



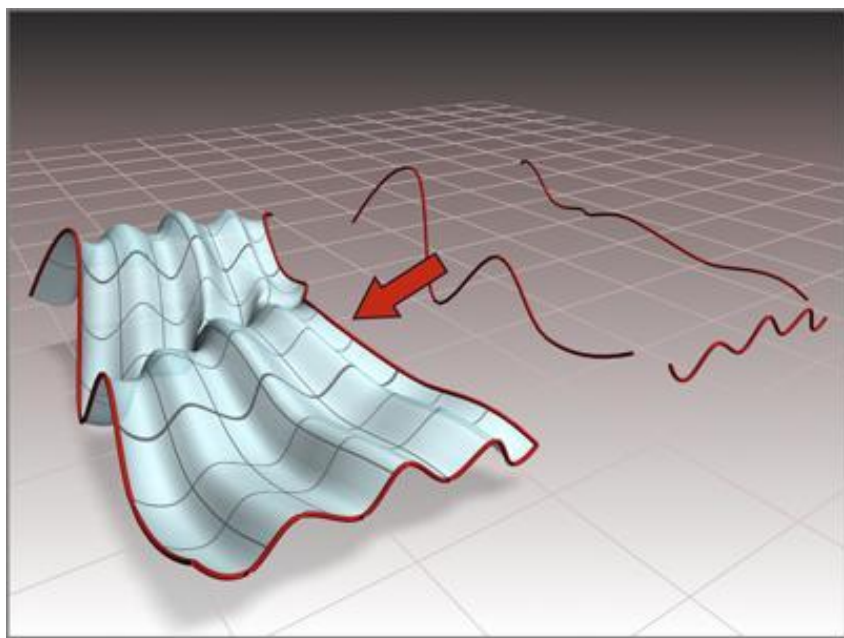
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΑΓΡΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΧΑΡΑΞΗ ΟΔΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΩΝ
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ Β - SPLINE**



Κυριάκος Αμοιρίδης

Επιβλέπων : Β. Ψαριανός, Καθηγητής ΕΜΠ

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ
ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ**



Αθήνα, Μάρτιος 2014



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF RURAL & SURVEYING ENGINEERING

DEP. OF INFRASTRUCTURE AND RURAL DEVELOPMENT

Diploma Thesis

**THREE DIMENSIONAL ROAD ALIGNMENT BY APPLYING
DIFFERENTIAL GEOMETRY AND B – SPLINE
INTERPOLATION CURVES**

Kiriakos Amiridis

Supervisor: B. Psarianos, Professor NTUA

LABORATORY OF
TRANSPORTATION ENGINEERING



Athens, March 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΑΓΡΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΧΑΡΑΞΗ ΟΔΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΩΝ
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ B - SPLINE**

Κυριάκος Αμοιρίδης

Επιβλέπων : Β. Ψαριανός, Καθηγητής ΕΜΠ

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ
ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ**



Αθήνα, Μάρτιος 2014

ΔΗΛΩΣΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

Δηλώνω ότι η διπλωματική αυτή εργασία αποτελεί στο σύνολό της, δική μου εργασία, και κανένα τμήμα της δεν έχει χρησιμοποιηθεί για την κτήση άλλου τίτλου σπουδών. Όπου έχει χρησιμοποιηθεί υλικό από άλλες πηγές, αυτές έχουν αναφερθεί με ακρίβεια και πληρότητα.

Κυριάκος Αμοιρίδης

Στον παππού μου, Κυριάκο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη Διπλωματική Εργασία μου, με την οποία ολοκληρώνω τις σπουδές μου στη Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Αντικείμενο της μελέτης αποτελεί η τρισδιάστατη χάραξη οδού. Η επιλογή του θέματος αυτού, προέκυψε ύστερα από προσωπικό ενδιαφέρον για την αντιμετώπιση της οδού ως μία ενιαία μαθηματική επιφάνεια, και διαμορφώθηκε ύστερα από αρκετή σκέψη και συζήτηση με τον επιβλέποντα καθηγητή.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, αλλά και των σπουδών μου γενικότερα.

Καταρχήν, θα ήθελα να εκφράσω ιδιαίτερες ευχαριστίες στον κ. Βασίλη Ψαριανό, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και διευθυντή του Εργαστηρίου Συγκοινωνιακής Τεχνικής της Σ.Α.Τ.Μ., για το άριστο κλίμα συνεργασίας, την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και τον χρόνο που αφιέρωσε συμβάλλοντας καθοριστικά στην επίλυση όλων των προβληματισμών μου και στην διεκπεραίωση αυτής της ιδιαίτερα ενδιαφέρουσας για εμένα, μελέτης.

Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Στέλιο Μαρκάτη, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε για την πολύτιμη καθοδήγησή του σχετικά με προβλήματα σε θέματα Γεωμετρίας που παρουσιάστηκαν.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φίλο μου Παντελή Παπαμανώλη για την καίρια στήριξή του στις τεχνικές δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά την κατασκευή των προγραμμάτων στο *Mathematica*. Ακόμα, ευχαριστώ τον συμφοιτητή και φίλο μου, Γιώργο Κλαδευτήρα με τον οποίο συνεργαστήκαμε μαζί για την περάτωση του μαθήματος – θέματος της οδοποιίας της σχολής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές του Εργαστηρίου Συγκοινωνιακής Τεχνικής, αλλά και όλης της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών για τις επιστημονικές βάσεις που μου έδωσαν όλα αυτά τα χρόνια.

Αθήνα, Μάρτιος 2014

Κυριάκος Αμοιρίδης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου που να καθιστά εφικτή την τρισδιάστατη χάραξη οδού. Δηλαδή, δε θα χρειάζεται, η ξεχωριστή μελέτη της οριζοντιογραφίας και της μηκοτομής πλέον, αφού η ανάλυση γίνεται απευθείας, στον χώρο των τριών διαστάσεων. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του λογισμικού *Mathematica*. Στόχος της εργασίας αποτέλεσε αρχικά, η μαθηματική αρτιότητα (θεωρητικά) του μοντέλου που κατασκευάστηκε, στη συνέχεια η υλοποίηση όλων των συναρτήσεων σε κώδικα μέσω της γλώσσας προγραμματισμού που προσφέρει το *Mathematica* (βασίζεται στη *C++*) και τελικά η εφαρμογή του μοντέλου σε έναν πραγματικό δρόμο κατά την περίπτωση μελέτης.

Για την μαθηματική τεκμηρίωση του μοντέλου, χρησιμοποιήθηκαν όλες εκείνες οι γνώσεις από τον κλάδο της Διαφορικής Γεωμετρίας που αναφέρονται στη μελέτη καμπυλών και επιφανειών.

Ως προς την τελική υλοποίησή του, οι καμπύλες που αξιοποιήθηκαν για τον ορισμό του άξονα της οδού, είναι οι καμπύλες *B-Spline* (σύνθετες καμπύλες *Bezier*). Ουσιαστικά, ορίζεται ένας προσωρινός άξονας της οδού (πρώτη προσέγγιση της οδού) και στη συνέχεια αυτός μεταβάλλεται. Η μεταβολή της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού, εξαρτάται κυρίως από τα όρια που τίθενται ως προς την καμπυλότητα και την κατά μήκος κλίση της οδού. Αξίζει να σημειωθεί ότι η καμπυλότητα αναλύεται σε δύο συνιστώσες που δεν είναι άλλες από τη γεωδαισιακή καμπυλότητα και την κάθετη καμπυλότητα.

Όσον αφορά τη γεωδαισιακή καμπυλότητα, αυτή αντιστοιχεί διαφορικά, στην οριζοντιογραφική καμπυλότητα με την ευρύτερη έννοια. Δηλαδή, αντιστοιχεί στην καμπυλότητα που έχει η καμπύλη αν προβληθεί σε επίπεδο που είναι "εφαπτόμενο" σε εκείνη. Έτσι, η αριθμητική τιμή (θετική ή αρνητική) της γεωδαισιακής καμπυλότητας υπολογίζεται ως η αριθμητική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας σε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης που είναι παράλληλο σε σχέση με τον ορίζοντα.

Ως προς την κάθετη καμπυλότητα, επιβάλλονται διαφορετικά όρια ως προς τη θετική κάθετη καμπυλότητα και την αρνητική κάθετη καμπυλότητα. Συγκεκριμένα, η θετική κάθετη καμπυλότητα αντιστοιχεί σε κυρτές καμπύλες κατά την έννοια της μηκοτομής, ενώ η αρνητική κάθετη καμπυλότητα αντιστοιχεί σε κοίλες καμπύλες. Η αριθμητική τιμή (θετική ή αρνητική) της κάθετης καμπυλότητας υπολογίζεται ως η αριθμητική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης. Ως μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης ορίζεται εκείνο το διάνυσμα που προκύπτει ως το εξωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος και του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος της καμπύλης που είναι παράλληλο σε σχέση με τον ορίζοντα.

Ο μορφή του άξονα της οδού προσδιορίζεται τελικά, μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης (θεμελιώδες θεώρημα καμπυλών), ενώ η ορθή ένταξή του στον χώρο επιτυγχάνεται μέσω του μετασχηματισμού στερεού σώματος του Προκρούστη.

Για τον ορισμό της επιφάνειας της οδού, ορίζεται μία ευθειογενής επιφάνεια που έχει ως οδηγό καμπύλη την τελική καμπύλη *B-Spline* που αντιστοιχεί στον άξονα της οδού. Ο άξονας της οδού μαζί με όλες εκείνες τις καμπύλες που είναι παράλληλες στον άξονα και εκτείνονται εκατέρωθέν του σε απόσταση μέχρι και το ημιπλάτος της οδού, αποτελούν τις *u*-παραμετρικές καμπύλες της επιφάνειας της οδού. Οι γέννητες της ευθειογενούς επιφάνειας είναι κάθετες στον άξονα της οδού και αποτελούν τις *v*-παραμετρικές καμπύλες της επιφάνειας της οδού. Μάλιστα, οι γεννέτιρες της επιφάνειας αποτελούν και γεωδαισιακές γραμμές της επιφάνειας, ενώ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ κάθε

γεννέτειρας και του οριζόντιου επιπέδου, ισούται με την επίκλιση της οδού. Προφανώς, για τον ορισμό της επιφάνειας, πρέπει προηγουμένως να είναι γνωστό το πλάτος της οδού, αλλά και η επίκλισή της.

Τελικά, όλοι οι αλγόριθμοι-προγράμματα που χρειάζονται για τη λειτουργία αυτού του μαθηματικού μοντέλου, εισάγονται σε ένα γενικευμένο πρόγραμμα. Έτσι, η χάραξη μίας οδού μπορεί να γίνει με αντικειμενικό τρόπο, δηλαδή χωρίς την υποκειμενικότητα που υπεισέρχεται από την ικανότητα και την εμπειρία του κάθε μελετητή, με το πάτημα ενός κουμπιού και σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα.

Λέξεις κλειδιά : τρισδιάστατη χάραξη, καμπύλες $B - Spline$, καμπυλότητα, γεωδαισιακή καμπυλότητα, κάθετη καμπυλότητα, στρέψη, κυρτές καμπύλες, κοίλες καμπύλες, κατά μήκος κλίση, επίκλιση, μετασχηματισμός στερεού σώματος, μετασχηματισμός του Προκρούστη, βασική καμπύλη, γεννέτειρες, ευθριογενής επιφάνεια, οριζόντια επιφάνεια, επιφάνεια μεταβλητής επίκλισης, καμπυλότητα του Gauss, μέση καμπυλότητα.

ABSTRACT

The object of this thesis is to develop a mathematical model that allows the three dimensional alignment of a road. By the achievement of this, the study of horizontal and vertical alignment in a separate manner, is no longer necessary, since the analysis is done directly, in three dimensional space. The study is performed using the software *Mathematica*. The purpose of this study is initially, the mathematical perfection (theoretically) of the model that was constructed, afterwards the implementation of all functions in code through the programming language offered by *Mathematica* (based on *C++*) and finally the application of the model on a real road through a case study.

For the mathematical model documentation, all the required aspects that refer to the study of curves and surfaces from the field of differential geometry were used.

In the final implementation, the curves used to define the axis of the road, are the interpolation B-Spline curves (piecewise Bezier curves). Essentially, a temporary axis of the road is defined (first approach of the road) and afterwards it is modified. The modification of the first approach of the axis of the road, mainly depends on the limits placed on the curvature and slope along the road. Notably curvature is split in two components that are not other than the geodesic curvature and the normal curvature.

Regarding the geodesic curvature, it corresponds differentially to the horizontal curvature, in the broadest sense. In other words, the geodesic curvature, corresponds to the curvature that a curve would have, if it was projected to a plane "tangential" to the surface it lies on. Thus, the numerical value (positive or negative) of the geodesic curvature is calculated as the arithmetic projection of the curvature vector to a unit normal vector of the curve that is parallel to the horizon.

As far as the normal curvature is concerned, a different limit is imposed to the positive normal curvature compared to the limit that is imposed to the negative normal curvature. Specifically, the positive normal curvature corresponds to vertical curves over crests, while the negative normal curvature corresponding to vertical curves in sags. The arithmetic value (positive or negative) of the normal curvature is calculated as the arithmetic projection of the curvature vector to unit normal vector of the curve. The unit normal vector of the curve is defined as the result of the outer product of the unit tangent vector and the unit normal vector of the curve that is parallel to the horizon.

The form of the axis of the road is determined ultimately by the curvature and the torsion of the curve (fundamental theorem of curves), while the correct determination in space is achieved by the Procrustes rigid body transformation.

For the definition of the surface of the road, a ruled surface is implemented whose base curve or directrix is the final *B-Spline* curve, which corresponds to the axis of the road. The axis of the road along with all those curves that are parallel to the axis and extend across it at a distance up to half the width of the road, are the *u* - parametric curves of the surface of the road. The rulings of the ruled surface are perpendicular to the axis of the road and are the *v* - parametric curves of the surface of the road. Indeed, the rulings of the surface are also geodesics of the surface, and the angle formed between each ruling and the horizontal plane, is equal to the superelevation of the road. Obviously, to define the surface, the width of the road and its superelevation must be known.

Eventually, all the algorithms-programs needed for the operation of this mathematical model, are inputed in a generalized program. Thus, the alignment of a road can be

accomplished in an objective manner, without the subjectivity that takes under consideration the ability and experience of each scholar, at the touch of a button and in a very short time.

Keywords : three dimensional alignment, B – Spline curves, curvature, geodesic curvature, normal curvature, torsion, vertical curves over crests, vertical curves over sags, slope, superelevation, rigid body transformation, Procrustes transformation, directrix curve, base curve, rulings, ruled surface, horizontal surface, surface of changing superelevation, Gaussian curvature, mean curvature.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	i
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	iii
ABSTRACT	v
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ	xiii
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΡΟΗΣ	xv
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	xvii
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ	xxi
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ.....	xxiii
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ.....	xxv
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	- 1 -
1.1. ΣΚΟΠΟΣ	- 1 -
1.2. Δομή	- 3 -
2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ	- 5 -
2.1. Καμπύλες.....	- 5 -
2.1.1. Παραμετρική παράσταση καμπύλης	- 5 -
2.1.2. Λείες καμπύλες – Ανώμαλα σημεία.....	- 6 -
2.1.3. Επιτρεπτές αλλαγές συντεταγμένων	- 6 -
2.1.4. Φυσική παράμετρος – Φυσική παράσταση καμπύλης.....	- 6 -
2.1.5. Τρίεδρο του <i>Frenet</i>	- 7 -
2.1.6. Το διάνυσμα καμπυλότητας k και η καμπυλότητα κ	- 9 -
2.1.7. Η στρέψη τ	- 13 -
2.1.8. Κέντρο καμπυλότητας $q(t)$, ακτίνα καμπυλότητας $\rho(t)$, εγγύτατος κύκλος (ή κύκλος καμπυλότητας), εξελιγμένη καμπύλης και πολικός άξονας.....	- 13 -
2.1.9. Η κίνηση ενός σημείου $r(t)$ κατά μήκος της καμπύλης C	- 15 -
2.1.10. Εξισώσεις <i>Frenet</i>	- 16 -
2.1.11. Το διάνυσμα του <i>Darboux</i> $d(t)$	- 17 -
2.1.12. Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας καμπυλών (θεμελιώδες θεώρημα καμπυλών).....	- 18 -
2.2. Επιφάνειες.....	- 19 -
2.2.1. Διανυσματικές συναρτήσεις	- 19 -
2.2.2. Παραμετρική παράσταση επιφάνειας	- 19 -
2.2.3. Στοιχειώδης επιφάνεια	- 20 -
2.2.4. Καμπύλες σε επιφάνεια	- 20 -

2.2.5.	Εφαπτόμενο επίπεδο – Κάθετο διάνυσμα.....	- 21 -
2.2.6.	Θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης.....	- 22 -
2.2.7.	Ισομετρική Απεικόνιση.....	- 23 -
2.2.8.	Μήκος τόξου επιφάνειας (επιφανειακής καμπύλης)	- 23 -
2.2.9.	Πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή I	- 24 -
2.2.10.	Παράλληλες u – ή v – παραμετρικές καμπύλες	- 25 -
2.2.11.	Στοιχειώδεις εμβαδόν dS και εμβαδόν επιφάνειας ε	- 26 -
2.2.12.	Μήκος εφαπτόμενου διανύσματος	- 27 -
2.2.13.	Γωνία εφαπτομένων διανυσμάτων.....	- 27 -
2.2.14.	Δεύτερη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή II	- 29 -
2.2.15.	Τα σύμβολα <i>Christoffel</i>	- 34 -
2.3.	Καμπυλότητα Επιφανειών	- 34 -
2.3.1.	Διάνυσμα κάθετης καμπυλότητας kn – Κάθετη καμπυλότητα kn	- 34 -
2.3.2.	Θεώρημα <i>Meusnier</i>	- 38 -
2.3.3.	Κύριες διευθύνσεις – Κύριες καμπυλότητες κ_1, κ_2	- 39 -
2.3.4.	Καμπυλότητα του <i>Gauss</i> K και μέση καμπυλότητα μ	- 43 -
2.3.5.	Γραμμές κύριας καμπυλότητας.....	- 46 -
2.3.6.	Τύπος του <i>Rodrigues</i>	- 48 -
2.3.7.	Θεώρημα του <i>Euler</i>	- 49 -
2.3.8.	Δείκτρια <i>Dupin</i>	- 50 -
2.3.9.	Ασυμπτωτικές διευθύνσεις – ασυμπτωτικές γραμμές	- 51 -
2.3.10.	Συζυγείς οικογένειες γραμμών	- 53 -
2.3.11.	Οι εξισώσεις των <i>Gauss – Weingarten</i>	- 53 -
2.3.12.	Οι εξισώσεις συμβιβαστότητας.....	- 54 -
2.3.13.	<i>Theorema Egregium</i> του <i>Gauss</i>	- 55 -
2.3.14.	Το θεμελιώδες θεώρημα των επιφανειών	- 56 -
2.3.15.	Ολικά θεωρήματα των επιφανειών	- 56 -
2.3.16.	Αναπτυκτές επιφάνειες.....	- 57 -
2.3.17.	Ευθριογενείς επιφάνειες.....	- 57 -
2.4.	Γεωδαισιακές Καμπύλες Και Γεωδαισιακή Καμπυλότητα	- 62 -
2.4.1.	Γεωδαισιακή Καμπυλότητα kg	- 62 -
2.4.2.	Γεωδαισιακή στρέψη τg	- 65 -
2.4.3.	Γεωδαισιακές καμπύλες.....	- 67 -
2.4.4.	Γεωδαισιακές συντεταγμένες	- 69 -
3.	ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ	- 71 -

3.1.	Καμπύλες <i>Bezier</i>	- 71 -
3.1.1.	Κυβικές καμπύλες <i>Bezier</i>	- 73 -
3.2.	Σύνθετες Καμπύλες	- 74 -
3.2.1.	Τμηματικές καμπύλες <i>Bezier</i>	- 74 -
3.3.	Καμπύλες <i>B – Spline</i>	- 75 -
4.	ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ	- 79 -
4.1.	Παραμετρικές Επιφάνειες.....	- 79 -
4.2.	Διγραμμικά <i>Patches</i>	- 79 -
4.3.	<i>Bezier Patches</i>	- 80 -
4.4.	Αύξηση Βαθμού Ενός <i>Bezier Patch</i>	- 82 -
5.	ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ.....	- 83 -
5.1.	Σύνθετες Επιφάνειες <i>Bezier</i>	- 83 -
5.2.	Σύνθετες Επιφάνειες <i>B – spline</i>	- 83 -
6.	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ (<i>RIGID BODY TRANSFORMATION</i>)..	- 85 -
7.	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΚΡΟΥΣΤΗ (<i>PROCRUSTES TRANSFORMATION</i>)..	- 87 -
8.	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ.....	- 95 -
8.1.	Κυκλοφοριακή μελέτη.....	- 95 -
8.2.	Πολυγωνική.....	- 96 -
9.	ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ.....	- 99 -
9.1.	Άξονας Της Οδού.....	- 99 -
9.1.1.	Πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού.....	- 99 -
9.1.2.	Γεωμετρία του άξονα της οδού.....	- 99 -
9.1.3.	Χρησιμότητα της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού.....	- 100 -
9.2.	Επιφάνεια Της Οδού	- 101 -
9.2.1.	Οριζόντια επιφάνεια	- 101 -
9.2.2.	Επιφάνεια με επίκλιση	- 103 -
9.2.3.	Πρώτη προσέγγιση της επιφάνειας της οδού.....	- 104 -
9.3.	Διάγραμμα Ροής Εργασιών Της Μεθοδολογίας	- 105 -
10.	ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ	- 109 -
10.1.	Άξονας Της Οδού.....	- 109 -
10.1.1.	Εισαγωγή Των Κορυφών Της Πολυγωνικής	- 109 -
10.1.2.	Εφαρμογή της παρεμβολικής καμπύλης <i>B – Spline</i> (πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού) με <i>control points</i> που αντιστοιχούν στις κορυφές της πολυγωνικής..	- 111 -
10.1.3.	Υπολογισμός του μήκους του άξονα της οδού	- 114 -

10.1.4.	Κατασκευή του διαγράμματος καμπυλότητας κ της καμπύλης $B - Spline$	- 114 -
10.1.5.	Κατασκευή μίας καμπύλης, μέσω των συναρτήσεων καμπυλότητας και στρέψης	- 115 -
10.1.6.	Δεύτερη προσέγγιση του άξονα της οδού	- 118 -
10.1.7.	Τρίτη προσέγγιση (τελική) του άξονα της οδού.....	- 140 -
10.2.	Επιφάνεια Της Οδού	- 146 -
10.2.1.	Επιλογή του πλάτους της οδού	- 146 -
10.2.2.	Επιφάνεια μεταβλητής επίκλισης	- 146 -
10.2.3.	Θέσπιση ορίου στην επίκλιση	- 148 -
10.2.4.	Ορισμός της τάξης της αρχικής καμπύλης $B - Spline$ (πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού)	- 151 -
10.3.	Βήματα του αλγορίθμου	- 152 -
10.3.1.	Δημιουργία βιβλιοθήκης.....	- 152 -
10.3.2.	Εισαγωγή δεδομένων.....	- 164 -
10.3.3.	Επεξεργασία των δεδομένων.....	- 166 -
10.3.4.	Έξοδος δεδομένων	- 174 -
10.4.	Γενικευμένος αλγόριθμος 1	- 175 -
10.5.	Γενικευμένος αλγόριθμος 2	- 177 -
10.6.	Υπολογισμός των συντεταγμένων της οδού με συγκεκριμένο βήμα που δίνεται από τον χρήστη	- 179 -
10.7.	Χάραξη της οδού	- 180 -
10.7.1.	Χάραξη του άξονα της οδού.....	- 181 -
10.7.2.	Χάραξη της δεξιάς οριογραμμής της οδού	- 181 -
10.7.3.	Χάραξη της αριστερής οριογραμμής της οδού.....	- 181 -
10.8.	Χρωματισμός του άξονα της οδού.....	- 181 -
10.8.1.	Παραδείγματα.....	- 181 -
10.8.2.	Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς το υψόμετρο	- 183 -
10.8.3.	Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς την καμπυλότητα	- 184 -
10.8.4.	Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς τη στρέψη.....	- 185 -
10.8.5.	Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς την κεντρομόλο επιτάχυνση -	187 -
10.8.6.	Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας (διάνυσμα του $Darboux d(t)$).....	- 188 -
10.9.	Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού.....	- 190 -
10.9.1.	Αντιμετώπιση της επιφάνειας της οδού ως μία σύνθετη επιφάνεια παρεμβολής $B - Spline$	- 190 -

10.9.2.	Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς το υψόμετρο των σημείων της	- 193 -
10.9.3.	Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλότητα του <i>Gauss K</i>	- 194 -
10.9.4.	Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς τη μέση καμπυλότητα μ	- 198 -
10.9.5.	Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την επίκλιση της οδού.	- 200 -
10.9.6.	Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την κατά μήκος κλίση της οδού	- 201 -
10.9.7.	Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη u	- 201 -
10.9.8.	Χρωματισμός της επιφάνειας ως προς το πλάτος της οδού	- 203 -
10.9.9.	Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την κεντρομόλο επιτάχυνση	- 204 -
10.10.	Επαλήθευση Ορισμένων Γεωμετρικών Μεγεθών Και Συνθηκών	- 205 -
10.10.1.	Καθετότητα των u – και v – παραμετρικών καμπυλών της επιφάνειας	- 205 -
10.10.2.	Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, N	- 210 -
10.10.3.	Υλοποίηση συστήματος αναφοράς γεωδαισιακών συντεταγμένων	- 211 -
10.10.4.	Γεωδαισιακές καμπύλες	- 211 -
10.10.5.	Παραλληλία των u – παραμετρικών καμπυλών	- 213 -
11.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	- 217 -
11.1.	Μελέτη Περίπτωσης	- 217 -
11.1.1.	Οπτική σύγκριση της μεθόδου που προτείνεται με την κλασική	- 217 -
11.1.2.	Αριθμητική σύγκριση της μεθόδου που προτείνεται ως προς την κλασική	- 219 -
11.1.3.	Σχολιασμός της σύγκρισης της μεθόδου που προτείνεται, σε σχέση με την κλασική	- 220 -
11.2.	Περαιτέρω Μελέτη	- 220 -
11.2.1.	Υπολογισμός χρωματισμών	- 221 -
11.2.2.	Απορροή των ομβρίων	- 221 -
11.2.3.	Μήκος ορατότητα με περιβάλλουσα και προσομοίωση με κώνο	- 221 -
11.2.4.	Εμβადόν για οδοστρωσία	- 222 -
11.2.5.	Επιβολή ορίων σε γεωμετρικά μεγέθη	- 222 -
11.2.6.	Πειραματική οδοποιία σε συνθήκες υπό κλίμακα	- 222 -
11.2.7.	Τρισδιάστατη ισοκλινής καμπύλη	- 223 -
11.2.8.	Καμπύλες <i>NURBS</i>	- 224 -
ΑΝΑΦΟΡΕΣ		- 225 -
	Στην ελληνική γλώσσα	- 225 -

Ξενόγλωσσες	- 226 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ	- 227 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.1 : Αλλαγή παραμέτρου συνάρτησης	- 227 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.2 : Μέτρο εφαπτόμενου διανύσματος καμπύλης ως προς τη φυσική παράμετρο	- 228 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.3 : Παραγωγή του μέτρου διανυσματικής συνάρτησης	- 229 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.4 : Αριθμητική – Διανυσματική προβολή διανύσματος σε άλλο	- 230 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.5 : Ορισμός και πίνακας της τετραγωνικής μορφής.....	- 231 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.6 : Αντίστροφες ρίζες εξισώσεων δευτέρου βαθμού	- 232 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.7 : Διακρίνουσα δευτεροβάθμιας εξίσωσης κύριων καμπυλοτήτων .	- 234 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.8 : Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.....	- 235 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.9 : Πίνακας στροφής στον χώρο	- 236 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.10 : Νόρμα του <i>Frobenius</i> (<i>Frobenius Norm</i>).....	- 237 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.11 : Κεντροσυμμετρικός πίνακας (<i>Centering Matrix</i>).....	- 238 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β : ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ	- 239 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.1 : Το ελληνικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς 1987 (<i>ΕΓΣΑ '87</i>)	- 239 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.2 : Υψομετρικό σύστημα αναφοράς	- 240 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.3 : Τρόποι χάραξης σημείων επί της οδού	- 243 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ : ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ <i>MATHEMATICA</i>	- 247 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΩΝ ΚΟΡΥΦΩΝ ΤΗΣ (ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ) ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ – ΘΕΜΑΤΟΣ ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ ΤΗΣ ΣΑΤΜ	- 249 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε : ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΑΝΑ 50 m .	- 251 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ : ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΑΝΑ 50 m ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ – ΘΕΜΑ ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ ΤΗΣ ΣΑΤΜ.....	- 257 -

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.1 : Καμπυλότητα του άξονα της οδού	- 115 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.2 : Τιμές της αριθμητικής προβολής του διανύσματος καμπυλότητας στο οριζόντιο διάνυσμα.....	- 125 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.3 : Τιμές της αριθμητική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας.....	- 126 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.4 : Τιμές της αριθμητική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας στο οριζόντιο διάνυσμα μαζί με τις τιμές της αριθμητικής προβολής του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας.....	- 126 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.5 : Διάγραμμα καμπυλότητας της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού - 129 -	
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.6 : Διάγραμμα ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας του άξονα της οδού με εισαγωγή ορίου	- 129 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.7 : Διάγραμμα ψευδοκάθετης καμπυλότητας του άξονα της οδού με εισαγωγή ορίων	- 130 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.8 : Διάγραμμα καμπυλότητας του άξονα της οδού αφού προηγουμένως έχουν επιβληθεί όρια στην ψευδογεωδαισιακή και ψευδοκάθετη καμπυλότητα.....	- 131 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.9 : Διάγραμμα κατά μήκους κλίσης της δεύτερης προσέγγισης του άξονα της οδού	- 141 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.10 : Διάγραμμα κατά μήκους κλίσης της οδού με επιβολή ανωτάτου ορίου - 141 -	
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.11 : Σύγκριση αρχικού διαγράμματος κατά μήκους κλίσης της οδού με διάγραμμα κατά μήκους κλίσης της οδού μετά την επιβολή ανωτάτου ορίου	- 142 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.12 : Διάγραμμα καμπυλότητας μέσω του Προγράμματος 10.2	- 143 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.13 : Σύγκριση του διαγράμματος καμπυλότητας που προκύπτει μέσω του Προγράμματος 10.17, με το διάγραμμα καμπυλότητας που προκύπτει μέσω του Προγράμματος 10.2	- 143 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.14 : Τελικό διάγραμμα καμπυλότητας	- 145 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.15 : Σύγκριση τελικού διαγράμματος καμπυλότητας με το διάγραμμα καμπυλότητας πριν την επιβολή ορίου στην κατά μήκος κλίση	- 145 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.16 : Σημεία του διαγράμματος επικλίσεων (δεξιάς οριογραμμής).....	- 149 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.17 : Διάγραμμα επικλίσεων (δεξιάς οριογραμμής) με εφαρμογή καμπύλης <i>B – Spline</i>	- 149 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.18 : Διάγραμμα επικλίσεων (δεξιάς οριογραμμής) με εφαρμογή καμπύλης <i>B – Spline</i> μαζί με τα αντίστοιχα <i>control points</i>	- 150 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.19 : Μέτρο του διανύσματος Darboux (γωνιακή ταύτητα) κατά μήκος του άξονα της οδού	- 189 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.20 : Καμπυλότητα του Gauss K σε τμήμα της επιφάνειας της οδού	- 197 -
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.21 : Καμπυλότητα του Gauss K της επιφάνειας της οδού.....	- 198 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.22 : Μέση καμπυλότητα μ σε τμήμα της επιφάνειας της οδού - 199 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.23 : Μέση καμπυλότητα μ της επιφάνειας της οδού..... - 200 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.24 : Πρώτο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, E , του άξονα της οδού - 205 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.25 : Πρώτο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, E , τμήματος της επιφάνειας της οδού - 206 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.26 : Δεύτερο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, F , του άξονα της οδού..... - 206 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.27 : Δεύτερο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, F , τμήματος της επιφάνειας της οδού - 207 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.28 : Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, G , του άξονα της οδού - 207 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.29 : Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, G , τμήματος της επιφάνειας της οδού - 208 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.30 : Γωνία (σε μοίρες) μεταξύ των u - και v -παραμετρικών καμπυλών κατά μήκος του άξονα της οδού - 209 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.31 : Γωνία (σε μοίρες) μεταξύ των u - και v -παραμετρικών καμπυλών σε όλη την επιφάνεια της οδού - 209 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.32 : Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, N , κατά μήκος του άξονα της οδού..... - 210 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.33 : Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, N , σε όλη την επιφάνεια της οδού..... - 210 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.34 : Σύμβολο Christoffel Γ^{221} , κατά μήκος του άξονα της οδού..... - 212 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.35 : Σύμβολο Christoffel Γ^{221} , σε όλη την επιφάνεια της οδού..... - 213 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.36 : Γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα της οδού και της δεξιάς οριογραμμής - 214 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.37 : Γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα της οδού και της αριστερής οριογραμμής - 215 -

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΡΟΗΣ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ 9.1 : Αλγοριθμική παρουσίαση της μεθόδου που προτείνεται - 108 -

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ Π.1 : Διαδικασία χάραξης σημείου με χρήση γεωδαιτικού σταθμού- 245 -

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

EIKONA 1.1 : Τρισδιάστατος άξονας οδού	- 1 -
EIKONA 1.2 : Επιφάνεια της οδού	- 2 -
EIKONA 2.1 : Καμπύλη <i>Peano</i>	- 5 -
EIKONA 2.2 : Πρωτεύοντα διανύσματα καμπύλης	- 7 -
EIKONA 2.3 : Τρίεδρο του <i>Frenet</i>	- 8 -
EIKONA 2.4 : Εγγύτατος κύκλος καμπύλης	- 15 -
EIKONA 2.5 : Ορισμός τμήματος ομαλής επιφάνειας.....	- 19 -
EIKONA 2.6 : Εφαπτόμενο επίπεδο – Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα	- 22 -
EIKONA 2.7 : Παράλληλες καμπύλες.....	- 25 -
EIKONA 2.8 : Παράλληλες καμπύλες.....	- 26 -
EIKONA 2.9 : Παραδείγματα καμπυλών <i>Jordan</i> και μη.....	- 27 -
EIKONA 2.10 : Ελλειπτικό σημείο	- 31 -
EIKONA 2.11 : Υπερβολικό σημείο	- 32 -
EIKONA 2.12 : Παραβολικό σημείο	- 32 -
EIKONA 2.13 : Επίπεδο σημείο.....	- 33 -
EIKONA 2.14 : Ελλειπτικά, υπερβολικά και παραβολικά σημεία σε επιφάνεια (τόρος ή σαμπρέλα).....	- 33 -
EIKONA 2.15 : Θεώρημα <i>Meusnier</i>	- 39 -
EIKONA 2.16 : Κύριες διευθύνσεις	- 42 -
EIKONA 2.17 : Κύριες διευθύνσεις ελλειπτικού σημείου	- 42 -
EIKONA 2.18 : Κύριες διευθύνσεις υπερβολικού σημείου	- 43 -
EIKONA 2.19 : Οπτική αναπαράσταση της καμπυλότητας του <i>Gauss K</i> ενός υπερβολικού παραβολοειδούς	- 45 -
EIKONA 2.20 : Οπτική αναπαράσταση της μέσης καμπυλότητας μ ενός υπερβολικού παραβολοειδούς	- 45 -
EIKONA 2.21 : Σφαίρα με χερούλια.....	- 56 -
EIKONA 2.22 : Ευθειογενής επιφάνεια	- 58 -
EIKONA 2.23 : Οι u - και v - παραμετρικές καμπύλες, ευθειογενούς επιφάνειας	- 59 -
EIKONA 2.24 : Επιφάνεια αρνητικής καμπυλότητας του <i>Gauss</i>	- 60 -
EIKONA 2.25 : Ορισμός της δεξιόστροφης και ορθοκανονικής τριάδας T, U, N	- 63 -
EIKONA 2.26 : Ορισμός των διανυσμάτων k, kg, kn	- 63 -
EIKONA 3.1 : Εφαπτομενικά διανύσματα στην αρχή και το πέρας της καμπύλης	- 72 -
EIKONA 3.2 : Ιδιότητα <i>convex hull</i> της καμπύλης <i>Bezier</i>	- 73 -
EIKONA 3.3 : Τυπικά παραδείγματα κυβικών (τρίτου βαθμού) καμπυλών <i>Bezier</i>	- 74 -

EIKONA 3.4 : <i>Knot Sequence</i>	- 74 -
EIKONA 4.1 : Επιφάνεια <i>Bezier</i>	- 81 -
EIKONA 4.2 : Επιφάνεια <i>Bezier</i>	- 82 -
EIKONA 10.1 : Κορυφές (τρισδιάστατης) πολυγωνικής καμπύλης	- 110 -
EIKONA 10.2 : Τρισδιάστατη πολυγωνική καμπύλη	- 110 -
EIKONA 10.3 : Καμπύλη <i>B – Spline</i> (πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού) με <i>control points</i> που αντιστοιχούν στις κορυφές της πολυγωνικής	- 111 -
EIKONA 10.4 : Καμπύλη <i>B – Spline</i> μαζί με τις κορυφές της πολυγωνικής (<i>control points</i>) και την ίδια την πολυγωνική	- 112 -
EIKONA 10.5 : Τμήμα πολυγωνικής.....	- 112 -
EIKONA 10.6 : Τμήμα του άξονα της οδού	- 113 -
EIKONA 10.7 : Τμήμα οριζοντιογραφίας του άξονα της οδού	- 113 -
EIKONA 10.8 : Τμήμα της όψης του άξονα της οδού	- 113 -
EIKONA 10.9 : Αποτύπωση του άξονα της οδού με μοναδικά δεδομένα την καμπυλότητα και τη στρέψη.....	- 117 -
EIKONA 10.10 : Αποτύπωση τμήματος του άξονα της οδού	- 118 -
EIKONA 10.11 : Αποτύπωση τμήματος της οριζόντιας επιφάνειας της οδού	- 119 -
EIKONA 10.12 : Αποτύπωση τμήματος της οριζόντιας επιφάνειας της οδού μαζί με τον άξονα της οδού	- 119 -
EIKONA 10.13 : Αναπαράσταση των οριζόντιων διανυσμάτων κατά μήκος τμήματος του άξονα της οδού	- 120 -
EIKONA 10.14 : Αποτύπωση τμήματος της οριζόντιας επιφάνειας της οδού	- 121 -
EIKONA 10.15 : Αναπαράσταση των διανυσμάτων της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας..	121 -
EIKONA 10.16 : Αποτύπωση των διανυσμάτων της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας μαζί με την οριζόντια επιφάνεια	- 122 -
EIKONA 10.17 : Αναπαράσταση των διανυσμάτων της ψευδοκάθετης καμπυλότητας ..	- 123 -
EIKONA 10.18 : Αποτύπωση των διανυσμάτων της ψευδοκάθετης καμπυλότητας μαζί με την οριζόντια επιφάνεια.....	- 123 -
EIKONA 10.19 : Αποτύπωση των διανυσμάτων της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας μαζί με τα διανύσματα της ψευδοκάθετης καμπυλότητας και την οριζόντια επιφάνεια	- 124 -
EIKONA 10.20 : Πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού	- 131 -
EIKONA 10.21 : Δεύτερη προσέγγιση του άξονα της οδού έπειτα από επιβολή ορίων στην καμπυλότητα.....	- 132 -
EIKONA 10.22 : Άξονας της οδού πριν και μετά την επιβολή ορίων στην καμπυλότητα (σύγκριση της πρώτης προσέγγισης της οδού με τη δεύτερη).....	- 132 -
EIKONA 10.23 : Σημεία της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού που έχουν υπολογιστεί μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης (δεν έχουν τη σωστή θέση στον χώρο)	- 133 -

EIKONA 10.24 : Σημεία του άξονα της οδού που έχουν υπολογιστεί με εφαρμογή του μετασχηματισμού του Προκρούστη και εν συνεχεία, του μετασχηματισμού στερεού σώματος	- 135 -
EIKONA 10.25 : Αρχικός άξονας της οδού	- 136 -
EIKONA 10.26 : Σύγκριση του αρχικού άξονας της οδού με αυτόν που έχει προκύψει μέσω του θεμελιώδους θεωρήματος καμπυλών (καμπυλότητα - στρέψη) και στη συνέχεια με εφαρμογή του μετασχηματισμού του Προκρούστη και του μετασχηματισμού στερεού σώματος	- 136 -
EIKONA 10.27 : Αρχικός άξονας της οδού	- 137 -
EIKONA 10.28 : Σημεία του άξονα της οδού που έχουν υπολογιστεί μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης (δεν έχουν τη σωστή θέση στον χώρο)	- 138 -
EIKONA 10.29 : Σημεία του άξονα της οδού που έχουν υπολογιστεί μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης (έχουν τη σωστή θέση στον χώρο μέσω του μετασχηματισμού του Προκρούστη και του μετασχηματισμού στερεού σώματος)	- 139 -
EIKONA 10.30 : Σύγκριση του αρχικού άξονας της οδού με αυτόν που έχει προκύψει μέσω της καμπυλότητας (με θέσπιση ορίων) και της στρέψης και στη συνέχεια με εφαρμογή του μετασχηματισμού του Προκρούστη και του μετασχηματισμού στερεού σώματος	- 139 -
EIKONA 10.31 : Διάγραμμα καμπυλότητας μέσω του Προγράμματος 10.17.....	- 143 -
EIKONA 10.32 : Διατομή γ_2	- 146 -
EIKONA 10.33 : Αποτύπωση οριζόντιας επιφάνειας μέσω του Προγράμματος 10.19.....	- 147 -
EIKONA 10.34 : Αποτύπωση κάθετης επιφάνειας μέσω του Προγράμματος 10.19	- 147 -
EIKONA 10.35 : Αποτύπωση οριζόντιας και κάθετης επιφάνειας τμήματος οδού μέσω του Προγράμματος 10.19	- 148 -
EIKONA 10.36 : Αποτύπωση οριζόντιας και κάθετης επιφάνειας τμήματος οδού μέσω του Προγράμματος 10.15	- 148 -
EIKONA 10.37 : Αποτύπωση τμήματος της επιφάνειας της οδού μεταβλητής επίκλισης -	150 -
EIKONA 10.38 : Χρωματισμός επίπεδης καμπύλης ως προς το υψόμετρό της	- 182 -
EIKONA 10.39 : Χρωματισμός επιπέδου ως προς το υψόμετρο των σημείων του	- 182 -
EIKONA 10.40 : Χρωματισμός επιφάνειας ως προς το υψόμετρο των σημείων της.....	- 183 -
EIKONA 10.41 : Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς το υψόμετρο	- 184 -
EIKONA 10.42 : Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς την καμπυλότητα	- 184 -
EIKONA 10.43 : Χρωματισμός τμήματος, του άξονα της οδού ως προς την καμπυλότητα -	185 -
EIKONA 10.44 : Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς τη στρέψη	- 186 -
EIKONA 10.45 : Χρωματισμός τμήματος, του άξονα της οδού ως προς τη στρέψη	- 186 -
EIKONA 10.46 : Χρωματισμός τμήματος, του άξονα της οδού ως προς την κεντρομόλο επιτάχυνση	- 187 -
EIKONA 10.47 : Χρωματισμός τμήματος, του άξονα της οδού ως προς τη γωνιακή ταχύτητα (διάλυμα του <i>Darboux</i>)	- 190 -

EIKONA 10.48 : Γραφική απεικόνιση τμήματος της επιφάνειας της οδού ως ευθειογενή επιφάνεια	- 192 -
EIKONA 10.49 : Γραφική απεικόνιση τμήματος της οδού ως σύνθετη επιφάνεια B-Spline-	192 -
EIKONA 10.50 : Σύγκριση της επιφάνειας της οδού όταν αντιμετωπίζεται ως ευθειογενής επιφάνεια σε σχέση με την αντιμετώπισή της ως μία σύνθετη επιφάνεια B-Spline	- 193 -
EIKONA 10.51 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς το υψόμετρο των σημείων της.....	- 193 -
EIKONA 10.52 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς το υψόμετρο των σημείων της.....	- 194 -
EIKONA 10.53 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλότητα του <i>Gauss K</i>	- 197 -
EIKONA 10.54 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς τη μέση καμπυλότητα μ	- 199 -
EIKONA 10.55 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς την επίκλιση της οδού	- 200 -
EIKONA 10.56 : Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την κατά μήκος κλίση της οδού	- 201 -
EIKONA 10.57 : Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη u	- 202 -
EIKONA 10.58 : Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς το πλάτος της οδού ...	- 203 -
EIKONA 10.59 : Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης	- 204 -
EIKONA 11.1 : Σημεία του άξονα της οδού ανά 50 m σύμφωνα με το μάθημα – θέμα οδοποιίας της ΣΑΤΜ.....	- 217 -
EIKONA 11.2 : Σημεία του άξονα της οδού ανά 50 m σύμφωνα με τη μεθοδολογία που προτείνεται στην εργασία.....	- 218 -
EIKONA 11.3 : Οριζοντιογραφική σύγκριση των σημείων προς χάραξη που προέκυψαν με τη μέθοδο που προτείνεται στην εργασία, σε σχέση με την κλασική	- 218 -
EIKONA 11.4 : Σύγκριση των σημείων προς χάραξη που προέκυψαν με τη μέθοδο που προτείνεται στην εργασία, σε σχέση με την κλασική	- 219 -
EIKONA Π.1 : Σχέση μεταξύ του ορθομετρικού υψομέτρου H , του γεωμετρικού υψομέτρου h και της αποχής του γεωειδούς N	- 240 -
EIKONA Π.2 : Απόκλιση της κατακορύφου θ	- 241 -
EIKONA Π.3 : Συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου ξ, η	- 242 -

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 : Σύγκριση των αποτελεσμάτων της μελέτης περίπτωσης με εκείνα του μαθήματος – θέματος	- 219 -
ΠΙΝΑΚΑΣ 2 : Συντεταγμένες αρχής και τέλους του άξονα της οδού	- 220 -
ΠΙΝΑΚΑΣ 3 : Συντεταγμένες της (τρισιδιάστατης) πολυγωνικής καμπύλης	- 249 -
ΠΙΝΑΚΑΣ 4 : Συντεταγμένες του άξονα της οδού ανά 50 m	- 251 -
ΠΙΝΑΚΑΣ 5 : Απόσταση μεταξύ των προς χάραξη σημείων του άξονα της οδού	- 254 -
ΠΙΝΑΚΑΣ 6 : Συντεταγμένες του άξονα της οδού ανά 50 m σύμφωνα με το μάθημα – θέμα οδοποιίας της ΣΑΤΜ.....	- 257 -

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 7.1 : Μετασχηματισμός Στερεού Σώματος του Προκρούστη με πίνακα βαρών W	- 91 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 7.2 : Μετασχηματισμός Στερεού Σώματος του Προκρούστη χωρίς πίνακα βαρών W	- 92 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 7.3 : Μετασχηματισμός Στερεού Σώματος	- 92 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 9.1 : Οριζόντια ευθειογενής επιφάνεια.....	- 103 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 9.2 : Ευθειογενής επιφάνεια με επίκλιση.....	- 103 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.1 : Αριθμητικός υπολογισμός του μήκους καμπύλης.....	- 114 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.2 : Υπολογισμός καμπυλότητας μίας καμπύλης.....	- 114 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.3 : Υπολογισμός συντεταγμένων καμπύλης (μου έχει παραμετροποιηθεί με τυχαία παράμετρο), όταν είναι γνωστή η καμπυλότητα και η στρέψη	- 116 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.4 : Αποτύπωση καμπύλης με γνωστή καμπυλότητα και στρέψη.....	- 117 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.5 : Διάνυσμα καμπυλότητας	- 120 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.6 : Οριζόντιο διάνυσμα (γεννέτριες της οριζόντιας επιφάνειας)	- 120 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.7 : Ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα : Προβολή (διάνυσμα) του διανύσματος καμπυλότητας στο οριζόντιο διάνυσμα	- 120 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.8 : Μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της οριζόντιας επιφάνειας... -	122 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.9 : Ψευδοκάθετη καμπυλότητα : Προβολή (διάνυσμα) του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας.....	- 122 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.10 : Αριθμητική προβολή (πραγματικός αριθμός) του διανύσματος καμπυλότητας στο οριζόντιο διάνυσμα της επιφάνειας.....	- 125 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.11 : Αριθμητική προβολή (πραγματικός αριθμός) του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας.....	- 125 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.12 : Εισαγωγή ορίου (άνω φράγμα) στην ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα	- 127 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.13 : Εισαγωγή ορίων (άνω φράγματα) στην ψευδοκάθετη καμπυλότητα. Θεσπίζεται άλλο όριο για τις κυρτές καμπύλες και άλλο για τις κοίλες	- 128 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.14 : Υπολογισμός της καμπυλότητας μέσω της ψευδογεωδαισιακής και ψευδοκάθετης καμπυλότητας αφού προηγουμένως τους έχουν επιβληθεί όρια	- 130 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.15 : Εισαγωγή ορίου (άνω φράγμα) στην κατά μήκος κλίση της οδού -	140 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.16 : Διάνυσμα καμπυλότητας	- 142 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.17 : Τροποποιημένο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης μετά την επιβολή ορίου στην κατά μήκος κλίση.....	- 144 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.18 : Τελικός υπολογισμός της καμπυλότητας του άξονα της οδού	- 145 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.19 : Ευθειογενής επιφάνεια μεταβλητής επίκλισης.....	- 146 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.20 : Εύρεση της τάξης της καμπύλης $B - Spline$ που αντιστοιχεί στον άξονα της οδού	- 151 -

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.21 : Υπολογισμός των συντεταγμένων του άξονα της οδού με σταθερό βήμα	- 180 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.22 : Υπολογισμός της στρέψης μίας καμπύλης	- 185 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.23 : Υπολογισμός κεντρομόλου επιτάχυνσης	- 187 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.24 : Δεύτερο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα b	- 188 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.25 : Διάνυσμα του <i>Darboux</i>	- 188 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.26 : Μέτρο του διανύσματος <i>Darboux</i>	- 189 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.27 : Υπολογισμός των <i>control points</i> της σύνθετης επιφάνειας B-Spline ..	- 191 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.28 : Υπολογισμός του πρώτου θεμελιώδους μεγέθους της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, L	- 195 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.29 : Υπολογισμός του δεύτερου θεμελιώδους μεγέθους της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, M	- 195 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.30 : Υπολογισμός του τρίτου θεμελιώδους μεγέθους της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, N	- 196 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.31 : Υπολογισμός της καμπυλότητας του Gauss.....	- 196 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.32 : Υπολογισμός της μέσης καμπυλότητας επιφανειών	- 198 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.33 : Υπολογισμός κεντρομόλου επιτάχυνσης σε επιφάνεια	- 204 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.34 : Υπολογισμός του πρώτου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, E	- 205 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.35 : Υπολογισμός του δεύτερου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, F	- 206 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.36 : Υπολογισμός του τρίτου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, G	- 207 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.37 : Υπολογισμός του συμβόλου <i>Christoffel</i> Γ_{221}	- 212 -
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.38 : Έλεγχος παραλληλίας των u - παραμετρικών καμπυλών της επιφάνειας της οδού	- 214 -

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

$\vec{\varphi}(s)$	Φυσική παράσταση καμπύλης
s	Φυσική παράμετρος (μήκος) καμπύλης
\vec{t}	Μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης
\vec{n}	Πρώτο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα καμπύλης
\vec{b}	Δεύτερο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα καμπύλης
\vec{k}	Διάνυσμα καμπυλότητας
κ	Καμπυλότητα
κ_2	Καμπυλότητα επίπεδης καμπύλης
τ	Στρέψη καμπύλης
$\vec{q}(t)$	Κέντρο καμπυλότητας καμπύλης
$\rho(t)$	Ακτίνα καμπυλότητας καμπύλης
\vec{R}	Διάνυσμα της ακτίνας του εγγύτατου κύκλου

$\vec{u}(t)$	Διάνυσμα της ταχύτητας μιας καμπύλης με παράμετρο τον χρόνο
$\vec{a}(t)$	Διάνυσμα της επιτάχυνσης μιας καμπύλης με παράμετρο τον χρόνο
$\vec{a}_\varepsilon(t)$	Διάνυσμα επιτροχίας επιτάχυνσης
$\vec{a}_\kappa(t)$	Διάνυσμα κεντρομόλου επιτάχυνσης
$\vec{d}(t)$	Διάνυσμα του <i>Darboux</i>
\vec{N}	Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας
E	Πρώτο θεμελιώδες μέγεθος πρώτης τάξης
F	Δεύτερο θεμελιώδες μέγεθος πρώτης τάξης
G	Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος πρώτης τάξης
H	Διακρίνουσα πρώτης τάξης
I	Πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή
L	Πρώτο θεμελιώδες μέγεθος δεύτερης τάξης

M	Δεύτερο θεμελιώδες μέγεθος δεύτερης τάξης
N	Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος δεύτερης τάξης
Π	Δεύτερη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή
b	Διακρίνουσα δεύτερης τάξης
Γ_{ijk}	Σύμβολο <i>Christoffel</i> πρώτου είδους
Γ_{jk}^i	Σύμβολο <i>Christoffel</i> δεύτερου είδους
\vec{k}_n	Διάνυσμα κάθετης καμπυλότητας
κ_n	Κάθετη καμπυλότητα
\vec{k}_g	Διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας
κ_g	Γεωδαισιακή καμπυλότητα
κ_1	Κύρια (μέγιστη) καμπυλότητα (κάθετη)
κ_2	Κύρια (ελάχιστη) καμπυλότητα (κάθετη)
$\kappa\kappa$	Κάθετη καμπυλότητα ομφαλικού σημείου
K	Καμπυλότητα του <i>Gauss</i>
μ	Μέση καμπυλότητα

τ_g Γεωδαισιακή στρέψη

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται ο σκοπός και οι στόχοι της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας. Ειδικότερα, καταγράφεται περιληπτικά ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιείται ο γεωμετρικός σχεδιασμός των οδών σήμερα, ενώ στη συνέχεια καταγράφεται μία νέα – πιο αυτοματοποιημένη – προσέγγιση, αυτής της μελέτης. Επίσης, αναδεικνύονται τα πλεονεκτήματα της μεθόδου που προτείνεται σε σχέση με τη συμβατική. Τέλος, πραγματοποιείται μία συνοπτική παρουσίαση των κεφαλαίων που απαρτίζουν την εργασία.

1.1. ΣΚΟΠΟΣ

Μέχρι σήμερα ο γεωμετρικός σχεδιασμός μιας οδού, γίνεται σε δύο διακριτά στάδια μεταξύ τους. Αρχικά, ορίζεται ο άξονας της οδού και στη συνέχεια η επιφάνειά της. Ο άξονας της οδού, ορίζεται από την οριζοντιογραφία και τη μηκοτομή της. Η οριζοντιογραφία και η μηκοτομή αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Έτσι, πραγματοποιούνται συνεχείς δοκιμές μέχρι να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Δηλαδή, βελτιώνοντας ορισμένα στοιχεία στην οριζοντιογραφία, μπορεί να υπάρξει αρνητική επίδραση ως προς την μηκοτομή και αντίστροφα. Η οριζοντιογραφία, όπως και η μηκοτομή, αποτελούνται από επίπεδες καμπύλες. Συγκεκριμένα, η οριζοντιογραφία εμπεριέχει την ευθεία, το κυκλικό τόξο και την κλωθοειδή ως καμπύλη συναρμογής, ενώ η μηκοτομή εμπεριέχει την ευθεία και ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (παραβολή) ως τόξο συναρμογής. Ο συνδυασμός της οριζοντιογραφίας με τη μηκοτομή, παράγει τελικά μια τρισδιάστατη καμπύλη η οποία αντιστοιχεί στον άξονα της οδού. Όμως, αυτή η τρισδιάστατη καμπύλη, δεν είναι μαθηματικά ορισμένη. Δηλαδή, δεν είναι γνωστή η μαθηματική της έκφραση (παραμετρική, αναλυτική, διανυσματική ή άλλη). Στη συνέχεια, για την κατασκευή της επιφάνειας της οδού, ορίζεται η επίκλιση και το πλάτος της οδού.



ΕΙΚΟΝΑ 1.1 : Τρισδιάστατος άξονας οδού

Πηγή : <https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRtSzzDmlFdw1UK-zFWMiPrYTNf8HfyhyPjwrPUOg7s5IDDD2pk>

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η τρισδιάστατη χάραξη της επιφάνειας της οδού (μαζί με τον άξονά της) με αυτόματο και αντικειμενικό τρόπο, έχοντας ως μοναδικά δεδομένα τις συντεταγμένες (X, Y, Z) των κορυφών της πολυγωνικής καμπύλης. Ακόμα και η επιλογή της θέσης των κορυφών της πολυγωνικής, μπορεί να γίνει με κάποιον τηλεπισκοπικό αλγόριθμο στο μέλλον που θα περιέχει περιορισμούς ως προς την οδοποιία. Τελικά, η χάραξη της οδού γίνεται με τη χρήση των καμπυλών $B - Spline$ που ορίζονται με παράμετρο μία τυχαία μεταβλητή $t \in [0,1]$. Με την αντιμετώπιση της οδού ως μια ενιαία τρισδιάστατη επιφάνεια, είμαστε σε θέση να εξάγουμε πιο ασφαλή συμπεράσματα για τα χαρακτηριστικά γνωρίσματά της, όπως είναι για παράδειγμα η ορατότητα ή η απορροή των ομβρίων, αλλά και γενικότερα, στοιχεία που υπόκεινται στην οδική ασφάλεια.



ΕΙΚΟΝΑ 1.2 : Επιφάνεια της οδού

Πηγή : http://jessicaleake.com/wp-content/uploads/2014/01/0_A_winding_road.jpg

Με τον συμβατικό τρόπο σχεδιασμού των οδών, το μήκος ορατότητας βασίζεται σε μία δισδιάστατη εποπτεία της οριζόντιας και κατακόρυφης χάραξης (μηκοτομή) ξεχωριστά. Δηλαδή, η μέθοδοι μέτρησης του μήκους ορατότητας που αναπτύχθηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο, βασίζονται στην ξεχωριστή εποπτεία της οριζοντιογραφίας και της μηκοτομής, λόγω της πολυπλοκότητας που εμπεριέχεται στη μέτρηση του μήκους ορατότητας στον χώρο των τριών διαστάσεων. Επομένως, αυτές οι μέθοδοι δε δίνουν ακριβή αποτελέσματα καθώς δε λαμβάνουν υπόψη την οριζοντιογραφία και τη μηκοτομή με ενιαίο τρόπο. Με άλλα λόγια, αυτές οι μέθοδοι δε λαμβάνουν υπόψη την αλληλεπίδραση – συσχέτιση της οριζοντιογραφίας με τη μηκοτομή. Χρησιμοποιώντας, τρισδιάστατες τεχνικές σχεδιασμού, νέες μέθοδοι θα αναπτυχθούν που θα μειώσουν τον χρόνο και τα σφάλματα μέτρησης του μήκους ορατότητας. Η ακριβής μέτρηση του μήκους ορατότητας, αποτελεί κρίσιμο παράγοντα όσον αφορά την οδική ασφάλεια. Κατά τον γεωμετρικό σχεδιασμό των οδών, είναι πολύ σημαντικό να μπορεί να υπολογιστεί το μήκος ορατότητας σε όλο το μήκος της οδού και παράλληλα να μπορεί να ελεγχθεί η

συμβατότητά του με τις ανάγκες και δυνατότητες του οδηγού. Τελικά, με αυτόν τον τρόπο, μπορούν να αποφεύγονται ατυχήματα – συγκρούσεις.

Λόγω του ορισμού της επιφανείας με μαθηματικά ακριβή τρόπο, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε μεγέθη (σε όλα τα σημεία της επιφάνειας της οδού) που πριν ήταν αδύνατο, όπως : το τρίεδρο *Frenet*, το διάνυσμα *Darboux*, την καμπυλότητα στο χώρο, τη στρέψη, την κάθετη καμπυλότητα, τις κύριες διευθύνσεις, τις κύριες καμπυλότητες, τις γραμμές κύριας καμπυλότητας, την καμπυλότητα του *Gauss*, τη γεωδαισιακή καμπυλότητα, τη γεωδαισιακή στρέψη και άλλα.

Έτσι, με αυτόν τον τρόπο, καθορίζεται καταρχήν, ποιά από αυτά τα μεγέθη λειτουργούν ως κρίσιμες παράμετροι ως προς την οδική ασφάλεια. Για παράδειγμα, αυτό μπορεί να γίνει με υπολογισμό των μεγεθών αυτών στα σημεία όπου παρατηρείται αυξημένος αριθμός τροχαίων ατυχημάτων, ενώ στη συνέχεια, καθορίζεται το πεδίο τιμών μέσα στο οποίο επιτρέπεται να κινούνται τα μεγέθη αυτά. Ουσιαστικά, το ποιές παράμετροι θα λειτουργούν ως κρίσιμες, αλλά και το ποιό θα είναι το άνω και κάτω φράγμα τους, θα προκύψει είτε από τη φυσική (π.χ η μέγιστη κεντρομόλος δύναμη που μπορεί να αντέξει ο ανθρώπινος οργανισμός χωρίς να τον ενοχλεί), είτε από παρατηρήσεις συσχετίσεων. Επίσης, το πεδίο ορισμού των κρίσιμων παραμέτρων μπορεί να τροποποιηθεί περαιτέρω (αποτελεί υποσύνολο του προηγούμενου) με εφαρμογή προσομοίωσης της απορροής των ομβρίων με πεπερασμένα στοιχεία (σε υπάρχοντες δρόμους ή μη) υπολογίζοντας τις τιμές των μεγεθών αυτών στα κρίσιμα σημεία (αυξημένη παρουσία νερού) της οδού όπου παρατηρούνται.

1.2. Δομή

Η εργασία αποτελείται συνολικά από έντεκα κεφάλαια, συμπεριλαμβανομένης και της εισαγωγής. Η δόμηση των κεφαλαίων έγινε με βάση το περιεχόμενο και με σκοπό τη βέλτιστη κατανόηση του θέματος από τον αναγνώστη.

Στο *πρώτο κεφάλαιο* πραγματοποιείται μία σύντομη εισαγωγή. Καταγράφεται ο σκοπός της εργασίας και τα συγκριτικά της πλεονεκτήματα της μεθόδου που προτείνεται, έναντι του τρόπου με τον οποίο υλοποιείται ο γεωμετρικός σχεδιασμός των οδών μέχρι σήμερα.

Στο *δεύτερο κεφάλαιο* παρουσιάζονται οι γνώσεις που απαιτούνται, κυρίως από τον κλάδο της Διαφορικής Γεωμετρίας, για τον ακριβή ορισμό καμπυλών και επιφανειών στον χώρο. Ο άξονας της οδού αντιστοιχεί σε μία τρισδιάστατη καμπύλη, ενώ η επιφάνεια της οδού, αντιστοιχεί σε μία μαθηματική επιφάνεια μεταβλητής επίκλισης.

Στο *τρίτο κεφάλαιο* περιγράφονται οι καμπύλες παρεμβολής και περιγράφονται οι ιδιότητες, αλλά και τα πλεονεκτήματά τους. Με βάση αυτές της καμπύλες παρεμβολής, και ειδικότερα με τη καμπύλη $B - Spline$, θα οριστεί τελικά ο άξονας της οδού. Τονίζεται ότι σε αυτό το στάδιο έχει οριστεί, μόνο η μορφή του άξονα της οδού, και όχι η σωστή ένταξή του στον χώρο. Δηλαδή, ο άξονας της οδού, έχει προσδιοριστεί γεωμετρικά μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης.

Στο *τέταρτο κεφάλαιο* αναλύονται οι επιφάνειες παρεμβολής. Τονίζεται η δυνατότητα ενιαίας θεώρησης της επιφάνειας της οδού ως μία επιφάνεια παρεμβολής.

Στο *πέμπτο κεφάλαιο* αναδεικνύεται η ανάγκη ορισμού σύνθετων επιφανειών παρεμβολής. Δηλαδή, επισημαίνεται ότι μόνο με αυτή τη θεώρηση, είναι δυνατή μία αξιόπιστη και ρεαλιστική μοντελοποίηση επιφάνειας.

Στο *έκτο κεφάλαιο* αναλύεται ο μετασχηματισμός του στερεού σώματος που θα παίξει σημαντικό ρόλο στην ορθή τοποθέτηση του άξονα της οδού στον χώρο. Δηλαδή, περά από τον γεωμετρικό προσδιορισμό του άξονα της οδού, πρέπει στη συνέχεια να προσανατολιστεί απόλυτα στον χώρο.

Στο *έβδομο κεφάλαιο* παρουσιάζεται η μέθοδος του Προκρούστη που αποτελεί ουσιαστικά μία αυτόματη μέθοδο συνόρθωσης. Με βάση τη μέθοδο του Προκρούστη, καθίσταται ακριβής και γρήγορος ο αλγόριθμος μέσω του οποίου επιτυγχάνεται ο μετασχηματισμός του στερεού σώματος.

Στο *όγδοο κεφάλαιο* καταγράφονται ορισμένα στοιχεία οδοποιίας και η λογική που διέπει τη μελέτη ενός οδικού έργου γενικότερα.

Στο *ένατο κεφάλαιο*, γίνεται η ανάλυση της μεθοδολογίας για τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Επίσης, γίνεται μία μικρή εισαγωγή στο λογισμικό που χρησιμοποιείται, το *Mathematica*.

Στο *δέκατο κεφάλαιο*, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μελέτης περίπτωσης, όπως αυτά προέκυψαν με την εφαρμογή της μεθοδολογίας που προτείνεται. Ακόμα, παρατίθενται όλοι οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται υπό μορφή προγραμμάτων στο *Mathematica*. Επίσης, εφαρμόζεται μία σύνθετη επιφάνεια παρεμβολής *B – Spline* και γίνεται ο χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς διάφορα γεωμετρικά μεγέθη ώστε να κατανοηθεί η συγκριτική διαφοροποίηση των μεγεθών αυτών στα διάφορα σημεία της επιφάνειας. Τέλος, επιχειρείται η επαλήθευση ορισμένων θεωρημάτων – πορισμάτων που αφορούν την επιφάνεια της οδού.

Στο *ενδέκατο κεφάλαιο* γίνεται μία εποπτική και αριθμητική σύγκριση των αποτελεσμάτων του μαθήματος – θέματος σε σχέση με τα αποτελέσματα που απορρέουν από τη μεθοδολογία που προτείνεται, σημειώνοντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Τέλος, αναφέρονται οι τομείς στους οποίους μπορεί να βρει εφαρμογή το αντικείμενο της εργασίας, ενώ παράλληλα καταγράφονται προτάσεις για την περαιτέρω έρευνα και μελέτη του θέματος.

2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο, καταγράφονται όλες εκείνες οι μαθηματικές γνώσεις και εργαλεία που απαιτούνται, αρχικά για την κατανόηση του προβλήματος που ανακύπτει και στη συνέχεια, για την κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου βάσει του οποίου θα πραγματοποιηθεί η χάραξη της οδού.

2.1. Καμπύλες

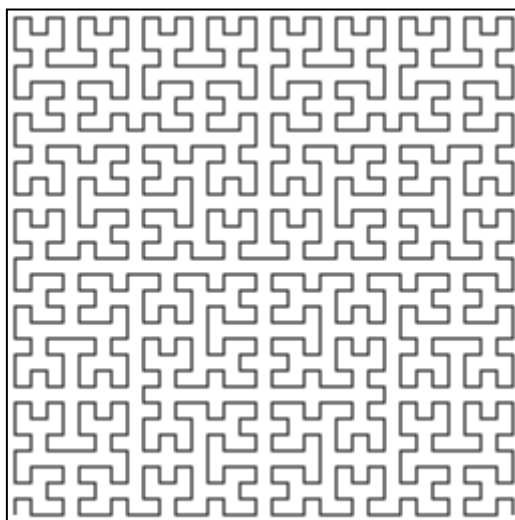
Η εικόνα ενός διαστήματος I (ανοιχτού, ημιανοιχτού ή κλειστού) στον \mathbb{R}^3 με μία απεικόνιση f τοπικά ένα προς ένα, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, λέγεται καμπύλη.

2.1.1. Παραμετρική παράσταση καμπύλης

Μία τέτοια καμπύλη παριστάνεται παραμετρικά, με παράμετρο το t και τα σημεία $f(I) \subset \mathbb{R}^3$ λέγονται σημεία της καμπύλης. Τα σημεία της καμπύλης προσδιορίζονται από ένα διάνυσμα $\vec{r}(t)$ του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από :

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$$

Ο ορισμός της καμπύλης με τοπικά ένα προς ένα συνεχείς απεικονίσεις αποκλείει μια ευρεία τάξη "παράξενων" καμπυλών όπως η καμπύλη *Peano* (Μαρκάτης, 1989).



ΕΙΚΟΝΑ 2.1 : Καμπύλη Peano

Πηγή : <http://people.csail.mit.edu/jaffer/Geometry/hilbert256.png>

2.1.2. Λείες καμπύλες – Ανώμαλα σημεία

Μία καμπύλη $\vec{r}(t)$ λέγεται ότι είναι κλάσεως C^n όταν υπάρχουν όλες οι παράγωγοι μέχρι τάξης n και είναι συνεχείς. Αν $n \rightarrow \infty$, τότε η καμπύλη λέγεται λεία. Τα σημεία t μιας καμπύλης για τα οποία $\vec{r}'(t) = \vec{0}$, λέγονται *ιδιάζοντα* ή *ανώμαλα σημεία* της καμπύλης.

Πολλές φορές, αυτή η ιδιότητα οφείλεται στον τρόπο παραμετρικοποίησης της καμπύλης. Αν όμως αυτό συμβαίνει για κάθε παραμετρικοποίηση, τότε τα σημεία λέγονται *πραγματικά ανώμαλα σημεία*.

Γενικά, μας ενδιαφέρει η καμπύλη να έχει τέτοια τάξη λειότητας, ώστε να ικανοποιούνται οι απαραίτητες συνθήκες κάθε φορά.

2.1.3. Επιτρεπτές αλλαγές συντεταγμένων

Η γεωμετρία εισάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^3 και επομένως, οι επιτρεπτές αλλαγές συντεταγμένων, είναι εκείνες που αφήνουν αναλλοίωτες τις ιδιότητες που προκύπτουν από αυτό. Συγκεκριμένα, για τον \mathbb{R}^3 με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο (ο Ευκλείδειος n -χώρος \mathbb{R}^n είναι χώρος εσωτερικού γινομένου), οι επιτρεπτές αλλαγές συντεταγμένων είναι οι μεταθέσεις και οι στροφές (Μαρκάτης, 1989).

2.1.4. Φυσική παράμετρος – Φυσική παράσταση καμπύλης

Θεωρούμε μια καμπύλη $C : \vec{r}(t)$. Εισάγουμε μια νέα παράμετρο s σύμφωνα με τη σχέση (2.1) :

$$s = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(u)| du \quad (2.1)$$

Λόγω του ότι $s'(t) = |\vec{r}'(t)| > 0$, η συνάρτηση $s(t)$ είναι γνησίως αύξουσα, (δηλαδή, το μήκος του τόξου s αυξάνεται, όσο αυξάνεται το u). Η αντίστροφη συνάρτηση της $\vec{s}(t)$ είναι η $\vec{t} = \vec{t}(s)$. Η παράγωγος της συνάρτησης t (μέσω του θεωρήματος της τοπικής αντιστροφής) δίνεται από τον τύπο (Πολυράκης, 2008) :

$$\vec{t}'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} > 0 \quad (2.2)$$

Δηλαδή, και η αντίστροφη συνάρτηση $\vec{t}(s)$ είναι αύξουσα. Άρα η συνάρτηση $\vec{t} = \vec{t}(s)$ είναι επιτρεπτή αλλαγή της παραμέτρου t .

Επομένως η συνάρτηση $\vec{\varphi}(s) = \vec{r}(t(s))$ είναι μια ισοδύναμη παράσταση της C (Παράρτημα Α.1.). Η συνάρτηση $\vec{\varphi}(s)$ ονομάζεται *φυσική παράσταση* της καμπύλης, ενώ η παράμετρος s λέγεται *φυσική παράμετρος* της καμπύλης και προσδιορίζει το μήκος της. Πρέπει να σημειωθεί ότι το μήκος της καμπύλης είναι ανεξάρτητο από την παραμετρική παράσταση της καμπύλης. Επομένως, το μήκος της καμπύλης εκφράζει μια

εσωτερική ιδιότητα της καμπύλης, δηλαδή είναι μία έννοια που μένει αναλλοίωτη στις αλλαγές του συστήματος συντεταγμένων.

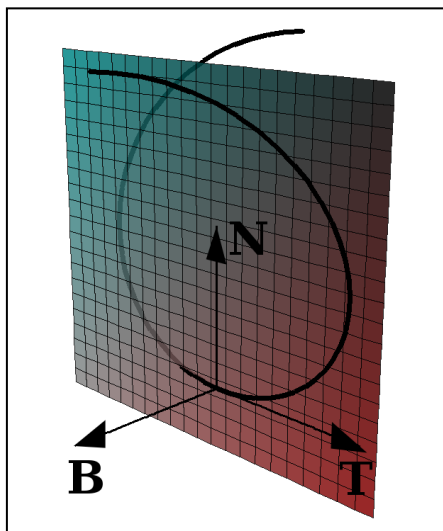
2.1.5. Τρίεδρο του *Frenet*

Το τρίεδρο του *Frenet*, μαζί με τις εξισώσεις που το ορίζουν, διαμορφώνουν ένα από τα βασικότερα και σηματικότερα εργαλεία της διαφορικής γεωμετρίας για τη μελέτη χωρικών καμπυλών.

Ορισμός του τριέδρου Frenet

Σε κάθε σημείο P μιας καμπύλης C προσαρτούμε τα εξής ορθοκανονικά (μοναδιαία και κάθετα ανά δύο μεταξύ τους) διανύσματα :

- ❖ Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα \vec{t} .
- ❖ Το πρώτο κάθετο διάνυσμα \vec{n} . Αυτό κείται στο εγγύτατο επίπεδο και έχει κατεύθυνση προς τα κοίλα της προβολής της καμπύλης επάνω στο εγγύτατο επίπεδο. Δηλαδή, το διάνυσμα \vec{n} δείχνει προς την κατεύθυνση του $\vec{\varphi}''(s)$. Επομένως, το πρώτο κάθετο διάνυσμα \vec{n} , έχει τη διεύθυνση του διανύσματος καμπυλότητας \vec{k} .
- ❖ Το δεύτερο κάθετο διάνυσμα \vec{b} , το οποίο είναι κάθετο προς τα δύο προηγούμενα με κατεύθυνση τέτοια ώστε η τριάδα $\{ \vec{t}, \vec{n}, \vec{b} \}$ να αποτελεί ένα δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα.



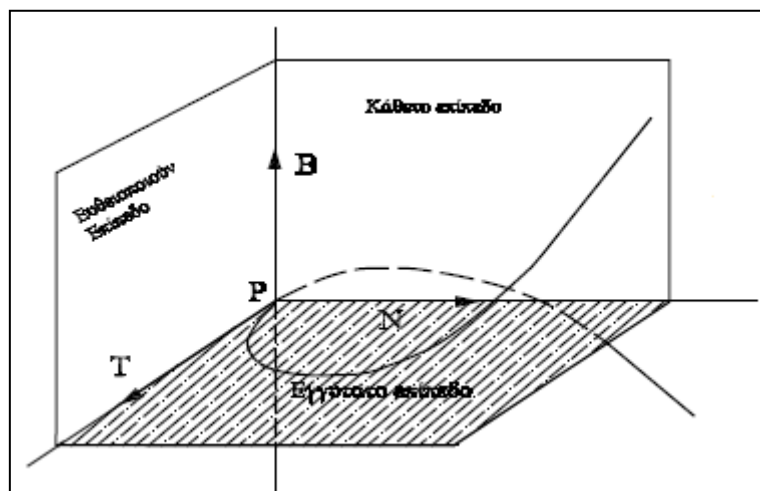
ΕΙΚΟΝΑ 2.2 : Πρωτεύοντα διανύσματα καμπύλης

Πηγή <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6f/Frenet.png>

Αυτή η τριάδα διανυσμάτων κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Έτσι, το σύστημα αυτό ονομάζεται κινούμενο ή συνοδεύον τρίεδρο ή *τρίεδρο Frenet* της καμπύλης. Το σύστημα αυτό λαμβάνεται συχνά ως σύστημα αναφοράς. Τα διανύσματα \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} ονομάζονται επίσης και πρωτεύοντα διανύσματα της καμπύλης.

Οι ευθείες πάνω στις οποίες κείνται αυτά τα διανύσματα λέγονται κατά σειρά, εφαπτομένη, πρώτη κάθετος και δεύτερη κάθετος.

Τα τρία επίπεδα που ορίζουν ανά δύο τα διανύσματα $\{\vec{t}, \vec{n}\}$, $\{\vec{t}, \vec{b}\}$ και $\{\vec{n}, \vec{b}\}$ λέγονται εγγύτατο, ευθειοποιούν και κάθετο επίπεδο αντίστοιχα.



ΕΙΚΟΝΑ 2.3 : Τρίεδρο του Frenet

Πηγή : (Καδιανάκης, 2013)

Υπολογισμός των διανυσμάτων $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ του τριέδρου Frenet

Όταν η καμπύλη C έχει εξίσωση $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(s)$, όπου s η φυσική παράμετρος, οι τύποι υπολογισμού των διανυσμάτων του τριέδρου Frenet, έχουν ως εξής (στο Παράρτημα Α. 2. αποδεικνύεται ότι $|\vec{\varphi}'(s)| = 1$) :

$$\vec{t}(s) = \vec{\varphi}'(s) \quad (2.3)$$

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{\varphi}''(s)}{|\vec{\varphi}''(s)|} \quad (2.4)$$

Όταν η καμπύλη C έχει εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}(t)$, όπου t τυχαία παράμετρος, οι τύποι έχουν ως εξής :

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (2.6)$$

$$\vec{b}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} \quad (2.7)$$

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| |\vec{r}'(t)|} = \frac{\vec{r}''(t) |\vec{r}'(t)|^2 - \vec{r}'(t) (\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t))}{|\vec{r}'(t)| |\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} \quad (2.8)$$

Διαπιστώνεται ότι αν τα διανύσματα $\vec{r}'(t)$ και $\vec{r}''(t)$ είναι συγγραμμικά, τότε οι τύποι (2.6), (2.7) και (2.8), δεν ισχύουν καθώς εμφανίζεται μηδέν στον παρονομαστή και συνεπώς, το τρίεδρο *Frenet* δεν υπάρχει.

2.1.6. Το διάνυσμα καμπυλότητας \vec{k} και η καμπυλότητα κ

Διάνυσμα καμπυλότητας \vec{k}

Το διάνυσμα καμπυλότητας $\vec{k}(s)$ είναι κάθετο στην καμπύλη στο $\vec{\varphi}(s)$, είναι διάνυσμα του εγγύτατου επιπέδου της καμπύλης και είναι συνεχές. Δηλαδή, μεταβάλλεται συνεχώς κατά μήκος της καμπύλης. Ο αριθμός $\kappa(s)$ με την ιδιότητα :

$$|\kappa(s)| = |\vec{k}(s)| \quad (2.9)$$

ονομάζεται *καμπυλότητα* της καμπύλης στο σημείο $\vec{\varphi}(s)$. Η καμπυλότητα εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος \vec{t} και εφόσον είναι διάφορο του μηδενός, η φορά του δείχνει ακριβώς, πώς κάμπτεται η καμπύλη. Λόγω του ορισμού αυτού, έπεται ότι :

Όταν η παράμετρος είναι η φυσική, τότε :

$$\vec{k}(s) = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \vec{t}'(s) = \vec{\varphi}''(s)$$

Δηλαδή,

$$\vec{k}(s) = \vec{\varphi}''(s) \quad (2.10)$$

Όταν η παράμετρος είναι τυχαία, τότε :

$$\vec{k}(t) = \frac{d\vec{t}(t)}{ds} = \frac{d\vec{t}(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{t}(t)}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{t}(t)}{dt} : \frac{ds}{dt} = \vec{t}'(t) : s'(t) = \vec{t}'(t) : |\vec{r}'(t)|$$

Δηλαδή,

$$\vec{k}(t) = \frac{\vec{t}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (2.11)$$

Η σχέση (2.11), μετασχηματίζεται (με τη βοήθεια του Παραρτήματος Α.3.) ως εξής :

$$\begin{aligned}\vec{k}(t) &= \frac{\vec{t}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{\left(\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\right)'}{\left|\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\right|} = \frac{\frac{\vec{r}''(t)|\vec{r}'(t)| - \vec{r}'(t)\frac{\vec{r}''(t)\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}}{\left|\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\right|^2}}{\left|\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\right|} = \\ &= \frac{\frac{\vec{r}''(t)|\vec{r}'(t)|^2 - (\vec{r}''(t)\vec{r}'(t))\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}}{\left|\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\right|^3} = \frac{\vec{r}''(t)|\vec{r}'(t)| - (\vec{r}''(t)\vec{r}'(t))\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^4} = \\ &= \frac{\vec{r}''(t)|\vec{r}'(t)|^2}{|\vec{r}'(t)|^4} - \frac{(\vec{r}''(t)\vec{r}'(t))\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^4} = \frac{\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} - \frac{\vec{r}''(t)\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^4}\vec{r}'(t)\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\vec{k}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|^2} \left(\vec{r}''(t) - \frac{\vec{r}''(t)\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} \vec{r}'(t) \right) \quad (2.12)$$

Παρακάτω (σχέση (2.40)), αποδεικνύεται ότι το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{a}_\kappa(t)$, δίνεται από τη σχέση (2.13) :

$$\vec{a}_\kappa(t) = \vec{r}''(t) - \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} \vec{r}'(t) \quad (2.13)$$

Επομένως, το διάνυσμα καμπυλότητας $\vec{k}(t)$, δίνεται και από τον τύπο (2.14) :

$$\vec{k}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|^2} \vec{a}_\kappa(t) \quad (2.14)$$

Καμπυλότητα κ

Η καμπυλότητα, μετράει την αποτυχία της καμπύλης από το να είναι ευθεία γραμμή (είτε στο χώρο είτε στο επίπεδο).

Όταν η παράμετρος είναι η φυσική, τότε :

$$|\kappa(s)| = |\vec{\varphi}''(s)| \quad (2.15)$$

Όταν η παράμετρος είναι η τυχαία, τότε :

$$|\kappa(t)| = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} \quad (2.16)$$

Επίσης, τα σημεία μηδενισμού της καμπυλότητας κ ονομάζονται *σημεία καμπής* της καμπύλης.

Αν δεν υπάρχουν σημεία καμπής στην C , δηλαδή, αν ισχύει $\vec{k}(s) \neq \vec{0}$, τότε έχουμε :

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{k}(s)}{|\kappa(s)|} \quad (2.17)$$

Δηλαδή, το $\vec{n}(s)$, είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, με τη διεύθυνση και φορά του διανύσματος $\vec{k}(s)$. Παρατηρείται ακόμα, ότι κατά μήκος μίας ευθείας, έχουμε $\kappa(s) \equiv 0$, οπότε το πρώτο κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα δεν ορίζεται. Μετά την εκλογή του $\vec{n}(s)$, διαπιστώνεται ότι υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση κ κατά μήκος της C , τέτοια ώστε :

$$\vec{k}(s) = \kappa(s) \vec{n}(s) \quad (2.18)$$

Σε ένα σημείο της καμπύλης, όπου το διάνυσμα $\vec{n}(s)$ έχει την ίδια φορά με το $\vec{k}(s)$, έχουμε:

$$\kappa(s) = |\vec{k}(s)| \quad (2.19)$$

Εκεί, όπου το $\vec{n}(s)$, έχει αντίθετη φορά με το $\vec{k}(s)$, έχουμε :

$$\kappa(s) = -|\vec{k}(s)| \quad (2.20)$$

Τέλος, σε ένα σημείο καμπής όπου $\vec{k}(s) = \vec{0}$, έχουμε :

$$\kappa(s) = 0 \quad (2.21)$$

Ο αριθμός $\kappa(s)$ που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση λέγεται προσημασμένη καμπυλότητα της καμπύλης C , στο σημείο $\vec{x}(s)$. Όμως, , επειδή το διάνυσμα $\vec{n}(s)$ είναι αρχικά αυθαίρετο ως προς τη φορά, το πρόσημο της καμπυλότητας $\kappa(s)$ δεν είναι καθορισμένο. Έτσι, μόνο η απόλυτη τιμή της καμπυλότητας, $|\kappa| = |\vec{k}|$, εκφράζει μία εσωτερική ιδιότητα της καμπύλης (δηλαδή, είναι μία έννοια που μένει αναλλοίωτη στις αλλαγές του συστήματος συντεταγμένων και δεν εξαρτάται από τον τρόπο παραμετρικοποίησης). Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (18.2) εσωτερικά επί $\vec{n}(s)$ και χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\vec{n} \cdot \vec{n} = |\vec{n}|^2 = 1$, παίρνουμε τον τύπο :

$$\kappa(s) = \vec{k}(s) \cdot \vec{n}(s) \quad (2.22)$$

Ως γνωστόν, το εμβαδόν E ενός παραλληλογράμμου με μη παράλληλες πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, μπορεί να υπολογιστεί μέσω του εξωτερικού γινομένου ως εξής :

$$E = |\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| \quad (2.23)$$

Επομένως, λόγω της μορφής του τύπου (2.16) που μας δίνει την καμπυλότητα και της σχέσης (20.3), συμπεραίνεται ότι η καμπυλότητα μπορεί να εκφραστεί και ως εξής (Petersen, 2006):

$$|\kappa(t)| = \frac{\text{Εμβαδόν Παραλληλογράμμου } \langle \vec{r}'(t), \vec{r}''(t) \rangle}{|\vec{r}'(t)|^3} \quad (2.24)$$

Προσημασμένη καμπυλότητα κ2 επίπεδων καμπυλών

Η καμπυλότητα μίας καμπύλης $\vec{a}(t)$ του επιπέδου όπου t τυχαία παράμετρος, δίνεται από τον τύπο :

$$\kappa_2 = \frac{\vec{a}''(t) \cdot J(\vec{a}'(t))}{|\vec{a}'(t)|^3} \quad (2.25)$$

Ο τελεστής J ορίζεται ως εξής :

$$J(p_1, p_2) = (-p_2, p_1) \quad (2.26)$$

Έστω $\vec{x} = \vec{x}(s)$, μία καμπύλη και $\Delta\theta$ η γωνία που σχηματίζουν τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{t}(s)$ και $\vec{t}(s + \Delta s)$, $\Delta s > 0$, στα γειτονικά σημεία $\vec{x}(s)$ και $\vec{x}(s + \Delta s)$, αντίστοιχα. Η καμπυλότητα κ , εκφράζει το πηλίκο της μεταβολής της διεύθυνσης της εφαπτομένης προς το μήκος τόξου :

Όταν η παράμετρος είναι η φυσική s , τότε :

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad (2.27)$$

Όταν η παράμετρος είναι τυχαία, τότε :

$$\kappa(t) = \frac{dt}{ds} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.28)$$

Εδώ, πρέπει να τονιστεί ότι η καμπυλότητα είναι μεγαλύτερη του μηδενός ($\kappa > 0$), όταν η γωνία θ αυξάνεται, καθώς αυξάνεται το μήκος της s καμπύλης. Αν η γωνία θ μειώνεται, καθώς αυξάνεται το μήκος της s καμπύλης, τότε η καμπυλότητα είναι αρνητική ($\kappa < 0$).

Τελικά, η καμπυλότητα μίας καμπύλης $\vec{a}(t)$ του επιπέδου, συνδέεται με τη γωνία διεύθυνσης τ της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της καμπύλης, με την παρακάτω σχέση :

$$\kappa_2 = \frac{d\tau}{ds} \quad (2.29)$$

όπου s η φυσική παράμετρος της καμπύλης (μήκος της καμπύλης).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, προκύπτει ένα πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα :

Σε αντίθεση με την προσημασμένη καμπυλότητα επίπεδης καμπύλης κ_2 , η καμπυλότητα κ καμπυλών του \mathfrak{R}^3 είναι πάντα μη αρνητική.

Το πρόσημο της καμπυλότητας σχετίζεται με τον προσανατολισμό της καμπύλης. Δηλαδή, θετική καμπυλότητα αντιστοιχεί στο να "στρίβει" η καμπύλη προς τα αριστερά (κατά σύμβαση) καθώς το μήκος της καμπύλης αυξάνεται, ενώ αρνητική καμπυλότητα αντιστοιχεί στο να "στρίβει" η καμπύλη προς τα δεξιά (πάλι κατά σύμβαση). Έτσι, ο μηδενισμός της καμπυλότητας επίπεδων καμπυλών (σημείο καμπής της καμπύλης) ισοδυναμεί με την αλλαγή του προσανατολισμού της καμπύλης.

2.1.7. Η στρέψη τ

Η στρέψη, μετράει την αποτυχία της καμπύλης από το να είναι επίπεδη.

Η *στρέψη* ή *περιστροφή* τ της καμπύλης είναι ένας αριθμός που εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του εγγύτατου επιπέδου της καμπύλης. Με άλλα λόγια, εκφράζει το κατά πόσο πολύ η καμπύλη, τείνει να γίνει τρισδιάστατη – χωρική (δηλαδή να ξεφύγει από το να είναι επίπεδη).

Όταν η παράμετρος είναι η φυσική s , τότε :

$$\tau(s) = \frac{\vec{\varphi}'(s) \cdot (\vec{\varphi}''(s) \times \vec{\varphi}'''(s))}{|\vec{\varphi}''(s)|^2} \quad (2.30)$$

Όταν η παράμετρος είναι τυχαία, τότε :

$$\tau(t) = \frac{\vec{r}'(t) \cdot (\vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t))}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2} \quad (2.31)$$

Μια καμπύλη είναι επίπεδη αν και μόνο αν $\tau \equiv 0$ (δηλαδή η στρέψη είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν).

Όπως συμβαίνει με την καμπυλότητα, έτσι και η στρέψη αποτελεί εσωτερική ιδιότητα της καμπύλης. Δηλαδή, δεν εξαρτάται από τον τρόπο παραμετρικοποίησης.

Ως γνωστόν, ο όγκος V ενός παραλληλεπιπέδου με ακμές, τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μικτού γινομένου ως εξής :

$$V = |\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})| \quad (2.32)$$

Επομένως, λόγω της μορφής του τύπου (2.31) που μας δίνει τη στρέψη και της σχέσης (2.32), συμπεραίνεται ότι η στρέψη μπορεί να εκφραστεί και ως εξής :

$$\tau(t) = \frac{\text{Προσημασμένος Όγκος Παραλληλεπιπέδου } \langle \vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t) \rangle}{(\text{Εμβαδόν Παραλληλογράμμου } \langle \vec{r}'(t), \vec{r}''(t) \rangle)^2} \quad (2.33)$$

2.1.8. Κέντρο καμπυλότητας $\vec{q}(t)$, ακτίνα καμπυλότητας $\rho(t)$, εγγύτατος κύκλος (ή κύκλος καμπυλότητας), εξελιγμένη καμπύλης και πολικός άξονας

Σε κάθε σημείο μίας καμπύλης $\vec{r}(t)$, ορίζεται η έννοια της ακτίνας καμπυλότητας $\rho(t)$ και του κέντρου καμπυλότητας $\vec{q}(t)$.

Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι τοπικά στο $\vec{r}(t)$, η καμπύλη συμπίπτει με κύκλο του εγγύτατου επιπέδου (δηλαδή θεωρούμε την καμπύλη, τοπικά επίπεδη). Η ακτίνα του κύκλου αυτού ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας $\rho(t)$ και το κέντρο του, κέντρο καμπυλότητας $\vec{q}(t)$. Από τη στιγμή που ο κύκλος βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $\{\vec{t}, \vec{n}\}$, αυτό σημαίνει η εφαπτομένη σε ένα σημείο του κύκλου θα έχει τη διεύθυνση του

διανύσματος \vec{t} , ενώ η κάθετος σε ένα σημείο του κύκλου θα έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \vec{n} .

Ως γνωστόν, η εφαπτόμενη σε ένα σημείο ενός κύκλου, είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου στο σημείο αυτό. Επομένως, το διάνυσμα της ακτίνας του κύκλου \vec{R} , έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \vec{n} . Το διάνυσμα της ακτίνας του κύκλου \vec{R} , θεωρείται ότι έχει αρχή το σημείο που βρίσκεται στην περίμετρο του κύκλου και πέρασ το κέντρο του κύκλου. Επομένως, το διάνυσμα της ακτίνας του κύκλου \vec{R} έχει και την ίδια φορά με το διάνυσμα \vec{n} ($\vec{R} \uparrow \vec{n}$). Δηλαδή, ισχύει ότι :

$$\vec{R} = R \vec{n} \quad (2.34)$$

όπου $R > 0$, η ακτίνα του κύκλου.

Θεωρώντας ότι $\vec{q}(t)$ είναι το κέντρο του κύκλου, έχουμε ότι :

$$\vec{q}(t) = \vec{r}(t) + \vec{R} \quad (2.35)$$

Η σχέση (2.35), μέσω της (2.34), γίνεται :

$$\vec{q}(t) = \vec{r}(t) + R \vec{n} \quad (2.36)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι σε κύκλο, η καμπυλότητά του κ_2 είναι σταθερή και ισούται με το αντίστροφο της ακτίνας. Δηλαδή :

$$\kappa_{2\text{κύκλου}} \equiv \frac{1}{R} \Rightarrow R \equiv \frac{1}{\kappa_{2\text{κύκλου}}} \quad (2.37)$$

όπου η ακτίνα του εγγύτατου κύκλου R , ονομάζεται και ακτίνα καμπυλότητας και συμβολίζεται με ρ .

Τελικά, η σχέση (2.36), γράφεται :

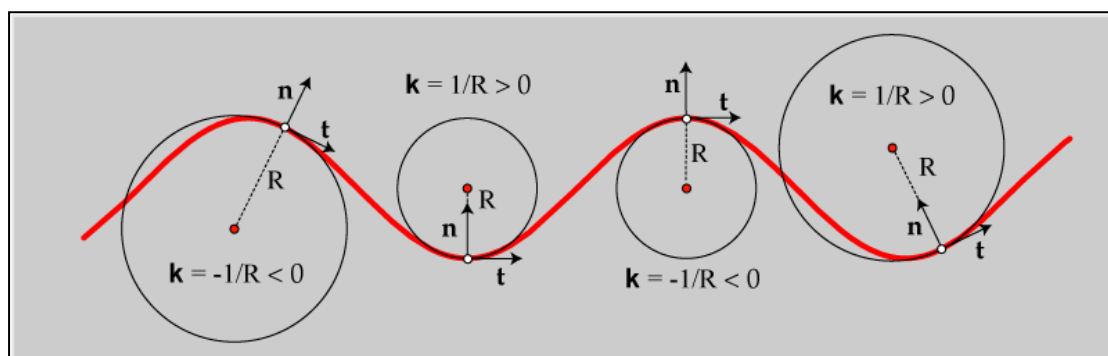
$$\begin{aligned} \vec{q}(t) &= \vec{r}(t) + \rho \vec{n} \\ \vec{q}(t) &= \vec{r}(t) + \frac{1}{\kappa_{2\text{κύκλου}}} \vec{n} \end{aligned}$$

Τελικά, ισχύει :

$$\vec{q}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \vec{n}(t) \quad (2.38)$$

όπου το σημείο $\vec{q}(t)$, ονομάζεται κέντρο καμπυλότητας και ο αριθμός $\frac{1}{\kappa(t)}$ ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας (Πολυράκης, 2008).

Εγγύτατος κύκλος ή κύκλος καμπυλότητας της καμπύλης ονομάζεται ο κύκλος με κέντρο το κέντρο καμπυλότητας της καμπύλης $\vec{q}(t)$ και ακτίνα, την ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης ρ .



ΕΙΚΟΝΑ 2.4 : Εγγύτατος κύκλος καμπύλης

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/introduction/s3.gif

Τα κέντρα καμπυλότητας μίας καμπύλης, σχηματίζουν την εξελιγμένη της καμπύλης η οποία είναι εν γένει μία χωρική καμπύλη.

Επίσης, η ευθεία η κάθετη προς το εγγύτατο επίπεδο, που περνάει από το κέντρο καμπυλότητας λέγεται πολική ευθεία ή πολικός άξονας της καμπύλης στο σημείο αυτό (Μαρκάτης, 1989).

2.1.9. Η κίνηση ενός σημείου $\vec{r}(t)$ κατά μήκος της καμπύλης C

Έστω η καμπύλη

$$C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή t παριστάνει τον χρόνο, οπότε το σημείο $\vec{r}(t)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης C . Έτσι, έχουμε ότι :

Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}(t)$ ισούται με $\vec{u}(t) = \vec{r}'(t)$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{a}(t)$ ισούται με $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$

Η ταχύτητα $u(t)$ ισούται με $u(t) = |\vec{u}(t)| = |\vec{r}'(t)|$

Στο Παράρτημα Α.2. έχει αποδειχθεί ότι όταν μία καμπύλη έχει ως παράμετρο τη φυσική s , τότε $|\vec{\varphi}'(s)| = 1$ δηλαδή $u(t) = 1$. Για αυτό το λόγο, οι καμπύλες με παράμετρο τη φυσική (το μήκος της καμπύλης), ονομάζονται και *καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας*.

Η επιτάχυνση $\alpha(t)$ ισούται με $\alpha(t) = |\vec{a}(t)| = |\vec{r}''(t)|$

Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}(t)$, είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη σε οποιαδήποτε θέση.

Αντίθετα, το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{a}(t)$ αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες : την επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_\varepsilon(t)$ (ή εφαπτομενική) και την κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_\kappa(t)$ (ή εγκάρσια). Οι συνιστώσες αυτές, είναι μεταξύ τους κάθετες, (επομένως, $\vec{a}_\varepsilon \cdot \vec{a}_\kappa = 0$). Η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_\varepsilon(t)$, έχει τη διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{u}(t)$ και συνεπώς είναι εφαπτόμενη στη καμπύλη (δηλαδή, έχει τη διεύθυνση του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος \vec{t}). Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_\kappa(t)$, έχει τη διεύθυνση του πρώτου μοναδιαίου κάθετου διανύσματος \vec{n} (άρα και του διανύσματος καμπυλότητας \vec{k}) και ειδικότερα, έχει τη διεύθυνση και φορά του διανύσματος της ακτίνας του εγγύτατου κύκλου \vec{R} .

Επομένως, το διάνυσμα της επιτρόχιας επιτάχυνσης $\vec{a}_\varepsilon(t)$, είναι η διανυσματική προβολή (Παράρτημα Α. 4.) του διανύσματος επιτάχυνσης $\vec{a}(t)$ στο διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}(t)$:

$$\vec{a}_\varepsilon(t) = \vec{P}_{\vec{u}}(\vec{a}) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{\vec{r}'' \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}'$$

Επομένως, το διάνυσμα της επιτρόχιας επιτάχυνσης \vec{a}_ε , ισούται με :

$$\vec{a}_\varepsilon(t) = \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} \vec{r}'(t) \quad (2.39)$$

Επειδή το διάνυσμα της επιτρόχιας επιτάχυνσης \vec{a}_ε και το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης \vec{a}_κ , αποτελούν τις συνιστώσες του διανύσματος της επιτάχυνσης \vec{a} , ισχύει ότι:

$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\kappa \Rightarrow \vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon$$

Δηλαδή, το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης \vec{a}_κ λόγω της σχέσης (2.39), ισούται με:

$$\vec{a}_\kappa(t) = \vec{r}''(t) - \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} \vec{r}'(t) \quad (2.40)$$

Συγκεντρωτικά, η επιτρόχια επιτάχυνση \vec{a}_ε έχει τη διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας \vec{u} και είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη, ενώ είναι υπεύθυνη για τη μεταβολή του μέτρου του διανύσματος της ταχύτητας \vec{u} . Η κεντρομόλος επιτάχυνση \vec{a}_κ έχει διεύθυνση κάθετη στην εφαπτομένη και φορά προς το κέντρο καμπυλότητας του εγγύτατου κύκλου της καμπύλης, ενώ είναι υπεύθυνη για την αλλαγή της διεύθυνσης του διανύσματος της ταχύτητας \vec{u} .

2.1.10. Εξισώσεις Frenet

Μελετάται η συμπεριφορά του τριέδρου Frenet όταν αυτό κινείται από σημείο σε σημείο της καμπύλης. Θεωρείται λοιπόν ότι υπάρχει το τριέδρο και στη συνέχεια παραγωγίζονται τα τρία διανύσματα ως προς τη φυσική παράμετρο s . Τα διανύσματα $\vec{t}'(s)$, $\vec{n}'(s)$, $\vec{b}'(s)$ αναλύονται στο τριέδρο Frenet της καμπύλης ως εξής :

$$\vec{t}'(s) = \kappa(s) \vec{n}(s) \quad (2.41)$$

$$\vec{n}'(s) = -\kappa(s) \vec{t}(s) + \tau(s) \vec{b}(s) \quad (2.42)$$

$$\vec{b}'(s) = -\tau(s) \vec{n}(s) \quad (2.43)$$

Αντίστοιχα, σε μορφή πινάκων, οι εξισώσεις (2.41), (2.42) και (2.43) καταλήγουν στην ακόλουθη μορφή :

$$\begin{bmatrix} \vec{t}'(s) \\ \vec{n}'(s) \\ \vec{b}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{bmatrix}$$

όπου $\kappa(s)$ η (προσημασμένη) καμπυλότητα και $\tau(s)$ η στρέψη της καμπύλης. Οι τύποι αυτοί ονομάζονται εξισώσεις *Frenet*.

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν μόνο στην περίπτωση που έχουμε καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας (παραμετρικοποίηση ως προς τη φυσική παράμετρο). Σε αντίθετη περίπτωση, οι εξισώσεις γίνονται :

$$\vec{t}'(t) = |\vec{u}(t)| \kappa(t) \vec{n}(t) \quad (2.44)$$

$$\vec{n}'(t) = -|\vec{u}(t)|\kappa(t) \vec{t}(t) + |\vec{u}(t)| \tau(t) \vec{b}(t) \quad (2.45)$$

$$\vec{b}'(t) = -|\vec{u}(t)|\tau(t) \vec{n}(t) \quad (2.46)$$

ή, επειδή $|\vec{u}(t)| = |\vec{r}'(t)|$:

$$\vec{t}'(t) = |\vec{r}'(t)| \kappa(t) \vec{n}(t) \quad (2.47)$$

$$\vec{n}'(t) = -|\vec{r}'(t)|\kappa(t) \vec{t}(t) + |\vec{r}'(t)| \tau(t) \vec{b}(t) \quad (2.48)$$

$$\vec{b}'(t) = -|\vec{r}'(t)|\tau(t) \vec{n}(t) \quad (2.49)$$

ή, επειδή $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)}$:

$$\vec{t}'(t) = \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa(t) \vec{n}(t) \quad (2.50)$$

$$\vec{n}'(t) = -\sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa(t) \vec{t}(t) + \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau(t) \vec{b}(t) \quad (2.51)$$

$$\vec{b}'(t) = -\sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau(t) \vec{n}(t) \quad (2.52)$$

Αντίστοιχα, υπό μορφή πινάκων, οι παραπάνω εξισώσεις (2.50), (2.51) και (2.52), καταλήγουν στην ακόλουθη μορφή :

$$\begin{bmatrix} \vec{t}'(t) \\ \vec{n}'(t) \\ \vec{b}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & |\vec{u}(t)| \kappa(s) & 0 \\ -|\vec{u}(t)| \kappa(s) & 0 & |\vec{u}(t)| \tau(s) \\ 0 & |\vec{u}(t)| \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}(t) \\ \vec{n}(t) \\ \vec{b}(t) \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \vec{t}'(t) \\ \vec{n}'(t) \\ \vec{b}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa(s) & 0 \\ -\sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa(s) & 0 & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau(s) \\ 0 & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}(t) \\ \vec{n}(t) \\ \vec{b}(t) \end{bmatrix}$$

2.1.11. Το διάνυσμα του *Darboux* $\vec{d}(t)$

Αν θεωρηθεί ότι η φυσική παράμετρος της καμπύλης είναι ο χρόνος t , τότε η καμπύλη αντιστοιχεί στις διαδοχικές θέσεις ενός κινητού σημείου στο χώρο, το οποίο κινείται με ταχύτητα ένα. Το *τρίεδρο Frenet* κινείται και αυτό σαν στερεό σώμα από θέση σε θέση.

Η κίνηση αυτή είναι σύνθεση μιας μεταφοράς και μιας περιστροφής (όπως κάθε κίνηση στερεού στο χώρο). Η μεταφορά περιγράφεται από την εξίσωση της καμπύλης. Η περιστροφή ενός σώματος γύρω από ένα σημείο χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{d}(t)$. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{d}(t)$, έπειτα από πράξεις χρησιμοποιώντας και τις εξισώσεις *Frenet*, εκφράζεται ως εξής (Gray, 1998) :

$$\vec{d}(t) = \tau(t) \vec{t}(t) + \kappa(t) \vec{b}(t) \quad (2.53)$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{d}(t)$ λέγεται *διάνυσμα του Darboux*. Το *τρίεδρο του Frenet* λέγεται και συνοδεύον τρίεδρο λόγω της ιδιότητάς του ακριβώς να συνοδεύει το κινητό σημείο της καμπύλης.

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας εκφράζεται μέσω της παραπάνω σχέσης, μόνο όταν έχουμε καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Σε αντίθετη περίπτωση, που η παράμετρος δεν αντιστοιχεί στη φυσική, η σχέση (2.53), γίνεται :

$$\vec{d}(t) = |\vec{u}(t)| \left(\tau(t) \vec{t}(t) + \kappa(t) \vec{b}(t) \right) = |\vec{r}'(t)| \left(\tau(t) \vec{t}(t) + \kappa(t) \vec{b}(t) \right)$$

ή

$$\vec{d}(t) = \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \left(\tau(t) \vec{t}(t) + \kappa(t) \vec{b}(t) \right) \quad (2.54)$$

2.1.12. Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας καμπυλών (θεμελιώδες θεώρημα καμπυλών)

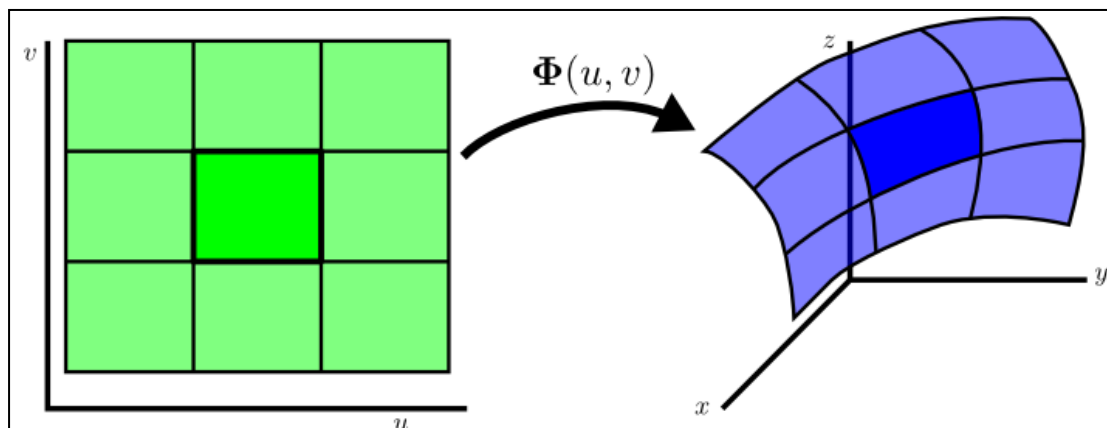
Αν δύο καμπύλες, $\vec{r}(s)$ και $\vec{\varphi}(s)$ έχουν ίση καμπυλότητα και στρέψη σε κάθε σημείο τους (έχοντας ως παράμετρο, τη φυσική παράμετρο της καμπύλης s), τότε μπορούν να συμπέσουν μετά από στροφή και παράλληλη μεταφορά του \mathbb{R}^3 .

Ειδικότερα, αν η καμπυλότητα και η στρέψη δύο καμπυλών του \mathbb{R}^3 συμπίπτουν και επιπλέον συμπίπτουν τα *τρίεδρα Frenet* των καμπυλών σε ένα τουλάχιστον σημείο τους, τότε οι καμπύλες συμπίπτουν με παράλληλη μεταφορά του \mathbb{R}^3 (Πολυράκης, 2008).

Σημειώνεται ότι οι παραπάνω μετασχηματισμοί αφήνουν αναλλοίωτες την καμπυλότητα και τη στρέψη των καμπυλών. Υπενθυμίζεται ότι για τον \mathbb{R}^3 , οι επιτρεπτές αλλαγές συντεταγμένων είναι οι μεταθέσεις και οι στροφές.

2.2. Επιφάνειες

Ένα σύνολο σημείων του \mathbb{R}^3 , τα οποία είναι σε 1 – 1 αντιστοιχία με μία συνεχή απεικόνιση με ένα κλειστό παραλληλόγραμμο του \mathbb{R}^2 , λέγεται απλό τμήμα επιφάνειας. Επιφάνεια λέγεται κάθε υποσύνολο S του \mathbb{R}^3 όταν για κάθε σημείο του υπάρχει περιοχή στο S της οποίας το περίβλημα είναι απλό τμήμα επιφάνειας.



ΕΙΚΟΝΑ 2.5 : Ορισμός τμήματος ομαλής επιφάνειας

Πηγή : <http://math.etsu.edu/multicalc/prealpha/Chap3/Chap3-4/param1b.gif>

2.2.1. Διανυσματικές συναρτήσεις

Έστω η πραγματική συνάρτηση $f(x)$. Με $f'(x)$ συμβολίζεται η πρώτη και με $f^{(n)}(x)$ η n – παράγωγος της f στο x . Αν η f έχει περισσότερες από μία μεταβλητές, συμβολίζεται με f_i η μερική παράγωγος της f ως προς την i μεταβλητή, με f_{ij} η μερική παράγωγος της f_i ως προς τη j μεταβλητή. Έτσι για τη συνάρτηση $f(x, y, z)$ ισχύει :

$$f_1(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, f_2(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, f_3(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$$

$$\text{και } f_{12}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right)$$

2.2.2. Παραμετρική παράσταση επιφάνειας

Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$, και έστω η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(u, v)$:

$$\vec{r}(u, v) = \left(\vec{f}(u, v), \vec{g}(u, v), \vec{h}(u, v) \right), (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Αν

$$S = \{ \vec{r}(u, v) \mid (u, v) \in \Omega \}$$

λέμε ότι η $\vec{r}(u, v)$ είναι *παραμετρική παράσταση του S* και ότι οι εξισώσεις :

$$x = \vec{f}(u, v), \quad y = \vec{g}(u, v), \quad z = \vec{h}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega$$

είναι παραμετρικές εξισώσεις του S . Οι μεταβλητές u, v ονομάζονται *παραμέτροι του S* .

Αν η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(u, v)$ είναι κλάσης 1 και ισχύει :

$$\vec{r}_1(u, v) \times \vec{r}_2(u, v) \neq \vec{0}, \quad \forall (u, v) \in \Omega$$

λέμε ότι η $\vec{r}(u, v)$ είναι *κανονική*. Αν επιπλέον είναι παραμετρική παράσταση του S λέμε ότι η $\vec{r}(u, v)$ είναι *κανονική παραμετρική παράσταση του S* . Αν η συνάρτηση $\vec{r}(u, v)$ είναι παραμετρική παράσταση του S , τότε οι καμπύλες :

$$\vec{r}(u_0, v) \text{ και } \vec{r}(u, v_0)$$

ονομάζονται *παραμετρικές καμπύλες του συνόλου S* .

Οι καμπύλες αυτές προέρχονται από τον περιορισμό της συνάρτησης $\vec{r}(u, v)$ στις ευθείες $u = u_0$ και $v = v_0$. Έτσι, συχνά αναφέρονται ως "*η παραμετρική καμπύλη $u = u_0$* " και "*η παραμετρική καμπύλη $v = v_0$* " αντίστοιχα.

2.2.3. Στοιχειώδης επιφάνεια

Ακολουθεί ο ορισμός της στοιχειώδους επιφάνειας.

Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ και $\vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega$ κανονική παράσταση του S . Αν το Ω είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , η $\vec{r}(u, v)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του S και η $\vec{r}^{-1}(u, v)$ είναι κλάσης 1, το ζεύγος (S, r) ονομάζεται *στοιχειώδης επιφάνεια*.

Με τον ορισμό αυτό εξασφαλίζεται η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του Ω και του S . Το τυχαίο σημείο $\vec{r}(u_0, v_0)$ ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο ως τομή των παραμετρικών καμπυλών $u = u_0$ και $v = v_0$ της *στοιχειώδους επιφάνειας S* και το ζεύγος (u_0, v_0) είναι οι *καμπυλόγραμμες συντεταγμένες* ή *συντεταγμένες του Gauss* του σημείου $\vec{r}(u_0, v_0)$.

2.2.4. Καμπύλες σε επιφάνεια

Έστω

$$S : \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega$$

είναι στοιχειώδης επιφάνεια του \mathbb{R}^3 .

Υποθέτουμε ότι :

$$\sigma : u = u(t), v = v(t), \quad t \in I$$

είναι τυχαία καμπύλη στο Ω και έστω :

$$\vec{g}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad t \in I$$

ο περιορισμός της r στην καμπύλη σ .

Η καμπύλη $\gamma : \vec{g}(t), t \in I$ είναι καμπύλη της επιφάνειας S που προκύπτει από την καμπύλη σ του Ω . Μια καμπύλη γ η οποία βρίσκεται πάνω σε δοσμένη επιφάνεια S είναι γνωστή και ως *επιφανειακή καμπύλη* της επιφάνειας S .

Το *εφαπτόμενο διάνυσμα* της γ στο σημείο $\vec{g}(t)$, είναι :

$$g'(t) = \vec{r}_1(u(t), v(t)) u'(t) + \vec{r}_2(u(t), v(t)) v'(t) \quad (2.55)$$

Οι καμπύλες $\vec{r}(u_0, v)$, $\vec{r}(u, v_0)$, όπου $(u_0, v_0) \in \Omega$ είναι οι παραμετρικές καμπύλες της επιφάνειας S , που συμβολίζονται με γ_1, γ_2 .

Υπενθυμίζεται ότι η καμπύλη $\vec{r}(u_0, v)$ αναφέρεται ως η παραμετρική καμπύλη $u = u_0$ και η καμπύλη $\vec{r}(u, v_0)$ αναφέρεται ως η παραμετρική καμπύλη $v = v_0$.

Τα αντίστοιχα *εφαπτόμενα διανύσματα* των καμπυλών αυτών είναι :

$$\vec{r}_2(u_0, v) \text{ και } \vec{r}_1(u_0, v)$$

Επειδή από τα σημείο (u_0, v_0) του Ω περνούν άπειρες καμπύλες (για παράδειγμα ευθείες), συνεπάγεται ότι και από το σημείο $P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ περνούν άπειρες καμπύλες της επιφάνειας. Το σύνολο αυτών των καμπυλών ορίζει τη *δέσμη των καμπυλών της S στο P_0* .

2.2.5. Εφαπτόμενο επίπεδο – Κάθετο διάνυσμα

Έστω :

$$S : \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega$$

είναι στοιχειώδης επιφάνεια του \mathfrak{R}^3 .

Υποθέτουμε ότι :

$$\gamma : \vec{g}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), t \in \Omega$$

είναι τυχαία καμπύλη της επιφάνειας S που περνάει από το σημείο P_0 της S και έστω $g(t_0) = P_0$

Το *εφαπτόμενο διάνυσμα* :

$$g'(t_0) = \vec{r}_1(u(t_0), v(t_0)) u'(t_0) + \vec{r}_2(u(t_0), v(t_0)) v'(t_0)$$

της γ στο P_0 είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{r}_1(u_0, v_0)$, $\vec{r}_2(u_0, v_0)$. Επομένως, είναι διάνυσμα του επιπέδου :

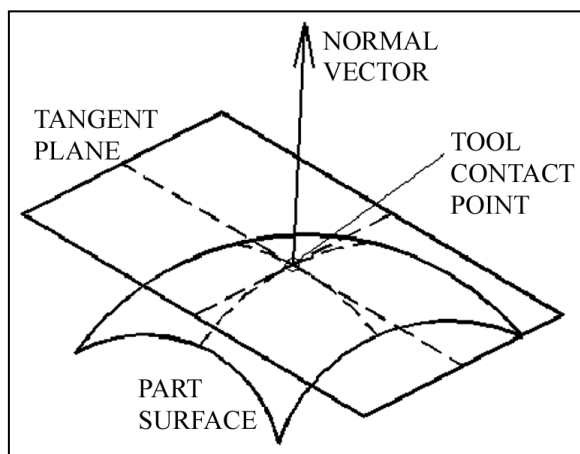
$$R = \vec{r}(u_0, v_0) + a \vec{r}_1(u_0, v_0) + b \vec{r}_2(u_0, v_0), \quad a, b \in \mathfrak{R}$$

Το επίπεδο αυτό ονομάζεται *εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο σημείο $\vec{r}(u_0, v_0)$*

Το διάνυσμα :

$$\vec{N} = \vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\vec{r}_1(u_0, v_0) \times \vec{r}_2(u_0, v_0)}{|\vec{r}_1(u_0, v_0) \times \vec{r}_2(u_0, v_0)|} \quad (2.56)$$

είναι κάθετο στο R και ονομάζεται μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S στο $\vec{r}(u_0, v_0)$.



ΕΙΚΟΝΑ 2.6 : Εφαπτόμενο επίπεδο – Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

Πηγή : http://www.emeraldinsight.com/content_images/fig/1560070203001.png

2.2.6. Θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης

Για κάθε σημείο (u, v) του Ω ή ισοδύναμα για κάθε σημείο $\vec{r}(u, v)$ της στοιχειώδους επιφάνειας S , ορίζονται οι παρακάτω συναρτήσεις :

$$E(u, v) = \vec{r}_1(u, v) \cdot \vec{r}_1(u, v) \quad (2.57)$$

$$F(u, v) = \vec{r}_1(u, v) \cdot \vec{r}_2(u, v) \quad (2.58)$$

$$G(u, v) = \vec{r}_2(u, v) \cdot \vec{r}_2(u, v) \quad (2.59)$$

Επίσης, με H συμβολίζεται η συνάρτηση :

$$H(u, v) = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \quad (2.60)$$

Οι τιμές $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ των συναρτήσεων αυτών στο (u, v) ονομάζονται *θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης* της S στο σημείο (u, v) και η τιμή της $H(u, v)$, διακρίνουσα της S στο ίδιο σημείο. Τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης δεν είναι αναλλοίωτα (δηλαδή, εξαρτώνται από το εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων που έχει επιλεγεί). Όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης οι τιμές αυτές συμβολίζονται με E, F, G, H .

Για κάθε σημείο (u, v) της S ισχύει :

$$H(u, v) = |\vec{r}_1(u, v) \times \vec{r}_2(u, v)| \quad (2.60)$$

2.2.7. Ισομετρική Απεικόνιση

Έστω οι στοιχειώδεις επιφάνειες :

$$\begin{aligned} S &: \vec{r}(u, v), & (u, v) \in \Omega \\ S^* &: \vec{r}^*(u, v), & (u, v) \in \Omega \end{aligned}$$

Απεικόνιση ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία αντιστοιχίζεται το σημείο $P(u, v)$ της S στο σημείο $P^*(u, v)$ της S^* έχοντας ως περιορισμό το ότι τα σημεία P και P^* πρέπει να έχουν τις ίδιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Η απεικόνιση $f: S \rightarrow S^*$ ονομάζεται ισομετρική (ή ισομετρία) αν το μήκος του τυχαίου τόξου στην επιφάνεια S ισούται με το μήκος της εικόνας του στην επιφάνεια S^* .

Η απεικόνιση f είναι μια ισομετρία αν και μόνο αν τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης της S είναι ίσα με τα αντίστοιχα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης της S^* . Δηλαδή,

$$E = E^*, \quad F = F^*, \quad G = G^*$$

2.2.8. Μήκος τόξου επιφάνειας (επιφανειακής καμπύλης)

Έστω μια επιφάνεια :

$$S: \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega,$$

και μια καμπύλη πάνω στην S με εξίσωση :

$$\vec{g}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$$

Το μήκος τόξου s της καμπύλης που περιλαμβάνεται μεταξύ των σημείων $t = a$ και $t = b$, όπως είναι γνωστό από τη θεωρία καμπυλών, δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$s = \int_a^b |\vec{g}'(t)| dt \quad (2.1)$$

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b |\vec{g}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\vec{g}'(t) \cdot \vec{g}'(t)} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{(\vec{r}_1(u(t), v(t)) u'(t) + \vec{r}_2(u(t), v(t)) v'(t)) \cdot (\vec{r}_1(u(t), v(t)) u'(t) + \vec{r}_2(u(t), v(t)) v'(t))} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \sqrt{\left(\vec{r}_1(u(t), v(t)) \cdot \vec{r}_1(u(t), v(t))\right) (u'(t))^2 + 2 \left(\vec{r}_1(u(t), v(t)) \cdot \vec{r}_2(u(t), v(t))\right) (u'(t) \cdot v'(t)) +} \\
 &\quad \sqrt{\left(\vec{r}_2(u(t), v(t)) \cdot \vec{r}_2(u(t), v(t))\right) (v'(t))^2} dt = \\
 &= \int_a^b \sqrt{(E) (u'(t))^2 + 2 (F)(u'(t) \cdot v'(t)) + (G) (v'(t))^2} dt = \\
 &\quad \int_a^b \frac{\sqrt{(E) (du)^2 + 2 (F)(du \cdot dv) + (G) (dv)^2}}{dt} dt
 \end{aligned}$$

Τελικά, το μήκος τόξου s επιφανειακής καμπύλης, είναι ίσο με :

$$s = \sqrt{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2} \quad (2.62)$$

2.2.9. Πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή I

Υπενθυμίζεται ότι μια καμπύλη του \mathbb{R}^3 ορίζεται μονοσήματα (ως προς το σχήμα της) από δύο τοπικά αναλλοίωτα μεγέθη, την καμπυλότητα και τη στρέψη, όταν τα μεγέθη αυτά εκφράζονται ως συναρτήσεις του μήκους τόξου. Ομοίως, μια επιφάνεια του \mathbb{R}^3 ορίζεται μονοσήματα (και πάλι ως προς το σχήμα της) από δύο τοπικά αναλλοίωτα μεγέθη που λέγονται αντίστοιχα πρώτη και δεύτερη θεμελιώδης μορφή.

Έστω $P = \vec{r}(u, v)$ τυχαίο σημείο της στοιχειώδους επιφάνειας S , και Π το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $P = r(u, v)$ και έστω :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u, v) \text{ και } \vec{r}_2 = \vec{r}_2(u, v)$$

Το $\{r_1, r_2\}$ αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων (βάση) του εφαπτόμενου επιπέδου Π .

Το τυχαίο διάνυσμα $\vec{d}(du, dv)$ του εφαπτόμενου επιπέδου είναι :

$$\vec{d} = du \vec{r}_1 + dv \vec{r}_2$$

και το τετράγωνο του μέτρου του δίνεται από τον τύπο :

$$|\vec{d}|^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

Η συνάρτηση που απεικονίζει το τυχαίο διάνυσμα ενός εφαπτόμενου επιπέδου μιας επιφάνειας στο τετράγωνο του μήκους του, ονομάζεται πρώτη θεμελιώδης μορφή (απεικόνιση) ή μετρική της επιφάνειας S στο σημείο (u, v) και συμβολίζεται με I . Δηλαδή :

$$I = ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \quad (2.63)$$

Από τη μορφή της παράστασης (2.63), φαίνεται ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι ένα ομογενές πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς du και dv (Παράρτημα Α. 5). Επομένως, η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι μία τετραγωνική μορφή (έτσι δικαιολογείται ο όρος πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή). Οι συντελεστές της I συνιστούν έναν πίνακα A διαστάσεων 2×2 που ονομάζεται πίνακας της τετραγωνικής μορφής και είναι ο εξής :

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα A είναι η εξής :

$$\det(A) = EG - F^2 = H$$

Δηλαδή, η ορίζουσα του πίνακα A ισούται με τη διακρίνουσα $H(u, v)$ της επιφάνειας S στο σημείο (u, v) .

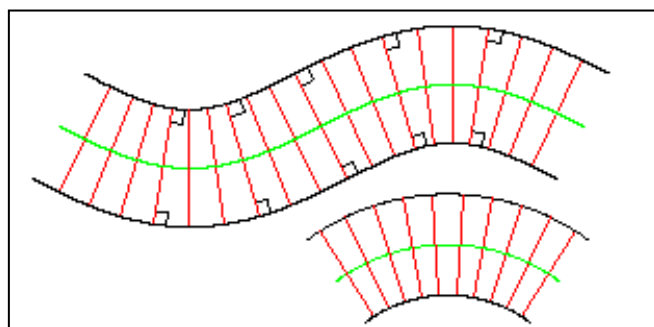
Αποδεικνύεται ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή I εξαρτάται μόνο από την επιφάνεια και όχι από το συγκεκριμένο τμήμα της επιφάνειας. Από την άλλη, τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης δεν παραμένουν αναλλοίωτα στους παραμετρικούς μετασχηματισμούς, αλλά μετασχηματίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε τελικά οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές I να ταυτίζονται στα διάφορα τμήματα της επιφάνειας.

2.2.10. Παράλληλες u – ή v – παραμετρικές καμπύλες

Αν η πρώτη θεμελιώδης μορφή ενός τμήματος, είναι της μορφής :

$$I = du^2 + f(u, v)dv^2 \quad (2.64)$$

τότε αποδεικνύεται ότι οι v – παραμετρικές καμπύλες αποκόπτουν ίσα τμήματα από όλες τις u – παραμετρικές. Επίσης, αφού $F = 0$, (λόγω της μορφής της πρώτης θεμελιώδους μορφής I), οι παραμετρικές καμπύλες είναι ορθογώνιες. Στην περίπτωση αυτή, οι v – παραμετρικές καμπύλες λέγονται *παράλληλες*. Αντίστοιχα, τα ίδια ισχύουν στην περίπτωση που $I = f(u, v)du^2 + dv^2$ (Lipschutz, 1982).



ΕΙΚΟΝΑ 2.7 : Παράλληλες καμπύλες

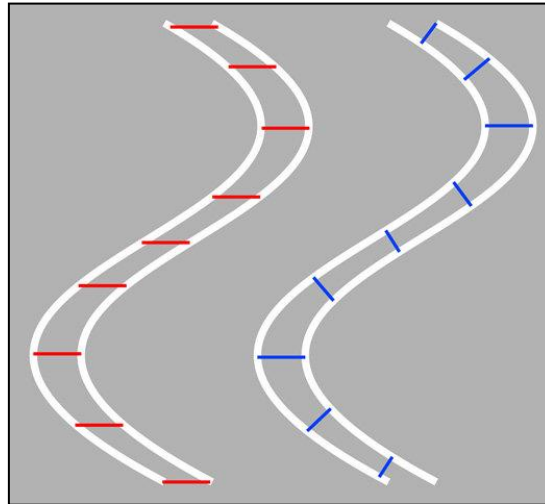
Πηγή : http://web1.kcn.jp/hp28ah77/fig8_5.gif

Επίσης, η πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή I είναι θετικά ορισμένη. Δηλαδή, για κάθε (du, dv) , έχουμε $I \geq 0$, ενώ $I = 0$ αν και μόνο αν $du = 0$ και $dv = 0$. Επειδή η I είναι θετικά ορισμένη, τα θεμελιώδη μεγέθη πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0$$

Τέλος, από την παράσταση της I , έχουμε ότι :

$$s = \int \sqrt{I} dt \quad (2.65)$$



ΕΙΚΟΝΑ 2.8 : Παράλληλες καμπύλες

Πηγή : http://www.mynetimages.com/e7dcae88_md.jpg

2.2.11. Στοιχειώδες εμβαδόν dS και εμβαδόν επιφάνειας ε

Το στοιχειώδες εμβαδόν dS της επιφάνειας είναι :

$$dS = H(u, v) du dv \quad (2.66)$$

Έστω D κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , $D \subseteq \Omega$.

Το εμβαδόν του τμήματος :

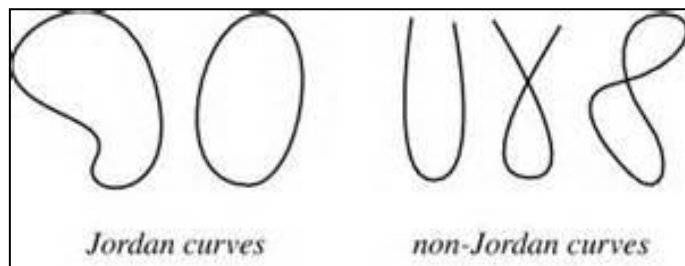
$$S_D = \{r(u, v) | (u, v) \in D\}$$

της επιφάνειας S δίνεται από τον τύπο :

$$\varepsilon = \iint_D H(u, v) du dv \quad (2.67)$$

Αποδεικνύεται ότι, αλλάζοντας συντεταγμένες, το εμβαδόν παραμένει αναλλοίωτο. Δηλαδή, το εμβαδόν επιφάνειας είναι ανεξάρτητο της παραμετροποίησης της παράστασης.

Γενικότερα, αυτός ο τύπος ισχύει για κάθε χωρίο S , το οποίο περικλείεται από μία γραμμή που είναι εικόνα μιας διαφορίσιμης κλειστής γραμμής *Jordan*.



ΕΙΚΟΝΑ 2.9 : Παραδείγματα καμπυλών Jordan και μη

Πηγή : http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/JordanCurves_1000.gif

2.2.12. Μήκος εφαπτόμενου διανύσματος

Έστω $P = \vec{r}(u, v)$ τυχαίο σημείο της στοιχειώδους επιφάνειας S , και Π το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $P = r(u, v)$ και έστω :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u, v) \text{ και } \vec{r}_2 = \vec{r}_2(u, v)$$

Το $\{r_1, r_2\}$ αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων (βάση) του εφαπτόμενου επιπέδου Π .

Το τυχαίο διάνυσμα $\vec{d}(du, dv)$ του εφαπτόμενου επιπέδου είναι :

$$\vec{d} = du \vec{r}_1 + dv \vec{r}_2$$

Έτσι, το μήκος του εφαπτόμενου διανύσματος, δίνεται από τον τύπο (2.68) :

$$|\vec{d}| = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \quad (2.68)$$

2.2.13. Γωνία εφαπτομένων διανυσμάτων

Γωνία τυχαίων εφαπτόμενων διανυσμάτων σε σημείο της επιφάνειας

Έστω $P = \vec{r}(u, v)$ τυχαίο σημείο της στοιχειώδους επιφάνειας S , και Π το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $P = r(u, v)$ και έστω :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u, v) \text{ και } \vec{r}_2 = \vec{r}_2(u, v)$$

Ως γνωστόν, το $\{r_1, r_2\}$ αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων (δηλαδή, μία βάση) του εφαπτόμενου επιπέδου Π .

Έστω ότι έχουμε δύο τυχαία εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{d}(du, dv)$, $\vec{\delta}(du, dv)$ σε ένα σημείο μιας επιφάνειας και τα οποία έχουν αναλυθεί στο σύστημα $\{r_1, r_2\}$. Τότε, λόγω του ότι το $\{r_1, r_2\}$ αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων, ισχύει ότι :

$$\vec{d} = du \vec{r}_1 + dv \vec{r}_2$$

$$\vec{\delta} = du \vec{r}_1 + dv \vec{r}_2$$

Αν ω είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{d}, \vec{\delta}$, τότε:

$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot \vec{\delta} &= |\vec{d}| |\vec{\delta}| \cos \omega \Rightarrow \cos \omega = \frac{\vec{d} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{d}| |\vec{\delta}|} = \\ &= \frac{(du \vec{r}_1 + dv \vec{r}_2) \cdot (du \vec{r}_1 + dv \vec{r}_2)}{|du \vec{r}_1 + dv \vec{r}_2| |du \vec{r}_1 + dv \vec{r}_2|} = \\ &= \frac{du du \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 + du dv \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + dv du \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + dv dv \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}} \end{aligned}$$

Συνεπώς, η γωνία ω μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{d}, \vec{\delta}$, ισούται με :

$$\omega = \text{ArcCos} \left(\frac{E du du + F (du dv + dv du) + G dv dv}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}} \right) \quad (2.69)$$

Δηλαδή, δύο τυχαία εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{d}(du, dv)$, $\vec{\delta}(du, dv)$ σε ένα σημείο μιας επιφάνειας είναι κάθετα μεταξύ τους, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση :

$$E du du + F (du dv + dv du) + G dv dv = 0 \quad (2.70)$$

Γωνία των u – και v – παραμετρικών καμπυλών σε σημείο της επιφάνειας

Το ζεύγος $(0,1)$ είναι η διεύθυνση της παραμετρικής καμπύλης $u = u_0$, ενώ το $(1,0)$ είναι η διεύθυνση της παραμετρικής καμπύλης $v = v_0$. Δηλαδή, ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} \text{παραμετρική καμπύλη } u = u_0 : (du, dv) &= (0, 1) \\ \text{παραμετρική καμπύλη } v = v_0 : (du, dv) &= (1, 0) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στη σχέση (2.69), έχουμε ότι :

$$\omega = \text{ArcCos} \left(\frac{F}{\sqrt{G} \cdot \sqrt{E}} \right) \quad (2.71)$$

Φυσικά, στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε, θεωρώντας ότι :

$$\begin{aligned} \text{παραμετρική καμπύλη } u = u_0 : (du, dv) &= (0, 1) \\ \text{παραμετρική καμπύλη } v = v_0 : (du, dv) &= (1, 0) \end{aligned}$$

Δηλαδή, οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ενός τμήματος τέμνονται κάθετα (είναι ορθογώνιες), αν και μόνο αν ισχύει η σχέση :

$$F = 0$$

2.2.14. Δεύτερη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή II

Υπενθυμίζεται ότι το διάνυσμα :

$$\vec{N} = \vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\vec{r}_1'(u_0, v_0) \times \vec{r}_2'(u_0, v_0)}{|\vec{r}_1'(u_0, v_0) \times \vec{r}_2'(u_0, v_0)|}$$

είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας R και ονομάζεται μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S στο $\vec{r}(u_0, v_0)$.

Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια :

$$S : \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega$$

κλάσης 2

Για κάθε σημείο (u, v) του Ω ή ισοδύναμα για κάθε σημείο $\vec{r}(u, v)$ της στοιχειώδους επιφάνειας S , ορίζονται οι παρακάτω συναρτήσεις :

$$L(u, v) = \vec{r}_{11}'(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) \quad (2.72)$$

$$M(u, v) = \vec{r}_{12}'(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) = \vec{r}_{21}'(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) \quad (2.73)$$

$$N(u, v) = \vec{r}_{22}'(u, v) \cdot \vec{N}(u, v) \quad (2.74)$$

Οι τιμές $L(u, v), M(u, v), N(u, v)$ των συναρτήσεων αυτών στο (u, v) ονομάζονται θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης στο σημείο (u, v) της επιφάνειας. Όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης οι τιμές αυτές συμβολίζονται με L, M, N .

Επίσης, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$L(u, v) = -\vec{N}_1'(u, v) \cdot \vec{r}_1'(u, v) \quad (2.75)$$

$$M(u, v) = -\vec{N}_2'(u, v) \cdot \vec{r}_1'(u, v) = -\vec{N}_2'(u, v) \cdot \vec{r}_2'(u, v) \quad (2.76)$$

$$N(u, v) = -\vec{N}_2'(u, v) \cdot \vec{r}_2'(u, v) \quad (2.77)$$

Ακόμα, ισχύουν και οι παρακάτω ισοδύναμοι τύποι :

$$L(u, v) = \frac{\vec{r}_1'(u, v) \cdot (\vec{r}_2'(u, v) \times \vec{r}_{11}'(u, v))}{H} \quad (2.78)$$

$$M(u, v) = \frac{\vec{r}_1'(u, v) \cdot (\vec{r}_2'(u, v) \times \vec{r}_{21}'(u, v))}{H} \quad (2.79)$$

$$N(u, v) = \frac{\vec{r}_1'(u, v) \cdot (\vec{r}_2'(u, v) \times \vec{r}_{22}'(u, v))}{H} \quad (2.80)$$

Τα διανύσματα $\vec{N}_1'(u, v)$ και $\vec{N}_2'(u, v)$, είναι κάθετα στο $\vec{N}(u, v)$ και σχετίζονται με τις μερικές παραγώγους $\vec{r}_1'(u, v), \vec{r}_2'(u, v)$ με τις ακόλουθες σχέσεις :

$$\vec{N}_1 = \frac{M F - L G}{H^2} \vec{r}_1 + \frac{L F - M E}{H^2} \vec{r}_2 \quad (2.81)$$

$$\vec{N}_2 = \frac{N F - M G}{H^2} \vec{r}_1 + \frac{M F - N E}{H^2} \vec{r}_2 \quad (2.82)$$

Οι σχέσεις (2.81) και (2.82) είναι γνωστές και ως σχέσεις *Weingarten*.

Η συνάρτηση :

$$II = L du^2 + 2 M du dv + N dv^2 \quad (2.83)$$

λέγεται δεύτερη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή της επιφάνειας S στο σημείο (u, v) . Παρατηρείται ότι, όπως και η πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή, έτσι και η δεύτερη, είναι μια ομογενής συνάρτηση δευτέρου βαθμού ως προς du, dv με συντελεστές τα θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης L, M, N .

Οι συντελεστές της II συνιστούν έναν πίνακα B διαστάσεων 2×2 που ονομάζεται πίνακας της τετραγωνικής μορφής και είναι ο εξής :

$$B = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα B είναι η εξής :

$$\det(B) = L N - M^2 = b(u, v) \quad (2.84)$$

Η τιμή της $b(u, v)$ ονομάζεται διακρίνουσα της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής της S στο σημείο (u, v) .

Αποδεικνύεται ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II παραμένει και αυτή αναλλοίωτη, όπως η I , στους παραμετρικούς μετασχηματισμούς που επιπλέον διατηρούν τη φορά του $\vec{N}(u, v)$. Όταν η φορά δεν διατηρείται, η II αλλάζει πρόσημο. Από την άλλη, τα θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης, όπως και τα πρώτης, δεν παραμένουν αναλλοίωτα στους παραμετρικούς μετασχηματισμούς.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η $|II|$ ισούται κατά προσέγγιση με το διπλάσιο της απόστασης του σημείου $\vec{r}(u + du, v + dv)$ της επιφάνειας από το σημείο $\vec{r}(u, v)$, ενώ η II εκφράζει προσεγγιστικά το διπλάσιο της (αριθμητικής) προβολής του διανύσματος PQ στο σημείου $\vec{N}(u, v)$, όπου Q το σημείο $\vec{r}(u + du, v + dv)$ και P το σημείο $\vec{r}(u, v)$.

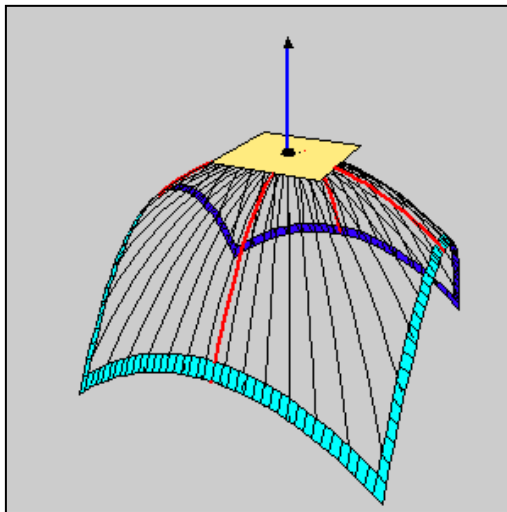
Η συνάρτηση :

$$\delta = \frac{1}{2} II = \frac{1}{2} (L du^2 + 2 M du dv + N dv^2) \quad (2.85)$$

ορίζει μια επιφάνεια που λέγεται εγγύτατο παραβολοειδές στο P (Μαρκάτης, 1989). Η μορφή του παραβολοειδούς αυτού προσδιορίζει τη μορφή της επιφάνειας σε μια περιοχή του P . Διακρίνονται τέσσερις περιπτώσεις, που εξαρτώνται από το πρόσημο ή τον μηδενισμό της διακρίνουσας της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής $b(u, v) = L N - M^2$.

❖ Ελλειπτικό σημείο

Αν $LN - M^2 > 0$, η κάθετη καμπυλότητα της S στο P ως προς κάθε διεύθυνση διατηρεί πρόσημο και το σημείο P ονομάζεται ελλειπτικό. Στην περίπτωση αυτή, η δ ως συνάρτηση των du και dv προσδιορίζει ένα ελλειπτικό παραβολοειδές. Στην περιοχή ενός ελλειπτικού σημείου, η επιφάνεια βρίσκεται προς το ένα μέρος του εφαπτόμενου επιπέδου της στο σημείο αυτό. Αν $\vec{N}(u, v) > 0$, η επιφάνεια στο P κάμπτεται προς τη φορά του $\vec{N}(u, v)$, ενώ αν $\vec{N}(u, v) < 0$ προς την αντίθετη φορά.



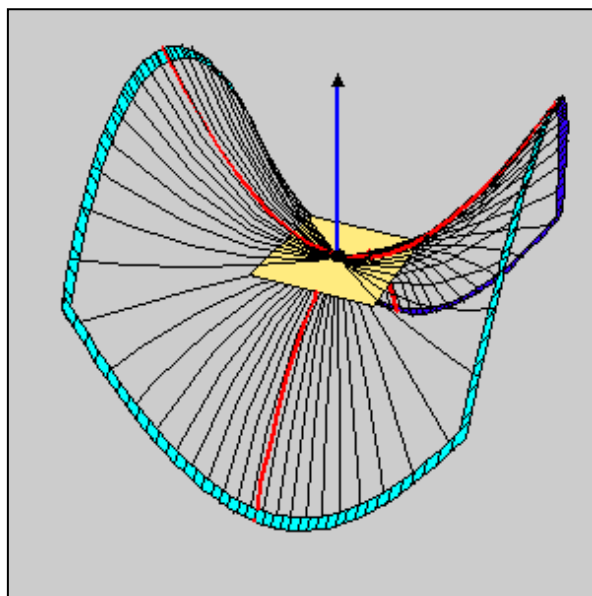
ΕΙΚΟΝΑ 2.10 : Ελλειπτικό σημείο

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ehpp/sl7.gif

❖ Υπερβολικό σημείο

Αν $LN - M^2 < 0$ η κάθετη καμπυλότητα της S στο P ως προς τις διάφορες διευθύνσεις δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο και το σημείο ονομάζεται υπερβολικό. Στην περίπτωση αυτή η δ ως συνάρτηση των du και dv προσδιορίζει ένα υπερβολικό παραβολοειδές. Στο εφαπτόμενο επίπεδο ενός υπερβολικού σημείου της επιφάνειας υπάρχουν δύο διαφορετικές ασυμπτωτικές ευθείες που διέρχονται από σημείο P και διαιρούν το εφαπτόμενο επίπεδο σε τέσσερα τμήματα στα οποία η κάθετη καμπυλότητα είναι άλλοτε θετική και άλλοτε αρνητική. Κατά μήκος των δύο αυτών ευθειών, η κάθετη καμπυλότητα μηδενίζεται. Στην περιοχή ενός υπερβολικού σημείου η επιφάνεια βρίσκεται και προς τα δύο μέρη του εφαπτόμενου επιπέδου. Η επιφάνεια έχει τη μορφή σάγματος στην περιοχή του P .

Αν $\vec{N}(u, v) > 0$ για κάθε διεύθυνση μεταξύ των κυρίων διευθύνσεων, η κάθετη καμπυλότητα είναι αρνητική, ενώ στις άλλες διευθύνσεις η κάθετη καμπυλότητα είναι θετική. Έτσι, εκτός των κυρίων διευθύνσεων, η επιφάνεια κάμπτεται προς προς τον ημιχώρο του $\vec{N}(u, v)$ και εντός των κυρίων διευθύνσεων κάμπτεται αντίθετα. Αν $\vec{N}(u, v) < 0$, η επιφάνεια εντός των κυρίων διευθύνσεων κάμπτεται προς τον ημιχώρο του $\vec{N}(u, v)$ και εκτός κάμπτεται αντίθετα.

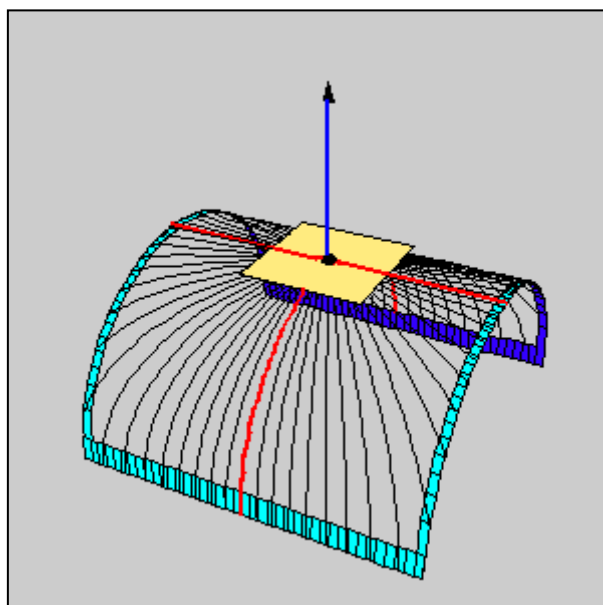


ΕΙΚΟΝΑ 2.11 : Υπερβολικό σημείο

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ehpp/sl8.gif

❖ Παραβολικό σημείο

Αν $L N - M^2 = 0$ και τουλάχιστον ένα από τα L, N είναι διάφορο του μηδενός, η κάθετη καμπυλότητα στο P διατηρεί πρόσημο ως προς κάθε διεύθυνση εκτός από μία στην οποία μηδενίζεται. Το σημείο P ονομάζεται παραβολικό. Στην περίπτωση αυτή η δ ως συνάρτηση των du, dv προσδιορίζει έναν παραβολικό κύλινδρο. Ειδικότερα, αν ένα από τα L, N είναι θετικό, τότε η κάθετη καμπυλότητα ως προς όλες τις διευθύνσεις (εκτός μίας) είναι θετική και η επιφάνεια στο P κάμπτεται προς τον ημίχωρο του $\vec{N}(u, v)$. Αν ένα από τα L, N είναι αρνητικό, η επιφάνεια κάμπτεται προς τον ημίχωρο που δεν περιέχει το $\vec{N}(u, v)$.

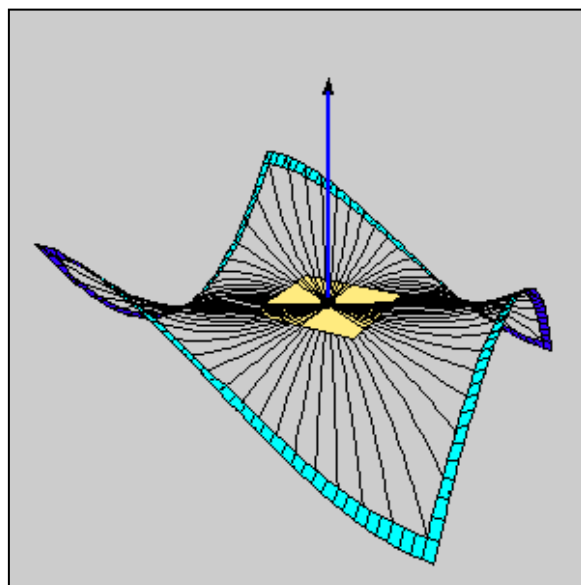


ΕΙΚΟΝΑ 2.12 : Παραβολικό σημείο

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ehpp/sl9.gif

❖ Επίπεδο σημείο

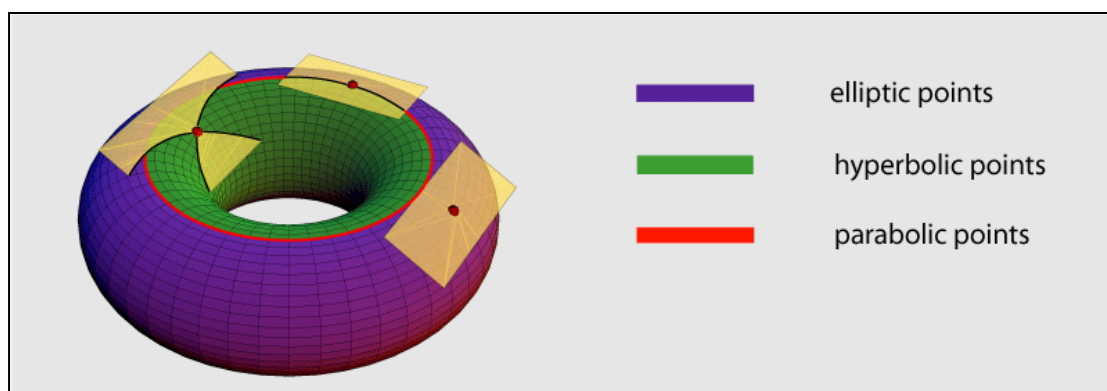
Αν $LN - M^2 = 0$ και $L = N = 0$. Τότε $M = 0$, άρα η κάθετη καμπυλότητα ως προς κάθε διεύθυνση ισούται ταυτοτικά με το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι στο P οι καμπύλες της επιφάνειας τείνουν να παραμείνουν στο εφαπτόμενο επίπεδο και το σημείο P ονομάζεται επίπεδο. Σε αυτή την περίπτωση, η περιγραφή της επιφάνειας στην περιοχή του σημείου P καθορίζεται από μορφές υψηλότερης τάξης ως προς du και dv . Επίσης, το εφαπτόμενο επίπεδο έχει επαφή υψηλότερης τάξης με την επιφάνεια.



ΕΙΚΟΝΑ 2.13 : Επίπεδο σημείο

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ehpp/sl10.gif

Από την παραπάνω μελέτη μιας επιφάνειας μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι η ιδιότητα ενός σημείου να είναι ελλειπτικό, υπερβολικό, παραβολικό ή επίπεδο, είναι ανεξάρτητη της παραμετρικής παράστασης της επιφάνειας.



ΕΙΚΟΝΑ 2.14 : Ελλειπτικά, υπερβολικά και παραβολικά σημεία σε επιφάνεια (τόρος ή σαμπρέλα)

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ehpp/s11.gif

2.2.15. Τα σύμβολα *Christoffel*

Για κάθε $i, j, k = 1, 2$ ορίζονται οι συναρτήσεις :

$$\Gamma_{ijk}(u, v) = r_i(u, v) \cdot r_{jk}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega \quad (2.86)$$

και στη συνέχεια οι συναρτήσεις :

$$\Gamma_{jk}^1(u, v) = \frac{G(u, v) \Gamma_{1jk}(u, v) - F(u, v) \Gamma_{2jk}(u, v)}{H^2(u, v)} \quad (2.87)$$

$$\Gamma_{jk}^2(u, v) = \frac{E(u, v) \Gamma_{2jk}(u, v) - F(u, v) \Gamma_{1jk}(u, v)}{H^2(u, v)} \quad (2.88)$$

Οι αριθμοί :

$$\Gamma_{ijk}(u, v), \quad i, j, k = 1, 2$$

ονομάζονται σύμβολα *Christoffel* πρώτου είδους και οι αριθμοί :

$$\Gamma_{jk}^i(u, v), \quad i, j, k = 1, 2$$

σύμβολα *Christoffel* δεύτερου είδους, της επιφάνειας S στο σημείο (u, v) .

Τα διανύσματα $\vec{r}_{11}, \vec{r}_{12}, \vec{r}_{22}$ αναλύονται ως εξής :

$$\vec{r}_{11} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_2 + L \vec{N} \quad (2.89)$$

$$\vec{r}_{12} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_2 + M \vec{N} \quad (2.90)$$

$$\vec{r}_{22} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_2 + N \vec{N} \quad (2.91)$$

Παρατηρείται ότι τα σύμβολα *Christoffel* δεύτερου είδους εξαρτώνται μόνο από τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης και τις παραγώγους τους.

2.3. Καμπυλότητα Επιφανειών

Η κατανόηση της καμπυλότητας επιφανειών, είναι κατά τάξη μεγέθους, δυσκολότερη σε σχέση με την καμπυλότητα καμπυλών.

2.3.1. Διάνυσμα κάθετης καμπυλότητας \vec{k}_n – Κάθετη καμπυλότητα κ_n

Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια κλάσης 2,

$$S : \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega$$

και η καμπύλη :

$$\gamma : \vec{\varphi}(s) = \vec{r}(u(s), v(s)), \quad s \in I$$

της επιφάνειας όπου s η φυσική παράμετρος της καμπύλης.

Αναλύεται το διάνυσμα καμπυλότητας $\vec{\varphi}''(s)$ της καμπύλης στο σύστημα $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{N}\}$, όπου $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(\vec{\varphi}(s))$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(\vec{\varphi}(s))$ και \vec{N} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο σημείο $\vec{\varphi}(s)$.

Έστω

$$\vec{\varphi}''(s) = \lambda \vec{r}_1 + \mu \vec{r}_2 + \nu \vec{N}$$

Το διάνυσμα $\lambda \vec{r}_1 + \mu \vec{r}_2$ (εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{\varphi}''(s)$) ονομάζεται *γεωδαισιακό διάνυσμα* της καμπύλης γ στο σημείο $\vec{\varphi}(s)$ και συμβολίζεται με $\vec{k}_g(s)$. Δηλαδή :

$$\vec{k}_g(s) = \lambda \vec{r}_1(u(s), v(s)) + \mu \vec{r}_2(u(s), v(s)) \quad (2.92)$$

Το διάνυσμα $\nu \vec{N}$ (κάθετη συνιστώσα του $\vec{\varphi}''(s)$) ονομάζεται *διάνυσμα κάθετης καμπυλότητας* της καμπύλης γ στο $\vec{\varphi}(s)$ και συμβολίζεται με \vec{k}_n . Δηλαδή :

$$\vec{k}_n(s) = \nu \vec{N}(u(s), v(s)) \quad (2.93)$$

Επομένως, το διάνυσμα της κάθετης καμπυλότητας της γ στο $\vec{\varphi}(s)$, που συμβολίζεται με $\vec{k}_n(s)$, είναι η διανυσματική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας $\vec{k}(s)$ της γ στο $\vec{\varphi}(s)$ στο κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \vec{N} στο $\vec{\varphi}(s)$. Έτσι έχουμε :

$$\vec{k}_n = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{N}) \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|^2}$$

ή

$$\vec{k}_n = (\vec{k} \cdot \vec{N}) \cdot \vec{N} \quad (2.94)$$

Η (αριθμητική) προβολή του \vec{k}_n στη διεύθυνση του \vec{N} λέγεται *κάθετη καμπυλότητα* της γ στο $\vec{\varphi}(s)$ και συμβολίζεται με κ_n . Δηλαδή, έχουμε :

$$\kappa_n = \frac{\vec{k} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|}$$

ή

$$\kappa_n = \vec{k} \cdot \vec{N} \quad (2.95)$$

Συμβολίζονται με U και V οι συναρτήσεις :

$$\vec{U}(s) = \vec{\varphi}''(s) \cdot \vec{r}_1(u(s), v(s)) \quad (2.96)$$

$$\vec{V}(s) = \vec{\varphi}''(s) \cdot \vec{r}_2(u(s), v(s)) \quad (2.97)$$

Οι συναρτήσεις U και V ορίζονται και όταν η μεταβλητή s της γ είναι τυχαία παράμετρος.
Σε κάθε σημείο $\vec{\varphi}(s)$ της καμπύλης γ ισχύει ότι :

- ❖ Το γεωδαισιακό διάνυσμα είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης
- ❖ $\vec{U}(s) \cdot u'(s) + \vec{V}(s) \cdot v'(s) = 0$

Για κάθε s ισχύει :

$$\vec{\varphi}''(s) = \lambda \vec{r}_1 + \mu \vec{r}_2 + \nu \vec{N}$$

όπου

$$\lambda = \frac{G U - F V}{H^2} = u''(s) + \Gamma_{11}^1 (u'(s))^2 + 2 \Gamma_{12}^1 u'(s) v'(s) + \Gamma_{22}^1 (v'(s))^2 \quad (2.98)$$

$$\mu = \frac{E V - F U}{H^2} = v''(s) + \Gamma_{11}^2 (u'(s))^2 + 2 \Gamma_{12}^2 u'(s) v'(s) + \Gamma_{22}^2 (v'(s))^2 \quad (2.99)$$

$$\nu = L(u'(s))^2 + 2 M u'(s) v'(s) + N(v'(s))^2 \quad (2.100)$$

Οι σχέσεις (2.98), (2.99), (2.100), ορίζονται και όταν η μεταβλητή s της γ είναι τυχαία παράμετρος.

Η τρίτη συντεταγμένη ν του διάνυσματος καμπυλότητας $\vec{\varphi}''(s)$ της καμπύλης (όταν η μεταβλητή s είναι η φυσική παράμετρος) ονομάζεται κάθετη καμπυλότητα της καμπύλης γ στο σημείο $\vec{\varphi}(s)$ και συμβολίζεται με $\kappa_n(s)$. Δηλαδή, η κάθετη καμπυλότητα της γ στο $\vec{\varphi}(s)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (2.101) :

$$\kappa_n(s) = L(u'(s))^2 + 2 M u'(s) v'(s) + N(v'(s))^2 \quad (2.101)$$

Τα θεμελιώδη μεγέθη L, M, N της επιφάνειας υπολογίζονται προφανώς, στο σημείο $\vec{r}(u(s), v(s))$.

Η κάθετη καμπυλότητα στο σημείο $\vec{\varphi}(s)$ της γ (s τυχαία παράμετρος), δίνεται από τον τύπο:

$$\kappa_n(s) = \frac{II(u'(s), v'(s))}{I(u'(s), v'(s))} = \frac{L(u'(s))^2 + 2 M u'(s) v'(s) + N(v'(s))^2}{E(u'(s))^2 + 2 F u'(s) v'(s) + G(v'(s))^2} \quad (2.102)$$

Δηλαδή, η κάθετη καμπυλότητα κ_n παραμένει αναλλοίωτη στους επιτρεπόμενους παραμετρικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τη φορά του \vec{N} (με την ίδια λογική που παραμένουν αναλλοίωτες και οι θεμελιώδεις τετραγωνικές μορφές I και II)

Αν $u'(s) \neq 0$, έχουμε :

$$\kappa_n(s) = \frac{L + 2M \left(\frac{v'(s)}{u'(s)}\right) + N \left(\frac{v'(s)}{u'(s)}\right)^2}{E + 2F \left(\frac{v'(s)}{u'(s)}\right) + G \left(\frac{v'(s)}{u'(s)}\right)^2} \quad (2.103)$$

Από τη σχέση (2.103), συμπεραίνεται ότι οι καμπύλες της επιφάνειας S που περνούν από σταθερό σημείο P και έχουν (στο P) παράλληλα εφαπτόμενα διανύσματα, έχουν στο σημείο αυτό την ίδια κάθετη καμπυλότητα κ_n . Αυτό ισχύει γιατί στα παράλληλα εφαπτόμενα διανύσματα, ο λόγος $\frac{v'(s)}{u'(s)}$ (αντίστοιχα και ο $\frac{u'(s)}{v'(s)}$) παραμένει σταθερός.

Δηλαδή, η κάθετη καμπυλότητα επιφανειακής καμπύλης που περνά από το σημείο P εξαρτάται μόνο από τη διεύθυνση της καμπύλης και φυσικά από τις τιμές των θεμελιωδών μεγεθών της επιφάνειας στο P .

Έτσι, αν (l, m) είναι η διεύθυνση της καμπύλης στο σημείο P , δηλαδή $(u'(s), v'(s)) = \alpha(l, m)$, έχουμε ότι :

$$\kappa_n = \frac{Ll^2 + 2Mlm + Nm^2}{El^2 + 2Flm + Gm^2} \quad (2.104)$$

είναι η κάθετη καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο P .

Επειδή η διεύθυνση είναι ανεξάρτητη της παραμετρικής παράστασης της καμπύλης έχουμε ότι η κ_n εξαρτάται μόνο από τη διεύθυνση (l, m) και από τα θεμελιώδη μεγέθη της επιφάνειας. Έτσι, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό :

Η κάθετη καμπυλότητα κ_n της τυχαίας καμπύλης της επιφάνειας S που περνά από το σημείο P και έχει στο σημείο αυτό διεύθυνση (l, m) ονομάζεται κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας στο P ως προς τη διεύθυνση (l, m) και δίνεται από τον τύπο :

$$\kappa_n = \frac{Ll^2 + 2Mlm + Nm^2}{El^2 + 2Flm + Gm^2}$$

Αν η παράμετρος s είναι η φυσική, τότε :

η κάθετη καμπυλότητα γράφεται (s φυσική παράμετρος) :

$$\kappa_n(s) = II(u'(s), v'(s)) = L(u'(s))^2 + 2M u'(s) v'(s) + N(v'(s))^2$$

ή

$$\kappa_n = Ll^2 + 2Mlm + Nm^2 \quad (2.105)$$

Αυτό δικαιολογείται ως εξής :

Επειδή ως παράμετρος θεωρείται η φυσική s , έχουμε :

$$|\varphi''(s)|^2 = 1 \Rightarrow E(u'(s))^2 + 2F u'(s) v'(s) + G(v'(s))^2 = 1 \Rightarrow I(u'(s), v'(s)) = 1$$

Επομένως, η σχέση $\kappa_n(s) = \frac{II(u'(s), v'(s))}{I(u'(s), v'(s))}$, γίνεται :

$$\kappa_n(s) = II(u'(s), v'(s)) = Ll^2 + 2Mlm + Nm^2$$

Μια επιφανειακή καμπύλη γ η οποία είναι τομή της επιφάνειας με επίπεδο το οποίο περιέχει το κάθετο διάνυσμα \vec{N} της επιφάνειας στο σημείο P ονομάζεται *κάθετη τομή της επιφάνειας στο σημείο P* . Αν το επίπεδο δεν περιέχει το κάθετο διάνυσμα \vec{N} της επιφάνειας στο σημείο P , τότε η τομή ονομάζεται *πλάγια*. Πρέπει να τονιστεί ότι η γ είναι επίπεδη καμπύλη από τη στιγμή που ανήκει σε επίπεδο. Ισχύει η πρόταση :

Έστω ότι η καμπύλη $\gamma : \vec{\varphi}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$, όπου s φυσική παράμετρος, είναι κάθετη τομή της επιφάνειας S στο σημείο P . Τότε :

$$|\kappa(s)| = |\kappa_n(s)|$$

Ειδικότερα, έχουμε :

$\kappa(s) = \kappa_n(s)$ αν στο $\vec{\varphi}(s)$ τα $\vec{n}(s), \vec{N}(s)$ είναι ομόρροπα και

$\kappa(s) = -\kappa_n(s)$ αν στο $\vec{\varphi}(s)$ τα $\vec{n}(s), \vec{N}(s)$ είναι αντίρροπα,

όπου $\vec{n}(s)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της γ στο $\vec{\varphi}'(s)$ και $\kappa(s)$ η προσημασμένη καμπυλότητα της γ στο ίδιο σημείο.

2.3.2. Θεώρημα Meusnier

Έστω η καμπύλη της επιφάνειας S :

$$\gamma : \vec{\varphi}(s) = \vec{r}(u(s), v(s)), \text{ όπου } s \text{ φυσική παράμετρος}$$

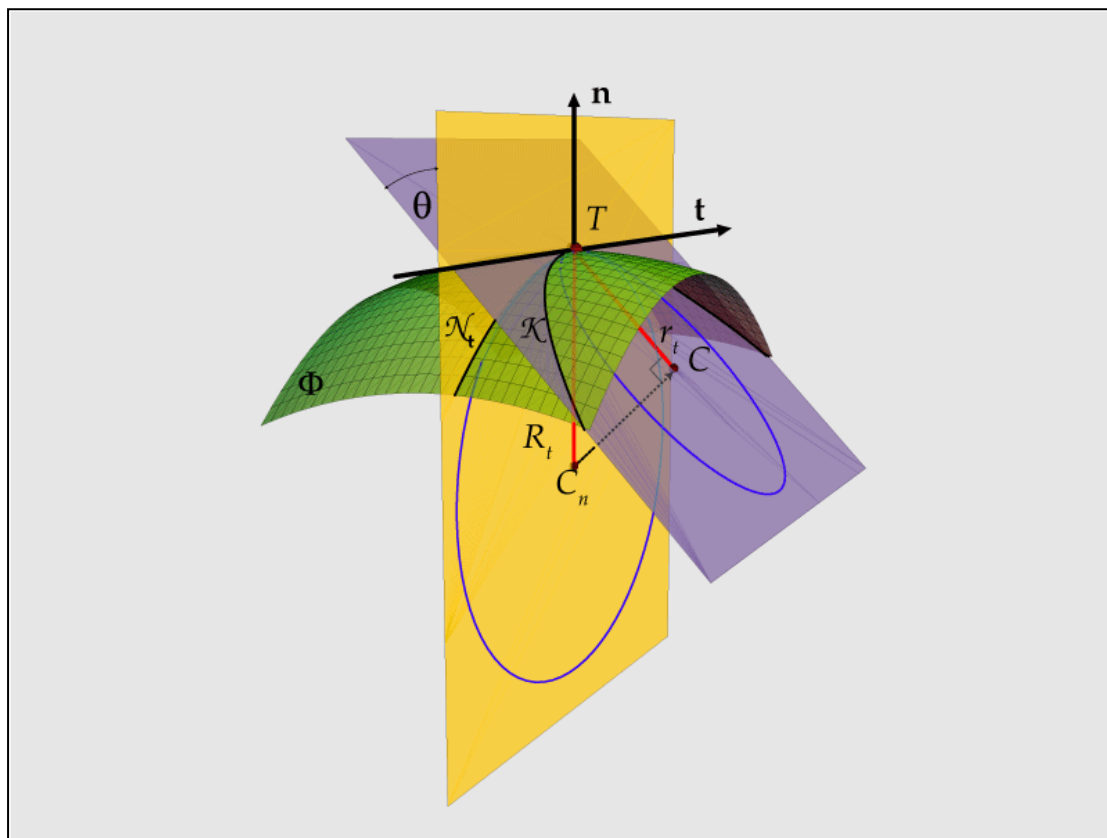
και έστω θ η γωνία του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος $\vec{n}(s)$ της καμπύλης γ στο $\vec{\varphi}(s)$ και του κάθετου διανύσματος $\vec{N}(s)$ της επιφάνειας στο ίδιο σημείο. Αν $\kappa_n(s)$ είναι η κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας στο $\vec{\varphi}(s)$ κατά τη διεύθυνση της καμπύλης και $k(s)$ η προσημασμένη καμπυλότητα της γ στο $\vec{\varphi}(s)$, έχουμε (Μαρκάτης, 1989):

$$\kappa_n(s) = |k(s)| \cos \theta \quad (2.106)$$

Επειδή η κάθετη καμπυλότητα εξαρτάται από την κατεύθυνση της καμπύλης στο σημείο P και η γωνία θ από τη θέση του εγγύτατου επιπέδου της καμπύλης, η καμπυλότητα της καμπύλης καθορίζεται πλήρως από αυτά τα στοιχεία. Διότι το εγγύτατο επίπεδο τέμνει το εφαπτόμενο κατά την εφαπτομένη της καμπύλης, δηλαδή την κατεύθυνση της καμπύλης στο P , η οποία καθορίζει την κ_n και τη γωνία θ επίσης. Συνεπώς :

$$\kappa(s) = \frac{\kappa_n(s)}{\cos \theta}$$

Εξαιρείται η περίπτωση όπου $\cos \theta = 0$. Αυτό συμβαίνει όταν το εγγύτατο επίπεδο ταυτίζεται με το εφαπτόμενο. Τότε η κάθετη καμπυλότητα είναι μηδέν κατά την κατεύθυνση αυτής της καμπύλης που έχει για εγγύτατο επίπεδο το εφαπτόμενο (απροσδιοριστία ως προς την καμπυλότητα). Οι κατευθύνσεις ως προς τις οποίες $\kappa_n = 0$ λέγονται *ασυμπτωτικές κατευθύνσεις* και για αυτές, το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει.



ΕΙΚΟΝΑ 2.15 : Θεώρημα Meusnier

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/introduction/s4.gif

Συγκεντρωτικά, ακολουθούν τρεις προτάσεις :

- ❖ Όλες οι επιφανειακές γραμμές που περνούν από το σημείο P και έχουν την ίδια εφαπτομένη σε αυτό, έχουν και την ίδια κάθετη καμπυλότητα στο σημείο P .
- ❖ Αν δύο επιφανειακές γραμμές έχουν κοινή εφαπτομένη και κοινό πρώτο κάθετο διάνυσμα στο σημείο P (δηλαδή έχουν κοινό εγγύτατο επίπεδο στο σημείο P), τότε έχουν και την ίδια καμπυλότητα στο σημείο P .
- ❖ Στην περίπτωση όπου το εγγύτατο επίπεδο είναι κάθετο προς την επιφάνεια, τότε η καμπυλότητα της καμπύλης είναι ίδια με την καμπυλότητα της κάθετης τομής της επιφάνειας με το επίπεδο αυτό.

2.3.3. Κύριες διευθύνσεις – Κύριες καμπυλότητες κ_1, κ_2

Έστω η επιφάνεια κλάσης 2

$$S : r(u, v), \quad (u, v) \in \Omega,$$

έστω τυχαίο σημείο P της επιφάνειας και έστω και έστω E, F, G, L, M, N τα θεμελιώδη μεγέθη της S στο P , Υπενθυμίζεται ότι $E, G \neq 0$.

Μελετάται η κάθετη καμπυλότητα κ_n :

$$\kappa_n = \kappa_n(l, m) = \frac{Ll^2 + 2Mlm + Nm^2}{El^2 + 2Flm + Gm^2}$$

της S στο P ως προς τις διάφορες κατευθύνσεις (l, m) . Ειδικότερα μελετώνται οι ακραίες τιμές (ακρότατα) της κ_n . Οι τύποι :

$$\kappa(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}, \quad \delta(\mu) = \frac{L\mu^2 + 2M\mu + N}{E\mu^2 + 2F\mu + G}$$

δίνουν την κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας στο P ως προς τις διευθύνσεις $(1, \lambda)$ και $(\mu, 1)$ αντίστοιχα.

Επειδή η θεμελιώδης μορφή πρώτης τάξης είναι θετικά ορισμένη, οι παρονομαστές των παραπάνω κλασμάτων είναι θετικοί.

Επίσης, παρατηρείται ότι :

- ❖ Αν $\kappa(\lambda_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της κ και $\kappa(\lambda_0) \geq \delta(0)$, τότε ο αριθμός $\kappa_n(1, \lambda_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης κ_n . Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για την ελάχιστη τιμή της κ και για τη συνάρτηση $\delta(\mu)$.
- ❖ Το σημείο $\lambda \neq 0$ είναι σημείο ολικού μεγίστου (ελαχίστου) της κ αν μόνο αν το $1/\lambda$ είναι σημείο ολικού μεγίστου (ελαχίστου) της δ .

Διαπιστώνεται ότι αν τα θεμελιώδη μεγέθη L, M, N και τα E, F, G είναι ανάλογα, τότε η κάθετη καμπυλότητα ως προς κάθε διεύθυνση (l, m) έχει σταθερή τιμή. Ειδικότερα ισχύει ότι η κάθετη καμπυλότητα κ_n της S στο P είναι σταθερή ως προς κάθε διεύθυνση (l, m) αν και μόνο αν ισχύουν οι ισότητες :

$$FN - GM = 0, \quad LG - EN = 0, \quad ME - FL = 0$$

ή

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} \quad (107.2)$$

Η σχέση – αναλογία (107.2) έχει νόημα και όταν $F = 0$ γιατί τότε και $M = 0$, οπότε αγνοείται το ανίστοιχο κλάσμα.

Αν στο σημείο P ισχύουν οι παραπάνω ισότητες, τότε το P ονομάζεται *ομφαλικό* σημείο της S . Αφού το P είναι ομφαλικό, η κάθετη καμπυλότητα στο P ως προς κάθε διεύθυνση (κάθετη τομή) είναι σταθερή (δηλαδή το σημείο είναι ισότροπο). Στην περίπτωση αυτή, η κάθετη καμπυλότητα κ_n δίνεται από τη σχέση :

$$\kappa_n = \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = \text{σταθερό} \quad (108.2)$$

Αν η κ_n παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στη διεύθυνση (l, m) , λέμε ότι η (l, m) είναι *κύρια διεύθυνση της S στο P* και ότι η τιμή $\kappa_n(l, m)$ της κ_n στη διεύθυνση αυτή είναι *κύρια καμπυλότητα* της S στο P . Για να προσδιορίσουμε τις κύριες καμπυλότητες, υπολογίζουμε την παράγωγο της $\kappa(\lambda)$ και έχουμε :

$$\kappa(\lambda) = \frac{L + 2 M \lambda + N \lambda^2}{E + 2 F \lambda + G \lambda^2}$$

$$\kappa'(\lambda) = \frac{(2 M + 2 N \lambda) (E + 2 F \lambda + G \lambda^2) - (L + 2 M \lambda + N \lambda^2) (2 F + 2 G \lambda)}{(E + 2 F \lambda + G \lambda^2)^2}$$

$$\kappa'(\lambda) = 2 \frac{(F N - G M) \lambda^2 + (N E - G L) \lambda + (M E - F L)}{(E + 2 F \lambda + G \lambda^2)^2}$$

Το ζευγάρι $(1, \lambda)$ είναι κύρια διεύθυνση αν και μόνο αν ισχύει :

$$(F N - G M) \lambda^2 + (N E - G L) \lambda + (M E - F L) = 0 \quad (2.109)$$

Αντίστοιχα, παραγωγίζοντας τη δ έχουμε ότι το ζευγάρι $(\mu, 1)$ είναι κύρια διεύθυνση αν και μόνο αν ισχύει :

$$(F L - E M) \mu^2 + (L G - E N) \mu + (M G - F N) = 0 \quad (2.110)$$

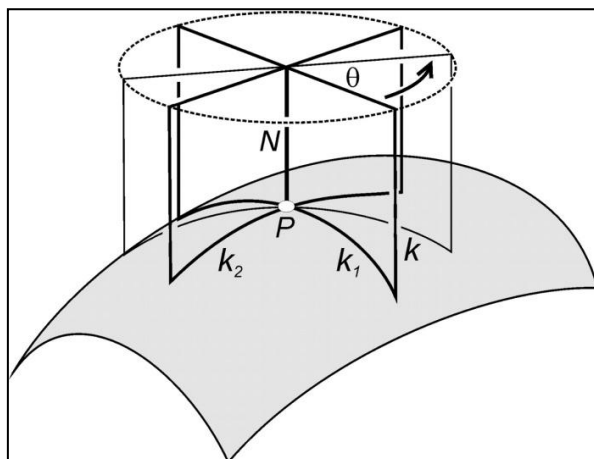
Ακόμα, παρατηρείται ότι οι μη μηδενικές ρίζες των παραπάνω εξισώσεων είναι αντίστροφες καθώς (Παράρτημα 1.6) :

$$\frac{F N - G M}{M G - F N} = \frac{N E - G L}{L G - E N} = \frac{M E - F L}{F L - E M} = -1$$

Οι διακρίνουσες των εξισώσεων (2.109) και (2.110) είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το μηδέν (Παράρτημα Α.7). Όταν η διακρίνουσα είναι θετική, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες κ_1 και κ_2 που είναι αντιστοιχούν στις κύριες (κάθετες) καμπυλότητες σε ένα μη ομφαλικό σημείο. Στις κ_1 και κ_2 αντιστοιχούν δύο εφαπτόμενα διανύσματα (τα ιδιοδιανύσματα) τα οποία είναι οι κύριες κατευθύνσεις, ενώ οι κάθετες τομές μου αντιστοιχούν στις κύριες καμπυλότητες ονομάζονται *κύριες τομές*. Όταν η διακρίνουσα είναι μηδέν, η εξίσωση έχει μια πραγματική διπλή (πολλαπλότητα δύο) ρίζα $\kappa\kappa$ που αντιστοιχεί στην κάθετη καμπυλότητα σε ένα ομφαλικό σημείο. Λόγω του ότι σε κάθε επίπεδο σημείο ισχύει $L = M = N = 0$, συμπεραίνεται ότι κάθε επίπεδο σημείο είναι και ομφαλικό με κάθετη καμπυλότητα $\kappa\kappa = 0$ σε όλες τις διευθύνσεις.

Ακολουθούν τρεις χρήσιμες προτάσεις :

- ❖ Σε κάθε μη ομφαλικό σημείο, υπάρχουν δύο κύριες διευθύνσεις της επιφάνειας S στο P .
- ❖ Οι διευθύνσεις αυτές είναι κάθετες.
- ❖ Στη μία από τις κύριες διευθύνσεις, η κάθετη καμπυλότητα παίρνει μέγιστη και στην άλλη ελάχιστη τιμή.



ΕΙΚΟΝΑ 2.16 : Κύριες διευθύνσεις

Πηγή : <http://geolmag.geoscienceworld.org/content/140/6/721/F1.large.jpg>

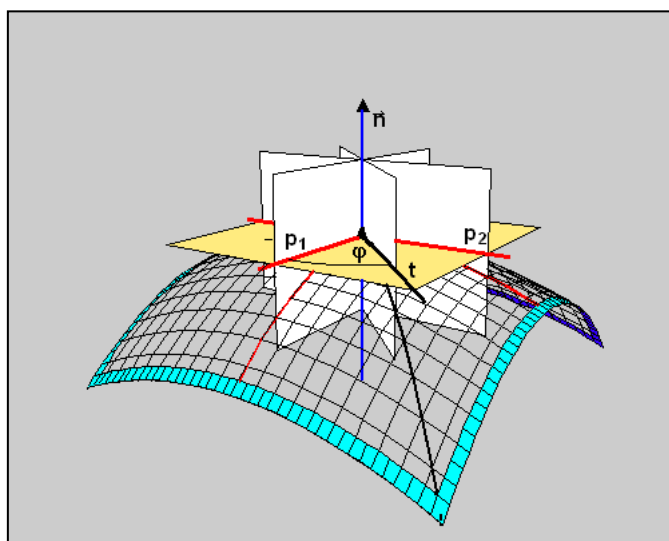
Έστω ότι το σημείο P δεν είναι ομφαλικό σημείο, (l, m) τυχαία διεύθυνση και κ_n πραγματικός αριθμός. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- ❖ (l, m) είναι κύρια διεύθυνση και κ_n η κάθετη καμπυλότητα της S στο P που αντιστοιχεί στη διεύθυνση (l, m) .
- ❖ $(L - \kappa_n E) l + (M - \kappa_n F) m = 0$ και $(M - \kappa_n F) l + (N - \kappa_n G) m = 0$

Αν το P δεν είναι ομφαλικό σημείο της S , τότε ο αριθμός κ_n είναι κύρια καμπυλότητα της S στο P αν και μόνο αν :

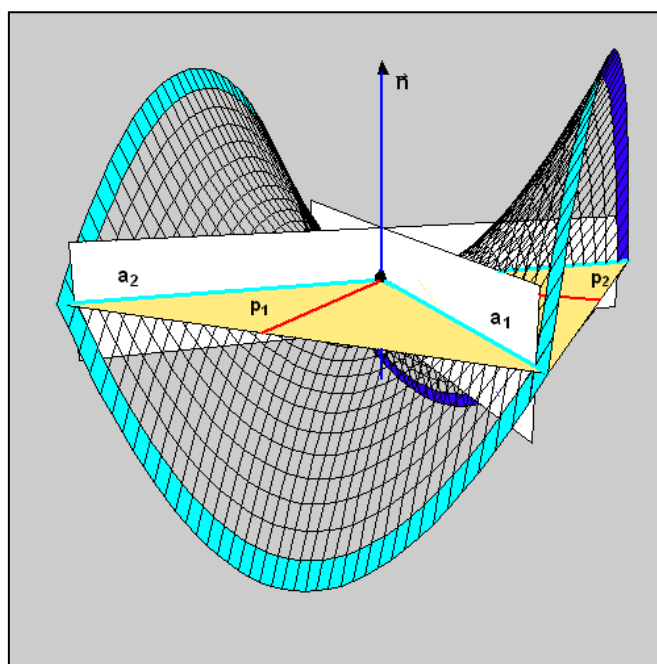
$$(E G - F^2) \kappa_n^2 - (E N + G L - 2 F M) \kappa_n + (L N - M^2) = 0 \quad (2.111)$$

Οι κύριες καμπυλότητες, μετρούν τη μέγιστη και ελάχιστη καμπύλωση μίας κανονικής επιφάνειας σε κάθε σημείο της.



ΕΙΚΟΝΑ 2.17 : Κύριες διευθύνσεις ελλειπτικού σημείου

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/introduction/s6.gif



ΕΙΚΟΝΑ 2.18 : Κύριες διευθύνσεις υπερβολικού σημείου

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/introduction/s8.gif

2.3.4. Καμπυλότητα του Gauss K και μέση καμπυλότητα μ

Η έννοια της καμπυλότητας μιας επιφάνειας είναι κατά τάξη μεγέθους πιο περίπλοκη από την έννοια της καμπυλότητας μιας καμπύλης. Έστω ότι γ μια καμπύλη του \mathbb{R}^3 και έστω P σημείο της καμπύλης γ . Η καμπυλότητα της καμπύλης γ στο σημείο P μετράει το κατά πόσο τείνει να ξεφύγει η καμπύλη γ από την εφαπτόμενη ευθεία (εφαπτόμενο διάνυσμα) της γ στο σημείο P . Κατά αναλογία, η καμπυλότητα μιας επιφάνειας S στο σημείο P , πρέπει να μετράει το κατά πόσο η επιφάνεια S τείνει να ξεφύγει από το εφαπτόμενο επίπεδό της στο σημείο P . Όμως, όσον αφορά τις επιφάνειες, ανακύπτει μία δυσκολία που δε συναντάται στις καμπύλες : Παρόλο που μία καμπύλη μπορεί να αποσπαστεί από την εφαπτόμενη ευθεία σε δύο μόνο κατευθύνσεις, μία επιφάνεια μπορεί να αποσπαστεί από το εφαπτόμενο επίπεδό της σε απείρως πολλές κατευθύνσεις. Γενικά, το κατά πόσο μια επιφάνεια αποκλίνει από ένα εφαπτόμενο επίπεδό της, εξαρτάται από τη διεύθυνση.

