ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Μοντελοποίηση μειωμένης τάξης μεθόδου συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης για την αεροδυναμική ανάλυση ταλαντούμενων αεροτομών με χρήση της μεθόδου POD

Διπλωματική Εργασία

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΠΟΥΤΣΙΚΑΚΗΣ

Επιβλέπων: ΣΠΥΡΟΣ ΒΟΥΤΣΙΝΑΣ, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2014

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται η ανάλυση των δεδομένων της συνεκτικής μη μόνιμης ροής γύρω από ταλαντούμενες αεροτομές με χρήση της μεθόδου Αποσύνθεσης Ορθοκανονικών Προβολών. Το αεροδυναμικό μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται για αυτό το σκοπό αποτελεί μία μέθοδο συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης. Βάσει αυτής της ανάλυσης κατασκευάζεται ένα μοντέλο μειωμένης τάξης του οριακού στρώματος με το οποίο επιλύονται ροές γύρω από αεροτομές ταλαντούμενες με μία (γωνιακή ταλάντωση) αλλά και δύο (γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση) συχνότητες διέγερσης. Ακόμη, κατασκευάζοντας το μοντέλο από την ανάλυση μίας λύσης αναφοράς, εξετάζονται τα όρια του μοντέλου μειωμένης τάξης σε διαφορετικού τύπου παραμετρικές διαφοροποιήσεις.

National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Section of Fluids
Laboratory of Aerodynamics

Reduced-order modeling analysis of the viscous-inviscid flow of oscillating airfoils using the Proper Orthogonal Decomposition

Diploma Thesis

ATHANASIOS BOUTSIKAKIS

Supervisor: SPYROS VOUTSINAS, Associate Professor NTUA

Athens, 2014

Abstract

An analysis of the data of the viscous unsteady aerodynamic flow around oscillating airfoils is conducted using the method of Proper Orthogonal Decomposition - POD. The aerodynamic model that is used for this purpose constitutes a method of viscous - inviscid interaction. Based on this analysis a Reduced Order Model - ROM of the boundary layer system is being constructed, which is used to solve the unsteady flows around airfoils that oscillate with one (pitching) and two (pitching & flapping) stimulation frequencies. In addition, by constructing a ROM via a reference solution, a parametric investigation of its limits of resolution is carried out by attempting off-reference solutions.

Ευχαριστίες

Κοιτώντας πίσω σε αυτούς τους μήνες της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας το μείγμα των συναισθημάτων που την περιβάλλει είναι ανάμικτο: αγωνία και αμφισβήτηση μαζί με αίσθημα δημιουργικότητας και χαρά της ανακάλυψης. Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή Σπύρο Βουτσινά για την αμέριστη υποστήριξη του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Οι υποδείξεις του υπήρξαν καθοριστικές για την έκβαση της εργασίας, και οι γνώσεις που αποκόμισα δουλεύοντας μαζί του είναι εξαιρετικά πολύτιμες για εμένα τόσο σε ακαδημαϊκό όσο και σε προσωπικό επίπεδο. Ο κος Βουτσινάς αποτέλεσε για εμένα τόσο καθηγητής όσο και μέντορας τον τελευταίο χρόνο και τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για τις γεμάτες ενόραση συζητήσεις μας. Ακόμη, να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές με τους οποίους είχα την τιμή να μοιράζομαι το ίδιο Υπολογιστικό Κέντρο για ένα χρόνο. Τον Νίκο Μπεμπεδέλη του οποίου η βοήθεια στην κατανόηση του αλγορίθμου συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης υπήρξε καθοριστική, τον Ηλία Πετρόπουλο για τις αμέτρητες ώρες φιλοσοφικο-επιστημονικών συζητήσεων στο εργαστήριο αλλά και την υποστήριξή του στη συγγραφή της διπλωματικής εργασίας στο Latex και τον Αλέξανδρο Θεοφιλόπουλο για τις αξέχαστες πολύκροτες διαφωνίες πάνω σε θέματα που κανείς θα θεωρούσε ήδη λυμένα. Χωρίς αυτή την παρέα η εκπόνηση της διπλωματικής θα αποτελούσε μία απολύτως μοναχική και ίσως αυτοκαταστροφική διαδικασία. Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να κάνω ιδιαίτερη αναφορά σε ένα συμφοιτητή και φίλο τον Γιώργο Αυδίκο ο οποίος με την εμπειρία του στο χώρο της έρευνας αποτέλεσε ένα πολύτιμο σύμβουλο σε αυτή την ακαδημαϊκή περιπέτεια. Να ευχαριστήσω ακόμη τον διδακτορικό φοιτητή Κώστα Διακάκη για την αλησμόνητη και ανιδιοτελή βοήθειά του στην εγκατάσταση και το χειρισμό των Unix, αλλά και όλους τους υπόλοιπους υποψήφιους διδάκτορες για τη βοήθειά τους σε οποιοδήποτε τεχνικό -και όχι μόνο- πρόβλημα παρουσιάστηκε. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για την οικονομική και συναισθηματική υποστήριξη όλων αυτών των χρόνων της φοίτησής μου στο ΕΜΠ, χωρίς την οποία τίποτα από όλα αυτά δε θα μπορούσε να είναι πραγματικότητα.

Αφιερωμένη στον πατέρα μου

Περιεχόμενα

Λίστα Συμβόλων **1**

1 Εισαγωγή **7**

1.1 Εφαρμογές των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης 7
1.2 Επισκόπηση της Μεθόδου POD 8
1.2.1 Βιβλιογραφική επισκόπηση της μεθόδου POD 8
1.2.2 Περίληψη Μεθόδου POD 9
1.2.3 Αναλυτική Μέθοδος POD 11
1.3 Ο στόχος της εργασίας 12
1.4 Διάρθρωση της εργασίας 13

2 Αεροδυναμικό μοντέλο πλήρους τάξης (*Full Order Model - FOM*) **15**

2.1 Το οριακό στρώμα 16
2.1.1 Εξίσωση συνέχειας 16
2.1.2 Εξίσωση διατήρησης της ορμής 18
2.1.3 Εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας 21
2.1.4 Το πρότυπο προσδιορισμού του σημείου μετάβασης 24
2.1.5 Οι όροι δεύτερης τάξης 26
2.1.6 Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος στον ομόρρου 27
2.1.7 Το εμπειρικό πλαίσιο 28
2.2 Η ισοδύναμη μη συνεκτική ροή 31
2.2.1 Οι εξισώσεις της αμιγώς μη συνεκτικής ροής 33
2.2.2 Η ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης 36
2.2.3 Η συνθήκη *Kutta* στην ακμή εκφυγής και η συνθήκη *Kelvin* 38
2.3 Συνεκτική-μη συνεκτική αλληλεπίδραση: το διακριτό πρόβλημα 40
2.3.1 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας 40
2.3.2 Διακριτοποίηση των εξισώσεων του οριακού στρώματος 41
2.3.3 Διακριτοποίηση των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής . 50

2.3.4 Αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης . . . 53

3 Μοντέλο Μειωμένης Τάξης (*Reduced Order Model - ROM*) 57

3.1 Χρονοσειρές POD (Snapshots POD) . . . 57
3.2 Singular Value Decomposition - SVD . . . 59
3.3 POD Ιδιομορφές (POD Modes - POMs) . . . 61
3.3.1 Επιλογή POD Ιδιομορφών . . . 62
3.3.2 Βασικές εξισώσεις διαχείρισης δεδομένων του POD . . . 63
3.4 Ευθεία αναπαράσταση λύσεων με χρήση POD Ιδιομορφών . . . 66
3.4.1 Διαστασιολόγιση πινάκων . . . 67
3.4.2 Εξαναγκασμένη ταλάντωση αεροτομής με μία συχνότητα διέγερσης (γωνιακή ταλάντωση) . . . 69
3.4.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση αεροτομής με δύο συχνότητες διέγερσης (γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση) . . . 81
3.5 Κατασκευή του Μοντέλου Μειωμένης Τάξης (ROM) . . . 106
3.5.1 Το σύστημα μειωμένης τάξης των εξισώσεων οριακού στρώματος . . . 107
3.5.2 Διόρθωση λύσης συστήματος εξισώσεων οριακού στρώματος . . . 109

4 Αποτελέσματα - Αντίστροφη ανακατασκευή λύσεων 111

4.1 Κριτήρια επιλογής POD Ιδιομορφών . . . 111
4.1.1 Το ενεργειακό κριτήριο . . . 112
4.1.2 Το κριτήριο της μέγιστης συνιστώσας των POD Modes . . . 127
4.1.3 Τελική επιλογή POD Modes . . . 147
4.2 Ανακατασκευή λύσης αναφοράς . . . 148
4.3 Ανακατασκευή Off-Reference λύσεων . . . 150

5 Αποτίμηση της Εργασίας 163

5.1 Ανακεφαλαίωση . . . 163
5.2 Αξιολόγηση της μεθόδου POD και Συμπεράσματα . . . 164
5.3 Προτάσεις για μελλοντική διερεύνηση και επέκταση της μεθόδου . . . 164

Παραρτήματα 167

Παράρτημα Α: Υπολογισμός των δυνάμεων 169

Παράρτημα Β: Η αρίθμηση των σημείων της αεροτομής στον αλγόριθμο 171

Βιβλιογραφία 177

Λίστα Συμβόλων

α	χρονικοί συντελεστές POD
$\bar{\varepsilon}$	σχετικό σφάλμα μεταξύ χρονοσειρών και προσεγγίσεων τους
$\bar{q}$	μέση τιμή χρονοσειράς q
$\bar{u}, \bar{v}$	σχετική ταχύτητα ρευστού ως την κίνηση του στερεού συνόρου
$\boldsymbol{\Sigma}$	διαγώνιος πίνακας που περιέχει τις ιδιόμορφες τιμές του $\boldsymbol{Q}$
$\boldsymbol{Q}$	πίνακας χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας
$\boldsymbol{q}$	διάνυσμα στήλης βαθμών ελευθερίας
$\boldsymbol{U}$	πίνακας που περιέχει τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του $\boldsymbol{Q}$
$\boldsymbol{V}$	πίνακας που περιέχει τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του $\boldsymbol{Q}$
$\boldsymbol{x}$	διάνυσμα στήλης αγνώστων βαθμών ελευθερίας
$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$	πίνακας επιλεγμένων POD ιδιομορφών
$\boldsymbol{C}$	πίνακας που περιέχει τις χρονοσειρές των POD συντελεστών
$\boldsymbol{F}$	μη γραμμικό σύστημα των εξισώσεων του οριακού στρώματος
ΔS	ευθύγραμμα τμήματα αεροτομής και ομόρρου
Δt	χρονικό βήμα αριθμητικής διαδικασίας
δ	πάχος οριακού στρώματος
δ^*	πάχος μετατόπισης οριακού στρώματος
δ^{**}	πάχος πυκνότητας οριακού στρώματος
δ^{*i}	πάχος μετατόπισης για την ασυμπίεστη ροή
Γ	κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή
γ	στροβιλότητα δίνης ή πεδίου ταχύτητας

$\gamma(\cdot;t)$ διανομή δινών στροβιλότητας

$\hat{\alpha}$ γωνία πρόσπτωσης αεροτομής

$\hat{\phi}_\alpha$ διαφορά φάσης pitching

$\hat{\phi}_y$ διαφορά φάσης flapping

μ δυναμική συνεκτικότητα, γραμμική διανομή διπόλων

$\omega(\cdot;t)$ πεδίο στροβιλότητας πεδίου ροής

$\psi(\cdot;t)$ ροϊκή συνάρτηση πεδίου ροής

σ ένταση πηγής, ιδιόμορφη τιμή

$\sigma(\cdot;t)$ διανομή πηγών

τ διατμητική τάση

$\tilde{n}$ λογάριθμος του μέγιστου λόγου ενίσχυσης

$\tilde{S}$ κλίση των γραμμών ροής

$\underset{\sim}{\Phi}$ ορθοκανονική διανυσματική βάση που παράγει το nullspace

$\underset{\sim}{\Psi}$ ορθοκανονική διανυσματική βάση που παράγει το range

$\underset{\sim}{Q}$ διανυσματικός χώρος λύσεων

Φ δυναμικό ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής

$\varphi(\cdot;t)$ δυναμικό αστρόβιλου πεδίου ροής

$\varphi^*(\cdot;t)$ δυναμικό συνεκτικής διόρθωσης

ϱ πυκνότητα ρευστού

ϑ πάχος ορμής οριακού στρώματος

ϑ^* πάχος ενέργειας οριακού στρώματος

$\vec{\nu}$ διάνυσμα κάθετο στο στερεό σύνορο της αεροτομής και στον ομόρρου

$\vec{\phi}$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα - ιδιομορφές POD

$\vec{\tau}$ διάνυσμα εφαπτομενικό στο στερεό σύνορο της αεροτομής και στον ομόρρου

$\vec{k}$	διάνυσμα κάθετο στο διδιάστατο πεδίο ροής
$\vec{u}(\cdot;t)$	πεδίο ταχύτητας αμιγώς μη συνεκτικής ροής
$\vec{u}^*(\cdot;t)$	πεδίο ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης
$\vec{U}_b$	διάνυσμα ταχύτητας κίνησης της αεροτομής
$\vec{x}$	διάνυσμα θέσης
$\vec{x}_v$	διάνυσμα βαθμών ελευθερίας των εξισώσεων οριακού στρώματος
$\vec{Z}_w$	διάνυσμα θέσης δινών στον ομόρρου
ξ	παράμετρος μήκους φύλλου στροβιλότητας
A_α	πλάτος ταλάντωσης pitching
A_y	πλάτος ταλάντωσης flapping
c	χορδή αεροτομής
C_τ	συντελεστής διατμητικής τάσης
C_D	συντελεστής διάχυσης
C_f	συντελεστής τριβής οριακού στρώματος
D	πεδίο ροής
F_c	συντελεστής συμπιεστότητας
H	συντελεστής σχήματος οριακού στρώματος
H^*	συντελεστής σχήματος κινητικής ενέργειας
H^{**}	συντελεστή σχήματος πυκνότητας
H_k	συντελεστής σχήματος για ασυμπίεστη ροή
I	αρίθμηση των κόμβων ελέγχου
i	αρίθμηση των ευθύγραμμων τμημάτων
k	καμπυλότητα
l_w	μήκος παραγόμενου ομόρρου
M	τοπικός αριθμός *Mach* της ροής

m ταχύτητα αναπνοής *transpiration velocity*

N πλήθος ευθύγραμμων τμημάτων καμπύλης αεροτομής και ομόρρου

n άξονας κάθετος στο στερεό σύνορο της αεροτομής και στον ομόρρου

O Κέντρο περιστροφής αεροτομής

$O_G X_G Y_G$ αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων

OXY σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων

p πίεση

Psn καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων

Re αδιάστατος αριθμός *Reynolds*

S καμπύλη του στερεού συνόρου της αεροτομής και του ομόρρου

s άξονας εφαπτομενικός στο στερεό σύνορο της αεροτομής και στον ομόρρου

t χρόνος

u ταχύτητα εφαπτομενική στο στερεό σύνορο της αεροτομής και στον ομόρρου

u_τ^* διανομή εφαπτομενικής ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης

v ταχύτητα κάθετη στο στερεό σύνορο της αεροτομής και στον ομόρρου

y κατακόρυφη θέση αεροτομής

$\vec{u}_\Delta(\cdot;t)$ αστρόβιλο πεδίο ταχύτητας

$\vec{u}_\omega(\cdot;t)$ στροβιλό πεδίο ταχύτητας μηδενικής απόκλισης

Εκθέτες

ib σημείο ελέγχου στην επιφάνεια της αεροτομής και του ομόρρου

$l, -$ κάτω πλευρά της αεροτομής και του ομόρρου

m μέσο διαστήματος δυο διαδοχικών σημείων ελέγχου ως η μέση τιμή τους

$u, +$ πάνω πλευρά της αεροτομής και του ομόρρου

Δείκτες

∞ άπειρο, σε μεγάλη απόσταση από το σώμα

b	πλευρά (πάνω/κάτω) αεροτομής και ομόρρου
cp	μέσο ευθύγραμμου τμήματος, σημείο ικανοποίησης διακριτών εξισώσεων
e	ισοδύναμη μη συνεκτική ροή
g	κόμβος ελέγχου αεροτομής και ομόρρου
inv	ισοδύναμη μη συνεκτική ροή
p	σημεία πάνω στην αεροτομή
tr	μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή
v	συνεκτική ροή, οριακό στρώμα
w	ομόρρους
$wall$	στερεό σύνορο

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εφαρμογές των Μοντέλων Μειωμένης Τάξης

Η αλματώδης εξέλιξη των υπολογιστών νέας γενιάς έδωσε τη δυνατότητα στην επιστημονική κοινότητα να αναδείξει τις δυνατότητες της υπολογιστικής ρευστομηχανικής βελτιώνοντας την φυσική κατανόηση περίπλοκων μη-μόνιμων αεροδυναμικών ροών. Παρόλα αυτά το υπολογιστικό κόστος που σχετίζεται με την περιπλοκότητα της ροής ή της γεωμετρίας εκτοξεύεται κάνοντας απαγορευτικές ορισμένες εφαρμογές λόγω όγκου δεδομένων. Η επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, παραμένει εξαιρετικά δύσκολη και υπολογιστικά δαπανηρή ακόμη και σήμερα ειδικά σε περιπτώσεις όπου:

- είτε είναι απαραίτητος ένας τεράστιος αριθμός επιλύσεων των εξισώσεων κατάστασης (μέθοδοι συνέχειας, παραμετρικές αναλύσεις, προβλήματα βελτιστοποίησης ή βέλτιστου ελέγχου)
- είτε αναζητείται μία λύση σε πραγματικό χρόνο (για παράδειγμα ενεργός έλεγχος σε κλειστό βρόγχο)

Δεν είναι τυχαίο ότι η μείωση του υπολογιστικού κόστους επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων κατάστασης αποτελεί βασική επιδίωξη σε πολλά επιστημονικά πεδία από τη γραμμική άλγεβρα μέχρι τα γραφικά υπολογιστών. Η ελπίδα έρχεται από διάφορες τεχνικές που αναπτύχθηκαν και συνεχίζουν να αναπτύσσονται και αναφέρονται στην βιβλιογραφία με τον όρο "Μοντέλα μειωμένης τάξεως" (*Reduced Order Models*). Τα μοντέλα αυτά έχουν έναν κύριο, κοινό και σημαντικό χαρακτηριστικό, μειώνουν το υπολογιστικό κόστος και επομένως και τον χρόνο επίλυσης δυναμικών γραμμικών ή μή συστημάτων.

Στον τομέα της μη-μόνιμης αεροδυναμικής με ένα ROM μπορεί κανείς να προβλέψει με ακρίβεια την απόκριση ενός συστήματος σε διάφορες είσοδος όπως πχ. ένα ευρύ εύρος συχνοτήτων, διαφορετικούς αριθμούς Mach κ.α. Ο τομέας της αεροελαστικότητας μελετά το πεδίο αυτό με ιδιαίτερη προσοχή καθώς εκμεταλλεύεται την ακρίβεια και την οικονομία χρόνου.

Δύο είναι οι κύριοι μέθοδοι κατασκευής ενός ROM στην αεροδυναμική. Ο πρώτος είναι η αναπαράσταση της ροής από έναν μικρό αριθμό καθολικών μορφών. Με τον όρο μορφή

εννοείται μια διανομή στον χώρο των ροϊκών μεταβλητών που αντιστοιχούν σε μια υψηλή ενεργειακά κίνηση του ρευστού. Ο πιο διαδεδομένος τρόπος είναι η ιδιοδιανυσματική ανάλυση αλλά με τη μέθοδο POD να προσφέρει μια εναλλακτική μέθοδο όμοια και εξίσου σημαντική. Η επόμενη μέθοδος βασίζεται στην ιδέα πως ένας μικρός αριθμός εισόδων και ένας μικρός αριθμός αντίστοιχων εξόδων σχετίζονται με ένα δυναμικό σύστημα. Έτσι γίνεται η προσπάθεια να κατασκευαστεί ένα μητρώο συναρτήσεων μεταφοράς με διάσταση που προσδιορίζεται από τον αριθμό εισόδων και εξόδων. Η αριθμητική επίλυση ενός CFD μοντέλου απαιτείται και από τις δύο μεθόδους που προαναφέρθηκαν και είναι το αρχικό στάδιο από όπου ξεκινά η εφαρμογή τους.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η μέθοδος *Proper Orthogonal Decomposition*. Η ελληνική μετάφραση είναι: Αποσύνθεση Ορθοκανονικών Προβολών, αλλά εφεξής θα προτιμάται η συντομογραφία POD.

Ενώ οι εφαρμογές της μεθόδου απαντώνται κυρίως σε δυναμικά προβλήματα στο πεδίο του χρόνου, μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή είναι η μελέτη ενός δυναμικού συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων (*Frequency Domain POD*), Hall, K.C., Thomas J.P. και Dowell E., [16] και Kim T. [17]. Οι Hall K.C. Thomas J.P. και Dowell E. [18] πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, εφήρμοσαν τη μέθοδο σε ροϊκό μοντέλο που περιλαμβάνει κινούμενα κύματα κρούσης και διηχητικές συνθήκες.

Τελευταία γίνονται προσπάθειες για την κατασκευή μη-γραμμικών ROMs. Μελέτη στο θέμα παρατηρείται από τον Hall ο οποίος μελέτησε τη μονοδιάστατη ταλάντωση κύματος κρούσης σε κανάλι. Παρόλα αυτά, δισδιάστατη ροή γύρω από αεροτομή υπό ταλάντωση μεγάλου εύρους δεν έχει προσεγγιστεί ακόμα από ένα ROM. Η ανάπτυξη του τομέα υπόσχεται μοντέλα που θα περιγράψουν με ακρίβεια ισχυρές και βίαιες κινήσεις ακόμα και ολόκληρων αεροσκαφών αλλά και περεταίρω εξέλιξη στον τομέα της αεροακουστικής. Η τύρβη που κατεξοχήν αφορά μοντέλα με τεράστιο υπολογιστικό κόστος βρίσκεται στο στόχαστρο των ROMs. Ήδη οι πλήρεις εξισώσεις *Navier Stokes* έστω και προσεγγιστικά λύνονται γύρω από υπεραπλουστευμένες γεωμετρίες με την βοήθεια μοντέλων μειωμένης τάξεως. Ελπίδα για το μέλλον είναι μέσω των μοντέλων αυτών να ξεπεραστούν αυτοί οι γεωμετρικοί περιορισμοί.

1.2 Επισκόπηση της Μεθόδου POD

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται η βιβλιογραφική επισκόπηση της μεθόδου POD, η περίληψη της μεθόδου και των τρόπων χρήσης της, καθώς και η παρουσίαση της αναλυτικής μαθηματικής διατύπωσης της μεθόδου.

1.2.1 Βιβλιογραφική επισκόπηση της μεθόδου POD

Σύμφωνα με τον *Yaglom* [1] η μέθοδος POD παρουσιάστηκε ανεξάρτητα από πολλούς ερευνητές σε διαφορετικές χρονικές στιγμές συμπεριλαμβανομένων των Kosambi [2], Loeve [3], Karhunen [4], Pougachev [5], και Obukhov [6], Lorenz [7]. Η διαδικασία έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλά επιστημονικά πεδία, εκτός της Ρευστομηχανικής στα οποία συμπεριλαμ-

βάνονται οι τυχαίες μεταβλητές [8], η επεξεργασία εικόνων [9], η ανάλυση σημάτων [10], η συμπίεση δεδομένων [11], αναγνώριση συστημάτων και διεργασιών, έλεγχος στη Χημική Μηχανική [13],[12] και οκεανογραφία [14]. Υπολογιστικά πακέτα βασισμένα στη μέθοδο POD γίνονται τώρα διαθέσιμα [15].

Στη βιβλιογραφία απαντάται και με τα ονόματα: *Larhunen Loeve Decomposition, Principal Component Analysis, Singular System Analysis* και *Singular Value Decomposition.* Οι πρώτες πλήρεις μελέτες στο πεδίο της μηχανικής ρευστών αναφέρονται το 1967 [19], [21], [22] στον τομέα της τύρβης. Παρόλο που αναπτύχθηκε στις δεκαετίες΄70' και΄80' δεν έλαβε την απαιτούμενη προσοχή της επιστημονικής κοινότητας εξαιτίας των τεράστιων για την εποχή υπολογιστικών απαιτήσεών της. Η "διακριτή" μέθοδος POD, (Snapshot Method) η οποία μελετάται στη διπλωματική αυτή αναπτύχθηκε για πρώτη φορά το 1987 από τον *Sirovich, L.* [23] το 1987. Οι πρώτες μελέτες εφαρμόστηκαν στην εξαγωγή ροϊκών χαρακτηριστικών στο πρόβλημα Rayleigh-Benard [24].

Αργότερα το εύρος εφαρμογής της μεθόδου επεκτάθηκε στη ροή εντός καναλιού [25], [26], [27], στο τυρβώδες οριακό στρώμα [28], [29] και στις ροές jet [30]. Το 1991 ο Ball,K. [25] χρησιμοποίησε τη μέθοδο των στιγμιοτύπων (snapshots) χρησιμοποιώντας δεδομένα που υπολογίστηκαν αριθμητικά. Η μέθοδος POD είναι μια γραμμική διαδικασία και όλοι οι υπόχωροι στους οποίους αναφέρεται η θεωρία της είναι γραμμικοί ακόμα και αν τα συστήματα τα οποία ορίζονται σε αυτούς και τα δεδομένα από τα οποία κατασκευάζονται είναι μη γραμμικά. Όπως αναφέρουν οι Holmes P., Lumley J., Berkooz,G., [31], η γραμμικότητα αυτή είναι ένα ισχυρό σημείο της μεθόδου.

1.2.2 Περίληψη Μεθόδου POD

Η μέθοδος POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) χρησιμοποιείται στον τομέα της υπολογιστικής μηχανικής ρευστών ως ένα δυνατό εργαλείο με κύριο σκοπό τη μείωση του υπολογιστικού κόστους επίλυσης δυναμικών συστημάτων (συνήθως μη γραμμικών).

Η μέθοδος βασίζεται στην ύπαρξη ενός μοντέλου πλήρους τάξης από το οποίο λαμβάνει μεγάλο όγκο πληροφορίας στη μορφή χρονοσειρών των ανεξάρτητων μεταβλητών - βαθμών ελευθερίας του μαθηματικού προβλήματος και για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων (*case study*). Στη συνέχεια με βάση αυτή τη λύση αναφοράς γίνεται μία ανάλυση των δεδομένων αυτών στις βασικές συνιστώσες (ιδιομορφές). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται και *εκπαίδευση των ιδιομορφών.* Από αυτές τις ιδιομορφές επιλέγεται κατάλληλος διανυσματικός χώρος ο οποίος είναι ικανός να αναδημιουργήσει την αρχική λύση με ικανοποιητική ακρίβεια. Τέλος, ανακατασκευάζεται ένα μοντέλο μειωμένης τάξης χρησιμοποιώντας αυτό το διανυσματικό χώρο και επιχειρείται η απόκτηση λύσεων για τις ίδιες παραμέτρους ή για τιμές κοντά σε αυτές (παραμετρική διερεύνηση).

Λόγω της δυνατότητας της μεθόδου για μείωση της τάξης του αρχικού προβλήματος η μέθοδος απευθύνεται σε συστήματα μεγάλων διαστάσεων ($>$ 5000), *Dowell*, [20]. Κύρια λειτουργία της μεθόδου είναι η προβολή του αρχικού (πλήρους) δυναμικού συστήματος σε

μια κατάλληλη διανυσματική βάση. Έτσι μειώνεται η τάξη του συστήματος καθώς αυτό που πρέπει να υπολογιστεί είναι οι συντελεστές των διανυσμάτων της βάσης (προσεγγιστικά < 50).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι ο υπολογισμός της διανυσματικής βάσης διαχωρίζει την εξάρτηση του χώρου και του χρόνου από τα αρχικά δεδομένα. Αυτό συνοπτικά σημαίνει πως η βάση εξαρτάται μόνο από τον χώρο και οι συντελεστές αυτής μόνο από τον χρόνο. Τα διανύσματα που αποτελούν τη βάση (ιδιομορφές η αλλιώς POD modes) είναι ορθοκανονικά. Το γεγονός αυτό δηλώνει πως κάθε ένα έχει "απορροφήσει" τη μέγιστη δυνατή ενέργεια και είναι ανεξάρτητο (ενεργειακά) από τα υπόλοιπα. Το παραπάνω χαρακτηριστικό εξασφαλίζει πως η βάση αυτή είναι βέλτιστη. Περισσότερα για τη μέθοδο και το μαθηματικό υπόβαθρο στο κεφάλαιο 3.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι η μέθοδος POD μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

- Ευθύς: Επίλυση του αρχικού συστήματος εξισώσεων, εξαγωγή βέλτιστης διανυσματικής βάσης από ένα σύνολο τιμών αναφοράς και ανακατασκευή κατά προσέγγιση αυτού του συνόλου τιμών ή και άλλων παραμετρικά κοντά σε αυτό.

- Αντίστροφος: Επίλυση του αρχικού συστήματος εξισώσεων, εξαγωγή βέλτιστης διανυσματικής βάσης από ένα σύνολο τιμών αναφοράς, ανακατασκευή του μοντέλου των εξισώσεων χρησιμοποιώντας τη βάση αναφοράς και υπολογισμός του ίδιου ή και άλλου συνόλου τιμών που προέρχεται από διαφορετικές οριακές συνθήκες του προβλήματος ή/και παραμέτρους.

Το ενδιαφέρον εστιάζεται στον δεύτερο τρόπο καθώς πλέον γίνεται λόγος για τη δημιουργία ενός μοντέλου μειωμένης τάξης που μπορεί να υπολογίζει με ικανοποιητική προσέγγιση *case studies* διαφορετικά από αυτό της αναφοράς. Ένα ερώτημα που εγείρεται και θα γίνει προσπάθεια να διερευνηθεί στην παρούσα διπλωματική είναι το εύρος των παραμέτρων και οριακών συνθηκών γύρω από το οποίο μπορούν να προκύψουν ικανοποιητικές λύσεις με το μοντέλο μειωμένης τάξης.

Για να γίνει πιο κατανοητό δίνεται στον αναγνώστη ένα παράδειγμα ημιτονοειδώς ταλαντούμενης αεροτομής με κυκλική συχνότητα $\omega = 0.2\ rad/s$. Μια υποθετική περίπτωση που θα αναπαραχθεί από τη μέθοδο είναι η ίδια αεροτομή ταλαντούμενη με κυκλική συχνότητα μεταβαλλόμενη κατά $x\%$, δηλαδή $\omega' = \omega \cdot (100 \pm x)/100\ rad/s$ όπου x, η διαφοροποίηση του εύρους της ταλάντωσης. Δηλώθηκε η μεταβλητή x και όχι ένα συγκεκριμένο νούμερο διότι οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει είναι επίσης ένα αντικείμενο μελέτης στην παρούσα εργασία.

Το παραπάνω είναι το σημείο όπου η μέθοδος POD ξεδιπλώνει τις δυνατότητες της και αποδίδει καθώς χρειάζεται ένα και μοναδικό τρέξιμο του πλήρους μοντέλου για την εκπαί-

δευση και κατασκευή των ιδιομορφών. Αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό π.χ. 5 διαφορετικών σεναρίων με επίλυση του πλήρους μοντέλου θα απαιτούσαν συνολικά $[5 \times N \times T]$ λύσεις διαφορικών εξισώσεων. Για τον ίδιο υπολογισμό χρησιμοποιώντας τις ίδιες ιδιομορφές απαιτούνται συνολικά $[N \times T + 5 \times L \times T]$ λύσεις εξισώσεων, όπου N: η τάξη του πλήρους μοντέλου, T: τα χρονικά βήματα, L: ο αριθμός των ιδιομορφών που επιλέχθηκαν. Υπενθυμίζεται πως το πλήρες μοντέλο στην παρούσα διπλωματική εργασία μπορεί να αποτελείται από 354 διαφορικές εξισώσεις, ενώ το μοντέλο μειωμένης τάξης μπορεί να χρησιμοποιεί 10-20 ιδιομορφές άρα και γραμμικές εξισώσεις. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τεράστια διαφορά τάξης μεγέθους όταν το POD εφαρμόζεται σε μοντέλα CFD.

1.2.3 Αναλυτική Μέθοδος POD

Η αναλυτική μέθοδος POD περιέχει την θεωρία και τη βάση από την οποία ξεκίνησε και εξελίχθηκε. Η διακριτή μέθοδος POD που εφαρμόζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι η μετάβαση της αναλυτικής μεθόδου στον τομέα των αριθμητικών και πειραματικών επιλύσεων με πιο δημοφιλή πεδίο εκείνο της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Σε αυτό το σημείο θα γίνει μία προσπάθεια να περιγραφεί μαθηματικά η μαθηματική θεωρία πάνω στην οποία στηρίζεται η διακριτή μέθοδος POD που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια.

Έστω οι συναρτήσεις $y_1, \ldots, y_n \in \underset{\sim}{X}$ όπου $y_n = y_n(x)$ από τις οποίες αποτελείται ο m-διάστατος ο χώρος $\underset{\sim}{V} \equiv span\{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathbb{R}^m$.

Αναζητείται μια ικανοποιητική αναπαράσταση των στοιχείων του $\underset{\sim}{V}$ οπότε και πρέπει να ληφθεί η προβολή του $\underset{\sim}{V}$ σε κατάλληλη διανυσματική βάση. Άρα θεωρείται πως τα στοιχεία του $\underset{\sim}{V}$ ανήκουν σε ένα χώρο τύπου εσωτερικό γινόμενο. Αυτός είναι ο γραμμικός χώρος *Hilbert* $(L^2([0,1]))$ που αποτελείται από συναρτήσεις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες με το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται ως

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g^*(x) \, \mathrm{d}x \tag{1.1}$$

Στόχος της μεθόδου POD είναι να βρεθούν $l \leqslant dim\underset{\sim}{V}$ ορθοκανονικά διανύσματα $\{\Phi\}_{i=1}^{l}$ στον $\underset{\sim}{X}$ τα οποία είναι βέλτιστα, δηλαδή ελαχιστοποιούν το σφάλμα της προσέγγισης των $\{y_1, \ldots, y_n\}$ και τα οποία στη μορφή,

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Phi_j(x) \tag{1.2}$$

περιγράφουν τα στοιχεία του $\underset{\sim}{X}$ καλύτερα από κάθε άλλη βάση. Απαραίτητες συνθήκες για

τα παραπάνω είναι :

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_i}\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_l, \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{ll}\right) = 0 \in X \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}}\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_l, \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{ll}\right) = 0 \in X \tag{1.4}$$

$$\text{για} \quad i = 1, \ldots, \lambda$$

όπου

$$L\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_l, \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{ll}\right) = J\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_l\right) + \sum_{i,j=1}^{l} \lambda_{ij}\left(\Phi_i^\top \Phi_j - \delta_{ij}\right)$$

Από την (1.3) προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j\left(y_j^\top \Phi_j\right) = \lambda_{ii}\Phi_i \quad \text{και} \quad \lambda_{ij} = 0 \quad \text{για} \quad i \neq j \tag{1.5}$$

Από την (1.4) προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}} = 0 \Leftrightarrow \Phi_i^\top \Phi_j = \delta_{ij}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δηλώνει την ορθοκανονικότητα της βάσης

Ορίζοντας $\lambda_i = \lambda_{ii}$ και $Y[y_1, \ldots, y_n]$ προκύπτει:

$$YY^\top \Phi_i = \lambda_i \Phi_i \quad \text{για} \quad i = 1, \ldots, \lambda$$

Που σημαίνει πως οι απαραίτητες συνθήκες ικανοποιούνται από ένα $[m \times m]$ συμμετρικό πρόβλημα ιδιοτιμών στο οποίο τα "αριστερά ιδιοδιανύσματα" (*left eigenvectors*) είναι η ζητούμενη βέλτιστη διανυσματική βάση.

1.3 Ο στόχος της εργασίας

Η μέθοδος POD χρησιμοποιείται κυρίως για ανάλυση δεδομένων πειραμάτων με σκοπό να εκλέξει κυρίαρχα στοιχεία και τάσεις: συνεκτικές δομές. Στο πλαίσιο της τύρβης και άλλων σύνθετων χωροχρονικών πεδίων, αυτά είναι συνήθως μοτίβα στο χώρο και στο χρόνο. Ωστόσο, ο στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι κάπως διαφορετικός. Η χρήση του POD έγκειται στην παροχή ενός διανυσματικού χώρου από τον οποίο θα επιλεγεί ένας κατάλληλος διανυσματικός υπόχωρος χαμηλότερης τάξης με τον οποίο θα κατασκευαστεί ένα μοντέλο χαμηλής τάξης ως προβολή των εξισώσεων του συστήματος πλήρους τάξης πάνω σε αυτόν. Το POD θα δημιουργήσει τα κύρια χωρικά στοιχεία, από τα οποία τα μοντέλα θα παράξουν δυναμικά τις συνεκτικές δομές ως μίξεις των POD ιδιομορφών.

Αν και χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά σε μη γραμμικά προβλήματα είναι σημαντικό να αναγνωριστεί το γεγονός ότι πρόκειται για μία γραμμική διαδικασία, ακόμη και αν

τα δυναμικά συστήματα που θα προβληθούν σε αυτούς και η πηγή των δεδομένων που τα παράγει είναι μη γραμμική. Η γραμμικότητα είναι ένα πολύ δυνατό στοιχείο της μεθόδου, αλλά ταυτόχρονα λειτουργεί και ως περιοριστικός παράγοντας. Μία άλλη ισχυρή ιδιότητα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι η διανυσματική βάση που κατασκευάζεται μέσω της POD είναι η βέλτιστη διανυσματική βάση με την οποία μπορεί να κατασκευαστεί μία γραμμική αναπαράσταση του συστήματος πλήρους τάξης. Στην αγγλική ορολογία αυτή η ιδιότητα αναφέρεται ως optimality. Με τον όρο γραμμική αναπαράσταση, εννοείται η υπέρθεση ενός πεπερασμένου αθροίσματος ιδιομορφών πολλαπλασιασμένες με κατάλληλους συντελεστές, όπως είναι η σειρά Fourier.

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να αναπτυχθεί ένα μοντέλο μειωμένης τάξης (*Reduced Order Model - ROM*) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο POD. Το μοντέλο πλήρους τάξης που χρησιμοποιείται ως βάση για την ανάπτυξη του ROM είναι μία μέθοδος συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης για την ανάλυση διδιάστατων μη μόνιμων ροών γύρω από αεροτομές που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής του λέκτορα Βασίλη Ριζιώτη [44]. Ο λόγος για τον οποίο επιλέχθηκε ως *Full-Order Model - FOM* μια μεθοδολογία οριακού στρώματος είναι γιατί το πρόβλημα -έτσι όπως αυτό θα διατυπωθεί τελικώς- είναι υπερβολικού τύπου, οπότε η μετάδοση της πληροφορίας στις εξισώσεις είναι παρόμοια με τα περισσότερα αεροδυναμικά μοντέλα CFD. Έτσι, μελετώντας την εφαρμογή του POD σε αυτό το αεροδυναμικό μοντέλο εξάγονται κάποια συμπεράσματα για την πιθανή εφαρμογή του σε CFD μοντέλα. Ακόμη, στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εξέταση των δυνατοτήτων του ROM με την έννοια της επίλυσης μη μόνιμων ροών γύρω από ταλαντούμενες αεροτομές χρησιμοποιώντας πληροφορία από το μοντέλο πλήρους τάξης. Ουσιαστικά, πρόκειται για τη διερεύνηση των δυνατοτήτων της μεθόδου POD σε δύο βασικές ιδιότητές της: τη γραμμικοποίηση (linearization) ενός μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων και την μείωση της τάξης (truncation).

1.4 Διάρθρωση της εργασίας

Στο κεφάλαιο 1 γίνεται μία εισαγωγή στα Μοντέλα Μειωμένης Τάξης, στους λόγους που οδήγησαν στην ανάπτυξή τους αλλά και στις εφαρμογές τους. Ακολουθεί βιβλιογραφική επισκόπηση της μεθόδου POD και ο στόχος της εργασίας. Ακόμη, υπάρχει μία συνοπτική επισκόπηση της μεθόδου POD καθώς και η διατύπωση του μαθηματικού πλαισίου της αναλυτικής μεθόδου POD προς κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών της μεθόδου.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το μοντέλο πλήρους τάξης που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία για την κατασκευή του μοντέλου μειωμένης τάξης. Παρουσιάζεται αναλυτικά η μέθοδος συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης και οι εξισώσεις της σε συνεχή και διακριτή μορφή. Πέραν των εξισώσεων ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και του οριακού στρώματος αναλύεται και το εμπειρικό πλαίσιο το οποίο παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη μέθοδο αυτή καθώς και στη συμπεριφορά του μοντέλου μειωμένης τάξης.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η μαθηματική θεωρία πάνω στην οποία στηρίζεται η διακριτή μέθοδος POD. Ακόμη, εξηγείται η μέθοδος POD από τη σκοπιά των δεδομένων και της πληροφορίας που κρύβεται σε αυτά και παρουσιάζονται κάποια πρώτα αποτελέσματα για ευθεία αναπαράσταση λύσεων με χρήση της μεθόδου POD. Τέλος, παρουσιάζεται η μαθηματική διατύπωση του μοντέλου μειωμένης τάξης καθώς και ο αλγόριθμος επίλυσής του.

Στο κεφάλαιο 4 αρχικά πραγματοποιείται μία παραμετρική ανάλυση της επιλογής POD ιδιομορφών και παρουσιάζονται τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία η επιλογή αυτή πραγματοποιείται. Τέλος, παρατίθενται τα τελικά αποτελέσματα της αντίστροφης ανακατασκευής λύσεων χρησιμοποιώντας το μοντέλο μειωμένης τάξης μέσω των οποίων δοκιμάζονται τα όρια της μεθόδου POD στο να παράγει διαφορετικές λύσεις χρησιμοποιώντας την ίδια βάση αναφοράς.

Στο κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται η αποτίμηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Παρουσιάζεται μία συνοπτική ανακεφαλαίωση της εργασίας και στη συνέχεια αξιολογούνται τα αποτελέσματά της και ως προέκταση αυτών η μέθοδος POD. Τέλος, ακολουθούν προτάσεις για μελλοντική διερεύνηση και επέκταση της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε.

Κεφάλαιο 2

Αεροδυναμικό μοντέλο πλήρους τάξης (*Full Order Model - FOM)*

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το αεροδυναμικό μοντέλο πλήρους τάξης *(full-order model)* το οποίο θα αποτελέσει τη βάση του μοντέλου μειωμένης τάξης *(reduced-order model)* που επιχειρείται να αναπτυχθεί σε αυτή την εργασία. Αυτό σημαίνει ότι για την ανάπτυξη του reduced-order model χρησιμοποιείται μία λύση του *(full-order model)* η οποία παρέχει την απαραίτητη πληροφορία που χρειάζεται για να κατασκευαστεί το *ROM.*

Το εν λόγω *full-order model*, αποτελεί μια μεθοδολογία συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης για την ανάλυση διδιάστατων μη μόνιμων ροών γύρω από αεροτομές. Η μεθοδολογία αυτή παρέχει μια λεπτομερέστερη κατανόηση των φυσικών μηχανισμών που συνδέονται με το φαινόμενο της δυναμικής απώλειας στήριξης. Ο λόγος για τον οποίο επιλέχθηκε ως *full-order model* μια μεθοδολογία οριακού στρώματος είναι γιατί το πρόβλημα -έτσι όπως αυτό θα διατυπωθεί- παρουσιάζει ίδιο τύπο μετάδοσης πληροφορίας με μοντέλα τύπου CFD καθώς είναι υπερβολικού τύπου πρόβλημα. Έτσι, μπορεί κανείς μελετώντας την εφαρμογή του POD σε αυτό το αεροδυναμικό μοντέλο να εξάγει κάποια συμπεράσματα για την πιθανή εφαρμογή του σε CFD μοντέλα.

Πιο συγκεκριμένα, για την επίλυση της μη μόνιμης - μη συνεκτικής ροής χρησιμοποιείται μια μεθοδολογία ελεύθερου ομόρρου στην οποία το πεδίο ταχύτητας αναπαρίσταται μέσω επιφανειακών διανομών πηγών και στροβιλότητας κατά μήκος της αεροτομής και στον ομόρρου. Η στροβιλότητα του ομόρρου προσεγγίζεται από στοιχεία στροβιλότητας (δίνες) που κινούνται ελεύθερα με την ταχύτητα του πεδίου ροής. Σε ότι αφορά τη συνεκτική ροή επιλύονται οι μη-μόνιμες εξισώσεις οριακού στρώματος σε ολοκληρωματική μορφή. Η αλληλεπίδραση των εξισώσεων της συνεκτικής ροής με αυτές της μη συνεκτικής επιτυγχάνεται μέσω μιας διανομής κάθετης ταχύτητας στο σύνορο της αεροτομής και στον ομόρρου η οποία αναπαριστά το έλλειμμα μάζας της συνεκτικής ροής σε σχέση με τη μη συνεκτική, στο πάχος του οριακού στρώματος. Οι συζευγμένες μη γραμμικές εξισώσεις του προβλήματος λύνονται ταυτόχρονα γεγονός που καθιστά την διαδικασία αλληλεπίδρασης τους πιο ισχυρή και επιτρέπει τη σύγκλιση σε περιπτώσεις ροών με ισχυρή αποκόλληση.

Στην ανάλυση ροών με αποκόλληση εξετάζεται μια κλασσική προσέγγιση μεθόδου συνεκτικής – μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης, σύμφωνα με την οποία οι εξισώσεις οριακού στρώματος λύνονται σε ολόκληρη την επιφάνεια της αεροτομής και κατά μήκος του ομόρρου που αποβάλλεται από την ακμή εκφυγής. Στην περίπτωση αυτή οι καθ'ύψος διανομές ταχύτητας που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των ολοκληρωμένων στο πάχος του οριακού στρώματος μεγεθών είναι κατάλληλες για την προσομοίωση ροών με αποκόλληση.

2.1 Το οριακό στρώμα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται σε ολοκληρωματική μορφή οι εξισώσεις του οριακού στρώματος, για τη μη μόνιμη ροή γύρω από διδιάστες γεωμετρίες μικρής καμπυλότητας. Η υπόθεση των μικρών καμπυλοτήτων ισχύει με αρκετά καλή ακρίβεια στην περίπτωση των αεροτομών οι οποίες ως επί το πλείστον εμφανίζουν μεγάλες καμπυλότητες μόνο στην περιοχή της ακμής πρόσπτωσης. Στην περιοχή αυτή όμως, λόγω του ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι μικρό, οι όροι που σχετίζονται με τις κλίσεις της γεωμετρίας εμφανίζονται να έχουν αμελητέα συνεισφορά. Οι εξισώσεις γράφονται για τη γενική περίπτωση του συμπιεστού ρευστού, ωστόσο οι υποθέσεις που περικλείουν δεν επιτρέπουν τη χρήση τους σε ροές πολύ υψηλών αριθμών *Mach*.

Έστω λοιπόν σώμα (Σ) και σύστημα συντεταγμένων OXY το οποίο είναι προσδεδεμένο στο (Σ) (σχήμα 2.1). Έστω τώρα ότι το (Σ) εκτελεί ως προς αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων $O_GX_GY_G$ μια μεταφορική και μια περιστροφική κίνηση με κέντρο O (σχήμα 2.1). Επίσης θεωρείται σύστημα συντεταγμένων Psn του οποίου ο s άξονας εφάπτεται στο στερεό σύνορο, ενώ ο n είναι κάθετος σε αυτό. Στη συνέχεια εξάγονται, ως προς το σύστημα αυτό, οι ολοκληρωματικές εξισώσεις συνέχειας, ορμής και κινητικής ενέργειας, οι οποίες γράφονται υπό τη μορφή ελλείμματος (μάζας, ορμής, και κινητικής ενέργειας αντίστοιχα) μεταξύ συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής *(Lock & Williams (1987), Le Balleur (1981))* [32].

2.1.1 Εξίσωση συνέχειας

Η εξίσωση διατήρησης της συνέχειας, ως προς το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων Psn. για τη μη συνεκτική ροή (την ισοδύναμη προς τη συνεκτική, σε ότι αφορά το πεδίο πίεσης γύρω από την αεροτομή-*Equivalent Inviscid Flow*) και τη συνεκτική ροή αντιστοίχως γράφεται στη μορφή:

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\varrho_e \bar{u}_e\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(\varrho_e \bar{v}_e\right)=0 \tag{2.1α'}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\varrho \bar{u}\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(\varrho \bar{v}\right)=0 \tag{2.1β'}$$

όπου $\bar{u}, \bar{v}$ η ταχύτητα και ϱ η πυκνότητα του ρευστού. Η "παύλα" στις ταχύτητες χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι είναι σχετικές ταχύτητες κίνησης του ρευστού, ως προς το στερεό σύνορο του (Σ). Και στις υπόλοιπες εξισώσεις του οριακού στρώματος (ορμής, κινητικής ενέργειας) χρησιμοποιούνται οι σχετικές ταχύτητες, οπότε για την απλοποίηση των συμβο-

λισμών στη συνέχεια του κεφαλαίου 2.1 η παύλα παραλείπεται. Ο δείκτης (e) στη σχέση (2.1) υποδηλώνει μεγέθη της μη συνεκτικής ροής(σχήμα 2.2). Στις εξισώσεις (2.1) έχουν αμεληθεί οι καμπυλόγραμμοι όροι, σύμφωνα με τα όσα ειπώθηκαν στην πρώτη παράγραφο της ενότητας 2.1. Αφαιρώντας τις εξισώσεις αυτές κατά μέλη και ολοκληρώνοντας στο πάχος δ του οριακού στρώματος προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial n}\left(\varrho_e v_e - \varrho v\right)\ \mathrm{d}n = \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial s}\left(\varrho_e u_e - \varrho u\right)\ \mathrm{d}n - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho_e - \varrho\right)\ \mathrm{d}n \tag{2.2}$$

Υποθέτοντας ότι τα μεγέθη της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής δε μεταβάλλονται σημαντικά κατά το ύψος του οριακού στρώματος (προσέγγιση μηδενικής τάξης) και ότι οι τιμές τους είναι ίσες με αυτές των αντίστοιχων μεγεθών της συνεκτικής ροής στο πάχος δ του οριακού στρώματος (σχήμα 2.1) (θέση πλήρως ανεπτυγμένης ροής) η σχέση (2.2) γράφεται:

$$\left(\varrho_e v_e - \varrho v\right)\Big|_0^\delta = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\delta \left(\varrho_e u_e - \varrho u\right)\ \mathrm{d}n - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho_e - \varrho\right)\ \mathrm{d}n \tag{2.3}$$

ή,

$$\left(\varrho_e v_e\right)_{wall} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\varrho_e u_e \delta^*) + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho_e - \varrho\right)\ \mathrm{d}n \tag{2.4}$$

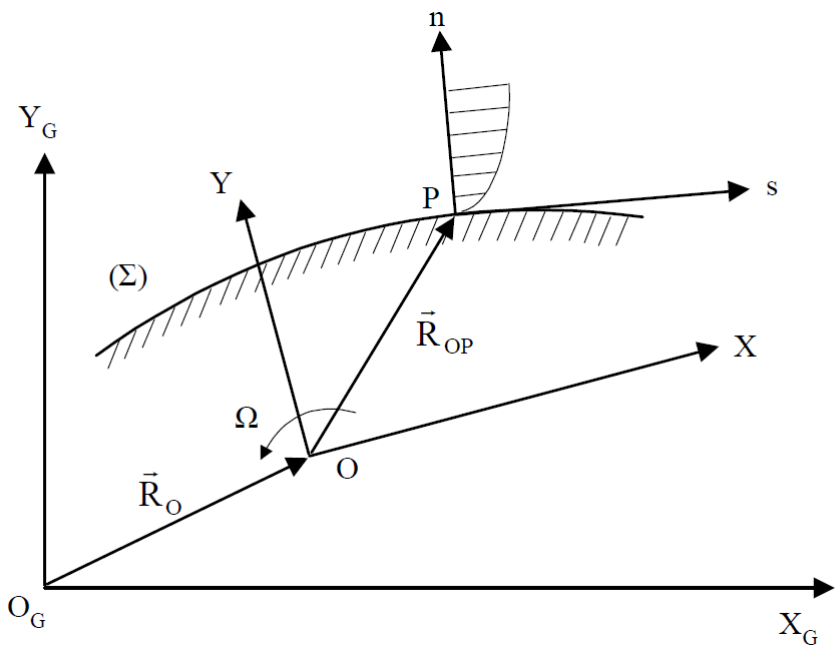
όπου δ^* το πάχος μετατόπισης του οριακού στρώματος :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\varrho u}{\varrho_e u_e}\right)\ \mathrm{d}n \tag{2.5}$$

Επιπλέον, ο δεύτερος όρος της (2.4) απαλείφεται στην περίπτωση που ο αριθμός *Mach* δεν παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, οπότε η καθ' ύψος μεταβολή της πυκνότητας μέσα στο οριακό στρώμα είναι αμελητέα. Με αυτόν τον τρόπο η εξίσωση (2.4) απλοποιείται και γράφεται τελικά:

$$\left(\varrho_e v_e\right)_{wall} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\varrho_e u_e \delta^*) \tag{2.6}$$

Η έκφραση (2.6) παρέχει την επιπλέον κάθετη στο σύνορο ταχύτητα η οποία πρέπει να επιβληθεί στη μη συνεκτική ροή, έτσι ώστε αυτή να είναι ισοδύναμη προς τη συνεκτική ροή (*transpiration velocity*), σε ότι αφορά την παροχή μάζας του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα. Η παραπάνω σχέση αποτελεί επομένως συνοριακή συνθήκη για τη μη συνεκτική ροή.



Σχήμα 2.1: *Ορισμός των συστημάτων συντεταγμένων.*

2.1.2 Εξίσωση διατήρησης της ορμής

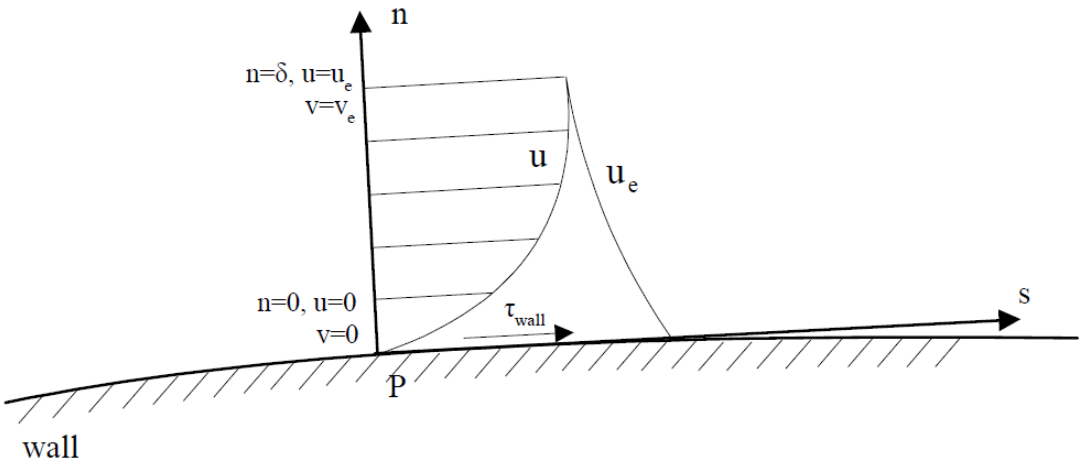
Η εξίσωσης διατήρησης της ορμής κατά τον άξονα s για τη μη συνεκτική και τη συνεκτική ροή αντίστοιχα ως προς το καμπυλόγραμμο σύστημα Psn γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\left(\varrho_e u_e\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\varrho_e u_e^2\right)}{\partial s}+\frac{\partial\left(\varrho_e u_e v_e\right)}{\partial n}-2\varrho_e\Omega v_e\\&=-\frac{\partial p_e}{\partial s}+\qquad\varrho_e\left[\Omega^2 R_{OPs}+\frac{\partial\Omega}{\partial t}(R_{OPn}+n)-\frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right]\end{aligned}\tag{2.7α′}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\left(\varrho u\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\varrho u^2\right)}{\partial s}+\frac{\partial\left(\varrho u v\right)}{\partial n}-2\varrho\Omega v\\&=-\frac{\partial p}{\partial s}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\varrho\left[\Omega^2 R_{OPs}+\frac{\partial\Omega}{\partial t}(R_{OPn}+n)-\frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right]\end{aligned}\tag{2.7β′}$$

Με αφαίρεση των εξισώσεων (2.7) κατά μέλη και ολοκλήρωση στο πάχος δ του οριακού στρώματος:

$$\begin{aligned}&\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho_e u_e-\varrho u\right)\,\mathrm{d}n+\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial s}\left(\varrho_e u_e^2-\varrho u^2\right)\,\mathrm{d}n+\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial n}\left(\varrho_e u_e v_e-\varrho u v\right)\,\mathrm{d}n\\&-2\Omega\int_0^\delta\left(\varrho_e v_e-\varrho v\right)\,\mathrm{d}n=-\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial s}\left(p_e-p\right)\,\mathrm{d}n-\int_0^\delta\mu\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\,\mathrm{d}n\\&+\int_0^\delta\left(\Omega^2 R_{OPs}+\frac{\partial\Omega}{\partial t}(R_{OPn}+n)-\frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right)\left(\varrho_e-\varrho\right)\,\mathrm{d}n\end{aligned}\tag{2.8}$$



Σχήμα 2.2: *Οι διανομές ταχυτήτων στο σύνορο της αεροτομής.*

Αναλυτικά, ο πρώτος όρος του πρώτου μέλους της εξίσωσης (2.8) γράφεται στη μορφή:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho_e u_e - \varrho u\right)\ \mathrm{d}n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) \tag{2.9}$$

Αν στην εξίσωση εισαχθεί επιπλέον η παράμετρος του πάχους ορμής ϑ,

$$\vartheta = \int_0^\delta \frac{\varrho u}{\varrho_e u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right)\ \mathrm{d}n \tag{2.10}$$

ο δεύτερος όρος του πρώτου μέλους γράφεται στη μορφή:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial s}\left(\varrho_e u_e^2 - \varrho u^2\right)\ \mathrm{d}n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\varrho_e u_e^2\left(\vartheta + \delta^*\right)\right] \tag{2.11}$$

ενώ χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας (2.6), ο τρίτος όρος του πρώτου μέλους γίνεται:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial n}\left(\varrho_e u_e v_e - \varrho u v\right)\ \mathrm{d}n = \left(\varrho_e u_e v_e - \varrho u v\right)\Big|_0^\delta = -\left(\varrho_e u_e v_e\right)_{wall} = -u_e \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) \tag{2.12}$$

Όσον αφορά το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.8) ο δεύτερος όρος γράφεται:

$$\int_0^\delta \mu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\ \mathrm{d}n = \mu \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_0^\delta = -\tau_{wall} \tag{2.13}$$

όπου $\tau_{wall} = -\mu \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_0^\delta$ η διατμητική τάση στο στερεό σύνορο του σώματος (Σ).
Αντικαθιστώντας λοιπόν τις νέες εκφράσεις των όρων της εξίσωσης (2.8) προκύπτει η εξίσωση:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e^2 \left(\vartheta + \delta^*\right)\right) - u_e \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) - \int_0^\delta 2\Omega \left(\varrho_e v_e - \varrho v\right)\, \mathrm{d}n \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) + \tau_{wall} + \int_0^\delta \left[\Omega^2 R_{OPs} + \frac{\partial \Omega}{\partial t}(R_{OPn} + n) - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right]\left(\varrho_e - \varrho\right)\, \mathrm{d}n\end{aligned} \tag{2.14}$$

Για την απλοποίηση της εξίσωσης (2.14) θεωρείται ότι

- ο όρος των δυνάμεων Coriolis είναι δεύτερης τάξης, αφού σχετίζεται με το έλλειμμα μάζας στην κάθετη κατεύθυνση, το οποίο υποτίθεται ότι είναι είναι μικρό.
- ο τελευταίος όρος του δεύτερου μέλους αμελείται, για το λόγο ότι σχετίζεται με την καθ'ύψος μεταβολή της διαφοράς πυκνότητας μη συνεκτικής και συνεκτικής ροής, η οποία στην περίπτωση ροών χαμηλού αριθμού *Mach* είναι μικρή
- ο όρος της κλίσης της διαφοράς πίεσης μεταξύ συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής είναι δεύτερης τάξης οπότε και αμελείται. Ο όρος αυτός σχετίζεται με την καμπυλότητα της γεωμετρίας και την καμπυλότητα των γραμμών ροής κοντά στο σύνορο της γεωμετρίας που εξετάζεται. Σε ότι αφορά την εξάρτηση από την κλίση της γεωμετρίας του συνόρου για την περίπτωση της ροής γύρω από αεροτομή, η καμπυλότητα του συνόρου λαμβάνει σημαντικές τιμές μόνο στην περιοχή της ακμής πρόσπτωσης. Ωστόσο σε εκείνη την περιοχή τα μεγέθη του οριακού στρώματος παίρνουν πολύ μικρές τιμές. Αντίθετα, κοντά στην ακμή εκφυγής, όπου τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος αυξάνουν σημαντικά, οι κλίσεις της γεωμετρίας είναι σχεδόν μηδενικές. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο και με την κλίση των γραμμών ροής οι οποίες καμπυλώνουν σημαντικά καθώς η ροή αποκολλάται πάνω από το στερεό σύνορο, οπότε γίνεται σαφές ότι σε αποκολλημένες ροές και μέσα στη ζώνη της αποκόλλησης η επίδραση της διαφοράς πίεσης μεταξύ συνεκτικής και ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής μπορεί να είναι σημαντική *(Lock & Williams)* [32].

Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, η εξίσωση (2.14), αδιαστατοποιημένη ως προς τη δυναμική πίεση $\varrho_e u_e^2$ γράφεται:

$$\frac{1}{\varrho_e u_e^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) + \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} + (2 + H)\frac{\vartheta}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}s} + \frac{\vartheta}{\varrho_e}\frac{\mathrm{d}\varrho_e}{\mathrm{d}s} = \frac{C_f}{2} \tag{2.15}$$

όπου $H = \delta^*/\vartheta$ ο συντελεστής σχήματος του οριακού στρώματος και $C_f = 2\tau_{wall}/\varrho_e u_e^2$ ο συντελεστής τριβής.

Η (2.15) αποτελεί την ολοκληρωματική έκφραση της εξίσωσης ορμής για μη μόνιμες ροές. Σε σχέση με την αντίστοιχη έκφραση για μόνιμες συνθήκες ροής διαφέρει μόνο ως προς τον πρώτο, χρονικά μεταβαλλόμενο όρο.

2.1.3 Εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας

Οι εξισώσεις διατήρησης της κινητικής ενέργειας για τη μη συνεκτική και τη συνεκτική ροή προκύπτουν από τις (2.7), πολλαπλασιάζοντας με u_e και u αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} u_e\frac{\partial\left(\varrho_e u_e\right)}{\partial t} + u_e\frac{\partial\left(\varrho_e u_e^2\right)}{\partial s} + u_e\frac{\partial\left(\varrho_e u_e v_e\right)}{\partial n} - 2\varrho_e\Omega u_e v_e \\ = -u_e\frac{\partial p_e}{\partial s} + \qquad \varrho_e u_e\left[\Omega^2 R_{OPs} + \frac{\partial\Omega}{\partial t}(R_{OPn}+n) - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right] \end{aligned} \tag{2.16α′}$$

$$\begin{aligned} u\frac{\partial\left(\varrho u\right)}{\partial t} + u\frac{\partial\left(\varrho u^2\right)}{\partial s} + u\frac{\partial\left(\varrho u v\right)}{\partial n} - 2\varrho\Omega u v \\ = -u\frac{\partial p}{\partial s} + \mu u\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \varrho u\left[\Omega^2 R_{OPs} + \frac{\partial\Omega}{\partial t}(R_{OPn}+n) - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right] \end{aligned} \tag{2.16β′}$$

Αφαιρώντας τις (2.16) κατά μέλη (κάνοντας χρήση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής (2.15)) και ολοκληρώνοντας στο πάχος του οριακού στρώματος δ προκύπτει η ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned} &\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho_e u_e^2 - \varrho u^2\right)\,\mathrm{d}n + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial s}\left(\varrho_e u_e^3 - \varrho u^3\right)\,\mathrm{d}n + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial n}\left(\varrho_e u_e^2 v_e - \varrho u^2 v\right)\,\mathrm{d}n \\ &- 4\Omega\int_0^\delta\left(\varrho_e u_e v_e - \varrho u v\right)\,\mathrm{d}n = -2\int_0^\delta u\frac{\partial}{\partial s}\left(p_e - p\right)\,\mathrm{d}n - 2\int_0^\delta \frac{\partial p_e}{\partial s}\left(u_e - u\right)\,\mathrm{d}n \\ &- 2\int_0^\delta \mu u\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\,\mathrm{d}n + 2\int_0^\delta\left[\Omega^2 R_{OPs} + \frac{\partial\Omega}{\partial t}(R_{OPn}+n) - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right]\left(\varrho_e u_e - \varrho u\right)\,\mathrm{d}n \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ο πρώτος όρος του πρώτου μέλους της (2.17) γράφεται:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho_e u_e^2 - \varrho u^2\right)\,\mathrm{d}n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varrho_e u_e^2\left(\vartheta + \delta^*\right)\right] \tag{2.18}$$

Ο δεύτερος όρος του πρώτου μέλους, εισάγοντας την παράμετρο του πάχους ενέργειας του οριακού στρώματος ϑ^* :

$$\vartheta^* = \int_0^\delta \frac{\varrho u}{\varrho_e u_e}\left[1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right]\,\mathrm{d}n \tag{2.19}$$

γίνεται

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial s}\left(\varrho_e u_e^3 - \varrho u^3\right)\,\mathrm{d}n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\varrho_e u_e^3\left(\vartheta + \delta^*\right)\right] \tag{2.20}$$

Ενώ ο τρίτος και ο τέταρτος όρος του πρώτου μέλους της γράφονται:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial n}\left(\varrho_e u_e^2 v_e - \varrho u^2 v\right)\ \mathrm{d}n = \left(\varrho_e u_e^2 v_e - \varrho u^2 v\right)\Big|_0^\delta = -u_e^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) \tag{2.21}$$

και

$$4\Omega \int_0^\delta \left(\varrho_e u_e v_e - \varrho u v\right)\ \mathrm{d}n = 4\Omega \varrho_e u_e^2 \Theta_n \tag{2.22}$$

αντίστοιχα, όπου η παράμετρος Θ_n ορίζεται από τη σχέση:

$$\Theta_n = \frac{1}{\varrho_e u_e^2}\int_0^\delta \left(\varrho_e u_e v_e - \varrho u v\right)\ \mathrm{d}n \tag{2.23}$$

Σε ότι αφορά το δεύτερο μέλος της (2.17) ο πρώτος όρος που σχετίζεται με τη διαφορά πίεσης μεταξύ συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής, όπως και στην εξίσωση της ορμής αμελείται. Στον δεύτερο όρο η κλίση πίεσης κατά την κατεύθυνση s εκφράζεται συναρτήσει της ταχύτητας u_e, με χρήση της εξίσωσης ορμής για την αναπτυγμένη ροή, η οποία γράφεται:

$$\varrho_e \frac{\partial u_e}{\partial t} + \varrho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial s} = -\frac{\partial p_e}{\partial s} \tag{2.24}$$

οπότε,

$$\begin{aligned} 2\int_0^\delta \frac{\partial p_e}{\partial s}\left(u_e - u\right)\ \mathrm{d}n &= -2\int_0^\delta \varrho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial t}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right)\ \mathrm{d}n \quad -2\int_0^\delta \varrho_e u_e^2 \frac{\partial u_e}{\partial s}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right)\ \mathrm{d}n \\ &= -2\varrho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial t}\delta^{*i} \qquad\qquad -2\varrho_e u_e^2 \frac{\partial u_e}{\partial s}\delta^{*i} \end{aligned} \tag{2.25}$$

όπου δ^{*i} η παράμετρος του πάχους μετατόπισης για την ασυμπίεστη ροή:

$$\delta^{*i} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right)\ \mathrm{d}n \tag{2.26}$$

Εν συνεχεία, ο τρίτος όρος του δεύτερου μέλους γράφεται:

$$2\int_0^\delta \mu u \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\ \mathrm{d}n = \underbrace{2\mu u \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_0^\delta}_{0} - 2\int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\ \mathrm{d}n = -2\varrho_e u_e^3 C_D \tag{2.27}$$

όπου C_D ο συντελεστής διάχυσης του οριακού στρώματος

$$C_D = \frac{1}{\varrho_e u_e^2}\int_0^\delta \tau \frac{\partial u}{\partial n}\ \mathrm{d}n \tag{2.28}$$

ενώ ο τέταρτος όρος του δεύτερου μέλους γράφεται:

$$\begin{aligned} &2\int_0^\delta \left[\Omega^2 R_{OPs} + \frac{\partial \Omega}{\partial t}(R_{OPn} + n) - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right](\varrho_e u_e - \varrho u)\ \mathrm{d}n \\ &\cong 2\left[\Omega^2 R_{OPs} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} R_{OPn} - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right]\varrho_e u_e \delta^* = 2a\varrho_e u_e \delta^* \end{aligned} \tag{2.29}$$

όπου θέτω $a = \left(\Omega^2 R_{OPs} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} R_{OPn} - \frac{\partial^2 R_{Os}}{\partial t^2}\right)$. Με βάση τα παραπάνω και ύστερα από την αδιαστατοποίηση με τον όρο $\varrho_e u_e^3$ η (2.17) γράφεται:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho_e u_e^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e^2 \vartheta\right) + \frac{1}{\varrho_e u_e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e \delta^*\right) + \frac{2}{u_e^2}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}\delta^{**} + \frac{\mathrm{d}\vartheta^*}{\mathrm{d}s} \\ &+ \left(3 + \frac{2\delta^{**}}{\vartheta^*}\right)\frac{\vartheta^*}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}s} + \frac{\vartheta^*}{\varrho_e}\frac{\mathrm{d}\varrho_e}{\mathrm{d}s} - \frac{4\Omega}{u_e}\Theta_n = 2C_D + \frac{2a}{u_e^2}\delta^* \end{aligned} \tag{2.30}$$

όπου η παράμετρος δ^{**} ονομάζεται πάχος πυκνότητας και ορίζεται από τη σχέση,

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\varrho u}{\varrho_e u_e}\left(\frac{\varrho_e}{\varrho} - 1\right)\ \mathrm{d}n = \delta^* - \delta^{*i} \tag{2.31}$$

Μια βολική έκφραση της εξίσωσης κινητικής ενέργειας λαμβάνεται αν από την (2.30) αφαιρεθεί η εξίσωση ορμής (2.15) πολλαπλασιασμένη με την παράμετρο $H^* = \vartheta^*/\vartheta$ (συντελεστής σχήματος κινητικής ενέργειας):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho_e u_e^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e^2 \vartheta\right) + \frac{1}{\varrho_e u_e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e \delta^*\right) + \frac{2}{u_e^2}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}H^{**}\vartheta - \frac{H^{**}}{\varrho_e u_e^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) \\ &+ \vartheta\frac{\mathrm{d}H^{**}}{\mathrm{d}s} + \left[2H^{**} + H^*\left(1 - H\right)\right]\frac{\vartheta}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}s} - \frac{4\Omega}{u_e}\Theta_n = 2C_D + \frac{2a}{u_e^2}\delta^* - H^*\frac{C_f}{2} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Συνολικά λοιπόν οι τρεις ολοκληρωματικές εξισώσεις του οριακού στρώματος, στη μορφή που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της μη μόνιμης ροής γύρω από αεροτομή, συνοψίζονται στις ακόλουθες,

$$(\varrho_e v_e)_{wall} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\varrho_e u_e \delta^*) \tag{2.33α'}$$

$$\frac{1}{\varrho_e u_e^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) + \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} + (2 + H)\frac{\vartheta}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}s} + \frac{\vartheta}{\varrho_e}\frac{d\varrho_e}{\mathrm{d}s} = \frac{C_f}{2} \tag{2.33β'}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho_e u_e^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e^2 \vartheta\right) + \frac{1}{\varrho_e u_e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e \delta^*\right) + \frac{2}{u_e^2}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}H^{**}\vartheta - \frac{H^{**}}{\varrho_e u_e^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) \\ &+ \vartheta\frac{\mathrm{d}H^{**}}{\mathrm{d}s} + \left[2H^{**} + H^*\left(1 - H\right)\right]\frac{\vartheta}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}s} - \frac{4\Omega}{u_e}\Theta_n = 2C_D + \frac{2a}{u_e^2}\delta^* - H^*\frac{C_f}{2} \end{aligned} \tag{2.33γ'}$$

Από τις εξισώσεις (2.33), όπως αναφέρθηκε, η πρώτη χρησιμοποιείται ως συνοριακή συνθήκη για τον υπολογισμό της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής. Από την επίλυση των δύο

άλλων προσδιορίζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος, πάχος μετατόπισης δ^* και πάχος ορμής ϑ. Οι εξισώσεις (2.33) συμπληρώνονται από μία σειρά εμπειρικών σχέσεων που δίνουν σε κλειστή μορφή τα υπόλοιπα άγνωστα μεγέθη που εμφανίζονται σε αυτές, συναρτήσει των βασικών αγνώστων δ^* και ϑ, χωριστά και για τη στρωτή και για την τυρβώδη ροή. Το εμπειρικό αυτό πλαίσιο βασίζεται στην υπόθεση ότι η διανομή της ταχύτητας στο οριακό στρώμα έχει δεδομένη μορφή και παραμετροποιείται με βάση τα μεγέθη δ^* και ϑ. Οι σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτήν την εργασία δίνονται στην υποενότητα 2.1.7. Επίσης στις εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας προστίθεται και μία εξίσωση για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη όπως και μια εξίσωση για τον προσδιορισμό των τυρβωδών τάσεων στο οριακό στρώμα οι οποίες απαιτούνται στον υπολογισμό του συντελεστή διάχυσης C_D της τυρβώδους ροής. Η πρώτη από τις δύο αυτές εξισώσεις επιλύεται στην περιοχή της στρωτής ροής ενώ η δεύτερη στην τυρβώδη ροή.

