Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Ανθρωπιστικών, Κοινωνικών Επιστημών και Δικαίου

Το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα και η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών

Επιστήμη Η. Επιτηδείου

Αθήνα 2014

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Ανθρωπιστικών, Κοινωνικών Επιστημών και Δικαίου

Το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα και η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών

Διπλωματική Εργασία

Επιστήμη Η. Επιτηδείου

Τριμελής Επιτροπή

Αριστείδης Αραγεώργης (Επιβλέπων), Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πέτρος Βαλντέν, Heriot-Watt University, Edinburgh

Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω πολύ τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Αριστείδη Αραγεώργη για το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που έδειξε και την βοήθεια που μου προσέφερε για την εκπόνησή της. Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Πέτρο Βαλντέν, γιατί με ενέπνευσε να ασχοληθώ με το εν λόγω θέμα και ήταν δίπλα μου σε κάθε βήμα. Επίσης, ευχαριστώ την κα. Μαντώ Ζαμπέλη, η οποία μου παρείχε βοήθεια κάθε φορά που τη χρειαζόμουν. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου και τον σύντροφό μου για την στήριξη και την αγάπη τους.

Περίληψη

Μια από τις πιο περίεργες ιδιότητες της κβαντικής μηχανικής είναι ότι η συχνή παρατήρηση επιβραδύνει την χρονική εξέλιξη ενός συστήματος. Στο όριο που οι παρατηρήσεις γίνονται συνεχώς, το σύστημα "παγώνει" πλήρως. Λόγω της ομοιότητας με τα παράδοξα του Ζήνωνα, το παραπάνω φαινόμενο λέγεται *κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα*. Στην παρούσα εργασία μελετάμε το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των Συνεπών Ιστοριών. Είναι μια διαφορετική θεμελίωση της κβαντικής θεωρίας που δεν προϋποθέτει την ύπαρξη εξωτερικού παρατηρητή και επιπλέον είναι κατάλληλα κατασκευασμένη για να απαντά ερωτήσεις που περιέχουν προτάσεις σε παραπάνω από μία χρονική στιγμή. Βλέπουμε ότι το φαινόμενο του Ζήνωνα παραμένει και σε ορισμένες περιπτώσεις στις οποίες δεν υπάρχει εξωτερικός παρατηρητής. Συγκεκριμένα, η υποψήφια πιθανότητα για να παγώσει το σύστημα είναι μονάδα πάντα, αλλά η συνθήκη συνέπειας ικανοποιείται σε μερικές περιπτώσεις μόνο ενώ στις υπόλοιπες η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών δεν δίνει κάποια απάντηση. Τέλος, η ιδιότητα που είδαμε στο κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα έχει συνέπειες και στην μελέτη άλλων ερωτήσεων που αφορούν χρονική διάρκεια, όπως το ερώτημα του χρόνου άφιξης, το οποίο και αναλύουμε.

Περιεχόμενα

1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα (Quantum Zeno Effect) και τη προσέγγιση των συνεπών ιστοριών (consistent histories approach), θα μιλήσουμε για το πρόβλημα χρόνου άφιξης (Arrival Time Problem) και πώς αυτό συνδέεται με τα προηγούμενα, ενώ θα αναφερθούμε σύντομα και στην πειραματική δραστηριότητα που βρίσκεται σε εξέλιξη πάνω στα θέματα αυτά.

Συγκεκριμένα, στο **πρώτο κεφάλαιο** θα αναφερθούμε στην έννοια του χρόνου στην κβαντική φυσική, στην έννοια της μέτρησης και στην κβαντική θεωρία κλειστών συστημάτων και τέλος θα παραθέσουμε αναφορικά κάποια παράδοξα του Ζήνωνα. Στο **δεύτερο κεφάλαιο** θα μιλήσουμε για το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα (Quantum Zeno Effect), γιατί είναι φαινόμενο και όχι παράδοξο, θα δώσουμε τη μαθηματική απόδειξη σε δύο διαστάσεις και τέλος θα αναφερθούμε σε διάφορα πειράματα που έχουν παρατηρήσει το φαινόμενο αυτό. Στο **τρίτο κεφάλαιο** θα εισαγάγουμε την προσέγγιση των συνεπών ιστοριών, θα δώσουμε ένα παράδειγμα και θα αναφέρουμε μερικές εφαρμογές της. Στο **τέταρτο κεφάλαιο** θα δούμε πώς η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών απαντάει σε ερωτήσεις σαν αυτή που ορίζει το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα (Quantum Zeno Effect). Συγκεκριμένα θα ορίσουμε τους κατάλληλους τελεστές τάξης, θα δούμε τι υποψήφιες πιθανότητες συνεπάγονται οι τελεστές τάξης και πότε ικανοποιούν την συνθήκη συνέπειας. Στο **πέμπτο κεφάλαιο** θα αναφερθούμε στο πρόβλημα χρόνου άφιξης, πώς αυτό συνδέεται με το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα και την προσέγγιση των συνεπών ιστοριών. Θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου και συγκεκριμένα θα ορίσουμε παρόμοιο τελεστή τάξης. Θα δούμε ένα φαινομενικό παράδοξο και θα δώσουμε την λύση του κοιτάζοντας ένα απλό παράδειγμα ενός κυματο-πακέτου. Θα αναφερθούμε και σε άλλους τρόπους να κατασκευάσουμε τελεστές τάξης για την ερώτηση του χρόνου άφιξης. Τέλος, στο **έκτο κεφάλαιο** θα συνοψίσουμε κάποια συμπεράσματα, καθώς και προοπτικές για περαιτέρω έρευνα.

1.1 Κβαντική Φυσική

Η Κβαντική Θεωρία (ΚΘ) είναι ίσως η πιο επιτυχημένη φυσική θεωρία που έχουμε. Έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά με τη μεγαλύτερη ακρίβεια, ενώ δεν υπάρχει κανένα πείραμα που να συγκρούεται με τις προβλέψεις της ΚΘ (εκεί που υπάρχουν προβλέψεις και για τα πειράματα που έχουν γίνει). Παρόλη την τεράστια επιτυχία της, είναι η θεωρία που έχει προκαλέσει τις πιο μεγάλες συζητήσεις σχετικά με την ορθότητά της, την πληρότητά της, καθώς και το πραγματικό της εννοιολογικό περιεχόμενο. Ο λόγος για όλα αυτά είναι ότι ενώ μαθηματικώς είναι σαφώς ορισμένη[1], η ερμηνεία της ακόμα και τώρα είναι ένα πεδίο μεγάλων επιστημονικών αντιπαραθέσεων. Από τους θεμελιωτές της ΚΘ ο Neils Bohr είχε πει «Όποιος δεν σοκαρίστηκε με την ΚΘ δεν την έχει καταλάβει»[1]. Η διττή φύση των κβαντικών σωμάτων (σώματα/κύματα), η απροσδιοριστία (π.χ., η αδυναμία προσδιορισμού θέσης και ορμής ταυτόχρονα), η υπέρθεση καταστάσεων, η κβαντική σύμπλεξη (quantum entanglement) είναι μερικές από τις συνέπειες του μαθηματικού φορμαλισμού της ΚΘ. Παρακάτω, πρώτα θα δώσουμε περιληπτικά τον φορμαλισμό της ΚΘ και στη συνέχεια επίσης περιληπτικά την καθιερωμένη ερμηνεία, την ερμηνεία της Κοπεγχάγης.

Η ΚΘ έχει τέσσερις θεμελιώδεις αρχές.

1. Η *καθαρή κατάσταση* ενός κβαντικού συστήματος είναι ένα διάνυσμα σε ένα μιγαδικό χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}$ που εκφράζει τον χώρο καταστάσεων (state space) του συστήματος. Οι προβλέψεις των αποτελεσμάτων μετρήσεων ενός απομονωμένου συστήματος είναι θεμελιωδώς πιθανολογικές.

2. Τα παρατηρήσιμα[2] (observables) εκφράζονται μαθηματικώς με αυτο-συζυγείς τελεστές που δρουν στον χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}$.

3. Έστω παρατηρήσιμο A με αντίστοιχο τελεστή $\hat{A}$ και κατάσταση που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Τότε η αναμενόμενη τιμή είναι $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$.

[1]Αναφερόμαστε κυρίως στη μη σχετικιστική κβαντική μηχανική και όχι στις σχετικιστικές κβαντικές θεωρίες πεδίων.

[2]Ως "παρατηρήσιμο μέγεθος" νοείται κάθε συλλογή ιδιοτήτων («τιμές του παρατηρήσιμου μεγέθους») που είναι τέτοια ώστε (α) οτιδήποτε μπορεί να έχει κάποια από αυτές τις ιδιότητες μπορεί να έχει το πολύ μια από αυτές τις ιδιότητες και (β) καθεμία από αυτές τις ιδιότητες αναπαριστάνεται από κάποιο πραγματικό αριθμό ή διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών.

4. Εάν δεν υπάρχει εξωτερική επίδραση (δηλ. κλειστό σύστημα) η κατάσταση ψ_t αλλάζει ομαλά ως προς τον χρόνο t ακολουθώντας την χρονικά-εξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\psi_t}{dt} = \hat{H}\psi_t \tag{1.1}$$

Μία μέτρηση, αντιστοιχεί στην προβολή της κυματοσυνάρτησης σε έναν υποχώρο P_a που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a του παρατηρήσιμου που μετρήσαμε[3]. Η πιθανότητα για το αποτέλεσμα a είναι $||P_a|\psi\rangle||^2$ και η (μη-κανονικοποιημένη) κυματοσυνάρτηση μετά την μέτρηση είναι $P_a|\psi\rangle$.

Στην ορθόδοξη κβαντική φυσική υπάρχουν, επομένως, δύο είδη χρονικής εξέλιξης. Από την μία η ντετερμινιστική μοναδιαία εξέλιξη και από την άλλη η πιθανολογική εξέλιξη όταν γίνεται μια μέτρηση. Πότε και τι μέτρηση γίνεται, είναι έξω από τις προβλέψεις της κβαντικής θεωρίας. Η πιο καθιερωμένη ερμηνεία της κβαντικής θεωρίας είναι η ερμηνεία της Κοπεγχάγης. Η ερμηνεία ονομάστηκε έτσι διότι διατυπώθηκε από τον Neils Bohr (κυριότερος υποστηρικτής της) και τον Werner Heisenberg όταν και οι δύο εργάζονταν στην Κοπεγχάγη. Υπάρχουν διαφορετικές απόψεις για το τι ακριβώς συμπεριλαμβάνει η ερμηνεία, αλλά βασικές θέσεις είναι οι εξής: (1) η μέτρηση γίνεται από ένα κλασικό παρατηρητή (εκτός συστήματος) και προκαλεί την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης σε μία από τις πιθανές ιδιοκαταστάσεις και (2) αποφεύγεται η αναφορά στην οντολογία της ΚΘ, δεν μιλάμε για beables αλλά μόνο για παρατηρήσιμα (observables). Δηλαδή, μπορούμε να πούμε μόνο προτάσεις της μορφής "εάν μετρούσαμε το παρατηρήσιμο A σε μια συλλογή ίδιων κβαντικών συστημάτων, θα μετρούσαμε το αποτέλεσμα a με την πιθανότητα που προβλέπει η ΚΘ". Επομένως, αυτές οι πιθανότητες αντιμετωπίζονται μόνο ως σχετικές συχνότητες διαφορετικών αποτελεσμάτων εάν επαναληφθεί πολλές φορές ένα πείραμα.

Είναι διάσημη η φιλοσοφική σύγκρουση του Bohr με τον Einstein σχετικά με την ερμηνεία της ΚΘ, με τον τελευταίο να αδυνατεί να δεχτεί την ερμηνεία της Κοπεγχάγης και συγκεκριμένα την ύπαρξη θεμελιώδους τυχαιότητας ("Ο Θεός δεν παίζει ζάρια" είναι μια από τις πιο γνωστές φράσεις του Einstein). Αν και η ερμηνεία της Κοπεγχάγης αποδείχτηκε επαρκής για την εξέλιξη της ΚΘ εκείνη την εποχή και έχει καταγραφεί ότι ο Bohr κέρδισε αυτή την διαμάχη, πλέον όλο και αυξανόμενος αριθμός ερευνητών την αμφισβητούν αναζητώντας μια φιλοσοφικά πιο ικανοποιητική ερμηνεία. Ο λόγος για αυτή την αμφισβήτηση είναι και "πρακτικός", μια και σε τομείς όπως η Κβαντική Βαρύτητα, Κβαντική Κοσμολογία ή η Κβαντική θεωρία πληροφορίας, η ερμηνεία της Κοπεγχάγης παρουσιάζεται ανεπαρκής.

[3] Υιοθετούμε τη συνήθη παραδοχή ότι τα παρατηρήσιμα μεγέθη που ενδιαφέρουν έχουν αμιγώς διακριτό (και μη εκφυλισμένο) φάσμα.

1.2 Χρόνος

Η έννοια του χρόνου στην Κβαντική Φυσική παρουσιάζει ιδιαιτερότητες. Όπως τονίσαμε και προηγουμένως, για κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος, στην Κβαντική Φυσική, αντιστοιχεί ένας αυτο-συζυγής τελεστής. Αντιθέτως, δεν μπορεί να κατασκευαστεί κανένας αυτο-συζυγής τελεστής που να αντιστοιχεί στον χρόνο. Ο χρόνος παρουσιάζεται στην Κβαντική Φυσική σαν μια εξωτερική παράμετρος που καθορίζει την εξέλιξη, στην εξίσωση του Schrödinger. Στον καθιερωμένο φορμαλισμό της ΚΘ, οι μετρήσεις των παρατηρήσιμων μεγεθών λαμβάνουν χώρα πάντα σε μία χρονική στιγμή. Οποιαδήποτε ερώτηση αφορά παραπάνω από μία χρονική στιγμή δεν είναι δυνατόν να απαντηθεί στην «συμβατική» ερμηνεία της ΚΘ χωρίς περαιτέρω υποθέσεις που αφορούν το συγκεκριμένο τρόπο μέτρησης και τις διατάξεις μέτρησης (measuring apparatus and devices). Απλές ερωτήσεις όπως ο χρόνος άφιξης (βλ. Κεφάλαιο 5) καθώς και ο χρόνος σκέδασης (tunneling time) έχουν πολλαπλές απαντήσεις. Η ιδιόμορφη θέση του χρόνου στην Κβαντική Θεωρία είναι και εννοιολογικά μια από τις βασικότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν προσπάθειες οικοδόμησης μια κβαντικής θεωρίας βαρύτητας. Συγκεκριμένα, η ειδική θέση του χρόνου στην ΚΘ έρχεται σε σύγκρουση με τη θέση του χρόνου στη Γενική Σχετικότητα. Εκεί χώρος και χρόνος εμφανίζονται ισότιμα ενώ στην ΚΘ η (χωρική) θέση είναι παρατηρήσιμη ποσότητα ενώ ο χρόνος δεν είναι. Αυτή η διαφορά οδηγεί στο διάσημο πρόβλημα του χρόνου στην Κβαντική Βαρύτητα (βλ Isham [2]). Στις κανονικές κβαντώσεις της Σχετικότητας το συγκεκριμένο πρόβλημα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οποιαδήποτε παρατηρήσιμη ποσότητα είναι αναλλοίωτη στην χρονική μεταβολή. Αυτή η πρωτοφανής ιδιότητα οδήγησε ορισμένους σύγχρονους ερευνητές, με πρωτοπόρο τον Julian Barbour [3] στο να προσπαθήσουν να κατανοήσουν μια αχρονική θεώρηση της πραγματικότητας. Έτσι επαναφέραν στο προσκήνιο τις φιλοσοφικές απόψεις των προσωκρατικών της Ελεατικής Σχολής (Παρμενίδης, Ζήνων, κλπ) όπου η αλλαγή (και ο χρόνος επομένως) ήταν μια ψευδαίσθηση, μια και η πραγματικότητα παρέμενε αμετάβλητη. Σε αυτό το πλαίσιο, γίνεται κατανοητό ότι αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη της κβαντικής εκδοχής του παράδοξου του Ζήνωνα, το οποίο αποτελεί και το κύριο αντικείμενο της παρούσης διπλωματικής.