Συγκεκριμένα, υπάρχουν διάφορα μεγέθη για τον ορισμό της έννοιας της καμπυλότητας μιας επιφάνειας στον \mathbb{R}^3 , όπως :

- ❖ Η κάθετη καμπυλότητα κ_n
- ❖ Οι κύριες καμπυλότητες κ_1 και κ_2
- ❖ Η μέση καμπυλότητα μ
- ❖ Η καμπυλότητα του Gauss K

Έχουν ήδη οριστεί η κάθετη καμπυλότητα κ_n και οι κύριες καμπυλότητες κ_1 και κ_2 μιας επιφάνειας S στον \mathfrak{R}^3 . Στη συνέχεια δίνονται οι ορισμοί της μέσης καμπυλότητας μ και της καμπυλότητας του *Gauss* K που μάλιστα, αποτελούν και τις πιο σημαντικές καμπυλότητες στη θεωρία των επιφανειών.

Έστω κ_1 και κ_2 οι κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας στο σημείο P . Το ημίαθροισμα των κ_1, κ_2 ονομάζεται ονομάζεται μέση καμπυλότητα και συμβολίζεται με μ , ενώ το γινόμενο των κ_1, κ_2 ονομάζεται *καμπυλότητα Gauss* και συμβολίζεται με K . Δηλαδή :

$$\mu = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad (2.112)$$

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad (2.113)$$

Όμως, οι κύριες καμπυλότητες αποτελούν ρίζες της εξίσωσης :

$$(E G - F^2) \kappa_n^2 - (E N + G L - 2 F M) \kappa_n + (L N - M^2) = 0$$

Έτσι, σύμφωνα με τους τύπους του *Viete* σχετικά με το άθροισμα και γινόμενο ριζών τριωνύμου, έχουμε :

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{E N + G L - 2 F M}{E G - F^2}$$

$$\kappa_1 \kappa_2 = \frac{L N - M^2}{E G - F^2}$$

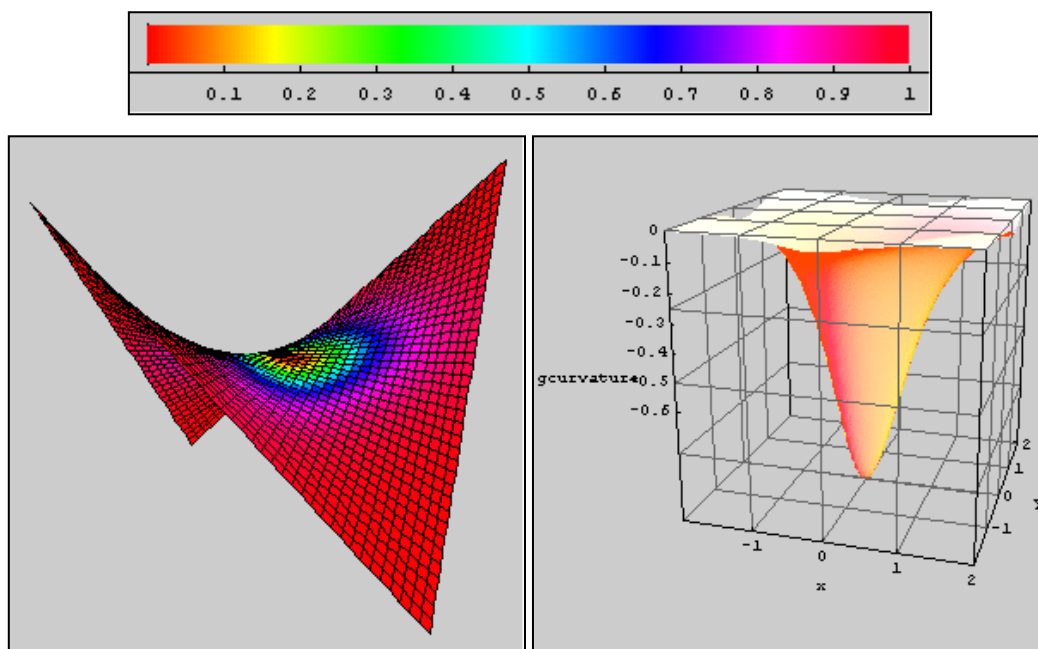
Συνεπώς, καταλήγουμε στο ότι :

$$\mu = \frac{E N + G L - 2 F M}{2 (E G - F^2)} \quad (2.114)$$

$$K = \frac{L N - M^2}{E G - F^2} \quad (2.115)$$

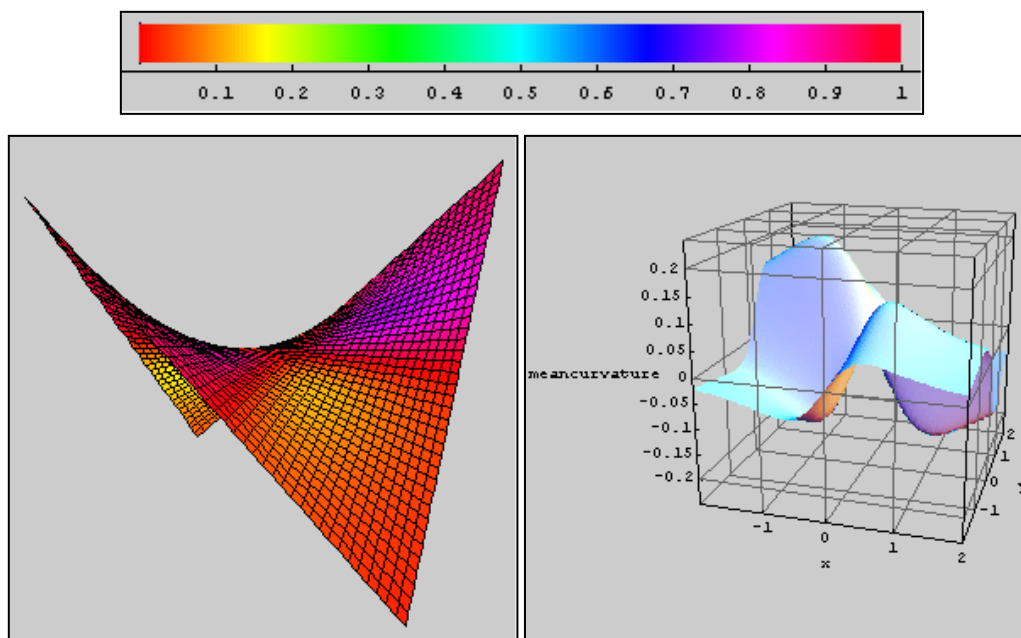
Επειδή η κάθετη καμπυλότητα κ_n μιας καμπύλης το πολύ να αλλάξει πρόσημο σε μια αλλαγή του προσανατολισμού της επιφάνειας, οι ακραίες τιμές της κ_n παραμένουν πάλι ακραίες τιμές και το πολύ, να αλλάξουν πρόσημο και μάλιστα συγχρόνως κατά την αλλαγή του προσανατολισμού (οπότε η μέγιστη γίνεται ελάχιστη και αντίστροφα) της επιφάνειας. Συνεπώς, η καμπυλότητα του *Gauss* $K = \kappa_1 \kappa_2$, είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού της επιφάνειας. Τέλος, αφού $E G - F^2 > 0$, το πρόσημο της K είναι ίδιο με το πρόσημο της $L N - M^2$. Από την πρόταση αυτή, έχουμε ότι η καμπυλότητα *Gauss* K είναι θετική σε ελλειπτικά, αρνητική σε υπερβολικά και μηδέν σε παραβολικά σημεία της S . Προφανώς, ισχύει και το αντίστροφο.

Επίσης, παρατηρείται ότι οι κύριες καμπυλότητες κ_1, κ_2 της επιφάνειας S είναι ομόσημες σε ελλειπτικά, ετερόσημες σε υπερβολικά και μία από αυτές ισούται με το μηδέν σε παραβολικά σημεία.



ΕΙΚΟΝΑ 2.19 : Οπτική αναπαράσταση της καμπυλότητας του Gauss K ενός υπερβολικού παραβολοειδούς

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ruled/hypar/sl9.gif



ΕΙΚΟΝΑ 2.20 : Οπτική αναπαράσταση της μέσης καμπυλότητας μ ενός υπερβολικού παραβολοειδούς

Πηγή : http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ruled/hypar/sl11.gif

2.3.5. Γραμμές κύριας καμπυλότητας

Υποθέτουμε ότι P είναι ένα σημείο ενός τμήματος $x = x(u, v)$ μιας επιφάνειας. Αποδεικνύεται ότι μία διεύθυνση (du, dv) σε ένα σημείο P μιας επιφάνειας είναι κύρια διεύθυνση αν και μόνο αν (για κάποιο τμήμα) τα du και dv ικανοποιούν την εξίσωση :

$$(E M - L F) du^2 + (E N - L G) du dv + (F N - M G) dv^2 = 0 \quad (2.116)$$

Όταν το σημείο δεν είναι ομφαλικό, το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.116), αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων και έτσι παίρνουμε δύο εξισώσεις της μορφής $A du + B dv = 0$, που αντιστοιχούν στις ορθογώνιες κύριες διευθύνσεις.

Επειδή η κάθετη καμπυλότητα κ_n μιας επιφάνειας είναι αναλλοίωτη (εκτός από το πρόσημό της) στους επιτρεπτούς παραμετρικούς μετασχηματισμούς, έπεται ότι οι διευθύνσεις στις οποίες η κ_n λαμβάνει τις ακραίες τιμές της, δηλαδή οι κύριες διευθύνσεις είναι επίσης αναλλοίωτες.

Μια καμπύλη μιας επιφάνειας λέγεται *γραμμή καμπυλότητας*, αν σε κάθε σημείο της καμπύλης η διεύθυνση της εφαπτομένης ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση, για κάποιο τμήμα $x = x(u, v)$ που περιέχει το σημείο. Ακόμα, η εξίσωση (2.116), μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαφορική εξίσωση που δίνει τις δύο οικογένειες των γραμμών καμπυλότητας. Από το αντίστοιχο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (Παράρτημα Α.8.), υπάρχουν μοναδικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. Έτσι, έχουμε το επόμενο θεώρημα :

Στην περιοχή ενός μη ομφαλικού σημείου μιας επιφάνειας, υπάρχουν δύο οικογένειες ορθογώνιων γραμμών καμπυλότητας (θεωρία διαφορικών εξισώσεων για ορθογώνιες τροχιές). Δηλαδή στην περιοχή κάθε μη ομφαλικού σημείου, υπάρχει ένα ορθογώνιο πλέγμα γραμμών κύριας καμπυλότητας.

Οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ως γραμμές καμπυλότητας

Για κάθε σημείο P μιας επιφάνειας, υπάρχει ένα τμήμα που περιέχει το P και του οποίου οι διευθύνσεις των u – και v – παραμετρικών καμπυλών στο P είναι οι κύριες διευθύνσεις.

Υποθέτουμε τώρα ότι οι διευθύνσεις των u – και v – παραμετρικών καμπυλών ενός τμήματος σε ένα μη ομφαλικό σημείο P είναι κύριες διευθύνσεις. Επειδή τα διανύσματα $x_u = 1 x_u + 0 x_v$ είναι εφαπτόμενα στις u – παραμετρικές καμπύλες, ενώ τα $x_v = 0 x_u + 1 x_v$ είναι εφαπτόμενα στις v – παραμετρικές καμπύλες, η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ικανοποιείται στο P για $du = 1, dv = 0$ (u – παραμετρική καμπύλη) και για $du = 0, dv = 1$ (v – παραμετρική καμπύλη). Για $du = 1, dv = 0$ η εξίσωση (114.2), γίνεται :

$$E M - L F = 0 \quad (2.117)$$

ενώ, για $du = 0, dv = 1$ η εξίσωση (2.114), γίνεται :

$$F N - M G = 0 \quad (2.118)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι κύριες διευθύνσεις σε ένα μη ομφαλικό σημείο είναι ορθογώνιες. Δηλαδή, στην συγκεκριμένη περίπτωση, οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες είναι ορθογώνιες. Επίσης, ισχύει ότι οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ενός τμήματος είναι ορθογώνιες αν και μόνο αν $F = 0$.

Όμως, η πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή I είναι θετικά ορισμένη. Δηλαδή, για κάθε (du, dv) , έχουμε $I \geq 0$, ενώ $I = 0$ αν και μόνο αν $du = 0$ και $dv = 0$. Επειδή η I είναι θετικά ορισμένη, τα θεμελιώδη μεγέθη πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0$$

Τελικά, από το σύστημα των εξισώσεων (2.115) και (2.116), καταλήγουμε στο ότι :

$$F = M = 0$$

Αν το σημείο δεν είναι ομφαλικό, έχουμε :

Οι διευθύνσεις $(1, 0)$ και $(0, 1)$ (δηλαδή οι διευθύνσεις των u – και v – παραμετρικών καμπυλών αντίστοιχα) είναι κύριες διευθύνσεις της S στο P αν και μόνο αν στο σημείο αυτό είναι $F = M = 0$.

Αντίστοιχα οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ενός τμήματος μιας επιφάνειας που δεν έχει ομφαλικά σημεία είναι γραμμές καμπυλότητας, αν και μόνο αν σε κάθε σημείο του τμήματος είναι $F = M = 0$.

Αν οι διευθύνσεις των u – και v – παραμετρικών καμπυλών ενός τμήματος σε ένα σημείο P είναι κύριες διευθύνσεις τότε, τότε έχουμε απλές εκφράσεις για τις κύριες καμπυλότητες

Η κάθετη καμπυλότητα κ_n δίνεται από τον τύπο :

$$\kappa_n(l, m) = \frac{Ll^2 + 2Mlm + Nm^2}{El^2 + 2Flm + Gm^2}$$

Επειδή όμως $F = M = 0$, έχουμε :

$$\kappa_n(l, m) = \frac{Ll^2 + Nm^2}{El^2 + Gm^2}$$

Για την u – παραμετρική καμπύλη όπου $l = 1$ και $m = 0$, έχουμε :

$$\kappa_n(1, 0) = \frac{L}{E} \quad (2.119)$$

Για την v – παραμετρική καμπύλη όπου $l = 0$ και $m = 1$, έχουμε :

$$\kappa_n(0, 1) = \frac{N}{G} \quad (2.120)$$

Τέλος, αν το P είναι ένα ομφαλικό σημείο, τότε ως γνωστόν, ισχύει :

$$\kappa_n = \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = \text{σταθερό}$$

Δηλαδή, αν οι διευθύνσεις των u – και v – παραμετρικών καμπυλών ενός τμήματος σε ένα σημείο P (ομφαλικό ή μη) μίας επιφάνειας είναι κύριες διευθύνσεις, τότε οι κύριες καμπυλότητες στο P δίνονται από τις σχέσεις :

$$\kappa_1 = \frac{L}{E} \quad , \quad \kappa_2 = \frac{N}{G} \quad (2.121)$$

Αντίστοιχα, αν οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ενός τμήματος μιας επιφάνειας είναι γραμμές καμπυλότητας, τότε οι κύριες καμπυλότητες στο τυχόν σημείο P (ομφαλικό ή μη) δίνονται από τις σχέσεις :

$$\kappa_1 = \frac{L}{E} \quad , \quad \kappa_2 = \frac{N}{G}$$

Υπαρξη γραμμών καμπυλότητας

Έστω ότι η επιφάνεια S δεν έχει ομφαλικά σημεία. Τότε για κάθε σημείο (u, v) της επιφάνειας υπάρχουν δύο κύριες καμπυλότητες $\kappa_1 = \kappa_1(u, v)$ και $\kappa_2 = \kappa_2(u, v)$. Οι κύριες καμπυλότητες είναι συνεχείς, τουλάχιστον σε ένα τμήμα της S . Επίσης, ισχύουν οι προτάσεις :

- ❖ Αν οι κύριες καμπυλότητες $\kappa_1 = \kappa_1(u, v)$ και $\kappa_2 = \kappa_2(u, v)$ της επιφάνειας είναι συνεχείς, τότε για κάθε σημείο P της επιφάνειας υπάρχουν ακριβώς δύο γραμμές καμπυλότητας $\varphi_P(t)$ και $g_P(t)$ που διέρχονται από το P και τέμνονται κάθετα. Από την πρόταση αυτή, έχουμε ότι το σύνολο των γραμμών καμπυλότητας ορίζει ένα *ορθογώνιο δίκτυο γραμμών που καλύπτει την επιφάνεια*. Δηλαδή, από κάθε σημείο της S περνάει μοναδικό ζευγάρι ορθογώνιων γραμμών καμπυλότητας.
- ❖ Έστω ότι η επιφάνεια S δεν έχει ομφαλικά σημεία. Τότε οι γραμμές καμπυλότητας της επιφάνειας συμπίπτουν με τις παραμετρικές καμπύλες της S αν και μόνο αν $F = M = 0$.

2.3.6. Τύπος του Rodrigues

Υποθέτουμε ότι (du, dv) είναι μία κύρια διεύθυνση σε ένα σημείο P ενός τμήματος S : $\vec{r}(u, v)$ και κ_n η αντίστοιχη κάθετη καμπυλότητα. Ακόμα, θεωρούμε ως $\vec{\varphi}(s)$ την επιφανειακή καμπύλη της επιφάνειας στη διεύθυνση αυτή.

Αποδεικνύεται ότι το διάνυσμα $\vec{N}'(s) + \kappa_{n(1,2)}(s)\varphi'(s)$ στο σημείο P είναι κάθετο στα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{r}_1(u, v)$ και $\vec{r}_2(u, v)$ και επίσης, παράλληλο προς το εφαπτόμενο επίπεδο επίπεδο στο P επειδή και τα $\vec{N}'(s), \varphi'(s)$ είναι παράλληλα προς αυτό. Επομένως, $\vec{N}'(s) + \kappa_{n(1,2)}(s)\varphi'(s) = 0$ ή $\vec{N}'(s) = -\kappa_{n(1,2)}(s)\varphi'(s)$. Έτσι, ως προς μία κύρια διεύθυνση, το διάνυσμα $\vec{N}'(s)$ είναι συγγραμμικό προς το $\vec{\varphi}'(s)$.

Τελικά, ισχύει :

Η διεύθυνση (du, dv) σε ένα σημείο μίας επιφάνειας είναι μία κύρια διεύθυνση (η κάθετη καμπυλότητα παίρνει τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της για στο συγκεκριμένο σημείο) αν και μόνο αν για κάποιο αριθμό $\kappa_{n(1,2)}$ (και για κάποιο τμήμα) τα διανύσματα $\vec{N}'(s)$ και $\varphi'(s)$ ικανοποιούν τη σχέση :

$$\vec{N}'(s) = -\kappa_{n(1,2)}(s)\varphi'(s) \quad (2.122)$$

όπου $\vec{N}(s)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο σημείο $\vec{\varphi}(s)$ και $\kappa_{n(1,2)}$ ο αριθμός που αντιστοιχεί σε μία από τις κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας στο σημείο $\vec{\varphi}(s)$.

Η σχέση (2.122), που χαρακτηρίζει πλήρως τις κύριες διευθύνσεις σε κάθε σημείο της επιφάνειας, λέγεται τύπος του *Rodrigues*.

2.3.7. Θεώρημα του Euler

Έστω ότι οι διευθύνσεις των u – και v – παραμετρικών καμπυλών ενός τμήματος σε ένα σημείο P μίας επιφάνειας είναι κύριες διευθύνσεις. Τότε, ισχύει :

$$F = M = 0$$

και

$$\kappa_1 = \frac{L}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{N}{G}$$

ενώ η κάθετη καμπυλότητα σε αυτές τις διευθύνσεις (δηλαδή στην $(1, 0)$ και $(0,1)$), δίνεται από τον τύπο :

$$\kappa_n(l, m) = \frac{Ll^2 + Nm^2}{El^2 + Gm^2} \quad (2.123)$$

Η σχέση (2.123), μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} \kappa_n(l, m) &= \frac{Ll^2 + Nm^2}{El^2 + Gm^2} = \frac{Ll^2}{El^2 + Gm^2} + \frac{Nm^2}{El^2 + Gm^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \kappa_n(l, m) &= \kappa_1 \frac{El^2}{El^2 + Gm^2} + \kappa_2 \frac{Gm^2}{El^2 + Gm^2} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Έστω ότι α και β είναι οι γωνίες μεταξύ μιας τυχούσας εφαπτομένης, που έχει διεύθυνση $du : dv$ και των κύριων διευθύνσεων $1:0$ και $0:1$ αντίστοιχα. Η γωνία που σχηματίζουν δύο εφαπτόμενα διανύσματα ισούται με :

$$\cos\omega = \frac{E du du + F (du dv + dv du) + G dv dv}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}}$$

Έτσι, έχουμε (υπενθυμίζεται ότι $F = 0$ όταν οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες τέμνονται κάθετα) :

$$\cos\alpha = \frac{E du}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \cdot \sqrt{E}} \quad (2.125)$$

$$\cos\beta = \frac{G dv}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \cdot \sqrt{G}} \quad (2.126)$$

Αν υψώσουμε στο τεράγωνο τις σχέσεις (2.125) και (2.126) και τις αντικαταστήσουμε στη σχέση (2.124), έχουμε :

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\alpha + \kappa_2 \cos^2\beta$$

Όμως, οι κύριες διευθύνσεις είναι κάθετες, δηλαδή $\beta = \pi/2 - \alpha$. Επομένως, η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\alpha + \kappa_2 \sin^2\beta$$

ή

$$\kappa_n = \frac{L}{E} \cos^2\alpha + \frac{N}{G} \sin^2\beta \quad (2.127)$$

Διευκρινίζεται ότι η γωνία α είναι η γωνία μεταξύ της τυχαίας εφαπτομένης που έχει διεύθυνση $du : dv$ και της κύριας διεύθυνσης που αντιστοιχεί στην κ_1 .

Βέβαια, η σχέση (2.127), είναι μία υποπερίπτωση του θεωρήματος του *Euler*. Το θεώρημα του *Euler* γενικεύεται, αφού αναφέρεται (στη γενική περίπτωση), στην περίπτωση που οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες δεν είναι απαραίτητα κύριες διευθύνσεις.

2.3.8. Δείκτρια Dupin

Πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο του σημείου P μιας επιφάνειας κάνουμε την ακόλουθη κατασκευή. Σε κάθε ευθεία διερχόμενη από το σημείο P λαμβάνουμε δύο σημεία που απέχουν από το P απόσταση ίση με $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}}$ όπου κ_n είναι η κάθετη καμπυλότητα κατά την κατεύθυνση της ευθείας. Τα σημεία αυτά σχηματίζουν μία καμπύλη πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο που λέγεται *δείκτρια του Dupin* (Μαρκάτης, 1989).

Για τη μελέτη της καμπύλης αυτής, θεωρείται πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με τα μοναδιαία διανύσματα πάνω στις κύριες διευθύνσεις και συντεταγμένες (ξ, η) . Τότε, σε πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) η καμπύλη δίνεται από τον τύπο του *Euler*.

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}} = \frac{1}{\sqrt{|\kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta|}} \quad (2.128)$$

και οι συντεταγμένες (ξ, η) δίνονται από τις σχέσεις :

$$\xi = \frac{\cos\theta}{\sqrt{|\kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta|}} \quad (2.129)$$

$$\eta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{|\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta|}} \quad (2.130)$$

με παράμετρο το θ . Για να απαλειφθεί το θ μεταξύ αυτών των εξισώσεων, υψώνουμε στο τετράγωνο, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με κ_1 και τη δεύτερη με κ_2 και προσθέτουμε.

Έτσι, λαμβάνεται :

$$|\kappa_1 \xi^2 + \kappa_2 \eta^2| = 1 \quad (2.131)$$

Παρατηρείται ότι η εξίσωση (2.131), προσδιορίζει μία κωνική τομή στο επίπεδο η οποία είναι :

- ❖ Έλλειψη όταν το σημείο P είναι ελλειπτικό (δηλαδή $\kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$). Ειδικότερα, αν $\kappa_1 = \kappa_2$, τότε είναι κύκλος.
- ❖ Δύο συζυγείς υπερβολές όταν το σημείο είναι υπερβολικό (δηλαδή $\kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$).
- ❖ Όταν το σημείο είναι παραβολικό, τότε η μία καμπυλότητα, για παράδειγμα η κ_1 είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, η δείκτρια έχει τη μορφή $\kappa_2 \cdot \eta^2 = 1$ και παριστάνει ένα ζευγάρι παραλλήλων ευθειών, δηλαδή μία εκφυλισμένη παραβολή.
- ❖ Στα επίπεδα σημεία όλη η κατασκευή είναι αδύνατη.

2.3.9. Ασυμπτωτικές διευθύνσεις - ασυμπτωτικές γραμμές

Μία διεύθυνση $du : dv$ σε ένα σημείο μίας επιφάνειας, για κάποιο τμήμα της οποίας ισχύει:

$$II = L du^2 + 2 M du dv + N dv^2 = 0 \quad (2.132)$$

λέγεται *ασυμπτωτική διεύθυνση*. Επειδή $\kappa_n = \frac{II}{I}$ και η I είναι θετικά ορισμένη, οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις είναι οι διευθύνσεις για τις οποίες $\kappa_n = 0$.

Σε ένα ελλειπτικό σημείο δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις, σε ένα υπερβολικό σημείο υπάρχουν δύο διαφορετικές ασυμπτωτικές διευθύνσεις, σε ένα παραβολικό σημείο υπάρχει μία ασυμπτωτική διεύθυνση και τέλος, σε ένα επίπεδο σημείο κάθε διεύθυνση είναι ασυμπτωτική.

Μάλιστα, η εξίσωση (2.132), ονομάζεται και διαφορική εξίσωση της ασυμπτωτικής γραμμής.

Μία καμπύλη μίας επιφάνειας λέγεται *ασυμπτωτική γραμμή*, αν σε κάθε σημείο της καμπύλης, η διεύθυνση της εφαπτομένης της είναι ασυμπτωτική διεύθυνση. Έτσι, μια καμπύλη μιας επιφάνειας είναι ασυμπτωτική γραμμή, αν και μόνο αν η διεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης ικανοποιεί την εξίσωση (2.132) για κάποιο τμήμα της επιφάνειας. Σε ένα υπερβολικό σημείο η εξίσωση αυτή αναλύεται σε δύο διαφορετικές εξισώσεις της μορφής $A du + B dv = 0$, που μπορούν να θεωρηθούν ως οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης των ασυμπτωτικών γραμμών. Έτσι, σε μία περιοχή ενός υπερβολικού σημείου μιας επιφάνειας, υπάρχουν δύο διαφορετικές οικογένειες ασυμπτωτικών γραμμών.

Αν οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ενός τμήματος είναι ασυμπτωτικές γραμμές, τότε πρέπει να ικανοποιείται η παραπάνω εξίσωση για $du = 1, dv = 0$ και $du = 0, dv = 1$ σε κάθε σημείο. Τότε ισχύει $L = N = 0$. Επίσης ισχύει και το αντίστροφο. Έτσι έχουμε το επόμενο θεώρημα :

Οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ενός τμήματος μίας επιφάνειας είναι ασυμπτωτικές γραμμές, αν και μόνο αν σε κάθε σημείο είναι $L = N = 0$.

Υπενθυμίζεται ότι :

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \vec{k} \cdot \vec{N}$$

όπου \vec{k} το διάνυσμα καμπυλότητας της καμπύλης. Από αυτό έπεται ότι μία καμπύλη είναι ασυμπτωτική γραμμή αν και μόνο αν $\vec{k} \cdot \vec{N} = 0$. Δηλαδή, αν και μόνο αν κάθε σημείο της καμπύλης είναι σημείο καμπής ($\vec{k} = 0$) ή το εγγύτατο επίπεδο στο τυχόν σημείο καμπύλης είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια (η αριθμητική προβολή $\vec{k} \cdot \vec{N}$ στο διάνυσμα \vec{N} είναι μηδέν).

Επίσης, επειδή κατά μήκος μίας ευθείας είναι $\vec{k} \equiv 0$, ισχύει το παρακάτω πόρισμα :

Μία ευθεία μίας επιφάνειας είναι ασυμπτωτική γραμμή.

Στη συνέχεια, ακολουθεί το πολύ χρήσιμο θεώρημα των *Beltrami – Enneper* :

Σε κάθε σημείο μίας ασυμπτωτικής καμπύλης μιας επιφάνειας, που δεν είναι ευθεία, η στρέψη τ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\tau^2 = -K \tag{2.133}$$

όπου K είναι η καμπυλότητα του *Gauss* στο αντίστοιχο σημείο.

Από την παραπάνω σχέση, συμπεραίνεται ότι μία ασυμπτωτική γραμμή μίας επιφάνειας με σταθερή αρνητική καμπυλότητα του *Gauss* K , έχει σταθερή στρέψη τ .

Ακολουθεί ο ορισμός του ασυμπτωτικού τμήματος επιφάνειας :

Ένα τμήμα επιφάνειας, στο οποίο το M δεν μηδενίζεται πουθενά, ονομάζεται ασυμπτωτικό, αν και μόνο αν $L \equiv 0$ και $N \equiv 0$. Σε αυτή την περίπτωση Οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές σύμφωνα με τα παραπάνω.

Τέλος, ακολουθεί ένα ακόμα πολύ χρήσιμο θεώρημα :

Η μέση καμπυλότητα μ είναι μηδέν σε μία επιφάνεια της οποίας οι ασυμπτωτικές γραμμές είναι ορθογώνιες.

Τέλος, ακολουθούθει ο χαρακτηρισμός των σημείων σε σχέση με τις ασυμπτωτικές διευθύνσεις :

- ❖ Σε ελλειπτικό σημείο, δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις.
- ❖ Σε υπερβολικό σημείο, υπάρχουν ακριβώς δύο ασυμπτωτικές διευθύνσεις.
- ❖ Σε παραβολικό σημείο, υπάρχει ακριβώς μία ασυμπτωτική διεύθυνση.
- ❖ Σε επίπεδο σημείο, κάθε διεύθυνση είναι ασυμπτωτική.

2.3.10. Συζυγείς οικογένειες γραμμών

Μία διεύθυνση $du : dv$ σε ένα σημείο μίας επιφάνειας λέγεται συζυγής προς τη διεύθυνση $du : dv$ αν :

$$d\vec{x} \delta\vec{N} = 0 \quad (2.134)$$

όπου (για κάποιο τμήμα) είναι $d\vec{x} = x_u du + x_v dv$ και $d\vec{N} = N_u du + N_v dv$.

Η σχέση (2.134), είναι η ισοδύναμη με την παρακάτω :

$$L du dv + M (du dv + dv du) + N dv du = 0 \quad (2.135)$$

Από τη συμμετρία της εξίσωσης (2.135), συμπεραίνεται ότι η $du : dv$ είναι επίσης συζυγής προς την $du : dv$, οπότε μπορούμε να μιλάμε για τις συζυγείς διευθύνσεις $du : dv$ και $du : dv$. Επίσης, παρατηρείται ότι μία ασυμπτωτική διεύθυνση είναι αυτοσυζυγής.

Αν δοθεί μία διεύθυνση $du : dv$, η εξίσωση (2.135) γίνεται γραμμική :

$$(L du + M dv) du + (M du + N dv) dv = 0 \quad (2.136)$$

ως προς $du : dv$. Αποδεικνύεται ότι η γραμμική εξίσωση (2.136), έχει μοναδική λύση $du : dv$, όταν $L N - M^2 \neq 0$. Έτσι, έχουμε το παρακάτω θεώρημα :

Κάθε διεύθυνση σε ένα ελλειπτικό ή υπερβολικό σημείο μίας επιφάνειας έχει μία μοναδική συζυγή διεύθυνση.

Δύο οικογένειες καμπυλών μίας επιφάνειας λέγονται συζυγείς (οικογένειες γραμμών), αν οι διευθύνσεις (των εφαπτομένων) των καμπυλών είναι συζυγείς σε κάθε σημείο.

Αν οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες είναι συζυγείς, τότε πρέπει να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (2.136) για $du = 1, dv = 0$ και $du = 0, dv = 1$ σε κάθε σημείο. Με αντικατάσταση αυτών των τιμών στην εξίσωση (2.136), προκύπτει τελικά ότι $M = 0$. Έτσι, έχουμε :

Οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ενός τμήματος μίας επιφάνειας είναι συζυγείς, αν και μόνο αν $M \equiv 0$ σε κάθε σημείο.

Επίσης, οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες ενός τμήματος μίας επιφάνειας που δεν έχει ομφαλικά σημεία είναι ορθογώνιες ($F = 0$) και συζυγείς ($M = 0$) αν και μόνο αν είναι γραμμές καμπυλότητας.

Τελικά, οι κύριες κατευθύνσεις, οι συζυγείς κατευθύνσεις και οι ασυμπτωτικές κατευθύνσεις σε ένα σημείο μίας επιφάνειας συμπίπτουν με αυτές της δείκτριας *Dupin*.

2.3.11. Οι εξισώσεις των Gauss – Weingarten

Οι εξισώσεις των Gauss – Weingarten για τις επιφάνειες είναι ανάλογες με τις εξισώσεις του Frenet για τις καμπύλες. Υπενθυμίζεται ότι οι εξισώσεις του Frenet εκφράζουν τα διανύσματα \vec{t}', \vec{n}' και \vec{b}' ως γραμμικούς συνδυασμούς των \vec{t}, \vec{n} και \vec{b} με συντελεστές που εξαρτώνται από την καμπυλότητα και τη στρέψη. Έτσι, και οι εξισώσεις των

Gauss – Weingarten εκφράζουν τις παραγώγους των διανυσμάτων $\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{N}$ (γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα) ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων αυτών με συντελεστές που εξαρτώνται από τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης και δεύτερης τάξης και τις παραγώγους τους. Τελικά έχουμε ένα σύστημα πέντε εξισώσεων από τις οποίες οι τρεις πρώτες (μερικές παράγωγοι ως προς \vec{x}_u, \vec{x}_v) εξισώσεις (134.2, 135.2, 136.2) ονομάζονται εξισώσεις του *Gauss*, ενώ οι άλλες δύο (μερικές παράγωγοι ως προς \vec{N}) εξισώσεις (137.2, 138.2) ονομάζονται εξισώσεις του *Weingarten* (Lipschutz, 1982).

$$x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L \vec{N} \quad (2.137)$$

$$x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + M \vec{N} \quad (2.138)$$

$$x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + N \vec{N} \quad (2.139)$$

$$N_u = \beta_1^1 x_u + \beta_1^2 x_v \quad (2.140)$$

$$N_v = \beta_2^1 x_u + \beta_2^2 x_v \quad (2.141)$$

όπου :

$$\beta_1^1 = \frac{M F - L G}{E G - F^2} \quad (2.142)$$

$$\beta_1^2 = \frac{L F - M E}{E G - F^2} \quad (2.143)$$

$$\beta_2^1 = \frac{N F - M G}{E G - F^2} \quad (2.144)$$

$$\beta_2^2 = \frac{M F - N E}{E G - F^2} \quad (2.145)$$

2.3.12. Οι εξισώσεις συμβιβαστότητας

Έστω ότι δίνονται οι συναρτήσεις E, F, G, L, M, N των u, v και ότι είναι κατάλληλης κλάσης. Θα εξεταστεί αν υπάρχει ένα τμήμα $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$, του οποίου τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης και δεύτερης τάξης να είναι οι συναρτήσεις E, F, G και L, M, N αντίστοιχα. Γενικά η απάντηση είναι αρνητική, εκτός αν ικανοποιούνται ορισμένες συνθήκες (εξισώσεις συμβιβαστότητας).

Οι συνθήκες αυτές προέρχονται από το γεγονός ότι αν $\vec{x}(u, v)$ κλάσης C^3 , τότε οι μικτές παράγωγοι τρίτης τάξης της $\vec{x}(u, v)$ είναι ανεξάρτητες της σειράς παραγωγίσης. Δηλαδή :

$$(\vec{x}_u)_{uv} = (\vec{x}_u)_{vu} \quad (2.146)$$

$$(\vec{x}_v)_{uv} = (\vec{x}_v)_{vu} \quad (2.147)$$

Έστω $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ ένα τμήμα μίας επιφάνειας κλάσης $C^m, m \geq 2$ του οποίου οι συντελεστές των εξισώσεων των *Gauss – Weingarten* είναι κλάσης C^1 . Τότε οι μικτές παράγωγοι $x_{uuv}, x_{uvu}, x_{vuv}, x_{vnu}$ υπάρχουν και ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες, αν και μόνο αν τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης και δεύτερης τάξης ικανοποιούν τις εξισώσεις συμβιβαστότητας.

Οι εξισώσεις συμβιβαστότητας μπορούν να γραφούν με διάφορες μορφές. Στην παρακάτω μορφή, οι δύο πρώτες εξισώσεις (2.148, 2.149), ονομάζονται εξισώσεις των *Mainardi – Codazzi*, ενώ η εξίσωση (2.150), ονομάζεται τύπος του *Gauss* (Lipschutz, 1982).

$$L_v - M_u = L \Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N \Gamma_{11}^2 \quad (2.148)$$

$$M_v - N_u = L \Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N \Gamma_{12}^2 \quad (2.149)$$

$$L N - M^2 = F [(\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2] + \\ + E [(\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2] \quad (2.150)$$

Η εξίσωση (2.150), είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα. Υπενθυμίζεται ότι οι συναρτήσεις Γ_{jk}^i εξαρτώνται μόνο από τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης και τις παραγώγους τους. Επομένως, και η έκφραση $L N - M^2$ εξαρτάται από τα θεμελιώδη μεγέθη E, F, G και τις παραγώγους τους. Τότε όμως, η καμπυλότητα του *Gauss*

$$K = \frac{L N - M^2}{E G - F^2}$$

που αρχικά ορίστηκε ως συνάρτηση της πρώτης και της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, εξαρτάται μόνο από τα μεγέθη της πρώτης θεμελιώδους μορφής. Αυτή η παρατήρηση, αποτελεί ένα από τα σπουδαιότερα θεωρήματα (*Theorema Egregium* του *Gauss*) της θεωρίας των επιφανειών με πολύ ενδιαφέρουσες συνέπειες.

2.3.13. *Theorema Egregium* του *Gauss*

Οι μαθηματικοί στο τέλος του 18^{ου} αιώνα όπως οι *Euler, Monge* είχαν χρησιμοποιήσει την καμπυλότητα του *Gauss*, αλλά μόνο ως οριζόμενη από το γινόμενο των κύριων καμπυλοτήτων. Από τη στιγμή που κάθε κύρια καμπυλότητα ενός σημείου μίας επιφάνειας εξαρτάται από τον συγκεκριμένο τρόπο με τον οποίο έχει “ενσωματωθεί” στον \mathbb{R}^3 , δεν υπήρχε υποψία μήπως η καμπυλότητα του *Gauss* αποτελεί μία αναλλοίωτη της εσωτερικής γεωμετρίας της επιφάνειας. Εν τέλει, ο *Gauss* απέδειξε ότι το γινόμενο των κύριων (κάθετων) καμπυλοτήτων εξαρτάται μόνο από την εσωτερική γεωμετρία της επιφάνειας, γεγονός που έφερε επανάσταση στον κλάδο της διαφορικής γεωμετρίας (αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές αποδείξεις του 19^{ου} αιώνα). Ειδικότερα, το θεώρημα αυτό έχει ως εξής :

Η καμπυλότητα του Gauss K μιας επιφάνειας κλάσης C^m , $m \geq 3$, είναι συνάρτηση μόνο των θεμελιωδών μεγεθών πρώτης τάξης και των παραγώγων τους. Το θεώρημα αυτό ονομάζεται *Theorema Egregium* του Gauss (Gray, 1998).

2.3.14. Το θεμελιώδες θεώρημα των επιφανειών

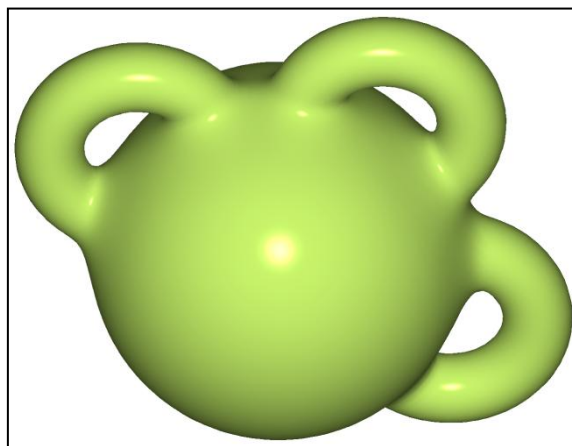
Δύο θεμελιώδεις τετραγωνικές μορφές I και II , για τις οποίες ισχύει ότι η I είναι θετικά ορισμένη και επιπλέον ικανοποιούν τις εξισώσεις συμβιβαστότητας, προσδιορίζουν πλήρως μια επιφάνεια στο χώρο της οποίας η θέση μόνο είναι απροσδιόριστη. Το θεώρημα αυτό στηρίζεται στην ύπαρξη μοναδικής λύσης ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

2.3.15. Ολικά θεωρήματα των επιφανειών

Αρχικά, ορίζονται οι έννοιες :

Μια απλή επιφάνεια S ονομάζεται συνεκτική, αν δύο τυχαία σημεία P και Q μπορούν να συνδεθούν με ένα κανονικό τόξο. Δηλαδή, μία συνεκτική επιφάνεια είναι κατά τόξο συνεκτική με κανονικά τόξα.

Μια απλή επιφάνεια είναι συμπαγής, αν ως σύνολο του E^3 είναι συμπαγές. Δηλαδή, η S είναι συμπαγής, αν κάθε ανοικτή κάλυψη της S έχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη ή ισοδύναμα η S είναι συμπαγής αν είναι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο του E^3 . Με άλλα λόγια, μία συμπαγής επιφάνεια δεν έχει σύνορο, είναι πεπερασμένη και ακόμα μοιάζει, κατά κάποιο τρόπο, με σφαίρα με χερούλια ή χωρίς χερούλια.



ΕΙΚΟΝΑ 2.21 : Σφαίρα με χερούλια

Πηγή : http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ac/Sphere_with_three_handles.png

Μία επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη, αν και μόνο αν, μπορούμε να ορίσουμε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια που να μεταβάλλεται κατά τρόπο συνεχή πάνω σε αυτή.

Έχουμε λοιπόν τα εξής θεωρήματα :

- ❖ Οι μόνες συνεκτικές και κλειστές επιφάνειες κλάσης C^m , $m \geq 3$, που έχουν όλα τους τα σημεία ελλειπτικά ομφαλικά σημεία, είναι οι σφαίρες.
- ❖ Οι μόνες συνεκτικές και κλειστές επιφάνειες κλάσης C^m , $m \geq 2$, που έχουν όλα τους τα σημεία επίπεδα σημεία, είναι τα επίπεδα.
- ❖ Οι μόνες συνεκτικές και συμπαγείς επιφάνειες κατάλληλης κλάσης, με σταθερή καμπυλότητα του *Gauss* είναι οι σφαίρες (θεώρημα του *Liebmann*).
- ❖ Δεν υπάρχει συμπαγής επιφάνεια στον E^3 κλάσης C^m , $m \geq 3$ με καμπυλότητα του *Gauss* $K \leq 0$.

2.3.16. Αναπτυκτές επιφάνειες

Αναπτυκτές επιφάνειες λέγονται εκείνες οι επιφάνειες, οι οποίες μπορούν να αναπτυχθούν στο επίπεδο, δηλαδή μπορούν να απεικονιστούν ισομετρικά στο επίπεδο. Υπάρχουν τρεις τρόποι σχηματισμού αυτών των επιφανειών :

- ❖ Σχηματίζονται από τις εφαπτόμενες μιας καμπύλης
- ❖ Είναι κωνικές επιφάνειες
- ❖ Είναι κυλινδρικές επιφάνειες

Το εφαπτόμενο επίπεδο μιας αναπτυκτής επιφάνειας σε κάποιο σημείο συναντά την επιφάνεια σε μια ευθεία η οποία λέγεται γεννέτιρα της επιφάνειας. Επίσης, όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα μιας αναπτυκτής επιφάνειας, στα σημεία μιας γεννέτιρας, συμπίπτουν. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε μία αναπτυκτική επιφάνεια, η καμπυλότητα του *Gauss* ισούται ταυτοτικά με το μηδέν.

$$K \equiv 0$$

2.3.17. Ευθειογενείς επιφάνειες

Εδώ, αναλύεται εκτενέστερα η γεωμετρία των ευθειογενών επιφανειών. Αυτό γίνεται γιατί στη μεθοδολογία που αναλύεται παρακάτω για τις ανάγκες μοντελοποίησης της επιφάνειας της οδού, η επιφάνεια που κατασκευάζεται τελικά είναι ακριβώς μία ευθειογενής επιφάνεια.

Μία ευθειογενής επιφάνεια είναι μία επιφάνεια που περιέχει τουλάχιστον μία *μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών*. Δηλαδή, πρέπει είτε η u – παραμετρική καμπύλη, είτε η v – παραμετρική καμπύλη να αποτελεί παράσταση ευθείας. Αν αποτελούν παράσταση ευθείας συγχρόνως και η u – παραμετρική καμπύλη, αλλά και η v – παραμετρική καμπύλη, τότε γίνεται λόγος για μία διπλά ευθειογενή επιφάνεια (Καδιανάκης, 2013).

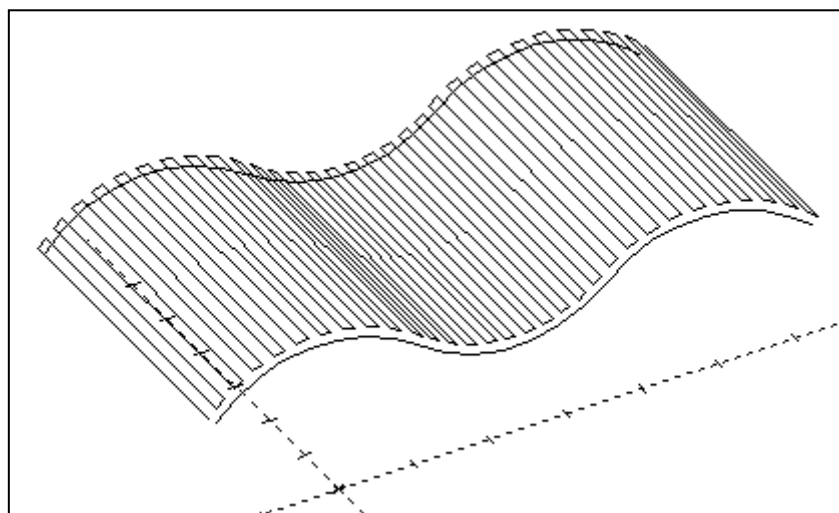
Οι διάφορες θέσεις των ευθειών που παράγουν την ευθαιογενή επιφάνεια λέγονται γεννέτιρες της επιφάνειας. Αν $\vec{\alpha}(u)$ μία κανονική καμπύλη κλάσης C^m και $\vec{\gamma}(u)$ μια μη μηδενιζόμενη διανυσματική συνάρτηση κλάσης C^m κατά μήκος της $\vec{\alpha}(u)$, τότε η διανυσματική παραμετρική συνάρτηση :

$$\vec{x}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v \vec{\gamma}(u) \quad (2.151)$$

αποτελεί μια κανονική διανυσματική παραμετρική παράσταση μιας ευθαιογενούς επιφάνειας κλάσης C^m , αν οι καμπύλες $\vec{\alpha}(u)$ και $\vec{\gamma}(u)$ είναι κλάσης C^m και $(\vec{\alpha}'(u) + v \vec{\gamma}'(u)) \times \gamma u \neq 0$ για κάθε u, v .

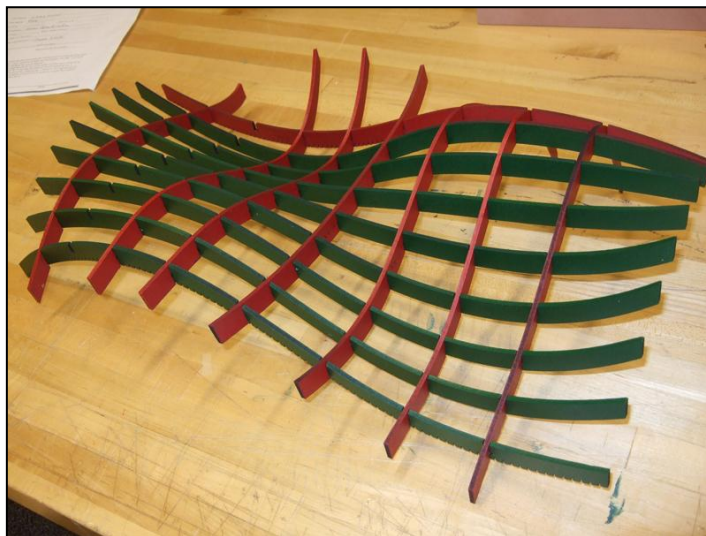
Μία κανονική παραμετρική παράσταση αυτής της μορφής λέγεται παραμετρική παράσταση ευθαιογενούς επιφάνειας. Μια ευθαιογενής επιφάνεια έχει την ιδιότητα από κάθε σημείο της να διέρχεται ευθεία η οποία κείται εξ ολοκλήρου στην επιφάνεια. Έτσι, η επιφάνεια καλύπτεται από ευθείες οι οποίες λέγονται *γεννέτιρες της επιφάνειας* και οι οποίες αποτελούν μια *μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών* (είναι οι ευθείες που παράγουν την επιφάνεια), ενώ η καμπύλη $\vec{\alpha}(u)$ λέγεται *βασική καμπύλη* ή *οδηγός* της παραμετρικής παράστασης.

Ειδικότερα, η καμπύλη $\vec{\alpha}(u)$ αντιστοιχεί στον άξονα της οδού, ενώ οι οικογένειες των ευθειών $\vec{\gamma}(u)$ αντιστοιχούν στη διατομή του δρόμου. Η διατομή (κάθετη τομή) ορίζεται ως η τομή, επιπέδου που περιέχει το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{N}(u, v)$ της επιφάνειας της οδού, με την επιφάνεια της οδού σε ένα συγκεκριμένο σημείο P που ανήκει στον άξονα της οδού. Αν η καμπύλη $\vec{\gamma}(u)$ είναι μοναδιαία και η διατομή περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της οδού, τότε η τιμή του v καθορίζει το ημιπλάτος της οδού. Αν το v έχει θετικό πρόσημο, τότε η επιφάνεια προεκτείνεται προς τα δεξιά του άξονα της οδού (κατά σύμβαση), ενώ αν το v έχει αρνητικό πρόσημο, τότε η επιφάνεια προεκτείνεται προς τα αριστερά του άξονα της οδού (πάλι κατά σύμβαση).



ΕΙΚΟΝΑ 2.22 : Ευθαιογενής επιφάνεια

Πηγή : http://techpubs.sgi.com/library/dynaweb_docs/0650/SGL_Developer/books/Perf_PG/sgi_html/figures/ruled_surfaces.gif



ΕΙΚΟΝΑ 2.23 : Οι u - και v - παραμετρικές καμπύλες, ευθαιογενούς επιφάνειας

Πηγή : <http://courses.media.mit.edu/2012spring/mas681/wp-content/uploads/2012/05/010512-vnoel-docuday43.jpg>

Αιτιολόγηση του γιατί η διανυσματική παραμετρική συνάρτηση $\vec{x}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\gamma}(u)$ περιέχει τουλάχιστον μία μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών.

Έστω \vec{m} και \vec{n} δύο διανύσματα (σημεία) του \mathbb{R}^3 με $\vec{n} \neq \vec{0}$. Καλούμε ευθεία που διέρχεται από το σημείο \vec{m} και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα \vec{n} το σύνολο των σημείων \vec{x} του \mathbb{R}^3 που ικανοποιούν την εξίσωση :

$$\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.152)$$

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται διανυσματική παραμετρική εξίσωση της ευθείας. Το σημείο \vec{x} παράγει την ευθεία, όταν η παράμετρος λ παίρνει τιμές στην πραγματική ευθεία.

Έστω ότι $\vec{x}(u, v)$, μία κανονική παραμετρική παράσταση από το U (τμήμα του \mathbb{R}^2) στο S (τμήμα του \mathbb{R}^3). Υπενθυμίζεται ότι η εικόνα της ευθείας $v = v_0$ του U είναι η καμπύλη του S $\vec{x}(u, v_0)$ με παράμετρο το u . Η καμπύλη αυτή ονομάζεται u – παραμετρική καμπύλη $v = v_0$. Ομοίως, η εικόνα της ευθείας $u = u_0$, είναι η καμπύλη $\vec{x}(u_0, v)$ του S και ονομάζεται v – παραμετρική καμπύλη $u = u_0$. Έτσι η παραμετρική παράσταση καλύπτει το S με δύο οικογένειες καμπυλών, τις εικόνες των ευθειών $v = \text{σταθερό}$ και $u = \text{σταθερό}$.

Η u –παραμετρική καμπύλη της επιφάνειας (2.151) είναι :

$$\vec{x}(u, v_0) = \vec{\alpha}(u) + v_0 \vec{\gamma}(u) \quad (2.153)$$

Η v –παραμετρική καμπύλη της επιφάνειας (2.151) είναι :

$$\vec{x}(u_0, v) = \vec{\alpha}(u_0) + v \vec{\gamma}(u_0) \quad (2.154)$$

Από τη μορφή των σχέσεων (2.152), (2.153), (2.154) παρατηρείται ότι η (2.154), δηλαδή η v –παραμετρική καμπύλη της (2.151), αποτελεί μια μονοπαραμετρική οικογένεια εξισώσεων ευθείας. Επομένως, η διανυσματική παραμετρική συνάρτηση:

$$\vec{x}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v \vec{\gamma}(u)$$

σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε, είναι μία ευθειογενής επιφάνεια. Αν και η (2.153), δηλαδή η u -παραμετρική καμπύλη της, αποτελούσε μια μονοπαραμετρική οικογένεια εξισώσεων ευθείας, τότε θα είχαμε μία διπλά ευθειογενή επιφάνεια.

Καμπυλότητα του Gauss K

Σε μία ευθειογενή επιφάνεια, οι γεννέτριες είναι ασυμπτωτικές γραμμές. Αυτό, δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι γεννέτριες είναι ευθείες γραμμές και κάθε ευθεία μίας επιφάνειας είναι ασυμπτωτική γραμμή γιατί κατά μήκος μίας ευθείας είναι $\vec{k} \equiv 0$. Υπενθυμίζεται ότι :

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \vec{k} \cdot \vec{N}$$

Επίσης, σε μία ευθειογενή επιφάνεια $\vec{x}(u, v)$, εύκολα αποδεικνύεται ότι :

$$\vec{x}_{22}(u, v) = 0$$

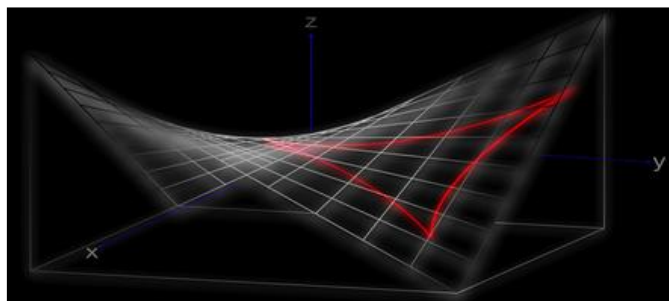
Δηλαδή,

$$N \equiv 0$$

Επομένως, η καμπυλότητα του Gauss γίνεται :

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2} \leq 0$$

Επομένως, σε μία ευθειογενή επιφάνεια, η καμπυλότητα του Gauss είναι παντού μη θετική. Η καμπυλότητα του Gauss μηδενίζεται αν και μόνο αν έχουμε μία ειδική περίπτωση ευθειογενούς επιφάνειας που ονομάζεται αναπτυσκόμενη επιφάνεια όπως έχει αναφερθεί στην παράγραφο (2.3.16) (υπενθυμίζεται ότι είναι είτε κυλινδρικές επιφάνειες, είτε κωνικές, είτε σχηματίζονται από τις εφαπτόμενες μίας καμπύλης). Τελικά, αν το M είναι παντού διάφορο του μηδενός (δηλαδή έχουμε μια καθαρά ευθειογενή επιφάνεια), η καμπυλότητα του Gauss είναι παντού αρνητική. Αν μία επιφάνεια έχει αρνητική καμπυλότητα του Gauss που παραμένει σταθερή, τότε η επιφάνεια αυτή, ονομάζεται υπερβολικό επίπεδο.



ΕΙΚΟΝΑ 2.24 : Επιφάνεια αρνητικής καμπυλότητας του Gauss

Πηγή : http://3.bp.blogspot.com/_LITk8rFFmaE/TIPfY8GKY3I/AAAAAAAAAHQ/Gs8TbMKm44o/s1600/Surface%2Bof%2BNegative%2BGaussian%2BCurvature%2B15cm150dpi%2Bok%2B4.jpg

Γενικά, στις επιφάνειες της οδοποιίας, η (μη θετική) καμπυλότητα του *Gauss* δε θα παραμένει σταθερή. Κατά συνέπεια, δε θα συναντώνται και υπερβολικά επίπεδα.

Οι επιφάνειες σταθερής και αρνητικής καμπυλότητας του *Gauss*, μας δίνουν πρότυπα ελλειπτικών και υπερβολικών (μη Ευκλείδειων) γεωμετριών. Η κύρια διαφορά μεταξύ της επίπεδης ($K = 0$), της ελλειπτικής ($K > 0$) και της υπερβολικής ($K < 0$) γεωμετρίας, βρίσκεται στο αξίωμα της παραλληλίας (πέμπτο αξίωμα). Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, το αξίωμα αυτό, ορίζει ότι από κάθε σημείο που δεν βρίσκεται πάνω σε δοθείσα ευθεία, διέρχεται μία μόνο παράλληλη προς τη δοθείσα. Στην ελλειπτική γεωμετρία (περίπτωση σφαίρας), δεν υπάρχουν παράλληλες, αφού κάθε ζεύγος “ευθειών” (δηλαδή μέγιστοι κύκλοι) πάντα τέμνεται. Στην υπερβολική γεωμετρία, υπάρχουν άπειρες “ευθείες” που είναι παράλληλες προς δοθείσα “ευθεία”.

Ισχύει ότι :

Σε κάθε σημείο μίας ασυμπτωτικής καμπύλης μιας επιφάνειας, που δεν είναι ευθεία, η στρέψη τ ικανοποιεί τη σχέση (θεώρημα των *Beltrami – Enneper*) :

$$\tau^2 = -K$$

όπου K είναι η καμπυλότητα του *Gauss* στο αντίστοιχο σημείο.

Γενικά, ο άξονας της οδού (βασική καμπύλη της ευθειογενούς επιφάνειας) δε θα είναι ασυμπτωτική γραμμή. Κατά συνέπεια, το θεώρημα των *Beltrami – Enneper*, θα ισχύει μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις.

Τέλος, αν σε μία ευθειογενή επιφάνεια, η βασική καμπύλη είναι ευθεία, τότε η ευθειογενής επιφάνεια “υποβιβάζεται” σε επίπεδο που αποτελεί μάλιστα και αναπτυσσόμενη επιφάνεια).

Μέση Καμπυλότητα μ

Σε μία ευθειογενή επιφάνεια, οι γεννέστερες είναι ασυμπτωτικές γραμμές, καθώς είναι ευθείες γραμμές και κάθε ευθεία μίας επιφάνειας είναι ασυμπτωτική γραμμή. Αποδεικνύεται ότι, σε μία επιφάνεια, η μέση καμπυλότητα μ είναι μηδέν, αν και μόνο αν, οι ασυμπτωτικές γραμμές είναι ορθογώνιες.

Οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές, αν και μόνο αν $L \equiv 0$ και $N \equiv 0$. Επίσης, οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες είναι ορθογώνιες, αν και μόνο αν $F \equiv 0$.

Επομένως, σε μία επιφάνεια, η μέση καμπυλότητα μ είναι μηδέν, αν και μόνο αν :

$$F \equiv 0, \quad L \equiv 0, \quad N \equiv 0$$

Γενικά, ο άξονας της οδού (δηλαδή, η βασική καμπύλη της ευθειογενούς επιφάνειας) δε θα είναι ασυμπτωτική γραμμή. Συνεπώς, οι παραπάνω συνθήκες δε θα ισχύουν. Βέβαια, η μόνη συνθήκη που θα ισχύει πάντα, είναι η $F \equiv 0$ λόγω κατασκευής, καθώς η επιφάνεια της οδού ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες να τέμνονται κάθετα.

2.4. Γεωδαισιακές Καμπύλες Και Γεωδαισιακή Καμπυλότητα

2.4.1. Γεωδαισιακή Καμπυλότητα \vec{k}_g

Το διάνυσμα καμπυλότητας στο P της προβολής μιας καμπύλης C επί του εφαπτόμενου επιπέδου στο P λέγεται *διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας* της C στο P και συμβολίζεται με \vec{k}_g . Για να υπολογίσουμε το διάνυσμα \vec{k}_g , υποθέτουμε ότι η S είναι μία επιφάνεια κλάσης C^m , $m \geq 2$, $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$, ένα τμήμα που περιέχει το P και $\vec{x} = \vec{x}(s) = \vec{x}(u(s), v(s))$, μία φυσική παράσταση της καμπύλης C κλάσης C^2 .

Αρχικά με \vec{T} συμβολίζεται το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της C στο σημείο P και με \vec{U} εκείνο το διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου στο P για το οποίο η τριάδα $\{\vec{T}, \vec{U}, \vec{N}\}$ είναι δεξιόστροφη και ορθοκανονική. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορεί να υποτεθεί ότι το σημείο P είναι η αρχή των αξόνων. Τότε, η διανυσματική προβολή της καμπύλης επί του εφαπτόμενου επιπέδου στο P είναι $\vec{x}^* = (\vec{x} \cdot \vec{T}) \vec{T} + (\vec{x} \cdot \vec{U}) \vec{U}$. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση, καταλήγουμε τελικά στο ότι :

$$\vec{k}_g = (\vec{k} \cdot \vec{U}) \vec{U} \quad (2.155)$$

Δηλαδή, το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας \vec{k}_g είναι η διανυσματική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας \vec{k} επί του διανύσματος \vec{U} (διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου). Τελικά, το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας \vec{k}_g είναι πράγματι η διανυσματική προβολή της καμπυλότητας \vec{k} της C στο P επί του εφαπτόμενου επιπέδου. Επειδή ακριβώς το διάνυσμα \vec{k} είναι κάθετο στο \vec{T} , η διανυσματική προβολή του επί του εφαπτόμενου επιπέδου είναι απλώς η συνιστώσα του $(\vec{k} \cdot \vec{U}) \vec{U}$ ως προς \vec{U} . Έτσι, ισχύει ότι :

Το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας \vec{k}_g μίας (επιφανειακής) καμπύλης C στο P , είναι η διανυσματική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας \vec{k} της C στο P επί του εφαπτόμενου επιπέδου στο P .

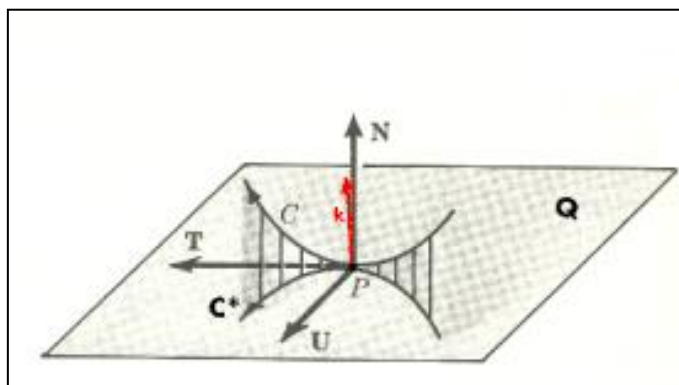
Τελικά :

$$\vec{k} = \vec{k}_g + \vec{k}_n = (\vec{k} \cdot \vec{U}) \vec{U} + (\vec{k} \cdot \vec{N}) \vec{N} \quad (2.156)$$

Παρατηρείται ότι το \vec{k}_g είναι ανεξάρτητο του προσανατολισμού της επιφάνειας και της καμπύλης C , γιατί το ίδιο ισχύει και για τα διανύσματα \vec{k} και \vec{k}_n .

Ο πραγματικός αριθμός κ_g που ορίζεται ως η αριθμητική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας \vec{k} της C στο P επί του εφαπτόμενου επιπέδου στο P . Δηλαδή, $\kappa_g = \vec{k} \cdot \vec{U}$. Επίσης, αφού το \vec{U} έχει εκλεχθεί έτσι, ώστε η τριάδα $\{\vec{T}, \vec{U}, \vec{N}\}$ δηλαδή η $\{\vec{t}, \vec{U}, \vec{N}\}$ να είναι δεξιόστροφη και ορθοκανονική, έχουμε τελικά $\vec{U} = \vec{N} \times \vec{t}$. Συνεπώς $\kappa_g = \vec{k} \cdot (\vec{N} \times \vec{t}) = \vec{t} \cdot (\vec{k} \times \vec{N})$. Δηλαδή, όταν η παράμετρος είναι η φυσική :

$$\kappa_g = [\vec{t}, \vec{k}, \vec{N}] = [\vec{x}', \vec{x}'', \vec{N}] \quad (2.157)$$



ΕΙΚΟΝΑ 2.25 : Ορισμός της δεξιόστροφης και ορθοκανονικής τριάδας $\{\vec{T}, \vec{U}, \vec{N}\}$

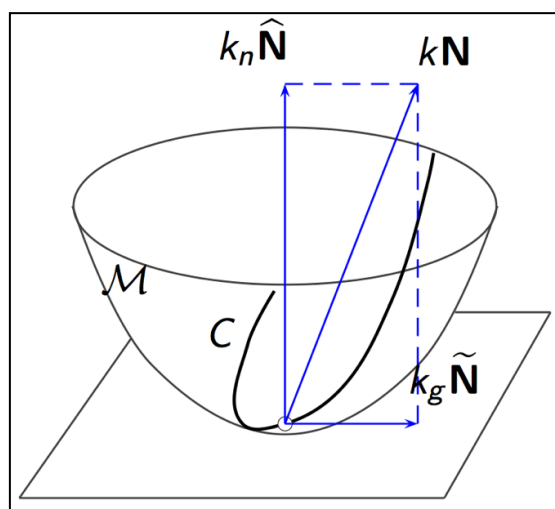
Πηγή : https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSP7TS_aGcys4paJwgNOsCQ9w_n8uOEAsMGdewIglHBkqtHvi6

Ακόμα, παρατηρείται ότι η απόλυτη τιμή της κ_g είναι αναλλοίωτη κάτω από ισομετρικές απεικονίσεις της επιφάνειας, ενώ το πρόσημό της εξαρτάται και από τον προσανατολισμό της επιφάνειας S (δηλαδή τη φορά του \vec{N}) και από τον προσανατολισμό της καμπύλης C (δηλαδή τη φορά του \vec{t}).

Αντίθετα από ότι συμβαίνει στην κάθετη καμπυλότητα κ_n που εξαρτάται από τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης και δεύτερης τάξης, η γεωδαισιακή καμπυλότητα κ_g εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης και τις παραγώγους τους και συνεπώς είναι μία εσωτερική ιδιότητα της επιφάνειας.

Δηλαδή :

Η γεωδαισιακή καμπυλότητα μίας καμπύλης μίας επιφάνειας είναι μία γεωμετρική αναλλοίωτη της επιφάνειας.



ΕΙΚΟΝΑ 2.26 : Ορισμός των διανυσμάτων $\vec{k}, \vec{k}_g, \vec{k}_n$

Πηγή : <http://staff.ustc.edu.cn/~juyong/gcf.png>

Υπολογισμός γεωδαισιακής καμπυλότητας κ_g όταν η παράμετρος είναι η φυσική

$$\kappa_g(s) = [\vec{\varphi}', \vec{\varphi}'', \vec{N}] \quad (2.158)$$

$$\kappa_g(s) = [\Gamma_{11}^2 (u')^3 + (2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) (u')^2 v' + (\Gamma_{22}^2 - 2 \Gamma_{12}^1) u' (v')^2 - \Gamma_{22}^1 (v')^3 + u' v'' - u'' v'] H \quad (2.159)$$

Υπολογισμός γεωδαισιακής καμπυλότητας κ_g όταν η παράμετρος είναι τυχαία

$$\kappa_g(t) = \frac{[\vec{g}', \vec{g}'', \vec{N}]}{|\vec{g}'|^3} \quad (2.160)$$

$$\kappa_g(t) = \frac{1}{|\vec{g}'|^3} [\Gamma_{11}^2 (u')^3 + (2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) (u')^2 v' + (\Gamma_{22}^2 - 2 \Gamma_{12}^1) u' (v')^2 - \Gamma_{22}^1 (v')^3 + u' v'' - u'' v'] H \quad (2.161)$$

Και στις δύο περιπτώσεις, είτε δηλαδή η παράμετρος είναι η φυσική, είτε όχι, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της επιφάνειας \vec{N} , τα σύμβολα *Christoffel* δεύτερου είδους και η διακρίνουσα της πρώτης θεμελιώδους μορφής H υπολογίζονται στο σημείο της καμπύλης $\vec{\varphi}(s)$ ή $\vec{g}(t)$ αντίστοιχα.

Το απόλυτο διαφορικό

Ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο σε μία επιφάνεια, είναι μία απεικόνιση η οποία προσαρτά σε κάθε σημείο της επιφάνειας ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της επιφάνειας σε αυτό το σημείο.

Ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο σε μία επιφάνεια κατά μήκος μίας καμπύλης προσαρτά σε κάθε σημείο της καμπύλης, ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στην επιφάνεια σε αυτό το σημείο, όχι απαραίτητα εφαπτόμενο και στην καμπύλη (Μαρκάτης, 1989).

Παράλληλη μεταφορά διανύσματος

Ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο πάνω σε μία επιφάνεια κατά μήκος μίας καμπύλης λέμε ότι, κατασκευάζεται από την παράλληλη μετακίνηση ενός διανύσματος κατά μήκος της καμπύλης ή ότι είναι παράλληλο κατά μήκος της καμπύλης, αν το απόλυτο διαφορικό του διανυσματικού πεδίου κατά μήκος της καμπύλης είναι μηδέν (Μαρκάτης, 1989).

Παράλληλα μεταφορά και γεωδαισιακή καμπυλότητα

Έστω λοιπόν, $\vec{\alpha}(s)$ ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο σε μία επιφάνεια S , παράλληλο κατά μήκος μίας καμπύλης $\vec{\varphi}(s)$ όπου s η φυσική παράμετρος της καμπύλης.

Έστω επίσης ότι $\theta(s)$ είναι η γωνία (προσανατολισμένη) μεταξύ του $\vec{\alpha}(s)$ και του εφαπτόμενου διανύσματος $\vec{t}(s)$ της καμπύλης. Τότε, η παράγωγος της γωνίας $\theta(s)$ ως προς το μήκος τόξου s ισούται με τη γεωδαισιακή καμπυλότητα της καμπύλης :

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \kappa_g(s) \quad (2.162)$$

Τελικά, η γεωδαισιακή καμπυλότητα μίας επιφανειακής καμπύλης, αποτελεί τη γενίκευση της καμπυλότητας κ^2 επίπεδων καμπυλών (Μαρκάτης, 1989).

2.4.2. Γεωδαισιακή στρέψη τ_g

Η γεωδαισιακή στρέψη $\tau_g(s)$, μετράει την αποτυχία μίας καμπύλης να είναι γραμμή κύριας καμπυλότητας. Κατά αναλογία με το τρίεδρο *Frenet* που συναντάται στις καμπύλες υπάρχει το τρίεδρο του *Darboux*, που βρίσκει εφαρμογή στη μελέτη επιφανειών.

Ορισμός του τριέδρου *Darboux*

Σε κάθε σημείο P καμπύλης C που ανήκει σε μία επιφάνεια S προσαρτούμε τα εξής ορθοκανονικά (μοναδιαία και κάθετα ανά δύο μεταξύ τους) διανύσματα :

- ❖ \vec{T} : είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C στο σημείο P .
- ❖ \vec{N} : είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S στο σημείο P .
- ❖ \vec{U} : εκείνο το διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας S στο P για το οποίο η τριάδα $\{\vec{T}, \vec{U}, \vec{N}\}$ είναι δεξιόστροφη και ορθοκανονική.

Τα παραπάνω τρία διανύσματα χρησιμοποιήθηκαν και για τη μελέτη της γεωδαισιακής καμπυλότητας.

Αυτή η τριάδα διανυσμάτων κινείται κατά μήκος της επιφάνειας. Έτσι, το σύστημα αυτό ονομάζεται κινούμενο ή συνοδεύον τρίεδρο ή *τρίεδρο Darboux* της επιφάνειας. Το σύστημα αυτό λαμβάνεται συχνά ως σύστημα αναφοράς. Τα διανύσματα \vec{T} , \vec{U} , \vec{N} ονομάζονται επίσης πρωτεύοντα διανύσματα της επιφάνειας, αντίστοιχα με τα πρωτεύοντα διανύσματα καμπύλης.

Από τη στιγμή που θέλουμε να μελετήσουμε τη γεωμετρία μεταξύ της καμπύλης C και της επιφάνειας S , χρησιμοποιούνται τα διανύσματα \vec{U} και \vec{N} αντί των \vec{n} και \vec{b} . Το διάνυσμα \vec{U} είναι πάντα εφαπτόμενο στην επιφάνεια S , ενώ Το διάνυσμα \vec{N} είναι πάντα κάθετο στην

επιφάνεια S . Αντίθετα, τα διανύσματα \vec{n} και \vec{b} δεν είναι γενικά, ούτε κάθετα ούτε εφαπτόμενα στα διάφορα σημεία της επιφάνειας S . Επομένως, τα διανύσματα \vec{n} και \vec{b} δεν είναι χρήσιμα για την περιγραφή της επιφάνειας S .

Εξισώσεις Darboux

Μελετάται η συμπεριφορά του τριέδρου Darboux όταν αυτό κινείται από σημείο σε σημείο της επιφάνειας. Θεωρείται λοιπόν ότι υπάρχει το τριέδρο και στη συνέχεια παραγωγίζονται τα τρία διανύσματα ως προς τη φυσική παράμετρο s . Τα διανύσματα $\vec{T}'(s), \vec{N}'(s), \vec{U}'(s)$ αναλύονται στο τριέδρο Darboux της καμπύλης ως εξής :

$$\vec{T}'(s) = \kappa_g(s) \vec{U}(s) + \kappa_n(s) \vec{N}(s) \quad (2.163)$$

$$\vec{U}'(s) = -\kappa_g(s) \vec{T}(s) + \tau_g(s) \vec{N}(s) \quad (2.164)$$

$$\vec{N}'(s) = -\kappa_n(s) \vec{T}(s) - \tau_g(s) \vec{U}(s) \quad (2.165)$$

Αντίστοιχα, σε μορφή πινάκων, οι εξισώσεις (2.163), (2.164) και (2.165), καταλήγουν στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{U}'(s) \\ \vec{N}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g(s) & \kappa_n(s) \\ -\kappa_g(s) & 0 & \tau_g(s) \\ \kappa_n(s) & \tau_g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{U}(s) \\ \vec{N}(s) \end{bmatrix}$$

όπου $\kappa_g(s)$ η γεωδαισιακή καμπυλότητα και $\tau_g(s)$ η γεωδαισιακή στρέψη της καμπύλης. Οι τύποι αυτοί ονομάζονται εξισώσεις Darboux.

Η γεωμετρική σημασία της γεωδαισιακής στρέψης $\tau_g(s)$ είναι η εξής :

Η γεωδαισιακή στρέψη $\tau_g(s)$, μετράει την αποτυχία μίας καμπύλης να είναι γραμμή κύριας καμπυλότητας (καμπύλη που λαμβάνει τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της κάθετης καμπυλότητας σε ένα σημείο της επιφάνειας σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση). Επομένως, μία επιφανειακή καμπύλη έχει γεωδαισιακή στρέψη ταυτοτικά ίση με το μηδέν αν και μόνο αν, είναι γραμμή κύριας καμπυλότητας (Gray, 1998).

Τέλος, η γεωδαισιακή στρέψη δεν εξαρτάται από τον τρόπο παραμετρικοποίησης. Δηλαδή, αποτελεί μία εσωτερική ιδιότητα της επιφάνειας.

Όπως και στην περίπτωση του τριέδρου Frenet, έτσι και εδώ, οι εξισώσεις (2.163), (2.164) και (2.165), ισχύουν μόνο στην περίπτωση που έχουμε καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας (παραμετρικοποίηση ως προς τη φυσική παράμετρο). Στην περίπτωση τυχαίας παραμέτρου, οι εξισώσεις (2.163), (2.164) και (2.165), γίνονται :

$$\vec{T}'(t) = |\vec{u}(t)| \kappa_g(t) \vec{U}(t) + |\vec{u}(t)| \kappa_n(t) \vec{N}(t) \quad (2.166)$$

$$\vec{U}'(t) = -|\vec{u}(t)| \kappa_g(t) \vec{T}(t) + |\vec{u}(t)| \tau_g(s) \vec{N}(t) \quad (2.167)$$

$$\vec{N}'(t) = -|\vec{u}(t)| \kappa_n(t) \vec{T}(t) - |\vec{u}(t)| \tau_g(t) \vec{U}(t) \quad (2.168)$$

ή

$$\vec{T}'(t) = |\vec{r}'(t)| \kappa_g(t) \vec{U}(t) + |\vec{r}'(t)| \kappa_n(t) \vec{N}(t) \quad (2.169)$$

$$\vec{U}'(t) = -|\vec{r}'(t)| \kappa_g(t) \vec{T}(t) + |\vec{r}'(t)| \tau_g(t) \vec{N}(t) \quad (2.170)$$

$$\vec{N}'(t) = -|\vec{r}'(t)| \kappa_n(t) \vec{T}(t) - |\vec{r}'(t)| \tau_g(t) \vec{U}(t) \quad (2.171)$$

ή

$$\vec{T}'(t) = \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa_g(t) \vec{U}(t) + \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa_n(t) \vec{N}(t) \quad (2.172)$$

$$\vec{U}'(t) = -\sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa_g(t) \vec{T}(t) + \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau_g(t) \vec{N}(t) \quad (2.173)$$

$$\vec{N}'(t) = -\sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa_n(t) \vec{T}(t) - \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau_g(t) \vec{U}(t) \quad (2.174)$$

Αντίστοιχα, σε μορφή πινάκων, οι εξισώσεις (2.172), (2.173) και (2.174), καταλήγουν στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(t) \\ \vec{U}'(t) \\ \vec{N}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & |\vec{u}(t)|\kappa_g(t) & |\vec{u}(t)|\kappa_n(t) \\ -|\vec{u}(t)|\kappa_g(t) & 0 & |\vec{u}(t)|\tau_g(t) \\ |\vec{u}(t)|\kappa_n(t) & |\vec{u}(t)|\tau_g(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(t) \\ \vec{U}(t) \\ \vec{N}(t) \end{bmatrix}$$

όπου $|\vec{u}(t)|$ η ταχύτητα σε κάθε σημείο της καμπύλης $\vec{r}(t)$. Ισχύει ότι $|\vec{u}(t)| = |\vec{r}'(t)|$.

Δηλαδή :

$$|\vec{u}(t)| = \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)}$$

Έτσι, ο παραπάνω πίνακας, γίνεται τελικά :

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(t) \\ \vec{U}'(t) \\ \vec{N}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa_g(t) & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa_n(t) \\ -\sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa_g(t) & 0 & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau_g(t) \\ \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa_n(t) & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau_g(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(t) \\ \vec{U}(t) \\ \vec{N}(t) \end{bmatrix}$$

2.4.3. Γεωδαισιακές καμπύλες

Αν σε κάθε σημείο μίας καμπύλης C το γεωδαισικό διάνυσμα \vec{k}_g ισούται ταυτοτικά με το μηδέν, τότε η καμπύλη C ονομάζεται γεωδαισιακή καμπύλη ή απλώς γεωδαισιακή της επιφάνειας S .

Από τον ορισμό αυτό έχουμε ότι η C είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν το διάνυσμα καμπυλότητας \vec{k} της C είναι κάθετο στην επιφάνεια σε κάθε σημείο της καμπύλης (δηλαδή το διάνυσμα καμπυλότητας \vec{k} είναι συγγραμμικό με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \vec{N}).

Ισχύει ότι $\vec{k}_g = (\vec{k} \cdot \vec{U}) \vec{U}$. Όμως, κατά μήκος μίας ευθείας ισχύει $\vec{k} \equiv \vec{0}$. Συνεπώς $\vec{k}_g \equiv \vec{0}$ σε μία ευθεία.

Συγκεντρωτικά, ισχύει ότι:

- ❖ Οι ευθείες μίας επιφάνειας είναι γεωδαισιακές. Επομένως, οι γεννέτιρες μίας ευθειογενούς επιφάνειας είναι γεωδαισιακές γραμμές. Μία καμπύλη που δεν είναι ευθεία, είναι γεωδαισιακή, αν και μόνο αν σε κάθε σημείο της καμπύλης το εγγύτατο επίπεδο είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας.
- ❖ Μία ασυμπτωτική γραμμή είναι μία ευθεία ή καμπύλη κατά μήκος της οποίας το εγγύτατο επίπεδο και το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια ταυτίζονται, ενώ μία γεωδαισιακή καμπύλη είναι μία ευθεία ή καμπύλη κατά μήκος της οποίας το εγγύτατο επίπεδο είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο. Δηλαδή, μία καμπύλη είναι ασυμπτωτική γραμμή αν $\vec{k}_n = \vec{0}$, ενώ μία καμπύλη είναι γεωδαισιακή αν $\vec{k}_g = \vec{0}$.

Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s (όπου s τυχαία παράμετρος) επαληθεύεται η εξίσωση :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 (u'(s))^3 + (2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) (u'(s))^2 v'(s) + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) u'(s)(v'(s))^2 - \\ - \Gamma_{22}^1 (v'(s))^3 + u'(s)v''(s) - u''(s)v'(s) = 0 \end{aligned} \quad (2.175)$$

Η εξίσωση (2.175), ονομάζεται *γεωδαισιακή διαφορική εξίσωση*

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- ❖ Η u – παραμετρική καμπύλη είναι γεωδαισιακή
- ❖ $\Gamma_{11}^2 = 0$ για κάθε (u, v_0)
- ❖ $E E_2 + F E_1 - 2 E F_1 = 0$, για κάθε (u, v_0)

Επίσης, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- ❖ Η v – παραμετρική καμπύλη είναι γεωδαισιακή
- ❖ $\Gamma_{22}^1 = 0$ για κάθε (u_0, v)
- ❖ $G G_1 + F G_2 - 2 G F_2 = 0$, για κάθε (u_0, v)

Στην περίπτωση που γίνεται λόγος για μία ευθειογενή επιφάνεια, οι παραπάνω προτάσεις ισχύουν καθώς οι v – παραμετρικές καμπύλες είναι (τρισιδιάστατες) ευθείες γραμμές άρα και γεωδαισιακές.

2.4.4. Γεωδαισιακές συντεταγμένες

Αν είναι εφικτό, είναι χρήσιμο να διαλέγουμε, σε μία επιφάνεια, συντεταγμένες (δηλαδή τμήματα) των οποίων οι παραμετρικές καμπύλες να έχουν κάποιες ειδικές ιδιότητες.

Ένα τμήμα του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι ορθογώνιες και η μία από τις δύο οικογένειες των παραμετρικών καμπυλών αποτελείται από γεωδαισιακές γραμμές, λέγεται σύστημα γεωδαισιακών συντεταγμένων. Ένα σύστημα γεωδαισιακών συντεταγμένων μπορεί να εισαχθεί σε μία επιφάνεια με άπειρους τρόπους.

Στην προκειμένη ευθειογενή επιφάνεια της οδού, οι v –παραμετρικές καμπύλες είναι γεωδαισιακές (καθώς είναι ευθείες) και κάθετες με την u –παραμετρική καμπύλη (βασική καμπύλη της ευθειογενούς επιφάνειας που αντιστοιχεί στον άξονα της οδού). Επομένως, είναι εφικτή η υλοποίηση ενός συστήματος γεωδαισιακών καμπυλών στην επιφάνεια της οδού.

3. ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, αναλύονται οι καμπύλες παρεμβολής, αλλά και ο τρόπος με τον οποίο βρίσκουν εφαρμογή στη χάραξη του άξονα της οδού. Από τις καμπύλες αυτές, εκείνες που θα παίξουν καίριο ρόλο στο να οριστεί μαθηματικά ο τρισδιάστατος άξονας της οδού, είναι οι καμπύλες *B – Spline*.

Οι συναρτήσεις είναι ένα βασικό μαθηματικό εργαλείο για να περιγράψει κανείς και να αναλύσει πολλά ενδιαφέροντα φαινόμενα. Επειδή, τις περισσότερες φορές, οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι με απόλυτη ακρίβεια γνωστές, είναι αναγκαίο να κατασκευαστούν προσεγγίσεις αυτών, βασισμένες σε πληροφορίες, που πηγάζουν από τη μελέτη των φαινομένων. Δηλαδή, μελετώντας ένα φαινόμενο, μπορεί να βρούμε αριθμητικά δεδομένα, που είναι τιμές μιας συνάρτησης $y = f(x)$ (Σοφιανός & Τυχόπουλος, 2005).

Το πρόβλημα τώρα, που λέγεται πρόβλημα *παρεμβολής*, είναι να βρούμε μία συνάρτηση, όσο το δυνατόν πιο απλή, που προσεγγιστικά να παριστάνει την άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$. Απλές συναρτήσεις και συγχρόνως εύκολες στον χειρισμό τους (διαφορίσιμες, ολοκληρώσιμες) είναι τα αλγεβρικά πολυώνυμα.

Σύμφωνα με το θεώρημα του *Weierstrass*, για μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα (a, b) , υπάρχει ένα πολυώνυμο $p(x)$, τέτοιο ώστε :

$$|p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

στο (a, b) για οποιοδήποτε δεδομένο θετικό ε . Δηλαδή, υπάρχει ένα πολυώνυμο που προσεγγίζει την $f(x)$ ομοιόμορφα για οποιαδήποτε απαιτούμενη ακρίβεια (Scheid, 1976).

3.1. Καμπύλες *Bezier*

Οι παραμετρικές καμπύλες που μας ενδιαφέρουν εδώ, είναι αυτές που οι συνιστώσες τους f, g, h αποτελούν πολυωνυμικές συναρτήσεις. Οι καμπύλες αυτές αποτελούν τις πολυωνυμικές και τμηματικά πολυωνυμικές καμπύλες. Η πιο σημαντική περίπτωση πολυωνυμικής καμπύλης, είναι η καμπύλη *Bezier*, που πήρε το όνομά της από τον Γάλλο μηχανικό *Pierre Bezier*.

Μία καμπύλη *Bezier* βαθμού n ορίζεται ως εξής :

$$\vec{x}(t) = \vec{b}_0 B_0^n(t) + \vec{b}_1 B_1^n(t) + \dots + \vec{b}_n B_n^n(t)$$

όπου τα 2D ή 3D σημεία \vec{b}_i ονομάζονται *Bezier control points* (σημεία ελέγχου *Bezier*) και δημιουργούν το πολυώνυμο *Bezier* της καμπύλης. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των 3D σημείων αποτελούν έναν πίνακα - διάνυσμα διαστάσεων 3×1 .

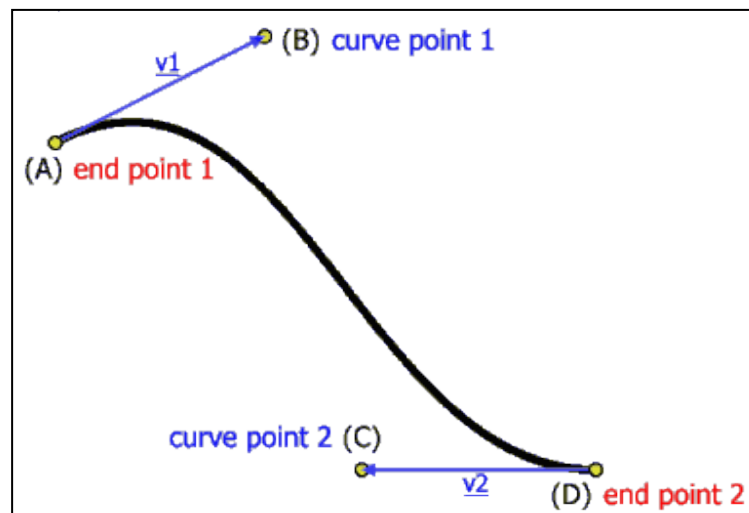
όπου τα $B_i^n(t)$ είναι πολυώνυμα *Bernstein* που ορίζονται με τη σειρά τους ως εξής :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (i - t)^{n-i} t^i$$

ενώ οι διωνυμικοί συντελεστές είναι :

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!}, & \text{αν } 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για κάθε καμπύλη *Bezier*, τα πιο σημαντικά εφαπτομενικά διανύσματα είναι στην αρχή και το πέρας της καμπύλης. Συνεπώς προκύπτει ότι το *control polygon* είναι εφαπτομενικό στην καμπύλη στα άκρα της, από τα οποία και διέρχεται. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο κατά τη σύνδεση διαφορετικών τμηματικών καμπυλών *Bezier*. Επίσης, ο βαθμός μίας καμπύλης ορίζεται ως το πλήθος των *control points* μειωμένο κατά ένα (Τσιρίγκας, 2011).



ΕΙΚΟΝΑ 3.1 : Εφαπτομενικά διανύσματα στην αρχή και το πέρας της καμπύλης

Πηγή : <http://freespace.virgin.net/hugo.elias/graphics/bezier05.gif>

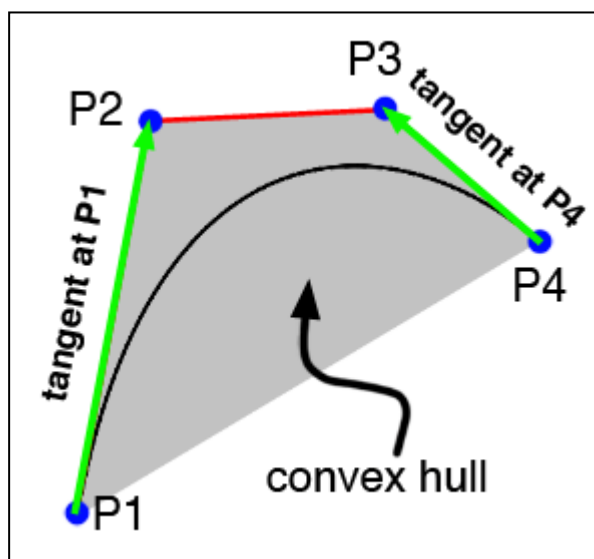
Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα σημείο $\vec{x}(t)$ μίας καμπύλης *Bezier*, κατασκευάζεται μέσω του αναδρομικού αλγορίθμου *de Casteljau*.

