάξη εμφανίζονται στις συχνότητες που εμφάνισαν κορυφές οι αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις. Αυτό συνάδει με τα ευρήματα της προηγούμενης παραγράφου και δικαιολογεί το φαινόμενο. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι στην περιοχή γύρω από το 1 rad/s εμφανίζουν κορυφές και οι τρεις τάξεις.

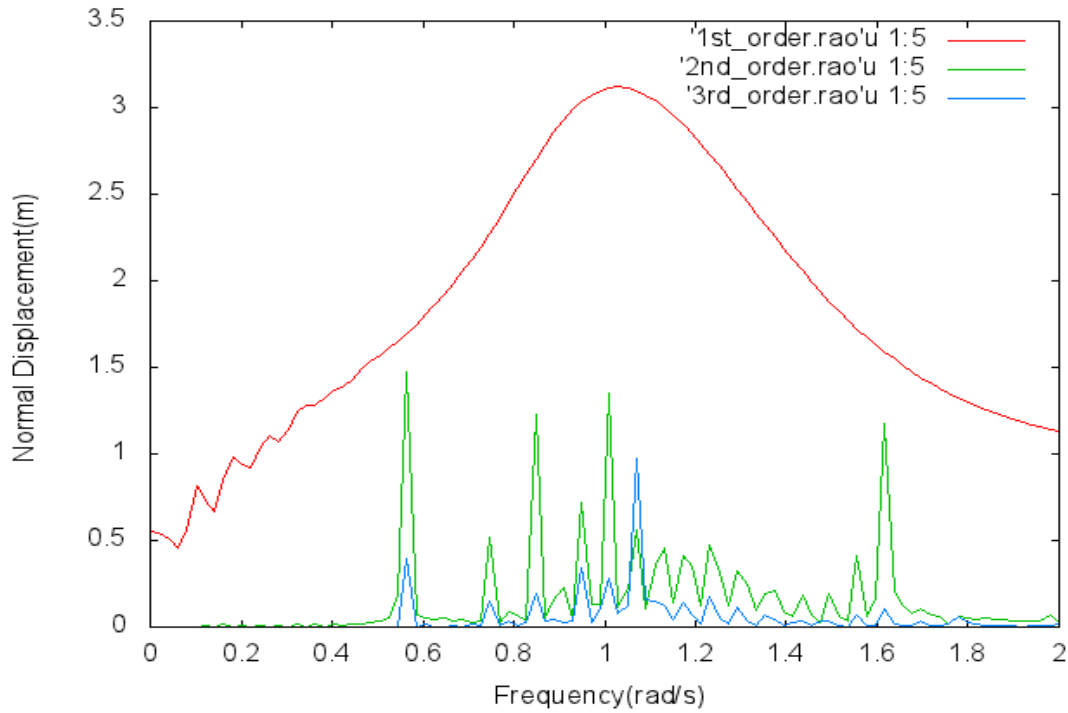


Εικόνα 9: Αξονική μετακίνηση στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής ($n=136$) για αξονική μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

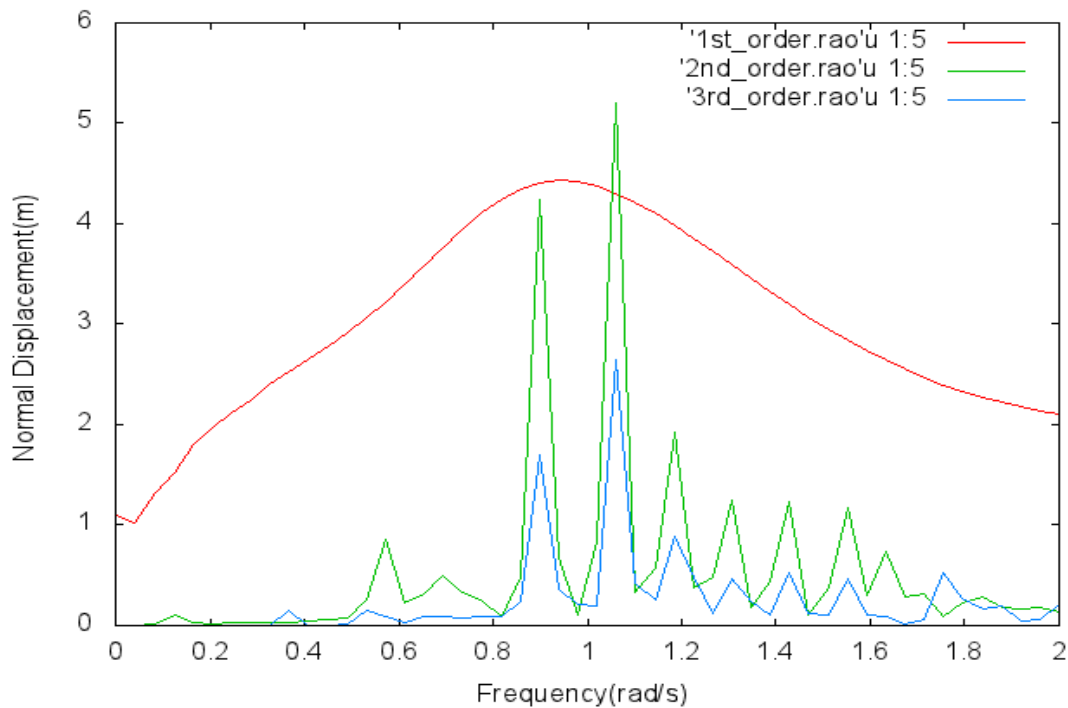


Εικόνα 10: Αξονική μετακίνηση στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής ($n=136$) για αξονική μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Οι μετακινήσεις κάθετα στον άξονα του αγωγού παρουσιάζονται στις Εικόνες 11 και 12. Στην Εικόνα 11 έχουμε τις κάθετες μετακινήσεις για αξονική φόρτιση 1m και στην Εικόνα 12 για αξονική φόρτιση 2m. Αυτό που φαίνεται και στις δύο περιπτώσεις είναι η μεγάλη συνεισφορά των δευτεροτάξιων και τριτοτάξιων μετακινήσεων στις ενδιάμεσες συχνότητες. Δηλαδή, για τις συχνότητες από 0.6 rad/s μέχρι 1.7 rad/s οι μετακινήσεις αυτές κυμαίνονται σε υψηλά επίπεδα. Οι πρωτοτάξιες μετακινήσεις εξακολουθούν να είναι πολύ μεγαλύτερες από τις υπόλοιπες. Οι δευτεροτάξιες μετακινήσεις είναι τουλάχιστον διπλάσιες από τις τριτοτάξιες. Κάτι που πρέπει να σημειωθεί είναι η απότομη αύξηση της συνεισφοράς των δευτεροτάξιων και των τριτοτάξιων φαινομένων στη συνολική κάθετη μετακίνηση, όταν αυξάνεται η φόρτιση. Στη δεύτερη περίπτωση (Εικόνα 12) παρατηρείται μια μεγάλη άνοδος των τιμών τους στην περιοχή του 1 rad/s. Στην περιοχή αυτή, οι δευτεροτάξιες κάθετες μετακινήσεις είναι σχεδόν ίδιες με τις γραμμικές, ενώ οι τριτοτάξιες είναι περίπου οι μισές αυτών.

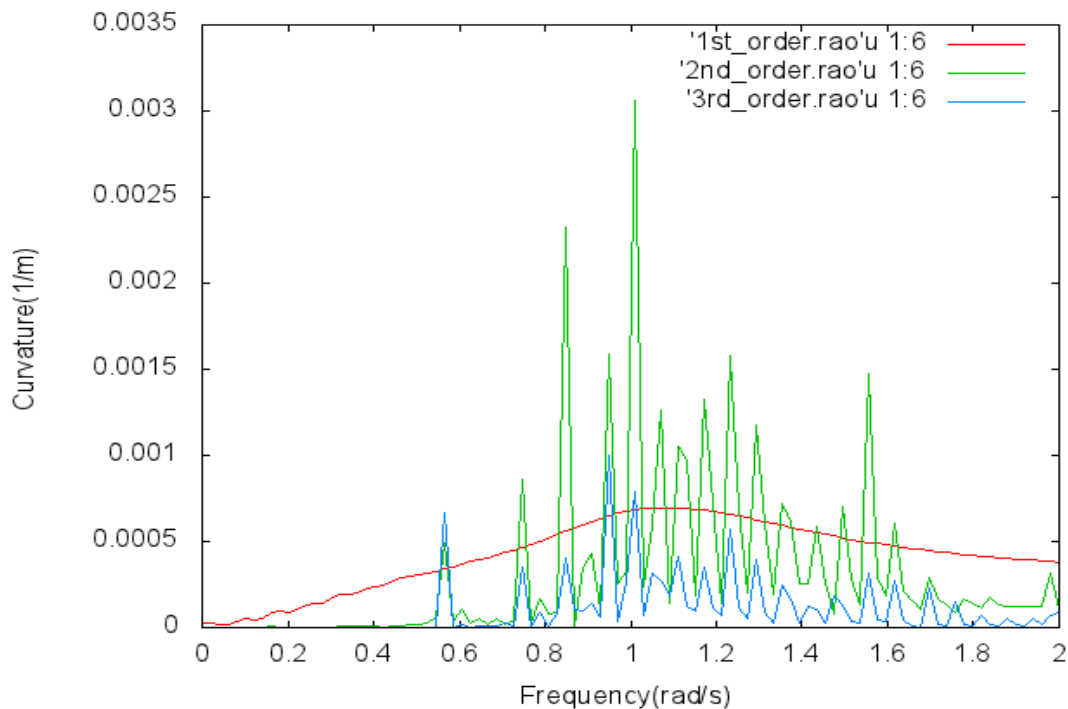


Εικόνα 11: Κάθετη μετακίνηση στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για αξονική μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

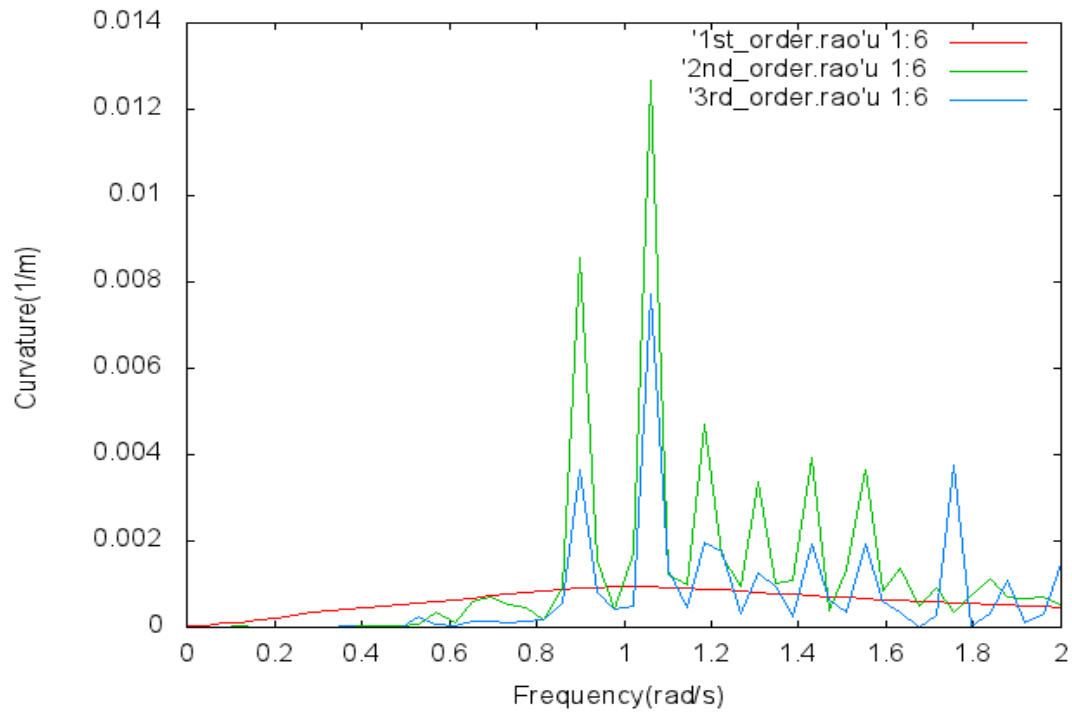


Εικόνα 12: Κάθετη μετακίνηση στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για αξονική μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Η δυναμική καμπυλότητα στο σημείο της μέγιστης στατικής ροπής είναι το μέγεθος στο οποίο τα δευτεροτάξια και τριτοτάξια φαινόμενα έχουν τη μεγαλύτερη συνεισφορά. Στις Εικόνες 13 και 14, παρουσιάζονται οι τιμές της δυναμικής καμπυλότητας για το παραπάνω σημείο και το 0-2 rad/s εύρος συχνοτήτων. Και στις δύο περιπτώσεις, σχηματίζεται μια περιοχή συχνοτήτων από τα 0.6 rad/s ως τα 1.8 rad/s, όπου τα δευτεροτάξια και τριτοτάξια φαινόμενα εμφανίζουν υψηλές τιμές. Για την περίπτωση της μικρότερης φόρτισης, τα δευτεροτάξια φαινόμενα είναι μεγαλύτερα από τα γραμμικά και σε κάποιες συχνότητες τριπλάσια από αυτά. Τα τριτοτάξια φαινόμενα έχουν μικρότερη συνεισφορά, αλλά για κάποιες συχνότητες αγγίζουν τις τιμές των γραμμικών φαινομένων. Προχωρώντας στη δεύτερη περίπτωση, με την αυξημένη φόρτιση, φαίνεται ότι τόσο τα δευτεροτάξια όσο και τα τριτοτάξια φαινόμενα είναι κατά πολύ μεγαλύτερα από τα γραμμικά. Δηλαδή, η αύξηση της αξονικής μετακίνησης στην κορυφή οδηγεί σε πολύ μεγάλες δυναμικές καμπυλότητες 2^{ης} και 3^{ης} τάξης κοντά στον πυθμένα. Το φαινόμενο αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι, η δυναμική καμπυλότητα στη 2^η και 3^η τάξη αντίστοιχα, προκαλείται από τη γεωμετρική μη-γραμμικότητα $\Omega_{31}T_1$ των προηγούμενων τάξεων. Έτσι, έχοντας την αξονική δύναμη να παρέχει το μοτίβο για τη δυναμική καμπυλότητα της επόμενης τάξης, διαφαίνονται οι ομοιότητες στα διαγράμματα της πρωτοτάξιας αξονικής δύναμης με τις δυναμικές καμπυλότητες ανώτερης τάξης.



