

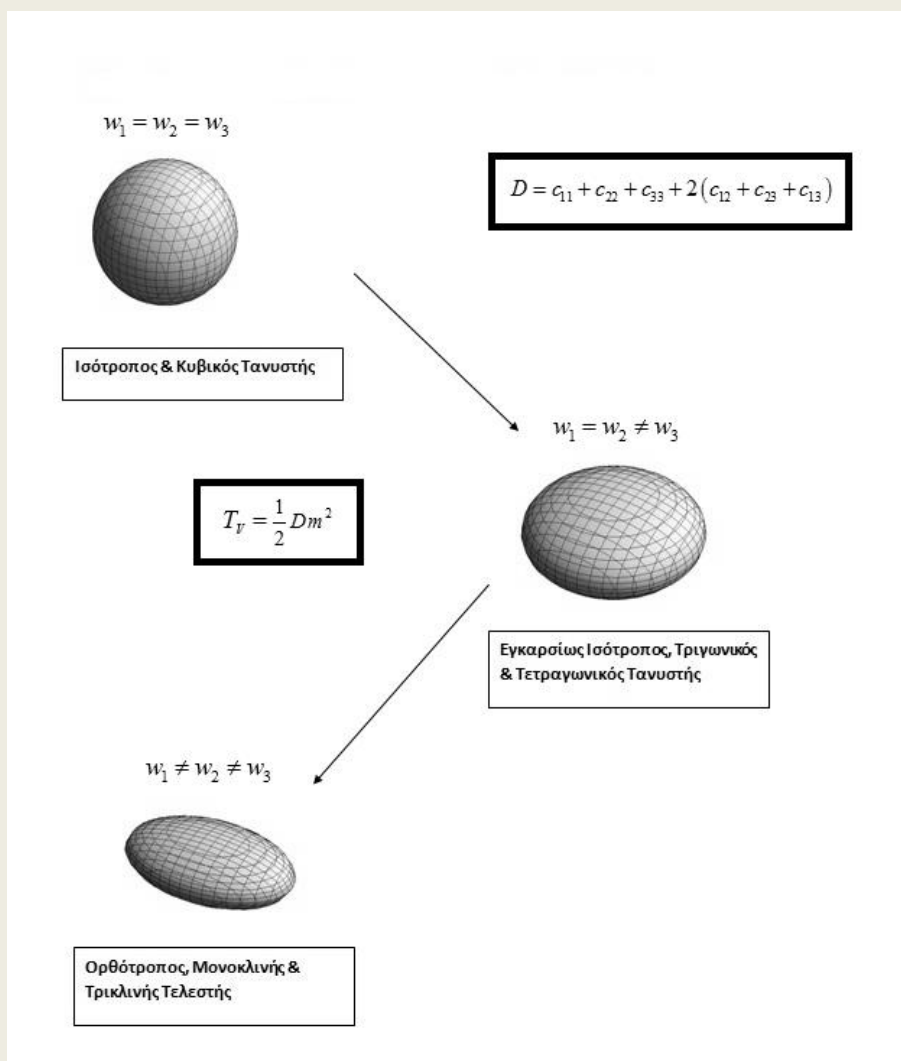


ΙΩΑΝΝΗΣ Θ. ΔΕΡΝΙΚΑΣ

Διπλωματούχος Μαθηματικός Εφαρμογών του Ε.Μ.Π.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ:

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ
ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΑΣ



ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Υπάρχουν θεωρητικά άπειροι τρόποι να διαχωρίσει κανείς την ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης (*πυκνότητα ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης*) ενός υλικού. Ελάχιστοι όμως, αν όχι ένας, έχουν πραγματικά κάποια σημασία για τη φύση του υλικού. Η εύρεση αυτών των διαχωρισμών με εξέχουσα φυσική σημασία μόνο εύκολη υπόθεση δεν μπορεί να χαρακτηριστεί. Απαιτεί την κατά το δυνατό σφαιρική γνώση της συμπεριφοράς ενός υλικού σε διαφορετικού τύπου καταπονήσεις, οι οποίες τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο έως αδύνατο να προσομοιωθούν στο εργαστήριο.

Ας πάρουμε την απλούστερη περίπτωση υλικών, δηλαδή των ισότροπων. Σήμερα πλέον, όλοι συμφωνούμε ότι τα υλικά αυτά παραμορφώνονται με δύο ανεξάρτητους τρόπους: ο ένας σχετίζεται με την αλλαγή του όγκου τους και ο άλλος με την αλλαγή του σχήματός τους. Ως φυσικό επακόλουθο και η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης των ισότροπων υλικών διαχωρίζεται σε μία διογκωτική (αλλαγή όγκου) και μία στρεβλωτική (αλλαγή σχήματος) συνιστώσα. Το εντυπωσιακό με αυτό το διαχωρισμό δεν είναι μόνο το ότι δίνει μία εκτίμηση του μέτρου φυσικών μεγεθών, αλλά επιπλέον ότι τα φυσικά αυτά μεγέθη αποδεικνύεται και πειραματικά ότι διαδραματίζουν κυρίαρχο ρόλο στην τελική αστοχία των ισότροπων υλικών. Ήδη από το 2^ο εξάμηνο των πολυτεχνικών σχολών, διδασκόμαστε το κριτήριο αστοχίας του Mises, το οποίο εναλλακτικά διατυπώνεται και ως εξής: «ένα υλικό αστοχεί όταν η ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματός του λάβει μία κρίσιμη τιμή». Εξαιρετικά σημαντικό αποτέλεσμα! Αντιστοίχως, η ιστορία συμπληρώνει ότι ένα ψαθυρό υλικό αστοχεί όταν η ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου του λάβει μία κρίσιμη τιμή. Πλήρης περιγραφή του κύκλου αστοχίας των ισότροπων υλικών.

Με τα ανισότροπα υλικά η κατάσταση περιπλέκεται αρκετά. Δεν είναι μόνο ο μαθηματικός φορμαλισμός που γίνεται σαφέστατα δυσκολότερος. Είναι κυρίως η φυσική που γίνεται λιγότερο διαισθητική! Αυτό με τη σειρά του δημιουργεί πολλές παρερμηνείες των μαθηματικών αποτελεσμάτων. Μία από αυτές τις παρερμηνείες μας απασχόλησε ιδιαίτερα σε αυτή τη διατριβή. Πρόκειται για το κατά πόσον η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης των ανισότροπων υλικών μπορεί ή όχι να διαχωριστεί σε μία διογκωτική και μία στρεβλωτική συνιστώσα. Δεν είμαστε οι πρώτοι που ασχοληθήκαμε με αυτό το ζήτημα. Υπάρχουν στη βιβλιογραφία προηγούμενες ερευνητικές μελέτες που καταλήγουν σε αρνητικό συμπέρασμα.

Στην παρούσα διατριβή λοιπόν, επανεξετάζεται η φυσική του προβλήματος του διαχωρισμού της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης των ανισότροπων υλικών σε ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου και ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος. Τα μεγέθη αλλαγή όγκου και αλλαγή σχήματος ορίζονται εκ νέου με βάση τη διατήρηση ή μη των συμμετριών της δομής των υλικών και καταλήγουμε σε αποτελέσματα με εξαιρετική φυσική σημασία. Επιπλέον, υπό το πρίσμα των νέων ορισμών, επιχειρείται σε κάθε περίπτωση μια ερμηνεία των προηγούμενων αρνητικών αποτελεσμάτων.

ABSTRACT

In theory, there are infinite ways of decomposing the elastic strain energy density of a material. But, only few of them, if not only one, are of some physical importance to the material. The derivation of these physically important decompositions is not at all an easy task. It demands the widest possible knowledge of a material's behavior under different loading conditions, these loading conditions being extremely difficult to simulate in the laboratory.

Let's consider the case of the simplest class of materials, the isotropic ones. We've all come to an agreement nowadays that isotropic materials deform in two independent ways: one has to do with their volume change and the other one with their shape change. In accordance, the elastic strain energy density can be decomposed into a dilatational (volume change) and a distortional (shape change) part. The most marvelous thing about this decomposition is not only that it gives us a measurement of physical quantities, but the fact that these measured physical quantities play a dominant role in the process of failure of isotropic materials. From the second semester of our undergraduate studies, we learn about the Von Mises' Failure Criterion, which could be interpreted as this: "a material fails when its distortional strain energy density takes a critical value". An extremely important result! In a similar manner, a brittle material fails when its dilatational strain energy density takes a critical value. That constitutes a complete description of the failure box of isotropic materials.

The situation with anisotropic materials becomes extremely complicated. Not only the mathematical handling becomes extremely difficult, but it is mainly the physics of those materials that becomes very non-intuitive. This leads to huge misunderstandings of the mathematical conclusions. One of these misunderstandings became the main subject of research of this thesis. Is it possible for the elastic strain energy density of anisotropic materials to decompose into a dilatational and a distortional part or not? This is not the first time someone deals with that subject. Previous researches on the subject ended up with a negative result.

In this thesis, we reexamine the physics of the problem of the decomposition of the elastic strain energy density of anisotropic materials into a part connected with volume changes and a part connected with shape changes. A redefinition of the terms volume change and shape change is made on the basis of the conservation or non-conservation of the original symmetries of the material and we come up with some physically meaningful results! In any case, a rationalization of the previous negative conclusions is being attempted.

Δημοσιεύσεις σε Διεθνή Περιοδικά

N.P. Andrianopoulos, I.T. Dernikas: *An attempt to separate elastic strain energy density of linear elastic anisotropic materials based on strains considerations*, Acta Mechanica, Volume 224, Issue 9, pp. 1879-1885, 2013

N.P. Andrianopoulos, V.M. Manolopoulos, I.T. Dernikas: *Failure criteria: Old Wines in New Bottles?*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, <http://dx.doi.org/10.1016/j.tafmec.2014.03.007>

Δημοσιεύσεις σε πρακτικά συνεδρίων

N.P. Andrianopoulos and I.T. Dernikas (2012). *On the failure of anisotropic materials: physical or mathematical?* Oral presentation delivered at ECF19 held in Kazan, Russia, August, 2012.

N.P. Andrianopoulos and I.T. Dernikas (2010). *On the elastic strain energy decomposition in the general case of anisotropic bodies*. Oral presentation delivered at the First Greek-Ukrainian Conference on Fracture Mechanics held in Xanthi, Greece, December, 2010.

N.P. Andrianopoulos and V.M. Manolopoulos and I.T. Dernikas (2008). *Coulomb Failure Surfaces in Ductile Non Linear Elastic Materials*. Engineering Against Fracture: 1st Conference held in Patras, Greece, 2008.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π. στο χρονικό διάστημα από τον Ιανουάριο του 2010 έως τον Ιούνιο του 2014 με επιβλέποντα τον Ομ.Καθηγητή κ. **Νίκο Π. Ανδριανόπουλο**, τον οποίο και ευχαριστώ βαθύτατα για την καθοδήγησή του σε όλη αυτή την πορεία.

Στην Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή συμμετείχαν επίσης ο εκλιπών Καθηγητής Ε.Μ.Π. **Δημήτριος Παναγιωτουνάκος**, ο οποίος αντικαταστάθηκε από τον Επίκουρο Καθηγητή της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. κ. **Δημήτριο Ευταξινόπουλο** και ο Καθηγητής Σ.Ν.Μ.Μ. κ. **Νικόλαος Τσούβαλης**, τους οποίους και ευχαριστώ θερμά. Επίσης ευχαριστώ ιδιαίτερα την Καθηγήτρια της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. κ. **Ευαγγελία Κοντού-Δρούγκα** και τον Αναπληρωτή Καθηγητή της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. κ. **Κωνσταντίνο Λαζόπουλο** που συμμετείχαν στην Πενταμελή Εξεταστική Επιτροπή. Ο κ. Λαζόπουλος αντικαταστάθηκε μετέπειτα από τον Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κ. **Αντώνιο Γιαννακόπουλο** λόγω συνταξιοδότησης του πρώτου, ενώ η Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή συμπληρώθηκε από τον Ομ.Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. **Γεώργιο Παπαδόπουλο** και τον Αναπλ. Καθηγητή της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. κ. **Βίκτωρα Κυτόπουλο**.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου Δρ. **Αθανάσιο Ηλιόπουλο**, Δρ. **Βασίλειο Μανωλόπουλο** και τους υποψήφιους Διδάκτορες **Άγγελο Πικράκη** και **Αγγελική Σταθοπούλου** που με βοήθησαν πολύ από τα πρώτα βήματά μου ως προπτυχιακού φοιτητή μέχρι και τη στιγμή της ολοκλήρωσης της διδακτορικής μου διατριβής. Τους ευχαριστώ ιδιαίτερα για το αίσθημα ομάδας που καλλιεργήσαμε μαζί όλα αυτά τα χρόνια, το οποίο για εμένα είναι ανεκτίμητο! Ευχαριστώ επίσης τους προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές με τους οποίους συνεργαστήκαμε κατά καιρούς στην εκπόνηση των δικών τους εργασιών. Ήταν για εμένα όλες πολύ σημαντικές και χρήσιμες εμπειρίες.

Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων απέναντι στον **Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας** για την υποτροφία που μου παρείχε κατά την τριετία 2010-2013, μία πολύ σημαντική βοήθεια, χωρίς την εξασφάλιση της οποίας δεν θα ήταν δυνατή αυτή η προσπάθεια.

Οφείλω μια μεγάλη ευγνωμοσύνη στα μέλη του **Τομέα Μηχανικής** για την άριστη συνεργασία μας σε κάθε πτυχή αυτής της διατριβής. Από τη Γραμματεία του Τομέα μέχρι τα μέλη Δ.Ε.Π. ήταν όλοι τους εξαιρετικοί απέναντί μου και ελπίζω κι εγώ το ίδιο.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους καλούς μου φίλους που ήταν και είναι πάντα εκεί για εμένα όλα αυτά τα χρόνια!

«Αλλά πρώτα θα δεις την ερημιά και θα της δώσεις το δικό σου νόημα» είπε

«Πριν από την καρδιά σου θα 'ναι αυτή

Και μετά πάλι αυτή θα ακολουθήσει

Τούτο μόνο να ξέρεις:

Ό,τι σώσεις μες στην αστραπή

Καθαρό στον αιώνα θα διαρκέσει. »

Από το Άξιον Εστί του Οδυσσέα Ελύτη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

| | |
|--|----|
| 1.1 Εισαγωγή..... | 3 |
| 1.2 Ελαστικά κατά Green ή υπερελαστικά υλικά | 4 |
| 1.3 Φυσική απαίτηση – Η ενέργεια είναι πάντοτε θετική..... | 7 |
| Ισότροπο | 8 |
| Κυβικό | 9 |
| Εξαγωνικό (εγκαρσίως ισότροπο)..... | 10 |
| Τριγωνικά ανισότροπο..... | 12 |
| Τετραγωνικά ανισότροπο | 13 |
| Ορθότροπο..... | 14 |
| Μονοκλινές..... | 16 |
| Το τρικλινές και ο Γάλλος μαθηματικός | 16 |
| 1.4 Επίλογος 1 ^{ου} κεφαλαίου | 18 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

| | |
|---|----|
| 2.1 Αλλαγή όγκου και αλλαγή σχήματος | 21 |
| 2.2 Προηγούμενες Προσεγγίσεις | 26 |
| 2.2.1 Ο ισότροπος διαχωρισμός των παραμορφώσεων | 26 |
| 2.2.2 Δύο επιπλέον προσεγγίσεις που δεν οδηγούν σε επιθυμητή λύση | 29 |
| 2.3 Διαχωρισμός με τη μέθοδο της Φασματικής Ανάλυσης..... | 32 |
| Παρατηρήσεις..... | 34 |
| 2.4 Συμπεράσματα 2 ^{ου} Κεφαλαίου..... | 38 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

| | |
|---|----|
| 3.1 Τί ορίζουμε ως αλλαγή όγκου; | 41 |
| 3.2 Προσπάθεια διαχωρισμού βασισμένη σε παραμορφώσεις | 43 |
| Φυσικό κριτήριο | 44 |
| Λίγα λόγια για την παράμετρο παραμόρφωσης m | 46 |
| Η ενέργεια αλλαγής όγκου σε όρους παραμορφώσεων..... | 47 |
| Η ενέργεια αλλαγής σχήματος σε όρους παραμορφώσεων..... | 48 |
| Παράδειγμα:Ορθότροπα Υλικά | 48 |
| Επίλογος 3 ^{ου} Κεφαλαίου | 50 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

| | |
|--|-----------|
| 4.1 Ο Διογκωτικός και ο Στρεβλωτικός Τανυστής των Τάσεων των Γραμμικά Ελαστικά Ανισότροπων Υλικών | 55 |
| Παρατηρήσεις..... | 57 |
| 4.2 Οι ελαστικές ενέργειες αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος ως συνάρτηση των τάσεων | 58 |
| Παρατηρήσεις..... | 65 |
| 4.3 Κατανομή των ελαστικών ενεργειών στα συνήθη πειράματα..... | 66 |
| Παρατηρήσεις..... | 75 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

| | |
|---|-----------|
| 5.1 Εισαγωγή..... | 79 |
| Συμπιεστότητα, μέτρο διόγκωσης και αλλαγή όγκου | 79 |
| 5.2 Ασυμπιεστά υλικά..... | 80 |
| 5.3 Ισοτροπικώς συμπιεστά ανισότροπα υλικά | 82 |
| Ισοτροπικώς συμπιεστά ορθότροπα υλικά | 82 |
| ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ..... | 83 |
| Ισοτροπικώς συμπιεστά εγκαρσίως ισότροπα υλικά | 84 |
| ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ..... | 85 |
| Συμπεράσματα Κεφαλαίου | 86 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

| | |
|--|----|
| Ανασκόπηση - Σχολιασμός επί των αποτελεσμάτων..... | 89 |
| Γιατί πιστεύουμε ότι η λύση που προτείνουμε είναι σωστή;..... | 90 |
| Ποια τα περιθώρια λάθους των παραγόμενων αναλυτικών τύπων για τις ελαστικές ενέργειες αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος;..... | 91 |
| Προτάσεις για μελλοντική έρευνα..... | 91 |
| Επίλογος Διατριβής..... | 92 |

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

| | |
|---|------------|
| A.1 Γενικευμένος Νόμος του Hooke – Πώς προκύπτει;..... | 95 |
| A.2 Η Αρχή του Neumann - Συμμετρία..... | 96 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ | 102 |

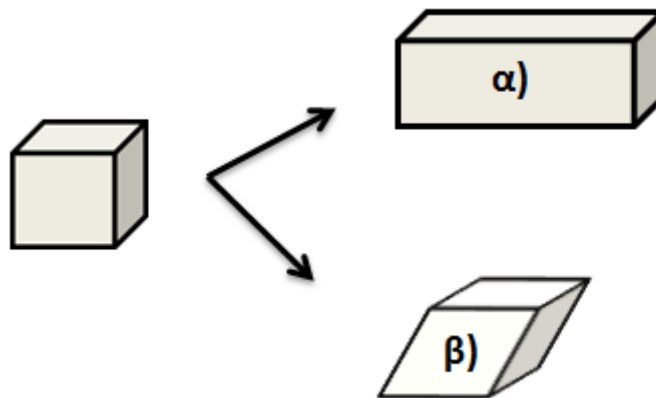
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1⁰

1.1 Εισαγωγή

Τα υλικά παραμορφώνονται όταν βρεθούν στο πεδίο δράσης εξωτερικών δυνάμεων. Διακρίνουμε τις εξωτερικές δυνάμεις σε καθολικές (π.χ. βάρος, μαγνητικές δυνάμεις, αδράνεια) και επιφανειακές (π.χ. τριβή) δυνάμεις [1]. Επιπλέον, με τον όρο παραμόρφωση περιγράφουμε γενικά δύο διαφορετικές καταστάσεις:

α) αλλαγές μηκών (*ορθές παραμορφώσεις*)

β) απειροελάχιστες αλλαγές γωνιών (*διατμητικές παραμορφώσεις*).



Εικόνα 1.1: Αλλαγή μηκών και αλλαγή γωνιών

Όταν ένα υλικό παραμορφώνεται, προφανώς οι επιδράσεις σε αυτό δυνάμεις παράγουν κάποιο έργο (τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετατοπίζονται κατά την παραμόρφωση). Στην περίπτωση ιδεατά ελαστικού υλικού, το έργο αυτό αποθηκεύεται υπό μορφή ενέργειας στο υλικό. Με την άρση των ασκούμενων φορτίων, το υλικό επανέρχεται στην αρχική απαραμόρφωτη κατάστασή του και αποδίδει πίσω στο περιβάλλον την ενέργεια που είχε αποθηκεύσει. Το ποσό της ενέργειας που αποθηκεύει ένα ελαστικό υλικό καθώς παραμορφώνεται, ονομάζεται *ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης* [2-7].

Όταν μιλούμε για μικρές παραμορφώσεις (*θεωρία μικρών παραμορφώσεων*), μπορούμε να λέμε ότι προσεγγιστικά τα υλικά παραμορφώνονται τελείως ελαστικά. Συγχρόνως, οι οποιεσδήποτε μεταβολές μηκών ή γωνιών είναι και αδιαβατικές, δηλαδή πραγματοποιούνται χωρίς παραγωγή θερμότητας εκ μέρους του καταπονούμενου υλικού. Προφανώς πρόκειται περί μιας προσέγγισης που έχει ισχύ σε συγκεκριμένες κατηγορίες υλικών, όπως π.χ. τα μέταλλα, ενώ απέχει πολύ από το να περιγράψει τη συμπεριφορά π.χ. γεωυλικών υπό παραμόρφωση. Σε μια πιο ρεαλιστική ανάλυση, τα υλικά παραμορφώνονται και μη-ελαστικά (ή *πλαστικά*) με συνέπεια αφενός κατά τη διάρκεια των παραμορφώσεων να εκλύονται μεγάλα ποσά θερμότητας, αφετέρου με την άρση των εξωτερικών φορτίων το υλικό να μην επανέρχεται στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Στην παρούσα διατριβή δεν θα αναφερθούμε καθόλου σε μη-ελαστικές καταστάσεις. Όταν μιλούμε για παραμορφώσεις, θα εννοούμε αποκλειστικά ελαστικές παραμορφώσεις.

1.2 Ελαστικά κατά Green ή υπερελαστικά υλικά

Η παράγραφος αυτή πραγματεύεται τον ορισμό εκείνων των μεγεθών (π.χ. ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης, Γενικευμένος Νόμος του Hooke) που χρησιμοποιούμε κατά κόρον στην παρούσα διατριβή. Υιοθετήθηκε ο αξιωματικός τρόπος ορισμού που ακολούθησε και ο Malvern [5], με βάση τον οποίο έχει δομηθεί μεγάλο μέρος αυτής της παραγράφου.

Στη βιβλιογραφία συναντά κανείς διάφορους ορισμούς για τα ελαστικά υλικά που δεν είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους. Έτσι εκτός από τα γραμμικά ελαστικά υλικά τα οποία ακολουθούν το Γενικευμένο Νόμο του Hooke και χρησιμοποιούνται για την περιγραφή κυρίως μετάλλων, υπάρχουν και μη-γραμμικά ελαστικά υλικά όπως είναι τα Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden [8] κ.α. τα οποία εισήχθησαν το 1940-1960 για την περιγραφή της συμπεριφοράς κυρίως ελαστικών και καουτσούκ τα οποία τότε έβρισκαν εφαρμογή σε ελαστικά αυτοκινήτων και ως βασικά συστήματα σε γέφυρες και μηχανολογικές κατασκευές. Σήμερα χρησιμοποιούνται επίσης για την περιγραφή πολυμερών και σύνθετων υλικών. Όλα αυτά ανήκουν στην κατηγορία των *ελαστικών κατά Green ή υπερελαστικών υλικών*, τα οποία αποτελούν ειδική περίπτωση των ελαστικών κατά Cauchy υλικών. Οι τάσεις σε οποιοδήποτε σημείο του υλικού είναι συναρτήσεις μόνο των παραμορφώσεων σε μια πολύ μικρή περιοχή γύρω από το σημείο αυτό, έχουν δηλαδή έναν τοπικό χαρακτήρα. Η τιμή της τάσης σε κάποιο σημείο του υλικού δεν εξαρτάται από τη διαδρομή ή την ιστορία της παραμόρφωσης, καθώς επίσης ούτε από το ρυθμό παραμόρφωσης. Η υπερελαστικότητα επιπλέον δεν λαμβάνει υπόψιν της τις θερμικές μεταβολές και θεωρεί ότι πάντοτε υπάρχει μια συνάρτηση ελαστικού δυναμικού W . Η συνάρτηση W είναι μια βαθμωτή συνάρτηση των συνιστωσών της παραμόρφωσης, από την οποία με παραγωγή ως προς μια συνιστώσα παραμόρφωσης μπορεί κανείς να υπολογίσει την αντίστοιχη συνιστώσα τάσης που την προκάλεσε, δηλ.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\underline{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (1.1)$$

όπου $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$ ο τανυστής των μικρών παραμορφώσεων και

$\underline{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ ο Cauchy τανυστής των τάσεων.

Στον παραπάνω ορισμό, η συνάρτηση $W(\underline{\varepsilon})$ υποτέθηκε συμμετρική ως προς τις συνιστώσες ε_{ij} και ε_{ji} και είναι η *ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης ανηγμένη κατά μοναδιαίο απαραμόρφωτο όγκο*. Στην περίπτωση που μια τέτοια συμμετρία δεν κρίνεται απαραίτητη, τότε η συμμετρία του τανυστή των τάσεων $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ μπορεί να διατηρηθεί, μετασχηματίζοντας την παραπάνω σχέση ως εξής:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\underline{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W(\underline{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ji}} \right). \quad (1.2)$$

Εισαγωγικές Έννοιες - Μελέτη Ιδιοτιμών

Εάν αναπτύξουμε την συνάρτηση $W(\underline{\varepsilon})$ ως δυναμοσειρά ως προς τις συνιστώσες ε_{ij} της παραμόρφωσης, τότε αγνοώντας τους όρους ανώτερης από δευτέρας τάξης μπορεί κανείς να εξάγει τις 6 εξισώσεις του Γενικευμένου Νόμου του Hooke:

Ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke

Ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke στη γενικότερη περίπτωση ανισοτροπίας γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{44} \\ \sigma_{55} \\ \sigma_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{44} \\ 2\varepsilon_{55} \\ 2\varepsilon_{66} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις προκύπτει ότι η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης W είναι μια τετραγωνική μορφή ως προς τις παραμορφώσεις:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon} \\ &= c_0 + c_1 \varepsilon_{11} + c_2 \varepsilon_{22} + c_3 \varepsilon_{33} + c_4 \varepsilon_{44} + c_5 \varepsilon_{55} + c_6 \varepsilon_{66} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_{11} \varepsilon_{11}^2 + c_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + c_{13} \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + c_{14} \varepsilon_{11} \varepsilon_{44} + c_{15} \varepsilon_{11} \varepsilon_{55} + c_{16} \varepsilon_{11} \varepsilon_{66} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_{22} \varepsilon_{22}^2 + c_{23} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + c_{24} \varepsilon_{22} \varepsilon_{44} + c_{25} \varepsilon_{22} \varepsilon_{55} + c_{26} \varepsilon_{22} \varepsilon_{66} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_{33} \varepsilon_{33}^2 + c_{34} \varepsilon_{33} \varepsilon_{44} + c_{35} \varepsilon_{33} \varepsilon_{55} + c_{36} \varepsilon_{33} \varepsilon_{66} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_{44} \varepsilon_{44}^2 + c_{45} \varepsilon_{44} \varepsilon_{55} + c_{46} \varepsilon_{44} \varepsilon_{66} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_{55} \varepsilon_{55}^2 + c_{56} \varepsilon_{55} \varepsilon_{66} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_{66} \varepsilon_{66}^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Από την παραπάνω μορφή της συνάρτησης W , προκύπτει ότι π.χ. η συνιστώσα σ_{44} του ταυιστή των τάσεων ισούται με

$$\sigma_{44} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{44}} = c_4 + c_{14} \varepsilon_{11} + c_{24} \varepsilon_{22} + c_{34} \varepsilon_{33} + c_{44} \varepsilon_{44} + c_{45} \varepsilon_{55} + c_{46} \varepsilon_{66} \quad (1.5)$$

Εισαγωγικές Έννοιες - Μελέτη Ιδιοτιμών

Υπό την απαίτηση η τάση να μηδενίζεται στην απαραμόρφωτη κατάσταση προκύπτει για την σ_{44} ότι $c_4 = 0$ και συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για τις υπόλοιπες συνιστώσες τάσης, προκύπτει ότι

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0.$$

Επιπλέον, η απαίτηση να έχω μηδενική ενέργεια παραμόρφωσης W στην απαραμόρφωτη κατάσταση, απαιτεί και τον μηδενισμό του όρου c_0 .

Με τις δύο τελευταίες απαιτήσεις, προκύπτει ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

με τους εξής συμβολισμούς (Voigt, 1910):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} & \sigma_2 &= \sigma_{22} & \sigma_3 &= \sigma_{33} & \sigma_4 &= \sigma_{23} & \sigma_5 &= \sigma_{31} & \sigma_6 &= \sigma_{12} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33} & \varepsilon_4 &= 2\varepsilon_{23} & \varepsilon_5 &= 2\varepsilon_{31} & \varepsilon_6 &= 2\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Σε πιο συνεπτυγμένη γραφή θα γράφουμε

$$W = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}^T, \text{ όπου } \begin{cases} \underline{\sigma} = [\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6] \\ \underline{\varepsilon} = [\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6] \end{cases}$$

οι τανυστές τάσεων και παραμορφώσεων αντίστοιχα.

Εάν τώρα ληφθούν υπόψιν οι δύο μορφές του Γενικευμένου Νόμου του Hooke

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon} = \underline{S} \cdot \underline{\sigma} \end{cases} \text{ όπου } \underline{C} \text{ και } \underline{S} \text{ τα μητρώα ακαμψίας και ενδοτικότητας αντίστοιχα,}$$

τότε και η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης θα λάβει τις ακόλουθες δύο περιγραφές :

$$W = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma} \text{ σε όρους τάσεων} \quad (1.8)$$

$$W = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon} \text{ σε όρους παραμορφώσεων} \quad (1.9)$$

1.3 Φυσική απαίτηση – Η ενέργεια είναι πάντοτε θετική

Η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης πρέπει να είναι μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή, ούτως ώστε να εξασφαλίζεται ότι θα παίρνει πάντα θετικές τιμές (για οποιοδήποτε συνδυασμό τάσεων ή παραμορφώσεων).

Αυτό που καθορίζει το αν θα είναι θετικά ορισμένη η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης, είναι το μητρώο ακαμψίας \underline{C} ή το μητρώο ενδοτικότητας \underline{S} , αναλόγως ποια από τις δύο παραπάνω περιγραφές της ενέργειας παραμόρφωσης χρησιμοποιούμε. Τα μητρώα αυτά λαμβάνουν υπόψιν τους τις οποιεσδήποτε ελαστικές συμμετρίες μπορεί να έχει ένα υλικό (κέντρα/επίπεδα συμμετρίας ή άξονες περιστροφής) και δύνανται να έχουν το πολύ 7 διαφορετικές μορφές, μία για κάθε διαφορετική κλάση ανισοτροπίας. Αναλυτικότερα παρουσιάζονται στο *Παράρτημα Α.2*.

Οι κλάσεις ανισοτροπίας είναι οι εξής:

1. Κυβική
2. Εξαγωνική (Εγκαρσίως Ισότροπη)
3. Τριγωνική
4. Τετραγωνική
5. Ορθότροπη
6. Μονοκλινής
7. Τρικλινής (γενικώς ανισότροπη)

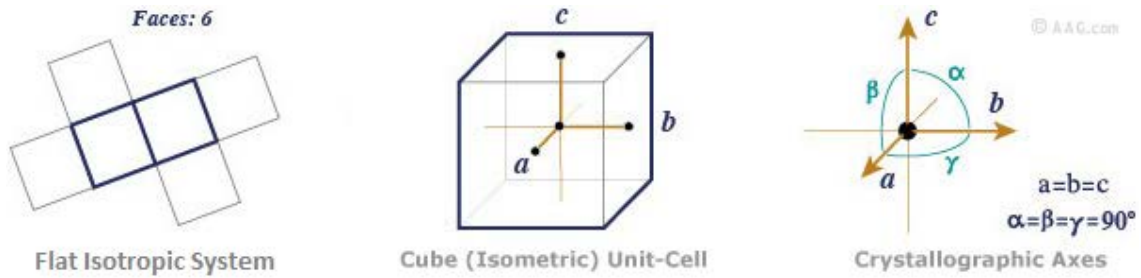
Τα μητρώα αυτά είναι συμμετρικά για κάθε τύπο ανισοτροπίας και τα στοιχεία τους είναι πραγματικοί αριθμοί, καθώς εκφράζουν αποτελέσματα φυσικών μετρήσεων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα μητρώα ενδοτικότητας και ακαμψίας είναι ερμιτιανά (αναστροφοσυζυγή). Για ερμιτιανά μητρώα δε, ισχύει ότι οι ιδιοτιμές τους είναι πάντα πραγματικοί αριθμοί.

Υπάρχει ένα πολύ απλό κριτήριο για να αποφανθούμε εάν μια τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη ή όχι. Έχει να κάνει με τις ιδιοτιμές του μητρώου της τετραγωνικής μορφής. Συγκεκριμένα, για την δική μας περίπτωση, αυτό που ισχύει είναι το εξής [9]:

«Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι θετικά ορισμένη η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης είναι τα μητρώα ακαμψίας και ενδοτικότητας να έχουν θετικές ιδιοτιμές.»

Ακολουθεί μια μελέτη των ιδιοτιμών και των περιορισμών που εισάγει η ικανοποίηση της παραπάνω συνθήκης στις τιμές των ελαστικών σταθερών για την περίπτωση ισότροπου ελαστικού σώματος καθώς και για κάθε τύπο ανισοτροπίας ξεχωριστά.

Ισότροπο



Εικόνα 1.2: (Πηγή Φωτογραφίας: http://www.allaboutgemstones.com/crystalline_structures.html)

$$\text{Το μητρώο } \tilde{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix}$$

έχει τρεις διακριτές ιδιοτιμές:

$$p_1 = s_{11} + 2s_{12} = \frac{1-2\nu}{E} \text{ (απλή), } p_2 = s_{11} - s_{12} = \frac{1+\nu}{E} \text{ (διπλή) και}$$

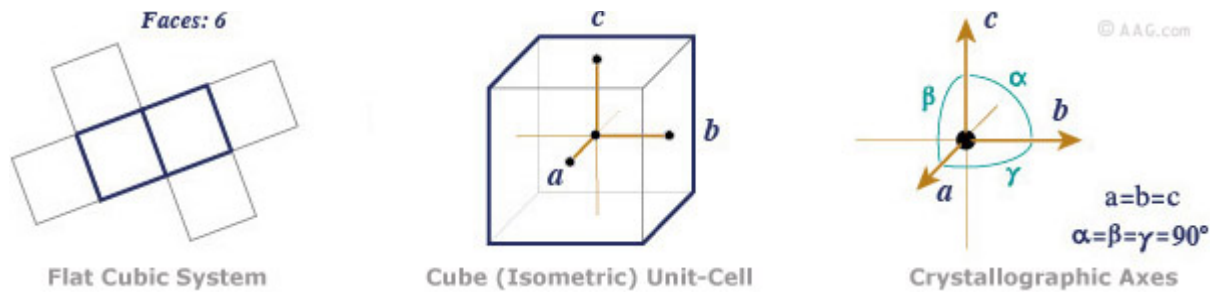
$$p_3 = 2(s_{11} - s_{12}) = \frac{2(1+\nu)}{E} \text{ (τριπλή).}$$

Για να παίρνει η ενέργεια μόνο θετικές τιμές, θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$\begin{cases} \frac{1-2\nu}{E} > 0 \\ \frac{1+\nu}{E} > 0 \\ \frac{2(1+\nu)}{E} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu < \frac{1}{2} \\ \nu > -1 \\ E > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < \nu < \frac{1}{2} \\ E > 0 \end{cases},$$

ένα πολύ γνωστό αποτέλεσμα στη βιβλιογραφία.