Οι καμπύλες *Bezier* έχουν ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες :

- ❖ Παρεμβολή στα άκρα τους : Η καμπύλη διέρχεται από τα ακραία σημεία του πολυγώνου δηλαδή $\vec{x}(0) = \vec{b}_0$ και $\vec{x}(1) = \vec{b}_n$
- ❖ Η καμπύλη μένει ανεπηρέαστη από αφινικούς (ομοπαράλληλους) μετασχηματισμούς: Αν ένας αφινικός μετασχηματισμός εφαρμοστεί στο *control polygon*, τότε η καμπύλη μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο.
- ❖ Συμμετρία : τα δύο πολύγωνα $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ και $\vec{b}_n, \vec{b}_{n-1}, \dots, \vec{b}_0$ περιγράφουν την ίδια καμπύλη. Το μόνο που αλλάζει είναι η φορά με την οποία διατρέχει το παραμετρικό διάστημα η παράμετρος t .

- ❖ Ιδιότητα *convex hull* : Για $t \in [0, 1]$, το σημείο $\vec{x}(t)$ της καμπύλης βρίσκεται μέσα στον χώρο που οριοθετείται από το *control polygon* ο οποίος ονομάζεται *convex hull* του *control polygon*.

Μάλιστα, η ιδιότητα του *convex hull* μπορεί να λειτουργήσει ως περιορισμός σε σχέση με το από πού επιθυμείται να περάσει ο άξονας της οδού. Για παράδειγμα, μπορεί να επιδιώκεται η αποφυγή μίας χάραξη που να περνάει από έναν χείμαρρο ή από μία περιοχή που αλλάζουν οι χρήσεις γης.



ΕΙΚΟΝΑ 3.2 : Ιδιότητα *convex hull* της καμπύλης Bezier

Πηγή : <http://www.scratchapixel.com/assets/Uploads/Lesson011/I011-convexhull.gif>

3.1.1. Κυβικές καμπύλες Bezier

Μία καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού ($n = 3$) ορίζεται ως εξής :

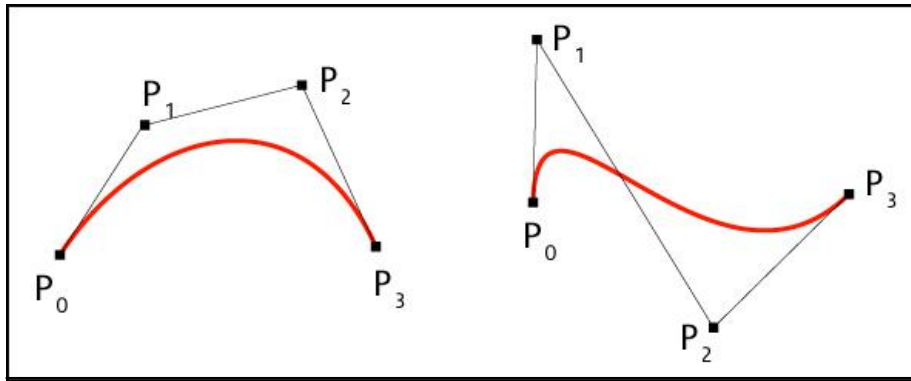
$$\vec{x}(t) = (1 - t)^3 \vec{b}_0 + 3(1 - t)^2 t \vec{b}_1 + 3(1 - t) t^2 \vec{b}_2 + t^3 \vec{b}_3$$

Η παραπάνω μορφή γράφεται ως εξής :

$$\vec{x}(t) = B_0^3 \vec{b}_0 + B_1^3 \vec{b}_1 + B_2^3 \vec{b}_2 + B_3^3 \vec{b}_3$$

όπου τα B_i^3 είναι τα (κυβικά) πολυώνυμα Bernstein.

Συγκεκριμένα, μία καμπύλη Bezier τρίτου βαθμού ορίζεται όταν υπάρχουν τέσσερα *control points*.



ΕΙΚΟΝΑ 3.3 : Τυπικά παραδείγματα κυβικών (τρίτου βαθμού) καμπυλών Bezier

Πηγή : http://www.e-cartouche.ch/content_reg/cartouche/graphics/en/image/curves/cub_bez_curve.jpg

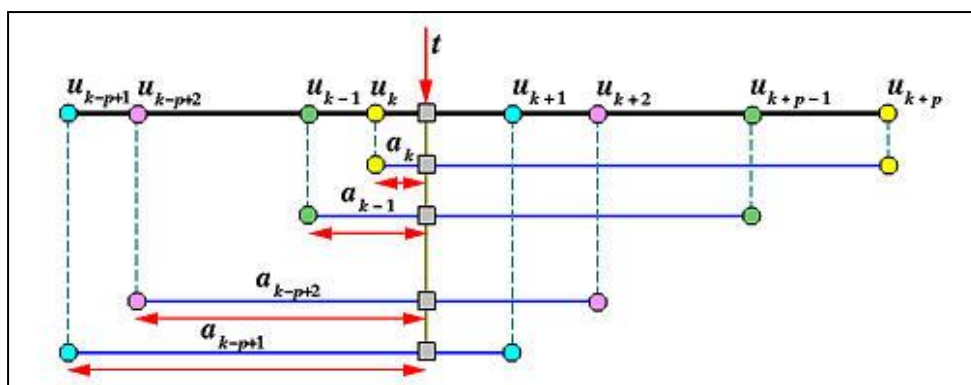
3.2. Σύνθετες Καμπύλες

Ενώ οι καμπύλες Bezier είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, δεν είναι πολύ βολικές όταν το ζητούμενο είναι η σχεδίαση σύνθετων καμπυλών. Σε αυτή την περίπτωση, επιλέγεται η χρήση σύνθετων καμπυλών, γνωστών ως *splines*. Μία σύνθετη καμπύλη, συντίθεται από απλούστερα τμήματα καμπυλών, για αυτό το λόγο γίνεται συχνά χρήση και του όρου τμηματική καμπύλη.

Στην προκειμένη περίπτωση, εξετάζονται καμπύλες Bezier που συνδέονται μεταξύ τους και αναλύονται οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για διάφορα είδη σύνδεσής τους, ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στο σημείο σύνδεσης.

3.2.1. Τμηματικές καμπύλες Bezier

Κάθε ξεχωριστό τμήμα της σύνθετης καμπύλης Bezier, αποτελεί μία ξεχωριστή καμπύλη Bezier που ορίζεται σε ένα παραμετρικό διάστημα κόμβων (*knots*) $[u_i, u_{i+1}]$ το οποίο ονομάζεται *knot span* (δηλαδή η παράμετρος t της καμπύλης κινείται σε αυτό το διάστημα - *domain*). Το σύνολο των *knots* αναφέρεται ως *knot vector* ή *knot sequence*. Το εύρος του *knot span* συμβολίζεται με $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$, ενώ οι σύνθετες καμπύλες αναφέρονται ως *spline* καμπύλες (Τσιρίγκας, 2011).



ΕΙΚΟΝΑ 3.4 : Knot Sequence

Πηγή : <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/B-spline/knot-insertion-scale-1.jpg>

Έστω η συνολική *spline* με ονομασία s . Κατά την εξέταση μίας ιδιότητάς της, χρησιμοποιείται η καθολική παράμετρος u που κινείται μέσα στο *knot vector*. Όταν πρόκειται για μία ιδιότητα του $i^{\text{στου}}$ τμήματος, το οποίο είναι καμπύλη *Bezier* s_i , που ορίζεται στο $[u_i, u_{i+1}]$, θα χρησιμοποιείται η τοπική παράμετρος $t \in [0, 1]$.

Επίσης, χρησιμοποιείται ο όρος σημείο σύνδεσης (*junction point*). Τα *junction points*, είναι τα άκρα των τμημάτων που συνδέονται μεταξύ τους. Δηλαδή, τα *junction points*, είναι οι απεικονίσεις των άκρων των *knot spans*.

Κατά την απλή γεωμετρική θεώρηση, μία καμπύλη είναι λεία αν οι εφαπτομένες εκατέρωθεν του *junction point* συμπίπτουν μεταξύ τους (λείες καμπύλες πρώτης τάξης). Για δύο κυβικές καμπύλες *Bezier*, για παραδειγμα, αυτό σημαίνει ότι τα $\vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ πρέπει απλά να είναι συνευθειακά.

Επίσης, αν το ενδιαφέρον έγκειται απλά στη γεωμετρία της καμπύλης, τότε, για να είναι η καμπύλη συνεχής, πρέπει απλά να ισχύει η συνέχεια της καμπυλότητας στο *junction point* (λείες καμπύλες δεύτερης τάξης).

3.3. Καμπύλες $B - Spline$

Οι καμπύλες $B - spline$ δεν είναι κάτι διαφορετικό από τις σύνθετες καμπύλες *Bezier*. Στην πραγματικότητα, είναι ακριβώς το ίδιο. Είναι οι σύνθετες (ή τμηματικές) καμπύλες που αποτελούνται από καμπύλες *Bezier*, απλώς έχουν άλλη ονομασία.

Με την εισαγωγή των καμπυλών $B - spline$, εισάγεται μία πιο κομψή μέθοδος ελέγχου της λειότητας στα σημεία σύνδεσης (*junction points*). Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχει ανάγκη ορισμού συνθηκών λειότητας τρίτης τάξης για σύνθετες καμπύλες τετάρτου βαθμού, αντίστοιχα τετάρτης τάξης για σύνθετες καμπύλες πέμπτου βαθμού. Η θεώρηση αυτή, μέσω των τμημάτων *Bezier* γίνεται πολύ δύσχρηστη.

Οι ιδιότητες μίας καμπύλης *Bezier* καθορίζονται από τις συναρτήσεις βάσης της, που είναι τα πολυώνυμα *Bernstein* $B_i^n(t)$. Κάθε συνάρτηση βάσης *Bernstein* αποτελεί μία πολυωνυμική συνάρτηση. Οι καμπύλες $B - spline$ τώρα, χρησιμοποιούν ως συναρτήσεις βάσης, κάποιες πιο ευέλικτες, τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις $B - splines$ $N_i^n(u)$. Τμηματικά πολυωνυμικές σημαίνει ότι συντίθεται από κομμάτια απλών πολυωνυμικών συναρτήσεων. Οι $B - splines$, οι συναρτήσεις βάσης των καμπυλών $B - spline$, είναι μία γενίκευση των πολυωνύμων *Bernstein*. Συντίθεται από διάφορα πολυωνυμικά μέρη, αντί να είναι ένα μόνο πολυώνυμο. Αυτά τα μέρη συντίθενται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η συνάρτηση $B - spline$ να είναι μίας ορισμένης λειότητας (*smoothness*) στο *junction point*.

Μία καμπύλη $B - Spline$, ορίζεται ως :

$$\vec{x}(u) = \vec{d}_0 N_0^n(u) + \vec{d}_1 N_1^n(u) + \dots + \vec{d}_{D-1} N_{D-1}^n(u)$$

Τα $N_i^n(u)$ είναι οι $B - Splines$ n βαθμού, ενώ τα \vec{d}_i ονομάζονται σημεία *de Boor* ή απλά (όπως και στις καμπύλες *Bezier*) *control points*.

Μία καμπύλη $B - Spline$ βαθμού n ορίζεται από ένα *control polygon*

$$\vec{d}_0, \vec{d}_1, \dots, \vec{d}_{D-1}$$

παρόμοιου με μίας καμπύλης *Bezier*. Λόγω του ότι η καμπύλη *B – Spline* είναι μία τμηματικά πολυωνυμική καμπύλη, χρειάζεται για την περιγραφή της περισσότερα του ενός παραμετρικά διαστήματα (*domains*). Χρειάζεται δηλαδή ένα *knot vector*

$$u_0, u_1, \dots, u_{K-1}$$

το οποίο αποτελεί μία αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για βαθμό καμπύλης n , μπορεί να συμβαίνει ταύτιση έως n συνεχόμενων κόμβων (*knots*) και ποτέ παραπάνω.

Το πλήθος D των *control points* σχετίζεται με το πλήθος K των *knots* και τον βαθμό της καμπύλης n , σύμφωνα με τη σχέση :

$$D = K - n + 1$$

Κατά την κατασκευή μίας καμπύλης *B – Spline*, μόνο οι παραμετρικές τιμές μέσα στο διάστημα των *knots*

$$u_{n-1}, \dots, u_{K-n}$$

χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση. Αυτές οι παραμετρικές τιμές θεωρούνται έγκυρες. Οι τιμές αυτές ονομάζονται *domain knots*. Παρατηρείται ότι η τιμή u_{n-1} είναι ο τελευταίος *knot* της πρώτης n -άδας, ενώ η τιμή u_{K-n} είναι ο πρώτος *knot* της τελευταίας n -άδας στο *knot vector*.

Όπως αναφέρεται πιο πάνω, μπορεί να συμβαίνει ταύτιση έως n συνεχόμενων κόμβων (*knots*) και ποτέ παραπάνω. Το πλήθος των *knots* που συμπίπτουν αποτελεί την πολλαπλότητα του *knot*. Όλοι οι ταυτιζόμενοι *knots* μοιράζονται αυτή τη τιμή πολλαπλότητας. Αν ένας *knot* έχει πολλαπλότητα ένα, τότε ονομάζεται απλός.

Συνήθως, θέτουμε τον αρχικό και τον τελικό *knot* ενός *knot vector*, με πολλαπλότητα n (δηλαδή ίση με τον βαθμό της καμπύλης). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η καμπύλη να διέρχεται από το πρώτο (\vec{d}_0) και το τελευταίο (\vec{d}_{D-1}) *de Boor point*.

Αν $u_i = u_{i+1}$ (δηλαδή η πολλαπλότητά τους είναι μεγαλύτερη του ένα), τότε το *knot span* $[u_i, u_{i+1}]$ έχει μηδενικό μήκος. Το πλήθος L των πολυωνυμικών τμημάτων (*curve segments* που εδώ αντιστοιχούν σε καμπύλες *Bezier*) μίας καμπύλης *B – Spline* είναι ίσο με το πλήθος των μη μηδενικών *knot spans* μέσα στο *domain knot vector* $[u_{n-1}, u_{K-n}]$. Αν όλοι οι εσωτερικοί *domain knots* u_n, \dots, u_{K-n-1} είναι απλοί, δηλαδή έχουν πολλαπλότητα ένα, τότε $L = K - 2n + 1$. Καθώς, το D εξαρτάται από το K μπορούμε επίσης πιο απλά να έχουμε ότι $L = D - n$. Στην περίπτωση που έχουμε πολλαπλότητες r_i για διάφορους *knots* u_i , τότε ισχύει ότι $L = D - n - \sum (r_i - 1)$ (Τσιρίγκας, 2011).

Τα *knot spans* είναι ίσα με τα *polygon legs* του *control polygon*. Δηλαδή, το $i^{\text{στο}}$ *knot span* απεικονίζεται στο $i^{\text{στο}}$ *polygon leg*.

Αν ένα *knot* μετακινηθεί έως ότου ταυτιστεί με το διπλανό του, τότε δύο *junction points* ταυτίζονται και ένα *curve segment* (μία καμπύλη *Bezier* δηλαδή) εκφυλίζεται σε σημείο. Στο σημείο αυτό, η λειότητα της καμπύλης υποβαθμίζεται κατά μία τάξη. Επιπλέον, αν και ο έτερος *knot* (από τους εκατερωθέν) μετακινηθεί έως ότου ταυτιστεί και πάλι με το υπό μελέτη σημείο, τότε η λειότητα της καμπύλης στο σημείο αυτό, υποβαθμίζεται κατά άλλη μία τάξη (μπορεί να φτάσει μέχρι και μηδενική τάξη όπου σε εκείνο το σημείο, υπάρχει μόνο επαφή).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι :

- ❖ Όταν μία καμπύλη $B - spline$ έχει λειότητα πρώτης τάξης, τότε το *junction point* βρίσκεται πάνω σε ένα *polygon leg* το οποίο είναι και εφαπτόμενο στην καμπύλη.
- ❖ Όταν μία καμπύλη $B - spline$ έχει λειότητα μηδενικής τάξης, τότε το *junction point* βρίσκεται πάνω σε ένα *control point*. Η καμπύλη κάνει σπάσιμο εκεί και το σημείο *de Boor control point*, είναι το ίδιο με ένα *Bezier point*.
- ❖ Η πολλαπλότητα ενός *knot* δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τον βαθμό n της $B - spline$.

Στα άκρα της καμπύλης $B - Spline$ όπου η πολλαπλότητα των *knots* είναι ίση με n , η καμπυλη διέρχεται από τα ακραία *de Boor points*. Δηλαδή, πρόκειται για εκφυλισμένα παραμετρικά διαστήματα, που έγιναν μηδενικά μετά από μετακίνηση των *knots* έως ότου ταυτιστούν.

Στην περίπτωση χάραξης οδού, η επαφή μηδενικής τάξης επιζητείται καθώς αυτό σημαίνει ότι ο άξονας της οδού θα περνάει σίγουρα από το αρχικό και το τελικό σημείο που επιδιώκει να ενώσει.

Όπως και στην περίπτωση της καμπύλης *Bezier*, έτσι και εδώ, πρέπει να σημειωθεί ότι ένα σημείο $\vec{x}(u)$ μίας καμπύλης $B - spline$, κατασκευάζεται μέσω του αλγορίθμου *de Boor*. Ο αλγόριθμος, χρησιμοποιεί μια διαδικασία από επαναλαμβανόμενες γραμμικές παρεμβολές για τον υπολογισμό του σημείου $\vec{x}(u)$ επί της καμπύλης $B - spline$.

Παρατίθενται ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες των καμπυλών $B - spline$:

- ❖ Παρεμβολή στα άκρα τους : Αν ισχύει $u_0 = \dots = u_{n-1}$, τότε $\vec{x}(u_{n-1}) = \vec{d}_0$ και αν $u_{K-n} = \dots = u_{K-1}$, τότε $\vec{x}(u_{K-n}) = \vec{d}_{D-1}$
- ❖ Τοπικός έλεγχος : Αν μεταβάλλουμε ένα *control point* \vec{d}_i , μόνο τα πιο κοντινά $n + 1$ πολυωνυμικά τμήματα της καμπύλης (*curve segments*) θα μεταβληθούν. Η καμπύλη μένει ανεπηρέαστη οπουδήποτε αλλού. Ο τοπικός έλεγχος είναι το χαρακτηριστικό που κάνει τις καμπύλες $B - spline$ πιο ευέλικτες και πιο εύχρηστες από τις καμπύλες *Bezier*. Αν ένας σχεδιαστής, είναι ικανοποιημένος με ένα τμήμα της καμπύλης, τότε οι επόμενες αλλαγές κάπου αλλού δε θα το επηρεάσουν καθόλου.
- ❖ Καμπύλες *Bezier* : Για κάποιο ειδικό *knot vector*, μία καμπύλη $B - spline$ είναι στην ουσία καμπύλη *Bezier*. Αυτή η διάταξη των *knots* έχει $K = 2n - 1$ και $u_0 = \dots = u_{n-1}$ και $u_n = \dots = u_{2n-1}$. Για την περίπτωση του κυβικού πολυωνύμου, ένα τέτοιο *knot vector* είναι το $0, 0, 0, 1, 1, 1$.
- ❖ Περιορισμένη έκταση (ιδιοτητα *convex hull*) : Κάθε σημείο της καμπύλης βρίσκεται μέσα στο περίγραμμα του *control polygon*. Ακόμα πιο αυστηρή είναι η συνθήκη στην προκειμένη περίπτωση των $B - spline$, καθώς κάθε σημείο της καμπύλης βρίσκεται μέσα στο περίγραμμα των $n + 1$ πιο κοντινών του *control points* (όπου n ο βαθμός της καμπύλης).

4. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται οι επιφάνειες παρεμβολής και η χρησιμότητά τους. Όπως θα φανεί και στη συνέχεια, αυτές οι επιφάνειες δε θα αξιοποιηθούν στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου. Όμως, δυνητικά, μπορούν αποτελέσουν έναν τρόπο ακόμα πιο γενικής θεώρησης της χάραξης της οδού. Δηλαδή, αντί να ορίζεται αρχικά ο άξονας της οδού και με βάση αυτόν να ορίζεται η (ευθειογενής) επιφάνεια της οδού, μπορεί ο ορισμός της επιφάνειας να γίνεται κατευθείαν μέσω των επιφανειών παρεμβολής, χωρίς δηλαδή να υπάρχει η ανάγκη εύρεσης του άξονα.

4.1. Παραμετρικές Επιφάνειες

Μία παραμετρική καμπύλη είναι το αποτέλεσμα της απεικόνισης (*mapping*) του παραμετρικού μονοδιάστατου διαστήματος, στον δισδιάστατο ή τρισδιάστατο χώρο. Μία παραμετρική επιφάνεια, ορίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο. Είναι το αποτέλεσμα της απεικόνισης του παραμετρικού δισδιάστατου επιπέδου στον τρισδιάστατο χώρο. Ένα τμήμα του δισδιάστου παραμετρικού επιπέδου, απεικονίζεται σε ένα τμήμα της παραμετρικής επιφάνειας. Το παραμετρικό δισδιάστατο επίπεδο, είναι απλά ένα σύστημα συντεταγμένων, όπου το κάθε σημείο έχει συντεταγμένες (u, v) . Το αντίστοιχο σημείο της παραμετρικής επιφάνειας είναι :

$$\vec{x}(u, v) = \begin{bmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \\ h(u, v) \end{bmatrix}$$

4.2. Διγραμμικά *Patches*

Η πεπερασμένη παραμετρική επιφάνεια, ονομάζεται *patch* (μπάλωμα) και είναι ουσιαστικά η απεικόνιση ενός τετραγώνου στον παραμετρικό χώρο.

Επιλέγεται το μοναδιαίο τετράγωνο που ορίζεται ως :

$$\{(u, v): 0 \leq u, v \leq 1\}$$

Το μοναδιαίο τετράγωνο που ορίστηκε, απεικονίζεται σε ένα επιφανειακό *patch*, το οποίο ορίζεται από τέσσερα σημεία $\vec{b}_{0,0}, \vec{b}_{0,1}, \vec{b}_{1,0}, \vec{b}_{1,1}$ με τον εξής τρόπο :

$$\vec{x}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0} & \vec{b}_{0,1} \\ \vec{b}_{1,0} & \vec{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

Αυτό το *patch* είναι γραμμικό και ως προς τις δύο παραμέτρους u και v . Λόγω αυτού, ονομάζεται διγραμμικό *patch*. Γράφοντας το *patch* με διαφορετικό τρόπο, είναι πολύ πιο εύκολο να κατανοηθεί το γεωμετρικό του σχήμα. Έτσι, έχουμε :

$$\vec{x}(u, v) = (1-v)\vec{p}^u + v\vec{q}^u$$

όπου

$$\vec{p}^u = (1 - u)\vec{b}_{0,0} + u\vec{b}_{1,0}$$

$$\vec{q}^u = (1 - u)\vec{b}_{0,1} + u\vec{b}_{1,1}$$

Κάθε μία από τις παραπάνω δύο εξισώσεις αποτελεί μία ευθεία. Συγκεκριμένα, η πρώτη εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\vec{p}^u = \vec{b}_{0,0} + u(\vec{b}_{1,0} - \vec{b}_{0,0})$$

η οποία είναι μία διανυσματική παραμετρική εξίσωση ευθείας της μορφής :

$$\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{n}$$

Συνεπώς, ένα διγραμμικό *patch*, που επίσης ονομάζεται υπερβολικό παραβολοειδές, καλύπτεται από δύο οικογένειες ευθειών γραμμών. Ωστόσο, το υπερβολικό παραβολοειδές συνίσταται επίσης και από καμπύλες εκτός από ευθείες. Αν θεωρήσουμε την ευθεία $u = v$, δηλαδή τη διαγώνιο του μοναδιαίου τετραγώνου, τότε, αυτή γράφεται παραμετρικά ως εξής :

$$u(t) = t, \quad v(t) = t$$

Αυτή η διαγώνιος απεικονίζεται στο *patch* ως μία τρισδιάστατη καμπύλη (και όχι ευθεία γραμμή), της μορφής $\vec{d}(t) = \vec{x}(t, t)$. Αναλυτικότερα είναι :

$$\vec{d}(t) = [1 - t \quad t] \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0} & \vec{b}_{0,1} \\ \vec{b}_{1,0} & \vec{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - t \\ t \end{bmatrix}$$

Ομαδοποιώντας τους όρους, έχουμε :

$$\vec{d}(t) = (1 - t)^2 \vec{b}_{0,0} + 2(1 - t)t \left[\frac{1}{2} \vec{b}_{0,1} + \frac{1}{2} \vec{b}_{1,0} \right] + t^2 \vec{b}_{1,1}$$

Η παραπάνω καμπύλη, αποτελεί μία τετραγωνική καμπύλη *Bezier*.

4.3. *Bezier Patches*

Ένα διγραμμικό *patch* μπορεί να γραφτεί με διαφορετικό τρόπο χρησιμοποιώντας τα γραμμικά πολυώνυμα *Bernstein*, ως εξής :

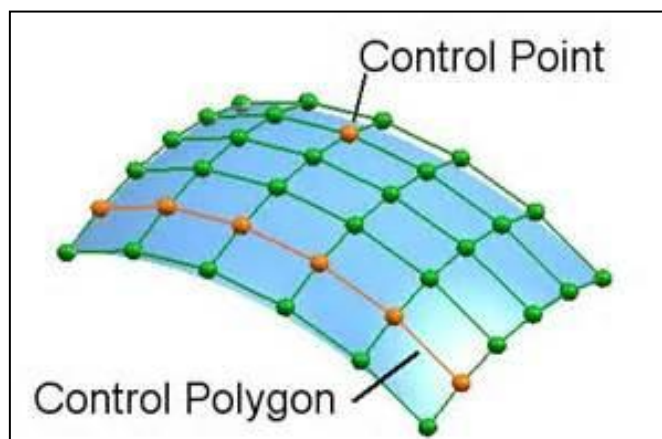
$$\vec{x}(u, v) = [B_0^1(u) \quad B_1^1(u)] \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0} & \vec{b}_{0,1} \\ \vec{b}_{1,0} & \vec{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^1(v) \\ B_1^1(v) \end{bmatrix}$$

Για βαθμό, μεγαλύτερο του τετραγωνικού, η γενική μορφή παραμετρικοποίησης της επιφάνειας είναι η εξής :

$$\vec{x}(u, v) = [B_0^1(u) \quad B_1^1(u)] \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0} & \vec{b}_{0,1} \\ \vec{b}_{1,0} & \vec{b}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^1(u) \\ B_1^1(u) \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(u, v) = [B_0^m(u) \quad \dots \quad B_m^m(u)] \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0} & \dots & \vec{b}_{0,n} \\ \vec{b}_{m,0} & \dots & \vec{b}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^n(v) \\ B_n^n(v) \end{bmatrix}$$

Για $m = n = 1$, λαμβάνουμε τη διγραμμική περίπτωση, για $m = n = 2$, λαμβάνουμε τη διτετράγωνη περίπτωση, ενώ για την ειδική περίπτωση που $m = n = 3$, λαμβάνεται δικυβικό *Bezier patch*.



ΕΙΚΟΝΑ 4.1 : Επιφάνεια Bezier

Πηγή : <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3e/Surface1.jpg>

Παρακάτω παρατίθενται ορισμένες ιδιότητες των *Bezier patches* :

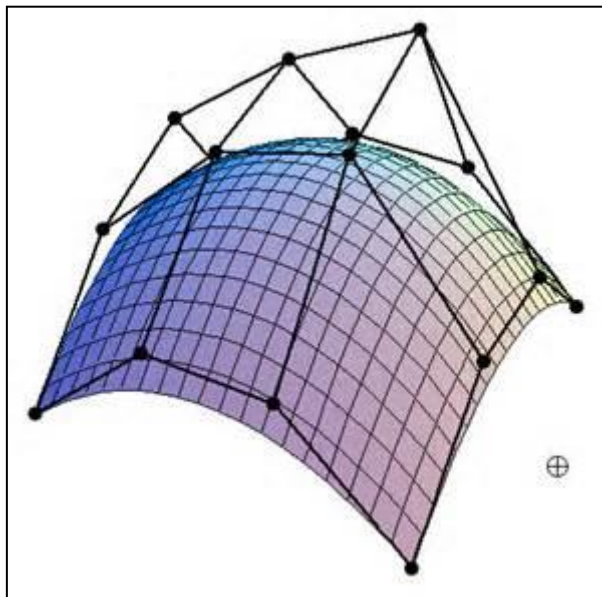
- ❖ Παρεμβολή στα άκρα τους : Ακριβώς ανάλογα με τις καμπύλες, το *patch* διέρχεται από τα τέσσερα γωνιακά *control points* που το ορίζουν. Δηλαδή :

$$\begin{aligned} \vec{x}(0, 0) &= \vec{b}_{0,0} & \vec{x}(1, 0) &= \vec{b}_{m,0} \\ \vec{x}(0, 1) &= \vec{b}_{0,n} & \vec{x}(1, 1) &= \vec{b}_{m,n} \end{aligned}$$

Ωστόσο, αυτή η ιδιότητα είναι πολύ πιο σημαντική για την περίπτωση της επιφάνειας από αυτή της καμπύλης. Ισχύει επίσης ότι τα σημεία στις πλευρές του *control polygon* είναι τα *control points* των πλευρών του *patch* (καμπύλες *Bezier*). Για παράδειγμα, η καμπύλη $\vec{x}(u, 1)$ έχει *control polygon* $\vec{b}_{0,n}, \dots, \vec{b}_{m,n}$.

- ❖ Συμμετρία : Μπορούμε να αλλάξουμε τους δείκτες των *control points* έτσι ώστε οποιοδήποτε από αυτά να αντιστοιχεί στο $\vec{b}_{0,0}$ χωρίς να αλλάζει η επιφάνεια που υπολογίζεται.
- ❖ Η επιφάνεια μένει ανεπηρέαστη από αφινικούς μετασχηματισμούς. Δηλαδή, αν εφαρμοστεί ένας αφινικός μετασχηματισμός στο *control polygon*, τότε η επιφάνεια μετασχηματίζεται με τον ίδιο μετασχηματισμό, χωρίς να αλλάζει σε τίποτα η μορφή της.
- ❖ Διγραμμική ακρίβεια : Τα *control points* των πλευρών πλευρών του *patch*, είναι σε ίσες αποστάσεις, και επί των ευθειών που συνδέουν τα γωνιακά *control points*.

- ❖ Ιδιότητα *convex hull* : Ό,τι ακριβώς ισχύει για τη μονοδιάστατη περίπτωση (καμπύλες), ισχύει και για τη δισδιάστατη (επιφάνειες).
- ❖ Γινόμενο τανυστών : Τα *Bezier patches* ανήκουν στην κλάση των επιφανειών που προκύπτουν ως γινόμενο τανυστών. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει την ανάλυσή τους, μέσω των u – και v – παραμετρικών καμπυλών, γεγονός που σημαίνει απλοποίηση στην κατασκευή και τον χειρισμό τους. Η ιδιότητα του γινομένου τανυστών είναι αυτή που απλοποιεί κατά πολύ την κατανόηση των *Bezier patches* (Τσιρίγκας, 2011).



ΕΙΚΟΝΑ 4.2 : Επιφάνεια Bezier

Πηγή : <http://glasnost.itcarlow.ie/~powerk/GeneralGraphicsNotes/CurvesandSurfaces/bez.GIF>

4.4. Αύξηση Βαθμού Ενός Bezier Patch

Ένα *Bezier patch*, έχει δύο βαθμούς : m κατά τη u –διεύθυνση και n κατά τη v –διεύθυνση. Κάθε ένας από τους βαθμούς αυτούς μπορεί να αυξηθεί μέσω μίας απλής διαδικασίας. Έστω ότι γίνεται αύξηση του βαθμού m σε $m + 1$, για παράδειγμα. Το *control net* που προκύπτει (το οποίο συνεχίζει να περιγράφει την ίδια ακριβώς επιφάνεια), θα έχει πλέον $n + 1$ στήλες από *control points*, κάθε μία από τις οποίες θα περιέχει $m + 2$ *control points*.

5. ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, τονίζεται το γεγονός ότι ένα *Bezier patch* σπάνια μπορεί να μοντελοποιήσει από μόνο του ένα αληθινό επιφανειακό τμήμα. Επομένως, περισσότερα του ενός *patches* θα συνενωθούν συνήθως, είτε στη μορφή μιας σύνθετης επιφάνειας *Bezier*, είτε μιας σύνθετης επιφάνειας *B – spline*.

5.1. Σύνθετες Επιφάνειες *Bezier*

Θεωρούμε το $b_{i,j} : 0 \leq i, j \leq 3$ δικυβικό *Bezier patch* το οποίο ονομάζεται αριστερό *patch*. Επίσης, έστω $b_{i,j} : 3 \leq i \leq 6, 0 \leq j \leq 3$ ένα δεύτερο δικυβικό *Bezier patch*, που ονομάζεται δεξί *patch*, έτσι ώστε να μοιράζονται ένα κοινό σύνορο. Όπως συνηθίζεται για τμηματικά αντικείμενα, υπεισέρχονται κάποιες υποθέσεις για τα *parametric domains* (διαστήματα) των δύο *patches*. Θεωρούμε ότι το αριστερό έχει ως *domain* το τετράγωνο $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$, ενώ το δεξί έχει το τετράγωνο $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$. Έτσι, τα δύο *domain* ικανοποιούν την ίδια συννοριακή πληροφορία η οποία ισχύει για τα *patches*, δηλαδή ότι μοιράζονται το ίδιο $u = 1$ όριο.

Ως προς τις συνθήκες που μας εξασφαλίζουν τη λειότητα της σύνθετης επιφάνειας, είναι απροσδόκητα απλές. Συγκεκριμένα, στις δικυβικές επιφάνειες, πρέπει οποιαδήποτε τρία σημεία $b_{2,j}, b_{3,j}, b_{4,j}$ να είναι συνευθειακά.

Αν οι βαθμοί των *patches* είναι μεγαλύτεροι από κυβικοί, προκύπτουν ακριβώς ανάλογες συνθήκες για τη λειότητα. Όμως, όταν έχουμε ένα δίκτυο από *patches*, υπάρχει ένα μειονέκτημα της παραπάνω διαδικασίας. Καθώς υπάρχουν μόνο δύο *knot vectors* (ένα για την κατεύθυνση u και ένα για την κατεύθυνση v), παρουσιάζονται ζητήματα έλλειψης ευελιξίας. Στην περίπτωση που δεν έχουν όλες οι u – παραμετρικές καμπύλες παρόμοιο σχήμα, τότε ένα κοινό *knot vector*, δεν μπορεί να δώσει ικανοποιητική περιγραφή για όλες τις u – παραμετρικές καμπύλες. Το ίδιο ισχύει και για τις v – παραμετρικές καμπύλες.

5.2. Σύνθετες Επιφάνειες *B – spline*

Οι επιφάνειες *B – spline* διαθέτουν όλα τα πλεονεκτήματα των *Bezier patches*, όπως η συμμετρία, το ότι μένουν ανεπηρέαστες από αφινικούς μετασχηματισμούς καθώς και η ιδιότητα του *convex hull*.

Ωστόσο, υπάρχουν δύο μεγάλες διαφορές. Τα οριακά πολύγωνα του *control mesh*, πρόκειται να είναι *control polygons* των οριακών καμπυλών, μόνο αν οι ακραίοι *knots* έχουν πλήρη πολλαπλότητα m και n . Αυτό είναι ανάλογο με την ιδιότητα των καμπυλών *B – spline* να παρουσιάζουν παρεμβολή στα άκρα τους. Επίσης, οι επιφάνειες *B – spline* έχουν την ιδιότητα του τοπικού ελέγχου. Αν ένα *control point* μετατοπιστεί, τότε, θα επηρεαστούν μόνο έως $(m + 1) \times (n + 1)$ *patches* στη γειτονιά του.

Μία επιφάνεια *B – spline*, αποτελείται από ένα σύνολο ανεξάρτητων πολυωνυμικών *patches*, ειδικότερα $(D - m) \times (E - n)$, αν όλοι οι *knots* των *domain knot vectors* είναι

απλοί. Κάθε ένα από αυτά τα *patches* μπορεί να γραφτεί σε *Bezier* μορφή, δηλαδή σαν *patches* βαθμού m στην u – διεύθυνση και n στη v – διεύθυνση (Τσιρίγκας, 2011).

6. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ (*RIGID BODY TRANSFORMATION*)

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, αναλύεται ο, γνωστός από τη Γεωδαισία και Φωτογραμμετρία κυρίως, γεωμετρικός μετασχηματισμός του στερεού σώματος.

Ο μετασχηματισμός στερεού σώματος αποτελεί έναν τρισδιάστατο μετασχηματισμό συντεταγμένων. Ως στερεό σώμα, ορίζεται γεωμετρικά ένα τρισδιάστατο σημειοσύνολο XYZ το οποίο, μετασχηματιζόμενο, δεν μεταβάλλεται κατά σχήμα και μέγεθος. Υπό αυτή την έννοια, σε ένα τρισσορθογώνιο σύστημα, ο μετασχηματισμός στερεού σώματος, εμπλέκει, στη γενικότερη περίπτωση, έξι συνολικά βαθμούς ελευθερίας, που εκφράζονται από τις ακόλουθες έξι παραμέτρους (Καρράς, 1998):

- ❖ τρεις συνιστώσες X_0, Y_0, Z_0 του διανύσματος της μετάθεσης \vec{T} κατά τους τρεις άξονες X, Y, Z
- ❖ τρεις στροφές κατά τις γωνίες ω, φ, κ περί τους ίδιους άξονες X, Y, Z , αντίστοιχα, οι οποίες και συγκροτούν τον πίνακα στροφής R διαστάσεων 3×3 (Παράρτημα 1.9.).

Αν \vec{X} είναι το διάνυσμα τυχόντος σημείου στο σύστημα XYZ και \vec{X}' το διάνυσμα του ίδιου σημείου σε σύστημα $X'Y'Z'$ που διαφέρει κατά στροφή και μετάθεση από το πρώτο, ο μετασχηματισμός στερεού σώματος, εκφράζεται ισοδύναμα ως :

$$\vec{X}' = \vec{T} + R \vec{X}$$

Η μορφή ενός πίνακα στροφής R (3×3), εξαρτάται από τη σειρά με την οποία θεωρούνται οι στροφές. Γενικά, υιοθετείται η διαδοχή ω, φ, κ :

$$R = R_\kappa \cdot R_\varphi \cdot R_\omega$$

Ο μετασχηματισμός στερεού σώματος, είναι αμφιμονοσήμαντος. Βάσει των γνωστών ιδιοτήτων των πινάκων στροφής (ορθογωνικότητα), ισχύει :

$$R^{-1} = R^T = R_{(-\omega)} \cdot R_{(-\varphi)} \cdot R_{(-\kappa)}$$

Ένας πραγματικός πίνακας A είναι ορθογώνιος αν $A^T = A^{-1}$, εάν δηλαδή $AA^T = A^T A = I$. Ως εκ τούτου, ο πίνακας A πρέπει να είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός, μπορεί να γραφτεί τότε, ως :

$$\vec{X} = -\vec{T} + R^T \vec{X}'$$

Υπενθυμίζεται ότι για τον \mathbb{R}^3 , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, οι επιτρεπτές αλλαγές συντεταγμένων, είναι οι στροφές και οι μεταθέσεις. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, συμπεραίνεται ότι ο μετασχηματισμός στερεού σώματος, αποτελεί μία επιτρεπτή αλλαγή συντεταγμένων στον \mathbb{R}^3 .

7. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΚΡΟΥΣΤΗ (*PROCRUSTES TRANSFORMATION*)

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται μία μέθοδος βελτιστοποίησης, ουσιαστικά, γνωστή ως *Ανάλυση του Προκρούστη* ή απλά *Προκρούστης*. Με την εφαρμογή της ανάλυσης του Προκρούστη, οι γραμμικοποιήσεις μη γραμμικών σχέσεων, ο ορισμός αρχικών τιμών, καθώς και η επαναληπτική διαδικασία κατά τη συνόρθωση, αποφεύγονται.

Η ανάλυση του Προκρούστη, είναι μία τεχνική αντιστοίχισης ενός συνόλου, σε ένα άλλο, έτσι ώστε να υπολογιστεί το μέτρο αυτής της αντιστοίχισης. Με όρους συνόρθωσης, το πρόβλημα του Προκρούστη, διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, μετασχηματισμού ενός δοσμένου πίνακα A σε έναν άλλο, επίσης δοσμένο, πίνακα B , μέσω ενός ορθογώνιου πίνακα μετασχηματισμού T , έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων του πίνακα των υπολοίπων $E = A - B T$ να είναι ελάχιστο.

Δηλαδή, με τον αλγόριθμο του Προκρούστη, το μόνο που χρειάζεται από τον χρήστη, είναι η εισαγωγή των συντεταγμένων σε ένα σύστημα αναφοράς (για παράδειγμα οι συντεταγμένες σε ένα τοπικό σύστημα αναφοράς) που αντιστοιχούν στον πίνακα A και οι αντίστοιχες συντεταγμένες σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς (για παράδειγμα στο *GPS* του *WGS - 84*) που αντιστοιχούν στον πίνακα B . Τότε, ο πίνακας μετάθεσης T , ο πίνακας στροφής R , αλλά και ο πίνακας της κλίμακας S του μετασχηματισμού αυτού, υπολογίζονται απευθείας (*straight - forward approach*), χωρίς να απαιτούνται ούτε γραμμικοποιήσεις, ούτε προσωρινές τιμές, ούτε επαναλήψεις. Δηλαδή, μπορεί να επιλυθεί απευθείας ένας τρισδιάστατος μετασχηματισμός στερεού σώματος, ένας τρισδιάστατος μετασχηματισμός ομοιότητας και γενικότερα ακόμα, ένας τρισδιάστατος αφινικός μετασχηματισμός (προφανώς, αυτό ισχύει και για τους μετασχηματισμούς στον χώρο των δύο διαστάσεων του επιπέδου). Αξίζει να σημειωθεί ότι στον αλγόριθμό του Προκρούστη, είναι δυνατή και η εισαγωγή πίνακα βαρών W κατά τη βελτιστοποίηση (Awange, et al., 2010).

Ως μερικό ή απλό πρόβλημα του Προκρούστη (*partial Procrustes*), ορίζεται εκείνο στο οποίο ο μοναδικός άγνωστος μεταξύ των δύο συστημάτων είναι:

- ❖ Ο πίνακας στροφής R (τρισδιάστατος μετασχηματισμός στροφής)

Δηλαδή, πρόκειται για έναν τρισδιάστατο μετασχηματισμό στροφής.

Ως γενικό πρόβλημα του Προκρούστη (*general Procrustes*), ορίζεται εκείνο στο οποίο οι άγνωστοι είναι:

- ❖ Ο πίνακας μετάθεσης T
- ❖ Ο πίνακας στροφής R και
- ❖ Ο πίνακας κλίμακας S , στον οποίο έχουμε ενιαία κλίμακα και στις τρεις διαστάσεις :

$$S = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

Δηλαδή, πρόκειται για έναν τρισδιάστατο μετασχηματισμό ομοιότητας.

Ως ABC πρόβλημα του Προκρούστη (ABC Procrustes), ορίζεται εκείνο στο οποίο οι άγνωστοι είναι:

- ❖ Ο πίνακας μετάθεσης T
- ❖ Ο πίνακας στροφής R και
- ❖ Ο πίνακας κλίμακας S στον οποίο έχουμε διαφορετικές κλίμακες στις τρεις διαστάσεις :

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$$

Δηλαδή, πρόκειται για έναν τρισδιάστατο αφινικό μετασχηματισμό.

Το ABC πρόβλημα του προκρούστη εφαρμόζεται με επιτυχία στις περιπτώσεις που έχουμε ήπια ανισοτροπία στον πίνακα κλίμακας.

Στη περίπτωση που εμφανίζεται έντονη ανισοτροπία στον πίνακα κλίμακας S , τότε εφαρμόζεται το PZ πρόβλημα του προκρούστη (PZ Procrustes).

Εν προκειμένω, επιβάλλεται ένας μετασχηματισμός στερεού σώματος. Επομένως, το πρόβλημα του Προκρούστη που πρέπει να εφαρμοστεί είναι εκείνο του γενικού αλγορίθμου Προκρούστη (*general Procrustes*) με τη διαφορά ότι δεν πρέπει να υπάρχει ο πίνακας κλίμακας (πίνακας ομοιότητας) ή να υπάρχει μεν ο πίνακας κλίμακας, αλλά να είναι μοναδιαίος ώστε να μην επηρεάζεται το σχήμα, αλλά μόνο η θέση στον χώρο:

$$S = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί η καμπυλότητα και η στρέψη που είναι αναλλοίωτα μεγέθη μίας καμπύλης και μάλιστα καθορίζουν τη μορφή της, δεν πρέπει να μεταβληθούν κατά τον μετασχηματισμό (οι επιτρεπτές αλλαγές συντεταγμένων, είναι οι στροφές και οι μεταθέσεις).

Με άλλα λόγια, αφού βρεθεί η μορφή του άξονα της οδού μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης με τη βοήθεια των εξισώσεων *Frenet* και του θεμελιώδους θεωρήματος καμπυλών, στη συνέχεια επιδιώκεται η ορθή τοποθέτησή του στον χώρο.

Κίνητρο του αλγορίθμου

Έστω ότι ένα σημείο P_i , δίνεται σε δύο συστήματα αναφοράς (X_i, Y_i, Z_i) και (x_i, y_i, z_i) . Ο μετασχηματισμός από το ένα σύστημα στο άλλο, υλοποιείται με "μία" μετάθεση και "μία" στροφή. Η σχέση, μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \mathcal{R} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

όπου $(X_0, Y_0, Z_0) \in \mathfrak{R}$ το διάνυσμα της μετάθεσης και $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ ο πίνακας στροφής που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση :

$$\mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathcal{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας στροφής, μπορεί να εκφραστεί και μέσω ενός αντισυμμετρικού πίνακα (*skew matrix*) \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

ως εξής :

$$\mathcal{R} = (\mathcal{I}_3 - \mathcal{S})^{-1} (\mathcal{I}_3 + \mathcal{S})$$

Ένας αντισυμμετρικός πίνακας \mathcal{S} , έχει την ιδιότητα: $\mathcal{S} \equiv -\mathcal{S}^T$

Το κάθε σημείο μεταφράζεται σε τρεις εξισώσεις. Έτσι, οι έξι παράμετροι του μετασχηματισμού (X_0, Y_0, Z_0, a, b, c) απαιτούν κατά ελάχιστο, δύο σημεία για να οριστούν (τα σημεία αυτά, πρέπει να είναι τα ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς).

Γενίκευση του αλγορίθμου μετασχηματισμού στερεού σώματος του Προκρούστη και εισαγωγή πίνακα βαρών \mathcal{W}

Η μορφή των παραπάνω εξισώσεων, στην περίπτωση που έχουμε N σημεία, γίνεται :

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [X_0 \quad Y_0 \quad Z_0] + \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_N & Y_N & Z_N \end{bmatrix} \mathcal{R}^T + \varepsilon$$

όπου ε είναι ο πίνακας σφάλματος.

Σε συνεπτυγμένη μορφή, η παραπάνω σχέση, γράφεται ως εξής :

$$xyz = XYZ \mathcal{R}^T + \mathcal{L} XYZ_0^T + \varepsilon$$

όπου

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ με μήκος } N$$

Ο πίνακας σφάλματος, εκφράζεται ως εξής :

$$\varepsilon = xyz - XYZ \mathcal{R}^T - \mathcal{L} XYZ_0^T$$

Εισάγοντας τον πίνακα βαρών \mathcal{W} ως :

$$\mathcal{W} = \text{diagonal}(w_1, \dots, w_N)$$

και μετά τετραγωνίζοντας τη νόρμα του *Frobenius* (*Frobenius norm*) (Παράρτημα Α.10.) του πίνακα σφάλματος (με εφαρμοσμένο τον πίνακα βαρών πάνω του), έχουμε :

$$(\|\mathcal{E}\|_{\mathcal{W}}^2 = \text{trace}(\mathcal{E}^T \mathcal{W} \mathcal{E}))$$

Το πρόβλημα, έγκειται, στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης στόχου :

$$(\|\mathcal{E}(XYZ_0, \mathcal{R})\|_{\mathcal{W}}^2 \rightarrow \min)$$

που υπόκεινται στους περιορισμούς :

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R} = I_3 \text{ και } \|\mathcal{R}\| = 1$$

Ο αλγόριθμος που λύνει το παραπάνω πρόβλημα είναι ο εξής :

1) Υπολογίζεται ο κεντροσυμμετρικός πίνακας (*centering matrix*) C (Παράρτημα 1.11.):

$$C = I_N - \frac{1}{N} \mathcal{L} \mathcal{L}^T$$

όπου I_N ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $N \times N$

2) Υπολογίζεται ο πίνακας A :

$$A = xyz^T C^T \mathcal{W} C XYZ$$

3) Εφαρμόζοντας μία παραγοντοποίηση *SVD* (*Singular Value Decomposition*) στον πίνακα A , παίρνουμε τους πίνακες U, V και $\text{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, έτσι ώστε :

$$A = U \text{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) V$$

Ουσιαστικά, η *SVD*, είναι μία μέθοδος παραγοντοποίησης ενός πίνακα.

4) Τότε, ο πίνακας στροφής \mathcal{R} , μπορεί να υπολογιστεί ως εξής :

$$\mathcal{R} = U V^T$$

5) Ο πίνακας στροφής \mathcal{R} , μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός αντισυμμετρικού πίνακα \mathcal{E} :

$$\mathcal{R} = (I_3 - \mathcal{E})^{-1} (I_3 + \mathcal{E})$$

Κατά συνέπεια, ο αντισυμμετρικός πίνακας \mathcal{E} είναι ίσος με :

$$\mathcal{E} = (\mathcal{R} - I_3)^{-1} (\mathcal{R} + I_3)$$

Τότε, οι παράμετροι a, b, c , μπορεί να υπολογιστούν από τον αντισυμμετρικό πίνακα \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

6) Το διάνυσμα μετάθεσης, XYZ_0 ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση :

$$\mathcal{L}^T \mathcal{W} \mathcal{L} XYZ_0 = (xyz - XYZ \mathcal{R}^T)^T \mathcal{W} \mathcal{L}$$

Συνεπώς

$$XYZ_0 = (\mathcal{L}^T \mathcal{W} \mathcal{L})^{-1} (xyz - XYZ \mathcal{R}^T)^T \mathcal{W} \mathcal{L}$$

Η εκτέλεση του αλγορίθμου στο *Mathematica*, γίνεται *straightforward* και φαίνεται στο Πρόγραμμα 7.1 :

```
ProcrustesRigidBody[xyz_, XYZ_, W_] := Module[
  {n, unit, CC, A, U, V, E, R, T, Δ, Err},
  n = Dimensions[xyz][[1]];
  unit = Table[{1}, {i, 1, n}];
  CC = IdentityMatrix[n] -  $\frac{1}{n}$  * unit.Transpose[unit];
  A = Transpose[xyz].Transpose[CC].W.CC.XYZ;
  {U, E, V} = SingularValueDecomposition[SetPrecision[A, 20]];
  R = U.Transpose[V];
  T = Flatten[Inverse[Transpose[unit].W.unit]][[1]] *
    Transpose[xyz - XYZ.Transpose[R]].W.unit;
  Δ = xyz - XYZ.Transpose[R] - unit.Transpose[T];
  Err = Tr[Transpose[Δ].W.Δ];
  {R, T, Err}];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 7.1 : Μετασχηματισμός Στερεού Σώματος του Προκρούστη με πίνακα βαρών W

όπου οι μεταβλητές εισόδου, είναι :

- ❖ xyz – πίνακας συνεταγμένων στο σύστημα αναφοράς που στοχεύουμε να φτάσουμε
- ❖ XYZ – πίνακας συνεταγμένων στο αρχικό σύστημα αναφοράς
- ❖ W – (διαγώνιος) πίνακας βαρών

ενώ οι μεταβλητές εξόδου, είναι :

- ❖ T - πίνακας-διάνυσμα μετάθεσης
- ❖ R - πίνακας στροφής
- ❖ Err – το μέτρο του σφάλματος του αλγορίθμου

Ειδικότερα, αν θεωρηθεί ότι οι παρατηρήσεις (συντεταγμένες) είναι ισοβαρείς, τότε ο πίνακας των βαρών W δεν υφίσταται ή θεωρείται μοναδιαίος. Η εκτέλεση του αλγορίθμου στο *Mathematica*, γίνεται :

```

ProcrustesRigidBody[xyz_, XYZ_] := Module [
  {n, unit, CC, A, U, V, S, R, T, Δ, Err},
  n = Dimensions[xyz][[1]];
  unit = Table[{1}, {i, 1, n}];
  CC = IdentityMatrix[n] -  $\frac{1}{n}$  * unit.Transpose[unit];
  A = Transpose[xyz].Transpose[CC].CC.XYZ;
  {U, S, V} = SingularValueDecomposition[SetPrecision[A, 20]];
  R = U.Transpose[V];
  T = Flatten[Inverse[Transpose[unit].unit]][[1]]
    * Transpose[xyz - XYZ.Transpose[R]].unit;
  Δ = xyz - XYZ.Transpose[R] - unit.Transpose[T];
  Err = Tr[Transpose[Δ].Δ];
  {R, T, Err}];

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 7.2 : Μετασχηματισμός Στερεού Σώματος του Προκρούστη χωρίς πίνακα βαρών W

όπου οι μεταβλητές εισόδου, είναι :

- ❖ xyz – πίνακας συντεταγμένων στο σύστημα αναφοράς που στοχεύουμε να πάμε
- ❖ XYZ – πίνακας συντεταγμένων στο αρχικό σύστημα αναφοράς

ενώ οι μεταβλητές εξόδου, είναι :

- ❖ T - πίνακας-διάνυσμα μετάθεσης
- ❖ R - πίνακας στροφής
- ❖ Err – το μέτρο του σφάλματος του αλγορίθμου

Στη συνέχεια, η εκτέλεση του αλγορίθμου του μετασχηματισμού στερεού σώματος στο *Mathematica*, γίνεται ως εξής :

```

RigidBodyTransformation[data1_, T_, R_] := Module[{data2, Tgeneral, n},
  n = Dimensions[data1][[1]];
  Tgeneral = SparseArray[{{i_, 1} → T[[1, 1]],
    {i_, 2} → T[[2, 1]], {i_, 3} → T[[3, 1]]}, {n, 3}];
  data2 = Tgeneral + data1.Transpose[R];
  data2];

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 7.3 : Μετασχηματισμός Στερεού Σώματος

όπου οι μεταβλητές εισόδου, είναι :

- ❖ $data1$ – πίνακας συντεταγμένων στο αρχικό σύστημα αναφοράς
- ❖ T - πίνακας-διάνυσμα μετάθεσης

- ❖ \mathcal{R} - πίνακας στροφής

ενώ η μοναδική μεταβλητή εξόδου, είναι :

- ❖ *data2* – πίνακας συντεταγμένων στο σύστημα αναφοράς που στοχεύουμε να υλοποιηθούν οι συντεταγμένες

8. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται μία συνοπτική περιγραφή των βημάτων που ακολουθούνται κατά τη μελέτη ενός οδικού έργου. Σκοπός αυτής της περιγραφής, είναι να κατανοηθεί η σύνδεση των μαθηματικών εννοιών που χρησιμοποιούνται στο υπό κατασκευή μαθηματικό μοντέλο με την οδοποιία και κυρίως να τονιστεί η σπουδαιότητα των περιορισμών που τίθενται στα διάφορα μεγέθη όπως είναι η επίκλιση της οδού, κατά τη μελέτη.

8.1. Κυκλοφοριακή μελέτη

Η μελέτη της οδού, έχει ως αντικειμενικό σκοπό, να προσφέρει στα οχήματα που πρόκειται να κυκλοφορήσουν σε αυτή, γρήγορη, ασφαλή και άνετη κίνηση, σε συνδυασμό πάντα με την ελάχιστη δυνατή δαπάνη κατασκευής και συντήρησης της οδού και τον σεβασμό στο περιβάλλον.

Καταρχήν, πρέπει να μελετηθούν οι παράγοντες, οι οποίοι επηρεάζουν τις παραπάνω προϋποθέσεις για μία καλή μελέτη. Οι κυριότεροι είναι :

- ❖ Ο προβλεπόμενος κυκλοφοριακός φόρτος της νέας οδού για το παρόν και το μέλλον (τριάντα χρόνια μετά την κατασκευή του για παράδειγμα).
- ❖ Η προβλεπόμενη κυκλοφοριακή σύνθεση, δηλαδή το είδος των οχημάτων που προβλέπεται να κυκλοφορήσουν.
- ❖ Η μορφολογία και η σύσταση του εδάφους της περιοχής της νέας οδού, αλλά και η απαιτούμενη δαπάνη για την απαλλοτρίωση των ιδιοκτησιών που θα καταλάβει η οδός.
- ❖ Ο βαθμός ασφαλείας της οδού.
- ❖ Οι διατιθέμενοι πόροι για τη κατασκευή της συγκεκριμένης οδού, οι οποίοι βρίσκονται σε άμεση σχέση με την εθνική οικονομία της χώρας.

Η σπουδή όλων των παραπάνω παραγόντων, που επηρεάζουν τη μελέτη μίας νέας οδού, αποτελεί, τη λεγόμενη κυκλοφοριακή μελέτη της οδού (Κωτσόβολος, 1975).

Βάσει των συμπερασμάτων της κυκλοφοριακής μελέτης, κάθε οδός κατατάσσεται σε κάποια κατηγορία οδού σύμφωνα με το κεφάλαιο "Λειτουργική Κατάταξη Οδικού Δικτύου" των Οδηγιών Μελετών Οδικών Έργων (ΟΜΟΕ – ΑΚΟΔ) (Ψαριανός, 2001).

Ταχύτητα μελέτης μίας υπό κατασκευή οδού, ονομάζεται η μέγιστη ταχύτητα που τα οχήματα έχουν τη δυνατότητα να αναπτύξουν με ασφάλεια σε αυτή. Όμως, για να επιτευχθεί η ταχύτητα αυτή πρακτικά, πρέπει να εφαρμοστούν επακριβώς, όλα τα προβλεπόμενα χαρακτηριστικά της μελέτης της οδού. Πλέον, η έννοια της ταχύτητας μελέτης, έχει αντικατασταθεί από την έννοια του ορίου ταχύτητας.

Καλό είναι , να καθορίζεται ενιαίο όριο ταχύτητας για ολόκληρη την υπό μελέτη οδό. Λόγοι, όπως η δαπάνη, επιβάλλουν τη μείωση της ταχύτητας σε ορισμένα τμήματα, επομένως και τη διαίρεση της οδού σε τμήματα με διάφορες ταχύτητες. Πάντως, επιδιώκεται η ταχύτητα

στα διάφορα τμήματα της οδού, να είναι αυτή, που έχει καθοριστεί για την κατηγορία στην οποία ανήκει η οδός.

Το πλάτος b του οδοστρώματος, έχει μεγάλη σημασία, τόσο για την άνεση και την ασφάλεια της κυκλοφορίας, όπως είναι φυσικό, όσο και για τον καθορισμό του μήκους απόσβεσης της επίκλισης στα καμπύλα τμήματα. Το πλάτος b του οδοστρώματος, εξαρτάται από την κατηγορία στην οποία ανήκει η οδός και δίνεται στο κεφάλαιο ‘Διατομές’ των Οδηγιών Μελετών Οδικών Έργων (ΟΜΟΕ – Δ) (Ψαριανός, 2001).

Καλό είναι, για την άνεση και την ασφάλεια της κυκλοφορίας, όλες οι οδοί να έχουν τουλάχιστο δύο ίχνη (τροχιές), εκ των οποίων κάθε ένα, να έχει πλάτος $b/2$, όπου :

$$\frac{b}{2} = 3,50 \div 3,75 \text{ m}$$

Αν προστεθούν και οι ζώνες καθοδήγησης από 0,50 m περίπου, το επιθυμητό συνολικό πλάτος οδοστρώματος, οδού δύο ιχμών, πρέπει να ανέρχεται σε :

$$b = 8,00 \div 8,50 \text{ m}$$

Τέλος, η μέγιστη επίκλιση q_{max} , σε διατομή της οδού, καθορίζεται από τους παρακάτω κυριότερους παράγοντες :

- ❖ Από τις κλιματολογικές συνθήκες
- ❖ Από τον χαρακτηρισμό του εδάφους ως πεδινού, λοφώδους ή ορεινού
- ❖ Από τον χαρακτηρισμό της περιοχής ως αγροτικής ή αστικής
- ❖ Από την πυκνότητα των πολύ βραδέως κινουμένων οχημάτων

Όπως είναι φανερό, οι παραπάνω παράγοντες, μεταβάλλονται από τόπο σε τόπο. Στην Ελλάδα, ορίζεται ως μέγιστη επίκλιση για όλες τις κατηγορίες οδών η τιμή $q_{max} = 6 \%$ ή $q_{max} = 8 \%$ σε εξαιρετικές περιπτώσεις.

8.2. Πολυγωνική

Από άποψη χωματισμών, η ισοκλινής γραμμή θεωρείται οικονομικά, η άριστη χάραξη, καθώς εξασφαλίζει την ελάχιστη δαπάνη κατασκευής.

Πράγματι, με την παραδοχή της ισοκλινούς ως τελική χάραξη, τα εκχώματα και επιχώματα σε κάθε διατομή, που δημιουργούνται από το πλάτος της οδού, έχουν στον άξονα της οδού, ύψος ίσο με το μηδέν. Για τον λόγο αυτό, η ισοκλινής γραμμή καλείται και μηδενική ή οδηγήτρια γραμμή.

Πέραν όμως, της επιδιωκόμενης ελάχιστης δαπάνης κατασκευής, προέχει οπωσδήποτε και η εξασφάλιση της προβλεπόμενης, για την κατηγορία της οδού, ταχύτητας (όριο ταχύτητας).

Για ορισμένο όμως όριο ταχύτητας αντιστοιχούν κάποια ελάχιστα όρια για ορισμένα γεωμετρικά μεγέθη όπως η καμπυλότητα του άξονα της οδού. Το γεγονός αυτό, έχει ως

συνέπεια την επιβολή ελάχιστης απόστασης μεταξύ των διαδοχικών κορυφών της χάραξης. Όμως, η απόσταση αυτή, δεν εξασφαλίζεται γενικά, από την ισοκλινή γραμμή.

Εκτός αυτού, η χάραξη, απαιτεί όσο το δυνατόν τεταμένη πορεία, σε συνδυασμό βέβαια με τη δαπάνη κατασκευής.

Για τους παραπάνω λόγους, λαμβάνεται μεν ως οδηγήτρια καμπύλη η ισοκλινής όσον αφορά τη δαπάνη κατασκευής, όμως, ακολουθεί τη τεταμένη πορεία της πολυγωνικής.

Η χάραξη της πολυγωνικής γραμμής, επιδιώκει πάντοτε να συμβιβάζει τις συγκρουόμενες απαιτήσεις, της ελάχιστης δαπάνης κατασκευής και της τεταμένης χάραξης.

Τα σημεία τομής των ευθυγράμμων τμημάτων της πολυγωνικής, δηλαδή οι κορυφές της, επιλέγονται σε τέτοια θέση, ώστε ο καμπύλος άξονας της οδού να διέρχεται ή να διαχωρίζει, τα σημεία της ισοκλινούς.

Εκτροπή του άξονα της οδού από την οδηγήτρια ισοκλινή προς τα ανάντη (δηλαδή προς τα υψηλότερα μέρη του εδάφους), σημαίνει δημιουργία εκχώματος. Αντίθετα, προς τα κατόντη, σημαίνει δημιουργία επιχώματος.

Γενικά, κατά τη χάραξη της κατάλληλης πολυγωνικής, επιδιώκεται να επικρατεί για ολόκληρη την οδό, το προβλεπόμενο όριο ταχύτητας. Όμως, πολλές φορές, λόγω της ανώμαλης μορφολογίας και της βραχύδους σύστασης τμήματος της υπό μελέτη εδαφικής ζώνης, επιβάλλεται η μείωση του ορίου ταχύτητας στο τμήμα αυτό, προκειμένου η πολυγωνική να προσεγγίσει περισσότερο την οδηγήτρια ισοκλινή. Αυτό ενδείκνυται στις περιπτώσεις που μικρή μείωση του ορίου ταχύτητας, επιφέρει μεγάλη μείωση της δαπάνης κατασκευής.

Αντίστροφα, πολλές φορές επιβάλλεται η επίτευξη μεγαλύτερου ορίου ταχύτητας, σε τμήματα όπου σημαντική αύξησή της, επιφέρει μικρή μόνο αύξηση της δαπάνης.

Επομένως, πριν τη χάραξη της πολυγωνικής και ανάλογα με τη μορφή της ισοκλινούς και της σύστασης του εδάφους, επιβάλλεται η διαίρεση της οδού σε τμήματα ενιαίου ορίου ταχύτητας. Πάντως, καλό είναι, τα τμήματα αυτά, να είναι όσο το δυνατόν λιγότερα σε αριθμό και επομένως, μεγαλύτερα σε μήκος. Επιπλέον, οι ταχύτητες των τμημάτων αυτών, επιβάλλεται να πλησιάζουν όσο το δυνατόν, το καθορισμένο όριο ταχύτητας για την καθορισμένη κατηγορία της οδού.

Όταν παρατηρείται μείωση της ταχύτητας σε μία ή δύο μόνο συνεχόμενες κορυφές της πολυγωνικής, επιβάλλεται στο στάδιο της κατασκευής η κατάλληλη σήμανση μέσω προειδοποιητικής πινακίδας.

9. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στο κεφάλαιο αυτό, πραγματοποιείται η ανάλυση της μεθοδολογίας που ακολουθείται για την κατασκευή μίας τρισδιάστατης, διανυσματικής παραμετρικής επιφάνειας που τελικά αντιστοιχεί στην επιφάνεια της οδού. Η μοντελοποίηση του προβλήματος, γίνεται με χρήση του λογισμικού *Mathematica*.

9.1. Άξονας Της Οδού

Η επιφάνεια που θα κατασκευαστεί είναι μία ευθειογενής επιφάνεια. Η βασική καμπύλη ή οδηγός της ευθειογενοῦς επιφάνειας, αντιστοιχεί στον άξονα της οδού. Το ότι η βασική καμπύλη αντιστοιχεί στον άξονα της οδού, στηρίζεται στο ότι γίνεται η παραδοχή ότι η περιστροφή του οδοστρώματος (για την επίτευξη της επιθυμητής επίκλισης της οδού) γίνεται γύρω από τον άξονα της οδού. Στο υποκεφάλαιο αυτό λοιπόν, αναλύεται το πώς ορίζεται η καμπύλη αυτή.

Βέβαια, πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμα και αν η περιστροφή του οδοστρώματος γίνει γύρω από τη δεξιά ή αριστερή οριογραμμή, και πάλι είναι εφικτή η μοντελοποίηση της επιφάνειας της οδού ως μία ευθειογενής επιφάνεια.

9.1.1. Πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού

Ο άξονας της οδού, αρχικά ορίζεται ως μία καμπύλη *B – Spline*, δηλαδή σύνθεση τμηματικών καμπυλών *Bezier* όπου ως σημεία *de Boor (control points)* λαμβάνονται οι κορυφές της πολυγωνικής. Το *Mathematica*, λαμβάνει το *knot vector* της *B – Spline* με τέτοιο τρόπο ώστε η καμπύλη (άξονας της οδού), να διέρχεται από το πρώτο και τελευταίο *control point* (δηλαδή ο άξονας του δρόμου ενώνει τα δύο σημεία που γεννούν το πρόβλημα της κατασκευής της οδού). Δηλαδή, το πρώτο και τελευταίο *knot*, έχουν πολλαπλότητα ίση με τον βαθμό της τμηματικής πολυωνυμικής καμπύλης *Bezier* που αντιστοιχεί στα σημεία αυτά. Επίσης, το *Mathematica*, λαμβάνει το *knot vector* της *B – Spline* με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια της καμπυλότητας στα *junction points* (λείες καμπύλες δεύτερης τάξης, τουλάχιστον).

Με αυτήν την προσέγγιση, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ό,τι γεωμετρικό στοιχείο θέλουμε, όπως η καμπυλότητα και η στρέψη, επί του άξονα της οδού.

9.1.2. Γεωμετρία του άξονα της οδού

Ο άξονας της οδού (τρειςδιάστατη καμπύλη) θα είναι ουσιαστικά, μία συνένωση καμπυλών (αντίρροπων τμηματικών καμπυλών. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα *control points*, είναι δυνατόν να ληφθούν με τέτοιο τρόπο ώστε οι καμπύλες που θα συνενωθούν να είναι αντίρροπες (αντίρροπων τμηματικών καμπυλών *Bezier*), χωρίς κατ'ανάγκη, την παρεμβολή ευθυγράμμου τμήματος μεταξύ τους. Αυτό το γεγονός είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς η ύπαρξη αντίρροπων – σιγμοειδών καμπυλών αυξάνουν την οδική ασφάλεια της οδού.

Καμπυλότητα του άξονα της οδού

Η καμπυλότητα, επιβάλλεται να μεταβάλλεται γραμμικά (τουλάχιστον) σε σχέση με το μήκος του άξονα. Επομένως, αφού υπολογιστεί η καμπυλότητα της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού, στη συνέχεια, η καμπυλότητα μπορεί (υπενθυμίζεται η καμπυλότητα είναι παντού μη αρνητική στις τρισδιάστατες καμπύλες) να γραμμικοποιηθεί εκατέρωθεν των σημείων καμπής. Ο λόγος που η καμπυλότητα μεταβάλλεται γραμμικά έγκειται στο ότι η κλωθοειδής, που χρησιμοποιείται ως τόξο συναρμογής στην οριζοντιογραφία, έχει αυτή την ιδιότητα.

Όμως, όπως θα φανεί από την περίπτωση μελέτης, η γραμμικοποίηση της καμπυλότητας, δε χρειάζεται να γίνει τελικά. Αυτό δικαιολογείται ως εξής :

Η καμπύλη $B - Spline$, δεν εξασφαλίζει απλώς τη συνέχεια της καμπυλότητας στα *junction points*, αλλά και τη παραγωγισιμότητά της (λείες καμπύλες τρίτης τάξης, τουλάχιστον). Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα καμπυλότητας (πέρα από τα σημεία καμπής, αν υπάρχουν), δεν παρουσιάζει πουθενά αλλού “θλάσεις”. Ακόμα και στα σημεία καμπής, ο λόγος που παρουσιάζεται “γωνία” στο διάγραμμα καμπυλότητας, είναι η μη αρνητικότητα της καμπυλότητας.

Τελικά, το ότι δε χρειάζεται η γραμμικοποίηση της καμπυλότητας απορρέει από το γεγονός ότι επιβάλλεται στην καμπύλη $B - Spline$, να είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού τουλάχιστον. Έτσι, το διάγραμμα καμπυλότητας αποτελείται από τμηματικές, παραβολές δευτέρου βαθμού (τουλάχιστον). Δηλαδή, δεν εμφανίζονται θλάσεις όπως συμβαίνει με το διάγραμμα καμπυλότητας της κλωθοειδούς. Επομένως, έχουμε ακόμα πιο ομαλή μεταβολή της καμπυλότητας κατά μήκος του άξονα της οδού.

Στρέψη του άξονα της οδού

Όπως στην περίπτωση της καμπυλότητας, έτσι και στη στρέψη, δεν επιβάλλουμε κάποια αλλαγή. Έτσι, η στρέψη, υπολογίζεται σε κάθε σημείο της καμπύλης με βήμα που ορίζεται από τον χρήστη και καταχωρείται σε πίνακα ώστε να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια. Σημειώνεται ότι, το βήμα πρέπει να είναι το ίδιο με εκείνο της καμπυλότητας έτσι ώστε οι τιμές της καμπυλότητας και της στρέψης, να αντιστοιχούν κάθε φορά, στο ίδιο σημείο επί του άξονα της οδού. Τέλος, επισημαίνεται ότι μία καμπύλη είναι πολύ πιο ευαίσθητη στη στρέψη από ότι είναι στην καμπυλότητα.

9.1.3. Χρησιμότητα της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού

Με τη βοήθεια της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού και της αντιμετώπισής του, ως μία μαθηματικά ορισμένη καμπύλη, με τη βοήθεια της καμπύλης παρεμβολής $B - Spline$, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του κάθε σημείου που βρίσκεται επί του άξονα. Έτσι, οι συντεταγμένες του κάθε σημείου της καμπύλης, υπολογίζονται με βήμα χιλιοστού (ως προς τη μεταβλητή t της καμπύλης $B - Spline$). Οι συντεταγμένες αυτές, καταχωρούνται σε πίνακα ο οποίος θα αποτελέσει εισαγωγή (*input*) στον αλγόριθμο - μετασχηματισμό του στερεού σώματος του Προκρούστη ως πίνακας συντεταγμένων στο αρχικό σύστημα αναφοράς (XYZ).

9.2. Επιφάνεια Της Οδού

Υπενθυμίζεται ότι η επιφάνεια που θα κατασκευαστεί, είναι μία ευθειογενής επιφάνεια με βασική καμπύλη ή οδηγό της ευθειογενούς επιφάνειας, τον άξονα της οδού. Συγκεκριμένα, η ευθειογενής επιφάνεια, μοντελοποιείται ως εξής :

Από τη βασική καμπύλη, περνούν ευθείες κάθετες προς αυτή. Το μήκος των ευθειών αυτών, ισούται με το ημι-πλάτος της οδού.

Μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα σημείο P μίας καμπύλης, αν είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης στο σημείο P . Προφανώς, υπάρχουν άπειρες κάθετες ευθείες στο σημείο P της καμπύλης (από θεώρημα Στερεομετρίας).

Αν μία οποιαδήποτε από αυτές τις άπειρες κάθετες ευθείες περιστραφεί κατά γωνία 2π γύρω από την καμπύλη στο P , δημιουργεί έναν κύκλο ακτίνας όσο το ημι-πλάτος της οδού και με κέντρο το σημείο P . Αν γίνει αυτό σε όλα τα σημεία της καμπύλης, τότε δημιουργείται μία επιφάνεια η οποία ονομάζεται σπείρα ή τόρος (*tube*).

9.2.1. Οριζόντια επιφάνεια

Ως οριζόντια επιφάνεια της οδού, ορίζεται εκείνη η ευθειογενής επιφάνεια, της οποίας το (ορθομετρικό) υψόμετρο των γεννέτιρων σε κάθε σημείο είναι ίσο με το (ορθομετρικό) υψόμετρο του σημείου της βασικής καμπύλης (άξονας της οδού) από το οποίο περνούν.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η επεξεργασία των υψομέτρων (τρίτη συνιστώσα της διανυσματικής συνάρτησης που περιγράφει την καμπύλη – άξονα της οδού) γίνεται ως προς τα γεωμετρικά υψόμετρα h . Αυτό γίνεται γιατί ο ορισμός του γεωμετρικού υψομέτρου h στηρίζεται στον ορισμό μίας μαθηματικής επιφάνειας (ελλειψοειδές εκ περιστροφής), ενώ όλη η λογική της χάραξης στηρίζεται και αυτή στην κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου. Έτσι, το γεωμετρικό υψόμετρο είναι εκείνο που μπορεί να έχει μία αυστηρή μαθηματική σύνδεση με το μοντέλο. Στη συνέχεια βέβαια, τα γεωμετρικά υψόμετρα h θα πρέπει να μετασχηματιστούν σε ορθομετρικά υψόμετρα H , μέσω της αποχής του γεωειδούς N , ώστε να πραγματοποιηθεί τελικά, η χάραξη των σημείων στο ύπαιθρο. (*Παράρτημα Β.*).

Έτσι, με όρους οδοποιίας, μπορούμε να πούμε ότι, ως οριζόντια επιφάνεια της οδού, ορίζεται η ευθειογενής επιφάνεια μηδενικής επίκλισης. Η οριζόντια επιφάνεια, κατασκευάζεται ως εξής :

Έστω ότι

$$\vec{x}_H(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v \vec{h}(u)$$

η οριζόντια ευθειογενής επιφάνεια της οδού. Η βασική καμπύλη $\vec{\alpha}(u)$ αντιστοιχεί στον άξονα της οδού ενώ το v αντιστοιχεί στη τιμή του ημιπλάτους της οδού. Ακόμα, τα διανύσματα $\vec{h}(u) = (h_1, h_2, h_3)$ τα οποία αποτελούν και τις γεννέτιρες της ευθειογενούς επιφάνειας, είναι :

- ❖ κάθετα στα πρώτα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$ της βασικής καμπύλης
- ❖ κάθετα στο διάνυσμα $\vec{z} = (0, 0, 1)$ (ή αλλιώς παράλληλα στο οριζόντιο επίπεδο) και

❖ μοναδιαία, δηλαδή $|\vec{h}(u)| = 1$

Επομένως, ισχύει ότι :

$$\begin{aligned}\vec{h} \cdot \vec{z} &= 0 \\ (h_1, h_2, h_3) \cdot (0, 0, 1) &= 0 \\ h_1 \cdot 0 + h_2 \cdot 0 + h_3 \cdot 1 &= 0 \\ h_3 &= 0\end{aligned}$$

Άρα

$$\vec{h}(u) = (h_1, h_2, 0) \quad (9.1)$$

Επίσης, ισχύει :

$$\begin{aligned}\vec{h} \cdot \vec{t} &= 0 \\ (h_1, h_2, 0) \cdot (t_1, t_2, t_3) &= 0\end{aligned}$$

Άρα

$$h_1 \cdot t_1 + h_2 \cdot t_2 = 0 \quad (9.2)$$

Η σχέση (9.2), αποτελεί μία *Διοφαντική Εξίσωση*. Η θεωρητικά, απειρία των λύσεων έγκειται στο ότι δεν έχει χρησιμοποιηθεί ακόμα η συνθήκη του ότι το διάνυσμα είναι μοναδιαίο).

Για $h_1 = 1$, η (9.2), γίνεται :

$$\begin{aligned}t_1 + h_2 \cdot t_2 &= 0 \\ h_2 &= -\frac{t_1}{t_2}\end{aligned}$$

Άρα

$$\vec{h}(u) = (1, h_2, 0) \quad (9.3)$$

όπου

$$h_2 = -\frac{t_1}{t_2}$$

Τέλος, το διάνυσμα \vec{h} πρέπει να είναι και μοναδιαίο. Έτσι, τελικά, έχουμε :

$$\vec{h}(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+h_2^2}}, \frac{h_2}{\sqrt{1+h_2^2}}, 0 \right)$$

Η εκτέλεση του αλγορίθμου κατασκευής οριζόντιας ευθειογενούς επιφάνειας, στο *Mathematica*, φαίνεται στο Πρόγραμμα 9.1 :

```

HorizontalSurface[alpha_][u_, v_] := Module[{t1, t2, c2},

t1 = TANGENT[alpha][u][[1]];
t2 = TANGENT[alpha][u][[2]];

c2 = - t1/t2;

alpha[u] + v { 1/sqrt[1+c2^2], c2/sqrt[1+c2^2], 0 }];
    
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 9.1 : Οριζόντια ευθριογενής επιφάνεια

Σημειώνεται ότι, αντί να τεθεί η τιμή $h_1 = 1$ στη σχέση (9.2), θα μπορούσε να καταστρωθεί άλλη μία εξίσωση (σχέση 9.3) από το γεγονός ότι το διάνυσμα $\vec{h}(u) = (h_1, h_2, 0)$ είναι μοναδιαίο :

$$h_1 \cdot t_1 + h_2 \cdot t_2 = 0 \quad (9.2)$$

$$(h_1 - \vec{x}_H(u1,0))^2 + (h_2 - \vec{x}_H(u2,0))^2 = 0 \quad (9.3)$$

Έτσι, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (9.2) και (9.3), πάλι λαμβάνεται το ίδιο αποτέλεσμα.

