ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΑ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ

ΣΠΥΡΙΛΙΩΤΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ – ΕΛΠΙΔΑ
Α.Μ. 09104067

Στη μνήμη του παππού μου, Βαγγέλη….

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει τίτλο «Τα Πυθαγόρεια Μαθηματικά και οι εφαρμογές τους στην Παιδαγωγική». Σκοπός είναι ξεκινώντας απο μια ιστορική αναδρομή στα Πυθαγόρεια Μαθηματικά να γίνει μια προσπάθεια να παρουσιαστεί ο τρόπος, με τον οποίο έφτασαν οι Πυθαγόρειοι στα μαθηματικά αποτελέσματα που τους αποδίδονται και τέλος να προσδιορίσουμε πως τα μαθηματικά των Πυθαγορείων μπορούν να συμβάλλουν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η διπλωματική εργασία χωρίζεται σε τρία μέρη.

Στο πρώτο μέρος δίνεται μία ιστορική αναδρομή με πρωταγωνιστή τον Πυθαγόρα και την Πυθαγόρεια σχολή και επεκτείνεται στην συμβολή τους ,σε γενικό πλαίσιο, στα μαθηματικά όπως και σε άλλες επιστήμες.

Στο δεύτερο μέρος δίνεται έμφαση στα Πυθαγόρεια μαθηματικά. Συγκεκριμένα επιμερίσαμε την έρευνα μας σύμφωνα με τα βιβλία του Ευκλείδη ,τα οποία περιλαμβάνουν τις μαθηματικές προτάσεις που αποδίδονται στους Πυθαγορείους. Σε αυτό το σημείο γίνεται η ανάλυση των μαθηματικών προτάσεων και η παρουσίαση τους σύμφωνα με τη μέθοδο των Πυθαγορείων. Παράλληλα γίνεται αντιστοίχιση των προτάσεων αυτών με τις ακριβείς σχολικές ενότητες και τους εναλλακτικούς τρόπους παρουσίασης τους κατά την διδασκαλία τους στις σχολικές αίθουσες.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος παρουσιάζεται ένα γενικό συμπέρασμα από την ανάλυση των μαθηματικών των Πυθαγορείων σχετικά με την παρουσία τους και τη περαιτέρω συμβολή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέρος Α

- ✍ Ιστορική Αναδρομή
- ✍ Η δομή της Πυθαγόρειας Σχολής

Έχοντας σαν σκοπό την παρουσίαση και την ανάλυση των μαθηματικών ανακαλύψεων των πυθαγορείων είναι ιδιαίτερα χρήσιμο ο αναγνώστης να έχει μία πλήρη εικόνα της εποχής, στην οποία αναφερόμαστε. Το περιβάλλον ,στο οποίο έζησαν οι Πυθαγόρειοι, οι επιρροές και τα ερεθίσματα που δέχτηκαν, είναι επόμενο να μας οδηγήσουν στην καλύτερη κατανόηση ως προς τον τρόπο και τους λόγους, οι οποίοι συντέλεσαν στην εξέλιξη της μαθηματικής – και όχι μόνο – επιστήμης από τα μέλη της Πυθαγόρειας Αδελφότητας.

Ιστορικά στοιχεία

Η Πυθαγόρεια Σχολή ιδρύθηκε , όπως προδίδει και το όνομα της, από τον Πυθαγόρα, έναν. Ο Πυθαγόρας, υιός του Μνήσαρχου, γεννήθηκε στη Σάμο το 570 π. Χ.[1] Σε κοντινή απόσταση προς τα ανατολικά, στην παράκτια πόλη της Μιλήτου ζούσε ο διάσημος φιλόσοφος Θαλής, ο πρώτος από τους μεγαλύτερους Έλληνες στοχαστές που διαμόρφωσαν τον πνευματικό κόσμο για τα επόμενα 1.000 χρόνια Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι ο νεαρός Πυθαγόρας ίσως είχε έρθει σε επαφή με τη σχολή της Μιλήτου ,στην οποία πρωτοστατούσε ο Θαλής, γεγονός του εμφύτευσε το πάθος για τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία. Επί πολλά χρόνια περιπλανήθηκε σε χώρες κυρίως της Ανατολής και λέγεται πως έμενε για ένα διάστημα στην Αίγυπτο και την Ινδία όπου μελέτησε τα τεκταινόμενα στον επιστημονικό τομέα. Έπειτα γυρίζοντας στην Σάμο, λόγω της τυρρανίας του Πολυκράτη, μεταναστεύει στο ελληνικό λιμάνι του Κρότωνα, στη νότια Ιταλία, όπου και ιδρύει την περίφημη Πυθαγόρεια Σχολή κάποια στιγμή μετά το 530 π.Χ.[2], η οποία απέβλεπε όχι μόνο σε επιστημονική έρευνα αλλά και σε πολιτικοθρησκευτικό σκοπό.

[1] Βλ. .Maor[2008] , σελ 40
[2].Βλ. .Hermann[2008] , σελ 65

Οι λόγιοι του Κρότωνα υποδέχθηκαν τον Πυθαγόρα, σαν ένα δημόσιο ρήτορα, ο οποίος είχε μία αποστολή[3].Ο σκοπός του ήταν να μορφώσει το λαό του Κρότωνα και να αποτελέσει την αφορμή ή την αιτία να αλλάξει ο τρόπος ζωής των εύπορων πολιτών με ροπή απο την πολυτέλεια στην νηφαλιότητα, κάτι το οποίο πέτυχε όπως προδίδει η φήμη του ως «αρχιτέκτονα της χρυσής εποχής » στον Κρότωνα[4]. Γίνεται κατανοητό ότι οι ομιλίες του Πυθαγόρα είχαν πολιτική και θρησκευτική χροιά , χωρίς να γίνεται καθαρός διαχωρισμός ανάμεσα στα δύο, «η πολιτική είναι θρησκεία και η θρησκεία πολιτική».[5]

Γι' αυτό κατηγορείται ο Πυθαγόρας ότι η σκοπιμότητα και η πιο σημαντική επίπτωση του στους πολίτες του Κρότωνα δεν ήταν η ανώτερη μόρφωση, όπως οι περισσότεροι έχουμε στο μυαλό μας! Βέβαια η μόρφωση για τον Πυθαγόρα ήταν εξέχουσας σημασίας, διότι θεωρούσε ότι διαρκεί για μία ζωή και ότι μπορούσε να καλλιεργεί την αιώνια φήμη. Συνδυάζοντας αυτό το στοιχείο με το θρησκευτικό δόγμα του περί μετεμψυχώσεων κατανοούμε την βαρύνουσα σημασία που είχε η μόρφωση για τον Πυθαγόρα, κάτι που αντικατοπτριζόταν στις ομιλίες του.[6]

Χαρακτηριστικά αναφέρει ο W.K.C Gurthie[7] :"Η ευφυΐα του Πυθαγόρα πρέπει να διέθετε τόσο λογική όσο και θρησκευτική ποιότητα, που σπάνια υπάρχουν στον ίδιο άνθρωπο. Δεν προκαλεί έκπληξη ότι εκείνος και η σχολή του προσέλκυσαν δύο διαφορετικούς τύπους ανθρώπων, από τη μία ενθουσιώδεις για την προώθηση της μαθηματικής φιλοσοφίας και από την άλλη θρησκευόμενους, το ιδανικό των οποίων ο «Πυθαγόρειος τρόπος ζωής», η ζωή της θρησκευτικής σέκτας που μοιάζει πολύ με εκείνη των Ορφικών και δικαιολογεί τις πρακτικές της με ένα παρόμοιο σύστημα μυστικιστικών πεποιθήσεων». Ο

[3] Van der Waerden[1954] (*Pythagoreer* 190-201)
[4] Ιαμβλιχός,*Βίος Πυθαγόρα* [37]Απο τις τέσσερις ομιλίες του Πυθαγόρα ,που διασώζονται από το Νικόμαχο,είναι φανερός ο αντίκτυπος αυτών των διδασκαλιών και η συμβολή τους στην ανανέωση του Κρότωνα και δικαιώνεται ο χαρακτηρισμός αυτός για τον Πυθαγόρα.
[5] Burkert[100], Γνώση 119
[6] Ιαμβλιχός,*Βίος Πυθαγόρα* 457
[7] Gurthrie[1962]σελ 43 και Βλ. .Hermann[2008] , σελ 148

Ορφισμός πρέσβευε ότι μέσω της έκστασης μπορούσε να επιτευχθεί η πνευματική ενόραση στη θεϊκή καταγωγή και τη φύση της ψυχής.

Η Πυθαγόρεια Σχολή αποτελούσε μία ακαδημία για τη μελέτη κυρίως της φιλοσοφίας και των μαθηματικών αν και επεκτάθηκε και σε άλλους τομείς, όπως η αστρονομία και η μουσική. Αποτελούνταν από μία ομάδα ανθρώπων, οι οποίοι είχαν δεχθεί κάποιες αρχές, έπρατταν συλλογικά και λειτουργούσαν υπό άκρα μυστικότητα, βασικό χαρακτηριστικό της σχολής. Λέγεται ότι ο ίδιος ο Πυθαγόρας πίστευε ότι οι μυστικές και καλά οργανωμένες δυνάμεις μπορούσαν να έχουν σημαντικά αποτελέσματα, στοιχεία που δεν αναφέρεται μόνο στη μόρφωση αλλά σε όλα τα επίπεδα (θρησκευτικό, πολιτικό) .

Η δομή της Πυθαγόρειας σχολής

Η δομή της σχολής δεν αποτελούνταν κατά τα γνωστά από μαθητές και δασκάλους αλλά από τρείς διαφορετικές βαθμίδες. Κατ' αρχάς υπήρχαν οι υποψήφιοι, οι οποίοι περνούσαν από μία σειρά δοκιμασιών ώσπου να γίνουν δεκτοί στη σχολή, ενώ το επόμενο βήμα, με την αποδοχή τους στη σχολή, ήταν η ακρόαση των διδασκαλιών χωρίς να υπάρχει το δικαίωμα οπτικής επαφής με τον διδάσκαλο, οι λεγόμενοι ακουσματικοί ή ακροατές[8]. Σε αντίθεση με τους ακουσματικούς υπήρχαν και οι εκλεκτοί, οι οποίοι είχαν το δικαίωμα να παρακολουθούν και να συζητούν με τον Πυθαγόρα , τους λεγόμενους Μαθηματικούς ή μαθητευόμενους[9].Αυτά τα άτομα ασχολήθηκαν με τα θέματα της «μάθησης», δηλαδή της έρευνας, αναζητώντας περαιτέρω απαντήσεις προς την κατανόηση της αλήθειας.

Σαφώς δεν πρέπει να παραλείψουμε ότι στον κύκλο των Πυθαγορείων αναδύεται και η λέξη «φιλόσοφος[10]», δημιούργημα ελληνικό, το οποίο θα

[8] Guthrie[1962] σελ 30
[9] Guthrie[19 62] σελ 31
[10] Burkert[1972] σελ 1

παραμείνει περνώντας μέσα στους αιώνες και στους περισσότερους λαούς ως λέξη ελληνική και συνήθως αμετάφραστη.

Φαίνεται , κατά πολλούς, ότι υπήρχαν τέσσερα μέρη της Πυθαγόρειας διδασκαλίας, τα οποία αναφέρονται από τον Πλάτωνα στη «*Πολιτεία*» ως το δευτερεύων μέρος του προγράμματος σπουδών :Αριθμητική, Γεωμετρία, Αρμονία (Μουσική) και Αστρονομία. Αυτό είναι το κλασσικό quadrivium[11] , η βασική διδασκόμενη γνώση που κάθε μορφωμένο άτομο οφείλει να κατέχει.

Κατά την διδασκαλία τους, η αρμονία είναι εκείνη που αποκαθιστά την ενότητα ανάμεσα στα αντιτιθέμενα μέρη και τα συγκροτεί σε κόσμο. Η αρμονία είναι θεία και συνίσταται από αριθμητικούς λόγους. Όποιος επιτυγχάνει να κατανοήσει πλήρως αυτή την αριθμητική αρμονία γίνεται ο ίδιος θείος και αθάνατος. Μουσική ,αρμονία και αριθμοί είναι άρρηκτα ενωμένα στην διδασκαλία του Πυθαγόρα[12]. Ακρογωνιαίος λίθος της φιλοσοφίας των Πυθαγορείων είναι ο αριθμός, αφού σύμφωνα με την κοσμολογία τους « τα πάντα είναι αριθμός»[13].Στηρίζονταν στην υπόθεση ότι οι ακέραιοι αριθμοί είναι η αιτία των διαφόρων ποιοτήτων του ανθρώπου και της ύλης, ότι οι αριθμοί ρυθμίζουν το σύμπαν και ποιοτικά και ποσοτικά. Χαρακτηριστικά αναφέρει ο Αριστοτέλης[14] ότι «ο αριθμός είναι η πρώτη αρχή, τον λαμβάνουν (οι Πυθαγόρειοι) ως ύλη των όντων όσο και ως αυτό που συνιστά τις ιδιότητες του και τις μόνιμες καταστάσεις του. Αυτή η εξύψωση των αριθμών οδήγησε στη βαθιά μελέτη τους.

Βέβαια εκτός από την προαγωγή της επιστήμης των μαθηματικών, η ενασχόληση με τους αριθμούς κατείχε θέση και στη θρησκεία του Πυθαγορισμού. Οι Πυθαγόρειοι, επειδή οι αριθμοί δεν ήταν η πιο κατάλληλη βάση για να στηριχθεί η φιλοσοφία τους στράφηκαν προς τον συμβολισμό, συγχέοντας με αυτόν τον τρόπο τους αριθμούς με πράγματα και έννοιες. Η ιδέα ήταν οτι όλα τα πράγματα μπορούν να αναλυθούν σε αριθμούς και να επικυρωθούν από

---

[11] Burkert[1972] σελ 1

[12] Καρασμάνης[1998] σελ 29.Αυτό πιστοποιείται και από ένα απόσπασμα του Ξενοκράτη, μαθητή του Πλάτωνα, που μας λέει ότι ο Πυθαγόρας ανακάλυψε τις αριθμητικές σχέσεις στη μουσική(*Darstellung der Lehre und Sammlung der Fragmente*, R.Heinze, ed., fr.9)

[13] Αριστοτέλης *Μετά τα Φυσικά* Α5

[14] *Μετά τα Φυσικά* 1080β19

αυτούς[15]. Την αντίθεση του στην συγκεκριμένη πλευρά της Πυθαγόρειας πίστης εξέφρασε ο Αριστοτέλης[16] ρωτώντας «Πως είναι δυνατόν οι ιδιότητες – λευκό, γλυκό, ζεστό- να είναι αριθμοί ;»Ενώ κάποιοι άλλοι, όπως παραδείγματος χάριν ο W.K.C Gurthie[17] φαίνεται να υπερασπίζεται τους Πυθαγορείους λέγοντας «Κοιτάζοντας πίσω, φαίνεται λες και ο Αριστοτέλης ήταν εκείνος που οδήγησε την επιστήμη σε λάθος δρόμο. Σήμερα η επιστημονική περιγραφή όλων των πραγμάτων στον φυσικό κόσμο παίρνει την μορφή αριθμητικών εξισώσεων. Αυτό που αντιλαμβανόμαστε ως φυσικές ιδιότητες – χρώμα, θερμότητα, φώς, ήχος – εξαφανίζονται και αντικαθίστανται από αριθμούς που εκπροσωπούν μήκη κύματος και μάζες.»

☞ Περί αριθμολογίας

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Burkert[18] για τους Πυθαγορείους, η μονάδα αντιπροσωπεύει την ψυχή, την νοημοσύνη, το πνεύμα γιατί αυτό «δεν αλλάζει, είναι το ίδιο παντού, μία κυρίαρχη αρχή», το δύο υποδηλώνει την σκέψη, την άποψη, που ταλαντεύεται συνεχώς. Επειδή το «όλον» περιλαμβάνει τρία πράγματα «αρχή, μέση και τέλος» του έδωσαν τον αριθμό τρία , που είναι και ο αριθμός του σύμπαντος.[19]

Συμφωνά με τον Αριστοτέλη στα «*Μετά τα Φυσικά*»(Α5) η έννοια της Δικαιοσύνης ήταν συνδεδεμένη με τον αριθμό 4 και 9, τους τετράγωνους αριθμούς, που προκύπτουν από τον πρώτο άρτιο (2) και τον πρώτο περιττό (3) αριθμό, δίνοντας βαρύτητα στην έννοια της αμοιβαιότητας. Ο αριθμός 5 αναπαριστούσε το γάμο, με το σκεπτικό ότι ενώνει τον πρώτο άρτιο αριθμό, που ήταν θηλυκός, και τον πρώτο περιττό αριθμό, που ήταν αρσενικό. Ο αριθμός 7 αντιπροσωπεύει τον σωστό χρόνο επειδή ο Ήλιος λέγεται ότι καταλαμβάνει την

---

[15] Heath[1981] σελ 67
[16] *Μετά τα Φυσικά* 1092β15
[17] Gurthier[1962]σελ43

[18] Burkert (1972) σελ40
[19] Αριστοτέλης *Περί Ουρανού* 268 α10

έβδομη θέση μεταξύ των ουράνιων σφαιρών και ο αριθμός 10, όπως φανταζόμαστε και από την ιερότητα που προσέδιδαν οι Πυθαγόρειοι, αντιπροσωπεύει την τελειότητα.

Κάνοντας όμως αυτή την αναφορά στην σημασιολογία των αριθμών στην Πυθαγόρεια συλλογιστική οφείλουμε να τονίσουμε ότι αυτού του είδους οι εικασίες ανήκουν στην αριθμολογία, τη μελέτη του νοήματος των αριθμών και όχι στα μαθηματικά, την μελέτη των αριθμητικών και γεωμετρικών σχέσεων.

Πριν αναλύσουμε την ενασχόληση με τους αριθμούς και την πρόοδο των Πυθαγορείων στα μαθηματικά δεν πρέπει να παραλείψουμε βέβαια την χρήση των αριθμών από τους Βαβυλωνίους και άλλους ανατολικούς λαούς, χρήση που περιοριζόταν στο να τακτοποιούν τα πράγματα αριθμητικά. Ενώ είχαν φτάσει σε ένα υψηλό επίπεδο υπολογισμού, πολύ πριν από τους Έλληνες, τα αποτελέσματα εξυπηρετούσαν μόνο τρέχουσες ανάγκες. Κατά τον Ιάμβλιχο, ο Πυθαγόρας παρέμεινε για επτά έτη στη Βαβυλώνα κατά τη διάρκεια των οποίων διδάχθηκε από τους μάγους την θεωρία των αριθμών και έμαθε την «τελειότατη αναλογία» Α:Η=Ρ:Β όπου Η ο αρμονικός και Ρ ο αριθμητικός μέσος των Α και Β[20].Σημασία πολύ έχουν οι έρευνες των Πυθαγορείων επί των αναλογιών αριθμητικής, γεωμετρικής και αρμονικής, που προκύπτουν εάν θέσουμε τον λόγο (α-β)\(β-γ) και προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις:

- β=(α+β)\2 αριθμητικός
- β=αγ γεωμετρικός
- β=1\2*(1\α+1\γ) αρμονικός

«Είμαι πεπεισμένος ότι ο ίδιος ο Πυθαγόρας ήταν αυτός που μεταλαμπάδευσε τις γνώσεις των Βαβυλωνίων(στον τότε ελληνικό κόσμο)» ισχυρίζεται ο Van der Waerden[21].

Από την άλλη μεριά, οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν τον αριθμό σαν σύμβολο, που έχει μέσα του νόημα και ξεπερνά το ρόλο του σαν όριο μίας απλής αρίθμησης και υπολογισμού. Και σε αυτή ακριβώς την διαφορετική φιλοσοφία περί των αριθμών έγκειται η θεμελίωση των μαθηματικών σαν επιστήμη. Μάλιστα

[20] Van der Werden[1954]σελ 94
[21]Van der Werden[1954] *Pythagoreer σελ* 66-70

λέγεται ότι η λέξη «μαθηματικά» πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τους Πυθαγορείους και τον Πλάτωνα σύμφωνα με μαρτυρία του Εύδημου , μαθητή του Αριστοτέλη(300-350 π.Χ.) και συγγραφέα βιβλίου περί της ιστορίας των μαθηματικών, το οποίο χάθηκε.

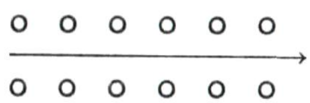
☞ Περί Πυθαγόρειας αριθμητικής

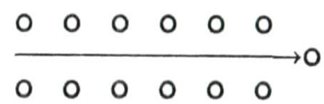
Οι Πυθαγόρειοι θέλοντας να δώσουν πρωταρχική σημασία στην λειτουργία της όρασης αναπαριστούσαν τους αριθμούς ως πέτρες ή ψηφίδες[22] και παρίσταναν έτσι γεωμετρικά σχήματα ενώ δεν χρησιμοποιούσαν συνεχή μεγέθη. Με αυτό τον τρόπο μπόρεσαν να προχωρήσουν στην αφαίρεση, κάτι στο οποίο υστερούσαν οι ανατολικοί λαοί. Διότι τα σχήματα ήταν τα πιο κατάλληλα για να δείξουν σχέσεις μεταξύ των αριθμών και η μόνη αίσθηση που μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε ένα σχήμα ή ένα τύπο από ένα οποιοδήποτε αντικείμενο είναι η όραση. Με τον όρο αφαίρεση, στη συλλογιστική, εννοούμε την τέχνη να διακρίνει κανείς μία ή περισσότερες κοινές ιδιότητες σε διαφορετικά πράγματα και να σχηματίζει έτσι μία γενική ιδέα γι' αυτά. Έτσι λοιπόν ο οπτικός τύπος οδήγησε στην αφαίρεση και εξυπηρέτησε σημαντικά την μετάβαση από τον ειδικό στο γενικό και την ανάπτυξη των μαθηματικών σαν επιστήμη.

Οι εικονικοί αυτοί αριθμοί ξεκινούν με τη μονάδα την αρχή, από την οποία προέρχονται με κάποιο ανεξήγητο τρόπο οι δύο αντιτιθέμενες αρχές του ορίου και του απείρου, του πεπερασμένου και του μη πεπερασμένου. Όπως εξηγεί ο Αριστοτέλης, όταν η μονάδα προστεθεί σε έναν άρτιο αριθμό τον κάνει περιττό ενώ όταν προστεθεί σε έναν περιττό τον κάνει άρτιο. Κάτι τέτοιο δε θα συνέβαινε αν η μονάδα δεν εμπεριείχε και τις δύο μορφές. Η μονάδα είναι η αρχή, από την οποία προέρχονται όλα τα πράγματα, ενώ η ίδια δεν προέρχεται από τίποτα και είναι αδιαίρετη. Δεν είναι ένας αριθμός, αλλά είναι η αρχή των αριθμών[23].

[22] Αριστοτέλης Μεταφ. 1092β10-13 *Φυσικά* 203 α13
[23] Gurthier[1962]σελ21

Χρησιμοποιώντας για μία ακόμη φορά τον Αριστοτέλη[24] και πηγή το έργο «*Μετά τα Φυσικά*» μαθαίνουμε ότι οι Πυθαγόρειοι ταυτίζουν το άρτιο με το άπειρο και το περιττό με το πεπερασμένο. Αυτό συμβαίνει διότι το περιττό αποτελεί σύνολο με αρχή μέση και τέλος ενώ ο άρτιος είναι διαιρετός επ' άπειρον. Αυτή τη θέση του Πυθαγορισμού εκφράζει ο Heidel στις εικόνες για την καλύτερη κατανόηση της ταύτισης του περιττού με το πεπερασμένο και του άρτιου με το άπειρο[25]. Επιλέγοντας δύο αριθμούς, εκ των οποίων ο ένας άρτιος (12) και ο άλλος περιττός (13) τους παριστάνει με τη γνωστή Πυθαγόρεια παράσταση με ψήφους.





Παρατηρούμε πως στην πρώτη περίπτωση ο άρτιος αριθμός διαιρείται σε δύο μισά ενώ ο περιττός αριθμός δεν μπορεί να διαιρεθεί διότι «μία μονάδα βρίσκεται στη μέση». Αυτή η παρατήρηση μπορεί να συγκριθεί και με εκείνη του Νικόμαχου: ως προς τον άρτιο αριθμό «μονάδος μέσον μη παρεμπιπτούσης» και ως προς τον περιττό «δια την προειρημένην της μονάδος μεσιτείαν», αν και ο ίδιος δεν κάνει κάποια περαιτέρω εξήγηση.

Επίσης στο ίδιο κείμενο του Αριστοτέλη[26], παρατίθεται ο Πυθαγόρειος πίνακας των δέκα αντιθετικών αρχών . Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, μία πυθαγόρεια δοξασία ήταν ότι ο κόσμος στηριζόταν σε δέκα αρχές. Αυτές τις αρχές τις συστοιχούσαν και τις εμφάνιζαν με τη μορφή εννοιολογικών διπόλων, ώστε τα μέρη των διπόλων, τα οποία άνηκαν στην ίδια συστοιχία, να αποτελούν μία απόλυτα συγγενική κλάση.