Κυβικό



Εικόνα 1.3: (Πηγή Φωτογραφίας: http://www.allaboutgemstones.com/crystalline_structures.html)

Το μητρώο $\xi =$
$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix}$$
 έχει ιδιοτιμές

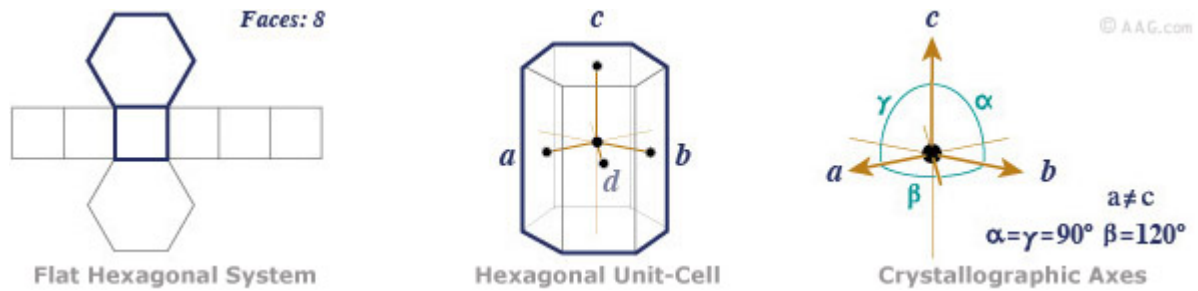
$p_1 = s_{11} + 2s_{12} = \frac{1-2\nu}{E}$ (απλή), $p_2 = s_{11} - s_{12} = \frac{1+\nu}{E}$ (διπλή) και $p_3 = s_{44} = \frac{1}{2G}$ (τριπλή).

Για να είναι θετικές οι ιδιοτιμές, θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$\begin{cases} \frac{1-2\nu}{E} > 0 \\ \frac{1+\nu}{E} > 0 \\ \frac{1}{2G} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu < \frac{1}{2} \\ \nu > -1 \\ E > 0 \\ G > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < \nu < \frac{1}{2} \\ E > 0 \\ G > 0 \end{cases} .$$

Και για το κυβικό ισχύει το γράφημα που παραθέσαμε για το ισότροπο υλικό. Επιπλέον πρέπει πάντα να ισχύει $s_{44} > 0$.

Εξαγωνικό (εγκαρσίως ισότροπο)



Εικόνα 1.4: (Πηγή Φωτογραφίας: http://www.allaboutgemstones.com/crystalline_structures.html)

Το μητρώο $\tilde{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές

$$p_1 = s_{11} - s_{12} = \frac{1 + \nu_{21}}{E_1} \text{ (απλή),} \quad p_2 = 2(s_{11} - s_{12}) = \frac{2(1 + \nu_{21})}{E_1} \text{ (απλή),} \quad p_3 = s_{44} = \frac{1}{2G}$$

(διπλή),

$$p_4 = \frac{s_{11} + s_{12} + s_{33} - \sqrt{(s_{11} + s_{12})^2 + 8s_{13}^2 - 2(s_{11} + s_{12})s_{33} + s_{33}^2}}{2} \text{ (απλή)}$$

$$= \frac{E_1 + E_3 - \nu_{21}E_3 - \sqrt{(E_1 + E_3(\nu_{21} - 1))^2 + 8\nu_{31}^2 E_3^2}}{2E_1 E_3}$$

και

$$p_5 = \frac{s_{11} + s_{12} + s_{33} + \sqrt{(s_{11} + s_{12})^2 + 8s_{13}^2 - 2(s_{11} + s_{12})s_{33} + s_{33}^2}}{2} \text{ (απλή).}$$

$$= \frac{E_1 + E_3 - \nu_{21}E_3 + \sqrt{(E_1 + E_3(\nu_{21} - 1))^2 + 8\nu_{31}^2 E_3^2}}{2E_1 E_3}$$

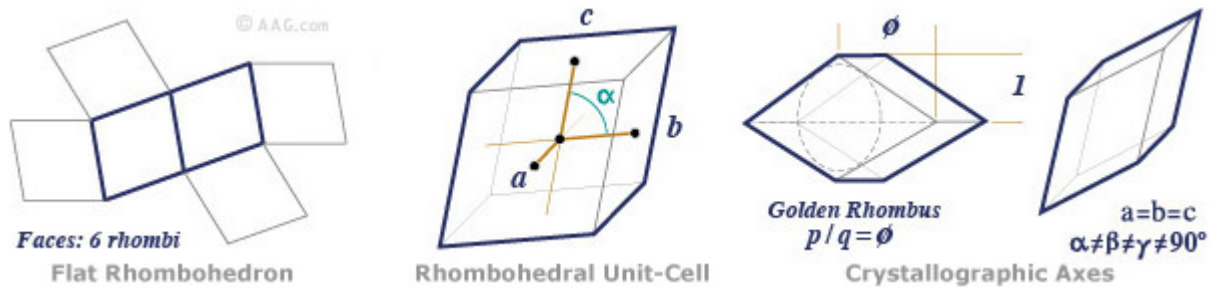
Για να είναι θετικές οι ιδιοτιμές, θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\nu_{21}}{E_1} > 0, \frac{2(1+\nu_{21})}{E_1} > 0, \frac{1}{2G} > 0 \\ \frac{E_1 + E_3 - \nu_{21}E_3 - \sqrt{(E_1 + E_3(\nu_{21} - 1))^2 + 8\nu_{31}^2 E_3^2}}{2E_1 E_3} > 0 \Rightarrow \\ \frac{E_1 + E_3 - \nu_{21}E_3 + \sqrt{(E_1 + E_3(\nu_{21} - 1))^2 + 8\nu_{31}^2 E_3^2}}{2E_1 E_3} > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{21} > -1 \\ E_1 > 0 \\ G > 0 \\ \frac{E_1 + E_3 - \nu_{21}E_3 - \sqrt{(E_1 + E_3(\nu_{21} - 1))^2 + 8\nu_{31}^2 E_3^2}}{2E_1 E_3} > 0 \\ \frac{E_1 + E_3 - \nu_{21}E_3 + \sqrt{(E_1 + E_3(\nu_{21} - 1))^2 + 8\nu_{31}^2 E_3^2}}{2E_1 E_3} > 0 \end{array} \right. , \text{όπου} \left\{ \begin{array}{l} G = G_{23} = G_{13} \\ \nu_{21} = \nu_{12} \\ \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3} \end{array} \right. .$$

Θα συνεχίσουμε παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα συναρτήσει των ελαστικών σταθερών s_{ij} , διότι η παρουσίαση με όρους τεχνικών ελαστικών σταθερών απαιτεί τη χρήση περισσότερων συμβόλων (π.χ. ν_{12} και ν_{21}), τα οποία επιπροσθέτως δεν οδηγούν σε κάποια βαθύτερη κατανόηση.

Τριγωνικά ανισότροπο



Εικόνα 1.5: (Πηγή Φωτογραφίας: http://www.allaboutgemstones.com/crystalline_structures.html)

Ανάλογα με τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς, οδηγεί σε μητρώα ελαστικών σταθερών με 6 ή 7 ανεξάρτητες ποσότητες (το ίδιο ισχύει και για τετραγωνικά ανισότροπα υλικά). Εμείς επιλέγουμε για ευκολία την παρουσίαση με 6 ανεξάρτητες σταθερές. Έχουμε λοιπόν το μητρώο

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ s_{14} & -s_{14} & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{14} & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix} \quad \text{με ιδιοτιμές θετικές αν και μόνο αν}$$

$$p_1 = \frac{s_{11} + s_{12} + s_{33} - \sqrt{(s_{11} + s_{12} - s_{33})^2 + 8s_{13}^2}}{2} > 0,$$

$$p_2 = \frac{s_{11} + s_{12} + s_{33} + \sqrt{(s_{11} + s_{12} - s_{33})^2 + 8s_{13}^2}}{2} > 0,$$

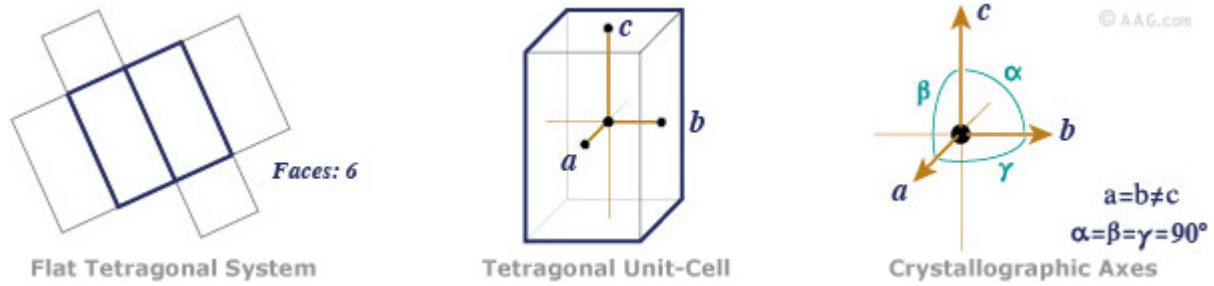
$$p_3 = \frac{s_{11} - s_{12} + s_{44} - \sqrt{(-s_{11} + s_{12} + s_{44})^2 + 8s_{14}^2}}{2} > 0,$$

$$p_4 = \frac{s_{11} - s_{12} + s_{44} + \sqrt{(-s_{11} + s_{12} + s_{44})^2 + 8s_{14}^2}}{2} > 0,$$

$$p_5 = \frac{2s_{11} - 2s_{12} + s_{44} - \sqrt{(-2s_{11} + 2s_{12} + s_{44})^2 + 4s_{14}^2}}{2} > 0 \quad \text{και}$$

$$p_6 = \frac{2s_{11} - 2s_{12} + s_{44} + \sqrt{(-2s_{11} + 2s_{12} + s_{44})^2 + 4s_{14}^2}}{2} > 0.$$

Τετραγωνικά ανισότροπο



Εικόνα 1.6: (Πηγή Φωτογραφίας: http://www.allaboutgemstones.com/crystalline_structures.html)

Το μητρώο $\underline{\xi} =$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix}$$

έχει θετικές ιδιοτιμές αν και μόνο αν

$$p_1 = s_{44} > 0 \text{ (διπλή),}$$

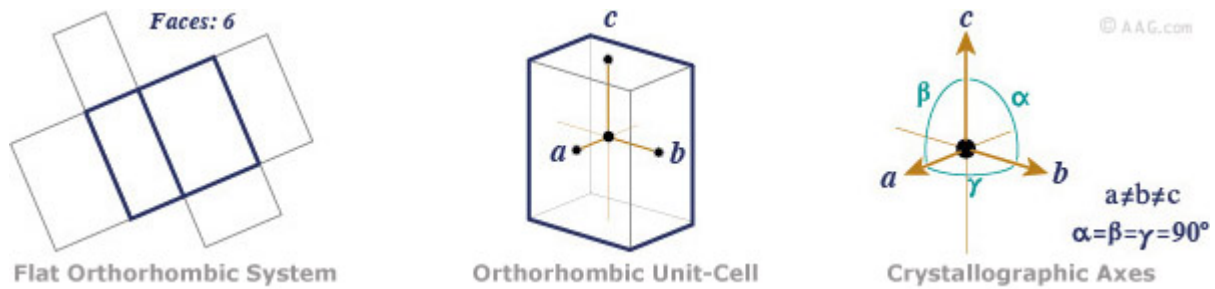
$$p_2 = s_{66} > 0,$$

$$p_3 = s_{11} - s_{12} > 0,$$

$$p_4 = \frac{s_{11} + s_{12} + s_{33} - \sqrt{(s_{11} + s_{12} - s_{33})^2 + 8s_{13}^2}}{2} > 0 \text{ και}$$

$$p_5 = \frac{s_{11} + s_{12} + s_{33} + \sqrt{(s_{11} + s_{12} - s_{33})^2 + 8s_{13}^2}}{2} > 0.$$

Ορθότροπο



Εικόνα 1.7: (Πηγή Φωτογραφίας: http://www.allaboutgemstones.com/crystalline_structures.html)

Το μητρώο $\zeta =$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix}$$

έχει θετικές ιδιοτιμές αν και μόνο αν

$$p_1 = s_{44} > 0, p_2 = s_{55} > 0, p_3 = s_{66} > 0,$$

ενώ οι υπόλοιπες τρεις ιδιοτιμές είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$-m^3 + (s_{11} + s_{22} + s_{33})m^2 + (s_{12}^2 + s_{13}^2 - s_{11}s_{22} + s_{23}^2 - (s_{11} + s_{22})s_{33})m + (-s_{13}^2s_{22} + 2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{11}s_{23}^2 - s_{12}^2s_{33} + s_{11}s_{22}s_{33}) = 0$$

Πρόκειται για μια γενική εξίσωση 3^{ου} βαθμού, της μορφής :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

όπου

$$a = -1$$

$$b = s_{11} + s_{22} + s_{33}$$

$$c = s_{12}^2 + s_{13}^2 - s_{11}s_{22} + s_{23}^2 - (s_{11} + s_{22})s_{33}$$

$$d = -s_{13}^2s_{22} + 2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{11}s_{23}^2 - s_{12}^2s_{33} + s_{11}s_{22}s_{33}.$$

Η αναλυτική λύση εξισώσεων 3^{ου} βαθμού αποδίδεται στον Gerolamo Cardano (1501-1576). Η έκτασή της όμως είναι ιδιαίτερα μακροσκελής με αποτέλεσμα να μην αποτελεί μια εύχρηστη φόρμουλα, για αυτό και δεν την παρουσιάζουμε εδώ.

Εισαγωγικές Έννοιες - Μελέτη Ιδιοτιμών

Σε κάθε περίπτωση πάντως, γνωρίζουμε ότι κάθε εξίσωση 3^{ου} βαθμού έχει πάντοτε 3 ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές), ενώ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα (προκύπτει από το θεώρημα Ενδιαμέσου Τιμής). Ένας τρόπος για να αποφανθούμε για το ποιόν των ριζών μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης, είναι ο έλεγχος της τιμής της ακόλουθης διακρίνουσας:

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- A.) εάν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει 3 άνισες πραγματικές ρίζες
- B.) εάν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία τριπλή πραγματική ρίζα
- Γ.) εάν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση έχει μία πραγματική και 2 συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

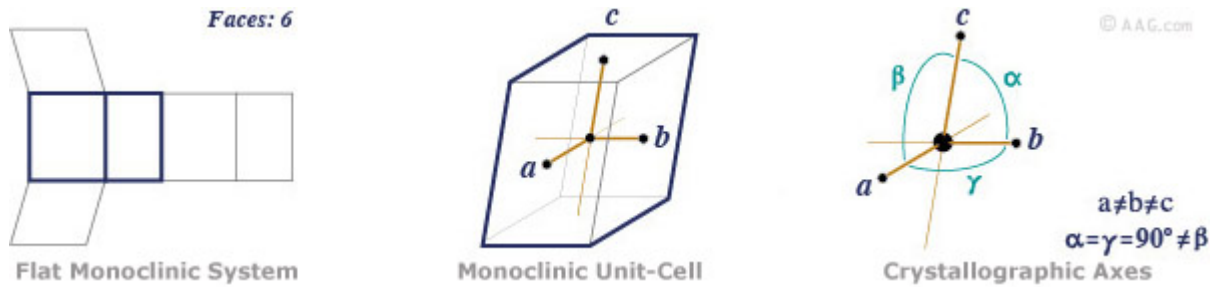
Εμείς ενδιαφερόμαστε μόνο για θετικές ιδιοτιμές, άρα η απαίτηση μας θα πρέπει να είναι η ακόλουθη:

$$\Delta \geq 0 \leftrightarrow 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 \geq 0.$$

Προφανώς η περίπτωση Γ εξαιρείται (το σύνολο των μιγαδικών αριθμών δεν είναι διατεταγμένο).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Από σεβασμό προς τον αναγνώστη, προτιμήθηκε η ευχρηστία έναντι της πληρότητας των μαθηματικών αποτελεσμάτων, μια γραμμή που ακολουθήθηκε και στην περίπτωση των μονοκλινών υλικών παρακάτω, όπου οι τέσσερις από τις έξι ιδιοτιμές αποτελούν τη λύση μιας 4^{ου} βαθμού εξίσωσης, η οποία είναι απείρως μακροσκελέστερη από εκείνη της τριτοβάθμιας.

Μονοκλινές



Εικόνα 1.8: (Πηγή Φωτογραφίας: http://www.allaboutgemstones.com/crystalline_structures.html)

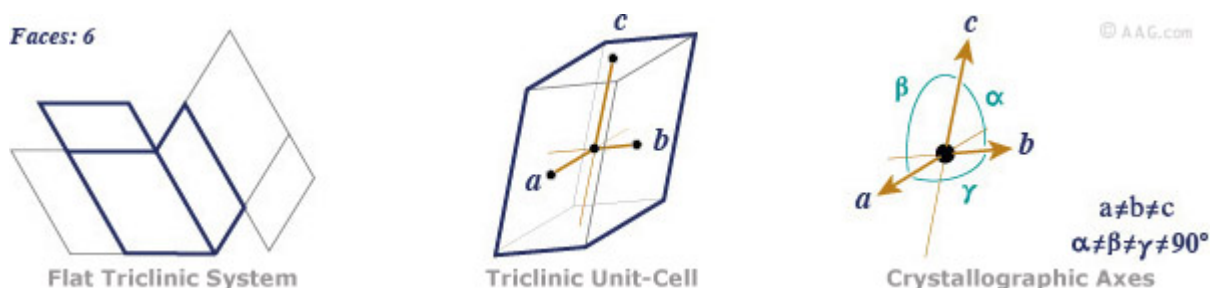
Το μητρώο $\underline{\xi} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & s_{55} & 0 \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix}$ έχει θετικές ιδιοτιμές

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(s_{44} + s_{55} - \sqrt{(s_{44} - s_{55})^2 + 4s_{45}^2} \right) > 0$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \left(s_{44} + s_{55} + \sqrt{(s_{44} - s_{55})^2 + 4s_{45}^2} \right) > 0$$

και 4 ακόμα εξαιρετικά ογκώδεις ιδιοτιμές, τις οποίες δεν θα παρουσιάσουμε εδώ. Πρόκειται για τις λύσεις μιας 4^{ου} βαθμού εξίσωσης (τη γενική λύση της οποίας έδωσε ο Lodovico Ferrari το 1540).

Το τρικλινές και ο Γάλλος μαθηματικός



Εικόνα 1.9: (Πηγή Φωτογραφίας: http://www.allaboutgemstones.com/crystalline_structures.html)

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές οποιουδήποτε μητρώου $\underline{\xi}$, αρκεί να βρούμε τις λύσεις λ της εξίσωσης:

$$\text{Det}(\underline{S} - \lambda \underline{I}) = 0.$$

Επειδή τα μητρώα \underline{S} είναι διαστάσεων 6x6, η παραπάνω εξίσωση καταλήγει σε ένα πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού ως προς λ

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + a_5\lambda^5 + a_6\lambda^6 = 0.$$

Δυστυχώς, μόνο ειδικές περιπτώσεις πολυωνύμων μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά (π.χ. όταν κάποιος από τους συντελεστές a_i είναι μηδενικοί), κάτι το οποίο δεν μας επιτρέπει να υπολογίσουμε (να δώσουμε κλειστή λύση συναρτήσει των ελαστικών σταθερών s_{ij}) τις ιδιοτιμές του τρικλινούς.

Την απόδειξη του παραπάνω μαθηματικού θεωρήματος την οφείλουμε στον Γάλλο μαθηματικό Evariste Galois (1811 – 1832), ο οποίος διερεύνησε την επιλυσιμότητα πολυωνύμων βαθμού μεγαλύτερου του 3 με ριζικά και κατέληξε στο ακόλουθο θεώρημα:



«Τα πολυώνυμα μέχρι 4ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές επιδέχονται πάντοτε αναλυτική λύση (λύση με ριζικά). Για τα πολυώνυμα 5ου ή ανώτερου βαθμού δεν υπάρχει πάντοτε μια λύση με ριζικά, αλλά μόνο σε ειδικές περιπτώσεις.»

Εικόνα 1.10: (Πηγή Φωτ.: Βικιπαίδεια)

Στις προηγούμενες περιπτώσεις ανισοτροπίας, τα μητρώα \underline{S} είχαν πολλά μηδενικά στοιχεία και προέκυπταν εύκολα τουλάχιστον 2 από τις 6 ρίζες τους. Διαιρώντας κατόπιν το πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού με τους όρους $(\lambda - p_1)$ και $(\lambda - p_2)$, προέκυπτε ένα πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού, το οποίο είναι πάντοτε επιλύσιμο. Η μαθηματική αυτή δυσκολία θα μας παρουσιαστεί και σε αρκετά ακόμα αποτελέσματα που θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε για το τρικλινές.

1.4 Επίλογος 1^{ου} κεφαλαίου

Κλείνοντας το 1^ο κεφάλαιο, έχουμε ορίσει τις έννοιες της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης, της γραμμικής ελαστικότητας (που περιγράφεται μέσω του Γενικευμένου Νόμου του Hooke), ενώ μέσω της φυσικής απαίτησης η ενέργεια αυτή να είναι πάντοτε θετική δώσαμε τους περιορισμούς που πρέπει να ισχύουν για τις ελαστικές σταθερές ούτως ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω φυσική απαίτηση.

Όλα τα παραπάνω θεωρούνται δεδομένα στα επόμενα κεφάλαια. Επιπλέον, κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό, ο αναγνώστης να συμβουλευτεί το *Παράρτημα Α.1-Α.2* ούτως ώστε να έχει μια πλήρη εικόνα του πώς προκύπτει αυτή η ειδική μορφή των μητρώων ενδοτικότητας, η οποία είναι χαρακτηριστική της ανισοτροπίας του εκάστοτε υλικού.

Η αναλυτική μελέτη των ιδιοτιμών των μητρώων ενδοτικότητας των ανισότροπων υλικών είναι μια εξαιρετικά απαιτητική διαδικασία. Ο μαθηματικός χειρισμός μεγάλου αριθμού μεταβλητών (21 στην περίπτωση των τρικλινών!) απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ αλλά αυτό δεν είναι το μεγαλύτερο μειονέκτημα στη διερεύνηση με ιδιοτιμές. Το αξεπέραστο εμπόδιο είναι η ανικανότητα παρουσίασης των ιδιοτιμών λόγω της μεγάλης έκτασής τους και συνεπώς και των οποιωνδήποτε εξ αυτών παραγόμενων αποτελεσμάτων. Ακόμα περισσότερο, όλες οι ιδιοτιμές του τρικλινούς υλικού είναι μαθηματικά αδύνατο να υπολογιστούν με αναλυτικό τρόπο.

Πολλές φορές στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε ένα πρόβλημα, το κάνουμε απείρως δυσκολότερο. Αυτό συμβαίνει και όταν δουλεύουμε με τις ιδιοτιμές των ανισότροπων υλικών. Η Φασματική Ανάλυση των τανυστών ενδοτικότητας των ανισότροπων υλικών, για την οποία θα μιλήσουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο είναι μία τέτοια περίπτωση. Παρόλο που δίνει μια απλή γραμμική σχέση αίτιου-αιτιατού ανάμεσα στα διαχωριζόμενα εντατικά και παραμορφωσιακά μεγέθη, ωστόσο δεν κατορθώνει να δώσει μια σφαιρική αντίληψη της συμπεριφοράς των γραμμικά ελαστικών ανισότροπων υλικών. Ακόμα και για τα φαινομενικά απλούστερα εξαγωνικά (εγκαρσίως ισότροπα) υλικά, κρίθηκε απαραίτητο να οριστούν επιπλέον μεταβλητές (γωνίες) που να δίνουν μια κάποια εποπτεία στον ερευνητή [10,11]. Αυξάνοντας τις μεταβλητές όμως, αυξάνεται και η μαθηματική πολυπλοκότητα και αυτό για την περίπτωση των ανισότροπων υλικών δεν πρέπει να θεωρείται καθόλου αμελητέο μειονέκτημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

2.1 Αλλαγή όγκου και αλλαγή σχήματος

Τα τασικά και παραμορφωσιακά πεδία στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου διέπονται από Ευκλείδεια κινηματική. Βασικό αξίωμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι ότι δύο είναι οι ανεξάρτητοι τρόποι με τους οποίους δύναται να παραμορφωθεί ένα τρισδιάστατο σώμα:

α.) αλλάζοντας τον όγκο του ή β.) αλλάζοντας το σχήμα του.

Ως εκ τούτου, μπορεί να υποτεθεί ότι κάθε παραμορφωσιακή κατάσταση αποτελεί υπέρθεση μιας αλλαγής όγκου $\underline{\varepsilon}_V$ και μιας αλλαγής σχήματος $\underline{\varepsilon}_D$. Δηλαδή κάθε παραμορφωσιακή κατάσταση $\underline{\varepsilon}$ θα ισοδυναμεί με ένα άθροισμα:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_V + \underline{\varepsilon}_D \quad (2.1)$$

Επιπλέον, κάθε παραμορφωσιακή κατάσταση χαρακτηρίζεται από ένα ποσό αποθηκευμένης ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων T . Ένα μέρος της ενέργειας αυτής, T_V , διατίθεται από το υλικό για την αλλαγή του όγκου του και ένα δεύτερο μέρος, T_D , για την αλλαγή του σχήματός του. Έτσι, φαίνεται να ισχύει πάντοτε ότι:

$$T = T_V + T_D \quad (2.2)$$

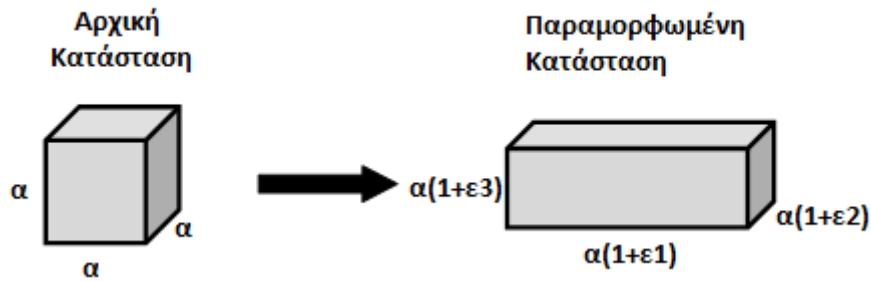
Οι παραμορφώσεις θεωρούμε ότι είναι αδιαβατικές, συνεπώς ο τύπος (2.1) είναι συνεπής με την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας (δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας με τη μορφή θερμότητας). Επιπλέον, τα ελαστικά πεδία είναι διατηρητικά. Σημασία για την ενέργεια έχει η αρχική και η τελική θέση στο χώρο των παραμορφώσεων (ή των τάσεων). Η ενέργεια είναι ανεξάρτητη της ιστορίας φόρτισης. Άρα, η υπέρθεση είναι μία ενεργειακά αποδεκτή πράξη.

Για ισότροπα υλικά, η αναλυτική λύση του προβλήματος του προσδιορισμού των παραμορφώσεων $\underline{\varepsilon}_V, \underline{\varepsilon}_D$ και των ελαστικών ενεργειών T_V, T_D θεωρείται γνωστή [12-27].

Έτσι, γνωρίζουμε ότι στα υλικά αυτά, κάθε παραμόρφωση $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}$ γράφεται ως υπέρθεση των ποσοτήτων

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}_V = \left\{ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, 0, 0, 0 \right\} \\ \underline{\varepsilon}_D = \left\{ \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3}, \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1}{3}, \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3}, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 \right\} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

που αντιστοιχούν στην αλλαγή όγκου και την αλλαγή σχήματος αντίστοιχα. Το κομμάτι που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου, $\underline{\varepsilon}_V$, καλείται **ογκομετρικό (volumetric)** ενώ το αντίστοιχο της αλλαγής σχήματος, $\underline{\varepsilon}_D$, καλείται **ισοχωρικό (isochoric)**. Ο λόγος είναι προφανής, διότι:



Εικόνα 2.1: Ανηγμένη αλλαγή όγκου του αντιπροσωπευτικού κύβου

- Η ανηγμένη αλλαγή όγκου $\frac{\Delta V}{V}$ ενός κύβου αρχικής ακμής α , αγνοώντας τα διαφορικά δευτέρας και τρίτης τάξης, ισούται με [28]:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\alpha(1+\varepsilon_1)\alpha(1+\varepsilon_2)\alpha(1+\varepsilon_3) - \alpha^3}{\alpha^3} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2.4)$$

δηλαδή με την πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή των παραμορφώσεων ξ .

- Η πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή ξ_V ισούται με αυτή του ξ , ενώ αντίστοιχα η πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή ξ_D ισούται με μηδέν. Συνεπώς ο τανυστής ξ_V περιέχει όλη την πληροφορία για την ανηγμένη αλλαγή όγκου του ολικού τανυστή ξ (“μετράει” την αλλαγή όγκου), ενώ ο τανυστής ξ_D χαρακτηρίζει μια κατάσταση όπου ο όγκος δεν μεταβλήθηκε (η ανηγμένη αλλαγή όγκου του ισούται με μηδέν ή αλλιώς ο χώρος παρέμεινε “ίσος”). Αυτό δικαιολογεί τους όρους *ογκομετρικό* και *ισοχωρικό*.

Οι τανυστές τάσης $\underline{\sigma}_V$ και $\underline{\sigma}_D$ που προκαλούν τις παραμορφώσεις ξ_V και ξ_D αντίστοιχα, είναι παρόμοιας μορφής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}_V = \left\{ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, 0, 0, 0 \right\} \\ \underline{\sigma}_D = \left\{ \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}, \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3}, \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \right\} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Ο τανυστής $\underline{\sigma}_V$ είναι ένας **σφαιρικός** (οι διατμητικές συνιστώσες του είναι μηδενικές) **υδροστατικός** (οι ορθές συνιστώσες του είναι ίσες μεταξύ τους) τανυστής, ενώ ο τανυστής $\underline{\sigma}_D$ καλείται **αποκλίνων**.

Προϊστορία του προβλήματος - Νέες Σκέψεις

Έτσι, η ολική ενέργεια T αναλύεται σε όρους παραμορφώσεων ως εξής:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\varepsilon}_V + \underline{\varepsilon}_D) \cdot \underline{C} \cdot (\underline{\varepsilon}_V + \underline{\varepsilon}_D) \Rightarrow \\ T = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_V \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_V + \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_D \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_D + \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_V \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_D + \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_D \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_V \end{cases} \quad (2.6)$$

όπου

$$\begin{cases} T_V = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_V \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_V \\ T_D = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_D \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_D \\ T_3 = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_V \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_D = T_4 = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_D \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_V = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ενώ η ανάλυση σε όρους τάσεων δίνει αντίστοιχα αποτελέσματα

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma} = \frac{1}{2} (\underline{\sigma}_V + \underline{\sigma}_D) \cdot \underline{S} \cdot (\underline{\sigma}_V + \underline{\sigma}_D) \Rightarrow \\ T = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_V + \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_D + \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_D + \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_V \end{cases} \quad (2.8)$$

όπου

$$\begin{cases} T_V = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_V \\ T_D = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_D \\ T_3 = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_D = T_4 = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_V = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Στις παραπάνω αναλύσεις (2.7) και (2.9), με T_V έχουμε συμβολίσει την **ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου**, ενώ με T_D την **ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος**.

Οι όροι $\begin{cases} T_3 = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_D = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{\varepsilon}_D \\ T_4 = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_V = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{\varepsilon}_V \end{cases}$ έχουν μεικτό ενεργειακό χαρακτήρα (θα τα

ονομάζουμε ολοκληρώματα αμοιβαίας επιρροής κατά αντιστοιχία με τους συντελεστές αμοιβαίας επιρροής των μητρών ακαμψίας τους) και ισούνται αλγεβρικά με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το έργο που δαπανούν οι τάσεις $\underline{\sigma}_V$ για αλλαγή σχήματος $\underline{\varepsilon}_D$ (δηλαδή ο όρος T_3) ισούται με μηδέν, καθώς επίσης και ότι το έργο που δαπανούν οι τάσεις $\underline{\sigma}_D$ για αλλαγή

όγκου ε_V (δηλαδή ο όρος T_4) ισούται επίσης με μηδέν. Στην περίπτωση που τα ολοκληρώματα αυτά είναι μη-μηδενικά, έχουμε αλληλοεπικάλυψη πεδίων, δηλαδή τόσο το τασικό πεδίο $\underline{\sigma}_V$ όσο και το $\underline{\sigma}_D$ προκαλούν και αλλαγή όγκου και αλλαγή σχήματος σε ένα υλικό με την επιβολή τους και συνεπώς ένας τέτοιος ενεργειακός διαχωρισμός δεν μας δίνει ξεκάθαρες πληροφορίες για τα περιγραφόμενα μεγέθη (αλλαγή όγκου και αλλαγή σχήματος).

Ωστόσο, ο υπολογισμός των ενεργειακών ποσοτήτων T_V και T_D στην περίπτωση των ανισότροπων υλικών έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα πολύπλοκος. Στη διαδρομή από το ισότροπο στο τρικλινές υλικό, πολλές συμμετρίες χάνονται και το πρόβλημα ορισμού των κατάλληλων μεγεθών για το σωστό διαχωρισμό της ενέργειας γίνεται όλο και λιγότερο διαισθητικό. Το μόνο σίγουρο είναι ότι ο διαχωρισμός του τανυστή των τάσεων σε υδροστατικό και αποκλίνοντα, όπως στην (2.5), αναλύει την ολική ενέργεια T σε ένα άθροισμα αντίστοιχο του (2.8), όπου όμως οι μεικτοί ενεργειακοί όροι T_3 και T_4 είναι σε κάθε κλάση ανισοτροπίας (πλην της κυβικής) μη-μηδενικοί. Επιπλέον, ο υδροστατικός τανυστής τάσης $\underline{\sigma}_V$ δεν αντιστοιχεί σε ογκομετρικό τανυστή παραμόρφωσης $\underline{\varepsilon}_V$, όπως στην (2.3), ούτε ο αποκλίνων τανυστής $\underline{\sigma}_D$ σε ισοχωρικό τανυστή $\underline{\varepsilon}_D$ αντίστοιχα. Το γεγονός αυτό οδήγησε εσφαλμένα στο συμπέρασμα ότι δεν είναι γενικώς δυνατός ο διαχωρισμός της ενέργειας παραμόρφωσης T σε ενέργεια αλλαγής όγκου και ενέργεια αλλαγής σχήματος.

Ο Φιλιππίδης στη διδακτορική του διατριβή [10] συμπεραίνει ότι:

«ο διαχωρισμός της πυκνότητας ενεργείας παραμορφώσεων, δεν είναι γενικώς δυνατός και οπωσδήποτε εξαρτάται από τη φόρτιση ως και από το ίδιο το ελαστικό στερεό ...»

ενώ και οι Kowalczyk K. και Ostrowska-Maciejewska J. [29] δεν θεώρησαν εφικτό το διαχωρισμό, όπως και ο Σοκόλης στη δική του διατριβή [11] που συνδυάζει στοιχεία και των δύο, επειδή ακριβώς οι μεικτοί όροι T_3 και T_4 προκύπτουν μη-μηδενικοί.

