ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

Διπλωματική εργασία με θέμα:

Βελτιστοποίηση ασύμμετρων οδοντωτών τροχών προς αντικατάσταση των κλασικών συμμετρικών.

Ιωάννης Κίτσος

Επιβλέπων: Λέκτορας Β. Σπιτάς

Αθήνα 2014

Ευχαριστίες

Η διπλωματική εργασία αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι, αν όχι το σημαντικότερο, κατά την διάρκεια των σπουδών στην σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών. Η βοήθεια που δέχεται κανείς κατά την εκπόνηση της διπλωματικής του εργασίας δεν περιορίζεται μόνο τις τεχνικές γνώσεις και πληροφορίες που δέχεται από τον επιβλέποντα ή ανταλλάσει με τους συνεργάτες του, αλλά συμπεριλαμβάνει ποικίλες άλλες ενέργειες που δέχεται από συγγενείς και φίλους από την αρχή μέχρι και την παρουσίαση της εργασίας, όπως για παράδειγμα μια βόλτα με καλή παρέα στο τέλος μιας κουραστικής μέρας.

Για αρχή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή και επιβλέποντα της εργασίας μου Δρ. Β. Σπιτά, για την υπομονή, την εμπιστοσύνη και τη συνεχή καθοδήγηση καθ’ όλη την διάρκεια της εργασίας μου καθώς και για τις γνώσεις που μου μετέδωσε και εξακολουθεί να μοιράζεται απλόχερα.

Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και συναδέλφους μου που δουλέψαμε μαζί στο Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών και περάσαμε μαζί πολλές στιγμές είτε εργασίας, είτε ανεμελιάς. Ονομαστικά θα ήθελα να ευχαριστώ τον συνεργάτη μου Ιωάννη Κανελλόπουλο με τον οποίο ανταλλάξαμε πολύτιμες πληροφορίες καθ’ όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας και σχετικά με τα θέματα του καθενός μας, αλλά και γενικότερα γύρω από το αντικείμενο σπουδών του Μηχανολόγου Μηχανικού.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τους στενούς μου φίλους, η βοήθεια των οποίων δεν θα μπορούσε να είναι τεχνικής φύσης, ωστόσο ήταν καταλυτικής σημασίας, καθώς ήταν δίπλα μου και με υποστήριζαν από την αρχή μέχρι το τέλος της εργασίας μου με οποιονδήποτε δυνατό τρόπο.

Περιεχόμενα

1. Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται προσπάθεια ορισμού μίας βελτιστοποιημένης κατατομής με την οποία θα μπορεί να αντικατασταθεί η μη-εργαζόμενη κατατομή του οδόντα ενός κλασσικού συμμετρικού οδοντωτού τροχού βελτιώνοντας τις μηχανικές ιδιότητες του οδόντα, κρατώντας την εργαζόμενη κατατομή ίδια, δημιουργώντας ασύμμετρες οδοντώσεις.

Για την παρούσα μελέτη πρώτα έγινε ανάλυση ευαισθησίας ως προς το πως επηρεάζεται η αντοχή σε σχέση με γεωμετρικές παραμέτρους που ορίζουν την μη-εργαζόμενη κατατομή του οδόντα, όπως το πάχος κεφαλής και η κλίση της κατατομής ως προς τον άξονα του δοντιού.

Στην συνέχεια με τα παραπάνω στοιχεία και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο βασικός νόμος των οδοντώσεων πρέπει να εφαρμόζεται και στην μη-εργαζόμενη κατατομή σε περίπτωση που αυτή χρειαστεί να εργαστεί ορίζεται μια βελτιστοποιημένη κατατομή με την βοήθεια εργαλείων που προσφέρονται από εμπορικά προγράμματα και ελέγχεται κατά πόσο αυτή συμφέρει να αντικαταστήσει την υπάρχουσα μη-εργαζόμενη κατατομή και παρουσιάζονται συγκριτικοί πίνακες.

2. Abstract

In this thesis, an optimized gear tooth profile is attempted to be generated in order to replace the non-working side of a classical symmetric spur gear, improving the mechanical properties of tooth, keeping the working side same as the symmetric gear, resulting to asymmetric gear teeth.

For this study, at first a sensitivity analysis was performed in order to define how strength is being affected from geometrical parameters defining the requested profile on the non-working side of the tooth, such as tip-thickness and slope of the profile with respect to the axis of the tooth.

Next, using the previous data and considering that the basic law of gearing should be obeyed for in the new profile as well, in case it is needed to mesh, an optimized profile is defined with the assistance of tools provided by commercial software. The new profile is validated in its capability of replacing the classical symmetric profile on the non-working side of the tooth and in the end comparison tables are presented.

3. Εισαγωγή

3.1 Γενικά περί Ασύμμετρων Οδοντωτών Τροχών

Η χρήση ασύμμετρων οδοντώσεων κατά την κατασκευή και λειτουργία οδοντωτών τροχών, είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει την βιομηχανία εδώ και μερικές δεκαετίες. Η χρήση τους κυρίως στοχεύει στην αύξηση της μηχανικής αντοχής του οδόντα, αυξάνοντας την διάρκεια ζωής του ή τα φορτία που μπορεί να μεταφέρει κατά τη μετάδοση ισχύος.

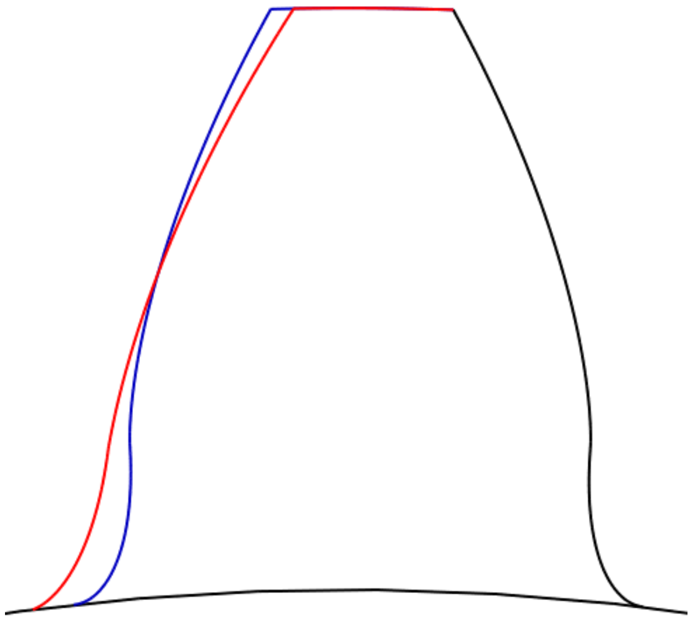
Η έννοια της ασύμμετρης οδόντωσης συνήθως στοχεύει στην αύξηση του πάχους του οδόντα στον πόδα, δηλαδή την περιοχή που στην πλειοψηφία των περιπτώσεων παρατηρείται η μεγαλύτερη συγκέντρωση φορτίων και κατά συνέπεια η αστοχία.

Η αύξηση του πάχους ποδός του οδόντα υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς. Πρώτος περιορισμός είναι ο φυσικός όγκος του οδοντωτού τροχού, δηλαδή δεν μπορεί να αυξηθεί το πάχος περισσότερο από το διάκενο μεταξύ δύο διαδοχικών δοντιών επειδή θα δημιουργηθούν υποκοπές λειτουργίας. Δεύτερος και εξίσου βασικός περιορισμός κατά την αύξηση του πάχους ποδός, είναι πως, αυξάνοντας το πάχος στον πόδα άμεσα συνεπάγεται η μείωση του πάχους κεφαλής και το πάχος κεφαλής δεν μπορεί να μειωθεί περισσότερο από ένα συγκεκριμένο όριο γιατί δημιουργεί περισσότερους τρόπους αστοχίας. Έχει αποδειχθεί πως δόντια με ακμή στην κεφαλή δεν μπορούν να εργαστούν, καθώς είναι πολύ εύθραυστα στην κεφαλή τους και δεν μπορούν να μεταφέρουν φορτία και επίσης συγκεντρώνουν υψηλές τάσεις κατά την λειτουργία τους. Επίσης δόντια με πολύ μικρό πάχος κεφαλής είναι ευαίσθητα σε chipping-σε αυτό το είδος αστοχίας ένα μικρό κομμάτι (chip) της κεφαλής αποκολλάται λόγω εφελκυστικών τάσεων που μεταφέρονται λόγω ισορροπίας ροπών κατά την εργασία του οδοντωτού τροχού.

Στην πλειοψηφία των εφαρμογών οι οδοντωτοί τροχοί στρέφονται μόνο προς μία φορά, και ακόμη και σε ανάγκη αντίστροφης περιστροφής (π.χ. όπισθεν αυτοκινήτου) παρεμβάλλεται ενδιάμεσος τροχός, και οι οδοντωτοί τροχοί συνεχίζουν να στρέφονται στην ίδια φορά, ωστόσο για τη σπάνια περίπτωση που ο οδοντωτός θα πρέπει να εργαστεί σε αντίστροφη φορά περιστροφής, θα πρέπει και οι δύο πλευρές του να υπακούουν στον βασικό νόμο των οδοντώσεων.

3.2 Ασύμμετροι οδοντωτοί τροχοί εξειλιγμένης

Η πιο συνηθισμένη τιμή για την γωνία εξειλιγμένης στους οδοντωτούς τροχούς είναι οι 20°, γι' αυτό το λόγο η πρώτη εναλλακτική λύση που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία ασύμμετρων οδοντώσεων ήταν η αύξηση της γωνίας εξειλιγμένης στην μη-εργαζόμενη κατατομή. Ένας λειτουργικός οδοντωτός τροχός θα μπορούσε για παράδειγμα να έχει γωνία εξειλιγμένης στην εργαζόμενη κατατομή 20° και γωνία εξειλιγμένης στην μη-εργαζόμενη κατατομή 30°. Ένα τέτοιο παράδειγμα εικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3.1: Δόντι οδοντωτού τροχού. Με μαύρο χρώμα φαίνεται η εργαζόμενη κατατομή (υποθέτοντας δεξιόστροφη περιστροφή) με γωνία εξειλιγμένης 20°, με μπλε χρώμα η συμμετρική της εργαζόμενης, μη-εργαζόμενη κατατομή, επίσης με γωνία εξειλιγμένης 20° και με κόκκινο η μη-εργαζόμενη κατατομή όπως προκύπτει με γωνία 30°.

Στο παραπάνω σχήμα είναι εμφανές πως όσο αυξάνεται η γωνία εξειλιγμένης τόσο αυξάνεται το πάχος ποδός και αντίστοιχα μειώνεται το πάχος κεφαλής. Στα θετικά των ασύμμετρων οδόντων αποτελούμενων αποκλειστικά από εξειλιγμένες καμπύλες είναι ότι υπακούουν πάντα στον βασικό νόμο οδοντώσεων, ωστόσο υπάρχουν φυσικοί περιορισμοί κατά την αύξηση της γωνίας εξειλιγμένης. Λόγω της δεδομένης γεωμετρίας της μπορεί να αυξηθεί μέχρι ένα συγκεκριμένο όριο χωρίς να δημιουργήσει υποκοπές λειτουργίας μεταξύ διαδοχικών οδόντων ή αιχμή στην κεφαλή. Το όριο αυτό δεν είναι σταθερό και εξαρτάται από την οδόντωση ανά περίπτωση.

3.3 Ασύμμετροι οδοντωτοί τροχοί μη-εξειλιγμένης

Λόγω των προαναφερθέντων γεωμετρικών περιορισμών στους οποίους υπόκειται η αύξηση γωνίας της εξειλιγμένης, έγινε προσπάθεια να δημιουργηθούν νέες καμπύλες που να μην κατ' ανάγκη είναι εξειλιγμένες. Αυτό είναι ακόμη ένα θέμα που απασχολεί την βιομηχανία καθώς η εξειλιγμένη καμπύλη, παρά τους γεωμετρικούς περιορισμούς που υπάρχουν στην αύξηση της γωνίας της, δεν είναι τυχαία εδώ και δεκαετίες η καμπύλη που χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά σε εφαρμογές μετάδοσης ισχύος μέσω οδοντώσεων.

Σε πολλές από τις μέχρι τώρα μελέτες επιχειρείται τροποποίησης μόνο του τροχοειδούς της μη-εργαζόμενης κατατομής με σκοπό την αύξηση της αντοχής στον πόδα. Τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι πως καθώς το μέρος αυτό της κατατομής ουσιαστικά δεν εργάζεται το ίδιο, ακόμη κι αν εργαστεί η κατατομή, είναι πως δεν χρειάζεται να υπακούει στον βασικό νόμο οδοντώσεων, ωστόσο οι επιλογές περιορίζονται τόσο από το εργαζόμενο κομμάτι της κατατομής (εξειλιγμένη καμπύλη) όσο και από τον κύκλο ποδός που ορίζει το φυσικό όριο του σώματος του τροχού.

Σε διαφορετικές περιπτώσεις έχει επιχειρηθεί να αντικατασταθεί πλήρως η εξειλιγμένη καμπύλη της μη-εργαζόμενης κατατομής με μία διαφορετική καμπύλη και στην συνέχεια να ελέγχονται οι διαφορές στις αναπτυσσόμενες τάσεις και να κρίνεται καλύτερη ή χειρότερη από την κλασσική συμμετρική.

4. Περιγραφή διπλωματικής εργασίας

Στην παρούσα μελέτη σκοπός ήταν η δημιουργία μίας βελτιστοποιημένης γεωμετρίας, ως προς την αντοχή ως βασικό κριτήριο. Η νέα κατατομή θα έπρεπε να υπόκειται σε όλους τους παραπάνω περιορισμούς, δηλαδή να υπακούει τον βασικό νόμο της οδόντωσης, να μην υπερβαίνει τα φυσικά όρια μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων και να μην δημιουργεί αιχμή στην κεφαλή.

Τα φυσικά γεωμετρικά όρια μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων είναι γνωστά και προκύπτουν πολύ εύκολα, οπότε δεν χρειάστηκε επιπλέον ανάλυση σε αυτό το κομμάτι.

Ο βασικός νόμος των οδοντώσεων είτε εφαρμόζεται μεταξύ δύο συνεργαζόμενων κατατομών είτε όχι, δεν υπάρχει ενδιάμεση περίπτωση, οπότε απλά έπρεπε να επιλεγεί κατατομή που να υπακούει στον βασικό νόμο των οδοντώσεων.

Σε ότι αφορά την ακμή στην κεφαλή, ήταν η πρώτη μελέτη που έγινε. Ορίστηκε ένα αρκετά μεγάλο εύρος τιμών ως ποσοστό του module της οδόντωσης και ελέγχθηκαν οι τάσεις που αναπτύσσονταν σε τέσσερις περιοχές του οδόντα που κρίθηκαν κρίσιμες.

Παράλληλα για να οριστούν επιπλέον περιορισμοί για την νέα καμπύλη ορίστηκε το απλούστερο δυνατό μοντέλο για να μετράται η κλίση της καμπύλης ως προς τον άξονα του δοντιού.

Με τα αποτελέσματα σχετικά με την κλίση και το πάχος κεφαλής του δοντιού ορίστηκε ένα σύνολο συνδυασμών-μια περιοχή τιμών- που τα αποτελέσματα ήταν επιθυμητά και μέσα σε αυτήν την περιοχή αναζητήθηκε η βελτιστοποιημένη καμπύλη.

Για την εύρεση της βελτιστοποιημένης καμπύλης δοκιμάστηκαν θεωρητικά μοντέλα, τα οποία όμως εμφάνιζαν μεγάλες αποκλίσεις σε σχέση με τα αποτελέσματα μοντελοποίησης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων, οπότε τελικά απορρίφθηκαν και ακολουθήθηκε διαφορετική μέθοδος.

Η μέθοδος που τελικά ακολουθήθηκε ήταν επαναληπτική-βελτιστοποίησης μέσω του προγράμματος Solidworks της εταιρείας Dassault Systèmes. Παραμετροποιήθηκε η καμπύλη ως προς κάποια γεωμετρικά στοιχεία της (παρουσιάζονται εκτενώς στο κεφάλαιο 6). Η καμπύλη που βρέθηκε μέσω της παραπάνω διαδικασίας ομαλοποιήθηκε με αποτέλεσμα μία λίγο διαφοροποιημένη- και πολύ ομαλότερηκαμπύλη. Κατά τη διάρκεια ορισμού και της αρχικής και της ομαλότερης καμπύλης είχαν ορισθεί σημεία ελέγχου (sensors) μέσω του προγράμματος για να εφαρμόζεται ο βασικός νόμος οδοντώσεων. Επειδή κατά την μοντελοποίηση των επαναλήψεων μπορεί να υπήρχαν σφάλματα στα γεωμετρικά κριτήρια λόγω του μεγάλου εύρους των γεωμετριών που εναλλάσσονταν κατά την διαδικασία βελτιστοποίησης, έγινε επανέλεγχος της καμπύλης ως προς το αν υπακούει στον βασικό νόμο οδοντώσεων. Το βασικό κριτήριο βελτιστοποίησης της καμπύλης ήταν η ελαχιστοποίηση των τάσεων, τόσο στον πόδα του οδόντος όσο και στο σύνολο του μοντέλου. Η ελαχιστοποίηση της εφελκυστικής τάσης στον πόδα ήταν το βασικό κριτήριο βελτίωσης της αντοχής, ενώ η ελαχιστοποίηση της εφελκυστικής τάσης στο σύνολο του μοντέλου εξασφαλίζει ότι δεν θα δημιουργηθούν κατά την διάρκεια της επαναληπτική διαδικασίας ακραίες γεωμετρίες.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της νέας καμπύλης σε σχέση με κλασσικές συμμετρικές οδοντώσεις και με άλλες ασύμμετρες.

5. Ανάλυση ευαισθησίας της αντοχής του οδόντα ως προς παραμέτρους γεωμετρίας της κατατομής

5.1 Εισαγωγή Κεφαλαίου

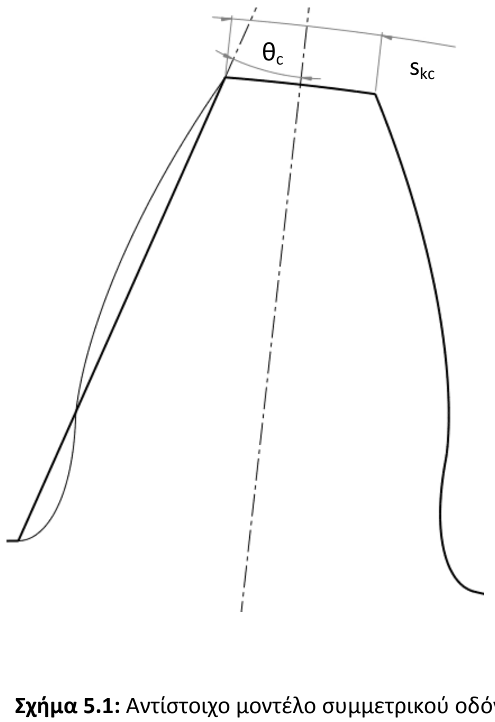
Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση ευαισθησίας που έγινε ως προς τις παραμέτρους γεωμετρίας που ορίζουν την κατατομή της μη-εργαζόμενης πλευράς του οδόντα. Αυτές οι παράμετροι είναι το πάχος κεφαλής του οδόντα και η κλίση της μη-εργαζόμενης κατατομής.

Ως μεταβλητή θ ορίζεται η γωνία και μεταβλητή c_{sk} ορίζεται το ποσοστό με το οποίο πολλαπλασιάζεται το module της οδόντωσης και δίνει το πάχος κεφαλής s_k.

