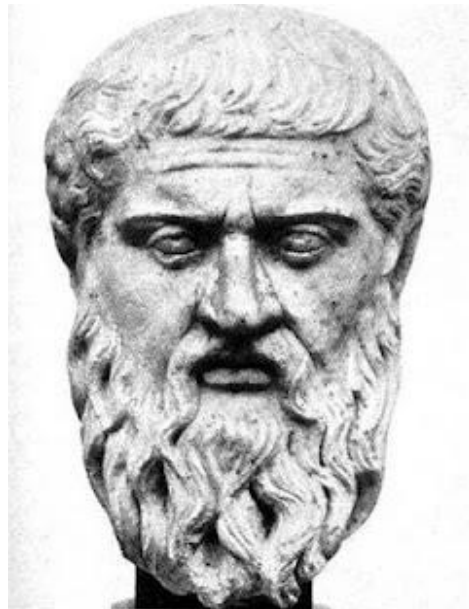




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**Η ΠΑΛΕΙΑ ΤΩΝ ΦΥΛΑΚΩΝ ΚΑΙ Ο ΡΟΛΟΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ 5^{ΟΥ}
ΒΙΒΛΙΟΥ, ΤΟΥ 6^{ΟΥ} & ΤΟΥ 7^{ΟΥ}**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΓΙΩΡΓΟΥ ΔΕΜΕΡΤΖΗ



Επιβλέπων : κ. Βασίλης Καρασμάνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Αύγουστος, 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	3
ABSTRACT.....	4
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	6
➤ I.1. ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ.....	6
➤ I.2. ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΠΟΛΙΤΕΙΑ.....	8
➤ I.3. ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΙΔΕΩΝ.....	9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η ΓΡΑΜΜΗ, ΤΟ ΣΠΗΛΑΙΟ ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.....	11
➤ II.1. ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ	12
➤ II.2. ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ	13
➤ II.3. ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ	15
➤ II.4. ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ	19
➤ II.5. ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ	21
➤ II.6. ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ	22
➤ II.7. ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ	23
➤ II.8. ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ	24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΠΟΛΙΤΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ.....	25
--	----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΠΟΛΙΤΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ.....	59
➤ IV.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	59
➤ IV.2. ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ	60
➤ IV.3. ΑΡΜΟΝΙΑ	67
ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.....	70
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	73

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η φιλοσοφία ανέκαθεν υπήρξε μια επιστήμη συναρπαστική και άκρως στοχαστική. Από την πρώτη στιγμή της παρουσίας του ο άνθρωπος -έστω κι υποσυνείδητα- διερωτήθηκε για τη φύση των πραγμάτων γύρω του και έθεσε φιλοσοφικούς στοχασμούς. Η αρχαία Ελλάδα ήταν ο τόπος όπου ουσιαστικά γεννήθηκε, αναπτύχθηκε και εδραιώθηκε ως επιστήμη η φιλοσοφία.

Ο Πλάτων υπήρξε αδιαμφισβήτητα ένας από τους μεγαλύτερους φιλοσόφους και η πορεία του χαρακτηρίζεται τουλάχιστον εντυπωσιακή. Ένα από τα συγγράμματά του που κατέχουν περίοπτη θέση είναι και η Πολιτεία. Πρόκειται για ένα αριστουργηματικό έργο που απαρτίζεται από 10 βιβλία, πραγματεύεται λεπτές έννοιες -όπως αυτή της δικαιοσύνης- και περιγράφει τη λειτουργία μιας ιδανικής πόλης σύμφωνα με τις απόψεις του Πλάτωνα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα επιχειρηθεί μια προσπάθεια ανάλυσης της εκπαιδευτικής πορείας που καλούνται να ακολουθήσουν οι επίδοξοι κυβερνήτες αυτής της πόλης προκειμένου να είναι άξιοι ώστε να αναλάβουν τη διακυβέρνησή της, ενώ επίσης θα τονισθεί ο σημαίνοντας ρόλος που παίζουν τα μαθηματικά στη μόρφωσή τους. Έτσι, θα γίνει μια προσπάθεια ανάλυσης του τέλους του 5^{ου} βιβλίου, του 6^{ου} και του 7^{ου}.

Πιο συγκεκριμένα, η εργασία θα ξεκινήσει με μια σύντομη αναφορά στη βιογραφία του Πλάτωνα, θα συνεχίσει με λίγα στοιχεία για την Πολιτεία κι έπειτα θα ακολουθήσει μια σύννοψη της θεωρίας των Ιδεών του φιλοσόφου. Στο δεύτερο τμήμα θα αναλυθούν οι παρομοιώσεις της Γραμμής και του Σπηλαίου και θα προβούμε στους μεταξύ τους συσχετισμούς. Το τρίτο κεφάλαιο θα επικεντρωθεί στον καταλυτικό ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά στην εκπαίδευση των φυλάκων, ενώ στο τελευταίο κεφάλαιο θα γίνει μια επιγραμματική αναφορά στο ρόλο που παίζουν η αστρονομία και η αρμονία στο πρόγραμμα σπουδών.

ABSTRACT

Philosophy has always been a fascinating and highly stochastic science. From the very first moment of his presence on earth wondered -albeit subconsciously- about the nature of the things around him and raised philosophical musings. Ancient Greece was the place where philosophy was actually born, developed and established itself as a science.

Plato was undoubtedly one of the greatest philosophers of all time and his route is characterized -at least- as impressive. One of his writings that holds prominent position is the Republic. It is a masterpiece work of philosophy, composed of 10 books, which discusses sensitive concepts -such as the one of justice- and describes the function of an ideal city according to the views of Plato.

In the present thesis an attempt will be made to analyze the educational system that the future rulers of this city are expected to attend in order to become capable of dealing with the governance. Moreover, the vital importance of mathematics will be highlighted in their education. Hence, the end of the 5th book, the 6th and the 7th will be analyzed.

More specifically, this thesis will begin with a brief mention in the biography of Plato, it will proceed with some details about the Republic and then a synopsis of the theory of Forms of the philosopher will follow. The second part will focus on the parallelisms of the Line and the Cave and the correlations between them. The third chapter will give prominence to the determinant role that mathematics play in the education of the guards. Finally, at the last chapter an epigrammatic description of the role that astronomy and harmonics play in the curriculum will be carried out.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σ' αυτό το σημείο θα ήθελα ιδιαίτερος να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Βασίλη Καρασμάνη. Χάρης στη δικιά του καθοδήγηση, στο πραγματικό ενδιαφέρον και την απεριόριστη υπομονή του μπόρεσα να ολοκληρώσω αυτή την εργασία. Με τη δική του βοήθεια κατάφερα να προσεγγίσω όσο το δυνατόν καλύτερα τη φιλοσοφία των μαθηματικών και να γνωρίσω τον Πλατωνικό κόσμο και την Πολιτεία.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και την αδελφή μου για την αμέριστη συμπαράσταση και την ψυχολογική υποστήριξη που μου παρείχαν!

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ

Ο Πλάτων υπήρξε ο δεύτερος της μεγάλης τριάδας των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων -Σωκράτης, Πλάτων και Αριστοτέλης- που έθεσαν σε συνάφεια ο ένας προς τον άλλον τα φιλοσοφικά θεμέλια του δυτικού πολιτισμού. Ήταν φιλόσοφος και συγγραφέας και γεννήθηκε κατά την 88η Ολυμπιάδα (428/7 π. Χ.) κατά πάσα πιθανότητα στην Κολλυτό της Αττικής¹. Το πραγματικό του όνομα ήταν Αριστοκλής εντούτοις, επειδή είχε πλατύ στέρνο και μέτωπο, ο γυμναστής τού έδωσε το προσωνύμιο Πλάτωνας. Προερχόταν από μια αριστοκρατική οικογένεια, αφού ο πατέρας του Αρίστων ήταν περήφανος για την καταγωγή του από τον μυθικό βασιλιά Κόδρο ενώ η μητέρα του Περικτιόνη ήταν απόγονος του Σόλωνα. Είχε και δύο αδέρφια, τον Αδείμαντο και το Γλαύκωνα.

Ο Πλάτωνας έχασε τον πατέρα του από πολύ νωρίς οπότε την ανατροφή του ανέλαβε -εκτός φυσικά από τη μητέρα του- ο πατριός του Πυριλάμπης. Η ανατροφή του ήταν εχθρική απέναντι στη δημοκρατία που ήταν και το κυρίαρχο πολίτευμα της Αθήνας κατά τις τελευταίες δεκαετίες του 5ου αιώνα π. Χ. Φυσικά πρέπει να αναφέρουμε ότι έλαβε στην παιδική και εφηβική του ηλικία την κατάλληλη γνώση και παιδεία που προοριζόταν για τους νεαρούς αριστοκράτες, η οποία περιλάμβανε τη μελέτη της γραμματικής, της μουσικής και της γυμναστικής.

Μέχρι την ηλικία των 20 ετών ασχολήθηκε με τη ζωγραφική, τον αθλητισμό και κυρίως την ποίηση. Τότε όμως είναι που έρχεται σε επαφή με το Σωκράτη και η

¹ Δήμος της Αττικής που ανήκε στην Αιγηίδα Φυλή και βρισκόταν μάλλον στη δυτική πλευρά της Ακρόπολης, νοτίως της Αγοράς.

γνωριμία αυτή υπήρξε καθοριστικής σημασίας στη ζωή του νεαρού τότε Πλάτωνα, ο οποίος μεταβάλλει οριστικά τον πνευματικό προσανατολισμό του και αποφασίζει να ασχοληθεί αποκλειστικά με τη φιλοσοφία ακολουθώντας τη διδασκαλία του δασκάλου του ως το θάνατο του. Ο Σωκράτης θα πρωταγωνιστήσει στα περισσότερα έργα των διαλόγων του Πλάτωνα και μέσα από αυτόν θα εκφράσει ακόμη και τις προσωπικές του σκέψεις.

Είναι γεγονός ότι έδειξε ενδιαφέρον για την πολιτική κι ήθελε να αναμειχθεί στα κοινά του τόπου. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν έγινε ποτέ πιθανότατα για δύο λόγους. Ο πρώτος αφορούσε την εμπλοκή μελών της οικογένειάς του στην υπόθεση των Τριάκοντα τυράννων και το συνακόλουθο στίγμα που του επέφερε. Ο δεύτερος έχει να κάνει με τη θανατική ποινή κι εκτέλεση που επέβαλε η αποκατεστημένη δημοκρατία στο δάσκαλό του Σωκράτη. Το γεγονός αυτό άλλαξε οριστικά κι αμετάκλητα όλη την κοσμοθεωρία του με αποτέλεσμα να εγκαταλείψει μια για πάντα την αρχική του πρόθεση να σταδιοδρομήσει στα κοινά. Έπειτα από το θάνατο του Σωκράτη καταφεύγει στα Μέγαρα, στο φιλόσοφο Ευκλείδη.

Ο Πλάτων έκανε αρκετά ταξίδια στη ζωή του. Μεταξύ άλλων, επισκέφτηκε την Αίγυπτο καθώς επίσης πήγε και τρεις φορές στη Σικελία και την Κάτω Ιταλία. Εκεί ήρθε σε επαφή με τον Πυθαγορισμό και τον εξέχοντα εκπρόσωπό του, τον Αρχύτα το Σαραντίνο, αλλά και με το Διονύσιο τον Α΄, τύραννο των Συρακουσών.

Όταν επέστρεψε πίσω στην Αθήνα από το πρώτο του ταξίδι στη Σικελία ο Πλάτων ιδρύει τη σχολή του, την περίφημη Ακαδημία (περίπου στα 388-7 π. Χ.). Ήταν ουσιαστικά ένα ίδρυμα που προήγαγε την επιστημονική μελέτη κι έρευνα γεγονός που καθίστα την Ακαδημία κάτι σαν προάγγελο των σύγχρονων πανεπιστημίων. Το ίδρυμα λειτούργησε εννέα αιώνες και έκλεισε από τον Ιουστινιανό το 529 μ. Χ.. Τα μαθήματα που διδάσκονταν εκεί πρέπει να έμοιαζαν πολύ με αυτά που ο Πλάτωνας ορίζει στην Πολιτεία του ως ιδανική παιδεία των φυλάκων, της ανώτερης τάξης που ασκεί την εξουσία. Το σίγουρο πάντως ήταν πως τα μαθηματικά έπαιζαν κυρίαρχο ρόλο αφού θεωρούνταν η απαραίτητη προετοιμασία για τη διδασκαλία της διαλεκτικής. Ενδεικτικό είναι ότι, σύμφωνα με μια αρχαία παράδοση, στην είσοδο της Ακαδημίας υπήρχε μια επιγραφή στην οποία κάποιος μπορούσε να διαβάσει *‘Αγεωμέτρητος μηδεις είσητω’*.

Τα τελευταία χρόνια της ζωής του ο Πλάτωνας αφοσιώθηκε στη μεγαλύτερη εμβάθυνση του φιλοσοφικού του στοχασμού όπως και στη σύνταξη των έργων του. Πέθανε περίπου 80 ετών (περίπου στα 348/7) και σύμφωνα με τον Πausanias ενταφιάστηκε κοντά στην Ακαδημία.²

1.2 ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΠΟΛΙΤΕΙΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την Πολιτεία του Πλάτωνα. Πρόκειται για το μεγαλύτερο σε έκταση έργο του το οποίο γράφτηκε κατά την περίοδο της ωριμότητας του φιλοσόφου που είχε πλέον διαμορφώσει ένα δικό του και προσωπικό ύφος. Το έργο πραγματεύεται πολλά και ποικίλα θέματα -μεταξύ άλλων τη δικαιοσύνη, την ηθική, τα πολιτεύματα, την παιδεία- και αποτελεί ένα από τα αριστουργήματα του Πλάτωνα. Φέρει και το δεύτερο τίτλο 'Περί Δικαίου' και χωρίζεται σε 10 βιβλία. Πιθανολογείται πως γράφτηκε μεταξύ του 380 και 370 μ. Χ. όταν ο φιλόσοφος ήταν περίπου στην ηλικία των 55 ετών.

Στο έργο αυτό τον πρώτο ρόλο κατέχει ο Σωκράτης. Ακόμα, συμμετέχουν τα δύο μεγαλύτερα αδέρφια του Πλάτωνα, ο Γλαύκων και ο Αδείμαντος, ένας πλούσιος μέτοικος, ο Κέφαλος, ο μεγαλύτερος γιος του, ο Πολέμαρχος, ο σοφιστής Θρασύμαχος και ο Κλειτοφών. Ο Σωκράτης με το Γλαύκωνα είχαν πάει ως τον Πειραιά προκειμένου να παρακολουθήσουν τη γιορτή μιας θεότητας και στην επιστροφή τους επισκέφτηκαν τον Κέφαλο στο σπίτι του. Εκεί, η συζήτηση αναπτύχθηκε γύρω από τη φύση της αδικίας και την έννοια της δικαιοσύνης. Ο Σωκράτης τους παροτρύνει να προσεγγίσουν το θέμα δημιουργώντας μια θεωρητική πόλη – κράτος και αναλύοντας τη λειτουργία της από το πρώτο στάδιο μέχρι και την πλήρη ανάπτυξή της.

Στα πλαίσια της παρούσης εργασίας θα ασχοληθούμε με το διάλογο που εκτυλίσσεται μεταξύ του Σωκράτη και του Γλαύκωνα από το τέλος του 5^{ου} βιβλίου ως και το 7^ο.

² Franco Montanari, *Ιστορία της αρχαίας ελληνικής λογοτεχνίας- Από τον 8ο αι. π.Χ. έως τον 6ο αι.μ.Χ.*, επιμέλεια: Δ.Ιακώβ-Α.Ρεγκάκος (Θεσσαλονίκη: University Press, 2008) σ. 627.

1.3 ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΙΔΕΩΝ

Ο Πλάτωνας πίστευε πως ο κόσμος είναι χωρισμένος σε δύο επίπεδα, στον κόσμο των αισθητών πραγμάτων και στον κόσμο των Ιδεών. Έτσι, ο μεν πρώτος αποτελείται από τα αντικείμενα που μάς περιβάλλουν και τα οποία γίνονται αντιληπτά μέσα από τις αισθήσεις μας, ενώ ο δε δεύτερος έχει να κάνει με τις Ιδέες των αντικειμένων.

Ο φιλόσοφος είναι της άποψης ότι τα αισθητά αντικείμενα δεν είναι πραγματικά όντα. Οι άνθρωποι όμως, ζώντας μέσα σε μία πλάνη, πιστεύουν πως αυτά που αγγίζουν και βλέπουν, αυτά που αντιλαμβάνονται με τις αισθήσεις τους είναι πραγματικά. Ο Πλάτων από την άλλη υποστηρίζει πως τα αντικείμενα αυτά απλώς αποτελούν αντικατοπτρισμό, είναι είδωλα των πραγματικών αντικειμένων. Φυσικά το εύλογο ερώτημα που δημιουργείται εδώ είναι ποιών αντικειμένων αποτελούν είδωλα τα αισθητά αντικείμενα. Η απάντηση που δίνει ο Πλάτωνας είναι ότι αποτελούν είδωλα των Ιδεών. Σύμφωνα με τη θεωρία του οι Ιδέες απλώνονται στο επίπεδο του νοητού κόσμου και πραγματική γνώση μπορούμε να έχουμε μόνο γι' αυτές. Τι ακριβώς όμως είναι αυτές οι Ιδέες; Πρόκειται για κάποιες νοητές οντότητες που είναι αυθύπαρκτες κι έχουν συνεπώς μια δικιά τους οντολογική υπόσταση. Παρότι η ανθρώπινη νόηση αδυνατεί να αντιληφθεί την υφή τους αυτές υπάρχουν και αποτελούν τις αιτίες των αισθητών.³ Είναι από τη φύση τους αμετάβλητες και οντολογικά πλήρως επαρκείς και αποτελούν τα πραγματικά αντικείμενα της γνώσης.⁴

Βέβαια, σ' αυτό το σημείο πρέπει να ξεκαθαρίσουμε πως η θεωρία των Ιδεών δεν είναι απολύτως σαφής ως προς τις λεπτομέρειές της στα έργα του Πλάτωνα και συχνά παρατηρούνται αντιφάσεις. Έτσι, για παράδειγμα αλλού συναντάμε κατηγορηματικά ότι 'η Ιδέα είναι ένα καθόλου, διακριτό από τα καθ' έκαστα' κι αλλού δεν είναι τόσο κατηγορηματικός.⁵ Επίσης, ενώ ισχυρίζεται στα περισσότερα έργα του ότι οι Ιδέες είναι αιώνιες και αδημιούργητες σε κάποια σημεία αναφέρει ότι ο Θεός τις δημιουργεί.⁶ Γενικά χαρακτηρίζεται από μια προχειρότητα στα χαρακτηριστικά των Ιδεών και αυτό

³ Πάνος Δήμας, 'Η φιλοσοφία του Πλάτωνα', στο Βισβιδάκης Σ., *Η Ελληνική Φιλοσοφία από την Αρχαιότητα έως τον 20ό Αιώνα*, (Πάτρα: ΕΑΠ, 2000) σ. 141.

⁴ Πάνος Δήμας, 'Η φιλοσοφία του Πλάτωνα', σ. 146.

⁵ Julia Annas, *An Introduction to Plato's Republic*, (Oxford, 1981) σ. 290.

⁶ Annas, *An Introduction to Plato's Republic*, σ. 291.

που φαίνεται κυρίως να τον απασχολεί είναι η ύπαρξή τους. Εξάλλου, αξίζει να αναφέρουμε το γεγονός ότι εισάγονται στο έργο του σα να είναι κιάλας αποδεκτές από τα πρόσωπα των διαλόγων του και πουθενά δε γίνεται κάποια προσπάθεια για να αποδειχτεί η ύπαρξή τους.⁷ Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι προτείνει να γίνουν δεκτές ως αξιώματα.

Κατόπιν τούτων, αποστολή του κάθε ανθρώπου θα πρέπει να είναι η συνειδητοποίηση της πλάνης στην οποία βρίσκεται και να προσπαθήσει να ξεφύγει από τον κόσμο του ψεύδους, τον αισθητό, φτάνοντας στη γνώση της αλήθειας. Έτσι θα έχει γνωρίσει τις Ιδέες των όντων κατακτώντας τη γνώση. Φυσικά αυτή η προσπάθεια είναι πολύ δύσκολη και το μέσο για να επιτευχθεί με επιτυχία είναι η παιδεία. Πιο συγκεκριμένα, ο άνθρωπος μέσα από τη μελέτη των επιστημών και κυρίως των μαθηματικών θα φτάσει στην ανώτερη επιστήμη όλων, τη διαλεκτική κι από εκεί θα οδηγηθεί στην υπέρτατη Ιδέα, την Ιδέα του Αγαθού. Άρα, αυτός που θα διδαχτεί φιλοσοφία θα σπάσει τα δεσμά της πλάνης και θα δει την αληθινή ουσία των πραγμάτων. Κατά τον Πλάτωνα ο άνθρωπος που θα καταφέρει να φτάσει σε αυτό το επίπεδο δε μπορεί παρά να μην είναι ο καταλληλότερος για να αναλάβει τη διακυβέρνηση μιας πόλης.

⁷ Annas, *An Introduction to Plato's Republic*, σ. 297.

Η ΓΡΑΜΜΗ, ΤΟ ΣΠΗΛΑΙΟ & ΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Η παρομοιώσεις της Γραμμής και της Σπηλιάς στη Πολιτεία του Πλάτωνα δυσκολεύουν την εύρεση μιας ερμηνείας που να ευσταθεί τόσο σε φιλοσοφικό αλλά και σε φιλολογικό επίπεδο.

Η επικρατούσα ερμηνεία υποστηρίζει ότι υπάρχει παραλληλισμός που βασίζεται σε ένα τετραμερή διαχωρισμό ψυχικών καταστάσεων (511d7) ή επιπέδων διαφώτισης (514a-517e). Μάλιστα, θεωρείται ότι υπάρχει μία προς μία αντιστοιχία ανάμεσα στα τέσσερα επίπεδα της Σπηλιάς και στα τέσσερα τμήματα της Γραμμής.

Η ερμηνεία όμως αυτή είναι δύσκολη διότι καταρχάς δεν φαίνεται η αντιστοιχία μεταξύ των αντικειμένων της γνώσης (σκιές και αντανακλάσεις) του κατώτερου τμήματος της Γραμμής (εικασία, L1) και των αντικειμένων γνώσης του αλυσοδεμένου φυλακισμένου στη σπηλιά ο οποίος βλέπει τις σκιές στον τοίχο (C1). Η δεύτερη δυσκολία της ερμηνείας αυτής αφορά την επεξήγηση της ισότητας που προκύπτει σύμφωνα με τον Πλάτωνα μεταξύ των L2 και L3 τμημάτων της Γραμμής.

Σε αντιδιαστολή με τις παραπάνω δύο δυσκολίες ο κ. Βασίλης Καρασμάνης υποστηρίζει πως όντως υπάρχει παραλληλισμός μεταξύ της Γραμμής και της Σπηλιάς ενώ ταυτόχρονα εξαλείφει το πρόβλημα γύρω από τα ‘αντικείμενα των μαθηματικών’ τα οποία είναι αποδεκτά από την επικρατούσα ερμηνεία. Προτείνει πως υπάρχει ένας πρωτεύων οντολογικός διαχωρισμός μεταξύ των αντικειμένων της δόξας και της νόησης (υποκεφάλαιο II.2) και ένας δευτερεύων διαχωρισμός μεταξύ των δύο κυρίως τμημάτων της Γραμμής (εικασία/πίστη και διάνοια/επιστήμη). Αυτός ο δευτερεύων διαχωρισμός εμπεριέχει μεθοδολογικές διαφορές αλλά και διαφορές μεταξύ αυτών που αντιλαμβάνονται τις εικόνες ως πραγματικότητα και αυτών που δεν τις θεωρούν

(υποκεφάλαια II.6-II.7). Ακόμη υποστηρίζει πως η Γραμμή συνδέει τον Ήλιο με τη Σπηλιά, μέσω του συμβολισμού του Ήλιου. Εκεί το ορατό συμβολίζει το νοητό και επανεισάγοντας τον διαχωρισμό δόξας/νόησης, προετοιμάζει το δρόμο για το Σπήλαιο (υποκεφάλαιο II.3). Έτσι, το κάτω τμήμα της Γραμμής (L1+L2) επεξηγεί την πάνω (L3 + L4) και άρα υποδεικνύεται πως η Σπηλιά με τα εκπαιδευτικά της επίπεδα δίνει το πραγματικό νόημα των δύο κατώτερων καταστάσεων της ψυχής (υποκεφάλαιο II.4).⁸

Ο Πλάτωνας μεταχειρίζεται τον μαθηματικό συλλογισμό ως μία μετάβαση από τη σκέψη του αισθητού κόσμου στη σκέψη του νοητού. Διαχωρίζοντας τα εμπειρικά και τα θεωρητικά μαθηματικά ο κ. Β. Καρασμάνης υποστηρίζει πως η πίστη και η διάνοια, ως εκπαιδευτικά επίπεδα στο Σπήλαιο, σχετίζονται με τα μαθηματικά. Καταντών τον τρόπο εξηγείται και η ισότητα $L2=L.3$ (υποκεφάλαια II.5, II.6, II.7).⁹

II.1 ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εδώ, θα μελετηθεί η παρομοίωση του Σπηλαίου το οποίο εμφανίζεται να αποτελείται από πολλά επίπεδα, από τον φυλακισμένο μέχρι την όραση του ήλιου.¹⁰ Μέσω των σχέσεων εικόνας/πραγματικότητας και φωτιάς/ήλιου διαπιστώνεται πως υπάρχουν τέσσερις βασικοί διαχωρισμοί. Ο κύριος διαχωρισμός αφορά το κόσμο της Σπηλιάς και τον πραγματικό κόσμο μέσω της σχέσης φωτιάς/ήλιου. Μέσα σε κάθε κόσμο υπάρχει και ένας δεύτερος διαχωρισμός εικόνας/πραγματικότητας. Άρα τα τέσσερα επίπεδα της Σπηλιάς είναι τα εξής:

- 1) ο αλυσοδεμένος φυλακισμένος βλέπει μόνο σκιές στον τοίχο
- 2) ο απελευθερωμένος φυλακισμένος μέσα στη Σπηλιά βλέπει ομοιώματα
- 3) ο απελευθερωμένος φυλακισμένος έξω από την Σπηλιά βλέπει τις σκιές και τις αντανακλάσεις των πραγματικών αντικειμένων
- 4) ο απελευθερωμένος φυλακισμένος έξω από την Σπηλιά βλέπει τα αληθινά αντικείμενα

⁸ Vassilis Karasmanis, 'Plato's Republic: The Line and the Cave', Markus Asper και Christian Wildberg (εκδ.), Apeiron, 47 vols (ΗΠΑ: Sept. 1988), XXI (issue 3), σσ. 148-149.

⁹ Karasmanis, 'Plato's Republic: The Line and the Cave', σ. 149.

¹⁰ Richard Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, (Oxford: Auflage, 1953) σ.182, αναφέρει τα οχτώ διαφορετικά επίπεδα της Σπηλιάς.

Στο εδάφιο 517a8-b1 ο Πλάτωνας αναφέρει πως ‘πρέπει να την συνδέσουμε (τη Σηλιά) με όσα λέγαμε πρωύτερα’.¹¹ Αυτό άλλοι μελετητές το ερμηνεύουν ως παραλληλισμό μεταξύ Γραμμής-Σηλαίου ενώ άλλοι δίνουν μια πιο ευρεία ερμηνεία χωρίς να αποκλείουν βέβαια και τη πιθανότητα του παραλληλισμού. Υπάρχει και μία τρίτη ερμηνεία που θέλει να συνδέεται η Σηλιά άμεσα με τον Ήλιο και έμμεσα με τη Γραμμή.

Γενικά συμπεραίνουμε πως ο Πλάτωνας επιδιώκει να συνδέσουμε τη Σηλιά με τη Γραμμή παρά με τον Ήλιο. Ο πρώτος λόγος βρίσκεται στο εδάφιο 517a-b. Εκεί, ο Σωκράτης συγκρίνει ‘τη περιοχή που μας αποκαλύπτεται διαμέσου της όρασης’ με τη ‘διαμονή στο δεσμοτήριο’, ‘το φως της φωτιάς’ με ‘τη δύναμη του ήλιου’ και ‘το ανέβασμα προς τα επάνω’ με ‘την άνοδο της ψυχής στο νοητό τόπο’.¹² Η Σηλιά όπως και το κάτω τμήμα της Γραμμής, συμβολίζουν τον ορατό κόσμο, ο οποίος δεν υπάρχει στον Ήλιο, όπου ο ορατός κόσμος συμβολίζει το νοητό κόσμο. Επομένως, το κατώτερο τμήμα της Γραμμής (L1+L2) και τα επίπεδα C1+C2 του Σηλαίου είναι παραλληλισμοί. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι στη Γραμμή και στο Σηλαίο -αλλά όχι στον Ήλιο- έχουμε άνοδο από κατώτερες καταστάσεις σε ανώτερες αλλά και την ευρεία χρήση της σχέσης σκιάς (ειδώλου)/ γνήσιου αντικειμένου. Τέλος, στο εδάφιο 532a-534a, παρουσιάζεται ξανά μια στενή σχέση μεταξύ της Γραμμής και της Σηλιάς.

II.2 ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ

Στο τέλος του πέμπτου Βιβλίου ο Πλάτωνας εισάγει τον διαχωρισμό μεταξύ των δύο δυνάμεων της δόξας και της νόησης (ή επιστήμης). Σύμφωνα με τον Πλάτωνα (477d) δύο δυνάμεις είναι ίδιες εάν έχουν το ίδιο αποτέλεσμα στα ίδια αντικείμενα και διαφέρουν εάν έχουν διαφορετικές επιπτώσεις σε διαφορετικά αντικείμενα. Η δόξα και η νόηση, ως διαφορετικές δυνάμεις, έχουν διαφορετικά αντικείμενα. Η δόξα τοποθετείται μεταξύ της γνώσης και της άγνοιας και τα αντικείμενά της είναι μεταβλητά (δεν έχουν παντοτινή υπόσταση) και βρίσκονται μεταξύ της ύπαρξης και της μη ύπαρξης (478d).

¹¹ Νικόλαος Μ. Σκουτερόπουλος, *Πλάτων Πολιτεία*, (Αθήνα: Πόλις, 2009) σ. 509.

¹² Σκουτερόπουλος, *Πλάτων Πολιτεία*, σ. 509.

