ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΠΤΕΡΥΓΑ ΒΑΣΙΣΜΕΝΟΥ ΣΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΜΕΣΗΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Διπλωματική Εργασία

Μπιτσακάκης Χαρίδημος Παναγιώτης

Επιβλέπων καθηγητής: Βασίλης Ριζιώτης, Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν στην εκπόνησή της.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Ριζιώτη Βασίλειο, ο οποίος με βοήθησε με ουσιαστικό τρόπο στην ολοκλήρωση της εργασίας μου και ήταν πάντα πρόθυμος να με καθοδηγήσει σε οποιαδήποτε απορία είχα. Οι θεωρητικές και πρακτικές γνώσεις που μου παρείχε ήταν καταλυτικές για την επιτυχή περάτωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Στην συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κύριο Βουτσινά Σπυρίδωνα για την υποστήριξή και το ενδιαφέρον του για την διπλωματική εργασία.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα κύριο Χασαπογιάννη Πέτρο, ο οποίος με καθοδήγησε και με βοήθησε ιδιαίτερα στα αποτελέσματα της εργασίας μου, καθώς είχε αναπτύξει το ίδιο θέμα με διαφορετική διατύπωση στην διδακτορική του εργασία.

Ξεχωριστά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον προπτυχιακό φοιτητή κύριο Ανδρόνικο Θεολόγο, ο οποίος με βοήθησε με τις γνώσεις του στην ολοκλήρωση της εργασίας, καθώς και με την υποστήριξή του όποτε αυτή ήταν απαραίτητη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την στήριξη που μου προσέφεραν.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1^{o}

1.1 Εισαγωγή

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας που εκπονήθηκε είναι η ανάπτυξη προτύπου αεροδυναμικής ανάλυσης της ροής γύρω από πτέρυγα αεροσκάφους, βασισμένου στην Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων και με την χρήση της Άμεσης Διατύπωσης ως προς το δυναμικό. Δημιουργήθηκε υπολογιστικό μοντέλο τρισδιάστατης πτέρυγας.

Η μέθοδος άμεσης διατύπωσης ως προς το δυναμικό αναπτύχθηκε, γιατί δίνει την δυνατότητα για μια καλύτερη σύζευξη με την μέθοδο συνεκτικής και μη συνεκτικής ροής που αφορά το οριακό στρώμα και το σημείο αποκόλλησης της ροής. Ειδικότερα, αντίστοιχη αναπαράσταση με αυτή που πραγματοποιήσαμε, χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της ταχύτητας συνεκτικής διόρθωσης στο οριακό στρώμα.

Σκοπός της δημιουργίας του μοντέλου, είναι η επίλυση μόνιμων και μη μόνιμων εξωτερικών ροών γύρω από πτέρυγα αεροσκάφους, γύρω από δρομείς ελικοπτέρου και ανεμογεννήτριας και γύρω από τρισδιάστατα πολύπλοκα σώματα (winglets).

Για την ανάλυση της ροής σε μη μόνιμες συνθήκες, ο ομόρρους είναι προδιαγεγραμμένος, δηλαδή η γεωμετρία του είναι προδιαγεγραμμένη και δημιουργείται σταδιακά. Τα στοιχεία που τον αποτελούν κινούνται με ταχύτητες (μέτρο και κατεύθυνση) που εξαρτώνται από τα δεδομένα που θα ορίσουμε εμείς.

Οι πτέρυγες που εξετάσθηκαν είναι η ορθογωνική πτέρυγα, η οπισθοκλινής πτέρυγα και η διπλής οπισθόκλισης πτέρυγα. Οι πτέρυγες δημιουργήθηκαν από αεροτομές που είναι συμμετρικές και ανήκουν στην σειρά NACA και η ανάλυση τους γίνεται στο Κεφάλαιο 8. Για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης βρίσκουμε τον συντελεστή πίεσης σε μία λωρίδα (strip) της πτέρυγας, την κατανομή της ταχύτητας κατά τον άξονα x και y και την κατανομή της κυκλοφορίας στο εκπέτασμα της πτέρυγας.

1.2 Γενικά Στοιχεία

Για την επίλυση του προβλήματος, η συνολική ροή ισοδυναμεί με την επαλληλία δύο ανεξάρτητων ροών. Στην μία περιλαμβάνεται η κυρτότητα της πτέρυγας και η γωνία πρόσπτωσης και αντιστοιχεί το *ανωστικό* πρόβλημα, ενώ στην άλλη υπολογίζεται η μετατόπιση της ροής που οφείλεται στο πάχος οπότε αντιστοιχεί στο *μη-ανωστικό* πρόβλημα. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε την διατύπωση των πηγών που αντιστοιχεί στο πρόβλημα του πάχους, ενώ η διατύπωση των διπόλων, αναφέρεται τόσο στο δυναμικό στην επιφάνεια της πτέρυγας, όσο και στον ομόρρου και εισάγεται για να υπάρξει άνωση. Και οι δύο διατυπώσεις επιλύονται ως προς το δυναμικό που είναι και ο άγνωστος του προβλήματος.

Σε τρισδιάσατες ροές έχουμε πάντα την εμφάνιση ομόρρου ακόμα και σε μόνιμες συνθήκες, ενώ η στροβιλότητα που αποβάλλεται από την ακμή εκφυγής εμφανίζεται στην διαμήκη χορδική κατεύθυνση.

Η ανάλυση της ροής γύρω από πτέρυγα με πάχος ξεκινά με την θεώρηση του ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού και της αστρόβιλης ροής σχεδόν παντού (εκτός από μία ή δύο επιφάνειες ασυνέχειας).

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πλαισίων ή συνοριακών στοιχείων, η οποία προτάθηκε από τους Hess και Smith. Στην μέθοδο αυτή, η επιφάνεια του σώματος (πτέρυγας) χωρίζεται σε τρίγωνα ή τετράπλευρα στοιχεία, επίπεδα ή καμπύλα, πάνω δε σε κάθε πλαίσιο τοποθετείται γραμμική κατανομή διπόλων (κατά τον άξονα x) και σταθερή κατανομή πηγών εκφρασμένη ως προς το δυναμικό.

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος απαιτείται η διακριτοποίηση τόσο της γεωμετρίας (διακριτοποίηση της πτέρυγας και του ομόρρου), όσο και των εξισώσεων του προβλήματος. Αυτές οι εξισώσεις είναι απαραίτητες για την αριθμητική επίλυση της μη μόνιμης ροής γύρω από την πτέρυγα. Οι εξισώσεις αυτές είναι η συνοριακή συνθήκη μη εισχώρησης και η συνθήκη για την ισότητα των πιέσεων στην ακμή εκφυγής (συνθήκη Kutta).

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του προδιαγεγραμμένου ομόρρου (prescribed wake), δηλαδή ο ομόρρους έχει προδιαγεγραμμένη γεωμετρία, ενώ θεωρείται και ''παγωμένος''. Με τον συγκεκριμένο όρο θεωρούμε ότι τα τμήματα του ομόρρου που παράγονται έχουν όλα το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση. Αποτελείται από ένα επιφανειακό πλέγμα στροβιλότητας που σχηματίζεται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων.

1.3 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε διερεύνηση της βιβλιογραφίας ως προς την κατεύθυνση των αριθμητικών μεθόδων και κυρίως στις τρισδιάστατες στροβιλές μεθοδολογίες (vortex methods). Στις μεθόδους αυτές επιλύεται η ασυμπίεστη μη συνεκτική ροή γύρω από σώμα με τρισδιάστατα πλέγματα. Η ροή αναπαριστάται μέσω της συνάρτησης δυναμικού και με την βοήθεια των θεωρημάτων αναπαράστασης του Helmholtz και Green. Οι ιδιομορφίες υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης Laplace για το δυναμικό με συνοριακές συνθήκες Neumann ή Dirichlet. Τα σώματα αναπαρίσταται μέσω της επιφάνειας άνωσης και μέσω μιας επιφανειακής διανομής δινοπλεγμάτων. Το αποβαλλόμενο φύλλο στροβιλότητας αναπαρίσταται είτε από πλέγμα δινοπετάλων (vortex lattice), είτε από στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles). Είναι δυνατόν να προσεγγιστεί με τις μεθόδους του προδιαγεγραμμένου ομόρρου (prescribed wake), είτε μέσω του ελεύθερου ομόρρου (free wake). Στην πρώτη περίπτωση, ο ομόρρους αποτελείται από τμήματα δινοσωλήνων που ακολουθούν μια γεωμετρία με περιορισμένους βαθμούς ελευθερίας. Στην δεύτερη περίπτωση, ο ομόρρους είναι ελεύθερος και η γεωμετρία του καθορίζεται από την επίλυση των δυναμικών και κινηματικών εξισώσεων για την ελεύθερη στροβιλότητα.

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν αριθμητικές υλοποιήσεις των τρισδιάστατων στροβιλών μεθοδολογιών σε ανεμογεννήτριες:

- Θεωρία δίσκου ορμής και στοιχείων πτερύγωσης (Schepers and Snel 1994),
- Λεπτότοιχα ανωστικά σώματα με προδιαγεγραμμένο ομόρρου (Chassapoyiannis and Voutsinas 1994),

- Λεπτότοιχα ανωστικά σώματα και ελεύθερος ομόρρους σε πλεγματική μορφή (Bareiss and Wagner 1993),
- Λεπτότοιχα ανωστικά σώματα και ελεύθερος ομόρρους με στοιχεία στροβιλότητας (Voutsinas, Belessis et al. 1994)

Σε δρομείς ελικοπτέρου:

- Θεωρία δίσκου ορμής και στοιχείων πτερύγωσης (Morino, Gennareti et al. 1998),
- Λεπτότοιχα ανωστικά σώματα και ελεύθερος ομόρρους με στοιχεία στροβιλότητας (Triantos and Voutsinas 1999b)

Σε ναυτικές έλικες:

- Λεπτότοιχα ανωστικά σώματα και προδιαγεγραμμένος ομόρρους σε πλεγματική μορφή (Kerwin and Lee 1978)
- Ανωστικά σώματα με πάχος και προδιαγεγραμμένος ομόρρους σε πλεγματική μορφή (Kinnas, Hsin et al. 1990; Belibasakis and Politis 1998; ITTC 1998; Kinnas 1998; Politis 1998)
- Ανωστικά σώματα με πάχος και ελεύθερο ομόρρου σε στροβιλή μορφή (Belessis, Chassapoyiannis et al. 2001)1

Στα πλαίσια της παραπάνω θεωρίας έχει αναπτυχθεί στο εργαστήριο Αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π από τον διδάκτορα κύριο Χασαπογιάννη Πέτρο, διδακτορική εργασία μέσω της οποίας γίνεται η επίλυση του ρευστοδυναμικού προβλήματος της μόνιμης ασυμπίεστης, μη συνεκτικής ροής γύρω από σώματα με πάχος. Στην συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκε η μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων. Οι βασικές εξισώσεις που επιλύθηκαν είναι η συνθήκη μη εισχώρησης της κάθετης ταχύτητας στο σύνορο και η συνθήκη Kutta Joukowski στην ακμή εκφυγής. Η αναπαράσταση του στροβιλού μέρους της ροής έγινε με την χρήση μεθοδολογίας ελεύθερων στοιχείων στροβιλότητας.

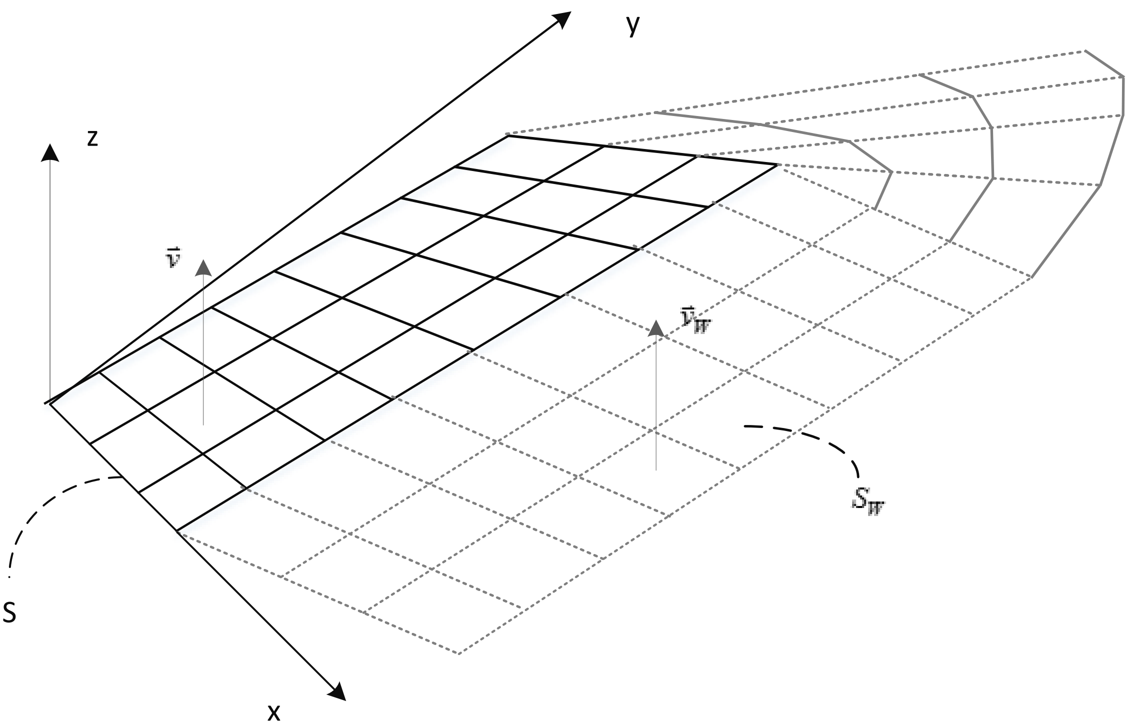
Κεφάλαιο 2ο

2.1 Διατύπωση Προβλήματος

Έστω μη μόνιμη, ασυμπίεστη και μη συνεκτική ροή γύρω από πτέρυγα. Με S συμβολίζεται η επιφάνεια της πτέρυγας με κάθετο διάνυσμα σε αυτήν το $\vec{v}$ και με S_W και $\vec{v}_W$ η επιφάνεια και το κάθετο διάνυσμα του ομόρρου.

Η εξίσωση την οποία επιλύουμε γύρω από την πτέρυγα S είναι η Laplace:

$$\nabla^2 \Phi(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = 0$$



Σχήμα 1. Η γεωμετρία της πτέρυγας και ο παραγόμενος ομόρρους

Ο ομόρρους εισάγεται ως φύλλο στροβιλότητας, δηλαδή μια κινούμενη επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας $\vec{u}(\vec{x}, t)$, που περιγράφεται από την μαθηματική εξίσωση:

$$\vec{x}_W \in S_W, \quad \begin{array}{l} \vec{v}_W(\vec{x}_W, t) \cdot [\![\vec{u}]\!](\vec{x}_W, t) = 0 \\ [\![p]\!](\vec{x}_W, t) = 0 \end{array}$$

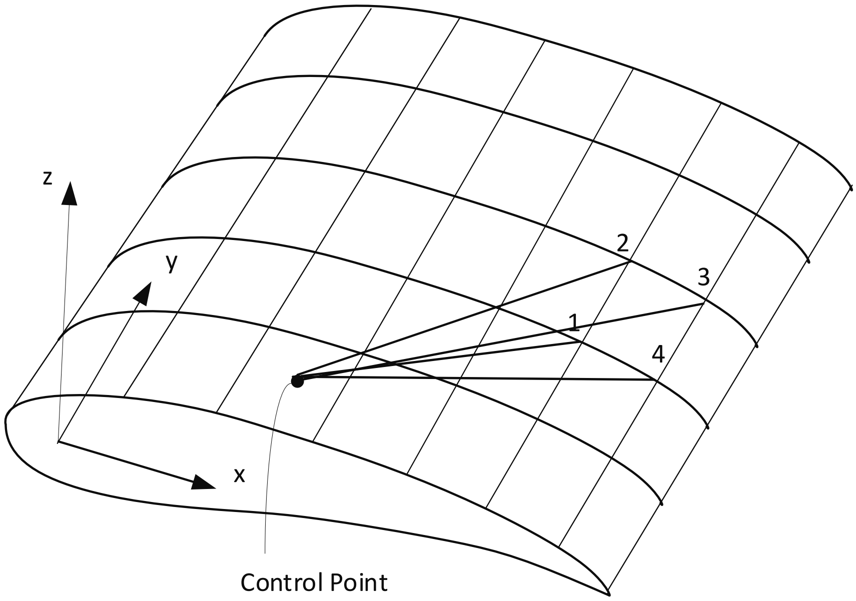
Η συνολική ταχύτητα είναι:

$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{U}_\infty(\vec{x},t) + \nabla\phi_S(\vec{x},t) \quad x \in \Re^3,\ t \geq 0$, όπου $\vec{U}_\infty$ είναι η ταχύτητα του πεδίου ροής στο άπειρο, ϕ_S το δυναμικό διαταραχής που οφείλεται στην πτέρυγα.

Επειδή η ροή γίνεται γύρω από ανωστικό σώμα ο όρος $\nabla\phi(\vec{x},t)$ είναι δυνατόν να συμπεριλάβει και την συνεισφορά της αποβαλλόμενης στροβιλότητας αυτού του σώματος που μπορεί να διανέμεται ως ένα ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας. Έτσι προκύπτει η δυναμική (potential) θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας, σύμφωνα με την οποία ο ομόρρους αναπαριστάται από μια επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού, κατασκευασμένη από πλέγμα δινοσωλήνων.

2.2 Μέθοδος Άμεσης Διατύπωσης

Η μέθοδος με την οποία επιλύουμε την πτέρυγα είναι η **Μέθοδος Άμεσης Διατύπωσης,** όπου το δυναμικό Φ(x,y,z) θεωρείται ο άγνωστος και το οποίο βρίσκουμε μέσω της επίλυσης των εξισώσεων. Αρχικά θεωρούμε το κάθε Control Point (CP) όπως αυτό θα οριστεί παρακάτω, ως προς το οποίο θέλουμε να γνωρίζουμε τι επάγουν τα υπόλοιπα panels, όπως και την συνεισφορά του ίδιου του panel στο δικό του CP. Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούμε γραμμικές κατανομές διπόλων και σταθερή κατανομή πηγών τις οποίες εκφράζουμε ως δυναμικό (δίπολα) και ως κάθετη ταχύτητα στο πάνελ (πηγές).



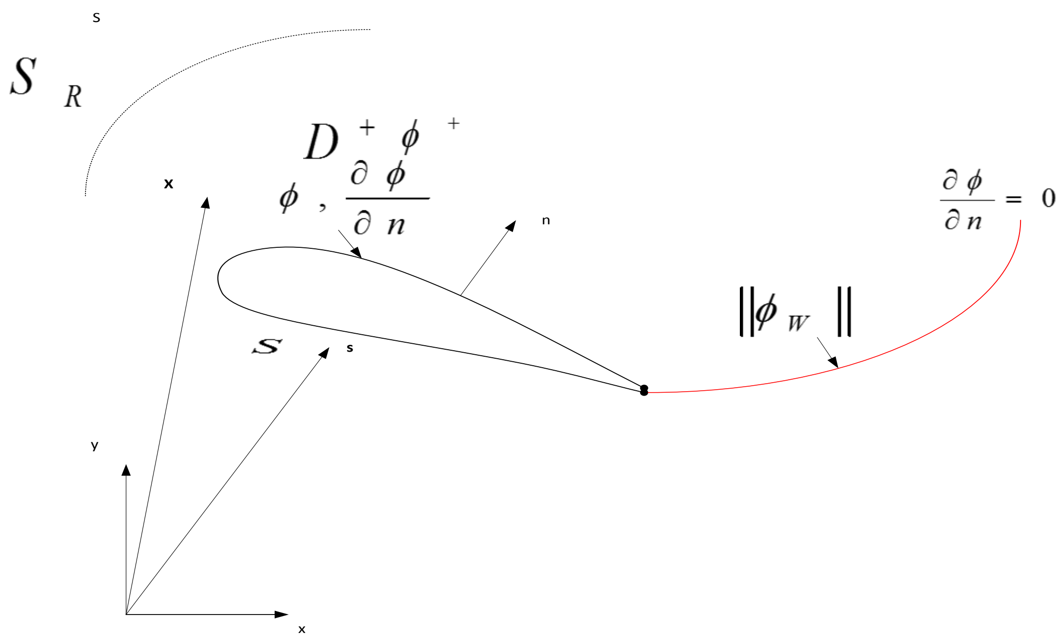
Σχήμα 2. Control Point και επαγωγή σε τυχαίο σημείο του χώρου

2.3 Υπολογισμός του Δυναμικού

Το δυναμικό που εισάγουμε στο σύστημα, χρησιμοποιώντας πηγές και δίπολα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\phi(x_0) = \frac{-1}{4\pi}\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n}\cdot\frac{1}{r}\,dS - \frac{1}{4\pi}\int_S -\phi\cdot\frac{\mathrm{r}\cdot\eta}{\mathrm{r}^3}\,dS - \frac{1}{4\pi}\int_{S_W} -[\![\phi]\!]_w\,\frac{r\cdot\eta}{r^3}\,dS_w$$

Παρατηρούμε ότι άγνωστοι του συστήματος είναι η κάθετη ταχύτητα στο σύνορο και η κατανομή του δυναμικού στην πτέρυγα και τον ομόρρου. Η κάθετη ταχύτητα στον ομόρρου είναι μηδέν. Οι εξισώσεις του δυναμικού είναι όσα και τα panels δηλαδή N (σε μία τομή), ενώ οι εξισώσεις είναι N+1. Η εξίσωση που λείπει και είναι βασική για την επίλυση του συστήματος, βρίσκεται μέσω της συνθήκης Kutta που αναφέρεται στην ισότητα των πιέσεων στην ακμή εκφυγής.



Σχήμα 3. Τα βασικά μεγέθη της Άμεσης Διατύπωσης

2.4 Υπολογισμός της Ταχύτητας

Η ταχύτητα σε ένα τυχαίο σημείο υπολογίζεται από την εξίσωση:

$\vec{u} = U_\infty + u(x) = U_\infty + \nabla\phi(\mathrm{x})$, όπου

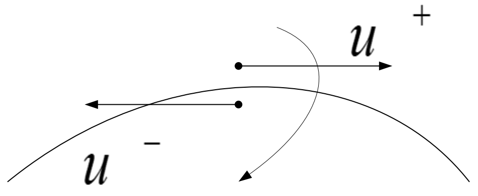
$$\vec{u}(x_0) = \nabla_0 \cdot [\frac{-1}{4\pi}\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n}\cdot\frac{1}{r}dS - \frac{1}{4\pi}\int_S -\phi\frac{\mathrm{r}\cdot\eta}{\mathrm{r}^3}dS - \frac{1}{4\pi}\int_{S_W} -[\![\phi]\!]_w \frac{r\cdot\eta}{r^3}dS_w]$$

$$\vec{u}(x_0) = \nabla_0[\frac{-1}{4\pi}\int_S \left\|\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\|(x)\frac{1}{\mathrm{r}}dS] + \nabla_0[\frac{-1}{4\pi}\int_{S+S_W}\phi\cdot\frac{\vec{n}(x)\vec{r}}{r^3}dS] + \frac{1}{4\pi}\int_S\frac{(-\mathrm{U}_\infty\cdot n\cdot\vec{r})}{r^3}$$

$$\vec{u}(x_0) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial S+\partial S_W}\phi\cdot\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}dS + \frac{1}{4\pi}\int_{S+S_W}\frac{(\nabla_S\phi\times\vec{n}(x))\times\vec{r}}{r^3}dS \ + \frac{1}{4\pi}\int_S\frac{(-\mathrm{U}_\infty\cdot n\cdot\vec{r})}{r^3}$$

Η διαφορά της ταχύτητας στην πάνω και κάτω πλευρά δημιουργούν στρόβιλο έντασης:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}^{+} = \nabla\phi^{+} \\ \vec{u}^{-} = \nabla\phi^{-} \end{array}\right\} \quad \vec{u}^{+} - \vec{u}^{-} = \nabla(\phi^{+} - \phi^{-})$$



Σχήμα 4 . Η παραγωγή στροβίλου

Ο επικαμπύλιος όρος του ολοκληρώματος αθροίζει της ταχύτητες, που επάγονται στο σημείο $\vec{x}_0$ από της τέσσερις δινοσωλήνες που περιβάλλουν το στοιχείο (επικαμπύλια στροβιλότητα).

2.5 Συνθήκη μη εισχώρησης

Εφόσον γνωρίζουμε την μορφή της ταχύτητας εφαρμόζουμε την συνθήκη μη εισχώρησης σε κάθε panel, που συνεπάγεται την μη εισχώρηση ρευστού στην πτέρυγα της και την μη ύπαρξη κάθετης ταχύτητας στο σύνορο της πτέρυγας (στο πάνελ που επάγουμε).

Η συνθήκη που ισχύει είναι η:

$$\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S$$

όπου : $\vec{n}(\vec{x})$ το κάθετο διάνυσμα στην θέση $\vec{x}$

$\vec{u}(\vec{x})$ η ταχύτητα του πεδίου ροής στην θέση $\vec{x}$

$$\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = 0 \Rightarrow (\mathrm{U}_\infty + \nabla\phi) \cdot \eta = 0 \Rightarrow \mathrm{U}_\infty \cdot \eta + \frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{n}} = 0 \Rightarrow$$

Άρα $\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{n}} = -U_{\infty} \cdot \eta(\mathrm{x}_0)$

Άρα, σε κάθε χρονική στιγμή για ένα panel, είναι γνωστό τι επάγει το ίδιο το panel στον εαυτό του, αλλά και τα υπόλοιπα panels σε αυτό. Συνεπώς δημιουργείται ένας πίνακα **A,** με τις διάφορες συνεισφορές των panels. Κάθε panel επάγει στον εαυτό του, δηλαδή στα άκρα του δυναμικού $0.5 \pm UPWIND$, όπου ψ η μετακίνηση του κέντρου που επάγει. Η μετακίνησή αυτή πραγματοποιείται, για να μην υπάρχει μηδενισμός του παρανομαστή στις εξισώσεις του δυναμικού και συνεπώς απειρισμός του .

Οι εξισώσεις που έχουμε είναι τόσες όσες οι και οι άγνωστες τιμές του δυναμικού (μαζί με την συνθήκη Kutta που θα αναπτυχθεί παρακάτω).

Παρακάτω αναπτύσσεται ένα σύστημα $(3 \cdot \mathrm{N} + 3) \times (3 \cdot \mathrm{N} + 3)$

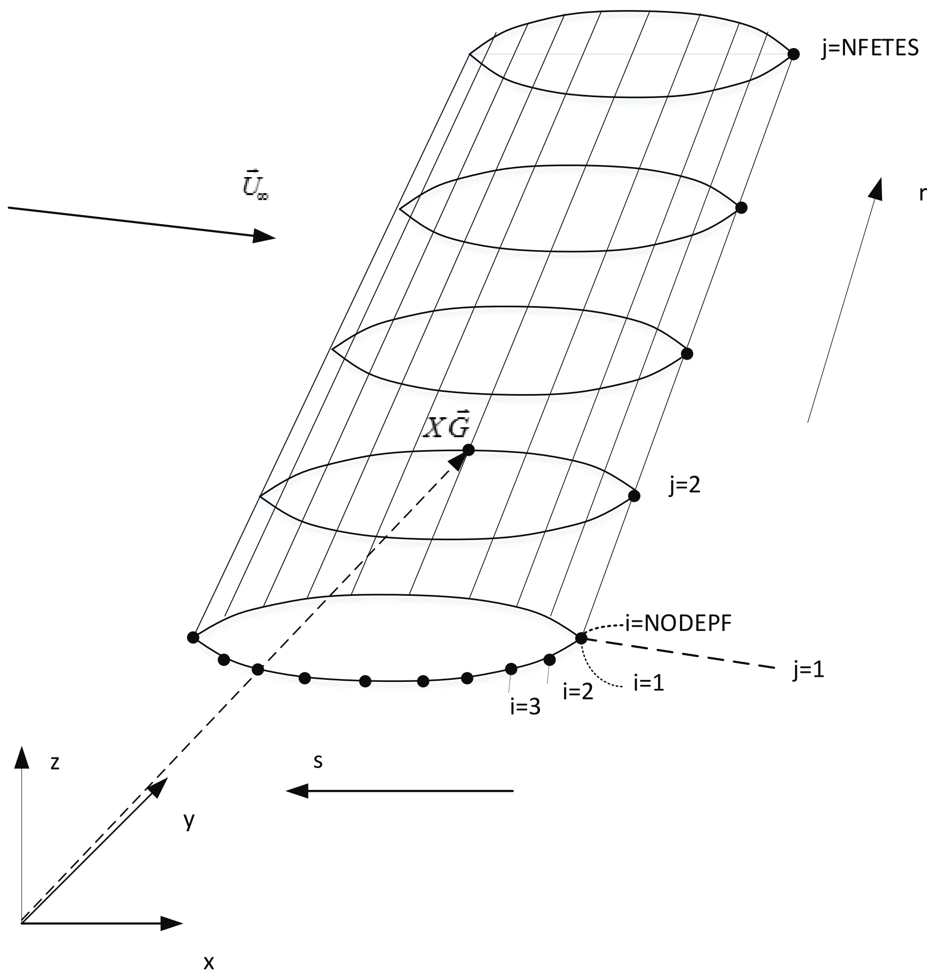
$$\rightarrow \begin{bmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^{N+1} & A_1^{N+2} & \cdots & A_1^{2\cdot N+2} & A_1^{2\cdot N+3} & \cdots & A_1^{3\cdot N+3} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N^1 & \cdots & A_N^{N+1} & A_N^{2\cdot N+2} & \cdots & A_N^{2\cdot N+2} & A_N^{2\cdot N+3} & \cdots & A_N^{3\cdot N+3} \\ \alpha & \cdots & \beta & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & A_{N+2}^{N+2} & \cdots & A_{N+2}^{2\cdot N+2} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \gamma & \ddots & \delta & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & A_{2\cdot N+3}^{2\cdot\cdot N+3} & \cdots & A_{2\cdot N+3}^{3\cdot N+3} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{3\cdot N+3}^1 & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \varepsilon & \cdots & \zeta \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi^{\mathrm{N}+1} \\ \phi^{\mathrm{N}+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi^{2\cdot\mathrm{N}+2} \\ \phi^{2\cdot\mathrm{N}+3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi^{3\cdot\mathrm{N}+3} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{B}^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{B}^{\mathrm{N}+1} \\ \mathrm{B}^{\mathrm{N}+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{B}^{2\cdot\mathrm{N}+2} \\ \mathrm{B}^{2\cdot\mathrm{N}+3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{B}^{3\cdot\mathrm{N}+3} \end{matrix} \right\}$$

Η τελευταία γραμμή της κάθε τομής (δηλαδή μετά από N panels) αποτελεί την συνθήκη Kutta που εξισώνει τις πιέσεις στην ακμή εκφυγής (δηλαδή στο πρώτο και το τελευταίο κάθε τομής). Τα γράμματα α,β,γ,δ,ε,ζ είναι πραγματικοί αριθμοί και αναφέρονται στην σχέση του δυναμικού στην ακμή εκφυγής.

Κεφάλαιο 3ο

3. 1 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας της πτέρυγας

Η γεωμετρία της πτέρυγας και του ομόρρου προσεγγίζεται από επιφανειακό πλέγμα σημείων $(\vec{XG})$ στο γενικό –αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5. Διακριτοποίηση της γεωμετρίας της πτέρυγας

Ως εισαγωγή στον κώδικα δίνουμε την γεωμετρία της πτέρυγας, δηλαδή τους κόμβους (NODEPF) και των αριθμών των τομών (NFETES). Στην συνέχεια ορίζονται ο αριθμός των λωρίδων (NSTRIPS), δηλαδή ο χώρος ανάμεσα σε 2 τομές, ο οποίος είναι (NFETES-1), ενώ ο συνολικός αριθμός των panels στην πτέρυγα είναι

(NFETES-1)*(NODEPF-1). Όπως αναφέρθηκε παραπάνω αντιστρέφουμε την αρίθμηση των κόμβων έτσι ώστε να αρχίζει η αρίθμηση τους, από την πλευρά υπερπίεσης, να περνάει από την ακμή προσβολής και να καταλήγει στην ακμή εκφυγής της πλευράς υποπίεσης όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.
Ένα επιφανειακό πλέγμα μπορεί να περιγραφεί από μια διπαραμετρική επιφάνεια $S(s_i, r_i)$, i =1, NODEPF, j= 1, NFETES

Οι γραμμές s_i είναι προσανατολισμένες προς την κύρια κατεύθυνση της ροής, με την συγκεκριμένη παράμετρο να περιγράφει το μήκος τόξου που διατρέχει την επιφάνεια του σώματος σε δεδομένη ακτινική θέση και μετράται σύμφωνα με την παραπάνω περιγραφή. Η παράμετρος μήκους r_i αντιστοιχεί σε ακτινικές θέσεις πάνω στο σώμα.

Ένα επιφανειακό πλέγμα ορίζεται από τους NODE κόμβους, που σχηματίζουν NPAN τετράπλευρα επιφανειακά στοιχεία.

$$
\begin{aligned}
&NODE = NODEPF \cdot NFETES \\
&NPAN = (NODEPF - 1) \cdot (NFETES - 1)
\end{aligned}
$$

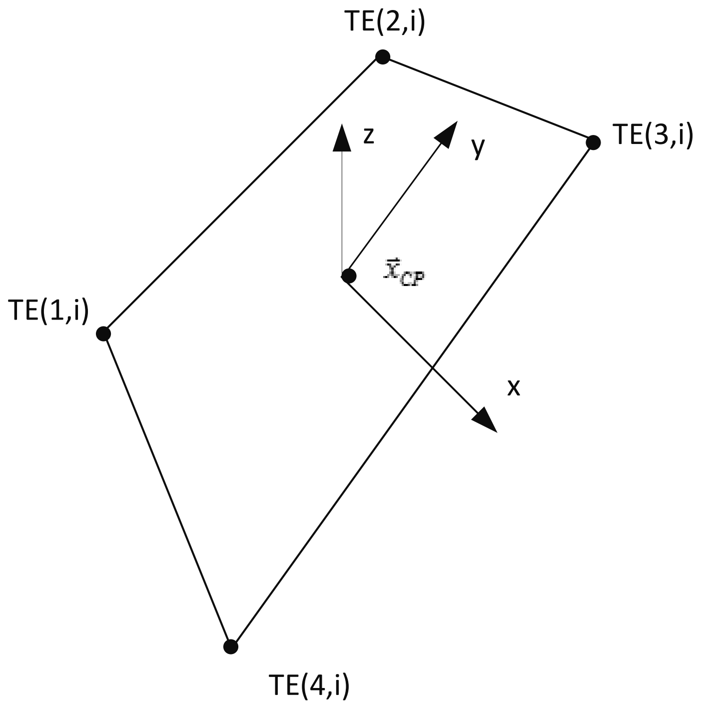
Η γενική αρίθμηση των κόμβων $TE(i, j)$ και των στοιχείων του πλέγματος είναι:

$$
\begin{aligned}
&NODE(i, j) = (j-1) * NODEPF + i, \qquad i = 1, NODEPF, j = 1, NFETES \\
&NEL(i, j) = (j-1) * (NODEPF - 1) + i, \quad i = 1, NODEPF - 1, j = 1, FETES - 1
\end{aligned}
$$

Οι κόμβοι που ορίζουν το επιφανειακό πλέγμα του σώματος βρίσκονται πάνω στην πραγματική επιφάνεια του σώματος και στην γενική περίπτωση ένα στοιχείο ορίζεται από τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία. Η αναπαράσταση των σωμάτων με επίπεδα στοιχεία, οδηγεί σε απλούστευση των αριθμητικών υπολογισμών και εξοικονόμηση χρόνου κατά την επίλυση του προβλήματος από τον υπολογιστή. Αυτό επιτυγχάνεται με την προβολή των κόμβων του τετράπλευρου στοιχείου σε ένα μέσο επίπεδο. Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς των ολοκληρωμάτων ταχυτήτων, γράφουμε τα αναλυτικά ολοκληρώματα και έτσι περιορίζουμε τις απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο. Στις περιοχές όπου η πτέρυγα εμφανίζει έντονες κλίσεις δημιουργούνται κενά μεταξύ των στοιχείων και η προσέγγιση της γεωμετρίας μπορεί να μην είναι ακριβής. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με πύκνωση των στοιχείων στις περιοχές αυτές και κυρίως στην ακμή προσβολής και στην ακμή εκφυγής. Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτουν τραπεζοειδή στοιχεία.

