ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Προσέγγιση της εικασίας του Hadwiger για πυκνά γραφήματα

Διπλωματική Εργασία

ΑΡΓΥΡΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

Συνεπιβλέποντες Καθηγητές:

Δημήτριος Θηλυκός, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Ευστάθιος Ζάχος, Καθηγητής. Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Δημήτριο Θηλυκό, για τη συνεχή ενθάρρυνση και καθοδήγηση που έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής. Θεωρώ επίσης υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής και καθηγητές μου κ. Ευστάθιο Ζάχο και κ. Αντώνη Συμβώνη για την πολύτιμη βοήθεια, στήριξη και τη συνεχή παρότρυνση ενασχόλησης μου με τα θέματα της Θεωρητικής Πληροφορικής, καθ' όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου. Ακόμα, δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τους συμφοιτητές/τριες μου , με τους οποίους ανακάλυψα την αξία του συλλογικού διαβάσματος.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τα εφόδια που μου προσέφεραν, τη φροντίδα, τη συμπαράσταση και την υπομονή τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η θεωρία γραφημάτων αποτελεί κλάδο των μαθηματικών στο πλαίσιο του οποίου μελετώνται ιδιότητες και προβλήματα διακριτών αντικειμένων και διμελών σχέσεων που ορίζονται πάνω σε αυτά. Ο κλάδος αυτός των διακριτών μαθηματικών έχει εφαρμογές σε διάφορες επιστήμες, αφού κάνοντας χρήση γραφημάτων καθίσταται δυνατή η μοντελοποίηση μιας σειράς από διαφορετικά είδη δικτύων και δομών. Πρόκειται για ένα κλάδο που, επίσης, έχει μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον και εφαρμογές στη θεωρητική πληροφορική.

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την εικασία του Hadwiger, ένα ανοιχτό πρόβλημα της θεωρίας γραφημάτων. Ο Hadwiger υπέθεσε, συγκεκριμένα, ότι όταν ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος είναι μεγαλύτερος ή ίσος ενός k θα περιέχει μια κλίκα ως έλασσον. Θα είναι δυνατός, δηλαδή, ο μετασχηματισμός του, μέσω μιας ακολουθίας σύνθλιψης ακμών και αφαίρεσης κορυφών και ακμών, σε ένα πλήρες γράφημα k κορυφών. Πλήρες γράφημα ονομάζεται το γράφημα του οποίου οι κορυφές συνδέεονται άνα δύο με μία ακμή.

Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση ορισμών και εννοιών της θεωρίας γραφημάτων,που είναι απαραίτητες για την κατανόηση τουκύριου μέρους της απόδειξης.Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται μια σειρά από βασικά αξιώματα και αποδείξεις της θεωρίας πιθανοτήτων. Συνεχίζοντας, στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια περιγραφή της πιθανοτικής μεθόδου και συγκεκριμένα της μεθόδου πρώτης ροπής. Αρχικά αποδεικνύονται κάποιες βασικές σχέσεις της θεωρίας πιθανοτήτων χρήσιμες για την συγκεκριμένη τεχνική (Αρχή Πρώτης Ροπής και Ανισότητα Markov). Στη συνέχεια, γίνεται μια παρουσίαση της γενικής μεθοδολογίας και δίνεται ένα παράδειγμα χρήσης της.Η συγκεκριμένη απόδειξη δίνεται και ως εισαγωγή στην κατηγορία προβλημάτων που ανήκει και η εικασία. Στο τέταρτο κεφάλαιο διατυπώνεται η εικασία,παρουσιάζονται κάποιες αποδείξεις και συνθήκες ικανοποίησης της εικασίας, γενικεύσεις,εναλλακτικές εκδοχές,καθώςεπίσης και κάποιες αλγοριθμικές προεκτάσεις. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η απόδειξη του Mader.Πρόκειται για μια προσεγγιστική απόδειξή, στην οποία αξιοποιούνται οι τεχνικές της πιθανοτικής μεθόδου. Αυτή η απόδειξη δεν επαληθεύει την γραμμικότητα στη σχέση χρωματικού αριθμού και κλίκας που ζητά η εικασία αλλά πετυχαίνει ένακάτω φράγμα στην πυκνότητα, με λογαριθμική σχέση με το k, τέτοιο ώστε στα τυχαία γραφήματα να περιέχεται, ως έλασσον, η κλίκα k κορυφών.

ABSTRACT

In mathematics, graph theory deals with the properties and the problems of discrete objects and, furthermore, with the pairwise relations defined on them. The above discipline of discrete mathematics can be applied in various scientific areas, on the assumption that the use of graphs enables the modeling of a series of different types of networks and structures. Graph theory has, also, great theoretical interest and applications in theoretical computer science.

As long as this thesis is related, focus is given in the conjecture of Hadwiger, an open problem in graph theory. Hadwiger assumed that, if the chromatic number of a graph is greater than or equal to a k, then one can contract edges and remove vertices and edges. In this way the graph will be reconstructed so that every pair of the k vertices will be connected by a unique edge. So, there will be a complete graph of k vertices as a minor.

In the first chapter of this work, an introductory reference is made to definitions and concepts related to graph theory. These are necessary for the better understanding of the main part of this work. In the second chapter, is presented a number of basic axioms and proofs of probability theory. Moreover, in the third chapter is given a description of a probabilistic method. More specifically, is discussed the first moment method. Firstly, some basic ratios of probability theory (Principle First Moment Inequality and Markov), which are useful for this technique, are proved. This chapter continues with the general methodology and the presentation of an example. This example is also given as an introduction to the category of problems in which belongs the conjecture.In the fourth chapter, the conjecture is setting down. Moreover, there are presented some proofs and conditions for the satisfaction of the conjecture, generalizations, alternative versions, and some algorithmic extensions. Finally, at the fifth chapter the proof of Mader is presented. This is an approximate proof, which utilized the techniques of probabilistic method. This proof does not verify the linearity between the chromatic number and the complete graph of k vertices that demands the conjecture. But, it accomplishes a lower bound on the density, such that the random graphs to include a complete graph of k vertices as a minor.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Η Θεωρία Γραφημάτων αποτελεί τον κλάδο των μαθηματικών στο πλαίσιο του οποίου πραγματοποιείται η μελέτη των ιδιοτήτων και των προβλημάτων διακριτών αντικειμένων και διμελών σχέσεων που ορίζονται πάνω σε αυτά. Ο κλάδος αυτός των διακριτών μαθηματικών έχει εφαρμογές στην πληροφορική, τη μηχανολογία, τη χημεία, καθώς και την κοινωνιολογία. Γενικά, κάνοντας χρήση γραφημάτων καθίσταται δυνατή η μοντελοποίηση μιας σειράς από διαφορετικά είδη δικτύων και δομών, όπως είναι για παράδειγμα τα συγκοινωνιακά δίκτυα κάθε είδους, ο παγκόσμιος ιστός, διάφορες χημικές συνθέσεις και μηχανολογικά δίκτυα, όπως επίσης και τα κοινωνικά δίκτυα. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε πολλές περιπτώσεις η μελέτη των ιδιοτήτων των γραφημάτων οδηγεί σε ιδιαιτέρως αξιόλογα συμπεράσματα, με αποτέλεσμα πολλοί ερευνητές να καταπιάνονται σήμερα με τέτοιου είδους ζητήματα. Το μεγάλο ενδιαφέρον της επιστημονική κοινότητας σε σχέση με τη θεωρία γραφημάτων, φαίνεται άλλωστε και από το πλήθος ανοιχτών προβλημάτων και εικασιών στον τομέα αυτό. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα γίνει μια εκτενής παρουσίαση και μελέτη ενός τέτοιου ζητήματος και συγκεκριμένα της εικασίας του Hadwiger, ενώ θα παρουσιασθεί παράλληλα και μια προσεγγιστική απόδειξή της για συγκεκριμένη κλάση γραφημάτων.

1.1 Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί

Στο πλαίσιο μιας σύντομης εισαγωγής στις βασικές έννοιες της Θεωρίας Γραφημάτων απαραίτητος κρίνεται ο σαφής ορισμός της έννοιας του γραφήματος:

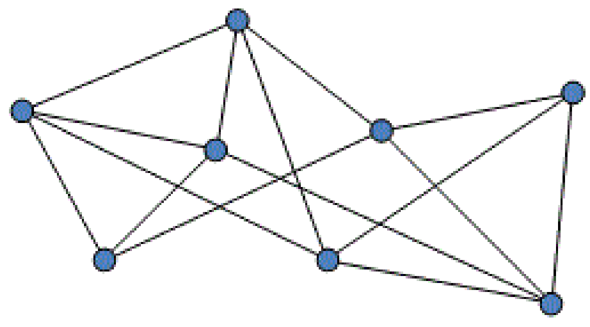
Ορισμός 1.1

Γράφημα *ονομάζεται ένα διατεταγμένο ζεύγος* $G=(V,E)$ *δυο ξένων μεταξύ τους συνόλων* $V \neq \varnothing$ *και* E*, όπου το σύνολο* E *αποτελεί ένα υποσύνολο του συνόλου των μη* *διατεταγμένων ζευγών του V=V(G). Τα στοιχεία του συνόλου V ονομάζονται κορυφές του γραφήματος, ενώ τα στοιχεία του συνόλου E ονομάζονται ακμές.*

Ο απλούστερος τρόπος να γίνει κατανοητή η έννοια του γραφήματος είναι ως ένα σύνολο κορυφών, ορισμένες εκ των οποίων ενώνονται μεταξύ τους ανά δύο με ακμές. Για κάθε ακμή $e=\{v,u\}\in \mathrm{E}$ οι κορυφές v και u θεωρούνται **συνδεδεμένες**, καθώς αποτελούν άκρα της e, ονομάζονται ακόμα **γειτονικές** κορυφές του G. Ακόμα η ακμή $e=\{v,u\}\in \mathrm{E}$ ονομάζεται **προσπίπτουσα** των κορυφών u και v.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να καταστεί σαφές το γεγονός ότι στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, οι έννοιες που ορίζονται αφορούν αποκλειστικά και μόνο **απλά γραφήματα**, δηλαδή γραφήματα στα οποία δεν υπάρχουν δύο ακμές που να συνδέουν το ίδιο ζευγάρι κορυφών ούτε ακμές που να συνδέουν την ίδια κορυφή.

Έτσι, για κάθε κορυφή μπορεί να ορισθεί η συνάρτηση **βαθμός** η οποία υποδεικνύει ουσιαστικά τον αριθμό των κορυφών με τις οποίες συνδέεται η εν λόγω κορυφή. Στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία ο βαθμός μιας κορυφής u συμβολίζεται συνήθως ως d(u). Επιπλέον, το πλήθος των κορυφών και των ακμών ενός γραφήματος συμβολίζονται με $|\mathrm{V}|=|\mathrm{V(G)}|$ και $|\mathrm{E}|=|\mathrm{E(G)}|$, ενώ αποτελούν την **τάξη** και το **μέγεθος** του γραφήματος, αντίστοιχα. [1]



Εικόνα 1.1-Απλό γράφημα

Ορισμός 1.2

Υπογράφημα *ενός γραφήματος G ονομάζεται ένα γράφημα G' όταν κάθε ακμή και κάθε κορυφή του G' περιέχεται στο G.*

Ορισμός 1.3

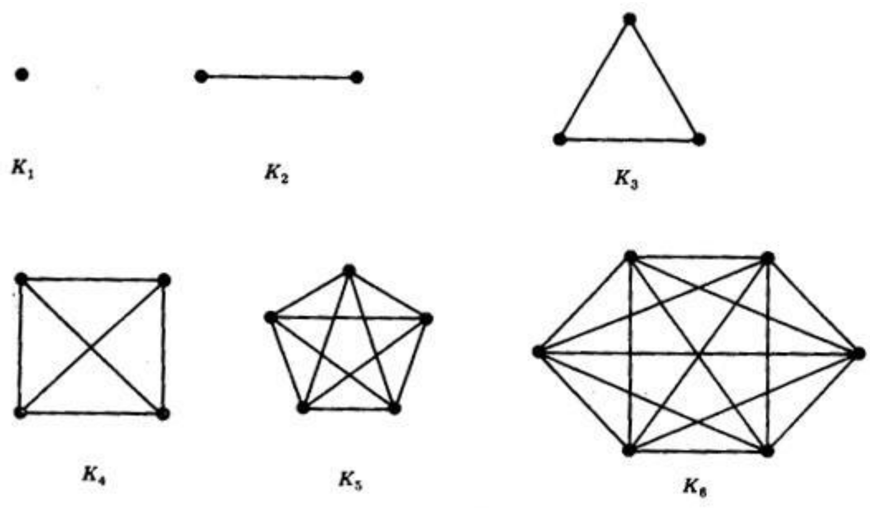
Ισομορφισμός Γραφημάτων: *Δυο γραφήματα* G, H *λέγονται ισόμορφα αν υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση* $\tau : \mathrm{V(G)} \rightarrow \mathrm{V(H)}$ *τέτοια ώστε για κάθε* $u, v \in \mathrm{V(G)}$ *με* $u \neq v$ *να ισχύει ότι* $\{u, v\} \in \mathrm{E(G)} \Leftrightarrow \{\tau(u), \tau(v)\} \in \mathrm{E(H)}$. *Αν δυο γραφήματα G και H είναι ισόμορφα τότε χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό G ≃ H και λέμε ότι το γράφημα G είναι το ίδιο με το H ή αλλιώς ότι το G είναι το H.*[2]

Στη Θεωρία Γραφημάτων γενικότερα και στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας ειδικότερα, ιδιαίτερα χρήσιμα αποδεικνύονται τα πλήρη γραφήματα:

Ορισμός 1.4

Πλήρες γράφημα *n κορυφών ονομάζεται το γράφημα που εμφανίζει ακμή για κάθε ζεύγος από τους n κόμβους και συμβολίζεται με* K_n.

Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας του πλήρους γραφήματος, στη συνέχεια παρατίθενται τα πλήρη γραφήματα έως και 6 κόμβων:



Εικόνα 1.2-Πλήρη γραφήματα από το K_1 έως το K_6

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει αναφορά στην ένοια της πυκνότητας ενός γραφήματος. Σε γενικές γραμμές, πυκνό ονομάζεται ένα γράφημα με μεγάλο μέσο βαθμό γραφήματος. Καθίσταται, λοιπόν, σαφές ότι τα πυκνά γραφήματα αποτελούν ουσιαστικά σύνολο γραφημάτων που προσεγγίζει γενικά στο σύνολο των πλήρων γραφημάτων, καθώς πρόκειται για γραφήματα με μεγάλο κατά μέσο όρο πλήθος ακμών ανά κορυφή. Αντίθετα, τα γραφήματα με μικρό μέσο βαθμό γραφήματος, δηλαδή με μικρό αριθμό ακμών ανά κορυφή καλούνται αραιά. Η διάκριση μεταξύ πυκνών και αραιών γραφημάτων εξαρτάται από το ευρύτερο πλαίσιο του εκάστοτε προβλήματος που εξετάζεται.

Ορισμός 1.5

Κλίκα *ονομάζεται το μέγιστο πλήρες υπογράφημα που περιέχεται σε ένα γράφημα G, ενώ το πλήθος των κόμβων της καλείται αριθμός κλίκας και συμβολίζεται με* $\omega(\mathrm{G})$.

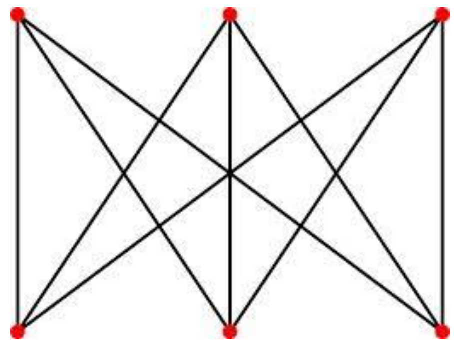
Ορισμός 1.6

Γειτονιά κορυφών: *Έστω σύνολο κορυφών S στο γράφημα G,* $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{V(G)}$*, καλούμε γειτονιά του S το σύνολο* $\mathrm{N}_G(S) = \{u \in \mathrm{V(G)/S} |\ \exists \mathrm{v} \in \mathrm{S}:(u, \mathrm{v}) \in \mathrm{E(G)}\}$ *δηλαδή το σύνολο όλων των κορυφών που είναι συνδεδεμένες με κάποιον v που ανήκει στο S αλλά δεν ανήκουν στο S. Αντιστοίχως, ορίζουμε και τη* ***γειτονιά κορυφής*** *u ως το σύνολο* $\mathrm{N}_G(u) = \{v \in \mathrm{V(G)} |\ (u, \mathrm{v}) \in \mathrm{E(G)}\}$. *Αν για μια κορυφή* $\mathrm{x} \in \mathrm{V(G)}$ *ισχύει ότι* $\mathrm{N}_G(\mathrm{x})=\varnothing$ *τότε λέμε ότι η x είναι* ***απομονωμένη κορυφή.***[3]

Ορισμός 1.7

Διμερές γράφημα: *Ένα γράφημα καλείται διμερές ή διαμερισμένο όταν το σύνολο των κορυφών του V μπορεί να διαμεριστεί σε δυο ξένα μη κενά υποσύνολα* V_1 *και* V_2*, τέτοια ώστε κάθε πλευρά του G να ενώνει μια κορυφή του* V_1 *με μια κορυφή του* V_2*. Αν στο G κάθε κορυφή του* V_1 *ενώνεται με κάθε κορυφή του* V_2*, τότε το G λέγεται* ***πλήρες διμερές*** *και συμβολίζεται με* $\mathrm{K}_{m,n}$*, όπου* $\mathrm{m}=|\mathrm{V}_1|$, $\mathrm{n}=|\mathrm{V}_2|$. [2]

Στη συνέχεια παρατίθεται το πλήρες διμερές $\mathrm{K}_{3,3}$:



Εικόνα 1.3-Πλήρες Διμερές $K_{3,3}$

Υπολογισμός μέσου βαθμού γραφήματος

Μέσος βαθμός γραφήματος είναι το πηλίκο του αθροίσματος των βαθμών των κορυφών ως προς το πλήθος των κορυφών και θα το συμβολίζουμε με d(G). Επειδή όμως $\sum_{v\in V} d(v) = 2*E$, αφού η κάθε ακμή μετριέται στους βαθμούς και των δυο κορυφών που είναι προσκείμενη, άρα προσφέρει δυο μονάδες στο άθροισμα των βαθμών. Συνεπώς έχουμε d(G)=$\frac{|2*E|}{|V|}$. Ακόμα ορίζεται η ποσότητα ε(G)=$\frac{|E|}{|V|}$ και καλείται πυκνότητα του γραφήματος G, προφανώς d(G)=2*ε(G).

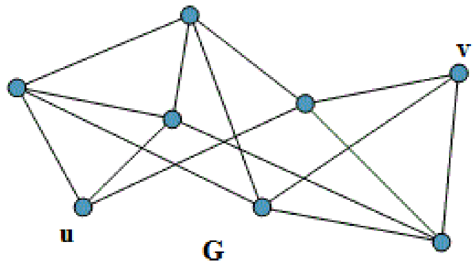
Έκτος από τον μέσο βαθμό γραφήματος μπορούμε να ορίσουμε και τον **μεγαλύτερο βαθμό** στο γράφημα όπου συμβολίζεται με **Δ(G)** και είναι η συνάρτηση που μας δίνει το μέγιστο πλήθος ακμών με το οποίο συνδέεται κάποια κορυφή στο G. Αντιστοίχως ορίζεται και το **δ(G)** ο **μικρότερος βαθμός** σε ένα γράφημα. [4]

Εκφυλισμός Γραφήματος

Πρόκειται για μια έννοια που αφορά το μέγιστο κάτω φράγμα, των ελάχιστων βαθμών των υπογραφημάτων ενός γραφήματος. Συμβολίζεται με δ^*(G) και ο μαθηματικός ορισμός του είναι ο εξής:

$\delta^*(G)=max\{k|\ G$ *περιέχει ένα υπογράφημα H με* $\delta(H)\geq k\}$. [3]

Ας δούμε με ένα παράδειγμα ότι ο εκφυλισμός του γραφήματος της εικόνας 1 είναι 3, οι μόνες κορυφές που έχουν βαθμό 3 είναι οι u και v όμως στο υπογράφημα στο οποίο έχουμε αναιρέσει και τις δυο έχουν όλες οι κορυφές βαθμό 3, άρα δεν υπάρχει υπογράφημα με μεγαλύτερο από 3 ελάχιστο βαθμό.