[24] *Μετά τα Φυσικά* , 1080β10
[25] Knorr[1945] σελ138
[26] 986 α22

Πέρας	Άπειρον
Περιττό	Άρτιο
Ένα	Πολλά
Δεξιό	Αριστερό
Αρσενικό	Θηλυκό
Ήρεμο	Κινούμενο
Ευθύ	Καμπύλο
Φώς	Σκοτάδι
Καλό	Κακό
Τετράγωνο	Ετερομήκες

Κατά τον Πυθαγόρα οι έννοιες αυτές ήταν πρωταρχικής σημασίας στην φιλοσοφία του, με σημαντικότερα ζεύγη τα πέρας-άπειρο και περιττό-άρτιο. Όταν επιβάλλεται ένα πέρας στο άπειρο και αόριστο, το αποτέλεσμα είναι η δημιουργία των αριθμών. Η μονάδα, όπως προείπαμε, περιλαμβάνει το πέρας και το άπειρο, το άρτιο και το περιττό. Εφόσον το ένα δεν είναι ένας αριθμός παρά η πηγή των αριθμών, το πεπερασμένο και το άπειρο, που αυτό περιλαμβάνει, είναι οι έσχατες αρχές όλων των πραγμάτων.

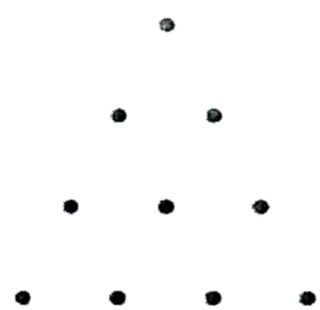
Η κοσμογονία των Πυθαγορείων είχε αριθμητικό χαρακτήρα. Σύμφωνα με αυτήν το σύμπαν δημιουργήθηκε από το ένα μετά από τη διαίρεση του, που πραγματοποιήθηκε από εισπνοή του απείρου[27]. Το άπειρο εισβάλει στο αδιαφοροποίητο είναι, και το διασπά δημιουργώντας τη δυάδα. Ο κόσμος κυριολεκτικά δημιουργείται από το δίπολο «πέρας- άπειρο». Αρχικά υπήρχε το δίπολο. Το είναι ήταν αδιαφοροποίητο, ενιαίο πεπερασμένο για τους Πυθαγορείους ταυτόσημο με τον αριθμό ένα. Το μη είναι ήταν ισχυρότατα συνδεδεμένο με το κενό. Το πεπερασμένο αδιαφοροποίητο όν περιορίζεται από το κενό που επεκτείνεται επ’ άπειρον. Αυτό το άπειρο εισβάλει στην αρχή της πυθαγόρειας κοσμογονίας και διασπά το πεπερασμένο είναι παρεμβαλλόμενο

[27] Αριστοτέλης *Μετά τα Φυσικά* 1091 α15

ανάμεσα στα δύο του κομμάτια. Δημιουργείται από τη μονάδα η δυάδα, από αυτήν η τριάδα κ.τ.λ. με τρόπο ώστε το πυθαγόρειο σύμπαν να αποτελεί ένα αντίγραφο αυτού που σήμερα θα λέγαμε σύνολο φυσικών αριθμών[28]. Για τους Πυθαγορείους ήταν «φυσιολογικό» να αναμένουν να υπακούει ο κόσμος που αποτελείται από διακριτές ψηφίδες σε σχέσεις, νόμους και αρμονίες εκφράσιμες με λόγους της μορφής $\frac{a}{b}$ όπου α, b φυσικοί αριθμοί και b όχι μηδέν.

Ο πρώτος άρτιος αριθμός είναι το 2(Διάς) ενώ ο πρώτος περιττός αριθμός το 3(Τριάς). Το 4 είναι ο πρώτος τετράγωνος (τετραγωνικός) αριθμός, αφού σχηματίζοντας τον με ψηφίδες παίρνει την μορφή τετραγώνου[29].

Το άθροισμα των παραπάνω αριθμών (1+2+3+4=10) έχει σαν αποτέλεσμα το δέκα, ο οποίος είναι για τους Πυθαγόρειους ιερός αριθμός. Παριστάνεται με ψηφίδες διατεταγμένες σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η επονομαζόμενη τετράκτυς[30].



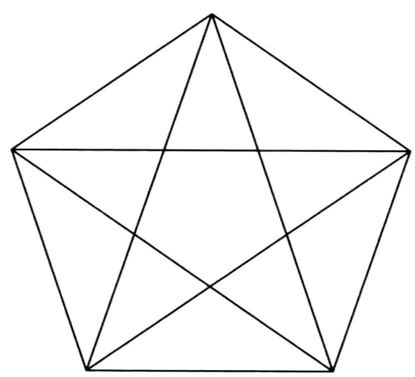
Η τετράκτυς λέγεται ότι ονομάστηκε έτσι διότι στο τρίγωνο κάθε πλευρά έχει 4 ψηφίδες. Η τετράκτυς και ο αριθμός δέκα ήταν για τους Πυθαγορείους ιερές οντότητες. Ο Πυθαγόρειος όρκος με τον οποίο δεσμεύονταν τα μέλη της σχολής ήταν: «Μα τον Πυθαγόρα, που παρέδωσε στην γενεά μας την τετράκτυν, που περιέχει την ρίζα της αέναης φύσης, δεν θα προδώσω»[31].Η τετράκτυς αποτελούσε και ένα από τα δύο σύμβολα που χαρακτήριζε τους Πυθαγόρειους.

[28] Burkert[1972]σελ 58
[29] Van der Werden[1954]σελ 98
[30] Αριστοτέλης *Μετά τα Φυσικά* 986 α8
[31] Kahn[2001]σελ 31

☞ Περί Πυθαγόρειων Πολυέδρων

Στον κατάλογο του ο Πρόκλος[32] αποδίδει στον Πυθαγόρα την κατασκευή των κανονικών πολυέδρων. Ένα όμως σχόλιο του Ευκλείδη αναφέρει, ότι οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν μόνο τρία κανονικά πολύεδρα(όπως και κατά τον Πάππο στη *Συναγωγή*) τον κύβο, το τετράεδρο και το δωδεκάεδρο και ότι εκείνος που ανακάλυψε πρώτος τα δύο άλλα ήταν ο Θεαίτητος.

Οι έδρες του δωδεκαέδρου είναι κανονικά πεντάγωνα. Οι διαγώνιοι ενός τέτοιου πενταγώνου σχηματίζουν ένα αστεροειδές ως διακριτικό γνώρισμα των Πυθαγορείων, το δεύτερο χαρακτηριστικό σύμβολο τους. Το είχαν θεσπίσει ως συνθηματικό σημείο αμοιβαίας αναγνώρισης, το αστεροειδές πεντάγωνον , το άλλως λεγόμενο και πεντάλφα ή πεντάγραμμο[33].



Στον Τιμαίο του Πλάτωνα τα 5 κανονικά στέρεα αναφέρονται «κοσμικά στερεά» και από αυτά αποτελούνται όλα τα στοιχεία. Η αντιστοιχία ήταν η εξής:

[32] Karasmanis [2000] σελ 8, Proclus *In primum Euclidis Elementorum Librum* σελ 66
[33] Maor[2008]σελ 45

Τετράεδρον	Πυρ
Εξάεδρον-Κύβον	Γη
Οκτάεδρον	Αήρ
Εικοσάεδρον	Ύδωρ
Δωδεκάεδρον	Κόσμος όλος-Σύμπαν

Έχοντας ως έναυσμα της ονομαστικής και όχι εννοιολογικής συνωνυμίας της λέξης «πεντάγραμμο», θα αναφερθούμε σε αυτό το σημείο στη μουσική και την αρμονία , που κατείχαν κεντρική θέση στη διδασκαλία του Πυθαγόρα.

☞ Περί της επιστήμης της Μουσικής

Καταρχάς ο Πυθαγόρας ήταν αυτός που έθεσε τις βάσεις στην επιστήμη της Μουσικής με μία επιστημονικά θεμελιωμένη θεωρία της Μουσικής.

Ανακάλυψε την σχέση ανάμεσα στο μήκος των χορδών και το τονικό ύψος (διάστημα) που δίνουν, χρησιμοποιώντας αρχικά ένα έγχορδο όργανο, που το δημιούργησε ο ίδιος το «Μονόχορδον»[34]. Το πλεονέκτημα του Πυθαγόρειου υπολογισμού των διαστημάτων είναι το ότι αποτελεί έναν τρόπο που να στηρίζεται σε αριθμητικές πράξεις και όχι στην εμπειρία, που βασιζόταν η μέθοδος και οι προτάσεις του Αριστόξενου του Ταραντινού (νεότερος του Πυθαγόρα περί το 375 π.Χ.) .Οι βασικοί φθόγγοι της τότε γνωστής μουσικής κλίμακας συνδεόταν με την τετράκτυν και οι λόγοι των συχνοτήτων που δόθηκαν για τους συγκεκριμένους αυτούς φθόγγους ήταν λόγοι μεταξύ των αριθμών 1, 2, 3, 4. Οι λόγοι ,που βρέθηκαν , υπήρξαν αποτέλεσμα εμπειρικών παρατηρήσεων πάνω σε μήκη παλλόμενων χορδών ή πάνω στα βάρη συγκεκριμένων συμπαγών μεταλλικών αντικειμένων που χρησιμοποιούνταν για σφυριά από τους μεταλλουργούς της αρχαιότητας, σύμφωνα με την παράδοση[35]. Μέχρι τον 16ο

[34] Guthrie [1962]σελ 24-25
[35] Maor [2008]σελ 41

αιώνα ο Πυθαγόρειος υπολογισμός των διαστημάτων υπήρξε ο πυρήνας της τεχνικής χορδίσματος των οργάνων.

Μία Πυθαγόρεια ιδέα, που σχετίζεται με τη μουσική, είναι γνωστή ως η « αρμονία των σφαιρών» ή εναλλακτικά η «μουσική των Σφαιρών»[36]. Αυτή η θεωρία διασώζεται από τον Αριστοτέλη στο έργο του «*Περί Ουρανού*»[37] και αναφέρεται στο σύνολο των ήχων, που παράγονται από την περιστροφή των πλανητών αλλά δεν γίνονται αντιληπτοί από τους ανθρώπους διότι συνεχίζονται αδιάκοπα και αδιατάραχτα. Επίσης το σύνολο των ήχων μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση των πλανητών από τη γη και την ταχύτητα της κίνησης τους. Η απόσταση ανάμεσα στα αστρικά σώματα ήταν πολύ σημαντική, επειδή το καθένα ήταν τοποθετημένο σε συμφωνία με μία αριθμητική αναλογία που αντιστοιχούσε επακριβώς στα ποσοστά της μουσικής κλίμακας. Έτσι οι ήχοι, που κάνουν τα αστέρια ταιριάζουν μεταξύ τους, δηλαδή καταλήγουν σε αρμονία.

☞ Περί αστρονομίας

Έχοντας παρατηρήσει την σημασία της τάξης και της αρμονίας για τους Πυθαγορείους είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε ότι πρώτος ο Πυθαγόρας χρησιμοποίησε τη λέξη «κόσμος»[38], αναφερόμενος στο σύμπαν, δηλαδή τάξη και αρμονία, αφού πίστευε πως το σύμπαν προήλθε από το χάος και απέκτησε μορφή με το μέτρο και την αρμονία.

Ο Πυθαγόρας βέβαια δεν παρέμεινε μόνο στη μουσική και κοσμική αρμονία αλλά ασχολήθηκε και με θέματα αστρονομίας. Πιθανολογείται πως ήταν ο πρώτος που θεώρησε ότι η γη είναι στρογγυλή και ακόμα ότι περιφέρεται γύρω από το «κεντρικό πυρ». Στη συνέχεια οι Πυθαγόρειοι ανέπτυξαν αυτή τη θεωρία λέγοντας πως γύρω από το κεντρικό πυρ δεν περιστρεφόταν μόνο η γη αλλά και άλλες σφαίρες, μία με όλους τους απλανείς αστέρες, μία με τον Ήλιο και τη σελήνη και μία με τους γνωστούς πλανήτες(Άρης, Ζεύς, Κρόνος, Ερμής,

---

[36] Αριστοτέλης *Μετά τα Φυσικά* 986 α2
[37] 290 β12
[38] Gurthier[1962]σελ 22

Αφροδίτη)[39]. Για να συμπληρωθεί ο ιερός αριθμός 10 παραδέχτηκαν ότι υπάρχει και ένα ακόμη ουράνιο σώμα με κυκλική κίνηση γύρω από το κοινό κέντρο, η «Αντίχθων»[40]. Δικαιολόγησαν το γεγονός ότι το δέκατο ουράνιο σώμα δεν ήταν ορατό από τη Γη , διότι κατά την περιστροφή του βρισκόταν πάντα ακριβώς απέναντι από τη γη και έτσι βρισκόταν πάντα το κεντρικό πυρ ανάμεσα τους.

Μετά την ανάλυση των επιτευγμάτων των Πυθαγορείων σε μουσική και αστρονομία επιστρέφουμε στο θεμελιώδες δόγμα της Πυθαγόρειας Σχολής, την τετράκτυ. Εξετάζοντας, με τη μέθοδο της αναπαράστασης των αριθμών με ψηφίδες, από την αρχή τους αριθμούς εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα για την τελειότητα της τετράκτυς.

☞ Τα Πυθαγόρεια Μαθηματικά

Ο αριθμός 1 είναι γεωμετρικό σημείο, όπου γεωμετρικό σημείο ορίζεται ως «μονάδα εχούσης θέσιν» από τον Πυθαγόρα. Αν το συνδέσω με ένα ακόμη σημείο, η ένωση τους θα δημιουργούσε μία γραμμή. Αν προσθέσουμε ένα τρίτο σημείο και το συνδέαμε με τα άλλα δύο θα είχαμε ένα τρίγωνο, το πρώτο επίπεδο σχήμα. Και η σύνδεση ενός ακόμα, τέταρτου, σημείου με τα προηγούμενα μας δίνει την πρώτη στέρεα μορφή, την πυραμίδα[41].

Με αυτό τον τρόπο συγχέονται τα αριθμητικά μεγέθη με τα γεωμετρικά δομημένα πράγματα και έτσι δεν είναι παράξενο πως η πορεία από την μονάδα

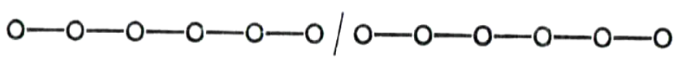
---

[39] Αριστοτέλης ,*Περί Ουρανού* 293 α 19-26
[40] Αριστοτέλης ,*Μετά τα Φυσικά* 982 α 2-12
[41] Σπεύσιππος, Απόσπασμα 28

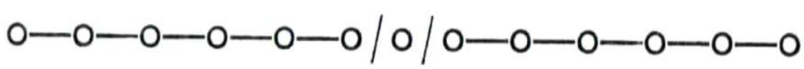
στο 4 δεν σημαίνει απλά πως η μονάδα έδωσε τους τρείς αριθμούς αλλά τις τρείς επόμενες διαστάσεις.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν εξισώσουμε αριθμούς με γεωμετρικά σημεία και μετά δημιουργήσουμε κάθε σχήμα συνδέοντας τα μπορεί να φτάσουμε στο συμπέρασμα ότι τα πράγματα που θα προκύψουν από μία τέτοια δομή ουσιαστικά αποτελούνται από αριθμούς και προκαλούνται από αυτούς, προσεγγίζοντας έτσι την Πυθαγόρεια φιλοσοφία περί αριθμών.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναλύσουμε μια θεμελιώδη πρόταση, που έχει αναφερθεί προηγουμένως και έχει αποδοθεί στον Πυθαγόρα. Η πρόταση αυτή αναφέρεται στον διαχωρισμό των αριθμών μόνο σε άρτιους και περιττούς. Θέλοντας να αναπαραστήσουμε με την μέθοδο των Πυθαγορείων τους άρτιους και περιττούς αριθμούς, θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα του W.R.Knorr[42], ο οποίος καταφεύγει στην πιο απλή πυθαγόρεια αναπαράσταση των αριθμών, τοποθετεί τις ψηφίδες πάνω στην ίδια ευθεία. Άρτιοι αριθμοί είναι εκείνοι που χωρίζονται σε δύο ίσα μέρη και το μέσον δεν περιέχει ψηφίδα.



Ενώ περιττοί είναι εκείνοι που στο μέσον τους υπάρχει ψηφίδα ,χωρίζοντας τους σε δύο ίσα μέρη.



Με αυτό τον απλό τρόπο αναπαράστασης των αριθμών ,οι Πυθαγόρειοι ήταν σε θέση να βγάλουν αρκετά συμπεράσματα ,τα οποία συγκεντρώθηκαν μετέπειτα από τον Ευκλείδη στα *Στοιχεία*.

[42] Knorr[1945] σελ 140

Οι πυθαγόρειοι ορισμοί, που αναφέρονται από τον Νικόμαχο[43], δεν διαφέρουν πολύ από εκείνους που αναφέρονται από τον Ευκλείδη στο Βιβλίο 7 των *Στοιχείων* και είναι οι εξής:

- Άρτιος αριθμός είναι ο αριθμός, ο οποίος διαιρείται σε δύο ίσα μέρη και μπορεί να διαιρεθεί σε δύο άνισα μέρη, εκτός βέβαια από την θεμελιώδη δυάδα, η οποία διαιρείται μόνο σε 2 ίσα μέρη.

- Περιττός αριθμός είναι ο αριθμός, ο οποίος διαιρείται μόνο σε δύο άνισα μέρη, τα οποία είναι πάντα διαφορετικού είδους, το ένα άρτιο και το άλλο περιττό, και διαφέρει από άρτιο αριθμό κατά μία μονάδα. Σε αντίθεση με τους άρτιους αριθμούς, των οποίων τα μέρη πρέπει να είναι πάντα του ίδιου είδους.

Ξεκινώντας λοιπόν με το συλλογισμό, ότι όλοι οι αριθμοί είναι είτε άρτιοι είτε περιττοί, θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα του απείρου, που αντιμετώπιζαν οι Πυθαγόρειοι. Υπενθυμίζουμε ότι το άρτιο εξισώνεται με το άπειρο και το πέρας με το περιττό και επομένως οι αρχές άρτιο-περιττό δεν έχουν τη σημασία που φανταζόμαστε σήμερα. Επειδή η σειρά των αριθμών είναι ατελείωτη, δεν θα μπορούσε κανείς να εκτελεί διαδοχικές διαιρέσεις με το 2 και να σημειώνει αν το υπόλοιπο είναι 0 ή 1, άρα δεν αποδεικνύεται και η πρόταση ότι όλοι οι αριθμοί είναι είτε άρτιοι είτε περιττοί. Αυτός ο απεριόριστος αριθμός πράξεων δεν αποτέλεσε εμπόδιο για τους Πυθαγορείους αλλά τους οδήγησε σε άλλα μαθηματικά μονοπάτια. Βρήκαν τρόπο να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα του απείρου χρησιμοποιώντας το γνώμονα[44]. Ο γνώμονας είναι μία ράβδος τοποθετημένη κατακόρυφα σε υπαίθριο μέρος ,έτσι ώστε το μήκος της σκιάς της κάθε φορά να δείχνει την ώρα της ημέρας. Αργότερα ο όρος χρησιμοποιείται και ως ονομασία ενός μηχανικού εργαλείου , κατάλληλου για την χάραξη ορθών

---

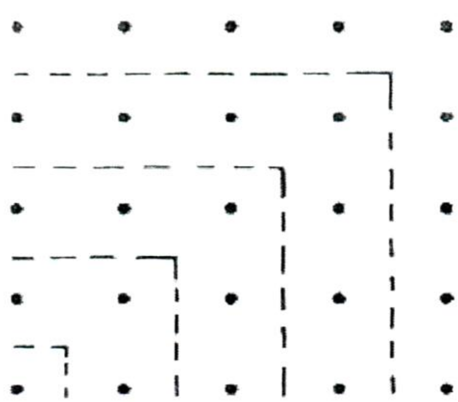
[43] Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*

[44] Αριστοτέλης ,*Μετά τα Φυσικά* 1092 β 10-13

γωνιών. Μετά από αυτή τη χρήση, ως φυσικό επακόλουθο του σχήματος του, έφτασε να σημαίνει το σχήμα που απομένει εάν από ένα τετράγωνο αφαιρεθεί από τη μία του γωνία ένα άλλο μικρότερο (ή το σχήμα που αν προστεθεί σε ένα τετράγωνο αυξάνει το μέγεθος του χωρίς να αλλάζει το σχήμα του). Με τη χρήση λοιπόν του γνώμονα οι Πυθαγόρειοι περιόρισαν το άπειρο βαθμηδόν. Ο περιορισμός όμως αυτός νοείται με ένα ειδικό σχήμα που αντιπροσωπεύει το περιττό. Η έννοια του περιττού ήταν συνδεδεμένη με την έννοια του πέρατος διότι η διαδικασία προσθήκης συνεχόμενων περιττών αριθμών στις πλευρές επάλληλων γνωμόνων οδηγεί πάντα στο ίδιο σχήμα, δηλαδή σε τετράγωνο. Ο λόγος των πλευρών είναι πάντα ίσος με τον αριθμό 1.

Για παράδειγμα έστω γνώμονας **α=9** .Ξεκινούσαν με τον αριθμό 1, τον οποίο παρίσταναν με μία ψηφίδα .Τοποθετούσαν εν συνεχεία έναν γνώμονα που αναγκαστικά κάλυπτε δύο πλευρές του χώρου ολόγυρα από τις ψηφίδες. Μετά τοποθετούσαν 3 ψηφίδες, μία σε κάθε πλευρά του γνώμονα και μία στην κορυφή του και ακολουθούσε νέος γνώμονας, τις πλευρές του οποίου κάλυπταν με πέντε ψηφίδες, μία από τις οποίες τοποθετούνταν σε ένα νέο γνώμονα και ο αριθμός 7 παριστάνονταν με επτά ψηφίδες, τοποθετημένες ανά 3 στις δύο πλευρές του γνώμονα και μία στην κορυφή. Συνέχιζαν τοποθετώντας μία ακόμη φορά τον γνώμονα για να σχηματίσουν τον αριθμό 9,που είναι και το ζητούμενο.

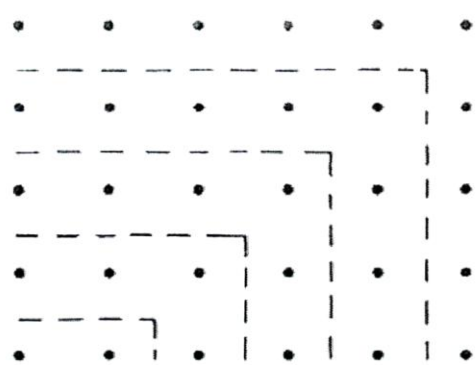
$1+3+5+7+9=5^2$



Γενικεύοντας λοιπόν έχουμε 1+3+5+7+….+(2ν-1)=ν², όπου (2ν-1) ο γνώμονας και ν η πλευρά του τετραγώνου.

Αντιθέτως όταν συνεχόμενοι άρτιοι αριθμοί, ξεκινώντας από τον αριθμό 2 τοποθετούνται στις πλευρές επάλληλων γνωμόνων, έχουμε ως αποτέλεσμα ένα σχήμα, το οποίο δεν παραμένει σταθερό όπως συμβαίνει με το σχήμα των περιττών σχηματικών αριθμών. Το σχήμα αλλάζει μια και κάθε φορά η αναλογία του μήκους και του ύψους του μεταβάλλεται. Αυτή η μεταβολή είναι αναγκαστικά μη φραγμένη με την έννοια πως δεν υπάρχει άρτιος αριθμός Ν μετά τον οποίο να σταθεροποιείται ο λόγος των πλευρών του προκύπτοντος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι ο λόγος των πλευρών του σχήματος που προκύπτει, υπολογίζεται ως ο λόγος των αριθμών των ψηφίδων που βρίσκονται στις αντίστοιχες πλευρές αφού εξαιρεθεί η ψηφίδα που έχει τοποθετηθεί στην κορυφή του αντίστοιχου γνώμονα. Γι' αυτό άλλωστε συμπεριλαμβάνεται στον πίνακα των αντιθέτων το ζεύγος τετράγωνο- ετερομήκες. Το ετερομήκες αναφέρεται σε μια ορθή γωνία, στην οποία η μία πλευρά υπερέχει από την άλλη κατά μία μονάδα. Έτσι ο λόγος των πλευρών του είναι

$\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}.$



2+4=2*3=6

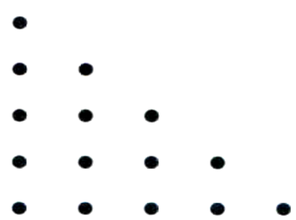
2+4+6=3*4=12

2+4+6+8=4*5=20

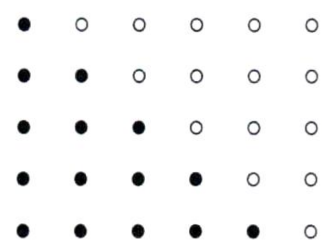
2+4+6+8+10=5*6=30

Γενικεύοντας λοιπόν έχουμε 2+4+6+….+2(ν-1)=ν(ν-1), όπου 2(ν-1) ο γνώμονας και ν, (ν-1) οι πλευρές του ορθογωνίου.