Είναι αλήθεια ότι για να μηδενιστούν οι όροι
$$\begin{cases} T_3 = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_D = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{\varepsilon}_D \\ T_4 = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_V = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{\varepsilon}_V \end{cases}$$
 αρκεί να συμβεί

ένα από τα επόμενα:

1. Η φόρτιση να είναι τέτοια που να μηδενίζει τους δύο όρους, ανεξαρτήτως των τιμών των ελαστικών σταθερών S_{ij} .
2. Το υλικό να έχει τέτοιες τιμές ελαστικών σταθερών S_{ij} που να μηδενίζονται οι δύο όροι για οποιαδήποτε φόρτιση.

Παράδειγμα: Για τα εγκαρσίως ισότροπα υλικά (εξαγωνικά ανισότροπα) η μορφή του μητρώου ενδόσεως είναι

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix}, \text{ οπότε προκύπτει μετά από πράξεις ότι}$$

- $\underline{\underline{\sigma}}_V \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D = \frac{1}{9}(s_{11} + s_{12} - s_{13} - s_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

Προφανώς, ο παραπάνω όρος μηδενίζεται αν και μόνο αν:

1. $s_{11} + s_{12} - s_{13} - s_{33} = 0$ ή
2. $\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3 = 0$ ή
3. $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Η πρώτη επιλογή προϋποθέτει ότι μεταξύ των ελαστικών σταθερών του εγκαρσίως ισότροπου μέσου ισχύει μία επιπλέον συνθήκη. Τότε όμως οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές εγκαρσίως ισότροπου μέσου θα είναι τέσσερις και όχι πέντε, κάτι που δεν προκύπτει με βάση τις θεωρήσεις συμμετρίας του Παραρτήματος. Οι άλλες δύο επιλογές συνιστούν ειδικές περιπτώσεις φόρτισης, άρα και πάλι δεν μπορεί να ισχύει γενικά για κάθε φόρτιση ο παραπάνω διαχωρισμός.

Η γενική λύση, αν υπάρχει, θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη της φόρτισης αλλά και των τιμών των ελαστικών σταθερών s_{ij} . Επειδή λοιπόν η μορφή των μητρώων ακαμψίας και ενδόσεως είναι προκαθορισμένη για κάθε κλάση ανισοτροπίας (βλ. Παράρτημα), θα πρέπει να προσανατολίσουμε τη σκέψη μας σε ένα διαφορετικό τρόπο διαχωρισμού του ταυυστή των τάσεων ή των παραμορφώσεων εξαρχής.

2.2 Προηγούμενες Προσεγγίσεις

Δεν πρέπει να θεωρείται τυχαίο το γεγονός ότι έως σήμερα δεν έχει προταθεί κανένας διαφορετικός διαχωρισμός του τανυστή των τάσεων από εκείνο των ισότροπων υλικών σε υδροστατικό και αποκλίνοντα. Αυτό οφείλεται στο ότι η έννοια της τάσης δεν είναι πρωτογενής. Αντιλαμβανόμαστε ότι ένα υλικό βρίσκεται υπό εντατική κατάσταση $\underline{\sigma}$ έμμεσα, όταν το βλέπουμε να παραμορφώνεται. Η σύνδεση μετέπειτα της παρατηρούμενης παραμόρφωσης με κάποιον τανυστή τάσης γίνεται με την εισαγωγή κατάλληλου Καταστατικού Νόμου. Η έννοια της παραμόρφωσης, λοιπόν, είναι εκείνη που οδηγεί σε μια γεωμετρική περιγραφή και συντελεί σε ένα επίπεδο κατανόησης της εντατικής κατάστασης. Άρα, είναι προτιμότερο κανείς να ξεκινήσει διαχωρίζοντας τον τανυστή των παραμορφώσεων $\underline{\varepsilon}$ σε δυο κατάλληλους τανυστές $\underline{\varepsilon}_V$ και $\underline{\varepsilon}_D$ οι οποίοι θα είναι αντιπροσωπευτικοί της αλλαγής όγκου και της αλλαγής σχήματος αντίστοιχα.

2.2.1 Ο ισότροπος διαχωρισμός των παραμορφώσεων

Οι Andrianoπουλος, Boulougouris, Iliopoulos [22,23] πρότειναν ο τανυστής παραμόρφωσης $\underline{\varepsilon}$ να διαχωρίζεται σε κάθε κλάση ανισοτροπίας σε έναν ογκομετρικό $\underline{\varepsilon}_V$ και έναν ισοχωρικό $\underline{\varepsilon}_D$, ακριβώς όπως στην περίπτωση των ισότροπων υλικών, δηλ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}_V = \left\{ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, 0, 0, 0 \right\} \\ \underline{\varepsilon}_D = \left\{ \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3}, \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1}{3}, \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3}, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 \right\} \end{array} \right.$$

Επειδή όμως σε κάθε κλάση ανισοτροπίας αντιστοιχεί και διαφορετικό μητρώο ακαμψίας \underline{C} , είναι προφανές ότι μέσω του Γενικευμένου Νόμου του Hooke (του Καταστατικού Νόμου των γραμμικά ελαστικών υλικών) οι αντίστοιχοι τανυστές τάσης $\underline{\sigma}_V$ και $\underline{\sigma}_D$ θα είναι και αυτοί διαφορετικής μορφής επίσης για κάθε διαφορετική κλάση ανισοτροπίας. Άρα, οι τύποι (2.5) ισχύουν μόνο για τα ισότροπα και τα κυβικά υλικά και χάνουν το νόημά τους στις υπόλοιπες κλάσεις ανισοτροπίας. Επιπλέον, ο τανυστής $\underline{\sigma}_V$ που αντιστοιχεί στον ογκομετρικό $\underline{\varepsilon}_V$ γενικά δεν μπορεί να είναι υδροστατικός, καθώς τα μέτρα ελαστικότητας (και συνακολούθως οι λόγοι Poisson) των ανισότροπων υλικών δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

Παράδειγμα: Για τα ορθότροπα υλικά, η μορφή του μητρώου ακαμψίας είναι:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \text{ οπότε η μορφή που προκύπτει για τον } \underline{\sigma}_V \text{ είναι:}$$

$$\bullet \quad \underline{\sigma}_V = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \right) \cdot \{ (c_{11} + c_{12} + c_{13}), (c_{12} + c_{22} + c_{23}), (c_{13} + c_{23} + c_{33}), 0, 0, 0 \} .$$

Παρατηρούμε ότι οι ορθές τάσεις είναι και οι τρεις διαφορετικές μεταξύ τους, αφού γενικά

$$c_{11} + c_{12} + c_{13} \neq c_{12} + c_{22} + c_{23} \neq c_{13} + c_{23} + c_{33}$$

Άρα με την υπόθεση του ισότροπου διαχωρισμού του τανυστή των παραμορφώσεων, η περίπτωση ενός υδροστατικού τανυστή τάσεων ως υπεύθυνου για την αλλαγή όγκου ενός ορθότροπου υλικού είναι αδύνατη.

Αν όμως επιπλέον προχωρήσουμε στην ανάλυση της ενέργειας παραμόρφωσης, όπως στην Εξίσωση (2.6), τότε και η λύση αυτή αποδεικνύεται προβληματική. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε κλάση ανισοτροπίας παρατηρούμε ότι οι μεικτοί ενεργειακοί όροι T_3 και T_4 στην Εξίσωση (2.7) είναι μη-μηδενικοί (υπάρχει αμοιβαία επιρροή). Αυτό σημαίνει ότι το έργο που απαιτείται για τη δημιουργία ογκομετρικής (ή ισοχωρικής) παραμόρφωσης παράγεται εν μέρει από τον τανυστή $\underline{\sigma}_V$ και εν μέρει από τον τανυστή $\underline{\sigma}_D$. Άρα η αρχική μας υπόθεση για το διαχωρισμό του τανυστή των παραμορφώσεων είναι εσφαλμένη. Γιατί όμως;

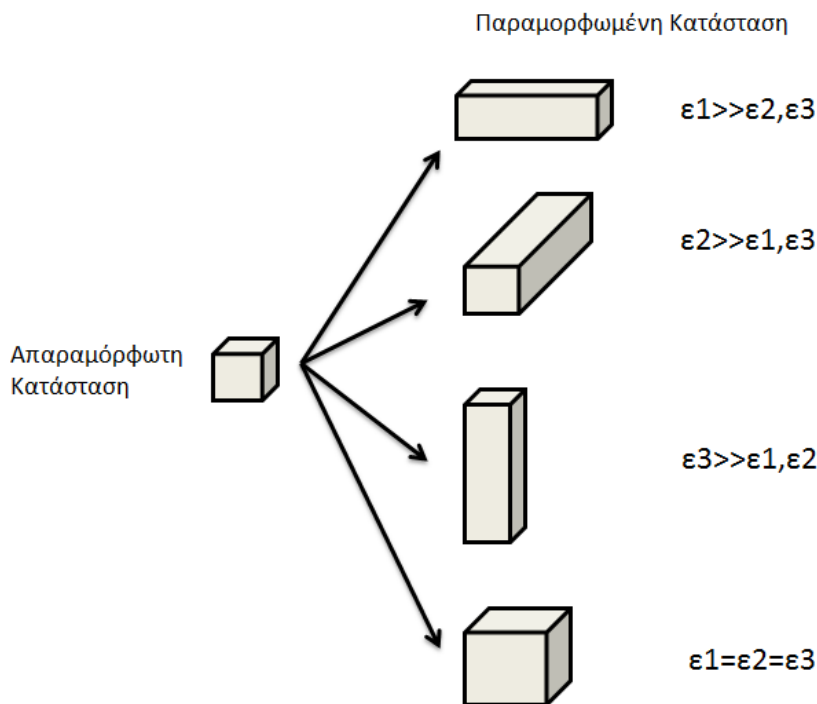
Στην παραδοχή για ισότροπο διαχωρισμό του τανυστή των παραμορφώσεων, σιωπηλά υποθέτουμε δύο ακόμη θέσεις:

1. ότι η αλλαγή όγκου ε_V είναι μια περίπτωση ομοιόθετης αλλαγής μηκών (ίσες ορθές παραμορφώσεις) και ότι
2. η ανηγμένη αλλαγή όγκου του τανυστή ε_V (που ισούται με το ίχνος του) ισούται με την ανηγμένη αλλαγή όγκου του ολικού τανυστή $\underline{\varepsilon}$, οπότε αναγκαστικά προκύπτει ότι η τιμή κάθε ορθής παραμόρφωσης είναι ίση με $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$.

Η δεύτερη θέση είναι και αυτή που είναι προβληματική. Δίνουμε μια εξήγηση για αυτό παρακάτω.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Όλες οι παραμορφωσιακές καταστάσεις που χαρακτηρίζονται από την ίδια ανηγμένη αλλαγή όγκου $(\Delta V / V) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ δεν αντιστοιχούν απαραίτητα και στην ίδια ενέργεια αλλαγής όγκου T_V .



Εικόνα 2.2: Ακραίες περιπτώσεις παραμόρφωσης με ίδια ανηγμένη αλλαγή όγκου

Το ποσό της ενέργειας που αντιστοιχεί σε μία παραμόρφωση $\alpha\%$ είναι συνάρτηση της κατεύθυνσης στην οποία αυτή πραγματοποιείται. Σε μια παραμόρφωση $\alpha\%$ στον άξονα 1 αντιστοιχεί ποσό ολικής ενέργειας T_1 , στον άξονα 2 T_2 , στον άξονα 3 T_3 και γενικά ισχύει ότι $T_1 \neq T_2 \neq T_3$.

Επιπλέον, επειδή $T_i = T_{V_i} + T_{D_i}$, $i = 1, 2, 3$, θα ισχύει γενικά επιπλέον και ότι $\begin{cases} T_{V_1} \neq T_{V_2} \neq T_{V_3} \\ T_{D_1} \neq T_{D_2} \neq T_{D_3} \end{cases}$.

Η ισότητα έχει γενική ισχύ μόνο στην περίπτωση που τα μεγέθη ενέργεια αλλαγής όγκου και ενέργεια αλλαγής σχήματος είναι ιστροπικές συναρτήσεις της παραμόρφωσης, κάτι που προφανώς δεν ισχύει στα ανισότροπα υλικά.

Με βάση τα παραπάνω, το μονόμετρο μέγεθος $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ της ανηγμένης αλλαγής όγκου δεν αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε ένα ποσό ενέργειας T . Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε μερικές παραμορφωσιακές καταστάσεις, όπου ναι μεν χαρακτηρίζονται από την ίδια ανηγμένη αλλαγή όγκου, το ίδιο όμως δεν θα πρέπει να ισχύει για τα χαρακτηριστικά τους ενεργειακά μεγέθη.

Για την περίπτωση του ισότροπου διαχωρισμού του τανυστή των παραμορφώσεων ειδικότερα, συμπεραίνουμε άμεσα ότι ισομοιράζοντας το άθροισμα των ορθών παραμορφώσεων $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ στους 3 άξονες, όπως στην (2.3), όχι μόνο δεν ισομοιράζουμε την ενέργεια στις 3 αυτές κατευθύνσεις, αλλά επιπλέον αλλοιώνουμε το συνολικό ποσό ενέργειας αλλαγής όγκου $(T_{V_1} + T_{V_2} + T_{V_3})$ που αντιστοιχεί στη δεδομένη αρχική ανηγμένη αλλαγή όγκου $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$. Το πλεόνασμα ή το υστέρημα αυτής της λανθασμένα υπολογισμένης ενέργειας είναι ακριβώς όσο το περιεχόμενο των παραμενουσών μη-μηδενικών μεικτών ενεργειακών όρων T_3 ή T_4 (σε αυτή την περίπτωση είναι $T_3 = T_4$).

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ο ισοτροπικός ογκομετρικός τανυστής παραμορφώσεων $\underline{\varepsilon}_V = \left\{ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, 0, 0, 0 \right\}$ στην περίπτωση των ανισότροπων υλικών αντιστοιχεί σε ποσό ενέργειας διαφορετικό (υπερ- ή υπο-εκτιμημένο) από εκείνο της πραγματικής αλλαγής όγκου, εκτός και αν εξαρχής ίσχυε ότι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, μια ειδική περίπτωση κατά την οποία ισχύει συγχρόνως ότι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{3}$.

Επιπλέον, από την παράγραφο αυτή συμπεραίνουμε ότι το βαθμωτό μέγεθος *ανηγμένη αλλαγή όγκου* δεν είναι χαρακτηριστικό της ελαστικής ενέργειας αλλαγής όγκου.

2.2.2 Δύο επιπλέον προσεγγίσεις που δεν οδηγούν σε επιθυμητή λύση

Δύο από τις πρώτες προσπάθειες αντιμετώπισης του προβλήματος στα πλαίσια αυτής της διατριβής ήταν οι ακόλουθες:

- I. Επιλογή μη-σφαιρικού ογκομετρικού τανυστή $\underline{\varepsilon}_V = \{a, b, c, 0, 0, 0\}$ ως υπεύθυνου για την αλλαγή όγκου, όπου οι συνιστώσες a, b, c θα είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τα εξής:

- i) $a + b + c = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

- ii) Θα μηδενίζουν τους μεικτούς ενεργειακούς όρους T_3 και T_4 .

Τότε θα είναι και $\underline{\varepsilon}_D = \{\varepsilon_1 - a, \varepsilon_2 - b, \varepsilon_3 - c, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}$. Η λύση αυτή όμως απορρίφθηκε αφενός μεν επειδή μια μη-ομοιόθετη αλλαγή μηκών ($a \neq b \neq c$) μεταβάλλει όχι μόνο τον όγκο αλλά και το σχήμα ενός υλικού (π.χ. μεταβάλλει τις εσωτερικές γωνίες του αντιπροσωπευτικού κύβου) και αφετέρου επειδή με βάση τα συμπεράσματα στα οποία οδηγηθήκαμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου, δύο τανυστές παραμόρφωσης με ίσα ίχνη (αθροίσματα διαγωνίων) δεν αντιστοιχούν απαραίτητα σε ίση ποσότητα ενέργειας (αλλαγής όγκου εν προκειμένω).

Προϊστορία του προβλήματος - Νέες Σκέψεις

- II. Διαχωρισμός του τανυστή των τάσεων σε έναν υδροστατικό $\sigma_v = \{p, p, p, 0, 0, 0\}$ και έναν αποκλίνοντα $\sigma_D = \{\sigma_1 - p, \sigma_2 - p, \sigma_3 - p, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$, όπου όμως η τιμή της παραμέτρου p δεν θα είναι ίση με $\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, αλλά θα λαμβάνει υπόψιν της τις συμμετρίες κάθε ανισότροπου μέσου και θα είναι τέτοια ώστε να μηδενίζονται οι μεικτοί ενεργειακοί όροι T_3 και T_4 . Η ικανοποίηση των παραπάνω προϋποθέσεων καταλήγει στις ακόλουθες τιμές της παραμέτρου p για κάθε κλάση ανισοτροπίας.

Πίνακας 2.1: Τιμή της υδροστατικής παραμέτρου p για κάθε κλάση ανισοτροπίας

| Κλάση ανισοτροπίας | Τιμή της παραμέτρου p |
|-----------------------------------|---|
| Εξαγωνικά, Τριγωνικά, Τετραγωνικά | $\frac{(s_{11} + s_{12} + s_{13})(\sigma_1 + \sigma_2)}{2s_{11} + 2s_{12} + 4s_{13} + s_{33}} + \frac{(2s_{13} + s_{33})\sigma_3}{2s_{11} + 2s_{12} + 4s_{13} + s_{33}}$ |
| Ορθότροπα | $\frac{(s_{11} + s_{12} + s_{13})\sigma_1}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} + \frac{(s_{12} + s_{22} + s_{23})\sigma_2}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} + \frac{(s_{13} + s_{23} + s_{33})\sigma_3}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})}$ |
| Μονοκλινή | $\frac{(s_{11} + s_{12} + s_{13})\sigma_1}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} + \frac{(s_{12} + s_{22} + s_{23})\sigma_2}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} + \frac{(s_{13} + s_{23} + s_{33})\sigma_3}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} + \frac{(s_{16} + s_{26} + s_{36})\sigma_6}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})}$ |

| | |
|----------|---|
| Τρικλινή | $\frac{(s_{11} + s_{12} + s_{13})\sigma_1}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} +$ $\frac{(s_{12} + s_{22} + s_{23})\sigma_2}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} +$ $\frac{(s_{13} + s_{23} + s_{33})\sigma_3}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} +$ $\frac{(s_{14} + s_{24} + s_{34})\sigma_4}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} +$ $\frac{(s_{15} + s_{25} + s_{35})\sigma_5}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} +$ $\frac{(s_{16} + s_{26} + s_{36})\sigma_6}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})}$ |
|----------|---|

Παρατηρώ ότι σε κάθε περίπτωση είναι:

$$p = q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3 + q_4\sigma_4 + q_5\sigma_5 + q_6\sigma_6 \quad (2.10)$$

όπου

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{s_{11} + s_{12} + s_{13}}{D_s}, q_2 = \frac{s_{12} + s_{22} + s_{23}}{D_s}, q_3 = \frac{s_{13} + s_{23} + s_{33}}{D_s} \\ q_4 &= \frac{s_{14} + s_{24} + s_{34}}{D_s}, q_5 = \frac{s_{15} + s_{25} + s_{35}}{D_s}, q_6 = \frac{s_{16} + s_{26} + s_{36}}{D_s} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

και

$$D_s = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23}) \quad (2.12)$$

Και η λύση αυτή είναι προβληματική όμως. Η υπολογισθείσα τιμή p για κάθε κλάση ανισοτροπίας λαμβάνει υπόψιν της τις συμμετρίες του εκάστοτε μέσου και μηδενίζει τους μεικτούς ενεργειακούς όρους T_3, T_4 . Σε κάθε προκύπτοντα τανυστή $\underline{\sigma}_V$ όμως αντιστοιχεί ένας τανυστής παραμόρφωσης $\underline{\varepsilon}_V$ ο οποίος έχει τις ιδιότητες της περίπτωσης I. Για τους ίδιους λόγους λοιπόν θα πρέπει να απορριφθεί.

Ο λόγος που ασχοληθήκαμε με έναν πιθανό διαχωρισμό του τανυστή των τάσεων σε έναν υδροστατικό και έναν οιονεί-αποκλίνοντα είναι η ευρέως διαδεδομένη άποψη ότι η περίπτωση αλλαγής όγκου σχετίζεται με την επιβολή υδροστατικής πίεσης. Οι υποθέσεις και τα επ' αυτών παραγόμενα αποτελέσματά μας ως τώρα όμως δεν συνηγορούν υπέρ αυτής της άποψης. Οι έννοιες της συμπιεστότητας και της αλλαγής όγκου δεν σχετίζονται μεταξύ τους στην περίπτωση των γραμμικά ελαστικών ανισότροπων υλικών. Η ενέργεια που υπολογίζεται με τον διαχωρισμό II είναι μάλλον η ενέργεια συμπιεστότητας και όχι της αλλαγής όγκου!

2.3 Διαχωρισμός με τη μέθοδο της Φασματικής Ανάλυσης

Έστω M ο χώρος των συμμετρικών τανυστών τετάρτης τάξεως.

Κάθε τανυστής \underline{A} που ανήκει στο χώρο M αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως εξής:

$$\underline{A} = \lambda_1 \underline{E}_1 + \dots + \lambda_k \underline{E}_k \quad (2.13)$$

όπου $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k, k \leq 6\}$ το σύνολο των ιδιοτιμών (φάσμα) του \underline{A} και οι τανυστές τετάρτης τάξεως \underline{E}_k είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου Lagrange που προσεγγίζει την χαρακτηριστική εξίσωση του \underline{A} .

Δίνονται από τις σχέσεις:

$$\underline{E}_m = \frac{(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I}) \cdots (\underline{A} - \lambda_{m-1} \underline{I})(\underline{A} - \lambda_{m+1} \underline{I}) \cdots (\underline{A} - \lambda_k \underline{I})}{(\lambda_m - \lambda_1) \cdots (\lambda_m - \lambda_{m-1})(\lambda_m - \lambda_{m+1}) \cdots (\lambda_m - \lambda_k)} \quad (2.14)$$

Η παραπάνω παράσταση (2.13) καλείται *φασματική ανάπτυξη* του \underline{A} [29-38].

Το σύνολο των τανυστών $\{\underline{E}_m\}$ αποτελεί μία βάση του χώρου M . Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \underline{E}_m \cdot \underline{E}_n = 0 \\ \underline{E}_k \cdot \underline{E}_k = \underline{E}_k^2 = \underline{E}_k \end{cases} \quad \text{και} \quad \underline{I} = \underline{E}_1 + \dots + \underline{E}_k \quad (2.15)$$

Είναι προφανές ότι η Φασματική Ανάλυση δεν είναι ο μοναδικός τρόπος ανάλυσης ενός τανυστή τετάρτης τάξης. Μπορεί κανείς να βρει μια πληθώρα διαφορετικών τρόπων ανάλυσης στη βιβλιογραφία [35,40,41].

Αν \underline{B} είναι ο αντίστροφος του \underline{A} , τότε η φασματική ανάπτυξη του \underline{B} θα είναι αντίστοιχα:

$$\underline{B} = \frac{1}{\lambda_1} \underline{E}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_k} \underline{E}_k \quad (2.16)$$

αφού ως γνωστόν οι ιδιοτιμές του αντίστροφου μητρώου είναι οι αντίστροφες των ιδιοτιμών του αρχικού μητρώου.

Τα παραπάνω ισχύουν προφανώς για τους τανυστές ακαμψίας \underline{C} και ενδόσεως \underline{S} που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. Η φασματική ανάλυση των ελαστικών τους μητρώων έχει επίδραση στα μητρώα στα οποία εφαρμόζεται, δηλαδή στους τανυστές παραμόρφωσης $\underline{\xi}$ και τάσης $\underline{\sigma}$ αντίστοιχα. Συνακόλουθα, ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως ένα σύστημα το πολύ έξι (αναλόγως του πλήθους των ιδιοτιμών) ανεξάρτητων μεταξύ τους καταστατικών σχέσεων όπου τα συνδεόμενα μέρη τάσεων και παραμορφώσεων έχουν σχέση αναλογίας με λόγο $\lambda_k, k \leq 6$.

Έστω η φασματική ανάλυση του τανυστή ενδόσεως \underline{S} :

$$\underline{S} = \lambda_1 \underline{E}_1 + \dots + \lambda_k \underline{E}_k \quad (2.17)$$

Για τον τανυστή των τάσεων $\underline{\sigma}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \underline{I} \cdot \underline{\sigma} = (\underline{E}_1 + \dots + \underline{E}_k) \cdot \underline{\sigma} = \underline{E}_1 \cdot \underline{\sigma} + \dots + \underline{E}_k \cdot \underline{\sigma} \Rightarrow \\ \underline{\sigma} &= \bar{\sigma}_1 + \dots + \bar{\sigma}_k \end{aligned} \quad (2.18)$$

όπου $\bar{\sigma}_m = \underline{E}_m \cdot \underline{\sigma}$, $m = 1, \dots, k$ είναι οι ιδιοτανυστές τάσεων που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $k = 1, \dots, 6$ αντίστοιχα.

Οι ιδιοτανυστές $\bar{\sigma}_m$ είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ικανοποιούν τα εξής:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_m \cdot \bar{\sigma}_n &= 0, \quad m \neq n \\ \underline{S} \cdot \bar{\sigma}_m &= (\underline{E}_1 + \dots + \underline{E}_k) \cdot \bar{\sigma}_m = \lambda_m \bar{\sigma}_m \end{aligned} \quad (2.19)$$

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Φασματικό Θεώρημα:

Έστω L ο χώρος των συμμετρικών τανυστών δευτέρας τάξεως επί του R^3 .

Το σύνολο όλων των ιδιοτανυστών των ερμιτιανών τανυστών τετάρτης τάξεως \underline{S} και \underline{C} σχηματίζει μια βάση του χώρου L .

Μέσω της φασματικής ανάλυσης ο χώρος L των συμμετρικών τανυστών δευτέρας τάξης αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως ευθύ άθροισμα k υποχώρων:

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_k, \quad k \leq 6 \quad (2.20)$$

όπου $L_m \perp L_n$, για $m \neq n$.

Επιπλέον, ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke αναλύεται ως εξής:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S} \cdot \underline{\sigma} = (\lambda_1 \underline{E}_1 + \dots + \lambda_k \underline{E}_k) \cdot \underline{\sigma} = \lambda_1 \bar{\sigma}_1 + \dots + \lambda_k \bar{\sigma}_k \quad (2.21)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\underline{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \dots + \bar{\varepsilon}_k \quad (2.22)$$

Τελικά καταλήγουμε σε k εξισώσεις:

$$\bar{\varepsilon}_m = \lambda_m \cdot \bar{\sigma}_m, \quad m = 1, \dots, k \quad (2.23)$$

Προϊστορία του προβλήματος - Νέες Σκέψεις

όπου οι ιδιοταυστές παραμόρφωσης $\bar{\varepsilon}_m$ είναι ανάλογοι των ιδιοταυστών τάσης $\bar{\sigma}_m$ με λόγο αναλογίας την αντιστοιχούσα σε αυτούς ιδιοτιμή λ_m .

Ως επακόλουθο και η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}T(\underline{\sigma}) &= \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 + \dots + \bar{\sigma}_k) \cdot \underline{S} \cdot (\bar{\sigma}_1 + \dots + \bar{\sigma}_k) \Rightarrow \\T(\underline{\sigma}) &= \frac{1}{2} \lambda_1 \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_1 + \dots + \frac{1}{2} \lambda_k \bar{\sigma}_k \cdot \bar{\sigma}_k \Rightarrow \\T(\underline{\sigma}) &= T(\bar{\sigma}_1) + \dots + T(\bar{\sigma}_k)\end{aligned} \quad (2.24)$$

σε όρους τάσεων

και

$$\begin{aligned}T(\underline{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_1 + \dots + \bar{\varepsilon}_k) \cdot \underline{C} \cdot (\bar{\varepsilon}_1 + \dots + \bar{\varepsilon}_k) \Rightarrow \\T(\underline{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \lambda_1 \bar{\varepsilon}_1 \cdot \bar{\varepsilon}_1 + \dots + \frac{1}{2} \lambda_k \bar{\varepsilon}_k \cdot \bar{\varepsilon}_k \Rightarrow \\T(\underline{\varepsilon}) &= T(\bar{\varepsilon}_1) + \dots + T(\bar{\varepsilon}_k)\end{aligned} \quad (2.25)$$

σε όρους παραμορφώσεων.

Ο Rychlewski [31] ονόμασε τις φορτίσεις $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_k$ ενεργειακά ορθογώνιες, επειδή ακριβώς είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους με την έννοια της καθετότητας (εσωτερικό γινόμενο μηδέν) και αναλύουν με μοναδικό τρόπο την ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης σε ανεξάρτητα ενεργειακά μέρη.

Παρατηρήσεις

1. Για να καταλάβουμε καλύτερα τον τρόπο ανάλυσης της ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων με βάση τη φασματική ανάλυση, το εφαρμόζουμε εδώ για την περίπτωση των ισότροπων υλικών.

Μητρώο ενδόσεως

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 \cdot (s_{11} - s_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & 2 \cdot (s_{11} - s_{12}) & 0 \\ & & & & & 2 \cdot (s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = s_{11} - s_{12} \quad \text{διπλή}$$

$$\lambda_2 = 2(s_{11} - s_{12}) \quad \text{τριπλή}$$

$$\lambda_3 = s_{11} + 2s_{12} \quad \text{απλή}$$

Δηλαδή, οι ιδιοτιμές των ισότροπων υλικών είναι τρεις και όχι δύο όπως θα περίμενε κανείς με βάση την καταστατική σχέση με τις δύο σταθερές του Lamé

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

που γνωρίζουμε ότι περιγράφει την ελαστική τους συμπεριφορά.

Προφανώς αν υποθέσουμε ότι $\lambda_1 = \mu$, τότε θα είναι και $\lambda_2 = 2\mu$. Αυτό δικαιολογεί εν μέρει τη χρήση μίας μεταβλητής για τα δύο αυτά μεγέθη.

Πίνακες Προβολής

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτανυστές τάσης

$$\bar{\sigma}_1 = \left[\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \quad \frac{-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}{3} \quad \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

$$\bar{\sigma}_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6]^T$$

$$\bar{\sigma}_3 = \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

Εδώ παρατηρούμε ότι $\bar{\sigma}_3$ είναι ο υδροστατικός τανυστής, ενώ το άθροισμα των $\bar{\sigma}_1$ και $\bar{\sigma}_2$ σχηματίζει τον αποκλίνοντα τανυστή τάσης.

Ιδιοτανυστές παραμόρφωσης

$$\bar{\xi}_1 = (s_{11} - s_{12}) \cdot \left[\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \quad \frac{-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}{3} \quad \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

$$\bar{\xi}_2 = 2(s_{11} - s_{12}) \cdot [0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6]^T$$

$$\bar{\xi}_3 = (s_{11} + 2s_{12}) \cdot \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

Αντίστοιχα με τις τάσεις, παρατηρώ εδώ για τις παραμορφώσεις ότι $\bar{\xi}_3$ είναι ο ογκομετρικός τανυστής και το άθροισμα των $\bar{\xi}_1$ και $\bar{\xi}_2$ σχηματίζει τον ισοχωρικό τανυστή παραμόρφωσης.

Διαχωριζόμενες ενέργειες

$$T_1 = \frac{1}{3}(s_{11} - s_{12})(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

$$T_2 = (s_{11} - s_{12})(\sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2)$$

$$T_3 = \frac{1}{6}(s_{11} + 2s_{12})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Για τις ενέργειες παρατηρώ ότι $T_V = T_3$ ενώ $T_D = T_1 + T_2$. Άρα ακόμα και στην περίπτωση των ισότροπων υλικών, η μέθοδος της Φασματικής Ανάλυσης δεν οδηγεί αυτομάτως στο διαχωρισμό της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης σε διογκωτική και στρεβλωτική συνιστώσα. Απαιτεί το εκ των υστέρων άθροισμα των δύο

διαχωριζόμενων όρων. Άρα χρειάζεται μεγάλη προσοχή στην εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων με βάση τη φασματική ανάλυση.

2. Με τη μέθοδο της φασματικής ανάλυσης, για τους προκύπτοντες ιδιοτανυστές τάσης και παραμόρφωσης προκύπτει πάντα μια σχέση αναλογίας:

$$\bar{\sigma}_m = \lambda_m \cdot \bar{\varepsilon}_m \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{m,1} \\ \sigma_{m,2} \\ \sigma_{m,3} \\ \sigma_{m,4} \\ \sigma_{m,5} \\ \sigma_{m,6} \end{Bmatrix} = \lambda_m \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{m,1} \\ \varepsilon_{m,2} \\ \varepsilon_{m,3} \\ \varepsilon_{m,4} \\ \varepsilon_{m,5} \\ \varepsilon_{m,6} \end{Bmatrix}$$

Από αυτό καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι μια παραμορφωσιακή κατάσταση καθαρής αλλαγής όγκου, η οποία χαρακτηρίζεται από ίσες τιμές ορθών παραμορφώσεων $\varepsilon_{m,1} = \varepsilon_{m,2} = \varepsilon_{m,3} = const$ θα αποτελεί ιδιοτανυστή παραμόρφωσης αν και μόνο αν ο αντίστοιχος ιδιοτανυστής τάσεων είναι υδροστατικός. Ισοδύναμα, για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει ο σφαιρικός τανυστής δευτέρας τάξης \underline{I} να είναι ιδιοτανυστής του τανυστή ενδόσεως \underline{S} . Κάτι τέτοιο όμως ισχύει μόνο στα ισότροπα και κυβικά ανισότροπα υλικά.

Το αποτέλεσμα αυτό της φασματικής ανάλυσης οδήγησε τους Φιλιππίδη [10], Σοκόλη [11] και την ομάδα των Olszak, Ostrowska-Maciejewska [29] στο συμπέρασμα ότι η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης δεν μπορεί να διαχωριστεί σε μία καθαρά διογκωτική και μία καθαρά στρεβλωτική συνιστώσα.

Μήπως όμως η μέθοδος της φασματικής ανάλυσης θέτει πολύ αυστηρούς όρους στην επίλυση του προβλήματος; Είναι φυσικά απαραίτητη αυτή η διατήρηση μιας σχέσης αναλογίας πάντοτε μεταξύ των διαχωριζόμενων τασικών και παραμορφωσιακών τανυστών; Θεωρούμε πως είναι μία πολύ αυστηρή μαθηματική συνθήκη που καθιστά την επίλυση του προβλήματος αδύνατη.

2.4 Συμπεράσματα Δευτέρου Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό είδαμε πώς διαχωρίζεται η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης γραμμικά ελαστικών ισότροπων υλικών σε δύο ανεξάρτητα μέρη, τα οποία αντιστοιχούν στην ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του καταπονούμενου υλικού.