Εικόνα 4- Εκφυλισμός δ^*(G)=3

<u>Ορισμός 1.8</u>

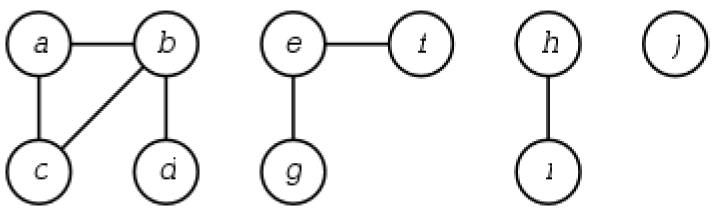
Κανονικά γραφήματα: *Αν σε ένα γράφημα όλες οι κορυφές έχουν βαθμό κ τότε το ονομάζουμε κ–κανονικό γράφημα ή κανονικό γράφημα βαθμού κ.*

<u>Ορισμός 1.9</u>

Δρόμοι, μονοπάτια και κύκλοι: *Μια πεπερασμένη ακολουθία κορυφών και ακμών, η οποία αρχίζει και τελειώνει με κορυφή και στην οποία κάθε ακμή είναι προσπίπτουσα της επόμενης και της προηγούμενης κορυφής καλείται **δρόμος**. Ένας δρόμος στον οποίο κάθε ακμή και κάθε κορυφή εμφανίζεται μόνο μια φορά λέγεται **μονοπάτι.** Ένα μονοπάτι που αρχίζει και τελειώνει με την ίδια κορυφή λέγεται **κύκλος**. Ένας κύκλος στον οποίο κάθε κορυφή και κάθε ακμή περιέχεται μια φορά καλείται **κύκλος Euler**.*[2]

<u>Ορισμός 1.10</u>

Συνεκτική συνιστώσα: *Δύο κορυφές* u,v *ενός γραφήματος ανήκουν στην ίδια **συνεκτική συνιστώσα** αν υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή* u *στην κορυφή* v. *Όταν ένα γράφημα αποτελείται από μια μόνο συνεκτική συνιστώσα ονομάζεται συνεκτικό.* [2]



Εικόνα 5- Συνεκτικές συνιστώσες: {a,b,c,d},{e,t,g},{h,i},{j}

Ορισμός 1.11

Δέντρα και Δάση: *Ένα συνεκτικό γράφημα, με μία συνεκτική συνιστώσα, χωρίς κύκλους ονομάζεται **δέντρο**. Κατ' αναλογία ένα γράφημα, με δύο ή περισσότερα δέντρα, χωρίς κύκλους ονομάζεται **δάσος**. Τέλος το υπογράφημα, όπου είναι δέντρο, καλείται **υποδέντρο**.*[2]

Στην **Εικόνα 5** το υπογράφημα που περιλαμβάνει τις κορυφές {e,t,g,h,i,j} είναι δάσος, ενώ δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ολόκληρο το γράφημα δάσος γιατί στο {a,b,c,d} περιέχεται κύκλος.

Χρωματισμός κορυφών γραφήματος

Χρωματισμός των κορυφών ενός γραφήματος G είναι μια αντιστοιχία διαφόρων χρωμάτων στις κορυφές του G, έτσι ώστε δύο γειτονικές κορυφές του G να έχουν διαφορετικό χρώμα. Ένα γράφημα G λέγεται n-χρωματικό αν υπάρχει χρωματισμός του με n χρώματα.

Ορισμός 1.12

Ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματιστεί ένα γράφημα λέγεται **χρωματικός αριθμός** και θα το συμβολίζουμε με $\chi(\mathrm{G})$.

Ο χρωματισμός γραφημάτων αφορά ένα μεγάλου πλήθους υποσύνολο των προβλημάτων και θεωρημάτων της θεωρίας γραφημάτων. Εδώ θα παρουσιαστούν τρία θεωρήματα σχετικά με το χρωματισμό γραφήματος:

1) **Ο χρωματικός αριθμός ενός πλήρους γραφήματος είναι ίσος με το πλήθος των κορυφών του: $\chi(\mathrm{K}_n) = n$**

2) **Κάτω φράγμα του χρωματικού αριθμού γραφήματος είναι ο αριθμός κλίκας: $\omega(\mathrm{G}) \leq \chi(\mathrm{G})$**

3) **Θεώρημα του Brooks: «Άνω όριο του χρωματικού αριθμού γραφήματος είναι ο μεγαλύτερος βαθμός κορυφής στο γράφημα εκτός αν το γράφημα είναι πλήρες ή μονού πλήθους κορυφών κύκλος όπου χρειάζονται Δ+1 χρώματα για τον**

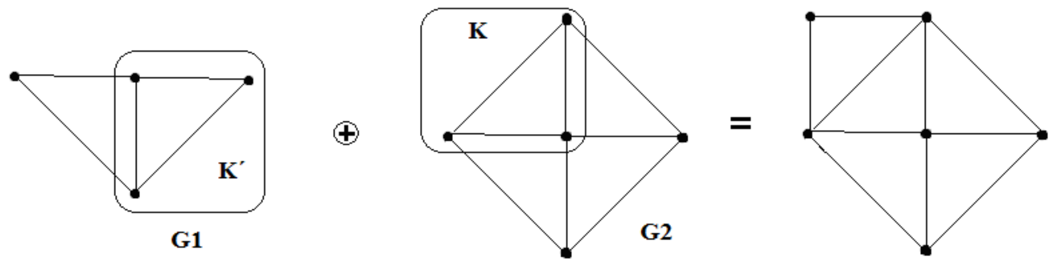
χρωματισμό των κορυφών του». [2]

Μια μαθηματική έννοια που σχετίζεται με την αλγοριθμική διαδικασία χρωματισμού κορυφών γραφήματος είναι το ανεξάρτητο σύνολο κορυφών. **Ανεξάρτητο σύνολο κορυφών** είναι ένα σύνολο κορυφών στο οποίο καμία κορυφή του συνόλου δεν γειτονεύει με άλλη κορυφή του συνόλου. Ο χρωματισμός ενός γραφήματος είναι η αλγοριθμική διαδικασία με την οποία σε κάθε ανεξάρτητο σύνολο κορυφών αντιστοιχεί ένα χρώμα.

1.2 Πράξεις και μετασχηματισμοί γραφημάτων

1.2.1 Άθροισμα Κλικών

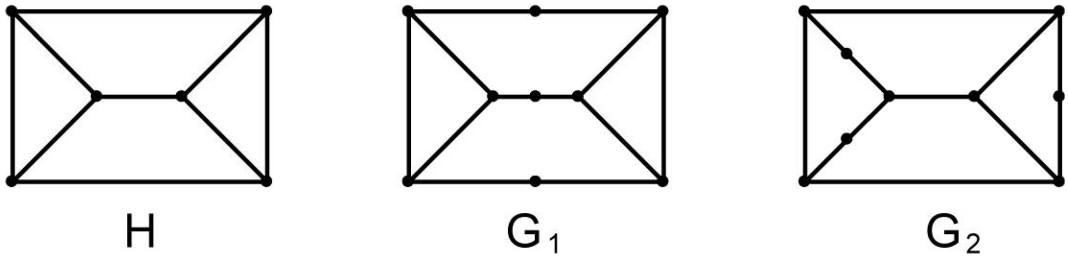
Η πρώτη πράξη, σε γραφήματα, την οποία θα ορίσουμε είναι το άθροισμα κλικών. Έστω G_1 και G_2 δύο γραφήματα και έστω ότι περιέχουν δύο κλίκες K, K' αντιστοίχως, τότε καλούμε άθροισμα κλικών την ταύτιση μιας προς μιας των κορυφών των δύο κλικών όταν είναι η ίδια κλίκα και την μερική ταύτιση κάποιων εκ των κορυφών όταν πρόκειται για διαφορετικές κλίκες.[3]



Εικόνα 6-Άθροισμα κλικών $G_1 \oplus_{K,K'} G_2$

1.2.2 Ομοιομορφισμός Γραφημάτων

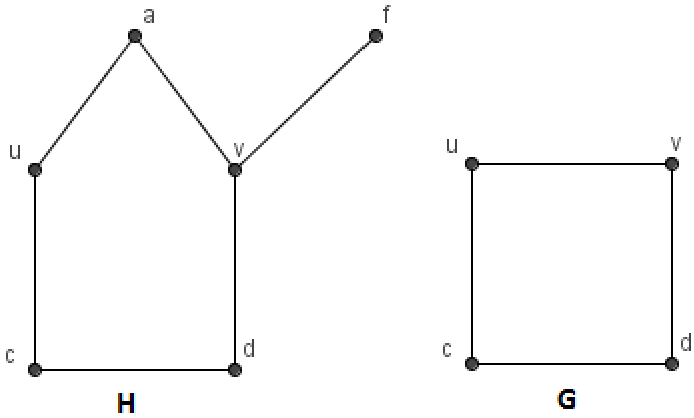
Δυο γραφήματα λέγονται ομοιόμορφα αν μπορούν να προκύψουν από το ίδιο γράφημα ή το ένα από το άλλο μέσω μιας διαδικασίας μετασχηματισμού που ονομάζεται υποδιαίρεση. **Υποδιαίρεση** είναι η δημιουργία ενός νέου γραφήματος G΄ χωρίζοντας κάποιες πλευρές ενός G με νέες κορυφές βαθμού 2.[2,3]



Εικόνα 7- G_1, G_2 ομοιόμορφα με το H άρα και ομοιόμορφα μεταξύ τους

1.2.3 Τοπολογικό έλασσον

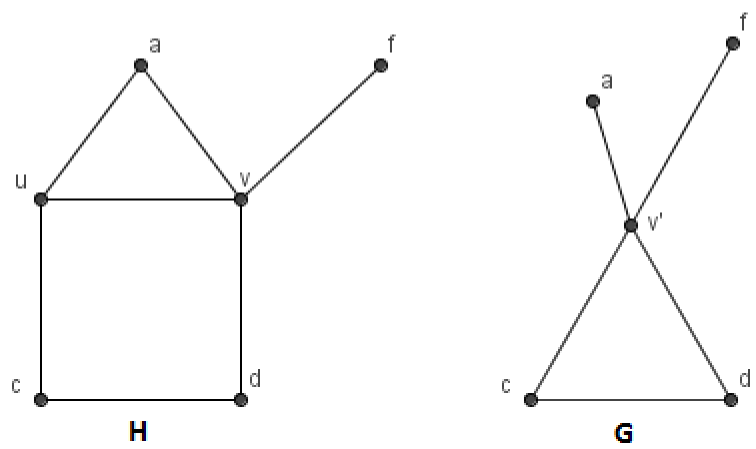
Πρόκειται για μια σχέση μερικής διάταξης γραφημάτων στην οποία οι επιτρεπτοί μετασχηματισμοί ενός γραφήματος G είναι η αφαίρεση ακμής, η αφαίρεση κορυφής και η διάλυση κορυφής που είναι ουσιαστικά ο αντίστροφος μετασχηματισμός από την υποδιαίρεση. Δηλαδή ένα γράφημα H λέγεται ότι είναι τοπολογικό έλασσον του G αν έχει προκύψει ύστερα από αφαίρεση ακμών, αφαίρεση κορυφών και την αφαίρεση κάποιων κορυφών με βαθμό 2 με ταυτόχρονη ένωση των δύο γειτόνων τους με μια ακμή.[3]



Εικόνα 8 – Το G είναι τοπολογικό έλασσον του H, έπειτα από αφαίρεση της κορυφής f και διάλυση της κορυφής a

1.2.4 Έλασσον γράφημα

Ένα γράφημα H λέγεται έλασσον του γραφήματος G αν έχει σχηματιστεί από το G μέσω των διαδικασιών αφαίρεσης ακμών ή κορυφών και σύνθλιψης ακμών. **Σύνθλιψη** μιας ακμής e είναι μια διαδικασία μετασχηματισμού γραφήματος στην οποία οι κορυφές u, v που ενώνονται από την ακμή e καθώς και όλες οι προσκείμενες ακμές τους αντικαθίστανται από μια καινούρια κορυφή v΄ η οποία συνδέεται με όλες τις κορυφές που περιέχονταν στη γειτονιά $N_G\{u,v\}$. Βλέπουμε και στην εικόνα 9 τη σύνθλιψη της ακμής {u,v} που δημιουργεί το γράφημα G, ένα έλασσον του H.[3]



Εικόνα 9 - G έλασσον γράφημα του H

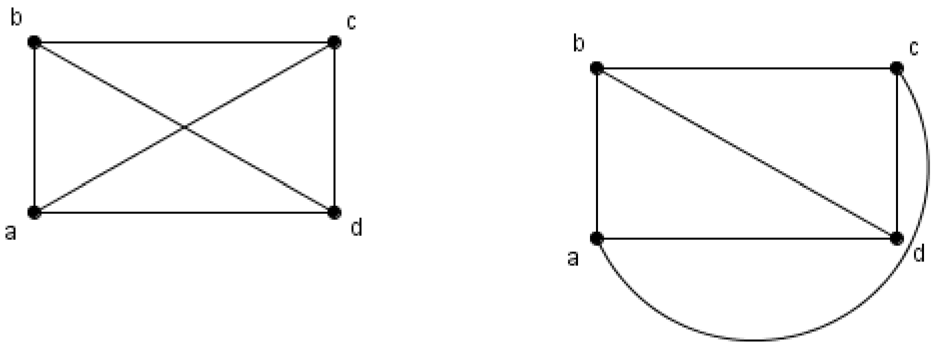
1.3 Σημαντικά Θεωρήματα

<u>Επίπεδα γραφήματα</u>

Μερικά από τα πιο ενδιαφέροντα θεωρήματα της θεωρίας γραφημάτων έχουν να κάνουν με ιδιότητες των επίπεδων γραφημάτων. Ο παρακάτω τοπολογικός ορισμός μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητός μέσω της εικόνας 10.

Ορισμός 1.13

Επίπεδα γραφήματα: *Ένα γράφημα G λέμε ότι είναι εμβαπτίσιμο στην επιφάνεια S όταν μπορεί να σχεδιαστεί σε κάποια επιφάνεια έτσι ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται. Ένα γράφημα G λέγεται* ***επίπεδο γράφημα*** *όταν είναι εμβαπτίσιμο στο επίπεδο.*



Εικόνα 10 – Το K_4 είναι επίπεδο, αφού με τον κατάλληλο ισομορφισμό του γραφήματος οι ακμές του δεν τέμνονται στο επίπεδο

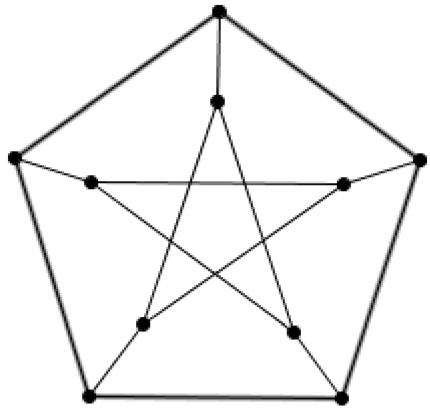
Στη θεωρία γραφημάτων ένα από τα πεδία έρευνάς τα οποία οδήγησαν σε κάποιες από τις πιο ενδιαφέρουσες αποδείξεις, αλλά και εικασίες, είναι τα κριτήρια επιπεδότητας και μη επιπεδότητας. Τα κριτήρια αυτά, έχουν και εφαρμογές στην ηλεκτρολογία, όπου τμήματα ενός δικτύου τυπώνονται στο ένα μέρος μιας κατάλληλα μονωμένης πλακέτας και ονομάζονται τυπωμένα κυκλώματα. Τα καλώδια δεν μονώνονται, άρα δεν μπορούν να εφάπτονται, διότι θα έχουμε βραχυκυκλώματα. Πρέπει λοιπόν το γράφημα του αντίστοιχου δικτύου να είναι επίπεδο. Ξεφεύγοντας κάπως από τα όρια της διπλωματικής εργασίας, προκειμένου να φανεί η αλληλεπίδραση θεωρίας και εφαρμογών, στην ηλεκτρολογία υπάρχει το ερώτημα, σε ένα μεγάλο δίκτυο, πόσα τυπωμένα κυκλώματα απαιτούνται ώστε να συμπληρωθεί όλο το δίκτυο, με αυτόν τον στόχο έχει οριστεί μια έννοια, το μέγεθος πάχος ενός γραφήματος, ένα μέτρο ουσιαστικά του πόσο «μη επίπεδο» είναι ένα γράφημα.[2]

1.3.1 Θεώρημα Kuratowski και θεώρημα Wagner

Επιστρέφοντας στα κριτήρια που μας ενδιαφέρουν, ο πολωνός μαθηματικός Kazimierz Kuratowski εισήγαγε τον χαρακτηρισμό των επίπεδων γραφημάτων που είναι γνωστός ως

θεώρημα Kuratowski, μια εκδοχή του θεωρήματος είναι αυτή που χρησιμοποιείται η σχέση τοπολογικό έλασσον:

«Ένα πεπερασμένο γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει ως τοπολογικό έλασσον ούτε το K_5 ούτε το $K_{3,3}$»



Εικόνα 11 – Το γράφημα Petersen είναι ένα χαρακτηριστικά μη επίπεδο γράφημα όπου χρησιμοποιείται και στην απόδειξη του θεωρήματος Kuratowski

Υπάρχει ακόμα και το ισοδύναμο **θεώρημα του Wagner** που εισήγαγε στη θεωρία γραφημάτων την έννοια που μας απασχολεί ιδιαίτερα σε αυτήν την διπλωματική εργασία τα ελάσσονα γραφήματα:

«Ένα πεπερασμένο γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν στα ελάσσονα γραφήματα του δεν περιέχεται ούτε το K_5 ούτε το $K_{3,3}$»

1.3.2 Θεωρήματα 4 και 5 χρωμάτων

Τα δύο θεωρήματα αυτά μπορούν να περιγραφούν από τις δύο ισοδύναμες διατυπώσεις όπου η μια χρησιμοποιεί την δομή των γραφημάτων έτσι όπως έχει περιγραφεί ως τώρα και η άλλη χρησιμοποιεί ένα είδος «χαρτών».

1) «Κάθε επίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 4».
2) «Αν χρωματίσουμε τις περιοχές ενός χάρτη έτσι ώστε δύο γειτονικές περιοχές να έχουν διαφορετικό χρώμα (δυο περιοχές θεωρούνται γειτονικές αν έχουν σύνορο πλευρά, αν το σύνορο είναι σημείο δεν θεωρούνται γειτονικές), τότε δεν απαιτούνται πάνω από 4

χρώματα».

Οι αντίστοιχες διατυπώσεις ισχύουν και για το θεώρημα 5 χρωμάτων. Άρα προφανώς πρόκειται για μια συνεπαγωγή του θεωρήματος 4 χρωμάτων αλλά είναι πολύ πιο εύκολο στην επίλυση. Συγκεκριμένα η απόδειξη στο θεώρημα 5 χρωμάτων, έγινε από τον Heawood και προέκυψε μέσω του εντοπισμού κάποιων λαθών στην αποτυχημένη απόπειρα του Kempe to 1879 να αποδείξει το θεώρημα 4 χρωμάτων. Αντίθετα το θεώρημα 4 χρωμάτων αποδείχθηκε έναν αιώνα μετά με ανάλυση του προβλήματος σε 1936 περιπτώσεις από υπολογιστή, από τους Appel και Haken όπου εφάρμοσαν μια ιδέα του Heesch.

