ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΕΡ ΠΙΝΑΚΩΝ ΜΕΣΩ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΕΩΝ

ΕΥΘΥΜΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: 09190011

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ ΔΡΙΒΑΛΙΑΡΗΣ

ΑΘΗΝΑ, 24/10/2014

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Τομεας Μαθηματικων

Διατμηματικο Προγραμμα Μεταπτυχιακων Σπουδων
«Μαθηματικη Προτυποποιηση σε Συγχρονες Τεχνολογιες
και την Οικονομια»

Χαρακτηρισμοί EP Πινάκων μέσω Παραγοντοποιήσεων

Μεταπτυχιακή Διατριβή του

Γεωργίου Ν. Ευθυμίου

Επιβλέπων

Επίκουρος Καθηγητής Δημοσθένης Δριβαλιάρης
(Τμήμα Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης -
Πανεπιστήμιο Αιγαίου)

Αθήνα, 2014

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων

Διατμηματικο Προγραμμα Μεταπτυχιακων Σπουδων
«Μαθηματικη Προτυποποιηση σε Συγχρονες Τεχνολογιες
και την Οικονομια»

Χαρακτηρισμοί ΕΡ Πινάκων μέσω Παραγοντοποιήσεων

Μεταπτυχιακή Διατριβή του
Γεωργίου Ν. Ευθυμίου

Επιτροπή Διατριβής: Δημοσθένης Δριβαλιάρης, Επιβλέπων
Σωτήριος Καρανάσιος
Νικόλαος Γιαννακάκης

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή εξετάστηκε και εγκρίθηκε στις .../.../2014

....	....	....
Δ. Δριβαλιάρης	Σ. Καρανάσιος	Ν. Γιαννακάκης
Επίκουρος Καθηγητής,	Καθηγητής,	Επίκουρος Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Αιγαίου	Εθνικό Μετσόβιο	Εθνικό Μετσόβιο
(Επιβλέπων)	Πολυτεχνείο	Πολυτεχνείο

....
Γεώργιος Ν. Ευθυμίου
Διπλωματούχος Μηχανικός Οικονομίας και Διοίκησης
M.Sc. «Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και την Οικονομία»

Σε όποιον
με υποστήριξε
όλα αυτά τα χρόνια

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τα τρία μέλη της επιτροπής εξέτασης, τον Επίκουρο Καθηγητή Δ. Δριβαλιάρη, τον Καθηγητή Σ. Καρανάσιο και τον Επίκουρο Καθηγητή Ν. Γιαννακάκη, για την καθοδήγηση και την υποστήριξή τους. Αυτή η μεταπτυχιακή διατριβή δεν θα ήταν η ίδια χωρίς τις πολύτιμες οδηγίες του επιβλέποντά μου, Επίκουρου Καθηγητή Δ. Δριβαλιάρη. Όλα αυτά τα χρόνια που τον γνωρίζω είναι μία πραγματική πηγή έμπνευσης για μένα και ειλικρινά ανυπομονώ να συνεργαστώ ξανά μαζί του σύντομα. Εάν ποτέ κατορθώσω να γίνω καθηγητής, θα επιθυμούσα να έχω αρκετές από τις ικανότητές του.

Ένα επιπλέον πρόσωπο άξιο αναφοράς είναι η Κατερίνα Αντωνιάδου. Κατερίνα, μοιραστήκαμε πολλά από τα προβλήματα και τις λύσεις μας και πιστεύω πως εν τέλει γίναμε και οι δύο καλύτεροι μέσα από αυτή τη συνεργασία.

Οφείλω επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλη μου την οικογένεια. Μου έδωσαν τα πάντα και μου ζήτησαν (σχεδόν!) τίποτα. Εκτός από αυτούς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη «δεύτερη» οικογένειά μου (δηλαδή τους φίλους μου) για την υποστήριξη και την αγάπη τους. Ένα ιδιαίτερα ευχαριστώ αξίζει στη Βάσια Κ., το Γιώγο Ρ., το Γεράσιμο Β. (γνωρίζει ακριβώς πως νιώθω αυτή τη στιγμή), το Δημήτρη Π., τον Παναγιώτη Τσ. (επίσης γνωρίζει πως νιώθω αυτή τη στιγμή), τον Chris Dim και τον Αντώνη Κ. (το συν-δύτη).

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους μου τους συναδέλφους στη Fine Telecommunicatios Ε.Π.Ε. και την Ελληνικά Πετρέλαια Α.Ε. για την κατανόηση και την υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής.

Περίληψη

Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται ότι είναι EP πίνακας αν $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$. Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή στοχεύει στο να συλλέξει και να παρουσιάσει μέρος της έρευνας που έχει δημοσιευθεί έως σήμερα σχετικά με τους EP πίνακες. Επιπλέον επιδεικνύουμε περιπτώσεις όπου ένας τετραγωνικός πίνακας μπορεί να χαρακτηρισθεί ως EP, μέσω διαφορετικών ειδών παραγοντοποιήσεων. Αυτές οι παραγοντοποιήσεις είναι της γενικής μορφής

$$A = U(A_1 \oplus 0)U^*,$$

$$A^* = SA,$$

$$A = BC$$

και

$$A = P \begin{bmatrix} D & DS^* \\ SD & SDS^* \end{bmatrix} P^*.$$

Abstract

A square matrix A is said to be an EP matrix if $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$. This thesis aims to collect and present part of the work done so far on EP matrices. Moreover we demonstrate cases where a square matrix can be characterized as an EP one, through different kinds of factorizations. These factorizations are of the general form

$$A = U(A_1 \oplus 0)U^*,$$

$$A^* = SA,$$

$$A = BC$$

and

$$A = P \begin{bmatrix} D & DS^* \\ SD & SDS^* \end{bmatrix} P^*.$$

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι EP ή Range-Hermitian πίνακες είναι εκείνοι οι πίνακες για τους οποίους ισχύει ότι $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$ ή ισοδύναμα $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$. Λέγεται ότι το όνομα EP προέρχεται από το "equal projection" (=ίση προβολή), μία σημαντική ιδιότητα των εν λόγω πινάκων, στην οποία θα επανέλθουμε αργότερα στο κείμενο.

Από το 1950, όταν ο H. Schwerdtfeger τους εισήγαγε πρώτος στο [19], οι EP πίνακες έχει αποδειχθεί πως ορίζουν μία αρκετά ενδιαφέρουσα ομάδα πινάκων. Έχει αποδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι EP αν και μόνο αν μετατίθεται με τον αντίστοιχό του Moore-Penrose αντίστροφο. Επιπλέον, για έναν EP πίνακα, ο Drazin αντίστροφος και ο Group αντίστροφος συμπίπτουν με τον Moore-Penrose αντίστροφο πίνακα.

Ο κύριος στόχος της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι η παρουσίαση της βασικής θεωρίας των EP πινάκων και ο χαρακτηρισμός τέτοιων πινάκων μέσω συγκεκριμένων παραγοντοποιήσεων. Καθ΄ όλη την έκταση του κειμένου υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης γνωρίζει τις βασικές έννοιες και συμβολισμό της Γραμμικής Άλγεβρας. Στις επόμενες σειρές ακολουθεί μία σύνοψη των περιεχομένων κάθε κεφαλαίου της μεταπτυχιακής διατριβής.

Το Κεφάλαιο 2 αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος παρουσιάζει εν τάχει μερικά θεμελιώδη αποτελέσματα της Γραμμικής Άλγεβρας. Το δεύτερο μέρος ασχολείται με τους Γενικευμένους Αντίστροφους ενός πίνακα και ειδικότερα με τον Moore-Pernrose αντίστροφο.

Η ιδέα ενός γενικευμένου αντίστροφου πρωτοσυναντάται στη βιβλιογραφία το 1903 από τον I. Fredholm στο [5], όπου όρισε έναν γενικευμένο αντίστροφο (τον οποίο ο Fredholm ονόμασε ψευδοαντίστροφο) ενός ολοκληρωτικού τελεστή. Η ομάδα όλων των ψευδοαντίστροφων χαρακτηρίστηκε το 1912 από τον W.A. Hurwitz στο [7], ο οποίος χρησιμοποίησε το ότι ο πυρήνας ενός τελεστή Fredholm έχει πεπερασμένη διάσταση για να δώσει μία απλή αλγεβρική κατασκευή. Ο E.H. Moore $(1862 - 1932)$ όρισε ένα μοναδικό αντίστροφο για κάθε πίνακα και τον ονόμασε "general reciprocal", κατά τη διάρκεια της δεκαετίας $1910 - 1920$ (βλέπε [11], [12] και [13]). Ο Moore κατασκεύασε τον general reciprocal, απέδειξε τη μοναδικότητά του και τις βασικές του ιδιότητες και δικαιολόγησε τις εφαρμογές του στις γραμμικές εξισώσεις. Ο general reciprocal ανακαλύφθηκε εκ νέου από τον R. Penrose το 1955 στο [17] και έτσι σήμερα καλείται Moore-Penrose αντίστροφος.

Το Κεφάλαιο 3 επικεντρώνεται στους EP πίνακες. Όπως προαναφέρθηκε, οι EP πίνακες προτάθηκαν αρχικά στο [19] και από τότε έχουν γίνει αντικείμενο αρκετής έρευνας. Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε ένα σύνολο ορισμών, θεωρημάτων, ιδιοτήτων και λημμάτων αναφορικά με τους EP πίνακες. Τα περισσότερα από τα προαναφερθέντα αποτελέσματα δίνονται με την απόδειξή τους. Αυτό το κεφάλαιο, ουσιαστικά, δίνει στον αναγνώστη την ικανότητα να κατανοήσει πλήρως όλα όσα παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε τέσσερα διαφορετικά είδη παραγοντοποιήσεων, μέσω των οποίων μπορούμε να χαρακτηρίσουμε έναν πίνακα ως EP. Αυτές οι παραγοντοποιήσεις είναι της γενικής μορφής

$$A = U(A_1 \oplus 0)U^*,$$

$$A^* = SA,$$

$$A = BC$$

και

$$A = P \begin{bmatrix} D & DS^* \\ SD & SDS^* \end{bmatrix} P^*.$$

Τα τρία πρώτα είδη παραγοντοποιήσεων έχουν εξεταστεί ενδελεχώς από τους Drivaliaris et. al. στο [4], όσον αφορά στους χαρακτηρισμούς EP τελεστών. Το τελευταίο είδος, είχε αρχικά προταθεί από τον Pearl στο [14] και μελετήθηκε περαιτέρω από τους Katz και Pearl στο [9].

Κεφάλαιο 2

Προκαταρκτικά και Συμβολισμός

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε μία ανασκόπηση βασικών αποτελεσμάτων από τη Γραμμική Άλγεβρα και τη θεωρία των Γενικευμένων Αντίστροφων πινάκων, γνώσεις απαραίτητες για την ανάγνωση των δύο επόμενων κεφαλαίων. Για τα αποτελέσματα της Γραμμικής Άλγεβρα θα χρησιμοποιήσουμε τα [10], [3] και [6]. Για τα αποτελέσματα σχετικά στους Γενικευμένους Αντίστροφους πίνακες θα χρησιμοποιήσουμε τα [10], [3] και [1]. Σχετικά συγγράμματα για τους Γενικευμένους Αντίστροφους πίνακες είναι και τα [18] και [21].

2.1 Αποτελέσματα από τη Γραμμική Άλγεβρα

Όλοι οι πίνακες στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή ορίζονται στο μιγαδικό χώρο $\mathbb{C}$. Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων στον $\mathbb{C}$ θα συμβολίζεται ως $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Αν $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, τότε με $\tilde{A}$ θα συμβολίζουμε το γραμμικό τελεστή από τον $\mathbb{C}^n$ στον $\mathbb{C}^m$ που ορίζεται ως $\tilde{A}(u) = Au$, για όλα τα $u \in \mathbb{C}^n$.

Αν $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, τότε με $\operatorname{rank}(A)$ θα συμβολίζουμε την τάξη του A.

2.1.1 Διάσταση

Αν ο M είναι ένας υπόχωρος στον $\mathbb{C}^n$, τότε θα συμβολίζουμε τη διάσταση του M ως $\dim(M)$.

Θεώρημα 2.1 ([10, (4.4.6), σ. 198]). *Έστω M, N υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ τέτοιοι ώστε $M \subseteq N$. Αν*

$$\dim(M) = \dim(N),$$

τότε

$$M = N.$$

2.1.2 Ίχνος

Ορισμός 2.1 ([10, Παράδειγμα 3.3.1, σ. 90])**.** *Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Το ίχνος του A είναι*

$$\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Θεώρημα 2.2 ([10, Παράδειγμα 3.6.5, σ. 110])**.** *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Τότε*

$$\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA).$$

Θεώρημα 2.3 ([10, Άσκηση 3.6.12, σ. 114])**.** *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε*

$$\operatorname{trace}(AA^*) = 0 \iff \operatorname{trace}(A^*A) = 0 \iff A = 0.$$

2.1.3 Συμπληρωματικοί Υπόχωροι

Ορισμός 2.2 ([10, σ. 383])**.** *Έστω M, N υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$. Λέμε ότι οι M, N είναι συμπληρωματικοί όταν*

$$M + N = \mathbb{C}^n \text{ και } M \cap N = \{0\}.$$

Αν οι M, N είναι συμπληρωματικοί, τότε λέμε ότι ο $\mathbb{C}^n$ είναι το ευθύ άθροισμα των M και N και γράφουμε

$$M \oplus N = \mathbb{C}^n.$$

Θεώρημα 2.4 ([10, σ. 383])**.** *Έστω M, N υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $M \oplus N = \mathbb{C}^n$.
(ii) *Για κάθε $u \in \mathbb{C}^n$, υπάρχουν μοναδικά $v \in M$ και $w \in N$ τέτοια ώστε*

$$u = v + w.$$

2.1.4 Ορθογώνιο Συμπλήρωμα

Ορισμός 2.3 ([10, σ. 403])**.** *Έστω M υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^\perp$ του M είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων στον $\mathbb{C}^n$ τα οποία είναι κάθετα σε κάθε διάνυσμα του M, δηλαδή*

$$M^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle u|v\rangle = 0, \text{ για όλα τα } u \in M\}.$$

Θεώρημα 2.5 ([10, (5.11.4), σ. 404]). *Έστω M υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$. Τότε*

$$\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M.$$

Θεώρημα 2.6 ([10, Άσκηση 5.11.5, σ. 409]). *Έστω M, N υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$. Τότε*

$$N \subseteq M \implies M^{\perp} \subseteq N^{\perp}.$$

Θεώρημα 2.7 ([10, (5.11.1), (5.11.2), σ. 403]).