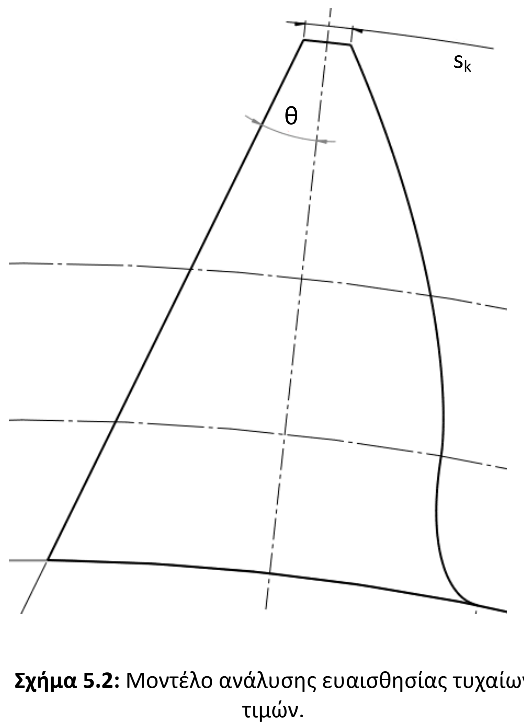
Για να υπολογιστούν αυτές οι παράμετροι χρειάστηκε να οριστεί το απλούστερο δυνατό μοντέλο, δηλαδή η καμπύλη της μη εργαζόμενης κατατομής να αντικατασταθεί από μία ευθεία γραμμή, οριζόμενη από το πάχος κεφαλής και την γωνία, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1.

Οι τιμές θ_c και s_{kc} είναι οι σταθερές τιμές που αντιπροσωπεύουν το μοντέλο όταν εφαρμοστεί στο κλασσικό συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης 20°, ενώνοντας το σημείο της κεφαλής με το αντίστοιχο σημείο της καμπύλης ποδός και αντιστοιχούν σε

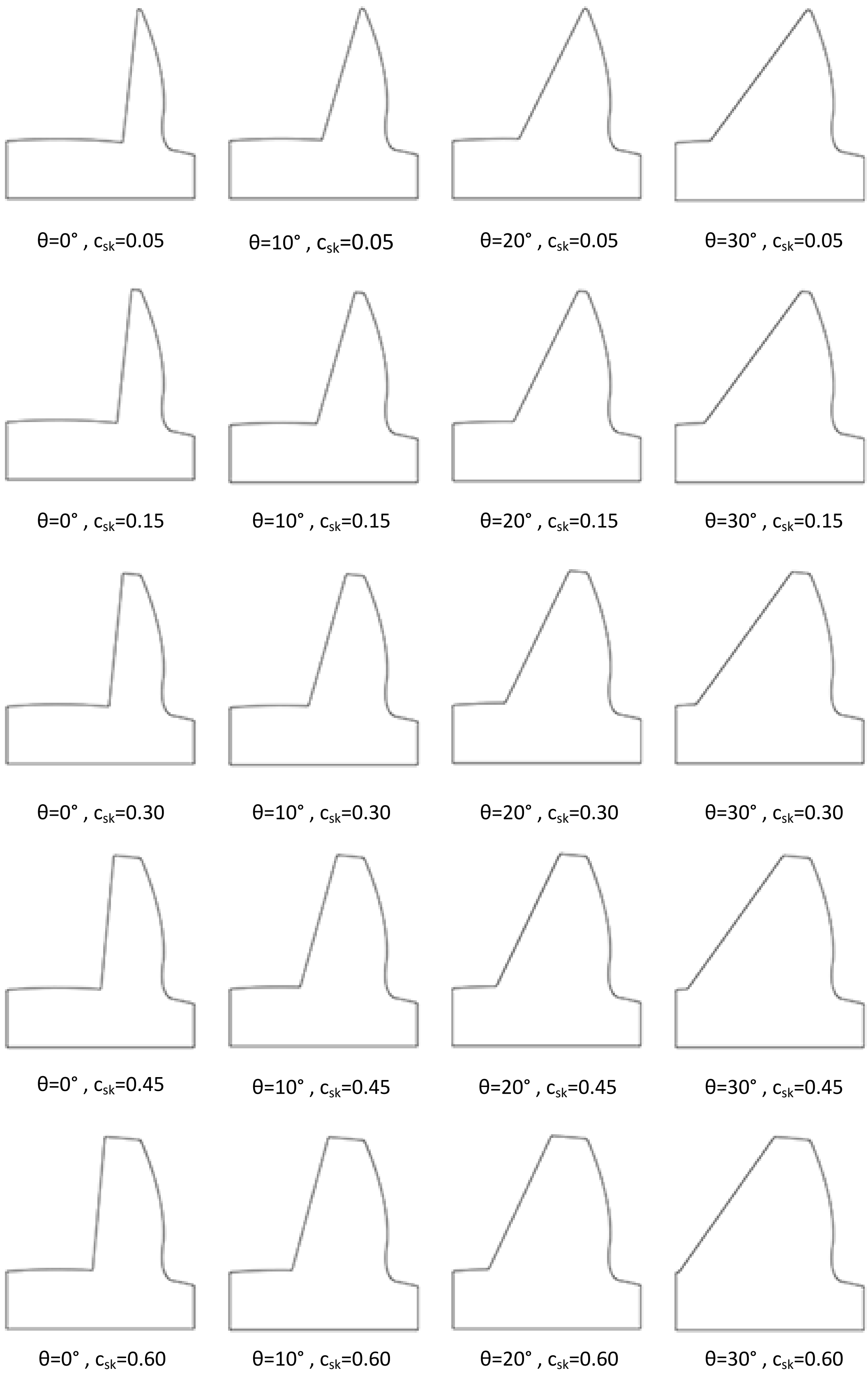
$$\begin{cases} \theta_c = 17.64° \\ s_{kc} = 0.72\mathrm{m} \end{cases}$$



Σχήμα 5.1: Αντίστοιχο μοντέλο συμμετρικού οδόντα όταν η μη-εργαζόμενη κατατομή αντικατασταθεί με ευθεία γραμμή.



Σχήμα 5.2: Μοντέλο ανάλυσης ευαισθησίας τυχαίων τιμών.



Σχήμα 5.3: Μορφές κατατομών που προκύπτουν από την ανάλυση ευαισθησίας ως προς το πάχος κεφαλής ως ποσοστό του module και της κλίσης της ευθείας μη-εργαζόμενης κατατομής

5.2 Γεωμετρία, φόρτιση και ανάλυση του μοντέλου

Κατά τη μοντελοποίηση χρησιμοποιήθηκε ένα «αδιάστατο» δόντι ώστε τα αποτελέσματα να μπορούν να γενικευθούν με χρήση της εξίσωσης [4 και 16]:

$$\sigma = \sigma_u \frac{P_N}{bm} \tag{5.1}$$

όπου σ είναι η αναπτυσσόμενη τάση στο κάθε μοντέλο, σ_u είναι η τάση που προκύπτει στο «αδιάστατο» μοντέλο, P_N είναι το κάθετο φορτίου στην κατατομή, b το πλάτος του οδόντα και m το module της οδόντωσης.

Κατά την μοντελοποίηση το «αδιάστατο» δόντι ορίστηκε με m=1mm, b=1mm και P_N=1N. Για να υπολογιστούν τα υπόλοιπα γεωμετρικά μεγέθη του οδοντωτού τροχού έπρεπε να οριστεί αριθμός οδόντων, για να γίνει αυτό επιλέχθηκε ο ελάχιστος δυνατός ώστε να μην εμφανίζονται υποκοπές κατασκευής. Αυτό έγινε με χρήση της εξίσωσης [1]:

$$z_{min} = \frac{2[C_f - C_c(1 - \sin a_0)]}{\sin^2 a_0} \tag{5.2}$$

όπου z_{min} είναι ο ελάχιστος αριθμός οδόντων για τους συγκεκριμένους συντελεστές, C_f συντελεστής που καθορίζει το ύψος ποδός του οδόντα για τον οποίο επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η πιο συνηθισμένη τιμή C_f=1.25, C_c είναι ο συντελεστής ακτίνας καμπυλότητας οδοντωτού κοπτικού κανόνα και θεωρήθηκε ακμή, συνεπώς C_c=0 και a_0 είναι η γωνία εξειλιγμένης, η οποία επιλέχθηκε η τυπική των 20°.

Από την σχέση 5.2 τελικά υπολογίζεται ελάχιστος αριθμός οδόντων ίσος με 21.37, το οποίο δεν έχει φυσική σημασία οπότε επιλέγονται 22 οδόντες. Με χρήση των παραπάνω μεγεθών και των σχέσεων της εξίσωσης 5.3 μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα απαραίτητα γεωμετρικά μεγέθη της οδόντωσης και του οδοντωτού τροχού.

$$\begin{cases} r_0 = \dfrac{zm}{2} \\ r_f = r_0 - C_f m \\ r_k = r_0 + C_k m \\ r_g = r_0 \cos a_0 \end{cases} \tag{5.3}$$

όπου r_0 είναι ο αρχικός κύκλος, r_f είναι ο κύκλος ποδός, r_k ο κύκλος κεφαλής και r_g ο βασικός κύκλος, z ο αριθμός οδόντων, 22 όπως υπολογίστηκε πιο πάνω και C_k είναι ο συντελεστής που καθορίζει το ύψος κεφαλής, για τον οποίο επίσης λήφθηκε τυπική τιμή, συνεπώς C_k=1.

Παρακάτω φαίνονται οι αριθμητικές τιμές των παραπάνω ακτινών σε mm.

$$\begin{cases} r_0 = 11.000 \\ r_f = 9.750 \\ r_k = 12.000 \\ r_g = 10.337 \end{cases}$$

Για την μοντελοποίηση επιλέχθηκε μοντέλο μόνο ενός οδόντα, για απλούστευση των υπολογισμών καθώς η φόρτιση σε έναν οδοντωτό τροχό σε συνεργασία, σε ότι αφορά την αντοχή των οδόντων, περιορίζεται μόνο στην περιοχή επαφής.

Για την εφαρμογή του μοναδιαίου φορτίου P_N=1N έγινε στατική ανάλυση με το φορτίου να ασκείται στην άκρη του οδόντα. Ασκώντας το φορτίο στην άκρη, επιτυγχάνοντας έτσι την δυσμενέστερη περίπτωση καθώς στον πόδα αναπτύσσονται μεγαλύτερες ροπές λόγω του μεγαλύτερου μοχλοβραχίονα του φορτίου. Δεν είναι δυνατό να ασκηθεί το φορτίο σε μία ακμή του μοντέλου, για αυτό το λόγο κρίθηκε απαραίτητο να δημιουργηθεί μία ζώνη στην οποία θα ασκηθεί σταθερά το κατανεμημένο αυτό φορτίο. Η ζώνη θα έπρεπε να είναι αρκετά μικρή ώστε συγκριτικά με το μέγεθος του οδόντα να έχει αποτέλεσμα ενός συγκεντρωμένου φορτίου κατά πλάτος του οδόντα, πάνω σε μία γραμμή. Για τον προσδιορισμό αυτής της ζώνης φόρτισης, έγινε ανάλυση ήδη λειτουργικών συστημάτων μετάδοσης ισχύος και με βάση την εξίσωση του Hertz για επιφανειακή πίεση λόγω επαφής βρέθηκε πως η ζώνη αυτή έχει πλάτος μεταξύ 4% και 5% του module της οδόντωσης, συνεπώς με module m=1mm επιλέχθηκε η ζώνη φόρτισης να έχει πλάτος 0.05mm, το οποίο αποτελεί ρεαλιστική περίπτωση φόρτισης. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό αυτής της ζώνης φόρτισης περιγράφεται παρακάτω. Αρχικά υπολογίστηκε η πίεση επιφανείας κατά Hertz από την σχέση [1]:

$$p_{max} = \sqrt{\frac{P_N(i_{12}+1)}{b_2 d_{os1} i_{12}}} Y_W Y_C Y_L \qquad (5.4)$$

όπου έχουμε:

p_{max}: η μέγιστη επιφανειακή πίεση

i_{12}: ο λόγος μετάδοσης των δύο συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών

b_2: το πλάτος του συνεργαζόμενου τροχού

d_{os1}: η διάμετρος του βασικού κύκλου

Y_W: συντελεστής υλικού

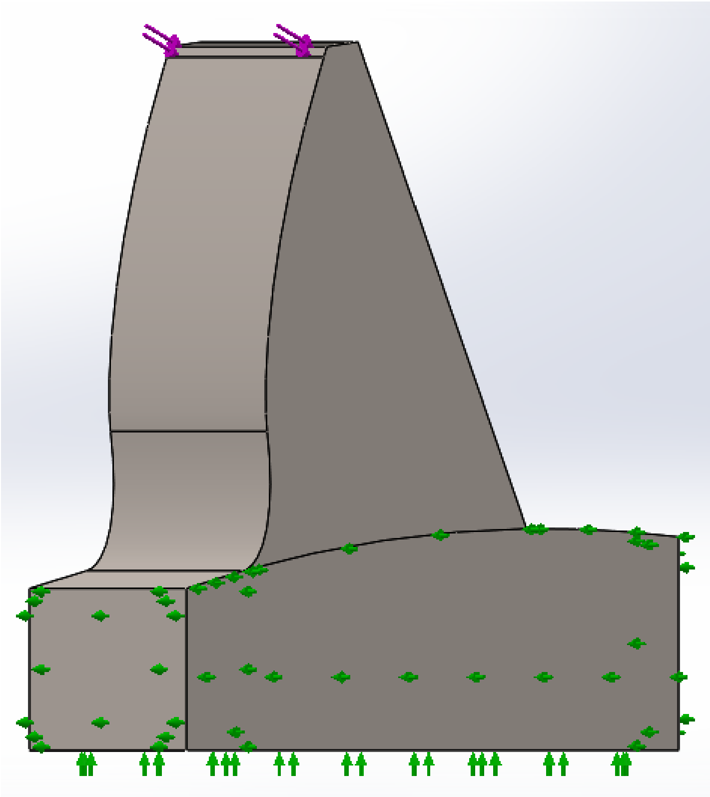
Y_C: συντελεστής κύλισης

Y_L: συντελεστής φορτίσεως

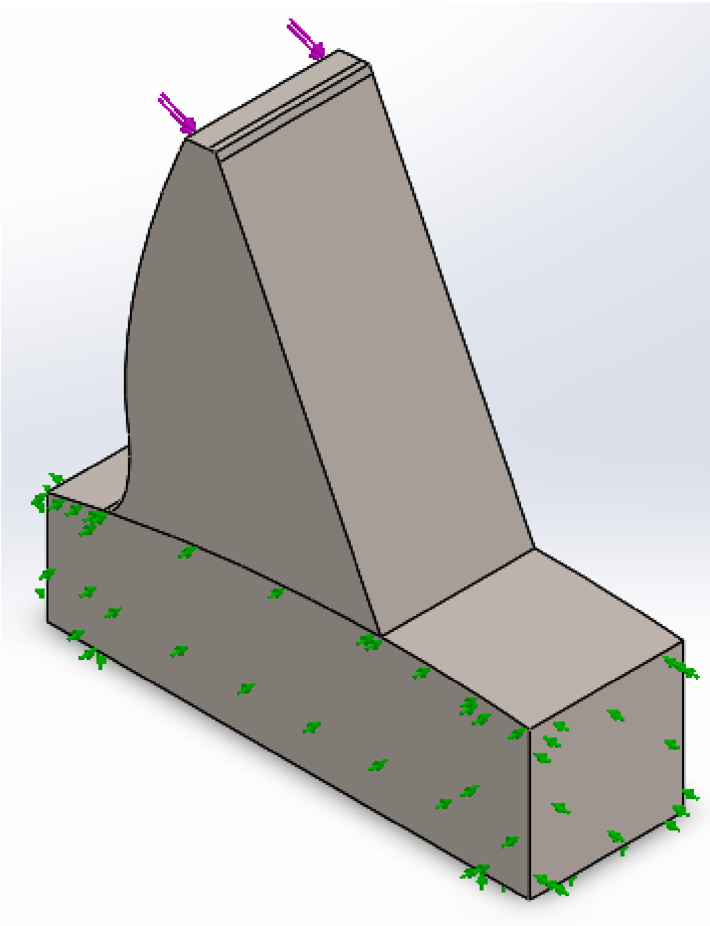
Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η πίεση αυτή ασκείται ως κατανεμημένο φορτίο παραβολικού προφίλ, ωστόσο για τον έλεγχο της ζώνης θεωρήθηκε πως το φορτίο ασκείται ισόποσα σε όλη τη ζώνη και ίσο με την μέγιστη τιμή της επιφανειακής πίεσης. Θεωρώντας πως η ζώνη φόρτισης είναι αρκετά μικρή ώστε να μην επηρεάζεται από την καμπυλότητα κατατομής του οδόντα, έγινε η υπόθεση πως είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Με την προηγούμενη θεώρηση και γνωστή την μέγιστη πίεση επιφανείας καθώς και το φορτίο το που την προκαλεί μπορεί να υπολογιστεί το εμβαδόν της ζώνης φόρτισης. Με γνωστό το εμβαδόν και την παραπάνω θεώρηση ότι πρόκειται για ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε το πλάτος αυτής της ζώνης, αφού το μήκος είναι γνωστό και ίσο με το πάχος του οδόντα. Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε για διαφορετικές οδοντώσεις και περιπτώσεις συνεργασίας ώστε να εξαχθεί ένα γενικό συμπέρασμα.

Στο μοντέλο (Σχήμα 5.4 και 5.5) η στήριξη πραγματοποιήθηκε με περιορισμό των κάθετων μετατοπίσεων (κυλίσεις) στις πλευρές. Η εναλλακτική λύση του περιορισμού όλων των βαθμών ελευθερίας (πάκτωση) δεν προτιμήθηκε λόγω της συγκέντρωσης τάσεων (artifacts) που προκαλούνταν στα άκρα πλησίον του πόδα του οδόντος.

Για την εκτέλεση των σεναρίων χρησιμοποιήθηκε η λειτουργία *Design Study* του λογισμικού Solidworks με την οποία ένα παραμετρικό μοντέλο μπορεί να αναλυθεί σε μία ή περισσότερες καταστάσεις κάτω εφαρμόζοντας σε όλες τις ίδιες συνθήκες και περιορισμούς.



Σχήμα 5.4: Φόρτιση και στήριξη του μοντέλου.



Σχήμα 5.5: Φόρτιση και στήριξη του μοντέλου.

5.3 Ανάλυση ως προς το πάχος κεφαλής

Για την ανάλυση ευαισθησίας ως προς το πάχος κεφαλής επιλέχθηκε ένα αρκετά μεγάλο εύρος. Σαφώς οι τιμές θα έπρεπε να είναι μικρότερες από την αντίστοιχη του συμμετρικού οδόντα, δηλαδή c_{skc}=0.72. Έπειτα από δοκιμές επιλέχθηκε το εύρος για την μεταβλητή c_{sk} να είναι το διάστημα [0.05,0.60] με βήμα 0.01.

