ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΤΙΤΛΟ: Ολοκληρώματα στις Πλειότιμες Απεικονίσεις

Φοιτήτρια: Αντιγόνη Μανίκα
Α.Μ: 09101213
Επιβλέπων Καθηγητής: Ι. Πολυράκης

16 Μαρτίου 2011

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π Ιωάννη Πολυράκη για τη συνεργασία, την επιστημονική καθοδήγηση αλλά και την υπομονή που επέδειξε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της Διπλωματικής Εργασίας.

Αντιγόνη Μανίκα

Αθήνα, Οκτώβριος 2010

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Πρόλογος

Η Ανάλυση των πλειότιμων απεικονίσεων έχει σημαντικές εφαρμογές σε πολλούς και διαφορετικούς τομείς της μαθηματικής επιστήμης. Αποτελεί μίξη διαφορετικών κλάδων των Μαθηματικών όπως η Θεωρία Μέτρου, η μη Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση κι η Τοπολογία. Ακόμη είναι στενά συνδεδεμένη με την Nonsmooth Analysis και πράγματι ένα από τα κύρια κίνητρα πίσω από την ανάπτυξη της θεωρίας ήταν να παρέχει τα απαραίτητα αναλυτικά εργαλεία για την μελέτη των προβλημάτων της Nonsmooth Analysis. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι η ανάπτυξη των δύο αυτών μαθηματικών θεωριών συμπίπτει χρονικά και ακολουθεί παράλληλα μονοπάτια.

Είναι γεγονός ότι στην επιστήμη των Μαθηματικών υπήρχε μια διστακτικότητα στο να ασχοληθεί κανείς με ακολουθίες συνόλων και πλειότιμων αντιστοιχιών. Παρά την ανάδυση καινούργιων οπτικών για τις εφαρμογές των Μαθηματικών η μακρά μας ενασχόληση και οικειότητα με τις ακολουθίες στοιχείων και των μονότιμων συναρτήσεων είχε μάλλον ριζωθεί τόσο βαθειά στην παραδοσιακή μαθηματική σκέψη που φάνηκε ευκολότερο να θυσιαστεί το “ πλάτος ” κάποιων προβλημάτων ώστε να αποφευχθεί η μελέτη των πλειότιμων απεικονίσεων.

Σήμερα η Ανάλυση πλειότιμων απεικονίσεων έχει τις δικές της μεθόδους, τεχνικές και εφαρμογές από κοινωνικές και οικονομικές επιστήμες ως τη Μηχανική και τη Βιολογία. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η μοντέρνα αντιμετώπιση της Μη Γραμμικής Συναρτησιακής Ανάλυσης δεν μπορεί να αντέξει την πολυτέλεια του να αγνοεί την Ανάλυση των πλειότιμων απεικονίσεων. Μια τέτοια παράλειψη θα περιόριζε δραστικά τις πιθανές εφαρμογές.

Για τους παραπάνω λόγους ξεκινάμε παρουσιάζοντας παραδείγματα φυσικών ή και γενικών προβλημάτων που περιέχουν πλειότιμες απεικονίσεις.

1.1 Παραδείγματα πλειότιμων απεικονίσεων

1. Πρώτα συναντούμε τις πλειότιμες απεικονίσεις κάθε φορά που αντιμετωπίζουμε κακώς ορισμένα ή αντίστροφα προβλήματα δηλαδή προβλήματα για τα οποία η ύπαρξη μιας λύσης ή η μοναδικότητα της δεν εξασφαλίζονται για κάποια δεδομένα. Οι πλειότιμες απεικονίσεις μας επιτρέπουν να απομακρυνθούμε από τον περιορισμό ότι μια αντιστοιχία πρέπει να είναι ένα προς ένα και επί όταν θέλουμε να λύσουμε μια εξίσωση.

   Πράγματι, η πρώτη φυσική περίπτωση όταν οι απεικονίσεις αυτές προκύπτουν ειναι η αντίστροφη απεικόνιση, f^{-1} μιας μονότιμης απεικόνισης f από το X στο Y. Πάντα ορίζουμε την f^{-1} σαν την πλειότιμη απεικόνιση η οποία συνδέει σε κάθε σημείο y το (πιθανά κενό) σύνολο των λύσεων:
$$f^{-1}(y) := \{x \in X : f(x) = y\},$$
   στην εξίσωση $f(x) = y$

   Από τις τρεις διαταγές του πίνακα του Handarmard δηλαδή ύπαρξη, μοναδικότητα και σταθερότητα μπορούμε μόνο να διατηρήσουμε τις απαιτήσεις της σταθερότητας οι οποίες μπορούν να περιληφθούν σε επαρκείς ορισμούς της συνέχειας της f^{-1}.

2. Ασχολούμενοι με τις αβεβαιότητες και τις διαταραχές οδηγούμαστε με φυσικό τρόπο σε πλειότιμες απεικονίσεις. Αυτές επίσης εμφανίζονται όταν επιθυμούμε να χειριστούμε ένα πρόβλημα ποιοτικά αναζητώντας λύσεις κοινές σε ενα σύνολο στοιχείων που μοιράζονται τις ίδιες (ποιοτικές) ιδιότητες. Η Ανάλυση των πλειότιμων απεικονίσεων θα έπρεπε να παίζει ένα σημαντικό ρόλο στον τομέα της Ποιοτικής Φυσικής που αποτελεί ένα γρήγορα αναπτυσσόμενο χώρο της Τεχνητής Νοημοσύνης.

3. Προβλήματα με φραγμούς επίσης επιφέρουν συγκεκριμένες πλειότιμες απεικονίσεις. Λύνοντας για παράδειγμα την εξίσωση $f(x) = y$ όπου η λύση x ζητείται να ανήκει σε ενα υποσύνολο K ισοδυναμεί με την επίλυση του εγκλεισμού της συνάρτησης f στο σύνολο K, $f_{|K(x)} = y$. Θεωρείται σαν η πλειότιμη απεικόνιση που συνδέει το x με το σημείο $f(x)$ όταν $x \in K$ και το κενό συνολο αν $x \notin K$.

4. Οι πλειότιμες απεικονίσεις παρέχουν ενα χρήσιμο πλαίσιο για τη Θεωρία Ελέγχου από τις πρώιμες κιόλας συνεισφορές του Filippov και Wazewski στις αρχές της δεκαετίας του 1960. Τέτοιες πλειότιμες απεικονίσεις

ονομάζονται παραμετρικοποιημένες (parametrized) και ασχολούνται με μια οικογένεια απεικονίσεων $x \to f(x,u)$ από το X στο Y όταν τα u κυμαίνονται πάνω σε ένα σύνολο παραμέτρων $U(x)$. Η (μονότιμη) απεικόνιση f περιγράφει τη δυναμική του συστήματος, συνδέει την κατάσταση x του συστήματος και τον έλεγχο με την ταχύτητα $f(x,u)$ του συστήματος. Η πλειότιμη απεικόνιση u περιγράφει μια συνάρτηση ανατροφοδότησης ($feedback\ map$) παραχωρώντας στην κατάσταση x το υποσύνολο $U(x)$ των δεκτών ελέγχων.

Έτσι η απεικόνιση F η οποία συνδέει σε κάθε κατάσταση x το υποσύνολο $F(x)$ των εφικτών ταχυτήτων ορίζεται ως:

$$F(x) := f(x, U(x)) = \{f(x,u)\}_{u \in U(x)}$$

Έτσι το σύστημα ελέγχου διέπεται από την οικογένεια παραμετρικοποιημένων διαφορικών εξισώσεων

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad \text{όπου} \quad u(t) \in U(x(t)),$$

που πράγματι διέπεται από τον διαφορικό εγκλεισμό $x'(t) \in F(x(t))$

5. Η Βελτιστοποιήση παρέχει παραδείγματα προβλημάτων όπου η μοναδικότητα της λύσης δεν υφίσταται. Έστω W μια συνάρτηση απο το $X \times Y$ στο $\mathbb{R}$ ($W : X \times Y \to \mathbb{R}$) και ας θεωρήσουμε την οικογένεια των προβλημάτων ελαχιστοποίησης,

$$\forall y \in Y, \quad V(y) := \inf_{x \in X} W(x,y),$$

που παρατηρούμε ότι είναι παραμετρικοποιημένα απο τις παραμέτρους y. Η συνάρτηση V ονομάζεται περιθωριακή (marginal) συνάρτηση. Για κάθε $y \in Y$ έστω το σύνολο

$$G(y) := \{x \in X : W(x,y) = V(y)\}$$

να είναι το υποσύνολο των λύσεων του προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Ένα από τα βασικά ζητήματα της θεωρίας βελτιστοποίησης είναι να μελετήσει την πλειότιμη απεικόνιση G (ως προς την κενότητα ή μη, τη συνέχεια, την παραγωγισιμότητα κ.α). Θα ονομάζουμε την απεικόνιση G περιθωριακή (marginal) απεικόνιση. Δεν πρέπει να προκαλεί απορία οτι η Θεωρία Παιγνίων και εν γένει τα Οικονομικά Μαθηματικά χρησιμοποιούν συχνά τις πλειότιμες απεικονίσεις.

6. Άλλη μια πηγή ισχυρών κινήτρων πηγάζει απο τον Μαθηματικό Προγραμματισμό όταν απαραίτητες υποθέσεις (ο κανόνας του Fermat, υπογραμμίζοντας οτι η παράγωγος μιας συνάρτησης εξαφανίζεται σε σημεία όπου επιτυγχάνεται ένα άκρο) απαιτούνταν για να αντικαταστήσουν προβλήματα βελτιστοποίησης από την επίλυση εξισώσεων.

   Ο κανόνας του Fermat είναι πράγματι μια ιδέα η οποία ερευνάται ξανά και ξανά και μάλιστα υπό διαφορετικά ονόματα:

   - Οι εξισώσεις Euler-Langrange όταν ασχολούνται με προβλήματα υπολογισμών.
   - Οι Langrange και Kuhn-Tucker πολλαπλασιαστές (*multipliers*) όταν οι καταστάσεις φραγμών (state constraints) προστέθηκαν στα προβλήματα βελτιστοποίησης.
   - Η Αρχή Pontriagin όταν έχει να κάνει με προβλήματα βέλτιστου ελέγχου.

   Ύστερα από τα επιτεύγματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης ήταν η ώρα να αποκαλύψουν την κοινή πραγματικότητα πίσω από όλα αυτά τα αποτελέσματα. Συνεχίζει να είναι ο κανόνας του Fermat που μας κατέστησε ικανούς να παραγωγίζουμε συναρτήσεις μεγαλύτερης τάξης.

7. Η χρήση των πλειότιμων απεικονίσεων στα Οικονομικά Μαθηματικά και στη Θεωρία Παιγνίων ξεκίνησε όταν ο von Neumann αναζήτησε μια επέκταση του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer στις πλειότιμες απεικονίσεις, κάτι που χρειαζόταν, για παράδειγμα, ώστε να βρούμε μη συσχετισμένα σημεία ισορροπίας (noncooperative equilibria) για n ανθρώπους - παιχνίδια. Αυτό επιτεύχθηκε με το διάσημο θεώρημα Σταθερού Σημείου του Kakutani στη δεκαετία του 1940. Χρησιμοπιήθηκε από τον Arrow και τον Debreu στα πρώτα χρόνια της δεκαετίας του 1950 για να παρέχει την πολυαναμενόμενη απόδειξη της ύπαρξης μιας Walrasian τιμής ισορροπίας.

   Αν και αυτό το επίτευγμα έκανε τις πλειότιμες συναρτήσεις δημοφιλείς ανάμεσα στους Οικονομολόγους Μαθηματικούς, δεν ήταν παρά μόνο στη δεκαετία του 1960 κατά τη διάρκεια της οποίας οι προκλήσεις μεγάλωσαν στη Βελτιστοποίηση, στη Θεωρία Ελέγχου και στα μονόπλευρα (*unilateral*) προβλήματα της Μηχανικής, που ανανεώθηκαν τα κίνητρα για την μελέτη των πλειότιμων απεικονίσεων σαν ένα σημαντικό ζήτημα.

   Ήταν τότε που ο Zarantonello εισήγαγε τις μονότονες απεικονίσεις οι οποίες καλύπτουν κάποιες σημαντικές μη γραμμικές μονότιμες ή πλειότιμες απεικονίσεις του Λογισμού των Μεταβολών (Calculus of Variations).

1.2 Ιδιότητες Πλειότιμων Απεικονίσεων

Έχοντας σύντομα αναδείξει την σημασία των πλειότιμων απεικονίσεων σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών και θεμελειωδών μαθηματικών χώρων θα αναφέρουμε παρακάτω κάποιες βασικές ιδιότητες τους.

1.2.1 Όρια και Συνέχεια

Τα όρια συνόλων παρουσιάστηκαν απο τον Painleve στα πρώτα χρόνια αυτού του αιώνα, αμέσως μετά την αξιωματικοποίηση του Frechet, το 1906, της ιδέας των $\mathcal{L}$ χώρων . Η μελέτη ορίων συνόλων μαζί με τα όρια στοιχείων φαίνεται να είναι πολύ φυσική σε αυτό το περιεχόμενο.

Οι τοπολογικές ιδέες είναι πράγματι αρκετά απλές κι άμεσες. Κατά τον ίδιο τρόπο που οι τοπολογικές ιδέες βασίζονται σε " αντιλήψεις " ορίων και σημείων συσσώρευσης ακολουθιών στοιχείων, οι αναλογίες τους στις πλειότιμες απεικονίσεις έχουν τις ρίζες τους στις ιδέες των κάτω κι άνω ορίων ακολουθιών συνόλων, τα οποία είναι " λεπτά " σημεία και σημεία συσσώρευσης αντίστοιχα. Το κάτω όριο μια ακολουθίας υποσυνόλων K_n είναι το σύνολο των ορίων ακολουθιών των στοιχείων $x_n \in K_n$, και το άνω όριο είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης αυτών των ακολουθιών.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι, η σταθερότητα είναι η μόνη απαίτηση που έχουμε όταν μελετάμε κακώς ορισμένα ή αντίστροφα προβλήματα. Η σταθερότητα είναι ένας όρος που σημαίνει ότι το σύνολο των λύσεων εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα.

Πώς μπορούμε όμως να ορίσουμε τη συνέχεια στις πλειότιμες απεικονίσεις;

Αν προσπαθήσουμε να προσαρμόσουμε στην περίπτωση των πλειότιμων απεικονίσεων τους δυο ανάλογους ορισμούς της συνέχειας των μονότιμων απεικονίσεων , αποκτάμε δυο έννοιες που δεν είναι πια ανάλογες. Αυτή η ατυχής συγκυρία οδήγησε σε δυο ιδέες ημισυνέχειας πλειότιμων απεικονίσεων που εισήγαγαν στις αρχες του 1930 οι Hausdorff και Kuratowski και μελετήθηκαν ενδελεχώς (αλλά όχι αποκλειστικά) από Γάλλους και Πολωνούς μαθηματικούς.

Λίγο αργότερα, οι πλειότιμες απεικονίσεις άνοιξαν το δρόμο στις μονότιμες συναρτήσεις. Μια πλειότιμη απεικόνιση αντιμετωπιζόταν εκείνη την εποχή σαν μια μονότιμη συνάρτηση από ένα σύνολο στο δυναμοσύνολο ενός άλλου συνόλου. Ωστόσο, όπως αποδείχθηκε, οι δομές στα δυναμοσύνολα ήταν τόσο φτωχές, και συγκεκριμένες πληροφορίες ξοδεύονταν πράγματι κάνοντας αυτή τη θεώρηση.

1.2.2 Μέτρα και Ολοκλήρωση

Συναντούμε τις μετρήσιμες απεικονίσεις κάθε φορά που έχουμε να κάνουμε με μοντέλα συστημάτων που έχουν μετρήσιμα δεδομένα και συγκεκριμένα με τυχαίες πλειότιμες μεταβλητές. Μια άλλη σημαντική περίπτωση που ανακύπτουν μετρήσιμες πλειότιμες απεικονίσεις είναι στην ευθυγράμμιση ενός συστήματος ελέγχου προς μια λύση.