Έτσι στο γενικό-αδρανειακό σύστημα ορίζεται δομημένο πλέγμα από σημεία $XG(k=1:3, n=1, NODE)$, όπου το k αντιστοιχεί σε καρτεσιανή συνιστώσα του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και το n σε αριθμό κόμβου του πλέγματος, σύμφωνα με την αρίθμηση που περιγράφεται παρακάτω. Η θέση ενός τετράπλευρου στοιχείου καθορίζεται από τις συντεταγμένες XG των τεσσάρων κορυφών που αριθμούνται δεξιόστροφα. Οι κορυφές $k=1:4$, στο τοπικό σύστημα του στοιχείου αντιστοιχούν σε κόμβους του γενικού συστήματος που έχουν αρίθμηση $NEL(k=1:4, i=1, NPAN)$. Ένας κόμβος της τοπικής αρίθμησης του στοιχείου θα αντιστοιχεί σε ένα και μόνο κόμβο NEL έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} TE(1,nel) &= (i-1)\cdot(NODEPF-1)+j \\ TE(2nel) &= i\cdot(NODEPF-1)+j \\ TE(3,nel) &= i\cdot(NODEPF-1)+j+1 \\ TE(4,nel) &= (i-1)\cdot(NODEPF-1)+j+1 \end{aligned} \quad , \; i=1, NFETES\,,\; j=1, NODEPF$$

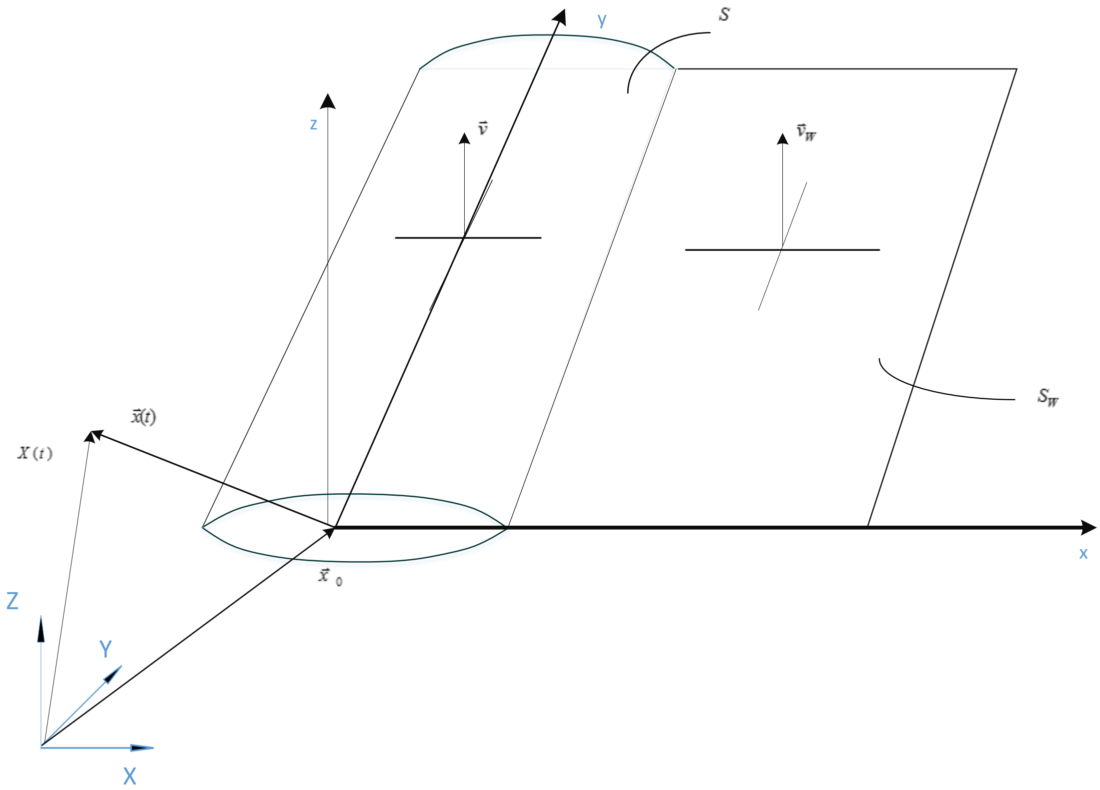


Σχήμα 6. Αρίθμηση του πάνελ

Με δεδομένη τη γεωμετρία των κόμβων του πλέγματος υπολογίζονται: το εμβαδόν, το μήκος της περιφέρειας του στοιχείου, τα μήκη και οι κλίσεις των πλευρών, το πλάτος και οι δύο διαγώνιοι όπως και η βάση του στοιχείου. Επίσης, για κάθε στοιχείο του επιφανειακού πλέγματος ορίζεται το ‘’σημείο ελέγχου’’ $\vec{x}_{CP}$ που αποτελεί το σημείο επαλήθευσης της συνθήκης μη εισχώρησης. Ο υπολογισμός του σημείου γίνεται έτσι ώστε να μηδενίζεται η εφαπτομενική αυτεπαγόμενη ταχύτητα της διανομής πηγών.

3.1.1 GPANEL_3D

Μετά την αρίθμηση των κόμβων, καλούμε την υπορουτίνα **GPANEL_3D,** όπου σαν μεταβλητές εισόδου δίνουμε τις θέσεις των κόμβων των panel (4 σημεία) και σαν έξοδο παίρνουμε τα γενικά στοιχεία του panel, δηλαδή το κέντρο του κάθε panel, την τοπική βάση, δηλαδή τα κάθετα διανύσματα στους άξονες (x,y,z), τις τοπικές θέσεις των κόμβων (στον άξονα x και y).



Σχήμα 7. Γεωμετρικά στοιχεία του προβλήματος

Σε επόμενο κεφάλαιο περιγράφεται ο τρόπος υπολογισμού των ολοκληρωμάτων των επαγόμενων ταχυτήτων από τις διανομές πηγών και διπόλων σε ένα σημείο του χώρου, τα οποία υπολογίζονται αναλυτικά μόνο εάν τα επιφανειακά στοιχεία είναι επίπεδα. Στην πραγματικότητα η καμπυλότητα των στοιχείων και ο αριθμητικός περιορισμός των σημείων που χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση μιας πτέρυγας, δεν επιτρέπει την δημιουργία επίπεδων στοιχείων. Για αυτό τον λόγο, γίνεται μέσω μετασχηματισμού, αναγωγή ενός τυχαίου στοιχείου στο επίπεδο. Μέσω της διαδικασίας μετασχηματισμού προκύπτουν δύο ειδών σφάλματα. Το ένα έχει να κάνει με την ικανότητα των επίπεδων στοιχείων να προσεγγίζουν την πραγματική επιφάνεια (μπορεί να είναι σύνθετη με έντονες κλίσεις). Το δεύτερο σχετίζεται με τα κενά που δημιουργούνται μεταξύ των στοιχείων όταν τα σημεία που τα ορίζουν προβάλλονται ανά τέσσερα σε ένα μέσο επίπεδο (όταν αυτά δεν είναι συνεπίπεδα). Και τα δύο σφάλματα μειώνονται με την αύξηση του πλήθους των στοιχείων.

Κάθε στοιχείο ορίζεται από τις κορυφές $x_{m,n}$ (m=1,3 n=1,4) στο γενικό σύστημα. Εάν θεωρήσουμε την μοναδιαία βάση $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, τότε οι κορυφές του τετραπλεύρου ορίζονται ως:

$$\vec{x}_{m,n} = x_{1,n}\cdot\vec{i} + x_{2,n}\cdot\vec{j} + x_{3,n}\cdot\vec{k}$$

Ορίζονται τα διανύσματα $\vec{P}_F,\vec{P}_S$ των πλευρών F και S σύμφωνα με τις θέσεις των σημείων $\vec{x}_{m,n}$, καθώς επίσης και το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_x$ που είναι παράλληλο ως προς το μέσο όρο των διανυσμάτων $\vec{P}_F,\vec{P}_S$ (ταυτόχρονα είναι το μοναδιαίο διάνυσμα ως προς τον τοπικό άξονα –ξ του τοπικού συστήματος συντεταγμένων του στοιχείου) ως εξής:

$$\vec{P}_F = \vec{x}_{m,4} - \vec{x}_{m,1}\,,\ \vec{P}_S = \vec{x}_{m,3} - \vec{x}_{m,2}$$

$$\vec{e}_x = \frac{\vec{P}_F + \vec{P}_S}{\left|\vec{P}_F + \vec{P}_S\right|}$$

Οι πλευρές που προκύπτουν από την στροφή των αρχικών πλευρών γύρω από το μέσο τους έχουν τελικά τη διεύθυνση του $\vec{e}_x$, Ο υπολογισμός αυτός εξασφαλίζει ότι κάθε παράλληλη πλευρά έχει το ίδιο μέσο και το ίδιο μήκος με το τμήμα της πλευράς από την οποία προέκυψε. Τα μήκη των πλευρών είναι:

$$d_F = \left|\vec{P}_F\right|,\ d_S = \left|\vec{P}_S\right|$$

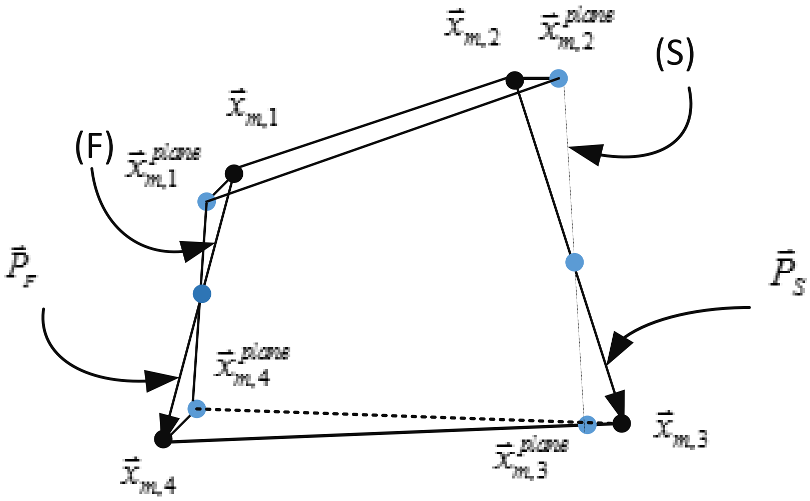
Τα μέσα των παράλληλων πλευρών έχουν τα διανύσματα θέσης:

$$\vec{m}_F = \frac{1}{2}\cdot(\vec{x}_{m,1} + \vec{x}_{m,4}),\quad \vec{m}_S = \frac{1}{2}\cdot(\vec{x}_{m,2} + \vec{x}_{m,3})$$

Τα άκρα των δύο παράλληλων πλευρών που θα αποτελέσουν τις κορυφές του τραπεζοειδούς στοιχείου υπολογίζονται ως:

$$\vec{x}_{m,1}^{plane} = \vec{m}_F - \frac{1}{2} d_F \vec{e}_x \qquad \vec{x}_{m,2}^{plane} = \vec{m}_S - \frac{1}{2} d_S \vec{e}_x$$

$$\vec{x}_{m,3}^{plane} = \vec{m}_S + \frac{1}{2} d_S \vec{e}_x \qquad \vec{x}_{m,4}^{plane} = \vec{m}_F + \frac{1}{2} d_F \vec{e}_x$$



Σχήμα 8. Η γεωμετρία του επίπεδου- τραπεζοειδούς στοιχείου

Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο του στοιχείου είναι:

$$\vec{N} = (\vec{x}_4 - \vec{x}_2) \times (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$$

ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα του στοιχείου θα είναι:

$$\vec{e}_z = \vec{v} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|},$$

το οποίο είναι και το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα ζ, z του στοιχείου. Τέλος το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα η, ψ του στοιχείου προκύπτει ως το εξωτερικό γινόμενο των άλλων δύο.

Τα τρία μοναδιαία διανύσματα του στοιχείου γράφονται:

$$\vec{e}_x = T_{11} \cdot \vec{i} + T_{12} \cdot \vec{j} + T_{13} \cdot \vec{k}$$
$$\vec{e}_y = T_{21} \cdot \vec{i} + T_{22} \cdot \vec{j} + T_{23} \cdot \vec{k}$$
$$\vec{e}_z = T_{31} \cdot \vec{i} + T_{32} \cdot \vec{j} + T_{33} \cdot \vec{k}$$

Τα παραπάνω μοναδιαία διανύσματα αποτελούν το μητρώο μετασχηματισμού (**T**) μεταξύ του γενικού και του τοπικού συστήματος.

Δηλαδή ο **T=** $\begin{bmatrix} e_x(1) & e_x(2) & e_x(3) \\ e_y(1) & e_y(2) & e_y(3) \\ e_z(1) & e_z(2) & e_z(3) \end{bmatrix}$**,** όπου τα e_x, e_y, e_z είναι ο πίνακας που περιέχει

τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων του τοπικού συστήματος ως προς τους άξονες του γενικού. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων μεταξύ του τοπικού και του γενικού συστήματος γράφονται:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [\mathrm{T}] \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Η αρχή του τοπικού συστήματος λαμβάνεται ως ο μέσος όρος των αρχικών σημείων εισόδου:

$$\vec{x}_C = \frac{1}{4} \cdot (\vec{x}_1^i + \vec{x}_2^i + \vec{x}_3^i + \vec{x}_4^i) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{x}_F + \vec{x}_S)$$

Οι τοπικές συντεταγμένες των κορυφών του τραπεζοειδούς θα είναι:

$$\begin{aligned} \xi_\mathrm{K} &= \mathrm{T}_{11}(x_K - x_C) + T_{12}(y_K - y_C) + T_{13}(z_K - z_C) \\ \eta_\mathrm{K} &= \mathrm{T}_{21}(x_K - x_C) + T_{22}(y_K - y_C) + T_{23}(z_K - z_C) \end{aligned}, \quad k = 1,2,3,4$$

όπου επειδή οι πλευρές 1-4, 2-3 είναι μεταξύ τους παράλληλες θα είναι:

$\eta_1 = \eta_4$ και $\eta_2 = \eta_3 = -\eta_1$

Το πλάτος του στοιχείου είναι:

$$w = \eta_2 - \eta_1 = 2\eta_1$$

ενώ οι κλίσεις των παράλληλων πλευρών του στοιχείου υπολογίζονται ως:

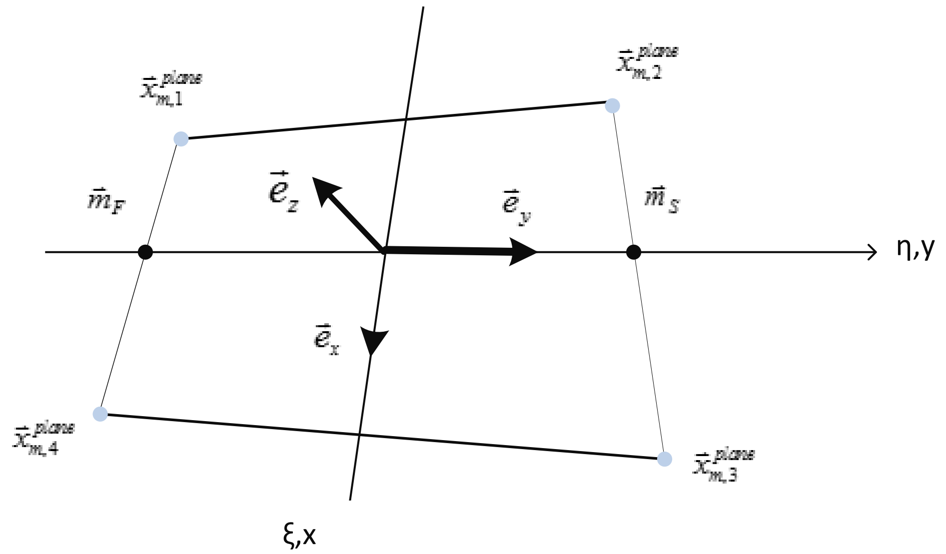
$$m_{21} = \frac{\xi_1 - \xi_2}{w} \qquad m_{34} = \frac{\xi_4 - \xi_3}{w}$$

Στη συνέχεια το κέντρο του τοπικού συστήματος μπορεί να τοποθετηθεί σε κάποιο σημείο της επιλογής μας. Μια κλασσική επιλογή είναι το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η αυτεπαγόμενη ταχύτητα του στοιχείου λόγω της διανομής πηγών. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Hess 1972) προτείνεται η χρήση ενός σημείου που ονομάζεται «κεντροειδές» (centroid) με συντεταγμένες:

$$\eta_0 = \frac{w^2}{6} \frac{m_{34} - m_{21}}{\xi_3 + \xi_2 - \xi_1 - \xi_4}$$
$$\xi_0 = \frac{m_{34} + m_{21}}{2} \eta_0$$

Ανεξάρτητα από το ποια από τις δύο επιλογές κάνουμε, θεωρούμε ότι το νέο κέντρο του τοπικού συστήματος έχει συντεταγμένες ξ_0, η_0 ως προς το προηγούμενο κέντρο (μέσο όρο των κορυφών). Οι νέες συντεταγμένες της αρχής του τοπικού συστήματος γράφονται στο γενικό σύστημα ως:

$$x_0 = x_C + T_{11}\xi_0 + \mathrm{T}_{21}\eta_0$$
$$y_0 = y_C + T_{12}\xi_0 + \mathrm{T}_{22}\eta_0$$
$$z_0 = z_C + T_{13}\xi_0 + \mathrm{T}_{23}\eta_0$$



Σχήμα 9. Το τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο τραπεζοειδές στοιχείο

Οι συντεταγμένες των κορυφών του τραπεζοειδούς υπολογίζονται εκ νέου:

$$\xi_{\mathrm{K}}^{'} = \xi_{\mathrm{K}} - \xi_0$$
$$\eta_{\mathrm{K}}^{'} = \eta_{\mathrm{K}} - \eta_0$$

Γνωρίζοντας τις 4 κορυφές που αποτελούν το κάθε panel, βρίσκουμε το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα z ,EZ (κάθετο στην πτέρυγα, προς τα έξω), που προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων κατά τους άξονες x,y (EX,EY). Στην συνέχεια βρίσκουμε το διάνυσμα κατά τον άξονα y, EY το οποίο προκύπτει από το ημιάθροισμα των μέσων των αντικριστών πλευρών του πάνελ (οι 2 πλευρές είναι οι [12] και [34]) κατά τον άξονα y. Το υπολογίζουμε με αυτό τον τρόπο, διότι το πάνελ μπορεί να μην είναι ορθογώνιο, οι πλευρές κατά τον άξονα x να μην είναι παράλληλες και για αυτό τον λόγο πρέπει τα διανύσματα να είναι σε μία μέση γωνία ως προς τις γωνίες που σχηματίζουν οι δύο πλευρές με το ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Έχοντας βρει τις 2 διαγώνιους, βρίσκουμε το κέντρο του πάνελ (control point), που είναι το σημείο τομής των 2 διαγωνίων. Το διάνυσμα EX είναι το εξωτερικό διάνυσμα των 2 διανυσμάτων (EX,EZ) όπως αυτά υπολογίσθηκαν παραπάνω. Το κάθε διάνυσμα έχει συνιστώσες και στους 3 άξονες, γιατί όπως αναφέρθηκε παραπάνω τα στοιχεία δεν είναι ακριβώς επίπεδα και η πτέρυγα έχει καμπυλότητα.

Κεφάλαιο 4ο

4.1 Ομόρρους

Η μη συνεκτική θεώρηση της ροής γύρω από το ανωστικό σώμα επιβάλλει την εισαγωγή πηδήματος (ασυνέχειας) δυναμικού που σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin ισοδυναμεί με την εμφάνιση κυκλοφορίας γύρω από το σώμα οπότε και άνωσης. Στην περίπτωση 3-D σωμάτων όπως οι πτέρυγες, η ασυνέχεια δυναμικού θα εκτείνεται σε όλο το εκπέτασμα (εγκάρσια κατεύθυνση) και μέχρι το άπειρο κατά την διαμήκη κατεύθυνση. Συνεπώς εισάγεται μια επιφάνεια ασυνέχειας με εκκίνηση από το σώμα και άπειρη έκταση. Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται *φύλλο στροβιλότητας*, ενώ η γραμμή εκκίνησης στην πτέρυγα *γραμμή αποβολής στροβιλότητας.* Με δεδομένο ότι το φύλλο στροβιλότητας είναι στην ελεύθερη ροή και εφ' όσον το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο, τόσο η κάθετη στο φύλλο ταχύτητα όσο και η πίεση θα πρέπει να είναι συνεχής. Οπότε το πήδημα δυναμικού θα δημιουργεί μόνο ασυνέχεια της εφαπτομενικής σ' αυτό ταχύτητα που αντιστοιχεί σε ιδιόμορφη (επιφανειακή και γραμμική) στροβιλότητα, οπότε και δικαιολογείται ο χαρακτηρισμός «φύλλο στροβιλότητας». Για σώματα όπως οι πτέρυγες η γραμμή αποβολής στροβιλότητας περιλαμβάνει οπωσδήποτε την ακμή εκφυγής αλλά μπορεί να εκτείνεται στο ακροπτερύγιο ή ακόμα να συμπεριλαμβάνει και την γραμμή αποκόλλησης (Ριζιώτης). Από φυσική άποψη το φύλλο στροβιλότητας αντιπροσωπεύει την μη- συνεκτική προσέγγιση του ομόρρου του σώματος, δηλαδή την περιοχή ανάπτυξης των στρωμάτων διάτμησης που καθώς η συνεκτικότητα μηδενίζεται, επίσης μηδενίζεται το πάχος τους. Εκτός από τον κινηματικό καθορισμό ενός φύλλου στροβιλότητας υπάρχει και η δυναμική, η οποία καθορίζεται από την μέση ταχύτητα πάνω στο φύλλο που οδηγεί την υλική μεταφορά του φύλλου ως επιφάνεια ασυνέχειας ενώ η εξίσωση ορμής καθορίζει την εξέλιξη στο χρόνο της επιφανειακής στροβιλότητας.

Η παραγωγή του ομόρρου ενός ανωστικού σώματος γίνεται σταδιακά σύμφωνα με ένα χρονικό σχήμα παραγωγής στροβιλότητας. Το φύλλο στροβιλότητας μπορεί να αναπαρασταθεί με την βοήθεια 2 θεωρήσεων. Ο κοντινός ομόρρους αποτελεί το τμήμα του φύλλου στροβιλότητας που εκφεύγει άμεσα από το σώμα και αναπαριστάται μέσω της δυναμικής θεώρησης με τη δημιουργία πλέγματος δινοσωλήνων. Ο μακρινός ομόρρους αποτελεί το υπόλοιπο τμήμα του φύλλου στροβιλότητας και αναπαριστάται σύμφωνα με την στροβιλή θεώρηση με πλέγμα στροβιλότητας που σχηματίζεται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων.

Η θέση αποβολής της στροβιλότητας καθορίζεται από συνεκτικούς μηχανισμούς και στα πλαίσια μίας μη συνεκτικής αναπαράστασης του πεδίου ροής γύρω από ένα ανωστικό σώμα θα πρέπει να θεωρηθεί ως δεδομένο του προβλήματος. Στην περίπτωση μίας πτέρυγας η προφανής θέση είναι η ακμή εκφυγής. Επιπρόσθετα η αποβολή στροβιλότητας μπορεί να συμβαίνει και σε κάποιο τμήμα κατά μήκος του ακροπτερυγίου της πτέρυγας, αλλά και να αποκολλάται λίγο μετά την ακμή προσβολής. Στην παρούσα διπλωματική εργασία η αποβολή στροβιλότητας γίνεται από την ακμή εκφυγής.

4.2 Ο Ομόρρους ως Φύλλο Στροβιλότητας και η Δημιουργία του

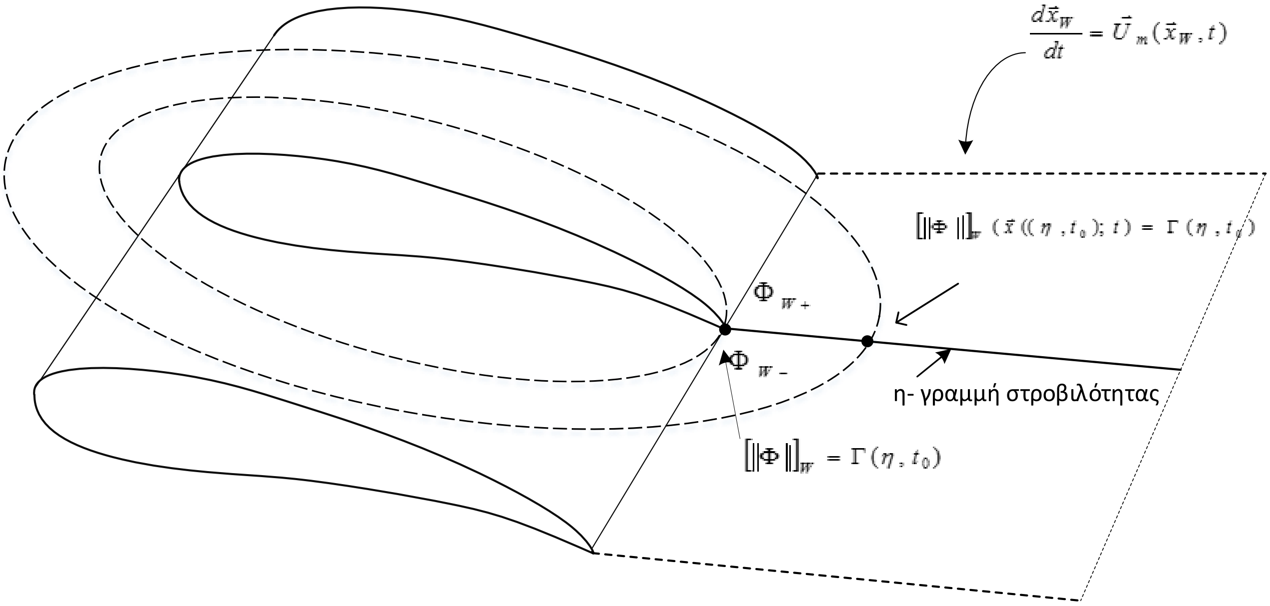
Η εμφάνιση άνωσης ή ισοδύναμα κυκλοφορίας στο πρόβλημα ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα γίνεται με την επιβολή της δυναμικής συνθήκης Kutta-Joukowski. Στα πλαίσια της μη συνεκτικής θεωρίας επιβάλλεται ο ορισμός επιφανειών που εκφεύγουν από το στερεό σύνορο του σώματος και παρουσιάζουν ασυνέχεια (πήδημα) στην εφαπτομενική ταχύτητα και συνεπώς στο δυναμικό, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κυκλοφορίας γύρω από μια κλειστή καμπύλη που περικλείει το σώμα. Αυτή η επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού είναι ο ομόρρους της πτέρυγας και αποτελεί το μη συνεκτικό ανάλογο ενός στρώματος διάτμησης. Σε μία χρονική στιγμή t σε μία τομή της πτέρυγας, η ασυνέχεια του δυναμικού στον ομόρρου στην ακμή εκφυγής, μεταξύ της κάτω και πλευράς και της επάνω πλευράς (πήδημα δυναμικού) ισούται με:

$$\left[\!\left|\Phi\right|\!\right]_W^t = \Phi_{W+}^t - \Phi_{W-}^t = \Gamma^t$$

Η ένταση της διαφοράς δυναμικού $[\![\Phi]\!]_W(\vec{x}_W)$ καθορίζει την ένταση δινοσωλήνα $\phi_W(\vec{x}_W)$ στο υλικό σημείο $\vec{x}_W \in S_W$ του ομόρρου:

$$[\![\Phi]\!]_W(\vec{x}_W) = (\Phi_W^+ - \Phi_W^-), \quad \vec{x}_W \in S_W$$

Η ασυνέχεια του δυναμικού κατά μήκος της ακμής εκφυγής του ανωστικού σώματος επεκτείνεται στην συνέχεια σε επιφάνεια, που αποτελεί τον ομόρρου του σώματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί το θεώρημα του Kelvin περί υλικής διατήρησης της κυκλοφορίας. Η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin επιβάλλει την υλική διατήρηση της κυκλοφορίας κατά μήκος των αποβαλλόμενων γραμμών στροβιλότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ένταση της διανομής του δυναμικού που μεταφέρεται με ένα υλικό σημείο κατά μήκος μιας γραμμής στροβιλότητας συντηρεί την ένταση που είχε αυτό το υλικό σημείο κατά την εκπομπή του από την ακμή εκφυγής. Έτσι τη χρονική στιγμή t το υλικό σημείο $\vec{x}_W((\eta,\mathrm{t}_0);t)$, που αποβλήθηκε τη στιγμή t_0 από την η- γραμμή στροβιλότητας, θα έχει ένταση $[\![\Phi]\!]_W\ \vec{x}_W((\eta,\mathrm{t}_0);t)$ ίση με την ένταση που είχε η κυκλοφορία $\Gamma(\eta,\mathrm{t}_0)$ στην η-γραμμή στροβιλότητας την στιγμή t_0.



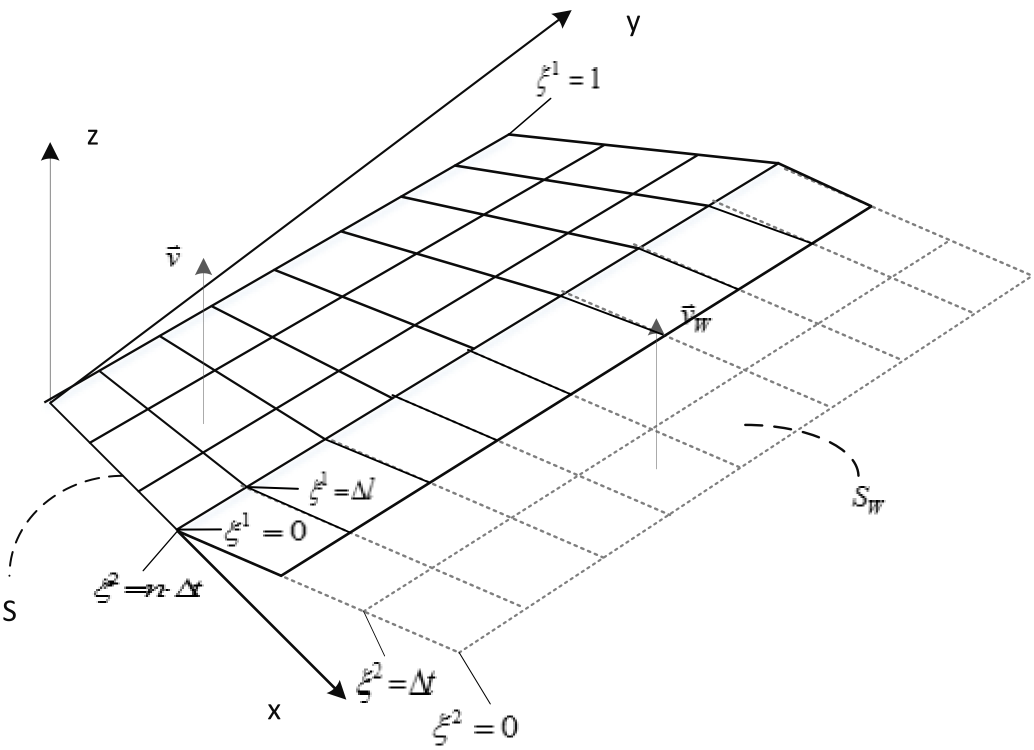
Σχήμα 10. Η συνθήκη Kelvin

Αρχικά θεωρούμε ''παγωμένο'' ομόρρου, δηλαδή ο ομόρρους εκφεύγει με γωνία ίση με την γωνιά πρόσπτωσης και μέτρο ίσο με την U_∞ (προβαλλόμενη στους 3 άξονες). Στην μη-μόνιμη ροή θεωρούμε ότι ο ομόρρους έχει σχέση με την ταχύτητα στην ακμή εκφυγής και σχεδιάζεται σύμφωνα με τις βασικές αρχές που διέπουν την πραγματική ροή (Kelvin).

Έστω ότι περιγράφουμε την S_W στην ακόλουθη παραμετρική μορφή ,

$$\vec{x}_W \in S_W: \quad \vec{x}_W = \vec{x}_W(\xi^1, \xi^2; t), \;\; \xi^1 \in [-1,1], \quad \xi^2 \geq 0, \quad t \geq 0$$

Στην πραγματικότητα θεωρούμε ότι η S_W σχηματίζεται από μία ακολουθία υλικών γραμμών που εκφεύγουν από την γραμμή εκκίνησης του ομόρρου όπου απελευθερώνεται – αποβάλλεται στροβιλότητα από την πτέρυγα στην ελεύθερη ροή. Για να ακολουθήσουμε την ιστορία αποβολής, θεωρούμε ότι κάθε σημείο $\vec{x}_W(s_i, t_i, t)$ απελευθερώθηκε από το σημείο s_i, της ακμής εκφυγής τη χρονική στιγμή $t_i < t$. Συνεπώς η καμπύλη $\vec{x}_W(s_i, t, t)$ παριστά την θέση της γραμμής αποβολής τη χρονική στιγμή t. Επιπλέον οι γραμμές σταθερού s_i σχηματίζονται από τα υλικά στοιχεία που απελευθερώθηκαν στον ομόρρου από την ίδια θέση της ακμής εκφυγής.



