ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer και Εφαρμογές

Συγγραφή : Μαριάννα Χατζάκου

Επιβλέπων Καθηγητής : Ιωάννης Πολυράκης

Τριμελής Επιτροπή : Ι. Πολυράκης, Σ. Καρανάσιος, Π. Ψαράκος

Αθήνα, Αύγουστος 2014

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η προκείμενη εργασία αφιερώνεται στην απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer με το λήμμα του Sperner, μια γενίκευση αυτού και μια εφαρμογή του στη θεωρία παιγνίων. Το θεώρημα αυτό αποδείχτηκε από τον Luitzen Brouwer το 1912 και συνιστά βασικό θεώρημα της τοπολογίας. Αναφέρει ότι κάθε συνεχής απεικόνιση, από ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο στον εαυτό του, έχει σταθερό σημείο. Λέγεται ότι η ιδέα για τη διατύπωση του θεωρήματος ήρθε στον επινοητή του παρατηρώντας ότι καθώς ανάδευε τον καφέ του, για να διαχυθεί η ζάχαρη, υπήρχε κάθε στιγμή ένα σημείο το οποίο παρέμενε ακίνητο.

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας περιέχει κάποια γενικά στοιχεία για την τοπολογία των κυρτών συνόλων που μας εξασφαλίζουν την ομοιομορφία των κυρτών και συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Ο προηγούμενος ισχυρισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικός για την απόδειξή του κεντρικού θεωρήματος, καθώς δια μέσου αυτού αρκεί να αποδειξθεί το ζητούμενο για τα n-simplex· υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με τις ιδιότητες του θεωρήματος.
Έτσι το δεύτερο κεφάλαιο αφιερώνεται στη μελέτη των n-simplex, με στόχο στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο να δοθεί η απόδειξη του λήμματος Sperner που αφορά στα simplex. Το λήμμα αυτό αποτελεί το συνδυαστικό ανάλογο του θεωρήματος Brouwer και η χρήση του εντοπίζεται στο λημμα των Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz που αποδεικνύεται στο κεφάλαιο 4.
Στο κεφάλαιο 5, δια μέσου του λήμματος αυτού παρουσιάζεται η απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος· του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer.Η βασική ιδέα του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer γενικέυεται για πλειότιμες απεικόνισές στο θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani, το οποίο αποδεικνύεται στο καφάλαιο 6. Η εργασία περιέχει

στο τελευταίο κεφάλαιο την εφαρμογή του θεωρήματος σταθερού σημείου του Kakutani σε ένα από το πλέον σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας παιγνίων · την ύπαρξη ισορροπίας κατά Nash σε παίγνιο n παικτών.

Abstract

The present thesis is about the proof of the Brouwer Fixed Point Theorem via Sperner's Lemma, one of its generalizations (Kakutani's Theorem) and its main application in Game Theory (Nash Equilibrium). The theorem has been proven by lt Luitzen Brouwer in 1912 and is a key theorem of topology. It states that for any continuous function mapping a compact convex set into itself there fixed point. The theorem is supposed to have originated from Brouwer's observation of a cup of coffee. While he was stirring his coffee to diffuse the sugar, every time there was one point which remained stationary.

The first chapter of this work consists of some general informations on compact sets that let us establish a homomorphism between convex and compact subsets in $\mathbb{R}^n$. The former claim is particularly important for the proof of the main theorem, as it is finally proved for n-simplex; subsets of $\mathbb{R}^n$ with the properties of the theorem.

Thus,in the second chapter we study n-simplexes, in order to give the proof Sperner Lemma. This lemma is the combinatorial analogue of Brouwer's Theorem and it is used in the proof of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Lemma in Chapter 4.

Chapter 5 , deals with the proof of Brouwer Fixed Point Theorem,which uses the above lemma. The main idea of Brouwer's Fixed Point Theorem is then generalized for set-valued functions in Kakutani Fixed Point Theorem in chapter 6. Finally, the lest chapter of this dissertation, the proof of one of the existence of Nash equilibrium in finite mixed strategy games via Kakutani fixed Point Theorem is presented.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου κ. Ιωάννη Πολυράκη για την καθοδήγηση και συμπαράσταση που μου προσέφερε, και πολύ περισσότερο για τις εύστοχες παρατηρήσεις του που ενέπνευσαν και ενίσχυσαν την πρόσπάθειά μου αυτή.

Κεφάλαιο 1

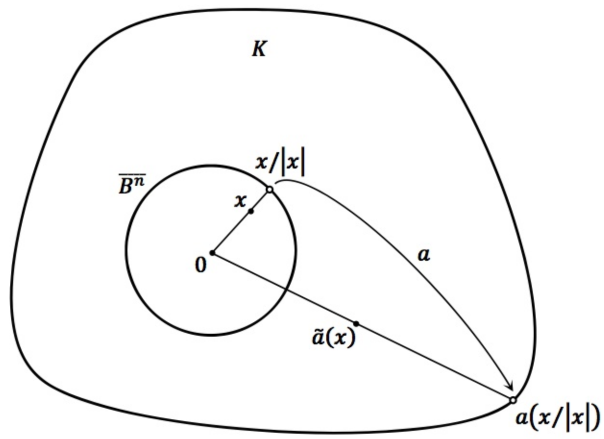
Τοπολογία Συμπαγών Κυρτών Συνόλων

Λήμμα 1.0.1 *Δοθέντος κυρτού συμπαγούς* $K \subset \mathbb{R}^n$ *με μη κενό εσωτερικό και συνεχούς απεικόνισης* $\alpha : \partial B^n \to \partial K$*, υπάρχει συνεχής επέκταση* $\tilde{\alpha} : \overline{B^n} \to K$ *της* α*. Εάν* α *ομοιομορφισμός, τότε η* $\tilde{\alpha}$ *είναι ομοιομορφισμός επίσης.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε q $\in$ intK και αντικαθιστούμε το K με την εικόνα αυτού από την μεταφορά x $\mapsto$ x-q, η οποία είναι προφανώς ομοιομορφική με το K και περιέχει το 0 ως εσωτερικό σημείο. Για επαρκώς μεγάλο $\varepsilon > 0$, αντικαθιστούμε το K με την εικόνα αυτού μέσω της απεικόνισης x $\mapsto$ x/ε που είναι προφανώς ομοιομορφική με το K και περιέχει την $\overline{B^n}$. Ισχύει τότε $\overline{B^n}\subset\overline{K}$=$K$ και ορίζεται η απεικόνιση $\tilde{a}$: $\overline{B^n} \to K$ ως εξής:

$$\tilde{a}(x) = |x| \cdot a\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

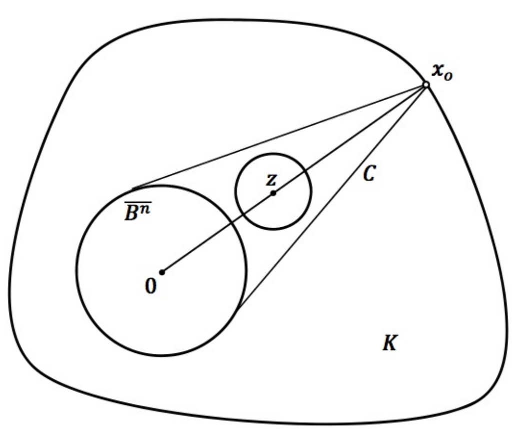
που προφανώς είναι συνεχής και λαμβάνει τιμές στο K λόγω κυρτότητας αυτού. Τέλος, εάν η α είναι ομοιομορφισμός, επαληθεύεται άμεσα ότι η $\tilde{a}$ είναι επίσης 1-1 και επί. Από την γενική τοπολογία είναι τότε γνωστό, ότι η $\tilde{a}$ είναι ομοιομορφισμός καθότι 1-1 και επί απεικόνιση από συμπαγή χώρο σε χώρο Hausdorff. ■



Σχήμα 1 : Η απεικόνιση $\tilde{\alpha}$.

Λήμμα 1.0.2 (**Λήμμα του Κώνου**) *Δοθέντος κυρτού συμπαγούς $K \subset \mathbb{R}^n$ με $\overline{B^n} \subset K$, τότε κάθε ημιευθεία που εκκινεί από το 0 τέμνει το ∂K σε μοναδικό σημείο.*

Απόδειξη. Εφόσον K συμπαγές, η τομή αυτού με τυχούσα ημιευθεία είναι επίσης συμπαγές ως τομή συμπαγούς με κλειστό. Συνεπώς υπάρχει x_0 σε αυτήν όπου η νόρμα, ως συνεχής συνάρτηση επί συμπαγούς, λαμβάνει μέγιστη τιμή, οπότε $x_0 \in \partial K$. Μένει να δειχθεί ότι κάθε άλλο στοιχείο της τομής είναι εσωτερικό του K.



Σχήμα 2 : Λήμμα του κώνου.

Έστω $y \in \overline{B^n} \subset K$. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x_0 και y περιέχεται στο K λόγω κυρτότητας του τελευταίου. Άρα ο κώνος C που προκύπτει καθώς το y διατρέχει την $\overline{B}^n$ περιέχεται στο K και έχει μη κενό εσωτερικό (διότι η βάση αυτού $\overline{B}^n$ έχει μη κενό εσωτερικό). Είναι σαφές επίσης ότι η αρχική τομή περιέχεται, πλην του x_0, στο εσωτερικό του κώνου.

