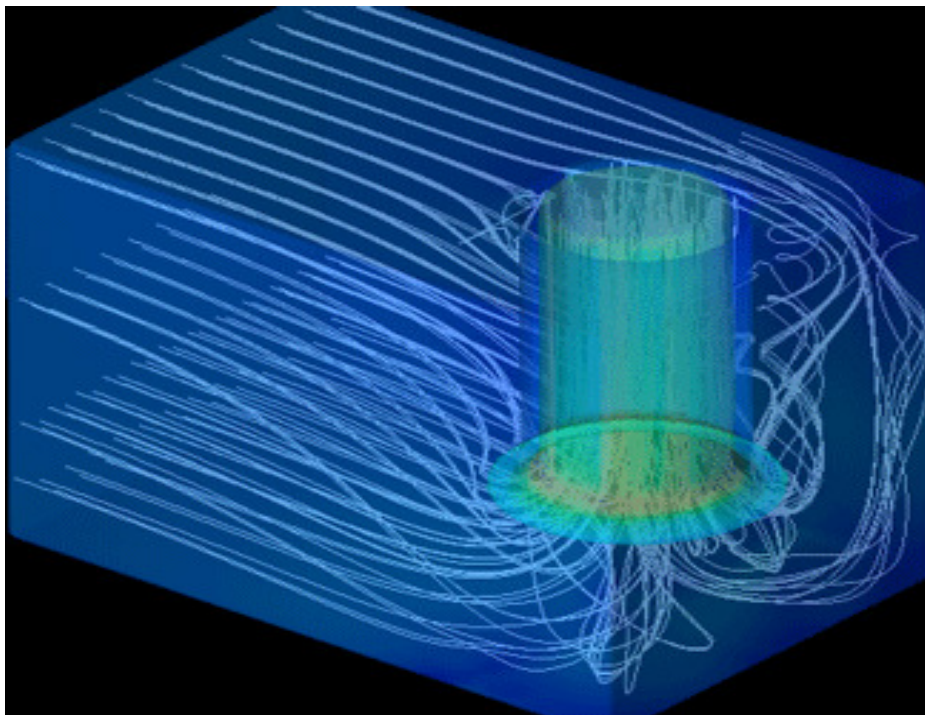




**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
Τομέας Π : Ανάλυσης, Σχεδιασμού και Ανάπτυξης  
Διεργασιών και Συστημάτων  
Μονάδα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

**<< ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΙΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΡΡΟΦΗΣΗΣ ΙΖΗΜΑΤΟΣ  
ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΥΘΜΕΝΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΔΕΞΑΜΕΝΗΣ ΜΕ ΤΗΝ  
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ >>**

**ΑΘΗΝΑ 2014**



**Διπλωματική εργασία του σπουδαστή: Χατζίνης Κωνσταντίνος**  
**Επιβλέπων Καθηγητής: Χ. Κυρανούδης**  
**Υπ' όψιν: Ν.Χ Μαρκάτος, Ομότιμος καθηγητής ΕΜΠ**

## **Ευχαριστίες**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου κύριο Νικόλαο Χ. Μαρκάτο για την δυνατότητα που μου προσέφερε να εκπονήσω τη Διπλωματική μου εργασία στο Εργαστήριο Ρευστοδυναμικής της Σχολής Χημικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτορα Καραδήμου Δέσποινα για την επίβλεψη και καθοδήγηση σε όλα τα στάδια της εργασίας, καθώς και το χρόνο που αφιέρωσε για όλες τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της εργασίας.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται η αριθμητική προσομοίωση της αναρρόφησης ιζήματος από τον πυθμένα κυλινδρικής δεξαμενής με την εφαρμογή μεθόδων υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.

Το μοντέλο αποτελείται από μία κυλινδρική δεξαμενή και ένα βυθισμένο σωλήνα αναρρόφησης υπεύθυνο για την αναρρόφηση του ιζήματος που βρίσκεται στο κάτω μέρος της δεξαμενής. Τα τοιχώματα της δεξαμενής είναι αδιαβατικά και δεν πραγματοποιείται καμία χημική αντίδραση στο εσωτερικό της. Το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης βασίζεται στις μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την μη μόνιμη, τρισδιάστατη ροή. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ελέγχου. Ο αλγόριθμος που εφαρμόζεται για την επίλυση του υδροδυναμικού πεδίου είναι ο αλγόριθμος SIMPLEST. Για την προσομοίωση χρησιμοποιείται το εμπορικό πακέτο PHOENICS της εταιρείας CHAM Ltd. Για τη μοντελοποίηση της ροής εφαρμόζεται ομοιόμορφο δομημένο πλέγμα, το οποίο αποτελείται από εξάεδρα στοιχειώδη κελιά κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων.

Παρουσιάζεται η διαδικασία εύρεσης του ανεξάρτητου πλέγματος για τη συγκεκριμένη γεωμετρία του προβλήματος, καθώς και οι όψεις του ανεξάρτητου πλέγματος σε δι-διάστατο και τρι-διάστατο επίπεδο.

Τέλος, εξάγονται συμπεράσματα για τις κατανομές των ταχυτήτων  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , καθώς επίσης και για την κατανομή της συγκέντρωσης στο πεδίο ροής.

## ABSTRACT

The present thesis investigates the numerical simulation of sediment suction from the bottom of a cylindrical tank by applying techniques of Computational Fluid Dynamics (CFD).

The model consists of a cylindrical tank and an immersed suction pipe responsible for the suction of the sediment at the bottom of the tank. The walls of the tank are adiabatic and no chemical reaction is noted inside. The proposed mathematical model simulation is based on partial differential equations governing the unsteady, three-dimensional flow. The equations are discretized by the finite volume method and solved by the SIMPLEST algorithm embodied in the CFD code PHOENICS. The flow is modeled by a uniformly structured grid. The specific grid consists of hexahedrons elementary cells of the cylindrical coordinate system.

The process of finding the independent grid for the particular geometry of the problem is described extensively. The views of the independent grid in two-dimensional and three-dimensional layer are also presented.

Finally, conclusions are drawn and described from the numerical results of the velocity and concentration distribution in the flow field.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## **Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή**

- 1.1 Γενικά
- 1.2 Ιστορική μελέτη

## **Κεφάλαιο 2 : Το Φυσικό Πρόβλημα**

- 2.1 Φυσική περιγραφή του προβλήματος
- 2.2 Σκοπός της εργασίας

## **Κεφάλαιο 3 : Μαθηματική Περιγραφή του Προβλήματος**

- 3.1 Εισαγωγή
- 3.2 Μεταβλητές
- 3.3 Εξισώσεις διατήρησης
- 3.4 Οριακές συνθήκες

## **Κεφάλαιο 4 : Αριθμητική Μέθοδος Επίλυσης**

- 4.1 Εισαγωγή
- 4.2 Μέθοδος πεπερασμένων όγκων ελέγχου
  - 4.2.1 Πλέγμα – Όγκος ελέγχου
  - 4.2.2 Διακριτοποίηση
- 4.3 Επίλυση εξισώσεων
- 4.4 Τεχνικές υποχαλάρωσης
- 4.5 Επίλυση του υδροδυναμικού πεδίου

## **Κεφάλαιο 5 : Μαθηματική Επίλυση – Αποτελέσματα**

- 5.1 Μαθηματική επίλυση του προβλήματος
- 5.2 Ανεξαρτησία λύσεως από το πλέγμα
- 5.3 Βέλτιστα πλέγματα
- 5.4 Διανύσματα ταχύτητας
- 5.5 Κατανομή συγκέντρωσης

## **Κεφάλαιο 6 : Συμπεράσματα – Προτάσεις**

6.1 Συμπεράσματα

6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

6.3 Βιβλιογραφικές αναφορές

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

#### 1.1 Γενικά

Αναρρόφηση είναι η ροή ενός ρευστού εντός μιας περιοχής μερικού κενού ή μιας περιοχής χαμηλής πίεσης. Η διαβάθμιση της πίεσης μεταξύ της περιοχής αυτής και της πίεσης του περιβάλλοντος θα ωθήσει το ρευστό προς την περιοχή της χαμηλότερης πίεσης. Η εφαρμογή της αναρρόφησης από τον πυθμένα αποτελεί ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης στις επιστήμες των διαφόρων κλάδων της Μηχανικής. Η εφαρμογή μεθόδων αναρρόφησης στις βιομηχανικές ροές συνεισφέρει στον έλεγχο και στη διατήρηση ορισμένων επιθυμητών χαρακτηριστικών σε κρίσιμες ροές σε μεγάλο φάσμα παραγωγικών διαδικασιών.

Κατά την εφαρμογή της αναρρόφησης από πορώδη τοιχώματα επιτυγχάνεται η διατήρηση της στρωτής ροής, η καθυστέρηση εμφάνισης χαμηλής ποιότητας ρευστού, η καθυστέρηση εμφάνισης της αποκόλλησης με την απαγωγή θερμού ρευστού επικίνδυνου για την αντοχή των τοιχωμάτων και η ψύξη πτερυγίων στροβιλομηχανών.



**Σχήμα 1.1 :** Πειραματική διάταξη αναρρόφησης σε πέντε κατευθύνσεις.

Επίσης η αναρρόφηση από τον πυθμένα εφαρμόζεται σε πολλές περιπτώσεις υδροληψίας από τον πυθμένα λιμνών ή θαλασσών για λόγους όπως η εγκατάσταση επιπλεόντων υλικών στην επιφάνεια, η μείωση της έκτασης αρδεύσεων ή και για λόγους αισθητικούς όπως η μη εμφανής κατασκευή της υδροληψίας.

Από θεωρητική σκοπιά, η απόκριση του οριακού στρώματος σε μια τέτοια απότομη αλλαγή στις οριακές συνθήκες μας προσφέρει τη δυνατότητα ανίχνευσης και κατανόησης των δυναμικών στοιχείων της τυρβώδους ροής.

## 1.2 Ιστορική μελέτη

Οι Weisseberg και Bergman [1] διερεύνησαν πειραματικά το φαινόμενο της αναρρόφησης για ρυθμούς έως 2% ( $C_q = V_w/U_o$ , όπου  $V_w$  είναι η κάθετη ταχύτητα στο τοίχωμα και  $U_o$  η ταχύτητα στην κεντρική γραμμή) και ανακάλυψαν ότι οι διαμήκεις εντάσεις της τύρβης μειώνονται.

Οι Brosh και Winograd [2] σε πειραματική μελέτη με αναρρόφηση σε κλειστό αγωγό με αέρα κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι απαιτούνται 40 διάμετροι για την επίτευξη ισορροπίας στα μεγέθη των τυρβωδών εντάσεων.

Ο Schildknecht [3] έκανε μετρήσεις με ανεμομετρία θερμού σύρματος σε αέρα σε κλειστό αγωγό με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για τα τυρβώδη χαρακτηριστικά του οριακού στρώματος. Με την εφαρμογή ρυθμών αναρρόφησης ως 13% ( $C_q = Q_w/Q_{o1}$ , όπου  $Q_w$  είναι η παροχή κυκλώματος αναρρόφησης και  $Q_{o1}$  είναι η ολική παροχή) διαπίστωσε ότι πάνω από την περιοχή της αναρρόφησης μειώνονται οι εντάσεις της τύρβης με διαφορετικό ρυθμό σε κάθε διεύθυνση καθώς και τα τοπικά μέγιστα των όρων της εξίσωσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας.

Ο Elena [4] χρησιμοποιώντας έναν θερμαινόμενο αγωγό μελέτησε τις μεταβολές της ταχύτητας και της θερμοκρασίας εξ αιτίας της επιβολής μικρού ρυθμού αναρρόφησης και εξήγαγε συμπεράσματα για τις χαρακτηριστικές κλίμακες των διακυμάνσεων της ταχύτητας και της θερμοκρασίας. Διαπιστώθηκε αύξηση της χαρακτηριστικής κλίμακας Taylor κοντά στο τοίχωμα.

Οι McLean και Mellor [5] χρησιμοποιώντας σωλήνα Pitot μελέτησαν την επίδραση της έγχυσης ποσότητας ρευστού σε ροή με αντίθετη κλίση πίεσης. Ανακάλυψαν την αλλαγή του σχήματος του προφίλ της ταχύτητας, την μείωση του συντελεστή τριβής και του αριθμού Stanton και την ταχύτερη προσέγγιση προς την αποκόλληση.

Οι Sofialidis και Prinos [6] σε μαθηματική προσομοίωση με μη γραμμικά μοντέλα τύρβης  $k-\epsilon$  και  $k-\omega$  χαμηλού αριθμού Reynolds μελέτησαν την επίδραση ρυθμών αναρρόφησης σε πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδη ροή σε κλειστό αγωγό. Συμπέραναν ότι η κατανομή των μέσων ταχυτήτων γίνεται πιο ομοιόμορφη με αύξηση των ταχυτήτων κοντά στο τοίχωμα και αντίστοιχη μείωση τους στην κεντρική περιοχή και ότι οι εντάσεις της τύρβης μειώνονται.



Οι Park και Choi [7] μελέτησαν την επίδραση ομοιόμορφης έγχυσης και αναρρόφησης από μικρή λωρίδα με χρήση Άμεσης Αριθμητικής Προσομοίωσης (DNS). Το συμπέρασμα ήταν η αύξηση του συντελεστή τριβής πάνω από τη διάτρητη λωρίδα και μείωση μετά τη διάτρητη περιοχή στην περίπτωση της αναρρόφησης και αντίθετο αποτέλεσμα στην περίπτωση της έγχυσης. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει μείωση των εντάσεων τύρβης πάνω από την περιοχή της αναρρόφησης και αύξηση στην περιοχή μετά την αναρρόφηση.