Σχήμα 11. Ο κοντινός ομόρρους και μακρινός ομόρρους

Η εξέλιξη του ομόρρου $S_W(t)$ στον χρόνο καθορίζεται από την εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d\vec{x}(\xi,t)}{dt} = \vec{U}_m(\vec{x}_W, t), \;\; \xi = (s_i, t)$$

καθώς και από τη συνθήκη της πίεσης.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου $\vec{x}_W$, της πάνω αντίστοιχα της κάτω πλευράς της $S_W(t)$ και το άπειρο, με αφαίρεση των δύο, $[\![p]\!](\vec{x}_W, t) = 0$ παίρνουμε.

$$\frac{\partial[\![\phi]\!]}{\partial t} + \frac{[\![u^2]\!]}{2} + \frac{[\![p]\!]}{\rho} = 0$$

Επειδή,

$$\frac{[\![u^2]\!]}{2} = \frac{(u_+^2 - u_-^2)}{2} = \frac{(\vec{u}_+ + \vec{u}_-)}{2} \cdot (\vec{u}_+ - \vec{u}_-) = \vec{U}_m \cdot [\![\vec{u}]\!]$$

$$\left[\!\left[p \right]\!\right] = 0$$
$$\left[\!\left[\phi \right]\!\right] = -\mu$$
$$\left[\!\left[\vec{u} \right]\!\right] = \left[\!\left[\nabla\phi \right]\!\right] = \nabla\left[\!\left[\phi \right]\!\right] = -\nabla\mu$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + (\vec{U}_m \cdot \nabla)\mu = 0 \qquad (8)$$

Ορίζοντας σαν μέση υλική παράγωγο,

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\vec{U}_m \cdot \nabla)(\cdot)$$

παρατηρούμε ότι η (8) εκφράζει την υλική διατήρηση της έντασης Φ. Μια τέτοια συνθήκη ισχύει εκεί όπου η πίεση παραμένει συνεχής. Συνεχής θα είναι η πίεση παντού εκτός από την επιφάνεια της πτέρυγας. Στην πτέρυγα υπάρχει ασυνέχεια πίεσης, η οποία αντιστοιχεί στη δύναμη που ασκεί το ρευστό σε αυτή. Άρα το παραπάνω αφορά τον ομόρρου, οπότε έχουμε:

$$\frac{D\Phi_W}{Dt} = 0 \ ,$$

η οποία ισοδυναμεί με την παρακάτω συνθήκη:

$$\Phi(\vec{x}_W(s_1,t_1,t),t) = \Phi_W(\vec{x}_W(s_1,t_1,t_1),t_1)$$

δηλαδή ότι όλα τα σημεία διατηρούν την ένταση του δυναμικού (διπόλων) που είχαν όταν εξέφυγαν από την πτέρυγα. Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό στον ομόρρου καθορίζεται από τους προηγούμενους ομόρρους μέχρι την χρονική στιγμή

t. Αυτό προϋποθέτει ότι τα σημεία του ομόρρου μεταφέρονται υλικά από το μέσο πεδίο ή αλλιώς ότι:

$$\frac{d\vec{x}_W(s,t)}{dt} = \vec{U}_m(\vec{x}_W, t) = \vec{U}_\infty(\vec{x}_W, t) + \nabla\phi(\vec{x}_W, t)$$

4.3 Διακριτοποίηση του Ομόρρου

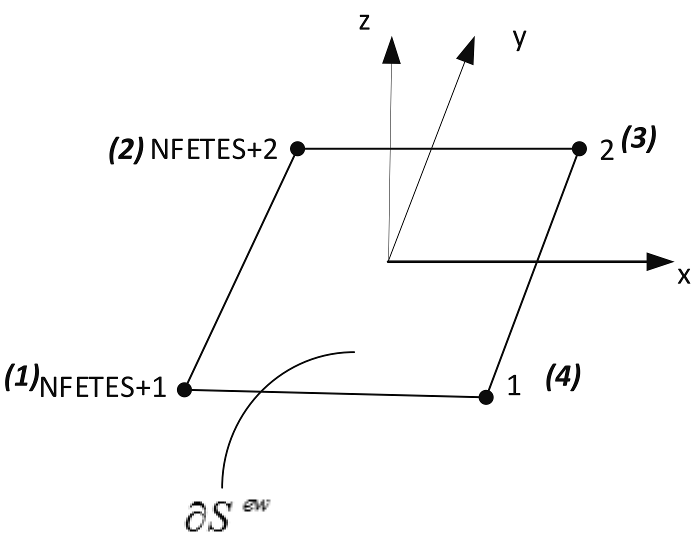
Η διακριτοποίηση του φύλλου στροβιλότητας (σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση) αποτελεί συνέχεια της ακτινικής διακριτοποίησης της επιφάνειας του σώματος και αναπαρίσταται από τετράπλευρα στοιχεία που αποτελούν προέκταση των γραμμών $y = ct$ του σώματος. Οι γραμμές αυτές πρέπει να είναι κοινές για τον ομόρρου και για το σώμα, επειδή αυτό επιβάλλεται από το θεώρημα του Kelvin που εφαρμόζεται σε αυτές τις θέσεις. Η γεωμετρία του ομόρρου προκύπτει από τους κόμβους του σώματος που βρίσκονται στην ακμή εκφυγής, αλλά και από τους κόμβους που προκύπτουν από την μεταφορά τους με την μέση ταχύτητα που υπολογίζεται στα Control Points (CP) των στοιχείων της πάνω και της κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη δημιουργία $(NODEPFW - 1)$ επιφανειακών στοιχείων που ορίζονται από τους $2 \cdot NODEPFW$ σημεία.

Η θέση του τετράπλευρου στοιχείου του κοντινού ομόρρου καθορίζεται από τις συντεταγμένες $XGWAKE(k, nelw)$, $k = 1,3$, $nelw = 1,(NODEPFW - 1)$ των τεσσάρων κορυφών του $nelw$, που αριθμούνται δεξιόστροφα. Με δεδομένα αυτά τα σημεία γίνονται οι υπολογισμοί για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων τόσο στο γενικό όσο και στο τοπικό τους σύστημα. Στην περίπτωση των στοιχείων του κοντινού ομόρρου δεν απαιτείται ο προσδιορισμός του σημείου ελέγχου καθώς δεν επαληθεύεται η συνθήκη μη εισχώρησης σε αυτά.

Για κάθε στοιχείο του κοντινού ομόρρου κατασκευάζονται τα στοιχεία με τη γενική αρίθμηση ενός κόμβου:

$$TEW(1,nelw) = (i-1)\cdot(NODEPFW-1) + j$$
$$TEW(1,nelw) = i\cdot(NODEPFW-1) + j$$
$$TEW(1,nelw) = i\cdot(NODEPFW-1) + j + 1$$
$$TEW(1,nelw) = (i-1)\cdot(NODEPFW-1) + j + 1$$

Στην συνέχεια ορίζονται οι κόμβοι που αποτελούν το κάθε panel. Η αρίθμηση των κόμβων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 12. Αρίθμηση κόμβων panel

Ο ομόρρους ενός ανωστικού σώματος αποτελείται από δύο τμήματα: τον ''κοντινό'' και ''μακρινό'' ομόρρου. Αρχικά παράγεται ο ''κοντινός '' ομόρρους, που εκφεύγει με ένταση που προκύπτει από το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας αρχικά παράγεται ένα τμήμα επιφανειακής στροβιλότητας (κοντινός ομόρρους), που εκφεύγει από το σώμα με ένταση που προκύπτει από το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Αυτή η περιοχή απαρτίζεται από δινοσωλήνες που ορίζουν τα τετράπλευρα στοιχεία. Έτσι δημιουργείται ένα δινοπλέγμα όπου διανέμεται επιφανειακή και επικαμπύλια στροβιλότητα. Στη συνέχεια παράγεται ο μακρινός ομόρρους, ο οποίος αποτελείται από τα στοιχεία που έχουν δημιουργηθεί τις προηγούμενες χρονικές στιγμές και έχουν παραμορφωθεί κατά την κίνησή του στον χώρο.

4.3.1 Κοντινός ομόρρους

Ο κοντινός ομόρρους αποτελεί μία λεπτή ζώνη κοντά στην ακμή εκφυγής όπου η στροβιλότητα διανέμεται ιδιόμορφα σε επιφανειακό πλέγμα διπόλων. Η υλική εξέλιξη του κοντινού ομόρρου καθορίζεται από την κινηματική εξίσωση:

$$\frac{d\vec{x}_W}{dt} = \vec{U}_m(\vec{x}_W, t) \Rightarrow \vec{x}_W^{t+\Delta t} = \vec{x}_W^{t} + \vec{U}_m(\vec{x}_W, t) \cdot dt$$

Ο όρος $\vec{U}_m(\vec{x}_W, t)$ εκφράζει τη συνολική μέση ταχύτητα στην ακμή εκφυγής, συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση της επί άπειρον ροής, των σωμάτων και της ελεύθερης στροβιλότητας. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας θεωρούμε ότι η διεύθυνση αυτής της ταχύτητας είναι προδιαγεγραμμένη και μάλιστα ότι είναι η εφαπτομενική στο στοιχείο που βρίσκεται στην ακμή εκφυγής. Αυτό βρίσκεται σε συνέπεια με τη θεωρία του ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού, που επιβάλλει ότι η διεύθυνση εκφυγής του ομόρρου μπορεί να είναι εφαπτομενική είτε στην κάτω είτε στην κάτω πλευρά, είτε να είναι η διχοτόμος της πάνω και της κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής. Το μετρό αυτής της ταχύτητας υπολογίζεται από την μέση τιμή των ταχυτήτων όπως αυτές υπολογίζονται στα σημεία ελέγχου των δύο επιφανειακών στοιχείων που βρίσκονται εκατέρωθεν από την ακμή εκφυγής, με κοινή την πλευρά εκφυγής. Η εφαρμογή της παραπάνω εξίσωσης, οδηγεί στην δημιουργία επιφανειακής διανομής στροβιλότητας από δινοσωλήνες που ορίζουν τετράπλευρα στοιχεία. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας θα πρέπει το μήκος του κοντινού ομόρρου να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μήκος των γειτονικών στοιχείων στην ακμή εκφυγής. Η προηγούμενη εξίσωση συσχετίζει την κλίμακα του χρόνου με την κλίμακα του μήκους, ώστε η αριθμητική επίλυση του προβλήματος να είναι ευσταθής. Η τυχαία επιλογή του χρονικού βήματος και χωρικής διακριτοποίησης δεν συνεπάγεται την λεπτομερή αναπαράσταση του πεδίου ροής. Η κλίμακα μήκους επιλέγεται ώστε να μπορεί να αναπαράγει την κλίμακα μήκους των διαφόρων φυσικών μηχανισμών του εξεταζόμενου προβλήματος.

Άρα ο κοντινός ομόρρους αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων με μήκος που καθορίζεται από την ταχύτητα.

Ο ποσοτικός καθορισμός της αποβαλλόμενης στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρου γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα με την ικανοποίηση της δυναμικής συνθήκης μηδενισμού της πίεσης στην ακμή εκφυγής και σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας, δηλαδή το θεώρημα του Kelvin.

Στον κώδικα για να ικανοποιήσουμε την συνθήκη Kelvin θεωρούμε ότι το $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ της προηγούμενης χρονικής στιγμής (t-DT) προστίθεται στον ομόρρου και είναι ίση με την διαφορά δυναμικού που παράγεται στο συγκεκριμένο χρονικό βήμα. Η κυκλοφορία που έχει ήδη παραχθεί στον κοντινό ομόρρου την προηγούμενη χρονική στιγμή επηρεάζει τον ομόρρου της επόμενης χρονικής στιγμής. Η διαφορά δυναμικού παραμένει σταθερή καθ’ όλη την διάρκεια κίνησης του ομόρρου.

4.3.2 Μακρινός ομόρρους

Αφού έχει παραχθεί ο κοντινός ομόρρους και με τις ταχύτητες που θα οριστούν παρακάτω, τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου, θα μετατοπιστούν κατά ένα μήκος σε κάθε χρονική στιγμή. Σύμφωνα με ότι αναφέρθηκε παραπάνω, τα στοιχεία του ομόρρου διατηρούν την ένταση που είχαν κατά την αποβολή τους από την ακμή εκφυγής. Κατά την κίνηση του, ο ομόρρους συνεχίζει να διατηρεί τον τρισδιάστατο χαρακτήρα του, ενώ συνεχίζει να αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων. Αυτοί οι δινοσωλήνες προσθέτουν στροβιλότητα και επηρεάζουν την ροή στην πτέρυγα και στον κοντινό ομόρρου.

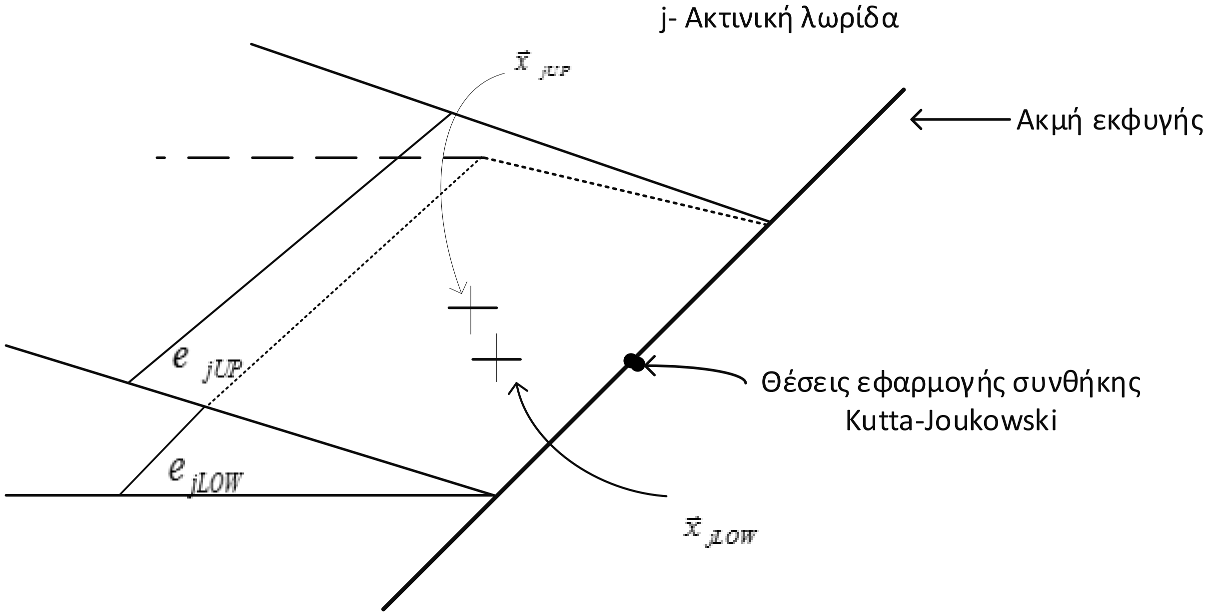
Κεφάλαιο 5ο

5.1 Συνθήκη Kutta

Η εφαρμογή της δυναμικής συνθήκης ολοκληρώνει το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων του προβλήματος. Η συνθήκη Kutta- Joukowski επιβάλλει την εξίσωση των πιέσεων ή ισοδύναμα τον μηδενισμό του πηδήματος στην ακμή εκφυγής. Ικανοποιείται σε όλες τις ακτινικές λωρίδες δηλαδή σε $NFETES - 1$, όχι όμως στην ακμή εκφυγής, καθώς η ταχύτητα απειρίζεται σε σημεία πάνω σε δινοσωλήνα, αλλά στα σημεία ελέγχου του πρώτου και του τελευταίου πάνελ κάθε strip.

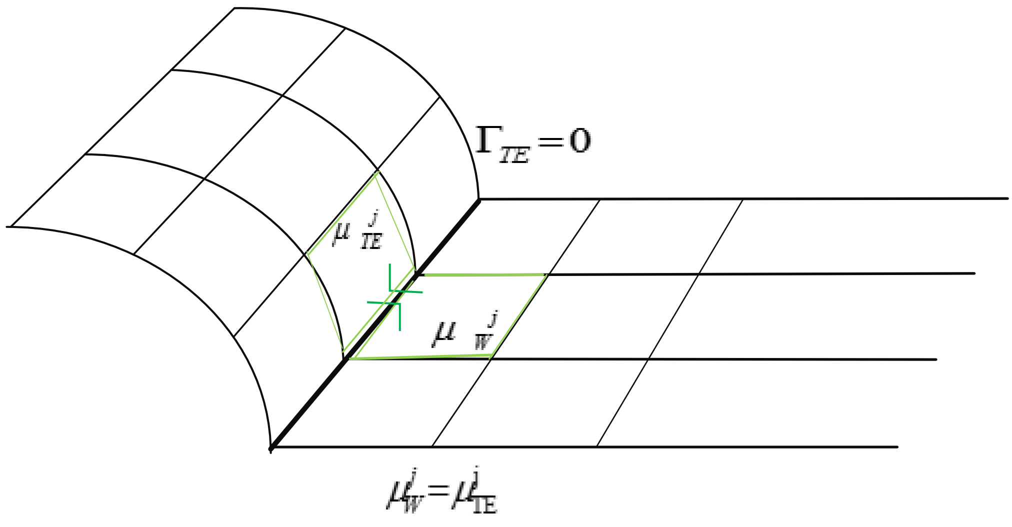
Η πύκνωση του γεωμετρικού πλέγματος έχει έναν περιορισμό, που επιβάλλει την ύπαρξη "αριθμητικά σημαντικής απόστασης" μεταξύ ενός σημείου ελέγχου και των πλευρών που το περιβάλλουν, ώστε να αποφεύγονται ιδιόμορφοι υπολογισμοί ταχυτήτων κοντά σε δινοσωλήνα.

Αυτή η επιλογή της θέσης από την μία εξασφαλίζει ότι ο υπολογισμός της ταχύτητας γίνεται με ακρίβεια (εφαρμόζεται στα σημεία ελέγχου της συνθήκης μη εισχώρησης), από την άλλη όμως επιβάλλει την πύκνωση των σημείων στην ακμή εκφυγής, ώστε να προσεγγίζονται καλύτερα οι συνθήκες του πεδίου ροής στην περιοχή αυτή.



Σχήμα 14. Εφαρμογή της συνθήκης Kutta Joukowski στα σημεία ελέγχου

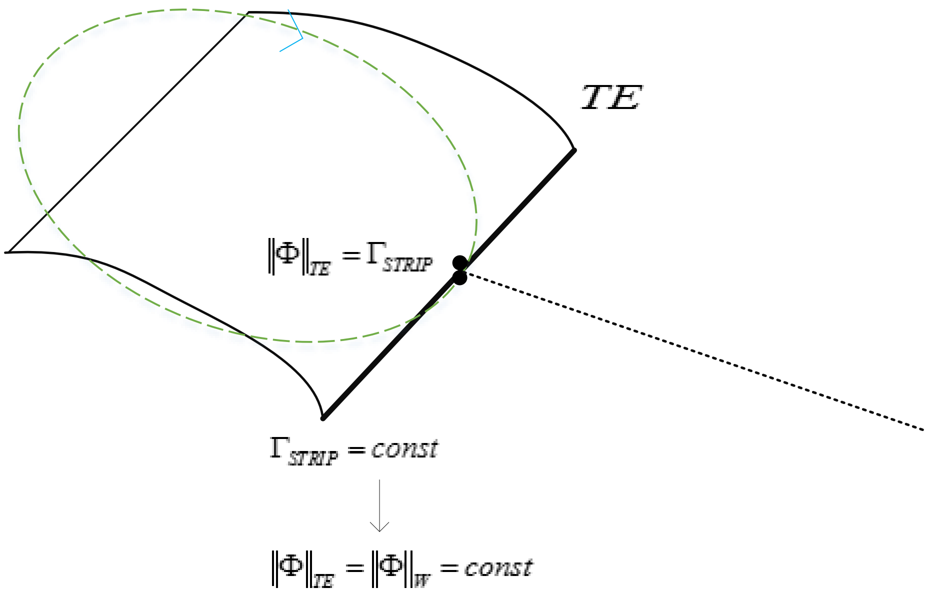
Επειδή οι άγνωστοι είναι **N_{PANELS}+1**, η τελευταία εξίσωση που εισάγεται για την επίλυση του μητρώου είναι η **συνθήκη Kutta**, η οποία για 0^o επιβάλλει ισότητα δυναμικού στην πάνω και κάτω πλευρά της ακμής εκφυγής. Για γωνία πρόσπτωσης $\neq 0^o$, η συνθήκη Kutta επιβάλλει ομαλή ροή στην ακμή εκφυγής το οποίο ισοδυναμεί με μηδενισμό του στροβίλου της ακμής εκφυγής, αλλιώς θα έχουμε απειρισμό της ταχύτητας, όπως και ότι η ροή καταλήγει σε σημείο ανακοπής στην ακμή εκφυγής.



Σχήμα 15. Η συνθήκη Kutta και ο μηδενισμός του στροβίλου

Για αυτήν την περίπτωση ισχύει ο Bernoulli,

$\frac{\partial\Phi^+}{\partial t}+\frac{p^+}{\rho}+\frac{V^{+^2}}{2}=\frac{\partial\Phi^-}{\partial t}\frac{p^-}{\rho}+\frac{V^{-^2}}{2} \Rightarrow \frac{\partial(\Phi^+-\Phi^-)}{\partial t}+\frac{V^{+^2}-V^{-^2}}{2}=0$, επειδή η πίεση στην πάνω και κάτω πλευρά είναι ίσες.



Σχήμα 16. Η συνθήκη Kutta και η εμφάνιση της κυκλοφορίας

Ο υπολογισμός της ταχύτητας γίνεται στην βάση του θεωρήματος του Green και οι ταχύτητες υπολογίζονται στο μέσο του κάθε panel. Επειδή κάθε panel έχει δύο βαθμούς ελευθερίας η ταχύτητα κατά τον άξονα x και y εκφράζεται ως $\mathrm{u}=a_1*\Phi_1+a_2*\Phi_2$.

$$\frac{\partial(\Phi^+-\Phi^-)}{\partial t}+\frac{V^{+^2}-V^{-^2}}{2}=$$

$$\frac{\phi^+-\phi^-}{\Delta t}-\frac{\phi_0^+-\phi_0^-}{\Delta t}+\frac{(U_{\infty s}^+ + u_s^+)^2+(U_{\infty\tau}^+ + u_\tau^+)^2-(U_{\infty s}^- + u_s^-)^2+(U_{\infty\tau}^- + u_\tau^-)^2}{2}=0$$

Ισχύει: $(U_{\infty s}^+ + u_s^+)^2 = U_{\infty s}^{+^2}+u_s^{+^2}+2\cdot U_{\infty s}^+\cdot u_s^+$

Ομοίως ισχύει $(U_{\infty s}^{-} + u_s^{-})^2 = U_{\infty s}^{-^2} + u_s^{-^2} + 2 \cdot U_{\infty s}^{-} \cdot u_s^{-}$

Το σταθερό μέρος είναι:

$$\frac{\phi_0^{\;+} - \phi_0^{\;-}}{\Delta \mathrm{t}} + \frac{(U_{\infty s}^{+})^2 + (U_{\infty \tau}^{+})^2 - (U_{\infty s}^{-})^2 + (U_{\infty \tau}^{-})^2}{2}$$

Το σύστημα που επιλύεται είναι:

$$U_{\infty s}^{+} \cdot u_s^{+} + \frac{\mathrm{u}_{\mathrm{S}}^2}{2} = u_S \cdot (U_{\infty S} + \frac{u_S}{2})$$

$$U_{\infty t}^{+} \cdot u_t^{+} + \frac{\mathrm{u}_{\mathrm{t}}^2}{2} = u_t \cdot (U_{\infty t} + \frac{u_t}{2})$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$(U_{\infty S} + \frac{u_S}{2}) \cdot (\alpha_1 \cdot \Phi_1 + \alpha_2 \cdot \Phi_2) + (U_{\infty \mathrm{t}} + \frac{u_t}{2}) \cdot (\beta_1 \cdot \Phi_1 + \beta_2 \cdot \Phi_2) =$$

$$\Phi_1 \cdot \alpha_1 \cdot (U_{\infty S} + \frac{u_S}{2}) + \Phi_2 \cdot \alpha_2 \cdot (U_{\infty S} + \frac{u_S}{2}) + \Phi_1 \cdot \beta_1 \cdot (U_{\infty \mathrm{t}} + \frac{u_t}{2}) + \Phi_1 \cdot \beta_2 \cdot (U_{\infty \mathrm{t}} + \frac{u_t}{2}) =$$

$$\Phi_1 \cdot [\alpha_1 \cdot (U_{\infty S} + \frac{u_S}{2}) + \beta_1 \cdot (U_{\infty \mathrm{t}} + \frac{u_t}{2})] + \Phi_2 \cdot [\alpha_2 \cdot (U_{\infty t} + \frac{u_t}{2}) + \beta_2 \cdot (U_{\infty \mathrm{t}} + \frac{u_t}{2})]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}} = \frac{1}{\Delta \mathrm{D}} \int_S \varphi \cdot \eta_{\mathrm{X}} \cdot dS$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{y}} = \frac{1}{\Delta \mathrm{D}} \int_S \varphi \cdot \eta_{\mathrm{y}} \cdot dS$$

$$u_S = \frac{1}{AREA} \cdot \sum_{i=1}^{4} \varphi(\mathrm{i}) \cdot \eta_{\mathrm{X}} \cdot \Delta \mathrm{S} =$$

$$u_S = \frac{1}{AREA} \cdot [(\varphi_1 \cdot \eta_{\mathrm{X}1} \cdot \Delta \mathrm{S}_1) + ((\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \cdot \eta_{\mathrm{X}2} \cdot \Delta \mathrm{S}_2) + (\varphi_2 \cdot \eta_{\mathrm{X}3} \cdot \Delta \mathrm{S}_3) + (\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \cdot \eta_{\mathrm{X}4} \cdot \Delta \mathrm{S}_4)] \Rightarrow$$

$$u_S = \frac{1}{AREA} \cdot [\varphi_1 \cdot (\eta_{\mathrm{X}1} \cdot \Delta \mathrm{S}_1 + \frac{\eta_{\mathrm{X}2} \cdot \Delta \mathrm{S}_2}{2} + \frac{\eta_{\mathrm{X}4} \cdot \Delta \mathrm{S}_4}{2}) + \varphi_2 \cdot (\eta_{\mathrm{X}3} \cdot \Delta \mathrm{S}_3 + \frac{\eta_{\mathrm{X}2} \cdot \Delta \mathrm{S}_2}{2} + \frac{\eta_{\mathrm{X}4} \cdot \Delta \mathrm{S}_4}{2})] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_S^{+} = a_{S1}^{+} \cdot \varphi_1 + a_{S2}^{+} \cdot \varphi_1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_\tau^{+} = a_{\tau 1}^{+} \cdot \varphi_1 + a_{\tau 2}^{+} \cdot \varphi_2$$

Η παραπάνω είναι μια προσεγγιστική μέθοδος για τον υπολογισμό της ταχύτητας στην συνθήκη Kutta.

Το μέγεθος $\phi_0^{+} - \phi_0^{-}$ αναφέρεται στην διαφορά δυναμικού την προηγούμενη χρονική στιγμή και στον Kelvin.

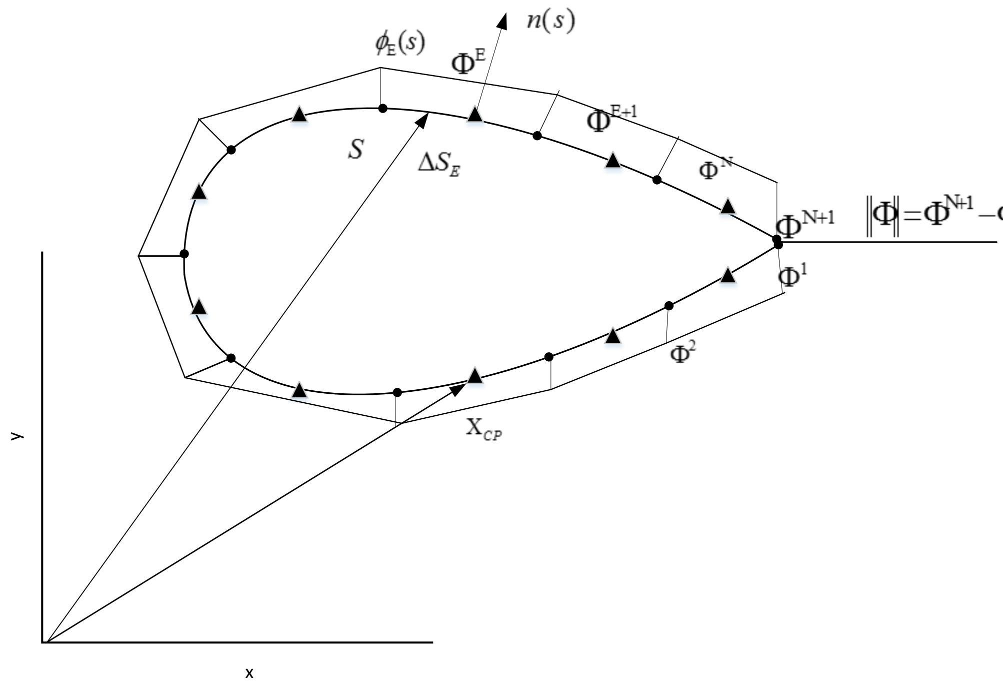
Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή πίεσης Cp, βρίσκουμε την ταχύτητα σε κάθε panel, η οποία προκύπτει από παραγώγιση του δυναμικού. Η συνολική ταχύτητα V είναι ίση, με το άθροισμα της ταχύτητας στην αξονική και ακτινική κατεύθυνση.

5.2 Επίλυση του συστήματος

Οι βασικές εξισώσεις του συστήματος είναι:

- Η κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης στα σημεία ελέγχου
- Η δυναμική συνθήκη εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής (συνθήκη Kutta-Joukowski)

Άρα, έχουμε έναν πίνακα **A($N_{panels} \times N_{panels}$)** και **B(N_{panels}),** οπότε λύνουμε την εξίσωση **A**$\times$**Φ = B,** ώστε να βρούμε την κατανομή του δυναμικού.



Σχήμα 17. Η κατανομή του δυναμικού

5.3 Σύγκλιση Kutta

Για την επίλυση του συστήματος και σύμφωνα με την γραμμικοποίηση της συνθήκης Kutta, σε κάθε χρονικό βήμα θέλουμε να συγκλίνει η ταχύτητα στην Kutta και αυτό γίνεται μέσω ενός κριτηρίου σύγκλισης που επιβάλλει η ταχύτητα σε κάθε επανάληψη να συγκλίνει σε μια τελική λύση.

Μέσα στην εξίσωση Kutta εμφανίζονται οι ακόλουθες ταχύτητες: u_S^2 και u_t^2 τις οποίες εκφράζουμε στο ακόλουθο ανάπτυγμα: $u_S \cdot u_{SOLD}$ και $u_T \cdot u_{TOLD}$. Σε κάθε επανάληψη θέλουμε η $u_S - u_{SOLD} \leq \alpha$ και $u_T - u_{TOLD} \leq \alpha$, όπου α ένας αριθμός που έχουμε ορίσει (πολύ μικρός). Ένα δεν ισχύει αυτό το κριτήριο, θεωρούμε ότι η u_S και u_T είναι πιο ακριβής λύσεις και επιλύουμε το σύστημα επαναληπτικά και σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, έως ότου να συγκλίνει. Επειδή η ταχύτητα επηρεάζεται από το δυναμικό, το κριτήριο σύγκλισης αναφέρεται στο δυναμικό, χωρίς να έχει κάποια διαφορά με την ανάλυση που έγινε παραπάνω.

```
aaaa=0.d0
do j=1,NODEST
aaaa=aaaa+(SL(j)-SLO(j))**2
enddo
if(aaaa.gt.1e-6) goto 20
```

Σχήμα 18. Το κριτήριο σύγκλισης στον κώδικα

Κεφάλαιο 6ο

6.1 Υπολογισμός ταχυτήτων

6.1.1 Υπολογισμός ταχύτητας (αριθμητική μέθοδος)

Για τον αριθμητικό υπολογισμό της ταχύτητας χρησιμοποιούνται οι σχέσεις:

$V^{+} = (U_{\infty s} + u_s) * \vec{s} + (U_{\infty \tau} + u_\tau) * \vec{t}$

Οι ταχύτητες :

- $U_{\infty s} = \vec{U}_\infty * \vec{s}$
- $U_{\infty \tau} = \vec{U}_\infty * \vec{t}$

Οι ταχύτητες u_s και u_τ είναι ίσες με:

- $u_s = \dfrac{\Phi^{I}_{N+1} - \Phi^{I}_{N}}{\Delta S_N}$
- $u_\tau = \dfrac{\left(\dfrac{\Phi^{I+1}_{N+!} + \Phi^{I+1}_{N}}{2}\right) - \left(\dfrac{\Phi^{I-1}_{N+!} + \Phi^{I-1}_{N}}{2}\right)}{\Delta \tau}$

Για το πρώτο strip ισχύει:

$U_\tau = \dfrac{(\Phi^{I+!}_{N+1} + \Phi^{I+1}_{N}) - (\Phi^{I}_{N+1} + \Phi^{I}_{N})}{2 * \Delta \tau}$

Για το τελευταίο strip ισχύει:

$U_\tau = \dfrac{-(\Phi^{I+!}_{N+1} + \Phi^{I+1}_{N}) + (\Phi^{I}_{N+1} + \Phi^{I}_{N})}{2 * \Delta \tau}$

Η συνολική ταχύτητα του κάθε panel είναι:

$U_{cp} = \sqrt{u_s + u_\tau}$

$U_{panel} = \sqrt{U_{\infty x} + U_{\infty y} + U_{\infty z}}$

Cp $_{\text{panel}}$ = 1 - $(\frac{U_{cp}}{U_{panel}})^2$

6.1.2 Υπολογισμός ταχύτητας (αναλυτική μέθοδος)

Γενικά ισχύει ο νόμος του Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u}_r^{\,2}}{2} - \frac{\vec{U}_b^{\,2}}{2} + \frac{p}{\rho} = c$$

$\vec{u}_r = u - \vec{U}_b$, όπου η ταχύτητα u είναι ίση με : $u = U_\infty + \nabla \phi$

Η ταχύτητα $\vec{U}_b$ αναφέρεται στην κίνηση της αεροτομής για αυτό και στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι μηδέν.

Ο όρος $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ είναι ίσος με $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi_{N+1}^{new} - \phi_{N+1}^{old}}{\Delta t}$,

ενώ η ταχύτητα $\vec{u}_r^2$ είναι ίσος με $\vec{u}_r^2 = U_\infty^2 + \vec{U}_\infty * \nabla \phi + \nabla \phi^2$, όπου ο όρος $\nabla \phi^2 = 0$.

Στην διατύπωση πηγών το δυναμικό είναι ίσο με:

$$\phi(x_0) = \frac{-1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{r} dS$$

Η ταχύτητα είναι ίση με:

$u(x_0) = \nabla_0 [\frac{-1}{4\pi} \int_S \left\| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\| (x) \frac{1}{\mathrm{r}} dS] = -\int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{U}_\infty \cdot \eta \cdot r}{\mathrm{r}^3}$, όπου ο όρος $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ είναι ίσος με $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\vec{U}_\infty \vec{n}$ (λόγω της συνθήκης μη εισχώρησης).

Στην παρούσα διπλωματική η ταχύτητα που επάγουν οι πηγές είναι:

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{x_0 - x}{r^3} dS = UL(1)$$
$$v = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{y_0 - y}{r^3} dS = UL(2)$$
$$w = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{z_0}{r^3} dS = UL(3)$$

Άρα η ταχύτητα είναι $\nabla\phi(x_0) = [UL(1), UL(2), UL(3)] * [-\vec{U}_\infty \vec{n}]$

Στην διατύπωση των διπόλων το δυναμικό είναι ίσο με:

$$\phi(x_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{S+S_W} \phi(x)\frac{n(x)(x_0 - x)}{|x_0 - x|^3} dS = \frac{-1}{4\pi}\int_S -\phi\frac{\vec{r}\vec{n}}{r^3} dS + \frac{-1}{4\pi}\int_{S_W} [\|-\phi_W\|]\frac{\vec{r}\vec{n}_W}{r^3} dS_W$$

όπου,

$-\phi = \mu$

$\|-\phi_W\| = \mu_W$

Η ταχύτητα είναι ίση με:

$$u(x_0) = \nabla_0[\frac{-1}{4\pi}\int_{S+S_W} \phi(\vec{x})\frac{\vec{n}(x)\vec{r}}{r^3} dS] = \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial S+\partial S_W} \phi(\vec{x})\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} dS + \frac{1}{4\pi}\int_{S+S_W} \frac{(\nabla_S\phi(x) \times \vec{n}(x)) \times \vec{r}}{r^3} dS$$

Ο πρώτος όρος είναι ο Biot- Savart και αναφέρεται στην επικαμπύλια στροβιλότητα, ενώ για τον δεύτερο ισχύει:

$$\vec{\omega} = \nabla_S\phi(x) \times \vec{n}$$

Το κάθετο διάνυσμα είναι $\vec{n} = (0,0,1)$ ενώ ισχύει $\nabla_S \phi = (\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{y}}, 0)$, γιατί θεωρούμε γραμμικά κατανεμημένο δίπολο κατά τον άξονα x, δηλαδή $\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right) = (\alpha, 0)$, όπου α η κλίση της γραμμικής κατανομής των διπόλων.

