



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΑΣΥΡΜΑΤΑ ΔΙΚΤΥΑ
ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία για το Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένες
Μαθηματικές Επιστήμες

ΕΛΕΝΗ Γ. ΣΤΑΗ

Αθήνα, Ιούλιος 2014



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

**STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH
APPLICATIONS IN WIRELESS
COMMUNICATIONS NETWORKS**

**Thesis for the Interdepartmental Postgraduate Course
Programme Applied Mathematics**

ELENI G. STAI

Athens, July 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ
ΑΣΥΡΜΑΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

της

Ελένης Γ. Στάη

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών,
Ε.Μ.Π., 2009

Πτυχιούχος Μαθηματικός, Ε.Κ.Π.Α., 2013

Επιβλέπων: Μιχαήλ Λουλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 22^η Ιουλίου 2014.

Μιχαήλ Λουλάκης, Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Συμεών Παπαβασιλείου, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Ιωάννης Σπηλιώτης, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2014



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

**STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL WITH
APPLICATIONS IN WIRELESS
COMMUNICATIONS NETWORKS**

by

Eleni G. Stai

Diploma in Electrical and Computer Engineering, National Technical University of
Athens, 2009

Bachelor in Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens, 2013

Advisor: Prof. Dr. Michail Loulakis

It has been approved by the advisory committee on July 22, 2014.

Prof. Dr. Michail Loulakis
Prof. Dr. Symeon Papavassiliou
Prof. Dr. Ioannis Spiliotis

Athens, July 2014

Copyright © Ελένη Γ. Στάη, 2014

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. *All rights reserved.*

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τη συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τη συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

«Η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής έγινε στο πλαίσιο της υλοποίησης του μεταπτυχιακού προγράμματος το οποίο συγχρηματοδοτήθηκε μέσω της Πράξης «Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ με διαδικασία εξατομικευμένης αξιολόγησης ακαδ. έτους 2012-2013» από πόρους του Ε.Π. «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (ΕΚΤ) και του ΕΣΠΑ (2007-2013)».

“The completion of this work was done during the implementation of the Master’s program partly financed by the Act “Scholarships program SSF with individualized academic assessment for academic year 2012-2013” resources from the O.P. “Education and Lifelong Learning” of the European Social Fund (ESF) and the NSRF (2007-2013)”.

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εστιάζει στη μελέτη του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου και τις εφαρμογές του στα ασύρματα δίκτυα τηλεπικοινωνιών. Ο Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος είναι μία μαθηματική μέθοδος βελτιστοποίησης ενός κριτηρίου επίδοσης, μέσω του προσδιορισμού βέλτιστων πολιτικών ελέγχου, ενώ λαμβάνεται υπόψη η ύπαρξη αβεβαιότητας είτε στην παρατήρηση των δεδομένων κατάστασης είτε στις δυνάμεις που επιδρούν στην εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος. Συγκεκριμένα, η κατάσταση του συστήματος μοντελοποιείται ως στοχαστική διαδικασία και λύση μίας Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης (ΣΔΕ) κατά *Itô* και η επιλογή μίας εκ των αποδεκτών πολιτικών ελέγχου επηρεάζει τη δυναμική του συστήματος, δηλ. τη ΣΔΕ της κατάστασης. Προτού μελετηθεί ο Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος, παρατίθεται το απαραίτητο υπόβαθρο όσον αφορά το ευρύτερο πλαίσιο των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων κατά *Itô* (κίνηση *Brown*, φόρμουλα του *Itô*, ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης της ΣΔΕ, αναλυτική και αριθμητική επίλυση, κλπ.). Ακολούθως, μελετάται και αναλύεται ο Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος. Αρχικά, περιγράφονται οι δυνατές διατυπώσεις ενός προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, ονομαστικά η ισχυρή και η ασθενής διατύπωση. Χρησιμοποιώντας τις δύο διατυπώσεις ενός προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, περιγράφονται οι δύο μέθοδοι επίλυσης του, η Στοχαστική Αρχή Μεγίστου και ο δυναμικός προγραμματισμός μέσω της μερικής διαφορικής εξίσωσης *Hamilton-Jacobi-Bellman*, ενώ μελετάται η ισοδυναμία των δύο μεθόδων. Περισσότερη έμφαση δίνεται στη δεύτερη μέθοδο, καθώς είναι εκείνη που εφαρμόζεται συχνότερα στα προβλήματα Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στη βιβλιογραφία. Ως εκ τούτου μελετώνται οι ιδιότητες της αναλυτικής λύσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης *Hamilton-Jacobi-Bellman*, ενώ εξετάζεται και η αριθμητική της επίλυση αφού στα περισσότερα προβλήματα δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός της αναλυτικής λύσης.

Τη θεωρητική μελέτη του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου ακολουθεί η μελέτη των εφαρμογών του για τη βελτιστοποίηση και το σχεδιασμό των ασύρματων δικτύων, με επίκεντρο την κατανομή πόρων και συγκεκριμένα τον προσδιορισμό της ισχύος εκπομπής των χρηστών των ασύρματων κυψελωτών δικτύων. Αναλυτικότερα, σύμφωνα με μελέτες της βιβλιογραφίας, ένα ρεαλιστικό μοντέλο των στοχαστικών ασύρματων καναλιών είναι εκείνο που περιγράφει την απώλεια ισχύος κατά μήκος τους ως λύση μίας ΣΔΕ. Ως εκ τούτου, εξετάζεται η βέλτιστη κατανομή ισχύος εκπομπής στους χρήστες ενός κυψελωτού δικτύου, με κριτήριο την οικονομική κατανάλωση ενέργειας, όπου τα ασύρματα κανάλια μεταξύ των χρηστών και του σταθμού βάσης είναι στοχαστικά και η δυναμική μεταβολή τους περιγράφεται από ΣΔΕ. Τέλος, η μεταπτυχιακή εργασία ολοκληρώνεται με τον προσδιορισμό κάποιων μελλοντικών κατευθύνσεων για την εφαρμογή του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στα ασύρματα δίκτυα επικοινωνιών.

Abstract

This master thesis is focused on the study of Stochastic Optimal Control and its applications in wireless communications networks. Stochastic Optimal Control is a theoretic optimization tool of a performance index, via the determination of optimal control policies, while taking into consideration the existence of uncertainty either in the observation of the state data of the system or in the evolution of system's state. Precisely, the state of the system is modeled as a stochastic process solving a Stochastic Differential Equation (SDE) of Itô type, and the choice of an admissible control policy affects the system's dynamics, i.e., the SDE describing the system's state. Before studying Stochastic Optimal Control, it is provided the necessary background regarding the broader framework of SDEs of Itô type (Brownian motion, Itô's formula, uniqueness and existence of solution, SDE's analytic and arithmetic solution, etc.). In the sequel, in view of the background on SDEs, Stochastic Optimal Control is studied and analyzed. Initially, the two possible formulations of a Stochastic Optimal Control problem are described, namely the strong and weak formulation. Based on these two formulations, two methods of solving a Stochastic Optimal Control problem are analytically studied, namely, the Stochastic Maximum Principle and the dynamic programming via the partial differential equation Hamilton-Jacobi-Bellman, while the conditions under which equivalence of the two methods holds are also given. In this master thesis, emphasis is put on the latter method as it is used in a great range of applications in literature. Therefore, the properties of the analytic solution of the *Hamilton-Jacobi-Bellman* are studied, but also a finite difference scheme for its arithmetic solution is provided, since an analytic solution form is not possible in the majority of applications.

The theoretical study of Stochastic Optimal Control is followed by the study of its applications in literature for the optimization and the design of wireless networks with focus on the resource allocation problem on the users of a wireless cellular network. Precisely, the resource is the transmission power while the performance index relates to the efficiency of the energy consumption. Specifically, as it is observed in literature, an SDE-based model describes in a realistic way the power loss along the stochastic wireless channels. As a result, the problem of optimal transmission power allocation on the users of a cellular network is studied where the wireless channels between the users and the base station are stochastic and their dynamic change is modeled via an SDE. Finally, some future directions for the application of Stochastic Optimal Control in wireless networks are identified and discussed.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να εκφράσω την ειλικρινή ευγνωμοσύνη μου στον καθηγητή κ. Μιχάλη Λουλάκη για την επίβλεψη της μεταπτυχιακής μου εργασίας, για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του και την άφογη καθοδήγησή του. Ήταν πάντα διαθέσιμος να μου προσφέρει τις γνώσεις και την εμπειρία του για τη βαθύτερη κατανόηση της περιοχής του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου και των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων καθώς και να με συμβουλέψει και να με βοηθήσει σε κάθε δυσκολία κατά την πορεία ολοκλήρωσης της μεταπτυχιακής εργασίας.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Συμεών Παπαβασιλείου, επιβλέποντα της υπό εξέλιξη διδακτορικής μου διατριβής στον τομέα των ασύρματων δικτύων επικοινωνιών, για την πολύτιμη καθοδήγησή του και τις εύστοχες συμβουλές του για την εφαρμογή του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στα ασύρματα δίκτυα επικοινωνιών στο πλαίσιο της μεταπτυχιακής μου εργασίας. Επιπλέον, τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για τη σημαντική στήριξή του, την εμπιστοσύνη του στις δυνατότητές μου καθώς και τη μετάδοση των γνώσεων και εμπειριών του σε όλα τα χρόνια των ακαδημαϊκών μου σπουδών.

Έπειτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της ΣΕΜΦΕ του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, που με δίδαξαν και με καθοδήγησαν τα τελευταία δύο χρόνια. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ιωάννη Σπηλιώτη που με δίδαξε πιθανότητες σε προπτυχιακό επίπεδο και σε μεταπτυχιακό επίπεδο με εισήγαγε, μαζί με τον κύριο Λουλάκη, στο πεδίο των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων προσφέροντάς μου έμπνευση για την επιλογή του αντικείμενου της μεταπτυχιακής μου εργασίας. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την κ. Κυριακή Κυριάκη για τις συζητήσεις που είχαμε και τις καθοριστικές συμβουλές της για την επιλογή του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου, συμφοιτητές και συνεργάτες μου από το μεταπτυχιακό καθώς και από το εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής όπου εκπονώ τη διδακτορική μου διατριβή για την άφογη συνεργασία που έχουμε καθώς και τις εποικοδομητικές ακαδημαϊκές συζητήσεις μας. Επιπλέον, ευχαριστώ τους φίλους μου Δημήτρη και Λίνα για κάθε συμβουλή, βοήθεια και ευχάριστη στιγμή που ζούμε καθημερινά και ελπίζω να είναι δίπλα μου και στο μέλλον.

Ωστόσο, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω τους γονείς μου Γιώργο και Μαρία για την πίστη τους στις δυνατότητές μου, την καθοδήγηση και την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφεραν στη ζωή μου ως τώρα, καθώς και την ατέρμονη ανοχή και στήριξή τους στη μακρά πορεία των σπουδών μου με όλες τις συνεπακόλουθες δυσκολίες. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αδερφό μου Γιάννη για τη συμπαράστασή του, την παρέα του

και τις συμβουλές του για τις αποφάσεις μου. Στην οικογένεια μου αφιερώνω την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
1.1	Δομή Μεταπτυχιακής Εργασίας	6
1.2	Πίνακας Βασικών Συμβολισμών	7
2	Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις	9
2.1	Η Κίνηση <i>Brown</i> & το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα	9
2.2	Το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα του <i>Itô</i>	12
2.3	Η Στοχαστική Ανέλιξη <i>Itô</i> και η Φόρμουλα του <i>Itô</i>	15
2.4	Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ): Περιγραφή	18
2.5	ΣΔΕ: Ύπαρξη & Μοναδικότητα της Λύσης	19
2.6	Γραμμικές ΣΔΕ: Ορισμός & Επίλυση	21
2.7	ΣΔΕ: Ειδικά Θεωρήματα & Ιδιότητες	22
2.8	Επέκταση Ορισμού των ΣΔΕ με Τυχαίους Συντελεστές	24
2.9	Αριθμητική Επίλυση ΣΔΕ	26
2.9.1	Διακριτοποιημένη Κίνηση <i>Brown</i>	26
2.9.2	Υπολογισμός Στοχαστικών Ολοκληρωμάτων	26
2.9.3	Η Μέθοδος <i>Euler – Maruyama</i>	28
2.9.4	Η Μέθοδος <i>Milstein</i>	29
2.9.5	Ισχυρή & Ασθενής Σύγκλιση των Αριθμητικών Μεθόδων	30
3	Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος	32
3.1	Διατυπώσεις Προβλημάτων Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου	33
3.1.1	Ισχυρή Διατύπωση	33
3.1.2	Ασθενής Διατύπωση	35
3.2	Μέθοδος Επίλυσης 1: Στοχαστική Αρχή Μεγίστου	37
3.2.1	Απαιτήσεις για την Εφαρμογή της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου	37
3.2.2	Διατύπωση της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου & Διαδικασία Επίλυσης	38
3.2.3	Ενσωμάτωση των Περιορισμών Κατάστασης	46
3.3	Μέθοδος Επίλυσης 2: Δυναμικός Προγραμματισμός & <i>Hamilton – Jacobi – Bellman</i> Μερική Διαφορική Εξίσωση	48
3.3.1	Διατύπωση Προβλήματος & Υποθέσεις	49

3.3.2	Μερική Διαφορική Εξίσωση <i>Hamilton Jacobi Bellman</i> & Επίλυση	52
3.3.3	Σχέση μεταξύ <i>Hamilton – Jacobi – Bellman</i> & Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου	56
3.3.4	Ιδιότητες της Συνάρτησης Αξίας	58
3.3.5	Εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού σε Στοχαστικές Συνθήκες .	61
3.3.6	Ενσωμάτωση των Περιορισμών Κατάστασης	65
3.3.7	Αριθμητική Προσέγγιση για την Επίλυση των Εξισώσεων <i>Hamilton Jacobi Bellman</i>	67
4	Εφαρμογές του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στις Ασύρματες Επικοινωνίες	78
4.1	Διαλείψεις των Ασύρματων Καναλιών Επικοινωνίας	79
4.2	Μοντελοποίηση των Ασύρματων Καναλιών με χρήση των ΣΔΕ	79
4.3	Παράδειγμα 1: Έλεγχος Ισχύος σε Κυψελωτά Ασύρματα Δίκτυα με Κινητούς Χρήστες υπό Στοχαστικά Ασύρματα Κανάλια [19]	83
4.4	Παράδειγμα 2: Έλεγχος Ισχύος σε μία Κυψέλη Ασύρματου Δικτύου με Στο- χαστικά Ασύρματα Κανάλια [17]	86
4.5	Μελλοντικές Κατευθύνσεις για την Εφαρμογή του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στα Ασύρματα Δίκτυα Επικοινωνιών	97
	Παράρτημα	99
	Α' Περιγραφή Ορισμών και Θεωρημάτων που Χρησιμοποιήθηκαν (από Θεωρία Πιθανοτήτων, Στοχαστικές Ανεξίξεις και Συναρτησιακή Ανάλυση)	100

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Αριθμητική προσομοίωση της κίνησης <i>Brown</i> με $N = 2^9$	27
2.2	Αριθμητική προσομοίωση της κίνησης <i>Brown</i> με $N = 2^{15}$	27
2.3	Αριθμητική προσομοίωση της λύσης της ΣΔΕ (2.37) με τη μέθοδο <i>Euler – Maruyama</i> και σύγκριση με την πραγματική (ακριβή) λύση.	29
2.4	Αριθμητική προσομοίωση της λύσης της ΣΔΕ (2.37) με τη μέθοδο <i>Milstein</i> και σύγκριση με την πραγματική (ακριβή) λύση.	30
4.1	Στο σχήμα απεικονίζονται οι κινητοί χρήστες και η επικοινωνία τους με τον αντίστοιχο ΣΒ με μπλε συνεχή γραμμή. Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή απεικονίζονται οι παρεμβολές (ισχύς που φτάνει) καθενός χρήστη στους υπόλοιπους ΣΒ (σε άλλες κυψέλες). Εδώ $M = 5$, $N = 3$	84
4.2	Στο σχήμα απεικονίζονται οι χρήστες και η επικοινωνία τους με το ΣΒ (σε μία κυψέλη).	87

Κατάλογος Πινάκων

1.1 Πίνακας βασικών ορισμών και συμβολισμών.	8
--	---

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο Βέλτιστος Έλεγχος είναι μία μαθηματική μέθοδος βελτιστοποίησης για τον προσδιορισμό των βέλτιστων πολιτικών ελέγχου ως προς κάποιο προκαθορισμένο κριτήριο. Το προς βελτιστοποίηση κριτήριο είναι συνάρτηση τόσο των μεταβλητών ελέγχου όσο και των μεταβλητών κατάστασης οι οποίες δύνανται να επηρεάζονται από τον έλεγχο και εκφράζουν την κατάσταση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή. Η ανάπτυξη της μεθόδου επίλυσης των προβλημάτων Βέλτιστου Ελέγχου βασίζεται κυρίως στη συμβολή των *Lev Pontryagin* και του *Richard Bellman*. Ο Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος είναι ένα πεδίο του Βέλτιστου Ελέγχου που αντιμετωπίζει την ύπαρξη αβεβαιότητας, είτε στην παρατήρηση των δεδομένων κατάστασης είτε στις δυνάμεις που επιδρούν στην εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος. Συγκεκριμένα, θεωρείται ότι η παρατήρηση και η εξέλιξη των δεδομένων κατάστασης επιδέχεται την επίδραση τυχαίου θορύβου με γνωστή κατανομή, ο οποίος συνήθως περιγράφεται μέσω της κίνησης *Brown*. Στόχος του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου είναι ο προσδιορισμός των μονοπατιών στο χρόνο των ελεγχόμενων μεταβλητών ώστε να επιτελέσουν τον επιθυμητό έλεγχο βελτιστοποιώντας κάποιο καλά ορισμένο κριτήριο, στο πλαίσιο της παρουσίας του θορύβου. Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται αναλυτικότερα, με περισσότερες λεπτομέρειες, η έννοια του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου.

Το αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας επικεντρώνεται στη μελέτη και εφαρμογή του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου με τις ακόλουθες βασικές κατευθύνσεις/στόχους:

- *Η μελέτη της Θεωρίας του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου.* Πιο συγκεκριμένα, στόχος είναι η μελέτη της μορφής ενός προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, των τρόπων επίλυσής του τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά, καθώς και η μελέτη των απαιτούμενων παραδοχών για την εφαρμογή των μεθόδων επίλυσης.
- *Η μελέτη της εφαρμογής του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου για την επίλυση προβλημάτων των ασύρματων δικτύων επικοινωνιών.* Η βιβλιογραφική μελέτη θα επικεντρωθεί στις εφαρμογές που αφορούν στην κατανομή πόρων στους χρήστες (συγκεκρι-

μένα προσδιορισμός της τιμής ισχύος εκπομπής κάθε χρήστη) στα ασύρματα κυφελωτά δίκτυα υπό στοχαστικές συνθήκες λειτουργίας των ασύρματων καναλιών.

Στην ακόλουθη ενότητα περιγράφεται το περιεχόμενο κάθε κεφαλαίου της μεταπτυχιακής εργασίας.

1.1 Δομή Μεταπτυχιακής Εργασίας

Η δομή της μεταπτυχιακής εργασίας έχει ως εξής:

- Το Κεφάλαιο 2 είναι εισαγωγικό καθώς σε αυτό περιγράφεται το απαραίτητο υπόβαθρο όσον αφορά το ευρύτερο πλαίσιο των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων [1]. Αρχικά, δίνονται ο ορισμός και οι ιδιότητες της κίνησης *Brown*, του στοχαστικού ολοκληρώματος *Itô* και της στοχαστικής ανέλιξης *Itô*, ενώ παρατίθεται η φόρμουλα του *Itô*. Στη συνέχεια, περιγράφεται μία Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση, μελετάται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης της καθώς και η επίλυση της στην περίπτωση που έχει γραμμική μορφή. Επιπλέον ο ορισμός της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης επεκτείνεται για τυχαίους συντελεστές. Τέλος, περιγράφεται η διαδικασία αριθμητικής επίλυσης μίας Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης με δύο μεθόδους και εξετάζεται η σύγκλισή τους.
- Το Κεφάλαιο 3 είναι το βασικό κεφάλαιο της μεταπτυχιακής εργασίας καθώς σε αυτό μελετάται και αναλύεται ο Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος. Αρχικά, περιγράφονται οι δυνατές διατυπώσεις ενός προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου (ισχυρή και ασθενής διατύπωση). Στη συνέχεια, περιγράφεται η εφαρμογή της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου (του *Pontryagin*) για την επίλυση ενός προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, συμπεριλαμβανομένων των απαιτήσεων/υποθέσεων για την εφαρμογή της καθώς και παραδείγματος εφαρμογής. Ακολούθως, αναλύεται η μέθοδος επίλυσης που στηρίζεται στο δυναμικό προγραμματισμό μέσω της μερικής διαφορικής εξίσωσης *Hamilton-Jacobi-Bellman*, ενώ μελετάται η ισοδυναμία των δύο προηγούμενων μεθόδων. Επιπρόσθετα, περιγράφεται ο τρόπος που προκύπτει η εξίσωση *Hamilton-Jacobi-Bellman* μέσα από την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού υπό στοχαστικές συνθήκες, ενώ επιπλέον μελετώνται διάφορες ιδιότητες της λύσης της. Μεγάλο μέρος του κεφαλαίου αφιερώνεται στην αριθμητική επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης *Hamilton-Jacobi-Bellman* καθώς η αναλυτική επίλυσή της δεν είναι εφικτή στα περισσότερα προβλήματα. Για την αριθμητική επίλυση γίνεται χρήση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.
- Στο Κεφάλαιο 4 μελετώνται εφαρμογές του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου που υπάρχουν στη βιβλιογραφία για τη βελτιστοποίηση και το σχεδιασμό των ασύρματων

δικτύων. Το κεφάλαιο επικεντρώνεται στην κατανομή πόρων στους χρήστες των ασύρματων κυψελωτών δικτύων. Συγκεκριμένα, μέσα από δύο εφαρμογές, εξετάζεται η κατανομή ισχύος εκπομπής στους χρήστες ενός κυψελωτού δικτύου όπου τα ασύρματα κανάλια μεταξύ των χρηστών και του σταθμού βάσης είναι στοχαστικά και η μεταβολή τους περιγράφεται από μια ΣΔΕ. Στο τέλος του Κεφαλαίου προσδιορίζονται κάποιες μελλοντικές κατευθύνσεις για την εφαρμογή του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στα ασύρματα δίκτυα επικοινωνιών.

1.2 Πίνακας Βασικών Συμβολισμών

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει βασικούς ορισμούς και συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται χωρίς περαιτέρω εξήγηση στο κείμενο της μεταπτυχιακής εργασίας που ακολουθεί.

1.2 Πίνακας Βασικών Συμβολισμών

Πίνακας 1.1: Πίνακας βασικών ορισμών και συμβολισμών.

Συμβολισμός	Σημασία
\mathcal{F}	σ -άλγεβρα
\mathcal{F}_s	σ -άλγεβρα σε χρόνο s
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$	Χώρος πιθανότητας με σύνολο ενδεχομένων Ω , σ -άλγεβρα \mathcal{F} και μέτρο πιθανότητας \mathbf{P}
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ ή $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$	Χώρος πιθανότητας όπως παραπάνω εφοδιασμένος με διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t, W(t))$	Κίνηση <i>Brown</i> σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$
\mathbf{P} -σ.β.	Μία συνθήκη ισχύει \mathbf{P} -σ.β. όταν ισχύει για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N$, όπου $N \in \mathcal{F}$ με $\mathbf{P}(N) = 0$.
\mathcal{B}	<i>Borel</i> σ -άλγεβρα των ανοιχτών υποσυνόλων του \mathbb{R}
$\mathcal{B}(A)$	σ -άλγεβρα των ανοιχτών υποσυνόλων του $A \subset \mathbb{R}$
\mathcal{F} -μετρήσιμη	Η τυχαία μεταβλητή x είναι \mathcal{F} -μετρήσιμη όταν $\{x \in A\} \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{B}$
\mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη	Η στοχαστική ανέλιξη που είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη, $\forall t \geq 0$
\subset	Υποσύνολο, όχι απαραίτητα γνήσιο
$A = [a_{ij}]$	Πίνακας με στοιχείο στην i γραμμή και στη j στήλη το a_{ij}
I_n	Διαγώνιος πίνακας με μη μηδενικά και ίσα με τη μονάδα μόνο τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου (ταυτοτικός)
$ a , a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$	$ a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$
$ A , A = [a_{ij}]$	$ A = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$
$C^{m,n}([0, T] \times \mathbb{R}^l)$	Σύνολο συναρτήσεων στο $[0, T] \times \mathbb{R}^l$ m φορές συνεχώς παραγωγίσιμες ως προς την πρώτη παράμετρο και n φορές ως προς τη δεύτερη
$C^{m,n}([0, \infty) \times \mathbb{R}^l)$	Όμοια με το παραπάνω με τις συναρτήσεις ορισμένες στο $[0, \infty) \times \mathbb{R}^l$
$\Sigma \Delta \text{E}$	Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση
$L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$	Σύνολο των τυχαίων μεταβλητών x με τιμές στο \mathbb{R}^n που είναι \mathcal{F} -μετρήσιμες έτσι ώστε $E x ^p < \infty, p \in [1, \infty)$
$L^p_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n)$	Σύνολο των στοχαστικών ανελιξεων $x(t), t \geq 0$ με τιμές στο \mathbb{R}^n που είναι $\mathcal{F}_{t \geq 0}$ -προσαρμοσμένες έτσι ώστε $E \int_0^T x(t) ^p dt < \infty, p \in [1, \infty)$
$\langle \cdot \rangle$	Εσωτερικό γινόμενο
$tr A$	Ίχνος του πίνακα A
$D_x \Phi, x \in \mathbb{R}^m$	Κλίση (<i>gradient</i>) της Φ
$D_x^2 \Phi, x \in \mathbb{R}^m$	Εσσιανός πίνακας (<i>Hessian</i>) της Φ
$E_{tx} \{ \}$	Μέση τιμή δοσμένων αρχικών συνθηκών (t, x)

Κεφάλαιο 2

Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Στο παρόν κεφάλαιο θα περιγραφεί το απαραίτητο υλικό στο ευρύτερο πλαίσιο των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ) [1]. Αρχικά, στην Ενότητα 2.1, περιλαμβάνεται ο ορισμός της κίνησης *Brown*, καθώς και οι ιδιότητές της. Η Ενότητα 2.2 αναλύει το στοχαστικό ολοκλήρωμα τύπου *Itô* και η Ενότητα 2.3 ορίζει τη στοχαστική διαδικασία *Itô* και παραθέτει τη φόρμουλα *Itô*. Το υπόλοιπο κεφάλαιο επικεντρώνεται στον ορισμό και την επίλυση των ΣΔΕ. Συγκεκριμένα, οι Ενότητες 2.4, 2.5 παρέχουν τον ορισμό μίας ΣΔΕ καθώς και τις προϋποθέσεις ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων της ενώ η Ενότητα 2.6 παρέχει την αναλυτική μεθοδολογία και τον κλειστό τύπο επίλυσης των γραμμικών ΣΔΕ. Η Ενότητα 2.7 παρουσιάζει ορισμένα θεωρήματα σχετικά με τις ιδιότητες των λύσεων των ΣΔΕ, ενώ η Ενότητα 2.8 επεκτείνει τον ορισμό των ΣΔΕ στην ειδική περίπτωση των τυχαίων συντελεστών που εμφανίζονται στο Στοχαστικό Βέλτιστο Έλεγχο. Τέλος, η Ενότητα 2.9 περιγράφει δύο βασικές μεθοδολογίες για την αριθμητική επίλυση των ΣΔΕ μαζί με ενδεικτικά αποτελέσματα προσομοιώσεων.

2.1 Η Κίνηση *Brown* & το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

Η κίνηση *Brown* ή αλλιώς στοχαστική διαδικασία *Wiener* αναφέρεται στο πιθανοτικό μοντέλο που έχει εισαχθεί για να περιγράψει και να αναλύσει την κίνηση των σωματιδίων μέσα σε ένα υγρό λόγω των συγκρούσεών τους με τα μόρια του νερού. Η κίνηση *Brown* είναι μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου. Εναλλακτικά, η κίνηση *Brown* δύναται να οριστεί ως το όριο μίας απλούστερης στοχαστικής διαδικασίας, διακριτής κατάστασης και χρόνου που είναι ο συμμετρικός τυχαίος περίπατος [2]. Ακολούθως παρατίθενται οι ορισμοί της κίνησης *Brown* σε μία και περισσότερες διαστάσεις.

Ορισμός 1. (*Κίνηση Brown σε μία διάσταση ([3], Κεφ. 2, Σελ. 30)*)

Η τυπική κίνηση Brown σε μία διάσταση ορίζεται ως η στοχαστική διαδικασία $\{W(t), t \in [0, \infty)\}$, με τιμές στον \mathbb{R} , ορισμένη πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ (Παράρτημα Α'), ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- Για κάθε $t \geq 0$, η $W(t)$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη (Παράρτημα Α'). Για αυτό το λόγο ονομάζεται και ως \mathcal{F}_t -κίνηση Brown.
- Η στοχαστική διαδικασία $\{W(t), t \in [0, \infty)\}$ έχει συνεχείς τροχιές (Παράρτημα Α').
- $W(0) = 0$, P -σχεδόν βεβαίως (P -σ.β.).
- Όταν $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή $W(t) - W(s)$ είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας \mathcal{F}_s .
- Όταν $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή $W(t) - W(s)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και μεταβλητότητα $t - s$, δηλαδή την $N(0, (t - s))$.

Για την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, θα θεωρηθεί ότι η διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ παράγεται από την ίδια την κίνηση Brown, δηλαδή, $\forall t, \mathcal{F}_t = \sigma(W(s), 0 \leq s < t)$.

Παρακάτω παρατίθενται επιπλέον ιδιότητες της κίνησης Brown, οι οποίες μπορούν να αποδειχτούν μέσω του ορισμού της ([3], Κεφ. 2, Σελ. 31):

- Αν η στοχαστική διαδικασία $\{W(t), t \in [0, \infty)\}$ είναι μία \mathcal{F}_t -κίνηση Brown τότε, η στοχαστική ανέλιξη $\{-W(t), t \in [0, \infty)\}$ είναι επίσης μία \mathcal{F}_t -κίνηση Brown.
- Αν ισχύει ότι $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, τότε οι προσαυξήσεις $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$, $j = 1, 2, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες.
- Η στοχαστική ανέλιξη $\{W(t), t \in [0, \infty)\}$ είναι ένα \mathcal{F}_t -martingale, (Παράρτημα Α').
- Η στοχαστική ανέλιξη $\{W^2(t) - t, t \in [0, \infty)\}$ είναι ένα \mathcal{F}_t -martingale.
- Για κάθε $s, t \geq 0$, ισχύει ότι $Cov(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}$.
- Αν $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, τότε το τυχαίο διάνυσμα $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$, ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, \Gamma)$ όπου $\Gamma = [\min\{t_i, t_j\}]$, $1 \leq i, j \leq n$, δηλαδή, Γ είναι ένας πίνακας $n \times n$ με στοιχείο στην i γραμμή και στη j στήλη το $\min\{t_i, t_j\}$.

Ορισμός 2. (Κίνηση Brown σε πολλαπλές διαστάσεις ([3], Κεφ. 2, Σελ. 43))

Η τυπική κίνηση Brown σε n διαστάσεις ορίζεται ως η στοχαστική διαδικασία $\{W(t) = (W^1(t), W^2(t), \dots, W^n(t)), t \in [0, \infty)\}$, με τιμές στον \mathbb{R}^n πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- Για κάθε $t \geq 0$, η $W(t)$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη.

- Η στοχαστική ανέλιξη $\{W(t), t \in [0, \infty)\}$ έχει συνεχείς τροχιές.
- Ισχύει $W(0) = 0$ P -σ.β.
- Όταν $0 \leq s < t$, η τυχαία μεταβλητή $W(t) - W(s)$ είναι ανεξάρτητη από τη σ -άλγεβρα \mathcal{F}_s .
- Όταν $0 \leq s < t$, η τυχαία μεταβλητή $W(t) - W(s)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, (t - s)I_n)$ (όπου I_n είναι ο ταυτοτικός πίνακας).

Παρακάτω ακολουθούν ορισμένες προτάσεις σχετικά με την επέκταση των ιδιοτήτων της κίνησης Brown σε πολλαπλές διαστάσεις (οι πρώτες δύο ιδιότητες που διατυπώθηκαν παραπάνω για την κίνηση Brown σε μία διάσταση ισχύουν ως έχουν):

- Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ και $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή $W^i(t) - W^i(s)$ ακολουθεί την κατανομή $N(0, (t - s))$ και επιπλέον μπορεί ναδειχτεί ότι [3] η $W^i(t)$ είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown, \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη.
- Καθώς κάθε στοιχείο του διανύσματος που περιγράφει την κίνηση Brown, δηλαδή, $W^i(t)$, $\forall i$, είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{W^i(t), t \in [0, \infty)\}$ είναι ένα \mathcal{F}_t -martingale.
- Ομοίως, οι στοχαστικές ανελιξίες $\{W^i(t)^2 - t, t \in [0, \infty)\}$ και $\{W^i(t)W^j(t) - \delta_{ij}t, t \geq 0\}$, είναι \mathcal{F}_t -martingales.

Η αμέσως επόμενη πρόταση διατυπώνει το γεγονός ότι οι τροχιές της κίνησης Brown, παρόλο που είναι συνεχείς, δεν είναι ομαλές, δηλαδή, δεν είναι παραγωγίσιμες.

Πρόταση 1. (Μη-διαφορισιμότητα της κίνησης Brown ([2], Κεφ. 9, Σελ. 52))

Οι τροχιές της κίνησης Brown $t \in [0, \infty) \rightarrow W(t, \omega) \in \mathbb{R}$, όπου $\omega \in \Omega/N$, με $\mathbf{P}(N) = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμες οπουδήποτε στο $[0, \infty)$.

Θεώρημα 1. (Πηλίκιο διαφοράς (difference quotient) της κίνησης Brown ([2], Κεφ. 9, Σελ. 52))

Έστω ότι $h > 0$ και η $W(t), t \geq 0$ είναι μία διαδικασία Wiener. Η μεταβλητότητα του ηλίκου διαφοράς της στοχαστικής ανέλιξης Wiener δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Var} \left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right) = \frac{1}{h}, \quad (2.1)$$

και επομένως τείνει στο άπειρο καθώς $h \rightarrow 0$.

Παρόλο που η στοχαστική ανέλιξη Wiener δεν είναι διαφορίσιμη, η παράγωγός της ονομάζεται λευκός θόρυβος και επιπλέον προκύπτει η ανάγκη του υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dW(t)$ τα οποία εμφανίζονται σε πολλές εφαρμογές [2], [7].

2.2 Το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα του $It\hat{o}$

Στην παρούσα ενότητα θα περιγραφούν συνοπτικά ο ορισμός και οι ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος τύπου $It\hat{o}$. Προς αυτή την κατεύθυνση, οι στοχαστικές ανελίξεις ταξινομούνται σε τρεις κλάσεις, ονομαστικά $\mathcal{L}_0(a, b)$, $\mathcal{L}(a, b)$, $\mathcal{P}(a, b)$, για τις οποίες ισχύει η εξής διάταξη $\mathcal{L}_0(a, b) \subset \mathcal{L}(a, b) \subset \mathcal{P}(a, b)$. Στη συνέχεια, ορίζεται το στοχαστικό ολοκλήρωμα του $It\hat{o}$ για κάθε μία από αυτές τις κλάσεις, χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο ορισμό της προηγούμενης κλάσης. Επιπρόσθετα, ο ορισμός του στοχαστικού ολοκληρώματος $It\hat{o}$ παρατίθεται τόσο στην περίπτωση των μονοδιάστατων όσο και των πολυδιάστατων στοχαστικών ανελίξεων. Για το υπόλοιπο της παρούσας ενότητας θεωρείται ένας χώρος πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, όπου για τη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, ισχύει ότι $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$, όπου $\mathcal{N} = \{\Lambda \subset \Omega : \exists N \in \mathcal{F} \text{ with } \Lambda \subset N \text{ and } \mathbf{P}(N) = 0\}$. Σέ όλη την έκταση της μεταπτυχιακής εργασίας, κάθε στοχαστικό ολοκλήρωμα που εμφανίζεται θα θεωρείται ότι είναι τύπου $It\hat{o}$ (υπάρχει και το στοχαστικό ολοκλήρωμα τύπου $Stratonovich$ το οποίο ωστόσο μπορεί να εκφραστεί μέσω στοχαστικών ολοκληρωμάτων τύπου $It\hat{o}$ [1]).

Αρχικά ορίζεται το μονοδιάστατο στοχαστικό ολοκλήρωμα του $It\hat{o}$ για τις κλάσεις των στοχαστικών ανελίξεων $\mathcal{L}_0(a, b)$, $\mathcal{L}(a, b)$ και παρατίθενται συνοπτικά οι αντίστοιχες ιδιότητες. Θεωρείται μία μονοδιάστατη \mathcal{F}_t -κίνηση $Brown$, $W = \{W(t), t \geq 0\}$, που ορίζεται στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Ορισμός 3. (Κλάση $\mathcal{L}(a, b)$ ([3], Κεφ. 3, Σελ. 57))

Για $a < b \in [0, \infty)$, η στοχαστική ανελίξη $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{L}(a, b)$ όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

- Η f είναι $\mathcal{B}_{[a,b]} \times \mathcal{F}$ -μετρήσιμη, όπου ο συμβολισμός $\mathcal{B}_{[a,b]}$ εκφράζει τη Borel σ-άλγεβρα στο διάστημα $[a, b]$.
- Για κάθε $t \in [a, b]$ η τυχαία μεταβλητή $f(t, \cdot)$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη, δηλαδή, η στοχαστική διαδικασία f είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη.
- Ισχύει $\int_a^b E[f^2(t, \cdot)] dt < \infty$.

Στη συνέχεια ορίζουμε μία κλάση στοιχειωδών συναρτήσεων ως εξής:

Ορισμός 4. (Κλάση $\mathcal{L}_0(a, b)$ ([3], Κεφ. 3, Σελ. 57))

Αν για μία στοχαστική διαδικασία $f \in \mathcal{L}(a, b)$, υπάρχει μία διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ και οι τυχαίες μεταβλητές $f_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ οι οποίες είναι \mathcal{F}_{t_i} -μετρήσιμες αντιστοίχως, $i = 0, 1, \dots, n-1$, ώστε να ισχύει:

$$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega) I_{[t_i, t_{i+1})}(t) + f_{n-1}(\omega) I_b(t),$$

όπου I είναι η δείκτρια συνάρτηση, δηλαδή, $I_{[t_i, t_{i+1})}(t) = 1$, όταν $t \in [t_i, t_{i+1})$, τότε η f καλείται 'στοιχειώδης' και ισχύει ότι $f \in \mathcal{L}_0(a, b)$.

Ορισμός 5. (Στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô για την κλάση $\mathcal{L}(a, b)$ ([3], Κεφ. 3))

Θεωρείται η στοχαστική ανέλιξη $f \in \mathcal{L}(a, b)$. Το ολοκλήρωμα Itô της f στο διάστημα $[a, b]$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)dW(t),$$

όπου το όριο είναι κατά την $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ έννοια (δηλ., $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\int_a^b f_n(t)dW(t) - \int_a^b f(t)dW(t) \right)^2 \right] = 0$) και η ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αποτελείται από στοχαστικές ανελίξεις στην κλάση $\mathcal{L}_0(a, b)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b (f(t) - f_n(t))^2 dt \right] = 0,$$

όπου, το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô για την κλάση $\mathcal{L}_0(a, b)$ ορίζεται ως ακολούθως:

$$\int_a^b f_n(t)dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

Αν θεωρηθεί ότι $f, g \in \mathcal{L}(a, b)$, $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(a, b)$, $c \in (a, b)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για το στοχαστικό ολοκλήρωμα τύπου Itô:

- $E \left[\int_a^b f(t)dW(t) \right] = 0$.
- $E \left| \int_a^b f(t)dW(t) \right|^2 = E \int_a^b f^2(t)dt$ (Ισομετρία Itô).
- $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dW(t) = \lambda \int_a^b f(t)dW(t) + \mu \int_a^b g(t)dW(t)$.
- $\int_a^b f(t)dW(t) = \int_a^c f(t)dW(t) + \int_c^b f(t)dW(t)$.
- Η τυχαία μεταβλητή $\int_a^b f(t)dW(t)$ είναι \mathcal{F}_b -μετρήσιμη.
- Αν ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b (f(t) - f_n(t))^2 dt \right] = 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)dW(t) = \int_a^b f(t)dW(t)$ όπου το όριο είναι κατά την $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ έννοια.