(i) *Έστω M υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$. Τότε*

$$M \oplus M^{\perp} = \mathbb{C}^n.$$

(ii) *Έστω M, N υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$. Αν*

$$M \oplus N = \mathbb{C}^n \text{ και } N \perp M,$$

τότε

$$N = M^{\perp}.$$

Αν

$$M \oplus N = \mathbb{C}^n \text{ και } N \perp M,$$

τότε θα γράφουμε

$$M \dot{\oplus} N = \mathbb{C}^n.$$

2.1.5 Εικόνα και Μηδενόχωρος

Ορισμός 2.4 ([10, σ. 170]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.*

(i) *Η εικόνα του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{C}^m$*

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax | x \in \mathbb{C}^n\}.$$

(ii) *Η εικόνα του A^* είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$*

$$\mathcal{R}(A^*) = \{A^*y | y \in \mathbb{C}^m\}.$$

Ορισμός 2.5 ([10, σ. 174]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.*

(i) *Ο μηδενοχώρος του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$*

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = 0\}.$$

(ii) *Ο μηδενοχώρος του A^* είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{C}^m$*

$$\mathcal{N}(A^*) = \{y \in \mathbb{C}^m \mid A^*y = 0\}.$$

Θεώρημα 2.8 ([10, (4.4.7), (4.4.8), (4.4.9), (4.4.10), σ. 199]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ με $\operatorname{rank}(A) = r$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $\dim(\mathcal{R}(A)) = r$,
(ii) $\dim(\mathcal{N}(A)) = n - r$,
(iii) $\dim(\mathcal{R}(A^*)) = r$,
(iv) $\dim(\mathcal{N}(A^*)) = m - r$.

Πόρισμα 2.1. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ με $\operatorname{rank} A = r$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $\mathcal{R}(A) = \mathbb{C}^m$ *αν και μόνο αν* $\operatorname{rank}(A) = m$,
(ii) $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ *αν και μόνο αν* $\operatorname{rank}(A) = n$,
(iii) $\mathcal{R}(A^*) = \mathbb{C}^n$ *αν και μόνο αν* $\operatorname{rank}(A) = n$,
(iv) $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$ *αν και μόνο αν* $\operatorname{rank}(A) = m$.

Θεώρημα 2.9 ([10, (4.4.15), σ. 199]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε*

$$\dim(\mathcal{R}(A)) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n.$$

Θεώρημα 2.10 ([10, Άσκηση 4.2.12, σ. 199]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{n\times k}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$,
(ii) $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$.

Θεώρημα 2.11 ([10, (4.5.5), (4.5.6), σ. 212]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $\mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A)$,
(ii) $\mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*)$,
(iii) $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$,
(iv) $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$.

Θεώρημα 2.12 ([10, (5.11.5), (5.11.6), (5.11.7), σ. 405]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$,
(ii) $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*)$,
(iii) $\mathcal{R}(A)\dot{\oplus}\mathcal{N}(A^*) = \mathbb{C}^m$,
(iv) $\mathcal{R}(A^*)\dot{\oplus}\mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n$.

2.1.6 Δείκτης ενός Πίνακα

Ορισμός 2.6 ([10, σ. 395]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος k για τον οποίο*

$$\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1}), \tag{2.1}$$

ονομάζεται δείκτης του πίνακα A και συμβολίζεται ως $\operatorname{ind}(A)$.

Σημείωση 2.1.

(i) Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $\operatorname{ind}(A) = 0$.
(ii) Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε $\operatorname{ind}(A) \le n$.

Θεώρημα 2.13 ([10, σσ. 394-395]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $\operatorname{ind}(A) = k$,
(ii) *ο k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο*

$$\mathcal{N}(A^k) = \mathcal{N}(A^{k+1}),$$

(iii) *ο k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο*

$$\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}),$$

(iv) $\mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k) = \mathbb{C}^n$.

2.1.7 Φάσμα

Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε θα συμβολίζουμε το φάσμα του A ως $\sigma(A)$.

Ορισμός 2.7 ([10, σ. 587]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $\lambda \in \sigma(A)$. Τότε ο δείκτης της ιδιοτιμής λ είναι*

$$\operatorname{ind}(\lambda) = \operatorname{ind}(A - \lambda I).$$

Ορισμός 2.8 ([10, σ. 601]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$, $k_i = \operatorname{ind}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, s$, και έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Θα λέμε ότι η $f(A)$ ορίζεται αν οι $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \dots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$ υπάρχουν, για $i = 1, 2, \dots, s$.*

Θεώρημα 2.14 ([10, Παράδειγμα 7.9.4, σ. 606]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση για την οποία η $f(A)$ ορίζεται. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $p(z)$ τέτοιο ώστε*

$$f(A) = p(A).$$

2.1.8 Ερμητιανοί, Φυσιολογικοί, Ορθομοναδιαίοι Πίνακες, Πίνακες Μεταθέσεων και Κύριοι Υποπίνακες

Ορισμός 2.9 ([10, σ. 85]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Λέμε ότι ο A είναι Ερμιτιανός αν*

$$A^* = A.$$

Ορισμός 2.10 ([10, σ. 547]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Λέμε ότι ο A είναι φυσιολογικός αν*

$$AA^* = A^*A.$$

Ορισμός 2.11 ([10, σσ. 320-321]). *Έστω $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Λέμε ότι ο U είναι ορθομοναδιαίος αν ο U είναι αντιστρέψιμος και*

$$U^{-1} = U^*.$$

Θεώρημα 2.15 ([10, σ. 547]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίος και $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ διαγώνιος τέτοιοι ώστε*

$$U^*AU = D,$$

(ii) *Ο A είναι φυσιολογικός.*

Θεώρημα 2.16 ([10, σ. 407]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ με $\mathrm{rank}(A) = r$. Τότε υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ και $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και αντιστρέψιμος πίνακας $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ τέτοιοι ώστε*

$$A = U\begin{bmatrix} C & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}V^*,$$

όπου οι πρώτες r στήλες του U ορίζουν μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{R}(A)$, οι τελευταίες $(m-r)$ στήλες του U ορίζουν μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{N}(A^*)$, οι πρώτες r στήλες του V ορίζουν μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{R}(A^*)$ και οι τελευταίες $(n-r)$ στήλες του V ορίζουν μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{N}(A)$.

Θεώρημα 2.17 ([10, σ. 412]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ με $\mathrm{rank}(A) = r$. Τότε υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ και $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και αντιστρέψιμος διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{C}^{r\times r}$ τέτοιοι ώστε*

$$A = U\begin{bmatrix} D & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}V^*.$$

Η αποσύνθεση του A που περιγράφεται στο προηγούμενο θεώρημα ονομάζεται Singular Value Decomposition του A.

Ορισμός 2.12 ([6, σ. 32]). *Έστω $P \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Λέμε ότι ο P είναι ένας πίνακας μεταθέσεων αν ακριβώς ένα στοιχείο κάθε γραμμής και στήλης είναι 1 και όλα τα άλλα είναι 0.*

Ένας πίνακας μεταθέσεων προκύπτει από έναν ίδιων διατάσεων μοναδιαίο πίνακα μεταθέτοντας τις γραμμές του.

Ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με ένα πίνακα μεταθέσεων μεταθέτει τις γραμμές του πολλαπλασιαζόμενου πίνακα και ο πολλαπλασιασμός από δεξιά με ένα πίνακα μεταθέσεων μεταθέτει τις στήλες του πολλαπλασιαζόμενου πίνακα.

Θεώρημα 2.18 ([6, σ. 32]). *Έστω $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας πίνακας μεταθέσεων. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $P^* = P$,
(ii) $P^{-1} = P$,
(iii) *υπάρχει* $k \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $P^k = I$,
(iv) *το γινόμενο πινάκων μεταθέσεων είναι ένας πίνακας μεταθέσεων.*

Ορισμός 2.13 ([10, σ. 494]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ο $B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ είναι ένας κύριος υποπίνακας του A παράγεται από το ίδιο σύνολο r γραμμών και στηλών.*

2.1.9 Προβολές

Ορισμός 2.14 ([10, σ. 386]). *Έστω M, N υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ τέτοιοι ώστε*

$$M \oplus N = \mathbb{C}^n.$$

Από το Θεώρημα 2.2 για κάθε $u \in \mathbb{C}^n$ υπάρχουν μοναδικά $v \in M$ και $w \in N$ τέτοια ώστε $u = v+w$. Τότε ο τετραγωνικός πίνακας P που ορίζεται ως $Pu = v$, για κάθε $u \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται προβολή του M στον N. Θα συμβολίζουμε την προβολή του M στον N ως $P_{M\|N}$.

Θεώρημα 2.19 ([10, σ. 386, Άσκηση 5.9.7, σ. 391]). *Έστω M, N συμπληρωματικοί υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ και $P_{M\|N}$ προβολή του M στον N. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $P_{M\|N}^2 = P_{M\|N}$,
(ii) $I - P_{M\|N} = P_{N\|M}$,
(iii) $\mathcal{R}(P_{M\|N}) = \{u \in \mathbb{C}^n \mid P_{M\|N}u = u\}$,
(iv) $\mathcal{R}(P_{M\|N}) = \mathcal{N}(I - P_{M\|N}) = M$ *και* $\mathcal{N}(P_{M\|N}) = \mathcal{R}(I - P_{M\|N}) = N$.

Θεώρημα 2.20 ([10, (5.9.13), σ. 387]). *Έστω $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ο P είναι προβολή αν και μόνο αν*

$$P^2 = P.$$

Αν $P^2 = P$, τότε $P = P_{\mathcal{R}(P)\|\mathcal{N}(P)}$.

Θεώρημα 2.21 ([10, Άσκηση 5.9.13, σ. 392]). *Έστω $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ προβολή. Τότε*

$$\operatorname{rank}(P) = \operatorname{trace}(P).$$

Ορισμός 2.15 ([10, σ. 429]). *Έστω M υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$. Θα ονομάζουμε την προβολή του M στον $M^\perp$ ορθογώνια προβολή του M και θα τη συμβολίζουμε ως P_M.*

Θεώρημα 2.22 ([10, σ. 433]). *Έστω $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ προβολή. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) *ο P είναι ορθογώνια προβολή,*
(ii) $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$,
(iii) $P^* = P$.

2.1.10 Ορθογώνιες Προβολές στην Εικόνα και το Μηδενόχωρο

Ορισμός 2.16. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Θα συμβολίζουμε ως P_A την ορθογώνια προβολή $P_{\mathcal{R}(A)}$ του $\mathcal{R}(A)$ και ως P_{A^*} την ορθογώνια προβολή $P_{\mathcal{R}(A^*)}$ του $\mathcal{R}(A^*)$.*

Θεώρημα 2.23. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $I - P_A = P_{\mathcal{N}(A^*)}$,
(ii) $I - P_{A^*} = P_{\mathcal{N}(A)}$,
(iii) $\mathcal{R}(P_A) = \mathcal{N}(P_{\mathcal{N}(A^*)}) = \mathcal{R}(A)$,
(iv) $\mathcal{N}(P_A) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}(A^*)}) = \mathcal{N}(A^*)$,
(v) $\mathcal{R}(P_{A^*}) = \mathcal{N}(P_{\mathcal{N}(A)}) = \mathcal{R}(A^*)$,
(vi) $\mathcal{N}(P_{A^*}) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}(A)}) = \mathcal{N}(A)$.

Απόδειξη. (i): Από τον ορισμό του P_A, Θεώρημα 2.12, (i) και το Θεώρημα 2.19, (ii) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I - P_A &= I - P_{\mathcal{R}(A)} \\ &= I - P_{\mathcal{R}(A)\|\mathcal{N}(A^*)} \\ &= P_{\mathcal{N}(A^*)}. \end{aligned}$$

(ii): Από το (i) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I - P_{A^*} &= P_{\mathcal{N}((A^*)^*)} \\ &= P_{\mathcal{N}(A)}. \end{aligned}$$

(iii), (iv): Προκύπτουν από το (i) και το Θεώρημα 2.19, (iv).
(v), (vi): Προκύπτουν από το (ii) και το Θεώρημα 2.19, (iv). □

Θεώρημα 2.24. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $P_A A = A$,
(ii) $P_{A^*} A^* = A^*$,
(iii) $A^* P_A = A^*$,
(iv) $A P_{A^*} = A$,
(v) $P_{\mathcal{N}(A^*)} A = 0$,

(vi) $P_{\mathcal{N}(A)}A^* = 0$,
(vii) $A^*P_{\mathcal{N}(A^*)} = 0$,
(viii) $AP_{\mathcal{N}(A)} = 0$.

Απόδειξη. (i): Έστω $u \in \mathbb{C}^n$. Τότε $Au \in \mathcal{R}(A)$. Αφού $\mathcal{R}(P_A) = \mathcal{R}(A)$, από το Θεώρημα 2.19, (iii) έχουμε ότι

$$P_A Au = Au.$$

Συνεπώς

$$P_A A = A.$$

(ii): Προκύπτει άμεσα από το (i).

(iii): Χρησιμοποιώντας το (i) και το Θεώρημα 2.22, (iii) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_A A = A &\implies (P_A A)^* = A^* \\ &\implies A^* P_A^* = A^* \\ &\implies A^* P_A = A^*. \end{aligned}$$

(iv): Προκύπτει άμεσα από το (iii).

(v): Χρησιμοποιώντας το (i) και το Θεώρημα 2.23, (i) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_A A = A &\implies A - P_A A = 0 \\ &\implies (I - P_A)A = 0 \\ &\implies P_{\mathcal{N}(A^*)}A = 0. \end{aligned}$$

(vi): Προκύπτει άμεσα από το (v).

(vii): Χρησιμοποιώντας το (iii) και το Θεώρημα 2.23, (i) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A^* P_A = A^* &\implies A^* - A^* P_A = 0 \\ &\implies A^*(I - P_A) = 0 \\ &\implies A^* P_{\mathcal{N}(A^*)} = 0. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να το αποδείξουμε ως εξής: Έστω $u \in \mathbb{C}^n$. Τότε $P_{\mathcal{N}(A^*)}u \in \mathcal{N}(A^*)$ και άρα

$$A^* P_{\mathcal{N}(A^*)} u = 0.$$

Συνεπώς

$$A^* P_{\mathcal{N}(A^*)} = 0.$$

(viii): Προκύπτει άμεσα από το (vii). □

Θεώρημα 2.25 ([4, Λήμμα 5.2, σ. 1564]).