Έστω τώρα τυχόν σημείο z επί της αρχικής τομής, διάφορο του x_0. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχει ανοικτή μπάλα με κέντρο z περιέχεται στον C, συνεπώς επίσης στο K. Άρα το z κείται στο εσωτερικό του K. ∎

Λήμμα 1.0.3 (**Λήμμα Ομοιομορφισμού Κυρτών-Μπάλας**) *Κάθε κυρτό συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό είναι ομοιομορφικό με την $\overline{B}^n$ και μάλιστα κατά τρόπον ώστε $\partial B^n \simeq \partial K$.*

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του λήμματος 1.0.1, μπορεί να υποτεθεί ότι $\overline{B}^n \subset K$. Από Λήμμα του Κώνου, η συνεχής απεικόνιση $g : \partial K \longrightarrow \partial B^n$, με

$$g(x) = \frac{x}{\mid x \mid},$$

είναι 1-1 και επί, άρα είναι ομοιομορφισμός καθότι είναι από συμπαγή χώρο σε χώρο Hausdorff. Από Λήμμα Επέκτασης για κυρτά σύνολα, ο ομοιομορφισμός $g^{-1} : \partial B^n \longrightarrow \partial K$ επεκτείνεται στον ζητούμενο ομοιομορφισμό $\overline{B^n} \longrightarrow K$ ∎

Λήμμα 1.0.4 *Όλα τα κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους, και μάλιστα κατά τρόπον ώστε τα σύνορά τους να είναι ομοιομορφικά επίσης.*

Απόδειξη. Άμεσα από το Λήμμα Ομοιομορφισμού Κυρτών-Μπάλας. ∎

Κεφάλαιο 2

Θεωρία των Simplex

Ορισμοί 2.0.1 *$N+1$ το πλήθος σημεία $x^0, x^1, ..., x^N$ του $\mathbb{R}^n$ καλούνται **αφινικώς ανεξάρτητα** όταν τα διανύσματα $x^i - x^0, i = 1, ..., N$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Είναι προφανές εκ του ορισμού ότι για να έχουμε $N+1$ το πλήθος αφινικώς ανεξάρτητα σημεία εντός του $\mathbb{R}^n$ πρέπει $n \geqslant N$. Σημειωτέον, επίσης, ότι ο ορισμός της αφινικής ανεξαρτησίας είναι ανεξάρτητος της επιλογής του x^0 που χρησιμοποιείται σε αυτόν· εξίσου καλά θα μπορούσε να έχει επιλεγεί λόγου χάρη ο δείκτης 1. Πράγματι, εάν τα $x^i - x^0, i = 1, ..., N$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα $x^i - x^1, i = 0, 2, 3, ..., N$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: για κάθε γραμμικό συνδυασμό των $x^i - x^1, i \neq 1$, ισχύει*

$$\sum_{i=0,i\neq 1}^{N} \lambda_i (x^i - x^1) = (-\sum_{i=0,i\neq 1}^{N} \lambda_i)(x^1 - x^0) + \sum_{i=2}^{N} \lambda_i (x^i - x^0)$$

οπότε υποθέτοντας μηδενισμό αυτής της ποσότητας, από τη γραμμική ανεξαρτησία των $x^i - x^0, i = 1, .., N$ συνάγεται ότι $\lambda_2 = ... = \lambda_N = 0$ και $\sum_{i=0,i\neq 1}^{N} \lambda_i = 0$, οπότε $\lambda_1 = 0$ επίσης.

Ορισμοί 2.0.2 *Καλείται **N-simplex** εντός του $\mathbb{R}^n$ με κορυφές τα $N+1$ αφινικώς ανεξάρτητα σημεία $x^0, .., x^N \in \mathbb{R}^n$ το σύνολο των αυστηρά θετικών κυρτών συνδυασμών τους,*

$$x^0...x^N = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i \colon \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$$

Προφανώς τα 1-simplex είναι ανοικτά ευθύγραμμα τμήματα και τα 2-simplexes είναι εσωτερικά τριγώνων, ενώ τα 0-simplex είναι απλώς μονοσύνολα. Σημειωτέον ότι το κλειστό περίβλημα του n-simplex συμπίπτει με την κυρτή θήκη των κορυφών του, δηλαδή

$$\overline{x^0...x^n} = co\{x^0, ..., x^n\}$$

Ορισμός 2.0.3 *Ως* **διάμετρος** *ενός N-simplex S εντός του* $\mathbb{R}^n$ *ορίζεται ο πραγματικός αριθμός* $diam(S) = sup_{u,v \in S}|u-v|$, *όπου* $|.|$ *η συνήθης ευκλείδεια νόρμα του* $\mathbb{R}^{n \geq N}$. *Ένεκα συμπάγειας του* $\overline{S}$ *ισχύει* $diam(S) = \max_{u,v \in \overline{S}} |u - v|$

Ορισμοί 2.0.4 *Ως* k**-όψη** *του N-simplex* $x^0...x^N$, $k \leq N$, *καλείται κάθε k-simplex* $x^{i_1}..., x^{i_k}$, *όπου* $0 \leq i_1 < ... < i_k \leq N$ *οποιαδήποτε* k*-άδα από τους δείκτες* $0, .., N$. *Προφανώς η μοναδική* N*-όψη του* $x^0..x^N$ *είναι ο εαυτός του, ενώ οι* 0*-όψεις του είναι ακριβώς τα μονοσύνολά των κορυφών του.*

Λήμμα 2.0.5 *Η γραφή τυχόντος σημείου της κυρτής θήκης αφινικώς ανεξαρτήτων σημείων ως κυρτού συνδιασμού αυτών είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Έστω $x_0, .., x_N$ αφινικώς ανεξάρτητα σημεία, y στοιχείο της κυρτής θήκης αυτών και $y = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^{N} \mu x_i$ δύο γραφές αυτού ως κυρτού συνδυασμού, οπότε $\sum_{i=0}^{N} \lambda_i = 1$ και $\sum_{i=0}^{N} \mu_i = 1$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ισότητες, έπεται ότι

$$\lambda_0 - \mu_0 = \sum_{i=1}^{N} (\mu_i - \lambda_i) \qquad (1)$$

Από την ισότητα των κυρτών συνδιασμών έπεται ότι

$$(\lambda_0 - \mu_0)x_0 + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \mu_i)x_i = 0,$$

οπότε, αντικαθιστώντας μέσω της (1), λαμβάνουμε

$$\left[\sum_{i=1}^{N} (\mu_i - \lambda_i)\right] x_0 + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \mu_i)x_i = 0,$$

που επαναγράφεται ισοδύναμα ως

$$\sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \mu_i)(x_i - x_0) = 0$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $x_i - x_0$ έπεται ότι $\lambda_i = \mu_i$ για κάθε $i = 1, .., N$. Από την (1) έπεται τότε ότι $\lambda_0 = \mu_0$ επίσης. ∎

Ορισμοί 2.0.5 *Οι μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί* $\lambda_0, .., \lambda_n$ *για τους οποίους δοθέν* $y \in \overline{S} = co\{x^0, ..., x^N\}$ *γράφεται στην μορφή* $y = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x^i$, *καλούνται* **βαρυκεντρικές συντεταγμένες** *του y ως προς τα* $x^0, .., x^N$.

Ορισμοί 2.0.6 *Ως* ***τριγωνοποίηση*** *ενός N-simplex* S *ορίζεται μία πεπερασμένη συλλογή από N-simplex* $T = \{S_i : i \in I\}$ *τέτοιων ώστε* $\cup_{i \in I} \overline{S}_i = \overline{S}$ *και για κάθε* $i, j \in I$ *με* $i \neq j$, *το σύνολο* $\overline{S_i} \cap \overline{S_j}$ *να είναι είτε το κενό, είτε το κλειστό περίβλημα της κοινής όψης των* S_i *και* S_j *(συμπεριλαμβανομένων των μονοσυνόλων* 0*-simplex). Ως* **διάμετρος της τριγωνοποίσης** T *εννοείται η μέγιστη από τις διαμέτρους των* N *-simplex που την απαρτίζουν,*

$$diam(T) = \max\{diam(S') : S' \in T\}$$

Ορισμοί 2.0.7 *Ως* ***βαρύκεντρο*** *ενός N-simplex* $S = x^0..x^N$ *ορίζεται το σημείο*

$$b_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} x^j \in T$$

Στην περίπτωση των 2-simplex, δηλαδή στην περίπτωση των τριγώνων, το βαρύκεντρο είναι ως γνωστόν το σημείο τομής των διαμέσων, το οποίο συμπίπτει με το κέντρο βάρους ενός αντικειμένου ομοιόμορφης πυκνότητας σε σχήμα τριγώνου.

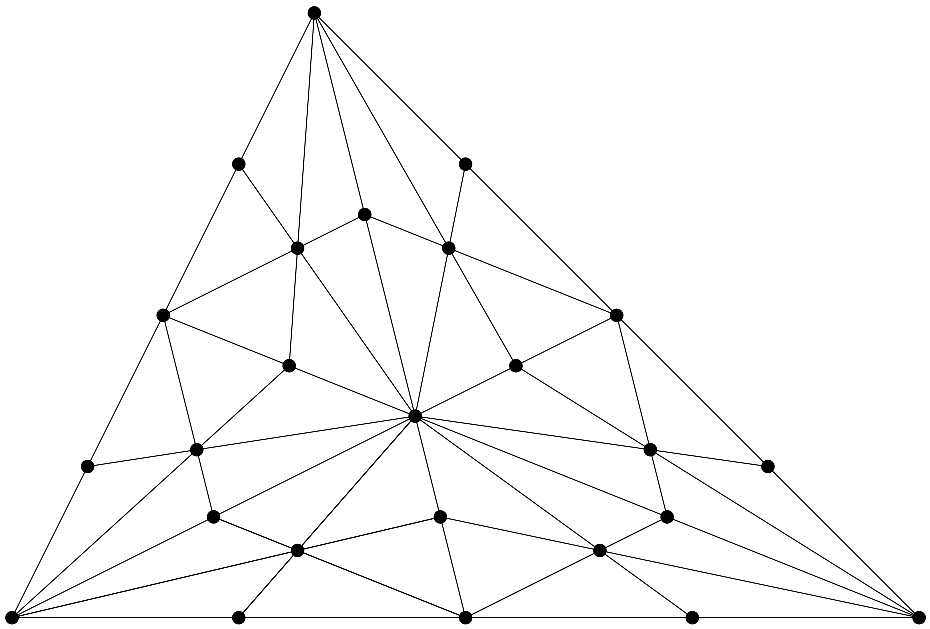
Ορισμός 2.0.8 **Βαρυκεντρική τριγωνοποίηση** *ενος* N *-simplex* S *καλείται η τριγωνοποίηση εκείνη, η οποία απαρτίζεται από τα* N *simplex της μορφής* $S' = b_0...b_N$, *όπου κάθε* b_k *είναι το βαρύκεντρο κάποιας* $(N-k)$*-όψης* $\sigma_K^{(N-k)}$*,του* S *κατά τρόπον ώστε* $\sigma_{k+1}^{(N-k-1)} \subset \sigma_k^{(N-k)}$. *Προφανώς, για κάθε* S' *της βαρυκεντρικής τριγωνοποίσης* b_0 *είναι το βαρύκεντρο του* S *(τουτέστιν* $S = \sigma_0^{(N)}$*), ενώ το* b_N *(για το οποίο ισχύει* $\sigma_N^{(0)} = \{b_N\}$*) είναι απλώς κάποια κορυφή του* S.*)*

Ορισμός 2.0.9 *Ορίζεται η* m*-οστή* **βαρυκεντρική τριγωνοποίηση**, $T_m, m \geq 1$, *ενός N-simplex* S *αναδρομικά ως εξής:*

(i) Εάν $m = 1$, *η* T_1 *είναι απλώς η βαρυκεντρική τριγωνοποίηση του* S *(βλ. προηγούμενο ορισμό).*

(ii) Εάν $m > 1$, *η* T_m *είναι η ένωση των βαρυκεντρικών τριγωνοποιήσεων όλων των* N*- simplex που απαρτίζουν την* T_{m-1}.