5.4 Ανάλυση ως προς την κλίση της μη-εργαζόμενης κατατομής

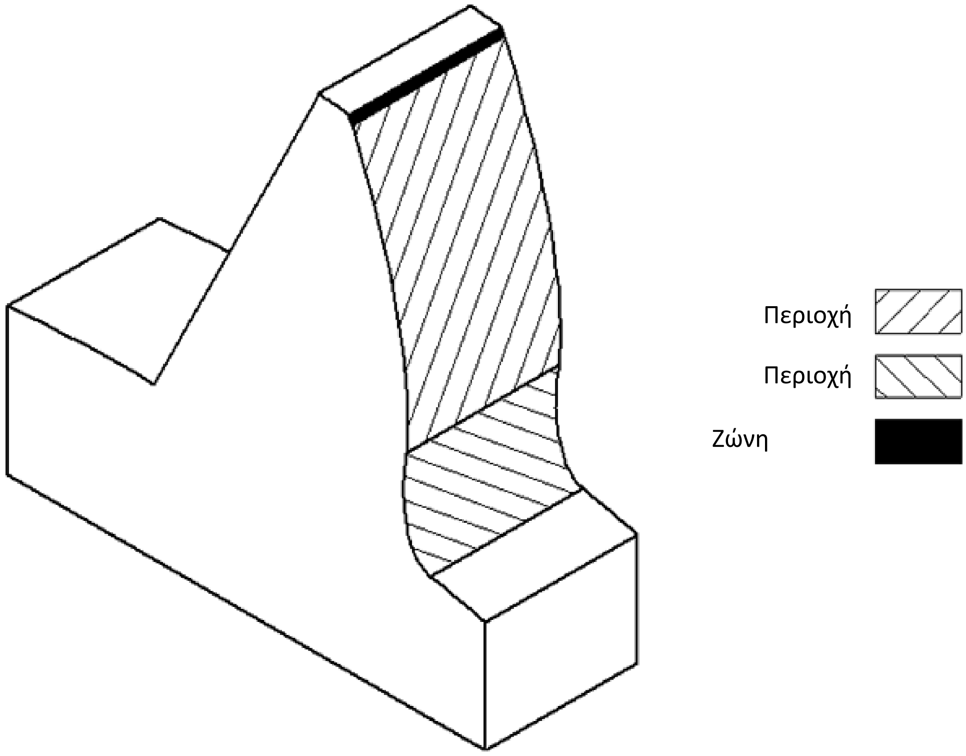
Για την ανάλυση ευαισθησίας ως προς την κλίση της μη-εργαζόμενης ευθείας κατατομής επιλέχθηκε γωνία σε εύρος που για το συγκεκριμένο μοντέλο δεν προκαλούσε υποκοπές λειτουργίας μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων. Έπειτα από δοκιμές επιλέχθηκε η τιμές για την μεταβλητή θ να είναι το διάστημα [0°,30°] με βήμα 2°.

5.5 Περιοχές ενδιαφέροντος

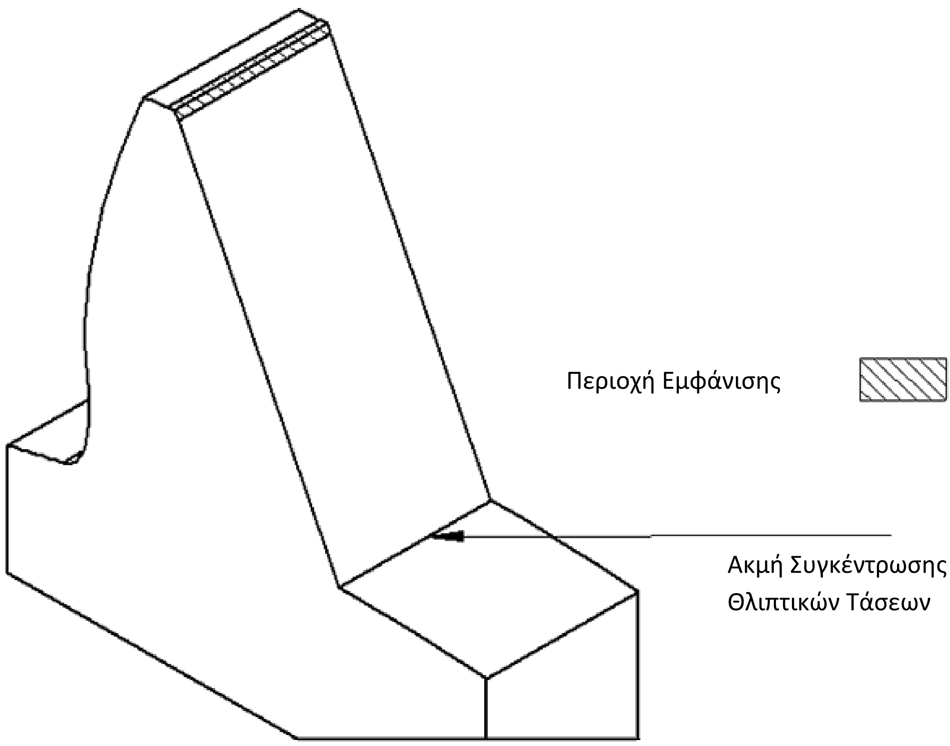
Κατά τη διάρκεια της ανάλυσης βρέθηκαν τέσσερις περιοχές στο μοντέλο που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στην μελέτη καθώς σε αυτές παρατηρείται συγκέντρωση τάσεων (Σχήμα 5.6 και 5.7).

Στην εργαζόμενη κατατομή εμφανίζονται μόνο εφελκυστικές τάσεις, είτε στο εργαζόμενο κομμάτι της κατατομής (Περιοχή Α), είτε στο τροχοειδές (Περιοχή Β).

Στην μη-εργαζόμενη κατατομή εμφανίζονται εφελκυστικές τάσεις στην κεφαλή (περιοχή που εμφανίζεται αποφλοίωση-chipping) και θλιπτικές τάσεις στην ακμή που ο οδόντας ενώνεται με το σώμα του οδοντωτού τροχού. Στην πραγματικότητα η περιοχή εμφάνισης θλιπτικών τάσεων βρίσκεται στην καμπυλότητα ποδός (fillet). Επειδή η παρούσα ανάλυση αφορά κυρίως στην περιοχή της κεφαλής του οδόντα, το πρόβλημα της συγκέντρωσης τάσης στην περιοχή ποδός δεν εξετάστηκε. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν τετραεδρικά ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία. Στις πιο πάνω περιοχές έγινε πύκνωση του πλέγματος με στοιχεία μισής διάστασης από ότι στο υπόλοιπο μοντέλο.



Σχήμα 5.6: Περιοχές ενδιαφέροντος στην εργαζόμενη κατατομή.



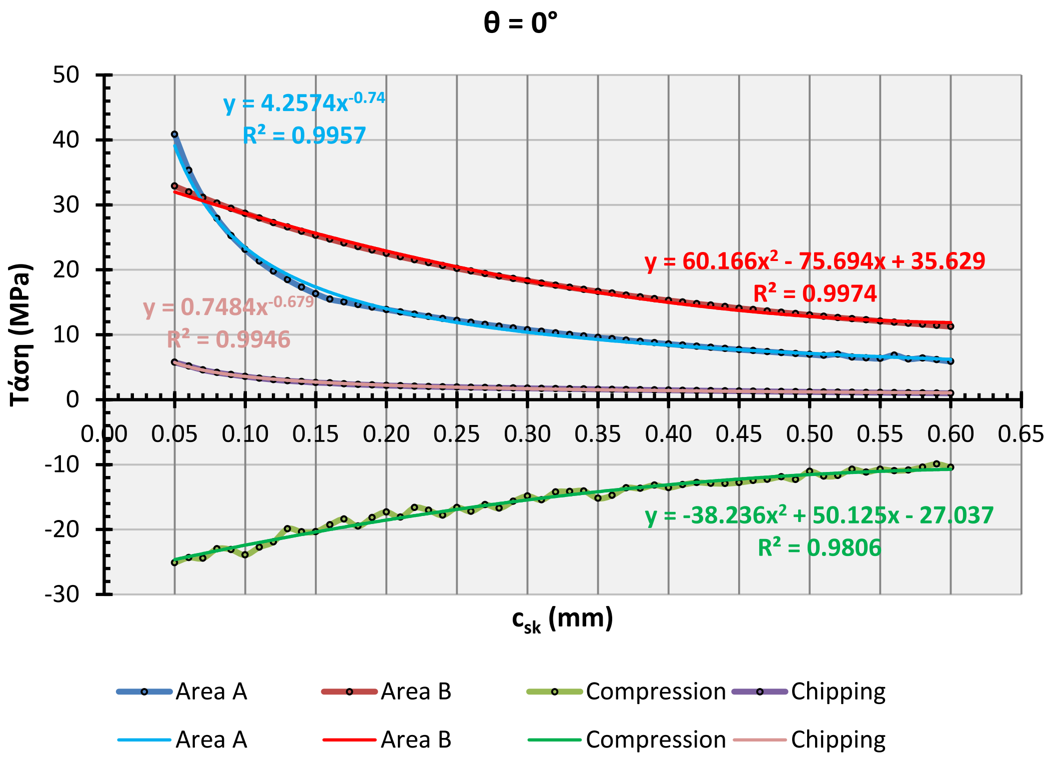
Σχήμα 5.7: Περιοχές ενδιαφέροντος στη μη-εργαζόμενη κατατομή.

5.6 Αποτελέσματα ανάλυσης

Για κάθε γωνία κατά την προσομοίωση έγιναν γραφικές παραστάσεις της τάσης ως προς το πάχος κεφαλής για κάθε μία από τις περιοχές ενδιαφέροντος. Στην συνέχεια τα αποτελέσματα αυτών το διαγραμμάτων (σημεία) παρεμβλήθηκαν είτε με εκθετική συνάρτηση (Περιοχή Α και περιοχή αποφλοίωσης) είτε με πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (Περιοχή Β και ακμή συγκέντρωσης θλιπτικών τάσεων). Ένα παράδειγμα για γωνία θ=0° φαίνεται στο σχήμα 5.6. Για να ελεγχθεί η ακρίβεια και η ορθότητα των προσεγγίσεων υπολογίστηκε ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης R^2, οι τιμές του οποίου παρουσιάζονται αναλυτικά στον επόμενο πίνακα. Αναλυτικά οι τιμές κάθε επανάληψης εμφανίζονται στο Παράρτημα 1.

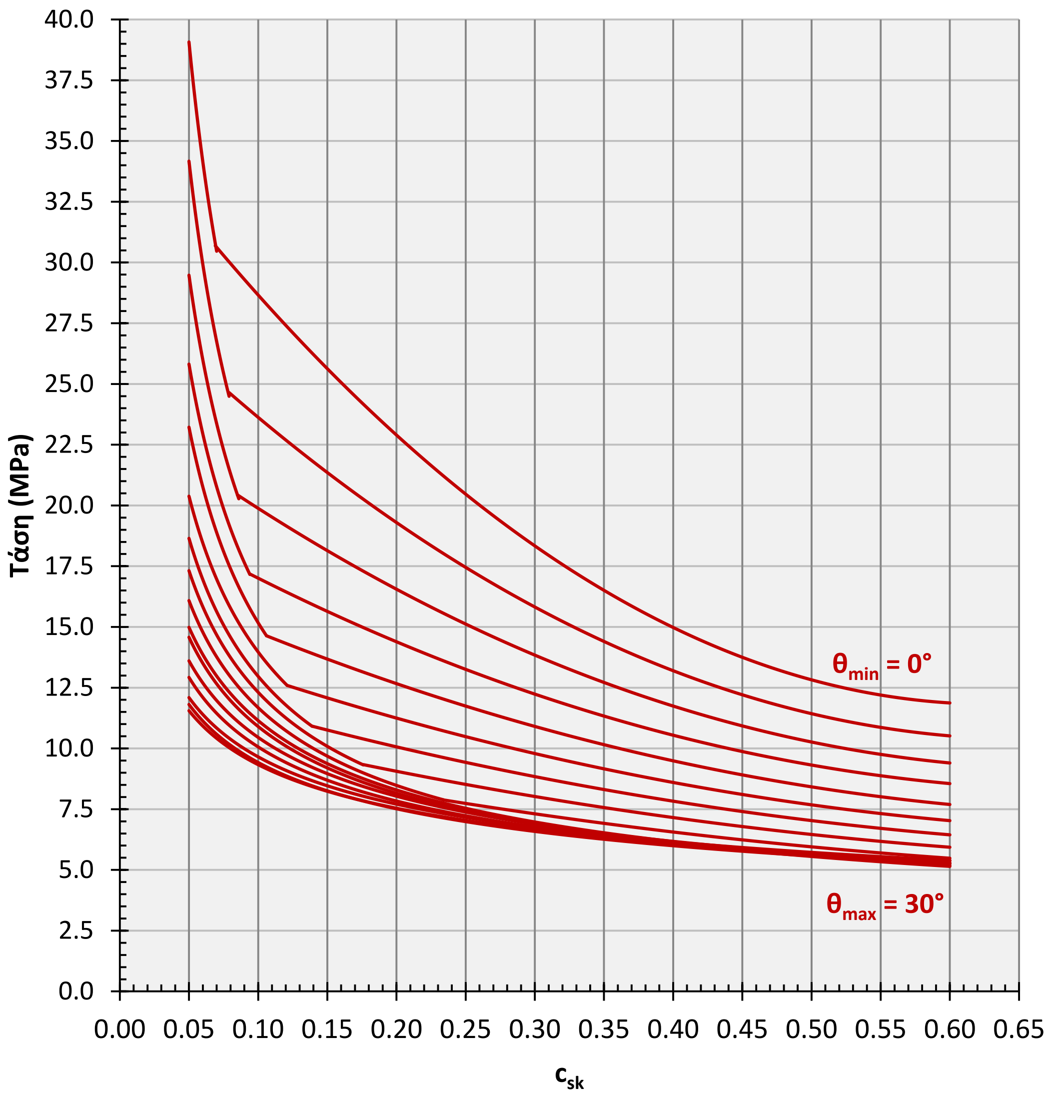
Πίνακας 5.1: Ελάχιστη και μέγιστη τιμή R^2 για κάθε Περιοχή Ενδιαφέροντος κατά τις παρεμβολές

Περιοχή Ενδιαφέροντος	**Ελάχιστο R^2** (%)	**Μέγιστο R^2** (%)
Περιοχή Α	79.30	99.57
Περιοχή Β	98.30	99.97
Ακμή Θλιπτικών Τάσεων	89.73	98.91
Περιοχή Chipping	99.46	99.89



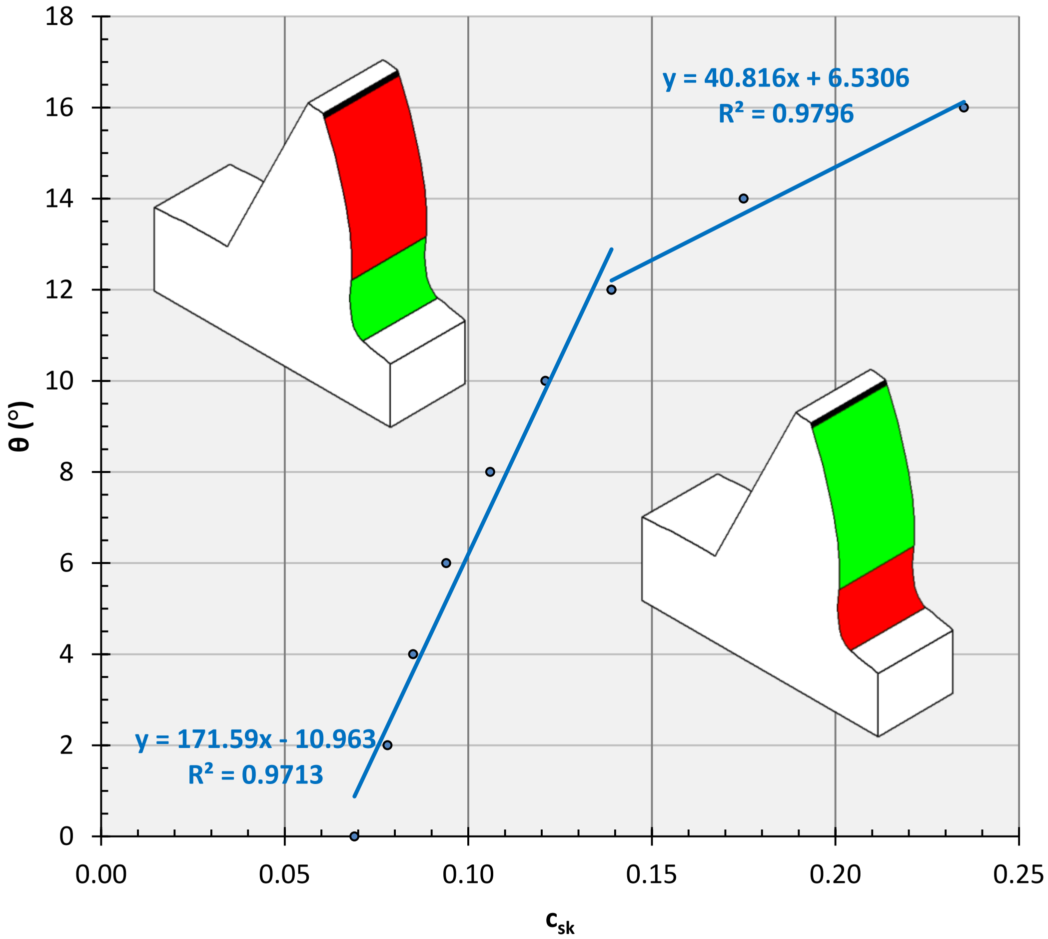
Σχήμα 5.8: Ενδεικτικό παράδειγμα για γωνία θ=0°

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζονται συνολικά οι εφελκυστικές τάσεις που εμφανίζονται στην εργαζόμενη κατατομή του οδόντα, είτε στην Περιοχή Α, είτε στην Β. Είναι εμφανές πως περίπου οι μισές καμπύλες αποτελούνται από δύο ξεχωριστές καμπύλες, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μέγιστη εφελκυστική τάση εμφανίζεται είτε στην Περιοχή Α ή στην Β. Για μικρές γωνίες (υψηλότερες καμπύλες) η μέγιστη εφελκυστική τάση εμφανίζεται στην εργαζόμενη κατατομή της πλευράς και στην συνέχεια στο τροχοειδές, ενώ από μία γωνία και μετά (των 16°) εμφανίζεται μόνο στο συνεργαζόμενο μέρος της κατατομής. Ακόμη, όσο αυξάνεται η γωνία οι καμπύλες πλησιάζουν η μία στην άλλη, άρα επηρεάζονται λιγότερο από την κλίση όσο αυτή αυξάνεται. Επιπλέον, είναι εμφανές πως τιμές της μεταβλητής c_{sk}<0.20 εμφανίζονται πολύ μεγάλες διαφορές στην τάση για μικρές μεταβολές στο πάχος κεφαλής.