Παρουσιάσαμε με όσο το δυνατόν πληρέστερο τρόπο ορισμούς εννοιών καθώς και μαθηματικούς τρόπους χειρισμού μιας ενδεχόμενης επέκτασης του διαχωρισμού αυτού σε ανισότροπα υλικά και καταλήξαμε σε μια σειρά συμπερασμάτων που συγκεντρώνονται στα ακόλουθα σημεία:

- Η περίπτωση υδροστατικής φόρτισης για τα ανισότροπα υλικά είναι μια καταπόνηση μέσω της οποίας τα υλικά διαθέτουν ένα ποσοστό της προφερόμενης σε αυτά ενέργειας για να αλλάξουν τον όγκο τους αλλά και ένα ποσοστό για να αλλάξουν το σχήμα τους (μεικτή ενεργειακά περίπτωση).
- Δεν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της ανηγμένης αλλαγής όγκου και της ελαστικής ενέργειας αλλαγής όγκου των ανισότροπων υλικών. Υλικά τα οποία χαρακτηρίζονται από την ίδια ανηγμένη αλλαγή όγκου, δεν διαθέτουν γενικά το ίδιο ποσοστό της προσφερόμενης σε αυτά ενέργειας για να αλλάξουν τον όγκο τους. Σε κάποιες διευθύνσεις παραμόρφωσης η ίδια ανηγμένη αλλαγή όγκου επιτυγχάνεται με λιγότερο ή περισσότερο ενεργειακό κόστος.
- Η μαθηματική μέθοδος της Φασματικής Ανάλυσης των τανυστών ενδόσεως ανισότροπων υλικών οδηγεί σε έναν διαχωρισμό της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης, ο οποίος οφείλει να ικανοποιεί συγκεκριμένες μαθηματικές συνθήκες. Δεν θεωρούμε ότι οι μαθηματικές αυτές συνθήκες είναι απαραίτητες στη διερευνούμενη επέκταση του διαχωρισμού της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης σε ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος.
- Εξακολουθούμε να πιστεύουμε ότι η περίπτωση ενός τανυστή ε_V του οποίου οι ορθές παραμορφώσεις είναι ίσες μεταξύ τους συνιστά τη μόνη περίπτωση καθαρής αλλαγής όγκου. Έχουμε αποκλείσει όμως την περίπτωση αυτές οι ορθές

παραμορφώσεις να παίρνουν την τιμή $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3⁰

3.1 Τί ορίζουμε ως αλλαγή όγκου;

Σε κάθε προσπάθεια διαχωρισμού της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης σε διογκωτική και στρεβλωτική συνιστώσα, είναι απαραίτητο να έχουμε ένα πλαίσιο αντίληψης του πώς περιγράφεται μια κατάσταση αποκλειστικής αλλαγής όγκου ή σχήματος. Αν γνωρίζουμε ακριβώς πώς περιγράφεται π.χ. μια κατάσταση καθαρής αλλαγής όγκου τότε επειδή η ολική ενέργεια είναι ανεξάρτητη του δρόμου φόρτισης (τα ελαστικά πεδία είναι διατηρητικά), ο διαχωρισμός προκύπτει από την υπέρθεση δύο προβλημάτων με ξεχωριστό φυσικό νόημα: ενός προβλήματος καθαρής αλλαγής όγκου και ενός αλλαγής σχήματος.

Για να μπορέσουμε να δώσουμε κάποιους ορισμούς για την αλλαγή όγκου ή σχήματος αναγκαστικά καταφεύγουμε σε μια περιγραφή με όρους παραμορφώσεων, διότι μόνο με τις παραμορφώσεις μπορούμε να έχουμε μια εποπτεία των διαφόρων καταστάσεων. Οι τάσεις γίνονται έμμεσα αντιληπτές, μέσω των παραμορφώσεων.

Μια παραμορφωσιακή κατάσταση θα λέμε ότι είναι **καθαρή** (μόνο) **αλλαγή όγκου** όταν είναι ομοιόθετη (ο Love [42] ονόμασε τέτοιου είδους παραμορφώσεις *κυβοειδείς*), δηλαδή της μορφής

$$\underline{\varepsilon}_V = \{m, m, m, 0, 0, 0\} \quad (3.1)$$

Όταν ένα υλικό οποιουδήποτε αρχικού σχήματος παραμορφωθεί ομοιόθετα σύμφωνα με τον ορισμό (3.1), διατηρεί όλες τις αρχικές του συμμετρίες καθώς και το σχήμα του. Αν αρχικά ήταν κύβος, παραμένει κύβος. Επίσης όλες οι γωνίες του διατηρούν την ίδια τιμή (δεν στρεβλώνεται).

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, οποιαδήποτε παραμορφωσιακή κατάσταση διαφορετικής τανυστικής μορφής (δηλαδή είτε με άνισες ορθές συνιστώσες είτε μόνο με διατμητικές) θα εμπεριέχει σίγουρα αλλαγή σχήματος.

Συνεπώς, οποιαδήποτε παραμορφωσιακή κατάσταση $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}$ αναλύεται ως εξής:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_V + \underline{\varepsilon}_D \quad (3.2)$$

όπου

$$\underline{\varepsilon}_V = \{m, m, m, 0, 0, 0\} \quad (3.3)$$

και

$$\underline{\varepsilon}_D = \{\varepsilon_1 - m, \varepsilon_2 - m, \varepsilon_3 - m, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}. \quad (3.4)$$

Ακολουθως, γνωρίζουμε ήδη για τα ισότροπα υλικά ότι παραμορφώσεις όπως την (3.3) προκαλούν μόνο οι υδροστατικές φορτίσεις. Αναλυτικά, μέσω του Γενικευμένου Νόμου του Hooke, η μορφή των τανυστών τάσης $\underline{\sigma}_V$ που προκαλούν παραμορφώσεις τύπου (3.3) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Μια νέα προσέγγιση με όρους συμμετρίας

Πίνακας 3.1: Μορφή των ταυιστών τάσης $\underline{\sigma}_V$ που προκαλούν ομοιόθετη αλλαγή όγκου

| Είδος ανισοτροπίας | Ταυιστής $\underline{\sigma}_V$ |
|-----------------------------------|--|
| Ισότροπα, Κυβικά | $\left\{ \begin{array}{c} (c_{11} + 2c_{12})m \\ (c_{11} + 2c_{12})m \\ (c_{11} + 2c_{12})m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$ |
| Εξαγωνικά, Τριγωνικά, Τετραγωνικά | $\left\{ \begin{array}{c} (c_{11} + c_{12} + c_{13})m \\ (c_{11} + c_{12} + c_{13})m \\ (2c_{13} + c_{33})m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$ |
| Ορθότροπα | $\left\{ \begin{array}{c} (c_{11} + c_{12} + c_{13})m \\ (c_{12} + c_{22} + c_{23})m \\ (c_{13} + c_{23} + c_{33})m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$ |
| Μονοκλινή | $\left\{ \begin{array}{c} (c_{11} + c_{12} + c_{13})m \\ (c_{12} + c_{22} + c_{23})m \\ (c_{13} + c_{23} + c_{33})m \\ 0 \\ 0 \\ (c_{16} + c_{26} + c_{36})m \end{array} \right\}$ |
| Τρικλινή | $\left\{ \begin{array}{c} (c_{11} + c_{12} + c_{13})m \\ (c_{12} + c_{22} + c_{23})m \\ (c_{13} + c_{23} + c_{33})m \\ (c_{14} + c_{24} + c_{34})m \\ (c_{15} + c_{25} + c_{35})m \\ (c_{16} + c_{26} + c_{36})m \end{array} \right\}$ |

Μια νέα προσέγγιση με όρους συμμετρίας

Από τον Πίνακα 3.1 συμπεραίνουμε ότι οι υδροστατικές φορτίσεις προκαλούν καθαρή αλλαγή όγκου μόνο στην περίπτωση των ισότροπων και των κυβικά ανισότροπων υλικών. Για τα υπόλοιπα ανισότροπα υλικά, μία υδροστατική φόρτιση προκαλεί μη-ομοιόθετη αλλαγή όγκου (άρα και αλλαγή σχήματος σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω) και ακόμα περισσότερο στα μονοκλινή και τρικλινή υλικά προκαλεί και αλλαγή γωνιών (δηλαδή αλλαγή σχήματος). Άρα, σε πλήρη συμφωνία με όσα συμπεράναμε στο τέλος του Κεφαλαίου 2, η υδροστατική φόρτιση δεν προκαλεί μόνο αλλαγή όγκου στα ανισότροπα υλικά. Προκαλεί και αλλαγή σχήματος.

3.2 Προσπάθεια διαχωρισμού βασισμένη σε παραμορφώσεις

Στον Πίνακα 3.1 δώσαμε τη μορφή των τανυστών τάσης $\underline{\sigma}_V$ οι οποίοι προκαλούν ομοιόθετη παραμόρφωση $\underline{\varepsilon}_V$ της μορφής (3.1). Όμως, οι συνιστώσες τους σ_i δίνονται συναρτήσει της μεταβλητής m . Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι τι τιμή θα πρέπει να δώσουμε στη μεταβλητή m ούτως ώστε η υπολογιζόμενη ενέργεια αλλαγής όγκου να είναι ίση με τη δεδομένη σε κάθε φόρτιση ενέργεια αλλαγής όγκου;

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι οι Andrianopoulos, Boulougouris, Iliopoulos [22] έδωσαν την απάντηση :

$$m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \quad (3.5)$$

Για τα ισότροπα και τα κυβικά ανισότροπα υλικά γνωρίζουμε ήδη ότι η απάντηση αυτή είναι και η σωστή. Για τα υπόλοιπα ανισότροπα υλικά όμως δεν φαίνεται να δικαιώνονται. Πράγματι, από την ενεργειακή ανάλυση σε όρους παραμορφώσεων

$$T = \frac{1}{2} \varepsilon_V \cdot \underline{C} \cdot \varepsilon_V + \frac{1}{2} \varepsilon_D \cdot \underline{C} \cdot \varepsilon_D + \frac{1}{2} \varepsilon_V \cdot \underline{C} \cdot \varepsilon_D + \frac{1}{2} \varepsilon_D \cdot \underline{C} \cdot \varepsilon_V \quad (3.6)$$

προκύπτει ότι :

$$t_{34} = T_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_V \cdot \underline{C} \cdot \varepsilon_D = T_4 = \frac{1}{2} \varepsilon_D \cdot \underline{C} \cdot \varepsilon_V \neq 0 \quad (3.7)$$

Αναλυτικότερα, για τα μεικτά ενεργειακά γινόμενα t_{34} προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές του Πίνακα 3.2.

Μια νέα προσέγγιση με όρους συμμετρίας

Πίνακας 3.2: Υπολογισμός του μεικτού ενεργειακού γινομένου t_{34} για $m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$

| Είδος ανισοτροπίας | Τιμή της t_{34} |
|-----------------------------------|--|
| Εξαγωνικά, Τριγωνικά, Τετραγωνικά | $\frac{1}{18}(c_{11} + c_{12} - c_{13} - c_{33})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$ |
| Ορθότροπα | $\frac{1}{18}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left(\begin{array}{l} (2c_{11} - c_{22} - c_{33} + c_{12} + c_{13} - 2c_{23})\varepsilon_1 + \\ (-c_{11} + 2c_{22} - c_{33} + c_{12} - 2c_{13} + c_{23})\varepsilon_2 + \\ (-c_{11} - c_{22} + 2c_{33} - 2c_{12} + c_{13} + c_{23})\varepsilon_3 \end{array} \right)$ |
| Μονοκλινή | $\frac{1}{18}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left(\begin{array}{l} (2c_{11} - c_{22} - c_{33} + c_{12} + c_{13} - 2c_{23})\varepsilon_1 + \\ (-c_{11} + 2c_{22} - c_{33} + c_{12} - 2c_{13} + c_{23})\varepsilon_2 + \\ (-c_{11} - c_{22} + 2c_{33} - 2c_{12} + c_{13} + c_{23})\varepsilon_3 + \\ +3(c_{16} + c_{26} + c_{36})\varepsilon_6 \end{array} \right)$ |
| Τρικλινή | $\frac{1}{18}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \left(\begin{array}{l} (2c_{11} - c_{22} - c_{33} + c_{12} + c_{13} - 2c_{23})\varepsilon_1 + \\ (-c_{11} + 2c_{22} - c_{33} + c_{12} - 2c_{13} + c_{23})\varepsilon_2 + \\ (-c_{11} - c_{22} + 2c_{33} - 2c_{12} + c_{13} + c_{23})\varepsilon_3 + \\ 3(c_{14} + c_{24} + c_{34})\varepsilon_4 + \\ 3(c_{15} + c_{25} + c_{35})\varepsilon_5 + \\ 3(c_{16} + c_{26} + c_{36})\varepsilon_6 \end{array} \right)$ |

Βέβαια η τιμή $m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$ είπαμε ότι δεν ήταν τυχαία επιλογή. Επιλέχθηκε προκειμένου ο προκύπτων τανυστής παραμόρφωσης $\underline{\varepsilon}_V$ να έχει την ίδια ανηγμένη αλλαγή όγκου $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ με τον ολικό τανυστή παραμόρφωσης $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}$. Η υπόθεση αυτή όμως καταλήξαμε ότι ήταν εσφαλμένη. Εάν ήταν αληθής, αυτό θα σήμαινε ότι όλες οι καταστάσεις με την ίδια ανηγμένη αλλαγή όγκου θα χρειαζόνταν ακριβώς την ίδια ποσότητα ενέργειας αλλαγής όγκου για να το επιτύχουν. Κάτι τέτοιο φυσικά δεν μπορεί να είναι αληθές! Συνεπώς θα πρέπει να αναζητήσουμε μια άλλη τιμή για τη μεταβλητή m .

Φυσικό κριτήριο

Εάν δεν δώσουμε τη σωστή τιμή στη μεταβλητή m [43-45], τότε η υπολογισθείσα με αυτό τον τρόπο ενέργεια αλλαγής όγκου θα είναι είτε μικρότερη είτε μεγαλύτερη από την πραγματική. Εάν για παράδειγμα στα ισότροπα υλικά δώσουμε στην μεταβλητή m την τιμή $m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{5}$, τότε η

Μια νέα προσέγγιση με όρους συμμετρίας

ενέργεια αλλαγής όγκου $T_V = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_V \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_V$ που υπολογίζεται σύμφωνα με την ενεργειακή ανάλυση (3.6) θα είναι υποεκτιμημένη. Το υπόλοιπο ενέργειας αλλαγής όγκου που απομένει, περιλαμβάνεται στους μεικτούς ενεργειακούς όρους t_{34} των σχέσεων (3.7) οι οποίοι πλέον είναι μη-μηδενικοί. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι η τιμή της μεταβλητής m για κάθε κλάση ανισοτροπίας θα έχει τιμή ακριβώς αυτή που απαιτείται προκειμένου να μην προκύπτουν μεικτά (διογκωτικά και στρεβλωτικά) ενεργειακά υπόλοιπα, δηλαδή τη λύση της εξίσωσης

$$t_{34} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_V \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_D = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_D \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}_V = 0 \quad (3.8)$$

Η εξίσωση (3.8) είναι ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς m . Η μία λύση είναι για κάθε κλάση ανισοτροπίας η τετριμμένη (μηδενική). Η δεύτερη λύση που προκύπτει για κάθε κλάση ανισοτροπίας φαίνεται στον Πίνακα 3.3:

Πίνακας 3.3: Υπολογισθείσα τιμή της μεταβλητής m

| Είδος ανισοτροπίας | Τιμή της μεταβλητής m |
|-----------------------------------|---|
| Εξαγωνικά, Τριγωνικά, Τετραγωνικά | $\frac{(c_{11} + c_{12} + c_{13})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (2c_{13} + c_{33})\varepsilon_3}{2(c_{11} + c_{12} + 2c_{13}) + c_{33}}$ |
| Ορθότροπα | $\frac{1}{D} [(c_{11} + c_{12} + c_{13})\varepsilon_1 + (c_{12} + c_{22} + c_{23})\varepsilon_2 + (c_{13} + c_{23} + c_{33})\varepsilon_3]$ |
| Μονοκλινή | $\frac{1}{D} [(c_{11} + c_{12} + c_{13})\varepsilon_1 + (c_{12} + c_{22} + c_{23})\varepsilon_2 + (c_{13} + c_{23} + c_{33})\varepsilon_3 + (c_{16} + c_{26} + c_{36})\varepsilon_6]$ |
| Τρικλινή | $\frac{1}{D} [(c_{11} + c_{12} + c_{13})\varepsilon_1 + (c_{12} + c_{22} + c_{23})\varepsilon_2 + (c_{13} + c_{23} + c_{33})\varepsilon_3 + (c_{14} + c_{24} + c_{34})\varepsilon_4 + (c_{15} + c_{25} + c_{35})\varepsilon_5 + (c_{16} + c_{26} + c_{36})\varepsilon_6]$ |

όπου:

$$D = c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23} \quad (3.9)$$

ισούται με το άθροισμα των 9 στοιχείων που βρίσκονται στην άνω αριστερή γωνία του μητρώου ακαμψίας \underline{C} .

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι η παράμετρος D εμφανίζεται στον παρονομαστή της τιμής της παραμέτρου m σε κάθε είδος ανισοτροπίας.

Για τα εξαγωνικά, τριγωνικά και τετραγωνικά υλικά είναι:

$$\begin{aligned} D &= c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23} \\ &= c_{11} + c_{11} + c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{13} \\ &= 2(c_{11} + c_{12} + 2c_{13}) + c_{33} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ενώ για τα ισότροπα και τα κυβικά είναι:

Μια νέα προσέγγιση με όρους συμμετρίας

$$\begin{aligned} D &= c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23} \\ &= c_{11} + c_{11} + c_{11} + 2c_{12} + 2c_{12} + 2c_{12} \\ &= 3(c_{11} + 2c_{12}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

και απλοποιείται με τον αριθμητή $(c_{11} + 2c_{12})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$, οπότε προκύπτει $m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$.

Λίγα λόγια για την παράμετρο παραμόρφωσης m

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3.3, η παράμετρος παραμόρφωσης m είναι μια σταθμισμένη συνάρτηση των συνιστωσών παραμόρφωσης $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$. Αναλυτικότερα, ισχύει ότι:

$$m = w_i \varepsilon_i = w_1 \varepsilon_1 + w_2 \varepsilon_2 + w_3 \varepsilon_3 + w_4 \varepsilon_4 + w_5 \varepsilon_5 + w_6 \varepsilon_6 \quad (3.12)$$

με τους συντελεστές w_i να δίνονται στη γενικότερη περίπτωση (αυτή του τρικλινούς) από τις σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{c_{11} + c_{12} + c_{13}}{D}, w_2 = \frac{c_{12} + c_{22} + c_{23}}{D}, w_3 = \frac{c_{13} + c_{23} + c_{33}}{D} \\ w_4 &= \frac{c_{14} + c_{24} + c_{34}}{D}, w_5 = \frac{c_{15} + c_{25} + c_{35}}{D}, w_6 = \frac{c_{16} + c_{26} + c_{36}}{D} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Στην απλούστερη περίπτωση των ισότροπων (αλλά και των κυβικών) υλικών, οι συντελεστές w_i μεταπίπτουν σε:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_2 = w_3 = \frac{1}{3} \\ w_4 &= w_5 = w_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Για όλες τις κλάσεις ανισότροπων υλικών, πλήν μονοκλινών και τρικλινών, ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^6 w_i = 1 \quad (3.15)$$

ενώ για τα μονοκλινή και τρικλινή υλικά κάτι τέτοιο δεν φαίνεται να ισχύει. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη των μη-μηδενικών όρων c_{ij} με $\begin{cases} 1 \leq i \leq 3 \\ 4 \leq j \leq 6 \end{cases}$ του μητρώου ακαμψίας τους, τους οποίους ο Lekhnitski [46] ονομάζει *συντελεστές αμοιβαίας επιρροής*.

Η ενέργεια αλλαγής όγκου σε όρους παραμορφώσεων

Με την υπολογισθείσα τιμή της παραμέτρου m του Πίνακα 4 για κάθε κατηγορία ανισότροπου υλικού, μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως την ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου, με βάση τον τύπο:

$$T_V = \frac{1}{2} \varepsilon_V \cdot \tilde{C} \cdot \varepsilon_V \quad (3.16)$$

Εξαγωνικά, Τριγωνικά, Τετραγωνικά

$$T_V = \frac{\left((c_{11} + c_{12} + c_{13})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (2c_{13} + c_{33})\varepsilon_3 \right)^2}{2(2(c_{11} + c_{12} + 2c_{13}) + c_{33})} \quad (3.17)$$

Ορθότροπα

$$T_V = \frac{\left((c_{11} + c_{12} + c_{13})\varepsilon_1 + (c_{12} + c_{22} + c_{23})\varepsilon_2 + (c_{13} + c_{23} + c_{33})\varepsilon_3 \right)^2}{2(c_{11} + 2c_{12} + 2c_{13} + c_{22} + 2c_{23} + c_{33})} \quad (3.18)$$

Μονοκλινή

$$T_V = \frac{\left((c_{11} + c_{12} + c_{13})\varepsilon_1 + (c_{12} + c_{22} + c_{23})\varepsilon_2 + (c_{13} + c_{23} + c_{33})\varepsilon_3 + (c_{16} + c_{26} + c_{36})\varepsilon_6 \right)^2}{2(c_{11} + 2c_{12} + 2c_{13} + c_{22} + 2c_{23} + c_{33})} \quad (3.19)$$

Τρικλινή

$$T_V = \frac{\left((c_{11} + c_{12} + c_{13})\varepsilon_1 + (c_{12} + c_{22} + c_{23})\varepsilon_2 + (c_{13} + c_{23} + c_{33})\varepsilon_3 + (c_{14} + c_{24} + c_{34})\varepsilon_4 + (c_{15} + c_{25} + c_{35})\varepsilon_5 + (c_{16} + c_{26} + c_{36})\varepsilon_6 \right)^2}{2(c_{11} + 2c_{12} + 2c_{13} + c_{22} + 2c_{23} + c_{33})} \quad (3.20)$$

Γενικότερα δηλαδή φαίνεται ότι η ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου ακολουθεί τον τύπο:

$$T_V = \frac{\left(\sum_{i=1}^6 D w_i \varepsilon_i \right)^2}{2D} = \frac{1}{2} D m^2 \quad (3.21)$$

Η ενέργεια αλλαγής σχήματος σε όρους παραμορφώσεων

Η εναπομείνουσα μορφή ενέργειας, δηλαδή η ενέργεια αλλαγής σχήματος, μπορεί τώρα εύκολα να υπολογισθεί είτε ως η διαφορά $T - T_V$ είτε άμεσα από τον τύπο:

$$T_D = \frac{1}{2} \varepsilon_D \cdot \underline{C} \cdot \varepsilon_D \quad (3.22)$$

Οι τύποι που προκύπτουν για την ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος των μονοκλινών και τρικλινών υλικών είναι ιδιαίτερα πολύπλοκοι και δεν θα τους παρουσιάσουμε εδώ. Αυτό που αξίζει να αναφέρουμε είναι ότι με βάση και τον τύπο (3.21), η ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος ακολουθεί τον παρακάτω τύπο:

$$T_D = \frac{\sum_{i,j=1}^6 g_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j}{2D} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 (c_{ij} - Dw_i w_j) \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (3.23)$$

όπου g_{ij} είναι βοηθητικές παράμετροι οι οποίες δίνονται από τη σχέση:

$$g_{ij} = D(c_{ij} - Dw_i w_j) \quad (3.24)$$

Παράδειγμα: Ορθότροπα Υλικά

Για ένα ορθότροπο υλικό, προκύπτουν τα εξής:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= (c_{22} + 2c_{23} + c_{33})c_{11} - (c_{12} + c_{13})^2 \\ g_{22} &= (c_{11} + 2c_{13} + c_{33})c_{22} - (c_{12} + c_{23})^2 \\ g_{33} &= (c_{11} + 2c_{12} + c_{22})c_{33} - (c_{13} + c_{23})^2 \\ g_{44} &= Dc_{44} \\ g_{55} &= Dc_{55} \\ g_{66} &= Dc_{66} \\ g_{12} &= 2(c_{12} + c_{13} + c_{23} + c_{33})c_{12} - 2(c_{22} + c_{23})c_{11} - 2(c_{22} + c_{23})c_{13} \\ g_{13} &= 2(c_{12} + c_{13} + c_{22})c_{13} - 2(c_{11} + c_{12} + c_{13})c_{23} - 2(c_{11} + c_{12})c_{33} \\ g_{23} &= 2(c_{11} + c_{12} + c_{23})c_{23} - 2(c_{12} + c_{22} + c_{23})c_{13} - 2(c_{12} + c_{22})c_{33} \\ g_{14} &= g_{15} = g_{16} = g_{24} = g_{25} = g_{26} = g_{34} = g_{35} = g_{36} = g_{45} = g_{46} = g_{56} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

και τελικά

$$T_D = \frac{1}{2D} \left[\begin{aligned} & (c_{11}(c_{22} + 2c_{23} + c_{33}) - (c_{12} + c_{13})^2) \varepsilon_1^2 \\ & + (c_{22}(c_{11} + 2c_{13} + c_{33}) - (c_{12} + c_{23})^2) \varepsilon_2^2 \\ & + (c_{33}(c_{11} + 2c_{12} + c_{22}) - (c_{13} + c_{23})^2) \varepsilon_3^2 \\ & + 2(c_{12}^2 - (c_{11} + c_{13})(c_{22} + c_{23}) + c_{12}(c_{13} + c_{23} + c_{33})) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ & + 2(c_{23}(c_{11} + c_{23}) + c_{13}(-c_{22} + c_{23}) - c_{22}c_{33} - c_{12}(c_{13} - c_{23} + c_{33})) \varepsilon_2 \varepsilon_3 \\ & + 2(c_{13}(c_{13} + c_{22} + c_{23}) - c_{11}(c_{23} + c_{33}) - c_{12}(-c_{13} + c_{23} + c_{33})) \varepsilon_3 \varepsilon_1 \\ & + \frac{1}{2}(c_{44}\varepsilon_4^2 + c_{55}\varepsilon_5^2 + c_{66}\varepsilon_6^2) \end{aligned} \right] \quad (3.26)$$

Επίλογος 3^{ου} Κεφαλαίου

Η χρησιμοποίηση της έννοιας της συμμετρίας ως χαρακτηριστικής ιδιότητας των καταστάσεων “αλλαγή όγκου” και “αλλαγή σχήματος” άλλαξε δραστικά τον τρόπο αντίληψης αυτών των ίδιων των εννοιών.

Η ταύτιση της αλλαγής όγκου με τη διατήρηση των συμμετριών και της αλλαγής σχήματος με την απόκλιση από κάποια συμμετρία έδωσε μια νέα προοπτική στο πρόβλημα του διαχωρισμού της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης των ανισότροπων υλικών σε ενέργεια αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος.

Οι μέχρι πρότινος προσπάθειες αντιμετώπισης του προβλήματος δεν κατάφεραν να ξεφύγουν από την ισότροπη λογική. Η απαίτηση για υδροστατικό τανυστή τάσεων και ογκομετρικό τανυστή παραμορφώσεων είναι μια καθαρά ισότροπη προϋπόθεση, επειδή ακριβώς οι δύο συγκεκριμένοι τανυστές παραμένουν αναλλοίωτοι σε ενδεχόμενη στροφή του συστήματος αναφοράς. Δεν έγινε αντιληπτό το γεγονός ότι κάθε μαθηματικά αναλλοίωτο (σε στροφή του συστήματος συντεταγμένων) μέγεθος δεν διαθέτει απαραίτητα και κάποιο ενεργειακά αναλλοίωτο περιεχόμενο.

Στον αντίποδα, η εισαγωγή της παραμέτρου m έδωσε στο πρόβλημα την κατευθυντικότητα που του έλειπε. Επιπλέον οδήγησε και σε ένα πολύ σημαντικό κατά τη γνώμη μας αποτέλεσμα: «*Το μονόμετρο μέγεθος διόγκωση ενός ανισότροπου υλικού δεν χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την ενέργεια αλλαγής όγκου*». Η ενέργεια αλλαγής όγκου έχει λοιπόν και αυτή τη δική της κατευθυντικότητα ως προς τις παραμορφώσεις.

Ο τρόπος εισαγωγής της παραμέτρου m έγινε με την εκμετάλλευση της αρχής της υπέρθεσης, μιας αρχής η οποία αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία στα χέρια των φυσικών. Τη συναντούμε συνεχώς στη σύγχρονη φυσική, όπου σύνθετα προβλήματα αναλύονται σε απλούστερα των οποίων η λύση είναι προφανής ή τουλάχιστον εύκολα υπολογίσιμη. Έπειτα, ο μαθηματικός χειρισμός του προβλήματος ήρθε ως φυσικό επακόλουθο της ικανοποίησης της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας. Η υπολογισθείσα τιμή της παραμέτρου m λοιπόν είναι συνεπής με δύο πολύ ισχυρά φυσικά αξιώματα και αυτό μας κάνει ιδιαίτερα αισιόδοξους ως προς την φυσική συνέπεια των εξ αυτής παραγομένων αποτελεσμάτων.

Σε ότι αφορά το μαθηματικό χειρισμό του προβλήματος, θα λέγαμε ότι η εισαγωγή των συντελεστών w_i έδωσε στο πρόβλημα εκείνη τη διαφορετική κανονικοποίηση που χρειαζόταν να γίνει σε κάθε έναν από τους έξι άξονες παραμόρφωσης του κάθε ανισότροπου χώρου. Έτσι, μια μαθηματική νόρμα δημιουργήθηκε από το μηδέν. Η αντίστροφη λογική, δηλαδή ο ορισμός μιας νόρμας που να οδηγεί στον επιθυμητό διαχωρισμό θα ήταν απείρως δυσκολότερα εφαρμόσιμη, καθώς καμμιά μαθηματική αρχή δεν θα είχε την ίδια στέρεα βάση που δίνει μια φυσική αρχή στην περιγραφή ενός φυσικού φαινομένου.

Προτάθηκε μια νέα εξαιρετικά απλή διαφαινόμενη λύση, η οποία οδηγεί σε λογικά συμπεράσματα. Η απλότητά της μόνο ως μειονέκτημα δεν μπορεί να εκληφθεί. Αντιθέτως, οι αναλυτικοί τύποι προκύπτουν απλοί ακριβώς επειδή λαμβάνουν υπόψιν τους τις υπάρχουσες συμμετρίες της κάθε κλάσης ανισοτροπίας.

Μια νέα προσέγγιση με όρους συμμετρίας

Οι μαθηματικοί υπολογισμοί, ειδικά σε ό,τι αφορά τα τρικλινή υλικά, είναι εξαιρετικά απαιτητικοί. Αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο η ανικανότητα υπολογισμού των ιδιοτιμών του μητρώου ενδόσεως τρικλινών υλικών. Η εισαγωγή μίας μόνο επιπλέον μεταβλητής σε ένα τόσο δύσκολο επιλύσιμο σύστημα δυσχεραίνει κατά πολύ τον μαθηματικό χειρισμό του προβλήματος. Πολλές φορές η διαθέσιμη υπολογιστική ισχύς αποδείχτηκε ανεπαρκής για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων συμβολικά. Συνεπώς, η μονοπαραμετρική περιγραφή της αλλαγής όγκου είναι όχι μόνο εξαιρετικά εύχρηστη αλλά και απαραίτητη γιατί ακριβώς λύνει πολλά προβλήματα υπολογιστικής φύσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4⁰

4.1 Ο Διογκωτικός και ο Στρεβλωτικός Τανυστής των Τάσεων των Γραμμικά Ελαστικά Ανισότροπων Υλικών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια λύση του προβλήματος συναρτήσει μόνο των παραμορφώσεων. Επειδή όμως στις εφαρμογές μας ενδιαφέρει κυρίως μια μελέτη σε όρους τάσεων κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να παρουσιάσουμε και τους τανυστές τάσεων που προκαλούν αλλαγή όγκου και αλλαγή σχήματος καθώς και τις αντίστοιχες εκφράσεις των ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος των ανισότροπων υλικών.

Με δεδομένη την τιμή της παραμέτρου m από τον Πίνακα 3.3, άρα και της μορφής των τανυστών ε_V και ε_D , εύκολα από το Γενικευμένο Νόμο του Hooke προκύπτει η μορφή των αντίστοιχων τανυστών τάσης :

$$\begin{cases} \sigma_V = \underline{C} \cdot \varepsilon_V \\ \sigma_D = \underline{C} \cdot \varepsilon_D \end{cases} \quad (4.1)$$

Ο τύπος (4.1) δίνει τις συνιστώσες των δύο τανυστών τάσης συναρτήσει των c_{ij} , ε_i . Αν τώρα εκφράσω τις παραμορφώσεις ε_i σαν συνάρτηση των s_{ij} , σ_i (μέσω του αντίστροφου Γενικευμένου Νόμου του Hooke $\varepsilon = \underline{S} \cdot \underline{\sigma}$) και τις ελαστικές σταθερές s_{ij} συναρτήσει των c_{ij} (αν δηλαδή αντιστρέψω το μητρώο ακαμψίας \underline{C}), τότε μπορώ να εκφράσω τις συνιστώσες των τανυστών τάσεως σ_V και σ_D συναρτήσει των c_{ij} και σ_i .

Παρά τις υπολογιστικές δυσκολίες, για κάθε κλάση ανισοτροπίας προκύπτουν τα ακόλουθα συνεπτυγμένα αποτελέσματα:

$$\begin{aligned} \sigma_V &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \cdot \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\} \\ &= \{w_1 I_1, w_2 I_1, w_3 I_1, w_4 I_1, w_5 I_1, w_6 I_1\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_D &= \left\{ (1-w_1)\sigma_1 - w_1(\sigma_2 + \sigma_3), (1-w_2)\sigma_2 - w_2(\sigma_1 + \sigma_3), (1-w_3)\sigma_3 - w_3(\sigma_1 + \sigma_2), \right. \\ &\quad \left. \sigma_4 - w_4(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \sigma_5 - w_5(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \sigma_6 - w_6(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right\} \\ &= \{ \sigma_1 - w_1 I_1, \sigma_2 - w_2 I_1, \sigma_3 - w_3 I_1, \sigma_4 - w_4 I_1, \sigma_5 - w_5 I_1, \sigma_6 - w_6 I_1 \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου τα w_i όπως ορίστηκαν στην (3.13) και I_1 η πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων.

Αναλυτικότερα, για κάθε κλάση ανισοτροπίας προκύπτουν οι ακόλουθοι διογκωτικοί τανυστές τάσης σ_V (οι τανυστές σ_D είναι αρκετά ογκώδεις στην παρουσίασή τους):

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

Πίνακας 4.1: Τανυστές τάσης υπεύθυνοι για την αλλαγή όγκου

| Τρικλινές | Μονοκλινές | Ορθότροπο | Τετραγωνικό, Τριγωνικό, Εξαγωνικό | Κυβικό, Ισότροπο |
|---|---|---|---|--|
| $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(c_{11} + c_{12} + c_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{12} + c_{22} + c_{23})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{13} + c_{23} + c_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{14} + c_{24} + c_{34})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{15} + c_{25} + c_{35})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{16} + c_{26} + c_{36})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(c_{11} + c_{12} + c_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{12} + c_{22} + c_{23})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{13} + c_{23} + c_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(c_{16} + c_{26} + c_{36})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(c_{11} + c_{12} + c_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{12} + c_{22} + c_{23})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ \frac{(c_{13} + c_{23} + c_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23})} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(c_{11} + c_{12} + c_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{2c_{11} + c_{33} + 2(c_{12} + 2c_{13})} \\ \frac{(c_{11} + c_{12} + c_{13})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{2c_{11} + c_{33} + 2(c_{12} + 2c_{13})} \\ \frac{(2c_{13} + c_{33})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{2c_{11} + c_{33} + 2(c_{12} + 2c_{13})} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \\ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \\ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$ |

Παρατηρήσεις

Η χρήση των συντελεστών βάρους w_i διευκολύνει πολύ τους υπολογισμούς και σε αυτή την περίπτωση και οδηγεί σε συνεπτυγμένους τύπους για τα ζητούμενα μεγέθη. Για τις συνιστώσες του διογκωτικού τανυστή τάσης $\underline{\sigma}_V$ παρατηρώ τα εξής:

- Οι συνιστώσες του είναι όλες συναρτήσεις των ελαστικών σταθερών c_{ij} και των ορθών τάσεων σ_i , $i = 1, 2, 3$. Οι διατμητικές τάσεις $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ δεν εισχωρούν στον τύπο υπολογισμού της ελαστικής ενέργειας αλλαγής όγκου (τον οποίο παρουσιάζουμε στην επόμενη παράγραφο).
- Επιπλέον, οι τρεις ορθές τάσεις εισχωρούν πάντοτε στις συνιστώσες του τανυστή $\underline{\sigma}_V$ υπό τη μορφή της πρώτης αναλλοίωτης $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον ταχύτερο υπολογισμό των συνιστωσών του διογκωτικού τανυστή $\underline{\sigma}_V$ σε ενδεχόμενη στροφή του συστήματος συντεταγμένων, αφού αρκεί να γνωρίζω τις τιμές των συντελεστών ακαμψίας c_{ij} ως προς το νέο αυτό σύστημα συντεταγμένων (το ίχνος διατηρείται).
- Το ίχνος (η πρώτη αναλλοίωτη) του τανυστή τάσης $\underline{\sigma}_V$ είναι σε κάθε περίπτωση ίσο με το ίχνος του ολικού τανυστή τάσης $\underline{\sigma}$.

