



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ανάλυση Αποφάσεων και Διαχείριση Ρίσκου:
Αποφάσεις υπό αβεβαιότητα, η έννοια της μέτρησης VAR
και η χρήση των Real Options

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ιωάννη Η. Ντίκα

Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

Ιωάννης Κολέτσος	Βασίλειος Κοκκίνης	Ιωάννης Σπηλιώτης
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα

Ιούλιος 2014

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική πραγματοποιήθηκε στην Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Το παρόν πόνημα αποτελεί μια κατάθεση ακαδημαϊκής γνώσης, έπειτα από μελέτη μηνών. Επίσης αποτελεί το τέλος μιας πορείας πέντε ετών η οποία κατά την γνώμη μου με καθιέρωσε ως άνθρωπο και μου έδωσε το κίνητρο και την ευκαιρία να βρω την κατεύθυνση για την μετέπειτα ζωή μου.

Λαμβάνω αυτή την ευκαιρία για να ευχαριστήσω έναν έναν τους φωτεινούς εκείνους ανθρώπους που κατόρθωσαν να μου μεταβιβάσουν λίγο από την γνώση τους. Θα ήθελα πρώτα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. που μου έδωσαν τα ακαδημαϊκά εφόδια και με δίδαξαν τον τρόπο σκέψης για να γίνω αυτό που ονομάζουμε «επιστήμονας» με την βαθύτερη έννοια του ρήματος «επίσταμαι». Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον Επίκουρο Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών κύριο Ιωάννη Κολέτσο, ο οποίος πίστεψε στις δυνατότητές μου και με κατεύθυνε ενεργά εν μέσω των σπουδών μου στο Ε.Μ.Π., προσφέροντας απλόχερα γνώσεις και συμβουλές, όχι μόνο ως επιβλέπων του παρόντος αλλά και ως καθοδηγητής επί επιστημονικών θεμάτων. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τους Καθηγητές του Τομέα Μαθηματικών κυρίους Ιωάννη Α. Πολυράκη, Γεώργιο Ε. Κοκολάκη και Ιωάννη Σπηλιώτη, οι οποίοι μέσω της διδασκαλίας τους με βοήθησαν να αναπτύξω μια ιδιαίτερη αγάπη για τον τομέα των Οικονομικών και Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους αφανείς και φανερούς ήρωες που καθόρισαν αυτά τα πέντε χρόνια και μου χάρισαν αναμνήσεις και εφόδια για μια ζωή. Μια ζεστή αγκαλιά σε όλους τους συμφοιτητές και φίλους. Ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου για την στήριξη και την πίστη στο όραμα της ζωής μου.

«Ξεκινώ ένα μεγάλο ταξίδι, χωρίς εσάς θα ήταν αδύνατο...»

Ιωάννης Ντίκας

Αθήνα 2014

« Αφιερώνεται σε αυτούς που
επιμένουν, αναζητώντας το
φως μέσα στο σκοτάδι...»

Περίληψη

Η παρούσα εκπόνηση, έχει ως σκοπό την ανάδειξη του προβλήματος της αβεβαιότητας υπό την σκέπη του ρίσκου όσον αφορά το σύγχρονο Μάνατζμεντ και την Επιχειρησιακή Έρευνα εν γένει. Ιδιαίτερη μνεία γίνεται στον τρόπο σκέψης και δράσης εκείνου ο οποίος είναι σε θέση να αποφασίζει αλλά και σε χρήσιμα εργαλεία για την βέλτιστη λήψη αποφάσεων και την μέτρηση του κινδύνου. Για αυτό τον σκοπό η διπλωματική αυτή χωρίζεται σε τρία κεφάλαια: «θεωρία Αποφάσεων», «Ανάλυση Ρίσκου» και «Πραγματικά Δικαιώματα». Η θεωρία και η ανάλυση αποφάσεων χρησιμοποιούν τεχνικές μοντελοποίησης των σύγχρονων προβλημάτων ώστε σε αυτά να βρεθούν βέλτιστες λύσεις. Στην παραπάνω ανάλυση ιδιαίτερα χρήσιμη καθίσταται η θεωρία πιθανοτήτων, η οποία προσφέρει το ιδανικό πρίσμα για να μελετηθεί η αβεβαιότητα του κόσμου μας. Η έννοια του ρίσκου έχει πολλές πτυχές και σίγουρα αδυνατούμε να το μετρήσουμε επαρκώς. Μπορούμε όμως να το προσεγγίσουμε με μεγάλο βαθμό ακρίβειας μέσω της κατανόησης και ανάλυσης του. Βασικό εργαλείο για την μελέτη του ρίσκου είναι ο προσδιορισμός της αξίας εκτεθειμένης σε αυτό (VAR) . Άπαξ και μετρηθούν οι πιθανές απώλειες λόγω κινδύνων, μπορούμε να αξιολογήσουμε εκ νέου την αξία των αγαθών υπό το φίλτρο της αβεβαιότητας. Τέλος, τα πραγματικά δικαιώματα (Real Options) αποτελούν ένα πολύ σύγχρονο τρόπο αξιολόγησης των επιλογών στον κλάδο των επιχειρησιακών χρηματοοικονομικών. Ολοένα και περισσότεροι διευθύνοντες σύμβουλοι επιχειρήσεων και διαχειριστές επενδυτικών προγραμμάτων, χρησιμοποιούν τα πραγματικά δικαιώματα ως κριτήριο κοστολόγησης των διαθέσιμων επιλογών τους, αλλά και ως άμεση ευκαιρία για προστιθέμενη αξία στην επιχείρησή τους.

Λέξεις Κλειδιά: Ανάλυση Αποφάσεων, Θεωρία Πιθανοτήτων, Ανάλυση Ρίσκου, Αξία Εκτεθειμένη σε Ρίσκο, Πραγματικά Δικαιώματα

Abstract

This dissertation, aims to highlight the problem of uncertainty under the umbrella of risk regarding modern Management and Operations Research in general. Particular reference is made to the way of thinking and the actions of a decision maker but also to useful tools for optimal decision-making and risk measurement. For this purpose the dissertation is divided into three chapters: "Decision Theory", "Risk Analysis" and "Real Options". The Decision Theory and Analysis use modeling techniques to map modern problems and find optimal solutions. In the above analysis, Probability Theory becomes especially useful, providing the ideal perspective to study the uncertainty of our world. The concept of risk has many aspects and it is certainly impossible for someone to measure it adequately. But we can approach it with a great degree of accuracy through understanding and analysis. The basic tool for the study of risk is to determine the value exposed to it (VAR). Once measured, potential losses due to risks, can aid us reassess the value of financial instruments under the filter of uncertainty. Finally, the Real Options are a very modern way of evaluating options in the field of corporate finance. More and more CEOs and investment managers, use Real Options to measure the value of alternatives, but also as an immediate opportunity of added value to their business.

Key Words: Decision Analysis, Probability Theory, Risk Analysis, Value at Risk (VaR), Real Options

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	11
I. Τι είναι η επιχειρησιακή έρευνα και πως εξελίχθηκε; Μια ιστορική αναδρομή:.....	11
II. Η «τέχνη» της μοντελοποίησης:	12
III. Οι φάσεις μιας μελέτης στην επιχειρησιακή έρευνα:	13
Κεφάλαιο 1: Θεωρία Αποφάσεων	15
1.1 The Maximin Criterion:.....	16
1.2 The Maximax Criterion:.....	17
1.3 The Minimax (Regret) Criterion:.....	17
1.4 The Maximum Likelihood Criterion:.....	18
1.5 Bayes' Decision Rule (Expected Monetary Value Criterion):	18
1.6 Εφαρμογή της θεωρίας: Το παράδειγμα της Perth Mining	18
1.6.1 Γραφικός προσδιορισμός του σημείου μετάβασης από την μία απόφαση στην άλλη:.....	21
1.6.2 Λήψη αποφάσεων υπό προστιθέμενη πληροφορία: Η χρήση πειραματισμού στην περίπτωση της Perth Mining	22
1.6.3 Αδέσμευτες πιθανότητες των αποτελεσμάτων της σεισμικής μελέτης:	24
1.6.4 Η αξία της πληροφόρησης:	25
1.7 Δέντρα αποφάσεων:.....	27
TO ΔΕΝΤΡΟ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΤΑΙΡΕΙΑ PERTH MINING:	29
1.8 Θεωρία χρησιμότητας:.....	31
1.8.1 Λοταρίες:	32
1.8.2 Συνάρτηση χρησιμότητας (Utility Function):	33
A. Προσδιορισμός της συνάρτησης χρησιμότητας χρηματικής αξίας για την Perth Mining:.....	35
B. Εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας:	37
C. Εφαρμογή της συνάρτησης χρησιμότητας στο δέντρο αποφάσεων της Perth Mining και περαιτέρω λήψη αποφάσεων:	38
Κεφάλαιο 2: Ανάλυση ρίσκου.....	41
2.1 Εργαλεία για την διαχείριση του ρίσκου:.....	43
2.2 Είδη χρηματοοικονομικού κινδύνου:	44
2.3 Αξία εκτεθειμένη σε ρίσκο (Value at Risk - VAR):.....	45
2.4 Μέθοδοι προσδιορισμού της VAR:.....	46
2.4.1 Μέθοδος Delta-Normal:.....	50
2.4.2 Μέθοδος της Ιστορικής Προσομοίωσης:	52

2.4.3 Μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo:	53
2.5 Εφαρμογή της μεθόδου Delta-Normal για τον υπολογισμό της τιμής VAR:	54
2.5.1 Εφαρμογή σε ισοτιμίες νομισμάτων:	55
2.5.2 Εφαρμογή σε χαρτοφυλάκιο σταθερού εισοδήματος:	57
2.5.3 Εφαρμογή σε προθεσμιακά συμβόλαια(forwards):	61
2.5.3 Εφαρμογή σε προθεσμιακά συμβόλαια εμπορευμάτων και πολύτιμων μετάλλων:	64
2.5.5 Εφαρμογή σε προθεσμιακές συμβάσεις επιτοκίων:	64
2.5.6 Εφαρμογή σε δικαιώματα προαίρεσης (options):	66
2.6 Εφαρμογή μεθόδων προσομοίωσης για τον υπολογισμό της τιμής VAR:	68
2.6.1 Ιστορική Προσομοίωση(Historical Bootstrapping):	69
2.6.2 Προσομοίωση Monte Carlo:	73
2.7 Η χρήση της τιμής VAR ως μέσο ενεργής διαχείρισης του ρίσκου:	78
2.7.1 Μέθοδοι των RAPM βασισμένα στις τιμές VAR:	80
2.7.2 Μέτρο απόδοσης εφαρμοσμένο σε επιχειρήσεις:	81
2.8 Το VAR ως εργαλείο στρατηγικής: «Ανάλυση Αξίας στους Μετόχους»	82
Κεφάλαιο 3: Πραγματικά Δικαιώματα (Real Options).....	83
3.1 Εισαγωγή:	83
3.1.1 Παραδοσιακές τεχνικές αξιολόγησης επενδύσεων και γιατί αυτές «απειλούνται»:	84
3.1.2 Η λέξη «δικαίωμα» στην φράση «πραγματικά δικαιώματα»:	86
3.2 Τα είδη των Real Options:	87
A. Δικαιώματα Ανάπτυξης (Growth Options):	87
B. Δικαιώματα Συρρίκνωσης-Εγκατάληψης (Contraction Options):	88
C. Δικαιώματα Εναλλαγής (Switching Options):	88
D. Δικαιώματα λόγω Σύμβασης (Contractual Options):	89
3.3 Ανάλυση επένδυσης μέσω πραγματικών δικαιωμάτων:	90
3.3.1 Επίλυση μέσω χρήσης της φόρμουλας Black&Scholes:	91
3.3.2 Διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων:	92
3.3.3 Δέντρα αποφάσεων προσαρμοσμένα στο ρίσκο:	98
3.3.4 Τιμολόγηση μέσω προσομοίωσης Monte-Carlo:	101
Βιβλιογραφία	106

Εισαγωγή

1. Τι είναι η επιχειρησιακή έρευνα και πως εξελίχθηκε; Μια ιστορική αναδρομή:

Η επιχειρησιακή έρευνα μπορεί να χαρακτηριστεί ως η επιστήμη της λήψης αποφάσεων. Πολλοί την θεωρούν κλάδο των μαθηματικών και της προσδίδουν συνώνυμα όπως επιστήμη της διοίκησης και επιστήμη των αποφάσεων.

Η επιστήμη αυτή εκμεταλλεύεται βασικές τεχνικές των μαθηματικών όπως η μαθηματική μοντελοποίηση, η στατιστική ανάλυση και η βελτιστοποίηση αλλά και την στατιστική, την φυσική, τον προγραμματισμό, την μηχανολογία, τα οικονομικά και πληθώρα άλλων κοινωνικών επιστημών. Η επιχειρησιακή έρευνα αναδείχθηκε ως πολύτιμος κλάδος της μαθηματικής επιστήμης διότι επιτρέπει την παροχή λύσεων μεγάλης ακρίβειας σε δύσκολα προβλήματα που αφορούν τις επιχειρήσεις, την βιομηχανία, τις στρατιωτικές δυνάμεις, το χρηματοπιστωτικό σύστημα και την κοινωνία γενικότερα. Ανοίγει τον δρόμο για την μοντελοποίηση προβλημάτων της καθημερινότητας αλλά παρέχει και την δυνατότητα να μελετηθούν οι δεσμοί που συνιστούν τα συστήματα της κοινωνίας μας μακριά από το φίλτρο μιας απλής αναλυτικής προσέγγισης μέσω ενός γρήγορου υπολογιστή.

Η βάση της επιχειρησιακής έρευνας δεν είναι κάτι το καινούργιο. Αιώνες τώρα στρατιωτικοί και επιστήμονες, συνεργάζονταν για την βελτιστοποίηση στρατιωτικών επιχειρήσεων και για την πρόβλεψη της έκβασης αυτών. Μάλιστα πολλοί ειδικοί αναφέρουν ότι ένας από τους πρώτους χρήστες αυτής της μεθόδου ήταν ο Αρχιμήδης τον 3^ο αιώνα π.Χ., ο οποίος σύμφωνα με τις καταγραφές οργάνωσε την ανάλυση και την βέλτιστη επίλυση του τρόπου άμυνας της πόλης των Συρακουσών κατά την πολιορκία της από τους Ρωμαίους. Μεγάλοι αντιπρόσωποι των μαθηματικών και φυσικών επιστημών όπως οι Newton, Leibnitz, Bernoulli, Lagrange και Fourier τελειοποίησαν αρκετούς αιώνες αργότερα τις τεχνικές μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης συναρτήσεων αλλά και εισήγαγαν την έννοια του γραμμικού προγραμματισμού. Εκείνος που αποτύπωσε επί χάρτου την βασική τεχνική του γραμμικού προγραμματισμού ήταν ο Janos Von Neumann στο σύγγραμμα «Θεωρία των Παιγνίων».

Πατέρας της επιχειρησιακής έρευνας θεωρείται ο Charles Babbage λόγω της ευρείας μελέτης του η οποία αφορούσε την ελαχιστοποίηση του μεταφορικού κόστους και την βελτιστοποίηση της διανομής εκ μέρους των Uniform Penny Post στην Αγγλία του 1840. Η επιχειρησιακή έρευνα ως επιστήμη πλέον, έχει τις απαρχές της στην περίοδο του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου. Στην Αγγλία του 1937 ο Patrick Blackett και η ομάδα του, το επονομαζόμενο «τσίρκο» κατόρθωσε, μετά από μελέτη, να αυξήσει το ποσοστό κατάρριψης εχθρικών αεροσκαφών από αεροπλάνα της Royal Air Force (της Αγγλίας) ενώ παράλληλα μείωσε τον αριθμό των βλημάτων ανά κατάρριψη. Με την βοήθεια των μαθηματικών η εξέλιξη ήρθε γρήγορα. Πριν το τέλος του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου, οι στρατιωτικές επιχειρήσεις είχαν γίνει ακριβείς, αποδοτικές και χωρίς υπέρογκο κόστος. Μπορεί η αρχική χρήση αυτής της επιστήμης να μην εξυπηρετούσε ειρηνικούς σκοπούς, παρ' όλα αυτά μετά το τέλος του πολέμου η επιχειρησιακή έρευνα άρχισε να προσαρμόζεται σε επιχειρήσεις και βιομηχανίες οι οποίες έψαχναν μεγαλύτερη απόδοση, μικρότερο κόστος και μεγαλύτερα κέρδη.

II. Η «τέχνη» της μοντελοποίησης:

Όπως έχει προαναφερθεί παραπάνω, η επιχειρησιακή έρευνα γεννήθηκε για να αντιμετωπίσει προβλήματα της καθημερινότητας. Ο επιστήμονας θα πρέπει να έχει άμεση επαφή με τα τεκταινόμενα της καθημερινότητας και να γνωρίζει τις αιτιακές σχέσεις που τα περιβάλλουν. Πρώτος στόχος του είναι να κατασκευάσει έναν «θεωρητικό κόσμο», συγκεντρώνοντας όλες τις ισχυρές μεταβλητές οι οποίες ελέγχουν το πραγματικό σύστημα (τον πραγματικό κόσμο). Το μοντέλο που καλείται στην συνέχεια να κατασκευάσει, αποτελείται από τις μαθηματικές συναρτήσεις που διέπουν την συμπεριφορά αυτού του «θεωρητικού κόσμου». Ο χαρακτηρισμός «τέχνη», έγκειται στο γεγονός ότι απαιτείται μεγάλη προσπάθεια, χρονοβόρα ενασχόληση και αρκετό μεράκι έτσι ώστε να συγκεντρωθούν τα απαραίτητα κατασκευαστικά στοιχεία που συγκροτούν αυτήν την «κοσμική αφαίρεση» και στην συνέχεια πολύπλοκα μαθηματικά να βοηθήσουν στην συνένωση των δεσμών τους ώστε να υλοποιηθεί το τελικό μαθηματικό μοντέλο.

III. Οι φάσεις μιας μελέτης στην επιχειρησιακή έρευνα:

1. Ορισμός του προβλήματος: Σκοπός αυτού του βήματος είναι η ανίχνευση τριών βασικών στοιχείων ενός προβλήματος αποφάσεων, ο προσδιορισμός του συνόλου των δυνατών αποφάσεων, καθορισμός του στόχου της μελέτης και τέλος η ανάλυση των περιορισμών που διέπουν το μοντέλο.
2. Κατασκευή του μοντέλου: Η μετάφραση του ορισμού του προβλήματος σε μαθηματικές σχέσεις. Αν το μοντέλο άπτεται άμεσης εφαρμογής ενός τυπικού μαθηματικού μοντέλου, τότε εφαρμόζεται ο συγκεκριμένος αλγόριθμος. Αν οι μαθηματικές σχέσεις που διέπουν το μοντέλο δεν ακολουθούν κάποια τυπική μορφή, ο ερευνητής μπορεί να απλοποιήσει το μοντέλο ή να το προσομοιώσει έτσι ώστε να προσδιορίσει την λύση με εναλλακτικούς τρόπους.
3. Επίλυση του μοντέλου: Εφαρμογή γνωστών ή μη αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Η σταθερότητα και η αρτιότητα του μοντέλου μπορεί να ελεγχθεί κάλλιστα με την χρήση της ανάλυσης ευαισθησίας. Το συγκεκριμένο είδος ανάλυσης βοηθά στον καθορισμό επιπλέον χρήσιμης πληροφορίας για τυχόν δύσκολα προσδιορίσαμε παραμέτρους.
4. Εγκυρότητα του μοντέλου: Έλεγχος της αποτελεσματικότητας του μοντέλου δεδομένου ότι αυτό ζητείται να προσεγγίζει βέλτιστα τον «πραγματικό» κόσμο. Συγκεκριμένα οι αναλυτές καλούνται να απαντήσουν στο ερώτημα: «η λύση είναι εφαρμόσιμη ;». Επίσης, αν υπάρχουν ιστορικά δεδομένα, θα πρέπει να επαληθεύουν το μοντέλο.
5. Εφαρμογή-εκτέλεση της λύσης: Απαιτείται «μετάφραση» των αποτελεσμάτων του μοντέλου από τους αναλυτές και παρουσιάσή τους στους ενδιαφερόμενους. Η λύση πρέπει να κατοχυρωθεί και να αιτιολογηθεί.

Κεφάλαιο 1: Θεωρία Αποφάσεων

Ένας χρήσιμος και ενδιαφέρον κλάδος της επιχειρησιακής έρευνας: Η θεωρία αποφάσεων και η χρήσιμη εφαρμογή της

Ένας πολύ αναπτυγμένος κλάδος της επιχειρησιακής έρευνας είναι η θεωρία αποφάσεων. Η θεωρία αυτή χρησιμοποιεί πολλές επιστήμες όπως: οικονομικά, μαθηματικά στατιστική, μανάτζμεντ, ψυχολογία και φιλοσοφία για την ανάλυση της ευστάθειας και της λογικής μίας απόφασης, βοηθώντας έτσι στην βελτιστοποίηση της απόφασης αυτής. Οι τρόποι με τους οποίους οι άνθρωποι σκέφτονται είναι πολλές φορές απροσδόκητοι και στα όρια της λογικής με του παραλόγου. Η «κανονική» θεωρία αποφάσεων προϋποθέτει ότι εκείνος που αποφασίζει κινείται μέσα στα πλαίσια της λογικής και είναι πλήρως ενήμερος για τυχόν αλλαγές στο περιβάλλον του. Η πρακτική εφαρμογή της θεωρίας αποφάσεων οδηγεί στην «ανάλυση αποφάσεων»- ένα ισχυρό εργαλείο στα χέρια εκείνων που λαμβάνουν αποφάσεις ώστε να βελτιστοποιούν τις αποκρίσεις τους. Ισχυρή βοήθεια στην ανάλυση αυτή προσφέρει η θεωρία πιθανοτήτων με σημαντικά εργαλεία όπως ο κανόνας του Bayes. Γνωρίζοντας εκ των προτέρων την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου που μπορεί να αντιμετωπίσουμε, με την χρήση της θεωρίας πιθανοτήτων, μπορούμε να επιλέξουμε την απόφαση η οποία θα μεγιστοποιεί την απόδοση. Αναπτυσσόμενη από το 1964 και μετά, η ανάλυση αποφάσεων εφαρμόζεται σε ένα ευρύ φάσμα κλάδων, από τους οποίους ξεχωρίζουν οι επιχειρήσεις, βοηθώντας έτσι στην ανάπτυξη του σύγχρονου Μανάτζμεντ.

Πρωτεργάτης της θεωρείται ο Ronald A. Howard, καταξιωμένος καθηγητής από το πανεπιστήμιο του Stanford, ο οποίος εδραίωσε την εφαρμογή της στον κόσμο των επιχειρήσεων. Ο ίδιος δίνει τον εξής ορισμό: «Η ανάλυση αποφάσεων είναι μια λογική διαδικασία για την εξισορρόπηση των παραγόντων οι οποίοι επηρεάζουν μια απόφαση. Η διαδικασία ενσωματώνει τις αβεβαιότητες, τις αξίες και τις προτιμήσεις σε μια βασική δομή, η οποία μοντελοποιεί την απόφαση. Τυπικά περιλαμβάνει τεχνικούς, διαφημιστικούς, ανταγωνιστικούς και περιβαλλοντολογικούς παράγοντες. Η ουσία της διαδικασίας είναι η κατασκευή του δομικού

μοντέλου της απόφασης σε μορφή κατάλληλη για υπολογισμούς και διαχείριση. Συνήθως το μοντέλο αυτό κατασκευάζεται με την χρήση ηλεκτρονικών προγραμμάτων, τα οποία παρέχονται από υπολογιστές. » (“Decision Analysis: Applied Decision Theory” , Howard, 1966)

Όλοι έχουμε λάβει σε κάποια στιγμή της ζωής μας αποφάσεις οι οποίες θα θέλαμε να βελτιστοποιήσουν a priori τα αποτελέσματα διαφόρων αβέβαιων καταστάσεων. Αυτός που λαμβάνει αποφάσεις υπό αβεβαιότητα επιλέγει αποφάσεις από ένα σύνολο αποφάσεων $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Όλες οι αποφάσεις όμως λαμβάνονται υπ’ όψιν του συνόλου των καταστάσεων-ενδεχομένων $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ τα οποία μπορούν να συμβούν με πιθανότητα p_j το καθένα. Αν επιλεγεί τελικώς η απόφαση a_i και η επικρατούσα κατάσταση είναι η s_j , τότε εκείνος που αποφασίζει, κερδίζει ή χάνει r_{ij} (αποτέλεσμα).

Ορισμός:

Μια απόφαση a_i καλείται κυρίαρχη μιας άλλης απόφασης a_i' αν για όλες τις καταστάσεις s_j του συνόλου S , ισχύει $r_{ij} \geq r_{i'j}$ και για τουλάχιστον μια κατάσταση s^* , ισχύει ότι $r_{i^*} > r_{i'^*}$.

Εφόσον εκείνος που αποφασίζει είναι ορθολογικός, δεν θα επέλεγε την απόφαση a , όταν η a κυριαρχείται από την απόφαση a' .

Στην περίπτωση που γνωρίζουμε εκ των προτέρων το αποτέλεσμα της κάθε κατάστασης, δεδομένης της εκάστοτε απόφασης και χωρίς την γνώση του διανύσματος πιθανοτήτων P , μπορούμε να αποφασίζουμε με την χρήση των τριών παρακάτω κριτηρίων.

1.1 The Maximin Criterion:

Επιλέγω εκείνη την απόφαση a_i , η οποία μεγιστοποιεί την τιμή $[\min_j r_{ij}]$

Με λίγα λόγια πρώτον βρίσκω το ελάχιστο αποτέλεσμα r που μου εξασφαλίζει η κάθε απόφαση ξεχωριστά και επιλέγω το μέγιστο από αυτά τα αποτελέσματα. Αποφασίζω σύμφωνα με το τελευταίο αποτέλεσμα. Το κριτήριο αυτό είναι ιδιαίτερα απαισιόδοξο, δεδομένου ότι αποφασίζουμε δεχόμενοι ότι θα συμβεί η χειρότερη για εμάς κατάσταση, αποφέροντας το χειρότερο δυνατό αποτέλεσμα.

1.2 The Maximax Criterion:

Επιλέγω εκείνη την απόφαση a_i , η οποία μεγιστοποιεί την τιμή [$\max_j r_{ij}$]

Κινούμενος αντίθετα με το προηγούμενο κριτήριο, βρίσκω το «καλύτερο» αποτέλεσμα υπό οποιαδήποτε κατάσταση και ανά απόφαση. Αποφασίζω έτσι ώστε να μεγιστοποιώ το «καλύτερο» αποτέλεσμα. Το κριτήριο αυτό είναι ιδιαίτερα αισιόδοξο, δεδομένου ότι αποφασίζουμε δεχόμενοι ότι θα συμβεί η καλύτερη για εμάς κατάσταση, αποφέροντας το καλύτερο για εμάς αποτέλεσμα.

1.3 The Minimax (Regret) Criterion:

Για κάθε πιθανή κατάσταση, βρίσκω το μέγιστο δυνατό αποτέλεσμα των k αποφάσεων. Ορίζω δυνητική ζημία (δ.ζ.) ως την διαφορά $r_{*j} - r_{ij}$, όπου r_{*j} είναι το μέγιστο δυνατό αποτέλεσμα δεδομένου της κατάστασης s_j . Υπολογίζω όλες τις δυνητικές ζημίες για κάθε κατάσταση s_j και για κάθε απόφαση a_i . Λαμβάνω τις μέγιστες δ.ζ. ανά απόφαση και επιλέγω την απόφαση εκείνη για την οποία έχω ελάχιστη μέγιστη δ.ζ. .

Με το παραπάνω κριτήριο προσπαθώ να επιλέξω εκείνη την απόφαση η οποία θα ελαχιστοποιήσει τις δυνητικές ζημίες . Ούτε αυτό το κριτήριο είναι αισιόδοξο διότι δέχομαι ότι θα συμβούν οι χειρότερες καταστάσεις.

Όλα τα παραπάνω κριτήρια επιλογής αποφάσεων έχουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους. Είναι όμως ότι καλύτερο διαθέτουμε για την λήψη αποφάσεων υπό αβεβαιότητα όταν δεν γνωρίζουμε με τι πιθανότητα συμβαίνει η κάθε πιθανή κατάσταση. Η γνώση της πιθανότητας p_j να συμβεί η κατάσταση s_j , μειώνει την «αβεβαιότητα» που έχουμε παρέχοντάς μας μια επιπλέον πληροφορία προς εκμετάλλευση.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε εις γνώσιν μας το διάνυσμα πιθανότητας $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ οποίο αντιστοιχεί την κάθε κατάσταση s_j να συμβεί υπό την πιθανότητα p_j . Με βάση αυτήν την εισερχόμενη νέα πληροφορία έχουμε στην διάθεσή μας δύο επιπλέον κριτήρια.

1.4 The Maximum Likelihood Criterion:

Εντοπίζω την κατάσταση η οποία έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί και πράττω σύμφωνα με την απόφαση η οποία μου αποδίδει το καλύτερο αποτέλεσμα για την κατάσταση αυτή.

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η επιλογή της απόφασης πλησιάζει περισσότερο στην επικρατέστερη κατάσταση, εξασφαλίζοντας «ασφαλέστερα» συμπεράσματα. Παρ' όλα αυτά το κριτήριο δεν λαμβάνει υπ' όψιν χρήσιμη πληροφόρηση για τις υπόλοιπες μη επικρατούσες καταστάσεις. Το μειονέκτημα του κριτηρίου γίνεται εμφανές όταν οι πιθανές καταστάσεις είναι πολλές και η επικρατούσα συμβαίνει με μικρή πιθανότητα.

1.5 Bayes' Decision Rule (Expected Monetary Value Criterion):

Για την πιο καλά προσαρμοσμένη πιθανότητα p_i πάνω σε μία κατάσταση, υπολογίζω το αναμενόμενο αποτέλεσμα κάθε απόφασης ως εξής: $\sum_{j=1}^n p(i)r(i, j)$ για $i=1, \dots, k$

Επιλέγω την απόφαση με το μεγαλύτερο αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα του παραπάνω κριτηρίου είναι ότι ενσωματώνει στην διαδικασία αποφάσεων όλη την διαθέσιμη πληροφορία. Το προηγούμενο καθιστά το κριτήριο αυτό ως το πιο διαδεδομένο και εφαρμόσιμο, εν γνώση της πιθανότητας να συμβεί η κάθε κατάσταση.

1.6 Εφαρμογή της θεωρίας: Το παράδειγμα της Perth Mining

Προς κατανόηση των ανωτέρω, παρατίθεται το παράδειγμα της εταιρείας Perth Mining (PM). Πρόκειται για μια εταιρεία εξόρυξης χρυσού η οποία βρίσκεται έξω από την πόλη Perth της δυτικής Αυστραλίας. Η PM έχει στην ιδιοκτησία της ένα μεγάλο κομμάτι ανεκμετάλλευτης γης. Ο γεωλόγος σύμβουλος της εταιρείας, ανέφερε στο συμβούλιο ότι κατά την εκτίμησή του, υπάρχει 25% εκ των προτέρων πιθανότητα να βρεθεί χρυσός στα υπεδάφη της ιδιοκτησίας. Οι πληροφορίες διέρρευσαν στην αγορά και μια ανταγωνίστρια εταιρεία εξόρυξης χρυσού, δεδομένου της παραπάνω πιθανότητας πρότεινε την αγορά της έκτασης αυτής από την PM προς το ποσό των \$90,000. Παρ' όλα αυτά, η διοίκηση της PM σκέφτεται να κρατήσει τα δικαιώματα της γης αυτής και να

προχωρήσει κατ' ευθείαν σε εξόρυξη, η οποία θα κοστίσει \$100,000. Τα αναμενόμενα κέρδη σε περίπτωση που βρεθεί χρυσός, ανέρχονται στο ποσό των \$800,000. Η απώλεια \$100,000 θεωρείται αρκετά ζημιογόνα για την εταιρεία καθότι λειτουργεί με περιορισμένο κεφάλαιο. Η PM αντιμετωπίζει το δίλημμα : «αρχίζω την εξόρυξη χρυσού» ή «πουλάω το κομμάτι γης». Το πρόβλημα σχηματίζεται με την βοήθεια του παρακάτω αναλυτικού πίνακα.

Κατάσταση Υπεδάφους		Gold	No Gold
Αποφάσεις	Εξόρυξη	\$700,000	-\$100,000
	Πώληση	\$90,000	\$90,000
Πιθανότητα Κατάστασης		25%	75%

Πίνακας 1.1: Αποτελέσματα δεδομένης της κατάσταση του υπεδάφους

Ας εφαρμόσουμε λοιπόν τα προηγούμενα κριτήρια επιλογής αποφάσεων στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

⇒ The Maximin Criterion:

Κατάσταση Υπεδάφους		Gold	No Gold
Αποφάσεις	Εξόρυξη	\$700,000	-\$100,000
	Πώληση	\$90,000	\$90,000
Πιθανότητα Κατάστασης		25%	75%

Πίνακας 1.2: Εφαρμογή Maximin Criterion - Επιλογή Πώληση


⇒ The Maximax Criterion:

Κατάσταση Υπεδάφους		Gold	No Gold
Αποφάσεις	Εξόρυξη	\$700,000	-\$100,000
	Πώληση	\$90,000	\$90,000
Πιθανότητα Κατάστασης		25%	75%

Πίνακας 1.3: Εφαρμογή Maximax Criterion - Επιλογή «Εξόρυξη»

⇒ The Minimax (Regret) Criterion:


Κατάσταση Υπεδάφους		Gold	No Gold
Αποφάσεις	Εξόρυξη	\$0	-\$10,000
	Πώληση	\$610,000	\$0
Πιθανότητα Κατάστασης		25%	75%



Πίνακας 1.4: Εφαρμογή Minimax (Regret) Criterion, Πίνακας Δυνητικών Ζημιών - Επιλογή «Εξόρυξη»

⇒ The Maximum Likelihood Criterion:

Κατάσταση Υπεδάφους		Gold	No Gold
Αποφάσεις	Εξόρυξη	\$700,000	-\$100,000
	Πώληση	\$90,000	\$90,000
Πιθανότητα Κατάστασης		25%	75%



Πίνακας 1.5: Εφαρμογή Maximum Likelihood Criterion - Επιλογή «Πώληση»

⇒ Bayes' Decision Rule (Expected Monetary Value Criterion):

Κατάσταση Υπεδάφους		Gold	No Gold	<u>expected value</u>
Αποφάσεις	Εξόρυξη	\$700,000	-\$100,000	\$100,000
	Πώληση	\$90,000	\$90,000	\$90,000
Πιθανότητα Κατάστασης		25%	75%	



Πίνακας 1.6: Εφαρμογή Bayes' Decision Rule (EMV Criterion) - Επιλογή «Εξόρυξη»

1.6.1 Γραφικός προσδιορισμός του σημείου μετάβασης από την μία απόφαση στην άλλη:

Έστω p η εκ των προτέρων πιθανότητα να βρεθεί χρυσός και προφανώς $1-p$ η πιθανότητα να μην βρεθεί.