2.1.4 Το πρότυπο προσδιορισμού του σημείου μετάβασης

Στην υποενότητα αυτή περιγράφεται το πρότυπο e^n για τον προσδιορισμό του σημείου στο οποίο η ροή από στρωτή μετατρέπεται σε τυρβώδη. Η μέθοδος αυτή, η οποία εφαρμόστηκε πρώτη φορά από τους *Smith & Gamberoni* [33] και τον *Ingen* [34], θεωρεί ότι η μετάβαση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη συμβαίνει όταν το πιο ασταθές *Tollmien-Schlichting* κύμα στο οριακό στρώμα αυξάνεται κατά ένα συντελεστή, που λαμβάνεται ίσος με $e^9 \cong 8100$. Για να υπολογιστεί ο συντελεστής ενίσχυσης, ο ρυθμός αύξησης των διαταραχών πρέπει να συσχετιστεί με τα μεγέθη του οριακού στρώματος. Με τη χρήση της οικογένειας διανομών ταχυτήτων των *Falkner-Skan* [35], η εξίσωση των *Orr-Sommerfeld* λύνεται ως προς το ρυθμό αύξησης των διαταραχών για ένα σημαντικό εύρος τιμών του συντελεστή σχήματος του οριακού στρώματος και "ασταθών" συχνοτήτων. Σύμφωνα με τους *Gleyzes et al.* [36] ο χάρτης του ολοκληρώματος των ρυθμών ενίσχυσης προσεγγίζεται από ευθείες γραμμές της μορφής,

$$\tilde{n} = \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{dRe_{\vartheta_0}} \left(H_k\right) \left[Re_{\vartheta_0} - Re_{\vartheta_0}\left(H_k\right)\right] \tag{2.34}$$

όπου στην (2.34) $\tilde{n}$ είναι ο λογάριθμος του μέγιστου λόγου ενίσχυσης και H_k είναι ο συντελεστής σχήματος για την ασυμπίεστη ροή:

$$H_k = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \mathrm{d}n \Big/ \int_0^\delta \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \mathrm{d}n \tag{2.35}$$

Ακόμη Re_{ϑ_0} ο κρίσιμος αριθμός *Reynolds* από τον οποίον οι διαταραχές στο οριακό στρώμα αρχίζουν να αυξάνουν με ρυθμό $\mathrm{d}\tilde{n}/\mathrm{d}Re_{\vartheta_0}$.

$$Re_{\vartheta_0} = \frac{\varrho_e u_e \vartheta}{\mu_e} \tag{2.36}$$

Η κλίση $\mathrm{d}\tilde{n}/\mathrm{d}Re_\vartheta$ και ο κρίσιμος αριθμός *Reynolds* προσεγγίζονται από τις ακόλουθες εμπειρικές σχέσεις:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}Re_{\vartheta_0}} = 0.01\{[2.4H_k - 3.7 + 2.5\tanh(1.5H_k - 4.65)]^2 + 0.25\}^{1/2} \tag{2.37}$$

$$\log_{10} Re_{\vartheta_0} = \left(\frac{1.415}{H_k - 1} - 0.489\right) \cdot \tanh\left(\frac{20}{H_k - 1} - 12.9\right) + \frac{3.295}{H_k - 1} + 0.44 \tag{2.38}$$

Για όμοιες ροές, όπου η παράμετρος H_k παραμένει σταθερή και ο Re_ϑ μεταβάλλεται, με τρόπο μοναδικό, συναρτήσει της κατεύθυνσης της ροής s, η παράμετρος $\tilde{n}$ υπολογίζεται άμεσα από τη σχέση (2.34). Η μετάβαση, όπως ήδη ειπώθηκε, λαμβάνεται εκεί όπου ο λόγος ενίσχυσης $\tilde{n}$ γίνεται ίσος με 9. Για ροές που δεν είναι όμοιες, ο λόγος ενίσχυσης υπολογίζεται από την ολοκλήρωση του ρυθμού ενίσχυσης $\mathrm{d}\tilde{n}/\mathrm{d}Re_\vartheta$ κατάντι του σημείου από όπου ξεκινά η αστάθεια. Οι *Gleyzes et al.* [36] ολοκλήρωσαν το ρυθμό αυτό σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tilde{n} = \int_{Re_{\vartheta_0}}^{Re_\vartheta} \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}Re_\vartheta}\, \mathrm{d}Re_\vartheta \tag{2.39}$$

Όμως η σχέση (2.39) δεν είναι κατάλληλη για τον προσδιορισμού του σημείου μετάβασης στην περίπτωση που παρατηρείται εμφάνιση φυσαλίδας αποκόλλησης στην περιοχή της στρωτής ροής, καθώς ο Re_ϑ ελάχιστα μεταβάλλεται στο τμήμα της φυσαλίδας όπου η ροή εμφανίζεται στρωτή. Συνέπεια αυτού είναι να υπολογίζονται μικρές τιμές ενίσχυσης, γεγονός που απέχει από την πραγματικότητα. Μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση είναι να ολοκληρωθεί ο ρυθμός μεταβολής του $\tilde{n}$ ως προς την κατεύθυνση s. Χρησιμοποιώντας ξανά την οικογένεια ταχυτήτων *Falkner-Skan* [35] προκύπτει ότι η χωρική μεταβολή του λόγου ενίσχυσης προσδιορίζεται από τη σχέση,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}Re_\vartheta} \cdot \frac{\mathrm{d}Re_\vartheta}{\mathrm{d}s} \tag{2.40}$$

όπου:

$$\frac{\mathrm{d}Re_\vartheta}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}s} + 1\right)\frac{\varrho_e u_e \vartheta^2}{\mu_e s}\frac{1}{\vartheta} \tag{2.41}$$

Στην (2.41) οι όροι $\varrho_e u_e \vartheta^2/\mu_e s$ και $s\mathrm{d}u_e/u_e\mathrm{d}s$ προσεγγίζονται από εμπειρικές σχέσεις, και εκφράζονται και οι δύο ως συναρτήσεις του H_k:

$$\frac{\varrho_e u_e \vartheta^2}{\mu_e s} = \frac{6.54H_k - 14.07}{H_k^2} \tag{2.42}$$

$$\frac{s}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}s} = \left[0.058\frac{(H_k - 4)^2}{H_k - 1} - 0.068\right]\frac{H_k^2}{6.54H_k - 14.07} \tag{2.43}$$

2.1.5 Οι όροι δεύτερης τάξης

Στην υποενότητα αυτή γίνεται αναφορά στη σημασία και στον τρόπο υπολογισμού των όρων που σχετίζονται με τη διαφορά πίεσης μεταξύ συνεκτικής και ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής, μέσα στο πάχος του οριακού στρώματος. Το γεγονός ότι αυτή η διαφορά πίεσης δεν είναι μηδενική οφείλεται αφενός μεν στην καμπυλότητα του συνόρου αφετέρου δε στην έντονη καμπύλωση των γραμμών ροής όταν παρατηρείται εμφάνιση αποκόλλησης. Για τον υπολογισμό του όρου $p_e - p$ μέσα στο πάχος του οριακού στρώματος *(Lock & Williams (1987))* [32] εφαρμόζεται η εξίσωση ορμής για την κάθετη στο τοίχωμα κατεύθυνση n. Όπως και στην υποενότητα 2.1.2 η εξίσωση γράφεται στη μορφή ελλείμματος μεταξύ συνεκτικής και ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής:

$$-\frac{\partial}{\partial n}\left(p_e - p\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho_e v_e - \varrho v\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\varrho_e u_e v_e - \varrho u v\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\varrho_e v_e^2 - \varrho v^2\right) + k_{wall}\left(\varrho_e u_e^2 - \varrho u^2\right) \tag{2.44}$$

όπου στην εξίσωση (2.44) με k_{wall} συμβολίζεται η καμπυλότητα του συνόρου. Οι όροι που σχετίζονται με την κίνηση του σώματος αμελούνται (Coriolis, φυγόκεντροι,κ.τ.λ.). Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.44) στο πάχος του οριακού στρώματος προκύπτει,

$$-\frac{\partial}{\partial n}\int_0^\delta \left(p_e - p\right)\ \mathrm{d}n \cong \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e^2 \Theta_n\right) - \left(\varrho_e v_e^2\right)_{wall} + k_{wall}\varrho_e u_e^2\left(\vartheta + \delta^*\right) \tag{2.45}$$

όπου ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της (2.45) αμελείται, δεδομένου ότι σχετίζεται με τη διαφορά μάζας στην κάθετη κατεύθυνση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί μικρή. Μια πρώτη προσέγγιση για την παράμετρο Θ_n είναι *(East (1981))* [37]:

$$\Theta_n \cong \left(\vartheta + \delta^*\right)\frac{\mathrm{d}\delta^*}{\mathrm{d}s} \tag{2.46}$$

οπότε με χρήση της εξίσωσης (2.46) προκύπτει η ακόλουθη σχέση *(Lock & Williams (1987))* [32],

$$-\frac{\partial}{\partial n}\int_0^\delta \left(p_e - p\right)\ \mathrm{d}n \cong \left(k_{wall} + \frac{\mathrm{d}^2\delta^*}{\mathrm{d}s^2}\right)\varrho_e u_e^2\left(\vartheta + \delta^*\right) + O(^2) \tag{2.47}$$

από την ολοκλήρωση της παραπάνω κατά την κατεύθυνση n προκύπτει,

$$\frac{1}{\varrho_e u_e^2}\int_0^\delta \left(p_e - p\right)\ \mathrm{d}n \cong \int_0^\delta \left(k_{wall} + \frac{\mathrm{d}^2\delta^*}{\mathrm{d}s^2}\right)\left(\vartheta + \delta^*\right)\ \mathrm{d}n \cong \int_0^\delta \underbrace{\left(k_{wall} + \frac{\mathrm{d}\tilde{S}}{\mathrm{d}s}\right)}_{k'}\left(\vartheta + \delta^*\right)\ \mathrm{d}n \tag{2.48}$$

όπου με $\tilde{S}$ συμβολίζεται η κλίση των γραμμών ροής της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής:

$$\tilde{S} = \frac{v_e}{u_e} = \frac{1}{\varrho_e u_e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e \delta^*\right) = \frac{\mathrm{d}\delta^*}{\mathrm{d}s} + \underbrace{\frac{\delta^*}{\varrho_e u_e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e\right)}_{\text{μικρό}} \tag{2.49}$$

Εξάγεται λοιπόν το συμπέρασμα ότι ο όρος της διαφοράς μεταξύ συνεκτικής και ισοδύναμης μη συνεκτικής πίεσης εμφανώς σχετίζεται με την καμπυλότητα της γεωμετρίας και την καμπυλότητα των γραμμών ροής κοντά στο σύνορο της γεωμετρίας που εξετάζεται. Σε ότι αφορά την εξάρτηση από την κλίση της γεωμετρίας του συνόρου για την περίπτωση της ροής γύρω από αεροτομή, η παράμετρος k_{wall} λαμβάνει σημαντικές τιμές μόνο στην περιοχή της ακμής πρόσπτωσης. Ωστόσο σε εκείνη την περιοχή τα μεγέθη του οριακού στρώματος δ^* και ϑ παίρνουν πολύ μικρές τιμές. Αντίθετα, κοντά στην ακμή εκφυγής, όπου τα μεγέθη δ^* και ϑ αυξάνουν σημαντικά, οι κλίσεις της γεωμετρίας είναι σχεδόν μηδενικές. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με την κλίση των γραμμών ροής $\tilde{S}$ οι οποίες καμπυλώνουν σημαντικά καθώς η ροή αποκολλάται πάνω από το στερεό σύνορο. Είναι λοιπόν σαφές ότι σε αποκολλημένες ροές και μέσα στη ζώνη της αποκόλλησης η επίδραση της διαφοράς πίεσης μεταξύ συνεκτικής και ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής μπορεί να είναι σημαντική.

2.1.6 Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος στον ομόρρου

Από την εφαρμογή της εξίσωσης συνέχειας στις δύο πλευρές του ομόρου (σχήμα 2.3), υπό τη μορφή ελλείμματος μεταξύ της πραγματικής και της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής προκύπτει, κατά αναλογία με την υποενότητα 2.1.1:

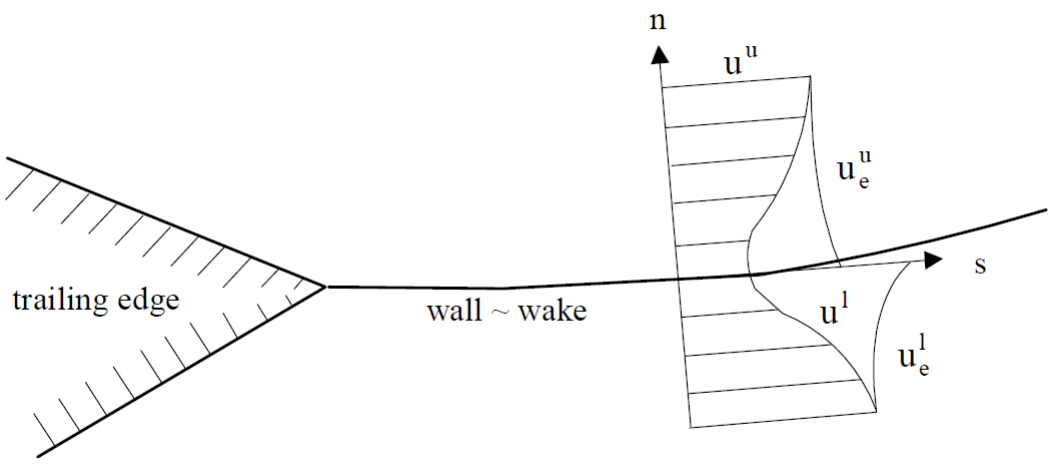
$$\left(\varrho_e v_e^u - \varrho v^u\right)_{wall} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e^u \delta^{*u}\right) \tag{2.50α'}$$

$$-\left(\varrho_e v_e^l - \varrho v^l\right)_{wall} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e^l \delta^{*l}\right) \tag{2.50β'}$$

όπου οι δείκτες (u) και (l) χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν μεγέθη που λαμβάνονται στην πάνω πλευρά του ομόρρου αντίστοιχα και ο δείκτης $wall$ για να δηλώσει μέγεθος υπολογιζόμενο πάνω στη γραμμή του ομόρρου (σχήμα 2.3). Στις παραπάνω σχέσεις έχει υποτεθεί ότι η πυκνότητα του ρευστού ανάμεσα στις δύο πλευρές δε διαφέρει σημαντικά. Αθροίζοντας τις δύο παροχές μάζας λαμβάνεται η συνολική παροχή μάζας στον ομόρρου η οποία είναι:

$$\left(\varrho_e v_e^u - \varrho_e v_e^l\right)_{wall} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e^u \delta^{*u}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e u_e^l \delta^{*l}\right) \tag{2.51}$$

Σε ότι αφορά τις εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας, αυτές επίσης εφαρμόζονται χωριστά για την κάθε πλευρά του ομόρρου, οι δε εκφράσεις που προκύπτουν δε διαφέρουν από αυτές που περιγράφονται από τις σχέσεις (2.15), (2.32). Η μόνη διαφοροποίηση αφορά τον συντελεστή C_f ο οποίος στον ομόρρου μηδενίζεται, και συνεπώς οι όροι που σχετίζονται με αυτόν απαλείφονται.



Σχήμα 2.3: *Οι διανομές ταχυτήτων στο σύνορο της αεροτομής.*

2.1.7 Το εμπειρικό πλαίσιο

Όπως αναφέρθηκε στην υποενότητα 2.1.3 για την επίλυση των εξισώσεων του οριακού στρώματος απαιτείται ο προσδιορισμός των σχέσεων υπολογισμού των παραμέτρων που εμφανίζονται στις εξισώσεις αυτές συναρτήσει των ανεξάρτητων μεταβλητών ϑ και δ^*. Οι παράμετροι που πρέπει να προσδιοριστούν είναι το H^*, το H^{**}, το C_f και το C_D τα οποία γράφονται στη μορφή,

$$\begin{aligned} H^* &= H^*\left(H_k, Re_\vartheta, M_e\right) \\ H^{**} &= H^{**}\left(H_k, M_e\right) \\ C_f &= C_f\left(H_k, Re_\vartheta, M_e\right) \\ C_D &= C_D\left(H_k, Re_\vartheta, M_e\right) \end{aligned} \tag{2.52}$$

όπου $Re_\vartheta = \varrho_e \vartheta u_e / \mu_e$ ο τοπικός αριθμός *Reynolds* ως προς το πάχος ορμής, M_e ο τοπικός αριθμός *Mach* της ροής.

Σύμφωνα με τον *Whitfield (1978)* [38], η παράμετρος H_k (συντελεστής σχήματος για ασυμπίεστη ροή) μπορεί να υπολογιστεί, για αδιαβατικές ροές, από τη σχέση:

$$H_k = \frac{H - 0.290 M_e^2}{1 + 0.113 M_e^2} \tag{2.53}$$

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή σχήματος πυκνότητας H^{**} χρησιμοποιείται η σχέση που έχει προταθεί επίσης από τον *Whitfield (1978)* [38]:

$$H^{**} = \left(\frac{0.064}{H_k - 0.8} + 0.251\right) M_e^2 \tag{2.54}$$

Η παραπάνω σχέση έχει εξαχθεί για τυρβώδεις ροές ωστόσο σύμφωνα με τους *Drela* και *Giles* [39], μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση της στρωτής ροής, καθώς η παράμετρος H^{**} έχει πολύ μικρή σημασία σε διηχητικές και υποηχητικές ροές.

Στρωτή ροή

Σε ότι αφορά το προφίλ ταχύτητας στη στρωτή περιοχή, χρησιμοποιούνται οι μονοπαραμετρικές διανομές ταχύτητας των *Falkner-Skan* [35], μέσω των οποίων οι υπόλοιπες παράμετροι του προβλήματος γράφονται:

$$H^* = \begin{cases} 1.515 + 0.076\frac{(4-H_k)^2}{H_k}, & H_k < 4 \\ 1.515 + 0.040\frac{(H_k-4)^2}{H_k}, & H_k > 4 \end{cases} \tag{2.55}$$

$$Re_\vartheta \frac{C_f}{2} = \begin{cases} -0.067 + 0.01977\frac{(7.4-H_k)^2}{H_k-1}, & H_k < 7.4 \\ -0.067 + 0.022\left(1 - \frac{1.4}{H_k-6}\right)^2, & H_k > 7.4 \end{cases} \tag{2.56}$$

$$Re_\vartheta \frac{2C_D}{H^*} = \begin{cases} 0.207 + 0.00205(4-H_k)^{5.5}, & H_k < 4 \\ 0.207 - 0.003\frac{(H_k-4)^2}{1+0.02(H_k-4)^2}, & H_k > 4 \end{cases} \tag{2.57}$$

Τυρβώδης ροή

Η εμφάνιση της τύρβης έχει ως συνέπεια την ανάπτυξη πολύπλοκων δομών στη ροή, ενώ συγχρόνως σηματοδοτεί και την απαρχή διαμόρφωσης του τριδιάστατου χαρακτήρα της. Επιπλέον, ο συντελεστής διάχυσης C_D αδυνατεί να δοθεί σε κλειστή μορφή, καθώς απαρτίζεται και από τυρβώδεις τάσεις, η μοντελοποίηση των οποίων γίνεται μέσω μίας διαφορικής εξίσωσης, η οποία παίρνει τη θέση της εξίσωσης για τον προσδιορισμό του σημείου μετάβασης της ροής.

Επισημαίνεται ότι ο συντελεστής σχήματος για την ασυμπίεστη ροή H_k, όπως και ο συντελεστής σχήματος πυκνότητας H^{**} δίνονται και για την περίπτωση της τυρβώδους ροής από τις (2.53) και (2.54) αντίστοιχα.

Στα τυρβώδη οριακά στρώματα διακρίνονται δύο περιοχές, ανάλογα με τον κύριο μηχανισμό που ελέγχει τη δομή της ροής. Η πρώτη είναι η εσωτερική περιοχή, όπου η συνεκτικότητα παίζει πρωτεύοντα ρόλο, και η δεύτερη είναι η εξωτερική, όπου κυριαρχεί η επίδραση της τύρβης. Συνεπώς, η κατανομή ταχύτητας σε ένα τυρβώδες οριακό στρώμα παρουσιάζει δύο ανεξάρτητες συνιστώσες.

Σύμφωνα με τον *Swafford (1983)* [40] οι κατακόρυφες διανομές ταχύτητας μέσα σε τυρβώδες οριακό στρώμα, μπορούν να παραμετροποιηθούν από την παρακάτω σχέση,

$$\frac{u}{u_e} = \frac{u_\tau}{u_e}\frac{C_f}{|C_f|}\frac{1}{0.09}\arctan\left(0.09y^+\right) + \left(1 - \frac{u_\tau}{u_e}\frac{C_f}{|C_f|}\frac{\pi}{0.18}\right)\tanh^{1/2}\left[a\left(\frac{n}{\vartheta}\right)^b\right] \tag{2.58}$$

όπου $\frac{u_\tau}{u_e} = \left|\frac{C_f}{2}\right|^{1/2}$ και $y^+ = \frac{\varrho_e u_\tau}{\mu_e}n$, ενώ a και b σταθερές.

Συντελεστής τριβής Για τον προσδιορισμό του συντελεστή τριβής C_f στο στερεό τοίχωμα χρησιμοποιείται η εμπειρική σχέση του *Swafford* [40],

$$F_c C_f = 0.3e^{-1.33H_k}\left[\log_{10}\left(\frac{Re_\vartheta}{F_c}\right)\right]^{-1.74-0.31H_k} + 0.00011\left[\tanh\left(4-\frac{H_k}{0.875}\right)-1\right] \quad (2.59)$$

όπου $F_c = \left(1+0.2M_e^2\right)^{1/2}$ ο συντελεστής συμπιεστότητας [41],

$$C_f = 0.172Re_\vartheta^{-0.268}10^{-0.678H}\left(1+B_1\sqrt{\tan\beta_{wall}\left(s-s_{tr}\right)/c}\right) \quad (2.60)$$

όπου $B_1 = 0.52$ και s_{tr} η απόσταση μεταξύ του σημείου ανακοπής και του σημείου μετάβασης.

Συντελεστής σχήματος κινητικής ενέργειας Οι σχέσεις (2.58) και (2.59) για καθορισμένες τιμές των παραμέτρων Re_ϑ και H_k δίνουν συγκεκριμένες τιμές των σταθερών a και b και επομένως συγκεκριμένη σχέση για τον προσδιορισμό της κατακόρυφης διανομής ταχυτήτων. Έτσι χρησιμοποιώντας κανείς τις δύο παραπάνω σχέσεις και τη σχέση ορισμού της παραμέτρου H^* είναι δυνατό να καταλήξει σε μία συσχέτιση αυτής με τις παραμέτρους Re_ϑ και H_k. Μια τέτοια σχέση προτείνεται από τους *Drela* και *Giles* [39] και είναι η ακόλουθη:

$$H^* = \begin{cases} 1.505 + \frac{4}{Re_\vartheta} + \left(0.165 - \frac{1.6}{Re_\vartheta^{1/2}}\right)\frac{(H_0-H_k)^{1.6}}{H_k} & , H_k < H_0 \\ 1.505 + \frac{4}{Re_\vartheta} + (H_k-H_0)^2\left(\frac{0.04}{H_k} + \frac{0.007\ln Re_\vartheta}{\left(H_k-H_0+\frac{4}{\ln Re_\vartheta}\right)^2}\right) & , H_k > H_0 \end{cases} \quad (2.61)$$

όπου,

$$H_0 = \begin{cases} 4 & , Re_\vartheta < 400 \\ 3 + \frac{4}{Re_\vartheta} & , Re_\vartheta > 400 \end{cases} \quad (2.62)$$

Συντελεστής διάχυσης Ο συντελεστής διάχυσης C_D στην τυρβώδη ροή εκφράζεται ως το σταθμισμένο άθροισμα της συνεισφοράς της διάτμησης λόγω της επαφής του ρευστού με το στερεό σύνορο, η οποία εκφράζεται μέσω του συντελεστή διατμητικής τάσης C_f και της διάτμησης ανάμεσα στα στρώματα του ρευστού, λόγω των τυρβωδών τάσεων *Reynolds*, το μέτρο της οποίας δίνει ο συντελεστής διατμητικής τάσης C_τ. Έτσι ο συντελεστής διάχυσης γράφεται στη μορφή:

$$C_D = \frac{C_f}{2}U_S + C_\tau\left(1-U_S\right) \quad (2.63)$$

όπου U_S είναι μια ισοδύναμη κανονικοποιημένη ταχύτητα ολίσθησης στον τοίχο η οποία σύμφωνα με τους *Drela* και *Giles* [39] ορίζεται από τη σχέση:

$$U_S = \frac{H^*}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{H_k - 1}{H}\right) \tag{2.64}$$

Ο συντελεστής διατμητικής τάσης C_τ, εξαιτίας του γεγονότος ότι οι τάσεις *Reynolds* εμφανίζουν αργή σχετικά απόκριση στην αλλαγή των εξωτερικών συνθηκών (ιδιαίτερα στους χαμηλούς αριθμούς *Reynolds*), δεν είναι δυνατό να γραφτεί ως απ' ευθείας συνάρτηση των τοπικών συνθηκών στη θέση υπολογισμού του. Η υστέρηση στην απόκριση που εμφανίζει ο C_τ προσομοιώνεται μέσω μίας διαφορικής εξίσωσης *(Green et al.)* [42], η οποία αποτελεί μια απλοποιημένη έκφραση της εξίσωσης μεταφοράς των διατμητικών τάσεων των *Bradshaw* και *Ferriss* [43]:

$$\frac{\delta}{C_\tau}\frac{\mathrm{d}C_\tau}{\mathrm{d}s} = 5.6\left(C_{\tau eq}^{1/2} - C_\tau^{1/2}\right) + 2\delta\left\{\frac{4}{3\delta^*}\left[\frac{C_f}{2} - \left(\frac{H_k - 1}{6.7H_k}\right)^2\right] - \frac{1}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}s}\right\} \tag{2.65}$$

Στην παραπάνω εξίσωση δ είναι το πάχος του οριακού στρώματος και $C_{\tau eq}$ ο συντελεστής διάτμησης για οριακό στρώμα σε ισορροπία *(equilibrium boundary layer)* τα οποία δίνονται από τις σχέσεις των *Drela* και *Giles* [39]:

$$\delta = \vartheta \cdot \left(3.15 + \frac{1.72}{H_k - 1}\right) + \delta^* \tag{2.66}$$

$$C_{\tau eq} = H^* \frac{0.015}{1 - U_S}\frac{(H_k - 1)^3}{H_k^2 H} \tag{2.67}$$

2.2 Η ισοδύναμη μη συνεκτική ροή

Στην υποενότητα αυτή δίνονται οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα της μη μόνιμης ασυμπίεστης μη συνεκτικής ροής γύρω από κινούμενη αεροτομή, ενώ ταυτόχρονα παρουσιάζονται και οι διορθώσεις που απαιτούνται, έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη στις εξισώσεις αυτές η επίδραση της συνεκτικότητας. Οι εξισώσεις της μη συνεκτικής ροής σε συνδυασμό με τις εξισώσεις οριακού στρώματος και τις απαραίτητες συνεκτικές διορθώσεις, συνιστούν ένα πρόβλημα συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης, από την επίλυση του οποίου λαμβάνεται η ισοδύναμη προς την πραγματική (ως προς το πεδίο πίεσης γύρω από την αεροτομή), μη συνεκτική ροή *(equivalent inviscid flow)*.

Η διατύπωση που παρουσιάζεται στη συνέχεια βασίζεται στη θεώρηση ότι το πεδίο ροής είναι παντού αστρόβιλο εκτός από συγκεκριμένες καμπύλες οι οποίες αποτελούν και το σύνορο του προβλήματος. Οι καμπύλες αυτές, στις οποίες διανέμεται ιδιόμορφα η στροβιλότητα, είναι το σύνορο της αεροτομής και η γραμμή (φύλλο στροβιλότητας) που εκφεύγει από την ακμή εκφυγής και σχηματίζει τον ομόρρου, η οποία θεωρείται επιπλέον και γραμμή

ασυνέχειας της εφαπτομενικής ταχύτητας.

Έστω S το σύνορο της αεροτομής και D το εξωτερικό χωρίο της αεροτομής (σχήμα 2.4) που αποτελεί και το πεδίο ροής. Το πεδίο ταχύτητας της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής $\vec{u}_e(\cdot;t)$ προκύπτει ως επαλληλία των πεδίων ταχύτητας της αμιγώς μη συνεκτικής ροής $\vec{u}(\cdot;t)$ και της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης $\vec{u}^*(\cdot;t)$

$$\vec{u}_e(\vec{x};t) = \vec{u}(\vec{x};t) + \vec{u}^*(\vec{x};t),\ \vec{x} \in D \tag{2.68}$$

Συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αποτελούν οι κάτωθι σχέσεις:

$$\lim_{\vec{x}\to\infty} \vec{u}(\vec{x};t) = \vec{U}_\infty(t) \tag{2.69}$$

$$\left(\vec{u}_e\left(\vec{x};t\right) - \vec{U}_b\left(\vec{x};t\right)\right) \cdot \vec{\nu}(\vec{x};t) = \vec{u}_e(\vec{x};t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x};t) = \left(\bar{v}_e\right)_{wall} \tag{2.70}$$

όπου $\vec{U}_\infty(t)$ η επ' άπειρον ταχύτητα του ρευστού,

$$\vec{U}_b = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_{OP}}{\mathrm{d}t} + \Omega \cdot \left(\vec{k} \times \vec{x}\right),\ \vec{x} \in S \tag{2.71}$$

η ταχύτητα κίνησης της αεροτομής εκφρασμένη ως προς το γεώδετο σύστημα συντεταγμένων $O_G X_G Y_G$, $\vec{k}$ το κάθετο στο διδιάστατο πεδίο διάνυσμα και $\vec{\nu}(\cdot;t)$ το κάθετο διάνυσμα στην S (σχήμα 2.4). Η πρώτη από τις δύο συνθήκες εκφράζει το μηδενισμό των ταχυτήτων διαταραχής της αμιγώς μη συνεκτικής ροής στο άπειρο, ενώ η δεύτερη εισάγει την κάθετη ταχύτητα που επιβάλλεται στην S ώστε η μη συνεκτική ροή να είναι ισοδύναμη προς τη συνεκτική ροή σε ότι αφορά την παροχή μάζας του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα. Αποτελεί επομένως μία τροποποιημένη συνθήκη μη εισχώρησης η οποία αναλύεται στις ακόλουθες ξεχωριστές συνοριακές συνθήκες για κάθε ένα από τα πεδία $\vec{u}(\cdot;t)$ και $\vec{u}^*(\cdot;t)$,

$$\vec{u}(\vec{x};t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x};t) = \vec{U}_b(\vec{x};t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x};t) \tag{2.72}$$

$$\vec{u}^*(\vec{x};t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x};t) = \left(\bar{v}_e\right)_{wall} \tag{2.73}$$

όπου έχει γίνει η υπόθεση ότι για μεν το αμιγώς μη συνεκτικό πεδίο $\vec{u}(\cdot;t)$ επαληθεύεται η συνθήκη μη εισχώρησης, το δε πεδίο $\vec{u}^*(\cdot;t)$ προκύπτει ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (2.6).

Επιπλέον, θεωρείται S_w η επιφάνεια του φύλλου στροβιλότητας που εκφεύγει από την ακμή εκφυγής και $\vec{x}_w$ ένα τυχαίο σημείο πάνω σε αυτήν. Με $\vec{\nu}_w(\cdot,t)$ συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα και με $\xi_w(t)$ η παράμετρος μήκους του φύλλου στροβιλότητας. Η κινηματική συνθήκη που περιγράφει την εξέλιξη του ομόρρου είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\mathrm{D}\vec{x}_w(\xi_w;t)}{\mathrm{D}t} = \vec{u}_e(\vec{x}_w;t), \quad \vec{x}_w \in S_w \tag{2.74}$$

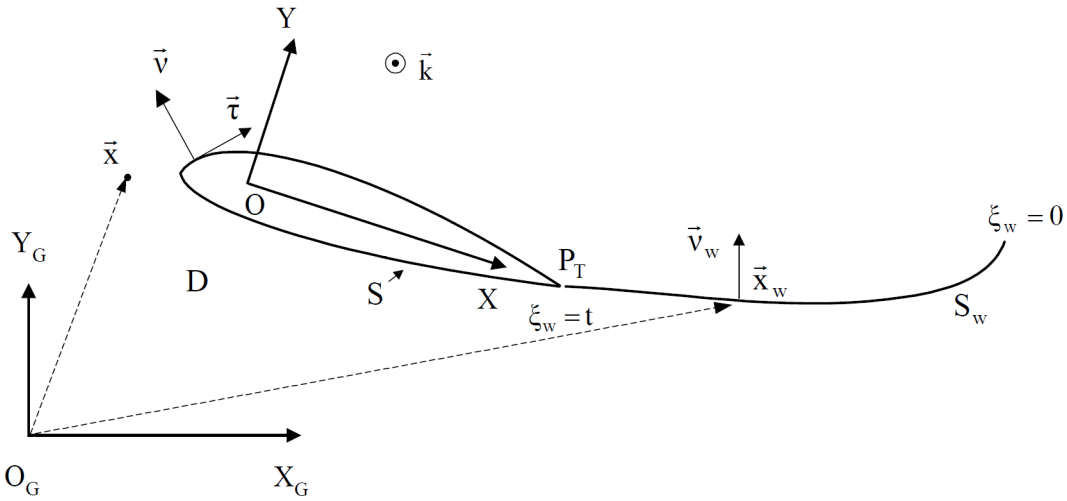
που σημαίνει ότι τα σημεία της επιφάνειας του φύλλου στροβιλότητας είναι υλικά σημεία κινούμενα ελεύθερα με την ταχύτητα του πεδίου ροής.

Οι δυναμικές συνθήκες που συμπληρώνουν το πρόβλημα είναι η συνθήκη *Kelvin*,

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{2.75}$$

η οποία εκφράζει την υλική διατήρηση της κυκλοφορίας Γ γύρω από την αεροτομή, και η συνθήκη μηδενικού "πηδήματος" πίεσης στην ακμή εκφυγής:

$$[\![p]\!]_{\xi_w=t} = 0 \tag{2.76}$$



Σχήμα 2.4: *Βασικοί συμβολισμοί του προβλήματος.[44]*

2.2.1 Οι εξισώσεις της αμιγώς μη συνεκτικής ροής

Σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού του *Helmholtz* κάθε πεδίο ταχύτητας $\vec{u}(\cdot;t)$ αναλύεται σε άθροισμα ενός αστρόβιλου πεδίου $\vec{u}_\Delta(\cdot;t)$ και ενός στροβιλού πεδίου $\vec{u}_\omega(\cdot;t)$ μηδενικής απόκλισης:

$$\vec{u}(\vec{x};t) = \vec{U}_\infty(t) + \vec{u}_\Delta(\vec{x};t) + \vec{u}_\omega(\vec{x};t) = \vec{U}_\infty(t) + \nabla\varphi(\vec{x};t) + \nabla\times(\psi(\vec{x};t)\cdot\vec{k}) \ , \quad \vec{x}\in D \tag{2.77}$$

όπου $\varphi(\cdot;t)$ το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου ροής, $\psi(\cdot;t)$ η ροϊκή συνάρτηση του σωληνοειδούς πεδίου. Θεωρώντας ροή ασυμπίεστη (ή χαμηλών υποηχητικών ταχυτήτων), προκύπτει ότι το δυναμικό και η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\nabla^2\varphi(\vec{x};t) = \nabla\vec{u}_\Delta(\vec{x};t) = 0 \ , \quad \vec{x}\in D \tag{2.78}$$

$$\nabla^2\psi(\vec{x};t)\cdot\vec{k} = \nabla\times\vec{u}_\omega(\vec{x};t) = -\omega(\vec{x};t)\cdot\vec{k} \ , \quad \vec{x}\in D \tag{2.79}$$

όπου $\omega(\cdot;t)$ το πεδίο στροβιλότητας του πεδίου ροής D.

Οι συνοριακές συνθήκες για τον προσδιορισμό των αγνώστων αυτών πεδίων είναι η συνθήκη μηδενισμού των ταχυτήτων διαταραχής στο άπειρο (2.69),

$$\lim_{\vec{x}\to\infty} \nabla\varphi(\vec{x};t) = 0 \tag{2.80}$$

$$\lim_{\vec{x}\to\infty} \nabla \times \left(\psi(\vec{x};t)\cdot\vec{k}\right) = 0 \tag{2.81}$$

και η συνθήκη μη εισχώρησης (2.72),

$$\vec{u}(\vec{x};t)\cdot\vec{\nu}(\vec{x};t) = \vec{U}_b(\vec{x};t)\cdot\vec{\nu}(\vec{x};t) \tag{2.82}$$

Από την εφαρμογή της δεύτερης ταυτότητας του *Green* στις εξισώσεις (2.78) και (2.79) λαμβάνεται η ολοκληρωματική αναπαράσταση του δυναμικού $\varphi(\cdot;t)$ και της ροϊκής συνάρτησης διαταραχής $\psi(\cdot;t)$ στην τυχαία θέση $\vec{x}_0$ του πεδίου ροής D. Η αναπαράσταση των δύο πεδίων βασίζεται στη διατύπωση πηγών για το δυναμικό και στροβιλότητας για τη ροϊκή συνάρτηση *(Ριζιώτης (1994))* [45] αντίστοιχα και είναι η ακόλουθη:

$$\varphi(\vec{x}_0;t) = \int_S \left[\!\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right]\!\right](\vec{x};t)\cdot G(\vec{x}_0-\vec{x})\,\mathrm{d}S(\vec{x}) \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}_0;t) = &\int_S \left[\!\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right]\!\right](\vec{x};t)\cdot G(\vec{x}_0-\vec{x})\,\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_{S_w} \left[\!\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right]\!\right]_w(\vec{x};t)\cdot G(\vec{x}_0-\vec{x})\,\mathrm{d}S_w(\vec{x})\end{aligned} \tag{2.84}$$

όπου στις (2.83) και (2.84), $G(\cdot)$ είναι η συνάρτηση *Green*, η οποία στις δύο διαστάσεις γράφεται:

$$G(\vec{x}_0-\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}_0-\vec{x}| \tag{2.85}$$

Στην (2.83), το $[\![\partial\varphi/\partial\nu]\!](\cdot;t)$ εκφράζει "πήδημα" κάθετης ταχύτητας στην επιφάνεια της αεροτομής και αναπαριστά μία διανομή πηγών $\sigma(\cdot;t)$ κατά μήκος της S,

$$\sigma(\vec{x};t) = \left[\!\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right]\!\right](\vec{x};t)\ , \quad \vec{x}\in S \tag{2.86}$$

Στην (2.84) τα $[\![\partial\psi/\partial\nu]\!](\cdot;t)$ και $[\![\partial\psi/\partial\nu]\!]_w(\cdot;t)$ εκφράζουν το "πήδημα" της εφαπτομενικής ταχύτητας στην επιφάνεια της αεροτομής και κατά μήκος του ομόρρου και αναπαριστούν

διανομές στροβιλότητας $\gamma(\cdot;t)$ και $\gamma_w(\cdot;t)$ κατά μήκος των S και S_w αντίστοιχα.

$$\gamma(\vec{x};t) = \left[\!\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right]\!\right](\vec{x};t)\ , \quad \vec{x}\in S \tag{2.87}$$

$$\gamma_w(\vec{x};t) = \left[\!\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right]\!\right]_w(\vec{x};t)\ , \quad \vec{x}\in S_w \tag{2.88}$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η (2.83) προκύπτει με την υπόθεση ότι ο ομόρρους στη μη συνεκτική ροή αποτελεί γραμμή ασυνέχειας της εφαπτομενικής ταχύτητας μόνο, και ότι το "πήδημα" της κάθετης ταχύτητας πάνω σε αυτόν είναι μηδέν. Σε αντίθετη περίπτωση η παροχή ρευστού θα ήταν κάθετη στην καμπύλη S_w, γεγονός που παραβιάζει την αρχή διατήρησης της μάζας. Έτσι, με βάση την παρατήρηση αυτή, λαμβάνονται μηδενικές πηγές πάνω στην S_w. Επίσης η (2.84) λαμβάνεται με την υπόθεση ότι το πεδίο ροής είναι αστρόβιλο με κυκλοφορία (ιδιόμορφα στροβιλό). Αυτό σημαίνει ότι η στροβιλότητα διανέμεται πάνω σε συγκεκριμένες γραμμές του πεδίου D έτσι ώστε να ισχύει ότι $\omega(\cdot;t)=0$.

Από τα δύο πεδία διαταραχής $\varphi(\cdot;t)$ και $\psi(\cdot;t)$ παίρνοντας την κλίση (*gradient*) και την περιστροφή (*rotation*) αντίστοιχα προκύπτει η αμιγώς μη συνεκτική ταχύτητα διαταραχής $\vec{u}(\cdot;t)$. Παραγωγίζοντας ως προς κάποιο σημείο του χώρου $\vec{x}_0$ τα πεδία $\varphi(\cdot;t)$ και $\psi(\cdot;t)$ προκύπτει:

$$\nabla_0\varphi(\vec{x}_0;t) = \int_S \sigma(\vec{x};t)\cdot\nabla_0\left(\frac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}_0-\vec{x}|\right)\mathrm{d}S(\vec{x}) = \int_S \sigma(\vec{x};t)\frac{\vec{x}_0-\vec{x}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x}) \tag{2.89}$$

$$\begin{aligned}\nabla_0\times\psi(\vec{x}_0;t) &= \int_S \gamma(\vec{x};t)\cdot\nabla_0\times\left(\frac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}_0-\vec{x}|\right)\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_{S_w}\gamma_w(\vec{x};t)\cdot\nabla_0\times\left(\frac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}_0-\vec{x}|\right)\mathrm{d}S_w(\vec{x})\\ &=\int_S \gamma(\vec{x};t)\frac{(\vec{x}_0-\vec{x})\times\vec{k}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_{S_w}\gamma_w(\vec{x};t)\frac{(\vec{x}_0-\vec{x})\times\vec{k}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S_w(\vec{x})\end{aligned} \tag{2.90}$$

όπου ο δείκτης (0) στον τελεστή ∇ υποδηλώνει παραγώγιση ως προς $\vec{x}_0$.

Θέτοντας τις (2.89) και (2.90) στη συνθήκη μη εισχώρησης (2.82) λαμβάνεται η ακόλουθη

ολοκληρωματική συνθήκη για το τυχαίο σημείο $\vec{x}_0 \in S$:

$$\int_S \sigma(\vec{x};t)\cdot\vec{\nu}_0\cdot\frac{\vec{x}_0-\vec{x}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x}) + \int_S \gamma(\vec{x};t)\cdot\vec{\nu}_0\cdot\frac{(\vec{x}_0-\vec{x})\times\vec{k}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x})$$
$$+\int_{S_w}\gamma_w(\vec{x};t)\cdot\vec{\nu}_0\cdot\frac{(\vec{x}_0-\vec{x})\times\vec{k}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S_w(\vec{x}) = \left(\vec{U}_b\left(\vec{x}_0;t\right)-\vec{U}_\infty\right)\cdot\vec{\nu}_0 \tag{2.91}$$

όπου $\vec{\nu}_0$ το κάθετο διάνυσμα στη θέση $\vec{x}_0$ της επιφάνειας της αεροτομής.

Η παραπάνω εξίσωση που ισχύει για την αμιγώς μη συνεκτική ροή, έχει ως αγνώστους τη διανομή πηγών $\sigma(\cdot;t)$ πάνω στην αεροτομή και τις διανομές στροβιλότητας $\gamma(\cdot;t)$ και $\gamma_w(\cdot;t)$ πάνω στην αεροτομή και τον ομόρρου αντίστοιχα. Το πρόβλημα της αμιγώς μη συνεκτικής ροής, συμπληρώνεται από την εξίσωση που αφορά την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης $\vec{u}^*(\cdot;t)$, για να δώσει την ισοδύναμη μη συνεκτική ροή $\vec{u}_e(\cdot;t)$.

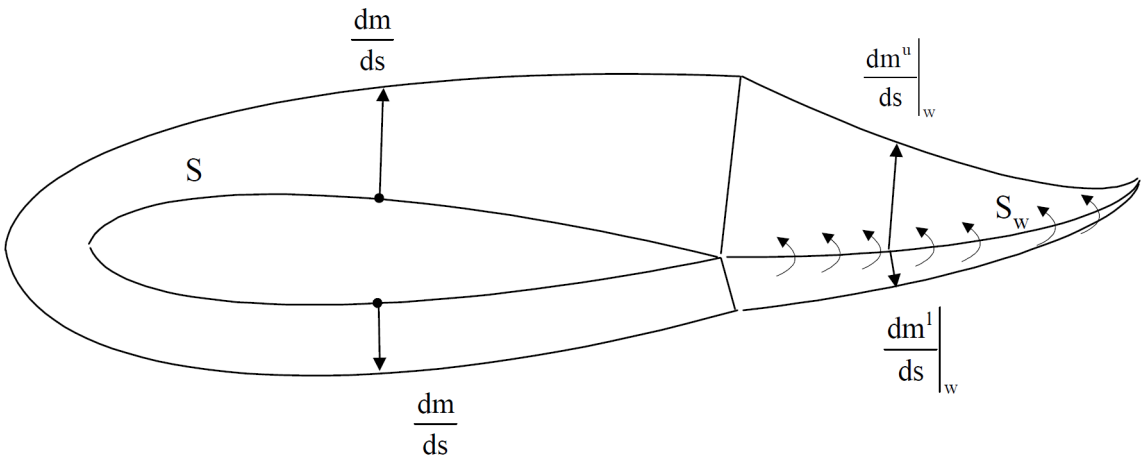
2.2.2 Η ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης

Η εξίσωση για την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης $\vec{u}^*(\cdot;t)$ λαμβάνεται από την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (2.73), όπου η κάθετη ταχύτητα στο σύνορο της αεροτομής και το "πήδημα" αυτής στον ομόρρου με βάση τις (2.6) και (2.51) δίνεται από τις:

$$u^*_\nu(\vec{x};t) = (\bar{v}_e)_{wall} = \frac{1}{\varrho_e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e\bar{u}_e\delta^*\right) \cong \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} \tag{2.92}$$

$$[\![u^*_\nu(\vec{x};t)]\!]_w = [\![\bar{v}_e]\!]_w = \left(\bar{v}^u_e-\bar{v}^l_e\right)_{wall} = \frac{1}{\varrho_e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e\bar{u}^u_e\delta^{*u}\right)+\frac{1}{\varrho_e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\varrho_e\bar{u}^l_e\delta^{*l}\right) \cong \frac{\mathrm{d}m^u}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}m^l}{\mathrm{d}s} \tag{2.93}$$

όπου $m = \bar{u}_e\delta^*$, $m^u = \bar{u}^u_e\delta^{*u}$ και $m^l = \bar{u}^l_e\delta^{*l}$ (σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: *Η διανομή κάθετης ταχύτητας στην αεροτομή και τον ομόρρου.[44]*

Η ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης $\vec{u}^*(\cdot;t)$, σε κάποιο σημείο $\vec{x}_0$ του πεδίου D, δίνεται

από την ακόλουθη ολοκληρωματική αναπαράσταση:

$$\begin{aligned}\vec{u}^*(\vec{x}_0;t) = &\int_S \vec{u}^*(\vec{x};t)\cdot\vec{\tau}(\vec{x};t)\cdot\frac{(\vec{x}_0-\vec{x})\times\vec{k}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_S \vec{u}^*(\vec{x};t)\cdot\vec{\nu}(\vec{x};t)\cdot\frac{(\vec{x}_0-\vec{x})\times\vec{k}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_{S_w} [\![\vec{u}^*(\vec{x};t)\cdot\vec{\nu}(\vec{x};t)]\!]_w\cdot\frac{(\vec{x}_0-\vec{x})\times\vec{k}}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S_w(\vec{x})\end{aligned} \tag{2.94}$$

όπου $\vec{\tau}(\cdot;t)$ το εφαπτομενικό διάνυσμα σε κάποιο σημείο της S.

Η συνθήκη (2.94) προκύπτει με παραγώγιση ενός δυναμικού διαταραχής $\varphi^*(\cdot;t)$, του οποίου η αναπαράσταση δίνεται από την άμεση διατύπωση (μέσω της δεύτερης ταυτότητας του *Green*):

$$\vec{u}^*(\vec{x}_0;t) = \nabla_0\varphi^*(\vec{x}_0;t) \tag{2.95}$$

$$\varphi^*(\vec{x}_0;t) = \int_{S+S_w}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu}(\vec{x};t)\cdot G(\vec{x}_0-\vec{x})\,\mathrm{d}S(\vec{x}) - \int_{S+S_w}\varphi^*(\vec{x};t)\cdot\frac{\partial G}{\partial\nu}(\vec{x}_0-\vec{x})\,\mathrm{d}S(\vec{x}) \tag{2.96}$$

όπου ο δείκτης (0) στον τελεστή ∇ υποδηλώνει παραγώγιση ως προς $\vec{x}_0$.

Στην αναπαράσταση (2.94) η ταχύτητα σε κάθε σημείο του πεδίου ροής εκφράζεται συναρτήσει της εφαπτομενικής και κάθετης διανομής της πάνω στο σύνορο της αεροτομής και του "πηδήματος" της κάθετης διανομής στον ομόρρου. Στον ομόρρου υποτίθεται ότι η εφαπτομενική συνιστώσα της $\vec{u}^*$ δεν παρουσιάζει ασυνέχεια, ότι δηλαδή η ασυνέχεια εφαπτομενικής ταχύτητας στον ομόρρου οφείλεται αποκλειστικά στη στροβιλότητα γ_w του μη συνεκτικού πεδίου ταχύτητας.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (2.94) για κάποιο σημείο $\vec{x}_0$ της S και προβάλλοντας την ταχύτητα στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{\tau}_0$ της S, στο συγκεκριμένο σημείο $\vec{x}_0$ προκύπτει:

$$\begin{aligned}\vec{u}^*_\tau(\vec{x}_0;t) = &\int_S \vec{u}^*_\tau(\vec{x};t)\cdot\frac{\vec{\nu}_0\cdot(\vec{x}_0-\vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_S \vec{u}^*_\nu(\vec{x};t)\cdot\frac{\vec{\tau}_0\cdot(\vec{x}_0-\vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_{S_w} [\![\vec{u}^*_\nu(\vec{x};t)]\!]_w\cdot\frac{\vec{\tau}_0\cdot(\vec{x}_0-\vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S_w(\vec{x})\end{aligned} \tag{2.97}$$

όπου $u^*_\nu(\cdot;t) = \vec{u}^*(\cdot;t)\cdot\vec{\nu}(\cdot;t)$ η κάθετη και $u^*_\tau(\cdot;t) = \vec{u}^*(\cdot;t)\cdot\vec{\tau}(\cdot;t)$ η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας. Η (2.97) αποτελεί μία ολοκληρωματική εξίσωση, που δίνει την εφαπτομενική ταχύτητα στο τυχαίο σημείο της S, ως συνάρτηση μιας διανομής κάθετων ταχυτήτων στην επιφάνεια της αεροτομής και στον ομόρρου. Η επίλυση της (2.97), με τη χρήση

της συνοριακής συνθήκης (2.73), δίνει την επιπλέον διανομή της εφαπτομενικής ταχύτητας στην S, η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της παροχής μάζας από το σύνορο (2.6) και τον ομόρρου (2.51) στην περίπτωση της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής.

Θέτοντας τις (2.92) και (2.93) στην (2.97) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\vec{u}_\tau^*(\vec{x}_0;t) = &\int_S \vec{u}_\tau^*(\vec{x};t)\cdot\frac{\vec{\nu}_0\cdot(\vec{x}_0-\vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_S \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}(\vec{x};t)\cdot\frac{\vec{\tau}_0\cdot(\vec{x}_0-\vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x})\\ &+\int_{S_w} \frac{\mathrm{d}\left(m^u+m^l\right)}{\mathrm{d}s}(\vec{x};t)\cdot\frac{\vec{\tau}_0\cdot(\vec{x}_0-\vec{x})}{2\pi|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S_w(\vec{x})\end{aligned} \tag{2.98}$$

Η συνθήκη (2.98) καθορίζει την εφαπτομενική στο σύνορο της αεροτομής συνιστώσα της $\vec{u}^*(\cdot;t)$ έτσι ώστε η κάθετη συνιστώσα αυτής στην αεροτομή και τον ομόρρου να ικανοποιεί τις (2.92) και (2.93).

Η αναπαράσταση του πεδίου $\vec{u}^*(\cdot;t)$ καθορίζει το νόμο αλληλεπίδρασης μεταξύ του συνεκτικού και του μη συνεκτικού προβλήματος. Η ολοκληρωματική αναπαράσταση που ορίζεται από την (2.94) διευκολύνει σημαντικά τη σύγκλιση των εξισώσεων του οριακού στρώματος, εντός της αποκολλημένης περιοχής, σε περιπτώσεις όπου εμφανίζεται ισχυρή αποκόλληση της ροής.

2.2.3 Η συνθήκη *Kutta* στην ακμή εκφυγής και η συνθήκη *Kelvin*

Η εφαρμογή της εξίσωσης *Bernoulli* για δύο σημεία στην περιοχή της ακμής εκφυγής P_T, όπου το μεν πρώτο βρίσκεται στην πάνω πλευρά της αεροτομής, το δε δεύτερο στην κάτω (σχήμα 2.6), δίνει:

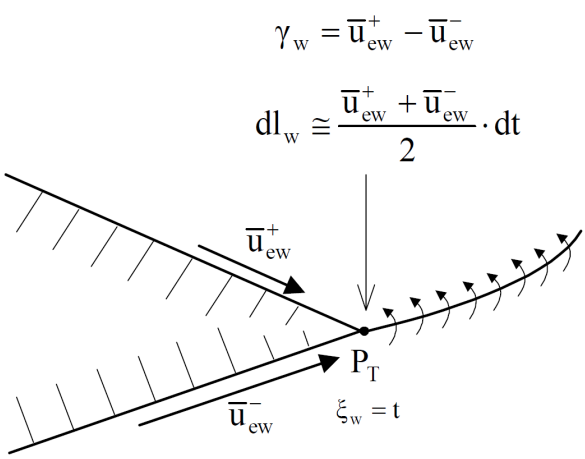
$$\frac{\partial\Phi_w^+}{\partial t}+\frac{p_w^+}{\varrho}+\frac{\vec{u}_{ew}^{+2}}{2}-\frac{\vec{U}_{bw}^{+2}}{2}=\frac{\partial\Phi_w^-}{\partial t}+\frac{p_w^-}{\varrho}+\frac{\vec{u}_{ew}^{-2}}{2}-\frac{\vec{U}_{bw}^{-2}}{2} \tag{2.99}$$

όπου με $+$ συμβολίζονται τα μεγέθη που αφορούν το σημείο της πάνω πλευράς και με $-$ της κάτω. Επίσης, Φ είναι το συνολικό δυναμικό της ροής (με βάση τον ορισμό $\vec{u}_e=\nabla\Phi$) και $\vec{u}_e$ είναι η σχετική ταχύτητα της ροής στην επιφάνεια της αεροτομής ($\vec{u}_e=\vec{u}_e-\vec{U}_b$). Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας της πίεσης (2.76) προκύπτει:

$$\frac{\vec{u}_{ew}^{-2}}{2}-\frac{\vec{u}_{ew}^{+2}}{2}=\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_w^+-\Phi_w^-) \tag{2.100}$$

Η χρονική παράγωγος του δεύτερου μέλους εκφράζει τη χρονική μεταβολή της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή αφού,

$$\Gamma=\Phi_w^+-\Phi_w^- \tag{2.101}$$



Σχήμα 2.6: *Η εφαρμογή της συνθήκης Kutta στην ακμή εκφυγής.[44]*

Με τη διαπίστωση αυτή, η (2.100) γίνεται,

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = (\bar{u}^+_{ew} - \bar{u}^-_{ew})\frac{\bar{u}^+_{ew} + \bar{u}^-_{ew}}{2} \tag{2.102}$$

όπου $\bar{u}_e = \vec{\bar{u}}_e \cdot \vec{\tau}$.

Η παραπάνω σχέση δίνει την έκφραση του ρυθμού μεταβολής της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή. Όμως σύμφωνα με τη συνθήκη του *Kelvin* (2.75) ο ρυθμός μεταβολής της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή, είναι ίσος και αντίθετος με το ρυθμό παραγωγής στροβιλότητας στον ομόρρου. Δηλαδή,

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \gamma_w(\vec{x}_w(\xi_w;\xi_w);\xi_w)\frac{\mathrm{d}l_w}{\mathrm{d}t} \tag{2.103}$$

όπου l_w το μήκος του παραγόμενου ομόρρου. Αν όμως ληφθεί υπόψιν ότι ισχύει,

$$\frac{\mathrm{d}l_w}{\mathrm{d}t} \cong \frac{\bar{u}^+_{ew} + \bar{u}^-_{ew}}{2} \tag{2.104}$$

από τις (2.102) και (2.103) άμεσα προκύπτουν οι συνθήκες για την ένταση της παραγόμενης στροβιλότητας ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του *Kelvin*.

$$\gamma_w(\vec{x}_w(\xi_w;\xi_w);\xi_w) = \bar{u}^+_{ew} - \bar{u}^-_{ew} \tag{2.105}$$

Σε ότι αφορά την εξέλιξη της στροβιλότητας στον ομόρρου, από τη στιγμή που αυτή παράγεται, σύμφωνα με το θεώρημα του *Helmholtz*, διατηρείται υλικά. Έτσι, στο οποιοδήποτε σημείο του ομόρρου ισχύει,

$$\gamma_w\left(\vec{x}_w(\xi_w;t);t\right) = \gamma_w\left(\vec{x}_w(\xi_w;\xi_w);\xi_w\right) \tag{2.106}$$

η δε κινηματική του ομόρρου περιγράφεται από τη συνθήκη (2.74).

Σε ότι αφορά στις γωνίες αποβολής στην ακμή εκφυγής το φύλλο στροβιλότητας εκφεύγει εφαπτομενικά προς την κάτω πλευρά της αεροτομής αν η κυκλοφορία γύρω από αυτή είναι θετική και εφαπτομενικά προς την πάνω αν είναι αρνητική. Η παραπάνω υπόθεση διατυπώθηκε από τους *Basu* και *Hancock* [46] και συνδέεται με το γεγονός ότι στην ακμή εκφυγής και στο πλαίσιο μιας δυναμικής θεώρησης της ροής παρατηρείται εμφάνιση σημείου ανακοπής της ταχύτητας στην πάνω πλευρά της αεροτομής όταν η κυκλοφορία είναι θετική και στην κάτω όταν είναι αρνητική με αποτέλεσμα το φύλλο στροβιλότητας να εκφεύγει εφαπτομενικά προς την αντίθετη πλευρά από αυτήν που η ταχύτητα μηδενίζεται.

2.3 Συνεκτική-μη συνεκτική αλληλεπίδραση: το διακριτό πρόβλημα

Στην παρούσα ενότητα γίνεται μία συνοπτική περιγραφή του αλγόριθμου επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης, αφού προηγουμένως παρουσιαστεί το πρόβλημα σε διακριτή μορφή *Ριζιώτης*[44].

2.3.1 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας

Η αεροτομή χωρίζεται σε N το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα $\Delta S^i,\ i = 1, N$ τα οποία ορίζουν $N+1$ σημεία πάνω σε αυτήν, τους κόμβους $\vec{x}_g^I(x_g^I, y_g^I),\ I = 1, N+1$. Η αρίθμηση των κόμβων και των τμημάτων ξεκινά από την κάτω πλευρά της αεροτομής, και από την ακμή εκφυγής, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7. Πάνω σε κάθε τμήμα ΔS^i της αεροτομής ορίζεται το μέσο του $\vec{x}_{cp}^i(x_{cp}^i, y_{cp}^i),\ i = 1, N$ το οποίο αποτελεί σημείο ελέγχου για την ικανοποίηση των διακριτών εξισώσεων, και το κάθετο και εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{\nu}^i$ και $\vec{\tau}^i$ αντίστοιχα. Πιο πυκνή διακριτοποίηση λαμβάνεται στην ακμή πρόσπτωσης και την ακμή εκφυγής, στη μεν πρώτη διότι οι κλίσεις των ταχυτήτων είναι μεγάλες, στη δε δεύτερη για την καλύτερη προσέγγιση των ταχυτήτων εκφυγής και επομένως των μεγεθών στον ομόρρου.

Πάνω στο φύλλο του ομόρρου λαμβάνονται N_w το πλήθος τμήματα με μήκη $\Delta S_w^{i_w}$, $i_w = 1, N_w$. Τα τμήματα αυτά ορίζουν τους κόμβους του πλέγματος του ομόρρου $\vec{x}_{gw}^{I_w}$, $I_w = 1, N_w+1$, η αρίθμηση των οποίων ξεκινά από το σημείο εκφυγής του φύλλου. Για κάθε τμήμα ορίζεται το μέσο του $\vec{x}_{cpw}^{i_w}$, $i_w = 1, N_w$ (σημείο ελέγχου) και το κάθετο και εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{\nu}_w^{i_w}$ και $\vec{\tau}_w^{i_w}$ αντίστοιχα. Πιο πυκνή διακριτοποίηση λαμβάνεται στο τμήμα του ομόρρου που βρίσκεται κοντά στο σημείο εκφυγής, καθώς σε αυτήν την περιοχή η κλίση των διαφόρων μεγεθών είναι μεγαλύτερη.

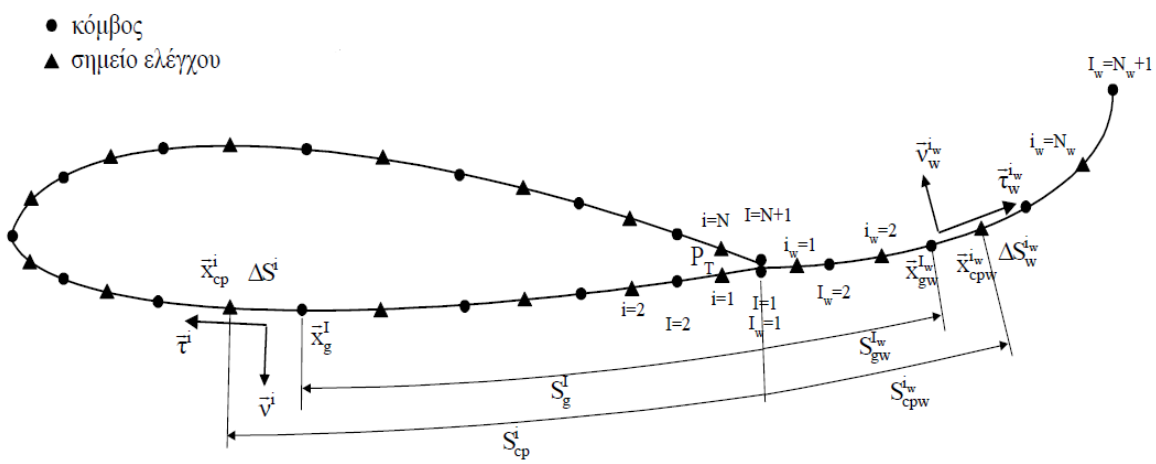
Επιπλέον πάνω στην αεροτομή και στο φύλλο του ομόρρου ορίζεται μία παράμετρος μήκους S, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7. Η τιμή αυτής της παραμέτρου για τον εκάστοτε κόμβο της αεροτομής δίνεται από τη σχέση:

$$S_g^I = \sum_{m=1}^{I-1} \Delta S^m = \sum_{m=1}^{I-1} \sqrt{\left(y_g^{m+1} - y_g^m\right)^2 + \left(x_g^{m+1} - x_g^m\right)^2}\ , \quad I = 1, N+1 \tag{2.107}$$

ενώ για τα σημεία ελέγχου:

$$S_{cp}^{i} = \sum_{m=1}^{i-1} \Delta S^{m} + \frac{\Delta S^{i}}{2} = \sum_{m=1}^{i-1} \sqrt{\left(y_{g}^{m+1} - y_{g}^{m}\right)^{2} + \left(x_{g}^{m+1} - x_{g}^{m}\right)^{2}} + \sqrt{\left(y_{cp}^{i} - y_{g}^{i}\right)^{2} + \left(x_{cp}^{i} - x_{g}^{i}\right)^{2}}, \quad i = 1, N \tag{2.108}$$

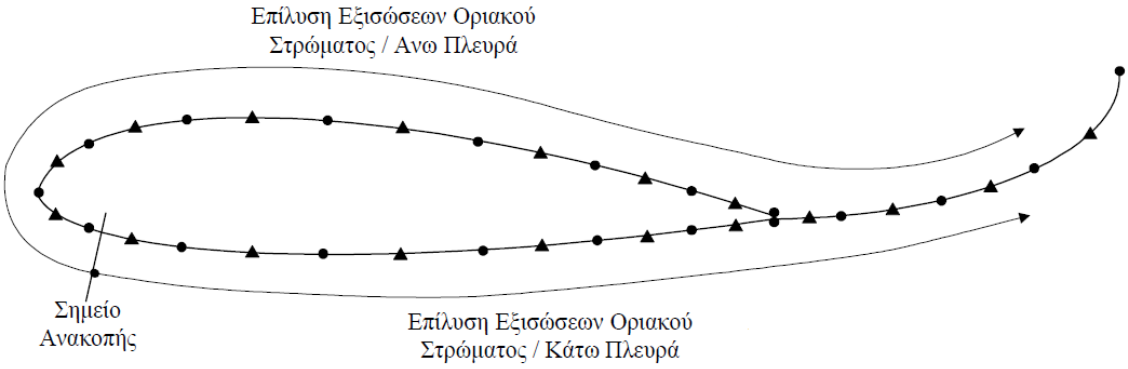
Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η παράμετρος μήκους για τους κόμβους $S_{gw}^{I_w}$, $I_w = 1, N_w + 1$ και τα σημεία ελέγχου $S_{cpw}^{i_w}$, $i_w = 1, N_w$ στον ομόρρου.



Σχήμα 2.7: *Διακριτοποίηση της γεωμετρίας.[44]*

2.3.2 Διακριτοποίηση των εξισώσεων του οριακού στρώματος

Οι διαφορικές εξισώσεις του οριακού στρώματος διακριτοποιούνται με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών, και επιλύονται στην επιφάνεια της αεροτομής και στον ομόρρου. Η επίλυση τους ξεκινά από το σημείο ανακοπής και οδεύει ξεχωριστά, κατά μήκος της πάνω και της κάτω πλευράς της αεροτομής, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.8. Οι εξισώσεις λύνονται μέχρι την ακμή εκφυγής και για τις δύο πλευρές της αεροτομής, και στη συνέχεια στην πάνω και την κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας. Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.1 βασικοί άγνωστοι είναι το πάχος μετατόπισης δ^* και το πάχος ορμής ϑ. Επιπλέον άγνωστοι είναι, για μεν την περιοχή της στρωτής ροής ο συντελεστής ενίσχυσης $\tilde{n}$ για δε την τυρβώδη ροή ο συντελεστής διάτμησης C_τ. Η τριάδα των παραπάνω μεγεθών υπολογίζεται στα σημεία ελέγχου της αεροτομής και του ομόρρου. Τα υπόλοιπα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις εκφράζονται συναρτήσει των βασικών αγνώστων, σύμφωνα με τις σχέσεις που παρουσιάστηκαν στην υποενότητα 2.1.7 ενώ η ταχύτητα υπολογίζεται από την επίλυση της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής.