Η κατάσταση για τον τανυστή αλλαγής σχήματος $\underline{\sigma}_D$ είναι αρκετά διαφορετική:

- ❖ Οι διατμητικές συνιστώσες του είναι συναρτήσεις όχι μόνο των ορθών αλλά και των κατά θέση αντίστοιχων διατμητικών συνιστωσών τάσης.
- ❖ Εμφανίζει μια κατευθυντικότητα ως προς τις τάσεις. Για παράδειγμα η πρώτη ορθή συνιστώσα του εξαρτάται από τις ορθές τάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ με συντελεστές $(1 - w_1)$, w_1 , w_1 αντίστοιχα. Βλέπουμε δηλαδή ότι στην κατεύθυνση 1 η ορθή τάση σ_1 έχει διαφορετική βαρύτητα σε σχέση με τις σ_2, σ_3 . Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για τις υπόλοιπες κατευθύνσεις φόρτισης.
- ❖ Είναι κοινή πεποίθηση από την ενασχόλησή μας με ισότροπα υλικά ότι το όριο διαρροής σχετίζεται με τον τανυστή αλλαγής σχήματος (ή τη γνωστή “ισοδύναμη τάση κατά Mises”). Στα ανισότροπα υλικά που το όριο διαρροής εξαρτάται από τη διεύθυνση φόρτισης, ίσως η κατευθυντικότητα που επιδεικνύει ο τανυστής αλλαγής σχήματος να δίνει μια εξήγηση για τη διαφοροποίηση της τιμής του ορίου διαρροής σε διαφορετικές διευθύνσεις.
- ❖ Το ίχνος (η πρώτη αναλλοίωτη) του τανυστή $\underline{\sigma}_D$ ισούται πάντα με μηδέν.

4.2 Οι ελαστικές ενέργειες αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος ως συνάρτηση των τάσεων

Για τις ελαστικές ενέργειες αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος αντίστοιχα προκύπτουν:

$$T_V = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_V \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_V = \frac{1}{2} s_{ij} w_i w_j (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{2D} = \frac{I_1^2}{2D} \quad (4.4)$$

και

$$T_D = \frac{1}{2} \underline{\sigma}_D \cdot \underline{S} \cdot \underline{\sigma}_D = \frac{1}{2} s_{ij} \left(\sigma_i \sigma_j - w_i w_j (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \right) \quad (4.5)$$

Και για τις ελαστικές ενέργειες ισχύουν ανάλογες παρατηρήσεις με εκείνες που κάναμε για τους αντίστοιχους τανυστές τάσης.

Η ύπαρξη ενός αναλυτικού μαθηματικού τύπου για τον υπολογισμό της ελαστικής ενέργειας αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος ήταν ένα μεγάλο ζητούμενο της παρούσας διατριβής.

Η εμπειρία μας από τη μελέτη των ισότροπων υλικών έχει δείξει ότι στα πιο σημαντικά σημεία του κύκλου ζωής ενός υλικού ένα από τα δύο αυτά μεγέθη παίρνει μια κρίσιμη τιμή. Ειδικότερα για την αστοχία ισότροπων υλικών, γνωρίζουμε ότι [14-21,24-27,47]:

«Ένα όλκιμο ισότροπο υλικό αστοχεί όταν η ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος T_D λάβει μία κρίσιμη τιμή $T_{D,0}$, ενώ ένα ψαθυρό ισότροπο υλικό αστοχεί όταν η ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου T_V λάβει μία διαφορετική κρίσιμη τιμή $T_{V,0}$.»

Με άλλα λόγια η ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου έχει συνδεθεί με την ύπαρξη περιοχών στο χώρο του δοκιμίου που χαρακτηρίζονται από υψηλές τιμές υδροστατικής πίεσης, ενώ η ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος με περιοχές στις οποίες κυριαρχούν υψηλές τιμές διατμητικών τάσεων, με ότι αυτό συνεπάγεται για την τελική θραύση του δοκιμίου και τη μορφή των αντίστοιχων επιφανειών αστοχίας.

Αν υποθέσουμε ότι ο ίδιος μηχανισμός διέπει και τα ανισότροπα υλικά, δηλαδή σύνδεση της ψαθυρής αστοχίας με την ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου και της όλκιμης αστοχίας με την ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος, τότε αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον η διερεύνηση:

- I. της μορφής των ισοσταθμικών επιφανειών των ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος και
- II. της κατανομής των ενεργειών αυτών στο χώρο του δοκιμίου (τόσο η γεωμετρία όσο και οι τυχόν ατέλειες της δομής του υλικού επηρεάζουν την κατανομή του εντατικού και παραμορφωσιακού πεδίου, συνεπώς και της ελαστικής ενέργειας).

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

Ο προσδιορισμός των κρίσιμων τιμών $T_{V,0}$ και $T_{D,0}$ γίνεται με βάση τα αποτελέσματα όσο το δυνατόν περισσότερων πειραμάτων. Οι δύο αυτές σταθερές πρέπει να αποτελούν μηχανικές σταθερές του υλικού, δηλαδή να μην εξαρτώνται από τη γεωμετρία του δοκιμίου ή τη γεωμετρία της φόρτισης.

Από την άλλη μεριά, η κατανομή των ελαστικών ενεργειών στο χώρο του δοκιμίου εξαρτάται κάθε φορά από τη γεωμετρία του δοκιμίου και τη γεωμετρία της φόρτισης (οπότε πρέπει να ελέγχεται κατά περίπτωση).

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τις ισοσταθμικές επιφάνειες στο χώρο των κυρίων τάσεων $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ των ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος όταν αυτές παίρνουν μία κρίσιμη τιμή για κάθε κλάση ανισοτροπίας ξεχωριστά (καθώς και για ένα ισότροπο υλικό). Ο χώρος των κυρίων τάσεων δεν έχει κάποια ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυσή μας. Προκύπτει από την ανάγκη εποπτείας των ζητούμενων μεγεθών, η οποία μπορεί να γίνει σε ένα χώρο το πολύ τριών διαστάσεων. Η μετάβαση στο χώρο των κυρίων τάσεων μετατρέπει το αρχικό πρόβλημα των 6 διαστάσεων $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ σε πρόβλημα τριών διαστάσεων $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$, άρα σε εποπτεύσιμο. Με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή αναπαρίσταται κάθε φορά ο υδροστατικός άξονας, προκειμένου να φανεί η ακαταλληλότητα της υδροστατικής πίεσης ως φόρτισης χαρακτηριστικής της καθαρής αλλαγής όγκου για τα περισσότερα ανισότροπα υλικά (πλην κυβικών). Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η αναπαράσταση των ισοσταθμικών επιφανειών σε διαφορετικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων αλλάζει τον προσανατολισμό αλλά όχι τη μορφή των αρχικών επιφανειών.

Στον Πίνακα 4.2 που ακολουθεί, δίνουμε τις τιμές των ελαστικών σταθερών c_{ij} για τα εξής 8 υλικά:

- a. Mild Steel – *Ισότροπο*
- b. Νικέλιο Ni – *Κυβικό*
- c. Βηρύλλιο Be – *Εξαγωνικό*
- d. Calcite – *Τριγωνικό*
- e. Zircon – *Τετραγωνικό*
- f. Aragonite – *Ορθότροπο*
- g. Γύψος – *Μονοκλινές*
- h. Θειούχος χαλκός – *Τρικλινές*

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

Πίνακας 4.2: Ελαστικές σταθερές (σε GPa) υλικών από κάθε κλάση ανισοτροπίας

| | Isotropic <i>Mild Steel</i> [*1] | Cubic <i>Ni</i> [*2] | Hexagonal <i>Be</i> [*2] | Trigonal <i>Calcite</i> [*3] | Tetragonal <i>Zircon</i> [*11] | Orthotropic <i>Aragonite</i> [*11] | Monoclinic <i>Γύψος</i> [*19] | Triclinic <i>Θειούχος</i> <i>Χαλκός</i> [*19] |
|------------|--|----------------------------|--------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|--|-------------------------------------|---|
| C11 | 263.846 | 246.5 | 292.3 | 149.4 | 73.503 | 159.582 | 78.6 | 57.09 |
| C12 | 64.615 | 147.3 | 26.7 | 57.9 | 8.987 | 36.627 | 41 | 20.62 |
| C13 | 64.615 | 147.3 | 14 | 53.5 | 5.226 | 1.973 | 26.8 | 31.64 |
| C22 | 263.846 | 246.5 | 292.3 | 149.4 | 73.503 | 86.975 | 62.7 | 35.77 |
| C23 | 64.615 | 147.3 | 14 | 53.5 | 5.226 | 15.909 | 24.2 | 23.4 |
| C33 | 263.846 | 146.5 | 336.4 | 85.2 | 45.911 | 85.032 | 72.6 | 58.41 |
| C44 | 398.462 | 127.4 | 162.5 | 34.1 | 13.889 | 41.152 | 9.1 | 16.5 |
| C55 | 398.462 | 127.4 | 162.5 | 34.1 | 13.889 | 25.641 | 10.44 | 15.15 |
| C66 | 398.462 | 127.4 | 531.2 | 45.75 | 32.258 | 42.735 | 26.4 | 12.05 |
| C14 | 0 | 0 | 0 | -20 | 0 | 0 | 0 | -4.26 |
| C15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.42 |
| C16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -7 | -2.21 |
| C24 | 0 | 0 | 0 | 20 | 0 | 0 | 0 | -2.81 |
| C25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.12 |
| C26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.1 | -0.58 |
| C34 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.84 |
| C35 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2.84 |
| C36 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -17.4 | -0.75 |
| C45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1.6 | -1.85 |
| C46 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.19 |
| C56 | 0 | 0 | 0 | -20 | 0 | 0 | 0 | -3.53 |

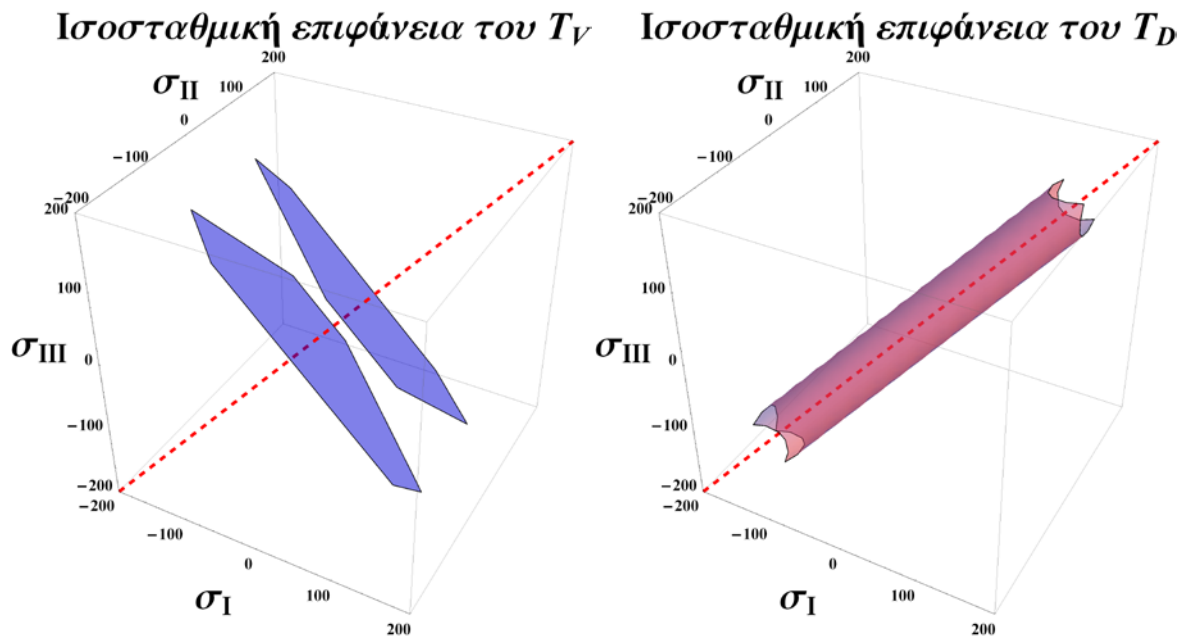
[*1]: M.F. Ashby and D.R.H. Jones, *Engineering Materials: An Introduction to Properties, Applications and Design*, Pergamon Press (2012)

[*2]: L.B. Freund and S. Suresh, *Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution*, Cambridge University Press (2004)

[*3]: Chien-Chih Chen, Chung-Cherng Lin, Lin-Gun Liu, Stanislav V. Sinogeikin and Jay D. Bass: *Elasticity of single-crystal calcite and rhodochrosite by Brillouin spectroscopy*, *American Mineralogist*, Volume 86, pages 1525–1529, 2001

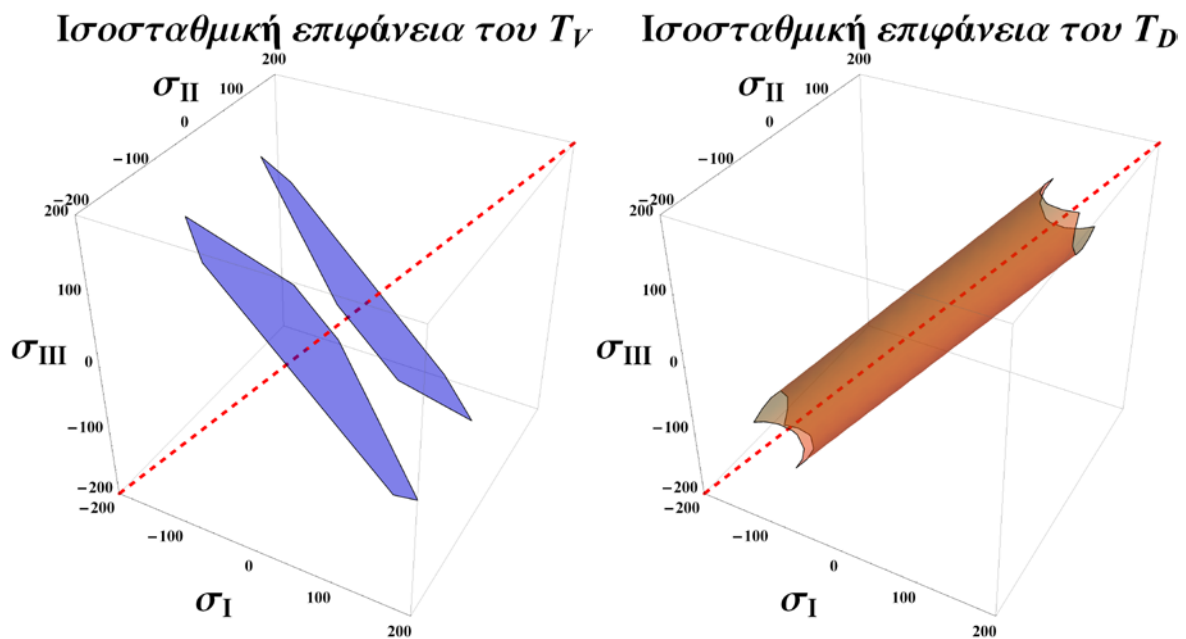
Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

Ισότροπο – Mild Steel



Εικόνα 4.1: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του Mild Steel (ισότροπου)

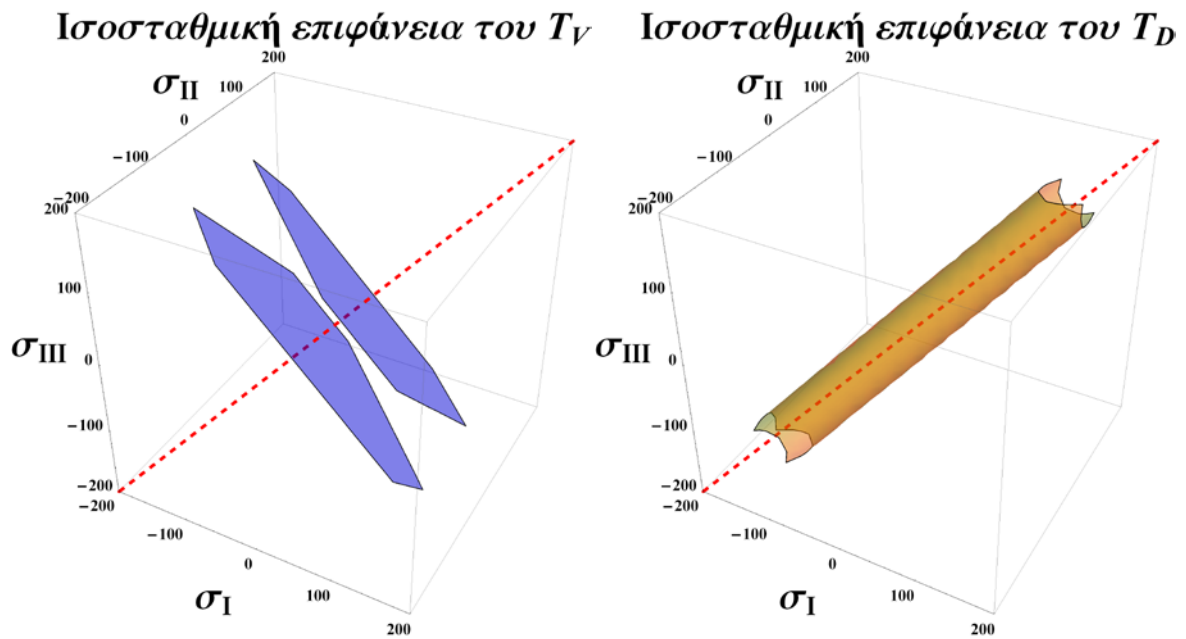
Κυβικό- Ni



Εικόνα 4.2: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του Ni (κυβικού)

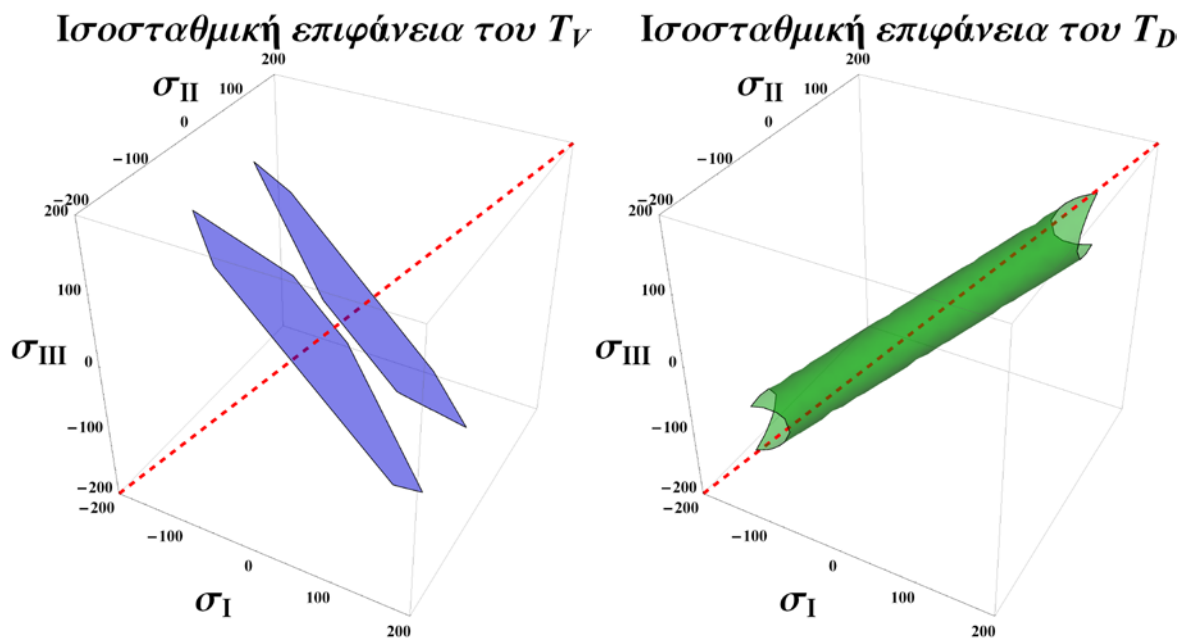
Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

Εξαγωνικό - Be



Εικόνα 4.3: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του Be (εξαγωνικού)

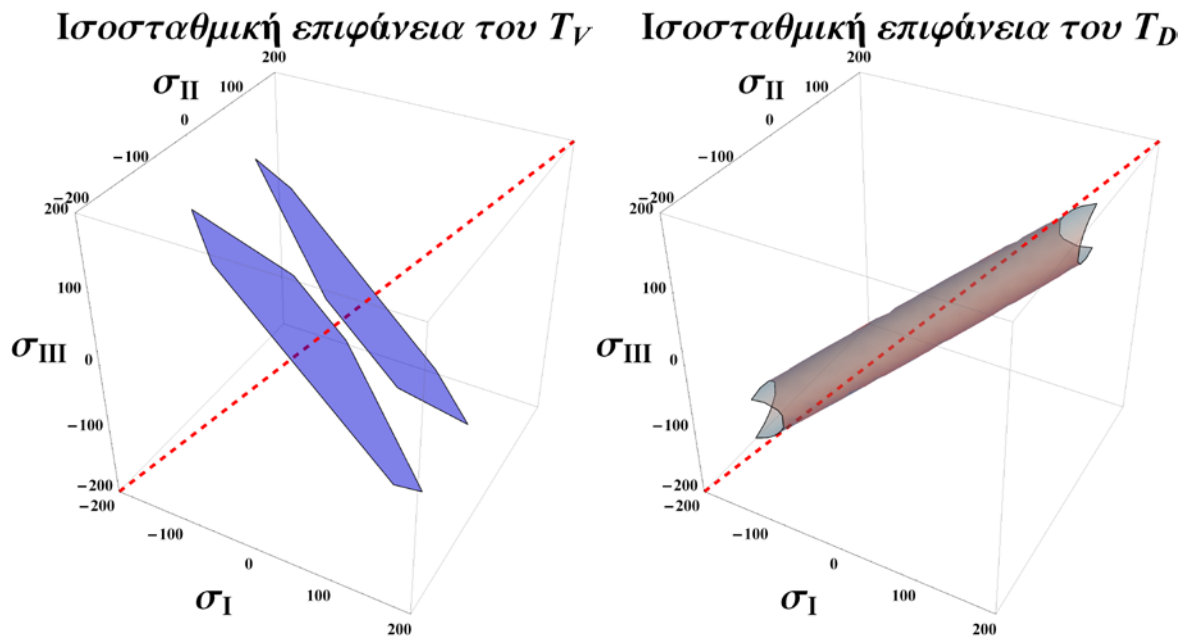
Τριγωνικό - Calcite



Εικόνα 4.4: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του Calcite (τριγωνικού)

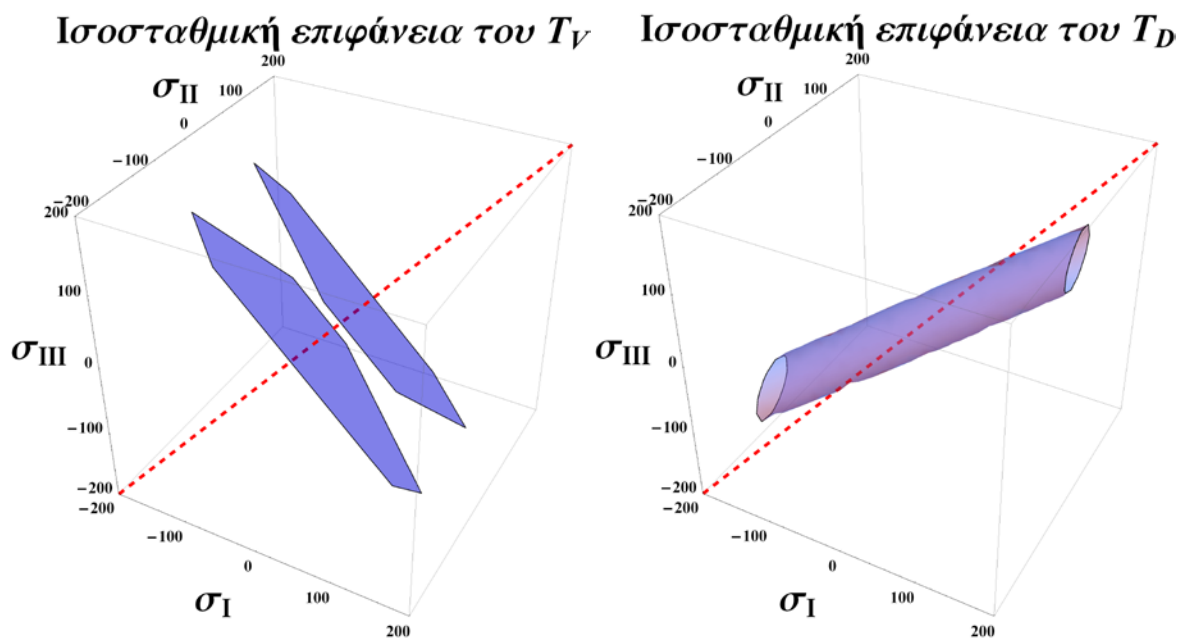
Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

Τετραγωνικό - Zircon



Εικόνα 4.5: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του Zircon (τετραγωνικού)

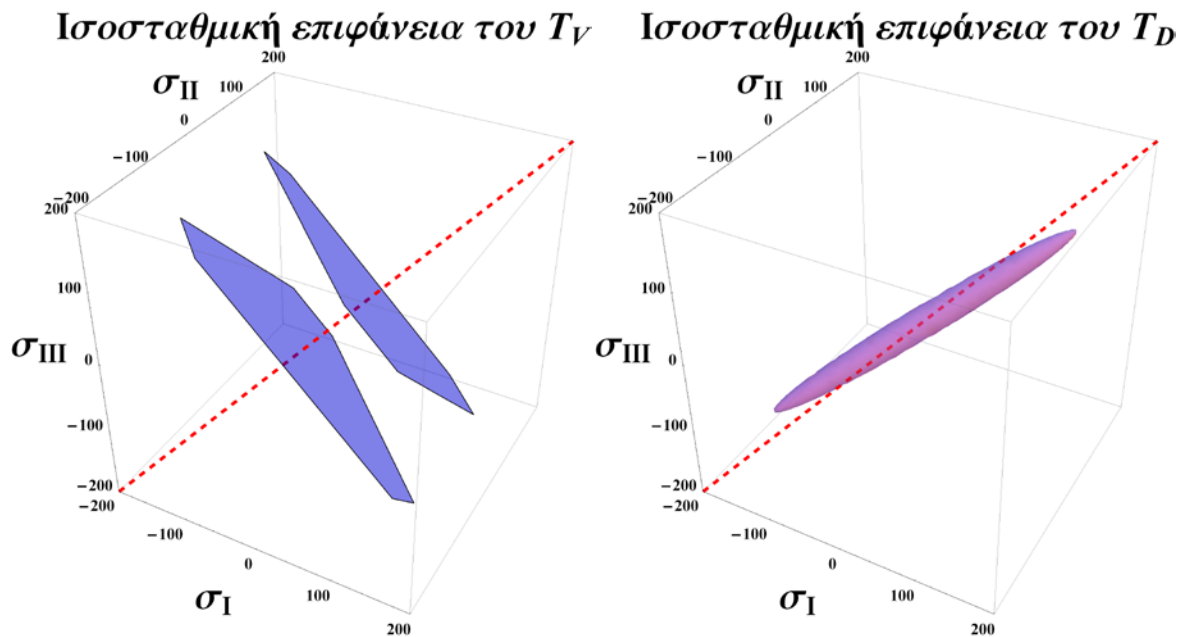
Ορθότροπο – Aragonite



Εικόνα 4.6: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του Aragonite (ορθότροπου)

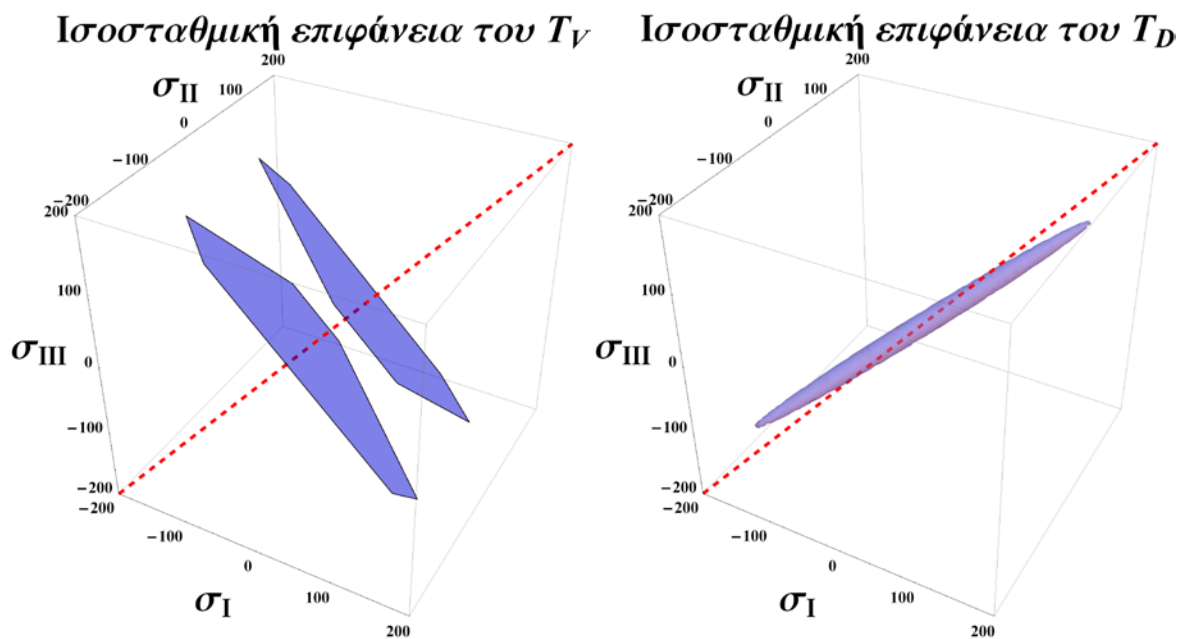
Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

Μονοκλινές – Γύψος



Εικόνα 4.7: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του Γύψου (μονοκλινούς)

Τρικλινές – Θειούχος Χαλκός

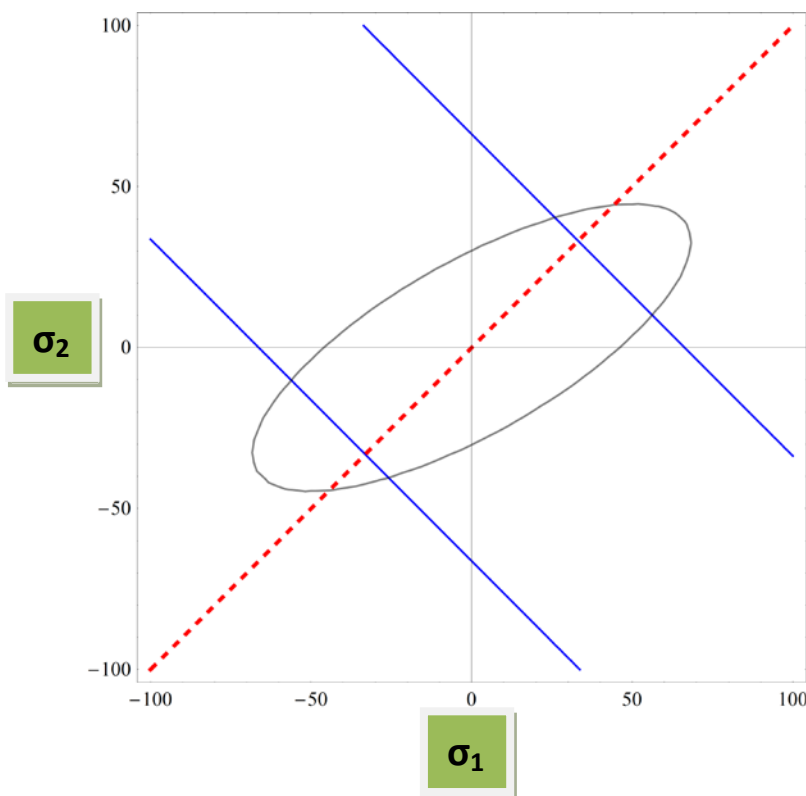


Εικόνα 4.8: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος του Θειούχου Χαλκού (τρικλινούς)

Παρατηρήσεις

Αξίζει να παρατηρήσουμε τα εξής:

- ✓ Η ισοσταθμική επιφάνεια της ελαστικής ενέργειας αλλαγής όγκου για μία κρίσιμη τιμή $T_{V,0}$ αποτελείται από δύο παράλληλα επίπεδα. Εύκολα αποδεικνύεται, μέσω του τύπου (4.4), ότι ο υδροστατικός άξονας είναι κάθετος στα δύο αυτά επίπεδα για κάθε κλάση ανισοτροπίας. Το σημείο τομής του υδροστατικού άξονα με τα δύο παράλληλα επίπεδα εξαρτάται κάθε φορά από την τιμή $T_{V,0}$.
- ✓ Η ισοσταθμική επιφάνεια της ελαστικής ενέργειας αλλαγής σχήματος για μία κρίσιμη τιμή $T_{D,0}$ αναπαρίσταται για όλα τα υλικά, πλην μονοκλινών και τρικλινών, με ένα κύλινδρο (ανοιχτή επιφάνεια). Για τα ισότροπα και κυβικά υλικά, άξονας του κυλίνδρου είναι ο υδροστατικός άξονας. Για τα εξαγωνικά, τριγωνικά, τετραγωνικά και ορθότροπα όμως, ο άξονας του κυλίνδρου σχηματίζει γωνία με τον υδροστατικό άξονα. Π.χ. η τομή του κυλίνδρου του Aragonite (ορθότροπο) με το $\sigma_1 - \sigma_2$ επίπεδο, είναι:



Απεικόνιση στο $\sigma_1 - \sigma_2$ επίπεδο των οριακών καμπύλων αλλαγής όγκου (παράλληλες ευθείες) και αλλαγής σχήματος (έλλειψη), όπου με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή αναπαρίσταται ο υδροστατικός άξονας.

Εικόνα 4.9: Τομή στο επίπεδο $\sigma_1 - \sigma_2$ των ισοσταθμικών επιφανειών του Aragonite

- ✓ Για μονοκλινή και τρικλινή υλικά, η ισοσταθμική επιφάνεια της ελαστικής ενέργειας αλλαγής σχήματος για μία κρίσιμη τιμή $T_{D,0}$ αναπαρίσταται με ένα ελλειψοειδές (κλειστή επιφάνεια). Ο υδροστατικός άξονας δεν είναι παράλληλος προς κανέναν από τους ημιάξονες του ελλειψοειδούς.

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

- ✓ Το γεγονός ότι στα μονοκλινή και τρικλινή υλικά η ισοσταθμική επιφάνεια της ελαστικής ενέργειας αλλαγής σχήματος είναι κλειστή κατά πάσα πιθανότητα οφείλεται στο ότι στα υλικά αυτά ορθές τάσεις μπορούν να είναι υπεύθυνες για τη δημιουργία διατμητικών παραμορφώσεων και αντιστρόφως, διατμητικές τάσεις μπορούν να είναι υπεύθυνες για τη δημιουργία ορθών παραμορφώσεων (δηλαδή στην ύπαρξη των συντελεστών αμοιβαίας επιρροής στα μητρώα ακαμψίας τους).