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{y}}, -\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}, 0)$$

Άρα

$$\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{y}} & -\frac{\partial \phi}{\partial x} & 0 \\ \mathrm{r_x} & r_y & r_\mathrm{z} \end{bmatrix} = -\vec{i} \cdot \omega_\mathrm{X} \cdot r_\mathrm{Z} - \vec{j} \cdot \omega_\mathrm{Y} \cdot r_\mathrm{Z} - \vec{k} \cdot \omega_\mathrm{y} \cdot r_X + \vec{k} \cdot \omega_\mathrm{X} \cdot \mathrm{r_y}$$

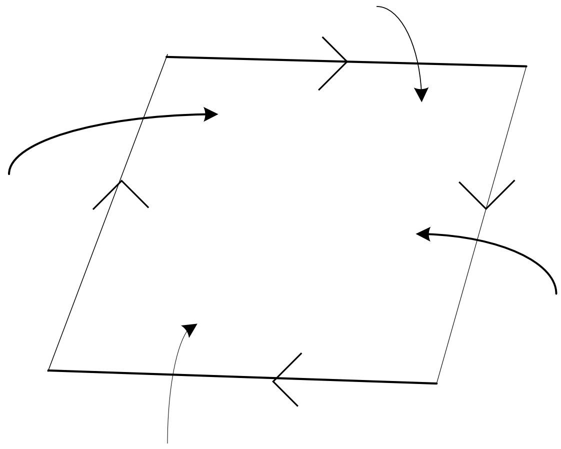
Το $\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta \mathrm{S}_{12}}$

Και τελικά η ταχύτητα προκύπτει:

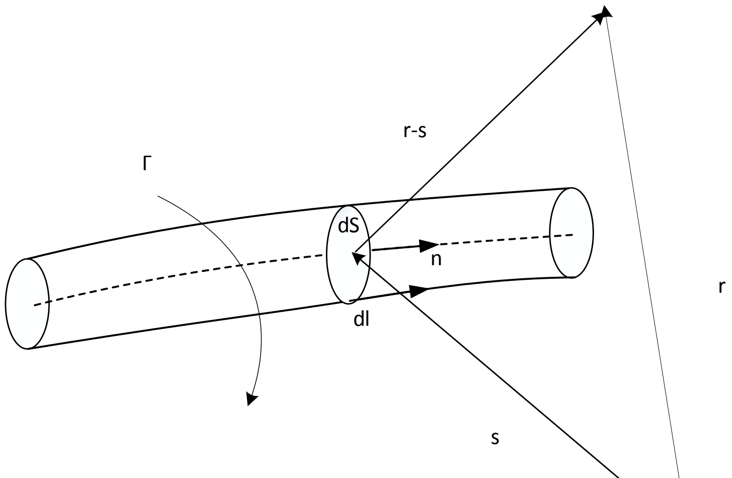
$\vec{V} = \left(\frac{-az, 0, ax}{r^3}\right)$, δηλαδή

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi} \alpha \int_S \frac{-\mathrm{z}, 0, x}{r^3}$$

Η επικαμπύλια στροβιλότητα που επάγει το κάθε πάνελ, προστίθεται στην ταχύτητα που επάγει το δυναμικό. Ο νόμος του Biot Savart αναφέρεται στο vortex filament και έχει σχέση με το μήκος του δινοσωλήνα και την απόσταση του σημείου που θέλουμε να βρούμε τι επάγει το filament σε αυτό.



Σχήμα 19. Το πάνελ και οι δινοσωλήνες



Σχήμα 20. Δινοσωλήνας και νόμος Biot- Savart

Κεφάλαιο 7ο

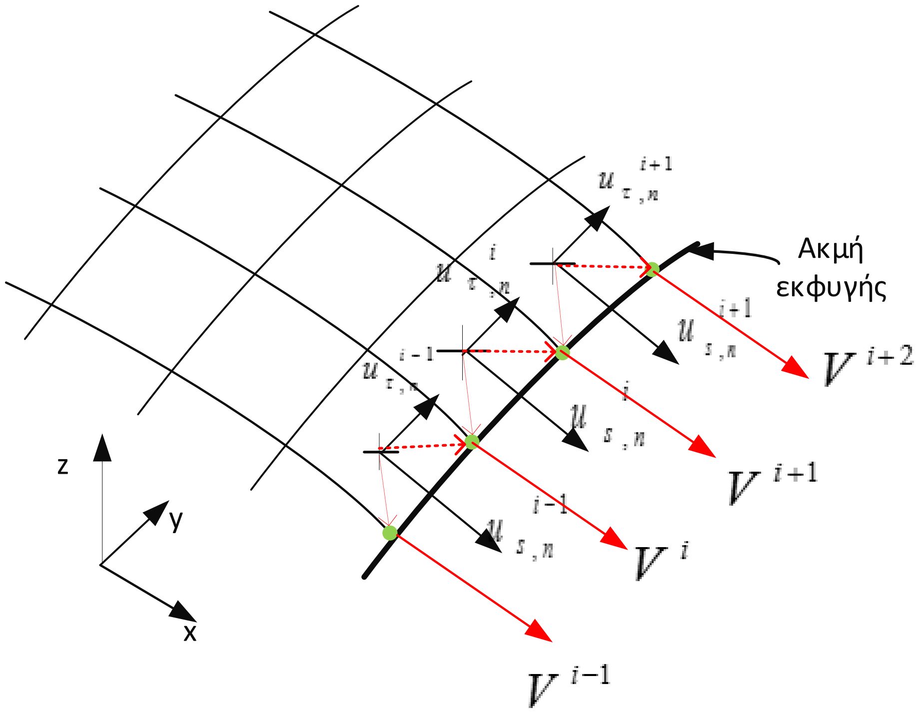
7.1 Μη μόνιμο πρόβλημα

Στο μη μόνιμο πρόβλημα ισχύουν οι βασικές αρχές που ίσχυαν στο μόνιμο πρόβλημα με την βασική διαφορά να παρουσιάζεται στην κίνηση του ομόρρου μετά την εκφυγή του από την πτέρυγα. Στην μόνιμη ροή, θεωρήσαμε ότι ο ομόρρους είναι ''παγωμένος'', δηλαδή το μήκος του είναι ίσο με την U_∞ ταχύτητα (στις 3 κατευθύνσεις) πολλαπλασιασμένο με ένα χρονικό βήμα. Αυτό συνεπάγεται ότι η ταχύτητα στην ακμή εκφυγής ισούται με την U_∞ ταχύτητα, ενώ στο μη- μόνιμο πρόβλημα η ταχύτητα στη πάνω πλευρά της πτέρυγας δεν είναι ίση με την ταχύτητα στην κάτω πλευρά, τόσο ως προς μέτρο, όσο και ως κατεύθυνση. Για παράδειγμα, για 0^0 η ταχύτητα στην ακμή εκφυγής δεν είναι παράλληλη προς την ροή που θεωρήσαμε στην μόνιμη ροή δηλαδή 0^0. Στην μόνιμη ροή η κυκλοφορία γύρω από την πτέρυγα παραμένει σταθερή επομένως το πήδημα δυναμικού παραμένει σταθερό στον ομόρρου.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρούμε μια αρχική τιμή για την ταχύτητα του ομόρρου στις 3 κατευθύνσεις, με βάση του οποίου βρίσκουμε τις θέσεις των στοιχείων του ομόρρου. Για τα πρώτα και τελευταία πάνελ του κάθε strip, βρίσκουμε τις τιμές της βάσης (EX, EY, EZ), όπως και τις τοπικές ταχύτητες στον x και y άξονα. Συνεπώς, η συνολική ταχύτητα στην ακμή εκφυγής του κάθε strip είναι:

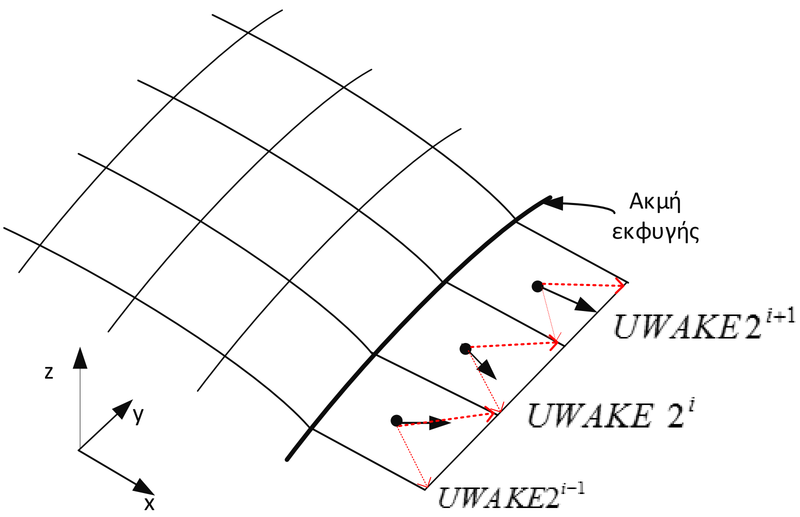
$$\vec{V}_u = \vec{u}_{sm}^u * \vec{e}_{xm}^u + \vec{u}_{\tau m}^u * \vec{e}_{ym}^u$$
$$\vec{V}_l = \vec{u}_{sm}^l * \vec{e}_{xm}^l + \vec{u}_{\tau m}^l * \vec{e}_{ym}^l$$

Η συνολική ταχύτητα στην ακμή εκφυγής είναι $UWAKE1(1:3,j) = \left(\dfrac{\vec{V}^u + \vec{V}^l}{2}\right)^J + \left(\dfrac{\vec{V}^u + \vec{V}^l}{2}\right)^{J+1}$ (αναφέρεται σε κόμβο που δεν βρίσκεται στα άκρα και επηρεάζεται από δύο γειτονικά panels).



Σχήμα 21. Η ταχύτητα στην ακμή εκφυγής

Η ταχύτητα που επάγουν τα πάνελ της πτέρυγας στον ομόρρου είναι ίσα με $UWAKE\,2(1:3)$, υπολογίζονται με τις αναλυτικές σχέσεις που έχουμε και αναφέρονται στα κέντρα των πάνελ.

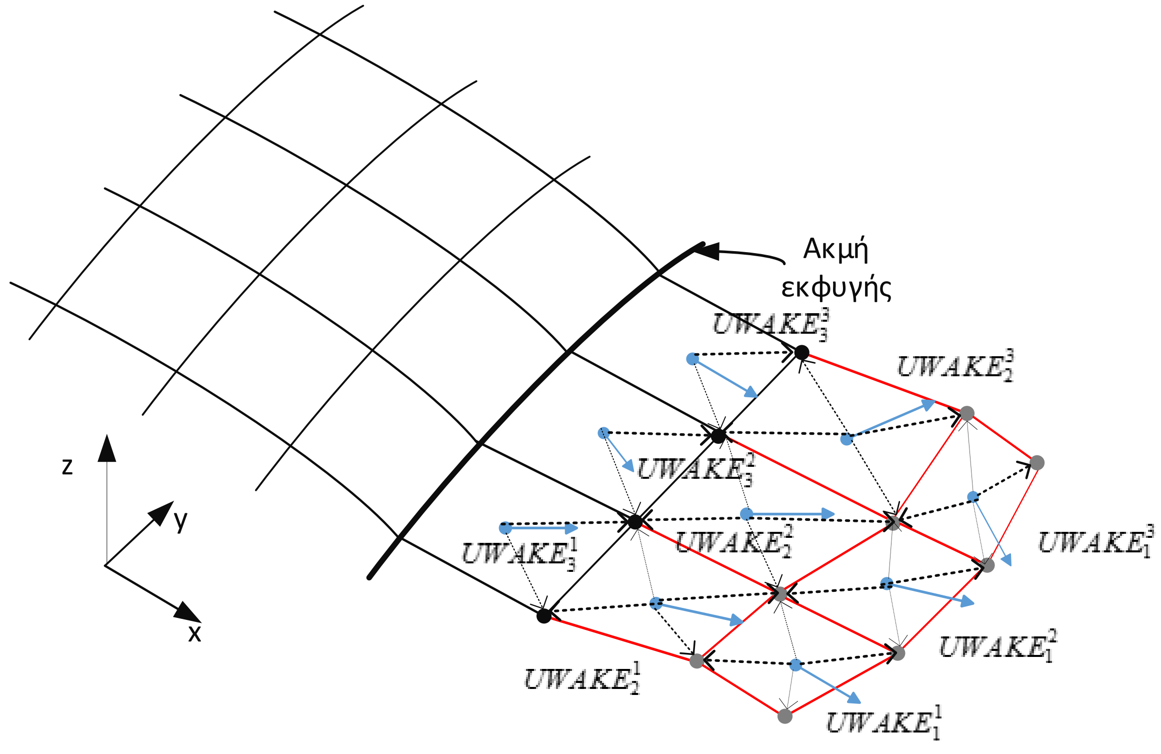


Σχήμα 22. Η ταχύτητα στα κέντρα των πάνελ του ομόρρου

Η τελική ταχύτητα, βάση της οποίας κατασκευάζεται ο ομόρρους είναι:

$$UWAKE(1:3) = \frac{UWAKE1(1:3) + UWAKE2(1:3)}{2}$$

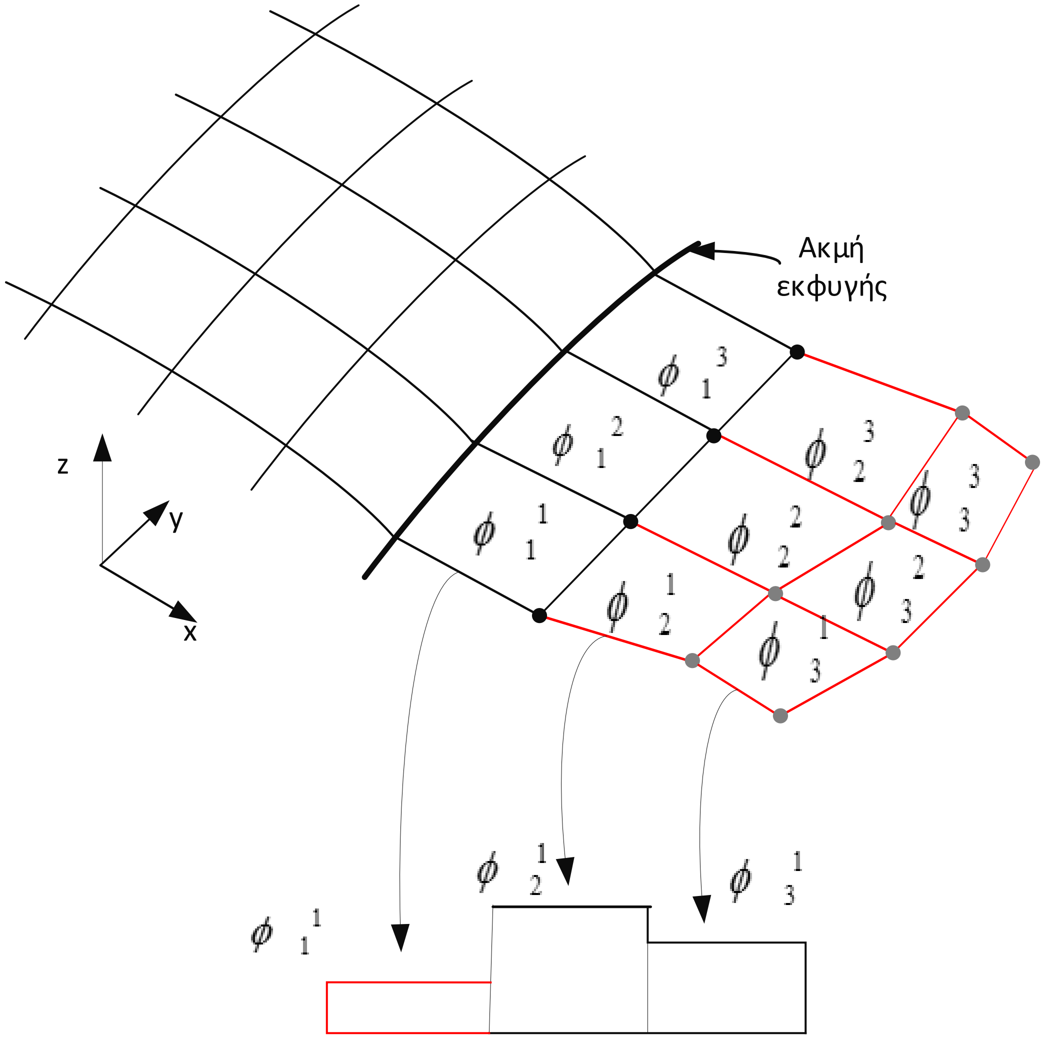
και τα σημεία του κοντινού ομόρρου, είναι ίσα με $UWAKE(1:3) * DT$, όπου DT το χρονικό βήμα για την παραγωγή του ομόρρου.



Σχήμα 23. Η τελική ταχύτητα των panels

Έχοντας τα καινούργια σημεία, βρίσκουμε τις διαφορές των προηγούμενων σημείων που προέκυψαν με την $UWAKE^{NEW} * DT$ σε σχέση με την $UWAKE^{OLD} * DT$. Εάν η διαφορά είναι αρκετά μεγάλη , θεωρούμε την $UWAKE^{NEW}$ ως την πιο ακριβή ταχύτητα και λύνουμε ξανά το σύστημα, μέχρις ότου αυτή η διαφορά να τείνει στο μηδέν.

Η τελική ταχύτητα των σημείων της ακμής εκφυγής, χρησιμοποιείται για την μετακίνηση των σημείων του ομόρρου. Δηλαδή στο επόμενο χρονικό βήμα, τα σημεία του ελεύθερου ομόρρους θα έχουν μετακινηθεί με την $UWAKE2(1:3)$, ενώ της ακμής εκφυγής με $UWAKE1(1:3)$.



Σχήμα 24 . Μετατόπιση του ομόρρου και σταθερές τιμές του πηδήματος δυναμικού

Τα σημεία που βρίσκονται στην άκρη του ομόρρου, έχουν ταχύτητα που προκύπτει από τα εσωτερικά σημεία (2 σημεία), ενώ τα σημεία που βρίσκονται εσωτερικά του ομόρρου, έχουν ταχύτητα που προκύπτει από τα αντίστοιχα γειτονικά σημεία (4 σημεία).

Το κάθε πάνελ του ομόρρου, έχει μια τιμή διαφοράς δυναμικού $\Phi = \Phi^{I}_{N+!} - \Phi^{I}_{N}$, η οποία παραμένει σταθερή σε κάθε χρονικό βήμα.

Κεφάλαιο 8^{o}

8.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

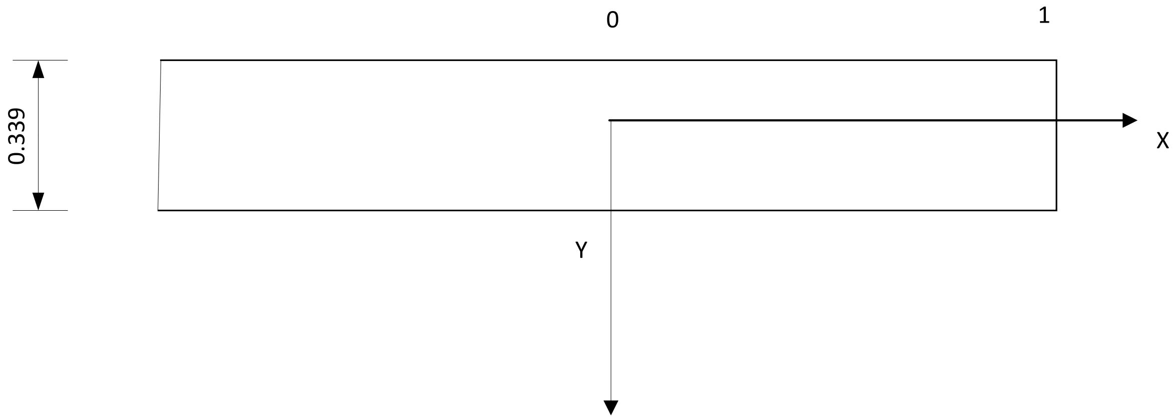
8.1.1 Ονοματολογία NACA

Η ονοματολογία της αεροτομής NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) 4 ψηφίων, έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

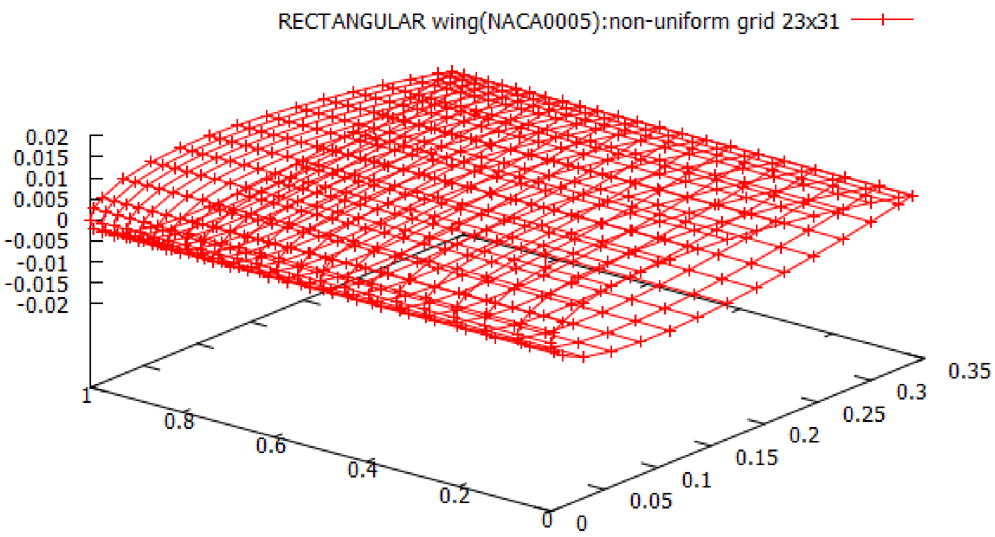
- Πρώτο ψηφίο, μέγιστη καμπυλότητα ως ποσοστό της χορδής (%)
- Δεύτερο ψηφίο, (%/10) απόσταση από το LE που εμφανίζεται η μέγιστη καμπυλότητα
- Τρίτο και τέταρτο ψηφίο, (%) μέγιστο πάχος ως ποσοστό της χορδής

8.1.2 Η ορθογωνική πτέρυγα

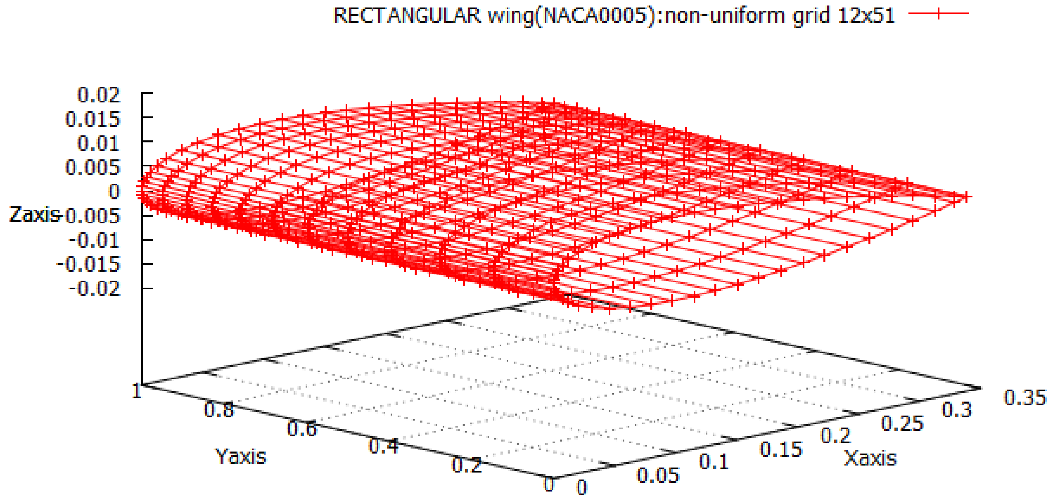
Η ορθογωνική πτέρυγα λόγω της απλής γεωμετρίας και της συμμετρίας της είναι ιδανική για έλεγχο της ευαισθησίας της λύσης από την παράμετρο του χρονικού βήματος. Παρακάτω παρουσιάζονται οι βασικές διαστάσεις της ορθογωνικής πτέρυγας που είναι $\mathrm{A}\Re = 5.9$, ενώ η γωνία πρόσπτωσης είναι α=8^{o}. Η πτέρυγα σχηματίζεται από την συμμετρική αεροτομή NACA0012 και δεν μεταβάλλεται ακτινικά.



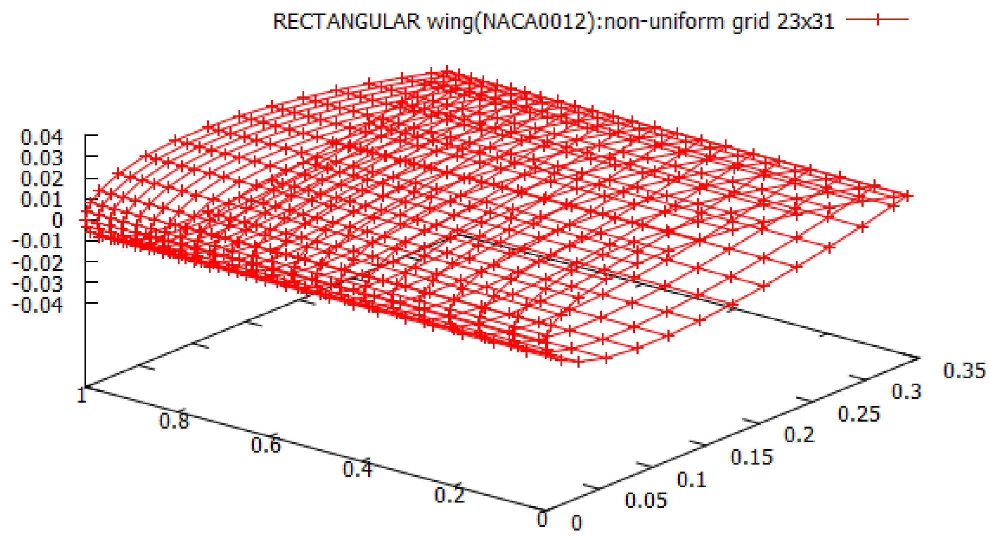
Σχήμα 25. Οι βασικές διαστάσεις της ορθογωνικής πτέρυγας



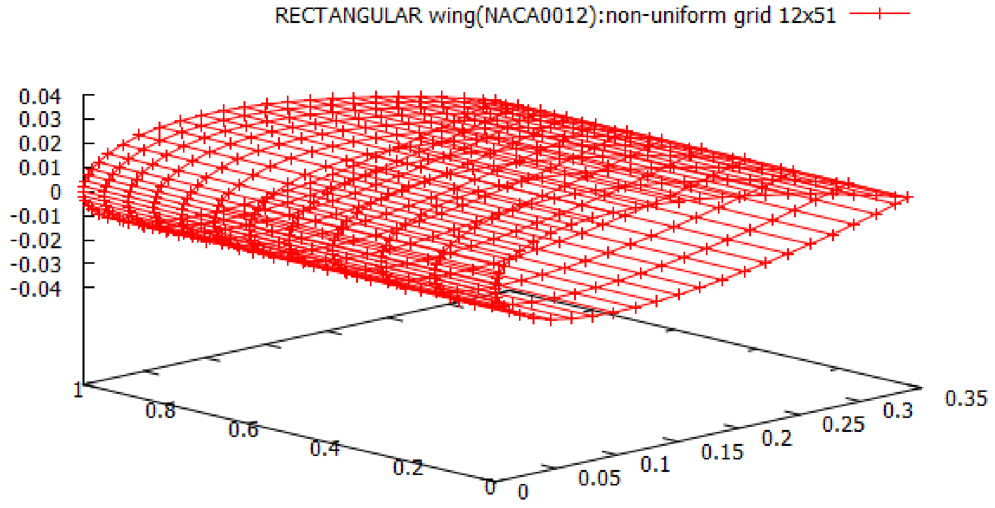
Σχήμα 26. Ορθογωνική πτέρυγα πάχους 5% με πύκνωση στην περιοχή του ακροπτερυγίου(23x31)



Σχήμα 27. Ορθογωνική πτέρυγα πάχους 5% με πύκνωση στην περιοχή του ακροπτερυγίου(12x51)



Σχήμα 28. Ορθογωνική πτέρυγα πάχους 12% με πύκνωση στην περιοχή του ακροπτερυγίου(23x31)

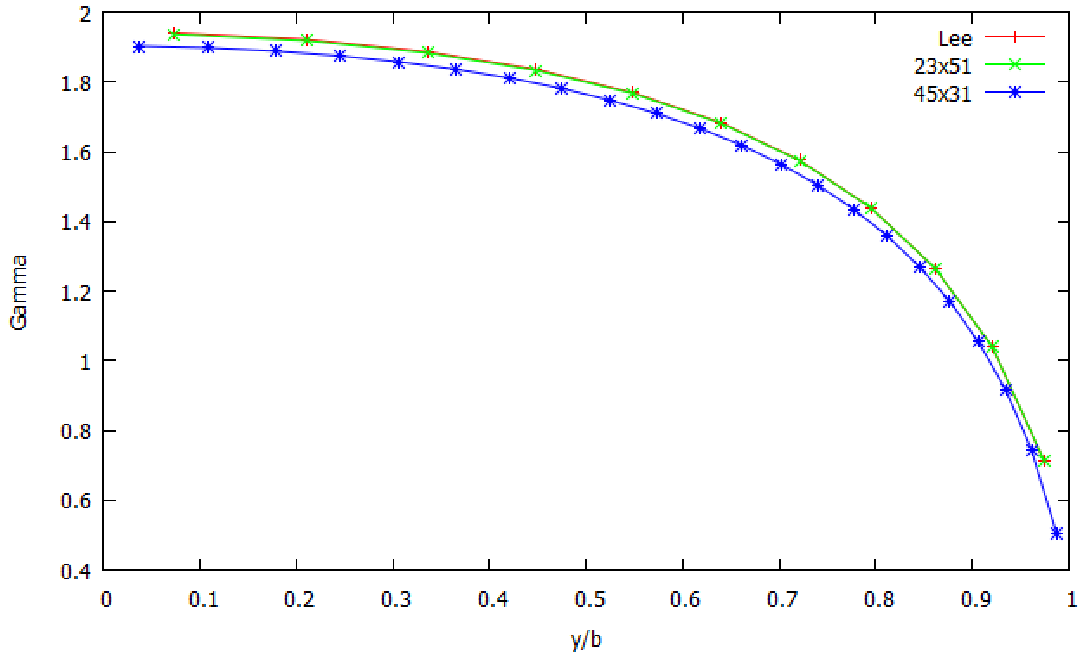


Σχήμα 29. Ορθογωνική πτέρυγα πάχους 5% με πύκνωση στην περιοχή του ακροπτερυγίου(12x51)

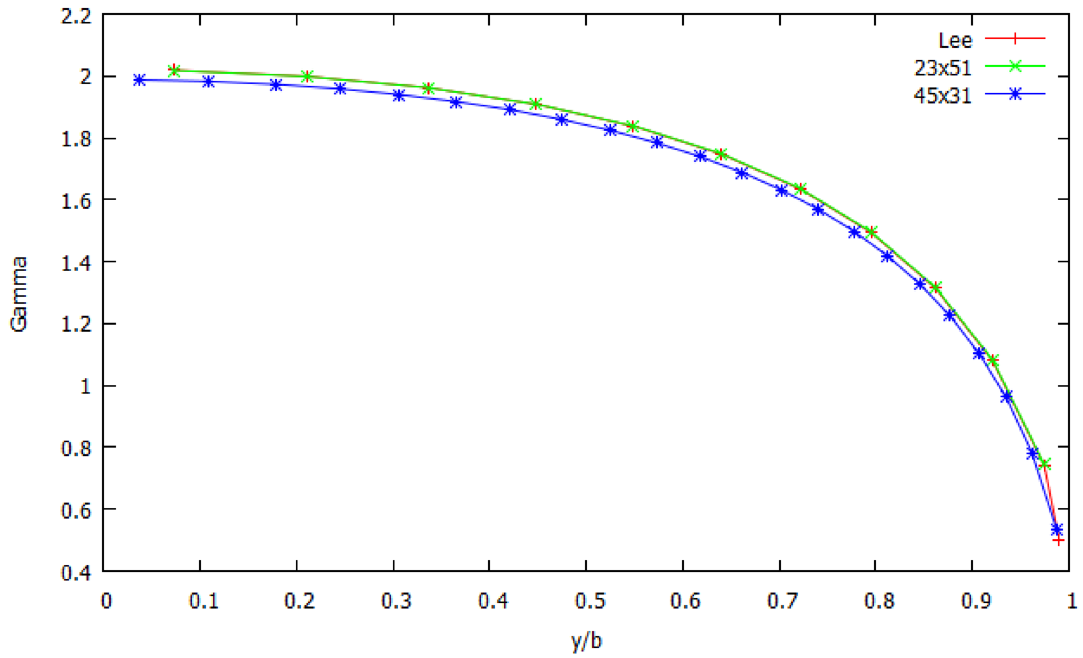
Θεωρούμε ότι η $U_{\infty} = 1\frac{m}{s}$ και ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι α=8^{o}, οπότε και γίνονται οι υπολογισμοί της κυκλοφορίας και της διαφοράς (πηδήματος) του συντελεστή πίεσης $\Delta(-Cp)$.

Οι πτέρυγες που χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζουν συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο επίπεδο z. Τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν είναι μεταβλητής πυκνότητας διαστάσεων 23×31 (31 σημεία σε κάθε αεροτομή και 23 ακτινικές θέσεις) και 12×51 (51 σημεία σε κάθε αεροτομή και 12 ακτινικές θέσεις).

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η κυκλοφορία που παράχθηκε με την μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, όσο και με τη άμεση διατύπωση (Lee 1987) με προδιαγεγραμμένη τη γεωμετρία του ομόρρου. Η σύμπτωση των αποτελεσμάτων είναι σαφής και ανεξάρτητη του πλέγματος (με μικρές διαφορές). Η χρήση περισσότερων σημείων στην επιφάνεια της πτέρυγας δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα.