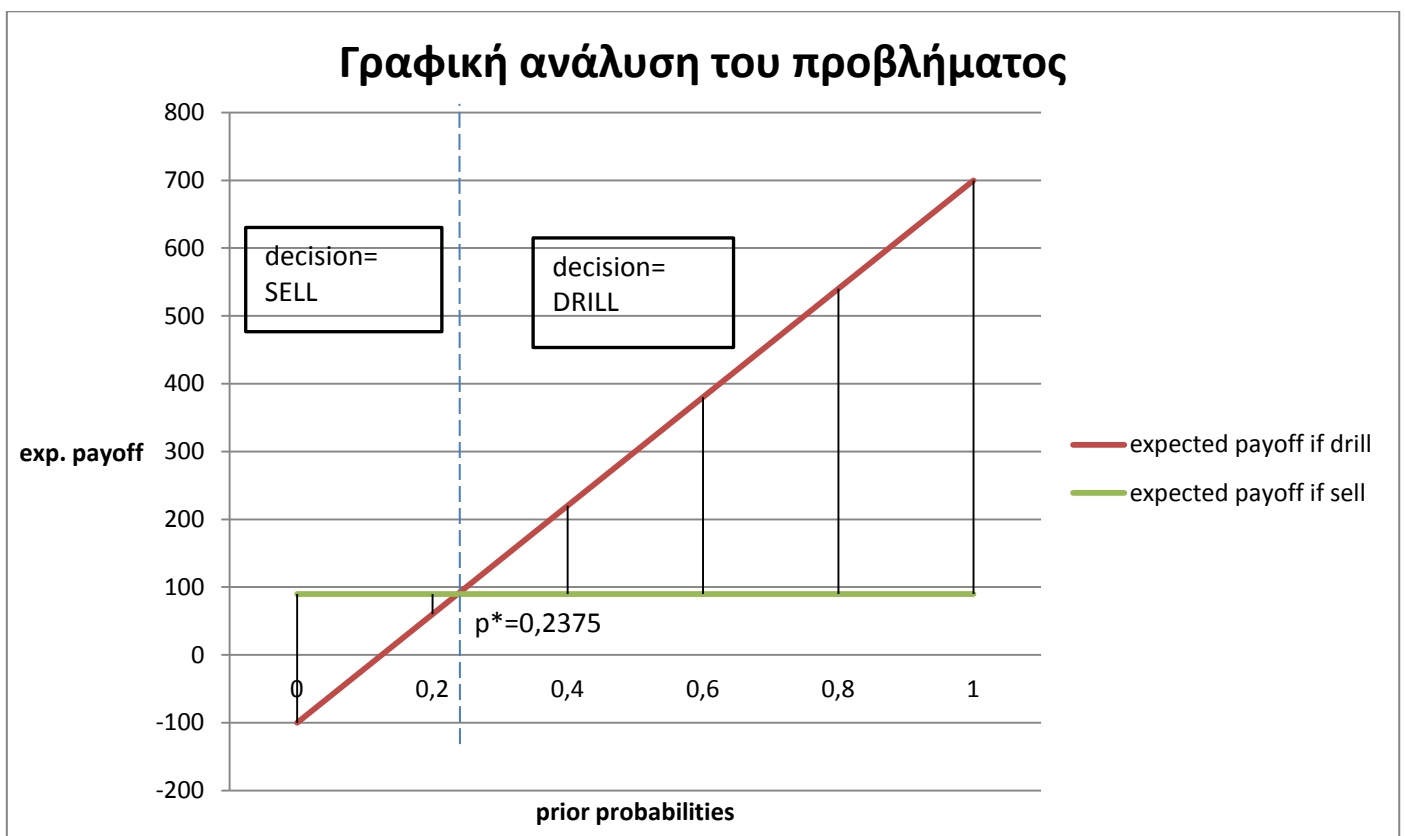
Το αναμενόμενο αποτέλεσμα(σε χιλιάδες) για την PM δεδομένου ότι αποφασίσει την έναρξη των διαδικασιών εξόρυξης είναι το εξής:

$$E(\text{payoff}|\text{drill}) = 700p - (1 - p)100 = 800p - 100$$

Αντίστοιχα το αναμενόμενο αποτέλεσμα για την PM δεδομένου ότι η εταιρεία αποφασίζει την άμεση πώληση της έκτασης που της ανήκει είναι:

$$E(\text{payoff}|\text{sell}) = 90p + (1 - p)90 = 90$$

Άμεσα προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα προσδιορισμού του σημείου μετάβασης.



Γραφική Παράσταση 1.1: Γραφική ανάλυση του προβλήματος της Perth Mining

1.6.2 Λήψη αποφάσεων υπό προστιθέμενη πληροφορία: Η χρήση πειραματισμού στην περίπτωση της Perth Mining

Κατά την λήψη αποφάσεων καλούμαστε να δουλέψουμε με την υπάρχουσα πληροφόρηση. Τις περισσότερες φορές όμως μας δίνονται επιλογές, οι οποίες μας επιτρέπουν την πρόσβαση σε περισσότερη πληροφορία. Έτσι είμαστε σε θέση να διαμορφώσουμε εκ νέου το ήδη υπάρχον μοντέλο που έχουμε κατασκευάσει ώστε να ενσωματώνει την προστιθέμενη πληροφόρηση.

Όταν η επιπλέον αυτή πληροφόρηση είναι εκμεταλλεύσιμη υπό την μορφή πιθανοτήτων, το ισχυρότερο «εργαλείο» που έχουμε στην διάθεσή μας ονομάζεται Θεώρημα Bayes.

Έστω δύο σύνολα ενδεχομένων $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ με $n, k \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα Bayes:

$$p(a_i|b_j) = \frac{p(b_j|a_i)p(a_i)}{\sum_{s=1}^n p(b_j|a_s)p(a_s)} \quad , \text{για } i = 1, \dots, n \text{ και } j = 1, \dots, k$$

Επιστρέφοντας λοιπόν στο παράδειγμα της PM, έστω ότι μία εταιρεία διεξαγωγής επιστημονικών ερευνών προτείνει στην PM την πραγματοποίηση σεισμικής μελέτης στην ιδιόκτητη έκταση κόστους \$30,000 ώστε να εκτιμηθεί εκ νέου η πιθανότητα να βρεθεί χρυσός στο υπέδαφος. Η εν λόγω έρευνα μπορεί να έχει δύο αποτελέσματα:

1. Πιθανή ύπαρξη κοιτασμάτων χρυσού (ΠΥΧ) με πιθανότητα το αποτέλεσμα της έρευνα να είναι αληθές, δηλαδή $p(\text{ΠΥΧ}|\text{χρυσός}) = 0.6$ και με αντίστοιχη πιθανότητα να είναι ψευδές, $p(\text{ΠΥΧ}|\text{όχι χρυσός}) = 0.2$
2. Απίθανη ύπαρξη κοιτασμάτων χρυσού (ΑΥΧ) με πιθανότητα το αποτέλεσμα της έρευνας να είναι αληθές, δηλαδή $p(\text{ΑΥΧ}|\text{όχι χρυσός}) = 0.8$ και αντίστοιχα ψευδές με $p(\text{ΑΥΧ}|\text{χρυσός}) = 0.4$

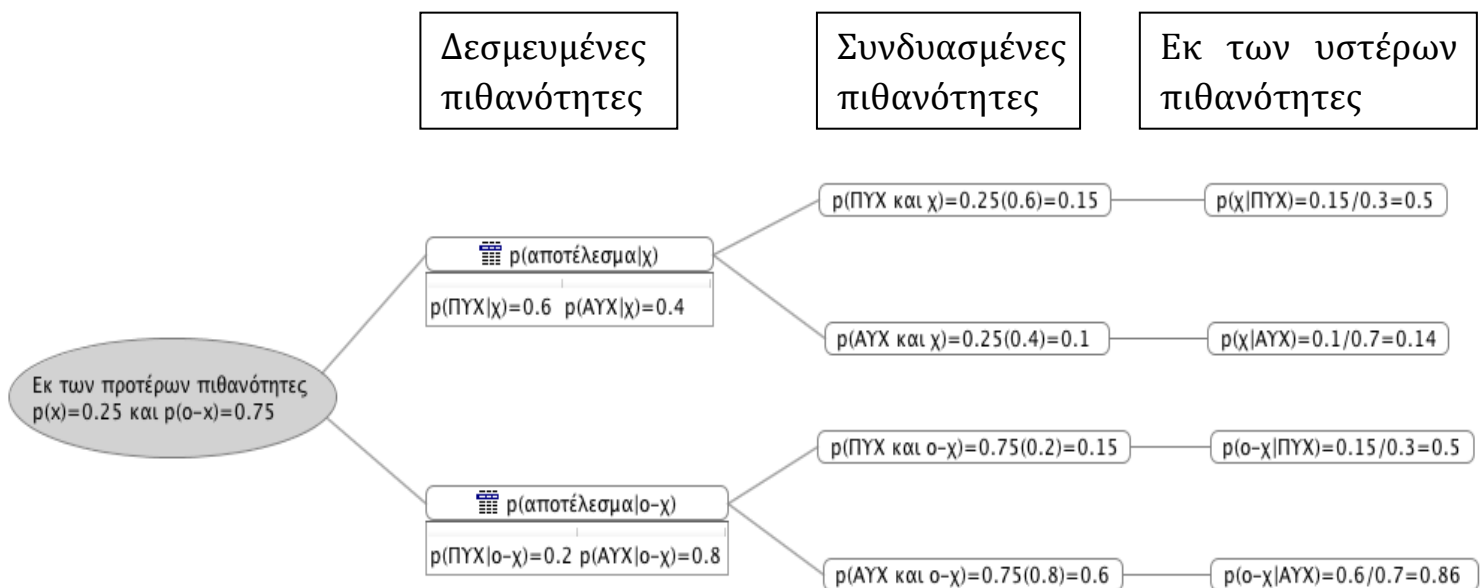
Έστω λοιπόν $A = \{\text{χρυσός}(\chi), \text{όχι χρυσός}(\sigma - \chi)\}$ και $B = \{\text{ΠΥΧ}, \text{ΑΥΧ}\}$, σύμφωνα με τους ορισμούς των παραμέτρων του θεωρήματος Bayes. Προβαίνουμε στον προσδιορισμό «βελτιωμένων»- εκ των υστέρων- πιθανοτήτων με την χρήση του θεωρήματος.

$$p(\chi|ΑΥΧ) = \frac{0.4(0.25)}{0.4(0.25) + 0.8(0.75)} = \frac{1}{7}$$

$$p(\sigma - \chi|ΑΥΧ) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$p(\chi|ΠΥΧ) = \frac{0.6(0.25)}{0.6(0.25) + 0.2(0.75)} = \frac{1}{2}$$

$$p(\sigma - \chi|ΠΥΧ) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



Διάγραμμα 1.1: Αναλυτική παρουσίαση της αλλαγής των πιθανοτήτων που αφορούν το παράδειγμα της ΡΜ υπό προστιθέμενη πληροφορία

1.6.3 Αδέσμευτες πιθανότητες των αποτελεσμάτων της σεισμικής μελέτης:

$p(\text{ΠΥΧ}) = p(\text{ΠΥΧ} \cap \chi) + p(\text{ΠΥΧ} \cap \sigma - \chi)$ και $p(\text{ΑΥΧ}) = p(\text{ΑΥΧ} \cap \chi) + p(\text{ΑΥΧ} \cap \sigma - \chi)$, από θεωρία πιθανοτήτων \Rightarrow

$$p(\text{ΠΥΧ}) = 0.15 + 0.15 = 0.3$$

$$p(\text{ΑΥΧ}) = 0.1 + 0.6 = 0.7$$

Υπολογισμός αναμενόμενου αποτελέσματος αν η σεισμική μελέτη δείξει ΠΥΧ:

$$E[\text{Αποτέλεσμα εξόρυξης} | \text{ΠΥΧ}] = \frac{1}{2}(700) + \frac{1}{2}(-100) - 30 = \mathbf{270}$$

$$E[\text{Αποτέλεσμα πώλησης} | \text{ΠΥΧ}] = \frac{1}{2}(90) + \frac{1}{2}(90) - 30 = 60$$

Παρατήρηση: Η απόφαση που μεγιστοποιεί το αποτέλεσμα-κέρδος για την ΡΜ δεδομένης ΠΥΧ είναι η «εξόρυξη».

Υπολογισμός αναμενόμενου αποτελέσματος αν η σεισμική μελέτη δείξει ΑΥΧ:

$$E[\text{Αποτέλεσμα εξόρυξης} | \text{ΑΥΧ}] = \frac{1}{7}(700) + \frac{6}{7}(-100) - 30 = -15.7$$

$$E[\text{Αποτέλεσμα πώλησης} | \text{ΑΥΧ}] = \frac{1}{7}(90) + \frac{6}{7}(90) - 30 = \mathbf{60}$$

Παρατήρηση: Η απόφαση που μεγιστοποιεί το αποτέλεσμα-κέρδος για την ΡΜ δεδομένης ΑΥΧ είναι η «πώληση».

1.6.4 Η αξία της πληροφόρησης:

Είναι λογική η ερώτηση: Τι επιπλέον προσφέρει τελικά η πειραματική διαδικασία ώστε να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε καλύτερα τις επιλογές μας; Με άλλα λόγια, ποια είναι αυτή καθ' αυτή η αξία της επιπλέον πληροφόρησης που μας προσφέρουν; Η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση έρχεται υπό την μορφή δύο συμπληρωματικών μεθόδων.

1. ΠΡΩΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:

Κατά την μέθοδο αυτή υποθέτουμε (μη ρεαλιστικώς βέβαια) ότι η πειραματική διαδικασία θα εξαφανίσει οποιαδήποτε μορφή αβεβαιότητας όσον αφορά το ποιόν του υπεδάφους της έκτασης που ανήκει στην ΡΜ. Συγκεκριμένα το αποτέλεσμα της σεισμικής έρευνας θα θεωρείται ως «θέσφατο» και αληθές. Χωρίς να λαμβάνει υπόψιν το κόστος της έρευνας, η μέθοδος αυτή, προσδιορίζει ένα άνω φράγμα για την αναμενόμενη αύξηση του αποτελέσματος μετά την χρήση των πληροφοριών που παρέχονται από το πείραμα. Η προσαύξηση αυτή καλείται **αναμενόμενο αποτέλεσμα της τέλει πληροφόρησης (expected value of perfect information -EVPI)** και αν έχει μεγαλύτερη τιμή από το κόστος του πειράματος τότε μας δίνεται ένας λόγος να δεχτούμε την εφαρμογή του πειράματος, αλλά προχωρούμε για ασφάλεια στην 2^η πιο «αυστηρή» μέθοδο ώστε να μειώσουμε την πιθανότητα σφάλματος. Προφανώς, αν το κόστος του πειράματος είναι μεγαλύτερο του EVPI τότε με ασφάλεια απορρίπτουμε την εφαρμογή της έρευνας.

- Αναμενόμενο αποτέλεσμα υπό τέλεια πληροφόρηση (expected payoff of perfect information-EPPI):

Υποθέτουμε ότι πριν η ΡΜ μάθει για την επιλογή της διεξαγωγής σεισμικής μελέτης, θεωρούσε ότι οι εκ των προτέρων πιθανότητες ήταν ακριβείς. Βρίσκουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα υπό τέλεια πληροφόρηση, λαμβάνοντας τα μέγιστα αποτελέσματα ανά πιθανή κατάσταση υπεδάφους, για κάθε απόφαση.

Η διαδικασία έχει ως εξής:

$$EPPI = 0.25(700) + 0.75(90) = 242.5$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα χωρίς πειραματισμό (expected payoff without experimentation-EPWtE), το

οποίο υπολογίστηκε σε προηγούμενα βήματα και ταυτίζεται με το αποτέλεσμα του «κανόνα του Bayes» $\Rightarrow EPWtE = 100$.

Τέλος, η τιμή του $EVPI$ υπολογίζεται ως εξής: $EVPI = EPPI - EPWtE = 242.5 - 100 = 142.5$

Η τιμή 142.5 είναι μεγαλύτερη του κόστους του πειράματος, το οποίο είναι 30(χιλιάδες \$) \Rightarrow αφού $142.5 > 30$ τότε ίσως αξίζει να προχωρήσουμε στην διεξαγωγή του πειράματος. Για να μειώσουμε τις πιθανότητες σφάλματος όμως, εξετάζουμε και την «αυστηρή» 2^η μέθοδο.

2. ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στον υπολογισμό της αναμενόμενης αξίας του πειραματισμού(expected value of experimentation-EVE). Αντί για τον προσδιορισμό ενός άνω φράγματος για το αναμενόμενο αποτέλεσμα, μελετάμε την αξία του πειράματος διεξοδικότερα, με την χρήση των εκ των υστέρων πιθανοτήτων και αφού πρώτα υπολογίσουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα έπειτα από την πραγματοποίηση του πειράματος (expected payoff with experimentation-EPWE) για τις βέλτιστες αποφάσεις (όπως υπολογίστηκε παραπάνω),χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν το κόστος του πειράματος.

Το EPWE υπολογίζεται ως εξής:

$$EPWE = \sum_j p(\text{απόκριση πειράματος}) E[\text{αποτέλεσμα} | \text{απόκριση πειράματος}]$$

, με $j = ΠΥΧ, ΑΥΧ$

Χρησιμοποιούμε τις αδέσμευτες πιθανότητες των αντίστοιχων αποκρίσεων του πειράματος οι οποίες υπολογίστηκαν παραπάνω με την χρήση της θεωρίας πιθανοτήτων.

Συγκεκριμένα: $p(ΠΥΧ) = 0.15 + 0.15 = 0.3, p(ΑΥΧ) = 0.1 + 0.6 = 0.7$

Επίσης υπολογίζουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα-κέρδος δεδομένης της απόκρισης του πειράματος για τις **βέλτιστες αποφάσεις**(έχει υπολογιστεί παραπάνω), αλλά με την διαφορά ότι δεν υπολογίζουμε το κόστος του πειράματος.

Δηλαδή:

$$E[\text{Αποτέλεσμα εξόρυξης} | PYX] = \frac{1}{2}(700) + \frac{1}{2}(-100) = 300$$

και

$$E[\text{Αποτέλεσμα πώλησης} | AYX] = \frac{1}{7}(90) + \frac{6}{7}(90) = 90$$

$$\text{Επομένως, EPWE} = 0.7(90) + 0.3(300) = \mathbf{153}$$

Τέλος, η αναμενόμενη αξία της πειραματικής διαδικασίας υπολογίζεται ως εξής:

$$EVE = EPWE - EPWtE = 153 - 100 = 53$$

Η τιμή της EVE είναι μεγαλύτερη από την κοστολόγηση του πειράματος $\Rightarrow 53 > 30$ (χιλιάδες\$), άρα μπορούμε να υποθέσουμε ασφαλώς ότι το πείραμα είναι μία ωφέλιμη διαδικασία για την μελέτη μας και επομένως πρέπει να πραγματοποιηθεί.

1.7 Δέντρα αποφάσεων:

Πολύ βασική βοήθεια για την καλύτερη αντίληψη του μοντέλου βέλτιστης απόφασης είναι η «σχηματοποίηση» του. Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση αποφάσεων και την παρουσίαση των προβλημάτων που την αποτελούν είναι τα δέντρα αποφάσεων. Πρόκειται για αναλυτικά διαγράμματα, αποτελούμενα από κόμβους και κλαδιά τα οποία λογικά οδηγούν σε αναμενόμενα αποτελέσματα. Με την βοήθειά τους, εκείνος ο οποίος αποφασίζει και καταστρώνει το μοντέλο ενός προβλήματος, μπορεί να αντιληφθεί άμεσα οποιαδήποτε αλλαγή στα δεδομένα και ποιο το αποτέλεσμα της εκάστοτε αλλαγής στα αναμενόμενα αποτελέσματα. Επίσης τα δέντρα αποφάσεων αποτελούν έναν απτό και κατανοητό τρόπο παρουσίασης του προβλήματος στο οποίο είναι εφαρμοσμένα, σε ανθρώπους (ή ομάδες) οι οποίοι δεν έχουν ιδιαίτερη σχέση με την έρευνα, αλλά απεναντίας έχουν άμεση σχέση με το αποτέλεσμά της.

Στο δια ταύτα, η οπτική παρουσίαση του προβλήματος με την χρήση των δέντρων αποφάσεων, μας δίνει άμεση απάντηση στα ερωτήματα:

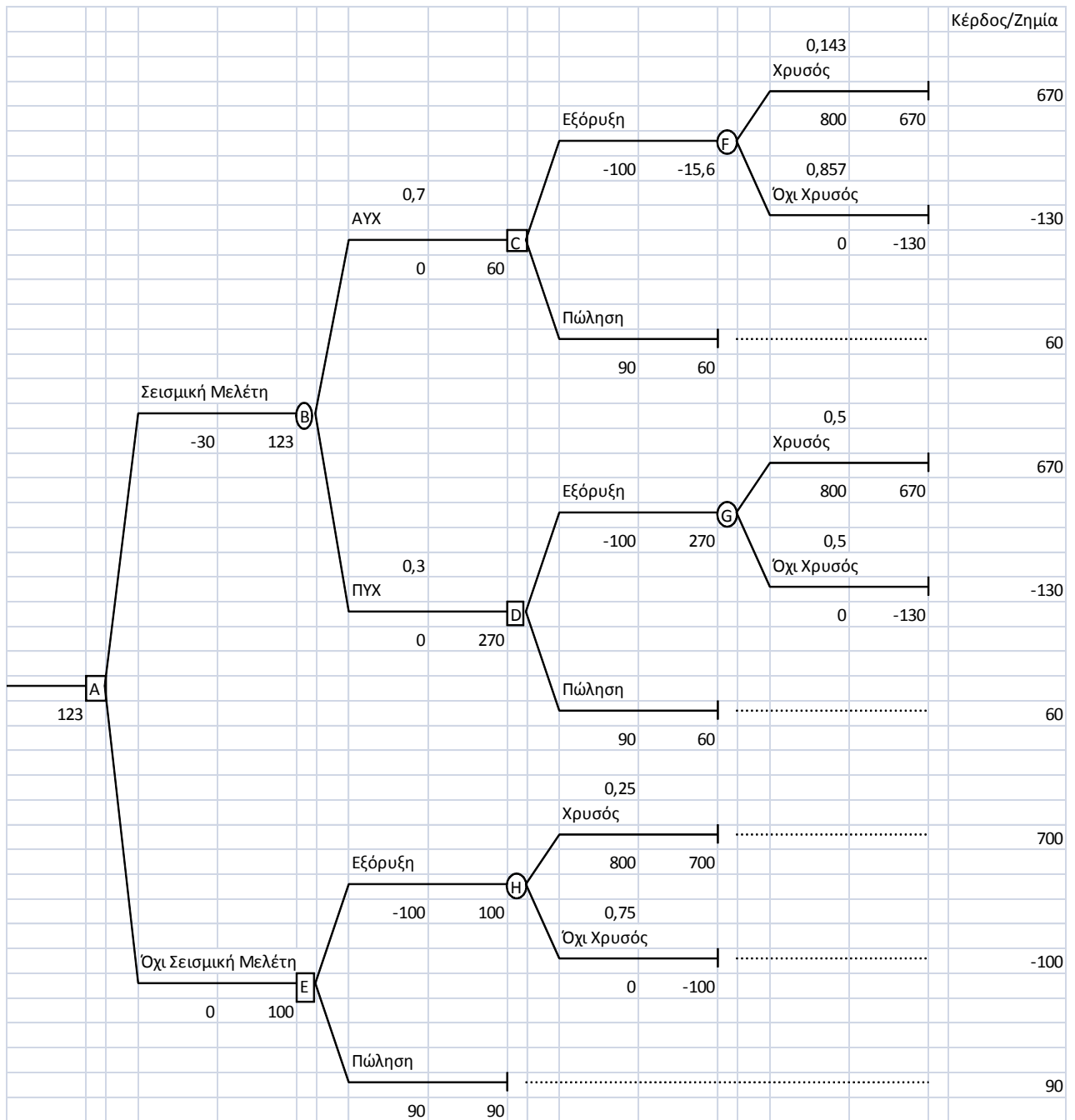
- Πρέπει να γίνει χρήση της πειραματικής διαδικασίας;
- Ποια είναι η απόφαση η οποία οδηγεί στο μέγιστο πιθανό κέρδος; Θα πρέπει τελικά η Perth Mining να εξορύξει ή να πουλήσει την έκταση γης την οποία κατέχει;

Τεχνικά χαρακτηριστικά των δέντρων αποφάσεων:

Ένα δέντρο απόφασης είναι ουσιαστικά ένα σύνολο από κόμβους οι οποίοι ενώνονται με κλαδιά, συμβολίζοντας πιθανές λογικές διαδρομές. Συγκεκριμένα, υπάρχουν τριών ειδών κόμβοι σε κάθε δέντρο:

1. **Κόμβοι απόφασης:** συμβολίζονται με ένα τετράγωνο (□) και εκφράζουν ένα σημείο στο οποίο καλούμαστε να λάβουμε μια απόφαση, επιλέγοντας από ένα σύνολο αποφάσεων.
2. **Κόμβοι ενδεχομένων:** συμβολίζονται με έναν κύκλο (○) και εκφράζουν ένα σημείο στο οποίο συμβαίνει ένα τυχαίο γεγονός.
3. **Τερματικοί κόμβοι:** συμβολίζονται συνήθως με μία κάθετη γραμμή (|) και εκφράζουν το τέλος της λογικής διαδρομής, ενώ επισυνάπτονται σε αυτούς τα αντίστοιχα αποτελέσματα (κάθε λογικής διαδρομής).

ΤΟ ΔΕΝΤΡΟ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΤΑΙΡΕΙΑ PERTH MINING:



Διάγραμμα 1.2: Γραφική αναπαράσταση του δέντρου αποφάσεων για την περίπτωση της PM

Ανάλυση του δέντρου:

- ⇒ Προχωράμε από αριστερά προς τα δεξιά ανά στήλη.
- ⇒ Για κάθε κόμβο ενδεχομένων που συναντάμε υπολογίζουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα του ως το αναμενόμενο αποτέλεσμα των κλαδιών τα οποία άρχονται από αυτόν.
- ⇒ Για κάθε κόμβο απόφασης συγκρίνουμε τα αναμενόμενα αποτελέσματα των κλαδιών τα οποία άρχονται από αυτόν και επιλέγουμε την απόφαση που μας εξασφαλίζει το μεγαλύτερο αποτέλεσμα.
- ⇒ Διαγράφουμε όποια κλαδιά δεν επιβεβαιώνουν τον παραπάνω κανόνα.

Ας προβούμε σε μια ενδεικτική λογική διαδρομή πάνω στο δέντρο αποφάσεων της PM. Ξεκινώντας από τον κόμβο απόφασης A , **δαπανάμε** \$30.000 για την διεξαγωγή της πειραματικής έρευνας και καταλήγουμε στον κόμβο ενδεχομένων B. Έστω τώρα ότι το αποτέλεσμα της έρευνας είναι ΠΥΧ με πιθανότητα 30% και αποφασίσουμε την εξόρυξη χρυσού στον κόμβο D **δαπανώντας** \$100.000 φτάνοντας στον κόμβο ενδεχομένων G. Αν παρ' ελπίδα βρεθεί χρυσός με πιθανότητα 50% **αποφέροντας** στην εταιρεία \$800.000, το **κέρδος** της PM θα είναι της τάξεως των \$670.000 .

Ανάλυση και αποτίμηση της αξίας των κόμβων του δένδρου υπό τις παραπάνω οδηγίες και με την μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής:

Για τους κόμβους ενδεχομένων F,G,H και τα αναμενόμενα αποτελέσματά τους (EP) ισχύει ότι ⇒

$$EP_F = 0,143(670) + 0,857(-130) = -15.7$$

$$EP_G = 0,5(670) + 0,5(-130) = 270$$

$$EP_H = 0,25(700) + 0,75(-100) = 100$$

Για τους κόμβους αποφάσεων C,D,E ισχύει ότι ⇒

C : $EP_{\text{πώλησης}} = 60 > -15,6 = EP_{\text{εξόρυξης}}$ άρα επιλέγω την πώληση και απορρίπτω την εξόρυξη.

D : $270 > 60$ άρα επιλέγω την εξόρυξη και απορρίπτω την πώληση.

E : $100 > 90$ άρα επιλέγω την εξόρυξη και απορρίπτω την πώληση.

Για τον κόμβο B: $EP_B = 0,7(60) + 0,3(270) = 123$

Για τον κόμβο A: $123 > 100$ επομένως θα επιλέξω την πραγματοποίηση της σεισμικής μελέτης.

Αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας είναι η διεξαγωγή συμπερασμάτων για την βέλτιστη πολιτική αποφάσεων που πρέπει να ακολουθήσει η PM έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Συγκεκριμένα, η PM πρέπει να προχωρήσει στην διενέργεια σεισμικής έρευνας. Αν το αποτέλεσμα αυτής βρεθεί ΠΥΧ τότε η PM προχωρά τις διαδικασίες εξόρυξης. Αν αντιθέτως το αποτέλεσμα της μελέτης βρεθεί ΑΥΧ τότε η PM καλείται να πουλήσει την έκταση γης. Το αναμενόμενο αποτέλεσμα ενσωματώνοντας και το κόστος της σεισμικής μελέτης είναι \$123.000 .

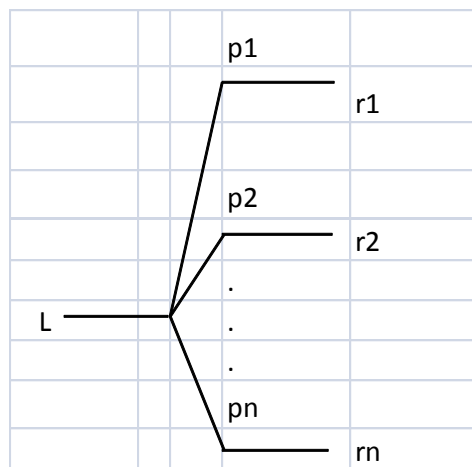
1.8 Θεωρία χρησιμότητας:

Μια ένσταση δημιουργήθηκε για το αν το κριτήριο του αναμενόμενου αποτελέσματος (expected value-payoff) είναι το πρόπον και ρεαλιστικό κριτήριο κατά την λήψη και ανάλυση αποφάσεων. Κάπως έτσι, με την ρεαλιστικότητα που επιτάσσει η καθημερινή ζωή γεννήθηκε η θεωρία χρησιμότητας. Πόσο «χρήσιμο» είναι το ίδιο χρηματικό ποσό για διαφορετικούς ανθρώπους; Σκεφτείτε το εξής συγκριτικό παράδειγμα: ο Mark είναι τελειόφοιτος Ιατρικής σχολής, δεν έχει εισόδημα και πριν μερικά χρόνια πήρε φοιτητικό δάνειο από την τράπεζα ώστε να καλύπτει τις στεγαστικές και καθημερινές του ανάγκες. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς του Mark το εν λόγω δάνειο θα μπορέσει να εκπληρωθεί αισίως σε δέκα έτη. Αντιθέτως η Susan, γόνος εύπορης οικογένειας και επαγγελματίας στον χώρο των κατασκευών, αναλαμβάνει την αξιοποίηση ακινήτων, ασχολία η οποία της εξασφαλίζει μία πολύ άνετη ζωή. Και στους δύο αυτούς ανθρώπους προσφέρεται αφιλοκερδώς το ποσό των \$20.000. Ποιός από τους δύο θεωρείτε ότι θα το εκτιμήσει περισσότερο; Για τον μεν Mark το ποσό αυτό μπορεί να καλύψει μεγάλο μέρος του δανείου του και να διευκολύνει την ζωή του. Για την δε Susan το ποσό αυτό μπορεί να αποτελεί κάτι το συνηθισμένο, δεδομένου ότι διαχειρίζεται καθημερινά μεγάλα χρηματικά ποσά.

Στην παραπάνω αντίθεση βασίζεται η θεωρία χρησιμότητας, η οποία εξ ορισμού προϋποθέτει ότι η αξία κάθε αγαθού διαμορφώνεται σύμφωνα με τις προσωπικές ανάγκες των ανθρώπων, όπως και στην διάθεσή τους να αναλάβουν ρίσκο. Πατέρας της θεωρίας χρησιμότητας θεωρείται ο Von Neumann-Morgenstern, ο οποίος εισήγαγε την έννοια της συνάρτησης χρησιμότητας. Η εν λόγω συνάρτηση χρησιμοποιείται ευρέως ως κριτήριο λήψης αποφάσεων υπό αβεβαιότητα.