Σχήμα 5.9: Εφελκυστικές τάσεις στην εργαζόμενη πλευρά ως συνάρτηση του πάχους κεφαλής και της κλίσης της μη-εργαζόμενης πλευράς

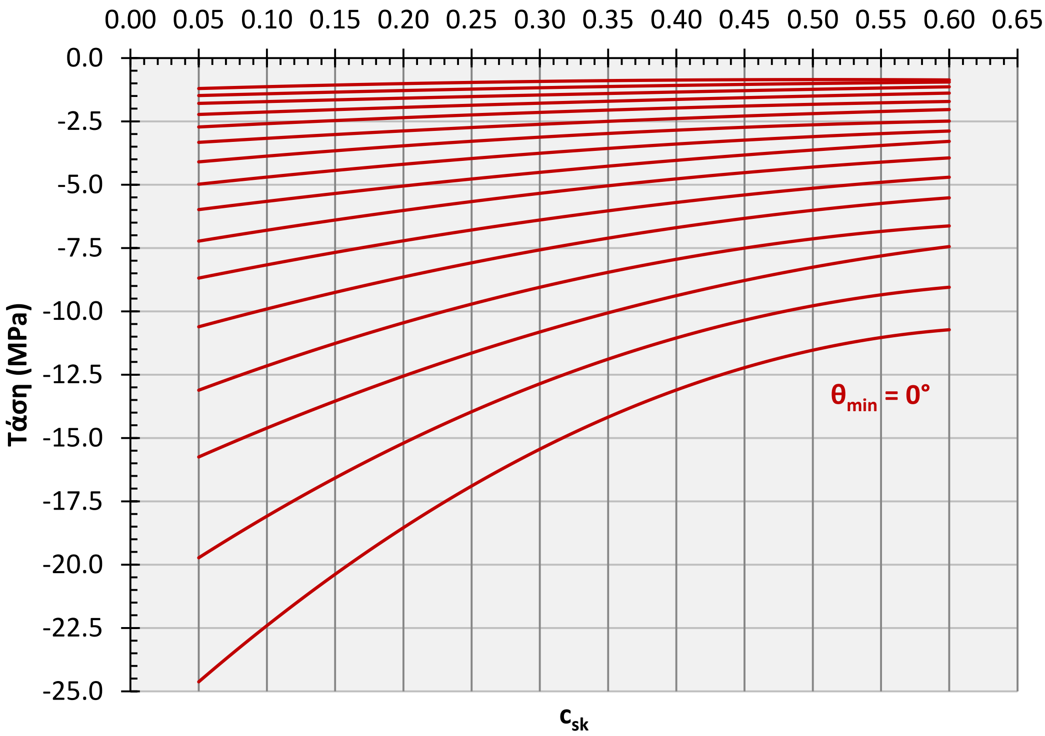
Από την παραπάνω ανάλυση διαπιστώθηκε πως υπάρχουν δύο περιοχές στις οποίες η εφελκυστική τάση λαμβάνει την μέγιστη τιμή της. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η πλευρά που φορτίζεται περισσότερο. Τα σημεία προκύπτουν για τα ζεύγη τιμών όπου η μέγιστη εφελκυστική τάση είναι ίση και στις δύο περιοχές της εργαζόμενης κατατομής. Στην συνέχεια παρεμβλήθηκαν με ευθείες γραμμές που παρουσιάζουν πολύ καλές τιμές στον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης. Επιλέχθηκαν δύο ευθείες αντί για μία καμπύλη μεγαλύτερου βαθμού για λόγους απλότητας. Συνεπώς η μέγιστη εφελκυστική τάση εμφανίζεται στο συνεργαζόμενο τμήμα της κατατομής για τιμές πάνω από την περιοχή που ορίζουν οι ευθείες ενώ στην περιοχή κάτω από τις ευθείες φορτίζεται περισσότερο το τροχοειδές τμήμα. Με κόκκινο εμφανίζεται σχηματικά η περιοχή της εργαζόμενης κατατομής που φορτίζεται περισσότερο, ενώ με πράσινο το τμήμα που δέχεται τη μικρότερη φόρτιση.



Σχήμα 5.10: Περιοχή μέγιστης εφελκυστικής τάσης στην εργαζόμενη κατατομή.

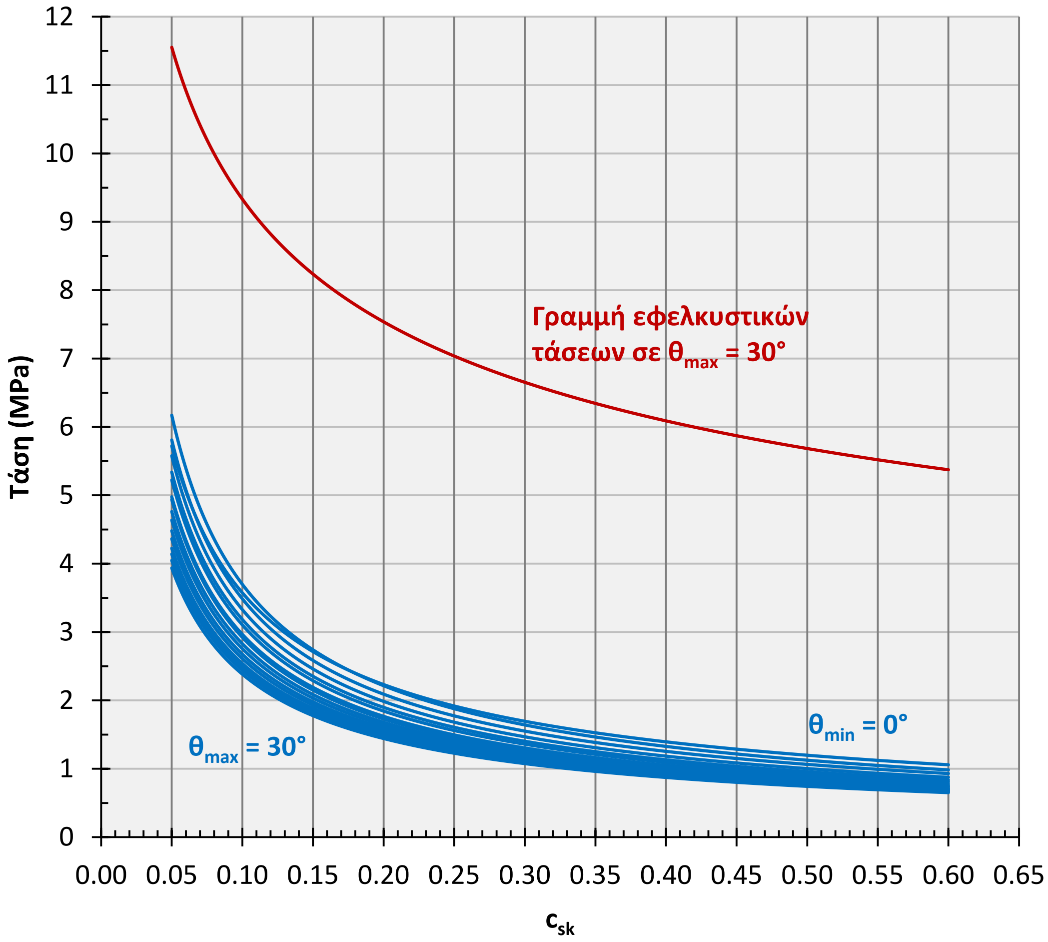
Με μία πρώτη ματιά το να φορτίζεται υψηλότερα το συνεργαζόμενο τμήμα της κατατομής, αντί του τροχοειδούς φαίνεται παράξενο, ωστόσο δεν πρέπει να αμελείται η ιδιαιτερότητα της γεωμετρίας και πως η συγκεκριμένη ανάλυση κυρίως στοχεύει στην περιοχή γύρω από την κεφαλή του οδόντα. Τα αποτελέσματα είναι αντιπροσωπευτικά, αλλά όχι απόλυτα, με τροποποιήσεις στην γεωμετρία θα προκύψουν σίγουρα ακριβέστερα. Θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι η εφελκυστική τάση που εμφανίζεται στο συνεργαζόμενο τμήμα και σε κάποιες περιπτώσεις είναι μεγαλύτερη από ότι στο τροχοειδές είναι απλώς σφάλμα λόγω του στατικού φορτίου στην άκρη της κεφαλής, η περίπτωση λήφθηκε υπόψη κατά την ανάλυση.

Στο επόμενο σχήμα εμφανίζονται οι θλιπτικές τάσεις στην μη-εργαζόμενη κατατομή του οδόντα. Κατ' αντιστοιχία με το αντίστοιχο διάγραμμα για τις εφελκυστικές τάσεις στην εργαζόμενη κατατομή, οι καμπύλες πλησιάζουν η μία την άλλη όσο η γωνία αυξάνεται και μετά από ένα συγκεκριμένο όριο (περίπου 16°) η τάση φαίνεται να επηρεάζεται πολύ λίγο από την αλλαγή της κλίσης της μη-εργαζόμενης ευθείας κατατομής. Για γωνίες μικρότερες από 16° και πάχος κεφαλής μικρότερο από το 0.20 του module οι τάση μεταβάλλεται πολύ για μικρές μεταβολές του πάχους κεφαλής, άρα οι τιμές αυτές των παραμέτρων θα πρέπει να αποφευχθούν κατά τον σχεδιασμό.



Σχήμα 5.11: Θλιπτικές τάσεις στη μη-εργαζόμενη κατατομή.

Τέλος, σε ότι αφορά την περιοχή της κεφαλής στην μη-εργαζόμενη κατατομή, την περιοχή δηλαδή που εμφανίζεται αποφλοίωση, έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα που, όπως και στα προηγούμενα, η τάση φαίνεται ότι μετά από ένα όριο δεν επηρεάζεται από την κλίση και πως οι μεταβολές μετά από την τιμή του c_{sk}=0.20 είναι πιο ομαλές. Αξίζουν να σημειωθούν στο ακόλουθο διάγραμμα πως οι καμπύλες είναι πιο ομογενοποιημένες από ότι στα προηγούμενα και πως όλες οι τιμές είναι πολύ μικρότερες από την βέλτιστη-μικρότερη καμπύλη εφελκυσμού στην εργαζόμενη κατατομή.



Σχήμα 5.12: Εφελκυστικές τάσεις στην περιοχή της κεφαλής στη μη-εργαζόμενη κατατομή (μπλε καμπύλες) και σύγκριση με την ελάχιστη κατά την μοντελοποίηση εφελκυστική στην εργαζόμενη κατατομή (κόκκινη καμπύλη).

Είναι σαφές, από τα σχήματα 5.7, 5.9 και 5.10 πως οι συνιστώμενη κλίση για την νέα κατατομή θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη η ίση των 16° και το πάχος κεφαλής να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 20% του module της οδόντωσης.

6. Ορισμός καμπύλης μη-εργαζόμενης κατατομής

6.1 Εισαγωγή κεφαλαίου

Έχοντας ολοκληρώσει την ανάλυση ευαισθησίας ως προς τις γεωμετρικές παραμέτρους της κατατομής και έχοντας εξαγάγει τα απαραίτητα αποτελέσματα και συμπεράσματα ο ορισμός μιας νέας καμπύλης για την μη εργαζόμενη κατατομή γίνεται πλέον δυνατός.

Επιδιώκοντας βελτιστοποιημένη καμπύλη, επιλέγεται η χρήση του ελάχιστου δυνατού πάχους κεφαλής, δηλαδή 0.2 φορές το module της εκάστοτε οδόντωσης. Το πάχος κεφαλής πλέον δεν θεωρείται ανεξάρτητη παράμετρος σχεδιασμού υποκείμενη σε βελτιστοποίηση, αλλά υιοθετείται η ολικά βέλτιστη αυτή τιμή, δηλαδή s_k = 0.2m.

Προσπαθώντας να ορίσουμε πλήρως ένα μοντέλο το οποίο να μπορεί εύκολα να επεκταθεί και σε διαφορετικές συνθήκες κατασκευής, το οποίο ωστόσο να παραμένει πιστό τόσο στα θεωρητικά δεδομένα, όσο και στις γεωμετρίες που προκύπτουν κατά την κατεργασία, ορίζεται ένα πλήρως παραμετρικό μοντέλο με χρήση του *Design Table* του λογισμικού Solidworks το οποίο για να λειτουργήσει απαιτεί συνεργασία με το υπολογιστικό πακέτο Excel της εταιρείας Microsoft. Με συνδυασμό αυτών των δύο προγραμμάτων δημιουργείται μια βάση δεδομένων που μπορεί να αναπαράγει παραμετρικά οδοντωτούς τροχούς οποιουδήποτε module και αριθμού οδόντων.

Με χρήση του παραπάνω παραμετρικού μοντέλου στην συνέχεια παραμετροποιείται η καμπύλη που ορίζει τη μη-εργαζόμενη κατατομή με διάφορα σημεία σε διαφορετικές κλίσεις ως προς τον άξονα του δοντιού.

Για την εύρεση βελτιστοποιημένης καμπύλης έτρεξαν διάφορα σενάρια με χρήση ξανά της λειτουργίας *Design Study* όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο σχετικά με την ανάλυση ευαισθησίας. Επιπλέον ορίστηκαν σημεία ελέγχου (sensors) ώστε να ικανοποιείται ο βασικός νόμος οδοντώσεων, να μην ξεπερνιόνται τα φυσικά όρια μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων, όπως αυτά ορίζονται με περιστροφή του ενός οδόντα κατά γωνία 360/z (σε °), όπου z ο αριθμός των οδόντων στην συγκεκριμένη εφαρμογή και τέλος να αποφεύγονται ακραίες γεωμετρίες.

6.2 Ορισμός βελτιστοποιημένης καμπύλης

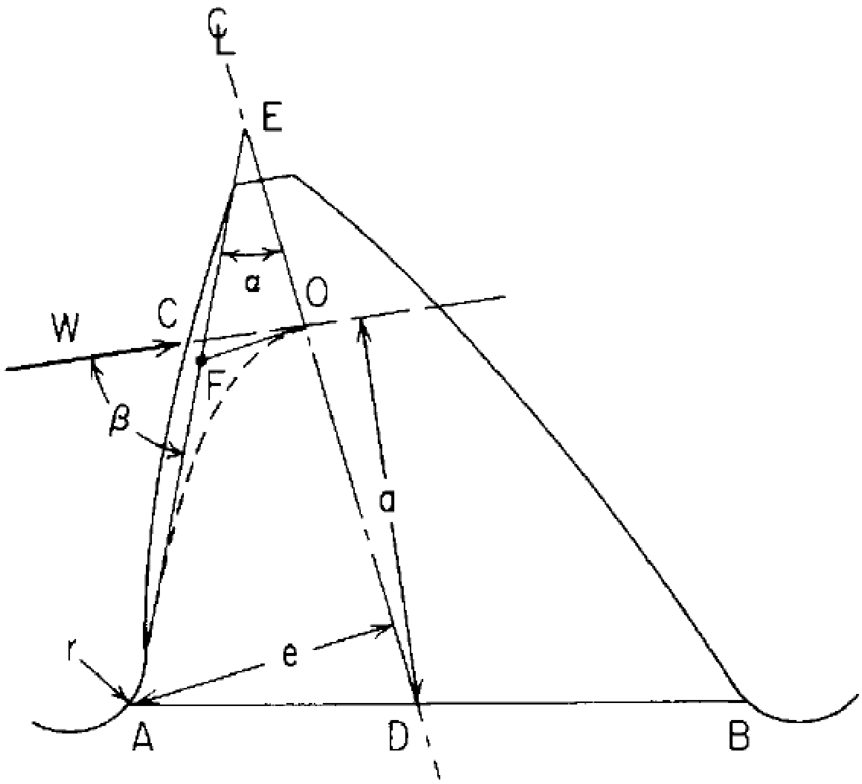
6.2.1 Βελτιστοποίηση μέσω γενετικού αλγορίθμου

Η επιλογή της μεθόδου η οποία θα ακολουθούταν για την εύρεση της βελτιστοποιημένης καμπύλης ήταν ένα από τα βασικότερα ζητήματα αφού ολοκληρώθηκε η ανάλυση του κεφαλαίου 5.

Η πρώτη επιλογή ήταν να γίνει χρήση γενετικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης, αλλά για να γίνει αυτό θα έπρεπε να οριστεί το κριτήριο βελτιστοποίησης-η αντικειμενική συνάρτηση του αλγορίθμου. Αφού η βελτιστοποίηση έχει να κάνει με την αντοχή, η μεταβλητή που θα έπρεπε να ελαχιστοποιηθεί ήταν η τάση. Για τον υπολογισμό της μέγιστης τάσης αναπτύχθηκε κώδικας στο λογισμικό Matlab® ο οποίος έκανε χρήση της εξίσωσης του Heywood [18], όπως μετά τροποποιήθηκε από τους Kelley και Pedersen [19], για προβόλους τυχαίου σχήματος. Η εξίσωση είναι η ακόλουθη [17].

$$\sigma = \frac{W}{t}\left[1 + 0.26\left(\frac{e}{r}\right)^{0.7}\right]\left[\frac{1.5a}{e^2} + \frac{\cos\beta}{2e} + \frac{0.45}{(be)^2}\right] \tag{6.1}$$

όπου W είναι το ασκούμενο φορτίο, t το πάχος της προβόλου. Τα υπόλοιπα μεγέθη φαίνονται στο επόμενο σχήμα, παρμένο από την αντίστοιχη βιβλιογραφία [17].



Σχήμα 6.1: Θεωρητικός υπολογισμός μέγιστης τάσης.

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε έπρεπε να ελεγχθεί ως προς την απόδοση του σε ακραίες γεωμετρίες, γι' αυτό δοκιμάστηκε σε ένα κλασικό συμμετρικό δόντι εξειλιγμένης, σε ένα απολύτως τριγωνικό δόντι και σε ένα τραπεζοειδές δόντι, για αριθμό οδόντων 20, 22, 40 και 60 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα πεπερασμένα στοιχεία, ώστε να διαπιστωθεί αν η σχέση (6.1) είναι αξιοποιήσιμη. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 6.1: Σύγκριση θεωρητικού μοντέλου υπολογισμού μέγιστης τάσης με αποτελέσματα αντίστοιχου μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων.

			Αριθμός Οδόντων			
			20	**22**	**40**	**60**
Τύπος Δοντιού	**Εξειλιγμένης**	**Θεωρητικό**	4.5463	4.3265	3.5364	3.1891
		Πεπερασμένα	5.1336	5.1091	7.9209	5.8138
		Απόκλιση (%)	11.44	15.32	55.35	45.15
	Τριγωνικό	**Θεωρητικό**	9.9837	9.8408	8.8207	8.3950
		Πεπερασμένα	6.2176	6.0218	8.3670	5.0726
		Απόκλιση (%)	37.72	38.81	5.14	39.58
	Τραπεζοειδές	**Θεωρητικό**	9.6252	9.4703	8.5159	8.0796
		Πεπερασμένα	7.0306	6.6760	8.6715	5.7850
		Απόκλιση (%)	26.96	29.51	1.79	28.40

Όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα οι αποκλίσεις που προέκυψαν μεταξύ του θεωρητικού μοντέλου και του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων είναι σημαντικές, ειδικά σε ακραίες γεωμετρίες. Επίσης δε φαίνεται να παρουσιάζουν κάποια εμφανή συνάφεια μεταξύ τους ώστε να χρησιμοποιηθεί διορθωτικός συντελεστής ώστε να επιτυγχάνονται ακριβή αποτελέσματα.

Καθώς τα πεπερασμένα στοιχεία θεωρούνται πιο ακριβής μέθοδος, θα ήταν χρήσιμο να χρησιμοποιηθούν αυτά μόνο κατά την βελτιστοποίηση και όχι ανάπτυξη κάποιου επιπλέον κώδικα και σύγκριση των αποτελεσμάτων του με τα αποτελέσματα των πεπερασμένων στοιχείων ώστε να διαπιστωθεί η εγκυρότητά του. Παρακάτω λοιπόν παρουσιάζεται πως έγινε χρήση μόνο της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων για βελτιστοποίηση με χρήση του λογισμικού Solidworks.

6.2.2 Βελτιστοποίηση με χρήση Design Study

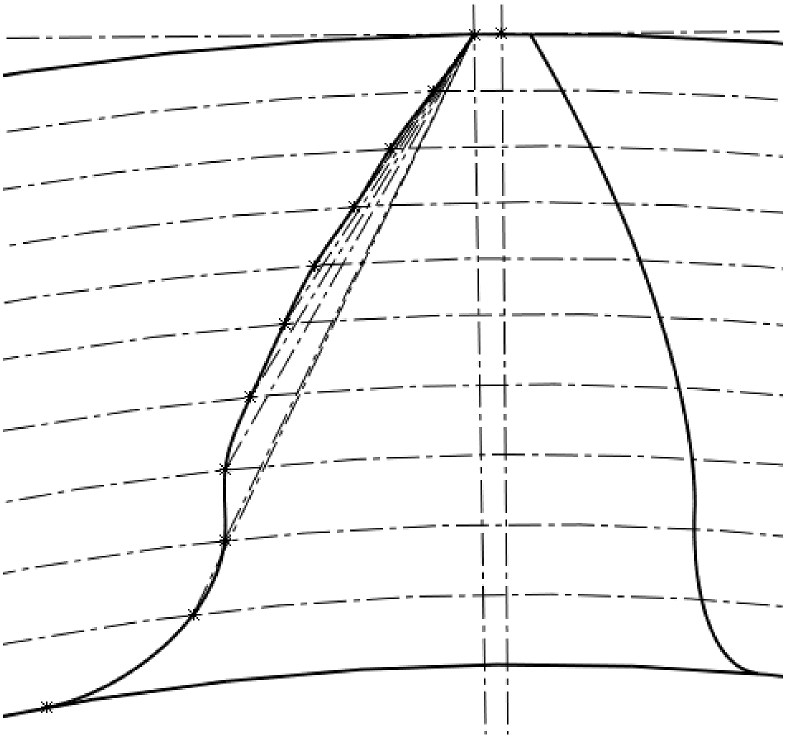
Για την βελτιστοποίηση με χρήση πεπερασμένων στοιχείων, έγινε ξανά χρήση της λειτουργίας *Design Study*, αυτή την φορά με ζητούμενο την βελτιστοποίηση ως προς την τάση στον πόδα της εργαζόμενης κατατομής και την τάση στο συνολικό μοντέλο προς αποφυγή ακραίων γεωμετριών με απότομες αλλαγές κλίσης.