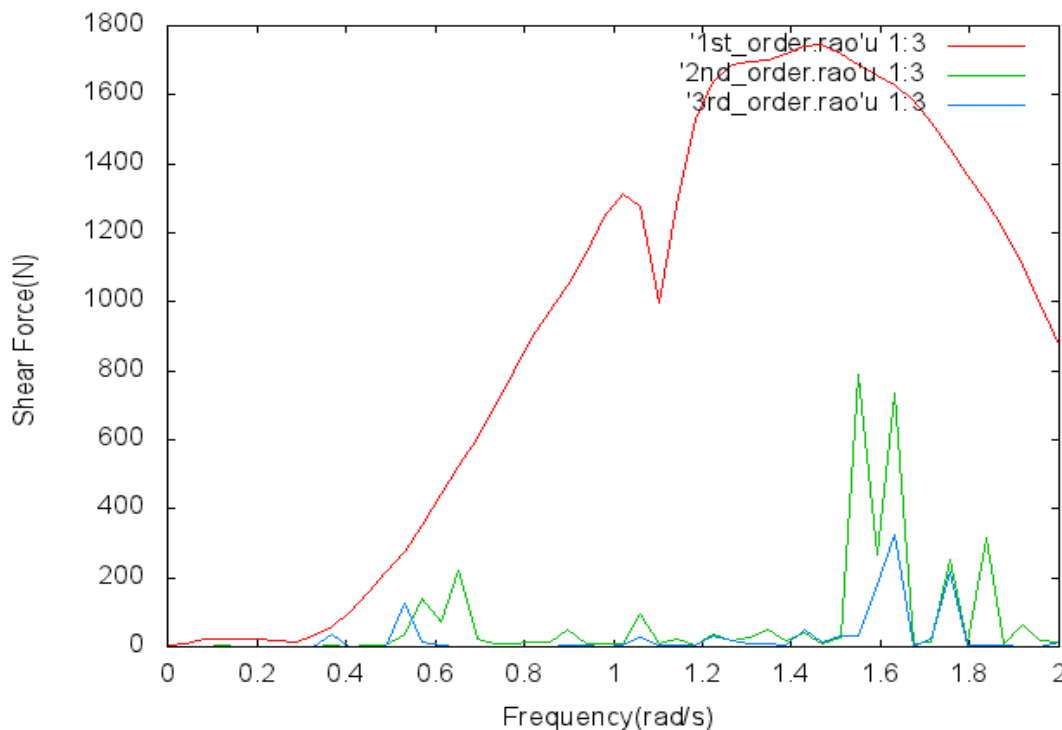
Εικόνα 13: Δυναμική Καμπυλότητα στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για αξονική μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s



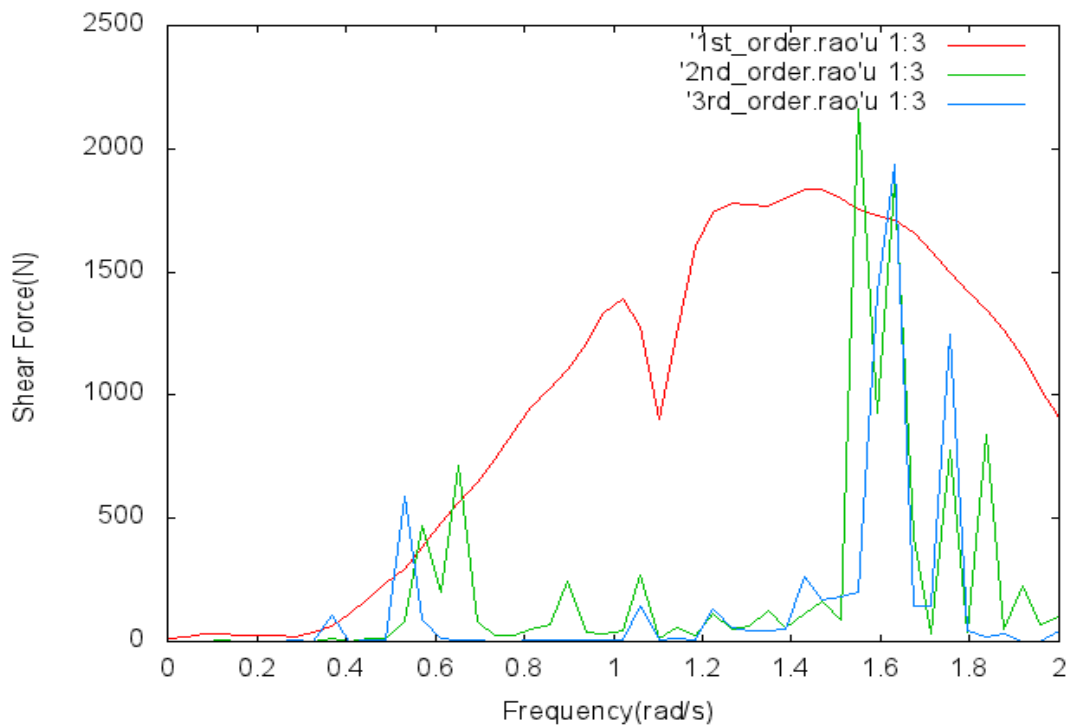
Εικόνα 14: Δυναμική Καμπυλότητα στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για αξονική μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Στη συνέχεια, εξετάζεται η συμπεριφορά των μη-γραμμικών δυναμικών μεγεθών, όταν εφαρμόζεται κάθετη στον άξονα του αγωγού φόρτιση στο επιφανειακό σημείο. Και πάλι, εξετάζεται ένα εύρος συχνοτήτων 0-2 rad/s και αναλύονται τα αποτελέσματα για το σημείο που εμφανίζεται η μέγιστη καμπτική ροπή στη στατική επίλυση. Έχουν ληφθεί υπόψη δύο περιπτώσεις φόρτισης, η μία με κάθετη μετατόπιση 1m του επιφανειακού σημείου και η άλλη με κάθετη μετατόπιση 2m του ίδιου σημείου.

Στα διαγράμματα των Εικόνων 15 και 16, παρουσιάζεται η μεταβολή του πρωτοτάξιου, δευτεροτάξιου και τριτοτάξιου τμήματος της διατμητικής δύναμης για τις δύο περιπτώσεις που εξετάζονται. Αρχικά, πρέπει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα αυτά εξετάζονται κυρίως για τα ποιοτικά τους χαρακτηριστικά και όχι για τα ποσοτικά. Με άλλα λόγια, αναμένεται η διατμητική δύναμη να παίρνει πολύ μικρές τιμές στο υπόψη σημείο και δεν είναι συνήθως παράγοντας αστοχίας ενός τέτοιου αγωγού. Πράγματι, οι τιμές που παίρνει, για παράδειγμα, η πρωτοτάξια διατμητική δύναμη είναι της τάξης των 2 kN. Παράλληλα, στην πρώτη περίπτωση φαίνεται ότι τα δευτεροτάξια και τα τριτοτάξια μεγέθη έχουν μικρή συνεισφορά στη συνολική δύναμη και εμφανίζουν κορυφές γύρω από τις περιοχές των 0.6 rad/s και 1.7 rad/s. Με την το διπλασιασμό της φόρτισης παρατηρείται ότι τα πρωτοτάξια φαινόμενα αυξάνονται πολύ λιγότερο σε σχέση με τα φαινόμενα υψηλότερης τάξης. Στις περιοχές που στην πρώτη περίπτωση εμφάνισαν κορυφές στο 30% περίπου της πρωτοτάξιας δύναμης, τώρα λαμβάνουν τιμές που αγγίζουν ή και ξεπερνούν τις πρωτοτάξεις. Δηλαδή, η αύξηση της κάθετης φόρτισης οδηγεί σε μεγαλύτερα δευτεροτάξια και τριτοτάξια πλάτη της διατμητικής δύναμης.

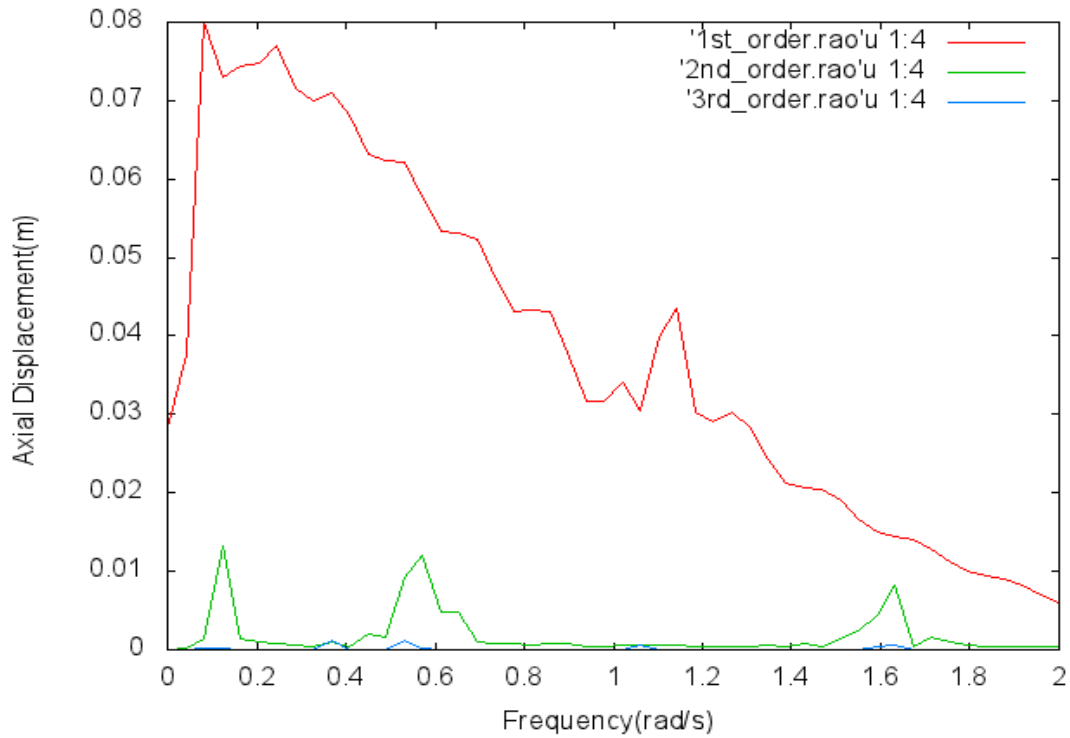


Εικόνα 15 Διατμητική δύναμη στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής ($n=136$) για κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

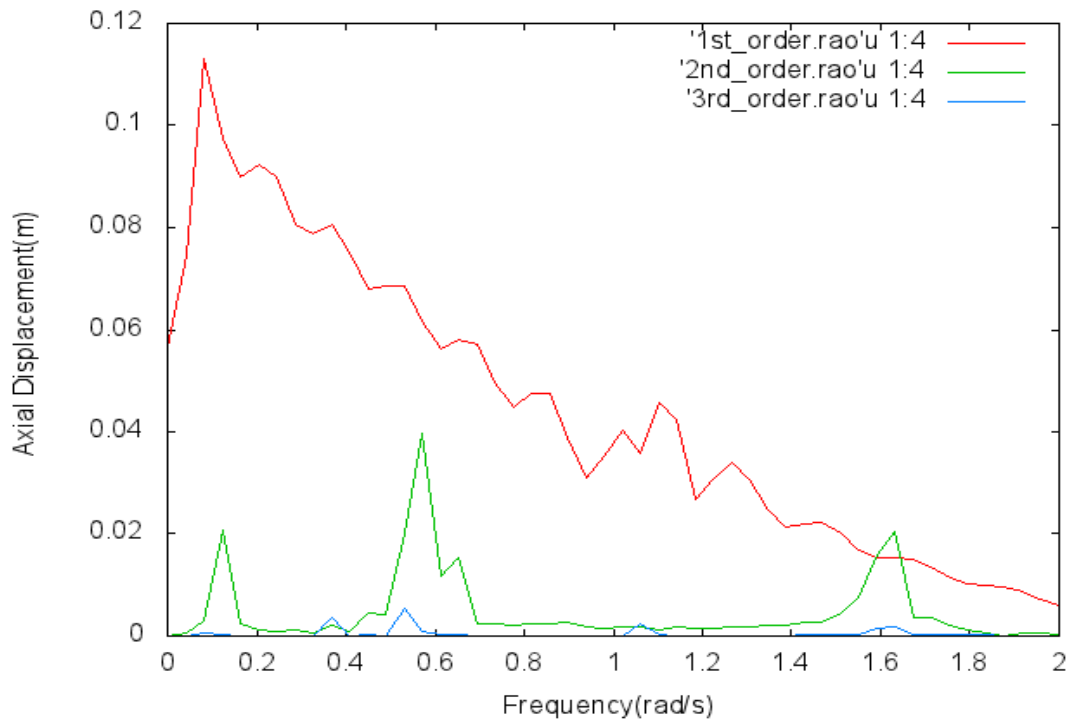


Εικόνα 16 Διατμητική δύναμη στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής ($n=136$) για κάθετη μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Στα διαγράμματα των Εικόνων 17 και 18, απεικονίζεται η μεταβολή των πρωτοτάξιων, δευτεροτάξιων και τριτοτάξιων αξονικών μετακινήσεων για τις εξεταζόμενες συχνότητες. Στις δύο περιπτώσεις κάθετης φόρτισης που εξετάστηκαν εμφανίζονται τα ίδια χαρακτηριστικά. Στην πρώτη περίπτωση με το μικρότερο πλάτος διέγερσης τα πρωτοτάξια έχουν καθοριστική σημασία. Τα δευτεροτάξια μεγέθη εμφανίζουν κορυφές στις περιοχές των 0.1 rad/s, 0.6 rad/s και 1.6 rad/s. Η συμβολή των δευτεροτάξιων αξονικών μετατοπίσεων είναι αρκετά μικρότερη από αυτή των πρωτοτάξιων. Οι τριτοτάξιες αξονικές μετακινήσεις είναι ξεκάθαρα αμελητέες για το συγκεκριμένο είδος φόρτισης. Η αύξηση του πλάτους διέγερσης στη δεύτερη περίπτωση, οδηγεί στην αύξηση των τιμών τόσο των πρωτοτάξιων όσο και των δευτεροτάξιων αξονικών μετακινήσεων. Μάλιστα, παρατηρείται μεγάλη άνοδος των τιμών των δευτεροτάξιων μετακινήσεων στις υψηλές συχνότητες. Αυτές αγγίζουν τις τιμές του πρωτοτάξιου φαινομένου.