Ως **ακολουθία βαρυκεντρικών τριγωνοποιήσεων** *του* S *εννοείται η ακολουθία* $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$.



Σχήμα 3 : Η 2-η βαρυκεντρική τριγωνοποίηση στην περίπτωση ενός 2-simplex.

Λήμμα 2.0.6 *Δοθέντος N-simplex* $S = v^0 ... v^N$ *και σημειου* $x \in \overline{S}$, *υπάρχει δείκτης* $0 \leq i \leq N$ *τέτοιος ώστε* $\max_{y \in \overline{S}} |y - x| = |v_i - x|$.

Απόδειξη. Θέτουμε $R = \max_{1 \leq j \leq N} |v_j - x| = |v_i - x|$ για κάποιο $0 \leq i \leq N$ και θεωρούμε την κλειστή μπάλα $\overline{B}(x, R)$. Εξ ορισμού της ακτίνας R ,$v^0, ..., v^N \in \overline{B}(x, R)$, συνεπώς επίσης

$$\overline{S} = co\{v^0, .., v^N\} \subset \overline{B}(x, R),$$

καθότι οι μπάλες είναι ως γνωστόν κυρτές και $\overline{S}$ είναι το ελαχιστικό κυρτό που περιέχει τα σημεία $v^0, .., v^N$. Όμως ο παραπάνω εγκλεισμός ισοδυναμεί με το ότι

$$|y - x| \leq R, \forall y \in \overline{S}, \text{ ή ισοδύναμα,}$$
$$\max_{y \in \overline{S}} |y - x| \leq R,$$

όπου το παραπάνω μέγιστο υπάρχει ένεκα συμπάγειας του $\overline{S}$. Εφόσον $v^i \in S$, από την τελευταία ανισότητα συνάγεται η ζητούμενη ισότητα. ∎

Πρόταση 2.0.1 *Δοθέντος N-simplex* $S = v^0 ... v^N$, *υπάρχουν δείκτες* $0 \leq i, j \leq N, i \neq j$, *τέτοιοι ώστε diam* $\overline{S} = |v^i - v^j|$.

Απόδειξη. Από τα γνωστά για τη διάμετρο συμπαγούς συνόλου, υπάρχει ζεύγος $x, y \in \overline{S}$ τέτοιο ώστε diam$\overline{S} = |x - y|$. Σταθεροποιώντας το x, και λαμβάνοντας υπ' όψιν το Λήμμα 2.0.6, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η y είναι κάποια από τις παραπάνω κορυφές του S, έστω η v_0, οπότε

$$\text{diam } \overline{S} = |x - v^0| \qquad (1)$$

Αρκεί να δειχθεί ότι για το συγκεκριμένο x, υπάρχει δείκτης $1 \leq j \leq N$ τέτοιος ώστε $|x - v^0| = |v^j - v^0|$.

<u>Ισχυρισμός</u> Το x δεν είναι εσωτερικό σημείο του $\overline{S}$.

(Απόδειξη Ισχυρισμού): Υποθέτουμε πρός άτοπο ότι x είναι εσωτερικό του $\overline{S}$, οπότε υπάρχει μπάλα $B(x, \varepsilon) \subset S$. Επιλέγοντας επαρκώς μικρό $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $\eta|x - v^0| < \varepsilon$ και συμβολίζοντας $z = x + \eta(x - v^0) \in B(x, \varepsilon)$, τότε ισχύει

$$\begin{gathered} |z - v^0| = |x + \eta(x - v^0) - v^0| = \\ (1 + \eta)\ |x - v^0| > |x - v^0|, \end{gathered}$$

που είναι άτοπο ένεκα της (1). $\square$

Με παρόμοιο επιχείρημα όπως αυτό του προηγούμενου ισχυρισμού, διαπιστώνεται εύκολα ότι το x δεν μπορεί να περιέχεται σε καμία απο τις $(n-1)$- όψεις του S που περιέχουν την κορυφή v^0. Συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με τον προηγούμενο ισχυρισμό, έπεται ότι το x οφείλει να περιέχεται στην μοναδική εναπομείνασα $(n-1)$-όψη του S, δηλαδή στη κυρτή θήκη των κορυφών $v^j, j = 1, .., N$. Άρα υπάρχουν μη αρνητικοί αριθμοί $\lambda_1, .., \lambda_n$ τέτοιοι ώστε

$$x = \lambda_1 v^1 + ... + \lambda_N v^N \text{ και } \lambda_1 + ... + \lambda_N = 1 \quad (2)$$

Κατόπιν αυτών των παρατηρήσεων, υποθέτουμε πρός άτοπο ότι

$$|v^j - v^0| \lneqq |v^j - x|, \text{ για κάθε } j = 1, .., N \quad (3)$$

Τότε,

$$\begin{aligned} |x - v^0| &= |(\lambda_1 v^1 + ... + \lambda_N v^N) - v^0| \\ &= |(\lambda_1 v^1 + ... + \lambda_N v^N) - (\lambda_1 + ... + \lambda_N)v^0| \quad (\text{από } (2)) \\ &= |\lambda_1(v^1 - v^0) + ... + \lambda_N(v^N - v^0)| \\ &\leq \lambda_1|v^1 - v^0| + ... + \lambda_N|v^N - v^0| \\ &\lneqq (\lambda_1 + ... + \lambda_N)|x - v^0|, \quad (\text{από } (3)) \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. ■

Πρόταση 2.0.2 *Δοθέντος N-simplex $S = v^0...v^N$, και εάν b_0 το βαρύκεντρο αυτού, τότε*

$$|b_0 - v^i| \leq \tfrac{N}{N+1}\, diamS, \text{ για κάθε } i = 1, ..., N.$$

Απόδειξη. Για τυχούσα κορυφή v^i του S έχουμε ότι

$$\begin{gathered} |b - v^i| = |\tfrac{1}{N+1}(v^0 + ... + v^N) - \tfrac{N+1}{N+1}v^i| = \\ \tfrac{1}{N+1}|(v^0 - v^i) + ... + \underbrace{(v^0 - v^0)}_{0} + .. + (v^N - v^i)| = \\ \tfrac{1}{N+1}|\textstyle\sum_{j=0, j\neq i}^{N}(v^j - v^i)| \\ \leq \tfrac{1}{N+1}\textstyle\sum_{j=0, j\neq i}^{N}|v^j - v^i| \\ \leq \tfrac{N}{N+1}\, diam(S). \end{gathered}$$

■

Πρόταση 2.0.3 *Δοθέντων δύο N-simplex S και S', τέτοιων ώστε το δεύτερο να περιέχεται στη βαρυκεντρική τριγωνοποίηση του πρώτου, ισχύει*

$$diam(S') \leq \tfrac{N}{N+1} diam(S)$$

Απόδειξη. Για $N = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε $N \geq 2$, οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 2.0.1, αρκεί να δείχθεί ότι οι αποστάσεις μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του S' φράσσονται ομοιόμορφα από το $\frac{N}{N+1}diam(S)$.

Από τα γνωστά για την βαρυκεντρική τριγωνοποίηση (βλ. ορισμό 2.0.5), οι κορυφές $b_0, .., b_N$ του S' είναι αντιστοίχως τα βαρύκεντρα κάποιων $\sigma_0^{(N)}, ..., \sigma_N^{(0)}$, όπου $\sigma_k^{(N-k)}$, $k = 0, .., N$, είναι k-όψη του S, τέτοιων ώστε $b_k \in \sigma_k^{(N-k)}$ και

$$\{b_N\} = \sigma_N^0 \subset ... \subset \sigma_k^{(N-k)} \subset ... \subset \sigma_1^{(N-1)} \subset \sigma_0^{(N)} = S$$

Διαλέγοντας τώρα τυχούσες διακεκριμένες κορυφές b_k, b_λ του S με $N \geq \lambda \gneqq k \geq 0$, οπότε $b_\lambda \in \sigma_k^{(N-k)}$ (καθότι βαρύκεντρο της $\sigma_\lambda^{(N-\lambda)} \subset \sigma_k^{(N-k)}$), ισχύει από Λήμμα 2.0.6 ότι

$$\begin{aligned} |b_k - b_\lambda| &\leq \{|b_k - w|\colon w \text{ κορυφή του } \sigma_k^{(N-k)}\} \\ &\leq \tfrac{N-k}{N-k+1} diam(\sigma_k^{(N-k)}) \qquad \text{(Πρ. 2.0.2)} \\ &\leq \tfrac{n}{n+1} diam(S), \end{aligned}$$

όπου για την τελευταία ανισότητα λήφθηκε υπ' όψιν το γεγονός ότι $\sigma_k^{(N-k)} \subset \overline{S}$ και η ανισότητα $\frac{n-k}{n-k+1} \leq \frac{n}{n+1}$ για κάθε $k = 0, ..., N$. ∎

Πρόταση 2.0.4 *Εάν $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία βαρυκεντρικών τριγωνοποιήσεων ενός N-simplex S, τότε*

$$diam(T_m) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού του $diam(T_m)$ και εφαρμόζοντας αναδρομικά την Πρόταση 2.0.3, ισχύει για κάθε m ότι

$$0 \leq \mathbf{diam} T^m \leq \left(\tfrac{N}{N+1}\right)^m diam(S) \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

∎

Κεφάλαιο 3

Το Λήμμα του Sperner

Ορισμοί 3.0.10 *Δοθέντος* $y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i \in \overline{S} = co\{x^0, ., x^n\}$, *συμβολίζουμε* $\chi(y)$ *το σύνολο των δεικτών* $0 \leq i \leq n$ *για τους οποίους ισχύει* $\lambda_i > 0$. *Σημειωτέον ότι ο καλός ορισμός του συνόλου* $\chi(y)$ *για κάθε* y *προκύπτει από την μοναδικότητα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων του σημείου (βλ. Λήμμα 2.0.5). Εάν* $\chi(y) = \{i_0 \leq ... \leq i_k\}$, *καλείται* ***φορέας*** *της y η k-όψη* $x^i_0...x^i_k$, *τουτέστιν η ελαχιστική από τις όψεις του* S *που περιέχουν το* y.