1.3 Κβαντική Θεωρία Κλειστών Συστημάτων

Το βασικότερο ίσως πρόβλημα της ΚΘ, είναι το πρόβλημα της μέτρησης. Όταν γίνεται μια μέτρηση από έναν εξωτερικό παρατηρητή, η μοναδιαία εξέλιξη του κβαντικού συστήματος διαταράσσεται από την παρατήρηση και η τελική κατάσταση είναι μία από τις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή που αντιστοιχεί στην παρατηρήσιμη ποσότητα που μετρήσαμε. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως ”αναγωγή του διανύσματος κατάστασης” ή, σε ειδικές περιπτώσεις, ως “κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης”. Όλες οι προβλέψεις της ΚΘ αφορούν τις σχετικές πιθανότητες διαφορετικών αποτελεσμάτων δεδομένου ότι γίνεται μια συγκεκριμένη μέτρηση. Έτσι αποφεύγεται να γίνεται αναφορά στην οντολογία του κβαντικου συστήματος (beables) και μιλάμε για παρατηρήσιμα (observables). Η ανάγκη όμως για μια διαφορετική ερμηνεία ή θεμελίωση της ΚΘ που θα μπορεί να μιλάει για τις ιδιότητες ενός συστήματος και όχι μόνο για τα αποτελέσματα κάποιων πιθανών μετρήσεων είναι επιτακτική. Εκτός του μεγάλου καθαρά φιλοσοφικού ενδιαφέροντος μιας ερμηνείας που μιλάει για την οντολογία της ΚΘ ανεξαρτήτως των παρατηρητών, υπάρχει και ένας επιπλέον λόγος για μια τέτοια αναζήτηση. Η αναζήτηση μιας θεωρίας που περιγράφει το σύμπαν στο σύνολό του, όπως στη διάσημη εργασία των Hartle και Hawking [4] για την κυματοσυνάρτηση του σύμπαντος, έχει κεντρικό ενδιαφέρον για τον τομέα της Κβαντικής Κοσμολογίας. Εκεί το κβαντικό σύστημα είναι το ίδιο το σύμπαν και εξ ορισμού δεν υπάρχουν εξωτερικοί παρατηρητές. Επομένως, ακόμα και για να διατυπώσουμε πλήρως μια οποιαδήποτε θεωρία Κβαντικής Κοσμολογίας, χρειαζόμαστε μια ΚΘ χωρίς εξωτερικούς παρατηρητές. Πολλές τέτοιες προσεγγίσεις έχουν υπάρξει, με τα θετικά και τα αρνητικά τους. Θα αναφέρουμε ενδεικτικά μερικές. Η θεωρία των de Broglie-Bohm [5, 6], είναι μία επαναδιατύπωση της ΚΘ βάσει κάποιων κρυμμένων μεταβλητών. Αυτές οι μεταβλητές είναι μη-τοπικές όπως επιβάλλεται λόγω του θεωρήματος του Bell [7]. Θεωρείται ότι συμφωνεί σε όλες τις προβλέψεις με την ερμηνεία της Κοπεγχάγης για μη-σχετικιστική ΚΘ αλλά έχει προβλήματα σε γενικεύσεις σχετικιστικές. Στις θεωρίες στιγμιαίας κατάρρευσης της κυματοσυνάρτησης (spontaneous collapse theories) ανήκει και το μοντέλο GRW (Ghirahi-Rimini-Weber [8]). Οι GRW τροποποιούν την εξίσωση του Schrödinger εισάγοντας μη-γραμμικό και στοχαστικό όρο στην διαφορική εξίσωση. Έχει δυσκολίες σε σχετικιστική γενίκευση. Δίνει εν δυνάμει διαφορετικές προβλέψεις από την ορθόδοξη ΚΘ και γίνονται πειράματα που στο όχι μακρινό μέλλον ενδέχεται να την επικυρώσουν ή να την αντικρούσουν. Τέλος έχουμε τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν ιστορίες (όπως στην θεμελιώση της ΚΘ με ολοκληρώματα διαδρομών κατά Dirac και Feynman [9, 10]). Λόγω ακριβώς του ότι χρησιμοποιούν ιστορίες, εμπεριέχουν ήδη μέσα τους κάποια έννοια χρονικότητας και είναι πιο εύκολο να αντιμετωπίσουμε ζητήματα που σχετίζονται με τον χρόνο. Οι πιο διαδεδομένες είναι (1) η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών [11, 12, 13, 14] και (2) η προσέγγιση των συν-γεγονότων [15, 16, 17]. Σε αυτή την διπλωματική θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση των συνεπών ιστοριών, την οποία και θα αναλύσουμε περισσότερο στο κεφάλαιο 3.

1.4 Τα παράδοξα του Ζήνωνα

Ο Ζήνων ο Ελεάτης, ήταν προσωκρατικός φιλόσοφος και μέλος της σχολής του Παρμενίδη. Για να υποστηρίξει την άποψη ότι η αλλαγή και πιο συγκεκριμένα η κίνηση, είναι ψευδαίσθηση, κατασκεύασε διάφορα παράδοξα[18]. Διασώζονται μερικά από αυτά, και παρακάτω θα αναφέρουμε τα τρία σημαντικότερα.

1. *Αχιλλέας και η χελώνα*: Σε έναν αγώνα δρόμου που ο πιο αργός δρομέας (χελώνα) προπορεύεται, ο γρηγορότερος δρομέας (Αχιλλέας) δεν θα τον προσπεράσει ποτέ. Αυτό, διότι ο Αχιλλέας θα πρέπει πρώτα τα φτάσει στο σημείο που ήταν αρχικά η χελώνα, η οποία όμως θα έχει διανύσει κάποια νέα (μικρότερη) απόσταση. Αυτό επαναλαμβάνεται κάθε φορά και επομένως ο Αχιλλέας δεν προσπερνάει την χελώνα.

2. *Διχοτομία*: Ο Ζήνων λέει ότι για να μεταβεί ένα σώμα από μια θέση A σε μια θέση B οφείλει να διανύσει το μισό της απόστασης AB. Στη συνέχεια το μισό του υπολοίπου, ακολούθως το μισό του νέου υπολοίπου και ούτω καθ'εξής. Σε κάθε βήμα, οι αποστάσεις αυτές γίνονται συνεχώς μικρότερες, αλλά απαιτείται για κάθε μια απ' αυτές ένας ορισμένος χρόνος για να διανυθεί. Επομένως, για να διανυθεί η απόσταση πρέπει να εκπληρωθεί άπειρος αριθμός βημάτων σε πεπερασμένο χρόνο, το οποίο έκανε τον Ζήνωνα να καταλήξει ότι δεν θα διανυθεί ποτέ η απόσταση.

3. *Βέλος*: Για να συμβεί κίνηση, ένα αντικείμενο (βέλος) πρέπει να αλλάξει την θέση που καταλαμβάνει. Αναφέρει ο Ζήνων, ότι σε κάθε χρονική στιγμή το βέλος ούτε κινείται προς τη θέση που καταλαμβάνει, ούτε εκεί που δεν είναι. Δηλαδή, σε κάθε χρονική στιγμή δεν κινείται, αλλά ηρεμεί καταλαμβάνοντας χώρο ίσο με την έκτασή του. Εάν όλα είναι ακίνητα σε κάθε χρονική στιγμή και ο χρόνος αποτελείται από στιγμές, η κίνηση είναι αδύνατη.

Ενώ στα δύο πρώτα παραδείγματα το παράδοξο παρουσιάζεται από την διαίρεση του συνεχούς χώρου, σε άπειρα μικρότερα διαστήματα, στο παράδοξο του βέλους, φαίνεται να είναι η διαίρεση του συνεχούς χρόνου σε χρονικές στιγμές που οδηγεί στο παράδοξο. Το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα που θα δούμε παρακάτω, θυμίζει το παράδοξο του βέλους.

2

Κβαντικό φαινόμενο Ζήνωνα (Quantum Zeno Effect)

2.1 Εισαγωγή

Κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα (ΚΦΖ) ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο η συχνή παρατήρηση ενός κβαντικού συστήματος προκαλεί την επιβράδυνση της χρονικής του εξέλιξης. Δηλαδή, οι συχνές μετρήσεις του κβαντικού συστήματος εμποδίζουν την μετάβασή του σε καταστάσεις διαφορετικές από την αρχική. Το παράδοξο της υπόθεσης είναι ότι αν πάρουμε το όριο των μετρήσεων αυτών προκαλείται «πάγωμα» της χρονικής εξέλιξης του συστήματος! Μαθηματικώς, όπως θα δούμε και αναλυτικά παρακάτω, αυτό συνεπάγεται ότι αν έχουμε έναν χώρο Hilbert δύο διαστάσεων και κάνουμε συχνές μετρήσεις προβάλλοντας την κατάσταση του συστήματος σε έναν μονοδιάστατο υπόχωρο, οριζόμενο από ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή της παρατηρήσιμης φυσικής ποσότητας, αυτό οδηγεί στην επιβράδυνση της χρονικής εξέλιξης του συστήματος με το όριο των συχνών μετρήσεων να σταματά πλήρως την εξέλιξη αυτή. Το φαινόμενο αυτό παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους George Sudarshan και Baidyanath Misra του Πανεπιστημίου του Τέξας το 1977 στο άρθρο τους με τίτλο «The Zeno's paradox in quantum theory» [19], όπου μελετούσαν την χρονική εξέλιξη ενός κβαντικού συστήματος που υπόκειται σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Συγκεκριμένα, έδειξαν ότι ένα ασταθές σωματίδιο, το οποίο παρατηρείται συνεχώς, δεν αποδιεγείρεται ποτέ. Το φαινόμενο αυτό, λόγω της «απουσίας» της χρονικής εξέλιξης, σχετίστηκε άμεσα με τα παράδοξα της κίνησης που είχε διατυπώσει ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνων ο Ελεάτης και συγκεκριμένα με το παράδοξο του βέλους, το οποίο αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο. Για αυτό και το φαινόμενο αυτό πήρε το όνομά του από τους G. Sudarshan και B. Misra, οι οποίοι χρησιμοποιούσαν τον όρο «Κβαντικό Παράδοξο του Ζήνωνα» (Quantum Zeno Paradox) και δεν ήταν οι μόνοι. Τα τελευταία χρόνια, έχει επικρατήσει η ονομασία «Κβαντικό Φαινόμενο του Ζήνωνα» (Quantum Zeno Effect). Αυτό ίσως συμβαίνει διότι το φαινόμενο αυτό έχει ελεγχθεί πειραματικά και δεν αποτελεί πλέον παράδοξο. Παρ' όλα αυτά, πολλοί συγγραφείς διαχωρίζουν το Κβαντικό Φαινόμενο του Ζήνωνα από το Κβαντικό Παράδοξο του Ζήνωνα. Για παράδειγμα οι S. Pascazio και M. Namiki [20]ονομάζουν Κβαντικό Φαινόμενο του Ζήνωνα την κατάσταση κατά την οποία η συχνότητα των μετρήσεων είναι πεπερασμένη με αποτέλεσμα την επιβράδυνση της χρονικής εξέλιξης του συστήματος, ενώ η περίπτωση κατά την οποία η συχνότητα των μετρήσεων είναι άπειρη, με αποτέλεσμα το «πάγωμα» του συστήματος, είναι το Κβαντικό Παράδοξο του Ζήνωνα. Απ' την άλλη, οι E. Block και P. R. Berman [21] ονομάζουν την αναστολή της αυθόρμητης αποδιέργερσης(the inhibition of spontaneous decay) "Κβαντικό Παράδοξο" του Ζήνωνα, ενώ την αναστολή της παραγόμενης μετάβασης(the inhibition of induced transitions) (όπως και στο πείραμα IHBW που θα δούμε στη συνέχεια) "Κβαντικό Φαινόμενο του Ζήνωνα". Επίσης, οι D. Home και M. A. B. Whitaker [22]διατηρούν την ονομασία "Κβαντικό Παράδοξο του Ζήνωνα" για ένα πείραμα με αρνητικά αποτελέσματα που περιλαμβάνει παρατηρήσεις με μακροσκοπικές συσκευές (for a negative-result experiment involving observations with macroscopic apparatus). Η ιδέα του ΚΦΖ όταν αυτό παρουσιάστηκε από τους G. Sudarshan και B. Misra δεν ήταν άγνωστη μέχρι τότε. Ο πρώτος που κατανόησε τα εκτεταμένα αποτελέσματα της μείωσης του χρόνου εξέλιξης και έφερε στο φως τα βασικά χαρακτηριστικά του ΚΦΖ ήταν το 1932 ο von Neumann [23], ο οποίος όμως εστίαζε στην κβαντική θερμοδυναμική και τα συμπεράσματά του είχαν ξεχαστεί. Αργότερα, το 1967 σε ένα άρθρο τους οι Beskow και Nilsson [24] υποστήριξαν ότι οι συχνές μετρήσεις της θέσης, που διεξάγονται έμμεσα από έναν θάλαμο φυσαλίδων σε ένα ασταθές σωματίδιο, θα μπορούσαν να αποτρέψουν την αποδιέγερσή του. Αυτές οι ιδέες επιβεβαιώθηκαν το 1968 από τον Khalfin [25] στο έργο του πάνω στα μεγάλης χρονικής διάρκειας χαρακτηριστικά των κβαντικών χρονικών εξελίξεων [26, 27], μέχρι που το 1972 απέκτησαν μαθηματική υπόσταση από τον Friedman [28]. Πάνω σε αυτές τις ιδέες, λοιπόν, βασίστηκαν οι G. Sudarshan και B. Misra και κατέληξαν στην παρουσίαση του ΚΦΖ, όπως το γνωρίζουμε σήμερα. Από τότε, το φαινόμενο αυτό απέκτησε μεγάλες διαστάσεις στην επιστημονική κοινότητα και αποτέλεσε αντικείμενο πολλών πειραματικών μελετών, σε μερικές από τις οποίες θα αναφερθούμε παρακάτω. Στην γενική του περίπτωση, το ΚΦΖ ισχύει για χώρους Hilbert απείρων διαστάσεων, όπου η κατάσταση συνεχίζει να εξελίσσεται χρονικά αλλά αυστηρά στον υπόχωρο της παρατήρησης. Τέλος, αναφορικά σημειώνουμε ότι, σε αντιδιαστολή με το ΚΦΖ, το 2000 οι Kofman και Kurizki [29]παρουσίασαν ένα άλλο φαινόμενο, γνωστό ως «anti-Zeno effect», κατά το οποίο μετρήσεις σε ασταθή συστήματα αυξάνουν τον ρυθμό μετάβασης. Η διαφορά του από το ΚΦΖ είναι ότι στην περίπτωση αυτή οι μετρήσεις πρέπει να είναι λιγότερο συχνές. Το φαινόμενο αυτό δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας εργασίας και δεν θα αναλυθεί περαιτέρω.