1.8.1 Λοταρίες:

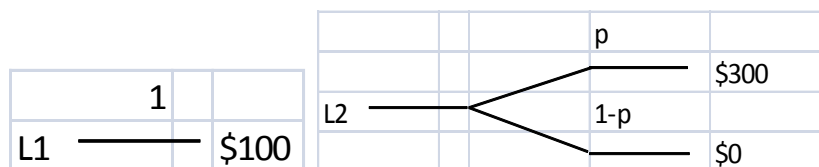
Έστω ότι κάποιος θα λάβει αμοιβή (reward) r_i με πιθανότητα p_i για $i = 1, 2, \dots, n$. Αυτό το νοητικό κατασκεύασμα ονομάζεται λοταρία και μπορεί να αναπαρασταθεί και σχηματικά ως εξής:



Ισχύει ότι $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Ο παίκτης ονομάζεται αδιάφορος ανάμεσα σε δύο λοταρίες όταν καθεμία εκ των δύο παρουσιάζει ακριβώς το ίδιο ενδιαφέρον για εκείνον.

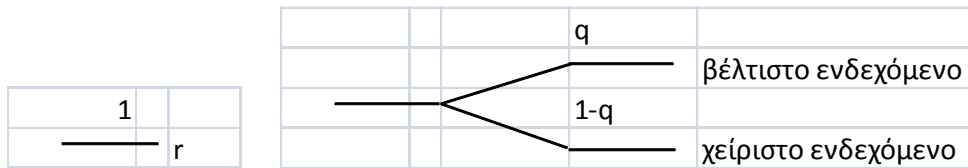
Για παράδειγμα ποια πιθανότητα θα σας καθιστούσε αδιάφορο/η ανάμεσα στις παρακάτω δύο λοταρίες;



Οι περισσότεροι άνθρωποι νιώθουν άβολα στην σκέψη ότι μπορεί να χάσουν εντελώς τα χρήματά τους, οπότε επιλέγουν να σιγουρέψουν τα κέρδη τους, ακόμα και αν η εναλλακτική επιλογή τους παρέχει υψηλότερο αναμενόμενο αποτέλεσμα. Ως ανασφαλή όντα τείνουμε προς την αγορά της ασφάλειας ακόμα και αν η αγορά αυτή είναι μια κακή επένδυση.

1.8.2 Συνάρτηση χρησιμότητας (Utility Function):

Η χρησιμότητα της αμοιβής r , γράφεται $u(r)$ και ισούται με τον αριθμό q ο οποίος καθιστά εκείνον ο οποίος αποφασίζει αδιάφορο μεταξύ των δύο παρακάτω λοταριών:



Όπου το βέλτιστο ενδεχόμενο είναι η καλύτερη δυνατή αμοιβή που μπορεί να παρέχει το σύνολο των ενδεχομένων που μπορούν να συμβούν σε αυτόν που αποφασίζει, ενώ αντίστοιχα το χειρίστο ενδεχόμενο είναι η χειρότερη αμοιβή που μπορεί να του παρέχει το σύνολο των ενδεχομένων. Ο ορισμός εξαναγκάζει την συνάρτηση χρησιμότητας u να λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ με $u(\text{βέλτιστο ενδεχόμενο}) = 1$ και $u(\text{χειρίστο ενδεχόμενο}) = 0$. Για να είναι κάποιος αδιάφορος μεταξύ των δύο λοταριών L_1 και L_2 , θα πρέπει οι αναμενόμενες χρησιμότητες των δύο λοταριών να είναι ίσες. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει: $E[u(L_1)] = E[u(L_2)]$

Ας κατασκευάσουμε λοιπόν μία ενδεικτική συνάρτηση χρησιμότητας με την χρήση 4 επιλογών :

Επιλογή 1: Επιλέγω μεταξύ πρώτης λοταρίας η οποία μου εξασφαλίζει σίγουρα \$100 και δεύτερης λοταρίας η οποία μου εξασφαλίζει \$100 με πιθανότητα p και \$0 με πιθανότητα $1-p$.

Προφανώς καθίσταμαι αδιάφορος μεταξύ των δύο λοταριών αν η πιθανότητα p είναι 1. Από την χρήση της παραπάνω θεωρίας και υπό την επιλογή 1 μπορώ με ασφάλεια να θέσω $u(100) = 1$ και $u(0) = 0$.

Επιλογή 2: Επιλέγω μεταξύ πρώτης λοταρίας η οποία μου εξασφαλίζει σίγουρα \$10 και δεύτερης λοταρίας η οποία μου εξασφαλίζει \$100 με πιθανότητα p και \$0 με πιθανότητα $1-p$.

Ένας μέσος άνθρωπος θα καθίστατο αδιάφορος μεταξύ των δύο λοταριών με πιθανότητα $p=0.25$.

Επομένως: $u(\$10) = 0.25u(\$100) + 0.75u(\$0) = 0.25$

Επιλογή 3: Επιλέγω μεταξύ πρώτης λοταρίας η οποία μου εξασφαλίζει σίγουρα \$30 και δεύτερης λοταρίας η οποία μου εξασφαλίζει \$100 με πιθανότητα p και \$0 με πιθανότητα $1-p$.

Ένας μέσος άνθρωπος θα καθίστατο αδιάφορος μεταξύ των δύο λοταριών με πιθανότητα $p=0.5$.

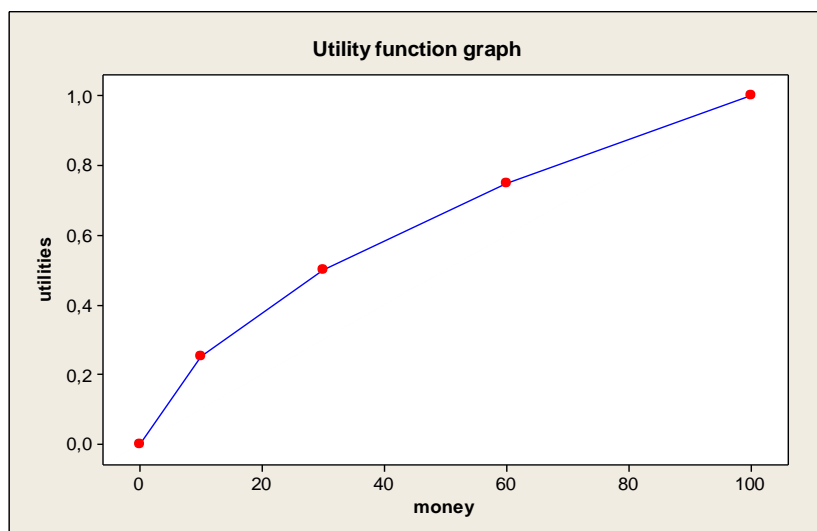
$$\text{Επομένως: } u(\$30) = 0.5u(\$100) + 0.5u(\$0) = 0.5$$

Επιλογή 4: Επιλέγω μεταξύ πρώτης λοταρίας η οποία μου εξασφαλίζει σίγουρα \$60 και δεύτερης λοταρίας η οποία μου εξασφαλίζει \$100 με πιθανότητα p και \$0 με πιθανότητα $1-p$.

Ένας μέσος άνθρωπος θα καθίστατο αδιάφορος μεταξύ των δύο λοταριών με πιθανότητα $p=0.75$.

$$\text{Επομένως: } u(\$60) = 0.75u(\$100) + 0.25u(\$0) = 0.75$$

Το διάγραμμα της εν λόγω συνάρτησης χρησιμότητας που σχηματίστηκε με τις ενδεικτικές απαντήσεις ενός μέσου ανθρώπου είναι το εξής:



Γραφική Παράσταση 1.2: Η συνάρτηση χρησιμότητας ενός μέσου ανθρώπου

Είναι φανερό από το παραπάνω διάγραμμα ότι η οριακή χρησιμότητα των χρηματικών ποσών μειώνεται. Αυτό είναι δείγμα ότι ο μέσος άνθρωπος είναι **απρόθυμος να αναλάβει ρίσκο**. Αν η εν λόγω συνάρτηση είχε αύξουσα οριακή χρησιμότητα τότε θα λέγαμε ότι ο άνθρωπος στον οποίο βασίστηκε η συνάρτηση είναι **πρόθυμος να αναλάβει ρίσκο**. Στην ενδιάμεση περίπτωση, όταν δηλαδή η οριακή χρησιμότητα τείνει στο 0 λέμε ότι ο άνθρωπος είναι **ουδέτερος ως προς την ανάληψη ρίσκου**, δηλαδή αντιμετωπίζει την αξία σύμφωνα με την αντικειμενική της τιμή.

Κάθε άνθρωπος, εταιρεία ή επιχειρηματικός οργανισμός έχει διαφορετική συνάρτηση χρησιμότητας, διότι απλά αντιμετωπίζει την έννοια «ρίσκο» με διαφορετικό τρόπο. Τις περισσότερες φορές στις περιπτώσεις επιχειρήσεων, είναι πιο αποτελεσματικό να αντικαθιστούμε με νομισματικές αξίες το σύνολο τιμών της εκάστοτε συνάρτησης χρησιμότητας. Αυτή η διαδικασία δημιουργεί την λεγόμενη συνάρτηση χρησιμότητας της χρηματικής αξίας (utility function for monetary values).

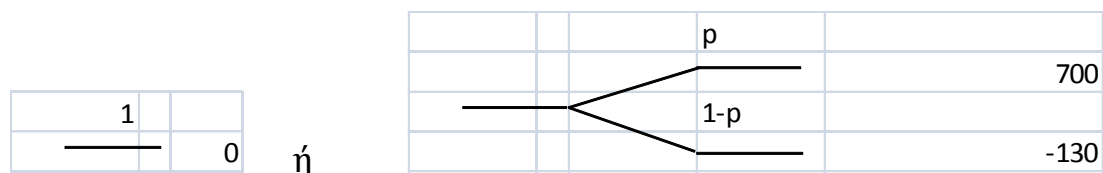
A. Προσδιορισμός της συνάρτησης χρησιμότητας χρηματικής αξίας για την Perth Mining:

Δεδομένου ότι η εταιρεία λειτουργεί χωρίς πολλά διαθέσιμα κεφάλαια και το ποσοστό δανεισμού της είναι αρκετά υψηλό, η απώλεια \$100.000 που αντιστοιχεί στο κόστος της εξόρυξης για χρυσό θεωρείται καταστρεπτική. Το χειρότερο πιθανό σενάριο είναι η διενέργεια σεισμικής μελέτης κόστους \$30.000 και η μετέπειτα άκαρπη εξόρυξη του εδάφους προσδοκώντας ευρήματα χρυσού, κόστους \$100.000. η συνολική ζημία για την εταιρεία στην χειρότερη περίπτωση θα είναι \$130.000. Αντιθέτως, αν η PM βρει τελικά χρυσό στην έκτασή της, τα έσοδά της υπολογίζονται στα \$700.000.

Συνεπώς έχουμε:

- Στην χειρότερη περίπτωση: -\$130.000
- Στην καλύτερη περίπτωση: + \$700.000

Είναι φυσικό να θεωρήσουμε την χρησιμότητα ενός μηδενικού χρηματικού ποσού ίση με 0 ($u(0) = 0$)¹. Το επόμενο βήμα είναι να θεωρήσουμε τις εξής εναλλακτικές σε μορφή λοταριών:



Η τιμή p η οποία θα καθιστούσε εκείνον που λαμβάνει την απόφαση αδιάφορο μεταξύ των παραπάνω δύο λοταριών είναι (ενδεικτικά)

$$p = \frac{1}{5}.$$

¹ Σε αντίθεση με την θεωρία της συνάρτησης χρησιμότητας, στον προσδιορισμό της χρησιμότητας της χρηματικής αξίας, η μηδενική χρηματική αξία έχει και μηδενική χρησιμότητα.

Αν εξισώσουμε τις αναμενόμενες χρησιμότητες των δύο παραπάνω λοταριών λαμβάνουμε:

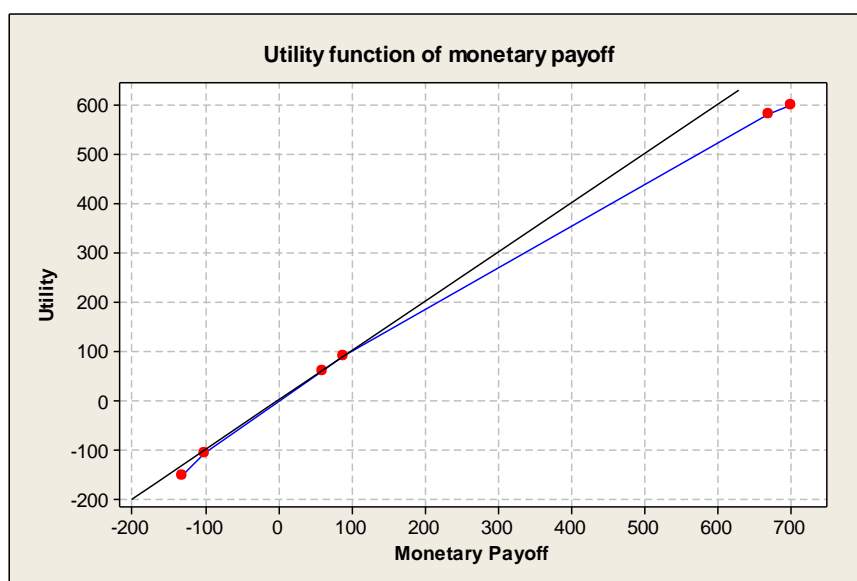
$$0 = \frac{1}{5}u(700) + \frac{4}{5}u(-130)$$

Οι τιμές των $u(700)$ και $u(-130)$ μπορούν να προσδιορίσουν αυθαίρετα, δεδομένου όμως ότι η πρώτη είναι θετική και η άλλη αρνητική. Έστω λοιπόν ότι $u(-130) = -150$, τότε $u(700) = 600$ σύμφωνα με την παραπάνω σχέση.

Επιπλέον για να υπολογίσουμε την $u(-100)$ πρέπει να βρεθεί η τιμή της πιθανότητας p η οποία να καθιστά αυτόν που αποφασίζει αδιάφορο μεταξύ αποτελέσματος -130 με πιθανότητα p και σίγουρης αποδοχής αποτελέσματος -100 . Η εκτίμηση $p = 0.7$ θεωρείται ικανοποιητική. Επομένως, $u(-100) = pu(-130) = 0.7(-150) = -105$.

Για να υπολογίσουμε την $u(90)$ πρέπει να βρεθεί η τιμή της πιθανότητας p η οποία να καθιστά αυτόν που αποφασίζει αδιάφορο μεταξύ αποτελέσματος 700 με πιθανότητα p και σίγουρης αποδοχής αποτελέσματος 90 . Η εκτίμηση $p = 0.15$ θεωρείται ικανοποιητική. Επομένως, $u(90) = pu(700) = 0.15(600) = 90$

Με την χρήση των παραπάνω τιμών, μπορούμε να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση και να εξάγουμε από αυτήν όλες τις τιμές που χρειαζόμαστε για να έχουμε μια πλήρη εικόνα της χρησιμότητας των δυνατών αποτελεσμάτων που αφορούν τις δραστηριότητες της ΡΜ.



Γραφική Παράσταση 1.3: Η συνάρτηση χρησιμότητας της χρηματικής αξίας στην περίπτωση της ΡΜ

Φαίνεται από την κλίση της καμπύλης ότι η εταιρεία PM είναι απρόθυμη να αναλάβει ρίσκο. Με την χρήση της καμπύλης προσδιορίζουμε τα σημεία που θα μας βοηθήσουν στην μελέτη μας.

Χρηματική Αξία	Χρησιμότητα
-130	-150
-100	-105
60	60
90	90
670	580
700	600

B. Εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας:

Πολλά είδη μοντέλων τα οποία προσεγγίζουν την χρησιμότητα του μέσου ανθρώπου και των επιχειρήσεων έχουν κατασκευαστεί. Ένα από τα σημαντικότερα είναι το μοντέλο της εκθετικής συνάρτησης χρησιμότητας, το οποίο δέχεται ευρείας αναγνώρισης στον τομέα των επενδύσεων και γενικότερα, λόγω της εύκολης χρήσης του και των ικανοποιητικών τιμών του. Η μορφή της εκθετικής συνάρτησης χρησιμότητας είναι η εξής: $U(x) = 1 - e^{-x/R}$, όπου x είναι χρηματική αξία και $R > 0$ είναι ο δείκτης ανοχής κινδύνου. Ουσιαστικά ο δείκτης R μετράει πόσο ρίσκο είναι διατεθειμένος να αναλάβει εκείνος που αποφασίζει. Επομένως μεγάλη τιμή του R σημαίνει μεγαλύτερη διάθεση για ρίσκο, ενώ αντίστοιχα μικρή τιμή του R σημαίνει αποστροφή προς το ρίσκο. Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης χρησιμότητας επιθυμούμε να έχει χρηματικές μονάδες ώστε να σχηματιστεί η εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας για την χρηματική αξία, τότε το μοντέλο λαμβάνει την εξής αντίστοιχη μορφή: $U(x) = R(1 - e^{-x/R})$. Το μεγαλύτερο μειονέκτημα των παραπάνω μοντέλων είναι ότι δεν μπορούν να συλλάβουν όλες τις διαθέσεις για ρίσκο. Για παράδειγμα στο διάγραμμα της συνάρτησης χρησιμότητας για την PM βλέπουμε ότι για μεγάλες τιμές χρηματικής αξίας η PM έχει μικρή απροθυμία για ανάληψη ρίσκου (μικρή καμπυλότητα της καμπύλης), ενώ για μικρές χρηματικές αξίες ή ακόμη και για ζημίες, λόγω της δυσχερούς οικονομικής κατάστασης της PM που περιγράφηκε παραπάνω, η εταιρεία έχει μεγαλύτερη απροθυμία για ανάληψη ρίσκου (μεγάλη καμπυλότητα της

καμπύλης). Είναι φανερό ότι αν προσεγγίζαμε την συνάρτηση χρησιμότητας της PM με την εκθετική της μορφή, θα έπρεπε να χρησιμοποιούσαμε διαφορετικές τιμές του συντελεστή R. Αυτό γίνεται φανερό και από τα παρακάτω ενδεικτικά αριθμητικά παραδείγματα:

$$u(670) = 580, u(700) = 600 \Rightarrow R \approx 2.250 \text{ ενώ } u(-130) = -150 \Rightarrow R \approx 465$$

Σε περιπτώσεις όπου σοβαρές χρηματικές απώλειες δεν απειλούν την βιωσιμότητα της επιχείρησης είναι αρκετά ασφαλής η εφαρμογή του μοντέλου της εκθετικής συνάρτησης χρησιμότητας.

Για να σχηματίσουμε την εν λόγω συνάρτηση προς όφελος μίας εταιρείας ή οργανισμού χρειαζόμαστε απλά την χαρακτηριστική τιμή της παραμέτρου R. Ο προσδιορισμός της μπορεί να γίνει όταν εκείνος που αποφασίζει μπορεί να προσδιορίσει την τιμή εκείνη του R η οποία τον καθιστά αδιάφορο μεταξύ της επιλογής: «εξασφαλίζω σίγουρο μηδενικό αποτέλεσμα» και της επιλογής: «εξασφαλίζω αποτέλεσμα R με πιθανότητα 0,5 είτε εξασφαλίζω αποτέλεσμα -R/2 με πιθανότητα 0,5».

C. Εφαρμογή της συνάρτησης χρησιμότητας στο δέντρο αποφάσεων της Perth Mining και περαιτέρω λήψη αποφάσεων:

Η διαδικασία επιλογής της βέλτιστης απόφασης σύμφωνα με το δέντρο απόφασης δεν αλλάζει. Εκείνο που αλλάζει είναι η αντικατάσταση των τιμών των τελικών αποτελεσμάτων με τις αντίστοιχες τους χρησιμότητες. Επίσης το κλαδιά του δέντρου πλέον αξιολογούνται με το κριτήριο της αναμενόμενης χρησιμότητας και όχι με αυτό του αναμενόμενου αποτελέσματος. Ως αποτέλεσμα, ο προσδιορισμός του βέλτιστου αποτελέσματος με την χρήση του κανόνα του Bayes, μεταβάλλεται στον προσδιορισμό της διαδρομής που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητα.

Στην προηγούμενη ανάλυση του δέντρου απόφασης της PM η εταιρεία υιοθέτησε την ουδέτερη προσέγγιση προς το ρίσκο, δηλαδή $u(M) = M$. Σε αυτή την προσέγγιση του δέντρου απόφασης η εταιρεία καθιερώνει την έννοια της χρησιμότητας και εκ των πραγμάτων χαρακτηρίζεται από μικρή απροθυμία ανάληψης ρίσκου. Παρατηρούμε ότι αν και η βέλτιστη πολιτική που ακολουθεί η εταιρεία δεν μεταβάλλεται, υπάρχει μια αλλαγή στρατηγικής σε έναν από τους κόμβους απόφασης. Όσο πιο απρόθυμη να αναλάβει ρίσκο θα είναι η εταιρεία, τόσο θα παρατηρείται μεταβολή στην πιο συντηρητική επιλογή της πώλησης της γης και η βέλτιστη πολιτική της θα αλλάζει. Η θεωρία χρησιμότητας αποδεικνύεται ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια εκείνων που χαράζουν επιχειρηματική πολιτική, αν και λόγω της πολυπλοκότητας του δεν χρησιμοποιείται ευρέως.

Κεφάλαιο 2: Ανάλυση ρίσκου

Η ανάγκη της διαχείρισης του ρίσκου είναι επιτακτική στον κόσμο μας. Οι χρηματοπιστωτική κρίση των τελευταίων ετών επιβεβαίωσε ότι κανείς δεν μένει πλέον αδιάφορος απέναντι στην έννοια του ρίσκου και στον αποτελεσματικό τρόπο ανάλυσης και διαχείρισής του. Από συλλογικής απόψεως, οι εταιρείες, ως οργανισμοί οι οποίοι δέχονται πρώτες την επήρεια κάθε οικονομικού κύματος, προσπαθούν να δημιουργήσουν ένα προστατευτικό κλοιό απέναντι στην αβεβαιότητα, μελετώντας και αφογκράζοντας τις οικονομικές εξελίξεις ώστε να προφυλαχθούν από πιθανούς κινδύνους. Οι πιο έμπειρες τα καταφέρνουν, αλλά κάποιες από αυτές δέχονται παθητικά τα χρηματοοικονομικά ρίσκα. Το πιο σημαντικό εργαλείο για την συγκρότηση αυτού του προστατευτικού κλοιού, είναι η «διαχείριση ρίσκου», η οποία ορίζεται ως η διαδικασία υπό την οποία διάφορες εκθέσεις σε ρίσκο εντοπίζονται, μετρώνται και κατ' επέκταση διαχειρίζονται.

Τι ακριβώς όμως είναι το ρίσκο. Ως ρίσκο λοιπόν, ορίζουμε την μεταβλητότητα των απροσδόκητων ενδεχομένων (γενικότερα την αξία του κεφαλαίου και τις δανειακές υποχρεώσεις). Αν και οι επιχειρήσεις δέχονται πολλών ειδών κινδύνους και αναλαμβάνουν αντίστοιχα ρίσκα, αυτά μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο βασικές κατηγορίες: στα επιχειρηματικά και στα μη-επιχειρηματικά ρίσκα.

Τα επιχειρηματικά (ή επιχειρησιακά) ρίσκα είναι ρίσκα τα οποία οικειοθελώς αναλαμβάνουν οι επιχειρήσεις έτσι ώστε να δημιουργήσουν στρατηγικά/ανταγωνιστικά πλεονεκτήματα και να αυξήσουν την αξία για τους μετόχους. Το ύψος των δανειακών υποχρεώσεων και οι επενδύσεις για έρευνα και ανάπτυξη, βιομηχανικό σχέδιο και μάρκετινγκ ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Αναπόφευκτα λόγω των αγορών, οι επιχειρήσεις δέχονται πολλούς μακροοικονομικούς κινδύνους που προέρχονται από τους οικονομικούς κύκλους, τον πληθωρισμό και τις νομισματικές πολιτικές.

Εκείνα τα ρίσκα πάνω στα οποία οι επιχειρήσεις δεν έχουν κανένα έλεγχο συγκροτούν την κατηγορία των μη-επιχειρηματικών ρίσκων. Αυτή την κατηγορία συγκροτούν τα λεγόμενα «στρατηγικά ρίσκα», τα οποία δημιουργούνται από θεμελιώδεις μεταβολές στην οικονομία και στο πολιτικό σκηνικό. Η απαλλοτρίωση και η

εθνικοποίηση επίσης ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Αυτού του είδους τα ρίσκα είναι αρκετά δύσκολο να αποφευχθούν και να ελεγχθούν αποτελεσματικά.

Μια ξεχωριστή κατηγορία ρίσκων είναι τα χρηματοοικονομικά ρίσκα. Αυτά οφείλονται σε αρνητικές αποδόσεις των χρηματοπιστωτικών αγορών και είναι δυνατή η αποτελεσματική διαχείρισή τους. Σε αντίθεση με τις βιομηχανίες, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, έχουν ως βασικό μέλημα την ενεργή διαχείριση των χρηματοοικονομικών ρίσκων. Για να το επιτύχουν, πρέπει να αξιολογήσουν τα ρίσκα που δέχονται με ακρίβεια και να προσπαθήσουν να προετοιμαστούν για την σχεδόν βέβαιη αβεβαιότητα.

Για να μπορέσουν οι επιχειρήσεις να αξιολογήσουν το ρίσκο, είναι πολύ βασικό να γνωρίζουν από που προέρχεται και πως αυτό δημιουργείται. Το ρίσκο μπορεί να δημιουργηθεί από τον ανθρώπινο παράγοντα, με άμεσα παραδείγματα, τους επιχειρηματικούς κύκλους, τον πληθωρισμό, τις κυβερνητικές πολιτικές και τους πολέμους. Αντιθέτως, το ρίσκο μπορεί να προέλθει από απρόβλεπτους παράγοντες όπως τα φυσικά φαινόμενα (καιρός, σεισμοί).

Μεγάλο μέρος των ενεργειών της χρηματοπιστωτικής και ασφαλιστικής βιομηχανίας έχει διοχετευτεί στην δημιουργία αγορών οι οποίες διασπείρουν το ρίσκο, μέσω της κατάθεσης ή του δανεισμού. Παρ' όλα αυτά, οι παραπάνω αγορές δεν μπορούν να προστατευτούν και να προστατέψουν από όλων των ειδών τα ρίσκα. Οι απρόβλεπτες μακροοικονομικές εξελίξεις, όπως το επίπεδο του εισοδήματος και η ανεργία είναι δύσκολο να αποφευχθούν. Οι κυβερνητικές πολιτικές, έχουν κατηγορηθεί ευρέως διότι πολλές φορές εντείνουν το ρίσκο και την αναταραχή μέσω οικονομικών πολιτικών (μερικές φορές ανυπόστατων) και παρεμβατισμών στο τραπεζικό σύστημα. Ως φαίνεται, υπάρχουν πολλοί παράγοντες που μπορούν να αυξήσουν την εν δυνάμει μεταβλητότητα των μεγεθών που επηρεάζουν τις επιχειρήσεις και τον χρηματοπιστωτικό κλάδο.

2.1 Εργαλεία για την διαχείριση του ρίσκου:

Ο κλάδος της διαχείρισης ρίσκου, αναδείχθηκε ως απάντηση στην αυξημένη μεταβλητότητα των παγκόσμιων χρηματοπιστωτικών αγορών. Η μεταβλητότητα στις συναλλαγματικές ισοτιμίες, στα επιτόκια και στις τιμές των αγαθών, δημιούργησαν την ανάγκη για νέα χρηματιστηριακά προϊόντα και αναλυτικές μεθόδους με σκοπό την αποτελεσματική διαχείριση ρίσκου.

Ίσως το πιο χρήσιμο εργαλείο για τον έλεγχο του ρίσκου είναι τα παράγωγα προϊόντα (derivatives). Πρόκειται για συμβόλαια τα οποία αντλούν-παράγουν την αξία τους σύμφωνα με την αξία άλλων, υποκείμενων χρηματοοικονομικών οντοτήτων, όπως το κεφάλαιο, οι δείκτες(μετοχές, ομόλογα, συναλλαγματικές ισοτιμίες, τιμές αγαθών) και τα επιτόκια. Τα παράγωγα είναι ουσιαστικά συμφωνία μεταξύ δύο πλευρών (αντισυμβαλλομένων). Τα κύρια είδη τους: προθεσμιακά συμβόλαια (futures), δικαιώματα προαίρεσης (options), ανταλλακτικά συμβόλαια (swaps) και εγγυητικά συμβόλαια (warrants). Όταν μιλάμε για αντιστάθμιση κινδύνου με την χρήση των παραγώγων προϊόντων εννοούμε την αγορά ασφάλειας προς αντιμετώπιση πιθανών κινδύνων και κατ' επέκταση την διαχείριση του ρίσκου. Η αγορά των συγκεκριμένων προϊόντων έχει φτάσει σε τεράστια μεγέθη. Ενδεικτικά το 1986 η συνολική αξία των παραγώγων προϊόντων που αντάλλαξαν χέρια έφτασε στο 1 τρις δολάρια, το 1999 τα 71 τρις δολάρια και μέχρι σήμερα η αγορά έχει δεκαπλασιάσει το μέγεθός της. Και ο πιο αγαθός παρατηρητής θα πρέπει να έχει αντιληφθεί ότι αυτή η αγορά παρέχει έναν μηχανισμό ανταλλαγής ρίσκου. Ουσιαστικά, η αγορά των παραγώγων μεταφέρει τον κίνδυνο σε εκείνον ο οποίος μπορεί κάλλιστα να τον διαχειριστεί. Αυτός ήταν και ο σκοπός δημιουργίας της, ασχέτως αν τα τελευταία χρόνια βρέθηκε στο επίκεντρο των συζητήσεων λόγω του γεγονότος ότι αποτέλεσε κατ' εξοχήν αρμόδια για τις πρόσφατες παγκόσμιες οικονομικές κρίσεις, αρχής γενομένης του 2007.

2.2 Είδη χρηματοοικονομικού κινδύνου:

- ⇒ Ρίσκο Αγοράς: Το συγκεκριμένο είδος αγοράς, σχετίζεται με τις μετακινήσεις του επιπέδου ή την μεταβλητότητα των τιμών της αγοράς. Το ρίσκο της αγοράς μπορεί να μετρηθεί με απόλυτα χρηματικά μεγέθη (απόλυτο ρίσκο) ή με σχετικά μεγέθη, π.χ. σε αντιπαράθεση με κάποιον δείκτη (σχετικό ρίσκο). Το πρώτο εστιάζει στην μεταβλητότητα των συνολικών αποδόσεων ενώ το δεύτερο παρουσιάζει την απόκλιση από το συγκεκριμένο σχετικό μέγεθος (π.χ. δείκτης). Το ρίσκο της αγοράς, μπορεί να διαχωριστεί σε ομόρροπο και αντίρροπο. Τα ομόρροπα ρίσκα εμπεριέχουν εκθέσεις προς την κατεύθυνση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών, όπως εκθέσεις στην αγορά των μετοχών ή στα επιτόκια. Στον αντίποδα, τα αντίρροπα ρίσκα αφορούν μη γραμμικές εκθέσεις σε ρίσκο, όπως οι τεχνικές αντιστάθμισης κινδύνου (hedging).
- ⇒ Πιστωτικό Ρίσκο: Δημιουργείται όταν ο αντισυμβαλλόμενος δεν δύναται να εκπληρώσει ή αθετεί τις υποχρεώσεις του συμβολαίου που έχει υπογράψει. Το ρίσκο αυτό προσμετράται σε κεφάλαιο και συγκεκριμένα ισούται με το αντίτιμο που προβλέπεται για να εκπληρωθεί επιτυχώς το υπογεγραμμένο συμβόλαιο. Πολλές φορές αυτού του είδους το ρίσκο επέρχεται σε περιπτώσεις χρεοκοπίας.
- ⇒ Ρίσκο Ρευστότητας: το εν λόγω ρίσκο λαμβάνει δύο μορφές, το ρίσκο ρευστότητας του κεφαλαίου και το ρίσκο ρευστότητας της χρηματοδότησης. Η πρώτη μορφή ρίσκου εμφανίζεται όταν ένα σύνολο τοποθετήσεων σε αγορές δεν μπορεί να ρευστοποιηθεί έγκαιρα στις υπάρχουσες τιμολογιακές συνθήκες λόγω μεγέθους. Η δεύτερη μορφή ρίσκου, αναφέρεται σε ανικανότητα εκπλήρωσης πληρωμών και συνήθως οδηγεί σε πρόωρη ρευστοποίηση των τοποθετήσεων στις αγορές.
- ⇒ Επιχειρησιακό ρίσκο: Προέρχεται από ανθρώπινα και τεχνικά λάθη ή από ατυχήματα. Σε αυτή την κατηγορία υπάγονται περιπτώσεις απάτης και αναποτελεσματικής διαχείρισης, όπως επίσης και περιπτώσεις διακοπής της λειτουργίας τεχνικών-ηλεκτρονικών υποστηρικτικών συστημάτων.

⇒ Νομικό Ρίσκο: Αυτού του είδους το ρίσκο δημιουργείται όταν μια συναλλαγή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί λόγω νομικών προβλημάτων. Το νομικό ρίσκο συνδέεται άμεσα με το πιστωτικό καθώς οι αντισυμβαλλόμενοι οι οποίοι ζημιώνονται από μια συναλλαγή, συνήθως προσπαθούν να προσβάλουν την συναλλαγή αυτή δια της νομικής οδού. Τα νομικά ρίσκα διαχειρίζονται κατόπιν συνεννόησης του νομικού τμήματος των χρηματοπιστωτικών οργανισμών με τους διαχειριστές ρίσκου.

Το μειονέκτημα της εστίασης σε ένα μόνο είδος ρίσκου, είναι ότι κάθε προσπάθεια διαχείρισης του συνήθως μεταβάλλει την έκθεση σε κάποιο άλλο είδος ρίσκου. Για αυτό τον λόγο οι χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί, συνενώνουν την μελέτη τους εφαρμόζοντας συστήματα διαχείρισης ρίσκου για όλη και σε όλη την επιχείρηση.