Θέλοντας να βρούμε το άθροισμα των διαδοχικών αριθμών με την Πυθαγόρεια μέθοδο θεωρούμε το άθροισμα των πέντε πρώτων ακεραίων (1+2+3+4+5).Αναπαριστούμε το άθροισμα με ψηφίδες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Προκειμένου να βρούμε τον συνολικό αριθμό αυτών των κουκκίδων, γεμίζουμε τα κενά ώστε να δημιουργηθεί ένα ορθογώνιο. Το ορθογώνιο με μήκος 6 και πλάτος 5 ψηφίδες έχει εμβαδόν 5*6=30 άρα το μισό του εμβαδού, που είναι 15, ισούται με το εμβαδόν του αρχικού μας σχήματος.



$1 + 2 + 3 + 4 + 5$



$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (5 \times 6)/2 = 15$

Επομένως γενικά ισχύει 1+2+3+….+ν= $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$

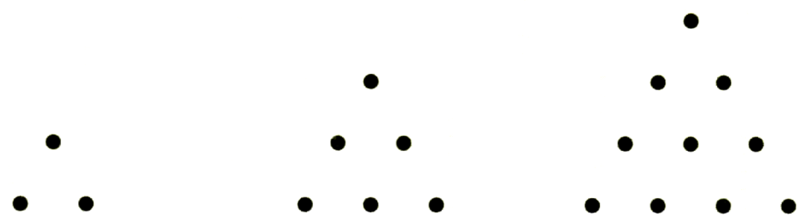
Περί κατηγοριοποίησης αριθμών

Εναλλακτικά παρατήρησαν ότι μπορούσαν να αναπαραστήσουν τους φυσικούς αριθμού, που ήταν αποτέλεσμα της παραπάνω σχέσης, σε τριγωνική μορφή. Για παράδειγμα:

- 1+2= $\frac{2*3}{2}$ =3

- $1+2+3=\frac{3*4}{2}=6$

- $1+2+3+4=\frac{4*5}{2}=10$



3 6 10

Αυτοί οι αριθμοί ονομάστηκαν **τριγωνικοί.**

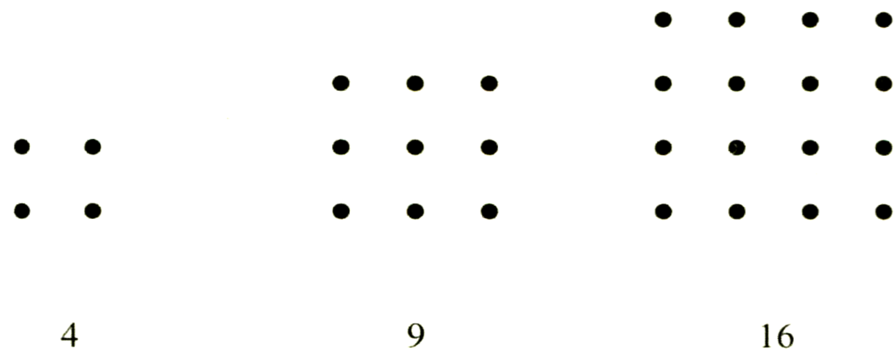
Συνεχίζοντας με ότι αφορά την απεικόνιση αριθμών σε ψηφίδες, οι Πυθαγόρειοι βρήκαν και άλλα κανονικά σχήματα, με τα οποία ήταν δυνατό να ομαδοποιούνται τα σημεία. Για παράδειγμα, οι αριθμοί που προκύπτουν από τη σχέση $1+3+5+7+\ldots.+(2\nu-1)=\nu^2$,αθροίζοντας δηλαδή διαδοχικούς περιττούς αριθμούς ,σχηματίζουν τετράγωνο.

Για παράδειγμα:

- $1+3=2^2=4$

- $1+3+5=3^2=9$

- $1+3+5+7+=4^2=16$

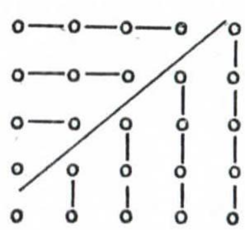


Γι’ αυτό το λόγο τους ονόμασαν **τετραγωνικούς**.

Παρατηρούμε ότι κάθε τετραγωνικός αριθμός v^2 είναι το άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών.

Για παράδειγμα:

- $3+6=9=3^2$
- $6+10=16=4^2$
- $10+15=25=5^2$,όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



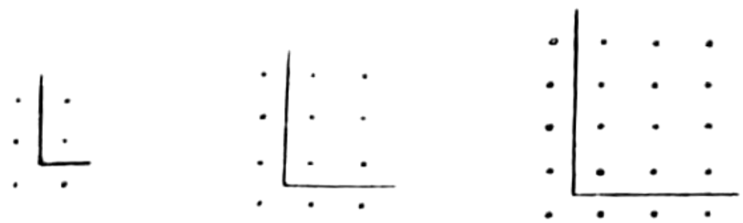
Ενώ **ορθογώνιοι** ονομάζονται οι αριθμοί, οι οποίοι σχηματίζουν ορθογώνιο και προκύπτουν αντίστοιχα αθροίζοντας διαδοχικούς άρτιους αριθμούς σύμφωνα με τον τύπο $2+4+6+….+2(v-1)=v(v-1)$

Για παράδειγμα:

- $2+4=2*3=6$

- 2+4+6=3*4=12

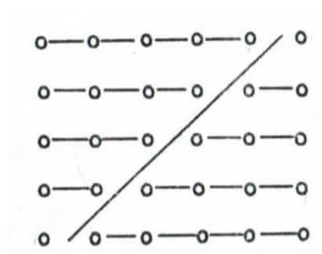
- 2+4+6+8=4*5=20



Είναι φανερό από το παρακάτω σχήμα ότι κάθε ορθογώνιος αριθμός (ν+1)*ν είναι το άθροισμα δύο τριγωνικών αριθμών.

Για παράδειγμα:

- 3+3=6=2*3
- 6+6=12=3*4
- 10+10=20=4*5
- 15+15=30=5*6, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



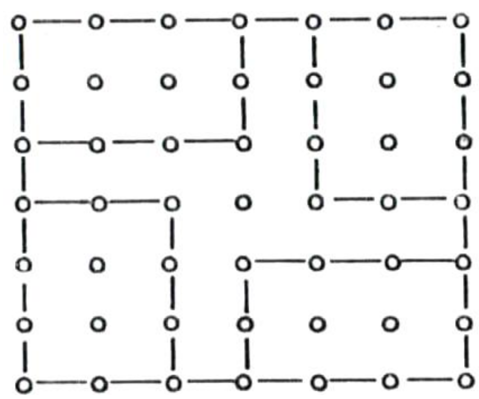
Από τα παραπάνω προκύπτει η αλγεβρική σχέση είναι η εξής:

$$\frac{1}{2}\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu(\nu+1)=\nu^2$$

Μία ακόμη ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ τριγωνικών και τετράγωνων αριθμών που μας παραπέμπει στους Πυθαγορείους συναντάμε στον Πλούταρχο[45] .

$$8*\frac{1}{2}\nu(\nu+1)+1=4\nu\,(\nu+1)+1=(2\nu+1)^2$$

Η απόδειξη γίνεται περισσότερο κατανοητή κάνοντας χρήση του παρακάτω σχήματος και είναι η εξής: Ένα ορθογώνιο αποτελείται από δύο ίσα τρίγωνα πλευράς ν και ν+1 αντίστοιχα. Για να αποδείξουμε λοιπόν την παραπάνω σχέση πρέπει να δείξουμε ότι 4 ίσα σχήματα αυτού του τύπου προσθέτοντας μία μονάδα ισούνται με ένα τετράγωνο πλευράς (2ν+1) ως προς το εμβαδόν.



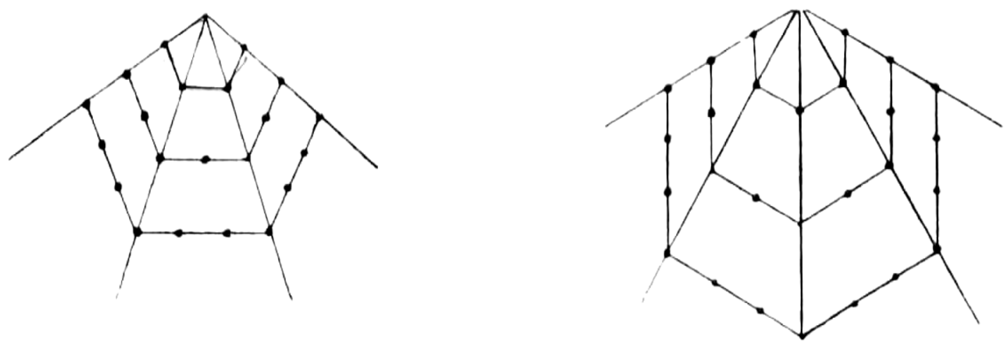
Τέλος υπήρχαν και οι επονομαζόμενοι **πολυγωνικοί** αριθμοί, ξεκινώντας από τους πενταγωνικούς και εξαγωνικούς οι οποίοι φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Οι πενταγωνικοί αριθμοί , 5, 12, 22, προκύπτουν απο μία αριθμητική ακολουθία ξεκινώντας από το 1 με σταθερή διαφορά 3, ενώ στην περίπτωση των εξαγωνικών αριθμών ,6, 15, 28, β η σταθερή διαφορά είναι 4.

Για παράδειγμα:

- διαδοχικοί πενταγωνικοί αριθμοί:5,12 ,22

[45] Πλατωνικά Ζητηματα.V 2.4, 1003F

- διαδοχικοί εξαγωνικοί αριθμοί:6 ,15 ,28



Ακόμα ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διάκριση των αριθμών , κατά τους Πυθαγορείους, σε τέλειους, φίλιους, ισοϋπόλοιπους, ελλιπείς και υπερτελείς.

- <u>Τέλειος</u> θεωρείται ένας αριθμός που ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του εκτός από τον ίδιο.

  Οι τέσσερις πρώτοι στη σειρά τέλειοι αριθμοί, που δίνονται από τον

. Νικόμαχο, είναι οι : 6, 28, 496, 8128

6=1+2+3

28=1+2+4+7+14

496=1+2+4+8+16+31+62+124+248

8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4084

Ο ίδιος παραθέτει και τον ακόλουθο τύπο , ο οποίος αποδεικνύεται από τον Ευκλείδη (βιβλίο IX) στην πρόταση 36:

Όταν το άθροισμα $1+2+2^2+\dots+2^{\nu}$ =ρ έχει σαν αποτέλεσμα πρώτο αριθμό, τότε $ρ*2^{n}$ είναι τέλειος αριθμός.

Για παράδειγμα:

1+2+4=7, όπου 7 πρώτος αριθμός. Άρα $7*2^2=7*4=28$ είναι τέλειος αριθμός.

Στην απόδειξη της σχέσης χρησιμοποιείται ο τύπος για τον υπολογισμό αθροίσματος γεωμετρικής προόδου, $1+2+\ldots+2^{\nu-1}=2^{\nu}-1$, ο οποίος έχει βρεθεί σε κείμενα των Πυθαγορείων.

- <u>Φίλιοι</u> ονομάζονται δύο αριθμοί, όταν ο καθένας τους είναι το άθροισμα των διαιρετών του άλλου εκτός από τον ίδιο των αριθμό.

Οι αριθμοί 220 και 284 είναι οι μοναδικοί φίλιοι αριθμοί που εμφανίζονται στα αρχαία κείμενα αριθμητικής.
Διαιρέτες του 220: 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110
Διαιρέτες του 284: 1,2,4,71,142
1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284
1+2+4+71+142=220

Όταν ο Πυθαγόρας ρωτήθηκε «τι εστί φίλος;» απάντησε «έτερος εγώ» και ανέφερε τους αριθμούς 220 και 284.

- <u>Ισοϋπόλοιποι</u> ονομάζονται δύο αριθμοί ως προς τον μ όταν εμφανίζουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι δια του μ.

Για παράδειγμα:

- ο αριθμός 9 είναι ισοϋπόλοιπος του 5 ως προς 4 αφού και οι δύο όταν διαιρεθούν με το 4 αφήνουν υπόλοιπο 1.
- οι αριθμοί 19 και 12 είναι ισοϋπόλοιποι ως προς 7 με υπόλοιπο 5.

- οι αριθμοί 72 και 47 είναι ισοϋπόλοιποι ως προς 5 με υπόλοιπο 2.

- <u>Ελλιπής</u> ονομάζεται ένας αριθμός, του οποίου το άθροισμα των παραγόντων του είναι μικρότερο του αριθμού.

  Για παράδειγμα:

  - ο αριθμός 14

    Διαιρέτες του 14: 1,2,7,14

    Άρα 1+2+7=10<14

- <u>Υπερτελής</u> ονομάζεται ένας αριθμός, του οποίου το άθροισμα των παραγόντων του είναι μεγαλύτερο του αριθμού.

  Για παράδειγμα:

  - ο αριθμός 12.

    Διαιρέτες του 12:1,2,3,4,6,12

    1+2+3+4+6=16>12

Στο βιβλίο του Νικόμαχου «Αριθμητική Εισαγωγή»[46] συναντάμε τις περαιτέρω υποδιαιρέσεις των άρτιων και περιττών αριθμών σε αρτιάκις άρτιους, περιττάκις περιττούς, περισσάρτιους και αρτιοπέριττους, οι οποίες εμφανίζονται και σε γραπτά του Πλάτωνα[47].

- <u>Αρτιάκις άρτιος</u> ονομάζεται ο αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη και καθένα από τα μέρη αυτά είναι διαιρετό σε δύο ίσα μέρη και πάλι σε δύο ίσα μέρη μέχρι η διαίρεση των διαδοχικών υποδιαιρέσεων να φτάσει την αδιαίρετη μονάδα. Είναι δηλαδή οι αριθμοί της μορφής 2^{ν}.

[46] Βιβλίο 1, παράγραφος 8

[47] *Παρμενίδης*, 143

Για παράδειγμα:

- ο αριθμός 64,του οποίου το μισό είναι το 32, και αυτού το 16 και αυτού το 8 και αυτού το 4 και αυτού το 2 και αυτού το 1,η αδιαίρετη μονάδα.

- Περιττάκις περιττός ονομάζεται κάθε περιττός αριθμός που δεν είναι πρώτος.

Για παράδειγμα:

- ο αριθμός 25,που είναι περιττός και δεν είναι πρώτος.

- Αρτιοπέριττος ονομάζεται ένας αριθμός που είναι άρτιος αλλά βρίσκεται σε αντιδιαστολή με τον αρτιάκις άρτιο γιατί επιδέχεται όπως και κάθε άρτιος την διαίρεση σε δύο ίσα μέρη αλλά τα δύο αυτά μισά δεν διαιρούνται σε δύο ίσα μέρη. Είναι δηλαδή οι αριθμοί της μορφής 2*(2ν+1).

Για παράδειγμα:

.

- ο αριθμός18, του οποίου το μισό είναι το 9.Το 9 όμως δεν χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη.

- Περισσάρτιος ονομάζεται ένας αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη, τα οποία επίσης μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ίσα μέρη και αυτή η διαδικασία να συνεχίζεται μέχρι ένα σημείο πριν μπορέσουμε και φτάσουμε στην μονάδα. Είναι δηλαδή οι αριθμοί της μορφής 2^{ν} *(2κ+1) με ν>1.

Για παράδειγμα:

- ο αριθμός24, του οποίου το μισό είναι το 12 και αυτού το 6 και αυτού το 3.Το 3 όμως δεν χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη

Τέλος σε γραπτά του Φιλόλαου συναντάμε τους ορισμούς ως προς την διάκριση των αριθμών σε πρώτους και ασύνθετους και δεύτερους και σύνθετους[48].

- Πρώτος και ασύνθετος ονομάζεται ένας αριθμός όταν είναι περιττός και δεν δέχεται άλλη διαίρεση εκτός από τον εαυτό του και την μονάδα .Ή σύμφωνα με τον Ευκλείδη[49] πρώτος είναι ένας αριθμός ο οποίος μπορεί να μετρηθεί μόνο από τη μονάδα.

Για παράδειγμα: 3 ,5 ,7, 11.

Σύμφωνα με τον Νικόμαχο[50] ο λόγος για τον οποίο οι αριθμοί με την παραπάνω ιδιότητα ονομάστηκαν πρώτοι είναι γιατί τέτοιοι αριθμοί δεν παράγονται από κανέναν άλλο αριθμό που συνδυάζεται με τον εαυτό του παρά μόνο από τη μονάδα. Όταν όμως οι πρώτοι συνδυάζονται με τον εαυτό τους παράγονται άλλοι αριθμοί που έχουν ως αρχή και ρίζα αυτούς. Επειδή λοιπόν είναι αρχή και ρίζα για τους υπόλοιπους αριθμούς λέγονται πρώτοι.

- Δεύτερος και σύνθετος ονομάζεται ένας αριθμός όταν δεν είναι πρώτος ή εναλλακτικά όταν μπορεί να μετρηθεί από κάποιον αριθμό εκτός της μονάδας.

Για παράδειγμα: 9, 15, 21, 25.

[48] Θέωνας Σμυρναίος, *Θεολογούμενα της Αριθμητικής*, σελ 62
[49] Βιβλίο VII ορισμός 11
[50] *Αριθμητική Εισαγωγή*, παράγραφος 11

- <u>Πρώτοι προς αλλήλους</u> ονομάζονται δύο αριθμοί όταν και οι δύο είναι δεύτεροι και σύνθετοι αλλά μεταξύ τους δεν έχουν κανένα κοινό μέτρο.

Για παράδειγμα:

- οι αριθμοί 9 και 25.Καθένας ως προς τον εαυτό του είναι δεύτερος και σύνθετος αλλά μεταξύ τους έχουν μόνο τη μονάδα σαν κοινό μέτρο.

<u>Περί του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου</u>

Ο Ευτόκιος, στα σχόλιά του στα *Κωνικά* του Απολλώνιου, λέει ότι «οι αρχαίοι θεωρούσαν τις δύο ορθές γωνίες (τριγώνου) σε έκαστο είδος τριγώνου, πρώτα στο ισόπλευρο, κατόπιν στο ισοσκελές και τέλος στο σκαληνό. Οι μεταγενέστεροι ήταν που απέδειξαν το εξής καθολικότερο θεώρημα: το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου ισούται με δύο ορθές». Ο Ευτόκιος βέβαια γράφει στις αρχές του έκτου αιώνα μ.Χ. Ίσως όμως να αντλεί πληροφορίες από αρχαιότερες πηγές. Είναι όμως σημαντική η μαρτυρία του ότι η καθολική απόδειξη του θεωρήματος που βρίσκουμε στον Ευκλείδη δεν είναι η αρχική και ότι η αρχική απόδειξη προσέγγιζε το θεώρημα κατά περίπτωση. Ο Ευτόκιος δεν αναφέρει τους Πυθαγόρειους αλλά θα μπορούσαν οι ‘αρχαίοι’ στους οποίους αναφέρεται να ήταν οι πρώιμοι Πυθαγόρειοι.

Πάντως το θεώρημα κάλλιστα θα μπορούσε να τους ήταν γνωστό γιατί αποδεικνύεται εύκολα με στοιχειώδη τρόπο. Παραθέτουμε σε αυτό το σημείο έναν τρόπο απόδειξής του: Έστω τυχόν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του που το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα (μπορούμε εύκολα να δείξουμε την ισότητα μετρώντας ψήφους ή με την μέθοδο της εφαρμογής). Επειδή το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου είναι τέσσερις ορθές γωνίες, το άθροισμα των γωνιών κάθε ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές. Για σκαληνό τρίγωνο, μπορούμε να φέρουμε το ύψος του, χωρίζοντάς το έτσι σε δύο ορθογώνια τρίγωνα με άθροισμα γωνιών δύο ορθές το καθένα. Αφαιρώντας τις δύο ορθές γωνίες βγαίνει ότι το άθροισμα των γωνιών του σκαληνού τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες.

☞ Το κόσκινο του Ερατοσθένη

Η παράγωγη των πρώτων αριθμών έγινε από τον νέο-Πυθαγόρειο Ερατοσθένη(276-194 π.Χ) με τη μέθοδο του κόσκινου, το επονομαζόμενο «κόσκινο του Ερατοσθένη». Ο ίδιος ο Ερατοσθένης ονόμασε τη μέθοδο του έτσι διότι μέσω αυτής παίρνουμε τους περιττούς αριθμούς χωρίς διακρίσεις όλους μαζί και από αυτούς με τη μέθοδο παραγωγής ξεχωρίζουμε όπως με ένα κόσκινο, τους πρώτους και ασύνθετους και τους δεύτερους και σύνθετους.

Η μέθοδος του κόσκινου είναι η εξής: Εκθέτουμε όλους τους περιττούς αριθμούς, ξεκινώντας από το 3, σε μία όσο το δυνατόν μακρύτερη σειρά. Μετά αρχίζοντας από τον πρώτο, τον αριθμό τρία, σημειώνουμε ανά τρείς τους αριθμούς παρατηρώντας ότι το τρία μπορεί να διαιρέσει κάθε αριθμό παραλείποντας δύο ενδιάμεσους. Αν θέλουμε να έχουμε και μία εικόνα για τους παράγοντες κάθε αριθμού μπορούμε να σημειώνουμε δίπλα σε κάθε αριθμό τον εκάστοτε διαιρέτη που εντοπίζουμε.

Στη συνέχεια συνεχίζουμε με τον δεύτερο αριθμό, το πέντε και σημειώνουμε ανά πέντε αυτή τη φορά τους αριθμούς παρατηρώντας οτι το πέντε είναι παράγοντας των αριθμών που προκύπτουν αν μετρήσουμε αφήνοντας τέσσερις θέσεις κενές.

Ανάλογα συνεχίζουμε χωρίς διακοπή έτσι ώστε οι αριθμοί να διαδέχονται ο ένας τον άλλο ως διαιρέτες σύμφωνα με την θέση τους στη σειρά. Αν σημειώσουμε τώρα τους αριθμούς με κατάλληλα σημάδια, όπως στον πίνακα, θα βρούμε ότι κανένας από τους όρους που μεταλαμβάνει τη θέση του διαιρέτη δεν διαιρεί πάντα τους ίδιους αριθμούς, ούτε όλοι οι αριθμοί θα δεχθούν έναν διαιρέτη, αλλά μερικοί διαφεύγουν να μετρηθούν από οποιονδήποτε αριθμό, κάποιοι διαιρούνται από έναν μοναδικό και κάποιοι από δύο ή περισσότερους. Αυτοί που δεν μετρούνται από κανέναν αριθμό είναι οι πρώτοι και ασύνθετοι και ξεχωρίζουν σαν να κοσκινίστηκαν με κόσκινο.

3	5	7	9_{3}	11	13	15^{5}_{3}	17
19	21^{7}_{3}	23	25_{5}	${}_{9}27^{7}_{3}$	29	31	33^{11}_{3}
35^{7}_{5}	37	39^{13}_{3}	41	43	${}^{15}_{9}45^{5}_{3}$	47	49_{7}
51^{17}_{3}	53	55^{11}_{5}	57^{19}_{3}	59	61	${}^{21}_{9}63^{7}_{3}$	65^{13}_{5}
67	69^{23}_{3}	71	73	${}^{25}_{13}75^{5}_{3}$	77^{11}_{7}	79	${}_{27}81^{9}_{3}$
83	85^{17}_{5}	87^{29}_{3}	89	91^{13}_{7}	93^{31}_{3}	95^{19}_{5}	97

Παρατηρούμε ότι, με βάση αυτής της εκδοχής του κόσκινου του Ερατοσθένη, στον πίνακα μας δεν παρουσιάζονται μόνο ποιοι είναι πρώτοι και ποιοι σύνθετοι αριθμοί αλλά και ποιοι είναι πρώτοι διαιρέτες κάθε σύνθετου αριθμού και με ποιο πηλίκο. Έτσι μπορούμε να δούμε αν δύο αριθμοί είναι πρώτοι προς αλλήλους ή όχι.

Το κόσκινο του Ερατοσθένη γνωστοποιείται πρώτη φορά στους μαθητές της Α γυμνασίου στο κεφάλαιο περί φυσικών αριθμών, και συγκεκριμένα στο μάθημα «Χαρακτήρες διαιρετότητας- ΜΚΔ- ΕΚΠ- Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων», στο οποίο μαθαίνουν τις έννοιες των πρώτων και σύνθετων αριθμών. Ο τρόπος που παρουσιάζεται η μέθοδος του κόσκινου είναι σαφώς απλουστευμένη για να είναι πιο κατανοητή στους μαθητές. Για να την εφαρμόσουν καλούνται να γράψουν όλους τους διαδοχικούς αριθμούς ξεκινώντας από τη μονάδα. Αρχικά διαγράφουν τον αριθμό 1 που δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος. Έπειτα υπογραμμίζουν το 2 και διαγράφουν όλα τα πολλαπλάσια του, συνεχίζοντας επ’ άπειρον με τον επόμενο αριθμό, ο οποίος δεν έχει διαγραφεί. Με ατό τον τρόπο διαγράφονται όλοι οι σύνθετοι αριθμοί και μένουν μόνο οι πρώτοι.