4.3 Κατανομή των ελαστικών ενεργειών στα συνήθη πειράματα

Στις επόμενες σελίδες παραθέτουμε τα ιστογράμματα κατανομής των ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος, όταν το κάθε υλικό υπόκειται σε:

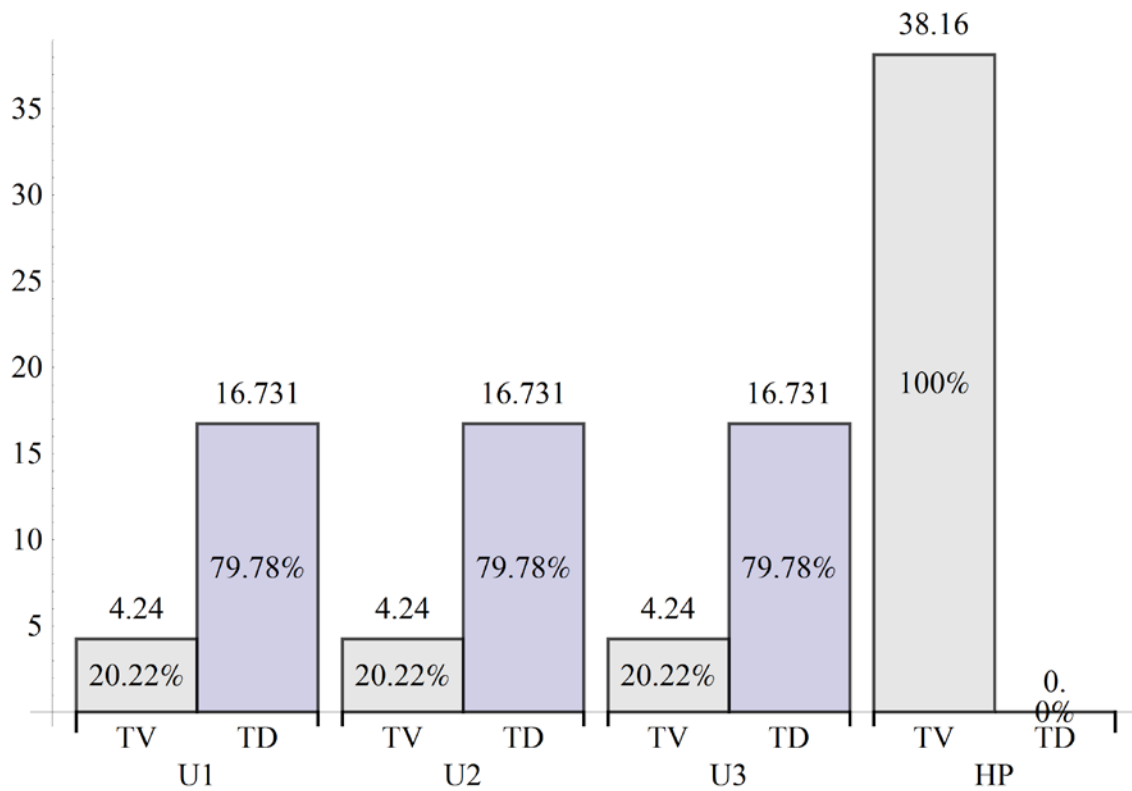
- ❖ Μονοαξονικό εφελκυσμό στη διεύθυνση 1 $\rightarrow U_1$
- ❖ Μονοαξονικό εφελκυσμό στη διεύθυνση 2 $\rightarrow U_2$
- ❖ Μονοαξονικό εφελκυσμό στη διεύθυνση 3 $\rightarrow U_3$
- ❖ Υδροστατική Φόρτιση $\rightarrow HP$
- ❖ Διάτμηση στο επίπεδο $xy \rightarrow SXY$
- ❖ Διάτμηση στο επίπεδο $xz \rightarrow SXZ$
- ❖ Διάτμηση στο επίπεδο $yz \rightarrow SYZ$
- ❖ Στρέψη στο επίπεδο $xy \rightarrow TXY$
- ❖ Στρέψη στο επίπεδο $xz \rightarrow TXZ$
- ❖ Στρέψη στο επίπεδο $yz \rightarrow TYZ$

Σε κάθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις φόρτισης, οι υπολογισμοί έγιναν για εφαρμοζόμενη τάση μέτρου 100 GPa.

Π.χ. στο πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού στη διεύθυνση 1 η μόνη εφαρμοζόμενη τάση είναι η $\sigma_1 = 100 \text{ GPa}$, ενώ στο πείραμα υδροστατικής πίεσης είναι $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 100 \text{ GPa}$.

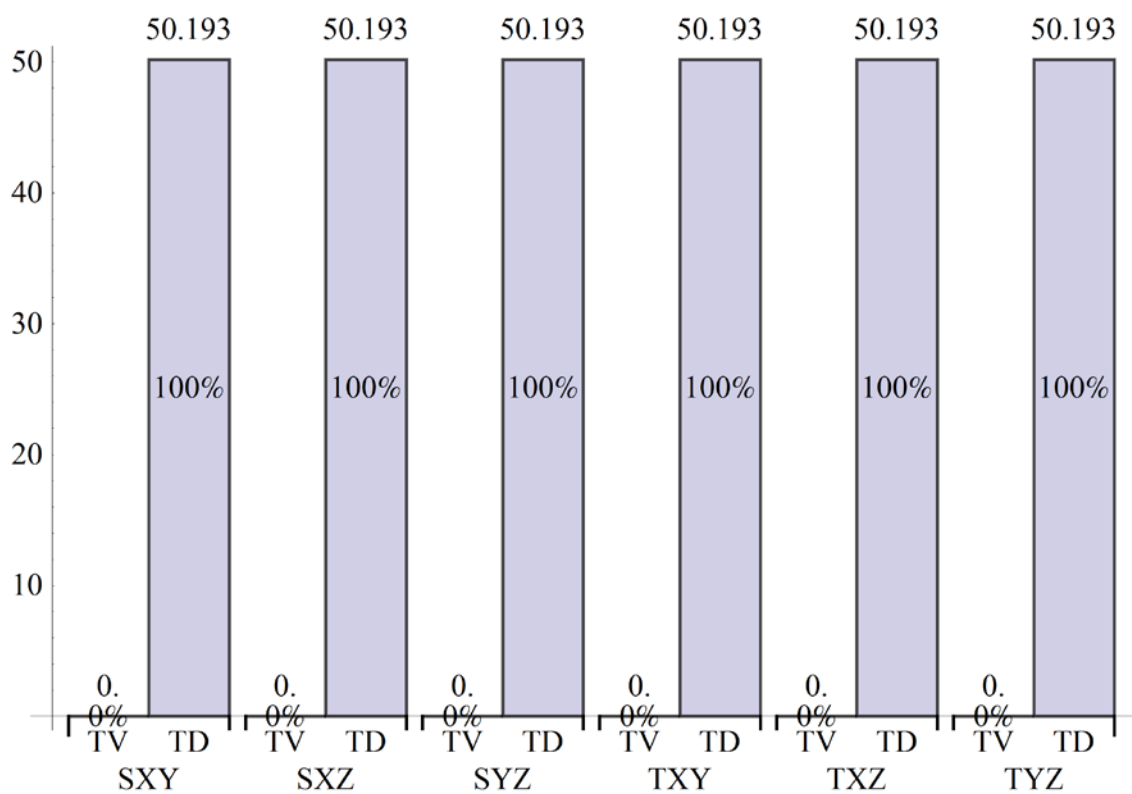
Αντιστοίχως, στο πείραμα διάτμησης στο επίπεδο xy είναι μόνο $\sigma_6 = 100 \text{ GPa}$, ενώ στο πείραμα στρέψης στο ίδιο επίπεδο είναι $\sigma_1 = -\sigma_2 = 100 \text{ GPa}$.

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων



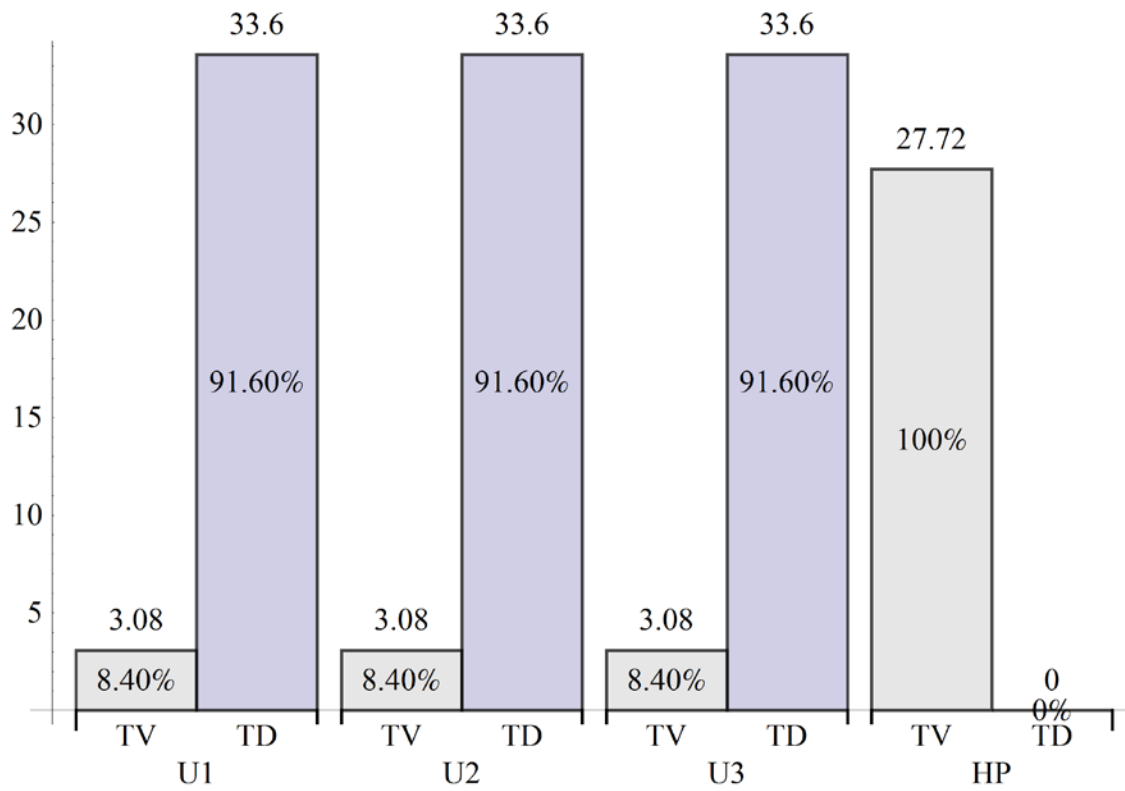
Mild Steel - Ισότροπο Γαλικό

Εικόνα 4.10: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα εφελκυσμού και υδροστατικής πίεσης

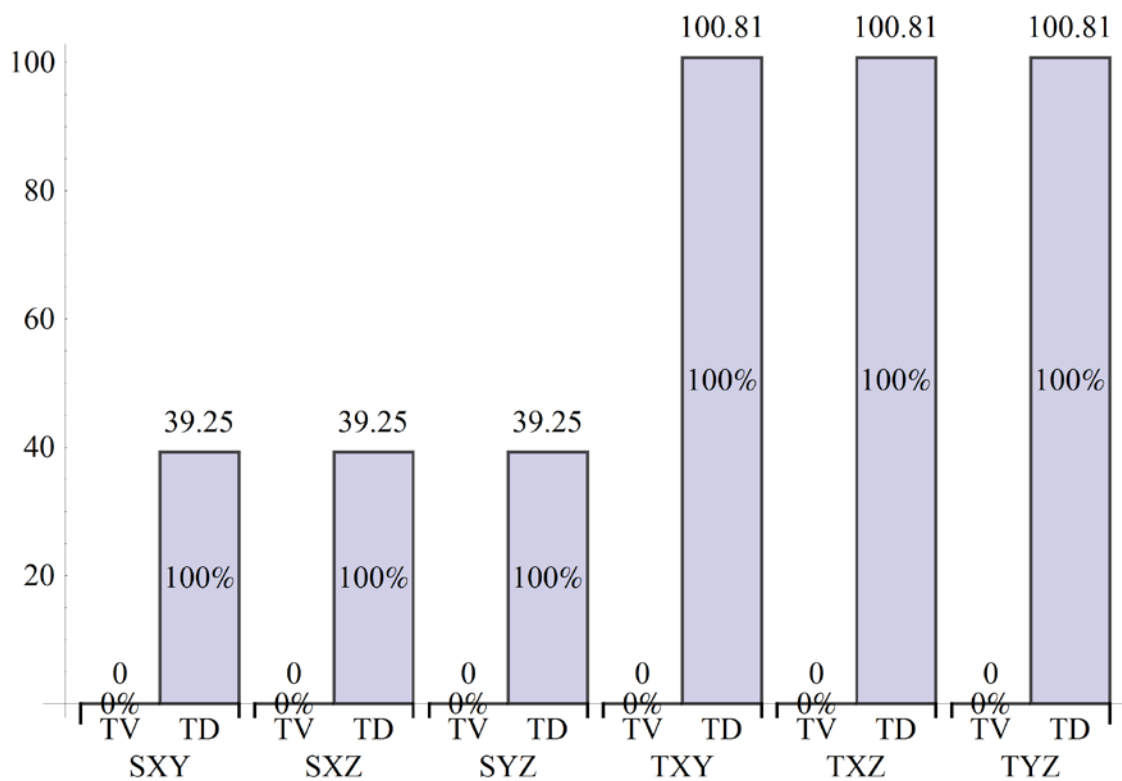


Εικόνα 4.11: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα διάτμησης και στρέψης

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

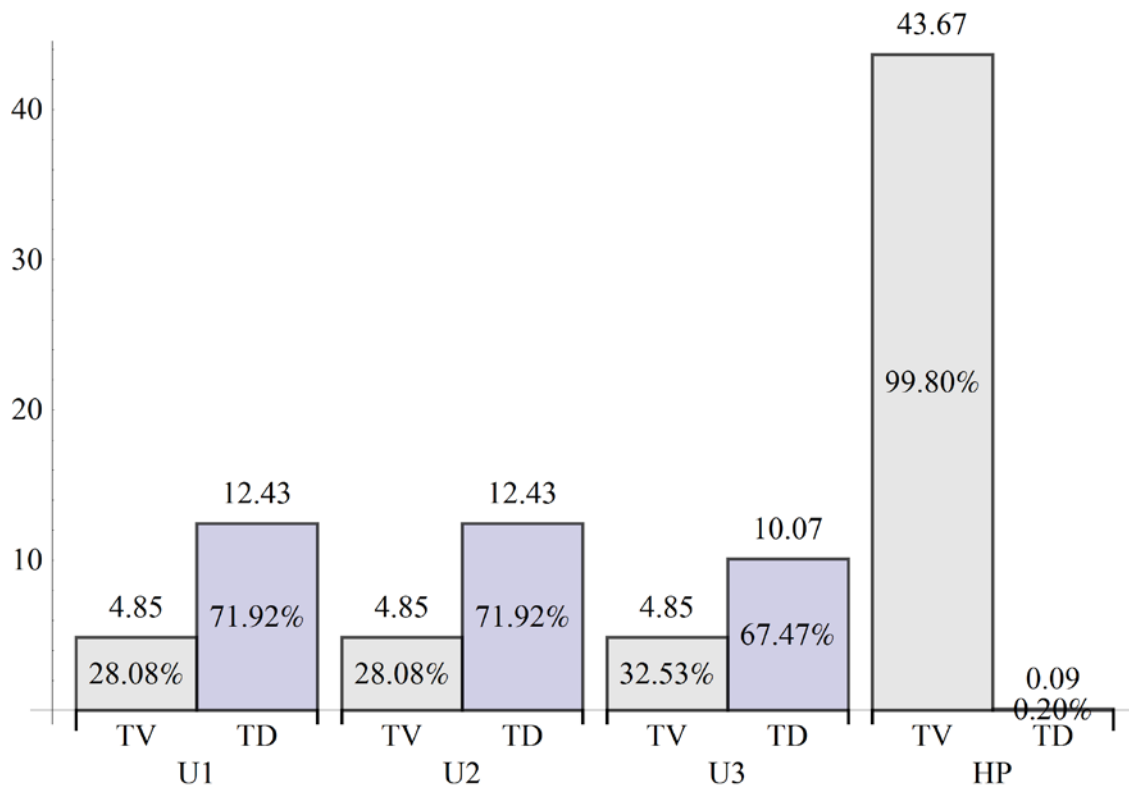


4.12: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα εφελκυσμού και υδροστατικής πίεσης

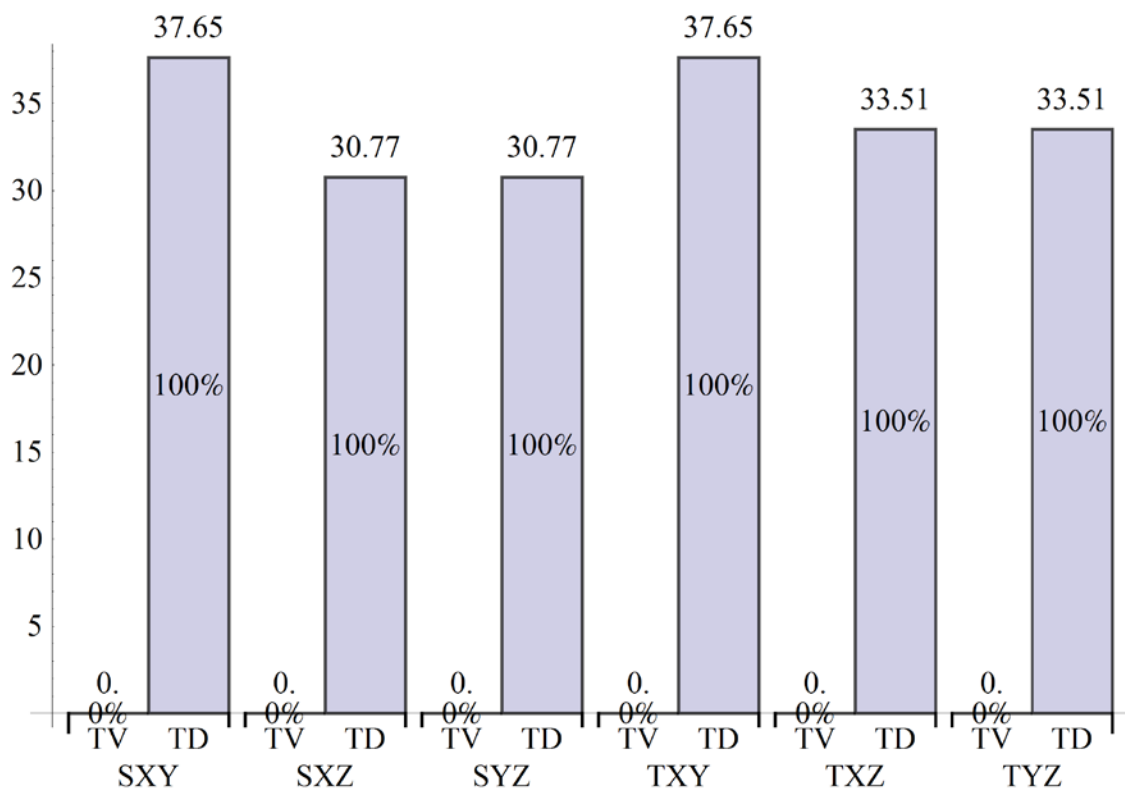


Εικόνα 4.13: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα διάτμησης και στρέψης

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

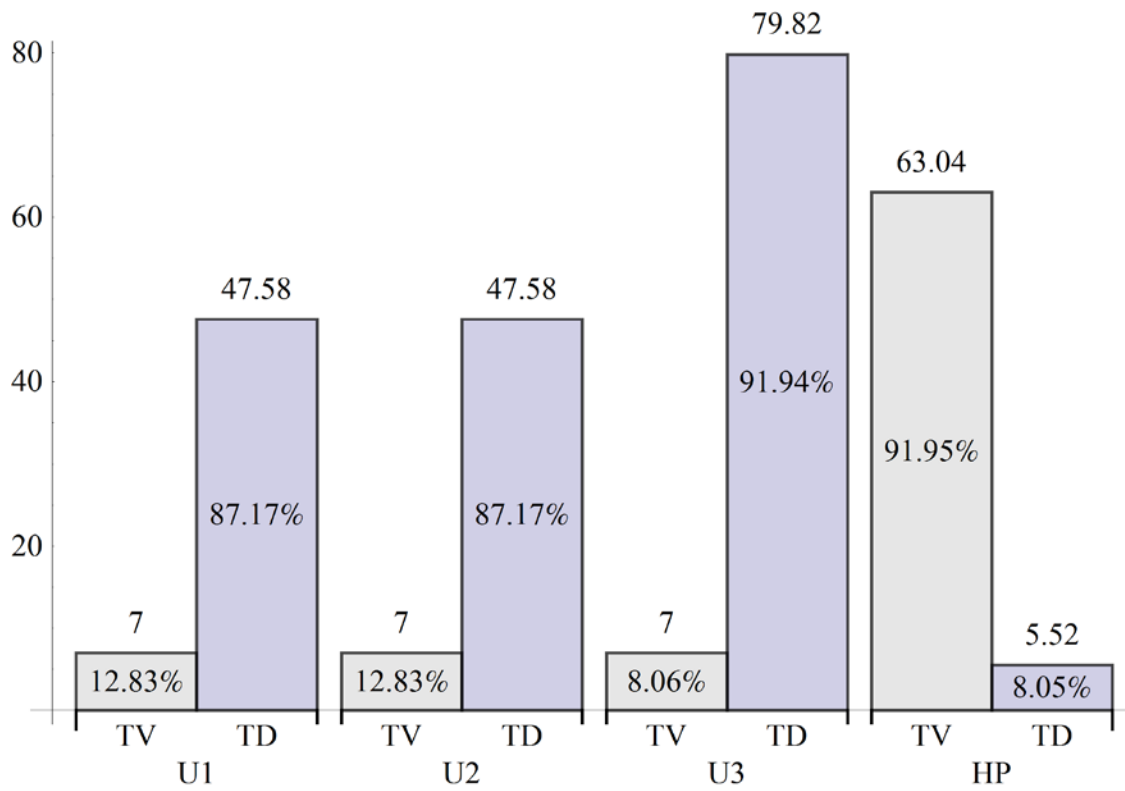


4.14: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα εφελκυσμού και υδροστατικής πίεσης

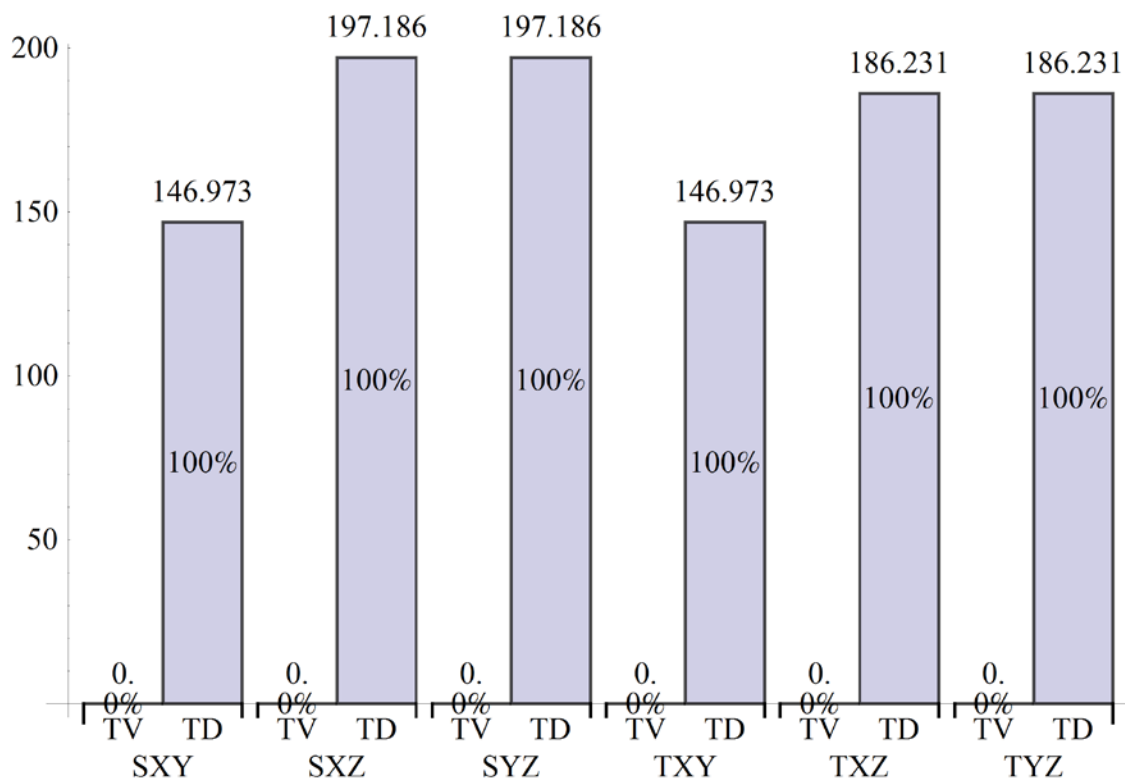


Εικόνα 4.15: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα διάτμησης και στρέψης

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

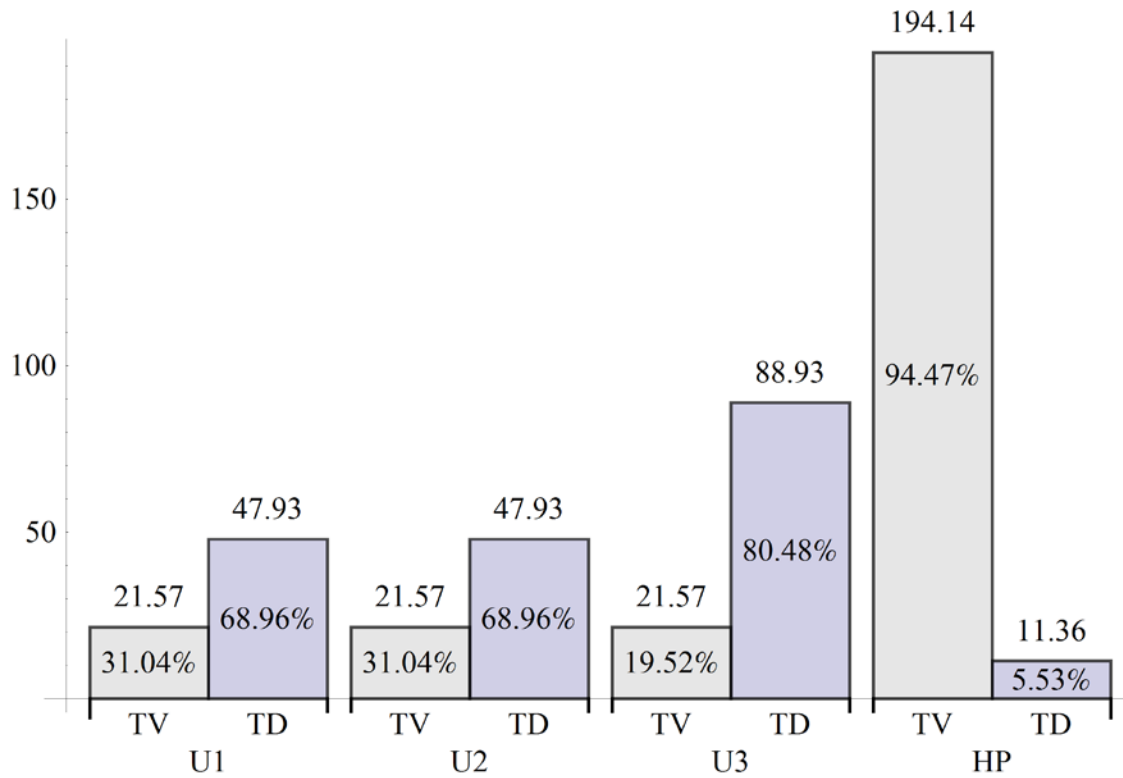


4.16: Ιστογράμματα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα εφελκυσμού και υδροστατικής πίεσης

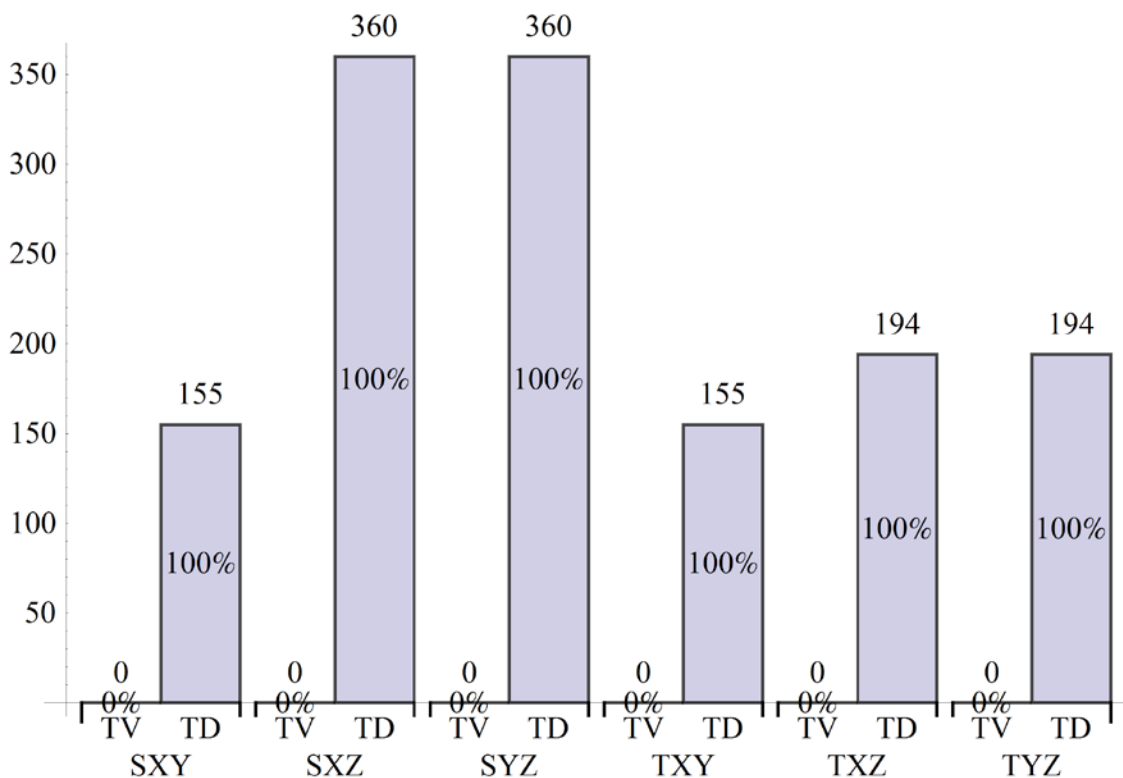


Εικόνα 4.17: Ιστογράμματα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα διάτμησης και στρέψης

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

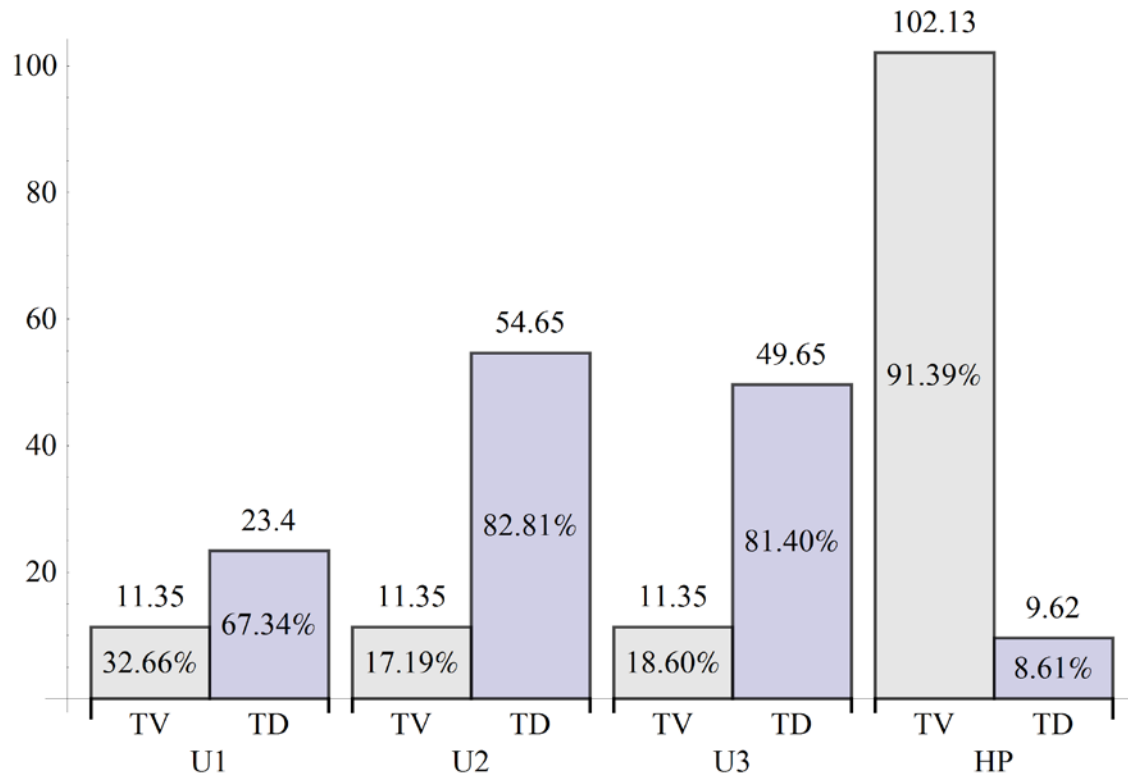


4.18: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα εφελκυσμού και υδροστατικής πίεσης

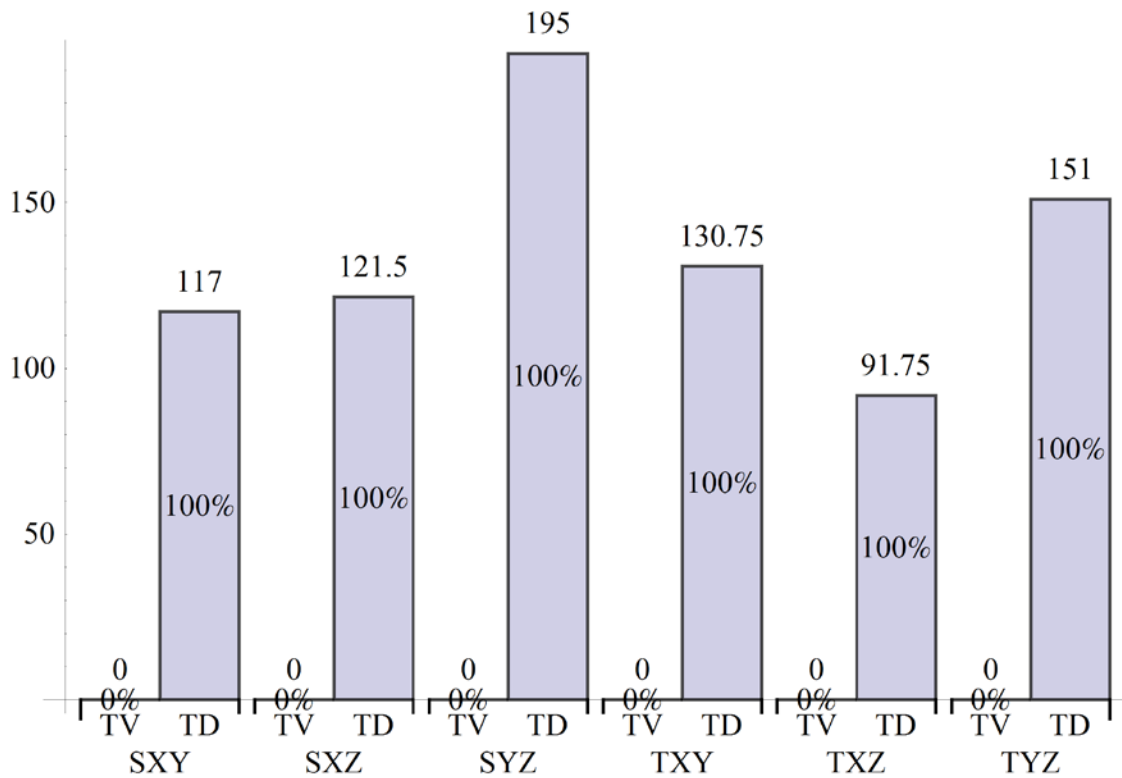


Εικόνα 4.19: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα διάτμησης και στρέψης