2.3 Αξία εκτεθειμένη σε ρίσκο (Value at Risk - VAR):

Το εργαλείο του προσδιορισμού της τιμής VAR και της σωστής ερμηνείας του είναι αναμφίβολα ένα από τα σημαντικότερα που διαθέτουμε προς αξιολόγηση του χρηματοοικονομικού ρίσκου, από όπου και αν προέρχεται αυτό. Αυτό το στατιστικό σύστημα διαχείρισης ρίσκου, έχει διεισδύσει πλέον στους μεγαλύτερους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς στον κόσμο. Σήμερα, πολλές τράπεζες, μεσιτικές εταιρείες χρηματοοικονομικών προϊόντων και επενδυτικά ταμεία χρησιμοποιούν την έννοια του VAR ώστε να μειώνουν δραστικά την έκθεσή τους σε ρίσκο. Τι ακριβώς είναι όμως η αξία εκτεθειμένη σε ρίσκο;

⇒ Ορισμός VAR: Ως VAR ορίζεται η χειρότερη δυνατή ζημία που μπορεί να δεχτεί ένας επενδυτικός οργανισμός σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα και σε ένα καθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα ποσοστιαίο σημείο (εκατοστημόριο) της κατανομής των αναμενόμενων κερδών το οποίο αντιστοιχεί στο $1-c$ ποσοστό των παρατηρήσεων της ουράς της κατανομής όταν c είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Το VAR είναι από τα τελευταία εργαλεία που βοήθησαν στην εξέλιξη της διαχείρισης ρίσκου. Μέχρι πρότινος, η κλασική προσέγγιση της διαχείρισης ρίσκου ήταν η εξής:

- Προσδιορισμός των τιμών που δίνουν κάθε πιθανό κέρδος.
- Για να αντιληφθεί κάποιος το ρίσκο, θα μπορούσε να μεταβάλλει τα επίπεδα των τιμών και να παρατηρήσει την επίδραση αυτής της αλλαγής στα κέρδη. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ανάλυση ευαισθησίας.
- Μια άλλη προσέγγιση είναι η ανάλυση σεναρίου όπου ένα ολόκληρο χαρτοφυλάκιο αγαθών υποβάλλεται σε αλλαγές θεμελιωδών χαρακτηριστικών της οικονομίας όπως τα τραπεζικά επιτόκια και ο πληθωρισμός.

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα, ο προσδιορισμός του VAR προχωράει ένα βήμα παραπάνω. Συνδέει την σχέση τιμής- κέρδους με την κατανομή των κερδών, προσφέροντας μια πιθανοθεωρητική σκοπιά στην μελέτη του προβλήματος και δημιουργώντας έτσι ένα άνω φράγμα των πιθανών απωλειών λόγω αναπάντεχης κίνησης των τιμών.

2.4 Μέθοδοι προσδιορισμού της VAR:

Οι προσέγγιση της τιμής VAR γίνεται με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι με **μεθόδους τοπικής αξιολόγησης (local-valuation methods)** και ο δεύτερος τρόπος είναι μέσω **μεθόδων ολικής αξιολόγησης (full-valuation methods)**. Αυτός ο διαχωρισμός, αντανακλά την σχέση μεταξύ ταχύτητας και ακρίβειας. Ταχύτητα συνήθως χρειάζεται σε περιπτώσεις μεγάλων χαρτοφυλακίων τα οποία επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες οι οποίοι είναι εκτεθειμένοι σε ρίσκο. Από την άλλη μεριά, ακρίβεια χρειάζεται σε περιπτώσεις χαρτοφυλακίων των οποίων σημαντικό μέρος είναι τοποθετημένο σε αντίρροπα αγαθά για λόγους αντιστάθμισης κινδύνου ή για κερδοσκοπικούς λόγους. Ας αρχίσουμε την ανάλυσή μας εξηγώντας τα χαρακτηριστικά έκαστης μεθόδου και ποια τα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματά τους.

LOCAL VALUATION:

Αυτού του τύπου οι μέθοδοι μετρούν το ρίσκο αξιολογώντας μια φορά κάθε χαρτοφυλάκιο (την χρονική στιγμή 0) και χρησιμοποιούν τοπικές μερικές παραγώγους ώστε να υπολογίσουν τις μεταβολές. Σε αυτή την παράγραφο, θα αναφερθούμε στην **Delta-Normal** αξιολόγηση (valuation), την πιο γνωστή μορφή τοπικής αξιολόγησης. Αυτή η μέθοδος υποθέτει ότι οι παράγοντες οι οποίοι υπόκεινται σε ρίσκο ακολουθούν την κανονική κατανομή. Η υπόθεση της κανονικότητας μας βοηθά πολύ δεδομένου ότι διευκολύνει πολύ την στατιστική διαδικασία και μεταφέρει την ιδιότητα της κανονικότητας από τους παράγοντες του ρίσκου, σε ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο. Ας αρχίσουμε με την delta valuation η οποία επικεντρώνεται στις μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως. Έστω λοιπόν ένα χρηματοοικονομικό αγαθό –προϊόν το οποίο εξαρτάται από ένα παράγοντα ρίσκου S . Το πρώτο βήμα είναι η τιμολόγησή του με βάση τον παράγοντα S την χρονική στιγμή 0. Δηλαδή, $V_0 = V(S_0)$. Ορίζουμε την παράμετρο Δ_0 ως την μερική παράγωγο πρώτης τάξεως της αξίας του αγαθού V ως προς την μεταβλητή ρίσκου S . Το Δ ονομάζεται «τροποποιημένη διάρκεια»(modified duration) στην περίπτωση χρηματιστηριακών αγαθών σταθερού εισοδήματος όπως οι ομολογιακοί τίτλοι και «δέλτα»(delta) στην περίπτωση των παραγώγων προϊόντων. Για να υπολογίσουμε το Δ του χαρτοφυλακίου μας, απλά αθροίζουμε τα Δ_i των i χρηματοοικονομικών στοιχείων του.

Η πιθανή μεταβολή της αξίας του αγαθού συνεπώς υπολογίζεται ως εξής:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} \Big|_0 ds = \Delta_0 \times dS$$

Αν ο παράγοντας ρίσκου S ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε η τιμή VAR υπολογίζεται ως: $VAR = |\Delta_0| \times VAR_S = |\Delta_0| \times (\alpha \sigma S_0)$, όπου σ είναι η μεταβλητότητα του S και α είναι η τυπική κανονική μεταβλητή για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης, δηλαδή για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% είναι 1.645 και για 99% είναι 2.33.

Παράδειγμα:

Στην περίπτωση χαρτοφυλακίου σταθερού εισοδήματος, ο παράγοντας ρίσκου είναι η απόδοση (yield) y και η σχέση αξίας-απόδοσης είναι $dV = -D^*Vdy$, όπου $D^* = \Delta_0 = \frac{\partial V}{\partial S} |_0$. Σε αυτή την περίπτωση, $VAR = (D^*V) \times (\text{ασ}y_0)$ για όλο το χαρτοφυλάκιο σταθερού εισοδήματος.

Το πόσο καλή είναι η προσέγγιση της μεθόδου, εξαρτάται από το κατά πόσο το χαρτοφυλάκιο είναι καλυμμένο με δικαιώματα προαίρεσης (options) και από τον χρονικό ορίζοντα της μελέτης. Η ποιότητα της τοπικής αυτής μεθόδου αξιολόγησης εξαρτάται άμεσα από την σχέση των στοιχείων που συγκροτούν το χαρτοφυλάκιο. Συγκεκριμένα, η μέθοδος λειτουργεί καλύτερα όταν δεν υπάρχουν πολλές μη-γραμμικές/αντίρροπες σχέσεις στοιχείων μέσα στο χαρτοφυλάκιο και όταν το VAR υπολογίζεται σε μικρότερο χρονικό ορίζοντα.

FULL VALUATION:

Στην περίπτωση κατά την οποία η μέγιστη ζημία δεν δικαιολογείται από μεγάλες μεταβολές του παράγοντα που εμπεριέχει ρίσκο, δηλαδή η σχέση μεταξύ τους είναι μη γραμμική, τότε η τοπική αξιολόγηση και συγκεκριμένα η προσέγγιση με την delta normal μέθοδο θεωρείται καθ' όλα ανεπαρκής. Οι μέθοδοι ολικής αξιολόγησης, υπολογίζουν το ρίσκο επανατιμολογώντας το χαρτοφυλάκιο για ένα σύνολο σεναρίων. Η προσέγγιση της ολικής αξιολόγησης, προϋποθέτει ότι η αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου έχει την μορφή:

$$dV = V(S_1) - V(S_0)$$

όπου οι νέες τιμές S_1 μπορούν να υπολογιστούν μέσω προσομοιωτικών μεθόδων, όπως η μέθοδος Monte-Carlo και η μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης. Προσέγγιση της ολικής αξιολόγησης είναι η πιο ακριβής, δεδομένου ότι τα αποτελέσματά της δεν αλλοιώνονται από τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του χαρτοφυλακίου (γραμμική ή μη). Στην συνέχεια το VAR υπολογίζεται ως το ποσοστημόριο της κατανομής που ακολουθούν οι τιμές του παράγοντα ρίσκου.

DELTA-GAMMA APPROXIMATIONS (THE "GREEKS"):

Κατά την αξιολόγηση Delta-Normal γίνεται χρήση της μεταβολής πρώτης τάξεως (πρώτη μερική παράγωγος) του παράγοντα ρίσκου. Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor ώστε να βελτιστοποιήσουμε την απλή γραμμική προσέγγιση της Delta-Normal.

Ανάπτυγμα Taylor:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \dots = \Delta ds + \frac{1}{2} \Gamma dS^2 + \Theta dt + \dots$$

, όπου Γ είναι η μερική παράγωγος δεύτερης τάξεως της αξίας ως τον παράγοντα ρίσκου και Θ είναι η μερική παράγωγος της αξίας ως προς το χρόνο. Είναι προφανής ο λόγος της ονομασίας "the Greeks".

Στην περίπτωση χαρτοφυλακίου σταθερού εισοδήματος, όπως έχουμε ξαναδεί, η μεταβολή της αξίας υπολογίζεται ως εξής με την προσθήκη ενός παράγοντα μεταβολής δευτέρας τάξεως λόγω αναπτύγματος Taylor:

$$dV = -(D^*V)dy + \frac{1}{2}(CV)dy^2, \text{ όπου } C \text{ ονομάζεται κυρτότητα και συγγενεύει με τον συντελεστή } \Gamma.$$

Η πιο απλή μέθοδος που χρησιμοποιεί το ανάπτυγμα Taylor ονομάζεται delta-gamma-delta μέθοδος και βασίζεται στην μορφή της διακύμανσης του αναπτύγματος αυτού, δηλαδή:

$$var(dV) = \Delta^2 var(ds) + \left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 var(dS^2) + 2\left(\Delta\frac{1}{2}\Gamma\right) cov(dS, dS^2)$$

Αν η μεταβλητή dS ακολουθεί την κανονική κατανομή τότε ο παράγοντας της συνδιακύμανσης μηδενίζεται και τελικά το VAR υπολογίζεται από την σχέση: $VAR = \alpha \sqrt{(\Delta S \sigma)^2 + 1/2 (\Gamma S^2 \sigma^2)^2}$

Μια δεύτερη μέθοδος είναι η delta-gamma-Monte Carlo, η οποία δημιουργεί προσομοιώσεις του παράγοντα ρίσκου S και στην συνέχεια χρησιμοποιεί το ανάπτυγμα Taylor για να προσομοιώσει τις αλλαγές στην αξία του χρηματοοικονομικού αγαθού. Για άλλη μια φορά το VAR βρίσκεται από την κατανομή που δημιουργείται μετά την προσομοίωση με Monte Carlo.

Στην περίπτωση χαρτοφυλακίου με περισσότερα του ενός στοιχεία, τότε το dS γίνεται πλέον διάνυσμα n μεταβολών, το Δ γίνεται επίσης διάνυσμα n στοιχείων και τέλος το Γ γίνεται ένας $n \times n$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία έχουν την μορφή $\Gamma_{i,j} = \frac{\partial^2 V}{\partial s_i \partial s_j}$ με $i, j = 1, 2, \dots, n$, έτσι ώστε το ανάπτυγμα Taylor να πάρει την μορφή:

$$dV(S) = \Delta' dS + \frac{1}{2} (dS)' \Gamma (dS) + \dots$$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ:

- ⇒ Για μεγάλα χαρτοφυλάκια, στα οποία τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα δεν έχουν σημαντική παρουσία, η delta-normal μέθοδος προσφέρει μια γρήγορη και αποτελεσματική λύση για την μέτρηση του VAR.
- ⇒ Σε χαρτοφυλάκια τα οποία είναι εκτεθειμένα σε λίγους παράγοντες ρίσκου και αποτελούνται από πολλούς τίτλους παραγώγων, η μέθοδος των "Greeks" προσφέρει υψηλή ακρίβεια και χαμηλό υπολογιστικό κόστος.
- ⇒ Σε χαρτοφυλάκια με πολλά παράγωγα προϊόντα συνήθως χρειάζονται μέθοδοι ολικής αξιολόγησης.

2.4.1 Μέθοδος Delta-Normal:

Ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από N χρεόγραφα των οποίων η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή θα έχει απόδοση:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,t+1}$$

όπου $w_{i,t}$ είναι το βάρος κάθε χρεογράφου την χρονική στιγμή t . Εφόσον η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ένας γραμμικός συνδυασμός κανονικών μεταβλητών, τότε και αυτή θα είναι κανονική. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την διακύμανση του χαρτοφυλακίου, δεν έχουμε παρά να δουλέψουμε ως εξής: $var(R_{p,t+1}) = w_t' \Sigma_{t+1} w_t$, με Σ_{t+1} την πρόβλεψη του πίνακα διασποράς για την επόμενη χρονική στιγμή.

Η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου έχει ως εξής:

1. Προσδιορισμός των παραγόντων που δημιουργούν ρίσκο.
2. Υπολογισμός της γραμμικής έκθεσης (ρυθμός μεταβολής της αξίας σε σχέση με τον κάθε παράγοντα ρίσκου) όλων των στοιχείων στους παράγοντες ρίσκου.
3. Συνένωση αυτών των εκθέσεων για όλα τα στοιχεία του χαρτοφυλακίου.
4. Προσδιορισμός του πίνακα συνδιακύμανσης Σ για όλους τους παράγοντες ρίσκου.
5. Υπολογισμός συνολικού ρίσκου για το χαρτοφυλάκιο.

Οι εκθέσεις του χαρτοφυλακίου σε όλα τα στοιχεία συγκροτούν τα διανύσματα $x_{i,t}$, τότε το VAR του χαρτοφυλακίου είναι $VAR = \alpha \sqrt{x_t' \Sigma_{t+1} x_t}$

Πλεονεκτήματα:

1. Εύκολη εφαρμογή λόγω απλών πράξεων πινάκων.
2. Υπολογιστικά γρήγορη μέθοδος.
3. Λόγω του εύκολου τύπου υπολογισμού που χρησιμοποιείται η VAR επιδέχεται εύκολα ανάλυση για κάθε αλλαγή των παραγόντων ρίσκου.

Μειονεκτήματα:

1. Εμφανίζει πρόβλημα όταν οι ουρές της κανονικής κατανομής είναι παχιές και αυτό διότι η VAR προσδιορίζεται ως ποσοστημόριο στην αριστερή ουρά.
2. Η μέθοδος δεν υπολογίζει σωστά τις μη-γραμμικότητες που εμφανίζονται λόγω ύπαρξης παραγώγων προϊόντων (όπως τα δικαιώματα προαίρεσης) στο χαρτοφυλάκιο διότι συνήθως παρουσιάζονται ασυμμετρίες στις κατανομές τους.

2.4.2 Μέθοδος της Ιστορικής Προσομοίωσης:

Πρόκειται για μια μέθοδο ολικής «προς τα πίσω» αξιολόγησης δεδομένου ότι αξιολογεί ιστορικές αποδόσεις ως εξής:

$$R_{p,k} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,k} \quad , k = 1, \dots, t$$

Η εν λόγω απόδοση είναι η ιστορική απόδοση του χαρτοφυλακίου. Οι υποθετικές μελλοντικές τιμές υπολογίζονται έπειτα από την εφαρμογή των ιστορικών αλλαγών (στις τιμές) στην τρέχουσα τιμή:

$S_{i,k}^* = S_{i,0} + \Delta S_{i,k}$, $i = 1, \dots, N \Rightarrow V_k^* = V(S_{i,k}^*)$ από όπου λαμβάνουμε την νέα αξία $V_{p,k}^*$ του χαρτοφυλακίου και υπολογίζουμε την υποθετική απόδοση της προσομοίωσης k ως: $R_{p,k} = \frac{V_k^* - V_0}{V_0}$. Η τιμή της VAR υπολογίζεται στην συνέχεια από την κατανομή των υποθετικών αποδόσεων.

Πλεονεκτήματα:

1. Εύκολη χρήση, ιδίως αν υπάρχει άμεση επαφή με την προϊστορία των στοιχείων του χαρτοφυλακίου.
2. Δεν χρειάζεται ο υπολογισμός του πίνακα συνδιακύμανσης παρά μόνο η χρονοσειρά που προσδιορίζει την απόδοση του χαρτοφυλακίου κατά την πάροδο του χρόνου.
3. Η μέθοδος προσδιορίζει από μόνη της τον χρονικό ορίζοντα κατά τον οποίο μετριέται το VAR και αυτό γιατί τα δεδομένα του χαρτοφυλακίου μελετώνται μεταξύ σταθερού χρονικού ορίζοντα. Για παράδειγμα οι τιμές ενός χαρτοφυλακίου μελετημένες καθημερινά θα δώσουν ένα VAR για το διάστημα μίας μέρας, ενώ οι τιμές ανά μήνα θα δώσουν VAR για ένα μήνα.
4. Όλη η πληροφορία που χρειαζόμαστε αντικατοπτρίζεται στις τιμές, επομένως δεν μας απασχολούν μη-γραμμικότητες και στοιχεία τα οποία δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή. Επίσης η αξιολόγηση που γίνεται είναι ολική.
5. Η μέθοδος δεν χρησιμοποιεί μοντέλα αξιολόγησης, επομένως δεν εξαρτάται από τα σφάλματά τους.

Μειονεκτήματα:

1. Χρειαζόμαστε συνεχείς χρονικά παρατηρήσεις για μεγάλα χρονικά διαστήματα.
2. Στηρίζεται στην υπόθεση ότι το παρελθόν μπορεί να προσδιορίσει επαρκώς το μέλλον, κάτι ιδιαίτερα δύσκολο δεδομένου των μεγάλων διακυμάνσεων και απρόβλεπτων τάσεων των σημερινών αγορών.
3. Η προσέγγιση θεωρεί ότι κάθε στοιχείο του χαρτοφυλακίου έχει το ίδιο «βάρος».

2.4.3 Μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo:

Πρώτο βήμα της μεθόδου είναι ο προσδιορισμός της στοχαστικής ανέλιξης των χρηματοοικονομικών παραμέτρων. Δεύτερο βήμα είναι ο προσδιορισμός υποθετικών τιμών υπό τον αλγόριθμο της μεθόδου Monte Carlo (MC) για όλες τις μεταβλητές που επηρεάζουν το χαρτοφυλάκιο. Ακολουθείται ολική αξιολόγηση για κάθε χρονικό σενάριο όπως στην μέθοδο ιστορικής προσομοίωσης ($V_k^* = V(S_{i,k}^*)$). Όλες αυτές οι υποθετικές αξίες στην συνέχεια βοηθούν στην άμεση κατασκευή της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Από την κατανομή αυτή υπολογίζεται η τιμή VAR κατά τα γνωστά. Είναι φανερό ότι η μέθοδος αυτή παρουσιάζει πολλά κοινά με την μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης με την διαφορά ότι οι διαφορές των παραγόντων ρίσκου δεν προέρχονται από ιστορικά δεδομένα αλλά προσομοιώνονται μέσω του αλγορίθμου προσέγγισης της μεθόδου MC.

Πλεονεκτήματα:

1. Θεωρείται η πιο ισχυρή μέθοδος υπολογισμού VAR διότι δεν επηρεάζεται από τα ρίσκα των τιμών που διαχειρίζεται, τις μη-γραμμικότητες και το ρίσκο της διακύμανσης.
2. Στο μοντέλο της μεθόδου αφομοιώνεται και η πάροδος του χρόνου η οποία μπορεί να προκαλέσει δομικές αλλαγές στο χαρτοφυλάκιο, όπως η λήξη των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Μειονεκτήματα:

1. Υπολογιστικά χρονοβόρα μέθοδος. Ενδεικτικά δείγμα 1000 στοιχείων χρειάζεται 1.000.000 υπολογισμούς.
2. Η εφαρμογή της είναι δύσκολη και απαιτεί κατάλληλο λογισμικό.
3. Επειδή η μέθοδος χρησιμοποιεί συγκεκριμένα είδη στοχαστικών ανελίξεων είναι επιρρεπείς σε σφάλματα μοντελοποίησης.
4. Οι τιμές της VAR που προκύπτουν από την μέθοδο MC δεν παραμένουν σταθερές όσο αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος, τόσο καλύτερες είναι οι προσεγγίσεις και κατ' επέκταση τόσο καλύτερη και η εκτίμηση της VAR.

2.5 Εφαρμογή της μεθόδου Delta-Normal για τον υπολογισμό της τιμής VAR:

Τα είδη των χαρτοφυλακίων είναι όσα και τα είδη των χρηματοοικονομικών συμβολαίων που περιέχουν αλλά και όσα οι αντίστοιχοι συνδυασμοί τους. Όπως είναι φυσικό, υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί αγαθών τα οποία συγκροτούν μια τεράστια γκάμα χαρτοφυλακίων. Από τις μεθόδους που περιγράφηκαν παραπάνω, η μέθοδος Delta-Normal είναι η πιο εύκολα εφαρμόσιμη. Αυτό διότι το μόνο προαπαιτούμενο για την μελέτη του ρίσκου στο χαρτοφυλάκιο είναι ο προσδιορισμός του πίνακα συνδιακύμανσης Σ των παραγόντων που προκαλούν το ρίσκο. Στην συνέχεια χρειαζόμαστε το διάνυσμα x το οποίο δηλώνει την έκθεση του χαρτοφυλακίου σε κάθε παράγοντα ρίσκου. Για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης και άρα αντίστοιχο α , το $VAR = \alpha \sqrt{x' \Sigma x}$. Αν είχαμε εύκαιρο τον πίνακα συσχετίσεων R τότε ο πίνακας Σ θα είχε την μορφή $\Sigma = S'RS$ όπου S είναι ένας διαγώνιος πίνακας, με στοιχεία της διαγωνίου του, τις αντίστοιχες διακυμάνσεις των παραγόντων ρίσκου και στις υπόλοιπες θέσεις μηδενικά. Το διάνυσμα ρίσκου είναι το: $V = (\alpha\sigma)$ και κατ' επέκταση, η τιμή του $VAR = \sqrt{x'(\alpha S'RS\alpha)x} = \sqrt{(x \times V)'R(x \times V)}$.

2.5.1 Εφαρμογή σε ισοτιμίες νομισμάτων:

Μια Αμερικάνικη επιχείρηση εξάγει το προϊόν της στην Αγγλία, στην Γερμανία και την Ιαπωνία. Το ύψος των ετήσιων εξαγωγών ανά χώρα είναι ίσο και αντιστοιχεί σε \$120.000.000 . Επομένως, λαμβάνει ετησίως \$120.000.000 σε Αγγλικές Λίρες, \$120.000.000 σε Ευρώ και \$120.000.000 σε Ιαπωνικό Yen. Η επιχείρηση αυτή λοιπόν διατηρεί 3 συναλλαγματικούς λογαριασμούς σε ένα χαρτοφυλάκιο και ετησίως λαμβάνει τα παραπάνω ποσά στα αντίστοιχα νομίσματα. Στόχος μας είναι ο προσδιορισμός του ημερησίου VAR για το χαρτοφυλάκιο της επιχείρησης σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Ημερησίως λοιπόν λαμβάνει \$480.000 δηλαδή $\frac{\$120.000.000}{250 \text{ ημέρες αγορών}}$ από κάθε αντίστοιχο λογαριασμό κάθε νομίσματος. Αυτά τα ισομερή ποσά συγκροτούν το διάνυσμα x έκθεσης του χαρτοφυλακίου στον κίνδυνο. Πρώτο και βασικότερο βήμα είναι η συλλογή δεδομένων (υπολογισμός των αντίστοιχων ημερησίων αποδόσεων) και η κατασκευή του πίνακα συσχετίσεων R . Για το παραπάνω παράδειγμα και με δεδομένα ετήσιας βάσης (16/5/2013-16/5/2014) ο πίνακας συσχετίσεων των τριών αυτών ισοτιμιών είναι:

Correlation matrix (R)			
	<i>gbp</i>	<i>euro</i>	<i>jpy</i>
<i>gbp</i>	1	0,608694805	0,373077409
<i>euro</i>	0,608694805	1	0,437540984
<i>jpy</i>	0,373077409	0,437540984	1

Πίνακας 2.1: Πίνακας συσχετίσεων μεταξύ των τριών ισοτιμιών

Και ο αντίστοιχος πίνακας διακυμάνσεων S είναι:

volatilities(S)		
0,004350424	0	0
0	0,004180757	0
0	0	0,006176431

Πίνακας 2.2: Πίνακας των τυπικών αποκλίσεων των τριών ισοτιμιών

Επίσης το διάνυσμα ρίσκου $V = (\alpha\sigma) = 1.65\sigma$ είναι το:

	Risk $V=\alpha\sigma$
<i>gbp</i>	0,007178199
<i>euro</i>	0,006898249
<i>jpy</i>	0,010191111

Πίνακας 2.3: Το διάνυσμα ρίσκου για το χαρτοφυλάκιο

Δεύτερο βήμα είναι ο υπολογισμός του πίνακα ρίσκου $(\alpha S)'R(S\alpha)$ ο οποίος στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι :

	(aS)'R(aS)	
5,15265E-05	3,0141E-05	2,7292E-05
3,01407E-05	4,7586E-05	3,07595E-05
2,7292E-05	3,0759E-05	0,000103859

Πίνακας 2.4: Πίνακας ρίσκου για το χαρτοφυλάκιο

Τρίτο βήμα είναι ο πολλαπλασιασμός του παραπάνω πίνακα με το διάνυσμα των εκθέσεων στο ρίσκο x, πρώτα εκ δεξιών και στην συνέχεια εκ αριστερών:

	(aS)'R(aS)		x	Result
5,15265E-05	3,01407E-05	2,7292E-05	0,48	5,23005E-05
3,01407E-05	4,75858E-05	3,07595E-05	0,48	5,20733E-05
2,7292E-05	3,07595E-05	0,000103859	0,48	7,77169E-05

Πίνακας 2.5: Πολλαπλασιασμός του πίνακα ρίσκου με το διάνυσμα εκθέσεων σε αυτό

Ο πολλαπλασιασμός εξ αριστερών του παραπάνω αποτελέσματος, δίνει ως αποτέλεσμα την τιμή του «συνθετικού» VAR υψωμένη στο τετράγωνο, η οποία ισούται με $8,74035E-05$, επομένως το ημερήσιο συνθετικό $VAR = \$0,009348986$ εκατομμύρια για το χαρτοφυλάκιο. Με άλλα λόγια η επιχείρηση θα μπορούσε να χάσει εν δυνάμει \$9.348 κατά την διάρκεια μίας ημέρας, λόγω της έκθεσής της στον συναλλαγματικό κίνδυνο. Για να υπολογίσουμε τις τιμές VAR για κάθε ισοτιμία τότε πρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές β_i . Ο υπολογισμός τους γίνεται απλά διαιρώντας το αποτέλεσμα του παραπάνω πίνακα με την τιμή του συνθετικού VAR^2 . Έπειτα, πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του διανύσματος των συντελεστών β με τα αντίστοιχα στοιχεία του διανύσματος που προκύπτει όταν πολλαπλασιάσουμε το διάνυσμα x με την τιμή VAR έχουμε:

	β	xVAR	component VAR
gbp	0,598379365	0,004487513	0,002685235
euro	0,595780326	0,004487513	0,002673572
jpy	0,889173642	0,004487513	0,003990179
		sum	0,009348986

Πίνακας 2.6: Υπολογισμός ημερήσιου συνθετικού VAR και διαχωρισμός του σε συνιστώσες σύμφωνα με το εκάστοτε συστημικό ρίσκο (β)

Τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα μας πληροφορούν ότι η επιχείρηση κινδυνεύει να χάσει ημερησίως \$2.685 λόγω διακυμάνσεων της Αγγλικής λύρας, \$2.674 λόγω των διακυμάνσεων του Euro και τέλος \$3.990 λόγω διακύμανσης στο Ιαπωνικό YEN.

Ο αναλυτικός ορισμός της VAR δηλαδή $VAR = xV = x'(αS)$ δίνει ελαφρώς μεγαλύτερη τιμή για την κάθε ισοτιμία ξεχωριστά:

	VAR=xV	
gbp	0,003445536	Με συνολική τιμή VAR ίση με \$11.648 ημερησίως για όλο το χαρτοφυλάκιο.
euro	0,003311159	
jpy	0,004891733	
sum	0,011648428	

Οι παραπάνω πληροφορίες είναι πολύ χρήσιμες για την σωστή χάραξη της πολιτικής διαχείρισης ρίσκου της επιχείρησης. Είναι φανερό ότι διατρέχει τον μεγαλύτερο κίνδυνο λόγω του Ιαπωνικού νομίσματος. Ίσως λοιπόν η επιχείρηση επιλέξει την αντιστάθμιση του κινδύνου μέσω χρηματοοικονομικών μέσων, αγορά μονάδων παραγωγής ή αλλαγή χώρας εξαγωγής. Όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα, η VAR είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο στα χέρια της εν λόγω επιχείρησης.

2.5.2 Εφαρμογή σε χαρτοφυλάκιο σταθερού εισοδήματος:

Με τον όρο σταθερό εισόδημα, συνήθως θεωρούμε επενδύσεις σε ομολογιακούς τίτλους. Σύμφωνα με την χρηματοοικονομική θεωρία, ομόλογα είναι δανειακοί τίτλοι σύμφωνα με τους οποίους ο εκδότης του τίτλου (issuer), είναι υποχρεωμένος να εκπληρώνει στον κάτοχο του τίτλου αυτού (holder) επιτόκιο ανά τακτά διαστήματα (interest-coupon) μέχρι μία συγκεκριμένη ημερομηνία (maturity date) κατά την οποία θα επιστρέψει και το αρχικό επενδεδυμένο ποσό.

Ένα χαρτοφυλάκιο με ομολογιακούς τίτλους, σπάνια χαρακτηρίζεται από σταθερές χρηματικές ροές. Επομένως οι παράγοντες ρίσκου που το διέπουν και το καθορίζουν, μπορεί να είναι από λίγοι έως πολλοί. Άπαξ και έχουν τεθεί οι παράγοντες ρίσκου, το επόμενο σημαντικό βήμα είναι η σωστή «χαρτογράφηση» των εκθέσεων του χαρτοφυλακίου στους παράγοντες αυτούς. Κατά τον Philippe Jorion και το σύγγραμμά του Value at Risk οι τρόποι χαρτογράφησης του χαρτοφυλακίου είναι τρεις:

1. Κύρια χαρτογράφηση: το ομολογιακό ρίσκο σχετίζεται με την ημερομηνία λήξης του κάθε ομολόγου και την αντίστοιχη τιμή αγοράς του.
2. Χαρτογράφηση διάρκειας: το ρίσκο συνδέεται με εκείνο του ομολόγου μηδενικού επιτοκίου με ημερομηνία λήξης ίση με την «διάρκεια» του ομολόγου².
3. Χαρτογράφηση χρηματικών ροών: το ρίσκο του χαρτοφυλακίου σταθερού εισοδήματος αποδομείται σε κάθε μία από τις ομολογιακές χρηματικές ροές.

Δανειζόμενοι το παράδειγμα του P.Jorion υποθέτουμε χαρτοφυλάκιο με δύο ομολογιακούς τίτλους στους οποίους τοποθετούμε συνολικά \$200.000.000 . Συγκεκριμένα, έστω ότι \$100.000.000 είναι τοποθετημένα σε ένα 5-ετές ομόλογο επιτοκίου 6% και \$100.000.000 είναι τοποθετημένα σε ένα 1-ετές ομόλογο επιτοκίου 4%. Το χαρτοφυλάκιο έχει μέση ημερομηνία λήξης τα 3 έτη και διάρκεια (duration) ίση με 2,733 χρόνια. Από στατιστική μελέτη των συσχετίσεων και των διακυμάνσεων των Αμερικάνικων κρατικών ομολόγων μηδενικού επιτοκίου (zero coupon bonds) διαφόρων λήξεων, γνωρίζουμε ότι ισχύει το παρακάτω δiάνυσμα ρίσκου από το οποίο μπορούμε εύκολα να εξάγουμε την τιμή VAR της επένδυσης που μας ενδιαφέρει.

² Διάρκεια ομολόγου (Duration): $D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \cdot C}{(1+i)^t} + \frac{n \cdot M}{(1+i)^n}}{P}$, όπου n = αριθμός χρηματικών ροών, t = χρόνος μέχρι την λήξη, C = χρηματική ροή, i = απόδοση, M = αρχική αξία ομολόγου, P = τιμή ομολόγου $P = C * \frac{[1 - \frac{1}{(1+i)^n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$

Αποτελεί ένα μέτρο της ταχύτητας αποπληρωμής του ομολόγου και κατ' επέκταση αποτελεί μια προσέγγιση της ευαισθησίας του ομολόγου στις μεταβολές του επιτοκίου

Έτος	Ρίσκο (V)%
1	0,470
2	0,987
3	1,484
4	1,971
5	2,426

Πίνακας 2.7: Το ρίσκο του χαρτοφυλακίου ανά έτος

Κατά την κύρια χαρτογράφηση όλες οι χρηματικές ροές συγκεντρώνονται στην μέση ημερομηνία λήξης των δύο ομολόγων, δηλαδή τα 3 έτη. Επομένως, η τιμή του VAR για το χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με το 3-ετές ρίσκο θα είναι $VAR = \$200\text{εκατ.} \times 1,484\% = \$2,97 \text{εκατ.}$. Αυτή η προσέγγιση λογικά φαίνεται πολύ απλή και όντως είναι αλλά έχει ένα πολύ σημαντικό ελάττωμα: δεν παρουσιάζει την πραγματική εικόνα του ρίσκου εφόσον αγνοεί τις ενδιάμεσες πληρωμές επιτοκίων.