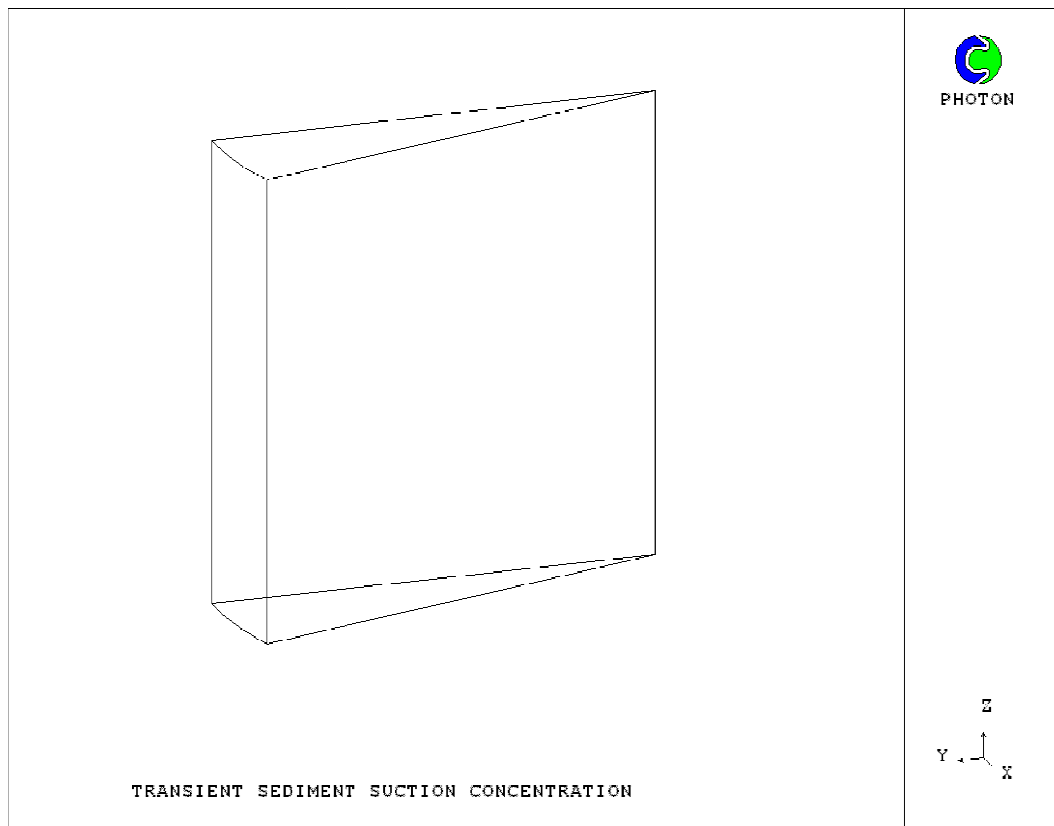
Τέλος, οι Sumitani και Kasagi [8] εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία της Προσομοίωσης των Μεγάλων Δινών (LES) μελέτησαν την επίδραση έγχυσης και αναρρόφησης μεταξύ δύο τοιχωμάτων σε πλήρως αναπτυγμένη τυρβώδη διδιάστατη ροή σε αγωγό στον οποίο τα τοιχώματα ήταν ισόθερμα, αλλά βρίσκονταν σε διαφορετικές θερμοκρασίες. Τα αποτελέσματα που πήραν έδειξαν μη συμμετρικές τιμές της μέσης ταχύτητας και της μέσης θερμοκρασίας σε σχέση με την κεντρική τιμή του καναλιού. Επίσης οι συντελεστές τριβής και ο αριθμός Nu μειώθηκαν στην περιοχή της έγχυσης, ενώ αντίθετα αυξήθηκαν στην περιοχή της αναρρόφησης. Ανακάλυψαν ότι οι τυρβώδεις εντάσεις, οι διατρητικές τάσεις Reynolds και οι τυρβώδεις παροχές θερμότητας αυξάνουν με την έγχυση και μειώνονται με την αναρρόφηση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

#### 2.1 Φυσική περιγραφή του προβλήματος

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται υπολογιστική προσομοίωση της διαδικασίας αναρρόφησης του ιζήματος από τον πυθμένα κυλινδρικής δεξαμενής. Επιλέχθηκε κυλινδρικός τομέας με διαστάσεις 1m ύψος, 1m μήκος και  $\pi/10$ m πλάτος. Η γεωμετρία του τομέα αποτελείται δύο τμήματα. Το πάνω τμήμα καταλαμβάνεται από υγρό ρευστό και το κάτω τμήμα από στερεό ίζημα. Στο πρόβλημα χρησιμοποιήθηκαν κυλινδρικές συντεταγμένες με το σωλήνα αναρρόφησης να βρίσκεται κατακόρυφα, στη δεξιά πλευρά του τομέα.



Σχήμα 2.1 Η γεωμετρία του τομέα

Η προσομοίωση έγινε με χρήση του υπολογιστικού κώδικα PHOENICS της εταιρείας CHAM Ltd. Το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφεται δημιουργήθηκε για να προβλέπει τις μεταβατικές τοπογραφικές μεταβολές που σχετίζονται με την διάβρωση και εναπόθεση των ιζημάτων που προέρχονται από την αναρρόφηση.

Η γεωμετρία [9] περιλαμβάνει ένα βυθισμένο σωλήνα αναρρόφησης σε ένα "στρώμα" από ίζημα το οποίο αποτελεί την περιοχή υψηλής συγκέντρωσης. Η ακτίνα του σωλήνα είναι 0.2 μέτρα. Το στόμιο του σωλήνα αναρρόφησης απέχει 0,1 μέτρα από το στρώμα του ιζήματος. Η ταχύτητα στην είσοδο του σωλήνα είναι  $w_1 = 0.1 \text{ m/s}$ . Το πάνω μέρος του τομέα είναι γεμάτο με νερό. Η συγκέντρωση τέθηκε ίση με  $1 \text{ kg/m}^3$  στο στρώμα του ιζήματος, ενώ στον υπόλοιπο τομέα ίση με 0.

## 2.2 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη του φαινομένου της αναρρόφησης από δεξαμενή κυλινδρικού σχήματος, η οποία περιέχει νερό. Το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης βασίζεται στις μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την μη μόνιμη, τρισδιάστατη ροή. Τα τοιχώματα τις δεξαμενής είναι αδιαβατικά και δεν πραγματοποιείται χημική αντίδραση. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ελέγχου. Στόχος είναι η κατάστρωση και επίλυση των διαφορικών εξισώσεων διατήρησης για τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) και τη συγκέντρωση  $C_1$ . Για την επίλυση των εξισώσεων χρησιμοποιείται μία επαναληπτική μέθοδος γραμμή προς γραμμή που ονομάζεται ADI. Ο αλγόριθμος που εφαρμόστηκε για την επίλυση του υδροδυναμικού πεδίου είναι ο SIMPLEST. Εξάγονται συμπεράσματα για την κατανομή των ταχυτήτων και την κατανομή της συγκέντρωσης του ιζήματος.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

#### 3.1 Εισαγωγή

Η αριθμητική προσομοίωση των φαινομένων μεταφοράς γίνεται δυνατή με την αποτύπωση σε μαθηματική μορφή, δηλαδή σε μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων, των νόμων που διέπουν τα φαινόμενα αυτά. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις εκφράζουν την αρχή διατήρησης για κάποια φυσική ποσότητα. Σε έναν χώρο συντεταγμένων Euler η εξίσωση διατήρησης μιας φυσικής ποσότητας  $\Phi$ , έχει την παρακάτω μορφή:

$$\text{Συσσώρευση} + (\text{Εκροή- Εισροή}) = (\text{Παραγωγή} - \text{Κατανάλωση})$$

Συνεπώς, οι όροι της διαφορικής εξίσωσης ορίζουν κάποια δράση ανά μονάδα όγκου, με τρόπο τέτοιο ώστε το άθροισμα τους να ικανοποιεί ένα ισοζύγιο.

Η φυσική ποσότητα που διατηρείται, αποτελεί την εξαρτημένη μεταβλητή της εξίσωσης διατήρησης, η οποία εκφράζει την ισορροπία των διαφορικών παραγόντων που επηρεάζουν αυτή τη μεταβλητή. Συνήθως, στις εξισώσεις διατήρησης η εξαρτημένη μεταβλητή είναι ποσότητα ανηγμένη στη μονάδα μάζας, δηλαδή ειδική ποσότητα, π.χ. κλάσμα μάζας (μάζα συστατικού ως προς τη μάζα μίγματος), ταχύτητα (ορμή ανά μονάδα μάζας), ειδική ενθαλπία.

#### 3.2 Μεταβλητές

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος είναι οι τρεις διαστάσεις του χώρου ( $\theta, r, z$ ) ενός κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κύριες εξαρτημένες μεταβλητές είναι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας ( $u, v, w$ ), η πίεση  $P$  και η συγκέντρωση  $C1$ .

#### 3.3 Εξισώσεις Διατήρησης

Η κατάστρωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων διατήρησης στηρίζεται στις ακόλουθες παραδοχές (Markatos and Moults, 1979; Yang et al., 2000):

- ✓ Μη Μόνιμη, μονοφασική ροή
- ✓ Ασυμπίεστη ροή
- ✓ Νευτώνικό ρευστό
- ✓ Απουσία χημικής αντίδρασης
- ✓ Οι φυσικές ιδιότητες λαμβάνονται σταθερές στη θερμοκρασία 25,5 °C ή 298,5 °K
- ✓ Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Με βάση τα παραπάνω οι εξισώσεις διατήρησης έχουν την ακόλουθη μορφή (Spalding, 1980), (Markatos, 1989), (Theologos et al., 1996):

#### ✚ Εξίσωση διατήρησης της μάζας ή εξίσωση συνέχειας

Το κλάσμα όγκου, η πυκνότητα και οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας πρέπει να ικανοποιούν την ακόλουθη εξίσωση διατήρησης της μάζας ή εξίσωση συνέχειας.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v) = 0 \quad (3.1)$$

#### ✚ Εξίσωση διατήρησης της ορμής για τη r-συνιστώσα της ταχύτητας, u

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w) \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu_{eff} \frac{\partial u}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ - \frac{\partial P}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

#### ✚ Εξίσωση διατήρησης της ορμής για τη θ-συνιστώσα της ταχύτητας, v

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v w) \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu_{eff} \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ + \left( \frac{\rho u^2}{2} - \frac{\partial P}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

#### ✚ Εξίσωση διατήρησης της ορμής για τη z-συνιστώσα της ταχύτητας, w

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho w v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w w) \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \mu_{eff} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ + \left( -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

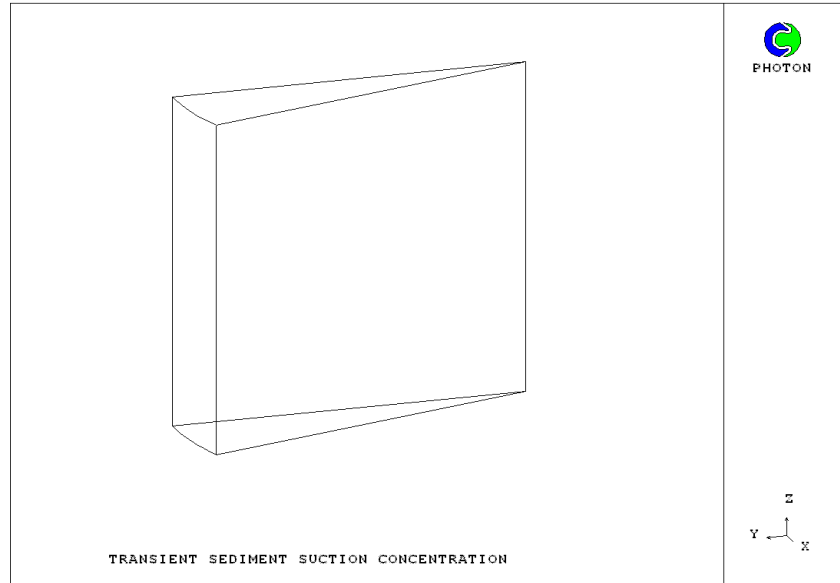
Όπου :  $\mu_{eff} = 0$  ενεργός συντελεστής συνεκτικότητας  
 $u = \eta$  γωνιακή ταχύτητα  
 $v = \eta$  ακτινική ταχύτητα  
 $w = \eta$  αξονική ταχύτητα  
 $\rho = \eta$  πυκνότητα  
 $P = \eta$  πίεση  
 $g = \eta$  επιτάχυνση της βαρύτητας

Η γενική μορφή της εξίσωσης διατήρησης της βαθμωτής ποσότητας (συγκέντρωση  $C1$ ) είναι :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C1) + \text{div} (\rho C1 \vec{u}) = \text{div} (\Gamma \text{grad} C1) + S_C \quad (3.5)$$

### 3.4 Οριακές συνθήκες

Στα όρια του υπολογιστικού πεδίου, θα πρέπει να εφαρμοστούν ειδικές τεχνικές, έτσι ώστε να εισαχθεί στη διακριτοποιημένη εξίσωση μεταφοράς η πληροφορία που περιέχεται στις οριακές συνθήκες. Στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκαν οι ακόλουθες οριακές συνθήκες.



**Σχήμα 3.1** : Γεωμετρία τομέα

Ο πυθμένας της δεξαμενής περιέχει ίζημα με συγκέντρωση  $1 \text{ kg/m}^3$ . Το υπόλοιπο τμήμα της δεξαμενής περιέχει νερό. Στα πλευρικά τοιχώματα της δεξαμενής, εφαρμόζεται η συνθήκη Neumann για τις ταχύτητες ( $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ ), ενώ η

μεταβολή της ροής του νερού είναι μηδέν ( $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ ). Η επιφάνεια της δεξαμενής είναι ελεύθερη και στο ένα άκρο, από το οποίο πραγματοποιείται η αναρρόφηση του ιζήματος, εφαρμόζεται η συνθήκη γνωστής ροής μάζας ( $\dot{m} = \rho \cdot A \cdot w$ ). Τα εσωτερικά τοιχώματα του σωλήνα αναρρόφησης έχουν μηδενικό πορώδες και δεν διαπερνώνται από το νερό. Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος πραγματοποιήθηκε για πραγματικό χρόνο 10 sec.