9.2.2. Επιφάνεια με επίκλιση

Η επιφάνεια με επίκλιση, δημιουργείται ουσιαστικά από την κάθετη στροφή των γεννέτριων της οριζόντιας επιφάνειας γύρω από τον άξονα της οδού. Η τιμή της στροφής, αντιστοιχεί στην επίκλιση της οδού.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου κατασκευής επιφάνειας με επίκλιση, στο *Mathematica*, φαίνεται στο Πρόγραμμα 9.2 :

```

TURNINGSURFACE[alpha_, phi_][u_, v_] :=
Module[{t1, t2, c2, horizontalvector, rot},

t1 = TANGENT[alpha][u][[1]];
t2 = TANGENT[alpha][u][[2]];
c2 = - t1/t2;

horizontalvector = { 1/sqrt[1+c2^2], c2/sqrt[1+c2^2], 0 };

rot = RotationMatrix[phi, {horizontalvector, {0, 0, 1}}];

alpha[u] + v * (rot.horizontalvector) ];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 9.2 : Ευθριογενής επιφάνεια με επίκλιση

9.2.3. Πρώτη προσέγγιση της επιφάνειας της οδού

Η επιφάνεια της οδού, αρχικά ορίζεται ως μία ευθιγογενής επιφάνεια με βασική καμπύλη την πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού.

Με αυτή τη προσέγγιση, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ό,τι γεωμετρικό στοιχείο θέλουμε επί της επιφάνειας της οδού. Αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως, είναι ο υπολογισμός της *καμπυλότητας του Gauss* K που αποτελεί και αναλλοίωτη της εσωτερικής γεωμετρίας της επιφάνειας (*Theorema Egregium του Gauss*). Η *καμπυλότητα του Gauss* K μπορεί να αποτελέσει έναν δείκτη οδικής ασφάλειας στο μέλλον, λόγω της εσωτερικής ιδιότητας που έχει σε σχέση με την επιφάνεια.

Η πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή I , εκφράζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$I = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

Όμως, στην προκειμένη περίπτωση, οι u – και v – παραμετρικές καμπύλες, λαμβάνονται έτσι, ώστε $F \equiv 0$ (περιστροφή μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετο σε κάθε σημείο της βασικής καμπύλης).

Συνεπώς, η πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή I , γίνεται :

$$I = E du^2 + G dv^2$$

Επίσης, ισχύει ότι :

$$G(u, v) = \vec{r}_2(u, v) \cdot \vec{r}_2(u, v)$$

όπου, η ευθιγογενής επιφάνεια (εδώ χρησιμοποιείται η οριζόντια επιφάνεια χωρίς να καταργείται η γενική περίπτωση όπου έχουμε επιφάνεια με επίκλιση), έχει την παρακάτω μορφή :

$$\vec{x}_H(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v \vec{h}(u)$$

Έτσι, το τρίτο θεμελιώδες μέγεθος πρώτης τάξης $G(u, v)$ για την ευθιγογενή επιφάνεια $\vec{x}_H(u, v)$, γίνεται :

$$\vec{r}_2(u, v) = \frac{\partial (\vec{\alpha}(u) + v \vec{h}(u))}{\partial v} = \vec{h}(u)$$

Δηλαδή,

$$G(u, v) = \vec{r}_2(u, v) \cdot \vec{r}_2(u, v) = \vec{h}(u)^2 = |\vec{h}(u)|^2$$

Όμως, στην προκειμένη περίπτωση, η διανυσματική συνάρτηση $\vec{h}(u)$, έχει οριστεί έτσι, ώστε το μέτρο της να ισούται με τη μονάδα ($|\vec{h}(u)| = 1$).

Επομένως, το τρίτο θεμελιώδες μέγεθος πρώτης τάξης $G(u, v)$ στην προκειμένη ευθιγογενή επιφάνεια $\vec{x}_t(u, v)$, ισούται με τη μονάδα :

$$G(u, v) = 1$$

Έτσι, η πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή I , γίνεται :

$$I = E(u, v) du^2 + dv^2$$

Υπενθυμίζεται ότι αν η πρώτη θεμελιώδης μορφή I , έχει τη μορφή $I = f(u, v)du^2 + dv^2$, τότε οι u – παραμετρικές καμπύλες αποκόπτουν ίσα τμήματα από όλες τις v – παραμετρικές καμπύλες. Στην περίπτωση αυτή, οι u – παραμετρικές καμπύλες λέγονται *παράλληλες*.

Στην προκειμένη περίπτωση, αυτό σημαίνει ότι η ευθειογενής επιφάνεια $\vec{x}_H(u, v)$ παράγεται από καμπύλες, παράλληλες προς τη βασική καμπύλη (άξονας της οδού) που εκτείνονται εκατέρωθεν της βασικής καμπύλης, σε απόσταση, ίση με το ημι-πλάτος της οδού.

Καμπυλότητα του Gauss

Σε μία ευθειογενή επιφάνεια $\vec{x}(u, v)$, η καμπυλότητα του Gauss K δίνεται από τον τύπο :

$$K = \frac{-M^2}{E G - F^2} \leq 0$$

Για την ευθειογενή επιφάνεια $\vec{x}_t(u, v)$, για την οποία ισχύει ότι :

$$F = 0, \quad G > 0, \quad E > 0 \quad \text{και} \quad M \neq 0,$$

η καμπυλότητα του Gauss K δίνεται από τον τύπο :

$$K = \frac{-M^2}{E G} \leq 0$$

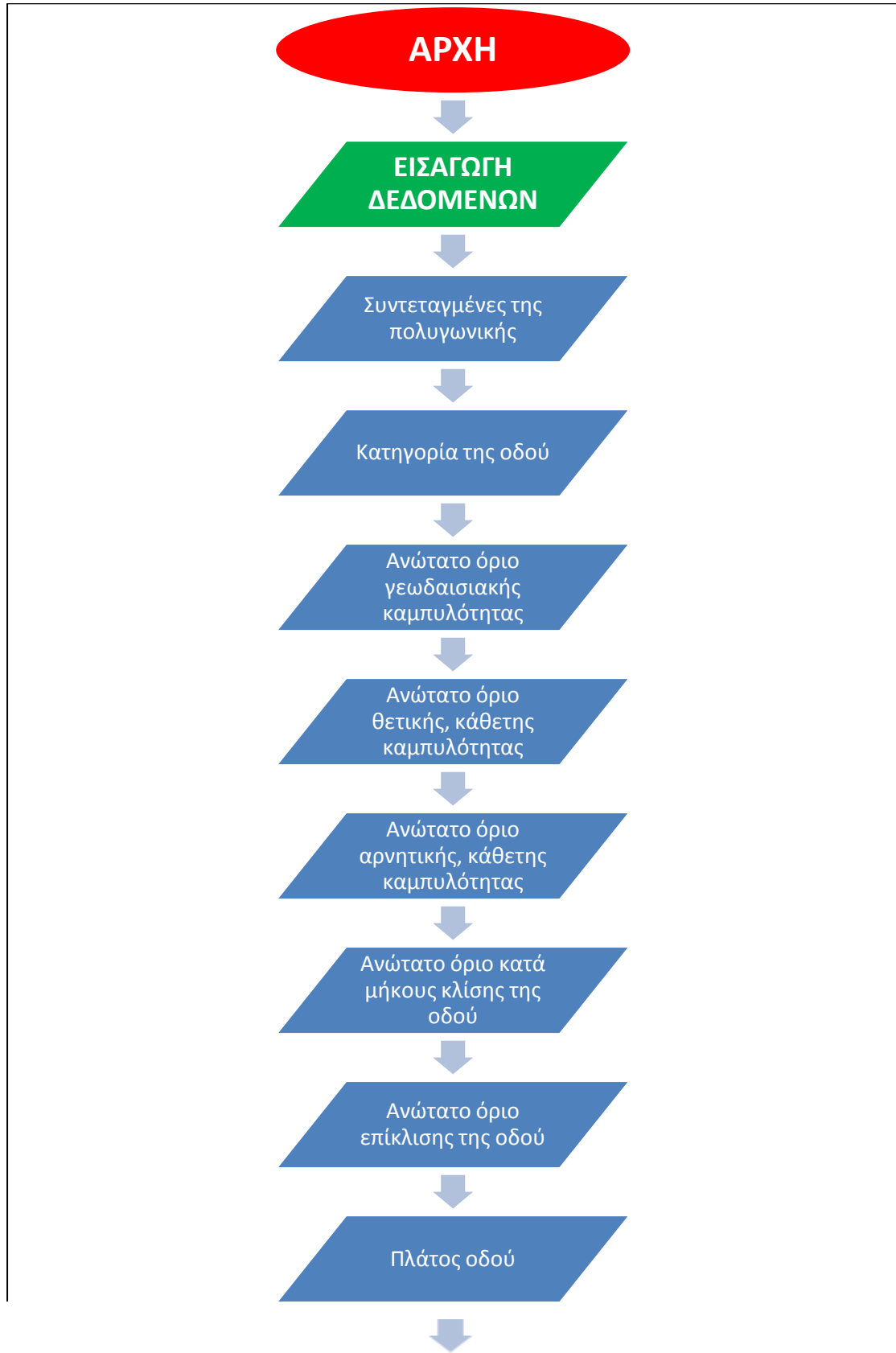
Γεωδαισιακές καμπύλες

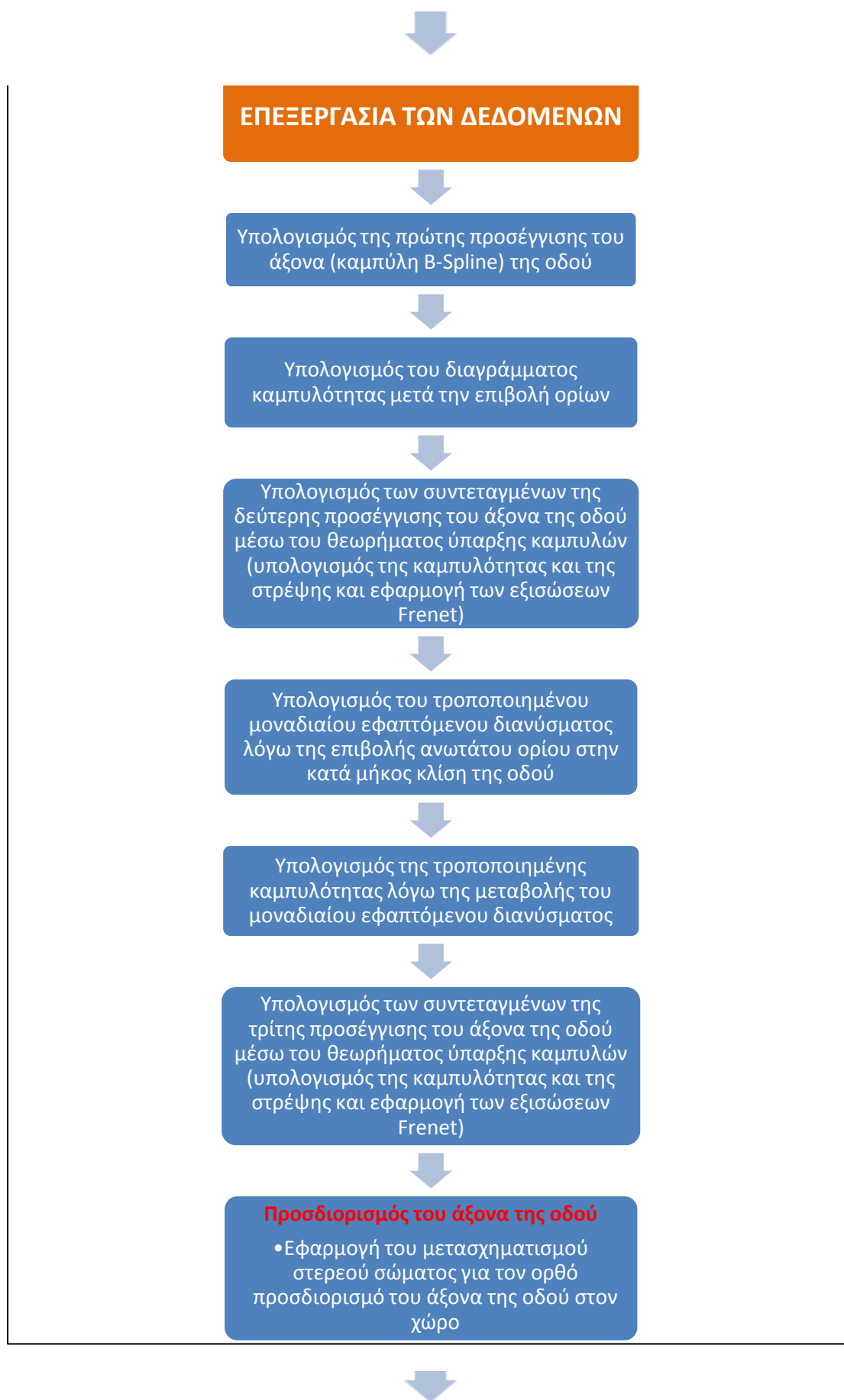
Αποδεικνύεται ότι οι v – παραμετρικές καμπύλες είναι γεωδαισιακές γραμμές. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι ευθείες μίας επιφάνειας, εξ'ορισμού είναι γεωδαισιακές. Πράγματι οι v – παραμετρικές καμπύλες αποτελούν μία παραμετρική οικογένεια ευθειών αφού γίνεται λόγος για ευθειογενή επιφάνεια. Επομένως, είναι γεωδαισιακές (δηλαδή, το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας ισούται ταυτοτικά με το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{k}_g \equiv \vec{0}$).

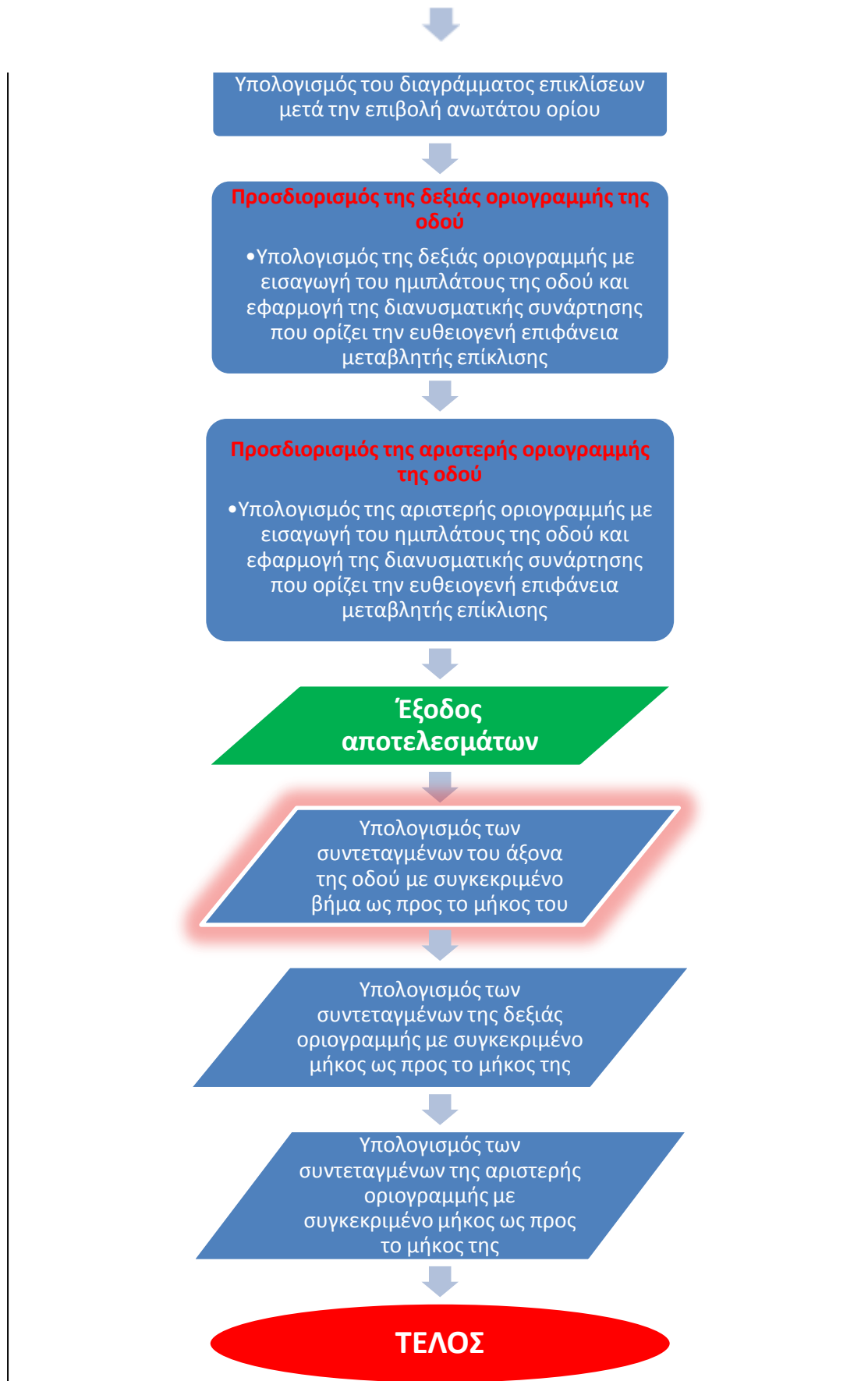
Πέραν αυτού, το σύμβολο *Christoffel* δεύτερου είδους ισούται ταυτοτικά με το μηδέν ($\Gamma_{22}^1 = 0$) για κάθε (u_0, v) . Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι η v – παραμετρική καμπύλη είναι γεωδαισιακή.

9.3. Διάγραμμα Ροής Εργασιών Της Μεθοδολογίας

Στη συνέχεια παρατίθενται διαγραμματικά, τα βήματα που ακολουθούνται για την υλοποίηση της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Συγκεκριμένα, γίνεται σαφής διαχωρισμός των δεδομένων εισόδου και εξόδου, αλλά και όλων των επεξεργασιών που απαιτούνται. Τα βήματα που ακολουθούνται, γίνονται πιο εύκολα κατανοητά στο Κεφάλαιο 10 που ακολουθεί, αφού εφαρμόζεται ο αλγόριθμος αυτός σε μία περίπτωση μελέτης ενός πραγματικού οδικού τμήματος.







ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ 9.1 : Αλγοριθμική παρουσίαση της μεθόδου που προτείνεται

10. ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μελέτης περίπτωσης. Η μελέτη περίπτωσης, έχει τον χαρακτήρα βελτίωσης της υφιστάμενης σύνδεσης (δασικής οδού) στο τμήμα Νιγρίτας – Σοχού που βρίσκεται μεταξύ των ορίων του Νομού Σερρών και του Νομού Θεσσαλονίκης. Ο λόγος που μελετάται η συγκεκριμένη οδός, είναι ότι, ακριβώς αυτή, αποτέλεσε το αντικείμενο του Μαθήματος – Θέματος Οδοποιίας του ενάτου εξαμήνου της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών (ΣΑΤΜ) κατά το ακαδημαϊκό έτος 2012-2013. Επομένως, είναι εφικτή η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων χάραξης στο τέλος της μελέτης.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να κατανοηθεί η λογική της μεθόδου και κυρίως, να διαφανεί η ορθότητά της μέσω των εικόνων και των διαγραμμάτων που ακολουθούν.

10.1. Άξονας Της Οδού

Ο ορισμός του άξονα της οδού είναι το δυσκολότερο και συγχρόνως το πιο σημαντικό κομμάτι της μεθοδολογίας. Άλλωστε, όλοι οι περιορισμοί που τίθενται (εκτός από την επίκλιση), αφορούν τον άξονα της οδού. Ακόμα και η επίκλιση της οδού, εξαρτάται τελικά από τον άξονα της οδού με την ανάλυση που γίνεται. Από τη στιγμή που οριστεί ο άξονας, ο ορισμός της επιφάνειας στη συνέχεια, είναι μία συγκριτικά πολύ πιο εύκολη διαδικασία.

10.1.1. Εισαγωγή Των Κορυφών Της Πολυγωνικής

Στην προκειμένη περίπτωση, οι κορυφές της πολυγωνικής, λαμβάνονται έτσι, ώστε να ταυτίζονται με αυτές που είχαν ληφθεί στο μάθημα-θέμα. Βέβαια, στην προκειμένη περίπτωση, η πολυγωνική καμπύλη είναι μία τρισδιάστατη καμπύλη αποτελούμενη από τρισδιάστατες τεθλασμένες γραμμές καθώς έχουν ενσωματωθεί και τα ορθομετρικά υψόμετρα στα σημεία των κορυφών της πολυγωνικής.

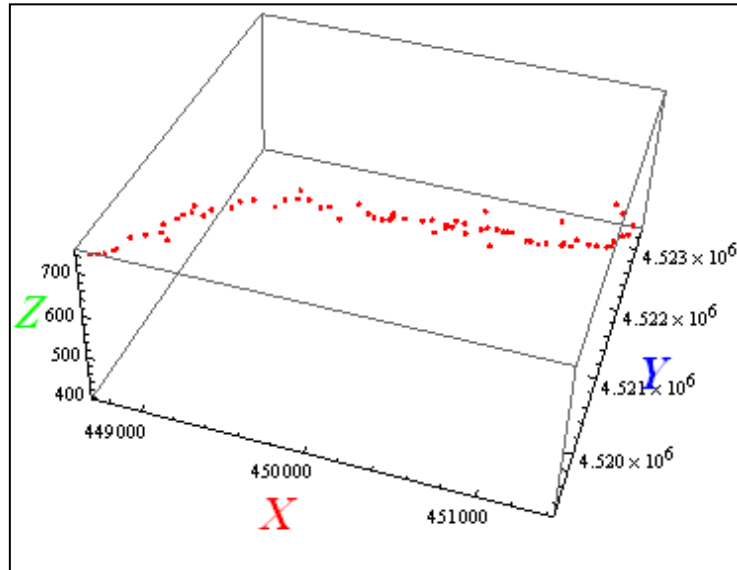
Όμως, κανονικά, πρέπει να βρεθεί ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης που να ορίζει εκείνος, το πλήθος και τη θέση των κορυφών της πολυγωνικής, ανάλογα με τους περιορισμούς που θα του θέτουμε. Για παράδειγμα, ένας πλήρως απλουστευτικός αλγόριθμος που μάλιστα τείνει να ελαχιστοποιήσει το κόστος, είναι αυτός που χαράσσει την ισοκλινή καμπύλη.

Γενικά, έχουμε να κάνουμε με μία πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση, καθώς στη συνάρτηση στόχου, θα έχουμε αλληλοσυγκρουόμενα συμφέροντα, όπως είναι εν γένει, το κόστος (ελαχιστοποίηση) με την οδική ασφάλεια (μεγιστοποίηση) και την καλή απορροή των ομβρίων. Ως προς τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται η συνάρτηση στόχου, αυτοί, θα έχουν να κάνουν κυρίως, με την καμπυλότητα και τη στρέψη της καμπύλης που αποτελούν ιδιότητες της εσωτερικής γεωμετρίας της.

Η κατασκευή τέτοιων αλγορίθμων, αφήνεται για περαιτέρω μελέτη.

Στην Εικόνα 10.1, φαίνονται οι κορυφές της (τρειςδιάστατης) πολυγωνικής καμπύλης :

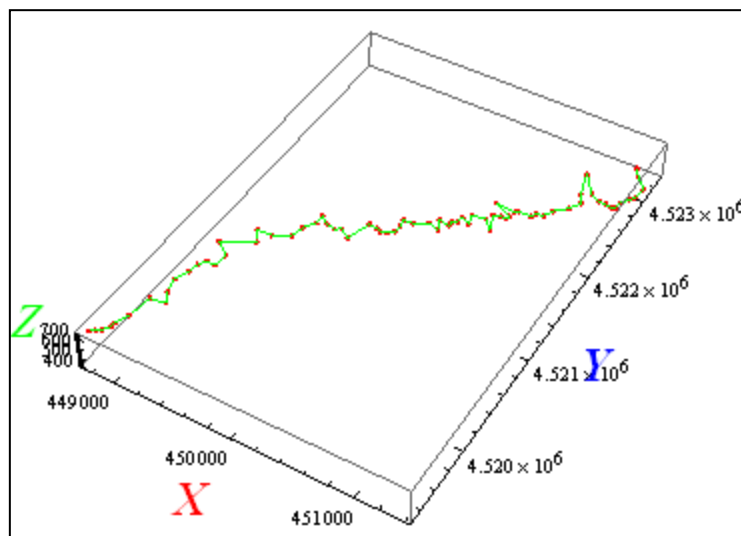
```
ListPointPlot3D[DATA3D, PlotStyle → Red, AxesLabel →
{Style[X, Large, Bold, Red],
Style[Y, Large, Bold, Blue],
Style[Z, Large, Bold, Green]}}
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.1 : Κορυφές (τρισδιάστατης) πολυγωνικής καμπύλης

Στην Εικόνα 10.2, φαίνεται η τρισδιάστατη πολυγωνική, αποτελούμενη από τρισδιάστατες, τεθλασμένες ευθείες μαζί με την καμπύλη *B – Spline* :

```
Graphics3D[{Green, Line[DATA3D], Red,
Point[DATA3D]},
Axes → True, AxesLabel →
{Style[X, Large, Bold, Red],
Style[Y, Large, Bold, Blue],
Style[Z, Large, Bold, Green]}}
```



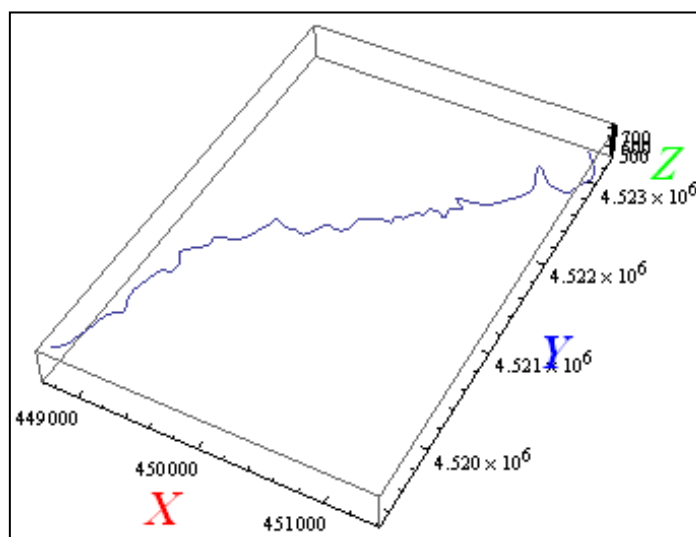
ΕΙΚΟΝΑ 10.2 : Τρισδιάστατη πολυγωνική καμπύλη

10.1.2. Εφαρμογή της παρεμβολικής καμπύλης $B - Spline$ (πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού) με $control points$ που αντιστοιχούν στις κορυφές της πολυγωνικής

Στην Εικόνα 10.3, φαίνεται η καμπύλη $B - Spline$ (τμηματικές καμπύλες $Bezier$) έχοντας ως $control points$, τις κορυφές της πολυγωνικής :

```
bspline1 = BSplineFunction[DATA3D];
```

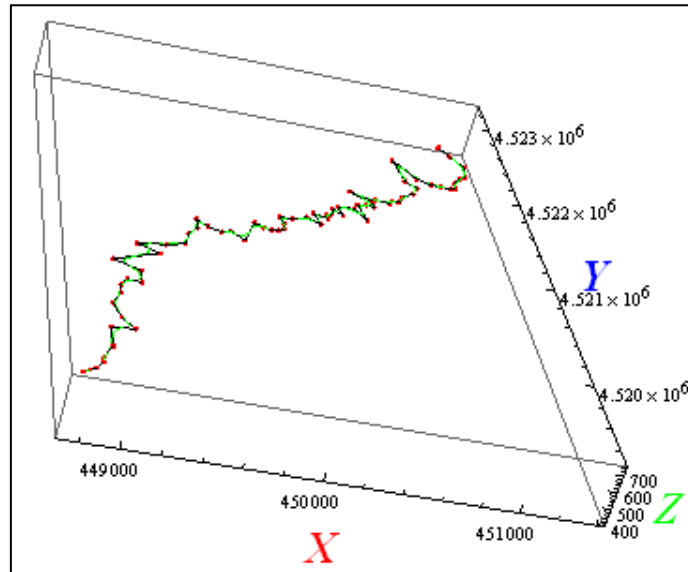
```
ParametricPlot3D[bspline1[t], {t, 0, 1}, Axes → True,
  AxesLabel →
  {Style[X, Large, Bold, Red],
   Style[Y, Large, Bold, Blue],
   Style[Z, Large, Bold, Green]}}
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.3 : Καμπύλη $B - Spline$ (πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού) με $control points$ που αντιστοιχούν στις κορυφές της πολυγωνικής

Στην Εικόνα 10.4, φαίνεται η καμπύλη $B - Spline$ μαζί με τις κορυφές της πολυγωνικής ($control points$) και την ίδια την πολυγωνική :

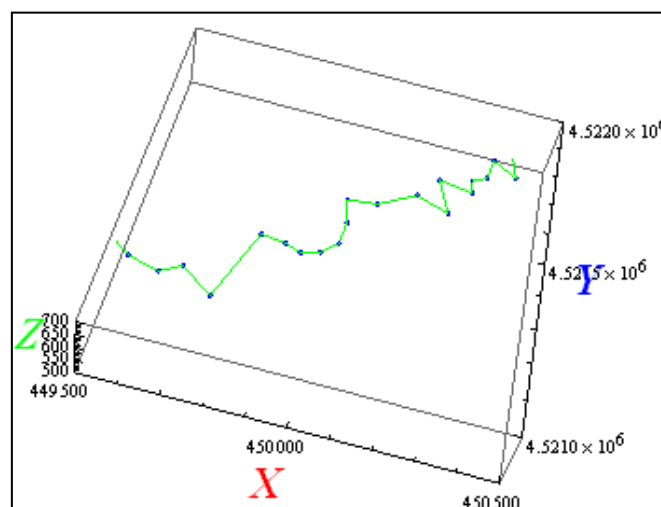
```
Graphics3D[{Green, BSplineCurve[DATA3D],
  Black, Line[DATA3D],
  Red, Point[DATA3D]},
  Axes → True, AxesLabel →
  {Style[X, Large, Bold, Red],
   Style[Y, Large, Bold, Blue],
   Style[Z, Large, Bold, Green]}}
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.4 : Καμπύλη $B - Spline$ μαζί με τις κορυφές της πολυγωνικής (*control points*) και την ίδια την πολυγωνική

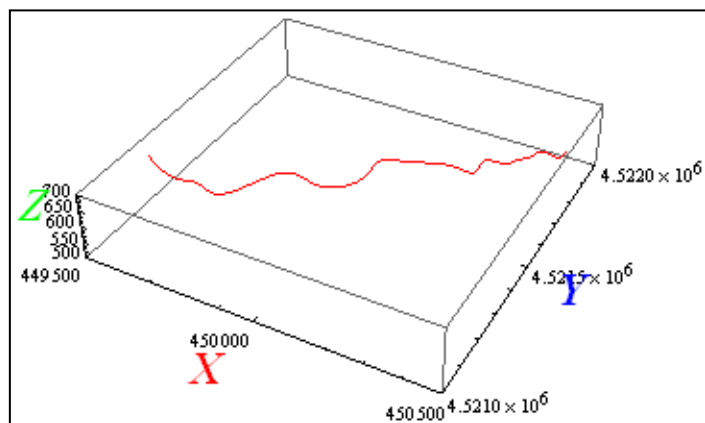
Στην Εικόνα 10.7, παρατίθεται ένα τμήμα της οριζοντιογραφίας (κάτοψη ουσιαστικά) της καμπύλης $B - Spline$, ενώ στην Εικόνα 10.8, παρατίθεται ένα τμήμα (το ίδιο) της όψης (προσεγγιστικά, οπτικά τουλάχιστον, μπορεί να θεωρηθεί ως η μηκοτομή) της καμπύλης για καλύτερη εποπτεία :

```
pol1 = Graphics3D[{
  Green, Line[DATA3D],
  Blue, Point[DATA3D]},
  Axes → True, AxesLabel →
  {Style[X, Large, Bold, Red],
   Style[Y, Large, Bold, Blue],
   Style[Z, Large, Bold, Green]},
  PlotRange → {{449500, 450500},
  {4521000, 4522000}, {500, 700}}]
```



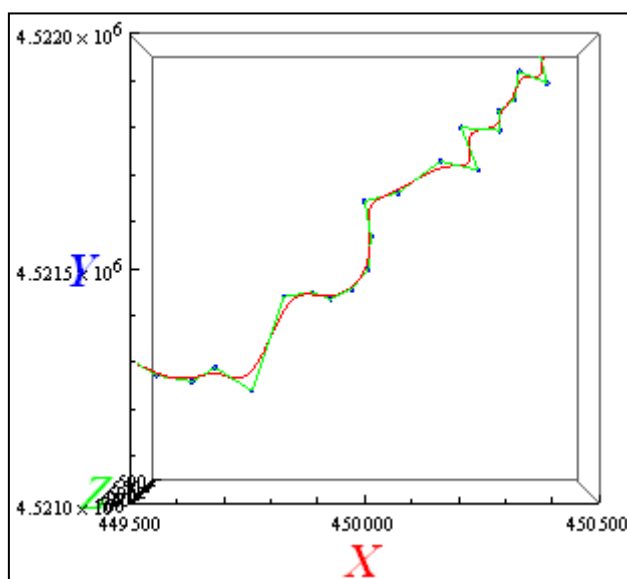
ΕΙΚΟΝΑ 10.5 : Τμήμα πολυγωνικής

```
ax1 = ParametricPlot3D[bspline1[t], {t, 0, 1}, PlotStyle -> Red,
  Axes -> True, AxesLabel ->
  {Style[X, Large, Bold, Red],
   Style[Y, Large, Bold, Blue],
   Style[Z, Large, Bold, Green]},
  PlotRange -> {{449 500, 450 500},
    {4 521 000, 4 522 000}, {500, 700}},
  PlotRange -> {{449 500, 450 500}, {4 521 000, 4 522 000}, {500, 700}}]
```

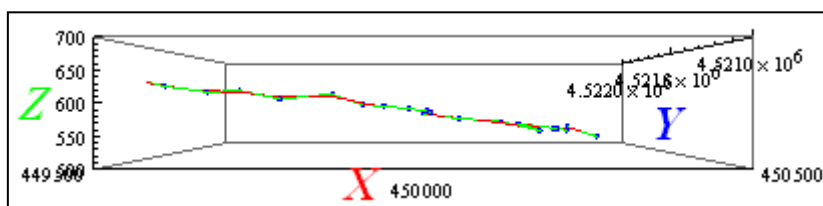


ΕΙΚΟΝΑ 10.6 : Τμήμα του άξονα της οδού

```
Show[ax1, pol1]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.7 : Τμήμα οριζοντιογραφίας του άξονα της οδού



ΕΙΚΟΝΑ 10.8 : Τμήμα της όψης του άξονα της οδού

10.1.3. Υπολογισμός του μήκους του άξονα της οδού

Με το *Mathematica*, υπολογίζεται (με αριθμητική ολοκλήρωση) το μήκος της καμπύλης *B – Spline* :

```
lengthn2[a_, b_][alpha_] :=
NIntegrate[Evaluate[arclengthprime[alpha][u]], {u, a, b},
MaxRecursion -> 12]
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.1 : Αριθμητικός υπολογισμός του μήκους καμπύλης

Υπολογισμός του μήκους της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού

```
lengthn2[0, 1][bspline1]
6173.56
```

Δηλαδή, το συνολικό μήκος της καμπύλης *B – Spline* (άξονας της οδού), είναι 6.173,56 m.

Υπενθυμίζεται ότι το μήκος μίας καμπύλης, αποτελεί μία αναλλοίωτη της γεωμετρίας της. Επομένως, δεν εξαρτάται από τον τρόπο παραμετρικοποίησης. Στην προκειμένη περίπτωση, η παραμετρικοποίηση, γίνεται με τη μεταβλητή *t* της καμπύλης *B – Spline* με πεδίο ορισμού $t \in [0,1]$.

10.1.4. Κατασκευή του διαγράμματος καμπυλότητας κ της καμπύλης *B – Spline*

Ο ορισμός της συνάρτησης καμπυλότητας, φαίνεται στο Πρόγραμμα 10.2 :

```
Kappa[alpha_][t_] :=

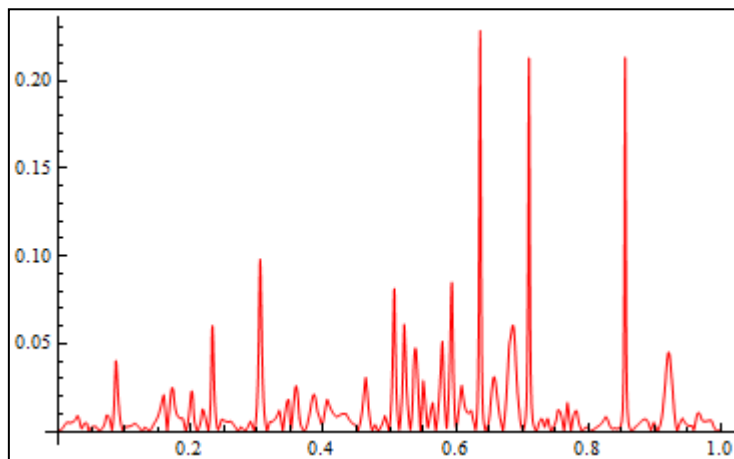
$$\frac{\sqrt{\text{cross}[\alpha'[t], \alpha''[t]] \cdot \text{cross}[\alpha'[t], \alpha''[t]]}}{(\alpha'[t] \cdot \alpha'[t])^{1.5}}$$

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.2 : Υπολογισμός καμπυλότητας μίας καμπύλης

Το διάγραμμα καμπυλότητας της καμπύλης *bspline1*, φαίνεται παρακάτω :

```
p1 = Plot[Kappa[bspline1][t], {t, 0, 1}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red]
```

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.1 : Καμπυλότητα του άξονα της οδού

10.1.5. Κατασκευή μίας καμπύλης, μέσω των συναρτήσεων καμπυλότητας και στρέψης

Ο άξονας της οδού (καμπύλη *bspline1*), δεν έχει παραμετροποιηθεί με βάση τη φυσική παράμετρο. Επομένως, οι εξισώσεις *Frenet* που χρησιμοποιούνται, σε μορφή πίνακα, είναι οι εξής :

$$\begin{bmatrix} \vec{t}'(s) \\ \vec{n}'(s) \\ \vec{b}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa(s) & 0 \\ -\sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \kappa(s) & 0 & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau(s) \\ 0 & \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{bmatrix}$$

Εδώ, πρέπει να τονιστεί ότι δεν επιβάλλεται καμία αλλαγή ως προς τη στρέψη της καμπύλης, παρά μόνο στην καμπυλότητά της. Αυτό γίνεται γιατί μία καμπύλης είναι πολύ “ευαίσθητη” σε σχέση με τη στρέψη. Δηλαδή, μικρή αλλαγή στη στρέψη, θα επιφέρει μεγάλη αλλαγή στη μορφή της καμπύλης. Άλλωστε, για να χρησιμοποιηθεί η στρέψη, πρέπει πρώτα να κατανοηθεί η σύνδεσή της με τον άξονα της οδού. Με άλλα λόγια, είναι σίγουρο ότι η στρέψη συνδέεται με την κατά μήκος κλίση της οδού, αλλά μένει να βρεθεί το πώς.

Οι εξισώσεις *Frenet* με τυχαία παράμετρο, με τη βοήθεια του *Mathematica* γίνονται :

```

intrinsic3darbitrarispeed[{alpha_, kk_, ttt_}, {a_: 0, {p1_: 0, p2_: 0, p3_: 0},
  {q1_: 1, q2_: 0, q3_: 0}, {r1_: 0, r2_: 1, r3_: 0}}, opts___][t_] := Module[
{x1, x2, x3, t1, t2, t3, n1, n2, n3, b1, b2, b3},
  {x1[t], x2[t], x3[t]} /.
  NDSolve[

$$\begin{aligned}
x1'[tt] &== \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} t1[tt], \\
x2'[tt] &== \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} t2[tt], \\
x3'[tt] &== \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} t3[tt], \\
t1'[tt] &== \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} kk[tt] * n1[tt], \\
t2'[tt] &== \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} kk[tt] * n2[tt], \\
t3'[tt] &== \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} kk[tt] * n3[tt], \\
n1'[tt] &== -\sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} kk[tt] * t1[tt] + \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} ttt[tt] * b1[tt], \\
n2'[tt] &== -\sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} kk[tt] * t2[tt] + \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} ttt[tt] * b2[tt], \\
n3'[tt] &== -\sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} kk[tt] * t3[tt] + \sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} ttt[tt] * b3[tt], \\
b1'[tt] &== -\sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} ttt[tt] * n1[tt], \\
b2'[tt] &== -\sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} ttt[tt] * n2[tt], \\
b3'[tt] &== -\sqrt{\alpha'[tt].\alpha'[tt]} ttt[tt] * n3[tt], \\
x1[a] &== p1, x2[a] == p2, x3[a] == p3, \\
t1[a] &== q1, t2[a] == q2, t3[a] == q3, \\
n1[a] &== r1, n2[a] == r2, n3[a] == r3, \\
b1[a] &== q2 * r3 - q3 * r2, \\
b2[a] &== q3 * r1 - q1 * r3, \\
b3[a] &== q1 * r2 - q2 * r1,
\end{aligned}$$

{x1, x2, x3, t1, t2, t3, n1, n2, n3, b1, b2, b3},
  {tt, t, t + 0.001}, MaxSteps -> 10 000 000]]

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.3 : Υπολογισμός συντεταγμένων καμπύλης (που έχει παραμετροποιηθεί με τυχαία παράμετρο), όταν είναι γνωστή η καμπυλότητα και η στρέψη

Εφαρμογή του θεωρήματος ύπαρξης καμπυλών

Το σχήμα μίας καμπύλης, ορίζεται μονοσήμαντα από την καμπυλότητα και τη στρέψη της. Επαναλαμβάνεται ότι με αυτόν τον τρόπο, ορίζεται μόνο το σχήμα της καμπύλης και όχι η θέση της στον χώρο.

Ο αλγόριθμος, μέσω του οποίου επιτυγχάνεται αυτή η κατασκευή-αποτύπωση στο *Mathematica*, με μοναδικά δεδομένα την καμπυλότητα και τη στρέψη, φαίνεται παρακάτω :

```

plotintrinsic3darbitrarspeed[{alpha_, kk_, ttt_}, {a_ : 0, {p1_ : 0, p2_ : 0, p3_ : 0},
  {q1_ : 1, q2_ : 0, q3_ : 0}, {r1_ : 0, r2_ : 1, r3_ : 0}},
  {tmin_ : 0, tmax_ : 1}, opts_] :=
ParametricPlot3D[Module[
  {x1, x2, x3, t1, t2, t3, n1, n2, n3, b1, b2, b3},
  {x1[t], x2[t], x3[t]} /.
NDSolve[{x1'[tt] ==  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  t1[tt],
  x2'[tt] ==  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  t2[tt],
  x3'[tt] ==  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  t3[tt],
  t1'[tt] ==  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt] * n1[tt],
  t2'[tt] ==  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt] * n2[tt],
  t3'[tt] ==  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt] * n3[tt],
  n1'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt] * t1[tt] +  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt] * b1[tt],
  n2'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt] * t2[tt] +  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt] * b2[tt],
  n3'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt] * t3[tt] +  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt] * b3[tt],
  b1'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt] * n1[tt],
  b2'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt] * n2[tt],
  b3'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt] * n3[tt],
  x1[a] == p1, x2[a] == p2, x3[a] == p3,
  t1[a] == q1, t2[a] == q2, t3[a] == q3,
  n1[a] == r1, n2[a] == r2, n3[a] == r3,
  b1[a] == q2 * r3 - q3 * r2,
  b2[a] == q3 * r1 - q1 * r3,
  b3[a] == q1 * r2 - q2 * r1},
  {x1, x2, x3, t1, t2, t3, n1, n2, n3, b1, b2, b3},
  {tt, tmin, tmax}, MaxSteps -> 10 000 000]] // Evaluate,
  {t, tmin, tmax}, opts]

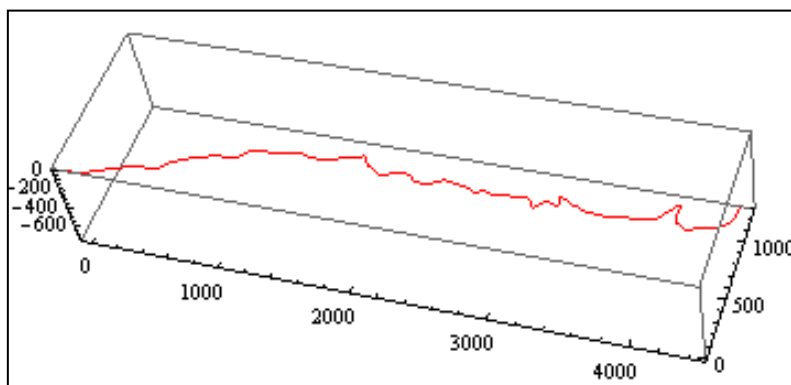
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.4 : Αποτύπωση καμπύλης με γνωστή καμπυλότητα και στρέψη

```

plotintrinsic3darbitrarspeed[
  {bspline1[#] &, Kappa[bspline1][#] &, Tau[bspline1][#] &}, {0, {0, 0, 0},
  {1, 0, 0}, {0, 1, 0}},
  {0, 1}, PlotStyle -> Red]

```



ΕΙΚΟΝΑ 10.9 : Αποτύπωση του άξονα της οδού με μοναδικά δεδομένα την καμπυλότητα και τη στρέψη

10.1.6. Δεύτερη προσέγγιση του άξονα της οδού

Ο άξονας της οδού οφείλει να τηρεί κάποιες προδιαγραφές ώστε η οδήγηση να γίνεται με ασφάλεια και άνεση. Αυτές οι προδιαγραφές ικανοποιούνται αν η καμπυλότητα του άξονα της οδού ικανοποιεί με τη σειρά της κάποιες συνθήκες. Έτσι, η καμπυλότητα του άξονα, διαμορφώνεται αντίστοιχα.

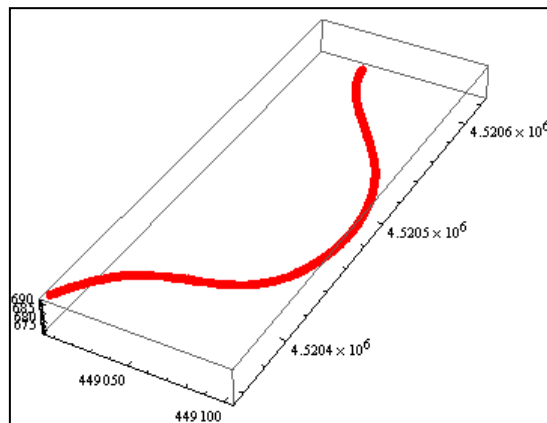
Αρχικά, ορίζεται μία ευθειογενής επιφάνεια, οι γεννέτιρες της οποίας είναι σε κάθε σημείο, κάθετες στον άξονα και ταυτόχρονα κάθετες στο μοναδιαίο διάνυσμα του θετικού ημιάξονα z , $(0,0,1)$. Η επιφάνεια αυτή όπως έχει γραφτεί παραπάνω, ορίζεται ως εξής :

```
HorizontalSurface[alpha_][u_, v_] := Module[{t1, t2, c2},
  t1 = TANGENT[alpha][u][[1]];
  t2 = TANGENT[alpha][u][[2]];
  c2 = - t1 / t2;
  alpha[u] + v { 1 / Sqrt[1 + c2^2], c2 / Sqrt[1 + c2^2], 0 }];
```

Πρόγραμμα 9.1 : Οριζόντια επιφάνεια

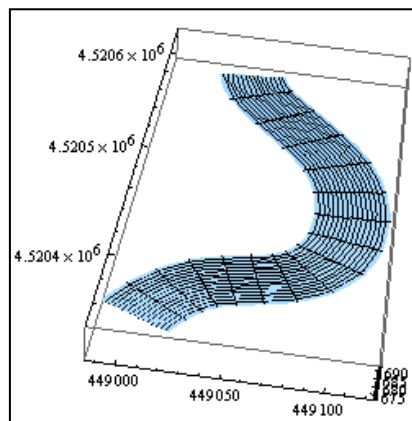
Ένα τμήμα της επιφάνειας αυτής, φαίνεται στην Εικόνα (10.10) :

```
bsp = ParametricPlot3D[bspline1[t], {t, 0.15, 0.20},
  PlotStyle -> {Red, Thickness[0.02]}]
```



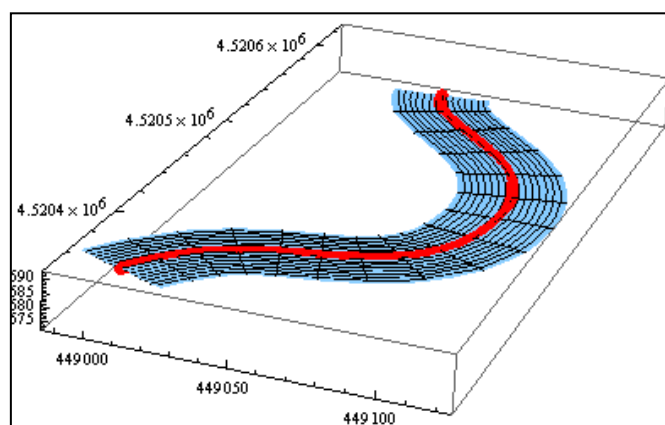
ΕΙΚΟΝΑ 10.10 : Αποτύπωση τμήματος του άξονα της οδού

```
hsp = ParametricPlot3D[HorizontalSurface[bspline1][u, v],
  {u, 0.15, 0.20}, {v, -20, 20}]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.11 : Αποτύπωση τμήματος της οριζόντιας επιφάνειας της οδού

Show [{bsp, hsp}, PlotRange -> All]



ΕΙΚΟΝΑ 10.12 : Αποτύπωση τμήματος της οριζόντιας επιφάνειας της οδού μαζί με τον άξονα της οδού

Έχει δοθεί στο ημιπλάτος της οδού, η τιμή 20 m για λόγους καλύτερης εποπτείας και μόνο.

Ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα

Λόγω της μορφής της επιφάνειας, το διάνυσμα καμπυλότητας, αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες. Η πρώτη θα αποτελεί τη διανυσματική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας στις γεννέτιρες της ευθιογενούς επιφάνειας (δηλαδή στα οριζόντια διανύσματα). Το διάνυσμα που προκύπτει, ονομάζεται ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα καθώς δεν έχει ληφθεί υπόψη κάποια επιφάνεια αναφοράς. Επίσης, το διάνυσμα ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας, είναι κάθετο στο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα \vec{t} , ενώ έχει την ίδια διεύθυνση με το οριζόντιο διάνυσμα της καμπύλης. Πιο συγκεκριμένα, όταν το διάνυσμα ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας είναι ομόρροπο με το οριζόντιο διάνυσμα, τότε παρουσιάζεται δεξιά στροφή (στη διεύθυνση που αυξάνεται το μήκος της καμπύλης), ενώ όταν το διάνυσμα ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας είναι αντίρροπο με το οριζόντιο διάνυσμα, τότε παρουσιάζεται αριστερή στροφή (στη διεύθυνση που αυξάνεται το μήκος της καμπύλης) :

$$\text{kappavector}[\alpha_][t_]:= \frac{\text{TANGENT}[\alpha_]'[t]}{\sqrt{\alpha_'[t] \cdot \alpha_'[t]}}$$

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.5 : Διάνυσμα καμπυλότητας

```
HORIZONTALVECTOR[alpha_][u_] := Module[{t1, t2, c2},

t1 = TANGENT[alpha][u][[1]];
t2 = TANGENT[alpha][u][[2]];

c2 = - t1/t2;

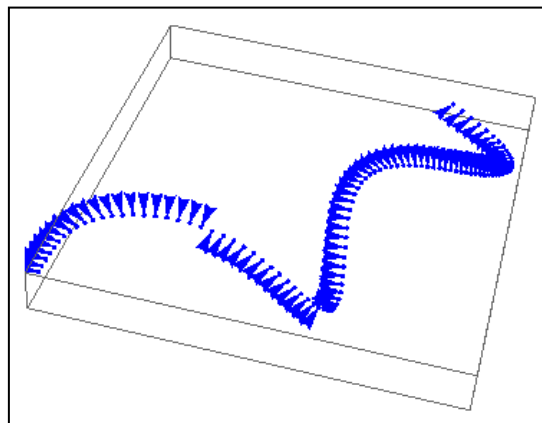
{ 1/sqrt[1+c2^2], c2/sqrt[1+c2^2], 0}];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.6 : Οριζόντιο διάνυσμα (γεννέτριες της οριζόντιας επιφάνειας)

Το πρόσημο του οριζόντιου διανύσματος, μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονα της οδού, εξαρτώμενο από το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης \vec{t} .

```
horizontalvector = Table[Arrow[{bspline1[t],
bspline1[t] + HORIZONTALVECTOR[bspline1][t]}],
{t, 0.6, 0.7, 0.001}];
```

```
g2 = Graphics3D[{Blue, Thickness[0.01], horizontalvector}]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.13 : Αναπαράσταση των οριζόντιων διανυσμάτων κατά μήκος τμήματος του άξονα της οδού

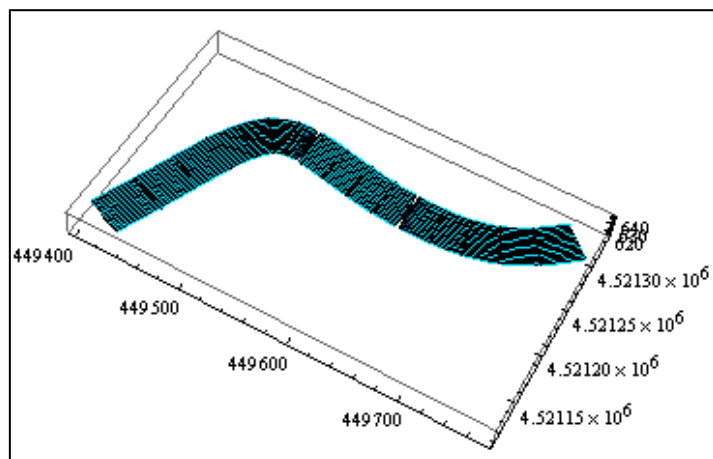
```
PSEUDOGEODESICVECTOR[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},

v1 = kappavector[alpha][t];
v2 = HORIZONTALVECTOR[alpha][t];
v3 = Projection[v1, v2];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.7 : Ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα : Προβολή (διάνυσμα) του διανύσματος καμπυλότητας στο οριζόντιο διάνυσμα

Στην Εικόνα 10.14, φαίνεται τμήμα της οριζόντιας επιφάνειας της οδού :

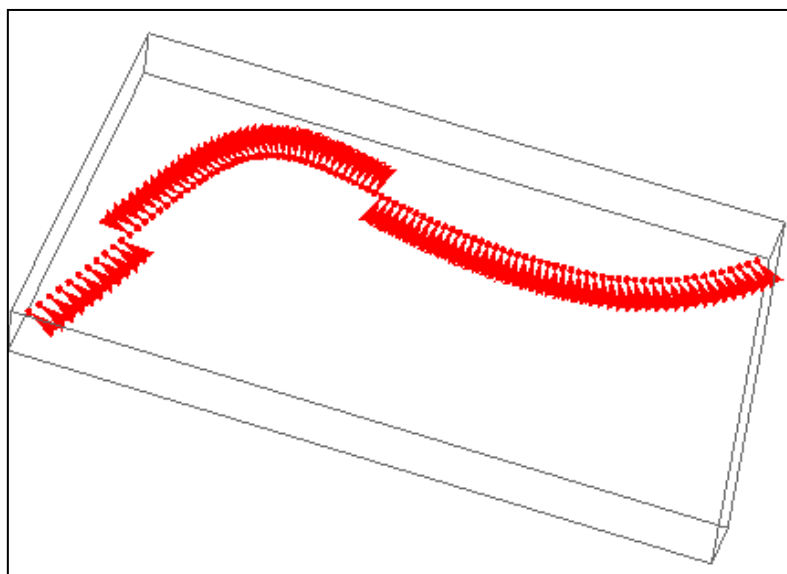
```
Hsurf[u , v ] := HorizontalSurface[bspline1][u, v]
hsurfp = ParametricPlot3D[Hsurf[u, v], {u, 0.25, 0.35},
{v, -20, 20},
PlotStyle -> Cyan]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.14 : Αποτύπωση τμήματος της οριζόντιας επιφάνειας της οδού

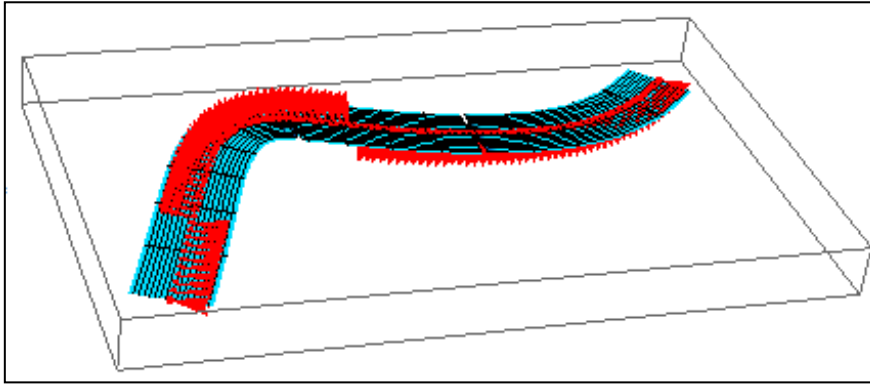
Στην Εικόνα 10.15, παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση των διανυσμάτων ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας κατά μήκος ενός τμήματος του άξονα της οδού :

```
pseudogeodesicvector = Table[Arrow[{bspline1[t],
bspline1[t] + PSEUDOGEODESICVECTOR[bspline1][t]}],
{t, 0.25, 0.35, 0.001}];
g1 = Graphics3D[{Red, Thickness[0.01], pseudogeodesicvector}]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.15 : Αναπαράσταση των διανυσμάτων της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας

```
Show[g1, hsurfp]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.16 : Αποτύπωση των διανυσμάτων της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας μαζί με την οριζόντια επιφάνεια

Διάνυσμα ψευδοκάθετης καμπυλότητας

Η δεύτερη κάθετη συνιστώσα του διανύσματος καμπυλότητας, αποτελεί τη διανυσματική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της ευθιογενούς επιφάνειας. Στην προκειμένη περίπτωση, ως μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα, ορίζεται το διάνυσμα που προκύπτει ως εξωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος \vec{t} με το οριζόντιο διάνυσμα. Σημειώνεται ότι τα διανύσματα αυτά, είναι κάθετα μεταξύ τους. Τελικά, ως διάνυσμα ψευδοκάθετης καμπυλότητας, ορίζεται η διανυσματική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα :

```
PSEUDOUNITNORMALVECTOR[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},
  v1 = TANGENT[alpha][t];
  v2 = HORIZONTALVECTOR[alpha][t];
  v3 = cross[v1, v2]];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.8 : Μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της οριζόντιας επιφάνειας

```
PSEUDONORMALVECTOR[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},
  v1 = kappavector[alpha][t];
  v2 = PSEUDOUNITNORMALVECTOR[alpha][t];
  v3 = Projection[v1, v2]];
```

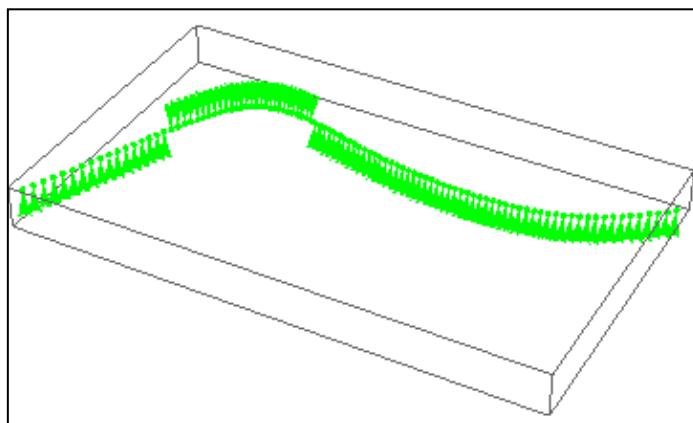
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.9 : Ψευδοκάθετη καμπυλότητα : Προβολή (διάνυσμα) του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας

Στην Εικόνα 10.16, παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση των διανυσμάτων ψευδοκάθετης καμπυλότητας κατά μήκος ενός τμήματος του άξονα της οδού :

```
pseudonormalvector = Table[Arrow[{bspline1[t],
  bspline1[t] + PSEUDONORMALVECTOR[bspline1][t]}],
  {t, 0.25, 0.35, 0.001}];
```

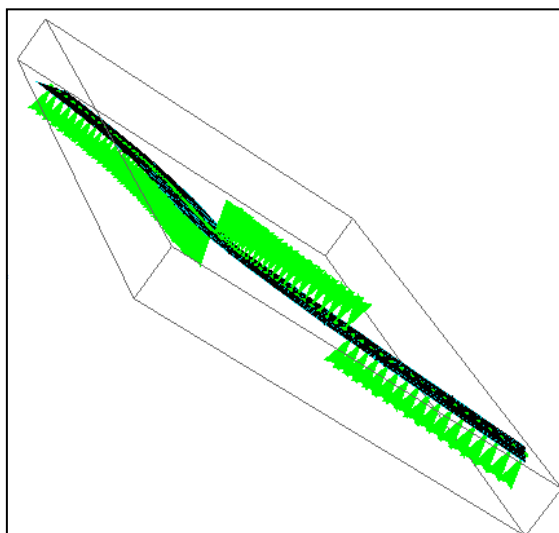


```
g2 = Graphics3D[{Green, Thickness[0.01], pseudonormalvector}]
```



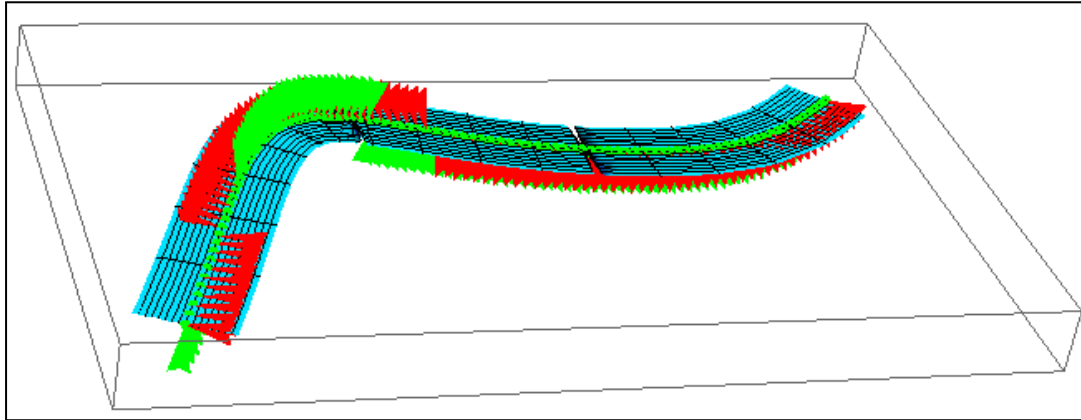
ΕΙΚΟΝΑ 10.17 : Αναπαράσταση των διανυσμάτων της ψευδοκάθετης καμπυλότητας

```
Show[g2, hsurf]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.18 : Αποτύπωση των διανυσμάτων της ψευδοκάθετης καμπυλότητας μαζί με την οριζόντια επιφάνεια

```
Show[g1, g2, hsurf]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.19 : Αποτύπωση των διανυσμάτων της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας μαζί με τα διανύσματα της ψευδοκάθετης καμπυλότητας και την οριζόντια επιφάνεια

Από την εικόνα (10.19), διαπιστώνεται ότι η ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα αντιστοιχεί τοπικά, στην οριζοντιογραφία του άξονα, ενώ αντίστοιχα, η ψευδοκάθετη καμπυλότητα, αντιστοιχεί τοπικά, στη μηκοτομή του άξονα. Το διάνυσμα καμπυλότητας, αναλύεται σε αυτές τις κάθετες συνιστώσες, έτσι ώστε να αξιοποιηθούν τα όρια των ακτίνων καμπυλότητας που ήδη υπάρχουν στους κανονισμούς της οδοποιίας. Αυτά τα όρια, αναφέρονται και σε οριζόντιες καμπύλες (οριζοντιογραφία), αλλά και σε κατακόρυφες (μηκοτομή).

Επίσης, από την Εικόνα (10.19), φαίνεται ότι η διεύθυνση των διανυσμάτων της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας, είναι ίδια με εκείνα της φυγόκεντρης δύναμης που είναι αντίρροπη σε σχέση με το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ακτίνα καμπυλότητας.

Θετική ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα, σημαίνει ότι το διάνυσμα ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας είναι ομόρροπο με το οριζόντιο διάνυσμα, γεγονός που αντιστοιχεί σε δεξιά στροφή (στη διεύθυνση που αυξάνεται το μήκος της καμπύλης). Αντίθετα, αρνητική ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα, σημαίνει ότι το διάνυσμα ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας είναι αντίρροπο με το οριζόντιο διάνυσμα, γεγονός που αντιστοιχεί σε αριστερή στροφή (στη διεύθυνση που αυξάνεται το μήκος της καμπύλης).

Ακόμα, από την Εικόνα (10.19), φαίνεται ότι, θετική κάθετη καμπυλότητα, αντιστοιχεί σε κυρτή κατακόρυφη καμπύλη, ενώ αρνητική κάθετη καμπυλότητα, αντιστοιχεί σε κοίλη κατακόρυφη καμπύλη. Αυτό συμβαίνει γιατί θετική ψευδοκάθετη καμπυλότητα, σημαίνει ότι το διάνυσμα καμπυλότητας είναι ομόρροπο με το μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα, γεγονός που αντιστοιχεί σε κυρτή καμπύλη. Αντίθετα, αρνητική ψευδοκάθετη καμπυλότητα, σημαίνει ότι το διάνυσμα καμπυλότητας είναι αντίρροπο με το μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα, γεγονός που αντιστοιχεί σε κοίλη καμπύλη.

Για να έχουν φυσικό νόημα οι κάθετες συνιστώσες, πρέπει να είναι προσημασμένες. Έτσι ορίζεται το “προσημασμένο μέτρο” των διανυσμάτων που αντιστοιχεί σε αριθμητική προβολή ενός διανύσματος (διάνυσμα καμπυλότητας), σε άλλο (οριζόντιο διάνυσμα ή μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας).

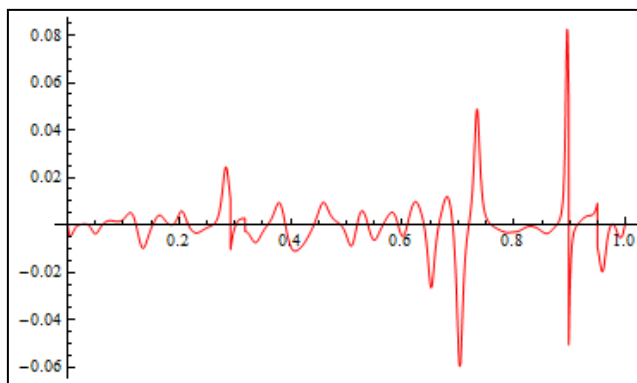
```
PSEUDOGEODESICVECTORARITHMETIC[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},
v1 = kappavector[alpha][t];
v2 = HORIZONTALVECTOR[alpha][t];
v3 =  $\frac{v1.v2}{\sqrt{v2.v2}}$ ];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.10 : Αριθμητική προβολή (πραγματικός αριθμός) του διανύσματος καμπυλότητας στο οριζόντιο διάνυσμα της επιφάνειας

```
PSEUDONORMALVECTORARITHMETIC[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},
v1 = kappavector[alpha][t];
v2 = PSEUDOUNITNORMALVECTOR[alpha][t];
v3 =  $\frac{v1.v2}{\sqrt{v2.v2}}$ ];
```

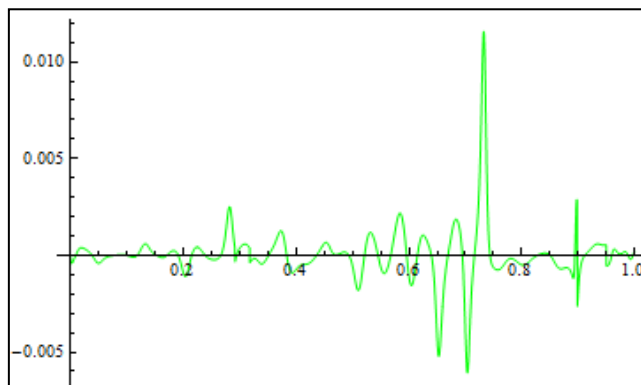
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.11 : Αριθμητική προβολή (πραγματικός αριθμός) του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας

```
s1 = Plot[PSEUDOGEODESICVECTORARITHMETIC[bspline1][t], {t, 0, 1},
PlotRange → All, PlotStyle → Red]
```



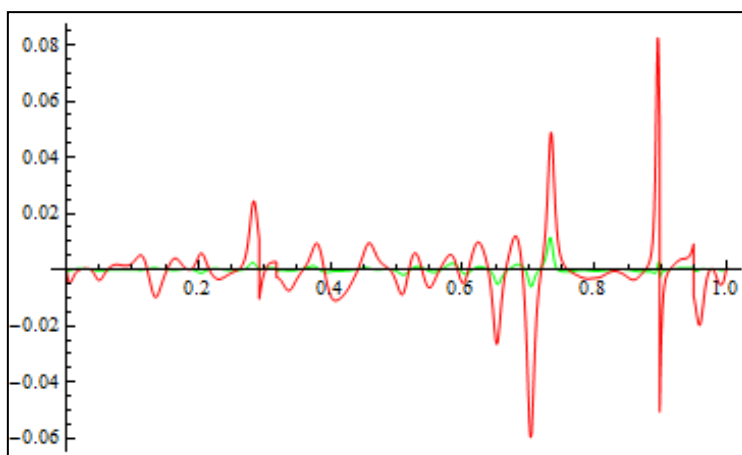
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.2 : Τιμές της αριθμητικής προβολής του διανύσματος καμπυλότητας στο οριζόντιο διάνυσμα

```
s2 = Plot[PSEUDONORMALVECTORARITHMETIC[bspline1][t], {t, 0, 1},
PlotRange → All, PlotStyle → Green]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.3 : Τιμές της αριθμητική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας

Show [s1, s2]



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.4 : Τιμές της αριθμητική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας στο οριζόντιο διάνυσμα μαζί με τις τιμές της αριθμητικής προβολής του διανύσματος καμπυλότητας στο μοναδιαίο ψευδοκάθετο διάνυσμα της επιφάνειας

Στη συνέχεια κατασκευάζονται δύο αλγόριθμοι (ένας για την κάθετη και ένας για τη γεωδαισιακή καμπυλότητα) που δίνουν τη δυνατότητα θέσπισης ενός ορίου (άνω φράγμα) καμπυλότητας, έτσι ώστε να μην μπορεί να ξεπεράσει μία συγκεκριμένη τιμή. Όπως συμβαίνει στη καμπυλότητα επίπεδης καμπύλης, έτσι και στην περίπτωση της γεωδαισιακής ή κάθετης καμπυλότητας χωρικής καμπύλης, αυτές αντιστοιχούν στο αντίστροφο της ακτίνας καμπυλότητας. Αυτό συμβαίνει, γιατί, για τον υπολογισμό της γεωδαισιακής και κάθετης καμπυλότητας, η επιφάνεια αντιμετωπίζεται ως, διαφορετικά, επίπεδη.

Αν για παράδειγμα, τεθεί η τιμή $1/20$ ως όριο της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας, αυτό σημαίνει ότι δεν επιτρέπεται στην ακτίνα καμπυλότητας (κατά την οριζοντιογραφική έννοια) να είναι μικρότερη από $20m$.

Επίσης, αν τεθεί η τιμή $1/1350$ ως όριο της (θετικής) κάθετης καμπυλότητας, αυτό σημαίνει ότι δεν επιτρέπεται στην ακτίνα καμπυλότητας (κατά την έννοια της μηκοτομής) της κυρτής καμπύλης, να είναι μικρότερη από $1350m$. Με τον ίδιο τρόπο, τίθεται όριο και στην περίπτωση κοίλης καμπύλης.

Στο Πρόγραμμα 10.12, φαίνεται ο αλγόριθμος μετασχηματισμού στην περίπτωση της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας :

```

ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[alpha_, limit_ : 0.02, step_ : 0.0001] :=
Module[{start, kappatemp},

start = ConstantArray[{0, 0}, 100 000];
t = 0;
i = 1;
While [t ≤ 1,

kappatemp = PSEUDOGEODESICVECTORARITHMETIC[alpha][t];

If[kappatemp > 0,
If [kappatemp < limit, kappatemp = kappatemp];
If [kappatemp ≥ limit, kappatemp = limit];

start[[i]] = {t, kappatemp};

i = i + 1];

If[kappatemp < 0,
If [kappatemp > -limit, kappatemp = kappatemp];
If [kappatemp ≤ -limit, kappatemp = -limit];

start[[i]] = {t, kappatemp};

i = i + 1];

t = t + step];
start[[1 ;; i - 1]]];

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.12 : Εισαγωγή ορίου (άνω φράγμα) στην ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα
 Στο Πρόγραμμα 10.13, φαίνεται ο αλγόριθμος μετασχηματισμού στην περίπτωση της ψευδοκάθετης καμπυλότητας :

```

ARRAYPSEUDONORMALKAPPAWITHLIMITS[alpha_, limitkurth_ : 0.02,
  limitkoilh_ : 0.02, step_ : 0.0001] := Module[{start, kappatemp},

  start = ConstantArray[{0, 0}, 100 000];
  t = 0;
  i = 1;
  While [t ≤ 1,

    kappatemp = PSEUDONORMALVECTORARITHMETIC[alpha][t];

    If[kappatemp > 0,
      If [kappatemp < limitkurth, kappatemp = kappatemp];
      If [kappatemp ≥ limitkurth, kappatemp = limitkurth];

      start[[i]] = {t, kappatemp};

      i = i + 1];

    If[kappatemp < 0,
      If [kappatemp > -limitkoilh, kappatemp = kappatemp];
      If [kappatemp ≤ -limitkoilh, kappatemp = -limitkoilh];

      start[[i]] = {t, kappatemp};

      i = i + 1];

    t = t + step];
  start[[1 ;; i - 1]];

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.13 : Εισαγωγή ορίων (άνω φράγματα) στην ψευδοκάθετη καμπυλότητα. Θεσπίζεται άλλο όριο για τις κυρτές καμπύλες και άλλο για τις κοίλες

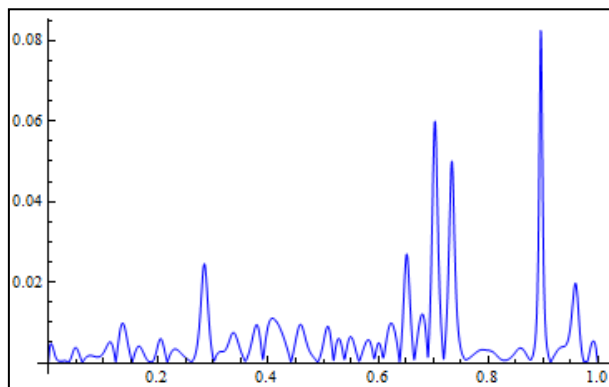
Στη συνέχεια, ορίζεται η καμπυλότητα της δεύτερης προσέγγισης του άξονα της οδού, θέτοντας τα όρια ως προς τη ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα και την ψευδοκάθετη καμπυλότητα. Συγκεκριμένα, στην ψευδοκάθετη καμπυλότητα επιβάλλονται δύο διακεκριμένα όρια σε σχέση με το εάν η κατακόρυφη καμπύλη είναι κυρτή ή κοίλη :

- ❖ Ελάχιστη οριζοντιογραφική ακτίνα καμπυλότητας : 20m
- ❖ Ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας κυρτής (θετικής) κατακόρυφης καμπύλης : 800m
- ❖ Ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας κοίλης (αρνητικής) κατακόρυφης καμπύλης : 1350m

```

KREAL = Plot[Kappa[bspline1][t], {t, 0, 1},
  PlotStyle → {Blue, Thickness[0.001]}, PlotRange → All]

```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.5 : Διάγραμμα καμπυλότητας της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού

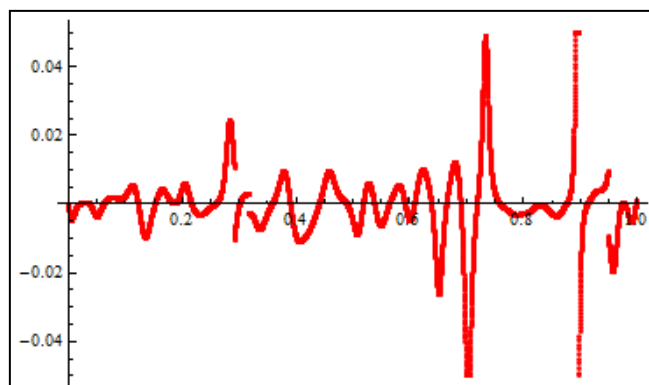
Τροποποιημένη ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα

```
TG = ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[bspline1, 1/20, 0.0001];
```

```
Dimensions [TG]
```

```
{10 001, 2}
```

```
TGP = ListPlot[TG, PlotRange → All, PlotStyle → Red]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.6 : Διάγραμμα ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας του άξονα της οδού με εισαγωγή ορίου

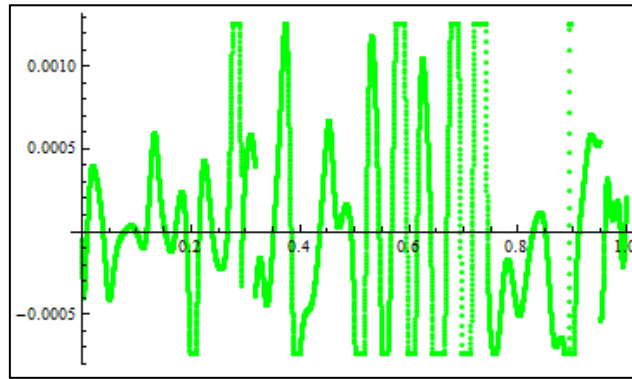
Τροποποιημένη ψευδοκάθετη καμπυλότητα

```
TN = ARRAYPSEUDONORMALKAPPAWITHLIMITS[bspline1, 1/800, 1/1350, 0.0001];
```

```
Dimensions [TN]
```

```
{10 001, 2}
```

```
TNP = ListPlot[TN, PlotRange → All, PlotStyle → Green]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.7 : Διάγραμμα ψευδοκάθετης καμπυλότητας του άξονα της οδού με εισαγωγή ορίων

Τροποποιημένη καμπυλότητα

```
bsplineg = BSplineFunction[TG, SplineDegree → 1];
```

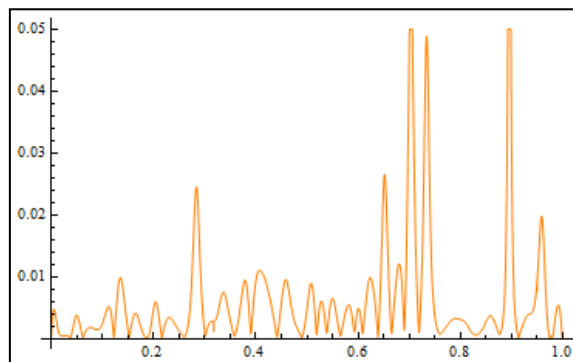
```
bsplinen = BSplineFunction[TN, SplineDegree → 1];
```

```
KappabyGeodeticandNormalArray[u_] := Module[{k, kg, kn},
  kg = bsplineg[u][[2]];
  kn = bsplinen[u][[2]];
  k =  $\sqrt{kn^2 + kg^2}$ ;
  k];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.14 : Υπολογισμός της καμπυλότητας μέσω της ψευδογεωδαισιακής και ψευδοκάθετης καμπυλότητας αφού προηγουμένως τους έχουν επιβληθεί όρια

Τονίζεται ότι η καμπυλότητα είναι μία συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση

```
kmP = Plot[KappabyGeodeticandNormalArray[t], {t, 0, 1}, PlotRange → All,
  PlotStyle → Orange, PlotRange → All]
```

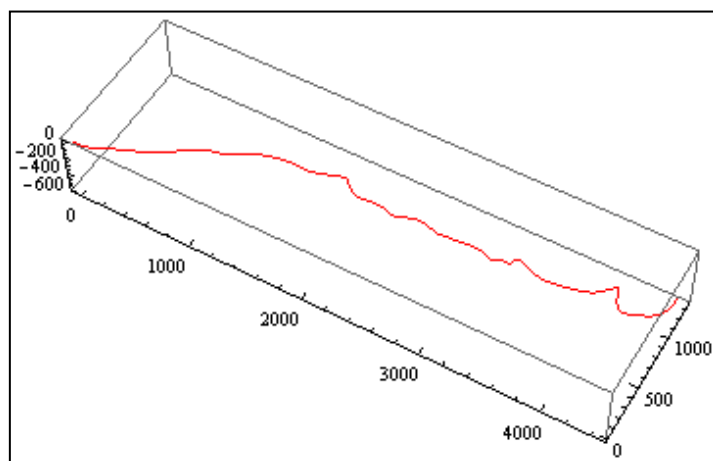
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.8 : Διάγραμμα καμπυλότητας του άξονα της οδού αφού προηγουμένως έχουν επιβληθεί όρια στην ψευδογεωδαισιακή και ψευδοκάθετη καμπυλότητα

```
KappaArrayAlignment = Table[KappabyGeodeticandNormalArray[t],
{t, 0, 1, 0.0001}];
```

```
KappaBSpline = BSplineFunction[KappaArrayAlignment, SplineDegree → 3];
```

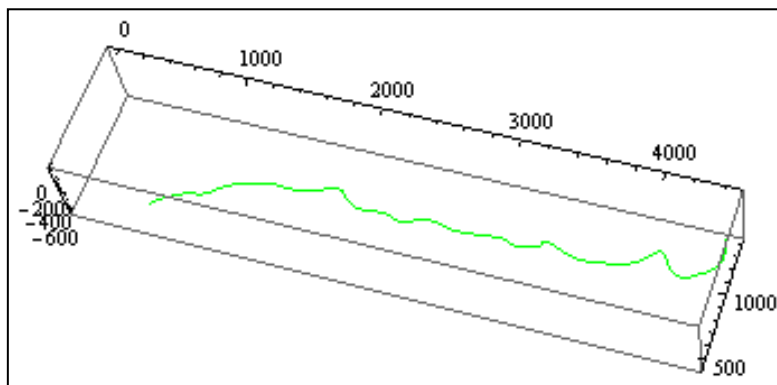
Το γεγονός ότι η καμπύλη παρεμβολής $B - Spline$ της καμπυλότητας, είναι τρίτης τάξης, σημαίνει ότι η συνάρτηση καμπυλότητας της δεύτερης προσέγγισης του άξονα της οδού αποτελείται τμηματικά, από κυβικές παραβολές.

```
prototype = plotintrinsic3darbitrarispeed [
{bspline1[#] &, Kappa[bspline1][#] &, Tau[bspline1][#] &},
{0.0001, {0, 0, 0},
{1, 0, 0}, {0, 1, 0}},
{0, 1}, PlotStyle → Red]
```



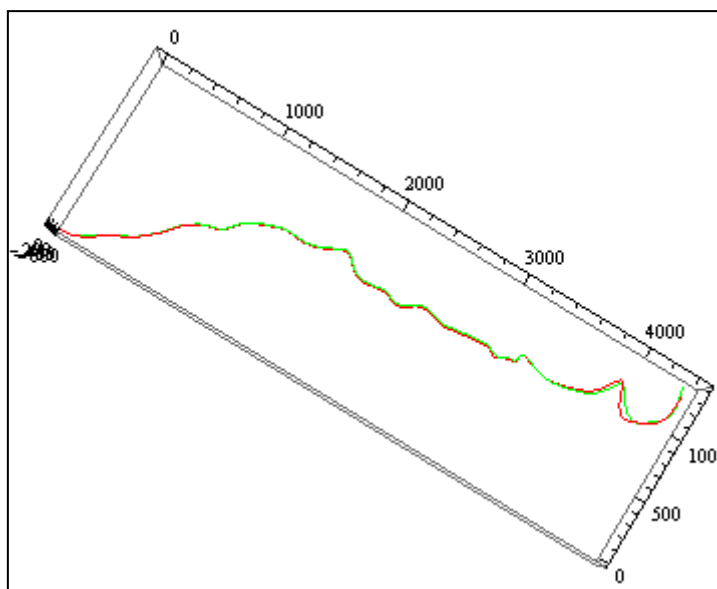
ΕΙΚΟΝΑ 10.20 : Πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού

```
prototypekappamodified =
plotintrinsic3darbitrarispeed [
{bspline1[#] &, KappaBSpline[#] &, Tau[bspline1][#] &},
{0.0001, {0, 0, 0},
{1, 0, 0}, {0, 1, 0}},
{0, 1}, PlotStyle → Green]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.21 : Δεύτερη προσέγγιση του άξονα της οδού έπειτα από επιβολή ορίων στην καμπυλότητα

Show[{{prototype, protypemodified}}, PlotRange -> All]



ΕΙΚΟΝΑ 10.22 : Άξονας της οδού πριν και μετά την επιβολή ορίων στην καμπυλότητα (σύγκριση της πρώτης προσέγγισης της οδού με τη δεύτερη)

Επαλήθευση του μετασχηματισμού στερεού σώματος και του μετασχηματισμού στερεού σώματος του Προκρούστη στην πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού

Όπως έχει τονιστεί, η κατασκευή μίας καμπύλης από την καμπυλότητα και τη στρέψη της, ορίζουν μόνο το σχήμα της καμπύλης και όχι τη θέση της στον χώρο.

Υπενθυμίζεται ότι στον \mathbb{R}^3 , οι επιτρεπτές αλλαγές συντεταγμένων, είναι οι στροφές και οι μεταφορές. Έτσι, για να οριστεί και η θέση της καμπύλης στον χώρο, εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός στερεού σώματος του Προκρούστη. Όμως, πριν εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός στερεού σώματος του Προκρούστη, πρέπει να υπολογιστούν οι συντεταγμένες της καμπύλης που κατασκευάζεται από την καμπυλότητα και τη στρέψη. Αυτό, επιτυγχάνεται, λύνοντας τις εξισώσεις του *Frenet* σε κάθε σημείο της καμπύλης με τη βοήθεια του *Mathematica*, μέσω της συνάρτησης *intrinsic3darbitrarispeed* (πρόκειται για καμπύλη τυχαίας παραμέτρου).

Κατασκευάζεται ένας πίνακας με τις συντεταγμένες της καμπύλης (“απροσδιόριστης στον χώρο”):

```
TableInitialCoordinates =
Table[
intrinsic3darbitrariyspeed[{bspline1[#] &, Kappa[bspline1][#] &,
Tau[bspline1][#] &}, {0, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}][t],
{t, 0, 0.999, 0.001}];
```

```
Dimensions[TableInitialCoordinates]
```

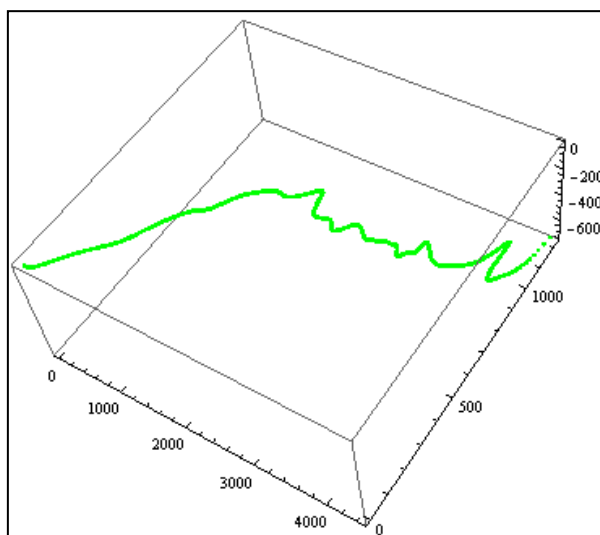
```
{1000, 1, 3}
```

```
TableInitialCoordinatesModified =
Table[TableInitialCoordinates[[i]][[1]], {i, 1, 1000}];
```

```
Dimensions[TableInitialCoordinatesModified]
```

```
{1000, 3}
```

```
pl2 = ListPointPlot3D[TableInitialCoordinatesModified, PlotStyle -> Green]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.23 : Σημεία της πρώτης προσέγγισης του άξονα της οδού που έχουν υπολογιστεί μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης (δεν έχουν τη σωστή θέση στον χώρο)

Επίσης, κατασκευάζεται ένας πίνακας με τις αντίστοιχες συντεταγμένες της πρότυπης καμπύλης :

```
TableCoordinates = Table[bspline1[t], {t, 0, 0.999, 0.001}];
```

```
Dimensions[TableCoordinates]
```

```
{1000, 3}
```

Έπειτα, εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός στερεού σώματος του Προκρούστη :

```

ProcrustesRigidBody[xyz_, XYZ_] := Module[
  {n, unit, CC, A, U, V, E, R, T, Δ, Err},
  n = Dimensions[xyz][[1]];
  unit = Table[{1}, {i, 1, n}];
  CC = IdentityMatrix[n] -  $\frac{1}{n}$  * unit.Transpose[unit];
  A = Transpose[xyz].Transpose[CC].CC.XYZ;
  {U, E, V} = SingularValueDecomposition[SetPrecision[A, 20]];
  R = U.Transpose[V];
  T = Flatten[Inverse[Transpose[unit].unit]][[1]]
    * Transpose[xyz - XYZ.Transpose[R]].unit;
  Δ = xyz - XYZ.Transpose[R] - unit.Transpose[T];
  Err = Tr[Transpose[Δ].Δ];
  {R, T, Err}];

```

Πρόγραμμα 7.2 : Μετασχηματισμός Στερεού Σώματος του Προκρούστη χωρίς πίνακα βαρών W

```

ProcrustesMatrix = ProcrustesRigidBody[TableCoordinates,
  TableInitialCoordinatesModified, IdentityMatrix[1000]]

```

```

{{{0.7732429810564575730, -0.5725776369522275435, 0.27248879226332577085},
 {0.6336192291672100148, 0.7145701014919130283, -0.29650673261055593075},
 {-0.02493921964443540054,
  0.40192588833768872535, 0.9153325164154753121}},
 {{448747.}, {4.51934 × 106}, {736.084}}, 0.00231762}

```

Από τον *ProcrustesMatrix*, υπολογίζεται ο πίνακας στροφής και ο πίνακας μετάθεσης :

Ο πίνακας στροφής R , είναι :

```
R = ProcrustesMatrix[[1]] // MatrixForm
```

```

( 0.7732429810564575730  -0.5725776369522275435  0.27248879226332577085
  0.6336192291672100148  0.7145701014919130283  -0.29650673261055593075
 -0.02493921964443540054  0.40192588833768872535  0.9153325164154753121 )

```

Ο πίνακας μετάθεσης T , είναι :

```
T = ProcrustesMatrix[[2]] // MatrixForm
```

```

( 448747.
  4.51934 × 106
  736.084 )

```

Η τιμή του σφάλματος της μεθόδου *Err*, είναι :

```
Err = ProcrustesMatrix[[3]]
```

```
0.00231762
```

Από τη στιγμή που έχει υπολογιστεί ο πίνακας στροφής και ο πίνακας μετάθεσης, μπορεί να εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός στερεού σώματος (*Rigid Body Transformation*). Στο *Mathematica*, αυτό γίνεται ως εξής :

```
RigidBodyTransformation[data1_, T_, R_] := Module[{data2, Tgeneral, n},
  n = Dimensions[data1][[1]];
  Tgeneral = SparseArray[{{i_, 1} → T[[1, 1]],
    {i_, 2} → T[[2, 1]], {i_, 3} → T[[3, 1]]}, {n, 3}];
  data2 = Tgeneral + data1.Transpose[R];
  data2];
```

Πρόγραμμα 7.3 : Μετασχηματισμός Στερεού Σώματος

Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε :

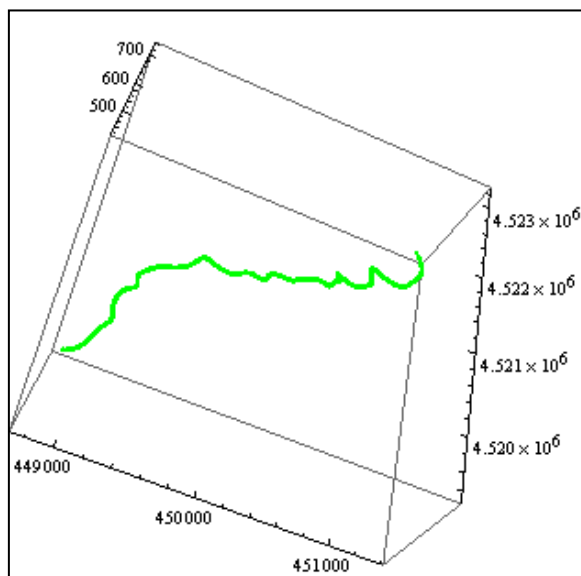
```
CoordinatesTable = RigidBodyTransformation[TableInitialCoordinatesModified, T, R];
```

```
Dimensions[CoordinatesTable]
```

```
{1000, 3}
```

Στη συνέχεια φαίνονται διαγραμματικά, οι συντεταγμένες του πίνακα που έχει προκύψει από τον μετασχηματισμό στερεού σώματος, στον οποίο τα δεδομένα εισόδου, δηλαδή ο πίνακας μετάθεσης και ο πίνακας στροφής, έχουν προκύψει από τον μετασχηματισμό στερεού σώματος του Προκρούστη :

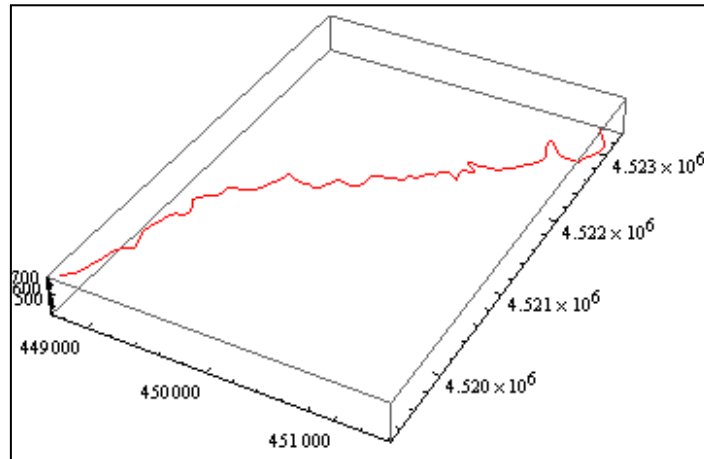
```
p13 = ListPointPlot3D[CoordinatesTable, PlotStyle → Green]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.24 : Σημεία του άξονα της οδού που έχουν υπολογιστεί με εφαρμογή του μετασχηματισμού του Προκρούστη και εν συνεχεία, του μετασχηματισμού στερεού σώματος

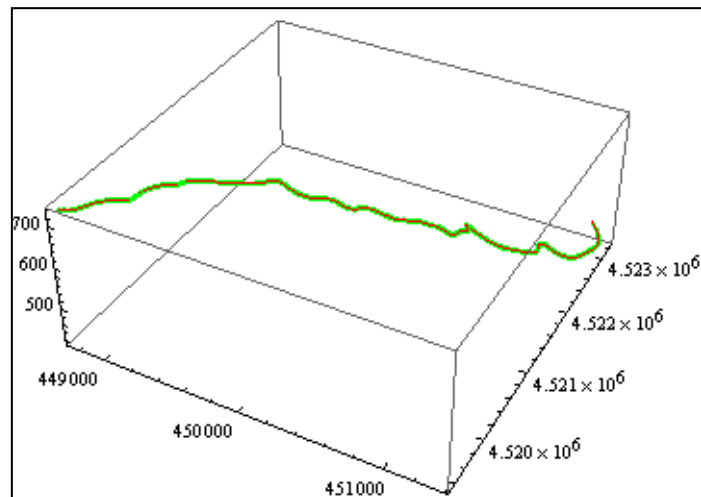
Τελικά, γίνεται η σύγκριση του άξονα της οδού που έχει υπολογιστεί με εφαρμογή του μετασχηματισμού του Προκρούστη και εν συνεχεία, του μετασχηματισμού στερεού σώματος με αυτό της αρχικής *B – Spline* (Εικόνα 10.25):

```
p14 = ParametricPlot3D[bspline1[t], {t, 0, 1}, PlotStyle → Red]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.25 : Αρχικός άξονας της οδού

Show [p13, p14]



ΕΙΚΟΝΑ 10.26 : Σύγκριση του αρχικού άξονας της οδού με αυτόν που έχει προκύψει μέσω του θεμελιώδους θεωρήματος καμπυλών (καμπυλότητα - στρέψη) και στη συνέχεια με εφαρμογή του μετασχηματισμού του Προκρούστη και του μετασχηματισμού στερεού σώματος

Το γεγονός ότι οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται, επαληθεύει το θεμελιώδες θεώρημα των καμπυλών, τη σωστή εφαρμογή του μετασχηματισμού στερεού σώματος του Προκρούστη και του προγράμματος μετασχηματισμού στερεού σώματος.

Στον πίνακα *CoordinatesTable*, υπάρχουν 1000 σημεία, ενώ το μήκος του άξονα είναι περίπου 6200m. Το γεγονός ότι έχουν επιλεγεί χίλια σημεία συνδέεται άμεσα με την ακρίβεια της μεθόδου, ενώ μπορεί να μεταβληθεί από τον χρήστη ανάλογα με τις απαιτήσεις του έργου. Ακόμα, πρέπει να σημειωθεί ότι αυτά τα χίλια σημεία, σε καμία περίπτωση, δεν κατανέμονται ομοιόμορφα κατά μήκος του άξονα της οδού, ενώ οι (τρισιδιάστατες) συντεταγμένες του πίνακα *CoordinatesTable*, δεν είναι αυτές που τελικά θα χαραχθούν στο ύπαιθρο.

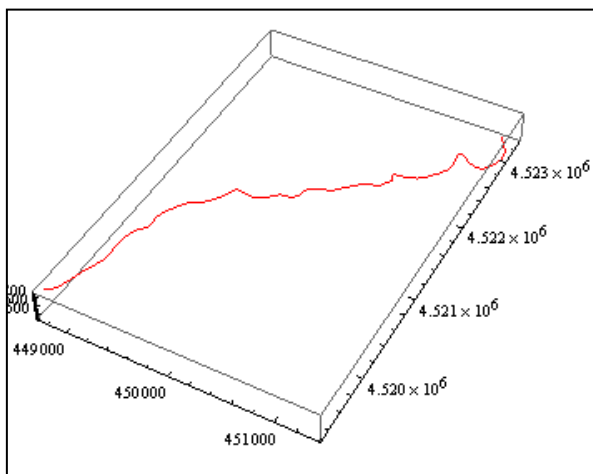
Εφαρμογή του μετασχηματισμού στερεού σώματος και του μετασχηματισμού στερεού σώματος του Προκρούστη στη δεύτερη προσέγγιση του άξονα της οδού

```
TableInitialCoordinates = Table[bspline1[t], {t, 0, 0.999, 0.001}];
```

```
Dimensions[TableInitialCoordinates]
```

```
{1000, 3}
```

```
p12 = ParametricPlot3D[bspline1[t], {t, 0, 1}, PlotStyle -> Red]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.27 : Αρχικός άξονας της οδού

Στη συνέχεια, κατασκευάζεται ένας πίνακας με τις αντίστοιχες συντεταγμένες της δεύτερης προσέγγισης του άξονα της οδού :

```
falsecookappamodified =  
Table[  
  intrinsic3darbitraryspeed[{bspline1[#] &, KappaBSpline[#] &,  
    Tau[bspline1][#] &}, {0, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}][t],  
  {t, 0, 0.999, 0.001}];
```

```
Dimensions[falsecookappamodified]
```

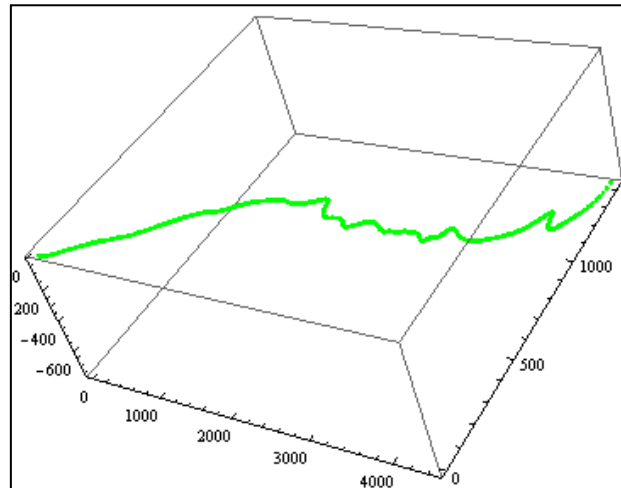
```
{1000, 1, 3}
```

```
falsecookappamodifiedtd = Table[falsecookappamodified[[i]][[1]],  
  {i, 1, 1000}];
```

```
Dimensions[falsecookappamodifiedtd]
```

```
{1000, 3}
```

```
p2 = ListPointPlot3D[falsecookappamodifiedtd, PlotStyle -> Green]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.28 : Σημεία του άξονα της οδού που έχουν υπολογιστεί μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης (δεν έχουν τη σωστή θέση στον χώρο)

```
ProcrustesMatrix2 = ProcrustesRigidBody[TableInitialCoordinates,
falsecoobspline1td, IdentityMatrix[1000]]
```

```
{{{0.7732429810564575730, -0.5725776369522275435, 0.27248879226332577085},
{0.6336192291672100148, 0.7145701014919130283, -0.29650673261055593075},
{-0.02493921964443540054,
0.40192588833768872535, 0.9153325164154753121}},
{{448747.}, {4.51934×106}, {736.084}}, 0.00231762}}
```

Από τον *ProcrustesMatrix2*, υπολογίζεται ο πίνακας στροφής και ο πίνακας μετάθεσης :

Ο πίνακας στροφής *R2*, είναι :

```
R2 = ProcrustesMatrix2[[1]] // MatrixForm
```

```
( 0.7732429810564575730 -0.5725776369522275435 0.27248879226332577085
0.6336192291672100148 0.7145701014919130283 -0.29650673261055593075
-0.02493921964443540054 0.40192588833768872535 0.9153325164154753121 )
```

Ο πίνακας μετάθεσης *T2*, είναι :

```
T = ProcrustesMatrix[[2]] // MatrixForm
```

```
( 448747.
4.51934×106
736.084 )
```

Η τιμή του σφάλματος της μεθόδου *Err2*, είναι :

```
Err2 = ProcrustesMatrix2[[3]]
```

```
0.00231762
```

Από τη στιγμή που έχει υπολογιστεί ο πίνακας στροφής και ο πίνακας μετάθεσης, μπορεί να εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός στερεού σώματος (*Rigid Body Transformation*).