2.2 Μαθηματική πραγμάτευση σε δύο διαστάσεις

Θεωρούμε ένα κβαντικό σύστημα Q, του οποίου οι καταστάσεις περιγράφονται από τελεστές πυκνότητας, οι οποίοι ειναι θετικοί με μοναδιαίο ίχνος σε έναν πλήρη διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ δύο διαστάσεων. Η χρονική εξέλιξη του συστήματος ρυθμίζεται από τον μοναδιαίο τελεστή $U(t) = exp(-itH)$, όπου H ο χρονοανεξάρτητος αυτο-συζυγής τελεστής της Χαμιλτονιανής. Θεωρούμε επίσης, μία ορθογώνια προβολή P, η οποία περιγράφει την μέτρηση που εκτελείται στο Q. Η μέτρηση εξετάζει εάν το σύστημα βρίσκεται στον υπόχωρο $\mathcal{H}_P := P\mathcal{H}$. Ορίζουμε $\bar{P}$ τον τελεστή προβολής στον υπόλοιπο χώρο $\mathcal{H}_{\bar{\mathcal{P}}} = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ Η αρχική κατάσταση του Q την $t = 0$ περιγράφεται από ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$: $|\psi_0\rangle = |0\rangle$. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή t προκύπτει αν εξελίξουμε χρονικά την αρχική κατάσταση, άρα $|\psi_t\rangle = e^{-iHt}|\psi_0\rangle$. Οι ποσότητες

$$a(t) = \langle\psi_0|\psi_t\rangle = \langle\psi_0|e^{-iHt}|\psi_0\rangle \tag{2.1}$$

$$p(t) = ||a(t)||^2 = ||\langle\psi_0|e^{-iHt}|\psi_0\rangle||^2 \tag{2.2}$$

λέγονται *πλάτος* και *πιθανότητα επιβίωσης* αντίστοιχα και συμβολίζουν το πλάτος και τη πιθανότητα να παραμείνει το κβαντικό σύστημα στην αρχική κατάσταση $|\psi_0\rangle$ κατά τη χρονική στιγμή t.

Μπορούμε να θεωρήσουμε το σύστημα ως ένα κβαντικό bit, όπου η αρχική κατάσταση $|\psi_0\rangle$ αντιστοιχεί στο $|0\rangle$, ενώ η ορθογώνια κατάσταση (όταν το σύστημα δεν είναι στην κατάσταση $|0\rangle$) είναι $|1\rangle = |\psi_\perp\rangle$.

Το ερώτημα που μας ενδιαφέρει, είναι ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $|1\rangle$ έχοντας ξεκινήσει στην κατάσταση $|0\rangle$ μετά από χρόνο t και δεδομένου ότι μετράμε σε κάθε χρονική στιγμή να δούμε εάν το σύστημα είναι ακόμα στην αρχική κατάσταση ή όχι. Για να απαντήσουμε αυτή την ερώτηση, πρώτα διαιρούμε το χρονικό διάστημα t σε n κομμάτια χρονικής διάρκειας δt, έτσι ώστε $n \times \delta t = t$. Υπολογίζουμε την πιθανότητα και στο τέλος παίρνουμε το όριο $\delta t \to 0$ και $n \to \infty$ κρατώντας όμως σταθερό το γινόμενο $\delta t \times n = t$.

Η παραπάνω περιγραφή, είναι μια απλούστευση για πιο σύνθετα συστήματα που έχουν τα δύο πρώτα ενεργειακά επίπεδα σε πολύ χαμηλότερες ενέργειες από τα άλλα και μπορούμε να τα θεωρήσουμε σαν να έχουν δύο διαστάσεις. Το σύστημα ξεκινάει στην 1η διεγερμένη κατάσταση (1st excited state) και υπολογίζουμε την πιθανότητα να βρεθεί στην αποδιεγερμένη κατάσταση (ground state).

Ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση $|0\rangle$, προβάλουμε στον υποχώρο $\mathcal{H}_{\bar{P}}$ που ορίζεται από τον τελεστή $\bar{P} = |1\rangle\langle 1|$ την κατάσταση του συστήματος $|\psi_{\delta t}\rangle$ κατά την χρονική στιγμή δt.

Η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην ορθογώνια κατάσταση μετά από δt χρόνο δίνεται από τον τυπο:

$$p(\delta t) = ||\langle 1|\psi_{\delta t}\rangle||^2 = p(0) + \delta t p'(0) + \frac{\delta t^2}{2} p''(0) + O(\delta t^3) \cdots \tag{2.3}$$

όπου $p(0) = ||\langle 1|\psi_0\rangle||^2 = ||\langle 1|0\rangle||^2 = 0$, η πιθανότητα την $t = 0$. Παρακάτω θα δούμε ότι αυτό συνεπάγεται και ότι $p'(0) = 0$, το οποίο θα οδηγήσει στο φαινόμενο του Ζήνωνα.
Έστω $p(t) = ||\alpha(t)||^2$ με $\alpha(t) = \langle 1|\psi_t\rangle$ για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.
Τότε παρατηρούμε ότι:

$$p'(t) = \frac{dp}{dt}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t)\alpha^*(t) + \alpha(t)\frac{d\alpha^*}{dt}(t) \tag{2.4}$$

Επειδή όμως την χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε ότι $\alpha(0) = 0$ συμπεραίνουμε ότι την ίδια χρονική στιγμή και έχουμε και $p'(0) = 0$.

Υποθέτοντας ότι οι μετρήσεις είναι αρκετά συχνές μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους που περιέχουν $O(\delta t^3)$ και τότε η Εξ. (2.3) γίνεται:

$$p(\delta t) \approx \frac{\delta t^2}{2} p''(0) \tag{2.5}$$

Αυτή είναι η πιθανότητα αποδιέγερσης μετά από χρόνο δt.

Για να *μην* έχει αποδιεγερθεί το σύστημα μετά από χρόνο t, πρέπει σε όλα τα n χρονικά διαστήματα (διάρκειας δt) να μην έχει αποδιεγερθεί και επομένως η πιθανότητα για αυτό είναι η n-οστή δύναμη του $(1 - p(\delta t))$

$$||\langle\psi_0|\psi_t\rangle||^2 = (1 - p(\delta t))^n \approx 1 - n(p''(0)\frac{\delta t^2}{2}) + O(\delta t^3) \tag{2.6}$$

Για να βρούμε την πιθανότητα μη-αποδιέγερσης του συστήματος όταν το παρατηρούμε συνεχώς, πρέπει να πάρουμε τα κατάλληλα όρια, με το $n \to \infty$, $\delta t \to 0$ ενώ το γινόμενο $n \times \delta t$ μένει σταθερό και ίσο με t:

$$\begin{aligned} p_{Zeno} &= \lim_{n\to\infty,\delta t\to 0} ||\langle\psi_0|\psi_t\rangle||^2 = \lim_{n\to\infty,\delta t\to 0}(1 - n(p''(0)\frac{\delta t^2}{2})) \\ &= \lim_{n\to\infty,\delta t\to 0}(1 - (p''(0)\frac{t \times \delta t}{2})) = 1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

όπου στην τελευταία ισότητα πριν υπολογίσουμε το όριο, χρησιμοποιήσαμε το $n \times \delta t = t$.

Εδώ είδαμε ότι στην απλή περίπτωση των δύο διαστάσεων, παίρνοντας το όριο όπου οι μετρήσεις γίνονται συνέχεια, παγώσαμε την χρονική εξέλιξη του συστήματος, μια και η πιθανότητα να μείνει στην ίδια κατάσταση με την αρχική του, είναι μονάδα και είναι ανεξάρτητη από το συνολικό διάστημα που γίνονται οι παρατηρήσεις. Αυτό ακριβώς ονομάζεται “κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα”.

2.3 Γενικεύσεις

Προηγουμένως εξετάσαμε την περίπτωση όπου η κατάσταση του κβαντικού συστήματος εξελισσόταν σε έναν χώρο Hilbert δύο διαστάσεων, με αποτέλεσμα το “πάγωμα” της εξέλιξης, στο όριο των συνεχών μετρήσεων. Γενικεύοντας την περίπτωση αυτή, δηλαδή αν θεωρήσουμε ένα κβαντικό σύστημα σε ένα χώρο Hilbert παραπάνω από δύο διαστάσεων, αυτό που θα παρατηρήσουμε δεν είναι το “πάγωμα” της εξέλιξης αλλά ο περιορισμός της σε έναν υπόχωρο του χώρου αυτού. Ειδικότερα, η κατάσταση εξελίσσεται μοναδιαία εφόσον η Χαμιλτονιανή που περιορίζεται στον υπόχωρο αυτό, είναι ένας αυτο-συζυγής τελεστής.

Τη γενική περίπτωση (χώρους Hilbert απείρων διαστάσεων) και την σημασία θα μελετήσουμε στο τελευταίο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας κάποιες ιδιότητες των συνεπών ιστοριών και την σχέση με το πρόβλημα του χρόνου άφιξης.

2.4 Πειράματα και βιβλιογραφία

Το ΚΦΖ θεωρούταν ένα παράδοξο με κυρίως φιλοσοφικό ενδιαφέρον μέχρι το 1988, όπου ο Cook [30]πρότεινε ένα πείραμα με ταλαντούμενα συστήματα, αντί για ασταθή. Αυτή ήταν μια συγκεκριμένη ιδέα που αναβίωσε το πρόβλημα και οδήγησε στο περίφημο πείραμα των Itano και συνεργατών [31] λίγα χρόνια αργότερα. Η συζήτηση που ακολούθησε [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51] βοήθησε στην βαθύτερη κατανόηση του φαινομένου και τελικά οδήγησε σε νέα πειράματα. Το ΚΦΖ έχει επιβεβαιωθεί πλήρως σε πληθώρα διαφορετικών περιπτώσεων και συγκεκριμένα σε πειράματα που αφορούν: πόλωση φωτονίων [52], πυρηνικά spin ισομερών [53], μεμονωμένα ιόντα [54, 55, 56, 57], οπτική άντληση [58], NMR [59], Bose-Einstein συμπυκνώματα [60] και νέα πειράματα βρίσκονται σε προετοιμασία με περιστροφή νετρονίων [61, 62] και υπεραγώγιμα qubits [63, 64]. Όλα τα προαναφερόμενα πειράματα ασχολούνται με πεπερασμένα (ταλαντούμενα) συστήματα, των οποίων ο χρόνος Poincare[1] είναι πεπερασμένος, γι’ αυτό και κάποιοι συγγραφείς θεωρούν ότι το

[1] *Χρόνος Poincare* είναι ο χρόνος που παίρνει σε ένα δυναμικό σύστημα να επανέλθει σε μία κατάσταση κοντά στην αρχική.

ΚΦΖ δεν έχει αποδειχθεί επιτυχώς σε ασταθή συστήματα. Η ανάλυση της εξέλιξης σε μικρά χρονικά διαστήματα γίνεται πιο περίπλοκη όταν αφορά ασταθή συστήματα [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71]. Στην περίπτωση αυτή, νέα και κάπως απροσδόκητα φαινόμενα παρουσιάζονται. Υπήρχαν επίσης, κάποιες αξιοσημείωτες πρώτες απόπειρες στην ερμηνεία προϋπαρχόντων πειραματικών δεδομένων πάνω στην αποδιέγερση ενός ασταθούς σωματιδίου. Ωστόσο, μόνο δύο πειράματα έχουν πραγματοποιηθεί με επιτυχία μέχρι τώρα στα ασταθή συστήματα, και τα δύο από την ομάδα του Mark Rain's. Το πρώτο πείραμα [72] ανακάλυψε την ύπαρξη μιας μικρής χρονικά μη-εκθετικής περιοχής, ενώ το δεύτερο [73] κατέδειξε το ΚΦΖ και το αντίστροφό του. Αξίζει, επίσης, να σημειωθεί ότι οι τελευταίες πειραματικές μελέτες οδηγούνται από το ενδιαφέρον για την θεμελιώδη φυσική, καθώς και από πρακτικές εφαρμογές, όπως η αποτελεσματική εφαρμογή διατήρησης σπιν σε αέρια [74, 75], η μείωση της δοσολογίας σε τομογραφία νετρονίων [76] και τον έλεγχο της αποσυνοχής σε κβαντικούς υπολογιστές [77, 78, 79, 80]. Τα τελευταία δέκα χρόνια έχει παρατηρηθεί μια σειρά από πολύ ενδιαφέρουσες ιδέες σχετικά με το ΚΦΖ και πιθανές εφαρμογές [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98].

3

Η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών (Consistent Histories Approach)

3.1 Εισαγωγή

Η *προσέγγιση των συνεπών ιστοριών* (consistent histories approach) αποτελεί μια ερμηνεία της Κβαντομηχανικής, η οποία είναι ειδικά σχεδιασμένη να ξεπερνά κάποια από τα προβλήματα της ορθόδοξης προσέγγισης (Κοπεγχάγης) με πρωτοπόρους τους Grifiths, Omnes και Gell-Mann και Hartle [11, 12, 13]. Είναι μια διατύπωση της Κβαντομηχανικής για κλειστά κβαντικά συστήματα, η οποία είναι επαρκώς γενική ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ιδιαιτέρως σημαντική περίπτωση της Κβαντικής Κοσμολογίας. Ο βασικός στόχος αυτής της προσέγγισης είναι να κατανοηθεί η ανάδυση ενός κατά προσέγγιση κλασικού συστήματος από ένα θεμελιώδες κβαντικό σύστημα, χωρίς να εμπλέκονται οι λεπτομέρειες των εκάστοτε παρατηρητών, των συσκευών μέτρησης ή της κατάρρευσης της κυματοσυνάρτησης. Η πρόβλεψη ενός κλασικού τομέα όμοιου με αυτόν στον οποίο ζούμε, θα εξαρτιώταν γενικά από τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες του σύμπαντος και επιπλέον θα μπορούσε να είναι μία από τις πολλές δυνατότητες που έχουν προβλεφθεί από την Κβαντομηχανική. Άλλος στόχος της προσέγγισης είναι η δημιουργία ενός κβαντομηχανικού λογικού πλαισίου για να διατυπώνουμε συλλογισμούς για τις ιδιότητες ενός κλειστού φυσικού συστήματος. Ένα τέτοιο πλαίσιο ειναι αναγκαίο αν η διαδικασία της πρόβλεψης στην κβαντομηχανική πρέπει να είναι πραγματικά κβαντομηχανική σε κάθε βήμα. Αυτή η διαδικασία συνίσταται πρώτα από την ανακατασκευή του ιστορικού του σύμπαντος από αρχεία (records) μακροσκοπικά που υπάρχουν στο παρόν και έπειτα χρησιμοποιώντας τα παρόντα αρχεία μαζί με την ανακατασκευασμένη ιστορία να γίνονται προβλέψεις για το μέλλον. Από μαθηματικής πλευράς, ο σκοπός της προσέγγισης των συνεπών ιστοριών ειναι να δώσει πιθανότητες σε (αδροποιημένες) ιστορίες ενός κλειστού συστήματος. Η προσέγγιση αυτή είναι μια γενίκευση της συνήθους κβαντομηχανικής, που στηρίζεται σε λιγότερα αξιώματα. Αυτά τα αξιώματα είναι βασικά ότι το κλειστό σύστημα περιγράφεται από τον συνήθη μαθηματικό φορμαλισμό του Hilbert μαζί με ένα τύπο για τις πιθανότητες των ιστοριών και έναν ερμηνευτικό κανόνα. Δεν γίνεται καμία διάκριση μεταξύ μικροσκοπικού και μακροσκοπικού, ούτε διαχωρίζεται a-priori το σύστημα από το περιβάλλον. Δεν παίζει σημαντικό ρόλο η μέτρηση ή η κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης. Αυτό που αντικαθιστά την μέτρηση ειναι οι πιο γενικές και αντικειμενικές ιδέες της συνέπειας (consistency), καθορίζοντας σε ποιες ιστορίες μπορούν να ανατεθούν πιθανότητες. Η προσέγγιση επίσης τονίζει την κλασική λογική, τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί και ως εκ τούτου τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί η κλασική λογική να εφαρμοστεί σε φυσικά συστήματα. Το βασικό ερώτημα που προσπαθεί να απαντήσει η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών είναι γιατί ο κόσμος περιγράφεται τόσο καλά από την κλασική μηχανική και την κλασική λογική, ενώ τα ατομικά του συστατικά περιγράφονται από την Κβαντομηχανική.