(i) *Έστω* $S \in \mathbb{C}^{k\times m}$ *και* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Τότε έχουμε ότι*

$$S = SP_A \iff \mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(S) \iff \mathcal{R}(S^*) \subseteq \mathcal{R}(A). \tag{2.2}$$

(ii) *Έστω* $S \in \mathbb{C}^{m\times k}$ *και* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Τότε έχουμε ότι*

$$S = P_A S \iff \mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(S^*) \iff \mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{N}(A). \tag{2.3}$$

Απόδειξη. (i): Υποθέτουμε ότι

$$S = SP_A.$$

Από το Θεώρημα 2.23, (iv) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(A^*) &\implies x \in \mathcal{N}(P_A) \\ &\implies P_A x = 0 \\ &\implies SP_A x = 0 \\ &\implies Sx = 0 \\ &\implies x \in \mathcal{N}(S), \end{aligned}$$

και άρα

$$S = SP_A \implies \mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(S).$$

Από την άλλη μεριά, υποθέτουμε ότι

$$\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(S).$$

Έστω $x \in \mathbb{C}^n$. Τότε, από το Θεώρημα 2.23, (i) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Sx = SP_A x &\iff S(I - P_A)x = 0 \\ &\iff SP_{\mathcal{N}(A^*)}x = 0. \end{aligned}$$

Αφού $P_{\mathcal{N}(A^*)}x \in \mathcal{N}(A^*)$,

$$P_{\mathcal{N}(A^*)}x \in \mathcal{N}(S)$$

και άρα

$$SP_{\mathcal{N}(A^*)}x = 0,$$

για όλα τα $x \in \mathbb{C}^n$. Συνεπώς

$$S = SP_A.$$

(ii): Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.22, (iii) και (i) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S = P_A S &\iff S^* = (P_A S)^* \\ &\iff S^* = S^* P_A^* \\ &\iff S^* = S^* P_A \\ &\iff \mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(S^*) \\ &\iff \mathcal{R}((S^*)^*) \subseteq \mathcal{N}(A) \\ &\iff \mathcal{R}(S) \subseteq \mathcal{N}(A). \end{aligned}$$

□

2.1.11 Αναλλοίωτοι Υπόχωροι

Ορισμός 2.17 ([3, Ορισμός 0.2.1, σ. 4]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και M υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$.*

(i) *Λέμε ότι M είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του A αν*

$$AM = \{Au \,|\, u \in M\} \subseteq M.$$

(ii) *Λέμε ότι M είναι ένας reducing υπόχωρος του A αν M είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του A και του A^*.*

Θεώρημα 2.26 ([3, Άσκηση 5, σ. 7]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και M υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) *αν M είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του A, τότε ο $M^\perp$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του A^*,*
(ii) *ο M είναι ένας reducing υπόχωρος του A αν και μόνο M και $M^\perp$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του A.*

Θεώρημα 2.27 ([3, Πρόταση 0.2.3, σ. 4]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και M υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) *ο M είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του A αν και μόνο αν $P_M A P_M = A P_M$,*
(ii) *ο M είναι ένας reducing υπόχωρος του A αν και μόνο αν $AP_M = P_M A$.*

2.2 Γενικευμένοι Αντίστροφοι

2.2.1 Ο Moore-Penrose Αντίστροφος

Ο πιο διαδεδομένος τύπος γενικευμένου αντίστροφου πίνακα είναι ο Moore-Penrose αντίστροφος πίνακας, ο οποίος περιγράφηκε ανεξάρτητα από τον Eliakim Hastings Moore το 1920 και το 1935 (βλέπε [12], [13]) και τον Roger Penrose το 1955 (βλέπε [17]).

Ορισμός 2.18 ([3, Ορισμός 1.1.3, σ. 9]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε ο μοναδικός $n \times m$ πίνακας $A^\dagger$ που ικανοποιεί τις*

$$AA^\dagger A = A, \tag{2.4}$$
$$A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger, \tag{2.5}$$
$$(AA^\dagger)^* = AA^\dagger, \tag{2.6}$$
$$(A^\dagger A)^* = A^\dagger A. \tag{2.7}$$

ονομάζεται Moore-Penrose αντίστροφος του A.

Θεώρημα 2.28 ([3, Ορισμός 1.1.2, σ. 9])**.** *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

$$AA^\dagger = P_A, \tag{2.8}$$
$$A^\dagger A = P_{A^*}. \tag{2.9}$$

Θεώρημα 2.29 ([3, Θεώρημα 1.2.1, σ. 11, Θεώρημα 1.2.2, σ. 12])**.** *Έστω $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) $(A^\dagger)^\dagger = A$,
(ii) $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$,
(iii) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^\dagger)$,
(iv) $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^\dagger A)$,
(v) $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(AA^\dagger)$,
(vi) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^\dagger A)$.

Θεώρημα 2.30 ([1, Λήμμα 1, σ. 43])**.** *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος. Τότε*

$$A^\dagger = A^{-1}.$$

Θεώρημα 2.31 ([3, Θεώρημα 2.1.1, σ. 28])**.** *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $b \in \mathbb{C}^n$. Τότε ο $A^\dagger b$ είναι η ελάχιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων του $Ax = b$.*

Θεώρημα 2.32 ([10, (5.12.16), σ. 423][1, Πόρισμα 1, σ. 207])**.**

(i) *Έστω A, C, U και V όπως στο Θεώρημα 2.16. Τότε*

$$A^\dagger = V\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^*.$$

(ii) *Έστω A, Σ, U και V όπως στο Θεώρημα 2.17. Τότε*

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*,$$

όπου

$$\Sigma^\dagger = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right).$$

2.2.2 Ο Drazin Αντίστροφος και ο Group Αντίστροφος

Ορισμός 2.19 ([3, Ορισμός 7.2.3, σ. 122])**.** *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $\operatorname{ind}(A) = k$. Αν ο $A^D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ικανοποιεί τις*

$$A^D A A^D = A^D, \tag{2.10}$$
$$AA^D = A^D A, \tag{2.11}$$
$$A^{k+1}A^D = A^k, \tag{2.12}$$

τότε ο A^D ονομάζεται Drazin αντίστροφος του A.

Θεώρημα 2.33 ([3, Πόρισμα 7.2.1, σ. 123]). *Έστω* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *με* $\mathrm{ind}(A) = k$. *Τότε*

(i) $AA^D = A^D A = P_{\mathcal{R}(A^k)\|\mathcal{N}(A^k)}$,
(ii) $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^k)$,
(iii) $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A^k)$.

Θεώρημα 2.34 ([3, Θεώρημα 7.5.2, σ. 130]). *Έστω* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Τότε υπάρχει πολυώνυμο* $p(z)$ *τέτοιο ώστε*

$$A^D = p(A).$$

Ορισμός 2.20 ([3, Ορισμός 7.2.4, σ. 124]). *Έστω* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *με* $\mathrm{ind}(A) = 1$. *Τότε ο* A^D *ονομάζεται Group αντίστροφος του* A *και συμβολίζεται ως* $A^{\#}$. *Ο* $A^{\#}$ *ικανοποιεί τις*

$$A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}, \tag{2.13}$$

$$AA^{\#} = A^{\#}A, \tag{2.14}$$

$$AA^{\#}A = A. \tag{2.15}$$

Κεφάλαιο 3

EP Πίνακες

Ορίζουμε έναν EP πίνακα όπως ακολουθεί.

Ορισμός 3.1. *Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται EP πίνακας ή Range-Hermitian πίνακας αν*

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*). \tag{3.1}$$

Αν ο A είναι ένας EP πίνακας και $\operatorname{rank}(A) = r$, τότε λέμε ότι ο A είναι ένας EP_r πίνακας.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνουμε ορισμένες συνθήκες σχετκές με τους $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{N}(A)$ και $\mathcal{N}(A^*)$ οι οποίες είναι ισοδύναμες με το να είναι ο A EP πίνακας.

Θεώρημα 3.1. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$,
(iii) $\mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(A)$,
(iv) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$,
(v) $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^*)$,
(vi) $\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(A)$,
(vii) $\mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A)$,
(viii) $\mathcal{N}(A^*) \perp \mathcal{R}(A^*)$,
(ix) $\mathcal{R}(A)\dot{\oplus}\mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n$,
(x) $\mathcal{R}(A^*)\dot{\oplus}\mathcal{N}(A^*) = \mathbb{C}^n$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii),(iii): Προφανές.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Από το Θεώρημα 2.8, (i), (iii) ξέρουμε ότι

$$\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^*)).$$

Άρα, από το Θεώρημα 2.1,
$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$$
συνεπάγεται ότι
$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$$
και συνεπώς, από τον Ορισμό 3.1, ο A είναι EP πίνακας.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με το (ii) $\Longrightarrow$ (i).

(i) $\Longleftrightarrow$ (iv): Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 3.1 και το Θεώρημα 2.12, (i), (ii) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{ο } A \text{ είναι EP πίνακας} &\Longleftrightarrow \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*) \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^*)^{\perp} \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A). \end{aligned}$$

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v): Παρόμοια με το (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.8, (ii), (iv).

(iv) $\Longleftrightarrow$ (vi): Παρόμοια με το (iv) $\Longleftrightarrow$ (v).

(v) $\Longleftrightarrow$ (vii): Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.12, (i) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^*) &\Longleftrightarrow \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{R}(A)^{\perp} \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A). \end{aligned}$$

(vi) $\Longleftrightarrow$ (viii): Παρόμοια με το (v) $\Longleftrightarrow$ (vii) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.12, (ii).

(iv) $\Longrightarrow$ (ix): Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.12, (iii) έχουμε ότι

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \dot{\oplus} \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A) \dot{\oplus} \mathcal{N}(A).$$

(ix) $\Longrightarrow$ (vii): Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.7, (ii) έχουμε ότι

$$\mathcal{R}(A) \dot{\oplus} \mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n \Longrightarrow \mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A).$$

(iv) $\Longrightarrow$ (x): Παρόμοια με το (iv) $\Longrightarrow$ (ix) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.12, (iv).

(x) $\Longrightarrow$ (viii): Παρόμοια με το (ix) $\Longrightarrow$ (vii). □

Σημείωση 3.1. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1, τον Ορισμό 3.1 και το Θεώρημα 2.29, (iv), (v) έχουμε ότι αν ο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) ο A είναι EP πίνακας,
(xi) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^\dagger)$,
(xii) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^\dagger)$,
(xiii) $\mathcal{R}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{R}(A)$,

(xiv) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^\dagger)$,
(xv) $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^\dagger)$,
(xvi) $\mathcal{N}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A)$,
(xvii) $\mathcal{N}(A^\dagger) \perp \mathcal{R}(A^\dagger)$,
(xviii) $\mathcal{R}(A^\dagger) \oplus \mathcal{N}(A^\dagger) = \mathbb{C}^n$.

Μία άμεση πρόταση του ορισμού των ΕΡ πινάκων είναι η παρακάτω.

Πρόταση 3.1. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι ΕΡ πίνακας,*
(ii) *ο A^* είναι ΕΡ πίνακας,*
(iii) *ο $A^\dagger$ είναι ΕΡ πίνακας,*
(iv) *ο $(A^*)^\dagger$ είναι ΕΡ πίνακας.*

Απόδειξη. (i) $\iff$ (ii): Από τον Ορισμό 3.1 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{ο } A \text{ είναι ΕΡ πίνακας} &\iff \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A) \\ &\iff \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}((A^*)^*) \\ &\iff \text{ο } A^* \text{ είναι ΕΡ πίνακας.} \end{aligned}$$

(i) $\iff$ (iii): Από τη Σημείωση 3.1 και το Θεώρημα 2.29, (i) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{ο } A \text{ είναι ΕΡ πίνακας} &\iff \mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A) \\ &\iff \mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}((A^\dagger)^\dagger) \\ &\iff \text{ο } A^\dagger \text{ είναι ΕΡ πίνακας.} \end{aligned}$$

(iii) $\iff$ (iv): Προκύπτει από το (i) $\iff$ (ii). □

Στις δύο επόμενες προτάσεις δείχνουμε ότι οι φυσιολογικοί και οι αντίστροφοι πίνακες είναι ΕΡ πίνακες.

Πρόταση 3.2. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Αν ο A είναι φυσιολογικός, τότε ο A είναι ΕΡ πίνακας.*

Απόδειξη. Αφού ο A είναι φυσιολογικός,

$$AA^* = A^*A.$$

Άρα, από το Θεώρημα 2.11, (i), (ii),

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*)$$

όπου, από τον Ορισμό 3.1, συνεπάγεται ότι ο A είναι ΕΡ πίνακας. □

Πρόταση 3.3. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A είναι ΕΡ πίνακας.*

Απόδειξη. Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος,

$$\mathcal{R}(A) = \mathbb{C}^n.$$

Επιπλέον, αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, ο A^* είναι επίσης αντιστρέψιμος. Άρα

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathbb{C}^n.$$

Έτσι

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$$

όπου, από τον Ορισμό 3.1, συνεπάγεται ότι ο A είναι ΕΡ πίνακας. □

Λήμμα 3.1. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $B \in \mathbb{C}^{n\times r}$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ είναι ΕΡ πίνακας αν και μόνο αν $B = 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\text{ο } \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ είναι ΕΡ πίνακας} &\iff \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&\iff \mathbb{C}^n \oplus \{0\} = \mathbb{C}^n \oplus \mathcal{R}(B^*) \\
&\iff \{0\} = \mathcal{R}(B^*) \\
&\iff B^* = 0 \\
&\iff B = 0.
\end{aligned}$$

□

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ένας πίνακας είναι ΕΡ αν και μόνο αν μετατίθεται με τον αντίστοιχό του Moore-Penrose αντίστροφο.

Θεώρημα 3.2. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ο A είναι ΕΡ πίνακας αν και μόνο αν*

$$AA^\dagger = A^\dagger A.$$

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 3.1 και το Θεώρημα 2.28 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\text{ο } A \text{ είναι ΕΡ πίνακας} &\iff \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*) \\
&\iff P_A = P_{A^*} \\
&\iff AA^\dagger = A^\dagger A.
\end{aligned}$$

□

Σημείωση 3.2. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Από το Θεώρημα 3.2, το Θεώρημα 2.29, (iv) και το Θεώρημα 2.23, (i), (ii), έχουμε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) ο A είναι ΕΡ πίνακας,
(ii) $P_A = P_{A^*}$,
(iii) $P_{\mathcal{N}(A)} = P_{\mathcal{N}(A^*)}$,
(iv) $P_A = P_{A^\dagger}$,
(v) $P_{\mathcal{N}(A)} = P_{\mathcal{N}(A^\dagger)}$.
(vi) $P_{A^*} = P_{(A^*)^\dagger}$,
(vii) $P_{\mathcal{N}(A^*)} = P_{\mathcal{N}((A^*)^\dagger)}$,
(viii) $P_{A^\dagger} = P_{(A^*)^\dagger}$,
(ix) $P_{\mathcal{N}(A^\dagger)} = P_{\mathcal{N}((A^*)^\dagger)}$.