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

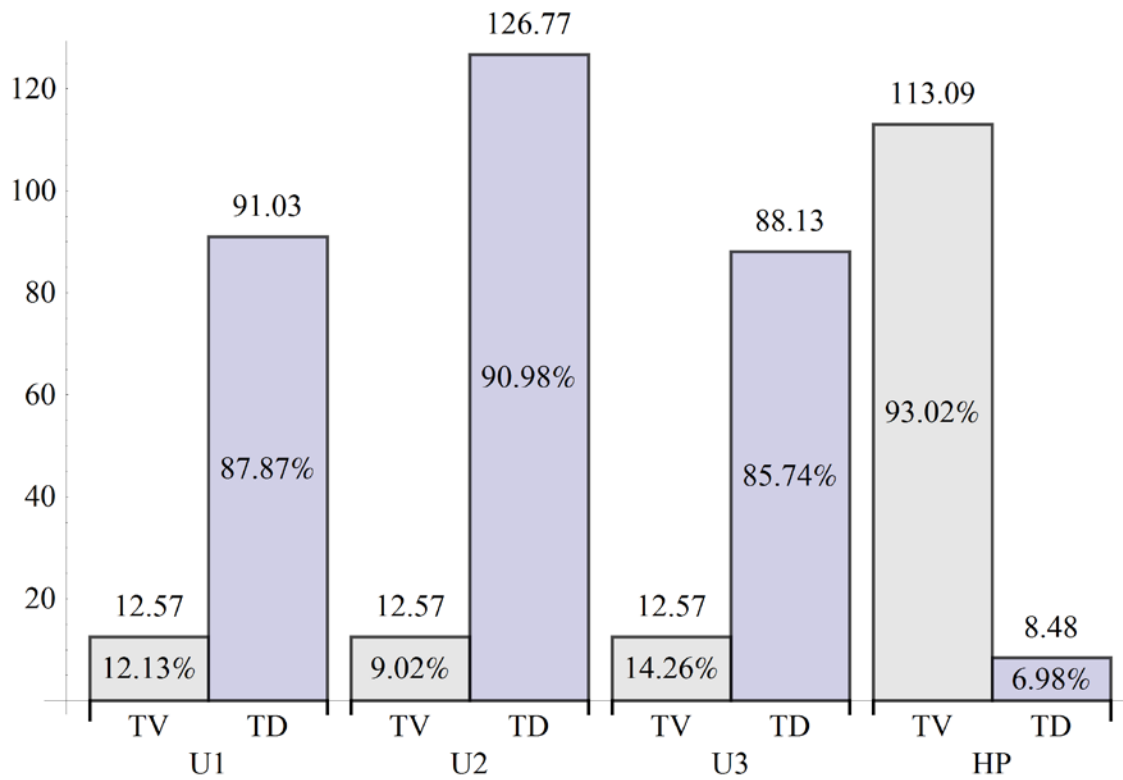


4.20: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα εφελκυσμού και υδροστατικής πίεσης

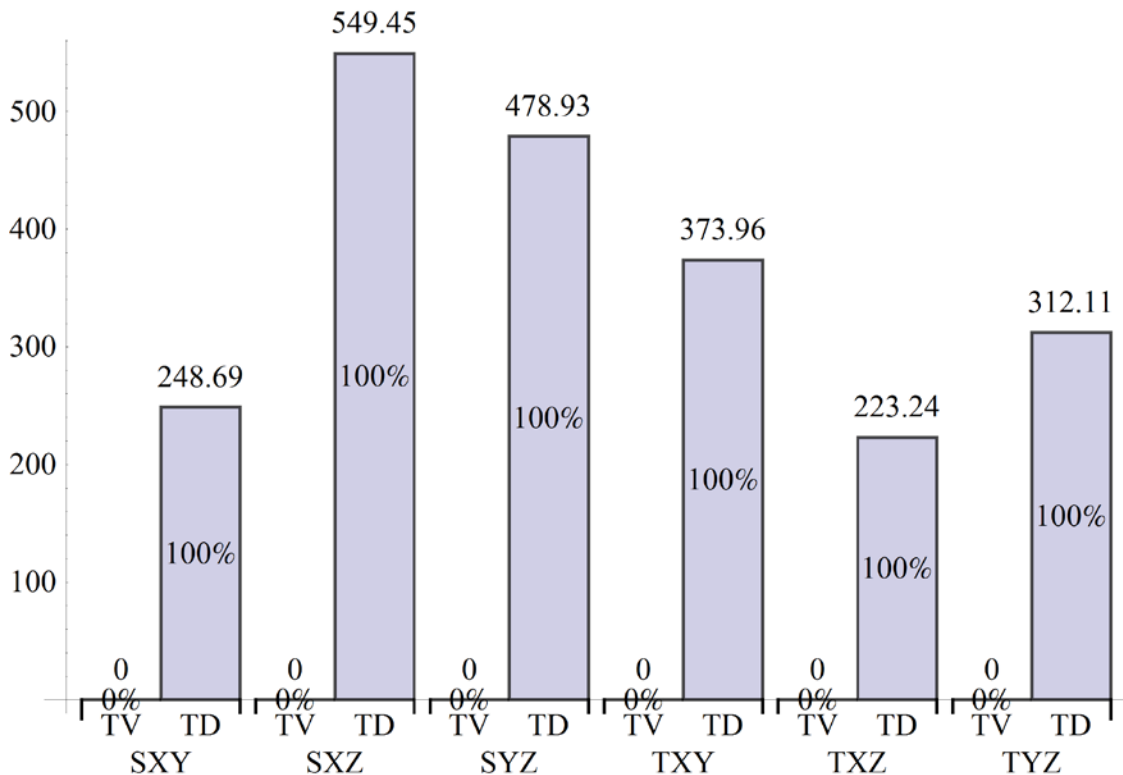


Εικόνα 4.21: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα διάτμησης και στρέψης

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

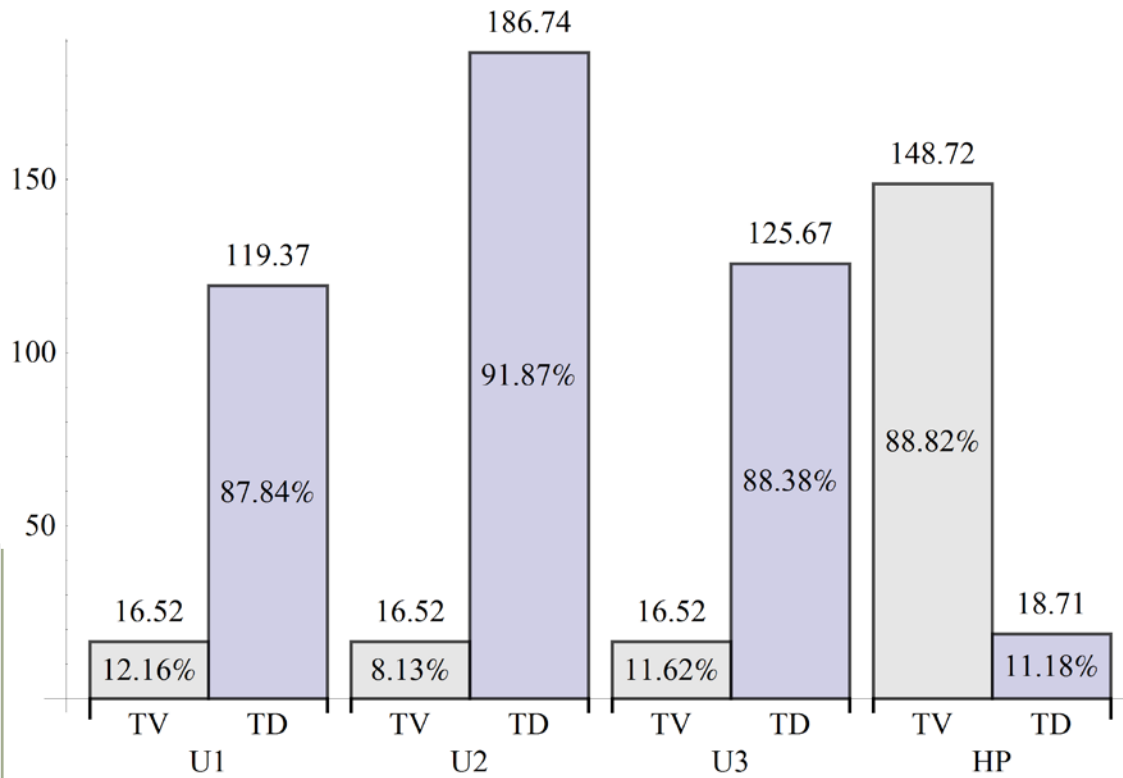


4.22: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα εφελκυσμού και υδροστατικής πίεσης

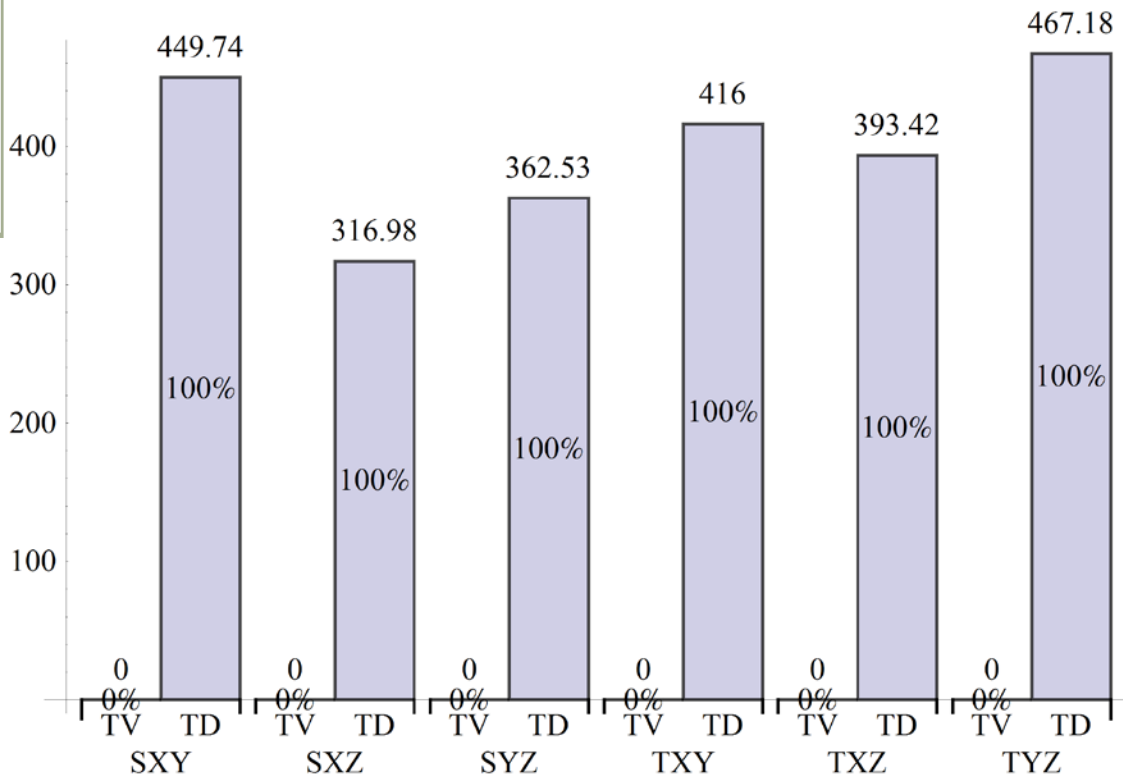


Εικόνα 4.23: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα διάτμησης και στρέψης

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων



4.24: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα εφελκυσμού και υδροστατικής πίεσης



Εικόνα 4.25: Ιστόγραμμα ελαστικών ενεργειών σε πειράματα διάτμησης και στρέψης

Παρατηρήσεις:

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι:

- i. Ένα υλικό, ισότροπο ή ανισότροπο (οποιασδήποτε κλάσης), σε συνθήκες καθαρής διάτμησης ή καθαρής στρέψης διαθέτει όλη την προσφερόμενη σε αυτό ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης αποκλειστικά για την αλλαγή του σχήματός του. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο από τη στιγμή που σε όλες τις συνιστώσες του τανυστή αλλαγής όγκου εμφανίζεται όπως είδαμε η ποσότητα $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.
- ii. Όλες οι περιπτώσεις μονοαξονικής φόρτισης είναι ενεργειακά μεικτές φορτίσεις, με την έννοια ότι πάντοτε από το σύνολο της προσφερόμενης ενέργειας ένα μέρος διατίθεται από το υλικό για την αλλαγή του όγκου του και το υπόλοιπο για την αλλαγή του σχήματός του. Ειδικότερα, για τα ισότροπα υλικά ο λόγος ενέργειας αλλαγής όγκου προς ενέργεια αλλαγής σχήματος ισούται με:

$$\frac{T_V}{T_D} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2(c_{11} + 2c_{12})}$$

ενώ για τα ορθότροπα υλικά αντίστοιχα θα ισχύει :

$$\left(\frac{T_V}{T_D}\right)_i = \frac{2c_{12}c_{13}c_{23} - c_{13}^2c_{22} - c_{12}^2c_{33} - c_{11}(c_{23}^2 - c_{22}c_{33})}{F_i}, i = 1, 2, 3, \text{ όπου}$$

$$F_1 = (c_{13} + c_{23})(c_{13}c_{22} - c_{23}(2c_{12} + c_{22} + 2c_{23})) + (c_{12}^2 + 2c_{12}c_{22} + 2c_{13}c_{22} + c_{22}^2 + 2c_{22}c_{23} - c_{23}^2)c_{33} + c_{22}c_{33}^2 \quad \text{στη διεύθυνση 1,}$$

$$F_2 = c_{11}^2c_{33} + c_{11}(-c_{13}^2 + 2c_{12}c_{33} + 2c_{13}c_{33} + (c_{23} + c_{33})^2) + (c_{12} + c_{13})(c_{12}c_{33} - c_{13}(2(c_{13} + c_{23}) + c_{33})) \quad \text{στη διεύθυνση 2,}$$

$$F_3 = c_{11}^2c_{22} + c_{11}(-c_{12}^2 + 2c_{12}c_{22} + 2c_{13}c_{22} + (c_{22} + c_{23})^2) - (c_{12} + c_{13})(2c_{12}^2 - c_{13}c_{22} + c_{12}(c_{22} + 2c_{23})) \quad \text{στη διεύθυνση 3.}$$

- iii. Η περίπτωση της υδροστατικής φόρτισης (υδροστατική πίεση) είναι ενεργειακά καθαρή περίπτωση αλλαγής όγκου μόνο στην περίπτωση των ισότροπων και των κυβικών υλικών. Για τις υπόλοιπες κλάσεις ανισοτροπίας, η υδροστατική φόρτιση προκαλεί επιπλέον και αλλαγή σχήματος.

Πιο συγκεκριμένα, για ορθότροπα υλικά ισχύει ότι:

$$\frac{T_V}{T_D} = \frac{9(c_{13}^2c_{22} + c_{12}^2c_{33} + c_{11}(c_{23}^2 - c_{22}c_{33}) - 2c_{12}c_{13}c_{23})}{H}, \text{ όπου}$$

Περιγραφή του διαχωρισμού με όρους τάσεων

$$\begin{aligned} H = & 2c_{12}^3 + 2c_{13}^3 - 4c_{13}^2c_{22} + 2c_{13}c_{22}^2 - 2c_{13}^2c_{23} + 2c_{13}c_{22}c_{23} - 2c_{13}c_{23}^2 + c_{22}c_{23}^2 + 2c_{23}^3 + \\ & c_{12}^2(-2c_{13} + c_{22} - 2c_{23} - 4c_{33}) + (c_{13}^2 - c_{22}^2 - 2(c_{13} + c_{22})c_{23} + c_{23}^2)c_{33} - c_{22}c_{33}^2 + \\ & c_{11}(c_{12}^2 + c_{13}^2 - c_{22}^2 - 2c_{12}(c_{13} + c_{22} - c_{23}) + 2c_{13}c_{23} - 4c_{23}^2 - 2c_{13}c_{33} + 6c_{22}c_{33} - c_{33}^2) + \\ & 2c_{12}(-c_{13}^2 - c_{23}(c_{22} + c_{23}) + c_{23}c_{33} + c_{33}^2 + c_{13}(c_{22} + 3c_{23} + c_{33})) - c_{11}^2(c_{22} - 2c_{23} + c_{33}) \end{aligned}$$

Άρα η υδροστατική φόρτιση χάνει κάθε ενεργειακή ιδιαιτερότητά της στην περίπτωση των ανισότροπων (πλην κυβικών) υλικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε δύο ειδικές κατηγορίες υλικών, τα *ασυμπιέστα* και τα *ισοτροπικώς συμπιεστά* υλικά [48,49] και θα δούμε τί συμβαίνει με την ενέργεια παραμόρφωσής τους. Τα ασυμπιέστα υλικά χρησιμοποιούνται πολύ στην Εμβιομηχανική για τη μοντελοποίηση της συμπεριφοράς μαλακών βιολογικών ιστών καθώς και ανθρώπινων οργάνων [39].

Συμπιεστότητα, μέτρο διόγκωσης και αλλαγή όγκου

Η έννοια της συμπιεστότητας έχει επικρατήσει από την μελέτη των ισότροπων υλικών να ταυτίζεται με την απόκριση ενός υλικού σε υδροστατική πίεση (μέση ορθή τάση). Μάλιστα, με βάση αυτή την ερμηνεία της συμπιεστότητας ορίζεται αντίστοιχα και το *μέτρο διόγκωσης* K ως εξής:

$$K = \frac{p}{\Theta} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} \quad (5.1)$$

Ειδικότερα, για τα ισότροπα υλικά ο τύπος καταλήγει στη γνωστή σχέση: $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$.

Άρα στα ισότροπα υλικά το μέτρο διόγκωσης αποτελεί μια σταθερά του υλικού.

Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως και για τα ανισότροπα υλικά. Ο Nye [28] περιγράφει ότι στα ανισότροπα υλικά η επιβολή υδροστατικής πίεσης p οδηγεί γενικά στην εξής σχέση μεταξύ ανηγμένης αλλαγής όγκου Θ και υδροστατικής πίεσης p :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (s_{11} + s_{12} + s_{13})p + (s_{12} + s_{22} + s_{23})p + (s_{13} + s_{23} + s_{33})p \Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23}))p \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{13} + s_{23})} \quad (5.2)$$

Αυτό όμως είναι αληθές μόνο στην περίπτωση όπου η τιμή της υδροστατικής πίεσης p είναι ίση με αυτήν που υπολογίσαμε στον τύπο (2.10) στο δεύτερο κεφάλαιο.

Σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή αντικαταστήσουμε όπου $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, τότε το πηλίκο p/Θ είναι συνάρτηση της επιβαλλόμενης τάσης και συνεπώς δεν αποτελεί σταθερά του υλικού.

Άρα στα ανισότροπα υλικά, σύμφωνα με τον συνήθη ορισμό, το μέτρο διόγκωσης K δεν αποτελεί σταθερά του υλικού, αλλά η τιμή του εξαρτάται από την τιμή της επιβαλλόμενης τάσης.

5.2 Ασυμπίεστα υλικά

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα υλικό ασυμπίεστο είναι για οποιαδήποτε τιμή της επιβαλλόμενης τάσης να ισχύει πάντοτε:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (5.3)$$

δηλαδή η ανηγμένη αλλαγή όγκου του $\Delta V / V$ να ισούται πάντα με μηδέν.

Για τη γενικότερη περίπτωση ενός τρικλινούς υλικού αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} (s_{11} + s_{12} + s_{13})\sigma_1 + (s_{12} + s_{22} + s_{23})\sigma_2 + (s_{13} + s_{23} + s_{33})\sigma_3 + \\ (s_{14} + s_{24} + s_{34})\sigma_4 + (s_{15} + s_{25} + s_{35})\sigma_5 + (s_{16} + s_{26} + s_{36})\sigma_6 = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Και επειδή η ισότητα θα πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε τιμή τάσης, συνεπάγεται την ταυτόχρονη ικανοποίηση των παρακάτω έξι συνθηκών:

$$\begin{cases} s_{11} + s_{12} + s_{13} = 0 & s_{12} + s_{22} + s_{23} = 0 & s_{13} + s_{23} + s_{33} = 0 \\ s_{14} + s_{24} + s_{34} = 0 & s_{15} + s_{25} + s_{35} = 0 & s_{16} + s_{26} + s_{36} = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Η ικανοποίηση των παραπάνω συνθηκών μειώνει περαιτέρω τον αριθμό των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών από 21 σε 15. Επιπλέον όμως, καθιστά το μητρώο ενδοτικότητας $\underline{\xi}$ ιδιόμορφο (η ορίζουσά του γίνεται ίση με μηδέν, οπότε δεν αντιστρέφεται). Άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον τανυστή ακαμψίας \underline{C} , ούτε προφανώς να εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία του Κεφαλαίου 3 για να υπολογίσουμε την τιμή της παραμέτρου m .

Η λύση της δευτεροβάθμιας Εξίσωσης (3.8) δίνει πάντα δύο λύσεις :

$$m = 0 \quad \text{ή} \quad m = w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + w_3\varepsilon_3 + w_4\varepsilon_4 + w_5\varepsilon_5 + w_6\varepsilon_6 \quad (5.6)$$

όπου τα w_i όπως γνωρίζουμε δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} w_1 = \frac{c_{11} + c_{12} + c_{13}}{D}, w_2 = \frac{c_{12} + c_{22} + c_{23}}{D}, w_3 = \frac{c_{13} + c_{23} + c_{33}}{D} \\ w_4 = \frac{c_{14} + c_{24} + c_{34}}{D}, w_5 = \frac{c_{15} + c_{25} + c_{35}}{D}, w_6 = \frac{c_{16} + c_{26} + c_{36}}{D} \end{cases}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η τιμή $m = 0$ δεν αντιστοιχεί υποχρεωτικά σε ανηγμένη αλλαγή όγκου ίση με μηδέν (συνθήκη ασυμπίεστοτητας).

Επιπλέον εάν δεν επιλέξω εξ αρχής τη λύση $m = 0$, τότε δεν υπάρχει περίπτωση να μπορέσει να μηδενιστεί η δεύτερη μη-μηδενική λύση. Πράγματι, κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι:

$$m = w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + w_3\varepsilon_3 + w_4\varepsilon_4 + w_5\varepsilon_5 + w_6\varepsilon_6 = 0 \Rightarrow$$

Εφαρμογή Σε Δύο Ειδικές Κατηγορίες Υλικών

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_{11} + c_{12} + c_{13} = c_{12} + c_{22} + c_{23} = c_{13} + c_{23} + c_{33} = 0 \\ c_{14} + c_{24} + c_{34} = c_{15} + c_{25} + c_{35} = c_{16} + c_{26} + c_{36} = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Αν ισχύουν όμως οι τρεις πρώτες ισότητες, τότε θα είναι και

$$D = c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23}) = 0 \quad (5.8)$$

Δηλαδή, τα w_i γίνονται όλα απροσδιόριστα (απροσδιοριστία 0/0)!

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι στα ασυμπιεστα υλικά η παράμετρος παραμόρφωσης και άρα και οι ελαστικές ενέργειες αλλαγής όγκου και σχήματος γίνονται απροσδιόριστα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στη βιβλιογραφία μπορεί κανείς να βρει αριθμητικούς τρόπους αντιστροφής του ιδιόμορφου μητρώου ενδοτικότητας (π.χ. ο γενικευμένος αντίστροφος Moore-Penrose). Τα μητρώα ακαμψίας που προκύπτουν όμως και πάλι καταλήγουν σε απροσδιοριστία των συντελεστών w_i . Η απαίτηση της ασυμπιεστότητας είναι μια ιδιαίτερα αυστηρή μαθηματική απαίτηση, όχι και τόσο ρεαλιστική όμως. Μια μικρή έστω συμπίεστικότητα πάντα πρέπει να υπάρχει.

5.3 Ισοτροπικώς συμπιεστά ανισότροπα υλικά

Με τον όρο ισοτροπικώς συμπιεστά εννοούμε εκείνα τα ανισότροπα υλικά στα οποία η εφαρμογή υδροστατικής πίεσης έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό του αποκλίνοντος τανυστή παραμόρφωσης $\underline{\underline{\xi}}_D$, ακριβώς όπως συμβαίνει και με τα ισότροπα υλικά.

Το μέτρο διόγκωσης K των ανισότροπων υλικών είναι γενικά συνάρτηση της επιβαλλόμενης τάσης. Για τα *ισοτροπικώς συμπιεστά ανισότροπα υλικά* όμως, όπως και στα ισότροπα και κυβικά υλικά, το μέτρο διόγκωσης K είναι σταθερά του υλικού, ανεξάρτητη της επιβαλλόμενης τάσης. Αυτό μαθηματικά εκφράζεται από τη συνθήκη:

$$\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{I}} = 3K\underline{\underline{I}} \Leftrightarrow \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{I}} = \frac{1}{3K}\underline{\underline{I}} \quad (5.9)$$

Ας δούμε τί συνεπάγεται η ικανοποίηση της συνθήκης αυτής για ισοτροπικώς συμπιεστά ορθότροπα και εγκάρσιως ισότροπα υλικά, που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο τεχνολογικό ενδιαφέρον.

Ισοτροπικώς συμπιεστά ορθότροπα υλικά

Η συνθήκη (5.9) συνεπάγεται ότι οι λόγοι Poisson ν_{ij} συνδέονται με τα μέτρα ελαστικότητας και το μέτρο διόγκωσης σύμφωνα με τη σχέση:

$$\nu_{ij} = \frac{1}{2} + \frac{E_j}{2} \left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_k} - \frac{1}{3K} \right), \quad (i \neq j \neq k \neq i, \quad i, j = 1, 2, 3) \quad (5.10)$$

Οπότε για τα στοιχεία του μητρώου ελαστικότητας $\underline{\underline{C}}$ θα ισχύουν αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \frac{1}{3D^*} \left(\frac{2}{E_j} + \frac{2}{E_k} - \frac{1}{E_i} - \frac{1}{3K} \right) + K \\ c_{ij} &= \frac{1}{6D^*} \left(\frac{1}{E_i} + \frac{1}{E_j} - \frac{5}{E_k} + \frac{1}{3K} \right) + K \end{aligned} \quad (i \neq j \neq k \neq i, \quad i, j = 1, 2, 3) \quad (5.11)$$

όπου

$$\left\{ \begin{aligned} D^* &= D - \frac{1}{6K} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} \right) + \frac{1}{36K^2} \\ D &= \frac{3}{4} \left(\frac{2}{E_1 E_2} + \frac{2}{E_2 E_3} + \frac{2}{E_3 E_1} - \frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_3^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (5.12)$$

Εφαρμογή Σε Δύο Ειδικές Κατηγορίες Υλικών

Αντικατάσταση των παραπάνω τιμών των ελαστικών σταθερών στον τύπο (3.12) δίνει τελικά ότι:

$$m = \frac{1}{L} \left[\begin{array}{l} 3K(E_1^2 E_2^2 + E_1^2 E_3^2 + E_2^2 E_3^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \\ E_1 E_2 E_3 (E_2 E_3 \varepsilon_1 + E_1 E_3 \varepsilon_2 + E_1 E_2 \varepsilon_3) - \\ 3KE_1 E_2 E_3 (E_2(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) + E_3(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + E_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)) \end{array} \right] \quad (5.13)$$

όπου

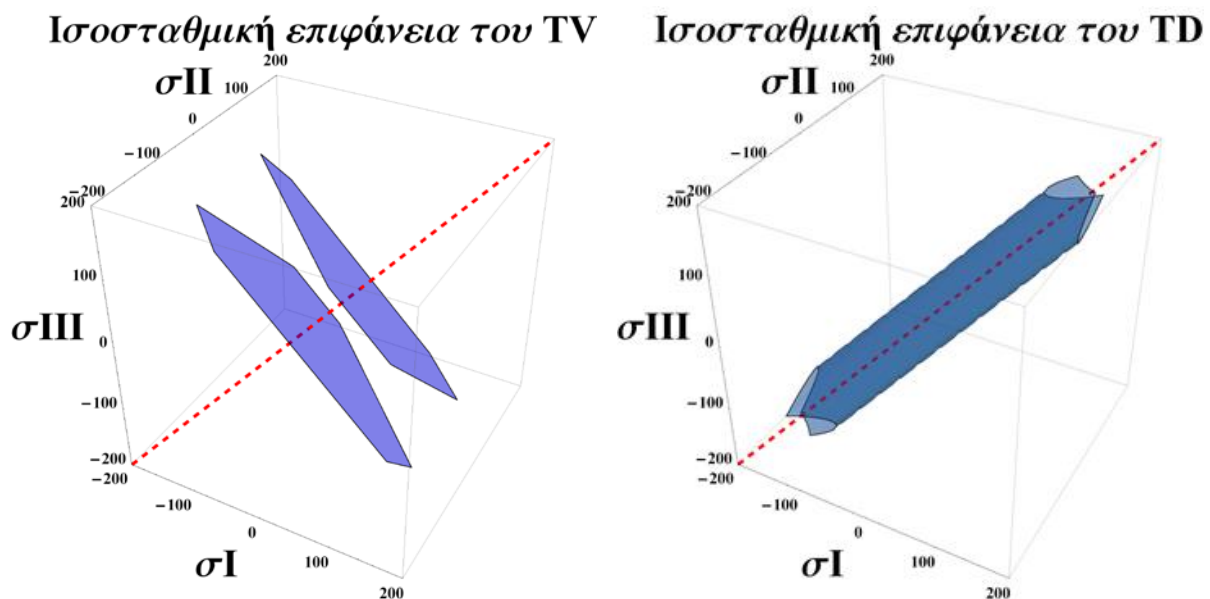
$$L = E_1 E_2 E_3 (E_2 E_3 + E_1 E_2 + E_1 E_3) + \left(9(E_2^2 E_3^2 + E_1^2 E_2^2 + E_1^2 E_3^2) - 15E_1 E_2 E_3 (E_1 + E_2 + E_3) \right) K \quad (5.14)$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω υποθετικό ισοτροπικώς συμπιεστό ορθότροπο υλικό με ελαστικές σταθερές (σε GPa):

$$c_{11} = 77.99, c_{22} = 40.28, c_{33} = 8.78, c_{12} = -53.25, c_{23} = 15.96, c_{13} = -21.74, c_{44} = 41.15, c_{55} = 25.64, c_{66} = 42.73$$

Αν δώσουμε μία κρίσιμη τιμή στην ενέργεια αλλαγής όγκου και την ενέργεια αλλαγής σχήματος, τότε προκύπτουν τα παρακάτω γραφήματα:



Εικόνα 5.1: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος ισοτροπικώς συμπιεστού ορθότροπου υλικού

Η ισοσταθμική επιφάνεια της ελαστικής ενέργειας αλλαγής όγκου αποτελείται από δύο παράλληλα επίπεδα στα οποία είναι κάθετος ο υδροστατικός άξονας.

Η ισοσταθμική επιφάνεια της ελαστικής ενέργειας αλλαγής σχήματος δεν είναι κύλινδρος, όπως είδαμε ότι είναι γενικώς στα ορθότροπα υλικά. Είναι ένας ελλειπτικός κύλινδρος με άξονα τον υδροστατικό άξονα.

Ισοτροπικώς συμπεστώ εγκαρσίως ισότροπα υλικά

Εφαρμογή της συνθήκης (5.9) οδηγεί στα εξής αποτελέσματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{21} = \nu_{31} = \frac{1}{2} - \frac{E_1}{6K} \\ \nu_{12} = \nu_{13} = \frac{E_2}{2} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{3K} \right) \\ \nu_{23} = \nu_{32} = 1 - \frac{E_2}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{3K} \right) \\ G_{23} = \frac{E_1 E_2}{4E_1 - E_2 - \frac{E_1 E_2}{3K}} \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Για τις ελαστικές σταθερές του μητρώου ακαμψίας τους θα ισχύει τότε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} = \frac{1}{3D^*} \left(\frac{4}{E_2} - \frac{1}{E_1} - \frac{1}{3K} \right) + K \\ c_{22} = c_{33} = \frac{1}{3D^*} \left(\frac{2}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{3K} \right) + K \\ c_{23} = \frac{1}{6D^*} \left(\frac{2}{E_2} - \frac{5}{E_1} + \frac{1}{3K} \right) + K \\ c_{12} = c_{13} = \frac{1}{6D^*} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{4}{E_2} + \frac{1}{3K} \right) + K \end{array} \right. \quad (5.16)$$

όπου

$$D^* = \frac{3}{4E_1} \left(\frac{4}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) - \frac{1}{6K} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{2}{E_2} \right) + \frac{1}{36K^2} \quad (5.17)$$

Με τις τιμές αυτές προκύπτει η τιμή:

$$m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$$

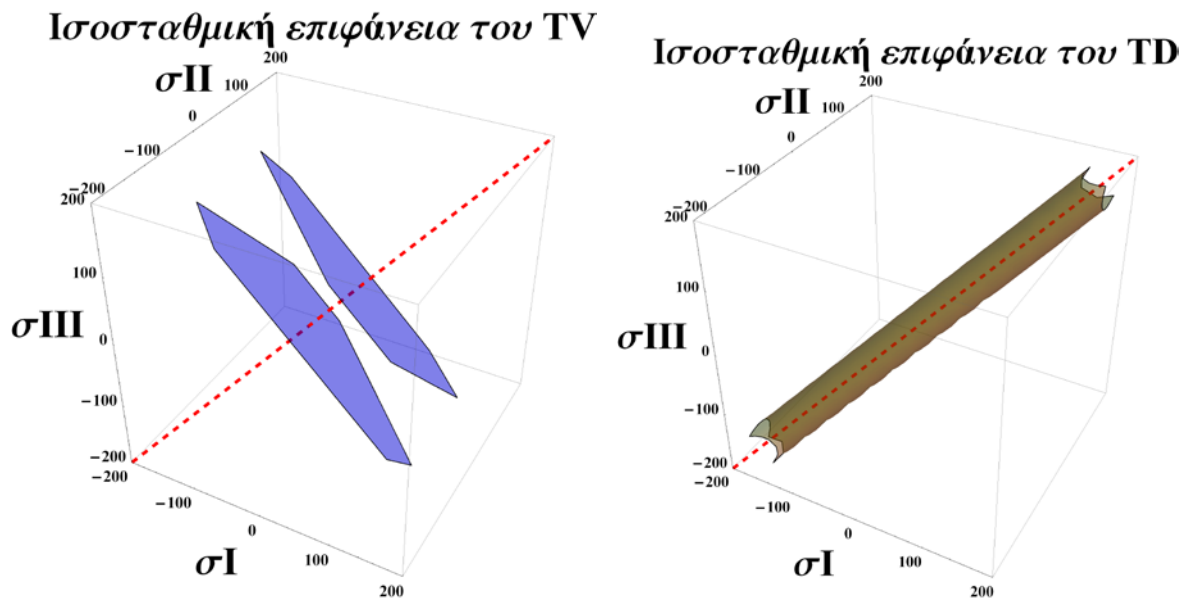
ακριβώς όπως και στα ισότροπα υλικά. Με μια πρόχειρη ματιά λοιπόν, φαίνεται ότι η ασθενής συνθήκη (5.9) είναι αρκούτως ικανοποιητική ούτως ώστε το εγκαρσίως ισότροπο υλικό να έχει ισότροπη συμπεριφορά, ενώ για τα ορθότροπα υλικά το λογικό συμπέρασμα είναι ότι χρειάζονται περισσότερες από μία ασθενείς συνθήκες.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω υποθετικό ισοτροπικώς συμπίεστο εγκάρσιως ισότροπο υλικό με ελαστικές σταθερές (σε GPa):

$$c_{11} = 20.08, c_{22} = 6.60, c_{33} = 6.60, c_{12} = -8.54, c_{23} = 4.94, c_{13} = -8.54, c_{44} = 41.15, c_{55} = 41.15, c_{66} = 14.31$$

Αν δώσουμε μία κρίσιμη τιμή στην ενέργεια αλλαγής όγκου και την ενέργεια αλλαγής σχήματος, τότε προκύπτουν τα παρακάτω γραφήματα:



Εικόνα 5.2: Ισοσταθμικές επιφάνειες ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος ισοτροπικώς συμπίεστου εγκάρσιως ισότροπου υλικού

Παρατηρούμε ότι για το ισοτροπικώς συμπίεστο εγκάρσιως ισότροπο υλικό προκύπτουν ισοΰψεις των ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος όμοιες με του ισότροπου υλικού.