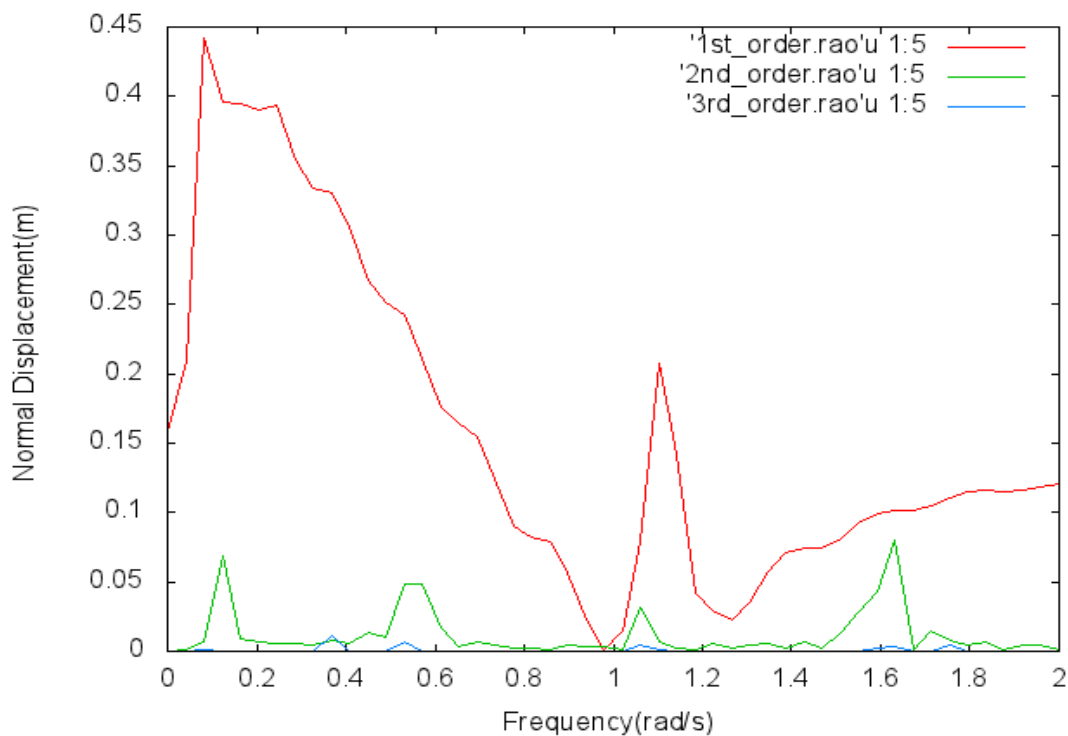


Εικόνα 17 Αξονικές μετακινήσεις στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

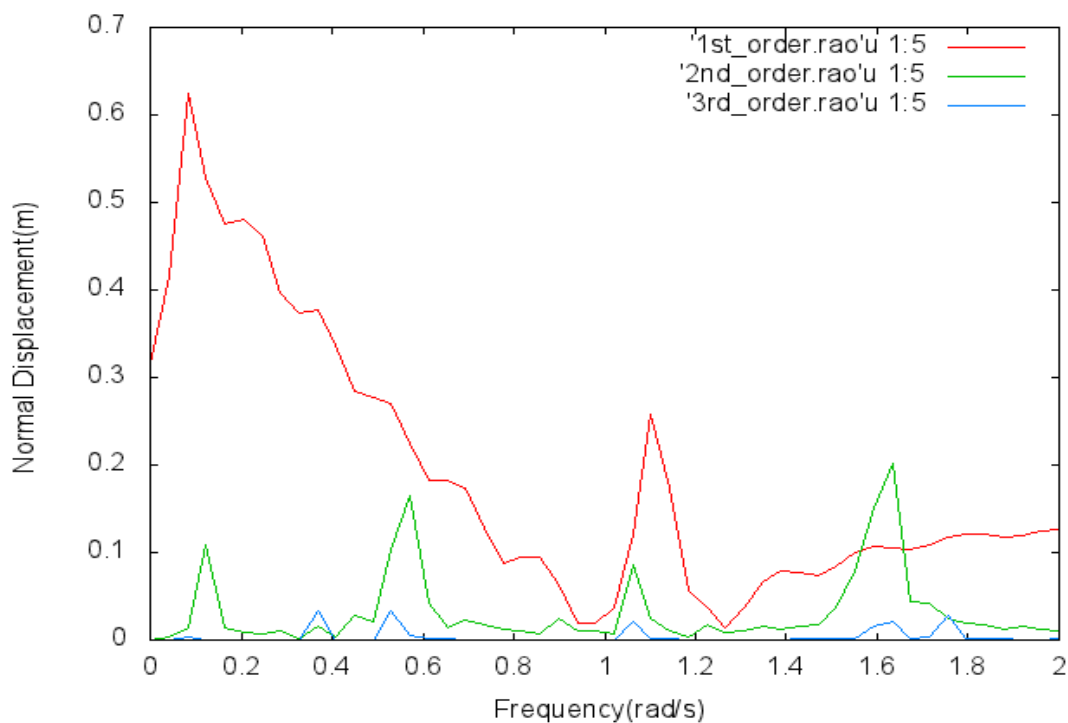


Εικόνα 18 Αξονικές μετακινήσεις στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για κάθετη μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Στα διαγράμματα των Εικόνων 19 και 20, μπορεί κανείς να δει τις πρωτοτάξιες, δευτεροτάξιες και τριτοτάξιες κάθετες μετακινήσεις για το υπόψη πεδίο συχνοτήτων. Δύο περιπτώσεις με διαφορετικά πλάτη διέγερσης εξετάστηκαν γι' αυτό το μέγεθος. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά βρίσκονται σε αντιστοιχία και για τις δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, με το μικρότερο πλάτος διέγερσης στην κορυφή (Εικόνα 19) παρατηρείται ότι τα πρωτοτάξια φαινόμενα έχουν καθοριστική συνεισφορά στο συνολικό μέγεθος. Οι δευτεροτάξιες κάθετες μετακινήσεις κινούνται στο 10% των πρωτοτάξιων. Η μεγαλύτερη συνεισφορά των δευτεροτάξιων μετακινήσεων εμφανίζονται στις περιοχές των 0.1 rad/s, 0.6 rad/s, 1 rad/s και 1.6 rad/s. Για τις υπόλοιπες συχνότητες η συνεισφορά τους είναι αμελητέα. Επίσης, αμελητέα είναι και η συνεισφορά των τριτοτάξιων μετακινήσεων γι' αυτό το είδος φόρτισης. Με την αύξηση του πλάτους διέγερσης, στη δεύτερη περίπτωση (Εικόνα 20), παρατηρείται μια μικρή αύξηση στις τιμές των πρωτοτάξιων φαινομένων. Ενώ το μοτίβο που εμφανίζεται είναι το ίδιο με την προηγούμενη περίπτωση, στις συχνότητες που αναφέρθηκαν η αύξηση των δευτεροτάξιων μεγεθών είναι αναλογικά μεγαλύτερη. Μάλιστα, στην υψηλότερη από αυτές τις συχνότητες, τα δευτεροτάξια φαινόμενα αποκτούν ιδιαίτερη σημασία, αφού η δευτεροτάξια μετακίνηση είναι μεγαλύτερη από την πρωτοτάξια. Συνεπώς, τόσο για τις κάθετες όσο και για τις οριζόντιες μετακινήσεις, παρατηρείται αύξηση της συνεισφοράς των φαινομένων δεύτερης τάξης σε σχέση με τα γραμμικά στις υψηλές συχνότητες, όσο αυξάνεται το πλάτος της κάθετης διέγερσης.

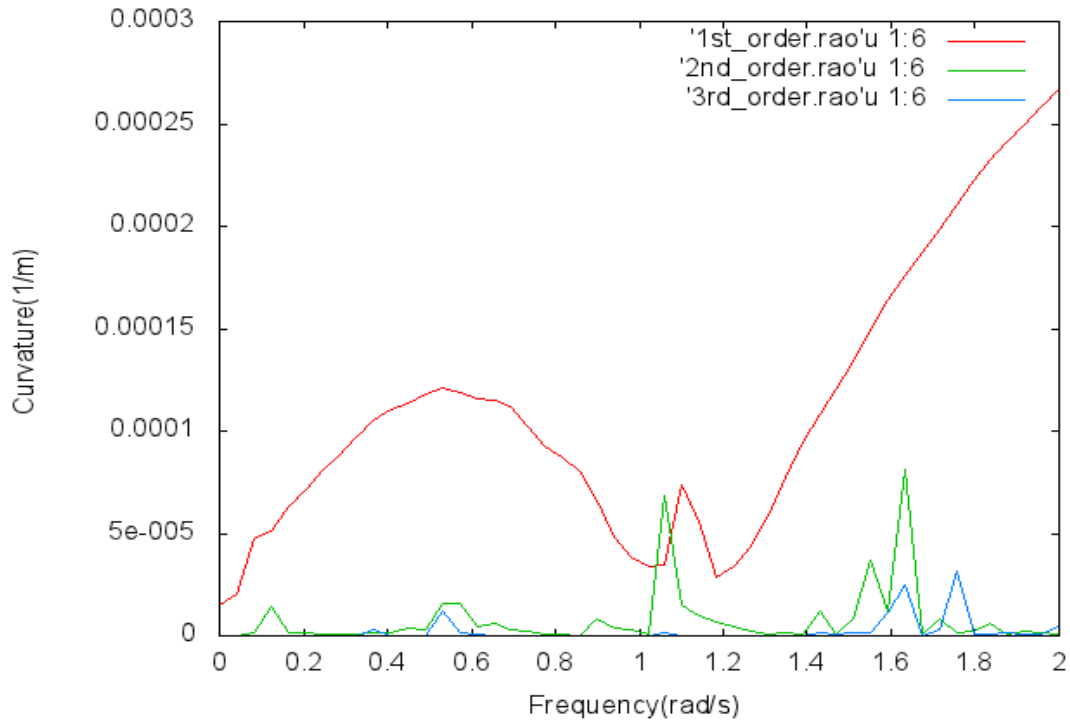


Εικόνα 19 Κάθετες μετακινήσεις στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

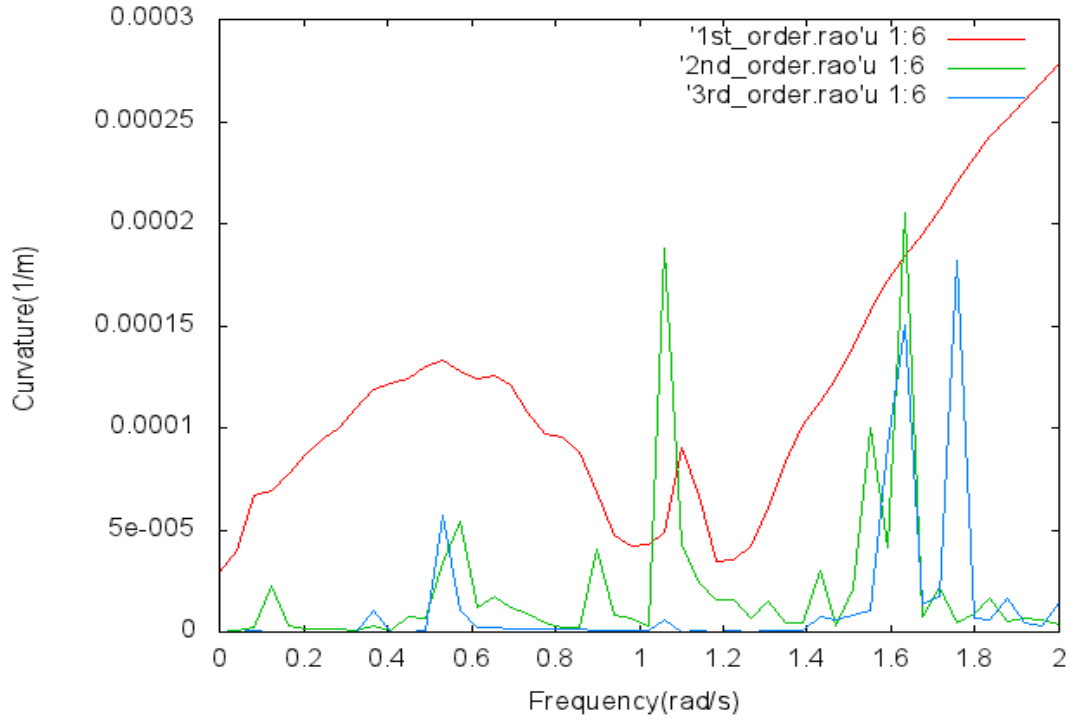


Εικόνα 20 Κάθετες μετακινήσεις στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για κάθετη μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Στα διαγράμματα των Εικόνων 21 και 22, παρουσιάζεται η μεταβολή της πρωτοτάξιας, δευτεροτάξιας και τριτοτάξιας δυναμικής καμπυλότητας για τις εξεταζόμενες συχνότητες. Για την πρώτη περίπτωση φόρτισης, με το μικρότερο πλάτος διέγερσης (Εικόνα 21), η πρωτοτάξια δυναμική καμπυλότητα έχει καθοριστική σημασία για τις περισσότερες συχνότητες. Για τις συχνότητες στην περιοχή των 1.6 rad/s παρατηρείται μια σημαντική συνεισφορά των δευτεροτάξιων φαινομένων. Ακόμα, μεγαλύτερες τιμές παίρνει η δευτεροτάξια καμπυλότητα για τις συχνότητες στην περιοχή του 1 rad/s, που αγγίζει την τιμή της πρωτοτάξιας δυναμικής καμπυλότητας. Τα τριτοτάξια φαινόμενα φαίνεται να μην έχουν αμελητέες τιμές μόνο σε μια περιοχή γύρω από τα 1.7 rad/s. Με την αύξηση του πλάτους διέγερσης, στη δεύτερη περίπτωση (Εικόνα 22), δεν έχουμε μεταβολή στην πρωτοτάξια καμπυλότητα. Εντούτοις, παρουσιάζεται μια σημαντική αύξηση στη δυναμική καμπυλότητα της δεύτερης και τρίτης τάξης και ιδιαίτερα στις υψηλές συχνότητες. Πιο συγκεκριμένα, η δευτεροτάξια δυναμική καμπυλότητα αποκτά διπλάσια τιμή από την πρωτοτάξια, για συχνότητες κοντά στο 1 rad/s και τιμή που αγγίζει την πρωτοτάξια στην περιοχή των 1.6 rad/s. Ταυτόχρονα, η τριτοτάξια δυναμική καμπυλότητα αποκτά μεγάλες τιμές, κοντά στις πρωτοτάξιες, για τις υψηλές συχνότητες στη περιοχή των 1.7 rad/s. Αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά των ανώτερων τάξεων στη δυναμική καμπυλότητα, κυρίως όταν αυξάνεται το πλάτος διέγερσης, αποκτά ιδιαίτερη σημασία. Η τελευταία παρατήρηση συμφωνεί με τις αντίστοιχες παρατηρήσεις που έγιναν για την απόκριση του αγωγού στην αξονική διέγερση.