Σχήμα 30. Η ακτινική διανομή της κυκλοφορίας για NACA0005

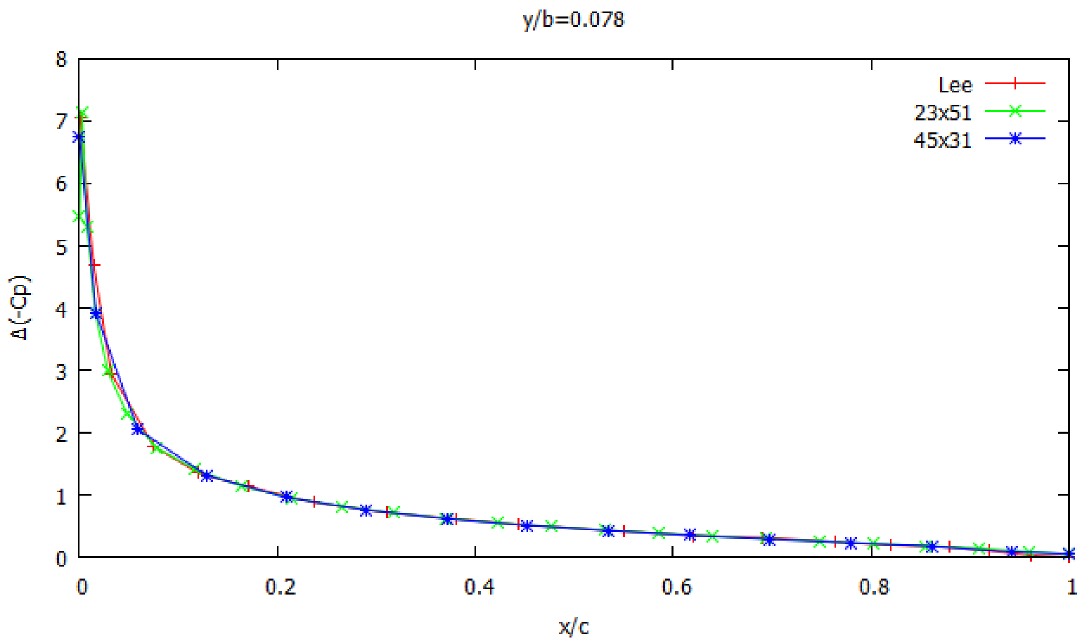


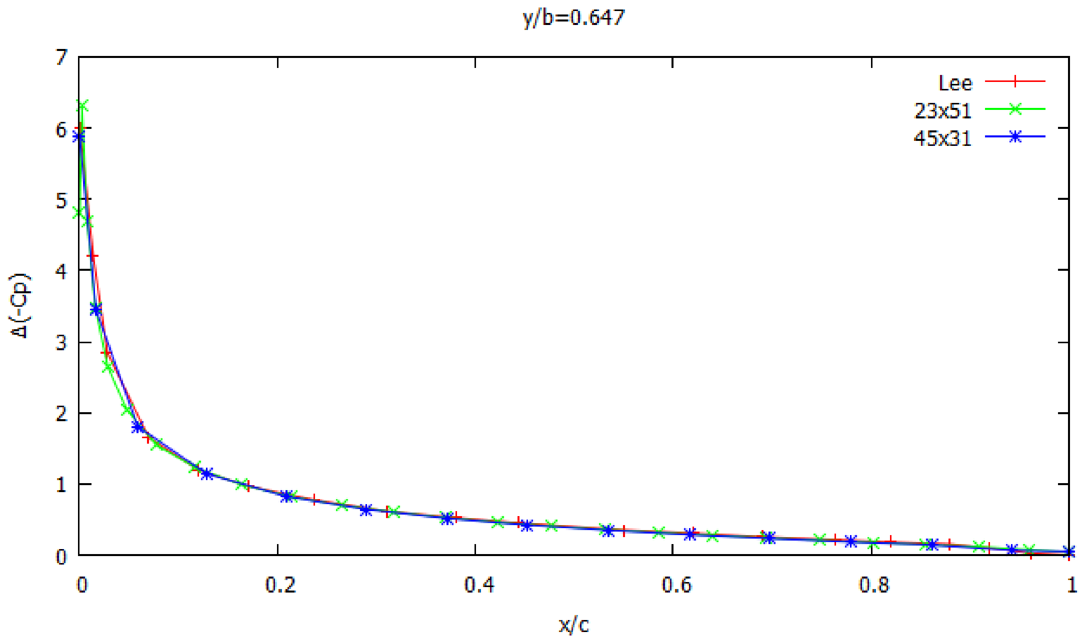
Σχήμα 31. Η ακτινική διανομή της κυκλοφορίας για NACA0012

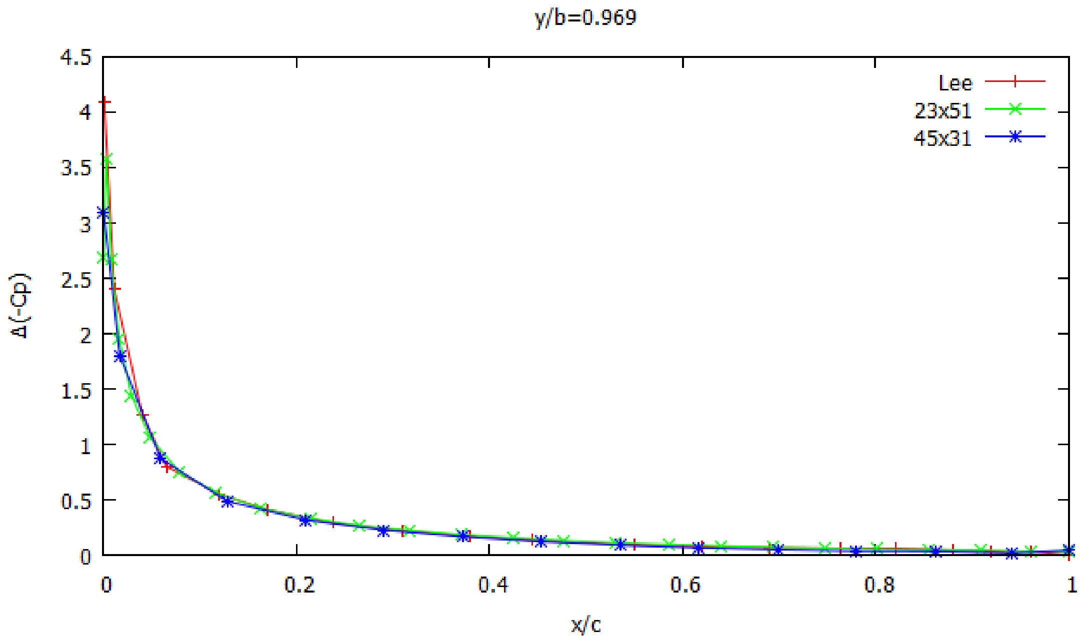
Στο παραπάνω σχήμα η μέθοδος Lee (άμεση διατύπωση- προδιαγεγραμμένος ομόρρους), συμπίπτει πολύ καλά με την μέθοδο που αναπτύξαμε, καθώς και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε προδιαγεγραμμένος ομόρρους και μέθοδος η οποία επίλυε σωστά το σύστημα ως προς το δυναμικό. Παρατηρούμε ότι τα δύο πλέγματα συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό και αυτό οφείλεται στην ανεξαρτησία πλέγματος που πρέπει να υπάρχει.

Τέλος, γίνεται σύγκριση των συντελεστών πίεσης σε τρεις θέσεις κατά το εύρος της πτέρυγας (y/b=0.078, 0.647, 0.969). Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η διαφορά των συντελεστών πίεσης της πάνω και της κάτω πλευράς στα αντίστοιχα σημεία ελέγχου ώστε τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τα αντίστοιχα της ασυμπτωτικής θεώρησης του Lee. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι το –ΔCp στο ακροπτερύγιο δεν είναι μηδέν όπως θα έπρεπε, γιατί όπως αναφέρθηκε παραπάνω υπολογίσαμε την ταχύτητα στην συνθήκη Kutta προσεγγιστικά και αυτή η ταχύτητα δεν είναι ίση με τις ταχύτητες που προκύπτουν από τις αναλυτικές εκφράσεις για πηγές και δίπολα (ως προς το δυναμικό). Εξαιρουμένου αυτού του υπολογιστικού σφάλματος, τα αποτελέσματα είναι πολύ καλά και οι όποιες υπερεκτιμήσεις του Cp είναι μικρές.

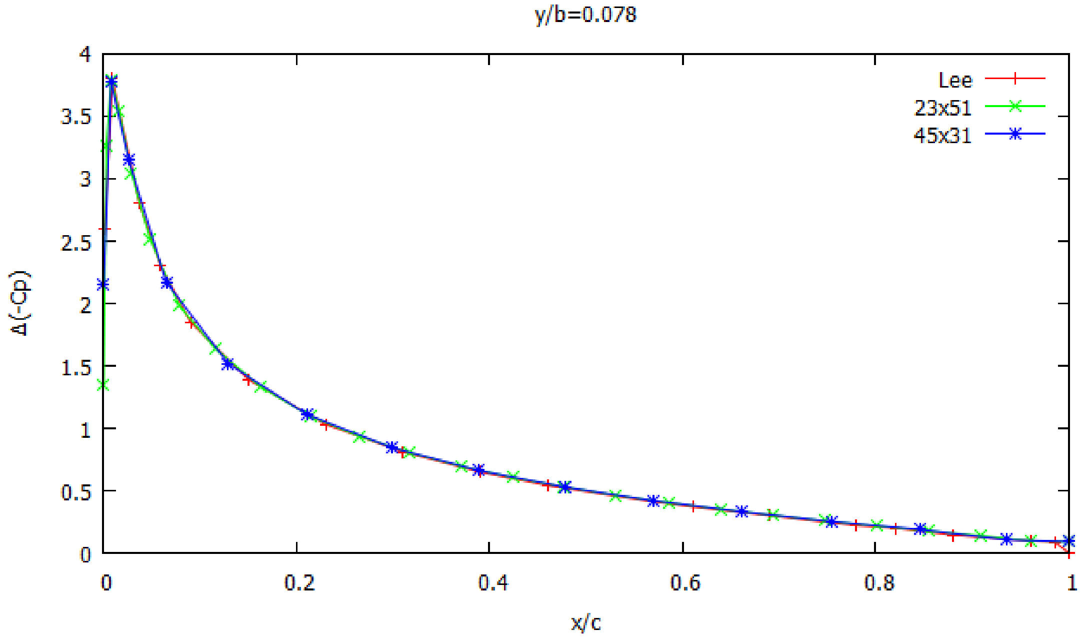
Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διαφοράς του συντελεστή πίεσης για ορθογωνική πτέρυγα NACA0005 για τις διάφορες ακτινικές θέσεις.

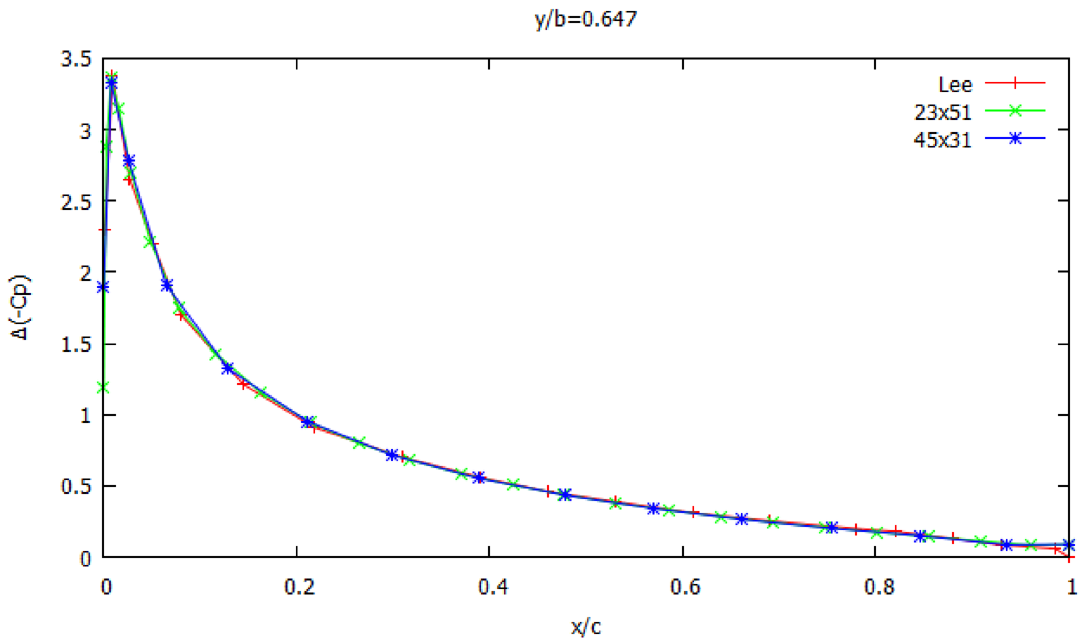


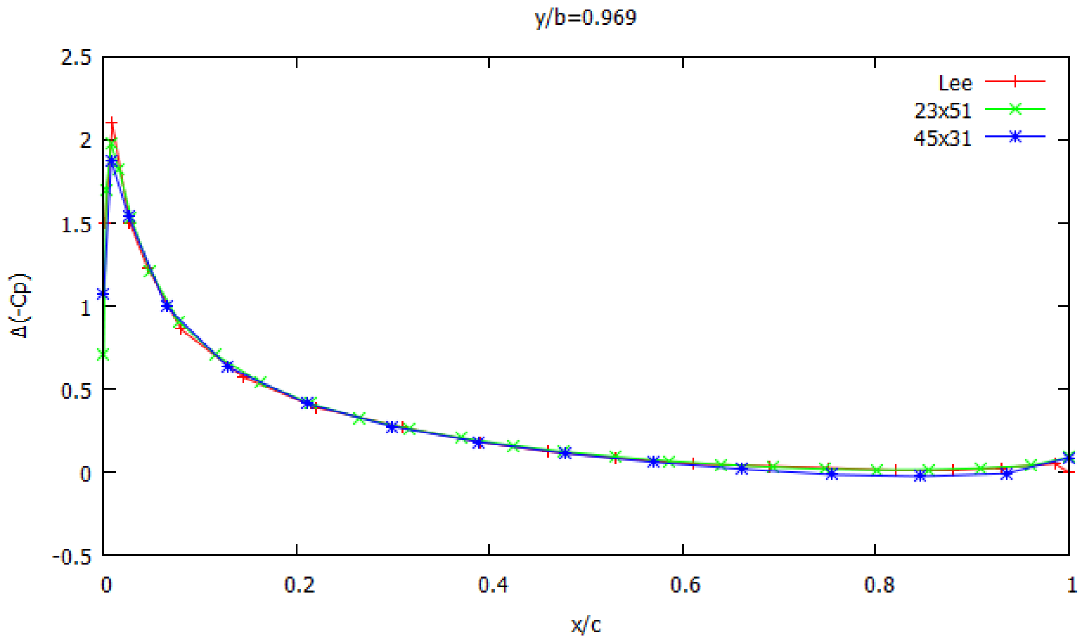

y/b=0.647
Lee
23x51
45x31
Δ(-Cp)
x/c
0
1
2
3
4
5
6
7
0.2
0.4
0.6
0.8


y/b=0.969
Lee
23x51
45x31
Δ(-Cp)
x/c
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
0.2
0.4
0.6
0.8

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διαφοράς του συντελεστή πίεσης για ορθογωνική πτέρυγα NACA0012 για τις διάφορες ακτινικές θέσεις.

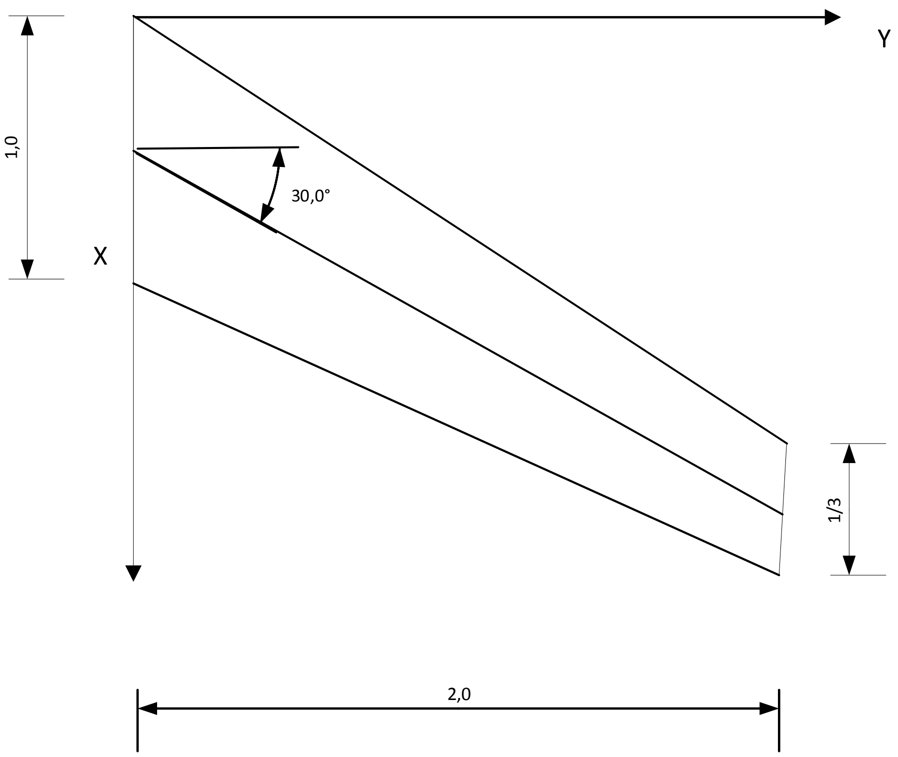






8.1.3 Η οπισθοκλινής πτέρυγα RAE-110

Στην συνέχεια εξετάζουμε την οπισθοκλινή πτέρυγα RAE-110 για την οποία υπάρχει η αριθμητική λύση “datum” του Roberts και του Rubbert. Η πτέρυγα σχηματίζεται από την συμμετρική NACA τεσσάρων ψηφίων με σταθερό πάχος κατά μήκος της ακτίνας. Η χορδή μεταβάλλεται γραμμικά σε συνάρτηση με την ακτίνα, ενώ στο παρακάτω σχήμα είναι η κάτοψη της πτέρυγας και οι βασικές διαστάσεις της.



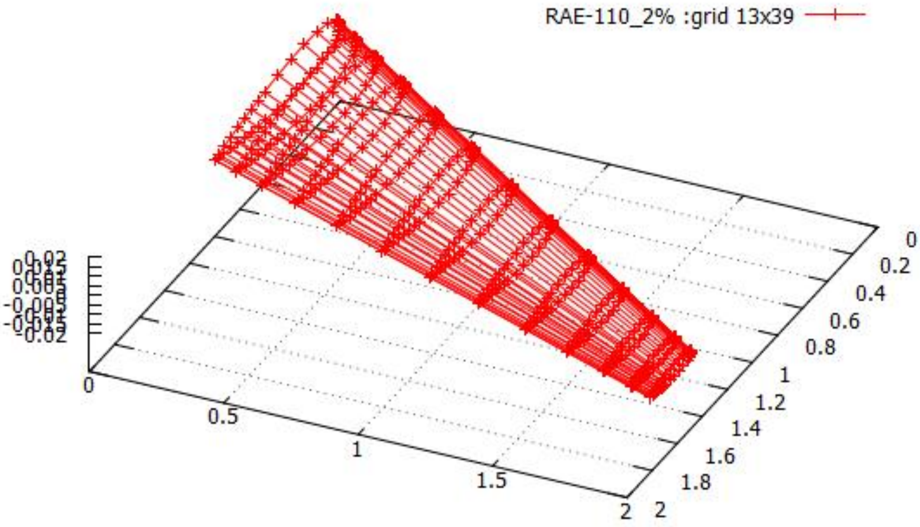
Σχήμα 32. Οι βασικές διαστάσεις της οπισθοκλινούς πτέρυγας

Στην περίπτωση της οπισθοκλινούς πτέρυγας εξετάστηκαν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις πάχους t/c= 2%, 5%, 15% με την πρώτη να είναι η πιο δύσκολη καθώς σύμφωνα με τις διαστάσεις της πτέρυγας το πάχος στο ακροπτερύγιο για αυτή την περίπτωση είναι t/c = 0.7%,

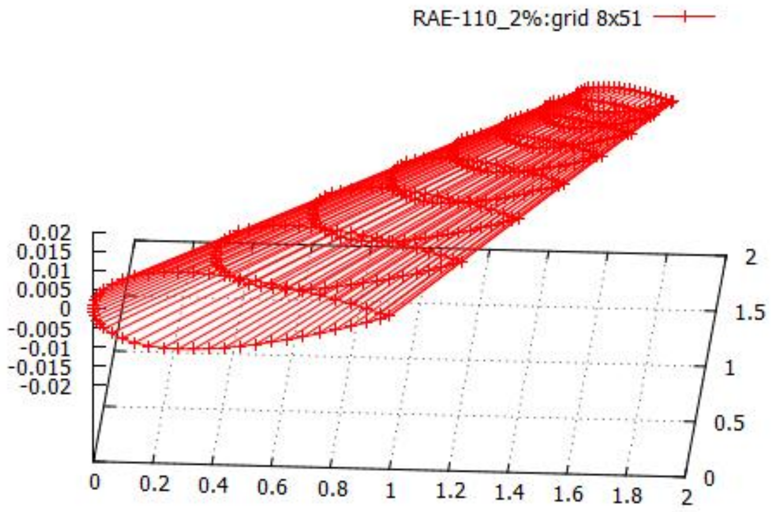
Για κάθε μία από τις περιπτώσεις πάχους χρησιμοποιείται μια διακριτοποίηση πλέγματος 51×8 και 39×13. Το πλέγμα στην δεύτερη περίπτωση είναι πιο πυκνό στην περιοχή της ακμής πρόσπτωσης αφού εκεί οι κλίσεις της τόσο της γεωμετρίας όσο και του πεδίου ροής είναι πιο έντονες. Για την καλύτερη προσέγγιση του φυσικού προβλήματος το πλέγμα θα πρέπει να πυκνώσει στην περιοχή του ακροπτερυγίου όπου η κλίση της κυκλοφορίας είναι έντονη και τείνει στο μηδέν.

1. Η πτέρυγα RAE-110 με συμμετρική αεροτομή NACA0002

Η πτέρυγα που χρησιμοποιήσαμε για αυτό το πάχος 2%, σχηματίστηκε από την συμμετρική NACA0002. Η γωνία πρόπτωσης είναι $\alpha = 5^o$ και επί άπειρο ταχύτητα έχει μοναδιαίο μέτρο.

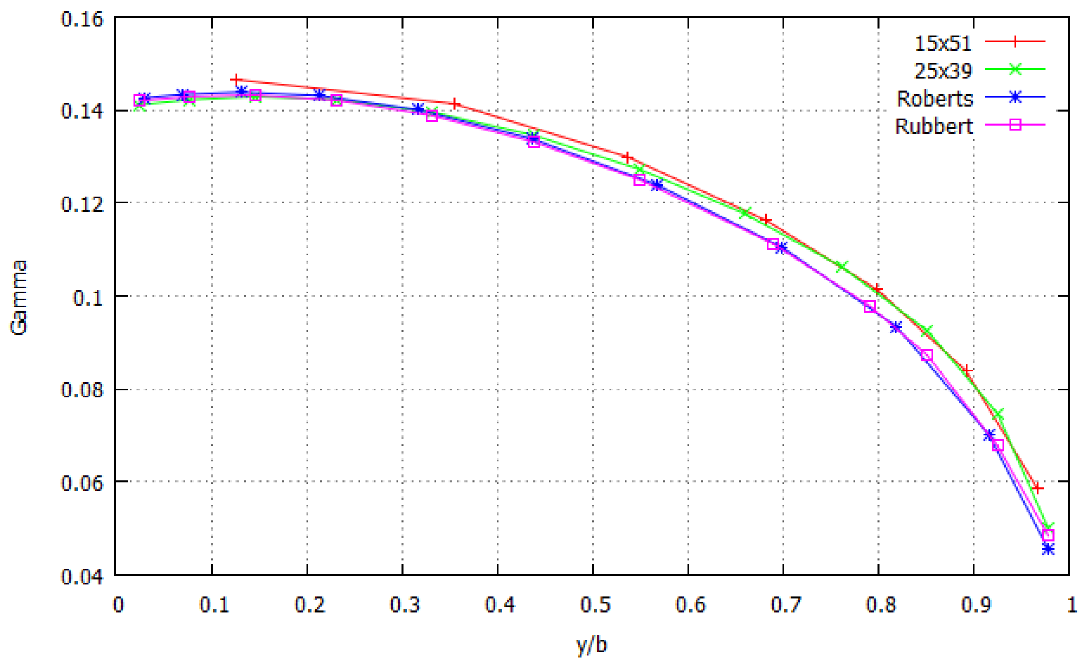


Σχήμα 33. Οπισθοκλινής πτέρυγα με πάχος 2% για πλέγμα 13x39



Σχήμα 34. Οπισθοκλινής πτέρυγα με πάχος 2% για πλέγμα 8x51

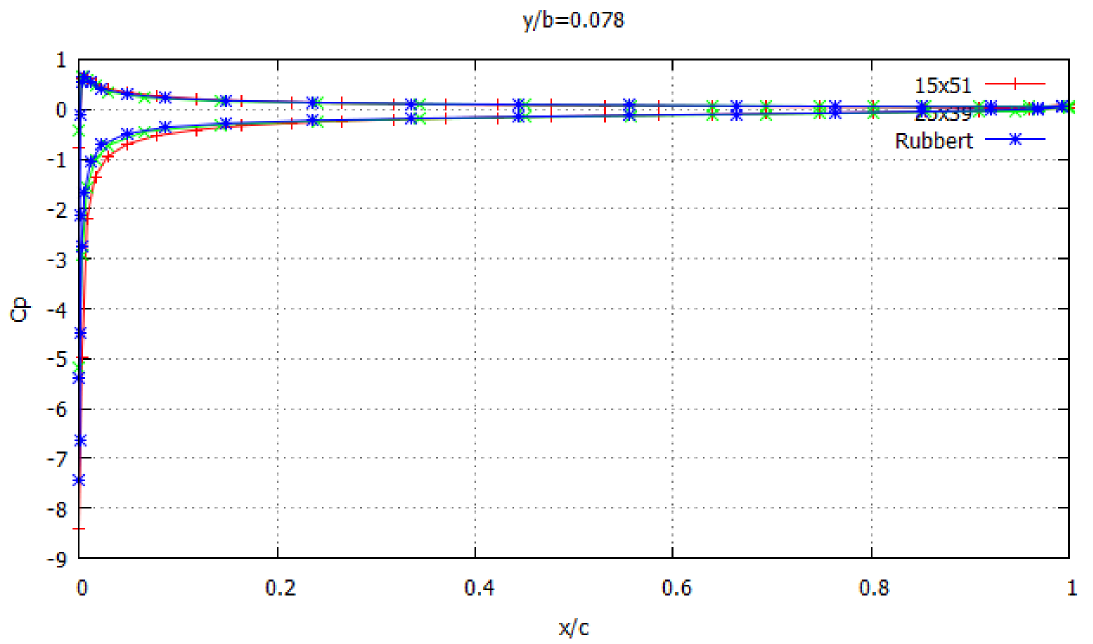
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η ακτινική διανομή (y/b) της κυκλοφορίας της πτέρυγας σε σύγκριση με τις δύο λύσεις που έχουμε.

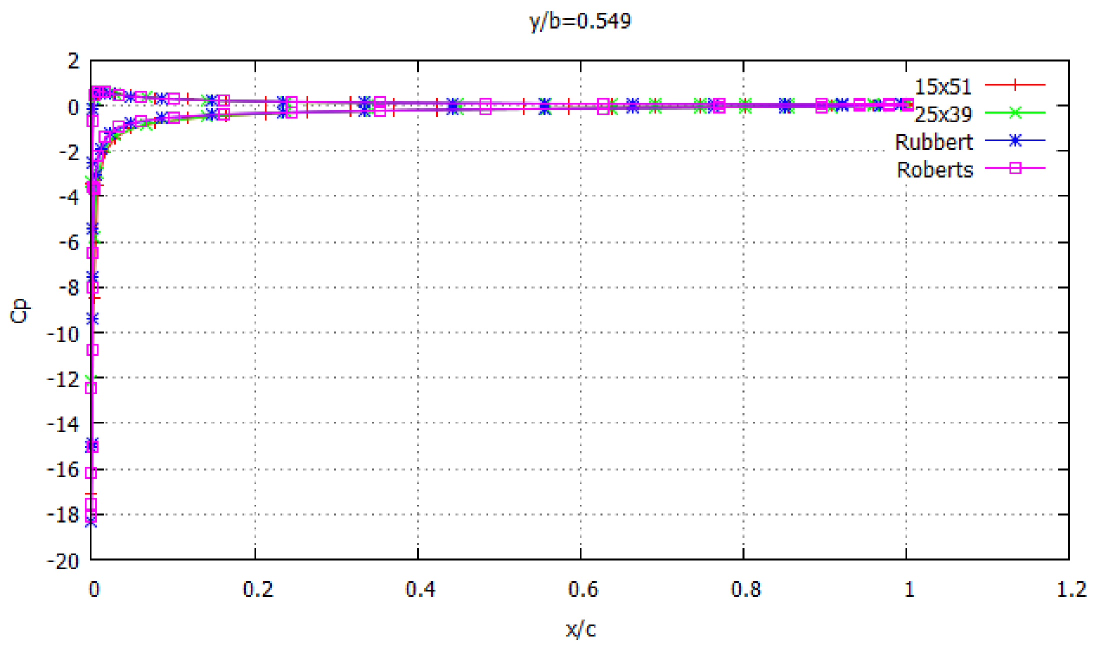


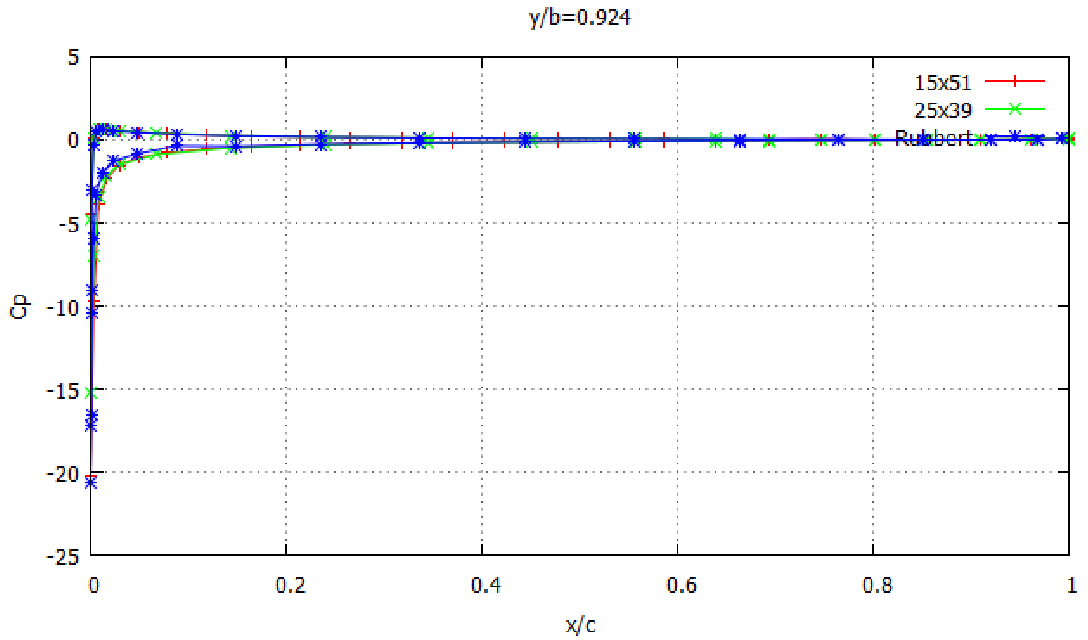
Τα αποτελέσματα του αλγόριθμου συμπίπτουν ικανοποιητικά με τη λύση αναφοράς, έχοντας τα ίδια χαρακτηριστικά με τις ήδη υπάρχουσες λύσεις (ίδια κλίση και ίδια τιμή προσδεδεμένης στροβιλότητας) αλλά και περίπου ίδια τιμή (με μια ελαφριά υπερεκτίμηση).

Η διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων σε σύγκριση με τα δεδομένα που έχουμε, οφείλεται στο γεγονός ότι με την παρούσα μέθοδο η ικανοποίηση της συνθήκης Kutta- Joukowski γίνεται στα σημεία ελέγχου των στοιχείων που βρίσκονται στο εσωτερικό των στοιχείων στην ακμή εκφυγής και όχι ακριβώς στην ακμή εκφυγής. Επίσης, σημαντικό ρόλο παίζει το πλέγμα, γιατί επειδή υπάρχουν μεγάλες κλίσεις στην γεωμετρία παρατηρούμε ότι για 51×8 υπάρχει υπερεκτίμηση της κυκλοφορίας στην ακμή προσβολής όπου είναι αραιό το πλέγμα, ενώ για 39×13 η κυκλοφορία είναι ίδια με αυτή των αποτελεσμάτων, λόγω πιο πυκνού πλέγματος. Στην ακμή εκφυγής επειδή το πλέγμα είναι πιο αραιό υπάρχει μια ελαφρά υπερεκτίμηση.

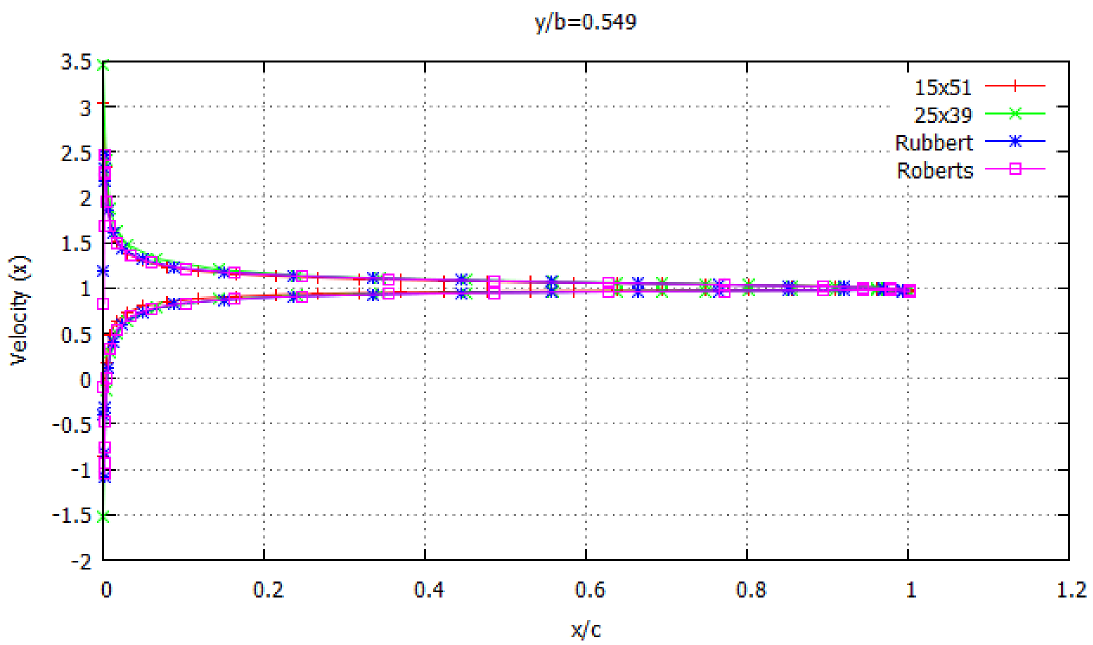
Στην συνέχεια παρουσιάζεται η χορδική κατανομή του συντελεστή πίεσης σε τρεις ακτινικές θέσεις y/b= 0.079, 0.549, 0.924.