Ορισμός 3.0.11 Χρωματισμός *ενός σημειοσυνόλου* $A \subset S$, *όπου* S n*-simplex, καλείται η απόδοση σε κάθε* $x \in A$ *ενός δείκτη (¨χρώματος¨)* $0, ..., n$, *τουτέστιν μία συνάρτηση της μορφής* $\lambda : A \longrightarrow \{0, .., n\}$.

Ορισμοί 3.0.12 *Έστω* $\overline{S} = co\{x^0, .., x^n\}$, T *μία τριγωνοποίηση του* S *και V το σύνολο των κορυφών όλων των simplexes που απαρτίζουν την* T *(οπότε* $x^i \in V, i = 0, .., n$*). Καλείται* **Spener χρωματισμός** *της* T *ένας χρωματισμός* $\lambda : V \longrightarrow \{0, .., n\}$ *του* V *τέτοιος ώστε*

$$\lambda(v) \in \chi(v), \text{ για κάθε } v \in V.$$

Ένα simplex της T *καλείται* **πλήρως χρωματισμένο** *εάν ο περιορισμός της* λ *στο σύνολο των κορυφών αυτού λαμβάνει και τις* $n + 1$ *δυνατές τιμές.*

Λήμμα 3.0.7 (**Λήμμα του Sperner**) *Το πλήθος των Sperner-simplex μιας κατά Sperner χρωματισμένης τριγωνοποίησης τυχόντος simplex είναι περιττός αριθμός.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στην διάσταση n του simplex. Η περίπτωση $n = 0$ είναι προφανής. Υποθέτοντας ότι ο ισχυρισμός ισχύει για τυχόν $n-1, n \geq 1$, θα δειχθεί επίσης για n.
Έστω S το n-simplex της υπόθεσης και T μία κατά Sperner χρωματισμένη τριγωνοποίησή του. Ορίζουμε αρχικά τα εξής σύνολα:

C το σύνολο των πλήρως χρωματισμένων n-simplex της T.
A το σύνολο όσων n-simplexes της T φέρουν όλα τα ¨χρώματα¨ $\{0, .., n-1\}$.
B το σύνολο των πλήρως χρωματισμένων $(n-1)$-simplexes της T που περιέχονται στο ∂S.
E το σύνολο των πλήρως χρωματισμένων $(n-1)$-simplexes της T.

(Ως $(n-1)$ simplex της T εννούνται εκείνα τα οποία ανακύπτουν ως $(n-1)$-όψεις των n- simplex που απαρτίζουν την T.)

Σκοπός είναι τώρα να οριστεί κατάλληλο γράφημα, με την βοήθεια του οποίου θα αποδειχθεί τελικά το ζητούμενο. Θεωρώντας ως ¨σύνολο κόμβων¨ το $D = A \cup B \cup C$ και ως ¨σύνολο ακμών¨ το E, τότε δοθέντος κόμβου $d \in D$ ορίζονται ως ¨βαίνουσες¨ σε αυτόν ακμές ως εξής:

(i) εάν $d \in A \cup C$, τότε οι βαίνουσες σε αυτόν ακμές είναι οι $(n-1)$-όψεις των simplexes που ανήκουν στο σύνολο A ή C.
(ii) εάν $d \in B$, τότε η μοναδική βαίνουσα ακμή στον d είναι ο εαυτός του ιδωμένος ως στοιχείο του E.

Πρέπει τώρα να δειχθεί ότι η σχέση του ¨βαίνειν¨, η οποία ορίστηκε μέσω των (i) και (ii), ορίζει καλώς ένα γράφημα (τουτέστιν ότι κάθε ακμή βαίνει σε ακριβώς δύο κόμβους). Ως βαθμός $\delta(d)$ ένος κόμβου d εννοείται το πλήθος των ακμών που βαίνουν σε αυτόν, το οποίο διακρίνεται εν προκειμένω ανάλογα με το σύνολο, A, B ή C στο οποίο ανήκει ο d:
(α) Εάν $d \in A$ τότε στο αντίστοιχο n-Simplex επαναλαμβάνεται ακριβώς ένας χρωματισμός

και συνεπώς ακριβώς δύο $(n-1)$-όψεις αυτού φέρουν όλα τα χρώματα $\{0,..,n-1\}$. Άρα στον κόμβο $d \in A$ βαίνουν ακριβώς δύο ακμές.

(β) Ομοίως, εάν $d \in C$ τότε στο αντίστοιχο n-simplex κάθε χρώμα εντοπίζεται άπαξ και συνεπώς ακριβώς μία πλήρως χρωματισμένη $(n-1)$-όψη. Άρα στον κόμβο d βαίνει βαίνει ακριβώς μία ακμή.

(γ) Τέλος, εάν $d \in B$ είναι άμεσο εξ ορισμού της σχέσης ¨βαίνειν¨ (βλ. (ii) παραπάνω) ότι ο βαθμός του κόμβου είναι ένα.

Συνοψίζοντας,

$$\delta(d) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \;\; d \in B \cup C \\ 2, & \alpha\nu \;\; d \in A \end{cases}$$

Ισχυρισμός: Κάθε ακμή βαίνει σε ακριβώς δύο κόμβους, και άρα μέσω της σχέσης ¨βαίνειν¨ ορίζεται καλώς κάποιο γράφημα.

(Απόδειξη ισχυρισμού) Η απόδειξη βασίζεται στην εξής παρατήρηση: κάθε $(n-1)$-simplex της T βρίσκεται είτε στο σύνορο του S ως όψη ενός μοναδικού n-simplex της T, είτε στο εσωτερικό του S ως κοινή όψη δύο n -simplexes της T. Εάν επιπλέον φέρει στις κορυφές του όλα τα χρώματα $\{0,..,n-1\}$, το $(n-1)$-simplex ανήκει στο E. Εάν ανήκει στο σύνορο του S, τότε βαίνει ακριβώς στον ¨συνοριακό¨ κόμβο $d \in B$ και στον κόμβο $d' \in A \cup C$, του οποίου αποτελεί μία $(n-1)$-όψη. Παρομοίως, εάν ανήκει στο εσωτερικό του S, τότε βαίνει ακριβώς στους κόμβους d και d', που αμφότεροι είναι στοιχεία των συνόλων A ή C, των οποίων το εν λόγω στοιχείο του E αποτελει κοινή όψη. $\square$

Βάσει του παραπάνω ισχυρισμού, μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί το γνωστό θεώρημα από την Θεωρία Γραφημάτων, ότι

$$\sum_{d \in D} \delta(d) = 2|E|$$

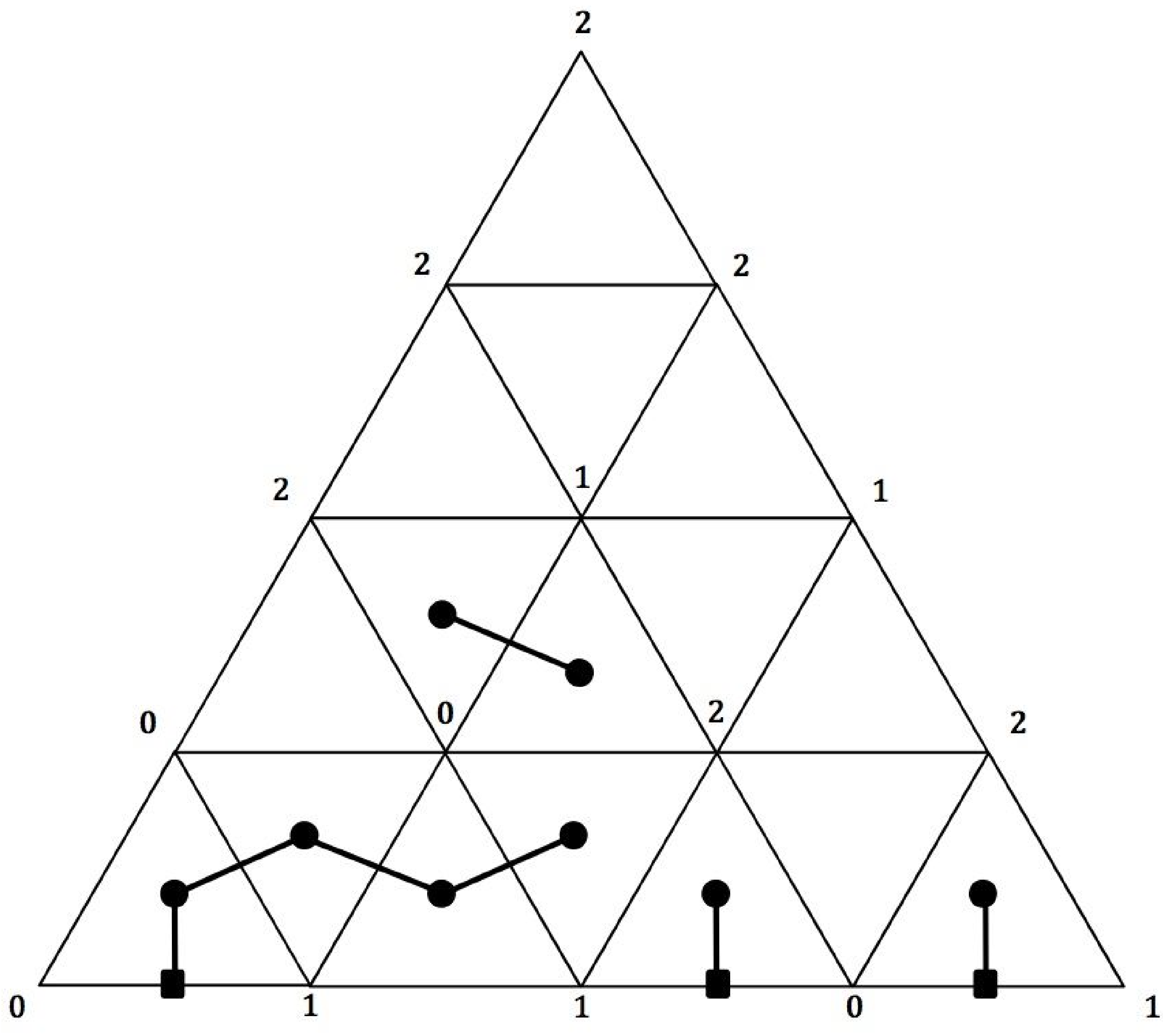
Εξ ορισμού του συγκεκριμένου γραφήματος, ισχύει επίσης ότι

$$\sum_{d \in D} \delta(d) = 2|A| + |B| + |C|$$

οπότε, εξισώνοντας, λαμβάνουμε

$$2|A| + |B| + |C| = 2|E|$$

Από την τελευτία σχέση γίνεται προφανές, ότι η ποσότητα $|B|+|C|$ είναι άρτια. Το ζητούμενο έπεται επειδή, από επαγωγική υπόθεση, το πλήθος των πλήρως χρωματισμένων $(n-1)$-siplexes που απαρτίζουν το σύνολο $|B|$ είναι περιττό. ■