Επίσης χρειαζόμαστε τη μετρησιμότητα για να ορίσουμε τα ολοκληρώματα των πλειότιμων απεικονίσεων. Η μελέτη της άθροισης και της ολοκλήρωσης πλειότιμων απεικονίσεων έγιναν αντικείμενο μελέτης πρώτα απο τον *Minkowski*. Τα τελευταία χρόνια ο λογισμός των πλειότιμων απεικονίσεων είναι πολυ εφαρμόσιμος σε διάφορους μαθηματικοόυς τομείς, κυρίως στη θεωρία ελέγχου, στα οικονομικά μαθηματικά και στη στατιστική. Έτσι, διάφορες μελέτες ασχολούνται με τη βασική θεωρία ολοκλήρωσης πλειότιμων απεικονίσεων και διάφορες προσεγγίσεις εκφράστηκαν. Μια από αυτές οφείλεται στον *Hukuhara* και θεωρεί τη *Riemann* ολοκλήρωση σε ένα χώρο κυρτών και συμπαγών συνόλων. Το ολοκλήρωμα *Lebesgue* επιτυγχάνεται παίρνοντας τα κατάλληλα όρια. Μια δεύτερη προσέγγιση έγινε από τον *Debreu* ο οποίος χρησιμοποίησε μια εμφύτευση κυρτών και συμπαγών συνόλων σε ένα χώρο *Banach* και ύστερα θεώρησε το ολοκλήρωμα *Bochner* σε αυτό το χώρο. Ωστόσο η προσέγγιση του *Aumann* που θεωρεί την ολοκλήρωση επιλογών (*selections*) θεωρείται από τις πιο κατάλληλες για εφαρμογές σε διάφορους μαθηματικούς τομείς. Στις τρεις παραπάνω προσεγγίσεις τα βασικά εργαλεία είναι θεωρητικές τεχνικές μέτρου.

Ο *Aumann* πρότεινε τον παρακάτω ορισμό για μια πλειότιμη απεικόνιση:

Ορισμός 1.1. *[1] Το ολοκλήρωμα της F στο Ω είναι το σύνολο των ολοκληρωμάτων των ολοκληρώσιμων επιλογών (selections) της F*

$$\int_\Omega F d\mu := \{\int_\Omega f d\mu | f \in F\}$$

Το ολοκλήρωμα είναι κυρτό όπου η F έχει κυρτές τιμές.

1.2.3 Επιλογές (*selections*) και παραμετρικοποίηση

Δεν μπορούμε να αποφύγουμε τις απαντήσεις σε δυο λογικά ερωτήματα: Μπορούμε να βρούμε επιλογές πλειότιμων απεικονίσεων που να κληρονομούν τις ιδιότητες κανονικότητας τους; Είναι οι πλειότιμες απεικονίσεις παραμετρικοποιήσιμες;

Θα δείξουμε ότι οι μετρήσιμες πλειότιμες απεικονίσεις έχουν μετρήσιμες επιλογές (*selections*) κι ότι οι συνεχείς (*Caratheodory*, *Lipschitz*) απεικονίσεις έχουν συνεχείς επιλογές κάτω από αυστηρές απαιτήσεις. Οι εικόνες των πλειότιμων απεικονίσεων πρέπει να είναι κυρτές.

Πράγματι, μια *Lipschitz* πλειότιμη απεικόνιση F με κλειστές, κυρτές εικόνες είναι παραμετρικοποιήσιμη ώστε να υπάρχει ένας " χώρος ελέγχου " U και μια απεικόνιση *Lipschitz* $f : X \times U \mapsto X$ τέτοια ώστε

$$\forall x, F(x) = \{f(x,u)\}_{u \in U}$$

Επομένως αυτή τάξη πλειότιμων απεικονίσεων είναι υποχρεωτικά φτιαγμένη από οικογένειες μονότιμων απεικονίσεων.

Κεφάλαιο 2

Πλειότιμες απεικονίσεις και Συνέχεια

Αυτό το κεφάλαιο αναφέρεται στις βασικές ιδιότητες συνέχειας των πλειότιμων απεικονίσεων. Το πρώτο ζήτημα που αντιμετωπίζουμε είναι πως να ορίσουμε την αντίστροφη εικόνα ενός συνόλου κάτω από τη δράση μιας πλειότιμης απεικόνισης. Υπάρουν δυο δυνατότητες:

Ορισμός 2.1. *([3], ορ. 4.1.1) Αν X και Y είναι σύνολα, $F : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ είναι μια πλειότιμη απεικόνιση και $A \subseteq Y$, τότε*

1. *η “ ασθενής αντίστροφη εικόνα ” του A υπό την F είναι το σύνολο $F^-(A) = \{x \in X : F(x) \cap A \neq \emptyset\}$*
2. *η “ ισχυρή αντίστροφη εικόνα ” του A υπό την F είναι το σύνολο $F^+(A) = \{x \in X : F(x) \subseteq A\}$*

Τώρα είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε τις πρώτες έννοιες συνέχειας για πλειότιμες απεικονίσεις. Σε ότι ακολουθεί οι X και Y είναι τοπολογικοί χώροι $Hausdorff$.

Ορισμός 2.2. *([3], ορ 4.1.3) Έστω $F : X \to 2^Y$ μια πλειότιμη απεικόνιση*

1. *Θα λέμε ότι η F είναι “ upper hemicontinuous στο x_0 ”, αν για όλα τα $V \subseteq Y$ ανοικτά τέτοια ώστε $F(x_0) \subseteq V$, μπορούμε να βρούμε ένα $U \in \mathcal{N}(x_0)$ τέτοιο ώστε $F(U) \subseteq V$. Λέμε ότι είναι upper hemicontinuous, αν είναι upper hemicontinuous σε κάθε $x_0 \in X$. Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τη συντόμευση “uhc ”*
2. *Θα λέμε ότι η F είναι “ lower hemicontinuous στο x_0 ” , αν για όλα*

τα $V \subseteq Y$ ανοικτά τέτοια ώστε $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ μπορούμε να βρούμε $U \in \mathcal{N}(x_0)$ τέτοιο ώστε $F(x) \cap V \neq \emptyset$ για όλα τα $x \in U$. Λέμε ότι η F είναι lower hemicontinuous αν είναι lower hemicontinuous σε κάθε $x_0 \in X$. Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τη συντόμευση " lhc ".

3. *Θα λέμε ότι η F είναι Vietoris στο x_0, αν είναι ταυτόχρονα "uhc " και "lhc " στο x_0.Λέμε ότι η F είναι συνεχής (ή Vietoris συνεχής), αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$*

Οι επόμενες τρεις προτάσεις προκύπτουν εύκολα από τους παραπάνω ορισμούς.

Πρόταση 2.3. *([3], προτ.4.1.4) Για μια πλειότιμη απεικόνιση $F : X \to 2^Y$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *η F είναι " uhc "*
2. *για κάθε $C \subseteq Y$ κλειστό, το $F^-(C)$ είναι κλειστό στο X*
3. *αν $x \in X$, $\{x_a\}_{a \in J}$ είναι μια ακολουθία στο X που συγκλίνει στο x και $V \subseteq Y$ είναι ανοικτό τέτοιο ώστε $F(x) \subseteq V$, τότε μπορούμε να βρούμε ένα $a_0 \in J$ τέτοιο ώστε για $a \geq a_0$ να έχουμε $F(x_a) \subseteq V$*

Πρόταση 2.4. *([3], προτ. 4.1.5) Για μια απεικόνιση $F : X \to Y$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *η F είναι "lhc "*
2. *για κάθε $C \subseteq Y$ κλειστό, το $F^+(C)$ είναι κλειστό στο X*
3. *αν $x \in X$,$\{x_a\}_{a \in J}$ είναι μια ακολουθία στο X που συγκλίνει στο x και $V \subseteq Y$ είναι ανοικτό τέτοιο ώστε $F(x) \cap V \neq \emptyset$, τότε μπορούμε να βρούμε $a_0 \in J$ τέτοιο ώστε για $a \geq a_0$ να έχουμε $F(x_a) \cap V \neq \emptyset$.*
4. *αν $\{x_a\}_{a \in J}$ είναι μια ακολουθία στο X που συγκλίνει στο $x \in X$ και $y \in F(x)$, μπορούμε να βρούμε $y_a \in F(x_a)$, $a \in J$ τέτοιο ώστε $y_a \to y$ στο Y.*

Πρόταση 2.5. *([3], προτ. 4.1.6) Για μια πλειότιμη απεικόνιση $F : X \to 2^Y$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *η F είναι συνεχής*
2. *για κάθε $C \subseteq Y$ κλειστό, τα $F^-(C)$ και $F^+(C)$ είναι κλειστά στο X*
3. *αν $x \in X$,$\{x_a\}_{a \in J}$ είναι μια ακολουθία στο X που συγκλίνει στο x και $V \subseteq Y$ είναι ανοικτό τέτοιο ώστε $F(x) \subseteq V$ ή $F(x) \cap V \neq \emptyset$, τότε*

μπορούμε να βρούμε $a_0 \in J$ τέτοιο ώστε $a \geq a_0$ να έχουμε $F(x_a) \subseteq V$ ή $F(x_a) \cap V \neq \emptyset$

Παρατήρηση 2.6. *Στον ορισμό της lower hemicontinuity μπορούμε να πάρουμε το V ως βασικό, ανοικτό σύνολο στο Y. Οι έννοιες της upper και lower hemicontinuity είναι γενικά διακριτές. Η πρώτη επιτρέπει προς τα πάνω άλματα σε σχέση με τον εγκλεισμό, ενώ η δεύτερη επιτρέπει μόνο προς τα κάτω άλματα.*

Για παράδειγμα

$$F_1(x) = \begin{cases} \{1\} \text{ αν } x \neq 0 \\ [0,1] \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι " lhc " στο $\mathbb{R}$, ενώ η πλειότιμη συνάρτηση

$$F_2(x) = \begin{cases} [0,1] \text{ αν } x \neq 0 \\ \{0\} \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι "lhc " αλλά όχι "uhc ". Επίσης αν $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ ορίζεται ως

$$F(x) = [\psi(x), \phi(x)] = \{\psi \in \mathbb{R} : \psi(x) \leq y \leq \phi(x)\},$$

τότε η F είναι "lhc " (ανάλογα "uhc ") αν η ψ είναι κάτω ημισυνεχής κι η ϕ είναι άνω ημισυνεχής (ανάλογα, η ψ είναι άνω ημισυνεχής κι η ϕ είναι κάτω ημισυνεχής). Τέλος αναφέρουμε ότι αν η F είναι μονότιμη απεικόνιση οι έννοιες της κάτω κι άνω ημισυνέχειας συμπίπτουν με την έννοια της συνέχειας.

Ορισμός 2.7. *([3], ορ. 4.1.8) Το γράφημα μιας πλειότιμης απεικόνισης $F : X \to 2^Y$ είναι το σύνολο $GrF = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$. Θα λέμε ότι η $F(x)$ είναι η εικόνα ή η τιμή της F στο x. Λέμε ότι το F είναι κλειστό στο $x_0 \in X$, αν για κάθε ακολουθία $\{(x_a, y_a)\}_{a \in J} \subseteq GrF$ τέτοιο ώστε $(x_a, y_a) \to (x_0, y_0)$ στο $X \times Y$, έχουμε $y_0 \in F(x_0)$ (δηλαδή $(x_0, y_0) \in GrF$). Λέμε ότι το F είναι κλειστό αν είναι κλειστό σε κάθε $x_0 \in X$ (δηλαδή $GrF \subseteq X \times Y$ είναι κλειστό). Αν ο παραπάνω ορισμός είναι αληθής μόνο για ακολουθίες λέμε ότι είναι ακολουθιακά κλειστό.*

Μια πλειότιμη απεικόνιση ονομάζεται μη τετριμμένη αν το γράφημα της δεν είναι κενό, δηλαδή αν υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $x \in X$ τέτοιο ώστε το $F(x)$ να μην είναι κενό.

Λέμε ότι η F είναι αυστηρή αν όλες οι εικόνες του $F(x)$ είναι μη κενές. Ο τομέας της F είναι το υποσύνολο των στοιχείων $x \in X$ τέτοιο ώστε το $F(x)$ να είναι μη κενό:

$$Dom(F) := \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\}$$

Η εικόνα της F είναι η ένωση των εικόνων ή τιμών $F(x)$, όταν κυμαίνεται στο X:

$$Im(F) := \bigcup_{x \in X} F(x)$$

Η αντίστροφη F^{-1} της F είναι η πλειότιμη απεικόνιση από το Y στο X που ορίζεται ως:

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in GrF$$

Ο τομέας της F είναι άρα η εικόνα της F^{-1} και συμπίπτει με την προβολή του γραφήματος στο χώρο X και κατά συμμετρικό τρόπο η εικόνα της F είναι ανάλογη του τομέα της F^{-1} και της προβολής του γραφήματος της F στο χώρο Y.

Αν K είναι ένα υποσύνολο του X, ονομάζουμε $F|_K$ τον περιορισμό της F στο K, που ορίζεται ως

$$F|_{K(x)} = \begin{cases} F(x) \text{ αν } x \in K \\ \emptyset \text{ αν } x \notin K \end{cases}$$

2.1 Συνεχείς επιλογείς (*selections*)

Αρχίζουμε αυτή την ενότητα παραθέτοντας το θεώρημα επιλογής του *Browder*.

Θεώρημα 2.8. *([2], θρμ. 17.63) Κάθε πλειότιμη απεικόνιση με κυρτές τιμές από ένα Hausdorff συμπαγή χώρο σε ένα κυρτό χώρο έχει συνεχή επιλογή (selection)*

Το θεώρημα επιλογής του *Browder* εφαρμόζεται σε κάθε τοπολογικό διανυσματικό χώρο αλλά απαιτείται η ισχυρή υπόθεση ανοικτών κάτω τομών. Ο *E.Michael* απέδειξε μια σειρά από θεωρήματα που αφορούν την ύπαρξη συνεχών επιλογέων (*selections*). Αυτά τα θεωρήματα απαιτούν μόνο την *lower hemicontinuity* των απεικονίσεων, αλλά απαιτούν ακόμη οι χώροι να είναι *Banach* (με την τοπολογία της νόρμας). Παρουσιάζουμε το μισό μόνο ενός απο αυτά τα θεωρήματα το οποίο εγγυάται την ύπαρξη συνεχών επιλογέων(*selectors*). Αλλά πρώτα χρειαζόμαστε δυο απλά λήμματα.

Λήμμα 2.9. *Έστω X ένας παρασυμπαγής (paracompact) χώρος κι έστω Y ένας τοπικά κυρτός χώρος και $\psi : X \to Y$ μια lower hemicontinuous απεικόνιση με μη κενές κυρτές τιμές. Αν V είναι μια ανοικτή κυρτή γειτονιά του μηδενός, τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ που ικανοποιεί $f(x) \in \psi(x) + V$ για κάθε $x \in X$.*

Αναφέρουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται παρασυμπαγής (*paracompact*) αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του έχει ένα τοπικά πεπερασμένο *filtration*.

Απόδειξη: Για κάθε $x \in X$ επιλέγουμε κάποια $y_x \in \psi(x)$ και σημειώνουμε ότι η οικογένεια $\{\psi^\ell(y_x + V) : x \in X\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Έστω $\{f_x : x \in X\}$ να είναι μια τοπικά πεπερασμένη συνεχής σύνθεση της μονάδας υποκείμενη σε αυτό το κάλυμμα. Τότε αφού $f_x(z) > 0$ προκύπτει ότι $z \in \psi^\ell(y_x + V)$, ή ανάλογα, $\psi_x \in \psi(z) + V$. Αφού η $\psi(z)$ κι ο V είναι κυρτοί αρα κι ο $\psi(z) + V$. Επομένως ο κυρτός συνδιασμός $f(z) = \sum_{x \in x} f_x(z) y_x$ ανήκει στο $\psi(z) + V$. Τώρα παρατηρούμε ότι η f είναι μια συνεχής συνάρτηση με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Λήμμα 2.10. *Έστω $\phi : X \to Y$ μια lower hemicontinuous απεικόνιση σε ένα τοπολογικό, διανυσματικό χώρο. Αν $f : X \to Y$ είναι συνεχής και U είναι μια ανοικτή γειτονιά του μηδενός, τότε η απεικόνιση $\psi : X \to Y$ που ορίζεται ως*

$$\psi(x) = \phi(x) \cap [f(x) + U]$$

είναι επίσης κάτω ημισυνεχής.