Σχήμα 2.8: *Περιοχές επίλυσης οριακού στρώματος.[44]*

Η εξίσωση της συνέχειας

Η κάθετη ταχύτητα σε μορφή διαφορών γράφεται (σχήμα 2.9):

$$dm = \int \bar{v}_e \, \mathrm{d}s \rightarrow m^i - m^{i-1} = \frac{\bar{v}_e^{i-1} + \bar{v}_e^I}{2} \frac{\Delta S^{i-1}}{2} + \frac{\bar{v}_e^I + \bar{v}_e^i}{2} \frac{\Delta S^i}{2} \tag{2.109}$$

όπου η κάθετη ταχύτητα $\bar{u}_e$ υπολογίζεται στους κόμβους της αεροτομής ενώ οι τιμές του μεγέθους m είναι γνωστές στα σημεία ελέγχου. Θεωρώντας γραμμική μεταβολή της $\bar{u}_e$ πάνω στα τμήματα λαμβάνονται:

$$\bar{v}_e^{i-1} = \frac{\bar{v}_e^{I-1} + \bar{v}_e^I}{2} \tag{2.110α'}$$

$$\bar{v}_e^i = \frac{\bar{v}_e^I + \bar{v}_e^{I+1}}{2} \tag{2.110β'}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.110) στην (2.109) προκύπτει,

$$m^i - m^{i-1} = \frac{\bar{v}_e^{I-1}}{4} \cdot \frac{\Delta S^{i-1}}{2} + \frac{3\bar{v}_e^I}{2} \cdot \frac{\Delta S^{i-1} + \Delta S^i}{2} + \frac{\bar{v}_e^{I+1}}{4} \cdot \frac{\Delta S^i}{2}, \quad I = 2, N \tag{2.111}$$

όπου $N + 1$ ο συνολικός αριθμός των κόμβων της αεροτομής. Η (2.111) εφαρμόζεται για όλους τους εσωτερικούς κόμβους της αεροτομής (δηλαδή για $I = 2, N$). Δεν είναι δυνατό όμως να εφαρμοστεί στους ακραίους κόμβους της ακμής εκφυγής. Για το λόγο αυτό γίνεται η υπόθεση ότι εκεί η συνάρτηση m ακολουθεί γραμμική μεταβολή της μορφής,

$$\begin{aligned} m(s) &= m^N + \frac{m^N - m^{N-1}}{S_{cp}^N - S_{cp}^{N-1}} \cdot \left(s - S^N\right) \\ m(s) &= m^1 + \frac{m^1 - m^2}{S_{cp}^1 - S_{cp}^2} \cdot \left(s - S^1\right) \end{aligned} \tag{2.112}$$

όπου με παραγώγιση των εξισώσεων (2.112) προκύπτει

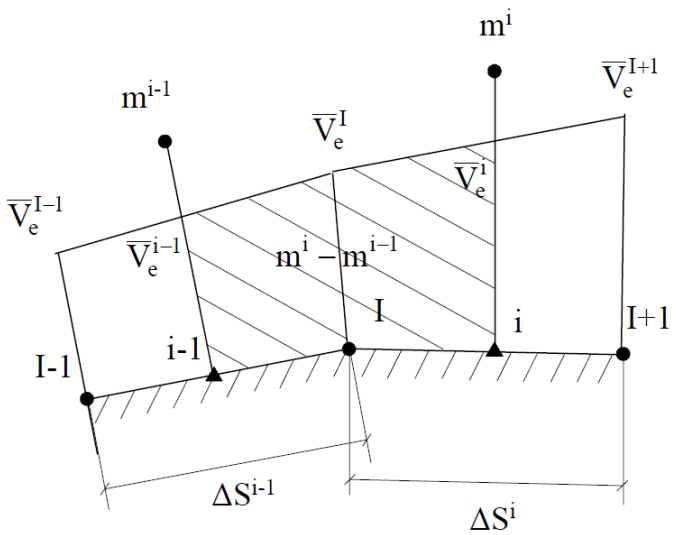
$$\begin{aligned} v_e^{N+1} &= \frac{m^N - m^{N-1}}{S_{cp}^N - S_{cp}^{N-1}} = \frac{2 \cdot \left(m^N - m^{N-1}\right)}{\Delta S^{N-1} + \Delta S^N} \\ v_e^1 &= \frac{m^1 - m^2}{S_{cp}^1 - S_{cp}^2} = \frac{2 \cdot \left(m^1 - m^2\right)}{\Delta S^1 + \Delta S^2} \end{aligned} \tag{2.113}$$

Οι (2.113) είναι $N+1$ εξισώσεις για τις $N+1$ άγνωστες τιμές της $\bar{v}_e$, συναρτήσει των $m = \bar{u}_e \delta^*$ στα σημεία ελέγχου.

Αντίστοιχα με τη διαδικασία που εφαρμόστηκε για την επιφάνεια της αεροτομής υπολογίζεται και το "πήδημα" της $\bar{v}_e$ στον ομόρρου, όπου η (2.111) χρησιμοποιείται για τους εσωτερικούς κόμβους και οι (2.113) για τους ακραίους. Οπότε σε μητρωική μορφή οι εξισώσεις για την αεροτομή και τον ομόρρου γράφονται:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{D^m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D_w^m} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D^m}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} m^i \\ \left(m^u + m^l\right)_w^{i_w} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{m}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{D^{u_e}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D_w^{u_e}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D^{u_e}}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{v}_e^I \\ [\![\bar{v}_e]\!]_w^{I_w} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\bar{v}_e}} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{v}_e} = \boldsymbol{D^*} \cdot \boldsymbol{m} \tag{2.114}$$

όπου το μητρώο $\boldsymbol{D^*}$ εξαρτάται αποκλειστικά από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής και του ομόρρου.



Σχήμα 2.9: *Σχήμα διακριτοποίησης για τον υπολογισμό της κάθετης ταχύτητας.[44]*

Εξίσωση ορμής και κινητικής ενέργειας

Οι εξισώσεις ορμής, κινητικής ενέργειας και υπολογισμού του σημείου μετάβασης ή του συντελεστή διατμητικών τάσεων, διακριτοποιούνται στο χρόνο χρησιμοποιώντας προς τα

πίσω δεύτερης τάξης διαφορές, σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα,

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \cong \frac{3A^n - 4A^{n-1} + A^{n-2}}{2\Delta t} \tag{2.115}$$

όπου A η εκάστοτε ποσότητα, n η τρέχουσα χρονική στιγμή και Δt το χρονικό βήμα της αριθμητικής διαδικασίας. Σε ότι αφορά τη διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων, στην περίπτωση της στρωτής ροής χρησιμοποιούνται προς τα πίσω διαφορές ενώ στην περίπτωση της τυρβώδους ροής χρησιμοποιούνται κεντρικές διαφορές. Όπως αναφέρθηκε η επίλυση των εξισώσεων ορμής και κινητικής ενέργειας ξεκινά από το σημείο ανακοπής και οδεύει χωριστά στην πάνω και στην κάτω πλευρά της αεροτομής και μετέπειτα στον ομόρρου. Για τον λόγο αυτό ορίζεται παράμετρος μήκους $\bar{s}$ η οποία έχει την αρχή της στο σημείο ανακοπής και ορίζεται στο σχήμα 2.10. Επίσης ορίζεται χωριστή αρίθμηση των σημείων ελέγχου, για τις δύο πλευρές της αεροτομής η οποία ξεκινά από το πλησιέστερο στο σημείο ανακοπής, σημείο ελέγχου της κάθε πλευράς, και καταλήγει στον ομόρρου όπως φαίνεται στο σχήμα 2.10. Έτσι αν $N_{p,u}$ και $N_{p,u}$ είναι ο συνολικός αριθμός σημείων ελέγχου της κάθε πλευράς, πάνω στη αεροτομή, τότε $N_{p,u} + N_{p,l} = N$. Ο συνολικός αριθμός σημείων ελέγχου της κάτω και της πάνω πλευράς της αεροτομής, συμπεριλαμβανομένων και των σημείων του ομόρρου θα είναι $N_l = N_{p,l} + N_w$ και $N_u = N_{p,u} + N_w$ αντίστοιχα. Με βάση τις παραπάνω διευκρινίσεις η εξίσωση ορμής σε διακριτή μορφή γράφεται:

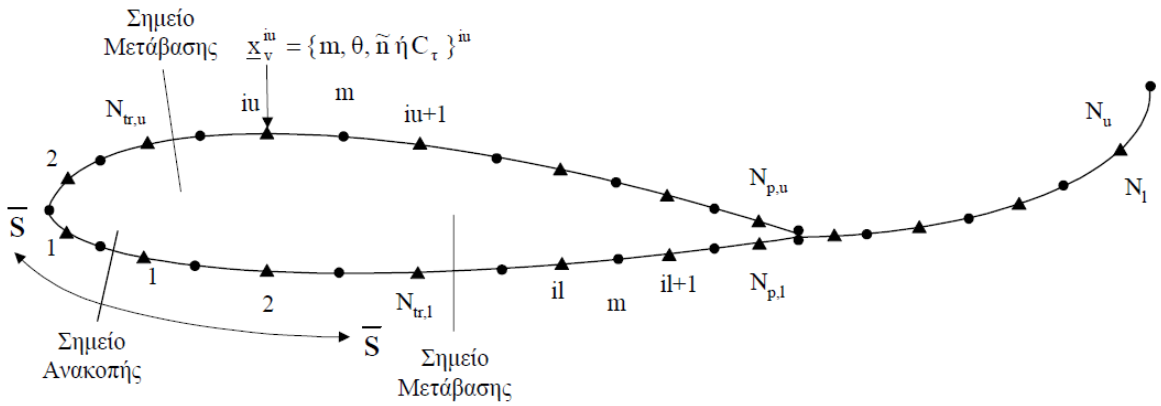
$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{s}^m}{\varrho_e^m \bar{u}_e^{m2} \vartheta^m} \left(\ln \bar{s}^{ib+1} - \ln \bar{s}^{ib}\right) \frac{\mathrm{d}\left(\varrho_e \bar{u}_e \delta^*\right)^m}{\mathrm{d}t} \\
&+ \left(\ln \vartheta^{ib+1} - \ln \vartheta^{ib}\right) + \left(2 + H^m\right) \left(\ln \bar{u}_e^{ib+1} - \ln \bar{u}_e^{ib}\right) \\
&+ \left(\ln \varrho_e^{ib+1} - \ln \varrho_e^{ib}\right) - \left(\frac{C_f \bar{s}}{2\vartheta}\right)^m \left(\ln \bar{s}^{ib+1} - \ln \bar{s}^{ib}\right) = 0, \\
&i = 1, N_b - 1,\ b = u, l
\end{aligned} \tag{2.116}$$

και της κινητικής ενέργειας

$$
\begin{aligned}
&\frac{\bar{s}^m}{\varrho_e^m \bar{u}_e^{m3} H^{*m} \vartheta^m} \left(\ln \bar{s}^{ib+1} - \ln \bar{s}^{ib}\right) \frac{\mathrm{d}\left(\varrho_e \bar{u}_e^2 \vartheta\right)^m}{\mathrm{d}t} + \frac{\bar{s}^m}{\varrho_e^m \bar{u}_e^m H^{*m} \vartheta^m} \left(\ln \bar{s}^{ib+1} - \ln \bar{s}^{ib}\right) \frac{\mathrm{d}\left(\varrho_e \delta^*\right)^m}{\mathrm{d}t} \\
&+ \frac{\bar{s}^m}{\bar{u}_e^{m2} H^{*m}} \left(\ln \bar{s}^{ib+1} - \ln \bar{s}^{ib}\right) \frac{\mathrm{d}\bar{u}_e^m}{\mathrm{d}t} - \frac{\bar{s}^m}{\varrho_e^m \bar{u}_e^{m2} \vartheta^m} \left(\ln \bar{s}^{ib+1} - \ln \bar{s}^{ib}\right) \frac{\mathrm{d}\left(\varrho_e \bar{u}_e \delta^*\right)^m}{\mathrm{d}t} \\
&+ \left(\ln H^{*ib+1} - \ln H^{*ib}\right) + \left(\frac{2H^{**m}}{H^{*m}} + \left(1 - H^m\right)\right) \left(\ln \bar{u}_e^{ib+1} - \ln \bar{u}_e^{ib}\right) \\
&- \frac{4\Omega}{\bar{u}_e^m} \frac{\left(\vartheta^m + \delta^{*m}\right) H^m}{H^{*m}} \left(\ln \delta^{*ib+1} - \ln \delta^{*ib}\right) \\
&+ \left[\left(\frac{C_f \bar{s}}{2\vartheta}\right)^m - \left(\frac{2C_D \bar{s}}{\vartheta H^*}\right)^m - \left(\frac{2aH\bar{s}}{\bar{u}_e^2 H^*}\right)^m\right] \left(\ln \bar{s}^{ib+1} - \ln \bar{s}^{ib}\right) = 0, \\
&i = 1, N_b - 1, \ b = u, l
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

Στις (2.116) και (2.117) οι δείκτες (ib) και $(ib{+}1)$ αντιπροσωπεύουν διαδοχικά σημεία ελέγχου στην επιφάνεια της αεροτομής και του ομόρρου. Ο δείκτης m σε κάποιο μέγεθος δηλώνει ότι το αντίστοιχο μέγεθος υπολογίζεται στο μέσο του διαστήματος μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων ελέγχου, η δε τιμή του λαμβάνεται ως η μέση τιμή των τιμών στα σημεία αυτά. Αυτό σημαίνει ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
\bar{s}^m &= \frac{1}{2}\left(\bar{s}^{ib+1} + \bar{s}^{ib}\right) \\
\delta^{*m} &= \frac{1}{2}\left(\delta^{*ib+1} + \delta^{*ib}\right) \\
\vartheta^m &= \frac{1}{2}\left(\vartheta^{ib+1} + \vartheta^{ib}\right) \\
\bar{u}_e^m &= \frac{1}{2}\left(\bar{u}_e^{ib+1} + \bar{u}_e^{ib}\right)
\end{aligned}
$$



Σχήμα 2.10: *Συμβολισμοί διακριτών εξισώσεων οριακού στρώματος.[44]*

Για το πρώτο σημείο ελέγχου στον ομόρρου οι εξισώσεις (2.116) και (2.117) εφαρμόζονται θέτοντας, στη θέση των μεγεθών του σημείου ελέγχου (ib) (προηγούμενου σημείου ελέγχου), τα μεγέθη του οριακού στρώματος στην ακμή εκφυγής της αεροτομής.Επίσης όπως θα φανεί και στη συνέχεια, η ταχύτητα $\bar{u}_e$ υπολογίζεται από την επίλυση της ισοδύναμης ροής, και για το τυχαίο σημείο $\vec{x}$ της αεροτομής και του ομόρρου, δίνεται από τη σχέση

$$\bar{u}_e\left(\vec{x};t\right) = \left(\vec{u}_e\left(\vec{x};t\right) - \vec{U}_b\left(\vec{x};t\right)\right) \cdot \vec{\tau}\left(\vec{x};t\right) \tag{2.118}$$

Σημειώνεται ότι για λόγους αριθμητικής ευστάθειας, στην περιοχή της στρωτής ροής, αντί για κεντρικές διαφορές στο χώρο, λαμβάνονται πίσω διαφορές. Έτσι για όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στις διακριτές εξισώσεις (2.116) και (2.117) με δείκτη m, λαμβάνονται οι τιμές τους στο σημείο ελέγχου (ib). Για την επίλυση των δύο παραπάνω εξισώσεων απαιτούνται συνοριακές συνθήκες, για τα άγνωστα μεγέθη δ^* και ϑ,

1. στο σημείο ανακοπής, στην ακμή πρόσπτωσης της αεροτομής
2. στην ακμή εκφυγής, στην πάνω και στην κάτω πλευρά της αεροτομής

Η συνοριακή συνθήκη 1. απαιτείται για την επίλυση των εξισώσεων πάνω στο σύνορο της αεροτομής, η δε 2. για την επίλυση των εξισώσεων στον ομόρρου.

Σε ότι αφορά τη συνοριακή συνθήκη για τα δ^* και ϑ στο σημείο ανακοπής, δεδομένου ότι στο σημείο αυτό η παράμετρος μήκους και η ταχύτητα μηδενίζονται, οι εξισώσεις (2.116) και (2.117) εμφανίζουν απειρισμό. Για το λόγο αυτό στο πρώτο διάστημα της κάθε πλευράς, το οποίο λαμβάνεται μεταξύ του σημείου ανακοπής και του πρώτου σημείου ελέγχου (σχήμα 2.11) ορίζεται "ψεύδο" σημείο με παράμετρο μήκους $\bar{s}^0$ τέτοιο ώστε,

$$\ln\left(\frac{\bar{s}^1}{\bar{s}^0}\right) = 1$$

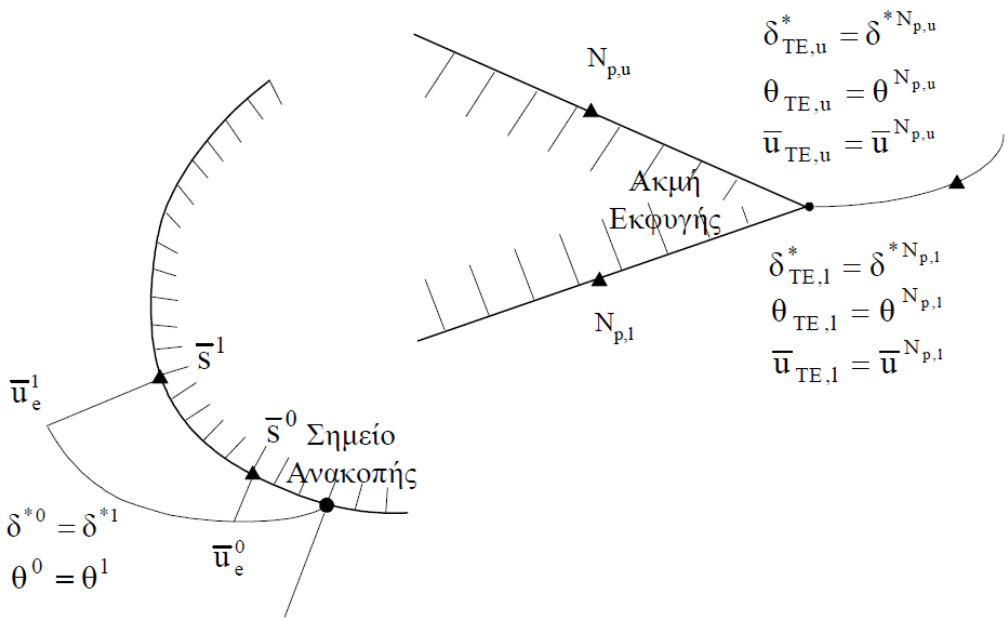
Στο διάστημα μεταξύ του "ψεύδο" σημείου και του πρώτου σημείου ελέγχου θεωρείται ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά,

$$\frac{\bar{u}_e^1}{\bar{u}_e^0} = \frac{\bar{s}^1}{\bar{s}^0} \rightarrow \ln \bar{u}_e^1 - \ln \bar{u}_e^0 = 1$$

ενώ τα μεγέθη του οριακού στρώματος παραμένουν αμετάβλητα,

$$\delta^{*0} = \delta^{*1}, \quad \vartheta^0 = \vartheta^1$$

Σε ότι φορά τη συνοριακή συνθήκη 2., γίνεται η υπόθεση ότι στην ακμή εκφυγής τα μεγέθη του οριακού στρώματος παίρνουν τις τιμές των ανάντι κοντινότερων σημείων ελέγχου πάνω στην αεροτομή (σχήμα 2.11).



Σχήμα 2.11: *Συνοριακές συνθήκες στο σημείο ανακοπής και στην ακμή εκφυγής.[44]*

Εξισώσεις για τον υπολογισμό του σημείου μετάβασης και του συντελεστή διατμητικών τάσεων

Για την εύρεση του σημείου μετάβασης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη λύνεται η εξίσωση (2.40) για το λόγο ενίσχυσης $\tilde{n}$. Η εξίσωση αυτή σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην υποενότητα 2.1.4 γράφεται στη μορφή,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}\bar{s}} = \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}Re_\vartheta} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{s}}{\bar{u}_e}\frac{\mathrm{d}\bar{u}_e}{\mathrm{d}\bar{s}} + 1\right) \cdot \frac{\varrho_e \bar{u}_e \vartheta^2}{\mu_e \bar{s}}\frac{1}{\vartheta}\right] \tag{2.119}$$

όπου, οι επιμέρους όροι του δεύτερου μέλους, δίνονται από εμπειρικές σχέσεις και εξαρτώνται από την παράμετρο H_k,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}Re_\vartheta} = \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}Re_\vartheta\left(H_k\right)} \tag{2.120}$$

$$\frac{\varrho_e \bar{u}_e \vartheta^2}{\mu_e \bar{s}} = l\left(H_k\right) \tag{2.121}$$

$$\frac{\bar{s}}{\bar{u}_e} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{u}_e}{\mathrm{d}\bar{s}} = m\left(H_k\right) \tag{2.122}$$

Επομένως προκύπτει,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}\bar{s}} = \frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}Re_\vartheta}\left(H_k\right) \cdot \left[\frac{1}{2}\left(m\left(H_k\right) + 1\right) \cdot \frac{l\left(H_k\right)}{\vartheta}\right] \tag{2.123}$$

Η εξίσωση (2.123), όπως και οι εξισώσεις ορμής και κινητικής ενέργειας στην στρωτή ροή, διακριτοποιείται με χρήση προς τα πίσω διαφορών, οπότε γράφεται,

$$\frac{\tilde{n}^{ib+1}-\tilde{n}^{ib}}{\bar{s}^{ib+1}-\bar{s}^{ib}}=\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}Re_{\vartheta}}\left(H_k^{ib}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\left(m\left(H_k^{ib}\right)+1\right)\cdot\frac{l\left(H_k^{ib}\right)}{\vartheta^{ib}}\right],\ i=1,N_{tr,b}-1,b=u,l \quad (2.124)$$

όπου N_{tr}^b το σημείο ελέγχου, ανάντι του σημείου μετάβασης. Η επίλυση της (2.124) ξεκινά από τη θέση στην οποία ικανοποιείται η συνθήκη, $Re_{\vartheta}\geqslant Re_{\vartheta_0}$, ενώ ως συνοριακή συνθήκη για την τιμή του λόγου ενίσχυσης λαμβάνεται η τιμή $\tilde{n}=0$. Η (2.124) λύνεται μέχρι του σημείου ελέγχου που θα βρεθεί $\tilde{n}>9$. Κατάντι αυτής της αυτής της θέσης η ροή γίνεται τυρβώδης, οπότε πλέον αντί της (2.40) λύνεται η εξίσωση (2.65) για τον συντελεστή διατμητικών τάσεων C_τ. Η εξίσωση (2.65) με βάση και τα όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, γράφεται σε διακριτή μορφή ως εξής:

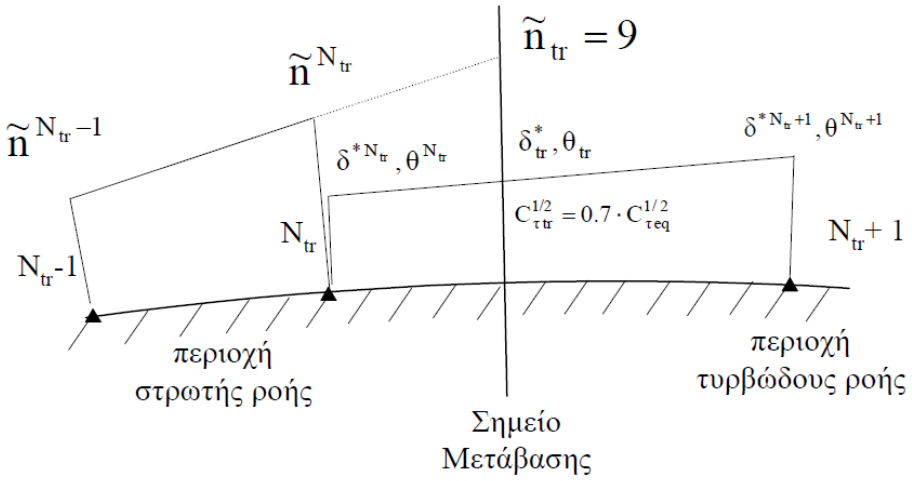
$$\begin{aligned}&2\delta^m\left[\ln\left(C_\tau^{1/2}\right)^{ib+1}-\ln\left(C_\tau^{1/2}\right)^{ib}\right]=5.6\left[\ln\left(C_{\tau eq}^{1/2}\right)^m-\ln\left(C_\tau^{1/2}\right)^m\right]\left(\bar{s}^{ib+1}-\bar{s}^{ib}\right)\\&+2\delta^m\left\{\frac{4}{3\delta^{*m}}\left[\frac{C_f^m}{2}-\left(\frac{H_k^m-1}{6.7H_k^m}\right)^2\right]\left(\bar{s}^{ib+1}-\bar{s}^{ib}\right)-\left(\ln\bar{u}_e^{ib+1}-\ln\bar{u}_e^{ib}\right)\right\},\\&i=N_{tr,b},N_{tr,b}-1,b=u,l\end{aligned} \quad (2.125)$$

όπου ως άγνωστος στην (2.125) εμφανίζεται η τετραγωνική ρίζα του συντελεστή διάτμησης C_τ.

Ειδική μεταχείριση απαιτείται στον υπολογισμό, για το διάστημα εκείνο στο οποίο εμφανίζεται το σημείο μετάβασης. Το διάστημα αυτό χωρίζεται σε δύο τμήματα, το μήκος των οποίων καθορίζεται από τη θέση του σημείου μετάβασης (εκεί δηλαδή όπου $\tilde{n}=9$) (σχήμα 2.12). Στο μεν πρώτο τμήμα η ροή λαμβάνεται στρωτή, ενώ στο δεύτερο τυρβώδης, οι δε διακριτές εξισώσεις (2.116), (2.117), (2.124) ή (2.125) λύνονται χωριστά για το καθένα από τα τμήματα αυτά. Για την επίλυση των εξισώσεων στα τμήματα αυτά υποτίθεται ότι οι τιμές των μεγεθών δ^* και ϑ στο σημείο μετάβασης προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών των γειτονικών σημείων ελέγχου, από τα οποία το μεν πρώτο βρίσκεται στην περιοχή της στρωτής ροής και το δεύτερο στην τυρβώδη ροή. Η διαδικασία αυτή, ακολουθείται με σκοπό την αποφυγή εμφάνισης ασυνεχειών, στις τιμές των μεγεθών του οριακού στρώματος, στην περιοχή του σημείου μετάβασης. Για την τιμή του συντελεστή $C_\tau^{1/2}$ στη θέση του σημείου μετάβασης χρησιμοποιείται η ακόλουθη συνοριακή συνθήκη *(Drela* και *Giles (1987))* [39]:

$$C_{\tau tr}^{1/2}=0.7\cdot C_{\tau eq}^{1/2} \quad (2.126)$$

Επιπλέον όπως και στην περίπτωση των μεγεθών δ^* και ϑ θεωρείται ότι στην ακμή εκφυγής ο συντελεστής C_τ παίρνει την τιμή του ανάντι κοντινότερου σημείου ελέγχου πάνω στο σύνορο της αεροτομής.



Σχήμα 2.12: *Συνοριακές συνθήκες στο σημείο μετάβασης.[44]*

Το μη γραμμικό σύστημα των εξισώσεων του οριακού στρώματος

Οι παραπάνω εξισώσεις συνιστούν ένα μη γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, $\vec{x}_v^{ib} = \left\{\tilde{n} \text{ ή } C_\tau, \delta^*, \vartheta, \bar{u}_e\right\}^{ib}$ για κάθε σημείο ελέγχου (ib) της αεροτομής και του ομόρρου. Κάθε εξίσωση του συστήματος εξαρτάται από τις τιμές των παραπάνω αγνώστων μεγεθών σε δύο γειτονικά σημεία ελέγχου. Έτσι αν

- F_1 Η εξίσωση για το $\tilde{n}$ ή το C_τ ανάλογα με το αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης
- F_2 Η εξίσωση διατήρησης της ορμής
- F_3 Η εξίσωση διατήρησης της κινητικής ενέργειας

το μη γραμμικό σύστημα των εξισώσεων γράφεται στη μορφή:

$$\boldsymbol{F}(\vec{x}_v) = \begin{Bmatrix} F_1^{ib}(\vec{x}_v^{ib}; \vec{x}_v^{ib+1}) \\ F_2^{ib}(\vec{x}_v^{ib}; \vec{x}_v^{ib+1}) \\ F_3^{ib}(\vec{x}_v^{ib}; \vec{x}_v^{ib+1}) \end{Bmatrix} = 0 \ , \quad i = 0, N_b - 1 \ , \ b = u, l \tag{2.127}$$

όπου $\vec{x}_v$ το συνολικό διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας των εξισώσεων του οριακού στρώματος και N_u, N_l ο συνολικός αριθμός σημείων ελέγχου της πάνω και της κάτω πλευράς της αεροτομής και του ομόρρου.

Όπως φαίνεται και στη συνέχεια, μέσω των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής η ταχύτητα $\bar{u}_e$ εκφράζεται συναρτήσει της ποσότητας m. Επομένως η $\bar{u}_e$ αποτελεί εξαρτημένη μεταβλητή για τις εξισώσεις του οριακού στρώματος. Έτσι το διάνυσμα των αγνώστων σε κάθε κόμβο μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\vec{x}_v^{ib} = \left\{\tilde{n} \text{ ή } C_\tau, \vartheta, m\right\}^{ib}$, όπου η $\bar{u}_e$ απαλείφεται και το πάχος μετατόπισης δ^* αντικαθίσταται από το μέγεθος m για λόγους που διευκολύνουν τη διαδικασία αριθμητικής επίλυσης.

2.3.3 Διακριτοποίηση των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής

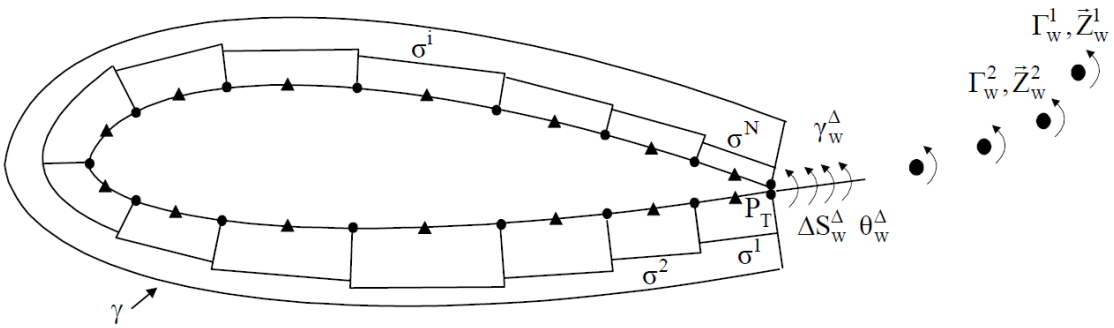
Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής (εξισώσεις (2.91), (2.98), (2.103), (2.105)) λαμβάνεται τμηματικά σταθερή διανομή πηγών σ και στροβιλότητας γ πάνω στο σύνορο της αεροτομής. Για τις πηγές, υποτίθενται N διαφορετικοί βαθμοί ελευθερίας $\sigma^i,\ i = 1, N$ για κάθε τμήμα ΔS^i της αεροτομής. Η στροβιλότητα γ λαμβάνει ένα βαθμό ελευθερίας κατά μήκος του συνόρου S (σχήμα 2.13). Σύμφωνα με τα παραπάνω, η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Gamma = \gamma \cdot S_g^{N+1} \tag{2.128}$$

Για τη στροβιλότητα του ομόρρου γίνεται η υπόθεση ότι τα κοντινά τμήματα αυτού, στα οποία διανέμεται η στροβιλότητα που παράγεται από την ακμή εκφυγής P_T τη χρονική στιγμή t, και για χρόνο Δt (όπου Δt το χρονικό βήμα της αριθμητικής διαδικασίας) φέρει σταθερή ένταση γ_w^Δ. Το τμήμα αυτό του ομόρρου λαμβάνεται ευθύγραμμο με μήκος ΔS_w^Δ και κατεύθυνση s_w^Δ. Για το μακρινό ομόρρου λαμβάνεται μία στοιχειακή (*dirac*) προσέγγιση της μορφής:

$$\gamma_w(\vec{x}_w; t) = \sum_{k=1}^{K} \Gamma_w^k \cdot \delta(\vec{x}_w - \vec{Z}_w^k) \tag{2.129}$$

όπου Γ_w^k οι σημειακές δίνες που απαρτίζουν το φύλλο της ακμής εκφυγής, K το συνολικό πλήθος των δινών και $\vec{Z}_w^k$ οι θέσεις αυτών (σχήμα 2.13). Οι δίνες του μακρινού ομόρρου κινούνται υλικά, με την ταχύτητα του πεδίου ροής, οι δε εντάσεις τους, βάσει του θεωρήματος *Helmholtz*, όπως εκφράζεται από τη σχέση (2.106) διατηρούνται αμετάβλητες στο χρόνο. Επομένως σε κάθε χρονική στιγμή t μόνο η ένταση της στροβιλότητας του κοντινού τμήματος του ομόρρου είναι άγνωστη, ενώ οι εντάσεις των σημειακών δινών του μακρινού ομόρρου είναι γνωστές από προηγούμενους χρόνους. Στη συνέχεια της υποενότητας δίνονται οι



Σχήμα 2.13: *Οι διακριτοί βαθμοί ελευθερίας της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής.[44]*

εξισώσεις της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής σε διακριτή μορφή.

Η συνθήκη της μη εισχώρησης για την αμιγώς μη συνεκτική ροή (2.72) επαληθεύεται στα σημεία ελέγχου $\vec{x}_{cp}$ της αεροτομής, και σε κάποια χρονική στιγμή t, γράφεται σε διακριτή μορφή ως εξής:

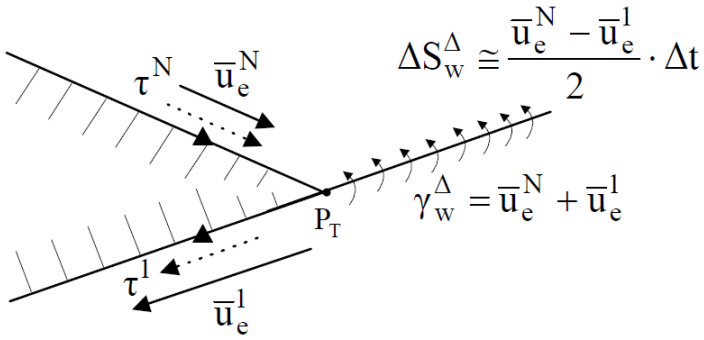
$$\sum_{i=1}^{N} \sigma^i \int\limits_{\Delta S^i} \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\nu}^j \cdot \vec{r}_{cp}^{\,j}}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S(\vec{x}) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Delta S^i} \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\nu}^j \cdot \left(\vec{r}_{cp}^{\,j} \times \vec{k}\right)}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S(\vec{x}) + \gamma_w^{\Delta} \int\limits_{\Delta S_w^{\Delta}} \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\nu}^j \cdot \left(\vec{r}_{cp}^{\,j} \times \vec{k}\right)}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S_w(\vec{x})$$
$$= \left(\vec{U}_b(\vec{x}_{cp}^j; t) - \vec{U}_\infty - \sum_{k=1}^{K} \frac{\Gamma_w^k}{2\pi} \frac{\left(\vec{x}_{cp}^j - \vec{Z}_w^k\right) \times \vec{k}}{\left|\vec{x}_{cp}^j - \vec{Z}_w^k\right|^2} \right) \vec{\nu}^j, \ j = 1, N \tag{2.130}$$

όπου $\vec{r}_{cp} = \vec{x}_{cp} - \vec{x}$. Η εξίσωση για την ένταση της αποβαλλόμενης στροβιλότητας από την ακμή εκφυγής είναι:

$$\gamma_w^{\Delta} = \vec{\bar{u}}_e(\vec{x}_{cp}^N; t) \cdot \vec{\tau}^N + \vec{\bar{u}}_e(\vec{x}_{cp}^1; t) \cdot \vec{\tau}^1 \tag{2.131}$$

όπου το θετικό πρόσημο στο δεύτερο μέλος της (2.131) σχετίζεται με τη σύμβαση που ακολουθείται στον ορισμό των εφαπτομενικών διανυσμάτων $\vec{\tau}$. Στην εξίσωση (2.131) γίνεται η υπόθεση ότι η ταχύτητες στην ακμή εκφυγής (στην πάνω και την κάτω πλευρά) είναι περίπου ίσες με αυτές που υπολογίζονται στα πλησιέστερα σημεία ελέγχου (σχήμα 2.14). Επομένως ο υπολογισμός ταχυτήτων πάνω στην αεροτομή γίνεται αποκλειστικά σε σημεία ελέγχου. Η σχετική (εφαπτομενική) ταχύτητα στο τυχαίο σημείο ελέγχου (j) της αεροτομής δίνεται σε διακριτή μορφή από τη σχέση:

$$\bar{u}_e(\vec{x}_{cp}^j; t) = \vec{\bar{u}}_e(\vec{x}_{cp}^j; t) \cdot \vec{\tau}^j = \left(\vec{u}_e(\vec{x}_{cp}^j; t) - \vec{U}_b(\vec{x}_{cp}^j; t)\right) \cdot \vec{\tau}^j = \sum_{i=1}^{N} \sigma^i \int\limits_{\Delta S^i} \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\tau}^j \cdot \vec{r}_{cp}^{\,j}}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S(\vec{x})$$
$$+ \gamma \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Delta S^i} \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\tau}^j \cdot \left(\vec{r}_{cp}^{\,j} \times \vec{k}\right)}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S(\vec{x}) + \gamma_w^{\Delta} \int\limits_{\Delta S_w^{\Delta}} \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\tau}^j \cdot \left(\vec{r}_{cp}^{\,j} \times \vec{k}\right)}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S_w(\vec{x})$$
$$+ \left(\vec{U}_\infty - \sum_{k=1}^{K} \frac{\Gamma_w^k}{2\pi} \frac{\left(\vec{x}_{cp}^j - \vec{Z}_w^k\right) \times \vec{k}}{\left|\vec{x}_{cp}^j - \vec{Z}_w^k\right|^2} \right) \vec{\tau}^j + u_\tau^*(\vec{x}_{cp}^j; t) - \vec{U}_b(\vec{x}_{cp}^j; t) \cdot \vec{\tau}^j \tag{2.132}$$



Σχήμα 2.14: *Η συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής.[44]*

Η ένταση της παραγόμενης στον κοντινό ομόρρου στροβιλότητας, οφείλει να ικανοποιεί τη συνθήκη *Kelvin* η οποία γράφεται:

$$\Gamma^{n-1} - \Gamma^n = \gamma_w^\Delta \cdot \Delta S_w^\Delta \tag{2.133}$$

και με βάση την οποία προσδιορίζεται η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή Γ^n τη χρονική στιγμή t δεδομένης της κυκλοφορίας Γ^{n-1} τη χρονική στιγμή $t - \Delta t$.

Το διακριτό πρόβλημα της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής συμπληρώνεται με την εξίσωση για την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης. Για τη διακριτοποίηση της εξίσωσης (2.98), υποτίθεται ότι η εφαπτομενική ταχύτητα στο σύνορο S προσεγγίζεται από μια τμηματικά σταθερή διανομή, με ένα βαθμό ελευθερίας u_τ^{*i} για κάθε τμήμα ΔS^i (σχήμα 2.15). Σε ότι αφορά στην κάθετη ταχύτητα στο σύνορο, και το πήδημα αυτής στον ομόρρου τα οποία με βάση την σχέση (2.116) λαμβάνονται στους κόμβους του πλέγματος, υποτίθεται ότι μεταβάλλονται γραμμικά. Η συνθήκη (2.98) επαληθεύεται στα σημεία ελέγχου της αεροτομής και σε διακριτή μορφή γράφεται:

$$\begin{aligned} u_\tau^{*j} = &\sum_{i=1}^{N} u_\tau^{*i} \int_{\Delta S^i} \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{v}^j \cdot \vec{r}_{cp}^j}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta S^i} \bar{v}_e^{\Delta S^i}(S) \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\tau}^j \cdot \vec{r}_{cp}^j}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S(\vec{x}) \\ &+ \sum_{i_w=1}^{N_w} \int_{\Delta S^i} [\![\bar{v}_e^{\Delta S_w^{i_w}}]\!](S_w) \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\tau}^j \cdot \vec{r}_{cp}^j}{{r_{cp}^j}^2} \mathrm{d}S_w(\vec{x}), \ j = 1, N \end{aligned} \tag{2.134}$$

όπου (σχήμα 2.15),

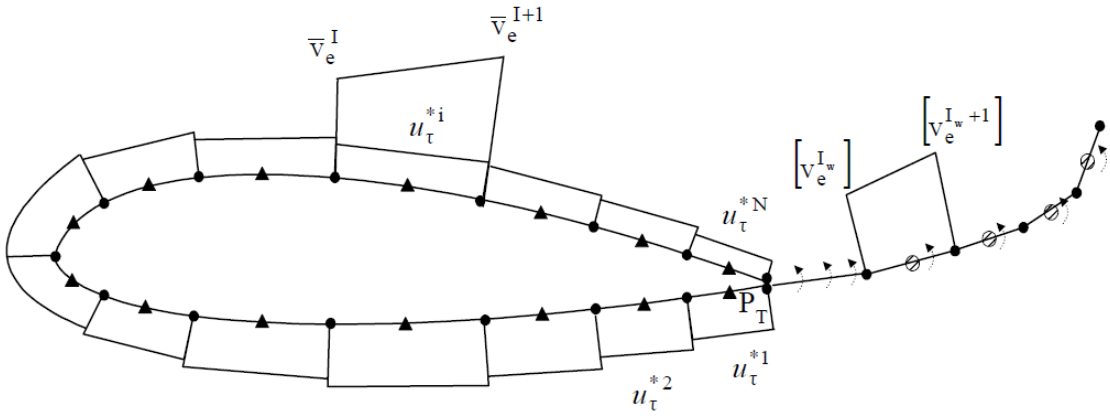
$$\begin{aligned} \bar{v}_e^{\Delta S_w^i}(S) &= \bar{v}_e^I \cdot \left(1 - \frac{S - S_g^I}{\Delta S^i}\right) + \bar{v}_e^{I+1} \cdot \left(1 - \frac{S - S_g^I}{\Delta S^i}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{N} D_{I,l}^* \cdot m^l \cdot (1 - \underline{S}) + \sum_{l=1}^{N} D_{I+1,l}^* \cdot m^l \cdot \underline{S} \end{aligned} \tag{2.135}$$

και

$$
\begin{aligned}
[\![\bar{v}_e^{\Delta S_w^{i_w}}]\!](S_w) &= [\![\bar{v}_e^{I_w}]\!] \cdot \left(1 - \frac{S_w - S_{gw}^{I_w}}{\Delta S_w^{i_w}}\right) + [\![\bar{v}_e^{I_w+1}]\!] \cdot \left(1 - \frac{S_w - S_{gw}^{I_w}}{\Delta S_w^{i_w}}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{N_w} (D_w^*)_{I_w,l} \cdot \left(m^u + m^l\right)_w^l \cdot (1 - \underline{S}_w) + \sum_{l=1}^{N_w} (D_w^*)_{I_w+1,l} \cdot \left(m^u + m^l\right)_w^l \cdot \underline{S}_w
\end{aligned}
\tag{2.136}
$$

όπου

$$
\underline{S} = \frac{S - S_g^I}{\Delta S^i} \quad \text{και} \quad \underline{S}_w = \frac{S_w - S_{gw}^{I_w}}{\Delta S_w^{i_w}} \tag{2.137}
$$



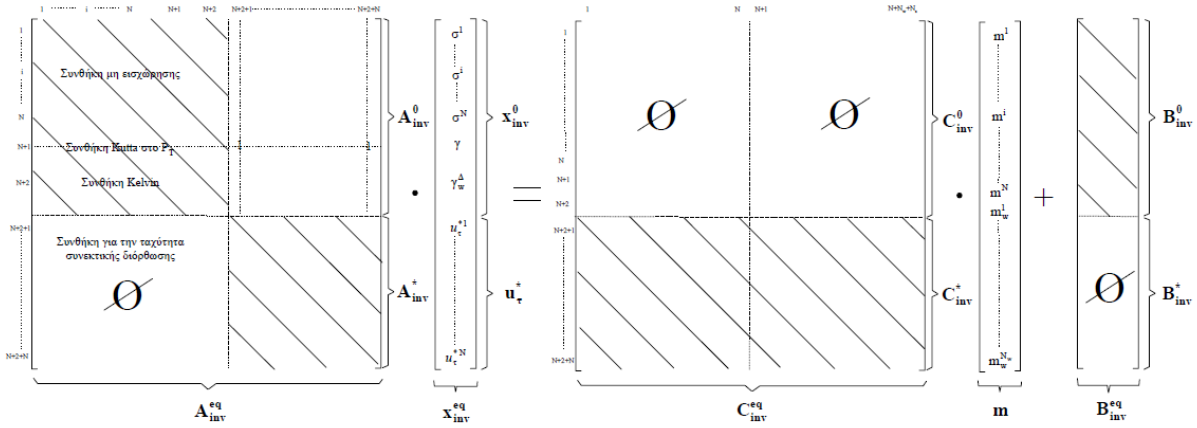
Σχήμα 2.15: *Διακριτοί βαθμοί ελευθερίας της εξίσωσης για την ταχύτητα συνεκτικής διόρθωσης.[44]*

2.3.4 Αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης γίνεται με βηματική ολοκλήρωση στο χρόνο, σε διαδοχικά χρονικά βήματα Δt. Η διαδικασία ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ με την επίλυση της μόνιμης, ασυμπίεστης και μη συνεκτικής ροής γύρω από την αεροτομή, με σκοπό τον προσδιορισμό της αρχικής κυκλοφορίας γύρω από αυτή, η οποία αποτελεί αρχική συνθήκη του προβλήματος. Στη συνέχεια και σε κάθε χρονικό βήμα Δt, οι μη γραμμικές εξισώσεις της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής όπως και αυτές του οριακού στρώματος λύνονται ταυτόχρονα με τη χρήση επαναληπτικού σχήματος για τη σύγκλιση της γεωμετρίας του κοντινού ομόρρου.

Τα άγνωστα μεγέθη της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής, σύμφωνα με τα όσα έχουν ήδη ειπωθεί, συνοψίζονται στις N τμηματικά σταθερές διανομές πηγών σ^i, στην ένταση της στροβιλότητας πάνω στην αεροτομή γ, στην ένταση της στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου γ_w^Δ, στη γεωμετρία του κοντινού ομόρρου ΔS_w^Δ, s_w^Δ και στις N τιμές της εφαπτομενικής ταχύ-

τητας συνεκτικής διόρθωσης u_τ^{*i}. Οι εξισώσεις της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής γραμμικοποιούνται με την υπόθεση ότι η γεωμετρία του κοντινού ομόρρου είναι γνωστή εκ των προτέρων, σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος. Με βάση την παραπάνω υπόθεση οι εξισώσεις (2.91), (2.105), (2.103) και (2.98) γραμμένες σε διακριτή μορφή συνιστούν ένα γραμμικό σύστημα $2N+2$ εξισώσεων. Από την αντιστροφή του συστήματος των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής προκύπτει μία γραμμική εξάρτηση των βαθμών ελευθερίας αυτής συναρτήσει της ποσότητας $m = \bar{u}_e\delta^*$, δηλαδή συναρτήσει βαθμών ελευθερίας των εξισώσεων οριακού στρώματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το σύστημα των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής γράφεται:



όπου η διαγράμμιση στην παραπάνω σχηματική αναπαράσταση του συστήματος υποδηλώνει τμήματα του μητρώου που είναι πλήρη.
Οπότε από την,

$$\boldsymbol{A}_{inv}^{eq} \cdot \boldsymbol{x}_{inv}^{eq} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{inv}^{0} \\ \boldsymbol{A}_{inv}^{*} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}_{inv}^{eq} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}_{inv}^{*} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{m} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{inv}^{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_{inv}^{eq} \cdot \boldsymbol{m} + \boldsymbol{B}_{inv}^{eq} \tag{2.138}$$

λαμβάνεται η:

$$\boldsymbol{x}_{inv}^{eq} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{inv}^{0} \\ \boldsymbol{u}_{\tau}^{*} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_{inv}^{eq\ -1} \cdot \boldsymbol{C}_{inv}^{eq} \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{A}_{inv}^{eq\ -1} \cdot \boldsymbol{B}_{inv}^{eq} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{inv}^{0} \\ \boldsymbol{D}_{inv}^{*} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{m} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{inv}^{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{2.139}$$

Η αλληλεπίδραση μεταξύ των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και των εξισώσεων του οριακού στρώματος επιτυγχάνεται μέσω της εξάρτησης των βαθμών ελευθερίας της μη συνεκτικής ροής από την παράμετρο m. Με αντικατάσταση της σχέσης (2.139) στις διακριτοποιημένες σχέσεις υπολογισμού της εφαπτομενικής ταχύτητας λαμβάνεται ότι:

$$\boldsymbol{\bar{u}_e} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{m} + \boldsymbol{G} \tag{2.140}$$

Η παραπάνω γραμμική σχέση εκφράζει το νόμο αλληλεπίδρασης μεταξύ συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής.

Με την (2.140) η ταχύτητα $\bar{u}_e$ απαλείφεται από το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων του οριακού στρώματος οι οποίες τελικά γράφονται στη μορφή:

$$\boldsymbol{F}(\vec{x}_v) = \begin{Bmatrix} F_1^{ib}(\tilde{n}^{ib-1} \text{ ή } C_\tau^{ib-1}, \vartheta^{ib-1}, \tilde{n}^{ib} \text{ ή } C_\tau^{ib}, \vartheta^{ib}, \boldsymbol{m}^\top) \\ F_2^{ib}(\tilde{n}^{ib-1} \text{ ή } C_\tau^{ib-1}, \vartheta^{ib-1}, \tilde{n}^{ib} \text{ ή } C_\tau^{ib}, \vartheta^{ib}, \boldsymbol{m}^\top) \\ F_3^{ib}(\tilde{n}^{ib-1} \text{ ή } C_\tau^{ib-1}, \vartheta^{ib-1}, \tilde{n}^{ib} \text{ ή } C_\tau^{ib}, \vartheta^{ib}, \boldsymbol{m}^\top) \end{Bmatrix} = 0, \; i = 0, N_b - 1, \; b = u, l \tag{2.141}$$

Το μη γραμμικό σύστημα (2.141) επιλύεται με τη μέθοδο *Newton-Raphson*. Σημειώνεται ότι η μορφή του γραμμικού τελεστή $\boldsymbol{D}$ στο νόμο αλληλεπίδρασης (2.140) παίζει σημαντικό ρόλο στη σύγκλιση της μεθόδου *Newton-Raphson* ιδιαίτερα όταν γίνεται αναφορά σε ροές με ισχυρή αποκόλληση. Για να επιτευχθεί η σύγκλιση απαιτείται το μητρώο $\boldsymbol{D}$ να είναι θετικά ορισμένο με ισχυρή κύρια διαγώνιο. Η παραπάνω απαίτηση επιτυγχάνεται μέσω της ολοκληρωματικής αναπαράστασης που χρησιμοποιείται στην έκφραση της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης.

Ο αλγόριθμος της επίλυσης του προβλήματος της συνεκτικής-μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης ολοκληρώνεται με την επαναληπτική διαδικασία για τον προσδιορισμό της γεωμετρίας του κοντινού ομόρρου (μήκος και κατεύθυνση). Σε κάθε χρονική στιγμή η επαναληπτική διαδικασία αυτή ξεκινά λαμβάνοντας τα παραπάνω δεδομένα από την προηγούμενη χρονική στιγμή. Στο τέλος κάθε επανάληψης που περιλαμβάνει την επίλυση των εξισώσεων (2.139) και (2.141) τα δεδομένα αυτά επανεκτιμώνται η δε επαναληπτική διαδικασία τερματίζει όταν επιτευχθεί σύγκλιση. Με τη διαδικασία αυτή των εσωτερικών επαναλήψεων εκμεταλλεύεται η γραμμικότητα του συστήματος των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής ώστε να μειωθεί το μέγεθος του συστήματος των μη γραμμικών εξισώσεων που πλέον περιλαμβάνει μόνο τις εξισώσεις οριακού στρώματος. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.14 τα μήκη του κοντινού ομόρρου καθορίζονται από τις σχέσεις:

$$\Delta S_w^\Delta = \frac{\bar{u}_e^N - \bar{u}_e^1}{2} \cdot \Delta t \tag{2.142}$$

Κεφάλαιο 3

Μοντέλο Μειωμένης Τάξης (*Reduced Order Model - ROM)*

3.1 Χρονοσειρές POD (Snapshots POD)

Η μέθοδος POD Χρονοσειρών (Snapshots) εφαρμόζεται συνήθως σε προβλήματα στα οποία το αρχικό σετ δεδομένων δεν προέρχεται από αναλυτικές εκφράσεις αλλά από πειραματική ή αριθμητική επίλυση. Μία από τις καινοτομίες της παρούσας διπλωματικής είναι ότι επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των POD Snapshots έχοντας ως μοντέλο πλήρους τάξης μία μέθοδο συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης και όχι κάποια αριθμητική μέθοδο Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής (CFD).

Αρχικά, η κατασκευή των χρονοσειρών γίνεται μετά την επίλυση του υπολογιστικού μοντέλου πλήρους τάξης, δηλαδή την επίλυση της ροής γύρω από ταλαντούμενη αεροτομή για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Η ροή αυτή είναι έντονα μη μόνιμη, ωστόσο λόγω της εξωτερικής συχνότητας διέγερσης της ταλάντωσης, οι τιμές των διαφόρων μεγεθών που περιγράφουν τη ροή εμφανίζουν περιοδικότητα.

Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s του χρονικού σήματος λαμβάνεται έτσι ώστε να ισχύει $f_s = \frac{1}{\Delta t}$, όπου Δt το χρονικό βήμα επίλυσης της συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης. Ο λόγος για τον οποίο επιλέγεται αυτό, είναι ότι σε κάθε χρονικό βήμα υπολογίζονται οι τιμές όλων των μεγεθών και ως αποτέλεσμα είναι διαθέσιμες προς αποθήκευση στο σύνολο των δεδομένων που θα αποτελέσουν την "είσοδο" στο POD. Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στην τήρηση του νόμου του *Shannon* σύμφωνα με τον οποίο η συχνότητα δειγματοληψίας f_s ενός χρονικού σήματος πρέπει να εκλέγεται έτσι ώστε να ξεπερνάει το διπλάσιο της μεγαλύτερης συχνότητας που είναι παρούσα στο δειγματοληπτημένο σήμα. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$f_s > 2f_{ext} \Leftrightarrow f_s > 2\frac{\omega_{ext}}{2\pi} \tag{3.1}$$

όπου $f_{ext}, \ \omega_{ext}$ είναι η συχνότητα και η κυκλική συχνότητα αντίστοιχα της εξωτερικής διέγερσης (ταλάντωση).

Ωστόσο αυτή η απαίτηση στο συγκεκριμένο πρόβλημα ικανοποιείται χωρίς ιδιαίτερη

προσπάθεια καθώς οι υπολογισμοί - άρα και η δειγματοληψία πραγματοποιούνται με συχνότητα της τάξης του $10^1 Hz$, ενώ οι εξωτερικές συχνότητες ταλάντωσης της αεροτομής βρίσκονται σε ένα εύρος της τάξης $[10^{-3}, 10^{-2}]Hz$. Αυτό συμβαίνει γιατί στους υπολογισμούς έχει επιλεγεί $\Delta t = 0.05\ s$, ενώ ως διεγέρσεις επιλέγονται συχνότητες ταλάντωσης που απαντώνται συχνά σε πτερύγια αεροσκαφών και ανεμογεννητριών. Χαρακτηριστικές είναι οι τιμές $\omega = 0.04,\ 0.08,\ 0.1,\ 0.2\ rad/s$

Τα μεγέθη των οποίων οι χρονοσειρές θα αποθηκευτούν επιλέγονται λόγω της φυσικής του προβλήματος και είναι οι ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος σ, γ, γ_w, ϑ, m, C_τ αφού αυτοί αρκούν για την περιγραφή όλων των άλλων εξαρτημένων μεγεθών του προβλήματος.

Έτσι μετά το πέρας κάθε χρονικού βήματος της επίλυσης της μεθόδου συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης η λύση των εξισώσεων συνοψίζεται στα παρακάτω διανύσματα στήλης

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{N_p} \end{bmatrix}_{N_p \times 1}, \boldsymbol{\vartheta} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_{N_p} \\ \hline \vartheta_{N_p+1} \\ \vdots \\ \vartheta_{N_p+N_w} \end{bmatrix}_{N_g \times 1}, \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{N_p} \\ \hline m_{N_p+1} \\ \vdots \\ m_{N_p+N_w} \end{bmatrix}_{N_g \times 1}, \boldsymbol{C_\tau} = \begin{bmatrix} C_{\tau 1} \\ C_{\tau 2} \\ \vdots \\ C_{\tau N_p} \\ \hline C_{\tau N_p+1} \\ \vdots \\ C_{\tau N_p+N_w} \end{bmatrix}_{N_g \times 1} \tag{3.2}$$

όπου N_p, N_w είναι το πλήθος των κόμβων ελέγχου που έχουν επιλεγεί πάνω στην αεροτομή και στον ομόρρου αντίστοιχα και $N_g = N_p + N_w$ το πλήθος των συνολικών κόμβων ελέγχου αεροτομής και ομόρρου.

Προφανώς οι $\sigma,\ \gamma,\ \gamma_w$ περιγράφουν την ισοδύναμη μη συνεκτική ροή, ενώ οι $\vartheta,\ m,\ C_\tau$ με τις εξισώσεις οριακού στρώματος. Το "πέρασμα" από τους μεν στους δε, όπως έχει εξηγηθεί στην υποενότητα 2.3.4 γίνεται μέσω της μεταβλητής m, εξίσωση (2.140). Επομένως ορίζονται τα παρακάτω διανύσματα στήλης $\boldsymbol{q_{inv}}$ και $\boldsymbol{q_v}$ που περιέχουν τη λύση της ισοδύναμης συνεκτικής ροής και του οριακού στρώματος αντίστοιχα.

$$\boldsymbol{q_{inv}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \gamma \\ \gamma_w \end{bmatrix}_{(N_p+2) \times 1}, \boldsymbol{q_v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\vartheta} \\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{C_\tau} \end{bmatrix}_{3N_g \times 1} \tag{3.3}$$

Στη συνέχεια σχηματίζεται το συνολικό διάνυσμα στήλης όλων των βαθμών ελευθερίας του

προβλήματος όπως αυτοί προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_{inv}} \\ \boldsymbol{q_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \gamma \\ \gamma_w \\ \hline \boldsymbol{\vartheta} \\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{C_\tau} \end{bmatrix}_{N\times 1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \tag{3.4}$$

όπου η συνολική διάσταση είναι $N = N_p + 2 + 3N_g$.

Έχοντας, λοιπόν, υπολογίσει για κάθε χρονικό βήμα t τα διανύσματα στήλης $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$, σχηματίζεται ένας πίνακας στοιβάζοντας τα M διανύσματα $\vec{q}^i = \boldsymbol{q}^{i^\top}$ $i = 1, \ldots, M$ ως εξής:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}^{\,1} \\ \vec{q}^{\,2} \\ \vdots \\ \vec{q}^{\,M} \end{bmatrix}_{M\times N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}^{1^\top} \\ \boldsymbol{q}^{2^\top} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}^{M^\top} \end{bmatrix}_{M\times N} = \begin{bmatrix} q_1^1 & \cdots & q_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^M & \cdots & q_N^M \end{bmatrix}_{M\times N} \tag{3.5}$$

όπου M το πλήθος των χρονικών βημάτων που καταγράφηκαν και q_j^i η τιμή του ανεξάρτητου βαθμού ελευθερίας που αντιστοιχεί στη θέση $j = 1, \ldots, N$ στο διάνυσμα $\vec{q}_i$ τη χρονική στιγμή $i = 1, \ldots, M$. Έτσι κάθε στήλη $\boldsymbol{Q}_j$ του πίνακα $\boldsymbol{Q}$ αποτελεί τη χρονοσειρά $\boldsymbol{q}_j$ της μεταβλητής - βαθμού ελευθερίας q_j.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί πως στη βιβλιογραφία των POD Snapshots συνήθως ως πίνακας χρονοσειρών λαμβάνεται ο ανάστροφος $\boldsymbol{Q}^\top$ του $\boldsymbol{Q}$ αλλά αυτό επηρεάζει ελάχιστα την εξέλιξη της μεθόδου. Στην ενότητα 3.2 γίνεται ξεκάθαρη η συνέπεια αυτής της επιλογής και σχετίζεται με την επιλογή αριστερών/δεξιών ιδιοδιανυσμάτων.

3.2 Singular Value Decomposition - SVD

Η Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών (*Singular Value Decomposition - SVD*) αποτελεί μία ισχυρή τεχνική ανάλυσης ενός πίνακα $\boldsymbol{Q}$ $[M \times N]$ σε ένα γινόμενο τριών πινάκων $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{V}$ ως εξής

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{V}^\top \tag{3.6}$$

Ο $\boldsymbol{\Sigma}$ $[m \times n]$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο, είναι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q}$ αλλά και του $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top$ σε φθίνουσα σειρά. Αυτά τα θετικά διαγώνια στοιχεία $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ ονομάζονται ιδιόμορφες τιμές (singular values) του πίνακα $\boldsymbol{Q}$ και καταλαμβάνουν τις πρώτες r θέσεις της κύριας διαγωνίου του πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$ όταν ο πίνακας $\boldsymbol{Q}$ έχει τάξη r.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία η SVD εφαρμόζεται [1] σε πίνακα $\boldsymbol{Q}$ $[M \times N]$, τάξης

[1] Στη διπλωματική αυτή χρησιμοποιήθηκε το πακέτο MKL (Math Kernel Library) της Intel για την μέθοδο

$r = N$ και ισχύει $M \gg N$.
Σχηματικά λοιπόν, η εξίσωση (3.6) έχει ως εξής

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \boldsymbol{Q} \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{M\times N} = \begin{bmatrix} & | & \\ & | & \\ & | & \\ & N & \\ & | & \\ & | & \\ & | & \end{bmatrix}_{M\times M} \cdot \begin{bmatrix} \diagdown & & & & \\ & \diagdown & & & \\ & & \sigma_i & & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & \diagdown \\ - & - & N & - & - \\ & & \varnothing & & \end{bmatrix}_{M\times N} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{V}^\top & \\ & & \end{bmatrix}_{N\times N} \tag{3.7}$$

Λόγω της μορφής του $\boldsymbol{\Sigma}$ μπορούν αμεληθούν οι γραμμές $\vec{\Sigma}_i$ για $i = N, N+1, \ldots, M$ οι οποίες περιέχουν μηδενικά καθώς και οι αντίστοιχες στήλες $\boldsymbol{U}_i$ του $\boldsymbol{U}$. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας $\boldsymbol{Q}$ αναλύεται τελικά στο γινόμενο ενός πίνακα $\boldsymbol{U}$ $[M \times N]$, ενός πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$ $[N \times N]$ και του ανάστροφου ενός πίνακα $\boldsymbol{V}$ $[N \times N]$. Δηλαδή τελικά η (3.7) γίνεται

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \boldsymbol{Q} \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{M\times N} = \begin{bmatrix} \\ \\ \boldsymbol{U} \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{M\times N} \cdot \begin{bmatrix} \diagdown & & & & \\ & \diagdown & & & \\ & & \sigma_i & & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & \diagdown \end{bmatrix}_{N\times N} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{V}^\top & \\ & & \end{bmatrix}_{N\times N} \tag{3.8}$$

Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου SVD είναι ότι οι πίνακες $\boldsymbol{U}$ και $\boldsymbol{V}$ περιέχουν ορθοκανονικά διανύσματα που αποτελούν βάσεις των δύο βασικών υποχώρων του πίνακα $\boldsymbol{Q}$: το range space και το null space. Πιο συγκεκριμένα

- Οι στήλες του πίνακα $\boldsymbol{U}[M \times N]$ είναι τα N ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\vec{\psi}[1 \times M]$ του πίνακα $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top$. Δηλαδή ορίζουν την ορθοκανονική διανυσματική βάση $\underset{\sim}{\Psi} = \{\vec{\psi}_1, \ldots, \vec{\psi}_N\}$ στο χώρο $\mathbb{R}^M$ που αποτελεί λύση της εξίσωσης $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{U} = \Lambda\boldsymbol{U}$ και παράγει τον υπόχωρο range του $\boldsymbol{Q}$
- Οι γραμμές του πίνακα $\boldsymbol{V}^\top[N \times N]$ είναι τα N ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\vec{\phi}[1 \times N]$ του $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q}$. Δηλαδή ορίζουν την ορθοκανονική διανυσματική βάση $\underset{\sim}{\Phi} = \{\vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_N\}$ στο χώρο $\mathbb{R}^N$ που αποτελεί λύση της εξίσωσης $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{V} = \Lambda\boldsymbol{V}$ και παράγει τον υπόχωρο null space του $\boldsymbol{Q}$

Επομένως ισχύει $\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}^\top\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$.

Singular Value Decomposition

3.3 POD Ιδιομορφές (POD Modes - POMs)

Στη συνέχεια πρέπει να δοθεί προσοχή στην επιλογή της ορθοκανονικής διανυσματικής βάσης γιατί όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1 όλοι οι κανόνες της βιβλιογραφίας προκύπτουν υποθέτοντας έναν πίνακα χρονοσειρών $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^\top$. Στην ενότητα 1.2.3 αποδείχτηκε ότι η βέλτιστη διανυσματική βάση του POD θα προκύψει λαμβάνοντας τα "αριστερά ιδιοδιανύσματα" (*left eigenvectors*). Αυτό απλώς σημαίνει ότι ως βέλτιστη διανυσματική βάση επιλέγονται τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top$.

Ωστόσο στην περίπτωση που εξετάζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία, η παραγοντοποίηση SVD εφαρμόζεται στον πίνακα $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}^\top$, οπότε χρειάζονται τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top\right)^\top = \boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q}$, δηλαδή τα "δεξιά ιδιοδιανύσματα" (*right eigenvectors*) που βρίσκονται στις γραμμές του $\boldsymbol{V}^\top$. Άρα επιλέγεται ως βέλτιστη διανυσματική βάση ο διανυσματικός υπόχωρος $\underset{\sim}{\Phi} = \{\vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_N\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Κάθε ένα από τα διανύσματα αυτά ονομάζεται POD ιδιομορφή (POD Mode - POM) και η διαδικασία κατασκευής τους ονομάζεται "εκπαίδευση" των POMs.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα $\vec{q}^i = \vec{q}(t),\ i = 1, \ldots, M$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{\phi}_j,\ j = 1, \ldots, N$. Άρα για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει

$$\vec{q}(t) = \alpha_1(t)\vec{\phi}_1 + \cdots + \alpha_N(t)\vec{\phi}_N = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\vec{\phi}_j \tag{3.9}$$

Στην εξίσωση (3.9) φαίνεται ο διαχωρισμός της εξάρτησης του χώρου και του χρόνου από τα αρχικά δεδομένα. Η βάση $\{\vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_N\}$ εξαρτάται μόνο από τον χώρο, ενώ οι συντελεστές $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ αυτής μόνο από τον χρόνο.

Οπότε για κάθε $\vec{q}(t)$ το $\alpha_j(t)$ είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{q}(t)$ πάνω στο αντίστοιχο $\vec{\phi}_j$. Δηλαδή ισχύει

$$\alpha_j(t) = \vec{q}(t) \cdot \vec{\phi}_j \tag{3.10}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \vec{q}(t) \cdot \vec{\phi}_j &= \sum_{j=1}^{N} \left[\alpha_j(t)\vec{\phi}_j\right] \cdot \vec{\phi}_j \\ &= \alpha_1(t)\underbrace{\vec{\phi}_1 \cdot \vec{\phi}_j}_{0} + \underbrace{\ldots}_{0} + \alpha_j(t)\underbrace{\vec{\phi}_j \cdot \vec{\phi}_j}_{1} + \underbrace{\ldots}_{0} + \alpha_N(t)\underbrace{\vec{\phi}_N \cdot \vec{\phi}_j}_{0} = \alpha_j(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

γιατί ισχύει

$$\vec{\phi}_k \perp \vec{\phi}_l \Leftrightarrow \vec{\phi}_k \cdot \vec{\phi}_l = 0 \quad \forall\, k \neq l \qquad \text{κάθετα} \tag{3.12}$$

$$\vec{\phi}_j \cdot \vec{\phi}_j = \|\vec{\phi}_j\|^2 = 1^2 = 1 \qquad \text{μοναδιαία} \tag{3.13}$$

3.3.1 Επιλογή POD Ιδιομορφών

Στην ενότητα 3.2 παρουσιάστηκε ο τρόπος υπολογισμού των POD Ιδιομορφών (POMs) και το επόμενο βήμα είναι να επιλεγεί το κατάλληλο πλήθος τους. Το σύνολο των POMs $\underset{\sim}{\Phi} = \{\vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_N\}$ είναι ικανό να παράγει όλο το διανυσματικό χώρο της λύσης $\underset{\sim}{Q} = \{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_M\}$. Δηλαδή $\underset{\sim}{Q} \equiv span\{\underset{\sim}{\Phi}\}$

Κάθε POM $\vec{\phi}_j,\ j = 1, \ldots, N$ περιέχει κάποια πληροφορία για το σύνολο της λύσης $\underset{\sim}{Q}$. Ωστόσο, κάποια POMs περιέχουν περισσότερη πληροφορία από τα άλλα. Το πόση πληροφορία περιλαμβάνει το κάθε POM, με την έννοια της δυνατότητας που έχει να αναπαραστήσει την αρχική λύση, σχετίζεται κυρίως με την ενέργεια που περιέχει. Η ενεργειακή στάθμη του κάθε POM $\vec{\phi}_j$ είναι ανάλογη του μέτρου της singular value $\sigma_j,\ j = 1, \ldots, N$ που του αντιστοιχεί, δηλαδή όσο ψηλότερη η τιμή της, τόσο υψηλότερη ενέργεια περιέχει ή αποδίδει το αντίστοιχο POM στη λύση. Έτσι επιλέγοντας κατάλληλο αριθμό $L \ll N$ POMs μπορεί να προκύψει μία αναπαράσταση του χώρου $\underset{\sim}{Q}$ με σχετικά μικρή απόκλιση. Τελικά κάθε POM περιλαμβάνει ένα ποσοστό της συνολικής ενέργειας που περιέχεται στη λύση, και ποσοτικά εκφράζεται μέσω της τιμής της αντίστοιχης singular value $\sigma_j,\ j = 1, \ldots, N$. Εφόσον οι singular values βρίσκονται σε φθίνουσα σειρά στον πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$ σε φθίνουσα σειρά (ενεργειακά) βρίσκονται και τα POMs στον πίνακα $\boldsymbol{V}^\top$.

Οπότε το κριτήριο επιλογής των POMs που εφαρμόζεται είναι ενεργειακό. Λογίζεται λοιπόν ως ικανοποιητικός αριθμός POMs, ο αριθμός εκείνος για τον οποίο τα POMs διαθέτουν το 99% της συνολικής ενέργειας της ροής:

$$\frac{\sum_{i=1}^{L} \sigma_i}{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i} \simeq 99\% \tag{3.14}$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να τονιστεί πως υπάρχει πολύ συγκεκριμένος λόγος για τον οποίο το ενεργειακό κριτήριο που εφαρμόζεται μπορεί είναι τόσο "αυστηρό" και σχετίζεται με το "θόρυβο" που περιλαμβάνουν τα αρχικά δεδομένα στον πίνακα $\boldsymbol{Q}$. Επειδή όμως τα δεδομένα αυτά είναι αποτέλεσμα επίλυσης μίας αριθμητικής διαδικασίας θεωρείται πως δεν περιέχουν κάποιο είδος θορύβου, οπότε και μπορούν να επιλεγούν τα POMs που περιέχουν το 99% της συνολικής ενέργειας. Ενδεικτικά, σε πειραματικές εφαρμογές του POD, το ενεργειακό κριτήριο που εφαρμόζεται βρίσκεται σε ένα εύρος $70 \div 80\%$, καθώς τα πειραματικά

αποτελέσματα που εισέρχονται ως είσοδος στο POD ενδέχεται να περιέχουν συστηματικά και τυχαία σφάλματα από την πειραματική διάταξη και το περιβάλλον.