Οι παραπάνω οριακές συνθήκες εφαρμόζονται στο λογισμικό πρόγραμμα PHOENICS με τις ακόλουθες εντολές:

Μεταβλητή	Πλευρικά τοιχώματα δεξαμενής	Πυθμένας δεξαμενής	Έξοδος νερού-τμήμα επιφάνειας δεξαμενής	Τοίχωμα σωλήνα αναρρόφησης
U	ONLYMS,SAME	-	-	CONPOR,0.0
V	ONLYMS,SAME	-	-	-
W	ONLYMS,SAME	-	-	-
P	FIXP,0.0	-	FIXFLU,- τιμή ροής μάζας	-
C1	-	Αρχική συγκέντρωση ιζήματος $1kg/m^3$	-	-

Η ONLYMS είναι μια οριακή συνθήκη η οποία δηλώνει ότι η συναγωγή επηρεάζει τη μεταφορά της μεταβλητής φ από το κέντρο του κελιού στο όριο, ενώ η επίδραση της διάχυσης είναι μηδενική.

Η FIXVAL είναι μια οριακή συνθήκη σταθερής τιμής. Στο λογισμικό Phoenics, οι οριακές συνθήκες, όπως και οι πηγές, εμφανίζονται στο δεξί μέρος της διαφορικής εξίσωσης μεταφοράς της μεταβλητής φ. Έτσι ισχύει ότι:

$$\operatorname{div}(\rho\varphi\vec{u} - \Gamma_\varphi \operatorname{grad} \varphi) = S_\varphi + S_{BC1} + S_{BC2} + \dots + S_{BCn} \quad (3.6)$$

Όπου  $S_{BC1}, S_{BC2}, \dots, S_{BCn}$  είναι οι οριακές συνθήκες οι οποίες εμφανίζονται σε συγκεκριμένες περιοχές του πλέγματος. Μετά την ολοκλήρωση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης (5.5) σε έναν όγκο ελέγχου, η εξίσωση της οριακής συνθήκης παίρνει την παρακάτω γραμμικοποιημένη μορφή:

$$S_{BC} = TC(V - F) \quad (4.6)$$

Έτσι, η τελική μορφή της δακρυτοποιημένης εξίσωσης μεταφοράς παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$a_\rho \varphi_\rho = \sum_{N,S,E,W,L,H} \alpha_\kappa \varphi_\kappa + S_\varphi + \sum_{Patches} TC(V - \varphi_\rho) \quad (3.7)$$

Όπου :  $S_\varphi$  = οι όροι πηγής

$C$  = ένας συντελεστής

$V$  = η τιμή

$T$  = ένας γεωμετρικός πολλαπλασιαστής

Η μεταβλητή  $\varphi_\rho$  υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\varphi_\rho = \frac{\sum \alpha_\kappa \varphi_\kappa + S_\varphi + \sum TVC}{a_\rho + \sum TC} \quad (3.8)$$

Στην περίπτωση της οριακής συνθήκης σταθερής τιμής (FIXVAL), θέτουμε ένα μεγάλο αριθμό στο συντελεστή  $C$  και την επιθυμητή τιμή στο  $V$ . Έτσι, η εξίσωση (3.7) γράφεται ως εξής :

$$\varphi_\rho = \frac{\sum \alpha_\kappa \varphi_\kappa + S_\varphi + \sum TVC}{a_\rho + \sum TC} = \frac{\text{μικρός αριθμός} + TC V}{\text{μικρός αριθμός} + TC} = \frac{TC V}{TC} = V \quad (3.9)$$



Η FIXFLU είναι μία οριακή συνθήκη σταθερής ροής. Στην περίπτωση αυτή, θέτουμε ένα μικρό αριθμό στο συντελεστή  $C$  και θεωρούμε ότι το  $V$  ισούται με πηγή /  $C$ . Στην περίπτωση αυτή, η μεταβλητή  $\varphi_\rho$  δίνεται από την εξίσωση :

$$\varphi_\rho = \frac{\sum \alpha_k \varphi_k + S_\varphi + \text{πηγή}}{a_\rho} \quad (3.10)$$

Η FIXP είναι μια οριακή συνθήκη σταθερής τιμής πεδίου. Συχνά, αντιμετωπίζεται η ανάγκη της διατήρησης της τιμής της  $\varphi$  σε κάποιο εσωτερικό κόμβο στην τιμή  $\varphi_{FIX}$ , σταθερής και ανεξάρτητης των μεταβολών που επιβάλλει ο αλγόριθμος επίλυσης σε εσωτερικό κόμβο. Στην παρούσα εργασία, η τιμή της πίεσης  $P$  θεωρήθηκε σταθερή και ανεξάρτητη των μεταβολών στα πλευρικά τοιχώματα της δεξαμενής.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

#### 4.1 Εισαγωγή

Οι εξισώσεις του μαθηματικού μοντέλου, οι οποίες περιγράφουν το πρόβλημα της αναρρόφησης ιζήματος από τον πυθμένα κυλινδρικής δεξαμενής, δεν επιλύονται αναλυτικά, αλλά με αριθμητικές μεθόδους. Οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται συνίστανται στη μετατροπή των διαφορικών εξισώσεων ,με κατάλληλα σχήματα διακριτοποίησης, σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που μπορεί να επιλυθεί.

Πιο συγκεκριμένα ,αν  $\varphi$  είναι η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει ,η αριθμητική επίλυση συνίσταται στην εύρεση ενός συνόλου αριθμητικών τιμών σε συγκεκριμένα σημεία του πλέγματος, από τις οποίες μπορεί να προκύψει η κατανομή της  $\varphi$  στο πεδίο ροής.

Η διαδικασία επίλυσης περιλαμβάνει υποδιαίρεση του υπολογιστικού πεδίου σε μικρότερα υποχωρία ,ώστε να δημιουργηθεί ένα δομημένα πλέγμα. Η συστηματική διακριτοποίηση του χώρου και των εξαρτημένων μεταβλητών καθιστούν εφικτή την αντικατάσταση των διαφορικών εξισώσεων από απλούστερες αλγεβρικές εξισώσεις. Η εξίσωση διακριτοποίησης είναι μια αλγεβρική εξίσωση που προέρχεται από μια διαφορική εξίσωση και μεταφέρει όσο το δυνατόν επαρκέστερα το φυσικό νόημα που εκφράζει αυτή. Όσο ο αριθμός των διακριτών σημείων του πλέγματος αυξάνεται ,η λύση που αποδίδουν οι εξισώσεις διακριτοποίησης πλησιάζει την ακριβή λύση που θα έδιναν οι διαφορικές εξισώσεις.

Στην παρούσα εργασία για την επίλυση του προβλήματος εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ελέγχου ,η οποία ανήκει στις ολοκληρωτικές μεθόδους αριθμητικής επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στις ολοκληρωτικές μεθόδους η διακριτοποιημένη εξίσωση, μέσω της οποίας προσδιορίζεται η αριθμητική λύση, προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξίσωσης μεταφοράς πάνω σε κάποιον όγκο ελέγχου.

Το πιο σημαντικό πλεονέκτημα της ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου είναι ότι η προκύπτουσα λύση εμπεριέχει την εφαρμογή επακριβώς της εξίσωσης διατήρησης ποσοτήτων όπως η μάζα, η ορμή και η ενέργεια σε οποιοδήποτε υποσύνολο του υπολογιστικού πλέγματος και στο σύνολο του πλέγματος.

## 4.2 Μέθοδος πεπερασμένων όγκων ελέγχου

Η αριθμητική μέθοδος που εφαρμόστηκε για την επίλυση του προβλήματος της αναρρόφησης από τον πυθμένα είναι η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ελέγχου. Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων ελέγχου ανήκει στις ολοκληρωτικές μεθόδους αριθμητικής επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή είναι γενική και μπορεί να αντιμετωπίσει με επιτυχία προβλήματα μεταφοράς θερμότητας, μάζας, ορμής και ενέργειας (Μαρκάτος & Ασημακόπουλος, 1995). Η παρουσίαση της μεθόδου θα γίνει με τη βοήθεια του τρισδιάστατου πεδίου ροής.

### 4.2.1 Πλέγμα-Όγκος ελέγχου

Το πρώτο βήμα στην εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων ελέγχου είναι η διαίρεση του πεδίου σε επιμέρους όγκους ελέγχου. Για το σκοπό αυτό, το πεδίο χωρίζεται σε πεπερασμένους όγκους τυχαίου μεγέθους, αλλά πάντοτε τυπολογικά καρτεσιανού σχήματος. Ο τελευταίος περιορισμός δηλώνει ότι οι όγκοι ελέγχου μπορεί να είναι μη-ορθογωνικού σχήματος, αλλά θα έχουν πάντοτε έξι ακμές και έξι πλευρές, στη γενική τρισδιάστατη περίπτωση (Μαρκάτος & Ασημακόπουλος, 1995). Στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Αρχικά ορίζεται η θέση των κόμβων του πλέγματος. Κάθε κόμβος περιέχεται σε έναν όγκο ελέγχου. Στη συνέχεια, στη μέση της απόστασης των δυο κόμβων και κάθετα στη γραμμή που τους ενώνει, τοποθετούνται τα μέτωπα των όγκων ελέγχου (Σχ. 4.1). Με τον τρόπο αυτόν δημιουργούνται οι όγκοι ελέγχου. Ο κεντρικός κόμβος ο οποίος περιέχεται στο εσωτερικό του όγκου ελέγχου συμβολίζεται με  $P$ . Οι γειτονικοί κόμβοι συμβολίζονται ανάλογα με τη θέση τους ως  $E$ ,  $W$ ,  $S$ ,  $N$ ,  $H$ ,  $L$  (Σχ. 4.1). Οι αντίστοιχες επιφάνειες των όγκων ελέγχου συμβολίζονται με  $\Delta e$ ,  $\Delta w$ ,  $\Delta s$ ,  $\Delta n$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta l$ . Το σύστημα συντεταγμένων που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1 είναι κυλινδρικό. Απεικονίζεται ο στοιχειώδεις όγκος ελέγχου και στις τρεις διαστάσεις του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων. Διακρίνονται ο κεντρικός κόμβος, οι γειτονικοί κόμβοι και τα αντίστοιχα μέτωπα των όγκων ελέγχου.



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varphi) + \operatorname{div}(\rho \varphi \vec{u}) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \varphi) + S_f \quad (4.1)$$

Οι όροι που εμφανίζονται στην εξίσωση (4.1) είναι, από αριστερά προς τα δεξιά, ο μεταβατικός όρος, ο όρος συναγωγής, ο όρος διάχυσης και ο όρος παραγωγής ή κατανάλωσης του  $\varphi$ . Στην παραπάνω εξίσωση (4.1),  $\rho$  είναι η πυκνότητα,  $\varphi$  η εξαρτημένη μεταβλητή,  $\vec{u}$  το διάνυσμα της ταχύτητας,  $\Gamma$  ο συντελεστής διάχυσης και  $S_f$  ο όρος πηγής.

Με ολοκλήρωση στον όγκο ελέγχου  $V$  και για μη μόνιμες συνθήκες, η εξίσωση (4.1) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varphi) dt \right] dV + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \operatorname{div}(\rho \varphi \vec{u}) dV \right] dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \varphi) dV \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint_V S_f dV \right) dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

Στη συνέχεια, γράφοντας τους όρους της συναγωγής και της διάχυσης ως επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια του όγκου ελέγχου  $A$ , με του θεωρήματος του Gauss, η παραπάνω εξίσωση (4.2) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varphi) dt \right] dV + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iint_A \vec{n} \cdot (\rho \varphi \vec{u}) dA \right] dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iint_A \vec{n} \cdot (\Gamma \operatorname{grad} \varphi) dA \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V S_f dV \right] dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

Η μαθηματική ανάλυση που ακολουθεί, βασίζεται στον Jakobsen (2007), Μεταπτυχιακή εργασία Π. Παπαδόπουλου (2012).