Απόδειξη: Έστω G έναι ανοικτό σύνολο στο Y και υποθέτουμε ότι $\psi_0 \in \phi(x_0) \cap [f(x_0) + U] \cap G$. Συγκεκριμένα , το ψ_0 ανήκει στο ανοικτό σύνολο $[f(x_0) + U] \cap G$. Επομένως υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά του μηδενός τέτοια ώστε

$$\psi_0 + V + V \subset [f(x_0) + U] \cap G.$$

Έστω $W = f^{-1}(f(x_0) + V)$. Η συνέχεια της f εγγυάται ότι η W είναι μια ανοικτή γειτονιά του x_0. Ύστερα ισχυριζόμαστε ότι $\psi_0 + V \subset f(x) + U$ για κάθε $x \in W$.

Για να το δούμε αυτό υποθέτουμε ότι $u \in V$ και $x \in W$. Τότε $w = f(x_0) - f(x) \in V$. Αφού $\psi_0 + V + V \subset f(x_0) + U$, τότε υπάρχει ένα $u \in U$ που ικανοποιεί $\psi_0 + u + w = f(x_0) + u$. Ξαναγράφοντας παίρνουμε

$$\psi_0 + u = f(x_0) - w + u = f(x) + u \in f(x) + U.$$

Αφού το $\psi_0 \in \phi(x_0) \cap (\psi_0 + V)$, βλέπουμε ότι το $x_0 \in \phi^\ell(\psi_0 + V)$. Τώρα ας θεωρήσουμε ότι τη γειτονιά $N = W \cap \phi^\ell(\psi_0 + V)$του x_0 . Αν το $x \in N$, τότε

$$\psi(x) \cap G = \phi(x) \cap [f(x) + U] \cap G \supset \phi(x) \cap [f(x) + U] \cap (\psi_0 + V) = \phi(x) \cap (\psi_0 + V) \neq \emptyset,$$

τότε το $\psi(x) \cap G \neq \emptyset$. Έτσι η ψ είναι *lower hemicontinuous*.

Θεώρημα 2.11. *([2], θρμ. 16.61) (Θεώρημα Επιλογής του Michael) Μια lower hemicontinuous απεικόνιση από ένα παρασυμπαγή (paracompact) χώρο σε ένα χώρο Banach με μη κενές κυρτές τιμές δέχεται ένα συνεχή επιλογέα (selector).*

Απόδειξη:Έστω X, παρασυμπαγής (*paracompact*) , κι έστω Y ένας *Banach* χώρος κι έστω $\phi : X \to Y$ να είναι μια *lower hemicontinuous* απεικόνιση με μη κενές, κλειστές, κυρτές τιμές. Έστω $U = \{y \in Y : \|y\| < 1\}$ η ανοικτή μοναδιαία μπάλα του Y. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ένας επιλογέας $f_0 : X \to Y$ από την απεικόνιση ϕ και μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_1, f_2, ...$ από το X στο Y που ικανοποιεί

1. $f_n(x) \in \phi(x) + \frac{1}{2^n}U$
2. $f_n(x) \in f_{n-1}(x) + \frac{1}{2^{n-2}}U$

για κάθε $n = 1, 2, ...$ και κάθε $x \in X$.

Για να καταστήσουμε εφικτή την ύπαρξη μιας τέτοιας ακολουθίας λειτουργούμε επαγωγικά. Για $n = 1$, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f_1 : X \to Y$ που ικανοποιεί $f_1(x) \in \phi(x) + \frac{1}{2}U \subset \phi(x) + 2U$ για κάθε $x \in X$. Συγκεκριμένα υπάρχει ένας επιλογέας (*selector*) $f_0 : X \to Y$ από την απεικόνιση ϕ που ικανοποιεί $f_1(x) \in f_0(x) + 2U = f_0(x) + \frac{1}{1^{1-2}}U$.

Τώρα, για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι $f_0 : X \to Y$ είναι ένας επιλογέας από τη ϕ και οι συνεχείς συναρτήσεις $f_1, ..., f_k$ από το X στο Y έχουν επιλεγεί για να ικανοποιούν τα (1),(2) για κάθε $n = 1, ..., k$. Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $\psi : X \to Y$ που ορίζεται ως

$$\psi(x) = \phi(x) \cap [f_k(x) + \frac{1}{2^k}U].$$

Από το (1) εύκολα προκύπτει ότι $\psi(x) \neq \emptyset$ για κάθε x κι ότι η ψ είναι *lower hemicontinuous*. Τώρα υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f_{k+1} : X \to Y$ που ικανοποιεί $f_{k+1}(x) \in \psi(x) + \frac{1}{2^{k+1}}U$ για κάθε x.

Επομένως, για κάθε $x \in X$ έχουμε:

1. $f_{k+1}(x) \in \phi(x) + \frac{1}{2^{k+1}}U$ και
2. $f_{k+1}(x) \in f_k(x) + \frac{1}{2^k}U + \frac{1}{2^{k+1}}U \subset f_k(x) + \frac{1}{2^{k-1}}U = f_k(x) + \frac{1}{2^{(k+1)-2}}U,$

και η επαγωγή είναι πλήρης.
Ύστερα παρατηρούμε ότι από το (2) έχουμε $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ για κάθε $x \in X$ και όλα τα $n = 1, 2, ...$ Άρα $\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ για όλα τα n και p και κάθε x. Αυτό σημαίνει ότι η $\{f_n\}$ είναι μια ομοιόμορφα *Cauchy* ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Αφού ο Y είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα, η

$\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Αφού η ϕ είναι κλειστών τιμών, προκύπτει από το (1) ότι $f(x) \in \phi(x)$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, η f έχει ένα συνεχή επιλογέα (*selector*) από την απεικόνιση ϕ.

Πόρισμα 2.12. *([2], πορ. 16.62) Ένας επί, συνεχής γραμμικός τελεστής ανάμεσα σε χώρους Banach έχει μια (όχι απαραίτητα γραμμική) συνεχή δεξιά αντίστροφη.*

Απόδειξη: Έστω $T : X \to Y$ ένας επί γραμμικός τελεστής σε χώρους *Banach*. Τότε η αντίστροφη απεικόνιση $\phi : Y \to X$ που ορίζεται ως $\phi(y) = T^{-1}(y)$ περιέχει μη κενές, κλειστές και κυρτές τιμές. Αφού η T είναι ανοικτό γράφημα τότε η ϕ είναι *lower hemicontinuous* κι άρα επιδέχεται ένα συνεχή επιλογέα (*selector*). Αλλά κάθε επιλογέας (*selector*) $S : Y \to X$ από τη ϕ ικανοποιεί $T(S(y)) = y$ για κάθε $y \in Y$.

Κεφάλαιο 3

Μετρήσιμες απεικονίσεις

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε το S να αποτελεί ένα μετρήσιμο χώρο και ο X ένα τοπολογικό χώρο (συνήθως μετρικοποιήσιμο). Ας ονομάσουμε Σ τη σ-άλγεβρα των μετρήσιμων υποσυνόλων του S, και ας εξοπλίσουμε το X με τη Borel $\sigma-$ άλγεβρα του B_x. Μια ειδική περίπτωση είναι όταν S είναι ένας τοπολογικός χώρος και Σ η Borel σ- άλγεβρα του. Πρωτίστης σημασίας είναι αν μια απεικόνιση $\phi : S \Rightarrow X$ δέχεται επιλογέα (selector) που είναι μετρήσιμος. Ιδανικά θέλουμε μια έννοια μετρησιμότητας για απεικονίσεις έτσι ώστε κάθε μετρήσιμη απεικόνιση να έχει ένα μετρήσιμο επιλογέα (selector). Δυστυχώς όμως αυτό δεν είναι κάτι που μπορεί να γίνει άμεσα.

Ορισμός 3.1. *([4], ορ. 9.1.1) Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και X ένας πλήρης, διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Θεωρούμε μια πλειότιμη απεικόνιση $F : \Omega \to X$. Μια μετρήσιμη απεικόνιση $f : \Omega \to X$ που ικανοποιεί*

$$\forall \omega \in \Omega, f(\omega) \in F(\omega)$$

ονομάζεται μια μετρήσιμη επιλογή της F.

Μια προφανής προσέγγιση είναι να ορίσουμε την μετρησιμότητα σε σχέση με τις κάτω αντίστροφες εικόνες Borel-συνόλων. Καταλήγει όμως να είναι άκρως περιοριστικό να απαιτούμε την κάτω αντίστροφη εικόνα κάθε Borel υποσυνόλου του X να είναι μετρήσιμο σύνολο. Έτσι αναζητούμε ορισμούς οι οποίοι είτε απαιτούν οι κάτω αντίστροφες εικόνες κλειστών μετρήσιμων συνόλων να είναι μετρήσιμες είτε οι άνω αντίστροφες εικόνες ανοικτών μετρήσιμων υποσυνόλων να είναι μετρήσιμες. Για τις συναρτήσεις δεν υπάρχει διαφορά μιας και

$f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$. Αυτό δεν είναι αληθές ούτε για τις άνω ούτε για τις κάτω αντίστροφες εικόνες μιας απεικόνισης, κι οι δυο αυτές προσεγγίσεις οδηγούν σε διαφορετικές έννοιες μετρησιμότητας, εκτός κι αν η απεικόνιση έχει συμπαγείς τιμές. Ονομάζουμε μια απεικόνιση μετρήσιμη αν η κάτω εικόνα κάθε κλειστού συνόλου είναι μετρήσιμη και ασθενώς μετρήσιμη αν η κάτω εικόνα κάθε ανοικτού συνόλου είναι μετρήσιμη. Αυτή η επιλογή των ορισμών οδηγεί σε κάποια αξιόλογα αποτελέσματα.

Μια ασθενέστερη έννοια της μετρησιμότητας για μια απεικόνιση είναι να είναι το γράφημα της ένα μετρήσιμο υποσύνολο. Μια ασθενώς μετρήσιμη απεικόνιση έχει μετρήσιμο γράφημα αλλά μια απεικόνιση με μετρήσιμο γράφημα δεν είναι απαραίτητα ασθενώς μετρήσιμη. Υπάρχουν δυο τρόποι γύρω απο αυτό το πρόβλημα. Ο πρώτος είναι να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερη σ-άλγεβρα στο S από την Borel-άλγεβρα. Πράγματι η σ- άλγεβρα των γενικά μετρήσιμων συνόλων φαίνεται να είναι η κατάλληλη. Αν θέλουμε να αποφύγουμε τοπολογικούς περιορισμούς στο S μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Σ είναι πλήρης για κάποιο μέτρο μ. Μια άλλη έννοια της μετρησιμότητας προκύπτει όταν τις χειριζόμαστε σαν συναρτήσεις στο χώρο $\mathcal{F}$ μη κενών κλειστών συνόλων.

Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα πάνω στις μετρήσιμες απεικονίσεις είναι το θεώρημα των Kuratowski-Ryll-Nardsewski της μετρήσιμης επιλογής (*selection*) το οποίο επιβεβαιώνει ότι μια ασθενώς μετρήσιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές τιμές σε ένα *Polish* χώρο (*Polish* χώρος ονομάζεται ο χώρος που είναι μετρικοποιήσιμος κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι πλήρης και διαχωρίσιμος) έχει ένα μετρήσιμο επιλογέα (*selector*). Αυτό εφαρμόζεται για να αποδείξει το θεώρημα υπονοούμενης (*implicit*) συνάρτησης του *Filippov* και το θεώρημα μετρήσιμου μεγίστου. Το τελευταίο είναι ένα χρήσιμο αποτέλεσμα που δίνει τις υποθέσεις για να είναι το σύνολο λύσεων ενός παραμετρικού προβλήματος μεγιστοποίησης μετρήσιμο και για να είναι η συνάρτηση βέλτιστης τιμής επίσης μετρήσιμη. Αναφέρουμε αρχικά το θεώρημα χαρακτηρισμού:

Θεώρημα 3.2. *([4], θρμ. 8.1.4) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης σ-πεπερασμένος μετρικός χώρος, X πλήρης, διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $F : \Omega \to X$ μια πλειότιμη απεικόν ιση με μη κενές, κλειστές εικόνες. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

- *η F είναι μετρήσιμη*
- *το γράφημα της F ανήκει στο $A \otimes \mathcal{B}$*
- *η $F^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ για κάθε κλειστό σύνολο $C \subset X$*
- *η $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε Borel σύνολο $B \subset X$*

- *για όλα τα $x \in X$ η απεικόνιση $d(x, F(\cdot))$ είναι μετρήσιμη*
- *υπάρχει μια ακολουθία μετρήσιμων επιλογών (selections) $(f_n)_{n\geq 1}$ της F τέτοια ώστε $\forall \omega \in \Omega$, $F(\omega) = \overline{\bigcup_{n\geq 1} f_n(\omega)}$*

Μια μετρήσιμη οικογένεια επιλογών που ικανοποιούν την τελευταία ιδιότητα ονομάζεται πυκνή.

Ακόμη αποδεικνύουμε ένα θεμελειώδες αποτέλεσμα που συνδέει την μετρησιμότητα μιας αντιστοιχίας συμπαγών, κυρτών τιμών με τη μετρησιμότητα των συναρτησιακών υποστηριγμάτων (*support functionals*). Οι μετρήσιμες απεικονίσεις μπορούν να είναι ολοκληρώσιμες. Το ολοκλήρωμα ορίζεται να είναι το σύνολο των ολοκληρωμάτων των επιλογέων (*selectors*) από την απεικόνιση.

3.2 Έννοιες μετρησιμότητας

Ξεκινάμε με μερικές φυσικές αλλά όχι ισοδύναμες έννοιες μετρησιμότητας.

Ορισμός 3.3. *([2], ορ. 17.1) Έστω (S, Σ) ένας μετρήσιμος χώρος και X ένας τοπολογικός χώρος. Θα λέμε ότι μια απεικόνιση $\phi : S \longrightarrow X$ είναι:*

- *ασθενώς μετρήσιμη, αν $\phi^\ell(G) \in \Sigma$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X.*
- *μετρήσιμη, αν $\phi^\ell(F) \in \Sigma$ για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X.*
- *Borel μετρήσιμη, αν $\phi^\ell(B) \in \Sigma$ για κάθε Borel υποσύνολο B του X*

Για παράδειγμα μια απεικόνιση ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη αν και μόνο αν η $\phi^u(F)$ ανήκει στον Σ για κάθε κλειστό σύνολο F, αφού $\phi^u(F) = [\phi^\ell(F^c)]^c$. Ας σημειώσουμε ότι η ασθενής μετρησιμότητα δεν έχει να κάνει με τις ασθενείς τοπολογίες. Προφανώς η μετρησιμότητα κι η ασθενής μετρησιμότητα είναι ασθενέστερες υποθέσεις από τη *Borel* μετρησιμότητα. Επίσης να σημειώσουμε ότι δεν απαιτούμε η ϕ να έχει μη κενές τιμές, αλλά παρατηρούμε ότι αν η ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη ή μετρήσιμη τότε $\{s \in S : \phi(s) \neq \emptyset\} = \phi^\ell(X)$ είναι μετρήσιμο. Έτσι η υπόθεση μη κενών τιμών δεν είναι περιοριστική.

Αν η ϕ είναι μονότιμη συνάρτηση, δηλαδή, αν ορίζει μια συνάρτηση τότε η μετρησιμότητα, η ασθενής μετρησιμότητα κι η *Borel* μετρησιμότητα της ϕ συμπίπτουν με την *Borel* μετρησιμότητα της ϕ σαν συνάρτηση. Η βασική διαφορά μεταξύ συναρτήσεων κι απεικονίσεων σε σχέση με τις αντίστροφες εικόνες είναι ότι παίρνοντας τις αντίστροφες εικόνες κάτω από μια συνάρτηση αντιμετατίθεται με συμπληρωματικότητα, ένωση και τομή. Αυτό δεν είναι αληθές για την άνω ή κάτω αντίστροφη εικόνα μιας απεικόνισης. Συμπερασματικά η σχέση μεταξύ ασθενούς μετρησιμότητας και μετρησιμότητας δεν είναι άμεση. Για μετρικούς χώρους, όμως, η κατάσταση είναι ξεκάθαρη.