Να σημειωθεί ακόμα, πως ανάλογα με την πολυπλοκότητα των φαινομένων της ροής ή της επιθυμητής ακρίβειας το συγκεκριμένο κριτήριο μπορεί να αλλάξει είτε με αύξηση, είτε με μείωση του ποσοστού. Τέλος, υπάρχει και άλλο κριτήριο επιλογής των POMs, μη ενεργειακό, που σχετίζεται με τη διέγερση που δίνει κάθε POM σε συγκεκριμένο βαθμό ελευθερίας και εξετάζεται στο κεφάλαιο 4 στην ενότητα 4.1.2.

Έτσι, ο διανυσματικός χώρος ο οποίος θα αποτελέσει την τελική βάση του POD είναι ένας χώρος $\tilde{\underset{\sim}{\Phi}} = \{\vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_L\} \subseteq \underset{\sim}{\Phi}$ και πλέον για κάθε χρονική στιγμή t έχω μία προσέγγιση του $\vec{q}(t)$ την

$$\tilde{\vec{q}}(t) = \alpha_1(t)\vec{\phi}_1 + \cdots + \alpha_L(t)\vec{\phi}_L = \sum_{j=1}^{L} \alpha_j(t)\vec{\phi}_j \tag{3.15}$$

3.3.2 Βασικές εξισώσεις διαχείρισης δεδομένων του POD

Παρακάτω γίνεται αναφορά σε σχέσεις που ισχύουν καθολικά.

Καταρχάς, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1 κάθε λύση συνοψίζεται σε πίνακα $\boldsymbol{Q}$ της μορφής (3.5). Δηλαδή, λαμβάνεται μία λύση της μορφής

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \ldots & \boldsymbol{q}_N \end{bmatrix}_{M \times N} \tag{3.16}$$

όπου η j-οστή στήλη $j = 1, \ldots, N$ αποτελεί τη χρονοσειρά $\boldsymbol{q}_j$ $[M \times 1]$ του βαθμού ελευθερίας q_j.

$$\boldsymbol{q}_j = \begin{bmatrix} q_j^1 \\ q_j^2 \\ \vdots \\ q_j^M \end{bmatrix}_{M \times 1} \tag{3.17}$$

Σχηματίζεται ο πίνακας $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ $[N \times L]$ βάζοντας ως στήλες του πίνακα τα διανύσματα στήλης

των επιλεγμένων POD ιδιομορφών $\boldsymbol{\phi} = \vec{\phi}^\top$. Δηλαδή

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} & & & \\ \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \dots & \boldsymbol{\phi}_L \\ & & & \end{bmatrix}_{N \times L} \tag{3.18}$$

Η ορθοκανονικότητα των POMs πλέον μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης:

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^\top \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{I}_L \tag{3.19}$$

η οποία ακριβώς δηλώνει ότι οι στήλες του $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ είναι ορθοκανονικά διανύσματα.
Ακόμη, ορίζω ως $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t)$ το διάνυσμα στήλης $[L \times 1]$ που περιέχει όλους τους συντελεστές $\{\alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ για κάθε χρονική στιγμή t, δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{bmatrix}_{L \times 1} \tag{3.20}$$

Επίσης, έστω $\boldsymbol{C}$ $[M \times L]$ ο συνολικός πίνακας των διανυσμάτων των συντελεστών $\vec{\alpha}^i = \vec{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}^\top(t)$ για όλες τις χρονικές στιγμές $i = 1, \dots, M$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}^1 \\ \vec{\alpha}^2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}^M \end{bmatrix}_{M \times L} = \begin{bmatrix} & & & \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \dots & \boldsymbol{\alpha}_L \\ & & & \end{bmatrix}_{M \times L} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_L^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^M & \cdots & \alpha_L^M \end{bmatrix}_{M \times L} \tag{3.21}$$

όπου κάθε στήλη του $\boldsymbol{C}$ είναι η χρονοσειρά $\boldsymbol{\alpha}_j$ του συντελεστή α_j που αντιστοιχεί στο POMs $\vec{\phi}_j$, $j = 1, \dots, L$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο α_j^i του πίνακα είναι η τιμή του συντελεστή που αντιστοιχεί στο POM $\vec{\phi}_j$, $j = 1, \dots, L$ τη χρονική στιγμή $i = 1, \dots, M$.
Ο πίνακας $\boldsymbol{C}$ αποτελεί ουσιαστικά την προβολή της λύσης αναφοράς στο διανυσματικό χώρο των επιλεγμένων POMs, δηλαδή με όρους γραμμικής άλγεβρας:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \tag{3.22}$$

Λόγω της (3.15) ισχύει ότι για κάθε χρονική στιγμή t η προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{q}}(t)$ του διανύσματος στήλης $\boldsymbol{q}(t)$ γράφεται ως

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(t) \tag{3.23}$$

Άρα για την προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ μίας συνολικής λύσης $\boldsymbol{Q}$ ισχύει ότι

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{C} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\top} \tag{3.24}$$

Η (3.24) λόγω της (3.22) γίνεται

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q} \cdot \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\top}}_{\text{φίλτρο}} \tag{3.25}$$

Η εξίσωση (3.25) έχει μεγάλη σημασία γιατί φαίνεται η σχέση μεταξύ της προσέγγισης $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ και του αρχικού πίνακα $\boldsymbol{Q}$. Ουσιαστικά ο πίνακας $\boldsymbol{Q}$ "περνάει" μέσα από το "φίλτρο" $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\top}$ $[N \times N]$. Και ισχύει ότι

$$\lim_{L \to N} \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\top} = I_N \tag{3.26}$$

Δηλαδή ότι το "φίλτρο" αυτό τείνει στον μοναδιαίο πίνακα $[N \times N]$ όταν ο αριθμός των επιλεγμένων POMs τείνει στον αριθμό των βαθμών ελευθερίας.

Για τον υπολογισμό του σφάλματος μεταξύ της προσέγγισης $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ και της αρχικής λύσης $\boldsymbol{Q}$, επιλέγεται να υπολογιστεί το σφάλμα ε_j μεταξύ κάθε χρονοσειράς $\boldsymbol{q}_j$ και της αντίστοιχης προσέγγισής της $\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{j}}$ ως εξής:

$$\varepsilon_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M} \left(q_j^i - \tilde{q}_j^i\right)^2}{M}}, \quad j = 1, \ldots, N \tag{3.27}$$

Ωστόσο, αυτή η έκφραση για το σφάλμα εξαρτάται από την τάξη μεγέθους της κάθε χρονοσειράς, οπότε για να είναι δυνατή η σύγκριση σφαλμάτων μεταξύ των χρονοσειρών θα γίνει αναγωγή του σφάλματος στη μέση τιμή $\bar{q}^j$ της αρχικής χρονοσειράς. Δηλαδή τελικά λαμβάνεται το σχετικό σφάλμα:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_j &= \frac{\varepsilon_j}{\bar{q}_j} \\ \bar{q}_j &= \frac{\sum_{i=1}^{M} q_j^i}{M} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ακόμη, έστω μία λύση $\boldsymbol{Q}_1$ η οποία προκύπτει από ένα συγκεκριμένο set παραμέτρων και $\boldsymbol{Q}_2$ μία λύση η οποία προκύπτει από ένα δεύτερο set παραμέτρων "κοντά" στην περιοχή του πρώτου. Κάθε μία από αυτές τις λύσεις παρέχει τους πίνακες των POMs $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ και $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2$ και ισχύει

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_1 &= \boldsymbol{Q}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 &= \boldsymbol{Q}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Αν ωστόσο θεωρηθεί η $\boldsymbol{Q}_1$ λύση αναφοράς, για να εξεταστεί η δυνατότητα των POMs $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ αναπαράστασης της λύσης $\boldsymbol{Q}_2$ υπολογίζω τον πίνακα $\boldsymbol{C}_2^1$ ως

$$\boldsymbol{C}_2^1 = \boldsymbol{Q}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 \tag{3.30}$$

Οι πίνακες $\boldsymbol{C}_2$ και $\boldsymbol{C}_2^1$ είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι καθώς όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.21) η j-οστή στήλη ενός πίνακα $\boldsymbol{C}$ αποτελεί τη χρονοσειρά του συντελεστή α_j που αντιστοιχεί στο POM $\vec{\phi}_j$. Η σύγκριση των χρονοσειρών $\boldsymbol{\alpha}_j$ που αντιστοιχούν σε POMs υψηλής ενέργειας αποτελεί ένα τρόπο αξιολόγησης της δυνατότητας του χώρου $\tilde{\Phi}$ να παράξει τη λύση $\boldsymbol{Q}_2$.

Πέραν της κλασσικής σύγκρισης δύο χρονοσειρών στο επίπεδο του χρόνου, ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί η σύγκριση μεταξύ $\boldsymbol{C}_2$ και $\boldsymbol{C}_2^1$ είναι η σύγκριση των μετασχηματισμών *Fourier* [2] των χρονοσειρών $\boldsymbol{\alpha}_j$. Με αυτόν τον τρόπο το σήμα στο επίπεδο του χρόνου θα μετασχηματιστεί σε σήμα στο επίπεδο των συχνοτήτων οι οποίες και ενδιαφέρουν στην παρούσα διπλωματική εργασία.
Τέλος, κατά τα γνωστά μπορεί να υπολογιστεί μία προσέγγιση του $\boldsymbol{Q}_2$ μέσω των συντελεστών $\boldsymbol{C}_2$ ως

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_2 = \boldsymbol{C}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{2}}^{\top} = \boldsymbol{Q}_2 \cdot \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{2}}^{\top}}_{\text{λύση 2}} \tag{3.31}$$

ενώ και οι συντελεστές $\boldsymbol{C}_2^1$ μπορούν να δώσουν μία ψευδο-προσέγγιση του $\boldsymbol{Q}_2$ ως εξής:

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1 = \boldsymbol{C}_2^1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{2}}^{\top} = \boldsymbol{Q}_2 \cdot \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{2}}^{\top}}_{\text{λύση 2 \& 1}} \tag{3.32}$$

Η μόνη προϋπόθεση για να έχει νόημα η εξίσωση (3.32) είναι η επιλογή ίδιου αριθμού L POMs από τη λύση 1 & 2.

3.4 Ευθεία αναπαράσταση λύσεων με χρήση POD Ιδιομορφών

Σε αυτό το σημείο ενδιαφέρον έχει να εξεταστεί η δυνατότητα που έχουν τα POMs υψηλής ενέργειας $\{\vec{\phi}_1, \ldots, \vec{\phi}_L\}$ να αναπαριστούν προσεγγιστικά μία λύση που έχει προκύψει από επίλυση του μοντέλου πλήρης τάξης. Καθώς όμως και η δυνατότητα που έχουν τα POMs που προέρχονται από μία λύση αναφοράς να προσεγγίζουν μία λύση "κοντά" σε αυτή της αναφοράς. Θα εξεταστούν δύο περιπτώσεις:

1. ταλάντωση αεροτομής με μία εξωτερική συχνότητα διέγερσης (γωνιακή ταλάντωση)

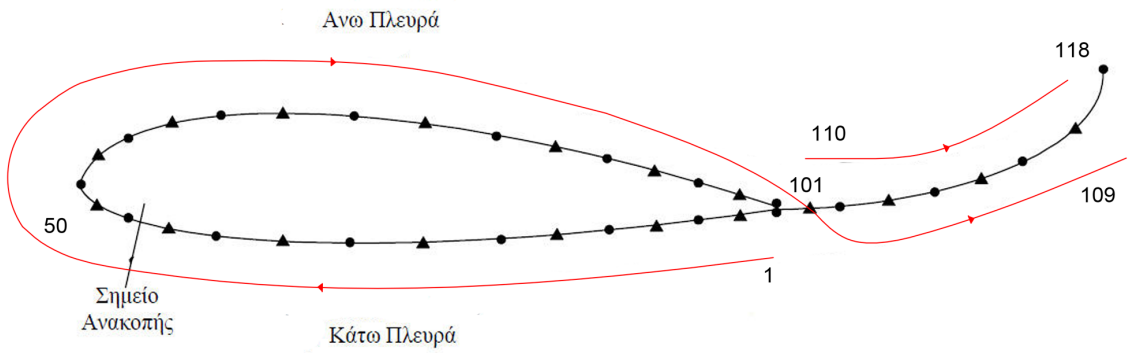
2. ταλάντωση αεροτομής με δύο εξωτερικές συχνότητες (γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση)

[2] Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε υπορουτίνα από το Numerical Recipies [53] για τη μέθοδο Fast Fourier Transform - FFT

3.4.1 Διαστασιολόγιση πινάκων

Στην παρούσα μελέτη ισχύει $M \gg N$ καθώς ο αριθμός των χρονικών βημάτων ($\sim 10^3$) είναι πολύ μεγαλύτερος από το πλήθος των ανεξάρτητων βαθμών ελευθερίας του προβλήματος ($\sim 10^2$). Θα γίνει μία προσπάθεια ανάλυσης της μεθοδολογίας υπολογισμού των διαστάσεων N και M.

Η αεροτομή αναπαρίσταται με 101 σημεία, ενώ ο ομόρρους 9 για κάθε φύλλο στροβιλότητας (πάνω και κάτω), σύνολο 18. Επομένως το πλήθος των βαθμών ελευθερίας είναι $N = 100 + 2 + 3 \cdot 118 = 456$. Πιο συγκεκριμένα, $\boldsymbol{\sigma}$ είναι το διάνυσμα στήλης $[100 \times 1]$ των πηγών πάνω στην αεροτομή, ενώ $\boldsymbol{\vartheta}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{C_\tau}$ είναι τα διανύσματα στήλης $[118 \times 1]$ των βαθμών ελευθερίας ϑ, m, C_τ στην αεροτομή και στον ομόρρου.



Σχήμα 3.1: *Αρίθμηση σημείων αεροτομής*

Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο αριθμούνται τα 101 σημεία της αεροτομής και τα 18 του ομόρρου στον κώδικα. Η αρίθμηση ξεκινάει από την ακμή εκφυγής στην κάτω πλευρά, περνάει από το σημείο ανακοπής, συνεχίζει στην πάνω πλευρά της αεροτομής και καταλήγει στην ακμή εκφυγής της πάνω πλευράς. Τέλος η αρίθμηση στον ομόρρου συνεχίζεται με πρώτο το κάτω φίλο στροβιλότητας και τελευταίο το πάνω. Η διαδικασία αρίθμησης διευκρινίζεται σε αυτό το σημείο έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να συσχετίζει άμεσα αύξοντα αριθμό κόμβου/στοιχείου σε πίνακα με σημείο της αεροτομής όπου αυτό δεν είναι σαφές. Στο Παράρτημα 5.3 υπάρχει ο πίνακας 1 με την αρίθμηση των σημείων της αεροτομής σύμφωνα με την παραπάνω εξήγηση.

Ακόμη, πρέπει να σημειωθεί ότι το μοντέλο πλήρους τάξης επιλύει μη μόνιμες ροές γύρω από ταλαντούμενες αεροτομές υπολογίζοντας τα μεγέθη του οριακού στρώματος σε κάθε χρονικό βήμα N_t. Υπάρχει λοιπόν ένα μεταβατικό στάδιο (transient phase) πριν την σταθερή απόκριση (steady state) των βαθμών ελευθερίας, το οποίο περιλαμβάνει ταλαντώσεις σε συχνότητες που δεν έχουν καμία σχέση με τις συχνότητες εξαναγκασμένων ταλαντώσεων στις οποίες διεγείρεται η αεροτομή, αλλά είναι εγγενείς (inherent) συχνότητες του δυναμικού συστήματος.

Συνεπώς, προτιμάται τα δεδομένα που περιέχονται στον πίνακα $\boldsymbol{Q}$ να είναι ενός τύπου

(transient ή steady state) καθώς οι δύο αυτές καταστάσεις έχουν πολύ διαφορετική συμπεριφορά και φυσική σημασία. Επειδή στην παρούσα εργασία ενδιαφέρει το *steady state* τμήμα της λύσης, στο χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί στην *transient phase* δεν αποθηκεύεται το διάνυσμα στήλης $\boldsymbol{q}$. Οπότε η καταγραφή του $\boldsymbol{q}$ λαμβάνει χώρα μετά από κάποιο χρονικό βήμα N_{tPOD}.

Ακόμη προκειμένου να ληφθούν επαρκή δεδομένα για τη μέθοδο POD η διάσταση M επιλέγεται έτσι ώστε οι χρονοσειρές που προκύπτουν από την επίλυση της μη μόνιμης ροής να περιέχουν αρκετή πληροφορία.

1. Για τις περιπτώσεις γωνιακής ταλάντωσης οι χρονοσειρές να περιλαμβάνουν τουλάχιστον 3 φορές την περίοδο ταλάντωσης.

2. Για τις περιπτώσεις ταλάντωσης γωνιακής ταλάντωσης & πτερύγισης οι χρονοσειρές να περιλαμβάνουν τουλάχιστον 2 φορές την μεγαλύτερη περίοδο ταλάντωσης.

Μία βολική έκφραση για το N_{tPOD} για την περίπτωση 1. είναι

$$N_{tPOD} = \frac{T_{max}}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\omega_{min}\Delta t} \tag{3.33}$$

ενώ για την περίπτωση 2. επιλέγεται απλώς μία σταθερή τιμή έτσι ώστε να αποφευχθεί η χρήση τεράστιων πινάκων

$$N_{tPOD} = 600 \tag{3.34}$$

Επίσης, τα συνολικά χρονικά βήματα N_{ttot} που θα επιλύεται κάθε φορά το μοντέλο πλήρους τάξης για την περίπτωση 1. δίνονται από τον τύπο

$$\begin{aligned} &\Delta t \cdot N_{ttot} = 3T_{max} + \Delta t \cdot N_{tPOD} \Leftrightarrow N_{ttot} = \frac{3T_{max}}{\Delta t} + N_{tPOD} \Leftrightarrow \\ &N_{ttot} = \frac{6\pi}{\omega_{min}\Delta t} + \frac{2\pi}{\omega_{min}\Delta t} \Leftrightarrow N_{ttot} = \frac{8\pi}{\omega_{min}\Delta t} \end{aligned} \tag{3.35}$$

και για την περίπτωση 2. δίνονται από τον τύπο

$$\begin{aligned} &\Delta t \cdot N_{ttot} = 2T_{max} + \Delta t \cdot N_{tPOD} \Leftrightarrow N_{ttot} = \frac{2T_{max}}{\Delta t} + N_{tPOD} \Leftrightarrow \\ &N_{ttot} = \frac{4\pi}{\omega_{min}\Delta t} + 600 \Leftrightarrow N_{ttot} = \frac{6\pi}{\omega_{min}\Delta t} + 600 \end{aligned} \tag{3.36}$$

όπου ως T_{max} ορίζεται η μεγαλύτερη περίοδος ταλάντωσης που είναι παρούσα στο δειγματοληπτημένο σήμα και αντιστοιχεί στη μικρότερη κυκλική συχνότητα ω_{min}.
Τέλος σε κάθε περίπτωση

$$M = N_{ttot} - N_{tPOD} + 1 \tag{3.37}$$

3.4.2 Εξαναγκασμένη ταλάντωση αεροτομής με μία συχνότητα διέγερσης (γωνιακή ταλάντωση)

Ευθεία αναπαράσταση λύσης χρησιμοποιώντας ίδια POD Modes

Περίπτωση 1 Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.1: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακής ταλάντωσης 1*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα ω_α	πλάτος ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης $\hat{\phi}_\alpha$
$5°$	$0.2rad/s$	$3°$	$0°$

Η αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$ καθώς και το πλάτος ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$ επιλέγεται έτσι ώστε να μην υπάρχει αποκόλληση στην υπό μελέτη ροή, ενώ η κυκλική συχνότητα ω_α επιλέγεται ως συνήθης συχνότητα ταλάντωσης πτερυγίων ανεμογεννητριών. Παρόμοια λογική σχετικά με την επιλογή των παραμέτρων για τις περιπτώσεις ταλάντωσης μίας συχνότητας ακολουθείται σε ολόκληρη τη διπλωματική εργασία.

Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.33), (3.35) και (3.37)

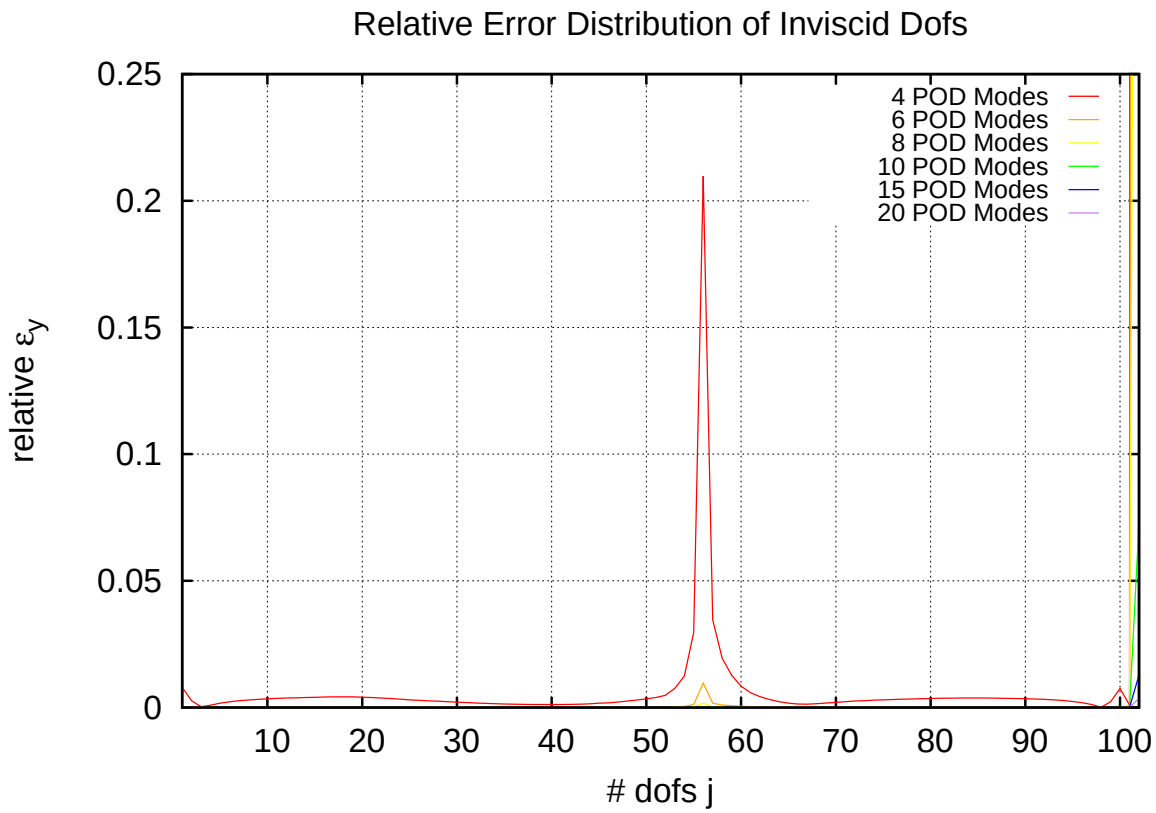
- $N_{tPOD} = 2\pi/(\omega_\alpha \Delta t) = 2\pi/0.2 \cdot 0.05 \cong 628$
- $N_{ttot} = 8\pi/(0.2 \cdot 0.05) \cong 2512$
- $M = 2512 - 628 + 1 = 1885$

Μετά την εκπαίδευση (μέθοδος SVD) των POMs για τη λύση αυτή, είναι δυνατή η αναπαράσταση της λύσης χρησιμοποιώντας $L \ll 456$ POMs. Σύμφωνα με το ενεργειακό κριτήριο (3.14) 4 POMs αρκούν για την αναπαράσταση της αρχικής λύσης, ωστόσο επειδή κάθε αναπαράσταση της λύσης μέσω POMs αποτελεί μία προσέγγιση της αρχικής λύσης, ενδιαφέρον έχει να εξεταστεί το σφάλμα προσέγγισης της λύσης με παράμετρο τον αριθμό L. Στον πίνακα πίνακα 3.2 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ποσοστά της ενέργειας που περιλαμβάνουν τα 4 πρώτα POMs.

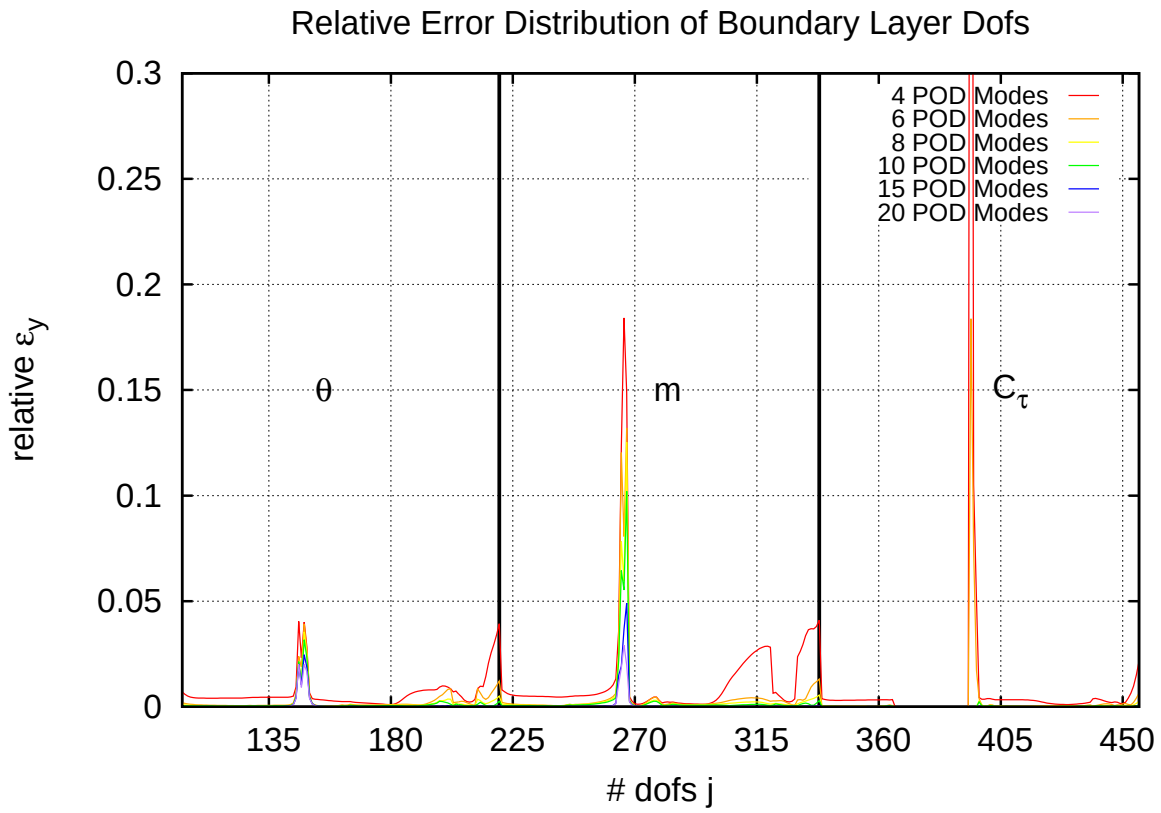
Πίνακας 3.2: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.90%	87.90%
2	8.57%	96.47%
3	2.01%	98.47%
4	0.64%	99.12%

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο διαγράμματα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας j για $L = 4, 6, 8, 10, 15, 20$. Ο λόγος για τον οποίο η πληροφορία του σφάλματος χωρίστηκε σε δύο διαγράμματα είναι το γεγονός ότι οι βαθμοί ελευθερίας που σχετίζονται με την ισοδύναμη μη συνεκτική ροή παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά από αυτούς που σχετίζονται με το οριακό στρώμα.



Σχήμα 3.2: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$. *Σημαντικό σφάλμα παρουσιάζεται στην περιοχή του σημείου ανακοπής*



Σχήμα 3.3: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$. *Σημαντικό σφάλμα παρουσιάζεται στην περιοχή του σημείου ανακοπής* (ϑ, m) *και στο μεταβατικό σημείο τυρβώδους ροής* (C_τ)

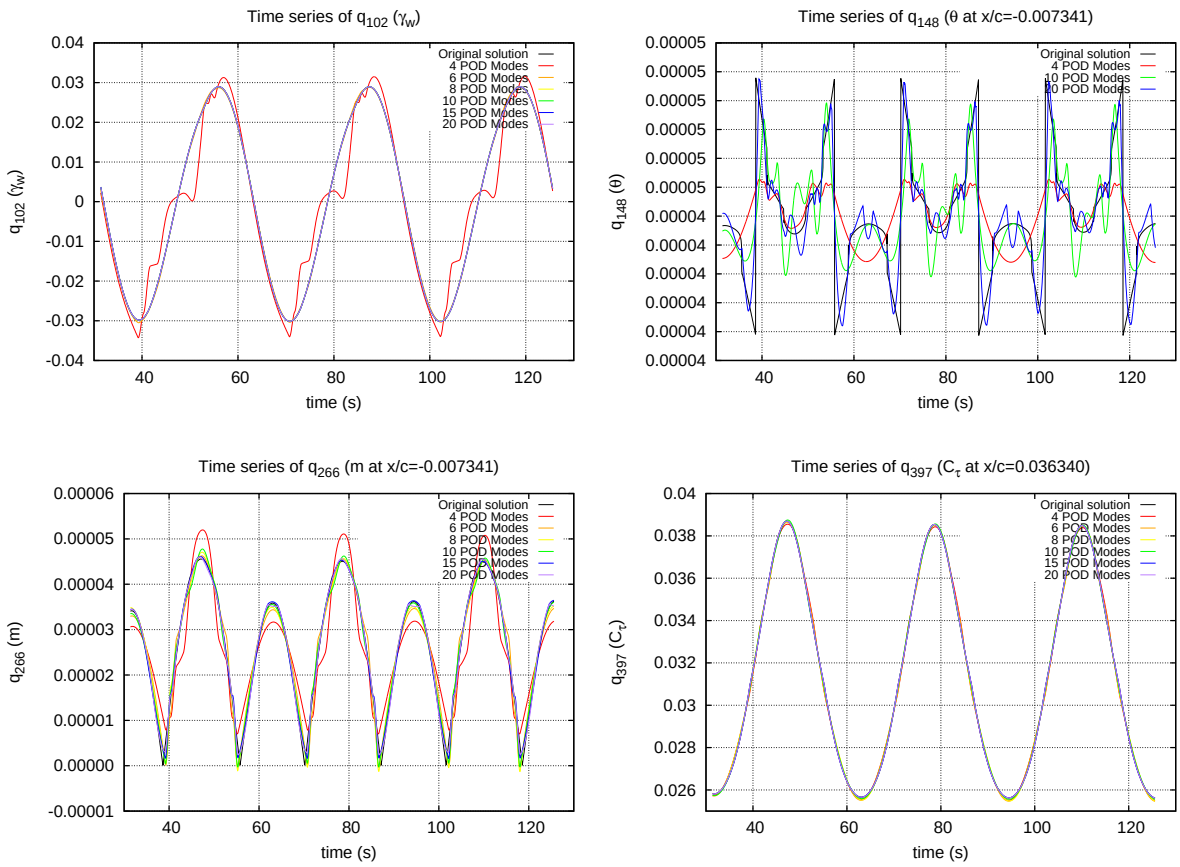
Τα διαγράμματα 3.3 και 3.2 μας παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για την προσέγγιση της λύσης που λαμβάνεται μέσω της ευθείας αναπαράστασης με POMs. Από το διάγραμμα 3.2 φαίνεται ότι ουσιαστικό σφάλμα στο μη συνεκτικό τμήμα της λύσης παρουσιάζει ο βαθμός ελευθερίας για $j = 102$, δηλαδή η ένταση της παραγόμενης στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρου γ_w. Αυτό οφείλεται στη μη γραμμικότητα της συνθήκης Kelvin μέσω της οποίας υπολογίζεται η στροβιλότητα γ_w. Χαρακτηριστικά μικρές είναι οι τιμές του σφάλματος για όλες τις εντάσεις των πηγών σ που κατανέμονται στην αεροτομή καθώς ο υπολογισμός τους πραγματοποιείται μέσω ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων. Αν και για 4 POMs το σφάλμα είναι εξαιρετικά υψηλό, παρατηρείται η εξάλειψή του με χρήση περισσότερων POMs. Με χρήση $L = 10$ POMs παρατηρείται ότι $\bar{\varepsilon}_{102} \in [0, 0.5]$.

Από το διάγραμμα 3.3 και από το Σχήμα 3.1 εξάγεται το συμπέρασμα ότι προκύπτει υψηλό σφάλμα στην προσέγγιση των βαθμών ελευθερίας του οριακού στρώματος ϑ και m στην περιοχή του σημείου ανακοπής (*stagnation point*). Αντίθετα, το C_τ σε αυτή την περιοχή που η ροή είναι ως γνωστόν στρωτή είναι μηδέν και υψηλό σφάλμα εμφανίζεται στην περιοχή μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τόσο για το C_τ όσο και για το m το σφάλμα

φαίνεται να υποχωρεί καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των POMs. Ειδικά στην περίπτωση του C_τ, το σφάλμα μηδενίζεται για περισσότερα από 8 POMs. Αντίθετα το σφάλμα του ϑ είναι περισσότερο σταθερό και δείχνει να μην επηρεάζεται ιδιαίτερα από την αύξηση του αριθμού των POMs.

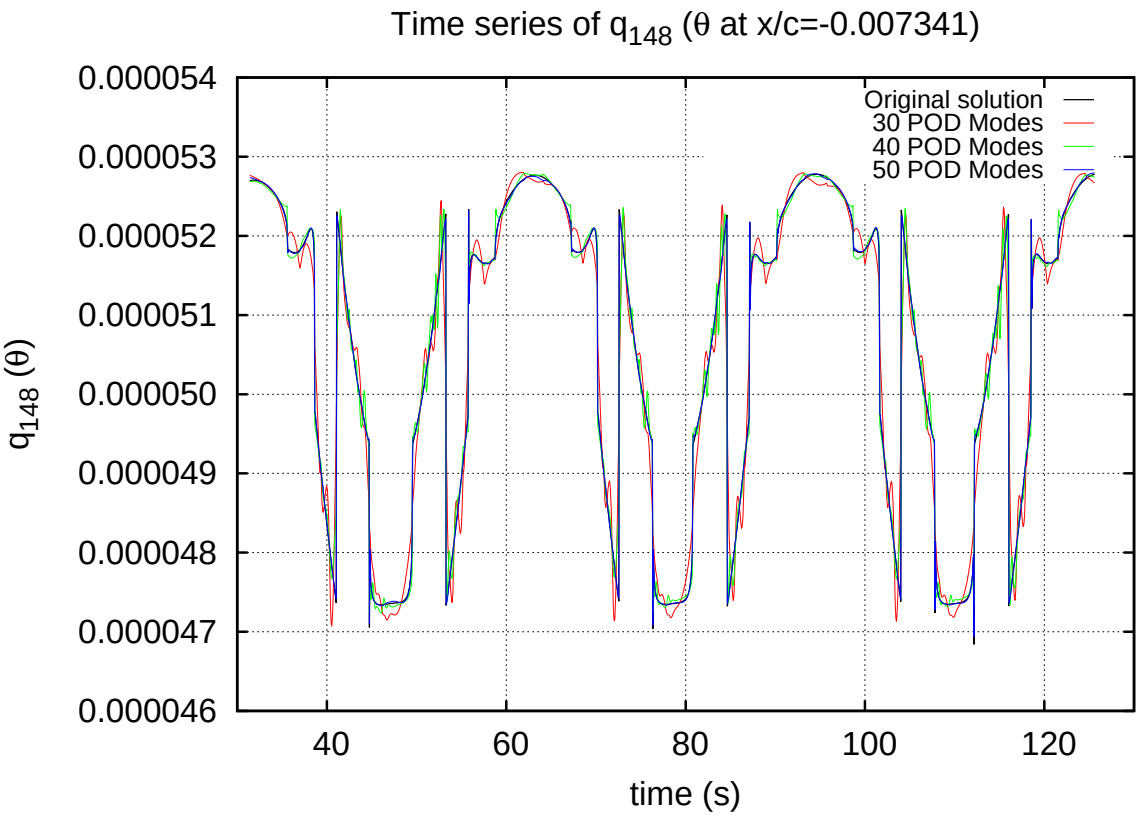
Παρακάτω παρουσιάζονται οι αρχικές χρονοσειρές κάποιων από τα σημαντικά ως προς το σφάλμα σημεία που σχολιάστηκαν καθώς και οι προσεγγίσεις αυτών για L=4,6,8,10,15,20.



Σχήμα 3.4: *Χρονοσειρές βαθμών ελευθερίας και προσεγγίσεις τους μέσω ευθείας αναπαράστασης σε θέσεις μέγιστου σχετικού σφάλματος. Η αύξηση του αριθμού των POD Modes συνεπάγεται καλύτερη προσέγγιση της αρχικής λύσης*

Παρατηρώντας τα διαγράμματα 3.4 επαληθεύεται η παρατήρηση για την "συνέπεια" του σφάλματος του ϑ στην περιοχή του σημείου ανακοπής. Ενώ όλα τα υπόλοιπα σφάλματα εξαλείφονται εντελώς αυξανόμενου του αριθμού των POMs που χρησιμοποιούνται για την ευθεία αναπαράσταση, το σφάλμα που παρουσιάζουν οι προσεγγίσεις των χρονοσειρών του ϑ στην περιοχή του σημείου ανακοπής ($j \in [145, 153]$) διατηρείται. Αυτό συμβαίνει γιατί όπως φαίνεται στα διαγράμματα 3.4 οι χρονοσειρές αυτές περιέχουν πολύ λεπτομερή πληροφορία (*fine information*) καθώς περιλαμβάνουν και άλλες ταλαντώσεις πέραν της κύριας με μεγαλύτερη συχνότητα και μικρότερο πλάτος. Η πληροφορία αυτή, περνά από το φίλτρο του SVD και κατανέμεται σε πολλά POMs, με αποτέλεσμα η ακριβής αναπαράσταση αυτών

των χρονοσειρών να χρειάζεται μεγάλο αριθμό L. Μάλιστα μία ακριβής προσέγγιση της χρονοσειράς του q_{148} λαμβάνεται για $L = 50$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: *Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των POD Modes λαμβάνεται ολοένα και καλύτερη προσέγγιση της αρχικής χρονοσειράς. Για 50 POMs το σφάλμα είναι αμελητέο*

Το γεγονός ότι οι ανωμαλίες αυτές συναντώνται σε σημεία της αεροτομής που βρίσκονται σε μία περιοχή γύρω από το σημείο ανακοπής δεν είναι τυχαίο. Αυτό συμβαίνει γιατί σε αυτή την περιοχή η ταχύτητα είναι μηδενική και ισχύει $u_e \cong 0$, και επειδή $\delta^* = m/u_e$, στην περιοχή αυτή εμφανίζονται σχετικά υψηλές τιμές του δ^* συνεπώς και πολύ υψηλές τιμές $H = \delta^*/\vartheta$. Σε αυτά τα σημεία, η λύση του συστήματος διορθώνεται μέσω ενός εξωτερικού τμήματος λύσης που δεν προέρχεται από το ίδιο σύστημα εξισώσεων ή εμπειρικών διορθώσεων σε περίπτωση μη κανονικών τιμών. Αυτός είναι ο λόγος που τελικώς για να προκύψει μία προσέγγιση της λύσης $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$ με μηδενικό σφάλμα αποκοπής χρειάζονται $50 \gg 4$ POMs.

Ευθεία αναπαράσταση λύσης χρησιμοποιώντας POMs λύσης αναφοράς

Επιλέγοντας την περίπτωση 1 ως περίπτωση αναφοράς, η λύση που προκύπτει από αυτό το set παραμέτρων αποτελεί τη λύση αναφοράς $\boldsymbol{Q}_1$. Θα εξεταστεί κατά πόσο η λύση αναφοράς $\boldsymbol{Q}_1$ είναι ικανή να παρέχει POMs $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ τα οποία μπορούν να λειτουργήσουν ως διανυσματική βάση προσέγγισης μίας άλλης λύσης $\boldsymbol{Q}_2$ η οποία προέρχεται από set παραμέτρων "κοντά" στο set αναφοράς. Ο αριθμός των POMs που θα χρησιμοποιηθεί είναι $L = 50$ έτσι ώστε να περιλαμβάνεται σε αυτά όλη η λεπτομέρεια στην περιοχή του σημείου ανακοπής.

Περίπτωση 2: Μεταβολή της κυκλικής συχνότητας ω_α Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.3: *Παράμετροι γωνιακής ταλάντωσης 2*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα ω_α	πλάτος ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης $\hat{\phi}_\alpha$
$5°$	$0.18 rad/s$	$3°$	$0°$

Όπως φαίνεται η κυκλική συχνότητα ω_α μειώθηκε κατά 10%, ενώ το πλάτος της ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$ παρέμεινε σταθερό σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.33), (3.35) και (3.37)

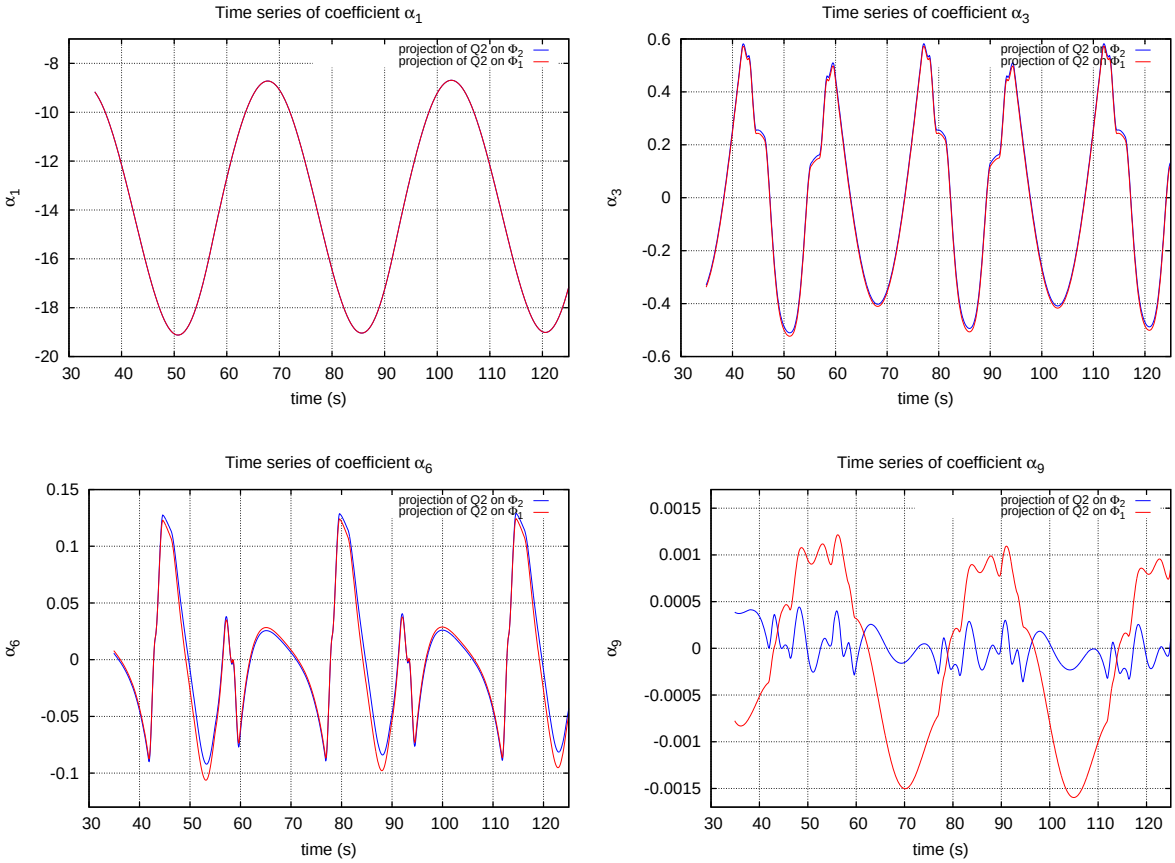
- $N_{tPOD} = 2\pi/(\omega_\alpha \Delta t) = 2\pi/0.18 \cdot 0.05 \cong 698$
- $N_{ttot} = 8\pi/(0.18 \cdot 0.05) \cong 2792$
- $M = 2792 - 698 + 1 = 2095$

Στον πίνακα πίνακα 3.4 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ποσοστά της ενέργειας που περιλαμβάνουν τα 4 πρώτα POMs.

Πίνακας 3.4: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.82%	87.82%
2	8.67%	96.50%
3	2.05%	98.54%
4	0.57%	99.12%

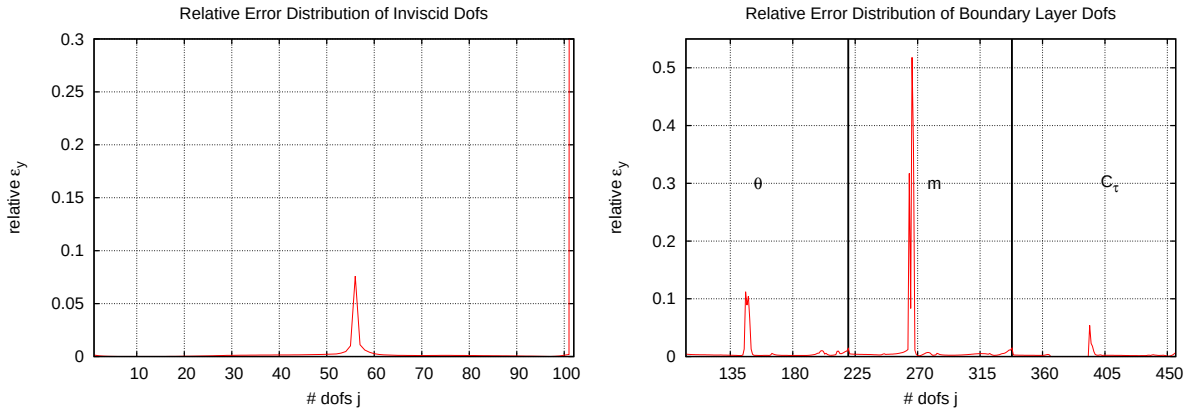
Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.29)-(3.32) προκύπτουν δύο πίνακες συντελεστών $\boldsymbol{C}_2$ και $\boldsymbol{C}_2^1$. Αρχικά θα γίνει μία σύγκριση των χρονοσειρών των συντελεστών α_j των αντίστοιχων POMs $\vec{\phi}_j$ (υψηλής ενεργειακής στάθμης) που βρίσκονται στις στήλες των πινάκων $\boldsymbol{C}_2$ και $\boldsymbol{C}_2^1$.



Σχήμα 3.6: *Σύγκριση χρονοσειρών συντελεστών* α_j, $j = 1, 3, 6, 9$. *Οι χρονοσειρές των συντελεστών που αντιστοιχούν σε POMs υψηλής ενέργειας παρουσιάζουν μηδενική απόκλιση*

Παρατηρείται ότι οι χρονοσειρές των συντελεστών που αντιστοιχούν σε POMs υψηλής ενέργειας υπολογίζονται με αρκετά καλή ακρίβεια μέχρι και την 9η χρονοσειρά. Ωστόσο η διαφορά αυτή μετά την 9η χρονοσειρά έχει μικρή σημασία καθώς το 99.12% της ενέργειας περιέχεται ήδη στα 4 πρώτα POMs.

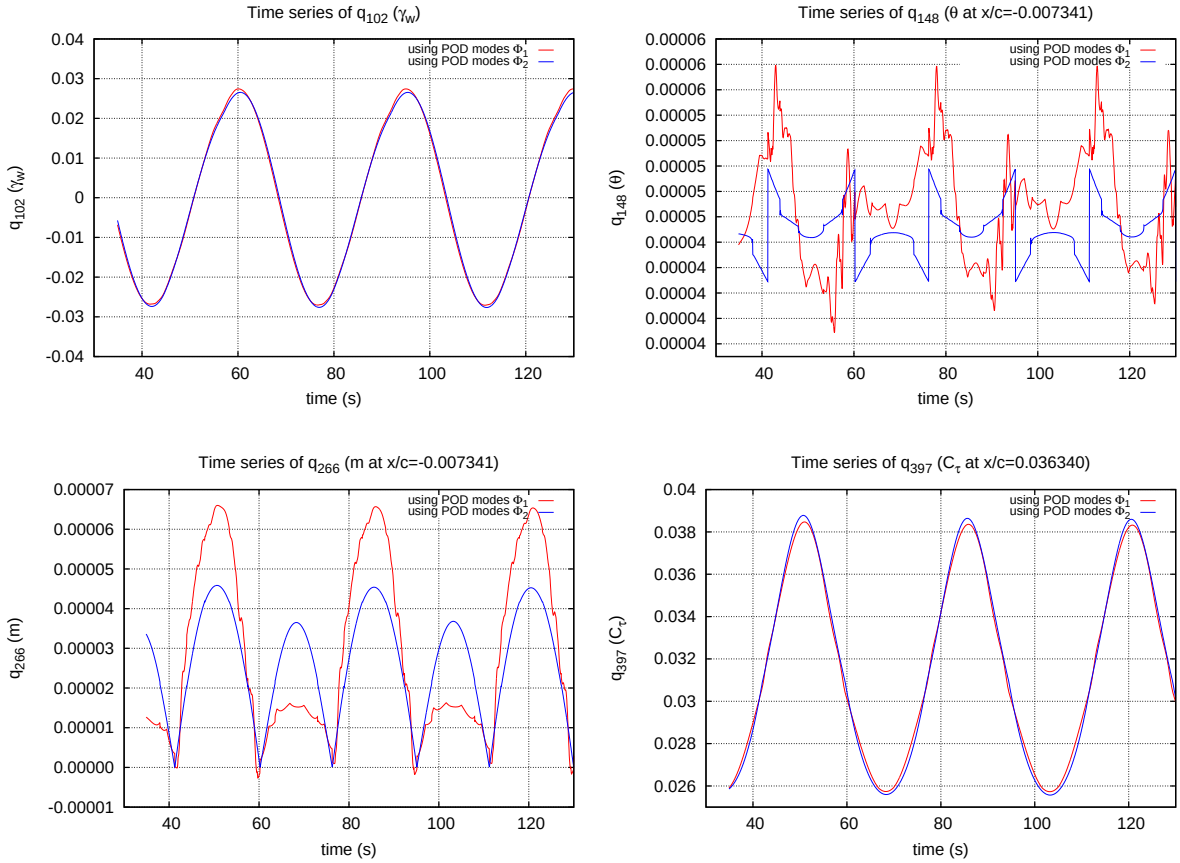
Στη συνέχεια, υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.32) η προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1$ και το σφάλμα της κατά την εξίσωση (3.28).



Σχήμα 3.7: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και οριακού στρώματος για την προσέγγιση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1$ *με* $L = 50$. *Οι περιοχές μέγιστου σφάλματος είναι στην περιοχή του σημείου ανακοπής* (σ, ϑ, m) *και στο σημείο μετάβασης σε τυρβώδη ροή* (C_τ)

Από τα 3.7 φαίνεται ότι τα σφάλματα εντοπίζονται στα αναμενόμενα σημεία της αεροτομής, ωστόσο είναι μικρού μέτρου γεγονός που δηλώνει ότι η λύση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1$ είναι αρκετά κοντά στη λύση $\boldsymbol{Q}_2$, δηλαδή η βάση $\tilde{\tilde{\Phi}}_1$ παράγει ικανοποιητικά τη λύση $\boldsymbol{Q}_2$.

Ενδιαφέρον έχει η σύγκριση των χρονοσειρών των βαθμών ελευθερίας που προκύπτουν από τις προσεγγίσεις $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2$ και $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1$ στα σημεία που παρουσιάζουν ιδιαίτερη συμπεριφορά



Σχήμα 3.8: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2$ *με* $L = 50$. *Η χρήση των* $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ *συνεπάγεται μεγάλη απόκλιση από την προσέγγιση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2$

Αυτό που φαίνεται από τα διαγράμματα 3.8 είναι ότι ακόμα και επιλέγοντας $L = 50$ POMs, η βάση $\tilde{\Phi}_1$ δεν μπορεί να παράξει τη λεπτομέρεια που χρειάζεται για τους βαθμούς ελευθερίας ϑ και m με ικανοποιητική ακρίβεια στην περιοχή κοντά στο σημείο ανακοπής.

Περίπτωση 3: Μεταβολή του πλάτους $\hat{A}_\alpha$ Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.5: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακής ταλάντωσης 3*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα ω_α	πλάτος ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης $\hat{\phi}_\alpha$
$5°$	$0.2 rad/s$	$3.3°$	$0°$

Όπως φαίνεται το πλάτος $\hat{A}_\alpha$ αυξήθηκε κατά 10%, ενώ η κυκλική συχνότητα ω_α παρέμεινε σταθερή σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.33), (3.35) και

(3.37)

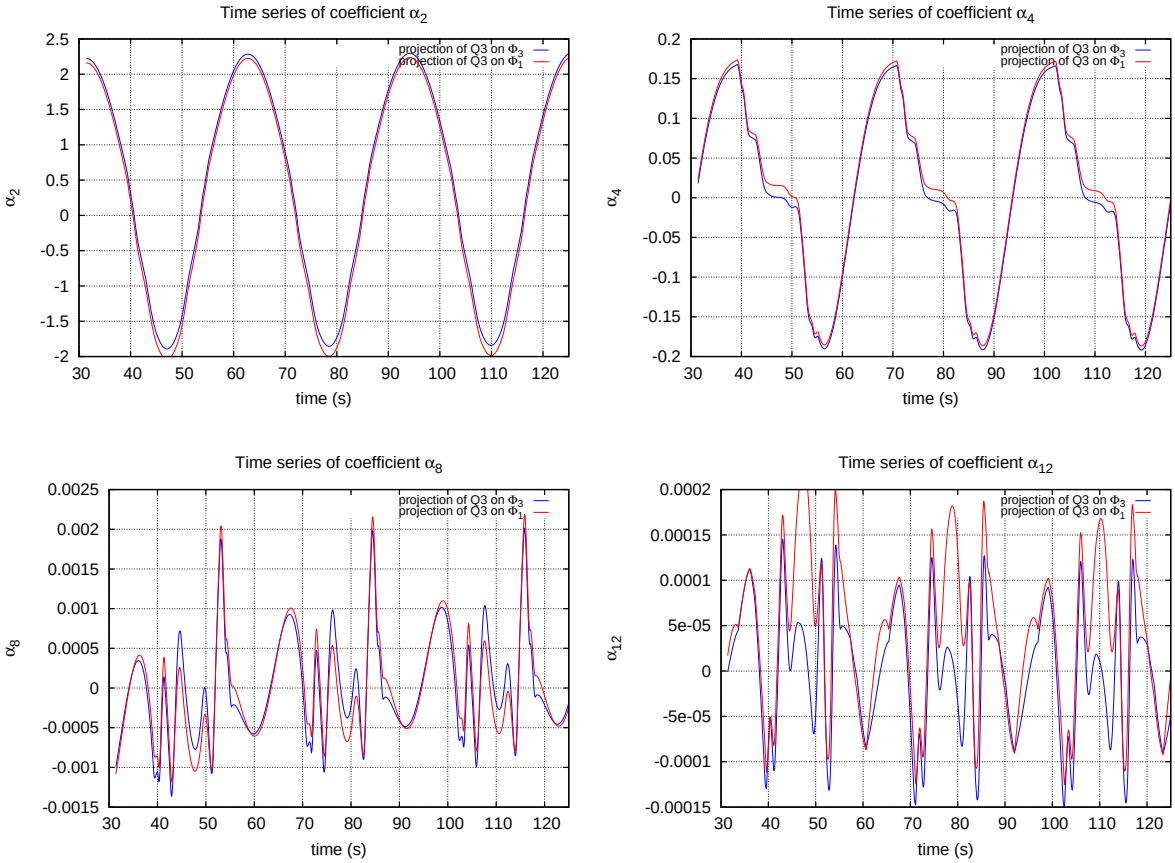
- $N_{tPOD} = 2\pi/(\omega_\alpha \Delta t) = 2\pi/0.2 \cdot 0.05 \cong 628$
- $N_{ttot} = 8\pi/(0.2 \cdot 0.05) \cong 2512$
- $M = 2512 - 628 + 1 = 1885$

Στον πίνακα πίνακα 3.6 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ποσοστά της ενέργειας που περιλαμβάνουν τα 4 πρώτα POMs.

Πίνακας 3.6: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99% της ενέργειας*

POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.40%	87.40%
2	8.88%	96.28%
3	2.14%	98.42%
4	0.66%	99.08%

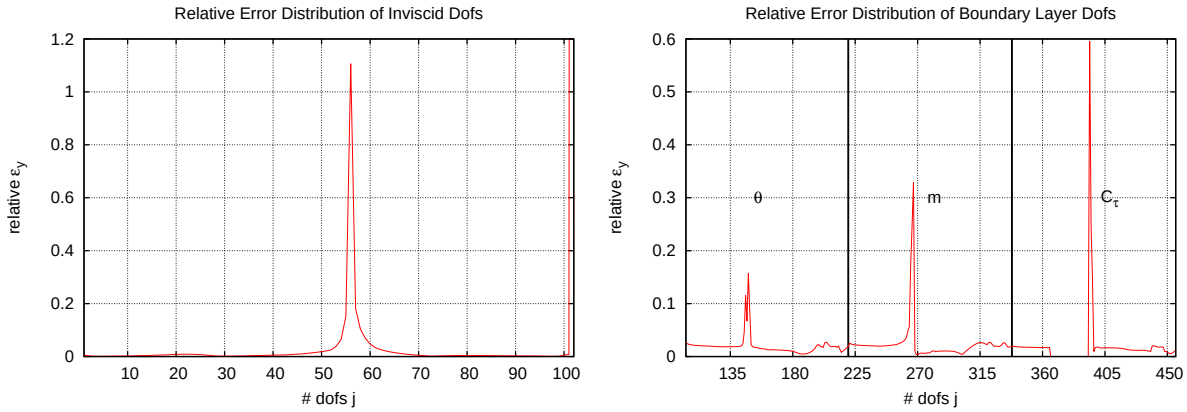
Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.29)-(3.32) προκύπτουν δύο πίνακες συντελεστών $\boldsymbol{C}_3$ και $\boldsymbol{C}_3^1$. Αρχικά θα γίνει μία σύγκριση των χρονοσειρών των συντελεστών α_j των αντίστοιχων POMs $\vec{\phi}_j$ (υψηλής ενεργειακής στάθμης) που βρίσκονται στις στήλες των πινάκων $\boldsymbol{C}_3$ και $\boldsymbol{C}_3^1$.



Σχήμα 3.9: *Σύγκριση χρονοσειρών συντελεστών* α_j, $j = 2, 4, 8, 12$. *Οι χρονοσειρές των συντελεστών που αντιστοιχούν σε POMs υψηλής ενέργειας παρουσιάζουν μηδενική απόκλιση*

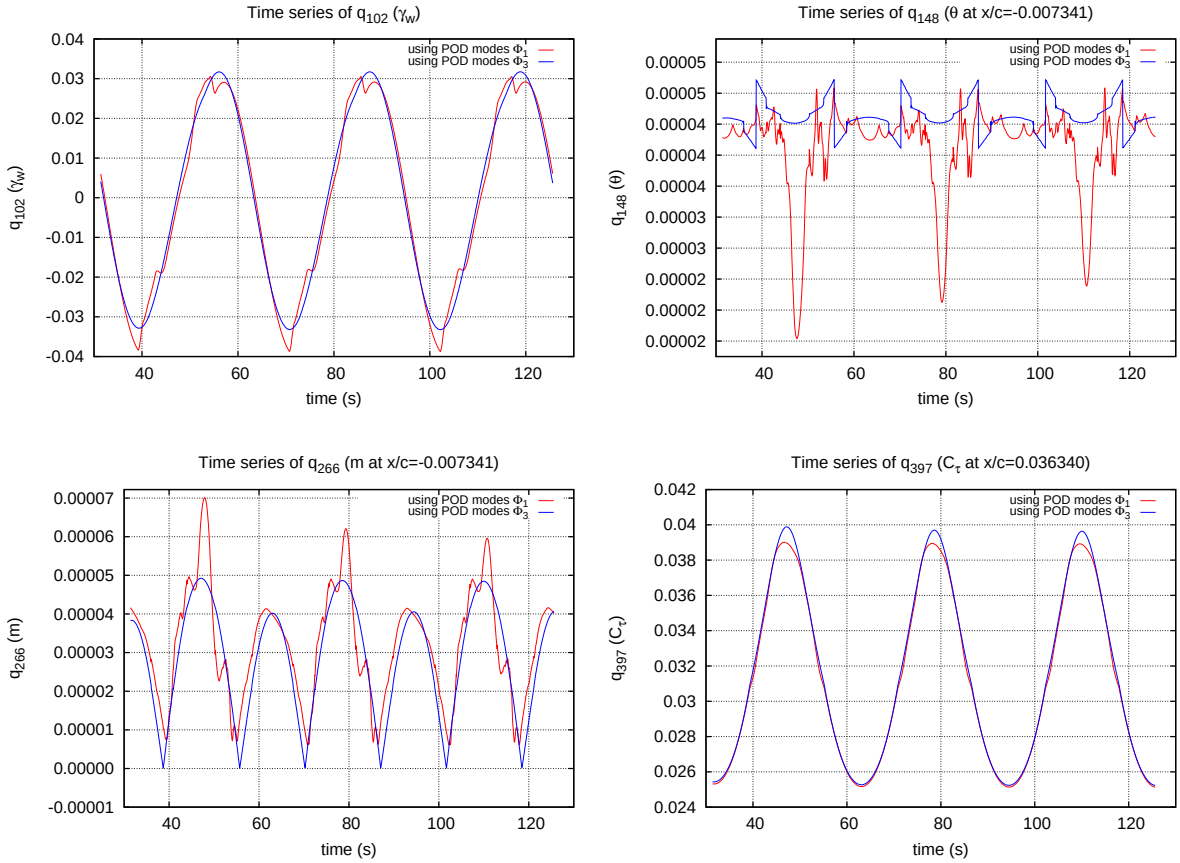
Παρατηρείται και σε αυτή την περίπτωση μία καλή ταύτιση των χρονοσειρών των συντελεστών γεγονός που αποτελεί ενθαρρυντική ένδειξη στο ότι η βάση $\tilde{\underset{\sim}{\Phi}}_1$ μπορεί να ανακατασκευάσει τη λύση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3$.

Στη συνέχεια, υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.32) η προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3^1$ και το σφάλμα τους κατά την εξίσωση (3.28).



Σχήμα 3.10: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και οριακού στρώματος για την προσέγγιση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3^1$ *με* $L = 50$. *Οι περιοχές μέγιστου σφάλματος είναι στην περιοχή του σημείου ανακοπής* (σ, ϑ, m) *και στο σημείο μετάβασης σε τυρβώδη ροή* (C_τ)

Από τα σχήματα 3.10 φαίνεται ότι τα σφάλματα εντοπίζονται στα αναμενόμενα σημεία της αεροτομής και μάλιστα παρουσιάζουν την ίδια τάση με τα σχήματα 3.7 γεγονός που δείχνει για άλλη μία φορά τη συστηματική φύση αυτών των σφαλμάτων. Ενδιαφέρον έχει η σύγκριση των χρονοσειρών των βαθμών ελευθερίας που προκύπτουν από τις προσεγγίσεις $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3$ και $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3^1$ στα σημεία που παρουσιάζουν ιδιαίτερη συμπεριφορά



Σχήμα 3.11: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3^1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3$ *με* $L = 50$. *Η χρήση των* $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ *συνεπάγεται μεγάλη απόκλιση από την προσέγγιση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3$

Αυτό που φαίνεται από τα διαγράμματα 3.11 είναι ότι ακόμα και επιλέγοντας $L = 50$ POMs, η βάση $\tilde{\Phi}_1$ δεν μπορεί να παράξει όλο το φάσμα των ταλαντώσεων της μεταβλητής ϑ κοντά στο σημείο ανακοπής καθώς αυτή η λεπτομέρεια βρίσκεται διασπαρμένη σε ιδιομορφές ακόμα χαμηλότερης ενεργειακής στάθμης.

3.4.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση αεροτομής με δύο συχνότητες διέγερσης (γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση)

Ευθεία αναπαράσταση λύσης χρησιμοποιώντας ίδια POD MODs

Περίπτωση 1 Θα εξεταστεί γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0 + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.7: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 1*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha}_0$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3°$	$0°$	0	$0.04rad/s$	0.2	$0°$

Η αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha}_0$ καθώς και το πλάτος ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$ επιλέγεται έτσι ώστε να μην υπάρχει αποκόλληση στην υπό μελέτη ροή, ενώ η κυκλική συχνότητα ω_α επιλέγεται ως συνήθης συχνότητα ταλάντωσης πτερυγίων ανεμογεννητριών. Η αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0 επιλέγεται ως μηδενική ενώ, η κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y επιλέγεται τέτοια ώστε $\omega_\alpha/\omega_y = 5$ που αποτελεί συνήθη λόγο για πτερύγια ανεμογεννητριών. Το πλάτος πτερύγισης A_y επιλέγεται σε μία επίσης συνήθη τιμή για εφαρμογές ανεμογεννητριών. Παρόμοια λογική σχετικά με την επιλογή των παραμέτρων για τις περιπτώσεις ταλάντωσης δύο συχνοτήτων ακολουθείται σε ολόκληρη τη διπλωματική εργασία. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

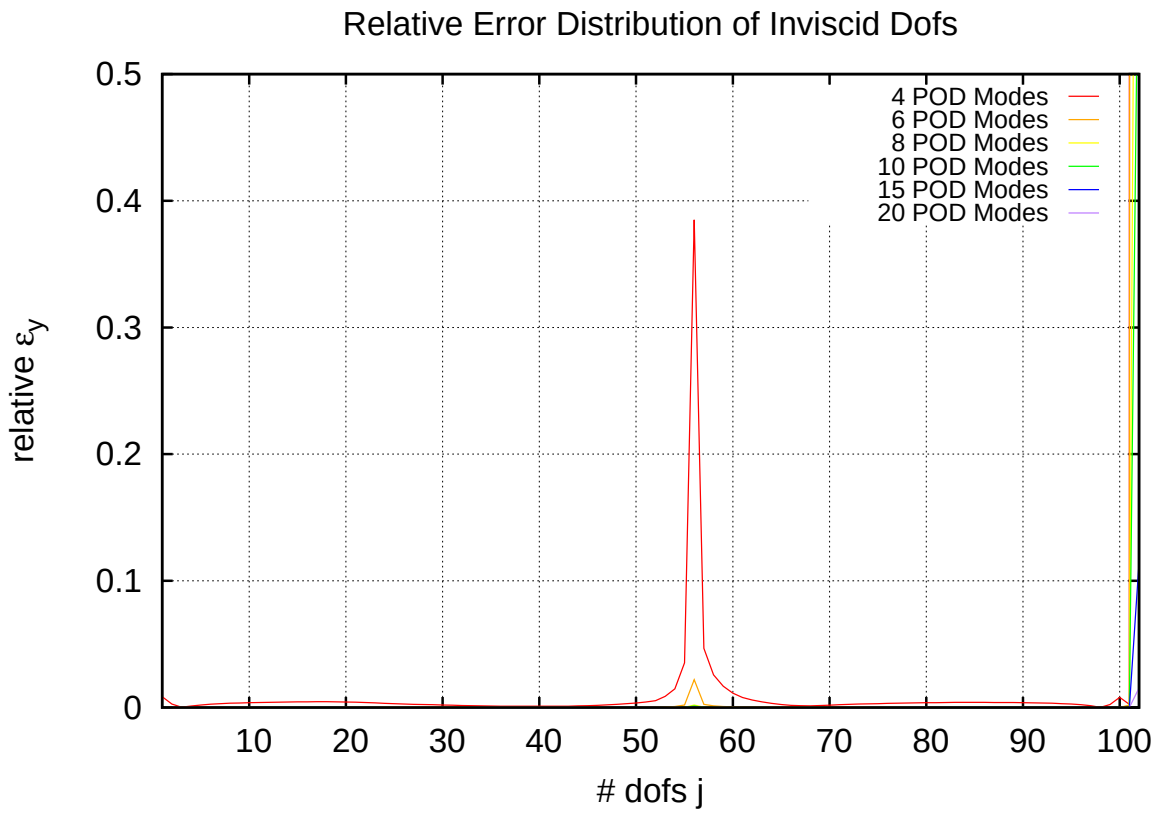
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

Μετά την εκπαίδευση (μέθοδος SVD) των POMs για τη λύση αυτή, είναι δυνατή η αναπαράσταση της λύσης χρησιμοποιώντας $L \ll 456$ POMs. Σύμφωνα με το ενεργειακό κριτήριο (3.14) 4 POMs αρκούν για την αναπαράσταση της αρχικής λύσης, ωστόσο επειδή κάθε αναπαράσταση της λύσης μέσω POMs αποτελεί μία προσέγγιση της αρχικής λύσης, ενδιαφέρον έχει να εξεταστεί το σφάλμα προσέγγισης της λύσης με παράμετρο τον αριθμό L. Στον πίνακα 3.8 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ποσοστά της ενέργειας που περιλαμβάνουν τα 4 πρώτα POMs.

