Κατηγορική CS4 Λογική

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Μαρντιροσιάν Κοάρ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Ζάχος Ευστάθιος, Καθηγητής ΕΜΠ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Νίκο Τζεβελέκο, Λέκτορα στο Queen Mary University of London, για την ανεκτίμητη συνεισφορά του και βοήθειά του, στο ρόλο του συνεπιβλέποντα, κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ. Στάθη Ζάχο, που χωρίς αυτόν δεν θα είχα ανακαλύψει τον θαυμαστό κόσμο της Επιστήμης Υπολογιστών, και κ. Γιώργο Κολέτσο, για τις πολύτιμες διαλέξεις του πάνω στη Συνολοθεωρία και τη Λογική. Δεν μπορώ στις ευχαριστίες να παραλείψω τον κ. Γιώργο Σταυρινό, Διδάκτορα στο ΕΜΠ, που με εισήγαγε στη Θεωρία Αποδείξεων και τον κ. Πέτρο Στεφανέα, Λέκτορα ΕΜΠ, που με ενθάρρυνε να ασχοληθώ με τη Θεωρία Κατηγοριών. Τέλος, ευχαριστώ τον κ. Άρη Παγουρτζή, Επίκουρο Καθηγητή του ΕΜΠ, που με βοήθησε στην αναζήτηση του θέματος της διπλωματικής μου εργασίας. Διαδικασία για την οποία ήθελα να αφιερώσω αρκετό χρόνο, καθώς τη θεώρησα σημαντική.

Ο κινητήριος παράγοντας στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας ήταν ο ενθουσιασμός μου για τα μαθηματικά πεδία γύρω από την Πληροφορική και τους υπολογιστές. Ενθουσιασμός που ίσως να μην ήταν τόσο έντονος χωρίς τους υπέροχους συμφοιτητές που γνώρισα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Θέλω, λοιπόν, να ευχαριστήσω και τους συναδέλφους μου, το Νίκο, τη Μαριάννα, τον Χρίστο, τον Φωτεινό, το Μάνθο, την Αγγελική, τον Ηλία, τον Κώστα, τους δύο Μάνους, τη Νάσια και γενικά όσους συμμερίζονταν την αγάπη μου για τα Μαθηματικά και αυτούς με τους οποίους αναπτύξαμε δεσμούς αλληλοβοήθειας και με ενέπνευσαν να βελτιωθώ σαν άνθρωπος και μέρος της κοινωνίας.

Πέρα από την ακαδημαϊκή κοινότητα, ευχαριστώ τον φίλο μου, Παναγιώτη, και τις φίλες μου Ανί και Ζεϋνέπ, που με άκουγαν υπομονετικά όποτε ένιωθα την ανάγκη να συζητήσω μαζί τους για την εργασία μου, και τους γονείς μου που μου έδωσαν την ευκαιρία να σπουδάσω.

Στη μνήμη του Γιώργου Λ.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η Θεωρία Αποδείξεων είναι ένας κλάδος της Μαθηματικής Λογικής για τη μελέτη αποδείξεων ή απαγωγών ως τυπικά μαθηματικά αντικείμενα. Οι απαγωγές που μελετάμε εδώ είναι της προτασιακής CS4 λογικής, μιας τροπικής επέκτασης της προτασιακής ιντουισιονιστικής λογικής. Στην εργασία αυτή, ορίζουμε ένα μοντέλο της προτασιακής CS4 λογικής πάνω στη Θεωρία Κατηγοριών, κατασκευάζοντας έτσι μια κατηγορία που ερμηνεύει τους τύπους της λογικής ως αντικείμενα, τις απαγωγές της ως βέλη μεταξύ αντικειμένων και την ισοδυναμία απαγωγών ως ισότητα βελών. Αρχικά, ορίζουμε έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών που θα μας χρησιμεύσουν στην κατανόηση του μοντέλου. Έπειτα, ορίζουμε το σύστημα φυσικής απαγωγής για την CS4 λογική, μαζί με τους απαραίτητους κανόνες αναγωγής για την κανονικοποίηση των απαγωγών, και δίνουμε το μοντέλο της πάνω στη Θεωρία Κατηγοριών. Τέλος, αποδεικνύουμε τα αντίστοιχα θεωρήματα ορθότητας και πληρότητας. Το τελευταίο μας έδωσε την ευκαιρία για μια εις βάθος ανάγνωση του συστήματος φυσικής απαγωγής στο CS4, καταλήγοντας σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα σχετικά με τους κανόνες αναγωγής και τον ρόλο της σταθεράς του ψεύδους, τα οποία δεν είναι τόσο εμφανή από τη ματιά της Θεωρίας Αποδείξεων.

Λέξεις-κλειδιά. Θεωρία Κατηγοριών, τροπική CS4 λογική, σύστημα φυσικής απαγωγής, αμφικαρτεσιανά κλειστή κατηγορία, κατηγορική λογική

Abstract

Proof Theory is the branch of Mathematical Logic which studies proofs as formal mathematical objects. The proofs that we consider here belong to the CS4 logic, a modal expansion of intuitionistic propositional logic. In this thesis, we define a category-theoretical model of propositional CS4 logic. That is, we construct a category that models formulas as objects, proofs as arrows between objects, and proof equivalence as arrow equality. First, we define notions of Category Theory which we shall use for constructing our model. We then proceed to define the natural deduction system for CS4 logic, together with the necessary reduction rules for proof normalization, and construct its category theoretical model. Finally, we prove the corresponding soundness and completeness theorems, which constitute the main thrust of the thesis. The latter gave us the opportunity for an in-depth study of the CS4 natural deduction system which led to interesting conclusions about the reduction rules and the role of falsehood. Conclusions which were not so visible within the proof-theoretical context.

Keywords. Category Theory, CS4 modal logic, natural deduction system, bicartesian closed category, Categorical Logic

Πρόλογος

Αυτό που κάνει ένα πεδίο επιστήμη είναι η έρευνα και η απόδειξη. Το πρώτο στοιχείο πραγματώνει την αναζήτηση και το δεύτερο θεμελιώνει γνώσεις, πάνω στις οποίες μπορεί να γίνει επιπλέον έρευνα και να χτιστεί ένα οικοδόμημα γνώσεων. Τι είναι όμως μια απόδειξη και τι την κάνει τόσο «ανίκητη» στο πέρας του χρόνου; Ας δοκιμάσουμε να περιγράψουμε την απόδειξη ως «ένα σχήμα που περιλαμβάνει υποθέσεις οι οποίες συνδυάζονται με τη βοήθεια κανόνων, ώσπου να προκύψει το συμπέρασμα». Αν και πρόκειται για μια απλή περιγραφή, εμπεριέχει κάτι ουσιαστικό: υποδηλώνει ότι αυτό που κάνει μια επιχειρηματολογία απόδειξη δεν αφορά το ίδιο το περιεχόμενο της επιχειρηματολογίας, αλλά τον τρόπο που συνδέονται οι αποφάνσεις που περιλαμβάνει. Γι' αυτό άλλωστε οι αποδείξεις χρησιμοποιούνται σε όλες τις θετικές επιστήμες, παρόλο που κάθε μία πραγματεύεται διαφορετικά θέματα. Η παραπάνω περιγραφή υποδηλώνει, επίσης, ότι οι αποδείξεις δεν μπορούν να είναι από μόνες τους. Πάντα υπάρχουν ως προς κάποιο σύστημα κανόνων που δείχνει το νόμιμο τρόπο επιχειρηματολογίας. Επιπλέον, εφόσον μια απόδειξη εμπεριέχει αποφάνσεις, πρέπει να βασίζεται σε μια γλώσσα. Μια απόδειξη, λοιπόν, πάντα βρίσκεται σε ένα κλειστό πλαίσιο που ορίζει τι μπορεί να εκφραστεί εντός του και πώς μπορούν οι εκφράσεις να συνδυαστούν. Ένα από τα μεγάλα μαθήματα των μαθηματικών από τη θύελλα που προκάλεσαν τα μαθηματικά παράδοξα[1] είναι ότι το κλείσιμο μιας απόδειξης σε ένα πλαίσιο, ή αλλιώς σύστημα, είναι αυτό που την κάνει αιώνια. Γιατί μόνο τότε, έχοντας μια ολική εικόνα - σαν εξωτερικοί παρατηρητές - για το κλειστό σύστημα, μπορούμε να εξετάσουμε αν αυτό είναι συνεπές. Όταν αποδεικνύουμε λοιπόν κάτι, το κάνουμε υπό τη συνθήκη (ή υπό το τίμημα) ότι ισχύει το σύστημα στο οποίο ανήκει η απόδειξη.

Από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, η φιλοσοφικά πολυ-επεξεργασμένη πλέον ιδέα της απόδειξης γίνεται αντικείμενο των Μαθηματικών, με κύρια δουλειά από τους Frege, Russel και Hilbert. Αναγνωρίζοντας την κεντρικότητα των Μαθηματικών στις θετικές επιστήμες, τα κίνητρα γι' αυτό ήταν η θεμελίωση της αποδεικτικής διαδικασίας και η δημιουργία ενός εργαλείου για τον έλεγχο της εγκυρότητάς τους. Όπως αναφέρει ο Frege (η μετάφραση στο [VH67]),

> It is possible to view the signs of arithmetic, geometry, and chemistry as realizations, for specific fields, of Leibniz's idea. The ideography proposed here adds a new one to these fields, indeed the central one, which borders on all the others. If we take our departure from there, we can with the greatest expectation of success proceed to fill the gaps in the existing formula languages, connect their hitherto separated fields into a single domain, and extend this domain to include fields that up to now have lacked such a language.
>
> I am confident that my ideography can be successfully used wherever special value must be placed on the validity of proofs, as for example when the foundations of differential and integral calculus are established.
>
> It seems to me to be easier still to extend the domain of this formula language to include geometry. [...] The transition to the pure theory of motion and then to mechanics and physics would follow at this point.

[1] Το γνωστότερο από τα παράδοξα είναι αυτό του Russell.

Μετά τη μεγάλη κρίση που έφεραν τα συνολοθεωρητικά παράδοξα, αφού πλέον τα Μαθηματικά φαίνεται να βρήκαν τις βάσεις τους και ενώ είχαν ήδη εφευρεθεί διάφορα αποδεικτικά συστήματα με κυριότερο αυτό του Hilbert, το 1935 ο Gentzen δημοσίευσε ένα σύστημα λογισμού πάνω στις αποδείξεις, με το οποίο προσπάθησε να προσεγγίσει τον τρόπο που συγκροτείται η σκέψη (actual reasoning, η μετάφραση στο [GS69]). Δίνοντας έμφαση στο κριτήριο αυτό, ο Gentzen το ονόμασε «σύστημα φυσικής απαγωγής». Πέρα από την ευκολία στη χρήση του, το σύστημα του Gentzen συνεισέφερε σε δύο κατευθύνεις:

i. Εισήγαγε την ιδέα της συμμετρίας ανάμεσα στην υπόθεση προτάσεων, πράγμα που εκφράζεται με τους κανόνες εισαγωγής, και την αποδοχή ενός συμπεράσματος από κάποιες υποθέσεις, που εκφράζεται με τους κανόνες απαλοιφής.

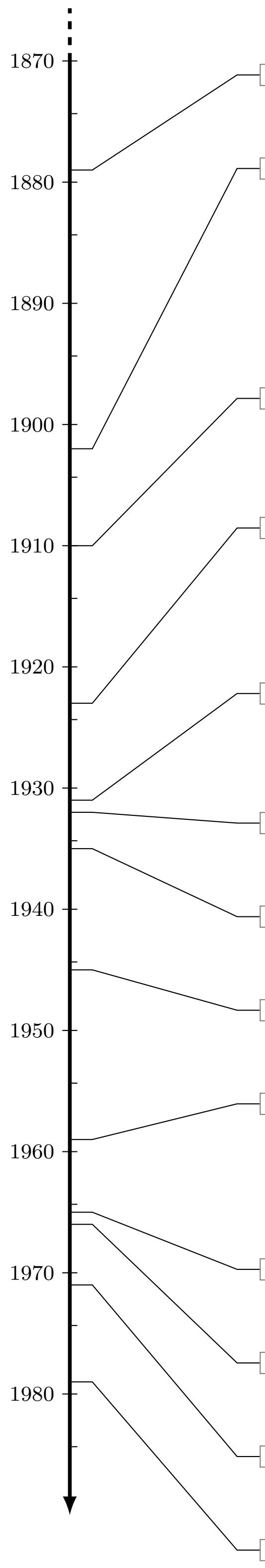
ii. Εισήγαγε την έννοια της κανονικοποίησης των αποδείξεων, δηλαδή του μετασχηματισμού τους έτσι ώστε να διατηρούν το σχήμα τους και παράλληλα να μην χρησιμοποιούν καμία περιττή πληροφορία.

Ο Gentzen έδωσε το σύστημα της φυσικής απαγωγής για τρεις τύπους λογικής: την κλασική, την ιντουισιονιστική και την minimal. Οι δύο τελευταίοι είναι γόνοι της μεγάλης κρίσης των Μαθηματικών.

Στο μεταξύ, από τη δεύτερη δεκαετία του $20^{ου}$ αιώνα, μελετώνται οι πρώτες τροπικές λογικές και το 1932 δημοσιεύονται από τον C. I. Lewis τα πέντε συστήματα τροπικής λογικής S1-S5,[LL59]. Η ποικιλία των συστημάτων αυτών έγκειται στο ότι οι έννοιες της πιθανότητας και της αναγκαιότητας μπορούν να ερμηνευτούν ακριβέστερα με διάφορους τρόπους. Επιπλέον, υπάρχουν πιο σύνθετες τροπικότητες, όπως «απαραίτητα πιθανό», και οι σχέσεις τους με τους υπόλοιπους συνδέσμους ποικίλουν. Και τα πέντε συστήματα, όμως, είναι επεκτάσεις της κλασικής λογικής. Στην παρούσα εργασία, ασχολούμαστε με την ιντουισιονιστική τροπική λογική CS4, η οποία αποτελεί παραλλαγή της λογικής I_{S4} του Prawitz. Στο βιβλίο του, [Pra65], δείχνει ότι οι νέες κατευθύνσεις του Gentzen εφαρμόζονται και στην I_{S4} λογική. Πολύ αργότερα, οι Bierman και de Paiva δείχνουν τα ίδια ακριβώς για το CS4, το οποίο στο κείμενό τους,[BdP01], συμβολίζουν με IS4 και δηλώνουν ρητά τις διαφορές του σε σχέση με το I_{S4}.

Ας κάνουμε τώρα ένα άλμα στους κλάδους των Μαθηματικών. Από την Αλγεβρική Τοπολογία προέκυψε τη δεκαετία του '40 η Θεωρία Κατηγοριών, με τις δημοσιεύσεις των S. Eilenberg και S. Mac Lane, οι οποίοι, μάλιστα, αμέσως μετά εφάρμοσαν την Θεωρία Κατηγοριών στη Αλγεβρική Τοπολογία δίνοντας, έτσι, τα θεμέλια της δεύτερης. Εφόσον ως τότε είχαν αναπτυχθεί οι αλγεβρικές ερμηνείες των διάφορων λογικών, συμπεριλαμβανομένων και των τροπικών, και αφού η Θεωρία Κατηγοριών αποδείχθηκε ότι μπορούσε να λειτουργήσει ως θεμέλιο της Άλγεβρας, ήταν σίγουρο ότι θα μπορούσε κι αυτή να ερμηνεύσει τις λογικές. Την ιδέα αυτή ανέδειξε ο F.W. Lawvere έμμεσα με τη διδακτορική του διατριβή το 1963, [Law63], και άμεσα λίγα χρόνια αργότερα με το [Law71]. Από τότε και έπειτα, ξεκίνησε η μελέτη της Λογικής από τη σκοπιά της Θεωρίας Κατηγοριών, συνιστώντας ένα νέο κλάδο, τη Κατηγορική Λογική (Categorical Logic). Για την Ιστορία της Κατηγορικής Λογικής, παραπέμπω στο [MR09].

Η Κατηγορική Λογική δεν προσθέτει κάποια επιπλέον δυνατότητα στα συστήματα που μελετά. Όπως συμβαίνει όταν αλγεβρικές τεχνικές εισαγάγονται σε ένα μαθηματικό πεδίο, έτσι και με τη Κατηγορική Λογική, το μεγάλο της πλεονέκτημα είναι ότι δίνει την ευκαιρία να μελετηθεί η ίδια η φύση της λογικής στην οποία εφαρμόζεται. Φωτίζει καλύτερα σημεία που προηγουμένως βλέπαμε πιο επιφανειακά ή θολά. Αυτό θα φανεί και στην παρούσα εργασία και θα αναπτυχθεί στα Συμπεράσματα.



1879 — O Frege δημοσιεύει το Begriffsschrift, έργο σημαντικό στην εξέλιξη της Μαθηματικής Λογικής.

1902 — O Russell επισημαίνει δι' αλληλογραφίας στον Frege το παράδοξο που είχε ανακαλύψει βασισμένος στο Begriffsschrift. O Frege πέρα από κάθε εγωισμό, ενώ η δεύτερη έκδοση του Grundgesetze der Arithmetik ήταν στα τυπογραφεία, πρόλαβε να προσθέσει στα παραρτήματα μια αναφορά στο παράδοξο αυτό και να προτείνει έναν περιορισμό για την αποφυγή του.

1910 — Οι Whitehead και Russell δημοσιεύουν το πρώτο μέρος της τριλογίας Principia Mathematica, ένα ακόμη έργο που αποτέλεσε σταθμό στη εξέλιξη της Μαθηματικής Λογικής.

1923 — Πάνω σε έναν διάλογο που είχε ξεκινήσει σχετικά με την Αρχή του Αποκλειόμενου Μέσου, ο Brouwer πρωτοδημοσιεύει τη δική του οπτική, εισαγάγοντας σε φιλοσοφικό επίπεδο ακόμα τον ιντουισιονισμό. Πολλοί Μαθηματικοί τότε τον χαρακτήρισαν πεσιμιστή.

1931 — O Gödel, χρησιμοποιώντας ένα σύστημα ισοδύναμο με αυτό στο Principia Mathematica, δημοσιεύει το πλέον γνωστό Θεώρημα Μη Πληρότητας.

1932 — O C. I. Lewis δημοσιεύει τα πέντε τροπικά συστήματα S1-S5, όλα επεκτάσεις της κλασικής λογικής.

1935 — O Gentzen δημοσιεύει το σύστημα φυσικής απαγωγής, προσθέτοντας έτσι άλλο ένα σημαντικό έργο στην Ιστορία της Μαθηματικής Λογικής.

1945 — Οι Eilenberg και Mac Lane δημοσιεύουν μια νέα θεωρία, τη Θεωρία Κατηγοριών.

1959 — O Kripke δημοσιεύει ένα μοντέλο για τη τροπική λογική S5 και αποδεικνύει το θεώρημα πληρότητας γι' αυτό. Η δημοσίευσή του ήταν η βάση για την εξερεύνηση των αλγεβρικών μοντέλων των διάφορων τροπικών λογικών, αλλά και της ιντουισιονιστικής.

1965 — O Prawitz δημοσιεύει την ιντουισιονιστική τροπική λογική I_{S4} και ένα σύστημα φυσικής απαγωγής γι' αυτήν.

1966 — O Lawvere προτείνει την κατηγορία των κατηγοριών ως θεμέλιο των Μαθηματικών.

1971 — O ίδιος δημοσιεύει το «Quantifiers and Sheaves» με το οποίο δίνει τη βάση για την ανάπτυξη της Κατηγορικής Λογικής.

1979 — O Goldblatt εκδίδει το βιβλίο «Topoi: A categorical analysis of logic».

Στο Κεφάλαιο 1 της παρούσας εργασίας, επιχειρείται μια εισαγωγή στη Θεωρία Κατηγοριών, όπου παρουσιάζονται βασικές έννοιες, όπως αυτές της κατηγορίας, του συναρτητή, του φυσικού μετασχηματισμού, του φυσικού ισομορφισμού και της σύζευξης, μαζί με παραδείγματα, και βασικές δομές, όπως το γινόμενο, το συγγινόμενο και τα εκθετικά. Επιπλέον, δίνω ένα βασικό αποδεικτικό εργαλείο: ένα λήμμα που προκύπτει από το Λήμμα του Yoneda. Έπειτα, παρουσιάζονται χαρακτηριστικές κατηγορίες, όπως οι μονοειδικές, οι πεπλεγμένες και οι συμμετρικές μονοειδικές, οι καρτεσιανά κλειστές και οι αμφικαρτεσιανά κλειστές. Τέλος, αφιερώνω μια ενότητα στις μονάδες και τις συμμονάδες, που θα παίξουν βασικό ρόλο στην ερμηνεία των τροπικών συνδέσμων.

Το Κεφάλαιο 2 αποτελεί μια εισαγωγή στην τροπική λογική CS4 και το αντίστοιχο σύστημα φυσικής απαγωγής. Περιγράφω τη γλώσσα της λογικής αυτής, δίνω τον ορισμό της απαγωγής στο CS4 και παρουσιάζω τους απαγωγικούς κανόνες του συστήματος φυσικής απαγωγής. Έπειτα, εισαγάγω τον αναγνώστη στην έννοια της κανονικοποίησης των απαγωγών, δίνοντας τους κανόνες αναγωγής για την κανονικοποίηση και ορίζοντας μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των απαγωγών βασισμένη στους κανόνες αναγωγής.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 3 ορίζω την CS4-κατηγορία και αποδεικνύω τα θεωρήματα ορθότητας και πληρότητας, δείχνοντας ότι κάθε CS4-κατηγορία αποτελεί μετάφραση μιας CS4 λογικής και ότι κάθε CS4 λογική ερμηνεύεται με μια CS4-κατηγορία. Η αντιστοίχιση μεταξύ της κατηγορίας και της λογικής γίνεται ως εξής.

- Οι λογικοί τύποι αντιστοιχούν στα αντικείμενα της κατηγορίας.
- Οι απαγωγές αντιστοιχούν στα βέλη της κατηγορίας.
- Η ισοδυναμία απαγωγών αντιστοιχεί σε ισότητα βελών.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Κατηγοριών

Η Θεωρία Κατηγοριών αποτελεί έναν σύγχρονο κλάδο των Μαθηματικών, που προσφέρει μια πολύ διαφορετική οπτική στα μαθηματικά αντικείμενα, με έμφαση στις δομές και τις σχέσεις μεταξύ τους. Παρόλη την αφαιρετικότητά της (ή ίσως και χάρη σ' αυτήν), αποτελεί ένα εργαλείο που δίνει έναν καθολικό τρόπο προσέγγισης μαθηματικών στοιχείων. Για παράδειγμα, στο πλαίσιο της Μαθηματικής Λογικής, ενώ μια θεωρία T μπορεί να έχει πολλά συστήματα αξιωμάτων, με τη Θεωρία Κατηγοριών μπορεί να περιγραφεί μοναδικά και παρόλ' αυτά να διατηρεί την ποικιλότητα των αξιωματικών της συστημάτων. Οι Eilenberg και MacLane για πρώτη φορά εισήγαγαν τις έννοιες της κατηγορίας, του συναρτητή και του φυσικού μεασχηματισμού στις αρχές της δεκαετίας του '40, εμπνευσμένοι από την Τοπολογία. Από τότε η θεωρία αυτή εξελίσσεται και ανακαλύπτονται σχέσεις της με άλλους μαθηματικούς και γενικότερα θετικούς κλάδους. Τη δεκαετία του '60, μάλιστα, ο Lewvere πρότεινε τη Θεωρία Κατηγοριών ως θεμέλιο των Μαθηματικών, με τη διδακτορική του διατρική [Law63].

Το βασικό αντικείμενο της Θεωρίας Κατηγοριών είναι οι κατηγορίες: αφηρημένες κατασκευές από αντικείμενα και βέλη που ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες. Αυτές επιτρέπουν την εισαγωγή της έννοιας των συναρτητών, οι οποίοι είναι απεικονίσεις μεταξύ κατηγοριών. Και με τη σειρά τους, αυτοί είναι η βάση για την έννοια του φυσικού μετασχηματισμού, που είναι μια απεικόνιση μεταξύ συναρτητών. Οι τελευταίοι παίζουν έναν πολύ σημαντικό ρόλο, καθώς είναι αυτοί που περιγράφουν σχέσεις και ιεραρχίες μεταξύ δομών και πράξεων.

Το κεφάλαιο αυτό έχει ως πηγές τα [Awo10], [BW95],[AT11],[McL92] και [Kob97].

1.1 Κατηγορίες

Ορισμός. Μια *κατηγορία*, $\mathcal{C}$, αποτελείται από *αντικείμενα* (συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα) και *βέλη* ή *μορφισμούς* μεταξύ των αντικειμένων (συμβολίζουμε με μικρούς λατινικούς χαρακτήρες f, g, h,...), για τα οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- Κάθε βέλος, f, έχει ένα πεδίο ορισμού (domain), που συμβολίζεται με $\mathrm{dom} f$, και ένα συμπεδίο ορισμού (codomain), που συμβολίζεται με $\mathrm{cod} f$. Και τα δύο είναι αντικείμενα της κατηγορίας. Γράφουμε $f : A \to B$ για ένα βέλος με $\mathrm{dom} f = A$ και $\mathrm{cod} f = B$.
- Για δύο βέλη f και g με $\mathrm{cod} f = \mathrm{dom} g$, ορίζεται η *σύνθεσή* τους, $g \circ f : \mathrm{dom} f \to \mathrm{cod} g$.
- Η σύνθεση είναι προσεταιριστική. Δηλαδή, για $f : A \to B$, $g : B \to C$ και $h : C \to D$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Για κάθε αντικείμενο A της κατηγορίας, υπάρχει ένα βέλος $\mathbf{1}_A : A \to A$, που καλείται *ταυτοτικό βέλος*, τέτοιο, ώστε για κάθε βέλος $f : A \to B$, $f \circ \mathbf{1}_A = f$ και για κάθε βέλος $g : B \to A$, $\mathbf{1}_A \circ g = g$.

Ένα συνηθισμένο παράδειγμα κατηγορίας είναι η κατηγορία **Set** που έχει σύνολα ως αντικείμενα και συναρτήσεις ως βέλη. Μια κατηγορία, όμως, είναι μια αρκετά πιο αφηρημένη δομή. Τα αντικείμενά της δεν είναι απαραίτητα σύνολα και τα βέλη της δεν είναι απαραίτητα συναρτήσεις. Η μόνη δομή που έχει μια κατηγορία εν γένει είναι μια προσεταιριστική πράξη πάνω στα βέλη και η ύπαρξη ταυτοτικών βελών για κάθε αντικείμενο.

Στην Θεωρία Κατηγοριών η διατύπωση ισοτήτων μέσω αντιμεταθετικών διαγραμμάτων είναι μια κοινή και βολική πρακτική. Τα διαγράμματα είναι κατά κάποιο τρόπο η απεικόνιση ενός μέρους της κατηγορίας ως κατευθυνόμενος γράφος. Ένα διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό, όταν όλες οι διαδρομές του με κοινή αφετηρία και κοινό πέρας είναι ίσες. Ένα παράδειγμα αντιμεταθετικού διαγράμματος είναι το παρακάτω, το οποίο απεικονίζει την ιδιότητα των ταυτοτικών βελών.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\mathbf{1}_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[r, "\mathbf{1}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Υπάρχουν κάποια είδη αντικειμένων και βελών που, όταν τα έχει μια κατηγορία, τότε αυτά ξεχωρίζουν.

Ορισμός. Ένα *τερματικό αντικείμενο*, T, σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ τέτοιο, ώστε για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$, υπάρχει ένα μοναδικό βέλος $T_A : A \to T$.

Ορισμός. Ένα *αρχικό αντικείμενο*, I, σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ τέτοιο, ώστε για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$, υπάρχει ένα μοναδικό βέλος $I_A : I \to A$.

Αν το αντικείμενο αυτό ικανοποιεί τη συνθήκη ύπαρξης για τα βέλη που εκκινούν από αυτό, αλλά όχι της μοναδικότητας, τότε το ονομάζουμε *ασθενές αρχικό αντικείμενο*.

Πέρα από απλά αντικείμενα και βέλη, υπάρχουν ολόκληρες δομές που ξεχωρίζουν.

Ορισμός. Το *γινόμενο* δύο αντικειμένων A και B μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο $A \times B$ της $\mathcal{C}$ μαζί με δύο βέλη (που καλούνται *προβολές*) $\pi_1^{A,B} : A \times B \to A$ και $\pi_2^{A,B} : A \times B \to B$, το οποίο έχει την ιδιότητα ότι για οποιοδήποτε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$, αν υπάρχουν βέλη $f_1 : C \to A$ και $f_2 : C \to B$, τότε υπάρχει επίσης μοναδικό βέλος $\langle f_1, f_2 \rangle : C \to A \times B$ τέτοιο, ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1^{A,B}"] \arrow[r, "\pi_2^{A,B}"'] & B \end{tikzcd}$$

Αν μια κατηγορία περιέχει το γινόμενο κάθε ζεύγους (όχι απαραίτητα διαφορετικών) αντικειμένων της, τότε λέμε ότι η κατηγορία αυτή έχει γινόμενα ή ότι είναι μια κατηγορία με γινόμενα.

Ορισμός. Για δύο βέλη $f : A \to B$ και $g : C \to D$, ορίζουμε το γινόμενό τους ως

$$f \times g = \langle f \circ \pi_1^{A,C}, g \circ \pi_2^{A,C} \rangle$$

Ορισμός. Το *εκθετικό* δύο αντικειμένων A και B μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ αποτελείται από ένα αντικείμενο B^A της $\mathcal{C}$ και ένα *βέλος εκτίμησης* $\varepsilon_{A,B} : B^A \times A \to B$ με την ιδιότητα ότι αν υπάρχει βέλος $f : C \times A \to B$, τότε υπάρχει επίσης μοναδικό βέλος (ονομάζεται *εκθετικός μεταθέτης* του f) $\tilde{f} : C \to B^A$ ώστε $\varepsilon_{A,B} \circ (\tilde{f} \times \mathbf{1}_A) = f$. Ισοδύναμα, για κάθε βέλος $f : C \to B^A$, υπάρχει μοναδικό βέλος $\bar{f} : C \times A \to B$ τέτοιο, ώστε $\varepsilon_{A,B} \circ (f \times \mathbf{1}_A) = \bar{f}$.