Ενώ στην Β λυκείου στα μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης οι μαθητές προσεγγίζουν ουσιαστικά με τον ίδιο τρόπο τη μέθοδο του Ερατοσθένη, στο κεφάλαιο των πρώτων αριθμών. Η περαιτέρω επισήμανση είναι ότι στους ν αριθμούς σταματάμε τη διαδικασία στον αριθμό ρ όπου ρ $\leq \sqrt{\nu}$.Δηλαδή αν θέλουμε να προσδιορίσουμε τους πρώτους αριθμούς μεταξύ του 1 και του 100, όπου ρ $\leq \sqrt{100} =>$, γνωρίζουμε πως όταν διαγράψουμε τα πολλαπλάσια των αριθμών από το1 έως το10, δηλαδή για ρ≤10, θα έχουμε προσδιορίσει όλους τους πρώτους αριθμούς από το 1 έως το 100.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Μέρος Β

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη

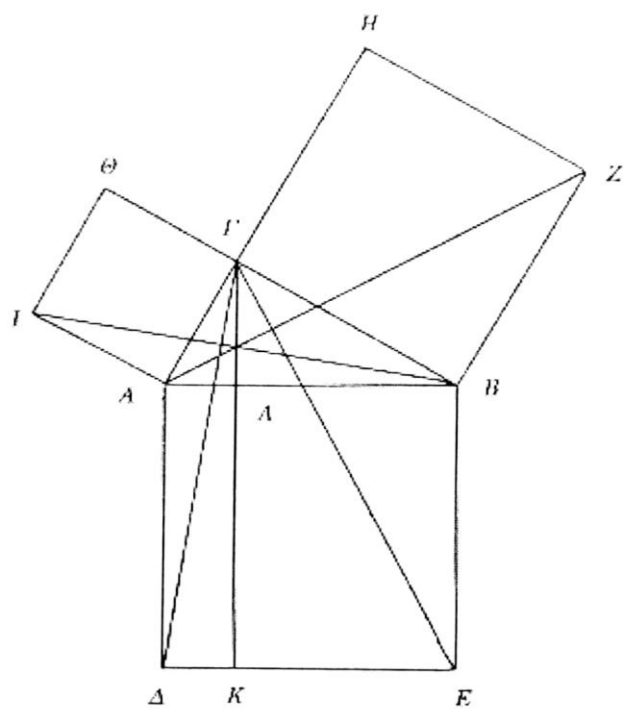
- ✍ Βιβλίο 1
- ✍ Βιβλίο 2
- ✍ Βιβλίο 7
- ✍ Βιβλίο 9

Στα περίφημα 13 βιβλία του Ευκλείδη, τα Στοιχεία, περιέχονται οι μαθηματικές προτάσεις που αποδίδονται στους Πυθαγορείους. Συγκεκριμένα στο βιβλίο 1 περιέχεται το πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφο του, ενώ το βιβλίο 2 ασχολείται κυρίως με την γεωμετρίζουσα αριθμητική της σχολής των Πυθαγορείων. Φαίνεται ότι μετά την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών, που θα αναφέρουμε παρακάτω, οι ψήφοι αντικαταστάθηκαν από ευθύγραμμα τμήματα, και η γεωμετρίζουσα αριθμητική των ψήφων μετατράπηκε στο είδος της γεωμετρίας που βρίσκουμε κυρίως στο πρώτο και το δεύτερο βιβλίο του Ευκλείδη. Τέλος στο βιβλίο 7 υπάρχει μία παρουσίαση της αρχαίας θεωρίας των αναλογιών των Πυθαγορείων και στο βιβλίο 9 η μελέτη των άρτιων και των περιττών αριθμών.

Βιβλίο 1

Πρόταση 47

Στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο της πλευράς της υποτείνουσας την ορθή γωνία είναι ίσο με τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία.



Μια περίληψη της απόδειξης της πρότασης 47 έχει ως εξής:

$(ΑΓ)^2 = 2(ΙΑΒ) = 2(ΓΑΔ) = (ΑΔΚΛ)$

$(ΒΓ)^2 = (ΒΕΚΛ)$

$(ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 = (ΑΔΚΛ) + (ΒΕΚΛ) = (ΑΒ)^2$

<u>Πρόταση 48</u>

Εάν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο μίας των πλευρών είναι ίσο με τα τετράγωνα των υπολοίπων πλευρών, η γωνία που περιέχεται από τις υπόλοιπες δύο πλευρές του τριγώνου είναι ορθή.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα διαδραματίζει κεντρικό ρόλο σε πολυάριθμες εφαρμογές. Μολονότι οι ρίζες του βρίσκονται στη γεωμετρία, το θεώρημα που αποδίδεται καθολικά στον Πυθαγόρα, απαντά σχεδόν σε κάθε κλάδο της επιστήμης, θεωρητικής ή εφαρμοσμένης.

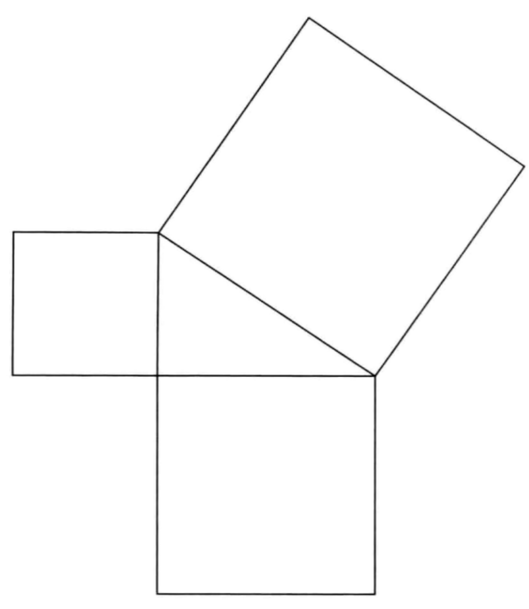
Η επιβεβαίωση ότι η απόδειξη του θεωρήματος οφείλεται στον Πυθαγόρα προέρχεται από αναφορές σε αρχαία κείμενα. Λόγου χάρη αναφέρεται ρητά από τον Πρόκλο[51] (412-485 μ.Χ.) , σε ένα σημείο όπου καταγράφει τα επιτεύγματα των αρχαίων γεωμετρών πρίν από τον Ευκλείδη. Ο ίδιος ο Πρόκλος αντλεί την πληροφορία από αρχαιότερο συγγραφέα, τον περιπατητικό φιλόσοφο Εύδημο

[51] Στα σχόλια του πρώτου βιβλίου του Ευκλείδη , Proclus *In primum Euclidis Elementorum Librum*

τον Ρόδιο (περίπου 370-300 π.Χ.), μαθητή και αργότερα συνεργάτη του Αριστοτέλη.
Στη σημερινή εποχή το Πυθαγόρειο θεώρημα διδάσκεται ως μία αλγεβρική σχέση, μέσω της οποίας μπορεί να βρεθεί το μήκος μίας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου αν είναι γνωστά τα μήκη των άλλων δύο πλευρών.

Όμως οι Πυθαγόρειοι δεν το έβλεπαν έτσι, για εκείνους ήταν μία πρόταση γεωμετρική ,σχετική με τα εμβαδά . Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ένας αριθμός νοούνταν ως το μήκος κάποιου ευθυγράμμου τμήματος. Το άθροισμα δύο αριθμών νοούνταν ως το άθροισμα των μηκών δύο ευθύγραμμων τμημάτων, που βρίσκονταν διαδοχικά ρο ένα μετά το άλλο. Ενώ το γινόμενο δύο αριθμών νοούνταν ως το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα που αντιστοιχούν στους δύο αριθμούς. Ως ειδική περίπτωση, το τετράγωνο ενός αριθμού α νοούνταν ως το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α, εξ' αυτού η ποσότητα $α^2$ αποκαλείται «τετράγωνο του α ».

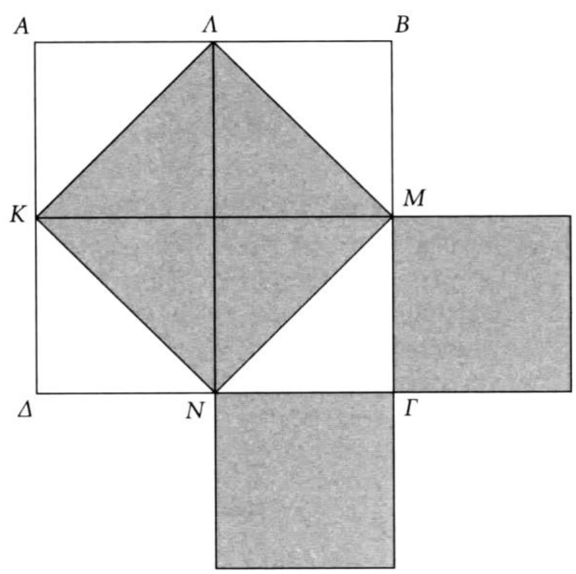
Επομένως μπορούμε να εκφράσουμε τη σχέση του αθροίσματος των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου ως το άθροισμα των εμβαδών δύο τετραγώνων πλευράς α, β αντίστοιχα ($α^2+β^2=γ^2$) και το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς γ ως το τετράγωνο της υποτείνουσας του ορθογωνίου αυτού τριγώνου, τα οποία σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα ισούνται.



Υπάρχουν λόγοι να πιστεύουμε ότι ο Πυθαγόρας απέδειξε πρώτα το θεώρημα στην ειδική περίπτωση ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου- δηλαδή, ενός τριγώνου με γωνίες 45-45 και 90 μοιρών. Η γεωμετρία δεν είχε προοδεύσει αρκετά στην εποχή του για να είχε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει την απόδειξη που περιέχεται από τον Ευκλείδη για την πρόταση 47 .

Η απόδειξη, λοιπόν, της ειδικής περίπτωσης είναι η εξής:

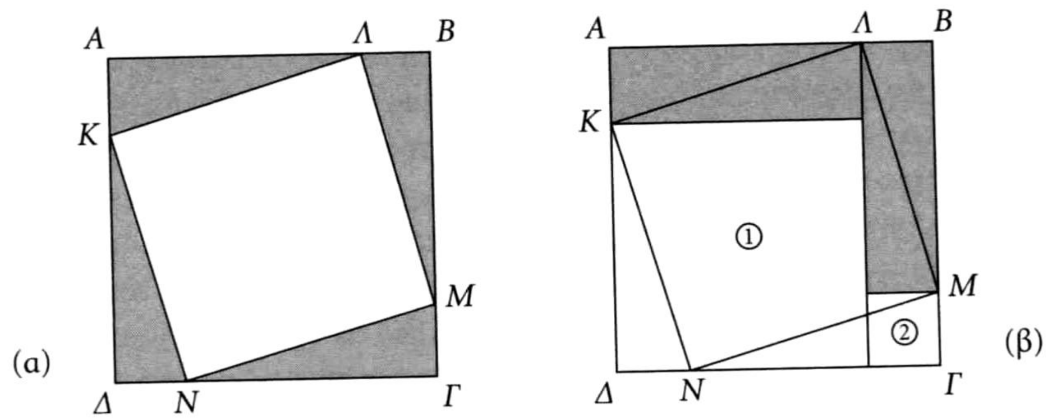
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ενώνουμε τα μέσα των διαδοχικών καθώς και των απέναντι πλευρών. Το εσωτερικό τετράγωνο ΚΛΜΝ χωρίζεται σε τέσσερα όμοια τρίγωνα που έχουν γωνίες 45, 45 και 90 μοιρών.



Δύο οποιαδήποτε από αυτά τα τρίγωνα έχουν συνολικό εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς ίσης με τη ΜΓ ή τη ΝΓ του τριγώνου ΜΝΓ, επομένως το συνολικό εμβαδόν του τετραγώνου ΚΛΜΝ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που το καθένα τους έχει πλευρά ίση με μία από τις κάθετες πλευρές του τριγώνου.

Λέγεται ότι αυτή η απόδειξη ήταν γνωστή στους Ινδούς και ότι ο Πυθαγόρας ενδέχεται να είχε ακούσει για αυτήν κατά τη διάρκεια των ταξιδιών του στη Μεσόγειο.

Δεν έχουμε άμεσες ενδείξεις αν ο Πυθαγόρας απέδειξε και την γενική περίπτωση αλλά είναι δύσκολο να πιστέψουμε ότι, έχοντας αποδείξει την ειδική περίπτωση δεν θα προχωρούσε και στο γενικό θεώρημα. Η απόδειξη που του αποδίδεται, λέγεται ότι ήταν γνωστή στους κινέζους, και είναι η εξής:

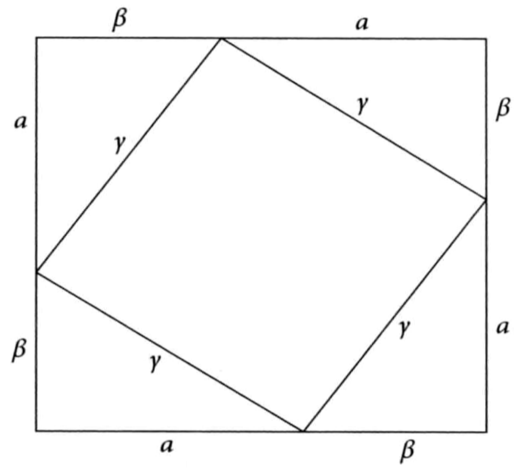


Μετατοπίζοντας το εσωτερικό τετράγωνο από τη θέση όπου σχημάτιζε γωνία 45 μοιρών με την πλευρά του εξωτερικού τετραγώνου , παίρνουμε την διάταξη που φαίνεται στο σχήμα α. Το τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι τώρα χωρισμένο σε ένα εσωτερικό τετράγωνο ΚΛΜΝ και τέσσερα όμοια τρίγωνα (σκιασμένα στο σχήμα).Διευθετώντας τα ορθογώνια τρίγωνα όπως φαίνεται στο σχήμα β, παρατηρούμε ότι το εναπομένον, μη σκιασμένο, εμβαδόν ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων 1 και 2- των τετραγώνων που το καθένα τους έχει πλευρά ίση με μία από τις δύο κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

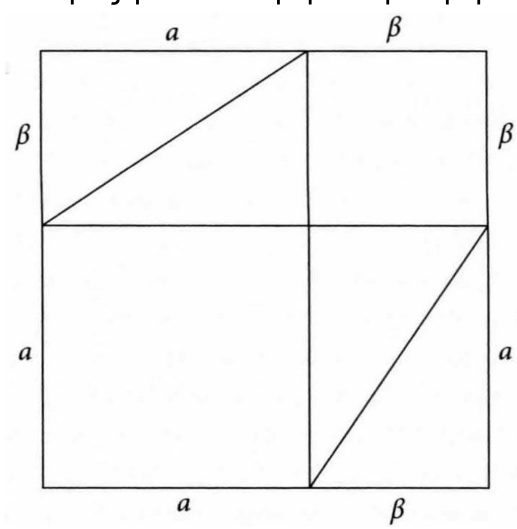
Μία διαφορετική απόδειξη που αποδίδεται στον Πυθαγόρα από τον Πρόκλο στο έργο του το Υπόμνημα, που περιέχει σχόλια για το πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη[52], είναι μία απόδειξη μέσω διαμέρισης :

---

[52] , Proclus *In primum Euclidis Elementorum* *Librum*



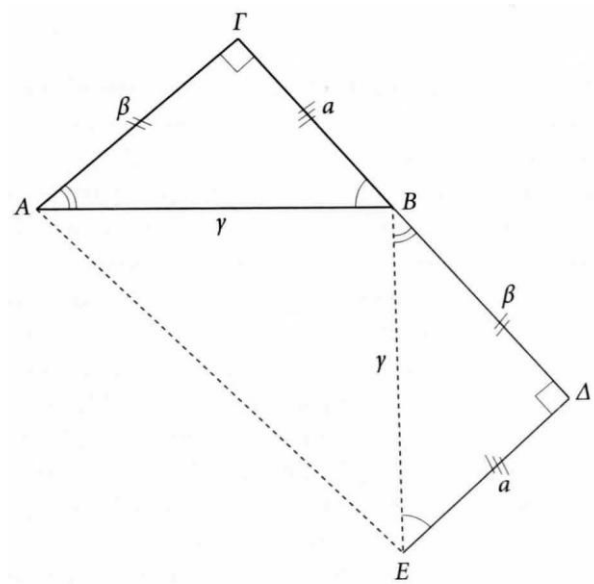
Θεωρούμε τετράγωνα πλευράς α+β και συνδέουμε τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήματα α και β σε κάθε πλευρά του τετραγώνου, έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα κεκλιμένο τετράγωνο. Έστω γ η πλευρά του. Το αρχικό τετράγωνο χωρίζεται σε πέντε μέρη: τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές α, β και υποτείνουσα γ, και ένα εσωτερικό τετράγωνο πλευράς γ. Μία διαφορετική διαμέριση φαίνεται στο σχήμα .



Συγκρίνοντας τα εμβαδά των δύο σχημάτων , έχουμε:

$4\frac{a\beta}{2}+\gamma^2 = 4\frac{a\beta}{2} + \alpha^2 + \beta^2$ από την οποία παίρνουμε $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2$.

Μία ακόμη απόδειξη , από τις σχεδόν 400, του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι η παρακάτω:



Στο τρίγωνο ΑΒΓ επεκτείνουμε την ΓΒ μέχρι το σημείο Δ, με ΒΓ =ΑΓ= β. Σχεδιάζουμε τη ΔΕ= ΓΒ= α, κάθετη στη ΒΔ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΔΕ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία. Συνεπώς οι γωνίες ΑΒΓ και ΕΒΔ είναι συμπληρωματικές, οπότε το ΑΒΕ είναι ορθογώνιο τρίγωνο. Επίσης το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΓΔΕ ισούται με (ΑΓ + ΕΔ)* ΓΔ/2 = (β+α) * (α+β)/2 $=(\alpha+\beta)^2/2$. Το εμβαδόν αυτό ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ συν το διπλάσιο εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΒ, δηλαδή $\gamma^2/2 +2(\alpha\beta/2) =\gamma^2/2 + \alpha\beta$. Εξισώνοντας τις δύο παραστάσεις, παίρνουμε $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$

Η εν λόγω απόδειξη έγινε διάσημη διότι προτάθηκε από τον James A.Garfield(1831-1881), τον 20ό πρόεδρο ΗΠΑ[53].

Στο βιβλίο της Β γυμνασίου γίνεται η πρώτη επαφή των μαθητών με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Η απόδειξη που αναφέρεται σε μορφή εφαρμογής είναι εκείνη της διαμέρισης που αναφέραμε παραπάνω. Επίσης υπάρχει αναφορά στη σύνδεση της αλγεβρικής σχέσης με το γεωμετρικό χαρακτήρα του θεωρήματος, υπό μορφή παρατήρησης βέβαια. Ιδιαίτερα ενδιαφέρον για την καλύτερη και

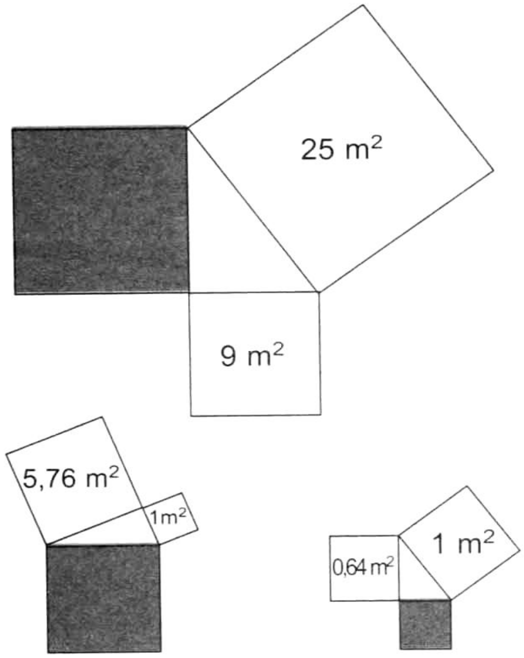
[53]Maor[2008]σελ 45

βαθύτερη κατανόηση των μαθητών θα ήταν οι καθηγητές να κάνουν εκτενή αναφορά στην γεωμετρίζουσα αριθμητική των Πυθαγορείων και να επισημάνουν την πολύπλευρη χρήση του θεωρήματος και την αξία της απόδειξης του παγκόσμια ,αναφέροντας κάποιες από τις αποδείξεις του θεωρήματος που έχουν γίνει γνωστές ανά την υφήλιο(περίπου 400).

Επίσης στο αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος αναφέρεται η γνώση από τους Αιγύπτιους σύμφωνα με ιστορικές πηγές κάποιων τριάδων, που εφαρμοσμένες ως πλευρές ενός τριγώνου το καθιστούν ορθογώνιο πολύ πριν ο Πυθαγόρας αποδείξει το ομώνυμο θεώρημα. Αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν σχοινί το οποίο είχε 13 κόμπους που σχημάτιζαν 12 ευθύγραμμα τμήματα. Κρατώντας τους ακραίους κόμπους ενωμένους και τεντωμένους σχημάτιζαν ένα τρίγωνο με πλευρές 3-4-5,την πρώτη Πυθαγόρεια τριάδα.

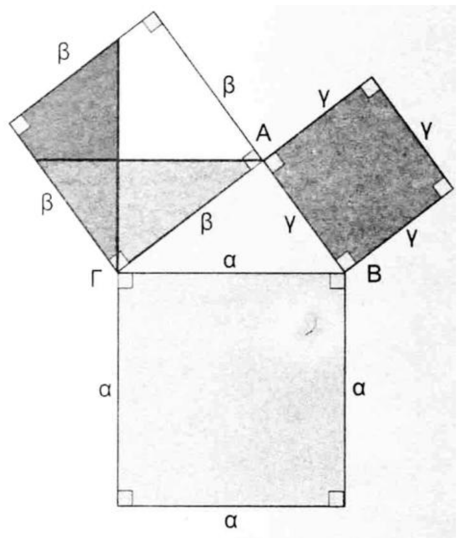
Μία άσκηση που βοηθά τον μαθητή να κατανοήσει την γεωμετρική ματιά του Πυθαγόρα ως προς το θεώρημα που τον έκανε αθάνατο και την σχέση του αλγεβρικού τύπου $α^2+β^2=γ^2$ με την γεωμετρική του ερμηνεία που σχετίζεται με τα εμβαδά τετραγώνων δίνεται προς λύση με την εξής εκφώνηση:

- Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου τετραγώνου στα επόμενα σχήματα.



Ενώ σαν δραστηριότητα για διασκέδαση αφήνεται η παρακάτω:

- ✍ Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκος υποτείνουσας α και μήκη κάθετων πλευρών β και γ. Εξωτερικά του τριγώνου έχουμε κατασκευάσει τρία τετράγωνα με μήκη πλευρών α, β, και γ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα σκιασμένα κομμάτια που αποτελούν τα τετράγωνα των κάθετων πλευρών , μπορείτε να γεμίσετε το μεγάλο τετράγωνο της υποτείνουσας ,πλευράς α, εφαρμόζοντας ακριβώς τα κομμάτια χωρίς το ένα να καλύπτει το άλλο;



Επίσης στο βιβλίο της Γ Γυμνασίου στο 1ο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις Πυθαγόρειες τριάδες και αφήνεται ως άσκηση στους μαθητές η απόδειξη του τύπου. Επειδή όμως οι μαθητές δεν είναι γνώστες ούτε της φιλοσοφίας ούτε του μαθηματικού πεδίου , στο οποίο δρούσαν οι Πυθαγόρειοι, είναι επόμενο να αδυνατούν να αποδείξουν τον τύπο εύρεσης Πυθαγορείων τριάδων Επομένως θα ήταν χρήσιμο να παρουσιαστεί η αντίστοιχη απόδειξη με την μέθοδο των ψηφίδων, την οποία αποδίδει ο Πρόκλος στους Πυθαγόρειους[54]. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές θα γνωρίσουν αρχικά την προσέγγιση του Πυθαγόρα και έπειτα θα μπορέσουν να αποδείξουν τους τύπους του Πλάτωνα και του Διόφαντου ως προς την εύρεση Πυθαγορείων τριάδων, κάτι που τους ζητείται στη συνέχεια.