Λήμμα 3.4. *Για μια απεικόνιση $\phi : (S, \Sigma) \longrightarrow X$ από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα μετρικοποιήσιμο έχουμε τα επόμενα:*

1. *Αν η ϕ είναι μετρήσιμη τότε είναι επίσης και ασθενώς μετρήσιμη.*
2. *Αν η ϕ είναι συμπαγών τιμών και ασθενώς μετρήσιμη τότε είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη:(1) Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Το ανοικτό σύνολο G είναι ένα $\mathcal{F}_\sigma$. Μπορούμε να γράψουμε $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Τότε

$$\phi^\ell(G) = \phi^\ell(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^\ell(F_n),$$

το οποίο ανήκει στο Σ, αφού η ϕ είναι μετρήσιμη.

(2)Έστω $\phi : (S, \Sigma) \longrightarrow X$ μια συμπαγών τιμών, ασθενώς μετρήσιμη απεικόνιση από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα μετρικοποιήσιμο χώρο. Δημιουργούμε μια μετρική d για το X κι έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του X. Αν το X είναι κενό τότε $\phi^\ell(F) = \emptyset$, το οποίο ανήκει στο Σ. Έτσι υποθέτουμε ότι η F δεν είναι κενή. Για κάθε n βάζουμε $G_n = \{x \in X : d(x, F) > 1/n\}$, κι έστω $F_n = \overline{G_n}$. Τότε $F^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι $\phi(s) \subset F^c$. Αφού $G_n \subset G_{n+1}$ για κάθε n κι η $\phi(s)$ είναι συμπαγής , υπάρχει κάποιο n για το οποίο $\phi(s) \subset G_n \subset F_n$. Αυτό δείχνει ότι η $\phi^u(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) = \cup_{n=1}^{\infty} \phi^u(F_n)$. Συμπερασματικά,

$$\phi^\ell(F) = [\phi^u(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)]^c = [\bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^u(F_n)]^c = [\bigcup_{n=1}^{\infty} [\phi^\ell(F_n)^c]^c]^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi^\ell(F_n^c)$$

Αφού η ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη, $\phi^\ell(F_n^c) \in \Sigma$ για κάθε n. Άρα $\phi^\ell(F) \in \Sigma$, άρα η ϕ είναι μετρήσιμη.

Αναφέρουμε ότι αν το πεδίο τιμών των ϕ βρίσκεται σε κάποιο υποσύνολο Y του X, τότε η ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη σαν μια απεικόνιση στο Y εφοδιασμένη με τη σχετική της τοπολογία αν και μόνο αν είναι ασθενώς μετρήσιμη σαν μια απεικόνιση στο X. Η απόδειξη αυτού είναι απλά θέμα ορισμών. Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι παίρνοντας την κλειστότητα διατηρείται η ασθενής μετρησιμότητα.

Λήμμα 3.5. *Μια απεικόνιση $\phi : S \longrightarrow X$ από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα τοπολογικό χώρο είναι ασθενώς μετρήσιμη αν και μόνο αν η κλειστότητα της $\bar{\phi}$, που ορίζεται ως $\overline{\phi}(s) = \overline{\phi(s)}$, είναι ασθενώς μετρήσιμη.*

Απόδειξη: Αν G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X, τότε ας σημειώσουμε ότι $\phi(s) \cap G \neq \emptyset$ αν και μόνο αν $\overline{\phi(s)} \cap G \neq \emptyset$, και το συμπέρασμα ακολουθεί.

Το επόμενο αποτέλεσμα περιγράφει τις ιδιότητες της ασθενούς μετρησιμότητας μετρήσιμων ενώσεων, τομών και γινομένων απεικονίσεων.

Λήμμα 3.6. *(Πράξεις και μετρησιμότητα) Για μια ακολουθία $\{\phi_n\}$ απεικονίσεων από ένα μετρήσιμο χώρο (S, Σ) σε ένα τοπολογικό χώρο X έχουμε τα επόμενα:*

1. *Η ένωση απεικόνιση $\phi : S \longrightarrow X$, που ορίζεται ως $\phi(s) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$, είναι*

   α. ασθενώς μετρήσιμη αν κάθε ϕ_n είναι ασθενώς μετρήσιμη,

   β. μετρήσιμη αν κάθε ϕ_n είναι μετρήσιμη, και

   γ. Borel μετρήσιμη αν κάθε ϕ_n είναι Borel μετρήσιμη.

2. *Αν X είναι ένας μετρικοποιήσιμος, διαχωρίσιμος χώρος και κάθε ϕ_n είναι ασθενώς μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση-γινόμενο $\psi : S \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$ ορίζεται απο την $\psi(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$, είναι ασθενώς μετρήσιμη.*

3. *Αν X είναι ένας διαχωρίσιμος, μετρήσιμος χώρος, κάθε ϕ_n είναι ασθενώς μετρήσιμη με κλειστές τιμές, και για κάθε s υπάρχει κάποιο k τέτοιο ώστε $\phi_k(s)$ να είναι συμπαγές τότε η τομή $\theta : S \longrightarrow X$ που ορίζεται ως $\theta(s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$ είναι μετρήσιμη κι επομένως ασθενώς μετρήσιμη.*

Απόδειξη: (1) Αυτό προκύπτει από την ταυτότητα $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n)^{\ell}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} {\phi_n}^{\ell}(A)$.
(2) Αφού ο X είναι ένας διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος τότε και $X^{\mathbb{N}}$ είναι ένας διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος. Έστω G να είναι ανοικτό στο $X^{\mathbb{N}}$. Τότε το G μπορεί να γραφεί σαν μια μετρήσιμη ένωση $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ βασικών, ανοικτών συνόλων της μορφής $U_k = \prod_{n=1}^{\infty} U_{k,n}$, όπου για κάθε k, $U_{k,n}$ είναι ανοικτό για όλα τα n και $U_{k,n} = X$ για όλα τα αλλά αριθμήσιμα πολλά n. Έτσι

$$\psi^{\ell}(G) = \psi^{\ell}(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \psi^{\ell}(U_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_n^{\ell}(U_{k,n}),$$

το οποίο ανήκει στο Σ. Έτσι η ψ είναι ασθενώς μετρήσιμη.

(3) Πρώτα υποθέτουμε ότι κάθε ϕ_n έχει κυρτές τιμές. Τότε από το (2) η απεικόνιση γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} \phi_n : S \to X^{\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μετρήσιμη, κι αφού

έχει συμπαγείς τιμές είναι και μετρήσιμη. Τώρα ας παρατηρήσουμε ότι για ένα κλειστό σύνολο $F \subset X$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\theta^{\ell} &= \left\{ s \in S : \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n(s) \right] \cap F \neq \emptyset \right\} \\
&= \left\{ s \in S : \left[\prod_{n=1}^{\infty} \Phi_n(s) \right] \cap F^{\mathbb{N}} \neq \emptyset \right\} \\
&= \left[\prod_{n=1}^{\infty} \Phi_n(s) \right]^{\ell} \left(F^{\mathbb{N}} \cap D \right),
\end{aligned}$$

όπου D η διαγώνιος του $X^{\mathbb{N}}$, δηλαδή, $D = \{(x)_{n \in \mathbb{N}} : x \in X\}$. Τώρα ας παρατηρήσουμε ότι $F^{\mathbb{N}} \cap D$ είναι κλειστό στο $X^{\mathbb{N}}$. Έτσι η μετρησιμότητα του $\prod_{n=1}^{\infty} \phi_n$ υπονοεί ότι $\theta^{\ell}(F) \in \Sigma$ για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X.

Τώρα ας αφήσουμε την υπόθεση ότι κάθε $\phi_n(s)$ είναι συμπαγές. Τότε ο χώρος X έχει μια μετρικοποιήσιμη συμπαγοποίηση (*compactification*), $\hat{X}$. Για κάθε n ορίζουμε $\widehat{\phi_n(s)} : S \longrightarrow \hat{X}$ ως $\widehat{\phi_n}(s) = \overline{\phi_n(s)}$, την κλειστότητα της $\phi_n(s)$ στο $\hat{X}$. Από το λήμμα 3.3 κάθε $\widehat{\phi_n}$ είναι ασθενώς μετρήσιμη. Αλλά η $\widehat{\phi_n}$ είναι συμπαγών τιμών άρα μετρήσιμη σύμφωνα με το λήμμα 3.2.

Αναφέρουμε ότι η συμπαγοποίηση (*compactification*) αποτελεί τη διαδικασία ή το αποτέλεσμα του να μετατρέπουμε ένα τοπολογικό χώρο σε συμπαγή. Οι μέθοδοι συμπαγοποίησης ποικίλουν αλλά ο καθένας από αυτούς είναι ένας τρόπος ελέγχου των σημείων από το να " πηγαίνουν " στο άπειρο προσθέτοντας σημεία στο άπειρο ή προβλέποντας μια τέτοια " διαφυγή ".

Από το προηγούμενο συμπέρασμα, η απεικόνιση $\widehat{\theta} : S \longrightarrow \hat{X}$ που ορίζεται ως $\widehat{\theta(s)} = \cap_{n=1}^{\infty} \widehat{\phi_n(s)}$ είναι μετρήσιμη. Αλλά αν το $\phi_k(s)$ είναι ήδη συμπαγές για κάποιο k, τότε $\widehat{\phi_k(s)} = \phi_k(s) \subset X$ για αυτό το k. Άρα $\widehat{\theta(s)} \subset X$ για κάθε $s \in S$. Ακόμη, αφού κάθε $\phi_n : S \longrightarrow X$ έχει κλειστές τιμές, είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\widehat{\phi_n(s)} \cap X = \phi_n(s)$ για κάθε s. Αυτό υπονοεί ότι

$$\widehat{\theta(s)} = [\bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{\phi_n(s)}] \cap X = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\widehat{\phi_n}(s) \cap X] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) = \theta(s)$$

Επομένως η θ είναι μια μετρήσιμη απεικόνιση από το S στο $\hat{X}$.

Τώρα έστω F ενα κλειστό υποσύνολο του X. Αν $\bar{F}$ είναι η κλειστότητα του F στο $\hat{X}$, τότε $\bar{F} \cap X = F$, έτσι

$$\theta^{\ell}(F) = \{s \in S : \theta(s) \cap F \neq \emptyset\} = \{s \in S : \widehat{\theta(s)} \cap \bar{F} \neq \emptyset\} = (\hat{\theta})^{\ell}(\bar{F}) \in \Sigma.$$

Αυτό δείχνει ότι η $\theta : S \longrightarrow X$ είναι μετρήσιμη.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις του Καραθεοδωρή για να χαρακτηρίσουμε τη μετρησιμότητα των απεικονίσεων σε σχέση με τη μετρησιμότητα των συναρτήσεων απόστασης που σχετίζονται με απεικονίσεις. Αν $\phi : (S, \Sigma) \longrightarrow (X, d)$ είναι μια απεικόνιση μη κενών τιμών από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα μετρικό χώρο, τότε η συνάρτηση απόστασης που σχετίζεται με τη ϕ είναι η συνάρτηση $\delta : S \times X \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\delta(s, x) = d(x, \phi(s))$$

Για κάθε $x \in X$ έστω δ_x ονομάζουμε τη συνάρτηση $\delta_x : S \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\delta_x(s) = \delta(s, x) = d(x, \phi(s))$. Ας θυμηθούμε ότι μια συνάρτηση $f : S \times X \to Y$ όπου (S, Σ) είναι μετρήσιμος χώρος και X και Y είναι τοπολογικοί χώροι, είναι μια συνάρτηση Καραθεοδωρή αν είναι συνεχής στο x και μετρήσιμη στο s κι επίσης οτι αυτές οι συναρτήσεις είναι γενικώς μετρήσιμες υπό ήπιες συνθήκες.

Θεώρημα 3.7. *([2], θρμ. 17.5) (Ασθενής μετρησιμότητα και συναρτήσεις απόστασης)*
Μια απεικόνιση μη κενών τιμών από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο είναι ασθενώς μετρήσιμη αν και μόνο αν η συνάρτηση απόστασης είναι μια Καραθεοδωρή συνάρτηση.

Απόδειξη: Έστω $\phi : (S, \Sigma) \longrightarrow (X, d)$ μια απεικόνιση μη κενών τιμών από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο. Αφού (X, d) είναι διαχωρίσιμος, κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι ένωση αριθμήσιμης οικογένειας ανοικτών d-μπαλών. Αφού $\phi^{\ell}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \phi^{\ell}(A_i)$, βλέπουμε ότι η ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη αν και μόνο αν $\phi^{\ell}(B_{\epsilon}(x))$ ανήκει στο Σ για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$. Αλλά

$$\phi^{\ell}(B_{\epsilon}(x)) = \{s \in S : d(x, \phi(s)) < \epsilon\} = \delta_x^{-1}((-\infty, \epsilon)).$$

Άρα η ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη αν και μόνο αν $\delta_x = \delta(\cdot, x)$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση για κάθε $x \in X$. Αφού $\delta(s, x) = d(x, \phi(s))$ είναι αυτομάτως συνεχής στο x, για κάθε s, αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η δ είναι μια Καραθεοδωρή συνάρτηση.

Η κλειστότητα μιας ασθενούς μετρήσιμης απεικόνισης σε ένα μετρικοποιήσιμο διαχωρίσιμο χώρο έχει μετρήσιμο γράφημα.

Θεώρημα 3.8. *([2], θρμ. 17.6) (Ασθενής μετρησιμότητα και μετρήσιμο γράφημα) Έστω $\phi : (S, \Sigma) \longrightarrow (X, d)$ να είναι μια απεικόνιση μη κενών τιμών από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα διαχωρίσιμο, μετρικοποιήσιμο χώρο. Αν η ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη, τότε η κλειστότητα της $\bar{\phi}$ έχει μετρήσιμο γράφημα, το οποίο είναι $Gr\bar{\phi} \in \Sigma \otimes \mathcal{B}_X$.*

Απόδειξη: Από το προηγούμενο θεώρημα (3.6) η συνάρτηση απόστασης δ της ϕ είναι μια Καραθεοδωρή συνάρτηση κι έτσι μετρήσιμη. Άρα $Gr\bar{\phi} = \delta^{-1}(\{0\}$ ανήκει στο $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις Καραθεοδωρή για να ταυτοποιήσουμε μια μεγάλη τάξη ασθενών μετρήσιμων απεικονίσεων.

Λήμμα 3.9. *Υποθέτουμε ότι $f : S \times X \to Y$ είναι μια Καραθεοδωρή συνάρτηση, όπου (S, Σ) είναι μετρήσιμος χώρος, X ένας διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος, και Y ένας τοπολογικός χώρος. Για κάθε υποσύνολο G του X ορίζουμε την απεικόνιση $\phi_G : S \longrightarrow X$ ως*

$$\phi_G(s) = \{x \in X : f(s, x) \in G\}.$$

Αν G είναι ανοικτό, τότε η ϕ_G είναι μια μετρήσιμη απεικόνιση.

Απόδειξη: Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του X, και δημιουργούμε ένα αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο $\{x_1, x_2, ...\}$ του X. Τώρα

$$\begin{aligned}
\phi^{\ell} &= \{s \in S : \phi(s) \cap F \neq \emptyset\} \\
&= \{s \in S : f(s, x) \in G \text{ για κάποιο } x \in F\} \\
&= \{s \in S : f(s, x_n) \in G \text{ για κάποιο } n\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s \in S : f(s, x_n) \in G\},
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από τη συνέχεια της f στο x. Αφού η f είναι μετρήσιμη στο s για κάθε $x \in X$, κάθε σύνολο $\{s \in S : f(s, x_n) \in G\}$ ανήκει στο Σ για κάθε n, έτσι η ϕ είναι μετρήσιμη.