Το επόμενο βήμα προς μεγαλύτερη ακρίβεια μέτρησης του ρίσκου για το χαρτοφυλάκιο είναι η χαρτογράφηση διάρκειας. Και σε αυτή την περίπτωση, οι χρηματικές ροές συγκεντρώνονται στην χρονική τιμή της μέσης διάρκειας του χαρτοφυλακίου η οποία υπολογίστηκε στα 2,733 έτη. Για τον υπολογισμό του αντίστοιχου ρίσκου του χαρτοφυλακίου χρειαζόμαστε την μέθοδο της παρεμβολής (interpolation) η οποία μας δίνει το εξής αποτέλεσμα: $\frac{x-0,987}{2,733-2} = 1,484 - 0,987 \Rightarrow x = 1,351\%$ ρίσκο. Επομένως το VAR υπολογίζεται $VAR = \$200\text{εκατ.} \times 1,351\% = \$2,7\text{εκατ.}$, μια τιμή πιο ακριβής από την προηγούμενη μέθοδο χαρτογράφησης.

Θα παρατηρήσουμε την εφαρμογή της μεθόδου χαρτογράφησης χρηματικών ροών με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα:

	Έτος	Χρηματικές Ροές(εκατ.)		Επιτόκιο Αγοράς	Χαρτογράφηση(εκατ.)		
		5-ετές	1 έτους		Κύρια	Διάρκειας	Χρηματικών Ροών
	1	\$6	\$104	4,000%	\$0,00	\$0,00	\$105,77
	2	\$6	\$0	4,618%	\$0,00	\$0,00	\$5,48
D=	2,733	-	-		-	\$200,00	-
	3	\$6	\$0	5,192%	\$200,00	\$0,00	\$5,15
	4	\$6	\$0	5,716%	\$0,00	\$0,00	\$4,80
	5	\$106	\$0	6,112%	\$0,00	\$0,00	\$78,79
	Σύνολο				\$200,00	\$200,00	\$200,00
					εκατ.	εκατ.	εκατ.

Πίνακας 2.8: Εφαρμογή των τριών μεθόδων χαρτογράφησης

Η χαρτογράφηση των χρηματικών ροών αποτελείται από τον διαχωρισμό των χρηματικών ροών ανά διαδοχικές ημερομηνίες λήξης των ομολόγων για τις οποίες έχουμε διαθέσιμες τις αντίστοιχες διακυμάνσεις. Κάθε χρηματική ροή παρουσιάζεται σύμφωνα με την παρούσα αξία του χρήματος μειωμένη ανάλογα με το πρόβον επιτόκιο της αγοράς.

Η τιμή του VAR υπολογίζεται με την χρήση της μεθόδου χαρτογράφησης προσφέροντας μία πολύ καλύτερη προσέγγιση ως εξής:

Έτος	Χρηματικές Ροές(εκατ.)	VAR (xV)	Πίνακας Συσχετίσεων R					Διαχωρισμένο VAR
			1ο Έτος	2ο Έτος	3ο Έτος	4ο Έτος	5ο Έτος	
1	\$105,77	\$0,497	1					\$0,45
2	\$5,48	\$0,054	0,897	1				\$0,05
3	\$5,15	\$0,076	0,886	0,991	1			\$0,08
4	\$4,80	\$0,095	0,886	0,976	0,994	1		\$0,09
5	\$78,79	\$1,911	0,855	0,966	0,988	0,998	1	\$1,90
Σύνολο	\$200,00	\$2,634						\$2,57

Πίνακας 2.9: Χρήση της μεθόδου χαρτογράφησης των χρηματικών ροών για τον υπολογισμό της τιμής VAR

Ο αναλυτικός ορισμός του VAR δίνει $VAR = \sum_{i=1}^N |x_i| V_i = \$2,634$ εκατομμύρια ενώ ο υπολογισμός του VAR μέσω χρονικής διάσπασης του στα επιμέρους έτη δίνει συνολικό αποτέλεσμα $VAR = \$2,57$ εκατομμύρια (σύμφωνα με την μεθοδολογία που ακολουθήσαμε στο συναλλαγματικό χαρτοφυλάκιο). Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο δεν μπορεί να χάσει παραπάνω από

\$2,57 εκατομμύρια σε διάστημα 1 μηνός σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

Παρατηρούμε ότι η τιμή VAR ανά μέθοδο χαρτογράφησης φθίνει. Το γεγονός αυτό είναι θεμιτό διότι η μέτρηση της πραγματικής αξίας σε ρίσκο γίνεται ολοένα και πιο ακριβής. Η διαφορά μεταξύ $VAR_{duration}$ και διαχωρισμένο $VAR_{\text{χρηματικών ροών}}$ είναι $\$2,7 - \$2,57 \text{ εκατ.} = \$130.000$. Από αυτό το ποσό, $\$70.000 (= \$2,7 - \$2,63 \text{ εκατ.})$ οφείλεται σε διαφορές διακύμανσης των ομολογιακών αποδόσεων στις αντίστοιχες χρονικές λήξεις και $\$60.000 (= \$2,63 - \$2,57 \text{ εκατ.})$ οφείλεται σε μη τέλειες συσχετίσεις.

2.5.3 Εφαρμογή σε προθεσμιακά συμβόλαια(forwards):

Αυτού του είδους τα συμβόλαια, αν και ανήκουν στα παράγωγα προϊόντα, αποτελούν περιπτώσεις απλών γραμμικών σχέσεων της αξίας τους με τις τιμές της αγοράς.

Ένα χρήσιμο παράδειγμα είναι εκείνο των προθεσμιακών συμβολαίων που αφορούν τις ισοτιμίες ξένου συναλλάγματος. Για να υπολογιστεί η αξία ενός forward, χρειαζόμαστε τον ορισμό των:

- Την παρούσα αξία μίας μονάδας του υποκείμενο αγαθού στις αγορές: S_t
- Την μελλοντική αξία του αγαθού αυτού, όπως αναγράφεται στο συμβόλαιο: K
- Το επιτόκιο ασφαλείας για το νόμισμα αναφοράς: r
- Το επιτόκιο ασφαλείας για το νόμισμα αγοράς: r^*
- Χρόνος λήξης: T

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την τρέχουσα αξία του προθεσμιακού συμβολαίου αγοράς μιας μονάδας ξένου συναλλάγματος σε τιμή K μετά από χρόνο T . Για να το κάνουμε αυτό ας αναλογιστούμε δύο ισοδύναμες επενδυτικά εναλλακτικές:

- 1) Ο επενδυτής αγοράζει e^{-r^*T} μονάδες του νομίσματος (αναγωγή στην τρέχουσα αξία) στην τιμή S_t και τις διαφυλάττει για T χρόνο. Η επένδυση αυτή θα αυξήσει την αξία της με τον χρόνο, σε μια μονάδα της μελλοντικής αξίας του νομίσματος

2) Ο επενδυτής γίνεται κάτοχος ενός προθεσμιακού συμβολαίου για να αγοράσει μια μονάδα του νομίσματος μετά από περίοδο T . Το συμβόλαιο κοστίζει f_t και με την πληρωμή αυτού έχουμε την δυνατότητα πληρωμής K στο μέλλον με τρέχουσα αξία Ke^{-rT} .

Αφού οι παραπάνω θέσεις είναι οικονομικά ισότιμες (οδηγούν στην μια μονάδα του αγαθού μετά από χρόνο T) θα έχουμε την εξής έκφραση για την αξία του προθεσμιακού συμβολαίου:

$$f_t = S_t e^{-r^*T} - Ke^{-rT}$$

Ένας επενδυτής υπογράφει **προθεσμιακό συμβόλαιο ενός έτους** για την αγορά £1.000.000 με αντάλλαγμα \$1.679.000.

Η τιμή του VAR του εν λόγω συμβολαίου μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα:

Συνιστώσα	Τιμή	VAR (%)	Συσχετίσεις(R)		
			UK bill rate	US bill rate	GBP/USD spot
UK bill rate	2,77%	0,11938%	1	0,883585478	0,076968637
US bill rate	2,53%	0,13155%	0,883585478	1	0,01148537
GBP/USD spot	\$1,6830	0,29187%	0,076968637	0,01148537	1
GBP/USD fwd	\$1,6790				

Πίνακας 2.10: Αναλυτικός πίνακας υπολογισμού VAR για το προθεσμιακό συμβόλαιο

Αν λάβουμε την μερική παράγωγο της συνάρτησης αξίας του προθεσμιακού συμβολαίου, έχουμε:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial r^*} dr^* + \frac{\partial f}{\partial r} dr$$

$$= (e^{-r^*T})dS - S(e^{-r^*T})Tdr^* + K(e^{-rT})Tdr$$

Εναλλακτικά μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα ασφαλή επιτόκια με τις τιμές των ομολόγων που μας τα εξασφαλίζουν. Συγκεκριμένα αντικαθιστούμε: $P = e^{-rT}$, $P^* = e^{-r^*T}$ και τα αντίστοιχα dP, dP^* με αποτέλεσμα:

$$df = (Se^{-r^*T})\frac{dS}{S} + (Se^{-r^*T})\frac{dP^*}{P^*} - (Ke^{-rT})\frac{dP}{P}$$

άρα ισχύει η έκφραση

"Προθεσμιακό Συμβόλαιο Αγοράς"

=

"Αγορά συναλλάγματος σε τρέχουσες τιμές" + "Αγορά Αγγλικού ομολόγου" +
"Πώληση Αμερικάνικου ομολόγου "

Κατά συνέπεια, η χαρτογράφηση των χρηματικών ροών έχει την παρακάτω μορφή:

Θέση	Συντελεστής τρέχουσας αξίας	Χρηματικές Ροές	Τρέχουσα αξία χρηματικών	Ατομικό VAR (xV)	Διαχωρισμένο VAR (βxVAR)
UK bill rate	0,97268013	£ 1	\$1,6370	\$0,0020	0,000147571
US bill rate	0,97501736	\$ -1,6790	-\$1,6371	\$0,0022	0,000775474
GBP/USD spot			\$1,6371	\$0,0048	0,000246549
			Σύνολο	\$0,00889	0,001169594

Πίνακας 2.11: Χαρτογράφηση των χρηματικών ροών για τον υπολογισμό του ατομικού και διαχωρισμένου VAR

Ο επενδυτής-κάτοχος του συμβολαίου κινδυνεύει να χάσει μέχρι \$8.890 σε διάστημα ενός μηνός και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Αυτό είναι το αποτέλεσμα της τιμής VAR για ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει τις παραπάνω θέσεις (ουσιαστικά μόνο το προθεσμιακό συμβόλαιο) και αυτές δεν συσχετίζονται καθόλου. Η τιμή του διαχωρισμένου VAR, δηλαδή η τιμή εκείνη η οποία προκύπτει από τον συνυπολογισμό των συσχετίσεων μεταξύ των θέσεων μας δίνει αποτέλεσμα \$1.169 . Συμπερασματικά παρατηρούμε ότι λόγω συσχετίσεων των θέσεων ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου με το προθεσμιακό συμβόλαιο κινδυνεύει να χάσει λόγω διακύμανσης της αγοράς ένα ποσό περίπου 80% μικρότερο από αυτό που αρχικά υπολογίσαμε.

2.5.3 Εφαρμογή σε προθεσμιακά συμβόλαια εμπορευμάτων και πολύτιμων μετάλλων:

Τα συμβόλαια αυτού του είδους μας βοηθούν να «κλειδώνουμε τιμές» στα προϊόντα αυτά. Οι τιμές τους δέχονται πολύ μεγαλύτερες πιέσεις και έχουν μεγαλύτερη διακύμανση από τα αντίστοιχα συμβόλαια που αφορούν νομίσματα. Αυτό διότι οι τιμές των αγαθών από τα οποία εξαρτώνται έχουν συνήθως ισχυρές διακυμάνσεις. Λαμβάνοντας το διαφορικό της σχέσης $f_t = S_t e^{-r^*T} - K e^{-rT}$ έχουμε $df = \frac{\partial f}{\partial K} dK = e^{-rT} K \frac{dK}{K}$.

Για να υπολογιστεί το VAR του συμβολαίου, πρέπει να υπολογιστεί η τρέχουσα αξία της μελλοντικής τιμής μιας μονάδας του αγαθού (τιμή αναφοράς του συμβολαίου K), με την διαδικασία που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αφού έχουμε αυτή την τιμή στα χέρια μας μπορούμε πλέον απλά να την πολλαπλασιάσουμε με την ποσότητα η οποία αναγράφεται στο συμβόλαιο, να πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστοιχο συντελεστή του ρίσκου (V σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης) που έχουμε υπολογίσει κατά την στατιστική μελέτη μας και ως αποτέλεσμα της πράξης αυτής λαμβάνουμε την τιμή VAR.

2.5.5 Εφαρμογή σε προθεσμιακές συμβάσεις επιτοκίων:

Οι προθεσμιακές συμβάσεις επιτοκίων (forward rate agreements- FRAs) είναι προθεσμιακά συμβόλαια τα οποία επιτρέπουν στον κάτοχό τους να «κλειδώσει» ένα συγκεκριμένο επιτόκιο δανεισμού, μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή. Ουσιαστικά ο αγοραστής του συμβολαίου «κλειδώνει» επιτόκιο για να δανειστεί ενώ ο πωλητής του συμβολαίου «κλειδώνει» επιτόκιο για να δανείσει. Αν στην συμφωνημένη ημερομηνία το επιτόκιο του FRA διαφέρει από το τρέχον επιτόκιο, τότε η διαφορά των επιτοκίων πρέπει να πληρωθεί σε ένα από τα δύο μέλη που συγκροτούν το συμβόλαιο αφού εφαρμοστεί στο συμφωνηθέν αρχικό κεφάλαιο.

Έστω λοιπόν ότι ένας επενδυτής αγοράζει ένα 6×12 FRA σε επιτόκιο 3% του δείκτη LIBOR με θεωρητικό ποσό \$1.000.000. Αυτό σημαίνει ότι και οι δύο αντισυμβαλλόμενοι θα ελέγξουν ξανά τον δείκτη επιτοκίων LIBOR σε 6 μήνες και ανάλογα με την τιμή που θα αντικρίσουν θα αποφασιστεί ποια θα είναι η χρηματική ροή για τον

κάθε αντισυμβαλλόμενο. Συγκεκριμένα αν το LIBOR σε 6 μήνες έχει τιμή 4%, τότε ο αγοραστής πληρώνει στον πωλητή τόκο 3% επί του \$1.000.000 για τους επόμενους 6 μήνες (μέχρι την λήξη του συμβολαίου στους 12 μήνες) δηλαδή \$15.000 ενώ λαμβάνει από τον πωλητή είσπραξη επιτοκίου 4% επί του θεωρητικού ποσού για τους επόμενους 6 μήνες, δηλαδή \$20.000 . Με λίγα λόγια αν τα επιτόκια LIBOR ανέβουν, ο αγοραστής του συμβολαίου κερδίζει (στην συγκεκριμένη περίπτωση \$5.000) ενώ ο πωλητής ζημιώνεται. Αν βέβαια τα επιτόκια LIBOR ακολουθήσουν αντίστροφη πορεία τότε οι ρόλοι αντιστρέφονται κατά αντίστοιχο τρόπο. Επειδή όμως η ημερομηνία πληρωμής είναι οι 6 μήνες η πληρωτέα διαφορά στους 12 μήνες πρέπει να αναχθεί 6 μήνες πριν. Επομένως στην παραπάνω περίπτωση ο κερδισμένος αγοραστής θα λάβει $\$5.000 \times e^{-4\% \times 0,5 \text{ \acute{e}τη}} = \4.901 .

Ας μελετήσουμε το ρίσκο ενός τέτοιου συμβολαίου. Ο επενδυτής είναι σε θέση να πωλήσει ένα $6 \times 12 FRA$ με αρχικό θεωρητικό ποσό τα \$100 εκατομμύρια. Η πώληση του συμβολαίου αυτή είναι ισοδύναμη με δανεισμό \$100 εκατ. για 6 μήνες και επένδυση των προσόδων για 12 μήνες. Επομένως το παραπάνω συμβόλαιο μπορεί να αναλυθεί στους εξής παράγοντες ρίσκου:

πώληση $6 \times 12 FRA =$ πώληση 6μηνου κρατικού ομολόγου + αγορά 12μηνου κρατικού ομολόγου

(εφόσον το θεωρητικό ποσό αντιστοιχεί σε Αμερικάνικα δολάρια, τα ομόλογα αναφοράς είναι Αμερικάνικα κρατικά ομόλογα)

Η τρέχουσα αξία του θεωρητικού ποσού των \$100 εκατ. σε 6 μήνες είναι $x = \frac{\$100 \text{ εκατ.}}{1+0,05\% \frac{1}{2}} = \$99,975 \text{ εκατ.}$, δεδομένου ότι στις 22/5/2014 το επιτόκιο του 6μηνιαίου Αμερικάνικου Κρατικού ομολόγου ήταν 0,05%.

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, σχηματίζεται ο παρακάτω πίνακας υπολογισμού του ρίσκου για το συγκεκριμένο παράγωγο προϊόν:

Θέση	Τρέχουσα αξία χρημ.	V	Συσχετίσεις		VAR=x*V	Διαχ. VAR
6-m	\$ -99,98	0,40150%	1	0,605474	\$ 0,40140	\$ 0,36834
12-m	\$ 99,98	0,16435%	0,6054743	1	\$ 0,16431	\$ -0,03932
				Σύνολο	\$ 0,56571	\$ 0,32902

Πίνακας 2.12: Υπολογισμός του διαχωρισμένου VAR για την προθεσμιακή σύμβαση

Παρατηρούμε ότι το ατομικό VAR του χαρτοφυλακίου είναι της τάξεως των \$565.710 για διάστημα 1 μήνα, για θεωρητικό ποσό \$100 εκατ. και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Λόγω συσχετίσεων των παραγόντων ρίσκου που συγκροτούν το εν λόγω FRA η τιμή του VAR κατέρχεται στα \$329.902 .

2.5.6 Εφαρμογή σε δικαιώματα προαίρεσης (options):

Θα πρέπει να σημειωθεί από νωρίς ότι η μέθοδος Delta-Normal δεν είναι ιδανική για την μέτρηση του VAR για τα συγκεκριμένα χρηματοοικονομικά προϊόντα και αυτό διότι τα options δεν είναι γραμμικά όργανα των αγορών σε αντίθεση με τις γραμμικές προδιαγραφές της μεθόδου.

Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι μια πολύ διαδεδομένη κατηγορία παραγώγων. Πρόκειται για ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων σύμφωνα με το οποίο ο αγοραστής έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει (call) ή να πουλήσει (put) την ποσότητα του υποκείμενου αγαθού στην σε μια συγκεκριμένη τιμή (τιμή εξάσκησης) μέχρι μια καθορισμένη ημερομηνία λήξης. Αντιστοίχως ο πωλητής του συμβολαίου έχει την υποχρέωση να παραδώσει ή να παραλάβει έναντι τιμήματος φυσικά (premium) την ποσότητα του αγαθού στην αναγραφόμενη τιμή, αν βεβαίως ο αγοραστής εξασκήσει το δικαίωμά του. Τα options συνήθως διαμερίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: στα American Options και στα European Options. Τα μεν American μπορούν να εκπληρωθούν οποιαδήποτε στιγμή επιλέξει ο κάτοχός τους μέχρι την λήξη τους ενώ τα European εκπληρώνονται μόνο στην ημερομηνία λήξης τους.

Ενδεικτικά, η τιμή ενός European Call Option ορίζεται από το πολύ γνωστό μοντέλο των Black&Scholes (BS) :

$c = c(S, K, T, r, y, \sigma) = Se^{-yT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$, όπου $N(d)$ είναι η συνάρτηση της τυπικής κανονικής αθροιστικής κατανομής και $d_1 = \frac{\ln(Se^{-yT}/Ke^{-rT})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$ και $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ τα αντίστοιχα ορίσματά της.

Επίσης:

- S είναι η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου αγαθού
- K είναι η τιμή εξάσκησης
- T είναι ο χρόνος ωρίμανσης ή αλλιώς το διάστημα μέχρι την ημερομηνία εξάσκησης
- r είναι το ασφαλές επιτόκιο τραπεζής
- y είναι ο λόγος των εσόδων προς την αξία του υποκείμενου αγαθού (στην περίπτωση των μετοχών το y αναφέρεται στην μερισματική απόδοση)
- σ είναι η τυπική απόκλιση της απόδοσης του υποκείμενου αγαθού σε ετήσια βάση

Ας παρατηρήσουμε πώς η μέθοδος της χαρτογράφησης των χρηματικών ροών βοηθά στην εμπέδωση της τιμής του option. Ορίζουμε $\Delta = e^{-yT} N(d_1)$, επομένως $c = S\Delta - Ke^{-rT} N(d_2) \Rightarrow Ke^{-rT} N(d_2) = c - S\Delta \Rightarrow c = S\Delta - (c - S\Delta)$

Ισχύει η έκφραση:

"Αγορά option" = "Αγορά Δ μονάδων του υποκείμενου αγαθού" + "Δανεισμός ($\Delta S - c$)"

Για παράδειγμα, έστω ότι επενδυτής λαμβάνει θέση αγοραστή ενός European call option με υποκείμενο αγαθό την μετοχή της Apple Inc. ,η οποία διαπραγματεύεται στο Αμερικάνικο χρηματιστήριο αξιών. Η αγορά του εν λόγω συμβολαίου γίνεται την 27/5/2014 όπου η τιμή της μετοχής είναι $\$625,63=S$. Ο επενδυτής θεωρεί ότι η μετοχή θα αξίζει σε διάστημα 3 μηνών (στις 16/8, δηλαδή $T=0,25$ έτη) πάνω από $\$650=K$. Δεδομένου ότι για την εν λόγω εταιρεία, $\sigma = 26,7\%$, $y = 2,1\%$ και ασφαλές $r = 2,5\%$, το συμβόλαιο κοστίζει $c = \$23,11$ και σε αυτό αντιστοιχεί $\Delta = 0,38$.

Συμπερασματικά και σύμφωνα με την παραπάνω λογική, το κόστος του option ($c = \$23,11$) με υποκείμενο αγαθό την μετοχή της Apple Inc. είναι ισοδύναμο με την αγορά μετοχών αξίας $\$236,46$, η οποία χρηματοδοτείται από ένα δάνειο ύψους $\$213,35$.

Εφόσον γνωρίζουμε από που προέρχονται οι χρηματικές ροές που καθορίζουν την αξία του παραγώγου προϊόντος, γνωρίζουμε και την προέλευση των παραγόντων του ρίσκου. Η διαδικασία προσδιορισμού της τιμής VAR ακολουθεί τα βήματα που περιγράφηκαν στις προηγούμενες παραγράφους και με την μέθοδο της χαρτογράφησης χρηματοροών.

2.6 Εφαρμογή μεθόδων προσομοίωσης για τον υπολογισμό της τιμής VAR:

Αυτές οι μέθοδοι προσομοιώνουν την αξία του χαρτοφυλακίου σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία μέσω της χρήσης σεναρίων. Ο τρόπος που δημιουργούνται αυτά τα σενάρια είναι είτε από ιστορικά δεδομένα (Ιστορική Προσομοίωση – Historical Simulation) είτε από τυχαίες διαδικασίες (Προσομοίωση Monte Carlo – Monte Carlo Simulation). Κάθε επανάληψη των μεθόδων προσομοίωσης, δημιουργεί ένα νέο σενάριο το οποίο με την σειρά του εφαρμόζει μια αντίστοιχη αξία στο χαρτοφυλάκιο των προϊόντων σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Τα δεδομένα που αφορούν την απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτή την μελλοντική στιγμή συλλέγονται και συγκροτούν την προσομοιωμένη κατανομή του χαρτοφυλακίου. Από αυτή την κατανομή, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η τιμή του VAR σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης κατά τα γνωστά. Οι μέθοδοι προσομοίωσης αποτελούν ίσως το ισχυρότερο εργαλείο για τον υπολογισμό του VAR στις μέρες μας και κατ' επέκταση για την διαχείριση του ρίσκου.

Το μαθηματικό μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται συχνά για να προσομοιώσει τις κινήσεις των τιμών των αγαθών είναι αυτό της «Γεωμετρικής Κίνησης Brown» (GBM). Συγκεκριμένα μικρές μεταβολές της τιμής ενός αγαθού μπορούν να περιγραφούν από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

,όπου μ είναι η μέση τιμή της αξίας του αγαθού και σ είναι η αντίστοιχη μεταβλητότητά του (volatility). Η B_t είναι κίνηση Brown, με βασική ιδιότητα ότι οι ανεξάρτητες διαφορές $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

Πως όμως γίνεται η προσομοίωση των μελλοντικών τιμών; Ορίζουμε ως t την αρχική χρονική στιγμή και T την μελλοντική χρονική στιγμή. Το χρονικό διάστημα $\tau = T - t$ χωρίζεται σε n υποδιαστήματα και στην συνέχεια προσδιορίζουμε την μεταβολή της τιμής σε κάθε ένα από τα χρονικά υποδιαστήματα $\Delta t = \tau/n$ που προκύπτουν. Ολοκληρώνοντας τον τύπο προσδιορισμού της τιμής λαμβάνουμε:

$$\Delta S_t = S_{t-1}(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t})$$

, όπου ε είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και μοναδιαία διασπορά. Είναι φανερό ότι μετά από n επαναλήψεις του παραπάνω τύπου καταλήγουμε στην τιμή $S_{t+n} = S_T$. Οι εν λόγω επαναλήψεις συνοδεύονται και με την δημιουργία μίας τυχαίας ακολουθίας $(\varepsilon_i)_{i=1,\dots,n}$. Αυτά τα ε_i προκύπτουν αν επιλέξουμε ένα τυχαίο αριθμό x από το 0 έως το 1 και υπολογίσουμε το $y = N^{-1}(x)$, με N την συνάρτηση της κατανομής σωρευτικής πιθανότητας η οποία λαμβάνει πάντα τιμές μεταξύ 0 και 1.

2.6.1 Ιστορική Προσομοίωση(Historical Bootstrapping):

Αυτού του είδους η προσομοίωση αποτελεί μια αρκετά απλή εφαρμογή της διαδικασίας επιλογής τυχαίων αριθμών. Αυτό γιατί απλά γίνεται τυχαία επιλογή ενός αντιπροσωπευτικού στοιχείου την φορά από ένα συγκεκριμένο δείγμα ιστορικών δεδομένων. Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δείγμα ανεξάρτητων ιστορικών αποδόσεων $R_i = \Delta S/S$ μεγέθους K , το οποίο θεωρούμε

ότι συγκροτεί μια κατανομή στοιχείων. Η τεχνική του “Historical Bootstrapping”, χρησιμοποιεί το παραπάνω δείγμα για να δημιουργεί ψευδομεταβλητές (μέσω τυχαίας επιλογής στοιχείων από το δείγμα με επανατοποθέτηση) και στην συνέχεια να εκτιμά μελλοντικές αποδόσεις.

Έστω ότι έχουμε στην διάθεσή μας τις αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου για τον περασμένο χρόνο και επιθυμούμε την πρόβλεψη της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αυτού σε διάστημα ενός μήνα από σήμερα. Μπορούμε να προβλέψουμε την μελλοντική απόδοση του χαρτοφυλακίου ανά μέρα, επιλέγοντας τυχαία μια απόδοση από το ετήσιο δείγμα που διαθέτουμε (με επανατοποθέτηση) για κάθε μια από τις μελλοντικές ημέρες. Επομένως η αξία του χαρτοφυλακίου μεταβάλλεται ανά μέρα σύμφωνα με τον αναδρομικό τύπο:

$$S_{t+1} = S_t(1 + \text{random } R_i)$$

, όπου S_t είναι η τιμή του παράγοντα ρίσκου για το χαρτοφυλάκιο και R_i μια ιστορική απόδοση τυχαία επιλεγμένη από το δείγμα ιστορικών αποδόσεων που έχουμε στην διάθεσή μας. 21 επαναλήψεις του παραπάνω αναδρομικού τύπου (διάρκεια ενός μήνα σε μέρες υπό συνθήκες αγοράς), μας δίνουν ως αποτέλεσμα την προβλεπόμενη τιμή του παράγοντα σε ένα μήνα από σήμερα.

Πολύ σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι λαμβάνει υπ’ όψιν ακραίες ιστορικές τιμές αποδόσεων οι οποίες έχουν την ίδια πιθανότητα να ξανασυμβούν στο μέλλον (π.χ. τις πρόσφατες χρηματοοικονομικές αναταράξεις των αγορών). Επίσης, ενσωματώνει σε αυτή την τυχαία επιλογή όλες τις συσχετίσεις των χρηματοοικονομικών αγαθών που μπορούν να συγκροτούν ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο.

Παρ’ όλα τα σημαντικά πλεονεκτήματα της μεθόδου, η τεχνική του “Historical Bootstrapping” έχει συγκεκριμένα μειονεκτήματα. Για δείγματα αποδόσεων μικρού μεγέθους, η μέθοδος δεν αποτυπώνει αποτελεσματικά την πρόβλεψη και το σφάλμα αυξάνεται ραγδαία. Αυτό διότι δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία αποδόσεων και η έννοια της «τυχειότητας» στην επιλογή της απόδοσης χάνεται καθότι παρατηρούνται συχνότερα ίσες τυχαία επιλεγμένες αποδόσεις. Επίσης, η μέθοδος λειτουργεί υπό την υπόθεση ανεξαρτησίας των δεδομένων και αυτό από μόνο του εξαλείφει τυχόν αιτιακές σχέσεις στις καθημερινές μεταβολές των τιμών.

Μετά τον υπολογισμό των τιμών των παραγόντων ρίσκου του χαρτοφυλακίου κατά την μελλοντική στιγμή, πως υπολογίζεται η τιμή του VAR;

Εφόσον έχουμε προσδιορίσει μια πιθανή μελλοντική τιμή για τον κάθε παράγοντα ρίσκου, έχουμε την δυνατότητα να υπολογίσουμε και την πιθανή μελλοντική συνολική αξία του χαρτοφυλακίου. Αυτή θα είναι ανάλογη της πρόβλεψης που έχουμε πραγματοποιήσει αλλά και των επενδεδυμένων κεφαλαίων σε κάθε αγαθό. Σκοπός μας είναι η δημιουργία της πιθανής κατανομής της μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου. Επαναλαμβάνοντας πολλές φορές (π.χ. 10000 επαναλήψεις) την παραπάνω διαδικασία εκ νέου, μπορούμε να δημιουργήσουμε την ζητούμενη κατανομή για την μελλοντική ημέρα-στόχο. Στην συνέχεια αφού έχουμε στα χέρια μας την κατανομή, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή VAR κατ' ευθείαν από αυτή μέσω του κλειστού τύπου:

$$VAR(c, T) = E(F_T) - Q(F_T, c)$$

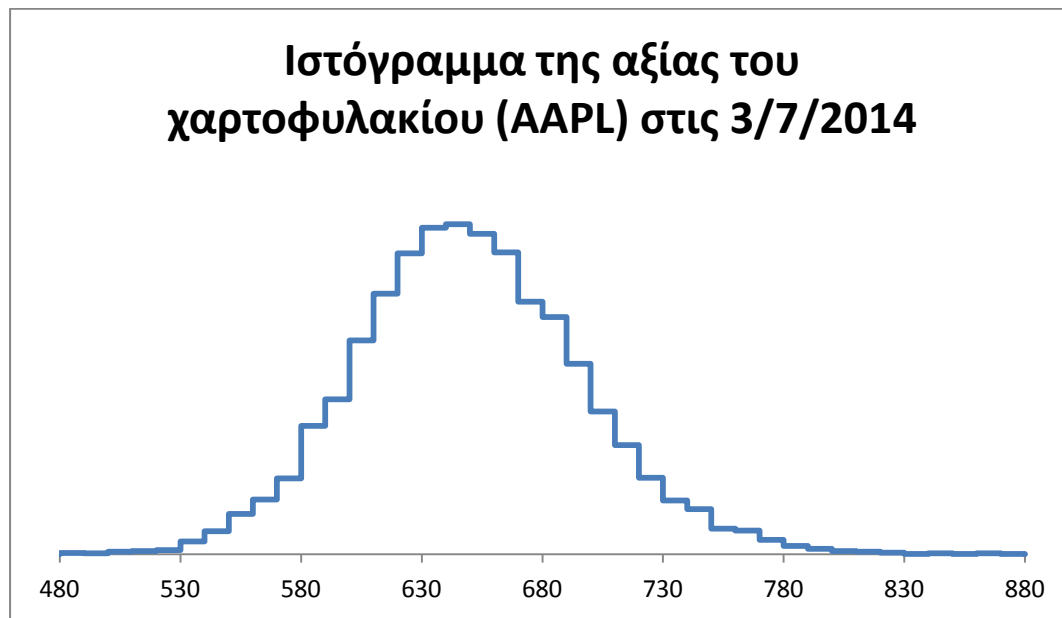
, όπου F_T είναι η προσομοιωμένη αξία του χαρτοφυλακίου την μελλοντική χρονική στιγμή T , $E(F_T)$ η μέση τιμή των προσομοιωμένων αξιών του χαρτοφυλακίου έπειτα από συγκεκριμένες επαναλήψεις και τέλος $Q(F_T, c)$ είναι το ποσοστημόριο της κατανομής που αφήνει $c\%$ των συνολικών παρατηρήσεων στα δεξιά αυτού.