Στο επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζουμε ΕΡ πίνακες μέσω ταυτοτήτων των A, A^*, P_A, P_{A^*}, $P_{\mathcal{N}(A)}$ και $P_{\mathcal{N}(A^*)}$.

Θεώρημα 3.3. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι ΕΡ πίνακας,*
(ii) $P_{A^*}A = A$,
(iii) $P_A A^* = A^*$,
(iv) $A^* P_{A^*} = A^*$,
(v) $AP_A = A$,
(vi) $P_{\mathcal{N}(A)}A = 0$,
(vii) $P_{\mathcal{N}(A^*)}A^* = 0$,
(viii) $A^* P_{\mathcal{N}(A)} = 0$,
(ix) $AP_{\mathcal{N}(A^*)} = 0$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii), (ix): Προκύπτουν από τη Σημείωση 3.2 και το Θεώρημα 2.24.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (v) $\Longleftrightarrow$ (vi) $\Longleftrightarrow$ (vii) $\Longleftrightarrow$ (viii) $\Longleftrightarrow$ (ix): Παρόμοια με τη απόδειξη του Θεωρήματος 2.24.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.24 και το Θεώρημα 3.1 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_{A^*}A = A &\Longrightarrow \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \\ &\Longrightarrow \text{ο } A \text{ είναι ΕΡ πίνακας.} \end{aligned}$$

□

Σημείωση 3.3. Από το Θεώρημα 3.3 και το Θεώρημα 2.28 έχουμε ότι αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) ο A είναι ΕΡ πίνακας,
(ii) $A^\dagger AA = A$,
(iii) $AA^\dagger A^* = A^*$,
(iv) $A^*A^\dagger A = A^*$,
(v) $AAA^\dagger = A$,

Στο επόμενο λήμμα δείχνουμε ότι αν ο A είναι EP πίνακας, τότε $\mathrm{ind}(A) \leq 1$.

Λήμμα 3.2. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ EP πίνακας. Τότε*

$$\mathrm{ind}(A) \leq 1.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathcal{R}(A^2) = \mathcal{R}(A).$$

Αφού ο A είναι EP πίνακας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(A^2) &= A(\mathcal{R}(A))\\ &= A(\mathcal{R}(A^*))\\ &= \mathcal{R}(AA^*)\\ &= \mathcal{R}(A).\end{aligned}$$ □

Στο επόμενο θεώρημα δείχνουμε ότι EP πίνακες είναι εκείνοι οι πίνακες για τους οποίους ο Drazin αντίστροφος και ο Group αντίστροφος συμπίπτουν με τον Moore-Penrose αντίστροφο πίνακα.

Θεώρημα 3.4. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) $\mathrm{ind}(A) \leq 1$ *και* $A^{\#} = A^{\dagger}$,
(iii) $A^D = A^{\dagger}$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Υποθέτουμε ότι ο A είναι EP πίνακας. Τότε από το Θεώρημα 3.2 έχουμε ότι $AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$. Έτσι

$$\begin{aligned}AA^{\dagger}A &= A,\\ A^{\dagger}AA^{\dagger} &= A^{\dagger}\\ AA^{\dagger} &= A^{\dagger}A.\end{aligned}$$

Άρα

$$A^{\dagger} = A^{\#}$$

και αφού ο $A^{\#}$ υπάρχει, $\mathrm{ind}(A) = 1$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Προφανές.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Αφού

$$\begin{aligned}A^D &= A^{\dagger},\\ AA^{\dagger} &= A^{\dagger}A\end{aligned}$$

και από το Θεώρημα 3.2 έχουμε ότι ο A είναι EP πίνακας. □

Το παρακάτω λήμμα είναι χρήσιμο για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.

Λήμμα 3.3. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ EP πίνακας. Τότε*

(i) *ο $A : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}(A)$ είναι αντιστρέψιμος,*
(ii) *ο $A : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}(A^*)$ είναι αντιστρέψιμος,*
(iii) *ο $A : \mathcal{R}(A^*) \to \mathcal{R}(A)$ είναι αντιστρέψιμος,*
(iv) *ο $A : \mathcal{R}(A^*) \to \mathcal{R}(A^*)$ είναι αντιστρέψιμος.*

Θεώρημα 3.5. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) *υπάρχουν $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίος και $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε*
$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Απόδειξη. (i) $\implies$ (ii): Αφού ο A είναι EP πίνακας,
$$\mathcal{R}(A)\dot{\oplus}\mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n, \tag{3.2}$$
το οποίο προκύπτει από το Θεώρημα 3.1. Έστω $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{R}(A)$ και $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{N}(A)$. Από την (3.2), $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$. Συνεπώς, ο $U = [u_1|\dots|u_n]$ είναι ορθομοναδιαίος πίνακας. Τότε $[A]_B = U^*AU$, το οποίο προκύπτει από την (4.8.5) του [10, σ. 253]. Από το Λήμμα 3.3, έχουμε ότι ο $\mathcal{R}(A)$ είναι αναλλοίωτος υπό τον A. Προφανώς, ο $\mathcal{N}(A)$ είναι επίσης αναλλοίωτος υπό τον A. Άρα, από την (4.9.8) του [10, σ. 262],
$$[A]_B = \begin{bmatrix} A|_{\mathcal{R}(A)} & 0 \\ 0 & A|_{\mathcal{N}(A)} \end{bmatrix}.$$
Έστω $A_1 = A|_{\mathcal{R}(A)} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}(A)$, ο οποίος από το Λήμμα 3.3 είναι αντιστρέψιμος. Επίσης, έχουμε ότι $A|_{\mathcal{N}(A)} = 0 : \mathcal{N}(A) \to \mathcal{N}(A)$ και γι αυτό υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίος και $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε:
$$U^*AU = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff A = U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

(ii) $\implies$ (i): Υποθέτουμε ότι
$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$
Θα αποδείξουμε ότι
$$A^\dagger = U \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\\
=&U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\
=&U\begin{bmatrix}A_1A_1^{-1}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\
=&U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $U^*U = I_n$ και η τελευταία από το γεγονός ότι $A_1A_1^{-1} = I_r$. Αντίστοιχα, έχουμε ότι

$$\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right) = U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*, \qquad (3.4)$$

αφού $U^*U = I_n$ και $A_1^{-1}A_1 = I_r$. Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα της (3.3) με το αποτέλεσμα της (3.4) και έχουμε ότι

$$\left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right) = U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*,$$

αφού $U^*U = I_n$ και $A_1A_1^{-1} = I_r$. Παίρνουμε τον Ερμιτιανό του προηγούμενου πίνακα και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left[\left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\right]^* &= \left(U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)^*\\
&= U\begin{bmatrix}I_r^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\
&= U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\
&= \left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right),
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από το γεγονός ότι $U^*U = I_n$ και $A_1^{-1}A_1 = I_r$ και η τρίτη από το γεγονός ότι $I_r^* = I_r$. Αντίστοιχα, πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα της (3.4) με το αποτέλεσμα της (3.3) και παίρνοντας τον Ερμιτιανό πίνακα έχουμε ότι

$$\left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right) = U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*,$$

$$\left[\left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\right]^* = \left(U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right)\left(U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\right),$$

αφού $U^*U = I_n$, $A_1^{-1}A_1 = I_r$ και $I_r^* = I_r$. Ως εκ τούτου,

$$A^\dagger = U\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*,$$

και από όσα είπαμε προηγουμένως,

$$AA^\dagger = U\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^* = A^\dagger A,$$

και συνεπώς ο A είναι EP πίνακας από το Θεώρημα 3.2. □

Σημείωση 3.4. Το Θεώρημα 3.5, (i) $\Longrightarrow$ (ii) μπορεί να αποδειχθεί εναλλακτικά όπως ακολουθεί.

Απόδειξη. Αφού ο A είναι EP πίνακας, τότε από το Θεώρημα 3.1, $\mathcal{R}(A)\bigoplus\mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n$. Έτσι ο $U^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ με $U^*x = \begin{bmatrix}P_Ax\\ P_{\mathcal{N}(A)}x\end{bmatrix}$, για όλα τα $x \in \mathbb{C}^n$ είναι ορθομοναδιαίος. Προφανώς, $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ με $U = \begin{bmatrix}P_Ax\\ P_{\mathcal{N}(A)}x\end{bmatrix} = P_Ax + P_{\mathcal{N}(A)}x = x$, για όλα τα $x \in \mathbb{C}^n$. Έστω $A_1 : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}(A)$ με $A_1 = A|_{\mathcal{R}(A)}$, τότε από το Λήμμα 3.3 ο A_1 είναι αντιστρέψιμος. Έστω επίσης ότι $x \in \mathbb{C}^n$, τότε

$$\begin{aligned}
U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*x &= U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_Ax\\ P_{\mathcal{N}(A)}x\end{bmatrix}\\
&= U\begin{bmatrix}A_1P_Ax\\ 0\end{bmatrix}\\
&= U\begin{bmatrix}AP_Ax\\ 0\end{bmatrix}\\
&= U\begin{bmatrix}Ax\\ 0\end{bmatrix}\\
&= Ax + 0\\
&= Ax,
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 3.3, αφού ο A είναι EP πίνακας. Άρα, έχουμε ότι

$$U\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^* = A.$$

□

Σημείωση 3.5. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ EP πίνακας, $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίος και $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντίστροφος τέτοιοι ώστε $A = U\left[\begin{smallmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]U^*$. Τότε

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} A &= \operatorname{rank} U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank} A_1 \\ &= r, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο U είναι αντιστρέψιμος, η τρίτη από το γεγονός ότι $\operatorname{rank}\left(\left[\begin{smallmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{smallmatrix}\right]\right) = \operatorname{rank}(X_1) + \operatorname{rank}(X_2)$ και η τελευταία από το γεγονός ότι ο A_1 είναι επίσης αντιστρέψιμος. Έτσι, αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) ο A είναι EP_r πίνακας,
(ii) υπάρχουν $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίος και $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε

$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Στην επόμενη σημείωση παρουσιάζουμε δύο εναλλακτικούς τρόπους απόδειξης του (ii) $\Longrightarrow$ (i) της απόδειξης του Θεωρήματος 3.5.

Σημείωση 3.6. Υποθέτουμε ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ο $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ορθομοναδιαίος και ο $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντίστροφος, με $A = U\left[\begin{smallmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]U^*$.

(i) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(A) &= \mathcal{R}\left(U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\right) \\
&= U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathcal{R}(U^*)) \\
&= U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbb{C}^n) \\
&= U\left[\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right] \\
&= U(\mathcal{R}(A_1) \oplus \mathcal{R}(0)) \\
&= U(\mathbb{C}^n \oplus \{0\}) \\
&= U(\mathcal{R}(A_1^*) \oplus \mathcal{R}(0)) \\
&= U\left[\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right] \\
&= U \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbb{C}^n) \\
&= U \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathcal{R}(U^*)) \\
&= \mathcal{R}\left(U \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\right) \\
&= \mathcal{R}(A^*),
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη και η δέκατη ισότητα προκύπτουν από το γεγονός ότι ο U^* είναι επί (ως ορθομοναδιαίος), η πέμπτη και η όγδοη από το γεγονός ότι $\mathcal{R}\left(\left[\begin{smallmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{smallmatrix}\right]\right) = \mathcal{R}(X_1) + \mathcal{R}(X_2)$, η έκτη από το γεγονός ότι ο A_1 είναι επί (ως αντίστροφος) και η έβδομη από το γεγονός ότι ο A_1^* είναι επίσης επί (ως αντίστροφος). Συνεπώς, ο A είναι EP πίνακας.

(ii) Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{N}(A) &\iff Ax = 0 \\
&\iff U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* x = 0 \\
&\iff \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* x = 0 \\
&\iff U^* x \in \mathcal{N}\Bigg(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg) \\
&\iff U^* x \in \mathcal{N}(A_1) \oplus \mathcal{N}(0) \\
&\iff U^* x \in \{0\} \oplus \mathbb{C}^n \\
&\iff U^* x \in \mathcal{N}(A_1^*) \oplus \mathcal{N}(0) \\
&\iff U^* x \in \mathcal{N}\Bigg(\begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg) \\
&\iff \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* x = 0 \\
&\iff U \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* x = 0 \\
&\iff A^* x = 0 \\
&\iff x \in \mathcal{N}(A^*),
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη και η δέκατη ισότητα προκύπτουν από το γεγονός ότι ο U^* είναι ένα-προς-ένα (ως ορθομοναδιαίος), η πέμπτη και η όγδοη από το γεγονός ότι $\mathcal{N}\big(\left[\begin{smallmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{smallmatrix}\right]\big) = \mathcal{N}(X_1) + \mathcal{N}(X_2)$, η έκτη από το γεγονός ότι ο A_1 είναι ένα-προς-ένα (ως αντίστροφος) και η έβδομη από το γεγονός ότι ο A_1^* είναι επίσης ένα-προς-ένα (ως αντίστροφος). Συνεπώς, ο A είναι EP πίνακας.

Στο τελευταίο θεώρημα αυτού του κεφαλαίου αποδεικνύουμε ότι ο A είναι EP πίνακας αν και μόνο αν ο $A^\dagger$ μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο του A.