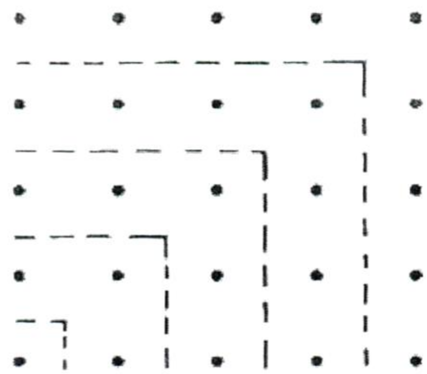
Η μέθοδος εύρεσης πυθαγορείων τριάδων ,που αναφέρει ο Πρόκλος, αποδίδοντας τη στον Πυθαγόρα είναι η εξής :

Οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν ότι το άθροισμα των διαδοχικών περιττών ακεραίων ισούται με έναν τετράγωνο αριθμό ή αριθμό εις το τετράγωνο μέσω της χρήσης του γνώμονα.$(1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2)$

Για παράδειγμα:

[54] Βλ. Πρόκλος 428-9, για μεθόδους εύρεσης πυθαγόρειων τριάδων αριθμών. Knorr (1975), 154-61, Burkert [1972], 428-30.

- $1+3+5+7+9=5^2$



Αν θεωρήσουμε τετράγωνο πλευράς ν, τότε ο γνώμονας γύρω από το τετράγωνο ισούται με (2ν+1).Άρα αν βρούμε αριθμό που το τετράγωνο του να αντιστοιχεί σε αριθμό της μορφής (2ν+1) έχουμε λύσει το πρόβλημα .Διότι πάλι καταλήγουμε σε τετράγωνο πλευράς (ν+1).

$2\nu+1=\mu^2 \Rightarrow 2\nu=\mu^2-1 \Rightarrow \nu=(\mu^2-1)\backslash 2$

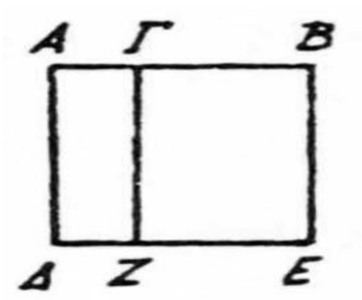
Προσθέτοντας μία μονάδα και στα δύο μέλη έχουμε:

$\nu+1=\mu^2\backslash 2 -1\backslash 2 +1 \Rightarrow \nu+1=(\mu^2+1)\backslash 2$. Άρα $\mu^2+[(\mu^2-1)\backslash 2]^2 =[(\mu^2+1)\backslash 2]^2$

Βιβλίο 2

Πρόταση 2

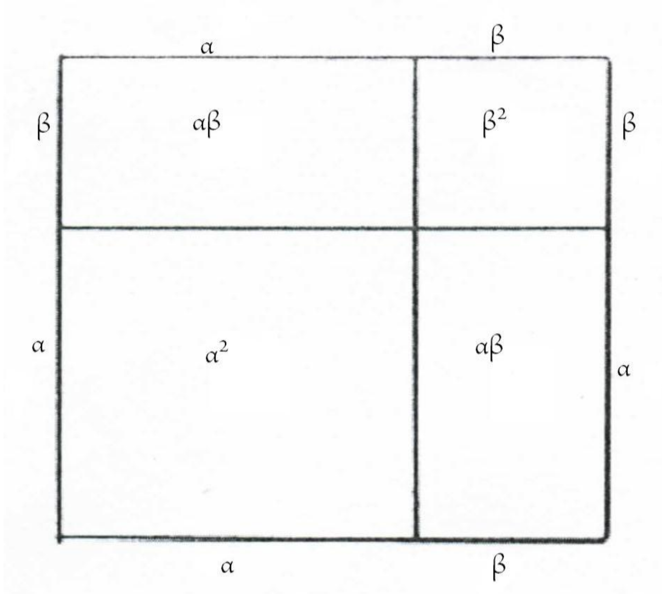
Εάν ευθεία γραμμή τμηθεί κατά τυχαίο τρόπο, το ορθογώνιο που περιέχεται από την ολόκληρη ευθεία και καθένα από τα τμήματα είναι ίσο με το τετράγωνο της ολόκληρης ευθείας.



Με αυτό το γεωμετρικό τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση, που αναφέρεται στο κεφάλαιο των φυσικών αριθμών της Α Γυμνασίου.

Πρόταση 4

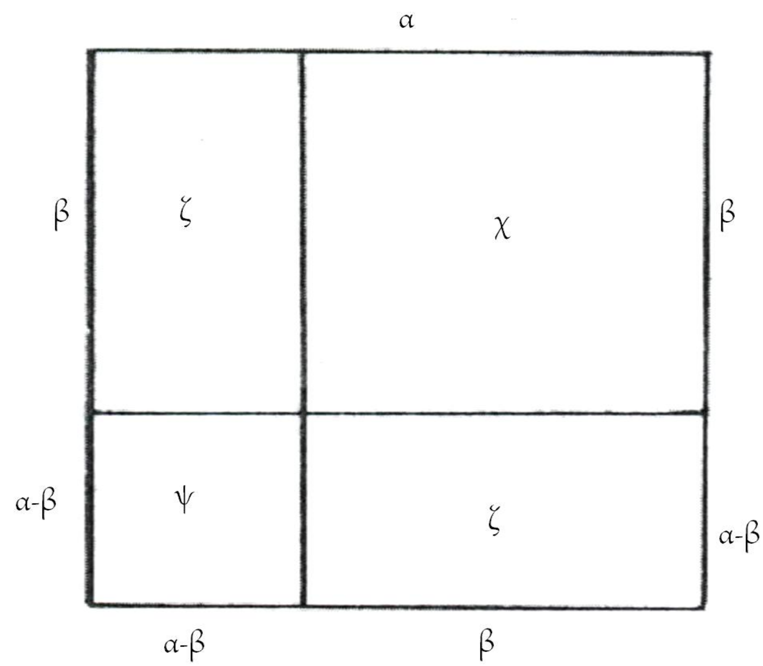
Εάν ευθεία γραμμή τμηθεί κατά τυχαίο τρόπο, το τετράγωνο ολόκληρης της γραμμής είναι ίσο με τα τετράγωνα των τμημάτων και το διπλάσιο του ορθογωνίου, που περιέχεται απο τα τμήματα.



Η συγκεκριμένη ευκλείδια πρόταση αποτελεί την γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$, εξισώνοντας το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς (α+β) με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους ορθογωνίων ΙΒΗΕ, ΘΕΖΔ και τετραγώνων ΑΙΕΘ και ΕΗΓΖ και αναφέρεται στο κεφάλαιο των αλγεβρικών παραστάσεων του βιβλίου των Μαθηματικών της Γ Γυμνασίου. Συμπληρωματικά μπορούμε να αναφέρουμε την πρόταση, η οποία αναφέρεται στην ταυτότητα $(α-β)^2$, το τετράγωνο της διαφοράς που αφήνεται σαν άσκηση για τον μαθητή.

Πρόταση 7

Εάν ευθεία γραμμή τμηθεί κατά τυχαίο τρόπο, το τετράγωνο της όλης ευθείας και το τετράγωνο του ενός τμήματος, μαζί, είναι ίσα με το διπλάσιο ορθογώνιο που περιέχεται απο την ολόκληρη και το εν λόγω τμήμα και με το τετράγωνο του άλλου τμήματος.

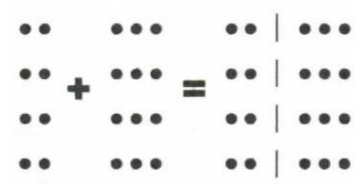


Θεωρώντας το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς (α-β), $(α-β)^2=ψ$ ανάλογα το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς (β), $(β)^2=χ$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου πλευρών β και (α-β), $(α-β)*β=ζ$ έχουμε ότι το ολικό τετράγωνο πλευράς α έχει εμβαδό :$α^2= χ+ψ+2ζ$ => $ψ=α^2-χ-2ζ$ => $ψ=χ+ψ+2ζ-χ-2ζ$ => $ψ=χ+ψ+2ζ-χ-2ζ+χ-χ$ => $ψ=(χ+ψ+2ζ)+χ-2(χ+ζ)$=>$(α-β)^2= α^2 -β^2-2αβ$, όπου αβ ισούται με (χ+ζ).

Θέλοντας να έχουμε μία πιο ρεαλιστική μία εικόνα της γεωμετρίζουσας αριθμητικής, που χρησιμοποιούσαν οι Πυθαγόρειοι, θα παραθέσουμε με την χρήση των ψηφίδων κάποια παραδείγματα των προτάσεων, που αφορούν στην εφαρμογή χωρίων.

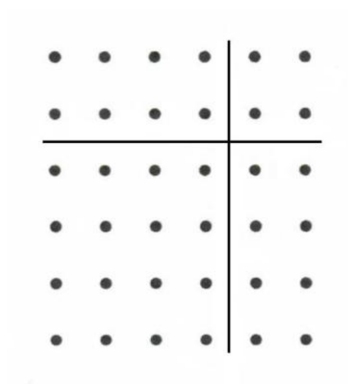
Πρόταση 2 : $α*(β+γ)=α*β+α*γ$

- Έστω $α=4,β=2,γ=3$



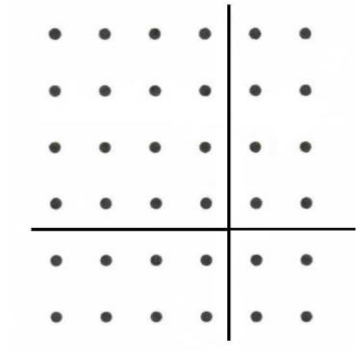
Πρόταση 4 : $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$

- Έστω $α=4,β=2$



Πρόταση 7: $(α-β)^2=α^2-2αβ+β$

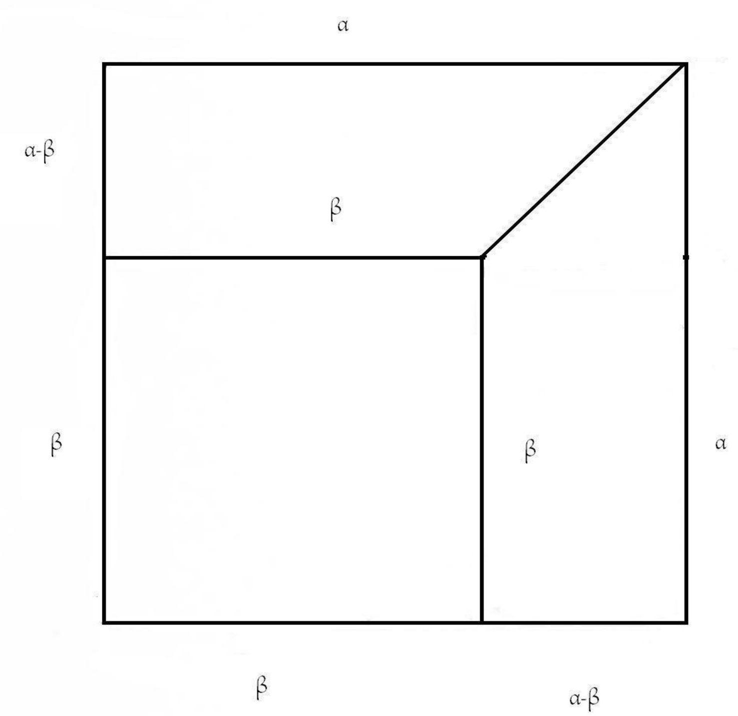
- Έστω $α=6,β=2$



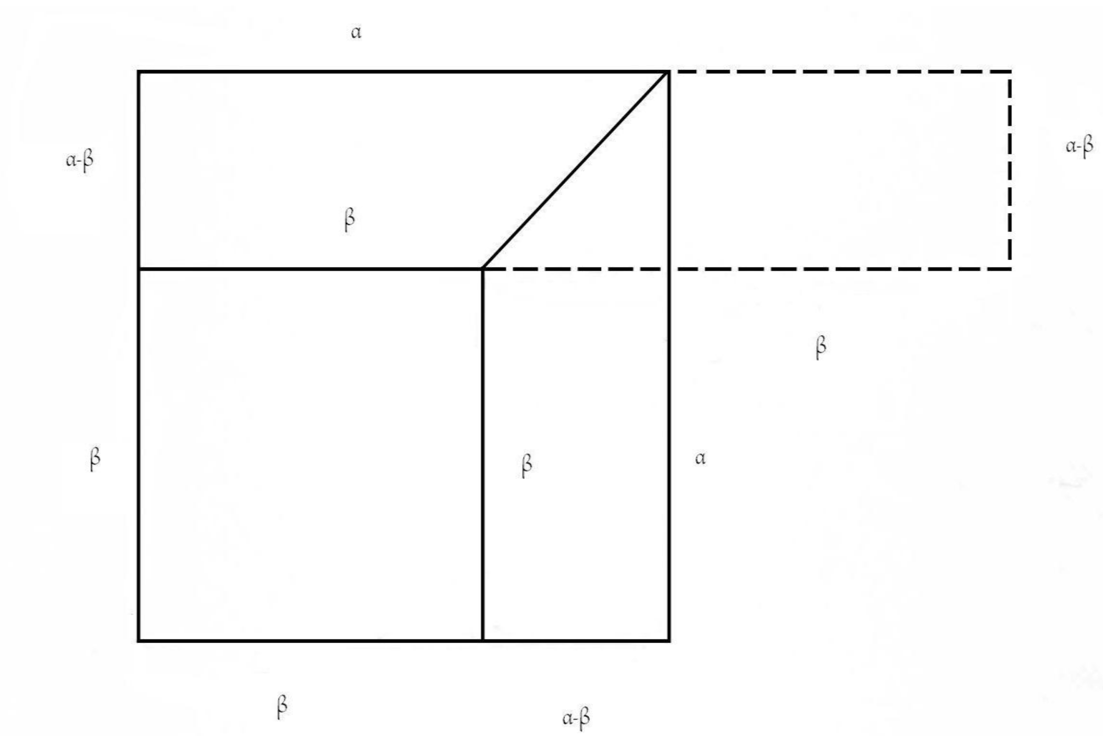
Ιδιαιτέρως εποικοδομητικό για τους μαθητές θα ήταν να εξασκηθούν στην απόδειξη αλγεβρικών ταυτοτήτων με γεωμετρικό τρόπο, εκτός απο τις $(α+β)^2$ και $(α-β)^2$ που προαναφέραμε.

Για παράδειγμά:

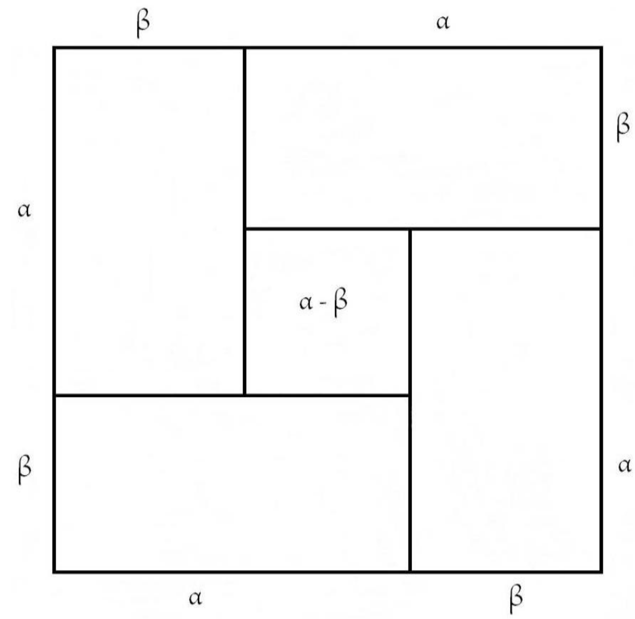
1. **$α^2-β^2=(α-β)(α+β)$** : μία γνωστή ταυτότητα είναι εκείνη της διαφοράς τετραγώνων



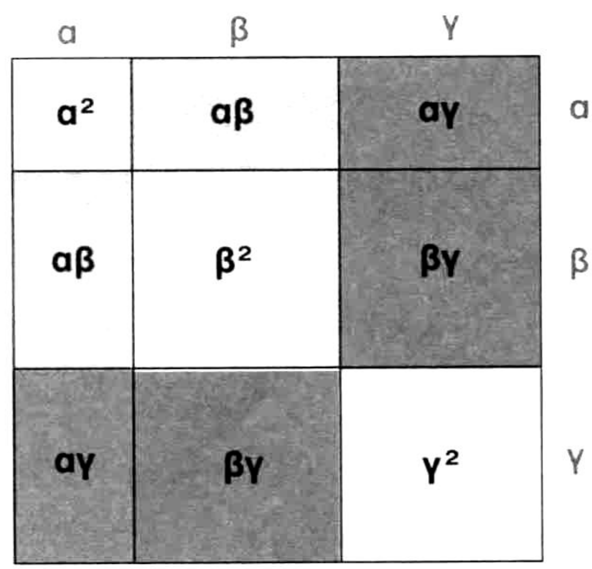
Σε ακόμη απλούστερη μορφή μεταφέροντας το ορθογώνιο με πλευρές (α-β) και β αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε το εμβαδό του τετραγώνου πλευράς α να ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς β και το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές (α-β) και (α+β). Επομένως έχουμε $α^2=β^2+(α-β)(α+β) \Rightarrow α^2-β^2= (α-β)(α+β)$.



2. $(α+β)^2=(α-β)^2+4αβ$



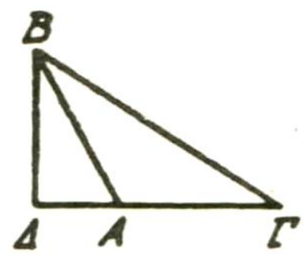
Στο σχολικό βιβλίο υπάρχει ως παράδειγμα η απόδειξη της ταυτότητας$(α+β+γ)^2=α^2+β^2+γ^2+2αβ+2αγ+2βγ$ με εφαρμογή χωρίων όπως φαίνεται στο σχήμα.



Οι προτάσεις 12 και 13 αποτελούν την γενίκευση του πυθαγορείου Θεωρήματος, που σήμερα είναι γνωστή ως νόμος των συνημιτόνων.

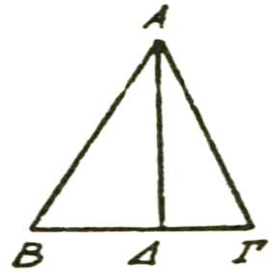
Πρόταση 12

Στα αμβλυγώνια τρίγωνα το τετράγωνο της πλευράς απέναντι απο την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο απο τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την αμβλεία γωνία κατά δύο φορές το ορθογώνιο που περιέχεται απο τη μία πλευρά της αμβλείας γωνίας , εκείνη στην οποία πέφτει η κάθετος και την ευθεία που αποκόπτεται εξωτερικά απο την κάθετο προς την αμβλεία γωνία.



Πρόταση 13

Στα οξυγώνια τρίγωνα το τετράγωνο της πλευράς απέναντι απο την οξεία γωνία είναι μικρότερο απο τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την οξεία γωνία κατά δύο φορές το ορθογώνιο που περιέχεται απο τη μία πλευρά της οξείας γωνίας , εκείνη στην οποία πέφτει η κάθετος και την ευθεία που αποκόπτεται εσωτερικά απο την κάθετο προς την οξεία γωνία.



✐ Ασύμμετρα μεγέθη – Άρρητοι αριθμοί

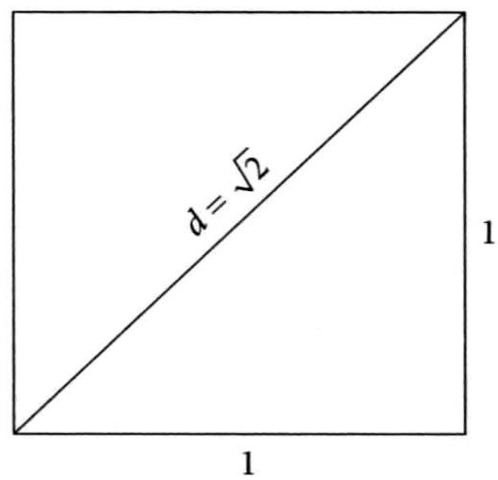
Περνώντας σε μία απο τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις των Πυθαγορείων, τους άρρητους αριθμούς, που καλούνται να γνωρίσουν οι μαθητές στην Β Γυμνασίου, θα είναι ιδιαίτερα βοηθητικό να ερμηνεύσουμε την έννοια της ασυμμετρίας.

Σύμμετρα ονομάζονται τα μεγέθη που μετρώνται με το ίδιο μέτρο ενώ ασύμμετρα αυτά για τα οποία δεν υπάρχει κοινό μέτρο, αναφέρει ο Ευκλείδης στο βιβλίο Χ των Στοιχείων.

Αρχικά γνωρίζουμε οτι οι Πυθαγόρειοι πίστευαν οτι όλα εξαρτώνται απο τους ακεραίους και όλα εκφράζονται μέσα απο αυτούς. Μετά την ανακάλυψη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και κατά την εφαρμογή του διαπιστώθηκε, αρχικά σε ένα τετράγωνο μοναδιαίας πλευράς, οτι η διαγώνιος του τετραγώνου και η πλευρά του δεν μπορούν να μετρηθούν με την ίδια μονάδα μέτρησης. Συγκεκριμένα εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα με τα ίδια στοιχεία που χρησιμοποίησε ο πυθαγόρειος Ίππασος από το Μεταπόντιο, που ανακάλυψε πρώτος την ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών και άρρητων αριθμών, προκύπτει η τετραγωνική ρίζα του 2, (γύρω στο 430-420 π.Χ.)[55].

$d^2=1^2+1^2 \Rightarrow d^2=2 \Rightarrow d=\sqrt{2}$

[55] Ο Β.Καρασμάνης [1998] θεωρεί τη χρονολόγηση αυτή πιο πιθανή. «Οι γνώμες των ιστορικών κυμαίνονται από το 480 ως το 400 π.Χ. περίπου. Σύμφωνα με τον Πλάτωνα (*Θεαίτητος* 147a κ.ε.), ο Θεόδωρος, που διδάσκει στην Αθήνα τα τελευταία χρόνια του 5ου αιώνα π.Χ., ανακαλύπτει τις ρίζες των αριθμών 3 έως 17. Άρα η ανακάλυψη της ασυμμετρίας της ρίζας του 2 (διαγώνιος τετραγώνου) είχε προηγηθεί. Η πρώιμη χρονολόγηση της ανακάλυψης (βλ. Fritz (1945/70)) έχει συνδεθεί με την μαρτυρία του Ιάμβιχου (*Πυθαγορικός βίος*, 89-90, 246-7) ότι η ανακάλυψη σχετίζεται με το κανονικό πεντάγωνο και έγινε από τον Ίππασο τον Μεταπόντιο, ο οποίος πνίγηκε στη θάλασσα λογω της ασέβειάς του να κοινοποιήσει το μυστικό. Οι Hasse και Scholz ([1928] 10 κ.ε., βλ. και Farrington [1961] 52) ισχυρίστηκαν ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας προκάλεσε κρίση τόσο στα μαθηματικά της εποχής όσο και στην πυθαγόρεια φιλοσοφία αφού έτσι αμφισβητήθηκε η βασική τους θέση ότι «τα πάντα είναι αριθμός». Η πιο σύγχρονη όμως έρευνα αμφισβητεί αυτή τη θέση (Knorr [1975]38-40, Fowler [2001]). Οι μαρτυρίες που έχουμε δε δείχνουν ότι υπήρξε κρίση στα μαθηματικά. Επιπλέον, φαίνεται πολύ πιο πιθανό ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας σχετίζονταν με τη διαγώνιο του τετραγώνου και όχι με τη διαγώνιο του κανονικού πενταγώνου.



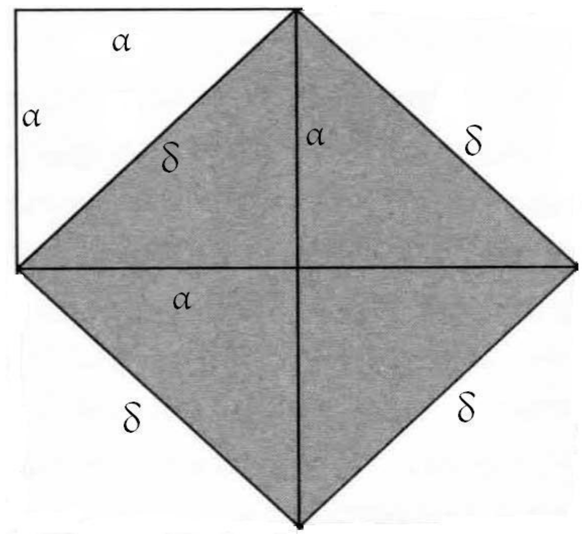
Υπήρχε όμως μία ελπίδα οτι αν μικραίνουν διαρκώς αυτή τη μονάδα, κάποια στιγμή θα προκύψει μία μονάδα μήκους ,της οποίας η πλευρά και η διαγώνιος θα είναι ρητά πολλαπλάσια. Με τη διαρκή και επ' άπειρον σμίκρυνση αυτής της μονάδας είχαν την εντύπωση οτι θα μπορούσαν να ξεπεράσουν τη δυσκολία που τους δημιούργησε η ασυμμετρία της πλευράς και της διαγωνίου, η μή ύπαρξη δηλαδή κοινής μονάδας μέτρησης.