1.3.3 Θεώρημα Robertson-Seymour

Μία απλή διατύπωση του πολύ ισχυρού θεωρήματος ελασσόνων γραφημάτων, των Robertson και Seymour, είναι η εξής: «Κάθε οικογένεια γραφημάτων κλειστή ως προς τον μετασχηματισμό έλασσον μπορεί να οριστεί από πεπερασμένο αριθμό γραφημάτων τα οποία δεν ανήκουν στην οικογένεια, και λέγονται απαγορευμένα-ελάσσονα». Με ένα παράδειγμα, το θεώρημα του Wagner αποδεικνύει ότι τα επίπεδα γραφήματα είναι μια οικογένεια που μπορεί να οριστεί από το σύνολο των $(K_5, K_{3,3})$ ως απαγορευμένα-ελάσσονα.[5]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Η έννοια της πιθανότητας ορίστηκε κυρίως για να περιγράψει το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης. **Πείραμα τύχης** ονομάζεται ένα πείραμα το οποίο εκτελούμενο υπό τις ίδιες συνθήκες μπορεί να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα. Είναι προφανές ότι ένα πείραμα τύχης συνεπάγεται αδυναμία πρόβλεψης του αποτελέσματος μιας εκτέλεσης του. Ένα κλασσικό παράδειγμα εισαγωγής σε έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων είναι τα πειράματα τύχης που αποτέλεσαν μια από τις πρώτες εφαρμογές των πιθανοτήτων, τα τυχερά παιχνίδια και μπορεί να δωθεί και χωρίς τον αυστηρό ορισμό των εννοιών: «Στο ρίξιμο ενός 6θέσιου ζαριού όπου παίρνουμε ως αποτέλεσμα το νούμερο της πάνω επιφάνειας, ο **δειγματοχώρος** είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και το **ενδεχόμενο** να έρθει με το ρίξιμο ζυγός αριθμός συμβολίζεται από το υποσύνολο $\{2,4,6\}$».

2.1 Κλασική Πιθανότητα

Ως **δειγματικός χώρος**, Ω, ορίζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, ενώ κάθε υποσύνολο του Ω αποτελεί ένα **ενδεχόμενο.** Όταν το ενδεχόμενο είναι μονοσύνολο ονομάζεται απλό, ενώ σε αντίθετη περίπτωση σύνθετο. Για πληρότητα, στο σύνολο των ενδεχομένων συμπεριλαμβάνουμε το κενό ή **αδύνατο** ενδεχόμενο $\varnothing$ καθώς και το **βέβαιο** ενδεχόμενο Ω. $P(\Omega) = 1$

Ο Laplace το 1812 θεμελίωσε τη θεωρία των πιθανοτήτων δίνοντας τον εξής ορισμό: « Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Ε είναι ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων για το Ε προς το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων, όταν τίποτα δεν μας κάνει να πιστεύουμε ότι κάποια από τις περιπτώσεις υπερισχύει των άλλων».

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει και ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Ορισμός 2.1

Έστω δειγματικός χώρος Ω , ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Ορίζεται ως πιθανότητα του ενδεχομένου $A \subset \Omega$, ο λόγος:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Όπου N(A) και N(Ω) είναι το πλήθος των στοιχείων A και Ω αντίστοιχα.

Μέσω της σχέσης (2.1) ορίζεται δηλαδή μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω και πεδίο τιμών το [0,1]. Η συνάρτηση ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. $0 \le P(A) \le 1, \forall A \subset \Omega$
2. $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$
3. $P(A) = 1 \Leftrightarrow A = \Omega$

Αξίζει να τονιστεί ότι ο παραπάνω ορισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάτω από δύο προϋποθέσεις. Αρχικά, ο δειγματικός χώρος Ω να είναι πεπερασμένος, δηλαδή να αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους απλά ενδεχόμενα. Επίσης, τα απλά ενδεχόμενα πρέπει να είναι ισοπίθανα.

2.2 Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Οι παραπάνω περιορισμοί μπορούν να ξεπεραστούν μέσω του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας. Ο συγκεκριμένος ορισμός εισήχθη το 1933 από τον Kolmogorov, δίνοντας τη δυνατότητα μιας αξιωματικής ανάπτυξης της θεωρίας Πιθανοτήτων. Σύμφωνα με την αξιωματική αυτή ανάπτυξη οι διάφορες ιδιότητες και θεωρήματα απορρέουν απαγωγικά από προτάσεις που θεωρούνται αληθείς.

Ορισμός 2.2

Έστω δειγματικός χώρος Ω ($\neq \varnothing$) και $\mathcal{F}$ ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω. Το σύνολο $\mathcal{F}$ αποτελεί ένα σ-πεδίο υποσυνόλων του Ω όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

i. $\Omega \in \mathcal{F}$
ii. εάν $A \in \mathcal{F}$ τότε $\overline{A} = \Omega - A \in \mathcal{F}$, $\overline{A}$ έχουμε ορίσει το γεγονός άρνησης του A
iii. εάν $A_i \in \mathcal{F}$ (i=1,2,…) τότε $\bigcup_1^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Τα στοιχεία του $\mathcal{F}$ ονομάζονται ενδεχόμενα ή σύμφωνα με τη θεωρία Μέτρου, **μετρήσιμα σύνολα.** Ενώ, το ζεύγος (Ω, $\mathcal{F}$) ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος**. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα υποσύνολο του Ω ονομάζεται ενδεχόμενο μόνο εάν ανήκει στο $\mathcal{F}$.

<u>**Ορισμός 2.3 – Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας**</u>

Έστω ο μετρήσιμος χώρος (Ω, $\mathcal{F}$) και P μία συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathcal{F}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Η συνολοσυνάρτηση P ονομάζεται μέτρο πιθανότητας όταν ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

Α1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$

Α2. Αν $A_i \in \mathcal{F}$ (i=1,2,…) και $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$, τότε $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Α3. $P(\Omega) = 1$.

Η τριάδα (Ω, $\mathcal{F}$, P) ονομάζεται **χώρος πιθανότητας.**

2.2.1 Βασικά πορίσματα

Άμεσες συνέπειες των παραπάνω τριών αξιωμάτων είναι οι εξής ιδιότητες της πιθανότητας. Οι ιδιότητες αυτές αναφέρονται πάντοτε σε ενδεχόμενα, δηλαδή σε στοιχεία του $\mathcal{F}$.

$$P(\varnothing) = 0 \quad \textbf{(2.1)}$$

Απόδειξη

Αφού $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$. Ακόμα $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, άρα από το δεύτερο αξίωμα έχουμε: $P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \ldots$. Συνεπώς, $P(\varnothing) = 0$.□

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i \text{, για κάθε ακέραιο n όταν } A_i \cap A_j = \varnothing \text{, για κάθε } i \neq j \quad \textbf{(2.2)}$$

(«Αξίωμα» της πεπερασμένης αθροιστικότητας)

Απόδειξη

Αρκεί να θέσουμε στο (Α2) κάθε ενδεχόμενο σύνολο μεγαλύτερο του n, ίσο με το κενό. □

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)\ \mathbf{(2.3)}$$

Απόδειξη

$\Omega = A \cup \overline{A}$ και $A \cap \overline{A} = \varnothing$ άρα από την (Α3) και την (2.2) συνεπάγεται, $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Άρα $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. □

$$0 \le P(A) \le 1\ \mathbf{(2.4)}$$

Απόδειξη

Από την (Α1) και την **(2.3)**. □

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)\ \mathbf{(2.5)}$$

Απόδειξη

$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$, ενώ $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \varnothing$. Άρα από την (2.2) προκύπτει, $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$ ή $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. □

$$P(A) \ge P(B) \text{ εάν } A \supset B\ \mathbf{(2.6)}$$

Απόδειξη

Από την (Α1) και την (2.5). □

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)\ \mathbf{(2.7)}$$

Απόδειξη

$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$ άρα $P(A \cup B) = P((A \cap \overline{B}) \cup B)$ και με $(A \cap \overline{B}) \cap B = \varnothing$ από την (2.2) προκύπτει ότι $P((A \cap \overline{B}) \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B)$.

Άρα $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B)$ και από την (2.5) συνεπάγεται ότι, $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$. □

Για κάθε χωρισμό του Ω σε ξένα υποσύνολα $B_1, \ldots B_k$ ισχύει η γενίκευση του (2.5), που αποδεικνύεται με επαγωγή:

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{i=k} \Pr(A \cap B_i).\ \mathbf{(2.8)}$$

Το (2.7) συνεπάγεται ότι:

$$\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)\ \mathbf{.\ (2.9)}$$

Γενικεύοντας προκύπτει η υποπροσθετικότητα των πιθανοτήτων και η **ανισότητα Boole**:

Για αριθμήσιμο σύνολο ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots$ ισχύει η ανισότητα: $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$

.(2.10)

Απόδειξη

Επαγωγική βάση, για n=1: $P(A_1) = P(A_1) \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_1)$

Συνεπώς, με δεδομένο ότι ισχύει για n, $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A_i$ (1), θα δειχθεί ότι $P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n+1} A_i$

Χρησιμοποιώντας το $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$, για $B = A_{n+1}$, μπορεί να δειχθεί ότι $P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) - P(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$. Ακόμα από το ότι η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου είναι ένας μη αρνητικός αριθμός, προκύπτει $P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) \overset{(1)}{\Rightarrow} P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A_i + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i$ □[24]

Η υποπροσθετικότητα των πιθανοτήτων, είναι μια σχέση χρήσιμη και στο κυρίως μέρος της απόδειξης. Προκύπτει με την ίδια μεθοδολογία με την οποία προέκυψε και σχέση (2.2) από το αξίωμα (Α2):

$$\Pr(\bigcup_{i=1}^{\ell} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} \Pr(A_i)\ \mathbf{(2.11)}$$

Απόδειξη

Θέτοντας κάθε $A_{i>\ell} = \varnothing$ στην ανισότητα Boole προκύπτει η υποπροσθετικότητα των πιθανοτήτων. □

2.2.2 Χώρος γινόμενο και Δεσμευμένη πιθανότητα

Για κάθε δύο πεπερασμένους δειγματικούς χώρους πιθανοτήτων $(Pr_1, \Omega_1), (Pr_2, \Omega_2)$ υπάρχει ο ***χώρος γινόμενο*** που έχει δειγματικό χώρο το εσωτερικό γινόμενο των δειγματικών χώρων $\Omega_1 \times \Omega_2$ και η συνάρτηση πιθανότητας ορίζεται ως εξής: $Pr(x \times y) = Pr_1(x) * Pr_2(y)$. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για να οριστεί ο χώρος γινόμενο αυθαίρετα πολλών υποχώρων. Για παραδείγμα, η ακολουθία n ανεξάρτητων ρίψεων νομίσματος. Ένα ακόμα παράδειγμα, από τη θεωρία γραφημάτων, είναι το γράφημα $G_{n,p}$ το οποίο έχει n πλήθος κορυφών και κάθε πιθανή από τις $\binom{n}{2}$ ακμές περιέχεται στο γράφημα με πιθανότητα p. Συνεπώς η πιθανότητα ένα γράφημα στον $G_{n,p}$ να είναι ένα συγκεκριμένο γράφημα H, με πλήθος κορυφών n, είναι:

$$Pr(H) = p^{|E(H)|}(1-p)^{(\binom{n}{2}-|E(H)|)} .$$

Για κάθε δύο ενδεχόμενα A,B, υπάρχει η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας όπου συμβολίζεται με $Pr(A | B)$ και πρόκειται για την πιθανότητα να ισχύει το ενδεχόμενο A με δεδομένο ότι ισχύει το ενδεχόμενο B. Για την δεσμευμένη πιθανότητα ισχύει η ισότητα: $Pr(A | B) = \dfrac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$.

Για παράδειγμα, αν A είναι το ενδεχόμενο η ζαριά να προκύψει περιττός αριθμός και B είναι το ενδεχόμενο η ζαριά να προκύψει μεγαλύτερη ή ίση του 3, τότε $P(A | B) = \dfrac{2}{3}$.

2.2.3 Ανεξαρτησία ενδεχομένων

Διαισθητικός ορισμός της ***ανεξαρτησίας ενδεχομένων*** A, B είναι ο έξης: *Το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο του ενδεχομένου B, αν η ισχύς του B δεν επηρεάζει την πιθανότητα ισχύος ή μη του A.* Τυπικά, το A είναι ανεξάρτητο του B αν Pr(A|B)=Pr(A) ή ισοδύναμα αν $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$. Σημειώνεται ότι από τον τελευταίο ορισμό προκύπτει ότι η ανεξαρτησία είναι σχέση συμμετρική, δηλαδή ότι ισχύει και Pr(B|A)=Pr(B). Από το 2.5 προκύπτει ότι το A είναι ανεξάρτητο του B αν και μόνο αν είναι και ανεξάρτητο του $\overline{B}$.

Ένα σύνολο ενδεχομένων ονομάζεται *κατά ζεύγη ανεξάρτητο* αν κάθε ζευγάρι ενδεχομένων είναι ανεξάρτητο. Ένα σύνολο ενδεχομένων ονομάζεται *αμοιβαία ανεξάρτητα* αν για κάθε υποσύνολο $\{A_0, A_1, ..., A_n\}$ ενδεχομένων και για κάθε ενδεχόμενο που ανήκει στο υποσύνολο, έστω το A_0: $\Pr(A_0 | \bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \Pr(A_0)$.

2.3 Τυχαίες μεταβλητές και οι αναμενόμενες τιμές τους

Μια τυχαία μεταβλητή ορίζεται σε ένα δειγματικό χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \Pr)$ ως μια συνάρτηση X από το Ω στο $\mathbb{R}$. Το πλήθος των αποτελεσμάτων «γράμματα» μετά το επαναληπτική ρίψη ενός νομίσματος ή το άθροισμα ρίψης δύο ζαριών, για παράδειγμα, είναι τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαία μεταβλητή X ακόμα ορίζει τον χώρο πιθανότητας $(\Pr_X, \Omega_X)$. Η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας $\Pr_X$, δίνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή. Ονομάζεται συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X και τυπικά ορίζεται:

$$\text{για κάποιο } x \in \Omega_X, \ \Pr_X(x) = \sum \{\Pr(\omega) \mid \omega \in \Omega, X(\omega) = x\}.$$

Στο παράδειγμα ρίψης δύο ζαριών και ορισμού ως τυχαίας μεταβλητής του αθροίσματος των ζαριών, $\Omega_X = \{2, 3, ..., 12\}$ και η συνάρτηση μάζας πιθανότητας για κάθε $x \in \Omega_X$:

$$\Pr_X(2) = \Pr_X(12) = \frac{1}{36}, \ \Pr_X(3) = \Pr_X(11) = \frac{2}{36}, \Pr_X(4) = \Pr_X(10) = \frac{3}{36}$$

$$\Pr_X(5) = \Pr_X(9) = \frac{4}{36}, \ \Pr_X(6) = \Pr_X(8) = \frac{5}{36}, \ \Pr_X(7) = \frac{6}{36}$$

Στους χώρους πιθανοτήτων ορίζεται και η *αναμενόμενη ή μέση τιμή* μιας τυχαίας μεταβλητής:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) X(\omega).$$

Διαισθητικά, E(X) είναι ο μέσος όρος των τιμών που παίρνει η τυχαία μεταβλητή αν το πείραμα έχει επαρκή αριθμό επαναλήψεων. Δηλαδή αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή όπου παίρνει την τιμή 1 με πιθανότητα p και την τιμή 0 με πιθανότητα 1-p, τότε η μέση τιμή του X είναι $p * 1 + (1 - p) * 0$. Με το ίδιο τρόπο η μέση τιμή ρίψης ζαριού είναι $\sum_{i=1,..,6} i * \frac{1}{6} = 3,5$.

Ο ορισμός της μέσης τιμής τυχαίας μεταβλητής μπορεί να βρεθεί και χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις μάζας πιθανότητας:

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\Pr(\omega)X(\omega)=\sum_{x\in\Omega_X}\sum_{\omega\in\Omega,x=X(\omega)}\Pr(\omega)x=\sum_{x\in\Omega_X}x\sum_{\omega\in\Omega,x=X(\omega)}\Pr(\omega)=\sum_{x\in\Omega_X}x\Pr_X(x)$$

Στο παράδειγμα με την ρίψη δύο ζαριών, η μέση τιμή προκύπτει:

$$E(X)=2\frac{1}{36}+12\frac{1}{36}+3\frac{2}{36}+11\frac{2}{36}+4\frac{3}{36}+10\frac{3}{36}+5\frac{4}{36}+9\frac{4}{36}+6\frac{5}{36}+8\frac{5}{36}+7\frac{6}{36}=7$$

2.3.1 Γραμμικότητα της μέσης τιμής

Η σχέση της μέσης τιμής με τις τυχαίες μεταβλητές είναι γραμμική. Πρόκειται για ένα συμπέρασμα που χρησιμεύει στον υπολογισμό της μέσης τιμής κάποιας τυχαίας μεταβλητής. Γιατί δίνει την δυνατότητα του χωρισμού σε τυχαίες μεταβλητές των οποίων ο υπολογισμός μέσης τιμής είναι εύκολος.

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\Pr(\omega)X(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}\Pr(\omega)(X_1(\omega)+...+X_n(\omega))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\omega\in\Omega}\Pr(\omega)X_i(\omega)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

Για παράδειγμα αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τη ρίψη n ζαριών, τότε E(X)=3,5n. Ομοίως αφού υπάρχουν $\binom{n}{2}$ πιθανές ακμές, με πιθανότητα p η κάθε μια, στο τυχαίο γράφημα $G_{n,p}$, το μέσο πλήθος ακμών είναι $\binom{n}{2}p$. Με ένα τελευταίο παράδειγμα από την άλγεβρα θα φανεί η χρησιμότητα της γραμμικότητας. Έστω ότι π είναι μια τυχαία αντιμετάθεση n αριθμών, μία από τις n!. Έστω ότι X(π) είναι το πλήθος των αριθμών που βρίσκονται στην «πραγματική» τους θέση , π(i)=i. Ορίζουμε $X_i=0$ αν $\pi(i)\neq i$ και $X_i=1$ αν $\pi(i)=i$, οπότε $X(\pi)=\sum_{i=1}^{n}X_i$. Όμως προφανώς η πιθανότητα να βρίσκεται ένας αριθμός στην «πραγματική» του θέση είναι ίση με την πιθανότητα να βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση, άρα $E(X_i)=\frac{1}{n}$ για κάθε i. Συνέπεια του οποίου είναι ότι E(X)=1. Πράγματι η μέση τιμή των «σταθερών» αριθμών σε μία τυχαία αντιμετάθεση υπολογίστηκε χωρίς να χρειαστεί να υπολογιστεί η πιθανότητα οι «σταθεροί» αριθμοί να ήταν 0, 1, 2,…,n αλλά με έναν πολύ πιο εύκολο τρόπο. Στα δύο τελευταία παραδείγματα προκειμένου να υπολογιστούν τυχαίες μεταβλητές που μετράνε πλήθος αθροίστηκαν μεταβλητές που την ύπαρξη την αντιστοιχούν σε μονάδα και την μη ύπαρξη σε μηδέν, οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται μεταβλητές Bernoulli.

2.3.2 Ροπές στη θεωρία πιθανοτήτων

Στη θεωρία πιθανοτήτων, εκτός από την μέση τιμή αρκετά στοιχεία για τις τυχαίες μεταβλητές και τις κατανομές τους δίνουν και άλλοι «μέσοι όροι». Δημιουργείται η ανάγκη ορισμού των ροπών:

Λέγεται ότι υπάρχει ροπή ν-οστής τάξης, με $\nu \in \mathbb{N}$, περί την αρχή της τυχαίας μεταβλητής Χ όταν $E(|X^{\nu}|) < \infty$.

Ροπή ν-οστής τάξης περί την αρχή: $E(X^{\nu}) = \sum_{\omega \in \Omega} X^{\nu}(\omega) \Pr(\omega)$

Συνεπώς η μέση τιμή είναι η ροπή $1^{ης}$ τάξης περί την αρχή. Ορίζονται ακόμα η ροπή ν-οστής τάξης περί την μέση τιμή, $E(X^{\nu}) = \sum_{\omega \in \Omega} [X(\omega) - E(X)]^{\nu} \Pr(\omega)$, καθώς και η ροπή ν-οστής τάξης περί την τιμή α, $E(X^{\nu}) = \sum_{\omega \in \Omega} [X(\omega) - \alpha]^{\nu} \Pr(\omega)$. Η ροπή $2^{ης}$ τάξης περί την μέση τιμή ονομάζεται και διασπορά και δίνει αρκετά στοιχεία για τον τρόπο που κατανέμεται η τυχαία μεταβλητή εντός του δειγματοχώρου. [6,24]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Η πιθανοτική μέθοδος είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων στα διακριτά μαθηματικά. Πρόκειται για μια μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης κάποιου μαθηματικού αντικειμένου με κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Εκτός από τα διακριτά μαθηματικά, την επιστήμη των υπολογιστών και την θεωρία πληροφοριών πλέον η μέθοδος χρησιμοποιείται εξίσου αποτελεσματικά στη θεωρία αριθμών, την γραμμική άλγεβρα και την πραγματική ανάλυση. Μια γενική περιγραφή του τρόπου χρήσης της μεθόδου έχει ως εξής:

Πιθανοτική μέθοδος είναι η προσπάθεια να αποδειχθεί ότι μια δομή που ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά υπάρχει, γίνεται μέσω του ορισμού ενός κατάλληλου χώρου πιθανοτήτων των δομών και της απόδειξής ότι τα χαρακτηριστικά έχουν μη μηδενική πιθανότητα, άρα και ικανοποιούνται.