Πρόταση 2. ([3], Κεφ. 3, Σελ. 68)

Θεωρείται ότι η f είναι στοχαστική ανέλιξη με $f \in \mathcal{L}(0, T)$ και $T > 0$. Τότε, η στοχαστική ανέλιξη $\{x(t) = \int_0^t f(s)dW(s), 0 \leq t \leq T\}$ είναι ένα \mathcal{F}_t -martingale με συνεχείς τροχιές.

Στη συνέχεια, παρατίθεται η επέκταση του στοχαστικού ολοκληρώματος $It\hat{o}$ στην κλάση των στοχαστικών ανελίξεων $\mathcal{P}(0, T)$.

Ορισμός 6. (Κλάση $\mathcal{P}(0, T)$ ([3], Κεφ. 3, Σελ. 71))

Για $T > 0$, θα ισχύει ότι η στοχαστική διαδικασία $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}(0, T)$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

- $H f$ είναι $\mathcal{B}_{[0, T]} \times \mathcal{F}$ -μετρήσιμη.
- Για κάθε $t \in [0, T]$, η τυχαία μεταβλητή $f(t, \cdot)$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη.
- $\mathbf{P} \left(\int_0^T f^2(t, \cdot) dt < \infty \right) = 1$.

Από τον ορισμό των κλάσεων παραπάνω, μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι ισχύει η σχέση διάταξης $\mathcal{L}(0, T) \subseteq \mathcal{P}(0, T)$, καθώς η συνθήκη $\mathbf{P} \left(\int_0^T f^2(t, \cdot) dt < \infty \right) = 1$ είναι ασθενέστερη της $\int_0^T E[f^2(t, \cdot)] dt < \infty$. Αν θεωρηθεί ότι ισχύει $f \in \mathcal{P}(0, T)$, $T > 0$, τότε δύναται να βρεθεί μία ακολουθία στοχαστικών ανελίξεων $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(0, T)$, κατά τρόπον ώστε να ισχύει $\int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ [3].

Πρόταση 3. (Στοχαστικό Ολοκλήρωμα του $It\hat{o}$ για την κλάση $\mathcal{P}(0, T)$ ([3], Κεφ. 3, Σελ. 74))

Ας θεωρηθεί ότι $f \in \mathcal{P}(0, T)$ και $0 < t \leq T$. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ της f στο διάστημα $[0, t]$ ορίζεται ως το όριο κατά πιθανότητα \mathbf{P} της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών $\{\int_0^t f_n(s) dW(s), n \in \mathbb{N}\}$, όπου $f_n \subset \mathcal{L}(0, T)$, $n \in \mathbb{N}$ και ικανοποιείται ότι $\int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Επομένως ισχύει: $\int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{\mathbf{P}} \int_0^t f_n(s) dW(s)$.

Πρόταση 4. (Υπαρξη συνεχούς εκδοχής της $\int_0^t f(s) dW(s)$ για $t \in [0, T]$ ([3], Κεφ. 3, Σελ. 75))

Ας θεωρηθεί η στοχαστική ανέλιξη $f \in \mathcal{P}(0, T)$ και $T > 0$. Τότε, υπάρχει μία στοχαστική ανέλιξη $\{x(t), t \in [0, T]\}$ με συνεχείς τροχιές, έτσι ώστε για κάθε $t \in [0, T]$ να ισχύει: $x(t) = \int_0^t f(s) dW(s)$, \mathbf{P} -σ.β., υπάρχει δηλαδή συνεχής εκδοχή της στοχαστικής ανέλιξης $\int_0^t f(s) dW(s)$ (Παράρτημα Α').

Σχετικά με τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος $It\hat{o}$ οριζόμενου στην κλάση στοχαστικών ανελίξεων $\mathcal{P}(0, T)$, δεν επεκτείνονται οι πρώτες δύο ιδιότητες που παρατέθηκαν παραπάνω αναφορικά με το στοχαστικό ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ στην κλάση $\mathcal{L}(0, T)$. Επιπρόσθετα, η στοχαστική ανέλιξη $\{x(t), t \in [0, T]\}$ της Πρότασης 4 είναι ένα \mathcal{F}_t -τοπικό *martingale* (Παράρτημα Α'), για κάθε $t \in [0, T]$.

Στη συνέχεια, η παρούσα ενότητα επικεντρώνεται στον ορισμό των πολυδιάστατων στοχαστικών ολοκληρωμάτων τύπου $It\hat{o}$. Θεωρείται η n -διάστατη κίνηση *Brown*, $W(t) =$

$(W^1(t), W^2(t), \dots, W^n(t)), t \geq 0$, ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Το πολυδιάστατο στοχαστικό ολοκλήρωμα αναφέρεται στην ολοκλήρωση μία στοχαστικής ανέλιξης στη μορφή ενός πίνακα διαστάσεων $m \times n$, δηλαδή $f(t, \omega) = [f_{ij}(t, \omega)]$, όπου $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ ως προς την n -διάστατη κίνηση Brown $W(t)$.

Ορισμός 7. (Κλάσεις $\mathcal{L}^{m \times n}(0, T)$, $\mathcal{P}^{m \times n}(0, T)$ ([3], Κεφ. 3, Σελ. 84))

Συμβολίζεται ως $\mathcal{L}^{m \times n}(0, T)$ (αντίστοιχα $\mathcal{P}^{m \times n}(0, T)$) η κλάση των στοχαστικών ανέλιξεων της μορφής πίνακα διαστάσεων $m \times n$, $f(t, \omega) = [f_{ij}(t, \omega)]$, όπου για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ και $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ το στοιχείο f_{ij} είναι μία στοχαστική ανέλιξη που ανήκει στην κλάση $\mathcal{L}(0, T)$ (αντίστοιχα $\mathcal{P}(0, T)$).

Ορισμός 8. (Στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô για τις κλάσεις $\mathcal{L}^{m \times n}(0, T)$, $\mathcal{P}^{m \times n}(0, T)$ ([3], Κεφ. 3, Σελ. 85))

Θεωρείται μία στοχαστική ανέλιξη $f \in \mathcal{P}^{m \times n}(0, T)$ και $s \in (0, T]$. Η m -διάστατη τυχαία μεταβλητή $x(s) = (x^1(s), x^2(s), \dots, x^m(s))$, όπου κάθε της στοιχείο $x^i(s)$, $1 \leq i \leq m$ ορίζεται ως εξής:

$$x^i(s) = \sum_{j=1}^n \int_0^s f_{ij}(t) dW^j(t), i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.2)$$

ονομάζεται στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô της στοχαστικής ανέλιξης f στο διάστημα $[0, s]$ ως προς την n -διάστατη κίνηση Brown, $W(t) = (W^1(t), W^2(t), \dots, W^n(t)), t \geq 0$. Επιπλέον, γράφεται ότι $x(s) = \int_0^s f(t) dW(t)$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η $x(s)$ όπως ορίζεται παραπάνω έχει συνεχείς τροχιές στο διάστημα $[0, T]$, ενώ στην περίπτωση που η κλάση αναφοράς είναι η $\mathcal{L}^{m \times n}(0, T)$, τότε κάθε στοιχείο $x^i(s), 0 \leq s \leq T$ είναι ένα \mathcal{F}_t -martingale.

2.3 Η Στοχαστική Ανέλιξη Itô και η Φόρμουλα του Itô

Ορισμός 9. (Στοχαστική ανέλιξη Itô ([3], Κεφ. 4, Σελ. 99))

Η στοχαστική ανέλιξη Itô στο διάστημα $[0, \infty)$ (αντίστοιχα $[0, T]$) με τιμές στο \mathbb{R}^m , ορίζεται ως η συνεχής στοχαστική ανέλιξη $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ (αντίστοιχα $\{x(t), t \in [0, T]\}$), για την οποία ισχύει ότι $\forall t \geq 0$ (αντίστοιχα $t \in [0, T]$):

$$x(t) = \xi + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t \beta(s) dW(s), \mathbf{P} - \sigma.β., \quad (2.3)$$

όπου:

- $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα \mathcal{F}_0 -μετρήσιμο.

- $\beta \in \mathcal{P}^{m \times n}(0, \infty)$ (αντίστοιχα $\mathcal{P}^{m \times n}(0, T)$).
- Η στοχαστική ανέλιξη $a(s) = (a_1(s), a_2(s), \dots, a_m(s))$, $s \geq 0$ είναι $\mathcal{B}_{[0, \infty)} \times \mathcal{F}$ -μετρήσιμη (αντίστοιχα $\mathcal{B}_{[0, T]} \times \mathcal{F}$ -μετρήσιμη) και \mathcal{F}_s -προσαρμοσμένη και ισχύει ότι:

$$\mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^m \int_0^r |a_j(s)| ds < \infty \right) = 1, \forall r \geq 0 \text{ (cor. } r = T). \quad (2.4)$$

Με βάση τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος (Ενότητα 2.2), μπορεί να παρατηρηθεί εύκολα ότι η στοχαστική διαδικασία Itô είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη. Επιπρόσθετα, για κάθε $0 \leq s < t$ ισχύει ότι:

$$x(t) - x(s) = \int_s^t a(s) ds + \int_s^t \beta(s) dW(s). \quad (2.5)$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ως ‘στοχαστικό διαφορικό’ και γράφεται στην παρακάτω συμβολική μορφή:

$$dx(t) = a(t)dt + \beta(t)dW(t), \quad x(0) = \xi. \quad (2.6)$$

Επίσης, μια m -διάστατη κίνηση Brown, $\{W(t), t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία Itô με $\beta = I$ και $a = \mathbf{0}$, όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας διαστάσεων $m \times m$ και $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα m στοιχείων.

Ακολούθως, ορίζεται η φόρμουλα του Itô σε μία και σε πολλαπλές διαστάσεις. Η φόρμουλα του Itô μπορεί να θεωρηθεί για τα στοχαστικά ολοκληρώματα ως η αντιστοιχία με τον κανόνα αλυσίδας για τα ντετερμινιστικά ολοκληρώματα.

Ορισμός 10. (Η φόρμουλα του Itô για $m = n = 1$ ([3], Κεφ. 4, Σελ. 100))

Θεωρείται μία στοχαστική ανέλιξη Itô, $x(t) = \xi + \int_s^t a(s) ds + \int_s^t \beta(s) dW(s)$, $t \geq 0$ και $f \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Τότε, για κάθε $t > 0$, ισχύει ότι:

$$f(t, x(t)) - f(0, \xi) = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, x(s)) + a(s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s)) + \frac{1}{2} \beta^2(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, x(s)) \right] ds + \int_0^t \beta(s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s)) dW(s), \quad (2.7)$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί επίσης στη μορφή (ΣΔΕ όπως θα επεξηγηθεί παρακάτω):

$$df(t, x(t)) = \frac{df}{dt}(t, x(t)) + \left[a(t) \frac{df}{dx}(t, x(t)) + \frac{1}{2} \beta^2(t) \frac{d^2 f}{dx^2}(t, x(t)) \right] dt + \beta(t) \frac{df}{dx}(t, x(t)) dW(t). \quad (2.8)$$

Η φόρμουλα του Itô μπορεί να επεκταθεί και σε περισσότερες διαστάσεις όπως ακολουθεί. Θεωρείται μία στοχαστική ανέλιξη $x(t) = \xi + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \beta(s)dW(s)$, $t \geq 0$, με τιμές στον \mathbb{R}^m , όπου $a(s) = (a_1(s), \dots, a_m(s))$ και $\beta(s) = [\beta_{ij}(s)]$, $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, $s \geq 0$. Επομένως, η $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως εξής: $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))$, όπου

$$x^i(t) = \xi + \int_0^t a_i(s)ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \beta_{ij}(s)dW^j(s), \quad i = 1, \dots, m.$$

Τότε, ο ορισμός της φόρμουλας του Itô σε πολλαπλές διαστάσεις ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 11. (Η φόρμουλα του Itô για $m, n \in \mathbb{N}$ ([3], Κεφ. 4, Σελ. 106))

Εστω η $f \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^m)$ με $f = f(t, x) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_m)$ και η στοχαστική ανέλιξη Itô, $\{x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t)), t \geq 0\}$ με τιμές στον \mathbb{R}^m . Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} f(t, x(t)) = f(t, x^1(t), \dots, x^m(t)) = f(0, \xi) + \\ \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, x(s)) + \sum_{i=1}^m a_i(s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, x(s)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i,k=1}^m \beta_{ij}(s) \beta_{kj}(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(s, x(s)) \right] ds + \\ \sum_{j=1}^n \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \beta_{ij}(s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, x(s)) \right] dW^j(s). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Η Εξίσωση (2.9) μπορεί να γραφεί σε απλούστερη μορφή θεωρώντας τις παρακάτω δύο ποσότητες:

$$L^s f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^m a_i(s) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i,k=1}^m \beta_{ij}(s) \beta_{kj}(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

και

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

οπότε:

$$f(t, x(t)) = f(0, \xi) + \int_0^t L^s f(s, x(s))ds + \int_0^t [\nabla f(s, x(s))\beta(s)] dW(s). \quad (2.10)$$

Παρατήρηση 1. Από τη Σχέση (2.8), μπορεί να παρατηρηθεί ότι γνωρίζοντας τη μορφή μίας στοχαστικής ανέλιξης Itô, $x(t)$, μία συνάρτηση της $x(t)$, $f(x(t), t)$, μπορεί επίσης να γραφεί ως ανέλιξη Itô, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις συνέχειας και παραγωγιμότητας για τη f . Παρακάτω θα φανεί ότι η Σχέση (2.8) έχει τη μορφή μίας ΣΔΕ, επομένως γνωρίζοντας την ΣΔΕ που περιγράφει τη μεταβολή της $x(t)$, υπολογίζεται η ΣΔΕ που περιγράφει τη μεταβολή της $f(x(t), t)$.

2.4 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ): Περιγραφή

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται η μορφή και η έννοια μίας ΣΔΕ.

Ορισμός 12. (Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ))

Ως ΣΔΕ αναφέρεται μία εξίσωση της μορφής:

$$\begin{aligned} dx(t) &= b(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dW(t), \\ x(0) &= \xi, \end{aligned} \quad (2.11)$$

με άγνωστο τη στοχαστική ανέλιξη $\{x(t), t \in [0, T]\}$ (αντί για $[0, T]$ μπορούμε να έχουμε και $[0, \infty)$) με τιμές στον \mathbb{R}^m . Επιπλέον, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, $\sigma = [\sigma_{ij}]$ ένας πίνακας διαστάσεων $m \times n$ με $b_j : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall j$ και $\sigma_{ij} : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i, j$ Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις και $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ μία n -διάστατη κίνηση Brown. Επίσης πρέπει να ισχύει ότι $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ τυχαία μεταβλητή \mathcal{F}_0 μετρήσιμη.

Παρατήρηση 2. Σημειώνεται ότι το $b(t, x(t))$ ονομάζεται στιγμιαία τάση (*drift*) της ΣΔΕ και το $\sigma(t, x(t))$, ονομάζεται στιγμιαία μεταβλητότητα (*diffusion coefficient*) της ΣΔΕ που αντιστοιχεί στη στιγμιαία τάση. Επιπρόσθετα δεν γίνεται να γραφτεί $\frac{dW(t)}{dt}$ γιατί η κίνηση Brown, $W(t)$, δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη με πιθανότητα 1 [7].

Παρατήρηση 3. Η ερμηνεία κατά Itô της ΣΔΕ (2.11) είναι ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{x(t), t \in [0, T]\}$ ικανοποιεί τη στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση:

$$x(t) = \xi + \int_0^t b(s, x(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x(s))dW(s). \quad (2.12)$$

Μετά την περιγραφή των ΣΔΕ ανακύπτουν ερωτήματα σχετικά με την ύπαρξη και την μοναδικότητα των λύσεων τους, τις ιδιότητες των λύσεών τους καθώς επίσης και τον τρόπο επίλυσης των ΣΔΕ. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κλειδί για την επίλυση πολλών ΣΔΕ αποτελεί η φόρμουλα του Itô (Ενότητα 2.3) [1]. Για παράδειγμα, αν θεωρηθεί η (μονοδιάστατη) ΣΔΕ:

$$\begin{aligned} dx(t) &= 2x(t)dt + 2x(t)dW(t), \\ x(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Τότε, η στοχαστική ανέλιξη $x(t) = e^{2W(t)}$, $t \geq 0$, την επαληθεύει, γεγονός που μπορεί εύκολα να δειχτεί με εφαρμογή της φόρμουλας του Itô (Σχέση (2.8)) στη στοχαστική ανέλιξη $\{W(t), t \geq 0\}$ με $f(x(t), t) = e^{2x(t)}$ $t \geq 0$ [3].

Οι προβληματισμοί αυτοί θα αποτελέσουν το αντικείμενο μελέτης των επόμενων ενοτήτων του κεφαλαίου.

2.5 ΣΔΕ: Ύπαρξη & Μοναδικότητα της Λύσης

Στην παρούσα ενότητα, αφού οριστεί η έννοια της ισχυρής λύσης και της μοναδικότητας της καθώς και της ασθενούς λύσης, παρατίθενται ορισμένα θεωρήματα, η ικανοποίηση των απαιτήσεων των οποίων, εξασφαλίζει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα ισχυρής λύσης της ΣΔΕ.

Ορισμός 13. (Ισχυρή λύση της ΣΔΕ (2.11) ([3], Κεφ. 5, Σελ. 163))

Θεωρείται μία n -διάστατη κίνηση Brown, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t, W(t))$, και μία τυχαία μεταβλητή $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ που είναι \mathcal{F}_0 μετρήσιμη. Ονομάζεται ισχυρή λύση της ΣΔΕ (2.11) (με αρχική συνθήκη ξ), μία στοχαστική ανέλιξη $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$ (μπορεί να ισχύει και $t \in [0, \infty)$) που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

- Η x έχει συνεχείς τροχιές.
- Η x είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη.
- $\mathbf{P}(x(0) = \xi) = 1$.
- $\mathbf{P}\left(\int_0^t (|b_i(s, x(s))| + \sigma_{ij}^2(s, x(s))) ds < \infty\right) = 1, \forall t \in [0, T], i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$.
- Ισχύει \mathbf{P} -σ.β. η Σχέση (2.12), για κάθε $t \in [0, T]$.

Ορισμός 14. (Ισχυρή μοναδικότητα λύσης της ΣΔΕ ([3], Κεφ. 5, Σελ. 163))

Η ισχυρή μοναδικότητα ισχύει όταν δύο ισχυρές λύσεις της ΣΔΕ (2.11), x, x' με αρχική συνθήκη ξ , είναι μη-διακρινόμενες (Παράρτημα Α') για οποιαδήποτε κίνηση Brown, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t, W(t))$ (για κάθε δηλαδή χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$) και οποιαδήποτε \mathcal{F}_0 μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή (αρχική συνθήκη) ξ .

Ορισμός 15. (Ασθενής λύση της ΣΔΕ (2.11) ([3], Κεφ. 5, Σελ. 163))

Θεωρείται ένα μέτρο πιθανότητας μ στο $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^n)$. Θα λέγεται ότι η ΣΔΕ (2.11) έχει ασθενή λύση με αρχική κατανομή μ , όταν υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$, και ένα ζεύγος στοχαστικών ανελίξεων (x, W) δηλ. $x = \{x(t)\}_{t \geq 0}, W = \{W(t), t \geq 0\}$ ορισμένων στο $[0, T] \times \Omega$ (μπορεί να ισχύει και $[0, \infty)$) με τιμές στα $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ αντίστοιχα έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

- Η x είναι συνεχής.

- Η x είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη.
- Η W είναι \mathcal{F}_t -κίνηση Brown.
- Η κατανομή της $x(0)$ είναι μ .
- Ισχύει \mathbf{P} -σ.β. η Σχέση (2.12), για κάθε $t \in [0, T]$.
- $\mathbf{P} \left(\int_0^t (|b(s, x(s))| + |\sigma(s, x(s))|^2) ds < \infty \right) = 1, \forall t \in [0, T]$,

όπου γενικά ισχύει ότι $|b(s, x(s))| = \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2(s, x(s))}$, $|\sigma(s, x(s))|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s, x(s))$.

Ακολούθως, παρατίθεται το θεώρημα του Itô για την ύπαρξη και μοναδικότητα ισχυρής λύσης της ΣΔΕ (2.11).

Θεώρημα 2. (Θεώρημα του Itô ([3], Κεφ. 5, Σελ. 168))

Εστω ότι οι συναρτήσεις b, σ της ΣΔΕ (2.11) ικανοποιούν τις παρακάτω απαιτήσεις:

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \text{ (Lipchitz condition)} \quad (2.14)$$

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2) \text{ (growth condition)} \quad (2.15)$$

για όλα τα $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$, όπου $K, L > 0$. Εστω μία n -διάστατη κίνηση Brown, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t, W(t))$ και $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, \mathcal{F}_0 μετρήσιμη με $E|\xi|^2 < \infty$, τότε, υπάρχει ισχυρή λύση της ΣΔΕ (2.11). Η λύση αυτή $x(t)$ είναι μοναδική και για τυχόν $T > 0$, θα ισχύει $E(|x(t)|^2) \leq N(1 + E|\xi|^2)e^{Nt}$, $0 \leq t \leq T$ και N εξαρτώμενη από τα L, T .

Τα συμπεράσματα του Θεωρήματος του Itô αληθεύουν και όταν η Συνθήκη (2.14) αντικατασταθεί από την «για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά $K_n > 0$ ώστε να ισχύει $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K_n|x - y|$ για όλα τα $t \geq 0$, $|x| \leq n$, $|y| \leq n$ ». Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης ενώ η ύπαρξη εξασφαλίζεται με την προσθήκη της Συνθήκης (2.15), που ονομάζεται και «συνθήκη ανάπτυξης» καθώς εξασφαλίζει ότι δεν θα υπάρξει έκρηξη της λύσης [3].

Στη συνέχεια παρατίθεται το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των Yamada–Watanabe, το οποίο αντικαθιστά τη Συνθήκη (2.14) του Θεωρήματος του Itô με μία ασθενέστερη, ωστόσο ορίζεται μόνο για μία διάσταση.

Θεώρημα 3. (Θεώρημα του Yamada – Watanabe ([3], Κεφ. 5, Σελ. 174))

Εστω ότι οι συναρτήσεις $b, \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της ΣΔΕ (2.11) ικανοποιούν τις παρακάτω απαιτήσεις:

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2), \quad (2.16)$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq p(|x - y|), \quad (2.17)$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq h(|x - y|), \quad (2.18)$$

για όλα τα $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, όπου $L > 0$ και $p, h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ είναι συναρτήσεις με τις παρακάτω ιδιότητες:

- p : γνησίως αύξουσα, κοίλη με $p(0) = 0$ και $\int_{(0,\varepsilon)} \frac{1}{p(s)} ds = \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.
- h : γνησίως αύξουσα με $h(0) = 0$ και $\int_{(0,\varepsilon)} \frac{1}{h^2(s)} ds = \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

Έστω μία 1-διάστατη κίνηση Brown, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t, W(t))$ και ξ, \mathcal{F}_0 μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή με $E|\xi|^2 < \infty$, τότε, υπάρχει μοναδική ισχυρή λύση της ΣΔΕ (2.11) ($m = n = 1$),

$$x(t) = \xi + \int_0^t b(s, x(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, x(s)) dW(s), \quad t \geq 0.$$

2.6 Γραμμικές ΣΔΕ: Ορισμός & Επίλυση

Η 1-διάστατη γραμμική ΣΔΕ έχει τη μορφή:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t [b_1(s)x(s) + b_2(s)] ds + \int_0^t [\sigma_1(s)x(s) + \sigma_2(s)] dW(s), \quad (2.19)$$

όπου $b_1(s), b_2(s), \sigma_1(s), \sigma_2(s)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου s .

Η λύση της γραμμικής ΣΔΕ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$x(t) = e^{Y(t)} \left(x(0) + \int_0^t [b_2(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)] e^{-Y(s)} ds + \int_0^t \sigma_2(s) e^{-Y(s)} dW(s) \right), \quad (2.20)$$

$$Y(t) = \int_0^t [b_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)] ds + \int_0^t \sigma_1(s) dW(s).$$

Ακολούθως παρατίθεται η απόδειξη του παραπάνω τύπου μέσα από την οποία σκιαγραφείται και το γενικότερο πνεύμα της μεθοδολογίας επίλυσης ΣΔΕ.

Απόδειξη. (Τύπος λύσης γραμμικής ΣΔΕ (2.20))

- Αρχικά ελέγχεται η ικανοποίηση των απαιτήσεων του θεωρήματος Itô για την ύπαρξη και μοναδικότητα ισχυρής λύσης.

Η γραμμική ΣΔΕ (2.19) έχει τη μορφή της ΣΔΕ (2.11) με $m = n = 1$ και $b(s, x) = b_1(s)x(s) + b_2(s)$, $\sigma(s, x) = \sigma_1(s)x(s) + \sigma_2(s)$. Επομένως:

$$|b(s, x) - b(s, y)| + |\sigma(s, x) - \sigma(s, y)| \leq (|b_1(s)| + |\sigma_1(s)|)|x - y|,$$

$$b^2(s, x) + \sigma^2(s, x) \leq 2(b_1^2(s) + \sigma_1^2(s))x^2 + 2(b_2^2(s) + \sigma_2^2(s)).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι αν για κάθε $T > 0$, υπάρχει $M_T > 0$, έτσι ώστε $\sup_{s \in [0, T]} (|b_1(s)| + |\sigma_1(s)|) \leq M_T$, $\sup_{s \in [0, T]} (|b_2(s)| + |\sigma_2(s)|) \leq M_T$, τότε από το θεώρημα του Itô η ΣΔΕ (2.20) έχει μοναδικά ισχυρή λύση στο $[0, T]$, $\forall T > 0$, άρα και στο $[0, \infty)$.

- Ακολούθως θα επιλυθεί η ΣΔΕ (2.20) υπό την παραπάνω υπόθεση. Θέτουμε

$$F(t) = e^{-Y(t)}, \quad t \geq 0,$$

με

$$Y(t) = \int_0^t [b_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)]ds + \int_0^t \sigma_1(s)dW(s).$$

Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Itô για τη στοχαστική ανέλιξη $\{Y(t), t \geq 0\}$ και τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$, από την οποία προκύπτει:

$$F(t) = 1 + \int_0^t [(-b_1(s) + \sigma_1^2(s))F(s)]ds + \int_0^t (-\sigma_1(s))F(s)dW(s).$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Itô για τον πολλαπλασιασμό των δύο στοχαστικών ανελιξεων Itô, $F(t)$, $x(t)$ (η $x(t)$ δίνεται από τη Σχέση (2.19)) [3], και προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} F(t)x(t) &= x(0) + \int_0^t \left[(-b_1(s) + \sigma_1^2(s))F(s)x(s) + (b_1(s)x(s) + b_2(s))F(s) - \right. \\ &\left. (\sigma_1(s)x(s) + \sigma_2(s))\sigma_1(s)F(s) \right] ds + \int_0^t [(\sigma_1(s)x(s) + \sigma_2(s))F(s) - \sigma_1(s)F(s)x(s)]dW(s) \\ &= x(0) + \int_0^t [b_2(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)]F(s)ds + \int_0^t \sigma_2(s)F(s)dW(s), \end{aligned} \quad (2.21)$$

από όπου με αντικατάσταση $F(t) = e^{-Y(t)}$ προκύπτει η λύση της ΣΔΕ (2.20).

□

2.7 ΣΔΕ: Ειδικά Θεωρήματα & Ιδιότητες

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται επιλεγμένα θεωρήματα για τις ιδιότητες των λύσεων των ΣΔΕ [4].

Θεώρημα 4. (Θεώρημα σύγκρισης -Yamada ([3], Κεφ. 5, Σελ. 181))

Εστω μία 1-διάστατη κίνηση Brown, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t, W(t))$ και \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένες συνεχείς

στοχαστικές ανελίξεις $x^1(t)$ και $x^2(t)$, $t \geq 0$, για τις οποίες για κάθε $t \geq 0$ ισχύει:

$$x^j(t) = x^j(0) + \int_0^t b_j(s, x^j(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x^j(s))dW(s), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.22)$$

όπου $b_1, b_2 : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει ότι $b_1(t, x) < b_2(t, x)$, $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, θεωρείται ότι η $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη Συνθήκη (2.18) του θεωρήματος Yamada – Watanabe (Ενότητα 2.5) και είναι συνεχής και επιπρόσθετα $x^1(0) \leq x^2(0)$, \mathbb{P} -σ.β.

Τότε υπάρχει $N \in \mathcal{F}$ με $\mathbf{P}(N) = 0$ τέτοιο ώστε

$$x^1(t, \omega) \leq x^2(t, \omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N, \forall t.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκρισης, αν δύο στοχαστικές ανελίξεις της μορφής της Σχέσης (2.22), έχουν την ίδια στιγμιαία μεταβλητότητα και η τάση της πρώτης είναι μικρότερη από την τάση της δεύτερης, τότε η δεύτερη θα έχει μεγαλύτερες τιμές από την πρώτη \mathbb{P} -σ.β. για κάθε χρονική στιγμή.

Παρατήρηση 4. Έστω ότι ισχύουν οι απαιτήσεις του θεωρήματος σύγκρισης Yamada και επιπλέον ισχύει η μοναδικότητα των ισχυρών λύσεων και για τις δύο στοχαστικές ανελίξεις $x^1(t)$, $x^2(t)$, λύσεις των ΣΔΕ

$$dx^j(t) = b_j(t, x^j(t))dt + \sigma(t, x^j(t))dW(t), \quad j = 1, 2. \quad (2.23)$$

Τότε τα συμπεράσματα του θεωρήματος σύγκρισης Yamada ισχύουν και στην περίπτωση όπου $b_1(t, x) \leq b_2(t, x)$, $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για να ισχύει η μοναδικότητα της λύσης θα πρέπει επιπλέον να ικανοποιείται και η Συνθήκη (2.17) του θεωρήματος Yamada – Watanabe (Ενότητα 2.5). Το παραπάνω αποδεικνύεται στο Θεώρημα 1.3 της αναφοράς [4].

Θεώρημα 5. (Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης λύσης της ΣΔΕ (2.11)-Yamada [4]) Έστω ότι για τις $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$ της ΣΔΕ (2.11) ισχύει ότι είναι συνεχείς ως προς (t, x) για $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ και υπάρχει μία θετική και αύξουσα συνάρτηση $\rho(u)$, $u \in [0, \infty)$, για την οποία ισχύει

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \rho(|x - y|) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

και $\int_{0+} \rho^{-2}(u)du = \infty$. Τότε, η ΣΔΕ (2.11), έχει μέγιστη και ελάχιστη λύση. Συγκεκριμένα, θεωρώντας δοσμένη την αρχική συνθήκη για τη ΣΔΕ (2.11), ξ , υπάρχουν λύσεις της ΣΔΕ (2.11), \bar{x}_t , \underline{x}_t , με $\bar{x}_0 = \underline{x}_0 = \xi$, έτσι ώστε για κάθε λύση x_t της ΣΔΕ (2.11) με $x_0 = \xi$, να ισχύει $\underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t$ για κάθε t .

2.8 Επέκταση Ορισμού των ΣΔΕ με Τυχαίους Συντελεστές

Στην παρούσα ενότητα θα μελετηθεί ένας τύπος ΣΔΕ που εμφανίζεται στα προβλήματα Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, ο οποίος αποτελεί το βασικό αντικείμενο της μεταπτυχιακής εργασίας. Συγκεκριμένα, στην ΣΔΕ (2.11), οι συντελεστές b , σ , εξαρτώνται μόνο εμμέσως από το δείγμα ω , δηλαδή μέσα από τη στοχαστική ανέλιξη $\{x(t)\}_{t \geq 0}$, και όχι άμεσα. Επομένως, ορίζεται η ΣΔΕ στην οποία οι συντελεστές b , σ , εξαρτώνται άμεσα από το δείγμα ω ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} dx(t, \omega) &= b(t, x(t), \omega)dt + \sigma(t, x(t), \omega)dW(t), \\ x(0, \omega) &= \xi(\omega). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η ΣΔΕ ορίζεται σε ένα δοσμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, καθώς τα b , σ θα πρέπει να δίνονται εκ των προτέρων. Έτσι, δεν έχει νόημα η ασθενής λύση (ορισμός στην Ενότητα 2.5) για την ΣΔΕ (2.24).

Ορισμός 16. (Ορισμός ΣΔΕ με τυχαίους συντελεστές ([5], Κεφ. 1, Σελ. 48))

Θεωρούνται τα εξής: $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ σε δοσμένο χώρο πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ και μία n -διάστατη τυπική \mathcal{F}_t -κίνηση Brown, $W(t)$. Έστω ακόμη μία τυχαία μεταβλητή $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ που είναι \mathcal{F}_0 μετρήσιμη. Ονομάζεται λύση της ΣΔΕ (2.24), μία στοχαστική ανέλιξη $x = \{x(t), t \in [0, \infty)\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

- Η x είναι συνεχής.
- Η x είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη.
- $x(0) = \xi$, \mathbf{P} -σ.β.
- $\int_0^t (|b(s, x(s, \omega), \omega)| + |\sigma(s, x(s, \omega), \omega)|^2) ds < \infty$, $\forall t \geq 0$, \mathbf{P} -σ.β., $\omega \in \Omega$.
- Ισχύει \mathbf{P} -σ.β. η παρακάτω Σχέση, για κάθε $t \geq 0$.

$$x(t, \omega) = \xi(\omega) + \int_0^t b(s, x(s, \omega), \omega)ds + \int_0^t \sigma(s, x(s, \omega), \omega)dW(s, \omega). \quad (2.25)$$

Παρατήρηση 5. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η λύση της ΣΔΕ (2.24) δεν χαρακτηρίζεται ως ισχυρή ή ασθενής καθώς όπως προαναφέρθηκε δεν έχει νόημα ο ορισμός της ασθενούς λύσης. Επιπρόσθετα, ο ορισμός της μοναδικότητας της λύσης, προσαρμόζεται ώστε να αναφέρεται μόνο στον εκ των προτέρων ορισμένο χώρο πιθανότητας, όπως παρακάτω.

Ορισμός 17. (Μοναδικότητα λύσης της ΣΔΕ (2.24) ([5], Κεφ. 1, Σελ. 49))

Η μοναδικότητα ισχύει όταν δύο λύσεις της ΣΔΕ (2.24), x, x' , ορισμένες στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ με την \mathcal{F}_t -κίνηση Brown, $W(t)$ είναι μη-διακρινόμενες (Παράρτημα Α').

Παρακάτω, παρατίθεται θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για την ΣΔΕ (2.24) που δίνεται στην αναφορά [5] (Θεώρημα 6.16, Κεφ. 1, Σελ. 49).

Θεώρημα 6. (Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης για την ΣΔΕ (2.24) ([5], Κεφ. 1, Σελ. 49))

Έστω ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις: Η x ανήκει στο $\mathcal{W}^m = C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$ (συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $[0, \infty)$ με τιμές στο \mathbb{R}^m) και οι $b(\cdot, x, \cdot), \sigma(\cdot, x, \cdot)$ είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένες στοχαστικές ανελίξεις για κάθε x . Επιπλέον για κάθε τιμή του ω ισχύει ότι οι $b(\cdot, \cdot, \omega), \sigma(\cdot, \cdot, \omega)$ ανήκουν στο σύνολο των $\{\mathcal{B}(\mathcal{W}_t^m)\}_{t \geq 0}$ -προοδευτικά μετρήσιμων συναρτήσεων [5] ορισμένες στο $[0, \infty) \times \mathcal{W}^m$ με τιμές στα $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m \times n}$, αντιστοίχως. Επιπλέον έστω ότι ισχύουν τα εξής:

$$|b(t, x(\cdot), \omega) - b(t, y(\cdot), \omega)| + |\sigma(t, x(\cdot), \omega) - \sigma(t, y(\cdot), \omega)| \leq L|x(\cdot) - y(\cdot)|_{\mathcal{W}^m}, \quad (2.26)$$

$$E \int_0^T \{|b(t, 0, \omega)| + |\sigma(t, 0, \omega)|\}^2 dt < \infty, \quad \forall T > 0, \quad (2.27)$$

όπου $|b(t, 0, \omega)| + |\sigma(t, 0, \omega)|$ είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη στοχαστική ανελίξη με τιμές στο \mathbb{R} . Τότε για κάθε αρχική συνθήκη τυχαία μεταβλητή ξ , \mathcal{F}_0 -μετρήσιμη με $E|\xi|^l < \infty, \forall l \geq 1$ η ΣΔΕ (2.24) έχει μοναδική λύση κατά τρόπον ώστε για κάθε $T > 0$ να ισχύει:

$$E \max_{0 \leq s \leq T} |x(s)|^l \leq K_T(1 + E|\xi|^l), \quad (2.28)$$

$$E|x(s) - x(t)|^l \leq K_T(1 + E|\xi|^l)|t - s|^{\frac{l}{2}}, \quad \forall s, t \in [0, T]. \quad (2.29)$$

Επιπρόσθετα, αν $\hat{\xi}$ είναι μία άλλη αρχική συνθήκη που ικανοποιεί τις ίδιες απαιτήσεις με την ξ και $\hat{x}(t)$ η αντίστοιχη λύση της ΣΔΕ (2.24), τότε μπορεί να αποδειχτεί ότι:

$$E \max_{0 \leq s \leq T} |x(s) - \hat{x}(s)|^l \leq K_T E|\xi - \hat{\xi}|^l. \quad (2.30)$$

Η λύση της γραμμικής ΣΔΕ που παρατίθεται στην Ενότητα 2.6 ισχύει και στην περίπτωση όπου οι συντελεστές είναι τυχαίοι [3].

2.9 Αριθμητική Επίλυση ΣΔΕ

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτυχθούν μεθοδολογίες αριθμητικής επίλυσης των ΣΔΕ, οι οποίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές καθώς οι ΣΔΕ βρίσκουν πληθώρα εφαρμογών (βιολογία, οικονομικά, χημεία, επιδημιολογία, κλπ.) ωστόσο δεν είναι πάντα εύκολη η επίλυσή τους. Μέσω της αριθμητικής επίλυσης των ΣΔΕ προκύπτουν τιμές που προσεγγίζουν τις τιμές των λύσεων των ΣΔΕ και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε προσομοιώσεις συστημάτων που περιλαμβάνουν ΣΔΕ οι οποίες δεν επιλύονται εύκολα με κλειστό τύπο. Το υλικό της παρούσας ενότητας, στηρίζεται στις δημοσιεύσεις [7],[8].

2.9.1 Διακριτοποιημένη Κίνηση *Brown*

Στην υποενότητα αυτή θα οριστεί η κίνηση *Brown* στο διάστημα $[0, T]$, σε διακριτές χρονικές στιγμές t . Συγκεκριμένα, τίθεται $\delta t = \frac{T}{N}$ για κάποιο θετικό ακέραιο N που καθορίζει τις διακριτές χρονικές στιγμές στις οποίες θα υπολογιστεί η κίνηση *Brown*. Τότε η κίνηση *Brown* θα υπολογιστεί στις χρονικές στιγμές $t_j = j\delta t$, $j = 1 \dots N$ ως εξής:

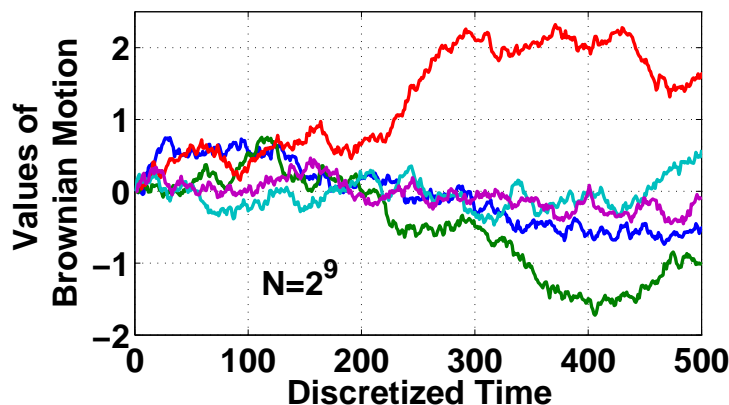
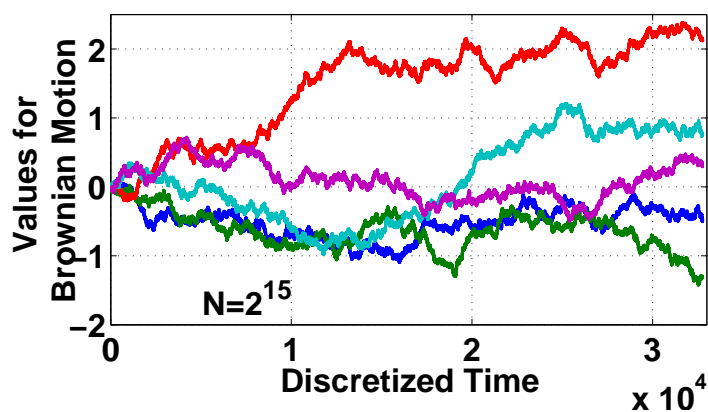
$$\begin{aligned} W(0) &= 0, \\ W(t_j) &= W(t_{j-1}) + dW(t_j), \quad j = 1 \dots N, \end{aligned} \quad (2.31)$$

όπου οι $dW(t_j)$ $j = 1 \dots N$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές της μορφής $\sqrt{\delta t}N(0, 1)$. Για ευκολία στην παρουσίαση η $W(t_j)$ θα γράφεται ως W_j . Ακολουθώντας, παρουσιάζονται δύο γραφήματα με 5 υλοποιήσεις της κίνησης *Brown* έκαστο (δηλαδή για διαφορετικές ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών $dW(t_j)$ $j = 1 \dots N$) για δύο διαφορετικές τιμές του N και $T = 1$ (Σχήματα 2.1, 2.2). Όσο μεγαλώνει η τιμή του N και άρα αυξάνεται η διακριτοποίηση (δηλαδή ο αριθμός των σημείων υπολογισμού της κίνησης *Brown*) η προσεγγιστική καμπύλη προσεγγίζει περισσότερο το πραγματικό μονοπάτι της κίνησης *Brown*, με το αντίστοιχο κόστος στο χρόνο υπολογισμού που αυξάνεται για μεγάλες τιμές του N . Για την υλοποίηση του κώδικα χρησιμοποιήθηκε *MATLAB*.