Αυτός που κατέχει τη γνώση (ο φιλόσοφος – 480a11) βλέπει το ‘μοναδικό’, την Ιδέα. Αυτός που κατέχει τη δόξα (ο φίλος της γνώμης – 480a12, 476b4) βλέπει τα ‘πολλά’ (476a, 479e). Αναφορικά με την Ιδέα (π.χ. η Ιδέα του Ωραίου) υπάρχουν τρία είδη του «πολλά»: α) πολλά όμορφα πράγματα, β) πολλές όμορφες πράξεις και 3) πολλές χρήσεις, πολλοί θεσμοί ή πολλά είδη όμορφων πραγμάτων ή πράξεων (479a, 538d e).¹³ Άρα η λέξη ‘πολλά’ δεν αφορά μόνο αισθητά πράγματα (πρβλ. 507b2-3, Μένων 72c and Συμπόσιο 210b).¹⁴

Η δόξα και η νόηση έχουν διαφορετικό βαθμό σαφήνειας και διαφώτισης (478c, πρβλ. 518c5-10, 532c6-8). Στην παρομοίωση του Ήλιου, η διαφορά μεταξύ της δόξας και της νόησης συγκρίνεται με τη διαφορά μεταξύ των φώτων της νύχτας και του φωτός του ήλιου (508c6). Αντίστοιχα στην Σπηλιά είναι η διαφορά μεταξύ της φωτιάς στο Σπήλαιο και του φωτός που ρίχνει ο ήλιος στον πραγματικό κόσμο. Η σχέση δόξας/νόησης συγκρίνεται και με τη σχέση ονείρου και ξύπνιου (476c2-d6, 534c5-7) ενώ τα αντικείμενά τους αντιστοιχούν στη σχέση ειδώλου/γνήσιου αντικειμένου (510a9-10). Ο Πλάτωνας διασαφηνίζει τη σχέση ονείρου/ξύπνιου στο 476c5-7. Καταλήγει πως αυτός που ονειρεύεται βλέπει μια εικόνα αντί για πραγματικότητα την οποία και θεωρεί αληθινή. Επομένως, πιστεύει ότι υπάρχει μόνο ένα επίπεδο, αυτό των εικόνων.

Τα όνειρα χαρακτηρίζονται από ασάφεια, δεν έχουν συνοχή και είναι εφήμερα.¹⁵ Αντίστοιχα και η δόξα είναι ασαφής σε σχέση με τη νόηση ή την επιστήμη (478c, 479c, 511e) δεν έχει συνοχή (479a-b, 523e-4c, 583e-589a, 602c) και είναι εφήμερη (508d). Τα ίδια χαρακτηριστικά συναντώνται και σε ένα είδωλο, όταν αυτό συγκρίνεται με το γνήσιο αντικείμενο. Το ζητούμενο στη περίπτωση, ειδώλου/γνήσιου αντικειμένου, είναι εάν ο άνθρωπος βλέποντας το είδωλο προσπαθεί να κατανοήσει τα πραγματικά αντικείμενα,¹⁶ ή απλώς αντιλαμβάνεται τα είδωλα ως πραγματικότητα.¹⁷¹⁶ Φαίνεται πως

¹³ Αναφορικά με το ‘πολλά’ ως πολλά είδη πραγμάτων, βλ. J. C. B. Gosling, ‘Republic Book V: τά πολλά καλά, etc.’, *Phronesis*, 58 vols (BRILL, 1960), V (issue 2), σσ. 116-128.

¹⁴ Στο *Θεαίτητο* 156b1-c2, η λίστα των αισθήσεων που αναφέρει ο Πλάτωνας περιλαμβάνει -πέρα από την όραση, την ακοή κτλ.- ηδονές και πόνους, επιθυμίες και φόβους.

¹⁵ David Gallop, ‘Dreaming and waking in Plato’, J. Anton και G. Kustas (εκδ.), *Essays in Ancient Greek Philosophy*, 5 vols (Albany: NY, 1972), I, σσ. 187-90.

¹⁶ Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, σσ.190-191, Neil Cooper, ‘The Importance of Διάνοια in Plato's Theory of Forms’, (New Series) 16 (1966), σ. 281 και πιθανότατα και Julia Annas, *An Introduction to Plato's Republic* (Oxford, 1981), σ. 281.

η δεύτερη περίπτωση είναι και η επικρατούσα καθώς ο άνθρωπος της δόξας δεν αντιλαμβάνεται την διαφορά που έχουν οι εικόνες από τις Ιδέες και συνεπώς δεν αναγνωρίζει τις τελευταίες ενώ και ο φυλακισμένος που βλέπει σκιές στη Σπηλιά τις περνάει για αληθινές (515b5, 515c2).

II.3 ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ

Στο σημείο αυτό θα εξεταστούν συγκεκριμένες δυσκολίες της Γραμμής. Στο 509d6-9 ο Πλάτωνας μας παρακινεί να τραβήξουμε μία κάθετη γραμμή (511d8) και να τη χωρίσουμε σε δύο άνισα τμήματα. Το πάνω τμήμα αντιπροσωπεύει τον νοητό κόσμο (509d9, 510b2) και το κάτω, τον αισθητό. Ας θεωρήσουμε σύμφωνα με τον Πρόκλο,¹⁸ πως το πάνω τμήμα είναι μεγαλύτερο. Εν συνεχεία, υποδιαιρούμε το κάθε τμήμα στην ίδια αναλογία και έτσι προκύπτει $L1+L2/L3+L4=L1/L2=L3/L4$, από όπου παίρνουμε $L2=L3$. Σύμφωνα με τον Πλάτωνα (509e1-510a6) το L1 αντιπροσωπεύει τα είδωλα (σκιές και αντανakλάσεις) και το L2 τα γνήσια αντικείμενα των ειδώλων (φυτά, ζώα, ανθρώπινα κατασκευάσματα).

Στο εδάφιο 511d6-e4 ο Πλάτωνας λέει ότι τα τέσσερα αυτά τμήματα συμβολίζουν τέσσερις καταστάσεις ψυχής-μυαλού (L1→η εικασία, L2→η πίστη, L3→η διάνοια, L4→η νόηση) οι οποίες 'πρέπει να καταταχτούν σύμφωνα με μία αναλογία τέτοια ώστε ο βαθμός της σαφήνειάς τους να ανταποκρίνεται στο βαθμό που τα αντικείμενα τους έχουν μερτικό στην αλήθεια και το ον'.¹⁹

Η λέξη 'αναλογία' έχει δυφορούμενη έννοια και μπορεί να αναφέρεται σε μία συνεχόμενη ($L1/L2=L2/L3=L3/L4$) ή μη αναλογία ($L1/L2=L3/L4$). Πάντως επειδή η μαθηματική ορολογία δεν είχε ακόμα παγιωθεί στον καιρό του Πλάτωνα –κάτι που έγινε επί Ευκλείδη– δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε ασφαλές συμπέρασμα. Γενικότερα

¹⁷ Richard L. Nettleship, *Lectures on the Republic of Plato*, (London: Macmillan, 1901), σσ. 238-263, David W. Hamlyn, 'Eikasia in Plato's Republic', St. Andrews, Scot. (εκδ.), *Philosophical Quarterly*, 62 vols (Oxford University Press, 1958), VIII (issue 3), σσ. 14-23, Richard Cross and Anthony D. Woozley, *Plato's Republic: A Philosophical Commentary*, (London: Macmillan, 1964), σ. 219, Gallop, 'Dreaming and waking in Plato', σσ. 191-193.

¹⁸ Lycaeus Proclus, 'In Platonis Rem publicam commentarii', Wilhelm Kroll (εκδ.), 2 vols (Amsterdam: Teubner, 1965), I, σσ. 288-9.

¹⁹ Νικόλαος Μ. Σκουτερόπουλος, 'Πλάτων Πολιτεία' (Αθήνα: Πόλις, 2009), p. 501

φαίνεται ότι ο Πλάτωνας θεωρεί ότι οι ανώτερες καταστάσεις βρίσκονται πιο κοντά στην αλήθεια από ότι οι κατώτερες. Στο εδάφιο 533e7-534a8 προκύπτει άλλη μια μαθηματική σχέση της Γραμμής: $L1+L2/L3+L4=L1/L3=L2/L4$, όπου ούτε και εδώ δεν είμαστε σίγουροι αν η αναλογία είναι συνεχόμενη ή όχι.

Υπάρχουν, λοιπόν, τρεις διαφορετικές μαθηματικές σχέσεις για τις αναλογίες της Γραμμής. Η πρώτη δίνει μια μη συνεχόμενη αναλογία, δηλ. $L1/L2=L3/L4$ η οποία υπονοεί ότι $L2=L3$, η δεύτερη μια συνεχόμενη ($L1/L2=L2/L3=L3/L4$) ενώ για τη τρίτη ($L1+L2/L3+L4=L1/L3=L2/L4$) δεν γνωρίζουμε αν είναι συνεχόμενη ή μη. Οι δύο πρώτες σχέσεις είναι μαθηματικά ασύμβατες γι' αυτό το λόγο πολλοί μελετητές τις απορρίπτουν. Αν όμως έπρεπε να διαλέξουμε ανάμεσα σε αυτές τις δύο πρώτες σχέσεις θα επιλέγαμε τη πρώτη γιατί είναι ευκρινώς ορισμένη εν αντιθέσει με τη δεύτερη που δε μας δίνει όλες τις αναλογίες.²⁰

Οι μελετητές που δεν δέχονται την ισότητα $L2=L3$ ισχυρίζονται ότι η αναλογία της Γραμμής βρίσκεται ανάμεσα στο $L2$ και στο $L3$, δηλ. $L2/L3=L1/L2$. Άρα τα αντικείμενα της πίστης είναι εικόνες των αντικειμένων της διάνοιας. Μα ο Πλάτων πουθενά δεν αναφέρει κάτι τέτοιο οπότε η παραπάνω γνώμη πρέπει να απορριφθεί.

Ένα ακόμη στοιχείο που παρατηρείται στη Γραμμή είναι πως δεν γνωρίζουμε αν οι τέσσερις καταστάσεις της ψυχής υπονοούν τέσσερα διαφορετικά είδη αντικειμένων ή όχι. Ο Πλάτωνας υποδεικνύει δύο διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των καταστάσεων: στο εδάφιο 509e1-510a6, δηλώνεται πως ο διαχωρισμός μεταξύ των δύο τμημάτων της κατώτερης γραμμής γίνεται σύμφωνα με τα αντικείμενά τους, ενώ στο εδάφιο 510b-511d ο διαχωρισμός μεταξύ της διάνοιας και της επιστήμης γίνεται με βάση τις μεθόδους τους. Ενδέχεται το κάτω τμήμα της Γραμμής να είναι επεξηγηματικό του άνω τμήματος και τα διαφορετικά αντικείμενά της να επεξηγούν τη σχέση ειδώλου/γνήσιου αντικειμένου. Άρα είναι πιθανό πως οι αληθινές σκιές και τα πραγματικά φυσικά αντικείμενά τους να μην είναι τα αληθινά αντικείμενα της εικασίας και της πίστης. Συνεπώς, δεν μπορούμε να έχουμε κάποιο απόλυτα βέβαιο στοιχείο από αυτό το απόσπασμα. Το μόνο σίγουρο είναι ο μεθοδολογικός διαχωρισμός ανάμεσα στη διάνοια και την επιστήμη.

Στη περίπτωση που κάθε κατάσταση της ψυχής αντιστοιχεί σε διαφορετικά αντικείμενα, τότε τα αντικείμενα της διάνοιας πρέπει να έχουν διαφορετική οντολογική

²⁰ Karasmanis, 'Plato's Republic: The Line and the Cave', σ. 154.

υπόσταση από αυτά της επιστήμης. Αυτή η άποψη βρίσκει ανταπόκριση στη Μεταφυσική του Αριστοτέλη ο οποίος αναφέρεται στην ύπαρξη μαθηματικών ενδιάμεσων αντικειμένων στον Πλάτωνα.²¹ Ο κύριος υποστηρικτής της παραπάνω θεωρίας είναι ο J. Adam ο οποίος ισχυρίζεται πως τα μαθηματικά είναι ενδιάμεσο αντικείμενο της διάνοιας.²² Παρά ταύτα πουθενά στην Πολιτεία ο Πλάτωνας δεν διευκρινίζει την ύπαρξη ενδιάμεσων αντικειμένων. Αντιθέτως, υπάρχουν δύο αποσπάσματα (510d7-8, 511d2) τα οποία αποκαλύπτουν ότι ο Πλάτωνας βλέπει τα αντικείμενα της διάνοιας ως Ιδέες.

Παρόλα αυτά, στο απόσπασμα (534a4-8) φαίνεται ότι ο Πλάτωνας αναγνωρίζει το πρόβλημα της αντιστοιχίας διαφορετικών αντικειμένων στις διαφορετικές καταστάσεις της ψυχής.²³ Ο Πλάτωνας μιλάει για τα αντικείμενα και τις σχέσεις τους με τις τέσσερις καταστάσεις της ψυχής και αναγνωρίζει ότι οι σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων τους είναι ένα μεγαλύτερο πρόβλημα από αυτό των νοητών σχέσεών τους. Άρα λοιπόν, δεν είναι ξεκάθαρο αν ο Πλάτωνας αποδίδει με σιγουριά διάφορα αντικείμενα στις διάφορες καταστάσεις της ψυχής.

Η γνώμη του κ. Β. Καρασμάνη είναι ότι δεν υπάρχουν ενδιάμεσα αντικείμενα στην Πολιτεία του Πλάτωνα αφού όπως φαίνετε η διάκριση διάνοιας και επιστήμης έχει μεθοδολογικό και όχι οντολογικό χαρακτήρα. Πιστεύει ότι τα αντικείμενα της διάνοιας είναι οι Ιδέες.²⁴

²¹ Βλ. π.χ. 987b14-18, 1028b18-21, 1086a2, 1076a19-21, κτλ. Πρβλ. Lycaeus Proclus, *In Euclidem*, G. Friedlein (εκδ.), (Teubner, 1873), σσ. 3-4, Συριανός, 'Σχόλια στα Μεταφυσικά του Αριστοτέλη', Wilhelm Kroll (εκδ.), *GAG*, 23 vols, (Βερολίνο: 1902), VI (issue 1), 82.20-26.

²² James Adam, *The Republic of Plato, Volume 2, Books VI-X and Indexes*, James Adam (εκδ.), (Cambridge: Cambridge University Press, 1902), Παράρτημα I στο Βιβλίο VII.

²³ Ian. M. Crombie, 'An Examination of Plato's Doctrines, Vol. II: Plato on Knowledge and Reality', Norman Gulley (εκδ.), *The Philosophical Quarterly*, 62 vols (London: Routledge, 1963), XV (issue 61), σ. 93, Anders Wedberg, *Plato's Philosophy of Mathematics*, (Stockholm: 1955), σ. 108, Myles Fredric Burnyeat, 'Platonism and Mathematics in Aristotle: A Prelude to Discussion', A. Graeser, ed., *Mathematics and Metaphysics in Aristotle* (Xth Symposium Aristotelicum), Stuttgart, 1987. Ο Burnyeat πιστεύει ότι το κύριο πρόβλημα του πάνω τμήματος της Γραμμής είναι οντολογικής και όχι μεθοδολογικής φύσης.

²⁴ Το ζήτημα των ενδιάμεσων θα μας απασχολήσει στο επόμενο κεφάλαιο διεξοδικότερα και πιο συγκεκριμένα στα αντικείμενα των μαθηματικών. Karasmanis, 'Plato's Republic: The Line and the Cave', σ. 157.

Αυτό που πρέπει να τονιστεί είναι πως η κεντρική και βασική ιδέα στην Πολιτεία του Πλάτων είναι η διάκριση ανάμεσα στη δόξα και τη νόηση δηλ. ανάμεσα στον αισθητό κόσμο και στον νοητό.

Άλλο ένα στοιχείο προβληματισμού στη Γραμμή είναι αν η κατώτερη γραμμή (L1+L2) αντιπροσωπεύει το κόσμο της δόξας ή τον αισθητό κόσμο. Λογικά η κατώτερη γραμμή υποδηλώνει το κόσμο της δόξας παρότι ο Πλάτωνας αναφέρει πως αντιπροσωπεύει τον αισθητό κόσμο (509d-510a). Σύμφωνα με την ‘Αιρετική’ άποψη²⁵ του Ferguson η δόξα δεν υπάρχει στη Γραμμή και η κατώτερη γραμμή αντιπροσωπεύει τον αισθητό κόσμο ο οποίος (όπως και στον Ήλιο) συμβολίζει τον νοητό κόσμο που απεικονίζεται από την πάνω γραμμή, δηλ. η κάτω γραμμή είναι επεξηγηματική της πάνω. Η άποψη αυτή όμως παρουσιάζει τις εξής δυσκολίες: α) ο Πλάτωνας δίνει μια συνεχόμενη πορεία στη Γραμμή και όχι δύο παράλληλες γραμμές, β) στο απόσπασμα 510a9 υπάρχει μια αντίθεση μεταξύ της άποψης και της γνώσης, γ) ο Πλάτωνας δε θα μπορούσε ποτέ να πει πως η διάνοια χρησιμοποιεί τα αντικείμενα της πίστης ως είδωλα αν το κάτω τμήμα της Γραμμής ήταν μόνο επεξηγηματικό του πάνω τμήματος, δ) στο απόσπασμα 511d-e, λέει ότι τα δύο κατώτερα τμήματα της Γραμμής αντιπροσωπεύουν αληθινές καταστάσεις της ψυχής του μυαλού, και ε) στο απόσπασμα 534a ο Πλάτωνας ξεκαθαρίζει πως $L1+L2=δόξα$.

Ο Raven²⁶ προτείνει μια πιο αληθοφανή ερμηνεία υποστηρίζοντας πως το αισθητό κομμάτι του Ήλιου συμβολίζει το νοητό. Στο εδάφιο 509c, ο Γλαύκων ζητάει περισσότερες λεπτομέρειες για το Αγαθό και το νοητό κόσμο. Άρα η Γραμμή θεωρείται συνέχεια του Ήλιου και τα δύο βασικά της τμήματα αντιπροσωπεύουν τον ορατό και το νοητό κόσμο. Έστω ότι το κάτω κομμάτι της Γραμμής επεξηγεί το πάνω τότε η σχέση ειδώλου/γνήσιου αντικειμένου επεξηγεί τη σχέση L3/L4. Ωστόσο, πέρα από το βασικό σκοπό της Γραμμής (να εξηγήσει τη νόηση και τις δύο καταστάσεις της στην ψυχή) αποσκοπεί να μας προετοιμάσει για τη Σπηλιά δίνοντάς μας τις τέσσερις καταστάσεις της

²⁵ Adam S. Ferguson, ‘Plato’s Simile of Light. Part I. The Similes of the Sun and the Line’, *Classical Quarterly*, 63 vols, (Cambridge University Press, Jul. - Oct., 1921), XV (issue 3/4), σσ. 131-152 και Adam S. Ferguson, ‘Plato’s Simile of Light. Part II. The Allegory of the Cave (Continued)’, *Classical Quarterly*, 63 vols, (Cambridge University Press, Jan., 1922), XVI (issue 1), σσ. 15-28.

²⁶ John Earle Raven, ‘Divided Line, and Cave’, *Classical Quarterly*, 63 vols, (Cambridge University Press, May 1953), III (issue 1-2), σσ. 22-32, πρβλ. John Gould, *The Development of Plato’s Ethics*, (Cambridge: Russell & Russell, 1955), σσ. 71-132.

ψυχής, δύο εκ των οποίων ανήκουν στο κόσμο της δόξας και δύο στο κόσμο της νόησης. Έτσι, η Γραμμή έχει μια δευτερεύουσα χρήση, δηλ. να τονίσει τη διάκριση μεταξύ της δόξας και της νόησης (βλ. 510a9, 510b9, 511d-e, 534a). Σε αυτή τη δευτερεύουσα χρήση της Γραμμής, το κάτω τμήμα αντιπροσωπεύει τη δόξα και όχι μονάχα τον αισθητό κόσμο.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα αυτής της ερμηνείας είναι ότι το απόσπασμα 509d9-510a6, το οποίο αναφέρεται στο περιεχόμενο του αισθητού κόσμου, εξηγεί το ρόλο του πάνω τμήματος της Γραμμής²⁷ και δεν αναφέρεται στα πραγματικά αντικείμενα ή τις μεθόδους της εικασίας και της πίστης. Αν ισχύει αυτό, και δεχτούμε τη μία προς μία αντιστοιχία μεταξύ των τεσσάρων καταστάσεων της Γραμμής και των τεσσάρων επιπέδων της Σπηλιάς, τότε η Σπηλιά θα μας δώσει το πραγματικό νόημα αυτών των δύο καταστάσεων της ψυχής (βλ. υποκεφάλαια II.4 και II.5).

II.4 ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η αλληγορία του Σπηλαίου ξεκινάει με τον Σωκράτη να αναφέρει (514a1-2) ότι η Σπηλιά σχετίζεται με τη φύση του καθημερινού ανθρώπου στην εποχή του και οι διάφορες καταστάσεις που εμφανίζονται στο Σπήλαιο είναι απόρροια της παιδείας ή της α παιδευσίας των ανθρώπων. Η βασική έννοια γύρω από τη παρομοίωση της Σπηλιάς είναι το είδος και τα επίπεδα της εκπαίδευσης του μελλοντικού φιλόσοφου (519c8-d2, πρβλ. 518b-d). Επιπλέον, μέσω του χαμηλότερου επιπέδου της Σπηλιάς ο Πλάτωνας εμμέσως κριτικάρει την τότε κοινωνία την λειτουργία της εκπαίδευσης (βλ. 517a, 517d-e και 520a-d).

Η Σπηλιά μας επαναφέρει στον γενικό διαχωρισμό δόξας-νόησης. Οι δεσμώτες δεν βλέπουν μόνο τις σκιές αλλά ακούνε αντίλαλους (515b), μιλάνε για δικαιοσύνη και πολιτική (520c, 517d, 516c-d). Ακόμη, συναντάμε και τη σχέση ειδώλου/γνήσιου αντικειμένου στο κόσμο μέσα και έξω από τη Σπηλιά.

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει μια σύγκριση μεταξύ των τεσσάρων ψυχικών καταστάσεων της Γραμμής και των τεσσάρων επιπέδων του Σπηλαίου. Η πρώτη

²⁷ Δες τη γλωσσολογική παρομοίωση της παραπάνω φράσης με το απόσπασμα 516a5-8 το οποίο ξεκάθαρα έχει συμβολικό χαρακτήρα.

κατάσταση της Γραμμής είναι η εικασία η οποία φαίνεται να αντιστοιχεί με τη κατώτερη κατάσταση της Σπηλιάς, του αλυσοδεμένου φυλακισμένου. Τα αντικείμενα της εικασίας είναι είδωλα (σκιές και αντανάκλασεις, 509e1-510a3) όπως αντίστοιχα και οι φυλακισμένοι βλέπουν σκιές (515a6-8). Οι φυλακισμένοι στη σπηλιά, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, συμβολίζουν τον μέσο αμόρφωτο άνθρωπο (515a5). Επομένως, αν η εικασία αντιστοιχεί στον δεσμώτη που αντιπροσωπεύει τον καθημερινό άνθρωπο τότε τα αντικείμενα της εικασίας είναι τα αντικείμενα της 'γνώσης' που κατέχει ο καθημερινός άνθρωπος. Αλλά ο καθημερινός άνθρωπος δεν βλέπει μόνο τις σκιές, οπότε φαίνεται είτε πως το κατώτερο επίπεδο στη Σπηλιά καλύπτει όλη δόξας είτε πως η εικασία λείπει από τη Σπηλιά. Οπότε δεν υπάρχει κάποια αντιστοιχία μεταξύ L1 και C1. Το πρόβλημα αυτό λύνεται αν αναλογιστούμε ότι (όπως είπαμε στο τέλος του υποκεφαλαίου III.3) ότι οι σκιές, τα φυτά και τα ζώα στη Γραμμή μπορεί να μην είναι τα πραγματικά αντικείμενα των καταστάσεων της εικασίας και της πίστης αλλά ότι η σχέση σκιάς/πραγματικού αντικειμένου στο κατώτερο τμήμα της γραμμής παραπέμπει στη σχέση ειδώλου/ γνήσιου αντικειμένου όπου εντάσσονται η διάνοια και η επιστήμη. Συνεπώς χρειάζεται να εξετάσουμε τα διάφορα εκπαιδευτικά επίπεδα της Σπηλιάς που θα μας δώσουν το πραγματικό περιεχόμενο της εικασίας και της πίστης. Άρα, το πρόβλημά μας είναι ο προσδιορισμός του καθημερινού ανθρώπου και το επίπεδο μόρφωσής του. Στο Σπήλαιο ο Πλάτωνας μέσω του δεσμώτη περιγράφει τον καθημερινό πολίτη (βλ. 517a, 517d4-e1, πρβλ. 516c8-d7, 520c7-d1) από τον οποίο λείπει η κατάλληλη εκπαίδευση. Το κατώτερο στάδιο της εικασίας περιλαμβάνει εκπαίδευση που έχει να κάνει με την ενασχόληση με την πολιτική, τη μουσική, τη γυμναστική και τη ποίηση.²⁸ Αυτή κατά τον Πλάτωνα είναι παιδεία κατώτατου επιπέδου που αντιστοιχεί σε έναν δεσμώτη, δηλ. στην κατάσταση της εικασίας.

Κάποιοι μελετητές υποστηρίζουν πως η κατάσταση του φυλακισμένου (=εικασία) δεν αντιπροσωπεύει τη ζωή και την εκπαίδευση ενός μέσου ανθρώπου αλλά μια ζωή που έχει διαφθαρεί από τους σοφιστές. Αυτό όμως δε φαίνεται αληθοφανές καθώς: α) οι δεσμώτες είναι η πλειονότητα στη σπηλιά, ενώ στην αληθινή ζωή οι σοφιστές καθώς και

²⁸ Ο Malcolm [John Malcolm, 'The Line and the Cave', 59 vols (*Phronesis*, 1962), VII (issue 1), σσ. 38-45] θεωρεί τη μουσική ως την εκπαίδευση που αποδίδεται από τον Πλάτωνα στο C2. Αλλά για τον Πλάτωνα η εκπαίδευση στη μουσική και στην ποίηση επουδενί δεν μας φέρνει 'πιο κοντά στη πραγματικότητα' (515d2).

αυτοί που έχουν επηρεαστεί από αυτούς είναι οι λίγοι, β) οι σοφιστές είναι επίσης δάσκαλοι μαθηματικών, γραμματικής, κτλ. και δεν μπορούμε να πούμε πως η εκπαιδευτική δραστηριότητα των σοφιστών ανήκει στην εικασία.

Από την άλλη δεν μπορούμε να συνδέσουμε τη πίστη με τους σοφιστές.²⁹ Κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι η κατάσταση C2 αποτελεί έναν εν δυνάμει κίνδυνο για τους μελλοντικούς άρχοντες –αφού ο Πλάτωνας είναι ενάντια στους σοφιστές. Η σοφιστική δεν ανήκει στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα αν και κάποια δευτερεύοντα στοιχεία της διδασκαλίας της π.χ. τα μαθηματικά μπορούν να ανήκουν σε κάποια από τα τρία χαμηλότερα επίπεδα.

Αν παραδεχτούμε ότι ο αλυσοδεμένος φύλακας (ο άντρας της εικασίας) είναι ο καθημερινός πολίτης, τότε η εκπαίδευση ξεκινάει μόλις ο δεσμώτης απελευθερώνεται, δηλ. μέσα στη Σπηλιά (515d). Ο Πλάτωνας το υποδεικνύει αυτό με το να λέει πως η απελευθέρωση του φυλακισμένου γίνεται με τη βία και ο άντρας είναι μπερδεμένος (515d-516a, πρβλ. 518a).³⁰ Η εκπαίδευση απαιτεί καθοδήγηση, ακόμη και καταναγκασμό.³¹⁻³⁵

II.5 ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα γίνει μία προσέγγιση της πίστης και δεχόμενοι την συνθήκη ότι $L2=C2$ θα δούμε πως εμπλέκονται τα μαθηματικά, τα οποία όμως θα αναλυθούν εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Ο Πλάτων λέει πως υπάρχουν πέντε διαφορετικά ‘μαθήματα’, τα οποία είναι κλάδοι των μαθηματικών και έχουν την ικανότητα να τραβούν τη ψυχή από τη σφαίρα του γίγνεσθαι στην σφαίρα του είναι (521d). Κάθε μάθημα, επομένως, έχει ένα εμπειρικό³² και ένα θεωρητικό κομμάτι (βλ. 525b-c: πρβλ. 527c).

²⁹ Όπως ο Christ P. Sze [Christ P. Sze, ‘Εικασία and Πίστις in Plato's Cave Allegory’, *Classical Quarterly*, 63 vols (Cambridge University Press, 1977), XXVII (issue 1), σσ. 134-138.]. Κατ’ αυτόν δεχόμενοι ότι το στάδιο C2 αντιστοιχεί στους σοφιστές, αν και αποτελεί ανώτερο επίπεδο σε σχέση με το C1, είναι ένα ‘λανθασμένο ξεκίνημα’ εκπαίδευσης και επομένως δεν γίνεται αποδεκτό στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα του Πλάτωνα.

³⁰ Πρβλ. Μένων 80c-d, 84a-c, 85c-86a.

³¹ Πρβλ. *Εβδομο Γράμμα* 343e, *Συμπόσιο* 210e

³² ..Μπορούμε να δούμε τον εμπειρικό χαρακτήρα των εφαρμοσμένων κλάδων των μαθηματικών στα αποσπάσματα 529d7-530b8.

Το πρόγραμμα εκπαίδευσης που προτείνει ο Πλάτωνας, όπως περιγράφεται στο έβδομο Βιβλίο, αρχίζει τη στιγμή που ο φυλακισμένος απελευθερώνεται και βλέπει τα ομοιώματα (532b6-7). Η εκπαίδευση των φυλάκων ανήκει στη πίστη και στη διάνοια (C2 και C3) και τα μαθήματα που διδάσκονται εκεί (532b-c) είναι κλάδοι των μαθηματικών. Βέβαια, πρέπει να σημειώσουμε ότι ενώ τα αντικείμενα της πίστης είναι τα αισθητά διαγράμματα που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί, τα αντικείμενα της διάνοιας είναι νοητά. Τώρα μπορεί να προσεγγιστεί το απόσπασμα 510b4, όπου ο Πλάτων λέει πως η διάνοια χρησιμοποιεί ως εικόνες τα αντικείμενα της πίστης, υπό διαφορετική σκοπιά. Επί παραδείγματι, η γεωμετρία σχετίζεται με τα νοητά (Ιδέα ενός κύκλου, τριγώνου, κτλ.) αλλά χρησιμοποιεί σαν εικόνες τα αντικείμενα της αισθητής γεωμετρίας (σχεδιασμένους κύκλους, τρίγωνα, κτλ.). Άρα, τα μαθηματικά είναι η γέφυρα ανάμεσα στη δόξα και στη νόηση και επιπλέον μας βοηθάνε να καταλάβουμε την ισότητα $L2=L3$: τόσο η πίστη όσο και η διάνοια σχετίζονται με τα μαθηματικά χρησιμοποιώντας παρόμοιες μεθόδους.³³

II.6 ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ

Στο υποκεφάλαιο αυτό η σχέση μεταξύ της εικασίας και της πίστης καθώς και ο ρόλος της εικασίας ως μία εικόνα ή ένα αντίγραφο της πίστης εξετάζονται. Στο απόσπασμα 523a-524d ο Πλάτων αναφέρει πως υπάρχουν δύο είδη αντίληψης, αυτή προκαλεί τη σκέψη ώστε να συλλογιστούμε για το τι βλέπουμε (π.χ. μεγάλο/ μικρό, χοντρό/λεπτό, σκληρό/μαλακό, ελαφρύ/βαρύ) και αυτή που δεν προκαλεί την νόηση αλλά την αίσθηση (π.χ. ένα δάχτυλο). Αντίστοιχα υπάρχουν και δύο κατηγορίες αντικειμένων. Η δεύτερη εμπεριέχει κοινά αισθητά πράγματα και η πρώτη ιδιότητες αυτών. Έστω ότι η εικασία σχετίζεται με τη δεύτερη κατηγορία αντικειμένων (το δάχτυλο δεν προκαλεί τη νόηση, πρβλ. τον αλυσοδεμένο δεσμώτη ο οποίος δεν αποδέχεται οποιαδήποτε άλλη πραγματικότητα πέρα από τις σκιές), τότε η πρώτη κατηγορία αφορά αντικείμενα της πίστης. Άρα τα 'πράγματα' που προκαλούν τη σκέψη

³³ Η ισότητα αυτή έδωσε έναυσμα για μια 'τριμερή' ερμηνεία της Γραμμής και της Σπηλιάς. Έτσι, ο Fogelin [Robert J. Fogelin, 'Three Platonic Analogies', *Philosophical Review*, 123 vols (1971), LXXX (issue 3), σσ. 371-382.] προτείνει την ακόλουθη αντιστοιχία: $L1 (= C1) =$ πραγματικές σκιές, $L3 = L2 (= C3 = C2) =$ αισθητά πράγματα, $L4 (= C4) =$ Ιδέες.