Σχήμα 4 : Περίπτωση 2-simplex

Κεφάλαιο 4

Το Λήμμα Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz

Λήμμα 4.0.8 ***(Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz)***
Δοθέντος N-simplex $\overline{S} = co\{u_0, ..., u_N\}$ *και κλειστών συνόλων* $C_0, ..., C_N$ *τέτοιων ώστε για κάθε επιλογή δεικτών* $1 \leq i_0 < ... < i_k \leq n$ *να ισχύει* $co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\} \subseteq \cup_{m=0}^{k} C_{i_m}$, *τότε*

$$\exists v \in \overline{S} \text{ τέτοιο ώστε } v \in \cap_{j=0}^{N} C_j \ .$$

Απόδειξη. Η περίπτωση N=0, οπότε S μονοσύνολο, είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε ότι $N \geq 1$. Ορίζεται για κάθε τριγωνοποίηση Sperner-χρωματισμός ως εξής. Δοθείσης τυχούσας τριγωνοποίησης $S_1, .., S_j$ του S και κορυφής v αυτής, έστω $co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\}$ η ελαχίστης διαστάσεως όψη του S στην οποία περιέχεται η v. Εξ υποθέσεως ισχύει

$$co\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\} \subseteq C_{i_0} \cup ... \cup C_{i_k},$$

οπότε υπάρχει $r \in \{i_0, .., i_k\}$ τέτοιο ώστε $v \in C_r$. Χρωματίζουμε τότε την v με r. Είναι προφανές τότε ότι ο εν λόγω χρωματισμός της δοθείσης τριγωνοποίησης είναι Sperner-χρωματισμός (καθότι r είναι δείκτης μιας κορυφής της ελαχλιστης διαστάσεως όψης του S). Επιτυγχάνεται συνεπώς Sperner-χρωματισμός τυχούσας τριγωνοποίησης κατά τρόπον ώστε εάν η κορυφή v έχει χρώμα r, τότε $v \in C_r$ (τουτέστιν το χρώμα είναι δείκτης ενός εκ των συνόλων $C_1, ..., C_N$ στα οποία ανήκει). Η παραπάνω ιδιότητα του εν λόγω χρωματισμού θα συμβολίζεται εφ' εξής ως $(*)$.

Εάν $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των βαρυκεντρικών τριγωνοποιήσεων του S, εφαρμόζουμε σε κάθε T_n τον παραπάνω χρωματισμό. Εφόσον για κάθε n ο χρωματισμός αυτός είναι Sperner, από Λήμμα Sperner, η T_n περιέχει Sperner-simplex S_n, του οποίου οι κορυφές $v_0^n, ..., v_N^n$ φέρουν ανά δύο διακεκριμένα χρώματα, υποδηλούμενα από τον κάτω δείκτη.Έτσι από την ιδιότητα του $(*)$ ισχύει

$$v_r^n \in C_r, \quad r = 0, 1, .., N, \ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Επειδή η μέγιστη διάμετρος της βαρυκεντρικής τριγωνοποίησης $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τείνει στο 0 καθώς $n \longrightarrow \infty$ (Πρόταση 2.0.4), έπεται ότι

$$diam\, co\{v_0^n, ..., v_N^n\} = diam\, S_n \longrightarrow 0, \text{ καθώς } n \longrightarrow \infty. \tag{2}$$

<u>Ισχυρισμός</u>: $\exists v \in \overline{S}$ τέτοιο ώστε $v_r^n \longrightarrow v$ καθώς $n \longrightarrow \infty, \forall r = 0, 1, ..., N$.

(Απόδειξη ισχυρισμού) Εφόσον η ακολουθία $(v_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχεται στο συμπαγές $\overline{S}$, υπάρχει άπειρο σύνολο δεικτών $M_1 \subset \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η $(v_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει σε κάποιο $v_0 \in \overline{S}$. Ομοίως, για την ακολουθία $(v_1^n)_{n\in M_1}$ υπάρχει άπειρο σύνολο δεικτών $M_2 \subset M_1$ τέτοιο ώστε η $(v_1^n)_{n\in M_2}$ να συγκλίνει σε κάποιο $v_1 \in S$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, εντοπίζεται τελικώς για την ακολουθία $(v_N^n)_M$ άπειρο σύνολο δεικτών

$$M \subset M_N \subset M_{N-1} \subset ... \subset M_1 \subset \mathbb{N}$$

τέτοιο ώστε η ακολουθία $(v_N^n)_{n\in M}$ να συγκλίνει σε κάποιο $v_N \in \overline{S}$. Τελικώς για κάθε $r = 0, 1, ..., N$ υπάρχει $v_r \in \overline{S}$ τέτοιο ώστε

$$v_r^n \longrightarrow v_r \text{ καθώς } n \longrightarrow \infty$$

Μένει να δειχθεί ότι $v_0 = v_1 = ... = v_N = v$: συγκεκριμένα, θα δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|v_i^n - v_j^n\| = 0 \text{ (οπότε } v_i = \lim v_i^n = \lim v_j^n = v_j).$$

Πράγματι, εφόσον $\|v_i^n - v_j^n\| \leq diam\, S_n$, το ζητούμενο προκύπτει ευθύς ένεκα της (2). □

Μένει τώρα να δειχθεί ότι το v του παραπάνω ισχυρισμού είναι το ζητούμενο, τουτέστιν ότι $v \in \cap_{r=0}^N C_r$. Πράγματι, εφόσον $v_r^n \in C_r$, το όριο $v = \lim_{n\longrightarrow\infty} v_r^n$ περιέχεται στο C_r (ένεκα κλειστότητας του τελευταίου), για κάθε $r = 0, .., N$. ■

Κεφάλαιο 5

Απόδειξη του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer με το λήμμα του Sperner

Θεώρημα 5.0.1 *(**Brouwer**) Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : M \longrightarrow M$, όπου $M \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό, συμπαγές και κυρτό έχει σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.0.4, το σύνολο M της υπόθεσης είναι ομοιομορφικό με την κλειστότητα κάποιου n-simplex, δηλαδή υπάρχει n-simplex S και ομοιομορφισμός $h : \overline{S} \longrightarrow M$ ομοιομορφικό με το κλειστό περίβλημα κάποιου n-simplex S. Τότε, υποθέτοντας ότι το ζητούμενο ισχύει για το $\overline{S}$, οπότε η απεικόνιση $h^{-1} \circ f \circ h$ έχει σταθερό σημείο $x \in \overline{S}$, είναι σαφές ότι το $h^{-1}(x)$ είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο της f. Αυτή η επιχειρηματολογία δείχνει ότι το θεώρημα αρκεί να αποδειχθεί για την περίπτωση $M = \overline{S}$.

Έστω ότι $\overline{S} = co\{u_0, ..., u_n\}$. Θα συμβολίζεται για κάθε $u \in \overline{S}$ με $a_i(u)$ η i-οστή βαρυκεντρική συντεταγμένη αυτού, οπότε $u = \sum_{i=0}^{n} a_i(u)u_i$. Από τα γνωστά για τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες, οι βαθμωτές συναρτήσεις a_i ικανοποιούν τις σχέσεις

$$0 \leq a_0, ..., a_n \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

Για τυχόν $u \in \overline{S}$ ισχύει τότε

$$\begin{aligned} u - u_0 &= a_0(u)u_0 + ... + a_n(u)u_n - u_0 \\ &= a_0(u)u_0 + ... + a_n(u)u_n - (a_0(u) + ... + a_n(u))u_0 \\ &= a_1(u)(u_1 - u_0) + ... + a_n(u)(u_n - u_0) \end{aligned}$$

Ισχυρισμός: Οι συναρτήσεις a_i, $i = 1, ..., n$, είναι συνεχείς.
(Απόδειξη ισχυρισμού) Μεταφέροντας την αρχή των αξόνων στο u_0, η παραπάνω έκφραση για το u γίνεται $u = a_i(u)u_1 + ... + a_n(u)u_n$. Εφόσον τα $u_0, ..., u_n$ είναι αφινικώς ανεξάρτητα, τα $u_1, ..., u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς συγκροτούν βάση του χώρου και τότε $a_i(u)$ είναι η i-οστή συντεταγμένη του u ως προς τη βάση αυτή. Με άλλα λόγια, οι $a_i, i = 1, ..., n$ είναι απλώς οι συναρτήσεις συντεταγμένων ως προς την εν λόγω βάση, και άρα συνεχείς. $\square$

Ορίζονται τώρα τα σύνολα $C_j, j = 1, .., n$ ως

$$C_j = \{u \in S | a_j(f(u)) \leq a_j(u)\} = (a_j \circ f - a_j)^{-1}(-\infty, 0].$$

Από τη συνέχεια των a_j, f, έπεται η συνέχεια της $a_j \circ f - a_j$, οπότε τα C_j, $j = 1, .., n$ είναι κλειστά εξ ορισμού τους (καθότι αντίστροφες εικόνες κλειστών μέσω συνεχούς συνάρτησης.