2.9.2 Υπολογισμός Στοχαστικών Ολοκληρωμάτων

Ο αριθμητικός υπολογισμός των στοχαστικών ολοκληρωμάτων πραγματοποιείται κατά αναλογία με τον αριθμητικό υπολογισμό των ντετερμινιστικών ολοκληρωμάτων. Συγκεκριμένα, το ολοκλήρωμα $\int_0^t h(t)dt$ προσεγγίζεται από το άθροισμα *Riemann*:

$$\int_0^t h(t)dt \simeq \sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(t_{j+1} - t_j), \quad t_j = j\delta t, \quad (2.32)$$

Σχήμα 2.1: Αριθμητική προσομοίωση της κίνησης Brown με $N = 2^9$.Σχήμα 2.2: Αριθμητική προσομοίωση της κίνησης Brown με $N = 2^{15}$.

όπου η ισότητα ορίζεται για το όριο $\delta t \rightarrow 0$.

Με την ίδια λογική, το στοχαστικό ολοκλήρωμα $It\hat{o}$, $\int_0^t h(t)dW(t)$, προσεγγίζεται αριθμητικά από το άθροισμα:

$$\int_0^t h(t)dW(t) \simeq \sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(W_{j+1} - W_j), \quad t_j = j\delta t. \quad (2.33)$$

Ακολούθως, θα μελετηθούν δύο μέθοδοι για την αριθμητική επίλυση των ΣΔΕ της μορφής:

$$\begin{aligned} dx(t) &= b(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dW(t), \\ x(0) &= \xi, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2.34)$$

ονομαστικά η *Euler – Maruyama* και η *Milstein*. Προς αυτή την κατεύθυνση, θα πρέπει να διακριτοποιηθεί το διάστημα $[0, T]$. Θεωρείται ότι $\Delta t = \frac{T}{L}$ για ένα θετικό ακέραιο L . Επιπλέον θεωρούνται οι χρονικές στιγμές $t_j = j\Delta t$, $j = 1 : L$ και οι τιμές της λύσης

της ΣΔΕ (2.34), υπολογισμένες αριθμητικά, τις χρονικές στιγμές τ_j , $j = 1 : L$, $x(\tau_j)$ που συμβολίζονται για συντομία ως x_j .

2.9.3 Η Μέθοδος *Euler – Maruyama*

Περιγραφή της Μεθόδου

Η μέθοδος *Euler – Maruyama* για την αριθμητική προσέγγιση της λύσης της ΣΔΕ (2.34) έχει τη μορφή:

$$x_j = x_{j-1} + b(\tau_{j-1}, x_{j-1})\Delta t + \sigma(\tau_{j-1}, x_{j-1})(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})), \quad j = 1 \dots L. \quad (2.35)$$

Η μέθοδος *Euler – Maruyama* της Σχέσης (2.35) προκύπτει από την ολοκληρωτική μορφή της ΣΔΕ (2.34):

$$x(\tau_j) = x(\tau_{j-1}) + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} b(t, x(t))dt + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \sigma(t, x(t))dW(t), \quad j = 1 \dots L, \quad (2.36)$$

αν αντιστοιχηθεί/προσεγγιστεί κάθε ένας από τους τρεις όρους στο δεξιό τμήμα της Σχέσης (2.36) με κάθε έναν από τους όρους στο δεξιό τμήμα της Σχέσης (2.35), όπου $\Delta t = \tau_j - \tau_{j-1}$.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι θεωρείται ότι το διάστημα διακριτοποίησης για την αριθμητική μέθοδο *Euler – Maruyama*, Δt επιλέγεται ως πολλαπλάσιο του διαστήματος διακριτοποίησης της κίνησης *Brown*, δt , δηλαδή $\Delta t = R\delta t$, $R > 0$, έτσι ώστε τα σημεία στα οποία υπολογίζεται η διακριτοποιημένη κίνηση *Brown* να εμπεριέχουν τα σημεία υπολογισμού της λύσης μέσω *Euler – Maruyama*. Αν ωστόσο δίνεται αναλυτικό μονοπάτι για την κίνηση *Brown*, τότε αρκεί αυθαίρετα μικρή τιμή για το Δt .

Παράδειγμα Εφαρμογής

Στην παρούσα υποενότητα θα εφαρμοστεί η μέθοδος *Euler – Maruyama* για τον αριθμητικό υπολογισμό της λύσης της γραμμικής διαφορικής (με χρήση *MATLAB*):

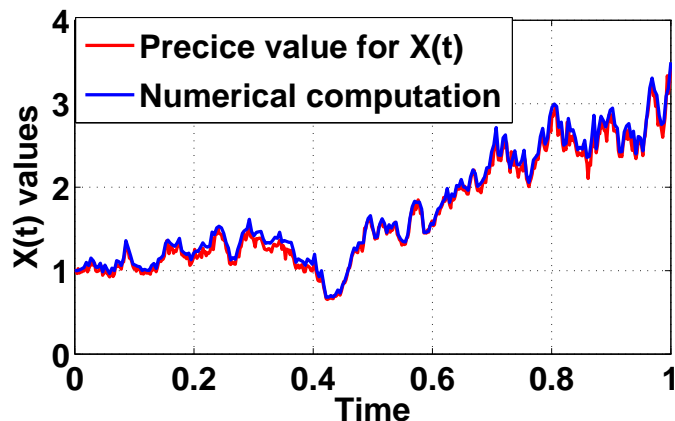
$$dx(t) = \lambda x(t)dt + \mu x(t)dW(t), \quad (2.37)$$

όπου λ, μ είναι πραγματικές σταθερές. Είναι γνωστό ότι η ακριβής λύση της ΣΔΕ (2.37) [7] (υπολογίζεται και με βάση την Ενότητα 2.6), ισούται με:

$$x(t) = x(0)e^{(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2)t + \mu W(t)}. \quad (2.38)$$

Η γνώση της ακριβούς λύσης της ΣΔΕ (2.37) επιτρέπει τη σύγκριση ανάμεσα στις ακριβείς τιμές λύσεων με εκείνες που υπολογίζονται αριθμητικά. Η σύγκριση αυτή απεικονίζεται στο

διάγραμμα 2.3 και αναφέρεται στο ίδιο μονοπάτι της κίνησης *Brown* και για τις δύο καμπύλες. Παρατηρείται ότι το σφάλμα λόγω του αριθμητικού υπολογισμού είναι ικανοποιητικά μικρό.



Σχήμα 2.3: Αριθμητική προσομοίωση της λύσης της ΣΔΕ (2.37) με τη μέθοδο *Euler – Maruyama* και σύγκριση με την πραγματική (ακριβή) λύση.

2.9.4 Η Μέθοδος *Milstein*

Περιγραφή της Μεθόδου

Η μέθοδος *Milstein* για την αριθμητική προσέγγιση της λύσης της ΣΔΕ (2.34) έχει τη μορφή:

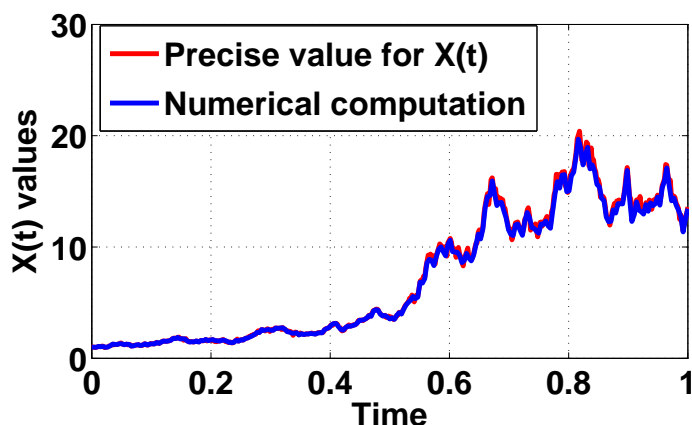
$$x_j = x_{j-1} + b(\tau_{j-1}, x_{j-1})\Delta t + \sigma(\tau_{j-1}, x_{j-1})(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})) + \frac{1}{2}\sigma(\tau_{j-1}, x_{j-1})\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\tau_{j-1}, x_{j-1})((W(\tau_j) - W(\tau_{j-1}))^2 - \Delta t), \quad j = 1 \dots L. \quad (2.39)$$

Η μέθοδος *Milstein* επιτυγχάνει καλύτερη σύγκλιση στη λύση της ΣΔΕ (2.34), συγκριτικά με την *Euler – Maruyama*, όσο το διάστημα διακριτοποίησης Δt τείνει στο μηδέν, όπως επεξηγείται στην επόμενη υποενότητα. Προκύπτει από την αποκοπή της φόρμουλας *Itô – Taylor*, η οποία ουσιαστικά είναι η προσαρμογή του αναπτύγματος *Taylor* μέσω της φόρμουλας του *Itô* για το στοχαστικό λογισμό.

Παράδειγμα Εφαρμογής

Στην παρούσα υποενότητα εφαρμόζεται η μέθοδος *Milstein* για τον αριθμητικό υπολογισμό της λύσης της γραμμικής διαφορικής (με χρήση *MATLAB*) για το παράδειγμα της ΣΔΕ (2.37) με το οποίο εξετάστηκε και η μέθοδος *Euler – Maruyama*. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 2.4. Συγκρίνοντας τα Σχήματα 2.3, 2.4 για τις μεθόδους *Euler – Maruyama*,

Milstein αντίστοιχα, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η μέθοδος *Milstein* προσεγγίζει την ακριβή λύση της ΣΔΕ (2.37) με μικρότερο σφάλμα, γεγονός που συνδέεται με την καλύτερη σύγκλιση που επιτυγχάνει η *Milstein*.



Σχήμα 2.4: Αριθμητική προσομοίωση της λύσης της ΣΔΕ (2.37) με τη μέθοδο *Milstein* και σύγκριση με την πραγματική (ακριβή) λύση.

2.9.5 Ισχυρή & Ασθενής Σύγκλιση των Αριθμητικών Μεθόδων

Στην ενότητα αυτή, θα μελετηθεί η σύγκλιση της διακριτοποιημένης λύσης της ΣΔΕ (2.34) x_n , $n = 1 : L$ στη συνεχή (κανονική) λύση της ΣΔΕ (2.34) $x(t)$, $t \in [0, T]$. Συγκεκριμένα θα μετρηθεί η διαφορά ανάμεσα στις x_n , $x(\tau)$ για δοσμένο n και $\tau = n\Delta t \in [0, T]$, με Δt αρκετά μικρό. Προς αυτή την κατεύθυνση ορίζονται δύο είδη σύγκλισης, η ισχυρή σύγκλιση και η ασθενής σύγκλιση.

Στην ισχυρή σύγκλιση η διαφορά ανάμεσα στις x_n , $x(\tau)$ μετριέται μέσω της ποσότητας $E|x_n - x(\tau)|$ ως ακολούθως:

Ορισμός 18. (Ισχυρή σύγκλιση)

Θα λέγεται ότι μία μέθοδος έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης ίση με γ αν υπάρχει μία σταθερά C τέτοια ώστε:

$$E|x_n - x(\tau)| \leq C\Delta t^\gamma, \quad (2.40)$$

για σταθερό $\tau = n\Delta t \in [0, T]$, με Δt αρκετά μικρό.

Σχετικά με την αριθμητική μέθοδο *Euler – Maruyama*, μπορεί ναδειχτεί ότι έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης ίση με $\gamma = \frac{1}{2}$ [7]. Η αριθμητική μέθοδος *Milstein* αυξάνει την ισχυρή τάξη σύγκλισης σε $\gamma = 1$ (η αύξηση οφείλεται στο ότι $\Delta t < 1$), γεγονός που οφείλεται στη στοχαστική διόρθωση που προσθέτει στη μέθοδο *Euler – Maruyama*, όπως φαίνεται στη Σχέση (2.39)[7].

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ισχυρή σύγκλιση μετράει το ρυθμό με τον οποίο το μέσο του σφάλματος ($|x_n - x(\tau)|$) μειώνεται καθώς $\Delta t \rightarrow 0$. Η ασθενής σύγκλιση που περιγράφεται αμέσως παρακάτω, εκφράζει μία ασθενέστερη εναλλακτική της σύγκλισης μετρώντας το ρυθμό με τον οποίο μειώνεται το σφάλμα των μέσων όταν $\Delta t \rightarrow 0$. Συγκεκριμένα,

Ορισμός 19. (Ασθενής σύγκλιση)

Θα λέγεται ότι μία μέθοδος έχει ασθενή τάξη σύγκλισης ίση με γ αν υπάρχει μία σταθερά C τέτοια ώστε για όλες τις συναρτήσεις p σε μία κλάση συναρτήσεων (π.χ., ταυτοτική συνάρτηση, γενικά θα πρέπει να ισχύουν κάποιες συνθήκες για αυτή την κλάση συναρτήσεων όπως ομαλότητα και πολυωνυμική ανάπτυξη):

$$|Ep(x_n) - Ep(x(\tau))| \leq C\Delta t^\gamma, \quad (2.41)$$

για σταθερό $\tau = n\Delta t \in [0, T]$, με Δt αρκετά μικρό.

Τόσο η αριθμητική μέθοδος *Euler–Maruyama*, όσο και η αριθμητική μέθοδος *Milstein* έχουν ασθενή τάξη σύγκλισης ίση με $\gamma = 1$ [8].

Κεφάλαιο 3

Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος

Τα περισσότερα πραγματικά συστήματα χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα που δυσχεραίνει τη λήψη αποφάσεων για τη βελτιστοποίησή τους, είτε οι αποφάσεις πραγματοποιούνται κατανεμημένα είτε κεντροποιημένα. Ο Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος μελετά τη βελτιστοποίηση συστημάτων πραγματικού κόσμου που έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Τα συστήματα εξελίσσονται στο χρόνο και μοντελοποιούνται από ΣΔΕ κατά *Itô* (σύμφωνα δηλαδή με το μοντέλο διάχυσης - *diffusion model*). Η βασική πηγή της αβεβαιότητας στα μοντέλα διάχυσης είναι ο λευκός θόρυβος που αντιπροσωπεύει τη συνδυασμένη επίδραση πολλών ανεξάρτητων δυνάμεων που δρουν στο σύστημα.
- Λόγω της χρονομεταβλητότητας και της τυχειότητας των προς βελτιστοποίηση συστημάτων, οι αποφάσεις είναι στοχαστικές διαδικασίες και στηρίζονται στην πιο πρόσφατη ενημέρωση σχετικά με την κατάσταση του συστήματος.
- Θα πρέπει να επιλεγεί μέσα από το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων, η πολιτική ελέγχου που βελτιστοποιεί τα αποτελέσματα σχετικά με τους στόχους που έχουν τεθεί.

Όπως και σε άλλα προβλήματα βελτιστοποίησης θα μελετηθεί ποιές είναι οι απαραίτητες συνθήκες που θα πρέπει να πληρεί μία βέλτιστη πολιτική ελέγχου και ποτέ αυτές είναι και ικανές ώστε η πολιτική ελέγχου να είναι βέλτιστη (ή ποιες είναι ικανές συνθήκες ώστε μία πολιτική ελέγχου να είναι βέλτιστη). Στο παρόν κεφάλαιο, θα μελετηθεί και θα αναλυθεί ο Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος. Αρχικά θα δοθούν οι δυνατές διατυπώσεις των προβλημάτων υπό τη μορφή του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου (Ενότητα 3.1) που διαχωρίζονται στην ισχυρή και ασθενή μορφή. Στη συνέχεια, με βάση τις διατυπώσεις αυτές, θα αναπτυχθούν και θα αναλυθούν οι δύο μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, ονομαστικά, η Στοχαστική Αρχή Μεγίστου (Ενότητα 3.2) και ο Δυναμικός Προγραμματισμός μέσω της μερικής διαφορικής εξίσωσης *Hamilton – Jacobi – Bellman* (Ενότητα 3.3).

3.1 Διατυπώσεις Προβλημάτων Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου

Πιο συγκεκριμένα, τα προβλήματα Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου έχουν τα παρακάτω κοινά χαρακτηριστικά:

- Η κατάσταση του συστήματος μοντελοποιείται ως στοχαστική διαδικασία και λύση μίας ΣΔΕ κατά $It\hat{o}$.
- Υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές εφικτές διαδικασίες ελέγχου, η επιλογή μίας εκ των οποίων επηρεάζει την κατάσταση/δυναμική του συστήματος, δηλ. τη μορφή της ΣΔΕ. Πρόκειται επομένως για μία ελεγχόμενη ΣΔΕ.
- Υπάρχουν περιορισμοί που διέπουν τις διαδικασίες ελέγχου και τις τιμές κατάστασης του συστήματος.
- Υπάρχει ένα κριτήριο επίδοσης για τις επιλεγμένες διαδικασίες ελέγχου.

Στόχος είναι η βελτιστοποίηση του κριτηρίου επίδοσης επιλέγοντας τη βέλτιστη εφικτή διαδικασία ελέγχου μεταξύ εκείνων που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Στις δύο επόμενες υποενότητες περιγράφονται οι δύο δυνατές διατυπώσεις ενός προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, με βάση την παραπάνω περιγραφή των χαρακτηριστικών του. Το περιεχόμενο των υποενότητων αυτών προέρχεται από το Κεφάλαιο 2 του βιβλίου [5].

3.1.1 Ισχυρή Διατύπωση

Δίνεται ένας χώρος πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ που ικανοποιεί τη συνήθη συνθήκη (Παράρτημα Α') στον οποίο ορίζεται μία n -διάστατη κίνηση Brown, $W(t)$, $t \in [0, T]$. Ορίζεται η παρακάτω «Ελεγχόμενη» ΣΔΕ (ΕΣΔΕ) που διέπει τη μεταβολή της στοχαστικής ανέλιξης $x = \{x(t)\}_{t \in [0, T]}$ που είναι m -διάστατη και περιγράφει την κατάσταση του συστήματος:

$$\begin{aligned} dx(t) &= b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t), \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου $b : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, και U είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος με $T \in (0, \infty)$ δοσμένη σταθερά.

Η διαφορά των ΕΣΔΕ με τις ΣΔΕ είναι ότι στις ΕΣΔΕ εισάγεται η στοχαστική διαδικασία $u = \{u(t)\}_{t \in [0, T]}$ στους συντελεστές τάσης και μεταβλητότητας b , σ αντίστοιχα, η οποία

ονομάζεται έλεγχος και αντιπροσωπεύει μία πράξη, πολιτική ή απόφαση των ελεγκτών του συστήματος. Επομένως η ΕΣΔΕ κατάστασης έχει τη μορφή της ΣΔΕ με τυχαίους συντελεστές, όπως ορίζεται στην Ενότητα 2.8, με την έννοια ότι εισάγεται τυχαιότητα στους συντελεστές b , σ και εκτός της στοχαστικής διαδικασίας κατάστασης. Ο ελεγκτής σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ είναι ενήμερος σχετικά με το τι έχει συμβεί στο σύστημα ως τη χρονική στιγμή αυτή, όπως η γνώση αυτή συμπεριλαμβάνεται στη σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t , και βασιζόμενος σε αυτή τη γνώση λαμβάνει την απόφαση $u(t)$. Σε μαθηματικούς όρους, ο παραπάνω περιορισμός γνώσης του ελεγκτή (*controller*) μπορεί να εκφραστεί ως «η $u(t)$ είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη». Έτσι, ορίζεται ο χώρος των «εφικτών» (*feasible*) ελέγχων ως εξής:

$$\mathcal{U}[0, T] \triangleq \{u : [0, T] \times \Omega \rightarrow U \mid u \text{ is } \mathcal{F}_t\text{-adapted}\}. \quad (3.2)$$

Οι περιορισμοί που επιβάλλονται στη στοχαστική ανέλιξη κατάστασης του συστήματος εκφράζονται ως ακολούθως:

$$x(t) \in S(t), \forall t \in [0, T], \mathbf{P} - \sigma.β., S(t) : [0, T] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}. \quad (3.3)$$

Στη συνέχεια, ορίζεται το συναρτησιακό κόστους το οποίο αποτελεί και το κριτήριο επίδοσης για την επιλογή της απόφασης ελέγχου ως εξής:

$$J(u) = E \left\{ \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt + h(x(T)) \right\}, \quad (3.4)$$

όπου $f : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Ορισμός 20. (Ορισμός αποδεκτού (*admissible*) ελέγχου, [5])

Έστω ένας χώρος πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ που ικανοποιεί τη συνήθη συνθήκη (Παράρτημα Α') στον οποίο ορίζεται μία n -διάστατη \mathcal{F}_t -κίνηση Brown, $W(t)$. Ένας έλεγχος u θα λέγεται s -αποδεκτός (*s-admissible*) και το ζεύγος (x, u) θα λέγεται s -αποδεκτό ζεύγος αν ισχύουν τα παρακάτω:

- $u \in \mathcal{U}[0, T]$.
- Η x είναι η μοναδική λύση της ΕΣΔΕ (3.1) κατά το Θεώρημα 6 της Ενότητας 2.8.
- Ικανοποιούνται οι απαιτούμενοι περιορισμοί κατάστασης, της μορφής π.χ., της Σχέσης (3.3).
- $f(\cdot, x, u) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$, $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$.

Το σύνολο των s -αποδεκτών ελέγχων συμβολίζεται με $\mathcal{U}_{ad}^s[0, T]$.

Ορισμός 21. (Πρόβλημα Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου με την ισχυρή διατύπωση) Ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού κόστους που δίνεται στη Σχέση (3.4) ως προς τον έλεγχο πάνω στο σύνολο $\mathcal{U}_{ad}^s[0, T]$. Επομένως στόχος είναι η εύρεση $u^* \in \mathcal{U}_{ad}^s[0, T]$ (αν υπάρχει), ώστε να ικανοποιεί τη σχέση:

$$J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}^s[0, T]} J(u). \quad (3.5)$$

Αν το δεξιό τμήμα της Σχέσης (3.5) είναι πεπερασμένο τότε το πρόβλημα θα ονομάζεται *s*-πεπερασμένο. Αν υπάρχει $u^* \in \mathcal{U}_{ad}^s[0, T]$ τότε θα λέγεται *s*-επιλύσιμο ενώ αν είναι και μοναδικό τότε θα λέγεται μοναδικά *s*-επιλύσιμο. Κάθε $u^* \in \mathcal{U}_{ad}^s[0, T]$ που ικανοποιεί τη Σχέση (3.5) θα ονομάζεται *s*-βέλτιστος έλεγχος, ενώ η αντίστοιχη στοχαστική διαδικασία κατάστασης x^* που επιλύει την ΕΣΔΕ (3.1) για έλεγχο u^* θα λέγεται *s*-βέλτιστη στοχαστική διαδικασία κατάστασης.

Ο εκθέτης *s* στους παραπάνω συμβολισμούς σχετίζεται με την ισχυρή (*strong*) διατύπωση, και θα παραλείπεται παρακάτω αν δεν δημιουργείται σύγχυση.

3.1.2 Ασθενής Διατύπωση

Στην περίπτωση της ισχυρής διατύπωσης, μπορεί να παρατηρηθεί αμέσως ότι ο χώρος πιθανότητας καθώς και η κίνηση *Brown*, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t, W(t))$ είναι δοσμένα και αμετάβλητα. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες είναι πιο κατάλληλο ο χώρος πιθανότητας και η κίνηση *Brown* να μεταβάλλονται και να θεωρούνται μέρος των παραμέτρων ελέγχου. Αυτό θα γίνει φανερό στην Ενότητα 3.3, που χρησιμοποιείται ο δυναμικός προγραμματισμός για την επίλυση του προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου αρχικά διαμορφωμένο στην ισχυρή μορφή (Ενότητα 3.1.1). Γενικά η ισχυρή διατύπωση ενός προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου είναι εκείνη που προκύπτει πρακτικά, ενώ η ασθενής διατύπωση, χρησιμοποιείται σαν ένα βοηθητικό αλλά αποτελεσματικό μαθηματικό εργαλείο για την επίλυση των προβλημάτων με την ισχυρή διατύπωση.

Ορισμός 22. (Ορισμός αποδεκτού (*admissible*) ελέγχου υπό την ασθενή διατύπωση) Η εξάδα $\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t, W(t), u(t))$ θα λέγεται *w*-αποδεκτός έλεγχος και το ζεύγος (x, u) θα λέγεται *w*-αποδεκτό ζεύγος αν ισχύουν τα παρακάτω:

- Ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας με διύλιση που ικανοποιεί τη συνήθη συνθήκη.
- Η $W(t)$ είναι η *n*-διάστατη τυπική κίνηση *Brown* ορισμένη στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$.
- $u \in U$ και u είναι μία \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

- Η x είναι η μοναδική λύση της ΕΣΔΕ (3.1) κατά τον ορισμό του Θεωρήματος 6 της Ενότητας 2.8 στο χώρο πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ και υπό τον έλεγχο u της εξάδας π .
- Ικανοποιούνται οι απαιτούμενοι περιορισμοί κατάστασης, π.χ., της μορφής της Σχέσης (3.3).
- $f(\cdot, x, u) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$, $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$. Οι χώροι $L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$, $L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ ορίζονται στο δοσμένο χώρο πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ που σχετίζεται με την εξάδα π .

Το σύνολο των w -αποδεκτών ελέγχων συμβολίζεται με $\mathcal{U}_{ad}^w[0, T]$.

Ορισμός 23. (Πρόβλημα Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου με την ασθενή διατύπωση) Ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού κόστους που δίνεται στη Σχέση (3.4) ως προς τον έλεγχο πάνω στο σύνολο $\mathcal{U}_{ad}^w[0, T]$. Επομένως στόχος είναι η εύρεση $\pi^* \in \mathcal{U}_{ad}^w[0, T]$ (αν υπάρχει), ώστε να ικανοποιεί τη σχέση

$$J(\pi^*) = \inf_{\pi \in \mathcal{U}_{ad}^w[0, T]} J(\pi). \quad (3.6)$$

Αν το δεξιό τμήμα της Σχέσης (3.6) είναι πεπερασμένο τότε το πρόβλημα θα ονομάζεται w -πεπερασμένο. Αν υπάρχει $\pi^* \in \mathcal{U}_{ad}^w[0, T]$ τότε θα λέγεται w -επιλύσιμο. Κάθε $\pi^* \in \mathcal{U}_{ad}^w[0, T]$ που ικανοποιεί τη Σχέση (3.6) θα ονομάζεται w -βέλτιστος έλεγχος, ενώ η αντίστοιχη στοχαστική διαδικασία κατάστασης x^* που επιλύει την ΕΣΔΕ (3.1) για έλεγχο π^* θα λέγεται w -βέλτιστη στοχαστική διαδικασία κατάστασης.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ασθενής διατύπωση δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση της ΕΣΔΕ και /ή συναρτησιακού κόστους με τυχαίους συντελεστές (b, σ, f, h) , δηλαδή όταν οι τελευταίοι εξαρτώνται άμεσα από το $\omega \in \Omega$ και όχι μόνο έμμεσα μέσω των στοχαστικών διαδικασιών κατάστασης και ελέγχου. Επιπλέον, η στοχαστική διαδικασία ελέγχου καθιστά τυχαίους τους συντελεστές b, σ, f, h συγκριτικά με την εξάρτησή τους μόνο από τη στοχαστική διαδικασία κατάστασης, λόγος για τον οποίο εφαρμόζεται το Θεώρημα 6 της Ενότητας 2.8, ωστόσο η εξάρτηση των συντελεστών από το δείγμα εξακολουθεί να παραμένει έμμεση. Ο εκθέτης w στους παραπάνω συμβολισμούς σχετίζεται με την ασθενή (*weak*) διατύπωση, και θα παραλείπεται παρακάτω αν δεν δημιουργείται σύγχυση.

Στη συνέχεια περιγράφονται οι δύο μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου [5], [9], όπου μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στη μέθοδο Δυναμικού Προγραμματισμού (*Hamilton – Jacobi – Bellman*) καθώς είναι η πιο εύκολα εφαρμόσιμη και πιο συχνά χρησιμοποιούμενη στις εφαρμογές για τα ασύρματα δίκτυα τηλεπικοινωνιών (Κεφάλαιο 4).

3.2 Μέθοδος Επίλυσης 1: Στοχαστική Αρχή Μεγίστου

Στην ενότητα αυτή θα περιγραφεί η μέθοδος που στηρίζεται στη Στοχαστική Αρχή Μεγίστου (*Stochastic Maximum Principle*) για την επίλυση προβλημάτων Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου. Καταρχάς, η μέθοδος της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου στηρίζεται στην ισχυρή διατύπωση του προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου (Ενότητα 3.1.1). Στις δύο πρώτες υποενότητες δεν θεωρούνται περιορισμοί κατάστασης. Αρχικά θα παρατεθούν οι προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται από τις συναρτήσεις από τις οποίες συνίσταται το πρόβλημα Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου (Ενότητα 3.1.1) και στη συνέχεια θα δοθεί η μέθοδος επίλυσης μέσω των συμπληρωματικών (*adjoint*) ΣΔΕ. Τέλος, η μέθοδος θα επεκταθεί στην περίπτωση ύπαρξης περιορισμών κατάστασης. Το περιεχόμενο αυτής της ενότητας βασίζεται στην αναφορά [5], Κεφάλαιο 3.

3.2.1 Απαιτήσεις για την Εφαρμογή της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου

Στην παρούσα υποενότητα περιγράφονται οι απαιτήσεις που θα πρέπει να πληρούνται από τις συναρτήσεις b, σ, f, h της Ενότητας 3.1.1, για την εφαρμογή της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου. Με βάση την Ενότητα 3.1.1 ορίζονται τα εξής:

$$\begin{aligned} b(t, x, u) &= (b^1(t, x, u), \dots, b^m(t, x, u))^T, \\ \sigma(t, x, u) &= (\sigma^1(t, x, u), \dots, \sigma^n(t, x, u)), \\ \sigma^j(t, x, u) &= (\sigma^{1j}(t, x, u), \dots, \sigma^{mj}(t, x, u))^T, \quad j = 1 \dots n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Οι απαραίτητες προϋποθέσεις για την εφαρμογή της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου είναι οι εξής:

- (Π0) Η $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ είναι η διύλιση που παράγεται από την κίνηση *Brown*, $W(t)$, προσαυξημένη με τα \mathbf{P} -κενά σύνολα της \mathcal{F} (ορισμοί στο Παράρτημα Α').
- (Π1) (U, d) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος όπου d είναι συνάρτηση μέτρου ορισμένη στο χώρο U και $T > 0$.
- (Π2) Οι συναρτήσεις b, σ, f, h είναι μετρήσιμες και υπάρχει μία σταθερά $L > 0$ και ένα μέτρο συνέχειας (*modulus of continuity* [6], μετράει ποσοτικά την ομοιόμορφη συνέχεια των συναρτήσεων) $\bar{\omega} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, τέτοιο ώστε για $\varphi = b, \sigma, f, h$ να

ισχύει:

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, \hat{x}, \hat{u})| &\leq L|x - \hat{x}| + \bar{\omega}(d(u, \hat{u})), \quad \forall t \in [0, T], x, \hat{x} \in \mathbb{R}^m, u, \hat{u} \in U, \\ |\varphi(t, 0, u)| &\leq L, \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times U. \end{aligned} \quad (3.8)$$

- (Π3) Οι συναρτήσεις b, σ, f, h είναι C^2 (δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες) ως προς x . Επιπλέον, υπάρχει μία σταθερά $L > 0$ και ένα μέτρο συνέχειας (*modulus of continuity*) $\bar{\omega} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, τέτοιο ώστε για $\varphi = b, \sigma, f, h$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} |\varphi_x(t, x, u) - \varphi_x(t, \hat{x}, \hat{u})| &\leq L|x - \hat{x}| + \bar{\omega}(d(u, \hat{u})), \\ |\varphi_{xx}(t, x, u) - \varphi_{xx}(t, \hat{x}, \hat{u})| &\leq \bar{\omega}(|x - \hat{x}| + d(u, \hat{u})), \\ \forall t \in [0, T], x, \hat{x} \in \mathbb{R}^m, u, \hat{u} \in U. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Η απαίτηση (Π0) ερμηνεύεται ως το γεγονός ότι ο (λευκός) θόρυβος του συστήματος (όπως μοντελοποιείται μέσω της κίνησης *Brown*) είναι η μόνη πηγή αβεβαιότητας και η πληροφορία για το θόρυβο αυτό σε περασμένες χρονικές στιγμές είναι διαθέσιμη στον ελεγκτή του συστήματος. Οι απαιτήσεις (Π1), (Π2), εξασφαλίζουν πρώτον ότι το συναρτησιακό κόστους που ορίζεται στην Ενότητα 3.1.1 είναι καλά ορισμένο, και δεύτερον ότι η ΕΣΔΕ κατάστασης επιδέχεται μοναδική λύση x για κάθε έλεγχο $u \in \mathcal{U}_{ad}^s$ (Ενότητες 3.1.1, 2.8).

3.2.2 Διατύπωση της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου & Διαδικασία Επίλυσης

Έστω $S^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = A\}$ και (x^*, u^*) είναι ένα δοσμένο βέλτιστο ζεύγος κατάστασης, ελέγχου. Στη συνέχεια θα δοθούν και θα επεξηγηθούν οι συμπληρωματικές ΣΔΕ που χρησιμοποιούνται στη Στοχαστική Αρχή Μεγίστου, οι οποίες διακρίνονται σε συμπληρωματικές ΣΔΕ πρώτης και δεύτερης τάξης.

Στις συμπληρωματικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, άγνωστο είναι το ζευγάρι των $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -προσαρμοσμένων στοχαστικών διαδικασιών $(p(\cdot), q(\cdot))$, το οποίο πρέπει να επιλύει το παρακάτω πρόβλημα τελικής τιμής ή αλλιώς την παρακάτω οπισθοδρομική ΣΔΕ (*backwards*

stochastic differential equation).

$$dp(t) = - \left\{ b_x(t, x^*(t), u^*(t))^T p(t) + \sum_{j=1}^n \sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t))^T q_j(t) - f_x(t, x^*(t), u^*(t)) \right\} dt + q(t) dW(t), \quad t \in [0, T],$$

$$p(T) = -h_x(x^*(T)). \quad (3.10)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση ντετερμινιστικού προβλήματος, όπου η κατάσταση περιγράφεται από μία κανονική διαφορική εξίσωση (*ordinary stochastic differential equation*) είναι δυνατή η αντιστροφή του χρόνου ώστε η οπισθοδρομική διαφορική εξίσωση να επιλυθεί ως εμπρόσθια διαφορική εξίσωση. Ωστόσο στην περίπτωση των ΣΔΕ μία ανάλογη προσέγγιση αντιστροφής του χρόνου καταλύει τη μη προβλεψιμότητα των λύσεων (*nonanticipativeness*), οπότε η παραπάνω ΣΔΕ πρέπει να επιλυθεί οπισθοδρομικά ενώ παράλληλα η λύση των στοχαστικών διαδικασιών $(p(\cdot), q(\cdot))$ πρέπει να είναι $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -προσαρμοσμένη. Κάθε ζεύγος στοχαστικών διαδικασιών $(p(\cdot), q(\cdot))$ που επιλύει την Εξίσωση (3.10) και για το οποίο ισχύει $(p(\cdot), q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^m) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^m))^n$ θα ονομάζεται «προσαρμοσμένη» λύση της Σχέσης (3.10).

Πρόταση 5. *Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις (Π0)-(Π3), τότε για κάθε βέλτιστο ζεύγος κατάστασης-ελέγχου $(x^*, u^*) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathcal{U}[0, T]$ η Σχέση (3.10) διαθέτει μία μοναδική προσαρμοσμένη λύση $(p(\cdot), q(\cdot))$.*

Γενικά, (και στη ντετερμινιστική περίπτωση Βέλτιστου Ελέγχου) η στοχαστική διαδικασία $p(\cdot)$ αντιπροσωπεύει την περιθωριακή αξία (*marginal value*) ή την τιμή σκιάς (*shadow price*) για τους πόρους που εκπροσωπούνται από τη μεταβλητή κατάσταση. Άρα, η ελαχιστοποίηση του κόστους αντιστοιχεί σε μεγιστοποίηση της συνολικής συνεισφοράς της περιθωριακής αξίας. Όμως στις στοχαστικές συνθήκες, ο έλεγχος δύναται π.χ., να επηρεάζει τη μεταβλητότητα της ΣΔΕ που περιγράφει την κατάσταση (Σχέση (3.1)), επομένως οι αποφάσεις ελέγχου θα πρέπει να οδηγούν σε συμβιβασμό μεταξύ του ελέγχου και του βαθμού αβεβαιότητας του συστήματος. Άρα η $p(\cdot)$ με την ερμηνεία της περιθωριακής αξίας μπορεί να μην είναι από μόνη της ικανή να χαρακτηρίσει πλήρως το συμβιβασμό ανάμεσα στο κόστος και στο κέρδος του ελέγχου σε στοχαστικές συνθήκες. Έτσι, εισάγεται μία δεύτερη συμπληρωματική ΣΔΕ (δεύτερης τάξης) ώστε να χαρακτηρίσει το ρίσκο ή την αβεβαιότητα

του συστήματος και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 dP(t) = & - \left\{ b_x(t, x^*(t), u^*(t))^T P(t) + P(t) b_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \right. \\
 & \sum_{j=1}^n \sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t))^T P(t) \sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t)) + \\
 & \sum_{j=1}^n \left\{ \sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t))^T Q_j(t) + Q_j(t) \sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t)) \right\} + \\
 & \left. H_{xx}(t, x^*(t), u^*(t), p(t), q(t)) \right\} dt + \sum_{j=1}^n Q_j(t) dW^j(t), \quad t \in [0, T], \\
 & p(T) = -h_{xx}(x^*(T)). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

όπου η Χαμιλτονιανή (*Hamiltonian*) ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 H(t, x, u, p, q) = & \langle p, b(t, x, u) \rangle + \text{tr}[q^T \sigma(t, x, u)] - f(t, x, u), \\
 (t, x, u, p, q) \in & [0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n}. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

όπου $(p(\cdot), q(\cdot))$ είναι η λύση της Σχέσης (3.10). Η Σχέση (3.11) είναι επίσης μία οπισθοδρομική ΣΔΕ όπως το Σύστημα (3.10) ωστόσο με αγνώστους σε μορφή πίνακα. Συγκεκριμένα, άγνωστο είναι το ζεύγος $(P(\cdot), Q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; S^m) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; S^m))^n$.

Πρόταση 6. *Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις (Π0)-(Π3), τότε η Σχέση (3.11) διαθέτει μία μοναδική προσαρμοσμένη λύση $(P(\cdot), Q(\cdot))$.*

Η Σχέση (3.10) λέγεται πρώτης τάξης συμπληρωματική εξίσωση και η Σχέση (3.11) λέγεται δεύτερης τάξης συμπληρωματική εξίσωση. Όμοια, οι $p(\cdot)$, $P(\cdot)$ λέγονται πρώτης και δεύτερης τάξης συμπληρωματικές στοχαστικές διαδικασίες. Τέλος, αν (x^*, u^*) είναι βέλτιστο ζεύγος κατάστασης, ελέγχου και $(p(\cdot), q(\cdot))$, $(P(\cdot), Q(\cdot))$ είναι προσαρμοσμένες λύσεις στις Σχέσεις (3.10), (3.11) τότε το διάνυσμα $(x^*, u^*, p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$ θα λέγεται βέλτιστη εξάδα. Αν το ζεύγος είναι (x^*, u^*) είναι αποδεκτό (και όχι βέλτιστο) τότε η παραπάνω εξάδα θα λέγεται αποδεκτή.