#### ✚ Όρος διάχυσης

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \varphi) dV \right] dt &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r d\theta dr dz \right] dt \\
 &+ \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) r d\theta dr dz \right] dt \\
 &+ \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r d\theta dr dz \right] dt
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Για τον πρώτο όρο (r- διεύθυνση) έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r d\theta dr dz \right] dt &= \Delta \theta \Delta z \left[ \left( r \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_e - \left( r \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_w \right] \Delta t \\
 &= A_e \left( r \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_e \Delta t - A_w \left( r \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_w \Delta t = \\
 &= A_e \Gamma_e r_e \left( \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta r_{PE}} \right) \Delta t - A_w \Gamma_w r_w \left( \frac{\varphi_P - \varphi_W}{\delta r_{WP}} \right) \Delta t = \\
 &= D_e (\varphi_E - \varphi_P) \Delta t - D_w (\varphi_P - \varphi_W) \Delta t
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Όπου :  $A_e = \Delta \theta \Delta z$  και  $A_w = \Delta \theta \Delta z$

$$D_e = \frac{A_e \Gamma_e r_e}{\delta r_{PE}} \quad \text{και} \quad D_w = \frac{A_w \Gamma_w r_w}{\delta r_{WP}}$$

Για τον δεύτερο όρο ( $\theta$  – διεύθυνση) έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) r d\theta dr dz \right] dt &= \Delta r \Delta z \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_s \right] \Delta t = \\
 &= A_n \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_n \Delta t - A_s \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_s \Delta t \\
 &= A_n \Gamma \left( \frac{\varphi_N - \varphi_P}{\delta \theta_{PN}} \right) \Delta t - A_s \Gamma \left( \frac{\varphi_P - \varphi_S}{\delta \theta_{SP}} \right) \Delta t \\
 &= D_n (\varphi_N - \varphi_P) \Delta t - D_s (\varphi_P - \varphi_S) \Delta t \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Όπου :  $A_n = \Delta r \Delta z$  και  $A_s = \Delta r \Delta z$

$$D_n = \frac{A_n \Gamma_n}{\delta \theta_{PN}} \quad \text{και} \quad D_s = \frac{A_s \Gamma_s}{\delta \theta_{SP}}$$

Για τον τρίτο όρο ( $z$  – διεύθυνση ) έχουμε :

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r d\theta dr dz \right] dt &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r d\theta dr dz \Delta t \\
 &= r \Delta \theta \Delta r \left[ \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_h - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_l \right] \Delta t \\
 &= A_h \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_h \Delta t - A_l \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_l \Delta t \\
 &= A_h \Gamma_h \left( \frac{\varphi_H - \varphi_P}{\delta z_{PH}} \right) \Delta t - A_l \Gamma_l \left( \frac{\varphi_P - \varphi_L}{\delta z_{LP}} \right) \Delta t \\
 &= D_h (\varphi_H - \varphi_P) \Delta t - D_l (\varphi_P - \varphi_L) \Delta t \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Όπου :  $A_h = r\Delta\theta\Delta r$  και  $A_l = r\Delta\theta\Delta r$

$$D_h = \frac{A_h \Gamma_h}{\delta z_{PH}} \quad \text{και} \quad D_l = \frac{A_l \Gamma_l}{\delta z_{LP}}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} [\iiint_V \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \varphi) dV] dt &= D_e(\varphi_E - \varphi_P) \Delta t - D_w(\varphi_P - \varphi_W) \Delta t \\ &+ D_n(\varphi_N - \varphi_P) \Delta t - D_s(\varphi_P - \varphi_S) \Delta t + D_h(\varphi_H - \varphi_P) \Delta t \\ &- D_l(\varphi_P - \varphi_L) \Delta t \end{aligned}$$

(4.8)

#### Όρος μεταφοράς - συναγωγής

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} [\iiint_V \operatorname{div}(\rho \varphi \vec{u}) dV] dt &= \int_t^{t+\Delta t} [\iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \varphi u_r) r d\theta dr dz] dt \\ + \int_t^{t+\Delta t} [\iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \varphi u_\theta) r d\theta dr dz] dt &+ \int_t^{t+\Delta t} [\iiint_V \frac{\partial}{\partial z} (\rho \varphi u_z) r d\theta dr dz] dt \quad (4.9) \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο (r – διεύθυνση) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} [\iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \varphi u_r) r d\theta dr dz] dt &= \Delta\theta \Delta z [(\rho \varphi u_r)_e - (\rho \varphi u_r)_w] \Delta t \\ &= A_e (\rho \varphi u_r)_e \Delta t - A_w (\rho \varphi u_r)_w \Delta t \\ &= A_e F_e r_e \varphi_e \Delta t - A_w F_w r_w \varphi_w \Delta t = C_e \varphi_e \Delta t - C_w \varphi_w \Delta t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{Όπου : } A_e &= \Delta\theta\Delta z & \text{και} & & A_w &= \Delta\theta\Delta z \\
F_e &= (\rho u_r)_e & \text{και} & & F_w &= (\rho u_r)_w \\
C_e &= A_e F_e r_e & \text{και} & & C_w &= A_w F_w r_w
\end{aligned}$$

Για το δεύτερο όρο ( $\theta$  – διεύθυνση) έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \varphi u_\theta) r d\theta dr dz \right] dt &= \Delta r \Delta z [(\rho \varphi u_\theta)_n - (\rho \varphi u_\theta)_s] \Delta t \\
&= A_n (\rho \varphi u_\theta)_n \Delta t - A_s (\rho \varphi u_\theta)_s \Delta t \\
&= A_n F_n \varphi_N \Delta t - A_s F_s \varphi_S \Delta t = C_n \varphi_N \Delta t - C_s \varphi_S \Delta t
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
\text{Όπου : } A_n &= \Delta r \Delta z & \text{και} & & A_s &= \Delta r \Delta z \\
F_n &= (\rho u_\theta)_n & \text{και} & & F_s &= (\rho u_\theta)_s \\
C_n &= A_n F_n & \text{και} & & C_s &= A_s F_s
\end{aligned}$$

Για τον τρίτο όρο ( $z$  – διεύθυνση) έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \left[ \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} (\rho \varphi u_z) r d\theta dr dz \right] dt &= r \Delta \theta \Delta r [(\rho \varphi u_z)_h - (\rho \varphi u_z)_l] \Delta t \\
&= A_h (\rho \varphi u_z)_h \Delta t - A_l (\rho \varphi u_z)_l \Delta t = \\
&= A_h F_h \varphi_H \Delta t - A_l F_l \varphi_L \Delta t = C_h \varphi_H \Delta t - C_l \varphi_L \Delta t
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \text{Όπου :} \quad A_h &= r \Delta r \Delta \theta & \text{και} \quad A_l &= r \Delta r \Delta \theta \\ F_h &= (\rho u_z)_h & \text{και} \quad F_l &= (\rho u_z)_l \\ C_h &= A_h F_h & \text{και} \quad C_l &= A_l F_l \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} [\iiint_V \operatorname{div}(\rho \phi \vec{u}) dV] dt = \\ & = C_e \phi_e \Delta t - C_w \phi_w \Delta t + C_n \phi_n \Delta t - C_s \phi_s \Delta t + C_h \phi_h \Delta t - C_l \phi_l \Delta t \end{aligned} \quad (4.13)$$

Για την πλήρη διακριτοποίηση της εξίσωσης μεταφοράς απαιτείται ο υπολογισμός των τιμών της μεταβλητής  $\phi$  των όρων συναγωγής της στα μέτωπα των όγκων ελέγχου e, w, n, s, h και l, ως συνάρτηση των τιμών της στα υπολογιστικά σημεία E, W, N, S, H και L, αντίστοιχα. Οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  $\phi$  στα μέτωπα των όγκων ελέγχου μπορούν να υπολογιστούν με τους παρακάτω τρόπους :

#### ✓ Σχήμα Κεντρικών Διαφορών

Στο σχήμα κεντρικών διαφορών γίνεται η υπόθεση της γραμμικής κατανομής της ποσότητας  $\phi$  γύρω από τα μέτωπα των όγκων ελέγχου. Έτσι, η τιμή της  $\phi$  στα μέτωπα του όγκου ελέγχου δίνεται από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} \phi_e &= \frac{\phi_P + \phi_E}{2}, \quad \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}, \quad \phi_n = \frac{\phi_P + \phi_N}{2} \\ \phi_s &= \frac{\phi_S + \phi_P}{2}, \quad \phi_h = \frac{\phi_P + \phi_N}{2}, \quad \phi_l = \frac{\phi_L + \phi_P}{2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

#### ✓ Σχήμα Ανάντη Διαφορών

Το σχήμα των ανάντη διαφορών λαμβάνει υπόψη τη φορά της ροής.

$r$  - διεύθυνση: Αν η φορά της ροής είναι προς τη θετική κατεύθυνση, δηλαδή αν  $u_{r,e} > 0$  και  $u_{r,w} > 0$  ( $F_e > 0$  και  $F_w > 0$ ), τότε οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  $\phi$  στα μέτωπα των όγκων ελέγχου είναι :

$$\phi_w = \phi_W \text{ και } \phi_e = \phi_P$$

Αν η φορά της ροής είναι προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή αν  $u_{r,e} < 0$  και  $u_{r,w} < 0$  ( $F_e < 0$  και  $F_w < 0$ ), τότε οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  $\varphi$  στα μέτωπα των όγκων ελέγχου είναι:

$$\varphi_e = \varphi_E \text{ και } \varphi_w = \varphi_P$$

$\theta$  - διεύθυνση: Αν η φορά της ροής είναι προς τη θετική κατεύθυνση, δηλαδή αν  $u_{\theta,n} > 0$  και  $u_{\theta,s} > 0$  ( $F_n > 0$  και  $F_s > 0$ ), τότε οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  $\varphi$  στα μέτωπα των όγκων ελέγχου είναι :

$$\varphi_n = \varphi_P \text{ και } \varphi_s = \varphi_S$$

Αν η φορά της ροής είναι προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή αν  $u_{\theta,n} < 0$  και  $u_{\theta,s} < 0$  ( $F_n < 0$  και  $F_s < 0$ ), τότε οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  $\varphi$  στα μέτωπα των όγκων ελέγχου είναι:

$$\varphi_n = \varphi_N \text{ και } \varphi_s = \varphi_P$$

$z$  - διεύθυνση: Αν η φορά της ροής είναι προς τη θετική κατεύθυνση, δηλαδή αν  $u_{z,h} > 0$  και  $u_{z,l} > 0$  ( $F_h > 0$  και  $F_l > 0$ ), τότε οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  $\varphi$  στα μέτωπα των όγκων ελέγχου είναι :

$$\varphi_h = \varphi_P \text{ και } \varphi_l = \varphi_L$$

Αν η φορά της ροής είναι προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή αν  $u_{z,h} < 0$  και  $u_{z,l} < 0$  ( $F_h < 0$  και  $F_l < 0$ ), τότε οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  $\varphi$  στα μέτωπα των όγκων ελέγχου είναι:

$$\varphi_h = \varphi_H \text{ και } \varphi_l = \varphi_P$$

#### ✓ Υβριδικό σχήμα

Στο υβριδικό σχήμα η προσέγγιση των τιμών της  $\varphi$  στα μέτωπα του όγκου ελέγχου είναι συνάρτηση της απόλυτης τιμής του αριθμού Peclet, όπου:

$$Pe_c = \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma}$$

Όταν  $|Pe_c| \leq 2$  χρησιμοποιείται το σχήμα των κεντρικών διαφορών.

Όταν  $|Pe_c| > 2$  χρησιμοποιείται το σχήμα των ανάντη διαφορών και αφαιρείται ο όρος της διάχυσης.

### ✚ Μεταβατικός όρος

Στον όρο της χρονικής παραγωγού εφαρμόζεται πρώτης τάξης έμμεσο σχήμα διακριτοποίησης. Με τον άνω δείκτη “ο” συμβολίζεται η τιμή της μεταβλητής  $\varphi$  στο προηγούμενο χρονικό βήμα.

$$\iiint_V \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\varphi) dt \right] dV = [(\rho\varphi)_P - (\rho\varphi)_P^o] \Delta V = \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho\varphi)_P \Delta t - \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho\varphi)_P^o \Delta t$$

(4.15)

Για τον υπολογισμό του δεξιού όρου της παραπάνω εξίσωσης χρειάζεται να γίνει μία παραδοχή για την κατανομή των  $\varphi_P, \varphi_E, \varphi_W, \varphi_N, \varphi_S, \varphi_H, \varphi_L$  με τον χρόνο. Η ολοκλήρωση πραγματοποιείται με την ακόλουθη παραδοχή:

$$\int_t^{t+\Delta t} \varphi_P \cdot dt = [\theta \cdot \varphi_P + (1 - \theta) \cdot \varphi_P^o] \Delta t$$

(4.16)

Στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκε η περίπτωση  $\theta=1$ , που αντιστοιχεί σε πρώτης τάξης έμμεσο σχήμα, όπου για τον προσδιορισμό της τιμής της μεταβλητής  $\varphi_P$  χρησιμοποιούνται οι τιμές των γειτονικών συντελεστών στο επόμενο χρονικό βήμα.

### ✚ Όρος πηγής

Στις περισσότερες περιπτώσεις ο όρος πηγής είναι συνάρτηση της εξαρτημένης μεταβλητής  $\varphi$ . Ο όρος πηγής προσεγγίζεται με τον κανόνα του μέσου σημείου, όπου το  $S$  αντιστοιχεί σε μία μέση τιμή, αντιπροσωπευτική για όλο τον όγκο ελέγχου.

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την μαθηματική ανάλυση που προηγήθηκε, η εξίσωση μεταφοράς γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho\varphi)_P \Delta t - \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho\varphi)_P^o \Delta t + C_e \varphi_e \Delta t - C_w \varphi_w \Delta t + C_n \varphi_N \Delta t \\ & - C_s \varphi_S \Delta t + C_h \varphi_H \Delta t - C_l \varphi_L \Delta t \\ & = D_e (\varphi_E - \varphi_P) \Delta t - D_w (\varphi_P - \varphi_W) \Delta t + D_n (\varphi_N - \varphi_P) \Delta t \\ & - D_s (\varphi_P - \varphi_S) \Delta t + D_h (\varphi_H - \varphi_P) \Delta t - D_l (\varphi_P - \varphi_L) \Delta t \\ & + S \Delta V \Delta t \end{aligned}$$

Διαιρούμε όλους τους όρους της παραπάνω εξίσωσης με  $\Delta t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} [(\rho\varphi)_P - (\rho\varphi)_P^o] + C_e \varphi_e - C_w \varphi_w + C_n \varphi_N - C_s \varphi_S + C_h \varphi_H - C_l \varphi_L = \\ = D_e (\varphi_E - \varphi_P) - D_w (\varphi_P - \varphi_W) + D_n (\varphi_N - \varphi_P) \\ - D_s (\varphi_P - \varphi_S) + D_h (\varphi_H - \varphi_P) - D_l (\varphi_P - \varphi_L) + S \Delta V \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις πράξεις χρησιμοποιώντας το σχήμα των ανάντη διαφορών στον όρο της συναγωγής η ολοκλήρωση της εξίσωσης μεταφοράς για μόνιμες συνθήκες οδηγεί στην ακόλουθη διακριτοποιημένη εξίσωση :

$$\alpha_P \cdot \varphi_P = \alpha_E \cdot \varphi_E + \alpha_W \cdot \varphi_W + \alpha_N \cdot \varphi_N + \alpha_S \cdot \varphi_S + \alpha_H \cdot \varphi_H + \alpha_L \cdot \varphi_L + S_U \quad (4.17)$$

Όπου  $\alpha_P = \alpha_E + \alpha_W + \alpha_N + \alpha_S + \alpha_H + \alpha_L - S_P$

όπου  $S_u = \alpha_p^o \cdot \varphi_p^o + b$  και  $b = S_u + S_p \cdot \varphi_p$

### 4.3 Επίλυση εξισώσεων

Κατά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων διατήρησης (ορμής, μάζας, ενέργειας) με αριθμητικές μεθόδους, προκύπτει ένα σύστημα «τυπικά» γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η επίλυση του συστήματος αυτού, αποτελεί το σημαντικότερο – σε υπολογιστικό χρόνο- βήμα, στην πορεία επίτευξης της προσεγγιστικής λύσης του προβλήματος.