Πόρισμα 3.10. *([2], πορ. 17.8) Έστω $f : S \times X \to \mathbb{R}$ μια Καραθεοδωρή συνάρτηση, όπου (S, Σ) ένας μετρήσιμος χώρος και X ένας διαχωρίσιμος μετρήσιμος χώρος. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : S \longrightarrow X$ ως*

$$\phi(s) = \{x \in X : f(s, x) = 0\}.$$

1. *Τότε η ϕ έχει μετρήσιμο γράφημα*
2. *Αν ο X είναι συμπαγής τότε η ϕ είναι επίσης μετρήσιμη*

Απόδειξη: Ορίζουμε $\phi_n : S \longrightarrow X$ ως $\phi(s) = \{x \in X : |s(s,x)| < \frac{1}{n}\}$. Τότε κάθε ϕ_n είναι μετρήσιμη κι άρα ασθενώς μετρήσιμη. Τώρα $\phi(s) \subset \overline{\phi_n} \subset \{x \in X : |f(s,x)| \leq \frac{1}{n}\}$, έτσι $\phi(s) = \cap_{n=1}^{\infty}\overline{\phi_n}(s)$

1. Αφού κάθε ϕ_n είναι ασθενώς μετρήσιμη τότε κάθε $\overline{\phi_n}$ έχει μετρήσιμο γράφημα. Αλλά $Gr\phi = \cap_{n=1}^{\infty} Gr\overline{\phi_n}$, τότε επίσης η ϕ έχει ένα μετρήσιμο γράφημα.
2. Η τομή των ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη. Αν ο X είναι συμπαγής, τότε κάθε $\overline{\phi_n}$ κι επομένως ϕ έχει συμπαγείς τιμές κι άρα είναι μετρήσιμη.

3.3 Απεικονίσεις συμπαγών τιμών

Είναι δυνατόν να χειριστούμε τις απεικονίσεις συμπαγών τιμών από ένα μετρήσιμο χώρο S σε ένα μετρικό χώρο X σαν συναρτήσεις απο τον S σε ένα χώρο $\mathcal{K}$ μη κενών υποσυνόλων του X. Η $Hausdorff$ μετρική τοπολογία στο $\mathcal{K}$ είναι ίδια για όλες τις συμβατές μετρικές στο X. Ακόμη αυτή η τοπολογία παράγεται από την συλλογή όλων των συνόλων της μορφής $G^u = \{K \in \mathcal{K} : K \subset G\}$ και $G^\ell = \{K \in \mathcal{K} : K \cap G \neq \emptyset\}$ καθώς το G κυμαίνεται πάνω στα ανοικτά υποσύνολα του X. Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε συναρτήσεις από ένα μετρήσιμο χώρο στο X οι οποίες είναι *Borel* μετρήσιμες. Αυτό σημαίνει ότι για να μελετήσουμε τις ιδιότητες τους, πρώτα χρειαζόμαστε μια περιγραφή της *Borel* σ-άλγεβρας του $\mathcal{K}$.

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει την *Borel* σ άλγεβρα του $\mathcal{K}$ όταν ο X είναι διαχωρίσιμος. Αποδίδεται στους *L.E.Dubins* και *D.S.Ornstein* από τον *G.Debreu*.

Θεώρημα 3.11. *([2], θρμ 17.9) (Borel σ- άλγεβρα του $\mathcal{K}$) Έστω $\mathcal{K}$ ο χώρος μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του διαχωρίσιμου, μετρικοποιήσιμου χώρου X, εξοπλισμένος με τη $Hausdorff$ μετρική του τοπολογία. Τότε η Borel σ- άλγεβρα $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ του $\mathcal{K}$ παράγεται από την οικογένεια $\{G^u$:το G ανοικτό$\}$ κι επίσης από την οικογένεια $\{G^\ell$: το G ανοικτό$\}$.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{U} = \{G^u$:το G ανοικτό$\}$ και $\mathcal{L} = \{G^\ell$: το G ανοικτό$\}$. Αφού τα $\mathcal{U}$ και $\mathcal{L}$ αποτελούνται από ανοικτά σύνολα, $\sigma(\mathcal{U} \cup \mathcal{L}) \subset \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$. Η $\sigma(\mathcal{U} \cup \mathcal{L})$ περιέχει μια βάση για το $\mathcal{K}$ και αφού ο X είναι διαχωρίσιμος είναι κι ο $\mathcal{K}$. Έτσι κάθε ανοικτό σύνολο είναι μετρήσιμη ένωση βασικών ανοικτών συνόλων από τη $\sigma(\mathcal{U} \cup \mathcal{L})$. Άρα $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \sigma(\mathcal{U} \cup \mathcal{L})$.

Τώρα έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Πρώτα γράφουμε $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου κάθε F_n είναι κλειστό. (Ας θυμηθούμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο σε ένα μετρικό χώρο είναι $\mathcal{F}_\sigma$).

Τότε

$$G^\ell = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^\ell = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(F_n^c)^u]^c.$$

Αυτό δείχνει ότι $\sigma(\mathcal{L}) \subset \sigma(\mathcal{U})$.

Από την άλλη πλευρά, αν η d είναι μια συμβατή μετρική στο X, τότε έχουμε $G^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}(G^c)$ όπου $N_{\frac{1}{n}}(G^c) = \{x \in X : d(x, G^c) < \frac{1}{n}\}$. Προφανώς κάθε $N_{\frac{1}{n}}(G^c)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, και $N_{\frac{1}{n+1}}(G^c) \subset N_{\frac{1}{n}}(G^c)$ για κάθε n. Ακόμη, $(G^c)^\ell \subset \cap_{n=1}^{\infty}[N_{\frac{1}{n}}(G^c)]^\ell$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $K \in \cap_{n=1}^{\infty}[N_{\frac{1}{n}}(G^c)]^\ell$, δηλαδή $K \cap N_{\frac{1}{n}}(G^c) \neq \emptyset$ για κάθε n. Έστω $x_n \in K \cap N_{\frac{1}{n}}(G^c)$ για κάθε n. Αν το $x \in K$ είναι ένα οριακό σημείο της ακολουθίας $\{x_n\}$, τότε από $d(x_n, G^c) < \frac{1}{n}$, προκύπτει ότι $d(x, G^c) = 0$, ή $x \in \overline{G^c} = G^c$. Έτσι $x \in K \cap G^c$, το οποίο υπονοεί ότι $K \in (G^c)^\ell$. Επομένως $(G^c)^\ell = \cap_{n=1}^{\infty}[N_{\frac{1}{n}}(G^c)]^\ell$. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$G^u = [(G^c)^\ell]^c = [\bigcap_{n=1}^{\infty}[N_{\frac{1}{n}}(G^c)]^\ell]^c \in \sigma(\mathcal{L}).$$

Άρα, $\sigma(\mathcal{U}) \subset \sigma(\mathcal{L})$, άρα $\sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{U} \cap \mathcal{L}) = \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο θεώρημα για να δείξουμε την αναλογία της μετρησιμότητας και της ασθενούς μετρησιμότητας για απεικονίσεις συμπαγών τιμών, όταν ο χώρος είναι διαχωρίσιμος και μετρικοποιήσιμος.

Θεώρημα 3.12. *([2], υρμ. 17.10) Έστω (S, Σ) ένας μετρήσιμος χώρος κι έστω X ένας μετρικοποιήσιμος, διαχωρίσιμος χώρος, και $\phi : S \longrightarrow X$ μια απεικόνιση μη κενών συμπαγών τιμών. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(α΄) Η απεικόνιση ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη.

(β΄) Η απεικόνιση ϕ είναι μετρήσιμη

(γ΄) Η συνάρτηση $f : S \longrightarrow \mathcal{K}$, που ορίζεται ως $f(s) = \phi(s)$, είναι Borel μετρήσιμη. Δηλαδή, $f^{-1}(B) \in \Sigma$ για κάθε Borel σύνολο $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$.

Ως τώρα έχουμε παραβλέψει τη φαινομενικά φυσική αντίληψη της *Borel* μετρησιμότητας για απεικονίσεις. Τώρα είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι η απαίτηση της *Borel* μετρησιμότητας μπορεί να είναι αδικαιολόγητα ισχυρή.

Παράδειγμα (**Μια μη** *Borel* **μετρήσιμη απεικόνιση**)Έστω $\mathcal{K}$ ονομάζουμε το χώρο των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του διαστήματος $[0,1]$ εξοπλισμένο με τη *Borel* σ- άλγεβρα απο τη *Hausdorff* μετρική της τοπολογία. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathcal{K} \to [0,1]$ που ορίζεται ως $\phi(K) = K$. Φυσικά, αυτή είναι μια τόσο καλή απεικό-νιση όσο κάποιος μπορεί να επιθυμήσει αφού είναι ανάλογη με την ταυτοτική συνάρτηση στο $\mathcal{K}$ κι επομένως είναι μετρήσιμη. Αλλά η ϕ δεν είναι *Borel* μετρήσιμη καθώς όπως δείχνουμε και στο επόμενο παράδειγμα $\phi^{\ell}(J) = \{K \in \mathcal{K} : K \cap J \neq \emptyset\} = \{K \in \mathcal{K} : K \subset \mathbb{Q}\}^c$ δεν είναι ένα *Borel* υποσύνολο του $\mathcal{K}$, όπου $\mathbb{Q}$ είναι το *Borel* σύνολο των ρητών στο $[0,1]$ και J είναι το *Borel* σύνολο των άρρητων. (Ας θυμηθούμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών, όντας αριθμήσιμο, είναι ένα *Borel* υποσύνολο του $[0,1]$, και για αυτό το συμπλήρωμα του J είναι ένα $\mathcal{G}_\delta$, και έτσι ένα *Borel* υποσύνολο του $[0,1]$.)

Παράδειγμα (**Ένα μη** *Borel* **υποσύνολο του** $\mathcal{K}([0,1])$) Έστω $\mathcal{K}$ ονομάζουμε τον χώρο των κλειστών (κι επομένως συμπαγών) υποσυνόλων του $I = [0,1]$, κι ας εφοδιάσουμε το $\mathcal{K}$ με τη *Hausdorff* μετρική τοπολογία της καταλήγοντας σε μια σ-άλγεβρα. Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών στο I. Ισχυριζόμαστε ότι το $\mathbb{Q}^u = \{K \in \mathcal{K} : K \subset \mathbb{Q}\}$ δεν είναι ένα *Borel* υποσύνολο του $\mathcal{K}$.

Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε την επόμενη έμμεση προσέγγιση. Ας υποθέσουμε προς αντίφαση ότι το $\mathbb{Q}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{K}$. Τότε για κάθε μετρήσιμη απεικόνιση κλειστών τιμών $\phi : I \to I$ έχουμε ότι το $\phi^u(\mathbb{Q}) = \{x \in I : \phi(x) \subset \mathbb{Q}\}$), είναι ένα *Borel* υποσύνολο του I. (Για να το δούμε αυτό, ταυτίζουμε τη ϕ με μια *Borel* μετρήσιμη συνάρτηση $f : I \to \mathcal{K}$, όπου $f(x) = \phi(x)$). Τότε το $\{x \in I : \phi(x) \subset \mathbb{Q}\}$ είναι απλά το $f^{-1}(\mathbb{Q}^u)$ (το οποίο είναι ένα *Borel* υποσύνολο του I.) Τώρα προσπαθούμε να επιδείξουμε μια μετρήσιμη ϕ κλειστών τιμών για την οποία το $\phi^u(\mathbb{Q})$ δεν είναι ένα *Borel* σύνολο. Αυτή η αντίθεση δείχνει ότι το $\mathbb{Q}^u$ δεν είναι ένα *Borel* υποσύνολο του $\mathcal{K}$. Η επόμενη κατασκευή οφείλεται στον *K.Kuratowski*.

Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο ονομάζεται αναλυτικό αν είναι η συνεχής εικόνα του $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αρχίζουμε με ένα αναλυτικό υποσύνολο A του I το οποίο δεν είναι ένα *Borel* σύνολο. Προκύπτει ότι ούτε το A^c είναι ένα *Borel* σύνολο. Έστω $f : \mathcal{N} \to A$ μια συνεχής συνάρτηση απο το

$\mathcal{N}$ στο A, μπορούμε να ταυτίσουμε το $\mathcal{N}$ με το σύνολο J των άρρητων στο I (άρα $\mathcal{N} \times A \subset I^2$). Έστω F η κλειστότητα του γραφήματος $Grf = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{N}\}$ της f στο I^2. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$x \in \mathcal{N} \text{ και } (x, y) \in F \Rightarrow y \in A.(*)$$

Αν (x_n, y_n) είναι ακολουθία στο Grf τέτοια ώστε $(x_n, y_n) \Rightarrow (x, y)$, τότε $y = f(x)$ από συνέχεια, και $f(x) \in A$ από υπόθεση.

Τώρα ορίζουμε τη $\phi : I \to I$ ως $\phi(x) = \{y \in I : (y, x) \in F\}$. Ισχυριζόμαστε ότι $A^c = \phi^u(\mathbb{Q})$. Για να το δούμε αυτό υποθέτουμε ότι το $x \notin A$. Τότε η (*) υποννοεί ότι $\phi(x) \subset \mathbb{Q}$. Από την άλλη πλευρά αν το $x \in A$, τότε υπάρχει κάποιο $z \in \mathcal{N}$ με $f(z) = x$. Αλλά τότε $z \in \phi(x)$, άρα $\phi(x) \not\subset \mathbb{Q}$.

Τώρα το γράφημα της ϕ είναι κλειστό, αφού $Gr\phi = \{(y, x) : (x, y) \in F\}$, αφού το μοναδιαίο διάστημα είναι συμπαγές, η ϕ είναι μετρήσιμη. Επομένως, έχουμε βρει μια μετρήσιμη απεικόνιση ϕ τέτοια ώστε το $\phi^u(\mathbb{Q})$ είναι το μη *Borel* σύνολο A^c.

3.4 Μετρήσιμοι επιλογείς (*selectors*)

Ένας μετρήσιμος επιλογέας (*selector*) από μια απεικόνιση $\phi : S \to X$ ανάμεσα σε μετρήσιμους χώρους είναι απλά ότι σκεφτόμαστε ότι πρέπει να είναι, δηλαδή, μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : S \to X$ που ικανοποιεί $f(s) \in \phi(s)$ για κάθε $s \in S$. Έτσι μόνο απεικονίσεις μη κενών τιμών μπορούν να δεκτούν ένα μετρήσιμο (ή οποιουδήποτε τύπου) επιλογέα. Παρουσιάζουμε τώρα το βασικό θεώρημα επιλογής (*selection*) για τις μετρήσιμες απεικονίσεις, το οποίο είναι μια ειδική περίπτωση ενός αποτελέσματος που οφείλεται στον $K.Kuratowski$ και $C.Ryll - Nardzewski$

Θεώρημα 3.13. *([2], θρμ 17.13)* $(Kuratowski - Ryll - Nardsewski)$ *Μια ασθενώς μετρήσιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές τιμές από ένα μετρήσιμο χώρο σε έναν Polish χώρο δέχεται έναν μετρήσιμο επιλογέα*

Απόδειξη: Έστω $\phi : (S, \Sigma) \to X$ μια μετρήσιμη απεικόνιση μη κενών τιμών από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα *Polish* χώρο. Κατασκευάζουμε ένα μετρήσιμο, πυκνό υποσύνολο $D = \{x_1, x_2, ...\}$ του X. Έστω d μια φραγμένη, συμβατή μετρική στο X που ικανοποιεί $diamX < 1$, και για κάθε k και n, βάζουμε $B_{k,n} = \{x \in X : d(x, x_k) < \frac{1}{2^n}\}$ ακτίνας $\frac{1}{2^n}$ στο x_k.

Θα ορίσουμε επαγωγικά μια ακολουθία $\{f_0, f_1, ...\}$ μετρήσιμων συναρτήσεων (απο το S στο X) με τιμές στο D που να ικανοποιούν

(α′) $d(f_n(s), \phi(s)) < \frac{1}{2^n}$, και

(β′) $d(f_n(s), f_{n+1}(s)) < \frac{1}{2^n}$

για κάθε $s \in S$ και όλα τα $n \geq 0$. Αυτή η ακολουθία είναι ομοιόμορφα $Cauchy$, και άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : S \to X$. Το γεγονός ότι η $\phi(s)$ είναι κλειστή κι η υπόθεση (1) υποννοούν ότι $f(s) \in \phi(s)$ για κάθε s. Η f αυτή είναι επίσης μετρήσιμη.

Αρχίζουμε ορίζοντας $f_0 : S \to X$ ως $f_0(s) = x_1$ για όλα τα s στο S, και σημειώνουμε ότι αφού $diamX < 1$, έχουμε ότι η f_0 ικανοποιεί την υπόθεση (1).