Ακολούθως θα αναπτυχθεί η Στοχαστική Αρχή Μεγίστου κατά αναλογία με την Αρχή Μεγίστου ή Αρχή του *Potryangin* για τα ντετερμινιστικά συστήματα. Σύμφωνα με την Αρχή Μεγίστου για ντετερμινιστικά περιβάλλοντα, θα έπρεπε να μεγιστοποιηθεί η Χαμιλτονιανή της Σχέσης (3.12) ώστε να προκύψει ο βέλτιστος έλεγχος. Ωστόσο, αν ο συντελεστής διάχυσης σ της ΕΣΔΕ (3.1) εξαρτάται από τον έλεγχο, τότε αυτό δεν οδηγεί σε λογικό αποτέλεσμα. Έτσι, γίνεται προσαρμογή του ρίσκου που οφείλεται στο συντελεστή μεταβλητότητας σ μέσω του ορισμού της Γενικευμένης Χαμιλτονιανής (*Generalized Hamiltonian*)

ως εξής:

$$G(t, x, u, p, P) = \langle p, b(t, x, u) \rangle + \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma(t, x, u)^T P \sigma(t, x, u)] - f(t, x, u),$$

$$(t, x, u, p, P) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \times \mathbb{R}^m \times S^m. \quad (3.13)$$

Από τη σύγκριση των Χαμιλτονιανών στις Σχέσεις (3.13), (3.12) προκύπτει ότι η Γενικευμένη Χαμιλτονιανή εξαρτάται από τη συμπληρωματική διαδικασία P και όχι από την q όπως η Χαμιλτονιανή. Επιπλέον, μέσω της σύγκρισης των Σχέσεων (3.13), (3.12) προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες:

$$G(t, x, u, p, P) = H(t, x, u) + \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma(t, x, u)^T P \sigma(t, x, u)], \quad (3.14)$$

$$H(t, x, u, p, P) = H(t, x, u) + \text{tr} [q^T \sigma(t, x, u)], \quad (3.15)$$

όπου $H(t, x, u) = \langle p, b(t, x, u) \rangle - f(t, x, u)$ η Χαμιλτονιανή ορισμένη κάτω από ντετερμινιστικές συνθήκες, δηλαδή, $\sigma(t, x, u) = 0, \forall t, x, u$.

Τέλος, προτού διατυπωθεί η Στοχαστική Αρχή Μεγίστου ορίζεται η συνάρτηση $\mathcal{H}(t, x, u)$ για τη βέλτιστη εξάδα (ή για οποιαδήποτε άλλη αποδεκτή εξάδα) $(x^*(\cdot), u^*(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x, u) &\triangleq H(t, x, u, p(t), P(t)) - \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma(t, x^*(t), u^*(t))^T P(t) \sigma(t, x^*(t), u^*(t))] \\ &+ \frac{1}{2} \text{tr} \{ [\sigma(t, x, u) - \sigma(t, x^*(t), u^*(t))]^T P(t) [\sigma(t, x, u) - \sigma(t, x^*(t), u^*(t))] \} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma(t, x, u)^T P(t) \sigma(t, x, u)] + \langle p(t), b(t, x, u) \rangle - f(t, x, u) \\ &\quad + \text{tr} [q(t)^T \sigma(t, x, u)] - \text{tr} [\sigma(t, x, u)^T P(t) \sigma(t, x^*(t), u^*(t))] \\ &= G(t, x, u, p(t), P(t)) + \text{tr} \{ \sigma(t, x, u)^T [q(t) - P(t) \sigma(t, x^*(t), u^*(t))] \}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Θεώρημα 7. (Στοχαστική Αρχή Μεγίστου)

Εστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις (Π0)-(Π3) και ότι το (x^*, u^*) είναι ένα βέλτιστο ζεύγος κατάστασης, ελέγχου. Τότε υπάρχουν τα ακόλουθα ζεύγη διαδικασιών που ικανοποιούν αντίστοιχα τις συμπληρωματικές εξισώσεις των σχέσεων (3.10), (3.11):

$$(p(\cdot), q(\cdot)) \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times (L_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^m))^n, \quad (3.17)$$

$$(P(\cdot), Q(\cdot)) \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T; S^m) \times (L_{\mathcal{F}}^2(0, T; S^m))^n, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} q(\cdot) &= (q_1(\cdot), \dots, q_n(\cdot)), \quad Q(\cdot) = (Q_1(\cdot), \dots, Q_n(\cdot)), \\ q_j(\cdot) &\in L_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^m), \quad Q_j(\cdot) \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T; S^m), \quad j \in \{1 \dots n\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

τέτοια ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω Σχέση «μεταβλητότητας»:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p(t), q(t)) - H(t, x^*(t), u, p(t), q(t)) - \frac{1}{2} \text{tr} \{ [\sigma(t, x^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, x^*(t), u)]^T P(t) [\sigma(t, x^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, x^*(t), u)] \} \geq 0, \quad (3.20)$$

ή ισοδύναμα να ικανοποιείται η παρακάτω «συνθήκη μεγιστοποίησης»:

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, x^*(t), u), \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{P} - \sigma. \beta. \quad (3.21)$$

Παρατήρηση 6. Γενικά, όταν $\sigma(t, x, u) = \sigma(t, x)$, δηλαδή όταν η μεταβλητότητα είναι ανεξάρτητη του ελέγχου, τότε η συνθήκη μεγιστοποίησης (Σχέση 3.21) μετατρέπεται στην εξής:

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p(t), q(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^*(t), u, p(t), q(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbf{P} - \sigma. \beta.$$

όπως φαίνεται από την Εξίσωση (3.16) που δίνει το $\mathcal{H}(t, x, u)$ (οι υπόλοιποι όροι δεν εξαρτώνται από το u).

Παρατήρηση 7. Αν όλοι οι συντελεστές είναι συνεχώς παραγωγίσιμοι ως προς τον έλεγχο (C^1 ως προς u) και το σύνολο τιμών του ελέγχου, U , είναι κυρτό τότε η Σχέση μεταβλητότητας (3.20) παίρνει την επονομαζόμενη ως «τοπική μορφή»:

$$\langle H_u(t, x^*(t), u^*(t), p(t), q(t)), u - u^*(t) \rangle \leq 0, \quad \forall u \in U, \quad t \in [0, T] \quad \mathbf{P} - \sigma. \beta. \quad (3.22)$$

Προκύπτει με παραγωγή της Σχέσης που δίνει την \mathcal{H} δηλαδή της Σχέσης (3.16). Αντίστοιχα η Σχέση (3.20) θα ονομάζεται ολική μορφή.

Αν συνδυαστεί η ΕΣΔΕ κατάστασης (3.1) με τη συμπληρωματική ΣΔΕ πρώτου βαθμού (ΣΔΕ (3.10)) προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} dx(t) &= H_p(t, x(t), u(t), p(t), q(t))dt + H_q(t, x(t), u(t), p(t), q(t))dW(t), \\ dp(t) &= -H_x(t, x(t), u(t), p(t), q(t))dt + q(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0, \quad p(T) = -h_x(x(T)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ο συνδυασμός των Συστημάτων (3.11), (3.23), (3.21) ή (3.20) ονομάζεται Στοχαστικό Χαμιλτονιανό Σύστημα και επιλύεται από μία εξάδα της μορφής $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$.

Θεώρημα 8. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις (Π0)-(Π3) και ότι (x^*, u^*) είναι ένα βέλτιστο ζεύγος κατάστασης, ελέγχου. Τότε, η βέλτιστη εξάδα $(x^*(\cdot), u^*(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$ επιλύει το Στοχαστικό Χαμιλτονιανό Σύστημα των εξισώσεων (3.11), (3.23), (3.21) ή (3.20).

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι αν βρεθεί μέσω της επίλυσης του Στοχαστικού Χαμιλτονιανού Συστήματος ένα ζεύγος $(x^*(t), u^*(t))$, θα πρέπει ακολούθως να επαληθευτεί ότι είναι βέλτιστο δηλαδή ότι ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό κόστους της Σχέσης (3.4). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται συχνά η φόρμουλα του Itô (Ενότητα 2.3). Ωστόσο, αν ισχύουν κάποιες παραπάνω απαιτήσεις που εισάγουν κάποιες συνθήκες κυρτότητας, τότε αυτές σε συνδυασμό με τη συνθήκη μεγιστοποίησης (3.21) είναι επαρκείς για την βελτιστότητα του ζεύγους $(x^*(t), u^*(t))$ που έχει προκύψει από την επίλυση του Στοχαστικού Χαμιλτονιανού Συστήματος.

(Σ4) Το πεδίο τιμών του ελέγχου U είναι κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^k . Οι συντελεστές b, σ, f είναι τοπικά *Lipschitz* ως προς u και οι παράγωγοί τους ως προς x είναι συνεχείς στο (x, u) .

Τότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα που καθορίζει τις επαρκείς συνθήκες ώστε το ζεύγος $(x^*(t), u^*(t))$ που έχει προκύψει από την επίλυση του Στοχαστικού Χαμιλτονιανού Συστήματος να είναι το βέλτιστο.

Θεώρημα 9. (Επαρκείς Συνθήκες για Βελτιστότητα)

Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες (Π0)-(Π3), (Σ4). Επίσης, έστω ότι η $(x^*(\cdot), u^*(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$ είναι μία αποδεκτή εξάδα. Αν η $h(\cdot)$ είναι κυρτή, η $H(t, \cdot, \cdot, p(t), q(t))$ είναι κοίλη για όλα τα $t \in [0, T]$ $\mathbf{P} - \sigma.β.$ και επιπλέον ισχύει

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, x^*(t), u(t)), \quad a.e. \ t \in [0, T], \ \mathbf{P} - \sigma.β.$$

(a.e. \equiv σχεδόν κάθε). Τότε, το $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ είναι βέλτιστο ζεύγος κατάστασης, ελέγχου του προβλήματος (Ενότητα 3.1.1).

Παράδειγμα Εφαρμογής της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου

Θεωρείται το παρακάτω σύστημα ελέγχου. Το πεδίο τιμών του ελέγχου, u , είναι $U = \mathbb{R}$. Η ΕΣΔΕ που περιγράφει τη δυναμική της κατάστασης του συστήματος δίνεται από:

$$\begin{aligned} dx(t) &= u(t)dt + u(t)dW(t), \quad t \in [0, 1], \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Το συναρτησιακό κόστους είναι:

$$J(u(\cdot)) = E \left\{ - \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r u(t)^2 \right] dt + \frac{1}{2} x(1)^2 \right\}, \quad (3.24)$$

όπου για την παράμετρο r θα πρέπει να ισχύει $r \in (0, 1)$, $\ln r + 2 - r < 0$. Έστω $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ το βέλτιστο ζεύγος (κατάστασης, ελέγχου) προς προσδιορισμό. Τότε, οι συμπληρωματικές

εξισώσεις πρώτης τάξης (Σχέση 3.10) είναι:

$$\begin{aligned} dp(t) &= q(t)dW(t), \quad t \in [0, 1], \\ p(1) &= -x^*(1), \end{aligned} \quad (3.25)$$

αφού $b_x = \sigma_x = f_x = 0$, $h_x = x$, και οι συμπληρωματικές εξισώσεις δεύτερης τάξης (Σχέση 3.11) δίνονται από:

$$\begin{aligned} dP(t) &= Q(t)dW(t), \quad t \in [0, 1], \\ P(1) &= -1, \end{aligned} \quad (3.26)$$

αφού $b_x = \sigma_x = b_{xx} = \sigma_{xx} = f_{xx} = 0$, $h_{xx} = 1$. Η μοναδική προσαρμοσμένη λύση στις συμπληρωματικές εξισώσεις δεύτερης τάξης είναι η $(P(t), Q(t)) = (-1, 0)$. Το γεγονός ότι $Q(t) = 0$, γίνεται φανερό από τη ντετερμινιστική τελική τιμή που διαφορετικά (αν δηλαδή $Q(t) \neq 0$) η επίτευξή της θα ήταν αδύνατη. Τέλος, η χαμιλτονιανή $\mathcal{H}(t, x, u)$ της Σχέσης (3.16) με αντικατάσταση της λύσης $(P(t), Q(t)) = (-1, 0)$ παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), u) = -\frac{1}{2}(1-r)u^2 + (p(t) + q(t) + u^*(t))u, \quad (3.27)$$

η οποία είναι κοίλη συνάρτηση του ελέγχου u (αφού $u < 1$) και μεγιστοποιείται για $u^*(t)$ που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} -(1-r)u^*(t) + p(t) + q(t) + u^*(t) &= 0, \\ u^*(t) &= -\frac{p(t) + q(t)}{r}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Από το συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει το ακόλουθο χαμιλτονιανό σύστημα. Συγκεκριμένα στην ΕΣΔΕ κατάστασης αντικαθίσταται ο βέλτιστος έλεγχος και συνδυάζεται και η συμπληρωματική εξίσωση πρώτου βαθμού.

$$\begin{aligned} dx^*(t) &= -\frac{p(t) + q(t)}{r}dt - \frac{p(t) + q(t)}{r}dW(t) \\ dp(t) &= q(t)dW(t), \\ x^*(0) &= 1, \quad p(1) = -x^*(1). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Έστω $(x^*(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$ μία προσαρμοσμένη λύση του παραπάνω χαμιλτονιανού συστήματος και ας γίνει η υπόθεση ότι $p(t) = \Theta(t)x(t)$, $\forall t \in [0, 1]$, \mathbf{P} - σ.β., με $\Theta(t)$ μία ντετερμινιστική συνάρτηση. Αφού έγινε η υπόθεση αυτή στόχος είναι η εύρεση της εξίσωσης που ικανοποιείται από τη συνάρτηση $\Theta(t)$. Εφαρμόζεται η φόρμουλα του Itô (Σχέση (2.7)) για

την $p(t)$ με χρήση της ΕΣΔΕ κατάστασης.

$$dp(t) = \left[\dot{\Theta}(t)x^*(t) - \Theta(t)\frac{p(t) + q(t)}{r} \right] dt - \Theta(t)\frac{p(t) + q(t)}{r} dW(t). \quad (3.30)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με τις συμπληρωματικές εξισώσεις πρώτης τάξεως προκύπτει:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(t)x^*(t) &= \Theta(t)\frac{p(t) + q(t)}{r}, \\ -\Theta(t)\frac{p(t) + q(t)}{r} &= q(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Από την τελευταία σχέση αμέσως προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned} q(t) &= -\frac{p(t)\Theta(t)}{r + \Theta(t)} = -\frac{x^*(t)\Theta(t)^2}{r + \Theta(t)}, \\ \frac{q(t) + p(t)}{r} &= -\frac{q(t)}{\Theta(t)} = \frac{x^*(t)\Theta(t)}{r + \Theta(t)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Τότε συνδυάζοντας τα αμέσως δύο προηγούμενα συστήματα εξισώσεων προκύπτουν οι εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιεί η $\Theta(t)$, όπου γίνεται η υπόθεση ότι το σύστημά τους έχει λύση [5].

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(t) &= \frac{\Theta(t)^2}{r + \Theta(t)}, \quad t \in [0, 1], \\ \Theta(1) &= -1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Τότε ο βέλτιστος έλεγχος, που έχει υπολογιστεί παραπάνω, γράφεται ως εξής:

$$u^*(t) = -\frac{p(t) + q(t)}{r} = -\frac{x^*(t)\Theta(t)}{r + \Theta(t)} \quad t \in [0, 1], \quad \mathbf{P} - \sigma.β. \quad (3.34)$$

και η αντίστοιχη βέλτιστη κατάσταση (που αντιστοιχεί στο βέλτιστο έλεγχο) δίνεται από την παρακάτω ΕΣΔΕ:

$$\begin{aligned} dx^*(t) &= -\frac{x^*(t)\Theta(t)}{r + \Theta(t)} dt - \frac{x^*(t)\Theta(t)}{r + \Theta(t)} dW(t), \quad t \in [0, 1], \\ x^*(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ακολούθως, θα πρέπει να επαληθευτεί ότι το ζεύγος $(x^*(.), u^*(.))$ που υπολογίστηκε από το χαμιλτονιανό σύστημα ως βέλτιστο, είναι βέλτιστο στην πραγματικότητα. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού, εφαρμόζεται και πάλι η φόρμουλα του Itô (Σχέση (2.7)) για την $\Theta(t)x(t)^2$ με χρήση της ΕΣΔΕ κατάστασης και για οποιοδήποτε αποδεκτό ζεύγος $(x(.), u(.))$ (όχι

απαραίτητα το βέλτιστο).

$$d(\Theta(t)x(t)^2) = \left\{ \Theta(t)u(t)^2 + 2\Theta(t)u(t)x(t) + \frac{\Theta(t)^2x(t)^2}{r + \Theta(t)} \right\} dt + \{\dots\}dW(t), \quad (3.35)$$

όπου δεν μας ενδιαφέρουν οι όροι μπροστά από το διαφορικό $dW(t)$ καθώς η προηγούμενη σχέση ολοκληρώνεται στο χρονικό διάστημα $(0, 1)$ και θεωρούνται μέσες τιμές (με $\Theta(1) = -1$ και $x(0) = 1$):

$$E(x(1)^2) = -\Theta(0) - E \int_0^1 \left\{ \Theta(t)u(t)^2 + 2\Theta(t)u(t)x(t) + \frac{\Theta(t)^2x(t)^2}{r + \Theta(t)} \right\} dt. \quad (3.36)$$

Ακολούθως η τιμή $E(x(1)^2)$ που έχει υπολογιστεί, αντικαθίσταται στη σχέση που δίνει το συναρτησιακό κόστος:

$$\begin{aligned} J(u(\cdot)) &= E \left\{ - \int_0^1 \left[\frac{1}{2}ru(t)^2 \right] dt + \frac{1}{2}x(1)^2 \right\} = \\ &= -\frac{1}{2}E \int_0^1 \left\{ (r + \Theta(t)) \left(u(t) + \frac{\Theta(t)x(t)}{r + \Theta(t)} \right)^2 \right\} dt - \frac{1}{2}\Theta(0), \end{aligned} \quad (3.37)$$

για την οποία είναι φανερό ότι το ελάχιστο επιτυγχάνεται για συνάρτηση ελέγχου $u^*(t) = -\frac{x^*(t)\Theta(t)}{r+\Theta(t)}$ όπως έχει υπολογιστεί και παραπάνω.

3.2.3 Ενσωμάτωση των Περιορισμών Κατάστασης

Στην παρούσα ενότητα, θα μελετηθεί η μέθοδος της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου στην περίπτωση όπου υπάρχουν περιορισμοί κατάστασης, γεγονός το οποίο εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές. Έστω $u \in \mathcal{U}[0, T]$ (σύνολο εφικτών ελέγχων, Ενότητα 3.1.1), τότε αν x είναι η αντίστοιχη λύση της ΕΣΔΕ (3.1), το ζεύγος (x, u) θα λέγεται εφικτό. Όπως φαίνεται από τον ορισμό του αποδεκτού ζεύγους κατάστασης, ελέγχου στην Ενότητα 3.1.1 η διαφορά του με το εφικτό ζεύγος είναι ότι η x στην περίπτωση του αποδεκτού ζεύγους θα πρέπει να ικανοποιεί και τους περιορισμούς κατάστασης. Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν περιορισμοί κατάστασης, το εφικτό με το αποδεκτό ζεύγος ταυτίζονται, όπως στις παραπάνω ενότητες. Συγκεκριμένα, οι περιορισμοί κατάστασης θα έχουν τη μορφή:

$$E\mathbf{h}(x(T)) + E \int_0^T \mathbf{f}(t, x(t), u(t))dt \in \Gamma, \quad (3.38)$$

όπου $\Gamma \subset \mathbb{R}^l$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\mathbf{f} : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^l$. Επιπλέον, ορίζονται τα εξής:

$$\mathbf{h} = (h^1(x), \dots, h^l(x))^T,$$

και

$$\mathbf{f} = (f^1(t, x, u), \dots, f^l(t, x, u))^T,$$

με $h^i, f^i, i = 1 \dots l$ να είναι βαθμωτές συναρτήσεις και

$$h^0(x) = h(x), \quad f^0(t, x, u) = f(t, x, u),$$

όπου οι $h(x), f(t, x, u)$ είναι οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στο συναρτησιακό κόστους της Σχέσης (3.4). Εισάγεται ακόμη η παρακάτω απαίτηση:

(Π4) Το σύνολο Γ είναι κυρτό και κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^l . Επιπρόσθετα, οι $h^i, f^i, i = 1 \dots l$ ικανοποιούν τις απαιτήσεις (Π2), (Π3).

Ακολούθως θα τροποποιηθεί η Στοχαστική Αρχή Μεγίστου στην περίπτωση των περιορισμών στην κατάσταση του συστήματος. Προς αυτή την κατεύθυνση, ορίζεται η παρακάτω Χαμιλτονιανή:

$$H(t, x, u, p, P, \psi^0, \psi) \triangleq -\psi^0 f(t, x, u) - \langle \psi, \mathbf{f}(t, x, u) \rangle + \langle p, b(t, x, u) \rangle + \text{tr}[q^T \sigma(t, x, u)],$$

$$(t, x, u, p, q, \psi^0, \psi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l.$$

(3.39)

Θεώρημα 10. (Στοχαστική Αρχή Μεγίστου με περιορισμούς κατάστασης)

Εστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις (Π0)-(Π4) και ότι το (x^*, u^*) είναι ένα βέλτιστο ζεύγος κατάστασης, ελέγχου για το πρόβλημα με περιορισμούς κατάστασης. Τότε υπάρχει ένα ζεύγος $(\psi^0, \psi) \in \mathbb{R}^{1+l}$ που να ικανοποιεί:

$$\psi^0 \geq 0, |\psi^0|^2 + |\psi|^2 = 1,$$

$$\langle \psi, z - E\mathbf{h}(x^*(T)) + \int_0^T E\mathbf{f}(t, x^*(t), u^*(t))dt \rangle \geq 0, \quad \forall z \in \Gamma. \quad (3.40)$$

Η παραπάνω συνθήκη ονομάζεται «συνθήκη μεταβατικότητας» (*traversality*). Επιπλέον, υπάρχουν οι ακόλουθες προσαρμοσμένες λύσεις:

$$(p(\cdot), q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^m) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^m))^n, \quad (3.41)$$

$$(P(\cdot), Q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; S^m) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; S^m))^n, \quad (3.42)$$

$$(3.43)$$

που επιλύουν τις δύο παρακάτω συμπληρωματικές εξισώσεις αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} dp(t) &= -H_x(t, x^*(t), u^*(t), p(t), q(t), \psi^0, \psi)dt + q(t)dW(t), \\ p(T) &= -\sum_{i=0}^l \psi^i h_x^i(x^*(T)), \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} dP(t) &= -\left\{ b_x(t, x^*(t), u^*(t))^T P(t) + P(t)b_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^n \sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t))^T P(t)\sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t)) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^n \{ \sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t))^T Q_j(t) + Q_j(t)\sigma_x^j(t, x^*(t), u^*(t)) \} + \right. \\ &\quad \left. H_{xx}(t, x^*(t), u^*(t), p(t), q(t), \psi^0, \psi) \right\} dt + \sum_{j=1}^n Q_j(t)dW^j(t), \quad t \in [0, T], \\ p(T) &= -\sum_{i=0}^l \psi^i h_{xx}^i(x^*(T)), \end{aligned} \quad (3.45)$$

έτσι ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} &H(t, x^*(t), u^*(t), p(t), q(t), \psi^0, \psi) - H(t, x^*(t), u, p(t), q(t), \psi^0, \psi) \\ &-\frac{1}{2}tr \{ [\sigma(t, x^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, x^*(t), u)]^T P(t)[\sigma(t, x^*(t), u^*(t)) - \sigma(t, x^*(t), u)] \} \geq 0 \\ &\quad \forall u \in U, t \in [0, T], \mathbf{P} - \sigma.β. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν περιορισμοί κατάστασης (δηλαδή \mathbf{h}, \mathbf{f} είναι μηδενικά και $\Gamma = \mathbb{R}^l$) η συνθήκη μεταβατικότητας δίνει $\psi = 0$ από το οποίο προκύπτει ότι $\psi^0 = 1$ και η Χαμιλτονιανή (3.39) συμπίπτει με την (3.12). Τότε τα δύο θεωρήματα για τη Στοχαστική Μέγιστη Αρχή, με και χωρίς περιορισμούς κατάστασης ταυτίζονται.

3.3 Μέθοδος Επίλυσης 2: Δυναμικός Προγραμματισμός & Hamilton – Jacobi – Bellman Μερική Διαφορική Εξίσωση

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί η επίλυση του προβλήματος το οποίο έχει αναπτυχθεί στην Ενότητα 3.1.1, με χρήση δυναμικού προγραμματισμού. Η εξίσωση του δυναμικού προγραμ-

ματισμού μετατρέπεται σε μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, η οποία ονομάζεται *Hamilton – Jacobi – Bellman (HJB)*. Ιδιαίτερης σημασίας είναι η ύπαρξη μίας αρκετά ομαλής ή αλλιώς «κλασσικής» λύσης για την εξίσωση *HJB*, γεγονός το οποίο ισχύει στην περίπτωση όπου η εξίσωση *HJB* έχει ομοιόμορφα παραβολική μορφή, όπως θα επεξηγηθεί παρακάτω. Ωστόσο, στη γενικότερη περίπτωση η εξίσωση *HJB* δεν επιδέχεται κλασσική λύση και για αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί γενικευμένες λύσεις, όπως οι επονομαζόμενες ως *viscosity* λύσεις που όμως δεν θα μελετηθούν στο πλαίσιο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε αρκετά σημεία της ενότητας αυτής ακολουθείται μία λίγο διαφορετική προσέγγιση παρουσίασης των απαιτήσεων και του προβλήματος σε σχέση με την Ενότητα 3.2, η οποία ωστόσο θα είναι πιο εύκολο να εφαρμοστεί στα προβλήματα που μελετώνται στο Κεφάλαιο 4. Ακόμη, ο δυναμικός προγραμματισμός επιλύει το πρόβλημα της Ενότητας 3.1.1, δηλαδή ορισμένο στην ισχυρή διατύπωση, αλλά με βοηθητική χρήση της ασθενούς διατύπωσης όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια. Τέλος, το περιεχόμενο της παρούσας ενότητας προέρχεται κυρίως από την αναφορά [9], Κεφάλαιο 4 αλλά και από την [5], Κεφάλαιο 4.

3.3.1 Διατύπωση Προβλήματος & Υποθέσεις

Στην ενότητα αυτή θα δοθεί η περιγραφή του προβλήματος καθώς και των υποθέσεων και των απαιτήσεων για την εφαρμογή της εξίσωσης *HJB*, οι οποίες θα είναι πιο συγκεκριμένες/περιοριστικές από την Ενότητα 3.2.1, ωστόσο καλύπτουν πολλές εφαρμογές με έμφαση στα ασύρματα δίκτυα επικοινωνιών (Κεφάλαιο 4). Έστω, ένας χώρος πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ στον οποίο ορίζεται μία n -διάστατη κίνηση *Brown*, $W(t)$, $t \in [t_0, T]$. Για λόγους πληρότητας, επαναλαμβάνεται η ΕΣΔΕ που περιγράφει τη δυναμική της m -διάστατης στοχαστικής ανέλιξης $x = \{x(t)\}_{t \geq t_0}$ της κατάστασης του συστήματος.

$$\begin{aligned} dx(t) &= b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t), \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{3.47}$$

όπου $b : [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma : [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$.

Σχετικά με το πεδίο ελέγχου U , όπου $u \in U$, γίνεται η υπόθεση ότι $U \subset \mathbb{R}^k$ για κάποιο $k \geq 0$ και ακόμη ότι το U είναι κλειστό σύνολο. Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπου αναφέρεται θα θεωρείται επιπρόσθετα ότι το U είναι συμπαγές. Επιπλέον, $T \in (0, \infty)$ δοσμένη σταθερά. Η στοχαστική διαδικασία ελέγχου $u : [t_0, T] \times \Omega \rightarrow U$ θεωρείται ότι είναι \mathcal{F}_s -προοδευτικά μετρήσιμη δηλαδή, για κάθε $s \in [t_0, T]$, η u είναι $\mathcal{B}_s \times \mathcal{F}_s$ -μετρήσιμη (Παράρτημα Α'). Αν

η διαδικασία ελέγχου είναι προοδευτικά μετρήσιμη και επιπλέον ισχύει ότι :

$$E \int_{t_0}^T |u(s)|^l ds < \infty, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (3.48)$$

τότε θα λέγεται αποδεκτή (*admissible*). Για παράδειγμα, αν το σύνολο U είναι συμπαγές και $|u(s)| \leq M$, $M < \infty$, $\forall s \in [t_0, T]$ τότε η Σχέση (3.48) ικανοποιείται αυτομάτως.

Αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί κατάστασης και η μεθοδολογία προσάρτησης τους θα δοθεί παρακάτω στην Ενότητα 3.3.6. Για την ΕΣΔΕ (3.47), θα γίνουν οι παρακάτω παραδοχές. Ορίζεται το σύνολο $Q_0 = [t_0, T) \times \mathbb{R}^m$, και ως \bar{Q}_0 συμβολίζεται το κλείσιμο του Q_0 . Το Q_0 εκφράζει συνδυαστικά το πεδίο τιμών του χρόνου, $[t_0, T)$, και της κατάστασης, \mathbb{R}^m . Θεωρείται ακόμη ότι οι συντελεστές b , σ είναι συνεχείς στο $\bar{Q}_0 \times U$ και ότι οι $b(\cdot, \cdot, u)$, $\sigma(\cdot, \cdot, u)$ είναι της τάξης $C^1(\bar{Q}_0)$ (μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμες στο \bar{Q}_0). Επιπρόσθετα, για κάποια σταθερά $C > 0$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$(a) |b_t| + |b_x| \leq C, \quad |\sigma_t| + |\sigma_x| \leq C, \quad (3.49)$$

$$(b) |b(t, x, u)| \leq C(1 + |x| + |u|), \quad (3.50)$$

$$(b') |\sigma(t, x, u)| \leq C(1 + |x| + |u|), \quad (3.51)$$

όπου, όπως έχει χρησιμοποιηθεί και παραπάνω οι b_t , σ_t είναι οι μερικές παράγωγοι ως προς το χρόνο και οι b_x , σ_x , οι κλίσεις (*gradients*) ως προς το x .

Με βάση τις παραπάνω απαιτήσεις/υποθέσεις, η ΕΣΔΕ (3.47) (που αντιστοιχεί σε ΣΔΕ με τυχαίους συντελεστές (Ενότητα 2.8) όπως έχει επεξηγηθεί στην Ενότητα 3.1.1) έχει μία ισχυρά μοναδική λύση, η οποία είναι \mathcal{F}_s -προοδευτικά μετρήσιμη και έχει συνεχείς τροχιές (προκύπτει από το Θεώρημα 6 στην Ενότητα 2.8, [9]). Το συναρτησιακό κόστους, όμοια με την Ενότητα 3.1.1, ορίζεται ως εξής:

$$J(t_0, x; u) = E \left\{ \int_{t_0}^T f(t, x(t), u(t)) dt + h(T, x(T)) \right\}, \quad (3.52)$$

όπου $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Οι f , h θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν τους παρακάτω περιορισμούς πολυωνυμικής αύξησης:

$$(a) |f(t, x, u)| \leq C(1 + |x|^k + |u|^k), \quad (3.53)$$

$$(b) |h(t, x)| \leq C(1 + |x|^k), \quad (3.54)$$

για κατάλληλες σταθερές C , k .

Ακολούθως θα αναλυθεί περισσότερο το κριτήριο προς ελαχιστοποίηση. Αντί να πραγματοποιείται έλεγχος σε ένα σταθερό χρονικό διάστημα $[t_0, T]$, ο έλεγχος πραγματοποιείται

μέχρι μία χρονική στιγμή που είναι η μικρότερη ανάμεσα στο T και στην έξοδο της x από ένα ανοιχτό σύνολο $O \subset \mathbb{R}^m$. Θεωρείται είτε ότι $O = \mathbb{R}^m$ ή ότι για το σύνολο του O , ϑO ισχύει ότι είναι συμπαγές *manifold* διαστάσεων $m - 1$ και τάξης C^3 . Έστω ότι $Q = [t_0, T] \times O$. Τότε για αρχικά δεδομένα $(t_0, x) \in Q$, όπου $x(t_0) = x$ ορίζεται ο χρόνος διακοπής (Παράρτημα Α’):

$$\tau = \inf\{s : (s, x(s)) \notin Q\}. \quad (3.55)$$

Παρατηρείται ότι η χρονική στιγμή τ είναι η στιγμή εξόδου της $x(s)$ από το O όταν αυτή συμβεί πριν τη χρονική στιγμή T αλλιώς αν $x(s) \in O, \forall s \in [t_0, T]$ τότε $\tau = T$. Επιπρόσθετα, ισχύει πάντα ότι $(\tau, x(\tau)) \in \vartheta^*Q$, όπου $\vartheta^*Q = ([t_0, T] \times \vartheta O) \cup (\{T\} \times O)$. Όταν $O = \mathbb{R}^m$, τότε συμβολίζεται $Q = Q_0$ και $\vartheta^*Q = \{T\} \times \mathbb{R}^m$.

Θεωρώντας αρχικά δεδομένα $(t_0, x) \in Q$ και με βάση τα παραπάνω το συναρτησιακό κόστος διαμορφώνεται ως ακολούθως:

$$J(t_0, x; u) = E_{t_0x} \left\{ \int_{t_0}^{\tau} f(t, x(t), u(t))dt + h(\tau, x(\tau)) \right\}. \quad (3.56)$$

Το πρόβλημα έγκειται στην εύρεση του ελέγχου $u(\cdot)$ (στοχαστική διαδικασία) ώστε να ελαχιστοποιηθεί το J .

Στην περίπτωση ντετερμινιστικού περιβάλλοντος, για την εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού θεωρείται μία οικογένεια βέλτιστων ελέγχων για διαφορετικές αρχικές τιμές χρόνου και κατάστασης πάνω στο δοσμένο μονοπάτι της κατάστασης. Ωστόσο, υπό στοχαστικές συνθήκες, η κατάσταση $x(t)$ πάνω στο μονοπάτι της (για κάποιο t) είναι τυχαία μεταβλητή σε ένα δοσμένο χώρο πιθανότητας. Επίσης, όπως έχει αναφερθεί, ένας αποδεκτός έλεγχος $u(\cdot)$, είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένος γεγονός που σημαίνει ότι, ο ελεγκτής του συστήματος έχει γνώση της κατάστασης του συστήματος ως τη χρονική στιγμή t . Άρα, σε μαθηματικούς όρους, η κατάσταση $x(t)$ δεν είναι ουσιαστικά αβέβαιη στον ελεγκτή τη χρονική στιγμή t . Συγκεκριμένα, αν οριστεί ένα διαφορετικό μέτρο πιθανότητας, το $\mathbf{P}(\cdot | \mathcal{F}_t)$, τότε η $x(t)$ θα είναι σχεδόν σίγουρα ντετερμινιστική ως προς αυτό το μέτρο. Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει η ιδέα της μεταβολής των χώρων πιθανότητας για την εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού υπό στοχαστικές συνθήκες. Για αυτό το λόγο ενώ τελικά στόχος είναι η επίλυση του προβλήματος υπό την ισχυρή διατύπωση, χρησιμοποιείται η ασθενής διατύπωση ως βοηθητικό εργαλείο. Παρακάτω υπεισέρχεται η θεώρηση της ασθενούς διατύπωσης μέσω της χρήσης πολλαπλών συστημάτων πιθανότητας.

Ορίζουμε ένα «σύστημα πιθανότητας αναφοράς» ως την παρακάτω τετράδα:

$$\nu = (\Omega, \{\mathcal{F}_s\}, \mathbf{P}, W), \quad (3.57)$$

όπου $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, $\{\mathcal{F}_s\}$ είναι μία αύξουσα οικογένεια σ -αλγεβρών και $W(\cdot)$ μία \mathcal{F}_s -προσαρμοσμένη κίνηση *Brown* στο $[t_0, T]$.

Ορίζεται ως $A_{t_0\nu}$ ως το σύνολο των \mathcal{F}_s -προοδευτικά μετρήσιμων διαδικασιών ελέγχου $u(\cdot)$ με τιμές στο U , στο διάστημα $[t_0, T]$, που ικανοποιούν τη Σχέση (3.48). Τότε θεωρούνται οι δύο ακόλουθες «συναρτήσεις αξίας». Η πρώτη δίνεται από την:

$$V_\nu(t_0, x) = \inf_{u(\cdot) \in A_{t_0\nu}} J(t_0, x; u), \quad (3.58)$$

και προκύπτει με βάση το βέλτιστο έλεγχο στο σύστημα πιθανότητας αναφοράς ν . Ακολούθως, θεωρείται η συνάρτηση αξίας που προκύπτει ως το ελάχιστο για όλα τα συστήματα πιθανότητας αναφοράς ν :

$$V_{PM}(t_0, x) = \inf_\nu V_\nu(t_0, x). \quad (3.59)$$

Ένας έλεγχος $u^*(\cdot) \in A_{t_0\nu}$ θα λέγεται ν -βέλτιστος, αν $V_\nu(t_0, x) = J(t_0, x; u^*(\cdot))$. Ένας έλεγχος $u^*(\cdot)$ λέγεται βέλτιστη αποδεκτή προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία ελέγχου (ή απλά βέλτιστος έλεγχος) αν $u^*(\cdot) \in A_{t_0\nu^*}$ για κάποιο

$$\nu^* = (\Omega^*, \{\mathcal{F}_s^*\}, \mathbf{P}^*, W^*)$$

και $V_{PM}(t_0, x) = J(t_0, x; u^*)$. Ωστόσο, στην Ενότητα 3.3.5 θα εισαχθούν κατάλληλες προϋποθέσεις ώστε $V_{PM} = V_\nu, \forall \nu$.

3.3.2 Μερική Διαφορική Εξίσωση *Hamilton Jacobi Bellman* & Επίλυση

Ορίζεται το σύνολο S_+^m των συμμετρικών (όπως στην προηγούμενη ενότητα) αλλά μη-αρνητικά ορισμένων πινάκων διαστάσεων $m \times m$. Επιπλέον, ορίζεται ο πίνακας $a = \sigma\sigma^T$ όπου σ είναι ο συντελεστής διάχυσης της ΕΣΔΕ (3.1), καθώς και το ίχνος του πίνακα aA με $A \in S_+^m$, δηλαδή $\text{tra}A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}A_{ij}$, όπου η τελευταία σχέση μπορεί να δειχτεί εύκολα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο A είναι συμμετρικός.

Ορίζεται η παρακάτω Χαμιλτονιανή, της οποίας η σχέση με τη Χαμιλτονιανή που ορίστηκε για την Αρχή Μεγίστου (Σχέση 3.12) θα μελετηθεί στην αμέσως επόμενη υποενότητα. Για $(t, x) \in \bar{Q}$, $p \in \mathbb{R}^m$, $A \in S_+^m$ ορίζεται η Χαμιλτονιανή:

$$H(t, x, p, A) = \sup_{u \in U} \left[-b(t, x, u) \cdot p - \frac{1}{2} \text{tra}(t, x, u)A - f(t, x, u) \right]. \quad (3.60)$$

Αν το σύνολο τιμών ελέγχου U είναι συμπαγές τότε το *supremum* είναι μέγιστο στο U .

Για δοσμένο (t, x, u) , η ποσότητα $-b(t, x, u) \cdot p - \frac{1}{2} \text{tra}(t, x, u)A$ είναι γραμμική συνάρτηση ως προς (p, A) , άρα η $H(t, x, \dots)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^m \times S_+^m$.

Παρακάτω θα χρησιμοποιηθεί το σύνολο $C^{1,2}(B)$, το οποίο αποτελείται από τις συναρτήσεις $\Phi(t, x)$ όπου κάθε Φ και κάθε μία από τις μερικές παραγώγους της $\Phi_t, \Phi_{x_i}, \Phi_{x_i x_j}, i, j = 1 \dots m$ είναι συνεχείς στο $B \subset \mathbb{R}^{m+1}$.

Με χρήση της χαμιλτονιανής της Σχέσης (3.60), η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού (αποδεικνύεται στην Ενότητα 3.3.5) παίρνει τη μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης *Hamilton – Jacobi – Bellman*:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, D_x V, D_x^2 V) = 0, \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (3.61)$$

όπου V είναι η συνάρτηση αξίας (αντιστοιχεί στο V_{PM} αλλά η ισότητα με αυτό εξετάζεται μέσω του θεωρήματος Επιβεβαίωσης παρακάτω) και αποτελεί τον άγνωστο της *HJB* μερικής διαφορικής εξίσωσης. Στη συνέχεια, ορίζονται οι οριακές συνθήκες της μερικής διαφορικής εξίσωσης ως εξής:

$$V(t, x) = h(t, x), \quad \forall (t, x) \in \partial^* Q. \quad (3.62)$$

Ορισμός 24. Η μερική διαφορική εξίσωση *HJB* έχει ομοιόμορφα παραβολική μορφή (*uniformly parabolic*) αν υπάρχει $c > 0$, ώστε για όλα τα $(t, x, u) \in Q \times U$ και $\xi \in \mathbb{R}^m$ να ισχύει:

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, x, u) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2. \quad (3.63)$$

Όταν ισχύει η Σχέση (3.63), τότε από τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης και παραβολικού τύπου, το πρόβλημα οριακών συνθηκών που δίνεται από τις Σχέσεις (3.61), (3.62) έχει μοναδική λύση. Διαφορετικά το πρόβλημα αυτό θα λέγεται ότι είναι εκφυλισμένου παραβολικού τύπου, όπου σε αυτή την περίπτωση δεν αναμένεται ύπαρξη ομαλής λύσης V . Προτού δοθούν περισσότερα αποτελέσματα για την περίπτωση της μερικής διαφορικής εξίσωσης παραβολικού τύπου, θα παρατεθεί το Θεώρημα Επιβεβαίωσης (*Verification Theorem*) που εξετάζει πότε η λύση της *HJB* εξίσωσης ταυτίζεται με τη συνάρτηση αξίας V_{PM} στην περίπτωση ύπαρξης ομαλής λύσης.