Δημιουργώντας ένα αρκετά ρεαλιστικό παράδειγμα εφαρμογής αυτής της μεθόδου, υποθέτουμε επενδυτή με χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από μια μετοχή της Apple Inc. . Ας παρατηρήσουμε λοιπόν πως εφαρμόζεται σε αυτή την απλή περίπτωση η μέθοδος της Ιστορικής Προσομοίωσης αλλά και πώς υπολογίζεται η τιμή του VAR.

Ως δείγμα έχουμε τις καθημερινές αποδόσεις ενός έτους για την μετοχή (AAPL), η οποία την ημερομηνία 2/6/2014 στοίχιζε \$628,65 και η ημερήσια χρηματιστηριακή συνεδρία «έκλεισε» με απόδοση -0,69%. Με δείγμα το παραπάνω εφαρμόζουμε την μέθοδο την οποία επεξηγήσαμε και αρχίζουμε την τυχαία επιλογή απόδοσης από το ετήσιο δείγμα για να αρχίσουμε την πρώτη προσομοίωση. Τελικός στόχος μας είναι ο προσδιορισμός του πιθανού VAR του χαρτοφυλακίου με συντελεστή εμπιστοσύνης 95% και σε διάστημα ενός μήνα (δηλαδή στις 3/7/2014, έπειτα από 23 ημέρες διαπραγμάτευσης της μετοχής). Μετά από 10.000 επαναλήψεις της

μεθόδου λαμβάνουμε μια εικόνα του χαρτοφυλακίου σε διάστημα ενός μήνα από τις 2/6/2014.

Η κατανομή της αξίας του χαρτοφυλακίου που φέρει μια μετοχή της εταιρείας Apple Inc. στις 3/7/2014 είναι η παρακάτω σύμφωνα με την μέθοδο “Historical Bootstrapping” :



Γραφική Παράσταση 2.1: Ιστορική Προσομοίωση της αξίας της μετοχής AAPL με 10.000 επαναλήψεις

Τα βασικά στατιστικά στοιχεία της κατανομής και η τελική πιθανή τιμή VAR είναι:

Μέση Τιμή	\$ 650,09
Τυπική Απόκλιση	\$ 46,87
Ποσοστημόριο (95%)	\$ 572,74
Μέγιστη Τιμή	\$ 877,93
Ελάχιστη Τιμή	\$ 480,81
VAR	\$ 77,34

Πίνακας 2.13: Στατιστικά στοιχεία κατανομής και υπολογισμός VAR

Επομένως, η μέγιστη πιθανή απώλεια ενός χαρτοφυλακίου το οποίο περιέχει μια μετοχή της Apple Inc. σε διάρκεια ενός μήνα με αρχική ημερομηνία 3/6/2014 και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% είναι \$77,34.

2.6.2 Προσομοίωση Monte Carlo:

Σε αντίθεση με την Ιστορική Προσομοίωση, η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo (MC), δεν χρησιμοποιεί τις ιστορικές αποδόσεις των τιμών των παραγόντων ρίσκου για να προσδιορίσει απ' ευθείας τις μελλοντικές. Απ' εναντίας, τις χρησιμοποιεί για να προσδιορίσει βασικά στατιστικά στοιχεία τα οποία μετέπειτα λειτουργούν ως βάση της εφαρμογής της μεθόδου MC. Συγκεκριμένα, έχοντας στην διάθεσή μας τις ιστορικές αποδόσεις των παραγόντων ρίσκου, θέλουμε να προσδιορίσουμε την μέση τιμή των αποδόσεων δηλαδή $E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \mu \Delta t$ και την τυπική απόκλιση των αποδόσεων αυτών δηλαδή $\sqrt{V(\Delta S/S)} = \sigma \sqrt{\Delta t}$, όπου $\Delta t = (T - t)/n$ σύμφωνα με την θεωρία των μεθόδων προσομοίωσης. Αφού λοιπόν προσδιοριστούν τα μ, σ από το δείγμα που έχουμε στην διάθεσή μας, δεν μένει παρά να προσδιορίσουμε την ακολουθία των τυχαίων αριθμών $(\varepsilon_i)_i$ που προκύπτουν από την αντιστροφή της σωρευτικής συνάρτησης πιθανότητας της κανονικής κατανομής (σύμφωνα με την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω). Οι μελλοντικές πιθανές αποδόσεις προσδιορίζονται από τον τύπο $\mu + \varepsilon_i \sigma$, για $i = t + 1, \dots, T$. Οι νέες τιμές του κάθε παράγοντα ρίσκου προσδιορίζονται σύμφωνα με τον αναδρομικό τύπο $S_{t+1} = S_t [1 + (\mu + \varepsilon_i \sigma)]$. Εφόσον έχουμε πλέον στα χέρια μας τις προσομοιωμένες τιμές για τον χρονικό ορίζοντα του ενδιαφέροντος μας και έπειτα από αρκετές επαναλήψεις της μεθόδου MC, μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατανομή που ακολουθούν αυτές και να υπολογίσουμε εν τέλει την τιμή του VAR.

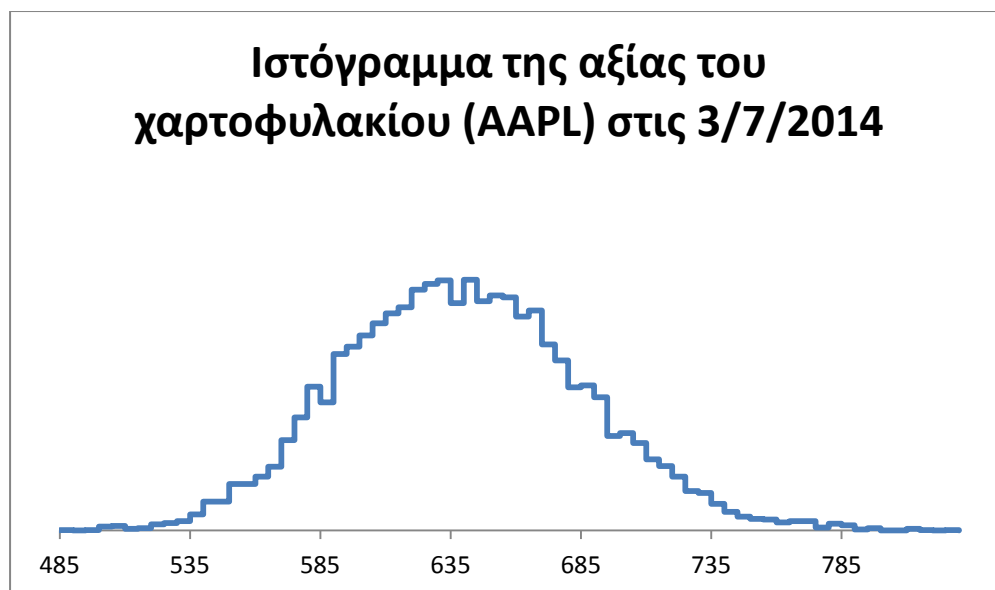
Προς σύγκριση των παραπάνω μεθόδων θα δανειστούμε για την μελέτη της MC το ίδιο παράδειγμα χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιήσαμε και στην περίπτωση της Ιστορικής Προσομοίωσης. Έχουμε λοιπόν τις ιστορικές τιμές της AAPL για διάστημα ενός χρόνου και θέλουμε να προσομοιώσουμε την πορεία της μετοχής σε διάστημα ενός μήνα από σήμερα (μέχρι τις 3/7/2014).

Τα βασικά στατιστικά στοιχεία του ετήσιου δείγματός μας είναι τα εξής:

Μέση ετήσια απόδοση	20%
Ετήσια τυπική απόκλιση	24%
Μέση ημερήσια απόδοση	0,08%
Ημερήσια τυπική απόκλιση	1,51%
Αρχική αξία μετοχής στις 2/6/2014	\$ 628,65

Πίνακας 2.14: Στατιστικά στοιχεία του ετήσιου δείγματος τιμών της μετοχής AAPL

Η τιμή VAR προσδιορίζεται με την βοήθεια της μεθόδου MC μετά από 10.000 επαναλήψεις. Η κατανομή που προκύπτει, όπως και τα βασικά στατιστικά στοιχεία των προσομοιωμένων τιμών για τις 3/7/2014 φαίνονται παρακάτω:

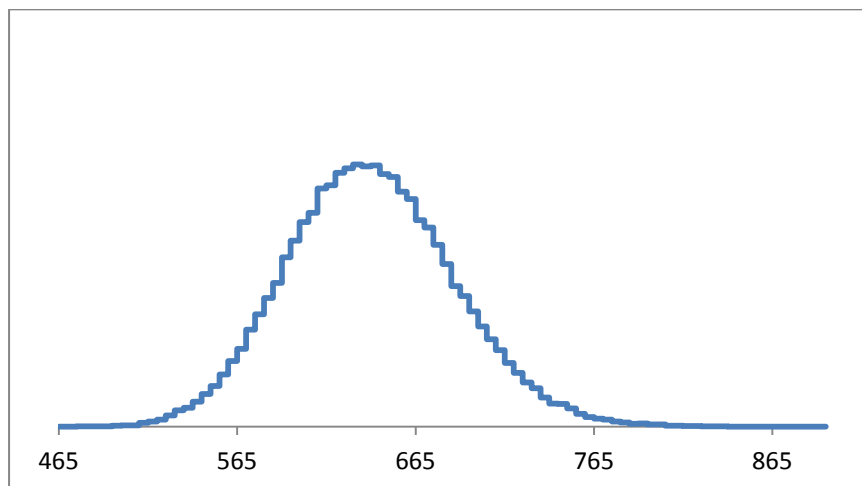


Γραφική Παράσταση 2.2: Προσομοίωση Monte Carlo για την μετοχή AAPL μετά από 10.000 επαναλήψεις

Μέση Τιμή	639,897
Τυπική Απόκλιση	46,0989
Ποσοστημόριο (95%)	563,834
Μέγιστη Τιμή	829,986
Ελάχιστη Τιμή	485,427
 VAR	 76,063

Πίνακας 2.15: Βασικά στατιστικά στοιχεία της κατανομής και υπολογισμός VAR

Η μέθοδος μας επιτρέπει να εκτελούμε τις επαναλήψεις αρκετά γρήγορα. Ας παρατηρήσουμε λοιπόν τις διαφορές της παραπάνω εφαρμογής με μια εφαρμογή 100.000 επαναλήψεων:



Γραφική Παράσταση 2.3: Προσομοίωση Monte Carlo για την μετοχή AAPL μετά από 100.000 επαναλήψεις

Μέση Τιμή	640,074
Τυπική Απόκλιση	46,4051
Ποσοστημόριο (95%)	563,506
Μέγιστη Τιμή	893,333
Ελάχιστη Τιμή	466,391
VAR	76,568

Πίνακας 2.16: Βασικά στατιστικά στοιχεία της κατανομής και υπολογισμός VAR

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνονται οι επαναλήψεις τα αποτελέσματά γίνονται πιο ακριβή και το εύρος των τιμών μεγαλώνει, δεδομένου ότι αυξάνεται η πιθανότητα παρατήρησης κάθε τιμής. Η τελική τιμή VAR υπολογίζεται στα \$76,568. Με λίγα λόγια, ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου δεν κινδυνεύει να χάσει παραπάνω από \$77 ανά μετοχή σε διάστημα ενός μήνα, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

Οι μέθοδοι προσομοίωσης δεν φημίζονται για την ταχύτητά τους. Αυτό διότι για ένα χαρτοφυλάκιο 1 αγαθού απαιτούνται 10.000 υπολογισμοί (αν υποτεθεί ότι επιλέγουμε 10.000 επαναλήψεις της μεθόδου). Αν ο αριθμός των αγαθών στο χαρτοφυλάκιο αυξηθεί στα 1000 αγαθά, αμέσως αντιλαμβανόμαστε την ανάγκη 10.000.000 ολικών αξιολογήσεων. Είναι αρκετά χρήσιμο να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι η μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης υστερεί σε ταχύτητα (588 δευτερόλεπτα για 10.000

επαναλήψεις του παραπάνω παραδείγματος) σε σχέση με την αντίστοιχη μέθοδο MC (15 δευτερόλεπτα για 10.000 επαναλήψεις του ίδιου παραδείγματος). Όσον αφορά την ακρίβεια των μεθόδων, ο γενικότερος κανόνας επιτάσσει ότι όσο περισσότερες επαναλήψεις εκτελούνται τόσο μεγαλύτερη είναι και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

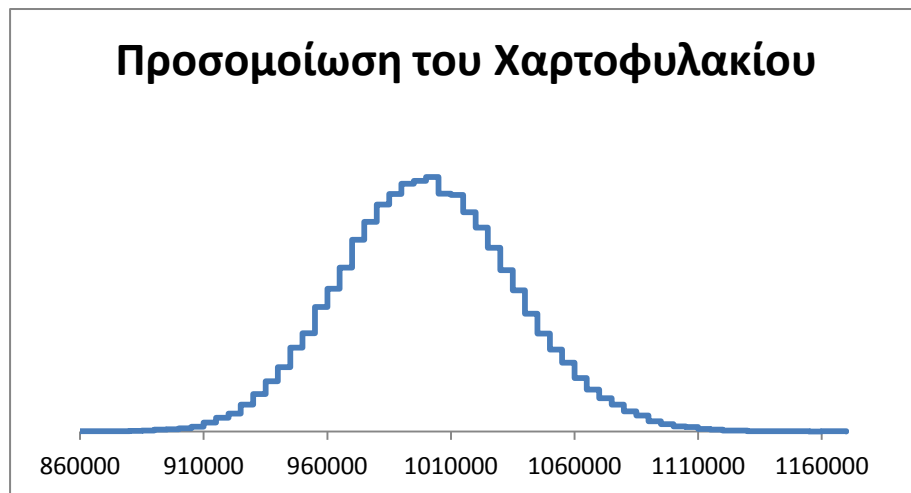
Σε αυτό το σημείο παρατίθεται ένα παράδειγμα μετοχικού χαρτοφυλακίου αξίας 1.000.000 ευρώ την 12^η Ιουνίου του 2014. Σκοπός είναι η προσομοίωση της αξίας του χαρτοφυλακίου σε μια εβδομάδα από την ημέρα αυτή, δηλαδή στις 19 Ιουνίου και ο μετέπειτα υπολογισμός της τιμής VAR για το επενδεδυμένο κεφάλαιο. Το χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από πέντε μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης εισηγμένες στο Ελληνικό χρηματιστήριο. Πρόκειται για τις μετοχές: Τιτάν, Ελ. Πετρέλαιο, ΟΤΕ, Τράπεζα της Ελλάδος και Follie Follie. Κάθε μια από τις παραπάνω μετοχές είναι πρωτοπόρα στον κλάδο της και ο καταμερισμός του επενδεδυμένου ποσού γίνεται σύμφωνα με την κεφαλαιοποίηση έκαστου τίτλου. Ο συγκεντρωτικός πίνακας στοιχείων όπως προκύπτει την 12^η Ιουνίου είναι ο εξής:

ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ	TITAN	ΕΛΠΕ	ΟΤΕ	ΤΡΑΠ. ΕΛΛ.	ΟΜΙΛΟΣ FF
Αξία Μετοχής (12/6)	25,68 €	6,19 €	12,20 €	14,97 €	33,00 €
Κεφαλαιοποίηση (εκατ. ευρώ)	1.978,99	1.891,88	5.979,83	297,38	2.209,29
Βάρος Μετοχής	16,01%	15,31%	48,39%	2,41%	17,88%
Καταμερισμός Χαρτ/κίου	160.146,54 €	153.097,30 €	483.907,98 €	24.064,99 €	178.783,19 €
Αριθμός Μετοχών	6236	24733	39664	1607	5417

Πίνακας 2.17: Βασικά στοιχεία μετοχικού χαρτοφυλακίου

Κατά τα γνωστά προσομοιώνονται στην συνέχεια οι τιμές των μετοχών αυτών για την διάρκεια μιας εβδομάδας και υπολογίζονται οι αντίστοιχες μεταβολές στην αξία του χαρτοφυλακίου σύμφωνα με τα βάρη. Το άθροισμα των νέων – προσομοιωμένων καταμερισμών του χαρτοφυλακίου αθροίζεται και ως αποτέλεσμα δίδεται η προσομοιωμένη τελική αξία του μετοχικού χαρτοφυλακίου την 19^η Ιουνίου 2014. Το επόμενο μέρος της μελέτης αναλαμβάνει η μέθοδος

MC και μετά από 100.000 επαναλήψεις της μεθόδου λαμβάνουμε την παρακάτω κατανομή αποτελεσμάτων:



Γραφική Παράσταση 2.4: Προσομοίωση Monte Carlo για το μετοχικό χαρτοφυλάκιο μετά από 100.000 επαναλήψεις

Με βασικά στατιστικά στοιχεία και αντίστοιχο VAR:

Μέση Τιμή	1.000.920,49 €
Τυπική Απόκλιση	35.204,14 €
Ποσοστημόριο (95%)	942.833,67 €
Μέγιστη Τιμή	1.169.871,66 €
Ελάχιστη Τιμή	864.419,89 €
VAR	58.086,82 €

Πίνακας 2.18: Βασικά στατιστικά στοιχεία της κατανομής και υπολογισμός VAR

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της τιμής VAR, υπάρχει 5% πιθανότητα το χαρτοφυλάκιο να ζημιωθεί περισσότερο από 58.086,82 ευρώ σε διάστημα μιας εβδομάδας. Το μεγάλο προσόν της μεθόδου σε αυτή την περίπτωση είναι ότι συμπεριλαμβάνει και τις συσχετίσεις μεταξύ των τίτλων – παραγόντων ρίσκου και τα αποτελέσματά της είναι αρκετά ακριβή υπό την χρήση ιστορικών τιμών ενός χρόνου.

2.7 Η χρήση της τιμής VAR ως μέσο ενεργής διαχείρισης του ρίσκου:

Οι διαχειριστές κεφαλαίων ανέκαθεν αναγνώριζαν ότι η βέλτιστη στρατηγική ακροβατεί μεταξύ της απόδοσης και του ρίσκου. Με τον όρο ενεργή διαχείριση ρίσκου εννοούμε την αξιολόγηση αποδοτικότητας, την κατανομή των κεφαλαίων και τις επιχειρησιακές αποφάσεις στρατηγικής σημασίας.

Το VAR μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο των κεφαλαίων σε κίνδυνο ή απλούστερα το κεφάλαιο που απαιτείται έτσι ώστε να μπορεί να είναι βιώσιμη μια χρηματοοικονομική δραστηριότητα. Λύνει τα χέρια στην σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία διότι παραμερίζει την παραδοσιακή σύγκριση των αποδόσεων των διαφορετικών επενδύσεων για τον καθορισμό της καλύτερης. Για παράδειγμα έστω μια επιχείρηση με μια θέση σε συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης θεωρητικού κεφαλαίου \$100 , λογιστικό όριο στην θέση αυτή \$10 ³ και απόλυτη απόδοση επένδυσης της τάξεως των \$5. Ποια είναι η απόδοση της επένδυσης; Ποιός είναι ο σωστός παρονομαστής της διαίρεσης με αριθμητή τα \$5; Το θεωρητικό ποσό δεν είναι η απάντηση διότι ποτέ δεν πληρώνεται και το λογιστικό όριο απαιτούμενο για την ανάληψη της θέσης είναι ένα ελάχιστο ενδεικτικό όριο και μπορεί να μην αντιστοιχεί στην πραγματική χρηματοροή.

Προς έξοδο από το παραπάνω δίλημμα θα μπορούσαμε να αναλογιστούμε το ύψος της αξίας του κεφαλαίου το οποίο θα πρέπει να έχει η επιχείρηση στα ταμειακά διαθέσιμα της ώστε η επένδυσή να είναι βιώσιμη και να μπορεί όποτε χρειαστεί να καλύπτει πιθανές ζημίες προερχόμενες από την επένδυση αυτή. Θεωρώντας μόνο κινδύνους αγορών το VAR μετρά το οικονομικό κεφάλαιο (economic capital - EC) , δηλαδή το συνολικό κεφάλαιο απαιτούμενο ώστε να καλύψει όλες τις πιθανές αρνητικές αποδόσεις. Εν προκειμένω $EC = VAR$. Όπως έχει αναφερθεί εκτενώς προηγουμένως, η τιμή VAR είναι μια ένδειξη της μέγιστης αποδεκτής ζημίας για μια επιχείρηση. Για να καλύψει αυτή την πιθανή ζημία , η επιχείρηση πρέπει να είναι ταμειακά καλυμμένη με το συγκεκριμένο ποσό ειδάλλως κινδυνεύει με χρεοκοπία.

³ Ουσιαστικά ο κάτοχος της θέσης διαχειρίζεται κεφάλαια δεκαπλάσιας αξίας από το χρηματικό όριο που διαθέτει. Λέμε ότι λειτουργεί με μόχλευση 10 προς 1 (100/10). Το ποσό των \$10 είναι το ελάχιστο ποσό που απαιτείται ώστε να παραμείνει ανοιχτή η θέση του επενδυτή στην αγορά.

Η μεθοδολογία που συνοδεύει την VAR όπως και αυτή καθ' αυτή η τιμή της, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την σύγκριση της αποτελεσματικότητας. Μπορούμε να συγκρίνουμε χρηματομεσίτες, επιχειρησιακές μονάδες (στην ίδια επιχείρηση ή σε διαφορετικές) και επενδυτικά χαρτοφυλάκια.

Ορισμός: **Μέτρο επίδοσης του προσαρμοσμένου κινδύνου** (risk-adjusted performance measurement - RAPM) ονομάζεται ο λόγος των κερδών προς την τιμή του VAR.

Για το προηγούμενο παράδειγμα η τιμή RAPM είναι $\frac{\$5}{\$10} = 50\%$. Πως όμως μπορούμε να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα διαφόρων φορέων με την χρήση του παραπάνω μέτρου;

Έστω δύο χρηματομεσίτες. Ο πρώτος ασχολείται με την αγορά συναλλάγματος και ο δεύτερος ασχολείται με την αγορά ομολόγων. Αμφότεροι κέρδισαν \$10 εκατ. το περασμένο έτος. Ο πρώτος χρηματομεσίτης απασχολεί θεωρητικό κεφάλαιο της τάξεως των \$100 εκατ. και ο δεύτερος αντίστοιχο κεφάλαιο \$200 εκατ.. Για την μεν αγορά συναλλάγματος η μεταβλητότητα (volatility) υπολογίζεται στο 12% σε ετήσια βάση ενώ για την δε αγορά ομολόγων το αντίστοιχο μέγεθος υπολογίζεται 4%. Επομένως η τιμή VAR (σε 99% επίπεδο εμπιστοσύνης) για τον πρώτο μεσίτη υπολογίζεται ως $\$100 \text{ εκατ.} \times 2,33 \times 12\% = \28 εκατ. ενώ για τον δεύτερο υπολογίζεται ως $\$200 \text{ εκατ.} \times 2,33 \times 4\% = \19 εκατ. . Οι αντίστοιχοι λόγοι RAPM είναι $\$10 \text{ εκατ.} \div \$28 \text{ εκατ.} = 36\%$ για τον μεσίτη συναλλάγματος και $\$10 \text{ εκατ.} \div \$19 \text{ εκατ.} = 54\%$ για τον μεσίτη ομολόγων. Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνονται συγκεντρωτικά υπο την μορφή του παρακάτω πίνακα:

	Κέρδος	Θεωρητικό Ποσό	Μεταβλητότητα	VAR	RAPM
Μεσίτης Συναλλάγματος	\$10 εκατ.	\$100 εκατ.	12%	\$28 εκατ.	36%
Μεσίτης Ομολόγων	\$10 εκατ.	\$200 εκατ.	4%	\$19 εκατ.	54%

Πίνακας 2.19: Λόγοι RAPM για τους δύο χρηματομεσίτες

Είναι φανερό ότι ο μεσίτης ομολόγων κάνει καλύτερη χρήση των κεφαλαίων υπό ρίσκο και αυτό διότι για τις δοσοληψίες του απαιτούνται λιγότερα κεφάλαια υπό ρίσκο.

Ένας χρήσιμος συντελεστής ο οποίος δημιουργήθηκε από την Bankers Trust (τωρινή Deutsche Bank) στα τέλη της δεκαετίας του 70 και ανήκει στην ομάδα μέτρων RAPM είναι ο δείκτης απόδοσης κεφαλαίου σταθμισμένου κινδύνου (Risk Adjusted Return on Capital – RAROC), οποίος υπολογίζεται ως εξής⁴:

$$RAROC = \frac{\text{(Αναμενόμενο Καθαρό Εισόδημα – Αναμενόμενες Απώλειες)}}{\text{Οικονομικό Κεφάλαιο}}$$

Ένας από τους βασικούς κλάδους των μεθόδων RAPM βασίζεται στο μέτρο των κερδών και όχι των κεφαλαίων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του κλάδου είναι ο δείκτης **κερδών υπό ρίσκο** (earnings at risk - EAR), ο οποίος εκφράζει την τυπική απόκλιση των καθημερινών κερδών. Η εφαρμογή των μεθόδων RAPM βασισμένη στα κέρδη ουσιαστικά προκύπτει από τον λόγο των κερδών με την ποσότητα EAR.

2.7.1 Μέθοδοι των RAPM βασισμένα στις τιμές VAR:

Βασισμένη στην έννοια της αξίας σε ρίσκο, η μέθοδοι RAPM επιτρέπουν στους διαχειριστές κεφαλαίων να συσχετίσουν τα κέρδη των ανθρώπων των χρηματαγορών (χρηματομεσίτες) με το ρίσκο που αναλαμβάνουν. Το μέτρο RAPM για την μονάδα *i* προκύπτει ως $RAPM_i = \frac{\text{κέρδος}_i}{VAR_i}$.

Επίσης, η έννοια των μέτρων RAPM ενσωματώνει και άλλες μορφές ρίσκων εκτός από το σύνθετο ρίσκο των αγορών όπως το πιστωτικό και το επιχειρησιακό ρίσκο. Συγκεκριμένα:

$$RAPM = \frac{\text{έσοδα} - \text{κόστη} - \text{αναμενόμενες απώλειες}}{VAR}$$

, όπου $VAR = VAR \text{ αγοράς} + VAR \text{ πίστωσης} + VAR \text{ επιχείρησης} - \text{οφέλη από διαφοροποίηση}$

⁴ Ο παράγοντας ρίσκου που χρησιμοποιείται από την ένωση τραπεζών είναι μια απλή ερμηνεία του εβδομαδιαίου VAR και έχει μορφή: $\text{παράγοντας ρίσκου } RAROC = 2,33 \times \sigma_w \times \sqrt{52} \times (1 - \text{ποσοστό φόρου})$

2.7.2 Μέτρο απόδοσης εφαρμοσμένο σε επιχειρήσεις:

Ένας πολύ γνωστός λόγος στα χρηματοοικονομικά και ειδικότερα στην διαχείριση ρίσκου προέρχεται από τον William Sharpe (1966). Ο λόγος αυτός μετρά την διαφορά της απόδοσης, σε σχέση με το εκάστοτε ασφαλές επιτόκιο, ως προς την συνολική μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) των εσόδων, δηλαδή:

$$S_i = \frac{\bar{R}_i - R_F}{\sigma(R_i)}$$

, με \bar{R}_i την μέση απόδοση του αγαθού i και $\sigma(R_i)$ την αντίστοιχη του τυπική απόκλιση.

Στον παραπάνω τύπο δεν εμφανίζεται η συσχέτιση του εκάστοτε αγαθού με το συνολικό χαρτοφυλάκιο. Αυτό το πρόβλημα λύθηκε με την βοήθεια του Treynor (1965), ο οποίος πρότεινε τον παρακάτω αντίστοιχο τύπο:

$$T_i = \frac{\bar{R}_i - R_F}{\beta_i}$$

, όπου β_i είναι το συστηματικό ρίσκο του αγαθού σε σχέση με το υπόλοιπο χαρτοφυλάκιο. Με την χρήση του οριακού VAR (marginal VAR) ο λόγος του Treynor αποκτά χρηματικό νόημα. Το οριακό VAR για το χρεόγραφο i έχει την μορφή $\Delta VAR_i = VAR \times \beta_i$ και εκφράζει την αλλαγή της συνολικής τιμής του VAR εξαιτίας της μοναδιαίας αύξησης της ποσότητας του χρεογράφου i . Συνεπώς το "οριακό $RAPM_i$ " = $\frac{\text{κέρδος}_i}{\Delta VAR_i}$.

Επίσης με την βοήθεια του συνθετικού VAR έχουμε:

$$\text{"συνθετικό } RAPM_i \text{"} = \frac{\text{κέρδος}_i}{\text{συνθετικό } VAR_i} = \frac{\text{κέρδος}_i}{(VAR \times w_i \beta_i)}$$

2.8 Το VAR ως εργαλείο στρατηγικής: «Ανάλυση Αξίας στους Μετόχους»

Γενικότερα το VAR μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της αποδιδόμενης αξίας στους μετόχους (shareholder value analysis - SVA) ώστε να βοηθήσει στην λήψη αποφάσεων για το ποιους επιχειρηματικούς τομείς θα πρέπει να αναπτυχθούν, διατηρηθούν ή περιοριστούν αλλά και να βοηθήσει στην μεγιστοποίηση της συνολικής αποδιδόμενης αξίας στους μετόχους.

Η μελέτη SVA χρησιμοποιεί την έννοια της καθαρής παρούσας αξίας (net present value - NPV), σύμφωνα με την οποία οι αναμενόμενες χρηματοροές θα πρέπει να μετατρέπονται (συνήθως μειώνονται) ώστε να αντικατοπτρίζουν την σημερινή τους αξία. Έτσι, όταν το NPV ενός έργου ή επένδυσης είναι θετικό αξίζει την προσοχή μας. Εναλλακτικά αν δεν υπάρχει κάποιο επικερδές μελλοντικό σχέδιο στην «φαρέτρα της επιχείρησης» (με θετικό NPV) τότε θα πρέπει να διανεμηθούν μερίσματα στους μετόχους σύμφωνα με τα υπάρχοντα κέρδη και υποδομές.

Ένας πολύ σημαντικός παράγοντας της ανάλυσης SVA είναι ο δείκτης μετατροπής (προεξοφλητικό επιτόκιο) των μελλοντικών χρηματοροών k . Η έννοια της οικονομικής προστιθέμενης αξίας (economic value added - EVA) στοχοποιεί την δημιουργία αξίας σε μια μόνο περίοδο, κατά την οποία τα κέρδη μειώνονται κατά το κόστος του οικονομικού κεφαλαίου. Συγκεκριμένα: $EVA = \text{κέρδος} - (\text{κεφάλαιο} \times k)^5$. Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή του k ;

Σύμφωνα με το μοντέλο τιμολόγησης του ενεργητικού κεφαλαίου (capital asset pricing model), πολύ γνωστό με την διεθνή ονομασία του CAPM, κάθε επενδυτής δεν θα πρέπει να αναλάβει την ευθύνη οποιασδήποτε επένδυσης, εάν αυτή δεν αναμένεται να αποδώσει τουλάχιστον το άθροισμα του εκάστοτε ασφαλούς επιτοκίου και ενός συγκεκριμένου ασφάλιστρου κινδύνου. Οι επενδυτές, σύμφωνα με το CAPM οφείλουν να αποζημιώνονται με ένα ποσοστό μεγαλύτερο του επιτοκίου ασφαλείας δεδομένου ότι αναλαμβάνουν ρίσκο. Συγκεκριμένα, το k ενός i χρεογράφου σε ένα χαρτοφυλάκιο υπολογίζεται ως $k_i = R_F + [E(R_M) - R_F]\beta_i^m$, όπου R_F το ασφαλές επιτόκιο, $E(R_M)$ η αναμενόμενη απόδοση της αγοράς και β_i^m το συστηματικό ρίσκο του χρεογράφου σε σχέση με τις κινήσεις της αγοράς.

⁵ Πρόκειται για τον αριθμητή του δείκτη RAROC

Κεφάλαιο 3: Πραγματικά Δικαιώματα (Real Options)

3.1 Εισαγωγή:

Η σύγχρονη θεωρία διοίκησης των επιχειρήσεων βασίζεται στην ένταξη της επιχείρησης στο κλίμα της μελλοντικής αβεβαιότητας. Σχεδόν όλες οι επιχειρήσεις διαμορφώνουν την στρατηγική τους βασιζόμενες σε ήδη υπάρχουσες πληροφορίες και εκτιμώμενες επιλογές. Πολύ σημαντική είναι λοιπόν η ικανότητα του σύγχρονου Μάνατζερ να μπορεί να διαχειρίζεται πιθανά σενάρια υπό το βάρος της συνεχούς αβεβαιότητας και του κινδύνου. Κάθε στρατηγική απόφαση, οφείλει να στηρίζεται σε διεξοδική μελέτη διαφόρων πληροφοριών, μελετών και προβλέψεων ώστε να επιταχύνει την πρόσβαση σε κέρδη. Για παράδειγμα ένα πρόγραμμα έρευνας και ανάπτυξης (research and development – R&D) σε μια εταιρεία τεχνολογίας απαιτεί τακτική χρηματοδότηση ώστε να συνεχίζει τις λειτουργίες του προς την σωστή κατεύθυνση. Η χρηματοδότηση αυτή με την σειρά της εξαρτάται ευθέως εκτός των άλλων από τα αποτελέσματα διαφόρων επιστημονικών ερευνών αφιερωμένα σε προϊόντα που η εταιρεία ενδιαφέρεται να λανσάρει στην αγορά, από το μέγεθος της ήδη υπάρχουσας αγοράς ή από το αν αυτή είναι έτοιμη να δεχτεί το προϊόν αυτό και από την ευελιξία που έχει η εταιρεία να αναπτύξει ή και να ακυρώσει το πρόγραμμα R&D σε μια δεδομένη μελλοντική χρονική στιγμή. Είναι φανερό λοιπόν ότι κάθε εταιρική απόφαση λαμβάνεται υπό την επήρεια διαφόρων αβέβαιων παραγόντων και ο Μάνατζερ κρίνεται από την ικανότητά του να μπορεί να τους διαχειριστεί.