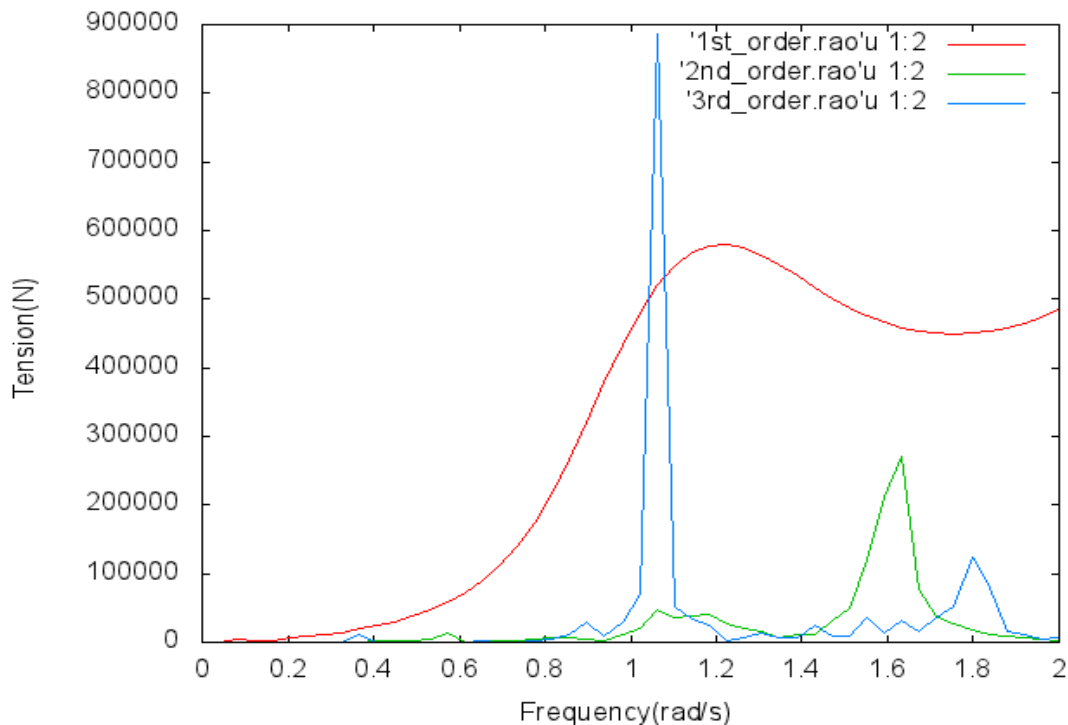
Εικόνα 21 Δυναμική Καμπυλότητα στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s



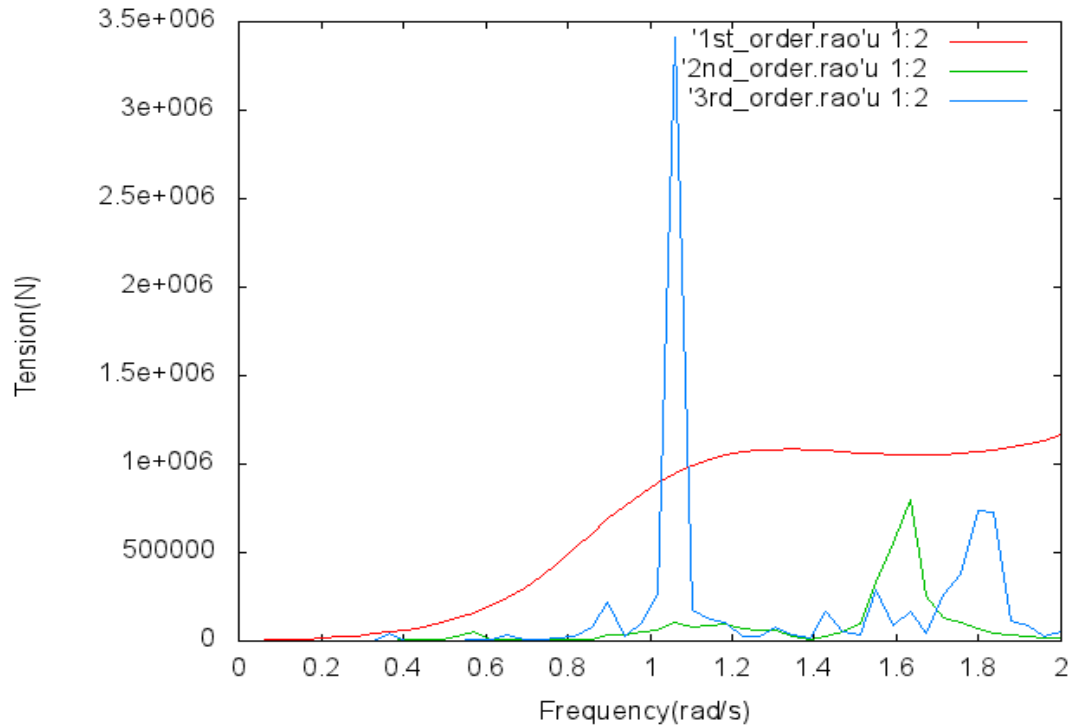
Εικόνα 22 Δυναμική Καμπυλότητα στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για κάθετη μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Ακολούθως, μελετήθηκαν δύο περιπτώσεις συνδυασμένης διέγερσης. Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόστηκε ταυτόχρονα αξονική και κάθετη διέγερση στο επιφανειακό σημείο πλάτους 1m. Στην δεύτερη περίπτωση εφαρμόστηκε ταυτόχρονα αξονική και κάθετη διέγερση πλάτους 2m, αυτή τη φορά. Οι συχνότητες που μελετήθηκαν, βρίσκονται στο πεδίο 0-2 rad/s και το σημείο που έγιναν οι υπολογισμοί είναι το σημείο που εμφανίζεται η μέγιστη στατική καμπτική ροπή.

Τα διαγράμματα στις Εικόνες 23 και 24 δείχνουν τη μεταβολή της αξονικής δύναμης στις τρεις τάξεις για τις συχνότητες που μελετήθηκαν. Στην περίπτωση με το μικρότερο πλάτος διέγερσης, παρατηρείται ότι η γραμμική αξονική δύναμη είναι σημαντικά μεγαλύτερη για τις περισσότερες συχνότητες. Στις υψηλές συχνότητες, όμως, εμφανίζεται αυξημένη συνεισφορά των δευτεροτάξιων και τριτοτάξιων φαινομένων. Πιο συγκεκριμένα, η δευτεροτάξια αξονική παρουσιάζει κορυφή στα 1.6 rad/s. Η τριτοτάξια αξονική δύναμη παρουσιάζει κορυφή στα 1.8 rad/s. Ταυτόχρονα, η τριτοτάξια δύναμη εμφανίζει μια κορυφή πολύ μεγαλύτερη από τη γραμμική και τη δευτεροτάξια δύναμη στην περιοχή του 1 rad/s. Η αύξηση του πλάτους διέγερσης έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση των γραμμικών δυνάμεων. Βέβαια, ταυτόχρονα αυξάνονται και τα ανώτερης τάξης φαινόμενα που μεγαλώνουν τη συνεισφορά τους σε σχέση με τα γραμμικά, κυρίως στις υψηλές συχνότητες.

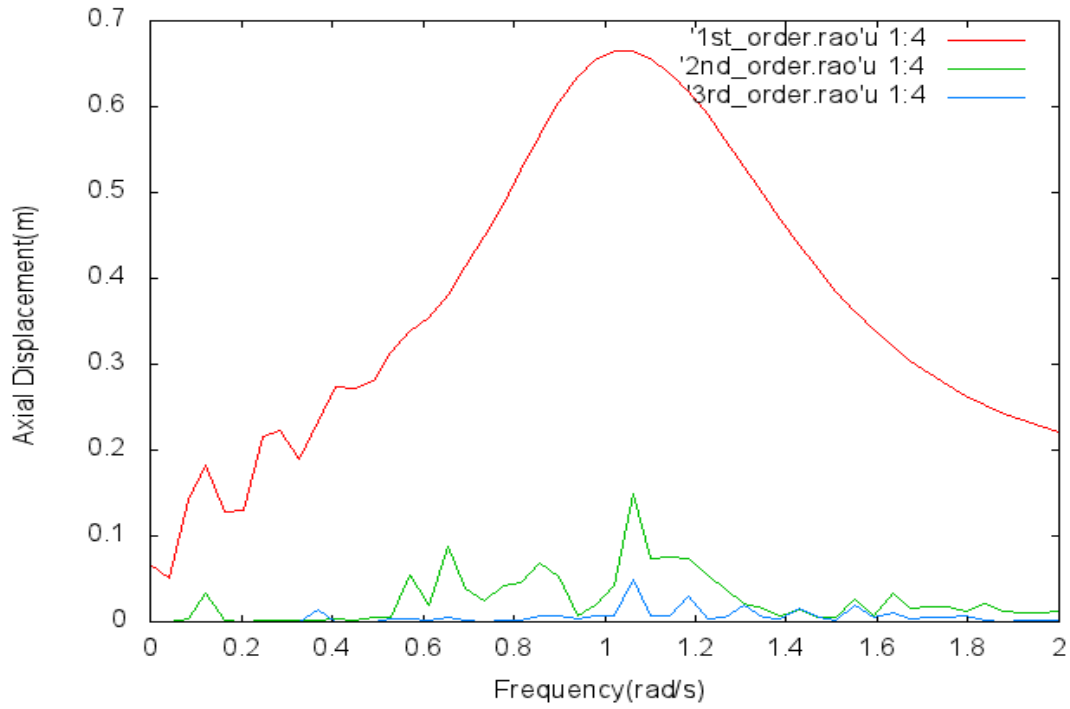


Εικόνα 23 Αξονική Δύναμη στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για οριζόντια μετακίνηση 1m και κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

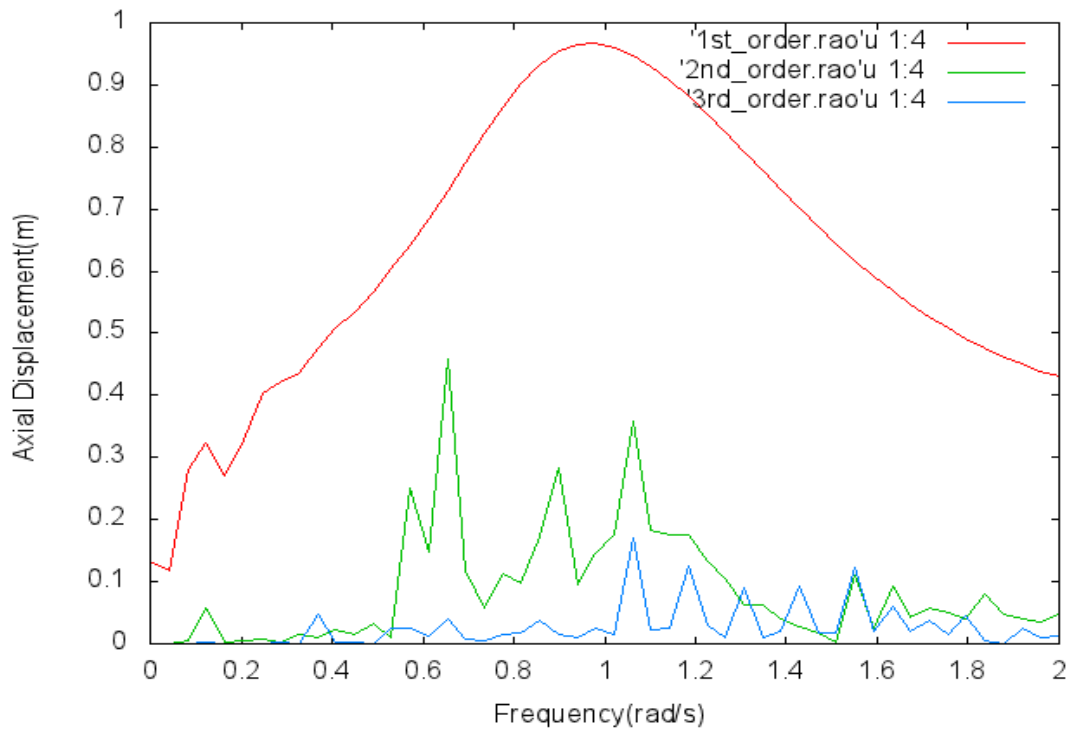


Εικόνα 24 Αξονική Δύναμη στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για οριζόντια μετακίνηση 2m και κάθετη μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Η μεταβολή των αξονικών μετακινήσεων στις τρεις τάξεις για τις δύο περιπτώσεις φαίνεται στα διαγράμματα των Εικόνων 25 και 26. Στην πρώτη περίπτωση (Εικόνα 25), όπου το πλάτος διέγερσης είναι μικρότερο, παρουσιάζεται η σημαντική συνεισφορά των γραμμικών δυνάμεων. Στις μεσαίες συχνότητες 0.6rad/s – 1.4 rad/s οι δευτεροτάξιες μετακινήσεις παίρνουν τις μεγαλύτερες τιμές τους. Για τις συχνότητες στο πεδίο 1 rad/s με 1.8 rad/s οι τριτοτάξιες μετακινήσεις παύουν να είναι αμελητέες. Προχωρώντας στη δεύτερη περίπτωση (Εικόνα 26) με το πλάτος διέγερσης να αυξάνεται διαφαίνεται ότι οι δευτεροτάξιες και οι τριτοτάξιες μετακινήσεις, στις προαναφερθείσες συχνότητες, αυξάνονται σχετικά με τις πρωτοτάξιες. Είναι δεδομένο ότι σε σχέση με την πρώτη περίπτωση, οι μετακινήσεις όλων των τάξεων είναι μεγαλύτερες.

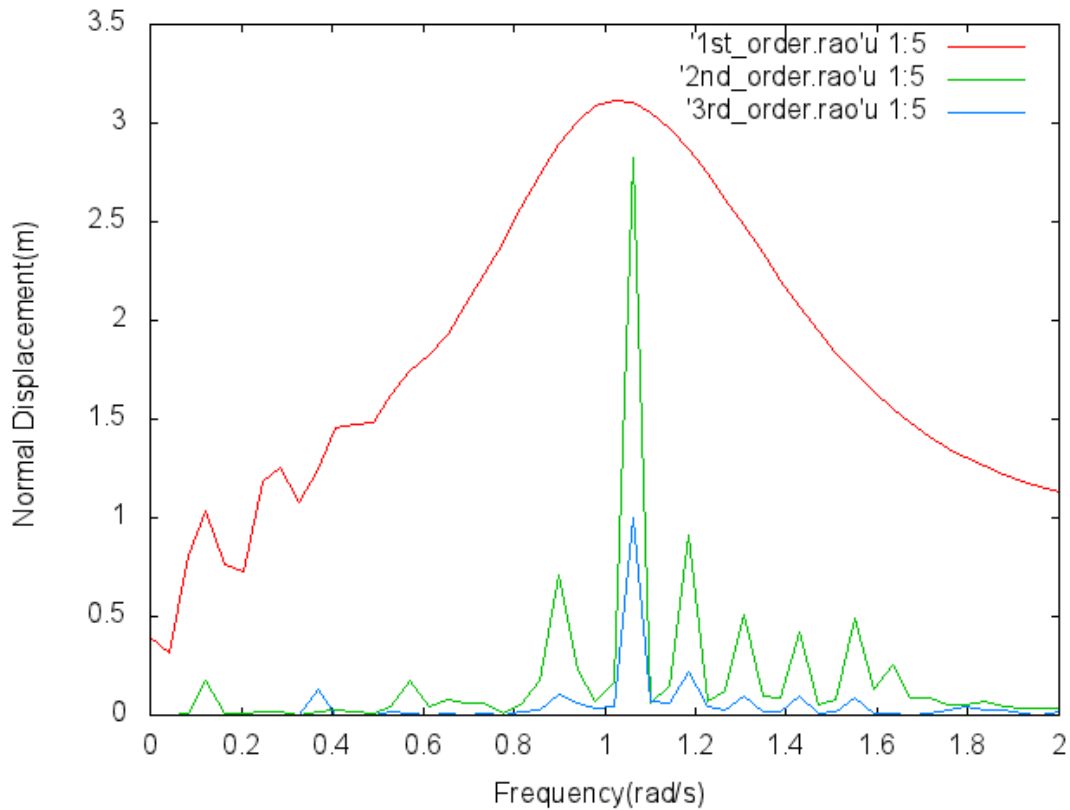


Εικόνα 25 Αξονικές μετακινήσεις στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για οριζόντια μετακίνηση 1m και κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