Ορίζεται το σύνολο $C_p(B)$ όλων των συνεχών συναρτήσεων Φ στο B που ικανοποιούν πολυωνυμική συνθήκη ανάπτυξης της μορφής $|\Phi(t, x)| \leq K(1 + |x|^l)$ για κάποιες σταθερές K, l .

Θεώρημα 11. (Θεώρημα Επιβεβαίωσης (*Verification Theorem*) ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 157))

Εστω ότι η $w \in C^{1,2}(Q) \cap C_p(\bar{Q})$ είναι λύση του προβλήματος οριακών τιμών που δίνεται από τις Σχέσεις (3.61), (3.62). Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (a) $w(t, x) \leq J(t, x; u)$ για κάθε αποδεκτή προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία ελέγχου $u(\cdot)$ και αρχικά δεδομένα $(t, x) \in Q$.
 (b) Αν υπάρχει $\nu^* = (\Omega^*, \{\mathcal{F}_s^*\}, \mathbf{P}^*, W^*)$ και $u^*(\cdot) \in A_{\nu^*}$ έτσι ώστε:

$$u^*(s) \in \operatorname{argmin} \left[b(s, x^*(s), u) \cdot D_x w(s, x^*(s)) + \frac{1}{2} \operatorname{tra}(s, x^*(s), u) D_x^2 w(s, x^*(s)) + f(s, x^*(s), u) \right], \quad (3.64)$$

για Lebesgue $\times \mathbf{P}^*$ – σ.β. στο $[t, \tau^*] \times \Omega^*$, τότε ισχύει

$$w(t, x) = V_{PM}(t, x) = J(t, x; u^*),$$

όπου $x^*(s)$ είναι η λύση της ΕΣΔΕ (3.47) που αντιστοιχεί στα $u^*(\cdot)$, ν^* , με $x^*(t) = x$ και τ^* είναι ο χρόνος εξόδου της $(s, x^*(s))$ από το Q .

Το Θεώρημα 11 προκύπτει ως ειδική περίπτωση του παρακάτω λήμματος όπου συγκεκριμένα, για το Θεώρημα 11 στο παρακάτω λήμμα ο \mathcal{F}_s -χρόνος διακοπής, θ , αντικαθίσταται από το χρόνο εξόδου τ .

Λήμμα 1. (Λήμμα Επιβεβαίωσης ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 157))

Εστω w όπως στο Θεώρημα 11. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (a) Αν $u(\cdot) \in A_{\nu}$ και θ ένας \mathcal{F}_s -χρόνος διακοπής με $t \leq \theta \leq \tau$, τότε:

$$w(t, x) \leq E_{tx} \left\{ \int_t^\theta f(s, x(s), u(s)) ds + w(\theta, x(\theta)) \right\}. \quad (3.65)$$

- (b) Αν ν^* , $u^*(\cdot) \in A_{\nu^*}$, όπως στο Θεώρημα 11, τότε για κάθε \mathcal{F}_s^* -χρόνος διακοπής θ^* με $t \leq \theta^* \leq \tau^*$:

$$w(t, x) = E_{tx} \left\{ \int_t^{\theta^*} f(s, x^*(s), u^*(s)) ds + w(\theta^*, x^*(\theta^*)) \right\}. \quad (3.66)$$

Στη συνέχεια παρατίθενται αποτελέσματα-θεωρήματα για την περίπτωση όπου ισχύει η ομοιόμορφη παραβολική μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης HJB , όπου αναμένεται το πρόβλημα οριακών συνθηκών που δίνεται από τις Σχέσεις (3.61), (3.62) να έχει μοναδική λύση $w(t, x)$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 11.

Θεώρημα 12. (Περίπτωση φραγμένου O ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 161))

Εστω ότι ισχύουν οι παρακάτω απαιτήσεις:

- Το U είναι συμπαγές.
- Το O είναι φραγμένο με σύνορο, ∂O , ένα *manifold* της κλάσης C^3 .
- Για $g = a, b, f$, η συνάρτηση g και οι μερικές παράγωγοι της $g_t, g_{x_i}, g_{x_i x_j}$ είναι συνεχείς στο $\bar{Q} \times U, i, j = 1 \dots m$.
- $h \in C^3(\bar{Q})$.

Τότε, αν επιπλέον ισχύει η Σχέση (3.63) της ομοιόμορφα παραβολικής μορφής της HJB μερικής διαφορικής εξίσωσης το πρόβλημα των (3.61), (3.62) έχει μοναδική λύση $w \in C^{1,2}(Q) \cap C(\bar{Q})$.

Ακολούθως, εξετάζεται η περίπτωση μη φραγμένου πεδίου τιμών για την κατάσταση x , συγκεκριμένα $O = \mathbb{R}^m$, δηλαδή $Q = Q_0$ κα $\tau = T$, ενώ επίσης θεωρείται ότι $h(T, x) = h(x)$. Στην περίπτωση αυτή, εισάγονται αρκετά περιοριστικές απαιτήσεις σχετικά με τις a, b, f, h . Συγκεκριμένα, θα πρέπει οι a, b, f, h και ορισμένες από τις μερικές παραγώγους τους να είναι φραγμένες.

Θεώρημα 13. (Περίπτωση Q_0 δηλαδή μη φραγμένου πεδίου τιμών κατάστασης ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 162))

Έστω ότι ισχύουν οι παρακάτω απαιτήσεις:

- Το U είναι συμπαγές.
- Οι a, b, f να είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\bar{Q}_0 \times U$.
- Για $g = a, b, f$, η συνάρτηση g και οι μερικές παράγωγοι της $g_t, g_{x_i}, g_{x_i x_j}$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\bar{Q}_0 \times U, i, j = 1 \dots m$.
- $h \in C_b^3(\mathbb{R}^m)$.

όπου $C_b^3(\mathbb{R}^m)$ συμβολίζει τις συναρτήσεις ορισμένες στο \mathbb{R}^m όπου οι ίδιες και οι μερικές παράγωγοί τους ως τρίτου βαθμού είναι συνεχείς και φραγμένες.

Τότε, αν επιπλέον ισχύει η Σχέση (3.63) της ομοιόμορφα παραβολικής μορφής της HJB μερικής διαφορικής εξίσωσης το πρόβλημα της (3.61), με δεδομένα $w(T, x) = h(x)$ (οριακά δεδομένα στο χρόνο) έχει μοναδική λύση $w \in C_b^{1,2}(\bar{Q}_0)$ όπου το $C_b^{1,2}(\bar{Q}_0)$ συμβολίζει τις συναρτήσεις όπου οι ίδιες και οι μερικές παράγωγοί τους ως πρώτου βαθμού για την πρώτη παράμετρο και ως δεύτερου βαθμού για τη δεύτερη παράμετρο είναι συνεχείς και φραγμένες.

Όπως προαναφέρθηκε, οι περιορισμοί που αφορούν στις φραγμένες συναρτήσεις είναι πολύ αυστηροί και είναι δύσκολο να ικανοποιούνται από τις a, b, f, h . Σε αυτήν την περίπτωση, το παρακάτω θεώρημα οδηγεί σε λύση $w \in C^{1,2}(Q_0) \cap C_p(\bar{Q}_0)$ του προβλήματος της Σχέσης (3.61) προσεγγίζοντας τις a, b, f, h με συναρτήσεις που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 13.

Θεώρημα 14. (Περίπτωση Q_0 και μη φραγμένων a, b, f, h ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 162))
 Θεωρείται ότι ο συντελεστής διάχυσης, σ , της ΕΣΔΕ (3.47) δεν εξαρτάται από τον έλεγχο, δηλαδή, $\sigma(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(\cdot, x(\cdot))$. Επιπρόσθετα, έστω φ ένας πίνακας $m \times m$ που έχει αντίστροφο (nonsingular). Επιπρόσθετα, έστω ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

- Το U είναι συμπαγές.
- $b(t, x, u) = B(t, x) + \varphi(t, x)\Theta(t, x, u)$.
- Ισχύει $B, \varphi \in C^{1,2}(\bar{Q}_0)$ και επιπρόσθετα $\varphi, \varphi^{-1}, \varphi_x, B_x$ είναι φραγμένα στο \bar{Q}_0 , ενώ $\Theta \in C^1(\bar{Q}_0 \times U)$ με Θ, Θ_x φραγμένα.
- $f \in C^1(\bar{Q}_0 \times U)$ και επιπλέον τα f, f_x ικανοποιούν μία συνθήκη πολυωνυμικής ανάπτυξης.
- $h \in C^3(\mathbb{R}^m)$ και επιπλέον τα h, h_x ικανοποιούν μία συνθήκη πολυωνυμικής ανάπτυξης.

Τότε, αν επιπλέον ισχύει η Σχέση (3.63), το πρόβλημα της (3.61), με δεδομένα $w(T, x) = h(x)$ έχει μοναδική λύση $w \in C^{1,2}(Q_0) \cap C_p(\bar{Q}_0)$.

3.3.3 Σχέση μεταξύ Hamilton – Jacobi – Bellman & Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου

Αρχικά υπενθυμίζονται οι δύο Χαμιλτονιανές. Η Χαμιλτονιανή που ορίστηκε στην περίπτωση του δυναμικού προγραμματισμού, χωρίς το sup, είναι η εξής:

$$\begin{aligned} H(t, x, u, D_x V, D_x^2 V) &= \left[-b(t, x, u) \cdot D_x V - \frac{1}{2} \text{tra}(t, x, u) D_x^2 V - f(t, x, u) \right] \\ &= \left[-b(t, x, u) \cdot D_x V - \frac{1}{2} \text{tr} \sigma^T(t, x, u) D_x^2 V \sigma(t, x, u) - f(t, x, u) \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Η δεύτερη ισότητα οφείλεται στην εξής παρατήρηση. Έστω $c = [c_{ij}] = \sigma^T$ και $A = [A_{ij}]$. Τότε,

$$\text{tr}(cA\sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m c_{ik} A_{kl} \sigma_{li},$$

και

$$\text{tr}(aA) = \text{tr}(\sigma c A) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sigma_{ik} c_{kl} A_{li} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \sigma_{li} c_{ik} A_{kl} = \text{tr}(cA\sigma).$$

Η Χαμιλτονιανή που ορίστηκε στην περίπτωση της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου έχει

την παρακάτω μορφή, όπου $(p(\cdot), q(\cdot))$ είναι οι συμπληρωματικές διαδικασίες πρώτου βαθμού:

$$H(t, x, u, p, q) = \langle p, b(t, x, u) \rangle + \text{tr}[q^T \sigma(t, x, u)] - f(t, x, u). \quad (3.68)$$

Εξετάζεται η περίπτωση όπου υπάρχει αρκετά ομαλή λύση της εξίσωσης HJB . Επιπλέον πραγματοποιούνται οι δύο παρακάτω υποθέσεις:

- (Π1') (U, d) είναι διαχωρίσιμος και πλήρης μετρικός χώρος και $T > 0$ (d συνάρτηση μέτρου ορισμένη στο χώρο U).
- (Π2') Οι συναρτήσεις $b, \sigma, f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{R}$ αντίστοιχα και $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς και υπάρχει μία σταθερά $L > 0$ ώστε για $\varphi = b, \sigma, f, h$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, \hat{x}, u)| &\leq L |x - \hat{x}|, \quad \forall t \in [t_0, T], x, \hat{x} \in \mathbb{R}^m, u \in U, \\ |\varphi(t, 0, u)| &\leq L, \quad \forall (t, u) \in [t_0, T] \times U. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Μπορεί να παρατηρηθεί εύκολα ότι η (Π2') ουσιαστικά αναφέρεται σε φραγμένη μερική παράγωγο ως προς την κατάσταση, όπως απαιτείται και στο Θεώρημα 13 της προηγούμενης υποενότητας. Η (Π1') ικανοποιείται γενικά από το χώρο $U \in \mathbb{R}^k$, για κάποιο $k > 0$ που θεωρείται στις προηγούμενες ενότητες που μελετούν την εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού.

Θεώρημα 15. (Σχέσεις μεταξύ των Χαμιλτονιανών ([5], Κεφάλαιο 5, Σελ. 250))
Εστω ότι ισχύουν οι απαιτήσεις (Π1'), (Π2'). Εστω η βέλτιστη τετράδα $(x^*(\cdot), u^*(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$ για τη Στοχαστική Αρχή Μεγίστου (Ενότητα 3.2) και έστω ότι $V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^m)$. Τότε:

$$\begin{aligned} V_t(t, x^*(t)) &= H(t, x^*(t), u^*(t), D_x V(t, x^*(t)), D_x^2 V(t, x^*(t))) \\ &= \max_{u \in U} H(t, x^*(t), u, D_x V(t, x^*(t)), D_x^2 V(t, x^*(t))), \text{ a.e. } t \in [0, T], \mathbf{P} - \sigma. \beta. \end{aligned} \quad (3.70)$$

δηλαδή ικανοποιεί την HJB μερική διαφορική εξίσωση. Ακόμη, αν $V \in C^{1,3}([0, T] \times \mathbb{R}^m)$ και η V_{tx} είναι συνεχής τότε:

$$\begin{aligned} D_x V(t, x^*(t)) &= -p(t) \quad \forall t \in [0, T], \mathbf{P} - \sigma. \beta., \\ D_x^2 V(t, x^*(t)) \sigma(t, x^*(t), u^*(t)) &= -q(t) \text{ a.e. } t \in [0, T], \mathbf{P} - \sigma. \beta. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Το παραπάνω θεώρημα στο πρώτο μέρος επεξηγεί τη σχέση μεταξύ της βέλτιστης λύσης της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου και την ικανοποίηση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

HJB , και στο δεύτερο μέρος αναπτύσσει τη σχέση μεταξύ της κλίσης και του Εσσιανού πίνακα της συνάρτησης αξίας με τις συμπληρωματικές διαδικασίες πρώτης τάξης, όπως η τελευταίες ορίζονται στη μέθοδο της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό η ισοδυναμία των δύο Χαμιλτονιανών στις Σχέσεις (3.67), (3.68).

3.3.4 Ιδιότητες της Συνάρτησης Αξίας

Στην Ενότητα αυτή θα μελετηθεί η συμπεριφορά του συναρτησιακού κόστους J και της συνάρτησης αξίας V_{PM} (Ενότητα 3.3.1), σε δύο περιπτώσεις. Καταρχάς, θεωρείται το $Q_0 = [t_0, T) \times \mathbb{R}^m$ ως το διάστημα ελέγχου και επιπλέον θεωρείται ότι δεν ισχύει κατ' ανάγκη η ομοιόμορφη παραβολική μορφή της εξίσωσης HJB . Έτσι, η V_{PM} η οποία θα συμβολίζεται με V στο υπόλοιπο της παρούσας ενότητας, δεν είναι γενικά κλασική λύση της εξίσωσης HJB , με την έννοια $V \in C^{1,2}(Q_0)$. Η πρώτη περίπτωση αφορά τη μελέτη της συμπεριφοράς των J, V , όταν οι f, b (Ενότητα 3.3.1) προσεγγίζονται από τις f_p, b_p , οι οποίες έχουν συμπαγή υποστήριξη όσον αφορά την κατάσταση x . Η δεύτερη περίπτωση αφορά τη μελέτη της συμπεριφοράς των J, V όταν διαταράσσονται οι συντελεστές της ΕΣΔΕ (3.47) ή η συνάρτηση f που ολοκληρώνεται στο συναρτησιακό κόστος. Η δεύτερη περίπτωση είναι πολύ χρήσιμη στην πράξη όπως θα γίνει φανερό στο υπόλοιπο της ενότητας αυτής αλλά και στο Κεφάλαιο 4.

Γίνονται οι παρακάτω παραδοχές, όπου $(t, x) \in Q_0$:

- Το U είναι συμπαγές.
- b, σ να είναι συνεχείς στο $\bar{Q}_0 \times U$ και οι $b(\cdot, \cdot, u), \sigma(\cdot, \cdot, u)$ είναι $C^1(\bar{Q}_0)$ για κάθε $u \in U$.
- Για κατάλληλες σταθερές C_1, C_2 ισχύουν:

$$\begin{aligned} |b_t| + |b_x| &\leq C_1, \quad |\sigma_t| + |\sigma_x| \leq C_1, \\ |b(t, 0, u)| + |\sigma(t, x, u)| &\leq C_2, \end{aligned} \quad (3.72)$$

δηλαδή, η σ είναι φραγμένη.

- Η f είναι συνεχής στο $\bar{Q}_0 \times U$ και για κατάλληλες σταθερές C_3, k ισχύει:

$$|f(t, x, u)| \leq C_3(1 + |x|^k). \quad (3.73)$$

Επιπλέον, θεωρείται ότι $h(T, x(T)) = 0$, χωρίς αυτό να αποτελεί ουσιαστικό περιορισμό [9]. Για τις ΣΔΕ με τυχαίους συντελεστές όπως η ΕΣΔΕ (3.47) ισχύει (παρατίθεται και

στην Ενότητα 2.8 στο Θεώρημα 6):

$$E_{tx} \max_{t \leq s \leq T} |x(s)|^l \leq B_l(1 + |x|^l). \quad (3.74)$$

Η σταθερά B_l εξαρτάται από τις C_1, C_2 , καθώς και από το U και το διάστημα $(T - t)$. Τότε, από τις Σχέσεις (3.73), (3.74), όταν $k = l$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$|J(t, x; u)| \leq M(T - t)(1 + |x|^l), \quad (3.75)$$

όπου $M = C_3(1 + B_l)$, δηλαδή το M εξαρτάται μόνο από τα C_1, C_2, C_3 , καθώς και από το U και το διάστημα $(T - t)$ και όχι από τις συναρτήσεις b, σ, f . Η παραπάνω σχέση προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} |J(t, x; u)| &= \left| E_{tx} \left\{ \int_t^T f(t, x(t), u(t)) dt \right\} \right| = \left| \int_t^T E_{tx} \{ f(t, x(t), u(t)) \} dt \right| \\ &\leq \int_t^T E_{tx} \{ |f(t, x(t), u(t))| \} dt \leq \int_t^T E_{tx} \{ C_3(1 + |x(t)|^l) \} dt \\ &= \int_t^T C_3(1 + E_{tx} \{ |x(t)|^l \}) dt \leq \int_t^T C_3(1 + B_l(1 + |x|^l)) dt \\ &\leq \int_t^T C_3(1 + B_l)(1 + |x|^l) dt \leq M(T - t)(1 + |x|^l), \end{aligned} \quad (3.76)$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος του *Fubini*, η πρώτη ανισότητα προκύπτει από την εφαρμογή της ανισότητας του *Jensen* για την απόλυτη τιμή και η τρίτη ανισότητα προκύπτει με εφαρμογή της Σχέσης (3.74).

Επιπρόσθετα, μέσω του ορισμού της συνάρτησης αξίας V (Ενότητα 3.3.1) και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση προκύπτει αμέσως ένα πολυωνυμικό άνω φράγμα για αυτή:

$$|V(t, x)| \leq M(T - t)(1 + |x|^l), \quad (t, x) \in Q_0. \quad (3.77)$$

Στη συνέχεια θα μελετηθεί η πρώτη περίπτωση. Για κάθε $\rho > 0$ επιλέγεται συνάρτηση $a_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ η οποία να πληρεί τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_\rho(x) \leq 1, \quad |Da_\rho| \leq 2, \\ a_\rho(x) &= 1 \text{ for } |x| \leq \rho, \quad a_\rho(x) = 0 \text{ for } |x| \geq \rho + 1. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Η a_ρ είναι μία *bump* συνάρτηση δηλαδή είναι ταυτόχρονα ομαλή συνάρτηση ($C^\infty(\mathbb{R}^m)$) με συμπαγή υποστήριξη. Ορίζεται $f_\rho = a_\rho f$ και $b_\rho = a_\rho b$. Παρατηρείται ότι οι f_ρ, b_ρ ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες πολυωνυμικής ανάπτυξης με τις f, b αντίστοιχα, λόγω των

ιδιοτήτων του a_ρ . Δοσμένου ενός συστήματος πιθανότητας αναφοράς ν και $u(\cdot) \in A_{t\nu}$ (Ενότητα 3.3.1), η $x_\rho(s)$ είναι η λύση της ΕΣΔΕ

$$dx_\rho(s) = b_\rho(s, x_\rho(s), u(s))ds + \sigma(s, x_\rho(s), u(s))dW(s), \quad (3.79)$$

$x_\rho(t) = x(t) = x$. Επίσης από τη θεωρία των ΣΔΕ [1], [9], ισχύει ότι με πιθανότητα 1

$$x_\rho(s) = x(s), \quad t \leq s \leq \tau_\rho, \quad (3.80)$$

όπου τ_ρ είναι ο χρόνος εξόδου της $(s, x(s))$ από το $Q = [t, T) \times \{|x| \leq \rho\}$

Ισχύει το παρακάτω λήμμα, το οποίο δίνει την απόκλιση των f, f_ρ .

Λήμμα 2. (Απόκλιση των f, f_ρ ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 173))

Υπάρχει μία σταθερά C , ώστε:

$$E_{tx} \int_t^T \left| f_\rho(s, x_\rho(s), u(s)) - f(s, x(s), u(s)) \right| ds \leq C\rho^{-\frac{1}{2}}(1 + |x|^{2k+1})^{\frac{1}{2}}, \quad (3.81)$$

όπου το k είναι ίδιο με της Σχέσης (3.73).

Από το παραπάνω λήμμα, προκύπτει απευθείας (με χρήση της *Jensen*) από τον ορισμό του J ότι:

$$\left| J_\rho(t, x; u) - J(t, x; u) \right| \leq C\rho^{-\frac{1}{2}}(1 + |x|^{2k+1})^{\frac{1}{2}}, \quad (3.82)$$

και όμοια επειδή αυτό ισχύει για κάθε ν και $u(\cdot) \in A_{t\nu}$, από τον ορισμό του V , ισχύει:

$$\left| V_\rho(t, x) - V(t, x) \right| \leq C\rho^{-\frac{1}{2}}(1 + |x|^{2k+1})^{\frac{1}{2}}. \quad (3.83)$$

Στη συνέχεια θα μελετηθεί η δεύτερη περίπτωση, δηλαδή η συμπεριφορά των J, V όταν διαταράσσονται οι συντελεστές της ΕΣΔΕ (3.47) ή η συνάρτηση f . Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα *supremum*. Έστω $\tilde{b}, \tilde{\sigma}, \tilde{f}$ οι τροποποιημένες συναρτήσεις των συντελεστών του προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου. Έστω \tilde{x} η λύση της ΕΣΔΕ:

$$d\tilde{x}(s) = \tilde{b}(s, \tilde{x}(s), u(s))ds + \tilde{\sigma}(s, \tilde{x}(s), u(s))dW(s), \quad (3.84)$$

με $\tilde{x}(t) = x(t) = x$. Προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 16. (Προσεγγίσεις με τροποποιημένους συντελεστές ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 173))

Θεωρείται ότι οι $f, \tilde{f}, \tilde{f}_x$ είναι συνεχείς και ότι οι $f - \tilde{f}, \tilde{f}_x$ είναι φραγμένες στο $\bar{Q}_0 \times U$.

Τότε υπάρχει σταθερά B_1 :

$$E_{tx} \int_t^T \left| \tilde{f}(s, \tilde{x}(s), u(s)) - f(s, x(s), u(s)) \right| ds \leq (T-t) \left\{ \|f - \tilde{f}\| + B_1 \|f_x\| \left[\|b - \tilde{b}\| + \|\sigma - \tilde{\sigma}\| \right] \right\}. \quad (3.85)$$

Όμοια με παραπάνω, για τη V ισχύει:

$$\left| V(t, x) - \tilde{V}(t, x) \right| \leq (T-t) \left\{ \|f - \tilde{f}\| + B_1 \|f_x\| \left[\|b - \tilde{b}\| + \|\sigma - \tilde{\sigma}\| \right] \right\}. \quad (3.86)$$

Το θεώρημα 16 βρίσκει χρήσιμη εφαρμογή στην περίπτωση όπου δεν ισχύει η ομοιόμορφη παραβολική μορφή για την εξίσωση HJB και υπάρχει δυνατότητα μέσω ελαφριάς τροποποίησης των συντελεστών του προβλήματος Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου να προκύψει προσεγγιστική HJB για την οποία να ισχύει η ομοιόμορφη παραβολική μορφή. Το σφάλμα μεταξύ των $V(t, x)$, $\tilde{V}(t, x)$ θα είναι μικρότερο όσο μικρότερη είναι η διαφορά μεταξύ των ζευγών f, \tilde{f} , b, \tilde{b} και $\sigma, \tilde{\sigma}$, όπως φαίνεται στη Σχέση (3.86). Ανάλογα αποτελέσματα εμπεριέχονται στην αμέσως επόμενη πρόταση:

Πρόταση 7. ([5], Κεφάλαιο 4, Σελ. 184)

Έστω ότι ισχύουν οι $(\Pi 1)$, $(\Pi 2)$ για τις $(b^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, f^\varepsilon, h^\varepsilon)$ οι οποίες αποτελούν τροποποιήσεις των (b, σ, f, h) με τις σταθερές στην $(\Pi 2)$ να εφαρμόζονται ομοιόμορφα για όλα τα $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Ορίζεται ως V^ε η συνάρτηση αξίας του τροποποιημένου προβλήματος. Ακόμα γίνεται η παρακάτω υπόθεση:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varphi^\varepsilon(t, x, u) - \varphi(t, x, u)| = 0, \quad (3.87)$$

ομοιόμορφα στο $(t, u) \in [0, T] \times U$ και x σε συμπαγή σύνολα του \mathbb{R}^m , με $\varphi^\varepsilon = b^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, f^\varepsilon, h^\varepsilon$ και $\varphi = b, \sigma, f, h$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V^\varepsilon(s, y) = V(s, y), \quad (3.88)$$

ομοιόμορφα στο (s, y) σε κάθε συμπαγή σύνολο του $[0, T] \times \mathbb{R}^m$.

3.3.5 Εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού σε Στοχαστικές Συνθήκες

Στην παρούσα ενότητα, θα δοθεί η αρχή του δυναμικού προγραμματισμού του *Bellman* ενώ επίσης θα αναλυθεί ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει η μερική διαφορική εξίσωση HJB

από την αρχή δυναμικού προγραμματισμού. Επιπλέον, θα παρατεθούν σχετικά θεωρήματα που διασυνδέουν τη λύση της *HJB* εξίσωσης με την αρχή του δυναμικού προγραμματισμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυστηρές προτάσεις σχετικά με το δυναμικό προγραμματισμό στα πλαίσια του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, διατυπώθηκαν και στο Θεώρημα Επιβεβαίωσης (Θεώρημα 11).

Αρχικά, θα περιγραφεί μέσα σε ένα γενικότερο πλαίσιο, η αρχή δυναμικού προγραμματισμού του *Bellman* (*Bellman's principle of dynamic programming*). Για αυτό, θα πρέπει να εκφραστεί το ελάχιστο της ποσότητας J που είναι υπό ελαχιστοποίηση (Ενότητα 3.3.1) ως συνάρτηση των αρχικών δεδομένων, δηλαδή του αρχικού χρόνου t , και της αρχικής κατάστασης $x(t) = x$. Έστω C ένα σύνολο αποδεκτών ελέγχων. Τότε, ορίζεται $V(t, x) = \min_{u \in C} J(t, x; u)$, όπου η $V(t, x)$ είναι ανάλογη-ισοδύναμη της συνάρτησης αξίας που ορίστηκε στην Ενότητα 3.3.1. Σύμφωνα με αρχή δυναμικού προγραμματισμού του *Bellman* ισχύει ότι για $t \leq t + h \leq T$:

$$V(t, x) = \inf_{u(\cdot) \in C} E_{tx} \left\{ \int_t^{t+h} f(s, x(s), u(s)) ds + V(t+h, x(t+h)) \right\}, \quad (3.89)$$

όπου το δεξιό μέλος μέσα στις αγκύλες αντιπροσωπεύει το τρέχον κόστος από τη χρονική στιγμή t ως τη χρονική στιγμή $t+h$ συν το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος με βέλτιστο έλεγχο στο χρονικό διάστημα $[t+h, T]$ και με αρχικά δεδομένα $(t+h, x(t+h))$. Στην περίπτωση της περιγραφής του προβλήματος της Ενότητας 3.3.1 ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα, όπου $\mathcal{U}^w[t, T]$ είναι το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων της ασθενούς διατύπωσης της Ενότητας 3.1.2:

Θεώρημα 17. (*Αρχή Δυναμικού Προγραμματισμού με σταθερούς χρόνους ([5], Κεφάλαιο 4, Σελ. 180)*)

Έστω ότι ισχύουν οι απαιτήσεις (Π1'), (Π2'), τότε για κάθε $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$, ισχύει:

$$V(t, x) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^w[t, T]} E_{tx} \left\{ \int_t^s f(l, x(l; t, x, u(\cdot)), u(l)) dl + V(s, x(s; t, x, u(\cdot))) \right\}, \quad s \in [t, T]. \quad (3.90)$$

Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται με βάση το Θεώρημα 17 και δίνει την τιμή της V για κάθε αρχική χρονική στιγμή t σε ένα διάστημα ελέγχου $[s, T]$.

Θεώρημα 18. (*V για κάθε αρχική χρονική στιγμή t ([5], Κεφάλαιο 4, Σελ. 180)*)

Έστω ότι ισχύουν οι απαιτήσεις (Π1'), (Π2'), και έστω $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ ένα βέλτιστο ζεύγος κατάστασης, ελέγχου, τότε ισχύει:

$$V(t, x^*(t)) = E \left\{ \int_t^T f(l, x^*(l), u^*(l)) dl + h(x^*(T)) \Big| \mathcal{F}_t^s \right\}, \forall t \in [s, T], \mathbf{P} - \sigma.β. \quad (3.91)$$

όπου \mathcal{F}_t^s είναι η σ -άλγεβρα από τη χρονική στιγμή s ως την t .

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 V(s, y) &= J(s, y; u^*(\cdot)) = \\
 &= E \left\{ \int_s^t f(l, x^*(l), u^*(l)) dl + E \left[\int_t^T f(l, x^*(l), u^*(l)) dl + h(x^*(T)) \middle| \mathcal{F}_t^s \right] \right\} \\
 &= E \int_s^t f(l, x^*(l), u^*(l)) dl + EJ(t, x^*(t); u^*(\cdot)) \\
 &\geq E \int_s^t f(l, x^*(l), u^*(l)) dl + EV(t, x^*(t)) \\
 &\geq V(s, y), \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα είναι λόγω του Θεωρήματος 17, και χάρη στην οποία όλες οι παραπάνω ανισότητες μετατρέπονται σε ισότητες. Συγκεκριμένα $EJ(t, x^*(t); u^*(\cdot)) = EV(t, x^*(t))$ κι επειδή $J(t, x^*(t); u^*(\cdot)) \geq V(t, x^*(t))$, \mathbf{P} – σ.β., τελικά αποδεικνύεται το θεώρημα καθώς προκύπτει $J(t, x^*(t); u^*(\cdot)) = V(t, x^*(t))$, \mathbf{P} – σ.β. (λόγω των δύο παραπάνω σχέσεων). \square

Ακολούθως θα περιγραφεί ο τρόπος που προκύπτει η εξίσωση HJB από το δυναμικό προγραμματισμό με βάση το γενικότερο πλαίσιο που περιγράφηκε παραπάνω.

Ορισμός 25. (Τελεστής $A^u\Phi(t, x)$ ([9], Κεφάλαιο 3))

Έστω διάστημα $I = [t_0, T]$ και Φ μία συνάρτηση με πραγματικές τιμές στο διάστημα $I \times \mathbb{R}^m$, όπου \mathbb{R}^m , είναι το πεδίο τιμών της κατάστασης. Ορίζεται ο παρακάτω τελεστής:

$$A\Phi(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} [E_{tx}\Phi(t+h, x(t+h)) - \Phi(t, x)], \quad (3.93)$$

δεδομένου ότι το όριο υπάρχει, για κάθε $t \in I$, $x(t) = x \in \mathbb{R}^m$. Οι συναρτήσεις Φ για τις οποίες ορίζεται ο παραπάνω τελεστής έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Φ , $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $A\Phi$ είναι συνεχείς στο $I \times \mathbb{R}^m$.
- $E_{tx}|\Phi(T, x(T))| < \infty$, $E_{tx} \int_t^T |A\Phi(s, x(s))| ds < \infty$, $t < T$, $t, T \in I$.
- Ισχύει η *Dynkin* φόρμουλα:

$$E_{tx}\Phi(s, x(s)) - \Phi(t, x) = E_{tx} \int_t^s A\Phi(r, x(r)) dr, \quad t < s. \quad (3.94)$$

Για τις διαδικασίες διάχυσης (που δίνονται από την ΕΣΔΕ (3.47)) ο τελεστής $A^u\Phi(t, x)$ έχει

μορφή που μοιάζει με τη *HJB* εξίσωση ως ακολούθως:

$$A^u \Phi(t, x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tra} D_x^2 \Phi + b D_x \Phi, \quad (3.95)$$

όπου το u χρησιμοποιείται λόγω της ελεγχόμενης στοχαστικής διαδικασίας x .

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό, ξεκινώντας από τη Σχέση δυναμικού προγραμματισμού (3.89), θα προκύψει η *HJB* μερική διαφορική εξίσωση. Θεωρείται σταθερός έλεγχος $u(s) = u$ για το χρονικό διάστημα $t \leq s \leq t + h$ και $x(t) = x$. Επιπρόσθετα, γίνεται η παραδοχή ότι η V ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό. Από τη Σχέση (3.89) ισχύει:

$$\begin{aligned} V(t, x) &\leq E_{tx} \int_t^{t+h} f(s, x(s), u) ds + E_{tx} V(t+h, x(t+h)) \Rightarrow \\ 0 &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} E_{tx} \int_t^{t+h} f(s, x(s), u) ds + \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} [E_{tx} V(t+h, x(t+h)) - V(t, x)], \end{aligned} \quad (3.96)$$

όπου η τελευταία σχέση προέκυψε αφαιρώντας το $V(t, x)$ και από τα δύο μέλη, διαιρώντας με h και παίρνοντας το όριο $h \rightarrow 0$. Ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} E_{tx} \int_t^{t+h} f(s, x(s), u) ds &= f(t, x, u), \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} [E_{tx} V(t+h, x(t+h)) - V(t, x)] &= \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} E_{tx} \int_t^{t+h} A^u V(s, x(s)) ds &= A^u V(t, x), \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο προκύπτει από τη φόρμουλα *Dynkin*. Αντικαθιστώντας τις τελευταίες στη Σχέση (3.96) προκύπτει:

$$0 \leq f(t, x, u) + A^u V(t, x).$$

Αν u^* είναι βέλτιστος έλεγχος τότε πρέπει να ισχύει:

$$V(t, x) = E_{tx} \int_t^{t+h} f(s, x^*(s), u^*(s)) ds + E_{tx} V(t+h, x^*(t+h)),$$

το οποίο χρησιμοποιώντας ίδια λογική με παραπάνω οδηγεί στη σχέση:

$$0 = f(t, x, u^*(t, x)) + A^{u^*} V(t, x).$$

Όποτε γίνεται φανερό ότι καταλήγουμε στην *HJB* εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού:

$$0 = \min_{u \in C} [f(t, x, u) + A^u V(t, x)].$$

Στη συνέχεια, δίνεται ένας πιο ισχυρός ορισμός της αρχής του δυναμικού προγραμματισμού (Σχέση (3.89)) βασιζόμενος στη διατύπωση της Ενότητας 3.3.1, χρησιμοποιώντας χρόνους διακοπής αντί για σταθερές χρονικές στιγμές. Γενικά παρακάτω θεωρείται ότι $V = V_{PM}$.

Ορισμός 26. (Αρχή Δυναμικού Προγραμματισμού με χρόνους διακοπής ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 176))

Θα λέγεται ότι ένα πρόβλημα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα ικανοποιεί την αρχή του δυναμικού προγραμματισμού για κάθε $(t, x) \in Q_0$ όταν ισχύουν τα παρακάτω:

Για κάθε ν , $u(\cdot) \in A_{t\nu}$ και \mathcal{F}_s -χρόνο διακοπής θ ,

$$V(t, x) \leq E_{tx} \left\{ \int_t^\theta f(s, x(s), u(s)) ds + V(\theta, x(\theta)) \right\}. \quad (3.97)$$

Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν ν , $u(\cdot) \in A_{t\nu}$ ώστε:

$$V(t, x) + \delta \geq E_{tx} \left\{ \int_t^\theta f(s, x(s), u(s)) ds + V(\theta, x(\theta)) \right\}, \quad (3.98)$$

για κάθε \mathcal{F}_s -χρόνο διακοπής θ .

Τα δύο παρακάτω θεωρήματα εξασφαλίζουν ότι η λύση της *HJB* είναι αρκετά ομαλή ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού και η βέλτιστη συνάρτηση αξίας να ταυτίζεται σε όλα τα συστήματα πιθανότητας (Ενότητα 3.3.1).

Θεώρημα 19. ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 178)

Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 13 και η Σχέση (3.63). Έστω ότι η λύση w της *HJB* εξίσωσης ικανοποιεί $w \in C_b^{1,2}(\bar{Q}_0)$ όπως στο Θεώρημα 13. Τότε $w = V = V_\nu$, $\forall \nu$ και ισχύει η αρχή του δυναμικού προγραμματισμού (Ορισμός 26).

Θεώρημα 20. ([9], Κεφάλαιο 4, Σελ. 178)

Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της Ενότητας 3.3.4. Τότε $V = V_\nu$, $\forall \nu$, η V είναι συνεχής στο \bar{Q}_0 και ισχύει η αρχή του δυναμικού προγραμματισμού (Ορισμός 26).

3.3.6 Ενσωμάτωση των Περιορισμών Κατάστασης

Στην παρούσα ενότητα περιγράφεται η τεχνική ενσωμάτωσης τελικών περιορισμών κατά την επίλυση των προβλημάτων Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου με τη μέθοδο των Λαγκρασιανών [14], [15] η οποία βρίσκει εφαρμογή κυρίως στη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αναφορικά με τη μέθοδο της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου υπάρχει μεθοδολογία επίλυσης με περιορισμούς κατάστασης που περιγράφεται στην Ενότητα 3.2.3, η οποία περιέχει πολλά στοιχεία της δυϊκής βελτιστοποίησης (με Λαγκρασιανές) αλλά είναι ενσωματωμένη στο πλαίσιο επίλυσης μέσω της Στοχαστικής Αρχής Μεγίστου (δηλαδή με συμπληρωματικές διαδικασίες πρώτου και δεύτερου βαθμού). Ακόμη, παρόλο που στην παρούσα ενότητα περιγράφεται το θεωρητικό υπόβαθρο για την ενσωμάτωση τελικών περιορισμών ($t = T$), στο επόμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 4) με ανάλογο τρόπο θα ενσωματωθούν γενικότεροι περιορισμοί κατάστασης ($\forall t$). Το περιεχόμενο της παρούσας ενότητας προέρχεται από την αναφορά [1], Κεφάλαιο 2, Σελ. 242.

Σύμφωνα με τον ορισμό του προβλήματος στην Ενότητα 3.3.1 στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του

$$J(t, x; u) = E_{tx} \left\{ \int_t^T f(s, x(s), u(s)) ds + h(T, x(T)) \right\}, \quad (3.99)$$

στην οποία προστίθενται οι τελικοί περιορισμοί:

$$E_{tx}[M_i(T, x(T); u)] = 0, \quad i = 1 \dots l, \quad (3.100)$$

όπου $M = (M_1, \dots, M_l) : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$ είναι συνεχής συνάρτηση με $E_{tx}[|M(T, x(T); u)|] < \infty$ για όλα τα (t, x) , $u(\cdot)$.

Στη συνέχεια εισάγεται το αντίστοιχο πρόβλημα αλλά διαμορφωμένο χωρίς περιορισμούς. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^l$ και έλεγχο u ορίζεται:

$$J_\lambda(t, x; u) = E_{tx} \left\{ \int_t^T f(s, x(s), u(s)) ds + h(T, x(T)) + \lambda M(T, x(T); u) \right\}. \quad (3.101)$$

Τότε υπολογίζεται το $J_\lambda = \sup_u J_\lambda(t, x; u(\cdot)) = J_\lambda(t, x; u_\lambda^*(\cdot))$. Έστω Πρ.1 το πρόβλημα με περιορισμούς και Πρ.2 το παραπάνω ορισμένο αντίστοιχο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς.

Αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 21. Θεωρείται ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^l$ μπορούν να βρεθούν J_λ , $u_\lambda^*(\cdot)$ που να επιλύουν το παραπάνω πρόβλημα χωρίς περιορισμούς (Πρ.2). Επιπλέον θεωρείται ότι υπάρχει λ_0 έτσι ώστε

$$E_{tx}[M_i(T, x(T); u_{\lambda_0}^*(\cdot))] = 0, \quad i = 1 \dots l.$$

Τότε, τα J_{λ_0} , $u_{\lambda_0}^*(\cdot)$, επιλύουν το πρόβλημα με περιορισμούς, Πρ.1.

3.3.7 Αριθμητική Προσέγγιση για την Επίλυση των Εξισώσεων *Hamilton Jacobi Bellman*

Στην παρούσα ενότητα θα περιγραφεί ένας τρόπος αριθμητικής επίλυσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης *HJB* μέσω της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών (*finite differences*) για προβλήματα Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα. Η μέθοδος διακριτοποίησης της *HJB* που στηρίζεται στις πεπερασμένες διαφορές αναπτύχθηκε από τον *Kushner* [12], [13], [9]. Αρχικά θα περιγραφεί ο δυναμικός προγραμματισμός σε διακριτό χρόνο, ο οποίος θα αποτελέσει και τη βάση για την εν συνεχεία διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης *HJB*. Σύμφωνα με το σχήμα του *Kushner*, μία ελεγχόμενη διάχυση *Markou* στο \mathbb{R}^m όπως ορίζεται στην Ενότητα 3.1.1, ΕΣΔΕ (3.1), προσεγγίζεται από μία ελεγχόμενη Μαρκοβιανή αλυσίδα σε πλέγμα στον \mathbb{R}^m με μεταβάσεις μόνο στους κοντινότερους γείτονες. Τότε, η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού σε διακριτό χρόνο για την ελεγχόμενη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, ισοδυναμεί με τη μερική διαφορική εξίσωση *HJB* αν αντικατασταθούν στην τελευταία οι μερικές παράγωγοι πρώτου και δεύτερου βαθμού με κατάλληλα πηλίκα πεπερασμένων διαφορών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η χρήση πεπερασμένων διαφορών για την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι μία μέθοδος αρκετά απλή και εδραιωμένη στη βιβλιογραφία [10], ωστόσο μέσα από το σχήμα του *Kushner* η διακριτοποίηση της *HJB* στη μορφή που απαιτείται από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών προκύπτει μέσα από την προσέγγιση της Μαρκοβιανής διάχυσης με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και όχι με την απευθείας αντικατάσταση των μερικών παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές. Το περιεχόμενο της παρούσας ενότητας προέρχεται από το Κεφάλαιο IX του βιβλίου [9], εκτός και αν αναφερθεί διαφορετικά.

Δυναμικός Προγραμματισμός σε Διακριτό Χρόνο

Θεωρείται ότι το σύνολο των καταστάσεων είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο και συμβολίζεται με Σ , ενώ τα διακριτά χρονικά βήματα στα οποία πραγματοποιείται ο έλεγχος συμβολίζονται με τον δείκτη l , που έχει τιμές $l = k, k + 1, \dots, M$. Η κατάσταση και ο έλεγχος στο χρονικό βήμα l συμβολίζονται με x^l , u^l αντίστοιχα, και είναι διακριτού χρόνου στοχαστικές διαδικασίες με $x^l \in \Sigma$, $u^l \in U$. Η μεταβολή της κατάστασης x σε μία άλλη κατάσταση y , στο χρονικό βήμα l και υπό τον έλεγχο u^l , εξαρτάται από την πιθανότητα μετάβασης $p_l^{u^l}(x, y)$. Για διευκόλυνση στην παρουσίαση, όταν είναι δυνατό, αντί για x^l , u^l θα γράφεται x, u , και θα διευκρινίζεται η χρονική στιγμή μέσα από τις συναρτήσεις που θα εμπεριέχουν τα x, u . Ακολουθώντας την ασθενή διατύπωση όπως στις Ενότητες 3.1.2, 3.3.1, ορίζεται το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων συστήματος ως εξής:

Ορισμός 27. (Αποδεκτό σύστημα ελέγχου σε διακριτό χρόνο)

Ένα σύστημα ελέγχου $\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_l, x, u)$ θα λέγεται αποδεκτό όταν ισχύουν τα εξής:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ είναι ένας χώρος πιθανότητας.
- \mathcal{F}_l είναι μία αύξουσα οικογένεια σ -αλγεβρών, με $l = k, k+1, \dots, M$ και $\mathcal{F}_l \subset \mathcal{F}$.
- Η αρχική κατάσταση (χρονικό βήμα k) είναι $x^k = x$ και το x^l είναι \mathcal{F}_l -μετρήσιμο για κάθε χρονικό βήμα $l = k, k+1, \dots, M-1$.
- Το u^l είναι \mathcal{F}_l -μετρήσιμο για κάθε χρονικό βήμα $l = k, k+1, \dots, M-1$.
- $P(x^{(l+1)} = y) = p_l^u(x^l, y)$, \mathbf{P} -σ.β. για $l = k, k+1, \dots, M-1$.

Το κριτήριο προς βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) στο διακριτό χρόνο (Ενότητα 3.1.1 για το συνεχή χρόνο) έχει τη μορφή:

$$J^k(x; \pi) = E_{kx} \left\{ \sum_{l=k}^{M-1} f^l(x^l, u^l) + h(x^M) \right\}, \quad (3.102)$$

όπου γίνονται οι παρακάτω παραδοχές:

- Υπάρχει K ώστε $|f^l(x, u)| \leq K$, $|h(x)| \leq K$, $\forall x \in \Sigma$, $u \in U$, $l = k, k+1, \dots, M-1$.
- Το πεδίο τιμών του ελέγχου U είναι συμπαγές.
- $p_l^u(x, y)$ είναι συνεχής στο U για κάθε $x, y \in \Sigma$.
- Για κάθε $x \in \Sigma$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο Γ_x έτσι ώστε $p_l^u(x, y) = 0$ για κάθε $y \notin \Gamma_x$.

Η συνάρτηση αξίας ορίζεται κατά αναλογία με το συνεχές σύστημα ως εξής:

$$V^k(x) = \inf_{\pi} J^k(x; \pi), \quad x \in \Sigma. \quad (3.103)$$

Τέλος, η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού σε διακριτό χρόνο παίρνει τη μορφή:

$$V^k(x) = \min_{u \in U} \left[\sum_{y \in \Sigma} p_k^u(x, y) V^{k+1}(y) + f^k(x, u) \right], \quad k < M, \quad (3.104)$$

με τελικά δεδομένα $V^M(x) = h(x)$.

Προσέγγιση των Εξισώσεων HJB με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών, $m = 1$

Θεωρείται ότι ισχύουν οι παραδοχές της Ενότητας 3.3.1 για τις $f(t, x, u)$, $b(t, x, u)$, $\sigma(t, x, u)$, $h(x)$ και επιπρόσθετα ικανοποιούνται και οι παρακάτω απαιτήσεις:

- Το πεδίο τιμών του ελέγχου U είναι συμπαγές.
- Οι b , σ , f , f_x , f_t είναι φραγμένες στο $Q_0 \times U$.

Θα εξεταστούν δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη θεωρείται ότι το ζεύγος (κατάστασης, χρόνου) ανήκει στο Q_0 με οριακές συνθήκες στην τελική χρονική στιγμή (δηλαδή στο σύνορο του χρόνου, T) που δίνονται από τη σχέση $V(T, x) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$. Στη δεύτερη περίπτωση θεωρείται ότι το ζεύγος (κατάστασης, χρόνου) ανήκει στο Q και οι οριακές συνθήκες είναι της μορφής $V(t, x) = h(t, x)$ για (t, x) πάνω στο $\partial^* Q$.

Ακολούθως, θα περιγραφεί η πρώτη περίπτωση, σε μία διάσταση ($m = 1$) όσον αφορά την κατάσταση, ενώ στη συνέχεια, στην ίδια υποενότητα περιγράφεται η δεύτερη περίπτωση. Η επέκταση σε περισσότερες διαστάσεις θα γίνει στην επόμενη υποενότητα. Αρχικά θα κατασκευαστεί η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου στο \mathbb{R} που προσεγγίζει τη διάχυση της ΕΣΔΕ (3.47).

Για τη διακριτοποίηση ορίζεται ως $h > 0$ το χρονικό βήμα και ως $\delta > 0$ το χωρικό βήμα τα οποία δεν προσδιορίζονται ανεξάρτητα μεταξύ τους, όπως θα δειχτεί παρακάτω. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου έχει ως χώρο καταστάσεων το εξής μονοδιάστατο πλέγμα (που είναι άπειρο λόγω του Q_0):

$$\Sigma_0^h = \{x = j\delta : j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (3.105)$$

Επιπλέον ορίζονται τα θετικά και αρνητικά τμήματα του συντελεστή τάσης (*drift coefficient*), b , της ΕΣΔΕ (3.47), που δηλώνονται ως b^+ , b^- αντίστοιχα:

$$b^+(t, x, u) = \max\{b(t, x, u), 0\}, \quad (3.106)$$

$$b^-(t, x, u) = \max\{-b(t, x, u), 0\}. \quad (3.107)$$

$$(3.108)$$

Επίσης, σε μία διάσταση, ισχύει ότι $a(t, x, u) = \sigma^2(t, x, u)$.

Η δυναμική της ελεγχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου περιγράφεται από τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης (το l δηλώνει τον αριθμό του χρονικού (διακριτού)

βήματος και t^l τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές (χρόνος) για αυτά τα βήματα):

$$\begin{aligned} p_l^u(x, x + \delta) &= \frac{h}{\delta^2} \left[\frac{a(t^l, x, u)}{2} + \delta b^+(t^l, x, u) \right], \\ p_l^u(x, x - \delta) &= \frac{h}{\delta^2} \left[\frac{a(t^l, x, u)}{2} + \delta b^-(t^l, x, u) \right], \\ p_l^u(x, x) &= 1 - p_l^u(x, x - \delta) - p_l^u(x, x + \delta), \end{aligned} \quad (3.109)$$

όπου $p_l^u(x, y) = 0$, αν $y = x + j\delta$, $j \neq 0, \pm 1$, δηλαδή οι μεταβάσεις σε ένα χρονικό βήμα γίνονται μόνο προς τους κοντινότερους γείτονες. Ισχύει ότι $p_l^u(x, x \pm \delta) \geq 0$, ωστόσο επειδή πρέπει να ισχύει και $p_l^u(x, x) \geq 0$ περιορίζονται και συσχετίζονται οι δυνατές τιμές που μπορούν να λάβουν τα βήματα h , δ . Ικανή συνθήκη για τα h , δ ώστε να ισχύει $p_l^u(x, x) \geq 0$ είναι η εξής:

$$h[a(t^l, x, u) + \delta|b(t^l, x, u)|] \leq \delta^2, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R} \times U, \quad t^l \leq T. \quad (3.110)$$

Οπότε επιλέγεται $\delta = \delta(h)$ ώστε να ισχύει η συνθήκη της Σχέσης (3.110). Σημειώνεται ότι οι πιθανότητες μετάβασης θα δίνονται ισοδύναμα και ως προς τη χρονική στιγμή αντί για τον αριθμό χρονικού βήματος, π.χ., p_t^u αντί για p_l^u .

Το κόστος προς ελαχιστοποίηση εξαρτάται από το h και εκφράζεται ως εξής:

$$J^h(t^k, x; \pi) = E_{kx} \left\{ \sum_{l=k}^{M-1} hf(t^l, x^l, u^l) + h(x^M) \right\}, \quad (3.111)$$

δηλαδή όμοια με τη Σχέση (3.102) για το διακριτό δυναμικό προγραμματισμό, με τη διαφορά ότι εμπεριέχεται η ποσότητα $hf(t^l, x^l, u^l)$.

Σχετικά με την αρχική χρονική στιγμή, η t_0 (Ενότητα 3.3.1) επαναπροσαρμόζεται στην $t_0^h = T - Mh$ όπου $t_0^h \rightarrow t_0$, $h \downarrow 0$. Το Q_0 σε διακριτοποιημένη μορφή γράφεται ως εξής (αντί για t^k , $k = 0, \dots, M$ γράφουμε t από εδώ και κάτω):

$$Q_0^h = \{(t, x) : t = t_0^h + kh, k = 0, 1, \dots, M, x \in \Sigma_0^h\}. \quad (3.112)$$

Γενικά ένα χρονικό βήμα της ελεγχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα h για την ΕΣΔΕ (3.47). Η συνάρτηση αξίας συμβολίζεται με $V^h(t, x) = \inf_{\pi} J^h(t, x; \pi)$, $(t, x) \in Q_0^h$.

Στην περίπτωση της ελεγχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου με πιθανότητες μετάβασης που δίνονται στη Σχέση (3.109), η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού

διακριτού χρόνου (Σχέση 3.104) παίρνει τη μορφή:

$$V^h(t, x) = \min_{u \in U} \left[p_t^u(x, x + \delta)V^h(t + h, x + \delta) + p_t^u(x, x - \delta)V^h(t + h, x - \delta) + p_t^u(x, x)V^h(t + h, x) + hf(t, x, u) \right], \quad (3.113)$$

με τελική συνθήκη $V(T, x) = h(x)$ (όπως έχει προαναφερθεί για την πρώτη περίπτωση). Στόχος είναι τώρα, η μετατροπή της παραπάνω εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού διακριτού χρόνου σε μία ισοδύναμη μορφή που να μοιάζει με την HJB εξίσωση. Προς αυτή την κατεύθυνση αντικαθίστανται οι πιθανότητες μετάβασης από τις τιμές τους από τη Σχέση (3.109) και διαιρούνται οι όροι με h . Επιπρόσθετα, ορίζονται τα παρακάτω ηλίκα πεπερασμένων διαφορών για μία οποιαδήποτε συνάρτηση $W(t, x)$:

$$\begin{aligned} \Delta_x^+ W &= \frac{W(t, x + \delta) - W(t, x)}{\delta}, \\ \Delta_x^- W &= \frac{W(t, x) - W(t, x - \delta)}{\delta}, \\ \Delta_x^2 W &= \frac{W(t, x + \delta) + W(t, x - \delta) - 2W(t, x)}{\delta^2}, \\ \Delta_t^- W &= \frac{W(t, x) - W(t - h, x)}{h}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Το πρώτο και το δεύτερο ηλίκο, ονομάζονται εμπρόσθιο και οπισθοδρομικό ηλίκο διαφορών πρώτης τάξης αντίστοιχα, το τρίτο είναι το ηλίκο διαφορών δεύτερης τάξης και το τελευταίο είναι το οπισθοδρομικό ηλίκο διαφορών πρώτης τάξης για το χρόνο. Αφού αντικατασταθούν στη Σχέση (3.113), οι πιθανότητες μετάβασης από τη Σχέση (3.109) και με κατάλληλη αναδιάταξη όρων εύκολα προκύπτουν τα παραπάνω ηλίκα τα οποία και αντικαθίστανται με τους συμβολισμούς τους (με V όπου W). Επιπλέον, ο χρόνος t αντικαθίσταται από τον $t - h$ και ο $t + h$ από τον t . Έτσι προκύπτει η παρακάτω εξίσωση που είναι όμοια στη μορφή με τη HJB .

$$-\Delta_t^- V^h + \bar{H}(t, x, \Delta_x^+ V^h, \Delta_x^- V^h, \Delta_x^2 V^h) = 0, \quad (3.115)$$

όπου η Χαμιλτονιανή \bar{H} ορίζεται ως εξής:

$$\bar{H}(t, x, p^+, p^-, A) = \max_{u \in U} \left[-b^+(t, x, u)p^+ + b^-(t, x, u)p^- - \frac{a(t, x, u)}{2}A - f(t, x, u) \right]. \quad (3.116)$$

Παρατήρηση 8. Παρατηρείται ότι αν $p^+ = p^- = p$, τότε, $\bar{H}(x, p, p, A) = H(x, p, A)$, όπου η H ορίστηκε στην Ενότητα 3.3.2, Σχέση (3.60).

Από τη *HJB* στη Σχέση (3.115) προκύπτει ο παρακάτω οπισθοδρομικός τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης αξίας V^h .

$$V^h(t-h, x) = V^h(t, x) - h\bar{H}(t, x, \Delta_x^+ V^h, \Delta_x^- V^h, \Delta_x^2 V^h), \quad (3.117)$$

όπου τα $\Delta_x^+ V^h$, $\Delta_x^- V^h$, $\Delta_x^2 V^h$, εξαρτώνται μόνο από το (t, x) , οπότε η τιμή της V^h στο $t-h$ εκφράζεται μέσω των τιμών της V^h τη χρονική στιγμή t . Για αυτό το λόγο, η φόρμουλα (3.117) ονομάζεται άμεση (*explicit*) [10] καθώς οι τιμές της για τη χρονική στιγμή $t-h$ δίνονται άμεσα (οπισθοδρομικά) από τις τιμές της V^h για τη χρονική στιγμή t , χωρίς να απαιτείται η επίλυση κάποιου συστήματος (γραμμικών) εξισώσεων. Το τελευταίο είναι απαραίτητο στην περίπτωση μίας έμμεσης (*implicit*) φόρμουλας στην οποία οι τιμές της V^h για τα ζεύγη (χρόνου, κατάστασης) τη χρονική στιγμή t εξαρτώνται από τις τιμές της για γειτονικές καταστάσεις την ίδια χρονική στιγμή (π.χ., υπάρχουν τιμές της V^h στις χρονικές στιγμές t , $t-h$ και στα δύο μέλη της φόρμουλας). Η έμμεση φόρμουλα, παρόλο που έχει πιο σύνθετη διαδικασία επίλυσης, μπορεί να αποβεί χρήσιμη για την αύξηση της τάξεως σύγκλισης της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών ([10], σελ. 91) και έχει το πλεονέκτημα της δυνατότητας χρήσης μεγαλύτερου χρονικού βήματος. Τέλος, η έμμεση και η άμεση φόρμουλα μπορούν να συνδυαστούν μέσω ενός πιθανοτικού πλαισίου ([12], σελ. 127).

Παρατήρηση 9. Μπορεί να αποδειχτεί ότι $V^h \rightarrow V$ καθώς $h \rightarrow 0$ [13], [12], [9].

Ακολούθως η πρώτη περίπτωση θα επεκταθεί στη δεύτερη περίπτωση όπου θεωρείται ότι το ζεύγος κατάστασης, χρόνου ανήκει στο Q και τα οριακά δεδομένα είναι της μορφής $V(t, x) = h(t, x)$ για (t, x) πάνω στο ϑ^*Q . Τότε, το σύνολο Σ_0^h πρέπει να αντικατασταθεί από ένα πεπερασμένο υποσύνολο Σ^h .

$$\Sigma^h = \{x \in \Sigma_0^h : |x| \leq B_h\}. \quad (3.118)$$

Το B_h λέγεται και παράμετρος αποκοπής και η εισαγωγή της γίνεται και για υπολογιστικούς λόγους. Τότε, η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού διακριτού χρόνου (Σχέση 3.113) θα ισχύει στο εσωτερικό του συνόλου Σ^h , ενώ θα πρέπει να καθοριστούν συνθήκες για το σύνορο του Σ^h . Συγκεκριμένα, οι πιθανότητες μετάβασης (που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού) $p_t^u(B_h, B_h + \delta)$, $p_t^u(-B_h, -B_h - \delta)$, $\forall t, u$ θα πρέπει να ορίζονται ως μηδενικές.

Επειδή υπάρχει μόνο μία διάσταση, ισχύει $Q = [t_0, T] \times (x_0, x_1)$ (Ενότητα 3.3.1). Ορίζεται $\delta = \frac{1}{N}(x_1^h - x_0^h)$ με x_1^h , x_0^h προσεγγίσεις των x_1, x_0 και N αρκετά μεγάλος ακέραιος. Τότε,

$$\Sigma^h = \{x_0^h + j\delta : j = 0, 1, \dots, N\}. \quad (3.119)$$

Για την ελεγχόμενη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου που προσεγγίζει τη διάχυση οι πιθανότητες μετάβασης σε όλα τα εσωτερικά σημεία του Σ^h ($1 \leq j \leq N - 1$) ορίζονται όπως στη Σχέση (3.109), ενώ τα άκρα του Σ^h λαμβάνονται ως απορροφητικές καταστάσεις, δηλαδή $p_t^u(x_0^h, x_0^h) = p_t^u(x_1^h, x_1^h) = 1, \forall t, u$. Το συναρτησιακό κόστους παίρνει τη μορφή:

$$J^h(t^k, x; \pi) = E_{kx} \left\{ \sum_{l=k}^{\eta-1} hf(t^l, x^l, u^l) + h(t^\eta, x^\eta) \right\}, \quad (3.120)$$

όπου το η είτε είναι η πρώτη στιγμή (ο αριθμός του διακριτού βήματος) όπου $x = x_0^h$ ή $x = x_1^h$ (άκρο του Σ^h) ή $\eta = M$. Σχετικά με την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού διακριτού χρόνου (Σχέση 3.113) ικανοποιείται από τη $V^h(t, x)$ στο εσωτερικό του συνόλου Σ^h αλλά εισάγονται και οι επιπλέον περιορισμοί:

$$V^h(t, x) = h(t, x), \quad (t, x) \in ([t_0, T] \times \{x_0^h, x_1^h\}) \cup (\{T\} \times [x_0^h, x_1^h]).$$

Παρατήρηση 10. Όταν $B_h \rightarrow \infty$ για $h \rightarrow 0$, αποδεικνύεται στο [9], Κεφάλαιο IX (παρόμοια ανάλυση υπάρχει στην Ενότητα 3.3.4 της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας για την ακριβή λύση V , όχι για εκείνη που προκύπτει αριθμητικά μέσω της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών), ότι η επίδραση της αποκοπής στον υπολογισμό της V^h είναι πολύ μικρή συγκριτικά με την περίπτωση του Q_0 , αν ισχύουν τα εξής: (i) η κατάσταση λαμβάνει τιμές σε συμπαγές σύνολο, (ii) όλες οι παραδοχές στην αρχή της ενότητας. Το γεγονός αυτό είναι σημαντικό καθώς η αποκοπή είναι απαραίτητη για υπολογιστικούς σκοπούς δηλαδή για την αριθμητική επίλυση με χρήση υπολογιστή.

Προσέγγιση των Εξισώσεων HJB με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών, $m > 1$

Στη συνέχεια, θα περιγραφεί η αριθμητική επίλυση της *HJB* σε πολλές διαστάσεις στο χώρο της κατάστασης, ή πιο συγκεκριμένα θα περιγραφούν οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν στη μεθοδολογία για τη μία διάσταση στην περίπτωση των πολλαπλών διαστάσεων. Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση του Q_0 .

Ο συντελεστής $b = (b_1, \dots, b_m)$ της ΕΣΔΕ (3.47), έχει πλέον $m > 1$ διαστάσεις και ο πίνακας $a = \sigma \sigma^T$ είναι διαστάσεων $m \times m$. Όπως στην περίπτωση της μίας διάστασης, ορίζονται τα θετικά και αρνητικά τμήματα του συντελεστή τάσης, b , για κάθε μία συνιστώσα του, δηλαδή, b_i^+, b_i^- , $i = 1, \dots, m$. Ο πίνακας $a(t, x, u) = [a_{ij}(t, x, u)]$, $i, j = 1, \dots, m$ είναι μη αρνητικά ορισμένος, δηλαδή $a_{ii}(t, x, u) \geq 0, \forall i$, ενώ για $i \neq j$, ορίζονται ως a_{ij}^+, a_{ij}^- τα

θετικά και τα αρνητικά τμήματα του a_{ij} . Γίνεται η παραδοχή ότι

$$a_{ii}(t, x, u) - \sum_{j \neq i} |a_{ij}(t, x, u)| \geq 0, \quad \forall i, \quad (3.121)$$

και η συνθήκη για τα h, δ παίρνει την εξής μορφή:

$$h \sum_{i=1}^m \left[a_{ii}(t, x, u) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |a_{ij}(t, x, u)| + \delta |b_i(t, x, u)| \right] \leq \delta^2, \\ \forall (x, u) \in \mathbb{R}^m \times U, \quad \forall t_0 \leq t \leq T, \quad (3.122)$$

η οποία γίνεται ίδια με την Συνθήκη (3.110) όταν $m = 1$. Επιπλέον, δεν είναι περιοριστική συνθήκη όπως υποστηρίζεται και στην αναφορά [9]. Οι δύο παραπάνω απαιτήσεις μπορούν να μετατραπούν σε αντίστοιχες ασθενέστερες στην περίπτωση όπου το χωρικό βήμα h έχει διαφορετική τιμή ως προς κάθε κατεύθυνση ή όταν πραγματοποιηθεί περιστροφή των συντεταγμένων ([12], Κεφάλαιο 7).

Παρατήρηση 11. (Εξάρτηση μεταξύ του χωρικού & του χρονικού βήματος)

Στην περίπτωση των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ντετερμινιστικά συστήματα χωρίς έλεγχο, ένας τρόπος εξέτασης της σύγκλισης της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών στη ακριβή λύση είναι το κριτήριο σταθερότητας κατά Von Neumann (Von Neumann stability), ([10], Παράρτημα C). Από την εφαρμογή του κριτηρίου Von Neumann δύναται να προσδιοριστεί η σχέση μεταξύ των βημάτων χώρου και χρόνου ώστε να επέρχεται σύγκλιση, αν αυτό είναι δυνατό. Το κριτήριο σταθερότητας κατά Von Neumann μπορεί να δώσει επίσης μία διαίσθηση για τη Σχέση (3.122). Για παράδειγμα, έστω η εξίσωση θερμότητας:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \text{tr} a D_x^2 V = 0, \quad (3.123)$$

όπου $a_{ii} = \sigma^2$, $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, σ είναι μία πραγματική σταθερά, και $b = 0$. Τότε η Σχέση (3.122) παίρνει τη μορφή $\frac{h\sigma^2 m}{\delta^2} \leq 1$ που ταυτίζεται με το αποτέλεσμα που προκύπτει εφαρμόζοντας το κριτήριο σταθερότητας κατά Von Neumann ([12], Κεφάλαιο 7).

Έστω η βάση του \mathbb{R}^m , $e = (e_1, \dots, e_m)$. Τότε, η κατάσταση x γράφεται ως εξής:

$$x = (x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i e_i. \quad (3.124)$$

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου έχει ως χώρο καταστάσεων το πολυδιάστατο πλέγ-

μα (που είναι άπειρο λόγω του Q_0):

$$\Sigma_0^h = \{x = \delta \sum_{i=1}^m j_i e_i\}, \quad (3.125)$$

όπου j_i , $i = 1 \dots m$ είναι ακέραιοι. Η δυναμική της ελεγχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου περιγράφεται από τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης (το l δηλώνει τα χρονικά (διακριτά) βήματα και t^l τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές για αυτά τα βήματα):

$$\begin{aligned} p_l^u(x, x \pm \delta e_i) &= \frac{h}{2\delta^2} \left[a_{ii}(t^l, x, u) - \sum_{j \neq i} |a_{ij}(t^l, x, u)| + 2\delta b_i^\pm(t^l, x, u) \right], \\ p_l^u(x, x + \delta e_i \pm \delta e_j) &= \frac{h}{2\delta^2} a_{ij}^\pm(t^l, x, u), \quad i \neq j, \\ p_l^u(x, x - \delta e_i \pm \delta e_j) &= \frac{h}{2\delta^2} a_{ij}^\mp(t^l, x, u), \quad i \neq j, \\ p_l^u(x, x) &= 1 - \frac{h}{\delta^2} \sum_{i=1}^m \left[a_{ii}(t^l, x, u) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |a_{ij}(t^l, x, u)| + \delta |b_i(t^l, x, u)| \right], \end{aligned} \quad (3.126)$$

και $p_l^u(x, y) = 0$, για κάθε άλλο y .

Στη συνέχεια αφού κατασκευάστηκαν οι πιθανότητες μετάβασης της ελεγχόμενης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου, γράφεται η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού σε διακριτό χρόνο μέσα από την οποία με κατάλληλες πράξεις και αντικαταστάσεις θα προκύψει εξίσωση *HJB* ανάλογη της Σχέσης (3.115) που επιλύεται αριθμητικά-επαναληπτικά. Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι:

$$V^h(t, x) = \min_{u \in U} \left[\sum_{y \in \Sigma_0^h} p_t^u(x, y) V^h(t + h, y) + hf(t, x, u) \right]. \quad (3.127)$$

Στη Σχέση (3.127), αντικαθίστανται οι πιθανότητες μετάβασης από τη Σχέση (3.126), αναδιοργανώνονται οι όροι, διαιρείται με h και επιπλέον αντικαθιστώνται τα πηλίκα διαφορών που ορίζονται αμέσως παρακάτω. Για μία οποιαδήποτε συνάρτηση $W(t, x)$ και $i = 1, \dots, m$ ορίζονται τα παρακάτω πηλίκα διαφορών (εμπρόσθια και οπισθοδρομικά) πρώτης και δεύτερης

τάξης:

$$\Delta_{x_i}^{\pm} W = \delta^{-1} [W(t, x \pm \delta e_i) - W(t, x)], \quad (3.128)$$

$$\Delta_{x_i}^2 W = \delta^{-2} [W(t, x + \delta e_i) + W(t, x - \delta e_i) - 2W(t, x)], \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{x_i x_j}^+ W &= \frac{1}{2} \delta^{-2} [2W(t, x) + W(t, x + \delta e_i + \delta e_j) + W(t, x - \delta e_i - \delta e_j)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta^{-2} [W(t, x + \delta e_i) + W(t, x - \delta e_i) + W(t, x + \delta e_j) + W(t, x - \delta e_j)], \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{x_i x_j}^- W &= -\frac{1}{2} \delta^{-2} [2W(t, x) + W(t, x + \delta e_i - \delta e_j) + W(t, x - \delta e_i + \delta e_j)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta^{-2} [W(t, x + \delta e_i) + W(t, x - \delta e_i) + W(t, x + \delta e_j) + W(t, x - \delta e_j)]. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Μετά τις πράξεις και αντικαταστάσεις που περιγράφονται παραπάνω, η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού της Σχέσης (3.127) οδηγείται σε μία μορφή όμοια με τη *HJB*, στην οποία οι μερικές παράγωγοι της *HJB* της Σχέσης (3.61) αντικαθίστανται από ηλίκα διαφορών ως εξής: Η V_t αντικαθίσταται από το $\Delta_t^- V^h$, όπως ορίστηκε στη μονοδιάστατη περίπτωση (Εξίσωση (3.114)). Η V_{x_i} αντικαθίσταται από το $\Delta_{x_i}^+ V^h$ αν $b_i(t, x, u) \geq 0$ αλλιώς από το $\Delta_{x_i}^- V^h$. Η $V_{x_i x_i}$ αντικαθίσταται από το $\Delta_{x_i}^2 V^h$ και τέλος αν $i \neq j$, η $V_{x_i x_j}$ αντικαθίσταται από $\Delta_{x_i x_j}^+ V^h$, αν $a_{ij}(t, x, u) \geq 0$ και αλλιώς από το $\Delta_{x_i x_j}^- V^h$.

Προκειμένου η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού της Σχέσης (3.127) να γραφεί συμπυκνωμένα στη μορφή της *HJB*, ορίζεται η εξής Χαμιλτονιανή:

$$\begin{aligned} \bar{H}(t, x, p_i^{\pm}, A_{ii}, A_{ij}^{\pm}) &= \max_{u \in U} \left\{ \sum_{i=1}^m \left[-b_i^+(t, x, u) p_i^+ + b_i^-(t, x, u) p_i^- \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_{ii}(t, x, u)}{2} A_{ii} + \sum_{j \neq i} \left(-\frac{a_{ij}^+(t, x, u)}{2} A_{ij}^+ + \frac{a_{ij}^-(t, x, u)}{2} A_{ij}^- \right) \right] - f(t, x, u) \right\}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Τελικά όμοια με τη μονοδιάστατη περίπτωση (Σχέση (3.117)) προκύπτει:

$$V^h(t - h, x) = V^h(t, x) - h \bar{H}(t, x, \Delta_{x_i}^{\pm} V^h, \Delta_{x_i}^2 V^h, \Delta_{x_i x_j}^{\pm} V^h), \quad (3.133)$$

από όπου μπορεί να υπολογιστεί η V^h οπισθοδρομικά. Για την επέκταση στην περιοχή Q αντί για την Q_0 η διαδικασία που ακολουθείται είναι ακριβώς όμοια με τη μονοδιάστατη περίπτωση.

Τελικά, οι Σχέσεις (3.117), (3.133) χρησιμοποιούνται για τον αριθμητικό υπολογισμό της λύσης της *HJB* μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (χρόνου ή (χρόνου, κατάστασης)), ανάλογα με την περίπτωση (Q_0, Q). Αξίζει να σημειωθεί ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου κατασκευάστηκε ως προσέγγιση της διάχυσης ΕΣΔΕ (3.47), ώστε μέσω της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού διακριτού χρόνου για τη Μαρκοβιανή

αλυσίδα να κατασκευαστεί αριθμητική μέθοδος υπολογισμού της λύσης της *HJB* (Σχέση (3.61)) που να συγκλίνει στην πραγματική λύση για αυθαίρετα μικρό χρονικό βήμα h , με τις κατάλληλες υποθέσεις ([9], Κεφάλαιο IX).

Παρατήρηση 12. (Αποκοπή χώρου κατάστασης & σύγκλιση [10], σελ. 38)

Από τη παραπάνω ανάλυση για τη διακριτοποίηση της *HJB*, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων για τη λύση θα εξαρτάται και από το μέγεθος του πλέγματος στον \mathbb{R}^m , δηλαδή από το χωρικό βήμα δ και από το σημείο αποκοπής των τιμών της κατάστασης (π.χ., B_h) στην περίπτωση αναφοράς του Q_0 . Μία στρατηγική για την ελαχιστοποίηση της επίδρασης του πλέγματος στα αριθμητικά αποτελέσματα είναι η σύγκριση των αριθμητικών λύσεων με ολοένα και περισσότερα σημεία πλέγματος μέχρις ότου δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές. Συγκεκριμένα, αρχικά επιλέγεται ένας μικρός αριθμός σημείων πλέγματος, ο οποίος διπλασιάζεται και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται, μέχρις ότου να μην υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των διαδοχικών αριθμητικών λύσεων. Τότε, η αριθμητική λύση θα είναι συγκλίνουσα ως προς το πλέγμα με την έννοια του ότι η προσθήκη περισσότερων σημείων στο πλέγμα π.χ., μείωση του χωρικού βήματος, αύξηση του σημείου αποκοπής δεν θα επηρεάζει σημαντικά τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στις Ασύρματες Επικοινωνίες

Το παρόν κεφάλαιο επικεντρώνεται στη μελέτη των εφαρμογών του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στα ασύρματα δίκτυα επικοινωνιών. Στη βιβλιογραφία, οι εφαρμογές του Βέλτιστου Ελέγχου και του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στα ασύρματα δίκτυα επικοινωνιών καλύπτουν διάφορα προβλήματα όπως η κατανομή των πόρων στο δίκτυο [16, 17, 18, 19], η βελτιστοποίηση της διάρκειας ζωής στα δίκτυα αισθητήρων [20] και η διάχυση πληροφορίας στο δίκτυο (π.χ., κακόβουλη) [21]. Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία επικεντρώνεται στη κατανομή των πόρων μεταξύ των χρηστών στο ασύρματο δίκτυο, όπου ως πόρος θεωρείται η ισχύς εκπομπής των κόμβων [22, 17]. Η χρήση του Στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου στην κατανομή των πόρων έγκειται στο γεγονός ότι οι συνθήκες των ασύρματων καναλιών επικοινωνίας είναι στην πραγματικότητα στοχαστικές με χρονομεταβλητές στατιστικές ποσότητες (π.χ., μέση τιμή), και έχειδειχτεί ότι μοντελοποιούνται ρεαλιστικά με χρήση ΣΔΕ [26, 27], [28]. Συγκεκριμένα, τα προβλήματα κατανομής πόρων στα δίκτυα επικοινωνιών εκφράζονται συνήθως ως προβλήματα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς όπου οι πόροι εμφανίζονται είτε στην αντικειμενική συνάρτηση, είτε στους περιορισμούς, είτε και στα δύο. Η μοντελοποίηση όμως των ασύρματων καναλιών με ΣΔΕ εισάγει ΣΔΕ στους περιορισμούς των προβλημάτων κατανομής πόρων και για αυτό καθίσταται κατάλληλη η χρήση του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου για την επίλυσή τους.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα μελετηθούν εφαρμογές που εξετάζουν την κατανομή ισχύος εκπομπής σε κυψελωτά ασύρματα δίκτυα υπό συνθήκες στοχαστικών καναλιών που μοντελοποιούνται μέσω ΣΔΕ. Στην περίπτωση των κυψελωτών δικτύων, οι κόμβοι επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω του σταθμού βάσης [29, 30]. Αρχικά, θα επεξηγηθούν σύντομα οι διαλείψεις που εμφανίζονται στα ασύρματα κανάλια και τα καθιστούν στοχαστικά (και πιθανώς με

χρονομεταβλητές στατιστικές ποσότητες). Στη συνέχεια θα περιγραφεί ο τρόπος μοντελοποίησης των ασύρματων καναλιών με ΣΔΕ και τέλος θα παρουσιαστούν προσεγγίσεις της βιβλιογραφίας για την κατανομή της ισχύος εκπομπής μεταξύ των χρηστών σε ασύρματα κυψελωτά δίκτυα.

4.1 Διαλείψεις των Ασύρματων Καναλιών Επικοινωνίας

Το φαινόμενο της διάλειψης, δηλαδή της εξασθένησης του σήματος που μεταδίδεται στο κανάλι μεταξύ εκπομπού και δέκτη διακρίνεται σε δύο τύπους, τη βραχυπρόθεσμη διάλειψη και τη μακροπρόθεσμη διάλειψη. Η μακροπρόθεσμη διάλειψη οφείλεται στη σκίαση από μεγάλα αντικείμενα και εξαρτάται από τη γεωγραφική περιοχή και την απόσταση r μεταξύ του εκπομπού και του δέκτη. Για παράδειγμα στον ελεύθερο χώρο η λαμβανόμενη ισχύς στο δέκτη ισούται με την εκπεμπόμενη ισχύ μειωμένη αντίστροφα ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης. Ωστόσο, οι παρεμποδίσεις και οι ανακλάσεις, πχ. σε αστική περιοχή, επιβάλλουν μεγαλύτερη εξασθένηση του σήματος, αυξάνοντας τον εκθέτη, έστω a , της αντιστρόφως ανάλογης σχέσης σε τιμή μεγαλύτερη του 2 [30]. Στην Ενότητα 4.2 που ακολουθεί, περιγράφονται αναλυτικά οι απώλειες ισχύος λόγω μακροπρόθεσμης διάλειψης και η μαθηματική μοντελοποίησή τους. Η βραχυπρόθεσμη διάλειψη, οφείλεται σε αθροιστική και καταστροφική παρεμβολή των εκπεμπόμενων κυματομορφών του σήματος, το οποίο διασπάται σε συνιστώσες καθεμία εκ των οποίων ακολουθεί διαφορετικό μονοπάτι. Εμφανίζεται σε χωρική κλίμακα του μήκους κύματος και εξαρτάται από τη συχνότητα. Κατάλληλες κατανομές για τη μοντελοποίηση του πλάτους του συνολικού λαμβανόμενου σήματος είναι η *Rayleigh* (όταν δεν υπάρχει απευθείας *Line of Sight* σήμα), η *Rician* (όταν υπάρχει *Line of Sight* σήμα) [30], κλπ. Γενικά η βραχυπρόθεσμη διάλειψη είναι περισσότερο καταστροφική για το σήμα από τη μακροπρόθεσμη. Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί η περίπτωση της μακροπρόθεσμης διάλειψης καναλιού.

4.2 Μοντελοποίηση των Ασύρματων Καναλιών με χρήση των ΣΔΕ

Η μοντελοποίηση του καναλιού επικεντρώνεται στην περίπτωση της μακροπρόθεσμης διάλειψης, που όπως προαναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα οφείλεται στο φαινόμενο της σκίασης, εξαρτάται από τη γεωγραφική περιοχή και εμφανίζεται σε αραιοκατοικημένες ή ημιαστικές περιοχές [30]. Με χρήση των ΣΔΕ, όπως προτείνεται στην αναφορά [26], καθίσταται δυνατή η μοντελοποίηση ενός ασύρματου καναλιού μακροπρόθεσμης διάλειψης με χρονικές

και χωρικές μεταβολές.