Αντίστοιχα, λέμε ότι μια κατηγορία έχει εκθετικά αν αυτή περιέχει το εκθετικό κάθε ζεύγους αντικειμένων της.

Αν σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ αντιστρέψουμε τη φορά των βελών της, τότε προκύπτει η δυϊκή της, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Η δυϊκότητα είναι μια σημαντική έννοια στη Θεωρία Κατηγοριών, καθώς δείχνει πώς σχετίζονται δομές και ιδιότητες. Την έχουμε ήδη συναντήσει στους ορισμούς του αρχικού και του τερματικού αντικειμένου. Θα συνεχίσουμε ορίζοντας το συγγινόμενο, που είναι μια δομή δυϊκή του γινομένου.

Ορισμός. Ένα *συγγινόμενο* δύο αντικειμένων A και B μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο $A + B$ της $\mathcal{C}$ μαζί με δύο βέλη (που καλούνται *συμπροβολές*) $\kappa_1^{A,B} : A \to A + B$ και $\kappa_2^{A,B} : B \to A + B$ με την ιδιότητα ότι για κάθε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$, αν υπάρχουν βέλη $f_1 : A \to C$ και $f_2 : B \to C$, τότε υπάρχει επίσης μοναδικό βέλος $[f_1, f_2] : A + B \to C$ τέτοιο, ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\kappa_1"'] & A + B \arrow[u, "{[f_1, f_2]}"'] & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\kappa_2"]
\end{tikzcd}$$

Ορισμός. Για δύο βέλη $f : A \to B$ και $g : C \to D$, ορίζουμε το συγγινόμενό τους ως

$$f + g = [\kappa_1^{B,D} \circ f, \kappa_2^{B,D} \circ g]$$

Πρόταση 1.1. Σε μια κατηγορία με γινόμενα και συγγινόμενα, για βέλη $f_1 : A \to C$, $f_2 : B \to C$ και $g_1 : A \to C$, $g_2 : B \to D$, ισχύει η ισότητα

$$\langle [f_1 . f_2], [g_1, g_2] \rangle = [\langle f_1, g_1 \rangle, \langle f_2, g_2 \rangle]$$

1.2 Συναρτητές

Ένα σημαντικό στοιχείο για την εξερεύνηση των σχέσεων μεταξύ κατηγοριών είναι ο συναρτητής.

Ορισμός. Ένας *συναλλοίωτος συναρτητής*, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, μεταξύ δύο κατηγοριών, $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$, είναι μια απεικόνιση των αντικειμένων της πρώτης στα αντικείμενα της δεύτερης και των βελών της πρώτης στα βέλη της δεύτερης έτσι, ώστε

- Κάθε βέλος $f : A \to B$ της $\mathcal{C}$, αντιστοιχεί σε ένα βέλος $F(f) : F(A) \to F(B)$ της $\mathcal{D}$
- Για κάθε αντικείμενο, A, της $\mathcal{C}$, $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}$
- Για κάθε σύνθεση βελών $g \circ f$ που ορίζεται στη $\mathcal{C}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Ένας *ανταλλοίωτος συναρτητής* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ορίζεται σχεδόν όπως και ένας συναλλοίωτος, με τη διαφορά ότι αντιστοιχεί κάθε βέλος $f : A \to B$ της $\mathcal{C}$ σε ένα βέλος $F(f) : F(B) \to F(A)$ της $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ και για κάθε σύνθεση βελών $g \circ f$ στη $\mathcal{C}$, έχουμε $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Ισοδύναμα, ένας ανταλλοίωτος συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Ορισμός. Δοθείσης μιας τοπικά μικρής κατηγορίας[1], $\mathcal{C}$, και δύο αντικειμένων της, A και B, ορίζουμε

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f \text{ στη } \mathcal{C} \mid f : A \to B\}$$

Ένα παράδειγμα συναλλοίωτου συναρτητή είναι ο $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, όπου $\mathcal{C}$ τοπικά μικρή και A αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Ο συναρτητής αυτός αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο, C, της $\mathcal{C}$ το σύνολο των βελών $A \to C$ και σε κάθε βέλος $g : B \to B'$ της $\mathcal{C}$ ένα βέλος $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B')$. Το βέλος $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, g)$ είναι μια συνάρτηση που με όρισμα $f : A \to B$, δίνει τη σύνθεση $g \circ f$. Αντίστοιχα, ο συναρτητής $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ είναι ένα παράδειγμα ανταλλοίωτου συναρτητή, για τον οποίο ισχύει $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, -)$. Παρακάτω, ορίζουμε τον συναρτητή $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$.

Ορισμός. Για μια τοπικά μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$, το $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ είναι ένας συναρτητής που κάνει την εξής αντιστοίχιση.

- Για κάθε δύο αντικείμενα $A, B \in \mathcal{C}$, το $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ είναι ένα αντικείμενο στη $\mathbf{Set}$.
- Για κάθε δύο βέλη $f : A \to B$ και $g : C \to D$ στη $\mathcal{C}$, το $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D)$ είναι ένα βέλος στη $\mathbf{Set}$, που με όρισμα ένα βέλος $h : B \to C$ της $\mathcal{C}$, δίνει τη σύνθεση $g \circ h \circ f$.

Πρόταση 1.2. Έστω συναρτητές $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ και $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Τότε η σύνθεσή τους, $G \circ F$, είναι συναρτητής.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς. □

Αν θεωρήσουμε κατηγορίες ως αντικείμενα και συναρτητές ως βέλη, τότε προκύπτει και πάλι μια κατηγορία. Πράγματι, το ταυτοτικό βέλος ενός αντικειμένου, $\mathcal{C}$, σε μια τέτοια μεγάλη κατηγορία είναι ο ταυτοτικός συναρτητής $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, που αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο και βέλος της $\mathcal{C}$ τον εαυτό τους. Επιπλέον, η σύνθεση ορίζεται στα βέλη της μεγάλης κατηγορίας, εφόσον η σύνθεση συναρτητών είναι συναρτητής. Τέλος, με χρήση μόνο των ορισμών και με τη βοήθεια διαγραμμάτων μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η σύνθεση συναρτητών είναι προσεταιριστική.

Σε μια κατηγορία, $\mathcal{C}$, με γινόμενα, το γινόμενο των αντικειμένων της με ένα σταθερό αντικείμενο, A, μπορεί να ειδωθεί ως συναρτητής $(-) \times A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, όπου για κάθε αντικείμενο B της $\mathcal{C}$, $(B) \times A = B \times A$, και για κάθε βέλος $f : B \to C$, $(f) \times (A) = f \times \mathbf{1}_A$.

Το ίδιο ισχύει και για τα εκθετικά μιας κατηγορίας με εκθετικά. Για ένα σταθερό αντικείμενο, A, μιας τέτοιας κατηγορίας, $\mathcal{C}$, υπάρχει συναρτητής $(-)^A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, ώστε για κάθε αντικείμενο, B, της $\mathcal{C}$, $(B)^A = B^A$, και για κάθε βέλος $f : B \to B'$ της $\mathcal{C}$, $(f)^A : B^A \to B'^A$, με $(f)^A = \widetilde{f \circ \varepsilon_{A,B}}$.

1.3 Φυσικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός. Για κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ και συναρτητές $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ένας *φυσικός μετασχηματισμός* $\zeta : F \to G$ είναι μια απεικόνιση που σε κάθε αντικείμενο, C, της $\mathcal{C}$ αντιστοιχεί ένα βέλος $\zeta_C : F(C) \to G(C)$ της $\mathcal{D}$ έτσι, ώστε για κάθε βέλος $f : A \to B$ της $\mathcal{C}$, το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό. Ένα βέλος $\zeta_C : F(C) \to G(C)$ καλείται *συνιστώσα* του ζ .

Αν φανταστούμε τους συναρτητές $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ σαν δύο διαφορετικές «μηχανές» που παράγουν την $\mathcal{D}$ από την $\mathcal{C}$, τότε ο φυσικός μετασχηματισμός $\zeta : F \to G$ είναι αυτός που παράγει τη δεύτερη μηχανή από την πρώτη. Οι συναρτητές μπορούν επίσης να ειδωθούν ως στοιχεία που

[1]Μια κατηγορία είναι τοπικά μικρή όταν για κάθε αντικείμενό της, η συλλογή των βελών με πεδίο ορισμού το εκάστοτε αντικείμενο αποτελεί σύνολο.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\zeta_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\zeta_B]{} & G(B) \end{array}$$

Διάγραμμα 1.1. $G(f) \circ \zeta_A = \zeta_B \circ G(f)$

«αποκαλύπτουν» τη δομή μιας κατηγορίας. Τότε, οι φυσικοί μετασχηματισμοί δείχνουν τη σχέση μιας δομής με μια άλλη. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ο ρόλος τους στη Θεωρία Κατηγοριών είναι τόσο σημαντικός.

Φυσικά, υπάρχει ο ταυτοτικός μετασχηματισμός και η σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών είναι πάλι φυσικός μετασχηματισμός και μάλιστα η πράξη είναι προσεταιριστική. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε την κατηγορία **Fun** με αντικείμενα συναρτητές και βέλη φυσικούς μετασχηματισμούς.

Ορισμός. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\zeta : F \stackrel{\sim}{\to} G$ καλείται *φυσικός ισομορφισμός*, αν υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\zeta^{-1} : G \to F$ τέτοιος, ώστε

$$\zeta^{-1} \circ \zeta = \iota_F$$
$$\zeta \circ \zeta^{-1} = \iota_G$$

όπου ι_{-} ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός. Λέμε τότε ότι οι συναρτητές F και G είναι ισομορφικοί και συμβολίζουμε $\zeta : F \stackrel{\sim}{\to} G$ ή $F \simeq G$.

Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό του φυσικού ισομορφισμού ως ένα ισομορφικό βέλος στην κατηγορία **Fun**. Ένας επίσης ισοδύναμος ορισμός είναι, ότι ένας φυσικός μετασχηματιμός είναι φυσικός ισομορφισμός αν όλες του οι συνιστώσες είναι ισομορφισμοί.

Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ τοπικά μικρές κατηγορίες. Μια *συζηγία* από την $\mathcal{C}$ στη $\mathcal{D}$ αποτελείται από συναρτητές $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ και έναν φυσικό ισομορφισμό, $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$, ώστε για κάθε αντικείμενο, A, της $\mathcal{C}$ και B της $\mathcal{D}$, ο ισομορφισμός $\phi_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B))$ να είναι συνιστώσα του.

Λέμε τότε ότι οι συναρτητές F και G είναι *συζηγείς* ή ότι ο F είναι *αριστερά συζηγής* του G ή ότι ο G είναι *δεξιά συζηγής* του F. Συμβολίζουμε $F \vdash G$.

Για παράδειγμα, οι συναρτητές $(-) \times A$ και $(-)^A$ είναι συζηγείς. Πράγματι, ο φυσικός μετασχηματισμός $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((-) \times A, -) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, (-)^A)$, έχει συνιστώσες $\phi_{B,C} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((B) \times A, C) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C^A)$ που είναι ισομορφισμοί, αφού για κάθε βέλος $f : B \times A \to C$, υπάρχει μοναδικό βέλος $\tilde{f} : B \to C^A$ και, αντίστροφα, για κάθε βέλος $g : B \to C^A$ υπάρχει μοναδικό βέλος $\bar{g} : B \times A \to C$. Έχουμε επίσης ότι $\tilde{\bar{g}} = g$ και $\bar{\tilde{f}} = f$. Έτσι, ο συναρτητής $(-)^A$ είναι δεξιά συζηγής του $(-) \times A$. Ισοδύναμα, για μια κατηγορία $\mathcal{C}$ που έχει αυτούς τους δύο συναρτητές και για αντικείμενα B και C στη $\mathcal{C}$,

$$\mathrm{Hom}(B \times A, C) \simeq \mathrm{Hom}(B, C^A) \tag{1.3.1}$$

Για μια τοπικά μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$, θέτουμε $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}} = \{F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set} \mid F \text{ είναι συναρτητής}\}$ και δημιουργούμε έτσι μια νέα κατηγορία με αντικείμενα τους συναρτητές από την $\mathcal{C}$ στη **Set** και βέλη τους μεταξύ τους φυσικούς μετασχηματισμούς. Ένας συγκεκριμένος συναρτητής, που απεικονίζει μια τοπικά μικρή κατηγορία στην κατηγορία των συναρτητών της προς το **Set**, είναι αξιοσημείωτος. Αυτός φέρνει σε ένα-προς-ένα αντιστοίχιση τα βέλη της κατηγορίας $\mathcal{C}$ με αυτά της κατηγορίας $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$. Αυτό μας επιτρέπει να βγάζουμε συμπεράσματα για την πρώτη κατηγορία, μελετώντας τη δεύτερη.

Ορισμός (Εμφύτευση Yoneda)**.** Έστω $\mathcal{C}$ μια τοπικά μικρή κατηγορία. Καλούμε *εμφύτευση Yoneda της* $\mathcal{C}$ τον συναρτητή $y : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, ο οποίος απεικονίζει

- κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$, στον συναρτητή $y(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$, που είναι αντικείμενο της $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$.
- κάθε βέλος $f : A \to B$ της $\mathcal{C}$, στον φυσικό μετασχηματισμό $y(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$, ο οποίος αντιστοιχεί με φυσικό τρόπο (δηλαδή, κάνοντας το Διάγραμμα 1.1 αντιμεταθετικό) κάθε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$ στη συνάρτηση $y(f)(C) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$.

Το παρακάτω πόρισμα, που αφορά την εμφύτευση Yoneda, είναι ένα χρήσιμο αποδεικτικό εργαλείο και αργότερα θα δούμε εφαρμογές του.

Πόρισμα 1.3. Έστω $\mathcal{C}$ μια τοπικά μικρή κατηγορία και δύο αντικείμενα, A και B, της $\mathcal{C}$. Ισχύει το εξής.

$$\text{Αν } y(A) \simeq y(B), \text{ τότε } A \simeq B.$$

Ή ισοδύναμα,

$$\text{αν } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B), \text{ τότε } A \simeq B.$$

1.4 Χαρακτηριστικές κατηγορίες

1.4.1 Μονοειδικές κατηγορίες

Ορισμός. Μια *μονοειδική κατηγορία*, $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, αποτελείται από μια κατηγορία $\mathcal{C}$ μαζί με έναν συναρτητή (που καλείται *μονοειδικό γινόμενο*)

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

και ένα αντικείμενο I μαζί με τους φυσικούς ισομορφισμούς

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B,C} &: A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\sim} (A \otimes B) \otimes C \\ \lambda_A &: I \otimes A \xrightarrow{\sim} A \\ \rho_A &: A \otimes I \xrightarrow{\sim} A \end{aligned}$$

για τους οποίους τα παρακάτω διαγράμματα είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd}
& & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A \otimes B, C, D}"] & & \\
& A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"] \arrow[dl, "\mathbf{1}_A \otimes \alpha_{B,C,D}"'] & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D)) \arrow[rrrr, "\alpha_{A, B \otimes C, D}"'] & & & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[ul, "\alpha_{A,B,C} \otimes \mathbf{1}_D"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes A) \arrow[rr, "\alpha_{A,I,A}"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_A \otimes \lambda_A"'] & & (A \otimes I) \otimes A \arrow[dl, "\rho_A \otimes \mathbf{1}_A"] \\
& A \otimes A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[rr, equal, "\mathbf{1}_{I\otimes I}"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_A \otimes \lambda_A"'] & & I \otimes I \arrow[dl, "\rho_A \otimes \mathbf{1}_A"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Το α καλείται *προσεταιριστικός ισομορφισμός*.

Πρόταση 1.4. Κάθε μονοειδική κατηγορία, $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, έχει έναν ενδοσυναρτητή $(-)\otimes A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Ορισμός. Μια μονοειδική κατηγορία, $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, καλείται *πεπλεγμένη*, όταν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$$

τέτοιος, ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\gamma_{A,B\otimes C}"] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[dr, "\alpha^{-1}_{B,C,A}"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\alpha^{-1}_{A,B,C}"] \arrow[dr, "\gamma_{A,B} \otimes \mathbf{1}_C"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
& (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha^{-1}_{B,A,C}"'] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[ur, "\mathbf{1}_B \otimes \gamma_{A,C}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\gamma_{A\otimes B,C}"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[dr, "\alpha_{C,A,B}"] & \\
A \otimes (B \otimes C) \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[dr, "\gamma_{A,B} \otimes \mathbf{1}_C"'] & & & (C \otimes A) \otimes B \\
& A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"'] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[ur, "\mathbf{1}_A \otimes \gamma_{B,C}"'] &
\end{tikzcd}$$

Σημειώνουμε ότι α είναι ο προσεταιριστικός ισομορφισμός από την μονοειδική δομή της $\mathcal{C}$. Ο φυσικός ισομορφισμός γ καλείται *τελεστής πλέξης*.

Ορισμός. Μια πεπλεγμένη μονοειδική κατηγορία καλείται *συμμετρική*, όταν για τον τελεστή πλέξης της ισχύει η ισότητα $\gamma_{B,A} \circ \gamma_{A,B} = \mathbf{1}_{A\otimes B}$.

Ορισμός. Μια μονοειδική κατηγορία καλείται *κλειστή* όταν ο συναρτητής $(-)\otimes A$ έχει έναν δεξιά συζηγή συναρτητή $(-)^A$.

1.4.2 Καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες

Ορισμός. Μια *καρτεσιανή κατηγορία* είναι μια κατηγορία με δυαδικά γινόμενα, κατ'επέκταση όλα τα πεπερασμένα μη κενά γινόμενα, και ένα τερματικό αντικείμενο, το οποίο ορίζουμε ως το κενό γινόμενο.

Από την δομή και τις ιδιότητες του γινομένου, προκύπτει ότι μια καρτεσιανή κατηγορία είναι μια συμμετρική μονοειδική κατηγορία, της οποίας το μονοειδικό γινόμενο, $\otimes$, ταυτίζεται με το γινόμενο, $\times$.

Ορισμός. Ένας ενδοσυναρτητής $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, όπου $(\mathcal{C}, \times, \top)$ καρτεσιανή κατηγορία, καλείται *καρτεσιανός*, όταν υπάρχουν

- φυσικός ισομορφισμός $m^{-1}_{-,-} : G(- \times -) \xrightarrow{\sim} G(-) \times G(-)$, όπου για A, B αντικείμενα της $\mathcal{C}$, ο αντίστροφος του $m_{A,B}$ είναι $m^{-1}_{A,B} = \langle G(\pi_1^{A,B}), G(\pi_2^{A,B}) \rangle$
- ισομορφικό βέλος $m_T : T \xrightarrow{\sim} G(T)$

ώστε για αντικείμενα A, B και C της $\mathcal{C}$, τα παρακάτω διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd}
G(A) \times G(B) \times G(C) \arrow[r, "m_{A,B} \times \mathbf{1}_{G(C)}"] \arrow[d, "\mathbf{1}_{G(A)} \times m_{B,C}"'] & G(A \times B) \times G(C) \arrow[d, "m_{A \times B, C}"] \\
G(A) \times G(B \times C) \arrow[r, "m_{A, B \times C}"] & G(A \times B \times C)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G(T) \times G(A) \arrow[r, "m_{T,A}"] & G(T \times A) \arrow[d, "G(\pi_2^{T,A})"] \\
T \times G(A) \arrow[u, "m_T \times \mathbf{1}_{G(A)}"] \arrow[r, "\pi_2^{T,G(A)}"'] & G(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(A) \times G(T) \arrow[r, "m_{T,A}"] & G(A \times T) \arrow[d, "G(\pi_2^{A,T})"] \\
G(A) \times T \arrow[u, "\mathbf{1}_{G(A)} \times m_T"] \arrow[r, "\pi_1^{G(A),T}"'] & G(A)
\end{tikzcd}$$

Ορισμός. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\psi : F \to G$ μεταξύ δύο καρτεσιανών ενδοσυναρτητών (F, m, m_T) και (G, n, n_T) καλείται *καρτεσιανός*, αν τα παρακάτω διαγράμματα είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \times F(B) \arrow[r, "\psi_A \times \psi_B"] \arrow[d, "m_{A,B}"'] & G(A) \times G(B) \arrow[d, "n_{A,B}"] \\
F(A \times B) \arrow[r, "\psi_{A \times B}"'] & G(A \times B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(A) \times G(T) \arrow[r, "m_{T,A}"] & G(A \times T) \arrow[d, "G(\pi_2^{A,T})"] \\
G(A) \times T \arrow[u, "\mathbf{1}_{G(A)} \times m_T"] \arrow[r, "\pi_1^{G(A),T}"'] & G(A)
\end{tikzcd}$$

Ορισμός. Μια κλειστή καρτεσιανή κατηγορία καλείται *καρτεσιανά κλειστή*. Ισοδύναμα, μια καρτεσιανά κλειστή κατηγορία είναι μια καρτεσιανή κατηγορία με επιπλέον όλα τα εκθετικά αντικείμενα.

Θα δείξουμε παρακάτω ιδιότητες που ικανοποιούν οι καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες. Οι ιδιότητες αυτές θα φανούν χρήσιμες στα επόμενα κεφάλαια.

Πρόταση 1.5. Έστω βέλη $g_1 : C \to A$, $g_2 : C \to B$ και $f : D \to C$ μιας καρτεσιανά κλειστής κατηγορίας. Τότε

$$\langle g_1, g_2 \rangle \circ f = \langle g_1 \circ f, g_2 \circ f \rangle$$

Απόδειξη. Η επιμεριστική ιδιότητα προκύπτει άμεσα από την ιδιότητα του γινομένου, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα που είναι αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "g_1 \circ f"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "g_2 \circ f"] & \\
 & C \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[d, "\langle g_1, g_2 \rangle"] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Για λόγους παρουσίασης, λείπει ένα βέλος $D \to A \times B$. Αυτό το βέλος είναι το $\langle g_1, g_2 \rangle \circ f$ που ισούται με το $\langle g_1 \circ f, g_2 \circ f \rangle$ λόγω αντιμεταθετικότητας του διαγράμματος. □

Πόρισμα 1.6. Για βέλη $g_1 : A \to B$, $g_2 : C \to D$ και $f : D \to A \times C$ μιας καρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, ισχύει η ισότητα

$$(g_1 \times g_2) \circ f = \langle g_1 \circ \pi_1^{A,C} \circ f, g_2 \circ \pi_2^{A,C} \circ f \rangle \tag{1.4.1}$$

Πρόταση 1.7. Για βέλη $f_1 : A_1 \to A_2$, $f_2 : A_2 \to A_3$, $g_1 : B_1 \to B_2$ και $g_2 : B_2 \to B_3$ μιας καρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, έχουμε

$$(f_2 \circ f_1) \times (g_2 \circ g_1) = (f_2 \times g_2) \circ (f_1 \times g_1) \tag{1.4.2}$$

Απόδειξη. Η πρόταση είναι άμεση συνέπεια της ιδότητας του γινομένου, όπως φαίνεται στο παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "f_1"'] & A_1 \times B_1 \arrow[l, "\pi_1^{A_1,B_1}"'] \arrow[r, "\pi_2^{A_1,B_1}"] \arrow[d, "f_1 \times g_1"] & B_1 \arrow[d, "g_1"] \\
A_2 \arrow[d, "f_2"'] & A_2 \times B_2 \arrow[l, "\pi_1^{A_2,B_2}"'] \arrow[r, "\pi_2^{A_2,B_2}"] \arrow[d, "f_2 \times g_2"] & B_2 \arrow[d, "g_2"] \\
A_3 & A_3 \times B_3 \arrow[l, "\pi_1^{A_3,B_3}"'] \arrow[r, "\pi_2^{A_3,B_3}"] & B_3
\end{tikzcd}$$

□

Παρατήρηση Μια καρτεσιανά κλειστή κατηγορία, $\mathcal{C}$, είναι μια κλειστή συμμετρική μονοειδική κατηγορία $(\mathcal{C}, \times, T)$, της οποίας το μονοειδικό γινόμενο ταυτίζεται με το καρτεσιανό γινόμενο και T είναι το τερματικό της αντικείμενο. Έτσι, κάθε καρτεσιανά κλειστή κατηγορία, $\mathcal{C}$ έχει, εκτός των άλλων,

- έναν προσεταιριστικό ισομορφισμό α, που για A, B και C αντικείμενα της $\mathcal{C}$, έχει τη συνιστώσα $\alpha_{A,B,C} : A \times (B \times C) \xrightarrow{\sim} (A \times B) \times C$,
- για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$, τους ισομορφισμούς $\lambda_A : T \times A \xrightarrow{\sim} A$ και $\rho_A : A \times T \xrightarrow{\sim} A$,
- έναν τελεστή πλέξης, γ, που για αντικείμενα A και B της $\mathcal{C}$, έχει τη συνιστώσα $\gamma_{A,B} : A \times B \xrightarrow{\sim} B \times A$, για την οποία ισχύει $\gamma^{-1}_{A,B} = \gamma_{B,A}$, και
- τη συζηγία $(-) \times A \vdash (-)^A$.

Λόγω της μονοειδικής δομής του καρτεσιανού γινομένου, δεν έχουν σημασία οι παρενθέσεις σε ένα πολλαπλό γινόμενο. Λόγω της συμμετρικής του δομής, δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι όροι ενός γινομένου. Δύο διαφορετικά αντικείμενα που είναι γινόμενα και η διαφορά τους βρίσκεται μόνο σ' αυτούς τους δύο παράγοντες (τις παρενθέσεις και τη σειρά των όρων) είναι ισομορφικά και ό,τι βέλος εισέρχεται στο (ή εξέρχεται από το) ένα θα εισέρχεται στο (ή εξέρχεται από το) άλλο.

Αν μια κατηγορία έχει τερματικό αντικείμενο, όπως για παράδειγμα οι καρτεσιανά κλειστές, τότε αυτό δεν είναι απαραίτητα το μοναδικό τερματικό αντικείμενό της. Ωστόσο, αν έχει δύο (ή παραπάνω) τερματικά αντικείμενα, τότε αυτά είναι μεταξύ τους ισομορφικά. Επιπλέον, αν ένα αντικείμενο είναι ισομορφικό με ένα τερματικό αντικείμενο, τότε είναι κι αυτό τερματικό. Ειδικά στην περίπτωση των καρτεσιανά κλειστών κατηγοριών, ισχύει το εξής.

Πρόταση 1.8. Αν σε μια καρτεσιανά κλειστή κατηγορία υπάρχει βέλος $f : T \to A$, όπου T τερματικό αντικείμενο, τότε το A είναι κι αυτό τερματικό.

1.4.3 Αμφικαρτεσιανά κλειστές κατηγορίες

Ορισμός. Μία *αμφικαρτεσιανά κλειστή κατηγορία* είναι μια καρτεσιανά κλειστή κατηγορία με δυαδικά συγγινόμενα, άρα κατ'επέκταση όλα τα πεπερασμένα μη κενά συγγινόμενα.

Όπως και στην περίπτωση των καρτεσιανά κλειστών κατηγοριών, το μονοειδικό γινόμενο συμπίπτει με το απλό γινόμενο και ο εκθετικός συναρτητής συμπίπτει με το εκθετικό δύο αντικειμένων. Ας προσέξουμε, όμως, πως μια αμφικαρτεσιανά κλειστή κατηγορία, ενώ έχει τερματικό αντικείμενο, δεν έχει απαραίτητα αρχικό αντικείμενο. Στο Κεφαλαιο 4, θα ασχοληθούμε με μια αμφικαρτεσιανά κλειστή κατηγορία που έχει ένα ασθενές αρχικό αντικείμενο.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα δυϊκά των προτάσεων και του πορίσματος της προηγούμενης ενότητας, που ισχύουν για τις αμφικαρτεσιανά κλειστές κατηγορίες. Για τις αποδείξεις τους, αρκεί να αντιστρέψουμε τα βέλη στα διαγράμματα των αντίστοιχων αποδείξεων της προηγούμενης ενότητας.

Πρόταση 1.9. Σε μια αμφικαρτεσιανά κλειστή κατηγορία, η αριστερή σύνθεση βελών είναι επιμεριστική πάνω στο συγγινόμενο. Πιο αναλυτικά, για αντικείμενα A, B, C και D μιας αμφικαρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, για τα οποία υπάρχουν βέλη $g_1 : A \to C$, $g_2 : B \to C$ και $f : C \to D$, ισχύει η ισότητα

$$f \circ [g_1, g_2] = [f \circ g_1, f \circ g_2]$$

Πόρισμα 1.10. Για βέλη $g_1 : A \to B$, $g_2 : C \to D$ και $f : B + D \to G$ μιας αμφικαρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, ισχύει η ισότητα

$$f \circ (g_1 + g_2) = [f \circ \kappa_1^{B,D} \circ g_1, f \circ \kappa_1^{B,D} \circ g_2]$$

Πρόταση 1.11. Για βέλη $f_1 : A_2 \to A_1$, $f_2 : A_3 \to A_2$, $g_1 : B_2 \to B_1$ και $g_2 : B_3 \to B_2$ μιας αμφικαρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, έχουμε

$$(f_1 \circ f_2) + (g_1 \circ g_1) = (f_1 + g_1) \circ (f_2 + g_2)$$

Η καρτεσιανή κλειστότητα μιας αμφικαρτεσιανά κλειστής κατηγορίας σημαίνει, πέρα των άλλων, ότι έχει τη δομή που αναφέρεται στις Παρατηρήσεις της προηγούμενης ενότητας. Αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο είναι η ύπαρξη ενός δεξιά συζηγή συναρτητή για τον $(-) \times A$, διότι χάρη σ' αυτόν το γινόμενο είναι επιμεριστικό ως προς το συγγινόμενο. Το «γιατί» είναι πέρα από τα όρια αυτής της εργασίας, αλλά στην απόδειξη της παρακάτω πρότασης είναι εμφανής η χρήση των εκθετικών αντικειμένων.