Δεδομένου ότι τα βασικά δομικά συστατικά αυτής της προσέγγισης είναι ιστορίες, αυτή η προσέγγιση είναι κατάλληλη για να απαντηθούν ερωτήσεις που αφορούν περισσότερες από μία χρονικές στιγμές, ή και ερωτήσεις που αφορούν χωροχρονικές περιοχές.

3.2 Φορμαλισμός

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, θα μελετήσουμε τον φορμαλισμό γενικά, ενώ στο αμέσως επόμενο θα δούμε ένα απλό παράδειγμα[1]. Στην ΚΘ οι προτάσεις για το σύστημα (σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή) αντιστοιχούν σε τελεστές προβολής. Μια συλλογή τελεστών προβολής $\{P_\alpha\}$ λέγεται *διαμέριση* (partition) εάν ισχύει ότι

$$\sum_\alpha P_\alpha = \mathbf{1} \tag{3.1}$$

και

$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha \tag{3.2}$$

Μια συλλογή τελεστών προβολής, λέγεται *λεπτομερής* (fine-grained) εάν είναι της μορφής $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, όπου $\{|\alpha\rangle\}$ είναι μια πλήρης συλλογή καταστάσεων. Σε άλλη περίπτωση λέγεται *αδροποιημένη* (coarse-grained). Στην καθιερωμένη θεμελίωση της ΚΘ, μια πρόταση για μια ιστορία ενός κβαντικού συστήματος, αντιστοιχεί σε

[1]Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς να βρει π.χ. στο [99]

μια σειρά από χρονικές μετρήσεις και ενδιάμεσα το σύστημα εξελίσσεται κανονικά με την μοναδιαία εξέλιξη. Ένας χρονικά εξαρτημένος τελεστής προβολής (Heisenberg τελεστής) σχετίζεται με τον χρονο-ανεξάρτητο τελεστή ακολούθως

$$P^k_{\alpha_k}(t_k) = e^{iH(t_k - t_0)} P^k_{\alpha_k} e^{-iH(t_k - t_0)} \tag{3.3}$$

όπου H είναι η Χαμιλτονιανή, t_0 η αρχική χρονική στιγμή και t_k η χρονική στιγμή που γίνεται η μέτρηση. Η πιθανότητα για ένα κβαντικό σύστημα με αρχική κατάσταση ρ, να βρεθεί την στιγμή t_1 στον υποχώρο α_1, t_2 στο α_2 κλπ, δεδομένου ότι στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές γίνεται μια μέτρηση από κάποιον εξωτερικό παρατηρητή, δίνεται από

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \mathrm{Tr}(P^n_{\alpha_n}(t_n) \cdots P^1_{\alpha_1}(t_1) \rho P^1_{\alpha_1}(t_1) \cdots P^n_{\alpha_n}(t_n)) \tag{3.4}$$

Την παραπάνω έκφραση μπορούμε να την δούμε και με τον εξής τρόπο. Έχουμε μια αρχική κατάσταση ρ, την εξελίσσουμε μοναδιαία από την χρονική στιγμή t_0 μέχρι την στιγμή t_1, όπου κάνουμε μια μέτρηση, δηλαδή δρούμε με τον προβολικό τελεστή $P^1_{\alpha_1}$. Μετά εξελίσσουμε την (μη-κανονικοποιημένη) κατάσταση μοναδιαία από τη στιγμή t_1 μέχρι την χρονική στιγμή t_2 όπου δρούμε με τον προβολικό τελεστή $P^2_{\alpha_2}$ κ.ο.κ.

Πρέπει να επισημάνουμε εδώ, ότι η παραπάνω εξίσωση, αντιστοιχεί σε πιθανότητα κάποιας ιστορίας υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος εξωτερικός παρατηρητής έκανε στην κάθε χρονική στιγμή που αναφερόμαστε, μια μέτρηση π.χ. κατά τη στιγμή t_k έκανε την μέτρηση $\{P^k_{\alpha_k}, \mathbf{1} - P^k_{\alpha_k}\}$. Δηλαδή, ως τώρα είναι κρίσιμο ότι υποθέτουμε την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης σε κάθε μία από τις χρονικές στιγμές t_k.

Μία δεύτερη σημαντική παρατήρηση, είναι ότι σε αυτή την έκφραση πιθανότητας υπάρχουν ήδη και τα δύο είδη χρονικής εξέλιξης που υπάρχουν στη ΚΘ. Στις χρονικές στιγμές t_k η πιθανολογική εξέλιξη που συμβαίνει σε μια μέτρηση, ενώ στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα η ντετερμινιστική μοναδιαία εξέλιξη.

Ορίζουμε *τελεστή τάξης* $C_{\underline{\alpha}}$ το γινόμενο των χρονικά εξαρτημένων τελεστών προβολής που αντιστοιχούν στην ιστορία $\underline{\alpha}$. Το σύμβολο $\underline{\alpha}$ αντιστοιχεί στην σειρά αποτελεσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Ο τελεστής τάξης ορίζεται

$$C_{\underline{\alpha}} = P_{\alpha_n}(t_n) \cdots P_{\alpha_2}(t_2) P_{\alpha_1}(t_1) \tag{3.5}$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$\sum_{\underline{\alpha}} C_{\underline{\alpha}} = \mathbf{1} \tag{3.6}$$

Εναλλακτικά θα μπορούσε κανείς να ορίσει τους τελεστές τάξης

$$C'_{\underline{\alpha}} = P_{\alpha_n} e^{-iH(t_n - t_{n-1})} P_{\alpha_{n-1}} \cdots P_{\alpha_2} e^{-iH(t_2 - t_1)} P_{\alpha_1} e^{-iH(t_1 - t_0)} \tag{3.7}$$

έτσι ώστε

$$\sum_{\underline{\alpha}} C'_{\underline{\alpha}} = e^{-iH(t_n - t_0)} \tag{3.8}$$

Και με τους δύο ορισμούς (3.5,3.7) μπορούμε να γράψουμε την πιθανότητα με τον παρακάτω τρόπο

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = Tr(C_{\underline{\alpha}} \rho C^{\dagger}_{\underline{\alpha}}) \tag{3.9}$$

Στην προσέγγιση των συνεπών ιστοριών, ο βασικός στόχος είναι να καθορίσουμε πότε μπορεί κανείς να αποδώσει την πιθανότητα της εξ. (3.9) σε ένα κλειστό κβαντικό σύστημα, χωρίς περαιτέρω αναφορά σε μέτρηση. Η έκφραση της εξ. (3.9) είναι γνωστή ως *υποψήφια πιθανότητα* (candidate probability).

Μια συνάρτηση μπορεί να ονομαστεί πιθανότητα εάν (1) είναι μη-αρνητική, (2) είναι κανονικοποιημένη (δηλαδή, το άθροισμα όλων των τιμών της είναι μονάδα) και (3) πληροί την συνθήκη προσθετικότητας του Kolmogorov που λέει ότι για κάθε δύο γεγονότα A και B με μηδενική τομή $A \cap B = \emptyset$ το μέτρο της ένωσης τους είναι το άθροισμα των μέτρων τους

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \tag{3.10}$$

Αυτή η τελευταία συνθήκη δεν ικανοποιείται στην γενικότερη περίπτωση από την υποψήφια πιθανότητα (3.9) λόγω της κβαντικής συμβολής. Ενδεικτικά, δεδομένου ενός συνόλου ιστοριών, μπορεί κανείς να ορίσει μια αδροποίηση (coarse-graining) ομαδοποιώντας τις ιστορίες. Παραδείγματος χάριν, μπορούμε να θεωρήσουμε πιο αδροποιημένους τελεστές προβολής σε κάθε χρονική στιγμή

$$\bar{P}_{\underline{\alpha}} = \sum_{\alpha \in \underline{\alpha}} P_{\alpha}. \tag{3.11}$$

Σε αυτή την περίπτωση για να μιλάμε για πιθανότητα, θα θέλαμε να μπορούμε να συμπεράνουμε την πιθανότητα της αδροποιημένης περιγραφής αθροίζοντας τις πιθανότητες των πιο λεπτομερών ιστοριών. Όμως, όπως είναι γνωστό, π.χ. στο πείραμα των δύο σχισμών, στην κβαντική θεωρία η συνθήκη της προσθετικότητας παραβιάζεται.

Η υποψήφια πιθανότητα είναι και μια ειδική περίπτωση ενός *κβαντικού μέτρου* όπως το όρισε ο Sorkin [100, 101]. Το κβαντικό μέτρο, είναι μια συνάρτηση μη-αρνητική, κανονικοποιήσιμη που αντί να υπακούει την συνθήκη της προσθετικότητας, υπακούει μια πιο αδύναμη συνθήκη που ουσιαστικά απαγορεύει την συμβολή τριών ή περισσοτέρων ιστοριών, επιτρέποντας όμως την ανά ζεύγος συμβολή. Η "κβαντική προσθετικότητα" ορίζεται ως εξής:

$$q(A \cup B \cup C) = q(A \cup B) + q(A \cup C) + q(B \cup C) - q(A) - q(B) - q(C) \quad (3.12)$$

Η τελευταία συνθήκη ικανοποιείται από τις προβλέψεις της κβαντικής θεωρίας (εξού και ονομάζεται κβαντικό μέτρο). Προσφάτως δε, έχουν διεξαχθεί και πειράματα για να επιβεβαιώσουν την μη-ύπαρξη τριπλής-συμβολής [102].

Για κάποιες συγκεκριμένες ιστορίες, η συμβολή μεταξύ των εναλλακτικών είναι αμελητέα και για αυτές τις ιστορίες, η συνθήκη της προσθετικότητας ισχύει και οι υποψήφιες πιθανότητες λειτουργούν σαν κανονικές πιθανότητες. Για να δει κανείς πόση συμβολή έχουν δύο ιστορίες, χρησιμοποιούμε το συναρτησιακό αποσυσχέτισης (ΣΑ) (decoherence functional)

$$D(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = Tr(C_{\underline{\alpha}} \rho C^{\dagger}_{\underline{\beta}}) \quad (3.13)$$

Η συνθήκη της προσθετικότητας μεταξύ δύο μη-επικαλυπτόμενων ιστοριών ικανοποιείται εάν το πραγματικό μέρος του ΣΑ των δύο ιστοριών είναι μηδέν.

$$ReD(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = 0 \quad (3.14)$$

Δύο ιστορίες $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ λέγονται ορθογώνιες εάν υπάρχει τουλάχιστον μία χρονική στιγμή t_k όπου $P_{\alpha_k} P_{\beta_k} = 0$. Ένα σύνολο ιστοριών $\{\underline{\alpha}_1, \cdots, \underline{\alpha}_n\}$ λέγεται *πλήρες* εάν είναι ορθογώνιες ανά ζεύγη $\underline{\alpha}_i, \underline{\alpha}_j \quad \forall\, i, j$ και καλύπτουν όλο τον χώρο ιστοριών $\cup_i \underline{\alpha}_i = \mathbf{1}$.

Έστω ένα πλήρες σύνολο ιστοριών $\{\underline{\alpha}_1, \cdots, \underline{\alpha}_n\}$ που ανά ζεύγος έχουν μηδενικό ΣΑ. Τότε αυτό το σύνολο το ονομάζουμε *συνεπείς ιστορίες* (ΣΙ). Το κβαντικό μέτρο, περιορισμένο σε ερωτήσεις αυτού του συνόλου ή αδροποιήσεών του, είναι ένα κανονικό μέτρο πιθανότητας και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε το κβαντικό μέτρο μιάς ιστορίας μέλους των ΣΙ σαν την πιθανότητα αυτής της ιστορίας να συμβεί.

Εδώ πρέπει να κάνουμε δύο σημαντικές παρατηρήσεις. Πρώτον, στον ορισμό των ΣΙ απαιτήσαμε να είναι μηδενικό και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ΣΑ, ενώ αρκούσε να απαιτήσουμε το πραγματικό μέρος για να ισχύει η προσθετικότητα. Υπάρχουν διάφοροι λόγοι. Ο σημαντικότερος είναι ότι στην ασθενέστερη συνθήκη, είναι δυνατόν να έχουμε δύο μη-συσχετισμένα και μη-αλληλεπιδρώντα συστήματα που ενώ το καθένα χωριστά είναι συνεπές, όταν τα θεωρήσουμε μαζί, παύουν να είναι. Το παραπάνω είναι γνωστό και ως *κριτήριο Diosi* από την εργασία [103]. Η σχέση της ισχυρότερης συνθήκης με την ύπαρξη αρχείων για τις ιστορίες (records) [14, 104] είναι ένας άλλος λόγος και, τέλος, το γεγονός ότι σε όλα τα φυσιολογικά συστήματα ο μηδενισμός του πραγματικού μέρους οδηγεί και στον μηδενισμό του φανταστικού είναι άλλη μια ένδειξη για την ορθότητα αυτής της επιλογής.

Δεύτερον, υπάρχουν πολλά πλήρη σύνολα ιστοριών, που το καθένα τους είναι συνεπές. Αυτό δυσκολεύει την ερμηνεία ενός συνόλου ΣΙ διότι δεν είναι σαφές ποιο σύνολο ΣΙ πρέπει να χρησιμοποιήσει κανείς για να κάνει προβλέψεις. Ακόμα πιο σημαντικό είναι το ότι ιστορίες μέσα σε διαφορετικά σύνολα ΣΙ είναι μη συμβατές η μια με την άλλη όπως παρατήρησαν οι Dowker και Kent [105, 106] και ο Kent [107] ενώ πρόσφατα μια πιθανή λύση πρότεινε ο Wallden [108]. Αυτό το θέμα είναι ίσως το σημαντικότερο για την ερμηνεία της προσέγγισης των συνεπών ιστοριών, αλλά περαιτέρω ανάλυση είναι έξω από τον στόχο της παρούσας διπλωματικής.

3.3 Παράδειγμα

Έστω ένα κβαντικό bit, δηλαδή ένα κβαντικό σύστημα με δύο καταστάσεις $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Για να απλοποιηθεί περαιτέρω το παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι το σύστημα δεν εξελίσσεται χρονικά, δηλαδή έχει Χαμιλτονιανή μηδέν. Ξεκινάει από την κατάσταση $|0\rangle$, δηλαδή ο αρχικός τελεστής πυκνότητας είναι $\rho = |0\rangle\langle 0|$. Τέλος, υποθέτουμε ότι γίνονται μετρήσεις, ή αλλιώς ρωτάμε για τις ιδιότητες του συστήματος, για δύο χρονικές στιγμές, μετά την αρχική, τις στιγμές t_1 και t_2.

Την χρονική στιγμή t_1 μετράμε εάν το σύστημα είναι στην κατάσταση $|+\rangle$ ή $|-\rangle$, όπου ορίζουμε

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \tag{3.15}$$

Τέλος, την χρονική στιγμή t_2 μετράμε εάν το σύστημα είναι στην κατάσταση $|0\rangle$ ή $|1\rangle$. Να σημειώσουμε εδώ, ότι και η συλλογή προβολικών τελεστών $\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ είναι διαμέριση (partition) και η συλλογή $\{|+\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$ είναι διαμέριση.

Οι πιθανές ιστορίες σε αυτό το παράδειγμα είναι τέσσερις, μια και υπάρχουν δύο διαφορετικά πιθανά αποτελέσματα σε κάθε μία από τις δύο χρονικές στιγμές που αναλύουμε. Ονομάζουμε τις ιστορίες με βάση τα αποτελέσματα των μετρήσεων, οπότε παραδείγματος χάριν την ιστορία που την στιγμή t_1 έδωσε αποτέλεσμα “$+$” και την στιγμή t_2 αποτέλεσμα “0” την συμβολίζουμε h_{+0}.