Η μέθοδος εξηγείται καλύτερα μέσω παραδειγμάτων. Τρεις είναι οι βασικές τεχνικές απόδειξης που χρησιμοποιούν την πιθανοτική μέθοδο: *Η μέθοδος πρώτης ροπής, Το τοπικό λήμμα του Lovasz και το Όριο του Chernoff.* Η μέθοδος πρώτης ροπής, όπου ήταν αρχικά ταυτισμένη εννοιολογικά με την πιθανοτική μέθοδο, κάνει χρήση των δύο θεωρημάτων της θεωρίας πιθανοτητών, της ανισότητας του Markov και της αρχής πρώτης ροπής. Όταν τα μαθηματικά αντικείμενα των οποίων η δομή διερευνάται δεν είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα η συγκεκριμένη μέθοδος αποδεικνύεται αρκετά ισχυρή. Το παράδειγμα το οποίο θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 3.3 κάνει χρήση της συγκεκριμένης τεχνικής και επιλέχθηκε ως εισαγωγή στην χρήση της μεθόδου στην προσέγγιση της εικασίας του Hadwiger.

3.1 Μέθοδος Πρώτης Ροπής

Η μέθοδος πρώτης ροπής είναι το πλέον θεμελιώδες εργαλείο της πιθανοτικής μεθόδου. Η ουσία της μεθόδου βρίσκεται στην απλή αλλά ισχυρή αρχή πρώτης ροπής:

<u>Θεώρημα 3.1 - *Αρχή πρώτης ροπής*</u>

Αν $E(X) \le t$ τότε $Pr(X \le t) > 0$

Πρόκειται για μία αρχή η οποία γίνεται εύκολα κατανοήτη αφού αν η πιθανότητα η τιμή του X να ήταν μικρότερη ή ίση του t ήταν 0, τότε και η μέση τιμή του X θα ήταν σίγουρα μεγαλύτερη του 0. Χρειάζεται όμως και τυπική απόδειξη:

<u>Απόδειξη</u>

Θα υποτεθεί ότι $\Pr(X \le t) = 0$ και ότι $E(X) \le t$ αλλά θα αποδειχθεί άτοπο να ισχύουν και τα δύο. Αφού ο χώρος πιθανοτήτων είναι πεπερασμένος, η τυχαία μεταβλητή X παίρνει πεπερασμένο αριθμό τιμών, έστω I, συνεπώς $E(X) = \sum_{i \in I} i * \Pr(X = i)$,. Τότε $E(X) = \sum_{i>t} \Pr(X = i) * i > \sum_{i>t} \Pr(X = i) * t = t * \sum_{i>t} \Pr(X = i)$ το οποίο λόγω του ότι $\Pr(X \le t) = 0 \Rightarrow \sum_{i>t} \Pr(X = i) = 1$ άρα $E(X) > t$, άτοπο. □

Η εφαρμογή της αρχής πρώτης ροπής αποτελείται από την σωστή επιλογή τυχαίας μεταβλητής X και τον υπολογισμό της μέσης τιμής ή ενός ορίου της. Συνήθως η τυχαία μεταβλητή επιλέγεται έτσι ώστε να παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, συνεπώς μια απόδειξη ότι η μέση τιμή είναι μικρότερη του 1 από την αρχή πρώτης ροπής συνεπάγεται ότι $\Pr(X = 0) = \Pr(X < 1) > 0$.

Θα μπορούσε να υποτεθεί ότι αφού η μέση τιμή ορίζεται ως $E(X) = \sum_{i} i * \Pr(X = i)$ για κάθε i του δειγματοχώρου, τότε δεν γίνεται να υπολογιστεί το E(X) χωρίς να υπολογιστεί το κάθε Pr(X=i), κάτι που είναι τουλάχιστον το ίδιο δύσκολο με τον απευθείας υπολογισμό του $\Pr(X \le t)$. Όμως η γραμμικότητα της μέσης τιμής στην πραγματικότητα κάνει δυνατό τον υπολογισμό της χωρίς να βρεθεί η πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο του δειγματοχώρου. Υπολογίζεται δηλαδή μέσω ενός άλλου αθροίσματος που όμως έχει το ίδιο αποτέλεσμα. Αν και αυτός είναι πρακτικά ο τρόπος χρήσης της μεθόδου, εύκολα μπορούν να αποδειχθούν και οι παρακάτω εκδοχές της αρχής και να χρησιμοποιείται η πιο ταιριαστή στο πρόβλημα κάθε φορά:

1.Αν $E(X) \geq t$ τότε $Pr(X \geq t) > 0$

2.Αν $E(X) < t$ τότε $Pr(X < t) > 0$

3.Αν $E(X) > t$ τότε $Pr(X > t) > 0$

Ακόμα σε αρκετές περιπτώσεις πιο εύχρηστη είναι η ανισότητα Markov για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές:

<u>Θεώρημα 3.2 - *Ανισότητα Markov*</u>

Για κάθε μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X, ισχύει $\boldsymbol{Pr(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}}$

Απόδειξη:

Αφού η τυχαία μεταβλητή X είναι μη αρνητική, δεν υπάρχει $i < 0$ τέτοιο ώστε $\Pr(X = i) \neq 0$. Άρα αφού $E(X) = \sum_{i \in \Omega_x} i * \Pr(X = i)$ και λόγω των μη αρνητικών τιμών του i συνεπάγεται ότι $E(X) \geq \sum_{i \geq t} i * \Pr(X = i)$. Ακόμα λόγω του ότι $\sum_{i \geq t} i * \Pr(X = i) \geq \sum_{i \geq t} t * \Pr(X = i) = t \sum_{i \geq t} \Pr(X = i) = t * \Pr(X \geq t)$ συνεπάγεται τελικά ότι $\Pr(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$.[7] □

<u>Πόρισμα 3.1</u>

Η περίπτωση της ανισότητας Markov για t=1 και με τον περιορισμό η τυχαία μεταβλητή X να είναι μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, είναι αυτή που χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στην μέθοδο πρώτης ροπής. Άρα η ανισότητα χρησιμοποιείται στη μορφή:

$$\Pr(X > 0) \leq E(X),$$

αφού $\Pr(X \geq 1) = \Pr(X > 0)$ λόγω του ότι η X είναι ακέραια.

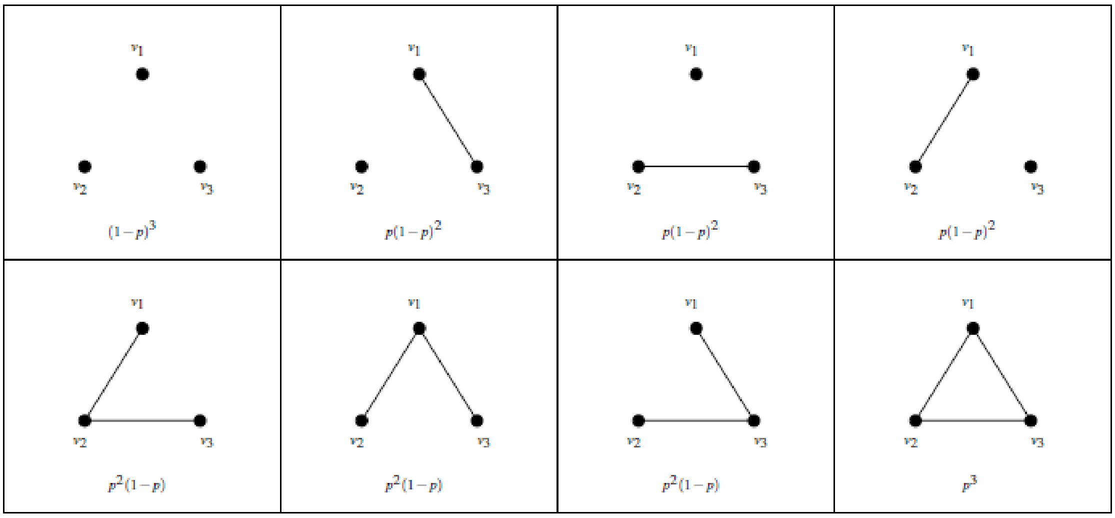
Το παραπάνω πόρισμα αποτελεί τη βάση για την διαδικασία απόδειξης της μη ύπαρξης δομών που ικανοποιούν την επιθυμητή ιδιότητα. Σε κάποιες περιπτώσεις έρχεται και ως συνέπεια η ύπαρξη δομών που ικανοποιούν την άρνηση κάποιας επιθυμητής ιδιότητας.

Βήματα αποδείξεων μη ύπαρξης

1. Δημιουργείτε ένας κατάλληλος πιθανοτικός δειγματίκος χώρος των δομών που αφορούν το πρόβλημα
2. Στόχος είναι να αποδειχθεί η μη επαλήθευση μιας ιδιότητας, ορίζεται μια τυχαία μεταβλητή X, η οποία αντιστοιχεί στον αριθμό των δομών που δεν ικανοποιούν την συγκεκριμένη ιδιότητα.
3. Εκφράζεται η τυχαία μεταβλητή σαν άθροισμα τυχαίων μεταβλητών των οποίων η μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί. Με χρήση της γραμμικότητας της μέσης τιμής, υπολογίζεται η μέση τιμή της X και αποδεικνύεται ότι τείνει στο μηδέν καθώς η μεταβλητή εισόδου τείνει στο άπειρο.
4. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω πορισμά, προκύπετι ότι και η πιθανότητα το X να είναι μεγαλύτερο του 0 τείνει στο μηδέν, άρα πράγματι οι δομές με την συγκεκριμένη ιδιότητα δεν υπάρχουν.[8]

3.2 Τυχαίες Δομές στη Θεωρία Γραφημάτων

Πριν το παράδειγμα, χρειάζεται να παρουσιαστούν πιο αναλυτικά τα τυχαία γραφήματα. Τυχαία ονομάζουμε τα γραφήματα που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και ανήκουν στον χώρο πιθανότητας $G_{n,p}$, δηλαδή τα υπογραφήματα του πλήρους γραφήματος n κορυφών στα οποία κάθε πιθανή ακμή έχει πιθανότητα εμφάνισης p. Από το προηγούμενο κεφάλαιο έχει προκύψει ότι η πιθανότητα ένα τυχαίο γράφημα στο χώρο πιθανότητας $G_{n,p}$ να είναι το συγκεκριμένο γράφημα H είναι $\Pr(H) = p^{|E(H)|}(1-p)^{(\binom{n}{2}-|E(H)|)}$. Για παράδειγμα το $G_{3,p}$ έχει ως δειγματοχώρο το σύνολο των $\binom{3}{2} = 8$ πιθανών γραφημάτων που εμφανίζεται στην παρακάτω εικόνα. Κάτω από κάθε πιθανό γράφημα εμφανίζεται η πιθανότητα εμφάνισής του.



Εικόνα 12- Χώρος πιθανότητας $G_{3,p}$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό και από το παράδειγμα ότι όσο πιο μικρό είναι το p, τόσο πιο μεγάλη είναι η πιθανότητα ο τυχαίο γράφημα να είναι ένα αραιό γράφημα. Κάθε ιδιότητα γραφήματος έχει πιθανότητα να ικανοποιείται ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των γραφημάτων στον δειγματοχώρο που ικανοποιούν την ιδιότητα. Για παράδειγμα στο $G_{3,p}$ η πιθανότητα το τυχαίο γράφημα να είναι συνεκτικό είναι $3p^2(1-p)+p^3$.

Το παράδειγμα επίλυσης ενός προβλήματος της θεωρίας γραφημάτων με χρήση της πιθανοτικής μεθόδου, συγκεκριμένα της μεθόδου που κάνει χρήση της ανισότητας Markov, δεν έχει επιλεχθεί μόνο για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου αλλά και γιατί είναι μια απόδειξη με την οποία επιχειρείται μια εμβάθυνση στις γνώσεις γύρω από την σχέση του αριθμού κλίκας ενός γραφήματος και του χρωματικού αριθμού του. Συγκεκριμένα:

3.3 Γραφήματα χωρίς τρίγωνα με μεγάλο χρωματικό αριθμό

Θεώρημα 3.3

Για οποιοδήποτε k μεγαλύτερο ή ίσο του 1 υπάρχει γράφημα G με $\omega(G)\leq 2$ και χρωματικό αριθμό μεγαλύτερο του k.

Με το θεώρημα αυτό δηλαδή αποδεικνύεται η ύπαρξη γραφημάτων όπου το μεγαλύτερο πλήρες υπογράφημα τους είναι δυο συνδεδεμένες κορυφές. Στην απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιείται μια πιθανοτική κατασκευή του Erdos [10], όπου υπήρξε μια από τις πρώτες αξιοσημείωτες εφαρμογές της πιθανοτικής μεθόδου. Υπάρχει και μια πιο παλιά, επίσης πιθανοτική, απόδειξη του Zykov αλλά η απόδειξη του Erdos πολύ πιο ισχυρή. Για δέκα χρόνια δεν υπήρχε μη-πιθανοτική απόδειξη ύπαρξης γραφημάτων χωρίς τρίγωνα με αυθαίρετα μεγάλο χρωματικό αριθμό και αυτό δείχνει το πόσο ισχυρό εργαλείο είναι η πιθανοτική μέθοδος[11]. Βέβαια οι Grotzsch (1955) και Mycielski (1955) είχαν κατασκευάσει τέτοια γραφήματα και τα οποία ονομάστηκαν γραφήματα του Mycielski και το γράφημα Grotzch που ανήκει στην οικογένεια των Mycielski, άλλα η απόδειξη των ιδιοτήτων έγινε σταδιακά[12].

<u>Απόδειξη :</u>

Ισχυρισμός 1: Χωρίς ανεξάρτητα σύνολα $\left\lceil \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2k}} \right\rceil$ κορυφών

Επιλέγουμε ένα τυχαίο γράφημα από τον χώρο $G_{n,p}$ με πιθανότητα ύπαρξης ακμής $p = n^{-\frac{2}{3}}$. Για να αποδειχθεί ότι ο χρωματικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το k αρκεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν ανεξάρτητα σύνολα $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ κορυφών. Στην πραγματικότητα θα αποδειχθεί η πιο ισχυρή, αλλά απαραίτητη, ιδιότητα μη ύπαρξης ανεξάρτητων συνόλων $\left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil$ κορυφών. Αυτό το όριο θα δειχθεί μέσω ενός απλού αριθμητικού υπολογισμού, έστω ότι I είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων συνόλων $\left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil$ κορυφών. Για κάθε υποσύνολο S, $\left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil$ κορυφών, ορίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή I_S να είναι ίση με 1 όταν το S είναι ανεξάρτητο σύνολο και 0 όταν δεν είναι, τότε $E(I_S)$ είναι η πιθανότητα το S στο τυχαίο γράφημα να είναι ανεξάρτητο σύνολο και είναι ίση με $(1-p)^{\binom{r}{2}}$, όπου $r = \left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil$. Άρα από την γραμμικότητα της μέσης τιμής και από το ότι το πλήθος των συνόλων r κορυφών, προκύπτει ότι:

$$E(I) = \sum_S E(I_S) = \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}} < \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{n/2k}{2}}$$

Αφού, για θετικό x, ισχύει η ανισότητα $1 - x < e^{-x}$, από την ανισότητα $\binom{n}{r} < 2^n$ για κάθε r, αλλά και από την ανάλυση της σχέσης $\binom{n/2k}{2}$, δηλαδή ότι ισούται με $\binom{n/2k}{2} = \frac{n/2k!}{2!\left(n/2k-2\right)!} = \frac{n/2k\,(n/2k-1)}{2} = \frac{n^2/4k^2 - n/2k}{2} = \frac{n^2-2nk}{8k^2}$, προκύπτει η παρακάτω ανισότητα: $E(I) < \binom{n}{r} * e^{-p\frac{n^2-2nk}{8k^2}} < 2^n * e^{-p\frac{n^2-2nk}{8k^2}}$.

Καθώς ο χώρος πιθανότητας στον οποίο αποδεικνύουμε την μη ύπαρξη ανεξάρτητων συνόλων $\left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil$ κορυφών είναι ο $G_{n,n^{-\frac{2}{3}}}$ προκύπτει:

$E(I) < 2^n * e^{-\frac{n^{\frac{4}{3}}}{8k^2}}$, αφού η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Τελικώς προκύπτει ότι $E(I) < \frac{1}{2}$ για $n \geq 2^{12}k^6$.

Συνεπώς από το Πόρισμα 1 αποδεικνύεται ότι $\Pr(I > 0) < \frac{1}{2}$ για γραφήματα μεγάλου πλήθους κορυφών

(Οι αποδείξεις των ανισοτήτων $1 - x < e^{-x}$ και $\binom{n}{r} < 2^n$ δίνονται στο Παράρτημα).

Ισχυρισμός 2: Με λιγότερα από $\frac{n}{2}$ τρίγωνα

Κανονικά το επόμενο βήμα της απόδειξης θα ήταν να δειχθεί ότι ακόμα το πλήθος των τριγώνων στο γράφημα είναι μηδέν, άρα $\omega(G) \leq 2$. Είναι αδύνατο να αποδειχθεί κάτι τέτοιο, όμως αν δειχθεί ότι είναι πιθανό να περιοριστούν τα τρίγωνα σε $\frac{n}{2}$ γίνεται εφικτός ένας μετασχηματισμός του G έτσι να προκύψει ένα γράφημα χωρίς τρίγωνα. Έστω ότι ο αριθμός T είναι το πλήθος των τριγώνων, για κάθε τριάδα κορυφών από τις $\binom{n}{3}$ τριάδες κορυφών η πιθανότητα να σχηματίζουν τρίγωνο ισούται με p^3. Συνεπώς από την γραμμικότητα της μέσης τιμής προκύπτει ότι:

$$E(T)=\binom{n}{3}p^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}(n^{-\frac{2}{3}})^3<\frac{n^3}{6}n^{-2}=\frac{n}{6}\ .$$

Άρα από την ανισότητα Markov προκύπτει ότι $\Pr(T\geq\frac{n}{2})<\frac{E(T)}{\frac{n}{2}}<\frac{1}{3}$.

Αφού $\Pr(I>0)<\frac{1}{2}$ και $\Pr(T\geq\frac{n}{2})<\frac{1}{3}$ συνεπάγεται ότι $\Pr(I>0)+\Pr(T\geq\frac{n}{2})<1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\Pr(I>0)+\Pr(T\geq\frac{n}{2})<1\Rightarrow 1-\Pr(I>0)-\Pr(T\geq\frac{n}{2})>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\Pr(I>0)-\Pr(T\geq\frac{n}{2})+\Pr[(I>0)\cap(T\geq\frac{n}{2})]>\Pr[(I>0)\cap(T\geq\frac{n}{2})]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Pr\overline{[(I>0)\cup(T\geq\frac{n}{2})]}>\Pr[(I>0)\cap(T\geq\frac{n}{2})]\Rightarrow\Pr[(I=0)\cap(T<\frac{n}{2})]>0$$

Συνεπώς ,για τις τυχαίες μεταβλητές I, T υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα να ισχύει I=0 και $T<\frac{n}{2}$. Δηλαδή, υπάρχει, με μη μηδενική πιθανότητα, γράφημα στο οποίο δεν περιέχεται κανένα $\left\lceil\frac{n}{2k}\right\rceil$ ανεξάρτητο σύνολο και ταυτόχρονα ο αριθμός των τριγώνων είναι μικρότερος από $\frac{n}{2}$.

Ισχυρισμός 3: Χωρίς Τρίγωνα!