Πρόταση 1.12. Σε μια αμφικαρτεσιανά κλειστή κατηγορία, $\mathcal{C}$, το γινόμενο είναι επιμεριστικό πάνω στο συγγινόμενο. Δηλαδή,

$$A \times (B + C) \simeq (A \times B) + (A \times C)$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $y((A+B) \times C) \simeq y((A+C) \times (B+C))$, όπου $y : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$. Τότε, από το Πόρισμα 1.3, θα έχουμε ότι $(A+B) \times C \simeq (A+C) \times (B+C)$. Έστω λοιπόν, X, αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A \times (B+C), X) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}((B+C) \times A, X) && \text{(συμμετρία)} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B+C, X^A) && \text{(καρτεσιανή κλειστότητα)} \end{aligned}$$

Όμως, κάθε βέλος $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B+C, X^A)$ συνεπάγεται τα δύο βέλη $f_1 = f \circ \kappa_1^{B,C} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, X^A)$ και $f_2 = f \circ \kappa_2^{B,C} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(C, X^A)$. Αντίστροφα, κάθε δύο βέλη $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, X^A)$ και $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, X^A)$, συνεπάγονται το βέλος $f = [f_1, f_2] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B+C, X^A)$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B+C, X^A) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, X^A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(C, X^A) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B \times A, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(C \times A, X) && \text{(καρτεσιανή κλειστότητα)} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A \times B, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A \times C, X) && \text{(συμμετρία)} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}((A \times B) + (A \times C), X) \end{aligned}$$

Δείξαμε για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$, τον ισομορφισμό

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A \times (B+C), X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}((A \times B) + (A \times C), X).$$

Επομένως,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A \times (B+C), -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}((A \times B) + (A \times C), -).$$

Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι ο παραπάνω ισομορφισμός είναι φυσικός, ικανοποιεί δηλαδή το αντιμεταθετικό διάγραμμα ενός φυσικού μετασχηματισμού. □

Παρατηρώντας στην παραπάνω απόδειξη τα βήματα από τον έναν Hom συναρτητή στον επόμενο ισοδύναμο, μπορούμε, για αντικείμενα A, B και C μιας αμφικαρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, να συμπεράνουμε το αντίστροφο ισομορφικό βέλος $\xi_{A,B,C}^{-1} : (A \times B) + (A \times C) \xrightarrow{\sim} A \times (B+C)$. Έχουμε,

$$\xi_{A,B,C}^{-1} = [\mathbf{1}_A \times \kappa_1^{B,C}, \mathbf{1}_A \times \kappa_2^{B,C}]$$

Ίσως είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε το $\xi_{A,B,C}$, γνωρίζοντας την κατασκευή του $\xi_{A,B,C}^{-1}$. Μελετώντας, όμως, τον ισομορφισμό αυτό θα βρούμε ιδιότητες που αργότερα θα μας φανούν χρήσιμες. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\xi_{A,B,C} \circ [\mathbf{1}_A \times \kappa_1^{B,C}, \mathbf{1}_A \times \kappa_2^{B,C}] = \mathbf{1}_{(A \times B)+(A \times C)}$$
$$[\xi_{A,B,C} \circ (\mathbf{1}_A \times \kappa_1^{B,C}), \xi_{A,B,C} \circ (\mathbf{1}_A \times \kappa_2^{B,C})] = \mathbf{1}_{(A \times B)+(A \times C)}$$

Δηλαδή,

$$\xi_{A,B,C} \circ (\mathbf{1}_A \times \kappa_1^{B,C}) = \kappa_1^{A\times B, A\times C} \tag{1.4.3a}$$
$$\xi_{A,B,C} \circ (\mathbf{1}_A \times \kappa_2^{B,C}) = \kappa_2^{A\times B, A\times C} \tag{1.4.3b}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$[\pi_1^{A,B}, \pi_1^{A,C}] \circ \xi_{A,B,C} = \pi_1^{A,B+C} \tag{1.4.4}$$

Απόδειξη. Προκύπτει από απλές ιδιότητες του γινομένου και του συγγινομένου.

$$\begin{aligned}
\pi_1^{A,B+C} \circ \xi_{A,B,C}^{-1} &= \pi_1^{A,B+C} \circ [\mathbf{1}_A \times \kappa_1^{B,C}, \mathbf{1}_A \times \kappa_2^{B,C}] \\
&= [\pi_1^{A,B+C} \circ (\mathbf{1}_A \times \kappa_1^{B,C}), \pi_1^{A,B+C} \circ (\mathbf{1}_A \times \kappa_2^{B,C})] \\
&= [\pi_1^{A,B+C} \circ \langle \pi_1^{A,B}, \kappa_1^{B,C} \circ \pi_1^{A,B+C} \rangle, \pi_1^{A,B+C} \circ \langle \pi_1^{A,C}, \kappa_2^{B,C} \circ \pi_2^{A,C} \rangle] \\
&= [\pi_1^{A,B}, \pi_1^{A,C}]
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.13. Για αντικείμενα A, B και C μίας αμφικαρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, $\mathcal{C}$, ισχύει

$$C^{A+B} \simeq C^A \times C^B$$

Απόδειξη. Έστω αντικείμενο X της $\mathcal{C}$. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C^{A+B}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times (A+B), C) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((X \times A) + (X \times B), C)
\end{aligned}$$

Όμως, κάθε βέλος $f : (X \times A) + (X \times B) \to C$ συνεπάγεται τα βέλη $f \circ \kappa_i^{(X\times A),(X\times B)}$, όπου $i = 1, 2$. Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι βελών $f : X \times A \to C$, $g : X \times B \to C$ συνεπάγεται το βέλος $[f, g]$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((X \times A) + (X \times B), C) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times A, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times B, C) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C^B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C^A) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C^A \times C^B)
\end{aligned}$$

Εφόσον ο ισομοριφσμός $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C^{A+B}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C^A \times C^B)$ υπάρχει για κάθε X, έχουμε $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C^{A+B}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C^A \times C^B)$. Δηλαδή, $y(C^{A+B}) \simeq y(C^A \times C^B)$, όπου y η εμφύτευση Yoneda. □

Αν συμβολίσουμε με $\zeta_{A,B,C} : C^{A+B} \to C^A \times C^B$ τον ισομορφισμό της παραπάνω πρότασης, αυτή υποδηλώνει ότι για βέλος $f : X \to C^A \times C^B$, έχουμε

$$\zeta_{C,A,B}^{-1} \circ f = \widetilde{\left([\overline{\pi_1 \circ f}, \overline{\pi_2 \circ f}] \circ \xi_{C,A,B}\right)} \tag{1.4.5}$$

όπου το σύμβολο της μετάθεσης, στο δεξί μέλος της ισότητας, εφαρμόζεται σε όλο το σύνθετο βέλος εντός των παρενθέσεων.

Οι αμφικαρτεσιανά κλειστές κατηγορίες δεν είναι απαραίτητο ότι έχουν μοναδικό ασθενές αρχικό αντικείμενο. Εύκολα διαπιστώνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 1.14. Αν σε μια αμφικαρτεσιανά κλειστή κατηγορία υπάρχει βέλος $f : A \to I$, όπου I ασθενές αρχικό αντικείμενο, τότε το A είναι κι αυτό ασθενώς αρχικό.

1.5 Μονάδες και συμμονάδες

Ορισμός. Μία *μονάδα (monad)* είναι μια τριάδα (F, η, μ) όπου $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ενδοσυναρτητής και $\eta : I_{\mathcal{C}} \to F$ και $\mu : F^2 \to F$ φυσικοί μετασχηματισμοί τέτοιοι, ώστε για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$, τα παρακάτω διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_{F(X)}"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{F(X)}"'] & F^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] & F(X) \arrow[l, "F(\eta_X)"'] \arrow[dl, "\mathbf{1}_{F(X)}"] \\ & F(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F^3(X) \arrow[r, "F(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{F(X)}"'] & F^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\ F^2(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & F(X) \end{tikzcd}$$

Ορισμός. Μία *συμμονάδα (comonad)* είναι μια τριάδα (G, ϵ, δ) όπου $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ενδοσυναρτητής και $\epsilon : G \to I_{\mathcal{C}}$ και $\delta : G \to G^2$ φυσικοί μετασχηματισμοί τέτοιοι, ώστε για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$, τα παρακάτω διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} & G(X) \arrow[dl, "\mathbf{1}_{G(X)}"'] \arrow[d, "\delta_X"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{G(X)}"] & \\ G(X) & G^2(X) \arrow[l, "\epsilon_{G(X)}"] \arrow[r, "G(\epsilon_X)"'] & G(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "\delta_X"'] & G^2(X) \arrow[d, "G(\delta_X)"] \\ G^2(X) \arrow[r, "\delta_{G(X)}"'] & G^3(X) \end{tikzcd}$$

Η συμμονάδα είναι η δυική δομή της μονάδας. Αλλιώς, αν (F, η, μ) μια μονάδα στη $\mathcal{C}$, τότε αυτή είναι συμμονάδα στη $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Ορισμός. Μια *καρτεσιανή συμμονάδα*, $(G, \epsilon, \delta, m, m_T)$, μιας καρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, $(C, \times, T)$, είναι μια συμμονάδα (G, ϵ, δ), όπου η τριάδα (G, m, T) είναι καρτεσιανός ενδοσυναρτητής και οι φυσικοί μετασχηματισμοί ϵ και δ είναι καρτεσιανοί.

Ορισμός. Δοθείσεις μιας καρτεσιανής συμμονάδας, $(G, \epsilon, \delta, m, m_T)$, μιας μονοειδικής κατηγορίας $(\mathcal{C}, \times, T)$, και ενός ενδοσυναρτητή F, η *G-δύναμη* είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $st : G(-) \times F(-) \to F(G(-) \times -)$ τέτοιος, ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd} F(A) & \\ G(T) \times F(A) \arrow[u, "\pi_2^{G(T),F(A)}"] \arrow[r, "st_{T,A}"] & F(G(T) \times A) \arrow[ul, "F(\pi_2^{G(T),A})"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G(A \times B) \times F(C) \arrow[rr, "st_{A \times B, C}"] \arrow[d, "m_{A,B} \times \mathbf{1}_{F(C)}"'] & & F(G(A \times B) \times C) \arrow[d, "F(m_{A,B} \times \mathbf{1}_C)"] \\ G(A) \times G(B) \times F(C) \arrow[r, "\mathbf{1}_{G(A)} \times st_{B,C}"'] & G(A) \times F(G(B) \times C) \arrow[r, "st_{A, G(B) \times C}"'] & F(G(A) \times G(B) \times C) \end{tikzcd}$$

Ορισμός. Μία μονάδα, (F, η, μ), μιας καρτεσιανά κλειστής κατηγορίας, $(\mathcal{C}, \times, T)$, λέμε ότι είναι *G-δυνατή*, όπου $(G, \epsilon, \delta, m, m_T)$ καρτεσιανή συμμονάδα, αν υπάρχει G-δύναμη $st : G(-) \times F(-) \to F(G(-) \times -)$ τέτοια, ώστε για A και B αντικείμενα της $\mathcal{C}$, το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
G(A) \times B \arrow[d, "\mathbf{1}_{G(A)} \times \eta_B"'] \arrow[dr, "\eta_{G(A)\times B}"] & & \\
G(A) \times F(B) \arrow[r, "st_{A,B}"] & F(G(A) \times B) & \\
G(A) \times F^2(B) \arrow[u, "\mathbf{1}_{G(A)} \times \mu_B"] \arrow[r, "st_{A,F(B)}"'] & F(G(A) \times F(B)) \arrow[r, "F(st_{A,B})"'] & F^2(G(A) \times B) \arrow[ul, "\mu_{G(A)\times B}"']
\end{tikzcd}$$

Κεφάλαιο 2

Τροπική CS4 Λογική

2.1 Σύστημα φυσικής απαγωγής

Η τροπική λογική CS4 (Constructive S4) αποτελεί επέκταση της προτασιακής ιντουισιονιστικής λογικής, με την εισαγωγή των συμβόλων $\Box$ και $\Diamond$, που συλλαμβάνουν τις έννοιες της αναγκαιότητας και της πιθανότητας, αντιστοίχως. Η ποικιλία των αξιωμάτων που μπορεί κανείς να επιλέξει για τους νέους αυτούς σύνδεσμους είναι μεγάλη. Για λόγους σαφήνειας, θα διευκρινιστούν στις παρακάτω παραγράφους οι αρχές από τις οποίες διέπονται οι τροπικότητες του CS4.

Οι σύνδεσμοι της γλώσσας είναι οι κλασικοί της σύζευξης ($\wedge$), της διάζευξης ($\vee$), του συμπερασμού ($\Rightarrow$) και οι τροπικοί: της αναγκαιότητας ($\Box$) και της πιθανότητας ($\Diamond$). Η γλώσσα αποτελείται επίσης από προτασιακές μεταβλητές, τις οποίες συνήθως συμβολίζουμε με λατινικούς κεφαλαίους χαρακτήρες $P, Q, \ldots$. Οι προτασιακές σταθερές είναι οι $\top$ και $\bot$, οι οποίες συλλαμβάνουν τις έννοιες της αλήθειας και του ψεύδους. Επιπλέον, στα σύμβολα της γλώσσας περιλαμβάνονται και οι παρενθέσεις που χρησιμοποιούνται για την αποφυγή αμφισημίας. Η άρνηση δεν έχει συμπεριληφθεί στους συνδέσμους γιατί μπορεί να οριστεί ως συμπερασμός προς το ψεύδος. Τυπικά δηλαδή $\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$.

Με τους συνδέσμους, τις προτασιακές μεταβλητές και τις σταθερές, σχηματίζουμε τους τύπους της γλώσσας, όπως παρακάτω:

$$A, B ::= P \mid \bot \mid \top \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \Rightarrow B \mid \Box A \mid \Diamond A$$

Αν και το CS4 περιγράφεται πλήρως από το σύστημα φυσικής απαγωγής του, δίνουμε παρακάτω τα αξιώματα που διέπουν τους τροπικούς σύνδεσμους, με τον φορμαλισμό του Hilbert. Ένας παράγοντας που διαφοροποιεί σημαντικά ένα τροπικό σύστημα από ένα άλλο είναι η σχέση των τροπικών συνδέσμων με τους υπόλοιπους. Τα αξιώματα του Σχήματος 2.1 δεν είναι ικανά για τον επιμερισμό της πιθανότητας πάνω από τη διάζευξη. Δεν αποδεικνύονται, δηλαδή, οι τύποι $\Diamond(A \vee B) \Rightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$ και $\neg\Diamond\bot$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την ανεξαρτησία των δύο τροπικών συνδέσμων. Ο ένας δεν μπορεί να οριστεί συναρτήσει του άλλου. Τυπικά, $\Diamond \not\equiv \neg\Box\neg$.

$\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Diamond A \Rightarrow \Diamond B)$
$\Box A \Rightarrow A$	$A \Rightarrow \Diamond A$
$\Box A \Rightarrow \Box\Box A$	$\Diamond\Diamond A \Rightarrow A$
Nec: Αν το A είναι θεώρημα, τότε είναι και το $\Box A$.	

Σχήμα 2.1. *Τα τροπικά αξιώματα της CS4*

Ένας τυπικός συλλογισμός αποτελείται από ένα συμπέρασμα, το οποίο έχει προέλθει από κάποιες προκείμενες που επεξεργαζόμαστε με κανόνες. Ο συλλογισμός μπορεί να είναι σωστός ή λανθασμένος, ασχέτως του status του συμπεράσματος. Μπορεί, για παράδειγμα, να έχουμε ξεκινήσει με λάθος προκείμενες και έτσι να έχουμε καταλήξει σε ένα λάθος συμπέρασμα, έχοντας κάνει όμως έναν σωστό συλλογισμό.

Στη Θεωρία Αποδείξεων, τα αντικείμενα μελέτης είναι οι συλλογισμοί καθαυτοί. Οι προκείμενες είναι τύποι της γλώσσας, τις οποίες μπορούμε να επεξεργαστούμε μέσω των απαγωγικών κανόνων. Αυτοί αποτελούν τη *νόμιμη* οδό προς το συμπέρασμα. Παρακάτω δίνονται οι τυπικοί ορισμοί, ακολουθώντας τους Troelstra και Schwichtenberg στο [TS00].

Ορισμός. Μια *απόδειξη* ή *απαγωγή* έχει τη δομή ενός δέντρου που σε κάθε του κόμβο εμφανίζεται ένας τύπος. Οι *υποθέσεις* είναι οι τύποι που εμφανίζονται στα φύλλα του δέντρου και διακρίνονται σε *πακέτα υποθέσεων* με χρήση ετικέτων. Συμβολίζουμε τις ετικέτες με πεζούς λατινικούς χαρακτήρες, $u, v, w, \ldots$.Ένα σύνολο ίδιων υποθέσεων με ίδιες ετικέτες απαρτίζει ένα πακέτο υποθέσεων. Διαφορετικοί τύποι πρέπει να έχουν διαφορετικές ετικέτες. Επιπλέον, επιτρέπονται κενά πακέτα υποθέσεων.

Οι υποθέσεις μπορεί να είναι *κλειστές* ή *ανοιχτές*. Μια υπόθεση κλείνει μαζί με τις υπόλοιπες του ίδιου πακέτου, με την εφαρμογή κάποιου *απαγωγικού κανόνα*. Δηλαδή, ένας απαγωγικός κανόνας είτε κλείνει όλες τις υποθέσεις ενός πακέτου, είτε τις αφήνει όλες ανοιχτές.

Μια απόδειξη στο σύστημα της φυσικής απαγωγής κατασκευάζεται επαγωγικά:

Βάση: Ένας κόμβος A^u αποτελεί μια *τετριμμένη απαγωγή* με συμπέρασμα A και ανοιχτή υπόθεση A (με ετικέτα u). Συνήθως, γράφουμε την ετικέτα μιας υπόθεσης μόνο αν αργότερα αυτή κλείσει. Ενώ για τις υποθέσεις που παραμένουν ανοιχτές, οι ετικέτες παραλείπονται όταν δεν κρίνονται απαραίτητες.

Επαγωγικό βήμα: Αν $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ είναι απαγωγές, τότε ορίζεται απαγωγή $\mathcal{D}$ σύμφωνα με τους απαγωγικούς κανόνες του Σχήματος 2.2. Ας παρατηρήσουμε ότι οι απαγωγικοί κανόνες είναι είτε *κανόνες εισαγωγής* ($\mathcal{I}$) είτε κανόνες απαλοιφής ($\mathcal{E}$) κάποιου συνδέσμου. Στους κανόνες απαλοιφής που έχουν περισσότερες από μία υποθέσεις, η υπόθεση που περιέχει τον σύνδεσμο προς απαλοιφή ονομάζεται *κύρια*, ενώ οι υπόλοιπες *περιβάλλουσες*.[1]

Αν και οι ανοιχτές υποθέσεις μιας απόδειξης $\mathcal{D}$ συγκροτούν ένα πολυσύνολο, έστω Δ, στον συμβολισμό $\begin{matrix}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}$ το Γ δηλώνει ένα σύνολο που περιέχει όλες τις ανοιχτές υποθέσεις της $\mathcal{D}$, λαμβάνοντας υπόψη και τις ετικέτες τους. Επίσης, στον συμβολισμό $\begin{matrix}\Gamma, [A]^u\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}$ το $[A]^u$ δηλώνει το κλείσιμο όλου του πακέτου υποθέσεων με ετικέτα u. Το B δηλώνει το συμπέρασμα της $\mathcal{D}$. Όταν η αναφορά σε μια συγκεκριμένη απόδειξη δεν είναι απαραίτητη ή εννοείται, θα γράφουμε $\Gamma \vdash A$ ή $\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ B\end{matrix}$.

Ας σημειώσουμε, ότι το Γ δεν προσδιορίζεται μοναδικά από το πολυσύνολο Δ, γιατί το πρώτο μπορεί να περιέχει και στοιχεία διαφορετικά από το δεύτερο. Για παράδειγμα, ισχύει ότι $B \vdash A \Rightarrow A$, γιατί υπάρχει απόδειξη $\mathcal{D}$ του $A \Rightarrow A$ από το κενό σύνολο ανοιχτών υποθέσεων και τετριμμένα κάθε στοιχείο του κενού συνόλου ανήκει και στο $\{B\}$.

Για τους κανόνες $\Rightarrow_{\mathcal{I}}$ και $\vee_{\mathcal{E}}$, οι υπο-απαγωγές στις οποίες κλείνει κάποιο πακέτο υποθέσεων μπορεί να περιλαμβάνουν επιπλέον ανοιχτές υποθέσεις. Ενώ στους κανόνες $\Box_{\mathcal{I}}$ και $\Diamond_{\mathcal{E}}$, η υπο-απαγωγή $\mathcal{D}_n$ έχει ανοιχτά πακέτα υποθέσεων μόνο αυτά που κλείνουν με την εφαρμογή του

[1] Οι κανόνες για τους κλασικούς συνδέσμους στο Σχήμα 2.2 βρίσκονται στο [TS00], ενώ αυτοί για τους τροπικούς συνδέσμους αποτελούν παραλλαγή αυτών στο [AMdPR01], ώστε να είναι συμβατοί με τον ορισμό της απαγωγής του [TS00].

$$
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \dfrac{\perp}{P}\,\perp_{\mathcal{E}}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}[A]^u\\ \mathcal{D}_1\\ \dfrac{B}{A\Rightarrow B}\,\Rightarrow_{\mathcal{I},u}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2\\ \dfrac{A\Rightarrow B \quad A}{B}\,\Rightarrow_{\mathcal{E}}\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2\\ \dfrac{A \quad B}{A\wedge B}\,\wedge_{\mathcal{I}}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \dfrac{A\wedge B}{A}\,\wedge_{\mathcal{E}}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \dfrac{A\wedge B}{B}\,\wedge_{\mathcal{E}}\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \dfrac{A}{A\vee B}\,\vee_{\mathcal{I}}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \dfrac{B}{A\vee B}\,\vee_{\mathcal{I}}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\quad [A]^u \quad [B]^v\\ \mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2 \quad \mathcal{D}_3\\ \dfrac{A\vee B \quad C \quad C}{C}\,\vee_{\mathcal{E},u,v}\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}\qquad\qquad [\Box A_1]^{u_1},\ldots,[\Box A_{n-1}]^{u_{n-1}}\\ \mathcal{D}_1 \cdots \mathcal{D}_{n-1} \qquad \mathcal{D}_n\\ \dfrac{\Box A_1 \cdots \Box A_{n-1} \qquad A}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u_1,\ldots,u_{n-1}}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \dfrac{\Box B}{B}\,\Box_{\mathcal{E}}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \dfrac{A}{\top}\,\top_{\mathcal{I}}\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \dfrac{B}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{I}}\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\qquad\qquad [\Box A_1]^{u_1},\ldots,[\Box A_{n-2}]^{u_{n-2}},[B]^{u_{n-1}}\\ \mathcal{D}_1 \cdots \mathcal{D}_{n-2} \quad \mathcal{D}_{n-1} \qquad \mathcal{D}_n\\ \dfrac{\Box A_1 \cdots \Box A_{n-2} \quad \Diamond B \qquad \Diamond C}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{E},u_1,\ldots,u_{n-1}}\end{array}
$$

Σχήμα 2.2. *Οι απαγωγικοί κανόνες της CS4 λογικής.*

κανόνα. Ο περιορισμός αυτός στους εν λόγω τροπικούς απαγωγικούς κανόνες είναι απαραίτητος, ώστε να διατηρηθεί η κλειστότητα των φυσικών απαγωγών ως προς το σχήμα της αντικατάστασης [AMdPR01],[BdP96].

Τέλος, ο κανόνας $\perp_{\mathcal{E}}$ μπορεί να έχει σαν συμπέρασμα μόνο προτασιακές μεταβλητές. Χωρίς αυτόν τον περιορισμό, δεν ισχύει η ιδιότητα του υποτύπου στις κανονικές απαγωγές (βλ. ενότητα 2.2.1), [Sim94]§2.1.2, [TS00]§6. Αν επιτρέπαμε το $\perp$ στο συμπέρασμα του κανόνα αυτού, θα δημιουργούνταν άλλες περιπλοκές, όπως άπειρες αποδείξεις που δεν θα είχαν κάποια πεπερασμένη κανονική μορφή, εφόσον δεν έχουμε κάποιον κανόνα αναγωγής για το $\perp_{\mathcal{E}}$.

2.2 Αναγωγές και κανονικοποίηση

Σ' αυτήν την ενότητα, ορίζουμε τρεις κατηγορίες απαγωγικών αναγωγών, οι οποίες θα μας επιτρέψουν να μετασχηματίζουμε μια απαγωγή σε κανονική μορφή. Σε μια μορφή, δηλαδή, που δεν θα επιδέχεται επιπλέον αναγωγές.

Η διαδικασία της κανονικοποίησης γίνεται σταδιακά, απαλείφοντας από το αποδεικτικό δέντρο τύπους που αποτελούν συμπέρασμα ενός κανόνα εισαγωγής και κύρια υπόθεση του κανόνα απαλοιφής του ίδιου συνδέσμου. Αυτού του είδους οι μετασχηματισμοί αποδείξεων περιγράφονται από τους *κανόνες παράκαμψης*. Αυτοί εγγυώνται ότι η διαδικασία της εισαγωγής ενός συνδέσμου και της άμεσης απαλοιφής του μπορεί να παρακαμφθεί και παρόλ' αυτά να λάβουμε μια απόδειξη ισοδύναμη.

Είναι όμως πιθανό σε μια απαγωγή, ένας τύπος που αποτελεί συμπέρασμα ενός κανόνα εισαγωγής, να παραμένει ίδιος σε μια σειρά απαγωγικών κανόνων και να απαλειφεί ο κύριος σύνδεσμός του αργότερα. Στην περίπτωση αυτή, η απόδειξη μετασχηματίζεται «αντιμεταθέτοντας» κανόνες, ώστε να φτάσει σε μια μορφή που να μπορούν να εφαρμοστούν οι κανόνες παράκαμψης. Αυτού του είδους οι μετασχηματισμοί περιγράφονται από τους *κανόνες μετάθεσης*.

Η παράκαμψη ενός σχήματος «εισαγωγή-απαλοιφή συνδέσμου» σε μια απαγωγή, με αποτέλεσμα μια ισοδύναμη απαγωγή, προϋποθέτει μια ιδιότητα των κανόνων απαλοιφής σύμφωνα με την οποία, όταν ένας κανόνας απαλοιφής εφαρμόζεται αμέσως μετά από τον αντίστοιχο κανόνα εισαγωγής, τον αναιρεί χωρίς όμως να προστίθεται πληροφορία στην απαγωγή. Ο F. Pfenning ονομάζει την ιδιότητα αυτή *τοπική ορθότητα*, [Pfe01]. Η δυϊκή της ιδιότητα είναι η *τοπική πληρότητα*, σύμφωνα με την οποία δεν χάνεται πληροφορία με την απαλοιφή και άμεση εισαγωγή του κύριου συνδέσμου ενός τύπου. Δηλαδή, δοθέντος ενός τύπου, μπορούμε να καταλήξουμε στον ίδιο, απαλείφοντας και εισαγάγοντας άμεσα τον κύριο σύνδεσμό της με τους απαγωγικούς κανόνες που ορίστηκαν παραπάνω. Η ιδιότητα της τοπικής πληρότητας είναι αυτή που εξηγεί την τρίτη κατηγορία αναγωγών, τους *η-κανόνες*.

Οι παρακάτω κανόνες ορίζονται πάνω σε απαγωγές των οποίων ένα υποδέντρο του αποδεικτικού τους δέντρου ταυτίζεται με μία από τις απαγωγές στην αριστερή πλευρά της παρακάτω λίστας. Μια τέτοια απαγωγή μετασχηματίζεται αντικαθιστώντας το συγκεκριμένο υποδέντρο στα αριστερά με το αντίστοιχο στα δεξιά. Αυτή η διαδικασία είναι νόμιμη και γίνεται με χρήση του θεωρήματος αντικατάστασης. Αυτό σημαίνει άλλωστε η τοπικότητα των ιδιοτήτων ορθότητας και πληρότητας που αναφέρονται παραπάνω.

Οι κανόνες που δεν αφορούν τους τροπικούς συνδέσμους αναλύονται στα [TS00] §6.1 και [Pfe01]. Για τους υπόλοιπους κανόνες, παραπέμπω στα [BdP01], [BBdP98] και [Sim94].

❑ Κανόνες παράκαμψης

$\top$-μετατροπή

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \top\end{array} \quad \text{ανάγεται σε} \quad \top$$

$(\wedge_{\mathcal{I}}, \wedge_{\mathcal{E}})$-μετατροπή

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ A_1 & A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}\wedge_{\mathcal{I}}}{A_i}\wedge_{\mathcal{E}} \quad \text{ανάγεται σε} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_i\\ A_i\end{array} \quad \text{για } i \in \{1,2\}$$

$(\vee_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{E}})$-μετατροπή

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A_i\end{array}}{A_1 \vee A_2}\vee_{\mathcal{I}} \quad \begin{array}{c}[A_1]^u\\ \mathcal{D}_1\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]^v\\ \mathcal{D}_2\\ C\end{array}}{C}\vee_{\mathcal{E},u,v} \quad \text{ανάγεται σε} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A_i\\ \mathcal{D}_i\\ C\end{array} \quad \text{για } i \in \{1,2\}$$

$(\Rightarrow_{\mathcal{I}}, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$-μετατροπή

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]^u\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathcal{I},u} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}'\\ A\end{matrix}}{B}\Rightarrow_{\mathcal{E}} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}'\\ A\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}$$

$(\Box_{\mathcal{I}}, \Box_{\mathcal{E}})$-μετατροπή

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \cdots \mathcal{D}_n\\ \Box A_1 \cdots \Box A_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Box A_1]^{u_1},\cdots,[\Box A_n]^{u_n}\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}}{\Box B}\Box_{\mathcal{I},u_1,\ldots,u_n}}{B}\Box_{\mathcal{E}} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_n\\ \Box A_1, & \cdots, & \Box A_n\\ & \mathcal{D} & \\ & B & \end{matrix}$$

$(\Diamond_{\mathcal{I}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$-μετατροπή

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_n\\ \Box A_1 \cdots & \Box A_n\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\end{matrix}}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{I}} \quad \begin{matrix}[\Box A_1]^{u_1},\ldots,[\Box A_n]^{u_n},[A]^{u_{n+1}}\\ \mathcal{D}'\\ \Diamond B\end{matrix}}{\Diamond B}\Diamond_{\mathcal{E},u_1,\ldots,u_{n+1}} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_n & \mathcal{D}\\ \Box A_1,\cdots, & \Box A_n, & A\\ & \mathcal{D}' & \\ & \Diamond B & \end{matrix}$$

❑ **Κανόνες μετάθεσης** Με $\star$ συμβολίζουμε οποιονδήποτε από τους συνδέσμους της γλώσσας: $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Box, \Diamond\}$.