(απευθύνονται στην νόηση) είναι αυτά που περνούν στην αίσθηση του αντίθετου, δηλ. εκφράζονται με όρους αντιθετικών και συγκριτικών.

Μπορούμε, επομένως, να πούμε ότι ο άνθρωπος της πίστης αναλύει την εμφάνιση και φτάνει στα πρώτα στοιχεία της πραγματικότητας. Συγκρίνει τα μεγέθη, αναζητά μαθηματικές αναλογίες στη φύση και γεωμετρικά σχήματα σε αισθητά αντικείμενα και έτσι εξηγεί φυσικομαθηματικά τα φυσικά φαινόμενα.

Από αποσπάσματα έργων του Πλάτωνα³⁴ φαίνεται πως θεωρεί ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τα ηθικά θέματα στο επίπεδο της πίστης με παρόμοιο τρόπο όπως προσεγγίζουμε και τα αισθητά πράγματα, δηλ. χρησιμοποιώντας τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Έτσι, ο καθημερινός άνθρωπος στο επίπεδο της εικασίας κρίνει τις δίκαιες και τις άδικες πράξεις όπως εμφανίζονται σε αυτόν, αλλά ο ίδιος ο άνθρωπος στο επίπεδο της πίστης έχουμε τον κριτή (ή το δικηγόρο) που γνωρίζει τους νόμους και κρίνει τις πράξεις ως δίκαιες ή άδικες σύμφωνα με αυτούς τους νόμους.

Επομένως, συμπεραίνουμε πως ο άνθρωπος της εικασίας είναι αυτός που εμφανίζεται να είναι το θύμα της λανθασμένης αποδοχής αυτών που φαίνονται. Η πίστη είναι ανώτερη της εικασίας επειδή χρησιμοποιώντας μαθηματικές τεχνικές αναγνωρίζει ότι η εμφάνιση μπορεί να είναι παραπλανητική. Ο άντρας της πίστης μπορεί να δει τη πραγματικότητα των αισθητών πραγμάτων καθώς βλέπει τις ιδιότητές τους. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να δούμε ότι ο άνθρωπος της εικασίας 'ονειρεύεται' τη φύση των αληθινών πραγμάτων και βλέπει μόνο είδωλά τους.

II.7 ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ

Επιγραμματικά αναφέρουμε ότι η διάνοια σχετίζεται με την επιστήμη όπως και ένα είδωλο με το γνήσιο αντικείμενο. Όπως λέει ο Πλάτωνας στο απόσπασμα 533b-7-c5, η διάνοια αντιστοιχεί σε μια κατάσταση ονείρου επειδή οι υποθέσεις θεωρούνται αυταπόδεικτες από τους μαθηματικούς και δε χρειάζονται να δώσουν λογαριασμό για αυτές. Συνεπώς ένα λογικό σύστημα που βασίζεται σε ανεξακρίβωτες υποθέσεις δεν μπορεί να εμπεριέχει γνώση (533c).

³⁴ Πολιτεία (517d8-e1) και Τιμαίο 64a-65b

Το επόμενο ζήτημα είναι αν η διάνοια πραγματεύεται μόνο τα μαθηματικά ή επεκτείνεται και σε άλλους τομείς. Ο Πλάτωνας στη Πολιτεία λέει πως η διάνοια σχετίζεται μόνο με τα μαθηματικά. Βέβαια, τα μαθηματικά (και η γεωμετρία) ήταν η μόνη αρκετά οργανωμένη επιστήμη τότε. Συνεπώς, κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί πως το σύστημα του και η ανάλυση του μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιαδήποτε αντίστοιχα οργανωμένη επιστήμη και άρα μπορούν να επεκταθούν πέρα των μαθηματικών. Έτσι όπως στη γεωμετρία ένας ζωγραφισμένος κύκλος αποτελεί μια εικόνα της Ιδέας του Κύκλου αντίστοιχα και μία πράξη αποτελεί μια εικόνα της Ιδέας της Δικαιοσύνης.

Π.8 ΥΠΟΚΕΦΑΛΑΙΟ

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει ο κ. Β. Καρασμάνης είναι ότι υπάρχει παραλληλισμός μεταξύ της Γραμμής και της Σπηλιάς βασιζόμενος στο σημαντικό ρόλο που κατέχουν τα μαθηματικά στη Πολιτεία ως μία μετάβαση από τον κόσμο της δόξας στον νοητό. Η μαθηματική σκέψη χαρακτηρίζει και τις δύο καταστάσεις της ψυχής, την πίστη και την διάνοια. Η πίστη έχει να κάνει με τα εμπειρικά μαθηματικά και τον απελευθερωμένο δεσμώτη εντός του Σπηλαίου, ενώ η διάνοια έχει να κάνει με τα θεωρητικά μαθηματικά και τις σκιές που βλέπει ο απελευθερωμένος πλέον δεσμώτης εκτός του Σπηλαίου. Άρα η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων είναι οντολογική. Ο άνθρωπος που σχετίζεται με την πίστη έχει ως βάση της σκέψης του τα αισθητά πράγματα, ενώ αυτός της διάνοιας σκέφτεται με βάση τη θεωρία των Ιδεών. Και στις δύο αυτές καταστάσεις η μαθηματική σκέψη δεν περιορίζεται μόνο στο δοξαστικό ή στο νοητό κόσμο. Επιπλέον οι άνθρωποι της εικασίας και της διάνοιας ονειρεύονται σε σχέση με αυτούς της πίστης και της επιστήμης αντίστοιχα με την έννοια ότι δεν γνωρίζουν τους περιορισμούς τους και πιστεύουν ότι τα είδωλα που βλέπουν είναι πραγματικά.³⁵

³⁵ Karasmanis, 'Plato's Republic: The Line and the Cave', σ. 169-170.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΠΟΛΙΤΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ

Οποιοσδήποτε έχει διαβάσει την Πολιτεία του Πλάτωνα γνωρίζει ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα κυρίαρχο κομμάτι του έργου. Γιατί όμως να συμβαίνει αυτό; Η απλή απάντηση ότι οι μελλοντικοί κυβερνήτες της ιδεατής πόλης πρέπει να εκπαιδευτούν στα μαθηματικά είναι πολύ γενική και αόριστη. Τα ερωτήματα που δημιουργούνται είναι γιατί σε αυτή την επιστήμη συγκεκριμένα, γιατί επιβάλλεται η μελέτη τόσων κλάδων των μαθηματικών και γιατί η εκπαίδευση να διαρκεί τόσα πολλά χρόνια.

Ο Πλάτωνας μάς ενημερώνει ότι ξεκινούν από την παιδική τους κιάλας ηλικία την εκμάθηση μέσα από το παιχνίδι (536d-537a). Στα 18 τους κάνουν ένα διάλειμμα για δύο χρόνια οπότε και ασχολούνται με τη στρατιωτική εκπαίδευση. Στη συνέχεια, ακολουθούν 10 χρόνια μαθηματικών σπουδών από την ηλικία των 20 ως αυτή των 30. Μάλιστα, η εκπαίδευση αυτή αφορά μια σοβαρή και επιστημονική προσέγγιση των μαθηματικών που κάθε άλλο παρά εύκολη είναι. Εν ολίγοις, αυτά τα 10 χρόνια θα οδηγήσουν τους άρχοντες στα πιο σύνθετα και προχωρημένα μονοπάτια της μαθηματικής σκέψης. Συγχρόνως, θα δουλέψουν προς μία συστηματική και ενοποιημένη κατανόηση όσων έχουν ήδη διδαχθεί σε μια τυχαία σειρά (*χύδην*). Κατ' αυτόν τον τρόπο θα αποκτήσουν μια συνοπτική και επισταμένη άποψη εφ' όλων των μαθηματικών κλάδων *‘εἰς σύννοσιν οἰκειότητός τε ἀλλήλων τῶν μαθημάτων καὶ τῆς τοῦ ὄντος φύσεως’* (537c).

Πιο συγκεκριμένα, το πρόγραμμα σπουδών θέλει οι μελλοντικοί άρχοντες να μελετήσουν κατά σειρά την αριθμητική, κατόπιν την επιπεδομετρία, τη στερεομετρία και τέλος την αστρονομία και την αρμονία. Όλα αυτά τα μαθήματα πρέπει να μελετηθούν από καθαρά μαθηματική σκοπιά. Αναφέρεται κατηγορηματικά ότι ο κύριος στόχος

αυτών των μελετών είναι να παροτρύνουν τον νου να συλλογίζεται με μη εμπειρικό και με άκρως αφαιρετικό τρόπο. Ο Πλάτων δεν ενδιαφέρεται τόσο να δημιουργήσει ειδικούς σε αυτά τα αντικείμενα, όσο να δημιουργήσει ανθρώπους εξοικειωμένους στον α priori λογισμό ως προς θέματα στα οποία οι περισσότεροι των ανθρώπων κατανοούν μόνο την εμπειρική προσέγγιση.

Συνεπώς, το εύρος της μαθηματικής εκπαίδευσης που θα περάσουν αυτοί οι άνθρωποι είναι απίστευτο. Έπειτα από τα 30 τους και τη δεκαετή σπουδή -με την απαραίτητη σύνοψη των επιστημών που θα έχει επιτευχθεί- ακολουθεί η διαλεκτική και η φιλοσοφία. Το εύλογο ερώτημα που εξακολουθεί να υπάρχει είναι γιατί τόσα πολλά μαθηματικά. Η απάντηση έχει να κάνει με το γεγονός πως η εν λόγω επιστήμη εκπαιδεύει αποτελεσματικά το μυαλό και το νου. Ο Πλάτωνας 'προτείνει ένα πρόγραμμα σπουδών για τη διανοητική πειθαρχία και την ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης' και θεωρεί κατάλληλα τα μαθηματικά 'όχι μόνο επειδή αποστρέφουν το βλέμμα από την αισθητηριακή αντίληψη αλλά και διότι προσφέρουν μία εποικοδομητική συλλογιστική πορεία που ακολουθείται χωρίς να γίνεται αναφορά στην άμεση και σημαντική χρησιμότητα τους'³⁶. Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως το περιεχόμενο του μαθηματικού προγράμματος σπουδών δεν είναι σχετικό τόσο με το στόχο του όσο με την παροχή βοήθειας προς τους επίδοξους άρχοντες ώστε να μπορούν με αφηρημένη σκέψη να επιλύουν μη-μαθηματικά προβλήματα στο πεδίο της ηθικής και στην πολιτική.

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι πολλοί σύγχρονοι του Πλάτωνα αντιτίθεντο στη μάθηση τόσο μεγάλου εύρους μαθηματικών. Ο Ισοκράτης υποστήριζε πως τα μαθηματικά είναι άχρηστα για τους σημαντικότερους τομείς της ζωής, ακόμα και επικίνδυνα πολλές φορές. Ακόμα, ο σοφιστής Πρωταγόρας ήταν κάθετα αντίθετος με το πρόγραμμα σπουδών του Πλάτωνα και επέμενε ώστε οι δικοί του μαθητές να μην το ακολουθούν. Παρόμοιο τρόπο σκέψης είχε και ο Ξενοφών του Σωκράτη που έβαζε κάποιου είδους πρακτικά όρια στην ποσότητα των μαθηματικών που θα έπρεπε να διδαχτούν. Εκείνος πίστευε ότι η γεωμετρία που μαθαίνει κάποιος θα πρέπει να φτάνει

³⁶ Η αναφορά στα δύο απόσπασμα είναι αντίστοιχα από το Paul Shorey, *What Plato Said* (Chicago: University of Chicago Press, 1933), σ. 236 και το Terence Irwin, *Plato's Ethics* (New York: Oxford University Press, 1995), σ. 301.

ως εκεί που του δίνει τη δυνατότητα να μετράει τη γη του. Αντιστοίχως, η γνώση γύρω απ' την αστρονομία να επαρκεί για να επιλέγει την κατάλληλη περίοδο για ένα ταξίδι και μέχρι εκεί. Οτιδήποτε πιο περίπλοκο και σύνθετο, το θεωρούσε, χαμένο χρόνο και κόπο. Όλες αυτές οι αντιπαραθέσεις εκείνης της εποχής καταδεικνύουν τη δυσκολία που αντιμετώπιζε ο Πλάτωνας για να αποδείξει την αξία των μαθηματικών τότε.

Ο στόχος του μαθηματικού προγράμματος σπουδών επαναλαμβάνεται επανειλημμένως στην Πολιτεία³⁷ πως δεν ήταν άλλος από την απόκτηση της γνώσης του Αγαθού. Αυτή η δεκαετής εμβάθυνση στα μαθηματικά αποτελεί το προπαιδευτικό στάδιο³⁸ για την επερχόμενη πενταετή εκπαίδευση στη διαλεκτική³⁹ η οποία θα οδηγήσει σταδιακά στη γνώση του Αγαθού. Πιο συγκεκριμένα, στην ηλικία των 35 θα ξεκινήσει μια δεκαπενταετής πρακτική άσκηση που θα άπτεται στρατιωτικών και διοικητικών υποθέσεων. Μόνο τότε, στα 50 τους, θα συνεχίσουν τη μελέτη της διαλεκτικής ώστε να πραγματοποιηθεί το τελευταίο βήμα για τη θέαση του Αγαθού. Και μην ξεχνάμε πως για τον Πλάτωνα η γνώση του Αγαθού είναι άρρηκτα δεμένη με τη φιλοσοφία και τη διακυβέρνηση.

Στη συνέχεια αξίζει να δούμε μερικές θέσεις του Myles Fredric Burnyeat όπως τουλάχιστον αυτές καταγράφονται στο βιβλίο του 'Plato on Why Mathematics is Good for the Soul'.⁴⁰ Ο Burnyeat αναφέρεται στην παρομοίωση του Σπηλαίου και εξηγεί πως μέσω αυτής ο Πλάτωνας μάς παροτρύνει να δούμε τον κόσμο πέρα από την αισθητή και καθημερινή ματιά αλλά να τον εξετάσουμε από μια επιστημονική άποψη. Τότε –έχοντας μια αντικειμενική θεώρηση στο μυαλό μας– θα διαπιστώσουμε την ανεπάρκεια που προκύπτει λόγω της αισθητηριακής αντίληψης. Άρα, οι ανθρώπινες εμπειρίες μας δεν αποτελούν παρά μια επιμέρους προοπτική την οποία πρέπει να υπερβούμε προκειμένου να έχουμε μια πλήρη και ακριβή άποψη. Βέβαια, την εποχή που τα έγραφε αυτά ο Πλάτωνας οι άνθρωποι δεν ήταν εξοικειωμένοι με την ιδέα πως ο κόσμος –υπό την

³⁷ 526de, 530e, 531c, 532c.

³⁸ 531d, 536d.

³⁹ 539de.

⁴⁰ Myles Fredric Burnyeat, 'Plato on Why Mathematics is Good for the Soul', in *Mathematics and Necessity: Essays in the History of Philosophy*, T. Smiley (εκδ.), *Mathematics and Necessity: Essays in the History of Philosophy*, 47 vols (Oxford: Oxford University Press, 2000), CIII (issue 3), σσ. 1–81.

επιστημονική θεώρηση– διαφέρει από τον ορατό. Αν μάλιστα συνυπολογίσουμε κι ότι η επιστημονική σκέψη ήταν ακόμα σε αρχάριο επίπεδο αλλά κι ότι η λογική ως επιστήμη δεν είχε επινοηθεί μπορούμε να αντιληφθούμε τη δυσκολία της κατανόησης του εγχειρήματος, που ούτως ή άλλως συνιστούσε μια καινοτομία στην εποχή του. Εκτός τούτων, ο Πλάτωνας καθιστά σαφές ότι τα μαθηματικά είναι η επιστήμη με την οποία μπορούμε να κατανοήσουμε την καλοσύνη στον κόσμο. Συνεπώς, οι μαθηματικές επιστήμες μας λένε πώς είναι τα πράγματα μιλώντας αντικειμενικά κι αυτό τις κάνει επιστήμες με αξία. Εντούτοις, ο Burnyeat δείχνει να διαφωνεί με αυτή την άποψη του Πλάτωνα. Για τον Πλάτωνα, λέει, η κατανόηση της καλοσύνης παίζει σπουδαίο ρόλο στην κατανόηση του αντικειμενικού κόσμου διαμέσου των μαθηματικών. Ο Πλάτωνας, όπως ο Αριστοτέλης και οι στωικοί φιλόσοφοι αργότερα, πίστευε στην ύπαρξη αξιών στον αντικειμενικό κόσμο. Αυτή η κατανόηση της αντικειμενικής καλοσύνης, της υπέρτατης Ιδέας του Αγαθού, σημαίνει και το τέλος της εκπαίδευσης των μαθηματικών κατά την άποψη του συγγραφέα της Πολιτείας.

Ο Σωκράτης στην Πολιτεία δεν προτείνει τα μαθηματικά λόγω μόνο της εκπαίδευσης του νου που παρέχουν αλλά και για παραπάνω λόγους. Καταρχάς, ξεκινάει με την αριθμητική. Ο Σωκράτης αναφέρει τρεις αιτίες για τις οποίες αυτός ο κλάδος είναι αναγκαίος⁴¹ για την περαιτέρω εκπαίδευση των μελλοντικών αρχόντων. Η πρώτη έχει να κάνει με το γεγονός πως η αριθμητική ωθεί την ψυχή προς την κατανόηση του τι είναι πραγματικά οι αριθμοί και τα νούμερα εστιάζοντας έτσι στη σφαίρα της παντοτινής αλήθειας⁴². Η δεύτερη αιτία είναι ότι επιπλέον εξοικειώνει τα άτομα και με άλλες σπουδές που επίσης καταπιάνονται με αριθμούς και η τρίτη αιτία είναι πως πρόκειται για έναν πολύ απαιτητικό κλάδο με ιδιαίτερο διανοητικό και ηθικό διαμέτρημα.

Έπειτα, ακολουθεί η επίπεδη γεωμετρία για την οποία ο Σωκράτης αναφέρει πως πρέπει να μελετηθεί για χάρη της παντοτινής και αιώνιας γνώσης και όχι της προσωρινής (527ab)⁴³. Επιπλέον, η γεωμετρία έχει την ικανότητα να τραβά την ψυχή προς τα πάνω, προς την αλήθεια, ενώ επιφέρει και κάποια πάρεργα –όπως τονίζει ο Burnyeat– για τα οποία ο Σωκράτης αναφέρει *‘τὰ πάρεργα αὐτοῦ οὐ μικρά... ἃ τε δὴ σὺ εἶπες, ἦν δ’ ἐγώ, τὰ*

⁴¹ ἀναγκαῖόν (526a 8).

⁴² 526b.

⁴³ Όπως επισημαίνει κι ο Burnyeat και η αριθμητική θα πρέπει να μελετηθεί για τη γνώση κι όχι για το εμπόριο (525d).

περι τὸν πόλεμον, καὶ δὴ καὶ πρὸς πάσας μαθήσεις, ὥστε κάλλιον ἀποδέχεσθαι, ἴσμεν πού ὅτι τῷ ὄλῳ καὶ παντὶ διοίσει ἡμμένοσ τε γεωμετρίας καὶ μή' (527c). Δηλαδή τις εφαρμογές της γεωμετρίας στο χώρο του πολέμου και το γεγονός πως υπάρχει μεγάλη διαφορά στην αντιληπτική ικανότητα ενός ανθρώπου που ξέρει γεωμετρία κι ενός που δεν ξέρει τις αξιολογεί ως πάρεργα ο Σωκράτης. Συνεπώς, παρατηρούμε μια υποβάθμιση των πρακτικῶν δυνατοτήτων της γεωμετρίας σε σχέση με την καθαρή θεωρητική γνώση που προσφέρει.

Στην αρχή του διαλόγου τους για το πρόγραμμα σπουδῶν ο Σωκράτης ἔθεσε ως ὄρο τα μαθήματα που θα επιλεγτοῦν να μην εἶναι ἀχρηστα για τους πολεμιστές κι αυτό διότι τόσο ο ἴδιος ὅσο και ο Γλαύκων σχεδιάζουν την περαιτέρω εκπαίδευση ανθρώπων που 'έχουν ἤδη 'προπονηθεῖ' για να εἶναι 'ἀθλητὰς μέντοι πολέμου'. Η αριθμητική ικανοποιεῖ αυτή τη συνθήκη δεδομένου ὅτι σου μαθαίνει να μετράς και να υπολογίζεις (522e). Αυτό ἀπὸ τη μία εἶναι σωστό ἀλλά ἀπὸ την ἄλλη δε δικαιολογεῖ ἐπ' ουδενὶ τη μεγάλη διάρκεια της σπουδῆς των μαθηματικῶν. Οποσδήποτε εἶναι ἀπαραίτητο σε ἕναν πολεμιστὴ να ξέρει να μετράει ὁμως ἡ γνώμη του Burnyeat εἶναι πως ο ἀληθινός λόγος που ἡ αριθμητική ἐντάσσεται στο πρόγραμμα σπουδῶν φανερώνεται στο 525bc: Ἐνῶ ο πολεμιστῆς πρέπει να γνωρίζει αριθμητική ὥστε να μετράει τους στρατιώτες ο φιλόσοφος τη χρειάζεται για τον ἀντίθετο λόγο, δηλαδή προκειμένου να ἀπομακρύνει την ψυχή του ἀπὸ το πεδίο των μαχῶν. Οι φύλακες θα χουν το διπλό ρόλο πολεμιστῶν και φιλοσόφων ὁμως ἐν προκειμένῳ ἡ φιλοσοφική εκπαίδευση εἶναι αυτή που υπερθεματίζεται και προέχει.

Σ' αυτό το σημείο μπορούμε να ἀνατρέξουμε στην ἀνάλυση της Julia Annas⁴⁴, *Introduction to Plato's Republic* και να τη συνδέσουμε με τα παραπάνω. Η συγγραφέας θεωρεῖ πως ο Πλάτωνας ἀρκετὲς φορές ἀπολογεῖται στο ἔργο του για το γεγονός πως οἱ σπουδές εἶναι κυρίως θεωρητικές και δεν ἀξιῶνουν να νομιμοποιηθοῦν μέσω της εφαρμογῆς τους. Οποσδήποτε εἶναι χρήσιμες για την ἀνάπτυξη της νόησης, κάτι που εἶναι πολύ σημαντικό. Ὑπάρχει –σύμφωνα πάντα με την Annas– μια θεωρησιακή ἀντίληψη περί φιλοσοφίας και σοφίας. Ὡστόσο πιστεύει πως ο Πλάτωνας νιώθει ἀμηχανία και γι' αυτό σαν να ἐπιμένει ἐπίσης ὅτι αυτές οἱ μελέτες στην πραγματικότητα δεν εἶναι ἀχρηστες, ἀλλά ἔχουν ὑψιστη πρακτική ἀξία. Βέβαια, ἡ πρακτική τους ἀξία

⁴⁴ Julia Annas, *An Introduction to Plato's Republic* (Oxford, 1981), σ. 345.

παρουσιάζεται με μια κυνικότητα αφού είναι χρήσιμες για τον υπολογισμό και την καταμέτρηση των στρατευμάτων, όπως είδαμε και παραπάνω. Η Annas προσδίδει στον Πλάτωνα το χαρακτηρισμό του επιθετικού τεχνοκράτη και θεωρεί πως το χωρίο 525bc που αναφέρθηκε στην ακριβώς παραπάνω παράγραφο ‘συνοψίζει άριστα το σκεπτικό που υπόκειται στην Νατοϊκή χρηματοδότηση πάμπολλων ερευνών, αλλά αποτελεί θλιβερή κατάπτωση από την ιδέα ότι η γνώση του υψίστου είδους έχει την πρακτική δύναμη να καθιστά τον άνθρωπο δίκαιο στις πράξεις και στις αποφάσεις του’⁴⁵. Ο Burnyeat από την πλευρά του κριτικάρει την Annas πως η θέση της είναι άτοπη και άδικη και θα ήταν να στοχεύσει στη διάκριση των ρόλων των φυλάκων-φιλοσόφων. Επιστρέφοντας στην Annas εκείνη επιμένει πως σ’ αυτό το σημείο βλέπουμε ένα πολύ σημαντικό σφάλμα από πλευράς του Πλάτωνα ο οποίος εκθειάζει σε υπερβολικό βαθμό τη θεωρία υποβιβάζοντας σε αντίστοιχο επίπεδο την πράξη. Η θεωρία λοιπόν περιφρονεί και αδιαφορεί για την πράξη προσφέροντας όμως εκείνα τα πάρεργα και τα υποπροϊόντα που αναβαθμίζουν την τεχνολογία του πολέμου.

Ας κλείσουμε εδώ επί του παρόντος την αναφορά μας στην Annas κι ας επιστρέψουμε στο κείμενο. Εκεί, ο Γλαύκων αδυνατεί να συλλάβει το νόημα του 525bc. Όταν η κουβέντα πάει στην επιπεδομετρία αυτός ενθουσιάζεται για το σημαίνοντα ρόλο που μπορεί να παίξει η γεωμετρία στις εφαρμογές τις στο χώρο του πολέμου (526d)⁴⁶. Ο Σωκράτης από την άλλη απαντάει ξερά ότι δε χρειάζεται η γεωμετρία για τέτοια πράγματα. Αυτό που πρέπει να μας νοιάζει είναι αν η γεωμετρία –ενός προχωρημένου επιπέδου⁴⁷– μπορεί να βοηθήσει κάποιον να γνωρίσει την Ιδέα του Αγαθού.

Ο Burnyeat συνεχίζει την ανάλυση του για τα μαθηματικά υπογραμμίζοντας ότι η αξία τους δεν έγκειται ούτε στη πρακτική τους χρήση, ούτε στις τεχνικές ιδιότητες που προσφέρουν, ούτε και στην αυστηρή δομή τους. Η τελευταία καθορίζεται από την εξαγωγή συμπερασμάτων από υποθέσεις και τη χρήση διαγραμμάτων –σχημάτων που καθιστούν τα εμπειρικά αντικείμενα ευάλωτα στη μαθηματική τους μεταχείριση. Ο Σωκράτης συνεχίζει να τονίζει για το νοήμον κομμάτι της ψυχής το οποίο θα παραμείνει

⁴⁵ Annas, *An Introduction to Plato's Republic*, σ. 345.

⁴⁶ πρὸς τὰ πολεμικὰ αὐτοῦ τείνει, δῆλον ὅτι προσήκει: πρὸς γὰρ τὰς στρατοπεδεύσεις καὶ καταλήψεις χωρίων καὶ συναγωγὰς καὶ ἐκτάσεις στρατιᾶς καὶ ὅσα δὴ ἄλλα σχηματίζουσι τὰ στρατόπεδα ἐν αὐταῖς τε ταῖς μάχαις καὶ πορείαις διαφέρει ἂν αὐτὸς αὐτοῦ γεωμετρικός τε καὶ μὴ ὢν.

⁴⁷ Ὅπως ἐπίσης καὶ ἡ αριθμητικὴ ἐνός προχωρημένου επιπέδου (525c: μὴ ἰδιωτικῶς).

άχρηστο εκτός κι αν στραφεί προς τα πάνω, μακριά από τα αισθητά πράγματα. Όταν τα μαθηματικά μελετώνται υπό το σωστό πρίσμα τότε στοχεύουν στη γνώση ή την κατανόηση του ανυπόστατου όντος, της παντοτινής αλήθειας.

Η έννοια του όντος με υπόσταση (το παντελώς γνωστό) ή χωρίς πρωτοαναφέρεται στο 5^ο βιβλίο, στο κομμάτι όπου γίνεται συζήτηση για το διαχωρισμό μεταξύ γνώσης και γνώμης. Σ' αυτό το χωρίο γίνεται πρώτη φορά λόγος και για το όργανο ή τη δύναμη της ψυχής που εγγενώς επιζητά την κατάκτηση της γνώσης⁴⁸ κι όχι της γνώμης. Ο Burnyeat καταλήγει πως το παντελώς γνωστό ον είναι κάτι που κρατάει την υπόστασή του ανεξαρτήτως των συμφραζόμενων και των γενικότερων πλαισίων. Για παράδειγμα το άθροισμα δύο μονών αριθμών θα ναι πάντα ζυγός αριθμός, είναι κάτι που έχει καθολική ισχύ. Γενικώς, ο Πλάτων προτρέπει να βρίσκουμε αλήθειες που ισχύουνε παντού και πάντα, ανεξαρτήτως συγκεκριμένων συνθηκών. Βέβαια, όπως προκύπτει κι από την παρομοίωση του Σπηλαίου, για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο απαιτείται να ανοίξουμε τους ορίζοντες μας και να ξεφύγουμε από τις καθημερινές και αισθητηριακές εμπειρίες που μας δίνουν μια περιορισμένη προοπτική του κόσμου και που στρέφουν την ψυχή μας προς τα κάτω φτάνοντας μέχρι τη Γνώμη κι όχι τη Γνώση. Τα μαθηματικά, λοιπόν, συνιστούν το απαραίτητο εργαλείο για τη μεταστροφή της ψυχής. Όσο εμβαθύνεις στο μαθηματικό πρόγραμμα σπουδών συνειδητοποιείς πως οι αφηρημένες έννοιες που πραγματεύεται και προσπαθεί να προσεγγίσει είναι πιο πραγματικές από τις αντίστοιχες που αντιμετώπιζες στην καθημερινή ζωή και τον αισθητό κόσμο (515de). Βέβαια, συνεχίζει ο Burnyeat, για έναν πλατωνιστή οι Ιδέες (όπως εννοούνται από τη θεωρία των Ιδεών του Πλάτωνα) προσφέρουν μια ακόμα πιο αληθινή και ουσιαστική εικόνα των πραγμάτων σε σχέση με τα αντικείμενα των μαθηματικών. Φυσικά, όμως, κάτι τέτοιο δεν υποβαθμίζει το ρόλο των μαθηματικών που με την αφηρημένη και αφαιρετική τους συλλογιστική διαδικασία –κινούμενα στη σφαίρα των μη-αισθητών αντικειμένων– παρέχουν τη λογική και την επιχειρηματολογία για πράγματα που είναι πιο αληθινά και θεμελιώδη με τη σειρά τους από τα αντικείμενα του αισθητού κόσμου.

Σ' αυτό το σημείο της εργασίας θα επιχειρηθεί μια προσέγγιση για τη σχέση που υφίσταται μεταξύ της μαθηματικής σκέψης και της διαλεκτικής ή φιλοσοφίας. Μάλιστα, αξίζει να γίνει υπό το πρίσμα της παρομοίωσης της Γραμμής, οπότε πριν προχωρήσουμε

⁴⁸ τὸ μὲν παντελῶς ὄν παντελῶς γνωστόν (477a).