Έχοντας ορίσει, λοιπόν, ρητούς τους αριθμούς που εκφράζονται ως το πηλίκο δύο ακεραίων, εύλογο είναι άρρητους αριθμούς να ονομάζουμε εκείνους, οι οποίοι δεν μπορούν να εκφραστούν ως πηλίκο δύο ακεραίων.

Η αλγεβρική απόδειξη της πρότασης ότι η $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός είναι η εξής[56]:

Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο πλευράς α και στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα ακόμη τετράγωνο με πλευρά ίση με τη διαγώνιο του αρχικού τετραγώνου.

[56] Η απόδειξη αυτή βρίσκεται σε ένα σχόλιο στο δέκατο βιβλίο του Ευκλείδη. Ο Αριστοτέλης υπαινίσσεται την απόδειξη αυτή στα «*Αναλυτικά Πρότερα*» (41 α 25-35)

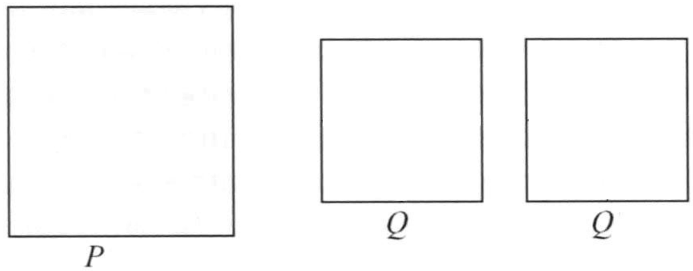


Παρατηρούμε ότι το αρχικό τετράγωνο πλευράς α χωρίζεται σε δύο ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα ενώ το τετράγωνο πλευράς δ χωρίζεται σε τέσσερα ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα, ίσα με τα προαναφερθέντα. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς δ είναι το διπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς α, δηλαδή $δ^2=2α^2$.Άπο την τελευταία σχέση το $δ^2$ είναι άρτιος αριθμός, άρα και το δ είναι άρτιος.

Αν δεχθούμε τους αριθμούς α, δ πρώτους προς αλλήλους, τότε αναγκαστικά ο α είναι περιττός. Αλλά αφού ο δ είναι άρτιος τότε δ=2γ και $2α^2 = 4γ^2$, ή $α^2 = 2\ γ^2$. Επομένως ο αριθμός α είναι ταυτοχρόνως περιττός και άρτιος, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το δ δεν είναι αριθμός και δεν έχει κοινό μέτρο με το α. Αρκετοί ιστορικό έχουν αμφισβητήσει το ότι αυτή ήταν η αρχική απόδειξη ανακάλυψης της ασυμμετρίας από τους πυθαγόρειους. Αλλά ο Oscar Benecke[57] έδειξε ότι παρόμοια απόδειξη μπορούμε να έχουμε σχεδιάζοντας τετράγωνα, κάτι που ταιριάζει στο στυλ των Πυθαγορείων.

[57] βλ. Χριστιανίδης [2003] 76-8

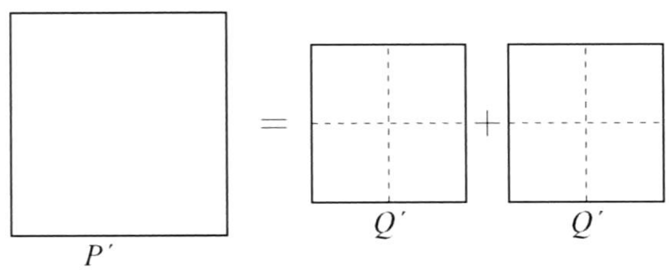
Εξ' αφορμής της σχέσης $α^2=2β^2$ παριστάνουμε το $α^2$ με ένα τετράγωνο (P) και το $2β^2$ με δύο ίσα τετράγωνα (Q).



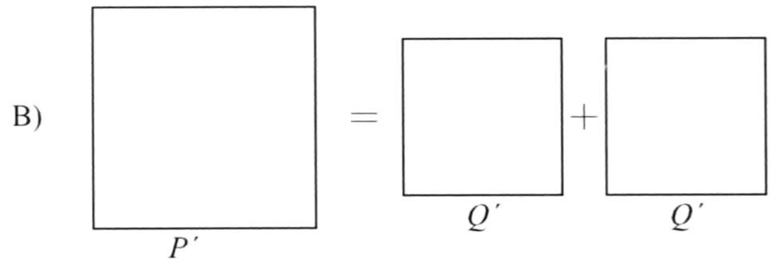
Γνωρίζοντας ότι ένα τετράγωνο με πλευρά άρτιο αριθμό χωρίζεται σε 4 ίσα μικρότερα τετράγωνα, αφού η κάθε πλευρά μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη, χωρίζουμε τόσο το (P) όσο και το (Q) σε 4 ίσα μικρότερα τετράγωνα. Αν οι πλευρές των νέων αυτών τετραγώνων είναι και πάλι άρτιοι αριθμοί, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και συνεχίζουμε ώσπου να προκύψει ένα τουλάχιστον τετράγωνο (μέρος είτε του (P) είτε του (Q)) με πλευρά περιττό αριθμό και επομένως μη διαιρούμενο δια 4 ώστε να καταλήγουμε σε άτοπο. Θα πάρουμε τις δύο πιθανές περιπτώσεις για το P:

1. Έστω οτι από το τετράγωνο P καταλήγουμε, μετά από έναν αριθμό διαιρέσεων, σε ένα <u>περιττό</u> τετράγωνο P΄ και από το κάθε τετράγωνο Q καταλήγουμε ,μετά από τον ίδιο αριθμό διαιρέσεων, σε ένα τετράγωνο Q' το οποίο μπορεί να είναι άρτιο (σχήμα A)

A)

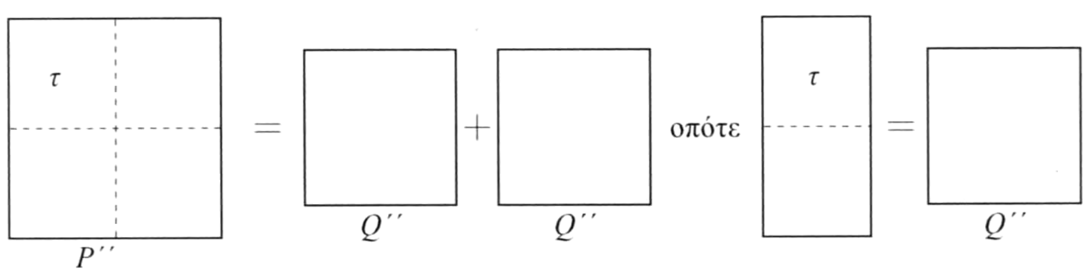


ή περιττό (σχήμα B).



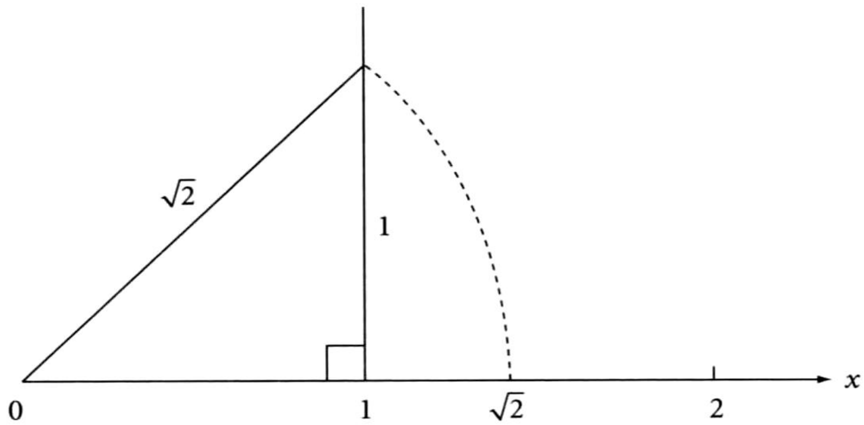
Και στη μία περίπτωση και στην άλλη προκύπτει ότι ένας περιττός αριθμός είναι ίσος με το διπλάσιο ενός αριθμού και αυτό είναι αδύνατο.

2. Έστω οτι από το τετράγωνο P καταλήγουμε, μετά από έναν αριθμό διαιρέσεων, σε ένα <u>άρτιο</u> τετράγωνο P΄΄ ,το οποίο είναι ίσο με το διπλάσιο ενός περιττού τετραγώνου Q''. Όμως το τετράγωνο P'', επειδή είναι άρτιο, χωρίζεται σε 4 μικρότερα τετράγωνα, καθένα από τα οποία είναι ίσο με r και επομένως 2r=Q'', το οποίο είναι και πάλι αδύνατο αφού Q'' είναι περιττός.



Από τις παραπάνω αποδείξεις είναι κατανοητό οτι η $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να γραφεί σαν πηλίκο δύο ακεραίων, άρα είναι ένας άρρητος αριθμός.
Όμως τι είδους αριθμός είναι ο $\sqrt{2}$?

Μία απλή γεωμετρική κατασκευή ,χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη, δείχνει ότι η τιμή του $\sqrt{2}$ βρίσκεται κάπου μεταξύ του 1 και του 2.Λογικό συμπέρασμα θα ήταν η $\sqrt{2}$ να είναι κάποιο κλάσμα, κάτι όμως που αποδείξαμε παραπάνω ότι δεν ισχύει.

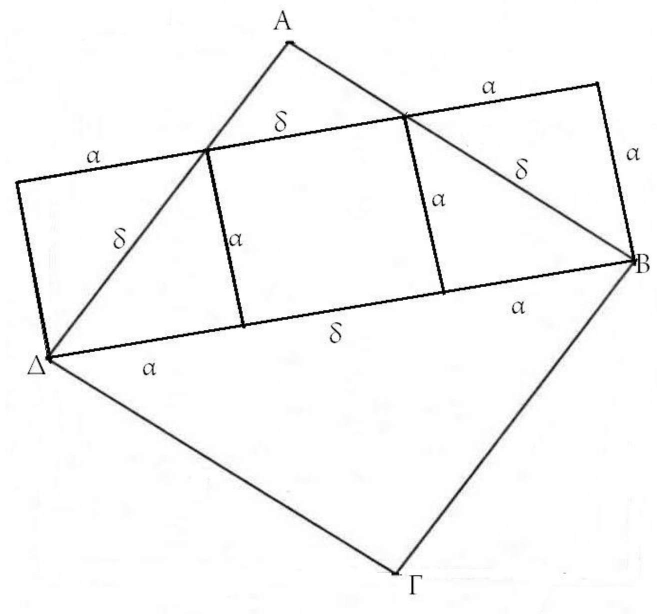


Θέλοντας να παραθέσουμε και την γεωμετρική απόδειξη, ότι η $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, θα δείξουμε ότι η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου είναι ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Θα εργαστούμε με εις άτοπο απαγωγή, θεωρώντας ότι η διαγώνιος και η πλευρά του τετραγώνου έχουν κοινή μονάδα μέτρησης.

Παρακάτω θα δείξουμε την προσέγγιση, από τους Πυθαγόρειους, του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$, η οποία έγινε καθαρά γεωμετρικά σύμφωνα με τον Θέωνα τον Σμυρναίο[58].

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α+δ αντιστοιχεί διαγώνιος 2α +δ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

[58] Θέωνας Σμυρναίος, *Θεολογούμενα της Αριθμητικής*, σελ 43-44



Έστω $α_1$=α+δ, $δ_1$=2α+δ. Προεκτείνοντας σε τετράγωνο πλευράς $α_2$=3α +2δ έχουμε διάμετρο $δ_2$=4α +3δ, εν συνεχεία για πλευρά $α_3$=7α +5δ έχουμε διάμετρο $δ_3$= 10 α+7δ. Συνεχίζοντας την διαδικασία αυτή προσεγγίζουμε την αριθμητική τιμή της $\sqrt{2}$.Συγκεκριμένα θέτοντας α=1 και δ=1 βρίσκουμε τα ζεύγη (α,δ) : (2,3), (5,7), (12,17) που προσεγγίζουν τον λόγο 1/$\sqrt{2}$.

Βιβλίο 7

Πρόταση 2

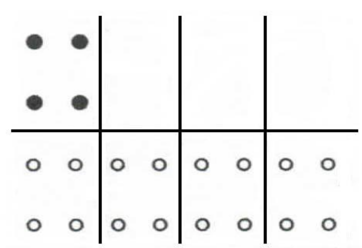
Εάν δίνονται δύο αριθμοί, που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Θέλοντας να προσεγγίσουμε τις μεθόδους του Πυθαγόρα και της Σχολής του, χρησιμοποιώντας τις ψηφίδες, θα πάρουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

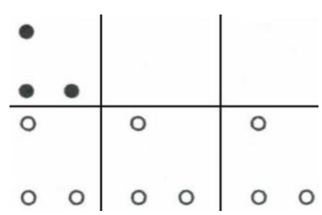
A. Ο ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιος του άλλου.

Για παράδειγμα,

- Έστω οι αριθμοί {4,16} : πόσες φορές? 4.



- Έστω οι αριθμοί {3,9} : πόσες φορές? 3.



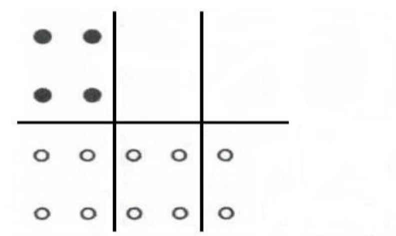
Αφού ο αριθμός χωρίζεται σε «μέρη» του μικρότερου αριθμού, οι κοινοί διαιρέτες είναι (α) ο μικρότερος αριθμός (β)ο αριθμός που αντιστοιχεί στην συχνότητα που εμφανίζεται ο μικρότερος σχηματίζοντας τον μεγαλύτερο αριθμό. Επομένως ο **Μ**έγιστος **Κ**οινός **Δ**ιαιρέτης είναι ο μεγαλύτερος από τους (α) και (β).

Β. Ο ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Για παράδειγμα,

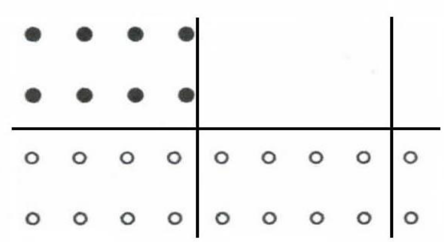
- Έστω οι αριθμοί {4,10} : 10-4=6

  6-4=2



- Έστω οι αριθμοί {8,18} : 18-8=10

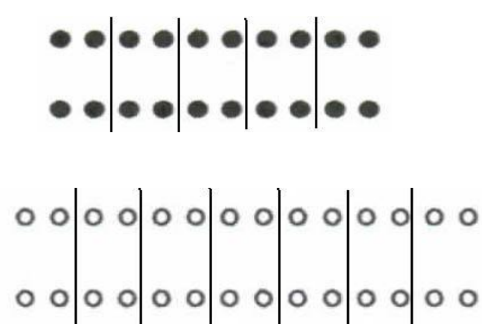
  10-8=2



- Έστω οι αριθμοί {20,28} : 28-20=8

  20-8=12

  12-8=4



Αφαιρώντας από τον μεγαλύτερο τον μικρότερο αριθμό και συνεχίζοντας την διαδικασία κάθε φορά με το υπόλοιπο καταλήγω, όταν δεν είναι δυνατή περαιτέρω η αφαίρεση, στον αριθμό, που αποτελεί τον μέγιστο κοινό διαιρέτη.

Η μέθοδος αυτή της αναπαράστασης μέσω των ψηφίδων αποτελεί μία απεικόνιση γεωμετρικού χαρακτήρα του τρόπου εύρεσης του Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών, χρησιμοποιώντας απλά την πράξη της αφαίρεσης.

Η μέθοδος εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών στο βιβλίο των Μαθηματικών της Α Γυμνασίου είναι η ακόλουθη :

1. Βρίσκουμε τους διαιρέτες του πρώτου και ακολούθως εκείνους του δεύτερου αριθμού.
2. Προσδιορίζουμε τους κοινούς διαιρέτες μεταξύ των αριθμών.
3. Επιλέγουμε τον μεγαλύτερο από τους κοινούς διαιρέτες μεταξύ των αριθμών

Για παράδειγμα:

- {4,10} : Διαιρέτες του 4 : 1,2,4
  Διαιρέτες του 10 : 1,2,5,10

- {8,18} : Διαιρέτες του 8 : 1,2,4,8
  Διαιρέτες του 18 : 1,2,3,6,9,18

- {20,28} : Διαιρέτες του 20 : 1,2,4,5,10,20
  Διαιρέτες του 28 : 1,2,4,7,14,28

Υπάρχει βέβαια και ο εναλλακτικός τρόπος μέσω του γινομένου πρώτων παραγόντων. Προσδιορίζουμε τον Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών επιλέγοντας τους κοινούς πρώτους παράγοντες, τον καθένα στο μικρότερο εκθέτη, στον οποίο εμφανίζεται. Για παράδειγμα,

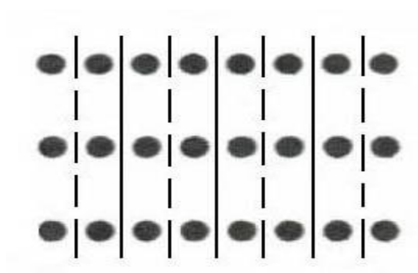
- $4=2*2=2^2$ Μ.Κ.Δ.(4,10)=2
- $10=2*5$

Στο βιβλίο της Β τάξης Λυκείου της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης στο κεφάλαιο της θεωρίας Αριθμών, υπάρχει εκτενής αναφορά για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη. Όμως ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ένα πόρισμα (3ο,σελ 154), το οποίο είναι το εξής :

Αν για τους ακεραίους α ,β ,γ ισχύει α/βγ και (α ,β)=1 τότε α|γ=1. Δηλαδή ένας ακέραιος διαιρεί το γινόμενο δύο ακεραίων και είναι πρώτος προς τον έναν, τότε διαιρεί τον άλλο.

Για παράδειγμα:

- Έστω α=3 , β=4 πρώτοι μεταξύ τους και γ=6



α/(β*γ)=3/(4*3)=3/24.

Το 3 διαιρεί το 24,δηλαδή οι 24 ψηφίδες μπορούν να διαιρεθούν σε τριάδες. Το 3 διαιρεί και το 6?Η απάντηση έρχεται κατευθείαν από το προηγούμενο σχήμα και ο λόγος είναι ότι αφού ξέρουμε τους παράγοντες του 24, χωρίζουμε τις 24 ψηφίδες στον παράγοντα, που δεν είναι πρώτος, ώστε κοιτώντας ένα από τα τέσσερα «κομμάτια» να είναι κατανοητό ότι το α=3 διαιρεί και το β=6.

Το ενδιαφέρον στο πόρισμα αυτό είναι η σχέση του με τις προτάσεις 23 και 24 από το Βιβλίο 7 των Στοιχείων του Ευκλείδη και αυτό θα αποτελέσει το έναυσμα για να προσπαθήσουμε να απεικονίσουμε το παραπάνω πόρισμα με τη βοήθεια της Πυθαγόρειας Μεθόδου. Επόμενο είναι να παρουσιαστούν στη συνέχεια και οι προτάσεις από το συγκεκριμένο βιβλίο του Ευκλείδη.

Η απόδειξη, που παρουσιάζεται στο βιβλίο της Β Λυκείου είναι η παρακάτω :

Επειδή (α, β)=1, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ τέτοιοι, ώστε κα+λβ=1 και επομένως καγ+λβγ =γ . Αφού α/αγ και α/βγ, θα ισχύει α/(καγ+λβγ), δηλαδή α/γ.

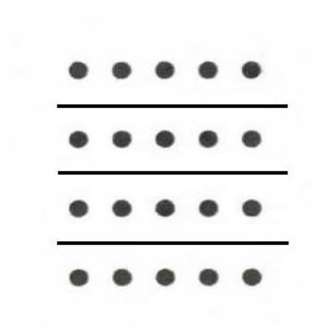
Πρόταση 23

Εάν δύο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους, ο αριθμός που διαιρεί έναν από αυτούς θα είναι προς τον άλλο .Δηλαδή εάν (α, β)=1 και γ/α τότε (γ, β)=1.

Για παράδειγμα,

- α=20, β=3 με (20, 3)=1 και 5/20 τότε (5, 3)=1

Το 20 δεν χωρίζεται σε τριάδες άρα σίγουρα δεν θα χωρίζονται και τα μικρότερα κομμάτια.



Πρόταση 24

Εάν δύο αριθμοί είναι πρώτοι προς έναν αριθμό και το γινόμενό τους θα είναι αριθμός πρώτος προς αυτόν. Δηλαδή εάν (α, γ)=1 και (β, γ)=1 τότε και (αβ, γ)=1
Για παράδειγμα,

- Έστω α=3, β=5, γ=2

Καμία πεντάδα και καμία τριάδα δεν μπορεί να χωριστεί σε δυάδες άρα όσες πεντάδες ή τριάδες και να προσθέσω δεν πρόκειται να καταμεριστούν σε δυάδες.

.

Έχοντας αναφερθεί επανειλημμένα στους πρώτους αριθμούς και προτού αναπτύξουμε προτάσεις ,που τους αφορούν, παραθέτουμε τους ορισμούς που περιέχονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη περί πρώτων αριθμών,

- **Πρώτος αριθμός** είναι αυτός που διαιρείται μόνο από τη μονάδα.
- **Πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί** είναι αυτοί που κοινό διαιρέτη έχουν μόνο τη μονάδα.

Πρόταση 31

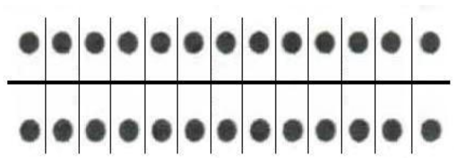
Κάθε σύνθετος αριθμός διαιρείται από κάποιον πρώτο αριθμό.

Για παράδειγμα:

- Έστω α=26

Διαιρέτες : 2 ,13

Στη συγκεκριμένη περίπτωση και οι δύο διαιρέτες είναι πρώτοι αριθμοί.

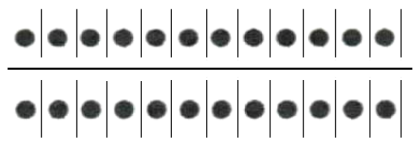


(2,13)

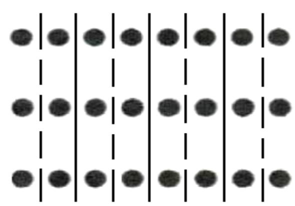
- Έστω β=24

Διαιρέτες : 2 ,3 ,4 ,6 ,8 ,12

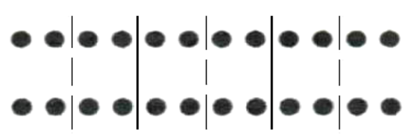
Παρατηρούμε ότι στο σύνολο των διαιρετών υπάρχουν και οι πρώτοι αριθμοί 2, 3.



(2,12)



(3,6)



(4,8)

Μια αντίστοιχη πρόταση σε μορφή θεωρήματος υπάρχει στο βιβλίο της Β Λυκείου, και είναι η εξής :

✍ ***Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.***

Απόδειξη :

Έστω ο θετικός ακέραιος α>1 και ρ ο μικρότερος από τους θετικούς διαιρέτες του με ρ>1.Θα αποδείξουμε ότι ο ρ είναι πρώτος αριθμός. Αν ο ρ ήταν σύνθετος, θα είχε ένα θετικό διαιρέτη, έστω β με 1<β>ρ. Αφού όμως β\ρ και ρ\α τότε θα ισχύει β\α. Βρήκαμε έτσι ένα θετικό διαιρέτη β του α, που είναι μικρότερος του ρ. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο ρ θεωρήθηκε ως ο ελάχιστος διαιρέτης του α. Έτσι ο μικρότερος από τους θετικούς διαιρέτες ενός ακεραίου είναι πρώτος αριθμός.

Στο βιβλίο της Α Γυμνασίου το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στα κλάσματα. Είναι πολύ χρήσιμο και ενδιαφέρον να δούμε πως οι πυθαγόρειες προτάσεις από το έβδομο βιβλίο των Στοιχείων θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμες στην εκπαιδευτική διαδικασία.

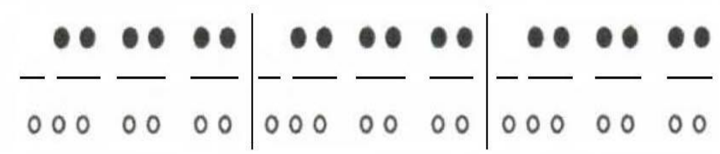
- Περί αθροίσματος ομώνυμων κλασμάτων

Πρόταση 5

Εάν ένας αριθμός είναι μέρος αριθμού και ένας άλλος είναι το ίδιο μέρος ενός άλλου, και το άθροισμα(των μικρότερων) θα είναι το ίδιο μέρος του αθροίσματος(των μεγαλύτερων), όπως είναι ο ένας του ενός.