Θεωρώντας δεδομένο το ελάχιστο δυνατό πάχος κεφαλής, η μόνη μεταβλητή που έμενε να τροποποιηθεί ήταν η κλίση. Με σκοπό την δημιουργία, αυτή την φορά, καμπύλης και όχι ευθείας γραμμής χρειάζονταν περισσότερα σημεία με διαφορετικές κλίσεις. Για τον λόγο αυτό δημιουργήθηκε ένα πλήρως παραμετρικό μοντέλο με χρήση της λειτουργίας *Design Table*. Σε αυτό το μοντέλο παράγονταν τέσσερις εσωτερικοί κύκλοι μεταξύ του r_f και του r_0 σε ίσες αποστάσεις (δηλαδή 0.2 φορές η ποσότητα mC_f) και άλλοι τέσσερις μεταξύ του r_0 και του r_k επίσης σε ίση μεταξύ τους απόσταση (δηλαδή 0.2 φορές την ποσότητα mC_k) , συμπεριλαμβάνοντας και τον r_0 υπήρχαν εννέα εσωτερικοί κύκλοι μεταξύ r_f και r_k. Σε αυτούς τους κύκλους τοποθετήθηκαν σημεία, συνεπώς υπήρχαν εννέα εσωτερικά ανεξάρτητα σημεία. Επίσης τοποθετήθηκαν εξαρτημένα σημεία στον r_k και στον r_f. Το σημείο στον r_k ήταν πάντοτε σε απόσταση s_k = 0.2m. Και τα έντεκα σημεία ενώθηκαν με μία καμπύλη (spline) η οποία απαιτήθηκε να είναι εφαπτόμενη στον r_f (εξάρτηση του σημείου στον r_f). Τα εννέα ανεξάρτητα σημεία ορίστηκαν με μέτρηση της γωνίας που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το εκάστοτε σημείο με το σημείο που βρίσκεται στον r_k με τον άξονα του οδόντα. Οι εννέα αυτές γωνίες ήταν και οι μεταβλητές του συστήματος. Σημείο εκκίνησης των προσομοιώσεων ήταν η ίδια εξειλιγμένη καμπύλη της εργαζόμενης κατατομής. Για την εκκίνηση των προσομοιώσεων από την εξειλιγμένη καμπύλη ήταν αναγκαίο να οριστούν οι τιμές των γωνιών ώστε τα σημεία να τοποθετούνταν έτσι ώστε η καμπύλη που διέρχεται από αυτά να είναι η εξειλιγμένη καμπύλη. Για να γίνει αυτό, σχεδιάστηκε η εξειλιγμένη καμπύλη με χρήση εξισώσεων και στην συνέχεια ορίστηκαν σημεία τομής της με τους εσωτερικούς κύκλους. Στην συνέχεια τα σημεία αυτά ενώθηκαν με ευθύγραμμα τμήματα με το σημείο του r_k και μετρήθηκε η γωνία που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα με τον άξονα του οδόντα. Οι τιμές που μετρήθηκαν εμφανίζονται στον επόμενο πίνακα, ξεκινώντας από το σημείο με τη μεγαλύτερη ακτίνα και προχωρώντας διαδοχικά σε μικρότερες.

Πίνακας 6.2: Αντίστοιχες τιμές γωνιών για παραγωγή εξειλιγμένης καμπύλης.

Γωνία	Τιμή (°)
α_1	27.7
α_2	26.6
α_3	25.4
α_4	24.2
α_5	22.9
α_6	21.1
α_7	19.2
α_8	16.7
α_9	15.3

Στην συνέχεια έπρεπε να οριστούν οι περιορισμοί της βελτιστοποίησης, αυτοί οι περιορισμοί είχαν κάνει με δημιουργία υποκοπών λειτουργίας υλικού μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων και τελικά θέτοντας εύρος από τις τιμές της εξειλιγμένης μέχρι τις 45° για κάθε μεταβλητή, χωρίς προκαθορισμένο βήμα το αποτέλεσμα της βελτιστοποιημένης καμπύλης φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 6.2: Βελτιστοποιημένη καμπύλη 11 σημείων.

Οι τιμές των γωνιών για αυτήν την καμπύλη φαίνονται στον επόμενο πίνακα, ξεκινώντας από τη μεγαλύτερη ακτίνα και προχωρώντας διαδοχικά στις αμέσως μικρότερες.

Πίνακας 6.3: Τιμές μεταβλητών βελτιστοποιημένης καμπύλης έντεκα σημείων.

Γωνία	Τιμή (°)
α_1	35.7
α_2	36.6
α_3	35.2
α_4	35.1
α_5	33.7
α_6	32.1
α_7	30.2
α_8	26.7
α_9	26.3

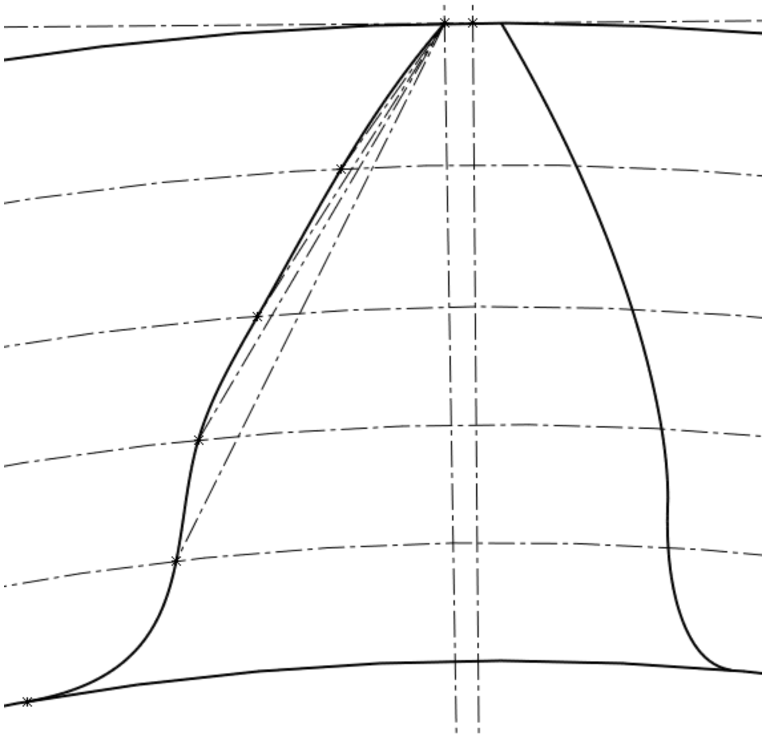
Είναι ξεκάθαρο πως η παραπάνω καμπύλη δεν είναι πρακτικά εφαρμόσιμη, καθώς δεν είναι πλήρως ομαλή. Η μικρές αυτές μεταβολές στην κλίση δεν είναι αρκετές για να συγκεντρώσουν τάση ώστε το μοντέλο να υπερβαίνει τους περιορισμούς ωστόσο παρουσιάζει δυσκολία κατασκευής και σίγουρα αν εργαζόταν θα παρουσίαζε περισσότερα προβλήματα από όσα θα έλυνε.

Η διατάραξη της ομαλότητας της καμπύλης οφείλεται στο πλήθος των σημείων, για αυτό τον λόγο επιλέχθηκε να δημιουργηθεί μια νέα, απλούστερη καμπύλη, παρεμβάλλοντας την προηγούμενη με λιγότερα σημεία. Τα εξαρτημένα σημεία προφανώς διατηρήθηκαν ως έχουν, ενώ για τα ανεξάρτητα χρησιμοποιήθηκαν συνολικά τέσσερα σημεία, ένα στον r_0, ένα μεταξύ r_0 και r_k σε ακτίνα $0.5(r_k-r_0)$ και 2 μεταξύ r_f και r_0 σε ίση μεταξύ τους απόσταση και ίση με $⅓(r_0-r_f)$. Για τον προσδιορισμό των νέων μεταβλητών εφαρμόζεται η ίδια διαδικασία που εφαρμόστηκε στον προσδιορισμό των σημείων για την εξειλιγμένη. Τελικά οι γωνίες εκκίνησης για τη νέα βελτιστοποιημένη καμπύλη φαίνονται στον επόμενο πίνακα, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις ξεκινώντας από τη μεγαλύτερη ακτίνα και διαδοχικά προχωρώντας στις επόμενες.

Πίνακας 6.4: Τιμές μεταβλητών για καμπύλη εκκίνησης τεσσάρων σημείων.

Γωνία	Τιμή (°)
α_1	35.78
α_2	34.70
α_3	32.09
α_4	26.10

Εφαρμόζοντας ξανά την διαδικασία βελτιστοποίησης για με τα τέσσερα ανεξάρτητα σημεία αντί για εννέα, πάλι σε εύρος από αυτές τις τιμές εκκίνησης και γύρω από αυτές καθώς ήδη βρέθηκε βέλτιστο σε αυτήν την περιοχή προκύπτει η βελτιστοποιημένη καμπύλη που υπακούει στον βασικό νόμο οδοντώσεων που εμφανίζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 6.3: Βελτιστοποιημένη καμπύλη τεσσάρων ανεξάρτητων σημείων.

Ακολουθούν οι τιμές των μεταβλητών της βελτιστοποιημένης καμπύλης.

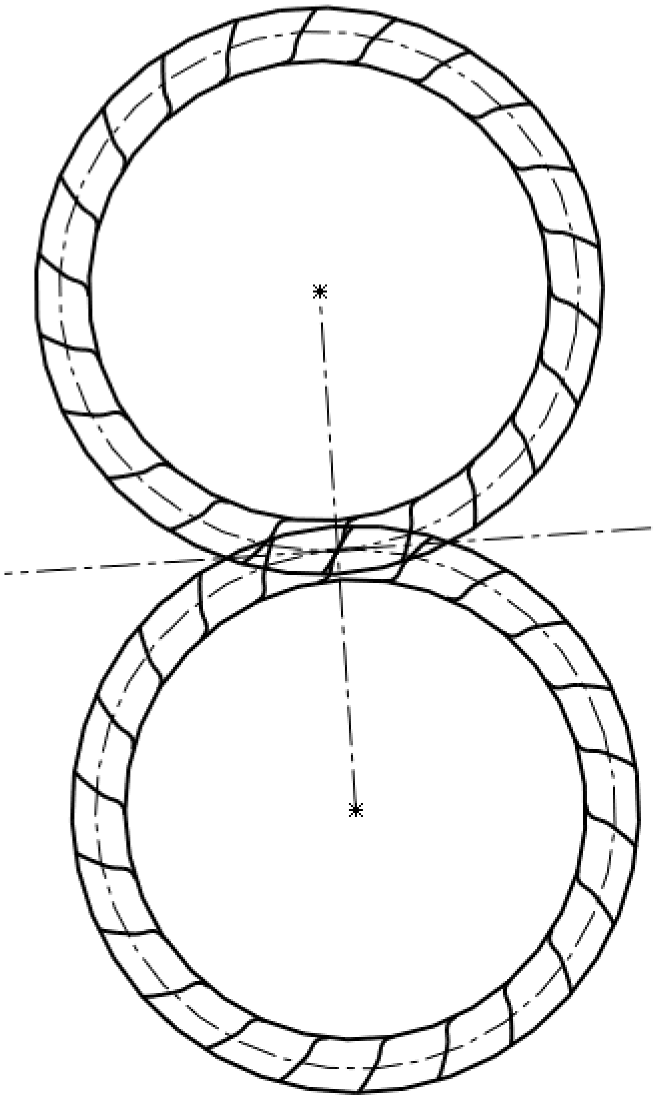
Πίνακας 6.5: Τιμές μεταβλητών βελτιστοποιημένης καμπύλης και σύγκριση προσέγγισης τεσσάρων ανεξάρτητων σημείων.

Γωνία	Τιμή (°) βελτιστοποιημένη	Τιμή (°) προσέγγισης
α_1	35.85	35.78
α_2	33.02	34.70
α_3	31.05	32.09
α_4	26.99	26.10

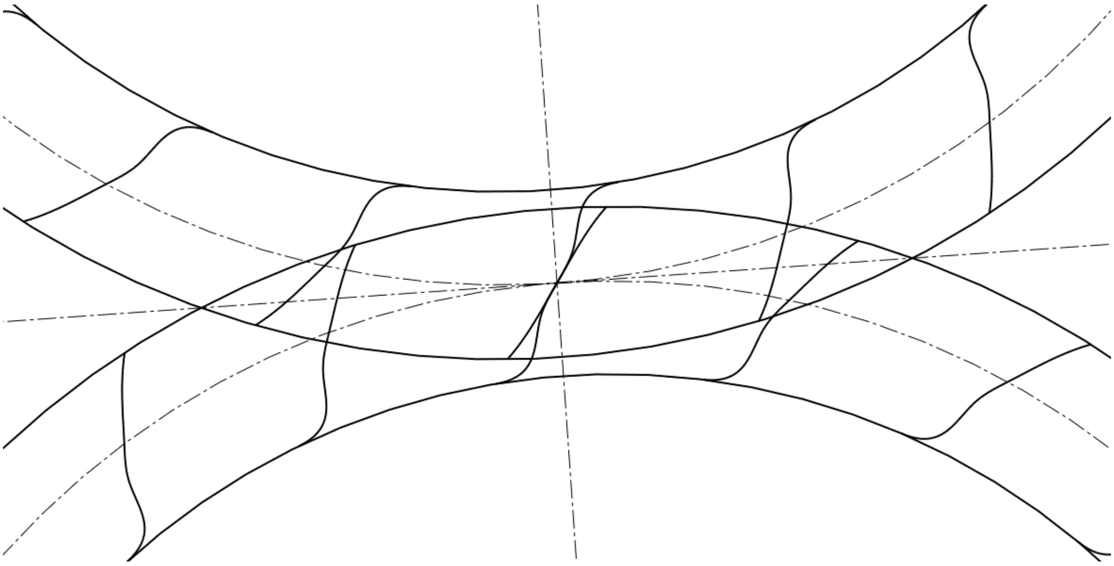
6.3 Ανάλυση βελτιστοποιημένης καμπύλης

6.3.1 Έλεγχος υποκοπές λειτουργίας

Σε πραγματικές περιπτώσεις και αριθμητικά υπολογιζόμενων κατατομών δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί απόλυτη ταύτιση στο σημείο συνεργασίας μεταξύ τους, για αυτό πρέπει εκ των προτέρων να γίνουν κάποιες παραδοχές. Για την παρούσα ανάλυση θεωρήθηκε ότι επαφή βρίσκεται μεταξύ δύο κατατομών που απέχουν απόσταση μικρότερη από 10μm, όπως και υποκοπές λειτουργίας δημιουργούνται όταν βρίσκεται η μία κατατομή μέσα στην άλλη σε απόσταση μεγαλύτερη από 10μm. Για αρχή έγινε έλεγχος σχετικά με τους οδόντες σαν οντότητες αν θα υπάρχουν υποκοπές λειτουργίας. Αναλυτικά τα επόμενα σχήματα.



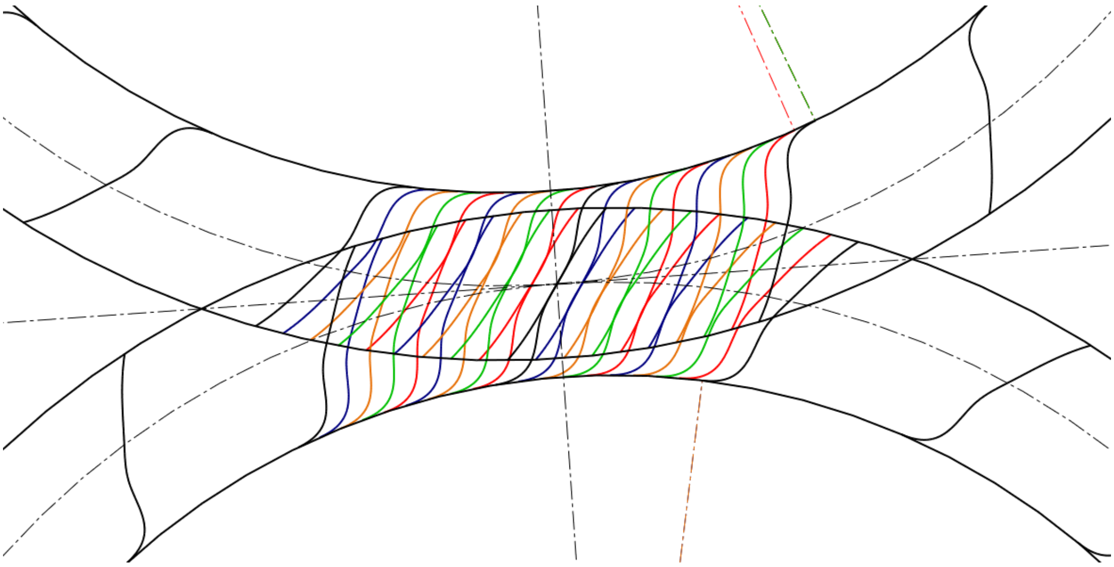
Σχήμα 6.4: Σχηματική αναπαράσταση δύο ίδιων οδοντωτών τροχών σε συνεργασία.



Σχήμα 6.5: Σχηματική αναπαράσταση δύο ίδιων οδοντωτών τροχών σε συνεργασία με εστίαση στο σημείο συνεργασίας.

Για τα δύο προηγούμενα σχήματα, καθώς και για τα επόμενα που αναφέρονται στην περίπτωση που η μη-εργαζόμενη κατατομή εργάζεται υποτίθεται αριστερόστροφη περιστροφή, αντίθετα με τη μέχρι τώρα παραδοχή δεξιόστροφης περιστροφής.

Είναι ξεκάθαρο από τα δύο προηγούμενα σχήματα, πως οι ίδιοι οι οδόντες μπορούν να λειτουργήσουν, τα ερώτημα που τίθεται τώρα όμως είναι αν θα μπορούν να λειτουργήσουν χωρίς υποκοπές λειτουργίας, το επόμενο σχήμα βοηθά στην εξαγωγή απαραίτητων συμπερασμάτων.



Σχήμα 6.6: Έλεγχος υποκοπών λειτουργίας κατά την συνεργασία δύο ίδιων οδοντωτών τροχών.