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη και ικανοποιεί την υπόθεση (1). Τότε για κάθε s, υπάρχει κάποιο $x \in \phi(s)$ με $d(x, f_n(s)) < \frac{1}{2^n}$. Αφού το D είναι πυκνό, υπάρχει ένα x_k αρκετά κοντά στο x τέτοιο ώστε $d(x_k, x) + d(x, f_n(s)) < \frac{1}{2^n}$ και $d(x_k, \phi(s)) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Αυτό υποννοεί ότι $s \in A_k = \phi^\ell(B_{k,n+1}) \cap f_n^{-1}(B_{k,n})$. Έστω $k_n(s)$ ας ονομάσουμε το μικρότερο k τέτοιο ώστε $s \in A_k$, και θέτουμε $f_{n+1}(s) = x_{k_n}(s)$. Εκ κατασκευής η f_{n+1} ικανοποιεί

$$d(f_{n+1}(s), \phi(s)) < \frac{1}{2^{n+1}} \text{και} d(f_n(s), f_{n+1}(s)) < \frac{1}{2^n}$$

έτσι απλά χρειάζεται να επαληθεύσουμε ότι η f_{n+1} είναι μετρήσιμη.

Αφού η ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη και η f_n είναι μετρήσιμη, κάθε A_k ανήκει στο Σ. Για κάθε $Borel$ υποσύνολο E του X, σημειώνουμε ότι

$$f_{n+1}^{-1}(E) = \{s \in S : x_{k_n}(s) \in E\} = \cup_{x_k \in E} f_{n+1}^{-1}(\{x_k\}).$$

Αλλά από κατασκευή,

$$f_{n+1}^{-1}(\{x_k\}) = \{s \in S : k_n(s) = k\} = A_k \setminus \cup_{m=1}^{k-1} A_m \in S,$$

άρα $f_{n+1}^{-1}(E) \in \Sigma$. Επομένως, η f_{n+1} είναι μετρήσιμη.
Το επόμενο πόρισμα του θεωρήματος του $Kuratowski{-}Ryll{-}Nardzewski$ οφείλεται στον $C.Castaing$.

Πόρισμα 3.14. *([2], πορ. 17.14) (Castaing) Έστω $\phi : S \to X$ μια ασθενώς μετρήσιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές τιμές από ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα Polish χώρο. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{f_n\}$ μετρήσιμων επιλογέων απο τη ϕ που ικανοποιεί $\phi(s) = \overline{\{f_1(s), f_2(s), ...\}}$ για κάθε s.*

Απόδειξη: Δημιουργώντας μια μετρήσιμη βάση $\{U_1, U_2, ...\}$ για το X, ορίζουμε τη $\phi_n : S \to X$ ως $\phi_n(s) = \phi(s) \cap U_n$ αν $\phi(s) \cap U_n \neq \emptyset$ και $\phi_n(s) = \phi(s)$ αλλιώς. Από την ισότητα

$$\phi_n^\ell(G) = \phi^\ell(U_n \cap G) \cup [\phi^\ell(G) \cap [\phi^\ell(U_n)]^c]$$

και από την ασθενή μετρησιμότητα της ϕ βλέπουμε ότι κάθε ϕ_n είναι ασθενώς μετρήσιμη με μη κενές τιμές. Έτσι, κάθε κλειστότητα $\overline{\phi_n} : S \to X$ είναι ασθενώς μετρήσιμη με μη κενές, κλειστές τιμές και ικανοποιεί $\overline{\phi_n(s)} \subset \phi(s)$ για κάθε $s \in S$. Άρα από το θεώρημα 3.13 υπάρχει ένας μετρήσιμος επιλογέας f_n από τη $\overline{\phi_n}$. Η ακολουθία $\{f_n\}$ ικανοποιεί τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει κάπως ένα θεώρημα που ο *V.Strassen* αποδίδει στον *K.Jacobs*, για τη περίπτωση που ο X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος.

Θεώρημα 3.15. *([2], θρμ. 17.15) (Θεώρημα Επιλογής του Jacobs) Έστω X ένας τοπικά συμπαγής, διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος , και έστω $\mathcal{F}$ ας ονομάσουμε το συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο όλων των μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X που είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία της κλειστής σύγκλισης. Τότε υπάρχει μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{F} \to X$ που ικανοποιεί $f(F) \in \mathcal{F}$ για κάθε μη κενό, κλειστό σύνολο $\mathcal{F}$.*

Απόδειξη: Ο $\mathcal{F}$ είναι ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, άρα τον εξοπλίζουμε με τη σ-άλγεβρα του. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : \mathcal{F} \to X$ ως $\phi(F) = F$. Τότε η ϕ είναι ασθενώς μετρήσιμη: Για ένα ανοικτό σύνολο $G \subset X$, $\phi^\ell(G) = \{F \in \mathcal{F} : F \cap G \neq \emptyset\}$, το οποίο είναι ανοικτό κι άρα ένα *Borel* σύνολο. Αφού η ϕ έχει μη κενές κλειστές τιμές το θεώρημα των *Kuratowski*, *Ryll-Nardsewski* εγγυάται την ύπαρξη της συνάρτησης που επιθυμούμε.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των *Kuratowski*, *Ryll-Nardsewski* για να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα επιλογής, γνωστό ως Λήμμα της έμμεσης συνάρτησης του *Filippov*. Αυτή η εκδοχή βασίζεται στον *C.JHimmelberg*.

Θεώρημα 3.16. *([2], θρμ.17.16)(Θεώρημα της έμμεσης συνάρτησης του Filippov) Έστω (S, Σ) ένας μετρήσιμος χώρος κι έστω X ένας Polish χώρος, και Y ένας διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος. Υποθέτουμε ότι η $f : S \times X \to Y$ είναι μια συνάρτηση Caratheodory κι ότι $\phi : S \to X$ μια ασθενώς μετρήσιμη με μη κενές, συμπαγείς τιμές.*

Υποθέτουμε ακόμη ότι η $g : S \to Y$ είναι ένας μετρήσιμος επιλογέας από το πεδίο τιμών της f στο ϕ κάτα τέτοιο νόημα που να είναι η g μετρήσιμη και για κάθε s να υπάρχει $x \in \phi(s)$ με $g(s) = f(s, x)$.

Τότε η απεικόνιση $\gamma : S \to X$ που ορίζεται ως

$$\gamma(s) = \{x \in \phi(s) : f(s, x) = g(s)\}$$

είναι μετρήσιμη και δέχεται ένα μετρήσιμο επιλογέα, το οποίο σημαίνει εκτός του ότι η γ είναι μετρήσιμη υπάρχει και μια μετρήσιμη συνάρτηση $\xi : S \to X$ με $\xi(s) \in \phi(s)$ και $g(s) = f(s, \xi(s))$ για κάθε $s \in S$.

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε μια μετρική d στο Y. Αφού η f είναι μια $Caratheodory$ συνάρτηση κι ο μετρικοποιήσιμος χώρος Y είναι διαχωρίσιμος τότε η απεικόνιση $(s, x) \to d(f(s, x), g(s))$ είναι μια $Caratheodory$ συνάρτηση.

Για κάθε n ορίζουμε ορίζουμε την απεικόνιση $\psi_n : S \to X$ ως

$$\psi_n(s) = \{x \in X : d(f(s, x), g(s)) < \frac{1}{n}\}$$

που είναι μετρήσιμη κι επομένως η απεικόνιση $\overline{\psi(n)}$ είναι ασθενώς μετρήσιμη. Παρατηρούμε ότι

$$\gamma(s) = \phi(s) \cap \overline{\psi_1(s)} \cap \overline{\psi_2(s)} \cap ...,$$

και ότι η $\phi, \overline{\psi_1(s)}, \bar{\psi_2}, ...\}$ ικανοποιεί την υπόθεση του λήμματος 3.6, άρα η γ είναι μετρήσιμη, κι έχει συμπαγείς τιμές. Από υπόθεση , η γ έχει επίσης μη κενές τιμές κι από το θεώρημα $Kuratowski - Ryll - Nardsewski$ η γ έχει μετρήσιμους επιλογείς, ο καθένας από τους οποίους θα κάνει για την ξ.

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο παραθέτοντας σαν μια άλλη εφαρμογή μια στοχαστική εκδοχή του θεωρήματος του $Taylor$.

Θεώρημα 3.17. *([2], θρμ. 17.17) (Στοχαστικό Θεώρημα του Taylor) Έστω η $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που έχει μια συνεχή $(n-1)$-τάξης παράγουσα στο $[a, b]$ και μια n τάξης παράγουσα στο (a, b). Κατασκευάζουμε μια $c \in [a, b]$ κι έστω r μια τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας (S, Σ, P) τέτοια ώστε η $c + r(s)$ να ανήκει στο $[a, b]$ για όλα τα s. Τότε υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση ξ τέτοια ώστε η $\xi(s)$ να κυμαίνεται μεταξύ 0 και $r(s)$ για κάθε $s \in S$, και*

$$h(c + r(s)) = h(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} h^{(k)}(c) r^k(s) + \frac{1}{n!} h^{(n)}(c + \xi(s)) r^n(s).$$

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρώματα πλειότιμων απεικονίσεων

4.1 Εισαγωγή

Οι πλειότιμες απεικονίσεις, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω έχουν κινήσει το ενδιαφέρον για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα κι έχουν χρησιμοποιηθεί επανειλλημμένα στο χώρο των Οικονομικών Μαθηματικών. Τα ολοκληρώματα των πλειότιμων απεικονίσεων αποτελούν μια ευθεία επέκταση του κλασικού αθροίσματος συνόλων του *Minkowski*. Επομένως, τα ολοκληρώματα αυτών των απεικονίσεων είναι βασισμένα σε κλασικά ολοκληρώματα Lebesgue . Ωστόσο, όπως θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο αυτή η " απλοική " προσέγγιση οδηγεί σε αξιοσημείωτα αποτελέσματα, τα οποία έχουν εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμοσμένων προβλημάτων.

Εστω T κλειστό διάστημα [0,1], για κάθε t στο T έστω $F(t)$ ένα μη κενό υποσύνολο του ευκλείδιου χώρου E^n.Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων f απο το T στο E^n τέτοιο ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο T και $f(t) \in F(t)$ για όλα τα t στο T. Ορίζουμε:

Ορισμός 4.1. *[1]* $\int_T F(t)dt = \left\{\int_T f(t)dt : f \in \mathcal{F}\right\}$

δηλαδή το σύνολο όλων των ολοκληρωμάτων των στοιχείων του $\mathcal{F}$. *Αυτή η αντίληψη είναι μια γενίκευση του ολοκληρώματος των μονότιμων συναρτήσεων από τη μια πλευρά και του αθροίσματος ενός πεπερασμένου αριθμού συνόλων από την άλλη.*

Στα επόμενα θα γράφουμε $\int F$, $\int f$ *αντί να γράφουμε* $\int_T F(t)dt$, $\int_T f(t)dt$

ενώ όταν θα χρειαστεί να ολοκληρώσουμε πάνω σε ένα υποσύνολο S του T θα γράφουμε $\int_S F$. Επίσης ο όρος μετρήσιμη θα αναφέρεται σε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση.

4.2 Βασικά θεωρήματα

Ας προχωρήσουμε σε μερικά πολύ σημαντικά θεωρήματα.

Θεώρημα 4.2. *([1], θρμ. 1) Το ολοκλήρωμα της F, $\displaystyle\int F$, είναι κυρτό.*

Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε κάτω από ποιές συνθήκες το $\int F$ (ή ανάλογα $\mathcal{F}$ είναι μη κενό). Η απεικόνιση F θα ονομάζεται Borel-μετρήσιμη αν το γραφημά της $\{(t,x) : x \in F(t)\}$ είναι ένα Borel υποσύνολο του $T * E^n$. Θα ονομάζεται ολοκληρώσιμα φραγμένο αν υπάρχει μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση h από το T στο E^n τέτοια ώστε $|x| \leq h(t)$ για κάθε x και για κάθε t τέτοιο ώστε $x \in F(t)$.

Θεώρημα 4.3. *([1], θρμ.2) Αν η F είναι Borel- μετρήσιμη και ολοκληρώσιμα φραγμένη τότε το $\int F$ είναι μη κενό.*

Ούτε η υπόθεση σε αυτό το θεώρημα μπορεί να παραλειφθεί καθώς θα πρέπει να την δείξουμε μέσω ενός αντιπαραδείγματος. Η απεικόνιση F θα ονομάζεται μη αρνητική αν $x \geq 0$ για όλα τα x και τα t τέτοια ώστε $x \in F(t)$. Για κάθε t στο T η $F^*(t)$ θα δηλώνει το κυρτό κάλυμμα του $F(t)$.

Θα ήταν πιο βολικό σε αυτή την περίπτωση να αντικαταστήσουμε τον ευκλείδιο χώρο E^n με ένα τυχαίο διαχωρίσιμο και πλήρη μετρικό χώρο X. Η απεικόνιση F θα εξακολουθεί να ορίζεται στο $T = [0,1]$ αλλά οι τιμές της θα είναι τώρα υποσύνολα του X. Μια συνάρτηση f από το T στο X θα ονομάζεται Lebesgue-μετρήσιμη συνάρτηση αν $f^{-1}(U)$ είναι Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του T για κάθε ανοικτό (ή ανάλογα Borel) υποσύνολο του X. Ας θυμηθούμε ότι ένα αναλυτικό υποσύνολο του X είναι η συνεχής εικόνα ενός Borel υποσυνόλου του X. Η πλειότιμη συνάρτηση F θα ονομάζεται αναλυτική αν το γράφημα της είναι ένα αναλυτικό υποσύνολο του $T \times X$. Η επόμενη πρόταση προέρχεται από ενα λήμμα του Von Neumann.

Πρόταση 4.4. *([1],προτ. 2.1) Αν η F είναι μια αναλυτική πλειότιμη απεικόνιση από το T στο X τότε υπάρχει μια Lebesgue-μετρήσιμη συνάρτηση $f : T \to X$ τέτοια ώστε $f(t) \in F(t)$ για όλα τα t.*

Καθώς κάθε Borel μετρήσιμη F είναι αναλυτική αφού $X = E^n$ η F είναι Borel μετρήσιμη από T στο E^n, τότε υπάρχει μια f που να ικανοποιεί τις συνέπειες της 4.4. Αν ακόμη η F είναι ολοκληρώσιμα φραγμένη τότε η f είναι και ολοκληρώσιμη. Άρα $\int f \in \int F$ και το θεώρημα 4.3 αποδείχθηκε.

Θεώρημα 4.5. *([1], θρμ.3) Αν η f είναι μη αρνητική και Borel-μετρήσιμη τοτε $\int F = \int F^*$.*

Το θεώρημα αυτό μοιάζει με μια τετριμμένη συνέπεια του θεωρήματος 4.2 αλλά δεν είναι. Ούτε εδώ η υπόθεση μπορεί να παραλειφθεί. Πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι το θεώρημα παραμένει αληθές αν η F είναι φραγμένη άνω ή κάτω από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση h έτσι ώστε η υπόθεση της μη-αρνητικότητας να είναι μια αποδυνάμωση της υπόθεσης του ολοκληρώσιμου φραξίματος. Η απεικόνιση F θα ονομάζεται κλειστή αν η $F(t)$ είναι κλειστή για κάθε t.

Η απόδειξη προκύπτει με επαγωγή στη διάσταση n του χώρου. Για $n = 0$ το θεώρημα είναι άμεσο αφού $F^*(t) = F(t) = \{0\}$ για όλα τα t. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα αληθεύει για διαστάσεις μικρότερες του n. Αν το θεώρημα δεν ισχύει στη n-διάσταση τότε για κατάλληλη F έχουμε $\int F^* \setminus \int F \neq \emptyset$. Έστω $x \in \int F^* \setminus \int F$. Από το θεώρημα 4.2 η $\int F$ είναι κυρτή άρα έχει ένα υποστηρίζον υπερεπίπεδο που περνάει από το x. Υπάρχει ένα διάνυσμα $\alpha \in E^n$ τέτοιο ώστε

$$\alpha \cdot y \leq \alpha \cdot x \tag{4.1}$$

για όλα τα $y \in \int F$. Αφού το $x \in \int F^*$ τότε $x = \int f^*$ όπου $f^*(t) \in F^*(t)$ για όλα τα t. Ακόμη η f μπορεί να επιλεχθεί Borel-μετρήσιμη. Κάθε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση είναι ανάλογη με μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση και σύμφωνα με την παραδοχή μας " όλα " σημαίνει " σχεδόν όλα ".