θα κάνουμε μια επιγραμματική περιγραφή αυτής –όπως προσφέρεται από τους R. C. Cross και Anthony D. Woozley⁴⁹. Η Γραμμή (που φέρει δύο άκρα A και B) χωρίζεται σε δύο κύρια μέρη, το πάνω που αντιστοιχεί στον κόσμο της νόησης (τμήμα CB) και το κάτω που αντιστοιχεί στον αισθητό κόσμο (AC). Τώρα και πάλι καθένα από τα δύο αυτά μέρη χωρίζεται σε δύο κομμάτια ώστε συνολικά η Γραμμή να ‘σπάει’ κατά κάποιο τρόπο στα τέσσερα. Έτσι, πηγαίνοντας από κάτω προς τα πάνω, το κομμάτι του αισθητού κόσμου AC χωρίζεται στα τμήματα AD (που αντιστοιχεί στην εικασία) και DC (που αντιστοιχεί στην πίστη) ενώ το κομμάτι του νοητού κόσμου χωρίζεται στα τμήματα CE (που αντιστοιχεί στη διάνοια) και EB (που αντιστοιχεί στη νόηση). Κατά γενική ομολογία τα μαθηματικά βρίσκονται στο τμήμα της διάνοιας CE της Γραμμής ενώ η φιλοσοφία και η διαλεκτική στο τμήμα της νόησης EB. Τα πιο σημαντικά εδάφια του κειμένου που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι το 510-511 και το 531-534. Σ’ αυτά τα κομμάτια ο Πλάτωνας τονίζει τα δύο χαρακτηριστικά των μαθηματικών που τα διαχωρίζουν από τη φιλοσοφία. Το πρώτο είναι πως οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν αισθητές εικόνες και διαγράμματα και το δεύτερο ότι εξαναγκάζονται να καταφύγουν σε κάποιες υποθέσεις τις οποίες όμως αφήνουν ανεπιβεβαιώτες και δομούν πάνω σ’ αυτές τις σκέψεις τους. Αυτά είναι κατά τον Πλάτωνα τα ελαττώματα της μαθηματικής μεθόδου τα οποία ο φιλόσοφος μπορεί και πρέπει να αποφύγει.

Θα ξεκινήσουμε την εμβάθυνσή μας από το πρώτο ελάττωμα, τη χρήση των λογικών και αισθητών εικόνων. Σε σχέση με τη Γραμμή αυτά τα διαγράμματα και τα μοντέλα που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί εντάσσονται στο τμήμα της πίστης DC. Είναι κάποια ορατά αντικείμενα που ρίχνουν τις σκιές τους και τις αντανάκλασεις τους οι οποίες με τη σειρά τους αντιστοιχούν στο τμήμα της εικασίας AD της Γραμμής. Ο Πλάτων υποστηρίζει ότι παρότι οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν αυτά τα αισθητικά βοηθήματα στην επιστήμη τους εντούτοις δε σκέφτονται αυτά τα ίδια μα τα αντικείμενα των οποίων αποτελούν αντίγραφα⁵⁰. Με άλλα λόγια ο μαθηματικός (και εν προκειμένω ο Πλάτων εννοεί το γεωμέτρη αν και τα ίδια ισχύουν και για τους άλλους κλάδους των μαθηματικών) χρησιμοποιεί μεν αισθητά διαγράμματα η σκέψη του δε βρίσκεται όχι σε

⁴⁹ Richard Cross and Anthony D. Woozley, *Plato's Republic: A Philosophical Commentary*, (London: Macmillan, 1964), σσ. 232-254.

⁵⁰ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ ἔνεκα τοὺς λόγους ποιούμενοι καὶ διαμέτρου αὐτῆς (510d).

αυτά αλλά σε αντικείμενα ενός διαφορετικού είδους. Αυτή τη θέση αξίζει να την προσεγγίσουμε ακόμα πιο αναλυτικά.

Καταρχάς πρέπει να αναρωτηθούμε τι είναι αυτά τα αντικείμενα τα οποία θεωρεί ο Πλάτων ότι σκέφτονται οι μαθηματικοί. Με δεδομένο ότι τα μαθηματικά αντιστοιχούνε στο άνω τμήμα της Γραμμής που έχει να κάνει με το νοητό κόσμο τα αντικείμενά τους θα έπρεπε να είναι κι αυτά νοητά –έξω από το χώρο των αισθήσεων. Άρα, βάσει των Cross και Woozley τα αντικείμενα αυτά είναι είτε οι Ιδέες που θεμελιώνει ο Πλάτωνας στη θεωρία Ιδεών του είτε κάποιας άλλης κλάσης νοητά αντικείμενα– όχι οι Ιδέες. Για να επεξηγήσουν τη θέση τους χρησιμοποιούν ένα παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ένα γεωμέτρη ο οποίος θέλει να αποδείξει ένα θεώρημα για δύο τρίγωνα –πιο συγκεκριμένα ότι δυο τρίγωνα με την ίδια βάση που βρίσκονται εντός των ίδιων παραλλήλων έχουν το ίδιο εμβαδό.⁵¹ Το ερώτημα που τίθεται είναι ποιο από τα δύο τρίγωνα: Κατά τον Πλάτωνα δε μπορεί να είναι τα δύο τρίγωνα που σχεδιάζει ο μαθηματικός καθότι αυτά είναι αισθητά σχήματα και καθώς γνωρίζουμε από τη θεωρία των Ιδεών είναι παροδικά και υπόκεινται στην αλλαγή ενώ το θεώρημα από τη στιγμή που θα αποδειχτεί θα πρέπει να έχει παντοτινή και αναλλοίωτη υπόσταση. Επιπλέον, τα σχήματα αυτά είναι μόνο προσεγγίσεις των αντίστοιχα τέλειων σχημάτων που έχει στο μυαλό του ο μαθηματικός αφού κανένας ζωγραφιστός κύκλος δεν είναι τέλεια και τελείως κυκλικός ούτε κάποια ίσια γραμμή τελείως ίσια. Συνεπώς, ο Πλάτωνας πιστεύει πως ο μαθηματικός δε σκέφτεται αυτό καθ' εαυτό το σχήμα όταν το ζωγραφίζει –είναι απλά ένα βοήθημα στη σκέψη του. Από την άλλη πλευρά βέβαια ούτε κι Ιδέες είναι αυτές που έχει ο μαθηματικός στο μυαλό του. Οπωσδήποτε οι Ιδέες εμπεριέχουν την έννοια της μονιμότητας, δεν υπόκεινται στην αλλαγή και είναι τέλειες αλλά είναι και μοναδικές. Ως εκ τούτου, υπάρχει μία μόνο Ιδέα του Τριγώνου, του Κύκλου κτλ. – όπως επεξηγείται στο κομμάτι 597c. Στο παραπάνω παράδειγμα όμως απαιτούνται δύο τέτοια αμετάβλητα και 'μόνιμα' τρίγωνα. Άρα, αναλογιζόμενοι τη θεωρία των Ιδεών, αυτό στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι απαιτείται μία κλάση γεωμετρικών αντικειμένων που μεσολαβούν ανάμεσα στα αισθητά αντικείμενα και στις Ιδέες. Αυτά τα αντικείμενα, όπως και τα αισθητά, είναι πολλά αλλά εν αντιθέσει με αυτά είναι τέλεια, αμετάβλητα και ως τέτοια ανήκουν στο νοητό κι όχι στον αισθητό κόσμο.

⁵¹ Cross and Woozley, *Plato's Republic*, σσ. 232-254.

Στην αριθμητική, απ' την άλλη, τα πράγματα ίσως να μην είναι ακριβώς έτσι. Ενώ στη γεωμετρία τα σχήματα που σχεδιάζονται δεν μπορεί να ικανοποιούν τις τέλει γεωμετρικές απαιτήσεις η αντίστοιχη δυσκολία δεν παρουσιάζεται στην αριθμητική. Χαρακτηριστικά ο William David Ross αναφέρει⁵²: 'Κάθε ζεύγος αντικειμένων είναι υποχρεωτικά δύο. Ενδεχομένως να μπορούν να προσδιοριστούν κι από κάποιον άλλο αριθμό υπό το πρίσμα μιας άλλης οπτικής γωνίας (όπως για παράδειγμα ότι η μία εβδομάδα είναι επίσης και επτά ημέρες) αλλά και πάλι θα εξακολουθεί να είναι ένα ζεύγος αντικειμένων'. Έτσι, όσον αφορά το επιχείρημα της ενδιάμεσης κλάσης αντικειμένων που αναφέρθηκε προηγουμένως για την ατελή φύση των αισθητών πραγμάτων αυτό αποδυναμώνεται στην περίπτωση της αριθμητικής. Βέβαια, ακόμα κι εδώ υπάρχει το επιχείρημα πως όταν ο μαθηματικός λέει ότι $2+2=4$ δε σκέφτεται, για παράδειγμα, ότι δύο συγκεκριμένα πορτοκάλια και δύο συγκεκριμένα πορτοκάλια κάνουν τέσσερα πορτοκάλια. Δε σκέφτεται οτιδήποτε παροδικό και μεταβλητό. Αυτό που έχει κατά νου είναι ότι δύο και δύο πάντα θα κάνουν τέσσερα. Άρα κι εδώ αναζητείται μια κλάση ενδιάμεσων πραγμάτων που εν σχέσει με τα αισθητά αντικείμενα θα είναι πολλά κι εν σχέσει με τις Ιδέες θα είναι αιώνια, αμετάβλητα και συνεπώς θα ανήκουν στο νοητό κόσμο.

Επομένως, βλέπουμε ότι η άποψη που προτείνεται εδώ ως αντικείμενα των μαθηματικών είναι μια κλάση ενδιάμεσων οντοτήτων που από τη μία μοιάζουν με τις Ιδέες υπό την έννοια ότι είναι αναλλοίωτες και παντοτινές κι απ' την άλλη μοιάζουν με τα αισθητά αντικείμενα υπό την έννοια ότι μπορούν να είναι και πολλά. Επιβεβαίωση αυτής της άποψης έχουμε στα Μεταφυσικά του Αριστοτέλη⁵³ αλλά και στο 5^ο βιβλίο της Πολιτείας⁵⁴ όπου ο Πλάτων λέει πως οι κλάδοι και οι διάφορες καταστάσεις του νου

⁵² Αριστοτέλης, *Μεταφυσικά*, William D. Ross (εκδ.), (Oxford: Clarendon Press, 1924), τόμος I, σσ. Iiii-Ivii.

⁵³ ἔτι δὲ παρὰ τὰ αισθητὰ καὶ τὰ εἶδη τὰ μαθηματικὰ τῶν πραγμάτων εἶναί φησι μεταξύ, διαφέροντα τῶν μὲν αισθητῶν τῷ αἰδία καὶ ἀκίνητα εἶναι, τῶν δ' εἰδῶν τῷ τὰ μὲν πόλλ' ἄττα ὅμοια εἶναι τὸ δὲ εἶδος αὐτὸ ἐν ἕκαστον μόνον. ἐπεὶ δ' αἴτια τὰ εἶδη τοῖς ἄλλοις, τὰ κεινῶν στοιχεῖα πάντων ᾗθη τῶν ὄντων εἶναι στοιχεῖα. ὡς μὲν οὖν ὕλην τὸ μέγα καὶ τὸ μικρὸν εἶναι ἀρχάς, ὡς δ' οὐσίαν τὸ ἐν (987b I4 ff). Σ' αυτό το κομμάτι του έργου του Αριστοτέλη ο Πλάτωνας αναφέρει ότι εκτός των αισθητών αντικειμένων και των Ιδεών υπάρχουν τα αντικείμενα των μαθηματικών τα οποία καταλαμβάνουν ένα ενδιάμεσο στάδιο διαφέροντας από τα αισθητά όντας παντοτινά και αμετάβλητα και από τις Ιδέες όντας πολλά ενώ η ίδια η Ιδέα είναι σε κάθε περίπτωση μία και μοναδική.

⁵⁴ 477c

διαχωρίζονται μεταξύ τους από τα αντικείμενά τους, δηλαδή κάθε κλάδος έχει και το δικό του ξεχωριστό αντικείμενο⁵⁵. Άρα, η σκέψη εντασσόμενη στο τρίτο τμήμα της Γραμμής CE (διάνοια) θα έπρεπε να έχει τα δικά της αντικείμενα, τα ‘ενδιάμεσα’, προκειμένου να ξεχωρίζουν από τις Ιδέες. Το εύλογο ερώτημα που προκύπτει έπειτα από τα παραπάνω είναι αν αυτά τα αντικείμενα ορίζονται ευκρινώς από τον Πλάτωνα. Η απάντηση είναι πως όχι, κάτι τέτοιο δε συμβαίνει. Ο William Francis Ross Hardie πιστεύει σε ένα τρόπο τινά ρητό δόγμα που αφήνεται να εννοηθεί στην Πολιτεία, ότι όπως η κατανόηση είναι μεταξύ της πίστης και της διάνοιας ομοίως και τα αντικείμενά της βρίσκονται μεταξύ των αισθητών και των Ιδεών.⁵⁶ Παρά ταύτα, κάποιος θα περίμενε από τον Πλάτωνα να εισαγάγει και να εξηγήσει αυτή τη θεωρία των ‘ενδιάμεσων’ αφού πρώτη φορά φαίνονται να παρουσιάζονται σε κάποιο από τα έργα του. Εντούτοις, στο 510d μάς λέει ότι ο γεωμέτρης δε σκέφτεται το αισθητό αντικείμενο που ζωγραφίζει αλλά περί ‘*τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ*’ και της ‘*διαμέτρου αὐτῆς*’. Η συγκεκριμένη ορολογία από τον Πλάτωνα μας παραπέμπει στη θεωρία των Ιδεών. Για το ίδιο κομμάτι ο Burnyeat θεωρεί πως ο Σωκράτης με αυτή τη φράση εννοεί το τετράγωνο που συμβολίζεται από το ζωγραφισμένο σχήμα. Το τετράγωνο αυτό μπορεί να ‘ειδωθεί’ μόνο με τη δύναμη της σκέψης. Το διάγραμμα που αναπαριστά αυτό το ιδεατό τετράγωνο χρησιμοποιείται για τη χάρη αυτού, ως ένα βοήθημα για να δείχθει ένα τετράγωνο που τα μάτια δε μπορούν να δουν. Στο 524e το μυαλό εξαναγκάζεται να ρωτήσει για ‘*αὐτὸ τὸ ἔν*’, ακόμα μία συνηθισμένη έκφραση που μας παραπέμπει στο χώρο των Ιδεών και την Ιδέα της Ενότητας, ενώ στο 525d ο νους προστρέχει στους ‘*περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν*’ και εκ πρώτης όψεως κι εδώ πέρα έχουμε μια αναφορά στην Ιδέα των Αριθμών. Αμέσως παρακάτω, βέβαια, στην κουβέντα γίνεται λόγος για το ‘*αὐτὸ τὸ [525e] ἔν*’ όπου ο μαθηματικός φέρεται να αντιστέκεται σε όλες τις προσπάθειες να το χωρίσει σε μέρη κι επιμένει ότι ‘*ἐν οἷς τὸ ἐν οἷον ὑμεῖς ἀξιοῦτέ ἐστιν, ἴσον τε ἕκαστον πᾶν παντὶ καὶ οὐδὲ σμικρὸν διαφέρον, μῦρον τε ἔχον ἐν ἑαυτῷ οὐδέν*⁵⁷’, δηλαδή ότι ‘κάθε ‘ένα’ είναι ίσο κι απαράλλαχτο σε όλα του με οποιοδήποτε άλλο ‘ένα’, χωρίς τη παραμικρή διαφορά και

⁵⁵ Κάτι που ο William Francis Ross Hardie, ‘*A Study in Plato*’, *Mind*, 121 vols (Oxford University Press, Apr., 1937), XLVI (issue 182), σ. 232, αποκαλεί ‘Plato’s objectivist bias’.

⁵⁶ Hardie, ‘*A Study in Plato*’, σσ. 222-232.

⁵⁷ 526a

χωρίς να έχει επάνω του απολύτως κανένα μέρος⁵⁸. Εδώ το ‘ένα’ που τίθεται υπό συζήτηση φαίνεται να είναι η μονάδα, η μαθηματική μονάδα, η οποία διαφέρει τόσο από τα αισθητά και πολλά ‘ένα’ όσο κι από την Ιδέα της Ενότητας, της Μονάδας. Η άποψη, λοιπόν, που υιοθετούν οι Cross και Woozley αναπτύσσεται παρακάτω και συνοψίζεται ότι στην Πολιτεία δεν υπάρχει κάποια ρητή και ξεκάθαρη θεωρία για την ύπαρξη ενδιαμέσων και συνεπώς αφού τα αντικείμενα του τρίτου κομματιού της Γραμμής είναι νοητά, τότε αυτά είναι οι Ιδέες.⁵⁹ Φυσικά, αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη θεώρηση του Πλάτωνα πως οι διαφορετικές καταστάσεις έχουν και διαφορετικά αντικείμενα αφού σε αυτή την περίπτωση η σκέψη και η διάνοια, το τρίτο και το τέταρτο κομμάτι της Γραμμής, θα είχαν και τα δύο ως αντικείμενα τις Ιδέες. Προσπαθώντας να διαλευκανθεί αυτό το ζήτημα πρέπει να τονιστεί πως στο πάνω μισό της Γραμμής το κύριο μέλημα του Πλάτωνα είναι να καταδείξει κυρίως τις διαφορετικές μεθόδους μεταξύ μαθηματικών και φιλοσόφων κι όχι τόσο να επεξεργαστούν τα αντικείμενα με τα οποία καταπιάνονται παρότι υπάρχει διαφορά σ’ αυτά. Ωστόσο οι Cross και Woozley προτείνουν μια συμβιβαστική λύση στο πρόβλημα που μελετάμε. Η γνώμη τους είναι πως στο τρίτο κομμάτι της Γραμμής όπου αντιστοιχούν τα μαθηματικά τα αντικείμενα θεωρούνται ξεχωριστά και ασύνδετα οπότε και η κατανόηση μας επ’ αυτών είναι ημιτελής και αποσπασματική. Αντίθετα, στο τέταρτο τμήμα της Γραμμής θεωρούνται σε σύνδεση με την Υπέρτατη Ιδέα, την Ιδέα του Αγαθού. Τώρα πλέον, η γνώση μας γι’ αυτά είναι ολοκληρωμένη και μπορούμε να τα κατανοήσουμε υπό το φως και το όλο σύστημα στο οποίο ανήκουν. Συνεπώς, δε θα ήταν άτοπο να ισχυριστούμε ότι βλέποντάς τα απομονωμένα από το Αγαθό οι Ιδέες αποτελούν διαφορετικού είδους αντικείμενα απ’ ότι αν βλέπονται σε σύζευξη με Αυτό.

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω κι εξετάσουμε κι άλλες πτυχές των Cross και Woozley αξίζει –μιας και αναφέρθηκε και παραπάνω– να σταθούμε στην μονάδα και το ‘αὐτὸ τὸ ἓν’. Ανατρέχοντας στον Burnyeat⁶⁰ και το βιβλίο του ‘Plato on Why Mathematics is Good for the Soul’ βλέπουμε πως η άποψή του είναι ότι ο Σωκράτης με αυτή τη φράση αναφέρεται σε κάτι του οποίου υπάρχουν πολλά, κάτι το οποίο μπορεί να πολλαπλασιαστεί προκειμένου να αποτελέσει έναν αριθμό. Το ‘ένα’ του έχει την ίδια

⁵⁸ Σκουτερόπουλος, *Πλάτων Πολιτεία*, σ. 533.

⁵⁹ Cross and Woozley, *Plato's Republic*, σσ. 232-254.

⁶⁰ Burnyeat, ‘Plato on Why Mathematics is Good for the Soul’, σσ. 1–81.

έννοια με τη ‘μονάδα’ του Ευκλείδη, δηλαδή πως δεν πρόκειται για έναν αριθμό αλλά για ένα κομμάτι, ένα μέρος ενός αριθμού. Εδώ πρέπει να ανοίξουμε μια μικρή παρένθεση και να πούμε πως μεταξύ του Ευκλείδη και του Πλάτωνα υπάρχουν πολλές κι εντυπωσιακές ομοιότητες. Όπως επισημαίνει κι ο κ. Β. Καρασμάνης⁶¹ ο ορισμός που δίνει ο Πλάτων για τη μονάδα ως αυτό το οποίο δεν έχει καθόλου μέρη⁶² είναι σχεδόν πανομοιότυπος με τον αντίστοιχο του Ευκλείδη για το σημείο⁶³ στο βιβλίο του ‘Στοιχειά Ευκλείδου α’, Βιβλίων Γ’. Συμπεραίνει, λοιπόν, πως είναι εύλογο να θεωρηθεί ότι ο πλατωνικός ορισμός της μονάδας αντικαταστάθηκε αργότερα από τον αντίστοιχο του Ευκλείδη⁶⁴ όταν και ο ορισμός του σημείου ως ‘όριο’ μιας γραμμής τέθηκε εν αμφιβόλω. Έτσι, ο παλιός ορισμός της μονάδας έγινε ο ορισμός του σημείου κι ένας νέος ορισμός δόθηκε στη μονάδα⁶⁵. Ακόμα όμως κι ο μεταγενέστερος ορισμός διατυπώθηκε σύμφωνα με την πλατωνική φιλοσοφία. Οτιδήποτε αποκαλείται ένα, λέγεται έτσι εξαιτίας της μονάδας (δηλαδή της Ιδέας της Μονάδας). Οι δύο παραπάνω ορισμοί δεν είναι οι μοναδικοί⁶⁶ αλλά το κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών είναι πως η μονάδα δε διαιρείται. Η αδιαιρετότητα της μονάδας, βέβαια, είναι ένα φιλοσοφικό παρά ένα μαθηματικό ζήτημα⁶⁷.

Επιστρέφοντας στην ανάλυση του Burnyeat για το ‘ένα’ εκείνος πιστεύει πως για να αντιληφθούμε την έννοια της ευκλείδειας μονάδας πρέπει να σκεφτούμε κάτι που υπάρχει και να απομονώσουμε όλα τα χαρακτηριστικά του εκτός από το ότι είναι ένα πράγμα. Αν συνδυάσουμε τρεις τέτοιες μονάδες πανομοιότυπες μεταξύ τους έχουμε ένα

⁶¹ Vassilis Karasmanis, ‘The Hypotheses of Mathematics in Plato's Republic and his Contribution to the Axiomatization of Geometry’, Pantelis Nicolacopoulos (εκδ.), *Greek Studies in the Philosophy and History of Science, Kluwer Academic Publishers, Boston Studies in the Philosophy of Science*, 280 vols (ΗΠΑ: Apeiron, Sept. 1990), CXXI, σσ.129, 130.

⁶² ἀμερῆς δήπου δεῖ παντελῶς τό γε ἀληθῶς ἐν κατὰ τὸν ὀρθὸν λόγον (sophist 245a8-9; cf Republic 526a, Parmenides 137d)

⁶³ Σημεῖόν ἐστιν, οὐ μέρος οὐθέν

⁶⁴ Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται (VII,I)

⁶⁵ Στοιχειά Ευκλείδου, Βιβλίο VII, I.

⁶⁶ Βλ. Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols, 2nd edition (Cambridge: Cambridge University Press, 1926), II, p. 279 για επιπλέον ορισμούς της μονάδας. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη (Μεταφυσικά 1089b35) μονάδα είναι το ‘εἰ μὴ μέτρον καὶ τὸ κατὰ τὸ ποσὸν ἀδιαίρετον’

⁶⁷ Πρβλ. Πλάτων, *Παρμενίδης*, 137c-d,149a. Για τη σχέση μεταξύ του ορισμού της μονάδας και της ελεατικής φιλοσοφίας, βλ. Arpad Szabó, *The Beginning of Greek Mathematics*, (D. Reidel, 1978), σσ. 256-261.

νούμερο, ένα τρία. Για την αρχαία αριθμητική δεν υφίσταται κάτι όπως ο αριθμός τρία, αυτό που υφίσταται είναι πολλά σεν τριών μονάδων –πολλές αφηρημένες τριάδες. Μάλιστα, δίνει κι ένα παράδειγμα ο Burnyeat ότι για τον αρχαίο Έλληνα μαθηματικό η πράξη ‘ $3+3=6$ ’ δε σημαίνει πως ο αριθμός 6 είναι ίδιος κι απαράλλαχτος με το νούμερο που προκύπτει αν προσθέσουμε το 3 με τον εαυτό του αλλά ότι ένα ζευγάρι τριάδων περιέχει τόσες ακριβώς μονάδες όσες και μία εξάδα.⁶⁸ Όπως άλλωστε έχει γίνει αντιληπτό η ευκλείδεια προσέγγιση της μονάδας και των αριθμών μοιάζει με την αντίστοιχη πλατωνική. Ο Ευκλείδης αναφερόταν στην αριθμητική όταν όριζε το νούμερο ως ένα πλήθος μονάδων⁶⁹. Ο Σωκράτης και ο Γλαύκων γνωρίζουν καλά ότι ένα αντικείμενο που λογίζεται ως ένα μπορεί ταυτόχρονα να είναι και πολλά (525e). Μια αγελάδα αποτελείται από πολλά κομμάτια μοσχαρίσιου κρέατος. Η οντότητα ενός νούμερου εξαρτάται από τη μονάδα που θα επιλέξεις να χρησιμοποιήσεις για να το χαρακτηρίσεις ή ακόμα κι από το περιγραφικό μέσο που θα διαλέξεις. Κανένας μαθηματικός δεν αρνείται ότι μια ορατή ή ενυπόστατη μονάδα δε μπορεί να διαιρεθεί. Αλλά δε δέχονται ότι αυτό κάνει τη μονάδα πολλά κι όχι ένα. Υποστηρίζουν ότι η μονάδα για την οποία μιλάνε είναι μια μονάδα προσβάσιμη μόνο στο χώρο της σκέψης κι όχι της όρασης (524d-526b) –κάτι που για να κατανοηθεί απαιτεί προσεχτική σκέψη και παραμερισμό των πολλών κομματιών και εστίαση της προσοχής στο ότι κάθε μονάδα είναι ένα πράγμα. Αυτή είναι μία αντίληψη που κάθε μαθητής πρέπει να τη διδάχτει.

Έπειτα από την αναδρομή στις έννοιες της μονάδας και του αριθμού μπορούμε να συνεχίσουμε την ανάλυση των μαθηματικών αντικειμένων και τη χρήση αισθητών διαγραμμάτων. Οι Cross και Woosley συμφωνούνε πως πρόκειται για αντικείμενα που ανήκουν στο πάνω μισό τμήμα της Γραμμής και συνεπώς είναι νοητής φύσης.⁷⁰ Ο ρόλος των αισθητών είναι για να βοηθούν απλώς τη μελέτη των νοητών, κάτι που γίνεται αντιληπτό και στο 510d⁷¹. Ο Πλάτωνας, λοιπόν, θα διαφωνούσε με το John Stuart Mill ένα φιλόσοφο εμπειριστή του 19^{ου} αιώνα που πίστευε ότι αντικείμενο των μαθηματικών

⁶⁸ Burnyeat, ‘Plato on Why Mathematics is Good for the Soul’, σσ. 1–81.

⁶⁹ Στοιχεία Ευκλείδου, Βιβλίο VII.

⁷⁰ Cross and Woosley, *Plato's Republic*, σσ. 232-254.

⁷¹ οὐκοῦν καὶ ὅτι τοῖς ὀρωμένοις εἶδеси προσχρῶνται καὶ τοὺς λόγους περὶ αὐτῶν ποιοῦνται, οὐ περὶ τούτων διανοοῦμενοι, ἀλλ’ ἐκείνων περὶ οἷς ταῦτα ἔοικε.

είναι τα αισθητά διαγράμματα ή μοντέλα που βλέπει και αγγίζει ο γεωμέτρης⁷² – τα ίδια που ο Πλάτων θεωρούσε ως βοηθητικά στη μελέτη. Από την άλλη κι ο Έλληνας φιλόσοφος θεωρεί τη χρήση των λογικών διαγραμμάτων ως ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα του γεωμέτρη. Είναι γεγονός ότι δεν τονίζει λεπτομερώς την αναγκαιότητα της χρήσης αυτών των διαγραμμάτων –ωστόσο αυτό είναι κάτι που εύκολα και εύλογα υπονοείται. Με άλλα λόγια, ο μαθηματικός, προκειμένου να συμπεράνει για τις ιδιότητες των νοητών αντικειμένων καταφεύγει σε κατασκευές στο χώρο (δηλ. στα αισθητά διαγράμματα) ώστε να βοηθηθεί στο έργο του. Έτσι, υπό αυτό το βλέμμα, ο Πλάτων δε θα απέρριπτε μόνο τη θέση του Mill αλλά και τη θέση άλλων φιλοσόφων η οποία επιδιώκει να υποβαθμίσει τα μαθηματικά στην απλή λογική. Κύριοι εκφραστές της τελευταίας άποψης είναι ο Γερμανός Friedrich Ludwig Gottlob Frege αλλά κι ο Bertrand Russell. Ειδικά αυτός ισχυρίζεται ότι η γεωμετρία είναι ένα συμπερασματικό σύστημα που εξελίσσεται από μια συλλογιστική διαδικασία διατυπώσεων και ορισμών και πως καμία επίκληση στο χώρο ούτε κάποια χωρική κατασκευή είναι αναγκαία. Ο Πλάτων είναι της άποψης ότι αν και η γεωμετρία έχει να κάνει με το νοητό κόσμο οι ρίζες ξεκινάνε από τον αισθητό. Αντίθετα, οι θέσεις του βρίσκονται σε συμφωνία με αυτές του Immanuel Kant ο οποίος επίσης υποστηρίζει ότι η γεωμετρία δε μπορεί να σταθεί χωρίς τις χωρικές κατασκευές. Ο Kant πιστεύει ότι τα θεωρήματα και προτάσεις της γεωμετρίας είναι αναγκαίες και παρέχουν μια περιγραφή της a priori διορατικότητας που έχουμε για το χώρο και τις κατασκευές του. Επιπλέον, ενστερνιζόταν τη γνώμη πως η γεωμετρία δε μπορούσε να υποβιβαστεί στην απλή λογική –όπως και ο Πλάτων.⁷³

Ένα ακόμα στοιχείο που θα μπορούσαμε να παραθέσουμε σχετικά με τα αισθητά αντικείμενα –βοηθήματα είναι πως η χρήση τους από μεριάς των μαθηματικών και η εγκατάλειψή τους από τους φιλόσοφους διαφοροποιεί τις δύο αυτές κατηγορίες επιστημόνων. Οι φιλοσοφία ασχολείται εξ' ολοκλήρου με το νοητό κόσμο, κάτι που καθίσταται ιδιαίτερος σαφές στο 511c. Εκεί ο Σωκράτης λέει πως ο φιλόσοφος 'χωρίς να κάνει χρήση απολύτως κανενός αισθητού αλλά χρησιμοποιώντας μόνο είδη καταλήγει με

⁷² Για περισσότερες λεπτομέρειες γύρω από τις θέσεις του Mill βλ. John Stuart Mill, *A System of Logic, Ratiocinative And Inductive*, (New York: Harper & Brothers, Publishers, 2009), Volume I, Book II.