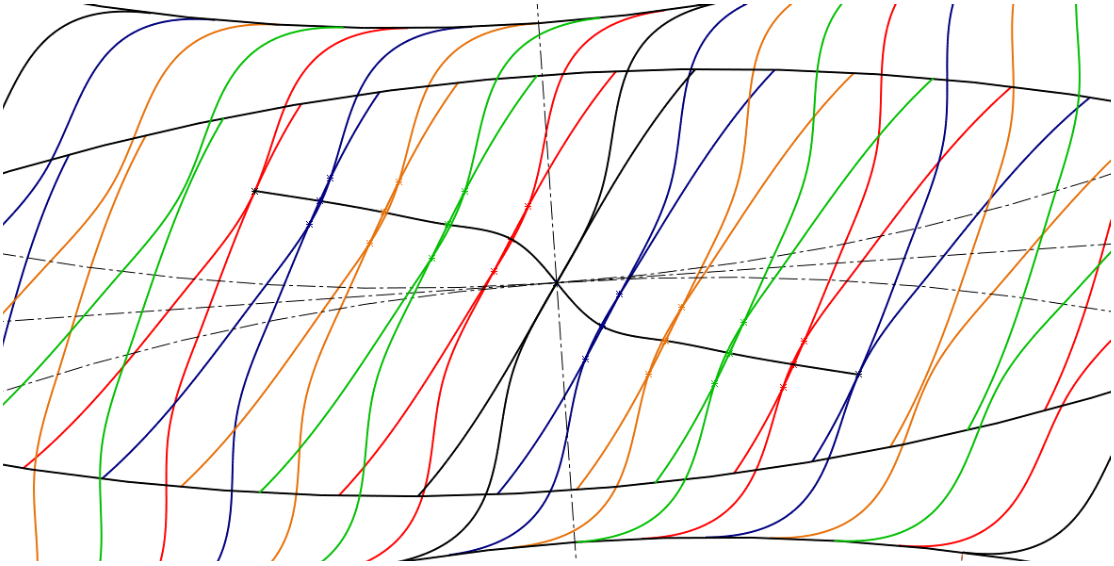
Στο προηγούμενο σχήμα εικονίζεται η συμπεριφορά δύο ίδιων οδοντωτών τροχών αν αυτοί συνεργάζονταν. Με μαύρο χρώμα φαίνονται οι πραγματικές θέσεις των οδόντων, ενώ οι έγχρωμες θέσεις είναι θέσεις που αντιστοιχούν σε διάφορα στιγμιότυπα κατά την περιστροφή του. Ενδεικτικά έχουν παρεμβληθεί ανάμεσα από δύο διαδοχικούς οδόντες οκτώ στιγμιότυπα, που ισαπέχουν μεταξύ τους. Λαμβάνοντας τις απαραίτητες μετρήσεις και με δεδομένη την παραδοχή ότι επαφή θεωρείται η απόσταση που είναι μικρότερη από 10μm, που έγινε παραπάνω, γίνεται αντιληπτό πως η επαφή ξεκινάει στην πρώτη κόκκινη καμπύλη (πρώτη από αριστερά προς τα δεξιά) και σταματάει στην τελευταία μπλε καμπύλη (τελευταία από αριστερά προς τα δεξιά επίσης). Συνολικά υπάρχουν έντεκα στιγμιότυπα σε επαφή και αφού ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς οδόντες υπάρχουν οκτώ (δέκα μαζί με τις θέσεις από όπου ξεκινάει ένας οδόντας και εκείνη που καταλήγει να αντικαταστήσει πλήρως τον επόμενο), εξασφαλίζεται πως δεν χάνεται ποτέ η επαφή κατά την συνεργασία.

Με προσεκτική παρατήρηση φαίνεται πως σε κάποια εσωτερικά τμήματα υπάρχουν δύο σημεία τομής, μεταξύ των δύο καμπύλων, ωστόσο η μέγιστη απόστασή τους είναι μικρότερη από 10μm σε όλες τις περιπτώσεις, οπότε θεωρήθηκε πως σε αυτά τα σημεία υπάρχει επαφή κι όχι δημιουργία υποκοπών λειτουργίας. Συγκεκριμένα σε αυτές τις περιπτώσεις το σημείο επαφής θεωρήθηκε πως υπάρχει στην μέση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει αυτά τα σημεία τομής.

Επίσης σε κάποια ακραία στιγμιότυπα φαίνεται να μην υπάρχει επαφή, με την ίδια παραδοχή πως αν απέχουν απόσταση μικρότερη από 10μm θεωρήθηκε πως εφάπτονται και το σημείο επαφής τους είναι στη μέση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία τομής της κατατομής κάθε τροχού και της κοινής καθέτου των δύο κατατομών.

6.3.2 Τροχιά Επαφών

Ενώνοντας τα σημεία επαφών όπως περιγράφηκαν προηγουμένως προκύπτει η τροχιά επαφών.



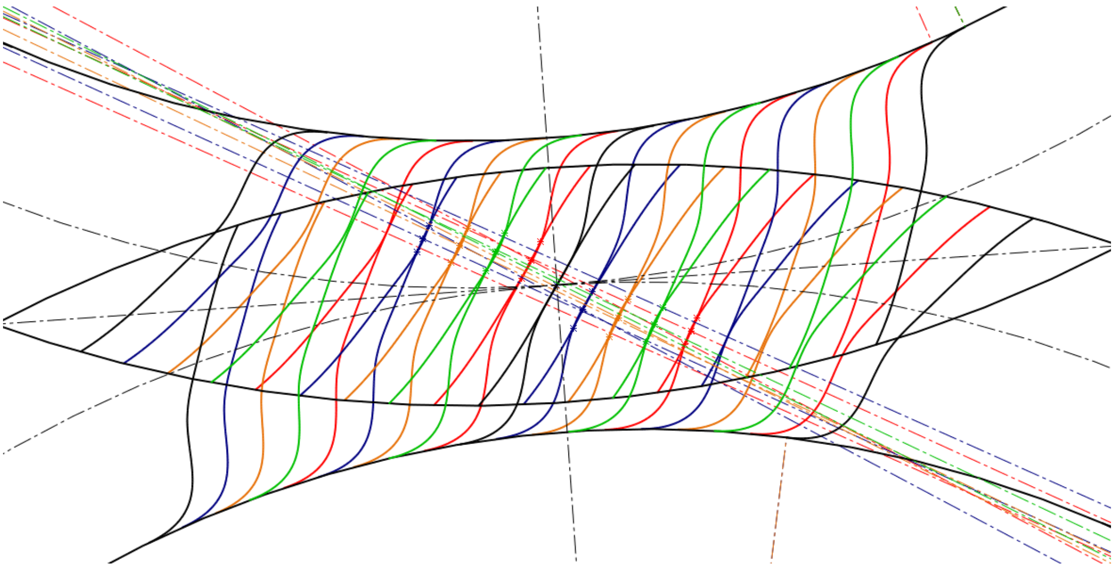
Σχήμα 6.7: Τροχιά επαφών βελτιστοποιημένης καμπύλης.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τροχιά επαφών πλησιάζει στο να είναι δύο ευθείες παράλληλες ένα στιγμιότυπο μακριά από το σημείο κύλισης και γενικότερα είναι μια ομαλή καμπύλη χωρίς απότομες αλλαγές στην κλίση. Μια τέτοια τροχιά επαφών μας δείχνει την ομαλότητα της λειτουργίας της συγκεκριμένης κατατομής σε περίπτωση που ακολουθεί και τον βασικό νόμο οδοντώσεων.

Η εξειλιγμένη καμπύλη δημιουργεί ευθεία τροχιά επαφών κατά την συνεργασία της, οπότε η παραπάνω τροχιά επαφών πλησιάζει την συμπεριφορά της εξειλιγμένης καμπύλης.

6.3.3 Νόμος οδόντωσης

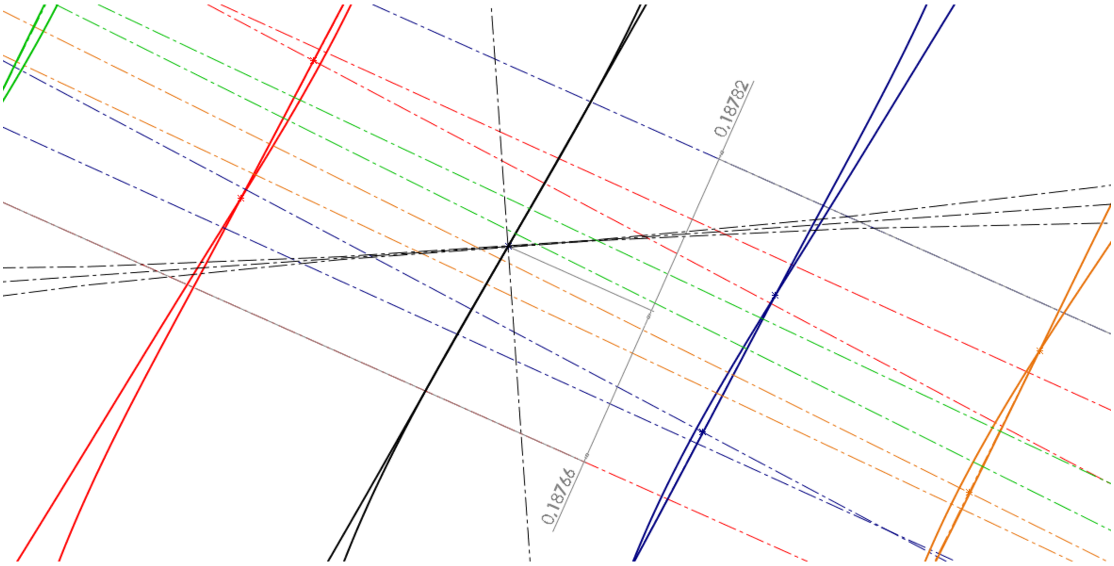
Για να εξασφαλίζεται η ομαλή μετάβαση ισχύος όταν μια κατατομή συνεργάζεται με μία άλλη θα πρέπει να ικανοποιείται ο βασικός νόμος των οδοντώσεων, δηλαδή η κοινή κάθετη των δύο κατατομών να διέρχεται από το σημείο κύλισης. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, σε καταστάσεις που παύουν να είναι θεωρητικές δεν μπορεί να επιτευχθεί κάτι απόλυτα, οπότε πρέπει να οριστεί κάποιο περιθώριο. Ακολουθεί σχήμα που παρουσιάζει τις κοινές καθέτους των κατατομών που, όπως περιγράφηκε πιο πάνω, είναι σε επαφή.



Σχήμα 6.8: Οι κοινές κάθετοι στις συνεργαζόμενες κατατομές.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα οι κοινές κάθετοι των συνεργαζόμενων κατατομών βρίσκονται όλες κοντά στο σημείο κύλισης, ωστόσο για να συμπεράνουμε αν όντως ικανοποιείται ο νόμος της οδόντωσης πρέπει να εξετάσουμε τις αποστάσεις, με εστίαση λοιπόν στο σημείο κύλισης προκύπτει το σχήμα 6.9.

Στο σχήμα 6.9 αναγράφονται οι διαστάσεις των ευθειών που απέχουν περισσότερο από όλες από το σημείο κύλισης, αυτές προφανώς αντιστοιχούν στα δύο πιο ακραία στιγμιότυπα και είναι περίπου ίσες (διαφέρουν από το τέταρτο δεκαδικό ψηφίο και μετά). Η μεγαλύτερη από τις δύο είναι 0.18782mm, δηλαδή το 8.35% του συνολικού ύψους.



Σχήμα 6.9: Κοινές κάθετοι συνεργαζόμενων κατατομών με εστίαση στο σημείο κύλισης.

Είναι σαφές πως όταν οι κατατομές φτάσουν να συνεργαστούν στο σημείο κύλισης, το κοινό τους σημείο είναι το ίδιο το σημείο κύλισης και άμεσα η κοινή κάθετη διέρχεται από αυτό.

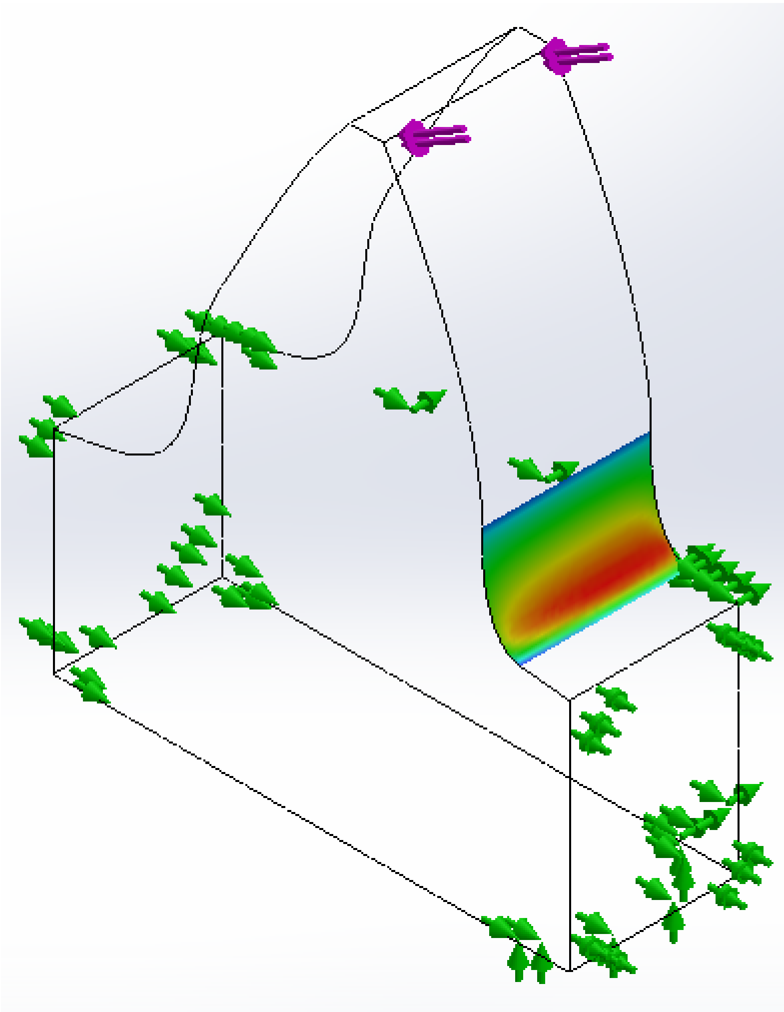
Συνεπώς μπορούμε να πούμε πως ο βασικός νόμος των οδοντώσεων εν γένει ισχύει αν και ένα πιο λεπτομερές μοντέλο αναμένεται να βελτιώσει την παρατηρούμενη απόκλιση.

6.4 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

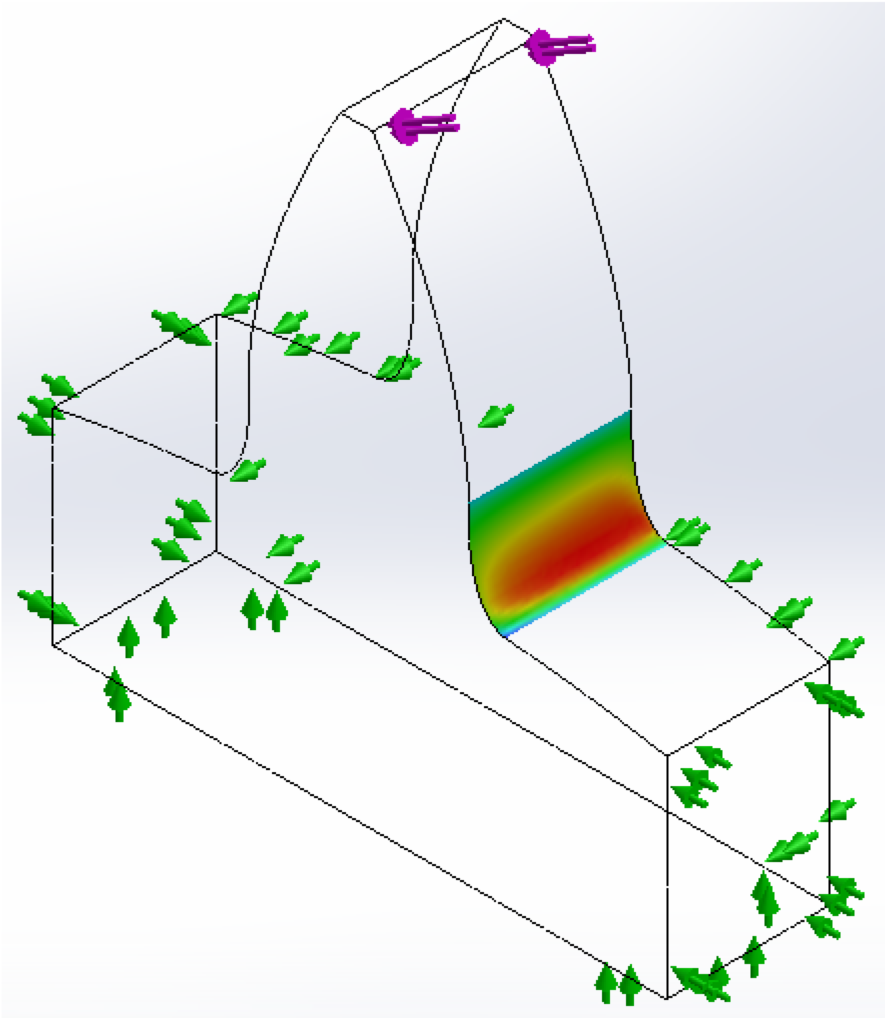
Στην συνέχεια ο οδόντας που προκύπτει από την βελτιστοποίηση συγκρίνεται ως προς την αντοχή του με έναν αντίστοιχο συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης ίδιου πάχους καθώς και με έναν κλασικό τυπικό συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης.

Πίνακας 6.6: Σύγκριση οδόντα βελτιστοποιημένης καμπύλης με συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης 20° ίδιου πάχους κεφαλής.

Καμπύλη	Μέγιστη Τάση στον Πόδα (MPa)
Βελτιστοποιημένη Καμπύλη	4.89
Συμμετρικός Οδόντας Εξειλιγμένης 20° Ίδιου Πάχους Κεφαλής	7.62
Διαφορά (%)	35.83



Σχήμα 6.10: Γραφική απεικόνιση τάσεων στον οδόντα της βελτιστοποιημένης καμπύλης.



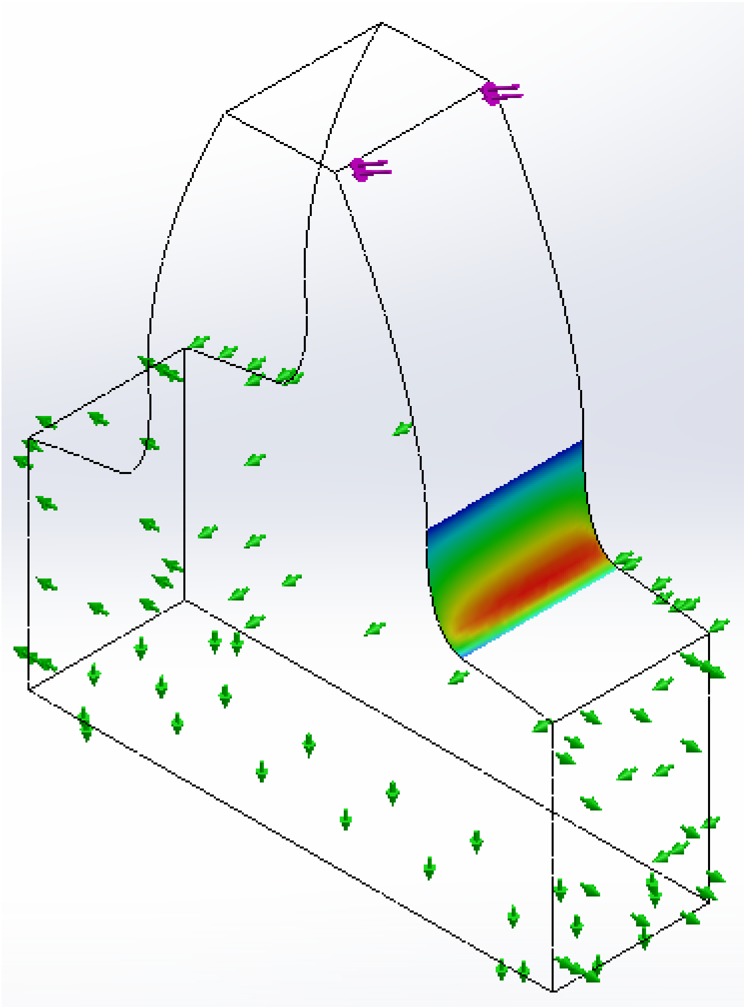
Σχήμα 6.11: Γραφική απεικόνιση τάσεων στον συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης καμπύλης 20°, πάχους κεφαλής ίσο με 0.2 φορές το module της οδόντωσης.