Οι αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν ισχύουν για κάθε κόμβο του υπολογιστικού πεδίου. Στα όρια του υπολογιστικού πεδίου οι αλγεβρικές εξισώσεις τροποποιούνται για να συμπεριλάβουν τις οριακές συνθήκες. Το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτει επιλύεται με επαναληπτικές μεθόδους. Μερικές από αυτές είναι η μέθοδος Gauss-Siedel, η μέθοδος της διαδοχικής υπερχαλάρωσης, η μέθοδος Jacobi, η μέθοδος επίλυσης γραμμή προς γραμμή, η μέθοδος SIP κ.α. (Μαρκάτος & Ασημακόπουλος, 1995).

Οι επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, εκμεταλλεύονται την αραιή μορφή του πίνακα των συντελεστών και εμφανίζουν έτσι αυξημένη αποτελεσματικότητα, σε σχέση με τις άμεσες μεθόδους. Επιπλέον, δεν απαιτούν την αποθήκευση των μηδενικών στοιχείων, μειώνοντας έτσι τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο. Ταυτόχρονα μειώνουν το υπολογιστικό φορτίο, καθώς δεν πραγματοποιούν πράξεις με τα μηδενικά στοιχεία. Το κύριο πρόβλημα που εισάγουν είναι η ανάγκη σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας, δηλαδή οι συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι δυνατή η σύγκλιση.

Η αρχή εφαρμογής των επαναληπτικών μεθόδων έγκειται στην αναδιάταξη του αρχικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, έτσι ώστε η επίλυσή του να είναι οικονομικότερη από πλευράς υπολογιστικού χρόνου και χώρου. Στις μεθόδους σημείο προς σημείο η αναδιάταξη των εξισώσεων γίνεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε στο αριστερό σκέλος της κάθε εξίσωσης να εμφανίζεται ένας μόνο άγνωστος. Με τον τρόπο αυτό η επίλυση των εξισώσεων σε κάθε επανάληψη γίνεται εύκολα με αντικατάσταση. Οι μέθοδοι σημείο προς σημείο διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τρόπο με τον οποίο σχηματίζεται το δεξί σκέλος της εξίσωσης. Στη μέθοδο επίλυσης γραμμή προς γραμμή πραγματοποιείται μία αναδιάταξη των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι δυνατή η ταυτόχρονη επίλυσή τους κατά μήκος μιας κατακόρυφης ή οριζόντιας γραμμής υπολογιστικών σημείων. Για να γίνει αυτό, οι όροι που περιέχουν τις τιμές της  $\varphi$  στα σημεία έξω από τη γραμμή επίλυσης μεταφέρονται στο δεξί σκέλος των εξισώσεων. Με την αναδιάταξη αυτή, το αρχικό σύστημα μετατρέπεται σε ένα σύνολο τριδιαγώνιων συστημάτων, το οποίο μπορεί να λυθεί επαναληπτικά με τον αλγόριθμο Thomas. Στη μέθοδο πλήρους πεδίου γίνεται ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων σε όλα τα σημεία του πεδίου επίλυσης, με αποτέλεσμα να μεταφέρονται ταχύτατα οι οριακές συνθήκες στο εσωτερικό του πεδίου.

Στόχος είναι η λήψη ικανοποιητικών και ρεαλιστικών αποτελεσμάτων όσον αφορά τα φυσικά μεγέθη που διέπουν το φαινόμενο και τις εξισώσεις που επιλύονται. Προϋπόθεση της επιτυχούς λύσης του εκάστοτε προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου είναι η επίτευξη σύγκλισης.

Το αριθμητικό πρόβλημα θεωρείται ότι συγκλίνει όταν:

- ✓ Έχει επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια, δηλαδή η πτώση των υπολοίπων (residuals) κάτω από μία τιμή που έχει προεπιλεγθεί από το χρήστη και εκφράζει την απαιτούμενη ακρίβεια της σύγκλισης. Τα υπόλοιπα καθορίζονται για κάθε μεταβλητή που επιλύεται στο σύνολο των κόμβων του πλέγματος.
- ✓ Έχει επιτευχθεί η σταθεροποίηση της τιμής της μεταβλητής που επιλύεται, σε συγκεκριμένο σημείο (spot value), κατά τη διάρκεια των διαδοχικών επαναλήψεων.
- ✓ Υπάρχει ανεξαρτησία λύσης από το πλέγμα, που σημαίνει ότι η λύση έχει επιτευχθεί για κάποιο πλέγμα αν αυτή δε μεταβάλλεται κατά την περαιτέρω πύκνωση.
- ✓ Ικανοποιούνται τα ισοζύγια μάζας, ενέργειας και ορμής, συνολικά σε όλο το πεδίο ροής. Το κριτήριο αυτό είναι η απαίτηση για τη σωστή επίλυση των εξισώσεων.

#### 4.4 Τεχνικές υποχαλάρωσης

Για τη βελτίωση της σύγκλισης, χρησιμοποιείται η μέθοδος της υποχαλάρωσης. Η υποχαλάρωση είναι απαραίτητη, ώστε να μειώνεται η αλλαγή στην τιμή της κάθε μεταβλητής, που προκύπτει σε κάθε επανάληψη και έτσι να αποφεύγεται η απόκλιση κατά την επαναληπτική διαδικασία. Εφαρμόστηκε γραμμική υποχαλάρωση για την πίεση (P1) και το βαθμωτό μέγεθος (συγκέντρωση C1) και υποχαλάρωση ψεύδους χρονικού βήματος για τα διανυσματικά μεγέθη (u, v, w). Στη γραμμική υποχαλάρωση, κατά την επαναληπτική διαδικασία ακολουθείται η εξής διαδικασία :

$$\varphi^{new} = \varphi^{old} + a(\varphi^{new} - \varphi^{old}) \quad (4.18)$$

Όπου :

$\varphi^{new}$  , η νέα τιμή της μεταβλητής  $\varphi$  στους κόμβους του πλέγματος

$\varphi^{old}$  , η τιμή της μεταβλητής  $\varphi$  στην προηγούμενη επανάληψη στον ίδιο κόμβο του πλέγματος

$a$  , ο συντελεστής υποχαλάρωσης  $a \in (0,1)$

Στην υποχαλάρωση ψεύδους χρονικού βήματος, η υποχαλάρωση επιτυγχάνεται με την προσθήκη ενός ψευδούς μεταβατικού όρου και στα δύο μέλη της εξίσωσης μεταφοράς :

$$\rho^o \Delta V \cdot \frac{(\varphi^{old} - \varphi^{new})}{\Delta t_\psi}$$

Όπου :

$\Delta V$  , ο όγκος ελέγχου

$\rho^o$  , η πυκνότητα στο προηγούμενο χρονικό βήμα

$\Delta t_\psi$  , το ψευδές χρονικό βήμα



Μικρή τιμή του  $\Delta t_\psi$  ισχυροποιεί τον όρο ψευδο – χρονικής υποχαλάρωσης και η νέα τιμή είναι πολύ κοντά στην προηγούμενη, ενώ το μεγάλο  $\Delta t_\psi$  ελαχιστοποιεί τον όρο και τις επιδράσεις του.

Το μέγεθος του ψευδο – χρονικού βήματος  $\Delta t_\psi$  υπολογίζεται με βάση τη χρονική κλίμακα του φυσικού προβλήματος ως εξής :

$$\Delta t_\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{Συνολικός χρόνος}}{\text{Αριθμός χρονικών βημάτων}}$$

Η υποχαλάρωση ψεύδους χρονικού βήματος μπορεί να εφαρμοστεί και σε αριθμητικό πρόβλημα μόνιμης κατάστασης.

#### 4.5 Επίλυση του υδροδυναμικού πεδίου

Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις διατήρησης για τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας ( $u, v, w$ ) και τη συγκέντρωση (C1) γραμμένες για όλους τους κόμβους του πλέγματος δημιουργούν ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο σε αυτή την εργασία λύνεται με τον αλγόριθμο Thomas, με τη μορφή μίας επαναληπτικής μεθόδου γραμμής προς γραμμή, η οποία ονομάζεται ADI (Alternating Direction Implicit). Για την πίεση (P1) εφαρμόστηκε η επαναληπτική μέθοδος επίλυσης πλήρους πεδίου στην εξίσωση συνέχειας.

Στην περίπτωση των υδροδυναμικών μεταβλητών ( $P, u, v, w$ ) χρησιμοποιείται μια πρόσθετη διαδικασία. Ο λόγος είναι ότι οι εξισώσεις ορμής περιέχουν ως άγνωστο και την πίεση  $P$ . Αν η τελευταία ήταν γνωστή τότε και οι εξισώσεις ορμής θα επιλύονταν με τον ίδιο τρόπο. Υπάρχει μια επιπλέον εξίσωση, η εξίσωση συνέχειας, στην οποία όμως δεν εμφανίζεται καθόλου η πίεση. Όμως και η πίεση είναι και αυτή μεταβλητή που πρέπει να υπολογισθεί πράγμα που δημιουργεί την ανάγκη εισαγωγής ενός αλγορίθμου επίλυσης του υδροδυναμικού πεδίου.

Στην παρούσα εργασία για την επίλυση του φυσικού προβλήματος χρησιμοποιείται ο εμπορικός κώδικας υπολογιστικής ρευστοδυναμικής PHOENICS της εταιρείας CHAM Ltd. Ο αλγόριθμος επίλυσης του λογισμικού PHOENICS είναι ο SIMPLEST (Semi-Implicit Method for Pressure – Linked Equations Shortened) που επινοήθηκε από τον Dudley Brian Spalding το 1980 ο οποίος αποτελεί εξέλιξη του αλγορίθμου SIMPLE. Η μέθοδος στηρίζεται στην εκτίμηση ενός πεδίου πίεσης  $P^*$  και στη διόρθωση αυτού μέχρι οι ταχύτητες που προκύπτουν, να ικανοποιήσουν την εξίσωση συνέχειας και ορμής.

Τα στάδια του αλγόριθμου SIMPLEST είναι :

- ✓ Εκτίμηση πεδίου πίεσης  $P^*$  , ταχυτήτων  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  και των υπολοίπων ιδιοτήτων  $\phi^*$
- ✓ Επίλυση εξισώσεων ορμής για  $(u^*, v^*, w^*)$  με χρήση των σχέσεων:

$$a_e u_e^* = \sum_{i=\text{γείτονες}} a_i u_i^* + A_e (P_P^* - P_E^*) + S_{Ue}$$

$$a_w u_w^* = \sum_{i=\text{γείτονες}} a_i u_i^* + A_w (P_W^* - P_P^*) + S_{Uw}$$

- ✓ Επίλυση εξίσωσης διόρθωσης πίεσης με χρήση της σχέσης:

$$a_p \cdot P_P' = a_E \cdot P_E' + a_W \cdot P_W' + a_N \cdot P_N' + a_S \cdot P_S' + S_m$$

Όπου  $a_p = a_E + a_W + a_N + a_S$

- ✓ Υπολογισμός σωστής πίεσης από τη σχέση :  $P = P^* + P'$
- ✓ Διόρθωση ταχυτήτων από τη σχέση :

$$u_e' = d_e (P_P' - P_E')$$

- ✓ Υπολογισμός τιμών ταχυτήτων από τη σχέση :
- $$u_e = u_e^* + d_e (P_P' - P_E')$$

- ✓ Επίλυση της εξίσωσης του βαθμωτού μεγέθους (συγκέντρωση).
- ✓ Εξετάζεται αν έχει επιτευχθεί σύγκλιση
  - Αν ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει τότε οι τιμές των μεταβλητών είναι η λύση του προβλήματος
  - Αν ο αλγόριθμος δεν έχει συγκλίνει τότε ακολουθεί επιστροφή στο πρώτο βήμα. Γίνεται νέα εκτίμηση για το πεδίο πίεσης  $P^* = P$  , των ταχυτήτων  $u^* = u$ ,  $w^* = w$ ,  $v^* = v$  και των υπολοίπων ιδιοτήτων  $\phi^* = \phi$  και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

#### 5.1 Η Μαθηματική επίλυση του προβλήματος

Η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση του προβλήματος ακολουθεί τα εξής στάδια :

- Σχεδιασμός της γεωμετρίας του πεδίου

Αρχικά σχεδιάζεται η γεωμετρία της δεξαμενής κυλινδρικού σχήματος

- Χωρική διακριτοποίηση

Το αρχικό βήμα για την δημιουργία του πλέγματος είναι η υποδιαίρεση του πεδίου σε μικρότερα υποχωρία με βάση τη γεωμετρία του, έτσι ώστε να κατασκευαστεί δομημένο πλέγμα.

Το επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή του πλέγματος. Στο πεδίο εφαρμόστηκε ομοιόμορφο δομημένο πλέγμα, το οποίο αποτελείται από εξάεδρα στοιχειώδη κελιά κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων.