Η παραδοσιακή τεχνική αξιολόγησης επενδύσεων βασίζεται στην αναγωγή μελλοντικών ταμειακών ροών στο παρόν. Τέτοιου είδους τεχνικές είναι η μέθοδος «προεξοφλημένων ταμειακών ροών» (discounted cash flow - DCF) και η μέθοδος της «καθαρής παρούσας αξίας» (net present value - NPV), οι οποίες χρησιμοποιούνται κατά κόρον. Δυστυχώς αυτές οι μέθοδοι αν και χρησιμοποιούνται πολύ ευρέως, δεν αντικατοπτρίζουν ικανοποιητικά την αξία μιας επένδυσης της οποίας οι μελλοντικές ταμειακές ροές εξαρτώνται από μελλοντικά αποτελέσματα διαφόρων παραγόντων και από διάφορες στρατηγικές επιλογές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ταμειακές ροές να

μην μεταβάλλονται από διάφορες απρόβλεπτες μελλοντικές αλλαγές, πράγμα άτοπο. Παρ' όλα αυτά, τα δυο προαναφερθέντα εργαλεία δέχονται αποδοχής λόγω της εύκολης χρήσης και κατανόησης τους.

Πρώτος ο Myers το 1977 συνέθεσε τον όρο «πραγματικό δικαίωμα», αφού παρατήρησε ότι οι μελλοντικές επενδύσεις μπορούν να παρομοιαστούν με τα χρηματιστηριακά δικαιώματα προαίρεσης, τα οποία παρέχουν στον κάτοχό τους το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός υποκείμενου αγαθού στην συμφωνημένη τιμή και για ένα χρονικό διάστημα. Η προοπτική αυτή παρουσιάζει δύο κύρια πλεονεκτήματα. Πρώτον, για τον συγκεκριμένο τύπο χρηματιστηριακού προϊόντος έχουν αναπτυχθεί αποτελεσματικές μέθοδοι αξιολόγησης. Δεύτερον, έχουν αναπτυχθεί τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιούν τα πραγματικά δικαιώματα ώστε να αξιολογούν επενδύσεις και τα αποτελέσματα των τεχνικών αυτών υπερέχουν της παραδοσιακής μεθόδου DCF.

3.1.1 Παραδοσιακές τεχνικές αξιολόγησης επενδύσεων και γιατί αυτές «απειλούνται»:

Η θεωρία και η πρακτική της αξιολόγησης εστιάζεται στον προσδιορισμό του ποσού που πρέπει να πληρώσει ένας επενδυτής σήμερα, ώστε να έχει το δικαίωμα να λαμβάνει ένα ορισμένο σύνολο ταμειακών ροών στο μέλλον (A.J. Triantis , “Real Options”, 2003). Είναι σχεδόν βέβαιο ότι μια νομισματική μονάδα στο μέλλον αξίζει λιγότερο από μια νομισματική μονάδα στο παρόν. Επίσης, ο επενδυτής προτιμά μια σίγουρη νομισματική μονάδα παρά μια μέση (αναμενόμενη) νομισματική μονάδα. Επομένως οι έννοιες «παρούσα αξία» και «προεξοφλημένη ταμειακή ροή» έχουν νόημα. Σκοπός του επενδυτή είναι ο σαφής και ακριβής προσδιορισμός της παρούσας αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών. Με λίγα λόγια σημαντικός είναι ο προσδιορισμός του προεξοφλητικού επιτοκίου, το οποίο μετατρέπει την μελλοντική τιμή σε παρούσα.

Σύμφωνα με την μέθοδο DCF, το αναμενόμενο επίπεδο των μελλοντικών ταμειακών ροών προσδιορίζεται και στην συνέχεια μετατρέπεται σε παρούσα αξία μέσω του προεξοφλητικού επιτοκίου. Συνήθως το προεξοφλητικό επιτόκιο προσδιορίζεται με την βοήθεια του μοντέλου CAPM, το οποίο αναφέρθηκε παραπάνω και χρησιμοποιεί το εκάστοτε ασφαλές επιτόκιο, την αναμενόμενη

απόδοση και το ρίσκο της αγοράς. Παρ' όλη την δημοσιότητα της, η μέθοδος είναι επιρρεπής σε σημαντικά λάθη τα οποία δεν την χαρακτηρίζουν ολοκληρωτικά αλλά αλλοιώνουν την ορθότητα του αποτελέσματός της.

Πρώτον η μέθοδος DCF εκτιμά το αναμενόμενο σενάριο και όχι έναν σωστά σταθμισμένο μέσο όρο χρηματικών ροών. Αυτό γίνεται φανερό στην περίπτωση ενός εργοστασίου παραγωγής ενέργειας το οποίο έχει μια επιπλέον μονάδα ώστε να εξυπηρετεί την ζήτηση για ενέργεια όταν αυτή είναι υψηλή(επομένως και η τιμή του ρεύματος είναι υψηλή). Η μονάδα αυτή λειτουργεί με υψηλό μεταβλητό κόστος. Ο αναλυτής θα μελετήσει και θα βρει τις μέσες τιμές ρεύματος και από τα αναμενόμενα έσοδα της μονάδας θα αφαιρέσει το κόστος λειτουργίας. Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα το αποτέλεσμα της παραπάνω πράξης να βγει αρνητικό υποδεικνύοντας ότι ο επενδυτής θα πρέπει να σταματήσει την λειτουργία της εν λόγω μονάδας. Ο σωστός τρόπος προσέγγισης είναι ο εξής: ο αναλυτής θα πρέπει πρώτα να κατασκευάσει την κατανομή που ακολουθούν οι τιμές ρεύματος, στην συνέχεια για κάθε πιθανό επίπεδο τιμής θα πρέπει να αναθέσει την αντίστοιχη πιθανότητα το ενδεχόμενο να συμβεί και να πολλαπλασιάσει με το αντίστοιχο κέρδος αν η τιμή υπερβαίνει το κόστος και με 0 αν όχι (δεδομένου ότι το εργοστάσιο δεν θα λειτουργούσε την μονάδα με ζημία). Το συνολικό αναμενόμενο κέρδος για την επιχείρηση βρίσκεται από το άθροισμα των γινομένων αυτών. Είναι φανερό ότι υπάρχει περίπτωση η παρούσα τιμή των αναμενόμενων κερδών να είναι τελικά θετική και η επιχείρηση να πρέπει να ξεκινήσει την παραγωγή μέσω της συγκεκριμένης μονάδας άμεσα. Στην παραπάνω περίπτωση, η στρατηγική απόφαση που πρέπει να ληφθεί είναι το αν θα λειτουργήσει τελικά η μονάδα ή όχι στο προσεχές χρονικό διάστημα. Αυτό το δίλημμα παρομοιάζεται εύκολα με ένα χρηματιστηριακό δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (call option) στο οποίο: το υποκείμενο αγαθό είναι η τιμή του ρεύματος, το κόστος λειτουργίας της μονάδας είναι η τιμή εξάσκησης και ο χρονικός ορίζοντας είναι το δεδομένο προσεχές χρονικό διάστημα (π.χ. μια μέρα).

Δεύτερον, τώρα που έχουν υπολογιστεί οι αναμενόμενες χρηματοροές, πρέπει να «μεταφραστούν» στην τρέχουσα αξία τους. Σε αυτό το σημείο παραμονεύει ένα σύνηθες πρόβλημα. Ποιο θα πρέπει να είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο το οποίο θα προεξοφλεί επιτυχώς την μελλοντική αξία; Η απάντηση έρχεται δια της

σύγκρισης των αποδόσεων μεταξύ παρεμφερών εταιρειών ή παραγωγικών μονάδων. Επομένως η απάντηση είναι ότι η αναμενόμενη απόδοση θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Και πάλι αυτή η απάντηση είναι ατελής γιατί κάθε επιχείρηση είναι διαφορετική και η απόδοσή της εξαρτάται από πολλούς παράγοντες εκτεθειμένους σε ρίσκο. Έστω ότι προσπαθούμε να προβλέψουμε την απόδοση μιας επένδυσης η οποία θα ξεκινήσει σε 4 χρόνια. Γνωρίζουμε (μετά από σύγκριση) ότι μετά από 4 χρόνια η εφαρμογή της επένδυσης μας εξασφαλίζει χρηματοροές σε μια αγορά με ρίσκο περίπου 10%. Αν σε 4 χρόνια όντως αποφασίσουμε να επενδύσουμε ένα μεγάλο ποσό για την πραγματοποίηση του προγράμματος το ρίσκο που θα δεχτούμε θα είναι το ίδιο; Η απάντηση είναι «όχι», θα είναι πολύ μεγαλύτερο διότι το μεγάλο επενδυτικό μέρος το οποίο θα πραγματοποιηθεί σε 4 έτη, δέχεται από σήμερα ρίσκο από πολλούς παράγοντες (όχι μόνο της αγοράς). Εδώ βρίσκεται και η όλη δυσκολία της εκτίμησης του προεξοφλητικού επιτοκίου: ποια είναι η τιμή που ενσωματώνει κατάλληλα το ρίσκο για όλο το επενδυτικό πρόγραμμα και για όλο το χρονικό ορίζοντα;

3.1.2 Η λέξη «δικαίωμα» στην φράση «πραγματικά δικαιώματα»:

Η ανάλυση των πραγματικών δικαιωμάτων αποτελεί την τομή μεταξύ των σύγχρονων χρηματοοικονομικών με την επιχειρησιακή στρατηγική. Κάθε παρούσα απόφαση, δημιουργεί εναλλακτικές μελλοντικές επιλογές, οι οποίες με την σειρά τους ανοίγουν τον δρόμο προς το κέρδος. Η έννοια «δικαίωμα» αναφέρεται στην δυνατότητα του κατόχου να καθυστερήσει την επενδυτική απόφαση έως ότου νέα, ωφέλιμη πληροφόρηση είναι διαθέσιμη. Ο κάτοχος του δικαιώματος έχει συνήθως ένα σύνολο αποφάσεων αποτελούμενο από δύο αποφάσεις: «πραγματοποιώ την επένδυση άμεσα» ή «δεν πραγματοποιώ την επένδυση άμεσα». Ο ίδιος μπορεί να επανεξετάζει τις επιλογές του και να λαμβάνει τις αντίστοιχες αποφάσεις ανά τακτά διαστήματα και όταν νέα πληροφόρηση είναι διαθέσιμη. Μια εταιρεία μπορεί να λανσάρει το καινούργιο της προϊόν στην αγορά άμεσα ή να περιμένει τον επόμενο χρόνο μήπως της φανερωθούν καινούργια στοιχεία για τις τεχνολογικές εξελίξεις αλλά και για την πορεία και δεκτικότητα των αγορών όσον αφορά συναφή προϊόντα.

Είναι φανερό ότι τα πραγματικά δικαιώματα παρέχουν στον κάτοχό τους ευελιξία και αυτή αποτελεί ίσως το χρησιμότερο εργαλείο για το πολύ αβέβαιο μέλλον. Λογική είναι λοιπόν η στροφή ολοένα και μεγαλύτερου κοινού στην κατοχύρωση των πραγματικών δικαιωμάτων τα οποία τους εξασφαλίζουν μελλοντικές επιλογές. Στις σύγχρονες επιχειρήσεις τα πραγματικά δικαιώματα κατοχυρώνονται άμεσα μέσω συμβολαίων, αδειών, πατεντών και μίσθωσης ή και έμμεσα μέσω ενσωματωμένων επιλογών σε συμβάσεις: δημόσιες, πωλήσεων ή και συγχώνευσης-εξαγοράς επιχειρήσεων (mergers & acquisitions – M&A).

3.2 Τα είδη των Real Options:

Αν και υπάρχουν πολλά είδη Real Options, είναι χρήσιμο να διαχωρίζονται σε τέσσερις βασικές κατηγορίες, λόγω των κοινών τους λειτουργικών χαρακτηριστικών.

A. Δικαιώματα Ανάπτυξης (Growth Options):

Αυτού του είδους τα δικαιώματα αποτελούν το επικρατέστερο είδος και λειτουργούν κατ' αναλογία με τα χρηματιστηριακά call options. Δηλαδή, μια μικρή επένδυση (η οποία δημιουργεί την μελλοντική επιλογή) γίνεται σήμερα και δίνει στο κάτοχο του option την δυνατότητα να πραγματοποιήσει μια μεγαλύτερη επένδυση σε μελλοντικό χρόνο (ή μια σειρά επενδύσεων) ώστε να μπορέσει να αυξήσει τα κέρδη του (ανάπτυξη). Στις περισσότερες περιπτώσεις τα δικαιώματα ανάπτυξης δεν έχουν μια προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης και χρησιμοποιούνται μόνο όταν το κόστος καθυστέρησης της χρήσης τους ξεπεράσει τα οφέλη της καθυστέρησης για λόγους επιπλέον πληροφόρησης.

Τα παραδείγματα των δικαιωμάτων ανάπτυξης είναι πολλά:

1. Τα καταναλωτικά προϊόντα που προέρχονται από εταιρείες με ισχυρό όνομα στην αγορά (Brand Name) μπορεί να χρησιμοποιηθούν από αυτές ως ένα μέσω διείσδυσης σε νέες διεθνείς αγορές.
2. Στον τομέα των εταιρειών τεχνολογίας ή στις φαρμακοβιομηχανίες, τα τμήματα έρευνας και ανάπτυξης (R&D) παρέχουν την δυνατότητα εν σειρά επένδυσης σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας.

3. Εταιρείες με ενεργά προγράμματα M&A προσπαθούν να εντοπίζουν ευκαιρίες για να αυξήσουν τα κέρδη τους, μέσω συγχώνευσης με άλλες επιχειρήσεις ή εξαγοράς τους.

B. Δικαιώματα Συρρίκνωσης-Εγκατάληψης (Contraction Options):

Εν αντιθέσει με τα δικαιώματα ανάπτυξης, τα δικαιώματα συρρίκνωσης - εγκατάληψης δίνουν την δυνατότητα αποκλιμάκωσης ενός επιχειρηματικού προγράμματος λόγω επερχόμενων και αναπόφευκτων ζημιών. Τα παραπάνω δικαιώματα δρουν κατ' αναλογία με τα χρηματιστηριακά put options των οποίων ο κάτοχος έχει την δυνατότητα να πουλήσει ένα συγκεκριμένο αγαθό σε μια μελλοντική στιγμή. Όπως και στα δικαιώματα ανάπτυξης, έτσι και στα συρρίκνωσης - εγκατάληψης συχνά δεν υπάρχει συγκεκριμένη ημερομηνία λήξης. Η συρρίκνωση μπορεί να είναι σταδιακή και να προσφέρεται το ενδεχόμενο ανάπτυξης αν τα δεδομένα αλλάξουν προς το καλύτερο.

Παραδείγματα των προαναφερθέντων δικαιωμάτων είναι τα εξής:

1. Η παραγωγή σε εργοστάσια χημικών, διυλιστήρια ή εξορύξεις μπορεί να μειώνεται λόγω μείωσης των τιμών στα παραγόμενα προϊόντα έως ότου παρατηρηθεί πάλι αύξηση στην τιμή (π.χ. λόγω αύξησης της ζήτησης).
2. Γραμμές παραγωγής ή προγράμματα R&D μπορούν να εγκαταλείπονται αν η ζήτηση μειώνεται.
3. Μετά από κάποιο χρόνο χρήσης, οι πλοιοκτήτριες εταιρείες συνηθίζουν να διαλύουν τα πολυκαιρισμένα πλοία τους όταν οι τιμές των μετάλλων είναι αρκετά υψηλές.

C. Δικαιώματα Εναλλαγής (Switching Options):

Πολύ σημαντικό όπλο στα χέρια του σύγχρονου μάνατζερ είναι η ευελιξία. Η ευελιξία ενός επενδυτικού προγράμματος χαρακτηρίζεται - μετράται από τις επιλογές που είναι διαθέσιμες μπροστά στην αβεβαιότητα. Είναι καίρια η δυνατότητα να μπορεί κανείς να επιλέξει μια εναλλακτική διέξοδο όταν το επενδυτικό κλίμα είναι δυσχερές. Αυτήν την ευελιξία εξυπηρετούν και τα δικαιώματα

εναλλαγής, τα οποία σε αντίθεση με την συνηθισμένη διττή επιλογή: επένδυση / όχι επένδυση, προσφέρουν εναλλακτικές.

Για παράδειγμα:

1. Τα εργοστάσια παραγωγής συνήθως επιλέγουν να παράγουν πολλά είδη προϊόντων, έτσι ώστε να έχουν την ευελιξία και να εναλλάσσουν τις αντίστοιχες ποσότητες παραγωγής έκαστου προϊόντος σύμφωνα με το κλίμα της αγοράς.
2. Ένα κομμάτι γης συνήθως μπορεί να επιδέχεται πολλών χρήσεων, έτσι ώστε η εκμετάλλευση του να συνάδει με τις πιο κερδοφόρες ευκαιρίες.
3. Ολοένα και περισσότερα εργοστάσια παραγωγής είναι σχεδιασμένα ώστε να μπορούν να λειτουργούν με διάφορα είδη ενέργειας (κάρβουνο, φυσικό αέριο, πετρέλαιο) και τα εναλλάσσουν σύμφωνα με τα αντίστοιχα κόστη τους.

D. Δικαιώματα λόγω Σύμβασης (Contractual Options):

Πρόκειται για δικαιώματα τα οποία είναι εκμεταλλεύσιμα μέσω υπογεγραμμένων συμβολαίων. Εταιρείες οι οποίες έχουν επενδύσει στην ευελιξία ή έχουν την ευχέρεια διαφοροποίησης στους πελάτες τους και στους προμηθευτές τους, μπορούν να την «πωλούν» μέσω συμβολαίων σε επιχειρήσεις οι οποίες δεν είναι ευέλικτες και εκτιμούν την δυνατότητα επιλογής. Γνωστό είναι το παράδειγμα μεγάλων κατασκευαστών αεροπλάνων αλλά και ναυπηγείων τα οποία δεσμεύουν την προσφορά τους μέσω συμβολαίων. Αντίστοιχα οι αερομεταφορείς και οι πλοιοκτήτριες εταιρείες «κλειδώνουν» τις τιμές και τις ημερομηνίες παραλαβής των μεταφορικών μέσων. Με αυτό τον τρόπο προστατεύονται από την τυχόν διακύμανση των τιμών αλλά και από τυχόν αύξηση της ζήτησης.

3.3 Ανάλυση επένδυσης μέσω πραγματικών δικαιωμάτων:

Στα τέλη του 2013 μια μεγάλη κατασκευαστική εταιρεία ανάπτυξης ακινήτων, εξετάζει την επιλογή της υπογραφής σύμβασης έναντι αντιτίμου η οποία της δίνει την δυνατότητα να αναδιαμορφώσει μια μαρίνα μεγάλων σκαφών. Σύμφωνα με την σύμβαση αυτή, η εταιρεία θα μπορέσει να κτίσει επαγγελματικούς χώρους, αλλά και χώρους προοριζόμενους για αναψυχή, όπως και να διαμορφώσει μέσω εναλίων έργων τον χώρο υποδοχής των σκαφών. Αυτή η σύμβαση θα λήγει σε δύο έτη και αν η εταιρεία αποφασίσει την έναρξη των εργασιών κατασκευής θα πρέπει να πρέπει να το κάνει πριν το τέλος του 2015.⁶ Το κόστος κατασκευής του έργου ανέρχεται στα 200 εκατομμύρια ευρώ και το ασφαλές ετήσιο επιτόκιο (συνεχώς καταμερισμένο) είναι της τάξεως του 5%. Αυτό σημαίνει ότι το κόστος του έργου θα αυξηθεί το 2014 σε $200e^{5\%} = 210,25$ εκατ. ευρώ και το 2015 σε $200e^{10\%} = 221,03$ εκατ. ευρώ. Αναμένονται ετήσια έσοδα από την εκμετάλλευση της μαρίνας ίσα με 25 εκατ. ευρώ. Η απόδοση αυτή αναμένεται να φθίνει κατά 3% ετησίως λόγω οικονομικής υποτίμησης της επένδυσης και λόγω του αντίκτυπου της ανέγερσης μιας μαρίνας για την τοπική οικονομία. Υποθέτουμε ότι ο λόγος κεφαλαιοποίησης θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να μετατραπεί η μέλλουσα αξία σε παρούσα. Αυτός ο λόγος κεφαλαιοποίησης⁷ για την συγκεκριμένη επένδυση, μετά από σύγκριση με άλλες συναφείς επενδύσεις του ίδιου κλάδου, στην ίδια περιοχή, υπολογίζεται 9%. Οι ετήσιες χρηματοροές της επένδυσης συμπεριφέρονται σαν αυξανόμενη διηλεκτής ράντα η οποία λόγω των παραπάνω στοιχείων τιμολογείται ως $(\text{χρηματοροή ενός έτους}) / (R - g)$, όπου R είναι ο λόγος κεφαλαιοποίησης της χρηματοροής και g είναι το ετήσιο ποσοστό ανάπτυξης της χρηματοροής. Επομένως η αξία της ανεπτυγμένης μαρίνας σκαφών υπό τα παραπάνω δεδομένα κατά το τέλος του 2013 είναι $\frac{25 \text{ εκατ.}}{9\% - (-3\%)} = \frac{25 \text{ εκατ.}}{12\%} = 208,33$ εκατ. ευρώ και αντίστοιχα κάθε επόμενο χρόνο η αξία αυτή θα υποτιμάται κατά 3%.

⁶ Θεωρούμε ότι η ανάπτυξη του έργου μπορεί να γίνει άμεσα, όπως και η εκμετάλλευσή του.

⁷ $\text{Λόγος Κεφαλαιοποίησης} = \frac{\text{ετήσια έσοδα}}{\text{αξία επένδυσης}}$

3.3.1 Επίλυση μέσω χρήσης της φόρμουλας Black&Scholes:

Η χρήση της B-S είναι πλέον ευρέως διαδεδομένη λόγω της συχνής της εφαρμογής στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων προϊόντων. Αν και είναι απλή στην χρήση της, χαρακτηρίζεται από σημαντικούς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, υποθέτει την ύπαρξη συγκεκριμένης ημερομηνίας λήξης του παραγώγου και αναφέρεται σε υποκείμενα αγαθά τα οποία ακολουθούν την lognormal κατανομή⁸.

Τα δεδομένα που χρειάζονται για την τιμολόγηση της επένδυσης μέσω χρήσης του παραπάνω μοντέλου είναι τα εξής:

- Την αρχική αξία του υποκείμενου αγαθού (S): στην περίπτωση η αξία της ιδιοκτησίας, δηλαδή $S=208,33$ εκατ. ευρώ.
- Την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος (K): στην περίπτωση μας το κόστος της επένδυσης στο τέλος της περιόδου των 2 ετών, δηλαδή $K=221,03$ εκατ. ευρώ.
- Την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος (T): $T=2$ έτη.
- Την διαφορά του λόγου κεφαλαιοποίησης της χρηματοροής και της ετήσιας υποτίμησης της χρηματοροής (δ): στην περίπτωση μας $\delta = 12\% = 9\% - (-3\%)$.
- Το ασφαλές επιτόκιο (r): με $r=5\%$
- Το ρίσκο του υποκείμενου αγαθού (σ)⁹: στην περίπτωση μας λόγω εποχιακής χρήσης της μαρίνας και άλλων παραγόντων της οικονομίας, θεωρείται ίση με 24%.

Η αξία του δικαιώματος υπολογίζεται από τον προαναφερθέντα τύπο $c = Se^{-\delta T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$, όπου $N(d)$ είναι η συνάρτηση της τυπικής κανονικής αθροιστικής κατανομής και $d_1 = \frac{\ln(Se^{-\delta T}/Ke^{-rT})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$ και $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ τα αντίστοιχα ορίσματα της.

Στο παραπάνω παράδειγμα, $d_1 = -0,417$ και $d_2 = -0,757$. Αντίστοιχα, $N(d_1) = 0,338$ και $N(d_2) = 0,225$. επομένως η τελική τιμή του οption θα είναι ίση με 10,51 εκατ. ευρώ.

⁸ Η συνεχώς καταμερισμένη απόδοση του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί την κανονική κατανομή με σταθερή τυπική απόκλιση.

⁹ Η τυπική απόκλιση της απόδοσης της επένδυσης (χρηματοροές).

Ίσως οι πιο σημαντικοί παράγοντες στην τιμολόγηση του παραπάνω πραγματικού δικαιώματος είναι η τυπική απόκλιση (σ) και το «κόστος καθυστέρησης» της επένδυσης (δ)¹⁰. Κατά κανόνα αύξηση του ρίσκου, δηλαδή του παράγοντα σ , αυξάνει την αξία του δικαιώματος. Απεναντίας, η μείωση του παράγοντα δ επιφέρει αύξηση στην αξία του δικαιώματος.

Παρατηρούμε ότι η αξία της απευθείας πραγματοποίησης της επένδυσης είναι 8,33 εκατ. ευρώ (208,33-200), ενώ η αξία της αναβολής της επένδυσης για 2 έτη μέχρι το 2015, όπως υπολογίστηκε με την βοήθεια της φόρμουλας B-S είναι 10,51 εκατ. ευρώ. Φαίνεται ότι ο επενδυτής αξίζει να περιμένει σύμφωνα με την διαφορά των αξιών των δύο επιλογών του.¹¹ Σε αυτό το παράδειγμα η άμεση πραγματοποίηση της επένδυσης φαίνεται λιγότερο επικερδής σε σχέση με την αναμονή δύο ετών. Παρ' όλα αυτά, η παραπάνω μέθοδος δεν αναλύει επαρκώς το πρόβλημα διότι δεν λαμβάνει υπ' όψιν πιθανές επιλογές σε ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα. Αν ο επενδυτής επιλέξει την αναβολή της επένδυσης για ένα έτος και η αξία του ακινήτου αυξηθεί, τότε ίσως τον συμφέρει να εκμεταλλευθεί την παραθαλάσσια περιοχή το έτος 2014 όταν περισσότερη πληροφορία θα είναι διαθέσιμη σε αυτόν.

3.3.2 Διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων:

Σε αντίθεση με το μοντέλο B-S, το διωνυμικό μοντέλο εξασφαλίζει μια πιο ενδελεχή ανάλυση των επιλογών στα χέρια του επενδυτή σε σχέση με τον χρονικό ορίζοντα. Μια άλλη βασική διαφορά είναι το γεγονός ότι το διωνυμικό μοντέλο σε κάθε χρονικό διάστημα δίνει μόνο δύο τιμές στις οποίες εφαρμόζεται η πιθανότητα της πραγματοποίησης του αντίστοιχου ενδεχομένου. Σε κάθε χρονικό στάδιο (ΔT) λοιπόν υπάρχουν δυο πιθανές εναλλακτικές. Αυτό από μόνο του δημιουργεί μια πληθώρα διαδρομών οι οποίες καταλήγουν στην ημερομηνία λήξης. Έτσι δημιουργείται ένα διωνυμικό δέντρο ενδεχομένων, με την βοήθεια

¹⁰ Ο παράγοντας δ παρουσιάζει την θυσία της αξίας της επένδυσης λόγω χρονικής καθυστέρησης. Με λίγα λόγια η μη πραγματοποίηση της επένδυσης δημιουργεί δυο ομόρροπες απώλειες: 9% αύξηση του κόστους και 3% μείωση των εσόδων σε ετήσια βάση.

¹¹ Η τιμολόγηση της επιλογής εξάσκησης της επένδυσης (σύμφωνα με το μοντέλο B&S) το έτος 2015 υπερβαίνει σε αξία την επιλογή άμεσης ανέγερσης του έργου.

του οποίου επιτυγχάνεται καλύτερη ανάλυση των πιθανών αποτελεσμάτων.

Το διωνυμικό δέντρο «κτίζεται» άμεσα, θεωρώντας ότι σε κάθε χρονικό στάδιο ΔT η αξία του υποκείμενου αγαθού αυξάνεται κατά παράγοντα $u = e^{(r-\delta)+\sigma\sqrt{\Delta T}}$ ή μειώνεται κατά παράγοντα $d = e^{(r-\delta)-\sigma\sqrt{\Delta T}}$. Ουσιαστικά αυτά τα δύο ενδεχόμενα φανερώνουν την πιθανή αξία την οποία κάποιος μπορεί να «κλειδώσει» επενδύοντας στην ανέγερση του συγκροτήματος γραφείων σε διάστημα ΔT από σήμερα, αυξημένη και αντίστοιχα μειωμένη κατά μια τυπική απόκλιση. Δεδομένων των ορισμάτων, οι παράγοντες λαμβάνουν τις τιμές: $u = 1,1853$ και $d = 0,7334$.

Το διωνυμικό μοντέλο έχει την μορφή:

Δεδομένα	(Εξάσκηση στο T=2)	Το διωνυμικό Δέντρο		
		t=0	t=1	t=2
S=	208,33			
K=	221,03			S=292,69 C=71,66
T=	2			
r=	5%			
σ=	24%			
δ=	12%			
u=	1,1853			
d=	0,7334			
		S=208,33	S=246,93 S=152,80	S=181,11 C=0 S=112,07 C=0

Πίνακας 3.1: Διωνυμικό δέντρο τιμολόγησης της επιλογής κτίσης της μαρίνας

Αρχίζοντας από το $t=0$ πολλαπλασιάζουμε κάθε κόμβο αναφοράς με u και d . Έτσι, στο $t=1$ εμφανίζονται οι τιμές 246,93 και 152,80. Ενώ συνεχίζοντας την διαδικασία αυτή, για το $t=2$ έχουμε τις τιμές 292,69, 181,11 και 112,07. Η τιμολόγηση του δικαιώματος γίνεται μόνο την χρονική στιγμή $t=2$, δηλαδή το έτος 2015 και συγκεκριμένα $c = \max(S_{t=2} - K, 0)$. Άρα η αξία του δικαιώματος το έτος 2015 είναι 71,66 εκατ. ευρώ, 0 και 0 αντίστοιχα.

Το επόμενο βήμα της μελέτης αποτελείται από την προς τα πίσω αξιολόγηση του δικαιώματος. Επομένως, θέλουμε να αξιολογήσουμε την επένδυση το έτος 2014 και αντίστοιχα το έτος 2013 υπό όλα τα πιθανά σενάρια. Σε αυτού του είδους την μελέτη μας βοηθά η τεχνική της DCF προσαρμοσμένη στο διωνυμικό μοντέλο.

Η αξία της επένδυσης την χρονική στιγμή $t=0$ ανέρχεται στα 208,33 εκατ. ευρώ. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος του 2014 η παρούσα αξία της θα είναι ίση με $208,33e^{-\delta} = 184,78$. Δηλαδή, αξία της τάξεως $23,56 = 208,33(1 - e^{-\delta})$ εκατ. ευρώ αντιστοιχεί στις κόστος καθυστέρησης προσαρμοσμένες στις χρηματοροές του πρώτου έτους¹². Επίσης, στο $t=1$, η αξία της επένδυσης θα έχει μειωθεί κατά 3% δηλαδή $208,33e^{-3\%} = 202,18$. Η πιθανότητα ανόδου της αξίας της επένδυσης θα βρεθεί από τον τύπο $202,18 = p246,93 + (1 - p)152,80 \Rightarrow p \simeq 52\%$.

Ενώ η τυπική διαδικασία της μεθόδου DCF επιτάσσει την προσαρμογή του ρίσκου στο προεξοφλητικό επιτόκιο, είναι πιο εύκολο να βρούμε τις αναμενόμενες αξίες της επένδυσης προσαρμοσμένες στο ρίσκο και στην συνέχεια απλά να προεξοφλούμε με το ασφαλές επιτόκιο για να βρούμε την παρούσα αξία της επένδυσης. Συγκεκριμένα, η αναμενόμενη αξία προσαρμοσμένη στο ρίσκο (Certainty Equivalent Value - CEV) είναι μικρότερη από την αναμενόμενη αξία και βρίσκεται προεξοφλώντας την αναμενόμενη αξία στο $t=1$ κατά 5%. Άρα $CEVe^{-5\%} = 184,78 \Rightarrow CEV = 194,25$ είναι η αναμενόμενη αξία προσαρμοσμένη στο ρίσκο για $t=1$, με παρούσα αξία 184,78 εκατ. ευρώ. Η αντίστοιχη πιθανότητα ανόδου της αξίας της επένδυσης βρίσκεται από τον τύπο $p^*246,93 + (1 - p^*)152,80 = 194,25 \Rightarrow p^* \simeq 44\%$.¹³ Η παραπάνω διαδικασία διευκολύνει τον υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος και δεν είναι επιρρεπής σε λάθη όπως η παραδοσιακή μέθοδος DCF με συνεχώς προσαρμοσμένο ως προς το ρίσκο προεξοφλητικό επιτόκιο προς υπολογισμό της εκάστοτε παρούσας αξίας. Οι τιμές του δικαιώματος με την βοήθεια της τιμής CEV, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

¹² Ουσιαστικά η παρούσα αξία των χρηματοροών που θα λάμβανε η εταιρεία το 2014 αν αποφάσιζε να χτίσει το 2013

¹³ Είναι φανερό ότι η p^* είναι μικρότερη της p διότι ενσωματώνει την έννοια του ρίσκου στην αξία της επένδυσης. Επομένως η πιθανότητα αύξησης της αξίας της επένδυσης μειώνεται ενώ αντίστοιχα η πιθανότητα μειωμένης αξίας αυξάνεται.