Όπως είναι εμφανές στον πίνακα 6.6, ο ασύμμετρος οδόντας που προκύπτει με χρήση της βελτιστοποιημένης καμπύλης που προέκυψε κατά την πιο πάνω ανάλυση, είναι περίπου 36% ανθεκτικότερος από έναν οδόντα εξειλιγμένης 20° με ίδιο πάχος κεφαλής.

Στην συνέχεια γίνεται σύγκριση με τον τυπικό συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης 20°, χωρίς μετατροπή.

Πίνακας 6.7: Σύγκριση οδόντα βελτιστοποιημένης καμπύλης με τυπικό συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης 20°.

Καμπύλη	**Μέγιστη Τάση στον Πόδα (MPa)**
Βελτιστοποιημένη Καμπύλη	4.89
Τυπικός Συμμετρικός Οδόντας Εξειλιγμένης 20°	5.14
Διαφορά (%)	4.86



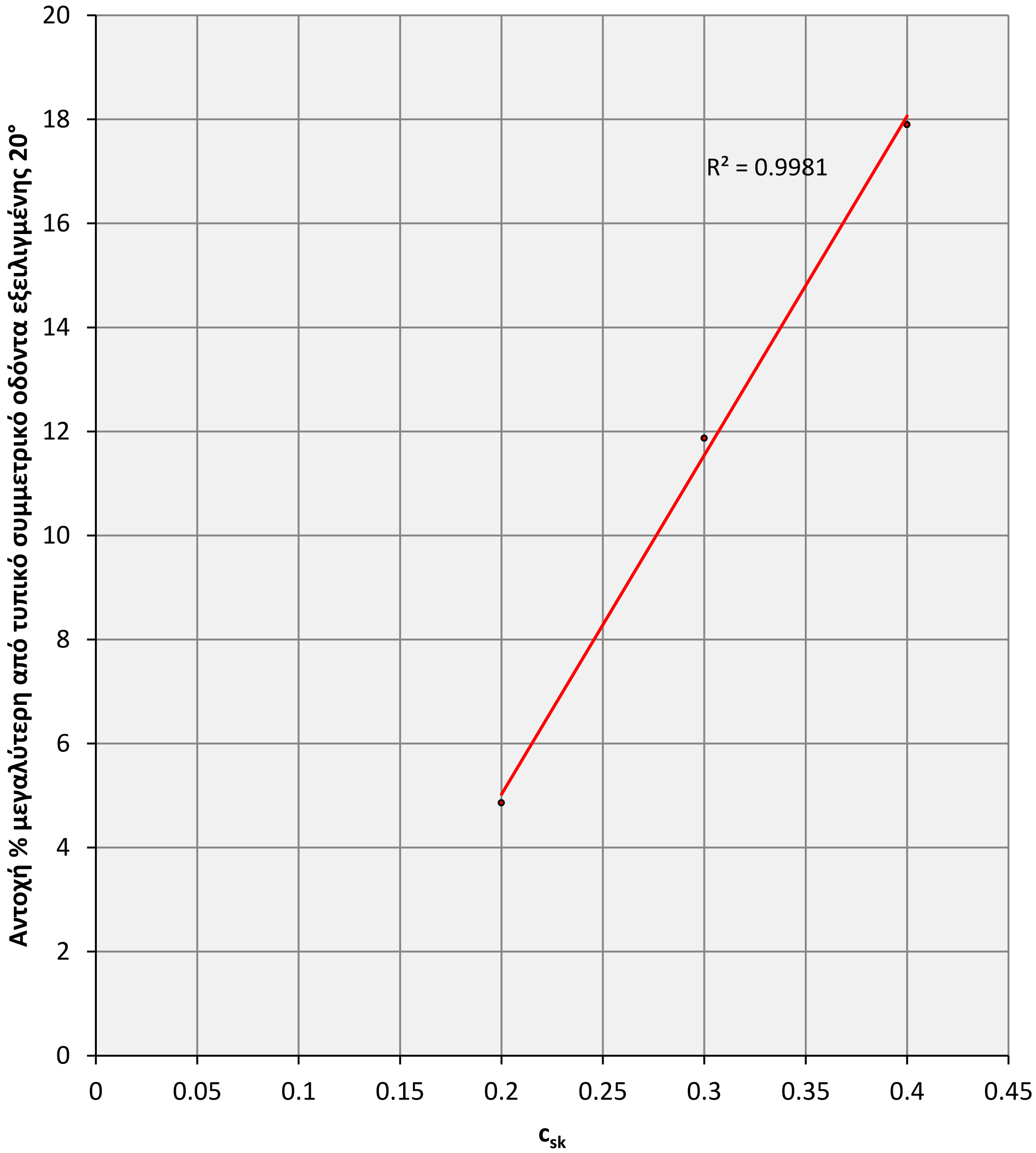
Σχήμα 6.12: Γραφική απεικόνιση τάσεων στον τυπικό συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης καμπύλης 20°.

Ο οδόντας που προκύπτει με χρήση της βελτιστοποιημένης καμπύλης στην μη-εργαζόμενη κατατομή είναι σχεδόν 5% ανθεκτικότερος από έναν τυπικό συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης. Η διαφορά αυτή έγκειται κυρίως στο γεγονός ότι το πάχος κεφαλής του οδόντα που έχει εφαρμοστεί η βελτιστοποιημένη καμπύλη είναι μόλις το 27.8% του τυπικού συμμετρικού οδόντα, γεγονός που εξηγεί την διαφορά.

Στη συνέχεια δοκιμάζεται η ίδια βελτιστοποιημένη καμπύλη σε οδόντες με μεγαλύτερο πάχος κεφαλής ώστε να προσδιοριστεί η βελτίωση της αντοχής σε συνδυασμό με το πάχος κεφαλής που όπως αποδείχθηκε στην ανάλυση ευαισθησίας, αυξάνοντας το πάχος κεφαλής, αυξάνεται και η αντοχή. Θα εφαρμοστεί πάχος κεφαλής 0.3 και 0.4 φορές το module της οδόντωσης. Τα αποτελέσματα φαίνονται των προσομοιώσεων φαίνονται συγκεντρωτικά στον επόμενο πίνακα. Για τιμές του πάχους κεφαλής μεγαλύτερες από 0.4 φορές το module της οδόντωσης η συγκεκριμένη γεωμετρία παρουσιάζει προβλήματα, άρα δεν έχει νόημα να μελετηθεί.

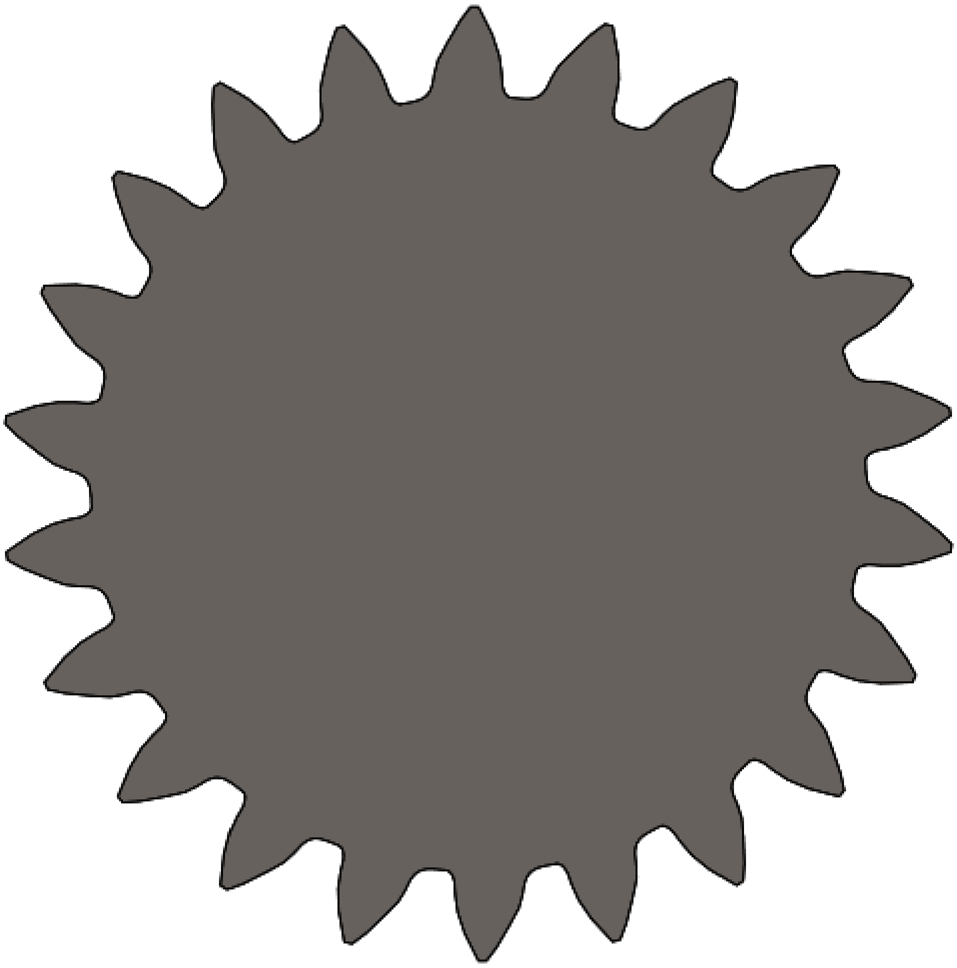
Πίνακας 6.8: Αύξηση αντοχής και σε συνάρτηση με το πάχος κεφαλής.

Πάχος Κεφαλής	Μέγιστη Τάση στον Πόδα (MPa)	Διαφορά με Τυπικό Συμμετρικό Οδόντα (%)
0.2 φορές το module	4.89	4.86
0.3 φορές το module	4.53	11.87
0.4 φορές το module	4.22	17.90

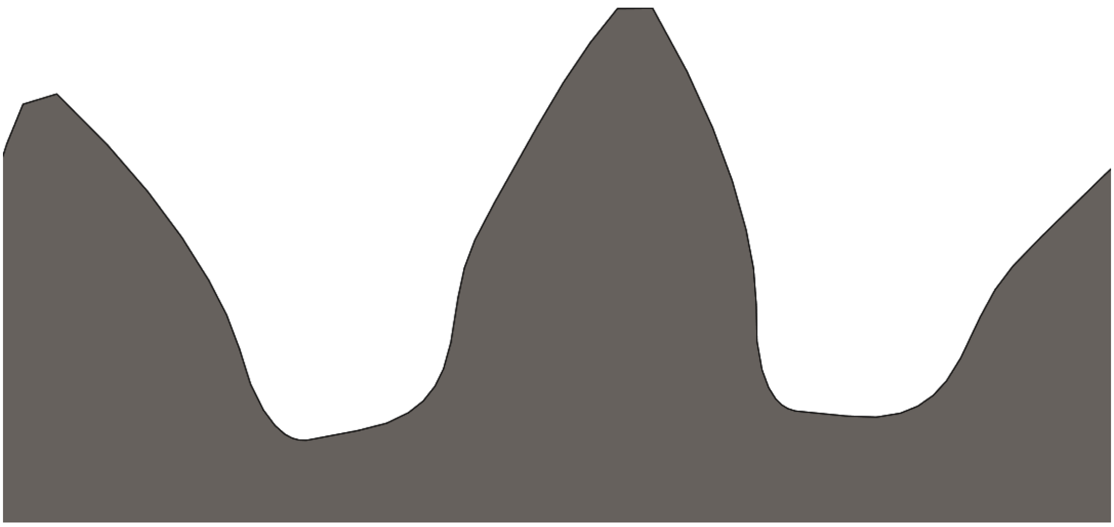


Σχήμα 6.13: % αύξηση αντοχής σε σχέση με τον τυπικό συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένης 20° ως συνάρτηση της αύξησης του πάχους κεφαλής.

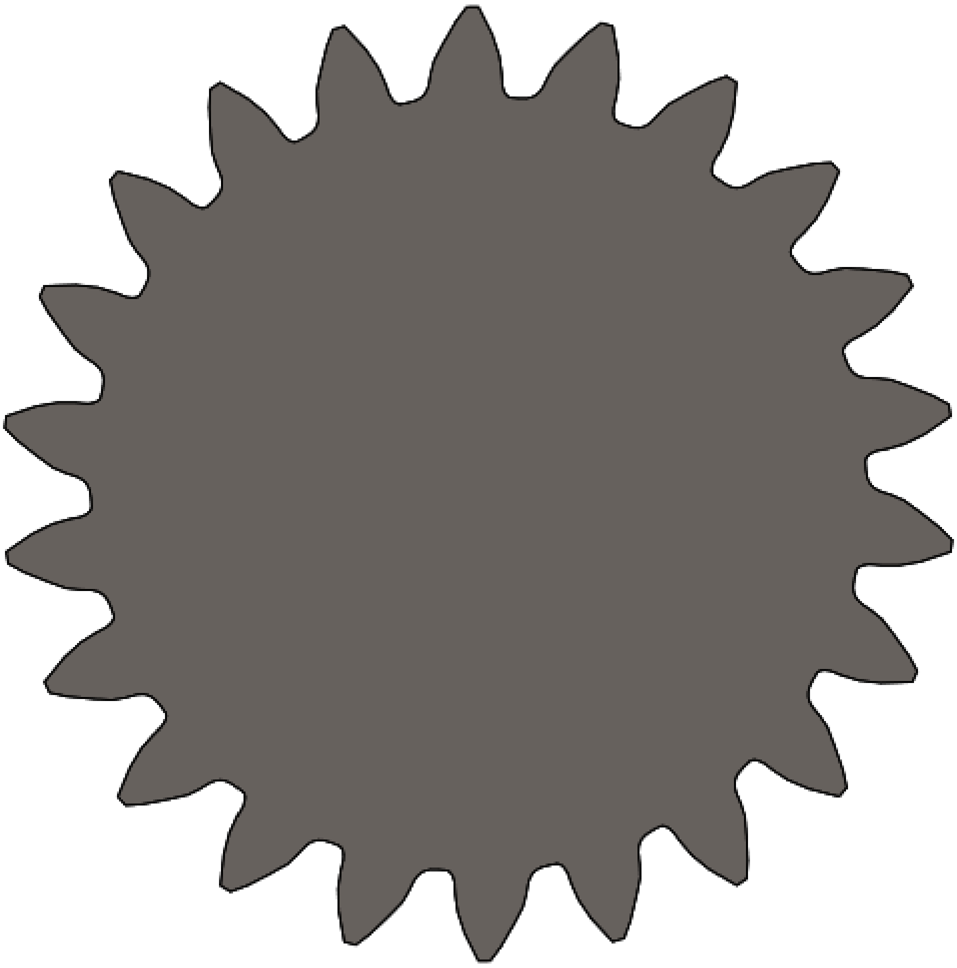
Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και το παραπάνω σχήμα, διπλασιάζοντας το πάχος κεφαλής από τον αρχικό οδόντα, η αντοχή σχεδόν τετραπλασιάζεται, δίνοντας αντοχή περίπου 18% μεγαλύτερη από τον τυπικό οδόντα εξειλιγμένης 20°, ποσοστό ικανό ώστε ο ασύμμετρος οδόντας να θεωρηθεί επαρκής αντικατάσταση και βελτιστοποίηση του υπάρχοντος συστήματος. Επίσης φαίνεται πως η αύξηση της αντοχής αυξάνεται γραμμικά όσο αυξάνεται το πάχος κεφαλής, άρα δίνεται η δυνατότητα να επιλεγεί το επιθυμητό πάχος κεφαλής γνωρίζοντας ανά πάσα στιγμή της αντοχή που αντιστοιχεί σε αυτό. Ακολουθούν σχήματα με πλήρεις οδοντωτούς τροχούς με χρήση της βελτιστοποιημένης καμπύλης στην μη-εργαζόμενη κατατομή.



Σχήμα 6.14: Πλήρης οδοντωτός τροχός βελτιστοποιημένης καμπύλης με πάχος κεφαλής 0.2 φορές το module της οδόντωσης.

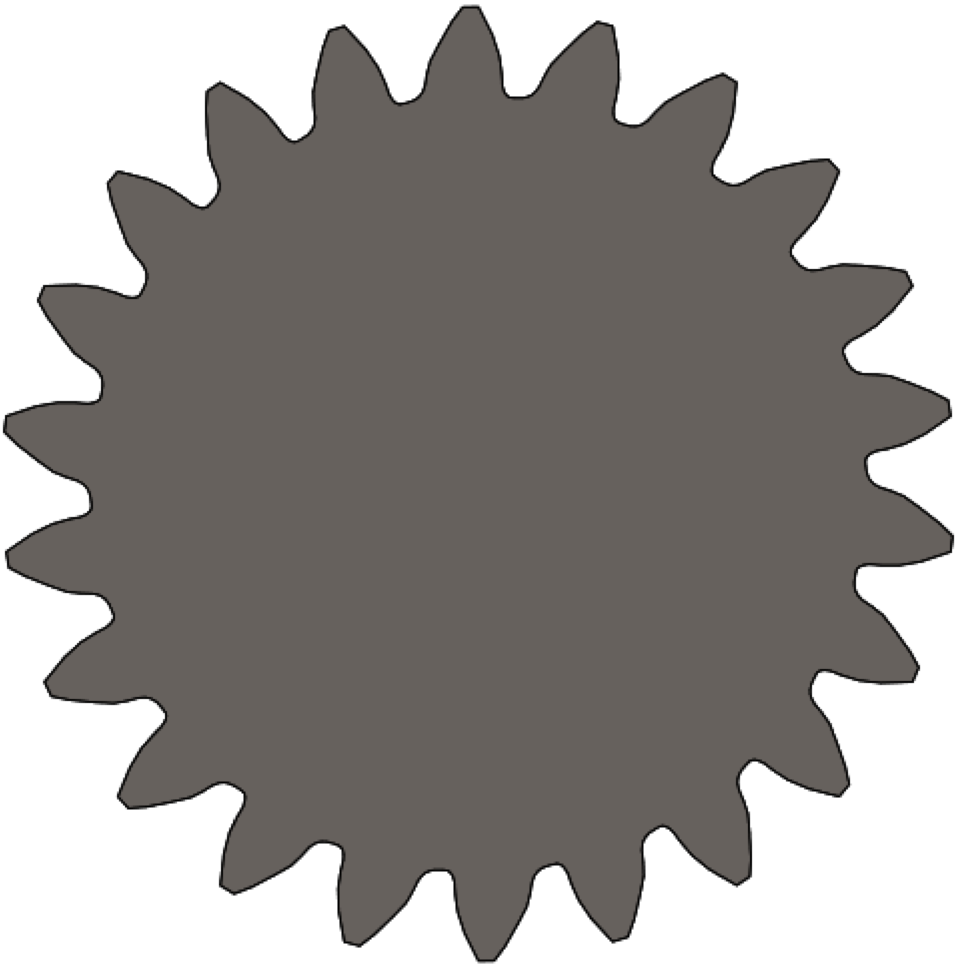


Σχήμα 6.15: Εστίαση στον οδόντα βελτιστοποιημένης καμπύλης με πάχος κεφαλής 0.2 φορές το module της οδόντωσης.