Θεώρημα 3.6. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*

(ii) *υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοια ώστε $A^\dagger = p(A)$,*

(iii) *υπάρχει συνάρτηση πινάκων $f(x)$ τέτοια ώστε η $f(A)$ μπορεί να ορισθεί και $A^\dagger = f(A)$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Έστω $s, k \in \mathbb{R}$ και

$$A^s + \lambda_1 A^{s+1} + \cdots + \lambda_k A^{s+k} = 0, \tag{3.5}$$

το ελάχιστο πολυώνυμο A. Τότε $s = 0$ ή $s = 1$. Για να το εξακριβώσουμε, υποθέτουμε ότι $s \geq 2$ και τότε έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(3.5) &\implies A^{\dagger}(A^{s} + \lambda_1 A^{s+1} + \cdots + \lambda_k A^{s+k}) = 0 \\
&\implies (A^{\dagger}A)(A^{s-1} + \lambda_1 A^{s} + \cdots + \lambda_k A^{s+k-1}) = 0 \\
&\implies (AA^{\dagger})(A^{s-1} + \lambda_1 A^{s} + \cdots + \lambda_k A^{s+k-1}) = 0 \\
&\implies (AA^{\dagger}A)(A^{s-2} + \lambda_1 A^{s-1} + \cdots + \lambda_k A^{s+k-2}) = 0 \\
&\implies A(A^{s-2} + \lambda_1 A^{s-1} + \cdots + \lambda_k A^{s+k-2}) = 0 \\
&\implies A^{s-1} + \lambda_1 A^{s} + \cdots + \lambda_k A^{s+k-1} = 0, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη συνεπαγωγή προκύπτει από το Θεώρημα 3.2 και η πέμπτη από την (2.4). Προφανώς, το προηγούμενο αποτέλεσμα μας οδηγεί σε αντίφαση. Αν $s = 0$, τότε έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(3.6) &\implies A^{-1} + \lambda_1 I + \cdots + \lambda_k A^{k-1} = 0 \\
&\implies A^{-1} = -\lambda_1 I - \lambda_2 A \cdots - \lambda_k A^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Αφού ο A^{-1} υπάρχει, έχουμε ότι

$$A^{\dagger} = A^{-1} = -\lambda_1 I - \lambda_2 A \cdots - \lambda_k A^{k-1}. \qquad (3.7)$$

Από την άλλη αν $s = 1$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(3.5) &\implies A^{\dagger}(A + \lambda_1 A^{2} + \lambda_2 A^{3} + \cdots + \lambda_k A^{k+1}) = 0 \\
&\implies A^{\dagger}A = -\lambda_1 A^{\dagger}A^{2} - \lambda_2 A^{\dagger}A^{3} - \cdots - \lambda_k A^{\dagger}A^{k+1} \\
&\implies A^{\dagger}A = -\lambda_1 A^{1} - \lambda_2 A^{2} - \cdots - \lambda_k A^{k} \\
&\implies A^{\dagger}AA^{\dagger} = -\lambda_1 A^{1}A^{\dagger} - \lambda_2 A^{2}A^{\dagger} - \cdots - \lambda_k A^{k}A^{\dagger} \\
&\implies A^{\dagger} = -\lambda_1 I - \lambda_2 A - \cdots - \lambda_k A^{k-1},
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη συνεπαγωγή προκύπτει από την (3.7) και η πέμπτη από την (2.5). Άρα, $A^{\dagger} = p(A)$.

(ii) $\implies$ (i): Έστω $k \in \mathbb{R}$ και

$$A^{\dagger} = -\lambda_1 I - \lambda_2 A - \cdots - \lambda_k A^{k-1}. \qquad (3.8)$$

Τότε έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(3.8) &\implies AA^{\dagger} = A(-\lambda_1 I - \lambda_2 A - \cdots - \lambda_k A^{k-1}) \\
&\implies AA^{\dagger} = -\lambda_1 A - \lambda_2 A^{2} - \cdots - \lambda_k A^{k} \\
&\implies AA^{\dagger} = (-\lambda_1 I - \lambda_2 A - \cdots - \lambda_k A^{k-1})A \\
&\implies AA^{\dagger} = A^{\dagger}A.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.2, ο A είναι ΕΡ πίνακας.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Προφανές.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Προφανές αφού κάθε συνάρτηση πινάκων μπορεί να γραφεί σαν πολυώνυμο (βλέπε [10, Παράδειγμα 7.9.4, σ. 198]). $\square$

Κεφάλαιο 4

Παραγοντοποιήσεις EP Πινάκων

Σε αυτό το κεφάλαιο, χαρακτηρίζουμε EP πίνακες μέσω της ύπαρξης τεσσάρων διαφορετικών τύπων παραγοντοποιήσεων. Αντίστοιχη έρευνα στους EP πίνακες και EP τελεστές έχει γίνει στα [14], [15], [16], [8], [9] και [4]. Ειδικότερα, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στις ενότητες 4.1, 4.2 και 4.3 βασίζονται στο [4] αυτά της ενότητας 4.4 στα [14] και [9].

4.1 Παραγοντοποίηση της μορφής $\boldsymbol{A = U(A_1 \oplus 0)U^*}$

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε χαρακτηρισμούς EP πινάκων μέσω παραγοντοποιήσεων του A της μορφής $A = U(A_1 \oplus 0)U^*$ και μέσω ταυτόχρονων παραγοντοποιήσεων του A και του A^* ή του A και του $A^\dagger$ ή του A^*A και του AA^* παρόμοιας μορφής.

Ξεκινάμε αναφέροντας δύο βασικά λήμματα, χρήσιμα για τις αποδείξεις που ακολουθούν.

Λήμμα 4.1. *Έστω $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ο $A_1 \oplus A_2$ είναι EP πίνακας αν και μόνο αν οι A_1 και A_2 είναι EP πίνακες.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\text{οι} A_1, A_2 \text{ είναι EP πίνακες} &\iff \mathcal{R}(A_1) + \mathcal{R}(A_2) = \mathcal{R}(A_1^*) + \mathcal{R}(A_2^*) \\
&\iff \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & A_2^* \end{bmatrix} \right) \\
&\iff \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^* \right) \\
&\iff \mathcal{R}(A_1 \oplus A_2) = \mathcal{R}((A_1 \oplus A_2)^*) \\
&\iff \text{ ο} A_1 \oplus A_2 \text{ είναι EP πίνακας.}
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.2. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{C}^{r\times r}$ και $U \in \mathbb{C}^{n\times r}$ με $\operatorname{rank}(U) = r$ τέτοιοι ώστε $A = UGU^*$. Τότε ο A είναι EP πίνακας αν και μόνο αν ο G είναι EP πίνακας.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$): Έστω ότι ο A είναι EP πίνακας, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*) &\iff \mathcal{R}(UGU^*) = \mathcal{R}(UG^*U^*) \\
&\iff \mathcal{R}(GU^*) = \mathcal{R}(G^*U^*) \\
&\iff \mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G^*),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει από το ότι $\operatorname{rank}(U) = r$ και η τελευταία από το ότι $\operatorname{rank}(U^*) = n$. Συνεπώς, ο G είναι EP πίνακας.

($\Longleftarrow$): Έστω ότι ο G είναι EP πίνακας, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{N}(A) &\iff Ax = 0 \\
&\iff UGU^*x = 0 \\
&\iff GU^*x = 0 \\
&\iff U^*x \in \mathcal{N}(G) \\
&\iff U^*x \in \mathcal{N}(G^*) \\
&\iff G^*U^*x = 0 \\
&\iff UG^*U^*x = 0 \\
&\iff A^*x = 0 \\
&\iff x \in \mathcal{N}(A^*),
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη και η έβδομη ισοδυναμία προκύπτουν από το ότι $\operatorname{rank}(U) = r$. Συνεπώς, ο A είναι EP πίνακας. □

Σημείωση 4.1.

(i) Το αποτέλεσμα του προηγούμενου λήμματος δεν είναι αληθές αν $\operatorname{rank}(U) \neq r$. Προς επαλήθευση, για τη μία κατεύθυνση έστω ότι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και για την άλλη έστω ότι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Όπως παρατηρούμε, στην πρώτη περίπτωση $\mathcal{R}(G) \neq \mathcal{R}(G^*)$ και στη δεύτερη $\mathcal{R}(A) \neq \mathcal{R}(A^*)$.

(ii) Ένα άμεσο πόρισμα του προηγούμενου λήμματος, είναι το ότι αν ο G είναι EP πίνακας και ο U ορθομοναδιαίος, τότε ο $UGU^* = UGU^{-1}$ είναι επίσης EP πίνακας. Από την άλλη μεριά, αν ο G είναι EP πίνακας και ο U αντιστρέψιμος, τότε δεν είναι γενικά αληθές ότι ο UGU^{-1} είναι EP πίνακας. Προς επαλήθευση, έστω ότι

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Όπως παρατηρούμε, $\mathcal{R}(UGU^{-1}) \neq \mathcal{R}((UGU^{-1})^*)$.

Το επόμενο θεώρημα είναι το κύριο θεώρημα της παρούσας ενότητας και στην ουσία αποτελεί επέκταση του Θεωρήματος 3.5. Με τη χρήση του παρακάτω θεωρήματος, μπορούμε να χαρακτηρίζουμε EP πίνακες μέσω παραγοντοποιήσεων της γενικής μορφής $A = U(A_1 \oplus 0)U^*$.

Θεώρημα 4.1. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n = n_1 + n_2$ και $r = r_1 + r_2$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A EP πίνακας,*

(ii) *υπάρχουν $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίος και $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε $A = U_1(A_1 \oplus 0)U_1^*$,*

(iii) *υπάρχουν $U_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος και $A_2 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε $A = U_2(A_2 \oplus 0)U_2^*$,*

(iv) *υπάρχουν $U_3 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ με $\operatorname{rank}(U_3) = r$ και $A_3 \in \mathbb{C}^{r_1\times r_1}$ αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε $A = U_3(A_3 \oplus 0)U_3^*$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Βλέπε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Προφανές, αφού ένας ορθομοναδιαίος πίνακας είναι αντιστρέψιμος (βλέπε [10, σ. 321]).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Προφανές, αφού ένας αντιστρέψιμος πίνακας στην ανοιχτή κλιμακωτή μορφή του είναι ο I, δηλαδή $\text{rank}(U_3) = r$ (βλέπε [10, (3.7.5), (3.7.7), σ. 116]).

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Αφού ο A_3 είναι αντιστρέψιμος, από την Πρόταση 3.3 έχουμε ότι ο A_3 είναι EP πίνακας. Επιπλέον, από το Λήμμα 4.1, έχουμε ότι ο $A_3 \oplus 0$ είναι επίσης EP πίνακας. Συνεπώς, από το Λήμμα 4.2 έχουμε ότι ο A είναι EP πίνακας. □

Σημείωση 4.2.

(i) Όσα αναφέραμε στη Σημείωση 4.1, (i) ισχύουν επίσης για το προηγούμενο θεώρημα. Σαν αποτέλεσμα, αν δεν υποθέσουμε ότι $\text{rank}(U_3) = r$, τότε ο A δεν είναι πάντοτε EP πίνακας.

(ii) Είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι αν $A = U(A_1 \oplus 0)U^*$, με U ορθομοναδιαίο και A_1 αντιστρέψιμο, τότε αντίστοιχα $A^\dagger = U(A_1^{-1} \oplus 0)U^*$. Η επαλήθευση μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τις (2.4)-(2.7) ή χρησιμοποιώντας το Γεγονός (6.3.8) του [2, σ. 371] από τη στιγμή που ο A_1 είναι αντιστρέψιμος.

Στην επόμενη πρόταση, παρουσιάζουμε ότι η ύπαρξη ταυτόχρονων παραγοντοποιήσεων του A και του A^* της γενικής μορφής $A = V(A \oplus 0)S$ και της $A^* = W(B \oplus 0)S$, συνεπάγεται ότι ο A είναι EP πίνακας. Μία περίπτωση της παραπάνω γενικής μορφής είναι αυτή όπου $A = U(A \oplus 0)U^*$ και $A^* = U(B \oplus 0)U^*$, όπου οι U, A και B έχουν πλήρη τάξη ως προς τη στήλη.

Πρόταση 4.1. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $r = r_1 + r_2$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*

(ii) *υπάρχουν $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ με $\text{rank}(V_1) = r$, $W_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $S_1 \in \mathbb{C}^{r\times n}$, $A_1 \in \mathbb{C}^{r_1\times r_1}$ με $\text{rank}(A_1) = r_1$ και $B_1 \in \mathbb{C}^{r_1\times r_1}$ τέτοιοι ώστε $A = V_1(A_1 \oplus 0)S_1$ και $A^* = W_1(B_1 \oplus 0)S_1$,*

(iii) *υπάρχουν $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $W_2 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ με $\text{rank}(W_2) = r$, $S_2 \in \mathbb{C}^{r\times n}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{r_1\times r_1}$ και $B_2 \in \mathbb{C}^{r_1\times r_1}$ με $\text{rank}(B_2) = r_1$ τέτοιοι ώστε $A = V_2(A_2 \oplus 0)S_2$ και $A^* = W_2(B_2 \oplus 0)S_2$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii),(iii): Προκύπτουν από το Θεώρημα 4.1.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(A) &\Longrightarrow Ax = 0 \\ &\Longrightarrow V_1(A_1 \oplus 0)S_1 x = 0 \\ &\Longrightarrow (A_1 \oplus 0)S_1 x = 0 \\ &\Longrightarrow S_1 x \in \mathcal{N}(A_1 \oplus 0) \\ &\Longrightarrow S_1 x \in \{0\} \oplus \mathbb{C}^n \\ &\Longrightarrow W_1(B_1 \oplus 0)S_1 x = 0 \\ &\Longrightarrow A^* x = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \mathcal{N}(A^*), \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισοδυναμία προκύπτει από το γεγονός ότι $\mathrm{rank}(V_1) = r$. Άρα, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$ και από το Θεώρημα 3.1, ο A είναι EP πίνακας.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με το (ii) $\Longrightarrow$ (i) αντικαθιστώντας τον V_1 με τον W_2, τον W_1 με τον V_2, τον A_1 με τον B_2 και τον B_1 με τον A_2. □

Σημείωση 4.3.

(i) Αν στο (ii) της προηγούμενης πρότασης υποθέσουμε μόνο ότι $\mathrm{rank}(V_1) = r$ ή μόνο ότι $\mathrm{rank}(A_1) = r_1$, τότε ο A δεν είναι πάντοτε EP πίνακας.

(ii) Χρησιμοποιώντας τη Σημείωση 4.2, (ii) και το Θεώρημα 2.29, (v) παίρνουμε ότι τα αποτελέσματα της προηγούμενης πρότασης ισχύουν επίσης αν αντικαταστήσουμε τον A^* με τον $A^\dagger$.

Από όσα αναφέραμε προηγουμένως στη Σημείωση 4.1, (ii), αν αντικαταστήσουμε τον $A = U_2(A_2 \oplus 0)U_2^*$ με τον $A = U_2(A_2 \oplus 0)U_2^{-1}$ στο Θεώρημα 4.1, (iii), τότε ο A δεν είναι πάντοτε EP πίνακας. Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζουμε ότι η ύπαρξη ταυτόχρονων παραγοντοποιήσεων του A και του A^* της μορφής $A = U(A \oplus 0)U^{-1}$ και της $A^* = U(B \oplus 0)U^{-1}$, με U αντιστρέψιμο και έναν από τους A και B επίσης αντιστρέψιμο, συνεπάγεται ότι ο A είναι EP πίνακας.