$(\vee_{\mathcal{E}}, \star_{\mathcal{E}})$-μετάθεση

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A_1 \vee A_2\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}}{B}\vee_{\mathcal{E}} \quad \mathcal{D}'}{C}\star_{\mathcal{E}} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A_1 \vee A_2\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ B\end{matrix} \quad \mathcal{D}'}{C}\star_{\mathcal{E}} \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix} \quad \mathcal{D}'}{C}\star_{\mathcal{E}}}{C}\vee_{\mathcal{E}}$$

Σημειώνουμε ότι το B είναι η κύρια υπόθεση του εκάστοτε κανόνα απαλοιφής στη θέση του $\star_{\mathcal{E}}$. Επιπλέον, ανάλογα τον κανόνα απαλοιφής $\star_{\mathcal{E}}$, η απαγωγή $\mathcal{D}'$ ενδέχεται να είναι κενή. Τέλος, ειδικά για την περίπτωση του $\vee_{\mathcal{E}}$, επειδή αυτή έχει δύο περιβάλλουσες υποθέσεις, δίπλα από την $\mathcal{D}'$ υπάρχει μία επιπλέον απαγωγή με το ίδιο συμπέρασμα.

$(\Box_{\mathcal{I}}, \Box_{\mathcal{I}})$-μετάθεση

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_n\\ \Box A_1 \cdots & \Box A_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Box A_1]^{u_1},\ldots,[\Box A_n]^{u_n}\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}}{\Box B}\Box_{\mathcal{I},u_1,\ldots,u_n} \quad \text{όπου για κάποιο } i,\ \mathcal{D}_i \equiv \quad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_m\\ \Box C_1 \cdots & \Box C_m\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Box C_1]^{v_1},\ldots,[\Box C_m]^{v_m}\\ \mathcal{F}\\ A_i\end{matrix}}{\Box A_i}\Box_{\mathcal{I},v_1,\ldots,v_m}$$

ανάγεται σε

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{F}_1 \quad \mathcal{F}_m \quad \mathcal{D}_n \\ \Box A_1 \cdots \Box C_1 \cdots \Box C_m \cdots \Box A_n\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{[\Box C_1]^{w_1}, \ldots, \Box C_m]^{w_m} \qquad \begin{array}{c}[\Box C_1]^{v_1}, \ldots, [\Box C_m]^{v_m} \\ \mathcal{F} \\ A_i\end{array}}{\Box A_i}\ \Box_{\mathcal{I}, v_1, \ldots, v_m} \\
[\Box A_1]^{u_1}, \ldots, [\Box A_{i-1}]^{u_{i-1}} \quad \mathcal{D} \quad [\Box A_{i+1}]^{u_{i+1}}, \ldots, [\Box A_n]^{u_m} \\
B
\end{array}
}{C}\ \Box_{\mathcal{I}, u_1, \ldots, u_{i-1}, w_1, \ldots, w_m, u_{i+1}, \ldots, u_n}
$$

$(\Diamond_{\mathcal{E}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$**-μετάθεση**

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}\mathcal{F}_1 \quad \mathcal{F}_m \\ \Box B_1 \cdots \Box B_m\end{array}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_n \\ \Box A_1 \cdots \Box A_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \Diamond A\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Box A_1]^{u_1}, \ldots, [\Box A_n]^{u_n}, [A]^{u_{n+1}} \\ \mathcal{D}' \\ \Diamond B\end{array}}{\Diamond B}\ \Diamond_{\mathcal{E}, u_1, \ldots, u_{n+1}}
\quad
\begin{array}{c}[\Box B_1]^{v_1}, \ldots, [\Box B_m]^{v_m}, [B]^{v_{m+1}} \\ \mathcal{F}' \\ \Diamond C\end{array}
}{\Diamond C}\ \Diamond_{\mathcal{E}, v, \ldots, v_{m+1}}
$$

ανάγεται σε

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_n \\ \Box A_1 \cdots \Box A_n\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \Diamond A\end{array}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{F}_1 \quad \mathcal{F}_m \\ \Box B_1 \cdots \Box B_m\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Box A_1]^{u_1}, \ldots, [\Box A_n]^{u_n}, [A]^{v_{n+1}} \\ \mathcal{D}' \\ \Diamond B\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Box B_1]^{v_1}, \ldots, [\Box B_n]^{v_m}, [B]^{u_{m+1}} \\ \mathcal{F}' \\ \Diamond C\end{array}}{\Diamond C}\ \Diamond_{\mathcal{E}, v_1, \ldots, v_{n+1}}
}{\Diamond C}\ \Diamond_{\mathcal{E}, u_1, \ldots, u_{m+1}}
$$

❏ η**-κανόνες** Σύμφωνα με την ιδιότητα της τοπικής πληρότητας των κανόνων απαλοιφής, ένας τύπος (ή μια τετριμμένη απαγωγή) επεκτείνεται σε μια απαγωγή που απαλείφει και έπειτα εισαγάγει τον κύριο σύνδεσμό του. Παρακάτω, όμως, δείχνω τις αναγωγές αυτές με την αντίθετη φορά. Αυτή η επιλογή έχει γίνει γιατί το κριτήριο στην παρούσα εργασία είναι η απλοποίηση των απαγωγών και όχι η απόδειξη της συνέπειας του συστήματος της φυσικής απαγωγής για το CS4. Επιπλέον, η αλλαγή της φοράς δεν επιφέρει ασυνέπειες στο σύστημά μας, καθώς, όπως θα δούμε παρακάτω, πάνω στους κανόνες αναγωγής ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας. Οι σχέσεις ισοδυναμίας περιλαμβάνουν και τις δύο κατευθύνσεις αναγωγών.

Αναφέρω, επίσης, ότι οι η-κανόνες στη θεωρία αποδείξεων προκύπτουν εύκολα από τις η-αναγωγές στον λ-λογισμό και τον Curry-Howard ισομορφισμό, [AT11], §1.6.3. Θα μπορούσαμε να πούμε, κατά κάποιο τρόπο, ότι μειώνουν την πολυπλοκότητα μιας απόδειξης.

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix}}{A}\,\wedge_{\mathcal{E}} \qquad \cfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix}}{B}\,\wedge_{\mathcal{E}}}{A\wedge B}\,\wedge_{\mathcal{I}} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix}$$

$$\cfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cfrac{[A]^u}{A\vee B}\,\vee_{\mathcal{I}}\\ \mathcal{D}'\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cfrac{[B]^v}{A\vee B}\,\vee_{\mathcal{I}}\\ \mathcal{D}'\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee_{\mathcal{E},u,v} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\vee B\\ \mathcal{D}'\\ C\end{matrix}$$

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\Rightarrow B\end{matrix} \qquad [A]^u}{B}\,\Rightarrow_{\mathcal{E}}}{A\Rightarrow B}\,\Rightarrow_{\mathcal{I},u} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\Rightarrow B\end{matrix}$$

$$\cfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Box A\end{matrix} \qquad \cfrac{[\Box A]^u}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Box A\end{matrix}$$

$$\cfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Diamond A\end{matrix} \qquad \cfrac{[A]^u}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{E},u} \qquad \text{ανάγεται σε} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Diamond A\end{matrix}$$

2.2.1 Κανονικοποίηση

Το σύνολο των κανόνων παράκαμψης και μετάθεσης ορίζουν μια δυαδική σχέση, τη συμβολίζουμε με β, πάνω στις απαγωγές. Μία επιπλέον δυαδική σχέση ορίζεται με τους η-κανόνες και τη συμβολίζουμε με η. Ο συμβολισμός αποτελεί αναφορά στις αντίστοιχες αναγωγές του λ-λογισμού.

Ορισμός. Έστω R μια δυαδική σχέση πάνω σε απαγωγές.

- Ένα στοιχείο $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \in R$ ονομάζεται *R-συστολή* και συμβολίζεται $\mathcal{D}_1 \to_R \mathcal{D}_2$.
- Τα στοιχεία, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, της ανακλαστικής και μεταβατικής κλειστότητας της R ονομάζονται *R-αναγωγές* και συμβολίζονται με $\mathcal{D}_1 \overset{*}{\to}_R \mathcal{D}_2$. Λέμε, επίσης, ότι η $\mathcal{D}_1$ *R-ανάγεται* στην $\mathcal{D}_2$.
- Η ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική κλειστότητα της R ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στις απαγωγές. Λέμε ότι η απαγωγή $\mathcal{D}_1$ είναι *R-ισοδύναμη* με την $\mathcal{D}_2$ (συμβολίζουμε $\mathcal{D}_1 \simeq_R \mathcal{D}_2$), όταν το ζεύγος $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ ανήκει σ' αυτήν την σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός. Μια απαγωγή, $\mathcal{D}_1$, βρίσκεται σε *R-κανονική μορφή*, όταν για κάθε απαγωγή για την οποία ισχύει $\mathcal{D}_1 \overset{*}{\to}_R \mathcal{D}_2$, η $\mathcal{D}_1$ ταυτίζεται με την $\mathcal{D}_2$. Δηλαδή, δεν υπάρχει καμία απαγωγή διάφορη της $\mathcal{D}_1$ στην οποία η $\mathcal{D}_1$ ανάγεται.

Στο [BdP01] αποδεικνύεται ασθενής κανονικοποίηση για το σύστημα IS4. Δηλαδή, κάθε απαγωγή στο IS4 έχει τουλάχιστον μια βc-κανονική μορφή[2]. Στο IS4, όμως, δεν υπάρχει ο απαγωγικός κανόνας $\top_{\mathcal{I}}$, ούτε η προτασιακή σταθερά $\top$ στη γλώσσα του, καθώς την ορίζει με τη βοήθεια του $\bot$, ως $\top \equiv \bot \Rightarrow \bot$. Έτσι, δεν υπάρχει ούτε ο κανόνας $\top$-μετατροπή.

Έστω, λοιπόν, μια απαγωγή $\mathcal{D}$ στο σύστημα CS4. Εφαρμόζοντας τον κανόνα $\top$-μετατροπή σε κάθε υπο-απαγωγή της $\mathcal{D}$ που έχει ως τελευταίο κανόνα τον $\top_{\mathcal{I}}$, αυτή μετασχηματίζεται σε μια

[2] Οι Bierman και de Paiva συμβολίζουν με βc τη δυαδική σχέση που στην παρούσα εργασία συμβολίζεται με β.

απαγωγή $\mathcal{D}'$, που είναι συμβατή με τον ορισμό της απαγωγής στο IS4. Τότε, η $\mathcal{D}'$, με πεπερερασμένο πλήθος βημάτων, μπορεί να μετασχηματιστεί σε κανονική μορφή, έστω $\mathcal{D}''$, ως προς τους κανόνες αναγωγής του IS4, δηλαδή όλους τους β-κανόνες της CS4 εκτός της $\top$-μετατροπής. Αν, όμως, εφαρμόσουμε τον κανόνα αυτό ξανά σε όσες υπο-απαγωγές της $\mathcal{D}''$ έχουν συμπέρασμα το $\top$, αυτή θα αναχθεί σε κανονική μορφή ως προς το σύστημα της παρούσας εργασίας. Η εφαρμογή της $\top$-μετατροπής δεν δημιουργεί νέα ζεύγη διαδοχικών κανόνων που να επιδέχονται κάποιον κανόνα αναγωγής. Δείξαμε, μόλις, ασθενή κανονικοποίηση για το CS4.

Θεώρημα 1 (Ασθενής κανονικοποίηση). *Κάθε απαγωγή στο* CS4 *έχει μια β-κανονική μορφή και μπορεί να αναχθεί σ' αυτήν με πεπερασμένο πλήθος βημάτων.*

Μια β-κανονική απαγωγή μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο, με τη βοήθεια των η-κανόνων και να φτάσει σε κανονική μορφή. Με την ένωση των η-συστολών και των β-συστολών, δημιουργείται μια νέα δυαδική σχέση πάνω στις απαγωγές. Τη συμβολίζουμε με $\beta\eta$.

Ορισμός. Μια απαγωγή $\mathcal{D}$ λέμε ότι βρίσκεται σε *κανονική μορφή* αν βρίσκεται σε $\beta\eta$-κανονική μορφή. Μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε την κανονική μορφή μιας απαγωγής ως ταυτόχρονη β-κανονική μορφή και η-κανονική μορφή.

Πρόταση 2.1. Αν $\mathcal{D}$ μια απαγωγή σε β-κανονική μορφή, τότε αυτή ανάγεται σε κανονική μορφή, με πεπερασμένο πλήθος η-συστολών.

Απόδειξη. Πρώτα, θα δείξουμε κατά περίπτωση, ότι οι η-συστολές πάνω σε β-κανονικές αποδείξεις δεν αυξάνουν τον β-βαθμό των αποδείξεων. Θα δείξουμε μόνο την περίπτωση της σύζευξης, καθώς οι υπόλοιπες δείχνονται με όμοιο τρόπο.

Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ όπως φαίνεται αριστερά στο Σχήμα 2.3. Αφού η $\mathcal{D}$ είναι σε β-κανονική

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\wedge B\end{array}}{A}\wedge\mathcal{E} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\wedge B\end{array}}{B}\wedge\mathcal{E}}{A\wedge B}\wedge\mathcal{I}\\
\mathcal{D}_2
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathcal{D}_1\\
A\wedge B\\
\mathcal{D}_2
\end{array}
$$

Σχήμα 2.3. *η-συστολή στην περίπτωση της σύζευξης*

μορφή, η $\mathcal{D}_1$ είναι επίσης σε β-κανονική μορφή. Άρα, ο τελευταίος κανόνας της δεν μπορεί να είναι κανόνας εισαγωγής. Αυτό συμβαίνει γιατί αν ήταν κάποιος κανόνας εισαγωγής, αυτός δεν θα μπορούσε να είναι άλλος από την εισαγωγή της σύζευξης, $\wedge_{\mathcal{I}}$. Τότε όμως η $\mathcal{D}$ δεν θα ήταν σε β-κανονική μορφή. Άτοπο. Επομένως, πράγματι ο τελευταίος κανόνας της $\mathcal{D}_1$ δεν είναι κανόνας εισαγωγής. Επιπλέον, ο τελευταίος κανόνας της $\mathcal{D}_1$ δεν μπορεί να είναι απαλοιφή της διάζευξης, γιατί αλλιώς πάλι η $\mathcal{D}$ δεν θα είναι σε β-κανονική μορφή. Για την $\mathcal{D}_2$, ο μόνος περιορισμός είναι ότι ο πρώτος της κανόνας δεν μπορεί να είναι απαλοιφή της σύζευξης.

Επομένως, καταλήγουμε με μια απαγωγή, $\mathcal{D}'$, όπως φαίνεται δεξιά στο παραπάνω σχήμα. Εφόσον οι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ έχουν τους περιορισμούς που αναφέραμε παραπάνω, η $\mathcal{D}'$ παραμένει σε β-κανονική μορφή. Ομοια προκύπτουν και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Ορίζουμε τώρα τον R-βαθμό, $d_R(\mathcal{D})$, μιας απαγωγής $\mathcal{D}$, να είναι το πλήθος των R-συστολών που έχει, όπου R η σχέση β ή η. Για παράδειγμα, αν $d_\eta(\mathcal{D}) = 3$ τότε υπάρχουν $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ και $\mathcal{D}_3$, ώστε $\mathcal{D} \to_\eta \mathcal{D}_i$, για $i = 1, 2, 3$. Ο η-βαθμός μιας απαγωγής είναι πεπερασμένος, γιατί διαφορετικά η απαγωγή θα ήταν άπειρη. Σε κάθε η-συστολή, διαγράφονται ένα ή παραπάνω υποδέντρα από το αποδεικτικό δέντρο. Έστω $\mathcal{T}_i$, τα υποδέντρα που διαγράφονται από μια απαγωγή $\mathcal{D}$ στην οποία εφαρμόζεται η-συστολή και έστω $\mathcal{D}'$ η απαγωγή στην οποία μετασχηματίζεται η $\mathcal{D}$ μετά την εφαρμογή της η-συστολής. Τότε

$$d_\eta(\mathcal{D}') = d_\eta(\mathcal{D}) - \sum_i d_\eta(\mathcal{T}_i) - 1$$

Έτσι, επειδή $d_\eta(\mathcal{T}_i) \geq 0$, ο η-βαθμός της απαγωγής μειώνεται κατά ένα ή και παραπάνω.

Έστω τώρα $\mathcal{D}$ μια β-κανονική απαγωγή, δηλαδή $d_\beta(\mathcal{D}) = 0$. Ακολουθώντας μια η-συστολή, η αρχική απαγωγή μετασχηματίζεται σε μια απαγωγή $\mathcal{D}'$, για την οποία ισχύει $d_\eta(\mathcal{D}') < d_\eta(\mathcal{D})$ και $d_\beta(\mathcal{D}') = 0$. Συνεχίζοντας με τις η-συστολές, θα φτάσουμε με πεπερασμένο αριθμό βημάτων σε μια η-κανονική μορφή της $\mathcal{D}$, η οποία όμως είναι επίσης β-κανονική. Άρα, σε πεπερασμένο πλήθος η-συστολών φτάνουμε σε μια κανονική μορφή της απαγωγής. □

Πόρισμα 2.2. Για κάθε απαγωγή, $\mathcal{D}$, υπάρχει τουλάχιστον μια κανονική απαγωγή, στην οποία η $\mathcal{D}$ ανάγεται με πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Παρατηρήσεις:

- Ας σημειώσουμε ότι από τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας, αν μία απαγωγή $\beta\eta$-ανάγεται σε μια άλλη, τότε αυτές είναι $\beta\eta$-ισοδύναμες. Ονομάζουμε ισοδυναμία μια $\beta\eta$-ισοδυναμία.
- Αν μια κανονική μορφή $\mathcal{D}'_1$ μιας απαγωγής $\mathcal{D}_1$ και μια κανονική μορφή $\mathcal{D}'_2$ μιας απαγωγής $\mathcal{D}_2$ είναι ισοδύναμες, τότε και οι $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ είναι ισοδύναμες. Επομένως, αν δύο απαγωγές ανάγονται στην ίδια κανονική μορφή, τότε είναι ισοδύναμες.
- Στην Θεωρία Αποδείξεων, συνήθως μια απόδειξη ορίζεται να είναι σε κανονική μορφή όταν είναι σε β-κανονική μορφή μόνο. Για τον σκοπό αυτής της εργασίας είναι απαραίτητο οι απαγωγές σε κανονική μορφή να είναι τέτοιες και ως προς τη δυαδική σχέση η.

Οι κανονικές απαγωγές έχουν μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα.

Θεώρημα 2 (Ιδιότητα του υποτύπου). *Κάθε εσωτερικός κόμβος του αποδεικτικού δέντρου μιας β-κανονικής απαγωγής στη* CS4 *είναι ένας υποτύπος του συμπεράσματός της ή των ανοιχτών της υποθέσεων.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{D}$ μια β-κανονική απαγωγή. Τότε, αυτή είναι κανονική ως προς το σύστημα IS4. Όπως έχει αποδειχθεί όμως στο [BdP01], κάθε κανονική απαγωγή στο IS4 (άρα και η $\mathcal{D}$) έχει την ιδιότητα του υποτύπου. Έτσι, η ιδιότητα του υποτύπου ισχύει για κάθε β-κανονική απαγωγή στο CS4. □

Μετασχηματίζοντας μια β-κανονική απαγωγή σε $\beta\eta$-κανονική μορφή, η ιδιότητα του υποτύπου διατηρείται, αφού οι η-συστολές δεν εισαγάγουν νέους τύπους.

Πρόταση 2.3. Μια απαγωγή σε κανονική μορφή έχει την ιδιότητα του υποτύπου.

Κεφάλαιο 3

Το κατηγορικό μοντέλο

Το σύνολο των αξιωμάτων που παρουσιάζονται στο πρώτο κεφάλαιο δεν είναι το μοναδικό που θα μπορούσε να περιγράψει τη CS4 λογική. Παρόλ' αυτά, κατηγοριοθεωρητικά το απαγωγικό σύστημα περιγράφεται με μοναδικό τρόπο.

Ορισμός. Μία CS4-κατηγορία είναι μια συμμετρική αμφικαρτεσιανά κλειστή κατηγορία, $\mathcal{C}$, με ασθενές αρχικό αντικείμενο, μία καρτεσιανή συμμονάδα $(\Box, \epsilon, \delta, m, m_\top)$, όπου $\Box : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ενδοσυναρτητής, και μία $\Box$-δυνατή μονάδα $(\Diamond, \mu, \eta)$, όπου $\Diamond : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ενδοσυναρτητής.

Μια CS4-κατηγορία έχει πλούσια δομή. Πολλά αντικείμενά της ή οικογένειες αντικειμένων της ξεχωρίζουν και χρειαζόμαστε σύμβολα για να αναφερόμαστε σ' αυτά. Σημειώνω εδώ, ότι συμβολίζουμε με $\top$ το τερματικό αντικείμενο μιας CS4-κατηγορίας και με $\bot$ το ασθενές αρχικό της αντικείμενο. Για την επεξήγηση όλων των συμβόλων μιας CS4-κατηγορίας που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία, παραπέμπω στον Πίνακα Συμβόλων του Παραρτήματος.

Θα δούμε στις επόμενες ενότητες ότι μια CS4-κατηγορία περιγράφει καθολικά και με μοναδικό τρόπο την CS4 λογική. Η σύζευξη και όλες οι ιδιότητές της μεταφράζονται στο γινόμενο, η διάζευξη και όλες οι ιδιότητές του στο συγγινόμενο, ο συμπερασμός με τις ιδιότητές του στην έκθεση και οι τροπικοί σύνδεσμοι σε μονάδα και συμμονάδα.

3.1 CS4 Ορθότητα

Θεώρημα 3 (Ορθότητα)**.** *Έστω $\mathcal{C}$ οποιαδήποτε CS4-κατηγορία που έχει ένα αντικείμενο για κάθε προτασιακή μεταβλητή. Τότε υπάρχει κανονιστική ερμηνεία $[\![-]\!]$ του CS4 λογικού συστήματος στη $\mathcal{C}$ τέτοια, ώστε*

i. ένας τύπος A αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο $[\![A]\!]$ της $\mathcal{C}$

ii. μια απόδειξη φυσικής απαγωγής $\begin{matrix}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}$ με $\Gamma = A_1^{u_1}, \ldots, A_n^{u_n}$ αντιστοιχεί σε ένα βέλος $[\![\mathcal{D}]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]$, όπου

$$\begin{cases} [\![\Gamma]\!] = \top, & \text{για } \Gamma = \emptyset \\ [\![\Gamma]\!] = [\![\Gamma']\!] \times [\![A]\!], & \text{για } \Gamma = \Gamma' \cup \{A^u\} \text{ με } A^u \notin \Gamma' \end{cases}$$

iii. κάθε δύο φυσικές απαγωγές $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}'$ του B με υποθέσεις Γ, οι οποίες είναι ισοδύναμες, αντιστοιχούν στο ίδιο βέλος, με άλλα λόγια $[\![\mathcal{D}]\!] = [\![\mathcal{D}']\!]$.

Απόδειξη. **i.** Ένας τύπος Α αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο $[\![A]\!]$ της $\mathcal{C}$ επαγωγικά:

- Μια προτασιακή μεταβλητή P αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο $[\![P]\!]$.
- Ένας τύπος της μορφής $A \wedge B$ αντιστοιχεί στο $[\![A]\!] \times [\![B]\!]$.
- Ένας τύπος της μορφής $A \vee B$ αντιστοιχεί στο $[\![A]\!] + [\![B]\!]$.
- Ένας τύπος της μορφής $A \Rightarrow B$ αντιστοιχεί στο $[\![B]\!]^{[\![A]\!]}$.
- Ένας τύπος της μορφής $\Box A$ αντιστοιχεί στο $\Box[\![A]\!]$.
- Ένας τύπος της μορφής $\Diamond A$ αντιστοιχεί στο $\Diamond[\![A]\!]$.
- Το $\top$ αντιστοιχεί στο τερματικό αντικείμενο και το $\bot$ στο ασθενές αρχικό αντικείμενο.

Από δω και στο εξής, παραλείπουμε τις σημασιολογικές αγκύλες για λόγους απλότητας, όπου δεν δημιουργείται σύγχυση.

ii. Σημειώνουμε εδώ, ότι ο ορισμός της ερμηνείας των ανοιχτών υποθέσεων μιας απαγωγής, στο σημείο (ii) του θεωρήματος, είναι ασαφής ως προς την αρίθμηση των πακέτων. Λόγω, όμως, της συμμετρικής δομής της $\mathcal{C}$, πράγματι δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία παίρνουμε τα γινόμενα. Επίσης, ένα μη κενό σύνολο ανοιχτών πακέτων υποθέσεων ερμηνεύεται πάντα ως γινόμενο ενός αντικειμένου με το τερματικό αντικείμενο της κατηγορίας. Σ' αυτό το σημείο, η μονοειδική δομή της $\mathcal{C}$ μας επιτρέπει να αναφερόμαστε στο αντικείμενο A ως ερμηνεία των ανοιχτών υποθέσεων, ενώ τυπικά θα ήταν το $[\![\Gamma]\!] \equiv A \times \top$.

Έχοντας ορίσει την ερμηνεία ενός τύπου στο μέρος (i) της απόδειξης ορθότητας, ορίζουμε την ερμηνεία μιας τετριμμένης απαγωγής της οποίας το αποδεικτικό δέντρο αποτελείται από έναν κόμβο, A, να είναι το ταυτοτικό βέλος $\mathbf{1}_{[\![A]\!]}$. Η ερμηνεία μιας τετριμμένης απαγωγής είναι η επαγωγική βάση για το μέρος (ii) της απόδειξης ορθότητας, η οποία γίνεται επαγωγικά στη δομή των φυσικών απαγωγών.

Εισαγωγή της αλήθειας ($\top_{\mathcal{I}}$)

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \dfrac{A}{\top}\,\top_{\mathcal{I}} \end{array}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε βέλος $f : \Gamma \to A$. Τότε, επειδή το $\top$ είναι τερματικό αντικείμενο, υπάρχει μοναδικό βέλος $\top_A : A \to \top$. Με σύνθεση, λαμβάνουμε το βέλος $\top_A \circ f : \Gamma \to \top$, που είναι αυτό που ερμηνεύει την παραπάνω απαγωγή.

Απαλοιφή του ψεύδους ($\bot_{\mathcal{E}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{A}\,\bot_{\mathcal{E}} \end{array}$$

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει βέλος $f : \Gamma \to \bot$. Από την κατασκευή της CS4-κατηγορίας, για κάθε αντικείμενο A υπάρχει βέλος $\bot_A : \bot \to A$. Με σύνθεση των δύο βελών έχουμε το βέλος $\bot_A \circ f : \Gamma \to A$, που ερμηνεύει την τελική απαγωγή $\mathcal{D}$.

Εισαγωγή της σύζευξης ($\wedge_{\mathcal{I}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & \Gamma \\ \vdots & \vdots \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}\wedge_{\mathcal{I}}$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε βέλη $f : \Gamma \to A$ και $g : \Gamma \to B$. Το βέλος $\langle f, g\rangle : \Gamma \to A \times B$ αντιστοιχεί στην ερμηνεία της $\mathcal{D}$.

Απαλοιφή της σύζευξης ($\wedge_{\mathcal{E}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\wedge_{\mathcal{E}} \qquad \text{ή} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\wedge_{\mathcal{E}}$$

Οι κανόνες απαλοιφής της σύζευξης αντιστοιχούν ο καθένας σε σύνθεση με μια προβολή. Τυπικά, $\pi_1^{A,B} \circ f : \Gamma \to A$ και $\pi_2^{A,B} \circ f : \Gamma \to B$, όπου $f : \Gamma \to A \times B$ είναι το βέλος από την επαγωγική υπόθεση.

Εισαγωγή του συμπερασμού ($\Rightarrow_{\mathcal{I}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [A]^u \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathcal{I},u}$$

Ο τελευταίος κανόνας κλείνει το πακέτο υποθέσεων A με ετικέτα u. Τότε, από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα βέλος $f : \Gamma \times A \to B$ (πριν την εφαρμογή του κανόνα $\Rightarrow_{\mathcal{I}}$, το A^u είναι ακόμα ανοιχτή υπόθεση). Τότε, το βέλος $\tilde{f} : \Gamma \to B^A$ ερμηνεύει την $\mathcal{D}$.

Απαλοιφή του συμπερασμού ($\Rightarrow_{\mathcal{E}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & \Gamma \\ \vdots & \vdots \\ A \Rightarrow B & A\end{matrix}}{B}\Rightarrow_{\mathcal{E}}$$

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν βέλη $f : \Gamma \to B^A$ και $g : \Gamma \to A$. Από τα βέλη αυτά μπορούμε να πάρουμε το βέλος $\varepsilon_{A,B} \circ \langle f, g\rangle : \Gamma \to B$, το οποίο ερμηνεύει την απαγωγή $\mathcal{D}$.