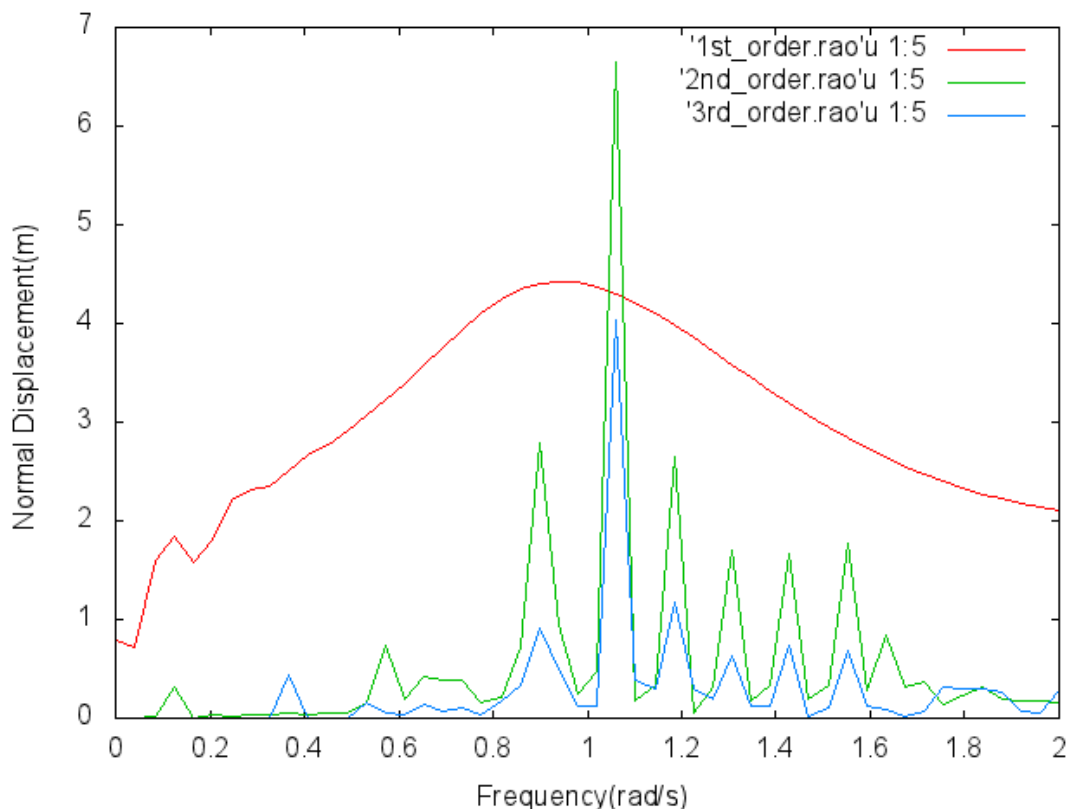


Εικόνα 26 Αξονικές μετακινήσεις στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για οριζόντια μετακίνηση 2m και κάθετη μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Οι κάθετες στον άξονα του αγωγού μετακινήσεις για τις τρεις τάξεις παρουσιάζονται στις Εικόνες 27 και 28. Και στις δύο περιπτώσεις φόρτισης, τα δευτεροτάξια και τριτοτάξια φαινόμενα αποκτούν ιδιαίτερη σημασία για τις συχνότητες από 0.8 rad/s μέχρι 1.7 rad/s. Η αύξηση του πλάτους της διέγερσης οδηγεί στην αύξηση της συνεισφοράς των τελευταίων στις παραπάνω συχνότητες, σε σχέση με τα πρωτοτάξια φαινόμενα. Στην περιοχή του 1 rad/s η δευτεροτάξια μετακίνηση λαμβάνει τιμές που αγγίζουν ή και ξεπερνάνε τη γραμμική. Στη ίδια περιοχή, η τριτοτάξια μετακίνηση αυξάνει σημαντικά το πλάτος της με την αύξηση της διέγερσης.

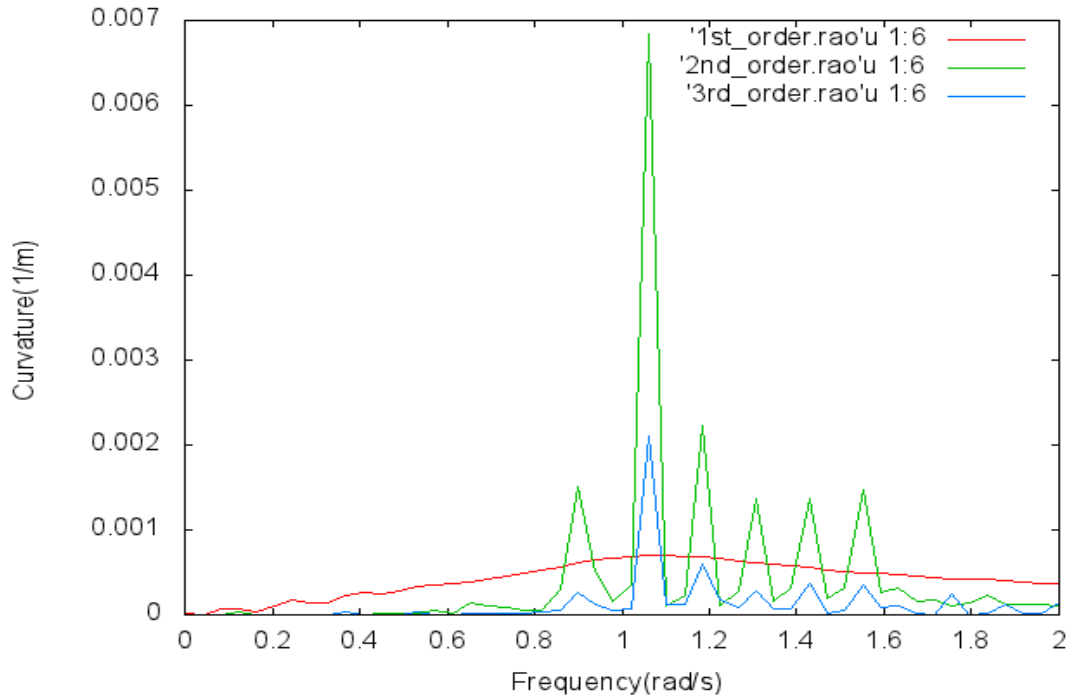


Εικόνα 27 Κάθετες μετακινήσεις στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής ($n=136$) για οριζόντια μετακίνηση 1m και κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

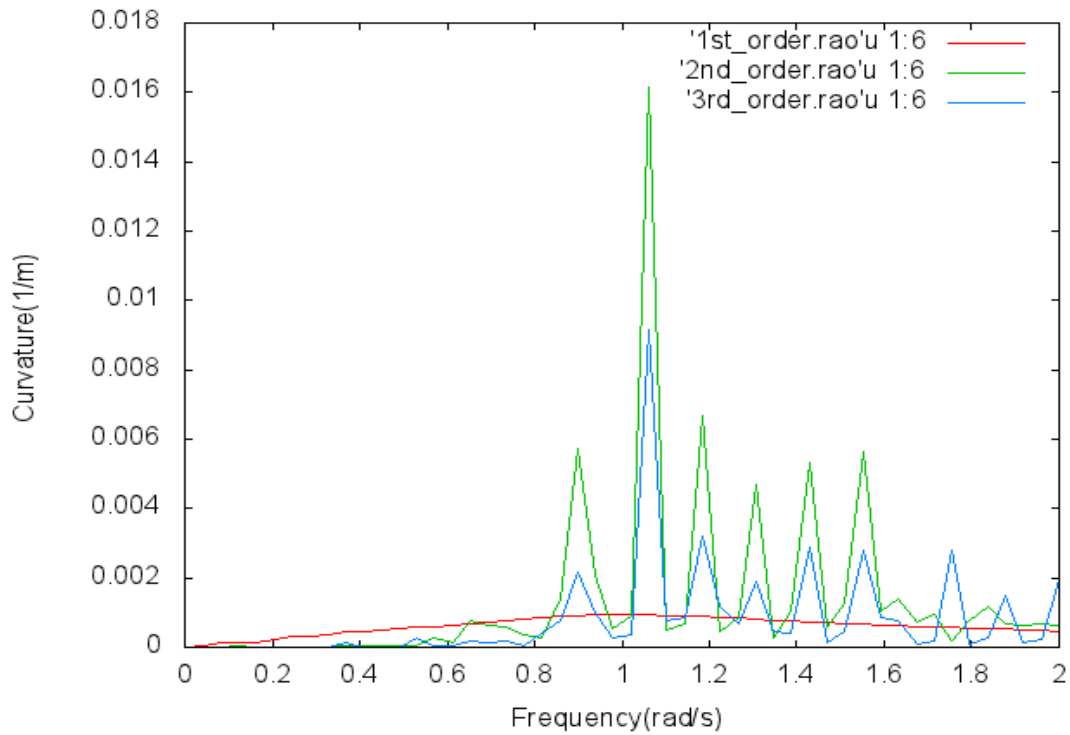


Εικόνα 28 Κάθετες μετακινήσεις στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής ($n=136$) για οριζόντια μετακίνηση 2m και κάθετη μετακίνηση 2m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

Τέλος, η δυναμική καμπυλότητα για τα πρωτοτάξια, δευτεροτάξια και τριτοτάξια φαινόμενα, φαίνεται στις Εικόνες 29 και 30. Το πρώτο διάγραμμα (Εικόνα 29) αντιστοιχεί στο μικρότερο πλάτος διέγερσης, ενώ το δεύτερο (Εικόνα 30) στο μεγαλύτερο πλάτος. Στην πρώτη περίπτωση, η δευτεροτάξια δυναμική καμπυλότητα είναι μεγαλύτερη από την πρωτοτάξια για τις συχνότητες 0.8 rad/s-1.6 rad/s. Ταυτόχρονα, η τριτοτάξια δυναμική καμπυλότητα παίρνει ψηλές τιμές για συχνότητες μεγαλύτερες του 1 rad/s. Στην δεύτερη περίπτωση, η αύξηση του πλάτους διέγερσης οδηγεί στην ακόμα μεγαλύτερη συνεισφορά των δευτεροτάξιων και τριτοτάξιων φαινομένων σε σχέση με τα γραμμικά. Για το λόγο αυτό, θεωρείται ότι ο υπολογισμός της δυναμική καμπυλότητας ενός τέτοιου αγωγού, χωρίς να ληφθούν υπόψη τα φαινόμενα ανώτερης τάξης μπορεί να οδηγήσει σε λάθος υπολογισμούς.



Εικόνα 29 Δυναμική Καμπυλότητα στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για οριζόντια μετακίνηση 1m και κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s



Εικόνα 30 Δυναμική Καμπυλότητα στο σημείο μέγιστης στατικής καμπτικής ροπής (n=136) για οριζόντια μετακίνηση 1m και κάθετη μετακίνηση 1m του επιφανειακού σημείου, για συχνότητες 0-2 rad/s

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η ανάλυση των φαινομένων πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης στη μη-γραμμική απόκριση ενός αγωγού μεταφοράς ρευστών για θαλάσσιες εφαρμογές. Για το λόγο αυτό, έγινε προσέγγιση του προβλήματος στο πεδίο των συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε σειρά διαταραχών. Αυτό οδήγησε στην δημιουργία τριών διακριτών συστημάτων για τις τρεις τάξεις του προβλήματος, που λύθηκαν διαδοχικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Η αριθμητική επίλυση κατέδειξε τη συνεισφορά των δευτεροτάξιων και τριτοτάξιων μεγεθών στην συμπεριφορά της κατασκευής. Η δυναμική καμπυλότητα είναι το μέγεθος που αλλάζει σημαντικά όταν ληφθούν υπόψη τα φαινόμενα ανώτερης τάξης. Σε κάποιες περιπτώσεις τα δευτεροτάξια και τριτοτάξια φαινόμενα παίρνουν τιμές μεγαλύτερες από αυτές των γραμμικών και συνολικά η συνεισφορά τους δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Αυτό δείχνει και την αναγκαιότητα να λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα ανώτερης τάξης, ειδικότερα όταν αντιμετωπίζει κανείς μεγάλες φορτίσεις.

Η εύρεση των συναρτήσεων μεταφοράς για τα δυναμικά μεγέθη του μη-γραμμικού προβλήματος αποτελεί μια από τις συνεισφορές της εργασίας αυτής. Ταυτόχρονα, η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος για την n -οστή τάξη αποτελεί έναυσμα για περαιτέρω έρευνα.

Τέλος, προτείνεται η επέκταση της παραπάνω λύσης στην προσέγγιση του μη-γραμμικού προβλήματος με όρους τέταρτης και ανώτερης τάξης. Παράλληλα, η ενσωμάτωση στην παρούσα εργασία ενός μοντέλου για την αλληλεπίδραση του αγωγού με τον πυθμένα, στα πρότυπα της εργασίας του Chatjigeorgiou [28] για τη δεύτερη τάξη, είναι πρόταση για περαιτέρω διερεύνηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] M.H. Ghayesh, Coupled longitudinal-transverse dynamics of an axially accelerating beam, *J Sound Vibr* 331 (2012) 5107– 5124
- [2] I.K.Chatjigeorgiou, Three dimensional nonlinear dynamics of submerged, extensible catenary pipes conveying fluid and subjected to end-imposed excitations, *Int J Non-Linear Mech* 45 (2010) 667-680
- [3] I.K.Chatjigeorgiou, On the effect of internal flow on vibrating catenary risers in three dimensions, *Eng Struct* 32 (2010) 3313-3329
- [4] <http://www.principia.fr/expertise-fields-software-products-deeplines-126.html>
- [5] <http://www.mcskenny.com/mcskenny/software-solutions/flexcom.html>
- [6] <http://www.sintef.no/home/marintek-old/Software-developed-at-marintek/Riflex/>
- [7] <http://www.orcina.com/SoftwareProducts/OrcaFlex/index.php>
- [8] C. Athisakul, T. Monprapussorn, S. Chucheepsakul, A variational formulation for three-dimensional analysis of extensible marine riser transporting fluid, *Ocean Eng* 38 (2011) 609– 620 [9] S.A. Hosseini Kordkheili, H. Bahai, M. Mirtaheeri, An updated Lagrangian finite element formulation for large displacement dynamic analysis of three-dimensional flexible riser structures, *Ocean Eng* 38 (2011) 793– 803
- [10] Y.M. Low, R.S. Langley, Time and frequency domain coupled analysis of deepwater floating production systems, *App. Ocean Res* 28 (2006) 371– 385
- [11] Y.M. Low, R.S. Langley, Dynamic analysis of a flexible hanging riser in the time and frequency domain. *Proc 26th Int Conf Offshore Mech Arctic Eng (OMAE 2006)*, Hamburg, Germany (2006), Paper No 92171
- [12] I.K. Chatjigeorgiou, A finite differences formulation for the linear and nonlinear dynamics of 2D catenary risers, *Ocean Eng* 35 (2008) 616– 636
- [13] M.S. Triantafyllou, A. Bliet, H. Shin, Dynamic analysis as a tool for open sea mooring system design, *Trans – Soc. Naval Arch Marine Eng* 93 (1985) 303– 324
- [14] S.A. Mavrakos, V.J. Papazoglou, M.S. Triantafyllou, J. Hatjigeorgiou, Deep water mooring dynamics, *Marine Struct* 9 (1996) 182– 209
- [15] P. Chidamparam, A.W. Leissa, Influence of centerline extensibility on the in-plane free vibrations of loaded circular arches, *J Sound Vib* 183 (1995) 779– 795