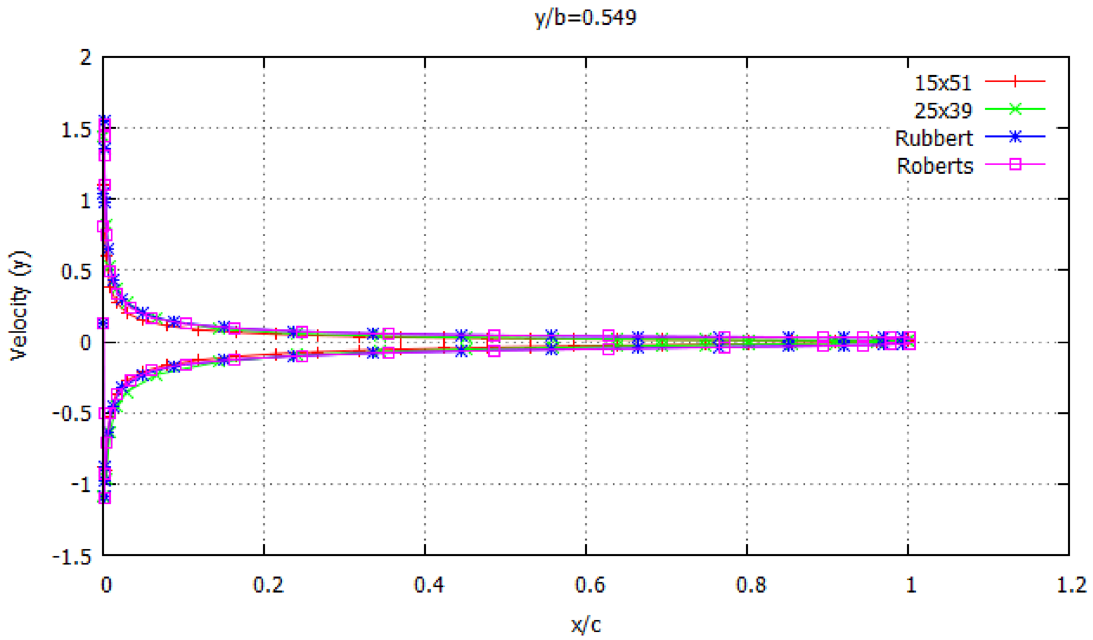


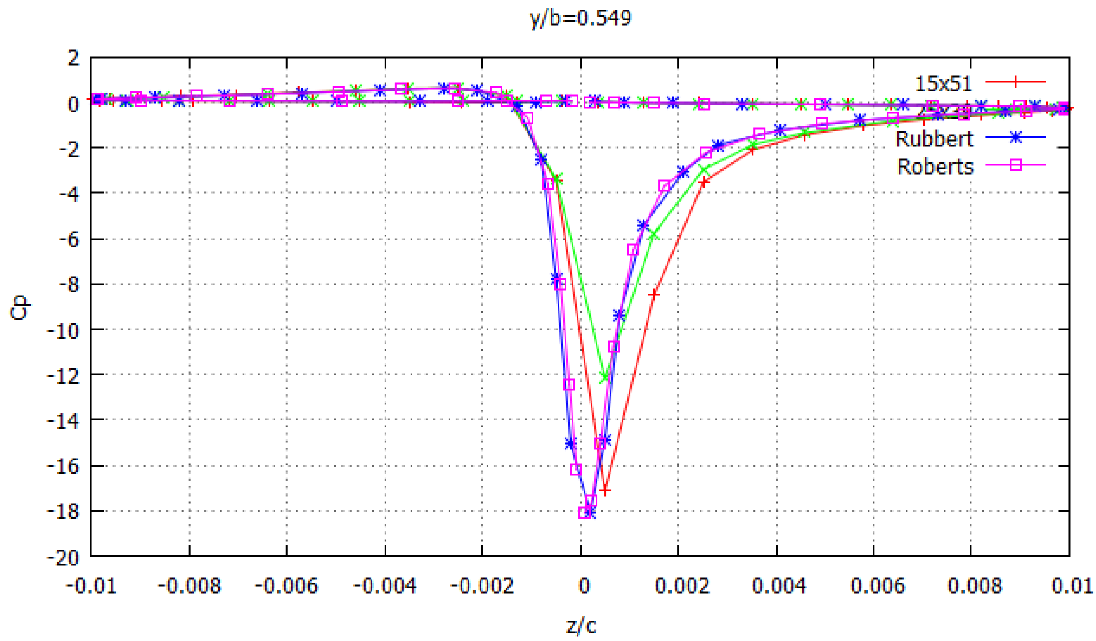




Επίσης παρουσιάζεται η ταχύτητα στον άξονα x και y στην ακτινική θέση y/b= 0.549, όπως και ο συντελεστής πίεσης σε συνάρτηση με το πάχος στην συγκεκριμένη θέση.



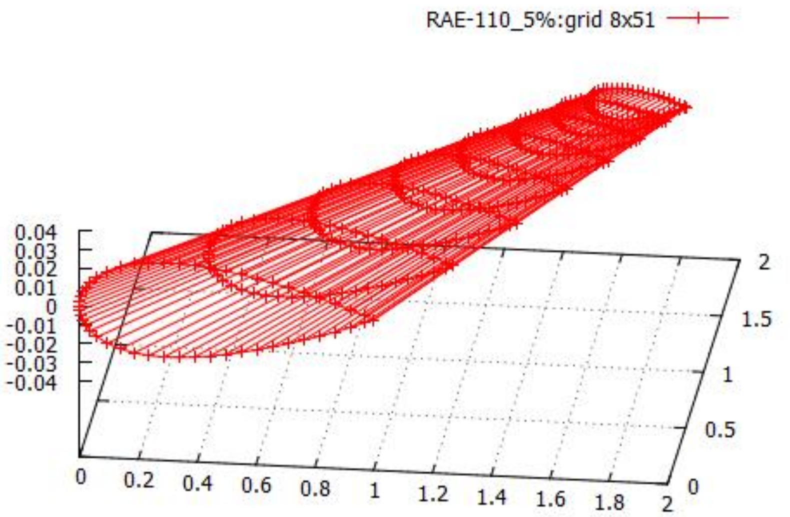




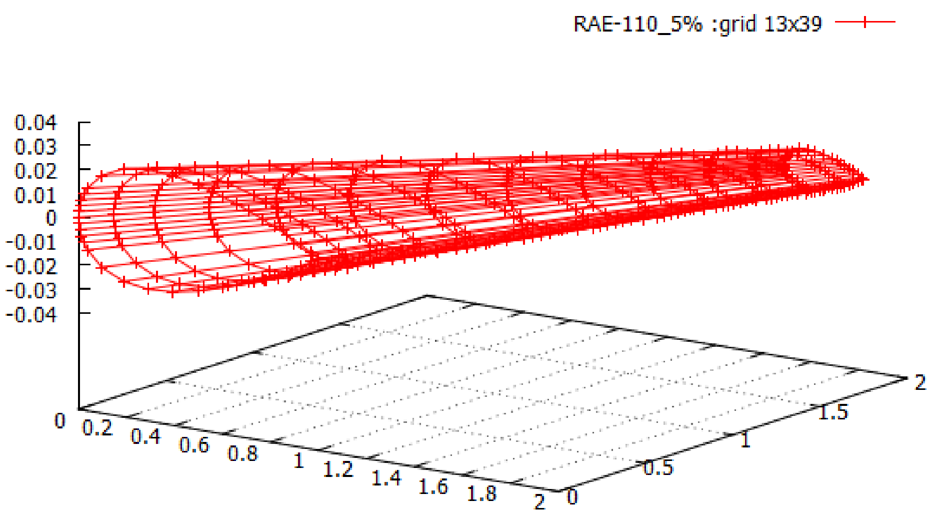
Από παραπάνω σχήματα είναι φανερή η αρκετά καλή σύμπτωση των αποτελεσμάτων με τις λύσεις που έχουμε, με μια μικρή υποεκτίμηση στην ακμή προσβολής και στην ακμή εκφυγής για το τελευταίο σχήμα για πλέγμα 39×13, το οποίο οφείλεται στο πλέγμα. Οι συντελεστές πίεσης είναι σχεδόν ίδιοι με τα δεδομένα που έχουμε, όπως και η ταχύτητα και αυτό δείχνει ότι τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα πλέγματος και το μοντέλο μπορεί να δώσει καλά αποτελέσματα για κάθε πλέγμα.

2. Η πτέρυγα RAE-110 με συμμετρική αεροτομή NACA0005

Παρόμοια συμπεράσματα βγάζουμε και για την RAE-110 που σχηματίστηκε από συμμετρική αεροτομή NACA0005. Η γωνία πρόπτωσης είναι $\alpha = 5^o$ και επί άπειρο ταχύτητα έχει μοναδιαίο μέτρο.

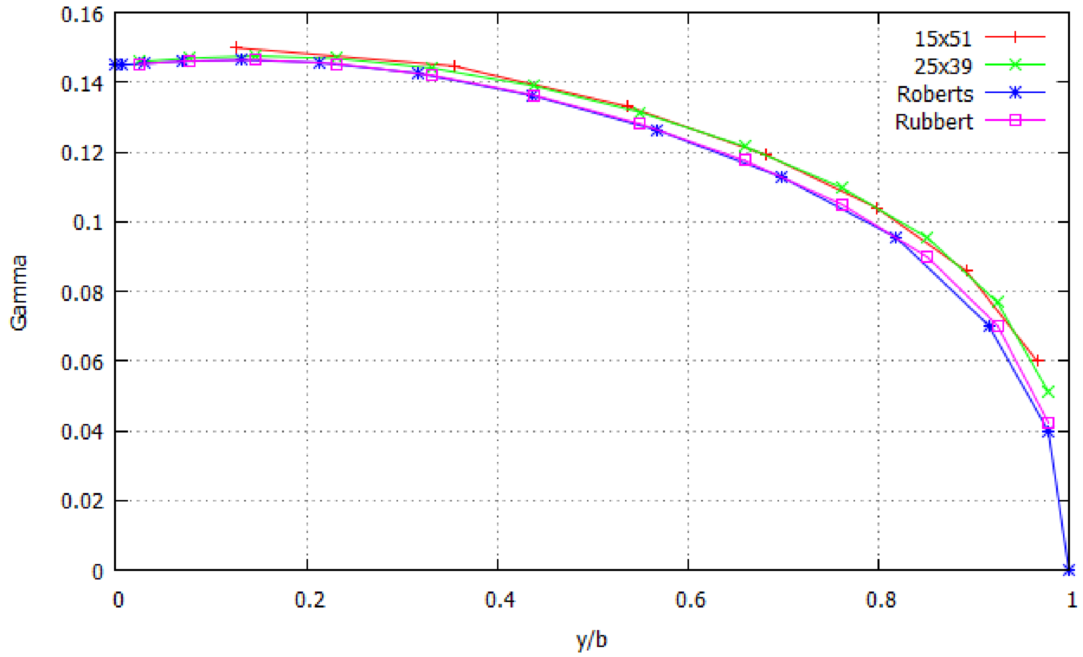


Σχήμα 35. Οπισθοκλινής πτέρυγα με πάχος 5% για πλέγμα 8x51

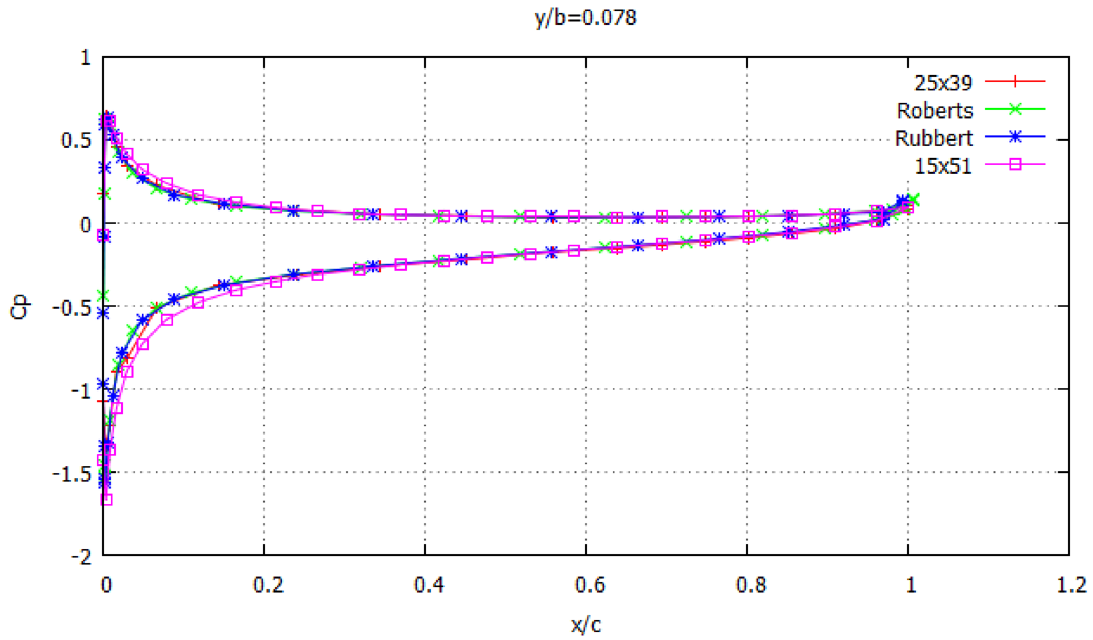


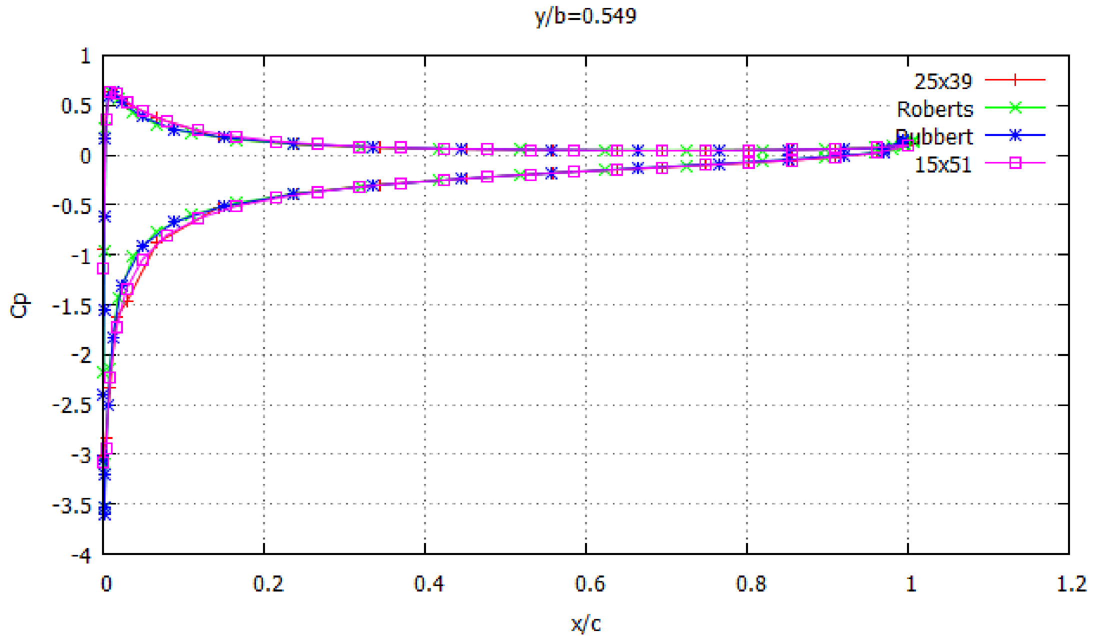
Σχήμα 36. Οπισθοκλινής πτέρυγα με πάχος 5% για πλέγμα 13x39

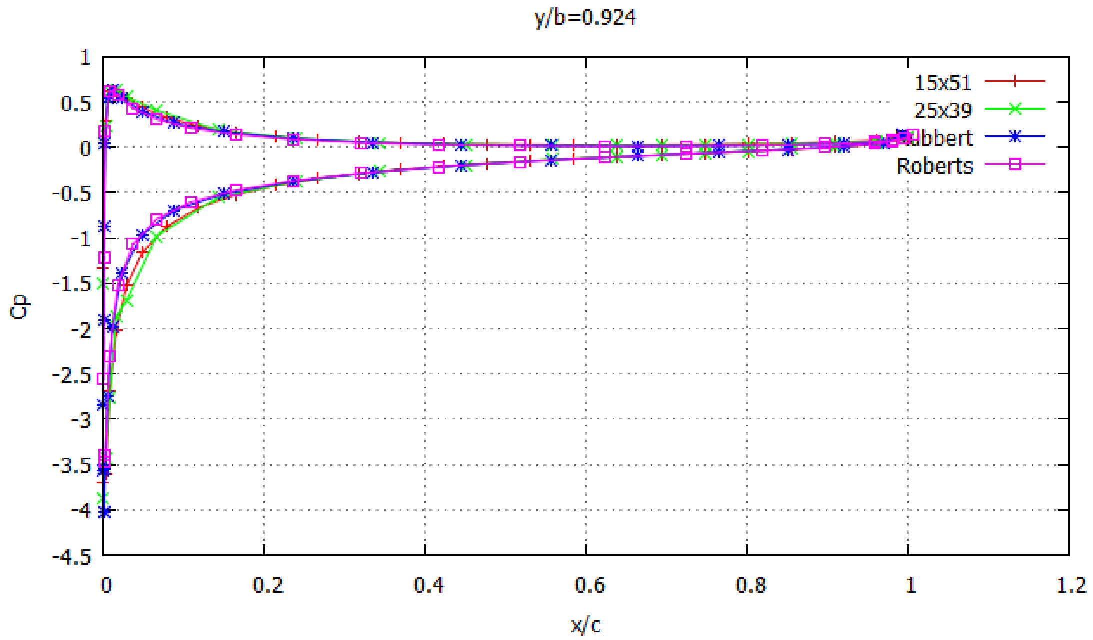
Οι προλέξεις και για την δεύτερη πτέρυγα είναι ικανοποιητικές, όπως ήταν για την πρώτη πτέρυγα. Όπως και στην πρώτη περίπτωση παρατηρείται το φαινόμενο της υπερεκτίμησης της κυκλοφορίας ειδικά για το 51×8 πλέγμα, ενώ η σύγκριση των πιέσεων είναι ικανοποιητική. Οι τυχόν διαφορές δεν μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως γιατί όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η ταχύτητα στην συνθήκη Kutta υπολογίστηκε προσεγγιστικά και δεν είναι ίση με τις αναλυτικές ταχύτητες που επάγουν οι πηγές και τα δίπολα (ως προς το δυναμικό).

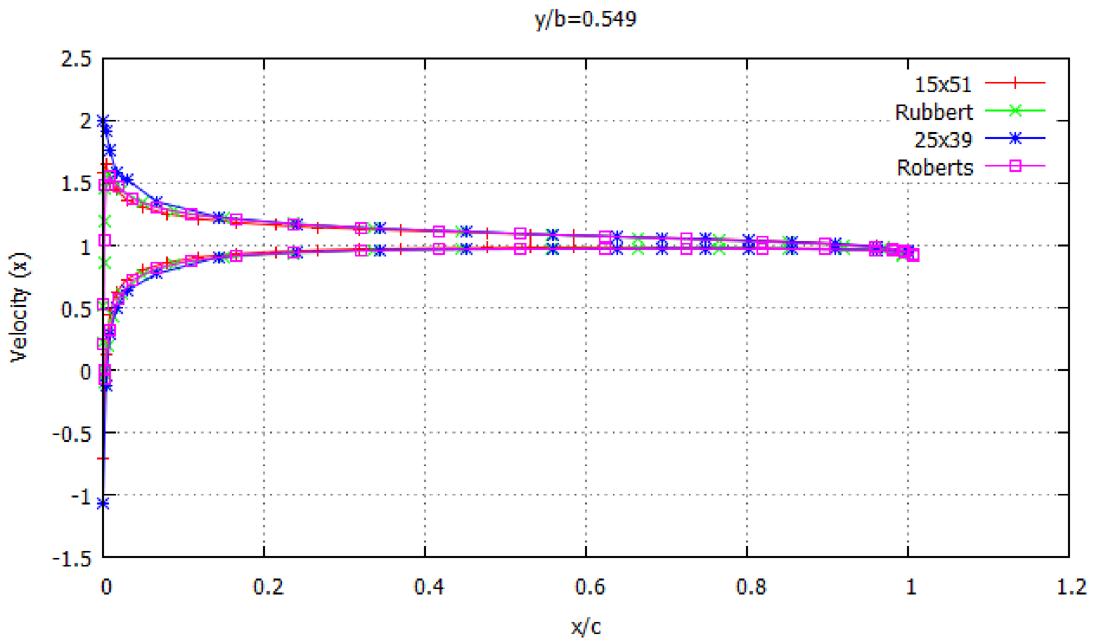


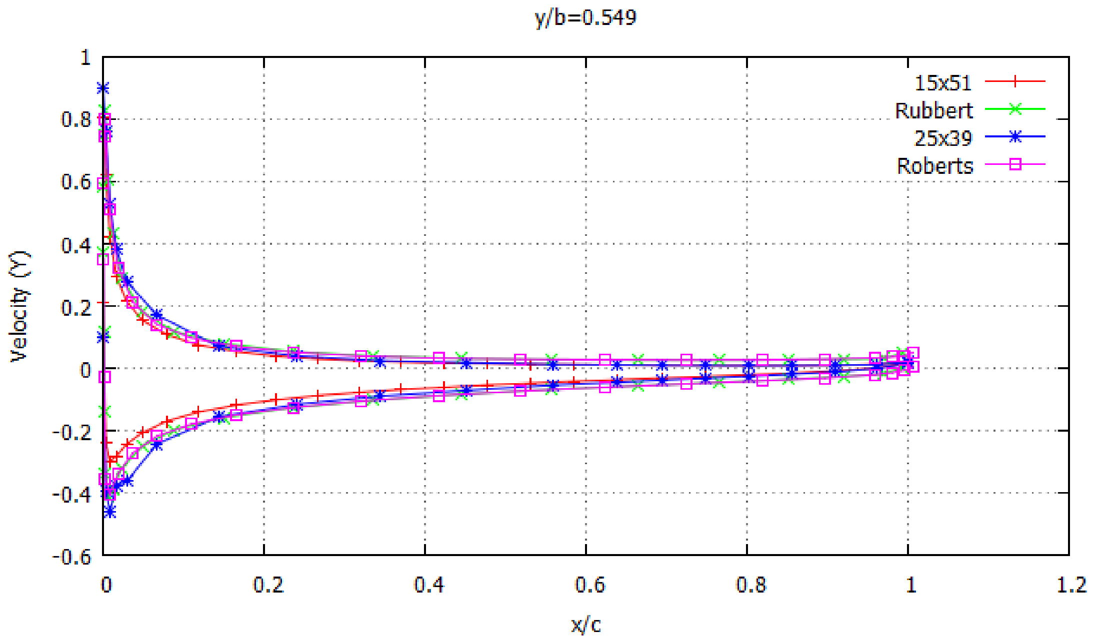
Παρακάτω παρουσιάζεται η χορδική κατανομή του συντελεστή πίεσης σε τρεις ακτινικές θέσεις y/b= 0.079, 0.549, 0.924, ενώ επίσης παρουσιάζεται η ταχύτητα στον άξονα x και y στην ακτινική θέση y/b= 0.549, όπως και ο συντελεστής πίεσης σε συνάρτηση με το πάχος στην συγκεκριμένη θέση.

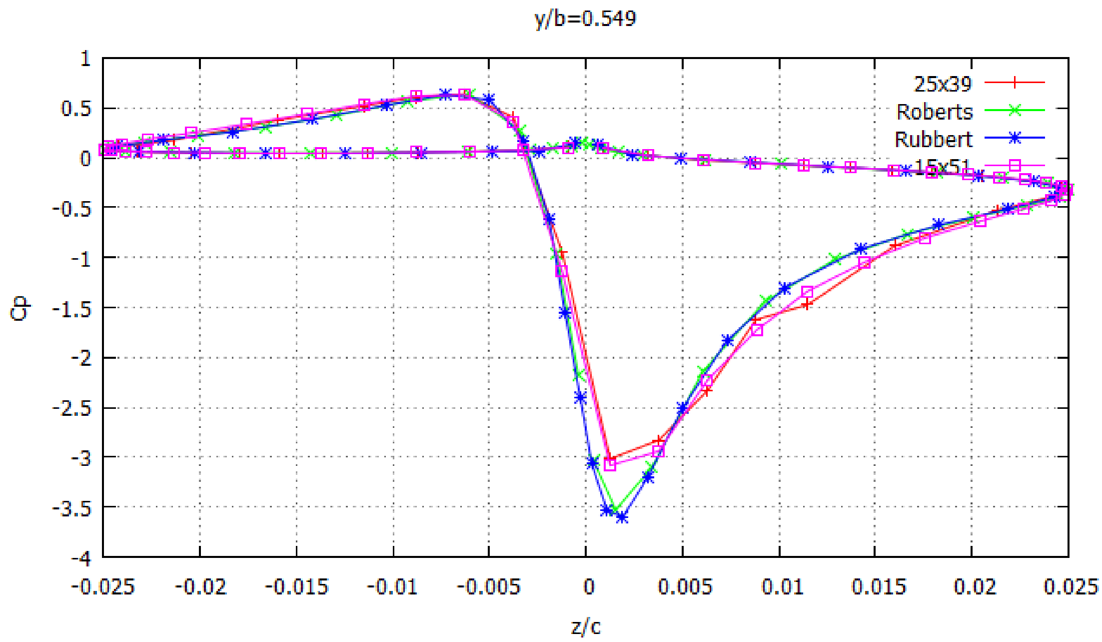

y/b=0.078
25x39
Roberts
Rubbert
15x51
Cp
x/c
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2


y/b=0.549
25x39
Roberts
Rubbert
15x51
Cp
x/c
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2


y/b=0.924
15x51
25x39
Rubbert
Roberts
Cp
x/c
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2


y/b=0.549
15x51
Rubbert
25x39
Roberts
Velocity (x)
x/c
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

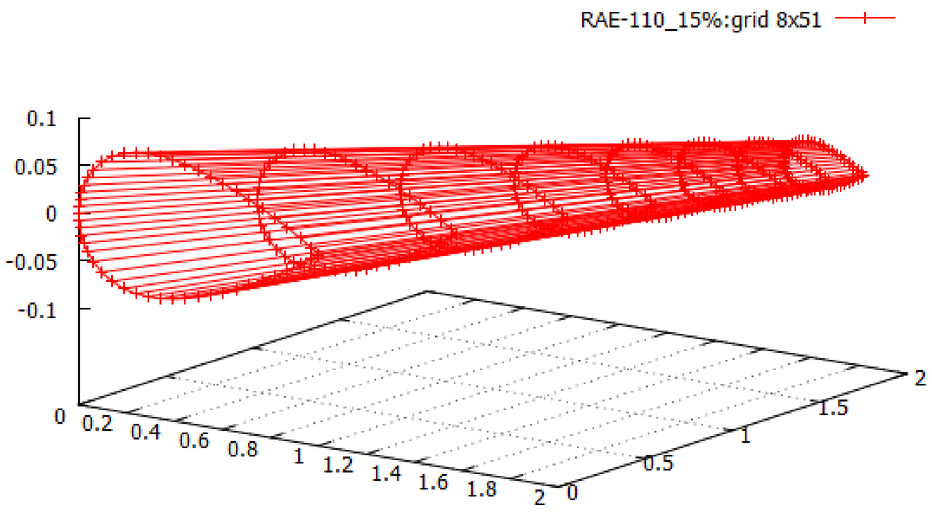




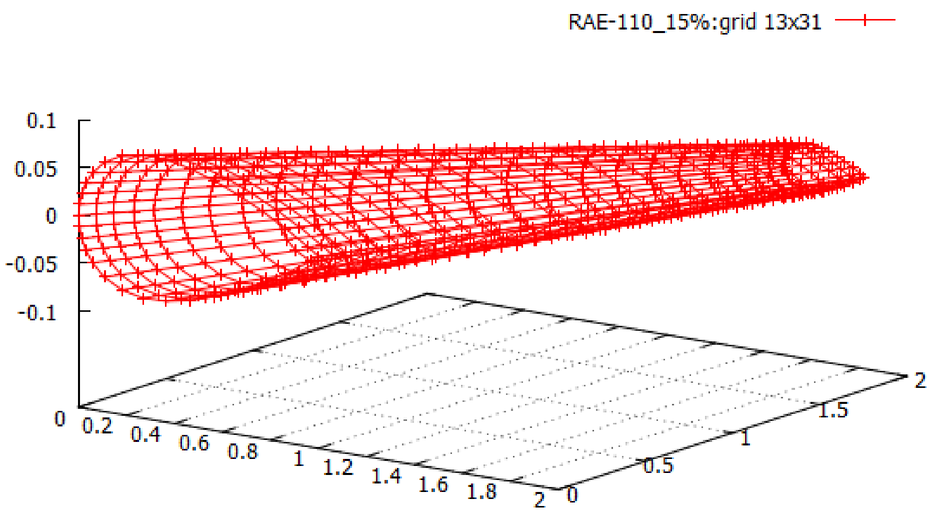
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα του συντελεστή πίεσης είναι πολύ καλά και στην ακμή προσβολής και στην ακμή εκφυγής. Επίσης ο συντελεστής πίεσης συναρτήσει του πάχους το οποίο είναι μεγαλύτερο, παρουσιάζει μια μικρή υποεκτίμηση και αυτό έχει να κάνει με τα πλέγματα που χρησιμοποιούνται. Πιο πυκνά πλέγματα θα δώσουν καλύτερα αποτελέσματα, αλλά θα αυξήσουν σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο.

3. Η πτέρυγα RAE-110 με συμμετρική αεροτομή NACA0015

Στην τελευταία εφαρμογή χρησιμοποιείται συμμετρική πτέρυγα NACA με πάχος 15%. Για την περίπτωση αυτή εξετάστηκε τόσο η περίπτωση της γωνίας πρόσπτωσης $\alpha = 5^o$ όσο και αυτή της $\alpha = 0^o$.



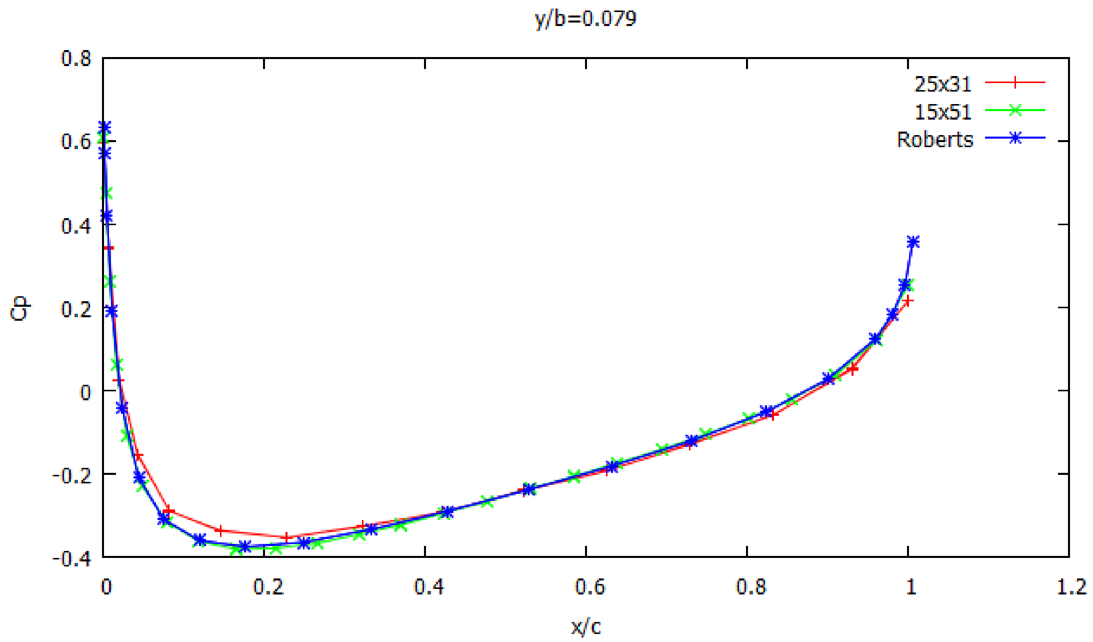
Σχήμα 37. Οπισθοκλινής πτέρυγα με πάχος 15% για πλέγμα 8x51

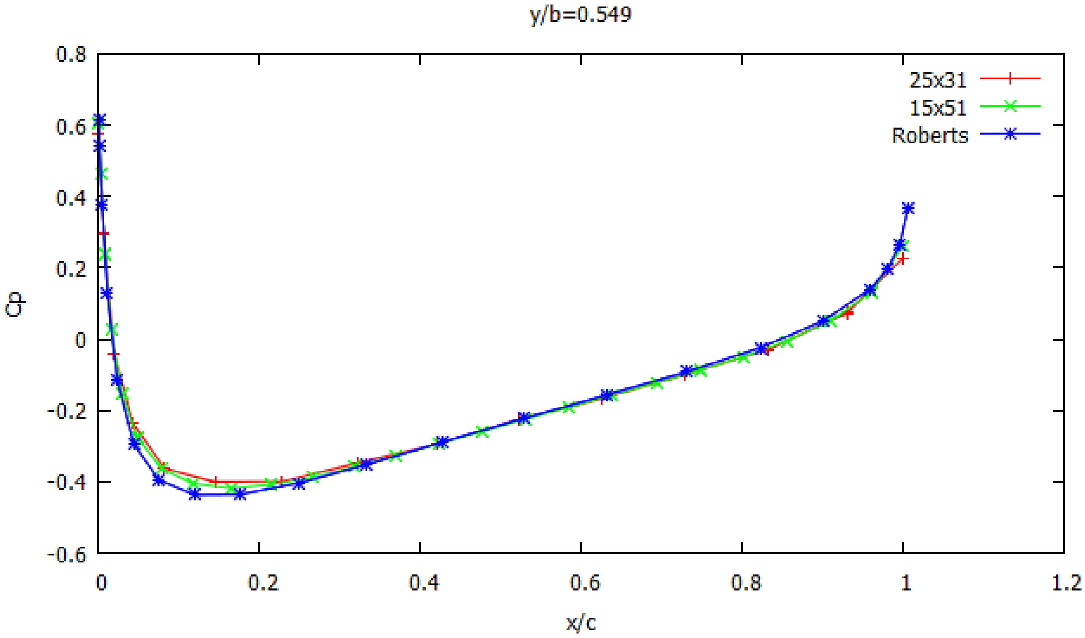


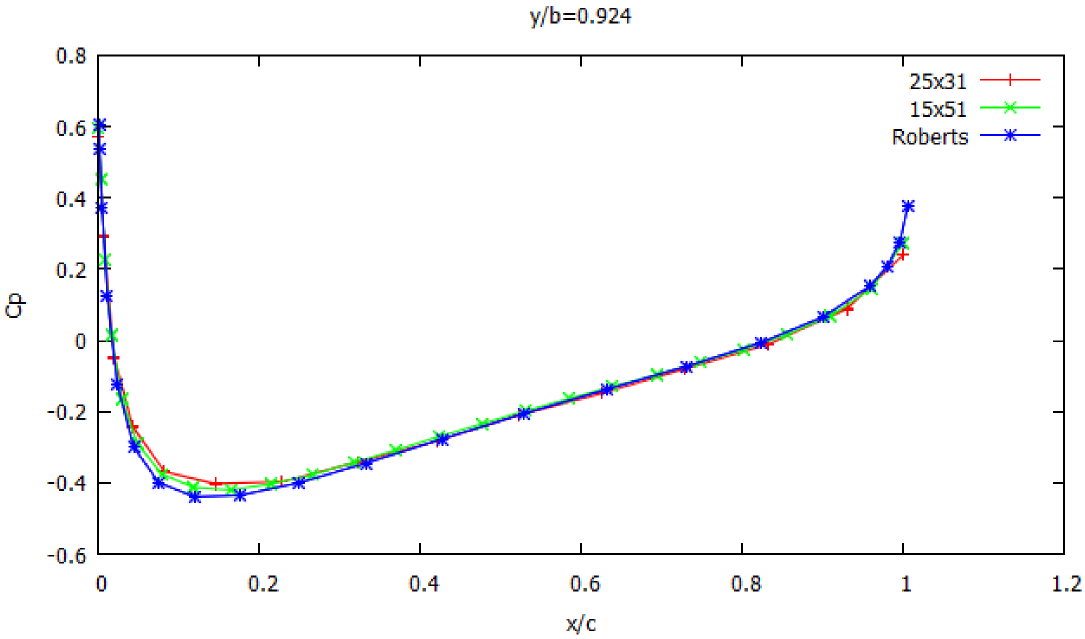
Σχήμα 38. Οπισθοκλινής πτέρυγα με πάχος 15% για πλέγμα 13x31

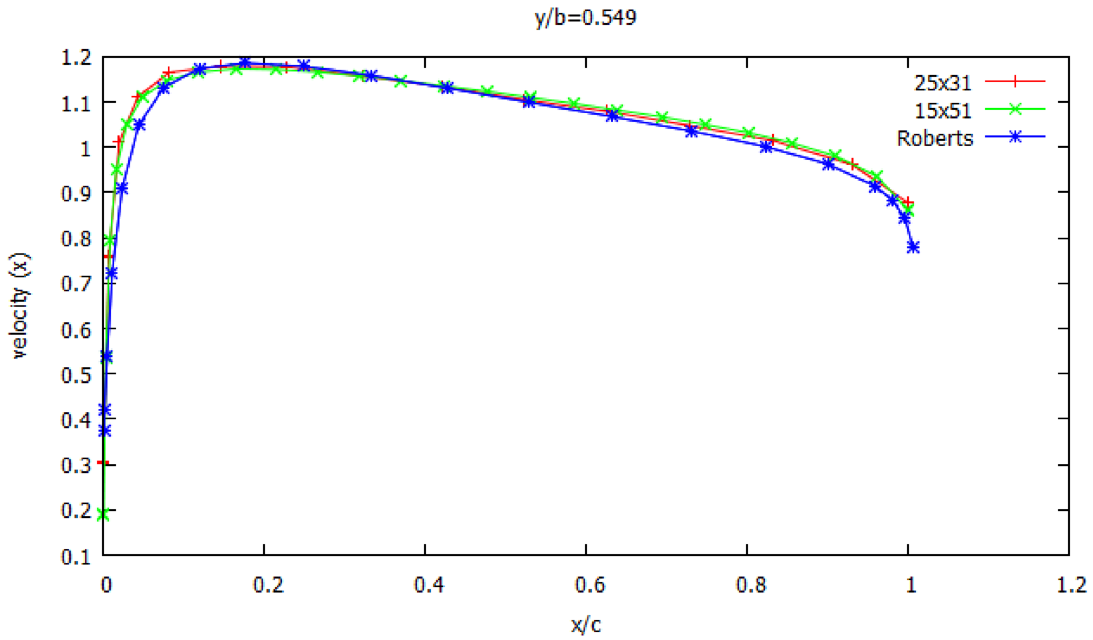
Η περίπτωση της ροής με μηδενική γωνία πρόσπτωσης επιτρέπει τον έλεγχο του αλγορίθμου για τυχόν ύπαρξη σφαλμάτων στην προσέγγιση της γεωμετρίας αλλά και στον τρόπο προγραμματισμού. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η άνωση είναι μηδενική και το σώμα συμπεριφέρεται ως μη ανωστικό. Όλα τα μεγέθη θα πρέπει να είναι συμμετρικά στην πάνω και κάτω πλευρά, γιατί χρησιμοποιείται συμμετρική αεροτομή, κάτι που επαληθεύεται από τις σχεδόν μηδενικού εύρους διανομές των συντελεστών πίεσης.