Για παράδειγμα:

- Έστω 7=(1\3)*21
  6=(1\3)*18



⇒ 7+6=(1\3)*(21+18)

⇒ 13=(1\3)* 39

- Περί διαφοράς ομώνυμων κλασμάτων

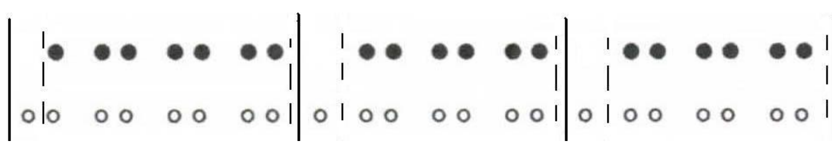
Πρόταση 7

Εάν αριθμός είναι μέρος αριθμού, όσο είναι αυτός που αφαιρείται από αυτόν που αφαιρέθηκε, τότε και αυτός που απομένει θα είναι το ίδιο μέρος αυτού που απομένει θα είναι το ίδιο μέρος αυτού που απομένει, όπως ο ολόκληρος του ολόκληρου.

Για παράδειγμά,

- Έστω 7=(1\3)*21

  6=(1\3)*18



⇒ 7-6=(1\3)*(21-18)

⇒ 1=(1\3)*3

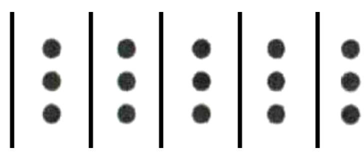
- Περί ισοδύναμων κλασμάτων

<u>Πρόταση 17</u>

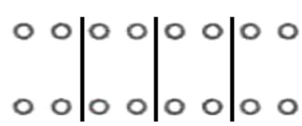
Εάν ένας αριθμός πολλαπλασιάζοντας δύο αριθμούς δίνει κάποια γινόμενα, τα γινόμενα από αυτούς θα έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν και οι αριθμοί που πολλαπλασιάστηκαν.

Για παράδειγμα:

- Έστω 4\5=(3*4)\(3*5)=12\15
  Θα ισχύει 12=(4\5)*15



- Έστω 3\4=(3*4)\(4*4)=12\16
  Θα ισχύει 12=(3\4)*16



Στο σχολικό εγχειρίδιο αναφέρεται:

- Δύο κλάσματα λέγονται <u>**ισοδύναμα**</u> αν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους
- Αν πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό προκύπτει <u>**ισοδύναμο κλάσμα**</u>, δηλαδή α\β=(α*λ)(β*λ)

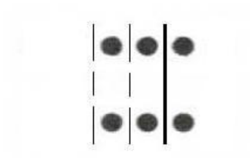
Πρόταση 19

Εάν τέσσερις αριθμοί βρίσκονται σε αναλογία, το γινόμενο του πρώτου και του τέταρτου αριθμού θα είναι ίσο με το γινόμενο του δεύτερου και του τρίτου αριθμού.

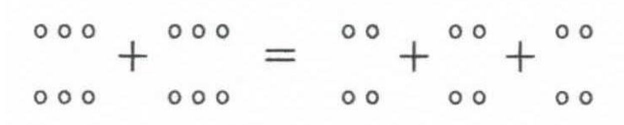
Για παράδειγμα,

- Έστω 2\3=4\6.

  Άρα ισχύει 4=(2\3)*6

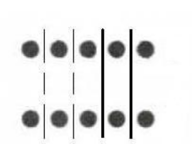


  Και 2*6=3*4=>6+6=4+4+4

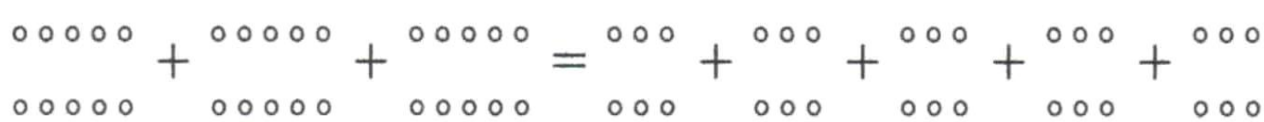


- Έστω 3\5=6\10.

  Άρα ισχύει 6=(3\5)*10



  Και 3*10=5*6=>10+10+10=6+6+6+6+6



- Περί ανάγωγων κλασμάτων

Πρόταση 21

Οι πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί είναι οι ελάχιστοι απο τους αριθμούς, με τους οποίους έχουν τον ίδιο λόγο.

Για παράδειγμά:

- Έστω 8\12=4\6=2\3

Τα 8\12 χωρίζονται σε 4άδες και σε 2άδες ενώ τα 4\6 χωρίζονται σε 2άδες και μονάδες και τέλος τα 2\3 χωρίζονται σε μονάδες. Άρα οι ελάχιστοι με τον ίδιο λόγο είναι τα 2\3,επομένως και πρώτοι μεταξύ τους.

Ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο αναφέρεται :

- Ένα κλάσμα λέγεται **ανάγωγο** όταν δεν μπορεί να απλοποιηθεί, δηλαδή όταν οι όροι του δεν έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1.

Επομένως με την προηγούμενη πρόταση βρίσκουμε ένα ανάγωγο κλάσμα μεταξύ ισοδύναμων κλασμάτων.

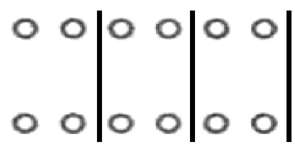
- Περί παραγόντων σύνθετου αριθμού

Πρόταση 37

Εάν αριθμός διαιρείται από κάποιον αριθμό, ο διαιρετέος θα έχει μέρος ομώνυμο με τον διαιρέτη.

Για παράδειγμα:

- Έστω α=12 και 4*3=12 άρα το 4 παράγοντας του 12, και 12\4 ακέραιο αποτέλεσμα, δηλαδή το 12 μπορεί να χωριστεί σε 4άδες.



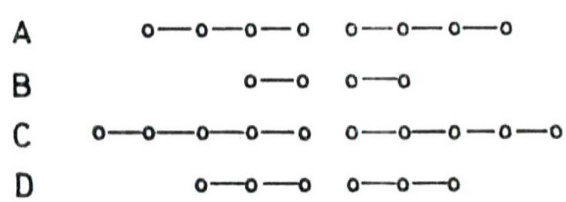
Βιβλίο 9

Α. Θεωρήματα για το άθροισμα άρτιων αριθμών.

- Το άθροισμα πλήθους άρτιων αριθμών δίνει αποτέλεσμα άρτιο αριθμό.(πρ.21)

Θα κάνουμε μία απόπειρα να προσεγγίσουμε την παραπάνω πρόταση με τη πυθαγόρεια μέθοδο των ψηφίδων, χρησιμοποιώντας την οπτική γωνία του W.R.Knorr.

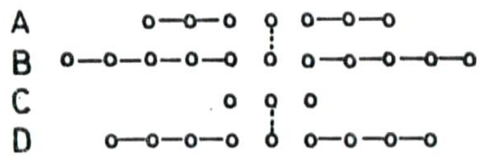
Έστω ότι προσθέτουμε τους άρτιους αριθμούς A,B,C,D οι οποίοι χωρίζονται σε δύο ίσα μέρη, όπως φαίνεται στο σχήμα.



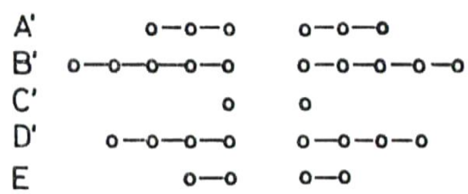
Η πρόσθεση των δύο ίσων μερών, ισούται με το άθροισμα των A,B,C,D . Αφού μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη, είναι άρτιος αριθμός.

- Το άθροισμα περιττών αριθμών, των οποίων το πλήθος είναι άρτιος, δίνει αποτέλεσμα άρτιο αριθμό.(πρ.22)

Έστω ότι προσθέτουμε τους περιττούς αριθμούς A,B,C,D ,που απεικονίζονται στο σχήμα.



Αν αποσπάσουμε από κάθε αριθμό την κεντρική μονάδα τότε σχηματίζονται οι άρτιοι αριθμοί A’ ,B’ ,C’ ,D’ και συγκεντρώνοντας τις μονάδες που αποσπάσαμε σε έναν αριθμό E, έχουμε έναν ακόμη άρτιο αριθμό.



Το άθροισμα των αριθμών A ,B ,C ,D είναι εκ κατασκευής ίσο με το άθροισμα των A’ ,B’ ,C’ ,D’, E και οι αριθμοί αυτοί είναι όλοι άρτιοι. Όμως από την πρόταση 21 το άθροισμα οσοδήποτε άρτιων αριθμών είναι άρτιος.

- Το άθροισμα περιττών αριθμών, των οποίων το πλήθος είναι περιττό, δίνει αποτέλεσμα περιττό αριθμό.(πρ.23)

B. Θεωρήματα για τη διαφορά αριθμών.

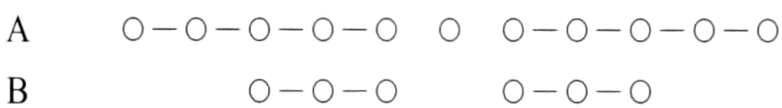
- Αν από έναν άρτιο αριθμό αφαιρεθεί ένας άρτιος αριθμός, το υπόλοιπο θα είναι άρτιος αριθμός.(πρ.24)

- Αν από έναν άρτιο αριθμό αφαιρεθεί ένας περιττός αριθμός, το υπόλοιπο θα είναι περιττός αριθμός.(πρ.25)

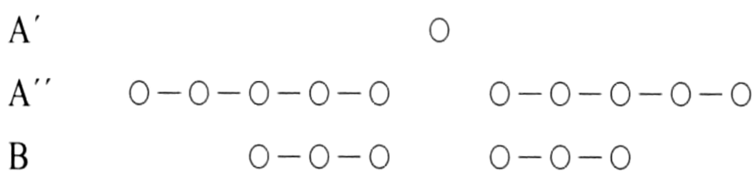
- Αν από ένα περιττό αριθμό αφαιρεθεί ένας περιττός αριθμός, το υπόλοιπο θα είναι άρτιος αριθμός.(πρ.26)

- Αν από ένα περιττό αριθμό αφαιρεθεί ένας άρτιος αριθμός, το υπόλοιπο θα είναι περιττός αριθμός.(πρ.27)

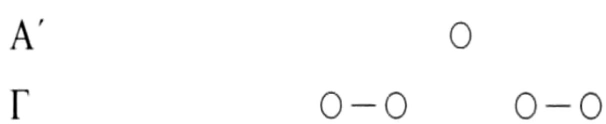
Έστω ότι από έναν περιττό αριθμό Α αφαιρούμε έναν αριθμό Β. Αν αποσπάσουμε τη μονάδα από τον αριθμό Α θα έχουμε την απεικόνιση.



Αν αποσπάσουμε τη μονάδα από τον αριθμό Α θα έχουμε την ακόλουθη απεικόνιση.



Οι αριθμοί Α’’ και Β είναι άρτιοι και η διαφορά τους (Γ) είναι άρτιος, σύμφωνα με την πρόταση 24.



Το αποτέλεσμα (Δ) λοιπόν θα είναι περιττός αριθμός.

C. Θεωρήματα για το γινόμενο αριθμών.

- Το γινόμενο ενός περιττού αριθμού με έναν άρτιο αριθμό είναι άρτιος.(πρ.28)

- Το γινόμενο ενός περιττού αριθμού με έναν περιττό αριθμό είναι περιττός.(πρ.29)

Μέρος Γ

✍ Ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών στην Παιδαγωγική

Ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών στην Παιδαγωγική

Είναι γνωστό ότι ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι ένας καλός φιλόσοφος πρέπει να ξέρει καλά μαθηματικά.[59] Όπως και ένας καλός μαθηματικός πρέπει να έχει γνώσεις φιλοσοφίας τουλάχιστον γύρω από το αντικείμενο του. Πολύ περισσότερο μάλιστα αν θέλει να είναι ταυτόχρονα καλός παιδαγωγός.

Το κεντρικό ερώτημα που αφορά τη φύση των μαθηματικών και την ανάπτυξη της επιστήμης είναι το εξής : "οι άνθρωποι ανακαλύπτουν ή κατασκευάζουν τα μαθηματικά;". Ζούμε σε ένα κόσμο που καθορίζεται από σταθερούς μαθηματικούς κανόνες που ο άνθρωπος ανακάλυψε και κατέγραψε ή είναι τα μαθηματικά μία ανθρώπινη κατασκευή η οποία υποστηρίζει τις δημιουργίες μας; Ποιό από τα δύο προηγείται; Παραδοσιακά έχει επικρατήσει ο πλατωνισμός, δηλαδή η άποψη ότι τα μαθηματικά ανακαλύπτονται. Βέβαια σε αυτό το σημείο δεν είναι επί του παρόντος να επεκταθούμε περαιτέρω, θα επικεντρωθούμε στο θέμα μας που είναι ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση.

Έχει υποστηριχθεί κατά καιρούς ότι πολλά προβλήματα σχετικά με την κατανόηση των μαθηματικών και την εικόνα που έχουν γι’ αυτά οι μαθητές οφείλονται στην έλλειψη ιστορικού πλαισίου από την διδασκαλία. Υπάρχει η γενική πεποίθηση ότι η γνώση του γνωστικού αντικειμένου αρκεί για να είναι ένας καθηγητής πλήρης για να εκπληρώσει τους στόχους του, να μεταδώσει δηλαδή στους μαθητές τις μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνται στα σχολικά πλαίσια. Πολλοί εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι η διδακτική του μαθήματος είναι μέσα στη λογική και στη δομή του. Έτσι για να διδάξει κανείς «καλά» αρκεί να ακολουθήσει την σειρά «ορισμός- θεώρημα- απόδειξη» και αυτό θα έχει σαν συνέπεια την κατανόηση από τον μαθητή. Δυστυχώς όμως, αυτός ο τρόπος έχει επιτυχία ελάχιστες φορές και οι μαθητές που δεν αντιλαμβάνονται τη λογική δομή των

[59] *Πολιτεία* Βιβλίο Ζ

μαθηματικών απογοητεύονται από την υπερβολική αυστηρότητα και αφαίρεση με αποτέλεσμα να αποτυγχάνουν στις σπουδές τους. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Jacques Barzun στο βιβλίο του "*Teacher in America*"[60] «Δεν υπάρχει ιστορικό πλαίσιο στη διδασκαλία, έτσι δίνεται η αίσθηση ότι όλο το σύστημα έχει πέσει έτοιμο από τον ουρανό για να χρησιμοποιηθεί μόνο από γεννημένους ταχυδακτυλουργούς». Γι' αυτό το λόγο πολύ σημαντικό βήμα στη διδασκαλία είναι ο καθηγητής να κάνει τα παιδιά να παρακολουθήσουν τα μαθηματικά μονοπάτια που ακολούθησαν οι προγενέστεροι μαθηματικοί και με αυτό τον τρόπο εκτός του ότι θα αποδείξει περίτρανα ότι τίποτα δεν υπήρχε έτοιμο εξ' αρχής, θα καλύψει το αρνητικό αίσθημα της υπερβολικής αυστηρότητας και του φορμαλισμού στη διδασκαλία.

Ο Poincare για την σημασία της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία είχε αναφέρει : «Μήπως η κατανόηση ενός θεωρήματος σημαίνει η διαδοχική εξέταση των συλλογισμών που το συνθέτουν για να επιβεβαιωθεί η εγκυρότητα του και η συνέπεια του με τους κανόνες του παιγνιδιού; Για μερικούς ναι, αυτό είναι αρκετό για να πούνε "τώρα το καταλαβαίνω". Για πολλούς όμως όχι. Χρειάζεται κάτι πολύ περισσότερο από αυτό. Αν οι συλλογισμοί τους φαίνονται ότι προέκυψαν στην τύχη, χωρίς σύστημα και ενσυνείδητο στόχο, τότε δεν ικανοποιούνταν. Ίσως ούτε οι ίδιοι να μην ξέρουν τι ακριβώς αναζητούν ,αλλά αν δεν το βρουν θα έχουν το συναίσθημα ότι κάτι τους λείπει.»

Η κεντρική ιδέα πίσω από όλα τα επιχειρήματα είναι η επιστημολογική θέση ότι τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο το αποτέλεσμα της διαδικασίας ενασχόλησης , μάθησης και ανάπτυξης θεωριών παρουσιασμένων στην τελική τους μορφή, αλλά και αυτές καθ' εαυτές οι διαδικασίες που οδηγούν σε αυτά, διαδικασίες που οδηγούν στην κατασκευή νοήματος συνδέοντας νέες με ήδη υπάρχουσες γνώσεις ή και διευρύνοντας, εμβαθύνοντας και επεκτείνοντας ήδη υπάρχοντα εννοιολογικά πλαίσια. Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών δεν μπορεί να περιορίζεται στην παρουσίαση και εκμάθηση παραγωγικά

[60] 1954, σελ 82

οργανωμένων τελικών προϊόντων της μαθηματικής κοινότητας, αλλά πρέπει να παρέχει δυνατότητες στον διδασκόμενο να αποκτήσει εμπειρίες μαθηματικής δημιουργίας ,κάνοντας Μαθηματικά ο ίδιος ανάλογα με το επίπεδο γνώσεων και την νοητική κατάσταση στην οποία βρίσκεται. Σ 'αυτή την οπτική , η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί ένα φυσιολογικό πλαίσιο για να ειδωθούν τα Μαθηματικά εν τω γενέσθαι , οδηγώντας έτσι σε μία σφαιρικότερη αντίληψη γι' αυτά, τόσο ως νοητική κατασκευή με συγκεκριμένο περιεχόμενο όσο και ως ανθρώπινη δραστηριότητα με όλες τις αδυναμίες αλλά και την συναρπαστικότητα που αυτό συνεπάγεται.

Αναλύοντας τα παραπάνω και σύμφωνα με την Επιστημονική Ένωση για την διδακτική των Μαθηματικών[61] βλέπει κανείς ότι η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση τους μπορεί να στηρίξει, να εμπλουτίσει και να βελτιώσει την διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, από πολλές πλευρές οι οποίες παρουσιάζονται πιο κάτω.

⌑ Η εκμάθηση των Μαθηματικών

Είναι γνωστό ότι ένας μαθηματικός στην προσπάθεια του να αποδείξει μία πρόταση ή ένα θεώρημα ακολουθεί μία διαδικασία, την επονομαζόμενη μέθοδο ανάλυσης και σύνθεσης. Κατά την διαδικασία αυτή ο μαθηματικός δεν ακολουθεί καθαρά τυπικούς τρόπους επίλυσης αλλά περισσότερο μη επιστημονικές μεθόδους, κάνει υποθέσεις ,πολλές φορές λανθασμένες, βασιζόμενος στη φαντασία και το ένστικτο του. Όταν όμως τελικά φτάσει στο στόχο του, το πρώτο πράγμα ,με το οποίο καταπιάνεται είναι η παρουσίαση της λύσης. Η διαδικασία που ακολουθεί , ονομάζεται παραγωγική μέθοδος, και είναι ουσιαστικά η αντίστροφη των βημάτων που ακολούθησε, με σκοπό να καταλήξει σε μία σωστά δομημένη και με λογική σειρά λύση. Αυτό το γεγονός δίνει μία εντελώς διαφορετική εικόνα στη διαδοχή των βημάτων, που ακολουθήθηκαν από τον λύτη. Τη συγκεκριμένη μέθοδο παρουσίασης ακολούθησε κατ' εξοχήν ο

[61] [2009]σελ 10-15

Ευκλείδης στη συγγραφή των «Στοιχείων»,και έπειτα από εκείνον ακολουθούν πλέον παραδοσιακά οι μαθηματικοί ανά την υφήλιο. Η αποδεικτική αυτή μέθοδος στοχεύει στη λιτότητα, την συνοπτικότητα και την απλότητα στην παρουσίαση. Όμως μέσω αυτής χάνουμε κάθε επαφή με τον τρόπο επίλυσης της πρότασης. Σε αυτό το σημείο αξιοποιείται η ιστορία των Μαθηματικών.

Μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών δίνεται η ιστορική διάσταση των Μαθηματικών αντιπαραβαλλόμενη με το τελικό «προϊόν» που σήμερα είναι αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα. Όπως επισημαίνει και ο Freudenthal «Καμία μαθηματική ιδέα δεν έχει δημοσιευτεί έτσι ακριβώς όπως ανακαλύφθηκε».(1983) Αυτό το γεγονός αγνοείται συστηματικά σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, αφαιρώντας έτσι την δυνατότητα να αντιληφθεί ο διδασκόμενος την ανθρώπινη δραστηριότητα της μαθηματικής δημιουργίας και της μέσω αυτής ανάπτυξη δεξιοτήτων.

⌗ Η ανάπτυξη απόψεων για την φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας

Μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών και με συγκεκριμένα παραδείγματα, μπορεί ο διδασκόμενος να αντιληφθεί ότι οι ευρετικές διαδικασίες , οι εικασίες, οι αμφιβολίες, τα λάθη, οι ελλιπείς διατυπώσεις και αποδείξεις, τα αδιέξοδα αποτελούν συστατικό κομμάτι της μαθηματικής δημιουργίας και άρα αποτελούν εν τέλει αναπόσπαστο κομμάτι αυτού που είναι τα μαθηματικά. Πρόκειται για σημαντική λειτουργία της ιστορίας των Μαθηματικών, που έμμεσα μπορεί να τονώσει τον διδασκόμενο, αναδεικνύοντας τα «ασθενή» σημεία της μαθηματικής δραστηριότητας και ενισχύοντας τον στο να διατυπώσει τις δικές του ατελείς εικασίες, να δει τα λάθη του φιλικότερα και άρα να αναπτύξει αυτοδιορθωτικές πρακτικές.

⌗ Τα ευεργετικά στοιχεία από την πλευρά των διδασκόντων

I. Προσδιορισμός κινήτρων :Είναι σαφές ότι ο διδάσκων ερευνώντας τον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκε μία έννοια, μέθοδος ή θεωρία, είναι σε θέση να εντοπίσει τα κίνητρα πίσω από την εισαγωγή των νέων εννοιών, τα προβλήματα που οδήγησαν σε αυτή και τις λιγότερο ή περισσότερο επιτυχημένες προσπάθειες για την αντιμετώπιση τους.

II. Δυσκολίες και εμπόδια :Ο διδάσκων ,μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών, μπορεί να αντιληφθεί τις δυσκολίες και τα εμπόδια που ενυπάρχουν σε μία μαθηματική έννοια ή μέθοδο και μέσω αυτού να συνειδητοποιήσει τον προχωρημένο ή μη χαρακτήρα τους, καθώς επίσης και να ευαισθητοποιηθεί απέναντι στο γεγονός ότι ανάλογες δυσκολίες και εμπόδια μπορεί να επανεμφανιστούν στην τάξη.

III. Εμπλουτισμός διδακτικού ρεπερτορίου: Μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών και φυσικά υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν σχετικές προσβάσιμες πηγές πληροφόρησης, ο δάσκαλος μπορεί να έχει μία ευρεία δεξαμενή προβλημάτων, ερωτημάτων, καταστάσεων, κλπ για τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας του και την κινητοποίηση των μαθητών του.

⌗ Τα ευεργετικά στοιχεία από την πλευρά των διδασκομένων

I. Η θεώρηση των Μαθηματικών ως ανθρώπινης προσπάθειας: Η ιστορική διάσταση στην εκμάθηση των Μαθηματικών είναι κατ' εξοχήν τρόπος να δει ο μαθητής τα Μαθηματικά ως μία ανθρώπινη προσπάθεια και όχι ως ένα σύστημα άκαμπτων κανόνων, και έτσι να γίνουν πιο οικεία.

II. Διατύπωση ερωτημάτων: Η ιστορική εξέλιξη κάθε επιστημονικού πεδίου βρίθει από παραδείγματα ιδεών και ερωτημάτων που δεν οδήγησαν απαραιτήτως κάπου και μπορεί τελικά να μη συνιστούν οργανικό κομμάτι των Μαθηματικών όπως τα αντιλαμβανόμαστε σήμερα, 'όμως αποτέλεσαν απαραίτητα βήματα της ιστορικής εξέλιξης που οδήγησε στο σήμερα. Κατ ΄ αναλογία , ο διδασκόμενος μέσω αυτής της συνειδητοποίησης, ενθαρρύνεται στο να τολμήσει τη διατύπωση των δικών του ιδεών, ερωτημάτων και δραστηριότητας, έστω και με ιδιόρρυθμο τρόπο, αφού αυτό συνέβη στο παρελθόν και συνεχίζει να συμβαίνει και σήμερα.

III. Η αποφυγή της απογοήτευσης λόγω αποτυχιών, λαθών, αβεβαιότητας ή παρανοήσεων: Στενά συνδεδεμένο με το παραπάνω είναι και η δυνατότητα που παρέχει η ιστορία των Μαθηματικών στον διδασκόμενο να αντιληφθεί τον δημιουργικό ρόλο που μπορεί να ενυπάρχει στο λάθος, την παρανόηση, ή την «αποτυχημένη» προσπάθεια. Ως εκ τούτου, ενθαρρύνεται στην δική του μοναχική περιπέτεια έρευνας, αποδεχόμενος τον «κίνδυνο» της αποτυχίας και του λάθους, που όμως βοηθούν στην ευχερέστερη μαθηματική του ωρίμανση.