Στην προκειμένη περίπτωση, έχουμε :

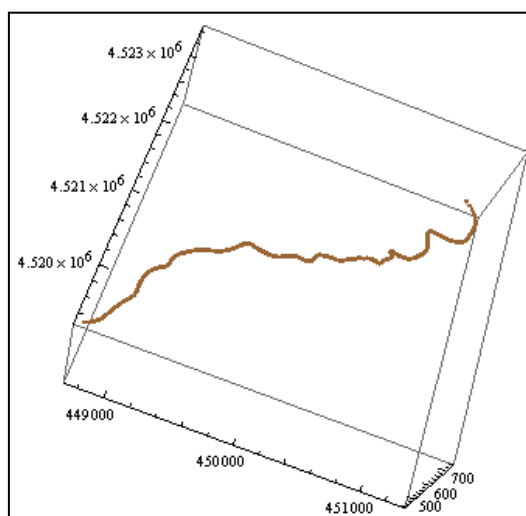

```
CoordinatesTable2 = RigidBodyTransformation[falsecookappamodifiedtd,
T2, R2];
```

```
Dimensions[CoordinatesTable2]
```

```
{1000, 3}
```

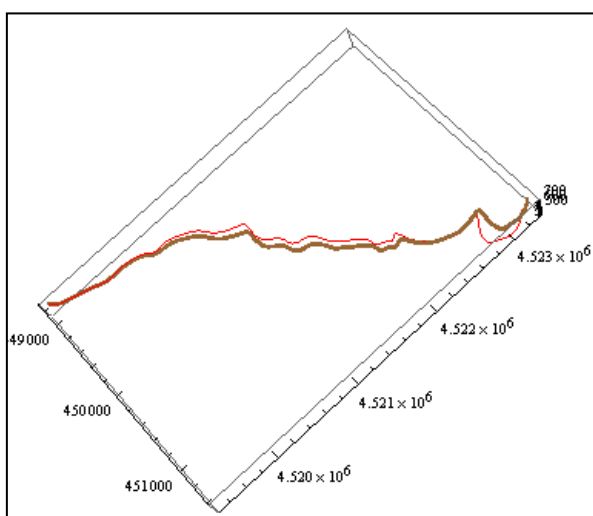
Στη συνέχεια, φαίνονται διαγραμματικά οι συντεταγμένες που έχουν προκύψει μέσω του θεμελιώδους θεωρήματος ύπαρξης καμπυλών (μεταβολή της καμπυλότητας της δεύτερης προσέγγιση του άξονα της οδού) και εν συνεχεία, της εφαρμογής του μετασχηματισμού στερεού σώματος :

```
plc = ListPointPlot3D[CoordinatesTable2, PlotStyle -> Brown]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.29 : Σημεία του άξονα της οδού που έχουν υπολογιστεί μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης (έχουν τη σωστή θέση στον χώρο μέσω του μετασχηματισμού του Προκρούστη και του μετασχηματισμού στερεού σώματος)

```
Show[pl2, plc]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.30 : Σύγκριση του αρχικού άξονα της οδού με αυτόν που έχει προκύψει μέσω της καμπυλότητας (με θέσπιση ορίων) και της στρέψης και στη συνέχεια με εφαρμογή του μετασχηματισμού του Προκρούστη και του μετασχηματισμού στερεού σώματος

Τελικά, η δεύτερη προσέγγιση του άξονα της οδού υλοποιείται ως εξής :

```
bspline2 = BSplineFunction[CoordinatesTable2];
```

10.1.7. Τρίτη προσέγγιση (τελική) του άξονα της οδού

Θέσπιση ορίου στην κατά μήκος κλίση της οδού

Πέραν των ορίων που τίθενται στην καμπυλότητα του άξονα της οδού, πρέπει να οριστεί και όριο στην κατά μήκος κλίση του άξονα. Η κατά μήκος κλίση του άξονα (με επιβολή ανωτάτου ορίου), δίνεται από το Πρόγραμμα 10.15 :

```
ARRAYSLOPEWITHLIMIT[alpha_, limit_ : 0.02, step_ : 0.0001] :=
Module[{start, kappatemp},

start = ConstantArray[0, 100 000];
t = 0;
i = 1;
While [t ≤ 1,

kappatemp = TANGENT[alpha][t].{0, 0, 1};

If[kappatemp > 0,
If [kappatemp < limit, kappatemp = kappatemp];
If [kappatemp ≥ limit, kappatemp = limit];

start[[i]] = kappatemp;

i = i + 1];

If[kappatemp < 0,
If [kappatemp > -limit, kappatemp = kappatemp];
If [kappatemp ≤ -limit, kappatemp = -limit];

start[[i]] = kappatemp;

i = i + 1];

t = t + step];
start[[1 ;; i - 1]]];
```

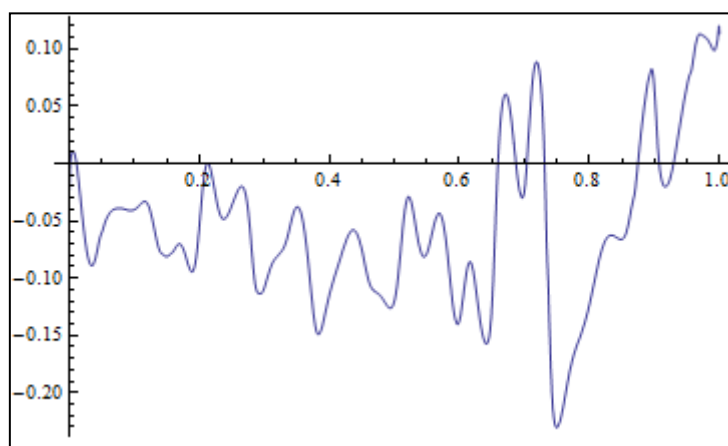
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.15 : Εισαγωγή ορίου (άνω φράγμα) στην κατά μήκος κλίση της οδού

Ουσιαστικά, ο παραπάνω αλγόριθμος, υπολογίζει το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος, σε κάθε σημείο της καμπύλης, και του μοναδιαίου

διανύσματος $(0,0,1)$ θέτοντας ένα ανώτατο όριο. Όμως το συνημίτονο αυτής της γωνίας, ισούται με το ημίτονο της συμπληρωματικής της. Η συμπληρωματική αυτής της γωνίας, είναι η γωνία μεταξύ του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος της καμπύλης και του οριζώντιου επιπέδου. Επίσης, για μικρές γωνίες, το ημίτονο μίας γωνίας, ισούται κατά προσέγγιση, με την αντίστοιχη εφαπτομένη αυτής της γωνίας. Τελικά, το συνημίτονο της γωνίας που υπολογίζεται μέσω του παραπάνω αλορίθμου, αντιστοιχεί στην κατά μήκος κλίση του άξονα της οδού.

Όμως, πιο σωστή αντιμετώπιση θα ήταν να χρησιμοποιηθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα, παράλληλο στο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην κατακόρυφο του τόπου, αντί του διανύσματος $(0,0,1)$. Η αλλιώς, να προστίθεται κάθε φορά η απόκλιση της κατακορύφου στο αποτέλεσμα.

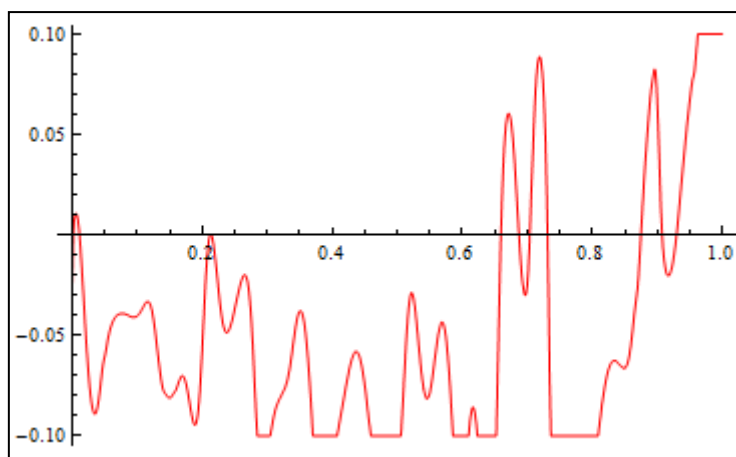
```
s1 = Plot[TANGENT[bspline2][t].{0, 0, 1}, {t, 0, 1}]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.9 : Διάγραμμα κατά μήκος κλίσης της δεύτερης προσέγγισης του άξονα της οδού

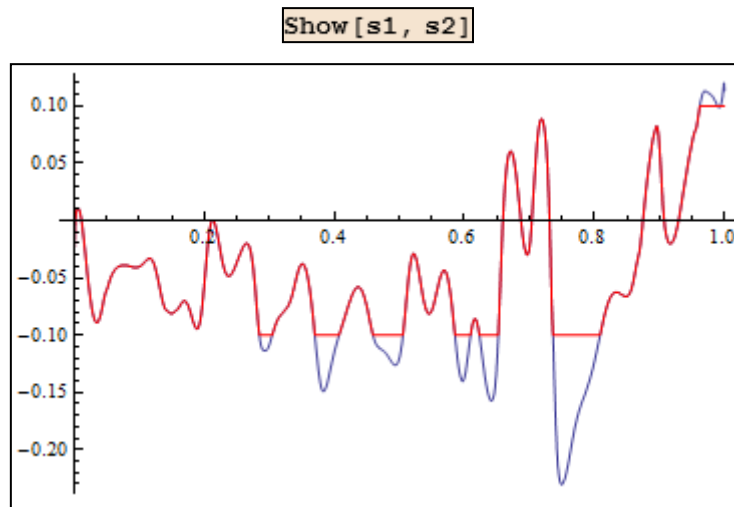
```
bss = BSplineFunction[ARRAYSLOPEWITHLIMIT[bspline2, 0.10, 0.0001],  
SplineDegree -> 1];
```

```
s2 = Plot[bss[t], {t, 0, 1}, PlotStyle -> Red]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.10 : Διάγραμμα κατά μήκος κλίσης της οδού με επιβολή ανωτάτου ορίου

Στο Διάγραμμα 10.11, έχει επιβληθεί ως όριο κατά μήκος κλίσης της οδού, η τιμή 10% :



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.11 : Σύγκριση αρχικού διαγράμματος κατά μήκος κλίσης της οδού με διάγραμμα κατά μήκος κλίσης της οδού μετά την επιβολή ανωτάτου ορίου

Ως γνωστόν, το διάνυσμα καμπυλότητας, συνδέεται άμεσα με την παράγωγο του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος ως εξής :

$$\vec{k}(t) = \frac{\vec{t}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (1.10)$$

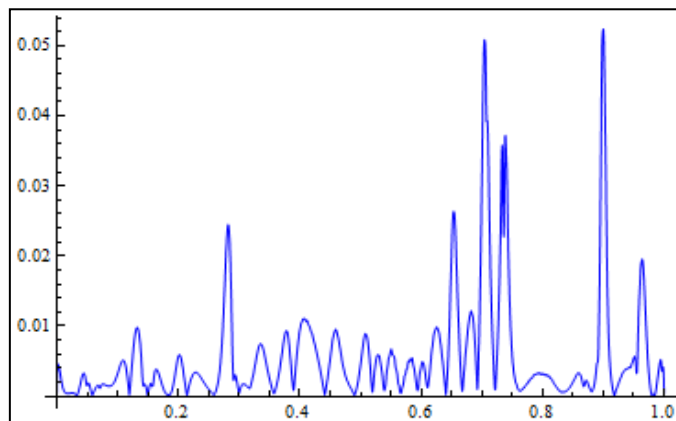
Μάλιστα, η σχέση (1.10), αποτελεί και τον κλασικό ορισμό της καμπυλότητας. Η κατά μήκος κλίση της οδού συνδέεται άμεσα με το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης \vec{t} . Όμως, από τη σχέση (1.10), συμπεραίνεται ότι και η καμπυλότητα της οδού συνδέεται άμεσα με το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης \vec{t} . Συνεπώς, αλλαγή στην κατά μήκος κλίση της οδού, επιφέρει αλλαγή και στην καμπυλότητα της οδού.

Επαλήθευση της σχέσης (1.10)

$$\text{kappavector}[\alpha_][t_] := \frac{\text{TANGENT}[\alpha][t]}{\sqrt{\alpha'[t] \cdot \alpha'[t]}}$$

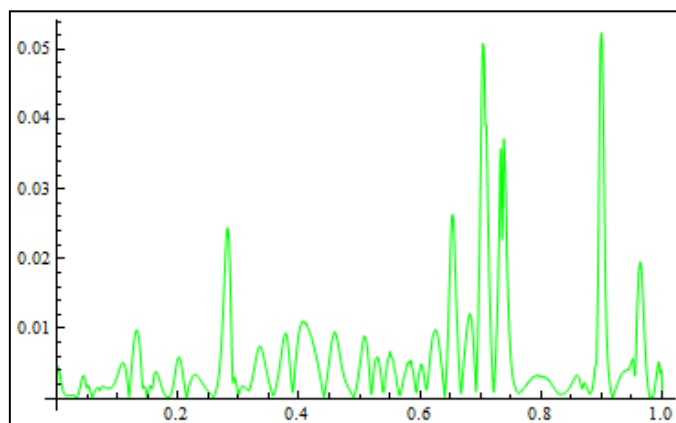
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.16 : Διάνυσμα καμπυλότητας

```
h1 = Plot[ $\sqrt{\text{kappavector}[\text{bspline2}][t] \cdot \text{kappavector}[\text{bspline2}][t]}$ ,
{t, 0, 1}, PlotRange → All, PlotStyle → Blue]
```



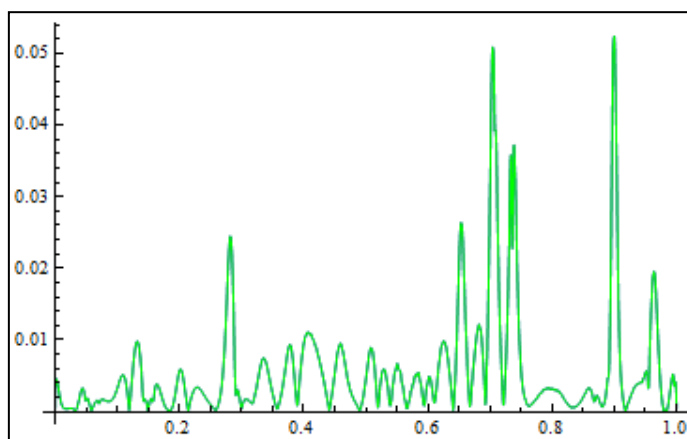
ΕΙΚΟΝΑ 10.31 : Διάγραμμα καμπυλότητας μέσω του Προγράμματος 10.17

```
h2 = Plot[Kappa[bspline2][t], {t, 0, 1}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Green]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.12 : Διάγραμμα καμπυλότητας μέσω του Προγράμματος 10.2

```
Show[h1, h2]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.13 : Σύγκριση του διαγράμματος καμπυλότητας που προκύπτει μέσω του Προγράμματος 10.17, με το διάγραμμα καμπυλότητας που προκύπτει μέσω του Προγράμματος 10.2

Από το Διάγραμμα 10.16, επαληθεύεται και τυπικά η σχέση (1.10) αφού τα διαγράμματα ταυτίζονται.

Από το πρόγραμμα 10.16 (εισαγωγή ορίου στην κατά μήκος κλίση της οδού), φαίνεται ότι ενδεχόμενη μεταβολή της κατά μήκος κλίσης, θα έχει αντίκτυπο και στα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα της καμπύλης \vec{t} . Επίσης, από τη σχέση 1.10, φαίνεται ότι ενδεχόμενη μεταβολή των μοναδιαίων εφαπτόμενων διανυσμάτων της καμπύλης \vec{t} , τροποποιεί και την καμπυλότητα του άξονα της οδού.

Τελικά, ενδεχόμενη μεταβολή της κατά μήκος κλίσης, μεταβάλλει και την καμπυλότητα του άξονα της οδού. Συνεπώς, πρέπει να υπολογιστεί εκ νέου η καμπυλότητα του άξονα της οδού. Τονίζεται ότι, η ψευδογεωδαισιακή και ψευδοκάθετη καμπυλότητα, δε χρειάζεται να ελεγχθούν ξανά αφού το μόνο που μπορεί να επιφέρει στην καμπυλότητα ο εκ νέου υπολογισμός της, είναι να μειωθεί περαιτέρω. Έτσι, η ψευδογεωδαισιακή και ψευδοκάθετη καμπυλότητα, θα βρίσκονται και πάλι εντός των ορίων.

Αρχικά, υπολογίζεται το τροποποιημένο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης :

```
TangentVector[alpha_, limit_ : 0.3, step_ : 0.1] := Module[
  {start, Slopebspline, v1, v2, v3, tangentBSpline},

  start = ConstantArray[{0, 0, 0}, 10 000];
  Slopebspline = BSplineFunction[ARRAYSLOPEWITHLIMIT[alpha, limit, step],
    SplineDegree → 1];
  t = 0;
  i = 1;

  While[t < 1,

    v1 = TANGENT[alpha][t][[1]];
    v2 = TANGENT[alpha][t][[2]];
    v3 = Slopebspline[t];

    start[[i]] = {v1, v2, v3};

    i = i + 1;

    t = t + step];
  start[[1 ;; i - 1]]];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.17 : Τροποποιημένο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης μετά την επιβολή ορίου στην κατά μήκος κλίση

Ο υπολογισμός του τροποποιημένου μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος \vec{t} της καμπύλης με εφαρμογή καμπύλης $B - Spline$, μετά την επιβολή ορίου στην κατά μήκος κλίση, φαίνεται παρακάτω :

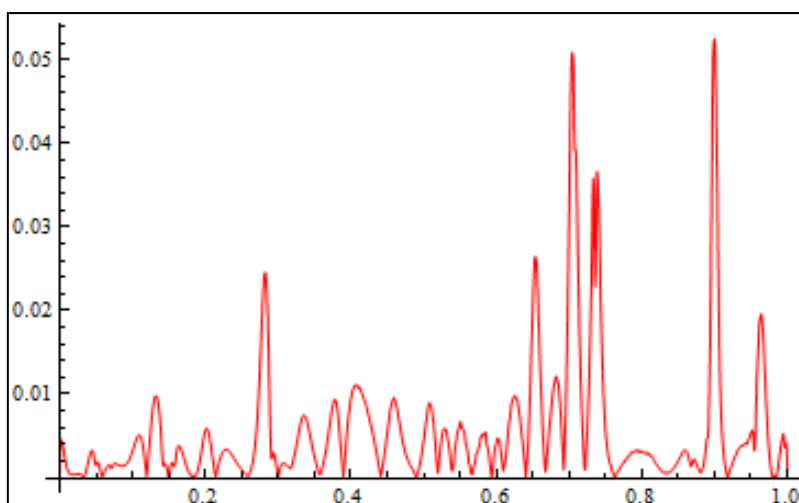
```
bstangent = BSplineFunction[TangentVector[bspline2, 0.0001, 0.1],
  SplineDegree → 1];
```

Τελικά, η καμπυλότητα υπολογίζεται μέσω του Προγράμματος (10.18) :

```
FinalKappa[alpha_][t_] := Module[{Fkappa},
  Fkappa =  $\frac{\sqrt{\text{bstangent}'[t] \cdot \text{bstangent}'[t]}}{\sqrt{\text{alpha}'[t] \cdot \text{alpha}'[t]}}$ ];
```

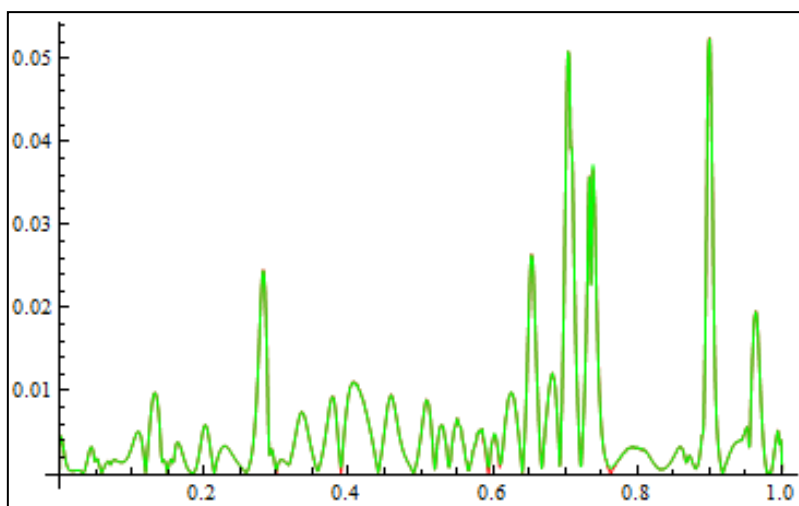
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.18 : Τελικός υπολογισμός της καμπυλότητας του άξονα της οδού

```
FinalKappaPlot = Plot[FinalKappa[bspline2, 0.0001, 0.10][t], {t, 0, 1},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Red]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.14 : Τελικό διάγραμμα καμπυλότητας

```
Show[FinalKappaPlot, h2, PlotRange -> All]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.15 : Σύγκριση τελικού διαγράμματος καμπυλότητας με το διάγραμμα καμπυλότητας πριν την επιβολή ορίου στην κατά μήκος κλίση

10.2. Επιφάνεια Της Οδού

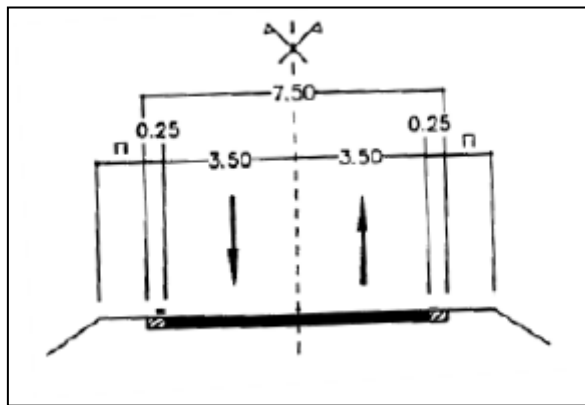
10.2.1. Επιλογή του πλάτους της οδού

Στο μάθημα-θέμα είχε επιλεγεί η διατομή γ_2 . Στη διατομή γ_2 , το ημιπλάτος της οδού (χωρίς τα 0,25 m της λωρίδας καθοδήγησης), ορίζεται ως 3,50m (Ψαριανός, 2001).

Δηλαδή :

$$v \in [-3.50, 3.50]$$

Τονίζεται ότι, η u –παραμετρική καμπύλη για $v = 0$, αντιστοιχεί στον άξονα της οδού.



ΕΙΚΟΝΑ 10.32 : Διατομή γ_2

Πηγή : (Ψαριανός, 2001)

10.2.2. Επιφάνεια μεταβλητής επίκλισης

Η επιφάνεια της οδού είναι μία ευθιογενής επιφάνεια μεταβλητής επίκλισης. Η επιφάνεια αυτή θα έχει ως βασική – οδηγό καμπύλη τη τρίτη προσέγγιση του άξονα της οδού $bspline2$. Η ευθιογενής επιφάνεια της οδού μεταβλητής επίκλισης, ορίζεται μέσω της παρακάτω διανυσματικής συνάρτησης :

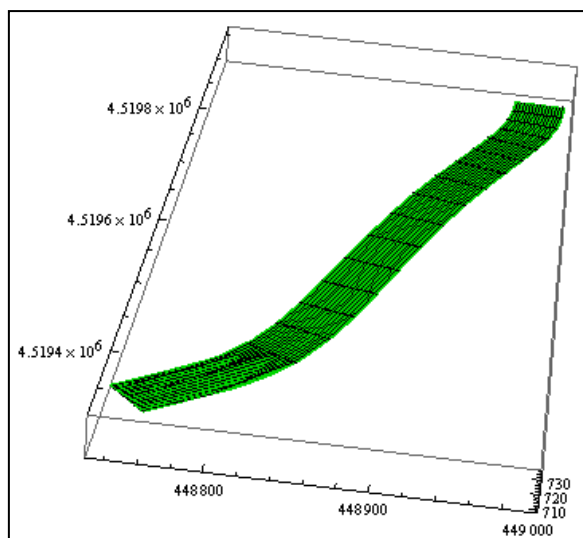
```
TURNINGSURFACE[alpha_, phi_][u_, v_] := Module[{t1, t2, c2, horizontalvector, rot},
  t1 = TANGENT[alpha][u][[1]];
  t2 = TANGENT[alpha][u][[2]];
  c2 = - t1 / t2;
  horizontalvector = { 1 / Sqrt[1 + c2^2], c2 / Sqrt[1 + c2^2], 0 };
  rot = RotationMatrix[phi, {horizontalvector, {0, 0, 1}}];
  alpha[u] + v * (rot.horizontalvector) ];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.19 : Ευθιογενής επιφάνεια μεταβλητής επίκλισης

Με το Πρόγραμμα 10.19, κατασκευάζονται επιφάνειες σταθερής, αλλά και μεταβλητής επίκλισης. Για $\rho hi = 0$, έχουμε την οριζόντια επιφάνεια, ενώ για $\rho hi = \pi/2$, έχουμε την κάθετη επιφάνεια. Σημειώνεται ότι, η κάθετη επιφάνεια μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί σε κατακόρυφη αν προστεθεί μία γωνία που αντιστοιχεί στην απόκλιση της κατακορύφου.

Οριζόντια επιφάνεια

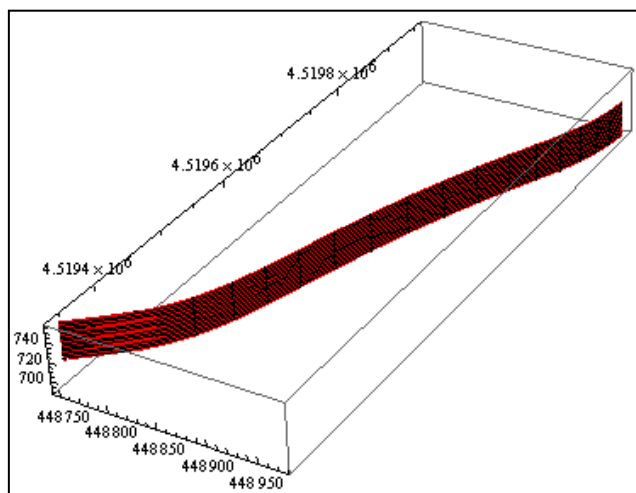
```
surfH = ParametricPlot3D[TURNINGSURFACE[bspline2, 0][u, v],
{u, 0, 0.05}, {v, -20, 20}, PlotStyle -> Green]
```



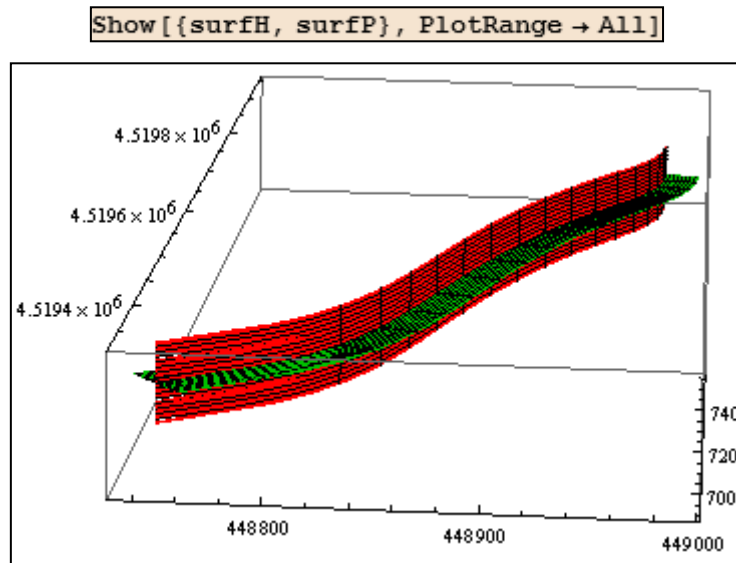
ΕΙΚΟΝΑ 10.33 : Αποτύπωση οριζόντιας επιφάνειας μέσω του Προγράμματος 10.19

Κάθετη επιφάνεια

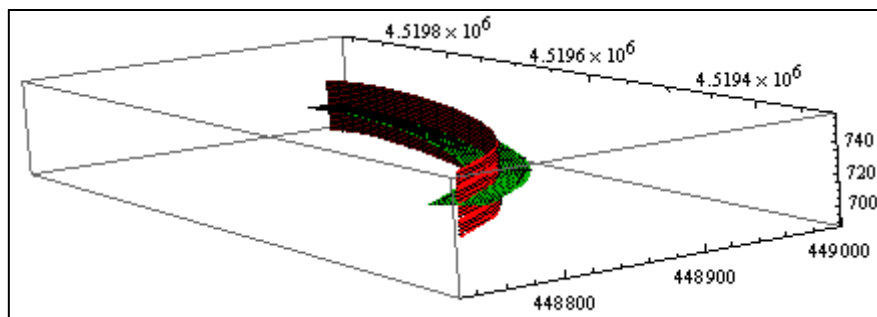
```
surfP = ParametricPlot3D[TURNINGSURFACE[bspline2, Pi/2][u, v],
{u, 0, 0.05}, {v, -20, 20}, PlotStyle -> Red]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.34 : Αποτύπωση κάθετης επιφάνειας μέσω του Προγράμματος 10.19



ΕΙΚΟΝΑ 10.35 : Αποτύπωση οριζόντιας και κάθετης επιφάνειας τμήματος οδού μέσω του Προγράμματος 10.19



ΕΙΚΟΝΑ 10.36 : Αποτύπωση οριζόντιας και κάθετης επιφάνειας τμήματος οδού μέσω του Προγράμματος 10.15

10.2.3. Θέσπιση ορίου στην επίκλιση

Η παράμετρος ρ_{hi} της παραπάνω συνάρτησης, είναι ουσιαστικά, η επίκλιση της οδού. Ακόμα, υπενθυμίζεται ότι η επίκλιση, μεταβάλλεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως και η “οριζοντιογραφική” καμπυλότητα. Δηλαδή, η επίκλιση, μεταβάλλεται όπως και η ψευδογεωδαισιακή καμπυλότητα.

Όμως, η επίκλιση δεν πρέπει να ξεπερνάει μία μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή. Τελικά, το διάγραμμα της γωνίας της επίκλισης, θα είναι ίδιο με το διάγραμμα της ψευδογεωδαισιακής καμπυλότητας, με τη μόνη διαφορά ότι θα τίθεται κάθε φορά μία μέγιστη επιτρεπόμενη γωνία. Οι παράγοντες που καθορίζουν τη μέγιστη επιτρεπόμενη επίκλιση, φαίνονται στην Παράγραφο 8.1.

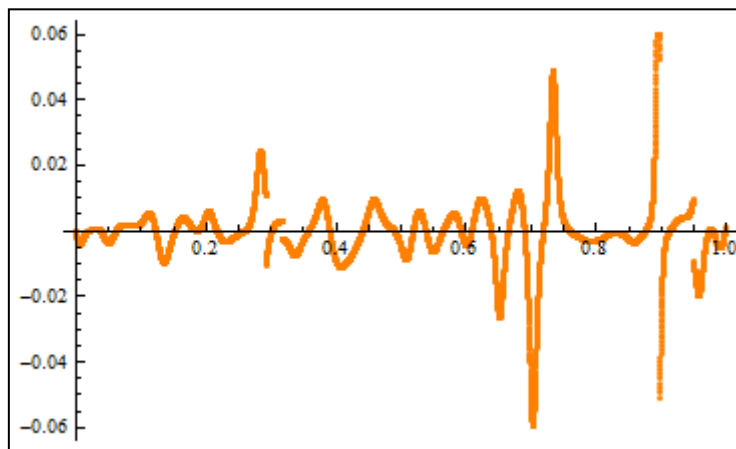
Διάγραμμα επικλίσεων

```
ArrayEpiKlish = ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[bspline1, 0.06, 0.0001];
```

```
Dimensions[ArrayEpiKlish]
```

```
{10 001, 2}
```

```
EpP = ListPlot[ArrayEpiklish, PlotRange → All, PlotStyle → Orange]
```

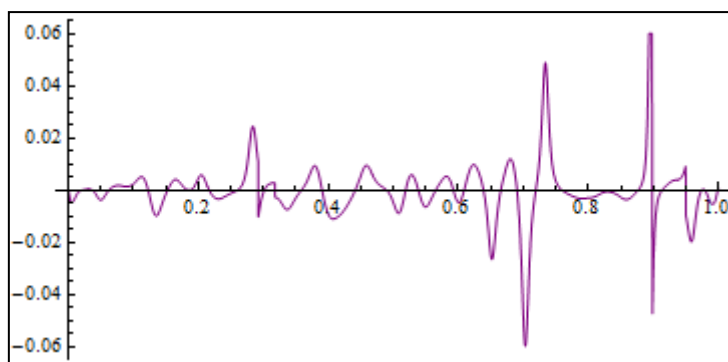


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.16 : Σημεία του διαγράμματος επικλίσεων (δεξιάς οριογραμμής)

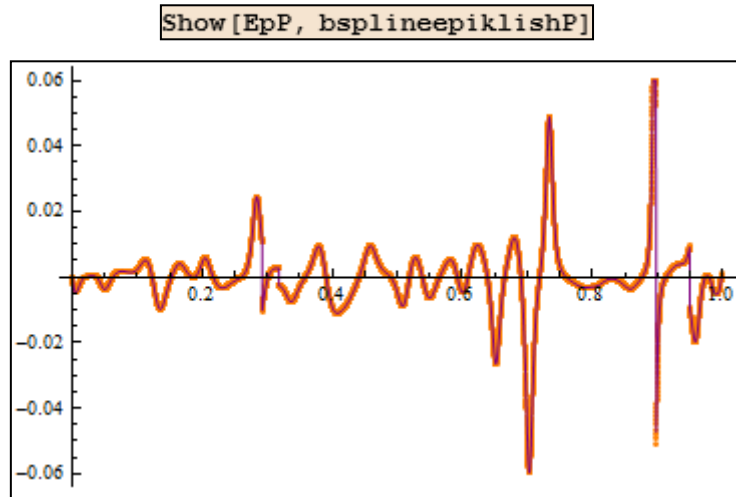
Το Διάγραμμα 10.16 αναφέρεται στη δεξιά οριογραμμή λόγω του τρόπου ορισμού της γωνίας ϕ .

```
bsplineepiklish = BSplineFunction[ArrayEpiklish, SplineDegree → 3];
```

```
bsplineepiklishP = ParametricPlot[bsplineepiklish[t], {t, 0, 1},  
PlotRange → All, PlotStyle → Purple, AspectRatio → 0.5]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.17 : Διάγραμμα επικλίσεων (δεξιάς οριογραμμής) με εφαρμογή καμπύλης $B - Spline$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.18 :: Διάγραμμα επικλίσεων (δεξιάς οριζογραμμής) με εφαρμογή καμπύλης $B - Spline$ μαζί με τα αντίστοιχα *control points*

Συνάρτηση επίκλισης

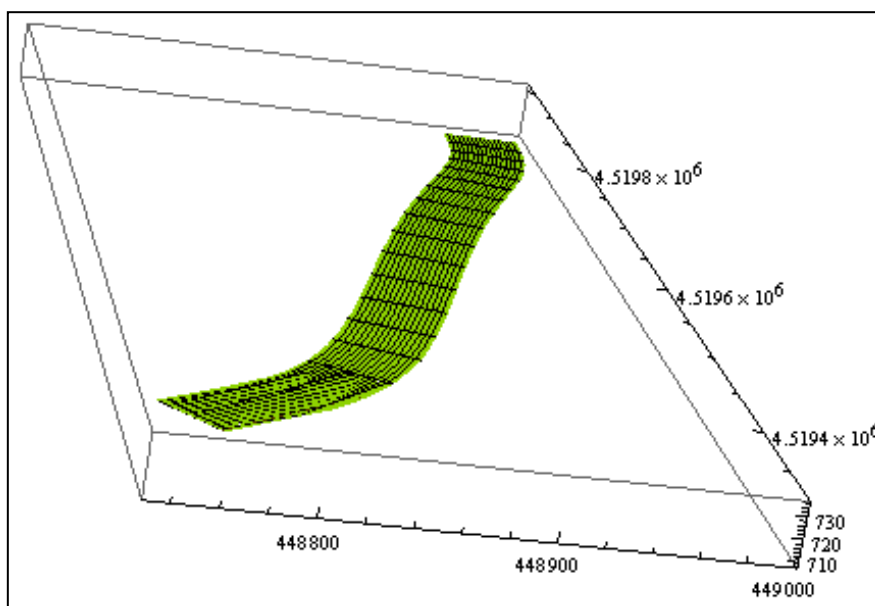
```
ArrayEpiklishF = Table[ArrayEpiklish[[i]][[2]], {i, 1, 10001}];
```

```
bsplineepiklishF = BSplineFunction[ArrayEpiklishF, SplineDegree -> 3];
```

Τελικά, κατασκευάζεται η επιφάνεια της οδού μεταβλητής επίκλισης. Θεωρείται ότι για $\omega \ll 0$, $\tan\omega \cong \omega$.

Τελική επιφάνεια της οδού

```
surfF = ParametricPlot3D[TURNINGSURFACE[bspline2, bsplineepiklishF[u]][{u, v}], {u, 0, 0.05}, {v, -20, 20}, PlotStyle -> Yellow]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.37 : Αποτύπωση τμήματος της επιφάνειας της οδού μεταβλητής επίκλισης

10.2.4. Ορισμός της τάξης της αρχικής καμπύλης $B - Spline$ (πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού)

Πριν γίνει όλη η παραπάνω ανάλυση, αρχικά, πρέπει να οριστεί η τάξη της καμπύλης $B - Spline$ που αντιστοιχεί στον άξονα της οδού. Η τάξη αυτή, εξαρτάται άμεσα από ένα όριο καμπυλότητας που τίθεται. Το όριο αυτό, τίθεται, ώστε να το διάγραμμα καμπυλότητας της καμπύλης να μπορεί να τροποποιηθεί στη συνέχεια ως προς την οριζόντια καμπυλότητα, την κάθετη καμπυλότητα και την κατά μήκος κλίση της οδού.

Επίσης, το όριο αυτό έχει άμεση σχέση με την κατηγορία της οδού. Το όριο που τίθεται στον παραπάνω αλγόριθμο, εξαρτάται από την κατηγορία της οδού. Όσο μεγαλύτερη είναι η κατηγορία της οδού, τόσο το όριο αυτό μειώνεται. Αυτό συμβαίνει γιατί, μεγαλύτερη κατηγορία οδού, συνεπάγεται μεγαλύτερο όριο ταχύτητας, που με τη σειρά του οδηγεί σε μεγαλύτερες ακτίνες καμπυλότητας, άρα τελικά, μικρότερες τιμές καμπυλότητας.

Η ακριβής αντιστοίχιση του ορίου αυτού με την αντίστοιχη κατηγορία της οδού, αφήνεται για περαιτέρω διερεύνηση.

```
FindDegreeOfBSpline[data_, limit_ : 1/10, step_ : 0.0001] :=
Module[{bspline, start},

d = 2;

While[d ≤ 15,

bspline = BSplineFunction[data, SplineDegree → d];
start = Table[Kappa[bspline][t], {t, 0, 1, step}];

If[Max[start] ≤ limit, Break[]];

d = d + 1];

bspline];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.20 : Εύρεση της τάξης της καμπύλης $B - Spline$ που αντιστοιχεί στον άξονα της οδού

Επαλήθευση του προγράμματος 10.21

```
FindDegreeOfBSpline[DATA3D, 1/10, 0.0001]
```

8

```
bis = BSplineFunction[DATA3D, SplineDegree → 8];
```

```
Max[Table[Kappa[bis][t], {t, 0, 1, 0.0001}]]
```

```
0.0979494
```

Πράγματι, $0.098 \leq 0.10$. Δηλαδή, η μέγιστη τιμή της καμπυλότητας είναι μικρότερη του ορίου που έχει οριστεί. Επομένως, επαληθεύεται το Πρόγραμμα 10.21.

10.3. Βήματα του αλγορίθμου

Στη συνέχεια, ακολουθούν με διαδοχική σειρά, τα βήματα που ακολουθούνται για την υλοποίηση του προγράμματος που υπολογίζει τη τελική χάραξη (υπολογισμός συντεταγμένων) του άξονα της οδού, καθώς και της δεξιάς και αριστερής οριογραμμής. Επίσης, ορίζονται οι συναρτήσεις που απαιτούνται για την υλοποίηση του προγράμματος.

10.3.1. Δημιουργία βιβλιοθήκης

Αρχικά, πριν παρουσιαστεί το γενικευμένο πρόγραμμα, πρέπει να οριστούν και να επεξηγηθούν οι συναρτήσεις – προγράμματα που θα εφαρμοστούν κατά την επεξεργασία των δεδομένων.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

(TANGENT)

$$\text{TANGENT}[\alpha_][t_]:= \frac{\alpha'[t]}{\sqrt{\alpha'[t] \cdot \alpha'[t]}}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 2 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΗ ΣΤΡΕΨΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

(TAU)

$$\text{Tau}[\alpha_][t_]:= \frac{\text{cross}[\alpha'[t], \alpha''[t]] \cdot \alpha'''[t]}{\text{cross}[\alpha'[t], \alpha''[t]] \cdot \text{cross}[\alpha'[t], \alpha''[t]]}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 3 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

(Kappa)

$$\text{Kappa}[\alpha_][t_]:= \frac{\sqrt{\text{cross}[\alpha' [t], \alpha'' [t]].\text{cross}[\alpha' [t], \alpha'' [t]]}}{(\alpha' [t].\alpha' [t])^{1.5}}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 4 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

(kappavector)

$$\text{kappavector}[\alpha_][t_]:= \frac{\text{TANGENT}[\alpha]' [t]}{\sqrt{\alpha' [t].\alpha' [t]}}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 5 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

(HORIZONTALVECTOR)

$$\begin{aligned} \text{HORIZONTALVECTOR}[\alpha_][u_]&:= \text{Module}[\{t1, t2, c2\}, \\ &t1 = \text{TANGENT}[\alpha][u][[1]]; \\ &t2 = \text{TANGENT}[\alpha][u][[2]]; \\ &c2 = -\frac{t1}{t2}; \\ &\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+c2^2}}, \frac{c2}{\sqrt{1+c2^2}}, 0 \right\}; \end{aligned}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 6 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΤΟΥ ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

(PSEUDOGEODESICVECTORARITHMETIC)

```
PSEUDOGEODESICVECTORARITHMETIC[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},
  v1 = kappavector[alpha][t];
  v2 = HORIZONTALVECTOR[alpha][t];
  v3 =  $\frac{v1.v2}{\sqrt{v2.v2}}$ ];
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 7 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

(PSEUDOUNITNORMAL)

```
PSEUDOUNITNORMALVECTOR[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},
  v1 = TANGENT[alpha][t];
  v2 = HORIZONTALVECTOR[alpha][t];
  v3 = cross[v1, v2];
```


ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 8 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΙ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΚΙΑΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΟΛΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

(ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT)

```
ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[alpha_, limit_ : 0.02, step_ : 0.0001] :=  
Module[{start, kappatemp},  
  
  start = ConstantArray[{0, 0}, 100 000];  
  t = 0;  
  i = 1;  
  While [t ≤ 1,  
  
    kappatemp = PSEUDOGEODESICVECTORARITHMETIC[alpha][t];  
  
    If[kappatemp > 0,  
      If [kappatemp < limit, kappatemp = kappatemp];  
      If [kappatemp ≥ limit, kappatemp = limit];  
  
      start[[i]] = {t, kappatemp};  
  
      i = i + 1];  
  
    If[kappatemp < 0,  
      If [kappatemp > -limit, kappatemp = kappatemp];  
      If [kappatemp ≤ -limit, kappatemp = -limit];  
  
      start[[i]] = {t, kappatemp};  
  
      i = i + 1];  
  
  t = t + step];  
start[[1 ;; i - 1]]];
```

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 9 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ
ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ**

(PSEUDONORMALVECTOR)

```
PSEUDONORMALVECTOR[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},
  v1 = kappavector[alpha][t];
  v2 = PSEUDOUNITNORMALVECTOR[alpha][t];
  v3 = Projection[v1, v2]];
```

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 10 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΗΝ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗ
ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ**

(PSEUDONORMALVECTORARITHMETIC)

```
PSEUDONORMALVECTORARITHMETIC[alpha_][t_] := Module[{v1, v2, v3},
  v1 = kappavector[alpha][t];
  v2 = PSEUDOUNITNORMALVECTOR[alpha][t];
  v3 =  $\frac{v1 \cdot v2}{\sqrt{v2 \cdot v2}}$  ];
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 11 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΙ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΟΛΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ (ΑΛΛΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΙ ΑΛΛΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΚΟΙΛΕΣ)

(ARRAYPSEUDONORMALKAPPAWITHLIMITS)

```
ARRAYPSEUDONORMALKAPPAWITHLIMITS[alpha_ , limitkurth_ : 0.02,
  limitkoilh_ : 0.02, step_ : 0.0001] := Module[{start, kappatemp},

  start = ConstantArray[{0, 0}, 100 000];
  t = 0;
  i = 1;
  While [t ≤ 1,

    kappatemp = PSEUDONORMALVECTORARITHMETIC[alpha][t];

    If[kappatemp > 0,
      If [kappatemp < limitkurth, kappatemp = kappatemp];
      If [kappatemp ≥ limitkurth, kappatemp = limitkurth];

      start[[i]] = {t, kappatemp};

      i = i + 1];

    If[kappatemp < 0,
      If [kappatemp > -limitkoilh, kappatemp = kappatemp];
      If [kappatemp ≤ -limitkoilh, kappatemp = -limitkoilh];

      start[[i]] = {t, kappatemp};

      i = i + 1];

    t = t + step];
  start[[1 ;; i - 1]]];
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 12 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ (ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ) ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΤΗΣ ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗΣ ΚΑΙ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

(KappabyGeodeticandNormalArray)

```
KappabyGeodeticandNormalArray[bsplineg_, bsplinen_][u_] := Module[{k, kg, kn},
  kg = bsplineg[u][[2]];
  kn = bsplinen[u][[2]];
  k =  $\sqrt{kn^2 + kg^2}$ ;
  k];
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 13 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΤΡΕΨΗΣ (ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ)

(intrinsic3darbitrarspeed)

```
intrinsic3darbitrarspeed[{alpha_, kk_, ttt_}, {a_:0, {p1_:0, p2_:0, p3_:0},
  {q1_:1, q2_:0, q3_:0}, {r1_:0, r2_:1, r3_:0}}, opts___][t_] := Module[
{x1, x2, x3, t1, t2, t3, n1, n2, n3, b1, b2, b3},
  {x1[t], x2[t], x3[t]}/.
  NDSolve[{x1'[tt] =  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  t1[tt],
    x2'[tt] =  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  t2[tt],
    x3'[tt] =  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  t3[tt],
    t1'[tt] =  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt]*n1[tt],
    t2'[tt] =  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt]*n2[tt],
    t3'[tt] =  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt]*n3[tt],
    n1'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt]*t1[tt] +  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt]*b1[tt],
    n2'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt]*t2[tt] +  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt]*b2[tt],
    n3'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  kk[tt]*t3[tt] +  $\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt]*b3[tt],
    b1'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt]*n1[tt],
    b2'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt]*n2[tt],
    b3'[tt] ==  $-\sqrt{\text{alpha}'[tt].\text{alpha}'[tt]}$  ttt[tt]*n3[tt],
    x1[a] == p1, x2[a] == p2, x3[a] == p3,
    t1[a] == q1, t2[a] == q2, t3[a] == q3,
    n1[a] == r1, n2[a] == r2, n3[a] == r3,
    b1[a] == q2*r3 - q3*r2,
    b2[a] == q3*r1 - q1*r3,
    b3[a] == q1*r2 - q2*r1},
  {x1, x2, x3, t1, t2, t3, n1, n2, n3, b1, b2, b3},
  {tt, t, t+0.001}, MaxSteps -> 10000000]]
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 14 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΙ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΥΣ ΚΛΙΣΗΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΟΛΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

(ARRAYSLOPEWITHLIMIT)

```
ARRAYSLOPEWITHLIMIT[alpha_ , limit_ : 0.02, step_ : 0.0001] :=  
  
Module[{start, kappatemp},  
  
  start = ConstantArray[0, 100 000];  
  t = 0;  
  i = 1;  
  While [t ≤ 1,  
  
    kappatemp = TANGENT[alpha][t].{0, 0, 1};  
  
    If[kappatemp > 0,  
      If [kappatemp < limit, kappatemp = kappatemp];  
      If [kappatemp ≥ limit, kappatemp = limit];  
  
      start[[i]] = kappatemp;  
  
      i = i + 1];  
  
    If[kappatemp < 0,  
      If [kappatemp > -limit, kappatemp = kappatemp];  
      If [kappatemp ≤ -limit, kappatemp = -limit];  
  
      start[[i]] = kappatemp;  
  
      i = i + 1];  
  
    t = t + step];  
  start[[1 ;; i - 1]]];
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 15 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟ (ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ) ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΟΛΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΚΛΙΣΗ

(TangentVector)

```
TangentVector[alpha_ , limit_ : 0.3, step_ : 0.1] :=
Module[{start, Slopebspline, v1, v2, v3, tangentBSpline},

start = ConstantArray[{0, 0, 0}, 10 000];
Slopebspline = BSplineFunction[ARRAYSLOPEWITHLIMIT[alpha, limit, step],
SplineDegree -> 1];
t = 0;
i = 1;

While[t < 1,

v1 = TANGENT[alpha][t][[1]];
v2 = TANGENT[alpha][t][[2]];
v3 = Slopebspline[t];

start[[i]] = {v1, v2, v3};

i = i + 1;

t = t + step];
start[[1 ;; i - 1]]];
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 16 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΗΝ ΤΕΛΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

(FinalKappa)

```
FinalKappa[alpha_ , bstangent_][t_] := Module[{Fkappa},
Fkappa =  $\frac{\sqrt{bstangent'[t].bstangent'[t]}}{\sqrt{alpha'[t].alpha'[t]}}$ ];
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 17 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΣΤΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΚΡΟΥΣΤΗ ΧΩΡΙΣ ΠΙΝΑΚΑ ΒΑΡΩΝ

(ProcrustesRigidBody)

```
ProcrustesRigidBody[xyz_, XYZ_] := Module[
  {n, unit, CC, A, U, V, E, R, T, Δ, Err},
  n = Dimensions[xyz][[1]];
  unit = Table[{1}, {i, 1, n}];
  CC = IdentityMatrix[n] -  $\frac{1}{n}$  * unit.Transpose[unit];
  A = Transpose[xyz].Transpose[CC].CC.XYZ;
  {U, E, V} = SingularValueDecomposition[SetPrecision[A, 20]];
  R = U.Transpose[V];
  T = Flatten[Inverse[Transpose[unit].unit]][[1]]
    * Transpose[xyz - XYZ.Transpose[R]].unit;
  Δ = xyz - XYZ.Transpose[R] - unit.Transpose[T];
  Err = Tr[Transpose[Δ].Δ];
  {R, T, Err}];
```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 18 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΣΤΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

(RigidBodyTransformation)

```
RigidBodyTransformation[data1_, T_, R_] := Module[{data2, Tgeneral, n},
  n = Dimensions[data1][[1]];
  Tgeneral = SparseArray[{{i_, 1} → T[[1, 1]],
    {i_, 2} → T[[2, 1]], {i_, 3} → T[[3, 1]]}, {n, 3}];
  data2 = Tgeneral + data1.Transpose[R];
  data2];
```

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 19 : ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΕΠΙΚΛΙΣΗΣ**

(TURNINGSURFACE)

```
TURNINGSURFACE[alpha_, phi_][u_, v_] := Module[{t1, t2, c2, horizontalvector, rot},

  t1 = TANGENT[alpha][u][[1]];
  t2 = TANGENT[alpha][u][[2]];
  c2 = - t1 / t2;

  horizontalvector = { 1 / Sqrt[1 + c2^2], c2 / Sqrt[1 + c2^2], 0 };

  rot = RotationMatrix[phi, {horizontalvector, {0, 0, 1}}];
  alpha[u] + v * (rot.horizontalvector) ];
```

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 20 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ B-SPLINE ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ
ΟΔΟΥ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ**

(FindDegreeOfBSpline)

```
FindDegreeOfBSpline[data_, limit_ : 1/10, step_ : 0.0001] := Module[{bspline, start},

  d = 2;

  While[d ≤ 15,

    bspline = BSplineFunction[data, SplineDegree → d];
    start = Table[Kappa[bspline][t], {t, 0, 1, step}];

    If[Max[start] ≤ limit, Break[]];

    d = d + 1];

  bspline];
```


**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 21 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΡΟΣ
ΧΑΡΑΞΗ ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΒΗΜΑ**

(XaraksiShmeiwnMeSugkekrimenoBhma)

```
XaraksiShmeiwnMeSugkekrimenoBhma[alpha_, step_ : 0.00001,
  metra_ : 50, anoxh_ : 1] := Module[{start, COORDINATESWITHSTEP,
  s, s1, s2, t1, t2, i},

  start = ConstantArray[0, 1000];
  t1 = 0;
  i = 1;
  t2 = 0;

  s1 = metra - anoxh;
  s2 = metra + anoxh;
  s = lengthn2[t1, step][alpha];

  While [t2 ≤ 1 - step,

    If[s ≥ s1 && s ≤ s2,

      start[[i]] = t2;

      i = i + 1;

      t1 = t2];

    t2 = t2 + step;

    s = lengthn2[t1, t2][alpha];
  ];
  COORDINATESWITHSTEP = Table[alpha[start[[i]]], {i, 1, i - 1}];

  {COORDINATESWITHSTEP, start[[1 ;; i - 1]]};
```

10.3.2. Εισαγωγή δεδομένων

**ΒΗΜΑ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΚΟΡΥΦΩΝ ΤΗΣ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗΣ (*CONTROL POINTS*)
(ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4)**

(*DATA3D*)

**ΒΗΜΑ 2 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΟΡΙΟΥ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ
ΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ**

(*limitspline*)

ΒΗΜΑ 3 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

(*limitkhor*)

**ΒΗΜΑ 4 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ
(ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)**

(*limitkurth*)

**ΒΗΜΑ 5 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ
(ΚΟΙΛΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)**

(*limitkoilh*)

ΒΗΜΑ 6 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΟΔΟΥ

(*limitslope*)

ΒΗΜΑ 7 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΠΙΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΟΔΟΥ

(limitepiklish)

ΒΗΜΑ 8 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ

(v)

ΒΗΜΑ 9 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΒΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ (ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ)

(step)

ΒΗΜΑ 10 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ ΕΠΙΘΥΜΕΙΤΑΙ ΝΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΕΙ Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

(numbertransf)

ΒΗΜΑ 11 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΕΠΙΘΥΜΕΙΤΑΙ ΝΑ ΓΙΝΕΤΑΙ Η ΧΑΡΑΞΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

(metra)

ΒΗΜΑ 12 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΝΟΧΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΕΠΙΘΥΜΕΙΤΑΙ ΝΑ ΓΙΝΕΤΑΙ Η ΧΑΡΑΞΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

(anoxh)

10.3.3. Επεξεργασία των δεδομένων

ΒΗΜΑ 1 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ *B – SPLINE* ΣΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ΤΩΝ *CONTROL POINTS* (ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΗΜΑ 1) ΜΕ ΤΑΞΗ ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ

(*bspline1*)

```
bspline1 = FindDegreeOfBSpline[data, limitspline, step];
```

ΒΗΜΑ 2 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΚΙΑΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΟΛΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

(*Array1*)

```
Array1 = ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[bspline1, limitkhor, step];
```

ΒΗΜΑ 3 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΟΛΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

(*Array2*)

```
Array2 = ARRAYPSEUDONORMALKAPPAWITHLIMITS[bspline1, limitkurth, limitkoilh, step];
```

**ΒΗΜΑ 4 : ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (*Array 1*)
(ΒΗΜΑ 2) ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
B – SPLINE ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ**

(*bsplineg*)

```
bsplineg = BSplineFunction[Array1, SplineDegree + 1];
```

**ΒΗΜΑ 5 : ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (*Array 2*)
(ΒΗΜΑ 3) ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
B – SPLINE ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ**

(*bsplinen*)

```
bsplinen = BSplineFunction[Array2, SplineDegree + 1];
```

**ΒΗΜΑ 6 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ
ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΗΣ
ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗΣ ΚΑΙ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ**

(*KappaArrayAlignment*)

```
KappaArrayAlignment = Table[KappabyGeodeticandNormalArray[bsplineg, bsplinen][t],  
{t, 0, 1, step}];
```

**ΒΗΜΑ 7 : ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ
KappaArrayAlignment (ΒΗΜΑ 6) ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ
 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ *B – SPLINE* ΤΡΙΤΗΣ ΤΑΞΗΣ**

(KappaBSpline)

```
KappaBSpline = BSplineFunction[KappaArrayAlignment, SplineDegree → 3];
```

**ΒΗΜΑ 8 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
 (ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ) ΜΕ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ
 ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ
 ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ)**

(kappamodified1)

```
kappamodified1 = Table[intrinsic3darbitrarispeed[{bspline1[#] &, KappaBSpline[#] &,
  Tau[bspline1][#] &}, {0, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}][t],
  {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];
kappamodified1cord = Table[kappamodified1[[i]][[1]], {i, 1, numbertransf}];
```

**ΒΗΜΑ 9 : ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (*kappamodified1*) (ΒΗΜΑ 8) ΩΣΤΕ ΝΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ
 ΤΟΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΤΕΙ ΤΟ *MATHEMATICA***

(kappamodified1cord)

```
kappamodified1cord = Table[kappamodified1[[i]][[1]], {i, 1, numbertransf}];
```

ΒΗΜΑ 10 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ $B - SPLINE$ ΤΡΙΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΣΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ($kappamodified1cord$) (ΒΗΜΑ 9)

(bsplinetemp2)

```
bsplinetemp2 = BSplineFunction[kappamodified1cord, SplineDegree → 3];
```

ΒΗΜΑ 11 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΟΥ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΟΛΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ $B - SPLINE$ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

(bstangent)

```
bstangent = BSplineFunction[TangentVector[bsplinetemp2, limitslope, 1 / numbertransf], SplineDegree → 1];
```

ΒΗΜΑ 12 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΟΥ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ($bstangent$) (ΒΗΜΑ 11) ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ $B - SPLINE$ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

(FKappaBSpline)

```
FKappaBSpline = BSplineFunction[Table[FinalKappa  
[bsplinetemp2, bstangent][t], {t, 0, 1, 0.0001}], SplineDegree → 1];
```

ΒΗΜΑ 13 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ (ΤΡΙΤΗ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ) ΜΕ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ)

(kappamodified2)

```
kappamodified2 = Table[intrinsic3darbitraryspeed[{bsplinetemp2[#] &,
  FKappaBSpline[#] &, Tau[bsplinetemp2][#] &}, {0, {0, 0, 0}, {1, 0, 0},
  {0, 1, 0}}][t], {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];
```

ΒΗΜΑ 14 : ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (*kappamodified 2*) (ΒΗΜΑ 13) ΩΣΤΕ ΝΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΤΟΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΤΕΙ ΤΟ *MATHEMATICA*

(kappamodified2cord)

```
kappamodified2cord = Table[kappamodified2[[i]][[1]], {i, 1, numbertransf}];
```

ΒΗΜΑ 15 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ (*bspline1*) (ΒΗΜΑ 1)

(TableInitialCoordinates)

```
TableInitialCoordinates = Table[bspline1[t],
  {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];
```

ΒΗΜΑ 16 : ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΡΟΚΡΟΥΣΤΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ (*kappamodified2*) (ΒΗΜΑ 14) και (*TableInitialCoordinates*) (ΒΗΜΑ 15)

(*ProcrustesMatrix*)

```
ProcrustesMatrix = ProcrustesRigidBody[TableInitialCoordinates,  
kappamodified2cord];
```

ΒΗΜΑ 17 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΜΕΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΟΥ ΤΕΛΙΚΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ (ΤΡΙΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ) ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ (ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ)

(*CoordinatesTable*)

```
CoordinatesTable = RigidBodyTransformation[kappamodified2cord,  
ProcrustesMatrix[[2]], ProcrustesMatrix[[1]]];
```

ΒΗΜΑ 18 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΕΛΙΚΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ *B – SPLINE* ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΣΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ (*CoordinatesTable*) (ΒΗΜΑ 17)

(*axes*)

```
axes = BSplineFunction[CoordinatesTable, SplineDegree + 2];
```

ΒΗΜΑ 19 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΚΛΙΣΗΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΤΕΛΙΚΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΟΛΗ ΑΝΩΤΑΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

(Array3)

```
Array3 = ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[axes, limitepiklish, step];
```

ΒΗΜΑ 20 : ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (*Array3*) (ΒΗΜΑ 19) ΩΣΤΕ ΝΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΤΟΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΤΕΙ ΤΟ *MATHEMATICA*

(Array3F)

```
Array3F = Table[Array3[[i]][[2]], {i, 1, 1 + 1/step}];
```

ΒΗΜΑ 21 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΚΛΙΣΗΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΤΩΝ ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (*Array3F*) (ΒΗΜΑ 20) ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ *B – SPLINE* ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

(bsplineepiklish)

```
bsplineepiklish = BSplineFunction[Array3F, SplineDegree → 2];
```

ΒΗΜΑ 22 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΗΣ ΔΕΞΙΑΣ ΟΡΙΟΓΡΑΜΜΗΣ

(rightoriogramm)

```
rightoriogramm = Table[TURNINGSURFACE[axes, bsplineepiklish[u]][u, v], {u, 0, 1, 1/numbertransf}];
```

ΒΗΜΑ 23 : ΓΕΜΙΣΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΕΡΗΣ ΟΡΙΟΓΡΑΜΜΗΣ

(leftoriogramm)

```
leftoriogramm = Table[TURNINGSURFACE[axes, bsplineepiklish[u]][u, -v],  
  {u, 0, 1, 1/numbertransf}];
```

10.3.4. Έξοδος δεδομένων

ΕΞΟΔΟΣ 1 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΒΗΜΑ

(AlignmentCoordinates)

```
AlignmentCoordinates = XaraksiShmeiwnMeSugkekrimenoBhma [axes ,
0.00001, 50, 0.5]
```

ΕΞΟΔΟΣ 2 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΔΕΞΙΑΣ ΟΡΙΟΓΡΑΜΜΗΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΒΗΜΑ

(AlignmentCoordinatesRight)

```
AlignmentCoordinatesRight =
XaraksiShmeiwnMeSugkekrimenoBhma [
BSplineFunction[rightoriogrammh, SplineDegree + 2], 0.00001, 50, 0.5]
```

ΕΞΟΔΟΣ 3 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΕΡΗΣ ΟΡΙΟΓΡΑΜΜΗΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΒΗΜΑ

(AlignmentCoordinatesLeft)

```
AlignmentCoordinatesLeft =
XaraksiShmeiwnMeSugkekrimenoBhma [
BSplineFunction[leftoriogrammh, SplineDegree + 2], 0.00001, 50, 0.5]
```

Πρέπει να τονιστεί ότι οι συντεταγμένες που υπολογίζονται αρχικά μέσω του μετασχηματισμού στερεού, δεν αντιστοιχούν σε σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση μεταξύ τους. Τα προς χάραξη σημεία, λόγω των ιδιοτήτων των καμπυλών *B – Spline*, πυκνώνουν όταν η καμπύλη τείνει να αυξήσει την καμπυλότητά της, ενώ αραιώνουν όταν η

καμπύλη τείνει να γίνει ευθεία. Για αυτόν τον λόγο κατασκευάζεται πρόγραμμα χάραξης των σημείων με συγκεκριμένο βήμα.

Επίσης, πέρα από τον άξονα της οδού και τη δεξιά και αριστερή οριογραμμή, μπορούν να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες οποιασδήποτε άλλης u – παραμετρικής καμπύλης απλώς αλλάζοντας τη τιμή του v που αντιστοιχεί στην απόσταση της u – παραμετρικής καμπύλης από τη βασική καμπύλη (άξονας της οδού). Υπενθυμίζεται ότι οι u – παραμετρικές καμπύλες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

10.4. Γενικευμένος αλγόριθμος 1

```

AxesCoordinates[data_, limitspline_ : 1/10, limitkhor_ : 1/20, limitkurth_ : 1/800, limitkoilh_ : 1/1350,
limitslope_ : 0.10, step_ : 0.0001, numbertransf_ : 1000] :=
Module[{bspline1, Array1, Array2, bsplineg, bsplinen, KappaArrayAlignment, KappaBSpline,
kappamodified1, kappamodified1cord, bsplinetemp2, bstangent, FKappaBSpline, kappamodified2,
kappamodified2cord, TableInitialCoordinates, ProcrustesMatrix, CoordinatesTable},

bspline1 = FindDegreeOfBSpline[data, limitspline, step];

Array1 = ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[bspline1, limitkhor, step];
Array2 = ARRAYPSEUDONORMALKAPPAWITHLIMITS[bspline1, limitkurth, limitkoilh, step];

bsplineg = BSplineFunction[Array1, SplineDegree -> 1];
bsplinen = BSplineFunction[Array2, SplineDegree -> 1];

KappaArrayAlignment = Table[KappabyGeodeticandNormalArray[bsplineg, bsplinen][t], {t, 0, 1, step}];
KappaBSpline = BSplineFunction[KappaArrayAlignment, SplineDegree -> 3];

kappamodified1 =
Table[intrinsic3darbitrarispeed[{bspline1[#] &, KappaBSpline[#] &, Tau[bspline1][#] &},
{0, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}][t], {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];
kappamodified1cord = Table[kappamodified1[[i]][[1]], {i, 1, numbertransf}];

bsplinetemp2 = BSplineFunction[kappamodified1cord, SplineDegree -> 3];

bstangent = BSplineFunction[TangentVector[bsplinetemp2, limitslope, 1/numbertransf], SplineDegree -> 1];
FKappaBSpline = BSplineFunction[Table[FinalKappa[bsplinetemp2, bstangent][t], {t, 0, 1, 0.0001}],
SplineDegree -> 1];

kappamodified2 =
Table[intrinsic3darbitrarispeed[{bsplinetemp2[#] &, FKappaBSpline[#] &, Tau[bsplinetemp2][#] &},
{0, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}][t], {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];

kappamodified2cord = Table[kappamodified2[[i]][[1]], {i, 1, numbertransf}];
TableInitialCoordinates = Table[bspline1[t], {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];

ProcrustesMatrix = ProcrustesRigidBody[TableInitialCoordinates, kappamodified2cord];

CoordinatesTable = RigidBodyTransformation[kappamodified2cord, ProcrustesMatrix[[2]], ProcrustesMatrix[[1]]];

CoordinatesTable];
    
```

ΛΕΑΔΟΜΕΝΑ ΕΙΣΟΔΟΥ :

1. ΚΟΡΥΦΕΣ (ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ) ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗΣ (*CONTROL POINTS*)
2. ΟΡΙΟ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
3. ΟΡΙΟ ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ
4. ΟΡΙΟ ΘΕΤΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ (ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)

5. ΟΡΙΟ ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ (ΚΟΙΛΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)
6. ΟΡΙΟ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΥΣ ΚΛΙΣΗΣ ΟΔΟΥ
7. ΒΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ (ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ)
8. ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΟΥ ΕΠΙΘΥΜΕΙΤΑΙ ΝΑ ΧΑΡΑΧΘΟΥΝ

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΞΟΔΟΥ :

1. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΑ

10.5. Γενικευμένος αλγόριθμος 2

```

AxesCoordinatesGeneral[data_, limitspline_ : 1/10, limitkhor_ : 1/20, limitkurth_ : 1/800,
limitkoih_ : 1/1350, limitslope_ : 0.10, limitepiklish_ : 0.06, v_ : 3.50, step_ : 0.0001, numbertransf_ : 1000] :=
Module[{bspline1, Array1, Array2, Array3, Array3F, bsplineg, bsplinen, KappaArrayAlignment,
KappaBSpline, kappamodified1, kappamodified1cord, bsplinetemp2, bstangent, FKappaBSpline,
kappamodified2, kappamodified2cord, TableInitialCoordinates, ProcrustesMatrix, CoordinatesTable,
axes, bsplineepiklish, Road, u, rightoriogrammh, leftoriogrammh},

bspline1 = FindDegreeOfBSpline[data, limitspline, step];

Array1 = ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[bspline1, limitkhor, step];
Array2 = ARRAYPSEUDONORMALKAPPAWITHLIMITS[bspline1, limitkurth, limitkoih, step];

bsplineg = BSplineFunction[Array1, SplineDegree -> 1];
bsplinen = BSplineFunction[Array2, SplineDegree -> 1];

KappaArrayAlignment = Table[KappabyGeodeticandNormalArray[bsplineg, bsplinen][t], {t, 0, 1, step}];
KappaBSpline = BSplineFunction[KappaArrayAlignment, SplineDegree -> 3];

kappamodified1 =
Table[intrinsic3darbitrarspeed[{bspline1[#] &, KappaBSpline[#] &, Tau[bspline1][#] &},
{0, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}][t], {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];
kappamodified1cord = Table[kappamodified1[[i]][[1]], {i, 1, numbertransf}];

bsplinetemp2 = BSplineFunction[kappamodified1cord, SplineDegree -> 3];

bstangent = BSplineFunction[TangentVector[bsplinetemp2, limitslope, 1/numbertransf], SplineDegree -> 1];
FKappaBSpline = BSplineFunction[Table[FinalKappa[bsplinetemp2, bstangent][t], {t, 0, 1, 0.0001}],
SplineDegree -> 1];

kappamodified2 =
Table[intrinsic3darbitrarspeed[{bsplinetemp2[#] &, FKappaBSpline[#] &, Tau[bsplinetemp2][#] &},
{0, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}][t], {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];

kappamodified2cord = Table[kappamodified2[[i]][[1]], {i, 1, numbertransf}];
TableInitialCoordinates = Table[bspline1[t], {t, 0, 1 - 1/numbertransf, 1/numbertransf}];

ProcrustesMatrix = ProcrustesRigidBody[TableInitialCoordinates, kappamodified2cord];

CoordinatesTable = RigidBodyTransformation[kappamodified2cord, ProcrustesMatrix[[2]], ProcrustesMatrix[[1]]];

axes = BSplineFunction[CoordinatesTable, SplineDegree -> 3];

Array3 = ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[axes, limitepiklish, step];

Array3F = Table[Array3[[i]][[2]], {i, 1, 1 + 1/step}];

bsplineepiklish = BSplineFunction[Array3F, SplineDegree -> 3];

rightoriogrammh = Table[TURNINGSURFACE[axes, bsplineepiklish[u]][u, v], {u, 0, 1, 1/numbertransf}];

leftoriogrammh = Table[TURNINGSURFACE[axes, bsplineepiklish[u]][u, -v], {u, 0, 1, 1/numbertransf}];

{CoordinatesTable, axes, rightoriogrammh, leftoriogrammh, bsplineepiklish}];

```

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΙΣΟΔΟΥ :

1. ΚΟΡΥΦΕΣ (ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ) ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗΣ (*CONTROL POINTS*)
2. ΟΡΙΟ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
3. ΟΡΙΟ ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ
4. ΟΡΙΟ ΘΕΤΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ (ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)

5. ΟΡΙΟ ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ (ΚΟΙΛΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)
6. ΟΡΙΟ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΥΣ ΚΛΙΣΗΣ ΟΔΟΥ
7. ΟΡΙΟ ΕΠΙΚΛΙΣΗΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
8. ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
9. ΒΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ (ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ)
10. ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΟΥ ΕΠΙΘΥΜΕΙΤΑΙ ΝΑ ΧΑΡΑΧΘΟΥΝ

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΞΟΔΟΥ :

1. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
2. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΗΣ ΔΕΞΙΑΣ ΟΡΙΟΓΡΑΜΜΗΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
3. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΕΡΗΣ ΟΡΙΟΓΡΑΜΜΗΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ

10.6. Υπολογισμός των συντεταγμένων της οδού με συγκεκριμένο βήμα που δίνεται από τον χρήστη

```
lengthn2[a_, b_][alpha_] := NIntegrate[Evaluate[arclengthprime[alpha][u]],
  {u, a, b}, MaxRecursion -> 12]
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.1 : Αριθμητικός υπολογισμός του μήκους καμπύλης

Αφού προσδιοριστεί μαθηματικά, ο τρισδιάστατος άξονας της οδού (καμπύλη $B - Spline$), στη συνέχεια επιθυμείται και η χάραξη στο ύπαιθρο. Η χάραξη του άξονα, γίνεται μέσω του υπολογισμού των συντεταγμένων ανά σταθερό βήμα ως προς την απόσταση μεταξύ των διαδοχικών σημείων. Έτσι λοιπόν, για τον υπολογισμό αυτών των συντεταγμένων καταστρώνεται ένα πρόγραμμα :

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΙΣΟΔΟΥ :

1. ΑΞΟΝΑΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ (ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗ $B - SPLINE$)
2. ΒΗΜΑ - ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ
3. ΒΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ (ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ)
4. ΑΝΟΧΗ ΠΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΧΕΙ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΠΡΟΣ ΧΑΡΑΞΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΞΟΔΟΥ :

1. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΒΗΜΑ (ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΠΟΣΤΑΣΗ)

Προφανώς, αυτό το πρόγραμμα μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό των συντεταγμένων με σταθερό βήμα και για τη δεξιά και αριστερή οριογραμμή.

Ο πίνακας των συντεταγμένων του άξονα της οδού που υπολογίζεται μέσω της μεθοδολογίας που προτείνεται στην εργασία, παρατίθεται στο *Παράρτημα 5*. Τα σημεία απέχουν μεταξύ τους $50\ m$, ενώ η ανοχή έχει οριστεί στο $0.5\ m$. Δηλαδή, τα σημεία, δύναται να απέχουν μεταξύ τους από $49.5\ m$ έως $50.5\ m$. Επίσης, στο *Παράρτημα 5*, παρατίθεται και η επαλήθευση του *Προγράμματος 10.22*, δηλαδή το ότι τα σημεία όντως απέχουν μεταξύ τους απόσταση από $49.5\ m$ έως $50.5\ m$.

```

ΧαράξιShmeiwnMeSugkekrimenoBhma[alpha_, step_ : 0.00001, metra_ : 50, ανοχή_ : 1] :=
Module[{start, COORDINATESWITHSTEP, s, s1, s2, t1, t2, i, d},

start = ConstantArray[0, 1000];
t1 = 0;
i = 1;
t2 = 0;

s1 = metra - ανοχή;
s2 = metra + ανοχή;
s = lengthn2[t1, step][alpha];

While [t2 ≤ 1 - step,

If[s ≥ s1 && s ≤ s2,

start[[i]] = t2;

i = i + 1;

t1 = t2];

t2 = t2 + step;

s = lengthn2[t1, t2][alpha];
];
COORDINATESWITHSTEP = Table[alpha[start[[i]]], {i, 1, i - 1}];
d = Dimensions[start];

{COORDINATESWITHSTEP, start[[1 ;; i - 1]]};

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.21 : Υπολογισμός των συντεταγμένων του άξονα της οδού με σταθερό βήμα

Οι συντεταγμένες που υπολογίζονται, αντιστοιχούν στα εσωτερικά σημεία του άξονα. Δηλαδή, πέραν αυτών θα χαραχθούν φυσικά και τα σημεία που αντιστοιχούν στην αρχή και το τέλος του άξονα τα οποία είναι γνωστά και ουσιαστικά παράγουν το ζήτημα της χάραξης ώστε να ενωθούν. Η αρχή και το πέρας της οδού προς χάραξη, παραμένουν αμετάβλητα λόγω των ιδιοτήτων της καμπύλης $B - Spline$ (παρεμβολή στα άκρα).

10.7. Χάραξη της οδού

Το γεγονός ότι έχει καθοριστεί η επιφάνεια της οδού, σημαίνει αυτόματα ότι μπορεί να υπολογιστούν οι συντεταγμένες σε οποιοδήποτε σημείο. Στο *Παράρτημα 2.2* αναφέρονται τρόποι χάραξης της οδού.

10.7.1. Χάραξη του άξονα της οδού

Ο άξονας της οδού αντιστοιχεί ουσιαστικά, στην u –παραμετρική καμπύλη για $v = 0$. Επομένως, οι συντεταγμένες του άξονα της οδού υπολογίζονται εύκολα και μάλιστα με βήμα που ορίζεται από τον χρήστη. Αυτό το βήμα μπορεί να είναι οποιοδήποτε και εξαρτάται φυσικά από την ακρίβεια χάραξης που απαιτείται. Στο *Παράρτημα Ε*, παρατίθεται ένας πίνακας τιμών των συντεταγμένων του άξονα της οδού όπως υπολογίστηκαν από το *Γενικευμένο Αλγόριθμο 2*, ανά 50 m περίπου.

10.7.2. Χάραξη της δεξιάς οριογραμμής της οδού

Η δεξιά οριογραμμή της οδού αντιστοιχεί ουσιαστικά, στην u –παραμετρική καμπύλη για $v = +$ ημιπλάτος $= +3,50$. Επομένως, οι συντεταγμένες της δεξιάς οριογραμμής της οδού υπολογίζονται και πάλι εύκολα με βήμα που ορίζεται από τον χρήστη.

10.7.3. Χάραξη της αριστερής οριογραμμής της οδού

Η αριστερή οριογραμμή της οδού αντιστοιχεί ουσιαστικά, στην u –παραμετρική καμπύλη για $v = -$ ημιπλάτος $= -3,50$. Επομένως, οι συντεταγμένες της δεξιάς οριογραμμής της οδού υπολογίζονται και πάλι εύκολα με βήμα που ορίζεται από τον χρήστη.

Υπενθυμίζεται ότι ο άξονας της οδού με την δεξιά και αριστερή οριογραμμή, όπως έχει αποδειχθεί, είναι παράλληλες καμπύλες.

Εννοείται ότι η χάραξη μπορεί να γίνει και για οποιαδήποτε άλλη u –παραμετρική και v –παραμετρική καμπύλη επιθυμείται.

10.8. Χρωματισμός του άξονα της οδού

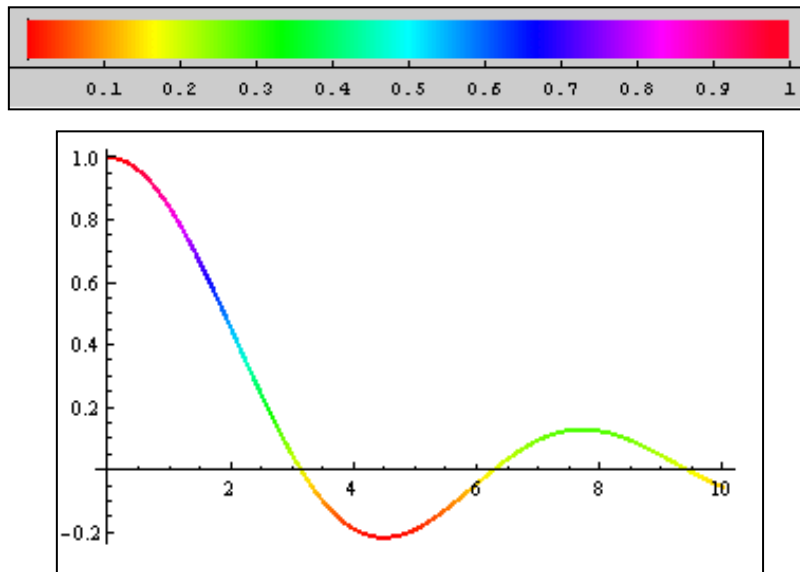
Σε αυτό το σημείο, επιχειρείται να κατανοηθεί η επίδραση διαφόρων γεωμετρικών μεγεθών, μέσω της οπτικής τους αναπαράστασης, ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί πολύ πιο εύκολα η σύγκρισή τους από σημείο σε σημείο.

Ο χρωματισμός της επιφάνειας, επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της ενσωματωμένης εντολής *Hue* στο *Mathematica*. Η εντολή *Hue* λαμβάνει τιμές από μηδέν έως ένα. Αυτή η επιβεβλημένη κανονικοποίηση γίνεται αυτόματα στο *Mathematica* μέσω της εντολής *ColorFunctionScaling* \rightarrow *True*.