Οπότε το ΣΑ μας δίνει

$$
\begin{aligned}
D(h_{+0},h_{+0}) &= \mathrm{Tr}((|0\rangle\langle 0|)(|+\rangle\langle +|)(|0\rangle\langle 0|)(|+\rangle\langle +|)(|0\rangle\langle 0|)) = 1/4 \\
D(h_{+0},h_{-0}) &= \mathrm{Tr}((|0\rangle\langle 0|)(|+\rangle\langle +|)(|0\rangle\langle 0|)(|-\rangle\langle -|)(|0\rangle\langle 0|)) = 1/4 \\
D(h_{+0},h_{+1}) &= \mathrm{Tr}((|0\rangle\langle 0|)(|+\rangle\langle +|)(|0\rangle\langle 0|)(|+\rangle\langle +|)(|1\rangle\langle 1|)) = 0 \\
D(h_{+1},h_{-1}) &= \mathrm{Tr}((|1\rangle\langle 1|)(|+\rangle\langle +|)(|0\rangle\langle 0|)(|-\rangle\langle -|)(|1\rangle\langle 1|)) = -1/4 \\
&= \cdots \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Μπορούμε να γράψουμε το ΣΑ ως ένα πίνακα 4×4, όπου οι στήλες και οι κάθετοι αντιστοιχούν με σειρά στις ιστορίες $h_{+0}, h_{-0}, h_{+1}, h_{-1}$.

$$
D(h_i, h_j) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}. \qquad (3.17)
$$

Από το παραπάνω ΣΑ, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι με μία αδροποίηση καταλήγουμε σε ένα σύνολο ΣΙ. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τις αδροποιημένες ιστορίες $h_A := \{h_{+0}, h_{-0}\}$ και $h_B := \{h_{+1}, h_{-1}\}$. Το σύνολο αδροποιημένων ιστοριών $\{h_A, h_B\}$ είναι ΣΙ, όπως φαίνεται και από το αδροποιημένο ΣΑ.

$$
D(h_A, h_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.18)
$$

Στην γενικότερη περίπτωση, υπάρχουν πολλά σύνολα ΣΙ.

3.4 Εφαρμογές

Η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών είναι μια εναλλακτική θεμελίωση της ΚΘ. Η ερμηνεία των πιθανοτήτων που προκύπτουν είναι ένα θέμα συζήτησης μεταξύ των ερευνητών που ασχολούνται με τα θεμέλια της ΚΘ. Επομένως το εάν αποτελεί μια ικανοποιητική ερμηνεία που αποφεύγει κάποια ή και όλα τα προβλήματα είναι ακόμα υπό συζήτηση. Η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών, όμως, έχει και εφαρμογή σε μια σειρά προβλημάτων, ανεξαρτήτως της φιλοσοφικής τους ερμηνείας. Εδώ θα αναφέρουμε περιληπτικά μερικά.

1. Χρόνος στην ΚΘ. Λόγω του ότι τα βασικά συστατικά είναι ιστορίες, η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών φαίνεται να εμπεριέχει ήδη μια χρονικότητα - πράγμα που την καθιστά κατάλληλη για ερωτήσεις που αφορούν χρονική

διάρκεια. Όπως ήδη αναφέραμε, κάτι τέτοιο είναι δύσκολο στην καθιερωμένη θεμελίωση της ΚΘ. Η παρούσα διπλωματική, σχετίζεται άμεσα με αυτή την εφαρμογή. Άλλες παρόμοιες εφαρμογές είναι ο χρόνος σκέδασης, χρόνος άφιξης, χρόνος πτήσης καθώς και το πρόβλημα του χρόνου της κβαντικής βαρύτητας.

2. Το πρόβλημα της μέτρησης στην ΚΘ έχει πολλές πλευρές. Στο καθαρά τεχνικό επίπεδο, μια βασική ερώτηση είναι πώς από θεμελιωδώς κβαντικά συστήματα, μακροσκοπικά αντικείμενα περιγράφονται με πολύ καλή ακρίβεια με τις εξισώσεις της κλασικής φυσικής. Το φαινόμενο της αποσυσχέτισης, δείχνει πώς προκύπτουν κλασικές στοχαστικές εξισώσεις, όταν αγνοούμε τους βαθμούς ελευθερίας του περιβάλλοντος. Η προσέγγιση των ΣΙ, είναι ένας ακόμα τρόπος να γίνει πιο σαφής αυτή η μετάβαση, μια και η αποσυσχέτιση μακροσκοπικών συστημάτων, προκύπτει εύκολα και από τον φορμαλισμό των ΣΙ.

3. Κβαντική Κοσμολογία. Η προσέγγιση των ΣΙ ξεκίνησε για να μπορέσει να αντιμετωπίσει προβλήματα σαν αυτό της κβαντικής κοσμολογίας. Συγκεκριμένα στην κβαντική κοσμολογία συναντώνται δύο προβλήματα που κάνουν την χρήση της ερμηνείας της Κοπεγχάγης το λιγότερο δυσκολότερη. Πρώτον, στην κβαντική κοσμολογία το σύστημα είναι το ίδιο το σύμπαν και επομένως δεν μπορούμε να μιλάμε για εξωτερικούς παρατηρητές. Δεύτερον, στην κανονική κβαντική κοσμολογία εμφανίζεται το πρόβλημα του χρόνου και, όπως ήδη έχουμε πει, οι ΣΙ φαίνεται να είναι από τους πιο υποσχόμενους τρόπους αντιμετώπισης του εν λόγω προβλήματος.

4. Λογική στην ΚΘ. Μία από τις συνέπειες της ΚΘ είναι ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλασική λογική όταν αναφερόμαστε σε ένα κβαντικό σύστημα. Η προσέγγιση των ΣΙ αποδεικνύεται ένας καλός τρόπος για να μιλήσουμε για λογική στην ΚΘ. Ήδη από τον φορμαλισμό της μας λέει σε ποιές συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλασική λογική παρότι έχουμε ένα κβαντικό σύστημα. Ακόμα πιο ενδιαφέρουσες είναι οι προτάσεις των Isham [109] και Sorkin [15] που παρουσιάζουν τροποποιήσεις της κλασικής λογικής, προσπαθώντας πάντα να μιλήσουν για ένα κβαντικό σύστημα ακόμα και σε περιπτώσεις που δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί κλασική λογική.

4

Το κβαντικό φαινόμενο Ζήνωνα και η προσέγγιση των συνεπών ιστοριών

4.1 Εισαγωγή

Το κβαντικό φαινόμενο του Ζήνωνα, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι γίνεται ακόμα πιο εμφανής η σημαντικότητα της διαδικασίας της μέτρησης. Είναι αυτή η διαφορετική εξέλιξη ενός συστήματος που μαθηματικώς μεταφράζεται στην κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης και οδηγεί εν τέλει στο πάγωμα της συνολικής χρονικής εξέλιξης στο όριο της συνεχούς μέτρησης. Επομένως, θα ήταν ιδιαιτέρως ενδιαφέρον, να μελετήσουμε ερωτήσεις του τύπου του φαινομένου του Ζήνωνα, στα πλαίσια θεμελιώσεων της κβαντικής θεωρίας που δεν έχουν εξωτερικούς παρατηρητές, για τις οποίες η μέτρηση δεν είναι κάτι που εισάγεται επιπλέον όπως συμβαίνει παραδείγματος χάριν στην καθιερωμένη ερμηνεία της Κοπεγχάγης. Σε αυτή την διπλωματική θα δούμε συγκεκριμένα τι απάντηση δίνει η προσέγγιση των Συνεπών Ιστοριών.

4.2 Μαθηματική πραγμάτευση

Στις ΣΙ, πρέπει πρώτα να ορίσουμε τους τελεστές τάξης (class operators) C που αντιστοιχούν στην φυσική ερώτηση που μας ενδιαφέρει. Μετά βλέπουμε εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέπειας (αποσυσχέτισης), δηλαδή εάν οι μη-διαγώνιοι όροι του ΣΑ είναι μηδενικοι. Και εάν πράγματι η προηγούμενη συνθήκη ικανοποιείται τότε έχουμε ένα σύνολο ΣΙ και μπορούμε να θεωρήσουμε το κβαντικό μέτρο (διαγώνιο μέρος του ΣΑ) σαν την πιθανότητα η συγκεκριμένη ιστορία να συμβεί[1].

4.2.1 Ο τελεστής τάξης

Για να κατασκευάσει κανείς τους τελεστές τάξης , πρέπει πρώτα να διευκρινίσει (α) την αρχική συνθήκη του συστήματος και (β) το σύνολο του συστήματος, περιβάλλοντος και συσκευών μέτρησης που υπάρχουν. Η ακριβής απάντηση, μπορεί να εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την μοντελοποίηση των συσκευών μέτρησης. Εδώ, όπως και στην εργασία [110], θα κάνουμε την πιο απλή υπόθεση, ότι δηλαδή δεν υπάρχει καμία πραγματική (υλική) συσκευή μέτρησης, και θα δούμε τι προβλέπουν οι ΣΙ για μια ερώτηση τύπου Ζήνωνα. Δηλαδή, η ερώτηση θα είναι: Έστω ένα σύστημα δύο διαστάσεων που ξεκινάει στην κατάσταση $|0\rangle$, το οποίο μελετάμε από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι την χρονική στιγμή $t_f = t$. Ερώτηση:

Ποια η πιθανότητα να παραμείνει το σύστημα στην κατάσταση $|0\rangle$ σε όλη την διάρκεια t;

Υποθέτουμε ότι έχει την γενικότερη Χαμιλτονιανή δύο διαστάσεων (δηλαδή αυτοσυζυγή τελεστή) της μορφής

$$H = \begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Τη Χαμιλτονιανή μπορούμε να την εκφράσουμε και $H = a\sigma_0 + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3$, όπου σ_i είναι οι πίνακες Pauli

$$\begin{gathered} \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Τον τελεστή τάξης που αντιστοιχεί στην απάντηση “το σύστημα παρέμεινε στην αρχική κατάσταση καθόλη την διάρκεια” θα τον συμβολίζουμε C_α, ενώ τον τελεστή τάξης που αντιστοιχεί στην αρνητική απάντηση συμβολίζουμε $C_{\bar{\alpha}} = e^{-iHt} - C_\alpha$. Υπενθυμίζουμε εδώ, ότι έχουμε πάρει τον ορισμό (3.7) για τους τελεστές τάξης που είναι κανονικοποιημένοι σύμφωνα με την (3.8). Σαν πρώτο βήμα για τον

[1] Η ερμηνεία της πιθανότητας ενός γεγονότος/ιστορίας ενός κλειστού μοναδικού συστήματος είναι κάτι που απασχολεί τους ερευνητές στα θεμέλια της κβαντικής θεωρίας και κοσμολογίας, αλλά είναι κάτι που δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω σε αυτή την εργασία.

ορισμό του τελεστή τάξης υπολογίζουμε το πλάτος πιθανότητας $\alpha(\delta t)$ να παραμείνει στην αρχική κατάσταση μετά από χρονικό διάστημα δt. Από τον τύπο του Rabi (βλ π.χ. [111]) έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha(\delta t) &= \langle 0|e^{-iH\delta t}|0\rangle \\
\alpha(\delta t) &= (|c_+|^2 + |c_-|^2 \exp(-i(E_- - E_+)\delta t))) \times e^{-iE_+\delta t}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου E_- και E_+ τα δύο επίπεδα ενέργειας (δηλαδή οι ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής), και c_-, c_+ οι συντελεστές βάρους της αρχικής κατάστασης $|0\rangle = c_-|E_-\rangle + c_+|E_+\rangle$ με τις καταστάσεις $|E_+\rangle$ και $|E_-\rangle$ να είναι οι ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις της δεδομένης Χαμιλτονιανής.

Αρχικά υποθέτουμε ότι ελέγχουμε n φορές κατά το διάστημα t εάν το σύστημα είναι ακόμα στην κατάσταση $|0\rangle$. Δηλαδή $\delta t = t/n$. Ορίζουμε τον τελεστή

$$\begin{aligned}
C_\alpha(n, \delta t)|0\rangle\langle 0| &= |0\rangle\langle 0|e^{-iH\delta t} \cdots |0\rangle\langle 0|e^{-iH\delta t}|0\rangle\langle 0| \\
&= |0\rangle\langle 0|(\alpha(\delta t))^n
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Παίρνοντας τα κατάλληλα όρια μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή τάξης C_α

$$C_\alpha|0\rangle\langle 0| = \lim_{n\to\infty, \delta t\to 0} C_\alpha(n, \delta t)|0\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0| \lim_{n\to\infty}(\alpha(t/n))^n \tag{4.5}$$

Αντίστοιχα, ο τελεστής τάξης να μην παραμείνει στην αρχική κατάσταση καθόλη την διάρκεια t είναι

$$C_{\bar{\alpha}} = e^{-iHt} - C_\alpha \tag{4.6}$$

όπως προκύπτει από την (3.8)

4.2.2 Οι (υποψήφιες) πιθανότητες

Όπως έχουμε δει και στην εισαγωγή, για να μπορέσουμε να αναθέσουμε πιθανότητες σε ιστορίες ενός κλειστού συστήματος, πρέπει να έχουμε ένα σύνολο συνεπών ιστοριών ΣΙ, όπου δηλαδή τα μη-διαγώνια στοιχεία του ΣΑ να είναι μηδενικά. Τα διαγώνια στοιχεία του ΣΑ λέγονται και υποψήφιες πιθανότητες ή κβαντικό μέτρο. Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε την υποψήφια πιθανότητα της ιστορίας που το σύστημα παραμένει συνεχώς στην αρχική κατάσταση σε όλο το χρονικό διάστημα t. Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα δούμε πότε η υποψήφια πιθανότητα είναι και πραγματική πιθανότητα, δηλαδή πότε έχουμε σύνολο ΣΙ.

Η υποψήφια πιθανότητα είναι

$$D(\alpha,\alpha) = \mathrm{Tr}(C_\alpha|0\rangle\langle 0|C_\alpha^\dagger) \tag{4.7}$$

που χρησιμοποιώντας την (4.5) και (4.3) γίνεται

$$\begin{aligned} D(\alpha,\alpha) &= \lim_{n\to\infty,\delta t\to 0} (\alpha^*(\delta t))^n(\alpha(\delta t)^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (|\alpha(n/t)|^2)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - 4|c_+|^2|c_-|^2 \sin^2(t/n\frac{E_+ - E_-}{2})\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 - 4|c_+|^2|c_-|^2 n(t/n)^2\frac{(E_+ - E_-)^2}{4} + O(...)) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ο παραπάνω υπολογισμός, δεν είναι παρά ένας διαφορετικός (από αυτόν που είδαμε νωρίτερα) τρόπος να δούμε πώς προκύπτει το ΚΦΖ. Το ενδιαφέρον παρουσιάζεται όταν δούμε (α) πότε αυτή η πιθανότητα βγάζει νόημα σε ένα κλειστό χωρίς παρατηρητές σύστημα και (β) τι γίνεται όταν έχουμε περισσότερες διαστάσεις και πώς συνδέεται με άλλες ερωτήσεις όπως το πρόβλημα χρόνου άφιξης.