Έχει αποδειχθεί μέσω της πιθανοτικής μεθόδου η ύπαρξη ενός γραφήματος με τις παραπάνω ιδιότητες, όμως τώρα θα μετασχηματιστεί το γράφημα έτσι ώστε να μην δύναται να χρωματιστεί με k χρώματα και ταυτόχρον να μην περιέχει τρίγωνα. Συγκεκριμένα έστω ότι το G γράφημα, είναι το γράφημα με τις n κορυφές και το οποίο περιέχει μικρότερο των $\frac{n}{2}$ αριθμό τριγώνων και δεν περιέχει κανένα ανεξάρτητο σύνολο $\left\lceil\frac{n}{2k}\right\rceil$ κορυφών. Με την επιλογή έως το πολύ $\frac{n}{2}$ κορυφών που περιέχονται σε ισάριθμα τρίγωνα και την αφαίρεση τους από το γράφημα, δημιουργείται ένα νέο γράφημα, έστω G' το οποίο δεν περιέχει τρίγωνα. Ο αριθμός των κορυφών που χρειάζεται να αφαιρεθούν εξαρτάται από την δομή του γραφήματος και είναι σαφές ότι είναι δυνατό να είναι και πολύ μικρότερος του $\frac{n}{2}$ καθώς κάθε κορυφή μπορεί να περιέχεται σε πάνω από ένα τρίγωνο. Το G' είναι ένα γράφημα που δεν περιέχει κανένα τρίγωνο και για το οποίο ισχύει ότι $|G'| \geq \frac{n}{2}$. Ακόμα για το G' ισχύει η ιδιότητα I=0, καθώς η αφαίρεση κορυφών δεν μπορεί να ανατρέψει την μη ύπαρξη ανεξάρτητου συνόλου $\left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil$ πλήθους κορυφών. Επιπρόσθετα, λόγω του ότι $\left\lceil \frac{n}{2k} \right\rceil < \left\lceil \frac{|G'|}{k} \right\rceil$, δεν υπάρχει στο G' κανένα ανεξάρτητο υποσύνολο $\left\lceil \frac{|G'|}{k} \right\rceil$ πλήθους κορυφών, εδώ μπορεί να διαπιστωθεί και η χρησιμότητα της ισχυρότερης απόδειξης μη ύπαρξης ανεξάρτητου συνόλου στο G έτσι ώστε να γίνει εφικτός και ο περίτεχνος μετασχηματισμός. Άρα ο χρωματικός αριθμός του G', ενός γραφήματος που δεν περιέχει μη τετριμμένα πλήρη υπογραφήματα, είναι μεγαλύτερος του k.[6]

Συμπεράσματα από το παράδειγμα

Συνέπεια της παραπάνω απόδειξης είναι η ύπαρξη γραφημάτων τα οποία έχουν αυθαιρέτα μεγάλο χρωματικό αριθμό, αλλά δεν περιέχουν κανένα τρίγωνο, άρα δεν περιέχουν και κανένα μεγαλύτερο του τριγώνου πλήρες υπογράφημα. Για αυτήν την απόδειξη, αν και πρέπει να επισημανθεί ότι ισχύει για πολύ μεγάλα γραφήματα, αφού για το πλήθος των κορυφών πρέπει να ισχύει ότι $n \geq 2^{12}k^6$ και ταυτόχρονα ότι πρόκειται για τυχαία γραφήματα στα οποία η πιθανότητα εμφάνισης ακμής είναι $n^{-\frac{2}{3}}$, έχει καταφερθεί να δειχθεί η μη αντίστροφη συσχέτιση του αριθμού κλίκας ενός γραφήματος και του χρωματικού αριθμού του. Δηλαδή αν και γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 1 ότι $\omega(G) \leq \chi(G)$ αποδεικνύεται ότι όχι μόνο δεν ισχύει το αντίστροφο αλλά ότι το $\chi(G)$ είναι αυθαιρέτως μεγάλο, με τον αριθμό κλίκας να μένει μικρότερος του 3. Η απόδειξη αυτή, πέρα από την χρησιμότητα της ως παράδειγμα χρήσης της πιθανοτικής μεθόδου, είναι χρήσιμη γιατί αποδεικνύεται μέσω αυτής και η ανάγκη μιας άλλης εσωτερικής δομής, από το υπογράφημα, προκειμένου να συσχετιστεί ο χρωματικός αριθμός με τον αριθμό κλίκας. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δειχθεί ότι, μέσω της εικασίας του Hadwiger, η αναζήτηση άνω φράγματος στον χρωματικό αριθμό γίνεται στον μετασχηματισμό των ελασσόνων γραφημάτων. Βέβαια η διατύπωση της εικασίας του

Hadwiger είχε διατυπωθεί πριν την πιο πάνω απόδειξη, οπότε μόνο σαν επιβεβαίωση του ότι η δομή του υπογραφήματος δεν αρκούσε για να εξηγήσει τον χρωματικό αριθμό μπορεί να λειτούργησε.

Η πιθανοτική μέθοδος είναι ένα χρήσιμο εργαλείο και θα χρησιμοποιηθεί στην προσέγγιση της εικασίας του Hadwiger που παρουσιάζεται στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία. Στο συγκεκριμένο σημείο ίσως αξίζει να επισημανθεί ότι στην απόδειξη του Mader δεν χρησιμοποιείται ο δειγματοχώρος $G_{n,p}$, αλλά ένας πιο ταιριαστός στο συγκεκριμένο πρόβλημα δειγματοχώρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ HADWIGER

Πρόκειται για μια εικασία που προσπαθεί να συνδέσει τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος με την δομή του. Συγκεκριμένα: «Αν ένα γράφημα G έχει χρωματικό αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο με k τότε μπορούν να βρεθούν k ξένα συνδεδεμένα υπογραφήματα στο G τέτοια ώστε αν εφαρμόσουμε συστολή ή αφαίρεση ακμών, στις εσωτερικές ακμές των υπογραφημάτων, προκύπτει ένα K_k πλήρες γράφημα ως έλασσον του G». Μια πιο σύντομη εκδοχή της εικασίας: «Κάθε γράφημα με $\chi\rho(G) \geq k$ περιέχει το K_k ως έλασσον».

Υπάρχει ακόμα και μια ισοδύναμη διατύπωση της εικασίας που προκύπτει από την αντιθετοαντίστροφη εκδοχή της. Δηλαδή αν δεν υπάρχει ακολουθία σύνθλιψης ακμών και αφαίρεσης κορυφών και ακμών που να οδηγεί από το G στο K_k , τότε υπάρχει χρωματισμός κορυφών με k-1 χρώματα.

Τέλος ο αριθμός Hadwiger ενός γραφήματος G, h(G), είναι ο αριθμός των κορυφών της μέγιστης κλίκας που περιέχεται ως έλασσον στο G.

Ουσιαστικά ο Hadwiger με την εικασία υποθέτει ότι το προφανές θεώρημα ότι το πλήθος των κορυφών της μέγιστης κλίκας που υπάρχει σαν υπογράφημα σε ένα γράφημα G είναι k τότε ο χρωματικός αριθμός του G είναι τουλάχιστον k, έχει και μία αντίστροφη εκδοχή.

Θεώρημα 4.1

Αν to πλήθος των κορυφών της μέγιστης κλίκας σε ένα γράφημα G είναι k τότε ο χρωματικός αριθμός του G είναι τουλάχιστον k.

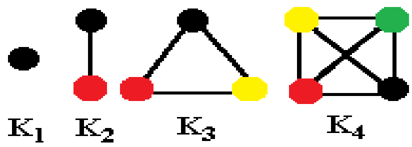
$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Απόδειξη:

Είναι προφανές ότι για τον χρωματισμό μιας κλίκας πλήθους k κορυφών χρειάζονται ακριβώς k χρώματα, άρα πράγματι το G δεν γίνεται να έχει μικρότερο χρωματικό αριθμό από k. ▫

Όπως επιβεβαιώθηκε και από το παράδειγμα για την πιθανοτική μέθοδο του προηγούμενου κεφαλαίου, η δομή του υπογραφήματος είναι ανεπαρκής στο να επηρρεάζει τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος. Συνεπώς η επιλογή της δομής των ελασσόνων γραφημάτων, στην εικασία του Hadwiger, φαίνεται, διαισθητικά τουλάχιστον, εύλογη. Μια πρώτη προσέγγιση απόδειξης της εικασίας από την οποία φαίνεται και το βάθος του προβλήματος, είναι αυτή η οποία αποδεικνύεται η ισοδυναμία της απόδειξης για k=5 με το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων.

Ο Hadwiger μαζί με την εικασία παρουσίασε και την απόδειξη της για χρωματικό αριθμό $k \leq 4$.[13]



Εικόνα 13 -Χρωματισμός Πλήρων Γραφημάτων από k=1 έως k=4

4.1 Περιπτώσεις για τις οποίες έχει αποδειχθεί η εικασία

Για χρ(G)=1

Προφανώς όλα τα γραφήματα έχουν χρωματικό αριθμό μεγαλύτερο της μονάδας και όλα τα γραφήματα περιέχουν ως έλασσον το γράφημα μονής κορυφής. Άρα για k=1 η εικασία ισχύει.

Για χρ(G)=2

Τα γραφήματα έχουν χρωματικό αριθμό μεγαλύτερο του 2 είναι αυτά που περιέχουν ακμές, άλλα πράγματι τα γραφήματα με ακμές περιέχουν ως έλασσον το K_2, αφού το K_2 είναι το γράφημα δύο κορυφών τις οποίες ενώνει μια ακμή.

Για χρ(G)=3

Τα γραφήματα με χρωματικό αριθμό μικρότερο του 3 είναι τα διμερή γραφήματα, αφού τα γραφήματα με χρωματικό αριθμό 2 μπορούν να χωριστούν σε δύο ξένα σύνολα στα οποία δεν υπάρχει εσωτερικά ακμή, αυτά που χρωματίζονται με το ένα χρώμα είναι αυτά που ανήκουν στο ένα σύνολο, έστω X, και αυτά που χρωματίζονται με το άλλο χρώμα είναι αυτά που ανήκουν στο άλλο, έστω Y. Είναι δηλαδή τα γραφήματα που δεν έχουν κύκλους περιττού μήκους (*αποδεικνύεται στο Παράρτημα, απ. 3*). Ακριβώς επειδή οι δύο αυτές ιδιότητες αποδεικνύονται ισοδύναμες, η άρνηση της μίας συνεπάγεται την άρνηση και της άλλης. Άρα τα γραφήματα που έχουν κάτω όριο του χρωματικού αριθμού το 3, είναι τα μη-διμερή γραφήματα δηλαδή αυτά που περιέχουν τουλάχιστον έναν κύκλο περιττού πλήθους κορυφών. Συνεπώς μέσω της πράξης της συστολής κάθε κύκλος, άρα και ο κύκλος περιττού μήκους, μπορεί να μετασχηματιστεί σε τρίγωνο, δηλαδή στο K_3. Αξίζει να επισημανθεί, ότι ενώ δεν ήταν αναγκαίο για τον μετασχηματισμό σε τρίγωνο το περιττό μήκος, πρόεκυψε από τη σχέση ισοδυναμίας που αποδεικνύεται στο Παράρτημα.

Για χρ(G)=4

Η απόδειξη της εικασίας για χρωματικό αριθμό γραφήματος ίσο με 4 που οφείλεται στον Hadwiger. Πρόκειται για την απόδειξη, πάνω στην αντιθετοαντίστροφη εκδοχή της εικασίας, ότι αν σε ένα γράφημα δεν υπάρχει ως έλασσον το K_4, τότε μπορεί να χρωματιστεί με 3 χρώματα. Η απόδειξη οφείλεται στο θεώρημα του Dirac:

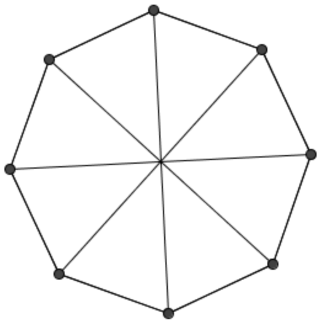
Αν $\delta(G) \geq 3$, τότε στο G περιέχεται ως έλασσον το K_4. [14]

Συγκεκριμένα συνεπάγεται ότι για γράφημα G το οποίο δεν περιέχει έλασσον το K_4 έχει εκφυλισμό το πολύ 2. Ακόμα χρησιμοποιώντας το ότι σε κάθε γράφημα G ισχύει $\chi(G) \leq \delta^*(G)+1$, το οποίο θα αποδειχθεί στο κεφάλαιο 5, έδειξε ότι το γράφημα μπορεί να τριχρωματιστεί.

Για χρ(G) = 5

Η επαλήθευση της εικασίας για k=5, συνεπάγεται την απόδειξη του θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων, αφού αν η εικασία ισχύει τότε κάθε γράφημα που έχει χρωματικό αριθμό 5 περιέχει ως έλασσον το K_5, συνεπώς από το θεώρημα του Wagner δεν θα είναι επίπεδο και άρα έχει αποδειχτεί το θεώρημα 4 χρωμάτων. Βέβαια η ιστορική εξέλιξη των ερωτημάτων και των εικασιών της θεωρίας γραφημάτων επιβάλει την διατύπωση ότι η εικασία του Hadwiger είναι μια εκτεταμένη γενίκευση του ερωτήματος των 4 χρωμάτων όταν ακόμα το θεώρημα δεν είχε αποδειχθεί.

Πράγματι με την απόδειξη του θεωρήματος του Klaus Wagner, το 1937, αποδεικνύεται η ισοδυναμία της εικασίας για χρωματικό αριθμό 5 με το θεώρημα των 4 χρωμάτων. Κάθε γράφημα στο οποίο δεν περιέχεται ως έλασσον το K_5 μπορεί να προκύψει ως μια ακολουθία αθροίσματος κλικών μεγέθους το πολύ 3, επίπεδων γραφημάτων και του γραφήματος που απεικονίζεται στην πιο κάτω εικόνα. Συνεπώς, η απόδειξη του θεωρήματος 4 χρωμάτων, το ότι το V_8 που απεικονίζεται πιο κάτω έχει χρωματικό αριθμό 3 αλλά και ότι η πράξη του αθροίσματος κλικών K_3 μπορεί να εφαρμοστεί έτσι ώστε να μην επηρεάζει των χρωματικό αριθμό των αθροισθέντων γραφημάτων συνεπάγονται την ισχύ της εικασίας για k=5. Άρα ο Wagner με την εργασία του έδειξε την ισοδυναμία του θεωρήματος 4 χρωμάτων με την εικασία του Hadwiger για k=5.[15]



Εικόνα 14- Γράφημα V_8

Για χρ(G) ≥ 6

Για k=6 η εικασία αποδείχτηκε από τους Robertson και Seymour το 1993 και είναι μια γενίκευση της εικασίας για χρ(G)=5. Βασίστηκαν στην απόδειξη ότι τα γραφήματα εμβαπτίσιμα στις τρεις διαστάσεις έχουν χρωματικό αριθμό το πολύ 5.

Ουσιαστικά παραμένει ανοιχτή για κάθε μεγαλύτερο k. Για k>6 υπάρχουν κάποια αποτελέσματα όπως, των Kawarabayashi και Toft (2005) [16], ότι κάθε γράφημα με χρωματικό αριθμό 7 είτε θα περιέχει ως έλασσον ένα K_7 ή ταυτόχρονα ένα $K_{4,4}$-έλασσον και ένα $K_{3,5}$-έλασσον.

Η προσέγγιση με την οποία ασχολείται η παρούσα διπλωματική εργασία, είναι κομμάτι κάποιων προσεγγίσεων που αποδεικνύουν ότι η σχέση της ύπαρξης ελάσσονος γραφήματος με την πυκνότητα του δεν είναι γραμμική. Συγκεκριμένα μια από αυτές τις αποδείξεις, του Thomason, αποδεικνύει και ότι είναι αδύνατο να πέσει σε γραμμική εξάρτηση. Από αυτό συνεπάγεται και ότι η σχέση πυκνότητας-χρωματικού αριθμού, που αποδεικνύεται στο επόμενο κεφάλαιο, δεν αρκεί για να αποδείξει την εικασία του Hadwiger.

4.2 Γενικεύσεις της εικασίας

Ο Gyorgy Hajos υπέθεσε ότι η δομή της υποδιαίρεσης μπορεί να προσφέρει μια πιο ισχυρή εικασία από αυτή του Hadwiger, έτσι προκύπτει η **εικασία του Hajos** ότι κάθε γράφημα με χρωματικό αριθμό k περιέχει μια υποδιαίρεση που είναι πλήρες γράφημα K_k. Η εικασία του Hajos έχει αποδειχθεί για τα γραφήματα με χρωματικό αριθμό εως 4 και ο Catlin έχει αποδείξει την ύπαρξη αντιπαραδειγμάτων για $k \geq 7$, άλλα οι περιπτώσεις k=5 και k=6 παραμένουν ανοιχτές. Όπως έχει δειχθεί από τον Thomason για την εικασία του Hadwiger για πυκνά τυχαία γραφήματα, έτσι έχει δειχθεί και για την εικασία του Hajos από τους Erdos και Faltlowicz ότι αποτυγχάνει για τυχαία γραφήματα. Αντιθέτως ο Bollobas, με χρήση της πιθανοτικής μεθόδου και μεταφέροντας στοιχεία της απόδειξης του Catlin στον κόσμο των επιτρεπτών συνθλίψεων, έχει αποδείξει ότι η εικασία του Hadwiger είναι σχεδόν πάντα αληθής για τυχαία γραφήματα.[17]

Ο Borowiecki επέκτεινε το ερώτημα της εικασίας του Hadwiger στην περίπτωση ενός άλλου τρόπου χρωματισμού, του χρωματισμού λίστας. Ο **χρωματισμός λίστας** είναι μια συνάρτηση επιλογής από κάθε κορυφή σε ένα χρώμα δεδομένου ενός συνόλου χρωμάτων που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή. Αντιστοίχως ο χρωματικός αριθμός λίστας είναι ο ελάχιστος αριθμός λιστών έτσι ώστε καμία από τις συναρτήσεις να μην οδηγεί σε γειτονικές κορυφές ιδίου χρώματος. Για $k \leq 4$, αποδεικνύεται ότι κάθε γράφημα με χρωματικό αριθμό λίστας k έχει μια κλίκα k κορυφών ως έλασσον. Αν και επειδή ο μέγιστος χρωματικός αριθμός λίστας επίπεδου γραφήματος αποδεικνύεται ότι είναι το 5, συνεπάγεται από το θεώρημα του Wagner ότι η επέκταση αποτυγχάνει για k=5. Ακόμα αποδεικνύεται ότι για κάθε $t \geq 1$ υπάρχουν γραφήματα με αριθμό Hadwiger 3t+1 και χρωματικό αριθμό λίστας 4t+1.

Οι Gerards και Seymour υπέθεσαν ότι κάθε γράφημα με χρωματικό αριθμό k μπορεί να δειχθεί ότι έχει περιττό-έλασσον k κορυφών. Το περιττό-έλασσον γράφημα είναι μια υποδομή γραφήματος που περιέχεται σε ένα γράφημα όταν αυτό περιέχει k ανεξάρτητα υποδέντρα συνδεδεμένα μεταξύ τους ανά δύο. Αν και τα γραφήματα που δεν περιέχουν ένα περιττό-έλασσον k κορυφών δεν είναι απαραιτήτως αραιά, για αυτά έχει δειχθεί το ίδιο όριο που προσεγγίζει και η παρούσα διπλωματική εργασία για την πρωτότυπη εκδοχή της εικασία του

Hadwiger, ότι ένα γράφημα που δεν περιέχει ένα περιττό K_k θα έχει χρωματικό αριθμό ίσο με $O(k\sqrt{\log k})$.

Το να τεθούν και κάποιες ακόμα συνθήκες σαν υποχρεωτικές σε ένα γράφημα, πέρα από τον χρωματικό αριθμό είναι ένας ακόμα τρόπος να επεκταθεί η εικασία του Hadwiger. Συγκεκριμένα ο Tutte διατύπωσε μια εικασία, το 2001, ότι κάθε 3-κανονικό γράφημα όπου μπορούν να χρωματιστούν οι ακμές του με 4 χρώματα έτσι ώστε κανένα ζευγάρι γειτονικών ακμών να μην έχει το ίδιο χρώμα, περιέχει το γράφημα Petersen ως έλασσον, και οι Robertson, Sanders, Seymour και Thomas την απέδειξαν, το 2002.