Εισαγωγή της διάζευξης ($\vee_{\mathcal{I}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{matrix}}{A \vee B}\vee_{\mathcal{I}} \qquad \text{ή} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \vee B}\vee_{\mathcal{I}}$$

Ο τελευταίος κανόνας κάθε απαγωγής αντιστοιχεί ο καθένας σε σύνθεση με μια συμπροβολή. Αν $f : \Gamma \to A$ και $g : \Gamma \to B$ είναι τα βέλη από την επαγωγική υπόθεση, τότε τα $\kappa_1^{A,B} \circ f : \Gamma \to A + B$ και $\kappa_2^{A,B} \circ g : \Gamma \to A + B$ είναι τα βέλη που ερμηνεύουν τις παραπάνω απαγωγές.

Απαλοιφή της διάζευξης ($\vee_{\mathcal{E}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \mathcal{D}' \\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A]^u \\ \mathcal{D}_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^v \\ \mathcal{D}_2 \\ C\end{matrix}}{C}\ \vee_{\mathcal{E},u,v}$$

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν τρία βέλη, $f : \Gamma \to A+B$, $f_1 : \Gamma \times A \to C$ και $f_2 : \Gamma \times B \to C$, όπου Γ το σύνολο των πακέτων των ανοιχτών υποθέσεων της $\mathcal{D}$. Τότε, έχουμε το βέλος $\langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle : \Gamma \to C^A \times C^B$. Από την Πρόταση 1.13, υπάρχει ισομορφισμός $\zeta^{-1}_{C,A,B} : C^A \times C^B \to C^{A+B}$ και έτσι, λαμβάνουμε το βέλος $\zeta^{-1}_{C,A,B} \circ \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle : \Gamma \to C^{A+B}$. Αλλά, με την ισότητα 1.4.5, έχουμε

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{A+B,C} \circ \langle \zeta^{-1}_{C,A,B} \circ \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle, f \rangle &= \varepsilon_{A+B,C} \circ \langle \Big(\widetilde{[\overline{\pi_1 \circ \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle}, \overline{\pi_2 \circ \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle}] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2}} \Big), f \rangle \\
&= \varepsilon_{A+B,C} \circ \langle \Big(\widetilde{[\overline{\tilde{f}_1}, \overline{\tilde{f}_2}] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2}} \Big), f \rangle \\
&= \varepsilon_{A+B,C} \circ \langle (\widetilde{[f_1, f_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2}}), f \rangle \\
&= \varepsilon_{A+B,C} \circ ((\widetilde{[f_1, f_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2}}) \times \mathbf{1}_{A+B}) \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f \rangle \\
&= [f_1, f_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f \rangle
\end{aligned}$$

Τότε, η ερμηνεία της $\mathcal{D}$ είναι το $[f_1, f_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f \rangle$.

Εισαγωγή της αναγκαιότητας ($\Box_{\mathcal{I}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \mathcal{D}_1 \\ \Box A_1\end{matrix} \cdots \begin{matrix}\Gamma \\ \mathcal{D}_n \\ \Box A_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Box A_1]^{u_1} \cdots [\Box A_n]^{u_n} \\ \mathcal{D}' \\ B\end{matrix}}{\Box B}\ \Box_{\mathcal{I},u_1,\ldots,u_n}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν βέλη $f_i : \Gamma \to \Box A_i$, $i = 1, \ldots, n$ και $f : \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \to B$. Μπορούμε να πάρουμε το βέλος $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle : \Gamma \to \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n$ και το γινόμενο $\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_n} : \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \to \Box\Box A_1 \times \cdots \times \Box\Box A_n$. Χρησιμοποιώντας τον φυσικό μετασχηματισμό m αναδρομικά[1] n φορές, λαμβάνουμε επίσης το βέλος $m_{A_1,\ldots,A_n} : \Box\Box A_1 \times \cdots \times \Box\Box A_n \to \Box(\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n)$. Τέλος, χρησιμοποιώντας τον ενδοσυναρτητή $\Box$ παίρνουμε το βέλος $\Box f : \Box(\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n) \to \Box B$. Έτσι, συνθέτοντας αυτά τα βέλη έχουμε το βέλος $(\Box f) \circ m_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n} \circ (\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_n}) \circ \langle f_1, \ldots, f_n \rangle : \Gamma \to \Box B$, που είναι αυτό που ερμηνεύει την απόδειξη $\mathcal{D}$.

Απαλοιφή της αναγκαιότητας ($\Box_{\mathcal{E}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ \Box A\end{matrix}}{A}\ \Box_{\mathcal{E}}$$

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα βέλος $f : \Gamma \to \Box A$. Από τον φυσικό μετασχηματισμό ϵ παίρνουμε το συστατικό βέλος $\epsilon_A : \Box A \to A$, το οποίο μπορούμε να συνθέσουμε με το f και τότε να λάβουμε το βέλος $\epsilon_A \circ f : \Gamma \to A$, το οποίο ερμηνεύει την απαγωγή $\mathcal{D}$.

[1] Επειδή ο φυσικός μετασχηματισμός m είναι μονοειδικός, υπάρχει μια ελευθερία στην επιλογή της αναδρομής για τον ορισμό του $m_{A_1,\ldots,A_k}$

Εισαγωγή της πιθανότητας ($\Diamond_{\mathcal{I}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{matrix}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{I}}$$

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα βέλος $f : \Gamma \to A$. Από τον φυσικό μετασχηματισμό $\eta : I_{\mathcal{C}} \to \Diamond$, παίρνουμε τη συνιστώσα $\eta_A : A \to \Diamond A$. Έτσι, με σύνθεση των δύο βελών λαμβάνουμε το $\eta_A \circ f : \Gamma \to \Diamond A$.

Απαλοιφή της πιθανότητας ($\Diamond_{\mathcal{E}}$) Έστω απαγωγή $\mathcal{D}$ της μορφής

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & & \Gamma \\ \mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_n \\ \Box A_1 & \cdots & \Box A_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma \\ \mathcal{D}_{n+1} \\ \Diamond A\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\Box A_1]^{u_1}, \ldots, [\Box A_n]^{u_n}, [A]^{u_{n+1}} \\ \mathcal{D}' \\ \Diamond B\end{matrix}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E}, u_1, \ldots, u_{n+1}}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν βέλη $f_i : \Gamma \to \Box A_i$, για $i = 1, \ldots, n$, $f_{n+1} : \Gamma \to \Diamond A$ και $g : \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \times A \to \Diamond B$. Παίρνουμε το βέλος $\langle f_1, \ldots, f_{n+1} \rangle : \Gamma \to \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \times \Diamond A$. Χρησιμοποιώντας τον φυσικό μετασχηματισμό st επαγωγικά $n+1$ φορές, παίρνουμε το συστατικό βέλος $st_{A_1, \ldots, A_n, A} : \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \times \Diamond A \to \Diamond(\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \times A)$. Έχουμε επίσης τα $\Diamond g : \Diamond(\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \times A) \to \Diamond\Diamond B$ και $\mu_B : \Diamond\Diamond B \to \Diamond B$. Συνθέτοντας όλα αυτά τα βέλη, λαμβάνουμε το $\mu_B \circ \Diamond g \circ st_{A_1, \ldots, A_n, A} \circ \langle f_1, \ldots, f_{n+1} \rangle$ που είναι το βέλος από το Γ στο $\Diamond B$ που ερμηνεύει την απαγωγή $\mathcal{D}$.

iii. Έχουμε ως τώρα αποδείξει και το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, που αποτελεί το επαγωγικό βήμα. Κάθε απόδειξη, λοιπόν, αντιστοιχεί σε ένα βέλος. Θα δείξουμε, με το τρίτο μέρος του θεωρήματος, ότι τα βέλη που ερμηνεύουν ισοδύναμες αποδείξεις ισούνται. Για τον σκοπό αυτό, θα μελετήσουμε τους διάφορους κανόνες αναγωγής, αποδεικνύοντας κάθε φορά την ισότητα δύο βελών. Όμως, οι κανόνες αναγωγής εφαρμόζονται στο εσωτερικό ενός αποδεικτικού δέντρου με αντικατάσταση. Σύμφωνα με την ερμηνεία που δίνουμε στις απαγωγές, μια υπο-απαγωγή αντιστοιχεί σε ένα βέλος που είναι όρος ενός σύνθετου βέλους. Χρησιμοποιούμε δηλαδή την ιδιότητα ότι αν $f = h$, τότε $f \circ g = h \circ g$ ή αντίστοιχα $g \circ f = g \circ h$.

❑ **Κανόνες παράκαμψης** Πρώτα θα δείξουμε την ισότητα για τους κανόνες παράκαμψης.

Παράκαμψη σύζευξης ($\wedge_{\mathcal{I}}, \wedge_{\mathcal{E}}$) Έστω η παρακάτω απαγωγή.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \mathcal{D}_1 \\ A_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma \\ \mathcal{D}_2 \\ A_2\end{matrix}}{A_1 \wedge A_2}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{A_i}\,\wedge_{\mathcal{E}}$$

Θέτουμε $f_i = [\![\mathcal{D}_i]\!] : \Gamma \to A_i$ για $i = 1, 2$. Η παραπάνω απαγωγή ερμηνεύεται με το βέλος $\pi_i^{A_1, A_2} \circ \langle f_1, f_2 \rangle$. Τότε, από τις ιδιότητες του γινομένου, έχουμε

$$\pi_i^{A_1, A_2} \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_i$$

Το βέλος στο δεύτερο μέλος της ισότητας ερμηνεύει τον μετασχηματισμό της παραπάνω απαγωγής στην ισοδύναμή της μετά την εφαρμογή της ($\wedge_{\mathcal{I}}, \wedge_{\mathcal{E}}$)-μετατροπής.

Παράκαμψη συμπερασμού $(\Rightarrow_{\mathcal{I}}, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ Έστω η παρακάτω απαγωγή.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]^u\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathcal{I},u} \quad \begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}'\\ A\end{array}}{\mathrm{B}}\Rightarrow_{\mathcal{E}}$$

Αυτή αντιστοιχεί στο βέλος $\varepsilon_{A,B} \circ \langle \tilde{f}, g\rangle$, όπου $f : \Gamma \times A \to B$ και $g : \Gamma \to A$. Όμως,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{A,B} \circ \langle \tilde{f}, g\rangle &= \varepsilon_{A,B} \circ \langle \tilde{f} \circ \mathbf{1}_\Gamma, , \mathbf{1}_A \circ g\rangle\\ &= \varepsilon_{A,B} \circ (\tilde{f} \times \mathbf{1}_A) \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g\rangle\\ &= f \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g\rangle.\end{aligned}$$

Η τελευταία σύνθεση βελών αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό της παραπάνω απαγωγής μετά την εφαρμογή της παράκαμψης του συμπερασμού.

Παράκαμψη διάζευξης $(\vee_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{E}})$ Έστω η παρακάτω απαγωγή.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_i'\\ A_i\end{array}}{A_1 \vee A_2}\vee_{\mathcal{I}} \quad \begin{array}{c}[A_1]^u\\ \mathcal{D}_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A_2]^v\\ \mathcal{D}_2\\ B\end{array}}{B}\vee_{\mathcal{E},u,v}$$

Αυτή ερμηνεύεται με το βέλος $[f_1, f_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, \kappa_i^{A_1,A_2} \circ h_i\rangle$, όπου $h_i = [\![\mathcal{D}_i']\!] : \Gamma \to A_i$ και $f_i = [\![\mathcal{D}_i]\!] : \Gamma \times A_i \to B$, με $i = 1, 2$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.4.3), έχουμε

$$\begin{aligned}[f_1, f_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, \kappa_i^{A_1,A_2} \circ h_i\rangle &= [f_1, f_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ (\mathbf{1}_\Gamma \times \kappa_i^{A_1,A_2}) \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, h_i\rangle\\ &= [f_1, f_2] \circ \kappa_i^{\Gamma\times A_1,\Gamma\times A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, h_i\rangle\\ &= f_i \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, h_i\rangle\end{aligned}$$

Παράκαμψη αναγκαιότητας $(\Box_{\mathcal{I}}, \Box_{\mathcal{E}})$ Για τον κανόνα παράκαμψης της αναγκαιότητας, το αντίστοιχο βέλος μιας μη κανονικής απόδειξης είναι

$$\epsilon_B \circ (\Box f) \circ m_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n} \circ (\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_n}) \circ \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$$

Επειδή το ϵ είναι φυσικός μετασχηματισμός

$$= f \circ \epsilon_{\Box A_1\times\cdots\times\Box A_n} \circ m_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n} \circ (\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_n}) \circ \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$$

Επειδή το $(\Box, \delta, \epsilon, m, m_\top)$ είναι μια μονοειδική συμμονάδα

$$= f \circ (\epsilon_{\Box A_1} \times \cdots \times \epsilon_{\Box A_n}) \circ (\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_n}) \circ \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$$

Επειδή η σύνθεση είναι επιμεριστική σε σχέση με τα γινόμενα

$$= f \circ ((\epsilon_{\Box A_1} \circ \delta_{A_1}) \times \cdots \times (\epsilon_{\Box A_n} \circ \delta_{A_n})) \circ \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$$

Επειδή το $(\Box, \delta, \epsilon)$ είναι συμμονάδα

$$
\begin{aligned}
&= f \circ (\mathbf{1}_{\Box A_1} \times \cdots \times \mathbf{1}_{\Box A_n}) \circ \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \\
&= f \circ \mathbf{1}_{\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n} \circ \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \\
&= f \circ \langle f_1, \ldots, f_n \rangle
\end{aligned}
$$

όπου $f_i : \Gamma \to \Box A_i$ για $i = 1, \ldots, n$ και $f : \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \to B$. Το τελευταίο βέλος της ισότητας ερμηνεύει την απαγωγή που προκύπτει μετά την εφαρμογή του κανόνα παράκαμψης για το ζέγος $(\Box_{\mathcal{I}}, \Box_{\mathcal{E}})$.

Παράκαμψη πιθανότητας $(\Diamond_{\mathcal{I}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$ Το βέλος που ερμηνεύει μια αρχική απαγωγή που επιδέχεται παράκαμψη της πιθανότητας, είναι το

$$
\begin{aligned}
&\mu_B \circ \Diamond g \circ st_{A_1, \ldots, A_n, A} \circ \langle f_1, \ldots, f_n, \eta_A \circ h \rangle \\
&= \mu_B \circ (\Diamond g) \circ st_{A_1, \ldots, \Box A_n, A} \circ (\mathbf{1}_{\Box A_1} \times \cdots \times \mathbf{1}_{\Box A_n} \times \eta_A) \circ \langle f_1, \ldots, f_n, h \rangle
\end{aligned}
$$

Επειδή η μονάδα $(\Diamond, \mu, \eta)$ είναι $\Box$-δυνατή

$$
= \mu_B \circ (\Diamond g) \circ \eta_{\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \times A} \circ \langle f_1, \ldots, f_n, h \rangle
$$

Επειδή η $(\Diamond, \mu, \eta)$ είναι μονάδα

$$
\begin{aligned}
&= \mu_B \circ \eta_{\Diamond B} \circ g \circ \langle f_1, \ldots, f_n, h \rangle \\
&= g \circ \langle f_1, \ldots, f_n, h \rangle
\end{aligned}
$$

όπου $f_i : \Gamma \to \Box A_i$ για $i = 1, \ldots, n$ και $g : \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \times A \to \Diamond B$ και $h : \Gamma \to A$. Το τελευταίο βέλος της ισότητας ερμηνεύει την απαγωγή που προκύπτει μετά την εφαρμογή του κανόνα παράκαμψης για την πιθανότητα, $(\Diamond_{\mathcal{I}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$.

Παράκαμψη της αλήθειας $(\top)$ Η περίπτωση αυτή είναι τετριμμένη. Μια απαγωγή με υποθέσεις Γ και συμπέρασμα $\top$ ερμηνεύεται με ένα βέλος $f : \Gamma \to \top$. Όμως, επειδή το $\top$ είναι τερματικό αντικείμενο, κάθε αντικείμενο έχει μοναδικό βέλος προς αυτό. Επομένως, $f = \top_\Gamma$. Το $\top_\Gamma$ είναι αυτό που ερμηνεύει την μετασχηματισμένη απαγωγή αφού εφαρμόστηκε ο κανόνας $\top$-μετατροπής.

❑ **Κανόνες μετάθεσης** Τώρα θα δείξουμε την ισότητα για τους κανόνες μετάθεσης.

$(\vee_{\mathcal{E}}, \perp_{\mathcal{E}})$**-μετάθεση** Έστω η παρακάτω απαγωγή

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \mathcal{D} \\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]^u \\ \mathcal{D}_1 \\ \perp\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]^v \\ \mathcal{D}_2 \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\ \vee_{\mathcal{E},u,v}}{C}\ \perp_{\mathcal{E}}
$$

και έστω $g_1 = [\![\mathcal{D}_1]\!]$, $g_2 = [\![\mathcal{D}_2]\!]$ και $f = [\![\mathcal{D}]\!]$. Τότε, η παραπάνω απαγωγή ερμηνεύεται με το βέλος $\perp_C \circ [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f \rangle : \Gamma \to C$. Όμως,

$$
\perp_C \circ [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f \rangle = [\perp_C \circ g_1, \perp_C \circ g_2] \circ \xi_{\perp,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f \rangle
$$

Το βέλος στο δεξί μέρος της ισότητας ερμηνεύει την παρακάτω απαγωγή.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]^u\\ \mathcal{D}_1\\ \bot\end{matrix}}{C}\bot_{\mathcal{E}} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[B]^v\\ \mathcal{D}_2\\ \bot\end{matrix}}{C}\bot_{\mathcal{E}}}{C}\vee_{\mathcal{E},u,v}$$

$(\vee_{\mathcal{E}}, \wedge_{\mathcal{E}})$-μετάθεση Όμοια, για την περίπτωση της $(\vee_{\mathcal{E}}, \wedge_{\mathcal{E}})$-μετάθεσης, το βέλος που ερμηνεύει την αρχική απόδειξη είναι το $\pi_i^{C,D} \circ [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle$, όπου $g : \Gamma \to A + B$, $g_1 : \Gamma \times A \to C \times D$ και $g_2 : \Gamma \times B \to C \times D$. Όμως,

$$\pi_i^{C,D} \circ [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle = [\pi_i^{C,D} \circ g_1, \pi_i^{C,D} \circ g_2] \circ \xi_{C\times D,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle$$

Το βέλος στο δεξί μέλος της ισότητας ερμηνεύει την απαγωγή στην οποία μετασχηματίζεται η αρχική, μετά την εφαρμογή του κανόνα $(\vee_{\mathcal{E}}, \wedge_{\mathcal{E}})$-μετάθεσης.

$(\vee_{\mathcal{E}}, \vee_{\mathcal{E}})$-μετάθεση Το βέλος που ερμηνεύει την αρχική απαγωγή είναι το

$$[h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle\rangle$$

όπου $g_i : \Gamma \times A_i \to B_1 + B_2$, $h_i : \Gamma \times B_i \to C$ και $f : \Gamma \to A_1 + A_2$. Ενώ το βέλος που ερμηνεύει την απαγωγή μετά την εφαρμογή της $(\vee_{\mathcal{E}}, \vee_{\mathcal{E}})$-μετάθεσης είναι το

$$\Big[[h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle \pi_1^{\Gamma,A_1}, g_1\rangle, [h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle \pi_1^{\Gamma,A_2}, g_2\rangle\Big] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle$$

Αυτά τα δύο βέλη, όμως, είναι ίσα, αφού

$$\begin{aligned}
&\Big[[h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle \pi_1^{\Gamma,A_1}, g_1\rangle, [h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle \pi_1^{\Gamma,A_2}, g_2\rangle\Big] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle \\
&= [h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ [\langle \pi_1^{\Gamma,A_1}, g_1\rangle, \langle \pi_1^{\Gamma,A_2}, g_2\rangle] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle && \text{Πρόταση 1.1} \\
&= [h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle [\pi_1^{\Gamma,A_1}, \pi_1^{\Gamma,A_2}], [g_1, g_2]\rangle \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle \\
&= [h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle [\pi_1^{\Gamma,A_1}, \pi_1^{\Gamma,A_2}] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle, [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle\rangle && \text{Εξίσωση 1.4.4} \\
&= [h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle \pi_1^{\Gamma,A_1+A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle, [g_1, g_2]\rangle \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle\rangle \\
&= [h_1, h_2] \circ \xi_{\Gamma,B_1,B_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, [g_1, g_2]\rangle \circ \xi_{\Gamma,A_1,A_2} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle\rangle
\end{aligned}$$

$(\vee_{\mathcal{E}}, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$-μετάθεση Έστω απαγωγή όπως παρακάτω.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ C\Rightarrow D\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]^u\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]^v\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\vee_{\mathcal{E},u,v}}{D}\Rightarrow_{\mathcal{E}}$$

Αυτή ερμηνεύεται με το βέλος $\varepsilon_{C,D} \circ \langle h, [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle\rangle$, όπου $g_1 : \Gamma \times A \to C$, $g_2 : \Gamma \times B \to C$, $f : \Gamma \to A + B$ και $h : \Gamma \to D^C$. Η ισοδύναμη απαγωγή στην οποία η παραπάνω μετασχηματίζεται με την εφαρμογή της $(\vee_{\mathcal{E}}, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$-μετάθεσης είναι η παρακάτω, η οποία ερμηνεύεται με το βέλος $[\varepsilon_{C,D} \circ \langle h \circ \pi_1^{\Gamma,A}, g_1\rangle, \varepsilon_{C,D} \circ \langle h \circ \pi_1^{\Gamma,B}, g_2\rangle] \circ \xi_{A,B,C} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, f\rangle$.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma & [A]^u\\ \vdots & \vdots\\ C\Rightarrow D & C\end{matrix}}{D}\Rightarrow_{\mathcal{E}} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma & [B]^v\\ \vdots & \vdots\\ C\Rightarrow D & C\end{matrix}}{D}\Rightarrow_{\mathcal{E}}}{D}\vee_{\mathcal{E},u,v}$$

Τα δύο βέλη όμως ισούνται, αφού

$$\begin{aligned}
&[\varepsilon_{C,D}\circ\langle h\circ\pi_1^{\Gamma,A},g_1\rangle,\varepsilon_{C,D}\circ\langle h\circ\pi_1^{\Gamma,B},g_2\rangle]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\\
&=[\varepsilon_{C,D}\circ(h\times\mathbf{1}_C)\circ\langle\pi_1^{\Gamma,A},g_1\rangle,\varepsilon_{C,D}\circ(h\times\mathbf{1}_C)\circ\langle\pi_1^{\Gamma,B},g_2\rangle]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\\
&=[\bar h\circ\langle\pi_1^{\Gamma,A},g_1\rangle,\bar h\circ\langle\pi_1^{\Gamma,B},g_2\rangle]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\\
&=\bar h\circ[\langle\pi_1^{\Gamma,A},g_1\rangle,\langle\pi_1^{\Gamma,B},g_2\rangle]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle && \text{(Πρόταση 1.1)}\\
&=\bar h\circ\langle[\pi_1^{\Gamma,A},\pi_1^{\Gamma,B}],[g_1,g_2]\rangle\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\\
&=\bar h\circ\langle[\pi_1^{\Gamma,A},\pi_1^{\Gamma,B}]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle,[g_1,g_2]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\rangle && \text{(Εξίσωση 1.4.4)}\\
&=\bar h\circ\langle\pi_1^{\Gamma,A+B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle,[g_1,g_2]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\rangle\\
&=\bar h\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,[g_1,g_2]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\rangle\\
&=\varepsilon_{C,D}\circ(h\times\mathbf{1}_C)\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,[g_1,g_2]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\rangle\\
&=\varepsilon_{C,D}\circ\langle h,[g_1,g_2]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle\rangle
\end{aligned}$$

$(\vee_{\mathcal{E}},\Box_{\mathcal{E}})$-μετάθεση Έστω απαγωγή όπως παρακάτω.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & [A]^u & [B]^v\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A\vee B & \Box C & \Box C\end{matrix}}{\Box C}\vee_{\mathcal{E},u,v}}{C}\Box_{\mathcal{E}}$$

Αυτή ερμηνεύεται με το βέλος $\epsilon_C\circ[g_1,g_2]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle$. Όμοια με τις περιπτώσεις των ζευγών $(\vee_{\mathcal{E}},\bot_{\mathcal{E}})$ και $(\vee_{\mathcal{E}},\wedge_{\mathcal{E}})$, έχουμε

$$\epsilon_C\circ[g_1,g_2]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle=[\epsilon_C\circ g_1,\epsilon_C\circ g_2]\circ\xi_{\Gamma,A,B}\circ\langle\mathbf{1}_\Gamma,f\rangle$$

Το βέλος στο δεξί μέλος της ισότητας, ερμηνεύει την απαγωγή στην οποία ανάγεται η παραπάνω, με εφαρμογή της $(\vee_{\mathcal{E}},\Box_{\mathcal{E}})$-μετάθεσης.

$(\vee_{\mathcal{E}},\Diamond_{\mathcal{E}})$-μετάθεση Έστω απαγωγή όπως παρακάτω.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & \Gamma\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_n\\ \Box C_1\cdots & \Box C_n\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma & [A]^u & [B]^v\\ \mathcal{E} & \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2\\ A\vee B & \Diamond C & \Diamond C\end{matrix}}{\Diamond C}\vee_{\mathcal{E},u,v} \qquad \begin{matrix}[\Box C_1]^{w}_1,\ldots,[\Box C_n]^{w_n},[C]^{w_{n+1}}\\ \mathcal{D}\\ \Diamond C\end{matrix}}{\Diamond C}\Diamond_{\mathcal{E},w_1,\ldots,w_{n+1}}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned}
f&=[\![\mathcal{D}]\!]:\Box C_1\times\cdots\Box C_n\times C\to\Diamond C, && g_1=[\![\mathcal{E}_1]\!]:\Gamma\times A\to\Diamond C\\
f_i&=[\![\mathcal{D}_i]\!]:\Gamma\to\Box C_n,\ \text{για } i=1,\ldots,n, && g_2=[\![\mathcal{E}_2]\!]:\Gamma\times B\to\Diamond C\\
& && \text{και } g=[\![\mathcal{E}]\!]:\Gamma\to A+B
\end{aligned}$$

Η παραπάνω απαγωγή ερμηνεύεται με το βέλος

$$\mu_C \circ \Diamond f \circ st_{C_1,\ldots,C_n,C} \circ \langle f_1, \ldots, f_n, [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle\rangle$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
&\langle f_1, \ldots, f_n, [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle\rangle \\
&= \langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,A+B}, [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \rangle \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle \\
&= \langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,A+B}, [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \rangle \circ \xi^{-1}_{\Gamma,A,B} \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle \\
&= \langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,A+B} \circ \xi^{-1}_{\Gamma,A,B}, [g_1 . g_2] \rangle \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle && \text{(Πρόταση 1.1)} \\
&= \langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ [\pi_1^{\Gamma,A}, \pi_1^{\Gamma,B}], [g_1 . g_2] \rangle \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle \\
&= \langle [\langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,A}, \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,B}], [g_1 . g_2] \rangle \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle && \text{(Εξίσωση 1.4.4)} \\
&= [\langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,A}, g_1 \rangle, \langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,B}, g_2 \rangle] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned}
&\mu_C \circ \Diamond f \circ st_{C_1,\ldots,C_n,C} \circ \langle f_1, \ldots, f_n, [g_1, g_2] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle\rangle \\
&= \mu_C \circ \Diamond f \circ st_{C_1,\ldots,C_n,C} \circ [\langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,A}, g_1 \rangle, \langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,B}, g_2 \rangle] \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle \\
&= [\mu_C \circ \Diamond f \circ st_{C_1,\ldots,C_n,C} \circ \langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,A}, g_1 \rangle, \mu_C \circ \Diamond f \circ st_{C_1,\ldots,C_n,C} \circ \langle \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \circ \pi_1^{\Gamma,B}, g_2 \rangle] \\
&\quad \circ \xi_{\Gamma,A,B} \circ \langle \mathbf{1}_\Gamma, g \rangle
\end{aligned}$$

Το βέλος στο δεξί μέλος της ισότητας, ερμηνεύει την απαγωγή στην οποία ανάγεται η παραπάνω, με εφαρμογή της $(\vee_\mathcal{E}, \Diamond_\mathcal{E})$-μετάθεσης.

$(\Box_\mathcal{I}, \Box_\mathcal{I})$-μετάθεση Η αρχική απαγωγή ερμηνεύεται με το βέλος

$$a_1 \circ \langle f_1, \ldots, f_{i-1}, a_2 \circ \langle h_1, \ldots, h_m \rangle, f_{i+1}, \ldots, f_n \rangle$$

όπου

$$\begin{aligned}
a_1 &= \Box f \circ m_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n} \circ (\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_n}) \\
a_2 &= \Box h \circ m_{\Box C_1,\ldots,\Box C_m} \circ (\delta_{C_1} \times \cdots \times \delta_{C_m})
\end{aligned}$$

Επειδή η κατηγορία είναι καρτεσιανή, έχουμε

$$\begin{aligned}
&a_1 \circ \langle f_1, \ldots, f_{i-1}, a_2 \circ \langle h_1, \ldots, h_m \rangle, f_{i+1}, \ldots, f_n \rangle \\
&= a_1 \circ \langle \mathbf{1}_{\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_{i-1}}, a_2, \mathbf{1}_{\Box A_{i+1} \times \cdots \times \Box A_n} \rangle \circ \langle f_1, \ldots, f_{i-1}, h_1, \ldots, h_m, f_{i+1}, \ldots, f_n \rangle
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας, πάλι, ιδιότητες του γινομένου, έχουμε

$$\begin{aligned}
&a_1 \circ \langle \mathbf{1}_{\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_{i-1}}, a_2, \mathbf{1}_{\Box A_{i+1} \times \cdots \times \Box A_n} \rangle \\
&= \Box f \circ m_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n} \circ (\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_n}) \circ \langle \mathbf{1}_{\Box A_1 \times \cdots \times \Box A_{i-1}}, a_2, \mathbf{1}_{\Box A_{i+1} \times \cdots \times \Box A_n} \rangle \\
&= \Box f \circ m_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n} \circ (\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_{i-1}} \times (\delta_{A_i} \circ a_2) \times \delta_{A_{i+1}} \times \cdots \times \delta_{A_n})
\end{aligned}$$

Έτσι, το βέλος

$$\begin{aligned}
\Box f \circ m_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n} &\circ (\delta_{A_1} \times \cdots \times \delta_{A_{i-1}} \times (\delta_{A_i} \circ a_2) \times \delta_{A_{i+1}} \times \cdots \times \delta_{A_n}) \\
&\circ \langle f_1, \ldots, f_{i-1}, h_1, \ldots, h_m, f_{i+1}, \ldots, f_n \rangle
\end{aligned}$$

αντιστοιχεί στην αναγωγή της αρχικής απόδειξης μετά την εφαρμογή του κανόνα μετάθεσης.