⁷³ Cross and Woosley, *Plato's Republic*, σ. 239.

αμιγώς απαγωγικό τρόπο σε είδη και σταματάει σε αυτά⁷⁴. Για τον Πλάτωνα από την άλλη ο μαθηματικός στέκει μεταξύ αισθητού και νοητού κόσμου. Πρέπει να χρησιμοποιεί αισθητά σχήματα και μοντέλα έχοντας στο νου του το μη-αισθητό, το νοητό. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο ο Πλάτωνας θεωρεί τα μαθηματικά ως το μάθημα που μπορεί να παίξει το ρόλο της γέφυρας και να συνδέσει τον αισθητό με το νοητό κόσμο. Αυτή είναι και η αιτία για την οποία στο πρόγραμμα σπουδών που περιγράφεται στο 7^ο βιβλίο της Πολιτείας εισαγάγει τόσους πολλούς κλάδους μαθηματικών. Η επιστήμη αυτή πρέπει, λοιπόν, να αποτελέσει την αρχική εκπαίδευση των φιλοσόφων. Τονίζεται πως πρέπει να είναι η αρχική εκπαίδευση καθότι ο φιλόσοφος μελετάει τις Ιδέες αυτές καθ' εαυτές. Το ερώτημα, επομένως, που γεννάται εδώ είναι πώς θα το πετύχει αυτό. Καταρχάς, ο φιλόσοφος δε χρησιμοποιεί τα διαγράμματα και τα μοντέλα με τον ίδιο τρόπο όπως και ο μαθηματικός. Έτσι, αν ένας φιλόσοφος ενδιαφέρεται π.χ. για τη δικαιοσύνη ή τη γνώση κανένα διάγραμμα δεν πρόκειται να τον βοηθήσει. Από την άλλη, αν αναφέρουμε πως αυτό που τον απασχολεί είναι μόνο η απλή Ιδέα και έννοια της δικαιοσύνης ή απλά η Ιδέα της γνώσης και κινείται από τη μία Ιδέα στην άλλη τότε θα έχουμε αφήσει τη διαδικασία μελέτης και τον τρόπο λειτουργίας του στο σκοτάδι. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ο φιλόσοφος θέλει να μελετήσει την έννοια της δικαιοσύνης και τη σχέση της με την καλοσύνη. Αρχικά, θα πρέπει να αναλογιστεί κάποιες αληθινές περιπτώσεις ή –να το θέσουμε διαφορετικά– τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι χρησιμοποιούν τις λέξεις 'δίκαιος' και 'καλός'. Τότε σ' αυτήν την περίπτωση θα εξετάζει την Ιδέα που θέλει μέσα σε κάποιες ιδιαίτερες συνθήκες. Μια τέτοια προσέγγιση προφανώς και δε θα ικανοποιούσε τον Πλάτωνα. Κατ' αυτόν, ο φιλόσοφος, μέσα από το πρόγραμμα σπουδών και την εκπαίδευση του θα είναι με κάποιο τρόπο ικανός να αντιληφθεί τις προς μελέτη Ιδέες καθώς επίσης και τις μεταξύ τους σχέσεις ανεξάρτητα από τις ιδιαίτερες συνθήκες και περιστάσεις που επικρατούν κάθε φορά. Θα κινείται συνεχώς στο νοητό κόσμο, έναν κόσμο συμπαντικό και γενικό και δε θα χρειάζεται να ενσωματώσει αυτή τη γενική εικόνα που έχει στις εκάστοτε ιδιαίτερες και συγκεκριμένες συνθήκες. Θα είναι ικανός να σχεδιάσει και να μελετήσει τις σχέσεις μεταξύ των Ιδεών αποκλειστικά μέσα στο νοητό κόσμο. Κάποιος, βέβαια, μπορεί να πει ότι κάτι τέτοιο

⁷⁴ αἰσθητῶ παντάπασιν οὐδενὶ προσχρῶμενος, ἀλλ' εἶδεσιν αὐτοῖς δι' αὐτῶν εἰς αὐτά, καὶ τελευτᾷ εἰς εἶδη Σκουτερόπουλος, *Πλάτων Πολιτεία*, σ. 499.

είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί. Σ' αυτή του την προσπάθεια ο φιλόσοφος έχει δύο ζητήματα. Το ένα είναι πως δε μπορεί να χρησιμοποιήσει αισθητά διαγράμματα και βοηθήματα και το άλλο ότι αυτό που τον απασχολεί είναι οι έννοιες και οι σχέσεις μεταξύ αυτών των εννοιών. Αυτή η δεύτερη ανησυχία μπορεί να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικότερα αν ο φιλόσοφος έχει μελετήσει τόσο αληθινές καταστάσεις όσο και τη γλώσσα που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι σε τέτοιες συνθήκες. Μα τα μαθηματικά των οποίων οι έννοιες και η λογική όχι μόνο αποσαφηνίζονται αλλά και αποσαφηνίζονται εντός του κόσμου στον οποίο ζούμε παρέχουν αυτά τα εφόδια στο φιλόσοφο και του επιτρέπουν να ξεπερνά τέτοιου είδους δυσκολίες όπως τις προαναφερόμενες.

Στο επόμενο κομμάτι της εργασίας θα ασχοληθούμε με τις 'υποθέσεις' όπως αυτές εισάγονται στην Πολιτεία καθώς και τη σχέση τους με τη διαλεκτική. Ο Πλάτωνας δίνει κάποια γνωρίσματα γύρω από τις υποθέσεις. Το πρώτο είναι ότι οι μαθηματικοί υποχρεούνται να ξεκινούν από υποθέσεις κι έπειτα προχωράνε προς το τέλος κι όχι προς ένα αρχικό σημείο (510b5-6). Εκτός τούτου, προϋποθέτουν τη γνώση αυτών των υποθέσεων και δε δίνουν εξηγήσεις γι' αυτές ούτε στους εαυτούς τους ούτε και στους άλλους. Συμπεριφέρονται λες και είναι ολοφάνερες σε όλους (510c6-d1). Ακόμα, ξεκινώντας από αυτές προχωράνε με μία συνεπή διαδικασία και τελειώνουν σε αυτό που ξεκίνησαν να εξετάζουν (510d1-3 πρβλ. 533c1-5). Τέλος, καταλήγει ο Πλάτωνας ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα σώμα που απαρτίζεται από κύριες αρχές, συμπεράσματα και ενδιάμεσα θεωρήματα που όλα αυτά 'συμπλέκονται' (533c1-4) μεταξύ τους.

Τα χαρακτηριστικά που αποδίδει ο Πλάτων στα μαθηματικά δίνουν την εικόνα μιας συμπερασματικά οργανωμένης επιστήμης. Είναι η εικόνα ενός συστήματος όπου φαίνονται οι βάσεις της και πώς κάθε συμπέρασμα προκύπτει από τα προηγούμενα θεωρήματα ή τις προτάσεις. Τα μαθηματικά ακολουθούν μόνο καθοδική πορεία, δηλ. από τις υποθέσεις (πρώτες αρχές) καταλήγεις στο τέλος. Όλα αυτά τα στοιχεία δείχνουν μια αξιωματική επιστήμη⁷⁵ και αυτό που μπορούμε με μια σχετική ασφάλεια να

⁷⁵ Ως αξιωματικό σύστημα εννοείται κάτι παρεμφερές με το σύστημα των Στοιχείων του Ευκλείδη ή ακόμα και με λιγότερο αυστηρές δομές, όπου κάποιες βασικές αρχές αποτελούν τη βάση. Πρέπει να τονιστεί πως όταν ο Πλάτων μιλάει για τα μαθηματικά έναντι της διαλεκτικής (510-511, 533b-d) έχει στο μυαλό του κυρίως τη γεωμετρία που ήταν ο πιο προχωρημένος κλάδος των μαθηματικών εκείνη την εποχή. Εύκολα διαπιστώνεται (528e-531c) ότι η αστρονομία και η αρμονική ήταν πιο πίσω. Μάλιστα, παροτρύνει τους αστρονόμους να δουλέψουν με τον ίδιο τρόπο που δουλεύουν και οι γεωμέτρεις (530b6-7).

συμπεράνουμε είναι ότι τον καιρό που γραφόταν η Πολιτεία η γεωμετρία είχε ήδη μετασηματιστεί σ' ένα αρχικό αξιωματικό στάδιο.

Το ερώτημα που δημιουργείται πλέον είναι 'τι ακριβώς είναι αυτές οι υποθέσεις', 'τι είδους πρώτες αρχές είναι'. Σ' αυτό το σημείο να παραθέσουμε πως μόνο ο Πλάτωνας αποκαλεί αυτές τις αρχές 'υποθέσεις'. Οι μαθηματικοί τις δεχόντουσαν από τη μεριά τους ως αληθινές και εύλογες αυταπόδεικτες αρχές και μόνο ο φιλόσοφος τις αναγνωρίζει ως αδιερεύνητες υποθέσεις των οποίων η αλήθεια πρέπει να διαπιστωθεί. Ο Πλάτων λέει ότι οι μαθηματικοί 'προϋποθέτουν το περιττό και το άρτιο, τα γεωμετρικά σχήματα, τα τρία είδη γωνιών και άλλα παρόμοια'⁷⁶ (510c), δηλ. κάποια βασικά στοιχεία των μαθηματικών. Οι υποθέσεις, λοιπόν, είναι είτε κάποιοι απλοί όροι είτε προτάσεις – θεωρήματα για αυτούς τους όρους.

Ο Richard Mervyn Hare είναι ίσως ο πιο ένθερμος υποστηρικτής της πρώτης άποψης⁷⁷. Η θέση του βασίζεται σε 4 επιχειρήματα:

1. βάσει της σύνταξης της πρότασης 'προϋποθέτουν το περιττό και το άρτιο, τα γεωμετρικά σχήματα, τα τρία είδη γωνιών και άλλα παρόμοια' οι λέξεις 'περιττό', 'άρτιο' κτλ είναι άμεσα αντικείμενα του ρήματος.
2. 'να δώσουν κάποια εξήγηση γι' αυτά'⁷⁸ σημαίνει πάντα να δώσουν έναν ορισμό
3. στη μαθηματική απόδειξη του έργου Μένων το 'τετράγωνο' δεν ορίζεται
4. ποτέ δε δόθηκαν ορισμοί από μαθηματικούς στην εποχή του Πλάτωνα.

Υπάρχουν εντούτοις αρκετοί λόγοι και αντεπιχειρήματα που καθιστούν τη θέση του Hare μη βιώσιμη⁷⁹:

- Η υπόθεση είναι συνήθως μια εικασία ενός θεωρήματος⁸⁰

⁷⁶ Σκουτερόπουλος, *Πλάτων Πολιτεία*, σ. 497.

⁷⁷ Richard Mervyn Hare, 'Plato and the Mathematicians', Renford Bambrough (εκδ.), *New Essays on Plato and Aristotle*, (London: Routledge & Kegan Paul, 1965), σσ. 21-38. Πρβλ. R. S. Bluck, 'Υποθέσεις in the Phaedo and Platonic Dialectic', *Phronesis*, 58 vols (BRILL, Sept. 1957), II (issue 1), σσ. 26-29, ο οποίος θεωρεί τις υποθέσεις ως 'γνώμες'

⁷⁸ 'λόγον διδόναι' (510c)

⁷⁹ Ο C. C. W. Taylor [C. C. W. Taylor, 'Plato and the Mathematicians: An Examination of Professor Hare's Views', *The Philosophical Quarterly*, 62 vols (Oxford University Press, Jul., 1967), XVII (issue 68), σσ. 193-203.] έχει κριτικάρει επαρκώς το Hare.

⁸⁰ Βλ. π.χ. Πλάτων, *Χαρμίδης*, 165a, 171d, 172c, Πλάτων, *Ευθύφρων*, 11c, Πλάτων, *Φαίδων*, 92d, 94b, Πλάτων, *Μένων*, 87d, Πλάτων, *Πρωταγόρας*, 339d, Πλάτων, *Πολιτεία*, 437a, Πλάτων, *Κρατύλος*, 428d, Πλάτων, *Θεαίτητος*, 165d, Πρβλ. Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, σσ. 93-4 και

➤ Παρότι η έκφραση ‘να δώσουν κάποια εξήγηση γι’ αυτά’ συχνά σημαίνει ‘να δοθεί ένας ορισμός’, συνήθως σημαίνει ‘να δοθεί απόδειξη’.

➤ Το κείμενο στο Μένωνα δεν αποτελεί απόδειξη για τη θέση του Hare επειδή ο Σωκράτης δεν ήταν ένας επαγγελματίας μαθηματικός: το κείμενο δεν αποτελεί κομμάτι επίσημης μαθηματικής δουλειάς αλλά ένα ανεπίσημο κομμάτι που δε συντάχθηκε ούτε για κάποιο μαθηματικό σκοπό ούτε για οποιαδήποτε μαθηματική απόδειξη.

➤ Δεν είναι αλήθεια πως οι μαθηματικοί δεν έδιναν ορισμούς. Υπάρχουν πολλές αποδείξεις για το αντίθετο όπως στον Ευθύφρων όπου στο 12d συναντάμε τον ορισμό του ‘περιττού’ και στα Μεταφυσικά του Αριστοτέλη (987a19-21) όπου οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που μίλησαν για την ουσία των αντικειμένων και τα όρισαν.

Οι υποθέσεις δε μπορεί να είναι αξιώματα αφού οι όροι ‘περιττό’, ‘άρτιο’, ‘γεωμετρικά σχήματα’, ‘τρία είδη γωνιών’ κτλ τους οποίους οι μαθηματικοί υποθέτουν εισάγονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη ως ορισμοί. Το πρόβλημα που δημιουργείται είναι αν ο μαθηματικός υπέθεταν την ύπαρξη αυτών των εννοιών, τους ορισμούς τους ή και τα δύο μαζί. Η σύνταξη του κειμένου μας κάνει να πιστεύουμε ότι οι υποθέσεις είναι προτάσεις που εικάζουν την ύπαρξη αυτών των πραγμάτων. Αυτή η άποψη υποστηρίζεται ακόμα καλύτερα κι από το έργο ‘Υστερα Αναλυτικά’ (I,2 και 10) του Αριστοτέλη όπου αναφέρεται ότι οι υποθέσεις είναι εικασίες γύρω από την ύπαρξη των βασικών όρων της επιστήμης (π.χ. των σημείων και των γραμμών για τη γεωμετρία).⁸¹ Η

Vassilis Karasmanis, *The Hypothetical Method on Plato's Middle Dialogues*, unpublished D. Phil. Dissertation, Brasenose College, Oxford, 1987, σσ. 8-10.

⁸¹ Βλ. William David Ross, *Plato's Theory of Ideas*, (Oxford: Clarendon Press, 1951), σ. 51, Hans-Peter Stahl, *Ansätze zur Satzlogik bei Platon*, *Hermes* 88 (1960), σσ. 441-443, Henry Desmond Pritchard Lee, ‘Geometrical Method and Aristotle’s Account of First Principles’, *The Classical Quarterly*, 64 vols (April 1935), XXIX (issue 2), σσ. 113-118, Thomas Heath, *Mathematics in Aristotle*, (Oxford: University Press, 1949), σ. 55, ς Alfred Edward Taylor, *Plato, The Man and His Work*, (New York: Meridian Books, 1956), σ. 291. Για διαφορετικές απόψεις βλ. Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, σ.101, Jonathan Barnes, *Aristotle: Posterior Analytics*, (Oxford: 1975) σσ. 103-4, Walter Leszl, ‘Mathematics, Axiomatization and Hypotheses’, in *Aristotle on science: the “Prosterior Analytics”*, Enrico Berti (εκδ.), *Studia Aristotelica*, 9 (Padova: Antenore, 1983), σσ. 229-30, Blake Landor, ‘Definition and Hypothesis in Posterior Analytics 72a19-25 and 76b35-77a4’, *Phronesis*, 59 vols (BRILL, 1981), XXVI (issue 3), σσ. 308 – 318, Alfonso Gómez-Lobo, ‘Aristotle’s Hypotheses and the Euclidean Postulates’, Markus Asper και Christian Wildberg (εκδ.), *The Transformation of Plato's Republic*, 47 vols (HPIA: Apeiron, Sept. 1988), XXI (issue 3), σσ. 256-61 Review of *Metaphysics*, vol. XXX, 1977, σσ. 430-439.

ύπαρξη οποιουδήποτε άλλου στοιχείου (π.χ. των διάφορων σχημάτων) πρέπει να αποδειχτεί από την κατασκευή τους (76a35-6, 76b8-11, 92b15-16). Παρά ταύτα, η περιγραφή που δίνεται για τις υποθέσεις και τους ορισμούς στο I,10 φαίνεται να διαφέρει από την αντίστοιχη στο I,2. Εκτός τούτου, σε ορισμένα κείμενα, ο Αριστοτέλης αποκαλεί τα βασικά αρχικά σημεία ‘υποθέσεις’ (Ύστερα Αναλυτικά 81b15, 76b36-7) ενώ σε άλλα κείμενα ‘ορισμούς’. Φαίνεται ότι ο όρος ‘υπόθεση’ στον Αριστοτέλη δεν περιορίζεται πάντα σε υπαρξιακές προτάσεις αλλά χρησιμοποιείται επίσης και για να υποδηλώσει τα αρχικά σημεία των επιστημών.

Οι υπαρξιακές προτάσεις δε βγάζουν και ιδιαίτερο νόημα για τη στάση των μαθηματικών –τουλάχιστον στο έργο του Πλάτωνα. Έτσι, για παράδειγμα μια τέτοια πρόταση του στυλ ‘ο περιττός υπάρχει’ δεν οδηγεί σε κανένα συμπέρασμα τους μαθηματικούς απλά και μόνο επειδή διατυπώνεται η ύπαρξη. Μόνο οι ορισμοί και τα αξιώματα μπορούν να αποτελούν τα αρχικά σημεία για αποδείξεις (πρβλ. Ύστερα Αναλυτικά 75b31). Στον Ευκλείδη δε διατυπώνεται καμία πρόταση που να υποθέτει την ύπαρξη των γεωμετρικών αντικειμένων, απεναντίας δίνονται μόνο ορισμοί.⁸² Άρα, είναι πολύ πιθανό οι αρχές που έδιναν οι μαθηματικοί στα συγγράμματά τους να ήταν και αυτές ορισμοί.⁸³

Από την άλλη, ένας ορισμός μπορεί κάλλιστα να είναι το ξεκίνημα μιας απόδειξης αλλά μια επιστήμη πρέπει αρχικά να υποθέτει ή να αποδεικνύει την ύπαρξη των σχετικών αντικειμένων της. Έτσι, για παράδειγμα, η πρόταση ‘ο περιττός είναι αυτό κι αυτό’ δεν έχει κανένα νόημα αν δε γνωρίζουμε ήδη την ύπαρξη του ‘περιττού’ ή όχι. Οι μαθηματικοί ξεκινώντας τις αποδείξεις σιωπηλά προϋποθέτουν και την ύπαρξη των

⁸² Βλ. Πλάτων, *Χαρμίδης*, 163a, 172c, Πλάτων, *Ευθύφρων*, 9d, Πλάτων, *Φαίδρος* 236b, Πλάτων, *Πολιτεία*, 437a, Πλάτων, *Τιμαίος*, 61d.

⁸³ Παρομοίως, Adam, *The Republic of Plato, Volume 2, Books VI–X and Indexes*, James Adam (εκδ.), (Cambridge: Cambridge University Press, 1903), vol II, σ. 66, Πλάτων, *Μένων*, R. S. Bluck (εκδ.), (Cambridge: Cambridge University Press, 1961), σ. 96, Joseph Boyle, ‘Plato's Divided Line: Essay II, Mathematics and Dialectic’, Markus Asper και Christian Wildberg (εκδ.), *Apeiron*, 47 vols (1974), VIII (issue 1), σσ. 7-18. Στα μαθηματικά μετά τον Ευκλείδη ο όρος ‘υπόθεση’ χρησιμοποιήθηκε για όλων των ειδών τις βασικές αρχές και κυρίως για ορισμούς (βλ. Karasmanis, *The Hypothetical Method on Plato's Middle Dialogues*, σσ. 12-13).

οριζόμενων μαθηματικών οντοτήτων. Κατ' αυτόν τον τρόπο, δηλαδή, οι ορισμοί αυτοί εμπεριέχουν τη σιωπηλή υπόθεση της ύπαρξης αυτών των οντοτήτων που ορίζονται.⁸⁴

Ένα από τα μείζονα προβλήματα που βρίσκει ο Πλάτων στα μαθηματικά και τα θεωρεί κατώτερα από τη διαλεκτική δεν είναι η χρήση των υποθέσεων αλλά το γεγονός ότι θεωρούνται αυταπόδεικτες από τους μαθηματικούς. Τα μαθηματικά δε μπορούν να προσπεράσουν τις υποθέσεις και να φτάσουν σε μια μη-υποθετική αρχή (511a). Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, τα μαθηματικά δεν προσφέρουν ολοκληρωμένη και τέλεια γνώση αλλά μόνο μία υποθετικής φύσεως. Μόνο η διαλεκτική προχωράει στην μη-υποθετική αρχή και επιτυγχάνει την άρτια γνώση (536c6-8). Τα μαθηματικά μπορούν να πετύχουν την τέλεια γνώση μόνο όταν ένας φιλόσοφος (κι όχι μαθηματικός) έχοντας ήδη φτάσει στην ανυπόθετη αρχή καταπιαστεί με αυτά. Τότε θα έχει διαγράψει μία καθοδική πορεία αφού ξεκινώντας από την ανυπόθετη αρχή θα καταλήξει στις υποθέσεις οι οποίες όμως τότε πλέον θα αποδεικνύονται.⁸⁵ Όσο όμως τα μαθηματικά παραμένουν μια ανεξάρτητη αξιωματική επιστήμη με αδιερεύνητες αρχές δε θα είναι και 'θεραπεύσιμα'. Από την άλλη, ο φιλόσοφος αναγνωρίζει τις 'υποθέσεις' στην ολότητά τους και καταλαβαίνει πως πρόκειται για αδιευκρίνιστες εικασίες που πρέπει να διερευνηθούν για να διαπιστωθεί η αλήθεια τους. Επομένως, δεν ακολουθεί την καθοδική πορεία των μαθηματικών αλλά μια ανοδική πορεία επιδιώκοντας να εξαγάγει τις αρχικές υποθέσεις από άλλες πιο γενικές μέχρις ότου να φτάσει σε μια ανυπόθετη –πρώτη αρχή (την Αρχή του Αγαθού). Όταν την ανακαλύψει μπορεί τώρα να ακολουθήσει την αντίθετη πορεία: να ανατρέξει ένα προς ένα στα ενδιάμεσα βήματα και να αποδείξει την αλήθεια όλων των υποθέσεων (αφού όλες αυτές προέρχονται από την ανυπόθετη αρχή της οποίας η ισχύς είναι πέρα για πέρα αληθινή) φτάνοντας μέσα από αυτή τη διαδικασία σε ένα αληθινό συμπέρασμα.

Η δήλωση του Πλάτωνα πως οι μαθηματικοί εξαναγκάζονται να αρχίζουν από υποθέσεις (510b5, 511a4) και δε μπορούν να τις ξεπεράσουν (511a5-6) έχει μπερδέψει τους κριτικούς. Ποιός είναι ο λόγος για τον οποίο ο γεωμέτρης δε μπορεί να εξετάσει τις αρχικές του υποθέσεις; Ο κ. Β. Καρασμάνης υποστηρίζει πως αφού ο γεωμέτρης ασκεί

⁸⁴ Ο Πλάτωνας συχνά επιμένει στο να προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιου πράγματος στην αρχή ενός επιχειρήματος. Βλ. π.χ. Πλάτων, *Φαίδων*, 74a11-12, Πλάτων, *Ιππίας Μείζων*, 287c1-d2, Πλάτων, *Πρωταγόρας*, 330c.

⁸⁵ Anders Wedberg, *A History of Philosophy*, vol 1, (Oxford: Oxford Clarendon Press, 1982), σ. 71, Nicholas White, *Plato on Knowledge and Reality*, (Indianapolis: Hackett, 1976) σ. 96, Cross and Woosley *Plato's Republic*, σ. 242, Annas, *An Introduction to Plato's Republic*, σ. 279.

γεωμετρία το ενδιαφέρον του επικεντρώνεται στην απόδειξη θεωρημάτων και την επίλυση προβλημάτων. Σ' αυτή του την προσπάθεια χρειάζεται κάποιες πρώτες-βασικές αρχές (ορισμούς και αξιώματα) από τις οποίες θα ξεκινήσει και θα στηρίξει την πορεία του. Οι ορισμοί που έχει ανάγκη ο μαθηματικός στις αποδείξεις αφορούν τον περιττό, τον άρτιο, τον κύκλο, την ορθή γωνία κτλ. και όχι οντότητες όπως το σημείο, τη γραμμή, τον αριθμό, το όριο κτλ. Τα τελευταία αυτά στοιχεία δε θα χρησιμοποιηθούν στις επιδείξεις του. Συνεπώς, η εξέτασή τους δείχνει ότι δε θα του χρειαστούν και τον αφήνουν αδιάφορο.⁸⁶ Άλλωστε, ο γεωμέτρης είναι μαθηματικός και δεν είναι δουλειά του να προχωρήσει παραπέρα από τις υποθέσεις, η εξέταση των οποίων είναι καθήκον του φιλόσοφου.⁸⁷ Πάντως, πρέπει να τονιστεί ότι αυτό το 'ελάττωμα' των μαθηματικών είναι ελάττωμα μόνο εν συγκρίσει με τη διαλεκτική.⁸⁸

Γράφοντας σχετικά με τα παραπάνω, οι Cross και Woosley είναι της γνώμης πως ο Πλάτωνας θεωρεί τα μαθηματικά ένα δομημένο και συνεπές σύστημα το οποίο όμως στηρίζεται σε αναπόδειχτες πρώτες αρχές.⁸⁹ Συνεπώς, αν και το όλο δημιούργημα είναι σε συμφωνία και παρότι τα συμπεράσματα προκύπτουν λογικά από τις υποθέσεις, εφόσον οι τελευταίες δεν είναι αποδεδειγμένες τότε ούτε το σύστημα αυτό αλλά ούτε και τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι αναγκαστικά αληθινά. Καθήκον του φιλοσόφου –όπως είδαμε– είναι να επιβεβαιώσει τις υποθέσεις φτάνοντας στην Πρώτη Αρχή. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο φιλόσοφος θα έχει τη γνώση (ή αλλιώς τη νόηση) ενώ ο μαθηματικός (511d) θα βρίσκεται μεταξύ πίστης και νόησης, στη διάνοια.

Στη συνέχεια, αξίζει να μελετήσουμε διεξοδικότερα κάποιες θέσεις των δύο μελετητών σχετικές πάντα με τις υποθέσεις. Καταρχάς, προσπαθούν να τις συνδέσουν με την παρομοίωση της Γραμμής. Βάσει της ανάλυσής τους η Γραμμή παρουσιάζει ορισμένες αναλογίες. Πιο συγκεκριμένα, το νοητό τμήμα του κόσμου CB αντιστοιχεί στο αισθητό AC. Επιπλέον, το τέταρτο τμήμα EB της νόησης είναι ανάλογο με το δεύτερο κομμάτι της Γραμμής DC, δηλ. την πίστη, όπως και το τρίτο CE, η διάνοια, με το πρώτο

⁸⁶ Αριστοτέλης, *Μεταφυσικά*, 1005a11: 'καὶ διὰ τοῦτο οὐ τοῦ γεωμέτρου θεωρῆσαι τί τὸ ἐναντίον ἢ τέλειον ἢ ἐν ἢ ὄν ἢ ταῦτόν ἢ ἕτερον, ἀλλ' ἢ ἐξ ὑποθέσεως'.

⁸⁷ Πρβλ. Πλάτων, *Ευθύδημος*, 190b-c. Μόνο η διαλεκτική προχωράει πέρα από τις υποθέσεις (Πλάτων, *Πολιτεία*, 511b).

⁸⁸ Ωστόσο, υπάρχουν 'ελαττώματα' χαρακτηριστικά των μαθηματικών και σε αυτήν την περίπτωση ο Πλάτωνας ξεκάθαρα κριτικάρει τους μαθηματικούς και τους παροτρύνει να τα διορθώσουν (βλ. 527d, 530b, 531a).

⁸⁹ Cross and Woosley, *Plato's Republic*, σσ. 232-254.

AD, την εικασία. Η αναλογία που θα σταθούμε εδώ αφορά το τμήμα της διάνοιας CE με χαρακτηριστικό της τη σκέψη και την αντιστοιχία της με το τμήμα AD της εικασίας που χαρακτηριστικό της είναι η ψευδαίσθηση. Δεχόμενοι ότι τα μαθηματικά έχουν να κάνουν με το τμήμα της διάνοιας αυτό που μελετάται είναι η αντιστοιχία τους με την εικασία και τη ψευδαίσθηση. Γνωρίζουμε ότι τα μαθηματικά έχουν κατά τον Πλάτωνα δύο ελαττώματα, τη χρησιμοποίηση αισθητών εικόνων και τις ανεπιβεβαίωτες υποθέσεις. Οι δύο μελετητές ενστερνίζονται την άποψη ότι τα αισθητά αυτά μοντέλα έχουν να κάνουν με την εικασία. Ο παραλληλισμός έχει να κάνει με το γεγονός ότι όπως ο μαθηματικός τα χρησιμοποιεί ως ένα μέσο για να κατανοήσει τα νοητά αντικείμενα έτσι κι ένας άνθρωπος όταν εικάζει προσπαθεί να προσεγγίσει την αυθεντική εικόνα δια μέσου των σκιών και των αντανakλάσεων της. Εκτός τούτου, η εικασία έχει να κάνει και με την ψευδαίσθηση, όπως έχουμε ήδη δει, υπό την έννοια ότι κάποιος όταν εικάζει πολλές φορές δέχεται αναντίρρητα κάτι χωρίς να το ερευνά. Αυτή η στάση έχει ξεκάθαρα να κάνει με τις υποθέσεις, τις οποίες ο μαθηματικός αδιαμαρτύρητα δέχεται ως αληθείς δίχως να εξετάζει αν ισχύουν.

Μια άλλη διάσταση που έχει νόημα να ελέγξουμε είναι αν υπάρχει κάποια αναγκαία σχέση μεταξύ των λογικών διαγραμμάτων που χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί και των υποθέσεων. Ο Richard Robinson⁹⁰ πιστεύει πως οι μαθηματικοί είχαν υιοθετήσει αυτή την κατά κάποιο τρόπο δογματική άποψη για τις υποθέσεις τους επειδή αυτές φαίνονταν να επιβεβαιώνονται από τον αισθητό κόσμο, δηλαδή από τα διαγράμματα και τα μοντέλα. Γι' αυτό το λόγο, οι υποθέσεις είναι ολοφάνερες σε όλους όπως αναφέρει ο Σωκράτης στο 510d. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι οι μαθηματικοί αποτύγχαναν να εμπεδώσουν ότι έπρεπε να διερωτηθούν και να εξετάσουν τις υποθέσεις έστω κι αν αυτές εμφανίζονταν να υποστηρίζονται από τα αισθητά μοντέλα. Συνεπώς, θεωρούσαν πως δεν έχριζαν κάποιας περαιτέρω απόδειξης. Κάποιος, βέβαια, οφείλει να αναλογιστεί ότι ο Πλάτωνας δεν κρίνει τους μαθηματικούς επειδή τις χρησιμοποιούσαν αλλά για την αδυναμία τους να συνειδητοποιήσουν ότι πρόκειται για υποθέσεις. Με άλλα λόγια, κατακρίνονται όχι επειδή χρησιμοποίησαν μια υποθετική μέθοδο, μα διότι απέτυχαν να χρησιμοποιήσουν την υποθετική μέθοδο. Άρα, ο φιλόσοφος αναγνωρίζει τις υποθέσεις στην ολότητά τους, ως αυτό που πραγματικά είναι και καταλαβαίνει ότι πρέπει

⁹⁰ Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, σσ. 155-156.