Σύμφωνα με το συμβατικό μοντέλο ασύρματου καναλιού μακροπρόθεσμης διάλειψης, η απώλεια ισχύος PL κατά μήκος της ασύρματης ζεύξης μεταξύ των κόμβων i και j σε απόσταση d_{ij} δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$PL(d_{ij})[dB] = \overline{PL}(d_0)[dB] + 10\gamma \log\left(\frac{d_{ij}}{d_0}\right) + \tilde{Z}, d \geq d_0, \quad (4.1)$$

όπου γ είναι ο συντελεστής απώλειας ισχύος που εξαρτάται από το ασύρματο μέσο διάδοσης, d_0 είναι η απόσταση αναφοράς, $\overline{PL}(d_0)$ είναι η μέση απώλεια ισχύος στην απόσταση αναφοράς και $\tilde{Z} \sim N(0; \sigma^2)$, δηλαδή μία τυχαία μεταβλητή, κανονικά (*Gaussian*) κατανομημένη με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2 που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την αβεβαιότητα μεταξύ διαφορετικών στιγμών παρατήρησης του συστήματος. Ο συμβολισμός $[dB]$ σημαίνει ότι η μονάδα μέτρησης της απώλειας ισχύος είναι σε dB (εκφράζει λογάριθμο λόγου τιμών ισχύος και συνήθως θεωρείται το $1Watt$ ως τιμή αναφοράς για την ισχύ) και όχι σε $Watt$ [29]. Η μέση τιμή του συμβατικού μοντέλου απώλειας ισχύος της Εξίσωσης (4.1) ισούται με:

$$\overline{PL}(d_{ij})[dB] = \overline{PL}(d_0)[dB] + 10\gamma \log\left(\frac{d_{ij}}{d_0}\right), d \geq d_0. \quad (4.2)$$

Από την εξίσωση (4.2) μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι στατιστικές ιδιότητες (π.χ., μέση τιμή) του συμβατικού μοντέλου απώλειας ισχύος είναι σταθερές στο χρόνο. Για λόγους συνέπειας, αναφέρεται ότι ο «συντελεστής εξασθένισης», $r(d_{ij})$, ακολουθεί τη λογάριθμο-κανονική κατανομή και δίνεται από τη σχέση:

$$r(d_{ij}) = e^{-\frac{\ln 10}{20} PL(d_{ij})[dB]}. \quad (4.3)$$

Ο συντελεστής εξασθένισης (υψωμένος στο τετράγωνο) πολλαπλασιάζει την ισχύ εκπομπής του κόμβου i ώστε να υπολογιστεί η ισχύς που φτάνει στο άκρο j της ζεύξης (i, j) , όταν λαμβάνει χώρα μετάδοση στην τελευταία. Η σταθερά $-\frac{\ln 10}{20}$ εμφανίζεται λόγω της μονάδας μέτρησης της απώλειας ισχύος (dB), ώστε να καταστεί δυνατός ο πολλαπλασιασμός του συντελεστή εξασθένισης με ισχύ σε $Watt$.

Ακολούθως, επεκτείνεται το συμβατικό μοντέλο απώλειας ισχύος στο δυναμικό μοντέλο απώλειας ισχύος στο χώρο και στο χρόνο, αντικαθιστώντας την τυχαία μεταβλητή της Εξίσωσης (4.1) με μία στοχαστική διαδικασία που δηλώνεται ως $\{x_{ij}(t, \tau_{ij})\}_{t \geq 0, \tau_{ij} \geq \tau_0}$, όπου η παράμετρος t αντιπροσωπεύει το χρόνο και η παράμετρος τ_{ij} αντιπροσωπεύει την απόσταση (χώρο) εκπεφρασμένη ως χρονική καθυστέρηση, δηλαδή $\tau_{ij} = \frac{d_{ij}}{c}$, όπου c η ταχύτητα του φωτός και $\tau_0 = \frac{d_0}{c}$. Οι μεταβολές στην απόσταση χρησιμοποιούνται ώστε να συμπεριληφθούν στο μοντέλο επιπτώσεις της κίνησης του εκπομπού και του δέκτη, ενώ οι μεταβολές στο χρόνο χρησιμοποιούνται ώστε το μοντέλο να λαμβάνει υπόψη τις χρονικές μεταβολές

του περιβάλλοντος διάδοσης, π.χ., κίνηση αντικειμένων και σκεδαστών στην περιβάλλουσα περιοχή του δικτύου. Στην περίπτωση των στατικών δικτύων, όπως μπορεί να παρατηρηθεί και από τον τύπο για τη χωρική εξάρτηση τ_{ij} , η στοχαστική διαδικασία $\{x_{ij}(t, \tau_{ij})\}_{t \geq 0, \tau_{ij} \geq \tau_0}$ θα συλλαμβάνει μόνο τις χρονικές μεταβολές του περιβάλλοντος διάδοσης. Όπως και η Εξίσωση (4.1), η $\{x_{ij}(t, \tau_{ij})\}_{t \geq 0, \tau_{ij} \geq \tau_0}$ αντιπροσωπεύει την (τυχαία) ισχύ που χάνεται κατά τη μετάδοση από τον i στο j σε μία συγκεκριμένη απόσταση d_{ij} ως συνάρτηση του χρόνου.

Στην αναφορά [26], η στοχαστική διαδικασία που εκφράζει την απώλεια ισχύος $\{x_{ij}(t, \tau_{ij})\}_{t \geq 0, \tau_{ij} \geq \tau_0}$ παράγεται ως μέση-επιστρέφουσα (*mean – reverting*) εκδοχή μίας γραμμικής ΣΔΕ [1] που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} dx_{ij}(t, \tau_{ij}) &= \beta_{ij}(t, \tau_{ij})(\gamma_{ij}(t, \tau_{ij}) - x_{ij}(t, \tau_{ij}))dt + \delta_{ij}(t, \tau_{ij})dW_{ij}(t) \\ x_{ij}(t_0, \tau_{ij}) &\sim \mathcal{N}(\overline{PL}(d_{ij})[dB]; \sigma^2), \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου:

- $\{W_{ij}(t)\}_{t \geq 0}$ είναι η τυπική κίνηση *Brown* και είναι ανεξάρτητη από την τυχαία μεταβλητή $x_{ij}(t_0, \tau_{ij})$.
- $\gamma_{ij}(t, \tau_{ij})$ συμβολίζει τη χρονομεταβλητή τιμή απώλειας ισχύος προς την οποία έλκεται στιγμιαία η $x_{ij}(t, \tau_{ij})$.
- $\beta_{ij}(t, \tau_{ij})(\gamma_{ij}(t, \tau_{ij}) - x_{ij}(t, \tau_{ij}))$ είναι η στιγμιαία ‘τάση’ (*drift*) της ΣΔΕ (4.4), η οποία εκφράζει την προσαρμογή/ώθηση της στοχαστικής διαδικασίας $x_{ij}(t, \tau_{ij})$ προς την $\gamma_{ij}(t, \tau_{ij})$.
- $\beta_{ij}(t, \tau_{ij})$ είναι η παράμετρος που εκφράζει την ταχύτητα της παραπάνω προσαρμογής.
- $\delta_{ij}(t, \tau_{ij})$ είναι η στιγμιαία μεταβλητότητα (συντελεστής διάχυσης) της ΣΔΕ (4.4) που αντιστοιχεί στη στιγμιαία τάση.

Σημειώνεται ότι οι μονάδες των $x_{ij}(\cdot, \tau_{ij})$ και $\gamma_{ij}(\cdot, \tau_{ij})$ είναι σε *dB*. Παρατηρείται ότι οι παράμετροι $\beta_{ij}(t, \tau_{ij})$, $\gamma_{ij}(t, \tau_{ij})$, $\delta_{ij}(t, \tau_{ij})$, εξαρτώνται από τη θέση, δηλαδή την απόσταση εκπομπού και δέκτη. Διαφορετικές θέσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικές παραμέτρους-συναρτήσεις χρόνου για το ίδιο ζεύγος εκπομπού και δέκτη. Όμοια με τη Σχέση (4.3), ορίζεται ο χρονικά και χωρικά εξαρτώμενος συντελεστής εξασθένισης:

$$S_{ij}(t, \tau_{ij}) = e^{-\frac{\ln 10}{20} x_{ij}(t, \tau_{ij})}. \quad (4.5)$$

Αν οι παράμετροι γ , β , δ είναι μετρήσιμες και φραγμένες, η ΣΔΕ (4.4) έχει μοναδική λύση για κάθε αρχική συνθήκη $x_{ij}(t_0, \tau_{ij})$, που υπολογίζεται μέσω της μεθοδολογίας επίλυσης

γραμμικών ΣΔΕ (Κεφάλαιο 2) και έχει την παρακάτω μορφή:

$$x_{ij}(t, \tau_{ij}) = e^{-\beta_{ij}([t, t_0], \tau_{ij})} \left(x_{ij}(t_0, \tau_{ij}) + \int_{t_0}^t e^{-\beta_{ij}([u, t_0], \tau_{ij})} (\beta_{ij}(u, \tau_{ij}) \gamma_{ij}(u, \tau_{ij}) du + \delta_{ij}(u, \tau_{ij}) dW_{ij}(u)) \right), \quad (4.6)$$

όπου: $\beta_{ij}([t, t_0], \tau_{ij}) = \int_{t_0}^t \beta_{ij}(u, \tau_{ij}) du$. Αν η αρχική τυχαία μεταβλητή $x_{ij}(t_0, \tau_{ij})$ είναι κανονική ή μία σταθερή τιμή τότε η κατανομή της $x_{ij}(t, \tau_{ij})$ είναι κανονική (προκύπτει με βάση τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων *Itô* στο Κεφάλαιο 2), όπως και η *PL* στην Εξίσωση (4.1) με τη διαφορά ότι οι στατιστικές της ποσότητες θα είναι χρονομεταβλητές.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του *Itô* (Κεφάλαιο 2), η ΣΔΕ για το συντελεστή εξασθένισης (Εξίσωση (4.5)) προκύπτει ως εξής:

$$dS_{ij}(t, \tau_{ij}) = S_{ij}(t, \tau_{ij}) \left[\left(-\frac{\ln 10}{20} \beta_{ij}(t, \tau_{ij}) [\gamma_{ij}(t, \tau_{ij}) + \frac{20}{\ln 10} \ln S_{ij}(t, \tau_{ij})] + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 10}{20} \right)^2 \delta_{ij}(t, \tau_{ij})^2 \right) dt - \frac{\ln 10}{20} \delta_{ij}(t, \tau_{ij}) dW_{ij}(t) \right], \quad (4.7)$$

$$S_{ij}(t_0, \tau_{ij}) = e^{-\frac{\ln 10}{20} x_{ij}(t_0, \tau_{ij})}. \quad (4.8)$$

Επιπλέον στην αναφορά [26] αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση όπου οι παράμετροι της ΣΔΕ (4.4) δεν εξαρτώνται από το χρόνο, τότε η λύση της όπως δίνεται στην Εξίσωση (4.6) συγκλίνει στο όριο του χρόνου στο συμβατικό μοντέλο απώλειας ισχύος της Σχέσης (4.2) και ως αποτέλεσμα το τελευταίο είναι ειδική περίπτωση του δυναμικού μοντέλου απώλειας ισχύος της Σχέσης (4.4). Συγκεκριμένα, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει χρονική εξάρτηση, η λύση της Εξίσωσης (4.6) παίρνει τη μορφή:

$$x_{ij}(t, \tau_{ij}) = e^{-\beta_{ij}(\tau_{ij})(t-t_0)} x_{ij}(t_0, \tau_{ij}) + \gamma(\tau_{ij}) (1 - e^{-\beta_{ij}(\tau_{ij})(t-t_0)}) + \delta_{ij}(\tau_{ij}) \int_{t_0}^t e^{-\beta_{ij}(\tau_{ij})(t-u)} dW(u). \quad (4.9)$$

Τότε, η μέση τιμή και η διασπορά της $x_{ij}(t, \tau_{ij})$, δίνονται από τις σχέσεις που ακολουθούν (με βάση τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων *Itô* στο Κεφάλαιο 2, [1]):

$$E[x_{ij}(t, \tau_{ij})] = e^{-\beta_{ij}(\tau_{ij})(t-t_0)} E[x_{ij}(t_0, \tau_{ij})] + \gamma(\tau_{ij}) (1 - e^{-\beta_{ij}(\tau_{ij})(t-t_0)}),$$

$$Var[x_{ij}(t, \tau_{ij})] = e^{-2\beta_{ij}(\tau_{ij})(t-t_0)} Var[x_{ij}(t_0, \tau_{ij})] + \delta^2(\tau_{ij}) \left(\frac{1 - e^{-2\beta_{ij}(\tau_{ij})(t-t_0)}}{2\beta_{ij}(\tau_{ij})} \right). \quad (4.10)$$

Παρατηρείται ότι η μέση τιμή και η διασπορά εξαρτώνται από το χρόνο (t) και την απόσταση

(τ , αν είναι μεταβλητή). Ωστόσο, αν $t \rightarrow \infty$, η στοχαστική ανέλιξη $\{x_{ij}(t, \tau_{ij})\}_{t \geq 0, \tau_{ij} \geq \tau_0}$ συγκλίνει σε μία κανονικά κατανομημένη τυχαία μεταβλητή με σταθερή μέση τιμή $\gamma(\tau_{ij})$ και διασπορά $\frac{\delta^2(\tau_{ij})}{2\beta_{ij}(\tau_{ij})}$ (στάσιμη κατανομή), όμοια με το συμβατικό μοντέλο απώλειας ισχύος.

Σημειώνεται ότι στις αναφορές [26], [28], [27] εξετάζεται όμοια η δυναμική μοντελοποίηση μέσω ΣΔΕ των ασύρματων καναλιών στην περίπτωση της βραχυπρόθεσμης διάλειψης (με χρονομεταβλητές στατιστικές ποσότητες).

4.3 Παράδειγμα 1: Έλεγχος Ισχύος σε Κυφελωτά Ασύρματα Δίκτυα με Κινητούς Χρήστες υπό Στοχαστικά Ασύρματα Κανάλια [19]

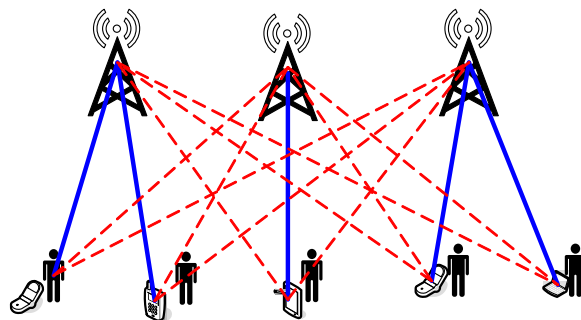
Θεωρείται το κανάλι άνω ζεύξης (δηλαδή από τους χρήστες προς το σταθμό βάσης) ενός κυφελωτού δικτύου με M χρήστες και N σταθμούς βάσης (Σχήμα 4.1). Κάθε χρήστης ανατίθεται σε ένα συγκεκριμένο σταθμό βάσης (ΣΒ). Ο χρήστης i εκπέμπει με ισχύ $p_i(t)$ στον αντίστοιχο σταθμό βάσης τη χρονική στιγμή t . Το σήμα $y_i(t)$ που λαμβάνεται τη χρονική στιγμή t στο σταθμό βάσης που έχει ανατεθεί στο χρήστη i ισούται με:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^M \sqrt{p_j(t)} s_j(t) S_{ij}(t, \tau_{ij}) + n_i(t), \quad (4.11)$$

όπου $n_i(t)$ είναι ο θόρυβος καναλιού στο ΣΒ που έχει ανατεθεί στο χρήστη i , $s_j(t)$ είναι το σήμα πληροφορίας που εκπέμπεται από το χρήστη j και πολλαπλασιάζεται με την ισχύ εκπομπής του $\sqrt{p_j(t)}$, και το $S_{ij}(t, \tau_{ij})$ που όπως και στα προηγούμενα εκφράζει το συντελεστή εξασθένισης στην ασύρματη ζεύξη μεταξύ του j και του ΣΒ που ανατίθεται στον i . Στο παράδειγμα αυτό [19], οι χρήστες δύνανται να είναι κινητοί και επομένως η απόσταση μεταξύ του κινητού χρήστη j και του ΣΒ που ανατίθεται στο χρήστη i , τ_{ij} , δύνανται να αλλάζει με το χρόνο t .

Ακολουθώντας τη δυναμική μοντελοποίηση του ασύρματου καναλιού της προηγούμενης ενότητας, το χωροχρονικά μεταβαλλόμενο ασύρματο κανάλι διάδοσης (δηλαδή η απώλεια ισχύος) μεταξύ κάθε ζεύγους κινητού χρήστη j και του ΣΒ που έχει ανατεθεί στο χρήστη i δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} dx_{ij}(t, \tau_{ij}) &= \beta_{ij}(t, \tau_{ij})(\gamma_{ij}(t, \tau_{ij}) - x_{ij}(t, \tau_{ij}))dt + \delta_{ij}(t, \tau_{ij})dW_{ij}(t), \\ x_{ij}(t_0, \tau_{ij}) &\sim \mathcal{N}(\bar{P}L(d_{ij})[dB]; \sigma^2), \quad 1 \leq j \leq M, \quad 1 \leq i \leq M, \end{aligned} \quad (4.12)$$



Σχήμα 4.1: Στο σχήμα απεικονίζονται οι κινητοί χρήστες και η επικοινωνία τους με τον αντίστοιχο ΣB με μπλε συνεχή γραμμή. Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή απεικονίζονται οι παρεμβολές (ισχύς που φτάνει) καθενός χρήστη στους υπόλοιπους ΣB (σε άλλες κυψέλες). Εδώ $M = 5$, $N = 3$.

και το $S_{ij}(t, \tau_{ij})$ δίνεται από τη Σχέση (4.5).

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι το παραπάνω μοντέλο επιτρέπει την εισαγωγή συσχετίσεων/αλληλεξαρτήσεων μεταξύ των ασύρματων ζεύξεων των ζευγών χρηστών- ΣB , το οποίο είναι πιο ρεαλιστικό σε ένα σύστημα πολλαπλών χρηστών, μέσω της θεώρησης αντίστοιχων συσχετίσεων στις κινήσεις *Brown* W_{ij} [1].

Στόχος του προβλήματος [19], είναι ο προσδιορισμός των ισχύων εκπομπής των κόμβων (προς κατανομή πόρος) ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολικά εκπεμπόμενη ισχύς από όλους τους κόμβους του δικτύου υπό τον περιορισμό ότι ο σηματοθορυβικός λόγος (*Signal – to – Interference & Noise – Ratio*) ($SINR$) σε κάθε σταθμό βάσης, για κάθε ζεύγος χρήστη- ΣB είναι μεγαλύτερος από μία προκαθορισμένη τιμή κατωφλίου.

Κάτω από χρονικά αμετάβλητες συνθήκες καναλιού, το παραπάνω πρόβλημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \min_{p_1 \geq 0, \dots, p_M \geq 0} \sum_{i=1}^M p_i \\ \text{s.t.} \\ SINR_i = \frac{p_i g_{ii}}{\sum_{j \neq i} p_j g_{ij} + \eta_i} \geq \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq M, \end{aligned} \quad (4.13)$$

όπου, p_i είναι η ισχύς του κινητού χρήστη i , g_{ij} είναι το χρονικά αμετάβλητο κέρδος καναλιού μεταξύ του χρήστη j και του ΣB που ανατίθεται στον κόμβο i , η_i είναι ο θόρυβος στο ΣB που έχει ανατεθεί στον κινητό χρήστη i , $SINR_i$ είναι ο σηματοθορυβικός λόγος στο ΣB που αντιστοιχεί στον i και τελικά ε_i είναι η τιμή στόχου για τον $SINR_i$.

Προκειμένου να εκφραστεί το ίδιο πρόβλημα κάτω από χρονομεταβλητές συνθήκες καναλιού μακροπρόθεσμης σκίασης, αρχικά, εισάγεται το αντίστοιχο μοντέλο σηματοθορυβικού λόγου ($SINR$) κάτω από αυτές τις συνθήκες (εκπεφρασμένο κατά την έννοια μονοπατιού -

pathwise - για κάθε χρήστη) και για το χρονικό εύρος $[0, T]$ όπως δίνεται στη σχέση που ακολουθεί:

$$SINR_i = \frac{\int_0^T p_i(t) s_i^2(t) S_{ii}^2(t, \tau_{ij}) dt}{\sum_{j \neq i} \int_0^T p_j(t) s_j^2(t) S_{ij}^2(t, \tau_{ij}) dt + \int_0^T n_i^2(t) dt}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (4.14)$$

Ως αποτέλεσμα, η γενίκευση του Προβλήματος (4.13) κάτω από χρονομεταβλητές συνθήκες καναλιού μακροπρόθεσμης σκίασης έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} \min_{p_1 \geq 0, \dots, p_M \geq 0} & \sum_{i=1}^M \int_0^T p_i(t) dt \\ & \text{s.t.} \\ & \frac{\int_0^T p_i(t) s_i^2(t) S_{ii}^2(t, \tau_{ij}) dt}{\sum_{j \neq i} \int_0^T p_j(t) s_j^2(t) S_{ij}^2(t, \tau_{ij}) dt + \int_0^T n_i^2(t) dt} \geq \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq M. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Στην αναφορά [19], έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις για την επίλυση του Προβλήματος (4.17), ωστόσο θα μελετηθεί η προσέγγιση που στηρίζεται στο μαθηματικό εργαλείο του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου.

Σύμφωνα με την [19], το πρόβλημα της Σχέσης (4.17) επαναδιατυπώνεται στα πλαίσια του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου (Κεφάλαιο 3) ως εξής:

$$\begin{aligned} \min_{p_1 \geq 0, \dots, p_M \geq 0} & \sum_{i=1}^M E \left\{ \int_0^T p_i(t) dt \right\} \\ & \text{s.t.} \\ & E \left\{ \sum_{j \neq i} \int_0^T p_j(t) s_j^2(t) S_{ij}^2(t, \tau_{ij}) dt + \int_0^T n_i^2(t) dt - \frac{1}{\varepsilon_i} \int_0^T p_i(t) s_i^2(t) S_{ii}^2(t, \tau_{ii}) dt \right\} \leq 0, \\ & \quad 1 \leq i \leq M, \end{aligned} \quad (4.16)$$

όπου επιπρόσθετα λαμβάνονται υπόψη και οι Σχέσεις (4.12) και (4.5). Υποθέτοντας ότι το σύνολο των $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^M$ ορίζεται κατά τρόπον ώστε οι περιορισμοί σηματοθορυβικού λόγου να είναι εφικτοί, ένας πολλαπλασιαστής *Lagrange* l_i , $i \in 1, \dots, M$ ανατίθεται σε κάθε περιορισμό και συμβολίζοντας με p^* τη βέλτιστη πολιτική (διάνυσμα) για τις τιμές της ισχύος εκπομπής των χρηστών και με $l = [l_1 \dots l_M]^T$ το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών *Lagrange*,

4.4 Παράδειγμα 2: Έλεγχος Ισχύος σε μία Κυψέλη Ασύρματου Δικτύου με Στοχαστικά Ασύρματα Κανάλια [17]

εισάγεται η δυϊκή συνάρτηση, η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

$$L^l(p^*, l) = \min_{p_1 \geq 0, \dots, p_M \geq 0} \sum_{i=1}^M E \left\{ \int_0^T p_i(t) dt + l_i \left[\sum_{j \neq i} \int_0^T p_j(t) s_j^2(t) S_{ij}^2(t, \tau_{ij}) dt + \int_0^T n_i^2(t) dt - \frac{1}{\varepsilon_i} \int_0^T p_i(t) s_i^2(t) S_{ii}^2(t, \tau_{ij}) dt \right] \right\}. \quad (4.17)$$

Μπορεί να δείχτεί ότι η $L^l(p^*, l)$ ικανοποιεί την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού *Hamilton-Jacobi-Bellman* (Κεφάλαιο 3, Ενότητα 3.3.6). Τελικά το πρόβλημα επιλύεται αν θεωρηθεί το *supremum* για όλα τα διανύσματα l , δηλαδή, $L^l(p^*, l^*) = \sup_l L^l(p^*, l)$. Από το παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό και η γενικότερη μεθοδολογία για την ενσωμάτωση των περιορισμών κατάστασης στο πρόβλημα Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου όταν οι τελευταίες δεν αφορούν μόνο την τελική χρονική στιγμή, όπως προαναφέρθηκε και στην Ενότητα 3.3.6, Κεφάλαιο 3. Το επόμενο παράδειγμα αφορά πάλι τον έλεγχο ισχύος σε κυψελωτά δίκτυα αλλά σε μία μόνο κυψέλη και έχει πιο αναλυτικά αποτελέσματα.

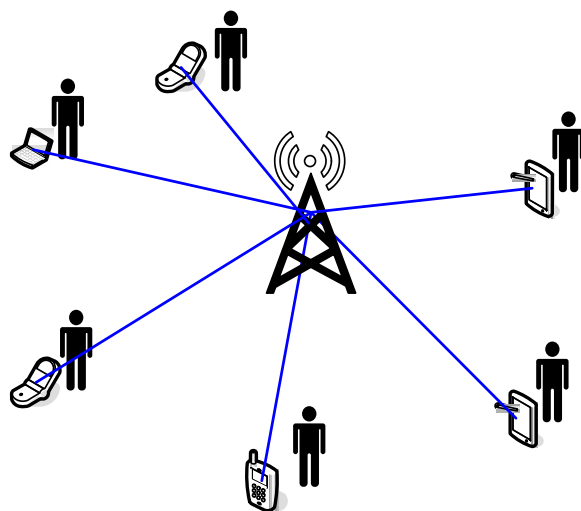
4.4 Παράδειγμα 2: Έλεγχος Ισχύος σε μία Κυψέλη Ασύρματου Δικτύου με Στοχαστικά Ασύρματα Κανάλια [17]

Στο δεύτερο παράδειγμα εξετάζεται η περίπτωση μίας μόνο κυψέλης ενός ασύρματου δικτύου όπου N χρήστες επικοινωνούν με το ΣΒ (Σχήμα 4.2). Η λογική είναι όμοια με το πρώτο παράδειγμα ωστόσο η διαφορετική διατύπωση του προβλήματος οδηγεί σε πολύ περισσότερα αναλυτικά αποτελέσματα.

Η απώλεια ισχύος στο ασύρματο κανάλι μεταξύ κάθε χρήστη και του ΣΒ περιγράφεται από την ακόλουθη ΣΔΕ:

$$dx_i(t) = -a_i(x_i(t) + b_i)dt + \sigma_i dW_i(t), \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.18)$$

όπου ισχύει $a_i > 0$, $b_i > 0$, $\sigma_i > 0$, $i \in \{1, \dots, N\}$ και η έννοια των παραμέτρων αυτών είναι όμοια με των αντίστοιχων παραμέτρων της ΣΔΕ (4.4) με τη διαφορά ότι θεωρούνται σταθεροί με το χρόνο όπως στην περίπτωση της λύσης της ΣΔΕ στη Σχέση (4.9). Η στοχαστική ανέλιξη $x_i(\cdot)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ εκφράζει την απώλεια ισχύος. Το σύνολο $\{w_i(\cdot), i \in \{1, \dots, N\}\}$, είναι N ανεξάρτητες *Brown* κινήσεις, οι οποίες είναι επίσης ανεξάρτητες από τις αρχικές καταστάσεις $x_i(0)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ οι οποίες είναι N ανεξάρτητες μεταξύ τους κανονικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Οι παράμετροι a_i , b_i , σ_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ θεωρούνται



Σχήμα 4.2: Στο σχήμα απεικονίζονται οι χρήστες και η επικοινωνία τους με το ΣΒ (σε μία κυψέλη).

γνωστοί, ωστόσο είναι επίσης δυνατό να εκτιμηθούν [22].

Σχετικά με τον προσδιορισμό της εκπεμπόμενης ισχύος από κάθε κόμβο προς το ΣΒ, ακολουθείται το μοντέλο της προσαρμογής σε βήματα (*step – wise adjustment*):

$$dp_i(t) = u_i(t)dt, \quad |u_i(\cdot)| \leq u_{imax}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.19)$$

όπου τα $u_i(\cdot)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ είναι οι στοχαστικές διαδικασίες ελέγχου της ισχύος που είναι φραγμένες αντίστοιχα από τα u_{imax} , $i \in \{1, \dots, N\}$ τα οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούνται ίσα με τη μονάδα. Ο συντελεστής απώλειας ισχύος δίνεται από την $\alpha_i(t) = e^{x_i(t)}$ $i \in \{1, \dots, N\}$. Ορίζονται οι παρακάτω συμβολισμοί:

$$x = [x_1, \dots, x_N]^T,$$

$$\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T,$$

$$p = [p_1, \dots, p_N]^T,$$

$$u = [u_1, \dots, u_N]^T.$$

Οι απώλειες ισχύος x και οι τιμές ισχύος εκπομπής p αποτελούν την κατάσταση του συστήματος, ενώ το u είναι ο έλεγχος. Συγκεκριμένα, η x μπορεί να χαρακτηριστεί ως εξωγενής κατάσταση ενώ η p ως ενδογενής κατάσταση του συστήματος και η ερμηνεία των χαρακτηρισμών αυτών προκύπτει από τις διαφορικές εξισώσεις μεταβολής των x , p , αφού η p εξαρτάται από τον έλεγχο του συστήματος, ενώ η x μεταβάλλεται ανεξάρτητα. Γενικός στόχος του παραδείγματος, όπως και στο παράδειγμα 1 είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος της εκπεμπόμενης ισχύος από τους χρήστες υπό τον περιορισμό το *SINR* στο ΣΒ από κάθε χρήστη i να υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο κατώφλι γ_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ (όμοια με τη συνθή-

κη της Σχέσης 4.13). Αν η ο θόρυβος στο Σ_B , με κατάλληλο μετασχηματισμό η συνθήκη για το $SINR$ (Σχέση (4.13)) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_i p_i}{\sum_{j=1}^N \alpha_j p_j + \eta} &\geq \mu_i, \\ \mu_i = \frac{\gamma_i}{1 + \gamma_i} &> 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \\ 0 &< \sum_{i=1}^N \mu_i < 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται ως ακολούθως και αντικατοπτρίζει το στόχο του προβλήματος που είναι η εύρεση ελέγχων για την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος του αθροίσματος της ισχύος εκπομπής των κόμβων (όπως απαιτείται από το Στοχαστικό Βέλτιστο Έλεγχο):

$$\int_0^T \sum_{i=1}^N p_i(t) dt. \quad (4.21)$$

Παρατηρείται [22], ότι οι περιορισμοί πρέπει να ικανοποιούνται με ισότητα αλλιώς οδηγούν σε αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Ως εκ τούτου για να μετατραπεί το πρόβλημα σε αντίστοιχο χωρίς περιορισμούς θεωρείται η παρακάτω αντικειμενική συνάρτηση που ενσωματώνει τους περιορισμούς μέσω ποινής (και που βελτιστοποιείται για ισότητα στους περιορισμούς με βάση την παραπάνω παρατήρηση):

$$\min E \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i(t) p_i(t) - \mu_i \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j(t) p_j(t) + \eta \right) \right]^2 + \lambda \sum_{i=1}^N p_i(t) dt \right\} dt, \lambda > 0. \quad (4.22)$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η ολοκλήρωση είναι απαραίτητη γιατί το διάνυσμα με τις τιμές ισχύος εκπομπής είναι τμήμα της στοχαστικής κατάστασης (α, p) , που αποτελείται από τις τιμές ισχύος εκπομπής και τα ασύρματα κανάλια και επομένως δεν γίνεται να βελτιστοποιείται όλο το (α, p) στιγμιαία για κάθε t μέσω του $u(t)$. Επειδή τα α, x συνδέονται μέσω της Σχέσης $\alpha_i(t) = e^{x_i(t)}$ $i \in \{1, \dots, N\}$ μπορεί να θεωρηθεί ένα από τα δύο για την περιγραφή της κατάστασης των καναλιών. Επιλέγεται το x ως πιο βολικό για τους υπολογισμούς καθώς ορίζεται για όλο το \mathbb{R} . Για το p δεν θεωρούνται περιορισμοί ωστόσο λαμβάνει με μικρή πιθανότητα αρνητικές τιμές υπό κατάλληλες προϋποθέσεις [22].

Μετά την περιγραφή του μοντέλου του συστήματος, θα αναλυθεί το πλαίσιο του Στοχα-

στικού Βέλτιστου Ελέγχου. Γίνονται οι παρακάτω ορισμοί:

$$f(x) = [-a_1(x_1 + b_1), \dots, -a_N(x_N + b_N)]^T,$$

H είναι ο $N \times N$ διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία $\sigma_i, i = 1, \dots, N$ στην κύρια διαγώνιο του, $z = [x^T, p^T]^T$ είναι η κατάσταση του συστήματος,

$\psi = [f^T, u^T]^T$ είναι ο συντελεστής τάσης της $\Sigma\Delta\epsilon$ που περιγράφει τη z όπως θα φανεί παρακάτω

και $G = [H, \mathbf{0}]^T$ (όπου $\mathbf{0}$ είναι μηδενικός $N \times N$ πίνακας) είναι ο αντίστοιχος στην τάση συντελεστής διάχυσης της $\Sigma\Delta\epsilon$ που περιγράφει τη z . Τέλος, $W = [W_1, \dots, W_N]^T$.

Η $\Sigma\Delta\epsilon$ που περιγράφει συνολικά την κατάσταση του συστήματος είναι η:

$$dz = \psi dt + GdW, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.23)$$

Η ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο εσωτερικό του συναρτησιακού κόστους της Σχέσης (4.22) συμβολίζεται με

$$L(z) = L(x, p) = \sum_{i=1}^N \left[e^{x_i} p_i - \mu_i \left(\sum_{j=1}^N e^{x_j} p_j + \eta \right) \right]^2 + \lambda \sum_{i=1}^N p_i, \quad \lambda > 0. \quad (4.24)$$

Έστω η σ -άλγεβρα που παράγεται από τα $x(0), W(\cdot), \mathcal{F}_t = \sigma(x(0), W(s), s \leq t)$ με την υπόθεση ότι η ισχύς έχει ντετερμινιστική τιμή σε μηδενικό χρόνο, ίση με $p(0)$. Το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων (Ενότητα 3.1.1) ορίζεται ως εξής (τα σύνολα εφικτών και αποδεκτών ελέγχων ταυτίζονται στο πρόβλημα που δεν έχει περιορισμούς κατάστασης):

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) | u(t) \mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t - \text{adapted and } u(t) \in U = [-1, 1]^N, \forall 0 \leq t \leq T\}. \quad (4.25)$$

Το συναρτησιακό κόστος που διασυνδέεται με την κατάσταση της $\Sigma\Delta\epsilon$ (4.23) δίνεται από:

$$J(s, x, p; u(\cdot)) = E_{sxp} \left[\int_s^T L(x(r), p(r)) dr \right]. \quad (4.26)$$

Για $s = 0$ η $J(0, x, p; u(\cdot))$ θα γράφεται ως $J(x, p; u(\cdot))$. Τέλος, παρατίθεται και η συνάρτηση αξίας

$$V(s, x, p) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(s, x, p; u(\cdot)). \quad (4.27)$$

Παρατήρηση 13. Στο παράδειγμα αυτό μελετάται η περίπτωση του Q_0 (Ενότητα 3.3.1).

Μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι η HJB εξίσωση δεν θα έχει ομοιόμορφα παραβολική μορφή (Ενότητα 3.3.2) γιατί υπάρχουν συνιστώσες της κατάστασης, και συγκεκριμένα το p που έχουν μηδενικό συντελεστή διάχυσης, σ , (ή αλλιώς ο πίνακας G δεν έχει πλήρη τάξη) και επομένως δεν ισχύει ο Ορισμός 3.63. Συνεπώς, δεν μπορούν να εφαρμοστούν τα κριτήρια της Ενότητας 3.3.2 για την ύπαρξη λύσης της HJB με τις ιδιότητες που απαιτεί το Θεώρημα Επιβεβαίωσης (άλλωστε δεν ισχύουν και άλλες απατήσεις π.χ., η L να είναι φραγμένη). Για το λόγο αυτό στην [22] μελετάται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της γενικευμένης λύσης *viscosity* (η οποία δεν εξετάζεται στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία) αλλά και η επίλυση με χρήση μίας προσεγγιστικής HJB που είναι ομοιόμορφα παραβολική και η οποία θα εξεταστεί στη συνέχεια.

Αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα σχετικά με την ύπαρξη μοναδικού βέλτιστου ελέγχου και τη συνέχεια της συνάρτησης αξίας.

Θεώρημα 22. (Υπαρξη μοναδικού βέλτιστου ελέγχου)

Υπάρχει μοναδικός βέλτιστος έλεγχος $\hat{u} \in U$ έτσι ώστε $J(x(0), p(0); \hat{u}) = \inf_{u \in U} J(x(0), p(0); u(\cdot))$, όπου $(x(0), p(0))$ η αρχική κατάσταση τη χρονική στιγμή $s = 0$ και η μοναδικότητα ισχύει με την ακόλουθη έννοια: αν $\tilde{u} \in U$ είναι ένας άλλος έλεγχος ώστε $J(x(0), p(0); \hat{u}) = J(x(0), p(0); \tilde{u})$ τότε $\mathbf{P}(\hat{u} \neq \tilde{u}) > 0$ μόνο σε ένα σύνολο χρονικών στιγμών μηδενικού μέτρου στο $[0, T]$.

Απόδειξη. Ορίζεται ο χώρος

$$\mathcal{L} = \{u(\cdot) | u(t) \mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t - \text{adapted and } E \int_0^T |u_i|^2 ds < \infty, i = 1 : N\}, \quad (4.28)$$

στον οποίο προσαρτάται το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle = E \int_0^T u^T v ds, \quad u, v \in \mathcal{L}, \quad (4.29)$$

ώστε ο χώρος \mathcal{L} να είναι *Hilbert* [23]. Με βάση το εσωτερικό αυτό γινόμενο, παράγεται η νόρμα $\|\cdot\|$ ¹ στο χώρο \mathcal{L} κάτω από την οποία το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων U είναι κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του χώρου \mathcal{L} . Για την απόδειξη της ύπαρξης ακολουθούνται τα εξής βήματα.

- Έστω ότι υπάρχει μία ακολουθία ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού κόστους (x^j, p^j, u^j) , $j \geq 1$, έτσι ώστε $\lim_{j \rightarrow \infty} J(x(0), p(0), u^j) = \inf_{u \in U} J(x(0), p(0), u) < \infty$ (η πεπερασμένη τιμή φαίνεται εύκολα από τη μορφή της L και το πεπερασμένο χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης). Έστω ο βέλτιστος έλεγχος $\hat{u} \in U$. Λόγω του ότι το U

¹Η νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του χώρου *Hilbert*, \mathcal{L} μπορεί να βρεθεί μία υπακολουθία της w^j , όπου για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι η ίδια η w^j , ώστε $w^j \rightarrow \hat{u}$ ασθενώς (Παράρτημα Α') στον \mathcal{L} καθώς $j \rightarrow \infty$. Συμβολίζεται με p^j , η ισχύς που αντιστοιχεί στον όρο w^j της ακολουθίας.

- Εφαρμόζεται το θεώρημα του *Mazur* [23], κατά το οποίο μπορεί να βρεθεί ακολουθία κυρτών συνδυασμών των όρων της ακολουθίας w^j , έστω $\bar{u}^j = \sum_{i \geq j} c_{ij} u^{(i+j)}$, $\sum_{i \geq j} c_{ij} = 1$, $c_{ij} \geq 0$ που να οδηγεί στην ισχυρή σύγκλιση (Παράρτημα Α'), δηλαδή $\lim_{j \rightarrow \infty} E \int_0^T |\bar{u}^j - \hat{u}|^2 ds \rightarrow 0$. Συμβολίζονται με \bar{p}^j , \hat{p} , η τιμές ισχύος που αντιστοιχούν στους ελέγχους \bar{u}^j , \hat{u} αντίστοιχα.
- Αποδεικνύεται μέσω της ανισότητας *Schwartz*² και λόγω της ισχυρής σύγκλισης ότι:

$$\begin{aligned} & E \sup_{0 \leq s \leq T} |\bar{p}^j(s) - \hat{p}(s)| \\ & \leq E \int_0^T |\bar{u}^j - \hat{u}| ds \\ & \leq \sqrt{T} \left(E \int_0^T |\bar{u}^j - \hat{u}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.30)$$

οπότε μπορεί να βρεθεί μία υπακολουθία της \bar{p}^j , όπου για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι η ίδια η \bar{p}^j ώστε $\bar{p}^j \rightarrow \hat{p}$ καθώς $j \rightarrow \infty$ σχεδόν για όλα τα (s, ω) .