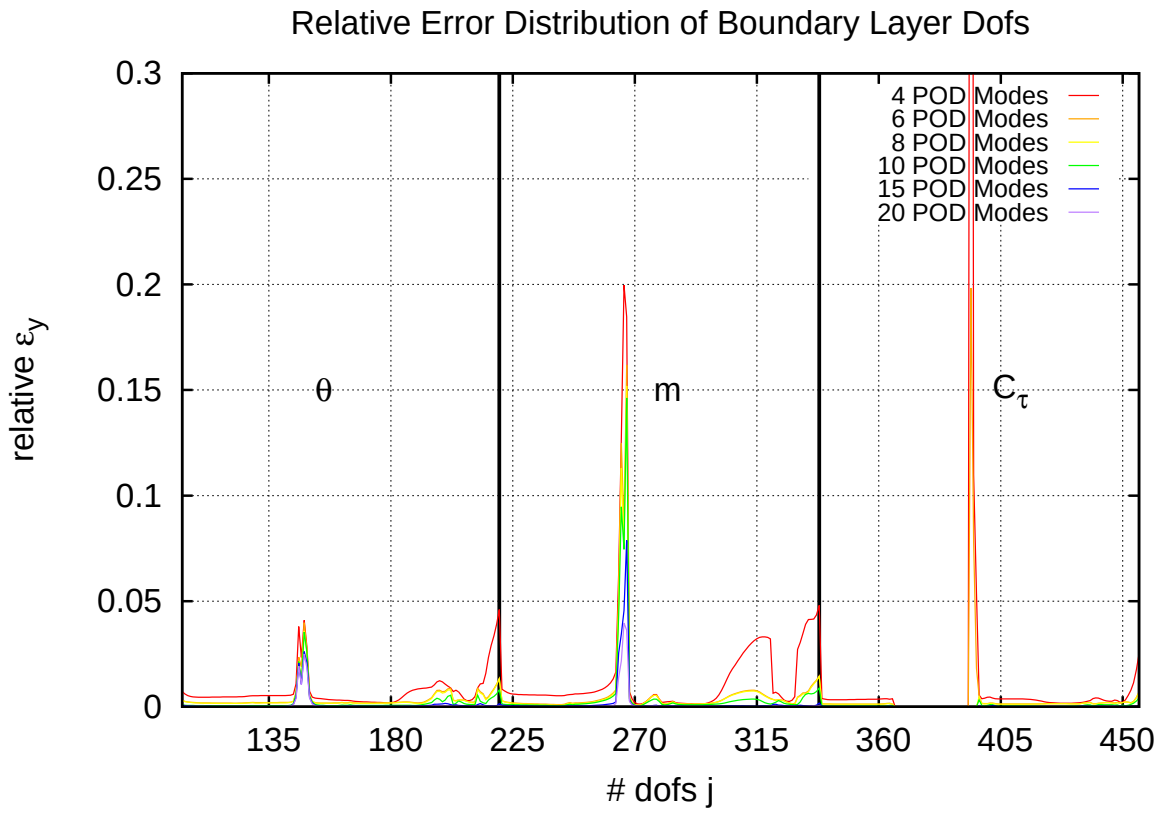
Πίνακας 3.8: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.60%	87.60%
2	8.69%	96.30%
3	2.12%	98.42%
4	0.65%	99.07%

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο διαγράμματα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας j για $L = 4, 6, 8, 10, 15, 20$. Ο λόγος για τον οποίο η πληροφορία του σφάλματος χωρίστηκε σε δύο διαγράμματα είναι το γεγονός ότι οι βαθμοί ελευθερίας που σχετίζονται με την ισοδύναμη μη συνεκτική ροή παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά από αυτούς που σχετίζονται με το οριακό στρώμα.



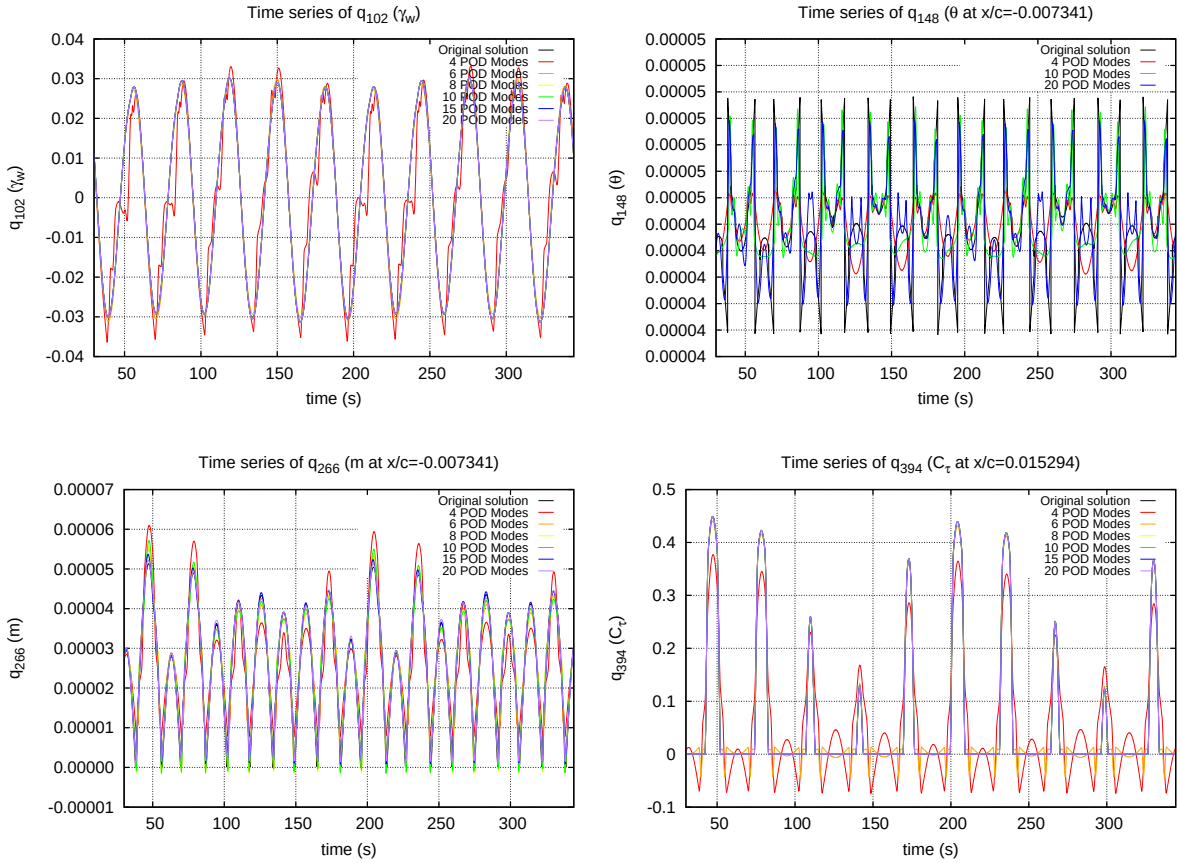
Σχήμα 3.12: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$. *Σημαντικό σφάλμα παρουσιάζεται στην περιοχή του σημείου ανακοπής*



Σχήμα 3.13: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$. *Σημαντικό σφάλμα παρουσιάζεται στην περιοχή του σημείου ανακοπής* (ϑ, m) *και στο μεταβατικό σημείο τυρβώδους ροής* (C_τ)

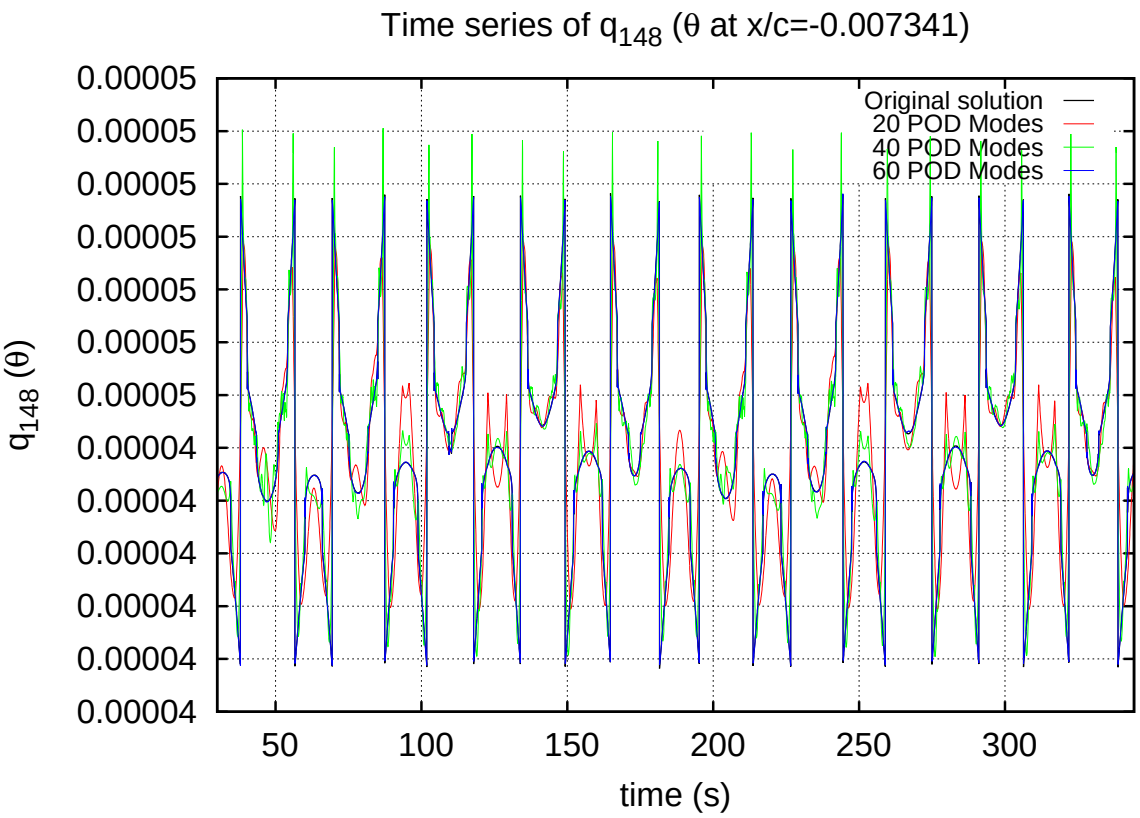
Τα διαγράμματα 3.13 και 3.12 μας παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για την προσέγγιση της λύσης που λαμβάνεται μέσω της ευθείας αναπαράστασης με POMs. Τα σφάλματα εντοπίζονται στα γνωστά σημεία και παρουσιάζουν συμπεριφορά αντίστοιχη με αυτή που εξηγήθηκε στην υποενότητα 3.4.2.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι αρχικές χρονοσειρές κάποιων από τα σημαντικά ως προς το σφάλμα σημεία που σχολιάστηκαν καθώς και οι προσεγγίσεις αυτών για $L = 4, 6, 8, 10, 15, 20$.



Σχήμα 3.14: *Χρονοσειρές βαθμών ελευθερίας και προσεγγίσεις τους μέσω ευθείας αναπαράστασης σε θέσεις μέγιστου σχετικού σφάλματος. Η αύξηση του αριθμού των POD Modes συνεπάγεται καλύτερη προσέγγιση της αρχικής λύσης*

Μία ακριβής προσέγγιση της χρονοσειράς του q_{148} λαμβάνεται για $L = 60$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.15.



Σχήμα 3.15: *Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των POD Modes λαμβάνεται ολοένα και καλύτερη προσέγγιση της αρχικής χρονοσειράς. Για 60 POMs το σφάλμα είναι αμελητέο*

Ευθεία αναπαράσταση λύσης χρησιμοποιώντας POMs λύσης αναφοράς

Επιλέγοντας την περίπτωση 1 ως περίπτωση αναφοράς η λύση που προκύπτει από αυτό το set παραμέτρων αποτελεί τη λύση αναφοράς $\boldsymbol{Q}_1$. Θα εξεταστεί κατά πόσο η λύση αναφοράς $\boldsymbol{Q}_1$ είναι ικανή να παρέχει POMs $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ τα οποία μπορούν να λειτουργήσουν ως διανυσματική βάση προσέγγισης μίας άλλης λύσης $\boldsymbol{Q}_2$ η οποία προέρχεται από set παραμέτρων "κοντά" στο set αναφοράς. Ο αριθμός των POMs που θα χρησιμοποιηθεί είναι $L = 60$ έτσι ώστε να περιλαμβάνεται όλη η λεπτομέρεια του σημείου ανακοπής.

Περίπτωση 2: Μεταβολή της κυκλικής συχνότητας ω_α Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0 + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.9: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 2*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.22rad/s$	$3°$	$0°$	0	$0.04rad/s$	0.2	$0°$

Όπως φαίνεται η κυκλική συχνότητα ω_α αυξήθηκε κατά 10%, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

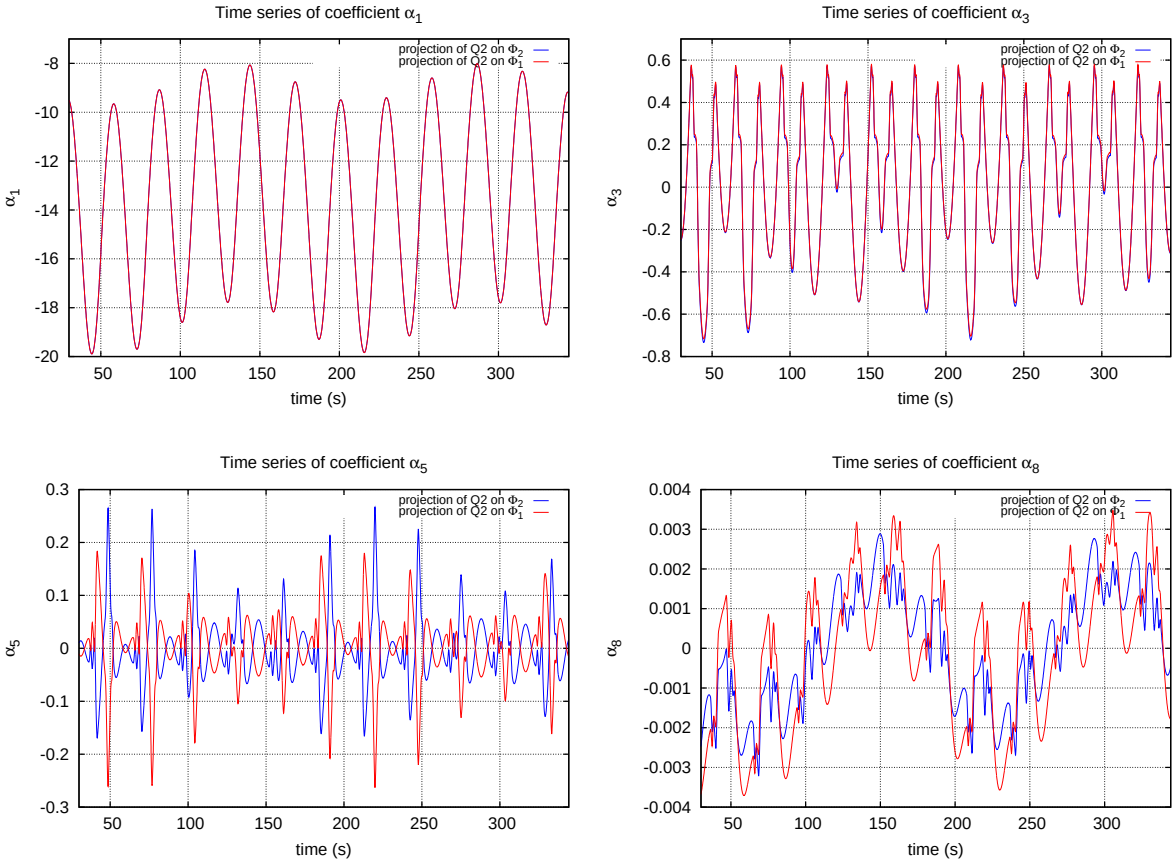
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

Στον πίνακα 3.10 πιο αναλυτικά παρουσιάζεται αθροιστικά η ενέργεια των 4 πρώτων POMs.

Πίνακας 3.10: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

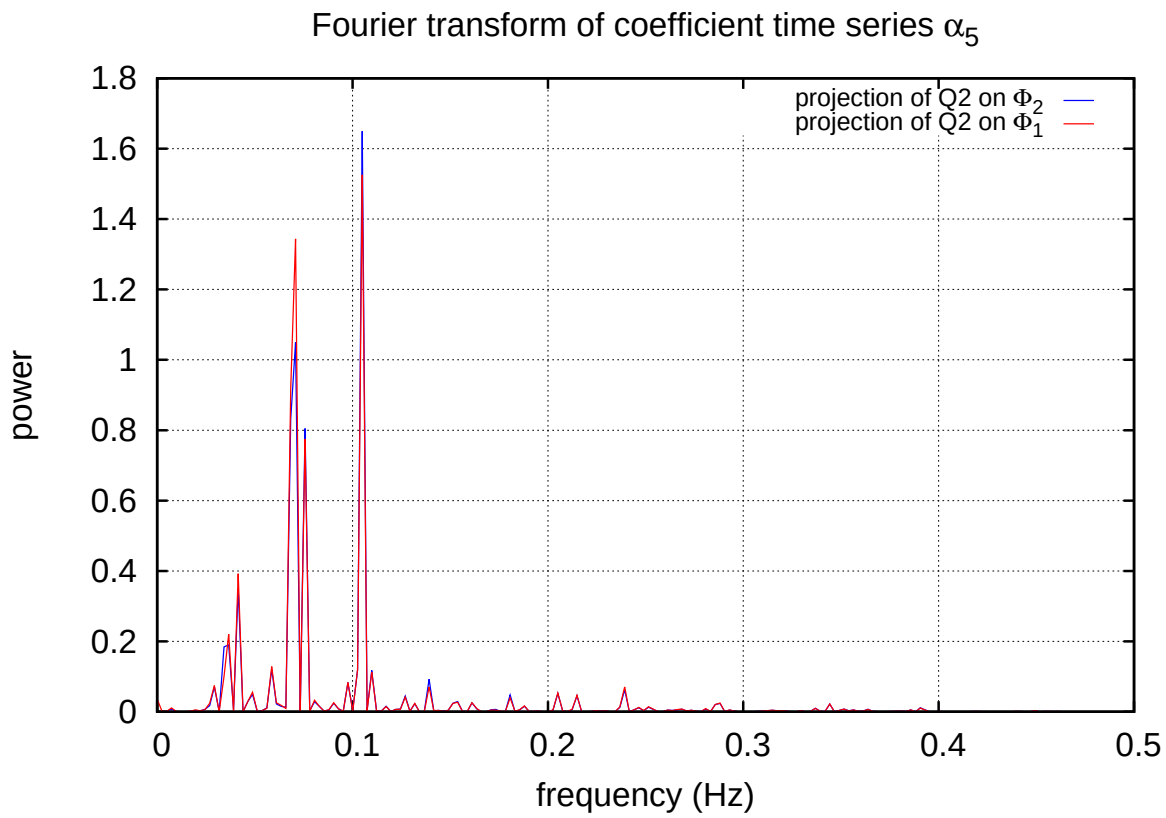
POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.63%	87.63%
2	8.62%	96.25%
3	2.09%	98.35%
4	0.72%	99.064%

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.29)-(3.32) προκύπτουν δύο πίνακες $\boldsymbol{C}_2$ και $\boldsymbol{C}_2^1$. Αρχικά θα γίνει μία σύγκριση των χρονοσειρών των συντελεστών α_j των αντίστοιχων POMs $\vec{\phi}_j$ (υψηλής ενεργειακής στάθμης) που βρίσκονται στις στήλες των πινάκων $\boldsymbol{C}_2$ και $\boldsymbol{C}_2^1$.



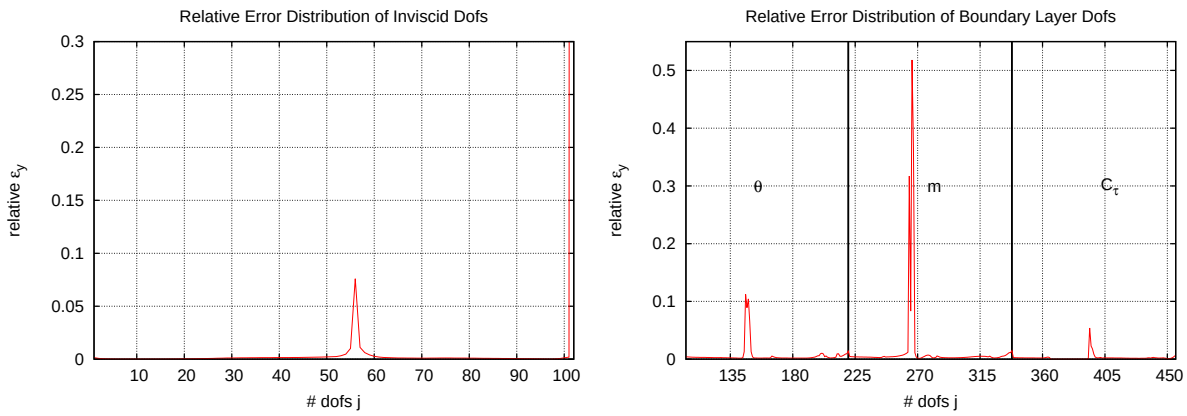
Σχήμα 3.16: *Σύγκριση χρονοσειρών συντελεστών* α_j, $j = 1, 3, 5, 8$. *Οι χρονοσειρές των συντελεστών που αντιστοιχούν σε POMs υψηλής ενέργειας παρουσιάζουν μηδενική απόκλιση ενώ στα χαμηλότερης ενέργειας παρατηρείται διαφορά φάσης ή πλάτους*

Για τη σύγκριση των χρονοσειρών του συντελεστή α_5 προτιμάται η σύγκριση τους στο πεδίο της συχνότητας μέσω FFT καθώς παρουσιάζουν διαφορά φάσης.



Σχήμα 3.17: *Οι μετασχηματισμοί Fourier των χρονοσειρών του συντελεστή α_5 που προκύπτουν από την προβολή της λύσης $\boldsymbol{Q}_2$ στα $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ και $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2$ παρουσιάζουν αμελητέες διαφορές*

Στη συνέχεια, υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.32) η προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1$ και το σφάλμα τους κατά την εξίσωση (3.28).

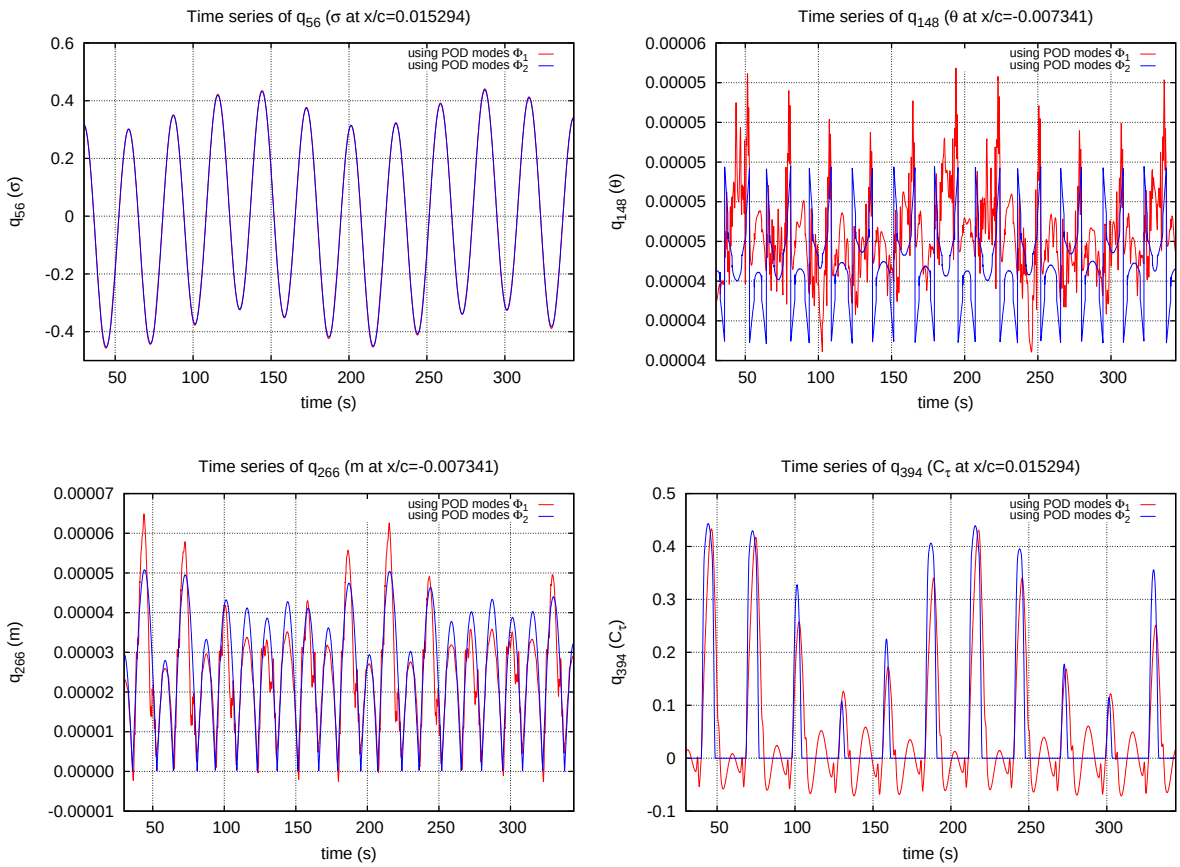


Σχήμα 3.18: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και οριακού στρώματος για την προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1$ με $L = 60$. Οι περιοχές μέγιστου σφάλματος είναι στην περιοχή του σημείου ανακοπής (σ, ϑ, m) και στο σημείο μετάβασης σε τυρβώδη ροή (C_τ)*

Τα σχήματα 3.18 ακολουθούν το γνωστό πλέον προφίλ σφάλματος, επαληθεύοντας τα

συμπεράσματα που έχουν προκύψει για αυτά τα σημεία της αεροτομής.

Ενδιαφέρον έχει η σύγκριση των χρονοσειρών των βαθμών ελευθερίας στην περιοχή κοντά στο σημείο ανακοπής.



Σχήμα 3.19: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2^1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2$ *με* $L = 60$. *Η χρήση των* $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ *συνεπάγεται μεγάλη απόκλιση από την προσέγγιση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_2$

Περίπτωση 3: Μεταβολή της κυκλικής συχνότητας $\hat{\omega}_y$ Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.11: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση και πτερύγιση 3*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3°$	$0°$	0	$0.042rad/s$	0.2	$0°$

Όπως φαίνεται η κυκλική συχνότητα ω_y αυξήθηκε κατά 5%, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

- Επειδή $\omega_{min} = \omega_y = 0.042$, η καταγραφή των δεδομένων θα ξεκινήσει το χρονικό βήμα $N_{tPOD} = 600$ για να αποφευχθεί η καταγραφή μεταβατικής κατάστασης.
- τα συνολικά χρονικά βήματα που απαιτούνται είναι $N_{ttot} = 4\pi/(0.042 \cdot 0.05) + 600 \cong 5984$
- $M = 5984 - 600 + 1 = 5385$

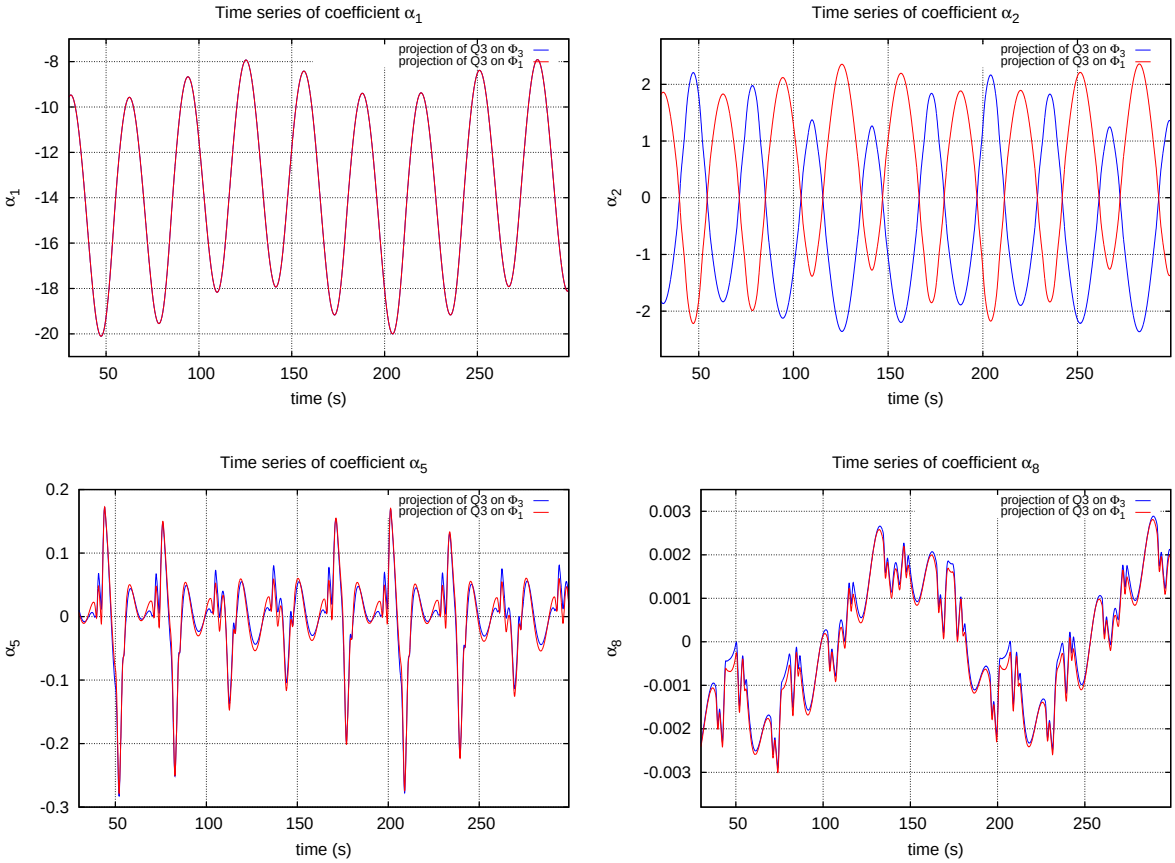
Μετά την εκπαίδευση (μέθοδος SVD) των POMs για τη λύση αυτή, είναι δυνατή η αναπαράσταση της λύσης χρησιμοποιώντας $L \ll 456$ POMs.

Σύμφωνα με το ενεργειακό κριτήριο (3.14) 4 POMs αρκούν για την αναπαράσταση της αρχικής λύσης, ωστόσο όπως εξηγήθηκε και στην περίπτωση 2 θα επιλεγούν 60 POMs. Στον πίνακα 3.12 πιο αναλυτικά παρουσιάζεται αθροιστικά η ενέργεια των 4 πρώτων POMs.

Πίνακας 3.12: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

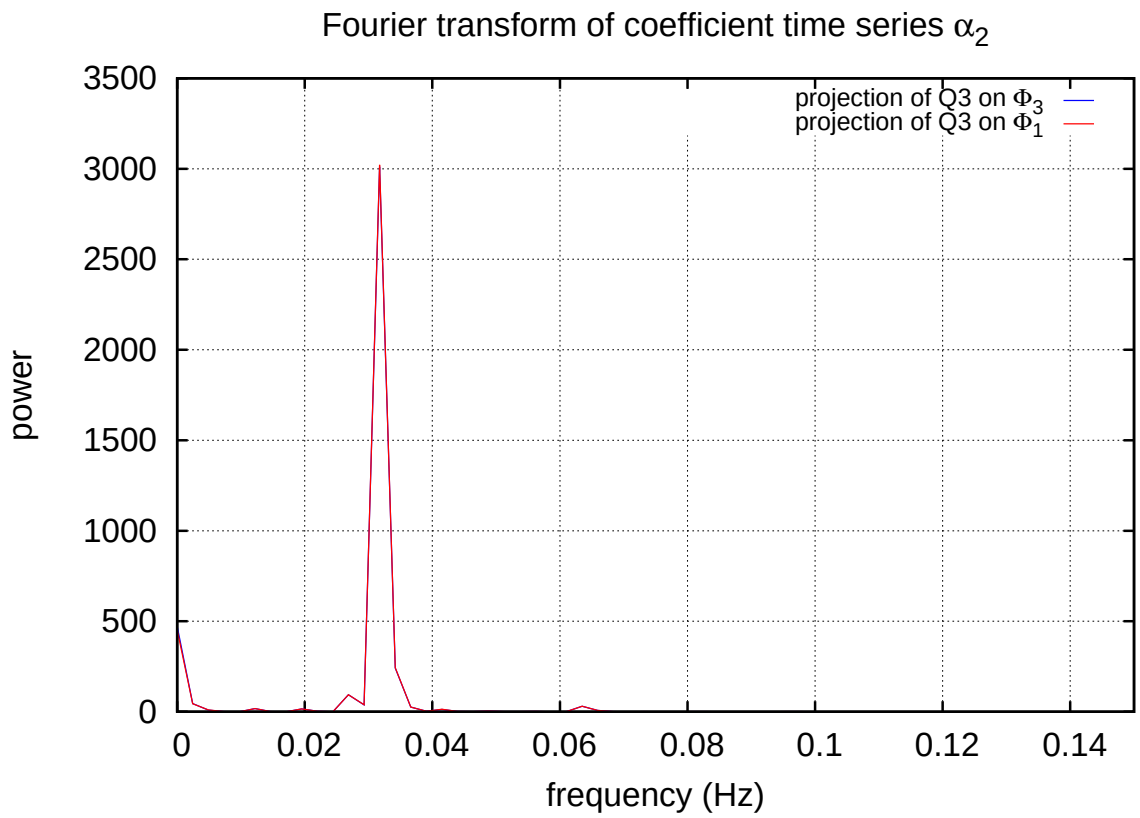
POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.53%	87.53%
2	8.73%	96.26%
3	2.15%	98.41%
4	0.64%	99.05%

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.29)-(3.32) προκύπτουν δύο πίνακες $\boldsymbol{C}_3$ και $\boldsymbol{C}_3^1$. Κατά τα γνωστά θα γίνει μία σύγκριση των χρονοσειρών των συντελεστών α_j.



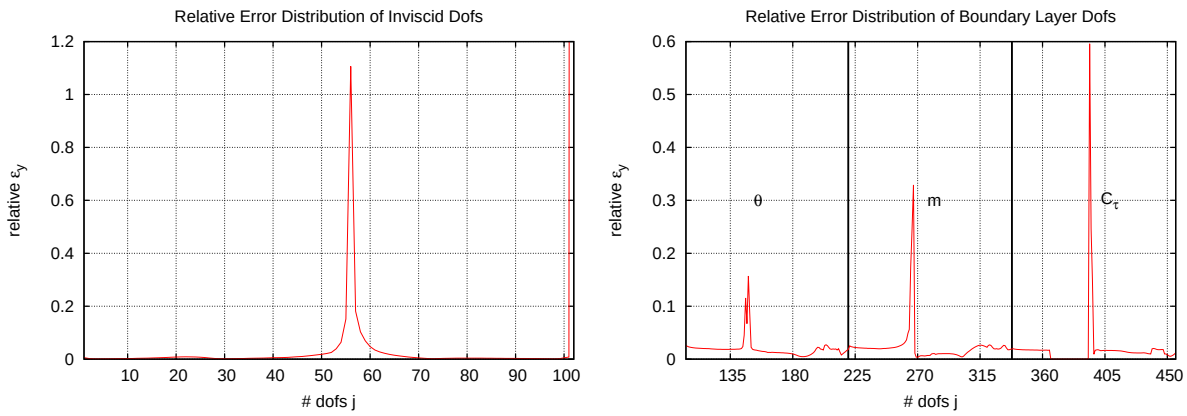
Σχήμα 3.20: *Σύγκριση χρονοσειρών συντελεστών α_j, $j = 1, 2, 5, 8$. Η χρονοσειρά του συντελεστή α_1 που αντιστοιχή σε POM υψηλής ενέργειας παρουσιάζει μηδενική απόκλιση ενώ του α_2 παρουσιάζει διαφορά φάσης*

Για τη σύγκριση των χρονοσειρών του συντελεστή α_2 προτιμάται η σύγκριση τους στο πεδίο της συχνότητας μέσω FFT καθώς παρουσιάζουν διαφορά φάσης.



Σχήμα 3.21: *Οι χρονοσειρές του συντελεστή α_2 που προκύπτουν από την προβολή της λύσης $\boldsymbol{Q}_3$ στα $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ και $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_3$ εμπεριέχουν τις ίδιες συχνότητες*

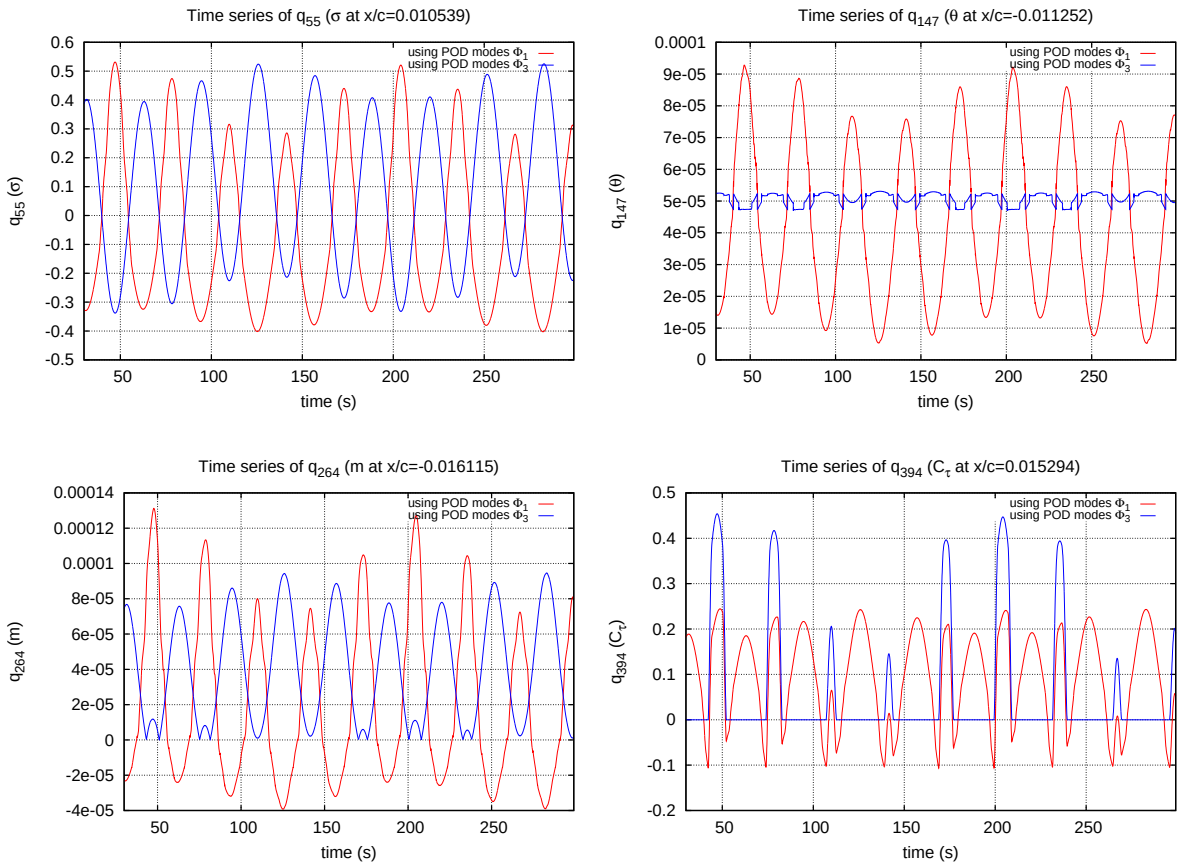
Στη συνέχεια, υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.32) η προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3^1$ και το σφάλμα τους κατά την εξίσωση (3.28).



Σχήμα 3.22: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και οριακού στρώματος για την προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3^1$ με $L = 60$. Οι περιοχές μέγιστου σφάλματος είναι στην περιοχή του σημείου ανακοπής (σ, ϑ, m) και στο σημείο μετάβασης σε τυρβώδη ροή (C_τ)*

Ενδιαφέρον έχει η σύγκριση των χρονοσειρών των βαθμών ελευθερίας στην περιοχή κο-

ντά στο σημείο ανακοπής



Σχήμα 3.23: *Σύγκρισης χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3^1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3$ *με* $L = 60$. *Η χρήση των* $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ *συνεπάγεται μεγάλη απόκλιση από την προσέγγιση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_3$

Από τα διαγράμματα 3.23 εξάγεται το συμπέρασμα ότι η περίπτωση μεταβολής του ω_y είναι πιο απαιτητική όσον αφορά την παραμετρική διαφοροποίηση μίας λύσης αναφοράς.

Περίπτωση 4: Μεταβολή του πλάτους $\hat{A}_\alpha$ Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0 + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.13: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 4*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3.3°$	$0°$	0	$0.04rad/s$	0.2	$0°$

Όπως φαίνεται το πλάτος $\hat{A}_\alpha$ αυξήθηκε κατά 10%, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37) Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

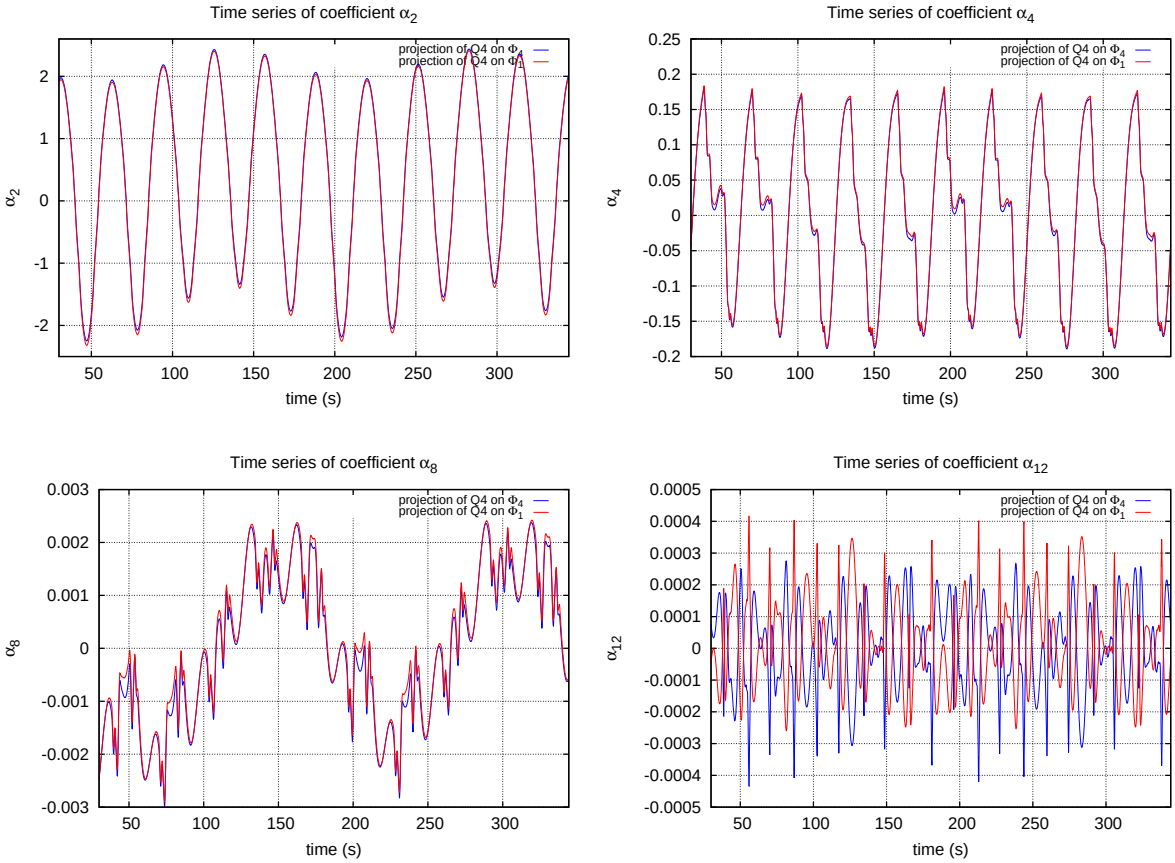
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

Στον πίνακα 3.14 πιο αναλυτικά παρουσιάζεται αθροιστικά η ενέργεια των 4 πρώτων POMs.

Πίνακας 3.14: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

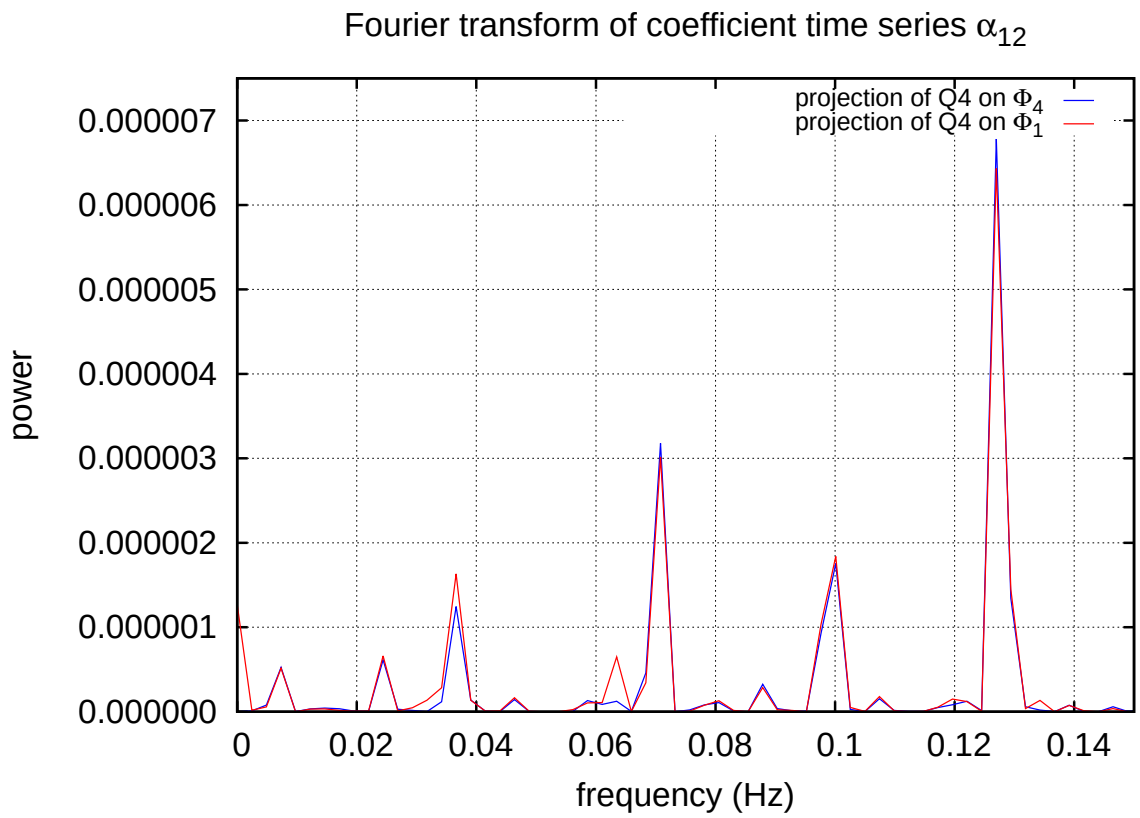
POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.12%	87.12%
2	9.00%	96.12%
3	2.24%	98.36%
4	0.67%	99.03%

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.29)-(3.32) προκύπτουν δύο πίνακες $\boldsymbol{C}_4$ και $\boldsymbol{C}_4^1$. Κατά τα γνωστά θα γίνει μία σύγκριση των χρονοσειρών των συντελεστών α_j.



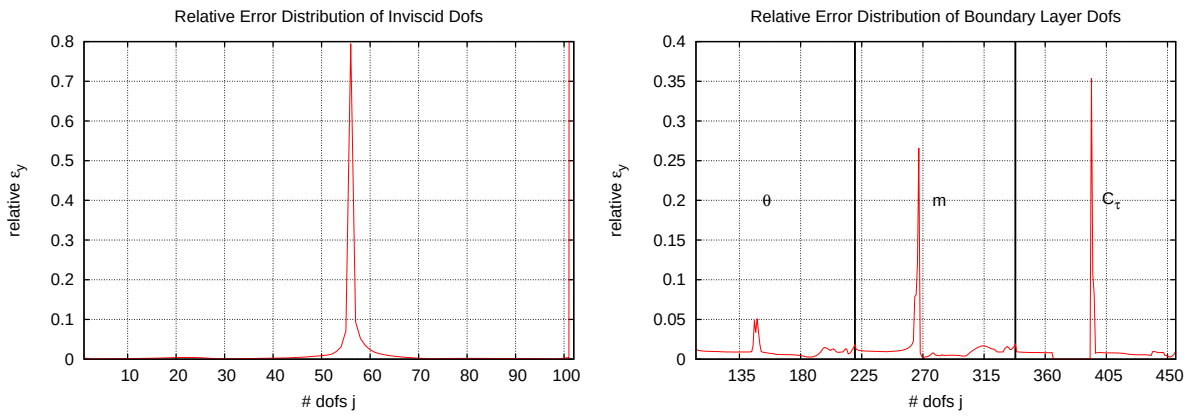
Σχήμα 3.24: *Σύγκριση χρονοσειρών συντελεστών* α_j, $j = 2, 4, 8, 12$. *Οι χρονοσειρές των συντελεστών που αντιστοιχούν σε POMs υψηλής ενέργειας παρουσιάζουν μηδενική απόκλιση ενώ στις χαμηλότερης ενέργειας παρατηρείται κάποιου είδους συμμετρία ως προς τον οριζόντιο άξονα*

Για τη σύγκριση των χρονοσειρών του συντελεστή α_{12} προτιμάται η σύγκριση τους στο πεδίο της συχνότητας μέσω FFT καθώς παρουσιάζουν διαφορά φάσης.



Σχήμα 3.25: *Οι χρονοσειρές του συντελεστή α_{12} που προκύπτουν από την προβολή της λύσης $\boldsymbol{Q}_4$ στα $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ και $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_4$ εμπεριέχουν τις ίδιες συχνότητες*

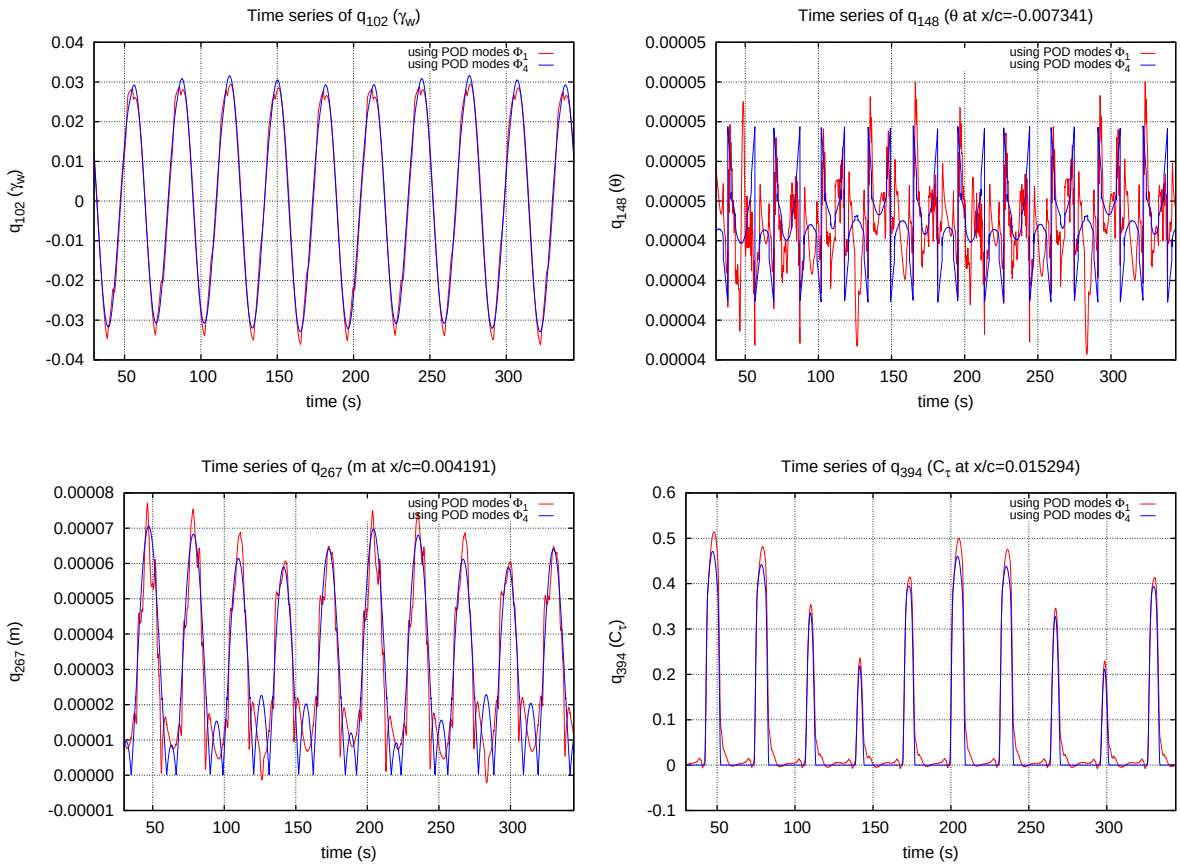
Στη συνέχεια, υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.32) η προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_4^1$ και το σφάλμα τους κατά την εξίσωση (3.28).



Σχήμα 3.26: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και οριακού στρώματος για την προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_4^1$ με $L = 60$. Οι περιοχές μέγιστου σφάλματος είναι στην περιοχή του σημείου ανακοπής (σ, ϑ, m) και στο σημείο μετάβασης σε τυρβώδη ροή (C_τ)*

Ενδιαφέρον έχει η σύγκριση των χρονοσειρών των βαθμών ελευθερίας στην περιοχή κο-

ντά στο σημείο ανακοπής.



Σχήμα 3.27: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_4^1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_4$ *με* $L = 60$. *Η χρήση των* $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ *συνεπάγεται μεγάλη απόκλιση από την προσέγγιση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_4$

Από τα διαγράμματα 3.27 φαίνεται μία πολύ καλή προσέγγιση της λύσης $\tilde{\boldsymbol{Q}}_4$ με χρήση των POMs αναφοράς γεγονός που ήδη διαφαινόταν από τη συμπεριφορά των χρονοσειρών των συντελεστών (βλ. σχήματα 3.24).

Περίπτωση 5: Μεταβολή του πλάτους $\hat{A}_y$ Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0 + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.15: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 5*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3°$	$0°$	0	$0.04rad/s$	0.15	$0°$

Όπως φαίνεται το πλάτος $\hat{A}_y$ μειώθηκε κατά 25%, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37) Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

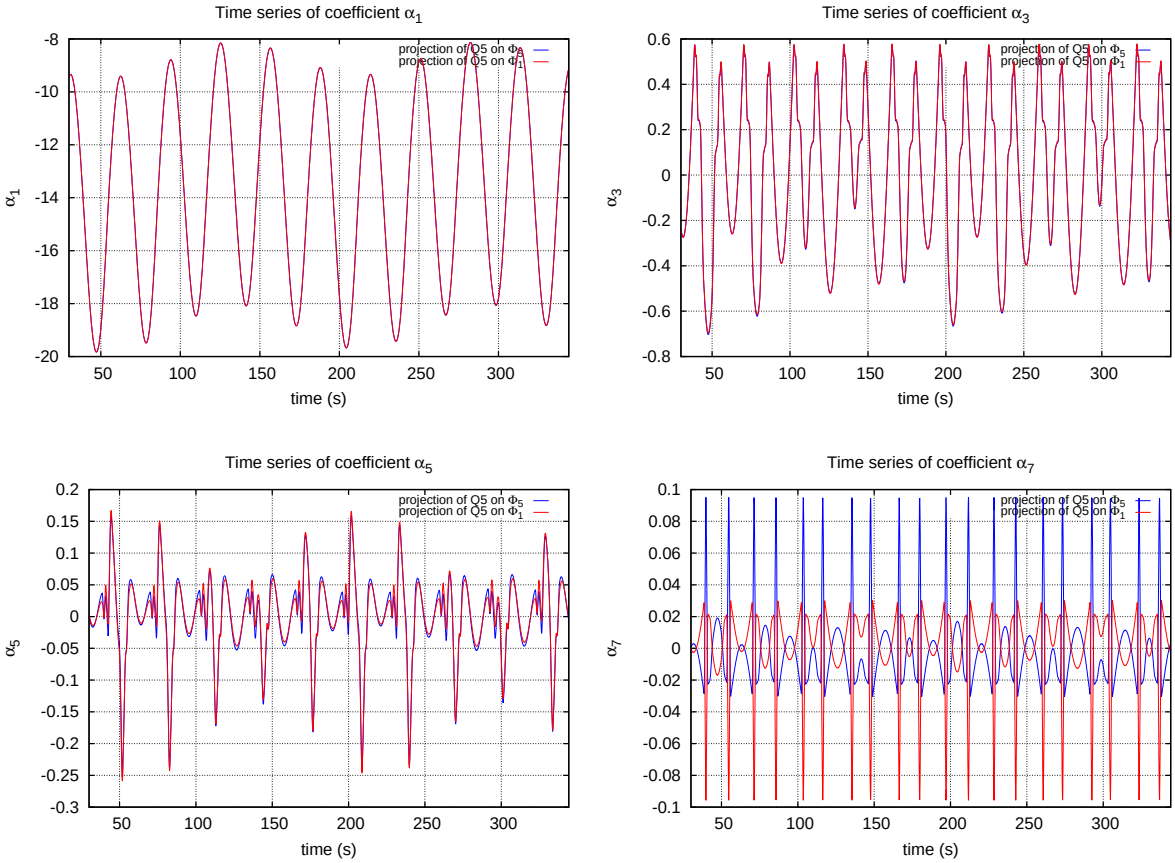
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

Στον πίνακα 3.16 πιο αναλυτικά παρουσιάζεται αθροιστικά η ενέργεια των 4 πρώτων POMs.

Πίνακας 3.16: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

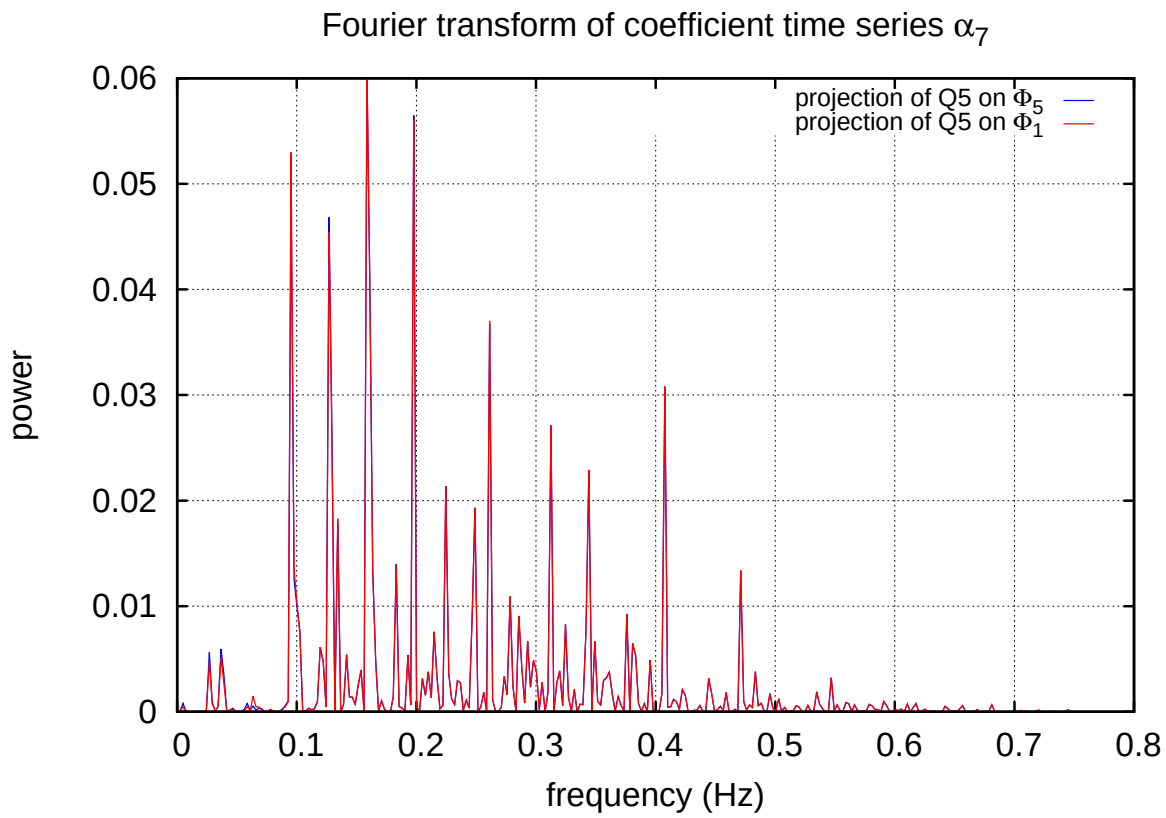
POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.70%	87.70%
2	8.66%	96.36%
3	2.08%	98.44%
4	0.65%	99.09%

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.29)-(3.32) προκύπτουν δύο πίνακες $\boldsymbol{C}_5$ και $\boldsymbol{C}_5^1$. Κατά τα γνωστά θα γίνει μία σύγκριση των χρονοσειρών των συντελεστών α_j.



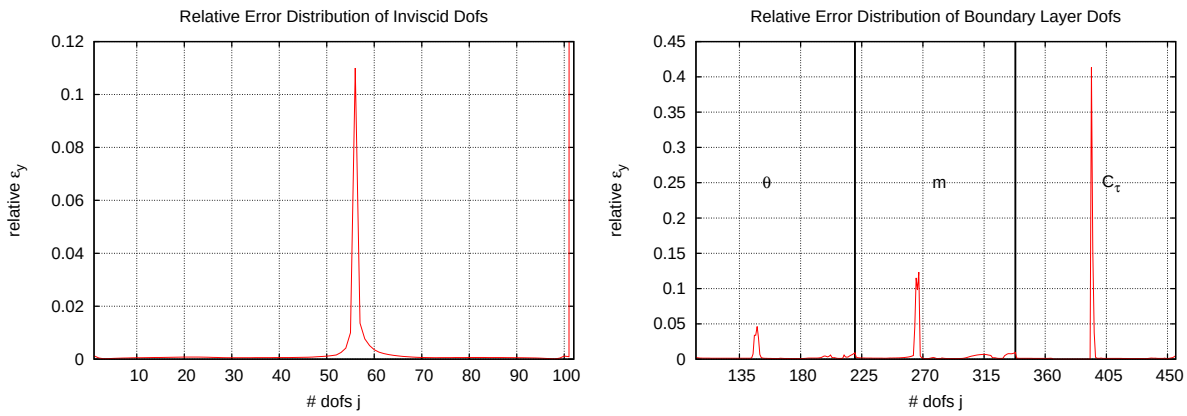
Σχήμα 3.28: *Σύγκριση χρονοσειρών συντελεστών* α_j, $j = 1, 3, 5, 7$. *Οι χρονοσειρές των συντελεστών που αντιστοιχούν σε POMs υψηλής ενέργειας παρουσιάζουν μηδενική απόκλιση ενώ στα χαμηλότερης ενέργειας παρατηρείται κάποιου είδους συμμετρία ως προς τον οριζόντιο άξονα*

Για τη σύγκριση των χρονοσειρών του συντελεστή α_7 προτιμάται η σύγκριση τους στο πεδίο της συχνότητας μέσω FFT καθώς παρουσιάζουν διαφορά φάσης.



Σχήμα 3.29: *Οι χρονοσειρές του συντελεστή α_7 που προκύπτουν από την προβολή της λύσης $\boldsymbol{Q}_5$ στα $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ και $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_5$ εμπεριέχουν τις ίδιες συχνότητες*

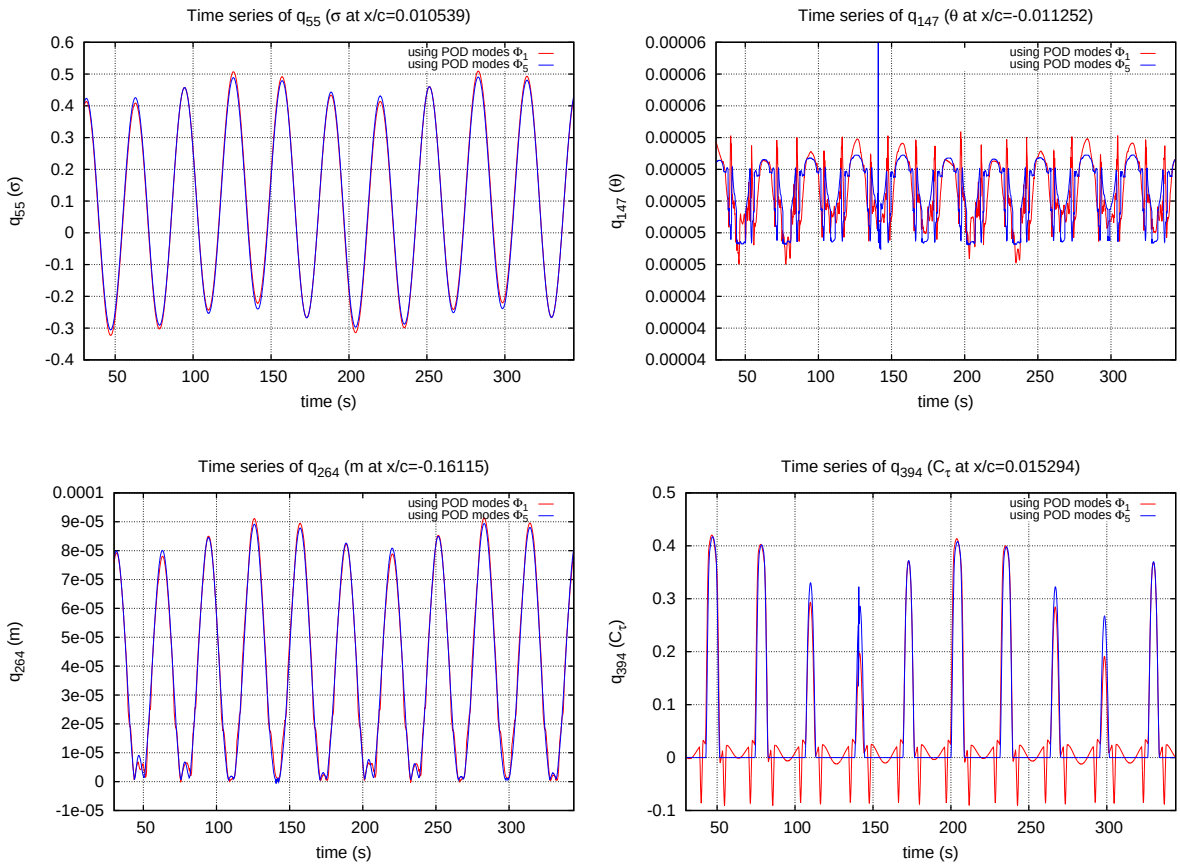
Στη συνέχεια, υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.32) η προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_5^1$ και το σφάλμα τους κατά την εξίσωση (3.28).



Σχήμα 3.30: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και οριακού στρώματος για την προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_5^1$ με $L = 60$. Οι περιοχές μέγιστου σφάλματος είναι στην περιοχή του σημείου ανακοπής (σ, ϑ, m) και στο σημείο μετάβασης σε τυρβώδη ροή (C_τ)*

Ενδιαφέρον έχει η σύγκριση των χρονοσειρών των βαθμών ελευθερίας στην περιοχή κο-

ντά στο σημείο ανακοπής.



Σχήμα 3.31: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_5^1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_5$ *με* $L = 60$. *Η χρήση των* $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ *συνεπάγεται μεγάλη απόκλιση από την προσέγγιση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_5$

Περίπτωση 6: Μεταβολή της διαφοράς φάσης $\hat{\phi}_\alpha$ Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 3.17: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 6*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακή ταλάντωση ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3°$	$90°$	0	$0.04rad/s$	0.20	$0°$

Όπως φαίνεται, στην περίπτωση αυτή υπάρχει διαφορά φάσης $\hat{\phi}_\alpha = 90°$, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

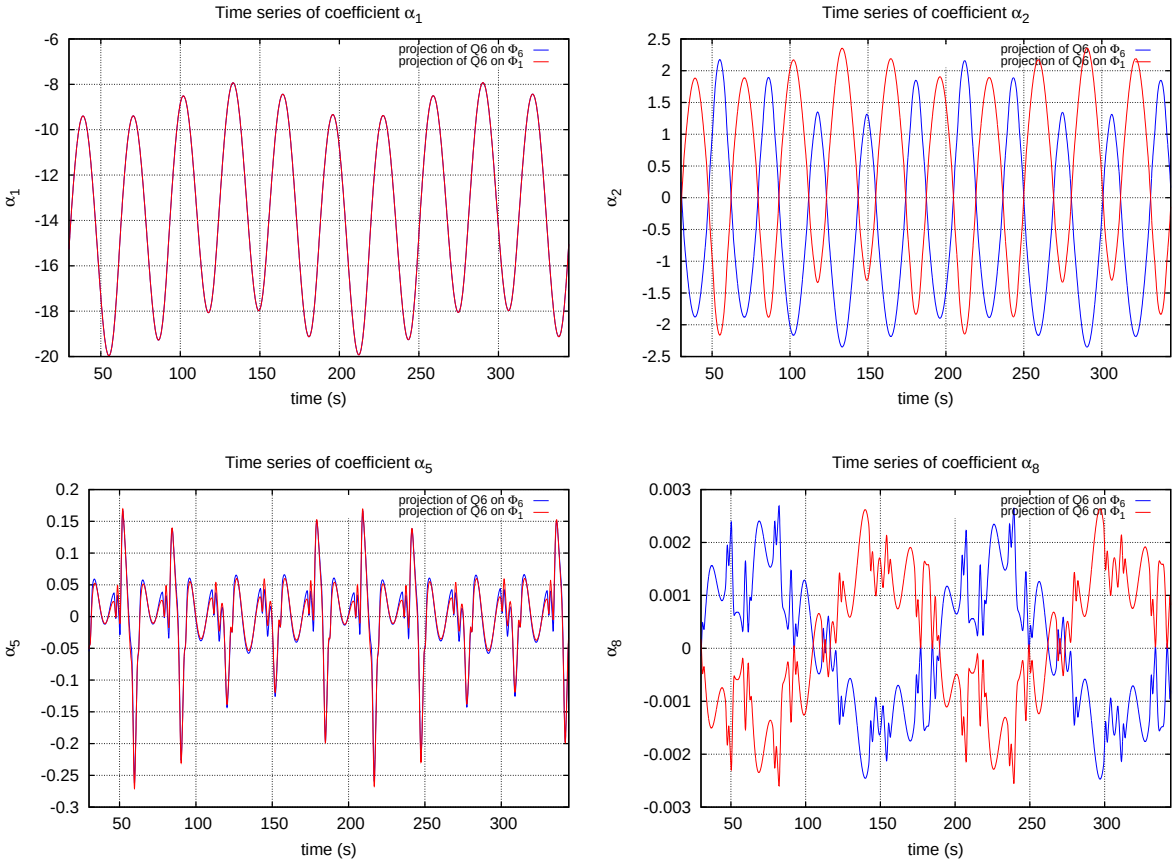
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

Στον πίνακα 3.16 πιο αναλυτικά παρουσιάζεται αθροιστικά η ενέργεια των 4 πρώτων POMs.