να αποδειχτούν. Για να αιτιολογήσουμε λίγο και τους μαθηματικούς οφείλουμε να πούμε ότι η Πολιτεία γράφτηκε σε μια περίοδο όταν η γεωμετρία βρισκόταν στα πρώτα στάδια της συστηματοποίησής της –κάτι που συντελέστηκε λίγο αργότερα στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Ο Leonard Mascot Blumenthal υποστηρίζει⁹¹ ότι ο Ευκλείδης σ' αυτό το έργο επέλεξε για τις διατυπώσεις του δηλώσεις που είχαν να κάνουν με τον κόσμο των εμπειριών, τον αισθητό, πιστεύοντας ότι έτσι καθίστανται αυταπόδεικτες και αληθινές. Το εγχείρημά του ήταν να προχωρήσει από αυτές τις βασικές αρχικές διατυπώσεις και να καταδείξει πιο σύνθετες και περίπλοκες οι οποίες θα αποτελούσαν ιδανικεύσεις του τρόπου με τον οποίο συμπεριφέρεται ο φυσικός κόσμος. Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι ο γεωμέτρης της εποχής του Πλάτωνα δε θα διερωτόταν ποτέ για τις υποθέσεις δεδομένου ότι τα αισθητά σχήματα και τα διαγράμματα τις ενσωμάτωναν και αποδέχονταν. Φυσικά, σήμερα η ανάπτυξη της γεωμετρίας έχει αλλάξει ριζοσπαστικά αυτή την αντίληψη. Έχει πλέον αποδειχτεί ότι αν υιοθετηθούν διαφορετικές αρχές από τις ευκλείδειες νέα είδη γεωμετρίας μπορούν να αναπτυχθούν τα οποία να είναι απολύτως συνεπή. Άρα, έχει εγκαταλειφθεί η άποψη ότι η γεωμετρία συνιστά απλώς μια περιγραφή του χώρου όπου ζούμε, αντίθετα έχει αναγνωριστεί η σημαίνουσα σημασία που παίζει η δόμηση του εκάστοτε είδους γεωμετρίας. Πλέον, δεν αρκεί η επιβεβαίωση των αρχικών αρχών –υποθέσεων από τα σχήματα. Εν αντιθέσει, ο Ευκλείδης έδινε μια διττή υπόσταση στις γεωμετρικές δηλώσεις του. Τις αποδεχόταν ή τις απέρριπτε αναλόγως αν αυτές επιβεβαιώνονταν ή διαψεύδονταν αντιστοίχως στο φυσικό κόσμο.

Ένα άλλο σημείο που χρήζει της προσοχής μας στην ανάλυση έχει να κάνει με τον τρόπο που οι φιλόσοφοι αντιμετωπίζουν τους μαθηματικούς και τις υποθέσεις τους. Σχετικά μ' αυτό υπάρχουν δύο εδάφια στην Πολιτεία όπου θα επικεντρωθούμε. Το πρώτο είναι στο 510c που έχει ήδη αναφερθεί στην παρούσα εργασία κι ο Πλάτων μιλά για 'το περιττό και το άρτιο, τα γεωμετρικά σχήματα, τα τρία είδη γωνιών και άλλα παρόμοια'. Το δεύτερο βρίσκεται στο 533cd με τον Πλάτωνα να αντιπαραθέτει τη διαλεκτική με τα μαθηματικά και να λέει μέσω του Σωκράτη ότι 'μόνο η διαλεκτική μέθοδος πορεύεται –ακυρώνοντας τις υποθέσεις– ίσαμε την ίδια την αφετηριακή αρχή

⁹¹ Leonard Mascot Blumenthal, *A Modern View of Geometry*, (Dover Publications, 1961) σ. 16.

για να κατοχυρώσει τα αποτελέσματά της⁹². Ειδικά η φράση ‘τὰς ὑποθέσεις ἀναιροῦσα’ έχει προκαλέσει πολλές συζητήσεις. Εκ πρώτης όψεως φαίνεται να εννοεί ότι η διαλεκτική ‘καταστρέφει’ τις υποθέσεις, σα να τις διαψεύδει, να αποδεικνύει ότι είναι ψευδείς. Ο Alfred Edward Taylor αναλύει⁹³ αυτά τα δύο κομμάτια και πολύ συνοπτικά η θέση του έχει ως εξής: το αρχικό κομμάτι της υπόθεσης αναφέρεται στο γεγονός ότι όλοι οι αριθμοί είναι ακέραιοι και ποιο συγκεκριμένα ότι ένας αριθμός, συνεπώς, θα είναι είτε περιττός είτε άρτιος. Κατ’ αυτόν τον τρόπο όμως αποκλείονται από την υπόθεση οι άρρητοι αριθμοί οι οποίοι δεν ανήκουν σε καμία από τις δύο κατηγορίες. Άρα, ο Taylor είναι της άποψης ότι ο Πλάτων –που γνώριζε για την ύπαρξη των άρρητων– δεν πιστεύει στην υπόθεση, τη θεωρεί λάθος και η διαλεκτική επεμβαίνει για να την καταστρέψει. Με παρόμοιο τρόπο ο Taylor προσεγγίζει και τα υπόλοιπα σημεία της υπόθεσης για τα γεωμετρικά σχήματα και τα είδη γωνιών. Ιστορικά, αυτή η ανάλυσή του θεωρείται απίθανη και αβάσιμη. Ο Πλάτωνας όντως στο έργο του Θεαίτητος κάνει μια αναφορά στους άρρητους. Όμως, αφενός, το συγκεκριμένο σύγγραμμα γράφτηκε μετά την Πολιτεία κι αφετέρου, δεν υπάρχει πουθενά καμία ένδειξη πως όταν έγραφε την Πολιτεία νοιαζόταν για αυτό το θέμα των άρρητων αριθμών. Εκτός τούτου, αν ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι οι υποθέσεις ήταν όντως ψευδείς αυτό θα σήμαινε ότι θεωρούσε και τα μαθηματικά της εποχής του λανθασμένα –κάτι που είναι πολύ δύσκολο να αποδεχτούμε στηριζόμενοι στα έργα του. Επομένως, η θέση του Taylor πρέπει να απορριφτεί και να προσεγγιστεί η έννοια της φράσης ‘τὰς ὑποθέσεις ἀναιροῦσα’ διαφορετικά. Οι Cross και Woozley ισχυρίζονται ότι αυτό που καταστρέφεται είναι ο υποθετικός τους χαρακτήρας. Δηλαδή, η διαλεκτική, η μέθοδος του φιλόσοφου, επιδιώκει όπως έχουμε αναλύσει παραπάνω να φτάσει σε μια ανυπόθετη αρχή. Στη διαδικασία αυτή οι υποθέσεις χάνουν την υποθετική τους φύση αλλά αυτό δε σημαίνει ότι αναγνωρίζονται και ως ψευδείς ή λάθος. Κάποιες μπορεί και να ναι αλλά οι περισσότερες θα αποδειχτεί ότι είναι αληθινές και δε θα ναι πλέον υποθέσεις μα προτάσεις και θεωρήματα. Ο μαθηματικός απλώς, λοιπόν, υποθέτει και προχωρά σε συμπεράσματα. Ο φιλόσοφος, όμως, δεν ικανοποιείται με μια τέτοια προσέγγιση. Η διαλεκτική του μέθοδος θα τον οδηγήσει εκ του ασφαλούς

⁹² ‘ή διαλεκτική μέθοδος μόνη ταύτη πορεύεται, τὰς ὑποθέσεις ἀναιροῦσα, ἐπ’ αὐτὴν τὴν ἀρχὴν ἵνα βεβαιώσῃται’

⁹³ Alfred Edward Taylor, ‘Note on Plato's Republic’, *Mind*, 123 vols (Oxford University Press, January 1934), XLIII (issue 169), σσ. 81-84.

στην αλήθεια και επομένως, στην ολοκληρωμένη γνώση. Βλέπουμε εδώ τη σχεδόν ταυτόσημη άποψη των Cross και Woosley και κ. Β. Καρασμάνη για τη μεταχείριση των υποθέσεων από τους φιλόσοφους.

Έπειτα από αυτά αξίζει να δούμε αναλυτικότερα την πορεία και τη διαδικασία που ακολουθούν οι μαθηματικοί και κυρίως οι φιλόσοφοι. Όπως έχουμε δει και παραπάνω, ο Πλάτων μάς λέει στο 511a-b ότι τα μαθηματικά δε μπορούν να αναρριχηθούν από τις υποθέσεις σε μια πρώτη αρχή, ενώ η διαλεκτική απ' την άλλη προχωράει σε ένα ανοδικό μονοπάτι από τις υποθέσεις προς κάτι το οποίο είναι μη-υποθετικό, την πρώτη αρχή των πάντων και στη συνέχεια ακολουθεί τον αντίθετο δρόμο, μια καθοδική πορεία. Στην πραγματικότητα, όμως, ο Πλάτωνας αναφέρει πολύ λίγες λεπτομέρειες γι' αυτή τη διπλή κατεύθυνση της διαλεκτικής και το ζήτημα αυτό έχει προκαλέσει πολλές συζητήσεις. Προκειμένου να εμπεδώσουμε αυτή τη διαδικασία ας ριξουμε μια ματιά σ' έναν πρωτότερο διάλογο του Πλάτωνα, το Φαίδωνα, όπου αναλύεται εκτενέστερα η υποθετική μέθοδος και βοηθάει εν μέρει στην κατανόηση της Πολιτείας. Εκεί, λοιπόν, το πρώτο βήμα της διαδικασίας περιγράφεται στο 100a και έχει να κάνει με την αποδοχή της οποιασδήποτε υπόθεσης και όσων ακολουθούν από αυτή. Στο 101d-e, ωστόσο, επεξηγείται τι συμβαίνει όταν μια υπόθεση τίθεται εν αμφιβόλω. Τότε, το επόμενο βήμα είναι ο έλεγχος των επιπτώσεών της, αν δηλαδή αυτές είναι ασυνεπείς μεταξύ τους. Αν προκύψουν τέτοιες ασυνέπειες η υπόθεση εγκαταλείπεται, αν όμως δεν προκύψουν τότε ακολουθεί το τρίτο βήμα όπου για να επιβεβαιωθεί η αρχική υπόθεση την ανάγουμε όσες φορές χρειαστεί σε άλλες γενικότερες υποθέσεις έως ότου καταλήξουμε σε κάποιο ικανοποιητικό αποτέλεσμα, σε κάτι κατάλληλο. Πριν προχωρήσουμε οφείλουμε να κάνουμε ορισμένες διευκρινήσεις. Καταρχάς, ακούγεται κάπως περίεργο μια υπόθεση να συνεπιφέρει επιπτώσεις που να αντικρούονται η μία την άλλη. Επιπλέον, οι προτάσεις και οι υποθέσεις που συνεπάγονται από μια δοσμένη θα πρέπει αναγκαστικά να είναι συνεπείς μεταξύ τους. Ο πρώτος σκόπελος του προβλήματος ξεπερνιέται αν αναλογιστούμε μια αρκετά σύνθετη και πολύπλοκη υπόθεση: υπάρχει η πιθανότητα κάποιες από τις συνέπειές της να αντικρούουν η μία την άλλη. Ο δεύτερος σκόπελος μπορεί να αντιμετωπιστεί αν σκεφτούμε ότι κάνοντας μια αρχική υπόθεση τότε –σιωπηλά ή υποσυνείδητα έστω– δεχόμαστε και κάποιες άλλες παραδοχές που έχουν να κάνουν με την αρχική υπόθεση. Αποτυγχάνουμε όμως να

αναγνωρίσουμε την ύπαρξή τους και τη σημασία που έχουν στο συλλογισμό μας –χωρίς αυτό να σημαίνει πως δε μπορεί να μην αντικρούονται μεταξύ τους. Ξεπερνώντας, λοιπόν, αυτά τα θέματα λογικής αυστηρότητας μπορούμε να δεχτούμε πως όντως μια απλή υπόθεση μπορεί να επιφέρει αλληλοσυγκρουόμενες επιπτώσεις. Έτσι, τώρα, μπορούμε να δούμε μια ομοιότητα ανάμεσα στη μέθοδο που περιγράφεται στο Φαίδωνα και στην ανοδική πορεία της Πολιτείας. Εύλογα κάποιος μπορεί να υποθέσει ότι και στην Πολιτεία όποιος ασκεί τη διαλεκτική θα έπρεπε να ακολουθήσει τα βήματα που περιγράφονται στο Φαίδωνα. Ένα ακόμα κοινό στοιχείο στα δύο κείμενα είναι ότι περιγράφουν ανοδικές πορείες, αφού και στο Φαίδωνα είναι ξεκάθαρο ότι οι ‘χαμηλότερες’ υποθέσεις προκύπτουν ως λογικό επακόλουθο ‘ανώτερων’ υποθέσεων. Μάλιστα, οι δεύτερες έχουν κι ένα πιο γενικό χαρακτήρα από τις πρώτες. Επιπροσθέτως, ο Robinson στην ανάλυσή του για το Φαίδωνα ασπάζεται⁹⁴ τη γνώμη ότι οι ‘ανώτερες’ υποθέσεις είναι πιο σημαντικές κι αυτό ισχύει και στην Πολιτεία όπου η ανώτερη αρχή είναι και η πιο σπουδαία, η Ιδέα του Αγαθού.

Αυτή η αναφορά του Robinson αποτελεί την τέλεια πάσα για να παραθέσουμε ακόμα μια διαφορά ανάμεσα στο κείμενο της Πολιτείας και στο Φαίδωνα. Στο δεύτερο έργο η διαδικασία της εξαγωγής μιας υπόθεσης συνεχίζεται κι επαναλαμβάνεται έως ότου καταλήξουμε σε κάτι κατάλληλο, σ’ ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Από το γενικό πλαίσιο του κειμένου αντιλαμβανόμαστε ότι με τον όρο ‘κατάλληλο’ εννοείται κάτι πάνω στο οποίο συμφωνούν όλα τα συμμετέχοντα μέρη της συζήτησης. Έτσι, κάθε φορά αναζητείται μια ανώτερη, πιο γενική υπόθεση επειδή κάποιο από τα συμβαλλόμενα μέλη εγείρει αντιδράσεις σχετικά με την αρχική. Το τέλος επέρχεται όταν προκύπτει κάτι κοινά αποδεκτό που δεν αμφισβητείται από κανέναν. Το σημαντικό σημείο εδώ είναι ότι η διαδικασία τελειώνει όταν επιτυγχάνεται μια γενική συμφωνία –η οποία όμως προκύπτει εντός της υποθετικής μεθόδου! Από την άλλη, στην Πολιτεία η θέση του Πλάτωνα διαφέρει. Εδώ, η υποθετική μέθοδος επιδιώκεται μέχρι να φτάσουμε στη μη-υποθετική αρχή, την πρώτη αρχή των πάντων (511b) που κατά τον Πλάτωνα είναι η Ιδέα του Αγαθού. Άρα, στόχος αυτού του έργου είναι η γνώση του Αγαθού που αν επιτευχθεί καταλύει τις υποθέσεις. Πλέον, δεν προκύπτει ζήτημα αν όλοι συμφωνούν, είναι μια κατάσταση αδιαμφισβήτητης και απόλυτης γνώσης-βεβαιότητας. Οι μαθηματικοί,

⁹⁴ Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, σ. 137.

λοιπόν, που ικανοποιούνται με τις υποθέσεις, ονειρεύονται μόνο ότι ζουν, ο φιλόσοφος από την άλλη είναι ο μόνος που κατέχει τη γνώση και συνεπώς αυτός έχει το δικαίωμα να κυβερνάει.

Ακόμα κι εδώ όμως δημιουργούνται κάποια θέματα. Στο Φαίδωνα ακολουθούμε μια υποθετική μέθοδο, δεν παρεκκλίνουμε από αυτή, ώσπου καταλήγουμε σε μια ανώτερη υπόθεση που δεν αμφισβητείται από κανέναν. Έχουμε, δηλαδή, μια ανιχνευτική προσέγγιση της αλήθειας και της γνώσης. Επί της ουσίας δε φτάνουμε στην απόλυτη γνώση αλλά πολύ κοντά. Στην Πολιτεία ακολουθείται μια υποθετική μέθοδος –που έχουμε υποθέσει πως είναι η ίδια με αυτή που περιγράφεται στο Φαίδωνα. Κάποια στιγμή φαίνεται να βγαίνουμε από αυτή τη μέθοδο και φτάνουμε στην Ιδέα του Αγαθού. Η αλήθεια είναι όμως πως ο Πλάτωνας μάς αφήνει στο σκοτάδι γύρω από αυτό το τελευταίο βήμα που περνάμε πέρα από τις υποθέσεις στο ανυπόθετο. Προφανώς, η υποθετική μέθοδος πρέπει να συμπληρωθεί με κάποια διορατικότητα εκ μέρους του αναγνώστη, με κάποια σχετική άμεση επίγνωση ώστε να πραγματοποιηθεί η θέαση του Αγαθού.

Από κει και πέρα, η Πολιτεία μας ενημερώνει ότι ο μαθηματικός που σκοπεύει να γίνει φιλόσοφος περνάει μέσα από τα μαθήματα που είδαμε σε ένα επίπεδο όπου κατέχει μια συνοπτική, εκτενή, διεξοδική και συνολική άποψη όλων των επιστημών (531d) ενώ, όπως τονίζει και ο Burnyeat⁹⁵, η διαλεκτική επικεντρώνεται στην εξήγηση των υποθέσεων με ένα τρόπο που τα μαθηματικά δε γίνεται να τον προσεγγίσουν (510b, 511b, 533c). Προς αυτό το σκοπό οι υποθέσεις της αριθμητικής, της γεωμετρίας, της αστρονομίας και της αρμονικής θα υποβληθούν σε μια ξεκάθαρη αναδιαμόρφωση. Τώρα, ο φιλόσοφος συσχετίζει όχι μόνο τις ξεχωριστές υποθέσεις των διαφορετικών επιστημών αλλά και τις μαθηματικές με τις μη-μαθηματικές Ιδέες σε μια πιο εκτενή ανάλυση.⁹⁶ Στο εδάφιο 537c1-3 ο Πλάτωνας αναφέρεται στην ένωση των μαθηματικών Ιδεών με τις άλλες. Άρα, το πολύ μεγάλο έργο⁹⁷ έχει να κάνει με τη συγκέντρωση όλων των μαθηματικών επιστημών. Αυτό το στάδιο φαίνεται να έχει να κάνει με τη διάνοια

⁹⁵ Burnyeat, 'Plato on Why Mathematics is Good for the Soul', σ. 27.

⁹⁶ Πρβλ. Annas, *An Introduction to Plato's Republic*, σσ. 285-286, Norman Gulley, *Plato's Theory of Knowledge*, (London: Greenwood Press, 1962) σ. 56, Friedrich Solmsen, 'Plato and Science', H. North (εκδ.), *Interpretations of Plato, Mnemosyne*, Vol 150, σσ. 88, Crombie, 'An Examination of Plato's Doctrines', σ. 555.

⁹⁷ πάμπολυ ἔργον (531d5)

(531d7), εντούτοις είναι ένα μεταβατικό επίπεδο από τη διάνοια στην επιστήμη το οποίο λαμβάνει χώρα έπειτα από τη μελέτη όλων των επιστημών (531c9-d4). Η μετάβαση αυτή είναι αναγκαία για το μελλοντικό φιλόσοφο που πρέπει να είναι ‘συνοπτικός’ (537c7) δηλαδή, ικανός να βλέπει και να αναγνωρίζει τις συνάψεις και την άρρητη σχέση μεταξύ των κλάδων της γνώσης.

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό πως ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι οι αρχές των μαθηματικών μπορούν να αναχθούν σε λιγότερες και κύριες κι ότι όλες οι επιστήμες της διάνοιας είχαν κοινά τα βασικά τους θεωρήματα. Πίστευε, επομένως, πως οι διάφοροι κλάδοι των μαθηματικών θα έπρεπε να ενωθούν σε μία επιστήμη (σύνοψη των επιστημών) και πως κάτι τέτοιο ήταν αδύνατο να επιτευχθεί εφόσον οι υποθέσεις παρέμεναν ανεξάρτητες.

Όπως έχουμε δει οι υποθέσεις ήταν ορισμοί δύο ειδών: α) στοιχειωδών μαθηματικών αντικειμένων (σημείο, γραμμή κτλ) και β) άλλων μαθηματικών αντικειμένων (είδη γωνιών, σχήματα κτλ) τα οποία προκύπτουν από τα πρώτα και ιεραρχικά βρίσκονται χαμηλότερα απ’ αυτά. Στα Στοιχεία του Ευκλείδη βλέπουμε ότι τα πρώτα δε χρησιμοποιούνται σε αποδείξεις –οπότε είναι μαθηματικώς άχρηστα– εν αντιθέσει με τα δεύτερα που χρησιμοποιούνται. Συνεπώς, τα δεύτερα είναι αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών ενώ τα πρώτα των φιλοσόφων.

Παρακάτω, θα ασχοληθούμε με τη σχέση που έχει διαπιστωθεί ανάμεσα στον Πλάτωνα και τον Ευκλείδη –όσον αφορά τα μαθηματικά τουλάχιστον. Τα στοιχεία που έχουμε για τα μαθηματικά στα χρόνια του Πλάτωνα είναι πολύ λίγα και ουσιαστικά οι γνώσεις μας ξεκινάνε από τον Ευκλείδη (περίπου 300 μ. Χ.) κι από άλλες διατριβές που χρονολογούνται από το δεύτερο μισό του 4^{ου} αιώνα κι έπειτα (η Πολιτεία γράφτηκε στο πρώτο μισό του 4^{ου} αιώνα). Πάντως, αυτό που μπορούμε να ισχυριστούμε είναι πως τα μαθηματικά την εποχή του Πλάτωνα θα έμοιαζαν με μία πρώιμη εικόνα των Στοιχείων του Ευκλείδη. Άρα, δε μας προξενεί καθόλου εντύπωση το γεγονός που έχουμε ήδη αναφέρει ότι μεταξύ των δύο υπάρχουν πάρα πολλές ομοιότητες. Έτσι, για παράδειγμα στο Μένωνα (76a) ο Πλάτωνας δίνει τον ορισμό του σχήματος ως ‘στερεού πέρασ σχήμα

είναι⁹⁸ ενώ στον Παρμενίδη (145a) δίνεται μια εξήγηση για το πέρας: ‘τό γε περιέχον πέρας ἂν εἴη’. Στον Ευκλείδη αντίστοιχα το σχήμα ορίζεται ως ‘Σχήμά ἐστι τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὄρων περιεχόμενον’, ενώ ο όρος ως ‘Όρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας’. Μπορούμε να διαπιστώσουμε τις πολύ μεγάλες ομοιότητες, αυτό όμως που προξενεί πολύ μεγάλη εντύπωση αφού πρόκειται ταυτοσημία είναι ο ορισμός του Πλάτωνα για το σχήμα με τον ορισμό του Ευκλείδη στα Στοιχεία από το βιβλίο XI,2: ‘Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.’

Ας δούμε τώρα κάποιους από τους ορισμούς του Ευκλείδη:

- 1) Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. (ορισμός I,1)
- 2) Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. (ορισμός I,2)
- 3) Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα. (ορισμός I,3)
- 4) Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. (ορισμός I,5)
- 5) Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί. (ορισμός I,6)
- 6) Στερεόν ἐστὶ τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον. (ορισμός XI,1)
- 7) Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια. (ορισμός XI,2)

Εδώ, δύο παρατηρήσεις σημαντικές μπορούμε να κάνουμε. Η πρώτη είναι ότι δε δίνεται καμία διευκρίνιση γύρω από το νόημα αυτών των ορισμών ούτε επίσης και γιατί να ισχύουν. Ο αναγνώστης τις δέχεται ως έχουν τόσο αυτές όσο και τα κατηγορήματά τους. Βλέπουμε εν προκειμένω τη φύση των υποθέσεων που έχουμε αναλύσει. Η δεύτερη παρατήρηση έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι ορισμοί της γραμμής, της επιφάνειας και του στερεού ακολουθούνται από δηλώσεις γύρω από τα όριά τους (ορισμοί 3, 5, 7). Αυτοί οι ορισμοί πιθανώς να ήταν οι παλαιότεροι ορισμοί του σημείου, της γραμμής και της επιφάνειας αντιστοίχως. Είναι πολύ εύλογο να προήλθαν από τον Πλάτωνα κι επειδή δέχτηκαν την επίθεση του Αριστοτέλη αντικαταστάθηκαν από τον Ευκλείδη από τους ορισμούς 1, 2, 4. Παρά ταύτα, ο Ευκλείδης τούς διατήρησε ως δευτερεύοντες ορισμούς ή ως επεξηγηματικές δηλώσεις. Υπάρχουν φυσικά κι άλλα τέτοια παραδείγματα που δείχνουν την επίδραση του Πλάτωνα στα έργα του Ευκλείδη.

Ανάλογες ομοιότητες προκύπτουν και γύρω από τα αξιώματα του Ευκλείδη, η καταγωγή των οποίων επίσης ανάγεται στη διαλεκτική και την πλατωνική φιλοσοφία. Στο έργο του πρώτου συναντάμε εννιά τέτοια αξιώματα που τα πρώτα οχτώ έχουν να

⁹⁸ Από την προηγούμενη συζήτηση στο διάλογο, φαίνεται ότι αυτός ο ορισμός είναι του ίδιου του Πλάτωνα και εκφράζεται από τον Σωκράτη ως παράδειγμα ορισμού. Ο Μένωνας είναι ένας νέος μορφωμένος άντρας που αδυνατεί να δώσει ορισμό του ‘σχήματος’.

κάνουν με την ισότητα και την ανισότητα. Μάλιστα, το 4^ο αξίωμα το βρίσκουμε στον Παρμενίδη του Πλάτωνα. Βέβαια, ο Πλάτωνας δεν αντιμετωπίζει αυτές τις προτάσεις ως αυταπόδεικτες αλλά μάλλον ως υποθέσεις και συζητήσιμες σε κάθε περίπτωση.

Στο Θεαίτητο (155a-b) ο Πλάτωνας προβαίνει σε τρεις τέτοιες δηλώσεις στις οποίες δίνεται ο χαρακτηρισμός ‘ομολογήματα’:

1) ‘μηδέποτε μηδὲν ἂν μείζον μηδὲ ἔλαττον γενέσθαι μήτε ὄγκῳ μήτε ἀριθμῶ, ἕως ἴσον εἴη αὐτὸ ἑαυτῶ.’

2) ‘ᾧ μήτε προστιθοῖτο μήτε ἀφαιροῖτο, τοῦτο μήτε ἀυξάνεσθαι ποτε μήτε φθίνειν, ἀεὶ δὲ ἴσον εἶναι.’

3) ‘ὃ μὴ πρότερον ἦν, ὕστερον ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄνευ τοῦ γενέσθαι καὶ γίγνεσθαι ἀδύνατον’

Ο Πλάτωνας δεν υποστηρίζει ότι η αλήθεια αυτών των προτάσεων είναι προφανής αλλά τα χαρακτηρίζει ως ‘ομολογήματα’. Το πιο εντυπωσιακό στοιχείο είναι πως τα τοποθετεί χωρίς αντίρρηση στην αρχή της συζήτησής του ὅτι ακριβῶς κάνει κι ο Ευκλείδης.

Βασισμένοι στα παραπάνω μπορούμε εύλογα να υποθέσουμε πως ο Πλάτων στην Πολιτεία εισήγαγε ένα πρόγραμμα σπουδών που σκοπό είχε την αναγωγή των μαθηματικών στις πιο βασικές τους αρχές. Γνωρίζουμε πως αυτό το πρόγραμμα έγινε πράξη από τους μαθηματικούς της Ακαδημίας του Πλάτωνα και είναι γεγονός ότι αυτός ο αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος συνεισέφερε ουσιαστικά στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Παρότι είναι μια επιστήμη κατώτερη από τη φιλοσοφία, ο Πλάτων τη θεωρεί ως απαραίτητο προκαταρκτικό της διαλεκτικής. Τα μαθηματικά συνιστούν μία πολύ καλή προπόνηση για την αφηρημένη σκέψη και το κατάλληλο μέσο για την ανύψωση της ψυχής στο χώρο των Ιδεών (521d, 523a, 525c, 527b). Ο Πλάτωνας δεν ενδιαφέρεται τόσο για τα εφαρμοσμένα μαθηματικά αυτά καθ’ αυτά. Απώτερος στόχος του είναι να απομακρύνει τους φύλακες από τον αισθητό κόσμο.

Σ’ αυτό το σημείο αξίζει να ειπωθεί η άποψη του Burnyeat⁹⁹ που παραθέτει ότι το παιδαγωγικό σύστημα στην Αθήνα την εποχή του Πλάτωνα δεν ήταν παιδοκεντρικό.

⁹⁹ Burnyeat, ‘Plato on Why Mathematics is Good for the Soul’, σσ. 40-41.

Περιελάμβανε πολλές υπαγορεύσεις και παπαγαλία¹⁰⁰. Όταν ο Πλάτωνας στην Πολιτεία βάζει το Σωκράτη να προτρέπει πως με το παιχνίδι κι όχι με το ζόρι το παιδί θα έρθει πιο κοντά στα μαθηματικά (536d,-537a) πηγαίνει συνειδητά ενάντια στα κοινωνικά πρότυπα. Στους Νόμους μάλιστα η ιδέα αυτή παρουσιάζεται ως εισαγόμενη από την Αίγυπτο. Εξίσου καινοτομικό είναι όμως και το μήνυμα από την παρομοίωση του Σπηλαίου. Η εκπαίδευση δεν είναι –όπως πιστεύουν οι άνθρωποι– ένα ζήτημα που έχει να κάνει με την εισαγωγή γνώσης στις ψυχές των ανθρώπων, σα να δίνεις φως σε ένα τυφλό. Η ψυχή ήδη κατέχει το όργανο με το οποίο κάθε άτομο μπορεί να μάθει. Αυτό που χρειάζεται είναι η μεταστροφή της ψυχής στο φως, σα να ήταν ένα μάτι που αποδυναμωμένο από το βαθύ σκοτάδι τώρα στρέφει το βλέμμα του στα όντα με αμετάβλητη υπόσταση και ξεφεύγει από την αντιληπτήρια οπτική του αισθητού κόσμου. Φυσικά αυτό μπορεί να το πετύχει μόνο η διαλεκτική, τα μαθηματικά όμως είναι το μάθημα που θα αναγκάσει το άτομο να στρέψει την ψυχή του στο φως.