10.8.1. Παραδείγματα

Στη συνέχεια, παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα με σκοπό την ανάδειξη της χρησιμότητας του χρωματισμού μίας επιφάνειας. Για παράδειγμα, η χρωματισμός μίας επίπεδης καμπύλης ως προς το υψόμετρό της (δηλαδή ως προς τη τεταγμένη y), φαίνεται στην εικόνα (10.36) :

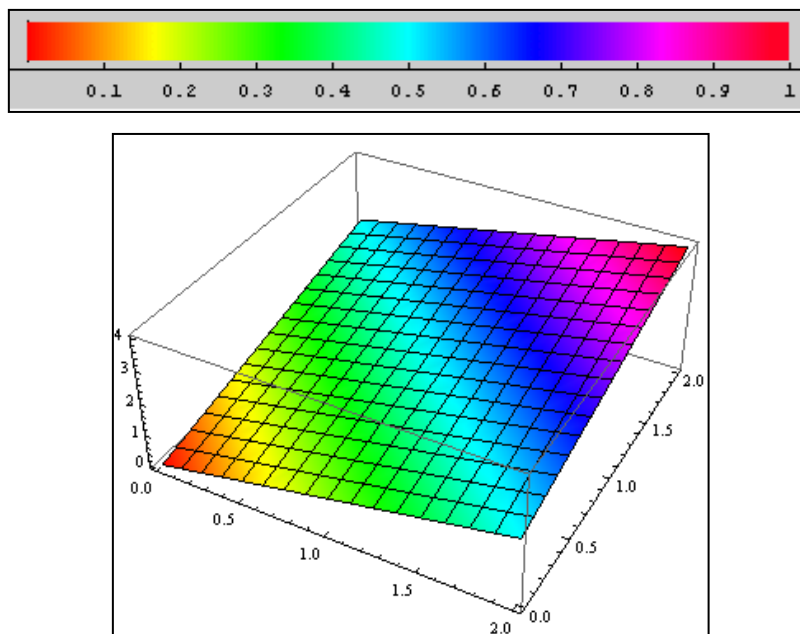
```
Plot[Sinc[x], {x, 0, 10}, PlotStyle -> Thick, ColorFunction -> Function[{x, y}, Hue[y]]]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.38 : Χρωματισμός επίπεδης καμπύλης ως προς το υψόμετρό της

Αντίστοιχα, η χρωματισμός ενός επιπέδου ως προς το υψόμετρό της (δηλαδή ως προς την κατηγμένη z), φαίνεται στην εικόνα (10.37), ενώ μίας ομαλής επιφάνειας φαίνεται στην εικόνα (10.38) :

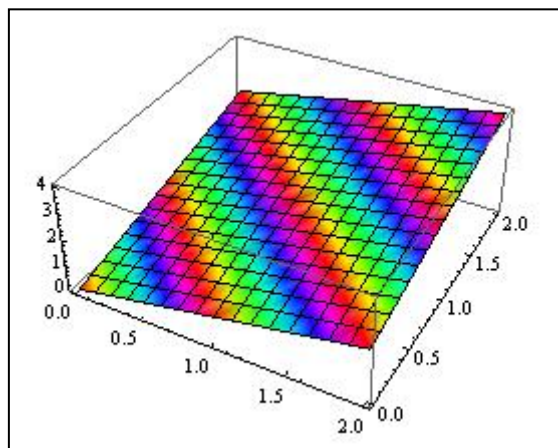
```
Plot3D[x + y, {x, 0, 2}, {y, 0, 2},  
ColorFunction -> Function[{x, y, z}, Hue[z]]]
```



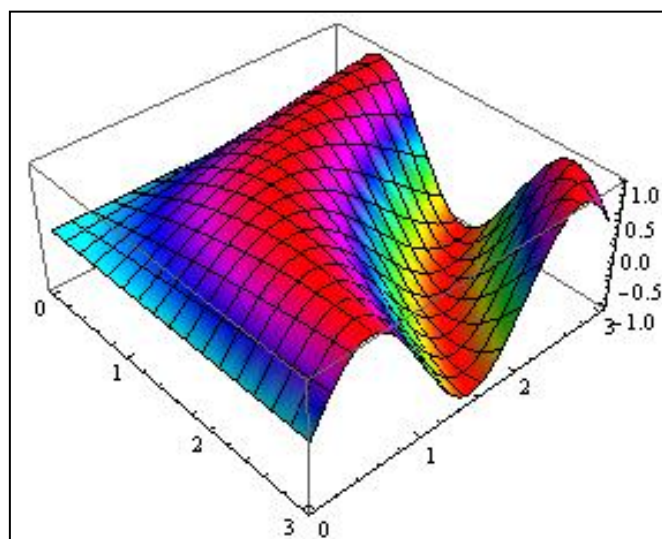
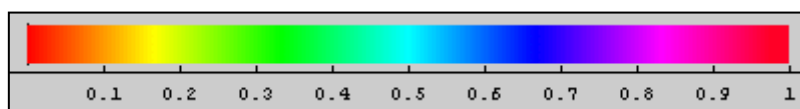
ΕΙΚΟΝΑ 10.39 : Χρωματισμός επιπέδου ως προς το υψόμετρο των σημείων του

Αν δε χρησιμοποιηθεί η εντολή `ColorFunctionScaling -> True`, τότε η Εικόνα (10.37) θα φαινόταν ως εξής :

```
Plot3D[x + y, {x, 0, 2}, {y, 0, 2},
ColorFunction -> Function[{x, y, z}, Hue[z]],
ColorFunctionScaling -> False]
```



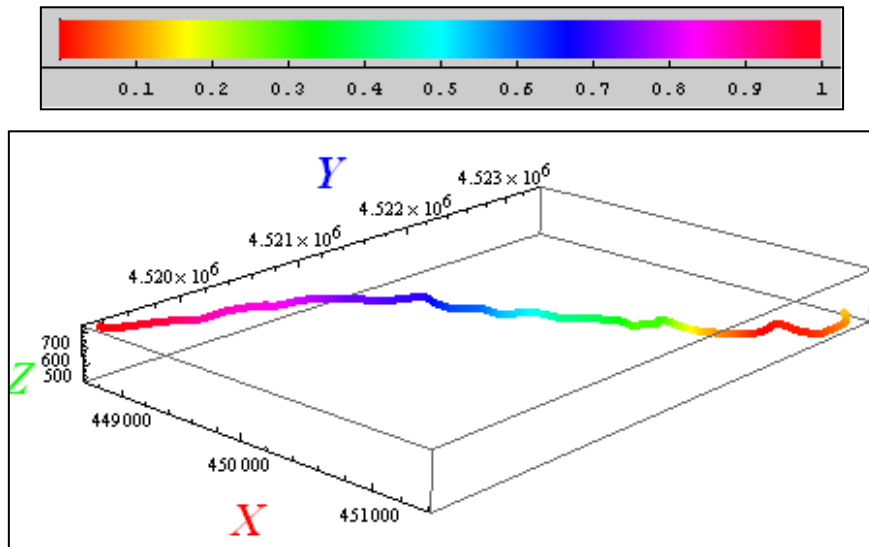
```
Plot3D[Sin[x y], {x, 0, 3}, {y, 0, 3},
ColorFunction -> Function[{x, y, z}, Hue[z]]]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.40 : Χρωματισμός επιφάνειας ως προς το υψόμετρο των σημείων της

10.8.2. Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς το υψόμετρο

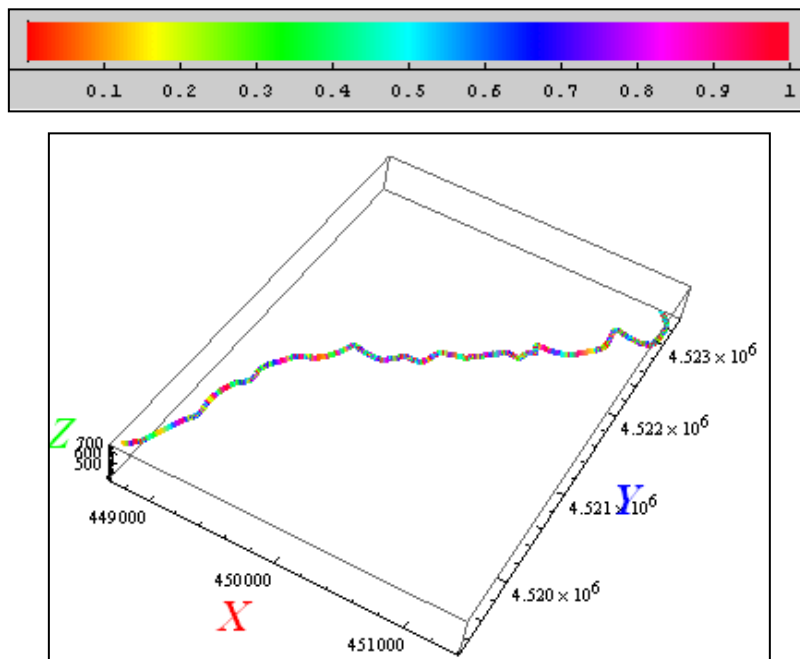
```
ParametricPlot3D[axes[t], {t, 0, 1}, ColorFunction -> Function[{x, y, z, t}, Hue[z]],
Axes -> True, AxesLabel ->
{Style[X, Large, Bold, Red],
Style[Y, Large, Bold, Blue],
Style[Z, Large, Bold, Green]},
PlotRange -> All, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.41 : Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς το υψόμετρο

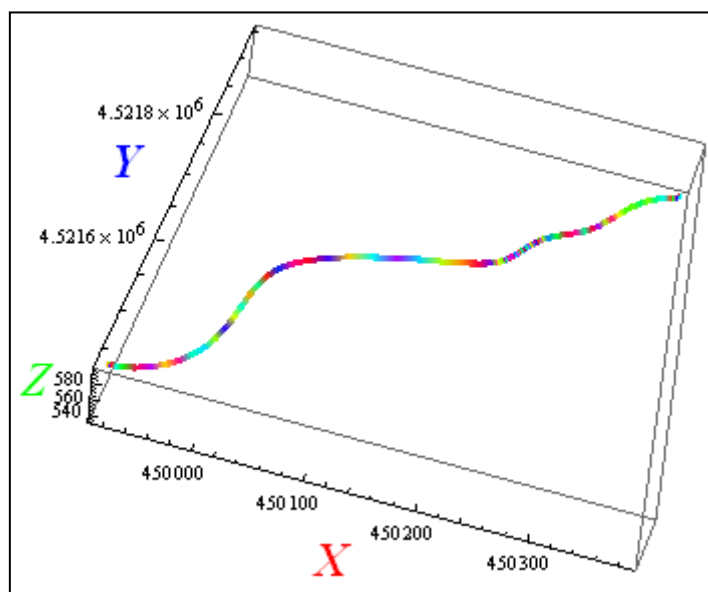
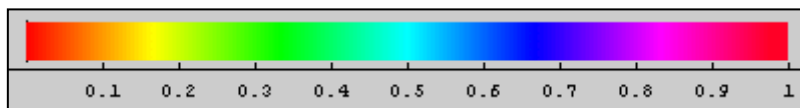
10.8.3. Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς την καμπυλότητα

```
ParametricPlot3D[axes[t], {t, 0, 1}, ColorFunction -> Function[{x, y, z, t},
  Hue[1000 * Kappa[axes][t]]],
  Axes -> True, AxesLabel ->
  {Style[X, Large, Bold, Red],
  Style[Y, Large, Bold, Blue],
  Style[Z, Large, Bold, Green]},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.42 : Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς την καμπυλότητα

```
ParametricPlot3D[axes[t], {t, 0.4, 0.6}, ColorFunction -> Function[{x, y, z, t},
  Hue[1000 * Kappa[axes][t]]],
  Axes -> True, AxesLabel ->
  {Style[X, Large, Bold, Red],
  Style[Y, Large, Bold, Blue],
  Style[Z, Large, Bold, Green]},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



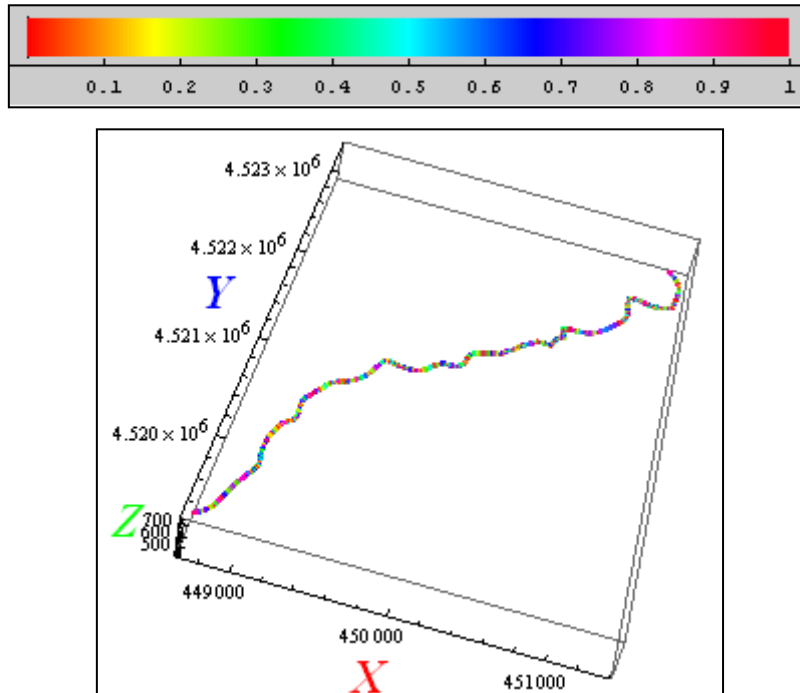
ΕΙΚΟΝΑ 10.43 : Χρωματισμός τμήματος, του άξονα της οδού ως προς την καμπυλότητα

10.8.4. Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς τη στρέψη

```
Tau[alpha_][t_] :=
  cross[alpha'[t], alpha''[t]].alpha'''[t]
  -----
  cross[alpha'[t], alpha''[t]].cross[alpha'[t], alpha''[t]]
```

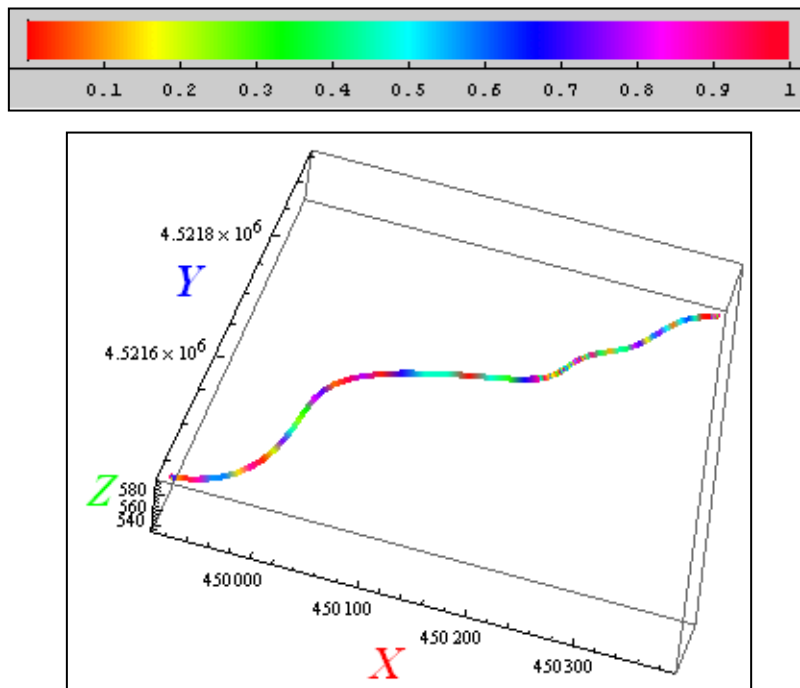
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.22 : Υπολογισμός της στρέψης μίας καμπύλης

```
ParametricPlot3D[axes[t], {t, 0, 1}, ColorFunction -> Function[{x, y, z, t},
  Hue[1000 * Tau[axes][t]]],
  Axes -> True, AxesLabel ->
  {Style[X, Large, Bold, Red],
  Style[Y, Large, Bold, Blue],
  Style[Z, Large, Bold, Green]},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.44 : Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς τη στρέψη

```
ParametricPlot3D[axes[t], {t, 0.4, 0.6}, ColorFunction -> Function[{x, y, z, t},
Hue[1000 * Tau[axes][t]]],
Axes -> True, AxesLabel ->
{Style[X, Large, Bold, Red],
Style[Y, Large, Bold, Blue],
Style[Z, Large, Bold, Green]},
PlotRange -> All, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.45 : Χρωματισμός τμήματος, του άξονα της οδού ως προς τη στρέψη

10.8.5. Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς την κεντρομόλο επιτάχυνση

Το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης, δίνεται από από τη σχέση (2.13) :

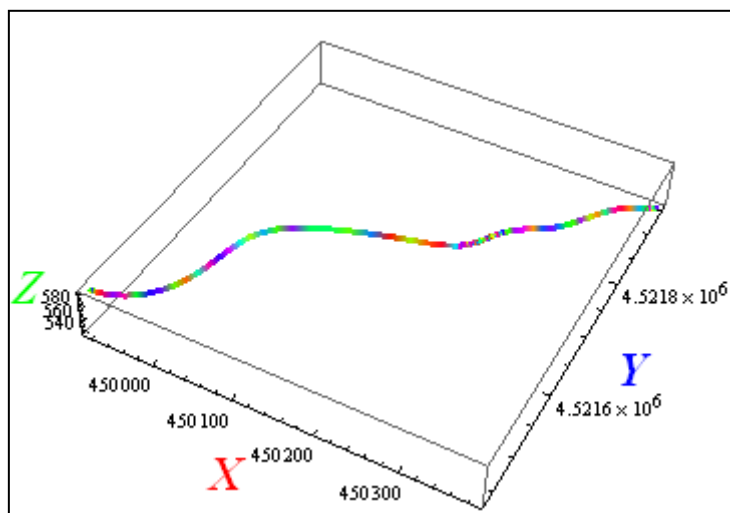
$$\vec{a}_κ(t) = \vec{r}''(t) - \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} \vec{r}'(t) \quad (2.13)$$

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης, υπολογίζεται από το *Mathematica*, με τη βοήθεια του Προγράμματος (10.30) :

```
AccelerationCentripetal[alpha_][t_] := Module[{ac, acn},
ac = alpha''[t] - (alpha''[t].alpha'[t])/alpha'[t].alpha'[t] alpha'[t];
acn = Sqrt[ac.ac];
];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.23 : Υπολογισμός κεντρομόλου επιτάχυνσης

```
ParametricPlot3D[axes[t], {t, 0.4, 0.6},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, t},
Hue[AccelerationCentripetal[axes][t]], ColorFunctionScaling -> True,
Axes -> True, AxesLabel ->
{Style[X, Large, Bold, Red],
Style[Y, Large, Bold, Blue],
Style[Z, Large, Bold, Green]},
PlotRange -> All, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.46 : Χρωματισμός τμήματος, του άξονα της οδού ως προς την κεντρομόλο επιτάχυνση

10.8.6. Χρωματισμός του άξονα της οδού ως προς το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας (διάνυσμα του Darboux $\vec{d}(t)$)

Ως γνωστόν, το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{d}(t)$ λέγεται *διάνυσμα του Darboux*, ενώ εκφράζεται ως εξής :

$$\vec{d}(t) = \tau(t) \vec{t}(t) + \kappa(t) \vec{b}(t) \quad (2.53)$$

Επίσης, το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας εκφράζεται μέσω της σχέσης (2.53), μόνο όταν έχουμε καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Σε αντίθετη περίπτωση, που η παράμετρος δεν αντιστοιχεί στη φυσική, η σχέση (2.53), γίνεται :

$$\vec{d}(t) = |\vec{u}(t)| \left(\tau(t) \vec{t}(t) + \kappa(t) \vec{b}(t) \right) = |\vec{r}'(t)| \left(\tau(t) \vec{t}(t) + \kappa(t) \vec{b}(t) \right)$$

ή

$$\vec{d}(t) = \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} \left(\tau(t) \vec{t}(t) + \kappa(t) \vec{b}(t) \right) \quad (2.54)$$

Αρχικά, καταστρώνεται πρόγραμμα υπολογισμού του δεύτερου μοναδιαίου κάθετου διανύσματος \vec{b} , σύμφωνα με τη σχέση (2.7), στο *Mathematica* :

$$\vec{b}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} \quad (2.7)$$

Η σχέση, (2.7), υλοποιείται στο *Mathematica*, ως εξής :

```
BINORMAL[alpha_][t_] :=
  Cross[alpha'[t], alpha''[t]]
  /
  Sqrt[Cross[alpha'[t], alpha''[t]].Cross[alpha'[t], alpha''[t]]]
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.24 : Δεύτερο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \vec{b}

Αντίστοχα, η σχέση, (2.54), υλοποιείται στο *Mathematica*, ως εξής :

```
DARBOUXVECTOR[alpha_][t_] :=
  Sqrt[alpha'[t].alpha'[t]] * (Tau[alpha][t] * TANGENT[alpha][t] +
  Kappa[alpha][t] * BINORMAL[alpha][t])
```

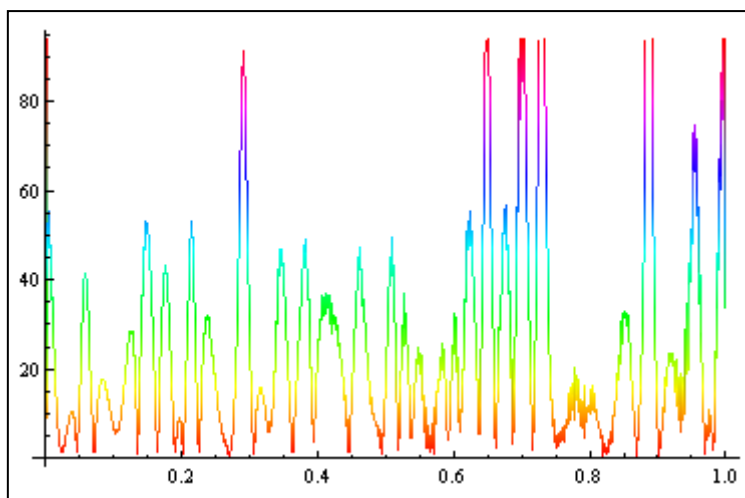
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.25 : Διάνυσμα του Darboux

Ενώ το μέτρο του διανύσματος *Darboux*, υλοποιείται στο *Mathematica*, σύμφωνα με το Πρόγραμμα (10.25).

```
DARBOUXVECTORNORM[alpha_][t_] := Module[{d, D},
  d = Sqrt[alpha'[t].alpha'[t] * (Tau[alpha][t] * TANGENT[alpha][t] +
    Kappa[alpha][t] * BINORMAL[alpha][t])];
  D = Sqrt[d.d];
];
```

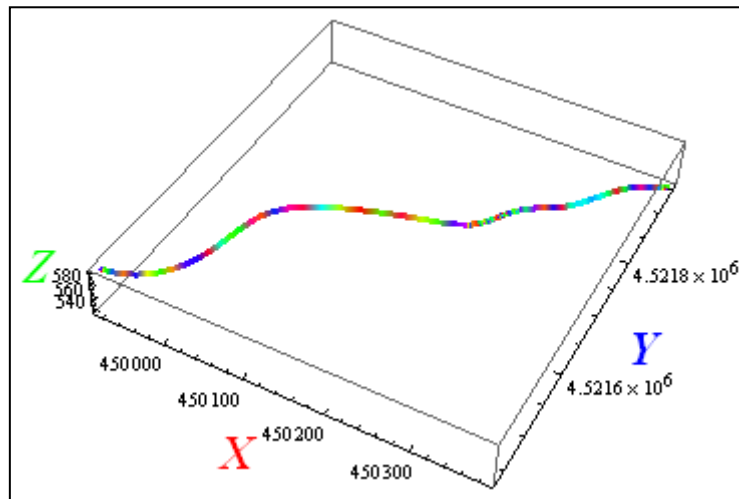
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.26 : Μέτρο του διανύσματος Darboux

```
Plot[DARBOUXVECTORNORM[axes][t], {t, 0, 1},
  ColorFunction -> Function[{x, y}, Hue[y]]]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.19 : Μέτρο του διανύσματος Darboux (γωνιακή ταύτητα) κατά μήκος του άξονα της οδού

```
ParametricPlot3D[axes[t], {t, 0.4, 0.6},
  ColorFunction -> Function[{x, y, z, t},
    Hue[DARBOUXVECTORNORM[axes][t]]], ColorFunctionScaling -> True,
  Axes -> True, AxesLabel ->
  {Style[X, Large, Bold, Red],
   Style[Y, Large, Bold, Blue],
   Style[Z, Large, Bold, Green]},
  PlotRange -> All, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.47 : Χρωματισμός τμήματος, του άξονα της οδού ως προς τη γωνιακή ταχύτητα (διάλυσμα του Darboux)

10.9. Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού

Και εδώ, όπως και στην περίπτωση του άξονα της οδού αντίστοιχα, χρωματίζεται η επιφάνεια της οδού ώστε να γίνει πιο εύκολα αντιληπτή η διακύμανση διαφόρων γεωμετρικών μεγεθών, από σημείο σε σημείο της επιφάνειας.

10.9.1. Αντιμετώπιση της επιφάνειας της οδού ως μία σύνθετη επιφάνεια παρεμβολής *B – Spline*

Καταρχήν, για να καταστεί εφικτή η αντιμετώπιση της επιφάνειας της οδού ως μία ενιαία μαθηματική επιφάνεια, πρέπει να εφαρμοστεί μία σύνθετη επιφάνεια παρεμβολής *B – Spline*. Με αυτό τον τρόπο, οι συντεταγμένες κάθε σημείου της επιφάνειας μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσει των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων u και v .

Οι συντεταγμένες της επιφάνειας της οδού λαμβάνονται κατά μήκος των u – παραμετρικών καμπυλών. Δηλαδή, υπολογίζονται αρχικά, οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν στην αριστερή οριογραμμή, ενώ στη συνέχεια υπολογίζονται οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν στην u – παραμετρική καμπύλη (υπενθυμίζεται ότι οι u – παραμετρικές καμπύλες είναι παράλληλες μεταξύ τους) που είναι μετατοπισμένη δεξιά ως προς την αριστερή οριογραμμή κατά έναν σταθερό αριθμό. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η u – παραμετρική καμπύλη να αντιστοιχιστεί στην δεξιά οριογραμμή. Η διακριτοποίηση των σημείων, καλό είναι να ληφθεί με τέτοιο τρόπο ώστε οι u – παραμετρικές καμπύλες να περάσουν διαδοχικά, και από την αριστερή οριογραμμή και από τον άξονα της οδού, αλλά και από τη δεξιά οριογραμμή. Το Πρόγραμμα 10.24 υπολογίζει τις συντεταγμένες της επιφάνειας της οδού που στη συνέχεια θα αποτελέσουν τα *control points* της σύνθετης επιφάνειας *B – Spline*.

Επίσης, λόγω της συνοριακής ιδιότητας της σύνθετης επιφάνειας *B – Spline*, αυτή θα περνάει ακριβώς από τη δεξιά και αριστερή οριογραμμή της επιφάνειας της οδού.

```

BSplineSurfacePoints[CoordinatesTable_, limitepiklish_ : 0.06, v_ : 3.5,
  widthstep_, step_ : 0.0001, numbertransf_ : 1000] :=
Module[{axes, Array3, Array3F, bsplineepiklish, width,
  JoinedTable, start2},

  axes = BSplineFunction[CoordinatesTable, SplineDegree → 2];
Array3 = ARRAYPSEUDOGEODESICKAPPAWITHLIMIT[axes, limitepiklish, step];
Array3F = Table[Array3[[i]][[2]], {i, 1, 1 + 1/step}];
bsplineepiklish = BSplineFunction[Array3F, SplineDegree → 2];

  JoinedTable = Transpose[{Transpose[Table[TURNINGSURFACE[axes,
    bsplineepiklish[u]][u, -v],
    {u, 0, 1, 1/numbertransf}], {1, 2}]}];

  width = -v + widthstep;

  While[width ≤ v,

    start2 = Transpose[{Transpose[Table[TURNINGSURFACE[axes,
      bsplineepiklish[u]][u, width],
      {u, 0, 1, 1/numbertransf}], {1, 2}]}];

    JoinedTable = Join[JoinedTable, start2, 2];
    width = width + widthstep;

  ];

  JoinedTable];

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.27 : Υπολογισμός των *control points* της σύνθετης επιφάνειας *B-Spline*

```
BSplineSurfaceCP = BSplineSurfacePoints[AXONAS, 0.06, 40, 5, 0.0001, 1000];
```

Ο λόγος που έχει επιλεχθεί η τιμή 40 για ημιπλάτος της οδού είναι μόνο και μόνο για εποπτικούς λόγους.

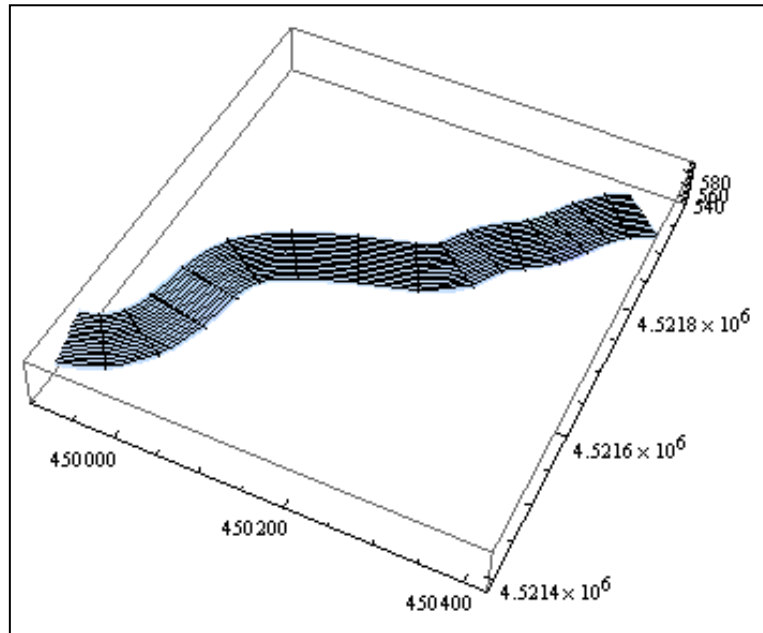
Τελικά, η επιφάνεια της οδού, προσομοιώνεται ως μία σύνθετη επιφάνεια *B – Spline* ως εξής :

```
ROADSURFACE = BSplineFunction[BSplineSurfaceCP, SplineDegree → 2];
```

Επαλήθευση του Προγράμματος (10.24)

Αρχικά, απεικονίζεται η επιφάνεια της οδού ως μία ευθειογενής επιφάνεια :

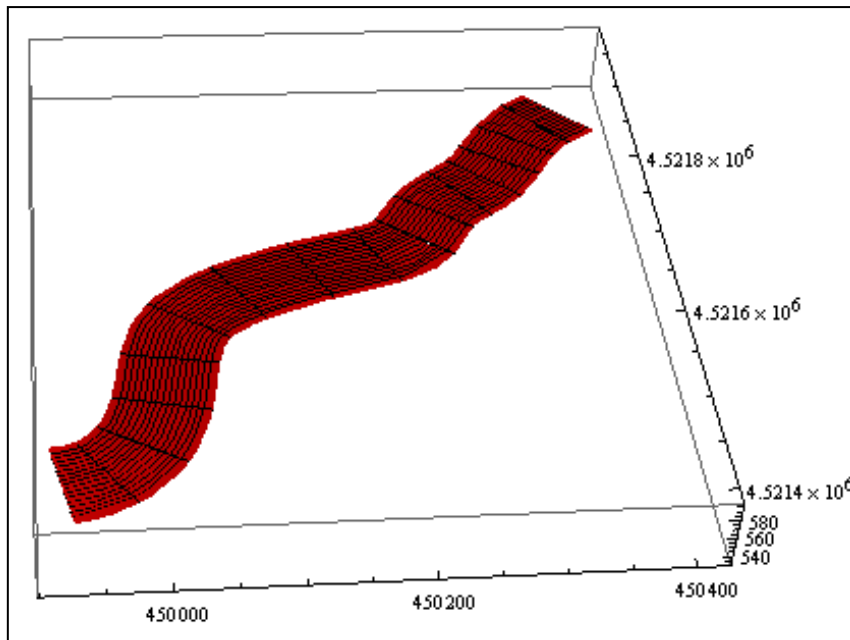
```
plot1 = ParametricPlot3D[TURNINGSURFACE[axes, bsplineepiklish[u]][u, v],
  {u, 0.4, 0.6}, {v, -40, 40}]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.48 : Γραφική απεικόνιση τμήματος της επιφάνειας της οδού ως ευθειογενή επιφάνεια

Στη συνέχεια, απεικονίζεται η επιφάνεια της οδού ως μία σύνθετη επιφάνεια *B – Spline* :

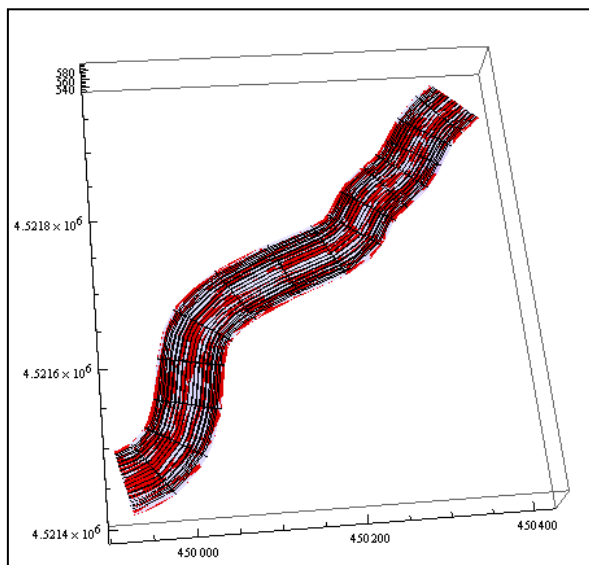
```
plot2 = ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v],
  {u, 0.4, 0.6}, {v, 0, 1}, PlotStyle -> Red]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.49 : Γραφική απεικόνιση τμήματος της οδού ως σύνθετη επιφάνεια *B-Spline*

Τελικά, συγκρίνονται οι δύο παραπάνω απεικονίσεις ενός τμήματος της επιφάνειας της οδού :

```
Show[plot1, plot2]
```

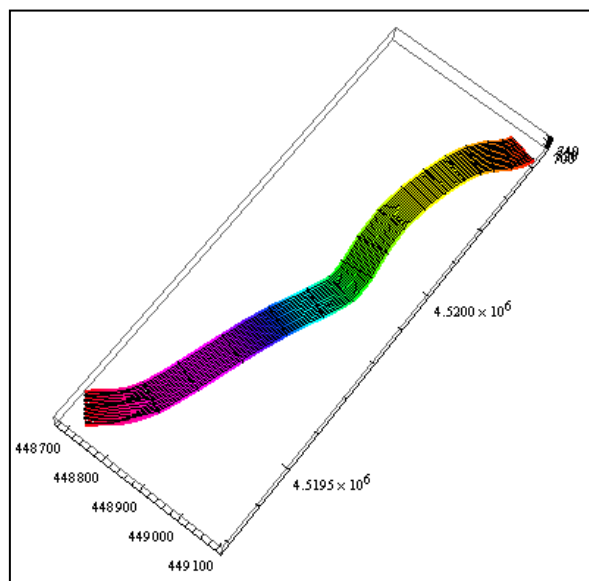
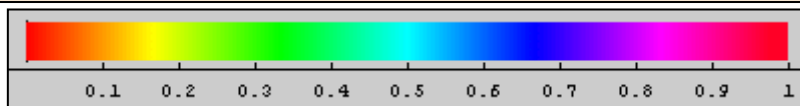


ΕΙΚΟΝΑ 10.50 : Σύγκριση της επιφάνειας της οδού όταν αντιμετωπίζεται ως ευθειογενής επιφάνεια σε σχέση με την αντιμετώπισή της ως μία σύνθετη επιφάνεια B-Spline

Από την Εικόνα (10.46), επαληθεύεται το Πρόγραμμα (10.24), αλλά και το θεωρητικό υπόβαθρο των σύνθετων επιφανειών B – Spline.

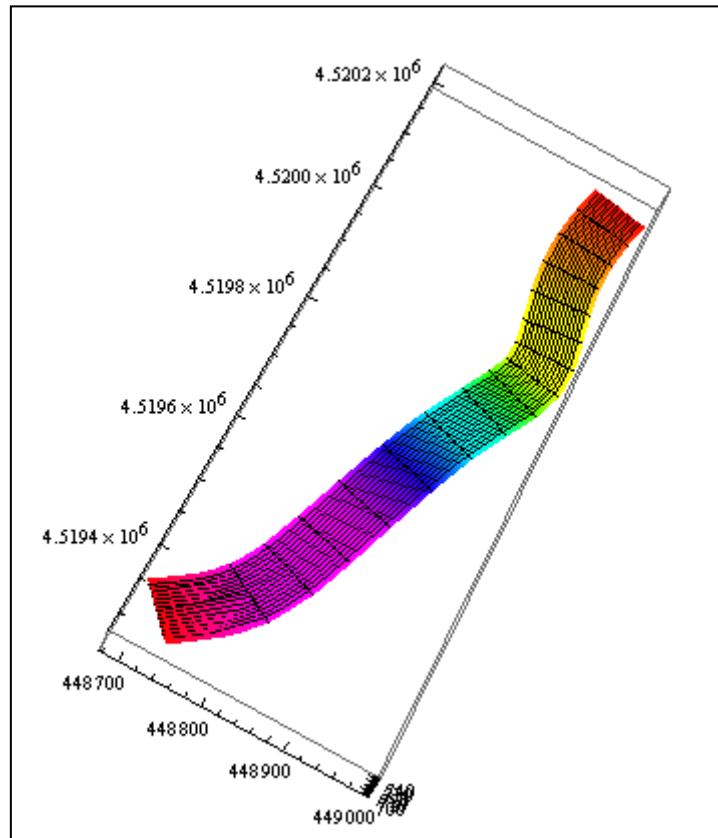
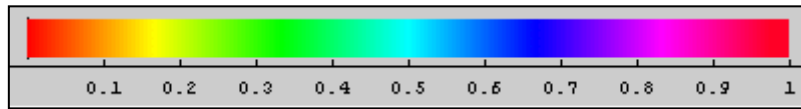
10.9.2. Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς το υψόμετρο των σημείων της

```
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0, 0.15}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, Hue[z]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.51 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς το υψόμετρο των σημείων της

```
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0, 0.1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, Hue[z]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.52 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς το υψόμετρο των σημείων της

10.9.3. Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλότητα του Gauss K

Αρχικά, κατασκευάζεται το πρόγραμμα υπολογισμού της καμπυλότητας του Gauss K :

Τα Προγράμματα (10.25), (10.26) και (10.27), βασίζονται στις σχέσεις (2.78), (2.79), (2.80) και στην ιδιότητα που έχει το μικτό γινόμενο, να μπορεί να γράφεται ως μία ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 :

$$L(u, v) = \frac{\vec{r}_1(u, v) \cdot (\vec{r}_2(u, v) \times \vec{r}_{11}(u, v))}{H} = \frac{\det(\vec{r}_{11}(u, v), \vec{r}_{11}(u, v), \vec{r}_1(u, v))}{H}$$

$$M(u, v) = \frac{\vec{r}_1(u, v) \cdot (\vec{r}_2(u, v) \times \vec{r}_{21}(u, v))}{H} = \frac{\det(\vec{r}_{12}(u, v), \vec{r}_{11}(u, v), \vec{r}_1(u, v))}{H}$$

$$N(u, v) = \frac{\vec{r}_1(u, v) \cdot (\vec{r}_2(u, v) \times \vec{r}_{22}(u, v))}{H} = \frac{\det(\vec{r}_{22}(u, v), \vec{r}_{11}(u, v), \vec{r}_1(u, v))}{H}$$


```

EEE[x_][u_, v_] := Module[{v1, v2, V1, E, F, G, H, V},

  V1 = D[x[uu, vv], uu, uu] /. {uu -> u, vv -> v};

  v1 = D[x[uu, vv], uu] /. {uu -> u, vv -> v};
  v2 = D[x[uu, vv], vv] /. {uu -> u, vv -> v};

  E = v1.v1;
  F = v1.v2;
  G = v2.v2;

  H = Sqrt[EG - F^2];

  V = Det[{V1, v1, v2}]/H;

  v];

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.28 : Υπολογισμός του πρώτου θεμελιώδους μεγέθους της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, L

```

FFF[x_][u_, v_] := Module[{v1, v2, V2, E, F, G, H, V},

  V2 = D[x[uu, vv], uu, vv] /. {uu -> u, vv -> v};

  v1 = D[x[uu, vv], uu] /. {uu -> u, vv -> v};
  v2 = D[x[uu, vv], vv] /. {uu -> u, vv -> v};

  E = v1.v1;
  F = v1.v2;
  G = v2.v2;

  H = Sqrt[EG - F^2];

  V = Det[{V2, v1, v2}]/H;

  v];

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.29 : Υπολογισμός του δεύτερου θεμελιώδους μεγέθους της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, M

```

GGG[x_][u_, v_] := Module[{v1, v2, v3, E, F, G, H, V},

  v3 = D[x[uu, vv], vv, vv] /. {uu -> u, vv -> v};

  v1 = D[x[uu, vv], uu] /. {uu -> u, vv -> v};
  v2 = D[x[uu, vv], vv] /. {uu -> u, vv -> v};

  E = v1.v1;
  F = v1.v2;
  G = v2.v2;

  H = Sqrt[EG - F^2];

  V = Det[{v3, v1, v2}]/H;

  v];

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.30 : Υπολογισμός του τρίτου θεμελιώδους μεγέθους της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, N

Στη συνέχεια, ακολουθεί το Πρόγραμμα (10.27) που υπολογίζει την καμπυλότητα του *Gauss* K . Το Πρόγραμμα (10.27), βασίζεται στη σχέση (2.115). Αν και η σχέση (2.115), δεν αποτελεί τον ορισμό της καμπυλότητας του *Gauss*, παρόλα αυτά, έχει πολύ σημαντική υπολογιστική ισχύ :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

```

GAUSSCURVATURE[x_][u_, v_] := (EEE[x][u, v] * GGG[x][u, v] - (FFF[x][u, v])^2) /
  (EE[x][u, v] * GG[x][u, v] - (FF[x][u, v])^2)

```

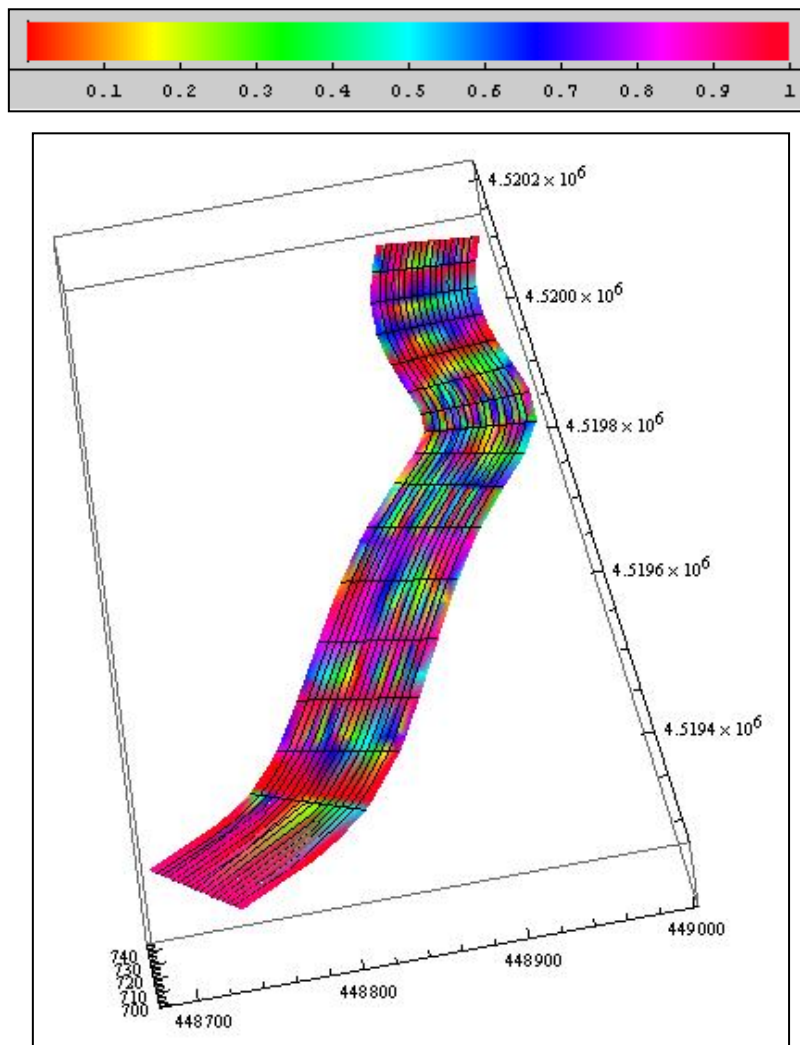
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.31 : Υπολογισμός της καμπυλότητας του *Gauss*

Στη συνέχεια, ακολουθεί ο χρωματισμός της επιφάνειας της οδού, συναρτήσει της καμπυλότητας του *Gauss* K , αλλά και η διαγραμματική της αναπαράσταση. Η καμπυλότητα του *Gauss*, είναι, ενδεχομένως, το πιο σημαντικό γεωμετρικό μέγεθος με το οποίο μπορεί να περιγραφεί μία ομαλή επιφάνεια. Άλλωστε, αποτελεί στοιχείο της εσωτερικής γεωμετρίας της επιφάνειας. Συνεπώς, η καμπυλότητα του *Gauss*, είναι πιθανό να συνδέεται άμεσα και με την οδική ασφάλεια της οδού.

```

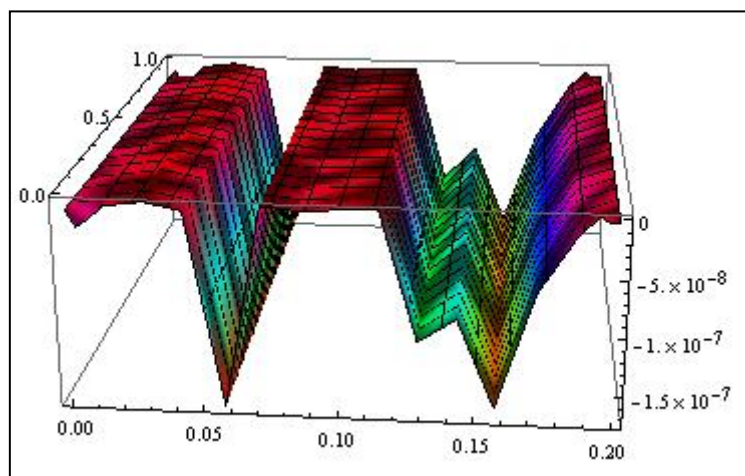
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0, 0.1}, {v, 0, 1},
  ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, Hue[10 000 000 * gcurvature[ROADSURFACE][u, v]]],
  ColorFunctionScaling -> True]

```



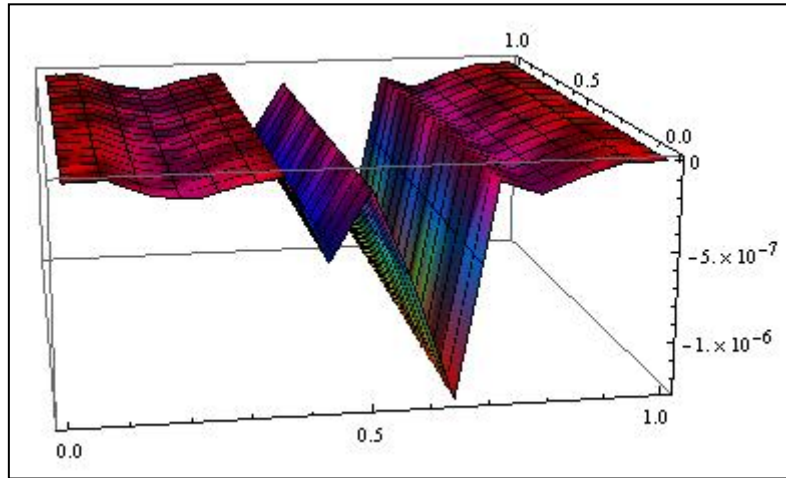
ΕΙΚΟΝΑ 10.53 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλότητα του Gauss K

```
Plot3D[gcurvature[ROADSURFACE][u, v], {u, 0, 0.2}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, Hue[z]]]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.20 : Καμπυλότητα του Gauss K σε τμήμα της επιφάνειας της οδού

```
Plot3D[gcurvature[ROADSURFACE][u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, Hue[z]]]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.21 : Καμπυλότητα του Gauss K της επιφάνειας της οδού

Σύμφωνα με το Διάγραμμα (10.20), επαληθεύεται και το θεώρημα της μη θετικότητας της καμπυλότητας του Gauss K ($K \leq 0$) σε ευθειογενείς επιφάνειες.

10.9.4. Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς τη μέση καμπυλότητα μ

Αρχικά, κατασκευάζεται το πρόγραμμα υπολογισμού της μέσης καμπυλότητας μ μέσω του Προγράμματος (10.28) :

Το Πρόγραμμα (10.28), βασίζεται στη σχέση (2.114) :

$$\mu = \frac{E N + G L - 2 F M}{2 (E G - F^2)}$$

```
MEANCURVATURE[x_][u_, v_] :=

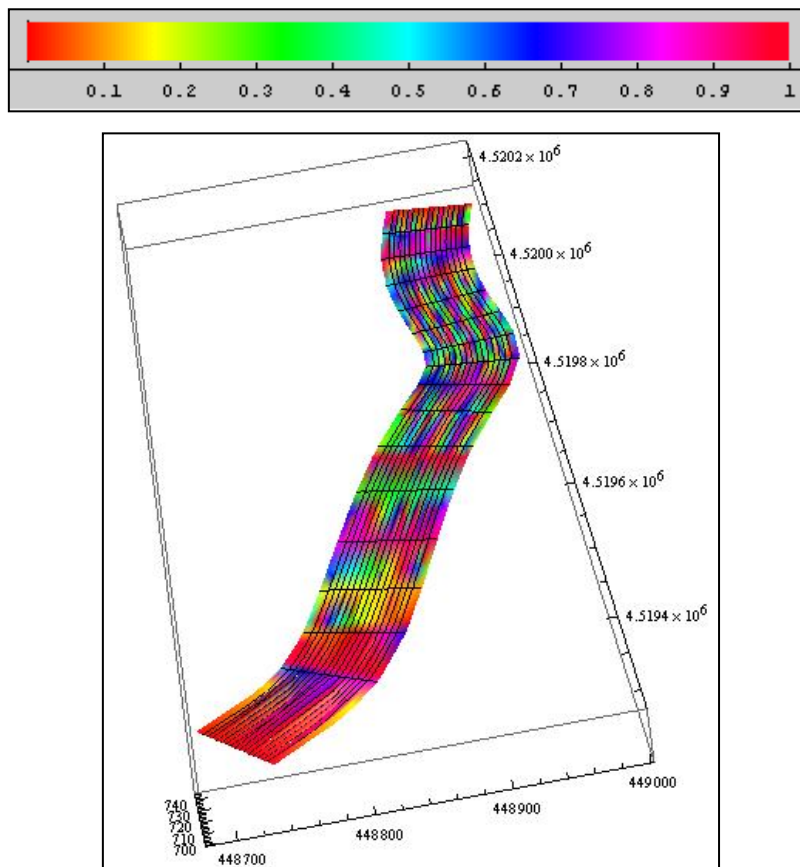
$$\frac{EE[x][u, v] * GGG[x][u, v] + GG[x][u, v] * EEE[x][u, v] - 2 * FF[x][u, v] * FFF[x][u, v]}{2 * (EE[x][u, v] * GG[x][u, v] - (FF[x][u, v])^2)}$$

```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.32 : Υπολογισμός της μέσης καμπυλότητας επιφανειών

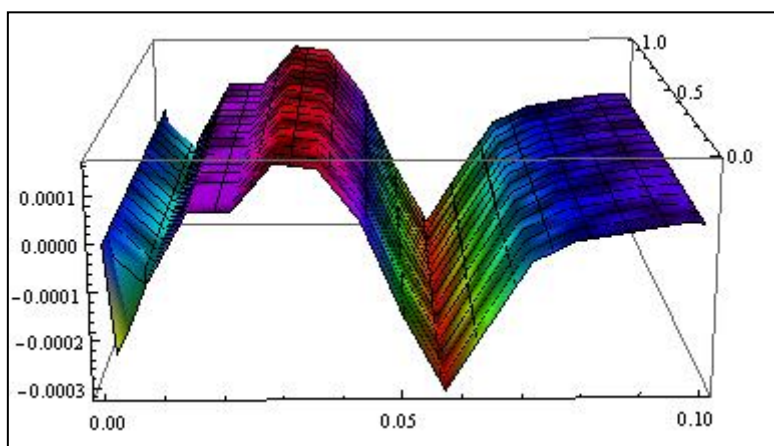
Στη συνέχεια, ακολουθεί ο χρωματισμός της επιφάνειας της οδού, συναρτήσει της μέσης καμπυλότητας μ , αλλά και η διαγραμματική της αναπαράσταση.

```
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0, 0.1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[1000 mcurvature[ROADSURFACE][u, v]], ColorFunctionScaling -> True]
```



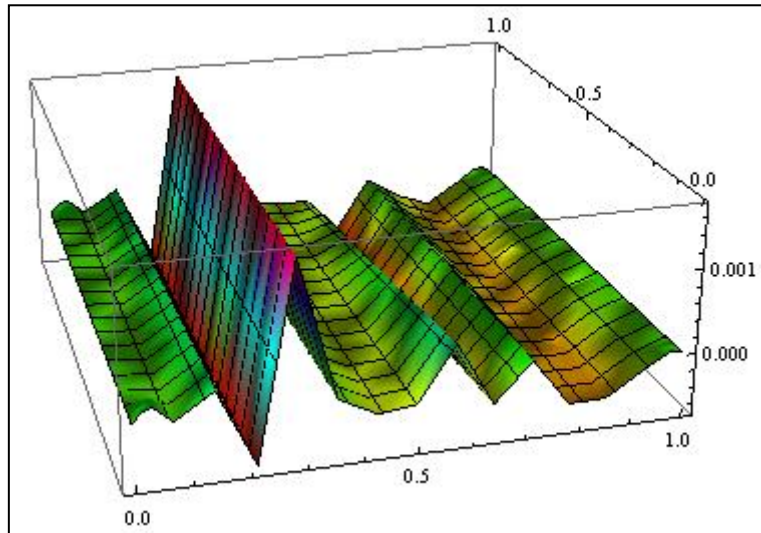
ΕΙΚΟΝΑ 10.54 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς τη μέση καμπυλότητα μ

```
Plot3D[mcurvature[ROADSURFACE][u, v], {u, 0, 0.1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, Hue[z]]]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.22 : Μέση καμπυλότητα μ σε τμήμα της επιφάνειας της οδού

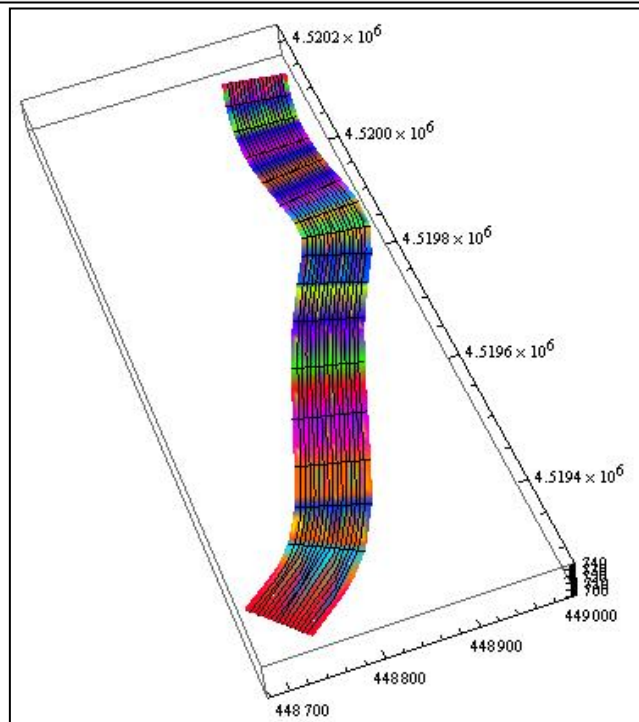
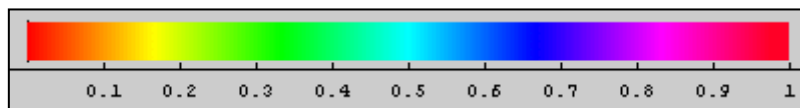
```
Plot3D[mcurvature[ROADSURFACE][u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v}, Hue[z]]]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.23 : Μέση καμυλότητα μ της επιφάνειας της οδού

10.9.5. Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την επίκλιση της οδού

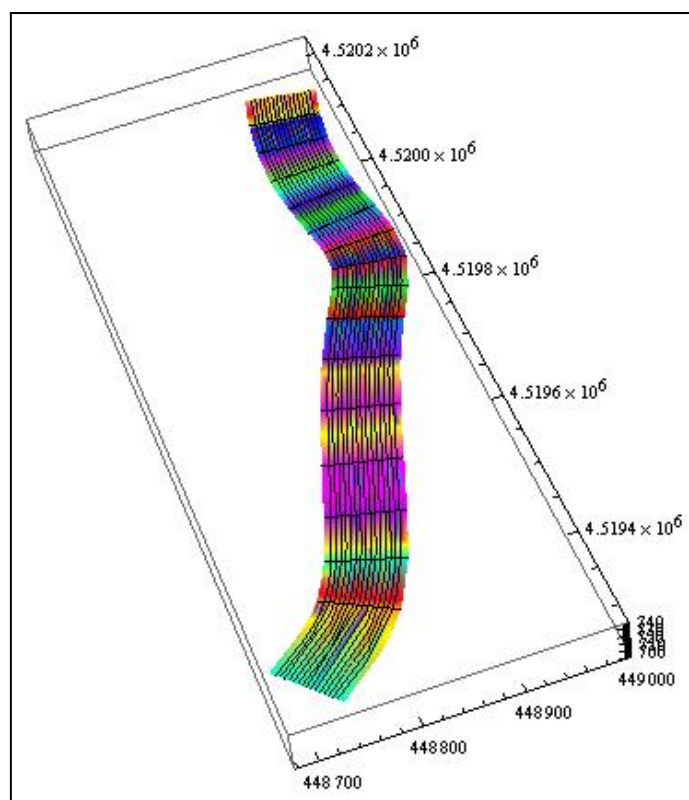
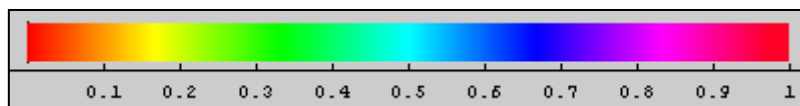
```
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0, 0.1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[100 * bsplineepiklish[u]]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.55 : Χρωματισμός τμήματος της επιφάνειας της οδού ως προς την επίκλιση της οδού

10.9.6. Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την κατά μήκος κλίση της οδού

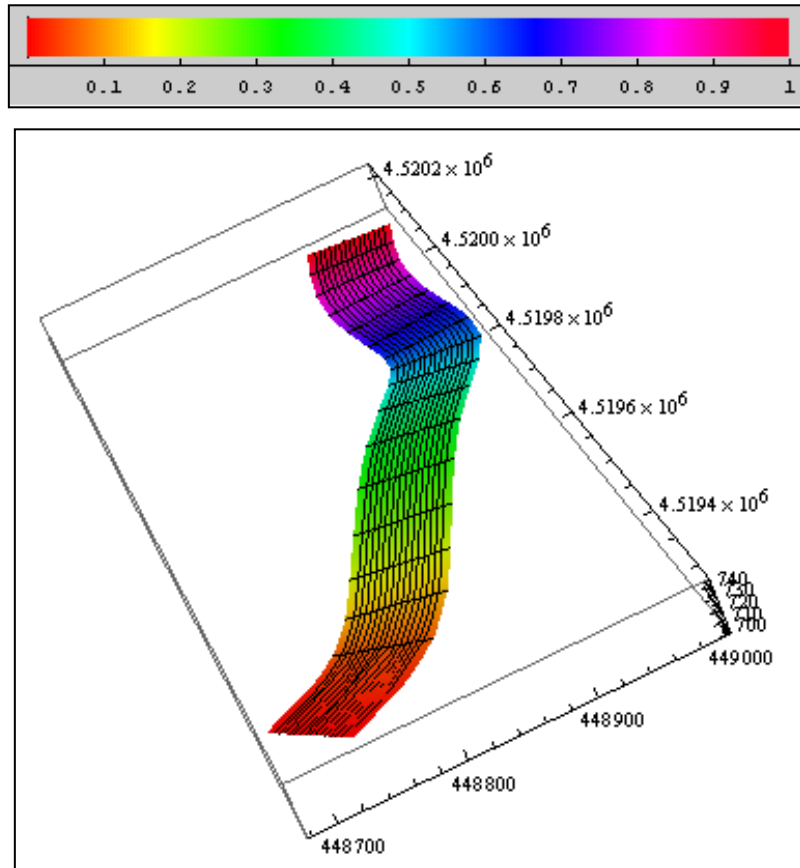
```
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0, 0.1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[1000 * TANGENT[axes][u] . {0, 0, 1}], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.56 : Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την κατά μήκος κλίση της οδού

10.9.7. Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη u

```
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0, 0.1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[u]], ColorFunctionScaling -> True]
```

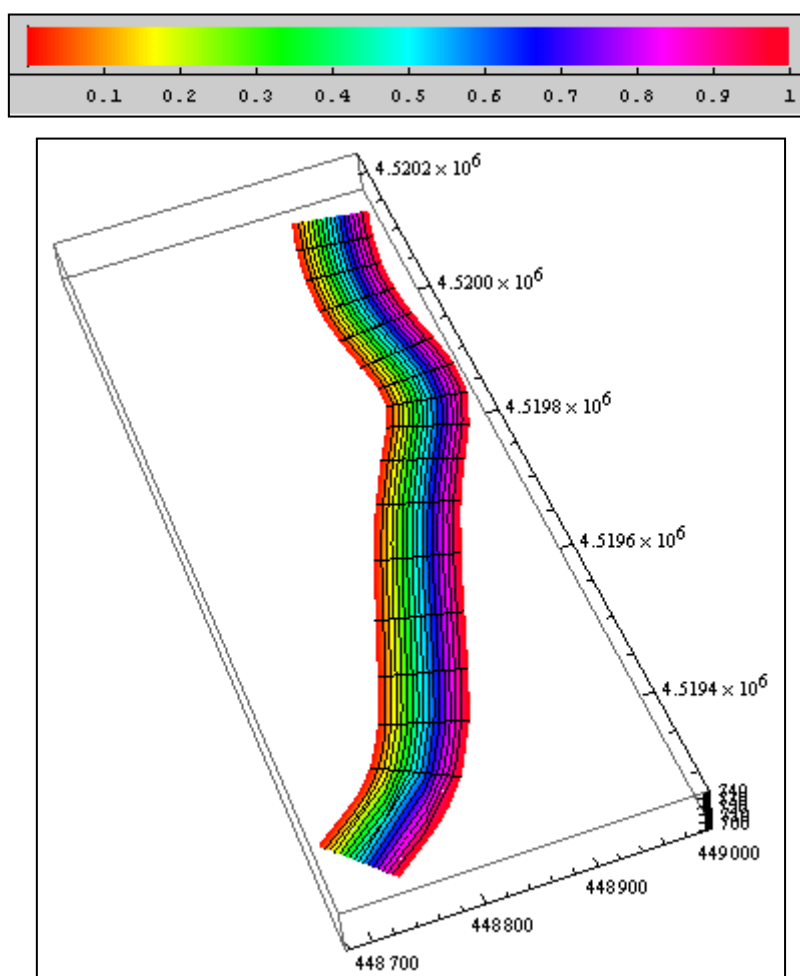


ΕΙΚΟΝΑ 10.57 : Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη u

10.9.8. Χρωματισμός της επιφάνειας ως προς το πλάτος της οδού

Λόγω του τρόπου ορισμού της ευθειογενούς επιφάνειας, ο χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς το πλάτος της, αντιστοιχεί ουσιαστικά, στον χρωματισμό της επιφάνειας της οδού ως προς την καμπυλόγραμμα συντεταγμένη v .

```
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0, 0.1}, {v, 0, 1},
  ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
    Hue[v]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.58 : Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς το πλάτος της οδού

10.9.9. Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς την κεντρομόλου επιτάχυνση

Το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης, δίνεται από από τη σχέση (2.13) :

$$\vec{a}_κ(t) = \vec{r}''(t) - \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} \vec{r}'(t) \quad (2.13)$$

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης σε ευθειογενή επιφάνεια, υπολογίζεται από το *Mathematica*, με τη βοήθεια του Προγράμματος (10.30) :

```
AccelerationCentripetalG[x_][u_, v_] :=
Module[{ac, v1, v2, vlnorm, acnorm},

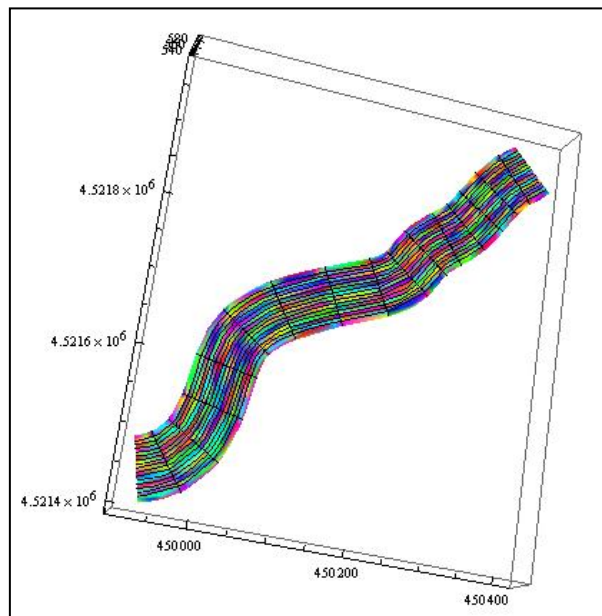
v1 = D[x[uu, vv], uu] /. {uu -> u, vv -> v};
v2 = D[x[uu, vv], {uu, 2}] /. {uu -> u, vv -> v};
vlnorm = Sqrt[v1.v1];

ac = v2 - (v2.v1/vlnorm) v1;

acnorm = Sqrt[ac.ac];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.33 : Υπολογισμός κεντρομόλου επιτάχυνσης σε επιφάνεια

```
ParametricPlot3D[ROADSURFACE[u, v], {u, 0.4, 0.6}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[AccelerationCentripetalG[ROADSURFACE][u, v]]],
ColorFunctionScaling -> True]
```



ΕΙΚΟΝΑ 10.59 : Χρωματισμός της επιφάνειας της οδού ως προς το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης

10.10. Επαλήθευση Ορισμένων Γεωμετρικών Μεγεθών Και Συνθηκών

Σε αυτό το σημείο, επαληθεύονται ορισμένες θεμελιώδεις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται όσον αφορά τη γεωμετρία της επιφάνειας της οδού κυρίως.

10.10.1. Καθετότητα των u – και v – παραμετρικών καμπυλών της επιφάνειας

Ως γνωστόν, η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των u – και v – παραμετρικών καμπυλών, δίνεται από τη σχέση (2.71) :

$$\omega = \text{ArcCos}\left(\frac{F}{\sqrt{G} \cdot \sqrt{E}}\right) \quad (2.71)$$

Υπολογισμός του πρώτου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής E σε τυχαίο σημείο :

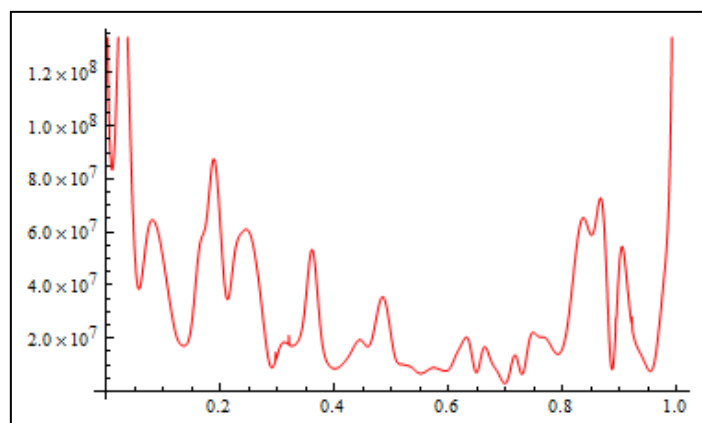
```
EE[x_][u_, v_] := Module[{v1, V},
  v1 = D[x[uu, vv], uu] /. {uu -> u, vv -> v};
  V = Simplify[v1.v1];
  V];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.34 : Υπολογισμός του πρώτου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, E

```
E = EE[ROADSURFACE][0.1, 0]
```

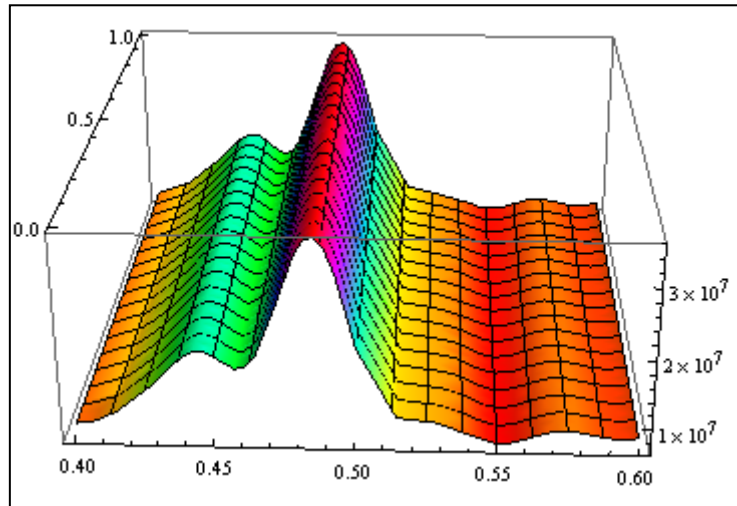
```
5.02434 × 107
```

```
Plot[EE[ROADSURFACE][u, 0], {u, 0, 1}, PlotStyle -> Red]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.24 : Πρώτο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, E , του άξονα της οδού

```
Plot3D[EE[ROADSURFACE][u, v], {u, 0.4, 0.6}, {v, 0, 1},
  ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
  Hue[z]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.25 : Πρώτο θεμελιώδες μεγέθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, E , τμήματος της επιφάνειας της οδού

Υπολογισμός του δεύτερου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής F σε τυχαίο σημείο :

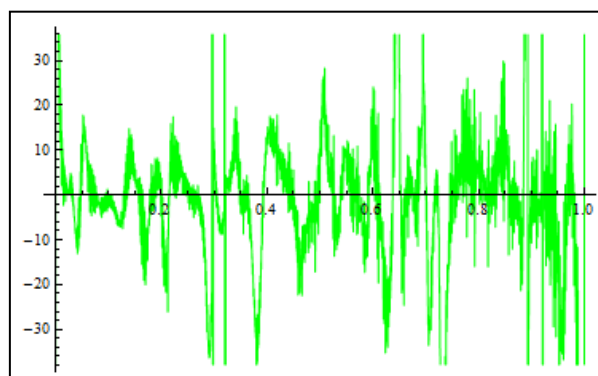
```
FF[x_][u_, v_] := Module[{v1, v2, V},
  v1 = D[x[uu, vv], uu] /. {uu -> u, vv -> v};
  v2 = D[x[uu, vv], vv] /. {uu -> u, vv -> v};
  V = Simplify[v1.v2];
  V];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.35 : Υπολογισμός του δεύτερου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, F

$$F = FF[ROADSURFACE][0.1, 0]$$

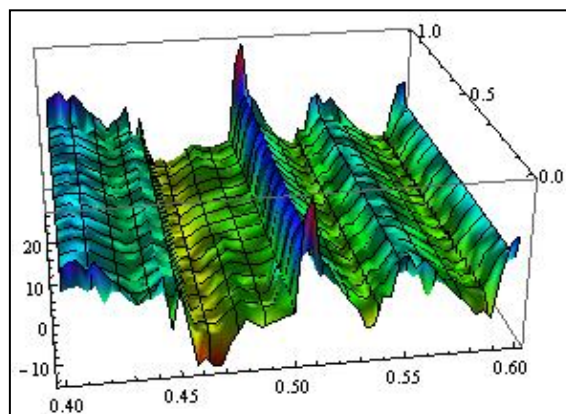
$$-0.490675$$

```
Plot[FF[ROADSURFACE][u, 0], {u, 0, 1}, PlotStyle -> Green]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.26 : Δεύτερο θεμελιώδες μεγέθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, F , του άξονα της οδού

```
Plot3D[FF[ROADSURFACE][u, v], {u, 0.4, 0.6}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[z]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.27 : Δεύτερο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, F , τμήματος της επιφάνειας της οδού

Υπολογισμός του τρίτου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής G σε τυχαίο σημείο :

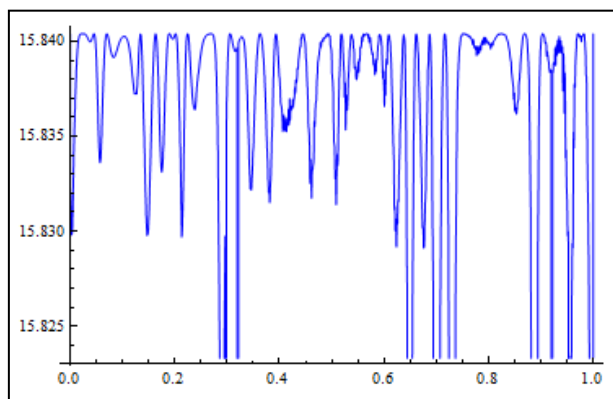
```
GG[x_][u_, v_] := Module[{v2, V},
v2 = D[x[uu, vv], vv] /. {uu -> u, vv -> v};
V = Simplify[v2.v2];
V];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.36 : Υπολογισμός του τρίτου θεμελιώδους μεγέθους, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, G

```
G = GG[ROADSURFACE][0.1, 0]
```

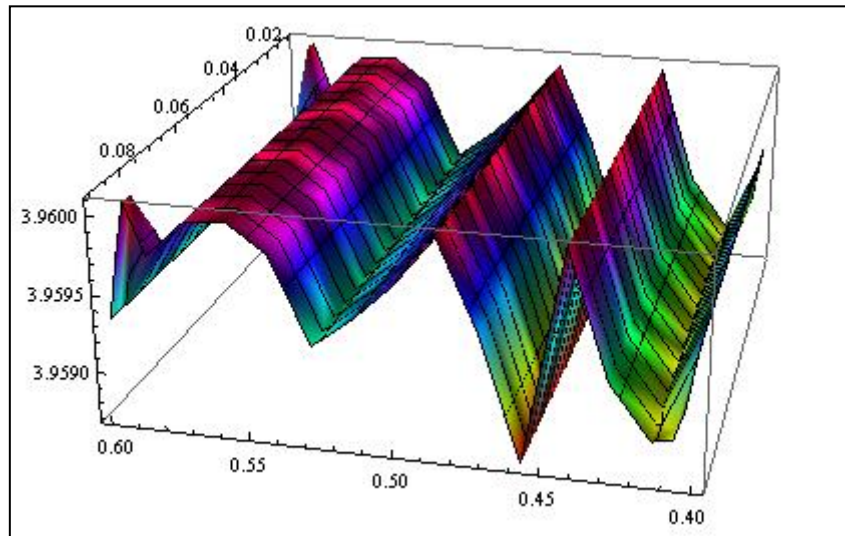
15.8402

```
Plot[GG[ROADSURFACE][u, 0], {u, 0, 1}, PlotStyle -> Blue]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.28 : Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, G , του άξονα της οδού

```
Plot3D[GG[ROADSURFACE][u, v], {u, 0.4, 0.6}, {v, 0.01, 0.09},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[z]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.29 : Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος, της πρώτης θεμελιώδους μορφής, G , τμήματος της επιφάνειας της οδού

Υπολογισμός της γωνίας ω που σχηματίζεται μεταξύ των u – και v – παραμετρικών καμπυλών :

$$\omega_{\text{rad}} = \text{ArcCos} \left[\frac{F}{\sqrt{G} * \sqrt{E}} \right]$$

1.57081

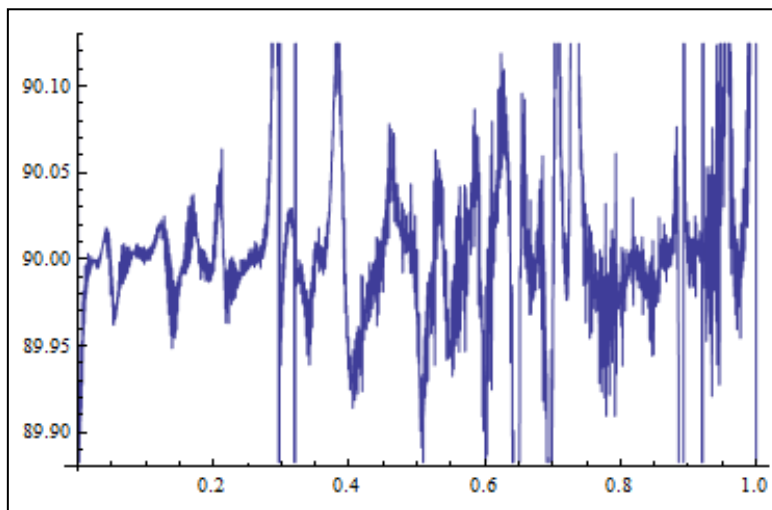
Τελικά, η γωνία ω που σχηματίζεται μεταξύ των u – και v – παραμετρικών καμπυλών, σε μοίρες, είναι :

$$\omega_{\text{degrees}} = \omega_{\text{rad}} * \frac{180}{\text{Pi}}$$

90.001

Θεωρητικά, πρέπει το F να ισούται ταυτοτικά με το μηδέν. Όμως, αυτό δε συμβαίνει λόγω της προσεγγιστικής θεώρησης που εμπεριέχεται στην προσομοίωση της επιφάνειας της οδού ως σύνθετη επιφάνεια $B - Spline$. Επίσης, το κατά πόσο το θεμελιώδες μέγεθος της πρώτης θεμελιώδους μορφής, τείνει να προσεγγίσει τη τιμή μηδέν, εξαρτάται άμεσα από την ακρίβεια της μεθόδου, δηλαδή τον βαθμό διακριτοποίησης της επιφάνειας.

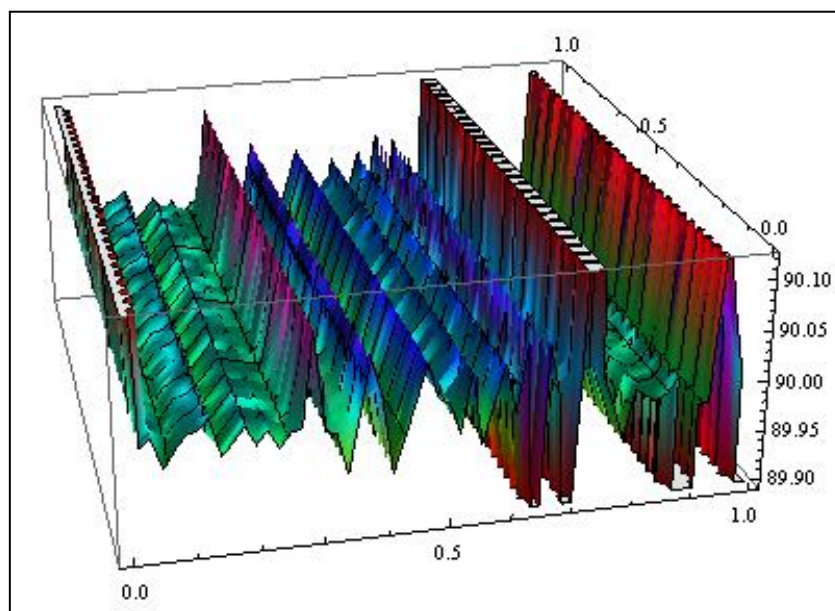
```
Plot[ArcCos[ $\frac{FF[ROADSURFACE][u, 0]}{\sqrt{GG[ROADSURFACE][u, 0]} * \sqrt{EE[ROADSURFACE][u, 0]}}$ ] *  $\frac{180}{\text{Pi}}$ ,
{u, 0, 1}]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.30 : Γωνία (σε μοίρες) μεταξύ των u - και v -παραμετρικών καμπυλών κατά μήκος του άξονα της οδού

Από το Διάγραμμα 10.26, παρατηρείται ότι πράγματι, ο άξονας της οδού, τέμνεται κάθετα από τις γεννέτριες της ευθειογενούς επιφάνειας με ανοχή 0.2 μοίρες περίπου.

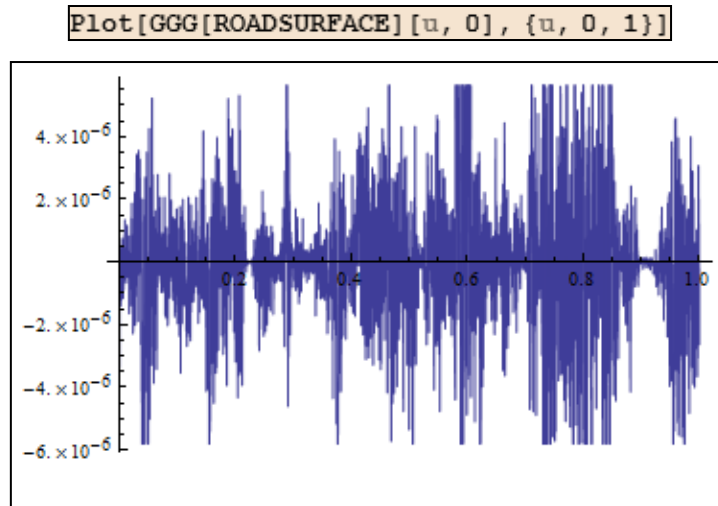
```
Plot3D[ArcCos[ $\frac{FF[ROADSURFACE][u, v]}{\sqrt{GG[ROADSURFACE][u, v]} * \sqrt{EE[ROADSURFACE][u, v]}}$ ] *  $\frac{180}{\text{Pi}}$ ,
{u, 0, 1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[z]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.31 : Γωνία (σε μοίρες) μεταξύ των u - και v -παραμετρικών καμπυλών σε όλη την επιφάνεια της οδού

10.10.2. Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, N

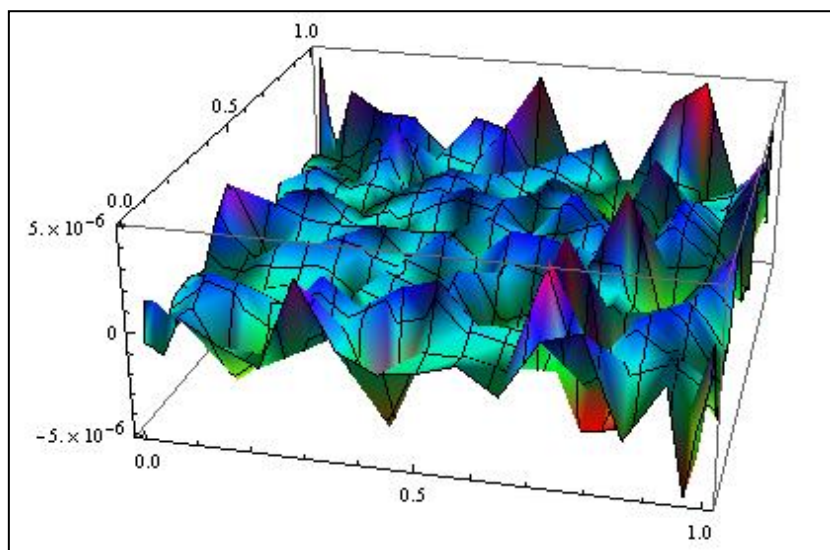
Ως γνωστόν, το τρίτο θεμελιώδες μέγεθος της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, N , ισούται ταυτοτικά με το μηδέν.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.32 : Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, N , κατά μήκος του άξονα της οδού

Θεωρητικά, πρέπει το N να ισούται ταυτοτικά με το μηδέν. Όμως, και εδώ, όπως και στην περίπτωση της γωνίας μεταξύ των u – και v – παραμετρικών καμπυλών αυτό δε συμβαίνει λόγω της προσεγγιστικής θεώρησης που εμπεριέχεται στην προσομοίωση της επιφάνειας της οδού ως σύνθετη επιφάνεια $B - Spline$.

```
Plot3D[GGG[ROADSURFACE][u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 1},  
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},  
Hue[z]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.33 : Τρίτο θεμελιώδες μέγεθος της δεύτερης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής, N , σε όλη την επιφάνεια της οδού

10.10.3. Υλοποίηση συστήματος αναφοράς γεωδαισιακών συντεταγμένων

Όπως έχει αναφερθεί στην Παράγραφο 2.4.4, ένα τμήμα του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι ορθογώνιες και η μία από τις δύο οικογένειες των παραμετρικών καμπυλών αποτελείται από γεωδαισιακές γραμμές, λέγεται σύστημα γεωδαισιακών συντεταγμένων. Ένα σύστημα γεωδαισιακών συντεταγμένων μπορεί να εισαχθεί σε μία επιφάνεια με άπειρους τρόπους.

Στην προκειμένη επιφάνεια της οδού, οι v – παραμετρικές καμπύλες είναι γεωδαισιακές (καθώς είναι οι γεννέτιρες της ευθειογενούς επιφάνειας) και κάθετες με την u – παραμετρική καμπύλη (βασική καμπύλη της ευθειογενούς επιφάνειας που αντιστοιχεί στον άξονα της οδού). Επομένως, είναι εφικτή η υλοποίηση ενός συστήματος γεωδαισιακών καμπυλών στην επιφάνεια της οδού.

10.10.4. Γεωδαισιακές καμπύλες

Στην περίπτωση ευθειογενούς επιφάνειας, οι v – παραμετρικές καμπύλες είναι (τρισιδιάστατες) ευθείες γραμμές άρα και γεωδαισιακές. Όμως, για την επαλήθευση της ορθότητας της μεθοδολογίας, αυτό επιχειρείται να αποδειχθεί.

Από την Παράγραφο 2.4.3., ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις :

- ❖ Η v – παραμετρική καμπύλη είναι γεωδαισιακή
- ❖ $\Gamma_{22}^1 = 0$ για κάθε (u_0, v)
- ❖ $G G_1 + F G_2 - 2 G F_2 = 0$, για κάθε (u_0, v)

Εδώ, για την επαλήθευση του ισχυρισμού, χρησιμοποιείται η συνθήκη :

$$\Gamma_{22}^1 \equiv 0$$

Ως γνωστόν κάθε $i, j, k = 1, 2$ ορίζονται οι συναρτήσεις :

$$\Gamma_{ijk}(u, v) = r_i(u, v) \cdot r_{jk}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega \quad (2.86)$$

και στη συνέχεια οι συναρτήσεις :

$$\Gamma_{jk}^1(u, v) = \frac{G(u, v) \Gamma_{1jk}(u, v) - F(u, v) \Gamma_{2jk}(u, v)}{H^2(u, v)} \quad (2.87)$$

$$\Gamma_{jk}^2(u, v) = \frac{E(u, v) \Gamma_{2jk}(u, v) - F(u, v) \Gamma_{1jk}(u, v)}{H^2(u, v)} \quad (2.88)$$

Επομένως για :

$$i = 1$$

$$j = k = 2$$

Η σχέση (2.88), γίνεται :

$$\Gamma_{22}^1(u, v) = \frac{G(u, v) \Gamma_{122}(u, v) - F(u, v) \Gamma_{222}(u, v)}{H^2(u, v)} \quad (10.1)$$

Η σχέση (10.1), μέσω της σχέσης (2.86), γίνεται :

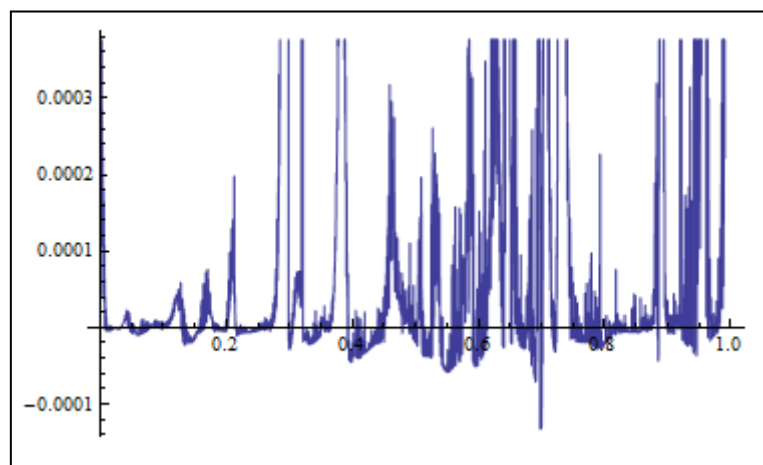
$$\Gamma_{22}^1(u, v) = \frac{G(u, v) (r_1(u, v) \cdot r_{22}(u, v)) - F(u, v) (r_1(u, v) \cdot r_{22}(u, v))}{H^2(u, v)} \quad (10.2)$$

Η σχέση (10.2), υλοποιείται στο *Mathematica*, σύμφωνα με το Πρόγραμμα (10.34) :

```
CHRISTOFFEL[1, 1, 2][x_][u_, v_] := Module[{v1, v2, v3, E, F, G, H, V},
  v1 = D[x[uu, vv], uu] /. {uu -> u, vv -> v};
  v2 = D[x[uu, vv], vv] /. {uu -> u, vv -> v};
  v3 = D[x[uu, vv], vv, vv] /. {uu -> u, vv -> v};
  E = v1.v1;
  F = v1.v2;
  G = v2.v2;
  H = Sqrt[E G - F^2];
  V = (G (v1.v3) - F (v1.v3)) / H^2;
  v];
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.37 : Υπολογισμός του συμβόλου Christoffel Γ_{22}^1

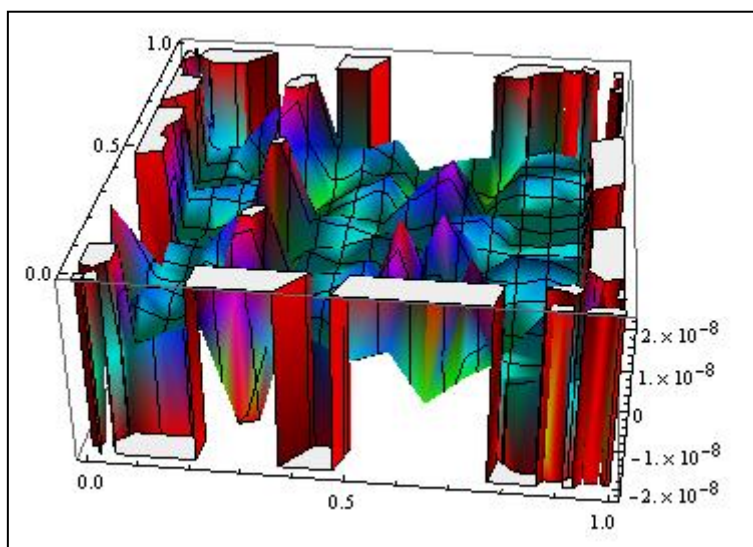
```
Plot[CHRISTOFFEL[1, 1, 2][ROADSURFACE][u, 0], {u, 0, 1}]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.34 : Σύμβολο Christoffel Γ_{22}^1 , κατά μήκος του άξονα της οδού

Θεωρητικά, πρέπει το Γ_{22}^1 να ισούται ταυτοτικά με το μηδέν. Όμως, και εδώ, αυτό δε συμβαίνει λόγω της προσεγγιστικής θεώρησης που εμπεριέχεται στην προσομοίωση της επιφάνειας της οδού ως σύνθετη επιφάνεια $B - Spline$.

```
Plot3D[CHRISTOFFEL[1, 1, 2][ROADSURFACE][u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, u, v},
Hue[z]], ColorFunctionScaling -> True]
```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.35 : Σύμβολο Christoffel Γ_{22}^1 , σε όλη την επιφάνεια της οδού

10.10.5. Παραλληλία των u – παραμετρικών καμπυλών

Δύο διανύσματα είναι παράλληλα, αν το μέτρο του εξωτερικού τους γινομένου ισούται με το μηδέν.

Επομένως, αρκεί να δειχθεί ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου μεταξύ των μοναδιαίων εφαπτόμενων διανυσμάτων, στα αντίστοιχα σημεία, κατά μήκος των u – παραμετρικών καμπυλών, ισούται με το μηδέν.

Αν δειχθεί ότι ο άξονας της οδού είναι παράλληλος προς τη δεξιά και αριστερή οριογραμμή, τότε, επειδή η επιφάνεια της οδού είναι ευθειογενής με γεννέτιρες κάθετες στην βασική καμπύλη, και όλες οι άλλες u – παραμετρικές καμπύλες, θα είναι παράλληλες μεταξύ τους. Λόγω της προσεγγιστικής θεώρησης που εμπεριέχεται στην προσομοίωση της επιφάνειας της οδού ως σύνθετη επιφάνεια $B - Spline$, η γωνία μεταξύ των αντίστοιχων εφαπτόμενων διανυσμάτων δε θα ισούται ακριβώς με το μηδέν. Όμως, οι μεγαλύτερες διαφορές (γωνία διάφορη του μηδενός), εμφανίζονται στις ακραίες θέσεις, δηλαδή στη δεξιά και αριστερή οριογραμμή. Έτσι, είναι δυνατός ο υπολογισμός της μέγιστης απόκλισης και να αποφασιστεί αν βρίσκεται εντός της ανοχής που τίθεται. Τελικά, με τον έλεγχο της παραλληλίας των u - παραμετρικών καμπυλών, ελέγχεται εκ νέου η ορθότητα της μεθόδου που προτείνεται.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το πρόγραμμα ελέγχου της παραλληλίας των u – παραμετρικών καμπυλών :

```

ElegxosParallhlias[axes_, matrix_: rightORleftoriogramm] [u_] :=
Module[{v1, v2, V, sin, diaforadegrees},

v1 = TANGENT[axes][u];
v2 = TANGENT[BSplineFunction[matrix, SplineDegree -> 2]][u];

V = Cross[v1, v2];

sin =  $\sqrt{V.V}$ ;

diaforadegrees = ArcSin[sin] *  $\frac{180}{\text{Pi}}$ ];

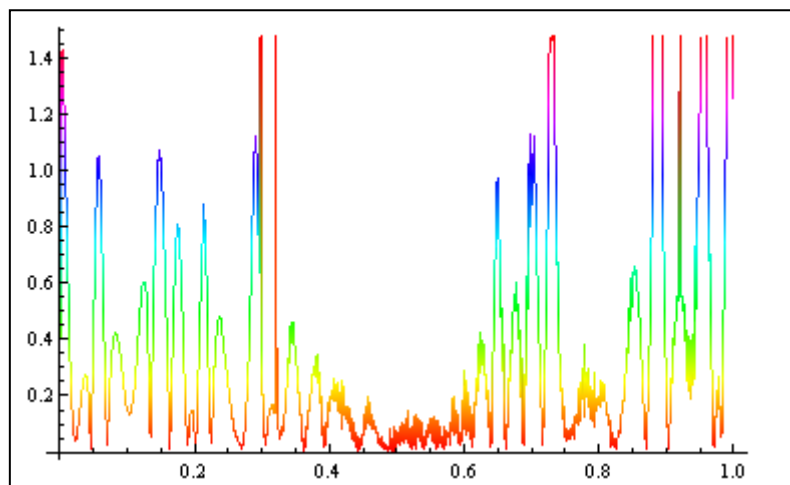
```

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 10.38 : Έλεγχος παραλληλίας των u - παραμετρικών καμπυλών της επιφάνειας της οδού

```

Plot[ElegxosParallhlias[axes, rightoriogramm] [u],
{u, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, u},
Hue[y]],
ColorFunctionScaling -> True]

```



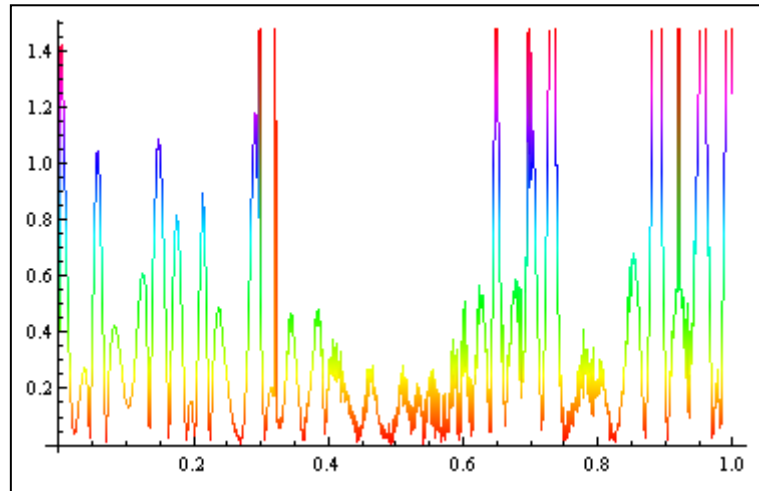
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.36 : Γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα της οδού και της δεξιάς οριογραμμής

Τονίζεται ότι το Πρόγραμμα 10.38 υπολογίζει τη γωνία (σε μοίρες) που σχηματίζεται μεταξύ των αντίστοιχων σημείων των u – παραμετρικών καμπυλών. Επομένως, η μέγιστη γωνία που σχηματίζεται είναι περίπου 1.5 μοίρες.

```

Plot[ElegxosParallhlias[axes, leftoriogramm] [u],
{u, 0, 1},
ColorFunction -> Function[{x, y, u},
Hue[y]], ColorFunctionScaling -> True]

```



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 10.37 : Γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα της οδού και της αριστερής οριογραμμής

Και εδώ, η μέγιστη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα της οδού και της αριστερής οριογραμμής, είναι περίπου 1.5 μοίρες.

11. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στόχος της εργασίας ήταν να προταθεί μία νέα μέθοδος χάραξης των οδών. Η μέθοδος καθίσταται ενδιαφέρουσα λόγω του ότι υλοποιείται στον χώρο των τριών διαστάσεων. Έτσι, η μελέτη γίνεται σε ένα βήμα. Δηλαδή, δεν υπάρχει η ανάγκη εφαρμογής της επαναληπτικής διαδικασίας (*trial and error*) που απαιτείται εξαιτίας της αλληλεξάρτησης μεταξύ οριζοντιογραφίας και μηκοτομής. Επίσης, οι θεώρησης καμπυλών και επιφανειών στον χώρο, προμηθεύουν την ανάλυση με περίσσεια πλούσιων μαθηματικών εργαλείων. Τελικά, αυτό δίνει τη δυνατότητα για αξιοποίηση της μεθόδου σε νέες εφαρμογές, αλλά και βελτίωση της αξιοπιστίας των ήδη υπάρχοντων (όπως συμβαίνει στη μέτρηση του μήκους ορατότητας).

Μεθοδολογικά, στο πλαίσιο της εργασίας παρουσιάστηκε αρχικά, το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο, ενώ στη συνέχεια έγινε η μεταφορά του σε υποπρογράμματα με τη χρήση του λογισμικού *Mathematica*. Τελικά, έγινε η σύνθεση όλων αυτών των προγραμμάτων σε ένα γενικευμένο το οποίο αποτελεί και το τελικό πόρισμα της ίδιας της εργασίας.

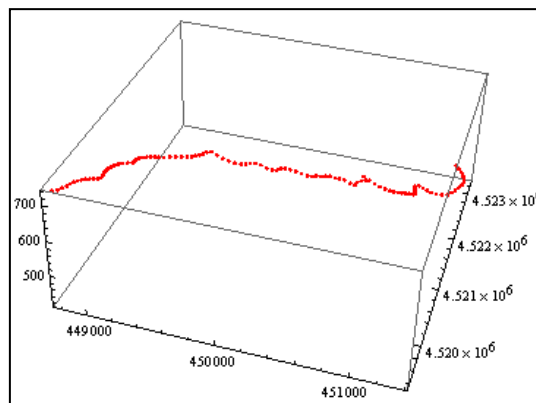
11.1. Μελέτη Περίπτωσης

Η μεθοδολογία που προτείνεται, εφαρμόζεται στο Μαθήμα – Θέμα Οδοποιίας του ενάτου εξαμήνου της Σ.Α.Τ.Μ. του ακαδημαϊκού έτους 2012-2013.