$(\Diamond_\mathcal{E}, \Diamond_\mathcal{E})$-μετάθεση Η αρχική απαγωγή ερμηνεύεται με το βέλος

$$\mu_C \circ \Diamond g \circ st_{\Box B_1,\ldots,\Box B_m,B} \circ \langle g_1,\ldots,g_m, \mu_B \circ \Diamond f \circ st_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n,A} \circ \langle f_1,\ldots,f_{m+1}\rangle\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} f &: \Box A_1 \times \cdots \times \Box A_n \times A \to \Diamond B, & g &: \Box B_1 \times \cdots \times \Box B_m \times B \to \Diamond C \\ f_i &: \Gamma \to \Box A_i, \text{ για } i = 1,\ldots,n, & g_i &: \Gamma \to \Box B_i, \text{ για } i = 1,\ldots,m \\ f_{n+1} &: \Gamma \to \Diamond B \end{aligned}$$

Με εφαρμογή του κανόνα $(\Diamond_\mathcal{E}, \Diamond_\mathcal{E})$-μετάθεση, η αρχική απαγωγή ανάγεται σε μια ισοδύναμή της, που ερμηνεύεται με το βέλος

$$\mu_C \circ \Diamond g \circ st_{\Box B_1,\ldots,\Box B_m,B} \circ (\mathbf{1}_{\Box B_1 \times \cdots \times \Box B_m} \times (\mu_B \circ \Diamond f \circ st_{\Box A_1,\ldots,\Box A_n,A})) \circ \langle g_1,\ldots,g_m,f_1,\ldots,f_{n+1}\rangle$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς την ισότητα των δύο βελών, χρησιμοποιώντας πάλι μόνο ιδιότητες του γινομένου.

Απομένει να μελετήσουμε τους η-κανόνες.

❑ η-κανόνες

Σύζευξη Έστω απαγωγή της μορφής

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix}}{A}\wedge_\mathcal{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ A\wedge B\end{matrix}}{B}\wedge_\mathcal{E}}{A\wedge B}\wedge_\mathcal{I}$$

Τότε, υπάρχει βέλος $f : \Gamma \to A \times B$ και η παραπάνω απαγωγή ερμηνεύεται με το βέλος $\langle \pi_1^{A,B} \circ f, \pi_2^{A,B} \circ f\rangle$. Όμως,

$$\langle \pi_1^{A,B} \circ f, \pi_2^{A,B} \circ f\rangle = f$$

Το δεξί μέλος της ισότητας ερμηνεύει την απαγωγή στην οποία ανάγεται η παραπάνω, με εφαρμογή του αντίστοιχου η-κανόνα.

Διάζευξη Έστω απαγωγή όπως παρακάτω.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ A\vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{[A]^u}{A\vee B}\vee_\mathcal{I}\\ \mathcal{D}'\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\dfrac{[B]^v}{A\vee B}\vee_\mathcal{I}\\ \mathcal{D}'\\ C\end{matrix}}{C}\vee_{\mathcal{E},u,v}$$

Αυτή ερμηνεύεται με το βέλος $[g \circ \kappa_1^{A,B}, g \circ \kappa_2^{A,B}] \circ f$, όπου $f : \Gamma \to A + B$ και $g : A + B \to C$. Τότε, έχουμε

$$[g \circ \kappa_1^{A,B}, g \circ \kappa_2^{A,B}] \circ f = g \circ f$$

Το βέλος στο δεξί μέλος της ισότητας ερμηνεύει την απαγωγή παρακάτω, η οποία προκύπτει με εφαρμογή του η-κανόνα για τη διάζευξη.

$$\begin{matrix}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ A\vee B\\ \mathcal{D}'\\ C\end{matrix}$$

Συμπερασμός Έστω απαγωγή όπως παρακάτω.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ A \Rightarrow B\end{array} \quad [A]^u}{B}\Rightarrow_{\mathcal{E}}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathcal{I},u}$$

Θέτοντας $f : \Gamma \to B^A$, η απαγωγή αυτή ερμηνεύεται με το βέλος $\varepsilon_{A,B} \widetilde{\circ \langle f, \mathbf{1}_A \rangle}$. Όμως, έχουμε

$$\varepsilon_{A,B} \widetilde{\circ \langle f, \mathbf{1}_A \rangle} = f$$

Αναγκαιότητα Έστω απαγωγή όπως παρακάτω.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ \Box A\end{array} \quad \dfrac{[\Box A]^u}{A}\Box_{\mathcal{E}}}{\Box A}\Box_{\mathcal{I},u}$$

Αυτή ερμηνεύεται με το βέλος $(\Box\epsilon_A) \circ \delta_A \circ f$, όπου $f : \Gamma \to \Box A$. Τότε, επειδή το $(\Box, \delta, \epsilon)$ είναι συμμονάδα, έχουμε $(\Box\epsilon_A) \circ \delta_A = \mathbf{1}_{\Box A}$. Άρα,

$$(\Box\epsilon_A) \circ \delta_A \circ f = f$$

Πιθανότητα Έστω απαγωγή όπως παρακάτω.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}\\ \Diamond A\end{array} \quad \dfrac{[A]^u}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Αυτή ερμηνεύεται με το βέλος $\mu_A \circ (\Diamond\eta_A) \circ f$, όπου $f : \Gamma \to \Diamond A$. Τότε, επειδή το $(\Diamond, \eta, \mu)$ είναι μονάδα, έχουμε $\mu_A \circ (\Diamond\eta_A) = \mathbf{1}_{\Diamond A}$. Άρα,

$$\mu_A \circ (\Diamond\eta_A) \circ f = f$$

□

Μέχρι εδώ αναπτύχθηκε ένα ορθό κατηγοριοθεωρητικό μοντέλο για την CS4 λογική. Παρακάτω θα δείξουμε ότι είναι και πλήρες. Αυτό, σε συνδυασμό με τον θεμελιακό χαρακτήρα της Θεωρίας Κατηγοριών, δίνει τη δυνατότητα για οποιοδήποτε μοντέλο από άλλο μαθηματικό πεδίο, να μην είναι αναγκαία η επανεξέταση της ορθότητάς και πληρότητάς του, παρά μόνο η μελέτη της δομής του. Οποιοδήποτε μοντέλο έχει τη δομή που περιγράφεται από μια CS4-κατηγορία, θα είναι ορθό και πλήρες ως προς τη CS4 λογική.

3.2 CS4 Πληρότητα

Στην προηγούμενη ενότητα, δείξαμε ότι μια CS4-κατηγορία είναι ικανή να περιγράψει μια αντίστοιχη CS4 λογική, δηλαδή δεν της λείπει τίποτα ώστε να μην μπορεί να ερμηνεύσει κάτι από τη CS4 λογική. Στην ενότητα αυτή, θα δείξουμε επιπλέον ότι η δομή της είναι ακριβώς η αναγκαία για για την περιγραφή μιας αντίστοιχης CS4 λογικής. Δηλαδή, όχι μόνο δεν λείπει τίποτα από μια τέτοια κατηγορία, αλλά ούτε και περισσεύει.

Θεώρημα 4 (CS4 Πληρότητα). *i. Υπάρχει μία CS4-κατηγορία τέτοια, ώστε όλα τα βέλη της είναι ερμηνείες αποδείξεων φυσικής απαγωγής.*

ii. Αν οι ερμηνείες δύο αποδείξεων φυσικής απαγωγής είναι ίσες σε όλες τις CS4-κατηγορίες, τότε οι δύο αποδείξεις είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\mathcal{C}$ μια κατασκευή με λογικούς τύπους ως αντικείμενα και αποδείξεις ως βέλη.

3.2.1 Η βάση μιας κατηγορίας

Θα πρέπει να δείξουμε ότι η κατασκευή αυτή ικανοποιεί τον ορισμό μιας κατηγορίας. Εν ολίγοις, πρέπει να έχει ταυτοτικά βέλη για κάθε της αντικείμενο, να ορίζεται η σύνθεση βελών και επιπλέον να είναι προσεταιριστική.

Λόγω της τετριμμένης απαγωγής $A \vdash A$, όπου A μπορεί να είναι ένας αυθαίρετος τύπος, όλα τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$ έχουν ένα βέλος $\mathbf{1}_{[\![A]\!]} : [\![A]\!] \to [\![A]\!]$.

Λόγω του θεωρήματος αντικατάστασης στη φυσική απαγωγή, για δύο βέλη της $\mathcal{C}$, $[\![\mathcal{D}]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$ και $[\![\mathcal{F}]\!] : [\![A]\!] \to [\![B]\!]$, υπάρχει ένα βέλος $[\![\mathcal{F}]\!] \circ [\![\mathcal{D}]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]$. Επομένως, η πράξη της σύνθεσης πάνω στα βέλη ορίζεται ως αντικατάσταση κάθε φύλλου A στο αποδεικτικό δέντρο της απαγωγής $\mathcal{F}$ με το αποδεικτικό δέντρο της $\mathcal{D}$. Εφόσον το σύστημα της φυσικής απαγωγής είναι κλειστό ως προς την αντικατάσταση, η κατασκευή $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς τη σύνθεση.

$$\mathcal{D}_{3(21)}\left\{\begin{array}{l} \qquad\quad \Gamma \\ \mathcal{D}_{(21)}\left\{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\\ \mathcal{D}_2\end{array}\right. \\ \qquad\quad \left.\begin{array}{c} B \\ \mathcal{D}_3\end{array}\right\}\mathcal{D}_{(32)} \\ \qquad\quad C\end{array}\right\}\mathcal{D}_{(32)1}$$

Έστω, τώρα, αποδείξεις $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ και $\mathcal{D}_3$, όπως φαίνονται στο σχήμα παραπάνω. Αντικαθιστώντας τα φύλλα B της $\mathcal{D}_3$ με την απόδειξη $\mathcal{D}_2$, λαμβάνουμε την απόδειξη $\mathcal{D}_{(32)}$. Αντικαθιστώντας τα φύλλα αυτής με την απόδειξη $\mathcal{D}_1$, θα λάβουμε την$\mathcal{D}_{(32)1}$. Όμως, η $\mathcal{D}_{(32)1}$ ταυτίζεται με την $\mathcal{D}_{3(21)}$, η οποία προέρχεται με αντικατάσταση των φύλλων της $\mathcal{D}_3$ με την $\mathcal{D}_{(21)}$, η οποία με τη σειρά της αποτελεί αντικατάσταση των φύλλων της $\mathcal{D}_2$ με την $\mathcal{D}_1$. Αντίθετα με το σχήμα παραπάνω, που μπορεί να υπονοεί κάτι τέτοιο, οι αποδείξεις $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ και $\mathcal{D}_3$ δεν είναι απαραίτητα γραμμικές, αλλά έχουν τη δομή δέντρου. Θέτοντας, τώρα, $f = [\![\mathcal{D}_1]\!]$, $g = [\![\mathcal{D}_2]\!]$ και $h = [\![\mathcal{D}_3]\!]$, έχουμε

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Δηλαδή, στην κατασκευή $\mathcal{C}$ που έχουμε ορίσει, η πράξη της σύνθεσης είναι προσεταιριστική. Παραλείπουμε πλέον τις σημασιολογικές αγκύλες για λόγους απλότητας.

Είναι προφανές ότι αν έχουμε μια τετριμμένη απόδειξη του A (το αποδεικτικό δέντρο της οποίας αποτελείται απλά από το φύλλο A) και μια άλλη απόδειξη, $\mathcal{D}$, του A με υποθέσεις Γ, τότε αντικαθιστώντας το φύλλο αυτό με την $\mathcal{D}$, η νέα απόδειξη ταυτίζεται με την $\mathcal{D}$. Έτσι έχουμε

$\mathbf{1}_A \circ f = f$, για $f : \Gamma \to A$. Ομοίως, αν στην τελευταία απόδειξη αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις του Γ στα φύλλα του αποδεικτικού δέντρου με την τετριμμένη απόδειξη του Γ, τότε και πάλι η απόδειξη παραμένει ίδια. Επομένως, $f \circ \mathbf{1}_\Gamma = f$, για $f : \Gamma \to A$. Καταλήγουμε έτσι, ότι τα βέλη $\mathbf{1}_{(-)}$ είναι ταυτοτικά βέλη.

Εφόσον κάθε αντικείμενο έχει ταυτοτικό βέλος και η σύνθεση βελών είναι προσεταιριστική, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία.

3.2.2 Αμφικαρτεσιανή κλειστότητα

Θα πρέπει να δείξουμε, σύμφωνα με τον ορισμό, ότι η $\mathcal{C}$ περιέχει γινόμενα, τερματικό αντικείμενο, εκθετικά αντικειμένων και συγγινόμενα.

❑ Γινόμενο

Ύπαρξη Με εφαρμογή του κανόνα απαλοιφής της σύζευξης στην τετριμμένη απόδειξη $A_1 \wedge A_2$, λαμβάνουμε τις αποδείξεις $A_1 \wedge A_2 \vdash A_1$ και $A_1 \wedge A_2 \vdash A_2$. Έτσι, για κάθε αντικείμενο της μορφής $A_1 \times A_2$ υπάρχουν βέλη $\pi_1^{A_1,A_2} : A_1 \times A_2 \to A_1$ και $\pi_2^{A_1,A_2} : A_1 \times A_2 \to A_2$.

Από τις αποδείξεις $\mathcal{D}_1, \Gamma \vdash A_1$, και $\mathcal{D}_2, \Gamma \vdash A_2$, με εισαγωγή σύζευξης λαμβάνουμε μια απόδειξη $\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2$. Επομένως, στο κατηγορικό μοντέλο, για βέλη $f : \Gamma \to A_1$ και $g : \Gamma \to A_2$ υπάρχει ένα βέλος $\langle f, g\rangle : \Gamma \to A_1 \times A_2$. Είναι προφανές, ότι με παράθεση του κανόνα απαλοιφής της σύζευξης στην απόδειξη $\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2$, η νέα απόδειξη β-ανάγεται στις $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$, εφαρμόζοντας σ' αυτήν τον κανόνα παράκαμψης για τη σύζευξη. Δηλαδή, $\pi_1^{A_1,A_2} \circ \langle f, g\rangle = f$ και $\pi_2^{A_1,A_2} \circ \langle f, g\rangle = g$.

Μοναδικότητα Έστω μια οποιαδήποτε άλλη απόδειξη $\mathcal{D}_3$ του $A_1 \wedge A_2$ με ανοιχτές υποθέσεις Γ, τέτοια ώστε εφαρμόζοντας τους κανόνες απαλοιφής της σύζευξης να λάβουμε αποδείξεις ισοδύναμες με τις $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$. Δηλαδή,

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_i\\ A_i\end{array} \quad \simeq_{\beta\eta} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_3\\ A_1 \wedge A_2\end{array}}{A_i}\wedge_{\mathcal{E}}$$

Τότε,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_1\\ A_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_2\\ A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}\wedge_{\mathcal{I}} \quad \simeq_{\beta\eta} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_3\\ A_1 \wedge A_2\end{array}}{A_1}\wedge_{\mathcal{E}} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_3\\ A_1 \wedge A_2\end{array}}{A_2}\wedge_{\mathcal{E}}}{A_1 \wedge A_2}\wedge_{\mathcal{I}} \quad \simeq_{\beta\eta} \quad \begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_3\\ A_1 \wedge A_2\end{array}$$

Από κατηγορικής πλευράς αυτό σημαίνει ότι αν $u : \Gamma \to A \times B$ ένα βέλος για το οποίο ισχύει $\pi_1^{A,B} \circ u = f$ και $\pi_2^{A,B} \circ u = g$, τότε $u = \langle f, g\rangle$. Κάτι που αποδεικνύει τη μοναδικότητα του ζεύγους $\langle f, g\rangle$.

Εφόσον τα αντικείμενα A_1 ή A_2 θα μπορούσαν να είναι της μορφής $M \times N$, η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει όλα τα μη κενά πεπερασμένα γινόμενα.

❑ Τερματικό αντικείμενο

Ύπαρξη Αν A ένας τύπος, τότε με τον κανόνα $\top_{\mathcal{I}}$ λαμβάνουμε μια απαγωγή του $\top$ με ανοιχτή υπόθεση A. Έτσι, κάθε αντικείμενο, C, στη $\mathcal{C}$ έχει ένα βέλος $\top_C : C \to \top$.

Μοναδικότητα Έστω μια διαφορετική απαγωγή του $\top$ με ανοιχτή υπόθεση A, $\mathcal{D}'$. Αυτή, με εφαρμογή του κανόνα της $\top$-παράκαμψης, ανάγεται στην τετριμμένη απαγωγή του $\top$. Αυτό σημαίνει ότι για βέλος $f : C \to \top$, έχουμε $f = \mathbf{1}_C \circ \top_C = \top_C$.

❑ Εκθετικά

Ύπαρξη Έστω $f : \Gamma \times A \to B$ ένα βέλος της $\mathcal{C}$ που ερμηνεύει μια απόδειξη, $\mathcal{D}$, του B με ανοιχτές υποθέσεις Γ και A. Με εισαγωγή του συμπερασμού, παίρνουμε μια απόδειξη $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$. Έτσι, για κάθε βέλος $f : \Gamma \times A \to B$ στη $\mathcal{C}$, υπάρχει ο εκθετικός του μεταθέτης $\tilde{f} : \Gamma \to B^A$.

Επιπλέον, ένα βέλος εκτίμησης $\varepsilon_{A,B} : B^A \times A \to B$ προκύπτει στη $\mathcal{C}$ από την παρακάτω απόδειξη.

$$\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\Rightarrow_{\mathcal{E}}$$

Λόγω της παρακάτω ισοδυναμίας αποδείξεων, ισχύει η αναμενόμενη ισότητα $\varepsilon_{A,B} \circ (\tilde{f} \times \mathbf{1}_A) = f$.

$$\begin{array}{c}\Gamma, [A]^u\\ \mathcal{D}\\ \dfrac{\dfrac{B}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathcal{I},u} \qquad A}{B}\Rightarrow_{\mathcal{E}}\end{array} \simeq_{\beta\eta} \begin{array}{c}\Gamma, A\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}$$

Μοναδικότητα Έστω μια άλλη απόδειξη, $\mathcal{F}$, του $A \Rightarrow B$ από ανοιχτές υποθέσεις Γ τέτοια, ώστε παραθέτοντας έναν κανόνα απαλοιφής του συμπερασμού, να προκύψει απόδειξη ισοδύναμη με την $\mathcal{D}$. Δηλαδή,

$$\begin{array}{c}\Gamma, A\\ \mathcal{D}\\ B\end{array} \simeq_{\beta\eta} \begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{F}\\ \dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}\Rightarrow_{\mathcal{E}}\end{array}$$

Τότε,

$$\begin{array}{c}\Gamma, [A]^u\\ \mathcal{D}\\ \dfrac{B}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathcal{I},u}\end{array} \simeq_{\beta\eta} \begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{F}\\ \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad [A]^u}{B}\Rightarrow_{\mathcal{E}}}{A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\mathcal{I},u}\end{array} \simeq_{\beta\eta} \begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{F}\\ A \Rightarrow B\end{array}$$

Αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε βέλος $h : \Gamma \to B^A$ τέτοιο, ώστε $\varepsilon_{A,B} \circ (h \times \mathbf{1}_A) = f$, θα ισχύει η ισότητα $\tilde{f} = h$, πράγμα που αποδεικνύει τη μοναδικότητα του εκθετικού.

❑ Συγγινόμενο

Ύπαρξη Λόγω των απαγωγών

$$\dfrac{A_i}{A_1 \vee A_2}\vee_{\mathcal{I}} \qquad \text{για } i = 1, 2$$

υπάρχουν βέλη $\kappa_1^{A_1,A_2} : A_1 \to A_1 + A_2$ και $\kappa_2^{A_1,A_2} : A_2 \to A_1 + A_2$ για κάθε αντικείμενο της μορφής $A_1 + A_2$.

Επίσης, έστω $f : A_1 \to B$ και $g : A_2 \to B$ βέλη της $\mathcal{C}$ που ερμηνεύουν τις αποδείξεις $\mathcal{D}_1$, $A_1 \vdash C$, και $\mathcal{D}_1$, $A_2 \vdash C$, αντίστοιχα. Από την παρακάτω απαγωγή, προκύπτει το βέλος $[f,g] : A_1 + A_2 \to B$.

$$\dfrac{A_1 \vee A_2 \qquad \begin{array}{c}[A_1]^u\\ \mathcal{D}_1\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A_2]^v\\ \mathcal{D}_2\\ B\end{array}}{B}\,\vee_{\mathcal{E},u,v}$$

Λόγω της παρακάτω ισοδυναμίας αποδείξεων για $i = 1, 2$, ισχύουν οι ισότητες $\kappa_1^{A_1,A_2} \circ [f,g] = f$ και $\kappa_2^{A_1,A_2} \circ [f,g] = g$.

$$\dfrac{\dfrac{A_i}{A_1 \vee A_2}\,\vee_{\mathcal{I}} \qquad \begin{array}{c}[A_1]^u\\ \mathcal{D}_1\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A_2]^v\\ \mathcal{D}_2\\ B\end{array}}{B}\,\vee_{\mathcal{E},u,v} \qquad \simeq_{\beta\eta} \qquad \begin{array}{c}A_i\\ \mathcal{D}_i\\ B\end{array}$$

Μοναδικότητα Έστω τώρα απόδειξη $\mathcal{D}'$ του C με ανοιχτή υπόθεση $A \vee B$ τέτοια, ώστε

$$\begin{array}{c}\dfrac{A_i}{A_1 \vee A_2}\,\vee_{\mathcal{I}}\\ \mathcal{D}'\\ C\end{array} \qquad \simeq_{\beta\eta} \qquad \begin{array}{c}A_i\\ \mathcal{D}_i \text{ για } i = 1, 2\\ B\end{array}$$

Τότε,

$$\dfrac{A_1 \vee A_2 \qquad \begin{array}{c}[A_1]^u\\ \mathcal{D}_1\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A_2]^v\\ \mathcal{D}_2\\ B\end{array}}{B}\,\vee_{\mathcal{E},u,v} \quad \simeq_{\beta\eta} \quad \dfrac{A_1 \vee A_2 \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[A_1]^u}{A_1 \vee A_2}\,\vee_{\mathcal{I}}\\ \mathcal{D}'\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[A_2]^v}{A_1 \vee A_2}\,\vee_{\mathcal{I}}\\ \mathcal{D}'\\ B\end{array}}{B}\,\vee_{\mathcal{E},u,v} \quad \simeq_{\beta\eta} \quad \begin{array}{c}A_2 \vee A_2\\ \mathcal{D}'\\ B\end{array}$$

Άρα, για οποιοδήποτε βέλος $h : A_1 + A_2 \to B$, για το οποίο ισχύει $k_1^{A_1,A_2} \circ h = f$ και $k_2^{A_1,A_2} \circ h = g$, έχουμε $h = [f,g]$, επομένως το συγγινόμενο δύο βελών είναι μοναδικό.

Εφόσον τα αντικείμενα A_1 ή A_2 μπορεί να είναι της μορφής $M + N$, η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει όλα τα πεπερασμένα συγγινόμενα.

3.2.3 Καρτεσιανή συμμονάδα

Θα δείξουμε ότι το $\Box$ είναι ενδοσυναρτητής και ότι υπάρχουν φυσικοί μετασχηματισμοί δ και ϵ τέτοιοι, ώστε η τριάδα $(\Box, \delta, \epsilon)$ να είναι μια συμμονάδα. Έπειτα, δείχνουμε ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός m και βέλος $m_\top$ τέτοια, ώστε η πεντάδα $(\Box, \delta, \epsilon, m, m_\top)$ να είναι μια καρτεσιανή συμμονάδα.

❑ **Ενδοσυναρτητής $\Box : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$**

Λόγω της παρακάτω απόδειξης, για κάθε βέλος $f : A \to B$ στη $\mathcal{C}$ υπάρχει ένα βέλος $\Box f : \Box A \to \Box B$.

$$\cfrac{\Box A \qquad \begin{matrix}\cfrac{[\Box A]^u}{A}\,\Box_{\mathcal{E}} \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},u}$$

Επίσης, επειδή $\cfrac{\Box A \qquad [A]^u}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u} \simeq_{\beta\eta} \Box A$, έχουμε $\Box \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{\Box A}$.

Αν επιπλέον $\Box(g \circ f) = \Box g \circ \Box f$, όπου $f : \Gamma \to A$ και $g : A \to B$, τότε το $\Box$ είναι ενδοσυναρτητής. Έστω, λοιπόν, $\mathcal{D}_1$ μια απόδειξη $\Gamma \vdash A$ και $\mathcal{D}_2$ μια απόδειξη $A \vdash B$ που αντιστοιχούν στα βέλη f και g. Οι αποδείξεις 3.1 και 3.2 είναι ισοδύναμες (παράκαμψη της αναγκαιότητας) και μοντελοποιούνται από τα $\Box g \circ \Box f$ και $\Box(g \circ f)$ αντίστοιχα, που σημαίνει ότι $\Box(g \circ f) = \Box g \circ \Box f$ και τελικά το $\Box$ είναι ενδοσυναρτητής της $\mathcal{C}$.

$$\cfrac{\Box \Gamma \qquad \begin{matrix}\cfrac{\cfrac{[\Box\Gamma]^v \qquad \begin{matrix}\cfrac{[\Box\Gamma]^u}{\Gamma}\,\Box_{\mathcal{E}} \\ \mathcal{D}_1 \\ A\end{matrix}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u}}{A}\,\Box_{\mathcal{E}} \\ \mathcal{D}_2 \\ B\end{matrix}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},v}$$

Απόδειξη 3.1. $\Box g \circ \Box f$

$$\cfrac{\Box \Gamma \qquad \begin{matrix}\cfrac{[\Box\Gamma]^u}{\Gamma}\,\Box_{\mathcal{E}} \\ \mathcal{D}_1 \\ A \\ \mathcal{D}_2 \\ B\end{matrix}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},u}$$

Απόδειξη 3.2. $\Box(g \circ f)$

Εφόσον το $\Box$ είναι ενδοσυναρτητής, το ίδιο θα ισχύει και για τον $\Box \circ \Box$, τον οποίο από δω και στο εξής θα συμβολίζουμε με $\Box\Box$.

❑ **Φυσικός μετασχηματισμός** $\delta : \Box \to \Box\Box$

Από την απόδειξη 3.3, προκύπτει ένα βέλος $\delta_A : \Box A \to \Box\Box A$ για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$. Αν

$$\cfrac{\Box A \qquad [\Box A]^u}{\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u}$$

Απόδειξη 3.3

για κάθε βέλος $f : A \to B$ της $\mathcal{C}$ ισχύει η ισότητα $\delta_B \circ \Box f = \Box\Box f \circ \delta_A$, τότε το $\delta : \Box \to \Box\Box$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός. Έστω $\mathcal{D}$ μια απόδειξη $A \vdash B$. Η απαγωγή 3.4, που αντιστοιχεί στο βέλος $\delta_B \circ \Box f$, είναι ισοδύναμη με την 3.5, που αντιστοιχεί στο βέλος $\Box\Box f \circ \delta_A$ (πάλι με εφαρμογή $(\Box_{\mathcal{I}}, \Box_{\mathcal{E}})$-μετατροπής). Αφού η ισότητα ορίζεται βάσει ισοδυναμίας των αντίστοιχων αποδείξεων, έχουμε την ισότητα $\delta_B \circ \Box f = \Box\Box f \circ \delta_A$ και το δ είναι φυσικός μετασχηματισμός.

❑ **Φυσικός μετασχηματισμός** $\epsilon : \Box \to I_{\mathcal{C}}$

Λόγω της απαγωγής $\cfrac{\Box A}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}$ κάθε αντικείμενο της μορφής $\Box A$ έχει ένα βέλος $\epsilon_A : \Box A \to A$. Αν $\epsilon_B \circ \Box f = f \circ \epsilon_A$, για ένα βέλος $f : A \to B$, τότε το ϵ είναι φυσικός μετασχηματισμός

$$\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{[\Box A]^v \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[\Box A]^u}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},u}}{\Box\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},v}$$

Απόδειξη 3.4. $\delta_B \circ \Box f$

$$\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{[\Box A]^z \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^v \quad [\Box A]^u}{\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{E}}}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},v}}{\Box\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},z}$$

Απόδειξη 3.5. $\Box\Box f \circ \delta_A$

$\epsilon : \Box \to I_{\mathcal{C}}$, όπου $I_{\mathcal{C}}$ είναι ο ταυτοτικός συναρτητής. Οι δύο εν λόγω συνθέσεις βελών αντιστοιχούν στις αποδείξεις 3.6 και 3.7.

$$\dfrac{\dfrac{\Box A \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[\Box A]^u}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},u}}{B}\,\Box_{\mathcal{E}}$$

Απόδειξη 3.6. $\epsilon_B \circ f$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\Box A}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}$$

Απόδειξη 3.7. $f \circ \epsilon_A$

Πάλι, η δεξιά (3.7) είναι η κανονική μορφή αυτής στα αριστερά (3.6). Επομένως, $\epsilon_B \circ f = f \circ \epsilon_A$ και το $\epsilon : \Box \to I_{\mathcal{C}}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός.