Συμπεράσματα Κεφαλαίου

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένα υλικό ώστε να μπορεί να χαρακτηριστεί ως ασυμπιέστο και ως ιστροπικώς συμπιεστό και είδαμε τί αυτές συνεπάγονται για την παράμετρο παραμόρφωσης m .

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η παράμετρος παραμόρφωσης m γίνεται απροσδιόριστη στην περίπτωση των ασυμπιέστων υλικών και ότι σε υλικά για τα οποία ισχύει $\Delta V / V = 0$

δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι και $m = 0$!

Είδαμε ακόμα ότι η επιπλέον συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα ιστροπικώς συμπιεστά εγκαρσίως ισότροπα υλικά είναι ικανή ώστε η παράμετρος παραμόρφωσης m να εκπίπτει στην

ισότροπη τιμή της $m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$, ενώ για τα ιστροπικώς συμπιεστά ορθότροπα υλικά η

συνθήκη αυτή δεν είναι εξίσου ικανή και συνεπώς απαιτούνται επιπλέον συνθήκες για να λάβει η παράμετρος παραμόρφωσης την ισότροπη τιμή της.

Στη συνέχεια δώσαμε δύο αριθμητικά παραδείγματα ιστροπικώς συμπιεστών ορθότροπων και εγκαρσίως ισότροπων υλικών. Οι χρησιμοποιηθείσες τιμές των ελαστικών σταθερών επαληθεύουν τους τύπους (5.11) και (5.15), ενώ οι ιδιοτιμές που προκύπτουν από τα εξ αυτών παραγόμενα μητρώα ακαμψίας προκύπτουν θετικές σε συμφωνία με όσα είπαμε στο Κεφάλαιο 1.

Οι ισοϋψείς που προκύπτουν είναι κυρτές επιφάνειες και οι ομοιότητες με την περίπτωση των ισότροπων υλικών είναι εμφανείς. Έτσι και στα ιστροπικώς συμπιεστά υλικά οι ισοϋψείς της ενέργειας αλλαγής όγκου είναι δυο επίπεδα στα οποία ο υδροστατικός άξονας είναι κάθετος, ενώ οι ισοϋψείς της ενέργειας αλλαγής σχήματος είναι *κύλινδροι* στην περίπτωση των ιστροπικώς συμπιεστών εγκαρσίως ισότροπων υλικών και *ελλειπτικοί κύλινδροι* με άξονα τον υδροστατικό άξονα στην περίπτωση των ιστροπικώς συμπιεστών ορθότροπων υλικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

Ανασκόπηση - Σχολιασμός επί των αποτελεσμάτων

Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκε το πρόβλημα του διαχωρισμού της ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων σε δύο διακριτά φυσικά μέρη: α) *ενέργεια αλλαγής όγκου* και β) *ενέργεια αλλαγής σχήματος*, για κάθε μία από τις επτά κλάσεις ανισότροπων υλικών.

Στην ερευνητική μας ομάδα υπήρχε εξαρχής η πεποίθηση ότι το φυσικό αυτό πρόβλημα πρέπει οπωσδήποτε να έχει λύση. Κάτι τέτοιο όμως ερχόταν σε αντίθεση με αποτελέσματα στη βιβλιογραφία που κατέληγαν σε φυσικά ή μαθηματικά αδιέξοδα, απορρίπτοντας κατηγορηματικά την πιθανότητα ύπαρξης λύσης. Έπρεπε λοιπόν να γίνει μια προσεκτική αξιολόγηση αυτών των αποτελεσμάτων και να εξεταστούν οι όποιες πιθανότητες διάψευσής των.

Σαν πρώτο επίπεδο διερεύνησης, μελετήθηκε η πιθανότητα ύπαρξης επιπλέον συνθηκών τις οποίες θα πρέπει να ικανοποιούν οι ελαστικές σταθερές της κάθε κλάσης ανισοτροπίας, κάτι το οποίο θα μείωνε τον αριθμό των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών σε λιγότερες από 21 στη γενικότερη περίπτωση και ενδεχομένως κάποια ή κάποιες από αυτές τις εξαρτήσεις θα ήταν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ούτως ώστε να μηδενίζονται τα ολοκληρώματα αμοιβαίας επιρροής αλλαγής όγκου και σχήματος. Κάτι τέτοιο όμως δυστυχώς δεν κατέστη εφικτό.

Παρόλα αυτά, αξίζει να αναφέρουμε ότι δεν είναι λίγοι αυτοί που κατά καιρούς αμφισβήτησαν την ανεξαρτησία και των 21 ελαστικών σταθερών του γενικώς ανισότροπου μέσου. Μεταξύ αυτών, αξίζει να αναφερθεί το όνομα του Love [42] ο οποίος δεν βλέπει κάποιο λόγο να υπάρχουν τόσες ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές:

«It may however be questioned whether the constants given by the theory are really independent. In other words I think it will be generally admitted that crystalline bodies are at least as nearly isotropic as the theory makes them, but it may be questioned whether they are not more nearly isotropic. Optical experiments appear in some cases to favour an affirmative answer to this question.»

Επίσης, ο V.V. Novozhilov [50] αναφέρει κατά λέξη:

«This seems illogical to me, since in the case of triclinic and monoclinic crystals the numbers refer to non-invariant coefficients (which are not really physical constants), and in the case of crystals of the cubic system they refer to constant invariants.»

Μάλιστα, προχώρησε ένα βήμα παραπέρα και θεώρησε ότι με κατάλληλη επιλογή του συστήματος συντεταγμένων ο αριθμός των 21 ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών μπορεί να μειωθεί σε 18, ένα συμπέρασμα το οποίο δεν έχει βρει ανταπόκριση από τους μεταγενέστερους ερευνητές! Επιπλέον, μελετώντας τη βιβλιογραφία, διακρίνει κανείς πολλές προσπάθειες εφαρμογής θεωρημάτων της Γραμμικής Άλγεβρας για την ανίχνευση ανεξάρτητων ή αναλλοίωτων μεγεθών που εξαρτώνται από τις ελαστικές σταθερές σε κάθε κλάση ανισοτροπίας. Οι προσπάθειες αυτές έχουν ως κύριο εκφραστή τους τον Ting [40,41]. Φαίνεται λοιπόν πως υπάρχει ακόμα ένα ανοιχτό πεδίο έρευνας προς αυτή την κατεύθυνση.

Στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής έγινε μια μελέτη των ιδιοτιμών των μητρώων ελαστικότητας της κάθε κλάσης ανισοτροπίας. Εκεί, πέραν των περιορισμών που εισάγει η απαίτηση για θετικά

Συμπεράσματα - Επίλογος

ορισμένα μητρώα, προκύπτει και ένα άλλο ζήτημα. Εφόσον τα μητρώα των ελαστικών σταθερών είναι σε κάθε περίπτωση διαγωνοποιήσιμα, μήπως τελικά ο αριθμός των πραγματικά ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών πρέπει να είναι το πολύ 6 και όχι 21; Φαντάζει μια λογική απαίτηση. Ο λόγος που δεν παρουσιάστηκε εδώ αναλυτικότερα είναι η αδυναμία φυσικής ερμηνείας των αποτελεσμάτων. Θα πρέπει να γίνει αντικείμενο έρευνας με στοιχεία θεωρίας ομάδων (θεωρία αναπαράστασεων) που πολύ ξεφεύγουν του σκοπού της παρούσας διατριβής.

Στη συνέχεια μελετήθηκαν διεξοδικά οι ήδη υπάρχουσες λογικές συνδέσεις μεταξύ εντατικών-παραμορφωσιακών μεγεθών και των διερευνούμενων μεγεθών της αλλαγής όγκου και της αλλαγής σχήματος με βάση τεκμηριωμένα αποτελέσματα από την περίπτωση των ισότροπων υλικών. Διαπιστώθηκε ότι η λογική σύνδεση μεταξύ της αλλαγής όγκου και της επιβολής υδροστατικής πίεσης είναι λανθασμένη για τα ανισότροπα υλικά και ότι είναι προτιμότερη μια σύνδεση της αλλαγής όγκου με έναν σφαιρικό τανυστή παραμόρφωσης.

Υπό αυτό το πρίσμα δόθηκε ένας κοινός για όλα τα υλικά (ισότροπα ή ανισότροπα) ορισμός της αλλαγής όγκου, η οποία περιγράφεται από έναν σφαιρικό τανυστή παραμόρφωσης που αντιστοιχεί σε ομοιόθετη παραμόρφωση κατά τις τρεις ορθές κατευθύνσεις. Το ποσοστό της συστολής ή διαστολής του χαρακτηριστικού όγκου αναφοράς κάθε κλάσης ανισοτροπίας είναι τέτοιο ώστε να μην παραβιάζει τις συμμετρίες του εκάστοτε μέσου. Ως λογικό επακόλουθο, η ανηγμένη αλλαγή όγκου του κάθε τανυστή παραμόρφωσης που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου είναι διαφορετική για κάθε κλάση ανισοτροπίας.

Με το νέο ορισμό της αλλαγής όγκου, ο οποίος είναι συμβατός και με την περίπτωση των ισότροπων υλικών και με την απαίτηση της μη-αλληλεπίδρασης των διαχωριζόμενων μεγεθών (μηδενισμός των ολοκληρωμάτων αμοιβαίας επιρροής) προέκυψαν κάποια ενδιάμεσα μεγέθη με ιδιαίτερη σημασία. Ένα από αυτά είναι οι συντελεστές βαρύτητας w_i , οι οποίοι έδωσαν μια κατευθυντικότητα στα διαχωριζόμενα μεγέθη. Έτσι, σε συμφωνία με τον ορισμό της ανισοτροπίας, τα μεγέθη ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου και ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος δεν λαμβάνουν την ίδια τιμή για την ίδια τιμή παραμόρφωσης σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Ένα δεύτερο είναι η παράμετρος D η οποία εμφανίζεται να παίζει τον ρόλο ενός συντελεστή αλλαγής όγκου, η οποία ταυτίζεται με το μέτρο διόγκωσης K στην περίπτωση των ισότροπων υλικών. Ο ρόλος της παραμέτρου αυτής χρήζει περισσότερης διερεύνησης. Φαίνεται να αποτελεί μια μηχανική σταθερά του εκάστοτε υλικού, της οποίας η τιμή δεν έχει συσχετιστεί ποτέ ως τώρα με πειραματικά αποτελέσματα.

Καταλήξαμε σε δύο αναλυτικούς τύπους για τις διαχωριζόμενες ενέργειες για κάθε μία από τις 7 κλάσεις ανισοτροπίας, κάτι το πολύ σημαντικό δεδομένων των υπαρχουσών δυσκολιών στο χειρισμό εξισώσεων με τόσο μεγάλο αριθμό μεταβλητών. Ας μην ξεχνάμε ότι, όπως είδαμε στα δύο πρώτα κεφάλαια, ο διαχωρισμός των ελαστικών ενεργειών με τη μέθοδο της Φασματικής Ανάλυσης δεν έχει αναλυτική λύση για τα τρικλινή υλικά, ενώ και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων για μονοκλινή και ορθότροπα υλικά είναι προβληματική.

Αντί επιλόγου κλείνουμε αυτή την ανασκόπηση απαντώντας σε δύο ερωτήματα σχετικά με τα αποτελέσματά αυτής της διατριβής.

Γιατί πιστεύουμε ότι η λύση που προτείνουμε είναι σωστή;

Οι αναλυτικοί τύποι που προέκυψαν για τις ελαστικές ενέργειες είναι σε συμφωνία με τους ορισμούς που δώσαμε για τα μεγέθη αλλαγή όγκου και αλλαγή σχήματος, ενώ είναι συνεπείς και με όλα τα γνωστά αποτελέσματα που γνωρίζουμε ότι ισχύουν για τα ισότροπα υλικά. Επιπλέον βασίζονται σε δύο από τις πιο βάσιμες αρχές της Φυσικής: την Αρχή της Υπέρθωσης και την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας και όχι σε κάποιο μαθηματικό θεώρημα με περιορισμένο πεδίο εφαρμογής. Με αυτό τον τρόπο δεν καταργούν την κεκτημένη γνώση από τα ισότροπα υλικά, αλλά τη γενικεύουν με ένα λογικό και φυσικά συνεπές τρόπο.

Ποια τα περιθώρια λάθους των παραγόμενων αναλυτικών τύπων για τις ελαστικές ενέργειες αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος;

Σε κάθε γενίκευση ελοχεύουν κίνδυνοι. Κάποια μεγέθη επαναορίζονται ή ερμηνεύονται με έναν διαφορετικό τρόπο προκειμένου να συμπεριλάβουν την καινούρια γνώση, κάποιο καινούριο χαρακτηριστικό το οποίο δεν περιλαμβάνεται στον παλαιότερο ορισμό. Επομένως, νομοτελειακά, όση περισσότερη γνώση αποκτούμε για ένα φαινόμενο/μια κατάσταση, τόσο πιο σωστά μπορούμε να το ορίσουμε με μαθηματικό τρόπο. Άρα, η λύση που προτείνουμε είναι επαρκής όσο δεν έρχεται σε αντίθεση με την κεκτημένη γνώση και με νέες παρατηρήσεις.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Από την αρχή αυτής της προσπάθειας, είχαμε στο πίσω μέρος του μυαλού μας μια πιθανή σύνδεση των δύο αυτών διαχωριζόμενων ενεργειακών μεγεθών με τη μακροσκοπική αστοχία των ανισότροπων υλικών. Στην πορεία όμως, εμφανίστηκαν πολλά σημεία τα οποία ζητούσαν περαιτέρω διερεύνηση και ταυτόχρονα επιδέχονταν πολλές διαφορετικές ερμηνείες και έτσι οποιαδήποτε συζήτηση περί αστοχίας πέρασε μοιραία σε δεύτερη μοίρα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το μπέρδεμα της έννοιας της συμπίεσότητας με την αλλαγή όγκου, οι οποίες όπως δείξαμε είναι δύο τελείως διαφορετικές καταστάσεις στην περίπτωση των ανισότροπων υλικών.

Με την πεποίθηση ότι οι παραγόμενοι αναλυτικοί τύποι για την ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου και την ελαστική ενέργεια αλλαγής σχήματος είναι λογικά ορθοί, κρίνουμε ότι τα επόμενα βήματα σε αυτή τη μελέτη θα πρέπει να είναι τα εξής:

- Διερεύνηση της σχέσης των δύο αυτών ενεργειακών μεγεθών με τη διαρροή και τη μακροσκοπική αστοχία ανισότροπων υλικών. Αν υποθεθεί ότι τα δύο αυτά μεγέθη κυριαρχούν επί οποιουδήποτε άλλου πιθανού διαχωριζόμενου ενεργειακού μεγέθους και στα ανισότροπα υλικά (όπως ήδη γνωρίζουμε ότι συμβαίνει στα ισότροπα υλικά), τότε

επειδή κανένα ενεργειακό μέγεθος δεν μπορεί να αυξάνει απεριόριστα, θα πρέπει να βρεθούν τα άνω όρια των ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος και να εξεταστεί αν η τιμή αυτή συμπίπτει με την τιμή που λαμβάνουν τα δύο αυτά ενεργειακά μεγέθη στα τελικά σημεία αστοχίας όσο το δυνατόν περισσότερων και διαφορετικής φόρτισης πειραμάτων.

- Πειραματική διερεύνηση της κατανομής των ελαστικών ενεργειών αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος σε ινώδη μονόστρωτα σύνθετα υλικά, τα οποία παρουσιάζουν μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον και βρίσκουν μεγάλες εφαρμογές πλέον στην καθημερινότητά μας. Αξίζει να αναφερθεί εδώ ότι τα εν λόγω σύνθετα υλικά είναι αρκούντως ομογενή υλικά ώστε να θεωρούμε ότι η χρησιμοποίηση των αναλυτικών τύπων αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος δεν εισάγουν τεράστια σφάλματα. Σε λιγότερο ομογενή υλικά (π.χ. πολύστρωτα σύνθετα υλικά) δεν είναι επιτρεπτή η χρησιμοποίηση των τύπων για την ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου και αλλαγής σχήματος που παρουσιάστηκαν σε αυτή τη διατριβή. Επιπλέον, η ομογενοποίηση που πολλές φορές συναντούμε να γίνεται σε ανισότροπα υλικά στη βιβλιογραφία, δεν είναι μια ακριβής μέθοδος και δεν μπορεί σε αυτό το σημείο να γίνει εκτίμηση των σφαλμάτων που εισάγει στον υπολογισμό τόσο κρίσιμων τιμών όπως οι τιμές των ελαστικών ενεργειών στα τελικά σημεία αστοχίας.

Επίλογος Διατριβής

Ο δρόμος για την κατανόηση του φαινομένου της μακροσκοπικής αστοχίας των γραμμικά ελαστικών ανισότροπων υλικών είναι μακρύς ακόμα. Η πειραματική διερεύνηση αυτού του εξαιρετικά πολύπλοκου φαινομένου προβλέπεται να είναι μια διαδικασία που θα διαρκέσει αρκετά χρόνια (αν σταθούμε αρκετά τυχεροί ώστε να δώσει από νωρίς θετικές ενδείξεις), γιατί δεν είναι ένα συγκεκριμένο υλικό που πρέπει να μελετηθεί, αλλά διάφορες ομάδες υλικών που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ανισοτροπίας. Επιπλέον, υπολογίζεται ότι θα είναι πολλά τα ενδιάμεσα βήματα μέχρι την τελική απάντηση. Διλήμματα του τύπου «εφελκυσμός ή θλίψη», «αλλαγή όγκου ή συμπίεστικότητα» θα προκύψουν αρκετά. Κάποιες απαντήσεις θα είναι απλές, κάποιες πολύ συνθετότερες. Βρισκόμαστε ακόμα στην αρχή αυτού του δέντρου αποφάσεων.

Ακόμα όμως και αν τα αρχικά αποτελέσματα δεν είναι τα αναμενόμενα, δεν υπάρχει κανένας λόγος απογοήτευσης. Οι θεωρίες σίγουρα εξελίσσονται πατώντας σε ολοένα και στερεότερες βάσεις. Για τον ερευνητή όμως είναι εξίσου σημαντικό να γνωρίζει προς τα πού να ψάξει μια λύση με το να γνωρίζει προς τα πού να μην την ψάξει. Τα λανθασμένα αποτελέσματα είναι σίγουρα απογοητευτικά, λειτουργούν όμως πάντοτε ευεργετικά, διότι περιορίζουν το πεδίο έρευνας και άρα αυξάνουν τις πιθανότητες εύρεσης μιας επιθυμητής λύσης. Υπό αυτή την έννοια, ένα λάθος μπορεί να μας διδάξει πολύ περισσότερα από ότι ένα σωστό. Μέχρι να φτάσουμε λοιπόν στο τέλος αυτής της διαδρομής ας μην σταματήσουμε να αμφιβάλουμε και να ρωτούμε. Είναι ο μόνος δρόμος. Και σίγουρα ο ομορφότερος!

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A.1 Γενικευμένος Νόμος του Hooke – Πώς προκύπτει;

Δεν είναι καθόλου προφανές το πώς στη γενική περίπτωση ανισοτροπίας (τρικλινής) ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke καταλήγει στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Αρχικά, η μητρική γραφή του Γενικευμένου Νόμου του Hooke (χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη σύμβαση γραφής κατά Voigt) είναι η ακόλουθη:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3331} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2321} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1331} & C_{1321} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1231} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3213} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3231} & C_{3221} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3113} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3131} & C_{3121} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2113} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2121} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix}$$

όπου τα διανύσματα τάσεων και παραμορφώσεων είναι διαστάσεων 9x1 και το μητρώο ακαμψίας 9x9. Το μητρώο ακαμψίας \underline{C} αποτελείται αρχικά από 81 στοιχεία.

Όμως, ο τανυστής τάσεων είναι συμμετρικός. Αυτό επιβάλλει τις εξής δεσμεύσεις στα στοιχεία του τανυστή \underline{C} :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

και μειώνει τον αριθμό των ανεξάρτητων συνιστωσών από 81 σε 36.

Επιπλέον, εφαρμογή του θερμοδυναμικού αξιώματος το οποίο απαιτεί την παραγωγή μηδενικού έργου υπό ενός ελαστικού μέσου σε κλειστό δρόμο φόρτισης, επάγει τις εξής δεσμεύσεις:

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Αυτό μειώνει περαιτέρω τις ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές από 36 σε 21. Η σύμπτυξη δεικτών με το συμβολισμό κατά Voigt οδηγεί στη γνωστή μορφή του Γενικευμένου Νόμου του Hooke.

A.2 Η Αρχή του Neumann - Συμμετρία

Ο Neumann στα 1885 διατύπωσε την ακόλουθη Αρχή:

«Οι οποιοσδήποτε συμμετρίες υπάρχουν στη δομή ενός υλικού θα πρέπει να αποτυπώνονται και στις ελαστικές ιδιότητες του υλικού, δηλαδή στα στοιχεία του μητρώου ακαμψίας του.»

Είναι ο πρώτος που ανέδειξε τον πολύ σημαντικό ρόλο της συμμετρίας στη μελέτη της ελαστικής απόκρισης των υλικών. Μελέτη και κατηγοριοποίηση των συμμετριών στη δομή μονοκρυστάλλων έχει γίνει με μεθόδους κρυσταλλογραφίας. Οι συμμετρίες που παρατηρούνται μπορούν να είναι:

1. Συμμετρία ως προς επίπεδο ή κατοπτρισμός
2. Συμμετρία ως προς άξονα ν-στής τάξης που ισοδυναμεί με συμμετρία σε στροφή κατά $2\pi/n$ ως προς τον άξονα.
3. Κέντρα συμμετρίας
4. Κέντρα αντιστροφής
5. Μεταφορική συμμετρία (επαναλαμβανόμενη δομή).

Εφαρμογή της Αρχής του Neumann οδήγησε στις ακόλουθες μορφές των μητρώων ακαμψίας \underline{C} για τα ανισότροπα και ισότροπα υλικά:

Ισότροπο

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

2 ανεξάρτητες
ελαστικές σταθερές

Κυβικό

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}$$

3 ανεξάρτητες
ελαστικές σταθερές

Εξαγωνικό

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

5 ανεξάρτητες
ελαστικές σταθερές

Τριγωνικό

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

6 ανεξάρτητες
ελαστικές σταθερές

Τετραγωνικό

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

6 ανεξάρτητες
ελαστικές σταθερές

Ορθότροπο

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

9 ανεξάρτητες
ελαστικές σταθερές

Μονοκλινές

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

13 ανεξάρτητες
ελαστικές σταθερές

Τρικλινές

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix}$$

21 ανεξάρτητες
ελαστικές σταθερές

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Μετάβαση από το τρικλινές στο μονοκλινές

Έστω τα συστήματα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ και $Ox_1'x_2'x_3'$, όπου το επίπεδο $x_1 - x_2$ είναι επίπεδο συμμετρίας:

Ο μετασχηματισμός από το ένα σύστημα στο άλλο δίνεται από τη σχέση:

$$x_i' = a_{ij}x_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{όπου} \quad a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

και για τους τανυστές τάσης και παραμόρφωσης ισχύουν αντίστοιχα:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}' = a_{im}a_{jn}\sigma_{mn} \\ \varepsilon_{ij}' = a_{im}a_{jn}\varepsilon_{mn} \end{cases} \quad i, j, m, n = 1, 2, 3.$$

Αναλυτικότερα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1, & \sigma_2' &= \sigma_2, & \sigma_3' &= \sigma_3, & \sigma_4' &= -\sigma_4, & \sigma_5' &= -\sigma_5, & \sigma_6' &= \sigma_6 \\ \varepsilon_1' &= \varepsilon_1, & \varepsilon_2' &= \varepsilon_2, & \varepsilon_3' &= \varepsilon_3, & \varepsilon_4' &= -\varepsilon_4, & \varepsilon_5' &= -\varepsilon_5, & \varepsilon_6' &= \varepsilon_6 \end{aligned}$$

Τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι συμμετρικά ως προς τις ελαστικές τους ιδιότητες, άρα θα χαρακτηρίζονται από το ίδιο μητρώο ακαμψίας \underline{C} , οπότε ο Γενικευμένος Νόμος του Hooke στα δύο συστήματα γράφεται ως εξής:

$$\begin{cases} \sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j \\ \sigma_i' = c_{ij}\varepsilon_j' \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{cases} \sigma_4 = c_{14}\varepsilon_1 + c_{24}\varepsilon_2 + c_{34}\varepsilon_3 + c_{44}\varepsilon_4 + c_{45}\varepsilon_5 + c_{46}\varepsilon_6 \\ \sigma_4' = -\sigma_4 = c_{14}\varepsilon_1 + c_{24}\varepsilon_2 + c_{34}\varepsilon_3 - c_{44}\varepsilon_4 - c_{45}\varepsilon_5 + c_{46}\varepsilon_6 \end{cases}$$

Με πρόσθεση των παραπάνω σχέσεων (και διαίρεση με το 2) προκύπτει ότι:

$$c_{14}\varepsilon_1 + c_{24}\varepsilon_2 + c_{34}\varepsilon_3 + c_{46}\varepsilon_6 = 0$$

από όπου αναγκαστικά προκύπτει $c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{46} = 0$.

Ομοίως, έχουμε ότι:

$$\begin{cases} \sigma_5 = c_{15}\varepsilon_1 + c_{25}\varepsilon_2 + c_{35}\varepsilon_3 + c_{45}\varepsilon_4 + c_{55}\varepsilon_5 + c_{56}\varepsilon_6 \\ \sigma_5' = -\sigma_5 = c_{15}\varepsilon_1 + c_{25}\varepsilon_2 + c_{35}\varepsilon_3 - c_{45}\varepsilon_4 - c_{55}\varepsilon_5 + c_{56}\varepsilon_6 \end{cases}$$

από όπου με πρόσθεση προκύπτει αντίστοιχα $c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{56} = 0$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Borisenko A.I. and Tarapov I.E., *Vector and Tensor Analysis with Applications*, Dover Publications, 1979
- [2] Freudenthal A.M., *Introduction to the Mechanics of Solids*, John Wiley & Sons, 1966
- [3] Chen W.F. and Han D.J., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, 1988
- [4] Hertzberg Richard W., *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*, 4th edition, 1995, Wiley & Sons
- [5] Malvern Lawrence E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969
- [6] Fung Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 365 (1965)
- [7] Sokolnikoff I.S., *Mathematical Theory of Elasticity*, Mc-Graw-Hill, New York (1956)
- [8] Fu Y.B., Ogden R.W., *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2001
- [9] Ting T.C.T., *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications*, Oxford University Press, 1996
- [10] Φιλίππιδης Θεόδωρος Π., *Γενικευμένα κριτήρια αστοχίας αρχικώς ανισότροπων ελαστικών μέσων με ιδιαίτερη έμφαση στα σύνθετα υλικά*, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, 1989
- [11] Σοκόλης Δημήτριος Π., *Η φασματική ανάλυση του τανυστού ενδόσεως του ανισότροπου ελαστικού μέσου*, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, 2002
- [12] Sih G.C. and Chen E.P., *Dilatational and distortional behavior of cracks in magneto-electroelastic materials*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics 40 (2003) 1–21
- [13] Andrianopoulos N.P. and Manolopoulos V.M., *Can Coulomb criterion be generalized in case of ductile materials? An application to Bridgman experiments*, International Journal of Mechanical Sciences 54 (2012) 241–248
- [14] Asp L.E. and Berglund L.A. and Talreja R., *A criterion for crack initiation in glassy polymers subjected to a composite-like stress state*, Composites Science and Technology 56 (1996) 1291–1301
- [15] Ανδριανόπουλος Νικ. Π., *Συνθήκες εκκινήσεως ρωγμών σε όγκιμα υλικά – Ένα νέο κριτήριο*, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, 1983
- [16] Μανωλόπουλος Βασίλειος Μ., *Συμβολή στη μελέτη κριτηρίων αστοχίας μη γραμμικών ελαστικών υλικών*, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, 2009
- [17] Δερνίκας Ιωάννης Θ., *Μελέτη περί της κατανομής των ελαστικών ενεργειών σε ανισότροπα υλικά*, Μεταπτυχιακή εργασία, ΕΜΠ, 2009
- [18] Δερνίκας Ιωάννης Θ., *Μελέτη συμπεριφοράς μη γραμμικών ελαστικών υλικών σε σύνθετες καταπονήσεις*, Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, 2007
- [19] Σκαρτάδος Παναγιώτης Ν., *Επί του προβλήματος διαχωρισμού της ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων στα ανισότροπα υλικά*, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, 2007
- [20] Καπέλλος Αλέξανδρος, *Έλεγχος πειραματικής συμπεριφοράς ανισότροπων υλικών*, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, 2010
- [21] Andrianopoulos N.P. and Manolopoulos V.M. and Dernikas I.T., *Coulomb Failure Surfaces in Ductile Non Linear Elastic Materials*, 1st Int. Conference on Engineering Against Fracture, 2008, Patras
- [22] Andrianopoulos N.P. and Boulougouris V.C. and Iliopoulos A.P., *On the Separation of Elastic Strain Energy in the General Case of Anisotropy: A Direct Approach*, The Archives of Mechanical Engineering, Vol. LIII, 2006, Number 2, p.153-163

- [23] Andrianopoulos N.P. and Iliopoulos A.P. and Skartados P., *An attempt to separate elastic strain energy in the general case of anisotropy*, 8th Int. Congress on Mechanics, HSTAM 2007, Patras
- [24] Andrianopoulos N.P., *Metalforming Limit Diagrams According to the T-Criterion*, J. Mat. Proc. Tech., Vol.39 (1993), pp.213-226
- [25] Andrianopoulos N.P. and Boulougouris V.C., *Failure by Fracture or Yielding in Strain Hardening Materials According to the T-Criterion*, Engng. Fract. Mech., Vol.47 (1994), pp.639-651
- [26] Andrianopoulos N.P. and Boulougouris V.C., *Loading Path Dependence of Failure Surfaces*, 7th Int. Congress on Mechanics, HSTAM 2004, Chania
- [27] Andrianopoulos N.P. and Manolopoulos V.M. and Boulougouris V.C., *Considerations on Failure Surfaces in Brittle, Non-Linear Elastic Materials*, 8th Int. Congress on Mechanics, HSTAM 2007, Patras
- [28] Nye J.F., *Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices*, Oxford: Clarendon Press 1957
- [29] Kowalczyk K. and Ostrowska-Maciejewska J., *Energy-based limit conditions for transversally isotropic solids*, Arch. Mech., **54**, 5-6, pp. 497-523, Warszawa 2002
- [30] Olszak W. and Ostrowska-Maciejewska J., *The plastic potential in the theory of anisotropic elastic-plastic solids*, Engineering Fracture Mechanics Vol. 21, No. 4, pp. 625-632, 1985
- [31] Rychlewski J., *On Hooke's law*, PMM U.S.S.R., Vol.48, No.3, pp.303-314, 1984
- [32] Arramon Yves P. and Mehrabadi Morteza M. and Martin David W. and Cowin Stephen C., *A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes*, International Journal of Solids and Structures 37 (2000) 2915-2935
- [33] Theocaris Pericles S. and Sokolis Dimitrios P., *Splitting the elastic strain energy in thin plates of a transversely isotropic material*, International Journal of Solids and Structures 37 (2000) 5061-5078
- [34] Kowalczyk-Gajewska K. and Ostrowska-Maciejewska J., *Energy-based limit criteria for anisotropic elastic materials with constraints*, Arch. Mech., 57, 2-3, pp. 133-155, Warszawa 2005
- [35] Dinçkal Ç. and Akgöz Y.C., *Decomposition of elastic constant tensor into orthogonal parts*, International Journal of Engineering, Science and Technology Vol. 2, No. 6, 2010, pp. 22-46
- [36] Kowalczyk-Gajewska K., *Estimation of overall properties of random polycrystals with the use of invariant decompositions of Hooke's tensor*, International Journal of Solids and Structures 49 (2012) 3022-3037
- [37] DeVore George W., *Elastic compliances of minerals related to crystallographic orientation and elastic strain energy relations in twinned crystals*, Lithos, Volume 3, Issue 3, 1970, Pages 193-208
- [38] Mahnken Rolf, *Anisotropic creep modeling based on elastic projection operators with applications to CMSX-4 superalloy*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 1611-1637
- [39] Kaliske Michael and Schmidt Jörg and Lin Guoyu and Bhashyam Grama, *Implementation of Nonlinear Anisotropic Elasticity at Finite Strains into ANSYS® including viscoelasticity and damage*, 23rd CADFEM Users' Meeting 2005 International Congress on FEM Technology with ANSYS CFX & ICEM CFD Conference
- [40] Ting T.C.T., *Anisotropic elastic constants that are structurally invariant*, J. Mechanics Appl Math (2000) 53 (4): 511-523
- [41] Srinivasan T.P. and Nigam S.D.: *Invariant Elastic Constants for Crystals*, Journal of Mathematics and Mechanics, 19 (5) pp. 411-420 (1969)

- [42] Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition, New York 1944, Dover Publications
- [43] Andrianopoulos N.P. and Dernikas I.T., *On the elastic strain energy decomposition in the general case of anisotropic bodies*, First Greek-Ukrainian Conference on Fracture Mechanics, 2010, Xanthi, Greece
- [44] Andrianopoulos N.P. and Dernikas I.T., *On the failure of anisotropic materials: physical or mathematical?*, ECF19, 2012, Kazan, Russia
- [45] Andrianopoulos N.P. and Dernikas I.T., *An attempt to separate elastic strain energy density of linear elastic anisotropic materials based on strains considerations*, *Acta Mechanica*, September 2013, Volume 224, Issue 9, pp 1879-1885
- [46] Lekhnitski S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body* (Translated from the revised 1977 edition), Mir Publishers (1981)
- [47] Andrianopoulos N.P. and Boulougouris V.C., *Failure by fracture or yielding in strain hardening materials according to the T-Criterion*, *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 41 No. 5, pp. 639-651, 1994
- [48] Itskov M., Aksel N.: *Elastic constants and their admissible values for incompressible and slightly compressible anisotropic materials*. *Acta Mechanica* 157(1-4), 81-96 (2002)
- [49] Felippa Carlos A. and Onate Eugenio, *Stress, strain and energy splittings for anisotropic elastic solids under volumetric constraints*, *Computers and Structures* 81 (2003) 1343-1357
- [50] Novozhilov V.V., *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, Oxford 1961