Ισχυρισμός: Για κάθε επιλογή δεικτών $0 \leq i_0 < ... < i_k \leq n$ ισχύει $co\{u_{i_0}, .., u_{i_k}\} \subseteq \cup_{m=0}^{k} C_{i_m}$.
(Απόδειξη ισχυρισμού) Μεταθέτοντας εν ανάγκη τους δείκτες χάριν ευκολίας, υποθέτουμε ότι $i_0 = 0, ..., i_k = k$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $co\{u_0, ..., u_k\} \nsubseteq \cup_{m=0}^{k} C_m$, οπότε υπάρχει $u \in co\{u_0, ..., u_k\}$ τέτοιο ώστε $u \notin \cup_{m=0}^{k} C_m$. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι

$$a_j(f(u)) > a_j(u), j = 0, ..., k \quad (1)$$

Επειδή $u, f(u) \in \overline{S}$, ισχύουν επίσης οι σχέσεις

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(u) = 1 \quad (2)$$
$$\sum_{j=0}^{n} a_j(f(u)) = 1 \quad (3)$$

Εφόσον $u \in co\{u_0, ..., u_k\}$, ισχύει επιπλέον

$$a_j(u) = 0, \forall j > k \qquad (4)$$

Από την (1), έπεται ότι

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{j=0}^{k} a_j(f(u)) > \sum_{j=0}^{k} a_j(u) \overset{a_j \geqslant 0, j=0,..,n}{\Longrightarrow} \\ \textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j(f(u)) > \sum_{j=0}^{k} a_j(u) \overset{(4)}{\Longrightarrow} \\ \textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j(f(u)) > \sum_{j=0}^{n} a_j(u) \overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} \\ 1 > 1,\end{gathered}$$

άτοπο. $\square$

Από το Λήμμα Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz και τον τελευταίο ισχυρισμό, $\exists v \in \overline{S}$ τέτοιο ώστε $v \in \cap_{j=0}^{n} C_j$. Θα δειχθεί ότι το v αυτό είναι το ζητούμενο. Εφόσον $f(v) \in \overline{S}$, ισχύει

$$a_0(f(v)) + ... + a_n(f(v)) = 1 = a_0(v) + ... + a_n(v),$$

όπου $a_j(f(v)) \leqslant a_j, j = 0, .., n$ εξ ορισμού των C_j. Επειδή επιπλέον $0 \leq a_j \leq 1$, λαμβάνουμε ότι

$$a_j(f(v)) = a_j(v), j = 0, ..., n.$$

Εφόσον λοιπόν τα $f(v)$ και v έχουν τις ίδιες βαρυκεντρικές συντεταγμένες, έπεται (Λήμμα 2.0.5) ότι

$$f(v) = v,$$

που είναι το ζητούμενο. $\blacksquare$

Κεφάλαιο 6

Θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani

Το θεωρήμα σταθερού σημείου του Kakutani αποτελεί γενίκευση του θεώρηματος σταθερού σημείου του Brouwer για πλειότιμες απεικονίσεις.

Ορισμοί 6.0.13 *Έστω X, Y μή κενά σύνολα. Μια **πλειότιμη απεικόνιση** $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ είναι ένας κανόνας που σε κάθε σημείο x του X αντιστοιχεί το υποσύνολο $\varphi(x)$ του Y.*
*Το σύνολο X είναι το **πεδίο ορισμού** και το σύνολο Y είναι το **πεδίο τιμών** της απεικόνισης. Αν το $\varphi(x)$ φέρει ως υποσύνολο του Y κάποια ισδιότητα για κάθε x, τότε λέμε ότι οι τιμές της απεικόνισης φ φέρουν τις αντίστοιχες ιδιότητες. Για παράδειγμα αν το $\varphi(x)$ είναι κυρτό ή ανοικτό για κάθε x, τότε η φ έχει κυρτές ή αντίστοιχα ανοιχτές τιμές.*

Ορισμοί 6.0.14 *Δοθήσης πλειότιμης απεικόνισης $\varphi : A \twoheadrightarrow A$ ένα $x \in A$ καλέιται **σταθερό σημείο** της φ όταν $x \in \varphi(x)$.*

Ορισμοί 6.0.15 *Δεδομένης απεικόνισης $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ το σύνολο*

$$\mathit{Gr}(\varphi) = \{(x, y) \in X \times Y | y \in \varphi(x)\} \subset X \times Y$$

αποτελέι το γράφημα αυτής. Αν το γράφημα της φ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$ τότε λέμε ότι η φ έχει κλειστό γράφημα.

Λήμμα 6.0.9 *Οι τιμές πλειότιμης απεικόνισης με κλειστό γράφημα είναι κλειστές.*

Απόδειξη. Δοθείσης $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ όπως στην υπόθεση και τυχόντος $x \in X$, θα δειχθεί ότι $\varphi(x)$ κλειστό. Έστω ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\varphi(x)$ με $y_n \to y$ καθώς $n \to \infty$. Εξ επιλογής των y_n, ισχύει $(x, y_n) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $(x, y_n) \to (x, y)$ καθώς $n \to \infty$, από την κλειστότητα του γραφήματος έπεται ότι $(x, y) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$. Άρα $y \in \varphi(x)$. ■

Λήμμα 6.0.10 *Δοθείσης πλειότιμης απεικόνισης $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ με κλειστό γράφημα και ακολουθιών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και Y αντιστοίχως τέτοιων ώστε $y_n \in \varphi(x_n)$ και $x_n \to x \in X$, $y_n \to y \in Y$ καθώς $n \to \infty$, τότε $y \in \varphi(x)$.*

Απόδειξη. Εφόσον $y_n \in \varphi(x_n)$, ισχύει ότι $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $(x_n, y_n) \to (x, y)$ καθώς $n \to \infty$, από την κλειστότητα του γραφήματος έπεται ότι $(x, y) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$. Άρα $y \in \varphi(x)$. ■

Θεώρημα 6.0.2 ***(Kakutani)*** *Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, κυρτό και μή κενό, τότε κάθε απεικόνιση $\varphi : K \to K$ με κλειστό γράφημα και κυρτές, μή κενές τιμές έχει σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.0.4, το σύνολο K της υπόθεσης είναι ομοιμορφικό με την κλειστότητα κάποιου n-simplex, δηλαδή υπάρχει n-simplex S και ομοιομορφισμός $h : \overline{S} \to K$. Τοτε υποθέτοντας ότι το ζητούμενο ισχύει για το $\overline{S}$, οπότε η απεικόνιση $h^{-1} \circ \varphi \circ h$ έχει σταθερό σημείο $x \in \overline{S}$, είναι σαφές ότι το $h^{-1}(x)$ είναι το σταθερό σημείο της φ. Αυτή η επιχειρηματολογία δείχνει ότι τι θεώρημα αρκεί να αποδειχτεί για την περίπτωση $K = \overline{S}$.
Έστω οτι $\overline{S} = co\{u_0, ..., u_n\}$.Εφαρμόζουμε στο S ακολουθία βαρυκεντρικών τριγωνοποιήσεων $T^k, k \in \mathbb{N}$. Στην $k-$οστή βαρυκεντρική διαμέριση T^k ορίζουμε τη (μονότιμη) συνάρτηση $\varphi^{(k)} : \overline{S} \to \overline{S}$ ως εξής:

Εάν το $x \in \overline{S}$ είναι κορυφή κάποιου simplex της T^k, τότε θέτουμε $\varphi^{(k)}(x) := y$, όπου y κάποιο $y \in \varphi(x)$. Ειδάλλως, εάν το x είναι εσωτερικό ή συνοριακό σημείο στο κλειστό περίβλημα κάποιου simpelx $\overline{\Delta} = co\{v_0, .., v_n\}$ της T^k, όπου $x = \sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i v_i$ η γραφή αυτού σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες ως προς το Δ, τότε ορίζουμε $\varphi^{(k)}(x) := \sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i \varphi^{(k)}(v_i)$.

Σημειωτέον ότι στην περίπτωση όπου το σημείο x ανήκει στην κοινή όψη δύο simplex της T^k, τότε οι αντίστοιχες βαρυκεντρικές συντεταγμένες του ως προς αυτά ταυτίζονται και άρα η συνάρτηση $\varphi^{(k)}$ είναι καλώς ορισμένη.

Ισχυρισμός 1: Η συνάρτηση $\varphi^{(k)} : \overline{S} \to \overline{S}$ είναι συνεχής.

(Απόδειξη ισχυρισμού): Έστω $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \overline{S}$ τέτοια ώστε $x_m \to x_0$ όταν $m \to \infty$. Τότε

$$\begin{gathered}
\lim_{m\to\infty} x_m = x_0 \Rightarrow \\
\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^m v_i\right) = \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i v_i \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{k} \left(\lim_{m\to\infty} \lambda_i^m\right) v_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \Rightarrow \\
\lim_{m\to\infty} \lambda_i^m = \lambda_i,\, i = 0, 1, .., n \quad (1)
\end{gathered}$$

Η τελευταία συνεπαγωγή οφείλεται στη μοναδικότητα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων (Λήμμα 2.0.5). Επομένως,

$$\begin{gathered}
\lim_{m\to\infty} \varphi^{(k)}(x_m) = \\
\lim_{m\to\infty} \varphi^{(k)} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^k (v_i)\right) = \\
\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^k \varphi^{(k)} v_i\right) = \\
\sum_{i=1}^{i=n} (\lim_{m\to\infty} \lambda_i^k) \varphi^{(k)} v_i \stackrel{(1)}{=} \\
\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \varphi^{(k)} v_i = \varphi^{(k)}(x_0),
\end{gathered}$$

όπου η δεύτερη ισότητα οφείλεται στον ορισμό της $\varphi^{(k)}$. $\square$

Από τον άνωθεν ισχυρισμό, και εφόσον το $\overline{S}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Brouwer, εφαρμόζοντας το τελευταίο στη συνάρτηση $\varphi^{(k)} : \overline{S} \to \overline{S}$ της k-οστής βαρυκεντρικής τριγωνοποίησης T^k συνάγεται ότι

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N}, \text{ υπάρχει } x_k \in \overline{S} \text{ τέτοιο ώστε } \varphi^{(k)}(x_k) = x_k,$$

με άλλα λόγια συγκροτείται ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, όπου το x_k είναι σταθερό σημείο της $\varphi^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. (Ας σημειωθεί -αν και δέν θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη- ότι εάν $x_k \in \{u_0, .., u_n\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε $x_k = \varphi^{(k)}(x_k) \in \varphi(x_k)$, τουτέστιν το x_k είναι το σταθερό σημείο του θεωρήματος.) Θεωρούμε την ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \overline{S}$ η οποία, λόγω συμπάγειας του $\overline{S}$, μπορεί να θεωρηθεί συγκλίνουσα (ενδεχομένος αγνοώντας ορισμένους όρους αυτής) σε κάποιο $x^* \in \overline{S}$. Για κάθε βαρυκεντρική τριγωνοποίηση T^k συμβολίζουμε ως $\Delta^k = w_0^k ... w_n^k$ το simplex αυτής για το οποίο $x_k \in \overline{\Delta}^k$, οπότε συγκροτείται η ακολουθία $(\Delta^k)_{k\in\mathbb{K}}$. (Στην περίπτωση που το x_k ανήκει σε περισσότερα του ενός simplex της T^k επιλέγουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ένα εξ αυτών.)