4.3 Αλγοριθμικές Προεκτάσεις

Χωρίς να επιλύουν το μαθηματικό πρόβλημα, υπάρχουν μια σειρά από αλγοριθμικές προσεγγίσεις του προβλήματος της εικασίας του Hadwiger. Συγκεκριμένα υπάρχει πληθώρα βιβλιογραφίας γύρω από αποδοτικούς αλγόριθμους για τον χρωματισμό γραφήματος, αλλά και για την εύρεση μέγιστης κλίκας περιεχόμενης ως έλασσον σε γράφημα. Για τον μεν χρωματισμό γραφήματος είναι δύσκολη μια πιο συγκεκριμένη αναφορά αφού έχει αξιοποιηθεί το σύνολο της αλγοριθμικής θεωρίας και έχουν ερευνηθεί πολλά είδη αλγορίθμων, όπως άπληστοι αλγόριθμοι, παράλληλοι αλγόριθμοι, αλγόριθμοι ωμής βιας και πολυωνυμικού χρόνου (για επίπεδα γραφήματα). Μια πιο συγκεκριμένη αναφορά μπορεί να γίνει στον αλγόριθμο που οφείλεται στον Zykov, έναν αναδρομικό αλγόριθμο βασισμένο στην σχέση:

$$\chi(G) = \min\{\chi(G+uv), \chi(G/uv)\}.$$

Όπου G+uv είναι το γράφημα G την προσθήκη της ακμής uv και G/uv είναι το γράφημα G με την αφαίρεση από αυτό της ακμής uv. Ο μέσος χειρότερος χρόνος του συγκεκριμένου αλγόριθμου είναι $O(1,618^{n+m})$, όπου n είναι ο αριθμός των κορυφών και m ο αριθμός των ακμών και το σύμβολο O(g(n,m)) χρησιμοποιείται για να δείξει ότι το άνω χρονικό φράγμα όπου ο αλγόριθμος σταματά είναι η συνάρτηση g πολλαπλασιασμένη με οποιαδήποτε σταθερά.

Για αλγόριθμο εύρεσης μέγιστης κλίκας που περιέχεται ως έλασσον δεν υπάρχει αντίστοιχη πληθώρα έρευνας άλλα είναι σημαντικό να αναφερθούν η εργασία που βρίσκεται σε εξέλιξη των Noga Alon, Andrzej Lingas και Martin Wahlen (2007) για την προσέγγιση της μέγιστης κλίκας που περιέχεται ως έλασσον άλλα και την απόδειξη αναγωγής πολυπλοκότητας στο σύνολο των hard του David Eppstein, δηλαδή ότι το πρόβλημα δεδομένου ενός αριθμού και ενός γραφήματος να βρεθεί το αν υπάρχει κλίκα τέτοιου μεγέθους που περιέχεται ως έλασσον στο γράφημα είναι NP-Complete. [18]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΕΙΚΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΜΕΓΑΛΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ

Μέχρι σήμερα η καλύτερη προσέγγιση της εικασίας του Hadwiger παραμένει αυτή που πέτυχαν οι Kostotchka (1982)[19] και Thomason (1984)[20] δείχνοντας ότι αν $\chi(G) \geq \Omega\left(\mathrm{k}\sqrt{\ln \mathrm{k}}\right)$ τότε υπάρχει έλασσον υπογράφημα $\mathrm{K_k}$. Η παραπάνω προσέγγιση δεν αποδεικνύει τη γραμμική σχέση χρωματισμού και πλήθους κορυφών κλίκας που είχε υποτεθεί στην εικασία, αλλά μια λογαριθμική σχέση ανάμεσα στα δύο μεγέθη. Σχεδόν δύο δεκαετίες αργότερα, ο Thomason (2001)[21] καθόρισε με μεγαλύτερη ακρίβεια τη σχέση αυτή, υπολογίζοντας μια πολλαπλασιαστική σταθερά. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι: «Αν c(t) είναι ο ελάχιστος αριθμός για τον οποίο σε κάθε γράφημα G θα περιέχεται ένα πλήρες γράφημα t κορυφών αν $\varepsilon(\mathrm{G}) \geq \mathrm{c}|G|$, τότε $c(t) = (o(1)+a)t\sqrt{\log t}$ όπου $a = 0.319\ldots$». Δηλαδή απέδειξε κάτι παραπάνω ότι είναι αδύνατο να αποδειχθεί η εικασία του Hadwiger χρησιμοποιώντας τη σχέση χρωματισμού και πυκνότητας που θα αποδειχθεί πιο κάτω.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας το ενδιαφέρον εστιάζεται κυρίως σε μια πιο αδύναμη εκδοχή της παραπάνω προσέγγισης, την οποία απέδειξε ο Mader (1968) [22]. Συγκεκριμένα θα δειχθεί ότι υπάρχει έλασσον $\mathrm{K_k}$ στο G όταν ο χρωματικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του $100\mathrm{k}\ln\mathrm{k}$ για επαρκώς μεγάλο k. Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία μέρη αλλά το κομμάτι που οφείλεται στον Mader είναι το θεώρημα 5.3.

<u>Θεώρημα 5.1</u>

Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι:

$$\chi(\mathrm{G}) \leq \delta^*(\mathrm{G})+1.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Για την απόδειξη της ανισότητας αρκεί δειχθεί ότι κάθε γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με $\delta^*(\mathrm{G})+1$ χρώματα. Έτσι, δεδομένου ότι ως χρωματικός αριθμός ορίζεται ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων με τα οποία μπορεί να χρωματιστεί ένα γράφημα, το παραπάνω αποδεικνύει τη ζητούμενη ανισότητα.

Με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών του γραφήματος προκύπτει αρχικά ότι το γράφημα μιας κορυφής προφανώς έχει εκφυλισμό ένα και χρωματίζεται το λιγότερο με ένα χρώμα. Άρα, η υπόθεση που προκύπτει από την επαγωγική αποδεικτική διαδικασία είναι ότι κάθε γράφημα με πλήθος κορυφών $<n$ μπορεί να χρωματιστεί με $\delta^*(\mathrm{G})+1$ χρώματα. Θα δειχθεί και για γράφημα G με $|\mathrm{V}| = n$.

Έστω v κορυφή του G με $\mathrm{d(v)} \leq \delta^*(\mathrm{G})$, την ύπαρξη της οποίας εγγυάται ο ορισμός του εκφυλισμού, τότε από επαγωγική υπόθεση το υπογράφημα στο οποίο έχει αφαιρεθεί η v και συμβολίζεται με G/v, μπορεί να χρωματιστεί με $\delta^*(\mathrm{G/v})+1 \leq \delta^*(\mathrm{G})+1$ χρώματα. Ξαναπροσθέτοντας την κορυφή v στο γράφημα προκύπτει τουλάχιστον ένα χρώμα από τα $\delta^*(\mathrm{G})+1$ που αντιστοιχεί σε αυτήν. Αφού η v έχει το πολύ $\delta^*(\mathrm{G})$ γείτονες, άρα έχει και το πολύ $\delta^*(\mathrm{G})$ απογορεύμενα χρώματα. Συνεπώς αποδείχθηκε επαγωγικά ότι κάθε γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με $\delta^*(\mathrm{G})+1$ χρώματα. [3] □

<u>Θεώρημα 5.2</u>

Αν ένα γράφημα G έχει $\chi(\mathrm{G}) \geq \mathrm{k}$, τότε περιέχει ένα υπογράφημα με μέσο βαθμό τουλάχιστον k-1.

<u>Απόδειξη:</u>

Θα δειχθεί ότι αν ένα γράφημα G έχει $\chi(\mathrm{G}) \geq \mathrm{k}$ τότε περιέχει ένα υπογράφημα με ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον k-1, δηλαδή $\delta^*(\mathrm{G}) \geq \mathrm{k}\text{-}1$. Πράγματι, από το θεώρημα 5.1 προκύπτει ότι $\chi(\mathrm{G}) \leq \delta^*(\mathrm{G})+1,\ \mathrm{k} \leq \chi(\mathrm{G}) \Rightarrow \mathrm{k}\text{-}1 \leq \delta^*(\mathrm{G})$. Άρα το G περιέχει ένα υπογράφημα με ελάχιστο βαθμό k-1, τουλάχιστον, το οποίο συνεπάγεται ότι περιέχει ένα υπογράφημα με μέσο βαθμό τουλάχιστον k-1, αφού είναι το λιγότερο k-1-κανονικό ή και πιο πυκνό. □

Δεδομένου ότι έχει καθορισθεί ο τρόπος με τον οποίο συνδέεται ο χρωματικός αριθμός κάθε γραφήματος με το μέσο βαθμό ενός υπογραφήματος του, καθίσταται πλέον δυνατή η διατύπωση του κεντρικού θεωρήματος αυτού του κεφαλαίου, Θεώρημα 5.3, του οποίου η απόδειξη παρατίθεται στη συνέχεια και πρόκειται για την απόδειξη του Mader.

Θεώρημα 5.3

Για k επαρκώς μεγάλο αν ένα γράφημα G έχει μέσο βαθμό τουλάχιστον $100k\ln k$ τότε το γράφημα έχει K_k-έλασσον.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω θεωρημάτων αποτελεί το θεώρημα 5.4

Θεώρημα 5.4

Για k επαρκώς μεγάλο αν ένα γράφημα G έχει χρωματικό αριθμό τουλάχιστον $\mathbf{100k \cdot \ln k+1}$ τότε το γράφημα έχει K_k-έλασσον.

Απόδειξη:

Από το θεώρημα 5.2 αν ένα γράφημα έχει $\chi(G) \geq 100k \cdot \ln k+1$ τότε έχει ένα υπογράφημα με μέσο βαθμό τουλάχιστον $100k \cdot \ln k$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 5.3 το υπογράφημα, άρα και το γράφημα, έχει K_k-έλασσον.□

5.1 Απόδειξη του Mader

Προκειμένου να καταστεί πιο κατανοητή η αποδεικτική διαδικασία της απόδειξης του θεωρήματος 5.3 κρίνεται απαραίτητος ο ορισμός μιας σειράς εννοιών της θεωρίας γραφημάτων ακόμα.

Ορισμός 5.1

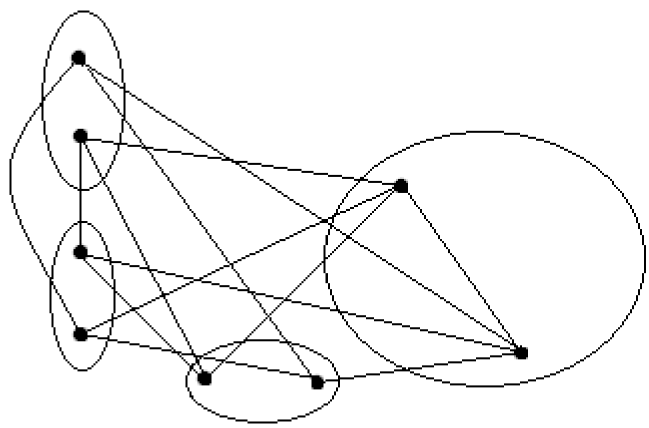
K_k - έλασσον: *Πρόκειται ουσιαστικά για το έλασσον υπογράφημα που είναι K_k-πλήρες. Θα προκύψει ένα πλήρες k κορυφών σαν έλασσον ενός γραφήματος G αν και μόνο αν έχει $V_1, V_2, V_3 .... V_k$ ανεξάρτητα υποσύνολα τα οποία είναι συνδεδεμένα εσωτερικά και σε κάθε ένα από αυτά υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος που να συνδέεται με κάποιον κόμβο σε κάποιο από τα άλλα σύνολα έτσι ώστε όταν εφαρμοσθεί η πράξη της συστολής στο εσωτερικό κάθε συνόλου να δημιουργηθεί τελικά η δομή του πλήρους K_k.*

Ορισμός 5.2

Ισορροπημένο- έλασσον: *Ορίζεται γράφημα στο οποίο κάθε έλασσον έχει μικρότερο μέσο βαθμό από το ίδιο.*

Ορισμός 5.3

K_k -χωρισμένο- έλασσον: *Πρόκειται για μια συλλογή από σύνολα* $V_1, V_2, V_3 .... V_k$ *ενός G στα οποία κάθε σύνολο* V_i *και κάθε σύνολο* V_j *από τα* $V_1, V_2, V_3 .... V_k$ *αποτελείται το πολύ από δυο συνεκτικές συνιστώσες και για κάθε i και κάθε j κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός* V_i *συνδέεται με το* V_j *και αντίστροφα.* Πρόκειται για μια έννοια η οποία χρειάζεται γιατί όπως θα φανεί στο τέλος του κεφαλαίου αποδεικνύεται ότι εντός ενός K_{4k} -χωρισμένου-έλασσον υπογραφήματος περιέχεται ένα K_k -έλασσον, λόγω του ότι τα V_{4k} σύνολα συνδεδεμένα με τον τρόπο που ορίστηκε αποδεικνύεται ότι περιέχουν ένα K_k -έλασσον.



Εικόνα 15 - K_4 -χωρισμένο-έλασσον στο οποίο κάθε κορυφή θα μπορούσε να είναι και σύνολο κόμβων το οποίο έχει συνθλιβεί

Η αποδεικτική διαδικασία του θεωρήματος 5.3 ολοκληρώνεται μέσω τριών λημμάτων:

Λήμμα 5.1: «Εάν ένα γράφημα G είναι ισορροπήμενο-έλασσον με μέσο βαθμό d τότε έχει υπογράφημα H το οποίο έχει το πολύ d κορυφές και ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον $\frac{d}{2}$-1» .

Λήμμα 5.2: «Εάν το πλήθος των κόμβων ενός γραφήματος H είναι μικρότερο από d και ο ελάχιστος βαθμός του είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}\text{d-1}$ για $d \geq 100k \cdot \ln k$ τότε έχει υπογράφημα το οποίο είναι K_{4k} -χωρισμένο- έλασσον».

Λήμμα 5.3: «Κάθε K_{4k} -χωρισμένο- ελάσσον γράφημα περιέχει ένα K_k -έλασσον».

Μένει, όμως, να δειχθεί ότι ένα γράφημα G περιέχει πάντα ένα ισορροπήμενο-έλασσον. Η απόδειξή αυτή είναι προφανής αφού θα δεχθεί ότι με οποιαδήποτε από τις τρεις πράξεις που οδηγούν σε ένα έλασσον γράφημα (αφαίρεση κορυφής, αφαίρεση ακμής ή σύνθλιψη ακμής) μειώνεται ο μέσος βαθμός του γραφήματος, εκτός από την πράξη της αφαίρεσης μιας κορυφής u όταν ο βαθμός της u είναι μικρότερος ή ίσος του μέσου βαθμού (d) του G, καθώς και την πράξη της σύνθλιψης μιας {u,v} όταν το πλήθος των κοινών των γειτονιών τους είναι μικρότερο ή ίσο του $\frac{d}{2}-1$.

Συνοπτικά μια πιο διαισθητική περιγραφή: «Όταν αντιστοίχως η u ή η {u,v} ανήκουν στο «αραιό» κομμάτι του G τότε μπορεί και να αυξάνεται ο μέσος. Κάθε γράφημα, λοιπόν, περιέχει ένα ισορροπήμενο-έλασσον αφού ακόμα και αν εφαρμόζει κανείς τις πράξεις που αυξάνουν τον μέσο βαθμό κάποια στιγμή δεν θα υπάρχει πλέον αρκετά «αραιό» κομμάτι να αφαιρεθεί και θα προκύψει ένα ισορροπήμενο-έλασσον. Η πρωτόλεια σκέψη, η οποία επαληθεύεται, είναι ότι αφού έχουμε φτάσει σε ένα τόσο πυκνό γράφημα είμαστε πλέον και πιο κοντά στο K_k -έλασσον»

Πως όμως επιδρά τελικά ο κάθε μετασχηματισμός στον μέσο βαθμό;

Αφαίρεση ακμής

Έστω ότι d' είναι ο καινούριος μέσος βαθμός μετά την αφαίρεση οποιασδήποτε ακμής. Οι κορυφές δεν επηρεάζονται κάπως, οπότε: $d'=\frac{2(E-1)}{V}$. Είναι σαφές ότι σε κάθε περίπτωση αφαίρεση ακμής προκύπτει μικρότερος μέσος βαθμός.

Αφαίρεση κορυφής

Έστω ότι d' είναι ο καινούριος μέσος βαθμός μετά την αφαίρεση μιας κορυφής u και αναζητούνται οι συνθήκες υπό τις οποίες είναι μεγαλύτερος του d. Οι ακμές θα μειωθούν κατά το βαθμό του u και οι κορυφές θα μειωθούν κατά ένα, άρα: $d' \geq d \Rightarrow \frac{2(E\text{-}d(u))}{V\text{-}1} \geq \frac{2E}{V} \Rightarrow 2Vd(u) \leq 2E \Rightarrow d(u) \leq \frac{d}{2}$.

Σύνθλιψη ακμής

Έστω ότι d' είναι ο καινούριος μέσος βαθμός μετά την σύνθλιψη μιας ακμής έστω $\{u,v\}$ και πάλι διερευνώνται οι συνθήκες υπό τις οποίες είναι μεγαλύτερος του d, με δεδομένο ότι $E'=E\text{-}|N(u) \cap N(v)|-1$ είναι το πλήθος των ακμών στο καινούριο μετά την σύνθλιψη γράφημα:

$$d' \geq d \Rightarrow \frac{2E'}{V'} \geq \frac{2E}{V} \Rightarrow \frac{2\left(E\text{-}|N(u) \cap N(v)|-1\right)}{V\text{-}1} \geq \frac{2E}{V} \Rightarrow 2EV\text{-}2V|N(u) \cap N(v)| - V \geq 2EV\text{-}2E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2|N(u) \cap N(v)|+1 \leq \frac{2E}{V} \Rightarrow |N(u) \cap N(v)| \leq \frac{d}{2}-1 .$$

Παρατηρείται, λοιπόν, ότι πράγματι εκκινώντας από οποιοδήποτε γράφημα G μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα έλασσον-ισορροπημένο καταλήγοντας επαναληπτικά σε ελάσσονα γραφήματα με μεγαλύτερο ή ίσο βαθμό, αφαιρώντας δηλαδή κορυφές με μικρότερο του $\frac{d}{2}$ βαθμό ή συνθλίβοντας ακμές που δεν έχουν πολλές κοινές κορυφές στις γειτονίες τους, καταλήγουμε να μην υπάρχει πράξη που να μεγαλώνει ή να κρατά σταθερό το μέσο βαθμό. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχει ένα άνω φράγμα στο πόσο μπορεί να αυξηθεί ο μέσος βαθμός, το πλήρες γράφημα με μέσο βαθμό $d = |V(G)| - 1$. Άρα κάθε γράφημα περιέχει τουλάχιστον ένα έλασσον-ισορροπημένο, το πιο πυκνό.