4.2.3 Η συνθήκη συνέπειας

Στην πιο απλή μορφή ΣΙ, έχουμε δύο ιστορίες, που πρέπει να αποτελούν διαμέριση του συνολικού χώρου ιστοριών. Στην περίπτωση μας, η μία ιστορία είναι να παραμένει συνεχώς στην αρχική κατάσταση $|0\rangle$ σε όλο το διάστημα t και αντιστοιχεί στον τελεστή τάξης C_α, ενώ η άλλη ιστορία είναι το αντίθετο, δηλαδή ότι το σύστημα, έστω και μία χρονική στιγμή στο χρονικό διάστημα που θεωρούμε, υπήρξε στην κατάσταση $|1\rangle$ και ανιστοιχεί στον τελεστή τάξης $C_{\bar{\alpha}} = e^{-iHt} - C_\alpha$ ικανοποιώντας την (3.8) . Η μοναδική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να έχουμε ΣΙ είναι

$$D(\alpha,\bar{\alpha}) = \mathrm{Tr}(C_\alpha|0\rangle\langle 0|C_{\bar{\alpha}}^\dagger) = 0 \tag{4.9}$$

Εύκολα βλέπουμε από την (4.8) ότι αυτό οδηγεί στην συνθήκη

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{iHt}C_\alpha|0\rangle - D(\alpha,\alpha) = 0 \\ \langle 0|e^{iHt}C_\alpha|0\rangle = 1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ο τελεστής τάξης όμως εξαρτάται από την Χαμιλτονιανή και το συνολικό χρονικό διάστημα t που μελετάμε. Είναι σαφές ότι στην γενικότερη περίπτωση η συνθήκη

(4.10) δεν ικανοποιείται. Αυτό είναι σύμφωνο και με τις προσδοκίες μας, μια και θα ήταν παράλογο να παγώνει η εξέλιξη ενός συστήματος χωρίς να γίνεται κάποια μέτρηση και μόνο από το ότι κάναμε την αντίστοιχη ερώτηση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι σε κάποιες (ειδικές) περιπτώσεις μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα. Αυτή η ιδιότητα, είναι κάτι που παρουσιάζει επιπλέον ενδιαφέρον και για το κατά πόσο μπορούμε να ερμηνεύσουμε την προσέγγιση των ΣΙ με τον συμβατικό τρόπο, δηλαδή θεωρώντας ότι μας δίνει κανονικές πιθανότητες ιστοριών.

Η συνθήκη (4.10) ικανοποιείται (α) όταν η αρχική κατάσταση είναι ενεργειακή ιδιοκατάσταση και (β) σε "συμπτωματικές" περιπτώσεις που η Χαμιλτονιανή και το χρονικό διάστημα συμβαίνει να δίνουν το παραπάνω όριο. Τις περιπτώσεις (α) θα μελετήσουμε παρακάτω, ενώ συγκεκριμένες περιπτώσεις (β) θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο όπου μελετάμε το πρόβλημα χρόνου άφιξης. Αυτές πιθανώς έχουν μεγαλύτερη σημασία στο κατά πόσο η ερμηνεία των συνεπών ιστοριών είναι ικανοποιητική ως έχει και δεν θα μας απασχολήσει σε αυτή την εργασία.

Η περίπτωση (α), μαθηματικώς αντιστοιχεί στο ότι είτε $|0\rangle = |E_-\rangle$ και επομένως $c_+ = 0, c_- = 1$, είτε $|0\rangle = |E+\rangle$ και $c_- = 0, c_+ = 1$. Θα δούμε αναλυτικά πως προκύπτει όταν $c_+ = 0, c_- = 1$, ενώ ομοίως προκύπτει και $c_+ = 1, c_- = 0$. Η αρχική κατάσταση είναι

$$|0\rangle = |E_-\rangle \tag{4.11}$$

και από την (4.3) έχουμε ότι

$$\alpha(\delta t) = e^{-iE_-\delta t} \tag{4.12}$$

και επομένως

$$C_\alpha|0\rangle = \lim_{n\to\infty}(e^{-iE_-t/n})^n|0\rangle = e^{-iE_-t}|0\rangle \tag{4.13}$$

και η συνθήκη (4.10) ικανοποιείται

$$\langle 0|e^{iHt}C_\alpha|0\rangle = \langle E_-|e^{iE_-t}e^{-iE_-t}|E_-\rangle = 1 \tag{4.14}$$

Από φυσικής άποψης, είναι αναμενόμενο το αποτέλεσμα. Όταν ένα σύστημα βρίσκεται σε μια ενεργειακή ιδιοκατάσταση, παραμένει σε αυτήν μια και η χρονική εξέλιξη το αφήνει αμετάβλητο όπως μπορούμε να δούμε

$$\begin{aligned} H|E\rangle &= E|E\rangle \Rightarrow \\ e^{-iHt}|E\rangle &= e^{-iEt}|E\rangle = |E\rangle \times \text{ φάση} \end{aligned} \tag{4.15}$$

όπου η φάση e^{-iEt} είναι συνολική και δεν επηρεάζει οποιαδήποτε πιθανότητα.

Η περίπτωση ενεργειακών ιδιοκαταστάσεων, αν και περιορισμένου ενδιαφέροντως στις συνηθισμένες εφαρμογές του ΚΦΖ, έχει ιδιαίτερη σημασία όταν μελετάμε την σχέση του ΚΦΖ με το πρόβλημα του χρόνου στην κβαντική βαρύτητα. Εκεί οι μόνες λύσεις συμβατές με την εξίσωση των Wheeler και DeWitt είναι ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις και μάλιστα με μηδενική συνολική ενέργεια. Για περισσότερα σχετικά με αυτό παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις εργασίες [112, 113, 114].

4.3 Συμπεράσματα

Είδαμε ότι το ΚΦΖ μπορεί να αποδειχτεί χρησιμοποιώντας έναν τελεστή τάξης από τις ΣΙ. Συγκεκριμένα, το ΚΦΖ συνεπάγεται ότι η υποψήφια πιθανότητα για την ιστορία "το σύστημα παρέμεινε στην αρχική του κατάσταση καθ'όλο το χρονικό διάστημα t" είναι μονάδα. Για να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω σαν πιθανότητα πρέπει να ανήκει σε ένα σύνολο ΣΙ, και επομένως πρέπει το ΣΑ να είναι μηδενικό για τα μη-διαγώνια στοιχεία. Αυτό συμβαίνει σε ένα απλό σύστημα, όπου δεν συμπεριλαμβάνουμε τη συσκευή μέτρησης, ενώ στη γενικότερη περίπτωση δεν μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητες μια και η συνθήκη συνέπειας δεν ικανοποιείται. Μια ειδική περίπτωση που αναμενόμενα ικανοποιείται η συνθήκη, είναι όταν η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι μια ενεργειακή ιδιοκατάσταση. Αυτή η περίπτωση έχει ιδιαίτερη σημασία στην κβαντική βαρύτητα και στη σχέση του ΚΦΖ με το πρόβλημα του χρόνου στην κβαντική βαρύτητα. Άλλες περιπτώσεις που μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητες είναι όταν έχουμε "συμπτωματικά" ΣΙ, και θα δούμε τέτοια περίπτωση στο επόμενο κεφάλαιο.

5

Πρόβλημα Χρόνου Άφιξης (Arrival Time Problem)

5.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε ήδη δει, ερωτήσεις που αφορούν παραπάνω από μία χρονική στιγμή, δεν έχουν εύκολη απάντηση στην ΚΘ. Μια ερώτηση με μεγάλη πρακτική σημασία, που δεν υπάρχει όμως γενικός τρόπος να απαντηθεί, είναι το *πρόβλημα του χρόνου άφιξης*. Υποθέτουμε ότι έχουμε αρχικά ένα σύστημα που είναι χωρικά περιορισμένο κοντά στο σημείο Ο.

Ποια η πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί εντός ενός διαστήματος Δ, έστω και μία στιγμή, εντός ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος t;

Η σχέση με το ΚΦΖ είναι φανερή. Έστω ότι το σωμάτιο που εξετάζουμε βρίσκεται αρχικά στην περιοχή $\bar{\Delta}$ που είναι όλος ο χώρος εκτός της περιοχής Δ. Δηλαδή $\Delta \cup \bar{\Delta} = R^n$ εάν το σωμάτιο βρίσκεται σε χώρο n-διαστάσεων. Η αρχική κατάσταση του συστήματος $|\psi\rangle$ είναι τέτοια ώστε $P_\Delta|\psi\rangle = 0$. Η ερώτηση χρόνου άφιξης με τελεστή τάξης C_Δ είναι η άρνηση της ερώτησης $C_{\bar{\Delta}}$ "ποια η πιθανότητα το σωμάτιο να έμεινε σε όλο το χρονικό διάστημα t στην περιοχή $\bar{\Delta}$ από την οποία και ξεκίνησε;". Αυτή η τελευταία ερώτηση είναι ίδια με αυτή του ΚΦΖ με μόνη διαφορά ότι και η "κατάσταση" που ξεκίνησε το σύστημα και η "κατάσταση" που δεν θέλουμε να βρεθεί αντιστοιχούν σε υποχώρους Hilbert άπειρων διαστάσεων σε αντίθεση με την παραπάνω ανάλυση του ΚΦΖ, στην οποία και οι δυο υπόχωροι ήταν μονοδιάστατοι.

5.2 Συνεπείς Ιστορίες και Πρόβλημα Χρόνου Άφιξης

Βλέποντας την ομοιότητα με το ΚΦΖ, ακολουθώντας τις εργασίες [113, 112] θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε το πρόβλημα χρόνου άφιξης χρησιμοποιώντας τις ΣΙ. Συγκεκριμένα θα ορίσουμε έναν τελεστή τάξης $C_{\bar{\Delta}}$ που θα αντιστοιχεί στην "άρνηση" της παραπάνω ερώτησης, δηλαδή "Ποια η πιθανότητα το σύστημα να μείνει συνέχεια στο χωρικό διάστημα $\bar{\Delta}$ σε όλο το χρονικό διάστημα t;". Μετά χρησιμοποιώντας την (3.8) ορίζουμε το τελεστή τάξης $C_{\Delta} = e^{-iHt} - C_{\bar{\Delta}}$.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονίσουμε ότι γενικά υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να ορίσει κανείς τελεστές τάξης που να αντιστοιχούν σε μία ερώτηση, όπως εδώ για την ερώτηση του χρόνου άφιξης. Ίσως το πιο σημαντικό για να χρησιμοποιήσουμε τις ΣΙ είναι να βρούμε έναν τρόπο να κατασκευάζουμε τους κατάλληλους τελεστές τάξης που να αντιστοιχούν στις φυσικές ερωτήσεις που μας ενδιαφέρουν και να οδηγούν σε περιπτώσεις που ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέπειας. Για να συμβεί το τελευταίο, σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να χρειάζεται και η εισαγωγή ενός περιβάλλοντος ή λεπτομέρειες των συσκευών μέτρησης. Εδώ θα δούμε απλές περιπτώσεις που δεν χρειάζονται τα παραπάνω.

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των υποψηφίων πιθανοτήτων και των συνθηκών συνέπειας, θα ορίσουμε τον *διαδότη* και τον *περιοριστικό διαδότη*.

5.2.1 Διαδότης και περιοριστικός διαδότης

Ο διαδότης στην ΚΘ είναι άλλος ένας τρόπος να δούμε την χρονική εξέλιξη ενός συστήματος. Συγκεκριμένα δίνει το πλάτος πιθανότητας που έχει το σύστημα να βρεθεί από ένα σημείο x_0 την χρονική στιγμή t_0 σε ένα σημείο x την χρονική στιγμή t και συμβολίζεται $g(x, t|x_0, t_0)$. Συγκεκριμένα η χρονική εξέλιξη γράφεται

$$\psi(x,t) = \int g(x,t|x_0,t_0)\psi(x_0,t_0)dx \tag{5.1}$$

Ο διαδότης ορίζεται είτε με συναρτησιακό ολοκλήρωμα διαδρομών (path integral) είτε με τελεστές με τον παρακάτω τρόπο

$$g(x,t|x_0,t_0) = \int \mathcal{D}x \exp(iS[x(t)]) = \langle x|g(t,t_0)|x_0\rangle = \langle x|e^{-iH(t-t_0)}|x_0\rangle \tag{5.2}$$

όπου $S[x(t)]$ είναι η δράση (action), το ολοκλήρωμα διαδρομών γίνεται σε όλες τις δυνατές διαδρομές $x(t)$, ο τελεστής $g(t,t_0) = e^{-iH(t-t_0)}$ είναι ο διαδότης σε μορφή τελεστή στον χώρο Hilbert και $|x\rangle$ είναι η ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στη θέση x και τέτοια ώστε $\langle x|y\rangle = \delta(x-y)$.

Η διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από τον διαδότη και συνεπάγεται την εξίσωση του Schrödinger είναι

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H)g(t,t_0) = 0 \tag{5.3}$$

Για τις ερωτήσεις τύπου ΚΦΖ, μας ενδιαφέρει ο *περιοριστικός διαδότης* (restricted propagator) που συμβολίζουμε με τον δείκτη r δηλαδή $g_r(t,t_0)$. Ο περιοριστικός διαδότης, δίνει την χρονική εξέλιξη ενός συστήματος, όταν είναι περιορισμένο σε μια συγκεκριμένη περιοχή (Δ). Εκφράζεται με το ίδιο ολοκλήρωμα διαδρομών με τον διαδότη, με τη σημαντική διαφορά ότι οι διαδρομές $x(t)$ που αθροίζουμε είναι διαδρομές που το x σε όλες τις χρονικές στιγμές βρίσκεται εντός της περιοχής (Δ) κατά το χρονικό διάστημα (t,t_0).

$$g_r(x,t|x_0,t_0) = \int_{x(t)\in\Delta} \mathcal{D}x \exp(iS[x(t)]) \tag{5.4}$$

Ορίζουμε τον προβολικό τελεστή

$$P = \int_{\Delta} |x\rangle\langle x| dx \tag{5.5}$$

που προβάλει στην περιοχή Δ. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί ο περιοριστικός διαδότης είναι

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - H)g_r(t,t_0) = [P,H]g_r(t,t_0) \tag{5.6}$$

όπου $[P,H] = PH - HP$ είναι ο μεταθέτης. Βλέπουμε ότι εάν η Χαμιλτονιανή μετατίθεται με τον προβολικό τελεστή της περιοχής που μας ενδιαφέρει τότε ο περιοριστικός διαδότης είναι ίδιος με τον πλήρη διαδότη. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε το ΚΦΖ σε δύο διαστάσεις. Το να μετατίθεται η Χαμιλτονιανή με την αρχική κατάσταση (στην οποία προβάλαμε συνεχώς κατά το διάστημα t) ήταν το ίδιο με το να είναι ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής η αρχική μας κατάσταση.

Ο περιοριστικός διαδότης ορίζεται

$$g_r(t,t_0) = \lim_{\delta t\to 0} Pe^{-iH(t_n - t_{n-1})}P\cdots Pe^{-iH(t_1-t_0)}P \tag{5.7}$$

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση από την εργασία [113], είναι ότι ο περιοριστικός διαδότης μπορεί να γραφεί και με τον παρακάτω τρόπο

$$g_r(t,t_0) = P\exp(-i(t-t_0)PHP)P \tag{5.8}$$

Βλέπουμε ότι ο περιοριστικός διαδότης (5.8) είναι ίδιος με τον πλήρη διαδότη, με την διαφορά ότι έχει Χαμιλτονιανή PHP αντί για H και ότι δρα μόνο στον υποχώρο Hilbert που ορίζει ο προβολικός τελεστής P. Το παραπάνω μπορούμε να το δούμε εάν πολλαπλασιάσουμε με P την εξίσωση (5.6) και καταλήγουμε στην εξίσωση (5.3) με PHP αντί για H. Μια τεχνική λεπτομέρεια είναι ότι ο τελεστής PHP πρέπει να είναι αυτοσυζυγής στον υποχώρο έτσι ώστε να μπορούμε να πούμε ότι ο τελεστής PHP είναι η περιορισμένη Χαμιλτονιανή (βλ [113]).