Δεδομένα		(Εξάσκηση στο T=2)		Το διωνυμικό Δέντρο		
				t=0	t=1	t=2
S=	208,33					
K=	221,03					S=292,69 C=71,66
T=	2					
r=	5%				S=246,93 C=29,99	
σ=	24%					S=181,11 C=0
δ=	12%			S=208,33 C=12,55		
u=	1,1853				S=152,80 C=0	
d=	0,7334					S=112,07 C=0

Πίνακας 3.2: Τιμολόγηση του πραγματικού δικαιώματος μέσω διωνυμικού μοντέλου (εξάσκηση την χρονική στιγμή t=2)

Εφόσον γνωρίζουμε τις πιθανότητες ανόδου και καθόδου της αξίας της ιδιοκτησίας, μπορούμε εύκολα με προς τα πίσω επαγωγή να υπολογίσουμε την αξία του δικαιώματος την χρονική στιγμή t=0. Ξεκινώντας την χρονική στιγμή t=1, γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση της ανοδικής τάσης (S=246,93) η αναμενόμενη αξία του δικαιώματος προσαρμοσμένη στο ρίσκο θα βρεθεί την t=2 ως $44\% * 71,66 + 56\% * 0 = 31,53$. Αν αυτή η τιμή προεξοφληθεί με το ασφαλές επιτόκιο του 5% έχουμε $31,53 * e^{-5\%} = 29,99$, την παρούσα αξία του δικαιώματος προσαρμοσμένη στο ρίσκο για το 2014. Η αντίστοιχη διαδικασία για την περίπτωση της καθοδικής τάσης δίνει μηδενικό αποτέλεσμα στην αξία του δικαιώματος. Κάνοντας άλλο ένα βήμα χρονικά προς τα πίσω, την αρχική χρονική στιγμή t=0 η αξία του δικαιώματος σύμφωνα με την προαναφερθείσα διαδικασία υπολογίζεται: $(44\% * 29,99 + 56\% * 0) * e^{-5\%} = 12,55$ εκατ. ευρώ.¹⁴

Σε όλη την μέχρι τώρα ανάλυση της αξίας του δικαιώματος με την βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου, υποθέταμε ότι το δικαίωμα κτίσης θα είχε ημερομηνία εξάσκησης στα τέλη του 2015. Δεδομένου όμως ότι ο επενδυτής χάνει σημαντικό μερίδιο από πιθανά κέρδη περιμένοντας επί 2 έτη, είναι πρόπον να εξετάσουμε την περίπτωση της αξίας εξάσκησης του δικαιώματος το έτος 2014, δηλαδή για t=1. Στην περίπτωση ανοδικής πορείας της αξίας της ιδιοκτησίας (S=246,93), η αξία του δικαιώματος υπολογίστηκε C=29,99. Το κέρδος από την εξάσκηση του δικαιώματος τον πρώτο χρόνο σε περίπτωση ανόδου της αξίας θα είναι η διαφορά της αξίας της

¹⁴ Η αξία του δικαιώματος σύμφωνα με την προσαρμογή στο ρίσκο είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αξία που υποδεικνύει η μέθοδος B-S (12,55 > 10,51).

ιδιοκτησίας (μαρίνας) το 2014, δηλαδή 246,93 και του κόστους κτίσης που για το 2014 υπολογίζεται ως $200e^{5\%} = 210,25$ εκατ. ευρώ. Επομένως, $C = 246,93 - 210,25 = 36,68$ εκατ. ευρώ. Για την περίπτωση της καθοδικής τάσης, η αξία εξάσκησης του δικαιώματος παραμένει μηδενική για ευνόητους λόγους. Με την νέα τιμή για της αξίας της επένδυσης, η αναμενόμενη αξία του δικαιώματος για τον πρώτο χρόνο θα είναι $44\% * 36,68 + 56\% * 0 = 16,14$ και η παρούσα αξία της θα βρεθεί όταν η παραπάνω ποσότητα προεξοφληθεί με 5% δηλαδή: $C = 16,14 * e^{-5\%} = 15,35$ εκατ. ευρώ για την αρχική χρονική στιγμή. Παρατηρούμε ότι η αξία του δικαιώματος με εξάσκηση στον πρώτο χρόνο, είναι μεγαλύτερη από την αξία του δικαιώματος με εξάσκηση τον δεύτερο χρόνο (12,55 εκατ. ευρώ), επομένως είναι καθ' όλα συνετό ο επενδυτής να επιλέξει την εξάσκηση του δικαιώματος νωρίτερα.

Τα παραπάνω συνοψίζονται από τον παρακάτω πίνακα:

Δεδομένα		(Εξάσκηση στο T=1)		Το διωνυμικό Δέντρο		
				t=0	t=1	t=2
S=	208,33					
K=	221,03					S=292,69
T=	2					C=71,66
r=	5%				S=246,93	
σ=	24%				C=36,68	
δ=	12%			S=208,33		S=181,11
				C=15,35		C=0
u=	1,1853				S=152,80	
d=	0,7334				C=0	
						S=112,07
						C=0

Πίνακας 3.3: Τιμολόγηση του πραγματικού δικαιώματος μέσω διωνυμικού μοντέλου (εξάσκηση την χρονική στιγμή t=1)

Παρατηρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος αναδιαμόρφωσης της μαρίνας σκαφών σύμφωνα με την χρήση του μοντέλου των Black&Scholes, είναι κατά 2,4 εκατ. ευρώ μικρότερη από την αντίστοιχη τιμολόγηση μέσω του διωνυμικού μοντέλου (για εξάσκηση του δικαιώματος το έτος 2015). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η διάρκεια των δύο χρόνων που ορίζει το δικαίωμα λόγω σύμβασης «σπάει» μόνο σε δύο χρονικά διαστήματα του ενός έτους. Στην περίπτωση κατά την οποία μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα για μικρότερα χρονικά διαστήματα, για παράδειγμα $\Delta t = 1/2$ έτη,

παρατηρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος προσεγγίζει εκείνη που υποδείχτηκε μέσω της εφαρμογής του τύπου B-S.

Το συμπέρασμα αυτό υποστηρίζεται από την παρακάτω εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου:

Δεδομένα	(Εξάσκηση στο T=2)	Το διωνυμικό Δέντρο				
		t=0	t=0,5	t=1	t=1,5	t=2
S=	208,33					
K=	221,03					S=357,08 c=136,05
T=	2					
r=	2,5%					
σ=	24%					
δ=	6%					
u=	1,14					
d=	0,81					
		S=208,33 c=11,66	S=238,37 c=22,62	S=272,74 c=42,82	S=312,07 c=78,33	S=254,31 c=33,28
			S=169,77 c=2,96	S=194,25 c=6,63	S=222,26 c=14,85	S=181,11 c=0
				S=138,34 c=0	S=158,29 c=0	S=128,99 c=0
					S=112,73 c=0	S=91,86 c=0

Πίνακας 3.4: Τιμολόγηση του πραγματικού δικαιώματος μέσω διωνυμικού μοντέλου (εξάσκηση την χρονική στιγμή t=2 , Δt=1/2 έτος)

Πράγματι, η διαφορά των δύο τιμολογήσεων μειώνεται σε 0,89 εκατ. ευρώ. Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι κάθε φορά που μειώνουμε ή αυξάνουμε το χρονικό βήμα της μελέτης του διωνυμικού δέντρου, οφείλουμε να τροποποιούμε και τα δεδομένα του προβλήματος.

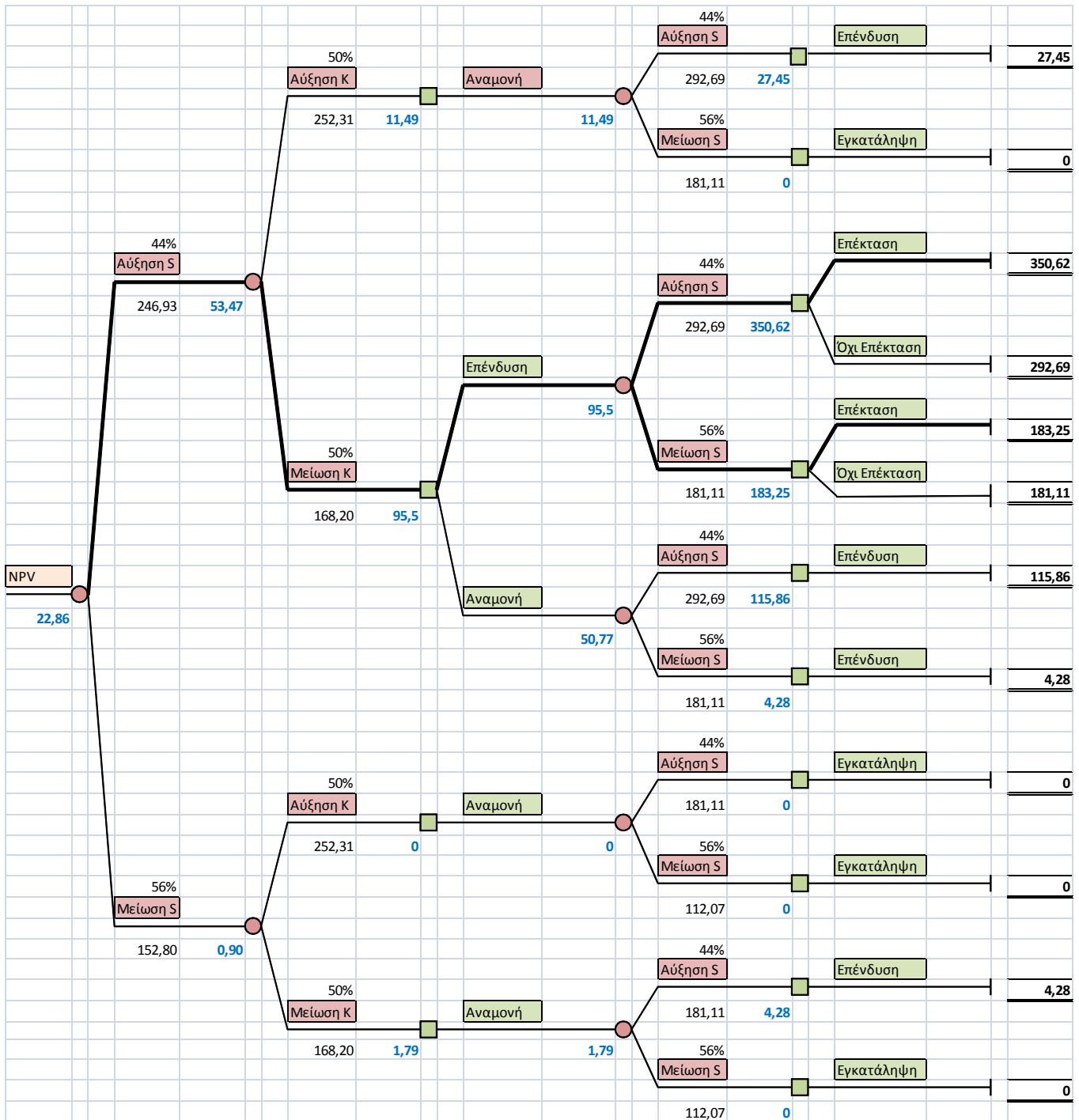
3.3.3 Δέντρα αποφάσεων προσαρμοσμένα στο ρίσκο:

Όταν τα προβλήματα απαιτούν την λήψη πληθώρας αποφάσεων αλλά και η πολυπλοκότητα των ενδεχομένων υπό ρίσκο αυξάνεται, τα δέντρα αποφάσεων προσφέρουν μια κομψή και ευνόητη λύση μοντελοποίησης. Η προηγούμενη ανάλυση προσαρμογής του ρίσκου στο διωνυμικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάλλιστα και στα δέντρα αποφάσεων. Ουσιαστικά πρόκειται για την γενική μορφή του διωνυμικού μοντέλου για πιο σύνθετα προβλήματα με εκτενή παρουσία αβεβαιότητας – ρίσκου.

Έστω ότι στο παράδειγμα του επενδυτή ανάπτυξης της μαρίνας που αναλύθηκε στα παραπάνω κεφάλαια, προστίθενται μερικές επιλογές ακόμα. Συγκεκριμένα, το κόστος του κτίσματος εξαρτάται από τεχνικές και ρυθμιστικές αβεβαιότητες, οι οποίες θα λυθούν τον πρώτο χρόνο (2014). Το κόστος θα είναι 20% προσαυξημένο με πιθανότητα 50% ή κατά 20% ισοπίθανα μειωμένο από τα αντίστοιχα αναμενόμενα κόστη για τις χρονικές στιγμές $t=1,2$ δηλαδή $K = 210,25$ για $t = 1$ και $K = 221,03$ για $t = 2$.¹⁵ Επιπροσθέτως, αν ο επενδυτής αποφασίσει την έναρξη των εργασιών τον πρώτο χρόνο, θα του επιτραπεί να αυξήσει την χωρητικότητα του έργου του (άρα και την αξία του) κατά 50% στο τέλος του δεύτερου και τελευταίου χρόνου (2015). Το κόστος της επέκτασης θα είναι αναλογικό, επομένως θα αξίζει το 50% του ολικού κόστους της επένδυσης την χρονική στιγμή $t=2$. Προφανώς, υπάρχει η περίπτωση το κόστος της επέκτασης να ξεπερνά την προστιθέμενη αξία και η επιλογή (επέκταση) να μην χρησιμοποιηθεί καθόλου.

¹⁵ Το κόστος της επένδυσης σύμφωνα με τα καινούργια δεδομένα θα είναι για $t=1$ ισοπίθανα 252,31 ή 168,20 και για $t=2$ θα είναι ισοπίθανα 265,24 ή 176,83.

Το πλήρες δέντρο αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας είναι το εξής:



Διάγραμμα 3.1: Δέντρο αποφάσεων προσαρμοσμένο στο ρίσκο περιέχον όλες τις διαθέσιμες επιλογές του επενδυτή και τις αντίστοιχες τιμολογήσεις τους

Στο παραπάνω δέντρο αποφάσεων χρησιμοποιούνται κόμβοι ενδεχομένων και κόμβοι αποφάσεων οι οποίοι οδηγούν τον επενδυτή στον προσδιορισμό της αξίας των δικαιωμάτων που διαθέτει σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος. Λογικές διαδρομές, οι οποίες οδηγούν σε ζημίες και μηδενική αξία των δικαιωμάτων λόγω υπέρβασης της αξίας από το κόστος της

επένδυσης έχουν παραληφθεί εσκεμμένα. Η βασική μεθοδολογία επίλυσης του δέντρου προϋποθέτει τον υπολογισμό των αναμενόμενων τιμών της αξίας για την επένδυση (στην μαρίνα) την χρονική στιγμή $t=2$ και την μετέπειτα προεξόφληση της αξίας αυτής κατά το ασφαλές επιτόκιο για τον προσδιορισμό των αντίστοιχων αξιών του δικαιώματος στους προηγούμενους χρόνους $t=0$ και $t=1$. Από το παραπάνω σχήμα, μέσω των τονισμένων γραμμών φαίνεται η βέλτιστη πολιτική που θα έπρεπε να ακολουθήσει ο επενδυτής. Αν το κόστος ανέγερσης της μαρίνας μειωθεί κατά 20% τον πρώτο χρόνο και η αξία της μαρίνας υποστεί αύξηση, ο επενδυτής οφείλει να επιλέξει να επενδύσει αρχίζοντας την πραγματοποίηση του έργου. Αν τον επόμενο χρόνο ($t=2$) η αξία της ιδιοκτησίας αυξηθεί ή μειωθεί, ο επενδυτής πρέπει να επεκτείνει την μαρίνα.

Ενδεικτικά, θα αναλυθούν οι υπολογισμοί που ακολουθήθηκαν στον προσδιορισμό της βέλτιστης επενδυτικής πολιτικής. Το έτος 2015, κατά το οποίο έχει ήδη ανεγερθεί το κτίσμα (σύμφωνα με την βέλτιστη πολιτική) αν υποτεθεί ότι η αξία της επένδυσης είναι $S = 292,69$ και το κόστος είναι της τάξεως του $K = 80\% \times 221,03 = 176,83$, ο επενδυτής επεκτείνει την ιδιοκτησία του αποκομίζοντας κέρδος 350,62 εξασκώντας το δικαίωμα που του δίνεται. Πως όμως καταλήγουμε στην τιμή αυτή; Μετά την επέκταση, η αξία της ιδιοκτησίας θα είναι ίση με $292,69 \times 1,50 = 439,04$ και το αντίστοιχο κόστος επέκταση θα είναι το μισό της ανέγερσης της παρούσας ιδιοκτησίας, δηλαδή $50\% \times 176,83 = 88,42$. Από την αφαίρεση των δύο προκύπτει το θετικό αποτέλεσμα της επέκταση το οποίο είναι ίσο με $439,04 - 88,42 = 350,62$. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα της μη επέκτασης ισούται με την υπάρχουσα αξία της ιδιοκτησίας, η οποία ισούται με 292,69 εκατ. ευρώ. Είναι φανερό ότι επειδή η αξία του δικαιώματος επένδυσης, υπερβαίνει την αντίστοιχη του δικαιώματος μη επέκτασης, ο επενδυτής θα επιλέξει την επέκταση. Για τον ίδιο λόγο, αν η αξία της ιδιοκτησίας μειωθεί σε 181,11 εκατ. ευρώ, θα επιλεγεί η δυνατότητα επέκτασης γιατί η αξία του δικαιώματος επέκτασης υπερβαίνει κατά 2,14 εκατ. ευρώ την αξία της μη επέκτασης της μαρίνας, όσο δηλαδή και η προστιθέμενη αξία από την επιλογή επέκτασης της μαρίνας σε περίπτωση χαμηλής αξίας την $t=2$. Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός της αξίας του κόμβου απόφασης για την επενδυτική επιλογή «ανέγερση του κτίσματος» το έτος 2014. Η αναμενόμενη αξία του δικαιώματος επέκτασης το 2015 αξίζει $44\% \times 350,62 + 56\% \times 183,25 = 256,89$. Η παρούσα αξία της παραπάνω ποσότητας το έτος 2014 θα είναι

(προεξόφληση κατά 5%) $256,89 \times e^{-5\%} = 244,36$. Από την τελευταία ποσότητα που αντιστοιχεί στην αξία του δικαιώματος την χρονική στιγμή $t=1$, θα πρέπει να αφαιρεθεί το κόστος ανέγερσης εκείνο το έτος, το οποίο είναι ίσο με 176,83 και προστεθεί σε αυτή η παρούσα αξία ($t=1$) των χρηματοροών που έλαβε ο επενδυτής από την αξιοποίηση του κτίσματος το 2015. Αυτή η παρούσα αξία των χρηματοροών υπολογίζεται ως $246,93(1 - e^{-12\%}) = 27,92$ εκατ. ευρώ. Επομένως, την χρονική στιγμή $t=1$, η αξία του δικαιώματος είναι ίση με $244,36 - 176,83 + 27,92 = 95,5$ εκατ. ευρώ.

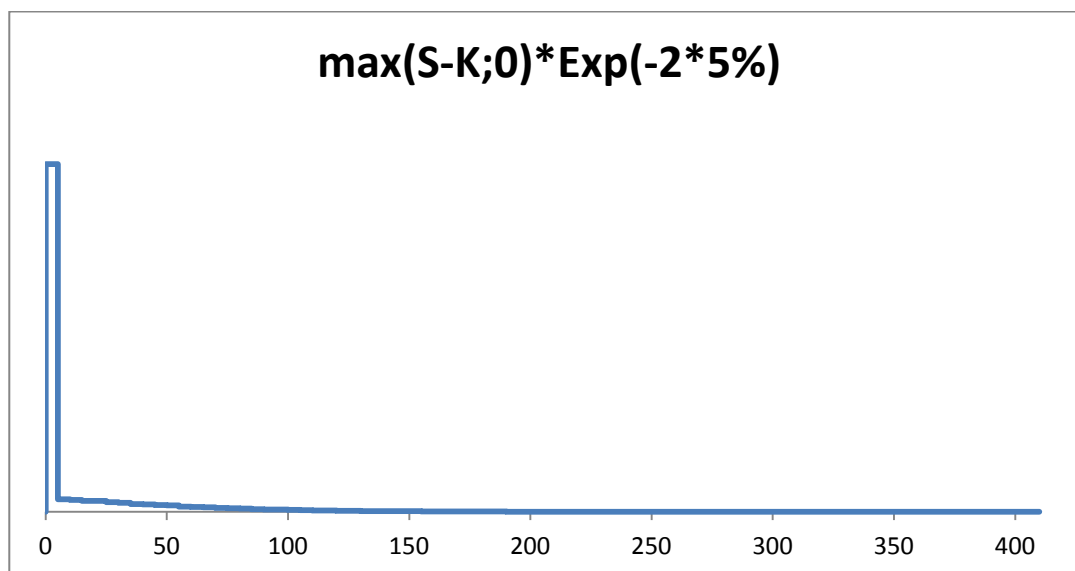
Η αξία του πραγματικού δικαιώματος κτίσης και επέκτασης την χρονική στιγμή $t=0$ υπολογίζεται στα 22,86 εκατ. ευρώ. Αυτή η τιμή είναι μεγαλύτερη από την αξία του δικαιώματος κτίσης όπως προκύπτει από το διωνυμικό μοντέλο (15,35 εκατ.). Αυτό συμβαίνει για δύο πολύ απλούς λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι η προστιθέμενη αβεβαιότητα όσον αφορά το κόστος της επένδυσης αυξάνει την συνολική μεταβλητότητα - ρίσκο της επένδυσης και επομένως αυξάνει και την αξία του πραγματικού δικαιώματος. Ο δεύτερος λόγος είναι το γεγονός ότι προστίθεται το δικαίωμα της επέκτασης το δεύτερο έτος, μοιράζοντας προστιθέμενη αξία στην περίπτωση μείωσης του κόστους των έργων το 2015.

3.3.4 Τιμολόγηση μέσω προσομοίωσης Monte-Carlo:

Η μέθοδος MC χρησιμοποιεί τις προαναφερθείσες βασικές αρχές προσδιορισμού της αναμενόμενης αξίας του δικαιώματος και μετέπειτα προεξόφλησής της με το ασφαλές επιτόκιο σε προηγούμενο χρόνο. Η βασική διαφορά με άλλες μεθόδους, αλλά ίσως και προτέρημα είναι το γεγονός ότι μπορεί να δέχεται πολλές μορφές αβεβαιότητας και να ενσωματώνει κάλλιστα πολλούς συσχετιζόμενους ή μη παράγοντες ρίσκου.

Σύμφωνα με τον ορισμό του παραπάνω προβλήματος επενδυτικής στρατηγικής, η αξία της ιδιοκτησίας και το κόστος αξιοποίησης της λαμβάνουν αρκετές διαφορετικές τιμές στον χρονικό ορίζοντα των δύο ετών. Ας τιμολογήσουμε πρώτα το πραγματικό δικαίωμα με ημερομηνία εξάσκησης το έτος 2015 όταν οι πιθανές τιμές κόστους (K) ανέγερσης του κτιρίου μπορούν να λάβουν ισοπίθανα τις τιμές 265,24 και 176,83 αντίστοιχα. Θεωρούμε

ότι η αξία της ιδιοκτησίας ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή και λαμβάνει τιμές σύμφωνα με την έκφραση μεταβολών $S = 208,33 \times e^Y$, όπου Y τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $(r - \delta - 0,5\sigma^2) \times T = (5\% - 12\% - 0,5 \times 24\%^2) \times 2 = -0,1976$ και τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{T} = 0,3394$.¹⁶ Η παρούσα αξία του δικαιώματος την αρχική χρονική στιγμή βρίσκεται από τον τύπο $C = \text{Max}(S - K, 0) \times e^{-5\% \times 2}$. Προσομοιώνοντας το αποτέλεσμα με την βοήθεια της μεθόδου MC καταλήγουμε έπειτα από 100.000 επαναλήψεις στο παρακάτω ιστόγραμμα:

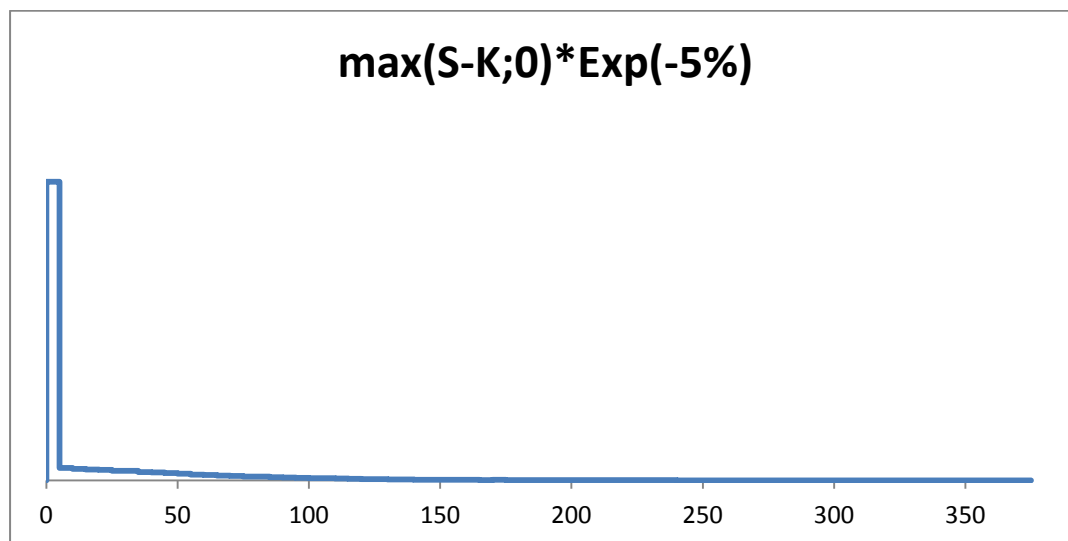


Γραφική Παράσταση 3.1: Προσομοίωση Monte Carlo 100.000 επαναλήψεων προς τιμολόγηση του contractual option (την χρονική στιγμή t=2)

Η παραπάνω προσομοίωση υπολογίζει την μέση αξία του πραγματικού δικαιώματος με ημερομηνία εξάσκησης την t=2, ίση με 13,72 εκατ. ευρώ και με τυπική απόκλιση ίση με 29,79 εκατ. ευρώ.

¹⁶ Η ίδια τακτική ακολουθήθηκε από το μοντέλο B-S και εξασφαλίζει ότι η παρούσα αξία την χρονική στιγμή t=0 της αξίας της ιδιοκτησίας την χρονική στιγμή t=2, θα είναι ίση με 208,33 εκατ. ευρώ.

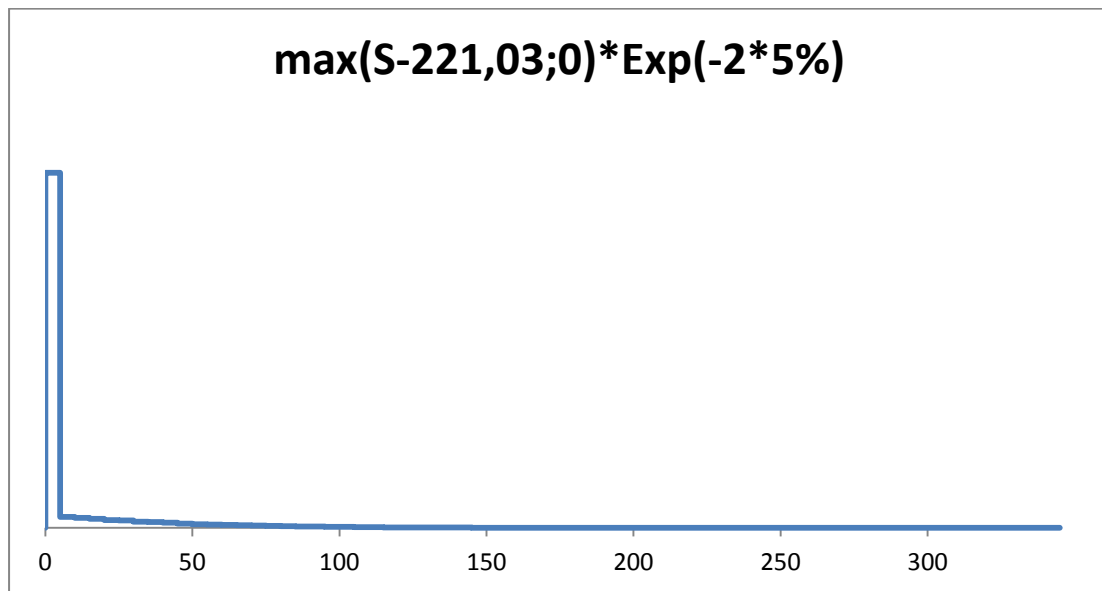
Στην περίπτωση επιλογής πρόωρης ανάπτυξης της μαρίνας το έτος 2014, η ίδια προσομοίωση δίνει το παρακάτω ιστόγραμμα της αξίας του δικαιώματος αν επιλεγεί η εξάσκηση την χρονική στιγμή $t=1$:



Γραφική Παράσταση 3.2: Προσομοίωση Monte Carlo 100.000 επαναλήψεων προς τιμολόγηση του contractual option (την χρονική στιγμή $t=1$)

Η αντίστοιχη μέση αξία του πραγματικού δικαιώματος ανάπτυξης υπολογίζεται σε αυτή την περίπτωση ίση με 17,19 εκατ. ευρώ και η κατανομή έχει τυπική απόκλιση ίση με 33,81 εκατ. ευρώ. Παρατηρείται μια προφανής διαφορά μεταξύ των δύο τιμών δεδομένου ότι στην περίπτωση της εξάσκησης μετά από ένα έτος, ο επενδυτής μπορεί να εκμεταλλευθεί την εισροή χρηματοροών και να αποφύγει επιπλέον αβεβαιότητα η οποία θα αυξήσει το ρίσκο.

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων MC, απέχουν αριθμητικά από τα αντίστοιχα αποτελέσματα της εφαρμογής των τιμολογήσεων B-S και Διωνυμικού Μοντέλου. Αυτό συμβαίνει διότι στην παραπάνω μελέτη θεωρούμε ότι το κόστος K της επένδυσης μπορεί να λάβει δύο πιθανές τιμές ανά ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Η αύξηση της αβεβαιότητας σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται ωφέλιμη. Αν όμως θέλουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων (πλήν του Δέντρου Αποφάσεων προσαρμοσμένο στο ρίσκο) είναι χρήσιμο να πραγματοποιήσουμε την παρακάτω προσομοίωση MC, η οποία θεωρεί χρόνο εξάσκησης το 2015 ($T=2$) και κόστος επένδυσης σταθερό και ίσο με 221,03 εκατ. ευρώ τον χρόνο εξάσκησης.



Γραφική Παράσταση 3.3: Προσομοίωση Monte Carlo 100.000 επαναλήψεων προς τιμολόγηση του contractual option (την χρονική στιγμή $t=2$ και με σταθερό κόστος επένδυσης 221,03 εκατ. ευρώ)

Η αντίστοιχη μέση αξία του πραγματικού δικαιώματος ανάπτυξης υπολογίζεται σε αυτή την περίπτωση ίση με 9,30 εκατ. ευρώ και η κατανομή έχει τυπική απόκλιση ίση με 24,17 εκατ. ευρώ. Η συγκεκριμένη τιμή «πλησιάζει» εκείνη των προηγούμενων αντίστοιχων τιμολογήσεων και θεωρείται πολύ ακριβής διότι ενσωματώνει ομοιόμορφα την ύπαρξη ρίσκου σε κάθε χρονική περίοδο.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση:

- [1] Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (2001), Introduction to Operations Research, McGraw-Hill, 7th Edition.
- [2] Winston, W. L. (2004), Operations Research – Applications and Algorithms, Thomson, 4th Edition.
- [3] Sterman, J. D. (2000), Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World, McGraw-Hill.
- [4] Hull, J. C. (n.d.), Options, Futures and Other Derivatives, Pearson Education, 5th Edition.
- [5] Vose, D. (2008), Risk Analysis – A quantitative guide, John Wiley & Sons, 3rd Edition.
- [6] Jorion, P. (2001), Value at Risk, McGraw-Hill, 2nd Edition.
- [7] Triantis, A.J. (2003), “Real Options,” in Handbook of Modern Finance, ed. D. Logue and J. Seward (New York: Research Institute of America), D1-D32.
- [8] Damodaran, A. (n.d.), The Promise and Peril of Real Options, Stern School of Business.
- [9] Huchzermeier, A. and Loch, C. H. (1998), Project Management Under Risk: Using the Real Options Approach to Evaluate Flexibility in R&D.

Ελληνόγλωσση:

- [1] Κολέτσος, Ι. και Στογιάννης, Δ. (2012), Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Συμεών
- [2] Σπηλιώτης, Ι. (2004), Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά, Εκδόσεις Συμεών
- [3] Πολυράκης, Ι. Α. (2010), Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία, Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

Διαδικτυακές Αναφορές:

- [1] Gray, S. and Harvey, C. R., Real Options in Project Evaluation, “https://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/.../Real_options_in.ppt”
- [2] Pindyck, R. S. (2008), Lectures on Real Options: Part 1 – Basic Concepts, “web.mit.edu/rpindyck/www/Courses/RO_P1_Handout%20Slides.pdf”
- [3] Pindyck, R. S. (2008), Lectures on Real Options: Part 2 – Technical Analysis, “http://web.mit.edu/rpindyck/www/Courses/RO_P2_Hand%20Outs.pdf”

- [4] Pindyck, R. S. (2008), Lectures on Real Options: Part 3 – Some Applications and Extensions, "http://web.mit.edu/rpindyck/www/Courses/RO_P3_Hand%20Outs.pdf"
- [5] Pindyck, R. S. (2008), Lectures on Real Options: Part 4 – Information and Learning, "http://web.mit.edu/rpindyck/www/Courses/RO_P4_Hand%20Outs.pdf"
- [6] Damodaran, A., Valuation: Lecture Note Packet 3 Real Options, Acquisition Valuation and Value Enhancement, "<http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/eqnotes/packet3.pdf>"
- [7] Damodaran, A., Value at Risk (VAR), "<http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/VAR.pdf>"
- [8] Duffie, D. and Pan, J. (1997), An Overview of Value at Risk, "<http://www.mit.edu/~junpan/ddjpa.pdf>"
- [9] "<http://financetrainingcourse.com/education/risk-management-what-is-risk/>"