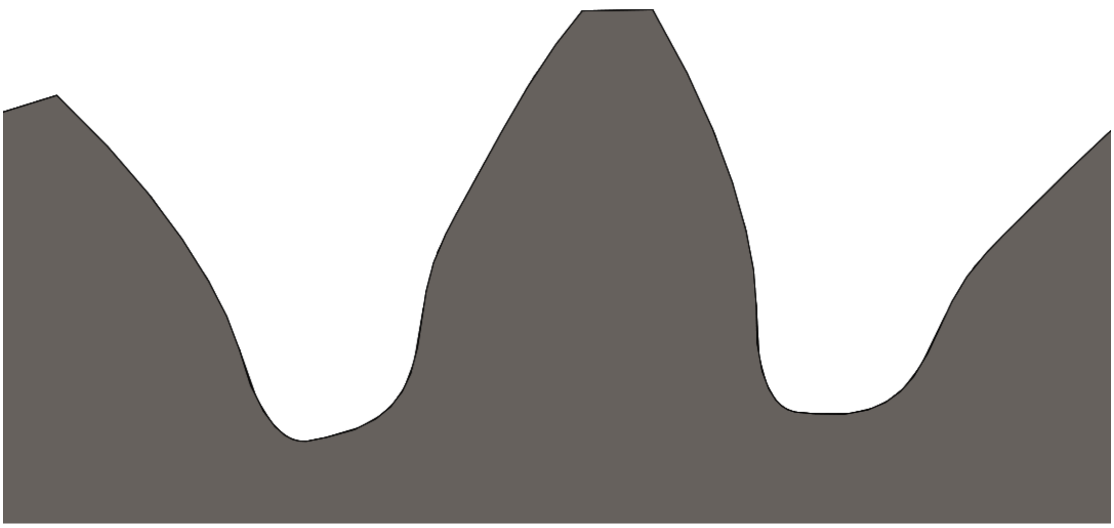


Σχήμα 6.16: Πλήρης οδοντωτός τροχός βελτιστοποιημένης καμπύλης με πάχος κεφαλής 0.3 φορές το module της οδόντωσης.

Σχήμα 6.17: Εστίαση στον οδόντα βελτιστοποιημένης καμπύλης με πάχος κεφαλής 0.3 φορές το module της οδόντωσης.



Σχήμα 6.18: Πλήρης οδοντωτός τροχός βελτιστοποιημένης καμπύλης με πάχος κεφαλής 0.4 φορές το module της οδόντωσης.



Σχήμα 6.19: Εστίαση στον οδόντα βελτιστοποιημένης καμπύλης με πάχος κεφαλής 0.4 φορές το module της οδόντωσης.

7. Συμπεράσματα και μελλοντική μελέτη

Παρότι η παρούσα ανάλυση εισάγει μια σημαντική βελτίωση στον τομέα της μετάδοσης ισχύος μέσω οδοντωτών τροχών, πάντοτε υπάρχει περιθώριο βελτίωσης και αναθεώρησης. Η παρούσα μελέτη πέτυχε:

- Αύξηση της αντοχής του οδόντα της τάξης του 20% σε σχέση με τον τυπικό συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένων καμπυλών και του 36% σε συμμετρικό οδόντα εξειλιγμένων καμπυλών ίδιου πάχους κεφαλής.
- Μείωση του πάχους κεφαλής και αύξηση του πάχους ποδός.
- Η αύξηση του πάχους ποδός οδηγεί σε μεγαλύτερη δυσκαμψία του οδόντα, συνεπώς οι ταλαντώσεις του οδόντα μειώνονται.
- Δημιουργία καμπύλης εκμεταλλευόμενη κάποιες ιδιότητες της εξειλιγμένης καμπύλης.

Ως μελλοντική μελέτη πάνω στην δημιουργία ασύμμετρων οδοντώσεων, αναμένεται να μπορέσουμε να επιλύσουμε τα ακόλουθα ζητήματα:

- Ενδεχόμενη περαιτέρω αύξηση της αντοχής.
- Ενδεχόμενη χρήση διαφορετικής παρεμβολής μεταξύ των σημείων σχεδιασμού (π.χ. καμπύλη Bezier).
- Βελτίωση συμπεριφοράς και εφαρμογής του βασικού νόμου οδοντώσεων.

8. Βιβλιογραφία

1. Θεόδωρος Ν. Κωστόπουλος, Οδοντώσεις και Μειωτήρες Στροφών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2010
2. Lin, T., Ou, H., Li, R., A finite element method for 3D static and dynamic contact/impact analysis of gear drives, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 196, Issues 9–12, 1 February 2007, Pages 1716–1728.
3. Litvin F., Fuentes A., Gear Geometry and Applied Theory, Cambridge University Press, 2004, UK
4. D.P. Townsend, Dudley's Gear Handbook – The Design, Manufacture and Application of Gears, McGraw-Hill, New York, 1992.
5. Spitas C., Spitas V., Amani A., Rajabalinejad M., Parametric investigation of the combined effect of whole depth and cutter tip radius on the bending strength of 20° involute gear teeth, Acta Mech 225, 2014, 361–371.
6. Spitas, V., Spitas, C., Four-parametric design study of the bending strength of circular-fillet versus trochoidal-fillet in gear tooth design using BEM, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 35, April 2007, 163–178.
7. Spitas V., Costopoulos Th., Spitas C., Optimum Gear Tooth Geometry for Minimum Fillet Stress Using BEM and Experimental Verification With Photoelasticity, Journal of Mechanical Design, Volume 128, Issue 5, November 2005, 1159-1164.
8. Atanasovska I., Nikolić-Stanojević V., Influence of addendum modification coefficient on the gear load capacity, Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures: Proceedings of the 16th European Conference of Fracture, Alexandroupolis, Greece, July 3-7, 2006, Volume 10,
9. Spitas, V., Papadopoulos, G.A., Spitas, C., Costopoulos, Th., Experimental investigation of load sharing in multiple gear tooth contact using the stress-optical method of caustics, Strain, Volume 47, Issue Supplement s1, June 2011, 227–e233,.
10. Costopoulos Th., Spitas V., Reduction of gear fillet stresses by using one-sided involute asymmetric teeth, Mechanism and Machine Theory 44 (2009) 1524–1534.
11. Faydor L. Litvin, Qiming Lian, Alexander L. Kapelevich, Asymmetric modified spur gear drives: reduction of noise, localization of contact, simulation of meshing and stress analysis, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 188 (2000) 363-390.

12. Fatih Karpat, Stephen Ekwaro-Osire, Kadir Cavdar, Fatih C. Babalik, Dynamic analysis of involute spur gears with asymmetric teeth, International Journal of Mechanical Sciences 50 (2008) 1598–1610.
13. Alexander Kapelevich, Geometry and design of involute spur gears with asymmetric teeth, Mechanism and Machine Theory 35 (2000) 117-130.
14. Niels L. Pedersen, Improving bending stress in spur gears using asymmetric gears and shape optimization, Mechanism and Machine Theory 45 (2010) 1707–1720.
15. Kapelevich A., Direct Gear Design, CRC Press, 2013, Boca Raton, Florida.
16. C.A. Rogers, H.H. Mabie, C.F. Reinholtz, Design of spur gears generated with pinion cutters, Mechanism and Machine Theory 25 (6) (1990) 623–634.
17. Warren C. Young, Richard G. Budynas, Roark's Formulas for Stress and Strain
18. Drucker, D. C.: The Photoelastic Analysis of Transverse Bending of Plates in the Standard Transmission Polariscope, Trans. ASME, vol. 64, 1942.
19. Mantle, J. B., and T. J. Dolan: A Photoelastic Study of Stresses in U-shaped Members, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., vol. 6, no. 1, 1948.
20. Solidworks Educational Edition, 2012-2013, Solidworks user manual, Dassault Systèmes SolidWorks Corp.
21. Matlab, Getting Started Guide, R2011b, Mathworks.

Παράρτημα 1: Απόκλιση καμπύλων προσαρμογής

Angle(°)	Area A		Area B	
	Interpolation	R^2 (%)	Interpolation	R^2 (%)
0	$4.2574x^{-0.74}$	99.57	$60.166x^2-75.694x+35.629$	99.74
2	$3.8593x^{-0.728}$	99.13	$42.705x^2-56.114x+28.811$	99.79
4	$3.7305x^{-0.69}$	96.75	$30.828x^2-42.542x+23.828$	99.85
6	$3.7165x^{-0.647}$	94.33	$23.178x^2-33.134x+20.089$	98.30
8	$3.6902x^{-0.614}$	92.84	$17.254x^2-26.238x+17.224$	99.93
10	$3.9825x^{-0.545}$	90.34	$13.478x^2-21.334x+14.976$	99.95
12	$3.8801x^{-0.524}$	89.03	$10.635x^2-17.559x+13.151$	99.96
14	$3.9657x^{-0.492}$	87.84	$8.551x^2-14.654x+11.648$	99.97
16	$4.0301x^{-0.462}$	87.85	$7.0065x^2-12.397x+10.397$	99.97
18	$4.1695x^{-0.427}$	85.05	$6.249x^2-10.732x+9.3407$	99.47
20	$4.1542x^{-0.419}$	86.24	$5.0283x^2-9.0778x+8.409$	99.40
22	$4.3581x^{-0.38}$	83.57	$4.4008x^2-7.9272x+7.625$	99.44
24	$4.3823x^{-0.361}$	81.48	$3.5789x^2-6.776x+6.9204$	99.32
26	$4.5675x^{-0.325}$	79.30	$3.2047x^2-5.9708x+6.3164$	99.36
28	$4.4473x^{-0.326}$	83.35	$2.6828x^2-5.1597x+ 5.7718$	99.25
30	$4.5916x^{-0.308}$	79.85	$2.4636x^2-4.583x+5.297$	99.30

Angle(°)	Compression		Chipping	
	Interpolation	R^2 (%)	Interpolation	R^2 (%)
0	$-38.236x^2+50.125x-27.037$	98.06	$0.7484x^{-0.679}$	99.46
2	$-26.888x^2+36.895x-21.507$	98.40	$0.6744x^{-0.739}$	99.74
4	$-15.461x^2+25.149x-16.968$	98.91	$0.6387x^{-0.737}$	99.83
6	$-14.883x^2+21.466x-14.15$	98.38	$0.5987x^{-0.745}$	99.71
8	$-9.6278x^2+15.515x-11.362$	98.76	$0.5714x^{-0.746}$	99.79
10	$-6.446x^2+11.429x-9.243$	98.04	$0.5507x^{-0.751}$	99.89
12	$-5.2344x^2+9.3737x-7.6832$	98.76	$0.5311x^{-0.747}$	99.81
14	$-3.2764x^2+7.0281x-6.3277$	98.71	$0.5114x^{-0.757}$	99.85
16	$-3.5757x^2+6.139x-5.2793$	97.60	$0.502x^{-0.751}$	99.89
18	$-3.2442x^2+5.0356x-4.3436$	95.31	$0.4902x^{-0.75}$	99.87
20	$-1.6455x^2+3.4238x-3.4964$	94.31	$0.4824x^{-0.744}$	99.83
22	$-1.564x^2+2.8476x-2.8608$	93.83	$0.474x^{-0.741}$	99.81
24	$-0.8196x^2+2.0652x-2.3295$	92.47	$0.4686x^{-0.734}$	99.81
26	$-0.4537x^2+1.4854x-1.8649$	89.73	$0.462x^{-0.732}$	99.81
28	$-0.8695x^2+1.5343x-1.5566$	90.06	$0.4557x^{-0.729}$	99.80
30	$-1.6933x^2+1.7167x-1.2867$	90.20	$0.45x^{-0.724}$	99.88

Παράρτημα 2: Κώδικες Matlab

```
function stress =
roark_s_formula(xR,yR,xL,yL,xds,yds,xcs,ycs,xT,yT,f)
%% Variables used
% xR: x-coordinates for root fillet on driving side
% yR: y-coordinates for root fillet on driving side
% xL: x-coordinates for applied load area--assumed very small area
% yL: y-coordinates for applied load area--assumed very small area
% xds: x-coordinates for driving side (without tip arc) from tip to
root
% yds: y-coordinates for driving side (without tip arc) from tip to
root
% xcs: x-coordinates for coast side (without tip arc) from root to
tip
% ycs: y-coordinates for coast side (without tip arc) from root to
tip
% xT: x-coordinates for tip (left-to-right)
% yT: y-coordinates for tip (left-to-right)

%% Tooth Definition
xTooth = [xcs xT xds];
yTooth = [ycs yT yds];

%% Loading Conditions
W = 1;                                    %Load (N)
thick = 1;                                %Gear thickness (mm)

%% Radius of curvature on root fillet
% Radius of curvature for plane curves is the absolute value of
%                       ds     1
%                  r = ---- = ---
%                       dφ     κ
% where s is the length of the curve, φ is the tangential angle and
% κ is the curvature.

if f == 0
    % Tangential angle
    tang = (yR(1)-yR(2))/(xR(1)-xR(2));
    const = yR(1)-tang*xR(1);
    x = -const/tang;
    d = sqrt((xR(1)-x)^2+yR(1)^2);
    phi = acos((xR(1)-x)/d);
    % Curve Length
    tp = length(xR);
    for i = 1:(tp-1)
       s(i) = sqrt((xR(i)-xR(i+1))^2+(yR(i)-yR(i+1))^2);
    end
    S = sum(s);
    r = phi/S;
else
    r = f;
end

%% Center line of tooth
lcs = length(xcs);
lds = length(xds);
d1 = linear_distance(xcs(1),ycs(1),xds(lds),yds(lds));
```

```
d2 = linear_distance(xcs(lcs),ycs(lcs),xds(1),yds(1));
xp1 = xcs(1);
yp1 = ycs(1);
xp2 = xds(1);
yp2 = yds(1);
d3 = linear_distance(xcs(1),ycs(1),xp1,yp1);
d4 = linear_distance(xds(1),yds(1),xp2,yp2);
a1 = (ycs(1)-yds(lds))/(xcs(1)-yds(lds));
b1 = ycs(1)-a1*xcs(1);
a2 = (ycs(lcs)-yds(1))/(xcs(lcs)-xds(1));
b2 = yds(1)-a2*xds(1);
while abs(d3-0.5*d1)>0.01
    xp1 = xp1+0.01;
    yp1 = a1*xp1+b1;
    d3 = linear_distance(xcs(1),ycs(1),xp1,yp1);
end
while abs(d4-0.5*d2)>0.01
    xp2 = xp2-0.01;
    yp2 = a2*xp2+b2;
    d4 = linear_distance(xds(1),yds(1),xp2,yp2);
end

cl = linear_distance(xp1,yp1,xp2,yp2);
acl = (yp2-yp1)/(xp2-xp1);
bcl = yp2-acl*xp2;
xcl = [(((yp1-0.1*cl)-bcl)/acl) (((yp2+0.1*cl)-bcl)/acl)];
ycl = [(yp1-0.1*cl) (yp2+0.1*cl)];

%% Load Application Area
lS = length(xL);
aS = (yL(1)-yL(lS))/(xL(1)-xL(lS));
aL = -1/aS;
xle = xL(round(0.5*lS));
yle = yL(round(0.5*lS));
bL = yle-aL*xle;
xls = xle+0.2*cl;
yls = aL*xls+bL;
loadStart = [xls yls];
loadEnd = [xle yle];

%% Maximum Tensile Stress point
xO = (bL-bcl)/(acl-aL);
yO = aL*xO+bL;
xO2 = xO-0.4*cl;
yO2 = aL*xO2+bL;
xline = [xle xO2];
yline = [yle yO2];
aparA = -4;
xparA = linspace(xO,xds(lds),lds);
Afound = false;
while Afound == false;
    aparA = aparA+0.01;
    bparA = aL-2*aparA*xO;
    cparA = yO-aparA*xO^2-bparA*xO;
    yparA = aparA*xparA.^2+bparA.*xparA+cparA;
    for i = 1:lds
        for j = 2:lds
            if ((abs(xparA(i)-xds(j))<0.01)&&(abs(yparA(i)-
yds(j))<0.01));
                xA = xds(j);
                yA = yds(j);
```

```
                Afound = true;
                aAE = (yds(j-1)-yds(j))/(xds(j-1)-xds(j));
                bAE = yA-aAE*xA;
            end
        end
    end
end
for i = 1:lds
    if yparA(i)>(yds(lds)-0.1*cl);
        ypA(i) = yparA(i);
        xpA(i) = xparA(i);
    end
end

%% Maximum Compressive Stress point
aparB = -4;
xparB = linspace(xO,xcs(1),lcs);
Bfound = false;
while Bfound == false;
    aparB = aparB+0.01;
    bparB = aL-2*aparB*xO;
    cparB = yO-aparB*xO^2-bparB*xO;
    yparB = aparB*xparB.^2+bparB.*xparB+cparB;
    for i = 1:lcs
        for j = 1:lcs
            if ((abs(xparB(i)-xcs(j))<0.01)&&(abs(yparB(i)-
ycs(j))<0.01));
                xB = xcs(j);
                yB = ycs(j);
                Bfound = true;
            end
        end
    end
end
for i = 1:lcs
    if yparB(i)>(ycs(1)-0.1*cl);
        ypB(i) = yparB(i);
        xpB(i) = xparB(i);
    end
end

%% AB part
aAB = (yB-yA)/(xB-xA);
bAB = yB-aAB*xB;
xD = (bcl-bAB)/(aAB-acl);
yD = aAB*xD+bAB;
xAB = [xA xB];
yAB = [yA yB];

%% e distance
ae = 1/acl;
be = yA-ae*xA;
xecl = (be-bcl)/(acl-ae);
yecl = ae*xecl+be;
e = linear_distance(xA,yA,xecl,yecl);
xe = [xA xecl];
ye = [yA yecl];

%% a distance
bS = yD-aS*xD;
```

```
xal = (bS-bL)/(aL-aS);
yal = aL*xal+bL;
a = linear_distance(xD,yD,xal,yal);
xa = [xD xal];
ya = [yD yal];

%% Angle b
xE = (bcl-bAE)/(aAE-acl);
yE = acl*xE+bcl;
xAE = [xA xE];
yAE = [yA yE];
xL2 = (bL-bAE)/(aAE-aL);
yL2 = aAE*xL2-bAE;
EO = linear_distance(xO,yO,xE,yE);
L2E = linear_distance(xL2,yL2,xE,yE);
OL2 = linear_distance(xO,yO,xL2,yL2);
cosbetaa = (L2E^2+OL2^2-EO^2)/(2*L2E*OL2);

%% b distance
b = linear_distance(xA,yA,xle,yle);

%% Plot the Roark's model
figure('name','Roarks model');
plot(xTooth,yTooth,'Color',[0,0,0]);
axis equal;
hold on;
plot(xcl,ycl,'Color',[0.2,0.2,0.2],'Linestyle','-.');
hold on;
arrow(loadStart,loadEnd);
hold on;
plot(xline,yline,'Color',[0.4,0.4,0.4],'Linestyle','--');
hold on;
plot(xpA,ypA,'Color',[0.6,0.6,0.6],'Linestyle','--');
hold on;
plot(xpB,ypB,'Color',[0.6,0.6,0.6],'Linestyle','--');
hold on;
plot(xD,yD,'Color',[0,0,0],'Marker','.');
hold on;
plot(xAB,yAB,'Color',[0.6,0.6,0.6]);
hold on;
plot(xe,ye,'Color',[0.6,0.6,0.6]);
hold on;
plot(xa,ya,'Color',[0.6,0.6,0.6]);
hold on;
plot(xAE,yAE,'Color',[0.4,0.4,0.4]);
hold on;
plot(xO,yO,'Color',[0,0,0],'Marker','.');
hold on;
plot(xA,yA,'Color',[0,0,0],'Marker','.');
hold on;
plot(xB,yB,'Color',[0,0,0],'Marker','.');
hold on;
plot(xE,yE,'Color',[0,0,0],'Marker','.');
hold on;
axis off;
set(gcf,'Color',[1,1,1]);

%% Calculation of maximum tensile stress
stress1 = (W/thick);
stress2 = 1+0.26*((e/r)^0.7);
```

```
stress3 = ((1.5*a)/(e^2))+(cosbetaa/(2*e))+(0.45/sqrt(b*e));
stress = stress1*stress2*stress3;
end
```

```
function d = linear_distance(xp1,yp1,xp2,yp2)
d = sqrt((xp1-xp2)^2+(yp1-yp2)^2);
end
```

---

arrow: Αρχείο ανοιχτού κώδικα άλλου χρήστη.