Ας θυμηθούμε το Θεώρημα του Καραθεοδωρή το οποίο δηλώνει πως αν D και D^* είναι υποσύνολα του E^n τέτοια ώστε D^* να είναι το κυρτό κάλυμμα του D τότε κάθε σημείο του D^* είναι κυρτός συνδυασμός $n + 1$ σημείων του D. Σύμφωνα με αυτό για κάθε t υπάρχουν $\phi_0(t), ..., \phi_n(t)$ που αθροίζονται στο 1 και μέλη $g_0(t), ..., g_n(t)$ του $F(t)$ τέτοια ώστε

$$f^*(t) = \sum_{j=0}^{n} \phi_j(t) g_j(t). \tag{4.2}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ϕ_j και g_j μπορούν να επιλεχθούν μετρήσιμες και με g_0 ολοκληρώσιμη. Η (4.2) υποννοεί ότι για τουλάχιστον ένα από τις g_j

$\sum\limits_{i=1}^{n} g_j^i(t) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} f^{*i}(t)$. *Αφού οι δείκτες της* g^j *δεν είναι κάποιας σημασίας, αυτό σημαίνει ότι το υποσύνολο* $G(t)$ *του* $E^{(n+1)+n(n+1)}$ *που ορίζεται ως:*

$$G(t) = \{(\xi_0, ..., \xi_n, x_0, ..., x_n) : 0 < \xi_j \leq 1 \qquad \text{και } x_j \in F(t) \text{ για όλα τα} j$$
$$\textstyle\sum_{j=0}^{n} \xi_j = 1, \sum_{i=1}^{n} x_0^i \leq \sum_{i=1}^{n} f^{*i}(t), \qquad \text{και } f^*(t) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j x_j.$$

είναι μη κενό για όλα τα t. *Ακόμη το γράφημα του* G *είναι ενα Borel υποσύνολο του* $E^{(n+1)+n(n+1)+1}$, *αυτό προκύπτει από τη Borel μετρησιμότητα της* F *και* f^*. *Έτσι από την πρόταση 4.4 μπορούμε να επιλέξουμε μια μετρήσιμη* ϕ_j *και* g_j *τέτοια ώστε*

$$(\phi_0(t), ..., \phi_n(t), g_0(t), ..., g_n(t)) \in G(t)$$

για όλα τα t.

Τότε οι ϕ_j *και* g_j *είναι μετρήσιμες. Ακόμη* $g_0(t) \in F(t)$ *και η μη αρνητικότητα της* F *προκύπτει από το ότι* $g_0(t) \geq 0$ *Επομένως*

$$0 \leq g_0^1(t) \leq \sum_{i=1}^{n} g_0^i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} f^{*i}(t)$$

κι έτσι η ολοκληρωσιμότητα της $g_0^i(t)$ *προκύπτει από την* f^*. *Ομοίως όλες οι* g_0^i *είναι ολοκληρώσιμες δηλαδή* g_0 *ολοκληρώσιμη. Τώρα δείχνουμε ότι*

$$\alpha \cdot g_j(t) \leq \alpha \cdot f^*(t) \tag{4.3}$$

για όλα τα t *και τα* j. *Πράγματι υποθέτουμε ότι*

$$\alpha \cdot g_k(t) > \alpha \cdot f^*(t) \tag{4.4}$$

για κάποια t *και* k, *έστω για* $t \in S$, *όπου το* S *έχει θετικό μέτρο. Για κάθε* t *υπάρχει ένα* j *που υπακούει*

$$\alpha \cdot g_j(t) \geq \alpha \cdot f^*(t) \tag{4.5}$$

κι αφού $\phi_j(t) > 0$, *έχουμε*

$$\alpha \cdot f^*(t) = \sum_{j=1}^{n+1} \phi_j(t)\alpha \cdot g_j(t) < \sum_{j=1}^{n+1} \phi_j(t)\alpha \cdot f^*(t) = \alpha \cdot f^*(t),$$

που είναι άτοπο. Ορίζουμε το πρώτο j *που ικανοποιεί την (3.5) ως* $j(t)$. *Ορίζουμε μια συνάρτηση* f *ως εξής*

$$f(t) = \begin{cases} g_k(t) & \textit{όταν } t \in S \\ g_{j(t)}(t) & \textit{όταν } t \notin S \end{cases}$$

Η f είναι προφανώς μετρήσιμη αλλά πιθανώς δεν είναι ολοκληρώσιμη. Για κάθε θετικό ακέραιο m , έστω $U(m) = \{t : f(t) \leq (m, ..., m)\}$, και ορίζουμε μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων f_m ως

$$f_m(t) = \begin{cases} f(t) & \textit{όταν } t \in U(m) \\ g_0(t) & \textit{όταν } t \notin U(m) \end{cases}$$

Τότε $f_m(t) \in F(t)$ για όλα τα t και η (4.1) υποχωρεί στην

$$\alpha \cdot f_m \leq \alpha \cdot \int f^* \tag{4.6}$$

για όλα τις f. Τώρα $\cup_{m=1}^{\infty} U(m) = T$, επομένως

$$\int_{T \setminus U(m)} \alpha \cdot (g_0 - f^*) \to 0. \tag{4.7}$$

Επιπλέον για επαρκώς μεγάλο m, το σύνολο $U(m) \cap S$ έχει θετικό μέτρο. Έτσι, για ένα τέτοιο m από την (4.4) προκύπτει ότι

$$\int_{U(m) \cap S} \alpha \cdot f_m = \int_{U(m) \cap S} \alpha \cdot g_k > \int_{U(m) \cap S} \alpha \cdot f^*.$$

Με άλλα λόγια, αν

$$\epsilon(m) = \int_{S \cap U(m)} \alpha \cdot (f_m - f^*),$$

τότε η $\epsilon(m)$ ειναι αύξουσα στο m, και $\epsilon(m) > 0$ για επαρκώς μεγάλο m. έστω για $m \geq m_0$. Τώρα από την (4.7) προκύπτει ότι για m αρκετά μεγάλο, έστω για $m \geq m_1$, έχουμε

$$\int \alpha \cdot (f_m - f^*) = \int_{T \setminus U(m)} \alpha \cdot (g_0 - f^*) \geq -\epsilon \frac{(m_0)}{2}$$

Ακόμη, από την (4.5) και τον ορισμό της f

$$\int_{U(m) \setminus S} \alpha \cdot f_m = \int_{U(m) \setminus S} \alpha \cdot f \geq \int_{U(m) \setminus S} \alpha \cdot f^*$$

Άρα αν το $m \geq max(m_1, m_2)$ *τότε*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \int f_m - \alpha \cdot \int f^* &= \int \alpha \cdot (f_m - f^*) = \int_{U(m)\cap S} + \int_{U(m)\setminus S} + \int_{T\setminus U(m)} \\ &\geq \epsilon(m_0) + 0 - \frac{\epsilon(m_0)}{2} > 0 \end{aligned}$$

που αντίκειται στην (4.6). Αυτό δείχνει την (4.3).

Τώρα θα δείξουμε

$$\alpha \cdot g_j(t) = \alpha \cdot f^*(t) \tag{4.8}$$

για όλα τα t *και* j. *Πράγματι έστω ότι υπάρχει ενα* j *κι ένα* k *τέτοιο ώστε για κάποιο* t *να ισχύει η ανισότητα γνησίως, δηλαδή,* $\alpha \cdot g_j(t) < \alpha \cdot f^*(t)$. *Εφαρμόζοντας την (4.3) και* $\phi_k(t) > 0$, *συνάγουμε*

$$\alpha \cdot f^*(t) = \sum_{j=0}^{n} \phi_j(t)\alpha \cdot g_j(t) < \sum_{j=0}^{n} \phi_j(t)\alpha \cdot f^*(t) = \alpha \cdot f^*(t),$$

που είναι άτοπο. Αυτό αποδεικνύει την (4.8).

Έστω H *το υπερεπίπεδο* $\{y : \alpha \cdot y = 0\}$. *Ορίζουμε* $E(t) = [F(t) - f^*(t)] \cap H$, *κι έστω* $E^*(t)$ *να είναι το κυρτό κάλυμμα του* $E(t)$. *Από την (4.8) προκύπτει ότι* $g_j(t) - f^*(t) \in E(t)$ *κι άρα από την (4.2),* $0 = f^*(t) - f^*(t) \in E^*(t)$. *Αφού το* H *ειναι* $n-1$ *διάστασης, μπορούμε να εφαρμόσουμε την υπόθεση της επαγωγής στο* E *και συνάγουμε ότι* $0 \in \int E$. *Έστω* e *να είναι τέτοιο ώστε* $e(t) \in E(t)$ *για όλα τα* t *και* $\int e = 0$. *Τότε για κάθε* t, $e(t) = f^*(t) \in F(t)$, *και* $\int [e + f^*] = \int f^* = x$. *Συμπερασματικά* $x \in \int F$ *το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση μας. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος 4.5.*

Για να δούμε ότι το θεώρημα 4.5 παύει να ισχύει αν δεν υποθέσουμε ότι η f *ειναι Borel μετρήσιμη, έστω* $n = 1$ *και έστω* g *η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός υποσυνόλου του* T *με εσωτερικό μέτρο 0 και εξωτερικό μέτρο 1. Έστω ότι η* $F(t)$ *περιέχει τα δυο σημεία* $g(t)$ *και μόνο. Τότε* $\int F = \{2\}$ *αλλά* $\int F^* = [1, 2]$.

Για να δείξουμε ότι το θεώρημα παύει να ισχύει χωρίς την υπόθεση της μη αρνητικότητας, έστω $n = 1$ *κι έστω* $F(t) = \{1/t, -1/t\}$. *Τότε* $\int F = \emptyset$ *και* $\int f^* = (-\infty, \infty)$.

Θεώρημα 4.6. *([1], θρμ.4) Αν η* F *είναι κλειστή κι ολοκληρώσιμα φραγμένη, τότε το* $\int F$ *ειναι συμπαγές*

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση της Borel μετρησιμότητας δεν χρειάζεται εδώ. Αυτό το θεώρημα αποδείχθηκε από τον Kudo για τις F που παίρνουν κυρτές τιμές και Borel-μετρήσιμες (εκτός από τις υποθέσεις που δίνονται εδώ). Ο Richter απέδειξε μια εκδοχή λίγο διαφορετική από αυτή του Kudo , η οποία δεν απαιτεί κυρτότητα, αλλά ωστόσο ακόμη απαιτεί μετρησιμότητα.

Τώρα στρεφόμαστε σε μια γενίκευση του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesque : αυτό μπορεί να θεωρηθεί το κύριο αποτέλεσμα μας. Αν $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ...$ είναι τα υποσύνολα του E^n τότε εξ ορισμού, $x \in \liminf \mathcal{A}_k$ αν και μόνο αν κάθε γειτονιά του x τέμνει όλα τα $\mathcal{A}_k$ με επαρκώς μεγάλο k, και $x \in \limsup \mathcal{A}_k$ αν και μόνο αν κάθε γειτονιά του x τέμνει απείρως πολλά $\mathcal{A}_k$. Αν $\liminf \mathcal{A}_k = \limsup \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$, τότε γράφουμε $\mathcal{A} = \lim \mathcal{A}_k$, ή $\mathcal{A}_k \to \mathcal{A}$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.6 ειναι μια συνέπεια της επόμενης αναλογίας του λήμματος Fatou.

Πρόταση 4.7. *([1], προτ. 4.1)*

Αν $F_1, F_2, ..$ είναι μια ακολουθία πλειότιμων απεικονίσεων οι οποίες ειναι όλες φραγμένες απο την ίδια ολοκληρώσιμη μονότιμη συνάρτηση h, τότε,

$$\int \limsup F_k \supset \limsup \int F_k.$$

Υποθέτουμε ότι $x \in \limsup \int F_k$. Τότε το x είναι το όριο μιας ακολουθίας $\int F_k$, όπου $f_k(t) \in F_k(t)$ για κάθε k και t, δηλαδή υπάρχει μια υπακολουθία του $\int f_k$ που συγκλίνει στο x. Θέλουμε να δείξουμε ότι $x \in \int \limsup F_k$, για αυτό τον σκοπό υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το x είναι πράγματι το όριο του $\int f_k$, δηλαδή ότι η υπακολουθία που συγκλίνει στο x είναι ολόκληρη η ακολουθία.

Οι f_k μπορούν να θεωρηθούν συναρτήσεις πραγματικών τιμών στο $\{1, ..., n\} \times T$, αφού είναι ολοκληρώσιμες , προκύπτει ότι είναι μέλη του Banach χώρου $L^1 = L^1(\{1, ..., n\} \times T)$.Καθώς οι f_k είναι όλες φραγμένες από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση h, προκύπτει ότι υπάρχει μια υπακολουθία με ασθενές όριο, την οποία καλούμε f. Πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f_k συγκλίνει ασθενώς στην f.

Έστω ότι $\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..\}$ είναι η ακολουθία των θετικών πραγματικών αριθμών που τείνουν στο 0. Αφού $\{f_1, f_2, ...\}$ προσεγγίζει ασθενώς την f, έχουμε ότι $\{f_m, f_{m+1}, ...\}$ προσεγγίζει επίσης την f ασθενώς για όλα τα m. Έτσι από γνωστό θεώρημα *προκύπτει ότι υπάρχει μια ακολουθία κυρτών συνδυασμών των* $f_m, f_{m+1}, \ldots$ *που προσεγγίζει την* f *στη νόρμα του* L_1. *Για κάθε* m, *έστω* g_m *τέτοιος κυρτός συνδυασμός με* $\|g_m - f\| \leq \epsilon_m$. *Τότε* $g_m \to f$ *στη νόρμα του* L^1. *Έτσι από γνωστό θεώρημα υπάρχει μια υπακολουθία του* g_m *που συγκλίνει στην* f *σχεδόν παντού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι είναι ολόκληρη η ακολουθία. Τότε για όλα τα* t, $g_m(t) \to f(t)$, *κσι* $g_m(t)$ *είναι ένας κυρτός συνδυασμός των* $\{f_m(t), f_{m+1}(t), \ldots\}$. *Αφού τα τελευταία είναι σημεία του* E^n, *από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή έχουμε ότι*

$$g_m(t) = \sum_{j=0}^{n} \theta_{jm}(t) e_{jm}(t),$$

όπου $\theta_j(t)$ *είναι μη αρνητικές και αθροίζουν στο 1, και* $e_{0m}(t), \ldots, e_{nm}(t)$ *επιλέγονται ανάμεσα στις* $f_m(t), f_{m+1}(t), \ldots$. *Τώρα για κάθε* t, *μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία της* $g_m(t)$ *τέτοια ώστε όλες οι αντίστοιχες υπακολουθίες των* $\{\theta_{0m}(t)\}, \ldots, \{\theta_{nm}(t)\}, \{e_{0m}(t)\}, \ldots$ *και* $\{e_{nm}(t)\}$ *να συγκλίνουν. Τα όρια των* θ *σε αυτές τις υπακολουθίες πρέπει να είναι μη αρνητικοί αριθμοί που να αθροίζουν στο 1, και τα όρια των* e *πρέπει να είναι οριακά σημεία των* $f_m(t)$. *Έτσι για κάθε* t,

$$f(t) = \lim g_m(t) = \sum_{j=0}^{n} \theta_j e_j(t),$$

όπου οι θ_j *είναι μη αρνητικές και αθροίζουν στο 1, και* $e_j(t)$ *είναι τα οριακά σημεία των* $\{f_1(t), f_2(t), ..\}$. *Τότε αν* $G(t)$ *είναι το σύνολο των οριακών σημείων του* $\{f_k(t)\}$, *και* G^* *το κυρτό κάλυμμα του* $G(t)$, *τότε έχουμε δείξει ότι* $f(t) \in G^*(t)$ *για κάθε* t. *Άρα* $\int f \in \int G^*$.

Όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω, κάθε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση είναι ανάλογη με μια Borel μετρήσιμη. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f_k *είναι Borel μετρήσιμη. Τότε προκύπτει εύκολα ότι η* G *είναι Borel μετρήσιμη. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 4.4 και να συνάγουμε ότι* $\int G^* = \int G$. *Άρα* $\int f \in \int G$. *Αλλά αφού* $f_k(t) \in F_k(t)$, *έχουμε ότι κάθε οριακό σημείο του* $F_k(t)$ *είναι ένα μέλος του* $\limsup F_k(t)$, *δηλαδή* $G(t) \subset \limsup F_k(t)$. *Άρα* $\int f \in \int \limsup F_k$. *Αλλά από την ασθενή σύγκλιση της* f_k *στο* f *έχουμε ότι* $\int f = \lim \int f_k = x$, *επομένως ότι* $x \in \int \limsup F_k$. *Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης 4.7.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η F *είναι κλειστή κι ολοκληρώσιμα φραγμένη, θέτουμε* $F_1 = F_2 = \ldots = F$. *Τότε το* $\limsup F_k = clF = F$ *κι ότι* $\limsup \int F_k = cl \int F$, *όπου* cl *είναι η κλειστότητα. Άρα από την πρόταση 4.7 ,*

$$\int F = \int \limsup F_k \supset \limsup \int F_k = cl \int F,$$

κι επομένως $\int F$ είναι κλειστό. Αφού είναι φραγμένη από το ολκλήρωμα της συνάρτησης h που φράσσει την F, προκύπτει ότι είναι συμπαγής, αποδεικνύοντας το θεώρημα 4.6.

Είναι δυνατόν να αποδείξουμε το θεώρημα 4.6 κάπως πιο απλά με μια ευθεία εφαρμογή αλλα η πρόταση 4.7 είναι ενδιαφέρουσα αφ εαυτού της και χρειάζεται στην απόδειξη του θεωρήματος 4.8.

Αν αντικαταστήσουμε την υπόθεση του ολοκληρώσιμου φραξίματος στο θεώρημα 4.6 από την υπόθεση ότι η F να είναι μη αρνητική, τότε $\int F$ δεν χρειάζεται να είναι κλειστό. Έστω ένα αντιπαράδειγμα, έστω $n = 2$ κι έστω $g(t) = (\frac{(1-t)}{t}, \frac{t}{(1-t)})$ κι έστω $F(t) = \{0, g(t)\}$. Τότε η F είναι η ένωση ανοικτών και θετικών τεταρτημορίων με αρχή το $\{0\}$.

Θεώρημα 4.8. *([1], θρμ. 5) Αν $F_k(t) \to F_(t)$ για όλα τα t κι όλες οι $F_k(t)$ είναι Borel μετρήσιμες και φραγμένες από την ίδια ολοκληρώσιμη μονότιμη συνάρτηση, τότε $\int F_k \to \int F$.*

Καμμία από τις υποθέσεις δεν μπορεί να παραλειφθεί σε αυτό το θεώρημα. Η απόδειξη του θεωρήματος 4.8 χρησιμοποιεί δυο αναλογίες του λήμματος Fatou

Πρώτα αποδεικνύουμε μια άλλη αναλογία του λήμματος Fatou ως εξής:

Πρόταση 4.9. *([1], προτ. 5.1) Αν όλες οι F_k είναι Borel μετρήσιμες και φραγμένες από την ίδια ολοκληρώσιμη μονότιμη συνάρτηση, τότε*

$$\int \liminf F_k \subset \liminf \int F_k$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \int \liminf F_k$. Τότε $x = \int f$, όπου $f(t) \in \liminf F_k(t)$ για κάθε t. Αφού η f είναι ανάλογη σε μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τώρα ο χώρος $E^n \times E^n \times \ldots$ μπορεί να μετρικοποιηθεί έτσι ώστε να είναι πλήρης κι έτσι η τοπολογία του είναι η συνήθης τοπολογία γινομένου. Για κάθε t ορίζουμε ένα υποσύνολο $G(t)$ του $E^n \times E^n \times \ldots$ ως

$$G(t) = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_1 \in F_1(t), x_2(t) \in F_2(t), \ldots, \textit{και } \lim x_k = f(t)\}$$

Τότε το ότι $f(t) \in \liminf F_k(t)$ είναι ακριβώς ανάλογο με το ότι $G(t) \neq \emptyset$ για κάθε t. Επίσης, η G είναι εύκολα φαίνεται ότι είναι Borel μετρήσιμη κι επομένως αναλυτική. Άρα από την πρόταση 4.4 υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση g από το T στο $E^n \times E^n \times \ldots$ τέτοιο ώστε $g(t) \in G(t)$ για κάθε t, δηλαδή μια ακολουθία

$f_1, f_2, ...$ μετρήσιμων συναρτήσεων από το T στο E^n, τέτοιο ώστε $f_k(t) \in F_k(t)$ για κάθε t, και $\lim f_k(t) = f(t)$. Τώρα αφού $f_k(t) \in F_k(t)$, όλες οι f_k είναι φραγμένες από την ίδια ολοκληρώσιμη μονότιμη συνάρτηση, Επομένως από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε ότι $\int f_k \to \int f = x$. Αλλά $\int f_k \in \int F_k$, κι έτσι $x \in \liminf \int F_k$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης 4.9.

Αν $F(t) = \liminf F_k(t) = \limsup F_k(t)$ για όλα τα t τότε

$$\int F = \int \liminf F_k \subset \liminf \int F_k \subset \limsup \int F_k \subset \int \limsup F_k = \int F$$

άρα η ισότητα παραμένει κι έτσι το $\lim \int F_k$ υπάρχει και ισούται με το $\int \lim F_k$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα 4.8.

Το θεώρημα 4.8 δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση της Borel μετρησιμότητας. Πράγματι, έστω $n = 1$, κι έστω g η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός υποσυνόλου του T με εσωτερικό μέτρο 0 κι εξωτερικό μέτρο 1, κι έστω $F_k(t) = \{g(t)/k\}$. Τότε $\lim \int F_k = \emptyset$ αλλά $\int \lim F_k = \{0\}$.

Έστω A ένα τυχαίο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X, κι έστω G_x μια πλειότιμη συνάρτηση για x στο A, των οποίων οι τιμές είναι υποσύνολα του E^n.Η G ονομάζεται άνω-ημισυνεχής αν $x_n \to x$ υποννοεί ότι $G_x \supset \limsup G_{x_n}$ για όλα τα x_n και x στο A, κάτω-ημισυνεχής αν $x_n \to x$ υποννοεί ότι $G_x \subset \liminf G_{x_n}$ για όκα τα x_n και x στο A, και συνεχής αν $x_n \to x$ υποννοεί ότι $G_x = \lim Gx_n$ για όλα τα x_n και x στο A.

Πόρισμα 4.10. *([1], πορ. 5.2)* Έστω $F_x(t)$ μια πλειότιμη απεικόνιση ορισμένη για $t \in T$ και $x \in A$, της οποίας όλες οι τιμές είναι φραγμένες από την ίδια ολοκληρώσιμη μονότιμη συνάρτηση, και τέτοια ώστε F_x είναι Borel μετρήσιμη για κάθε σταθερό $x \in A$. Τότε αν $F_x(t)$ είναι άνω-ημισυνεχής στο x για κάθε σταθερό t, τότε το $\int F_x$ είναι άνω-ημισυνεχές, αν $F_x(t)$ είναι κάτω-ημισυνεχής στο x για κάθε σταθερό t, τότε το $\int f_x$ είναι κάτω ημισυνεχές, κι αν η $F_x(t)$ είναι συνεχής για κάθε σταθερό t, τότε $\int F_x$ είναι συνεχές.

4.3 Εφαρμογές στα ακραία σημεία συνόλων διανυσματικών συναρτήσεων

Σε αυτή την ενότητα κάνουμε χρήση μόνο της πρότασης 4.4, τα υπόλοιπα αποτελέσματα δεν θα χρειαστούν. Έστω A ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του E^n, B το σύνολο των ακραίων σημείων , $cl(B)$ η κλειστότητα του B. Αν $n \geq 3$, *δεν είναι απαραίτητα αληθές ότι $cl(B) = B$. Έστω $\mathcal{M}_A, \mathcal{M}_B$, και $\mathcal{M}_{cl(B)}$ τα σύνολα όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων από το T στο A, B και $cl(B)$ αντίστοιχα. Αφού ο χώρος όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων απο το T στο E^n έξει μια γραμμική δομή μπορούμε να συζητήσουμε τα ακραία σημεία του $\mathcal{M}_A$. Ο Karlin απέδειξε ότι το σύνολο των οριακών σημείων του $\mathcal{M}_A$ περιέχει το $\mathcal{M}_B$ και περιέχεται στο $\mathcal{M}_{cl(B)}$.*

Πρόταση 4.11. *([1], προτ. 6.1) Το σύνολο των οριακών σημείων του $\mathcal{M}_A$ είναι ακριβώς το $\mathcal{M}_B$*

Απόδειξη: Προφανώς κάθε σημείο του $\mathcal{M}_B$ είναι ένα ακραίο σημείο του $\mathcal{M}_A$. Αντίστροφα, έστω f ένα ακραίο σημείο του $\mathcal{M}_A$. Αν το f δεν είναι στο $\mathcal{M}_B$, τότε για κάποιο t, η $f(t)$ δεν είναι ακραίο σημείο του A. Άρα για κάθε t μπορούμε να διαλέξουμε μια $g(t)$ και μια $h(t)$ στο A τέτοια ώστε $f(t) = \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2}h(t)$, κι οι $g(t)$ και $h(t)$ διαφέρουν τουλάχιστον κάποια t. Λόγω της πρότασης 4.4, οι g και h μπορούν να επιλεγούν να είναι κι αυτές μετρήσιμες. Τότε οι g και h είναι στο $\mathcal{M}_A$ και $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h$ που αντιτίθεται στην ιδιότητα ακραίου σημείου της f. Αυτό αποδεικνύει την πρόταση.

Άλλη μια κατάσταση με την οποία ασχολήθηκε ο Karlin είναι η επόμενη: Έστω $\mu_1, ..., \mu_m$ το σύνολο μη ατομικών πεπερασμένων μέτρων στο T, και έστω $\alpha_1, ..., \alpha_m$, $b_1, ..., b_m$ να είναι στο E^n. Έστω A και B όπως παραπάνω. Έστω $\mathcal{G}$ το υποσύνολο του $\mathcal{M}_A$ που αποτελείται από συναρτήσεις f τέτοιες ώστε $b_i \leq \int f d\mu_i \leq \alpha_i$ για $i = 1, ..., m$. Ο Karlin απέδειξε ότι τα ακραία σημεία του $\mathcal{G}$ περιέχονται στο $\mathcal{M}_{cl(B)}$.

Πρόταση 4.12. *([1], προτ 6.2) Τα ακραία σημεία του $\mathcal{G}$ περιέχονται στο $\mathcal{M}_B$*

Έστω f ένα ακραίο σημείο της $\mathcal{G}$, κι ας υποθέσουμε ότι δεν είναι στη $\mathcal{M}_B$. Κατασκευάζουμε τις g και h όπως στην προηγούμενη απόδειξη, κι έστω $e = \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}h$, έτσι ώστε $f + e = g \in \mathcal{A}$. Για $S \subset T$, θέτουμε $\mu(S) = \{\int\limits_S e d\mu_1, ..., \int\limits_S e d\mu_m\}$. Τότε μ είναι διανυσματικό μέτρο διάστασης nm. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Liapunov στα διανυσματικά μέτρα αποκτάμε ένα υποσύνολο S του T τέτοιο ώστε $\mu(S) = \frac{1}{2}\mu(T)$. Ορίζουμε e' πάνω στο T ως $e'(t) = e(t)$ για $t \in S$, και $e'(t) = -e(t)$ για $t \notin S$. Τώρα ορίζουμε f_1 και f_2 ως $f_1 = f + e'$, $f_2 = f - e'$. Τότε $f = \frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2}$, f_1 και f_2 είναι στο $\mathcal{M}_A$, και

$$\int f_1 d\mu_i \;=\; \int f d\mu_i + \int\limits_S e d\mu_i - \int\limits_{\frac{T}{S}} e d\mu_i$$

$= \int f d\mu_i + \frac{1}{2}\int e d\mu_i - \frac{1}{2}\int e d\mu_i = \int f d\mu_i$.*Επομένως* $f_1 \in \mathcal{G}$. *Ομοίως* $f_2 \in \mathcal{G}$ *κι* *η απόδειξη ολοκληρώθηκε.* □

Αν η F είναι μια πλειότιμη συνάρτηση που ορίζεται ως $F(t) = A$ για όλα τα t, τότε $\mathcal{F} = \mathcal{M}_A$.

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

Θα αναφέρουμε σε αυτό το κεφάλαιο δυο θεμελειώδη θεωρήματα της Ανάλυσης των πλειότιμων συναρτήσεων. Αρχικά παρουσιάζουμε το θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer κι ύστερα τη γενίκευση αυτού, δηλαδή το θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani.
Το θεώρημα του Brouwer είναι πολύ διάσημο λόγω της χρήσης του σε πολλά μαθηματικά πεδία, το κυριότερο εξ αυτών είναι η Τοπολογία του Ευκλείδιου χώρου, στη θεμελείωση της οποίας αποτελεί ένα απο τα πιο σημαντικά θεωρήματα. Ακόμη χρησιμοποιείται για να αποδείξει διάφορα αποτελέσματα στις διαφορικές εξισώσεις και συνήθως καλύπτεται σε κάθε εισαγωγικό μάθημα Διαφορικής Γεωμετρίας. Στη Θεωριά Παιγνίων και στα Οικονομικά τόσο το θεώρημα αυτό όσο κι η επέκτασή του κατέχουν κεντρικό ρόλο στην απόδειξη της ύπαρξης μιας γενικής ισορροπίας στις οικονομίες αγοράς, όπως αναπτύχθηκαν στα 1950 από τους οικονομολόγους G.Debreu και K.Arrow.

Θεώρημα 5.1. *Έστω B^n η n-διάστατη κλειστή μοναδιαία μπάλα κι έστω $f : B^n \to B^n$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η f έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή για κάποιο $x \in B^n$ $f(x) = x$*

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani είναι ένα θεώρημα σταθερού σημείου για πλειότιμες απεικονίσεις. Παρέχει επαρκείς υποθέσεις για να έχει μια πλειότιμη συνάρτηση ένα σταθερό σημείο. Χρησιμοποιήθηκε από τον J.Nash στην περιγραφή της Nash ισορροπίας κι αργότερα στη Θεωρία Παιγνίων και στα Οικονομικά.

Θεώρημα 5.2. *[4] Έστω S μη κενό συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του Ευκλείδιου χώρου E^n κι έστω $f : S \to 2^S$ μια πλειότιμη απεικόνιση στο S με κλειστό γράφημα και $f(x)$ είναι μη κενή και κυρτή για όλα τα $x \in S$. Τότε η*

f έχει σταθερό σημείο.

Κάποιες πηγές καθώς κι η πρωτότυπη εργασία του Kakutani χρησιμοποιούν την έννοια της upper hemicontinuity στη διατύπωση του θεωρήματος, δηλαδη θεωρούν την f upper hemicontinuous.
Επίσης αναφέρουμε το θεώρημα κλειστού γραφήματος για πλειότιμες απεικονίσεις.

Θεώρημα 5.3. *[3] Μια απεικόνιση $F : A \to B$ με κλειστές τιμές και συμπαγή πεδίο τιμών είναι upper hemicontinuous αρκεί να έχει κλειστό γράφημα.*

$$Gr(F) = \{(a, b) \in A \times B : b \in F(a)\}$$

Βιβλιογραφία

[1] *R.AUMANN, Ολοκληρώματα πλειότιμων απεικονίσεων, Ιερουσαλήμ (1965)*

[2] *C.ALIPRANTIS-K.BORDER, Απειροδιάστατη Ανάλυση (1999)*

[3] *Z.DENKOWSKI-S.MIGORSKI-N.PAPAGEORGIOU Μια εισαγωγή στη μη Γραμμική Ανάλυση (2003)*

[4] *J.P.AUBIN-H.FRANKOWSKA, Ανάλυση πλειότιμων απεικονίσεων (1990)*

[5] *Ι. ΠΟΛΥΡΑΚΗΣ, Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία (2010)*

[6] *Z.ARTSTEIN-J.A.BURNS, Ολοκλήρωση συμπαγών πλειότιμων απεικονίσεων (1975)*

[7] *G.DEBREU, Ολοκλήρωση απεικόνισης (1966)*