- Τέλος χρησιμοποιείται το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του *Lebesgue* ([24], Παράρτημα Α') για τη σύγκλιση του συναρτησιακού κόστους J , μαζί με την κυρτότητα της L ως προς p με σταθερό x ώστε να δειχτεί η Σχέση $J(x(0), p(0); \hat{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(x(0), p(0); u(\cdot))$ που απαιτείται για την ύπαρξη του βέλτιστου ελέγχου. Συγκεκριμένα, σε συμπαγή σύνολα του \mathbb{R}^{2N} , ισχύει η ανισότητα $L(x, \bar{p}^j) \leq C(1 + \sum_{i=1}^N e^{2x_i}) \triangleq R(x)$, όπου C σταθερά και $E \int_0^T R(x(s)) ds < \infty$, όπως προκύπτει εύκολα από τον τύπο της L και τη γραμμικότητα της ΕΣΔΕ που περιγράφει τη δυναμική του x , λόγω της οποίας η κατάσταση έχει πεπερασμένη τιμή σε πεπερασμένο χρόνο. Τότε, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του *Lebesgue*, σύμφωνα με το οποίο το όριο περνάει μέσα στη μέση τιμή και στο ολοκλήρωμα, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} J(x(0), p(0); \bar{u}^j) &= \lim_{j \rightarrow \infty} E \int_0^T L(x(s), \bar{p}^j(s)) ds \\ &= E \int_0^T L(x(s), \hat{p}(s)) ds = J(x(0), p(0); \hat{u}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

²Είναι η $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Στη συνέχεια, καθώς η L είναι κυρτή ως προς p με σταθερό x ισχύει:

$$\begin{aligned} J(x(0), p(0), \bar{u}^j) &\leq \sum_{i \geq j} c_{ij} E \int_0^T L(x(s), p^{(i+j)}(s)) ds \\ &= \sum_{i \geq j} c_{ij} (\inf_{u \in \mathcal{U}} J(x(0), p(0), u) + o(1)) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} J(x(0), p(0), u), \end{aligned} \quad (4.32)$$

καθώς $j \rightarrow \infty$. Το $o(1)$ οφείλεται στην ασθενή σύγκλιση. Από τις τελευταίες δύο σχέσεις γίνεται φανερό ότι $\inf_{u \in \mathcal{U}} J(x(0), p(0), u) = J(x(0), p(0), \hat{u})$ γεγονός που αποδεικνύει την ύπαρξη του ελέγχου σύμφωνα με τη διατύπωση του θεωρήματος.

Για την απόδειξη της μοναδικότητας χρησιμοποιείται απαγωγή σε άτοπο μέσω χρήσης της κυρτότητας της L ως προς p . Έστω ότι υπάρχει ένας άλλος έλεγχος \tilde{u} ώστε $J(x(0), p(0), \hat{u}) = J(x(0), p(0), \tilde{u})$ και έστω \tilde{p} η αντίστοιχη σε αυτόν ισχύς. Επειδή η L είναι κυρτή ως προς p με σταθερό x ισχύει:

$$L(x(s), (\hat{p}(s) + \tilde{p}(s))/2) \leq \frac{1}{2}[L(x(s), \hat{p}(s)) + L(x(s), \tilde{p}(s))], \quad (4.33)$$

όπου η ανισότητα ισχύει αυστηρά στο σύνολο $A \triangleq \{(s, \omega), \tilde{p}(s) \neq \hat{p}(s)\}$. Έστω ότι το σύνολο A έχει μη μηδενικό μέτρο πιθανότητας, δηλαδή $E \int_0^T 1_{(\tilde{p}(s) \neq \hat{p}(s))} ds > 0$. Τότε εφαρμόζοντας τον έλεγχο $(\hat{u} + \tilde{u})/2 \in \mathcal{U}$ προκύπτει εύκολα ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση για το L (Σχέση (4.33)) και θεωρώντας μέσες τιμές ότι:

$$\begin{aligned} &J(x(0), p(0); (\hat{u} + \tilde{u})/2) < \\ &\frac{1}{2}[J(x(0), p(0); \hat{u}) + J(x(0), p(0); \tilde{u})] = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(x(0), p(0); u), \end{aligned} \quad (4.34)$$

το οποίο είναι άτοπο και άρα το σύνολο A έχει μέτρο μηδέν, δηλαδή $E \int_0^T 1_{(\tilde{p}(s) \neq \hat{p}(s))} ds = 0$. Επομένως, οι στοχαστικές ανελίξεις \hat{p} , \tilde{p} είναι η μία εκδοχή της άλλης και επειδή έχουν και συνεχείς τροχιές είναι μη διακρινόμενες ([3], Παράρτημα Α'). Άρα ισχύει $\tilde{p}(s) - \hat{p}(s) \equiv 0$, $\forall s \in [0, T]$ (εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν που είναι το ίδιο για κάθε s , Παράρτημα Α') και από τη διαφορική εξίσωση της ισχύος (Σχέση 4.19) προκύπτει ότι $\int_0^s (\tilde{u}(r) - \hat{u}(r)) dr = \tilde{p}(s) - \hat{p}(s)$, σ.β. $\forall s \in [0, T]$, δηλαδή $E \int_0^T 1_{(\tilde{u}(s) \neq \hat{u}(s))} ds = 0$ γεγονός που αποδεικνύει τη μοναδικότητα. \square

Θεώρημα 23. (Συνέχεια της συνάρτησης αξίας)

Η συνάρτηση αξίας $V(t, x, p)$ είναι συνεχής στο $[0, T] \times \mathbb{R}^{2N}$ και επιπλέον

$$V(t, x, p) \leq K(1 + \sum_{i=1}^N p_i^4 + \sum_{i=1}^N e^{4x_i}),$$

όπου το K είναι ανεξάρτητο των (t, x, p) .

Απόδειξη. (Για το άνω φράγμα)

Για τη συνάρτηση $L(z)$, δεδομένου ότι $\mu_i \leq 1 \forall i$ ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} L(z) = L(x, p) &= \sum_{i=1}^N \left[e^{x_i} p_i - \mu_i \left(\sum_{j=1}^N e^{x_j} p_j + \eta \right) \right]^2 + \lambda \sum_{i=1}^N p_i \\ &\leq N \left(\sum_{j=1}^N e^{x_j} p_j + \eta \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^N p_i \\ &\leq N \left(\sum_{j=1}^N e^{2x_j} p_j^2 + 2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^N e^{x_i} p_i e^{x_j} p_j + 2 \sum_{j=1}^N e^{x_i} p_i \eta + \eta^2 \right) + \lambda \sum_{i=1}^N p_i. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Όμως ισχύει ότι, $\sum_{j=1}^N e^{2x_j} p_j^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (e^{4x_j} + p_j^4)$ και για $x_i < 0$ ισχύει $e^{x_i} < 1$ ενώ για $p_i < 1$ ισχύει $p_i^2 < 1$. Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές, η L φράσσεται από:

$$L(x(t), p(t)) \leq K' \left(1 + \sum_{j=1}^N (e^{4x_j(t)} + p_j(t)^4) \right), \quad (4.36)$$

όπου K' μία αρκετά μεγάλη σταθερά (η χρήση της είναι για να φράξει την L σε μικρές τιμές κατάστασης). Τότε με χρήση του θεωρήματος *Fubini*,

$$J(s, x, p; u(\cdot)) \leq \int_s^T \left[K' \left(1 + \sum_{j=1}^N E_{sxp} (e^{4x_j(t)}) + \sum_{j=1}^N E_{sxp} (p_j(t)^4) \right) \right] dt. \quad (4.37)$$

Μπορεί να δειχτεί εύκολα από τη λύση της γραμμικής ΣΔΕ (4.18) (Ενότητα 2.6) ότι η $x_i(t)$, $\forall i$ έχει *Gaussian* κατανομή, άρα $E(e^{4x_j(t)}) = e^{4E_{sxp}(x_j(t)) + 8\text{Var}(x_j(t))}$. Τότε, με χρήση του Θεωρήματος 6 της Ενότητας 2.8 και θεωρώντας τα x, p ως αρχικές τιμές, αποδυναμώνεται το άνω φράγμα για τη συνάρτηση αξίας $V(t, x)$ καθώς:

$$\begin{aligned} J(s, x, p; u(\cdot)) &\leq TK' \left(1 + \sum_{j=1}^N e^{4x_j} + \sum_{j=1}^N p_j^4 \right) = \\ &K \left(1 + \sum_{j=1}^N e^{4x_j} + \sum_{j=1}^N p_j^4 \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

□

Η συνάρτηση αξίας αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής, όμως δεν αποδεικνύεται να είναι

αρκετά ομαλή (π.χ., συνεχώς παραγωγίσιμη).

Προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα της μη ύπαρξης ομοιόμορφης παραβολικής μορφής, εισάγεται το παρακάτω προσεγγιστικό πρόβλημα στο οποίο αντιστοιχεί μία ομοιόμορφα παραβολική *HJB* εξίσωση.

$$\begin{aligned} \min J^\epsilon(s, x, p; u(\cdot)) &= E_{sxp} \left[\int_s^T L(x(r), p(r)) dr \right] \\ &\text{subject to:} \\ dx(t) &= f(x)dt + \sigma dW(t) \\ dp(t) &= u(t)dt + \sigma^\epsilon dW_2(t), \end{aligned} \quad (4.39)$$

όπου οι $W(t)$, $W_2(t)$ είναι δύο ανεξάρτητες N -διάστατες (διάσταση όσοι και οι χρήστες) τυπικές κινήσεις *Brown* και $\sigma^\epsilon = \epsilon = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_N]^T$. Στο συναρτησιακό κόστος J^ϵ , αντιστοιχεί η συνάρτηση αξίας V^ϵ . Στο πρόβλημα αυτό αντιστοιχεί η ομοιόμορφα παραβολική *HJB* παρακάτω:

$$0 = \frac{\partial V^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \frac{\partial^2 V^\epsilon}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 \frac{\partial^2 V^\epsilon}{\partial p_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V^\epsilon}{\partial x_i} (a_i(x_i + b_i)) - \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial V^\epsilon}{\partial p_i} \right| + L(x, p), \quad (4.40)$$

όπου οι απόλυτες τιμές στα $\frac{\partial V^\epsilon}{\partial p_i}$ οφείλονται στο \sup ως προς τον έλεγχο της *HJB* εξίσωσης.

Παρατηρείται ότι για το προσεγγιστικό πρόβλημα της Σχέσης (4.39) ενώ ισχύει η ομοιόμορφα παραβολική μορφή της *HJB* (4.40) δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 13 λόγω του γεγονότος ότι οι L , f δεν είναι φραγμένες (ισχύει το Q_0 -πεπερασμένος χρόνος και κατάσταση στο \mathbb{R}^{2N}). Επίσης, παρατηρείται ότι $\sigma^\epsilon \rightarrow 0$, για $\epsilon \rightarrow 0$ για τον τροποποιημένο κατά ϵ , αρχικά μηδενικό συντελεστή διάχυσης της ΣΔΕ της p . Ωστόσο, δεν πληρούνται οι απαιτήσεις των φραγμένων συντελεστών L , f και των μερικών παραγώγων τους ή/και η πολυωνυμική αύξησή τους λόγω του εκθετικού e^x που υπάρχει στην L , ώστε να εφαρμοστούν τα θεωρήματα για τροποποιημένους συντελεστές της ΣΔΕ της Ενότητας 3.3.4.

Ωστόσο, αποδεικνύονται στην αναφορά [22] τα παρακάτω δύο θεωρήματα σχετικά με τη V^ϵ , αφού οριστεί η κλάση των λύσεων F .

Ορισμός 28. (Κλάση των λύσεων V^ϵ , F)

Ορίζεται ως κλάση F , το σύνολο των λύσεων με τα εξής χαρακτηριστικά:

- $V^\epsilon \in C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^{2N}) \cup C([0, T] \times \mathbb{R}^{2N})$
- $|V^\epsilon| \leq C(1 + |p|^{k_1} + e^{k_2|x|})$, όπου τα C , k_1 , k_2 εξαρτώνται από το V^ϵ .

- $V^\epsilon(T, x, p) = 0$.

Θεώρημα 24. (Υπαρξη μοναδικής κλασσικής λύσης στην κλάση F για την HJB (4.40)) Η HJB (4.40) έχει μοναδική κλασσική λύση V^ϵ στην κλάση F για όλα τα $\epsilon > 0$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος αυτού εισάγεται το επόμενο πρόβλημα.

$$\begin{aligned} \min J^l(s, x, p; u(\cdot)) &= E_{sxp} \left[\int_s^T h^l(z(r))L(x(r), p(r))dr \right] \\ &\text{subject to :} \\ dx(t) &= h^l(z)f(x)dt + \sigma dW(t) \\ dp(t) &= h^l(z)u(t)dt + \sigma^\epsilon dW_2(t), \\ 0 &\leq h^l(z) \leq 1, \\ h^l(z) &= 1, |z| \leq l, \\ h^l(z) &= 0, |z| \geq l+1, \\ |h_{z_i}^l| &\leq 2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Η εισαγωγή της συνάρτησης h στο πρόβλημα αυτό οδηγεί σε φραγμένους συντελεστές της $\Sigma \Delta E$ της κατάστασης και σε φραγμένο συναρτησιακό κόστος και σε συνδυασμό με την ύπαρξη ομοιόμορφης παραβολικής μορφής λόγω του $\sigma^\epsilon = \epsilon$ μπορεί να εφαρμοστεί για παράδειγμα το Θεώρημα 13 ώστε να αποδειχτεί η ύπαρξη λύσης που να πληρεί της απαιτήσεις του Θεωρήματος Επιβεβαίωσης (Ενότητα 3.3.2). Η συνάρτηση h είναι μία *bump* συνάρτηση όμοια με τη συνάρτηση a_ρ που ορίστηκε στην Ενότητα 3.3.4.

Θεώρημα 25. (Σύγκλιση της κλασσικής λύσης της HJB (4.40) στη συνάρτηση αξίας του αρχικού προβλήματος V)

Για $0 < \epsilon < 1$, $B \in \mathbb{R}^{2N}$ συμπαγές και V^ϵ στην κλάση F , $V^\epsilon(s, x, p) \rightarrow V(s, x, p)$ ομοιόμορφα στο $[0, T] \times B$, για $\epsilon \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Συμβολίζεται με p_i^ϵ η λύση της

$$dp_i^\epsilon(t) = u_i(t)dt + \sigma_i^\epsilon dW_{2i}(t), \quad \forall i,$$

που ορίστηκε στο προσεγγιστικό πρόβλημα της Σχέσης (4.39). Τότε είναι φανερό συγκρίνοντας τη διαφορική εξίσωση για την ισχύ (Σχέση 4.19) και την παραπάνω στοχαστική διαφορική για την p^ϵ ότι $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} |p_i^\epsilon - p_i| = 0$ με πιθανότητα 1. Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του *Lebesgue* όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 22, έτσι με την εφαρμογή του (πιο λεπτομερώς η εφαρμογή του

θα πρέπει να είναι σε μία ακολουθία του ε , ε^j με $\varepsilon^j \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J^\varepsilon(s, x, p; u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E \int_s^T L(x(t), p^\varepsilon(t)) dt \\ &= E \int_s^T L(x(t), p(t)) dt = J(s, x, p; u), \end{aligned} \quad (4.42)$$

και επομένως $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V^\varepsilon(s, x, p) = V(s, x, p)$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. \square

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται φανερό ότι για αριθμητική εφαρμογή αρκεί να επιλυθεί αριθμητικά η HJB (4.40) με μικρή τιμή για το ε , όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Έστω ότι υπάρχουν δύο μόνο χρήστες της κυψέλης και $T = 1$. Οι ΣΔΕ που περιγράφουν τα κανάλια τους προς το ΣΒ δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -a(x_1 + b)dt + \sigma dW_1, \\ dx_2 &= -a(x_2 + b)dt + \sigma dW_2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Η ολοκληρώσιμη συνάρτηση L στο συναρτησιακό κόστος παίρνει τη μορφή:

$$L = [e^{x_1} p_1 - 0.4(e^{x_1} p_1 + e^{x_2} p_2 + 0.25)]^2 + [e^{x_2} p_2 - 0.4(e^{x_1} p_1 + e^{x_2} p_2 + 0.25)]^2 + \lambda(p_1 + p_2). \quad (4.44)$$

Με βάση την L και τις ΣΔΕ κατασκευάζεται η HJB η οποία πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά προκειμένου να προκύψει ο προσεγγιστικά βέλτιστος έλεγχος.

$$\begin{aligned} 0 &= V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 (V_{x_1 x_1} + V_{x_2 x_2}) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (V_{p_1 p_1} + V_{p_2 p_2}) \\ &\quad - a(x_1 + b) V_{x_1} - a(x_2 + b) V_{x_2} - |V_{p_1}| - |V_{p_2}| + L, \\ &\quad V(1, x, p) = 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

όπου οι απόλυτες τιμές στα V_{p_1} , V_{p_2} οφείλονται στο \sup ως προς τον έλεγχο της HJB εξίσωσης.

Η παραπάνω HJB θα επιλυθεί αριθμητικά με τη μέθοδο που περιγράφηκε στην Ενότητα 3.3.7 στη φραγμένη περιοχή

$$S = \{(t, x, p), 0 \leq t \leq 1, -4 \leq x_1, x_2 \leq 3, |p_1|, |p_2| \leq 3\}$$

Επιπλέον, εισάγονται οι οριακές συνθήκες: $V(t, x, p)|_{\bar{\partial}} = 0$, $\bar{\partial} = \partial S - \{(t, x, p), t = 0\}$. $\delta t > 0$, $h > 0$ είναι το χρονικό και το χωρικό βήμα αντίστοιχα. Επιπλέον, $z = (x_1, x_2, p_1, p_2)^T$ και $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ όπου το 1 είναι στη θέση i (η συνήθης βάση του

\mathbb{R}^{2N}). Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών της HJB (4.45) που προκύπτει με βάση τη θεωρία της Ενότητας 3.3.7 είναι:

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{1}{\delta t} [-V(t - \delta t, z) + V(t, z)] \\
 & + \frac{\sigma^2}{2h^2} [V(t, z + e_1 h) + V(t, z - e_1 h) - 2V(t, z)] + \frac{\sigma^2}{2h^2} [V(t, z + e_2 h) + V(t, z - e_2 h) - 2V(t, z)] \\
 & + \frac{\epsilon^2}{2h^2} [V(t, z + e_3 h) + V(t, z - e_3 h) - 2V(t, z)] + \frac{\epsilon^2}{2h^2} [V(t, z + e_4 h) + V(t, z - e_4 h) - 2V(t, z)] \\
 & - \frac{a(x_1 + b)}{h} [V(t, z + e_1 h) - V(t, z)] \mathbf{1}_{a(x_1 + b) \leq 0} - \frac{a(x_1 + b)}{h} [-V(t, z - e_1 h) + V(t, z)] \mathbf{1}_{a(x_1 + b) > 0} \\
 & - \frac{a(x_2 + b)}{h} [V(t, z + e_2 h) - V(t, z)] \mathbf{1}_{a(x_2 + b) \leq 0} - \frac{a(x_2 + b)}{h} [-V(t, z - e_2 h) + V(t, z)] \mathbf{1}_{a(x_2 + b) > 0} \\
 & + \frac{u_1}{2h} [V(t, z + e_3 h) - V(t, z - e_3 h)] + \frac{u_2}{2h} [V(t, z + e_4 h) - V(t, z - e_4 h)] + L(z),
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

όπου οι μερικές διαφορικές ως προς την ισχύ προσεγγίστηκαν με κεντρικές διαφορές για να αποφευχθεί η ανάγκη χρήσης του προσήμου του ελέγχου που είναι άλλωστε προς προσδιορισμό. Οι έλεγχοι υπολογίζονται ως εξής:

$$u_1 = -\text{sgn}[V(t, z + e_3 h) - V(t, z - e_3 h)], \quad u_2 = -\text{sgn}[V(t, z + e_4 h) - V(t, z - e_4 h)].$$

Με χρήση της συνθήκης στο όριο και $V(T, x, p) = 0$ μπορούν να υπολογιστούν οι έλεγχοι u_1 , u_2 και εν συνεχεία να ανανεώνεται η αριθμητική λύση οπισθοδρομικά. Σύμφωνα με τη θεωρία στην Ενότητα 3.3.7 η συνάρτηση αξίας που υπολογίζεται αριθμητικά συγκλίνει στην ακριβή λύση της Εξίσωσης (4.45), η οποία με τη σειρά της στο συμπαγές σύνολο B συγκλίνει στη βέλτιστη συνάρτηση αξίας του προβλήματος (χωρίς το ϵ).

4.5 Μελλοντικές Κατευθύνσεις για την Εφαρμογή του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στα Ασύρματα Δίκτυα Επικοινωνιών

Στην παρούσα ενότητα θα συζητηθούν δύο βασικές κατευθύνσεις εφαρμογής του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου στις ασύρματες επικοινωνίες. Η πρώτη σχετίζεται με το διαστρωματικό σχεδιασμό και τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας των ασύρματων κυψελωτών και πολυβηματικών δικτύων [32] και η δεύτερη αφορά στη διάδοση πληροφορίας σε ασύρματα πολυβηματικά δίκτυα [21]. Με τον όρο πολυβηματικό δίκτυο περιγράφεται η τοπολογία δικτύου όπου δεν υπάρχει κεντρική υποδομή και διαχείριση, αλλά οι κόμβοι συνεργάζονται για την επικοινωνία τους. Συγκεκριμένα, η πηγή και ο προορισμός επικοινωνούν μέσω ενδιάμε-

σων κόμβων (ή πολλαπλών βημάτων) που αναλαμβάνουν την αναμετάδοση της πληροφορίας λόγω της περιορισμένης ακτίνας εκπομπής των κόμβων [29], [30].

Κατεύθυνση 1: Θεωρία Μεγιστοποίησης Χρησιμότητας Ασύρματων Δικτύων.

Η Θεωρία Μεγιστοποίησης Χρησιμότητας Δικτύου (ΘΜΧΔ) [31, 32] εφαρμόζεται συχνά για τη διαστρωματική σχεδίαση και βελτιστοποίηση των ασύρματων πολυβηματικών δικτύων. Μία συνάρτηση χρησιμότητας (*utility function*) ανατίθεται σε κάθε ροή δικτύου (δηλαδή ζεύγος πηγής-προορισμού), και μεγιστοποιείται το άθροισμα των συναρτήσεων χρησιμότητας όλων των ροών στο δίκτυο, που ονομάζεται χρησιμότητα του δικτύου, κάτω από περιορισμούς σταθερότητας του δικτύου.

Το σύννηδες πρόβλημα του ελέγχου συμφόρησης [31, 32] σε ασύρματα πολυβηματικά δίκτυα, στηριζόμενο στη ΘΜΧΔ, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x} \geq 0} \sum_s U_s(x_s) \\ & \text{s.t.} \sum_{s:l \in L(s)} x_s \leq c_l, \forall l, \end{aligned} \quad (4.47)$$

όπου, κάθε πηγή s επιτυγχάνει μία ευχαρίστηση ή χρησιμότητα $U_s(x_s)$ όταν παράγει δεδομένα με ρυθμό x_s . Ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι σε κάθε σύνδεσμο l , το άθροισμα των εισερχόμενων ροών $\sum_{s:l \in L(s)} x_s$ από όλες τις πηγές που χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο σύνδεσμο θα είναι μικρότερο από τη χωρητικότητα του συνδέσμου. Η χωρητικότητα του συνδέσμου θεωρείται σταθερή σε πολλές εργασίες στη βιβλιογραφία. Ωστόσο, κάτω από ρεαλιστικές συνθήκες ασύρματων καναλιών οι χωρητικότητες τους είναι στοχαστικές (τυχαίες και χρονομεταβλητές), και συχνά χαρακτηρίζονται από χρονομεταβλητές στατιστικές ποσότητες (π.χ., μέση τιμή), δημιουργώντας την ανάγκη για τον επανασχεδιασμό και την εκ νέου επίλυση του προβλήματος ΜΧΔ. Επομένως, θα πρέπει να μελετηθεί το πρόβλημα ΜΧΔ σε ασύρματα πολυβηματικά δίκτυα υπό στοχαστικές συνθήκες λειτουργίας των ασύρματων καναλιών. Προς αυτή την κατεύθυνση μπορεί να υιοθετηθεί το μοντέλο του στοχαστικού ασύρματου καναλιού κατά το οποίο η απώλεια ισχύος κατά μήκος του καναλιού προκύπτει ως λύση μίας ΣΔΕ, όπως περιγράφηκε στην Ενότητα 4.2. Σημειώνεται ότι υπάρχει ένα προς ένα σχέση μεταξύ της απώλειας ισχύος και της χωρητικότητας του ασύρματου καναλιού κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μέσω της φόρμουλας του *Shannon* [29]. Τότε, δύναται να χρησιμοποιηθεί ο Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος για το φορμαλισμό και την επίλυση του ΜΧΔ προβλήματος υπό στοχαστικές συνθήκες.

Θα πρέπει να δοθεί προσοχή στην ικανοποίηση των απαιτήσεων από τις συναρτήσεις του προβλήματος ΜΧΔ για την ύπαρξη αρκετά ομαλής λύσης της *HJB* εξίσωσης (Ενότητα 3.3.2). Ακόμη, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι εκτός από την απώλεια ισχύος μπορεί να υπάρχει και άλλη μεταβλητή κατάστασης όπως οι ουρές δεδομένων στους κόμβους.

Σε ένα πολυβηματικό δίκτυο, οι κόμβοι αποθηκεύουν τα πακέτα σε ουρές αποθήκευσης μέχρι να καταστεί δυνατή η εξυπηρέτησή τους δηλαδή η μετάδοσή τους σε γειτονικό κόμβο προς την κατεύθυνση του προορισμού. Η δυναμική των ουρών αποθήκευσης στους κόμβους περιγράφεται συχνά από μία κανονική διαφορική εξίσωση (θεωρώντας συνεχή χρόνο). Το γεγονός αυτό μπορεί να δημιουργήσει το πρόβλημα μη ύπαρξης παραβολικής μορφής στη HJB εξίσωση και να είναι δυνατή μόνο η εφαρμογή προσεγγιστικών μεθόδων όπως στην προηγούμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου.

Κατεύθυνση 2: Διάδοση Πληροφορίας σε Ασύρματα Πολυβηματικά Δίκτυα.

Στα ασύρματα πολυβηματικά δίκτυα συχνά αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της διάδοσης κακόβουλης πληροφορίας που δύναται να αρχίσει διάφορες μορφές επίθεσης στο δίκτυο [21]. Προκειμένου να εφευρευθούν αποτελεσματικά μέτρα αντιμετώπισης της διάδοσης κακόβουλης πληροφορίας στα ασύρματα πολυβηματικά δίκτυα, κατασκευάζονται μοντέλα του τρόπου της διάδοσης αυτής, ώστε να ποσοτικοποιηθούν οι επιπτώσεις που δύνανται να προκληθούν στο δίκτυο από τους επιτιθέμενους και να καθοριστούν βέλτιστες αποφάσεις/έλεγχοι για την προστασία του δικτύου. Η δυναμική μεταβολή του αριθμού των κόμβων που είναι μολυσμένοι, κατεστραμμένοι, ευάλωτοι ή προφυλαγμένοι από την από κακόβουλη πληροφορία περιγράφεται μέσα από διαφορικές εξισώσεις. Στην αναφορά [21] αναπτύχθηκε ένα μοντέλο διάδοσης πληροφορίας στο πλαίσιο του Βέλτιστου Ελέγχου. Καθώς, όμως η διάδοση πραγματοποιείται μέσω της ασύρματης επικοινωνίας των κόμβων και τα ασύρματα κανάλια υποφέρουν από διαλείψεις που τα καθιστούν στοχαστικά θα είναι χρήσιμο να ληφθεί ο παράγοντας αυτός υπόψη στο φορμαλισμό του προβλήματος και επομένως το πρόβλημα της [21] θα πρέπει να τεθεί στο πλαίσιο του Στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε πιο ρεαλιστική μοντελοποίηση της διάδοσης κακόβουλης πληροφορίας και στην ταυτοποίηση πιο εύστοχων πολιτικών ελέγχου και προστασίας των ασύρματων κόμβων.

Παράρτημα Α΄

Περιγραφή Ορισμών και Θεωρημάτων που Χρησιμοποιήθηκαν (από Θεωρία Πιθανοτήτων, Στοχαστικές Ανελίξεις και Συναρτησιακή Ανάλυση)

Στο παρόν παράρτημα, παρατίθενται ορισμοί που χρησιμοποιούνται στη μεταπτυχιακή εργασία. Την πρώτη φορά χρήσης κάποιου όρου που ορίζεται στο παρόν παράρτημα, γίνεται παραπομπή σε αυτό.

Ορισμός 29. (Συνεχής στοχαστική ανέλιξη ([3], Κεφ. 1, Σελ. 12))

Εστω μία στοχαστική ανέλιξη $x = \{x(t)\}_{t \geq 0}$ με τιμές στο \mathbb{R}^m και ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Λέγεται ότι η στοχαστική ανέλιξη x έχει συνεχείς τροχιές ή είναι συνεχής, όταν υπάρχει $N \in \mathcal{F}$ με $P(N) = 0$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N$ η συνάρτηση $t \in [0, \infty) \rightarrow x(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ να είναι συνεχής.

Ορισμός 30. (Σχέσεις μεταξύ δύο στοχαστικών ανελίξεων ([3], Κεφ. 1, Σελ. 5))

Εστω δύο στοχαστικές ανελίξεις $x = \{x(t)\}, t \in [0, T], Y = \{Y(t)\}, t \in [0, T]$, ορισμένες στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον \mathbb{R}^m . Οι στοχαστικές ανελίξεις x, Y , ονομάζονται

(i) Εκδοχή ή τροποποίηση η μία της άλλης όταν για κάθε $t \in [0, T]$, ισχύει $x(t) = Y(t)$ \mathbf{P} -σχεδόν βεβαίως (\mathbf{P} -σ.β.), δηλαδή, για κάθε $t \in [0, T]$ υπάρχει $N_t \in \mathcal{F}$ με $\mathbf{P}(N_t) = 0$ έτσι ώστε να ισχύει $x(t, \omega) = Y(t, \omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N_t$.

(ii) Μη-διακρινόμενες όταν υπάρχει $N \in \mathcal{F}$ με $\mathbf{P}(N) = 0$ έτσι ώστε να ισχύει $x(t, \omega) = Y(t, \omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N$, για κάθε $t \in [0, T]$. Δύο στοχαστικές ανελίξεις όπου η μία είναι εκδοχή της άλλης με συνεχείς τροχιές θα είναι μη διακρινόμενες.

Ορισμός 31. (Παραγόμενη σ -άλγεβρα από τη στοχαστική ανέλιξη x)

Ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_t^x = \sigma(x(s), s \leq t) = \sigma(\{x(s)^{-1}(A) : s \in [0, t], A \in \mathcal{B}^m\})$, η οποία είναι η ελάχιστη σ -άλγεβρα για την οποία οι τυχαίες μεταβλητές $x(s), s \leq t$ καθίστανται μετρήσιμες. Στο συμβολισμό της διύλισης δεν θα αναφέρεται η στοχαστική ανέλιξη, δηλαδή θα γράφεται \mathcal{F}_t όταν δεν προκύπτει σύγχυση.

Ορισμός 32. (Χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με διύλιση)

Ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ λέγεται ότι είναι εφοδιασμένος με διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, όταν για κάθε $t \geq 0$, η \mathcal{F}_t είναι σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Ω με $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ και ισχύει $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ για $t_1 < t_2$.

Να σημειωθεί ότι εναλλακτικά του $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ μπορούμε να έχουμε $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ όπου T είναι ένα σύνολο χρόνων.

Ορισμός 33. (Χώρος πιθανότητας που ικανοποιεί τη συνήθη συνθήκη ([5], Κεφ. 1))

Ένας χώρος πιθανότητας με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$ θα λέγεται ότι ικανοποιεί τη συνήθη συνθήκη, όταν η σ -άλγεβρα \mathcal{F}_0 εμπεριέχει όλα τα \mathbf{P} κενά σύνολα της \mathcal{F} (ένα σύνολο A θα λέγεται \mathbf{P} κενό όταν $P(A) = 0$), ο μετρικός χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ είναι πλήρης (δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{F}$ αν $B \subset A$ τότε $B \in \mathcal{F}$), και η $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ είναι δεξιά συνεχής (δηλαδή $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$).

Ορισμός 34. (Προοδευτική μετρησιμότητα)

Η προοδευτική μετρησιμότητα ορίζεται ως η $\mathcal{B}_{[0,s]} \times \mathcal{F}_s$ -μετρησιμότητα για κάθε $s \geq 0$.

Ορισμός 35. (Στοχαστική ανέλιξη προσαρμοσμένη στη διύλιση)

Έστω μία στοχαστική ανέλιξη $x = \{x(t)\}_{t \geq 0}$ ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ που είναι εφοδιασμένος με διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Η στοχαστική ανέλιξη x λέγεται προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ όταν για κάθε $t \geq 0$, η $x(t)$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη.

Ορισμός 36. (\mathcal{F}_t -Χρόνος διακοπής (Stopping Time) ([3], Κεφ. 1, Σελ. 22))

Έστω ο μετρήσιμος χώρος (Ω, \mathcal{F}) , εφοδιασμένος με τη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Μία τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ λέγεται χρόνος διακοπής της $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ όταν ισχύει $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.

Ορισμός 37. (Martingale ([3], Κεφ. 1, Σελ. 25))

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ με τιμές στο \mathbb{R} , ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ λέγεται ότι είναι ένα \mathcal{F}_t -submartingale (αντίστοιχα \mathcal{F}_t -supermartingale), με $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ μία διύλιση του χώρου (Ω, \mathcal{F}) , όταν και μόνο όταν ισχύουν:

- Η τυχαία μεταβλητή $x(t)$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη $\forall t \in T$.
- $E(|x(t)|) < \infty, \forall t \in T$.
- $E(x(t)|\mathcal{F}_s) \geq x(s)$ (αντίστοιχα $E(x(t)|\mathcal{F}_s) \leq x(s)$), $\mathbf{P} - \sigma.\beta.$

για οποιαδήποτε $s, t \in T, s < t$. Αν η $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ είναι ταυτόχρονα *submartingale* και *supermartingale* θα λέγεται *martingale*.

Ορισμός 38. (\mathcal{F}_t -τοπικό *martingale* ([3], Κεφ. 1, Σελ. 28))

Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ με τιμές στο \mathbb{R} , ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ που είναι εφοδιασμένος με τη διύλιση $\{\mathcal{F}\}_{t \geq 0}$. Η στοχαστική ανέλιξη $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ θα λέγεται ότι είναι ένα \mathcal{F}_t -local *martingale* όταν υπάρχει ακολουθία χρόνων διακοπής $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, με $\lim \tau_n = \infty$, $\mathbf{P} - \sigma.\beta.$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η στοχαστική ανέλιξη $\{x(t \wedge \tau_n)\}_{t \geq 0}$ να είναι \mathcal{F}_t -*martingale*.

Θεώρημα 26. (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του *Lebesgue*)

Έστω μία ακολουθία (*Lebesgue*) μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων, f_n σε ένα μετρήσιμο χώρο (S, Σ, μ) . Έστω ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g με $|f_n(x)| \leq g(x), \forall n, x \in S$. Έστω ότι υπάρχει f ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ σχεδόν παντού. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_S f d\mu = \lim_n \int_S f_n d\mu$.

Ορισμός 39. (Χώρος *Hilbert* [33])

Ένας πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος *Hilbert*.

Ορισμός 40. (Ισχυρή σύγκλιση σε χώρο *Hilbert* [33])

Μία ακολουθία x_n σε ένα χώρο *Hilbert*, E , θα καλείται ισχυρώς συγκλίνουσα στο $x \in E$ αν ισχύει $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$.

Ορισμός 41. (Ασθενής σύγκλιση σε χώρο *Hilbert* [33])

Μία ακολουθία x_n σε ένα χώρο *Hilbert*, E , θα καλείται ασθενώς συγκλίνουσα στο $x \in E$ αν ισχύει $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ όταν $n \rightarrow \infty$ για κάθε $y \in E$.

Η ισχυρή σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση ωστόσο δεν ισχύει πάντα το αντίστροφο.

Βιβλιογραφία

- [1] B. Oksendal, “Stochastic Differential Equations”, *6th Edition Springer-Verlag*, 2003.
- [2] W. G. Faris, “Lectures on Stochastic Processes”, Nov. 2001.
- [3] Ι. Σπηλιώτης, «Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά», Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα 2004.
- [4] T. Yamada, “On a Comparison Theorem for Solutions of Stochastic Differential Equations and its Applications”, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, Vol. 13, No. 3, pp. 497-512, 1973.
- [5] J. Yong, X. Y. Zhou, “Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations”, *Springer-Verlag*, 1999.
- [6] A. V. Efimov, “Modulus of Continuity”, *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer, 2001.
- [7] D. J. Higham, “An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations”, Vol. 43, No. 3, pp. 525-546, 2001.
- [8] D. J. Higham, P. E. Kloeden, “MAPLE and MATLAB for Stochastic Differential Equations in Finance”, *Programming Languages and Systems in Computational Economics and Finance*, Springer US, pp. 233-269, 2002.
- [9] W. H. Fleming, H. M. Sonner, “Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions”, *2nd Edition*, Springer-Verlag, 2006.
- [10] D. M. Causon, C. G. Mingham, “Introductory Finite Difference Methods for PDEs”, *Ventus Publishing ApS*, 2010.
- [11] K. Yosida, “Functional Analysis”, *6th Edition Springer-Verlag*, 1980.
- [12] H. J. Kushner, “Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations”, *Academic Press, New York*, 1977.
- [13] H. J. Kushner, P. Dupuis, “Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time”, *Springer-Verlag, New York, Second Edition*, 2001.
- [14] S. Boyd, L. Vandenberghe, “Convex Optimization”, *Cambridge University Press*, 2004.
- [15] D. P. Bertsekas, “Nonlinear Programming: 2nd Edition”, *Athena Scientific*, 2009.
- [16] X. Gao, Y. Lu, M. Sharma, M. S. Squillante, J. W. Bosman, “Stochastic Optimal

- Control for a General Class of Dynamic Resource Allocation Problems”, *SIGMET-RICS Perform. Eval. Rev.*, Vol. 41, No. 2, pp. 3-14, August 2013.
- [17] M. Huang, P. E. Caines, R. P. Malhame, “Uplink Power Adjustment in Wireless Communication Systems: a Stochastic Control Analysis”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, No. 10, pp. 1693-1708, Oct. 2004.
- [18] F. Meriaux, S. Lasaulce, H. Tembine, “Stochastic Differential Games and Energy-Efficient Power Control”, *Dynamic Games and Applications*, Vol. 3, No. 1, pp. 3-23, 2013.
- [19] M. Olama, S. Djouadi, C. Charalambous, “Stochastic Power Control for Time-Varying Long-Term Fading Wireless Networks”, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, pp. 1-13, 2006.
- [20] E. Sharanya, A. Misra, T. La Porta, “Control-Theoretic Optimization of Utility Over Mission Lifetimes in Multi-hop Wireless Networks”, *6th Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor, Mesh and Ad Hoc Communications and Networks (SECON'09)*, 2009.
- [21] M. H. R. Khouzani, S. Sarkar, “Dynamic Malware Attack in Energy-Constrained Mobile Wireless Networks”, *In Proc. of the IEEE Information Theory and Applications Workshop (ITA)*, pp. 1-11, January 2010.
- [22] M. Huang, E. C. Peter, C. D. Charalambous, R. P. Malhame, “Stochastic power control for wireless systems: classical and viscosity solutions”, *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 2, 2001.
- [23] K. Yosida, “Functional Analysis”, *6th Edition Springer-Verlag*, 1980.
- [24] D. Williams, “Probability with Martingales”, *Cambridge University Press*, 1991.
- [25] L. Yang, S. P. Sheng, R. Saigal, M. Liu, D. Chen, Q. Zhang, “A Stochastic Differential Equation Model for Spectrum Utilization”, *In Proc. of IEEE International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks (WiOpt)*, pp. 220-227, May 2011.
- [26] M. Olama, S. Djouadi, C. Charalambous, “Wireless Fading Channel Models: from Classical to Stochastic Differential Equations”, *Stochastic Control, Chris Myers(Ed.)*, ISBN: 978-953-307-121-3, InTech, DOI: 10.5772/9738, Aug. 2010.
- [27] C. Charalambous, D. Seddik, M. Djouadi, S. Z. Denic, “Stochastic Power Control for Wireless Networks via SDEs: Probabilistic QoS Measures”, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 51, No. 12, pp. 4396-4401, 2005.
- [28] T. Feng, T. R. Field, S. Haykin, “Stochastic Differential Equation Theory Applied to Wireless Channels”, *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 55, No. 8, pp. 1478-1483, 2007.
- [29] A. Goldsmith, “Wireless Communications”, *Cambridge University Press*, 2005.

- [30] D. Tse, P. Viswanat, “Fundamentals of Wireless Communication”, *Cambridge University Press*, 2005.
- [31] A. Eryilmaz, R. Srikant, “Joint Congestion Control, Routing and MAC for Stability and Fairness in Wireless Networks”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 24, No. 8, pp. 1514-1524, August 2006.
- [32] L. Georgiadis, M. J. Neely, L. Tassiulas, “Resource Allocation and Cross-Layer Control in Wireless Networks”, *Now Publishers*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-144, 2006.
- [33] L. Debnath, P. Mikusinski, “Introduction to Hilbert Spaces with Applications”, *Academic Press*, 2005.