Πίνακας 3.18: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

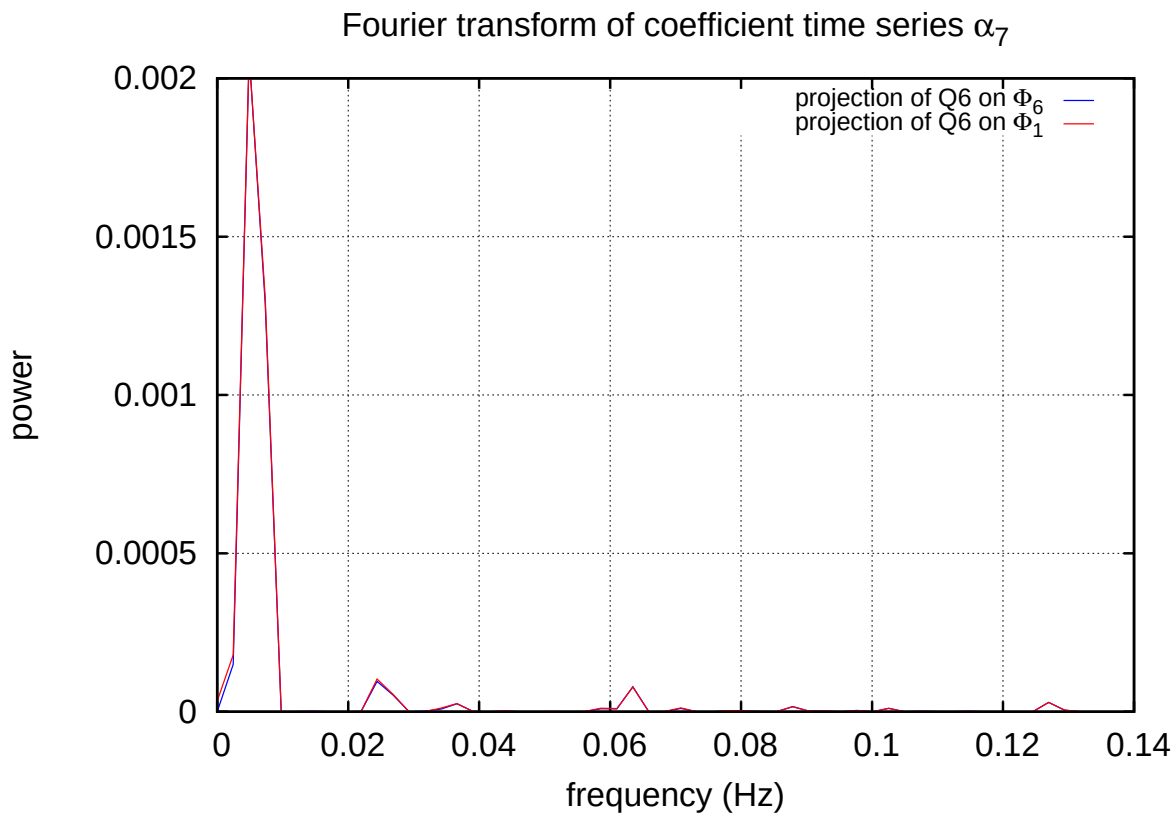
POM $\vec{\phi}_j$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	87.60%	87.60%
2	8.69%	6.30%
3	2.12%	98.42%
4	0.65%	99.07%

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.29)-(3.32) προκύπτουν δύο πίνακες $\boldsymbol{C}_6$ και $\boldsymbol{C}_6^1$. Κατά τα γνωστά θα γίνει μία σύγκριση των χρονοσειρών των συντελεστών α_j.



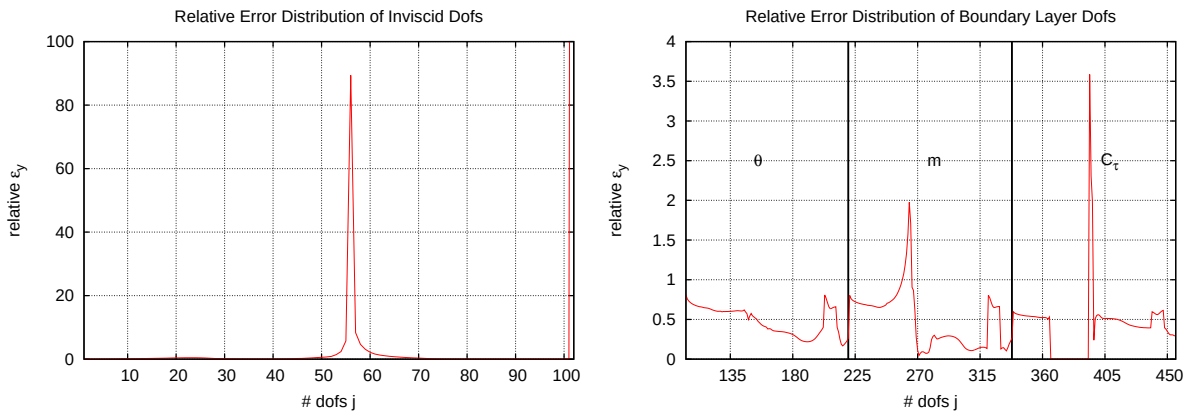
Σχήμα 3.32: *Σύγκριση χρονοσειρών συντελεστών* α_j, $j = 1, 2, 5, 8$. *Οι χρονοσειρές των συντελεστών που αντιστοιχούν σε POMs υψηλής ενέργειας παρουσιάζουν μηδενική απόκλιση ενώ στα χαμηλότερης ενέργειας παρατηρείται διαφορά φάσης*

Για τη σύγκριση των χρονοσειρών του συντελεστή α_8 προτιμάται η σύγκριση τους στο πεδίο της συχνότητας μέσω FFT καθώς παρουσιάζουν διαφορά φάσης.



Σχήμα 3.33: *Οι χρονοσειρές του συντελεστή α_8 που προκύπτουν από την προβολή της λύσης $\boldsymbol{Q}_6$ στα $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ και $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_6$ εμπεριέχουν τις ίδιες συχνότητες*

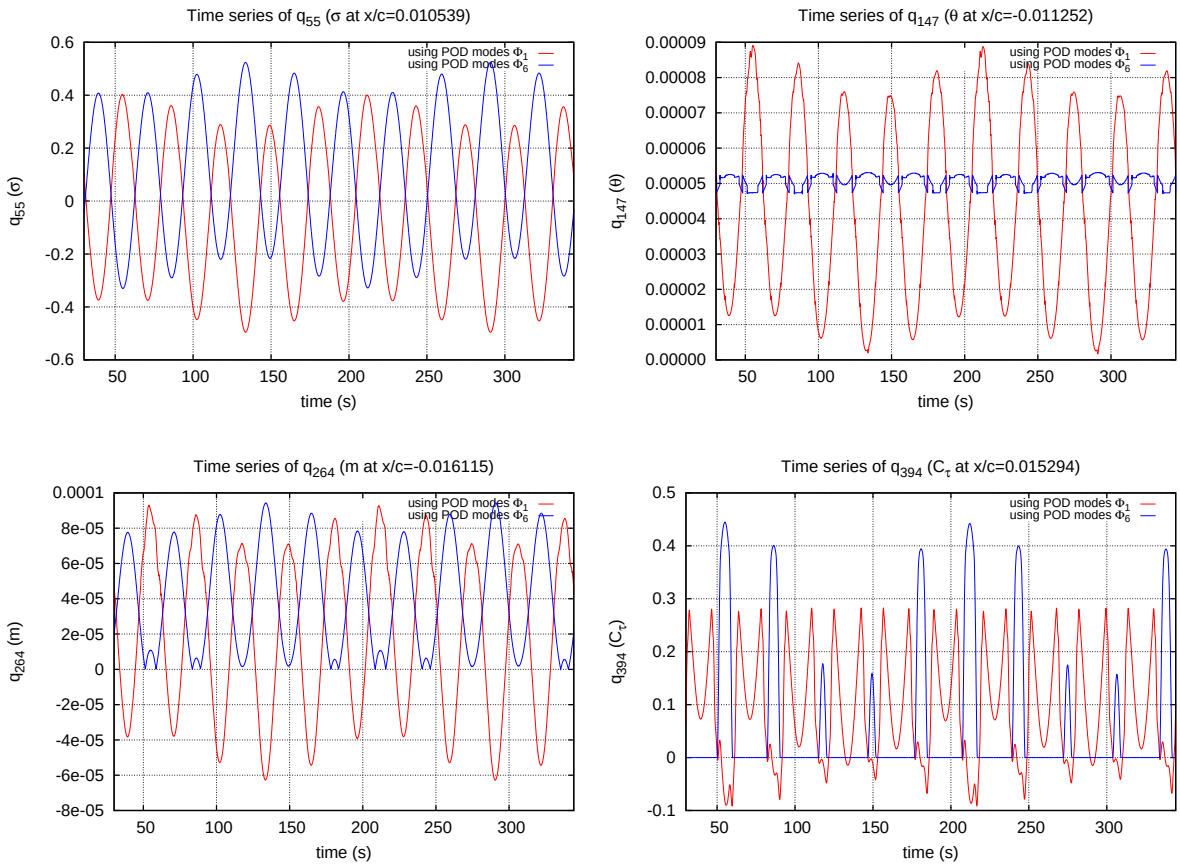
Στη συνέχεια, υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.32) η προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_5^1$ και το σφάλμα τους κατά την εξίσωση (3.28).



Σχήμα 3.34: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής και οριακού στρώματος για την προσέγγιση $\tilde{\boldsymbol{Q}}_6^1$ με $L = 60$. Παρατηρείται ότι σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα στο οριακό στρώμα δεν εντοπίζεται σε κάποια περιοχή αλλά διαχέεται σε όλα τα σημεία της αεροτομής και του ομόρρου*

Ενδιαφέρον έχει η σύγκριση των χρονοσειρών των βαθμών ελευθερίας στην περιοχή κο-

ντά στο σημείο ανακοπής.



Σχήμα 3.35: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_6^1$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_6$ *με* $L = 60$. *Η χρήση των* $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ *φαίνεται να μην μπορεί να "πιάσει" λύση* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_6$

Από τα διαγράμματα 3.35 εξάγεται το συμπέρασμα ότι η περίπτωση με διαφορά φάσης 90° είναι πιο απαιτητική όσον αφορά την παραμετρική διαφοροποίηση από μία λύση αναφοράς.

3.5 Κατασκευή του Μοντέλου Μειωμένης Τάξης (ROM)

Σε αυτή την ενότητα θα περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο θα κατασκευαστεί το μοντέλο μειωμένης τάξης του συστήματος εξισώσεων οριακού στρώματος. Ο λόγος για τον οποίο το ROM κατασκευάζεται βάσει των εξισώσεων του οριακού στρώματος και όχι των εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής είναι γιατί το πρώτο αποτελεί ένα μη γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτό έχει νόημα να εφαρμοστεί το POD έτσι ώστε να εξεταστούν οι ιδιότητες της γραμμικοποίησης και της μείωσης της τάξης. Αντίθετα το σύστημα εξισώσεων της ισοδύναμης συνεκτικής ροής είναι κατά βάση γραμμικό (εκτός της συνθήκης Kelvin) και εκφυλίζεται σε δύο εξισώσεις.

3.5.1 Το σύστημα μειωμένης τάξης των εξισώσεων οριακού στρώματος

Το τελικό μη γραμμικό σύστημα των εξισώσεων οριακού στρώματος (2.141) γράφεται σε ανάπτυγμα *Taylor* στην παρακάτω μορφή:

$$\boldsymbol{F}(\vec{x}_v)^K + \partial \boldsymbol{F}(\vec{x}_v)^K \cdot \delta \boldsymbol{x_v} = 0 \tag{3.38}$$

όπου άγνωστη ποσότητα είναι η διαφορά $\delta \boldsymbol{x_v} = \boldsymbol{x_v}^{K+1} - \boldsymbol{x_v}^K$ και με K συμβολίζεται η αρίθμηση των επαναλήψεων της Newton-Raphson. Υπενθυμίζεται στον αναγνώστη ότι η άγνωστη ποσότητα $\vec{x}_v = \left\{C_\tau, \vartheta, m\right\}$ είναι το διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος που σχετίζονται με το οριακό στρώμα, δηλαδή το αντίστοιχο διάνυσμα στήλης για όλα τα σημεία της αεροτομής και του ομόρρου γράφεται ως

$$\boldsymbol{x_v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_\tau} \\ \boldsymbol{\vartheta} \\ \boldsymbol{m} \end{bmatrix}_{N_v \times 1} \tag{3.39}$$

όπου $N_v = 3N_g$ το πλήθος των μεταβλητών του οριακού στρώματος
Η εξίσωση (3.38) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\boldsymbol{A_v} \cdot \delta \boldsymbol{x_v} = \boldsymbol{b_v} \tag{3.40}$$

όπου

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A_v} &= \boldsymbol{A_v}(\vec{x}_v) = \partial \boldsymbol{F}(\vec{x}_v) \\ \boldsymbol{b_v} &= \boldsymbol{b_v}(\vec{x}_v) = -\boldsymbol{F}(\vec{x}_v) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Το σύστημα εξισώσεων (3.40) αποτελεί το μη γραμμικό δυναμικό σύστημα εξισώσεων το οποίο θα επιχειρηθεί να λυθεί με τη χρήση του POD στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.
Σχηματικά ο πίνακας $\boldsymbol{Q}$ που περιλαμβάνει τις χρονοσειρές όλων των βαθμών ελευθερίας γράφεται ως εξής

$$\boldsymbol{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q_inv} & \boldsymbol{Q_v} \end{array}\right]_{M \times N} \tag{3.42}$$

Η εκπαίδευση των POMs σε αυτό το σημείο θα πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας SVD στο τμήμα του $\boldsymbol{Q_v}$ $[M \times N_v]$ που αφορά το οριακό στρώμα δηλαδή στο (δεξιό) τμήμα εκείνο του

οποίου οι γραμμές είναι τα διανύσματα $\vec{q}_v(t) = \boldsymbol{q_v}(t)^\top$

$$\boldsymbol{q_v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\vartheta} \\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{C_\tau} \end{bmatrix}_{N_v \times 1} = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^{N_v} \end{bmatrix}_{N_v \times 1} \tag{3.43}$$

Έχοντας εκπαιδεύσει με τη μέθοδο SVD τα POMs που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του οριακού στρώματος m, ϑ, C_τ ανακτάται ο διανυσματικός χώρος $\underset{\sim}{\Phi}_v = \{\vec{\phi}_{v_1}, \ldots, \vec{\phi}_{v_N}\} \subseteq \mathbb{R}^{N_v}$. Στη συνέχεια επιλέγονται $L \ll N_v$ POMs τα οποία αρκούν να αναπαραστήσουν το χώρο των ζητούμενων λύσεων με ακρίβεια και σχηματίζεται ο διανυσματικός χώρος $\underset{\sim}{\tilde{\Phi}}_v = \{\vec{\phi}_{v_1}, \ldots, \vec{\phi}_{v_L}\} \subseteq \underset{\sim}{\Phi}_v$. Έτσι δημιουργείται ο πίνακας $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}}$ $[N_v \times L]$ βάζοντας ως στήλες του πίνακα τα επιλεγμένα διανύσματα-στήλες $\boldsymbol{\phi}_v = \vec{\phi}_v^\top$. Δηλαδή

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi_{v1}} & \boldsymbol{\phi_{v2}} & \ldots & \boldsymbol{\phi_{vL}} \end{bmatrix}_{N_v \times L} \tag{3.44}$$

Ακόμη, ορίζω ως $\boldsymbol{\alpha_v} = \boldsymbol{\alpha_v}(t)$ το διάνυσμα στήλης $[L \times 1]$ που περιέχει όλους τους συντελεστές $\{\alpha_{v1}, \ldots, \alpha vL\}$ για κάθε χρονική στιγμή t, δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha_v} = \begin{bmatrix} \alpha_{v1} \\ \alpha_{v2} \\ \vdots \\ \alpha_{vL} \end{bmatrix}_{L \times 1} \tag{3.45}$$

Ακόμη ισχύει

$$\boldsymbol{x_v} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\alpha_v} \tag{3.46}$$

και κατ' επέκταση

$$\delta \boldsymbol{x_v} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{\alpha_v} \tag{3.47}$$

Άρα αντικαθιστώντας την (3.47) στην (3.40) λαμβάνεται

$$\boldsymbol{A_v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{\alpha_v} = \boldsymbol{b_v} \tag{3.48}$$

πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με τον πίνακα $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}}{}^{\top}$ $[L \times N_v]$ από αριστερά προκύπτει

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}}{}^{\top} \cdot \boldsymbol{A_v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} \cdot \delta\boldsymbol{\alpha_v} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}}{}^{\top} \cdot \boldsymbol{b_v} \tag{3.49}$$

Η εξίσωση (3.49) τελικά γράφεται ως

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{v}} \cdot \delta\boldsymbol{\alpha_v} = \tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{v}} \tag{3.50}$$

όπου οι πίνακες $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{v}}$ $[L \times L]$ και $\tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{v}}$ $[L \times 1]$ ορίζονται παρακάτω

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{v}} =& \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}}{}^{\top} \cdot \boldsymbol{A_v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} \\ \tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{v}} =& \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}}{}^{\top} \cdot \boldsymbol{b_v} \end{aligned} \tag{3.51}$$

Η εξίσωση (3.50) αποτελεί το μειωμένης τάξης σύστημα εξισώσεων οριακού στρώματος. Συγκεκριμένα πρόκειται για ένα σύστημα εξισώσεων (3.50) $[L \times L] \quad L \ll N_v$

Το σύστημα αυτό λύνεται με έναν αλγόριθμο *Gauss* ή και απλά με αντιστροφή του πίνακα $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{v}}$ και υπολογίζεται η άγνωστη ποσότητα $\delta\boldsymbol{\alpha_v}$. Επομένως οι συντελεστές ανανεώνονται ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha_v}^{K+1} = \boldsymbol{\alpha_v}^{K} + \delta\boldsymbol{\alpha_v} \tag{3.52}$$

Και στη συνέχεια προβάλλονται στο διανυσματικό χώρο $\underset{\sim}{\tilde{\Phi}}_v$ έτσι ώστε να προκύψει το $\delta\boldsymbol{x_v}$ μέσω της εξίσωσης (3.47). Άρα φτάνοντας ξανά στο επίπεδο του $\boldsymbol{x_v}$ αυτό ανανεώνεται ως

$$\boldsymbol{x_v}^{K+1} = \boldsymbol{x_v}^{K} + \delta\boldsymbol{x_v} \tag{3.53}$$

και η διαδικασία συνεχίζεται επαναληπτικά μέχρι να βρεθεί μία ικανοποιητική προσέγγιση του $\boldsymbol{x_v}$.

3.5.2 Διόρθωση λύσης συστήματος εξισώσεων οριακού στρώματος

Το σύστημα εξισώσεων οριακού στρώματος (3.40) είναι ένα σύστημα μεγάλου αριθμού κατάστασης ($\sim [10^9, 10^{10}]$) *ill-conditioned* και η σύγκλισή του με τη *Newton-Raphson* απαιτεί ειδική μεταχείριση. Αυτό σημαίνει ότι γνωρίζοντας προσεγγιστικά τα όρια στα οποία πρέπει να κινείται το $\boldsymbol{x_v}$ δεν γίνονται αποδεκτές λύσεις οι οποίες ξεπερνούν αυτά τα όρια.

Στον αλγόριθμο επίλυσης του μοντέλου πλήρους τάξης του οριακού στρώματος αυτό υλοποιείται ελέγχοντας σε κάθε επανάληψη K της *Newton-Raphson* το διάνυσμα στήλης $\boldsymbol{x_v}^{K}$. Αν βρεθούν μη αποδεκτές τιμές η λύση συμπληρώνεται χρησιμοποιώντας ένα κομμάτι ad hoc λύσης το οποίο δεν προέρχεται από την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων (2.141) αλλά σχετίζεται με την παραβολική λύση του αντιστρόφου οριακού στρώματος (inverse boundary layer) ή σε ορισμένες περιπτώσεις είναι εμπειρικού τύπου. Περαιτέρω λεπτομέρειες για την προέλευση της λύσης μπορούν να βρεθούν στην εργασία του *Drela* [39].

Άρα το τελικό διάνυσμα στήλης ${\boldsymbol{x_v}_f}^{K+1}$ των αγνώστων μεταβλητών του οριακού στρώματος δίνεται από την εξίσωση

$$ {\boldsymbol{x_v}_f}^{K+1} = {\boldsymbol{x_v}}^{K+1} + \delta\tilde{\boldsymbol{x}}_v = {\boldsymbol{x_v}}^{K} + \delta\boldsymbol{x_v} + \delta\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{v}} \tag{3.54} $$

όπου το $\delta\boldsymbol{x_v}$ προέρχεται από το σύστημα των εξισώσεων, ενώ το $\delta\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{v}}$ είναι το ad hoc τμήμα της λύσης. Αυτή η διόρθωση είναι απολύτως απαραίτητη για τη σύγκλιση του συστήματος (3.40) καθώς χωρίς αυτή η λύση αποκλίνει. Σημασία έχει η κατανόηση του ότι η διόρθωση $\delta\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{v}}$ δεν περιορίζεται στο να διορθώνει τη λύση στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, αλλά τη διορθώνει σε κάθε επανάληψη με αποτέλεσμα το τελικό διορθωμένο $\boldsymbol{x_v}_f$ να είναι αυτό βάσει του οποίου υπολογίζονται οι πίνακες $\boldsymbol{A_v} = \partial\boldsymbol{F}(\vec{x}_{v_f})$ και $\boldsymbol{b_v} = -\boldsymbol{F}(\vec{x}_{v_f})$.

Όσον αφορά το ROM, αυτή η υπολογιστική λεπτομέρεια είναι πολύ σημαντική καθώς η καταγραφή των δεδομένων στα στιγμιότυπα POD που λαμβάνει χώρα μετά το πέρας κάθε χρονικού βήματος. Αυτό σημαίνει πως το POD καταγράφει την τελική λύση μετά τις διορθώσεις οι οποίες οδηγούν το σύστημα (3.40) στη σύγκλιση. Έτσι τα POMs έχουν καταγράψει ουσιαστικά και την πληροφορία της διόρθωσης $\delta\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{v}}$ με αποτέλεσμα όταν κατασκευάζεται το ROM οι πίνακες $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{v}}$ και $\tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{v}}$, δηλαδή το σύστημα των εξισώσεων του ROM να λαμβάνει αυτή τη διόρθωση μέσω των POMs. Ακόμη ενδιαφέρον έχει ότι με τη χρήση μικρού αριθμού POMs ($L < 50$) το σύστημα ROM, δηλαδή ο πίνακας $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{v}}$ γίνεται πλέον μικρού αριθμού κατάστασης ($\sim [10^2, 10^4]$) με αποτέλεσμα η σύγκλιση να επιτυγχάνεται πολύ πιο εύκολα.

Αυτό σημαίνει ότι ενώ οι δυνατότητες του συστήματος (3.40) περιορίζονται στο να δίνουν τη λύση $\boldsymbol{x_v}$ η οποία χρειάζεται διόρθωση για να εξασφαλιστεί η σύγκλιση, το σύστημα (3.50) έχει τη δυνατότητα να φτάνει μόνο του, χωρίς διορθώσεις στη λύση

$$ {\boldsymbol{x_v}_f}^{K+1} = {\boldsymbol{x_v}}^{K} + \delta\boldsymbol{x_v} = {\boldsymbol{x_v}}^{K} + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} \cdot \delta\boldsymbol{\alpha_v} \tag{3.55} $$

καθώς η διόρθωση βρίσκεται μέσα στο $\delta\boldsymbol{\alpha_v}$ το οποίο είναι η λύση του συστήματος (3.50). Το πρόβλημα με αυτό είναι όπως θα φανεί στο κεφάλαιο 4 ότι προκειμένου να μεταφερθεί όλη αυτή η πληροφορία χρειάζεται πολύ μεγάλος αριθμός POMs καθώς η πληροφορία της εν λόγω διόρθωσης βρίσκεται διασπαρμένη στα POMs χαμηλής ενέργειας.

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα - Αντίστροφη ανακατασκευή λύσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο μειωμένης τάξης του οριακού στρώματος που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.5. Αρχικά θα γίνει μία διεξοδική ανάλυση σχετικά με την επιλογή των κατάλληλων POMs και στη συνέχεια θα παρουσιαστούν αποτελέσματα από on και off-reference υπολογισμό λύσεων χρησιμοποιώντας το μοντέλο μειωμένης τάξης οριακού στρώματος που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.5. Θα εξεταστεί μόνο η εξαναγκασμένη ταλάντωση αεροτομής με δύο συχνότητες διέγερσης (γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση) καθώς όπως φάνηκε στην ενότητα 3.4 είναι η πιο απαιτητική και ενδιαφέρουσα περίπτωση. Ως λύση αναφοράς (reference) σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί η Περίπτωση 1 της υποενότητας 3.4.3.

Σε όλες τις περιπτώσεις για να αποφευχθεί η λύση της μεταβατικής κατάστασης το ROM ενεργοποείται στο χρονικό βήμα $N_{tROM} = 400$. Για τη διαστασιολόγιση των πινάκων ισχύουν αυτά που αναλύθηκαν στην υποενότητα 3.4.1 με τη διαφορά ότι πλέον η διάσταση N αντικαθίσταται από τη διάσταση $N_v = 3 \cdot 118 = 354$ καθώς το μοντέλο μειωμένης τάξης αναπτύσσεται βάσει των βαθμών ελευθερίας του οριακού στρώματος και όχι της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής.

4.1 Κριτήρια επιλογής POD Ιδιομορφών

Περίπτωση 1 Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

Πίνακας 4.1: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 1*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha}_0$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3°$	$0°$	0	$0.04rad/s$	0.2	$0°$

Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

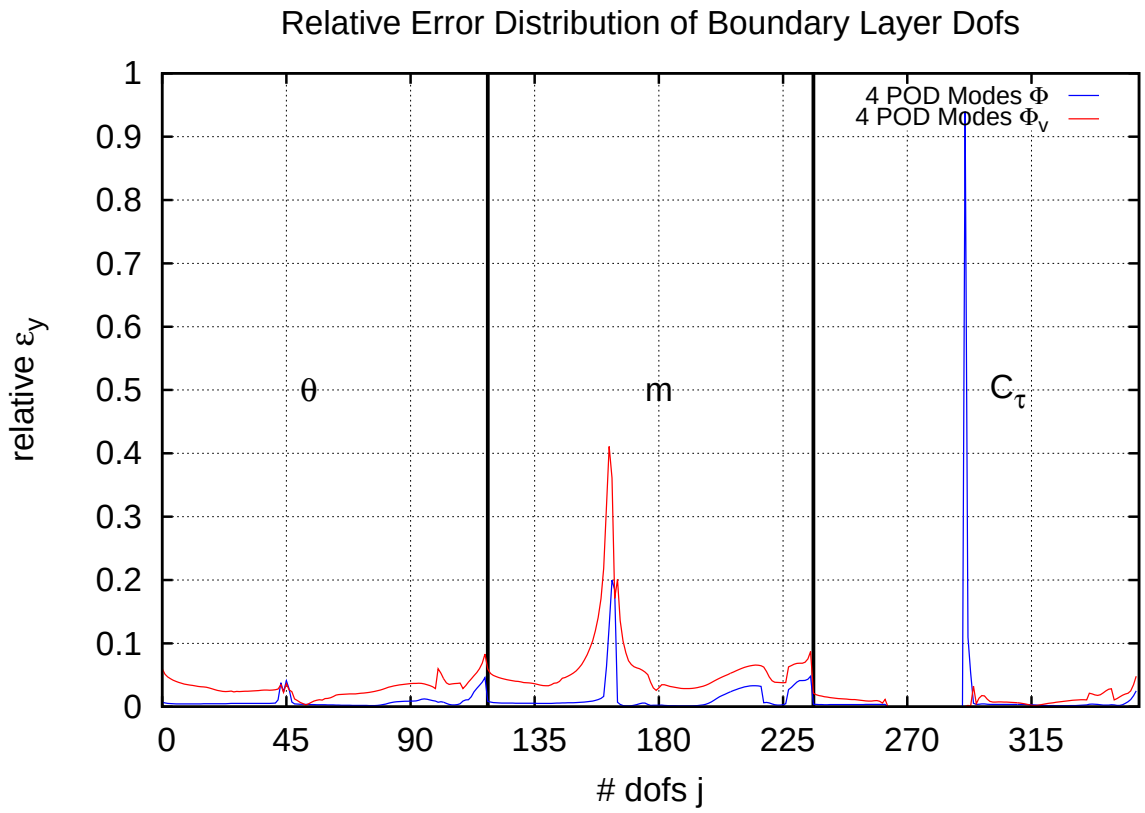
4.1.1 Το ενεργειακό κριτήριο

Εφαρμόζοντας SVD στον πίνακα $\boldsymbol{Q_v}$ προκύπτουν τα POMs του οριακού στρώματος και σύμφωνα με το ενεργειακό κριτήριο (3.14) 4 POMs αρκούν για την ανακατασκευή της αρχικής λύσης. Στον πίνακα πίνακα 4.2 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ποσοστά της ενέργειας που περιλαμβάνουν τα 4 πρώτα POMs.

Πίνακας 4.2: *Τα POMs που περιλαμβάνουν το 99 % της ενέργειας*

POM $\vec{\phi}_{v_j}$	ποσοστό ενέργειας	αθροιστικά
1	70.37%	70.37%
2	21.82%	92.19%
3	5.21%	97.40%
4	1.85%	99.26%

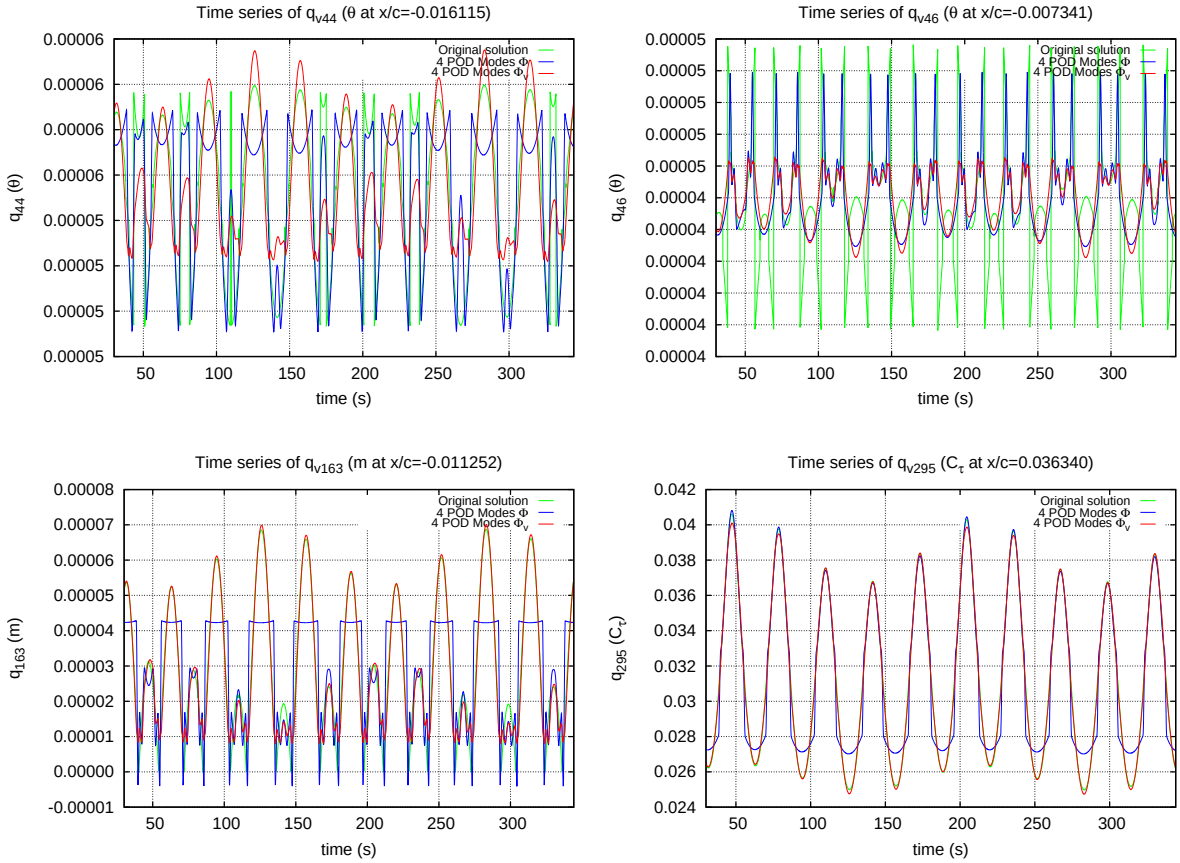
4 POMs Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $L = 4$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$. Ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση με αυτό που προέκυψε στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιώντας $L = 4$ modes $\vec{\phi} \in \mathbb{R}^N$.



Σχήμα 4.1: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$. *Για τα* ϑ, m *το σφάλμα με χρήση των* $\vec{\phi}_v$ *είναι μεγαλύτερο, ωστόσο παρατηρείται συμφωνία κοντά στο σημείο ανακοπής. Για το* C_τ *το σφάλμα εξαλείφεται με χρήση των* $\vec{\phi}_v$

Από το διάγραμμα 4.1 φαίνεται μία γενική τάση για μεγαλύτερο σφάλμα χρησιμοποιώντας τα POMs $\vec{\phi}_v$ καθώς τα δεδομένα $\boldsymbol{Q_v}$ με τα οποία τροφοδοτείται η SVD είναι σαφώς μικρότερα σε όγκο από τα $\boldsymbol{Q}$ άρα και τα modes $\vec{\phi}_v$ περιέχουν λιγότερη πληροφορία. Ακόμη, παρατηρώντας προσεκτικά το διάγραμμα διαφαίνεται η συνέπεια του σφάλματος της μεταβλητής ϑ στην περιοχή του σημείου ανακοπής καθώς σε αυτή την περιοχή έχει χαρακτηριστικά ίδια τιμή. Ακόμη με χρήση των $\vec{\phi}_v$ παρατηρείται και μικρότερο σφάλμα στη μεταβλητή C_τ στην περιοχή μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή.

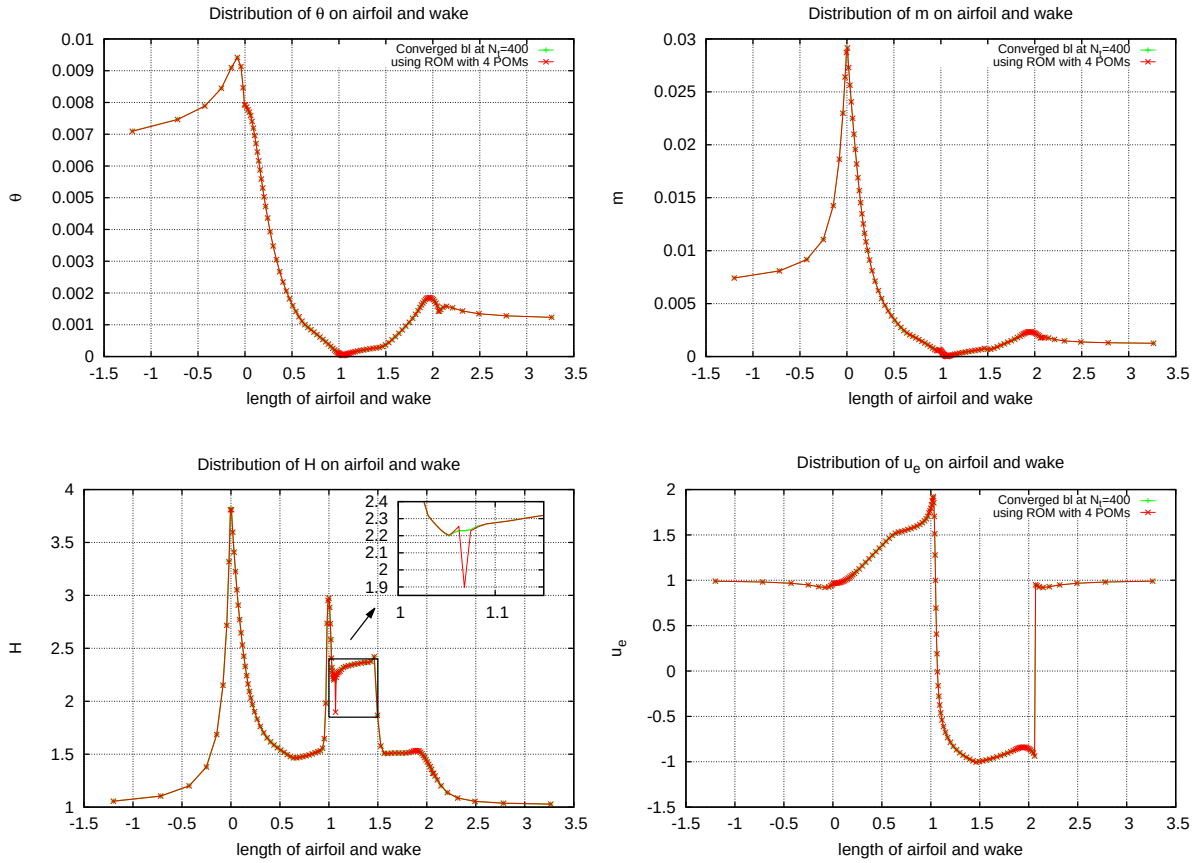
Για λόγους πληρότητας παρουσιάζονται οι αρχικές χρονοσειρές κάποιων από τα σημαντικά ως προς το σφάλμα σημεία που σχολιάστηκαν καθώς και οι προσεγγίσεις αυτών χρησιμοποιώντας $\vec{\phi}_v$ και $\vec{\phi}$ και $L = 4$.



Σχήμα 4.2: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$ *και* $\boldsymbol{Q}_1$ *με* $L = 4$. *Η προσέγγιση με χρήση των* $\vec{\phi}_v$ *φαίνεται ποιοτικά καλύτερη*

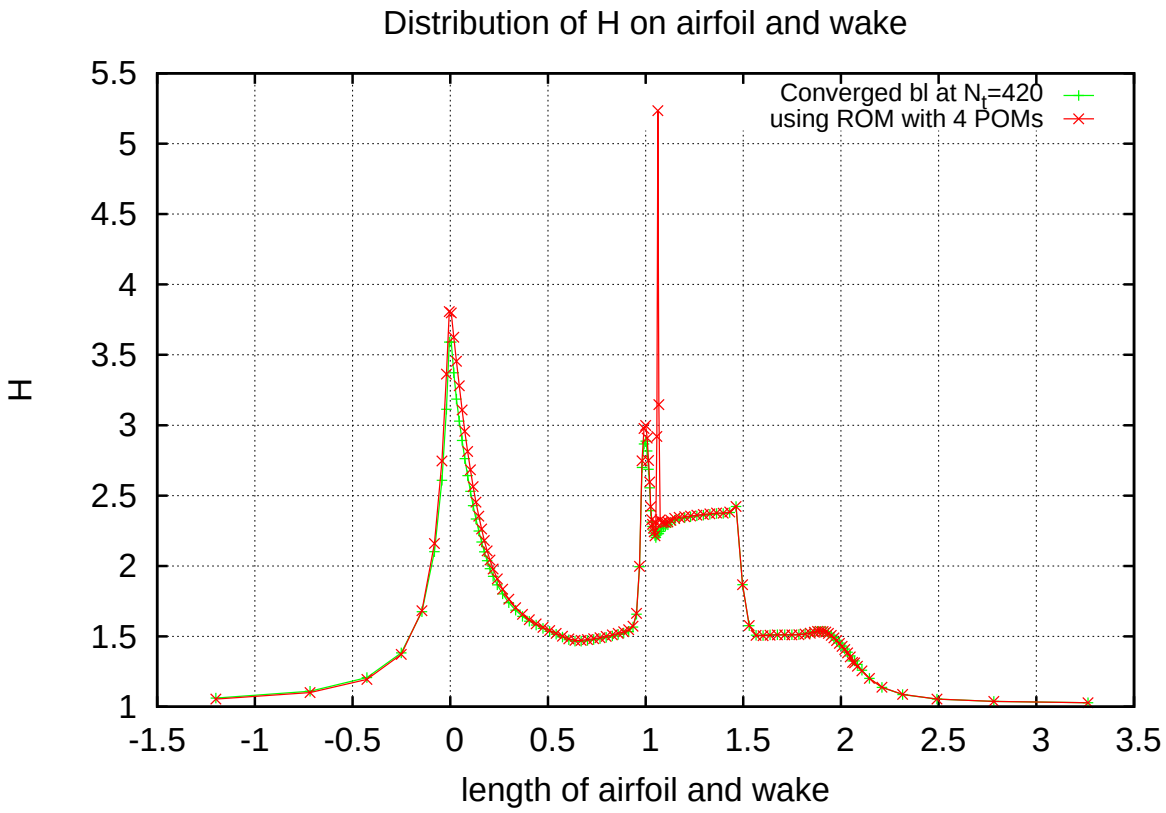
Αν και όπως σχολιάστηκε, οι προσεγγίσεις αυτές υπολογίζονται χρησιμοποιώντας 4 POMs $\vec{\phi}_v$ μικρότερης διάστασης από αυτά του κεφαλαίου 4, παρατηρείται μία καλύτερη προσέγγιση στα σημεία ενδιαφέροντος (περιοχή σημείου ανακοπής και τυρβώδης περιοχή). Αυτό πιθανώς συμβαίνει γιατί τα POMs σε αυτό το σημείο είναι ιδιομορφές που κατασκευάστηκαν από δεδομένα του οριακού στρώματος και μόνο και χρησιμοποιούνται για να αναπαράγουν αποκλειστικά τους μεταβλητές του οριακού στρώματος.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα 4 POMs $\vec{\phi}_v$ που περιλαμβάνουν το 99% της ενέργειας της λύσης κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των βαθμών ελευθερίας του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



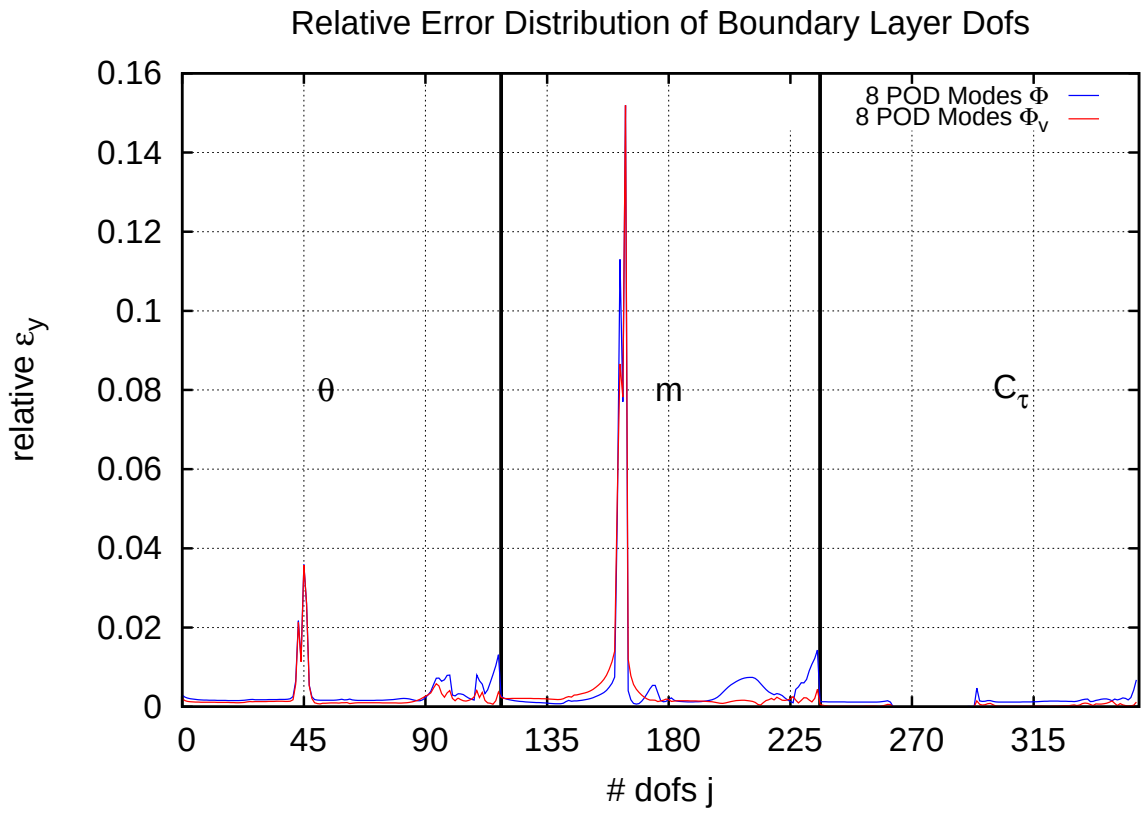
Σχήμα 4.3: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $L = 4$ στο χρονικό βήμα $N_t = 400$. Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή H στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.3 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, εκτός του H το οποίο εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής. Όπως έχει ήδη αναφερθεί αυτό οφείλεται σε αυτή την περιοχή η ταχύτητα είναι μηδενική και ισχύει $u_e \cong 0$, και επειδή $\delta^* = m/u_e$ στην περιοχή αυτή εμφανίζονται σχετικά υψηλές τιμές του δ^*. Αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το ϑ παρουσιάζει μεγάλο και συνεπές σφάλμα λόγω της "πολύπλοκης" μορφής των χρονοσειρών του σε αυτό το σημείο, οδηγεί το $H = \delta^*/\vartheta$ σε αυτή τη μη κανονική τιμή. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται με αποτέλεσμα να μην μπορεί να συγκλίνει η λύση στο χρόνο. Χαρακτηριστικό είναι το διάγραμμα του H για $N_t = 420$



Σχήμα 4.4: *Κατανομή της μεταβλητής του οριακού στρώματος H στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $L = 4$ στο χρονικό βήμα $N_t = 420$. Το σφάλμα παραμένει εντοπισμένο και αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου*

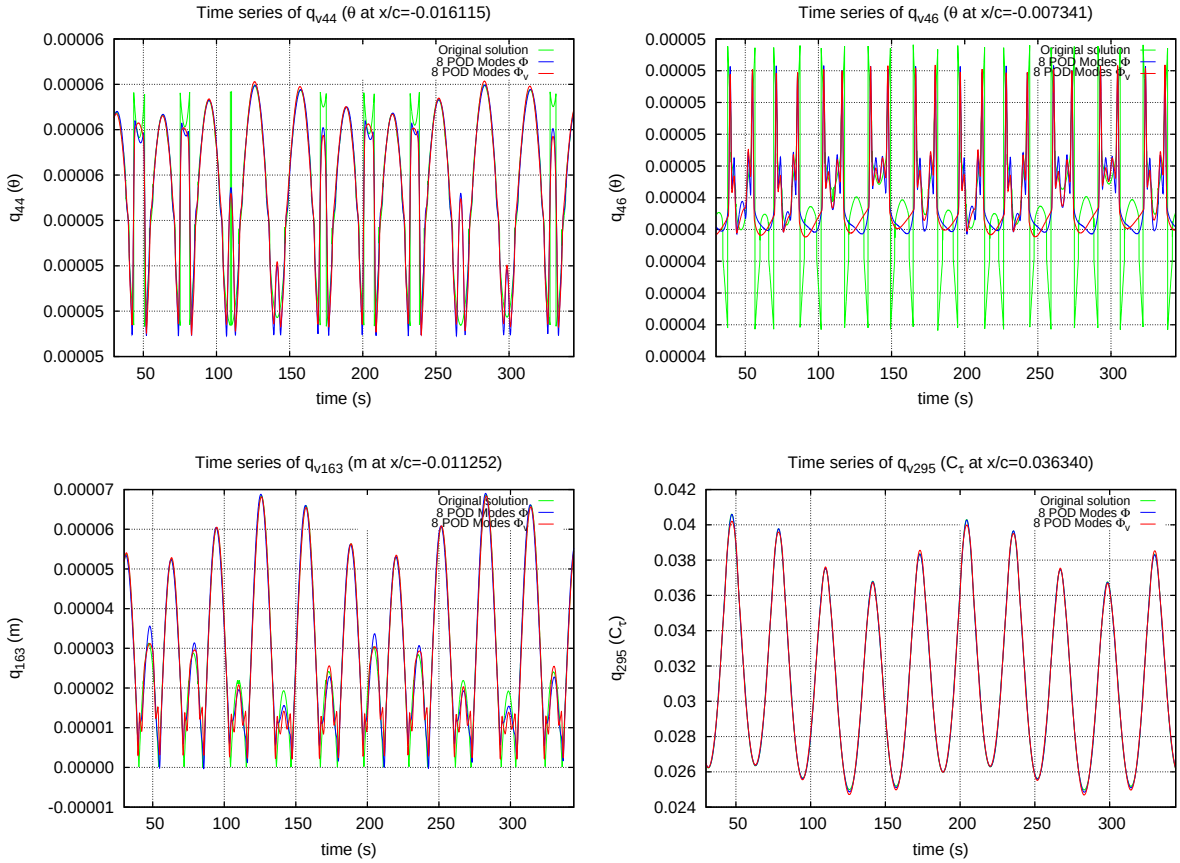
8 POMs Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $L = 8$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$. Ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση με αυτό που προέκυψε στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιώντας $L = 8$ modes $\vec{\phi} \in \mathbb{R}^N$.



Σχήμα 4.5: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$. *Το σφάλμα της χρήσης των* $\vec{\phi}_v$ *φαίνεται να υποχωρεί σε σχέση με αυτό των* $\vec{\phi}$ *για* $L = 8$

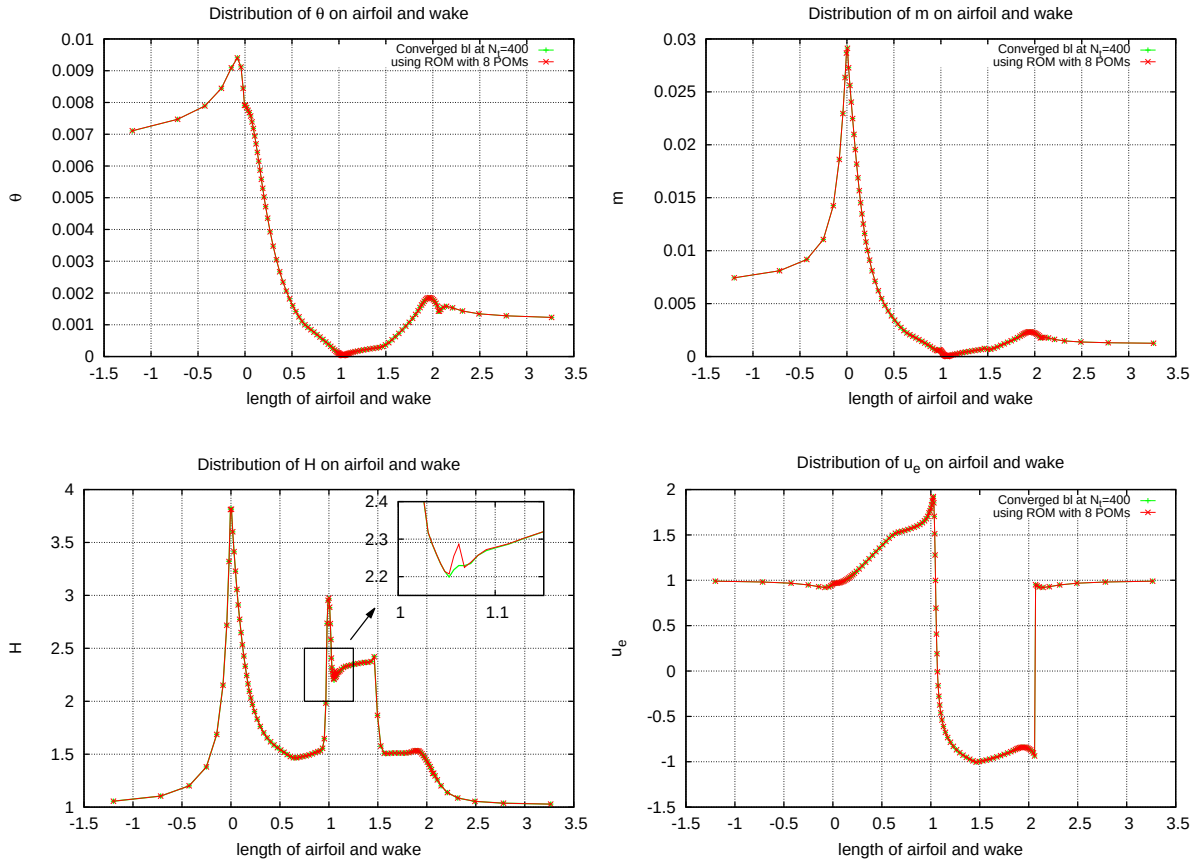
Από το διάγραμμα 4.5 φαίνεται ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός των POMs το σφάλμα γίνεται ανεξάρτητο της προέλευσής τους ($\boldsymbol{Q}$ ή $\boldsymbol{Q}_v$) καθώς φαίνεται σχεδόν ίδιο για $\vec{\phi}_v$ και $\vec{\phi}$.

Για λόγους πληρότητας παρουσιάζονται οι αρχικές χρονοσειρές κάποιων από τα σημαντικά ως προς το σφάλμα σημεία που σχολιάστηκαν καθώς και οι προσεγγίσεις αυτών χρησιμοποιώντας $\vec{\phi}_v$ και $\vec{\phi}$ και $L = 8$ και $L = 8$.



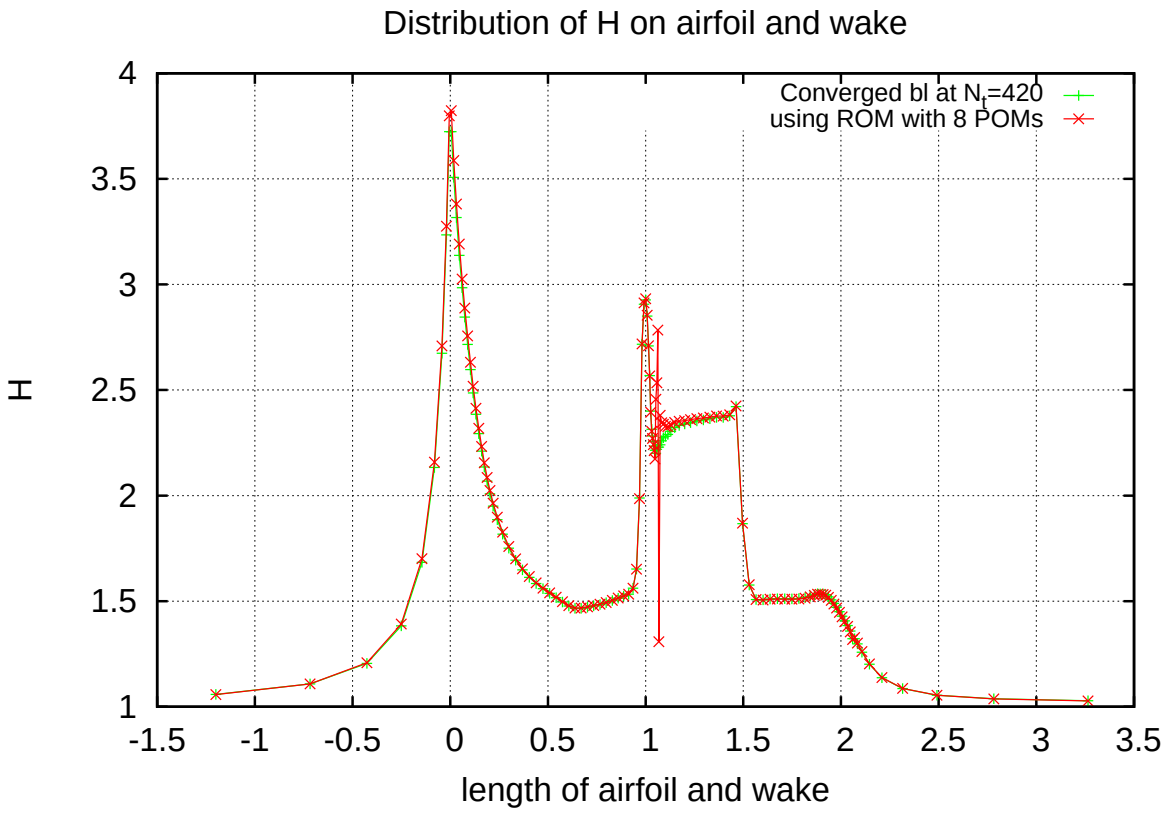
Σχήμα 4.6: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$ *και* $\boldsymbol{Q}_1$ *με* $L = 8$. *Οι δύο προσεγγίσεις παρουσιάζουν παρόμοια απόκλιση από την αρχική λύση*

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα 8 POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



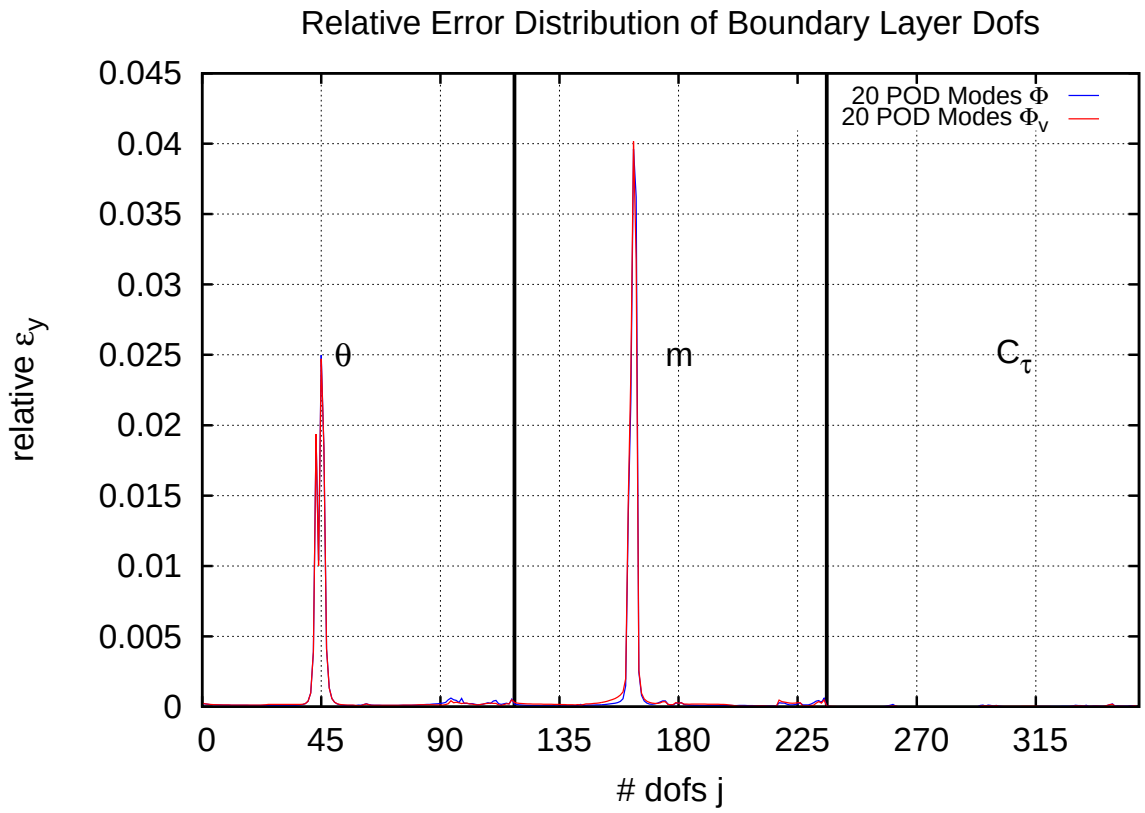
Σχήμα 4.7: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος* $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ *στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με* $L = 8$ *στο χρονικό βήμα* $N_t = 400$. *Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή* H *στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.7 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, το H συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του stagnation της αεροτομής. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται με αποτέλεσμα να μην μπορεί να συγκλίνει η λύση στο χρόνο. Χαρακτηριστικό είναι το διάγραμμα του H για $N_t = 420$



Σχήμα 4.8: *Κατανομή της μεταβλητής του οριακού στρώματος H στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $L = 8$ στο χρονικό βήμα $N_t = 420$. Το σφάλμα παραμένει εντοπισμένο και αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου*

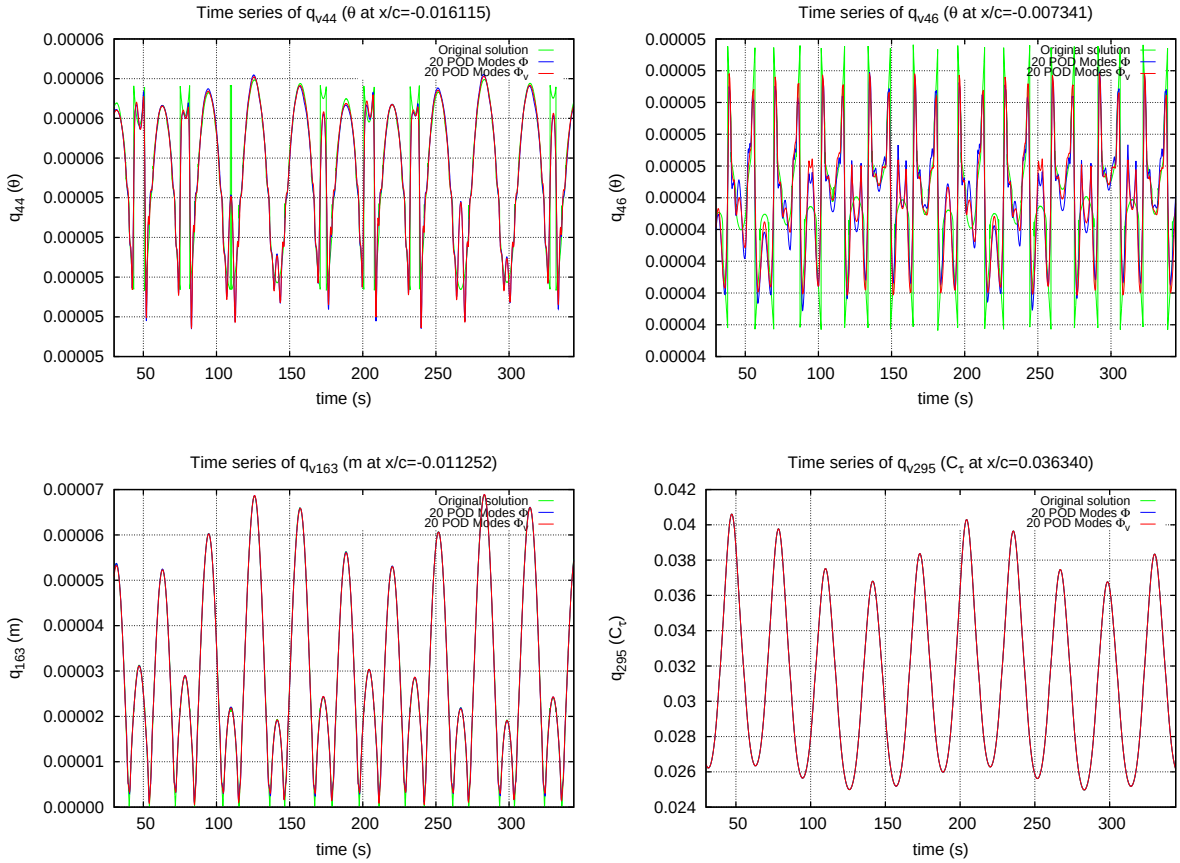
20 POMs Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $L = 20$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$. Ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση με αυτό που προέκυψε στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιώντας $L = 20$ modes $\vec{\phi} \in \mathbb{R}^N$.



Σχήμα 4.9: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$. *Το σφάλμα παρουσιάζεται εντοπισμένο στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής και μάλιστα η χρήση των* $\vec{\phi}_v$ *παράγει ίδιο σφάλμα σε σχέση με τα* $\vec{\phi}$

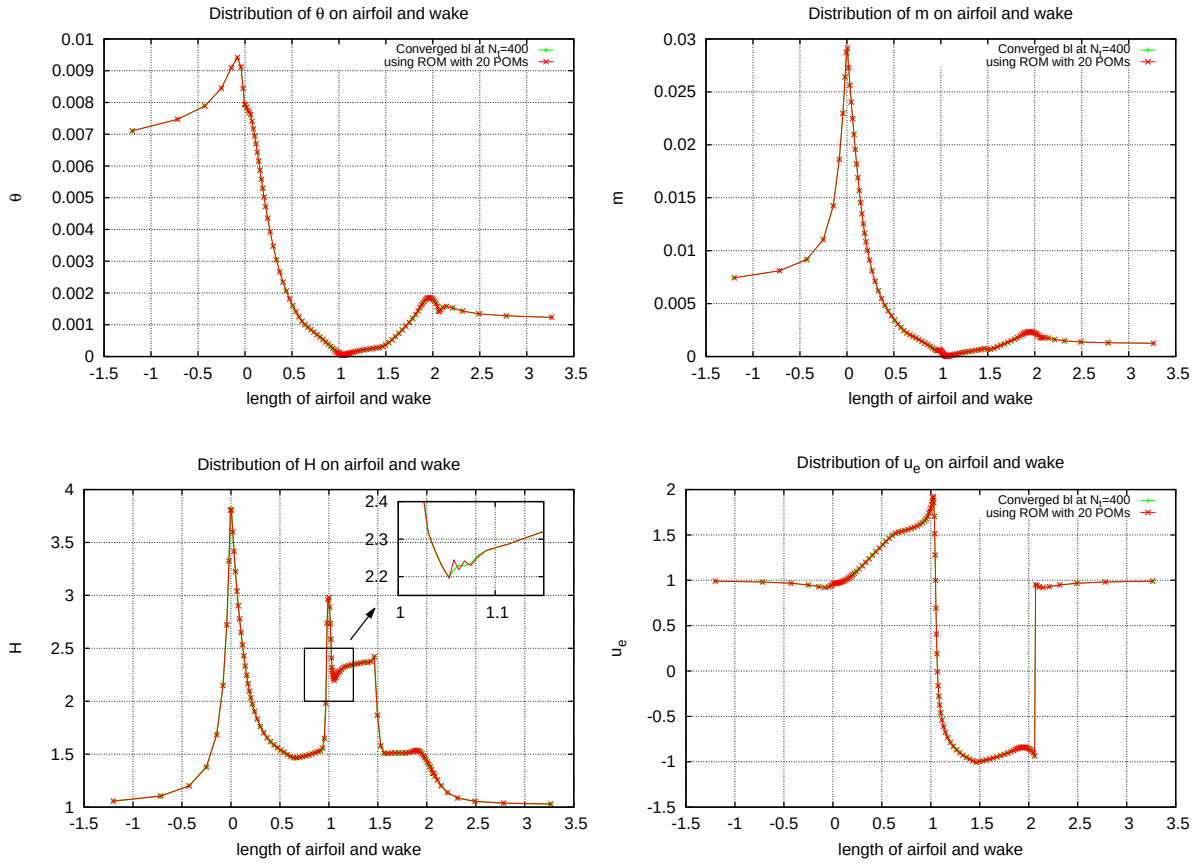
Στο διάγραμμα 4.9 φαίνεται πλέον ότι η προέλευση των POMs δεν παίζει κάποιο ρόλο στην προσέγγιση των βαθμών ελευθερίας του οριακού στρώματος από το POD.

Για λόγους πληρότητας παρουσιάζονται οι αρχικές χρονοσειρές κάποιων από τα σημαντικά ως προς το σφάλμα σημεία που σχολιάστηκαν καθώς και οι προσεγγίσεις αυτών χρησιμοποιώντας $\vec{\phi}_v$ και $\vec{\phi}$ και $L = 4$ και $L = 4$.



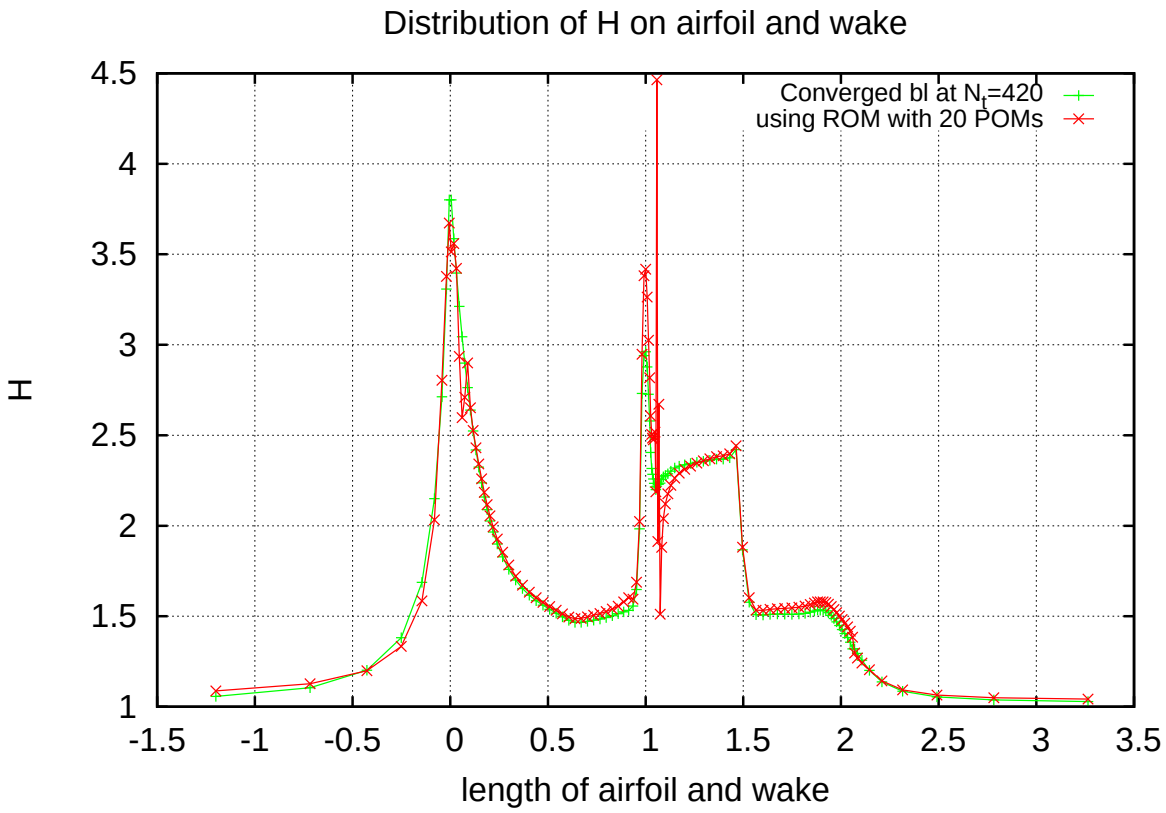
Σχήμα 4.10: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$ *και* $\boldsymbol{Q}_1$ *με* $L = 20$. *Οι δύο προσεγγίσεις είναι πρακτικά ίδιες*

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα 20 POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



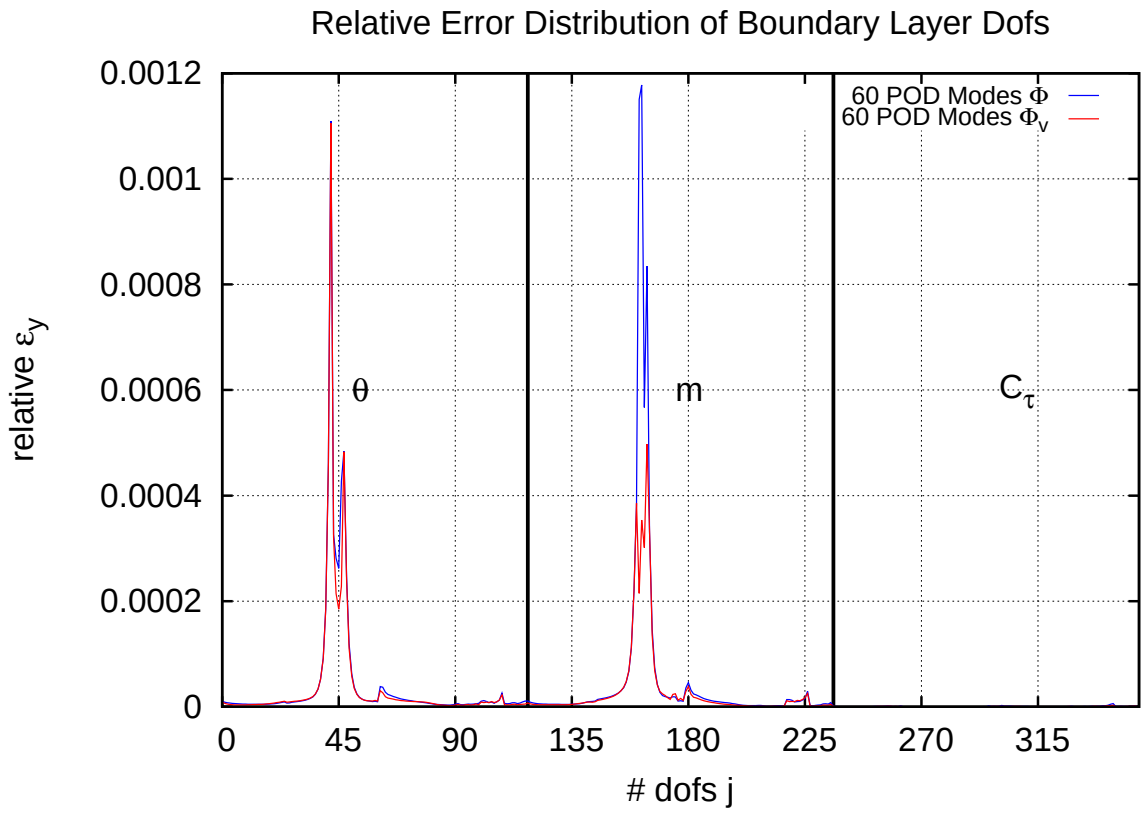
Σχήμα 4.11: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος* $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ *στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με* $L = 20$ *στο χρονικό βήμα* $N_t = 400$. *Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή* H *στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.11 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, το H συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του stagnation της αεροτομής. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται με αποτέλεσμα να μην μπορεί να συγκλίνει η λύση στο χρόνο. Χαρακτηριστικό είναι το διάγραμμα του H για $N_t = 420$.