Κατόπιν τούτων ταιριάζει τώρα να πούμε πως την εποχή του Πλάτωνα μόνο η γεωμετρία και ίσως σε μικρότερο βαθμό η αριθμητική είχαν διαμορφωθεί σε ένα αξιωματικό συμπερασματικό σύστημα. Η γεωμετρία αποτελεί το μοντέλο για τις υπόλοιπες επιστήμες της διάνοιας. Γι' αυτό το λόγο και ο Πλάτων προτρέπει τους αστρονόμους να οργανώσουν κι αυτοί την επιστήμη τους στο πρότυπο τη γεωμετρίας. Επιπλέον, ο Πλάτων παροτρύνει τους γεωμέτρους από τη μεριά τους να απελευθερώσουν την επιστήμη τους από τον εμπειρικό κόσμο και να την αναπτύξουν σε ένα πιο αφηρημένο και θεωρητικό επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα, μάλιστα, στο κομμάτι 527a6-b1 αναφέρεται στη γλώσσα και την ορολογία που χρησιμοποιούν: 'Να, εκφράζονται με τρόπο πολύ αστείο και λειψό. Μιλούν για κατασκευές, για προσθέσεις μεγεθών σαν να ασχολούνταν με κάτι πρακτικό και όλες οι αποδείξεις τους να αναφέρονταν στην πράξη. Τέτοιες είναι οι διατυπώσεις τους όλες, ενώ στην πραγματικότητα η σπουδή αυτή στο σύνολό της έχει αποκλειστικό αντικείμενό της τη γνώση'¹⁰¹. Κι αμέσως μετά στο εδάφιο 527b5-6 λέει για τη γεωμετρία 'ότι πρόκειται για τη γνώση εκείνου το οποίο έχει παντοτινή υπόσταση κι όχι εκείνου που κάποια στιγμή αποτελεί μια επιμέρους

¹⁰⁰ Henri-Irénée Marrou, *Histoire de l'éducation dans l'Antiquité*, (Paris: Le Seuil, 1948), Part II, chaps 6-8.

¹⁰¹ Σκουτερόπουλος, *Πλάτων Πολιτεία*, σσ. 535-537.

περίπτωση γένεσης και φθοράς.¹⁰² Ο κ. Β. Καρασμάνης¹⁰³ είναι της άποψης ότι ο Πλάτωνας μέμφεται και κατηγορεί εδώ τους γεωμέτρους. Στον αντίποδα, ο Burnyeat μοιάζει να έχει μια πιο διαλλακτική στάση απέναντι στον Πλάτωνα. Από τη μία αναγνωρίζει ότι η γλώσσα που χρησιμοποιούν είναι γελοία αφού τα θεωρήματα που αποδεικνύουν έχουν παντοτινή αλήθεια και αιώνια υπόσταση. Άλλα από την άλλη είναι αναγκασμένοι να τη χρησιμοποιούν προκειμένου να αποδεικνύουν αυτά τα θεωρήματα με τα αισθητά σχήματα που οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν. Πιο συγκεκριμένα ο Burnyeat θεωρεί ‘πως δεν πρέπει να περάσουμε ένα αστείο για σοβαρή κριτική’¹⁰⁴.

Φαίνεται, λοιπόν, πως στην Πολιτεία ο Πλάτων έχει δύο στόχους. Ο πρώτος έχει να κάνει με την απαλοιφή των μειονεκτημάτων των μαθηματικών –εν σχέσει με τη διαλεκτική– και την ανάπτυξη νέων πεδίων έρευνας βασισμένων στο μοντέλο της γεωμετρίας. Ο δεύτερος στόχος αποσκοπεί στη συνέχιση της αξιωματικοποίησης των μαθηματικών ανάγοντας τις αρχές τους στις πιο βασικές και θεμελιώδεις ούτως ώστε να βρεθούν οι κοινές αρχές όλων των επιστημών (531d) έχοντας έτσι μια συνοπτική άποψη επ’ αυτών.

Κάποιοι υποστηρίζουν ότι η Πολιτεία αφήνει πολλά κενά για παράδειγμα γύρω από τη θέαση του Αγαθού αλλά και για τον τρόπο με τον οποίο η Αγαθότητα καθιστά κατανοητά όλα τα άλλα. Πιστεύουν, όπως ο Robinson¹⁰⁵, ότι υπάρχει μια σύγκρουση ανάμεσα στην επιστημολογία της Πολιτείας του Πλάτωνα (θεωρεί πως η απόλυτη, ανεπίδεκτη γνώση είναι εφικτή) και της μεθοδολογίας του (μέθοδος των υποθέσεων). Έτσι, υποτιμάται η σημασία και η αξία του συγγράμματος. Αυτό όμως δεν είναι απόλυτα σωστό. Η Πολιτεία περιέχει πολλές ιδέες που αποτελούν γόνιμη σκέψη για να εδραιωθεί η επιστήμη των μαθηματικών. Άλλωστε, αυτό που πέτυχε ο Πλάτων με την υποθετική μέθοδο περιέχει το σπόρο για την αξιωματικοποίησή τους και ήταν κεφαλαιώδους σημασίας για τα μαθηματικά. Φυσικά για τον Πλάτωνα η αξιωματικοποίηση συνδέεται άμεσα με την ανυπόθετη πρώτη αρχή, την Ιδέα του Αγαθού. Κατ’ αυτόν, μόλις φτάσουμε στην πρώτη αρχή ακολουθούμε την καθοδική πορεία όπου η εγκυρότητα κάθε βήματος

¹⁰² Σκουτερόπουλος, *Πλάτων Πολιτεία*, σ. 537.

¹⁰³ Karasmanis, ‘The Hypotheses of Mathematics in Plato's Republic and his Contribution to the Axiomatization of Geometry’, σ. 131.

¹⁰⁴ Burnyeat, ‘Plato on Why Mathematics is Good for the Soul’, σσ. 40-41.

¹⁰⁵ Robinson, *Plato's Earlier Dialectic*, σ. 146.

πλέον εξασφαλίζεται από το αξιωματικό σύστημα. Ταυτόχρονα, δεδομένου ότι όλα προέρχονται από την πρώτη αρχή η αλήθεια της οποίας είναι αδιαμφισβήτητη, τότε και κάθε ενδιάμεσο στάδιο θα είναι πέρα για πέρα αληθινό αφού πηγάζει από την Ιδέα του Αγαθού.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΠΟΛΙΤΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ

IV.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο 7ο βιβλίο της Πολιτείας ο Σωκράτης περιγράφει τις πέντε επιστήμες (μαθήματα) που παίζουν πρωτεύοντα ρόλο στην εκπαίδευση των αρχόντων για το ιδανικό κράτος που προτείνει. Αυτά είναι η αριθμητική, η γεωμετρία, η στερεομετρία, η αστρονομία και η αρμονία. Από μια μοντέρνα σκοπιά των πραγμάτων υπάρχει μια εμφανής διαφορά ανάμεσα στις τρεις πρώτες και στις άλλες δύο: οι μεν πρώτες είναι συμπερασματικές, οι δε δεύτερες είναι παρατηρητικές επιστήμες. Ο Σωκράτης μοιάζει να θέλει να αρνηθεί, να απαλλαγεί από αυτή τη διαφορά. Οι μαθητές του θα ‘αφήσουνε τον έναστρο ουρανό στην άκρη’ (530b7) όσον αφορά την αστρονομία ενώ σε ό,τι σχετίζεται με την αρμονία δε θα δίνουν σημασία ‘στις αρμονικές σχέσεις των ήχων’ (531c1-2). Οι περισσότεροι μελετητές έχουν βρει αυτές τις θέσεις τουλάχιστον αινιγματικές. Παρόλα αυτά θα κάνουμε μια ανάλυση στην λογική του Πλάτωνα στο έργο της Πολιτείας σε σχέση με την αρμονική. Από τα λεγόμενα του Πλάτωνα στο έργο του πρέπει να υποστηρίξουμε ότι εξομοίωνε την αστρονομία με την γεωμετρία (συμπεριλαμβανομένης και της στερεομετρίας) και αντίστοιχα της αρμονικής με την αριθμητική.¹⁰⁶

¹⁰⁶ Ian, Mueller, ‘Ascending to Problems: Astronomy and Harmonics in Republic VII’, John P. Anton (εκδ.), *Science and The Sciences in Plato*, (New York, EIDOS, 1980) σ. 103.

IV.2 ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ

Στις φυσιολογικές γνώσεις κάθε λαού που προκύπτουν από την παρατήρηση του ουρανού και των μετεωρολογικών φαινομένων για τις καθημερινές του ανάγκες έρχονται να προστεθούν κατά τον 5ο αιώνα και επιπλέον πληροφορίες από την Ανατολή. Αυτές αφορούνε τους πλανήτες, τις φάσεις της Σελήνης και το ζωδιακό κύκλο. Ελληνικές ανακαλύψεις της ίδιας εποχής θεωρούνται η τροχιά της εκλειπτικής¹⁰⁷ και το φαινόμενο της ανισότητας των εποχών. Η προσπάθεια καθιέρωσης ενός αποτελεσματικού ημερολογίου αποτελεί για κάθε κοινωνία το κίνητρο για τη βελτίωση των αστρονομικών της γνώσεων. Αυτό σημαίνει κατ' ουσίαν έναν ενιαίο καθορισμό των γεωργικών εργασιών -που εξαρτώνται από τον κύκλο του Ήλιου- και των θρησκευτικών εορτών που -εξαρτώνται από τον κύκλο της Σελήνης. Η προσπάθεια αυτή αρχίζει στην Αθήνα κατά το δεύτερο μισό του 5ου αιώνα π.Χ. με τον Μέτωνα και τον Ευκλήμονα και συνεχίζεται κατά τον 4ο αιώνα. Η ανάγκη ενός ακριβούς ημερολογίου πρέπει να ήταν επιτακτική αν σκεφθεί κανείς τις πολύπλοκες λειτουργίες της πολιτικής κοινωνίας της Αθήνας. Η πρώτη επαρκής αστρονομική θεωρία των πλανητικών κινήσεων -μια θεωρία που σέβεται τα αστρονομικά φαινόμενα και διαθέτει εσωτερική συνέπεια- αναπτύσσεται στα χρόνια του Πλάτωνα από τον Εύδοξο τον Κνίδιο.

Η αστρονομία κατά τον Πλάτωνα ήταν κάτι σαν εξιδανικευμένη κινηματική με περιστασιακές απεικονίσεις από τις ορατές κινήσεις ουράνιων σωμάτων. Αυτήν την έννοια ο Πλάτωνας την συμπεριλαμβάνει στην αρμονική την οποία θεωρεί σαν ένα κλάδο μαθηματικών και καταδικάζει την εμπειρική προσέγγιση στο θέμα της αρμονίας από τους Πυθαγόρειους. Από την άλλη ο Josh Burnet θεωρεί ότι η πρόθεση του Πλάτωνα στην αστρονομία δεν ήταν να προτείνει ένα ιδανικό ουρανό με ιδανική κίνηση και ιδανικούς πλανήτες αλλά να γίνει μία διάκριση ανάμεσα στη παρατηρούμενη (ορατή) και την πραγματική κίνηση.¹⁰⁸

Υπάρχουν δυο εκδοχές για τον ρόλο της παρατήρησης στην αντίληψη του Πλάτωνα πάνω στην αστρονομία. Ο πρώτη είναι ότι ο Πλάτωνας είχε απορρίψει την έννοια της αίσθησης του ανθρώπου γύρω από την αντίληψη της αστρονομίας. Η δεύτερη

¹⁰⁷ Η φαινόμενη τροχιά που διαγράφει ο Ήλιος στον ουρανό σε διάστημα ενός έτους.

¹⁰⁸ Andre, Barbera, *Another Look at Plato and the Pythagoreans* (Χειμώνας, 1981). Προσβάσιμο στο <http://www.jstor.org/stable/294326> [Είσοδος 07 Δεκεμβρίου 2010], σ. 395.

είναι ότι ο Πλάτωνας δεν συμφωνούσε με τον απόλυτα αποστειρωμένο εμπειρισμό των Πυθαγόρειων. Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι πως ο Πλάτωνας έδωσε μια ώθηση στην αστρονομία και προσπάθησε να την προσεγγίσει σε ένα θεωρητικό-μαθηματικό επίπεδο και όχι εμπειρικά.

Ο κ. Γ. Βλαστός φέρεται να αντιτίθεται στο παραπάνω συμπέρασμα. Απορεί πώς είναι δυνατόν να απορρίπτονται οι αισθήσεις και πού μπορεί να στηριχτεί η επιστήμη εάν αποκλείσουμε το ορατό με ό,τι συνεπάγεται αυτό (π.χ. ουράνια σώματα). Χαρακτηριστικά λέει πως γίνεται ο Εύδοξος, ο οποίος απεικόνισε τις απλές παρατηρήσεις του ουρανού σε μαθηματικές-γεωμετρικές αναπαραστάσεις (μοντέλα) και θεωρείται ο μεγαλύτερος αστρονόμος της εποχής να συνδέεται στενά με τον Πλατωνικό κύκλο; και επιπλέον, πώς εξηγείται η θεωρία των ομόκεντρων σφαιρών¹⁰⁹, σύμφωνα με την οποία υπάρχουν δύο ομόκεντρες σφαίρες οι οποίες αναπαριστούσαν το ζεύγος ουρανού-Γης. Δεν υπάρχουν πάντως γραπτά που να αποδεικνύουν ότι ο Πλάτωνας είχε κάνει μεταστροφή ή ότι άλλαξε η αντίληψη του για την αστρονομία όπως επίσης δεν αναφέρεται και καμία μαρτυρία ότι ο Πλάτωνας επιθυμούσε από τους αστρονόμους να αντικαταστήσουν την παρατήρηση από την νόηση.¹¹⁰

Η σκέψη του Πλάτωνα όμως αποδεικνύεται ορθολογική και θα κάνουμε μια ανάλυση στη σύλληψη του Πλάτωνα για την αστρονομία, δηλαδή το πώς αντιλαμβανόταν την παρατήρηση των ουράνιων φαινομένων σε σχέση με την γεωμετρία για να καταλάβουμε σε βάθος τον συλλογισμό του από φιλοσοφικής πλευράς. Θα ήταν εύλογο για τον Πλάτωνα ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις γραφημάτων και σχεδιαγραμμάτων είναι σε ορισμένες περιπτώσεις πολύ παραπλανητικές. Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα ο Ευκλείδης θέτει το πρόβλημα I, 12¹¹¹.

Παρατηρούμε, όμως, ότι αρκετά χαρακτηριστικά του σχεδιαγράμματος διαστρεβλώνουν τη γεωμετρική αλήθεια. Σύμφωνα με την Πλατωνική αντίληψη η ευθεία γραμμή δεν είναι άπειρη αλλά είναι πεπερασμένη και όλες οι σχεδιασμένες γραμμές είναι

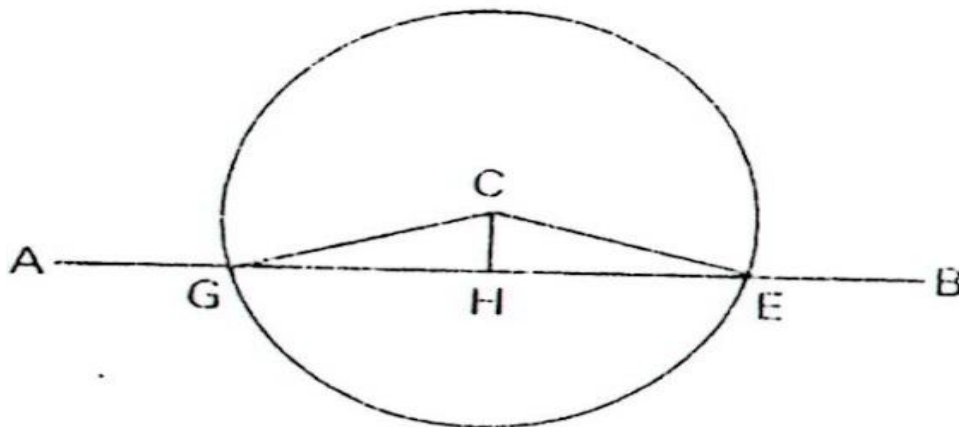
¹⁰⁹ Οι ομόκεντρες σφαίρες αναπαριστούν το ζεύγος ουρανού-Γης και τα άστρα είναι στερεωμένα στην ουράνια σφαίρα, ενώ ο Ήλιος, η Σελήνη και οι υπόλοιποι πέντε πλανήτες κινούνται πάνω στην ουράνια σφαίρα.

¹¹⁰ Gregory, Vlastos, 'The Role of Observation in Plato's Conception of Astronomy', John P. Anton (εκδ.), *Science and The Sciences in Plato*, (New York, EIDOS, 1980) σ. 4.

¹¹¹ 'Επί τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

εσφαλμένες και ψεύτικες εφόσον όλες είναι μονοδιάστατες. Υπάρχει όμως και διαφορετική άποψη εάν αναλυθεί με διαφορετική φιλοσοφία το σχεδιάγραμμα. Μερικά στοιχεία του σχεδιαγράμματος είναι αναμφίβολα σωστά, δηλαδή $GC=CE$, και οι γωνίες $CHG = CHE$. Αυτές οι δηλώσεις και πολλές άλλες θα είναι σωστές, αλλά ο Πλάτωνας επέμενε ότι η αποδοχή της αλήθειάς τους θα πρέπει να γίνει στη βάση δυο προϋποθέσεων:

Σχήμα 1



Η πρώτη προϋπόθεση είναι ότι δεν πρέπει να ψάχνουμε την τέλεια ισότητα γιατί έχουμε να κάνουμε με υλικά, γραμμές και γωνίες και όλα αυτά υπολείπονται κατά πολύ από την αλήθεια και την τέλεια ισότητα που έχουμε με βάση τη γεωμετρική συλλογιστική.

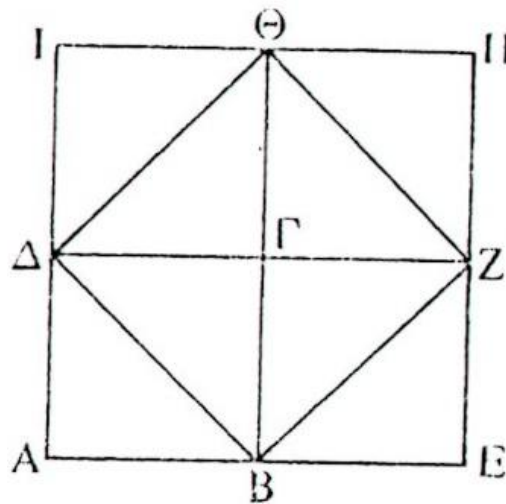
Η δεύτερη προϋπόθεση είναι ότι εάν τα αποδεικτικά στοιχεία που έχουμε προέρχονται από την παρατήρηση και μόνο των διαγραμμάτων τότε δεν μπορούμε να αποκτήσουμε γνώση παρά μόνο ‘αληθινή άποψη’. Για να μετατρέψουμε την αληθινή άποψη σε γνώση θα πρέπει να απορρίψουμε το διάγραμμα και να κοιτάξουμε σε βάθος τις αρχές της γεωμετρίας. Αυτές οι ιδιότητες που προαναφέραμε είναι συνέπειες των αρχών της γεωμετρίας εφόσον οι δυο γωνίες για παράδειγμα είναι οι αντίστοιχες γωνίες των CHG και CHE και επιπλέον οι δυο γραμμές CG και CE είναι ίσες γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου.¹¹²

Κατ’ αυτόν τον τρόπο μπορεί να επεξηγηθεί ο συσχετισμός που προσπαθεί να αποδώσει ο Πλάτωνας μεταξύ της γεωμετρίας και της Αστρονομίας. Όπως ένας

¹¹² Vlastos, ‘The Role of Observation in Plato’s Conception of Astronomy’, σσ. 7-8.

γεωμέτρης αντιλαμβάνεται στο παραπάνω πρόβλημα πως υπάρχουν χαρακτηριστικά που διαστρεβλώνουν τη γεωμετρική αλήθεια (αλλά ταυτόχρονα εάν το πρόβλημα αναλυθεί με διαφορετική φιλοσοφία μερικά στοιχεία του σχεδιαγράμματος είναι αναμφίβολα σωστά), έτσι και ο αστρονόμος καταλαβαίνει ότι η αλήθεια δεν μπορεί να ξεδιπλωθεί από την παρατήρηση των περιόδων των ουράνιων σωμάτων. Επιπλέον, ο γεωμέτρης θα πρέπει να ενδιαφέρεται για την συμμετρία των σχημάτων και να καταλαβαίνει ότι η αλήθεια δεν μπορεί να ξεδιπλωθεί απλώς και μόνο από την παρατήρηση. Αντίστοιχα πρέπει να σκέφτεται και ένας πραγματικός αστρονόμος. Ένα γεωμετρικό πείραμα του Πλάτωνα για την συμμετρία παρουσιάζεται στο διάλογο του Μένωνα. Ας δούμε το παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 2



Υποθέτουμε ότι ο εμπειρογνώμονας γεωμέτρης ενδιαφέρεται για τη συμμετρία ενός δοσμένου τετραγώνου και του διπλάσιού του. Υποθέτουμε ότι ξεκινάει να εξετάζει το σχήμα και το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Όπως ο δούλος στο πείραμα του Πλάτωνα, έτσι και ο γεωμέτρης παρατηρεί ότι ένα τετράγωνο με διπλάσια πλευρά από του ΑΒΓΔ έχει τετραπλάσιο μέγεθος από το τελευταίο, δηλ. $AEHI = 4 * ABGD$. Το επόμενο που παρατηρεί είναι ότι το διπλάσιο του ΑΒΓΔ είναι το τετράγωνο ΒΖΘΔ, ισχύει δηλ. ότι $BZ\Theta\Delta = \frac{1}{2} * 4ABGD = 2ABGD$. Όλες αυτές οι παρατηρήσεις δεν είναι ασήμαντα επιτεύγματα και για τον Πλάτωνα δείχνουν μία πρόοδο προς την κατανόηση της γεωμετρικής αλήθειας. Φυσικά ο γεωμέτρης που δεν πηγαίνει παραπέρα από αυτό το

στάδιο της παρατήρησης δεν είναι σοφότερος από τον δούλο στο Μένωνα. Διότι σε αυτό το σημείο έχει απλώς μια διαισθητική κατανόηση της συμμετρίας. Αυτός ο γεωμέτρης δεν μπορεί να λέγεται ειδικός γεωμέτρης εφόσον νόμιζε ότι θα εντοπίσει την αλήθεια της συμμετρίας σε αυτό σχήμα που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Κατά τον Πλάτωνα το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνει ο ειδικός γεωμέτρης είναι να αποσαφηνίσει τη μαθηματική κατασκευή του διπλάσιου τετραγώνου ως προς ένα άλλο δοσμένο. Συνεπώς, αυτό που πρέπει να καταλάβει ο γεωμέτρης είναι ότι δεν πρέπει να προσεγγίσει το θέμα υπολογιστικά και το να υπολογίσουμε το σχήμα είναι άσχετο με την λύση του. Έτσι κατά τον Πλάτωνα το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνει ο γεωμέτρης είναι να αποδεχτεί συνειδητά ότι προσεγγίζει το σχήμα ως διάγραμμα. Με αυτόν τον τρόπο θα είναι σε θέση να εισηγηθεί μια σειρά από εξιδανικευμένες υποθέσεις: 1) υποθέτουμε ότι το ΑΒΓΔ έχει τέσσερις ίσες πλευρές, 2) υποθέτουμε ότι πλευρά ΑΕ είναι ακριβώς ίση με το διπλάσιο της ΑΒ, 3) υποθέτουμε ότι ΑΕΗΙ είναι επίσης ένα τέλειο τετράγωνο και 4) υποθέτουμε ότι ΒΖ, ΖΘ, ΘΔ, ΔΒ είναι τέλειες ευθείες. Μόλις θέσει αυτές τις υποθέσεις μπορεί να προχωρήσει σε μια σειρά συμπερασμάτων. Το σημαντικό συμπέρασμα που θα προκύψει είναι ότι η γραμμή που ενώνει τις δύο απέναντι γωνίες του τετραγώνου χωρίζει τόσο αυτές όσο και το τετράγωνο σε δύο ίσα μέρη. Έτσι ο γεωμέτρης -ο δούλος όπως αποκαλείται από τον Πλάτωνα- έχει μια προ-θεωρητική επίγνωση ότι προσεγγίζει το σχήμα ως διάγραμμα, δηλ. ότι θέτει εξιδανικευμένες προϋποθέσεις. Κατ' αυτόν τον τρόπο μόνο όταν αυτή η στάση γίνεται απόλυτα σαφής, τότε ο γεωμέτρης μπορεί να αρχίσει να κινείται έξω από τις παρωπίδες της «σωστής άποψης» και να στραφεί προς την «γνώση».¹¹³

Σε αυτό το σημείο θα ήταν διδακτικό να δούμε και μια άλλη άποψη για τη συμμετρία από κάποιον ο οποίος δεν θα έβλεπε το *σχήμα 2* σαν διάγραμμα, δηλ. χωρίς τη χρήση εξιδανικευμένων προϋποθέσεων. Σε μια τέτοια περίπτωση η βάση θα ήταν οι εμπειρικοί υπολογισμοί. Αυτού του τύπου η στάση και η αντίληψη για το πείραμα βασίζεται στην αυστηρά εμπειρική γεωμετρία και όχι στην επιστημονική γεωμετρία. Πάμε να εξηγήσουμε δηλαδή τι θα έκανε κάποιος γεωμέτρης εάν βασιζόταν σε αυτό το μοντέλο. Σε αυτήν την περίπτωση ο γεωμέτρης θα υπολόγιζε τις αναλογίες των

¹¹³ Alexander, Mourelatos, 'Plato's "Real Astronomy": Republic 527d-531d', John P. Anton (εκδ.), *Science and The Sciences in Plato*, (New York, EIDOS, 1980) σσ. 44-45.

τετραγώνων και των τριγώνων βρίσκοντας πόσες φορές θα μπορούσε να χωρέσει ένα βότσαλο μέσα σε αυτά. Χωρίς αμφιβολία τα αποτελέσματα θα ήταν ασυνήθιστες αναλογίες π.χ. $AB\Gamma\Delta/A\epsilon\eta\theta = 97/403$. Ωστόσο ακόμα και αν ο εμπειρικός γεωμέτρης έβρισκε ότι $AB\Delta/\Delta B\Gamma = 48/48$, αυτό από μόνο του δεν θα αποδείκνυε ότι $B\Gamma Z = BZE$. Ο γεωμέτρης θα έβρισκε αρκετές αναλογίες ανάμεσα στα μέρη του σχήματος αλλά δεν θα ανακάλυπτε ποτέ συμμετρίες.

Ας υποθέσουμε τώρα -για λόγους ευκολίας ή για λόγους απλότητας ή ακόμη και επειδή ο γεωμέτρης δεν εμπιστευόταν τους υπολογισμούς του- ότι στρογγυλοποιούσε τα νούμερα που έχει βρει έτσι ώστε να ταιριάζουν και να προκύπτει ότι $AB\Gamma\Delta = 100$ και $BZ\Theta\Delta = 200$. Και πάλι δεν θα μπορούσε να έχει ‘αληθινή συμμετρία’. Ο λόγος είναι ότι δεν θα μπορούσε να συνδυάσει τις στρογγυλοποιημένες αναλογίες ως ίσες, πολλαπλάσιες ή υποπολλαπλάσιες του ενός με του άλλου όπως αυτές καθορίζονται από τους μαθηματικούς νόμους που συνδέουν τις παραμέτρους ενός δοσμένου τετραγώνου με το διπλάσιό του. Δεν θα είχε νόημα να χρησιμοποιούμε την Πλατωνική φράση ‘αλήθεια της συμμετρίας’ όταν το μόνο που κάνουμε είναι σύγκριση αντικειμένων από παρατήρηση.

Σε αυτό το σημείο θα επιχειρηθεί μία προσέγγιση και εφαρμογή του παραδείγματος του Μένωνα στην Πολιτεία μέσα από τις τρεις παρακάτω σκοπιές:

1. Αυτή του γεωμέτρη που έχει αυστηρά εμπειρικό προσανατολισμό, δεν μπορεί ούτε καν να προσεγγίσει το σχήμα σαν διάγραμμα και το αντιμετωπίζει σαν άλλο ένα φυσικό αντικείμενο.
2. Αυτή του διαισθητικού γεωμέτρη ο οποίος φτάνει σε μια ‘σωστή άποψη’ μόλις ‘πρωτοδει’ τη λύση.
3. Αυτή του έμπειρου γεωμέτρη ο οποίος κατέχει την επιστήμη των σχετικών μαθηματικών αληθειών.

Μια παρόμοια τριπλή αντιδιαστολή γίνεται και στην αρμονία του Πλάτωνα και θα λειτουργήσει ως ένας επιπλέον περιορισμός προς την άρθρωση της επιστήμης όπως εξασκείται από τον πραγματικό αστρονόμο. Στις παραπάνω συγκρίσεις γεωμετρών, ο πρώτος και ο δεύτερος τύπος γεωμετρών έχουν λανθασμένη αντίληψη κατά τον Πλάτωνα εάν πιστεύουν ότι η αλήθεια της συμμετρίας βρίσκεται στα σχήματα.¹¹⁴

¹¹⁴ Mourelatos, ‘Plato’s “Real Astronomy”’: Republic 527d-531d’, σ. 47.

Επομένως εύλογα κατανοούμε πως σύμφωνα με τον Πλάτωνα η αστρονομία έχει άμεση σχέση με την γεωμετρία. Στο κομμάτι αυτό της πτυχιακής θα αναπτύξουμε την Πλατωνική σκέψη σε σχέση με την Αστρονομία για το πώς θα έπρεπε να συλλέγονται οι πληροφορίες για τα ουράνια φαινόμενα. Η ανάλυση αντιστοιχεί ακριβώς όπως ο γεωμέτρης προσεγγίζει τα διαγράμματα και για αυτόν τον λόγο έχουν και άμεση σχέση. Ο πραγματικός αστρονόμος μελετά τους ουρανούς και παρατηρεί μια ποικιλία από τακτικά επαναλαμβανόμενα μοτίβα της κίνησης. Για παράδειγμα εάν το πάρουμε από την πλευρά του γεωμέτρη η αντιστοιχία θα ήταν η μέτρηση των αριθμών των τετραγώνων και των μικρότερων τετραγώνων τα οποία αναγράφονται στο σχέδιο του Μένωνα. Τα δεδομένα που αναφέρονται στο απόσπασμα 530a7-b1 θα έχουν την ακόλουθη μορφή:

(1) Ημέρα + νύχτα = J (ηλιακή ημέρα), όπου η 'ημέρα' και η 'νύχτα' αποτελούν μεταβλητές τιμές και είναι αντίστοιχες των εποχών.

(2) Ημέρα & Νύχτα (αστρική ημέρα)/ μήνας (σεληνιακή περίοδος) = S/M.