❑ Συμμονάδα $(\Box, \delta, \epsilon)$

Η απόδειξη 3.8, με τον κανόνα παράκαμψης της αναγκαιότητας, ανάγεται στην απόδειξη 3.9. Επομένως, $\Box(\epsilon_A) \circ \delta_A = \mathbf{1}_{\Box A}$.

$$\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^v \quad [\Box A]^u}{\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{E}}}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},v}$$

Απόδειξη 3.8. $\Box\epsilon_A \circ \delta_A$

$$\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{[\Box A]^v}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},v}$$

Απόδειξη 3.9. $\Box\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{\Box A}$

Η απαγωγή παρακάτω αντιστοιχεί στο βέλος $\epsilon_{\Box A} \circ \delta_A$.

$$\dfrac{\dfrac{\Box A \quad [\Box A]^u}{\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{E}}$$

το οποίο κανονικοποιείται στην τετριμμένη απόδειξη του $\Box A$. Έτσι, έχουμε ότι $\Box(\epsilon_A) \circ \delta_A = \epsilon_{\Box A} \circ \delta_A = \mathbf{1}_{\Box A}$. Αυτή η διπλή ισότητα απεικονίζεται με το αντιμεταθετικό διάγραμμα 3.1.

Η απόδειξη 3.10 κανονικοποιείται στην 3.11. Επομένως, $(\Box\delta_A) \circ \delta_A = \delta_{\Box A} \circ \delta_A$.

$$\begin{tikzcd}
& \Box A \arrow[dl, "\mathbf{1}_{\Box A}"'] \arrow[d, "\delta_A"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{\Box A}"] & \\
\Box A & \Box\Box A \arrow[l, "\epsilon_{\Box A}"] \arrow[r, "\Box(\epsilon_A)"'] & \Box A
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.1. $\Box(\epsilon_A) \circ \delta_A = \epsilon_{\Box A} \circ \delta_A = \mathbf{1}_{\Box A}$

$$\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{[\Box A]^z \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^v \quad [\Box A]^u}{\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{E}}}{\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},v}}{\Box\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},z}$$

Απόδειξη 3.10. $(\Box\delta_A) \circ \delta_A$

$$\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{[\Box A]^z \quad [\Box A]^v}{\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},v}}{\Box\Box\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},z}$$

Απόδειξη 3.11. $\delta_{\Box A} \circ \delta_A$

$$\begin{tikzcd}
\Box A \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "\delta_A"'] & \Box\Box A \arrow[d, "\delta_{\Box A}"] \\
\Box\Box A \arrow[r, "\Box\delta_A"'] & \Box\Box\Box A
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.2. $(\Box\delta_A) \circ \delta_A = \delta_{\Box A} \circ \delta_A$

Το αντιμεταθετικό διάγραμμα 3.2 δείχνει αυτήν την ισότητα βελών.
Αφού τα διαγράμματα 3.1 και 3.2 είναι αντιμεταθετικά, η τριάδα $(\Box, \delta, \epsilon)$ είναι μια συμμονάδα.

❑ Φυσικός ισομορφισμός $m_{-,-}$

Για αντικείμενα A και B, υπάρχει βέλος $m_{A,B} : \Box A \times \Box B \to \Box(A \times B)$, λόγω της παρακάτω απαγωγής.

$$\dfrac{\Box A \qquad \Box B \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^u}{A}\,\Box_{\mathcal{E}} \qquad \dfrac{[\Box B]^u}{B}\,\Box_{\mathcal{E}}}{A \wedge B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Box(A \wedge B)}\,\Box_{\mathcal{I},u}$$

Εύκολα μπορει κανείς να δει ότι ο αντίστροφός του είναι το βέλος $m^{-1}_{A,B} = \langle \Box\pi_1^{A,B}, \Box\pi_2^{A,B} \rangle$, που ερμηνεύει την απαγωγή

$$\dfrac{\dfrac{\Box(A \wedge B) \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(A \wedge B)]^u}{A \wedge B}\,\Box_{\mathcal{E}}}{A}\,\wedge_{\mathcal{E}}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u} \qquad \dfrac{\Box(A \wedge B) \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(A \wedge B)]^v}{A \wedge B}\,\Box_{\mathcal{E}}}{B}\,\wedge_{\mathcal{E}}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},v}}{\Box A \wedge \Box B}\,\wedge_{\mathcal{I}}$$

Το βέλος $m_\top : \top \to \Box\top$ αντιστοιχεί στον κανόνα της αναγκαιότητας (necessitation rule) εφαρμοσμένο πάνω στο $\top$.

Η απαγωγή παρακάτω αντιστοιχεί στο βέλος $(\Box\pi_2^{\top,A}) \circ m_{\top,A} \circ (m_\top \times \mathbf{1}_{\Box A})$.

$$\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^z \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\top}{\Box\top}\,\Box_{\mathcal{I},u}}{\top}\,\Box_{\mathcal{E}} \qquad \dfrac{[\Box A]^v}{A}\,\Box_{\mathcal{E}}}{\top \wedge A}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Box(\top \wedge A)}\,\Box_{\mathcal{I},v}}{\top \wedge A}\,\Box_{\mathcal{E}}}{A}\,\wedge_{\mathcal{E}}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},z}$$

Με κανονικοποίηση, ανάγεται στις τετριμμένες απαγωγές $\top$ και $\Box A$. Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα στα αριστερά είναι αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\Box\top \times \Box A \arrow[r, "m_{\top,A}"] & \Box(\top \times A) \arrow[d, "\Box\pi_2^{\top,A}"] \\
\top \times \Box A \arrow[u, "m_\top \times \mathbf{1}_{\Box A}"] \arrow[r, "\pi_2^{\top,\Box A}"'] & \Box A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Box A \times \Box\top \arrow[r, "m_{A,\top}"] & \Box(A \times \top) \arrow[d, "\Box\pi_1^{\top,A}"] \\
\Box A \times \top \arrow[u, "\mathbf{1}_{\Box A} \times m_\top"] \arrow[r, "\pi_1^{\top,\Box A}"'] & \Box A
\end{tikzcd}$$

Ομοίως, το διάγραμμα στα δεξιά είναι αντιμεταθετικό επίσης.

Θα δείξουμε ότι το διάγραμμα 3.3 είναι αντιμεταθετικό. Η απόδειξη 3.12 αντιστοιχεί στο βέλος $m_{A\times B,C} \circ (m_{A,B} \times \mathbf{1}_{\Box C})$ και είναι ισοδύναμη με την 3.13, η οποία αντιστοιχεί στο βέλος $m_{A,B\times C} \circ (\mathbf{1}_{\Box A} \times m_{B,C})$. Έτσι, το διάγραμμα 3.3 είναι πράγματι αντιμεταθετικό.

Δείξαμε ότι η τριάδα $(\Box, m, m_\top)$ είναι ένας καρτεσιανός συναρτητής. Μένει να δείξουμε ότι τα δ και ϵ είναι καρτεσιανοί φυσικοί μετασχηματισμοί. Η απόδειξη 3.15 είναι η κανονική μορφή της 3.14. Έτσι, έχουμε την ισότητα $\epsilon_{A\times B} \circ m_{A,B} = \epsilon_A \times \epsilon_B$ η οποία απεικονίζεται με το αντιμεταθετικό διάγραμμα 3.4.

$$
\begin{tikzcd}
\Box A \times \Box B \times \Box C \arrow[r, "m_{A,B} \times \mathbf{1}_{\Box C}"] \arrow[d, "\mathbf{1}_{\Box A} \times m_{B,C}"'] & \Box(A \times B) \times \Box C \arrow[d, "m_{A \times B, C}"] \\
\Box A \times \Box(B \times C) \arrow[r, "m_{A, B \times C}"] & \Box(A \times B \times C)
\end{tikzcd}
$$

Διάγραμμα 3.3. $m_{A\times B,C} \circ (m_{A,B} \times \mathbf{1}_{\Box C}) = m_{A,B\times C} \circ (\mathbf{1}_{\Box A} \times m_{B,C})$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box A$}
\AxiomC{$\Box B$}
\AxiomC{$\Box C$}
\AxiomC{$[\Box A]^{v_1}$}
\AxiomC{$[\Box B]^{v_2}$}
\AxiomC{$[\Box A]^{u_1}$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[\Box B]^{u_2}$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},u_1,u_2}$}
\TrinaryInfC{$\Box(A \wedge B)$}
\AxiomC{$[\Box C]^{v_3}$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$\Box(A \wedge B) \wedge \Box C$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box(A \wedge B)$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$A \wedge B$}
\AxiomC{$[\Box C]^{v_3}$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{C}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$A \wedge B \wedge C$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},v_1,v_2,v_3}$}
\QuaternaryInfC{$\Box(A \wedge B \wedge C)$}
\end{prooftree}
$$

Απόδειξη 3.12. $m_{A\times B,C} \circ (m_{A,B} \times \mathbf{1}_{\Box C})$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box A$}
\AxiomC{$\Box B$}
\AxiomC{$\Box C$}
\AxiomC{$[\Box A]^{v_1}$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[\Box A]^{v_1}$}
\AxiomC{$[\Box B]^{v_2}$}
\AxiomC{$[\Box C]^{v_3}$}
\AxiomC{$[\Box B]^{u_1}$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$[\Box C]^{u_2}$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{C}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$B \wedge C$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},u_1,u_2}$}
\TrinaryInfC{$\Box(B \wedge C)$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$\Box A \wedge \Box(B \wedge C)$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box(B \wedge C)$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$B \wedge C$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$A \wedge (B \wedge C)$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},v_1,v_2,v_3}$}
\QuaternaryInfC{$\Box((A \wedge B) \wedge C)$}
\end{prooftree}
$$

Απόδειξη 3.13. $m_{A,B\times C} \circ (\mathbf{1}_{\Box A} \times m_{B,C})$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box A$}
\AxiomC{$\Box B$}
\AxiomC{$[\Box A]^{u_1}$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[\Box B]^{u_2}$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},u_1,u_2}$}
\TrinaryInfC{$\Box(A \wedge B)$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$A \wedge B$}
\end{prooftree}
$$

Απόδειξη 3.14. $\epsilon_{A\times B} \circ m_{A,B}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box A$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$\Box B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\end{prooftree}
$$

Απόδειξη 3.15. $\epsilon_A \times \epsilon_B$

Το διάγραμμα 3.5 είναι αντιμεταθετικό, αφού $m_{\top}^{-1} = \epsilon_{\Box\top}$. Αφού τα διαγράμματα 3.4 και 3.5

$$\begin{tikzcd}
\Box A \times \Box B \arrow[r, "m_{A,B}"] \arrow[dr, "\epsilon_A \times \epsilon_B"'] & \Box(A \times B) \arrow[d, "\epsilon_{A\times B}"] \\
& A \times B
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.4. $\epsilon_{A\times B} \circ m_{A,B} = \epsilon_A \times \epsilon_B$

$$\begin{tikzcd}
\top \arrow[d, "m_\top"'] \arrow[dr, "\mathbf{1}_\top"] & \\
\Box\top \arrow[r, "\epsilon_\top"'] & \top
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.5. $\epsilon_\top \circ m_\top = \mathbf{1}_\top$

είναι αντιμεταθετικά, το ϵ είναι καρτεσιανός φυσικός μετασχηματισμός.

Για να είναι το δ καρτεσιανός φυσικός μετασχηματισμός πρέπει τα διαγράμματα 3.6 και 3.7 να είναι αντιμεταθετικά. Για το πρώτο διάγραμμα, η απόδειξη που αντιστοιχεί στο βέλος $\Box m_{A,B} \circ$

$$\begin{tikzcd}
\Box A \times \Box B \arrow[rr, "m_{A,B}"] \arrow[d, "\delta_A \times \delta_B"'] & & \Box(A \times B) \arrow[d, "\delta_{A\times B}"] \\
\Box\Box A \times \Box\Box B \arrow[r, "m_{\Box A,\Box B}"'] & \Box(\Box A \times \Box B) \arrow[r, "\Box m_{A,B}"'] & \Box\Box(A \times B)
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.6. $\Box m_{A,B} \circ m_{\Box A,\Box B} \circ (\delta_A \times \delta_B) = \delta_{A\times B} \circ m_{A,B}$

$$\begin{tikzcd}
\top \arrow[r, "m_\top"] \arrow[d, "m_\top"'] & \Box\top \arrow[d, "\delta_\top"] \\
\Box\top \arrow[r, "\Box m_\top"'] & \Box\Box\top
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.7. $\delta_\top \circ m_\top = \Box m_\top \circ m_\top$

$m_{\Box A,\Box B} \circ (\delta_A \times \delta_B)$ είναι η 3.16. Αυτή η απόδειξη κανονικοποιείται στην 3.17, που αντιστοιχεί στο βέλος $\delta_{A\times B} \circ m_{A,B}$. Έτσι, τα δύο βέλη ισούνται και το διάγραμμα 3.6 είναι αντιμεταθετικό.

Για το επόμενο διάγραμμα, πρέπει να δείξουμε ότι $\delta_\top \circ m_\top = \Box m_\top \circ m_\top$. Πράγματι, οι αποδείξεις 3.18 και 3.19, που αντιστοιχούν στα βέλη της ισότητας, είναι ισοδύναμες.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box A$}
\AxiomC{$\Box B$}
\AxiomC{$[\Box A]^{y_1}$}
\AxiomC{$[\Box B]^{y_2}$}
\AxiomC{$[\Box A]^{x_1}$}
\AxiomC{$[\Box B]^{x_2}$}
\AxiomC{$[\Box A]^{z_1}$}
\AxiomC{$[\Box A]^{u}$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box A$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},u}$}
\BinaryInfC{$\Box\Box A$}
\AxiomC{$[\Box B]^{z_2}$}
\AxiomC{$[\Box B]^{v}$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},v}$}
\BinaryInfC{$\Box\Box B$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$\Box\Box A \wedge \Box\Box B$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box\Box A$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box A$}
\AxiomC{$[\Box A]^{z_1}$}
\AxiomC{$[\Box A]^{u}$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box A$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},u}$}
\BinaryInfC{$\Box\Box A$}
\AxiomC{$[\Box B]^{z_2}$}
\AxiomC{$[\Box B]^{v}$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},v}$}
\BinaryInfC{$\Box\Box B$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$\Box\Box A \wedge \Box\Box B$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box\Box B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box B$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$\Box A \wedge \Box B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},z_1,z_2}$}
\TrinaryInfC{$\Box(\Box A \wedge \Box B)$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box A \wedge \Box B$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\Box A$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[\Box A]^{x_1}, [\Box B]^{x_2}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\mathcal{D}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Box A \wedge \Box B$}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$[\Box B]^{x_2}$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\wedge_{\mathcal{I}}$}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},x_1,x_2}$}
\TrinaryInfC{$\Box(A \wedge B)$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},y_1,y_2}$}
\TrinaryInfC{$\Box\Box(A \wedge B)$}
\end{prooftree}
$$

Απόδειξη 3.16. $\Box m_{A,B} \circ m_{\Box A,\Box B} \circ (\delta_A \times \delta_B)$.
Η απαγωγή $\mathcal{D}$ είναι η ίδια μ' αυτήν στο αριστερό υποδέντρο που συμπαιρένει τον τύπο $\Box A \wedge \Box B$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box A$}
\AxiomC{$\Box B$}
\AxiomC{$[\Box A]^{y_1}$}
\AxiomC{$[\Box B]^{y_2}$}
\AxiomC{$[\Box A]^{x_1}$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[\Box B]^{x_2}$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{B}
\BinaryInfC{$A \wedge B$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},x_1,x_2}$}
\TrinaryInfC{$\Box(A \wedge B)$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},y_1,y_2}$}
\TrinaryInfC{$\Box\Box(A \wedge B)$}
\end{prooftree}
$$

Απόδειξη 3.17. $\delta_{A\times B} \circ m_{A,B}$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\top$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},u}$}
\UnaryInfC{$\Box\top$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{E}}$}
\UnaryInfC{$\top$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},v}$}
\UnaryInfC{$\Box\top$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},z}$}
\UnaryInfC{$\Box\Box\top$}
\end{prooftree}
$$

Απόδειξη 3.18. $\Box m_\top \circ m_\top$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\top$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},v}$}
\UnaryInfC{$\Box\top$}
\RightLabel{$\Box_{\mathcal{I},z}$}
\UnaryInfC{$\Box\Box\top$}
\end{prooftree}
$$

Απόδειξη 3.19. $\delta_\top \circ m_\top$

3.2.4 Μονάδα

Θα δείξουμε πρώτα ότι το $\Diamond$ είναι ενδοσυναρτητής και τα μ και η φυσικοί μετασχηματισμοί. Έπειτα, θα δείξουμε την αντιμεταθετικότητα των απαραίτητων διαγραμμάτων.

❑ Ενδοσυναρτητής $\Diamond$

Έστω $f : A \to B$ ένα βέλος που αντιστοιχεί σε μια απόδειξη $\mathcal{D}$, $A \vdash B$. Τότε, λόγω της παρακάτω απαγωγής, υπάρχει ένα βέλος $\Diamond f : \Diamond A \to \Diamond B$.

$$\dfrac{\Diamond A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^u\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Με κανονικοποίηση είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι $\Diamond \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{\Diamond A}$ (η-συστολή πάνω στον σύνδεσμο της πιθανότητας).

Η απόδειξη 3.20 μετασχηματίζεται στην 3.21 (κανόνας μετάθεσης $(\Diamond_{\mathcal{E}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$) και, τέλος, κανονικοποιείται στην 3.22 (κανόνας παράκαμψης για τον σύνδεσμο της αναγκαιότητας). Έτσι, $\Diamond g \circ \Diamond f = \Diamond(g \circ f)$ και το $\Diamond$ είναι ενδοσυναρτητής. Συμβολίζουμε με $\Diamond\Diamond$ τον ενδοσυναρτητή $\Diamond \circ \Diamond$.

$$\dfrac{\dfrac{\Diamond A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^u\\ \mathcal{D}_1\\ B\end{array}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E},u} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[B]^v\\ \mathcal{D}_2\\ C\end{array}}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{E},v}$$

Απόδειξη 3.20. $\Diamond g \circ \Diamond f$

$$\dfrac{\Diamond A \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]^u\\ \mathcal{D}_1\\ B\end{array}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{I}} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[B]^v\\ \mathcal{D}_2\\ C\end{array}}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{E},v}}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Απόδειξη 3.21

$$\dfrac{\Diamond A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^u\\ \mathcal{D}_1\\ B\\ \mathcal{D}_2\\ C\end{array}}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Απόδειξη 3.22. $\Diamond(g \circ f)$

❑ **Φυσικοί μετασχηματισμοί** $\eta : I_{\mathcal{C}} \to \Diamond$ **και** $\mu : \Diamond\Diamond \to \Diamond$

Για κάθε τύπο A, έχουμε τις απαγωγές

$$\dfrac{A}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{I}} \qquad \text{και} \qquad \dfrac{\Diamond\Diamond A \qquad [\Diamond A]^u}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Έτσι, για κάθε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$, υπάρχει ένα βέλος $\eta_C : C \to \Diamond C$ κι ένα βέλος $\mu_C : \Diamond\Diamond C \to \Diamond C$. Έστω $f : A \to B$ ένα βέλος στη $\mathcal{C}$ που αντιστοιχεί στην απόδειξη $\mathcal{D}$, $A \vdash B$. Τα βέλη $\Diamond f \circ \eta_A$ και $\eta_B \circ f$ αντιστοιχούν στις αποδείξεις 3.23 και 3.24. Αφού η απόδειξη 3.24 είναι η

$$\dfrac{\dfrac{A}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{I}} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^u\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Απόδειξη 3.23. $\Diamond f \circ \eta_A$

$$\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{I}}$$

Απόδειξη 3.24. $\eta_B \circ f$

κανονική μορφή της 3.23, ισχύει η ισότητα $\eta_B \circ f = \Diamond f \circ \eta_A$. Επομένως, το $\eta : I_{\mathcal{C}} \to \Diamond$, όπου $I_{\mathcal{C}}$ ο ταυτοτικός συναρτητής, είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός. Όπως φαίνεται παρακάτω από τις αποδείξεις 3.25 και 3.26, που αντιστοιχούν στα βέλη $\mu_B \circ \Diamond\Diamond f$ και $\Diamond f \circ \mu_A$, ισχύει η ισότητα $\mu_B \circ \Diamond\Diamond f = \Diamond f \circ \mu_A$. Εξόρισμού λοιπόν, το $\mu : \Diamond\Diamond \to \Diamond$ είναι κι αυτό φυσικός μετασχηματισμός.

$$\dfrac{\Diamond\Diamond A \quad \dfrac{[\Diamond A]^v \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^u\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}}{\Diamond B}\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond B}\Diamond_{\mathcal{E},u}}{\Diamond B}\Diamond_{\mathcal{E},v}$$

Απόδειξη 3.25. $\mu_B \circ \Diamond\Diamond f$

$$\dfrac{\dfrac{\Diamond\Diamond A \quad [\Diamond A]^v}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},v} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]^u\\ \mathcal{D}\\ B\end{matrix}}{\Diamond B}\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond B}\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Απόδειξη 3.26. $\Diamond f \circ \mu_A$

❑ Μονάδα $(\Diamond, \eta, \mu)$

Για να είναι η τριάδα $(\Diamond, \eta, \mu)$ μονάδα, αρκεί τα διαγράμματα 3.8 και 3.9 να είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd}
& \Diamond A & \\
\Diamond A \arrow[ur, equal, "\mathbf{1}_{\Diamond A}"] \arrow[r, "\eta_{\Diamond A}"'] & \Diamond\Diamond A \arrow[u, "\mu_A"] & \Diamond A \arrow[ul, equal, "\mathbf{1}_{\Diamond A}"'] \arrow[l, "\Diamond\mu_A"]
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.8. $\mu_A \circ \Diamond\eta_A = \mu_A \circ \eta_{\Diamond A}$

$$\begin{tikzcd}
\Diamond A & \Diamond\Diamond A \arrow[l, "\mu_A"'] \\
\Diamond\Diamond A \arrow[u, "\mu_A"] & \Diamond\Diamond\Diamond A \arrow[l, "\Diamond\mu_A"] \arrow[u, "\mu_{\Diamond A}"']
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.9. $\mu_A \circ \Diamond\mu_A = \mu_A \circ \mu_{\Diamond A}$

Οι αποδείξεις 3.27 και 3.28 κανονικοποιούνται και οι δύο στην τετριμμένη απόδειξη $\Diamond A$, που σημαίνει ότι $\mu_A \circ \Diamond\eta_A = \mu_A \circ \eta_{\Diamond A} = \mathbf{1}_{\Diamond A}$. Η απόδειξη 3.27 κανονικοποιείται με εφαρμογή του κανόνα μετάθεσης $(\Diamond_{\mathcal{E}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$, έπειτα εφαρμογή του κανόνα παράκαμψης για τον σύνδεσμο της πιθανότητας και, τέλος, εφαρμογή του η-κανόνα για τον σύνδεσμο της πιθανότητας. Η απόδειξη 3.28 κανονικοποιείται με μια εφαρμογή του κανόνα παράκαμψης για την πιθανότητα.

$$\dfrac{\dfrac{\Diamond A \quad \dfrac{\dfrac{[A]^u}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},u} \quad [\Diamond A]^v}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},v}$$

Απόδειξη 3.27. $\mu_A \circ \Diamond\eta_A$

$$\dfrac{\dfrac{\Diamond A}{\Diamond\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{I}} \quad [\Diamond A]^v}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},v}$$

Απόδειξη 3.28. $\mu_A \circ \eta_{\Diamond A}$

Το βέλος $\mu_A \circ \Diamond\mu_A$ αντιστοιχεί στην απόδειξη 3.29. η οποία μετασχηματίζεται στην 3.30 με

$$\dfrac{\dfrac{\Diamond\Diamond\Diamond A \quad \dfrac{\dfrac{[\Diamond\Diamond A]^v \quad [\Diamond A]^u}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},u}}{\Diamond\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},v} \quad [\Diamond A]^z}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},z}$$

Απόδειξη 3.29. $\mu_A \circ \Diamond\mu_A$

$$\dfrac{\Diamond\Diamond\Diamond A \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Diamond\Diamond A]^v \quad [\Diamond A]^u}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},u}}{\Diamond\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{I}} \quad [\Diamond A]^z}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},z}}{\Diamond A}\Diamond_{\mathcal{E},v}$$

Απόδειξη 3.30. *Ενδιάμεση αναγωγή*

εφαρμογή του κανόνα μετάθεσης $(\Diamond_{\mathcal{E}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$ και, τέλος, κανονικοποιείται στην 3.31 (με εφαρμογή του κανόνα παράκαμψης για την πιθανότητα), που αντιστοιχεί στο βέλος $\mu_A \circ \mu_{\Diamond A}$. Σαν αποτέλεσμα, ισχύει η ισότητα $\eta_A \circ \eta_{\Diamond A} = \eta_A \circ \Diamond\eta_A$ και το $(\Diamond, \mu, \eta)$ είναι μονάδα.

$$\dfrac{\Diamond\Diamond\Diamond A \qquad \dfrac{[\Diamond\Diamond A]^v \qquad [\Diamond A]^u}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{E},v}$$

Απόδειξη 3.31. *$\eta_A \circ \eta_{\Diamond A}$, η κανονική μορφή της 3.29*

3.2.5 $\Box$-δύναμη

Θα δείξουμε πρώτα, ότι υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός st με συνιστώσες $st_{A,B} : \Box A \times \Diamond B \to \Diamond(\Box A \times B)$, για αντικείμενα A και B στη $\mathcal{C}$. Έπειτα, θα δείξουμε ότι είναι $\Box$-δύναμη. Τέλος, δείχνουμε ότι η μονάδα $(\Diamond, \mu, \eta)$ είναι $\Box$-δυνατή.

❏ Φυσικός μετασχηματισμός $st_{A,B} : \Box A \times \Diamond B \to \Diamond(\Box A \times B)$

Λόγω της παρακάτω απόδειξης, για αντικείμενα A και B της $\mathcal{C}$ υπάρχει βέλος $st_{A,B} : \Box A \times \Diamond B \to \Diamond(\Box A \times B)$.

$$\dfrac{\Box A \qquad \Diamond B \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^{u_1} \qquad [B]^{u_2}}{\Box A \wedge B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{E},u_1,u_2}$$

Έστω βέλη $f : A \to C$ και $g : B \to D$. Τότε, αν ισχύει η ισότητα $st_{C,D} \circ (\Box f \times \Diamond g) = \Diamond(\Box f \times g) \circ st_{A,B}$, τότε το $st_{-,-}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός. Το πρώτο βέλος αντιστοιχεί στην απόδειξη 3.32. Με $(\Diamond_{\mathcal{E}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$-μετάθεση και έπειτα $(\Diamond_{\mathcal{I}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$-μετατροπή, αυτή ανάγεται στην

$$\dfrac{\dfrac{\Box A \qquad \begin{matrix}\dfrac{[\Box A]^u}{A}\,\Box_{\mathcal{E}} \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{\Box C}\,\Box_{\mathcal{I},u} \qquad \dfrac{\Diamond B \qquad \dfrac{\begin{matrix}[B]^v \\ \vdots \\ D\end{matrix}}{\Diamond D}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond D}\,\Diamond_{\mathcal{E},v} \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box C]^{w_1} \qquad [D]^{w_2}}{\Box C \wedge D}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box C \wedge D)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box C \wedge D)}\,\Diamond_{\mathcal{E},w_1,w_2}$$

Απόδειξη 3.32. $st_{C,D} \circ (\Box f \times \Diamond g)$

απόδειξη 3.33. Έτσι, η παραπάνω ισότητα ισχύει.