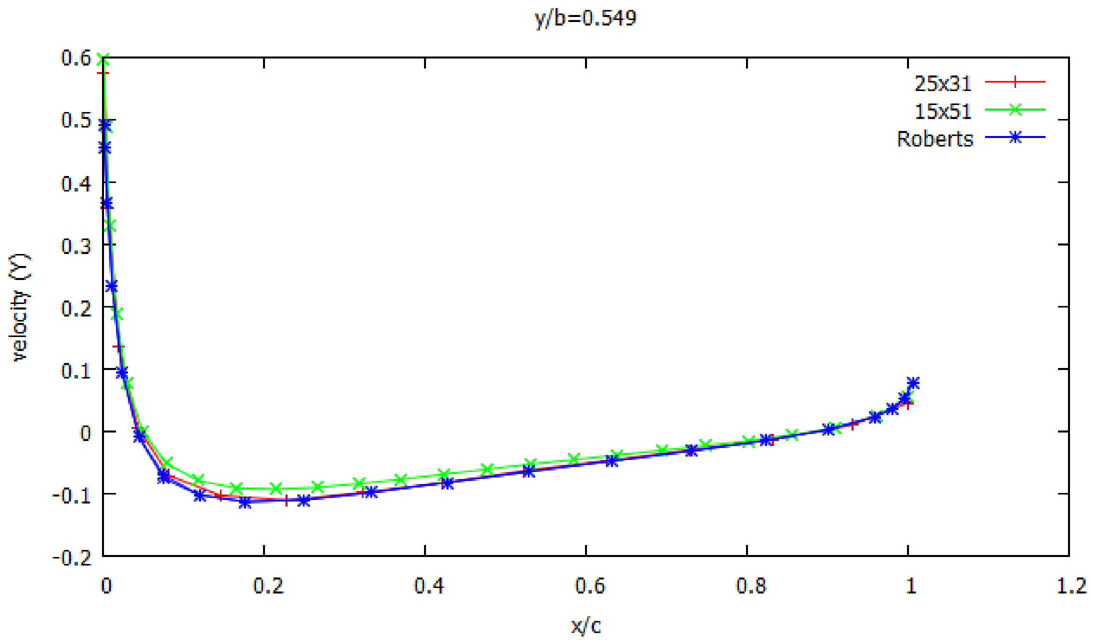
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η χορδική κατανομή του συντελεστή πίεσης σε τρεις ακτινικές θέσεις (y/b= 0.079, 0.549, 0.924) για την περίπτωση μηδενικής γωνίας πρόσπτωσης. Η σύγκριση των σχετικών αποτελεσμάτων με την λύση αναφοράς Roberts και Rubbert, δείχνει ότι η διανομή πηγών ως προς το δυναμικό επιλύει σωστά το πρόβλημα του πάχους, δηλαδή ο αλγόριθμος μπορεί να επιλύσει σωστά ανωστικά και μη ανωστικά σώματα.




y/b=0.549
25x31
15x51
Roberts
Cp
x/c
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

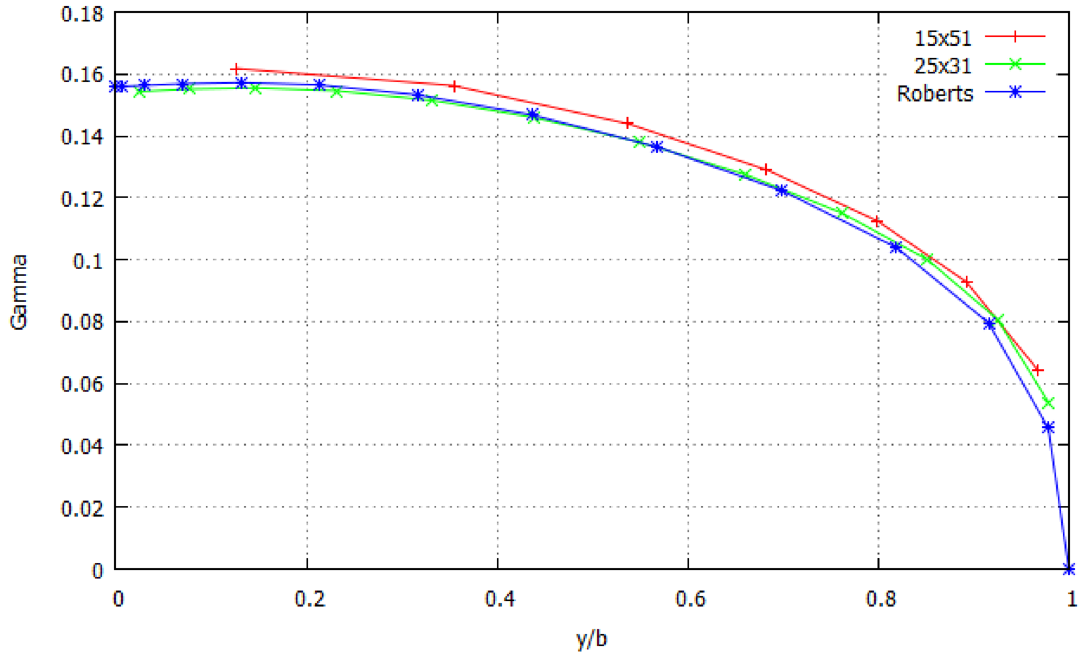

y/b=0.924
25x31
15x51
Roberts
Cp
x/c
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2



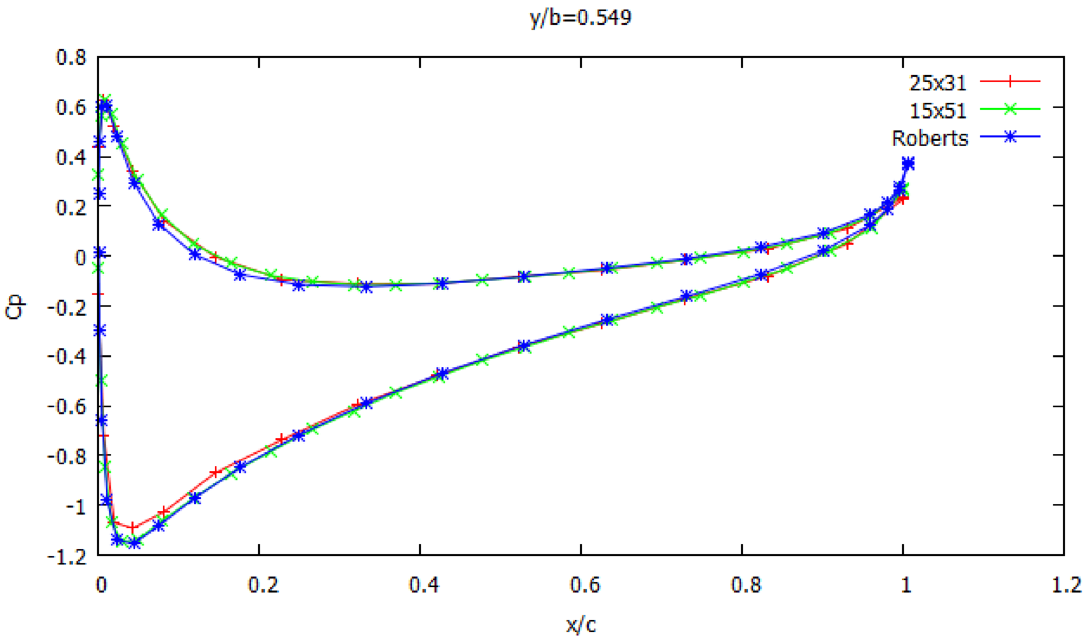


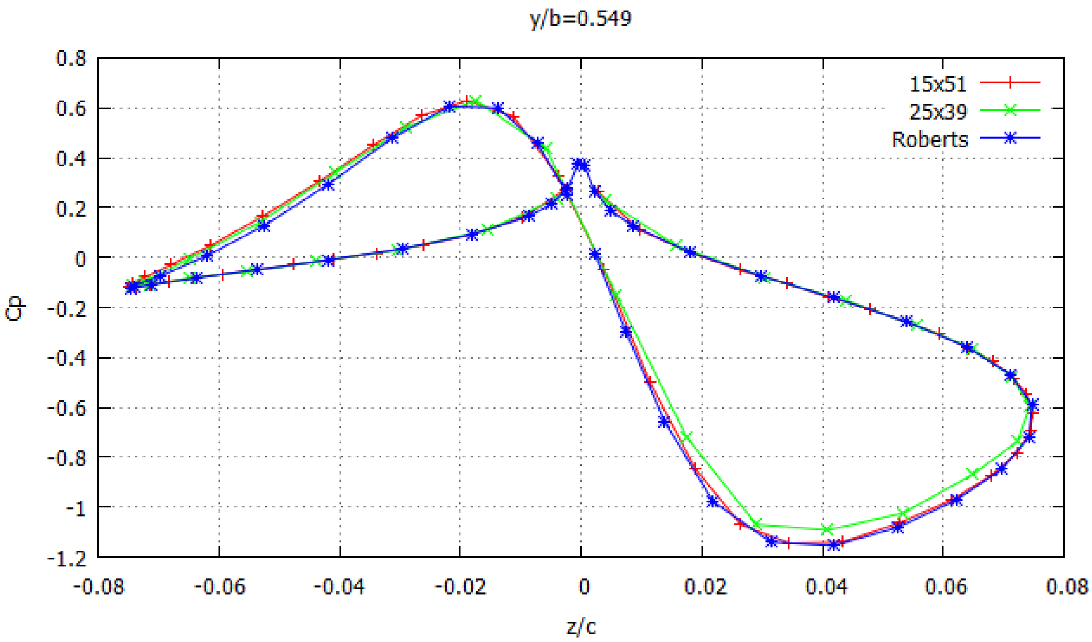
Τα αποτελέσματα συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό με τα δεδομένα που έχουμε. Οι όποιες διαφορές έγκειται στο πλέγμα που χρησιμοποιούμε. Το πιο σημαντικό είναι τα αποτελέσματα να είναι συμμετρικά, κάτι που δείχνει ότι ο κώδικας δίνει καλά αποτελέσματα.

Στην συνέχεια εξετάζεται η λύση της οπισθοκλινούς πτέρυγας RAE-110 με πάχος αεροτομών 15% σε παράλληλη ροή μοναδιαίου μέτρου και γωνίας πρόσπτωσης $\alpha = 5^o$.



Η κυκλοφορία έχει ικανοποιητική σύγκλιση σε σχέση με τα δεδομένα που έχουμε. Υπάρχει μια μικρή υπερεκτίμηση για πλέγμα 51×8. Το 31×13 δίνει πιο ακριβές αποτέλεσμα κάτι που δείχνει ότι υπάρχει καλύτερη ανάλυση της ροής λόγω καλύτερου πλέγματος. Επίσης συγκρίνουμε την διανομή του συντελεστή πίεσης με τις αντίστοιχες λύσεις που δίνεται για την ακτινική θέση y/b = 0.549.

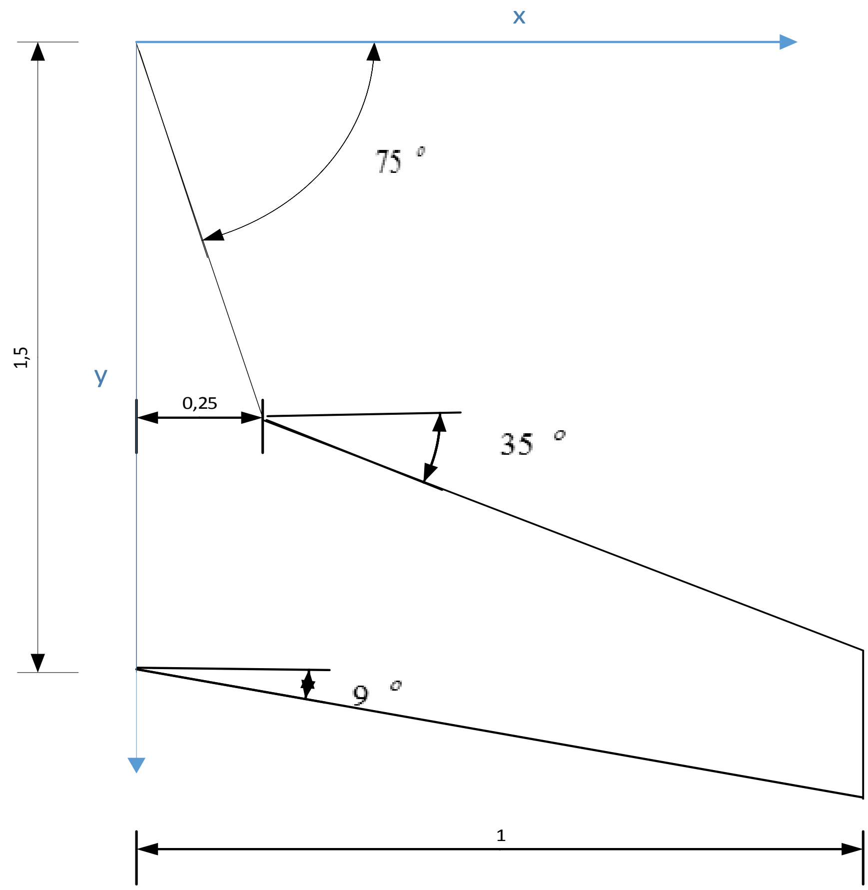




Και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα της διατύπωσης πηγών και διπόλων (ως προς το δυναμικό), ακολουθούν πιστά τις λύσεις των Roberts και Rubbert. Οι συντελεστές πίεσης είναι σε πολύ ικανοποιητικά επίπεδα σε σχέση με την λύση. Γενικά όσο αυξάνει το πάχος της πτέρυγας η ταχύτητα στην ακμή πρόπτωσης μεταβάλλεται πιο γρήγορα με αποτέλεσμα να χρειάζεται πιο πυκνό πλέγμα για να παρακολουθήσουμε αυτές τις μεταβολές και κυρίως περισσότερα σημεία στην κάθε τομή.

8.1.4 Διπλής οπισθόκλισης πτέρυγα (straked wing)

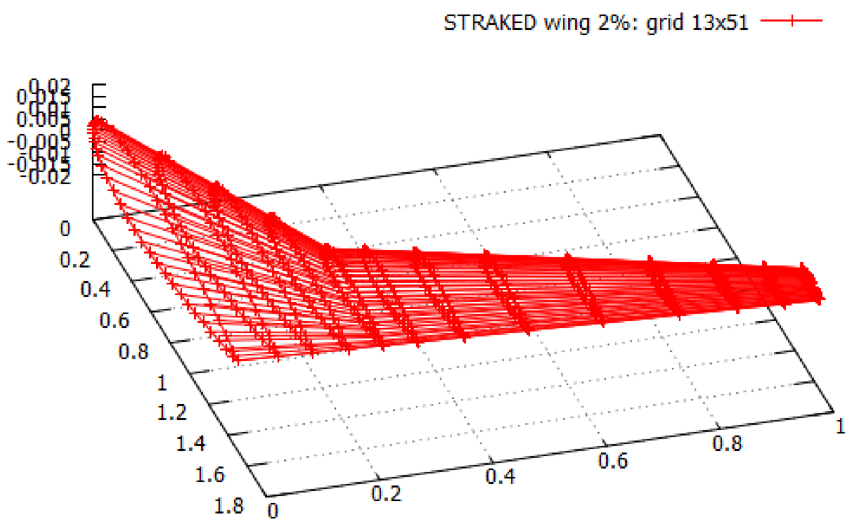
Τέλος, εξετάζουμε την διπλής οπισθόκλισης πτέρυγα (straked wing), για την οποία υπάρχει η αριθμητική λύση “datum” του Roberts και του Rubbert. Η πτέρυγα σχηματίζεται από την συμμετρική NACA τεσσάρων ψηφίων με σταθερό πάχος κατά μήκος της ακτίνας. Η χορδή μεταβάλλεται γραμμικά σε συνάρτηση με την ακτίνα, ενώ στο παρακάτω σχήμα είναι η κάτοψη της πτέρυγας και οι βασικές διαστάσεις της.



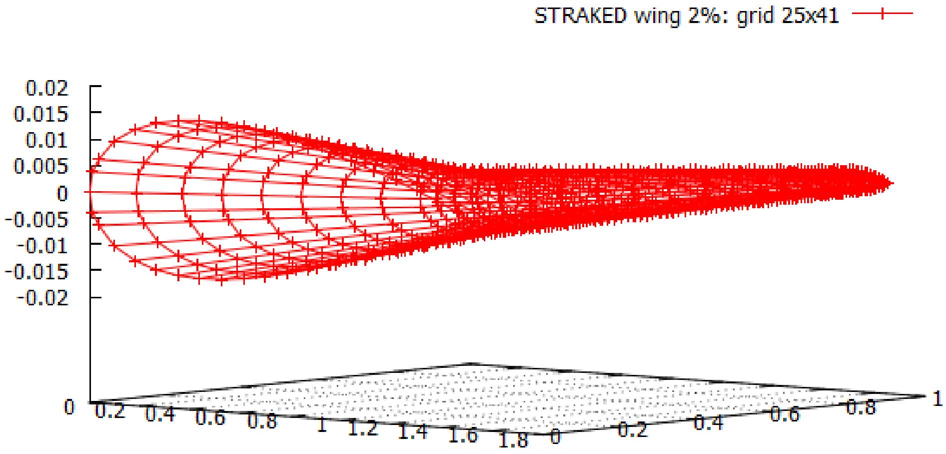
Για την συγκεκριμένη πτέρυγα χρησιμοποιήσαμε δύο πάχη t/c= 2%, 5%. Για κάθε μία από τις περιπτώσεις χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικής πυκνότητας πλέγματα με πύκνωση των στοιχείων στην ακμή προσβολής και κυρίως στην πρώτη οπισθόκλιση όπου υπάρχουν μεγαλύτερες κλίσεις των τετράπλευρων στοιχείων και χρειάζονται πιο πολλά σημεία για να απεικονιστεί σωστά η ροή. Για την καλύτερη προσέγγιση του φυσικού προβλήματος το πλέγμα θα πρέπει να πυκνώσει και στην περιοχή του ακροπτερυγίου όπου η κλίση της κυκλοφορίας είναι έντονη και τείνει στο μηδέν.

1. STRAKED WING με συμμετρική αεροτομή πάχους 2%

Η πτέρυγα που χρησιμοποιήσαμε για αυτό το πάχος 2%, σχηματίστηκε από την συμμετρική NACA0002. Η γωνία πρόπτωσης είναι $\alpha = 5^o$ και επί άπειρο ταχύτητα έχει μοναδιαίο μέτρο.

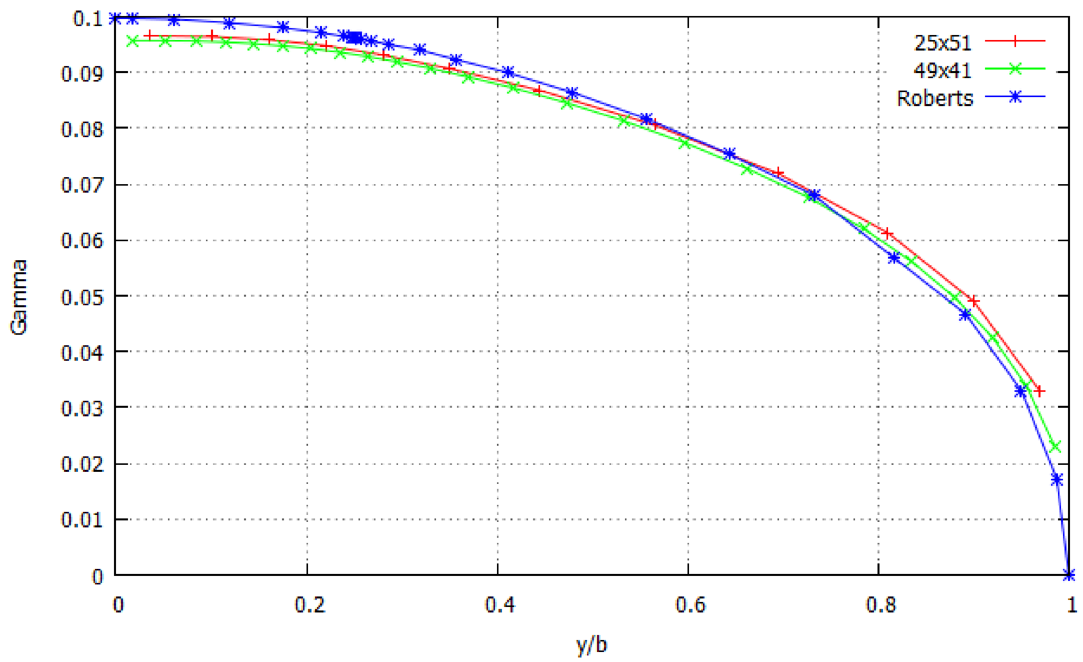


Σχήμα 39. Η διπλής οπισθόκλισης πτέρυγα με πάχος 2% και πλέγμα 13x51



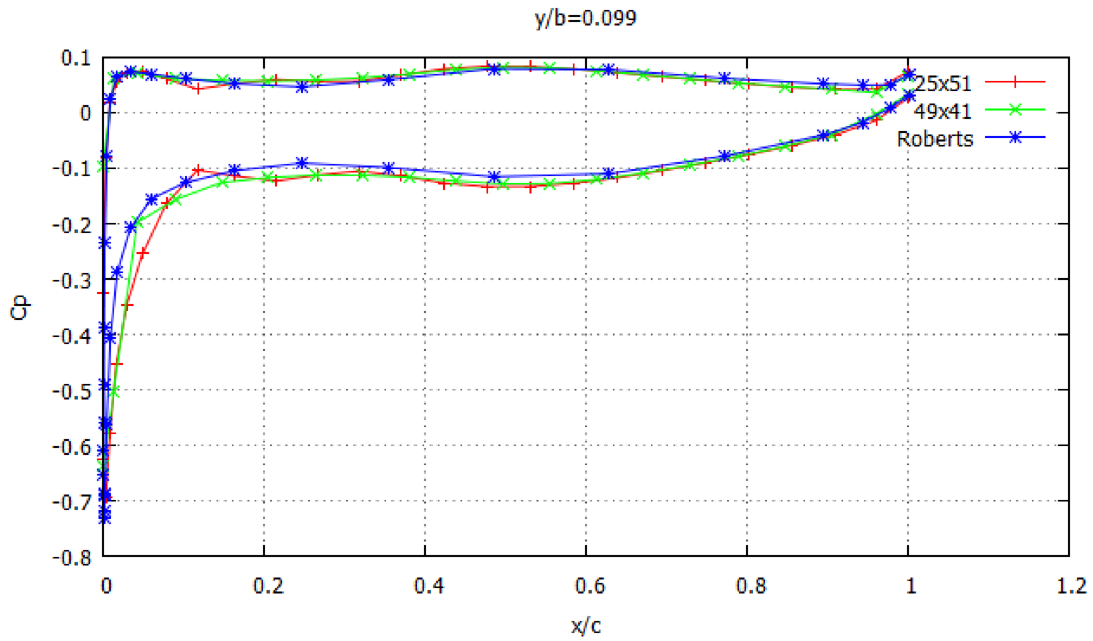
Σχήμα 40. Η διπλής οπισθόκλισης πτέρυγα με πάχος 2% και πλέγμα 25x41

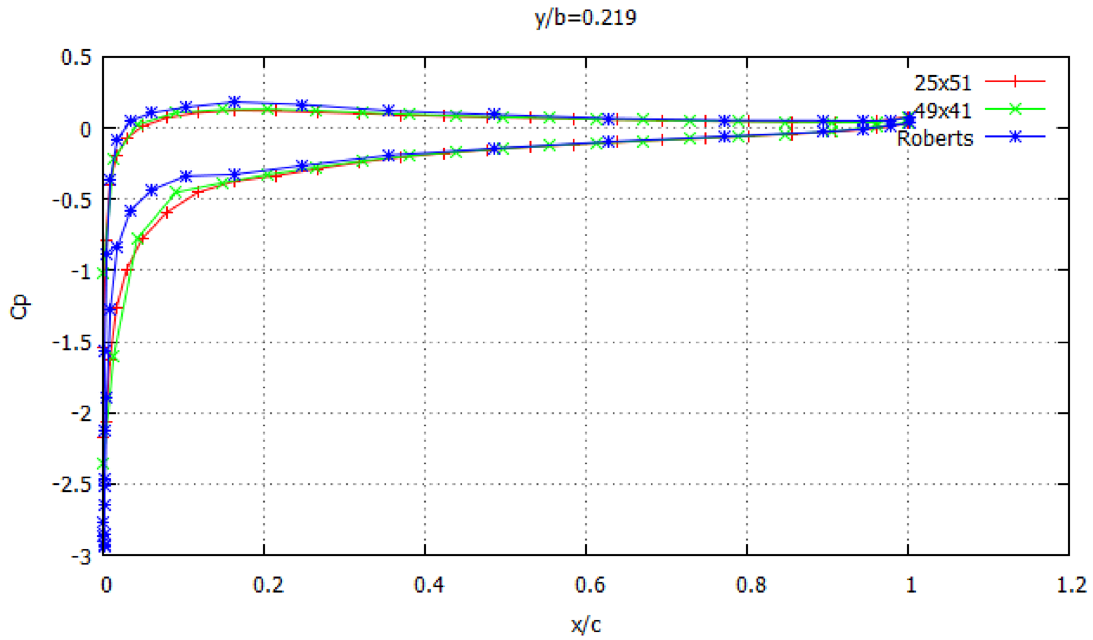
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η ακτινική διανομή (y/b) της κυκλοφορίας της πτέρυγας σε σύγκριση με τις δύο λύσεις που έχουμε.

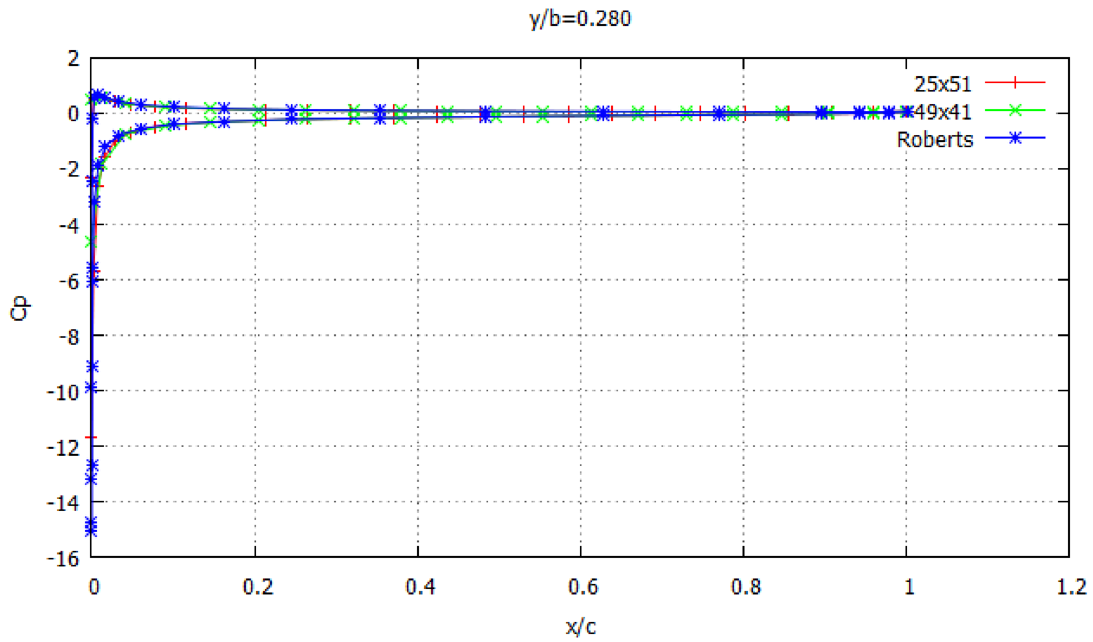


Τα αποτελέσματα του αλγόριθμου συμπίπτουν ικανοποιητικά με τη λύση αναφοράς, έχοντας τα ίδια χαρακτηριστικά με τις ήδη υπάρχουσες λύσεις (ίδια κλίση) αλλά και περίπου ίδια τιμή με μια ελαφριά υποεκτίμηση για τα δύο πλέγματα στην ακμή πρόπτωσης και μια ελαφρά υπερεκτίμηση στην ακμή εκφυγής.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται η χορδική κατανομή του συντελεστή πίεσης σε τρεις ακτινικές θέσεις y/b= 0.099, 0.219, 0.280.