(3) Μήνας/ Έτος (ηλιακή περίοδος) = M/Y

(4) Περίοδος Πλανητών A/ Ημέρα & Νύχτα = A/S

(5) Περίοδος Πλανήτη A/ Περίοδος Πλανήτη B = A/B

Κατά τον Πλάτωνα για αυτόν που αντιλαμβάνεται τους ουρανούς σαν διάγραμμα, οι αριθμοί που προκύπτουν από αυτές τις αναλογίες είναι απλές ποσοτικές παράμετροι των χαραγμένων κύκλων που τυγχάνει να συναντάμε όταν αναλογιζόμαστε τους ουρανούς. Το πρόβλημα του πραγματικού αστρονόμου είναι τι φόρμουλες, τι κανόνες, ή ποιες μαθηματικές και γεωμετρικές διαδικασίες θα καταδείκνυαν ένα σύστημα από συμμετρίες το οποίο να καθιστά με ένα λογικό και σαφή τρόπο τα νούμερα που προκύπτουν από αυτά τα δεδομένα. Οπότε ο πραγματικός αστρονόμος θα πρέπει να αναζητάει –μέσα από όλη την ποικιλία των αριθμών και αναλογιών που περιγράφουν την κίνηση των ουράνιων σωμάτων– μόνο εκείνους (αριθμούς και αναλογίες) που κατά πάσα πιθανότητα θα συνιστούσαν μία ευκρινή και συστηματική συμμετρία. Για παράδειγμα δεν θα πρέπει να μείνει έκπληκτος αν δεν προκύψει κάτι σημαντικό στην (3) αναλογία. Ο λόγος είναι ότι αυτοί οι δύο αριθμοί –όσο χρήσιμοι και αν είναι για ημερολογιακούς σκοπούς– δεν μετράνε καν συγκρίσιμα φαινόμενα: ο μήνας μετράει την κίνηση του

φεγγαριού σε σχέση με τον ήλιο ενώ το έτος μετράει τη κίνηση του ήλιου σε σχέση με τα σταθερά άστρα.¹¹⁵

IV.3 ΑΡΜΟΝΙΑ

Η αρμονία και η αστρονομία κατά των Πλάτωνα και το Σωκράτη είναι συμβατές και αλληλένδετες επιστήμες. Μάλιστα ο Σωκράτης μέσα από τον Πλάτωνα τις χαρακτηρίζει συγγενικές επιστήμες που μελετούν δύο μορφές κίνησης. Συγκεκριμένα λέει ότι όπως τα μάτια είναι πλαισιωμένα στην αστρονομία έτσι και τα αυτιά είναι πλαισιωμένα στην αρμονία. Η πλατωνική αρμονία εμφανίζεται να είναι αριθμοί ή ακριβέστερα σχέσεις αριθμών. Η κύρια διάκριση μεταξύ αρμονικών και αριθμητικής είναι οι αριθμητικές ιδιότητες. Δηλαδή, η αριθμητική έχει να κάνει θα λέγαμε με τις ιδιότητες που είναι σε πρώιμο στάδιο. Η αρμονία από την άλλη, ασχολείται με την αριθμητική αντιστοιχία και την ασυμφωνία γενικότερα και τέτοια παραδείγματα είναι π.χ. οκτάβα ή ένας τόνος. Στην σύγχρονη εποχή η ιδέα των σύμφωνων αριθμών έχει αρκετούς υπερασπιστές. Ακόμη και στην αρχαιότητα η έννοια της αρμονίας ως υποκλάδος της αριθμητικής φαίνεται να είχε ακμάσει.¹¹⁶

Το κείμενο το οποίο ενσαρκώνει καλύτερα την έννοια των αρμονικών είναι το «Sectio Canonis». Το συγκεκριμένο κείμενο ξεκινάει με ένα επεξηγηματικό προοίμιο ως εξής:

Ἐάν υπήρχε ακινησία θα υπήρχε σιωπή. Ἐάν υπήρχε σιωπή και δεν κινούταν τίποτα τότε δεν θα ακουγόταν τίποτα. Ὡς εκ τούτου εάν είναι κάτι να ακουστεί θα πρέπει να υπάρχει εκ των προτέρων ένα χτύπημα ή μια κίνηση. Ἐτσι για να παραχθεί ήχος (νότα) πρέπει εκ των προτέρων να υφίσταται αρχική ενέργεια (χτύπημα) και επιπλέον είναι αδύνατον αυτό το χτύπημα να παραχθεί εάν δεν έχει υπάρξει αρχική κίνηση. Και δεδομένων των κινήσεων που άλλες είναι πυκνότερες και άλλες αραιότερες, οι πυκνότερες βγάζουν νότες ψηλές ενώ αντίστοιχα οι αραιότερες παράγουν βαθύτερες

¹¹⁵ Mourelatos, 'Plato's "Real Astronomy": Republic 527d-531d', σσ. 53-55.

¹¹⁶ Mueller, 'Ascending to Problems: Astronomy and Harmonics in Republic VII', σ. 112.

νότες. Οι ψηλές νότες παράγονται από πιο συμπαγείς και πολλαπλές κινήσεις, ενώ αντίστοιχα κάποιες βαθύτερες νότες παράγονται από πιο αραιές και λιγότερες κινήσεις. Έτσι, οι ψηλές και έντονες νότες παράγονται από την αύξηση της κίνησης και χαλαρώνουν από την μείωση της κίνησης. Οι βαθύτερες νότες επιτυγχάνουν να πλαισιωθούν σε ένα καλούπι από την αύξηση της κίνησης.

Έτσι, οι νότες αποτελούνται από τμήματα τα οποία με την πρόσθεση ή την αφαίρεση κίνησης μπορούν να φτιάσουν σε ένα ταίριασμα. Όλα τα αντικείμενα που αποτελούνται από τμήματα έχουν την αναλογία ενός αριθμού προς ένα άλλο, έτσι και οι νότες αναγκαστικά αναφέρεται ότι έχουν την αναλογία ενός αριθμού προς ένα άλλο. Μερικοί αριθμοί φέρουν πολλαπλάσια αναλογία, άλλοι είναι σε επιμόριο (που εκφραζόταν με την αριθμητική μορφή $n+2/n+1$), άλλοι είναι σε επιμερές (που εκφραζόταν με την μαθηματική μορφή $m+1+n+2/n+2$) έτσι ώστε οι νότες υποχρεωτικά να είναι σε τέτοιες αναλογίες η μία με την άλλη. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι κάποιες νότες είναι σύμφωνες και κάποιες ασύμφωνες.

Οι σύμφωνες νότες μπορούν να είναι μίγμα από δύο πράγματα, ενώ αντίστοιχα οι ασύμφωνες δεν μπορούν. Έτσι είναι λογικό οι σύμφωνες νότες να βρίσκονται μεταξύ αριθμών οι οποίοι καλούνται με ένα όνομα σε σχέση ο ένας με τον άλλο. Δηλαδή τα πολλαπλάσια και επιμόρια, εφόσον δημιουργούν ήχο από δύο πράγματα.' (Sectio 158.1-160.4)

Ο πρόλογος του Sectio φιλοδοξεί να προσφέρει μια αιτιολόγηση για τη θεμελιώδη υπόθεση της αρμονικής: Οι αρμονικές νότες βρίσκονται μεταξύ αριθμών οι οποίοι ονομάζονται με ένα όνομα σχέση ο ένας με τον άλλο. Η υπόθεση αυτή μπορεί να εκφραστεί με τον εξής τρόπο:

Εάν δύο αριθμοί είναι σύμφωνοι, ο μεγαλύτερος είναι ένα πολλαπλάσιο ή ένα επιμόριο του μικρότερου.

Με βάση αυτό το συλλογισμό της αρμονικής ο Πλάτωνας δεν θα είχε κανένα πρόβλημα να ερμηνεύσει το έργο του Ευκλείδη «Sectio» χαρακτηρίζοντας το ως ένα κομμάτι αφαιρετικής αριθμητικής με βάση τις συνηθισμένες αριθμητικές υποθέσεις. Αυτοί οι όροι και οι υποθέσεις περιγράφουν απόλυτα τα σαφή χαρακτηριστικά των αριθμών. Το μόνο ίσως που φαίνεται σαν λάθος στην Πλατωνική αντίληψη είναι ότι δεν συμπεριφέρεται στους αριθμούς της αρμονικής θεωρίας ως αριθμούς του οτιδήποτε.

Μπορούμε να κατανοήσουμε τις αναλογίες της αρμονικής σαν αναλογίες μεταξύ φυσικών μεγεθών, π.χ. μήκη χορδών ή συχνοτήτων.

Αν η αρμονική είναι απλά η μελέτη ορισμένων ιδιοτήτων των αριθμών, τότε η σχέση μεταξύ της Πλατωνικής αρμονικής και του φυσικού κόσμου πιθανώς δεν θα είναι ίδια όπως η σχέση της Πλατωνικής αστρονομίας με το φυσικό κόσμο. Γιατί ενώ τα σημεία μιας περιστρεφόμενης σφαίρας είναι μια άμεση απεικόνιση ή μια εξιδανικευμένη εικόνα της σφαίρας των σταθερών άστρων, η αναλογία του δύο προς ένα, δεν είναι με στην ίδια λογική η εικόνα μιας αντίστοιχης οκτάβας. Αυτή η διαφορά μεταξύ της Πλατωνικής αρμονίας και της αστρονομίας είναι αντίστοιχη με την περίπτωση της γεωμετρίας και της αριθμητικής, η οποία θα μπορούσε να αναλυθεί με τον ακόλουθο τρόπο. Όταν υπολογίζουμε τις γωνίες ενός τριγώνου του οποίου οι πλευρές εμφανίζονται να είναι ίσες, περιμένουμε και οι γωνίες να είναι περισσότερο ή λιγότερο ίσες, αλλά όχι ακριβώς ίσες. Αλλά όταν τοποθετούμε αντικείμενα σε m σειρές από n αντικείμενα η καθεμία τότε περιμένουμε να βρούμε ακριβώς $n * m$ αντικείμενα μέσα στον πίνακα. Με άλλα λόγια, παρότι αποδεχόμαστε πως δεν υπάρχουν τέλει φυσικές υλοποιήσεις της γεωμετρικής αλήθειας, δεν υπάρχει κανένας λόγος για να αποδεχτούμε το ίδιο πράγμα για τις αριθμητικές αλήθειες.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι ίσως ο τρόπος για να ξεχωρίσεις την αρμονική από την αριθμητική είναι η άποψη σε σχέση με την ακρίβεια της αντίληψης μας. Οι διαφορές μεταξύ των αρμονικών και αριθμητικής φαίνεται να συνεπάγονται σε μια αντίληψη προσέγγισης, αλλά και μιας ελαφρώς διαφορετικής από αυτήν που εμπλέκεται στη διαφορά μεταξύ της αστρονομίας και της γεωμετρίας. Τόσο η αριθμητική όσο και αρμονικές μπορούν να αντιμετωπίζονται ως καθαρά επιστήμες που έχουν άμεση σχέση με αριθμούς.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Είδαμε πως τα μαθηματικά είναι κατώτερα της φιλοσοφίας. Παρά ταύτα ο Πλάτων τα θεωρεί αναγκαία προκειμένου ο μελλοντικός άρχοντας να φτάσει ως τη διαλεκτική. Ο λόγος είναι πως μόνο αυτά έχουν τη δύναμη να στρέψουν το μυαλό και την ψυχή μακριά από το μεταβαλλόμενο κόσμο των αισθητών στον κόσμο της νόησης. Έτσι, για 10 χρόνια όπως είδαμε πρέπει να εκπαιδεύονται στις πέντε μαθηματικές επιστήμες επιδιώκοντας στο τέλος να φτάσουν σε μια συνοπτική άποψη αυτών. Σκοπός τους είναι να συνδέσουν όλους αυτούς του κλάδους μεταξύ τους αλλά και να εξηγήσουν τη φύση καθενός και μόνο τότε θα ακολουθήσουν τα πέντε χρόνια διαλεκτικής. Μετά κι από αυτά, βέβαια, θα είναι έτοιμοι για μια ανώτερη σύνοψη, αυτή των Ιδεών που θα πραγματοποιηθεί υπό το φως του Αγαθού.

Φυσικά οι κλάδοι των μαθηματικών της κύριας εκπαίδευσης αφορούν την αριθμητική, τη γεωμετρία (επιπεδομετρία), τη στερεομετρία, την αστρονομία και την αρμονία. Το πρόγραμμα σπουδών ξεκινά με την αριθμητική που πρέπει να μελετηθεί όχι για εμπορικούς σκοπούς αλλά για να βοηθήσει στη μεταστροφή της ψυχής προς την αλήθεια. Ακολουθεί η γεωμετρία και στη συνέχεια ο Γλαύκων προτείνει την αστρονομία. Ο Σωκράτης θεωρεί πως αυτό είναι λάθος αφού έτσι πάνε από τα διςδιάστατα σώματα κατευθείαν στα τρισδιάστατα εν κινήσει. Γι' αυτό εισάγεται ως τρίτο μάθημα η στερεομετρία που εξετάζει τα ακίνητα τρισδιάστατα σώματα κι έπειτα ακολουθεί η αστρονομία και η αρμονία. Άρα, η διδασχία αυτών των πέντε κλάδων γίνεται σε μια σειρά ώστε ο ένας να αποτελεί τη βάση για να χτιστεί ο επόμενος.

Κατά αυτόν τον τρόπο κάθε κλάδος προσεγγίζεται με μια ιδιαιτερότητα και -καταρχάς- ανεξάρτητα από τους άλλους ταυτόχρονα όμως υπάρχει η συναίσθηση ότι δεν αποτελεί παρά ένα τμήμα ενός ενοποιημένου συστήματος και εντέλει προσδιορίζεται η κατάλληλη σχέση του και συνάφεια με κάθε έναν από τους άλλους. Κάποιος που έχει πετύχει αυτή την ενοποιημένη κατάσταση έχει αφομοιώσει μια απέραντη ποσότητα μαθηματικών μέσα σε ένα ορθά δομημένο σύστημα. Με άλλα λόγια, για τον Πλάτωνα η

αφομοίωση σημαίνει ότι η ψυχή αποδέχεται τη δομή αυτής της αφηρημένης σφαίρας επιστημών και εξηγείται η φύση του κάθε κλάδου και η σχέση του καθενός με οποιονδήποτε άλλον. Η σχέση κιάλας είναι αμφίδρομη: Η ψυχή αφομοιώνει αυτό το δομημένο σύστημα και τα μαθηματικά με τη σειρά τους αφομοιώνουν την ψυχή. Έτσι, μπορεί να εξηγηθεί και να γίνει αντιληπτή η συγγένεια και αυτή η καθ' εαυτή φύση των μαθηματικών και των κλάδων τους.

Βέβαια, η παραπάνω κατάσταση είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί όπως αναφέρει κι ο Πλάτων στο 531d. Ο αναγνώστης που θα διαβάσει την Πολιτεία οφείλει να καταλάβει πως απαιτείται πολύ μεγάλη προσπάθεια αλλά και μια συμπάθεια για αυτό το εγχείρημα. Εξάλλου είναι μια διαδικασία που θέλει πολλά χρόνια για να ολοκληρωθεί.

Ένα από τα πιο δύσκολα σημεία σ' αυτή την προσπάθεια της σύνοψης των μαθηματικών αποτελεί η κατανόηση του ρόλου της αρμονίας. Ο Burnyeat¹¹⁷ μάς παρακινεί να δώσουμε έμφαση σε δύο στοιχεία γύρω από αυτόν τον κλάδο. Το πρώτο είναι ο εκτεταμένος ρόλος που παίζουν οι αναλογίες στα ελληνικά μαθηματικά. Από την αριθμητική και τη γεωμετρία μέχρι τη στερεομετρία και την αστρονομία παρατηρείται η παρουσία λόγων και αναλογιών μέσα στις αποδείξεις. Η αρμονία είναι ο πρώτος κλάδος που έχει ως κύριο αντικείμενο μελέτης του αυτούς τους λόγους. Το δεύτερο αφορά το είδος των αναλογιών που η αρμονία πραγματεύεται. Στην Πολιτεία αυτή φαίνεται να είναι και η αιτία που η αστρονομία και η αρμονία θεωρούνται αδερφές επιστήμες: Όπως η αστρονομία μελετά κινήσεις ορατές με τα μάτια έτσι και η αρμονία μελετά μουσικές κινήσεις αντιληπτές με τα αυτιά (530d). Στη συνέχεια, ο Σωκράτης απορρίπτει την ιδέα των πυθαγόρειων της αναζήτησης αριθμών, δηλαδή λόγων, σε αρμονικές σχέσεις ήχων (531bc).

Κάτι τελευταίο που πρέπει να σημειωθεί σχετικά με την αστρονομία και την αρμονία είναι πως δε βρίσκονται στο πρόγραμμα σπουδών ως παρατηρησιακές επιστήμες που αντικείμενο έχουν τους ορατούς ουρανοί και τους ήχους που ακούμε. Βρίσκονται εκεί για τη δύναμη που έχουν να ερεθίζουν τη σκέψη και να οδηγούν την ψυχή έξω από τον αισθητό κόσμο. Εξ' ου και το απόσπασμα στο 530b που αναφέρει πως 'την

¹¹⁷ Myles Fredric Burnyeat, 'Plato on Why Mathematics is Good for the Soul', in *Mathematics and Necessity: Essays in the History of Philosophy*, T. Smiley (εκδ.), *Mathematics and Necessity: Essays in the History of Philosophy*, 47 vols (Oxford: Oxford University Press, 2000), CIII (issue 3), σ. 73.

αστρονομία θα την σπουδάσουμε ακριβώς όπως και τη γεωμετρία, με τη βοήθεια προβλημάτων, και θα αφήσουμε τον έναστρο ουρανό στην άκρη¹¹⁸.

Κλείνοντας, πρέπει να αναφέρουμε πως τα μαθηματικά -παρά τη χρήση των αισθητών διαγραμμάτων και τις υποθέσεις τους- αποτελούν το καλύτερο μέσο για την επιρροή της ψυχής και της μεταστροφής προς τον κόσμο της νόησης και της αλήθειας. Βέβαια, ο Πλάτων πιστεύει πως τη φιλοσοφική αλήθεια πρέπει ο καθένας να την ανακαλύψει μόνος του. Αυτό που πετυχαίνει η παιδεία είναι απλά να στρέψει τα μάτια προς τον ήλιο. Γι' αυτό και υποβαθμίζει τα βιβλία αφού κανένα δεν εγγυάται ότι θα συλλάβεις το νόημά του. Συνεπώς, κάποιος φιλοσοφεί όταν διαλέγεται κι όχι όταν απλώς διαβάζει βιβλία. Έτσι, όμως ο Πλάτων ακροβατεί μεταξύ δύο καταστάσεων: αφενός η φιλοσοφία έχει μια ακατάλυτη αξία και συνεπώς η διαλεκτική προσφέρει κάτι πολύ παραπάνω από εφήμερα αποτελέσματα, αφετέρου η διαλεκτική είναι ένα ζήτημα προσωπικό που στοχεύει ώστε να παρακινηθείς και να ψάξεις την αλήθεια αντί να συλλέγεις γνώμες -έστω και σοφών ανθρώπων.¹¹⁹

¹¹⁸ Νικόλαος Μ.Σκουτερόπουλος, *Πλάτων Πολιτεία*, (Αθήνα: Πόλις, 2009), 530b, σ. 545.

¹¹⁹ Julia Annas, *An Introduction to Plato's Republic* (Oxford, 1981), σ. 365.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ❖ Αριστοτέλης, *Μεταφυσικά*, William D. Ross (εκδ.), (Oxford: Clarendon Press, 1924), τόμος I, σσ. Iiii-1vii.
- ❖ Δήμας, Πάνος, 'Η φιλοσοφία του Πλάτωνα', στο Βισβιδάκης Σ., *Η Ελληνική Φιλοσοφία από την Αρχαιότητα έως τον 20ό Αιώνα*, (Πάτρα: ΕΑΠ, 2000).
- ❖ Ευκλείδης, *Στοιχεῖα Εὐκλείδου*, Βιβλίο VII.
- ❖ Πλάτων, *Ἑβδομο Γράμμα*.
- ❖ Πλάτων, *Ευθύδημος*
- ❖ Πλάτων, *Ευθύφρων*.
- ❖ Πλάτων, *Θεαίτητος*, Εισαγωγή, μετάφραση, σχόλια Β. Τατάκης (Εκδ. Ζαχαρόπουλος).
- ❖ Πλάτων, *Ιππίας Μείζων*.
- ❖ Πλάτων, *Κρατύλος*.
- ❖ Πλάτων, *Μένων*, R. S. Bluck (εκδ.), (Cambridge: Cambridge University Press, 1961).
- ❖ Πλάτων, 1993. Παρμενίδης ή περί ιδεών. Εισαγωγή – Μετάφραση – Σχόλια: Φιλολογική Ομάδα Κάκτου. Αθήνα: Κάκτος
- ❖ Πλάτων, *Πρωταγόρας*.
- ❖ Πλάτων, *Συμπόσιο*, Εισαγωγή, μετάφραση, σχόλια Ι. Συκουτρής (Εκδ. Εστίας).
- ❖ Πλάτων, *Τίμαιος*.
- ❖ Πλάτων, *Φαίδων*.
- ❖ Πλάτων, *Χαρμίδης*.
- ❖ Σκουτερόπουλος, Νικόλαος Μ., *Πλάτων Πολιτεία*, (Αθήνα: Πόλις, 2009).
- ❖ Συριανός, 'Σχόλια στα Μεταφυσικά του Αριστοτέλη', Wilhelm Kroll (εκδ.), *GAG*, 23 vols, (Βερολίνο: 1902), VI (issue 1).
- ❖ Adam, James, *The Republic of Plato, Volume 2, Books VI–X and Indexes*, James Adam (εκδ.), (Cambridge: Cambridge University Press, 1902), Παράρτημα I στο Βιβλίο VII.
- ❖ Annas, Julia, *An Introduction to Plato's Republic* (Oxford, 1981).

- ❖ Barbera, Andre, *Another Look at Plato and the Pythagoreans* (Χειμώνας, 1981). Προσβάσιμο στο <http://www.jstor.org/stable/294326> [Είσοδος 07 Δεκεμβρίου 2010].
- ❖ Barnes, Jonathan, *Aristotle: Posterior Analytics*, (Oxford: 1975).
- ❖ Blumenthal, Leonard Mascot, *A Modern View of Geometry*, (Dover Publications, 1961).
- ❖ Bluck, R. S., ‘Υποθέσεις in the Phaedo and Platonic Dialectic’, *Phronesis*, 58 vols (BRILL, Sept. 1957), II (issue 1), σσ. 21-31.
- ❖ Boyle, Joseph, ‘Plato's Divided Line: Essay II, Mathematics and Dialectic’, Markus Asper και Christian Wildberg (εκδ.), *Apeiron*, 47 vols (1974), VIII (issue 1), σσ. 7-18.
- ❖ Burnyeat, Myles Fredric ‘Platonism and Mathematics in Aristotle: A Prelude to Discussion’, A. Graeser (εκδ.), *Mathematics and Metaphysics in Aristotle* (Xth Symposium Aristotelicum, Stuttgart, 1987).
- ❖ Burnyeat, Myles Fredric, ‘Plato on Why Mathematics is Good for the Soul’, in *Mathematics and Necessity: Essays in the History of Philosophy*, T. Smiley (εκδ.), *Mathematics and Necessity: Essays in the History of Philosophy*, 47 vols (Oxford: Oxford University Press, 2000), CIII (issue 3), σσ. 1–81.
- ❖ Cooper, Neil, ‘The Importance of Διάνοια in Plato's Theory of Forms’, (New Series) 16 (1966).
- ❖ Crombie, Ian. M. ‘An Examination of Plato's Doctrines, Vol. II: Plato on Knowledge and Reality’, Norman Gulley (εκδ.), *The Philosophical Quarterly*, 62 vols (London: Routledge, 1963), XV (issue 61).
- ❖ Cross, Richard and Woosley, Anthony, *Plato's Republic: A Philosophical Commentary*, (London: Macmillan, 1964).
- ❖ Ferguson, Adam S. ‘Plato's Simile of Light. Part I. The Similes of the Sun and the Line’, *Classical Quarterly*, 63 vols, (Cambridge University Press, Jul. - Oct., 1921), XV (issue 3/4), σσ. 131-152.
- ❖ Ferguson, Adam S. ‘Plato's Simile of Light. Part II. The Allegory of the Cave (Continued)’, *Classical Quarterly*, 63 vols, (Cambridge University Press, Jan., 1922), XVI (issue 1), σσ. 15-28.

- ❖ Fogelin, Robert J., 'Three Platonic Analogies', *Philosophical Review*, 123 vols (1971), LXXX (issue 3), σσ. 371-382.
- ❖ Gallop, David, 'Dreaming and waking in Plato', J. Anton και G. Kustas (εκδ.), *Essays in Ancient Greek Philosophy*, 5 vols (Albany: NY, 1972), I.
- ❖ Gómez-Lobo, Alfonso, 'Aristotle's Hypotheses and the Euclidean Postulates', Markus Asper και Christian Wildberg (εκδ.), *The Transformation of Plato's Republic*, 47 vols (HPIA: Apeiron, Sept. 1988), XXI (issue 3), σσ. 256-61
Review of *Metaphysics*, vol. XXX, 1977, σσ. 430-439.
- ❖ Gosling, J. C. B., 'Republic Book V: τὰ πολλά καλά, etc,' *Phronesis*, 59 vols (BRILL, 1960), V (issue 2), σσ. 116-128.
- ❖ Gould, John, *The Development of Plato's Ethics*, (Cambridge: Russell & Russell, 1955).
- ❖ Gulley, Norman, *Plato's Theory of Knowledge*, (London: Greenwood Press, 1962) σ. 56,
- ❖ Hamlyn, David W., 'Eikasia in Plato's Republic', St. Andrews, Scot. (εκδ.), *Philosophical Quarterly*, 62 vols (Oxford University Press, 1958), VIII (issue 3), σσ. 14-23.
- ❖ Hardie, William Francis Ross, 'A Study in Plato', *Mind*, 121 vols (Oxford University Press, Apr., 1937), XLVI (issue 182).
- ❖ Hare, Richard Mervyn, 'Plato and the Mathematicians', Renford Bambrough (εκδ.), *New Essays on Plato and Aristotle*, (London: Routledge & Kegan Paul, 1965), σσ. 21-38.
- ❖ Heath, Thomas L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols, 2nd edition (Cambridge: Cambridge University Press, 1926), II.
- ❖ Heath, Thomas, *Mathematics in Aristotle*, (Oxford: University Press, 1949).
- ❖ Irwin, Terence, *Plato's Ethics* (New York: Oxford University Press, 1995).
- ❖ Karasmanis, Vassilis, 'Plato's Republic: The Line and the Cave', Markus Asper και Christian Wildberg (εκδ.), *Apeiron*, 47 vols (HPIA: Sept. 1988), XXI (issue 3), σσ. 147-171.
- ❖ Karasmanis, Vassilis, 'The Hypotheses of Mathematics in Plato's Republic and his Contribution to the Axiomatization of Geometry', Pantelis Nicolacopoulos

- (εκδ.), *Greek Studies in the Philosophy and History of Science*, Kluwer Academic Publishers, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, 280 vols (ΗΠΑ: Apeiron, Sept. 1990), CXXI.
- ❖ Karasmanis, Vassilis, *The Hypothetical Method on Plato's Middle Dialogues*, unpublished D. Phil. Dissertation, Brasenose College, Oxford, 1987.
 - ❖ Landor, Blake, 'Definition and Hypothesis in Posterior Analytics 72a19-25 and 76b35-77a4', *Phronesis*, 59 vols (BRILL, 1981), XXVI (issue 3), σσ. 308-318.
 - ❖ Lee, Henry Desmond Pritchard, 'Geometrical Method and Aristotle's Account of First Principles', *The Classical Quarterly*, 64 vols (April 1935), XXIX (issue 2).
 - ❖ Leszl, Walter, 'Mathematics, Axiomatization and Hypotheses', in *Aristotle on science: the "Prosterior Analytics"*, Enrico Berti (εκδ.), Studia Aristotelica, 9 (Padova: Antenore, 1983).
 - ❖ Malcolm, John, 'The Line and the Cave', *Phronesis*, 59 vols (1962), VII (issue 1), σσ. 38-45
 - ❖ Marrou, Henri-Irénée, *Histoire de l'éducation dans l'Antiquité*, (Paris: Le Seuil, 1948).
 - ❖ Mill, John Stuart, *A System of Logic, Ratiocinative And Inductive*, (New York: Harper & Brothers, Publishers, 2009), Volume I, Book II.
 - ❖ Montanari, Franco, *Ιστορία της αρχαίας ελληνικής λογοτεχνίας- Από τον 8ο αι. π.Χ. έως τον 6ο αι.μ.Χ.*, επιμέλεια: Δ.Ιακώβ-Α.Ρεγκάκος (Θεσσαλονίκη: University Press, 2008) σ. 627.
 - ❖ Mourelatos, Alexander, 'Plato's "Real Astronomy": Republic 527d-531d', John P. Anton (εκδ.), *Science and The Sciences in Plato*, (New York, EIDOS, 1980) σσ. 33-73.
 - ❖ Mueller, Ian, 'Ascending to Problems: Astronomy and Harmonics in Republic VII', John P. Anton (εκδ.), *Science and The Sciences in Plato*, (New York, EIDOS, 1980) σσ. 103-122.
 - ❖ Nettleship, Richard L., *Lectures on the Republic of Plato*, (London: Macmillan, 1901).
 - ❖ White, Nicholas, *Plato on Knowledge and Reality*, (Indianapolis: Hackett, 1976).
 - ❖ Proclus, 'In Platonis Rem publicam commentarii', Wilhelm Kroll (εκδ.), 2 vols (Amsterdam: Teubner, 1965), I.

- ❖ Raven, John Earle, 'Divided Line, and Cave', *Classical Quarterly*, 63 vols, (Cambridge University Press, May 1953), III (issue 1-2), σσ. 22-32.
- ❖ Robinson, Richard, *Plato's Earlier Dialectic*, (Oxford: Auflage, 1953).
- ❖ Ross, William David, *Plato's Theory of Ideas*, (Oxford: Clarendon Press, 1951), σ. 51, Hans-Peter Stahl, *Ansätze zur Satzlogik bei Platon*, *Hermes* 88 (1960).
- ❖ Shorey, Paul, *What Plato Said* (Chicago: University of Chicago Press, 1933).
- ❖ Solmsen, Friedrich, 'Plato and Science', H. North (εκδ.), *Interpretations of Plato, Mnemosyne*, Vol 150.
- ❖ Szabó, Arpad, *The Beginning of Greek Mathematics*, (D. Reidel, 1978).
- ❖ Sze, Christ P. 'Εικασία and Πίστις in Plato's Cave Allegory', *Classical Quarterly*, 63 vols (Cambridge University Press, 1977), XXVII (issue 1), σσ. 134-138.
- ❖ Taylor, Alfred Edward, *Plato, The Man and His Work*, (New York: Meridian Books, 1956).
- ❖ Taylor, Alfred Edward, 'Note on Plato's **Republic**', *Mind*, 123 vols (Oxford University Press, January 1934), XLIII (issue 169), σσ. 81-84.
- ❖ Taylor, C. C. W., 'Plato and the Mathematicians: An Examination of Professor Hare's Views', *The Philosophical Quarterly*, 62 vols (Oxford University Press, Jul., 1967), XVII (issue 68), σσ. 193-203.
- ❖ Vlastos, Gregory, 'The Role of Observation in Plato's Conception of Astronomy', John P. Anton (εκδ.), *Science and The Sciences in Plato*, (New York, EIDOS, 1980), σσ. 1-31.
- ❖ Wedberg, Anders, *A History of Philosophy*, vol 1, (Oxford: Oxford Clarendon Press, 1982).
- ❖ Wedberg, Anders, *Plato's Philosophy of Mathematics*, (Stockholm: 1955).