- Μαθηματική επίλυση – Προσομοίωση του φαινομένου της αναρρόφησης

Το πρόβλημα της παρούσας εργασίας προσεγγίζεται μαθηματικά (μοντελοποιείται) με τις εξισώσεις που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3.

Η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος πραγματοποιείται με την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων ελέγχου, η οποία περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του προβλήματος ως εξής:

- Ανεξαρτησία λύσεως από το πλέγμα

Παρουσιάζεται η διαδικασία εύρεσης του ανεξάρτητου πλέγματος για τη συγκεκριμένη γεωμετρία του προβλήματος (κυλινδρική δεξαμενή)

- Βέλτιστα πλέγματα

Παρουσιάζονται οι όψεις του ανεξάρτητου πλέγματος σε δι-διάστατο και τρι-διάστατο επίπεδο.

- Διανύσματα ταχύτητας - συγκέντρωση

Παρουσιάζονται τα διαγράμματα που εμφανίζουν τα διανύσματα των ταχυτήτων  $u$ ,  $v$ ,  $w$  καθώς και την κατανομή συγκέντρωσης.

## 5.2 Ανεξαρτησία λύσεως από το πλέγμα

Αρχικά κατασκευάστηκε το πλέγμα της κυλινδρικής δεξαμενής. Στο πεδίο προσομοίωσης επιβλήθηκαν πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας με στόχο τον καθορισμό του πλέγματος που εξασφαλίζει την ανεξαρτησία της λύσης κατά τη διακριτοποίηση που επιχειρείται για την επίλυση.

Το πρώτο πλέγμα αποτελείται από **1600 κελιά** και είναι αρκετά αραιό, με αποτέλεσμα να μην εξασφαλίζει ανεξαρτησία της λύσης. Χρησιμοποιείται για αρχική ποιοτική εκτίμηση της ορθότητας του μαθηματικού μοντέλου.

Το δεύτερο πλέγμα αποτελείται από **5.400 κελιά**.

Το τρίτο πλέγμα αποτελείται από **12.800 κελιά**.

Το τέταρτο πλέγμα αποτελείται από **25.000 κελιά**.

Το πέμπτο πλέγμα αποτελείται από **43.200 κελιά**.

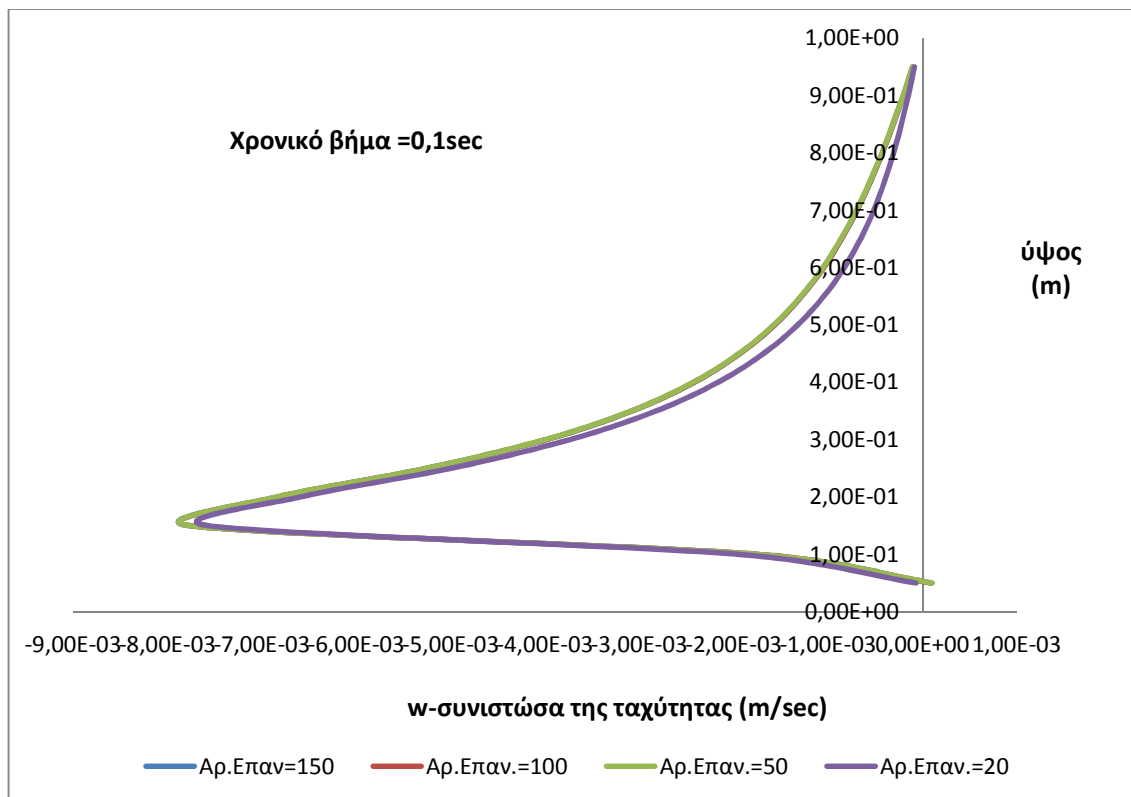
Για να εξασφαλιστεί η ανεξαρτησία της λύσης εξετάστηκαν τρία διαφορετικά πεπερασμένα χρονικά βήματα για κάθε πλέγμα. Επιπλέον, μελετήθηκε και η ανεξαρτησία της λύσης ως προς τον αριθμό επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικοί αριθμοί επαναλήψεων για κάθε χρονικό βήμα (Πίνακες 5.1-5.5).

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η διαδικασία που πραγματοποιήθηκε για κάθε πλέγμα ξεχωριστά :

### Πλέγμα 1<sup>ο</sup>

Για το πρώτο πλέγμα επιλέχθηκαν τρία διαφορετικά χρονικά βήματα ( $\Delta t=0.1\text{sec}$ ,  $0.05\text{sec}$  και  $0.025\text{sec}$ ) και ανά χρονικό βήμα εφαρμόστηκαν τέσσερις διαφορετικοί αριθμοί επαναλήψεων. Τα διαγράμματα που ακολουθούν παριστάνουν την κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας στην περιοχή του πεδίου ροής, όπου εμφανίζονται οι μεγαλύτερες μεταβολές της ροής και περιγράφουν τη μελέτη ανεξαρτησίας για κάθε χρονικό βήμα ξεχωριστά.

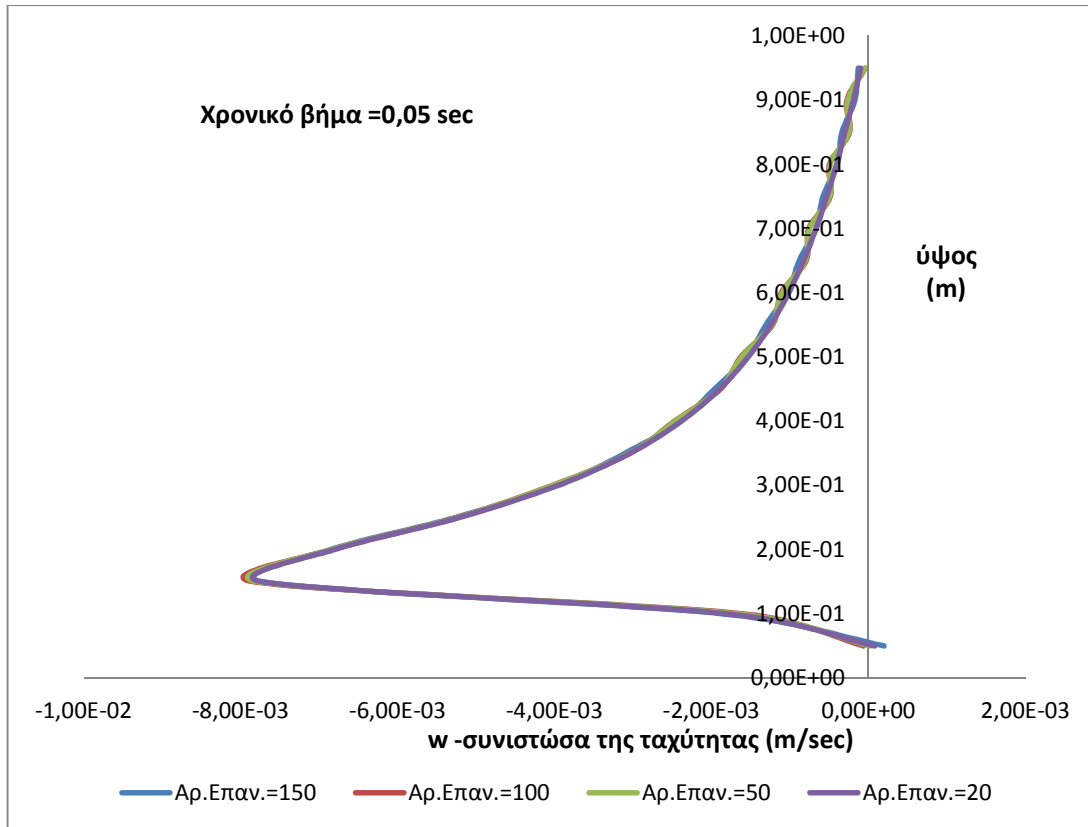
Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.1\text{sec}$  ο αριθμός των επαναλήψεων που εφαρμόστηκαν είναι 20, 50, 100, 150. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση z δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Επομένως, για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 20.



**Διάγραμμα 5.1 :** Κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας  $w$  για χρονικό βήμα  $0,1\text{ sec}$ .

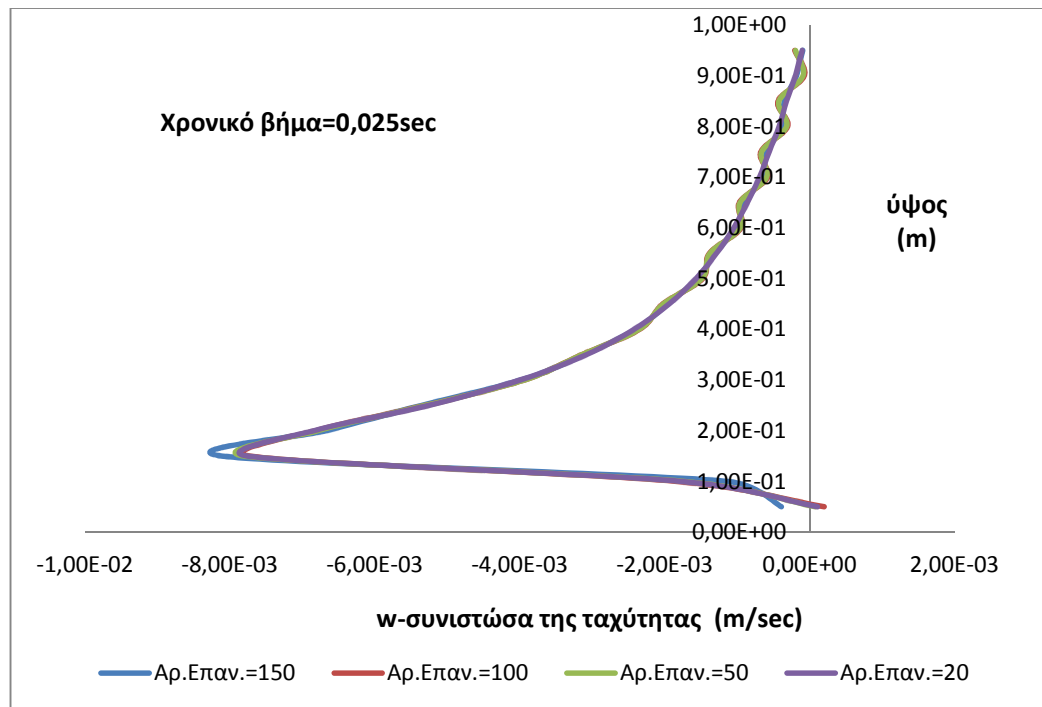
Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0,05\text{sec}$  ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20, 50, 100, 150. Από το διάγραμμα που ακολουθεί,

προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση z δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 20.



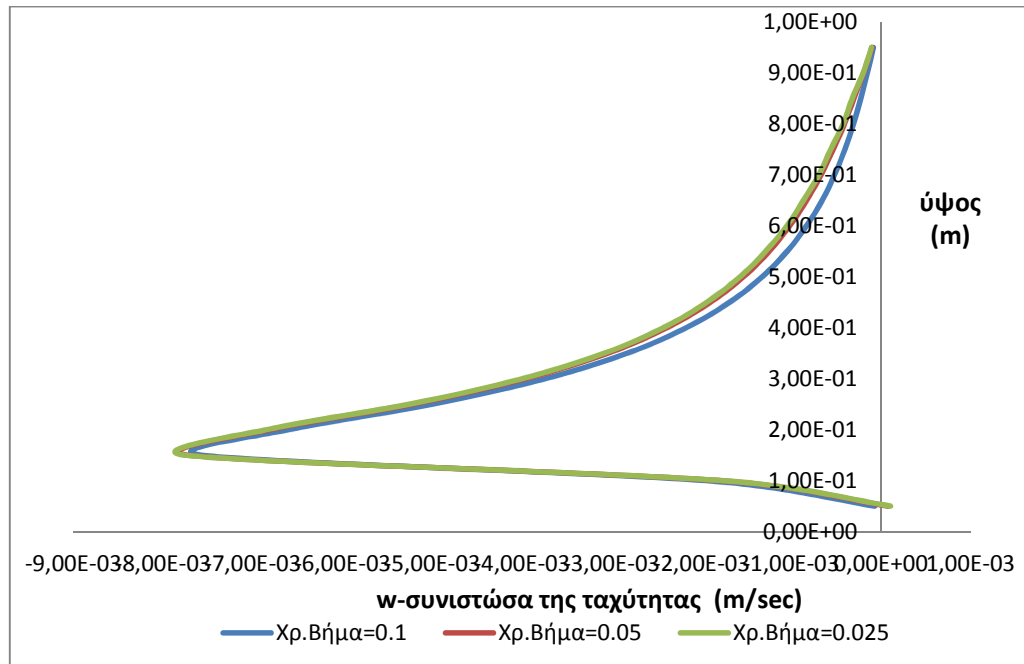
**Διάγραμμα 5.2 :** Κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας w για χρονικό βήμα 0,05 sec.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0,025$  sec ο αριθμός των επαναλήψεων που εφαρμόστηκαν είναι 20, 50, 100, 150. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση z δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 20.