<u>Απόδειξη λήμματος 5.1:</u>

Βρίσκοντας ένα πυκνό υπογράφημα

Εάν ένα γράφημα G είναι έλασσον-ισορροπημένο με μέσο βαθμό d τότε έχει υπογράφημα H το οποίο έχει το πολύ d κορυφές και ελάχιστο βαθμό το πολύ $\frac{1}{2}d\text{-}1$

Βήμα 1: «Για κάθε κορυφή u στο G και κάθε $v \in N(u)$ ισχύει ότι το πλήθος των κοινών

των γειτονιών τους είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{2}$d-1»

Απόδειξη:

Αφού το γράφημα G είναι ισορροπημένο-έλασσον τότε ο νέος μέσος βαθμός κάθε ελάσσονος υπογραφήματος του, έστω d', είναι μικρότερος άρα έχουμε $d' < d$. Έστω ότι το υπογράφημα H έχει προκύψει έπειτα από σύνθλιψη της ακμής {u,v} . Άρα για το πλήθος των ακμών του H, έστω E', ισχύει $|E'|=|E|-|N(u)\cap N(v)|-1$. Μπορούμε να δούμε με μια διαισθητική προσέγγιση που όμως έχει αποδεικτική βαρύτητα ότι με μια σύνθλιψη οι κοινές της γειτονιάς του ενός με τη γειτονιά του άλλου κορυφές θα έχουν «συνθλιψή» των δυο ακμών που τις συνέδεαν με την u και την v αντίστοιχα σε μια που τις συνδέει με την u' αλλά υπάρχει και η ακμή {u,v} που συνθλίβεται, άρα πράγματι προκύπτει η συγκεκριμένη μείωση του πλήθους των ακμών. Αντίστοιχα το πλήθος των κορυφών θα μειωθεί κατά μια άρα έχουμε $|V'|=|V|-1$ οπότε:

$$d'<d \Rightarrow 2\left|\frac{E'}{V'}\right| < 2\left|\frac{E}{V}\right| \Rightarrow \frac{2\left(|E|-|N(u)\cap N(v)|-1\right)}{|V|-1} < \frac{2|E|}{|V|} \Rightarrow 2|E||V|-2|V||N(u)\cap N(v)|-|V| < 2|E||V|-2|E| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2|N(u)\cap N(v)|+1 > \frac{2|E|}{|V|} \Rightarrow |N(u)\cap N(v)| > \frac{d}{2}-1$$

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι για κάθε κορυφή u που ανήκει στο G και κάθε κορυφή $v \in N(u)$ ισχύει ότι $|N(u)\cap N(v)| > \frac{d}{2}-1$.□

Βήμα 2: «Το H έχει το πολύ d κορυφές και ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον $\frac{d}{2}-1$»

Απόδειξη:

Αφού λοιπόν το γράφημα G έχει μέσο βαθμό d τότε υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή, έστω η v, με βαθμό το πολύ d. Άρα για το υπογράφημα που προκύπτει από τις κορυφές της γειτονιάς του v, έστω H ισχύει ότι $|V(H)| \le d$. Όμως στο προηγούμενο βήμα έγινε σαφές ότι για κάθε $u \in N(v)$ κορυφή προκύπτει ότι έχει τουλάχιστον $\frac{d}{2}-1$ γείτονες στο N(v) άρα το υπογράφημα Η έχει το πολύ d κορυφές και ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον $\frac{d}{2}-1$.□

Συμπεράσματα και εξηγήσεις

Πριν το επόμενο λήμμα της απόδειξης υπάρχουν κάποια συμπεράσματα και κάποιες διαισθητικές ερμηνείες στο Λήμμα 4.1. Το ερώτημα που χρήζει διερεύνησης είναι το γιατί χρησιμοποιείτε σαν ενδιάμεσο στάδιο για να βρεθεί το K_k-έλασσον το έλασσον-ισοζυγισμένο όπου εντός του περιέχεται το πυκνό υπογράφημα Η. Από την ίδια την διαδικασία χρωματισμού ενός γραφήματος διαφαίνεται το γιατί, στην εικασία του Hadwiger, τα ελάσσονα επιλέγονται σαν εσωτερική δομή που σχετίζονται με το χρωματισμό, σε αντίθεση με τα υπογραφήματα και εκεί κρύβεται και η απάντηση. Είναι επειδή σε ένα γράφημα μπορεί η παρεμβολή ενός αραιού κομματιού να «κρύβει» την αιτία που προκύπτει ένας χρωματικός αριθμός, οπότε η σύνθλιψη του κομματιού αυτού μπορεί να αποκαλύψει την εσωτερική δομή και την αιτία του χρωματικού αριθμού. Αυτή ακριβώς η σκέψη, ότι για να εντοπιστεί το K_k-έλασσον πρέπει να συνθλίβουν όλα τα «αραιά» κομμάτια του G, οδηγεί στο να οριστεί το έλασσον-ισορροπημένο. Προσεγγίζοντας το πιο πυκνό έλασσον του G, το έλασσον το οποίο θα είναι τόσο πυκνό όπου κάθε πράξη που οδηγεί σε ένα νέο έλασσον θα μικραίνει τον μέσο βαθμό, το έλασσον με το μέγιστο δυνατό μέσο βαθμό, προσεγγίζεται και το K_k-έλασσον. Τα συμπεράσματα για τον ελάχιστο βαθμό ενός υπογραφήματος d κορυφών χρειάζονται στο επόμενο βήμα της στο οποίο γίνεται και χρήση της πιθανοτικής μεθόδου.

<u>Απόδειξη Λήμματος 5.2:</u>

Εντοπίζοντας ένα χωρισμένο έλασσον

Το βασικό ζήτημα που πραγματεύεται η απόδειξη του λήμματος 2 είναι να δειχθεί ότι στο υπογράφημα Η περιέχεται ένα K_{4k}-χωρισμένο- έλασσον. Θα αποδειχθεί με χρήση της πιθανοτικής μεθόδου, θα δειχθεί δηλαδή ότι είναι μη μηδενική η πιθανότητα με τον τυχαίο διαμελισμό σε 4k σύνολα $H_1, H_2, \ldots, H_{4k}$ να έχουν την δομή ενός K_{4k}-χωρισμένου- έλασσον. Ο τυχαίος αυτός διαμελισμός θα γίνει με τον πλέον φυσικό τρόπο, κάθε κορυφή του γραφήματος Η θα τοποθετηθεί σε ένα τυχαίο από τα 4k σύνολα με ίση πιθανότητα. Δηλαδή με ένα παράδειγμα η πιθανότητα κάθε κορυφή v να βρεθεί στο σύνολο H_3 είναι $\frac{1}{4k}$. Για να έχουν την δομή ενός K_{4k}-χωρισμένου- έλασσον θα δειχθεί ότι απαιτείται να ικανοποιούνται δυο ιδιότητες:

Ιδιότητα 1: Κάθε κορυφή έχει ένα γείτονα σε κάθε ένα από τα 4k σύνολα

Ιδιότητα 2: Για κάθε i υπάρχει ζεύγος κορυφών u, v, τέτοιο ώστε $\mathbf{u,v \in V(H_i)}$ και $\mathbf{|N(u) \cap N(v)| \geq \frac{1}{6}|V(H)|}$, τότε οι u και v κορυφές έχουν ένα κοινό γείτονα στο $\mathbf{H_i}$.

Πιο συγκεκριμένα θα δειχθεί ότι με μη μηδενική πιθανότητα ικανοποιούνται οι δυο ιδιότητες. Τότε εύκολα, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων, αποδεικνύεται ότι η δομή του H είναι K_{4k}-χωρισμένου- έλασσον. Η μη μηδενική πιθανότητα των δυο ιδιοτήτων αποδεικνύεται με μια εφαρμογή της μεθόδου πρώτης ροπής:

Έστω ότι X είναι ο αριθμός των κορυφών u για τις οποίες δεν ισχύει η Ιδιότητα 1 και έστω ότι Y είναι ο αριθμός των ζευγαριών u, v για τα οποία δεν ισχύει η Ιδιότητα 2.

<u>Απόδειξη Ιδιότητας 1:</u>

Για κάθε i η πιθανότητα κανένας γείτονας του u να μην βρίσκεται στο H_i είναι $(1-\frac{1}{4k})^{d(u)}$, αφού για κάθε κορυφή η πιθανότητα να μην βρίσκεται στο H_i είναι $(1-\frac{1}{4k})$ και το πλήθος των κορυφών που γειτονεύουν με την u είναι d(u). Από την αρχή της υποπροσθετικότητας των πιθανοτήτων συνεπάγεται ότι τουλάχιστον για κάποιο i η πιθανότητα, η κορυφή u να μην βρίσκεται στο H_i, είναι το πολύ $4k*(1-\frac{1}{4k})^{d(u)}$. Συνεπώς, αφού $1-\frac{1}{4k}<1$ και ο ελάχιστος βαθμός κορυφής στο H είναι $\frac{d}{2}-1$, για κάθε κορυφή $u_1, u_2, \ldots, u_\ell \in V(H)$, προκύπτει:

$$E(X) \leq 4k*(1-\frac{1}{4k})^{d(u_1)} + 4k*(1-\frac{1}{4k})^{d(u_2)} + \ldots + 4k*(1-\frac{1}{4k})^{d(u_d)} \leq |V(H)|*4k*(1-\frac{1}{4k})^{\frac{1}{2}d-1}$$

Ακόμα για το H ισχύει ότι $|V(H)| \le d$ καθώς επίσης χρησιμοποιώντας ότι $(1-x) < e^{-x}$ για x θετικό (*η απόδειξη παρατίθεται στο Παράρτημα*), άρα η ανισότητα μπορεί να γίνει $E(X) < d*4k*e^{-\frac{d-2}{8k}}$. Όμως μέσος βαθμός στο γράφημα G είναι μεγαλύτερος από $100k\ln k$, άρα $E(X) < 100k*\ln k*4k*e^{-\frac{100k\ln k-2}{8k}}$. Όπου λόγω του ότι το $de^{-\frac{d-2}{8k}}$ τείνει στο 0, καθώς το d αυξάνεται πάνω από το 8k και το k τείνει στο άπειρο, έχουμε $E(X) < \frac{1}{2}$ (*ολόκληρη η απόδειξη παρατίθεται στο Παράρτημα*).□

Ο υπολογισμός άνω ορίου της αναμενόμενης μέσης τιμής του πλήθους Y, των ζευγαριών u, v για τα όποια υπάρχει ένα H_i τέτοιο ώστε $u, v \in V(H_i)$ και ταυτόχρονα $|N(u) \cap N(v)| \ge \frac{1}{6}\ell$ άλλα δεν έχουν κανένα κοινό γείτονα στο H_i, θα γίνει με παρόμοιο τρόπο.

<u>Απόδειξη Ιδιότητας 2:</u>

Η πιθανότητα οι κορυφές u, v να περιέχονται ταυτόχρονα σε κάποιο H_i είναι $\frac{1}{4k}$. Αν περιέχονται στο ίδιο H_i, η πιθανότητα να μην έχουν κοινό γείτονα είναι $(1-\frac{1}{4k})^{|N(u)\cap N(v)|}$ *(λεπτομέρειες για τον τρόπο υπολογισμού των πιθανοτήτων παρατίθενται στο Παράρτημα, απ. 5)*. Χρησιμοποιώντας ότι το πλήθος όλων των πιθανών ζευγαριών κορυφών, για τα οποία η Ιδιότητα 2 δεν ισχύει, είναι $\binom{\ell}{2}$, ℓ έχει οριστεί το πλήθος των κορυφών στο H. Ακόμα λόγω του ότι $|N(u) \cap N(v)| \ge \frac{1}{6}\ell$, προκύπτει: $E(Y) \le \binom{\ell}{2}*\frac{1}{4k}*(1-\frac{1}{4k})^{|N(u)\cap N(v)|} \le \binom{\ell}{2}*\frac{1}{4k}*(1-\frac{1}{4k})^{\frac{\ell}{6}}$. Χρησιμοποιώντας πάλι την ανισότητα $(1-x) < e^{-x}$ το άνω όριο γίνεται: $E(Y) < \frac{\ell^2}{2}*\frac{1}{4k}*e^{-\frac{\ell}{24k}}$.

Λόγω του ότι ο ελάχιστος βαθμός στο H είναι $\frac{d}{2}-1$ έχουμε τουλάχιστον $\frac{d}{2}$ κορυφές, άρα $\ell \geq \frac{d}{2}$, όμως τα γραφήματα τα οποία εξετάζει η απόδειξη είναι πολύ πυκνά ισχύει δηλαδή $d \geq 100k\ln k$, άρα $\ell \geq \frac{d}{2} \geq 50k\ln k$. Το οποίο συνεπάγεται για την αναμενόμενη τιμή $E(Y) \leq 1250k(\ln k)^2 e^{-2\ln k}$, αυτό το άνω όριο για μεγάλες τιμές του k τείνει στο 0 *(στο Παράρτημα, απ. 6, αποδεικνύεται ολοκληρωμένα)*. Συνεπάγεται λοιπόν ότι $E(Y) < \frac{1}{2}$.□

Συνεπώς από την ανισότητα του Markov, συγκεκριμένα από την εκδοχή της ανισότητας του Πορίσματος 1 προκύπτει: $\Pr(X>0) < \frac{1}{2}$, $\Pr(Y>0) < \frac{1}{2}$. Τελικά από την υποπροσθετικότητα των πιθανοτήτων προκύπτει με μη μηδενική πιθανότητα να ισχύουν η Ιδιότητα 1 και η Ιδιότητα 2 ταυτόχρονα. Γιατί: $\Pr[(X=0)\cap(Y=0)] = 1 - \Pr[(X>0)\cup(Y>0)] \geq 1 - \Pr(X>0) - \Pr(Y>0) > 0$

Χρησιμοποιώντας πλέον αυτές τις δυο ιδιότητες θα δειχθεί ότι το H έχει δομή K_{4k}-χωρισμένου- έλασσον, δηλαδή κάθε $H_1, H_2, ..., H_{4k}$ έχει το πολύ 2 συνιστώσες και για κάθε i, j υπάρχει μια ακμή από κάθε συνεκτική συνιστώσα του H_i σε κάθε H_j.

Το H είναι K_{4k} - χωρισμένο- έλασσον

<u>Προϋπόθεση 1</u>: *Υπάρχει μια ακμή από κάθε συνεκτική συνιστώσα του* H_i *σε κάθε* H_j.

Η ιδιότητα του K_{4k} - χωρισμένου- έλασσον να υπάρχουν ακμές από κάθε συνεκτική συνιστώσα σε κάθε υποσύνολο H_i, εκτός από αυτό στο οποίο ανήκει, ουσιαστικά εκπληρώνεται από την εγκυρότητα της Ιδιότητας 1. Χρειάζεται εδώ μία διευκρίνιση όμως, μπορεί η Ιδιότητα 1 να έχει αποδειχθεί με τη βοήθεια της πιθανοτικής μεθόδου για κορυφές αλλά ισχύει και για συνεκτικές συνιστώσες με δεδομένο ότι η πράξη της σύνθλιψης μετατρέπει τις συνεκτικές συνιστώσες σε κορυφές και το υπογράφημα H προέκυψε ως υπογράφημα ενός ισορροπημένου-έλασσον, δηλαδή στο πρόβλημα μας η έννοια της συνεκτικής συνιστώσας μπορεί να ταυτιστεί με την έννοια της κορυφής.

<u>Προϋπόθεση 2</u>: *Κάθε υπογράφημα* $\mathbf{H_i}$ *έχει το πολύ δύο συνεκτικές συνιστώσες*

Απόδειξη:

Θα δειχθεί ότι κάθε υπογράφημα H_i έχει το πολύ 2 συνεκτικές συνιστώσες με εις άτοπον απαγωγή άλλα και χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα 2 που αποδείχθηκε με χρήση της πιθανοτικής μεθόδου. Έστω ότι κάποιο γράφημα H_i έχει 3 κορυφές u, v, m σε τρεις διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του H_i. Αφού καμία από τις κορυφές u, v, m δεν περιέχεται στη γειτονιά κάποιας άλλης έχουμε $|N(u)\cup N(v)\cup N(m)|\leq|\ell|-3$ και $|N(u)\cap N(v)\cap N(m)|=0$. Ακόμα $|N(u)|+|N(v)|+|N(m)|\geq\frac{3}{2}|\ell|-3$, αφού από την υπόθεση έχουμε ότι ο ελάχιστος βαθμός στο γράφημα H είναι $\frac{\ell}{2}-1$. Συνεπώς λόγω της γνωστής από τη συνολοθεωρία αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού (*αποδεικνύεται στο Παράρτημα, απ.7)*:

$$|N(u)\cap N(v)|+|N(m)\cap N(v)|+|N(u)\cap N(m)|=-|N(u)\cup N(v)\cup N(m)|+$$
$$+|N(u)|+|N(v)|+|N(m)|+|N(u)\cap N(v)\cap N(m)|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|N(u)\cap N(v)|+|N(m)\cap N(v)|+|N(u)\cap N(m)|\geq \ell/2$$

Άρα τουλάχιστον μια από τις τομές των γειτονιών είναι μεγαλύτερη του $\frac{\ell}{6}$, αφού αν και οι τρεις ήταν μικρότερες από $\frac{\ell}{6}$ το άθροισμα τους θα ήταν μικρότερο του $\frac{\ell}{2}$. Έστω ότι $|N(u)\cap N(v)|\geq\frac{\ell}{6}$ άλλα αφού ταυτόχρονα οι $u, v\in V(H_i)$, έχουμε από την Ιδιότητα 2 ότι έχουν έναν τουλάχιστον κοινό γείτονα Όμως αυτό το αποτέλεσμα δεν γίνεται να ισχύει λόγω του ότι οι u και v ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του H_i, άρα έχουμε καταλήξει σε άτοπο και το κάθε υπογράφημα H_i έχει το πολύ δύο συνεκτικές συνιστώσες.□

Με δεδομένο λοιπόν ότι το υπογράφημα H είναι K_{4k}- χωρισμένο- έλασσον, μένει να δειχθεί ότι το H περιέχει ένα K_k-έλασσον. Να αποδειχθεί δηλαδή το 3^o Λήμμα της απόδειξης.

<u>Απόδειξη Λήμματος 5.3:</u>

Βρίσκοντας το έλασσον

Για να απλοποιηθεί η απόδειξη ότι σε κάθε K_{4k}- χωρισμένο- έλασσον περιέχεται ένα K_k-έλασσον, θα γίνουν δυο παραδοχές που απλοποιούν την δομή του υπογραφήματος H:

1) Κάθε συνεκτική συνιστώσα μέσα από τη διαδικασία της σύνθλιψης μετασχηματίζεται σε κορυφή όπως έχει ήδη δειχθεί, δηλαδή θεωρείται ότι κάθε υπογράφημα H_i περιέχει μια ή δυο κορυφές.
2) Η δεύτερη παραδοχή είναι ότι κάθε υπογράφημα H_i περιέχει δυο κορυφές ακριβώς, και θα αποδειχθεί με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι γίνεται να περιέχονται στα r υπογραφήματα $H_1, H_2, ..., H_r$ μονές κορυφές, μια κλίκα r κορυφών δηλαδή, αλλά στο H δεν περιέχεται K_k-έλασσον. Τα 4k-r υπογραφήματα $H_{r+1}, ...H_{4k}$, με δύο κορυφές ακριβώς το κάθε ένα, περιέχουν ένα K_{k-r}- έλασσον αφού $4(k-r) < 4k-r$ και τα 4(k $-$r) υπογραφήματα ικανοποιούν τις δυο παραδοχές. Έστω ότι το K_{k-r}- έλασσον που περιέχεται στο υπογράφημα έχει κορυφές τις $\{u_1, ..., u_{k-r}\}$, όμως κάθε κορυφή στο γράφημα H που είναι K_{4k}- χωρισμένο- έλασσον έχει ακμή προς κάθε υπογράφημα H_i, άρα οι $\{u_1, ..., u_{k-r}, H_1, H_2, ..., H_r\}$ και οι ακμές που τις ενώνουν σχηματίζουν ένα K_k-έλασσον. Άτοπο, άρα είτε πράγματι περιέχεται ένα K_k-έλασσον στο γράφημα H, είτε κάθε H_i έχει ακριβώς δυο κορυφές. Η απόδειξη έγινε με δεδομένο ότι με αυτές τις παραδοχές αποδεικνύεται η ύπαρξη K_k-έλασσον, το οποίο όμως μένει να αποδειχθεί.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του Λήμματος 5.3 αρκεί να επαληθευτεί ο παρακάτω ισχυρισμός:

Ισχυρισμός: *Έστω ότι οι κορυφές ενός γραφήματος S είναι χωρισμένες σε ζευγάρια* $\{a_1, b_1\}, ..., \{a_{4k}, b_{4k}\}$ *και ότι κάθε κορυφή έχει ένα γείτονα σε κάθε ζευγάρι εκτός από το δικό της, συνεπάγεται ότι το γράφημα S περιέχει ένα πλήρες γράφημα k κορυφών.*

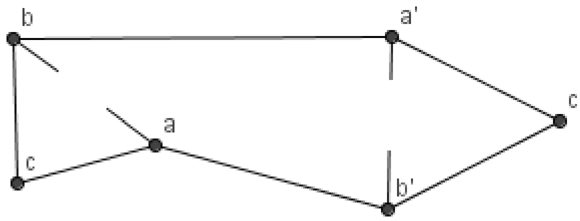
Διαισθητικά αν τα ζευγάρια στο S μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε όλες οι a_i

κορυφές να είναι συνδεδεμένες, τότε προκύπτει να περιέχει μια γενικά μεγάλη κλίκα. Αλλιώς θα έπρεπε οι ακμές να «διασταυρώνονται» με ένα τέτοιο τρόπο που θα υπάρχει μονοπάτι που θα συνδέει τις κορυφές του ίδιου ζευγαριού, συνεπώς θα υπάρχουν αρκετά ανεξάρτητα συνεκτικά υπογραφήματα τα οποία θα περιέχουν το καθένα τουλάχιστον ένα ζευγάρι έτσι ώστε, με τις κατάλληλες συνθλίψεις, να δημιουργείτε έλασσον υπογράφημα που είναι μεγάλη κλίκα.