Ισχυρισμός 2: Για κάθε $1 \leq i \leq n$ ισχύει $w_i^k \to x^*$ καθώς $k \to \infty$.
(Απόδειξη ισχυρισμού) Για την ακολουθία των διαμέτρων των βαρυκεντρικών τριγωνοποιήσεων $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ισχύει ως γνωστόν (Προτ. 2.0.4) ότι $diam(T^k) \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Συνεπώς επίσης (εξ ορισμού της διαμέτρου τριγωνοποιήσεως) $diam(\Delta^k) \to 0$, και άρα $|w_i^k - x_k| \to 0$ καθως $k \to \infty$, απ' που το ζητούμενο. $\square$

Γράφοντας τώρα κάθε $x_k \in \overline{\Delta^k}$, $k \in \mathbb{N}$, ως κυρτό συνδυασμό των κορυφών του $\overline{\Delta^k}$,

$$x_k = \textstyle\sum_{i=1}^{i=n} \vartheta_i^k w_i^k, \text{ τότε } \varphi^{(k)}(x_k) = \sum_{i=1}^{i=n} \vartheta_i^k y_i^k,$$

όπου $y_i^k = \varphi^{(k)}(w_i^k)$, $i = 1, .., n$. Επειδή οι δύο ακολουθίες, $(y_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\vartheta_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ $1 \leq i \leq n$, είναι υποσύνολα των συμπαγών συνόλων $\overline{\Delta^k}$ και $[0, 1]$ αντιστοίχως, μπορούν να θεωρηθούν από κοινού συγκλίνουσες, δηλαδή

$$y_i^k \to y_i \in \overline{\Delta^k}$$
$$\vartheta_i^k \to \vartheta_i \in [0, 1],$$

όπου σημειωτέον ότι $0 \leq \vartheta_i \leq 1$ και $\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i = 1$ (καθότι τα ϑ_i^k είναι βαρυκεντρικές συντεταγμένες). Επειδή τώρα το x_k είναι σταθερό σημείο της $\varphi^{(k)}$, ισχύει η ισότητα $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \varphi^{(k)}(x_k)$, απ' όπου συνάγεται ότι

$$x^* = \lim_{k\to\infty}(\vartheta_1^k y_1^k + ... + \vartheta_n^k y_n^k) = \vartheta_1 y_1 + .. + \vartheta_n y_n. \quad (*)$$

Σημειωτέον ότι, βάσει της προηγούμενης παρατήρησης, η παράσταση $(*)$ είναι κυρτός συνδυασμός των y_i. Συνεπώς, επειδή σύμφωνα με την υπόθεση το σύνολο $\varphi(x^*)$ είναι κυρτό, μένει να ελεγχθεί ότι $y_i \in \varphi(x^*), i = 1, .., n$

Εξ ορισμού της $\varphi^{(k)}$, και επειδή το w_i^k είναι κορυφή τριγωνοποίησης, ισχύει

$$y_i^k = \varphi^{(k)}(w_i^k) \in \varphi(w_i^k).$$

Επειδή επίσης $y_i^k \to y_i$ και $w_i^k \to x^*$ (Ισχ. 2), από Λήμμα 6.0.10 έπεται ότι $y_i \in \varphi(x^*)$. ■

Κεφάλαιο 7

Απόδειξη της Ισορροπίας κατά Nash με την βοήθεια σταθερού σημείου

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύεται ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα στη Θεωρία Παιγνίων, αυτό της ύπαρξης ισορροπίας κατά Nash. Ο Nash απέδειξε τη θεωρία του το 1950 κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Brouwer. Ωστόσο αργότερα δόθηκε μια πιο απλή απόδειξη της ίδια θεωρίας κάνοντας χρήση του θεωρήματος Kakutani, και αυτήν επιλέγουμε να παρουσιάσουμε. Η ύπαρξη σταθερού σημείου παρέμεινε η κεντρική ιδέα και για τις δύο αποδείξεις.

Ορισμοί 7.0.16 ***Θεωρία Παιγνίων*** *ονομάζεται η μελέτη των στρατηγικών λήψης αποφάσεων. Πιο συγκεκριμένα είναι η μελέτη των μαθηματικών μοντέλων τα οποία εκφράζουν την αλληλεπίδραση παικτών κατά τη λήψη αποφάσεων από αυτούς, δεδομένου ότι αυτή γίνεται ορθολογικά- δηλαδή οι παίκτες ακολουθούν μια στρατηγική.*

Στο **Παίγνιο** n **παικτών**, $n \in \mathbb{N}$ συμμετέχουν προφανώς n παίκτες . Ο $i-$ οστός παίκτης συμβολίζεται με $i = 1, .., n$. Σε κάθε παίκτη αντιστοιχεί ένα πεπερασμένο σύνολο **στρατηγικών** (δυνατών επιλογών). Συμβολίζουμε για κάθε παίκτη i το σύνολο στρατηγικής αυτού S_i. Κάθε πάικτης επιλέγει την ίδια χρονική στιγμή ένα στοιχείο (στρατηγική) $s_i \in S_i$. Οπότε τη χρονική αυτή στιγμή το διάνυσμα

$$(s_1, s_2, .., s_n) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$$

,είναι το **διάνυσμα σταρτηγικής** που επιλέχθηκε από τους παίκτες, όπου το καρτεσιανό γινόμενο $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ συγκροτεί το σύνολο των **στρατηγικών συνδιασμών**. Τα στοιχεία του συνόλου των στρατηγικών συνδιασμών ονομάζονται **διάνυσμα (προφίλ) στρατηγικής ή στρατηγικος συνδιαμός**. Σε κάθε παίκτη i αντιστοιχέι μια **συνάρτηση απόδοσης**

$$u_i : S_1 \times S_2 \times ... \times S_n \to \mathbb{R}$$

,ώστε ο πραγματικός αριθμός $u_i(s_1, .., s_n)$ να είναι η **απόδοση** (payoff) του διανύσματος στρατηγικής $(s_1, .., s_n)$ για τον παίκτη i.

Σε κάθε πάιγνιο οι παίκτες επιλέγουν στατηγικές με αυστηρό γνώμονα την απόδοση αυτών. Παρακάτω περιγράφουμε δύο πολύ γενικές αρχές με τις οποίες οι αποδόσεις αυτές μπορούν να συγκριθούν.

Έστω χάριν ευκολίας, παίγνιο δύο παικτών. Λέμε ότι η στρατηγική σ_i του παίκτη 1

(i) **κυριαρχεί** της στρατηγικής σ_j του παίκτη 1 αν

$$u_1(\sigma_i, \omega) \geq u_1(\sigma_j, \omega)\cdot$$

για κάθε στρατηγική ω του παίκτη 2,

(ii) **κυαριρχεί αυστηρά** της στρατηγικής σ_j του παίκτη 1 αν

$$u_1(\sigma_i, \omega) > u_1(\sigma_j, \omega),$$

για κάθε στρατηγική ω του παίκτη 2. Το αποτέλεσμα που προκύπτει μετά απο επανάληψη της μεθόδου των αυστηρά κυριαρχημενών στρατηγικών ονομάζεται **λύση του παίγνιου**. Μία σημαντική κατηγορία λύσεων είναι αυτή που φέρεί το όνομα **ισορροπία κατα Nash**.

Ορισμοί 7.0.17 *Έστω παίγνιο n παικτών, οπού σε κάθε παίκτη i,$i = 1, .., n$ αντιστοιχίζεται το σύνολο στρατηγικών S_i και η συνάρτηση απόδοσης u_i. Το διάννυσμα στρατηγικής$(s_1, .., s_n)$ είναι* ***ισορροπία κατά Nash*** *αν για κάθε i και και για κάθε $s \in S_i$ ισχύει*

$$u_i(s_1, s_2, .., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, .., s_n) \geq u_i(s_1, .., s_{i-1}, s, s_{i+1}, .., s_n).$$

Από παραπάνω ορισμό γίνεται σαφές ότι ένα διάνυσμα στρατηγικής είναι ισορροπία κατα Nash αν κανένας παίκτης δεν μπορεί,δεδομένής της στρατηγικής των άλλων παικτών, να βελτιώσει γνήσια την απόδοσή του αλλάζοντας στρατηγική .

Ορισμοί 7.0.18 *Τα* ***παίγνια καθαρής στρατηγικής*** *είναι παραδείγματα παιγνίων όπου κάθε παίκτης έχει προαποφασίσει τη στρατηγική που θα ακολουθήσει. Οι παίκτες εκτελούν τη στρατηγική αυτή στον ίδιο χρόνο και χωρίς να γνωρίζουν τη στρατηγική των άλλων παικτών. Τα παίγνια αυτά είναι δύο χρονικών περιόδων* 0 *και* 1*, όπου τη χρονική στιγμή* 0 *κάθε παίκτης μελετά το παίγνιο και τη χρονική στιγμή* 1 *κάθε παίκτης επιλέγει μια στρατηγική από το σύνολο στρατηγικής του με σκοπό να την ακολουθήσει.*

Ορισμοί 7.0.19 *Τα* ***παίγνια μεικτής στρατηγικής*** *είναι παραδείγματα παιγνίων τα οποία διαφοροποιούνται ως προς τα παίγνια καθαρής στρατηγικής στο ότι ο κάθε παίκτης επιλέγει ένα διάνυσμα πιθανότητας* $P_i = (p_1, .., p_{\nu_i})$*, όπου* ν_i *το πλήθος των στρατηγικών του, με το οποίο θα επιλέξει τη στρατηγική του τη χρονική στιγμή* 1*. Σε παίγνιο* n *παικτών, το διάνυσμα*

$$P = (P_1, .., P_n) \in \overline{\Sigma}_{\nu_1} \times .. \times \overline{\Sigma}_{\nu_n},$$