- [16] F.S. Hover, M.S. Triantafyllou, Linear dynamics of curved tensioned elastic beams, *J Sound Vibr* 228 (1999) 923– 930
- [17] C.K. Morooka, F.M. Coelho, D.A. Shiguemoto, R. Franciss, C.G.C. Matt, Dynamic behavior of top tensioned riser in frequency and time domain. *Proc 16th Int Conf Offshore Polar Eng (ISOPE 2006)*, San Francisco, CA, USA (2006), 31– 36
- [18] I.K. Chatjigeorgiou, Linear out-of-plane dynamics of catenary risers, *J Eng Maritime Env* 224 (2010) 13– 27
- [19] S. Stoykov, P. Ribeiro, Stability of nonlinear periodic vibrations of 3D beams, *Nonlinear Dyn* 66 (2011) 335– 353
- [20] K.Y. Sze, S.H. Chen, J.L. Huang, The incremental harmonic balance method for nonlinear vibration of axially moving beams, *J Sound Vibr* 281 (2005) 611– 626
- [21] P. Ribeiro, Periodic vibration of plates with large displacements, *AIAA Journal*, 40 (2002) 185-188
- [22] M.P. Païdoussis, *Fluid-structure interactions: Slender structures and axial flow*, Vol. 1, London, Academic Press (1998)
- [23] J. Kevorkian, J.D. Cole, *Perturbation methods in applied mathematics*, Springer-Verlag, New York (1981)
- [24] A.H. Nayfeh, *Problems in perturbation*, John Wiley & Sons Inc., New York (1985)
- [25] J.D. Hoffman, *Numerical methods for engineers and scientists*, McGraw-Hill, New York (1993)
- [26] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. *Numerical recipes*, Cambridge University Press (1986).
- [27] E. Passano, C.M. Larsen, Efficient analysis of a catenary riser, *Proc 25th Int Conf Offshore Mech Arctic Eng (OMAE 2006)*, Hamburg, Germany (2006), Paper No 92308
- [28] I.K.Chatjigeorgiou, Second-order nonlinear dynamics of catenary pipelines: A frequency domain approach, *Computers and Structures*, 123 (2013) 1-14

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακες Εξ (72)

Π1

$$\mathbf{P}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_{30} & 0 & -(k\omega)^2 m & 0 & 0 & k\omega MV \Omega_{30} & S_{n0} & 0 & w \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{30} & 0 & -(k\omega)^2 m & -k\omega MV \Omega_{30} & 0 & 0 & S_{n0} & 0 & w \cos \varphi_0 \\ -\Omega_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & k\omega MV \Omega_{30} & -(k\omega)^2 \bar{M} & -b^{(k)} \omega^2 |\tilde{q}^{(1)}| & -T_0 + MV^2 & 0 & -w \sin \varphi_0 & -k\omega MV \\ 0 & -\Omega_{30} & 0 & 0 & -k\omega MV \Omega_{30} & 0 & b^{(k)} \omega^2 |\tilde{q}^{(1)}| & -(k\omega)^2 \bar{M} & 0 & -T_0 + MV^2 & k\omega MV & -w \sin \varphi_0 \\ 1/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

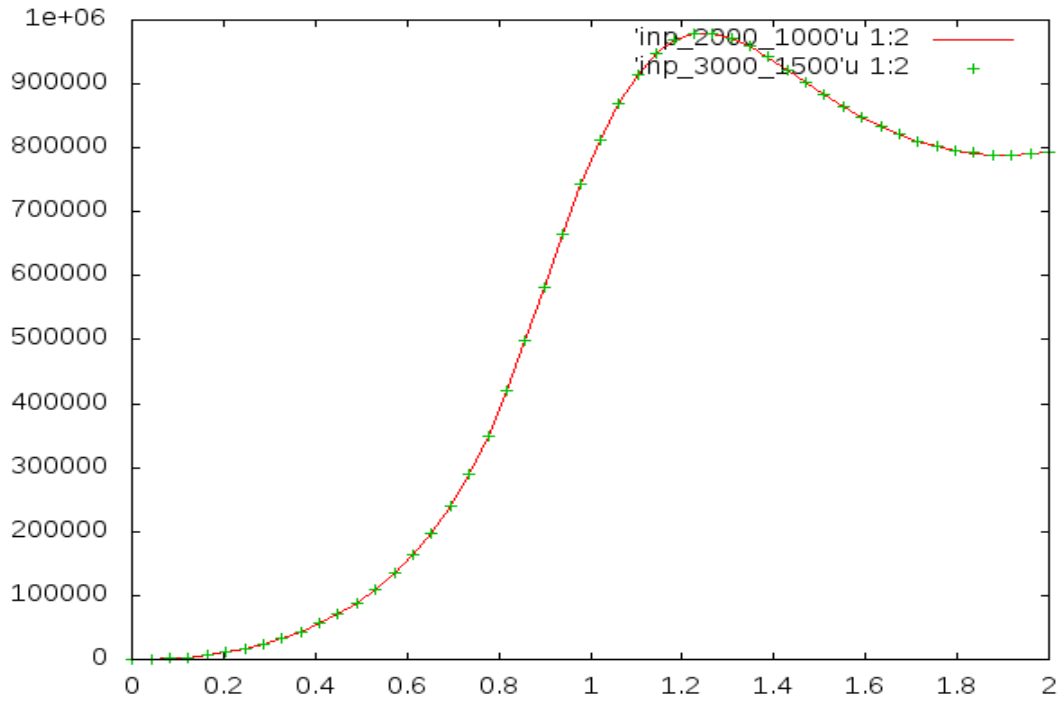
Π2

$$\mathbf{Q}^{(2)} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{n1_R}^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} + \tilde{S}_{n1_I}^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} - MV \omega \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} \tilde{q}_I^{(1)} + MV \omega \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} \tilde{q}_R^{(1)} \\ \tilde{S}_{n1_I}^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} + \tilde{S}_{n1_R}^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} - MV \omega \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} \tilde{q}_R^{(1)} + MV \omega \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} \tilde{q}_I^{(1)} \\ \omega MV (\tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} \tilde{p}_R^{(1)} + \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} \tilde{p}_I^{(1)}) - \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} \tilde{T}_{1_R}^{(1)} + \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} \tilde{T}_{1_I}^{(1)} \\ \omega MV (-\tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} \tilde{p}_R^{(1)} + \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} \tilde{p}_I^{(1)}) - \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} \tilde{T}_{1_R}^{(1)} + \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} \tilde{T}_{1_I}^{(1)} \\ \frac{1}{2} (\tilde{q}_R^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} - \tilde{q}_I^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)}) \\ \frac{1}{2} (\tilde{q}_I^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} + \tilde{q}_R^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)}) \\ \frac{1}{2} (-\tilde{p}_R^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)} + \tilde{p}_I^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)}) \\ -\frac{1}{2} (\tilde{p}_R^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(1)} + \tilde{p}_I^{(1)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(1)}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

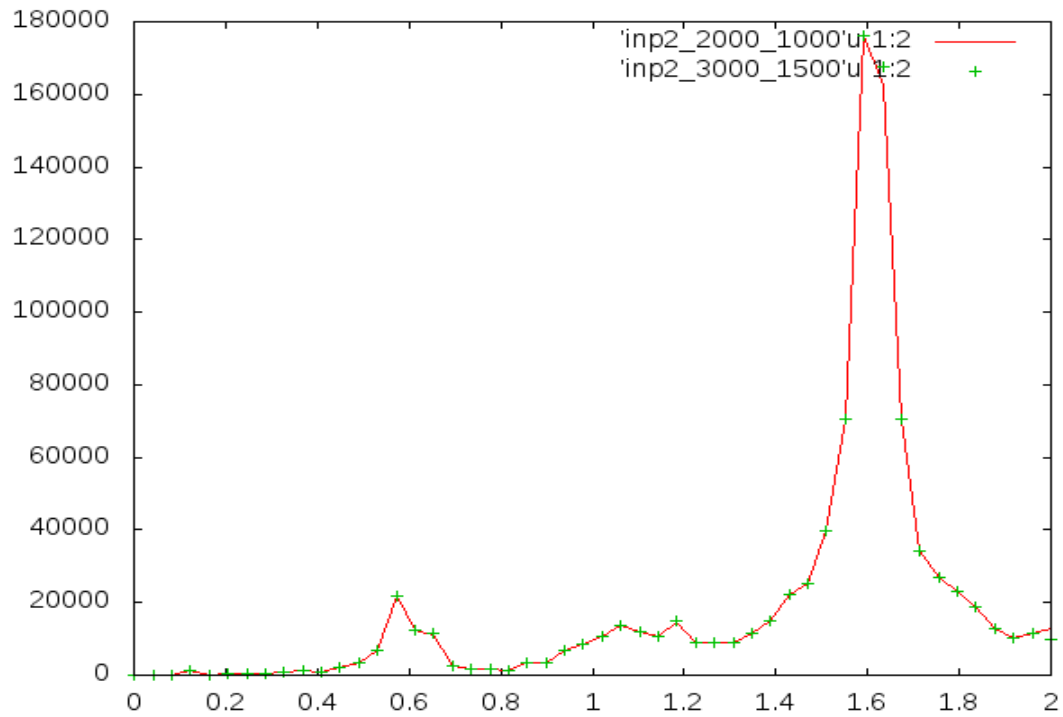
$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & \tilde{S}_{m_R}^{(0)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} - \tilde{S}_{m_I}^{(0)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} + \tilde{S}_{m_R}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} - \tilde{S}_{m_I}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} + 2(m+M)\omega^2 (\tilde{q}_R^{(0)} \tilde{\varphi}_R^{(2)} - \tilde{q}_I^{(0)} \tilde{\varphi}_I^{(2)} + \tilde{q}_R^{(2)} \tilde{\varphi}_R^{(0)} - \tilde{q}_I^{(2)} \tilde{\varphi}_I^{(0)}) + 2MV\omega (\tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} \tilde{q}_I^{(2)} + \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} \tilde{q}_R^{(2)} + \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} \tilde{q}_I^{(0)} + \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} \tilde{q}_R^{(0)}) \\
 & \tilde{S}_{m_I}^{(0)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} + \tilde{S}_{m_R}^{(0)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} + \tilde{S}_{m_I}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} + \tilde{S}_{m_R}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} + 2(m+M)\omega^2 (\tilde{q}_I^{(0)} \tilde{\varphi}_R^{(2)} + \tilde{q}_R^{(0)} \tilde{\varphi}_I^{(2)} + \tilde{q}_I^{(2)} \tilde{\varphi}_R^{(0)} + \tilde{q}_R^{(2)} \tilde{\varphi}_I^{(0)}) + MV\omega (-2\tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} \tilde{q}_I^{(2)} + 2\tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} \tilde{q}_R^{(2)} - \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} \tilde{q}_I^{(0)} + \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} \tilde{q}_R^{(0)}) \\
 & -\tilde{T}_{I_R}^{(0)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} + \tilde{T}_{I_I}^{(0)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} - \tilde{T}_{I_R}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} - \tilde{T}_{I_I}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} + \omega MV (2\tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} \tilde{p}_I^{(2)} + 2\tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} \tilde{p}_R^{(2)} + \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} \tilde{p}_I^{(0)} + \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} \tilde{p}_R^{(0)}) - 2m\omega^2 (\tilde{p}_R^{(0)} \tilde{\varphi}_R^{(2)} - \tilde{p}_I^{(0)} \tilde{\varphi}_I^{(2)} + \tilde{p}_R^{(2)} \tilde{\varphi}_R^{(0)} - \tilde{p}_I^{(2)} \tilde{\varphi}_I^{(0)}) \\
 & -\tilde{T}_{I_R}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} - \tilde{T}_{I_I}^{(2)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} - \tilde{T}_{I_R}^{(0)} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} - \tilde{T}_{I_I}^{(0)} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} - \omega MV (2\tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} \tilde{p}_R^{(2)} - 2\tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} \tilde{p}_I^{(2)} + \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} \tilde{p}_R^{(0)} - \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} \tilde{p}_I^{(0)}) - 2m\omega^2 (\tilde{p}_R^{(0)} \tilde{\varphi}_I^{(2)} + \tilde{p}_I^{(0)} \tilde{\varphi}_R^{(2)} + \tilde{p}_R^{(2)} \tilde{\varphi}_I^{(0)} + \tilde{p}_I^{(2)} \tilde{\varphi}_R^{(0)}) \\
 & \frac{2}{3} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} \tilde{q}_R^{(2)} - \frac{2}{3} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} \tilde{q}_I^{(2)} + \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} \tilde{q}_R^{(0)} - \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} \tilde{q}_I^{(0)} \\
 & \frac{2}{3} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} \tilde{q}_I^{(2)} + \frac{2}{3} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} \tilde{q}_R^{(2)} + \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} \tilde{q}_I^{(0)} + \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} \tilde{q}_R^{(0)} \\
 & -\frac{2}{3} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} \tilde{p}_R^{(2)} + \frac{2}{3} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} \tilde{p}_I^{(2)} - \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} \tilde{p}_R^{(0)} + \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} \tilde{p}_I^{(0)} \\
 & -\frac{2}{3} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(0)} \tilde{p}_I^{(2)} - \frac{2}{3} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(0)} \tilde{p}_R^{(2)} - \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{31_R}^{(2)} \tilde{p}_I^{(0)} - \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{31_I}^{(2)} \tilde{p}_R^{(0)} \\
 & 0 \\
 & 0 \\
 & 0 \\
 & 0
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Q^{(3)} = \\
 & [53]
 \end{aligned}$$