❏ Η δύναμη

Αν τα διαγράμματα 3.10 και 3.11 είναι αντιμεταθετικά, τότε ο φυσικός μετασχηματισμός st είναι $\Box$-δύναμη της μονάδας $(\Diamond, \eta, \mu)$. Η απόδειξη 3.34 ανάγεται στην απόδειξη 3.35 και έπειτα στην 3.36 και από την απόδειξη 3.36 με εφαρμογή του κανόνα παράκαμψης για την σύζευξη και έπειτα με χρήση του η-κανόνα για την πιθανότητα, φτάνουμε στην κανονική μορφή της 3.34, που αποτελείται από τις τετριμμένες αποδείξεις $\Box\top$ και $\Diamond A$. Επομένως το διάγραμμα 3.10 είναι αντιμεταθετικό.

$$\dfrac{\Diamond B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^{w_1} \qquad \begin{matrix}[\Box A]^u\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{\Box C}\,\Box_{\mathcal{I},u} \qquad \begin{matrix}[B]^v\\ \vdots\\ D\end{matrix}}{\Box C \wedge D}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box C\wedge D)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box C \wedge D)}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Απόδειξη 3.33. $\Diamond(\Box f \times g) \circ st_{A,B}$

$$\begin{tikzcd}
\Diamond A & \\
\Box\top\times\Diamond A \arrow[u, "\pi_2^{\Box\top,\Diamond A}"] \arrow[r, "st_{\top,A}"] & \Diamond(\Box\top\times A) \arrow[ul, "\Diamond\pi_2^{\Box\top,A}"']
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.10. $\pi_2^{\Box\top,\Diamond A} = \Diamond\pi_2^{\Box\top,A} \circ st_{\top,A}$

$$\begin{tikzcd}
\Box(A\times B)\times\Diamond C \arrow[rr, "st_{A\times B,C}"] \arrow[d, "m_{A,B}\times\mathbf{1}_{\Diamond C}"] & & \Diamond(\Box(A\times B)\times C) \arrow[d, "\Diamond(m_{A,B}\times\mathbf{1}_C)"'] \\
\Box A\times\Box B\times\Diamond C \arrow[r, "\mathbf{1}_{\Box A}\times st_{B,C}"'] & \Box A\times\Diamond(\Box B\times C) \arrow[r, "st_{A,\Box B\times C}"'] & \Diamond(\Box A\times\Box B\times C)
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.11. $st_{A,\Box B\times C} \circ (\mathbf{1}_{\Box A} \times st_{B,C}) \circ (m_{A,B} \times \mathbf{1}_{\Diamond C}) = \Diamond(m_{A,B} \times \mathbf{1}_C) \circ st_{A\times B,C}$

$$\dfrac{\dfrac{\Box\top \qquad \Diamond A \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box\top]^{u_1}\qquad [A]^{u_2}}{\Box\top\wedge A}\,\wedge_{\mathcal I}}{\Diamond(\Box\top\wedge A)}\,\Diamond_{\mathcal I}}{\Diamond(\Box\top\wedge A)}\,\Diamond_{\mathcal{E},u_1,u_2} \qquad \dfrac{[A]^v}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal I}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{E},v}$$

Απόδειξη 3.34. $\Diamond\pi_2^{\Box\top,A} \circ st_{\top,A}$

$$\dfrac{\Box\top\qquad\Diamond A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box\top]^{u_1}\qquad[A]^{u_2}}{\Box\top\wedge A}\,\wedge_{\mathcal I}}{\Diamond(\Box\top\wedge A)}\,\Diamond_{\mathcal I} \qquad \dfrac{[A]^v}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal I}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{E},v}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{E},u_1,u_2}$$

Απόδειξη 3.35. $(\Diamond_{\mathcal{E}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$-*μετάθεση πάνω στην απόδειξη 3.34*

$$\dfrac{\Box\top\qquad\Diamond A\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box\top]^u\qquad[A]^u}{\Box\top\wedge A}\,\wedge_{\mathcal I}}{A}\,\wedge_{\mathcal E}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal I}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}$$

Απόδειξη 3.36. $(\Diamond_{\mathcal{I}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$-*μετατροπή, πάνω στην απόδειξη 3.35*

Η απόδειξη 3.39 αντιστοιχεί στο βέλος $st_{A,\Box B\times C}\circ(\mathbf{1}_{\Box A}\times st_{B,C})\circ(m_{A,B}\times\mathbf{1}_{\Diamond C})$. $\mathcal{D}_d$ είναι η απόδειξη 3.37 και $\mathcal{D}_s$ είναι η 3.38. Η απόδειξη 3.40 είναι η κανονική μορφή της 3.39 και αυτής

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box(A\wedge B)\qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(A\wedge B)]^u}{A\wedge B}\,\Box_{\mathcal{E}}}{A}\,\wedge_{\mathcal{E}}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u}\qquad \dfrac{\Box(A\wedge B)\qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(A\wedge B)]^v}{A\wedge B}\,\Box_{\mathcal{E}}}{B}\,\wedge_{\mathcal{E}}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},v}}{\Box A\wedge\Box B}\,\wedge_{\mathcal{I}}\qquad \Diamond C}{\Box A\wedge\Box B\wedge\Diamond C}\,\wedge_{\mathcal{I}}$$

Απόδειξη 3.37. $\mathcal{D}_d$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_d\\ \Box A\wedge\Box B\wedge\Diamond C\end{matrix}}{\Box A}\,\wedge_{\mathcal{E}}\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_d\\ \Box A\wedge\Box B\wedge\Diamond C\end{matrix}}{\Box B}\,\wedge_{\mathcal{E}}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_d\\ \Box A\wedge\Box B\wedge\Diamond C\end{matrix}}{\Diamond C}\,\wedge_{\mathcal{E}}\qquad \dfrac{\dfrac{[\Box B]^s\quad [C]^s}{\Box B\wedge C}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box B\wedge C)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box B\wedge C)}\,\Diamond_{\mathcal{E},s}}{\Box A\wedge\Diamond(\Box B\wedge C)}\,\wedge_{\mathcal{I}}$$

Απόδειξη 3.38. $\mathcal{D}_s$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_s\\ \Box A\wedge\Diamond(\Box B\wedge C)\end{matrix}}{\Box A}\,\wedge_{\mathcal{E}}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_s\\ \Box A\wedge\Diamond(\Box B\wedge C)\end{matrix}}{\Diamond(\Box B\wedge C)}\,\wedge_{\mathcal{E}}\qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^t\quad [\Box B\wedge C]^t}{\Box A\wedge(\Box B\wedge C)}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A\wedge(\Box B\wedge C))}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A\wedge(\Box B\wedge C))}\,\Diamond_{\mathcal{E},t}$$

Απόδειξη 3.39. $st_{A,\Box B\times C}\circ(\mathbf{1}_{\Box A}\times st_{B,C})\circ(m_{A,B}\times\mathbf{1}_{\Diamond C})$

που αντιστοιχεί στο βέλος $\Diamond(m_{A,B}\times\mathbf{1}_C)\circ st_{A\times B,C}$, επίσης. Έτσι, η μονάδα $(\Diamond,\mu,\eta)$ έχει μια $\Box$-δύναμη.

$$\dfrac{\Box(A\wedge B)\quad \Diamond C\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box(A\wedge B)]^{t_1}\qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(A\wedge B)]^u}{A\wedge B}\,\Box_{\mathcal{E}}}{A}\,\wedge_{\mathcal{E}}}{\Box A}\,\Box_{\mathcal{I},u}\qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(A\wedge B)]^{t_1}\qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(A\wedge B)]^v}{A\wedge B}\,\Box_{\mathcal{E}}}{B}\,\wedge_{\mathcal{E}}}{\Box B}\,\Box_{\mathcal{I},v}\qquad [C]^{t_2}}{\Box B\wedge C}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Box A\wedge(\Box B\wedge C)}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A\wedge(\Box B\wedge C))}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A\wedge(\Box B\wedge C))}\,\Diamond_{\mathcal{E},t_1,t_2}$$

Απόδειξη 3.40. *Κανονική μορφή της 3.39 και της απόδειξης που αντιστοιχεί στο βέλος* $\Diamond(m_{A,B}\times\mathbf{1}_C)\circ st_{A\times B,C}$

Είναι προφανής η ισοδυναμία των παρακάτω απαγωγών, πράγμα που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι $st_{A,B}\circ(\mathbf{1}_{\Box A}\times\eta_B)=\eta_{\Box A\times B}$.

$$\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{B}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{I}} \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^{u_1} \qquad [B]^{u_2}}{\Box A \wedge B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{E},u_1,u_2} \quad \simeq_{\beta\eta} \quad \dfrac{\dfrac{\Box A \qquad B}{\Box A \wedge B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}$$

Επιπλέον, η απόδειξη 3.41 αντιστοιχεί στο βέλος $\mu_{\Box A \times B} \circ \Diamond st_{A,B} \circ st_{A,\Diamond B}$. Όμως με $(\Diamond_{\mathcal{E}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$-μεταθέσεις και $(\Diamond_{\mathcal{I}}, \Diamond_{\mathcal{E}})$-μετατροπές, ανάγεται στην 3.42. Έτσι, το διάγραμμα 3.12 είναι αντιμεταθετικό.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box A \quad \Diamond\Diamond B \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^{u_1} \qquad [\Diamond B]^{u_2}}{\Box A \wedge \Diamond B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge \Diamond B)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge \Diamond B)}\,\Diamond_{\mathcal{E},u_1,u_2} \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^{w_1} \qquad [\Diamond B]^{w_2} \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^{v_1} \qquad [B]^{v_2}}{\Box A \wedge B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{E},v_1,v_2}}{\Diamond\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{E},w} \qquad [\Diamond(\Box A \wedge B)]^x}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{E},x}$$

Απόδειξη 3.41. $\mu_{\Box A \times B} \circ \Diamond st_{A,B} \circ st_{A,\Diamond B}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{\Diamond\Diamond B \qquad [\Diamond B]^u}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}}{\Box A \wedge \Diamond B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Box A}\,\wedge_{\mathcal{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Box A \qquad \dfrac{\Diamond\Diamond B \qquad [\Diamond B]^u}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E},u}}{\Box A \wedge \Diamond B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond B}\,\wedge_{\mathcal{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^{v_1} \qquad [B]^{v_2}}{\Box A \wedge B}\,\wedge_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{I}}}{\Diamond(\Box A \wedge B)}\,\Diamond_{\mathcal{E},v_1,v_2}$$

Απόδειξη 3.42. $st_{A,B} \circ (\mathbf{1}_{\Box A} \times \mu_B)$

$$\begin{tikzcd}
\Box A \times B \arrow[d, "\mathbf{1}_{\Box A} \times \eta_B"'] \arrow[drr, "\eta_{\Box A \times B}"] & & \\
\Box A \times \Diamond B \arrow[rr, "st_{A,B}"] & & \Diamond(\Box A \times B) \\
\Box A \times \Diamond\Diamond B \arrow[u, "\mathbf{1}_{\Box A} \times \mu_B"] \arrow[rr, "st_{A,\Diamond B}"'] & & \Diamond(\Box A \times \Diamond B) \arrow[r, "\Diamond(st_{A,B})"'] & \Diamond\Diamond(\Box A \times B) \arrow[ul, "\mu_{\Box A \times B}"']
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.12. $\mu_{\Box A \times B} \circ \Diamond st_{A,B} \circ st_{A,\Diamond B} = st_{A,B} \circ (\mathbf{1}_{\Box A} \times \mu_B)$ *και* $st_{A,B} \circ (\mathbf{1}_{\Box A} \times \eta_B) = \eta_{\Box A \times B}$

Για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, έστω δύο βέλη που είναι ίσα σε όλες τις CS4-κατηγορίες. Επειδή η κατηγορία $\mathcal{C}$, που κατασκευάσαμε παραπάνω, είναι μια CS4-κατηγορία, τα βέλη είναι ίσα και στη $\mathcal{C}$. Αλλά η ισότητα βελών στη $\mathcal{C}$ είναι ισοδυναμία μεταξύ φυσικών απαγωγών, επομένως οι δύο απαγωγές είναι ισοδύναμες. $\Box$

Συμπεράσματα

1. Στο τελευταίο κεφάλαιο, διαπιστώσαμε μια αυστηρή αντιστοιχία μεταξύ των CS4 λογικών και των CS4-κατηγοριών. Η σύζευξη ερμηνεύεται με τη δομή του γινομένου, το οποίο εκφράζεται με συναρτητές. Συγκεκριμένα, η σύζευξη με έναν τύπο A στη $\mathcal{C}$ μοντελοποιείται από τον συναρτητή $(-) \times [\![A]\!]$. Η διάζευξη ερμηνεύεται με το συγγινόμενο, που είναι δυικό του γινομένου. Οι συναρτητές του συγγινόμενου είναι αυτοί που εκφράζουν το γινόμενο στη $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, τη δυϊκή της $\mathcal{C}$. Ο συμπερασμός αντιστοιχεί στην έκθεση, δομή που έχει ο εκθετικός συναρτητής, ο οποίος είναι δεξιά συζηγής του συναρτητή του γινομένου.

Θα εισαγάγουμε εδώ τον *διαγώνιο συναρτητή*, $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, που απεικονίζει κάθε αντικείμενο, A, της $\mathcal{C}$ στο ζεύγος (A, A) και κάθε βέλος f της $\mathcal{C}$ στο βέλος (f, f) της $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Ο συναρτητής αυτός έχει δεξιά συζηγή τον $(-) \times (-)$ και αριστερά συζηγή τον $(-) + (-)$, [Awo10], [Pie91]. Δηλαδή,

$$+ \vdash \Delta \vdash \times.$$

Αν θεωρήσουμε το συγγινόμενο, το ζεύγος $(-, -)$ και το γινόμενο πράξεις, αντί για δομές, η παραπάνω διπλή κατηγοριοθεωρητική συζηγία δείχνει μια σχέση μεταξύ των πράξεων αυτών: κάθε μία μπορεί να οριστεί ως συζηγής πράξη μιας άλλης, πράγμα όχι τόσο εμφανές από τη πλευρά της Θεωρίας Αποδείξεων. Το ίδιο, βέβαια, ισχύει για την έκθεση, που είναι δεξιά συζηγής του γινομένου.

Ο διαγώνιος συναρτητής Δ εκφράζεται στη CS4 λογική με την απαγωγή

$$\frac{A^u \qquad A^u}{A \wedge A} \wedge_{\mathcal{I}}$$

όπου A οποιοσδήποτε τύπος. Είναι σημαντικό εδώ να προσέξουμε ότι στην παραπάνω απαγωγή υπάρχει ένα μόνο πακέτο υποθέσεων που περιέχει δύο φορές την υπόθεση A, σημειωμένη με την ίδια ετικέτα. Αυτό δείχνει τη σημασία του χωρισμού των υποθέσεων σε πακέτα και την αυστηρότητα του κατηγοριοθεωρητικού μοντέλου, το οποίο λαμβάνει υπόψη του τόσο λεπτομερή στοιχεία στις απαγωγές όπως οι ετικέτες.

2. Οι Gentzen και Prawitz προκειμένου να ορίσουν μια διαδικασία κανονικοποίησης των απαγωγών, έπρεπε να εισαγάγουν κάποιους κανόνες μετασχηματισμού των απαγωγών: αυτούς που στην παρούσα εργασία ονομάσαμε $\beta\eta$-συστολές. Οι κανόνες αυτοί, από τη σκοπιά της Θεωρίας Αποδείξεων ορίζονται ξέχωρα από τους συνδέσμους που αφορούν. Αυτό όμως αλλάζει από τη σκοπιά της Θεωρίας Κατηγοριών.

Η κατηγοριοθεωρητικές έννοιες του γινομένου, του συγγινομένου και της έκθεσης συλλαμβάνουν μονομιάς τους αντίστοιχους συνδέσμους της CS4 λογικής μαζί με τους η και β κανόνες τους. Με τον ίδιο τρόπο, οι συναρτητές $\Box$ και $\Diamond$ που αποτελούν συμμονάδα και μονάδα, αντίστοιχα, συλλαμβάνουν μονομιάς τους συνδέσμους της αναγκαιότητας και της πιθανότητας μαζί με τους κανόνες αναγωγής τους. Αυτός, μάλιστα, είναι ο λόγος για τον οποία το κατηγοριοθεωρητικό μοντέλο που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή ερμηνεύει όχι απλώς απαγωγές, αλλά κλάσεις ισοδυναμίας απαγωγών, σε βέλη.

Όπως φαίνεται στην απόδειξη του θεωρήματος πληρότητας, οι κανόνες παράκαμψης για τους ιντουισιονιστικούς συνδέσμους περιγράφονται κατηγοριοθεωρητικά με την *ύπαρξη* χαρακτηριστικών βελών που έχουν καθολικές ιδιότητες (universal properties) στις αντίστοιχες δομές. Ενώ οι η-κανόνες περιγράφονται από τη *μοναδικότητα* των βελών εκείνων που έχουν την εκάστοτε καθολική ιδιότητα. Όσον αφορά τους τροπικούς συνδέσμους, οι β κανόνες συλλαμβάνονται κατηγοριοθεωρητικά από τον ορισμό ενός συναρτητή να είναι επιμεριστικός ως προς τη σύνθεση βελών ($F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$) και οι η-κανόνες από τον ορισμό $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}$, όπου $F \in \{\Box, \Diamond\}$.

Είδαμε ότι οι β και η κανόνες των ιντουισιονιστικών συνδέσμων ερμηνεύονται με καθολικές ιδιότητες, ενώ αυτοί των τροπικών συνδέσμων με ιδιότητες συναρτητών. Ουσιαστικά, δεν υπάρχει διαφορά, αφού το γινόμενο, το συγγινόμενο και η έκθεση ορίζονται ισοδύναμα ως συναρτητές. Στον διαχωρισμό αυτό μεταξύ ορισμών που κάνουν χρήση καθολικών ιδιοτήτων κι αυτών που κάνουν χρήση συναρτητών γίνεται λόγος στο [Fre72], όπου όμως διασαφηνίζεται ότι είναι ισοδύναμοι. Μάλιστα, ο Freyd τελικά καταλήγει:

> The reduction of a subject to an elementary one - in other than the formal method of set theory - usually marks a great event in mathematics. The elementary axioms of topoi are a testament to the ingenuity and insight of human genius. I will refuse to belittle this triumph of mind over matter by taking it as evidence that mind is matter.

Λόγω του ότι το γινόμενο, το συγγινόμενο και όλες οι δομές που ερμηνεύουν σύνδεσμους ορίζονται μαζί με τις ιδιότητες που ερμηνεύουν τους αντίστοιχους η και β κανόνες, και επειδή ενώ οι $\beta\eta$ κανόνες δίνουν ισοδύναμες απαγωγές αλλά τα αντιμεταθετικά διαγράμματα δίνουν ίσα βέλη, για τους δύο αυτούς λόγους το βέλος δεν ερμηνεύει μια απαγωγή, αλλά και όλες τις ισοδύναμές της.

3. Στο Κεφάλαιο 3, είδαμε επιπλέον την αντιστοιχία του $\top$ στο τερματικό αντικείμενο και του $\perp$ στο ασθενές αρχικό. Επειδή εισαγάγαμε το $\top$ ως ανεξάρτητη προτασιακή σταθερά, για την ερμηνεία του ως τερματικό αντικείμενο και άρα τη συμφωνία των αποτελεσμάτων μας με αυτά των Bierman, de Paiva, Kobayashi και πολλών άλλων προηγούμενων, ήταν απαραίτητο να συμπεριλάβουμε έναν κανόνα μετατροπής γι' αυτό. Αυτό σημαίνει ότι η αλήθεια και το ψεύδος δεν ερμηνεύονται δυϊκά, όσο κι αν ο ορισμός της αλήθειας ως άρνηση του ψεύδους ($\top \equiv \perp \Rightarrow \perp$), σύνηθης πρακτική στη Μαθηματική Λογική, μπορεί να υποδηλώνει κάτι τέτοιο. Αν υιοθετούσαμε αυτή τη σύμβαση στην παρούσα εργασία, θα είχαμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα, ότι το $[\![\perp]\!]^{[\![\perp]\!]}$ είναι τερματικό αντικείμενο, ενώ το $[\![\perp]\!]$ ασθενές αρχικό. Για την ερμηνεία του $\perp$ ως ασθενές αρχικό αντικείμενο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν δύο κανονικές μη ισοδύναμες απαγωγές του P από το $P \wedge Q \wedge \perp$, οι παρακάτω.

$$\dfrac{\dfrac{P \wedge Q \wedge \perp}{P \wedge Q}\wedge\mathcal{E}}{P}\wedge\mathcal{E} \qquad \text{και} \qquad \dfrac{\dfrac{P \wedge Q \wedge \perp}{\perp}\wedge\mathcal{E}}{P}\perp\mathcal{E}$$

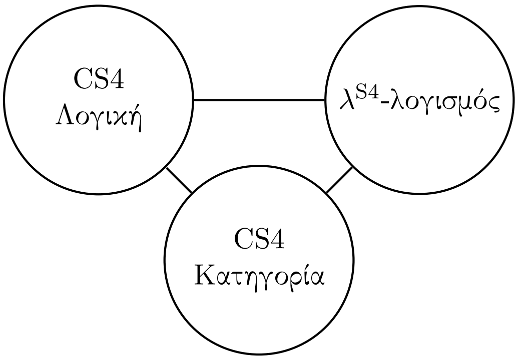
Σε μια CS4-κατηγορία, για κάθε αντικείμενο A, υπάρχει το βέλος $A \to \perp^{\perp^A}$, ο εκθετικός μεταθέτης του πεπλεγμένου βέλους εκτίμησης $\varepsilon_{A,\perp} \circ \gamma_{A,\perp^A} : A \times \perp^A \to \perp$, που ερμηνεύει την απαγωγή $A \vdash \neg\neg A$. Ωστόσο, το βέλος αυτό δεν είναι ισομορφικό, πράγμα που καταργεί τη δυνατότητα απαλοιφής της διπλής άρνησης. Αν το βέλος αυτό ήταν ισομορφισμός, τότε το $\perp$ θα ήταν αρχικό αντικείμενο και από το λήμμα του Joyal[2] θα υπήρχε το πολύ ένα βέλος από ένα αντικείμενο σε ένα άλλο. Αυτό, βέβαια, δε σημαίνει ότι θα υπήρχε μοναδική απαγωγή από ένα

[2] Κάθε καρτεσιανά κλειστή κατηγορία για την οποία ο φυσικός μετασχηματισμός $\phi : I_{\mathcal{C}} \to \perp^{\perp^{(-)}}$ είναι ισομορφικός, αποτελεί μια προδιάταξη (preorder, μια ανακλαστική και μεταβατική σχέση), δηλαδή μια κατηγορία όπου κάθε βέλος της από ένα αντικείμενο σε ένα άλλο είναι μοναδικό, [Abr10].

σύνολο υποθέσεων σε ένα συμπέρασμα, διότι τα βέλη ερμηνεύουν απαγωγές modulo μια σχέση ισοδυναμίας. Το αποτέλεσμα θα ήταν μια διαφορετική ερμηνεία της ισότητας βελών. Η ισότητα θα ερμήνευε μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στις απαγωγές, σύμφωνα με την οποία κάθε απαγωγή $\Gamma \vdash A$ θα ήταν ισοδύναμη με οποιαδήποτε άλλη με ίδιες υποθέσεις και συμπέρασμα.

Αυτό, με τη σειρά του, θα είχε σαν αποτέλεσμα ένα κατηγορικό μοντέλο που θα έχανε τις δομικές πληροφορίες κάθε απαγωγής. Θα ερμήνευε *τι* είναι αποδείξιμο / υπολογίσιμο, αλλά όχι το *πώς*, βγάζοντάς μας, έτσι, από το ιντουισιονιστικό πλαίσιο (πράγμα που ήδη υπονοήθηκε με την ύπαρξη του φυσικού ισομοριφσμού $I_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \perp^{\perp(-)}$, ο οποίος επιτρέπει την απαλοιφή της διπλής άρνησης). Συνεπώς, ένα τέτοιο μοντέλο δεν θα μπορούσε να αποτελέσει επέκταση του Curry-Howard ισομορφισμού (βλ. §5 παρακάτω), καθώς δεν θα υπήρχε καμία πληροφορία για τον λ-όρο που θα αντιστοιχούσε σε κάθε απαγωγή.

5. Σύμφωνα με τον Curry-Howard ισομορφισμό, υπάρχει μια αυστηρή αντιστοιχία μεταξύ των ιντουισιονιστικών αποδείξεων και των αλγορίθμων ενός υπολογιστικού συστήματος,[How80]. Κάθε ιντουισιονιστική απαγωγή αντιστοιχεί σε έναν αλγόριθμο ο οποίος κατασκευάζει το συμπέρασμα της πρώτης με είσοδο τις υποθέσεις της. Αυτό σημαίνει ότι η απόδειξη ύπαρξης ενός αντικειμένου ταυτίζεται με την αλγοριθμική περιγραφή της κατασκευής του. Η επέκταση του Curry-Howard ισομορφισμού σε τροπικά ιντουισιονιστικά συστήματα δείχνει ότι και οι τροπικότητες μπορούν να μεταφραστούν αλγοριθμικά, δίνοντας νέες δυνατότητες, όπως για παράδειγμα υπολογισμούς σε στάδια, κατανεμημένα συστήματα γνώσης, διάκριση ενός υπολογισμού από το αποτέλεσμά του.



Έπειτα, η επέκταση του Curry-Howard ισομορφισμού και στη Θεωρία Κατηγοριών δείχνει τη δομή κάθε πράξης, τους φυσικούς κανόνες που την διέπουν και πώς το σύνολο των συνδέσμων και των λειτουργιών τους αλληλεπιδρούν για να φτιάξουν μια CS4-κατηγορία. Στην παρούσα εργασία είδαμε μια από τις διάφορες επεκτάσεις του Curry-Howard ισομορφισμού. Πράγματι, η δομή κάθε απαγωγής αποτυπώνεται στο βέλος που την ερμηνεύει, όπως και τα βήματα ενός υπολογισμού αποτυπώνονται σε έναν όρο του λ-λογισμού. Έτσι, ένα βέλος μπορεί να μεταφραστεί σε έναν αλγόριθμο που έχει είσοδο στοιχεία από το πεδίο ορισμού του και έξοδο ένα στοιχείο από το συμπεδίο ορισμού του.

Παραρτήματα

Βιβλιογραφία

[Abr10] Samson Abramsky. No-cloning in categorical quantum mechanics. In Simon Gay and Ian Mackie, editors, *Semantic Techniques in Quantum Computation*, pages 1–28. Cambridge University Press, March 2010.

[AMdPR01] Natasha Alechina, Michael Mendler, Valeria de Paiva, and Eike Ritter. Categorical and Kripke Semantics for Constructive S4 Modal Logic. In Laurent Fribourg, editor, *Computer Science Logic*, volume 2142 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 292–307. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[AT11] Samson Abramsky and Nikos Tzevelekos. Introduction to categories and categorical logic. In Bob Coecke, editor, *New Structures for Physics*, volume 813 of *Lecture Notes in Physics*, pages 3–94. Springer-Verlag, 2011.

[Awo10] JS. Awodey. *Category Theory.* Oxford Logic Guides Series, second edition, 2010.

[BBdP98] P. N. Benton, Gavin M. Bierman, and Valeria de Paiva. Computational types from a logical perspective. *Journal of Functional Programming*, 8:177–193, 1998.

[BdP96] G. M. Bierman and Valeria de Paiva. Intuitionistic Necessity Revisited. Technical Report CSR-96-10, School of Computer Science, University of Birmingham, 1996.

[BdP01] G. M. Bierman and Valeria de Paiva. On an intuitionistic modal logic. *Studia Logica*, 65:2000, 2001.

[BW95] Michael Barr and Charles Wells. *Category Theory for Computing Science, 2Nd Ed.* Prentice Hall International (UK) Ltd., Hertfordshire, UK, 1995.

[Fre72] Peter Freyd. Aspects of topoi. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 7:1–76 and 467–480, 1972.

[GS69] G. Gentzen and E. Szabo. *The collected papers of Gerhard Gentzen.* Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Pub. Co., 1969.

[How80] W. A. Howard. The formulae-as-types notion of construction. In *To H. B. Curry: essays on combinatory logic, lambda calculus and formalism*, pages 480–490. Academic Press, London-New York, 1980.

[Kob97] Satoshi Kobayashi. Monad as modality. *Theoretical Computer Science*, 175(1):29–74, March 1997.

[Law63] F. William Lawvere. *Functorial Semantics of Algebraic Theories.* PhD thesis, Columbia University, 1963.

[Law71] Bill Lawvere. Quantifiers and sheaves. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens*, volume 1, pages 329–334. Gauthier-Villars, 1971.

[LL59] C. I. A. Lewis and C. H. A. Langford. *Symbolic Logic:*. Dover Book. Dover Publ., 1959. Reprint from 1932.

[McL92] C. McLarty. *Elementary Categories, Elementary Toposes.* Clarendon Press, 1992.

[MR09] Jean-Pierre Marquis and Gonzalo E. Reyes. The history of categorical logic. 2009.

[Pfe01] Frank Pfenning. Chapter 17 - logical frameworks. In Alan Robinson and Andrei Voronkov, editors, *Handbook of Automated Reasoning*, pages 1063 – 1147. North-Holland, Amsterdam, 2001.

[Pie91] Benjamin C. Pierce. *Basic Category Theory for Computer Scientists.* Foundations of Computing Series. The MIT Press, 1991.

[Pra65] D. Prawitz. *Natural deduction: a proof-theoretical study.* Stockholm studies in philosophy. Almqvist & Wiksell, 1965.

[Sim94] Alex K. Simpson. *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic.* PhD thesis, University of Edinburgh, 1994.

[TS00] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory.* Cambridge University Press, Second edition, 2000.

[VH67] J. Van Heijenoort. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Source books in the history of the sciences. Harvard University Press, 1967.

Πίνακας Συμβόλων μιας CS4-κατηγορίας

Σύμβολο	**Επεξήγηση**
$\top$	τερματικό αντικείμενο
$\top_A$	το μοναδικό βέλος $A \to \top$
$\bot$	ασθενές αρχικό αντικείμενο
$\bot_A$	το βέλος $\bot \to A$
$\times$	καρτεσιανό γινόμενο
$\pi_1^{A,B}, \pi_2^{A,B}$	πρώτη $(A \times B \to A)$ και δεύτερη $(A \times B \to B)$ προβολή
$\langle f, g \rangle$	το ζεύγος (pairing) δύο βελών με κοινό πεδίο ορισμού
$\alpha_{A,B,C}$	συνιστώσα του προσεταιριστικού ισομορφισμού, $A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$
λ_A	το βέλος $\top \times A \to A$, συνιστώσα του φυσικού ισομορφισμού λ
ρ_A	το βέλος $A \times \top \to A$, συνιστώσα του φυσικού ισομορφισμού ρ
$\gamma_{A,B}$	το ισομορφικό βέλος $A \times B \to B \times A$, συνιστώσα του τελεστή πλέξης, ο οποίος επιπλέον είναι συμμετρικός
$+$	συγγινόμενο
$\kappa_1^{A,B}, \kappa_2^{A,B}$	πρώτη $(A \to A + B)$ και δεύτερη $(B \to A + B)$ συμπροβολή
$[f, g]$	το συζεύγος δύο βελών με κοινό συμπεδίο ορισμού
$\xi_{A,B,C}$	το βέλος $A \times (B + C) \to A \times B + A \times C$, συνιστώσα του επιμεριστικού φυσικού ισομορφισμού ξ
$\tilde{f}$	ο εκθετικός μεταθέτης του f
$\bar{f}$	το βέλος που έχει εκθετικό μεταθέτη το f
$\varepsilon_{A,B}$	το βέλος $B^A \times A \to B$
$\Box$	ενδοσυναρτητής που έχει τη δομή καρτεσιανής συμμονάδας
δ_A	το βέλος $\Box A \to \Box\Box A$, συνιστώσα του φυσικού μετασχηματισμού δ
ϵ_A	το βέλος $\Box A \to A$, συνιστώσα του φυσικού μετασχηματισμού ϵ
$m_{A,B}$	το ισομορφικό βέλος $\Box A \times \Box B \to \Box(A \times B)$
$m_\top$	το βέλος $\top\top\Box\top$
$\Diamond$	ενδοσυναρτητής που έχει τη δομή $\Box$-δυνατής μονάδας
η_A	το βέλος $A \to \Diamond A$, συνιστώσα του φυσικού μετασχηματισμού η
μ_A	το βέλος $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$, συνιστώσα του φυσικού μετασχηματισμού μ
$st_{A,B}$	το βέλος $\Box A \times \Diamond B \to \Diamond(\Box A \times B)$, συνιστώσα του φυσικού μετασχηματισμού st