**Διάγραμμα 5.3 :** Κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας  $w$  για χρονικό βήμα 0,025 sec.

Στη συνέχεια κατασκευάζεται διάγραμμα με την κατανομή της ταχύτητας στη διεύθυνση  $z$  για τα τρία διαφορετικά χρονικά βήματα και τους βέλτιστους αριθμούς επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα.



33

**Διάγραμμα 5.4 :** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για τα χρονικά βήματα 0.1, 0.05, 0.025 sec

**Πίνακας 5.1**

<b>Πλέγμα 1° (1600 κελιά)</b>			
<b>Χρονικό βήμα</b>	0.1	0.05	0.025
<b>Αριθμός επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα</b>	150,100,50,20	150,100,50,20	150,100,50,20
<b>Βέλτιστος αριθμός επαν. Ανά χρονικό βήμα</b>	20	20	20
<b>Βέλτιστο χρονικό βήμα</b>	0.1		

**Πλέγμα 2°**

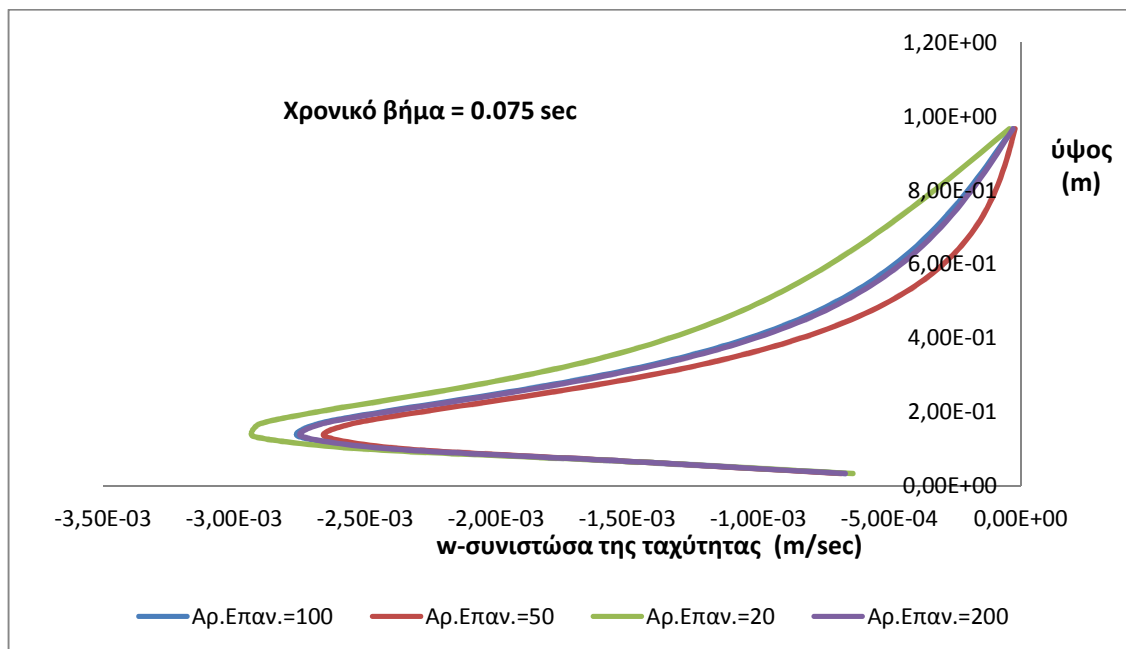
Για το δεύτερο πλέγμα επιλέχθηκαν τρία διαφορετικά χρονικά βήματα ( $\Delta t = 0.075\text{sec}$ ,  $0.0375\text{sec}$  και  $0.01875\text{sec}$ ) και ανά χρονικό βήμα εφαρμόστηκε



διαφορετικός αριθμός επαναλήψεων. Για το χρονικό βήμα 0.075 sec εφαρμόστηκαν τέσσερις διαφορετικοί αριθμοί επαναλήψεων, ενώ για τα χρονικά βήματα 0.0375 sec και 0.001875 sec τρεις διαφορετικοί αριθμοί επαναλήψεων. Τα διαγράμματα που ακολουθούν περιγράφουν την μελέτη ανεξαρτησίας για κάθε χρονικό βήμα ξεχωριστά.

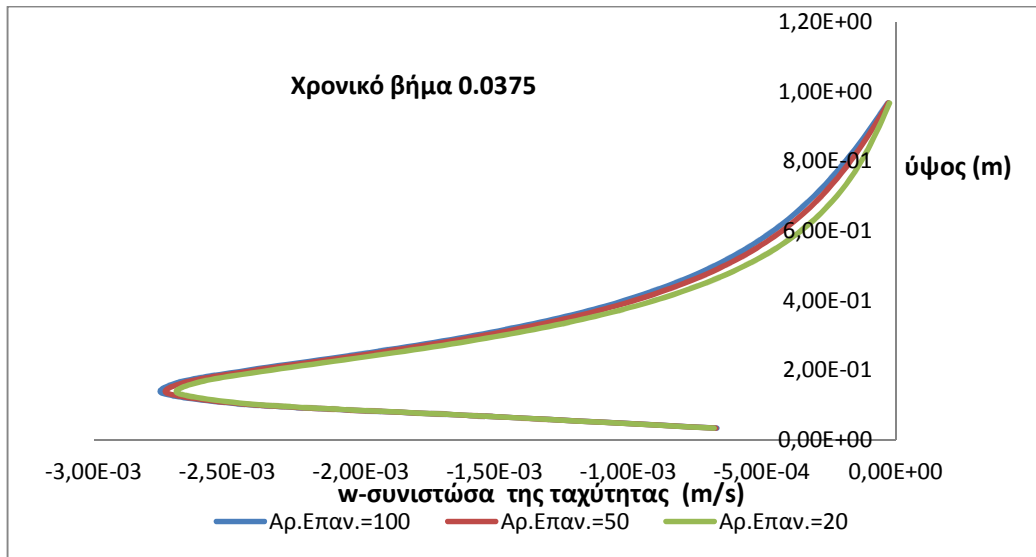
Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.075$  sec ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20, 50, 100, 200. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση z δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 100.

34



**Διάγραμμα 5.5 :** Κατανομή της ταχύτητας w, ως προς τον άξονα Z για χρονικό βήμα 0,075 sec.

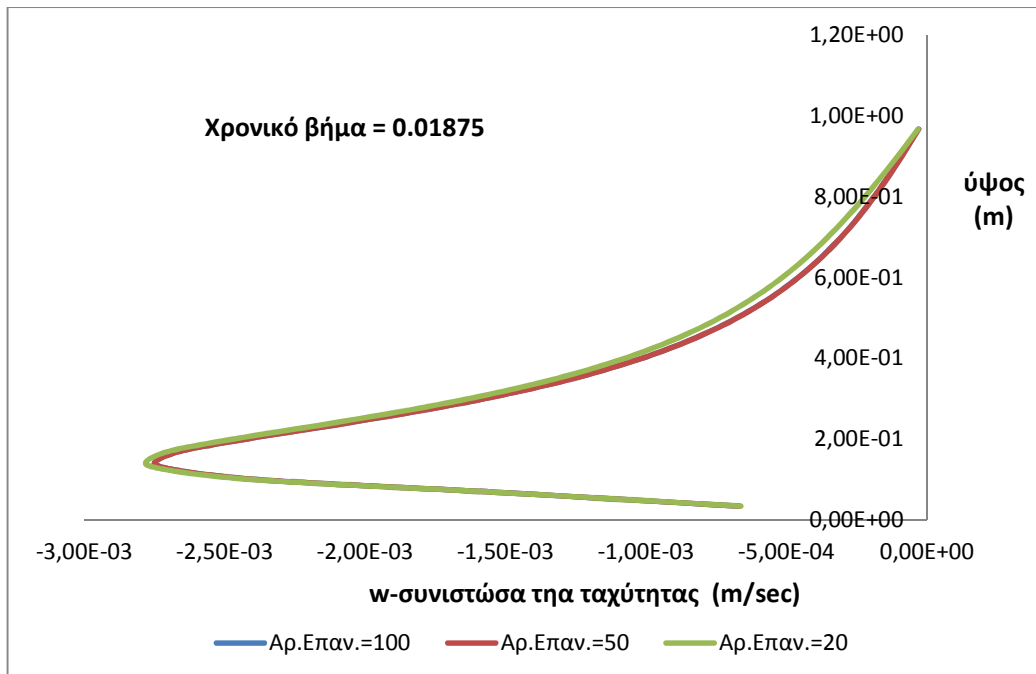
Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.0375$  sec ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20, 50, 100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση z δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 50.



**Διάγραμμα 5.6 :** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,0375 sec.

35

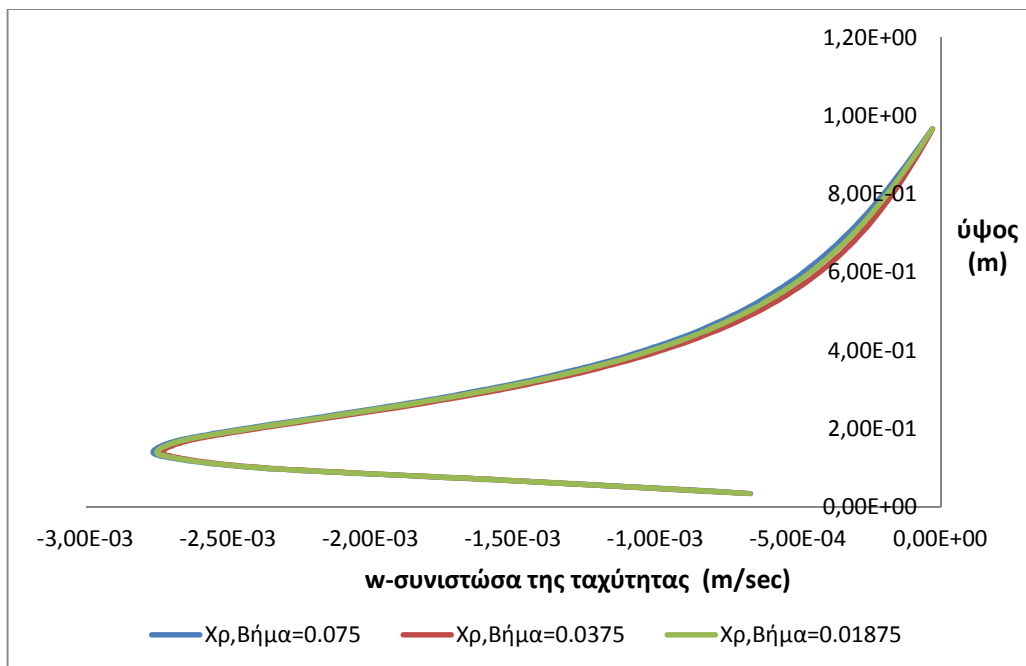
Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.01875$  sec ο αριθμός των επαναλήψεων που εφαρμόστηκαν είναι 20, 50, 100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $z$  δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 50.



**Διάγραμμα 5.7 :** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,01875 sec.

Στη συνέχεια κατασκευάζεται διάγραμμα για τα τρία διαφορετικά χρονικά βήματα και τους βέλτιστους αριθμούς επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα.

36



**Διάγραμμα 5.8:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για τα χρονικά βήματα 0.075, 0.0375, 0.01875 sec.

## Πίνακας 5.2

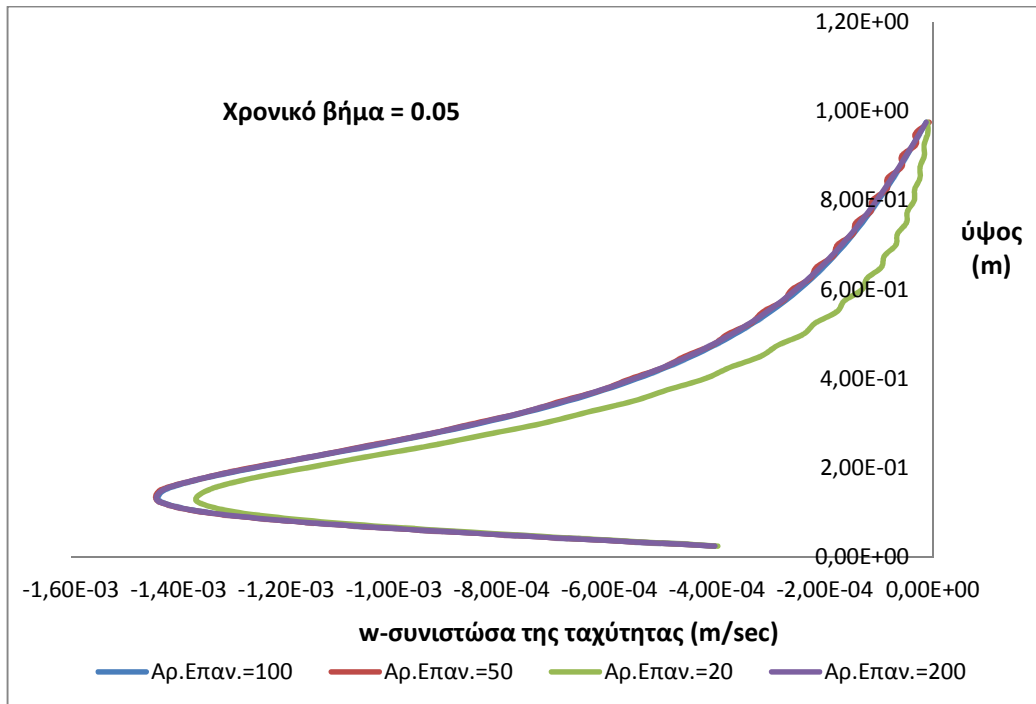
Πλέγμα 2° (5400κελιά)