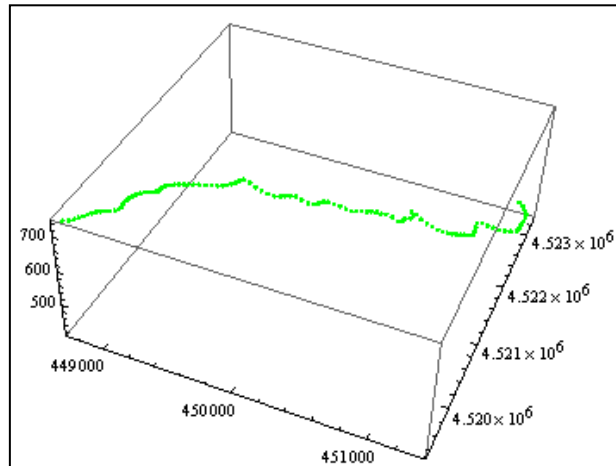
Στη συνέχεια, καθίσταται δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων χάραξης στο τέλος της μελέτης. Παρόλο που η σύγκριση των δύο μεθόδων πρέπει να γίνει μέσω των υπολοίπων των συντεταγμένων, των αντίστοιχων σημείων, εντούτοις, αυτό δεν είναι εφικτό. Ο λόγος είναι ότι ο αριθμός των σημείων προς χάραξη δεν είναι ο ίδιος από τη στιγμή που ούτε το μήκος των δύο αξόνων δεν είναι ίδιος. Επομένως, δεν μπορεί να υπάρξει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων.

Τελικά, η σύγκριση των δύο μεθόδων γίνεται εποπτικά καθώς και με τον υπολογισμό ορισμένων χαρακτηριστικών στατιστικών μεγεθών.

11.1.1. Οπτική σύγκριση της μεθόδου που προτείνεται με την κλασική

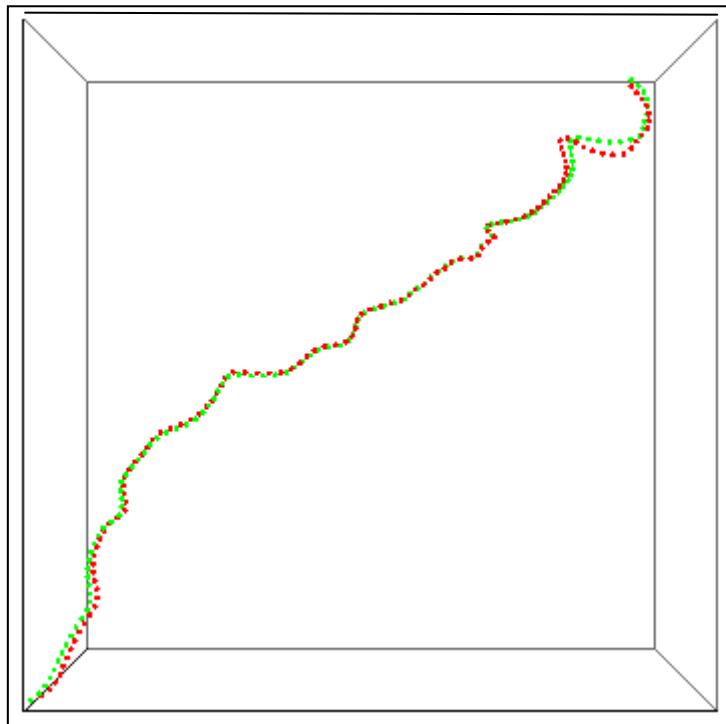


ΕΙΚΟΝΑ 11.1 : Σημεία του άξονα της οδού ανά 50 m σύμφωνα με το μάθημα – θέμα οδοποιίας της ΣΑΤΜ

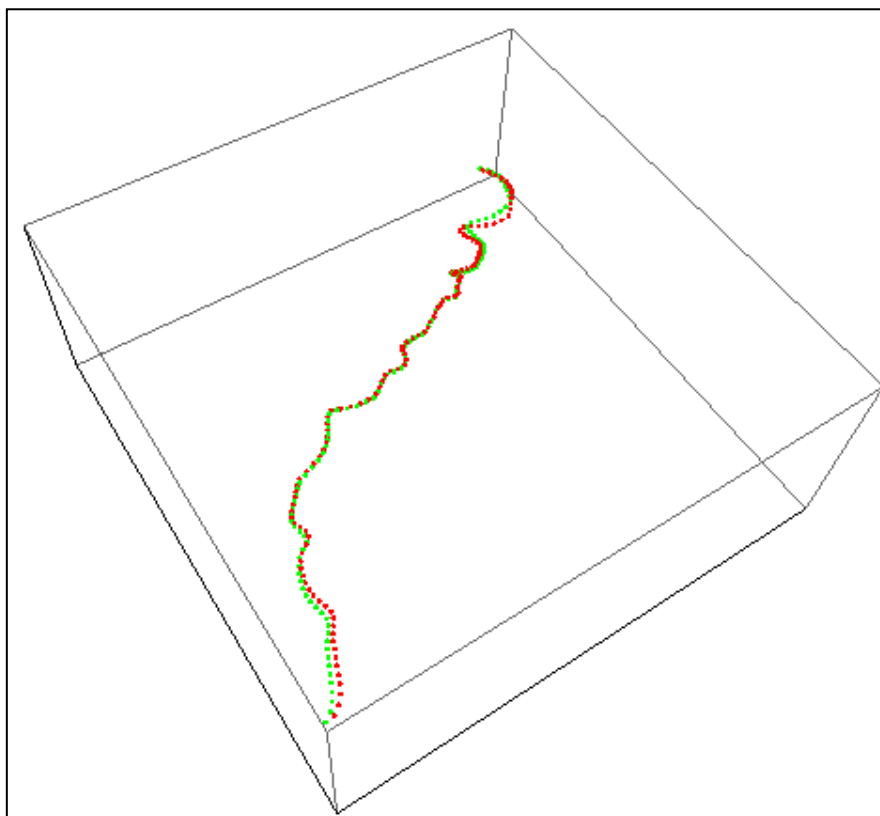


ΕΙΚΟΝΑ 11.2 : Σημεία του άξονα της οδού ανά 50 m σύμφωνα με τη μεθοδολογία που προτείνεται στην εργασία

Στη συνέχεια, γίνεται οπτική σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου που προτείνεται στην εργασία, σε σχέση με τον κλασικό τρόπο, στον οποίο η ανάλυση γίνεται σε δύο διακεκριμένα στάδια : την οριζοντιογραφία και τη μηκοτομή.



ΕΙΚΟΝΑ 11.3 : Οριζοντιογραφική σύγκριση των σημείων προς χάραξη που προέκυψαν με τη μέθοδο που προτείνεται στην εργασία, σε σχέση με την κλασική



ΕΙΚΟΝΑ 11.4 : Σύγκριση των σημείων προς χάραξη που προέκυψαν με τη μέθοδο που προτείνεται στην εργασία, σε σχέση με την κλασική

11.1.2. Αριθμητική σύγκριση της μεθόδου που προτείνεται ως προς την κλασική

Στη συνέχεια, ακολουθεί ένας πίνακας αριθμητικής σύγκρισης ορισμένων μεγεθών (στατιστικών κυρίως), μεταξύ της μεθόδου που προτείνεται στην εργασία, σε σχέση με τον κλασικό τρόπο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 : Σύγκριση των αποτελεσμάτων της μελέτης περίπτωσης με εκείνα του μαθήματος – θέματος

ΜΕΓΕΘΟΣ	ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΕΤΑΙ	ΜΑΘΗΜΑ - ΘΕΜΑ	ΔΙΑΦΟΡΑ
ΜΗΚΟΣ ΑΞΟΝΑ (m)	5467	5591	-124
ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΧΑΡΑΞΗ	110	112	-2
ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ X_{max} (m)	451358.79	451363.77	-4.98
ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΕΤΑΓΜΕΝΗ Y_{max} (m)	4523292.08	4523242.09	49.99
ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΤΗΓΜΕΝΗ Z_{max} (m)	742.03	735.68	6.36
ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ X_{min} (m)	448746.14	448784.21	-38.07
ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΕΤΑΓΜΕΝΗ Y_{min} (m)	4519357.28	4519374.64	-17.36

ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΚΑΤΗΓΜΕΝΗ Z_{min} (m)	410.56	412.81	-2.24
ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΕΤΜΗΜΕΝΩΝ \bar{X} (m)	449979.70	450003.79	-24.09
ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ \bar{Y} (m)	4521467.87	4521495.43	-27.57
ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΤΗΓΜΕΝΩΝ \bar{Z} (m)	577.01	574.66	2.34
ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΤΕΤΜΗΜΕΝΩΝ δ_X (m)	449974.43	449998.57	-24.14
ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ δ_Y (m)	4521474.01	4521528.59	-54.59
ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΚΑΤΗΓΜΕΝΩΝ δ_Z (m)	589.05	585.93	3.12
ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΕΤΜΗΜΕΝΩΝ σ_X (m)	870.29	862.52	7.77
ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ σ_Y (m)	1105.20	1093.71	11.48
ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΚΑΤΗΓΜΕΝΩΝ σ_Z (m)	110.98	108.87	2.11

Υπενθυμίζεται ότι οι συντεταγμένες της αρχής και του τέλους του άξονα, λόγω των ιδιοτήτων των καμπυλών *B – Spline*, είναι ακριβώς οι ίδιες και στις δύο περιπτώσεις :

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 : Συντεταγμένες αρχής και τέλους του άξονα της οδού

	<i>X</i> (m)	<i>Y</i> (m)	<i>Z</i> (m)
ΑΡΧΗ	448746.54	4519342.43	736.08
ΤΕΛΟΣ	451241.78	4523276.97	461.59

11.1.3. Σχολιασμός της σύγκρισης της μεθόδου που προτείνεται, σε σχέση με την κλασική

Από τη σύγκριση των δύο μεθόδων, διαφαίνεται η ορθότητα της μεθόδου. Αυτός ο ισχυρισμός απορρέει και από την οπτική σύγκριση των δύο μεθόδων, αλλά και από την αριθμητική τους σύγκριση ως προς κάποια χαρακτηριστικά στατιστικά μεγέθη. Τελικά, αυτή η μέθοδος είναι σε θέση να εφαρμοστεί άμεσα όταν πρόκειται για βελτίωση χάραξης.

11.2. Περαιτέρω Μελέτη

Στη συνέχεια, παρατίθενται ορισμένες εφαρμογές της μεθόδου που δυνητικά μπορούν να επιτευχθούν.

11.2.1. Υπολογισμός χωματισμών

Ο όγκος των προβλεπομένων ορυγμάτων και επιχωμάτων, όχι μόνο επηρεάζει σημαντικά τη δαπάνη κατασκευής μίας οδού, αλλά πολλές φορές, παρέχει και ασφαλή κριτήρια για την ορθότητα ή μη της πορείας που ακολουθήθηκε κατά τη χάραξη.

Τρόπος υπολογισμού των χωματισμών

Μετά, τη μοντελοποίηση της οδού ως μία τρισδιάστατη επιφάνεια, ο τρόπος υπολογισμού των χωματισμών καθίσταται απλός και γίνεται ως εξής :

Καταρχήν, λαμβάνονται οι συντεταγμένες από το τμήμα του ψηφιακό μοντέλο εδάφους (ΨΜΕ) που αντιστοιχεί στην επιφάνεια της οδού. Υψομετρικά, το ΨΜΕ, θα βρίσκεται, είτε πάνω από τη επιφάνεια της οδού (όρυγμα), είτε κάτω από την επιφάνεια της οδού (επίχωμα).

Γενικά, ο όγκος ενός στερεού μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση του τριπλού ολοκληρώματος. Επομένως, όγκος των χωματισμών υπολογίζεται ως διαφορά της επιφάνειας του ΨΜΕ από την επιφάνεια της οδού.

Ο όγκος Ω ενός τόπου V , είναι :

$$\Omega = \iiint_{(V)} dx \, dy \, dz$$

11.2.2. Απορροή των ομβρίων

Από τη στιγμή που έχει καθοριστεί με ακριβή μαθηματικό τρόπο η επιφάνεια της οδού, είναι γνωστές οι συντεταγμένες της σε κάθε σημείο. Έτσι, είναι δυνατή η διακριτοποίηση της επιφάνειας μέσω πεπερασμένων στοιχείων ώστε να αναλυθεί η απορροή των ομβρίων σε κάθε σημείο της επιφάνειας ώστε τελικά, να γίνει εκτίμηση της καταλληλότητας και ασφάλειας της οδού. Επίσης, είναι εφικτή η αριθμητική σύνδεση της απορροής των ομβρίων με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του άξονα της οδού και της επιφάνειας εν γένει.

Πέρα από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, η απορροή των ομβρίων μπορεί να μελετηθεί και με προσομοίωση του φαινομένου. Με αυτόν τον τρόπο, δίνονται τιμές από τον χρήστη και παρατηρείται η επίδρασή τους στο υπό μελέτη φαινόμενο.

11.2.3. Μήκος ορατότητα με περιβάλλουσα και προσομοίωση με κώνο

Και εδώ, το μήκος ορατότητας μπορεί να υπολογιστεί είτε αριθμητικά, είτε να αξιολογηθεί οπτικά.

Αριθμητικά, το μήκος ορατότητας μπορεί να υπολογιστεί μέσω των εφαπτομένων καμπύλης και στη συνέχεια με εφαρμογή της περιβάλλουσας καμπύλης λαμβάνοντας υπόψη όλα τα αντικείμενα που δυνητικά επηρεάζουν την ορατότητα του οδηγού.

Οπτικά, το μήκος ορατότητας ορατότητας, μπορεί να αξιολογηθεί, προσομοιώνοντας την ορατότητα με έναν κώνο, του οποίου η ακτίνα της βάσης και το ύψος καθορίζονται από τον

χρήστη. Μάλιστα, τα γεωμετρικά στοιχεία του κώνου μεταβάλλονται, έχοντας ως κριτήριο, τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του οδηγού, όπως είναι η ηλικία.

11.2.4. Εμβαδόν για οδοστρωσία

Από τη στιγμή που είναι γνωστή η επιφάνεια της οδού, είναι πολύ εύκολο να υπολογιστεί και το εμβαδόν της. Το εμβαδόν της επιφάνειας μίας οδού, πέρα των άλλων, επηρεάζει άμεσα και την ποσότητα των υλικών οδοστρωσίας, άρα και το κόστος κατασκευής του έργου τελικά. Επομένως, το εμβαδόν της επιφάνειας μπορεί να αποτελέσει και ένα κριτήριο βελτιστοποίησης ως προς το κόστος.

$$\varepsilon = \iint_D H(u, v) du dv \quad (67.2)$$

όπου $H(u, v)$ η διακρίνουσα της πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής I

11.2.5. Επιβολή ορίων σε γεωμετρικά μεγέθη

Μέχρι τώρα, τα όρια που επιβάλλονται, όπως είναι η καμπυλότητα στην οριζοντιογραφία ή στις κοίλες και κυρτές καμπύλες, αφορούν επίπεδες καμπύλες. Όμως, με την εισαγωγή τρισδιάστατων καμπυλών και επιφανειών η θεώρηση της καμπυλότητας γίνεται στον χώρο (υπολογίζεται στον χώρο). Επίσης, γεννιούνται και μεγέθη που προηγουμένως δεν ήταν δυνατό να μελετηθούν καθώς είτε δεν ορίζονται στο επίπεδο, είτε ορίζονται με εκφυλισμένο τρόπο, όπως η στρέψη, η κάθετη καμπυλότητα, η γεωδαισιακή καμπυλότητα, η καμπυλότητα του *Gauss*, η μέση καμπυλότητα.

Επομένως, πρέπει να βρεθούν τα όρια (πεδία ορισμού) όλων αυτών των μεγεθών, οι οποίοι είναι σε θέση να λειτουργήσουν και ως σημαντικοί δείκτες ως προς την οδική ασφάλεια.

Αυτό μπορεί να γίνει είτε με έκθεση οδηγών σε πραγματικές συνθήκες, είτε με χρήση εξομοιωτή. Το βασικό πλεονέκτημα που προσφέρει ο εξομοιωτής είναι η μελέτη δρόμου που δεν έχει κατασκευαστεί. Μάλιστα, λόγω της τρισδιάστατης φύσης του μοντέλου, στην περίπτωση του εξομοιωτή, ο χρήστης μπορεί να εκλαμβάνεται στερεοσκοπικά την οδό, γεγονός που οδηγεί σε πραγματικά - ρεαλιστικά αποτελέσματα. Έτσι, οι ενδεχόμενες αστοχίες που υπάρχουν σε σχέση με τη γεωμετρία της οδού, μπορούν να προβλεφθούν και πολύ περισσότερο να οριοθετηθούν εκ νέου.

Τελικά, τα στοιχεία που θα προκύψουν από τη δειγματοληψία, θα υποστούν στατιστική επεξεργασία με αποτέλεσμα την εξαγωγή της μέσης τιμής της ανοχής-άνεσης του οδηγού σε κάθε γεωμετρικό μέγεθος, για τον πληθυσμό. Μία αξιόπιστη στατιστική ανάλυση απαιτεί παρατηρήσεις από πολλά και διαφορετικά μεταξύ τους οδικά τμήματα.

11.2.6. Πειραματική οδοποιία σε συνθήκες υπό κλίμακα

Μεγέθη που σχετίζονται με τη Φυσική του οχήματος, είναι δυνατό να προσδιοριστούν πειραματικά. Αρχικά, πρέπει η επιφάνεια να μοντελοποιηθεί, δηλαδή να κατασκευαστεί (με

έναν μετασχηματισμό ομοιότητας) ένα ομοίωμά της. Στη συνέχεια, υπολογίζονται (ο υπολογισμός μπορεί να γίνει με εφαρμογή πεπερασμένων στοιχείων) τα υπό μελέτη στοιχεία (ταχύτητα, επιτάχυνση, διάνυσμα του *Darboux*) ώστε να οριστούν οι κρίσιμες τιμές τους, αλλά και να επαληθευτεί η ορθότητα των πεδλιων ορισμών που έχουν τεθεί στα αμιγώς γεωμετρικά στοιχεία του άξονα και της επιφάνειας. Ενδεχομένως, με αυτόν τον τρόπο να μπορεί να οριστεί και το όριο ταχύτητας ενός οδικού τμήματος.

Για να πετύχει αυτό το εγχείρημα, πρέπει προφανώς, να εξασφαλιστούν ανάλογες συνθήκες με τις πραγματικές. Για παράδειγμα, η βαρύτητα που δέχεται το όχημα, μπορεί να αυξηθεί αν στραφεί και εφαρμοστεί μία φυγόκεντρη δύναμη.

11.2.7. Τρισδιάστατη ισοκλινής καμπύλη

Για να έχει μία καμπύλη σταθερή κατά μήκος κλίση, πρέπει ο λόγος της στρέψης προς την καμπυλότητα να είναι σταθερός. Αυτός ο λόγος, ισούται ακριβώς με τη γωνία που αντιστοιχεί στην κατά μήκος κλίση.

Επομένως, μπορεί ως πρώτη προσέγγιση του άξονα της οδού να είναι η τρισδιάστατη ισοκλινής (τμηματικά) η οποία θα τροποποιείται αναλόγως, στη συνέχεια. Ο λόγος που προτιμάται η ισοκλινής, είναι ότι αποτελεί την πιο οικονομική χάραξη. Αυτό δε σημαίνει φυσικά ότι λύνονται απαραίτητα και τα προβλήματα που αφορούν γενικότερα τον γεωμετρικό σχεδιασμό των οδών, όπως το μήκος ορατότητας ή η καμπυλότητα για παράδειγμα.

Για χαραχθεί η (τρειςδιάστατη) ισοκλινής, απαιτείται το ΨΜΕ, η αρχή και το τέλος της οδού και ένα πρόγραμμα βελτιστοποίησης που υπόκεινται σε περιορισμούς. Ένας από τους περιορισμούς που θα υπόκειται η αντικειμενική συνάρτηση, θα είναι το μαθηματικό πρόβλημα της τομής ευθείας και επιφάνειας (ΨΜΕ). Ως ευθεία μπορεί να θεωρηθεί η γεννέταιρα ενός κώνου μεταβλητού ύψους, αλλά με σταθερή κορυφή. Αυτή η κορυφή, θα αντιστοιχεί κάθε φορά, στο τέλος μίας καμπύλης σταθερής κατά μήκος κλίσης.

Καμπύλες σταθερής κατά μήκος κλίσης

Αν μία καμπύλη έχει σταθερή κατά μήκος κλίση, τότε ο λόγος της στρέψης της καμπύλης τ προς την καμπυλότητα της καμπύλης κ , παραμένει σταθερός ως προς κάποιο διάνυσμα. Στην προκειμένη περίπτωση, αυτό το διάνυσμα πρέπει να είναι το διάνυσμα που βρίσκεται στην κατακόρυφο του τόπου όπου βρίσκεται το προς χάραξη οδικό τμήμα. Επισημαίνεται ότι αυτή η διεύθυνση θα αλλάζει κατά μήκος του άξονα της οδού. Επίσης ο λόγος της στρέψης της καμπύλης τ προς την καμπυλότητα της καμπύλης κ , αποδεικνύεται (Gray, 1998) ότι ισούται με τη συνεφαπτομένη μίας γωνίας α , το συνημίτονο της οποίας, ισούται με τη σειρά του με την κατά μήκος κλίση της οδού ως προς το διάνυσμα αυτό. Όμως, αν θεωρηθεί ως διάνυσμα αναφοράς η κατακόρυφος, τότε η κατά μήκος κλίση της οδού θα ισούται γενικά, με τη συμπληρωματική γωνία της εν λόγω γωνίας. Το συνημίτονο συμπληρωματικής γωνίας $\beta = 90 - \alpha$, ισούται με το ημίτονο της γωνίας β . Όμως, για πολύ μικρές γωνίες, το ημίτονο λαμβάνεται ίσο σε σχέση με την εφαπτομένη της γωνίας που αντιστοιχεί τελικά στην κατά μήκος κλίση της οδού s :

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot \alpha$$

όπου

$$s = \sin a$$

Με αυτή τη θεώρηση, η χάραξη ενός νέου οδικού άξονα γίνεται πλήρως αυτοματοποιημένα καθώς τα μόνα δεδομένα εισόδου που απαιτούνται, είναι :

- ❖ ΨΗΦΙΑΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΔΑΦΟΥΣ
- ❖ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΑΡΧΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΑΤΟΣ ΤΟΥ ΟΔΙΚΟΥ ΑΞΟΝΑ
- ❖ ΟΡΙΟ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
- ❖ ΟΡΙΟ ΨΕΥΔΟΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ
- ❖ ΟΡΙΟ ΘΕΤΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ (ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)
- ❖ ΟΡΙΟ ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ ΨΕΥΔΟΚΑΘΕΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ (ΚΟΙΛΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ)
- ❖ ΟΡΙΟ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΥΣ ΚΛΙΣΗΣ ΟΔΟΥ
- ❖ ΟΡΙΟ ΕΠΙΚΛΙΣΗΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
- ❖ ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ
- ❖ ΒΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ (ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ)
- ❖ ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΟΥ ΕΠΙΘΥΜΕΙΤΑΙ ΝΑ ΧΑΡΑΧΘΟΥΝ

11.2.8. Καμπύλες *NURBS*

Στην περίπτωση νέας χάραξης, οι καμπύλες *B – Spline*, πρέπει να αντιμετωπιστούν ως καμπύλες *NURBS* (*Non Uniform Rational B-Splines*). Στα ελληνικά, μεταφράζονται ως Μη Ομοιόμορφες Ρητές Συναρτήσεις Παρεμβολής.

Το βασικό πλεονέκτημα των καμπυλών *NURBS* σε σχέση με τις καμπύλες *B – Spline*, είναι ότι μπορεί να καταστρωθεί ένας πίνακας βαρών, με κριτήριο, να μην περνάει η οδός από συγκεκριμένα μέρη, ενώ να περνάει υποχρεωτικά από άλλα.

Επομένως η τρισδιάστατη ισοκλινής καμπύλης, ενδεχομένως να μπορεί να προσδιοριστεί τελικά, με βάση τις καμπύλες *NURBS*.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Στην ελληνική γλώσσα

- Γιώτης, Α., Κανελλαΐδης, Γ. & Μαλέρδος, Γ., 1990. *Γεωμετρικός Σχεδιασμός των Οδών*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών.
- Καδιανάκης, Ν., 2013. *Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Καμπυλών και επιφανειών*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- ΚΑΔΙΑΝΑΚΗΣ, Ν. & ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ, Σ., 2003. *ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Καρράς, Γ., 1998. *Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στη Φωτογραμμετρία*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Κορακίτης, Ρ., 2008. *Σημειώσεις Γεωδαιτικής Αστρονομίας*. Αθήνα: ΕΜΠ.
- ΚΟΦΙΤΣΑΣ, Ι., 2001. *ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ*. Αθήνα: ΙΩΝ.
- Κωτσόβολος, Κ., 1975. *ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΕΡΓΑ : ΟΔΟΙ*. Αθήνα: Ίδρυμα Ευγενίδου.
- Λάμπρου, Ε. & Πανταζής, Γ., 2010. *Εφαρμοσμένη Γεωδαισία*. Αθήνα: ΖΗΤΗ.
- Λοΐζος, Α., 2011. *Κατασκευαστικά στοιχεία έργων οδοποιίας*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Μαρκάτης, Σ., 1989. *ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Ναλμπάντης, Ι., 2007. *Προστασία και Διαχείριση Υδατικών Πόρων*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Πάλλας, Α., 1961. *Μεγάλη Άλγεβρα*. Αθήνα: Παπαζήσης.
- Πάλλας, Α., 1963. *Μεγάλη Γεωμετρία*. Αθήνα: Παπαζήση.
- Παπαγεωργίου, Γ. & Τσίτουρας, Χ., 2008. *Αριθμητική Ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών.
- Πατιάς, Π., 1991. *ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑ*. Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΗ.
- Πολυράκης, Ι., 2008. *Στοιχειώδης ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Πραστάκος, Π., 2006. *Διοικητική Επιστήμη*. Αθήνα: ΑΘ.ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ.
- Σοφιανός, Γ. & Τυχόπουλος, Ε., 2005. *Αριθμητική Ανάλυση*. Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε..
- Τσιρίγκας, Π., 2011. *ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΟΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Φωτίου, Α., 2009. *ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ*. Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΗ.
- Φωτίου, Α. & Πικριδάς, Χ., 2006. *GPS ΚΑΙ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ*. Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΗ.
- Ψαριανός, Β., 2001. *ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ Ι ΤΕΥΧΟΣ 1ο: Υπολογισμοί*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Ψαριανός, Β., 2001. *ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ Ι : Οδηγίες Μελετών Αγροτικών και Δασικών Δρόμων*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Ψαριανός, Β., 2001. ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΟΔΟΠΟΙΙΑΣ I ΤΕΥΧΟΣ 1ο. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Kraus, K., 2010. ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑ. Αθήνα: ΤΕΕ.

Lipschutz, M., 1982. Διαφορική Γεωμετρία. ΑΘΗΝΑ: ΕΣΠΙ.

Scheid, F., 1976. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ. Αθήνα: ΕΣΠΙ.

Ξενόγλωσσες

Awange, J., Grafarend, E., Palancz, B. & Zaletnyik, P., 2010. *Algebraic Geodesy and Geoinformatics*. New York: Springer.

Bronson, R. & Naadimuthu, G., 2010. *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Gray, A., 1998. *MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*. New York: CRC Press.

Hewes, L. & Oblesby, C., 1954. *HIGHWAY ENGINEERING*. New York: Wiley.

Jha, M., Karri, G. & Kuhn, W., November 2010. *A New 3-Dimensional Highway Design Methodology for Sight Distance Measurement*. Washington DC, TRB.

Karri, K., Maji, A. & Jha, M., January 2012. *Optimizing geometric elements of a 3-dimensional alignment in a single stage highway design process*. Washington, TRB.

Kim, D. & Lovell, D., January 2011. *A Procedure for 3-D Sight Distance Evaluation using Thin Plate Splines*. Washington DC, TRB.

Kuhn, K., 2012. *3D Methodology for the design process of safe rural highways*. Washington DC, TRB.

Kuhn, W. & Jha, M., January 2012. *Methodology for checking shortcomings in the three - dimensional alignment*. Washington DC, TRB.

Petersen, P., 2006. *Classical Differential Geometry*. Los Angeles: UCLA.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.1 : Αλλαγή παραμέτρου συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση :

$$t = w(\omega), \quad \omega \in J, \text{ όπου } J \text{ διάστημα του } \mathfrak{R}$$

Αν η w είναι κλάσης 1 με $w'(\omega) \neq 0$ για κάθε ω , λέμε ότι η w είναι επιτρεπτή αλλαγή της παραμέτρου t και ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις \vec{r} και $\vec{\varphi}$, όπου

$$\vec{\varphi}(\omega) = \vec{r}(w(\omega)), \quad \omega \in J$$

είναι ισοδύναμες. Εύκολα αποδεικνύεται ότι :

Ισοδύναμες διανυσματικές συναρτήσεις είναι παραμετρικές παραστάσεις του ίδιου συνόλου.

Αν $w'(\omega) > 0$ για κάθε ω , η συνάρτηση $t = w(\omega)$ είναι γνησίως αύξουσα και η $\vec{\varphi}(\omega)$ είναι παραμετρική παράσταση του ίδιου συνόλου και με την ίδια φορά. Αν $w'(\omega) < 0$ για κάθε ω , η συνάρτηση $t = w(\omega)$ είναι γνησίως αύξουσα και η $\vec{\varphi}(\omega)$ είναι παραμετρική παράσταση του ίδιου συνόλου και με αντίθετη φορά.

Αν η $t = w(\omega)$ είναι επιτρεπτή αλλαγή της παραμέτρου t , η αντίστροφη συνάρτηση

$$\omega = w^{-1}(t)$$

είναι επίσης επιτρεπτή αλλαγή της παραμέτρου ω , και έχουμε :

$$\vec{r}(t) = \vec{\varphi}(w^{-1}(t))$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι :

Η συνάρτηση \vec{r} είναι κανονική αν και μόνο αν η $\vec{\varphi}$ είναι κανονική.

Η κανονική καμπύλη ορίζεται ως μία κλάση ισοδυναμίας στο σύνολο των κανονικών παραμετρικών παραστάσεων

Γενικά, μία ιδιότητα μίας παραμετρικής παράστασης δεν είναι υποχρεωτικά και ιδιότητα της καμπύλης. Όμως, κάθε ιδιότητα της καμπύλης, πρέπει να είναι κοινή για όλες τις παραμετρικές παραστάσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση, ή όπως συνηθίζεται να λέγεται, πρέπει να είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.2 : Μέτρο εφαπτόμενου διανύσματος καμπύλης ως προς τη φυσική παράμετρο

Έχουμε :

$$\vec{\varphi}(s) = \vec{r}(t(s)) \quad (1)$$

Θεωρώντας ότι η διανυσματική συνάρτηση της καμπύλης είναι παραγωγίσιμη, η σχέση (1) γίνεται :

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}'(s) &= \vec{r}'(t) \cdot t'(s) \\ \vec{\varphi}'(s) &= \vec{r}'(t) \cdot t'(s) \end{aligned} \quad (2)$$

Τελικά, η σχέση (2), μέσω της σχέσης (2.2), γίνεται :

$$\vec{\varphi}'(s) = \vec{r}'(t) \cdot \frac{1}{|\vec{r}'(t)|}$$

ή

$$\vec{\varphi}'(s) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = 1$$

Επομένως, το $\vec{\varphi}'(s)$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C στο $\vec{\varphi}(s)$. Το διάνυσμα αυτό, συμβολίζεται με $\vec{t}(s)$. Δηλαδή :

$$\vec{t}(s) = \vec{\varphi}'(s)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.3 : Παραγωγή του μέτρου διανυσματικής συνάρτησης

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t)|' &= \left(\sqrt{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)}} (\vec{r}'(t) \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \vec{r}'(t)) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)}} (2 \vec{r}'(t) \vec{r}(t)) = \frac{\vec{r}'(t) \vec{r}(t)}{\sqrt{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)}} = \frac{\vec{r}'(t) \vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|} \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$|\vec{r}(t)|' = \frac{\vec{r}'(t) \vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.4 : Αριθμητική – Διανυσματική προβολή διανύσματος σε άλλο

Έστω \vec{b} ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Η αριθμητική προβολή του διανύσματος \vec{a} στο διάνυσμα \vec{b} , που συμβολίζεται με $P_b(a)$, είναι ο αριθμός :

$$P_b(a) \equiv \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Το διάνυσμα $\vec{P}_b(a)$ u_b , όπου \vec{u}_b είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση και τη φορά του \vec{b} , λέγεται διανυσματική προβολή του \vec{a} στο \vec{b} και συμβολίζεται με $\vec{P}_b(a)$. Έτσι, ισχύει ότι $\vec{P}_b(a) = P_b(a) \vec{u}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$. Δηλαδή :

$$\vec{P}_b(a) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

Αποδεικνύεται ότι το διάνυσμα $\vec{P}_b(a)$, είναι ανεξάρτητο της φοράς \vec{b} . Αντίθετα, ο αριθμός $P_b(a)$, αλλάζει πρόσημο, όταν αλλάξει η φορά του \vec{b} .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.5 : Ορισμός και πίνακας της τετραγωνικής μορφής

Ορίζεται ως τετραγωνική μορφή με μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n κάθε ομογενές πολυώνυμο δευτέρου βαθμού αυτών των μεταβλητών.

Για παράδειγμα, το πολυώνυμο :

$$P(x, y) = a x^2 + b xy + c y^2$$

είναι ένα ομογενές πολυώνυμο δευτέρου βαθμού των μεταβλητών x, y , αφού ο βαθμός του γινομένου $x^1 y^1$ είναι ίσος με το άθροισμα των εκθετών των x, y σε αυτό, δηλαδή $1+1=2$. Επομένως, η έκφραση αυτή είναι μια τετραγωνική μορφή.

Έστω η τετραγωνική μορφή :

$$P(x, y) = a x^2 + b xy + c y^2$$

Ο πίνακας :

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

ονομάζεται πίνακας της τετραγωνικής μορφής. Έχει διαγώνια στοιχεία τους συντελεστές των x^2, y^2 και στοιχεία $a_{12} = a_{21}$ ίσα με το μισό του συντελεστή του γινομένου xy στη τετραγωνική μορφή. Όπως φαίνεται, ο πίνακας A είναι συμμετρικός πίνακας καθώς $A^T = A$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.6 : Αντίστροφες ρίζες εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουν οι συναρτήσεις :

$$f_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \text{ και } f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 ,$$

ρίζες αντίστροφες, είναι :

$$\frac{a_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{a_2}$$

Απόδειξη :

Το πρόβλημα τίθεται ως εξής :

Να κατασκευαστεί δευτεροβάθμια εξίσωση $d x^2 + e x + g = 0$, της οποίας οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι αντίστροφες των ριζών ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης :

$$a x^2 + b x + c$$

Ισχύει ότι :

$$x_1 = \frac{1}{\rho_1} \text{ και } x_2 = \frac{1}{\rho_2}$$

Άρα :

$$S = x_1 + x_2 = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$$

Σύμφωνα με τους τύπους *Viète* οι παραπάνω σχέσεις γίνονται :

$$S = -\frac{b}{c}$$

$$P = \frac{a}{c}$$

Επίσης, από τους τύπους *Viète*, έχουμε :

$$\begin{aligned}x^2 - Sx + P &= 0 \\x^2 - \left(-\frac{b}{c}\right)x + \frac{a}{c} &= 0 \\cx^2 + bx + a &= 0\end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύει :

$$d = c$$

$$e = b$$

$$f = a$$

Συνεπώς, διαμορφώνεται η παρακάτω αναλογία :

$$\frac{\alpha}{f} = \frac{b}{e} = \frac{c}{d}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.7 : Διακρίνουσα δευτεροβάθμιας εξίσωσης κύριων καμπυλοτήτων

$$(F N - G M)\lambda^2 + (N E - G L)\lambda + (M E - F L) = 0$$

$$\Delta = (N E - G L)^2 - 4 (F N - G M) (M E - F L)$$

Η διακρίνουσα Δ μπορεί να δειχθεί ότι είναι ταυτοτικά ίση με την έκφραση :

$$4 \left(\frac{E G - F^2}{E^2} \right) (E M - F L)^2 + \left[E N - G L - \frac{2 F}{E} (E M - F L) \right]^2$$

Η ποσότητα $(E G - F^2)$ είναι η διακρίνουσα της πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής I που ορίζεται ως εξής :

$$H = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \geq 0$$

Όμως, επειδή τα διανύσματα $\{ \vec{r}_1, \vec{r}_2 \}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αποτελούν την οριζοντιογραφική βάση του τοπικού συστήματος αναφοράς), τελικά ισχύει :

$$H > 0$$

Συνεπώς, η διακρίνουσα Δ είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν ως άθροισμα μη αρνητικών παραστάσεων. Η διακρίνουσα Δ ισούται με μηδέν αν και μόνο αν :

$$(E M - F L = 0) \text{ και } \left[E N - G L - \frac{2 F}{E} (E M - F L) = 0 \right]$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν :

$$(E M - F L = 0) \text{ και } (E N - G L = 0)$$

ή τελικά :

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.8 : Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

Αν οι $f(x, y)$ και $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ είναι συνεχείς σε ένα ορθογώνιο $J : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$,

τότε :

υπάρχει ένα διάστημα γύρω από το x_0 στο οποίο το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ έχει μοναδική λύση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.9 : Πίνακας στροφής στον χώρο

Ως ανεξάρτητες παράμετροι χρησιμοποιούνται οι τρεις στροφές ω, φ, κ γύρω από τους τρεις βασικούς άξονες συντεταγμένων X, Y, Z . Αρχικά, το υποκείμενο σύστημα αναφοράς xyz , ταυτίζεται με το υπερκείμενο σύστημα XYZ . Στη συνέχεια, αυτό στρέφεται σε τρία βήματα. Οι τρεις στροφές, εφαρμόζονται με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, αν κανείς παρατηρεί τον άξονα από την κορυφή του, προς την αρχή του. Στη συνέχεια, φαίνεται ο τελικός πίνακας στροφής R , αλλά και οι πίνακες στροφής $R_\omega, R_\varphi, R_\kappa$ για την κάθε γωνία ξεχωριστά, αντίστοιχα.

Πίνακας R_ω : Αριστερόστροφη στροφή, γύρω από τον άξονα των X

$$R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ 0 & -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}$$

Πίνακας R_φ : Αριστερόστροφη στροφή, γύρω από τον άξονα των Y

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Πίνακας R_κ : Αριστερόστροφη στροφή, γύρω από τον άξονα των Z

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos(\kappa) & \sin(\kappa) & 0 \\ -\sin(\kappa) & \cos(\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικός πίνακας στροφής R , στον οποίο υιοθετείται η διαδοχή ω, φ, κ :

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(\kappa) & \cos(\omega)\sin(\kappa) + \sin(\omega)\sin(\varphi)\cos(\kappa) & \sin(\omega)\sin(\kappa) - \cos(\omega)\sin(\varphi)\cos(\kappa) \\ -\cos(\varphi)\sin(\kappa) & \cos(\omega)\cos(\kappa) - \sin(\omega)\sin(\varphi)\sin(\kappa) & \sin(\omega)\cos(\kappa) + \cos(\omega)\sin(\varphi)\sin(\kappa) \\ \sin(\varphi) & -\sin(\omega)\cos(\varphi) & \cos(\omega)\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.10 : Νόρμα του *Frobenius* (*Frobenius Norm*)

Η νόρμα του *Frobenius*, ενός πίνακα A διαστάσεων $m \times n$, ισούται με τη τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των στοιχείων του. Δηλαδή :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2}$$

Αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός, τότε η νόρμα του *Frobenius*, ισούται με τη τετραγωνική ρίζα του ίχνους (*trace*) του πίνακα $B: B = A A^T$. Δηλαδή :

Η νόρμα του *Frobenius*, ενός τετραγωνικού πίνακα A , ισούται με :

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A A^H)}$$

όπου A^T ο ανάστροφος πίνακας του A .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.11 : Κεντροσυμμετρικός πίνακας (Centering Matrix)

Κεντροσυμμετρικός πίνακας C , ονομάζεται ο συμμετρικός πίνακας (άρα και τετραγωνικός), ο οποίος όταν πολλαπλασιαστεί με ένα διάνυσμα, έχει το ίδιο αποτέλεσμα που θα είχε αν αφαιρούσαμε τον μέσο όρο των στοιχείων του διανύσματος από κάθε στοιχείο του διανύσματος. Επίσης, ο κεντρικός πίνακας C , έχει την ιδιότητα, όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, να έχει ως αποτέλεσμα τον εαυτό του. Δηλαδή, $C \cdot C = C$.

Ο κεντρικός πίνακας C_n , εκφράζεται ως ένας πίνακας διαστάσεων $n \times n$:

$$C_n = I_n - \frac{1}{n}O$$

όπου I_n είναι ο μοναδιαίος (ή ταυτοτικός) πίνακας και O είναι ένας πίνακας $n \times n$ στον οποίο όλα τα στοιχεία του είναι η μονάδα.

Για παράδειγμα, έχουμε :

$$C_1 = [0]$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β : ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.1 : Το ελληνικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς 1987 (ΕΓΣΑ '87)

Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς 1987 (ΕΓΣΑ '87) είναι σήμερα το επίσημο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς της Ελλάδας.

Ορίστηκε, θεωρώντας ως επιφάνεια αναφοράς το ελλειψοειδές *GRS 80* (αυτό που χρησιμοποιείται και στο παγκόσμιο σύστημα αναφοράς) με μία μετάθεση ως προς το κέντρο της γης προκειμένου να προσαρμοστεί κατά τον καλύτερο τρόπο στο γεωειδές του του ελλαδικού χώρου και να ελαχιστοποιηθούν οι τιμές της αποχής του γεωειδούς *N* στην ηπειρωτική Ελλάδα.

Εφαρμόστηκε με την Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή σε μία ζώνη. Η εγκάρσια μερκατορική προβολή είναι μία σύμμορφη κυλινδρική προβολή, διατηρεί δηλαδή τη μορφή των σχημάτων των τμημάτων της φυσικής γήινης επιφάνειας (ΦΓΕ) που προβάλλονται πάνω στην αναπτυσσόμενη επιφάνεια του κυλίνδρου. Ο άξονας του κυλίνδρου είναι κάθετος στον άξονα των πόλων, ενώ ως γραμμή επαφής του κυλίνδρου και της γης ορίζεται ένας κεντρικός μεσημβρινός. Ως κεντρικός μεσημβρινός ορίζεται αυτός που διέρχεται από γεωδαιτικό μήκος $\lambda = 24^\circ$. Επίσης, με τη χρήση αυτής της προβολής παραμορφώνονται οι οριζόντιες γωνίες και οι αποστάσεις.

Η παραμόρφωση των οριζόντιων γωνιών που μετρώνται, είναι πολύ μικρή όταν αυτές μεταφέρονται στην προβολή. Είναι γνωστή ως αναγωγή εφαπτομένης σε χορδή, ενώ μπορεί να υπολογιστεί σε κάθε διεύθυνση που μετράται. Βέβαια, η αναγωγή αυτή, έχει νόημα για σκοπεύσεις σε μεγάλες αποστάσεις κατά τη διεύθυνση του άξονα *y* (μερικά *km*). Για τον λόγο αυτό, δεν εφαρμόζεται σε συνήθεις εργασίες, με σκοπεύσεις της τάξης του *1km-2km*.

Όσον αφορά τις αποστάσεις, κάθε απόσταση *S* που υπολογίζεται, προκειμένου να μεταφερθεί στην προβολή, πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον συντελεστή κλίμακας *K*.

Ο συντελεστής κλίμακας *K* μεταβάλλεται όσο αυξάνεται η απόσταση από τον κεντρικό. Για να ελαχιστοποιηθεί η παραμόρφωση των αποστάσεων στα άκρα της ζώνης προβολής, ο κύλινδρος συρρικνώθηκε έτσι ώστε να τέμνει τον κεντρικό μεσημβρινό και ορίστηκε συντελεστής κλίμακας στον κεντρικό μεσημβρινό ίσος με $K_0 = 0.9996$. Η μέγιστη τιμή του συντελεστή κλίμακας *K* στον Ελλαδικό χώρο είναι περίπου 1.00150 που αντιστοιχεί σε παραμόρφωση 1500 ppm ή 1.50 m/km, ενώ υπάρχουν περιοχές της χώρας όπου το *K* είναι ίσο με τη μονάδα και δεν υπάρχουν παραμορφώσεις.

Οι επίπεδες καρτεσιανές συντεταγμένες *x, y* της προβολής ορίστηκαν αυθαίρετα. Ως αφετηρία των τετμημένων *x* ορίστηκε η τιμή 500000 m στον κεντρικό μεσημβρινό, ώστε να μην υπάρχουν αρνητικές τιμές αριστερά του μεσημβρινού σε κάποια περιοχή της Ελλάδας, ενώ ως αφετηρία των τεταγμένων *y* ορίστηκε $y = 0$ στον Ισημερινό.

Η αντιστοιχία κάθε σημείου στον Ελλαδικό χώρο και των συντεταγμένων του *x, y* στο ΕΓΣΑ '87 είναι μονοσήμαντη, δηλαδή δεν υπάρχει άλλο σημείο με τις ίδιες συντεταγμένες.

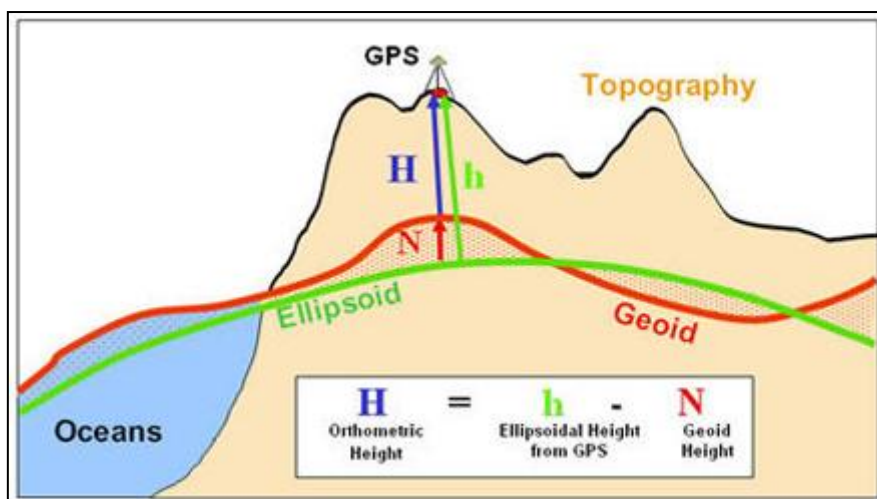
Τέλος, πλεονέκτημα της προβολής σε μία ζώνη του ΕΓΣΑ '87, είναι ότι διευκολύνεται η μετατροπή των συντεταγμένων από το παγκόσμιο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς, χρησιμοποιώντας έναν ενιαίο μετασχηματισμό (Λάμπρου & Πανταζής, 2010).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.2 : Υψομετρικό σύστημα αναφοράς

Το υψόμετρο, η τρίτη διάσταση σε ορισμένα συστήματα συντεταγμένων, είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε κάθε γεωδαιτική εργασία, αφού δίνει πληροφορίες για τη μορφολογία της ΦΓΕ, η οποία είναι καθοριστική για τη θέση, την κατασκευή και τη λειτουργία κάθε τεχνικού έργου. Απαραίτητος είναι ο ορισμός ενός υψομετρικού συστήματος αναφοράς.

Τα δύο βασικά υψόμετρα είναι το ορθομετρικό H και το γεωμετρικό h (εικόνα 2.2.1.). Το πρώτο έχει ως επιφάνεια αναφοράς το γεωειδές. Στους χάρτες, στα κτηματολογικά και τοπογραφικά διαγράμματα, τα αναγραφόμενα υψόμετρα είναι ορθομετρικά.

Η τιμή του ορθομετρικού υψομέτρου της αρχικής υψομετρικής αφετηρίας ενός υψομετρικού συστήματος αναφοράς, εξαρτάται από τον προσδιορισμό της επιφάνειας αναφοράς, δηλαδή τη μέση στάθμη της θάλασσας (μσθ). Ο προσδιορισμός της μσθ είναι αρκετά δύσκολος και γίνεται σε τοπική ή εθνική ή παγκόσμια κλίμακα. Για τον λόγο αυτό, το ορθομετρικό υψόμετρο δεν ορίζεται συνήθως σε ενιαία κλίμακα, αλλά σε τοπικό ή κρατικό επίπεδο.



ΕΙΚΟΝΑ Π.1 : Σχέση μεταξύ του ορθομετρικού υψομέτρου H , του γεωμετρικού υψομέτρου h και της αποχής του γεωειδούς N

Πηγή : http://www.nrcan.gc.ca/sites/www.nrcan.gc.ca/files/earthsciences/images/t5a_1_e_.jpg

Ορθομετρική υψομετρική διαφορά (ΔH_{AB}) μεταξύ δύο σημείων A και B είναι η διαφορά των ορθομετρικών υψομέτρων τους H_B και H_A , δηλαδή :

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A$$

Το γεωμετρικό υψόμετρο ορίζεται μαθηματικά πολύ εύκολα. Όμως, δε δίνει ουσιαστική και άμεσα αντιληπτή πληροφορία για την υψομετρική θέση της περιοχής. Η τιμή του εξαρτάται από το ελλειψοειδές στο οποίο αναφέρεται.

Γεωμετρική υψομετρική διαφορά (Δh_{AB}) μεταξύ δύο σημείων A και B είναι η διαφορά των γεωμετρικών υψομέτρων τους h_B και h_A , δηλαδή :

$$\Delta h_{AB} = h_B - h_A$$

Υψόμετρο N του γεωειδούς ή αποχή του γεωειδούς, ορίζεται η απόσταση που αντιστοιχεί στη διαφορά της κατακόρυφης θέσης γεωειδούς – ελλειψοειδούς σε κάθε σημείο της ΦΓΕ. Μετράται πάνω στην κάθετο στο ελλειψοειδές αναφοράς και έχει φορά αντίθετη προς το διάνυσμα της κανονικής βαρύτητας. Οι τιμές που μπορεί να πάρει σε όλη τη γη είναι από -100 m στον Ινδικό ωκεανό έως $+80\text{ m}$ στον βόρειο Ατλαντικό ωκεανό με τυπική απόκλιση $\pm 30\text{ m}$.

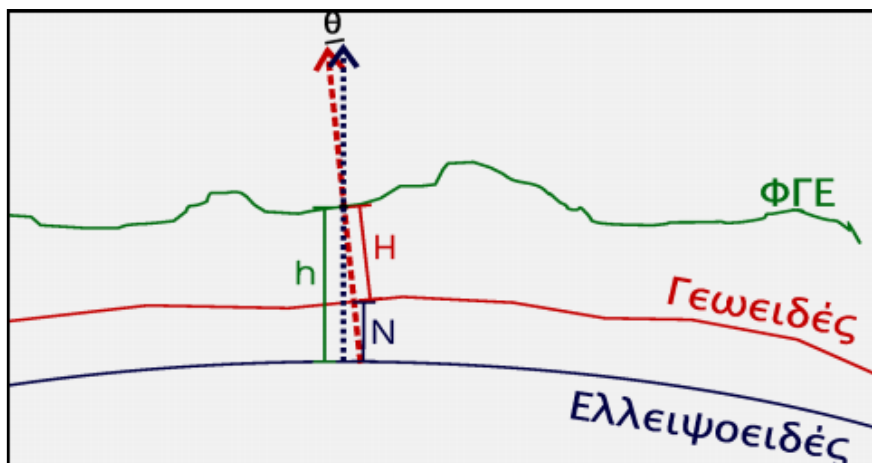
Η σχέση που συνδέει τα τρία αυτά υψόμετρα είναι :

$$h = H + N$$

Επίσης, ισχύει :

$$\Delta h_{AB} = \Delta H_{AB} + \Delta N_{AB}$$

Απόκλιση της κατακορύφου ε (Εικόνα 2.2.2.) ορίζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της κατακορύφου και της καθέτου στο ελλειψοειδές αναφοράς που περνούν από ένα σημείο της ΦΓΕ. Οι συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου κατά μεσημβρινό και παράλληλο είναι αντίστοιχα οι ξ και η (Εικόνα 2.2.3.).

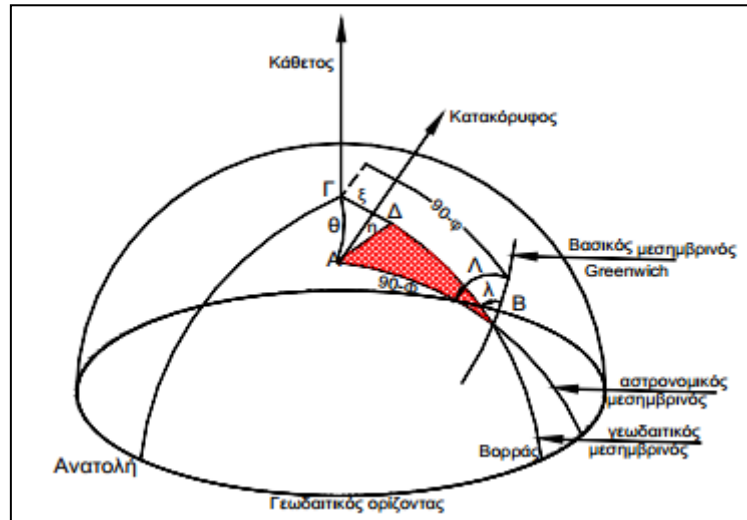


ΕΙΚΟΝΑ Π.2 : Απόκλιση της κατακορύφου θ

Πηγή : (Κορακίτης, 2008)

Το υψόμετρο N του γεωειδούς μπορεί να προσδιοριστεί με μικρή αβεβαιότητα :

- ❖ Με αστρογεωδαιτική χωροστάθμιση, αφού υπολογιστούν οι συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου ξ, η σε κάθε σημείο, υπολογίζεται η μεταβολή ΔN από σημείο σε σημείο.
- ❖ Με βαρυτομετρικές μεθόδους, με μετρήσεις των ανωμαλιών της βαρύτητας
- ❖ Με συνδυασμό των παραπάνω μεθόδων.



ΕΙΚΟΝΑ Π.3 : Συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου ξ, η

Πηγή : (Κορακίτης, 2008)

Έτσι, είναι δυνατή η δημιουργία χαρτών ή μοντέλων του γεωειδούς. Χρησιμοποιώντας τέτοια στοιχεία έχουν δημιουργηθεί μοντέλα του γεωειδούς για όλη τη γη – παγκόσμια γεωδυναμικά μοντέλα - (*Earth Gravitational Model EGM*) αξιοποιώντας τα τελευταία χρόνια και δεδομένα από δορυφορική αλτιμετρία.

Είναι φανερό ότι ο υπολογισμός του υψομέτρου του γεωειδούς N ή της μεταβολής του ΔN σε μία περιοχή της γης αναφέρεται πάντοτε σε συγκεκριμένο ελλειψοειδές. Επίσης, ο χάρτης του γεωειδούς, προκύπτει από μοντελοποίηση (παρεμβολή) μεταξύ των τιμών του N , όπως αυτές υπολογίστηκαν από μετρήσεις σε διακεκριμένα σημεία στον ελλαδικό χώρο (Κορακίτης, 2008) (Λάμπρου & Παναζής, 2010).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.3 : Τρόποι χάραξης σημείων επί της οδού

Χάραξη με χρήση ολοκληρωμένου γεωδαιτικού σταθμού (total station)

Με τη χρήση των ολοκληρωμένων γεωδαιτικών σταθμών, η χάραξη γεωμετρικών συνόλων (γραμμών, επιφανειών) έχει απλουστευθεί και ανάγεται στην πολλαπλή εφαρμογή της ίδιας διαδικασίας χάραξης ενός σημείου με γνωστές συντεταγμένες.

Η χάραξη ενός σημείου εξελίσσεται σε δύο κυρίως στάδια :

- ❖ Χάραξη της διεύθυνσης στην οποία βρίσκεται το σημείο και τη χάραξη της απόστασής του από τη στάση χάραξης.
- ❖ Χάραξη του υψομέτρου

Οι περισσότεροι ολοκληρωμένοι γεωδαιτικοί σταθμοί φέρουν ειδικούς οδηγούς χάραξης με τη βοήθεια των οποίων η χάραξη της διεύθυνσης γίνεται ευκολότερα και ταχύτερα.

Οι οδηγοί είναι δύο φωτεινές πηγές ορατού laser, διαφορετικού χρώματος (κόκκινο – πράσινο), ή η μία πηγή είναι συνεχούς εκπομπής και η άλλη διακοπτόμενης εκπομπής, ενώ βρίσκονται στο εμπρός και πάνω μέρος του τηλεσκοπίου του γεωδαιτικού σταθμού.

Οι οδηγοί αυτοί καθοδηγούν τον στοχοφόρο δεξιά ή αριστερά ώστε να προσεγγίσει εύκολα τη διεύθυνση χάραξης του σημείου. Έτσι, επιταχύνεται η διαδικασία και δεν είναι απαραίτητη η συνεχής επικοινωνία με τον παρατηρητή. Σε πολλές περιπτώσεις, η χάραξη μπορεί να εκτελεστεί από έναν άνθρωπο, χρησιμοποιώντας έναν ρομποτικό σταθμό.

Όταν ο στοχοφόρος – ανακλαστήρας βρεθεί στο σωστό σημείο, δηλαδή πάνω στη διεύθυνση που ορίζει ο σκοπευτικός άξονας του γεωδαιτικού σταθμού, τότε ο στοχοφόρος μπορεί να βλέπει τα υτόχρονα και τις δύο φωτεινές δέσμες. Σε αντίθετη περίπτωση, αν βρίσκεται σε λάθος θέση και βλέπει μόνο μια φωτεινή δέσμη, αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να κινηθεί προς τα δεξιά ή αριστερά, ώστε να έρεθει στο σωστό σημείο.

Ο σταθμός υπολογίζει αυτόματα, κάθε φορά που μετρά το κεκλιμένο μήκος D από τη στάση προς το επιθυμητό σημείο, την οριζόντια απόσταση S . Έτσι, ο στοχοφόρος γνωρίζει αν πρέπει να απομακρυνθεί ή να πλησιάσει τη στάση χάραξης.

Εισάγονται στον γεωδαιτικό σταθμό οι συντεταγμένες των προς χάραξη σημείων καθώς οι συντεταγμένες του σημείου τοποθέτησής του και της στάσης μηδενισμού. Με το λογισμικό χάραξης που διαθέτει ο σταθμός, είναι δυνατός στο πεδίο ο προσδιορισμός των στοιχείων χάραξης (πολική γωνία, πολική απόσταση).

Η εισαγωγή των σημείων, μπορεί να γίνει :

- ❖ Από το πληκτρολόγιο του σταθμού
- ❖ Με τη μεταφορά ενός αρχείου στο οποίο περιέχονται, από τον υπολογιστή στον σταθμό ή από κάποιο άλλο περιφερειακό μέσο, όπως το διαδίκτυο ή ακόμα και το κινητό τηλέφωνο

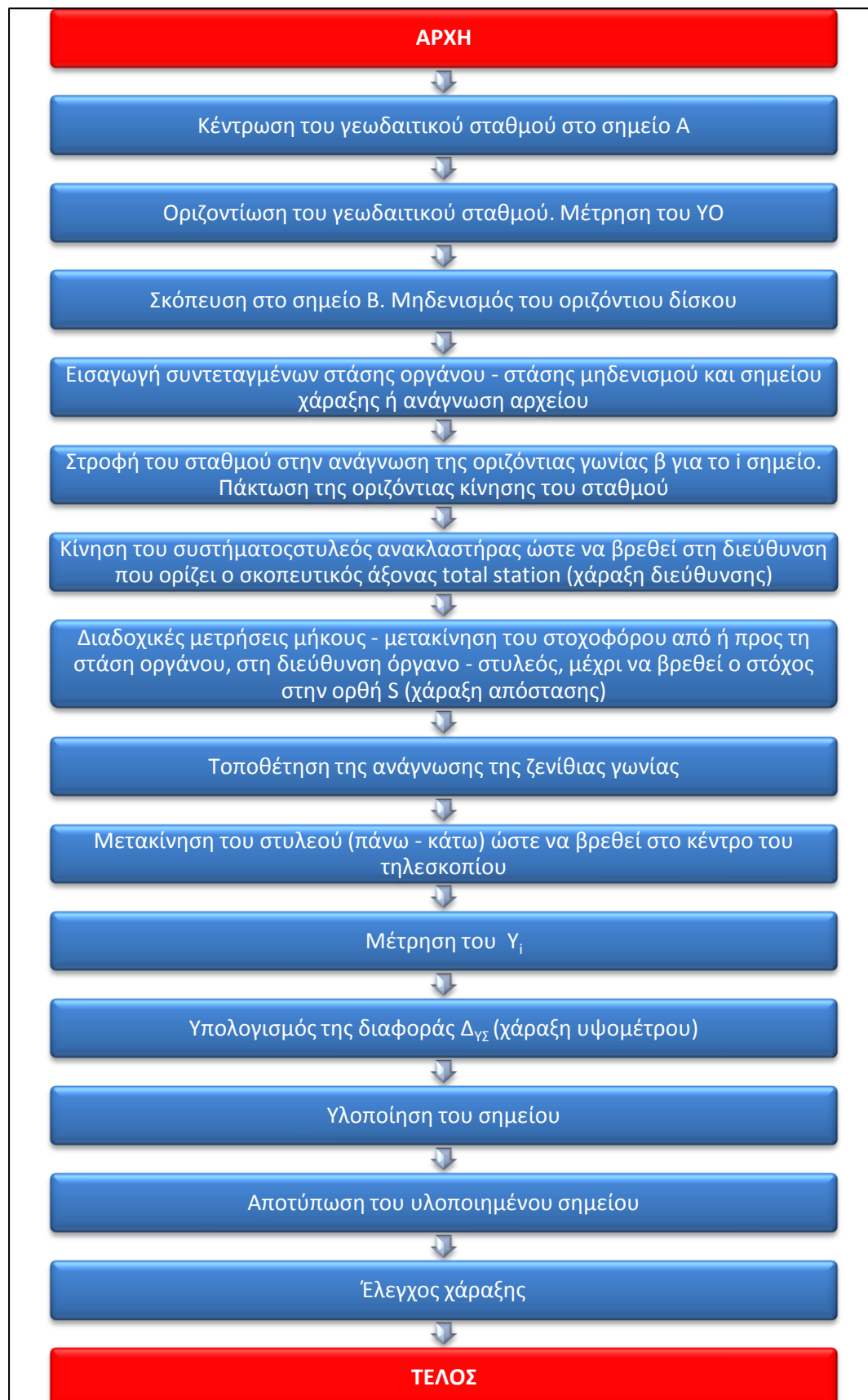
Οι ηλεκτροκινούμενοι γεωδαιτικοί σταθμοί, στρέφονται αυτόματα στη διεύθυνση χάραξης κάθε σημείου i χωρίς την παρέμβαση (σκοπευση) του παρατηρητή αφού, αφού προηγηθεί

βέβαια ο ορισμός της διεύθυνσης αναφοράς. Αν επιπλέον ο γεωδαιτικός σταθμός είναι ρομποτικός, τότε καθοδηγεί τον στοχοφόρο, ώστε να προσεγγίσει το σωστό σημείο.

Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στην εισαγωγή των παραμέτρων στον γεωδαιτικό σταθμό και του σωστού συντελεστή κλίμακας K όταν οι συντεταγμένες των σημείων αναφέρονται στο σύστημα ΕΓΣΑ '87. Αυτό είναι απαραίτητο γιατί οι γεωδαιτικοί σταθμοί φέρουν συνήθως αυτόματα ενσωματωμένη στη μνήμη τους τη τιμή $K = 1$ για τον συντελεστή της κλίμακας παραμόρφωσης. Η διαδικασία της χάραξης ενός σημείου ή μιας διεύθυνσης με χρήση ολοκληρωμένου γεωδαιτικού σταθμού περιγράφεται στο Διάγραμμα Ροής 2 (Λάμπρου & Πανταζής, 2010).

Πρέπει να τονιστεί ότι οι απλές χαράξεις όπως ευθυγραμμίας, κάθετης σε ευθεία ή χάραξη τυχαίας ορθής γωνίας, πραγματοποιούνται αυτόματα από τους σύγχρονους γεωδαιτικούς σταθμούς, χρησιμοποιώντας το κατάλληλο υποπρόγραμμα. Επίσης, οι σκοπεύσεις του στόχου κατά τη χάραξη, μπορούν να γίνονται αυτόματα μέσω της διαδικασίας *ATR*. Έτσι, ελαχιστοποιούνται τα τυχαία και συστηματικά σφάλματα και αποφεύγονται τα χονδροειδή σφάλματα του παρατηρητή.

Η μέθοδος *ATR* (*Attenuated Total Reflectance*) ή μέθοδος εξασθενημένης ολικής ανάκλασης, αποτελεί μια τεχνική δειγματοληψίας που χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με υπέρυθρη φασματοσκοπία και επιτρέπει την άμεση εξέταση δειγμάτων δειγμάτων σε στερεή ή υγρή κατάσταση, χωρίς περαιτέρω προετοιμασία.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ Π.1 : Διαδικασία χάραξης σημείου με χρήση γεωδαιτικού σταθμού

Πηγή : (Λάμπρου & Πανταζής, 2010)

Χάραξη με χρήση δεκτών του δορυφορικού συστήματος εντοπισμού

Η διαδικασία της χάραξης σήμερα μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη χρήση δεκτών του δορυφορικού συστήματος εντοπισμού (*GPS*). Στην περίπτωση αυτή, χαράσσεται το επιθυμητό σημείο στον χώρο, οι συντεταγμένες του οποίου υπολογίζονται από το σύστημα σε πραγματικό χρόνο (*Real time*).

Τοποθετείται ο ένας δέκτης σε σημείο γνωστών συντεταγμένων. Εφαρμόζεται η μέθοδος του σχετικού εντοπισμού σε πραγματικό χρόνο.

Εισάγοντας τις συντεταγμένες του προς χάραξη σημείου στο επιθυμητό σύστημα αναφοράς και τοποθετώντας τον δεύτερο δέκτη οπουδήποτε, γίνεται ο εντοπισμός, δηλαδή ο υπολογισμός των συντεταγμένων που βρίσκεται ο δέκτης σε σχέση με τον σταθερό δέκτη, σε πραγματικό χρόνο.

Αμέσως, καθοδηγείται ο χρήστης με τη βοήθεια του χειριστηρίου προς ποιά κατεύθυνση και σε πόση απόσταση πρέπει να μετακινηθεί.

Κινούμενος και σταματώντας σε επόμενο σημείο, επαναπροσδιορίζεται η θέση του και υπολογίζεται εκ νέου η διαφορά των συντεταγμένων από το επιθυμητό σημείο. Έτσι, με διαδοχικές επαναλήψεις της διαδικασίας χαράσσεται το σημείο.

Ο χρόνος που απαιτείται για να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες των σημείων από τα οποία περνά ο δέκτης κυμαίνεται από μερικά δευτερόλεπτα έως λίγα λεπτά. Εξαρτάται από τη μέθοδο που χρησιμοποιείται, τον γεωμετρικό σχηματισμό και τον αριθμό των δορυφόρων από τους οποίους λαμβάνει σήμα ο δέκτης, την απόσταση από τον σταθερό δέκτη και την απαιτούμενη αβεβαιότητα της χάραξης.

Οι δέκτες του δορυφορικού συστήματος εντοπισμού χρησιμοποιούνται συνήθως σε χαράξεις οδών ή άλλων έργων με μικρές απαιτήσεις στην αβεβαιότητα χάραξης, της τάξης των μερικών *cm*.

Η υψομετρική χάραξη με τη χρήση δεκτών του δορυφορικού συστήματος εντοπισμού απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή. Η μετατροπή των γεωμετρικών υψομετρικών διαφορών που υπολογίζονται, σε ορθομετρικές, μπορεί να γίνει αν είναι γνωστή η τιμή της μεταβολής του υψομέτρου του γεωειδούς για την περιοχή (χάρτης γεωειδούς). Συνήθως, η μετατροπή αυτή γίνεται χρησιμοποιώντας κάποιο παγκόσμιο μοντέλο γεωειδούς, που είναι ενσωματωμένο στο λογισμικό των δεκτών. Η διαδικασία αυτή, εμπεριέχει αβεβαιότητες αρκετών δεκάδων εκατοστών.

Αν η χάραξη γίνεται σε μικρές αποστάσεις, της τάξης του 1 *km*, τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι $\Delta N = 0$, οπότε $\Delta h = \Delta H$, με αβεβαιότητα λόγων *mm*.

Γενικά, δε συνίσταται αυτή η μέθοδος για την ακριβή χάραξη υψομέτρων ή υψομετρικών διαφορών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ : ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ *MATHEMATICA*

Το *Mathematica* είναι ένα υπολογιστικό λογισμικό πρόγραμμα που χρησιμοποιείται σε διάφορα επιστημονικά πεδία, όπως στα μαθηματικά, στη φυσική, στη μηχανική και στην επιστήμη των υπολογιστών, ενώ η υλοποίησή του, στηρίζεται στα συμβολικά μαθηματικά. Δηλαδή, το *Mathematica*, είναι ένα πακέτο συμβολικής άλγεβρας, με το οποίο μπορεί κάποιος να κάνει αναλυτικούς υπολογισμούς παραγώγων, ολοκληρωμάτων, αντιστροφές πινάκων με μη αριθμητικά στοιχεία (Παπαγεωργίου & Τσίτουρας, 2008). Η ιδέα του *Mathematica*, οφείλεται στον *Stephen Wolfram*, η πρώτη έκδοση του οποίου, έγινε γνωστή στο κοινό, το 1988. Το *Mathematica* βελτιώνεται συνεχώς με νέες εκδόσεις του λογισμικού, τη διαχείριση της οποίας έχει η *Wolfram Research*.

Ο λόγος που προτιμήθηκε το *Mathematica* ήταν η μεγάλη παράδοση που έχει στον χώρο της Διαφορικής Γεωμετρίας. Ειδικότερα, στο βιβλίο "*MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*" του *Alfred Gray*, έχουν κατασκευαστεί προγράμματα υπολογισμού σχεδόν όλων των μεγεθών που μπορεί να συναντήσει κανείς στον κλάδο της Διαφορικής Γεωμετρίας και όχι μόνο. Η ιστοσελίδα μέσω της οποίας μπορούν να βρεθούν αυτά τα προγράμματα σε ηλεκτρονική μορφή, ώστε στη συνέχεια να φορτωθούν ως βιβλιοθήκες στο *MATHEMATICA*, είναι η <http://www.maths.manchester.ac.uk/~kd/mmaprogs/>. Συγκεκριμένα, από την πληθώρα των βιβλιοθηκών που συναντώνται, αυτές που χρειάστηκαν ήταν η *CSPROGMS.m*, η *CURVES.m* και η *PLTPROGS.m*. Η βιβλιοθήκη *CSPROGMS.m*, έχει ουσιαστικά ενσωματωμένες όλες τις συναρτήσεις που υπολογίζουν μεγέθη από τον χώρο της Διαφορικής Γεωμετρίας, από την καμπυλότητα και τη στρέψη, μέχρι την εύρεση των γεωδαισιακών καμπυλών και ασυμπτωτικών γραμμών σε μία επιφάνεια. Η βιβλιοθήκη *CURVES.m* εμπεριέχει τον μαθηματικό ορισμό πληθώρας καμπυλών από την κλωθοειδή του επιπέδου μέχρι την καμπύλη του *Bessel* στον χώρο. Από την άλλη, η βιβλιοθήκη *PLTPROGS.m*, είναι εξοπλισμένη με όλες εκείνες τις εντολές που εξασφαλίζουν μία άριστη, εποπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων ώστε να ελέγχεται κάθε φορά η ορθότητά τους. Το *Mathematica*, παρέχει ιδιαίτερα πολλές δυνατότητες για αναπαράσταση γραφικών.

Πέραν των σπουδαίων δυνατοτήτων που έχει το *MATHEMATICA* όσον αφορά τη Διαφορική Γεωμετρία, εξίσου σημαντικές δυνατότητες έχει και ως προς την Αριθμητική Ανάλυση. Λόγω της πολυπλοκότητας πολλών σχέσεων-εξισώσεων, αλλά και της μορφής των ίδιων των καμπυλών, ο μόνος τρόπος για να υπολογιστούν διάφορα μεγέθη (όπως το μήκος μίας καμπύλης) είναι αριθμητικά. Βέβαια, η μεγαλύτερη συμβολή που είχαν οι δυνατότητες του *Mathematica* στην εργασία (σε σχέση με την Αριθμητική Ανάλυση), ήταν το γεγονός ότι το πρόγραμμα, έχει ενσωματωμένες τις καμπύλες παρεμβολής *Bezier* και *B – Spline*. Μάλιστα, δίνεται η δυνατότητα ορισμού των *control points*, της τάξης της καμπύλης, αλλά και του *knot sequence* από τον χρήστη.

Τελικά, οι δυνατότητες που έχει το *Mathematica* ως γλώσσα προγραμματισμού μαζί με εκείνες της Διαφορικής Γεωμετρίας, της Αριθμητικής Ανάλυσης, αλλά και των μεγάλων δυνατοτήτων που έχει ως προς τις γραφικές αναπαραστάσεις, ήταν εκείνες που έκαναν εφικτή την προσπάθεια κατάρτισης ενιαίου προγράμματος υπολογισμού των στοιχείων χάραξης. Με άλλα λόγια, με το πάτημα ενός κουμπιού (αφού πρώτα έχουν καταχωρηθεί τα απαραίτητα δεδομένα εισόδου), το *Mathematica* υπολογίζει τις τρισδιάστατες συντεταγμένες που πρόκειται να χαραχθούν στο ύπαιθρο, του άξονα της οδού, της δεξιάς οριογραμμής, της αριστερής οριογραμμής, αλλά και οποιασδήποτε άλλης (παράλληλης ή μη) γραμμής ανάμεσά τους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΩΝ ΚΟΡΥΦΩΝ ΤΗΣ (ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ) ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ – ΘΕΜΑΤΟΣ ΟΔΟΠΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΑΤΜ

Οι κορυφές της (τρισεδιάστατης) πολυγωνικής που εισήχθησαν στο πρόγραμμα κατά την περίπτωση μελέτης, είναι εκείνες που προέκυψαν από τη μελέτη του μαθήματος – θέματος και φαίνονται παρακάτω. Οι τιμές των συντεταγμένων, λαμβάνονται από το λογισμικό *ΟΔΟΣ*. Συγκεκριμένα, οι διαστάσεις του πίνακα, είναι 72×3 :

`Dimensions [DATA3D]`

`{72, 3}`

`DATA3D // MatrixForm`

ΠΙΝΑΚΑΣ 3 : Συντεταγμένες της (τρισεδιάστατης) πολυγωνικής καμπύλης

448 747.	4.51934×10^6	736.083
448 781.	4.51937×10^6	734.981
448 815.	4.5194×10^6	734.059
448 850.	4.51946×10^6	735.878
448 852.	4.5195×10^6	733.429
448 902.	4.51961×10^6	746.028
448 910.	4.51985×10^6	714.494
449 035.	4.51987×10^6	709.096
448 972.	4.51997×10^6	705.313
448 938.	4.52011×10^6	700.139
448 983.	4.52024×10^6	697.578
448 992.	4.52033×10^6	692.435
449 028.	4.5204×10^6	690.858
449 102.	4.5204×10^6	690.707
449 112.	4.52053×10^6	685.533
448 971.	4.52064×10^6	665.192
449 225.	4.52077×10^6	678.022
449 124.	4.52093×10^6	630.445
449 274.	4.52091×10^6	664.596
449 389.	4.521×10^6	644.888
449 418.	4.52113×10^6	642.744
449 474.	4.52122×10^6	636.997
449 473.	4.52131×10^6	644.
449 538.	4.52127×10^6	632.132
449 615.	4.52125×10^6	621.594
449 666.	4.52128×10^6	624.51
449 747.	4.52123×10^6	609.316
449 819.	4.52144×10^6	620.
449 879.	4.52145×10^6	598.995
449 920.	4.52143×10^6	596.688
449 968.	4.52146×10^6	591.314
450 005.	4.5215×10^6	586.604
450 012.	4.52158×10^6	583.374

449 998.	4.52165×10^6	579.424
450 074.	4.52167×10^6	569.328
450 171.	4.52175×10^6	560.805
450 260.	4.52173×10^6	541.411
450 219.	4.52183×10^6	554.877
450 310.	4.52182×10^6	543.74
450 306.	4.52187×10^6	543.172
450 343.	4.52189×10^6	538.264
450 354.	4.52196×10^6	544.
450 422.	4.52193×10^6	521.881
450 397.	4.52203×10^6	530.553
450 505.	4.52206×10^6	518.299
450 582.	4.52198×10^6	495.401
450 536.	4.52213×10^6	515.624
450 595.	4.52215×10^6	511.556
450 639.	4.52215×10^6	510.495
450 646.	4.52219×10^6	502.562
450 498.	4.52225×10^6	536.
450 651.	4.52227×10^6	491.871
450 672.	4.52229×10^6	489.197
450 772.	4.52232×10^6	472.272
450 796.	4.52237×10^6	464.684
450 846.	4.52239×10^6	457.247
450 883.	4.52248×10^6	448.366
450 973.	4.52259×10^6	434.157
451 024.	4.52271×10^6	416.495
450 966.	4.52282×10^6	403.02
450 914.	4.52304×10^6	424.
451 047.	4.52286×10^6	413.038
451 133.	4.52281×10^6	414.439
451 189.	4.52281×10^6	417.387
451 255.	4.52278×10^6	422.84
451 282.	4.5228×10^6	424.808
451 286.	4.52287×10^6	428.158
451 337.	4.52294×10^6	435.747
451 370.	4.52297×10^6	437.773
451 387.	4.5231×10^6	442.588
451 300.	4.52319×10^6	455.264
451 242.	4.52328×10^6	461.59

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε : ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΑΝΑ 50 m

```
AXONAS = AxesCoordinates[DATA3D, 1/10, 1/20, 1/800, 1/1350, 0.10, 0.0001, 1000];
```

```
AXONASBS = BSplineFunction[AXONAS];
```

```
AlignmentCoordinates = XaraksiShmeiwnMeSugkekrimenoBhma[AXONASBS, 0.00001, 50, 0.5]
```

```
AlignmentCoordinates // MatrixForm
```

ΠΙΝΑΚΑΣ 4 : Συντεταγμένες του άξονα της οδού ανά 50 m

448 746.	4.51936×10^6	742.014
448 779.	4.51939×10^6	740.034
448 802.	4.51944×10^6	738.823
448 819.	4.51948×10^6	737.82
448 834.	4.51953×10^6	736.465
448 848.	4.51958×10^6	734.712
448 862.	4.51963×10^6	732.536
448 877.	4.51967×10^6	729.612
448 892.	4.51972×10^6	725.861
448 910.	4.51977×10^6	721.445
448 929.	4.51981×10^6	716.687
448 948.	4.51986×10^6	712.135
448 957.	4.51991×10^6	708.702
448 953.	4.51996×10^6	706.667
448 946.	4.52001×10^6	705.246
448 941.	4.52005×10^6	703.986
448 941.	4.5201×10^6	702.739
448 947.	4.52015×10^6	701.438
448 956.	4.5202×10^6	700.021
448 968.	4.52025×10^6	698.438
448 982.	4.5203×10^6	696.714
449 004.	4.52034×10^6	694.969
449 037.	4.52038×10^6	693.237
449 063.	4.52042×10^6	690.887
449 069.	4.52047×10^6	687.746
449 063.	4.52052×10^6	684.311
449 059.	4.52057×10^6	680.892
449 064.	4.52062×10^6	677.751
449 082.	4.52066×10^6	674.866
449 105.	4.52071×10^6	671.738
449 129.	4.52075×10^6	668.047
449 151.	4.52079×10^6	663.71
449 173.	4.52084×10^6	659.062

449201.	4.52088×10^6	655.903
449242.	4.52091×10^6	655.582
449285.	4.52093×10^6	655.51
449325.	4.52096×10^6	654.278
449359.	4.52099×10^6	651.984
449386.	4.52104×10^6	649.463
449409.	4.52108×10^6	647.324
449428.	4.52113×10^6	645.795
449446.	4.52117×10^6	644.928
449464.	4.52122×10^6	644.487
449494.	4.52126×10^6	642.448
449542.	4.52125×10^6	635.527
449591.	4.52125×10^6	629.142
449640.	4.52125×10^6	624.389
449689.	4.52126×10^6	620.054
449732.	4.52128×10^6	616.769
449766.	4.52132×10^6	614.924
449796.	4.52136×10^6	613.2
449827.	4.52139×10^6	610.353
449866.	4.52142×10^6	604.31
449913.	4.52143×10^6	596.674
449957.	4.52146×10^6	591.238
449986.	4.52149×10^6	587.367
449999.	4.52154×10^6	584.666
450007.	4.52159×10^6	581.931
450027.	4.52164×10^6	577.593
450064.	4.52167×10^6	572.099
450107.	4.52169×10^6	566.388
450151.	4.52171×10^6	560.119
450195.	4.52173×10^6	553.334
450231.	4.52177×10^6	549.105
450259.	4.52181×10^6	548.095
450296.	4.52184×10^6	543.902
450324.	4.52188×10^6	540.996
450353.	4.52192×10^6	538.057
450389.	4.52195×10^6	530.365
450418.	4.52199×10^6	525.743
450458.	4.52202×10^6	519.93
450506.	4.52203×10^6	511.026
450544.	4.52205×10^6	504.946
450557.	4.5221×10^6	507.671
450585.	4.52214×10^6	508.546
450615.	4.52217×10^6	506.395
450594.	4.52222×10^6	510.949
450602.	4.52226×10^6	505.669
450646.	4.52228×10^6	492.754
450692.	4.5223×10^6	481.616
450737.	4.52231×10^6	471.95

450 780.	4.52234×10^6	462.927
450 818.	4.52237×10^6	454.908
450 852.	4.5224×10^6	448.357
450 883.	4.52244×10^6	442.988
450 911.	4.52248×10^6	438.043
450 939.	4.52252×10^6	433.058
450 965.	4.52256×10^6	427.929
450 990.	4.52261×10^6	422.652
451 009.	4.52265×10^6	417.489
451 020.	4.5227×10^6	413.176
451 021.	4.52275×10^6	410.75
451 017.	4.5228×10^6	410.66
451 011.	4.52285×10^6	412.179
451 009.	4.5229×10^6	414.638
451 041.	4.52292×10^6	416.812
451 090.	4.52291×10^6	416.45
451 138.	4.5229×10^6	415.967
451 187.	4.52289×10^6	415.975
451 236.	4.52289×10^6	417.158
451 284.	4.5229×10^6	419.88
451 328.	4.52293×10^6	423.621
451 343.	4.52297×10^6	427.473
451 348.	4.52302×10^6	431.005
451 355.	4.52307×10^6	434.289
451 359.	4.52312×10^6	437.25
451 353.	4.52317×10^6	440.228
451 336.	4.52321×10^6	443.714
451 308.	4.52326×10^6	447.78
451 273.	4.52329×10^6	452.071

**Σημείωση : Τα σημεία του Πίνακα 4, αναφέρονται στα εσωτερικά σημεία των άκρων του άξονα της οδού. Δηλαδή, οι συντεταγμένες της αρχής και του τέλους του άξονα, δεν φαίνονται στον άξονα, αλλά παρόλα αυτά, είναι γνωστές.

`Dimensions[AlignmentCoordinates[[1]]]`

`{110, 3}`

Στη συνέχεια, ακολουθεί η επαλήθευση του Προγράμματος 10.22 :

```
lengthtable = Table[lengthn2[AlignmentCoordinates[[2]][[k]],  
  AlignmentCoordinates[[2]][[k + 1]][AXONASBS],  
  {k, 1, 109}] // MatrixForm
```

ΠΙΝΑΚΑΣ 5 : Απόσταση μεταξύ των προς χάραξη σημείων του άξονα της οδού

49.507
49.5596
49.5129
49.5132
49.6079
49.5602
49.6074
49.5883
49.5624
49.5265
49.5343
49.545
49.5486
49.535
49.514
49.5291
49.5063
49.5092
49.5627
49.5497
49.5291
49.5272
49.5445
49.5243
49.5664
49.5235
49.5251
49.504
49.5913
49.5276
49.5351
49.5144
49.547
49.5319
49.5415
49.5617
49.5226
49.5518
49.5372
49.5125
49.5047
49.5171
49.5103
49.5012
49.5093
49.5106
49.5064

49.5295
49.5711
49.5448
49.5285
49.5147
49.5275
49.5258
49.5035
49.504
49.5314
49.5043
49.5002
49.5056
49.5427
49.5228
49.5291
49.5258
49.5117
49.5261
49.5015
49.5107
49.5308
49.5372
49.5256
49.5257
49.5302
49.5272
49.5149
49.5022
49.5002
49.5086
49.5163
49.5068
49.5205
49.5081
49.5056
49.5015
49.5099
49.5407
49.5151
49.509
49.5134
49.5483
49.5346
49.5424
49.5083
49.5373
49.5273
49.557

49.5588
49.5336
49.5155
49.5245
49.5271
49.5395
49.5464
49.5444
49.512
49.6376
49.6175
49.6157
49.5391

Dimensions [lengthtable]

{109}

Ο τελικός άξονας της οδού, έχει μήκος :

lengthn2 [0, 1] [AXONASBS]

5466.52

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ : ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΟΥ
ΑΞΟΝΑ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΑΝΑ 50 m ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ –
ΘΕΜΑ ΟΔΟΠΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΑΤΜ**

Παρακάτω, παρατίθενται οι συντεταγμένες των προς χάραξη σημείων, όπως υπολογίστηκαν από το λογισμικό ΟΔΟΣ για τις ανάγκες του μαθήματος – θέματος οδοποιίας της Σ.Α.Τ.Μ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6 : Συντεταγμένες του άξονα της οδού ανά 50 m σύμφωνα με το μάθημα – θέμα οδοποιίας της ΣΑΤΜ

448 784.	4.51937×10^6	735.02
448 817.	4.51941×10^6	734.752
448 840.	4.51946×10^6	735.161
448 857.	4.5195×10^6	735.677
448 871.	4.51955×10^6	735.668
448 884.	4.5196×10^6	734.68
448 896.	4.51965×10^6	732.625
448 910.	4.51969×10^6	729.576
448 924.	4.51974×10^6	725.686
448 940.	4.51979×10^6	721.161
448 959.	4.51983×10^6	716.329
448 976.	4.51988×10^6	711.69
448 984.	4.51993×10^6	708.012
448 979.	4.51998×10^6	705.538
448 970.	4.52002×10^6	703.639
448 963.	4.52007×10^6	701.954
448 962.	4.52012×10^6	700.369
448 966.	4.52017×10^6	698.82
448 974.	4.52022×10^6	697.221
448 985.	4.52027×10^6	695.498
448 998.	4.52032×10^6	693.686
449 020.	4.52036×10^6	692.017
449 053.	4.5204×10^6	690.643
449 080.	4.52044×10^6	688.5
449 083.	4.52049×10^6	685.043
449 075.	4.52054×10^6	681.108
449 068.	4.52059×10^6	677.207
449 072.	4.52063×10^6	673.766
449 088.	4.52068×10^6	670.827
449 111.	4.52073×10^6	667.778
449 134.	4.52077×10^6	663.978
449 155.	4.52081×10^6	659.156
449 175.	4.52086×10^6	653.918

Παράρτημα Ζ – Πίνακας τιμών των συντεταγμένων του άξονα της οδού ανά 50 m σύμφωνα με το μάθημα – θέμα οδοποιίας της ΣΑΤΜ

449204.	4.5209×10^6	650.708
449245.	4.52093×10^6	650.945
449288.	4.52095×10^6	651.434
449329.	4.52098×10^6	650.515
449363.	4.52101×10^6	648.331
449391.	4.52105×10^6	645.736
449413.	4.5211×10^6	643.422
449432.	4.52114×10^6	641.656
449450.	4.52119×10^6	640.52
449468.	4.52124×10^6	639.953
449498.	4.52127×10^6	638.051
449547.	4.52127×10^6	631.873
449595.	4.52126×10^6	626.349
449645.	4.52126×10^6	622.408
449693.	4.52127×10^6	618.797
449737.	4.52129×10^6	616.014
449771.	4.52133×10^6	614.403
449801.	4.52137×10^6	612.774
449833.	4.52141×10^6	609.819
449872.	4.52144×10^6	603.787
449920.	4.52144×10^6	596.536
449964.	4.52146×10^6	591.438
449993.	4.5215×10^6	587.461
450005.	4.52155×10^6	584.393
450011.	4.5216×10^6	581.194
450031.	4.52165×10^6	576.495
450069.	4.52168×10^6	571.041
450112.	4.5217×10^6	565.594
450157.	4.52172×10^6	559.7
450202.	4.52174×10^6	553.316
450237.	4.52178×10^6	549.215
450266.	4.52182×10^6	548.022
450303.	4.52185×10^6	544.012
450331.	4.52189×10^6	541.015
450360.	4.52193×10^6	538.147
450396.	4.52196×10^6	530.443
450426.	4.522×10^6	525.764
450467.	4.52203×10^6	520.396
450515.	4.52203×10^6	512.398
450553.	4.52206×10^6	507.278
450565.	4.5221×10^6	510.144
450595.	4.52214×10^6	511.428
450622.	4.52218×10^6	510.119
450591.	4.52221×10^6	514.909
450595.	4.52226×10^6	509.518
450639.	4.52228×10^6	497.542

Παράρτημα Ζ – Πίνακας τιμών των συντεταγμένων του άξονα της οδού ανά 50 m σύμφωνα με το μάθημα – θέμα οδοποιίας της ΣΑΤΜ

450 684.	4.52229×10^6	487.512
450 729.	4.52231×10^6	479.055
450 771.	4.52234×10^6	471.003
450 808.	4.52237×10^6	463.545
450 841.	4.5224×10^6	457.266
450 870.	4.52244×10^6	451.899
450 896.	4.52249×10^6	446.826
450 922.	4.52253×10^6	441.663
450 947.	4.52257×10^6	436.217
450 968.	4.52261×10^6	430.42
450 984.	4.52266×10^6	424.433
450 990.	4.52271×10^6	418.948
450 986.	4.52276×10^6	414.978
450 977.	4.52281×10^6	412.979
450 967.	4.52286×10^6	412.805
450 962.	4.52291×10^6	414.344
450 995.	4.52292×10^6	416.419
451 034.	4.52289×10^6	415.904
451 113.	4.52283×10^6	415.258
451 159.	4.52281×10^6	416.471
451 207.	4.5228×10^6	419.223
451 255.	4.5228×10^6	423.121
451 286.	4.52284×10^6	427.084
451 309.	4.52288×10^6	430.724
451 333.	4.52293×10^6	434.181
451 354.	4.52297×10^6	437.184
451 364.	4.52302×10^6	440.082
451 360.	4.52307×10^6	443.398
451 345.	4.52312×10^6	447.212
451 322.	4.52316×10^6	451.245
451 295.	4.5232×10^6	455.183
451 266.	4.52324×10^6	458.824

**Σημείωση : Τα σημεία του Πίνακα 6, αναφέρονται στα εσωτερικά σημεία των άκρων του άξονα της οδού. Δηλαδή, οι συντεταγμένες της αρχής και του τέλους του άξονα, δεν φαίνονται στον άξονα, αλλά παρόλα αυτά, είναι γνωστές.