5.2.2 Πιθανότητες και συνθήκη συνέπειας

Μπορούμε τώρα να δούμε τι υποψήφιες πιθανότητες και τι συνθήκες συνέπειας προκύπτουν. Ορίζουμε $\bar{P}$ τον τελεστή προβολής για την περιοχή $\bar{\Delta}$. Όπως έχουμε ήδη πει, υποθέτουμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε αρχική κατάσταση $|\psi\rangle$ που βρίσκεται πλήρως στο διάστημα $\bar{\Delta}$, δηλαδή

$$\bar{P}|\psi\rangle = |\psi\rangle. \tag{5.9}$$

Ο τελεστής τάξης $C_{\bar{\Delta}}$, που αντιστοιχεί στην "άρνηση" της ερώτησης του χρόνου άφιξης (θα την συμβολίζουμε με $\bar{\alpha}$), είναι ένας τελεστής που ελέγχει εάν το σύστημα παρέμεινε συνεχώς καθόλο το χρονικό διάστημα που μελετάμε στην περιοχή $\bar{\Delta}$

$$C_{\bar{\Delta}} = g_r(t,t_0) = \lim_{\delta t \to 0} \bar{P}e^{-iH(t_n-t_{n-1})}\bar{P}\cdots\bar{P}e^{-iH(t_1-t_0)}\bar{P} \tag{5.10}$$

Από την (3.8) ο τελεστής τάξης C_{Δ} για την ερώτηση χρόνου άφιξης (που θα συμβολίζουμε με α) δίνεται από

$$C_{\Delta} = e^{-iH(t-t_0)} - g_r(t,t_0) \tag{5.11}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} D(\bar{\alpha},\bar{\alpha}) &= \mathrm{Tr}(C_{\bar{\Delta}}|\psi\rangle\langle\psi|C_{\bar{\Delta}}^{\dagger}) \\ &= \langle\psi|g_r^{\dagger}(t,t_0)g_r(t,t_0)|\psi\rangle \end{aligned} \tag{5.12}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.8) και εφόσον η περιορισμένη Χαμιλτονιανή PHP είναι αυτοσυζυγής, έχουμε ότι

$$g_r^{\dagger}(t,t_0)g_r(t,t_0) = \bar{P} \tag{5.13}$$

που είναι και ο μοναδιαίος τελεστής στον υποχώρο που ορίζεται από τον προβολικό τελεστή $\bar{P}$. Οπότε η (5.12) γίνεται

$$D(\bar{\alpha},\bar{\alpha}) = \langle\psi|\bar{P}|\psi\rangle = 1 \tag{5.14}$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν η συνθήκη συνέπειας ικανοποιείται, το σύστημα δεν θα φτάσει ποτέ στο διάστημα Δ. Η σημαντικότητα αυτής της παρατήρησης είναι ακόμα μεγαλύτερη διότι ακόμα και εάν είχαμε λάβει υπόψιν πιθανό περιβάλλον και τη συσκευή μέτρησης, η υποψήφια πιθανότητα να μην φτάσει ποτέ στο διάστημα Δ θα είναι πάλι μονάδα. Θα σχολιάσουμε περισσότερο αυτό το φαινομενικό παράδοξο αργότερα.

Επιστρέφουμε τώρα στη συνθήκη συνέπειας. Δίνεται από την εξής έκφραση

$$\begin{aligned} D(\bar{\alpha},\alpha) &= \mathrm{Tr}(C_{\bar{\Delta}}|\psi\rangle\langle\psi|C_{\Delta}^{\dagger}) = 0 \\ D(\bar{\alpha},\alpha) &= \langle\psi|e^{iH(t-t_0)}g_r(t,t_0)|\psi\rangle - \langle\psi|g_r^{\dagger}(t,t_0)g_r(t,t_0)|\psi\rangle \\ 1 &= \langle\psi|e^{iH(t-t_0)}g_r(t,t_0)|\psi\rangle \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ξέρουμε ότι

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle \tag{5.16}$$

και ορίζουμε την περιορισμένη εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης

$$|\psi(t)\rangle_r = g_r(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = \bar{P}e^{-i\bar{P}H\bar{P}}\bar{P}|\psi\rangle \tag{5.17}$$

Η συνθήκη (5.15) μας λέει ότι η πλήρης και η περιορισμένη εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης την χρονική στιγμή t έχουν επικάλυψη μονάδα

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle_r = 1 \tag{5.18}$$

Η παραπάνω συνθήκη είναι πολύ περιοριστική. Εξαρτάται από την Χαμιλτονιανή, το διάστημα Δ και $\bar{\Delta}$, την αρχική κατάσταση $|\psi\rangle$, καθώς και το χρονικό διάστημα t. Ενδιαφέρον παρουσιάζει, ότι ακόμα και για αρχικές συνθήκες που είναι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας, η παραπάνω συνθήκη δεν ικανοποιείται για όλες τις αρχικές συνθήκες και διαστήματα Δ. Συγκεκριμένα απαιτείται η κυματοσυνάρτηση/ενεργειακή ιδιοκατάσταση να είναι μηδενική στο όριο της περιοχής Δ. Συγκεκριμένα κατασκευασμένα παραδείγματα που ικανοποιείται αυτή η συνθήκη μπορούν να βρεθούν στο [113].

Στις περιπτώσεις που η συνθήκη (5.18) ικανοποιείται, η πιθανότητα να μην βρεθεί ποτέ στο διάστημα Δ κατά την χρονική περίοδο t είναι μονάδα όπως βλέπουμε από την (5.14) και επομένως η πιθανότητα να βρεθεί στο Δ είναι μηδενική. Επειδή όμως στις περισσότερες περιπτώσεις που θέτουμε το ερώτημα του χρόνου άφιξης η απάντηση είναι ότι το σωμάτιο έχει κάποια μη-μηδενική πιθανότητα να φτάσει, υποθέτουμε ότι πράγματι η συνθήκη (5.18) είναι ιδιαιτέρως περιοριστική και για αυτό οι παραπάνω υποψήφιες πιθανότητες δεν είναι κανονικές πιθανότητες σε αυτές τις περιπτώσεις.

5.3 Συμπεράσματα και άλλες προσεγγίσεις

Είδαμε ότι το πρόβλημα του χρόνου άφιξης μπορεί να εφραστεί με τρόπο παρόμοιο με το ΚΦΖ. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι είναι δυνατό να κατασκευάσει κανείς διαφορετικούς τελεστές τάξης που αντιστοιχούν στην ίδια φυσική ερώτηση όπως στην προκειμένη περίπτωση ο χρόνος άφιξης. Εφόσον πράγματι αντιστοιχούν στην ίδια φυσική ερώτηση, ο κάθε τελεστής τάξης εάν πληροί την συνθήκη συνέπειας, πρέπει να δίνει ίδιες υποψήφιες πιθανότητες. Εάν ένας τελεστής τάξης που αντιστοιχεί σε μία φυσική ερώτηση δεν πληροί την συνθήκη συνέπειας, μπορεί να σημαίνει ότι (α) αυτή την ερώτηση δεν μπορούμε να την απαντήσουμε ή (β) ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιον άλλο τελεστή τάξης. Πιο συγκεκριμένα, οι υποψήφιες πιθανότητες τελεστών τάξης που αντιστοιχούν στην ίδια φυσική ερώτηση, δεν χρειάζεται να είναι ίδιες εάν δεν ικανοποιούν την συνθήκη συνέπειας[1].

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα χρόνου άφιξης, παραπάνω είδαμε έναν συγκεκριμένο τρόπο να ορίσουμε τον τελεστή τάξης του χρόνου άφιξης που σχετίζεται άμεσα με το ΚΦΖ. Η υποψήφια πιθανότητα για να μην φτάσει ποτέ το σωμάτιο είναι μονάδα, και το σημαντικότερο είναι ότι δεν εξαρτάται από τις λεπτομέρειες του συστήματος, περιβάλλοντος, συσκευής μέτρησης, Χαμιλτονιανής ή χρονικού διαστήματος. Η εξίσωση (5.14) ισχύει πάντα λόγω της (5.8) που σημαίνει ότι ο περιοριστικός διαδότης είναι η μοναδιαία εξέλιξη στον υποχώρο που ορίζεται από τον $P_{\bar{\Delta}}$. Αυτό είναι αναπάντεχο, διότι φυσικά υπάρχουν πολλά συστήματα που θα περιμέναμε να έχουν πεπερασμένο χρόνο άφιξης. Η λύση αυτού του φαινομενικού παράδοξου έχει δύο σκέλη.

Πρώτον, οι υποψήφιες πιθανότητες έχουν σημασία μόνο όταν πληρούν την συνθήκη συνέπειας, που στην περίπτωσή μας δίνεται από την (5.18). Κανείς μπορεί να δει συγκεκριμένα σε περιπτώσεις στις οποίες θα περιμέναμε να φτάσει το σωμάτιο εντός του χρονικού διαστήματος που μελετάμε, η συνθήκη (5.18) δεν ικανοποιείται. Και πάλι όμως, μπορεί να αποφύγαμε την αντίφαση, αλλά δεν είπαμε πώς θα απαντούσαμε θετικά σε μία ερώτηση χρόνου άφιξης.

Δεύτερον, όπως τονίσαμε παραπάνω, υπάρχουν πολλοί τρόποι να ορίσουμε τελεστές τάξης που αντιστοιχούν στην ίδια φυσική ερώτηση. Επομένως, όταν η συνθήκη συνέπειας δεν ικανοποιείται πρέπει να αναζητήσουμε εναλλακτικούς τρόπους να ορίσουμε τελεστή τάξης. Θα δώσουμε παρακάτω ένα παράδειγμα που θα περιμέναμε με πιθανότητα μονάδα να έχει φτάσει στη περιοχή Δ και πώς θα περιγράψουμε έναν εναλλακτικό τρόπο να ορίσουμε τελεστή τάξης για αυτό το παράδειγμα.

Έστω ελεύθερο σωμάτιο σε μία χωρική διάσταση με μάζα $m = 1$ και Χαμιλ-

[1]Μόνο όταν πληροί την συνθήκη συνέπειας η υποψήφια πιθανότητα ενός τελεστή τάξης έχει την οποιοδήποτε φυσική σημασία.

τονιανή

$$H = -1/2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{5.19}$$

και αρχική κυματοσυνάρτηση εντοπισμένη γύρω από το σημείο $x_0 = -4$ και με μέση ορμή $\bar{p} = +4$ που δίνεται ως εξής

$$\psi(x, t_0) = A \exp(i4x - (x+4)^2) \tag{5.20}$$

όπου A σταθερά κανονικοποίησης και έχουμε θέσει $\hbar = 1$. Δηλαδή, το σωμάτιο ξεκινάει από το σημείο -4 (τυπική απόκλιση $1/\sqrt{2}$) και κινείται με μέση ταχύτητα 4 (τυπική απόκλιση $\sqrt{2}$).

Αυτή η κυματοσυνάρτηση επομένως περιμένουμε να διασχίσει το σημείο 0 σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Έστω ότι $\Delta = (0, \infty)$ και άρα $\bar{\Delta} = (-\infty, 0]$ και μελετάμε για ένα χρονικό διάστημα $[t_f, t_0]$. Η συνθήκη συνέπειας δεν ικανοποιείται. Ο περιοριστικός διαδότης, περιορίζει την κίνηση στην ίδια περιοχή $\bar{\Delta}$ σε κάθε στιγμή t. Αντί για αυτό, θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε ποια η πιθανότητα να παραμένει σε ένα διάστημα που αλλάζει ανά χρονική στιγμή. Παραδείγματος χάριν, θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε ποια η πιθανότητα να παραμένει σε ένα διάστημα με κέντρο την αναμενόμενη μέση θέση σε κάθε χρονική στιγμή, $\bar{\Delta}_1(t) = [-8 + 4t, 0 + 4t]$. Εάν λοιπόν κατασκευάζαμε έναν τελεστή τάξης που αντιστοιχεί σε αυτό το διάστημα, θα βλέπαμε ότι έχει υποψήφια πιθανότητα μονάδα και ότι ικανοποιεί την συνθήκη συνέπειας. Όμως αυτός ο τελεστής τάξης συνεπάγεται ότι π.χ. την χρονική στιγμή $t = 5$ το σύστημα βρίσκεται στο διάστημα $[12, 20]$ με πιθανότητα ένα, και επομένως η αρχική ερώτηση άφιξης έχει απαντηθεί θετικά.

Στο παραπάνω παράδειγμα, βρήκαμε τον κατάλληλο τελεστή τάξης διότι ξέραμε την (ήμι-)κλασική απάντηση, ενώ στην γενικότερη περίπτωση αυτό δεν είναι δυνατόν. Όμως αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι μπορεί κανείς να ορίσει αλλιώς τον τελεστή τάξης και να πάρει την σωστή απάντηση ακόμα όταν ο πιο απλός τελεστής τάξης αποδειχτεί ανεπαρκής (λόγω μη-συνέπειας).

Υπάρχουν φυσικά και άλλοι συστηματικοί τρόποι να κατασκευάσει κανείς τελεστές τάξης για το πρόβλημα χρόνου άφιξης. Μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει αντί για προβολικούς τελεστές τους πιο ήπιους POVM (Positive Operator Valued Measure), μπορεί κανείς να μην ελέγχει κάθε χρονική στιγμή δηλαδή να μην παίρνει το όριο $\delta t \to 0$ είτε να χρησιμοποιήσει ένα μιγαδικό δυναμικό [115, 116, 117, 118]. Αυτά όμως ξεφεύγουν από το θέμα της παρούσης εργασίας.

6

Σύνοψη - Συμπεράσματα - Προοπτικές

Σε αυτήν την εργασία πρώτα μελετήσαμε το ΚΦΖ. Είδαμε ότι ο λόγος που παρουσιάζεται είναι ότι η πιθανότητα ένα κβαντικό σύστημα να φύγει από την αρχική κατάσταση μετά από χρονικό διάστημα δt είναι ανάλογο του $(\delta t)^2$ και επομένως στο όριο συνεχών μετρήσεων, το κβαντικό σύστημα παραμένει στην αρχική του κατάσταση. Η λογική εξήγηση είναι ότι η διαδικασία της μέτρησης ενός κβαντικού συστήματος επηρεάζει το σύστημα. Επόμενο είναι ότι θα είχε ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς τι γίνεται σε θεμελιώσεις της ΚΘ που δεν έχουν κάποιον εξωτερικό παρατηρητή. Για αυτό μελετήσαμε την προσέγγιση των συνεπών ιστοριών. Εισαγάγαμε τον φορμαλισμό και δώσαμε κάποιο γενικό πλαίσιο γιατί μια τέτοια θεμελίωση μπορεί να είναι χρήσιμη. Για να απαντήσει κανείς μια ερώτηση στις ΣΙ πρέπει να ορίσει καταλλήλως τους αντίστοιχους τελεστές τάξης. Μετά τα διαγώνια στοιχεία του συναρτησιακού αποσυσχέτισης (ΣΑ) δίνουν τις υποψήφιες πιθανότητες, ενώ τα μη-διαγώνια στοιχεία πρέπει να είναι μηδενικά (συνθήκη συνέπειας) έτσι ώστε οι υποψήφιες πιθανότητες να μπορούν να ερμηνευτούν σαν κανονικές πιθανότητες. Στην περίπτωση του ΚΦΖ έχουμε υποψήφια πιθανότητα για να μην εξελιχθεί το σύστημα, μονάδα, ανεξαρτήτως περιβάλλοντος και συσκευών μέτρησης. Εάν ήταν κανονικές πιθανότητες θα ήταν απροσδόκητο αποτέλεσμα. Όμως είδαμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η συνθήκη συνέπειας δεν ικανοποιείται.