Σχήμα 4.12: *Κατανομή της μεταβλητής του οριακού στρώματος H στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $L = 20$ στο χρονικό βήμα $N_t = 420$. Το σφάλμα παραμένει εντοπισμένο και αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου*

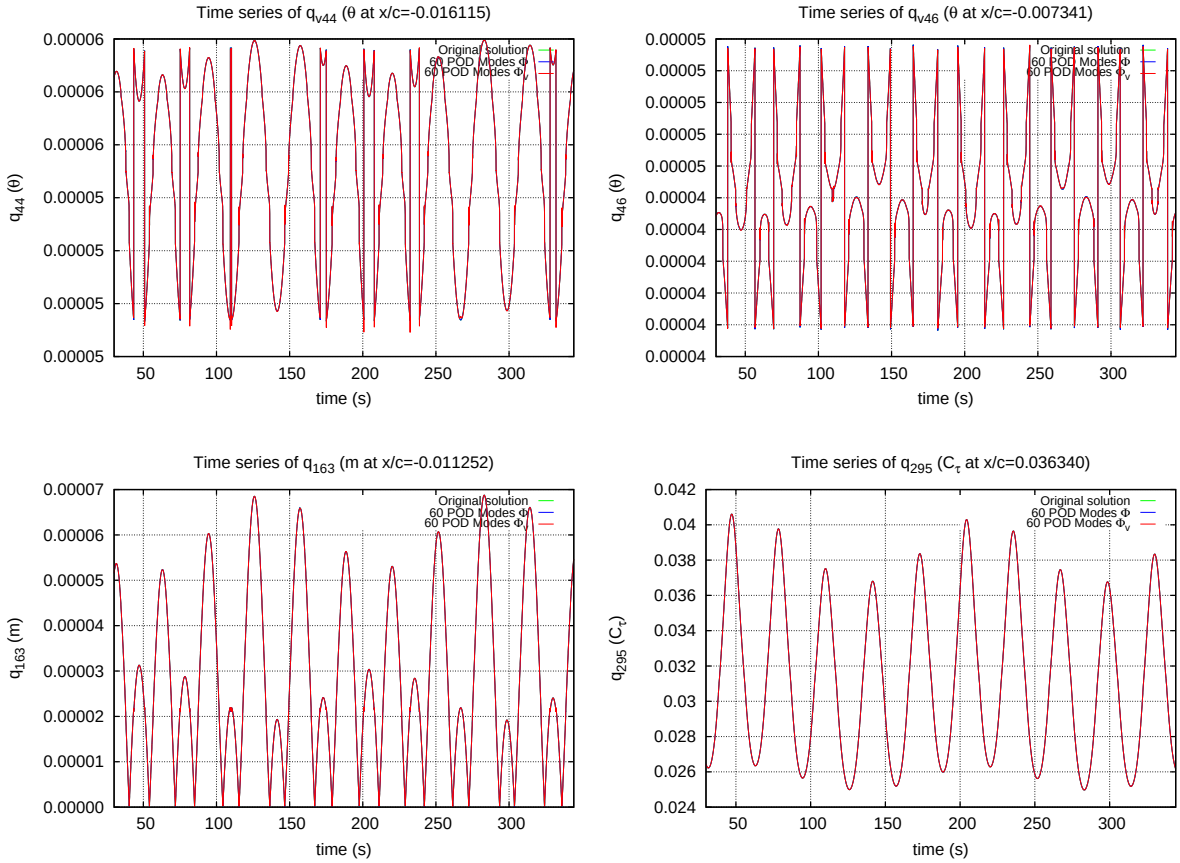
60 POMs Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $L = 60$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$. Ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση με αυτό που προέκυψε στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιώντας $L = 60$ modes $\vec{\phi} \in \mathbb{R}^N$.



Σχήμα 4.13: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$. *Το σφάλμα παρουσιάζεται εντοπισμένο στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής και μάλιστα παρουσιάζεται μειωμένο για τα* $\vec{\phi}_v$

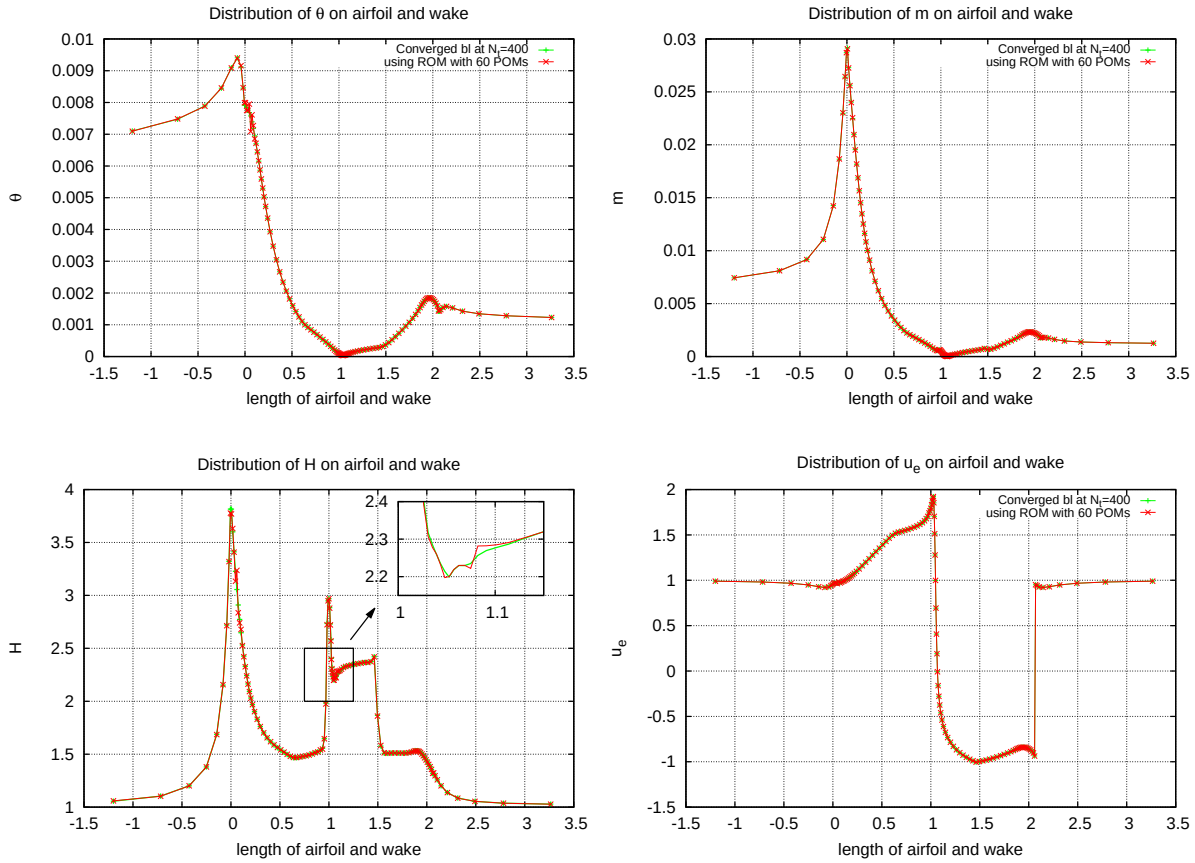
Στο διάγραμμα 4.13 φαίνεται πλέον ότι για τον βαθμό ελευθερίας m το σφάλμα είναι ακόμη μικρότερο χρησιμοποιώντας τα POMs $\vec{\phi}_v$. Από την άλλη το σφάλμα του ϑ είναι ακριβώς το ίδιο, γεγονός που επιβεβαιώνει για άλλη μία φορά τη σταθερή του φύση.

Για λόγους πληρότητας παρουσιάζονται οι αρχικές χρονοσειρές κάποιων από τα σημαντικά ως προς το σφάλμα σημεία που σχολιάστηκαν καθώς και οι προσεγγίσεις αυτών χρησιμοποιώντας $\vec{\phi}_v$ και $\vec{\phi}$ και $L = 60$ και $L = 60$.



Σχήμα 4.14: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_1$ *και* $\boldsymbol{Q}_1$ *με* $L = 60$. *Οι δύο προσεγγίσεις είναι πρακτικά ίδιες*

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα 60 POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα των τιμών που παίρνουν οι μεταβλητές του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



Σχήμα 4.15: *Σύγκρισης της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος ϑ, m, H, u_e στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $L = 60$ στο χρονικό βήμα $N_t = 400$. Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή H στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.15 είναι ότι ακόμη και με τόσο μεγάλο αριθμό POMs το H συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του stagnation της αεροτομής και μάλιστα φαίνεται να εμφανίζεται σε περισσότερα σημεία. Ακόμη, φαίνεται ότι τα 60 POMs μετέφεραν και άλλες διεγέρσεις στο σύστημα κυρίως στην πάνω πλευρά της αεροτομής με αποτέλεσμα η λύση να είναι εντελώς εκτός σύγκλισης. Αυτά τα σφάλματα μεταφέρονται στο χρόνο αυξάνονται και εξαπλώνονται και σε άλλα σημεία με αποτέλεσμα να μην μπορεί να συγκλίνει η λύση στο χρόνο. Στην περίπτωση αυτή η λύση δεν μπόρεσε να φτάσει ούτε το $N_t = 401$.

4.1.2 Το κριτήριο της μέγιστης συνιστώσας των POD Modes

Σε αυτή την ενότητα επιχειρείται να γίνει επιλογή -εκτός από τα 4 ενεργειακά ισχυρά- εκείνων των POMs τα οποία εμφανίζουν μέγιστη συνιστώσα που αντιστοιχεί στις μεταβλητές ϑ, m σε μία περιοχή γύρω από το σημείο ανακοπής Αυτά τα POMs αν και περιλαμβάνουν χαμηλό ποσοστό ενέργειας της συνολικής ροής, περιέχουν την πληροφορία η οποία δίνει ισχυρές ταλαντώσεις στις τιμές των βαθμών ελευθερίας ϑ, m στην περιοχή του σημείου

ανακοπής όπου συγκεντρώνεται το σφάλμα ακόμη και στην περίπτωση των 60 modes (βλ. Σχ. 4.13). Έχοντας λοιπόν τον πίνακα

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} & & & & \\ \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{v}1} & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{v}j} & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{v}L} \\ & & & & \end{bmatrix}_{N_v \times L} = \begin{bmatrix} \Phi_v(1,1) & \cdots & \Phi_v(1,j) & \cdots & \Phi_v(1,L) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_v(i,1) & \cdots & \Phi_v(i,j) & \cdots & \Phi_v(i,L) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_v(N_v,1) & \cdots & \Phi_v(N_v,j) & \cdots & \Phi_v(N_v,L) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

όπου θα επιλεγούν τα POMs $\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{v}j}$ για τα οποία ισχύει

$$\begin{aligned} &\forall \quad j \quad \text{Αν} \quad \Phi_v(i,j) = \max\{\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{v}j}\} \\ &\text{και} \quad \{i \in \Delta_\vartheta \quad \text{ή} \quad i \in \Delta_m\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

όπου Δ_ϑ και Δ_m είναι σύνολα φυσικών αριθμών τα οποία επιλέγονται βάσει των σημείων στα οποία παρατηρήθηκαν ισχυρές αποκλίσεις για τους βαθμούς ελευθερίας ϑ και m αντίστοιχα, κατά την ευθεία αναπαράσταση λύσεων. Αυτό το "φίλτρο" μπορεί να εφαρμοστεί 2 φορές παίρνοντας τα $\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{v}j}$ POMs των οποίων η 1η και η 2η μέγιστη συνιστώσα βρίσκεται σε θέσεις i κοντά στο σημείο ανακοπής για τους επιθυμητούς βαθμούς ελευθερίας. Τα Δ_ϑ και Δ_m θα είναι πιο "αυστηρά" στο κριτήριο της 1ης μέγιστης συνιστώσας και λίγο πιο "χαλαρά" σε αυτό της 2ης με την έννοια του αριθμού των σημείων που θα περιλαμβάνονται σε αυτά.

Αφού επιλέγονται $K < L$ POMs μέσω αυτού του κριτηρίου σχηματίζεται κατά τα γνωστά ο πίνακας

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} & & & \\ \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{v}1} & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{v}K} \\ & & & \end{bmatrix}_{N_v \times K} \tag{4.3}$$

ο οποίος φυσικά διατηρεί τη γνωστή ιδιότητα ορθοκανονικότητας αλλά και συνεχίζει να ισχύει ${\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{v}}}^\top \cdot \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{I}_K$. και χρησιμοποιείται κατά τα γνωστά. Επιλέγοντας σταθερά σύνολα Δ_ϑ και Δ_m ο αριθμός K εξαρτάται αποκλειστικά από τον L. Οπότε παρακάτω θα επιλέγεται αριθμός L από τον οποίο θα προκύπτει ο K.

Κριτήριο 1ης μέγιστης συνιστώσας των POMs

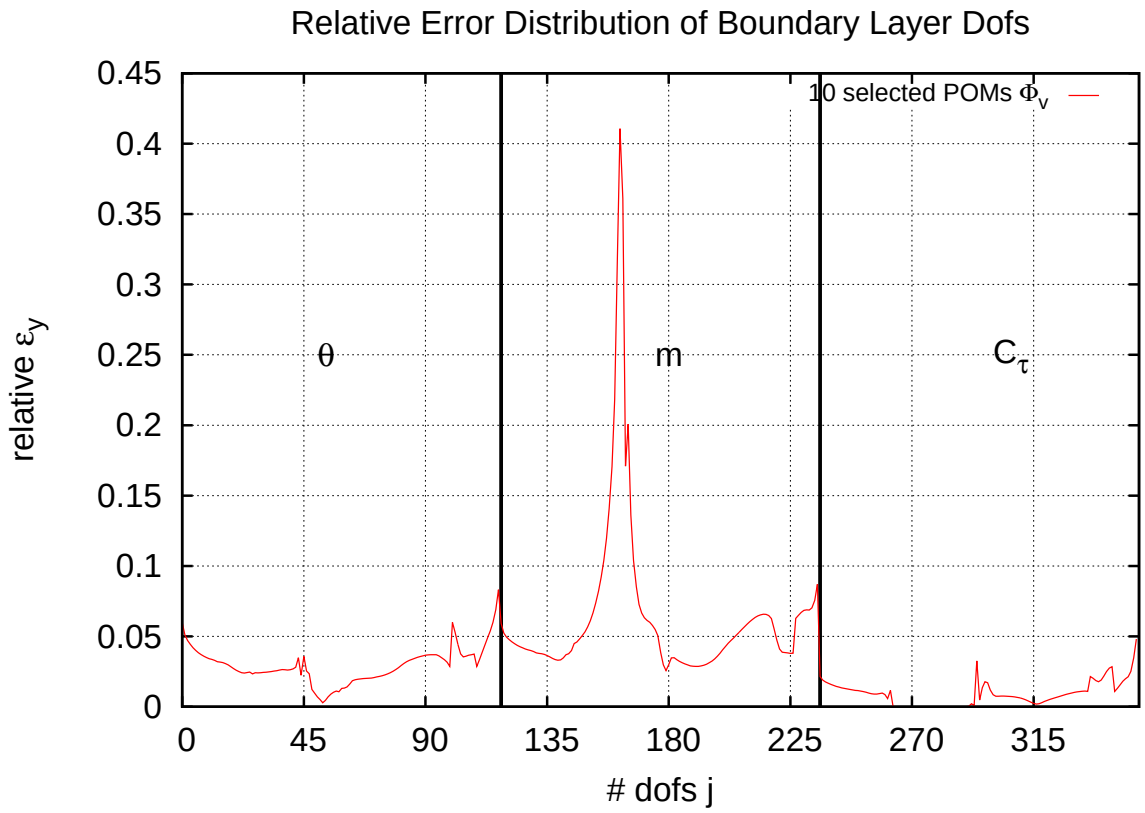
Θα επιλεγούν τα POMs $\boldsymbol{\phi_{v_j}}$ για τα οποία ισχύει η εξίσωση (4.3) και $\Delta_\vartheta = \{43, 48\}$ και $\Delta_m = \{161, \ldots, 165\}$

$L = 50$, $K = 10$ **POMs** Στον πίνακα πίνακα 4.3 παρουσιάζονται τα 6 $\vec{\phi}_v$ POMs που επιλέγονται, και η συνιστώσα i που εμφανίζουν το 1ο μέγιστο. Τα 4 πρώτα επιλέγονται με βάση το ενεργειακό κριτήριο, οπότε δεν έχει νόημα να βρίσκονται σε αυτόν τον πίνακα.

Πίνακας 4.3: 6 *POMs και 1η μέγιστη συνιστώσα*

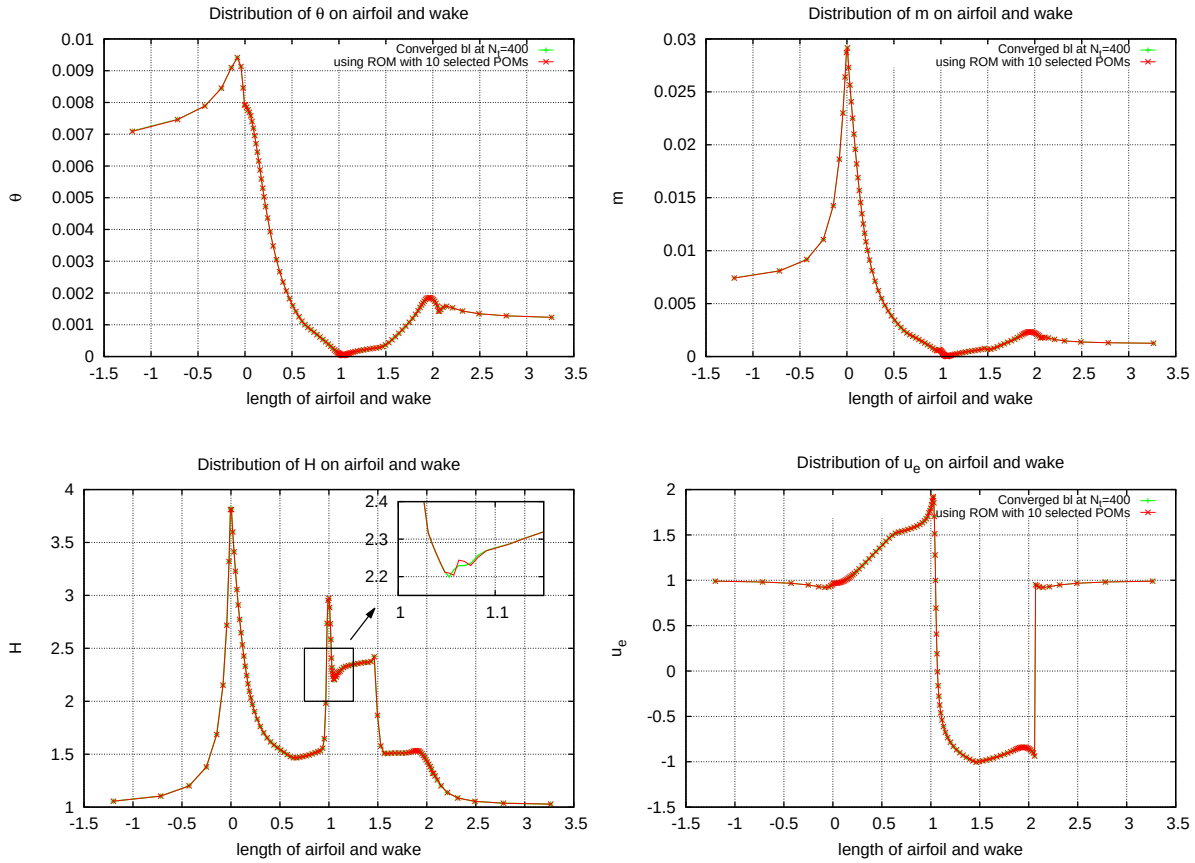
POM $\vec{\phi}_{v_j}$	i	βαθμός ελευθερίας
43	164	m
45	163	m
46	165	m
47	164	m
48	163	m
49	163	m

Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $K = 10$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$.



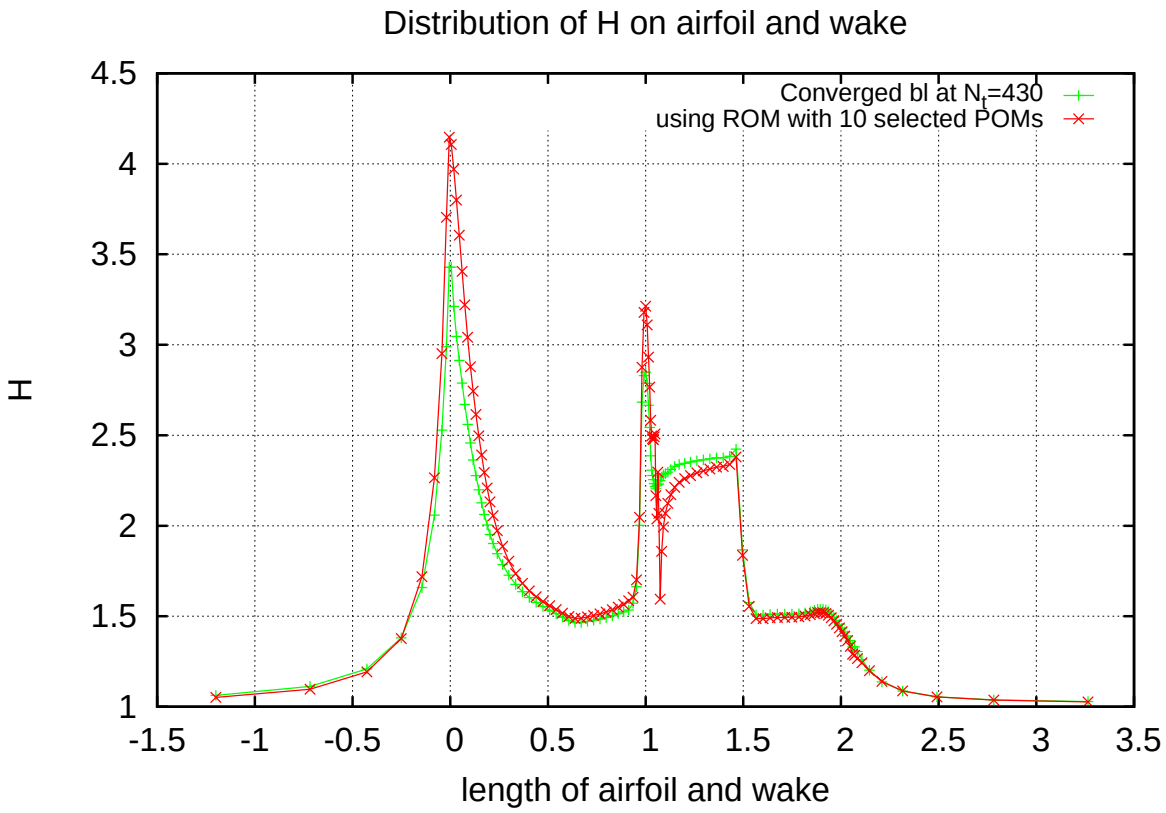
Σχήμα 4.16: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$ *χρησιμοποιώντας* $\vec{\phi}_v$ *και* $\vec{\phi}$ *με* $K = 10$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα $K = 10$ POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



Σχήμα 4.17: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος* $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ *στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με* $K = 10$ *στο χρονικό βήμα* $N_t = 400$. *Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή* H *στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.17 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, εκτός του H το οποίο συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται. Χαρακτηριστικό είναι το αντίστοιχο διάγραμμα για $N_t = 430$



Σχήμα 4.18: *Κατανομή της μεταβλητής του οριακού στρώματος H στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $K = 10$ στο χρονικό βήμα $N_t = 430$. Το σφάλμα παραμένει εντοπισμένο και αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου*

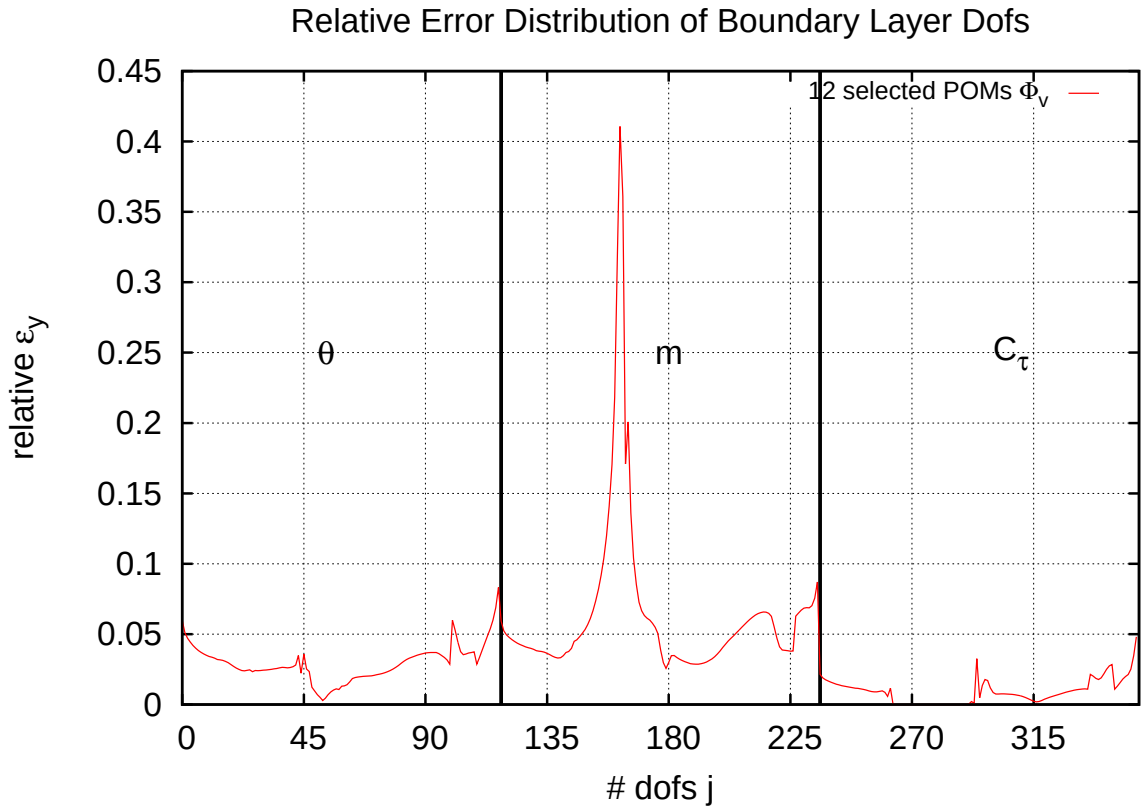
$L = 60$, $K = 12$ **POMs** Στον πίνακα πίνακα 4.4 παρουσιάζονται τα 8 $\vec{\phi}_{v_j}$ POMs που επιλέγονται, και η συνιστώσα i που εμφανίζουν το 1ο μέγιστο. Τα 4 πρώτα επιλέγονται με βάση το ενεργειακό κριτήριο, οπότε δεν έχει νόημα να βρίσκονται σε αυτόν τον πίνακα.

Πίνακας 4.4: 8 *POMs και 1η μέγιστη συνιστώσα*

POM $\vec{\phi}_{v_j}$	i	βαθμός ελευθερίας
43	164	m
45	163	m
46	165	m
47	164	m
48	163	m
49	163	m
52	162	m
53	162	m

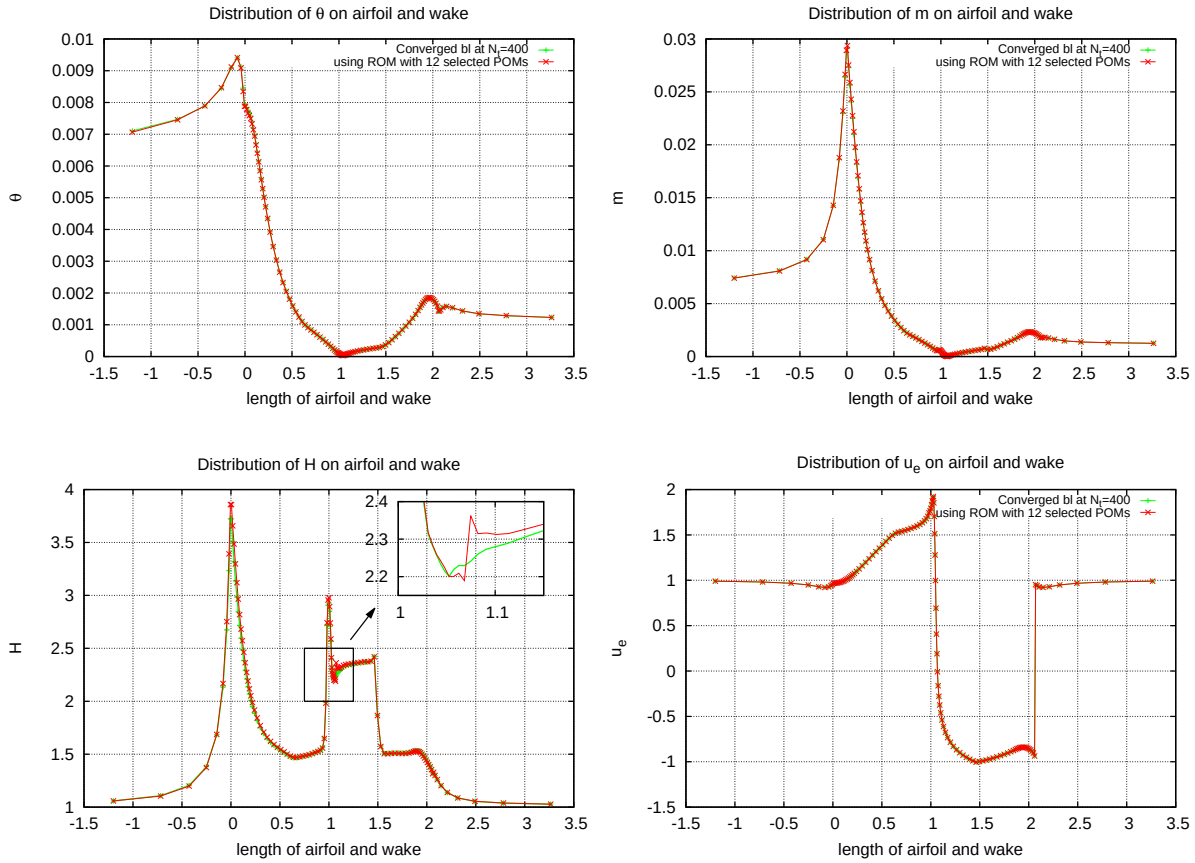
Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον

αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $K = 12$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$.



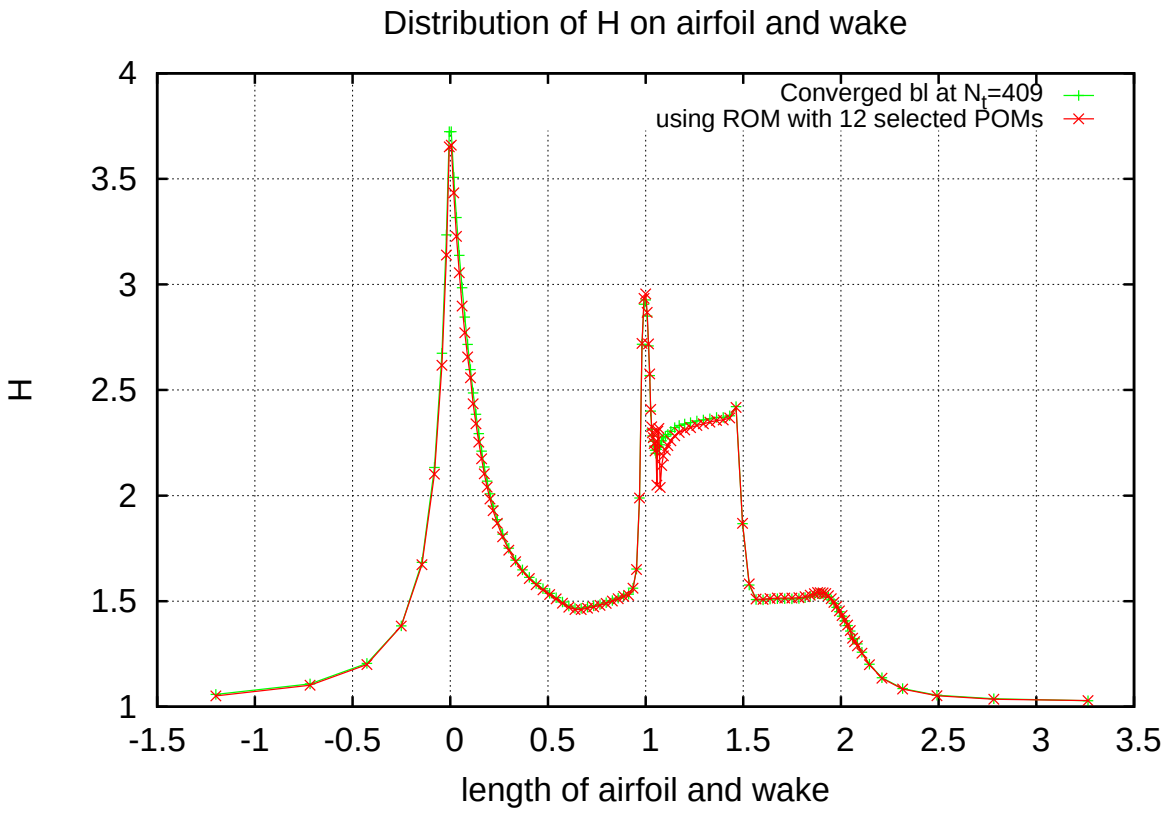
Σχήμα 4.19: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$ *χρησιμοποιώντας* $\vec{\phi}_v$ *και* $\vec{\phi}$ *με* $K = 12$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα $K = 12$ POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



Σχήμα 4.20: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος* $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ *στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με* $= 12$ *στο χρονικό βήμα* $N_t = 400$. *Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή* H *στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.20 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, εκτός του H το οποίο συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται. Χαρακτηριστικό είναι το αντίστοιχο διάγραμμα για $N_t = 409$



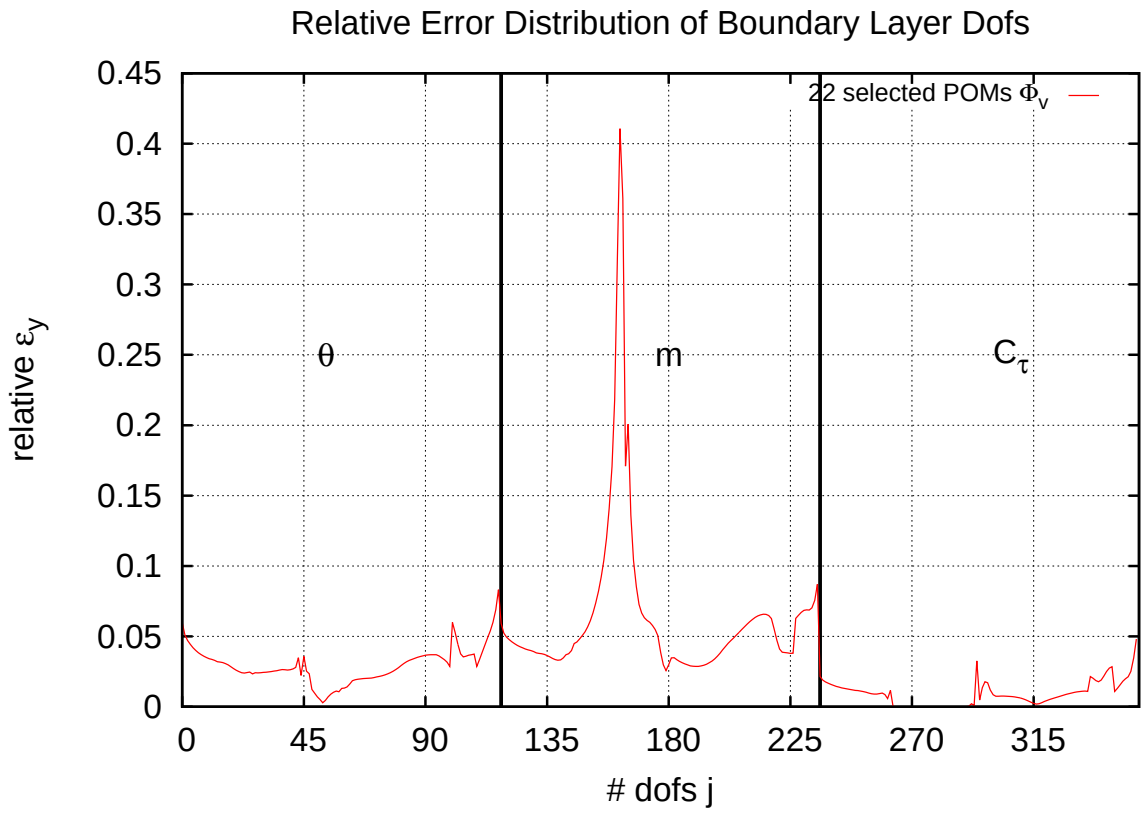
Σχήμα 4.21: *Κατανομή της μεταβλητής του οριακού στρώματος H στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $= 12$ στο χρονικό βήμα $N_t = 409$. Το σφάλμα παραμένει εντοπισμένο και αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου*

$L = 120$, $K = 22$ **POMs** Στον πίνακα πίνακα 4.5 παρουσιάζονται τα 18 $\vec{\phi}_{v_j}$ POMs που επιλέγονται, και η συνιστώσα i που εμφανίζουν το 1ο μέγιστο. Τα 4 πρώτα επιλέγονται με βάση το ενεργειακό κριτήριο, οπότε δεν έχει νόημα να βρίσκονται σε αυτόν τον πίνακα.

Πίνακας 4.5: 18 *POMs και 1η μέγιστη συνιστώσα*

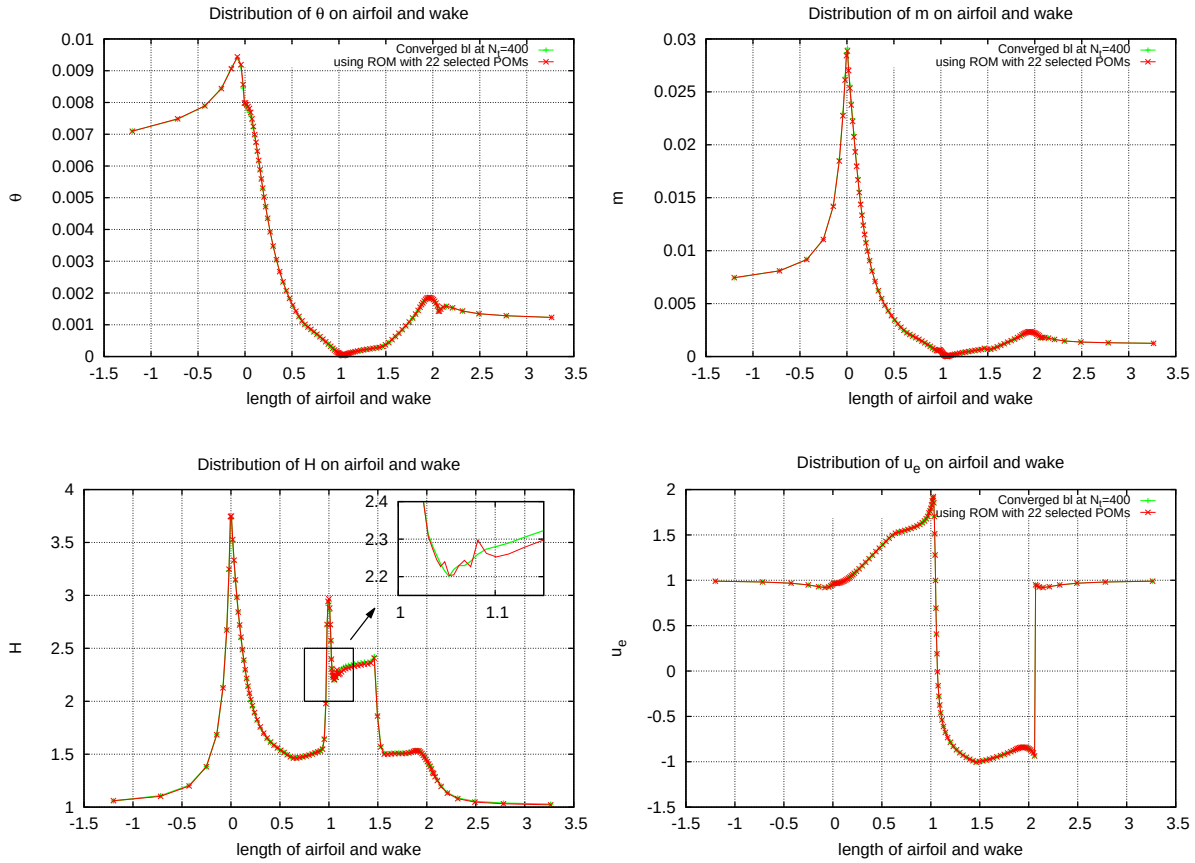
POM $\vec{\phi}_{v_j}$	i	βαθμός ελευθερίας
43	164	m
45	163	m
46	165	m
47	164	m
48	163	m
49	163	m
52	162	m
53	162	m
65	43	ϑ
66	43	ϑ
67	43	ϑ
81	48	ϑ
82	48	ϑ
93	48	ϑ
101	48	ϑ
109	161	m
110	161	m
111	161	m

Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $K = 22$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$.



Σχήμα 4.22: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$ *χρησιμοποιώντας* $\vec{\phi}_v$ *και* $\vec{\phi}$ *και* $= 22$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα $= 22$ POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



Σχήμα 4.23: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος* $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ *στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με* $K = 22$ *στο χρονικό βήμα* $N_t = 400$. *Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή* H *στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.23 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, εκτός του H το οποίο συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι η μέθοδος δεν μπόρεσε να προχωρήσει πέραν του βήματος $N_t = 400$

Κριτήριο 2ης μέγιστης συνιστώσας των POMs

Θα επιλεγούν τα POMs $\boldsymbol{\phi_{v_j}}$ για τα οποία ισχύει το κριτήριο 1ης μέγιστης συνιστώσας των POMs και αφού αυτά έχουν επιλεγεί, εφαρμόζεται ξανά η συνθήκη (4.3) στα εναπομείναντα POMs με $\Delta_\vartheta = \{41, \ldots, 49\}$ και $\Delta_m = \{159, \ldots, 167\}$.

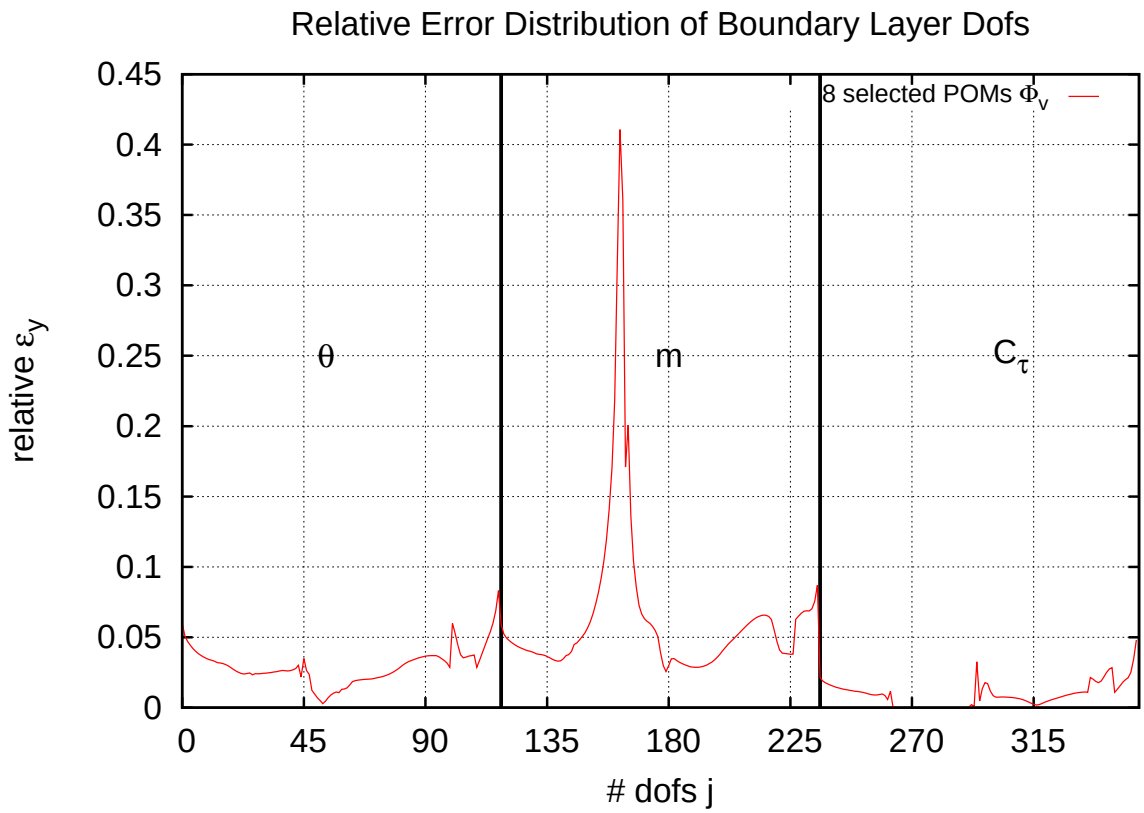
$L = 40$, $K = 8$ **POMs** Στον πίνακα πίνακα 4.6 παρουσιάζονται τα 4 $\boldsymbol{\phi_{v_j}}$ POMs που επιλέγονται, και η συνιστώσα i που εμφανίζουν το 1ο μέγιστο ή το 2ο μέγιστο. Τα 4 πρώτα επιλέγονται με βάση το ενεργειακό κριτήριο, οπότε δεν έχει νόημα να βρίσκονται σε αυτόν

τον πίνακα.

Πίνακας 4.6: 4 *POMs και 1η & 2η μέγιστη συνιστώσα*

POM $\vec{\phi}_{v_j}$	μέγιστο	i	βαθμός ελευθερίας
33	2	164	m
35	2	164	m
37	2	43	ϑ
39	2	44	ϑ

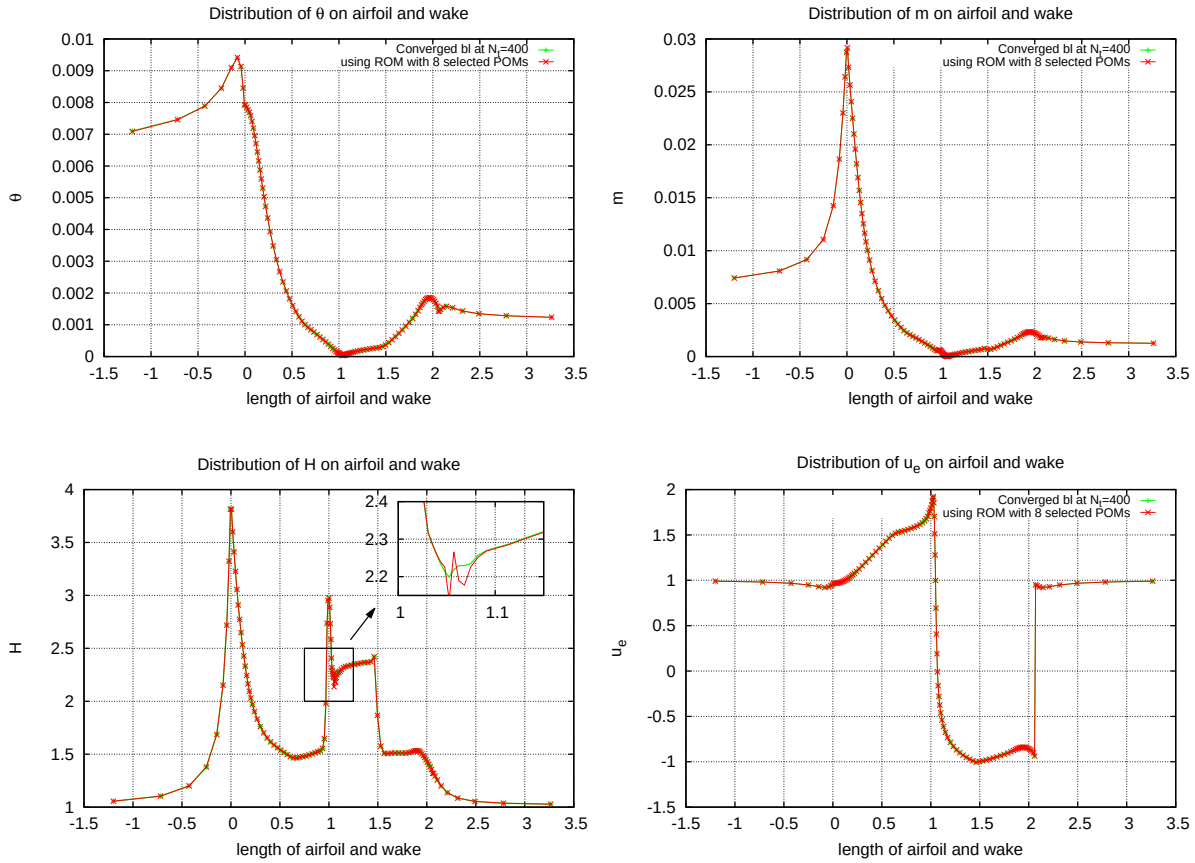
Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $K = 8$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$.



Σχήμα 4.24: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$ *χρησιμοποιώντας* $\vec{\phi}_v$ *και* $\vec{\phi}$ *με* $= 8$

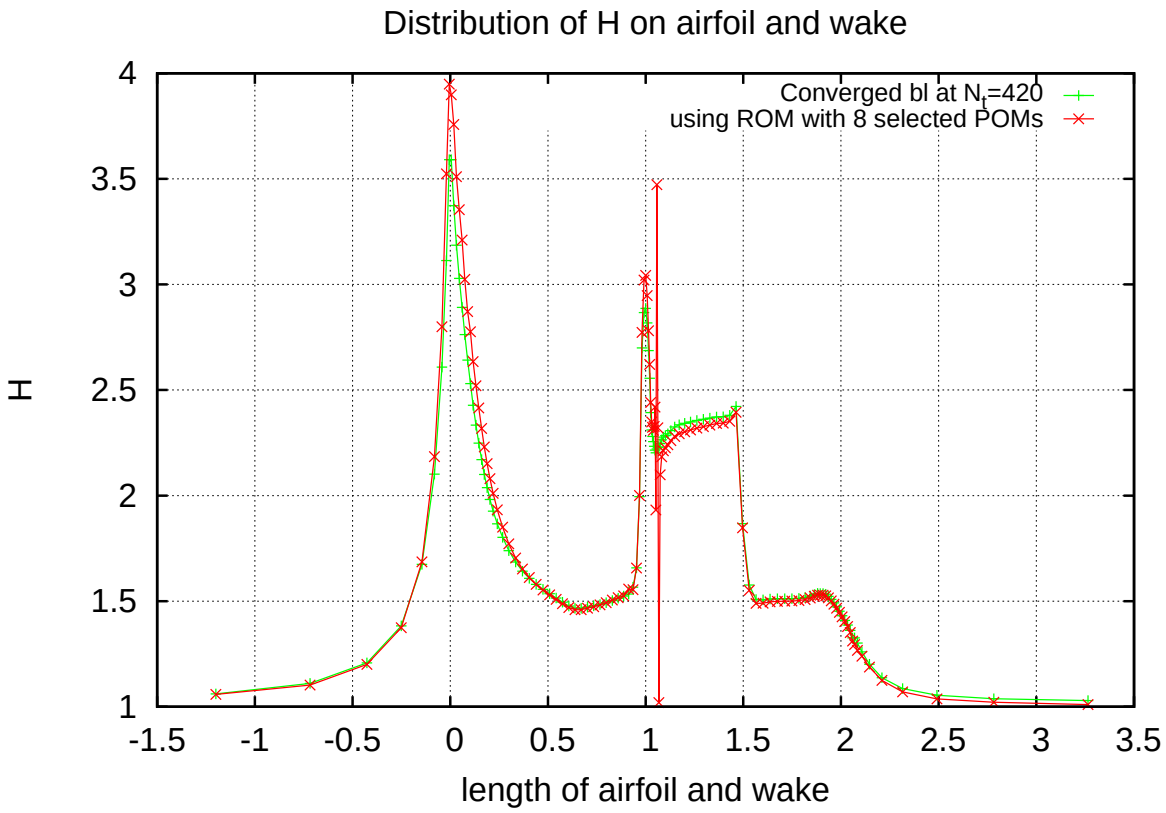
Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα $K = 8$ POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των μεταβλητών του

οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



Σχήμα 4.25: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $= 8$ στο χρονικό βήμα $N_t = 400$.Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή H στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.25 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, εκτός του H το οποίο συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται. Χαρακτηριστικό είναι το αντίστοιχο διάγραμμα για $N_t = 420$



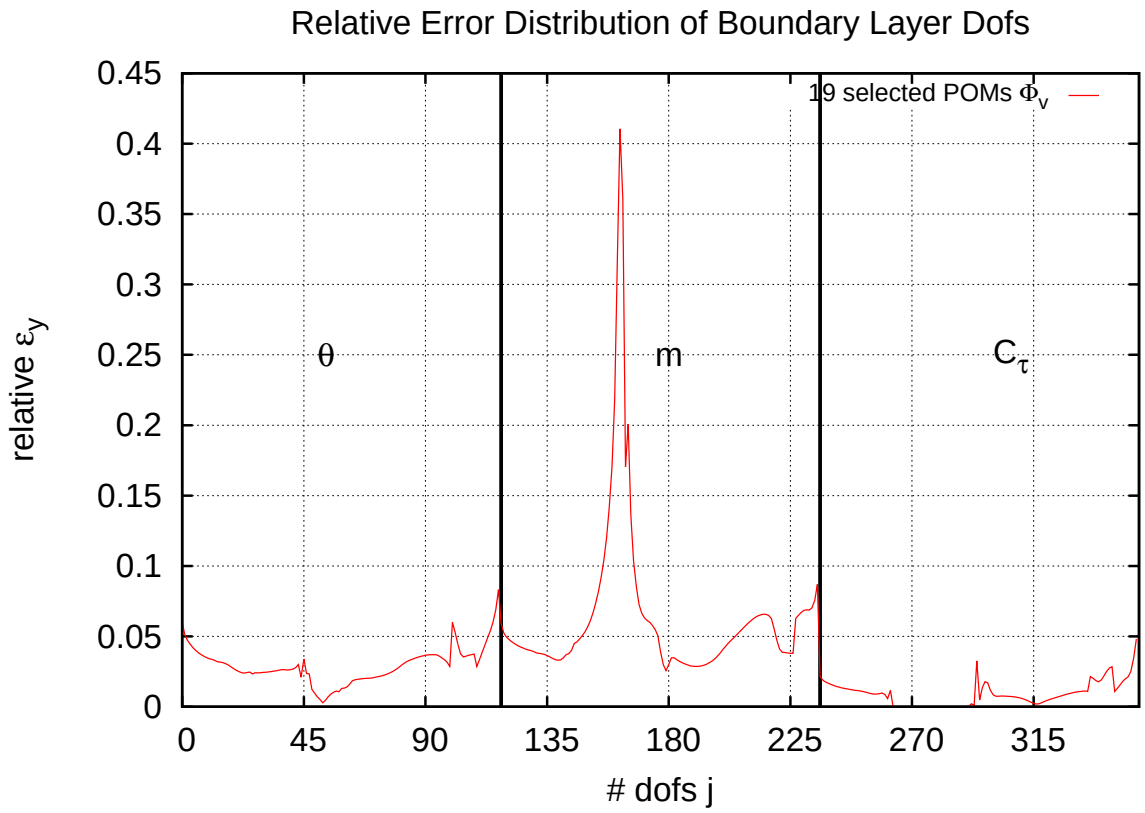
Σχήμα 4.26: *Κατανομή της μεταβλητής του οριακού στρώματος H στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με $= 8$ στο χρονικό βήμα $N_t = 420$. Το σφάλμα παραμένει εντοπισμένο και αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου*

$L = 60$, $K = 19$ **POMs** Στον πίνακα πίνακα 4.7 παρουσιάζονται τα 15 $\vec{\phi}_{v_j}$ POMs που επιλέγονται, και η συνιστώσα i που εμφανίζουν το 1ο μέγιστο ή το 2ο μέγιστο. Τα 4 πρώτα επιλέγονται με βάση το ενεργειακό κριτήριο, οπότε δεν έχει νόημα να βρίσκονται σε αυτόν τον πίνακα.

Πίνακας 4.7: 15 *POMs και 1η & 2η μέγιστη συνιστώσα*

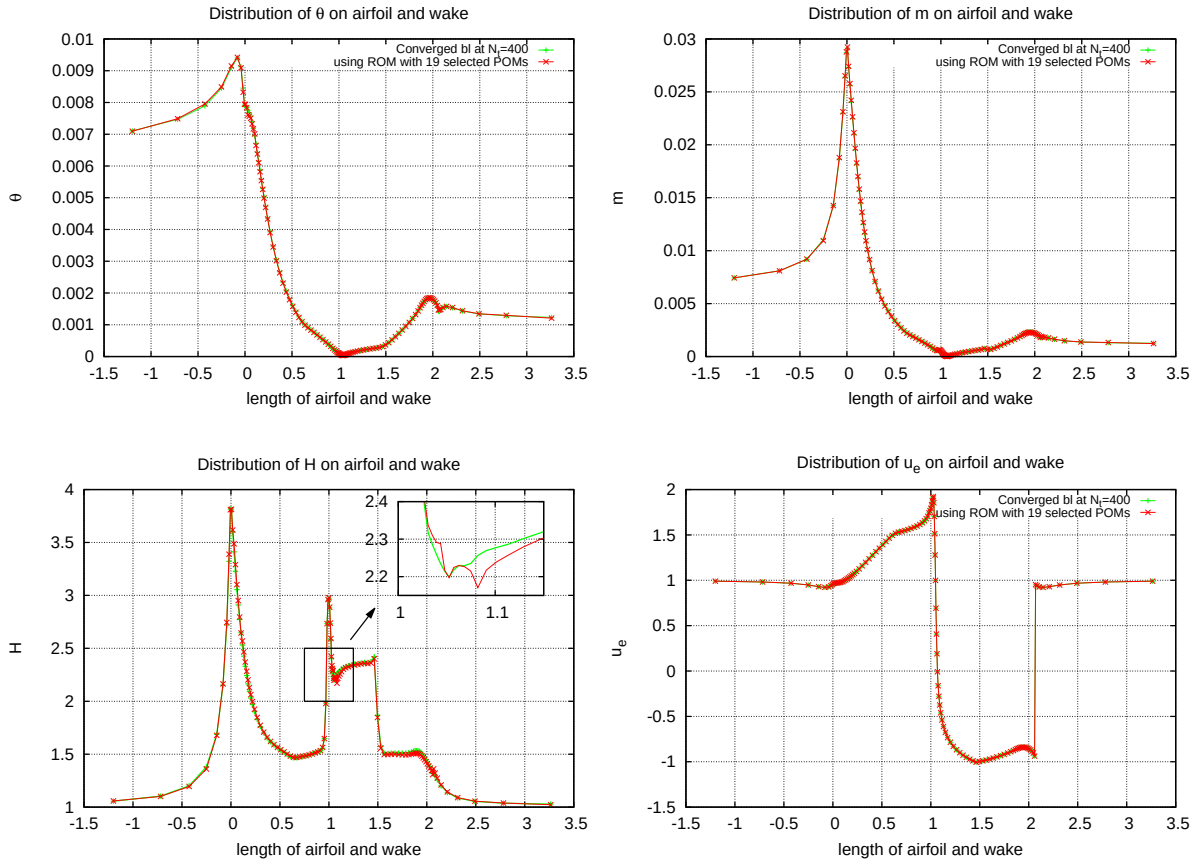
POM $\vec{\phi}_{v_j}$	μέγιστο	i	βαθμός ελευθερίας
33	2	164	m
35	2	164	m
37	2	43	ϑ
39	2	44	ϑ
42	2	46	ϑ
43	1	164	m
44	2	165	m
45	1	163	m
46	1	165	m
47	1	164	m
48	1	163	m
49	1	163	m
50	2	163	m
52	2	162	m
53	2	162	m

Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $K = 19$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$.



Σχήμα 4.27: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$ *χρησιμοποιώντας* $\vec{\phi}_v$ *και* $\vec{\phi}$ *με* $K = 19$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα $K = 19$ POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



Σχήμα 4.28: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος* $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ *στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με* $K = 19$ *στο χρονικό βήμα* $N_t = 400$. *Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή* H *στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

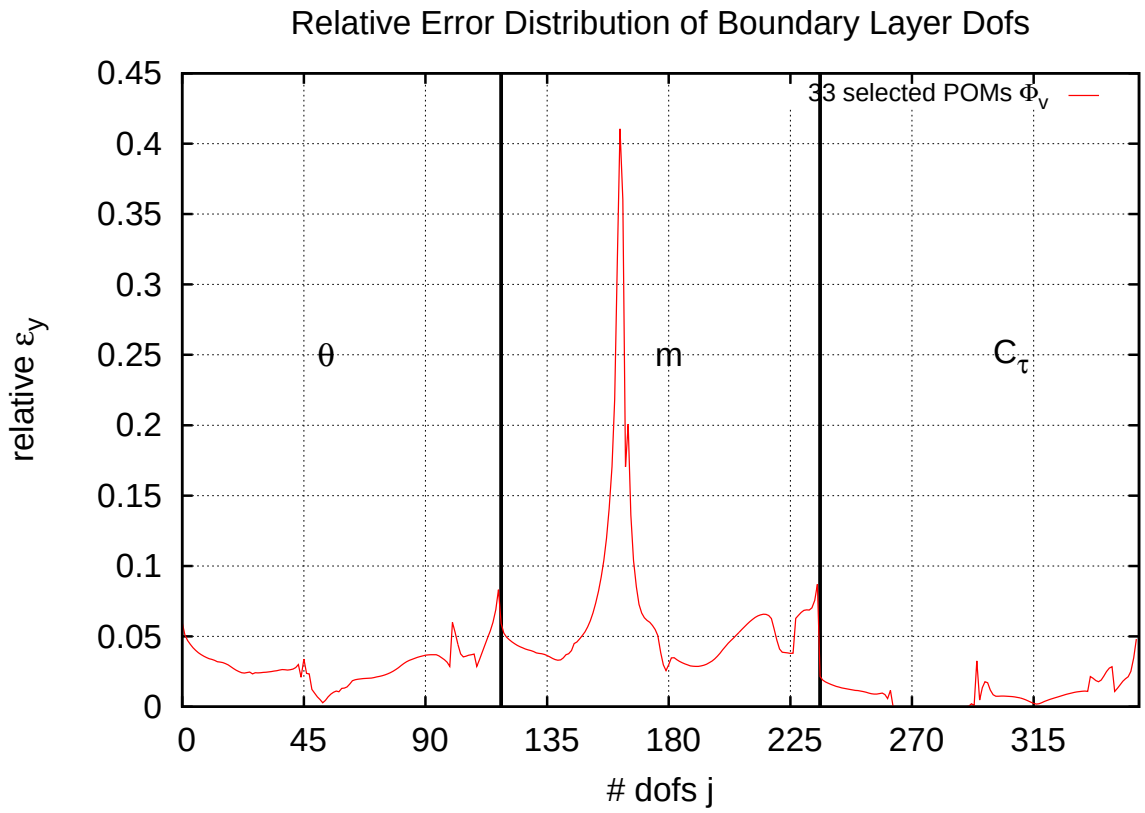
Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.28 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, εκτός του H το οποίο συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι η μέθοδος δεν μπόρεσε να προχωρήσει πέραν του βήματος $N_t = 400$

$L = 120$, $K = 33$ **POMs** Στον πίνακα πίνακα 4.8 παρουσιάζονται τα 29 $\vec{\phi}_{v_j}$ POMs που επιλέγονται, και η συνιστώσα i που εμφανίζουν το 1ο μέγιστο. Τα 4 πρώτα επιλέγονται με βάση το ενεργειακό κριτήριο, οπότε δεν έχει νόημα να βρίσκονται σε αυτόν τον πίνακα.

Πίνακας 4.8: 29 *POMs και 1η & 2η μέγιστη συνιστώσα*

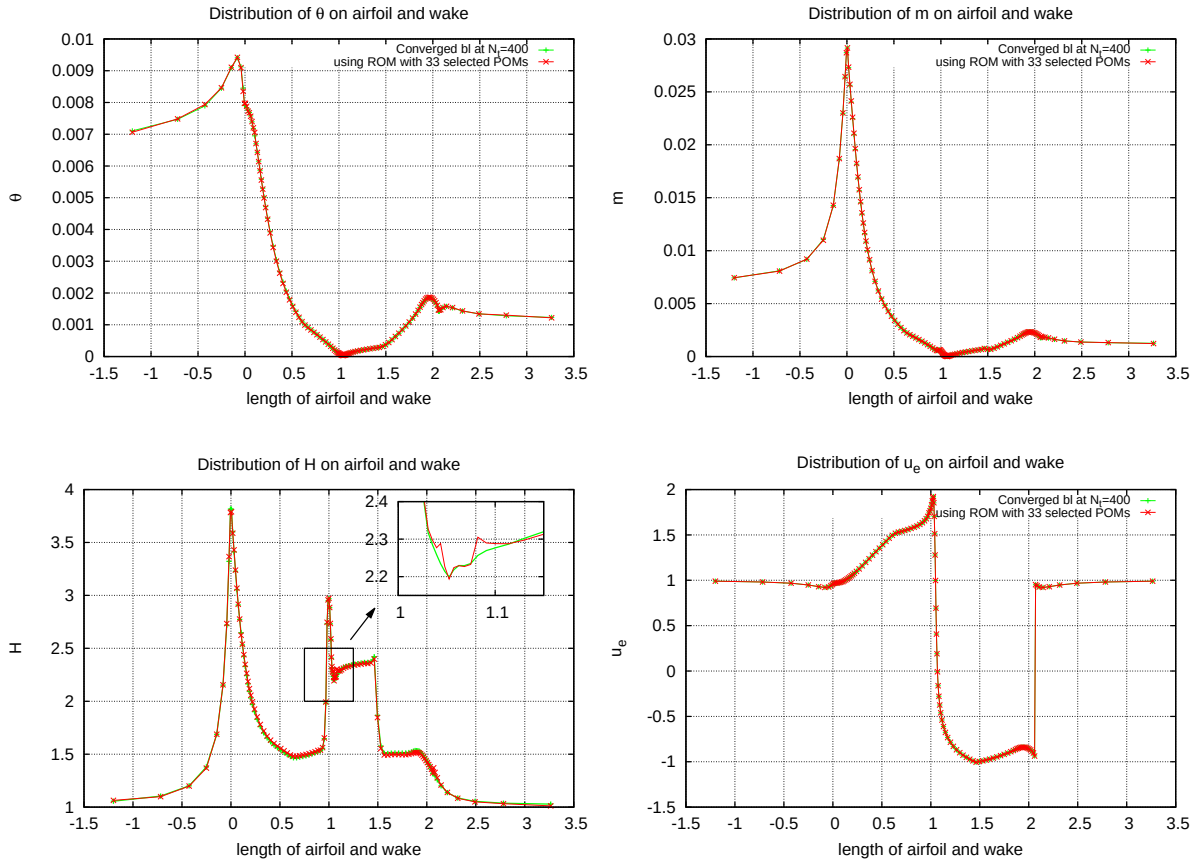
POM $\vec{\phi}_{v_j}$	μέγιστο	i	βαθμός ελευθερίας
33	2	164	m
35	2	164	m
37	2	43	ϑ
39	2	44	ϑ
42	2	46	ϑ
43	1	164	m
44	2	165	m
45	1	163	m
46	1	165	m
47	1	164	m
48	1	163	m
49	1	163	m
50	2	163	m
52	2	162	m
53	2	162	m
65	1	43	ϑ
66	1	43	ϑ
67	1	43	ϑ
74	2	160	m
81	1	48	ϑ
82	1	48	ϑ
91	2	159	m
93	1	48	ϑ
99	2	48	ϑ
101	1	48	ϑ
105	2	41	ϑ
109	1	161	m
110	1	161	m
111	1	161	m

Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος για $K = 33$ modes $\vec{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N_v}$.



Σχήμα 4.29: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$ *χρησιμοποιώντας* $\vec{\phi}_v$ *και* $\vec{\phi}$ *με* $K = 33$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα $K = 33$ POMs $\vec{\phi}_v$ κατασκευάζεται ένα ROM του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και χρησιμοποιείται για την ανακατασκευή της Περίπτωσης 1. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ στην αεροτομή και στον ομόρρου όπως αυτά υπολογίζονται με χρήση του ROM σε σύγκριση τις τιμές της αντίστοιχης λύσης του FOM για το ίδιο χρονικό βήμα $N_t = 400$.