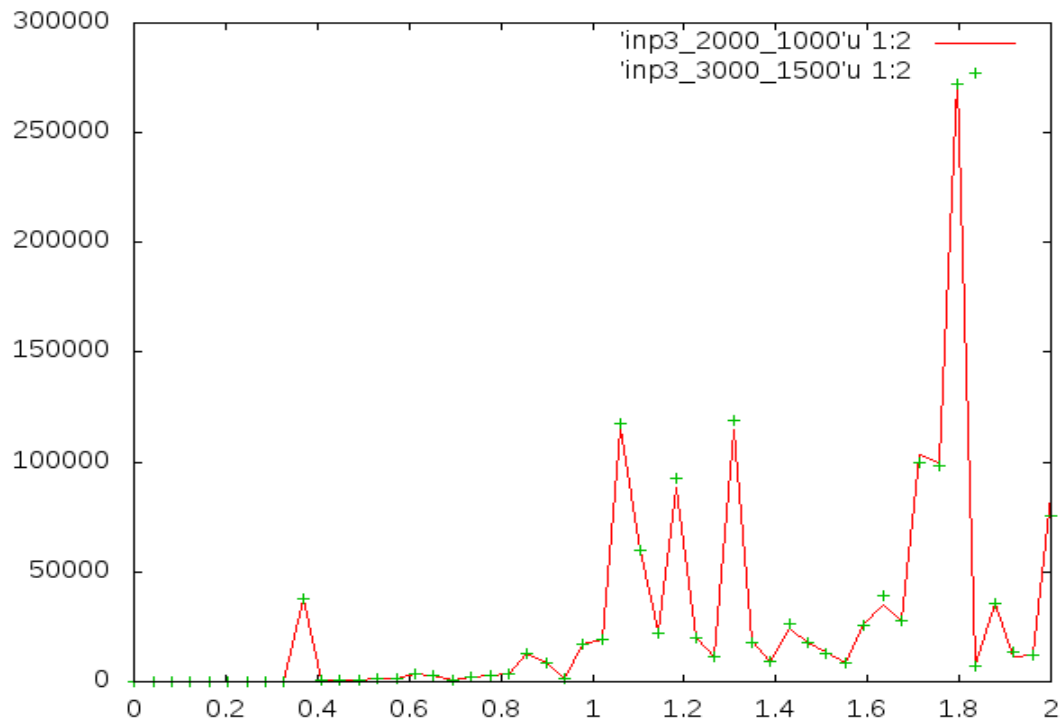
Διαγράμματα σύγκλισης μοντέλου



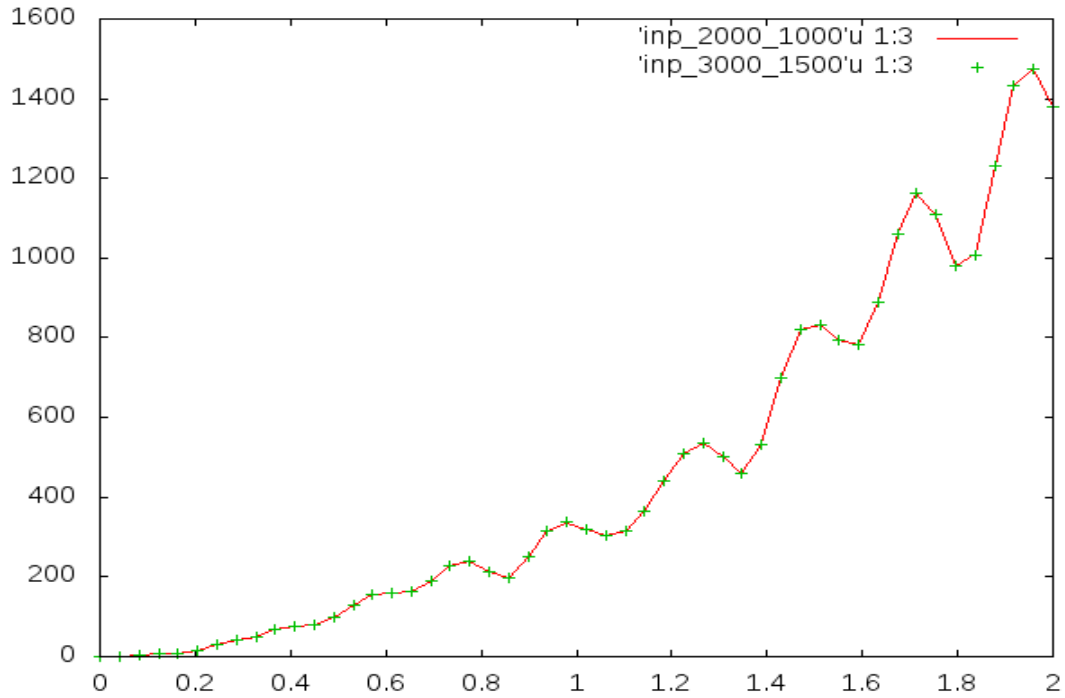
Εικόνα 31 Σύγκλιση μοντέλου-Αξονική δύναμη του γραμμικού συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



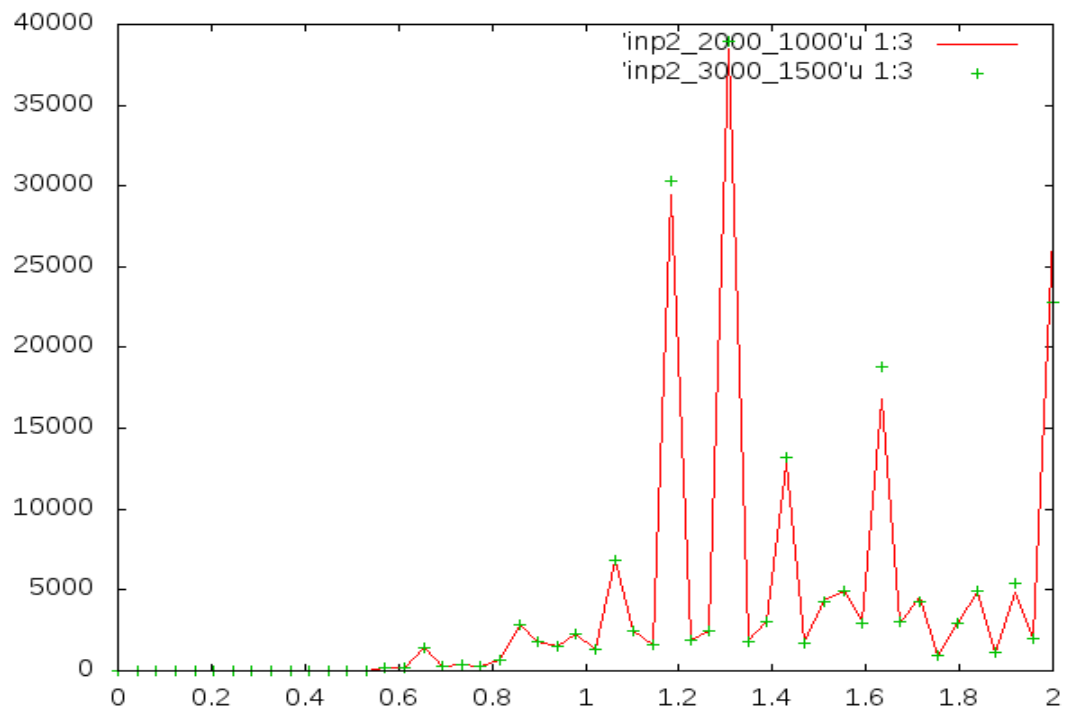
Εικόνα 32 Σύγκλιση μοντέλου-Αξονική δύναμη του δευτεροτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



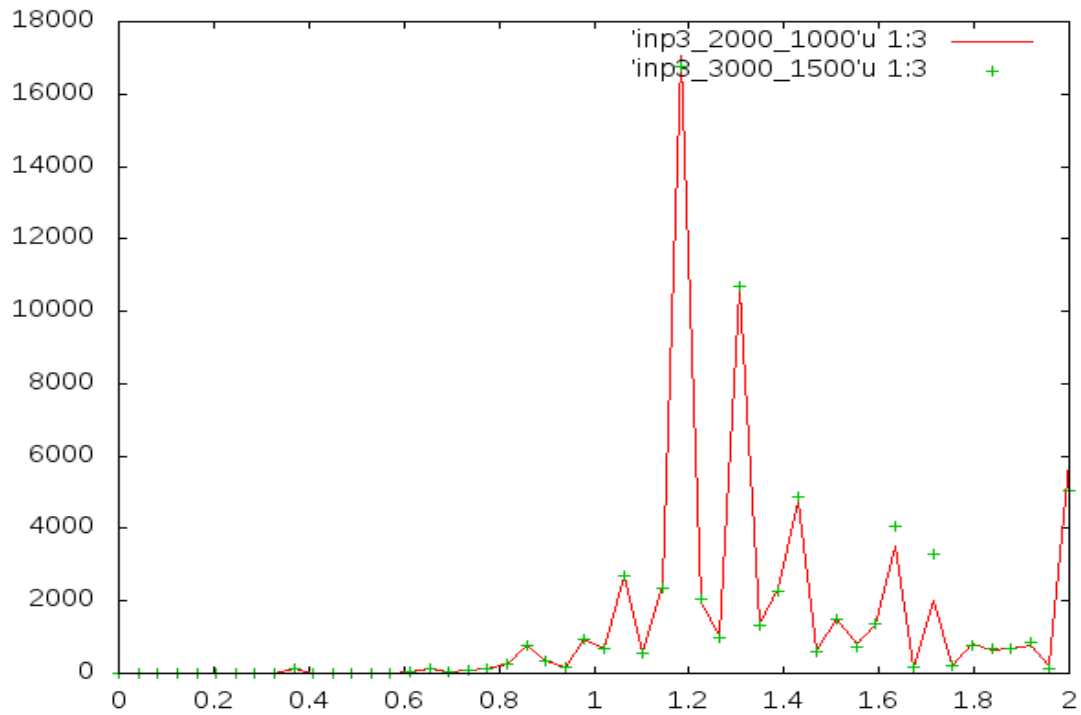
Εικόνα 33 Σύγκλιση μοντέλου-Αξονική δύναμη του τριτοτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



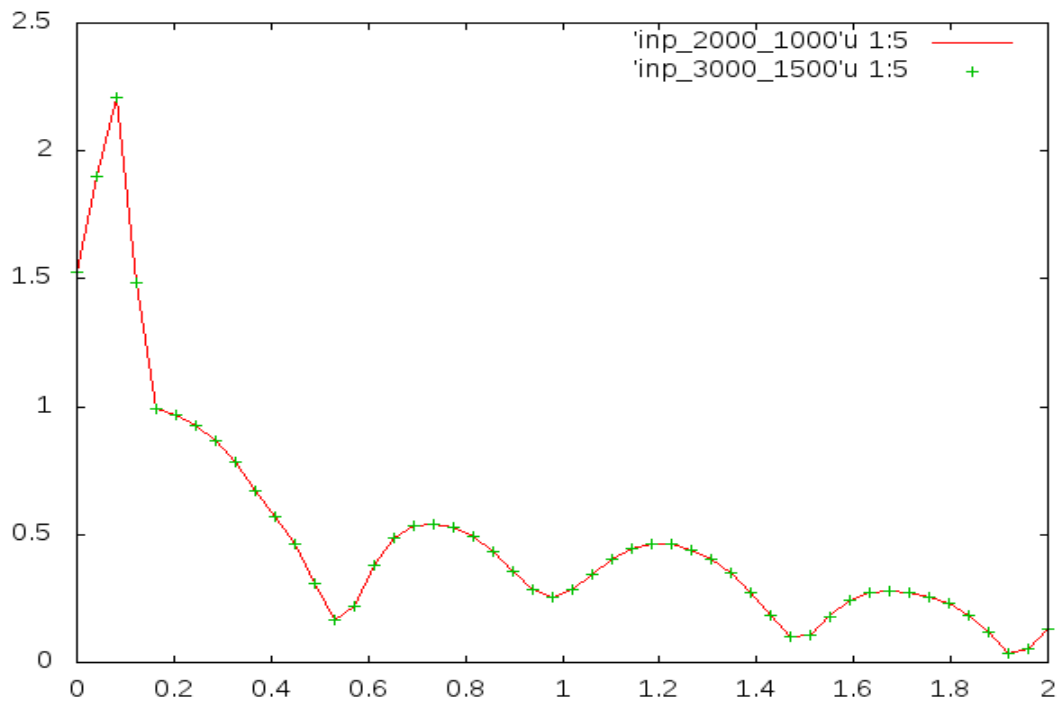
Εικόνα 34 Σύγκλιση μοντέλου-Διατημητική δύναμη του γραμμικού συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



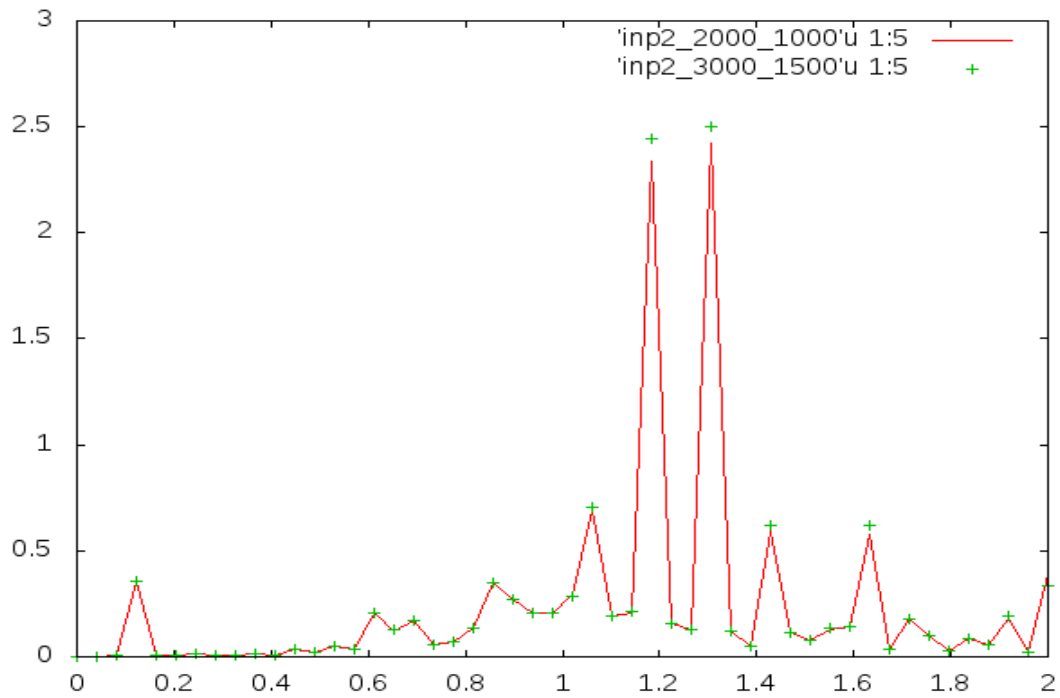
Εικόνα 35 Σύγκλιση μοντέλου-Διατημητική δύναμη του δευτεροτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



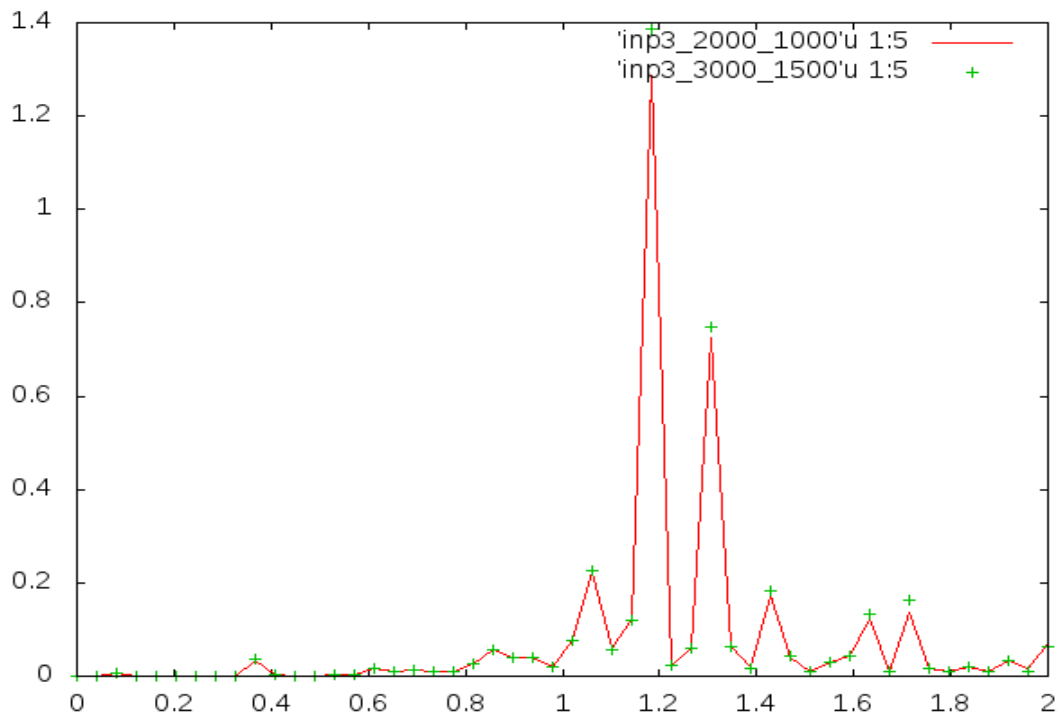
Εικόνα 36 Σύγκλιση μοντέλου-Διαμητική δύναμη του τριτοτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