είναι ένα προφίλ στρατηγικής σε μεικτό παίγνιο, το οποίο καλείται ***διάνυσμα μεικτής στρατηγικής****, όπου*

$$\overline{\Sigma}_{\nu_k} = \{x \in \mathbb{R}_+^{\nu_k} | \sum_{i=1}^{\nu_k} x_i = 1\},$$

είναι το κλειστό περίβλημα του Σ_{ν_k} *simplex του* $\mathbb{R}_+^{\nu_k}$*. Έτσι τη χρονική στιγμή* 1 *ο παίκτης* i *με γνώμονα το διάνυσμα πιθανότητας* P_i *που έχει προεπιλέξει, εκλέγει μια στρατηγική* $s_{i_k} \in S_i$*.*

Στην περίπτωση του παίγνιου μεικτής στρατηγικής στο εξής θα θεωρούμε ως διάνυσμα στρατηγικής του κάθε παίκτη το διάνυσμα μεικτής στρατηγικής που αντιστοιχεί σε αυτόν. Έτσι στην περίπτωση των n παικτών, συμβολίζοντας χάριν ευκολίας τα σύνολα $\overline{\Sigma}_{\nu_j}, j = 1, .., n$ ως $S_j, j = 1, .., n$, το διάνυσμα

$$\sigma = (\sigma_1, .., \sigma_n),$$

όπου $\sigma_i \in S_1$ η επιλογή του παίκτη i, είναι το διάνυσμα στρατηγικών του παίγνιου. Για κάθε τέτοιο διάνυσμα, συμβολίζουμε με (t_i, σ_{-i}), όπου $t_i \in S_i$, το διάνυσμα στρατηγικών $(\sigma_1, .., \sigma_{i-1}, t_i, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ που προέρχεται αν στο διάνυσμα σ αντικαταστήσουμε τη στρατηγική σ_i του παίκτη i με τη στρατηγική t_i.
Οι συναρτήσεις απόδοσης u_i έχουν οριστεί ώστε να ικανοποίουν τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) Εΐναι σύνεχεις στο πεδίο ορισμού τους και
(ii) η συνάρτηση $u_i(t_i, \sigma_{-i})$,$t_i \in S_i$ ικανοποιέι την ακόλουθη συνθήκη γραμμικότητας

$$u_i\left(\lambda t_i + (1-\lambda)z_i, \sigma_{-i}\right) = \lambda u_i(t_i, \sigma_{-i}) + (1-\lambda)u_i(z_i, \sigma_{-i})$$

, για κάθε $t_i, z_i \in S_i$ και για $\lambda \in [0, 1]$.

Ορισμοί 7.0.20 *Σε κάθε παίγνιο μεικτής στρατηγικής με n παίκτες αντιστοιχίζουμε σε κάθε παίκτη i τη* ***συνάτηση βέλτιστης επιλογής*** *(best responce) την οποία συμβολίζουμε με BR_i,και ορίζεται ως εξής :*

$$BR_i : S^1 \times ... \times S^{i-1} \times S^{i+1} \times ... \times S^n \longrightarrow S^i \quad \textit{με}$$
$$BR_i(\sigma_1, .., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n) \equiv \textit{arg} \max_{\sigma_i \in S_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{i-1}), \ \textit{ή}$$
$$BR_i(\sigma_{i-1}) \equiv \textit{arg} \max_{\sigma_i \in S_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{i-1})$$

,έχοντας συμβολίσει για συντομία το διάνυσμα $(\sigma_1, .., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ με σ_{i-1}.

Είναι προφανές κάνοντας χρήση του παραπάνω ορισμού, ότι το διάνυσμα στρατηγικής $(\sigma_1, .., \sigma_n)$ είναι ισορροπία κατα Nash αν και μόνον αν

$$\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i}), \text{ για κάθε } i = 1, .., n. \quad (\star)$$

Θεώρημα 7.0.3 *Κάθε παίγνιο n παικτών μεικτής στρατηγικής έχει ισορροπία κατά Nash.*

Απόδειξη. Έστω S_i το σύνολο στρατηγικών του i-οστού παίκτη $i = 1, .., n$ και u_i η συνάρτηση χρησιμότητας που αντιστοιχει σε αυτόν.
Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$BR : S = S_1 \times ... \times S_n \longrightarrow S = S_1 \times ... \times S$$
$$\text{ως εξής: } BR(\sigma) = BR_1(\sigma_{-1}) \times ... \times BR_n(\sigma_{-n})$$

Είναι προφανες ότι εάν $\sigma_1^* \in BR_1(\sigma_{-1}), ..., \sigma_n^* \in BR_n(\sigma_{-n})$, τότε $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*) \in BR(\sigma^*)$. Έτσι η $(\star)$ μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως: υπάρχει $\sigma^* \in S$ τέτοιο ώστε $\sigma^* \in B(\sigma^*)$. Αρκεί λοιπόν να δειχθούν οι προυποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου του Kakutani για την συνάρτηση $BR : S \to S$ προκειμένου να αναχθεί το ζητούμενο.

(i) Το σύνολο S είναι κυρτό, συμπαγές και μη κενό σύνολο

Κάθε S_i περιέχει τουλάχιστον μια στρατηγική, οπότε το S είναι μή κενό σύνολο. Επιλεόν κάθε S_i είναι συμπαγές και κυρτό, άρα και το S ως το καστρεσινό τους γινόμενο είναι επίσης κυρτό και συμπαγές ως το καρτεσιανό γινόμενο αυτών.

(i) Η BR έχει μη κενές τιμές

Έστω u_i η συνάρτηση χρησιμότητας του $i-$οστού παίκτη και $\sigma_{-i} \in S_1 \times .. \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$. Τότε το σύνολο $\{u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}), \sigma_i \in S_i\}$ είναι συμπαγές υποσύλο του $\mathbb{R}$ ως απεικόνιση συμπαγούς συνόλου σε συνεχή συνάρτηση και επομένως λαμβάνει μέγιστο. Είναι επόμενο ότι το σύνολο $BR_i(\sigma_{-i})$ είναι μή κενό για κάθε $i = 1, .., n$ και επομέως η BR έχει μή κενές τιμές.

(iii) Η BR έχει κυρτές τιμές

Έστω $BR(\sigma), \sigma \in S$ τιμή της συνάρτησης. Υποθέτουμε $\sigma^1, \sigma^2 \in BR(\sigma)$.

Αν $\sigma_1 = (\sigma_1^1, .., \sigma_1^n)$ και $\sigma_2 = (\sigma_2^1, .., \sigma_2^n)$, τότε για $i = 1, .., n$ και για τυχόν $\lambda \in [0, 1]$ έχουμε

$$u_i(\lambda\sigma_i^1 + (1-\lambda)\sigma_i^2, \sigma_{-i}) \geq$$
$$u_i(\sigma_i^1, \sigma_{-i}) \geq \quad \text{(από συνθήκη γραμμικότητας της } u_i \text{)}$$
$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \quad \text{(αφού } \sigma_i^1 \in BR(\sigma)\text{) ,και τελικά}$$
$$\lambda\sigma_i^1 + (1-\lambda)\sigma_i^2 \in BR_i(\sigma_{-i}) \quad (1)$$

Η (1) ισχύει για κάθε $i = 1, .., n$ οπότε ο γραμμικός συνδιασμός $\lambda\sigma^1 + (1-\lambda)\sigma^2$ είναι στοιχείο του συνόλου $BR(\sigma)$ και το ζητούμενο έχει δειχθεί.

(iv) Η BR έχει κλειστό γράφημα

Έστω ακολουθίες $(a^m)_{m\in\mathbb{N}}, (b^m)_{m\in\mathbb{N}} \in S$ τέτοιες ώστε $a^m \to a$ και $b^m \to b$ καθώς $m \to \infty$ με

$b^m \in BR(a^m)$. Αρκεί να δειχθεί ότι $b \in BR(a)$ ή διαφορετικά αν $b = (b_1, .., b_n), a = (a_1, .., a_n)$ ότι $b_i \in BR_i(a_{-i})$ για κάθε $i = 1, .., n$. Έστω προς απαγωγή εις άτοπο ότι υπάρχει $i \in \{1, .., n\}$ τέτοιο ώστε $b_i \notin BR_i(a_{-i})$. Τότε υπάρχει $x_i \in S_i$ τέτοιο ώστε

$$u_i(x_i, a_{-i}) - u_i(b_i, a_{-i}) \equiv k > 0$$

Από τη συνέχεια της u_i συνάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M_\epsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$|u_i(x_i, a_{-i}^m) - u_i(x_i, a_{-i})| < \epsilon \text{ και } |u_i(b_i^m, a_{-i}^m) - u_i(b_i, a_{-i})| < \epsilon$$

για κάθε $m \geq M_\epsilon$. Έτσι, για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $m \geq M_\epsilon$. έχουμε

$$u_i(x_i, a_{-i}^m) > u_i(x_i, a_{-i}) - \epsilon = u_i(b_i, a_{-i}) + k - \epsilon > u_i(b_i^m, a_{-i}^m) + k - 2\epsilon$$

Επιλέγοντας $\epsilon = \frac{k}{2}$ συνάγεται ότι $u_i(x_i, a_{-i}^m) > u_i(b_i^m, a_{-i}^m)$ για κάθε $m \geq M_{\frac{k}{2}}$. Η τελευταία σχέση έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή ότι $b^m \in BR(a^m)$ που έχει γίνει για τις ακολουθίες, εφόσον από αυτήν συνάγεται ότι $b_i^m \in BR(a_i^m)$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Έστι καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την εφαρμογή του θεωρήματος σταθερού σημείου του Kakutani στη συνάρτηση $BR : S \longrightarrow S$

■

Βιβλιογραφία

[1]EBEBHARD ZEIDLER

Applied Functional Analysis Applications to Mathematical Physics(1995)

[2] JOHN.M.LEE

Iintroduction To Topological Manifolds(2010)

[3]MUNKRES

Topology(2000)

[4]PONTRYAGIN

Foundations of Combinatorial Topology(1952)

[5]KIM.C.BORDER

Fixed Point Theorems with Applications to economics and Game Theory(1985)

[6]I.A. ΠΟΛΥΡΑΚΗΣ

Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία(2010)

[7] KEN BINMORE

Playing for Real(2007)

[8] MICHAEL J.TODD

The computations of Fixed Point and Applications(1976)

[9]CHRISTIAN-OLIVER EWALD

Games, Fixed Points and Mathematical Economics(2004)