Πρόταση 4.2. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $n = n_1 + n_2$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*

(ii) *υπάρχουν $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμοι και $B_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ τέτοιοι ώστε $A = U_1(A_1 \oplus 0)U_1^{-1}$ και $A^* = U_1(B_1 \oplus 0)U_1^{-1}$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Προκύπτει από το Θεώρημα 4.1.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.1, (ii) $\Longrightarrow$ (i). □

Σημείωση 4.4. Χρησιμοποιώντας τη Σημείωση 4.2, (ii) και το Θεώρημα 2.29, (v) παίρνουμε ότι τα αποτελέσματα της προηγούμενης πρότασης ισχύουν επίσης αν αντικαταστήσουμε τον A^* με τον $A^\dagger$.

Τέλος, προτείνουμε έναν χαρακτηρισμό EP πινάκων μέσω ταυτόχρονων παραγοντοποιήσεων του A^*A και του AA^*.

Πρόταση 4.3. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n = n_1 + n_2$ και $r = r_1 + r_2$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) *υπάρχουν $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίος και $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε $A^*A = U_1(A_1^*A_1 \oplus 0)U_1^*$ και $AA^* = U_1(A_1A_1^* \oplus 0)U_1^*$,*
(iii) *υπάρχουν $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ με $\operatorname{rank}(V_2) = r$, $W_2 \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $S_2 \in \mathbb{C}^{r\times n}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ με $\operatorname{rank}(A_2) = n_1$ και $B_2 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ τέτοιοι ώστε $A^*A = V_2(A_2 \oplus 0)S_2$ και $AA^* = W_2(B_2 \oplus 0)S_2$,*
(iv) *υπάρχουν $V_3 \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $W_3 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ με $\operatorname{rank}(W_3) = r$, $S_3 \in \mathbb{C}^{r\times n}$, $A_3 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ ανδ $B_3 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ με $\operatorname{rank}(B_3) = n_1$ τέτοιοι $A^*A = V_3(A_3 \oplus 0)S_3$ και $AA^* = W_3(B_3 \oplus 0)S_3$,*
(v) *υπάρχουν $U_4 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος και $A_4, B_4 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ με $\operatorname{rank}(A_4) = n_1$ και $\operatorname{rank}(B_4) = n_1$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A^*A = U_4(A_4 \oplus 0)U_4^{-1}$ και $AA^* = U_4(A_4 \oplus 0)U_4^{-1}$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Προκύπτει από το Θεώρημα 4.1.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii),(iv): Προφανές.
(ii) $\Longrightarrow$ (v): Προφανές.
(v) $\Longrightarrow$ (iii),(iv): Προφανές.
(iii),(iv) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.1, (ii) $\Longrightarrow$ (i) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.11, (iii), (iv). □

Σημείωση 4.5. Αν στο (ii) της προηγούμενης πρότασης υποθέσουμε μόνο ότι ο U_1 είναι ορθομοναδιαίος ή μόνο ότι ο A_1 είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A δεν είναι πάντοτε EP πίνακας.

4.2 Παραγοντοποίηση της μορφής $A^* = SA$

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε χαρακτηρισμούς EP πινάκων μέσω παραγοντοποιήσεων του A της μορφής $A^* = SA$, της μορφής $A^\dagger = SA$, της μορφής $A^*A = SAA^*$, της μορφής $A^*A = ASA^*$, της μορφής $A^\dagger A = SAA^\dagger$ και της μορφής $A^\dagger A = ASA^\dagger$. Ξεκινάμε χαρακτηρίζοντας EP πίνακες μέσω παραγοντοιήσεων της μορφής $A^* = SA$.

Πρόταση 4.4. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) *υπάρχει $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A^* = V_1A$,*
(iii) *υπάρχει $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = A^*V_2$,*

(iv) *υπάρχει* $V_3 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε* $A^* = AV_3$,
(v) *υπάρχει* $V_4 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε* $A = V_4A^*$,
(vi) *υπάρχουν* $S_1, S_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *τέτοιοι ώστε* $A^* = S_1A$ *και* $A = S_2A^*$,
(vii) *υπάρχουν* $S_3, S_4 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *τέτοιοι ώστε* $A^* = AS_3$ *και* $A = A^*S_4$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Από το Θεώρημα 4.1, αφού ο A είναι EP πίνακας, έχουμε ότι $A = U(A_1 \oplus 0)U^*$, όπου ο $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ορθομοναδιαίος, ο $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ είναι αντιστρέψιμος και $n = n_1 + n_2$. Έστω

$$V_1 = U(A_1^*A_1^{-1} \oplus I_{n_2})U^*,$$

τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
V_1A &= (U(A_1^*A_1^{-1} \oplus I_{n_2})U^*)(U(A_1 \oplus 0)U^*) \\
&= U(A_1^*A_1^{-1} \oplus I_{n_2})(A_1 \oplus 0)U^* \\
&= U \begin{bmatrix} A_1^*A_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U(A_1^* \oplus 0)U^* \\
&= A^*,
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο U είναι ορθομοναδιαίος πίνακας.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Από την Πρόταση 3.1 έχουμε ότι το να είναι ο A EP πίνακας ισοδυναμεί με το να είναι και ο A^* EP πίνακας. Σαν αποτέλεσμα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
A = V_1A &\implies (A^*)^* = (V_1A)^* \\
&\implies A = A^*V_1^* \\
&\implies A = A^*V_2.
\end{aligned}$$

Το αντίστροφο προκύπτει με παρόμοιο τρόπο.

(i) $\Longrightarrow$ (iv): Παρόμοια με το (i) $\Longrightarrow$ (ii) με $V_3 = U(A_1^{-1}A_1^* \oplus I_{n_2})U^*$.

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v): Παρόμοια με το (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (vi): Από τη στιγμή που ο V_1 είναι αντιστρέψιμος έχουμε ότι

$$A^* = V_1A \implies A = V_1^{-1}A^*.$$

Θέτουμε $V_1 = S_1$ και $V_1^{-1} = S_2$ για να πάρουμε το (vi).

(vi) $\Longrightarrow$ (i): Από τη σχέση $A^* = S_1A$ παίρνουμε ότι $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^*)$ και συνεπώς από το Θεώρημα 3.1, ο A είναι EP πίνακας. Θα μπορούσαμε επίσης να καταλήξουμε στη σχέση $\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(A)$ από την $A = S_2A^*$, κάτι που θα μας οδηγούσε στο ίδιο συμπέρασμα, ότι δηλαδή ο A είναι EP πίνακας.

(iv) $\Longrightarrow$ (vii): Παρόμοια με το (ii) $\Longrightarrow$ (vi).

(vii) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με το (vi) $\Longrightarrow$ (i). □

Σημείωση 4.6. Αν $A = U(A_1 \oplus 0)U^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίο πίνακα, $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμο και $n = n_1+n_2$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης $A^* = XA$ είναι

$$X = U \begin{bmatrix} A_1^* A_1^{-1} & B \\ 0 & D \end{bmatrix} U^*, \quad B \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}, \quad D \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}.$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε, με παρόμοιο τρόπο, τις λύσεις των εξισώσεων $A = XA^*$, $A = A^*X$ και $A^* = AX$. Για παρόμοια αποτελέσματα βλέπε [9].

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας μία ανάλογη πρόταση που αφορά το χαρακτηρισμό EP πινάκων μέσω παραγοντοποιήσεων της μορφής $A^\dagger = SA$.

Πρόταση 4.5. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) *υπάρχει $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A^\dagger = V_1 A = AV_1$,*
(iii) *υπάρχει $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = V_2 A^\dagger = A^\dagger V_2$,*
(iv) *υπάρχουν $S_1, S_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^\dagger = S_1 A$ και $A = S_2 A^\dagger$,*
(v) *υπάρχουν $S_3, S_4 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^\dagger = AS_3$ και $A = A^\dagger S_4$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Από το Θεώρημα 4.1, αφού ο A είναι EP πίνακας, έχουμε $A = U(A_1 \oplus 0)U^*$, όπου ο $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ορθομοναδιαίος πίνακας, ο $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμος και $n = n_1 + n_2$. Έστω

$$V_1 = U(A_1^{-2} \oplus I_{n_2})U^*,$$

τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V_1 A &= (U(A_1^{-2} \oplus I_{n_2})U^*)(U(A_1 \oplus 0)U^*) \\ &= U(A_1^{-2} \oplus I_{n_2})(A_1 \oplus 0)U^* \\ &= U \begin{bmatrix} A_1^{-2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U(A_1^{-1} \oplus 0)U^* \\ &= A^\dagger, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο U είναι ορθομοναδιαίος πίνακας και η τελευταία από τη Σημείωση 4.2, (ii). Από την άλλη μεριά, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} AV_1 &= (U(A_1 \oplus 0)U^*)(U(A_1^{-2} \oplus I_{n_2})U^*) \\ &= U(A_1 \oplus 0)(A_1^{-2} \oplus I_{n_2})U^* \\ &= U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U(A_1^{-1} \oplus 0)U^* \\ &= A^\dagger, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει όπως παραπάνω. Συνεπώς, $A^\dagger = V_1 A = AV_1$.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Παρόμοια με το (i) $\Longrightarrow$ (ii) με $V_2 = U(A^2 \oplus I_{n_2})U^*$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv): Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.4, (ii) $\Longrightarrow$ (vi).

(iii) $\Longrightarrow$ (v): Όπως παραπάνω.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.4, (vi) $\Longrightarrow$ (i) και το Θεώρημα 2.29, (v).

(v) $\Longrightarrow$ (i): Όπως παραπάνω. □

Σημείωση 4.7.

(i) Γενικά δεν είναι πάντοτε αληθές ότι αν ο A είναι EP πίνακας και V είναι αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε $A^\dagger = VA$, τότε $A^\dagger = AV$. Προς επαλήθευση, έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Αν $A = U(A_1 \oplus 0)U^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$, με $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορθομοναδιαίο πίνακα, $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ αντιστρέψιμο και $n = n_1 + n_2$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης $A^\dagger = XA$ είναι

$$X = U \begin{bmatrix} A_1^{-2} & B \\ 0 & D \end{bmatrix} U^*, \quad B \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}, \quad D \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}.$$

και οι λύσεις της εξίσωσης $A^\dagger = XA = AX$ είναι

$$X = U \begin{bmatrix} A_1^{-2} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} U^*, \quad D \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2},$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε, με παρόμοιο τρόπο, τις λύσεις των εξισώσεων $A = XA^\dagger$ και $A = XA^\dagger = A^\dagger X$.

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με δύο χαρακτηρισμούς EP πινάκων μέσω παραγοντοποιήσεων της μορφής $A^*A = SAA^*$ και $A^*A = ASA^*$.

Πρόταση 4.6. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) *υπάρχει $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A^*A = V_1AA^*$,*
(iii) *υπάρχει $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A^*A = AA^*V_2$,*
(iv) *υπάρχουν $S_1, S_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^*A = S_1AA^*$ και $AA^* = S_2A^*A$,*
(v) *υπάρχουν $S_3, S_4 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^*A = AA^*S_3$ και $AA^* = A^*AS_4$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Από το Θεώρημα 4.1, αφού ο A είναι EP πίνακας, έχουμε $A = U(A_1 \oplus 0)U^*$, όπου ο $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ορθομοναδιαίος πίνακας, ο $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ είναι αντιστρέψιμος και $n = n_1 + n_2$. Έστω

$$V_1 = U(A_1^*A_1(A_1^*)^{-1}A_1^{-1} \oplus I_{n_2})U^*,$$

τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
V_1A^*A &= (U(A_1^*A_1(A_1^*)^{-1}A_1^{-1} \oplus I_{n_2})U^*)(U(A_1 \oplus 0)U^*)(U(A_1^* \oplus 0)U^*)\\
&= U(A_1^*A_1(A_1^*)^{-1}A_1^{-1} \oplus I_{n_2})(A_1 \oplus 0)(A_1^* \oplus 0)U^*\\
&= U\begin{bmatrix} A_1^*A_1(A_1^*)^{-1}A_1^{-1} & 0\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\
&= U\begin{bmatrix} A_1^*A_1(A_1^*)^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\
&= U\begin{bmatrix} A_1^*A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\
&= U(A_1^*A_1 \oplus 0)U^*\\
&= A^*A,
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο U είναι ορθομοναδιαίος πίνακας.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Παρόμοια με το (i) $\Longrightarrow$ (ii) με $V_2 = U((A_1^*)^{-1}A^{-1}A^*A \oplus I_{n_2})U^*$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv): Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.4, (ii) $\Longrightarrow$ (vi).

(iii) $\Longrightarrow$ (v): Όπως παραπάνω.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.4, (vi) $\Longrightarrow$ (i) και το Θεώρημα 2.11, (iii), (iv).

(v) $\Longrightarrow$ (i): Όπως παραπάνω. □

Σημείωση 4.8.

(i) Αν $A = U(A_1 \oplus 0)U^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίο πίνακα, $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμο και $n = n_1 + n_2$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης $A^*A = XAA^*$ είναι

$$X = U\begin{bmatrix} A_1^*A_1(A_1^*)^{-1}A_1^{-1} & B\\ 0 & D\end{bmatrix}U^*, \quad B \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}, \quad D \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}.$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε, με παρόμοιο τρόπο, τις λύσεις της εξίσωσης $A^*A = AA^*X$.

(ii) Χρησιμοποιώντας τη Σημείωση 4.2, (ii) και το Θεώρημα 2.11, (iii), (iv) παίρνουμε ότι τα αποτελέσματα της προηγούμενης πρότασης ισχύουν επίσης αν αντικαταστήσουμε τον A^*A με τον $A^\dagger A$ και τον AA^* με τον $AA^\dagger$ και αν αντικαταστήσουμε μόνο τον A^*A με τον $A^\dagger A$ ή τον AA^* με τον $AA^\dagger$.

Πρόταση 4.7. *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε τα παρακάτω ισχύουν:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*

(ii) *υπάρχει $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A^*A = AV_1^*V_1A^*$,*

(iii) *υπάρχουν $S_1, S_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^*A = AS_1A^*$ και $AA^* = A^*S_2A$.*

Απόδειξη. (i) $\implies$ (ii): Από την Πρόταση 4.4, αφού ο A είναι EP πίνακας, έχουμε ότι υπάρχει $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = V_1A^*$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A = V_1A^* &\implies A^* = AV_1^* \\ &\implies A^*A = AV_1^*A \\ &\implies A^*A = AV_1^*V_1A, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από το γενογός ότι $A = V_1A^*$.