Στην συνέχεια μελετήσαμε το πρόβλημα του χρόνου άφιξης. Η ερώτηση σε αυτή την περίπτωση είναι ποια η πιθανότητα ένα σωμάτιο να φτάσει σε ένα συγκεκριμένο μέρος (περιοχή Δ) σε οποιαδήποτε στιγμή εντός ενός χρονικού διαστήματος t. Ένας τρόπος να απαντήσουμε αυτή την ερώτηση είναι με το να κατασκευάσουμε έναν τελεστή για την "άρνηση" αυτής της ερώτησης, δηλαδή για την πιθανότητα να μείνει πάντα στην περιοχή $\bar{\Delta}$. Η τελευταία ερώτηση όμως είναι ίδια με του ΚΦΖ με την διαφορά ότι ο υποχώρος που προβάλλουμε είναι τώρα απείρων διαστάσεων σε αντίθεση με την μία διάσταση στο ΚΦΖ που μελετήσαμε νωρίτερα. Με λίγη περισσότερη προσοχή, κανείς μπορεί να καταλήξει στα ίδια (σχεδόν) συμπεράσματα. Ο υπολογισμός του ΚΦΖ που κάναμε νωρίτερα έχει μια σημαντική συνέπεια και ένα φαινομενικό παράδοξο. Καταλήγουμε ότι η υποψήφια πιθανότητα να μην φτάσει ποτέ στο Δ είναι μονάδα. Αυτό είναι κάτι που εμφανώς συγκρούεται με την εμπειρία μας. Η εξήγηση δίνεται, διότι στις περιπτώσεις που το σύστημα θα έφτανε στο Δ η συνθήκη συνέπειας δεν ικανοποιείται και οι υπολογισμένες υποψήφιες πιθανότητες δεν ερμηνεύονται ως πιθανότητες. Τέλος για να απαντήσουμε θετικά την ερώτηση του χρόνου άφιξης (στις περιπτώσεις που οφείλουμε να την απαντήσουμε θετικά) με τις ΣΙ βλέπουμε ότι χρειάζεται να ορίσουμε τον τελεστή τάξης με κάποιον άλλο τρόπο. Για να εξηγήσουμε καλύτερα το παραπάνω δώσαμε ένα απλό παράδειγμα.

Ενδιαφέρον για περαιτέρω διερεύνηση έχει (α) η μελέτη γενικότερου φορμαλισμού, ο οποίος θα παράγει τελεστή τάξης που θα απαντάει την ερώτηση του χρόνου άφιξης σε όλες τις περιπτώσεις ημικλασικής συμπεριφοράς, (β) η μελέτη της συνέπειας των παραπάνω παρατηρήσεων σε α-χρονικά συστήματα όπως στην κβαντική κοσμολογία και βαρύτητα και (γ) η ανάλυση του γεγονότος ότι υπάρχουν πολλοί τελεστές τάξης για την ίδια ερώτηση σε σχέση με την ερμηνεία της προσέγγισης των συνεπών ιστοριών και την δυνατότητα να δώσουν σαφείς προβλέψεις.

Βιβλιογραφία

[1] http://en.wikiquote.org/wiki/Niels_Bohr

[2] Isham C J 1993 in *Integrable Systems, Quantum Groups, and Quantum Field Theories*, edited by L. A. Ibort and M. A. Rodrguez (Kluwer Academic Publishers, London)

[3] Barbour J 1999 *The End of Time* (London: Weidenfeld and Nicolson; New York: Oxford University Press)

[4] Hartle J and Hawking S W 1983 *Phys. Rev. D 28 2960*

[5] Bohm D 1952 *Phys Rev 85 166-179*

[6] Bohm D and Hiley B 1993 *The undivided universe: An ontological interpretation of quantum theory (Routledge, New York)*

[7] Bell J S 1964 *Physics 1 195–200*

[8] Ghirardi G C, Rimini A and Weber T 1986 *Phys Rev D 34 470*

[9] Dirac P A 1933 *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion 3 64*

[10] Feynman R P 1948 *Rev Mod Phys 20 367*

[11] Griffiths R B 1984 *J Stat Phys 36 219*

[12] Omnès R 1988 *J Stat Phys 53 893*

[13] Gell-Mann M and Hartle J 1990 in *Complexity, Entropy and the Physics of Information, SFI Studies in the Science of Complexity, Vol. VIII*, edited by W. Zurek, (Addison-Wesley, Reading).

[14] Gell-Mann M and Hartle J 1993 *Phys Rev D 47 3345*

[15] Sorkin R D 2007 *J Phys: Conf Ser 67 012018*

[16] Sorkin R D 2007 *J Phys A 40 3207*

[17] Wallden P 2013 *J Phys: Conf Ser 442 012044*

[18] Kirk, R. S., Raven, J. E., and Schofield, M. (επιμ.), *Οι Προσωκρατικοί Φιλόσοφοι, Αθήνα: ΜΙΕΤ, σ. 271-287.*

[19] Misra B and Sudarshan E C G 1977 *J. Math. Phys. 18 756*

[20] Pascazio S and Namiki M 1994 *Phys. Rev. A 50 4582*

[21] Block E and Berman P R 1991 *Phys. Rev. A 44 1466*

[22] Home D and Whitaker M A B 1992 *J. Phys. A 25 657*

[23] von Neumann J 1932 *Die Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlin) [English translation by E. T. Beyer E T 1955 *Mathematical Foundation of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton)]. For the QZE, see in particular p. 195 of the German edition (p. 366 of the English translation).

[24] Beskow A and Nilsson J 1967 *Arkiv f¨ur Fysik 34 561*

[25] Khalfin L A 1968 Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis. Red. 8 106 [1968 JETP Letters 8 65]

[26] Khalfin L A 1957 Dokl. Acad. Nauk USSR 115 277 [1957 Sov. Phys. Dokl. 2 340]

[27] Khalfin L A 1958 Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33 1371 [1958 Sov. Phys. JET 6 1053]

[28] Friedman C N 1972 *Indiana Univ. Math. J. 21 1001*

[29] Kofman A G and Kurizki G 2000 *Nature 405 546*

[30] Cook R J 1988 *Phys. Scr. T 21 49*

[31] Itano W M, Heinzen D J, Bollinger JJ and Wineland D J 1990 *Phys. Rev. A 41 2295*

[32] Petrosky T, Tasaki S and Prigogine I 1990 *Phys. Lett. A 151 109*

[33] Peres A and Ron A 1990 *Phys. Rev. A 42 5720*

[34] Itano W M, Heinzen D J, Bollinger JJ and Wineland D J 1991 *Phys. Rev. A 43 5168*

[35] Petrosky T, Tasaki S and Prigogine I 1991 *Physica A 170 306*

[36] Inagaki S, Namiki M and Tajiri T 1992 *Phys. Lett. A 166 5*

[37] Frerichs V and Schenzle A 1992 in: *Foundations of Quantum Mechanics*, eds T.D. Black, M.M. Nieto, H.S. Pillo□, M.O. Scully and R.M. Sinclair (World Scientific, Singapore)

[38] Pascazio S, Namiki M, Badurek G and Rauch H 1993 *Phys. Lett. A 179 155*

[39] Altenm¨uller T P and Schenzle A 1994 *Phys. Rev. A 49 2016*

[40] Pascazio S and Namiki M 1994 *Phys. Rev. A 50 4582*

[41] Schulman L S, Ranfagni A and Mugnai D 1994 *Phys. Scr. 49 536*

[42] Berry M 1995 in: *Fundamental Problems in Quantum Theory*, eds Greenberger D M and Zeilinger A (Ann. N.Y. Acad. Sci. Vol. 755, New York) p. 303

[43] Beige A and Hegerfeldt G 1996 *Phys. Rev. A 53 53*

[44] Kofman A G and Kurizki G 1996 *Phys. Rev. A 54 R3750*

[45] Schulman L S 1997 *J. Phys. A 30 L293*

[46] Mihokova E, Pascazio S and Schulman L S 1997 *Phys. Rev. A 56 25*

[47] Schulman L S 1998 *Phys. Rev. A 57 1509*

[48] Luis A and Periˇna J 1996 *Phys. Rev. Lett. 76 4340*

[49] Facchi P, Klein A G, Pascazio S and Schulman L S 1999 *Phys. Lett. A 257 232*

[50] Home D and Whitaker M A B 1998 *Phys. Lett. A 239 6*

[51] Whitaker M A B 2000 *Progr. Q. Electr. 24 1*

[52] Kwiat R, Weinfurter H, Herzog T, Zeilinger A, and Kasevich M 1995 *Phys. Rev. Lett. 74 4763*

[53] Nagels B, Hermans L J F and Chapovsky P L 1997 *Phys. Rev. Lett. 79 3097*

[54] Balzer C, Huesmann R, Neuhauser W and Toschek P E 2000 *Opt. Comm. 180 115*

[55] Toschek P E and Wunderlich C 2001 *Eur. Phys. J. D 14 387*

[56] Wunderlich C, Balzer C and Toschek P E 2001 *Z. Naturforsch. 56a 160*

[57] Balzer C, Hannemann T, Reib D, Wunderlich C, Neuhauser W and Toschek P E 2002 *Opt.Commun. 211 235*

[58] Mølhave K and Drewsen M 2000 *Phys. Lett. A 268 45*

[59] Xiao L and Jones J A 2006 *Physics Letters A 359 424*

[60] Streed E W, Mun J, Boyd M, Campbell G K, Medley P, Ketterle W and Pritchard D E 2006 *Phys. Rev. Lett. 97 260402*

[61] Jericha E, Schwab D E, J¨akel M R, Carlile C J and Rauch H 2000 *Physica B 283 414*

[62] Rauch H 2001 *Physica B 297 299*

[63] Johansson G private communication

[64] Vion D private communication

[65] Miglietta F, Rimini A 1984 *Phys. Lett. B 139 353*

[66] Bernardini C, Maiani L and Testa M 1993 *Phys. Rev. Lett. 71 2687*

[67] Facchi P and Pascazio S 1998 *Phys. Lett. A 241 139*

[68] Maiani L and Testa M 1998 *Ann. Phys. (NY) 263 353*

[69] Joichi I, Matsumoto Sh and Yoshimura M 1998 *Phys. Rev. D 58 045004*

[70] Facchi P and Pascazio S 1999 *Physica A 271 133*

[71] Alvarez-Estrada R F and S´anchez-G´omez J L 1999 *Phys. Lett. A 253 252*

[72] Wilkinson S R, Bharucha C F, Fischer M C, Madison K W, Morrow P R, Niu Q, Sundaram B and Raizen M G 1997 *Nature 387 575*

[73] Fischer M C, Guti´errez-Medina B and Raizen M G 2001 *Phys. Rev. Lett. 87 040402*

[74] Nagels B, Hermans L J F and Chapovsky P L 1997 *Phys. Rev. Lett. 79 3097*

[75] Nakanishi T, Yamane K and Kitano M 2001 *Phys. Rev. A 65 013404*

[76] Facchi P, Hradil Z, Krenn G, Pascazio S and Rehacek J 2002 *Phys. Rev. A 66 012110*

[77] Franson J D , Jacobs B C and Pittman T B 2004 *Phys. Rev. A 70 062302*

[78] Facchi P, Tasaki S, Pascazio S, Nakazato H, Tokuse A and Lidar D A 2005 *Phys. Rev. A 71 022302*

[79] Sasaki M, Hasegawa A, Ishi-Hayase J, Mitsumori Y and Minami F 2005 *Phys. Rev. B 71 165314*

[80] Hosten O, Rakher M T, Barreiro J T, Peters N A and Kwiat G R 2006 *Nature 439 949*

[81] Blanchard Ph and Jadczyk A 1993, *Phys. Lett. A 183 272*

[82] Cirac J I, Schenzle A and Zoller P 1994 *Europhys. Lett. 27 123*

[83] Zhu S -Y, Narducci L M and Scully M O 1995 *Phys. Rev. A 52 4791*

[84] Beige A and Hegerfeldt G 1996 *Phys. Rev. A 53 53*

[85] Huang H, Zhu S -Y, Zubairy M S and Scully M O 1996*Phys. Rev. A 53 1834*

[86] Zhu S -Y and Scully M O 1996 *Phys. Rev. Lett. 76 388*

[87] Facchi P, Klein A G, Pascazio S and Schulman L S 1999 *Phys. Lett. A 257 232*

[88] Facchi P, Nakazato H, Pascazio S, Peˇrina J and Reh´aˇcek J 2001, ˇ *Phys. Lett. A 279 117*

[89] Militello M, Messina A and Napoli A 2001 *Phys. Lett. A 286 369*

[90] Militello B, Messina A and Napoli A 2001 *Fortschr. Phys. 49 1041*

[91] Koshino K and Shimizu A 2005 *Phys. Rep. 412 191*

[92] Alvarez G A, Danieli E P, Levstein P R and Pastawski H M 2006 ´ *J. Chem. Phys. 124 194507*

[93] Delgado F, Muga J G, and Garc´ıa-Calder´on G 2006 *Phys. Rev. A 74 062102*

[94] Maniscalco S, Piilo J and Suominen K-A 2006 *Phys. Rev. Lett. 97 130402*

[95] Longhi S 2006 *Phys. Rev. Lett. 97 110402*

[96] Tian L 2007 *Phys. Rev. Lett. 98 153602*

[97] Gordon G, Erez N and Kurizki G 2007 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 40 S75*

[98] Maniscalco S, Francica F, Zaffino R L, Lo Gullo N and Plastina F 2008 *Phys. Rev. Lett. 100 090503*

[99] J. J. Halliwell 1995 *Annals N.Y. Acad. Sci. 755: 726-740*

[100] R. D. Sorkin, Mod. Phys. Lett. A **9**, 3119 (1994).

[101] R. D. Sorkin, *Quantum Classical Correspondence: Proceedings of the 4th Drexel Symposium on Quantum Nonintegrability*, Philadelphia, September 8-11, 1994, pages 229-251, (International Press, Cambridge Mass. 1997) D.H. Feng and B-L Hu, editors. [arXiv:gr-qc/9507057].

[102] U. Sinha, C. Couteau, T. Jennewein, R. Laflamme and G. Weihs 2010 *Science 329 418*

[103] L. Diosi, *Phys. Rev. Lett. 92, 170401 (2004)*

[104] J.J. Halliwell 1999 *Phys. Rev. D60 105031*

[105] F. Dowker and A. Kent, *Phys. Rev. Lett.* **75**, *3038 (1995)*

[106] F. Dowker and A. Kent, *J. Statist. Phys.* **82**, *1575 (1996)*

[107] A. Kent, *Phys. Rev. Lett.* ***78**, 2874 (1997)*

[108] P. Wallden 2014 *arXiv:1402.3733*

[109] Isham C 1997 *Int. J. Theor. Phys. 36 785-814*

[110] Wallden P 2007 *J Phys: Conf Ser 67 012043*

[111] Griffiths D 2005 *Introduction to Quantum Mechanics* (2nd ed) Pearson Education Limited, Essex p.343

[112] Halliwell J J and Wallden P 2006 *Phys Rev D 45 2350*

[113] Wallden P 2008 *Int J Theor Phys 47 1512*

[114] Christodoulakis T and Wallden P 2011 *J Phys: Conf Ser 283 012041*

[115] Halliwell J J and Yearsley J 2012 *Phys Rev D 86 024016*

[116] Yearsley J 2011 *PhD thesis arxiv:1110.5790*

[117] Anastopoulos C and Savvidou N 2006 *J Math Phys 47 122106*

[118] Anastopoulos C and Savvidou N 2012 *Phys Rev A 86 012111*