Σχήμα 4.30: *Σύγκριση της κατανομής των μεταβλητών του οριακού στρώματος* $\vartheta,\ m,\ H,\ u_e$ *στην αεροτομή και τον ομόρρου από FOM και ROM με* $K = 33$ *στο χρονικό βήμα* $N_t = 400$. *Το σφάλμα εντοπίζεται μόνο στην εμπειρική μεταβλητή* H *στην πάνω πλευρά της αεροτομής αμέσως μετά το σημείο ανακοπής*

Αυτό που φαίνεται στα διαγράμματα 4.30 είναι ότι μετά τη λύση του ROM όλες οι μεταβλητές του οριακού στρώματος προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια, εκτός του H το οποίο συνεχίζει να εμφανίζει μία έντονη διαφοροποίηση στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής. Το θέμα είναι ότι αυτό το σφάλμα μεταφέρεται στο χρόνο και αυξάνεται. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι η μέθοδος δεν μπόρεσε να προχωρήσει πέραν του βήματος $N_t = 400$

4.1.3 Τελική επιλογή POD Modes

Στην προσπάθεια για αναγνώριση του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος που έγινε παραπάνω, είναι ξεκάθαρο ότι η πληροφορία που χρειάζονται τα σημεία στην περιοχή του σημείου ανακοπής της αεροτομής είναι διασπαρμένη στα POMs χαμηλής ενέργειας με αποτέλεσμα να μην μπορεί να βρεθεί κατάλληλη διανυσματική βάση μικρού ($L \sim 10^1$) αριθμού POMs η οποία είναι ικανή να κατασκευάσει ένα ROM που να παράγει τη λύση αναφοράς.

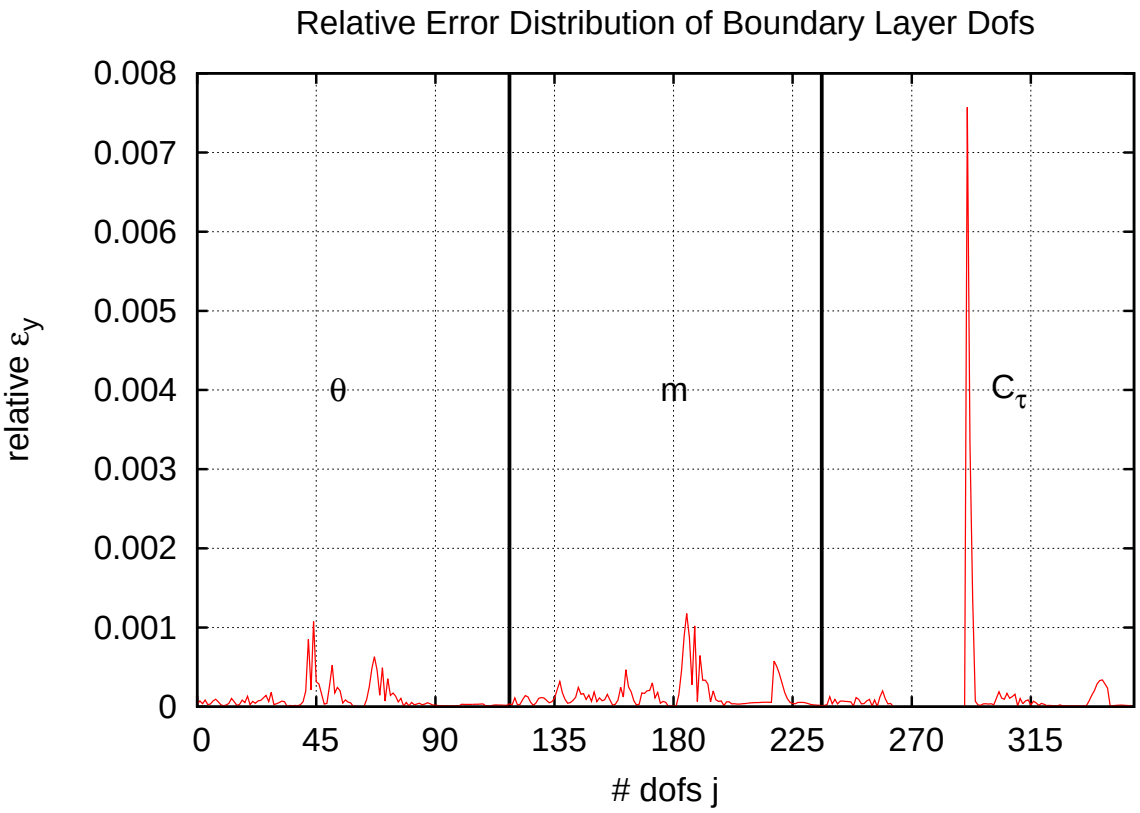
Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται ότι χρησιμοποιώντας μικρό αριθμό POMs υψηλής ενέργειας

το σφάλμα εντοπίζεται σε σημεία γύρω από το σημείο ανακοπής και είναι σταθερό. Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των επιλεγμένων POMs όμως, ενώ το σφάλμα δείχνει να περιορίζεται σε αυτά τα σημεία, εμφανίζονται σφάλματα σε άλλα σημεία. Αυτό συμβαίνει γιατί χρησιμοποιούνται POMs χαμηλής ενέργειας τα οποία πέραν της επιθυμητής διέγερσης που δίνουν στη μεταβλητή μέγιστης συνιστώσας περιέχουν και μη επιθυμητή πληροφορία, η οποία χρησιμοποιημένη μεμονωμένα "καταστρέφει" τη λύση. Έτσι, παρατηρώντας την εξέλιξη των επιχειρούμενων λύσεων του οριακού στρώματος αυξάνοντας τον αριθμό των επιλεγμένων POMs, δίνεται η εντύπωση ότι η πληροφορία που χρειάζεται να δοθεί στο ROM σύστημα είναι διασπαρμένη στα POMs χαμηλής ενέργειας.

Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαστική τη χρήση μεγάλου αριθμού POMs, υπονομεύοντας την ιδιότητα της μείωσης της τάξης του FOM (reduction). Ωστόσο, για να είναι δυνατόν να εξεταστούν οι δυνατότητες της μεθόδου στη γραμμικοποίηση, αλλά και στη κατασκευή off-reference λύσεων μέσω της ίδιας βάσης, τελικά επιλέγονται τα πρώτα $L = 240$ POMs των οποίων δυνατότητες αυτών θα φανούν στις ενότητες 4.2 και 4.3.

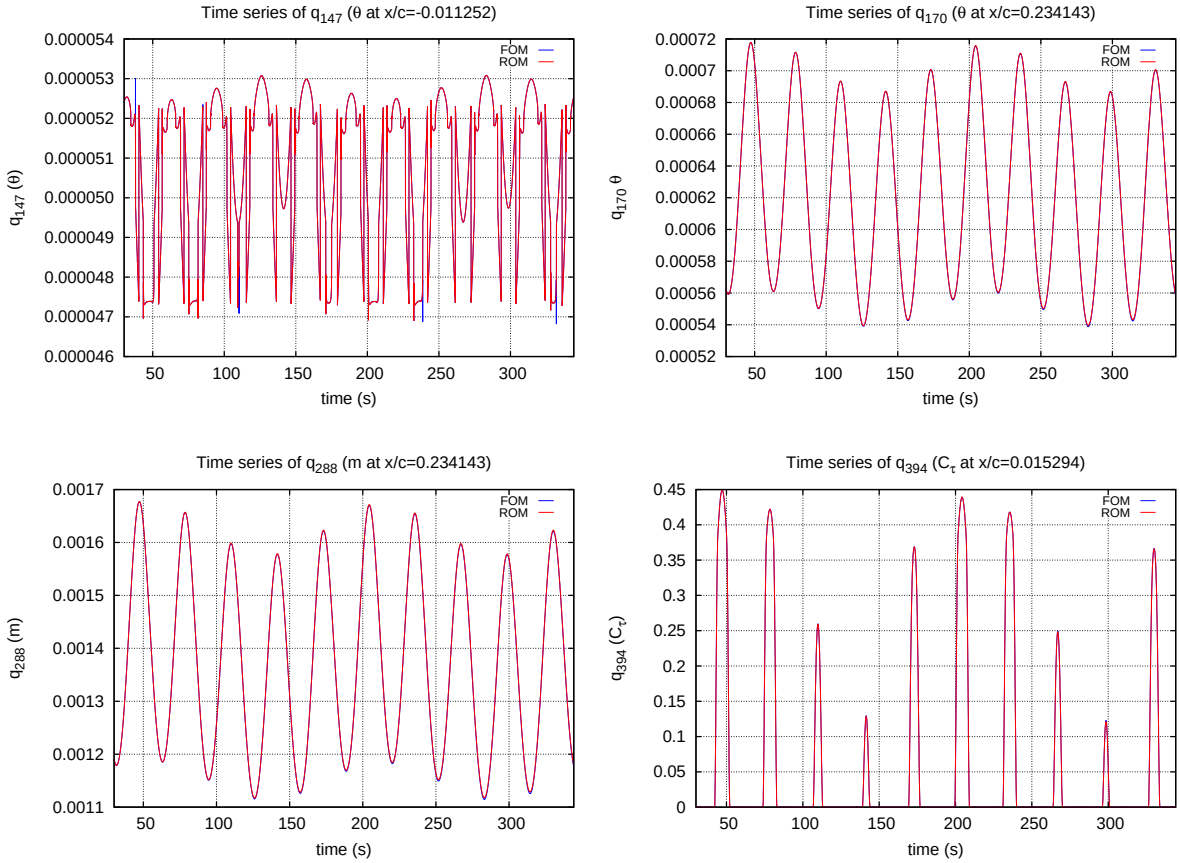
4.2 Ανακατασκευή λύσης αναφοράς

Θα γίνει επίλυση της περίπτωσης αναφοράς της οποίας οι παράμετροι βρίσκονται στον πίνακα 4.1. Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ μεταξύ της λύσης FOM και ROM ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος.



Σχήμα 4.31: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v1}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v1}$ *χρησιμοποιώντας* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v_1}$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι χρονοσειρές των βαθμών ελευθερίας που παρουσιάζουν τα μεγαλύτερα σφάλματα.



Σχήμα 4.32: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{v}1}$ *και* $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}1}$ *με* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v1}$. *Η ανακατασκευή της λύσης αναφοράς πραγματοποιείται με μεγάλη ακρίβεια*

4.3 Ανακατασκευή Off-Reference λύσεων

Περίπτωση 2: Μεταβολή της κυκλικής συχνότητας $\hat{\omega}_y$ Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

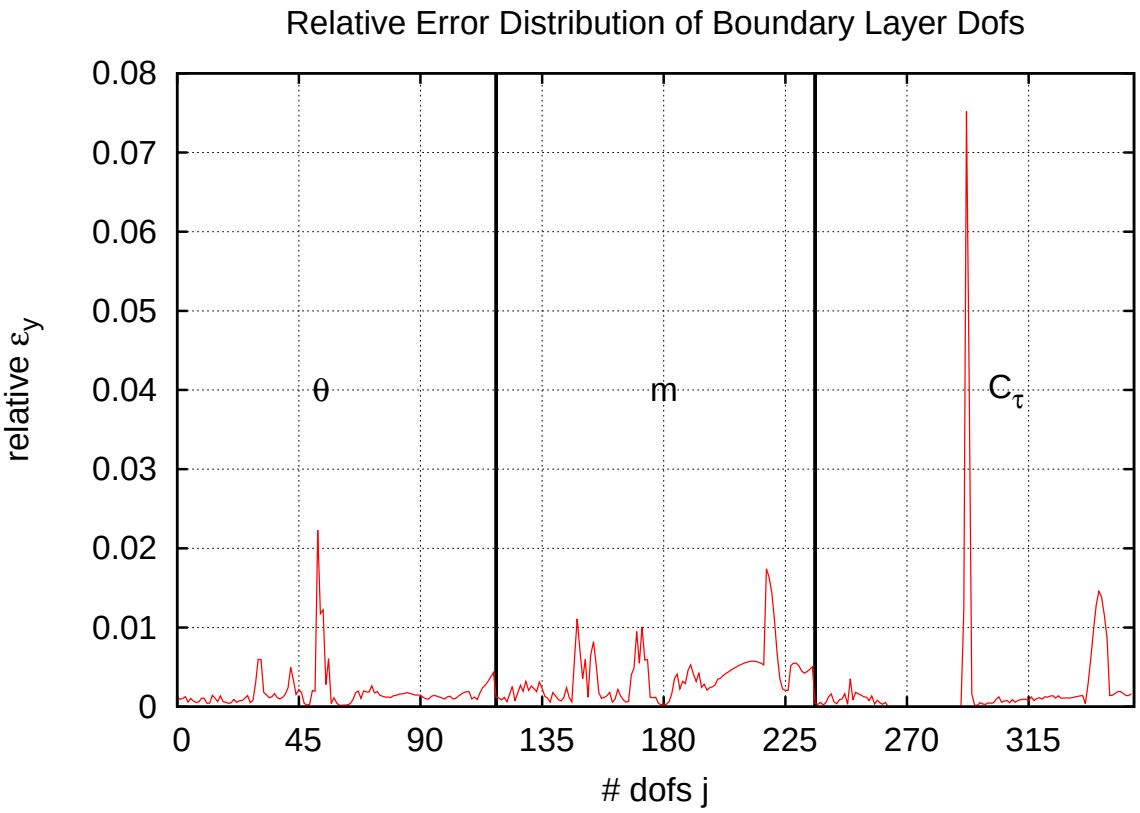
Πίνακας 4.9: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 2*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3°$	$0°$	0	$0.042rad/s$	0.2	$0°$

Όπως φαίνεται η κυκλική συχνότητα ω_y αυξήθηκε κατά 5%, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

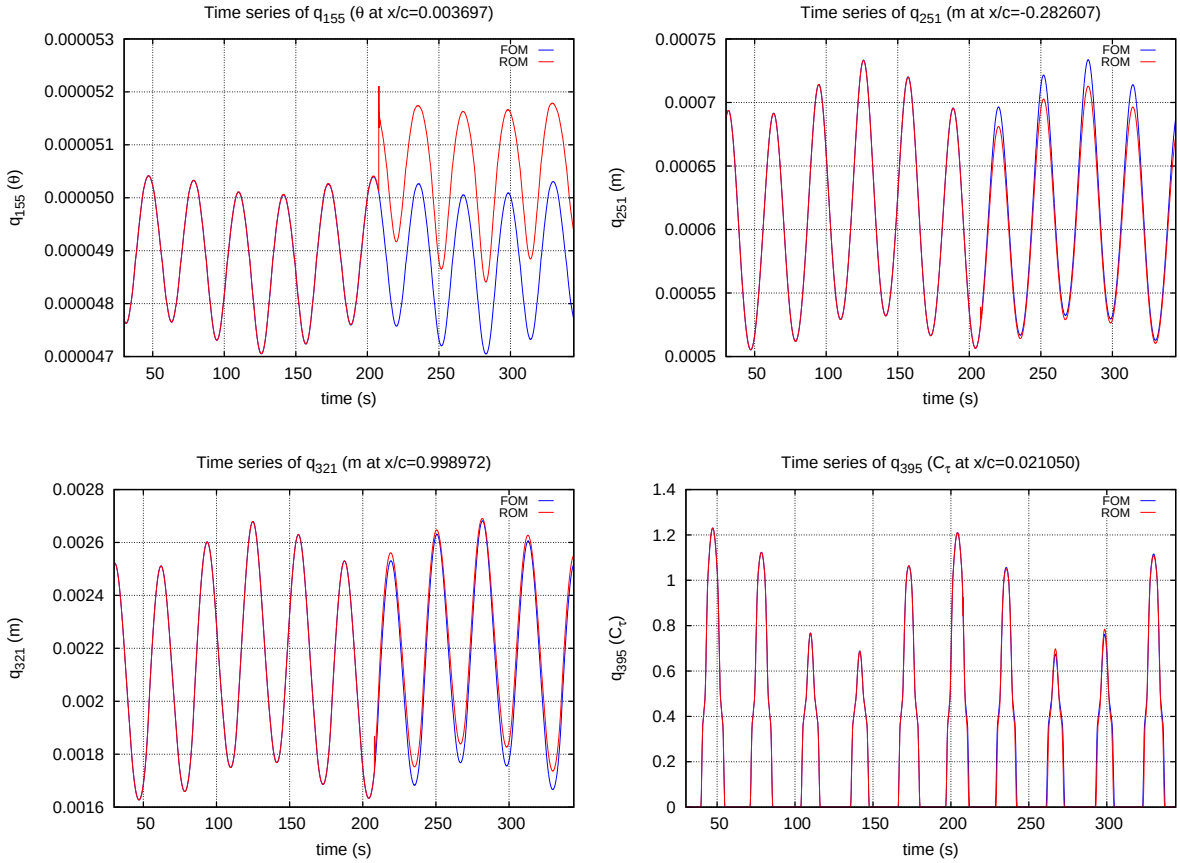
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.042 \cdot 0.05) + 600 \cong 5984$
- $M = 5984 - 600 + 1 = 5385$

Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ μεταξύ της λύσης FOM και ROM ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος.



Σχήμα 4.33: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{v_2}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v_2}$ *χρησιμοποιώντας* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v_1}$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι χρονοσειρές των βαθμών ελευθερίας που παρουσιάζουν τα μεγαλύτερα σφάλματα.



Σχήμα 4.34: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{v}2}$ *και* $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}2}$ *με* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v1}$. *Παρατηρείται απόκλιση της λύσης για* $T > 200sec$

Περίπτωση 3: Μεταβολή του πλάτους $\hat{A}_\alpha$ Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

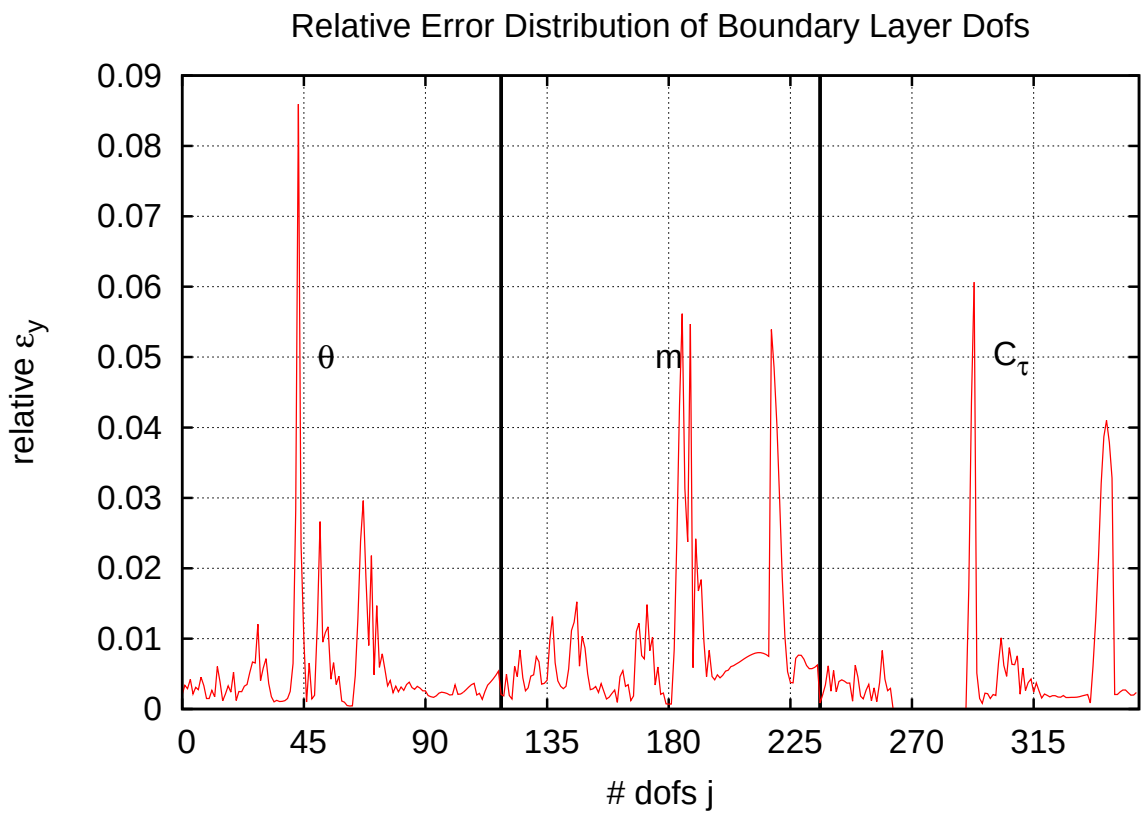
Πίνακας 4.10: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 3*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος ταλάντωσης πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3.3°$	$0°$	0	$0.04rad/s$	0.2	$0°$

Όπως φαίνεται το πλάτος $\hat{A}_\alpha$ αυξήθηκε κατά 10%, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37) Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

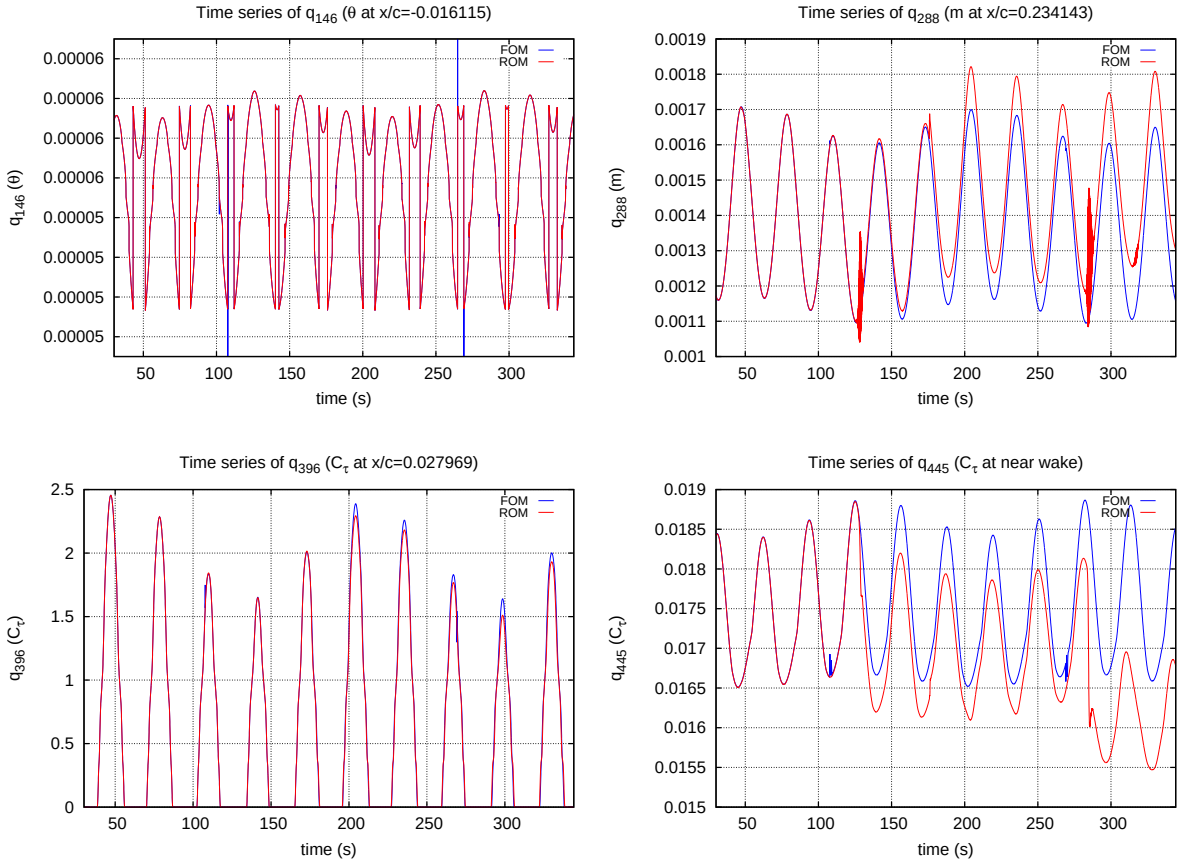
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ μεταξύ της λύσης FOM και ROM ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος.



Σχήμα 4.35: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}3}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{v}3}$ *χρησιμοποιώντας* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v_1}$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι χρονοσειρές των βαθμών ελευθερίας που παρουσιάζουν τα μεγαλύτερα σφάλματα.



Σχήμα 4.36: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{v3}$ *και* $\boldsymbol{Q}_{v3}$ *με* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v1}$. *Παρατηρείται απόκλιση της λύσης για* $T > 125sec$

Περίπτωση 4: Μεταβολή της κυκλικής συχνότητας ω_α **και του πλάτους** A_y Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_0} + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

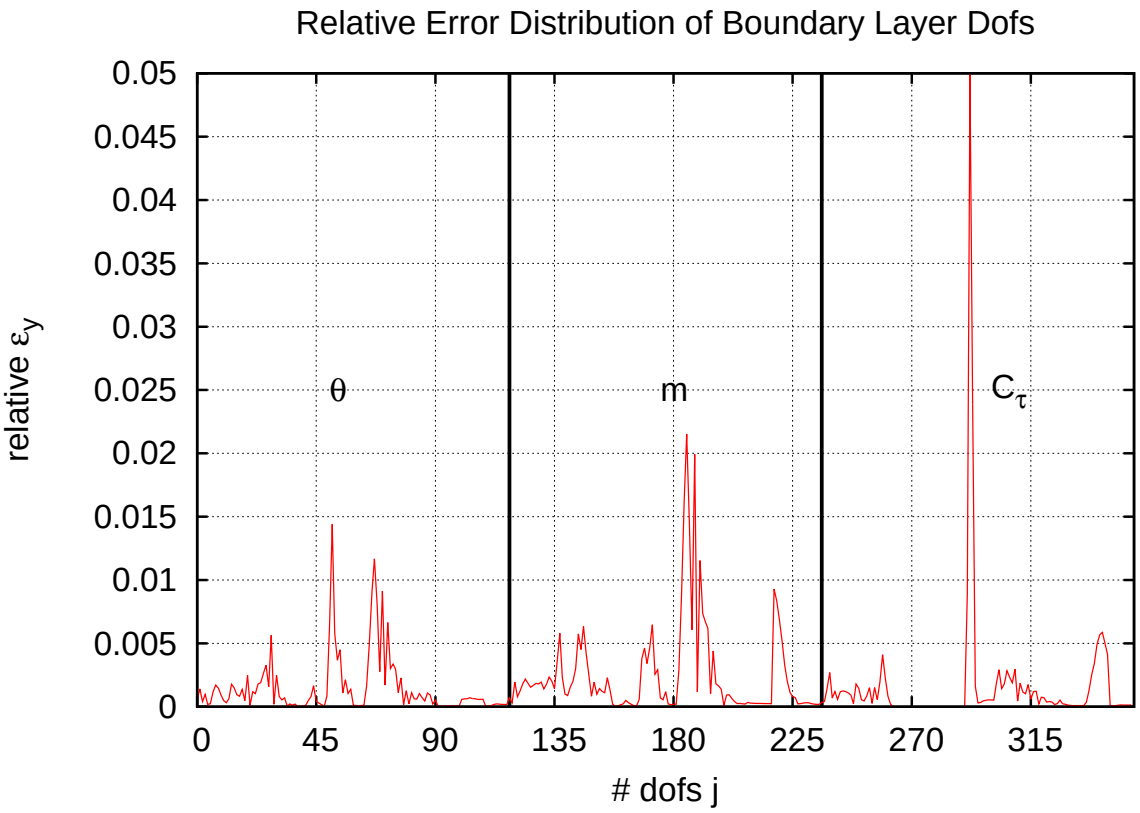
Πίνακας 4.11: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 4*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.22rad/s$	$3°$	$0°$	0	$0.04rad/s$	0.18	$0°$

Όπως φαίνεται, στην περίπτωση 4 η κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσηςω_α αυξήθηκε κατά 10% και το πλάτος πτερύγισης A_y μειώθηκε κατά 10%, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

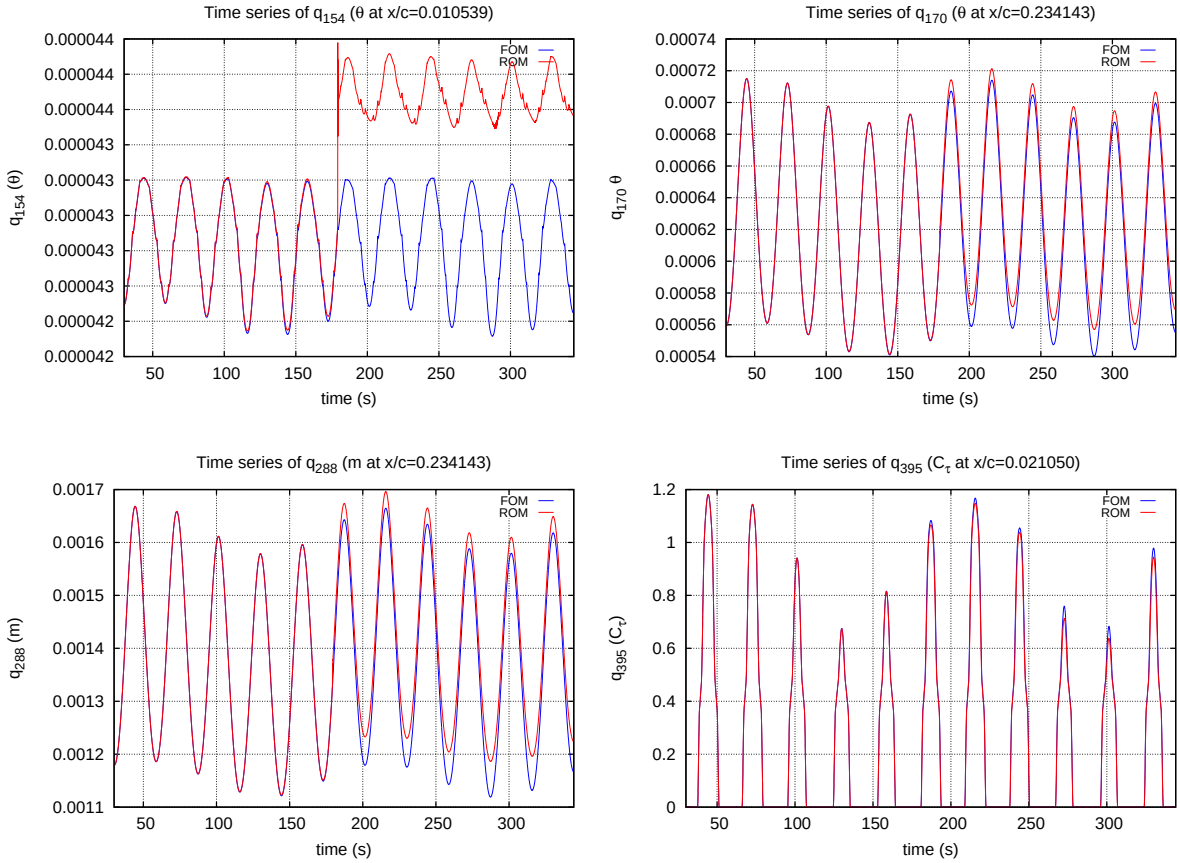
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ μεταξύ της λύσης FOM και ROM ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος.



Σχήμα 4.37: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}4}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{v}4}$ *χρησιμοποιώντας* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v_1}$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι χρονοσειρές των βαθμών ελευθερίας που παρουσιάζουν τα μεγαλύτερα σφάλματα.



Σχήμα 4.38: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{v}4}$ *και* $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}4}$ *με* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v1}$. *Η ανακατασκευή της λύσης παρουσιάζει απόκλιση για* $T > 180sec$

Περίπτωση 5: Μεταβολή της διαφοράς φάσης $\hat{\phi}_\alpha$ Θα εξεταστεί η γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση της αεροτομής NACA 64418 που διέπεται από την εξίσωση $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0 + \hat{A}_\alpha \cdot \sin\left(\omega_\alpha t + \hat{\phi}_\alpha\right)$ & $y = y_0 + A_y \cdot \sin\left(\omega_y t + \hat{\phi}_y\right)$ και επιλέγονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

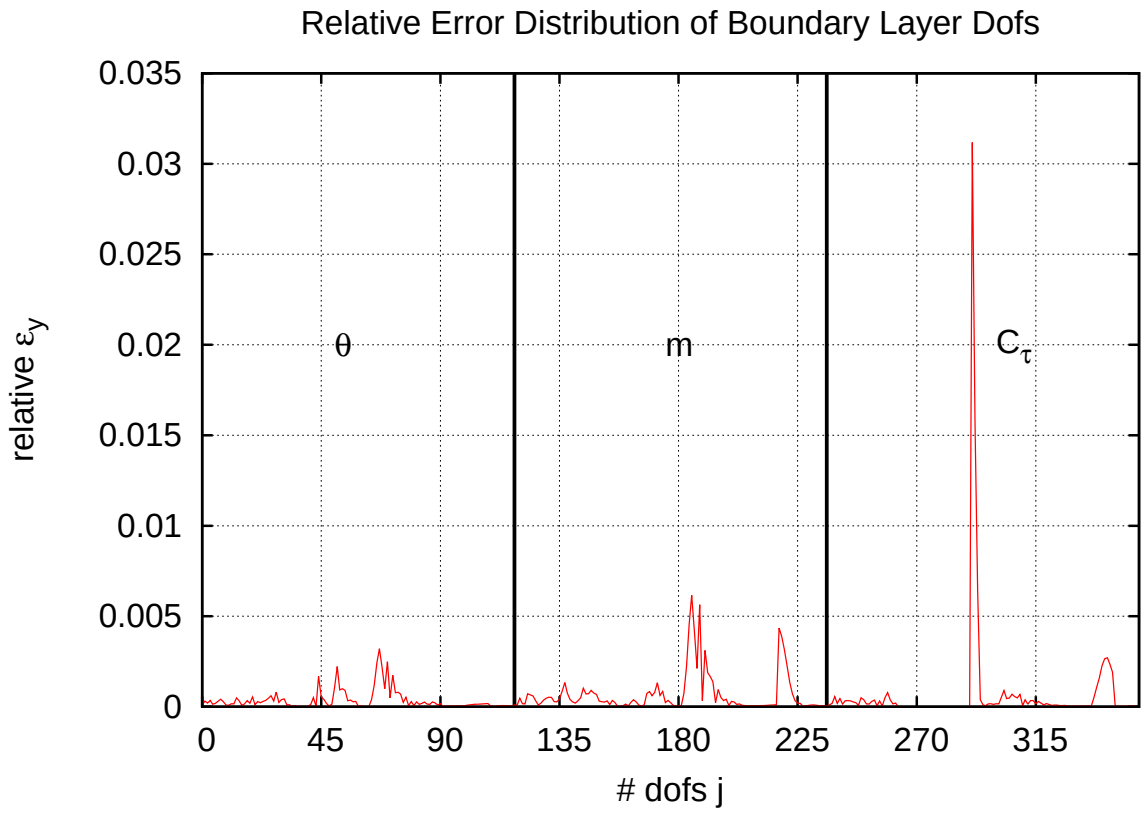
Πίνακας 4.12: *Παράμετροι περίπτωσης γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση 5*

αρχική γωνία πρόσπτωσης $\hat{\alpha_0}$	κυκλική συχνότητα γωνιακής ταλάντωσης ω_α	πλάτος γωνιακής ταλάντωσης $\hat{A}_\alpha$	διαφορά φάσης γωνιακής ταλάντωσης $\hat{\phi}_\alpha$	αρχική κατακόρυφη θέση αεροτομής y_0	κυκλική συχνότητα πτερύγισης ω_y	πλάτος πτερύγισης A_y	διαφορά φάσης πτερύγισης $\hat{\phi}_y$
$5°$	$0.2rad/s$	$3°$	$90°$	0	$0.04rad/s$	0.20	$0°$

Όπως φαίνεται, στην περίπτωση αυτή υπάρχει διαφορά φάσης $\hat{\phi}_\alpha = 90°$, ενώ όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παρέμειναν σταθερές σε σχέση με την αναφορά. Οπότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.34), (3.36) και (3.37)

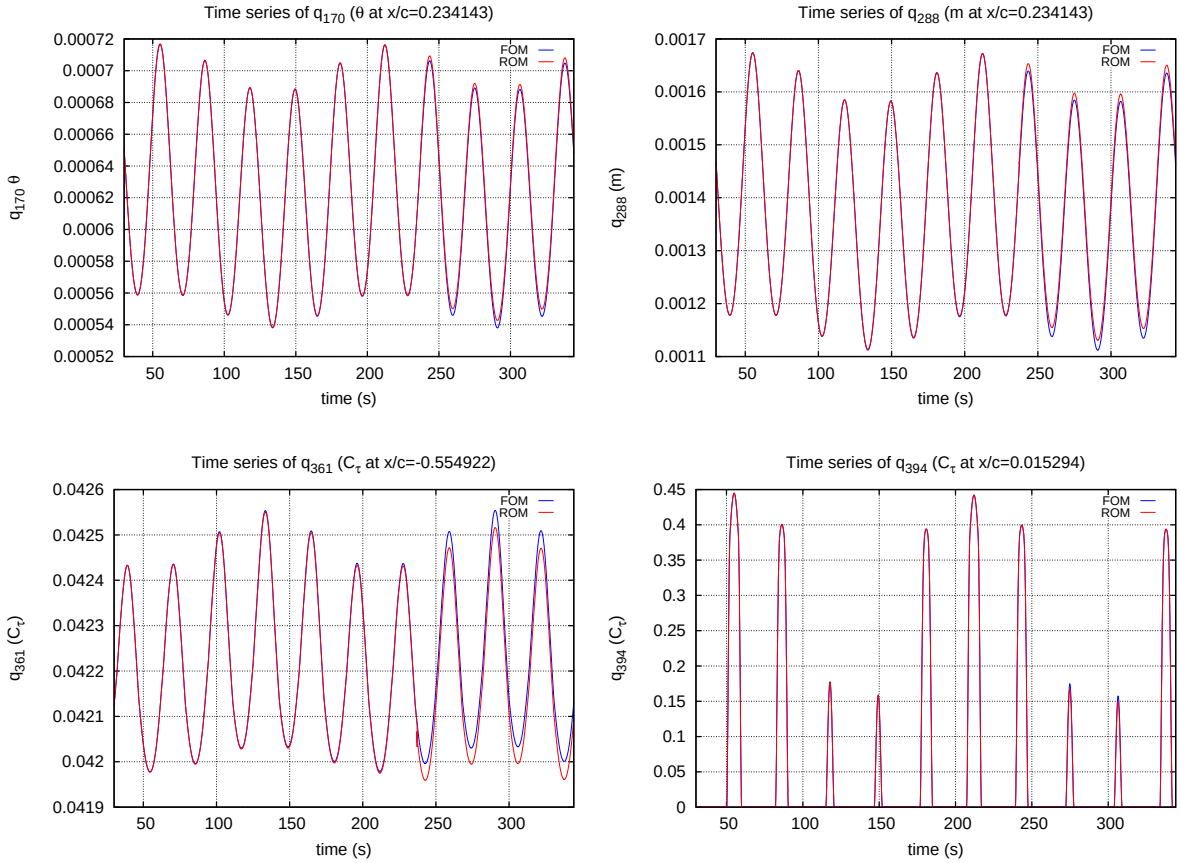
- $N_{tPOD} = 600$
- $N_{ttot} = 4\pi/(0.04 \cdot 0.05) + 600 \cong 6884$
- $M = 6884 - 600 + 1 = 6285$

Ενδιαφέρον έχει να παρουσιαστεί το διάγραμμα σχετικού σφάλματος $\bar{\varepsilon}_j$ μεταξύ της λύσης FOM και ROM ως προς τον αύξοντα αριθμό των βαθμών ελευθερίας $j = 1, \ldots, N_v$ του οριακού στρώματος.



Σχήμα 4.39: *Κατανομή σχετικού σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας οριακού στρώματος μεταξύ* $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}_5}$ *και* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{v}_5}$ *χρησιμοποιώντας* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v_1}$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι χρονοσειρές των βαθμών ελευθερίας που παρουσιάζουν τα μεγαλύτερα σφάλματα.



Σχήμα 4.40: *Σύγκριση χρονοσειρών βαθμών ελευθερίας μεταξύ* $\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{v}5}$ *και* $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{v}5}$ *με* $L = 240$ $\vec{\phi}_{v1}$. *Η ανακατασκευή της λύσης αναφοράς πραγματοποιείται με καλή ακρίβεια*

Κεφάλαιο 5

Αποτίμηση της Εργασίας

5.1 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται η μέθοδος POD για την ανάλυση μη μόνιμων συνεκτικών ροών γύρω από αεροτομές που ταλαντώνονται εξαναγκασμένα με μία και δύο συχνότητες. Η μέθοδος POD χρησιμοποιείται ακόμη για την κατασκευή ενός μοντέλου μειωμένης τάξης (reduced-order model) του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος που αποτελεί τμήμα μίας μεθόδου συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης.

Αρχικά πραγματοποιείται η καταγραφή των κατάλληλων δεδομένων - βαθμών ελευθερίας του προβλήματος - από λύσεις του συστήματος πλήρους τάξης (full-order model) και αναλύθηκαν με τη μέθοδο SVD στις βασικές τους συνιστώσες. Οι περιπτώσεις που εξετάζονται είναι μίας και δύο εξαναγκασμένων συχνοτήτων ταλάντωσης. Εν συνεχεία, με ενεργειακά κριτήρια επιλέγονται κατάλληλες ιδιομορφές βάσει των οποίων γίνεται μία πρώτη ευθεία αναπαράσταση λύσεων του πλήρους συστήματος και εξετάζεται το σφάλμα αποκοπής με παράμετρο τον αριθμό των επιλεγμένων ιδιομορφών. Γίνεται ανάλυση του σφάλματος ανά βαθμό ελευθερίας και σημείο στην αεροτομή και τον ομόρρου και διαπιστώνεται η φύση των δεδομένων και η συμπεριφορά του συστήματος πλήρους τάξης. Επίσης μέσω των ευθειών αναπαραστάσεων εξετάζεται σε πρώτο βαθμό η δυνατότητα των ιδιομορφών να παράξουν λύσεις παραμετρικά "κοντά" στη λύση-προέλευσή τους.

Στη συνέχεια, κατασκευάζεται το γραμμικοποιημένο μοντέλο μειωμένης τάξης του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος και διατυπώνεται ο νέος τρόπος λύσης και ανανέωσης των αγνώστων μεταβλητών του προβλήματος. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο αυτό γίνεται παραμετρική διερεύνηση της δυνατότητας σύγκλισης του συστήματος των εξισώσεων ως προς τις επιλεγμένες ιδιομορφές. Τα κριτήρια επιλογής των ιδιομορφών που εξετάζονται είναι το ενεργειακό και το κριτήριο της μέγιστης συνιστώσας.

Τέλος, με επιλεγμένο αριθμό ιδιομορφών που δύναται να λύσει το αντίστροφο πρόβλημα παραγωγής των λύσεων του οριακού στρώματος μέσω του μοντέλου μειωμένης τάξης, πραγματοποιείται διερεύνηση των δυνατοτήτων του όσον αφορά στην επίλυση περιπτώσεων παραμετρικά "κοντά" στην περίπτωση αναφοράς από την οποία παράγονται οι ιδιομορφές.

5.2 Αξιολόγηση της μεθόδου POD και Συμπεράσματα

Η μέθοδος POD μπορεί να αξιολογηθεί ξεχωριστά ως προς τις ιδιότητές της

- γραμμικοποίηση (*linearization*). Η μέθοδος πέτυχε με επιτυχία την γραμμικοποίηση του συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων του οριακού στρώματος. Μάλιστα επιλέγοντας χαμηλό αριθμό ιδιομορφών μετέτρεπε το σύστημα από σύστημα μεγάλου αριθμού κατάστασης (*ill conditioned*) σε σύστημα μικρού αριθμού κατάστασης (*well-conditioned*) με αποτέλεσμα την εύκολη επίλυσή του.

- δημιουργία βέλτιστης διανυσματικής βάσης (*optimality*). Η μέθοδος πράγματι επιλέγει τη βέλτιστη διανυσματική βάση ιδιομορφών με την οποία ένα σύνολο δεδομένων μπορεί να αναπαρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης αυτής.

- διαχωρισμός του χρόνου από το χώρο. Η ανάλυση χωροχρονικών δεδομένων με χρήση της μεθόδου των στιγμιοτύπων POD επιτυγχάνει το διαχωρισμό του χρόνου από το χώρο καθώς στη λογική των αναπαραστάσεων των δεδομένων με γραμμικούς συνδυασμούς, η διανυσματική βάση είναι αμιγώς χωρική, ενώ οι συντελεστές αμιγώς χρονικοί.

- δυνατότητες παραμετρικής διαφοροποίησης λύσεων (*span*). Το μοντέλο μειωμένης τάξης που κατασκευάστηκε με τη μέθοδο POD κατάφερε να επιλύσει περιπτώσεις παραμετρικά "κοντά" στην περίπτωση αναφοράς και εξαγωγής των ιδιομορφών ακόμη και στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αεροτομής με δύο συχνότητες (γωνιακή ταλάντωση & πτερύγιση). Από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν φάνηκε μία ευκολία ανακατασκευής λύσεων όπου η παράμετρος διαφοροποίησης ήταν το πλάτος της ταλάντωσης, ενώ αντίθετα μία δυσκολία όταν η μεταβολή σχετιζόταν με τη συχνότητα της ταλάντωσης. Τέλος, ενδιαφέρον έχει η περίπτωση της ύπαρξης διαφοράς φάσης 90° μεταξύ γωνιακής ταλάντωσης και πτερύγισης στην οποία υπήρξε πολύ καλή προσέγγιση χρησιμοποιώντας POMs αναφοράς.

- μείωση της τάξης (*order reduction*). Το μοντέλο μειωμένης τάξης δεν εμφανίζει ικανοποιητική μείωση των εξισώσεων άρα και των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος του οριακού στρώματος (240 από 354), αλλά οφείλεται στο γεγονός ότι το σύστημα εξισώσεων πλήρους τάξης συμπληρώνεται από εμπειρικό πλαίσιο και άλλες ad hoc λύσεις προκειμένου να συγκλίνει.

5.3 Προτάσεις για μελλοντική διερεύνηση και επέκταση της μεθόδου

Περαιτέρω διερεύνηση της σύγκλισης στην περιοχή κοντά στο σημείο ανακοπής Ενδιαφέρουσα θα ήταν μία προσπάθεια διερεύνησης της σύγκλισης του συστήματος εξισώσεων μειωμένης τάξης στην περιοχή του σημείου πρόσπτωσης της αεροτομής. Αυτό γιατί

επιλέγοντας πολύ μικρό αριθμό POD ιδιομορφών παρατηρείται ένα εντοπισμένο σφάλμα στις μεταβλητές του οριακού στρώματος σε μία περιοχή κοντά στο σημείο πρόσπτωσης της αεροτομής ενώ όλο το άλλο κομμάτι της λύσης παρουσιάζει μηδενική απόκλιση από την επιθυμητή λύση. Αυτό θα μπορούσε να γίνει είτε στη λογική της διόρθωσης με κάποιο ad hoc κομμάτι λύσης, είτε στη λογική του ελέγχου των τιμών των χρονικών συντελεστών του POD εφόσον η τιμή τους μπορεί να υπολογιστεί με προβολή μίας λύσης του μοντέλου πλήρους τάξης πάνω στις POD ιδιομορφές.

Ενοποίηση του συστήματος εξισώσεων του μοντέλου συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης και ταυτόχρονη επίλυση Μία διαφορετική προσέγγιση για το συγκεκριμένο μοντέλο συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης είναι η ενοποίηση του συστήματος εξισώσεων της ισοδύναμης μη συνεκτικής ροής (2.138) και του συστήματος εξισώσεων του οριακού στρώματος (2.141) και η ταυτόχρονη επίλυση του ενοποιημένου συστήματος στη λογική των ελάχιστων τετραγώνων. Σε αυτή τη λογική η συνθήκη *Kelvin* και *Kutta* θα αποτελούν περιορισμούς του προβλήματος ελαχιστοποίησης. Με αυτή τη γραφή των εξισώσεων το μοντέλο μειωμένης τάξης θα γίνει βάσει όλου του μοντέλου συνεκτικής - μη συνεκτικής αλληλεπίδρασης και όχι μόνο βάσει του οριακού στρώματος. Ακόμη, οι POD ιδιομορφές θα προέρχονται επίσης από την καταγραφή όλων των βαθμών ελευθερίας του συστήματος και όχι μόνο από την καταγραφή των βαθμών ελευθερίας του οριακού στρώματος. Αυτό μπορεί να δώσει μία στιβαρότητα *robustness* στο όλο σύστημα και να ξεπεραστούν τα υπάρχοντα προβλήματα σύγκλισης.

Εφαρμογή της μεθόδου σε μοντέλο CFD Όπως έχει αναλυθεί, η παρούσα μέθοδος υστερεί κυρίως στην ιδιότητα της αποκοπής (*truncation*) του συστήματος εξισώσεων πλήρους τάξης. Αυτό οφείλεται στην έλλειψη συνοχής (*consistency*) του μοντέλου πλήρους τάξης, εφόσον για τη σύγκλισή του χρησιμοποιούνται διορθώσεις ad hoc αλλά και εμπειρικό πλαίσιο για τη συμπλήρωση των εξισώσεων. Αυτά μπορούν να ξεπεραστούν αν το μοντέλο πλήρους τάξης είναι ένα μοντέλο CFD. Βέβαια σε αυτήν την περίπτωση ενδιαφέρον θα είχε να χρησιμοποιηθεί τόσο ένα μοντέλο CFD με ένα μοντέλο τύρβης (αλγόριθμος χωρίς διακλαδώσεις) όσο και ένα μοντέλο CFD με διαφορετικά μοντέλα τύρβης υπό συνθήκη (αλγόριθμος με διακλαδώσεις) έτσι ώστε να γίνει σαφής η συμπεριφορά του POD. Έτσι το POD μπορεί να αναδείξει και την ιδιότητα της αποκοπής η οποία ενδιαφέρει πολύ καθώς είναι εκείνη η οποία εξασφαλίζει το μικρότερο υπολογιστικό κόστος, αλλά και τη μείωση του αριθμού των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος σε περίπτωση που ο στόχος είναι κάποιος έλεγχος της ροής (*flow control*).

Παραρτήματα

Παράρτημα Α
Υπολογισμός των δυνάμεων

Στο Παράρτημα αυτό γίνεται αναφορά στον τρόπο προσδιορισμού των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα. Για τον υπολογισμό της πίεσης κατά μήκος της επιφάνειας της αεροτομής εφαρμόζεται η εξίσωση *Bernoulli* η οποία στην περίπτωση της μη μόνιμης ροής γράφεται:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{u}_e^2}{2} + \vec{u}_e \cdot \vec{U}_b + \frac{p}{\varrho} = c(t) \tag{1}$$

Η παραπάνω εξίσωση, εκφρασμένη ως προς τη σχετική ταχύτητα $\vec{\bar{u}}_e = \vec{u}_e - \vec{U}_b$ γίνεται,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{\bar{u}}_e^2}{2} - \frac{\vec{\bar{U}}_b^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = c(t) \tag{2}$$

όπου στις (1) και (2) Φ είναι το συνολικό δυναμικό της ροής ($\vec{u}_e = \nabla \Phi$), σε αντίθεση με το δυναμικό διαταραχής φ που ορίστηκε στην παράγραφο (2.2.1).

Υποθέτοντας ως συνθήκες αναφοράς την πίεση και την ταχύτητα στο άπειρο $p_\infty(t)$, $\vec{U}_\infty(t)$ προκύπτει,

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho} = \frac{\vec{U}_\infty^2}{2} - \frac{\vec{\bar{u}}_e^2}{2} + \frac{\vec{U}_b^2}{2} - \frac{\partial(\Phi - \Phi_\infty)}{\partial t} \tag{3}$$

όπου $\Phi_\infty = U_{\infty x} \cdot x + U_{\infty y} \cdot y$ το δυναμικό στο άπειρο.

Για τον υπολογισμό του συνολικού δυναμικού του πεδίου ροής γίνεται η υπόθεση ότι αυτό συντίθεται από το άθροισμα των στοιχειωδών δυναμικών των διανομών ιδιόμορφων σημείων που λαμβάνονται κατά μήκος της αεροτομής και του ομόρρου,

$$\Phi = \Phi_\infty + \varphi_\sigma + \varphi_\gamma + \varphi_{\gamma wake} + \varphi^* \tag{4}$$

όπου φ_σ το δυναμικό της διανομής πηγών κατά μήκος της αεροτομής, φ_γ το δυναμικό της διανομής στροβιλότητας στην αεροτομή, $\varphi_{\gamma wake}$ το δυναμικό της στροβιλότητας του ομόρρου και φ^* το δυναμικό του πεδίου ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης. Το φ_σ υπολογίζεται μέσω της ολοκληρωματικής έκφρασης (2.83) για την τμηματικά σταθερή διανομή πηγών. Σε ότι αφορά στο δυναμικό που επάγεται από το στροβιλό τμήμα της ροής ορίζεται μία διανομή διπόλων ισοδύναμη προς τη διανομή στροβιλότητας, η οποία λαμβάνεται στην αεροτομή

και στο φύλλο του ομόρρου. Η ισοδυναμία μιας διανομής στροβιλότητας με μια διανομή διπόλων εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$\gamma = [\![\bar{u}]\!] = [\![\nabla_s \varphi]\!] = \nabla_s [\![\varphi]\!] = -\nabla_s \mu \tag{5}$$

όπου το ∇_s είναι η παράγωγος κατά μήκος καμπύλης s.

Το δυναμικό στο τυχαίο σημείο $\vec{x}_0$ του πεδίου ροής από μια συνεχή διανομή διπόλων κατά μήκος της αεροτομής και του ομόρρου, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(\vec{x}_0) = &-\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \mu(\vec{x};t)\cdot\frac{\vec{\nu}(\vec{x})\cdot(\vec{x}_0-\vec{x})}{|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S(\vec{x}) \\ &-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_w} \mu_w(\vec{x};t)\cdot\frac{\vec{\nu}(\vec{x})\cdot(\vec{x}_0-\vec{x})}{|\vec{x}_0-\vec{x}|^2}\,\mathrm{d}S_w(\vec{x}) \end{aligned} \tag{6}$$

Από την ολοκλήρωση της τμηματικά σταθερής διανομής στροβιλότητας κατά μήκος της αεροτομής προκύπτει μία τμηματικά γραμμική διανομή διπόλων σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mu^{I+1} = \mu^I - \gamma^i \Delta S^i \tag{7}$$

Η ολοκλήρωση της (7) ξεκινά από την ακμή εκφυγής στην κάτω πλευρά της αεροτομής όπου υποτίθεται ότι $\mu^1 = 0$ και οδεύει κατά μήκος του στερεού συνόρου μέχρι την ακμή εκφυγής στην πάνω πλευρά.

Για την ολοκλήρωση της (7) κατά μήκος του ομόρρου υποτίθεται πλέγμα ως κόμβοι του οποίου λαμβάνονται τα μέσα των αποστάσεων μεταξύ δύο διαδοχικών στο χρόνο δινών (σχήμα 1). Από την ολοκλήρωση της στροβιλότητας του ομόρρου λαμβάνεται επίσης μια γραμμική διανομή διπόλων σύμφωνα με τη σχέση,

$$\mu_w^{I+1} = \mu_w^I - \Gamma_w^i \tag{8}$$

η ολοκλήρωση της οποίας ξεκινά από την ακμή εκφυγής, όπου ως συνοριακή συνθήκη λαμβάνεται $\mu_w^1 = -\gamma S_g^{N+1}$.

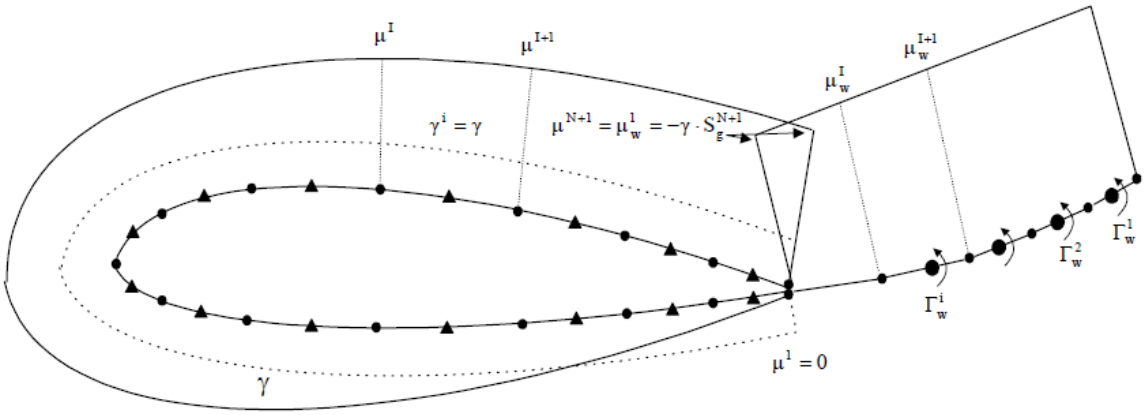
Τέλος σε ότι αφορά το δυναμικό φ^* της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης υπολογίζεται με απευθείας ολοκλήρωσης του αντίστοιχου πεδίου ταχύτητας u_τ^* κατά μήκος της αεροτομής.

Για τον υπολογισμό της χρονικής παραγώγου του δυναμικού λαμβάνονται προς τα πίσω διαφορές πρώτης τάξης,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \cong \frac{\Phi(t) - \Phi(t-\Delta t)}{\Delta t} \tag{9}$$

Τα αεροδυναμικά φορτία πάνω στην αεροτομή υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά μήκος

αυτής των δυνάμεων πίεσης και των δυνάμεων τριβής.



Σχήμα 1: *Ορισμός της ισοδύναμης διανομής διπόλων.[44]*

Σε ότι αφορά την αντίσταση της αεροτομής, πιο ακριβής τρόπος υπολογισμού της, τουλάχιστον στην περίπτωση της μόνιμης ροής, είναι αυτός που βασίζεται στην εφαρμογή του θεωρήματος της ορμής. Με εφαρμογή του ολοκληρωματικού θεωρήματος της ορμής σε ένα χωρίο που περικλείει την αεροτομή προκύπτει ότι:

$$C_D = 2\frac{\vartheta_\infty}{c} \tag{10}$$

όπου c η χορδή της αεροτομής και ϑ_∞ η παράμετρος πάχους ορμής του οριακού στρώματος, κατάντι της αεροτομής και σε μεγάλη απόσταση από αυτήν. Το ϑ_∞ συσχετίζεται με το πάχος ορμής ϑ_w σε κάποια άλλη θέση στην ομόρρου όπου η ταχύτητα είναι u_e μέσω της σχέσης του *Young (1989)* [47],

$$\vartheta_\infty = \vartheta_w \left(\frac{u_{se}}{U_\infty}\right)^{(H+5)/2} \tag{11}$$

οπότε:

$$C_D = 2\frac{\vartheta_w}{c}\left(\frac{u_{se}}{U_\infty}\right)^{(H+5)/2} \tag{12}$$

Η παραπάνω σχέση υπολογισμού της αντίστασης εξάγεται για συνθήκες μόνιμης ροής. Σύμφωνα με τον *Ριζιώτη* [44], η σχέση (12) υπολογίζει την αντίσταση μιας αεροτομής με πολύ καλύτερη ακρίβεια σε σχέση με την ολοκλήρωση των δυνάμεων.

Παράρτημα Β
Η αρίθμηση των σημείων της αεροτομής στον κώδικα foil2w

Πίνακας 1: *Η αρίθμηση των σημείων της αεροτομής στον κώδικα foil2w*

α/α	**θέση** χ/c	**θέση** y/c
1	0.998972	−0.039252
2	0.988553	−0.038475
3	0.974679	−0.037569
4	0.960725	−0.036816
5	0.946786	−0.036228
6	0.932856	−0.035810
7	0.918929	−0.035571
8	0.905004	−0.035517
9	0.891079	−0.035655
10	0.877152	−0.035993
11	0.863221	−0.036537
12	0.849284	−0.037293
13	0.835338	−0.038271
14	0.821391	−0.039410
15	0.807427	−0.040642
16	0.789337	−0.042357
17	0.765842	−0.044738
18	0.736428	−0.047892
19	0.702374	−0.051687
20	0.665790	−0.055802
21	0.628532	−0.059910
22	0.591479	−0.063796
23	0.554922	−0.067326

Συνέχεια σε επόμενη σελίδα

Πίνακας 1 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

α/α	**θέση**χ/c	**θέση**y/c
24	0.518973	−0.070379
25	0.483695	−0.072856
26	0.449190	−0.074655
27	0.415574	−0.075649
28	0.382660	−0.075648
29	0.349773	−0.074528
30	0.316366	−0.072432
31	0.282607	−0.069555
32	0.248933	−0.065942
33	0.215645	−0.061589
34	0.183120	−0.056554
35	0.152043	−0.050946
36	0.123449	−0.044973
37	0.098477	−0.038985
38	0.077837	−0.033338
39	0.061339	−0.028188
40	0.048229	−0.023496
41	0.037700	−0.019214
42	0.029117	−0.015295
43	0.022017	−0.011642
44	0.016115	−0.008105
45	0.011252	−0.004503
46	0.007341	−0.000740
47	0.004191	0.003109
48	0.001934	0.007168
49	0.000628	0.011360
50	0.000217	0.015523
51	0.000578	0.019606
52	0.001724	0.023760
53	0.003697	0.027928
54	0.006687	0.031935
55	0.010539	0.035876
56	0.015294	0.039807
57	0.021050	0.043824
58	0.027969	0.048067

Συνέχεια σε επόμενη σελίδα

Πίνακας 1 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

α/α	**θέση**χ/c	**θέση**y/c
59	0.036340	0.052623
60	0.046573	0.057554
61	0.059215	0.062872
62	0.074909	0.068578
63	0.094215	0.074618
64	0.117279	0.080780
65	0.143615	0.086688
66	0.172383	0.092002
67	0.202769	0.096518
68	0.234143	0.100123
69	0.266103	0.102769
70	0.298383	0.104454
71	0.330688	0.105196
72	0.362625	0.104962
73	0.394132	0.103595
74	0.425690	0.100969
75	0.457784	0.097172
76	0.490520	0.092339
77	0.523771	0.086573
78	0.557437	0.079959
79	0.591445	0.072573
80	0.625706	0.064505
81	0.660044	0.055873
82	0.693984	0.046871
83	0.726392	0.037911
84	0.755196	0.029713
85	0.778532	0.022952
86	0.796340	0.017743
87	0.810272	0.013651
88	0.823961	0.009627
89	0.837638	0.005610
90	0.851322	0.001597
91	0.865010	−0.002397
92	0.878704	−0.006371
93	0.892406	−0.010317

Συνέχεια σε επόμενη σελίδα

Πίνακας 1 – συνέχεια από προηγούμενη σελίδα

α/α	**θέση**χ/c	**θέση**y/c
94	0.906120	−0.014228
95	0.919845	−0.018094
96	0.933584	−0.021910
97	0.947339	−0.025666
98	0.961117	−0.029346
99	0.974921	−0.032949
100	0.988658	−0.036460
101	0.998972	−0.039252

Βιβλιογραφία

[1] J.L. Lumley *Stohastic Tools in Turbulence*, Academic Press, New York, 1971

[2] D.D Kosambi *Statistics in function space*, J. Indian Math Soc., 7:76-88, 1943

[3] M. Loeve *Functions aleatoire de second ordre*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 220, 1945

[4] K. Karhunen. *Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse.*Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A1,34, 1946

[5] V.S. Pougachev *General theory of the correlations of random functions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Math. Ser., 17:401-2, 1953

[6] A.M. Obukhov *Statistical description of continuous fields*, Trudy Geophys. Int. Aked. Nauk. SSSR, 24:3-42, 1954

[7] E.N Lorenz *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci., 20:130-41, 1963.

[8] A. Papoulis. *Propability, Random Variables, and Stohastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[9] A. Rosenfeld and A.C. Kak. *Digital Picture Processing*, Academic Press, New York, 1982

[10] V.R. Algazi and D.J. Sakrizon *On the optimality of the Karhunen expansion*, IEEE Trans. Inform. Theory, 15:319-21, 1969

[11] C.A. Andrews, J.M. Davies, and G.R. Schwartz *Adaptive data compression*, Proc. IEEE, 55:267-77, 1967

[12] D.H Gay and W.H. Ray, *Identification and control of linear distributed parameter systems through the use of experimentally determined singular functions*, In Proc. IFAC Symp. Control of Distributed Parameter Systems, Los Angeles, CA, 30 June-2 July 1988, pages 173-9, 1986

[13] D.H. Gay and W.H. Ray. *Application of singular value methods for identification and model based control of distributed parameter systems.*, In Proc. IFAC Workshop on Model Based Process Control, Atlanta, GA, June 1988 pages 95-102, 1988

[14] R.W. Preisendorfer *Principal Component Analysis in Meteorology and Oceanography*, Elevesier, Amsterdam, 1988

[15] D. Armbruster, R. Heiland, and E.J. Kostelich, *KLTOOL: a tool to analyze spatio-temporal complexity*, Chaos, 4(2):421-4, 1994

[16] K. Hall, J. Thomas, and E. Dowell, *Reduced-order modelling of unsteady small-disturbance flows using a frequency-domain proper orthogonal decomposition technique*, Identity, vol. 5, no. 679, p. 8.

[17] T. Kim, *Frequency-Domain Karhunen-Loeve Method and Its Application to Linear Dynamic Systems* AIAA Journal, vol. 36, pp. 2117–2123, Nov.1998.

[18] J. Thomas, K. Hall, and E. Dowell, *Reduced-order aeroelastic modeling using proper orthogonal decompositions*, in Proceedings of the CEAS/AIAA/ICASE/NASA Langley International Forum on Aeroelastic- ity and Structural Dynamics, 1999.

[19] J. Lumley, *The structure of inhomogeneous turbulent flows*, Atmospheric turbulence and radio wave propagation, pp. 166–178, 1967.

[20] E. Dowell and D. Tang, *Dynamics of very high dimensional systems*, World Scientific Pub Co Inc, 2003.

[21] H. Bakewell Jr and J. Lumley, *Viscous sublayer and adjacent wall region in turbulent pipe flow*, Physics of fluids, vol. 10, p. 1880, 1967. 127

[22] F. Payne and J. Lumley, *Large eddy structure of the turbulent wake behind a circular cylinder*, Physics of Fluids, vol. 10, p. S194, 1967.

[23] L. Sirovich, *Turbulence and the dynamics of coherent structures. part i: Coherent structures* Quarterly of applied mathematics, vol. 45, no. 3, pp. 561–571, 1987.

[24] L. Sirovich and H. Park, *Turbulent thermal convection in a finite domain: Part i. theory* Physics of Fluids A: Fluid Dynamics, vol. 2, p. 1649, 1990.

[25] K. Ball, L. Sirovich, and L. Keefe, *Dynamical eigenfunction decomposition of turbulent channel flow*, International journal for numerical methods in fluids, vol. 12, no. 6, pp. 585–604, 1991.

[26] D. Hilberg, W. Lazik, and H. Fiedler, *The application of classical pod and snapshot pod in a turbulent shear layer with periodic structures*, Applied scientific research, vol. 53, no. 3, pp. 283–290, 1994.

[27] L. Pastur, F. Lusseyran, Y. Fraigneau, and B. Podvin, *Determining the spectral signature of spatial coherent structures in an open cavity flow*, Physical review E, vol. 72, no. 6, p. 065301, 2005.

[28] A. Liberzon, R. Gurka, I. Tiselj, and G. Hetsroni, *Spatial characterization of the numerically simulated vorticity fields of a flow in a flume*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, vol. 19, no. 2, pp. 115–125, 2005.

[29] D. Rempfer and H. Fasel, *Dynamics of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 275, pp. 257–284, 1994.

[30] B. Pelliccia-Kraft and D. Watt, *Visualization of coherent structure in scalar fields of unsteady jet flows with interferometric tomography and proper orthogonal decomposition*, Experiments in fluids, vol. 30, no. 6, pp. 633–644, 2001.

[31] P. Holmes, J. Lumley, and G. Berkooz, *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*, Cambridge Univ Pr, 1998.

[32] Lock, R.C. and Williams, B.R., *Viscous-inviscid interactions in external aerodynamics*, Prog. Aerospace Sci., vol. 23, pp. 51-171, 1987.

[33] Smith, A.M.O. and Gamberoni, N., *Transition pressure gradient and stability theory*, Douglas Aircraft Co., Rept. ES26388, 1956.

[34] Ingen, J.L. van, *A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region*, Delft University of Technology, Dept. Of Aerospace Engineering, Rept. VTH-74, 1956.

[35] Falkner, V.M. and Skan, S.W., *Some approximate solutions of the boundary layer equations*, Phil. Mag, vol. 12, pp. 865, 1931.

[36] Gleyzes, C., Cousteix, JR. and Bonnet, J.L., *Theoretical and experimental study of low Reynolds number transitional separation bubbles*, Presented at the Conference on Low Reynolds Number Airfoil Aerodynamics, University of Notre Dame, Notre Dame, 1985.

[37] East, L.F., *A representation of second order boundary layer effects in the momentum integral equation and in viscous-inviscid interactions*, RAE Tech. Report, 1981.

[38] Whitfield, D.L., *Integral solution of compressible turbulent boundary layers using improved velocity profiles, Arnold Air Force Station*, AEDC-TR-78-42, 1978.

[39] Drela, M. and Giles, M., *Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils*, Journal AIAA, vol. 25, no. 10, pp. 1347-1355, 1987.

[40] Swafford, T.W., *Analytical approximation of two-dimensional separated turbulent boundary-layer velocity profiles*, Journal AIAA, vol. 21, no. 6, Technical Notes, pp. 923-926, 1983.

[41] Lakshminarayana, B. and Govindan, T.R., *Analysis of turbulent boundary layer on cascade and rotor blades of turbomachinery*, AIAA Journal, 19:1333-1341, 1981.

[42] Green, J.E., Weeks, D.J. and Brooman, J.W.F., *Prediction of turbulent boundary layers and wakes in compressible flow by a lag-entrainment method*, ARC R&M Report no. 3791, HMSO, London, England, 1977.

[43] Bradshaw, P. and Ferriss, D.H., *Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation: compressible flow on adiabatic walls*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 46, part 1, pp. 83-110, 1970.

[44] Ριζιώτης, Β.Α., *Αεροδυναμική και αεροελαστική ανάλυση της απώλειας στήριξης σε δρομείς ΑΓΟΑ*, Διδακτορική Διατριβή, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ, 2003.

[45] Ριζιώτης, Β.Α., *Διερεύνηση της δυνατότητας προσομοίωσης της απώλειας στήριξης με στροβιλές μεθοδολογίες*, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Ρευστών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ, 1994.

[46] Basu, B.C. and Hancock, G.J., *The unsteady motion of a two-dimensional airfoil in incompressible inviscid flow*, Journal of Fluid Mechanics, part 1, pp. 159-178, 1978.

[47] Young, A.D., *Boundary layers*, BSP Professional Books, pp. 207, 1989.

[48] Gilbert Strang, *Linear Algebra and Its Applications, Fourth Edition*, 2006.

[49] Drela, M., *An analysis and design systems for low Reynolds number airfoils*, Conference on Low Reynolds Number Aerodynamics, University of Notre Dame, 1989.

[50] LeBalleur, J.C., *Strong matching method for computing transonic viscous flows including wakes and separation.* Lifting Airfoils, Recherche Aerospatiale, no. 1981-3, 1981.

[51] LeBalleur, J.C., *New possibilities of viscous-inviscid numerical techniques for solving viscous flow equations with massive separation*, Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows, vol. IV, Springer, Berlin, 1990.

[52] Whitfield, D.L., *Analytical description of the complete two-dimensional turbulent boundary layer velocity profile*, Arnold Air Force Station, AEDC-TR-77-79 (ADA 045033), 1977.

[53] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, Second Edition, 1997.

[54] Βουτσινάς, Σ.Γ., *Μη μονιμη αεροδυναμική, Αεροελαστικότητα, Αεροακουστική*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΕΜΠ.

[55] Τσαγγάρης, Σ., *Μηχανική των ρευστών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2005.