IV. Η δημιουργική διαδικασία «κάνω Μαθηματικά» και προώθηση της ερευνητικής δραστηριότητας :Η επαφή με πρωτότυπες πηγές, η ενασχόληση με εργασίες που έχουν ένα προσανατολισμό προς την ιστορία και η προσπάθεια ανακατασκευής μίας μεθόδου ή της λύσης ενός προβλήματος βάσει πρωτότυπων ή δευτερογενών πηγών, προσομοιώνει τη διαδικασία δημιουργίας στο χώρο των Μαθηματικών, με ευεργετικά αποτελέσματα, τόσο για τον διδάσκοντα, όσο και για τον διδασκόμενο.

V. Η σωστή εικόνα για την σύνθεση των Μαθηματικών σαν επιστήμη: Με την ιστορία των Μαθηματικών ο μαθητής κατανοεί ποια προβλήματα οδήγησαν στην ανακάλυψη νέων κλάδων των Μαθηματικών και έτσι κατανοεί ότι τα Μαθηματικά είναι ένα πλήρες , σωστά θεμελιωμένο, επιστημονικό σύστημα.

⌗ Η αναγνώριση των Μαθηματικών ως μίας πολιτιστικής - ανθρώπινης προσπάθειας

I. Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα για εσωτερικούς λόγους : Μέσω της ιστορίας μπορεί κανείς να ανιχνεύσει τους ενδογενείς και εξωγενείς λόγους εξέλιξης και ανάπτυξης των Μαθηματικών. Αντίθετα από την απλοϊκή άποψη ότι τα Μαθηματικά αναπτύσσονται καθαρά γα πρακτικούς και ωφελιμιστικούς σκοπούς εξυπηρέτησης της κοινωνίας, μπορεί κανείς να στηρίξει με πολλά και πλούσια παραδείγματα ότι αναπτύσσονται και για καθαρά εσωτερικούς λόγους, αισθητικών αναζητήσεων, διανοητικής περιέργειας και πρόκλησης, καθώς και καθαρής ευχαρίστησης.

II. Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων : Συμπληρωματικά προς τα παραπάνω, μέσω της ιστορίας μπορεί να δει κανείς εξίσου πειστικά και τεκμηριωμένα την εξέλιξη των Μαθηματικών εξ αιτίας πάσης φύσεως εξωγενών παραγόντων, προερχόμενων από άλλα επιστημονικά πεδία, από συγκεκριμένες πρακτικές ανάγκες της κοινωνίας, ή από τις επιταγές και τους περιορισμούς που έθετε το εκάστοτε πολιτισμικό πλαίσιο.

III. Τα Μαθηματικά αποτελούν μέρος της τοπικής πολιτισμικής παράδοσης : Τα Μαθηματικά σήμερα έχουν ένα διεθνιστικό χαρακτήρα, στενά συνυφασμένο με τον σύγχρονο δυτικό πολιτισμό. Όμως η εξέλιξη τους προέκυψε ως η συνισταμένη πολλών διαφορετικών τάσεων και παραδόσεων που αναπτύχθηκαν και ενδεχομένως υπάρχουν σε κάποια μορφή ακόμα. Μέσω της ιστορίας, μπορεί να γίνει αντιληπτό αυτό και να έλθει και ο διδάσκων και ο διδασκόμενος σε επαφή με λιγότερο γνωστές όψεις των μαθηματικών, ή άλλες μορφές που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο διαφορετικών πολιτισμικών παραδόσεων. Κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα επίκαιρο σήμερα, που οι τάξεις είναι πολύ- πολιτισμικές, αλλά μπορεί να είναι σημαντικό και για επαφή με την τοπική κουλτούρα.

⌗ Ο σκοπός για τον οποίο αξιοποιείται η ιστορία

I. Η Ιστορία ως εργαλείο : Η ιστορική διάσταση αφορά στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Η ιστορία αποτελεί ένα βοηθητικό μέσον στην εκμάθηση του περιεχομένου των Μαθηματικών, είτε δημιουργώντας κίνητρα μάθησης, είτε αλλαγή στάσης, είτε οδηγώντας ή διευκολύνοντας στην κατανόηση και μάθηση συγκεκριμένων μαθηματικών αντικειμένων (εννοιών, μεθόδων, θεωριών κλπ.) Με άλλα λόγια, η Ιστορία των Μαθηματικών υπεισέρχεται εδώ σε σχέση με ζητήματα που αφορούν στο εσωτερικό των Μαθηματικών.

II. Η Ιστορία ως στόχος :Η ιστορική διάσταση αφορά σε ζητήματα για τα ίδια τα Μαθηματικά : Εν προκειμένω, η ιστορία δεν είναι πρωτογενώς ένα βοήθημα για την εκμάθηση μαθηματικών θεμάτων, αλλά ως μία οδός για την διατύπωση, στοχασμό και συζήτηση ερωτημάτων σχετικά με την εξέλιξη των Μαθηματικών, του εσωτερικού νοήματος που μπορεί να έχουν, τη σχέση τους με τις άλλες επιστήμες, τις αλληλεπιδράσεις με άλλες πολιτισμικές δραστηριότητες και διεργασίες, με την διάκριση και κατανόηση των ενδογενών και εξωγενών παραγόντων που επηρεάζουν την εξέλιξη και ανάπτυξη τους κλπ. Μ ε άλλα λόγια, η Ιστορία των Μαθηματικών υπεισέρχεται εδώ σε σχέση με θέματα για τη φύση, τον ρόλο και τη σημασία των Μαθηματικών.

⌗ Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα από τις σχολικές αίθουσες

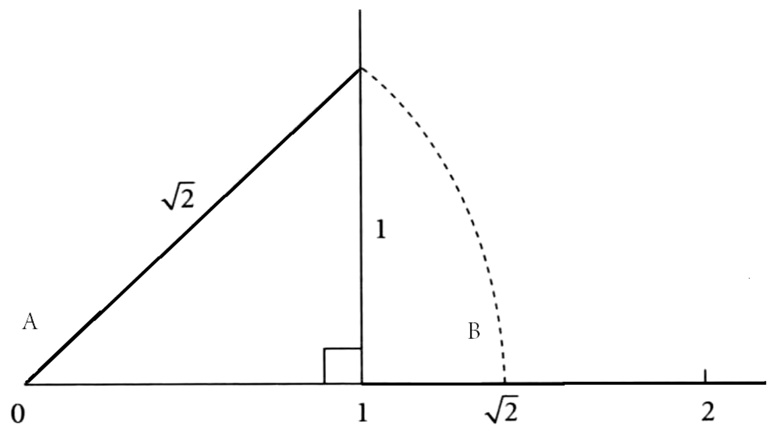
Πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συνηθισμένη αντίδραση κάποιου εκ των μαθητών , στο εισαγωγικό μάθημα του Πυθαγορείου θεωρήματος. «Τι μας νοιάζει εμάς κύριε, τι έκανε ο Πυθαγόρας; Γιατί να παιδευόμαστε με πράγματα που έγιναν πριν από 3000 χρόνια;». Είναι μία στάση με την οποία βρίσκονται καθημερινά αντιμέτωποι οι καθηγητές στην αίθουσα διδασκαλίας. Και πολλές φορές δυσκολεύονται να εξηγήσουν τόσο τη χρηστικότητα του αντικειμένου που διδάσκουν, όσο και να ερμηνεύσουν τη στάση και τις αντιλήψεις των μαθητών για τα μαθηματικά. Αντιλήψεις οι οποίες εκπορεύονται από την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά δεν έχουν σχέση με τια άλλες πτυχές της ανθρώπινης δραστηριότητας, δεν προκύπτουν ως αποτέλεσμα επίπονης και μακρόχρονης προσπάθειας να αντιμετωπιστούν προβλήματα και προκλήσεις που θέτει, σε κάθε ιστορική περίοδο το οικονομικό, πολιτισμικό και ιστορικό γίγνεσθαι. Τα μαθηματικά, για ένα μεγάλο αριθμό μαθητών , «είναι αποτέλεσμα κάποιων «σπουδαίων αλλά νοσηρών» εγκεφάλων που γράφουν δυσνόητα πράγματα, τα οποία μπορεί να έχουν αξία για «προχωρημένα πράγματα τα οποία εμείς δεν καταλαβαίνουμε» και θα μπορούσαν να ενδιαφέρουν μόνο εκείνους που θέλουν να γίνουν «μαθηματικοί».

Είναι κατανοητό ότι τα μαθηματικά εφόσον δημιουργήθηκαν από τον άνθρωπο, είχαν κάποια φυσική ροή μέχρι να φτάσουν στη σημερινή τους μορφή, και διαμορφώθηκαν ανάλογα με τις ανάγκες των μαθηματικών και άλλων θετικών επιστημών αλλά και με την ανακάλυψη αντιφατικών σημείων στις ήδη υπάρχουσες θεωρίες.

⌗ Χαρακτηριστικά παραδείγματα από τα Πυθαγόρεια Μαθηματικά και οι εφαρμογές τους στην παιδαγωγική

Οι άρρητοι αριθμοί είναι ένα πολύ καλό παράδειγμα στο συγκεκριμένο σημείο. Οι μαθητές στο δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου των μαθηματικών της Β γυμνασίου μαθαίνουν ότι υπάρχει και ένα άλλο είδος αριθμών εκτός από τους ρητούς. Ενώ λοιπόν οι μαθητές γνωρίζουν τους αριθμούς ως διακριτά «όντα» στον μαθηματικό κόσμο, καλούνται να γνωρίσουν και την περίφημη τετραγωνική ρίζα, ως ένα ακόμη είδος αριθμών! Όμως γιατί πρέπει να υπάρχει και άλλο είδος αριθμών, δεν μας φτάνουν αυτοί που ξέρουμε; Και τι εννοούμε όταν μιλάμε για τον αριθμό $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ κλπ ; Αυτές είναι οι πρώτες ερωτήσεις που γεννιούνται στα εφηβικά μυαλά των μαθητών και οι οποίες φυσικά επιβάλλεται να απαντηθούν.

Διότι στην παράδοση του μαθήματος των άρρητων αριθμών, το μαθητικό κοινό συμπεριφέρεται ανάλογα με τους Πυθαγορείους την περίοδο της ανακάλυψης αυτού του νέου είδους αριθμών, με την ίδια έκπληξη! Ο καθηγητής λοιπόν σε αυτό το σημείο πρέπει να εξηγήσει ότι μέσω γεωμετρικών κατασκευών βρέθηκαν κάποια ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δεν μπορούν να εκφραστούν αριθμητικά, δεν αντιστοιχούσαν σε κανένα αριθμό. Το γεγονός αυτό αποτελούσε εμπόδιο στην λύση πολλών μαθηματικών προβλημάτων και μεγάλο ερωτηματικό για την φύση αυτών των άγνωστων και απροσδιόριστων μεγεθών. Έτσι επινοήθηκε από τους μαθηματικούς αυτό το νέο είδος αριθμών, το οποίο ουσιαστικά μετατρέπει αυτά τα συνεχή γεωμετρικά μεγέθη σε διακριτά αριθμητικά όντα. Δηλαδή βρήκαμε τον τρόπο να μετατρέπουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα σε αλγεβρικό, δίνοντας σε ένα συνεχές μέγεθος, όπως είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο παρακάτω σχήμα , την αριθμητικά τιμή $\sqrt{2}$, και με αυτό τον τρόπο να φτάσουμε στην επίλυση του.

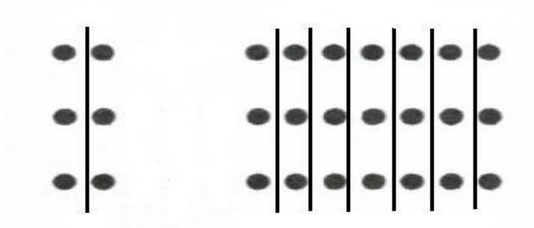


Το σημαντικότερο σημείο είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι οι τετραγωνικές ρίζες προέκυψαν για την διευκόλυνση στον χειρισμό αυτών των γεωμετρικών μεγεθών, που δεν εκφράζονται αριθμητικά.

Η συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών λοιπόν έγκειται και στο να εξηγήσει το αδιέξοδο στο οποίο έφτασαν οι Πυθαγόρειοι και τους λόγους για τους οποίους αναγκάστηκαν να ερμηνεύσουν αυτά τα σημεία του επιπέδου ,που δεν εκφράζονται με μορφή κλάσματος, σε άρρητους αριθμούς. Σαφώς και η σύνδεση των δύο ενοτήτων , της νέας με τους άρρητους και της παλιάς με τους ρητούς αριθμούς, γίνεται πιο ομαλά κατ' αυτόν τον τρόπο.

Εξετάζοντας γενικότερα τα μαθηματικά των Πυθαγορείων μπορούμε να κατανοήσουμε τη συμβολή μίας τέτοιας ιστορικής προσέγγισης στην εκπαιδευτική διαδικασία.

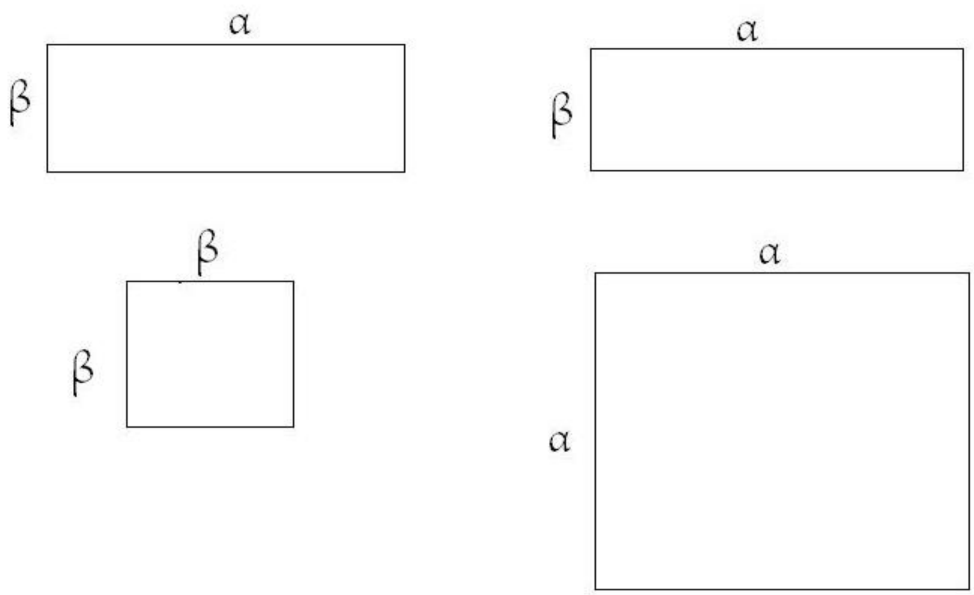
Συγκεκριμένα η μέθοδος των ψηφίδων καθιστά την παράδοση ιδιαίτερα κατανοητή στους μαθητές μέσω της απλότητας και της παραστατικότητας των ψηφίδων. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τη μέθοδο αυτή των Πυθαγορείων για τον υπολογισμό του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αριθμών με σκοπό να προσεγγίσουμε αυτό το καθαρά αλγεβρικό ζήτημα από μία διαφορετική σκοπιά. Για παράδειγμα, έστω οι αριθμοί 6 και 21.



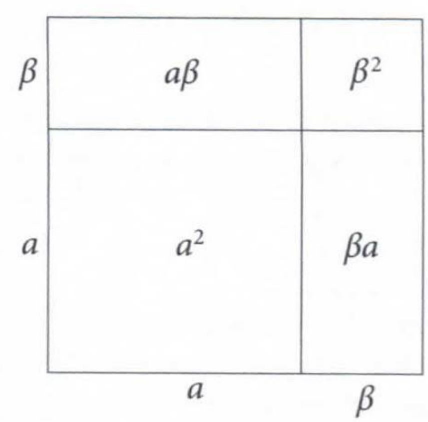
Παρατηρώντας το σχήμα είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να χωρίσουμε τις 21 ψηφίδες ανά 6 άρα ο αριθμός 21 δεν είναι πολλαπλάσιο του 6. Επίσης μετά από κάποιες δοκιμές παρατηρούμε ότι οι δύο αριθμοί χωρίζονται μόνο σε τριάδες. Άρα ο Μ.Κ.Δ.(6, 21)=3.Με αυτό τον τρόπο μπορούν οι μαθητές να κατανοήσουν πιο πρακτικά την έννοια του μέγιστου κοινού διαιρέτη όπως και την έννοια του πολλαπλάσιου ή του παράγοντα κάποιου αριθμού.

Η εφαρμογή χωρίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εκπαιδευτική διαδικασία ως εναλλακτική μέθοδος προσέγγισης των αλγεβρικών ταυτοτήτων και βοηθά πρώτον στην κατανόηση τους υπό μορφήν απόδειξης και δεύτερον στην απομνημόνευση τους.

Συγκεκριμένα η πρώτη ταυτότητα που διδάσκονται οι μαθητές της Γ γυμνασίου είναι η $(α+β)^2=α^2+β^2+2αβ$. Παρουσιάζοντας αυτό τον τύπο ο καθηγητής μπορεί να προτρέψει τα παιδιά να σκεφτούν τι θα μπορούσε αυτή η σχέση να συμβολίζει αν βρισκόντουσαν σε κάποιο κεφάλαιο γεωμετρίας, υποθέτοντας ότι τα α και β είναι δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα. Γνωρίζοντας τους τύπους των εμβαδών του ορθογωνίου και του τετραγώνου ήδη από το δημοτικό δεν θα ήταν δύσκολο να μαντέψουν ότι κάθε μονώνυμο εκφράζει το εμβαδόν κάποιου γνωστού σχήματος, ειδικότερα το $α^2$ εμβαδό τετραγώνου πλευράς α, το $β^2$ εμβαδό τετραγώνου πλευράς β, ενώ τα αβ εκφράζουν τα εμβαδά δύο ορθογωνίων πλευρών α, β.



Σχεδιάζοντας ξεχωριστά το κάθε σχήμα, όπως παραπάνω, ο καθηγητής προτρέπει τους μαθητές να τον βοηθήσουν να ενώσει τα επιμέρους σχήματα σε ένα, το οποίο θα είναι κάποιο γνωστό τους γεωμετρικό σχήμα. Μετά από κάποιες αποτυχημένες απόπειρες θα ενώσει τελικά τα τέσσερα αυτά σχήματα σχηματίζοντας ένα τετράγωνο πλευράς (α+β), το εμβαδόν του οποίου θα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους σχημάτων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η δραστηριότητα αυτή θα είναι πολύ πιο εύκολη και άμεση με τη χρήση διαδραστικών πινάκων.



Με αυτό τον τρόπο αποδείχθηκε κατασκευαστικά μία αλγεβρική ταυτότητα με γεωμετρικό τρόπο. Στη συνέχεια παρουσιάζοντας νέες μορφές ταυτοτήτων ο καθηγητής μπορεί να παροτρύνει τους μαθητές να βρουν την ταυτότητα που αντιστοιχεί στην ανεπτυγμένη μορφή που τους δίνεται σχεδιάζοντας τα κατάλληλα σχήματα και βρίσκοντας τον κατάλληλο τρόπο να τα ενώσουν ή αντίστροφα να προσπαθήσουν να χωρίσουν το αρχικό σχήμα σε επιμέρους. Θεωρώ ότι η παραπάνω διαδικασία θα ενεργοποιήσει το μεγαλύτερο μέρος του μαθητικού κοινού λόγω του ότι έχει την μορφή παιχνιδιού και παραπέμπει σε παιδικό πάζλ. Και έτσι θα έχει επιτευχθεί ο στόχος να συνδέσουν δηλαδή οι μαθητές τις αλγεβρικές ταυτότητες με την γεωμετρική τους υπόσταση και να έχουν ένα τρόπο να κατασκευάζουν τον τύπο της εκάστοτε ταυτότητας χωρίς να χρειάζεται να την απομνημονεύσουν.

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει το παιδαγωγικό ινστιτούτο στις οδηγίες του προς τους καθηγητές σχετικά με τη διδασκαλία «Είναι γνωστή η παιδαγωγική αξία των σχημάτων και γενικότερα των εποπτικών μέσων και εικόνων, γι’ αυτό συνίσταται , όταν προσφέρεται η διδακτική ενότητα, η χρησιμοποίηση σχημάτων, πινάκων κ.τ.λ. γιατί έτσι γίνονται κατανοητά και ερμηνεύονται καλύτερα οι έννοιες που πραγματεύεται η ενότητα.»

Καταληκτικά, έχοντας παραθέσει τα επιχειρήματα υπέρ της αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών στην διδακτική των Μαθηματικών και εστιάζοντας στα Πυθαγόρεια Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους στην παιδαγωγική, το αντικείμενο της παρούσης διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να αναφέρω ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα από το βιβλίο του George Sarton “*The study of the history of Mathematics*” « Η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών θα βελτιώσει την προσωπικότητα των μαθηματικών, θα διευρύνει το μυαλό τους, θα γλυκάνει την καρδιά τους και θα αναδείξει τα προτερήματα τους!»

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, Βασίλη Καρασμάνη , ο οποίος με το ενδιαφέρον και την καθοδήγηση του με βοήθησε να διευρύνω τις γνώσεις μου σχετικά με την ιστορία των Μαθηματικών, να προσεγγίσω όσο το δυνατόν καλύτερα τα Μαθηματικά των Πυθαγορείων, και απο μία καθαρά παιδαγωγική σκοπιά, και να καταφέρω να ολοκληρώσω αυτή την εργασία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτρια της Διδακτικής των Μαθηματικών, Καλλιόπη Παυλοπούλου, της οποίας η βοήθεια ήταν πολύτιμη και οι συμβουλές της σε γενικό επίπεδο, αλλά και ιδιαίτερα στο κομμάτι της αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών στην Παιδαγωγική, ιδιαίτερα χρήσιμη.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω την φίλη μου, Κωνσταντίνα Σαρρή, χωρίς την βοήθεια της οποίας η παρούσα εργασία δεν θα είχε την εικόνα που παρουσιάζει σήμερα καθώς με βοήθησε σε όλες τις δυσκολίες που αντιμετώπισα σε τεχνικά ζητήματα, και ιδιαίτερα στην προσαρμογή των εικόνων!

Τέλος οι ευχαριστίες προς την οικογένεια μου είναι ευνόητες για την ψυχολογική τους υποστήριξη!

Βιβλιογραφία

1) Burkert, Walter , [1972], *LORE AND SCIENCE IN ANCIENT PYTHAGOREANISM,* Harvard University Press Cambridge, English Translation by Edwin L. Minar,Jr.
2) Fideler, David ,[1987] *THE PYTHAGOREAN SOURCEBOOK AND LIBRARY*,Phanes Press, Translated by W.K.C.Guthrie
3) Guthrie,W.K.C., [1962] Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας, Cambridge University Press τόμος 1ος
4) Heath ,Thomas,[1956], *THE THIRTEEN BOOKS OF EUCLID'S ELEMENTS* ,Dover Publications, New York ,Translated from the text of Heiberg
5) Heath,Thomas, [1981]*, A HISTORY OF GREEK MATHEMATICS Volume I From Thales to Euclid,* Dover Publications, New York
6) Hermann, Arnold, [2008], *ΣΚΕΨΟΥ ΣΑΝ ΘΕΟΣ*, εκδόσεις Ενάλιος
7) Kahn, Charles, [2001],*PYTHAGORAS AND THE PYTHAGOREANS A BRIEF HISTORY*, Hackett Publishing Company,Indianapolis/Cambridge

8) Karasmanis,Vassilis[1998], "*Seminaires de Litterature et de Culture grecgues anciennes*" στο Supplement au Bulletin d'information de la FPGL No.113

9) Karasmanis,Vassilis[2000], "*ON THE FIRST GREEK MATHEMATICAL PROOF*" στο Hermanthena No. 169

10) Knorr, W.Richard [1945], *THE EVOLUTION OF THE EUCLIDEAN ELEMENTS*" , D.Reidel Publishing Company, Volume 15

11) Maor, Eli ,[2008] ΤΟ *ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ*, Εκδόσεις Κάτοπτρο

12) Van der Waerden, B.L, [1954] *SCIENCE AWAKENING*, P.Noordhoff ltd-Groningen Holland, English Translation by Arnold Dresden

13) Van der Waerden, B.L,[1954], "*DIE HARMONIELEHRE DER PYTHAGOREER"*, Hermes 78

14) Γκαρθία δελ Σιδ, Λαμπέρτο , [2010] *ΤΟ ΧΑΜΟΓΕΛΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ*, Εκδόσεις Ενάλιος

15) Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών ,{2009} *ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ,* Εκδόσεις Ζήτη

16) Χριστιανίδης , Γιάννης, [2008] *ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

17) *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2010

18) *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2008

19) *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2009

20) *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2009

21) *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ* , Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2008