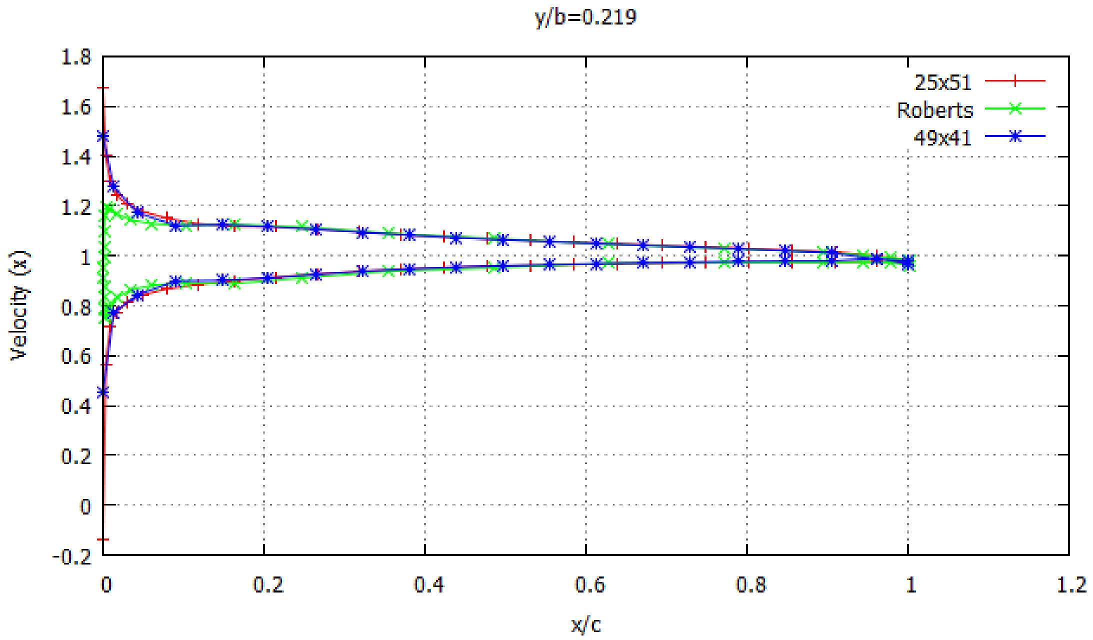


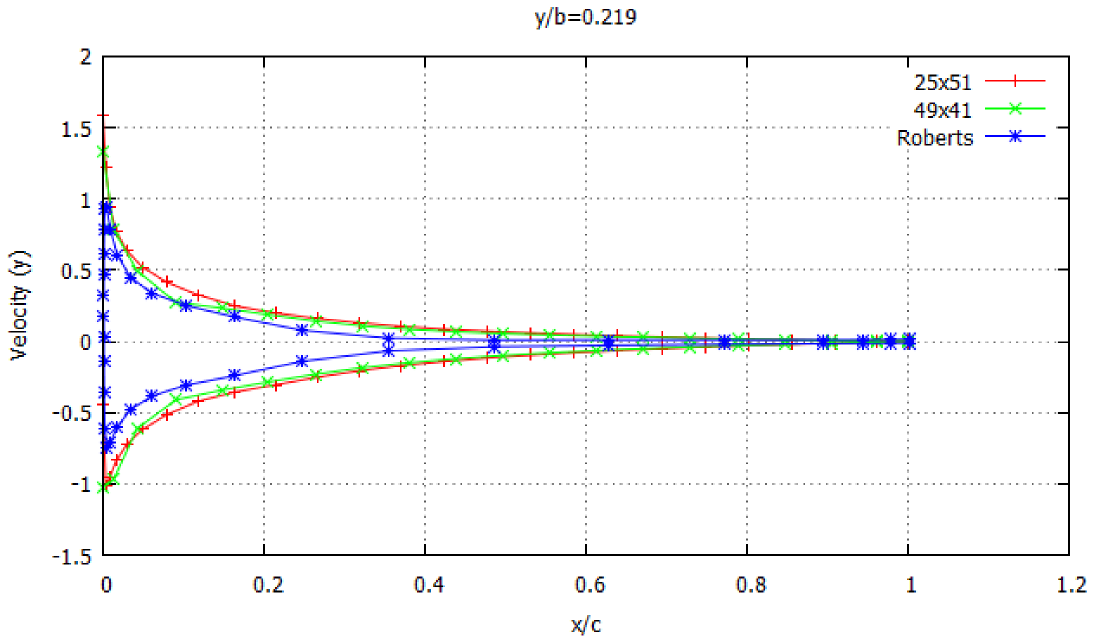


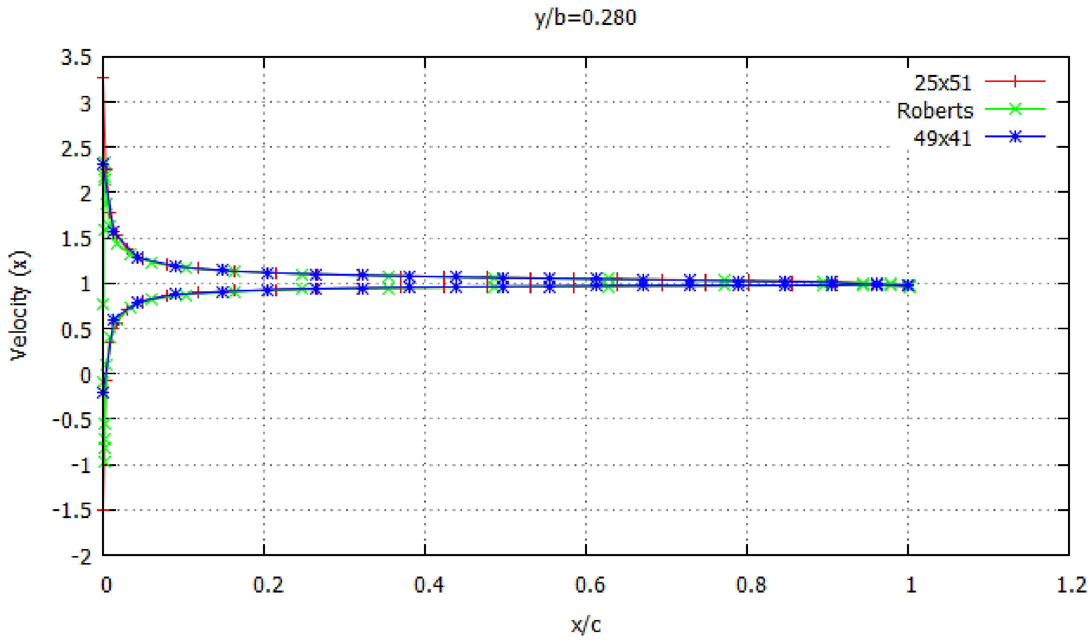


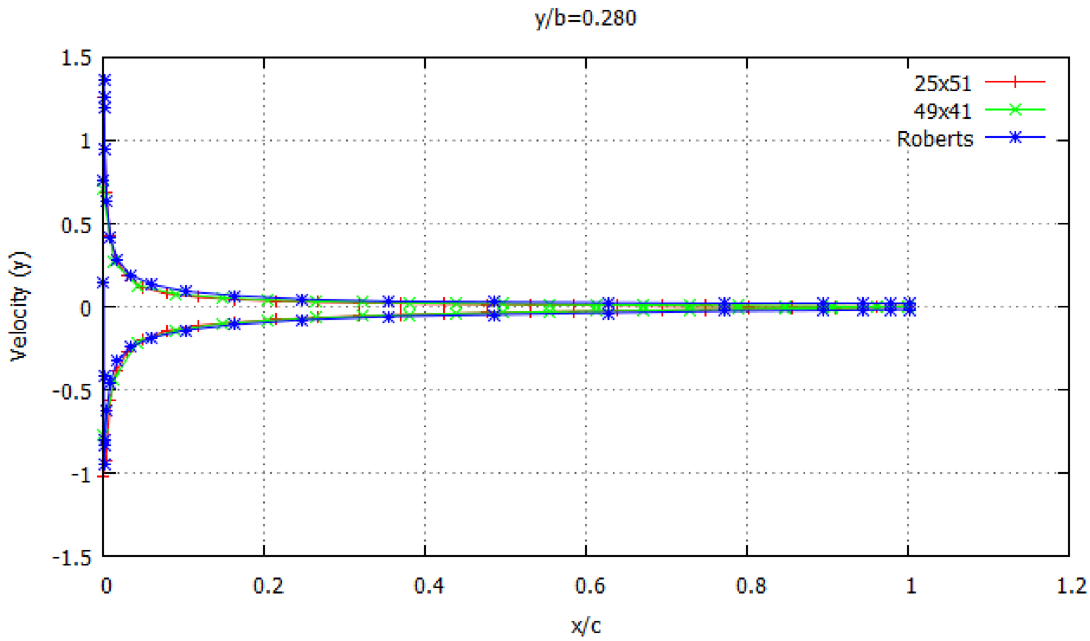
Τα αποτελέσματα των συντελεστών πίεσης συμπίπτουν ικανοποιητικά με τα δεδομένα που έχουμε. Στην θέση y/b=0.219 υπάρχει μια ελαφρά υποεκτίμηση στην ακμή προσβολής. Γενικά επειδή η πρώτη οπισθόκλιση έχει μεγάλη γωνία και τα panels έχουν μεγάλη κλίση, υπάρχει μια διαφορά σε σχέση με τις λύσεις που έχουμε. Για καλύτερα αποτελέσματα, χρειάζεται πιο πυκνό πλέγμα, κάτι που θα αυξήσει σημαντικά τον υπολογιστικό χώρο και χρόνο.

Επίσης παρουσιάζεται η ταχύτητα στον άξονα x και y στην ακτινική θέση y/b= 0.219 και y/b= 0.280.





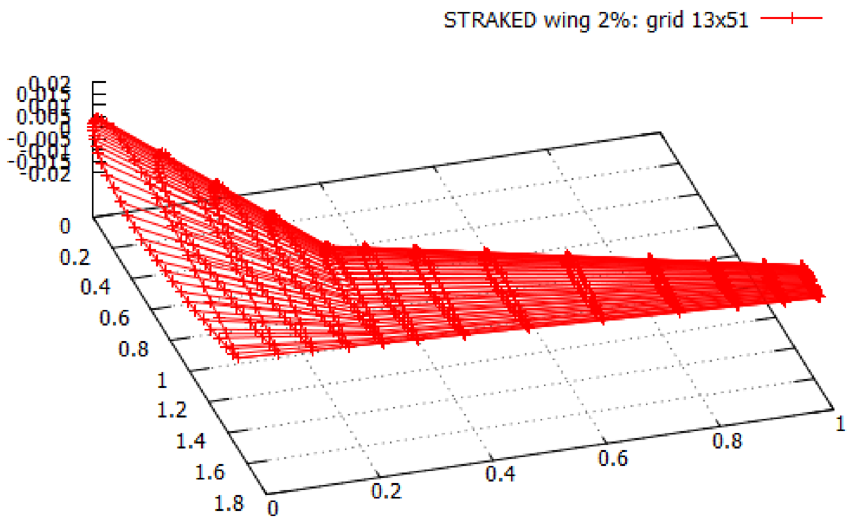




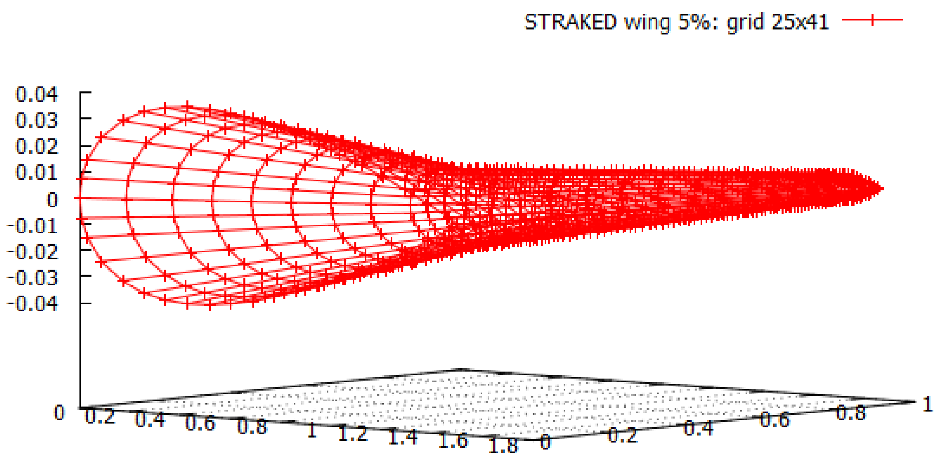
Από παραπάνω σχήματα είναι φανερή η σύμπτωση των αποτελεσμάτων με τις λύσεις που έχουμε, ακόμη και στην περιοχή του ακροπτερυγίου όπου το μικρό πάχος θα μπορούσε να δημιουργήσει αριθμητικές αστάθειες. Στην θέση y/b=0.219 υπάρχει μια υπερεκτίμηση της ταχύτητας και κατά τον άξονα x και y. Λόγω αλλαγής οπισθόκλισης σε πολύ κοντινό σημείο (y/b=0.25), η ροή χρειάζεται μεγαλύτερη πύκνωση σε αυτό το σημείο, για να απεικονιστεί σωστά η ροή.

2. STRAKED WING με συμμετρική αεροτομή πάχους 5%

Παρόμοια συμπεράσματα βγάζουμε και για την διπλής οπισθόκλισης πτέρυγα που σχηματίστηκε από συμμετρική αεροτομή NACA0005. Η γωνία πρόπτωσης είναι $\alpha = 5^o$ και επί άπειρο ταχύτητα έχει μοναδιαίο μέτρο.

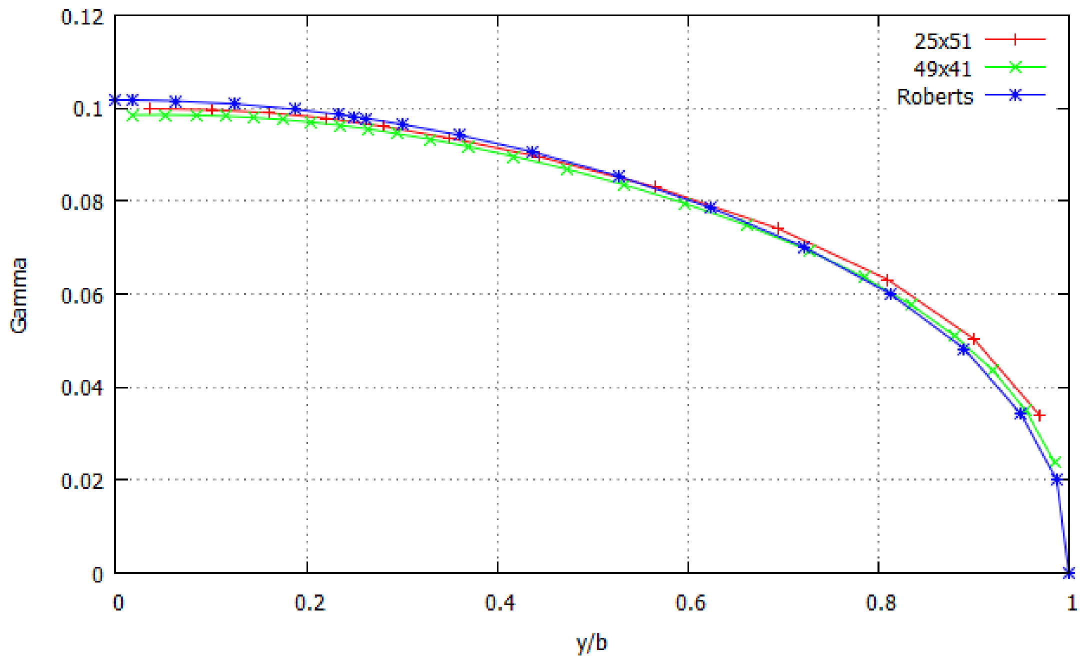


Σχήμα 41. Η διπλής οπισθόκλισης πτέρυγα με πάχος 5% και πλέγμα 13x51

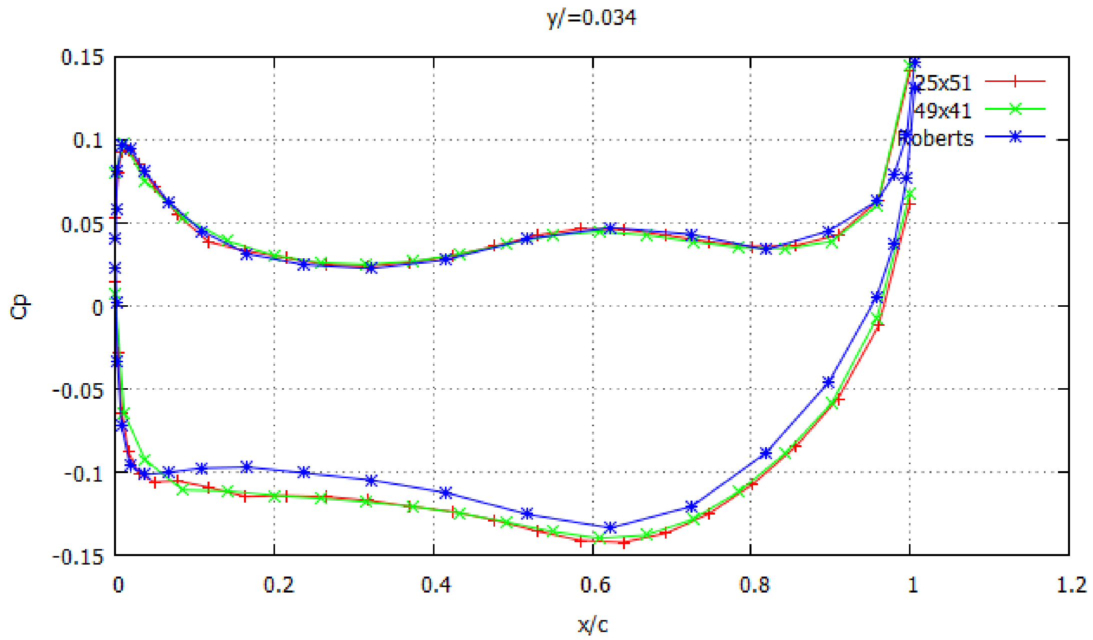


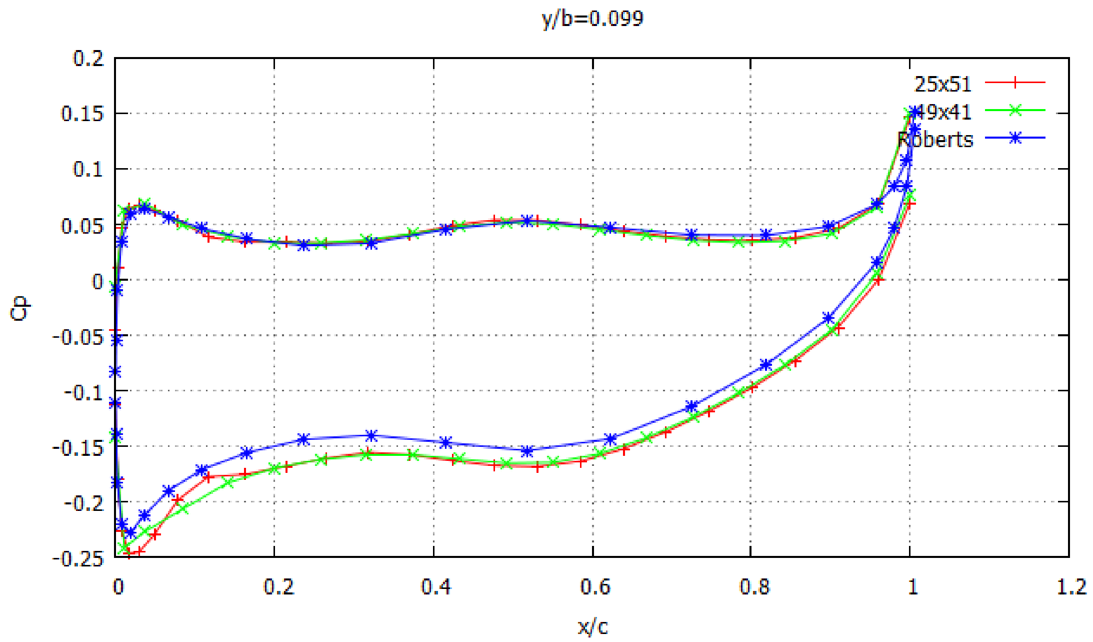
Σχήμα 42. Η διπλής οπισθόκλισης πτέρυγα με πάχος 5% και πλέγμα 25x41

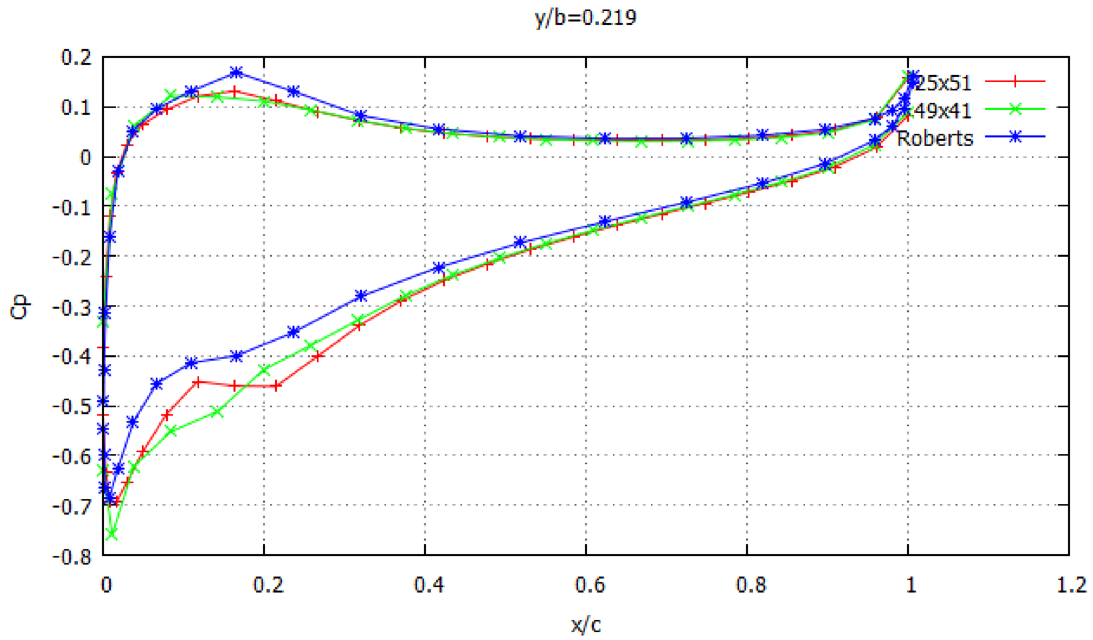
Οι προλέξεις και για την δεύτερη πτέρυγα είναι ικανοποιητικές, όπως ήταν για την πρώτη πτέρυγα. Όπως και στην πρώτη περίπτωση παρατηρείται το φαινόμενο της υπερεκτίμησης της κυκλοφορίας στην ακμή εκφυγής και την υποεκτίμηση στην ακμή προσβολής.



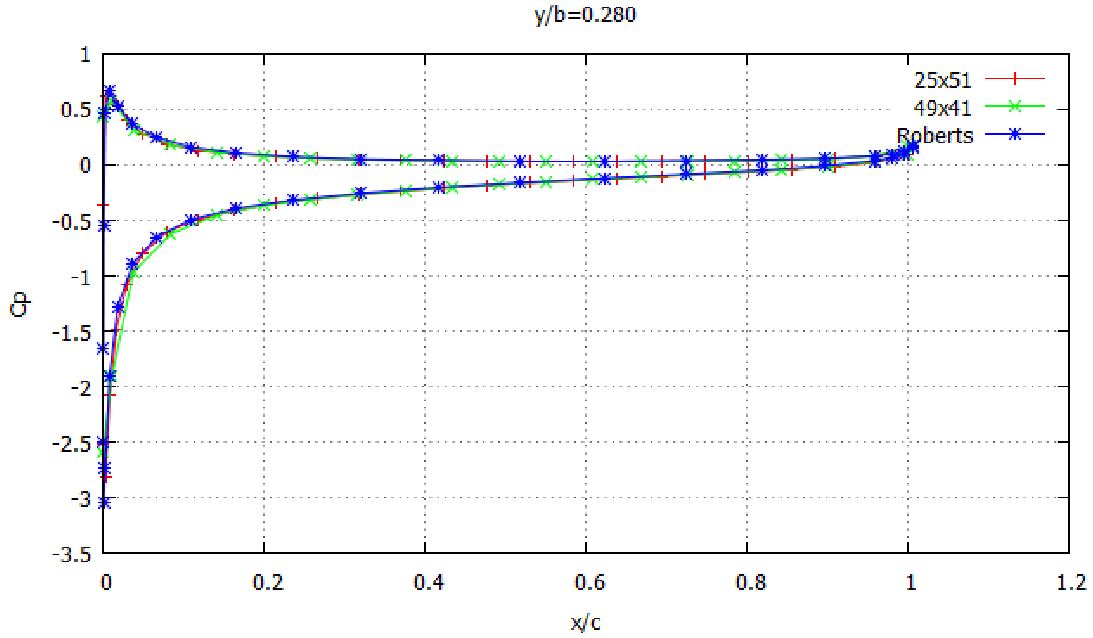
Παρακάτω παρουσιάζεται η χορδική κατανομή του συντελεστή πίεσης σε έξι ακτινικές θέσεις y/b= 0.034, 0.099, 0.219, 0.280, 0.693, 0.899, ενώ επίσης παρουσιάζεται η ταχύτητα στον άξονα x και y στην ακτινική θέση y/b= 0.219 και y/b= 0.280.


y/=0.034
25x51
49x41
Roberts
Cp
x/c
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

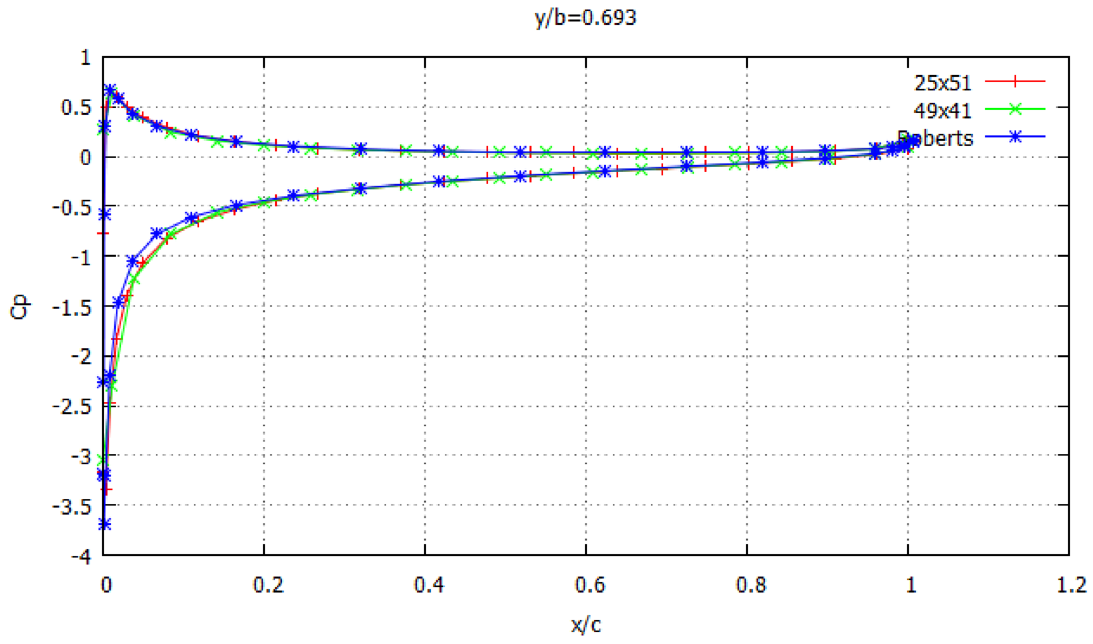

y/b=0.099
25x51
49x41
Roberts
Cp
x/c
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

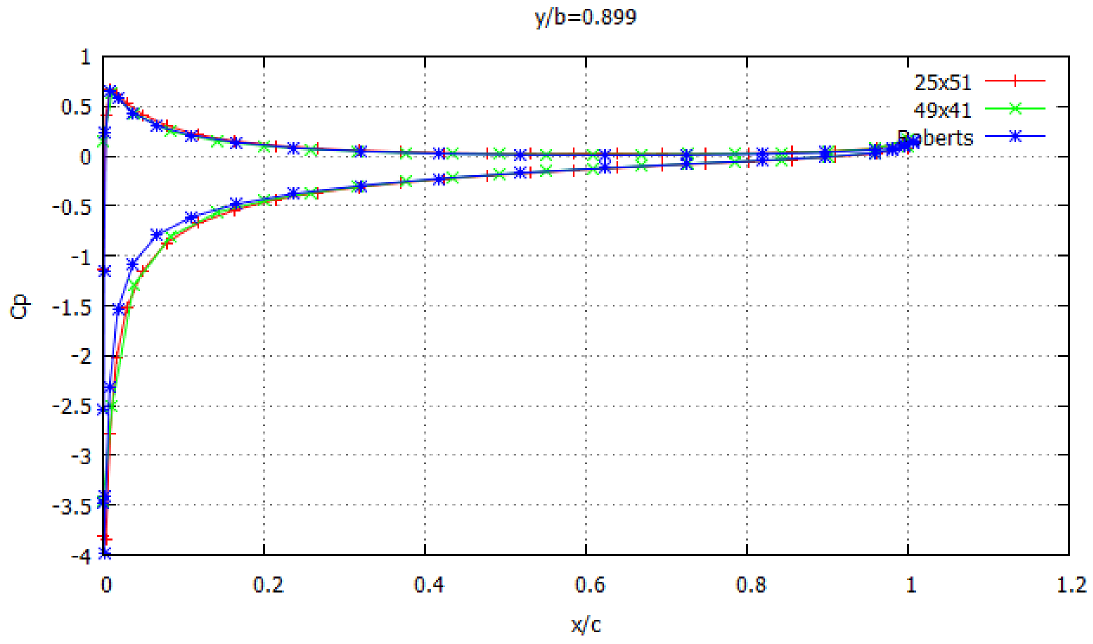


y/b=0.219
Cp
x/c
25x51
49x41
Roberts
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

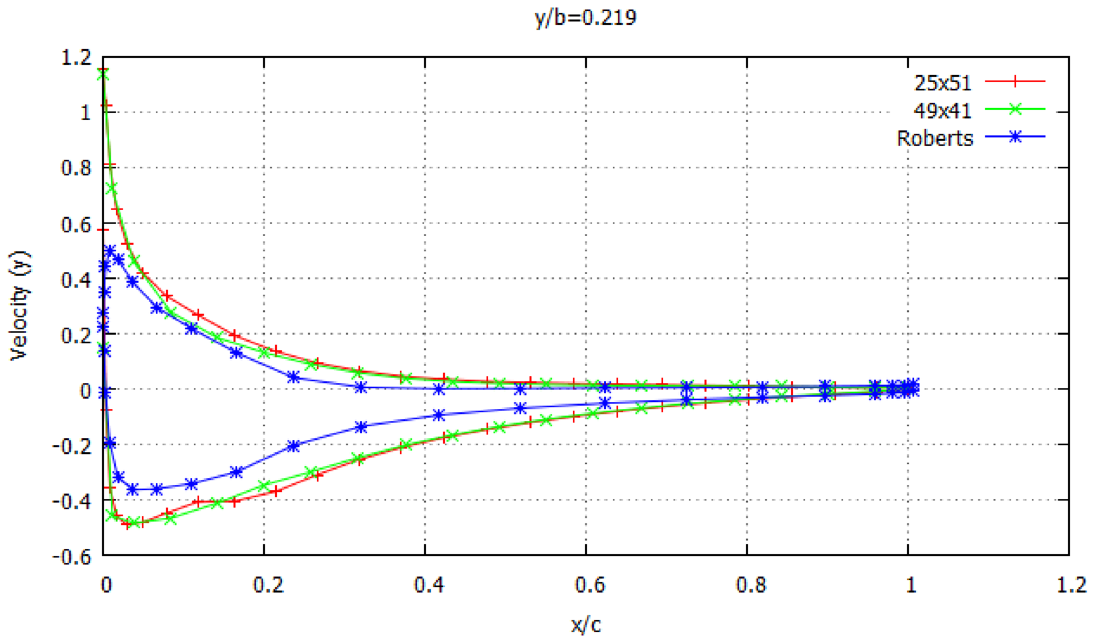


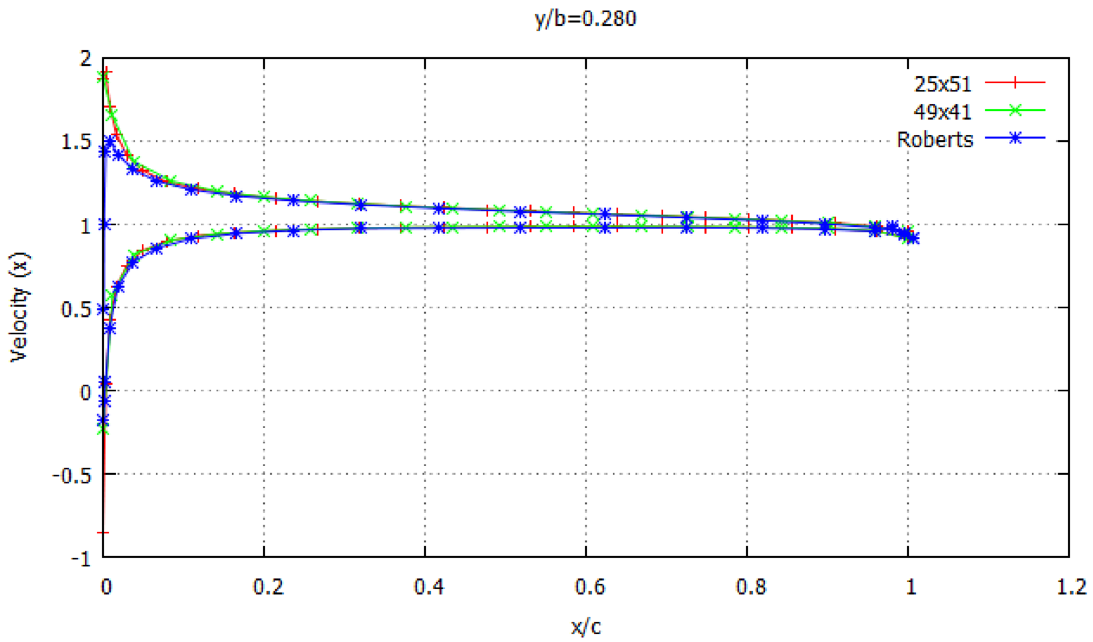
y/b=0.280
Cp
x/c
25x51
49x41
Roberts
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

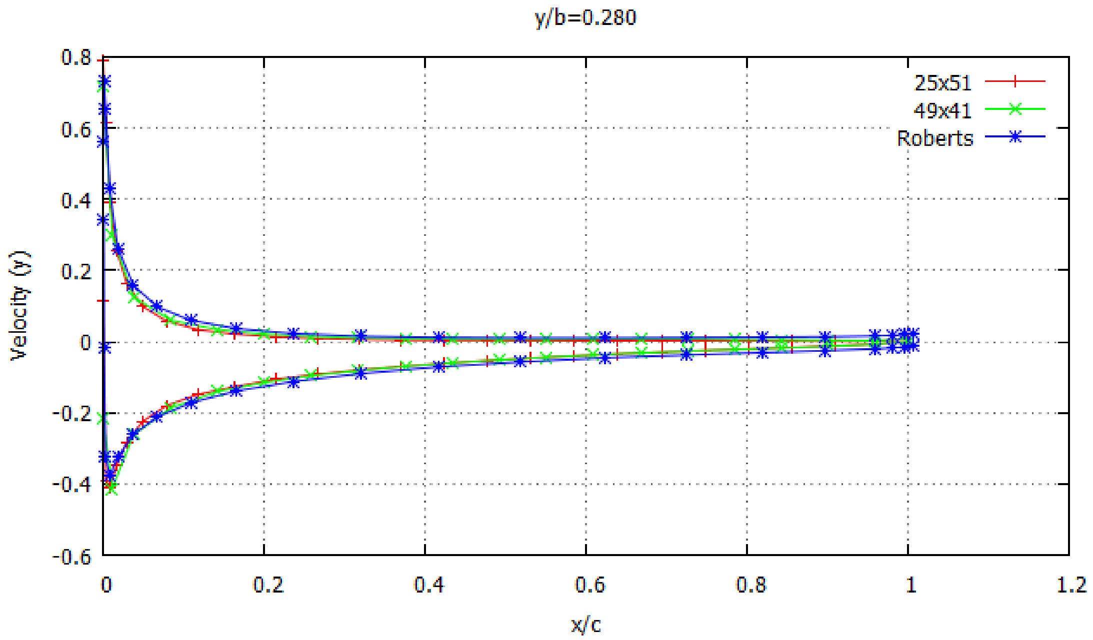




Τα αποτελέσματα των πιέσεων είναι πολύ ικανοποιητικά σε σχέση με τα δεδομένα που έχουμε . Αυτό που παρατηρούμε είναι λόγω της προσέγγισης που κάναμε για τις ταχύτητες στην συνθήκη Kutta, οι συντελεστές πίεσης ενώ θα έπρεπε να είναι στην ακμή εκφυγής να είναι ίσοι, δεν είναι.


y/b=0.219
25x51
49x41
Roberts
Velocity (y)
x/c
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2


y/b=0.280
25x51
49x41
Roberts
Velocity (x)
x/c
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2



Για της ταχύτητες παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σημαντική διαφορά εύρους στην ταχύτητα κατά τον άξονα x , ενώ τα αποτελέσματα κατά τον y άξονα είναι σε ικανοποιητικά επίπεδα. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, θα ήταν καλό να υπήρχε πύκνωση του πλέγμα στο σημείο αλλαγής της οπισθόκλισης.

8.2 Συμπεράσματα

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε είναι καινούργιο και αναπτύχθηκε από την αρχή. Για αυτό τον λόγο, πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι οποιοδήποτε πλέγμα και να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο θα μας δώσει τα ίδια αποτελέσματα. Από τα παραπάνω αποτελέσματα, είναι φανερό ότι υπάρχει ανεξαρτησία πλέγματος και οποιεσδήποτε διαφορές υπάρχουν οφείλονται σε υπολογιστικά σφάλματα όπως αυτό του υπολογισμού της συνθήκης Kutta. Επίσης, παρατηρούμε ότι πρέπει να χρησιμοποιηθούν πιο πυκνά πλέγματα για την πιο ακριβή απεικόνιση της ροής, τα οποία όμως αυξάνουν τον υπολογιστικό χώρο και χρόνο, τα οποία είναι σημαντικά για την επίλυση μη-μόνιμων ροών.

9. Βιβλιογραφία

H.S.Sytsma, B.L.Hewitt and RE.Rubbert. A Comparison of Panel Methods for Subsonic Flow Computation (AGARD)

Hess, J. L. (1972). Calculation of Potential Flow About Three Dimensional Lifting Bodies, Douglas Aircraft Co. Rep. MDC J5679-01.

Hess, J. L. and A. M. O. Smith (1962). Calculation of Non Lifting Potential Flows About Arbitrary Three Dimensional Bodies, Douglas Aircraft Co. Rep. ES 40622.

Βασίλης Ριζιώτης. Αεροδυναμική

Σπύρος Βουτσινάς. Μη μόνιμη Αεροδυναμική, Αεροελαστικότητα, Αερακουστική (Πανεπιστημιακές Σημειώσεις)

Πέτρος Ι. Χασαπογιάννης (2005). Ανάλυση Συμπεριφοράς Αξονικού Δρομέα σε Μόνιμες και Μεταβατικές Καταστάσεις Λειτουργίας (Διδακτορικό Δίπλωμα)