(ii) $\implies$ (i): Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(A) &\iff x \in \mathcal{N}(A^*A) \\ &\iff x \in \mathcal{N}(AV_1^*V_1A^*) \\ &\iff x \in \mathcal{N}((V_1A^*)^*V_1A^*) \\ &\iff x \in \mathcal{N}(V_1A^*) \\ &\iff V_1A^*x = 0 \\ &\iff A^*x = 0 \\ &\iff x \in \mathcal{N}(A^*), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τέταρτη ισοδυναμία προκύπτουν από το Θεώρημα 2.11, (iv) και η έκτη από το γεγονός ότι ο V_1 έχει πλήρη τάξη. Συνεπώς, ο A είναι EP πίνακας.

(i) $\implies$ (iii): Από το (i) $\iff$ (ii) και την Πρόταση 3.1 έχουμε ότι υπάρχει $V_3, V_4 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι τέτοιοι ώστε $A^*A = AV_3^*V_3A^*$ και $AA^* = A^*V_4^*V_4A$. Θέτουμε $V_3^*V_3 = S_1$ και $V_4^*V_4 = S_2$ για να πάρουμε το (iii).

(iii) $\implies$ (i): Από τη σχέση $A^*A = AS_1A^*$ και το Θεώρημα 2.11, (iv) παίρνουμε ότι $\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(A)$ και συνεπώς από το Θεώρημα 3.1, ο A είναι EP πίνακας. Θα μπορούσαμε επίσης να καταλήξουμε στη σχέση $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^*)$ από την $AA^* = A^*S_2A$, κάτι που θα μας οδηγούσε στο ίδιο συμπέρασμα, ότι δηλαδή ο A είναι EP πίνακας. □

Σημείωση 4.9.

(i) Αν $A = U(A_1 \oplus 0)U^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίο πίνακα, $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμο και $n = n_1 + n_2$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης $A^*A = AXA^*$ είναι

$$X = U \begin{bmatrix} A_1^{-1}A_1^*A_1(A_1^*)^{-1} & B \\ C & D \end{bmatrix} U^*,$$

$$B \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}, \quad C \in \mathbb{C}^{n_2\times n_1}, \quad D \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}.$$

(ii) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.29, (v) και το Θεώρημα 2.11, (iii), (iv) παίρνουμε ότι τα αποτελέσμτα της προηγούμενης πρότασης ισχύουν επίσης αν αντικαταστήσουμε τον A^* με τον $A^\dagger$.

4.3 Παραγοντοποίηση της μορφής $\boldsymbol{A = BC}$

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε χαρακτηρισμούς EP πινάκων μέσω παραγοντοποιήσεων του A της μορφής $A = BC$, όπου ο B έχει πλήρη τάξη ως προς τη στήλη και ο C πλήρη τάξη ως προς τη σειρά.

Από την Πρόταση 1.3.1 του [3, σ. 14] παίρνουμε ότι αν $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, τότε υπάρχουν $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$ και $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ τέτοια ώστε $A = BC$, με $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C)$. Αξίζει να σημειωθεί, ότι για κάθε $U \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντιστρέψιμο, ο $BU \in \mathbb{C}^{m\times r}$ έχει πλήρη τάξη ως προς τη στήλη, δηλαδή $\operatorname{rank}(BU) = r$, και ο $U^{-1}C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ έχει πλήρη τάξη ως προς τη σειρά, δηλαδή $\operatorname{rank}(U^{-1}C) = r$. Έτσι, οι παραγοντοποιήσεις του A της μορφής $A = BC$ δεν είναι μοναδικοί. Ένα άμεσο αποτέλεσμα της Πρότασης 1.3.1 του [3, σ. 14] είναι ότι $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ και $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(C)$. Επιπλέον, έχουμε ότι $A^* = C^*B^*$, όπου ο $C^* \in \mathbb{C}^{r\times n}$ έχει πλήρη τάξη ως προς τη στήλη, ο $B^* \in \mathbb{C}^{r\times m}$ έχει πλήρη τάξη ως προς τη σειρά, $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(C^*)$ και $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(B^*)$.

Υποθέτοντας ότι $A = BC$, με A, B και C όπως παραπάνω, από τις (3.9.7) και (3.9.8) του [21, σ. 84] έχουμε ότι

$$B^\dagger = (B^*B)^{-1}B^* \tag{4.1}$$

και

$$C^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}. \tag{4.2}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$B^\dagger B = I_r \tag{4.3}$$

και

$$CC^\dagger = I_r. \tag{4.4}$$

Έτσι, από την (4.1) και την (4.2), έχουμε ότι

$$A^\dagger = C^\dagger B^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*.$$

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα εξαρχής χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3.2 του [3, σ. 14].

Καθ' όλη την έκταση της παρούσας ενότητας, θεωρούμε ότι $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times r}$ με $\operatorname{rank}(B) = r$ και $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ με $\operatorname{rank}(C) = r$ τέτοια ώστε $A = BC$. Στα επόμενα τέσσερα θεωρήματα, χαρακηρίζουμε EP πίνακες μέσω πραγοντοποιήσεων της μορφής $A = BC$.

Θεώρημα 4.2. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) $BB^\dagger = C^\dagger C$,
(iii) $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(C)$.

Απόδειξη. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii): Αφού $A^\dagger = C^\dagger B^\dagger$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Ο } A \text{ είναι EP πίνακας} &\Longleftrightarrow AA^\dagger = A^\dagger A \\ &\Longleftrightarrow BCC^\dagger B^\dagger = C^\dagger B^\dagger BC \\ &\Longleftrightarrow BB^\dagger = C^\dagger C, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισοδυναμία προκύπτει από το Θεώρημα 3.2 και η τελευταία από τις (4.3) και (4.4).

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} BB^\dagger = C^\dagger C &\Longleftrightarrow P_B = P_{C^*} \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C^*) \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{R}(B)^\perp = \mathcal{R}(C^*)^\perp \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(C), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισοδυναμία προκύπτει από τις (2.8) και (2.9) και η τελευταία από το Θεώρημα 2.12, (i). □

Θεώρημα 4.3. *Τα παρακάτω είναι ιδοσύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) $B = C^\dagger CB$ *και* $C = CBB^\dagger$,
(iii) $B^\dagger = B^\dagger C^\dagger C$ *και* $C = CBB^\dagger$,
(iv) $B = C^\dagger CB$ *και* $C^\dagger = BB^\dagger C^\dagger$,
(v) $B^\dagger = B^\dagger C^\dagger C$ *και* $C^\dagger = BB^\dagger C^\dagger$.

Απόδειξη. (i) $\iff$ (ii): Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B = C^\dagger C B &\iff B = P_{C^*} B \\ &\iff \mathcal{N}((C^*)^*) \subseteq \mathcal{N}(B^*) \\ &\iff \mathcal{N}(C) \subseteq \mathcal{N}(B^*), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισοδυναμία προκύπτει από την (2.9) και η δεύτερη από την (2.3). Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C = CBB^\dagger &\iff C = CP_B \\ &\iff \mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{N}(C), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισοδυναμία προκύπτει από την (2.8) και η δεύτερη από την (2.2). Συνεπώς, $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(C)$ και από το Θεώρημα 4.2, ο A είναι EP πίνακας.

(i) $\iff$ (iii): Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B^\dagger = B^\dagger C^\dagger C &\iff B^\dagger = B^\dagger P_{C^*} \\ &\iff \mathcal{N}((C^*)^*) \subseteq \mathcal{N}(B^\dagger) \\ &\iff \mathcal{N}(C) \subseteq \mathcal{N}(B^*), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισοδυναμία προκύπτει από την (2.9), η δεύτερη από την (2.2) και η τελευταία από το Θεώρημα 2.29, (v). Επιπλέον, από ότι είπαμε προηγουμένως έχουμε ότι

$$C = CBB^\dagger \iff \mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{N}(C).$$

Συνεπώς, $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(C)$ από το Θεώρημα 4.2, ο A είναι EP πίνακας.

(i) $\iff$ (iv): Από ότι είπαμε προηγουμένως έχουμε ότι

$$B = C^\dagger C B \iff \mathcal{N}(C) \subseteq \mathcal{N}(B^*).$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C^\dagger = BB^\dagger C^\dagger &\iff C^\dagger = P_B C^\dagger \\ &\iff \mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{N}((C^\dagger)^*) \\ &\iff \mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{N}((C^*)^*) \\ &\iff \mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{N}(C), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισοδυναμία προκύπτει από την (2.8), η δεύτερη από την (2.3) και η τρίτη από το Θεώρημα 2.29, (v). Συνεπώς, $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(C)$ και από το Θεώρημα 4.2, ο A είναι EP πίνακας.

(i) $\iff$ (v): Από ότι είπαμε προηγουμένως έχουμε ότι

$$B^\dagger = B^\dagger C^\dagger C \iff \mathcal{N}(C) \subseteq \mathcal{N}(B^*)$$

και

$$C^\dagger = BB^\dagger C^\dagger \iff \mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{N}(C).$$

Συνεπώς, $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(C)$ και από το Θεώρημα 4.2, ο A είναι EP πίνακας. □

Σημείωση 4.10. Οι ισοδυναμίες του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύουν πάντοτε αν υποθέσουμε ότι μόνο μία από τις δύο συνθήκες σε καθένα από τα (ii)-(v) ισχύουν. Επιπλέον, από τις συνθήκες

$$B = C^\dagger CB \quad \text{και} \quad B^\dagger = B^\dagger C^\dagger C$$

ή

$$C = CBB^\dagger \quad \text{και} \quad C^\dagger = BB^\dagger C^\dagger,$$

δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι ο A είναι EP πίνακας. Προς επαλήθευση, για την πρώτη συνθήκη έστω

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και για τη δεύτερη έστω

$$B = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Και στα δύο παραδείγματα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2, καταλήγουμε στο ότι ο A δεν είναι EP πίνακας.

Θεώρημα 4.4. *Τα παρακάτω είναι ιδοσύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) $A^*A = C^*B^*BCBB^\dagger$ *και* $A^*A = C^*B^*C^\dagger CBC$,
(iii) $AA^* = BCC^*B^*C^*(C^*)^\dagger$ *και* $AA^* = BCBB^\dagger C^*B^*$,
(iv) $A^*A = C^*B^*BCBB^\dagger$ *και* $AA^* = BCC^*B^*C^*(C^*)^\dagger$,
(v) $A^*A = C^*B^*C^\dagger CBC$ *και* $AA^* = BCBB^\dagger C^*B^*$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Αφού ο A είναι EP πίνακας, από το Θεώρημα 4.3 έχουμε ότι

$$B = C^\dagger CB \tag{4.5}$$

και

$$C = CBB^\dagger. \tag{4.6}$$

Σαν αποτέλεσμα, έχουμε ότι

$$A^*A = C^*B^*BC = C^*B^*BCBB^\dagger,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (4.6) και

$$A^*A = C^*B^*BC = C^*B^*C^\dagger CBC,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (4.5).

(i) $\Longrightarrow$ (iii)-(v): Παρόμοια με το (i) $\Longrightarrow$ (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(A^*) &\iff A^*x = 0 \\ &\iff C^*B^*x = 0 \\ &\iff B^*x = 0 \\ &\iff x \in \mathcal{N}(B^*) \\ &\iff x \in \mathcal{N}(B^\dagger), \end{aligned} \tag{4.7}$$

όπου η τρίτη ισοδυναμία προκύπτει από το γεγονός ότι $\mathrm{rank}(C^*) = r$ και η τελευταία από το Θεώρημα 2.29, (v). Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A^*A = C^*B^*BCBB^\dagger &\implies \mathcal{N}(B^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A^*A) \\ &\implies \mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(A), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία συνεπαγωγή προκύπτει από την (4.7) και το Θεώρημα 2.11, (iv). Επιπρόσθετα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A^*A = C^*B^*C^\dagger CBC &\implies A^*A = A^*P_{C^*}A \\ &\implies x^*A^*Ax = x^*A^*P_{C^*}Ax, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{C}^n \\ &\implies x^*A^*Ax = x^*A^*P_{C^*}^2Ax, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{C}^n \\ &\implies x^*A^*Ax = x^*A^*P_{C^*}^*P_{C^*}Ax, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{C}^n \\ &\implies \|Ax\|^2 = \|P_{C^*}Ax\|^2, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{C}^n \\ &\implies Ax = P_{C^*}Ax, \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{C}^n \\ &\implies \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^*), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη συνεπαγωγή προκύπτει από την (2.9), η τρίτη και η τέταρτη από το γεγονός ότι ο P_{T^*} είναι ορθογώνια προβολή και η τελευταί από την (2.3). Συνεπώς, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$ και από το Θεώρημα 3.1, ο A είναι EP πίνακας.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με το (ii) $\Longrightarrow$ (i).

(iv), (v) $\Longrightarrow$ (i): Προκύπτει από το συνδυασμό των (ii) $\Longrightarrow$ (i) και (iii) $\Longrightarrow$ (i). □

Θεώρημα 4.5. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP πίνακας,*
(ii) *υπάρχει $V \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντιστρέψιμο τέτοιο ώστε $C = VB^*$,*
(iii) *υπάρχει $V \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντιστρέψιμο τέτοιο ώστε $B^* = VC$,*
(iv) *υπάρχουν $S_1, S_2 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ τέτοια ώστε $C = S_1B^*$ και $B^* = S_2C$,*
(v) *υπάρχουν $S_3, S_4 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ τέτοια ώστε $B^* = S_3C$ και $C = S_4B^*$,*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Προφανώς

$$C = CC^{\dagger}C = CP_{C^*} \tag{4.8}$$

και

$$B^* = B^*BB^{\dagger} = B^*P_B, \tag{4.9}$$

όπου η τελευταία ισότητα και στις δύο εξισώσεις προκύπτει από την (2.9) και την (2.8) αντίστοιχα. Αφού ο A είναι EP πίνακας, από το Θεώρημα 4.2, έχουμε ότι $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(C)$ και άρα η (4.9) γίνεται

$$B^* = B^*P_{C^*}. \tag{4.10}$$

Αφού ο B έχει πλήρη τάξη ως προς τη στήλη, ο B^* έχει πλήρη τάξη ως προς τη σειρά και άρα ο

$$B^*|_{\mathcal{R}(C^*)} : \mathcal{R}(C^*) \to \mathbb{C}^n$$

είναι ισομορφισμός και συνεπώς, ο

$$(B^*|_{\mathcal{R}(C^*)})^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathcal{R}(C^*)$$

είναι επίσης ισομορφισμός. Επιπλέον, αφού ο C έχει πλήρη τάξη ως προς τη σειρά, ο

$$C|_{\mathcal{R}(C^*)} : \mathbb{C}^n \to \mathcal{R}(C^*)$$

είναι επίσης ισομορφισμός. Έστω $V|_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ με

$$V|_{\mathbb{C}^n} : C|_{\mathcal{R}(C^*)}(B^*|_{\mathcal{R}(C^*)})^{-1}.$$

Από ότι είπαμε προηγουμένως, ο V είναι ισομορφισμός. Από το Πόρισμα 3.1 του [20, σ. 158], έχουμε ότι

$$\begin{aligned} VB^* &= C(B^*)^{-1}B^* \\ &= C(B^*)^{-1}B^*P_{C^*} \\ &= CP_{C^*} \\ &= C, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την (4.10) και η τελευταία από την (4.8).