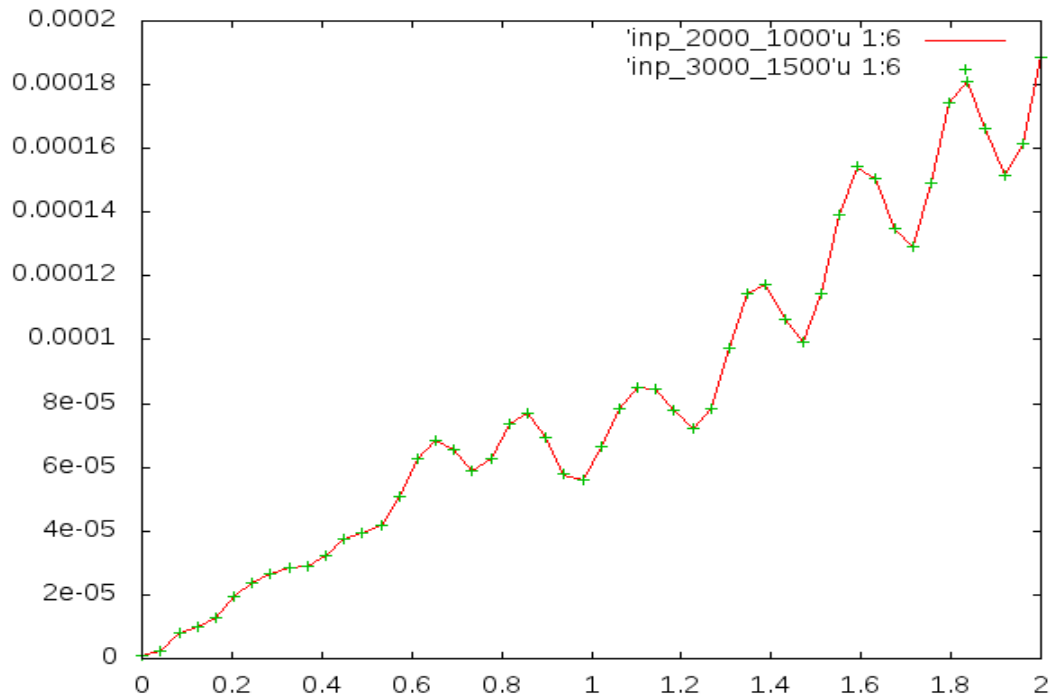
Εικόνα 37 Σύγκλιση μοντέλου-Αξονικές μετακινήσεις του γραμμικού συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



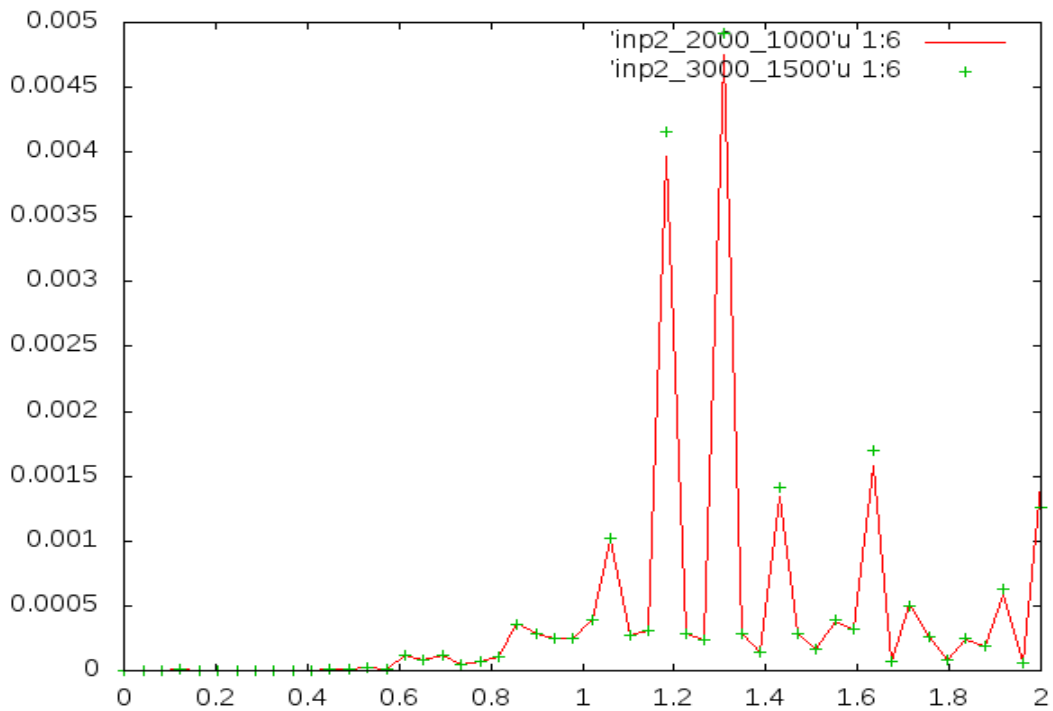
Εικόνα 38 Σύγκλιση μοντέλου-Αξονικές μετακινήσεις του δευτεροτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



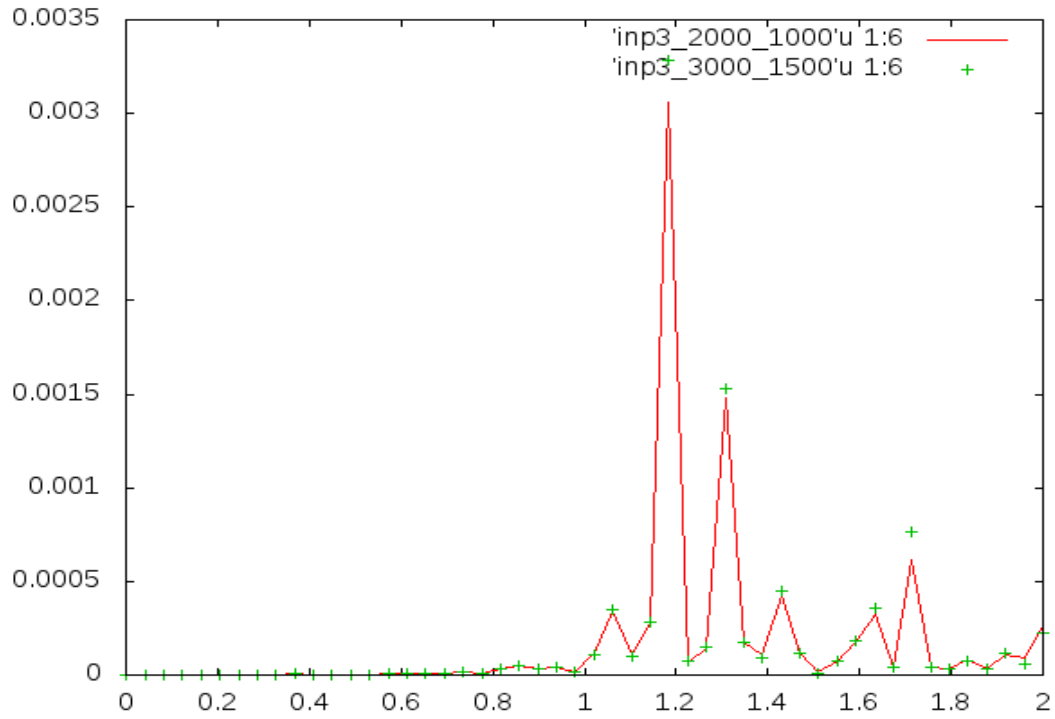
Εικόνα 39 Σύγκλιση μοντέλου-Αξονικές μετακινήσεις του τριτοτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



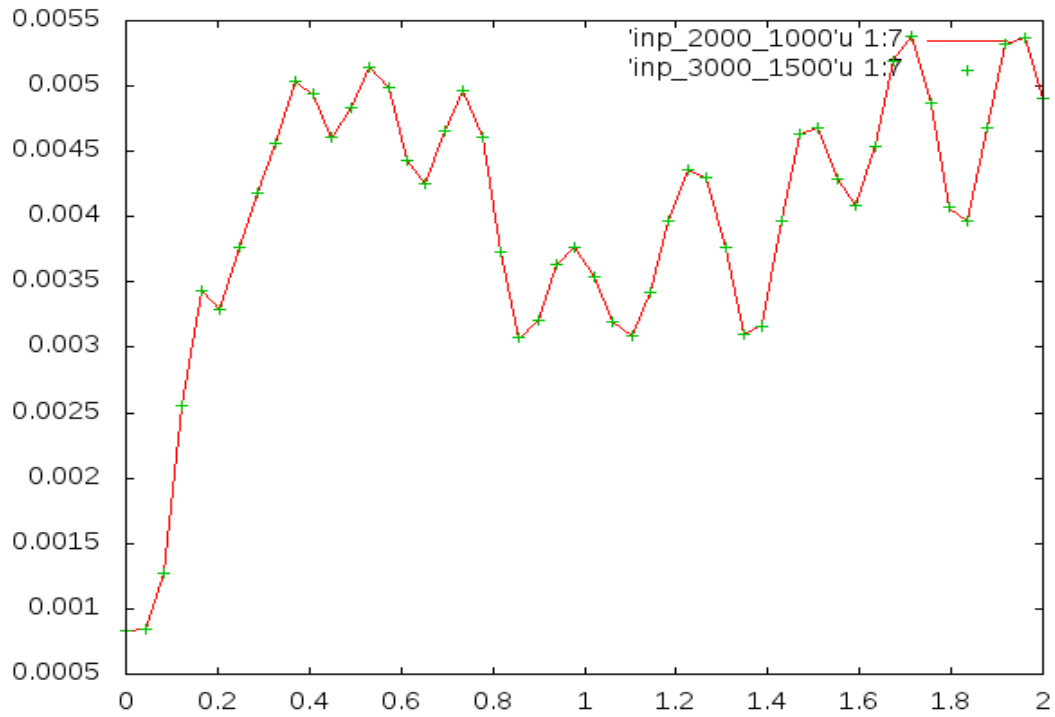
Εικόνα 40 Σύγκλιση μοντέλου-Κάθετες μετακινήσεις του γραμμικού συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



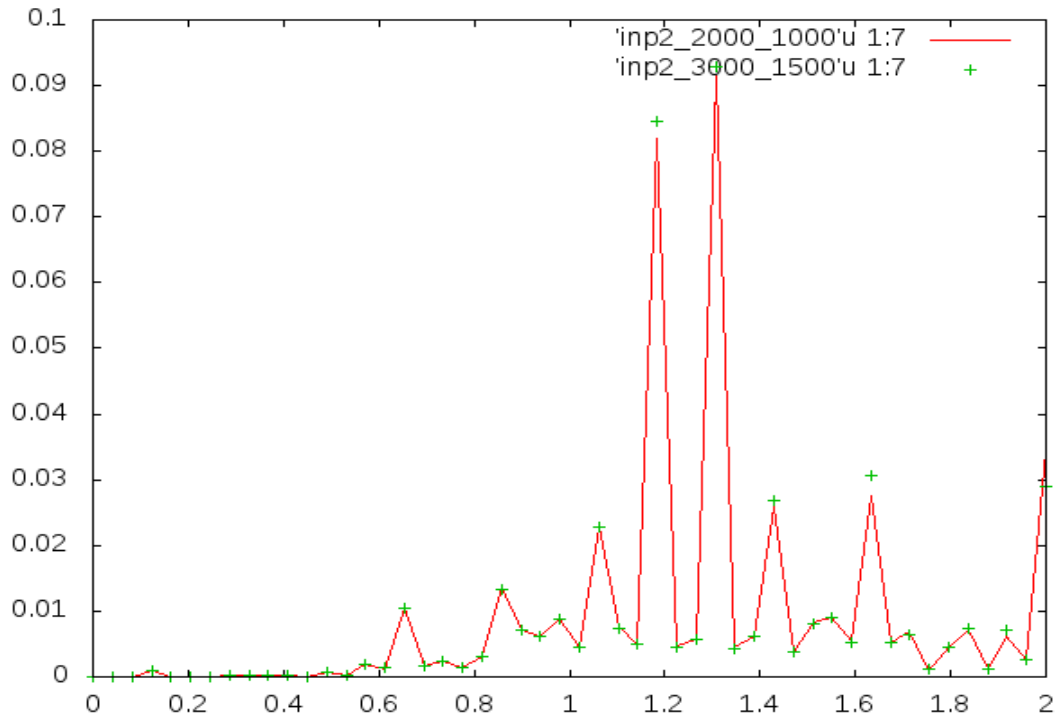
Εικόνα 41 Σύγκλιση μοντέλου-Κάθετες μετακινήσεις του δευτεροτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



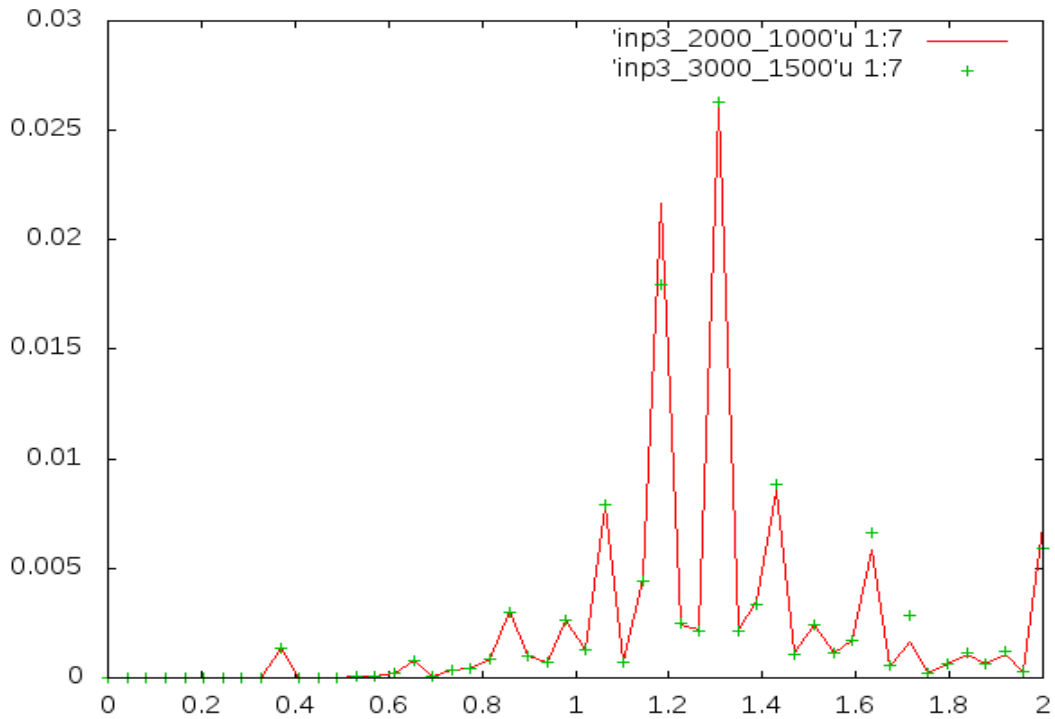
Εικόνα 42 Σύγκλιση μοντέλου-Κάθετες μετακινήσεις του τριτοτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



Εικόνα 43 Σύγκλιση μοντέλου-Δυναμική Καμπυλότητα του γραμμικού συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



Εικόνα 44 Σύγκλιση μοντέλου-Δυναμική Καμπυλότητα του δευτεροτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού



Εικόνα 45 Σύγκλιση μοντέλου-Δυναμική Καμπυλότητα του τριτοτάξιου συστήματος για διακριτοποίηση 2000 κόμβων (με κόκκινη γραμμή) και 3000 κόμβων (με πράσινο σταυρόνημα) στη μεσαία θέση του αγωγού