Απόδειξη Ισχυρισμού:

Προκειμένου να απλοποιηθεί η απόδειξη ορίζεται ως *συνεκτική τριάδα* μία τριάδα ζευγαριών κορυφών H_x, H_y, H_z στην οποία όλες οι κορυφές είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους.

Κάθε τριάδα ζευγαριών, αποτελείται από 6 ακριβώς κορυφές και έχει ελάχιστο βαθμό 2, άρα είτε έχει την δομή δυο ανεξάρτητων τριγώνων είτε είναι *συνεκτική τριάδα.*



Εικόνα 16 - Λόγω της σύνδεσης των ζευγαριών, είτε θα έχει τη δομή δυο ανεξάρτητών τριγώνων είτε θα είναι συνεκτικό γράφημα

Κάθε συλλογή r ζευγαριών που δεν περιέχει καμία συνεκτική τριάδα συνεπώς θα περιέχει 2 κλίκες r κορυφών. Θα αποδειχθεί όμως ότι το S έχει αρκετά μεγάλο πλήθος κορυφών, ώστε ακόμα και αν περιέχει συνεκτικές τριάδες να περιέχει ένα K_k-έλασσον γράφημα. Αν το S έχει μια κλίκα k κορυφών, τότε προφανώς περιέχει ένα K_k-έλασσον γράφημα. Μια συλλογή από k ανεξάρτητες συνολοθεωρητικά συνεκτικές τριάδες $C_1, C_2, ..., C_k$, όπου σε κάθε μια περιλαμβάνονται και οι δυο κορυφές ενός ζευγαριού (στην πραγματικότητα και οι 6 κορυφές των 3 ζευγαριών), μπορεί να μετατραπεί μέσα από τη διαδικασία της σύνθλιψης σε k κορυφές όλες συνδεδεμένες μεταξύ τους. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε κορυφή ζευγαριού έχει γείτονα σε κάθε άλλο ζευγάρι, άρα και κάθε συνεκτική τριάδα C_i είναι συνδεδεμένη με κάθε μια από τις $C_1, C_2, ..., C_k$. Άρα και με την δομή των συνεκτικών τριάδων περιέχεται στο S ένα K_k-έλασσον.□ [6]

<u>Παρατήρηση 1η</u>: *Γιατί 4k;*

Η επιλογή να αποδειχθεί ότι σε ένα γράφημα που έχει μέσο βαθμό πολλαπλάσιο του k περιέχεται ένα K_k-έλασσον πέρασε από τον ορισμό των χωρισμένων-ελάσσονα γραφημάτων και συγκεκριμένα από το ότι κάθε γράφημα που έχει μέσο βαθμό τουλάχιστον $100k\ln k$ περιέχει ένα K_{4k}- χωρισμένο- έλασσον. Το ότι επιλέχθηκε το γράφημα να χωριστεί σε 4k υπογραφήματα και όχι λιγότερα επηρεάζει και την σταθερά μπροστά από το klnk, το λιγότερο σημαντικό στοιχείο βέβαια, σε σχέση με το πόσο πιο αδύναμη είναι η απόδειξη σε σχέση με την εικασία. Όμως στο Λήμμα 4.3 αποσαφηνίστηκε ο λόγος που χρειάζονται 4k ζευγάρια κορυφών. Αν είχε χωριστεί το γράφημα σε 4k-1 ζευγάρια θα μπορούσε να μην συμπληρώνετε ο απαιτούμενος αριθμός ζευγαριών που δεν συμμετέχουν σε σχηματισμό k-κλίκας στο S δηλαδή k και ταυτόχρονα να μην συμπληρώνεται ο αριθμός των 3k ζευγαριών που απαιτείται προκειμένου οι συνεκτικές τριάδες να σχηματίζουν K_k-έλασσον.

<u>Παρατήρηση 2η</u>: *Γιατί K_{4k}- χωρισμένο- έλασσον;*

Το να χρησιμοποιηθεί το εργαλείο της πιθανοτικής μεθόδου, είναι που οδήγησε στο να χωριστεί το γράφημα σε τυχαία σύνολα κορυφών τα οποία λόγω της μεγάλης πυκνότητας του H δύναται να αποδειχθούν συνδεδεμένα μεταξύ τους. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται η χρησιμότητα του K_{4k}- χωρισμένο- έλασσον, αφού πρόκειται για τυχαία σύνολα κορυφών που αποδεικνύονται αρκετά συνδεδεμένα και αρκετά σε πλήθος ώστε να περιέχουν ένα K_k-έλασσον.

<u>Παρατήρηση 3η:</u> *Γιατί $100k\ln k$;*

Το πιο ενδιαφέρων στοιχείο της διπλωματικής εργασίας είναι το γιατί καταλήγει μια τέτοια απόδειξη που αξιοποιεί το σημαντικό εργαλείο της πιθανοτικής μεθόδου, σε ένα αποτέλεσμα που δεν καταρρίπτει την εικασία, όπως κάνει η απόδειξη των Thomason και Kostotchka για πυκνά γραφήματα, αλλά δεν την επιβεβαιώνει εξίσου σαφώς. Αφού χρησιμοποιώντας το αρχικό λήμμα που συνδέει τον εκφυλισμό με τον χρωματικό αριθμό αλλά βρίσκει ένα κάτω φράγμα στη σχέση ύπαρξης K_k-έλασσον και μέσου βαθμού πολύ μεγαλύτερο από τη γραμμική σχέση.

Ακριβώς επειδή στην μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε ο χωρισμός σε 4k υποσύνολα, μέσω της ανισότητας $(1-x)<e^{-x}$ φαίνεται ότι οτιδήποτε λιγότερο, με τη συγκεκριμένη μέθοδο, δεν θα μπορούσε να καταλήξει σε μια φθίνουσα μέση τιμή όσο αυξάνεται το k, όπου συνεπώς για συγκεκριμένες τιμές του και πάνω να καταλήγει να είναι κάτω του $1/2$. Η σταθερά 100 αποδεικνύεται απαραίτητη για τη ικανοποίηση της Ιδιότητας 2 αφού σε αυτή τη σταθερά στηρίζεται η ύπαρξη ενός k^{-1} που οδηγεί στο να είναι φθίνουσα η μέση τιμή *(στο Παράρτημα, απόδειξη 7 σε συνδυασμό με την απόδειξη ικανοποίησης της ιδιότητας μπορεί να ιδωθεί ότι το μόνο καλύτερο αποτέλεσμα με τη συγκεκριμένη μέθοδο θα μπορούσε να είναι* $96k\ln k$ *).*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1) Ανισότητα: Να δειχθεί ότι $1-x<e^{-x}$ για κάθε $x>0$

Απόδειξη:

Ένας εύκολος τρόπος να αποδειχθεί η ανισότητα είναι μέσω του ορισμού της συνάρτησης $f(x)=e^{-x}-1+x$ και της απόδειξης ότι είναι θετική για $x>0$. Η μονοτονία μιας συνάρτησης εντοπίζεται μέσω της παραγώγου. Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=-e^{-x}+1$, συνεπώς: $f'(x)=0 \Rightarrow -e^{-x}=1 \Rightarrow x=0$. Άρα το 0 είναι τοπικό ακρότατο. $f'(x)>0 \Rightarrow -e^{-x}>-1 \Rightarrow e^{-x}<e^{0} \Rightarrow -x<0 \Rightarrow x>0$. Συνεπώς το 0 είναι ολικό ελάχιστο στο $\mathbb{R}$. Ακόμα επειδή $f(0)=0$, συνεπάγεται ότι $f(x)>f(0)$ για $x>0$. Άρα $1-x<e^{-x}$ για κάθε $x>0$.•

Στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιείται η ανισότητα $\binom{n}{r}<2^{n}$

2) $\boldsymbol{\binom{n}{r}<2^{n}}$

Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας μια απλή μέθοδο απαρίθμησης από τα διακριτά μαθηματικά, προκύπτει ότι $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}=2^{n}$. Αν το 2^{n} ιδωθεί ως το πλήθος του δυναμοσυνόλου ενός συνόλου n διακριτών αντικειμένων, θα είναι ίσο με το αριστερά σκέλος της ισότητας που μετρά και αθροίζει κάθε πιθανό σύνολο με αύξοντα πλήθος αντικειμένων από 1 έως n. Συνεπώς, με επαγωγική βάση ότι το πλήθος των πιθανών συνόλων 0 αντικειμένων είναι $2^{0}=1$ σύνολο, το $\varnothing$. Αν για κάθε n-οστό στοιχείο στο δυναμοσύνολο ανήκουν όλα τα σύνολα n-1 αντικειμένων χωρίς το n-οστό αντικείμενο και όλα τα σύνολα με το n-οστό αντικείμενο και με δεδομένο ότι η επαγωγική υπόθεση ισχύει για n-1 αντικείμενα.

Άρα η ισότητα έχει δειχθεί και συνεπώς για κάθε r μικρότερο του n, ισχύει $\binom{n}{r} < 2^n$.□

3) Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα κύκλο περιττού μήκους.

Απόδειξη:

Έστω το διμερές γράφημα G και θα δειχθεί ότι πράγματι κάθε πιθανός κύκλος είναι περιττού μήκους. Τις κορυφές του διμερούς γραφήματος τις συμβολίζουμε με x_i αν ανήκουν στο σύνολο X και με y_i αν ανήκουν στο σύνολο Y, συνεπώς η μορφή ενός κύκλου θα είναι $x_1, y_1, ..., y_n, x_1$ και το μήκος τους είναι 2n. Αντίστροφα, θα δειχθεί ότι ένα γράφημα G που δεν περιέχει κανένα κύκλο περιττού μήκους μπορεί να χωριστεί σε δύο σύνολα X, Y στα οποία δεν περιέχεται καμία ακμή εσωτερικά. Η απόδειξη γίνεται για συνεκτικό γράφημα, άρα ισχύει και στην κάθε συνιστώσα ενός μη συνεκτικού γραφήματος. Συνεπώς, θέτοντας το κάθε σύνολο X_i, Y_i των συνιστωσών να ανήκει στο αντίστοιχο X, Y η απόδειξη έχει αναχθεί και στα μη συνεκτικά.

Επιστρέφοντας στην απόδειξη, μια αυθαίρετη κορυφή u τίθεται να ανήκει στο X, ακόμα στο X τίθενται όλες οι κορυφές που έχουν άρτια απόσταση από τη u. Στο Y τίθενται να ανήκουν όλες οι κορυφές που έχουν περιττή απόσταση από τη u, ουσιαστικά μέσω αυτής της κατανομής έχει γίνει η επιθυμητή διαμέριση. Αν το X περιείχε εσωτερικά κάποια ακμή αυτή θα ένωνε δυο κορυφές που έχουν μεταξύ τους άρτια απόσταση, συνέπεια του ότι έχουν και οι δύο άρτια απόσταση από τη u, άρα θα δημιουργούταν κύκλος περιττού μήκους, άτοπο. Αν στο Y περιεχόταν μια ακμή αυτή θα ένωνε και πάλι δυο κορυφές που έχουν μεταξύ τους άρτια απόσταση, ως συνέπεια του ότι έχουν και οι δύο περιττή απόσταση από το u. Συνεπώς, οι δύο περιπτώσεις καταλήγουν σε άτοπο και ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς περιττούς κύκλους είναι διμερές. [23]

Στο κεφάλαιο 5 χρησιμοποιήθηκε ότι η αναμενόμενη μέση τιμή του πλήθους των X λόγω της ανισότητας $E(X) < 100k * \ln k * 4k * e^{-\frac{100k\ln k - 2}{8k}}$ είναι μικρότερη του $\frac{1}{2}$ για μεγάλες τιμές του k, αρκεί:

4) Να δειχθεί ότι $\lim_{k\to+\infty}(100k*\ln k*4k*e^{-100k\ln k-2/8k})=0$

Απόδειξη:

Επειδή, $e^{-\frac{100k\ln k-2}{8k}}=e^{-12,5\ln k}e^{\frac{1}{4k}}=\left(e^{\ln k}\right)^{-12,5}e^{\frac{1}{4k}}=k^{-12,5}e^{\frac{1}{4k}}$, συνεπάγεται ότι $\lim_{k\to+\infty}(100k*\ln k*4k*e^{-100k\ln k-2/8k})=\lim_{k\to+\infty}(400k^2k^{-12,5}*\ln k*e^{\frac{1}{4k}})$.

Άρα επειδή προκύπτει απροσδιοριστία στο όριο $\lim_{k\to+\infty}(400k^2k^{-12,5}*\ln k*e^{\frac{1}{4k}})=400\lim_{k\to+\infty}e^{\frac{1}{4k}}\lim_{k\to+\infty}(k^{-10,5}*\ln k)=400*1*\lim_{k\to+\infty}(k^{-10,5}*\ln k)$ από τον κανόνα de l' Hopital προκύπτει ότι $400\lim_{k\to+\infty}(-10,5k^{-11,5}*\frac{1}{k})=0$.□

5) Πιθανότητα να μην ισχύει η Ιδιότητα 2 του κεφαλαίου 4

Απόδειξη:

Η πιθανότητα μία κορυφή να βρίσκεται σε ένα συγκεκριμένο σύνολο από τα 4k είναι $\frac{1}{4k}$, συνεπώς και η πιθανότητα οι κορυφές u και v να βρίσκονται στο ίδιο σύνολο H_i είναι $\frac{1}{4k}$. Ακριβώς επειδή μπορεί να υπολογιστεί είτε από την πιθανότητα η κορυφή u να περιέχεται εντός του συγκεκριμένου συνόλου που ανήκει η κορυφή v, είτε από τον αντίστροφο υπολογισμό. Αντίστοιχα το να μην έχουν κοινή γειτονική κορυφή που να ανήκει στο ίδιο σύνολο με τις u και v προκύπτει $(1-\frac{1}{4k})^{|N(u)\cap N(v)|}$, ακριβώς επειδή προκύπτει σαν το γινόμενο των πιθανοτήτων κάθε κοινής γειτονικής κορυφής να μην ανήκει στο συγκεκριμένο σύνολο.

Στο κεφάλαιο 4 χρησιμοποιήθηκε ότι η αναμενόμενη μέση τιμή του πλήθους των Y λόγω της ανισότητας $E(Y)\le 1250k(\ln k)^2e^{-2\ln k}$ είναι μικρότερη του $\frac{1}{2}$ για μεγάλες τιμές του k, αρκεί:

6) Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{k\to\infty} 1250k(\ln k)^2 e^{-2\ln k} = 0$

Απόδειξη:

Επειδή, $1250k(\ln k)^2 e^{-2\ln k} = \frac{1250}{k}(\ln k)^2$ το οποίο όμως έχει απροσδιοριστία στο όριο $\lim\limits_{k\to\infty} 1250k(\ln k)^2 e^{-2\ln k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1250}{k}(\ln k)^2 = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1250}{k}\lim\limits_{k\to\infty}(\ln k)^2$, αφού $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1250}{k} = 0$ και $\lim\limits_{k\to\infty}(\ln k)^2 = +\infty$. Άρα πάλι από τον κανόνα de l' Hopital προκύπτει ότι $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1250}{k}(\ln k)^2 = \lim\limits_{k\to\infty}(-\frac{1250}{k^2} * 2\ln k\frac{1}{k})$, το οποίο είναι ένα ακόμα απροσδιόριστο όριο και άρα χρειάζεται να εφαρμοστεί μια ακόμα φορά ο κανόνας. Συνεπώς $\lim\limits_{k\to\infty}(-\frac{1250}{k^2} * 2\ln k\frac{1}{k}) = \lim\limits_{k\to\infty}(4\frac{1250}{k^3} * \frac{1}{k} * \frac{1}{k}) = 0$.□

7) Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για τα τρία σύνολα κορυφών N(u), N(v), N(m):

$$\mathbf{|N(u)| + |N(v)| + |N(m)| - |N(u) \cap N(v)| - |N(m) \cap N(v)| - |N(u) \cap N(m)| +}$$

$$\mathbf{+ |N(u) \cap N(v) \cap N(m)| = |N(u) \cup N(v) \cup N(m)|}$$

Απόδειξη

Θεωρώντας μια τυχαία κορυφή x, θα δειχθεί ότι αν η x ανήκει στο σύνολο $N(u) \cup N(v) \cup N(m)$ θα μετριέται και μια φορά στο αριστερά σκέλος της ισότητας. Αν η x ανήκει σε ένα σύνολο μετριέται μία φορά στον πληθικό αριθμό του συνόλου. Αν η x ανήκει σε δύο σύνολα μετριέται μία φορά σε κάθε σύνολα και μία φορά στην τομή τους, άρα έχουμε 1+1−1=1. Αν ανήκει και στα τρία σύνολα μετριέται σε όλους τους πληθάριθμους, άρα έχουμε 1+1+1−1−1−1+1=1.□

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[2] Παπαϊωάννου Αλέξανδρος. Θεωρία Γραφημάτων:1-4, 6, 8, 9, 23, 24, 34, 86. Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα 2006.

[3]Δημήτριος Μ. Θηλυκός. Σημειώσεις στη Θεωρία Γραφημάτων: 7, 9, 18, 20, 22, 27. Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

[4] Reinhard Diestel. Graph Theory: 5.Springer Verlang, New York 2000

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Theorems_in_graph_theory

[6] Molloy Michael, Reed Bruce. Graph colouring and the probabilistic method: 15-19, 29-30, 49-53. Springer Verlang. Berlin 2002

[7] F.Havet. Introduction to the probabilistic method: 6

[8] Σ. Νικολτσέας, Π. Σπυράκης. Στοιχεία της πιθανοτικής μεθόδου: 32. Gutenberg, Au;hna 1996

[9] Erdos P. Graph theory and the probability. Canadian journal of math. 11: 34-38

[10] Zykov. A. On some problems of linear complexes. Mat. Sbornik N.S.: 163-188. English Translation (1952)

[11] Lovasz L. On chromatic number of finite set systems. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 19: 59-67

[12] Chvatal Vasek. The Minimality of Mycielski graph (1974): 243-246. Lectures notes in mathematics 406. Springer Verlang.

[13] Hugo Hadwiger Uber eine Klassifikation der Streckenkomplexe. Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zurich, 88:133–142, 1943.

[14] Gabriel A. Dirac. In abstrakten Graphen vorhandene vollst¨andige 4-Graphen und ihre Unterteilungen. Math. Nachr., 22:61–85, 1960.

[15] Oystein Ore. The problem four color: 146. Academic Press Inc. 1967

[16] Kawarabayashi Ken-Ichi, Toft Bjarne (2005), Any 7-chromatic graph has K_7 or $K_{4,4}$ as a minor, *Combinatorica* 25 : 327–353

[17] Bollobás, B.; Catlin, P. A. Erdős, Paul (1980), "Hadwiger's conjecture is true for almost every graph, *European Journal of Combinatorics* 1: 195.

[18] Eppstein David. Finding large clique minors is hard. Journal of graphs algorithms and applications (13): 197-204. 2008

[19] Kostochka A. The minimum Hadwiger Number for Graphs with a Given Mean Degree of Vertices (in Russian) Met. Diskret. Analiz 38: 37-58

[20] Thomason A. (1984) An external function for contractions of Graphs, Math Proc. Camb. Phil. Soc. 95:261-265

[21] Thomason Andrew (2001). The extremal function for complete minors . J. Combinatorial Theory Ser. B 81: 318-338

[22] Wolfang K.W. Mader Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen. Math. Ann., 174: 265-268. (1967)

[23] Σημειώσεις Δημήτρη Φωτάκη για το μάθημα Διακριτά Μαθηματικά 2 στο τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων του Πανεπιστημίου Αιγαίου, Διμερή Γραφήματα: σελ.2

[24] Κοκολάκης Γ. και Σπηλιώτης Ι., Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική: 16, Αθήνα 2002, Εκδ. Συμεών