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Παρόμοια με το (i) $\Longrightarrow$ (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Αφού $C = VB^*$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(C) &\implies Cx = 0 \\ &\implies VB^*x = 0 \\ &\implies B^*x = 0 \\ &\implies x \in \mathcal{N}(B^*), \end{aligned}$$

όπου η τρίτη συνεπαγωγή προκύπτει από το γεγονός ότι ο V έχει πλήρη τάξη, δηλαδή $\operatorname{rank}(V) = r$. Έτσι, αφού $\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(B^*)$, από το Θεώρημα 4.2 έχουμε ότι ο A είναι EP πίνακας.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Παρόμοια με το (ii) $\Longrightarrow$ (i).

(ii) $\Longrightarrow$ (iv): Έχουμε ότι

$$C = VB^* \implies B^* = V^{-1}C.$$

Θέτουμε $V = S_1$ και $V^{-1} = S_2$ για να πάρουμε το (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (v): Παρόμοια με το (ii) $\Longrightarrow$ (iv).

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Από τη σχέση $C = S_1B^*$ παίρνουμε ότι $\mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{N}(C)$ και από τη σχέση $B^* = S_2C$ παίρνουμε ότι $\mathcal{N}(C) \subseteq \mathcal{N}(B^*)$. Συνεπώς, $\mathcal{N}(B^*) = \mathcal{N}(C)$ και από το Θεώρημα 4.2 έχουμε ότι ο A είναι EP πίνακας.

(v) $\Longrightarrow$ (iii): Παρόμοια με το (iv) $\Longrightarrow$ (ii). □

Σημείωση 4.11.

(i) Τα αποτελέσματα του προηγούμενου θεωρήματος επίσης ισχύουν αν αντικαταστήσουμε στο (ii) και στο (iii), τις σχέσεις $C = VB^*$ και $B^* = VC$ με τις σχέσεις $C = B^*V$ και $B^* = CV$ αντίστοιχα.

(ii) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα, μπορούμε να πάρουμε γενικότερους χαρακτηρισμούς των EP πινάκων. Για παράδειγμα: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και έστω ότι υπάρχουν $B \in \mathbb{C}^{n\times r}$ με $\operatorname{rank}(B) = r$ και $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ τέτοια ώστε $A = BC$. Επίσης, έστω $V \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $C = VB^*$. Αφού $\operatorname{rank}(B) = r$, τότε $\operatorname{rank}(B^*) = r$ και από τη σχέση $C = VB^*$ παίρνουμε ότι $\operatorname{rank}(C) = r$. Συνεπώς, από ότι είπαμε στο προηγούμενο θεώρημα, ο A είναι EP πίνακας.

4.4 Παραγοντοποίηση της μορφής $\boldsymbol{A = P\left[\begin{smallmatrix} D & DS^* \\ SD & SDS^* \end{smallmatrix}\right]P^*}$

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε χαρακτηρισμούς EP πινάκων μέσω παραγοντοποιήσεων του A της μορφής $A = P\left[\begin{smallmatrix} D & DS^* \\ SD & SDS^* \end{smallmatrix}\right]P^*$, όπου ο P είναι πίνακας μεταθέσεων, ο D είναι τετραγωνικός και ο S αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 4.6 ([14, Θεώρημα 1, σ. 1]). *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $n = r + m$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο A είναι EP_r πίνακας,*

(ii) *υπάρχουν $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος και $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ αντιστρέψιμος τέτοιοι ώστε $A = V(A_1 \oplus 0)V^*$,*

(iii) *υπάρχει πίνακας μεταθέσεων* $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *αντιστρέψιμος και* $S \in \mathbb{C}^{m\times r}$ *τέτοιοι ώστε*

$$A = P \begin{bmatrix} D & DS^* \\ SD & SDS^* \end{bmatrix} P^* = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ S & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix} P^*.$$

Απόδειξη. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii): Προκύπτει από το Θεώρημα 4.1.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Έστω ότι ο$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι $\mathrm{EP_r}$ πίνακας. Τότε για έναν κατάλληλο πίνακα μεταθέσεων $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, έχουμε ότι $P^*AP = B = [B_i]$. Έστω

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ S_1 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & B_4 - S_1DS_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & S_2 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

όπου ο $D \in \mathbb{C}^{r\times r}$ είναι ένας κύριος υποπίνακας του A, ο $S_1 \in \mathbb{C}^{m\times r}$ δίνεται από τη σχέση $S_1 = B_3D^{-1}$ και ο $S_2 \in \mathbb{C}^{r\times m}$ δίνεται από τη σχέση $S_2 = D^{-1}B_2$. Χρησιμοποιώντας την (1.63) του [21, σ. 14], παίρνουμε ότι $\mathrm{rank}(B) = r$ αφού ο A είναι $\mathrm{EP_r}$ πίνακας και έτσι έχουμε ότι

$$B = \begin{bmatrix} D & DS_2 \\ S_1D & S_1DS_2 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Επίσης, έστω

$$C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -S_1 & I_m \end{bmatrix},$$

τότε από την (4.11), έχουμε ότι

$$CP^*APC^* = \begin{bmatrix} D & DS_2 - DS_1^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αφού οι A, C και P είναι EP πίνακες (βλέπε Πρόταση 3.3 για τους C, P), έχουμε ότι ο CP^*APC^* είναι επίσης EP πίνακας και συνεπώς, από το Λήμμα 3.1, έχουμε ότι $DS_2 = DS_1^*$ και άρα $S_1 = S_2$. Σαν αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} CP^*APC^* = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\Longleftrightarrow A = (P^*)^{-1}C^{-1} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (C^*)^{-1}P^{-1} \\ &\Longleftrightarrow A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ S & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix} P^* \\ &\Longleftrightarrow A = P \begin{bmatrix} D & DS^* \\ SD & SDS^* \end{bmatrix} P^*, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $P^{-1} = P^* = P$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Προφανές. □

Στη Σημείωση 4.6 παρουσιάσαμε τις λύσεις των εξισώσεων $A^* = XA$ και $A^* = AX$, όπου ο A είναι EP πίνακας, χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση $A = U(A_1 \oplus 0)U^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, με $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ορθομοναδιαίο και $A_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ αντιστρέψιμο, όπως παρουσιάστηκε στο Θεώρημα 4.1. Στο επόμενο θεώρημα, παρουσιάζουμε τη γενική μορφή λύσεων της εξίσωσης $A^* = XA = AX$, όπου ο A είναι $\mathrm{EP_r}$ πίνακας, χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση που παρουσιάστηκε προηγουμένως στο Θεώρημα 4.6.

Θεώρημα 4.7 ([9, Θεώρημα 2, σ. 445]). *Έστω ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι EP_r πίνακας, ο $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι πίνακας μεταθέσεων, ο $D \in \mathbb{C}^{r\times r}$ είναι αντιστρέψιμος, ο $S \in \mathbb{C}^{m\times r}$, ο $W \in \mathbb{C}^{m\times m}$ και $n = r + m$. Τότε ο πίνακας*

$$X = P\begin{bmatrix} I_r & -S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D^{-1}D^*(I_n + S^*S) & D^{-1}D^*S^* \\ SD^*D^{-1} & W \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -S & I_m \end{bmatrix}P^*$$

είναι μία λύση της εξίσωσης $A^* = XA = AX$ για κάθε επιλογή του W και κάθε λύση της προαναφερθείσας εξίσωσης έχει αυτή τη μορφή.

Απόδειξη. Έστω ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι $\mathrm{EP_r}$ πίνακας, ο $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι πίνακας μεταθέσεων, ο $D \in \mathbb{C}^{r\times r}$ είναι αντιστρέψιμος, ο $S \in \mathbb{C}^{m\times r}$, ο $W \in \mathbb{C}^{m\times m}$ και $n = r + m$. Τότε από το Θεώρημα 4.6, η εξίσωση $A^* = XA$ μπορεί να γραφεί ως

$$P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ S & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix}P^* = XP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ S & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix}P^*,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{bmatrix} D^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Z_1\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

όπου

$$Z_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -S & I_m \end{bmatrix}P^*XP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ S & I_m \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Έστω

$$P^*XP = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

όπου $T \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $U \in \mathbb{C}^{r\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{m\times r}$ και $W \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Έτσι, η (4.13) γίνεται

$$Z_1 = \begin{bmatrix} T + US & U \\ V - ST - WS - SUS & W - SU \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Αντικαθιστώντας την (4.15) στην (4.12), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} D^* &= (T + US)D \iff \\ T &= D^*D^{-1} - US \end{aligned} \tag{4.16}$$

και

$$\begin{aligned} 0 &= (V - ST - WS - SUS)D \iff \\ 0 &= V - ST - WS - SUS. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Αντικαθιστώντας την (4.16) στην (4.17), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= V - SD^*D^{-1} - WS \iff \\ V &= SD^*D^{-1} - WS. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Συνεπώς, από τις (4.14), (4.16) και (4.18), έχουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $A^* = XA$ είναι οι

$$X = P \begin{bmatrix} D^*D^{-1} - US & U \\ SD^*D^{-1} - WS & W \end{bmatrix} P^*, \tag{4.19}$$

όπου $U \in \mathbb{C}^{r \times m}$ και $W \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

Παρομοίως, μπορούμε να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $A^* = AX$. Έστω A, P, D, S, W και n όπως προηγουμένως. Τότε έχουμε ότι

$$A^* = AX \implies \begin{bmatrix} D^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z_2,$$

όπου

$$Z_2 = \begin{bmatrix} I_r & S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix} P^*XP \begin{bmatrix} I_r & -S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Πράττωντας όπως προηγουμένως, καταλήγουμε στις λύσεις της εξίσωσης $A^* = AX$, οι οποίες είναι

$$X = P \begin{bmatrix} D^{-1}D^* - S^*V & D^{-1}D^*S^* - S^*W \\ V & W \end{bmatrix} P^*, \tag{4.20}$$

όπου $V \in \mathbb{C}^{m \times r}$ και $W \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

Για να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $A^* = XA = AX$, η (4.19) και η (4.20) πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Με άλλα λόγια, πρέπει να έχουμε ότι οι

$$D^*D^{-1} - US = D^{-1}D^* - S^*V \tag{4.21}$$

$$V = SD^*D^{-1} - WS \tag{4.22}$$

$$U = D^{-1}D^*S^* - S^*W \tag{4.23}$$

έχουν ταυτόχρονη λύση. Αντικαθιστώντας την (4.22) και την (4.23) στην (4.21), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} & D^*D^{-1} - D^{-1}D^*S^*S - S^*WS = D^{-1}D^* - S^*SD^*D^{-1} - S^*WS \\ \iff & D^*D^{-1} - D^{-1}D^*S^*S = D^{-1}D^* - S^*SD^*D^{-1} \qquad (4.24) \\ \iff & DD^*D^{-1}D - DD^{-1}D^*S^*SD = DD^{-1}D^*D - DS^*SD^*D^{-1}D \\ \iff & DD^* - D^*S^*SD = D^*D - DS^*SD^* \\ \iff & DD^* + DS^*SD^* = D^*D + D^*S^*SD \\ \iff & D(I_r + S^*S)D^* = D^*(I_r + S^*S)D, \qquad (4.25) \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει από τον εξ αριστερών και εκ δεξιών πολλαπλασιασμό με τον D.

Συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης $A^* = XA = AX$ είναι

$$\begin{aligned} X &= P \begin{bmatrix} D^{-1}D^* - S^*SD^*D^{-1} - S^*WS & D^{-1}D^*S^* - S^*W \\ SD^*D^{-1} - WS & W \end{bmatrix} P^* \\ &= P \begin{bmatrix} I_r & -S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1}D^*(I_n + S^*S) & D^{-1}D^*S^* \\ SD^*D^{-1} & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -S & I_m \end{bmatrix} P^*. \qquad \square \end{aligned}$$

Σημείωση 4.12. Χρησιμοποιώντας την (4.24), το Θεώρημα 4.7 επίσης ισχύει για

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & -S^* \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_n + S^*S)D^{-1}D^* & D^{-1}D^*S^* \\ SD^*D^{-1} & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -S & I_m \end{bmatrix} P^*.$$

Βιβλιογραφία

[1] A. Ben-Israel and T.N.E Greville, *Generalized Inverses Theory and Applications*, 2nd ed., Canadian Mathematical Society, Springer, 2003, Edited by J. Borwein, P. Borwein.

[2] D.S. Bernstein, *Matrix Mathematics, Theory, Facts, and Formulas*, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 2008.

[3] S.L. Campbell and C.D Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.

[4] D. Drivaliaris, S. Karanasios and D. Pappas, *Factorizations of EP operators*, Linear Algebra Appl. **429** (2008), 1555-1567.

[5] I. Fredholm, *Sur une classé d'équations fontcionnelles*, Acta Math. **27** (1903), 365-390.

[6] R.A. Horn and C.R Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[7] W.A. Hurwitz, *On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **13** (1912), 405-418.

[8] I.J. Katz and M.H. Pearl, *On EP_r and normal EP_r matrices*, J. Res. Natl. Bur. Stand. **70B** (1966), 47-77.

[9] I.J. Katz and M.H. Pearl, *Solution of the matrix equation $A^* = XA = AX$*, J. London Math. Soc. **41** (1966), 443-452.

[10] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000.

[11] E.H. Moore, *On properly positive Hermitian matrices*, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1916), 59.

[12] E.H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 394-395.

[13] E.H. Moore, *General Analysis*, vol.1, American Philosophical Society, Philadelphia, 1935, Edited by R.W. Barnard.

[14] M.H. Pearl, *On normal and* EP_r *matrices*, Michigan Math. J. **6** (1959), 1-5.

[15] M.H. Pearl, *On normal* EP_r *matrices*, Michigan Math. J. **8** (1961), 33-37.

[16] M.H. Pearl, *On generalized inverses of matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **62** (1966), 673-677.

[17] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51** (1955), 406-413.

[18] C.R. Rao and S.K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1971.

[19] H. Schwerdtfeger, *Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices*, P. Noordhoff, Groningen, 1950.

[20] T.S. Shores, *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*, Springer, New York, 2007.

[21] H. Yanai, K. Takeuchi, and Y. Takane, *Projections Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*, Springer, New York, 2011.