<b>Χρονικό βήμα</b>	0.075	0.0375	0.01875
<b>Αριθμός επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα</b>	200,100,50,20	100,50,20	100,50,20
<b>Βέλτιστος αριθμός επαν. Ανά χρονικό βήμα</b>	100	50	50
<b>Βέλτιστο χρονικό βήμα</b>	0.075		

### Πλέγμα 3<sup>ο</sup>

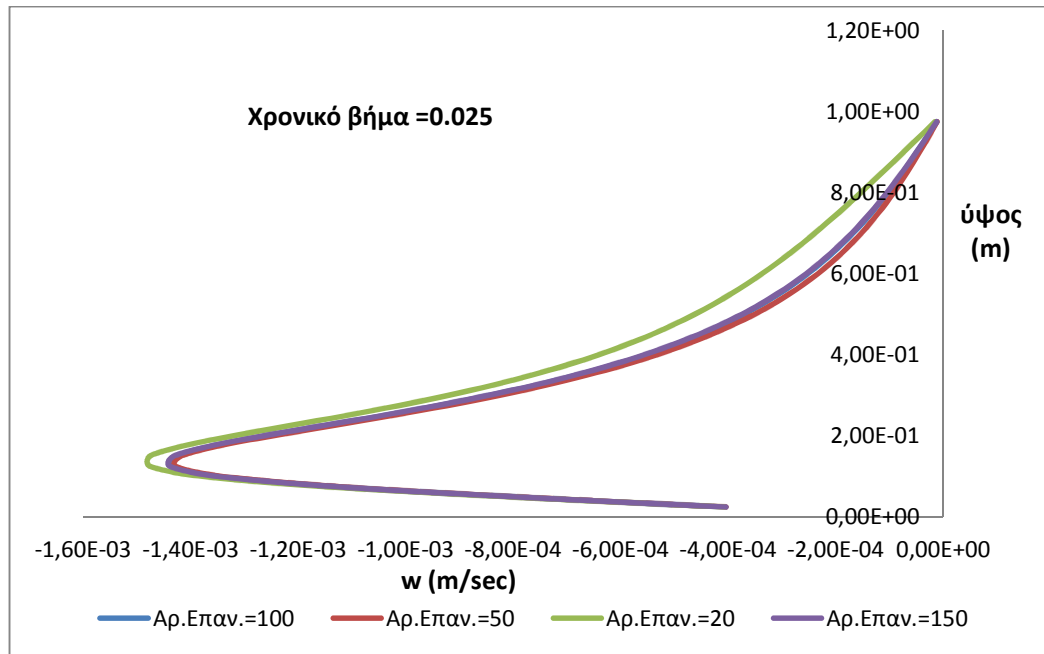
Για το τρίτο πλέγμα επιλέχθηκαν τρία διαφορετικά χρονικά βήματα ( $\Delta t = 0.05, 0.025, 0.01 \text{ sec}$ ) και ανά χρονικό βήμα εφαρμόστηκε διαφορετικός αριθμός επαναλήψεων. Για τα χρονικά βήματα 0.05 και 0.025 sec εφαρμόστηκαν τέσσερις διαφορετικοί αριθμοί επαναλήψεων, ενώ για το χρονικό βήμα 0.01 sec τρεις αριθμοί επαναλήψεων. Τα διαγράμματα που ακολουθούν περιγράφουν τη μελέτη ανεξαρτησίας για κάθε χρονικό βήμα ξεχωριστά.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.05 \text{ sec}$  ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20, 50, 100, 200. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση z δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 50.



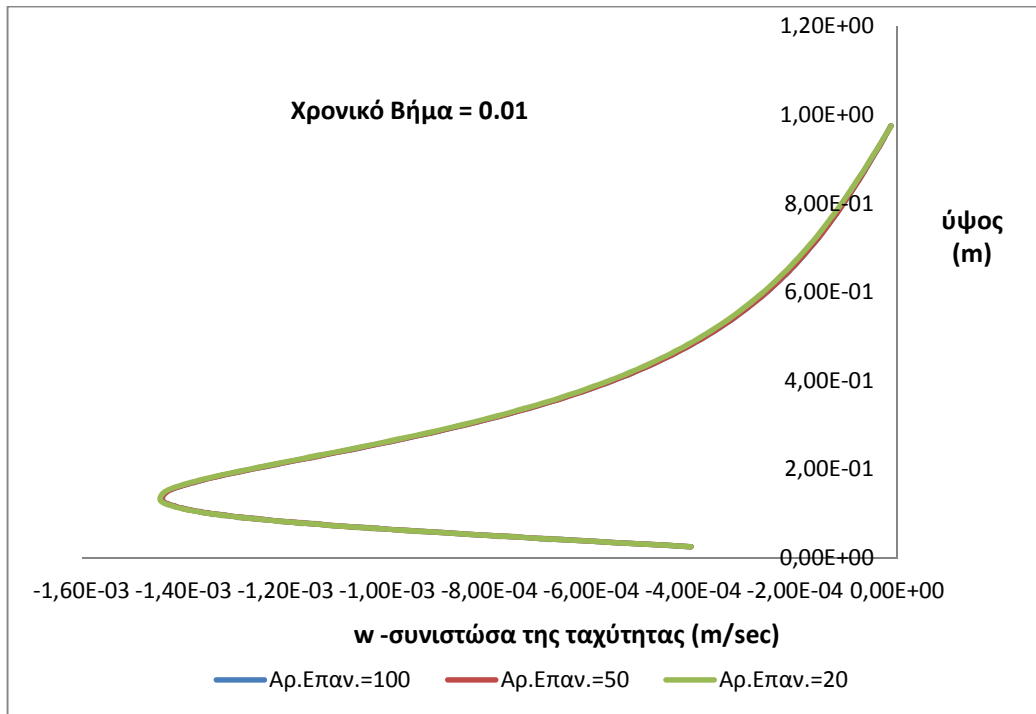
**Διάγραμμα 5.9:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,05 sec.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.025$  sec ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20, 50, 100, 150. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $z$  δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 50.



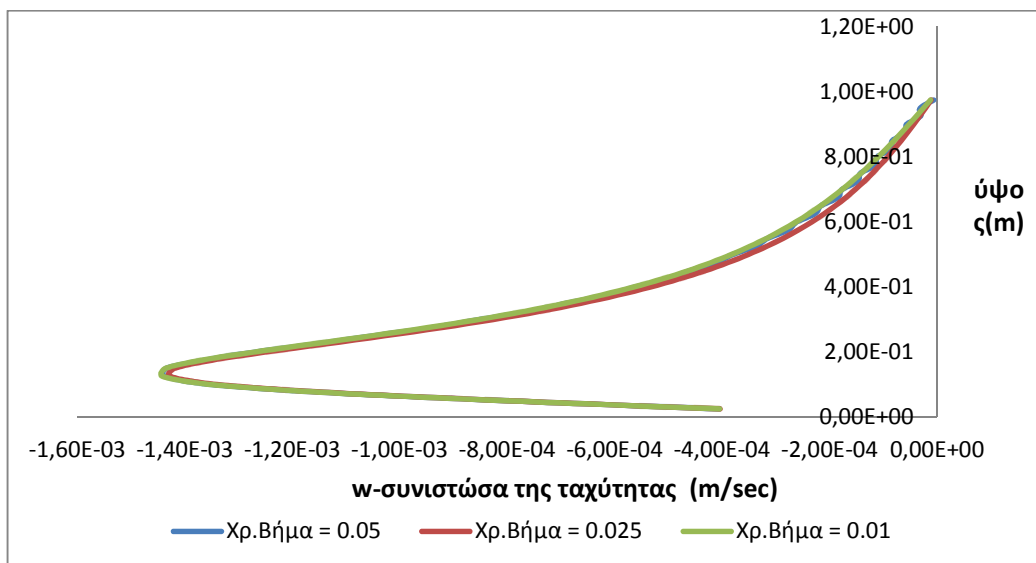
**Διάγραμμα 5.10:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,025 sec.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.01$  sec ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20, 50, 100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $z$  δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 20.



**Διάγραμμα 5.11:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,01 sec.

Στη συνέχεια κατασκευάζεται διάγραμμα για τα τρία διαφορετικά χρονικά βήματα και τους βέλτιστους αριθμούς επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα.



**Διάγραμμα 5.12:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικά βήματα 0.05, 0.025, 0.01 sec.

**Πίνακας 5.3**

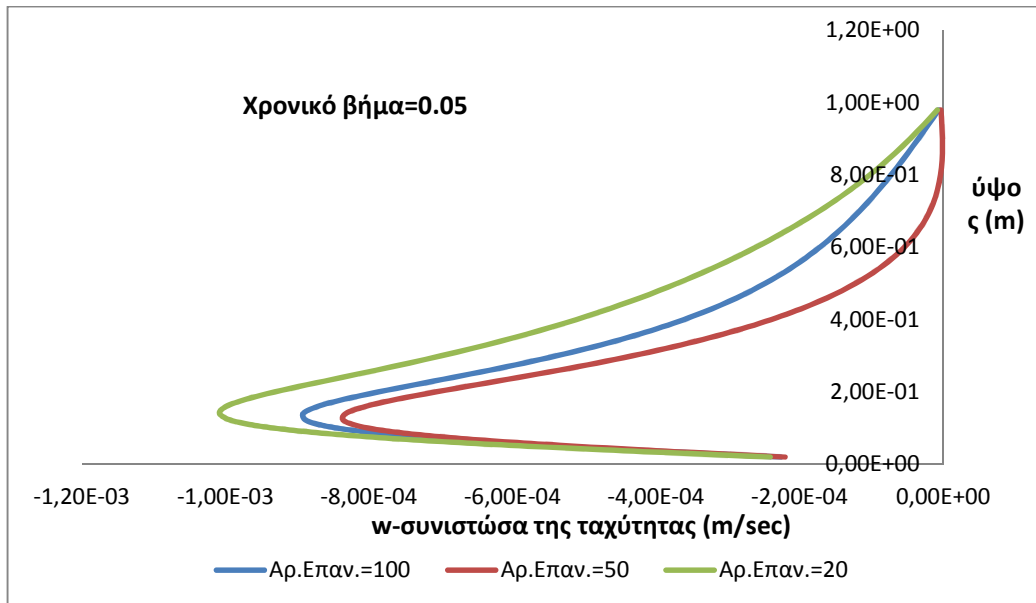
<b>Πλέγμα 3<sup>ο</sup> (12800κελιά)</b>			
<b>Χρονικό βήμα</b>	0.05	0.025	0.01
<b>Αριθμός επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα</b>	200,100,50,20	150,100,50,20	100,50,20
<b>Βέλτιστος αριθμός επαν. Ανά χρονικό βήμα</b>	50	50	20
<b>Βέλτιστο χρονικό βήμα</b>	0.05		

**Πλέγμα 4<sup>ο</sup>**

Για το τέταρτο πλέγμα επιλέχθηκαν τρία διαφορετικά χρονικά βήματα ( $\Delta t = 0.05\text{sec}$ ,  $0.025\text{sec}$  και  $0.01\text{ sec}$ ) και ανά χρονικό βήμα εφαρμόστηκαν τέσσερις διαφορετικοί αριθμοί επαναλήψεων. Τα διαγράμματα που ακολουθούν περιγράφουν την μελέτη ανεξαρτησίας για κάθε χρονικό βήμα ξεχωριστά.

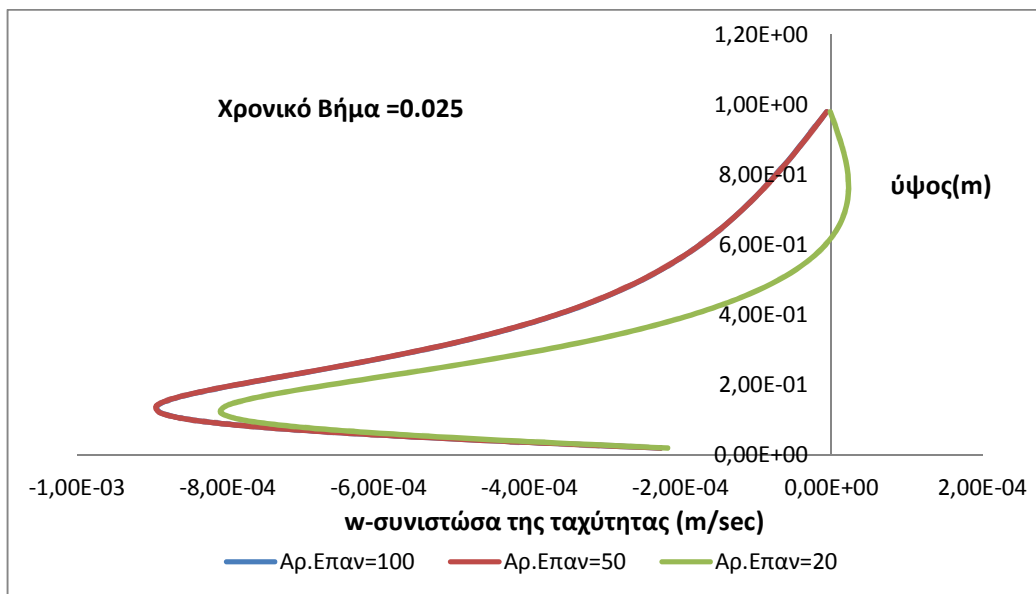
Για χρονικό  $\Delta t = 0.05\text{sec}$  ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20,50,100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι το διάνυσμα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση z δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 100.





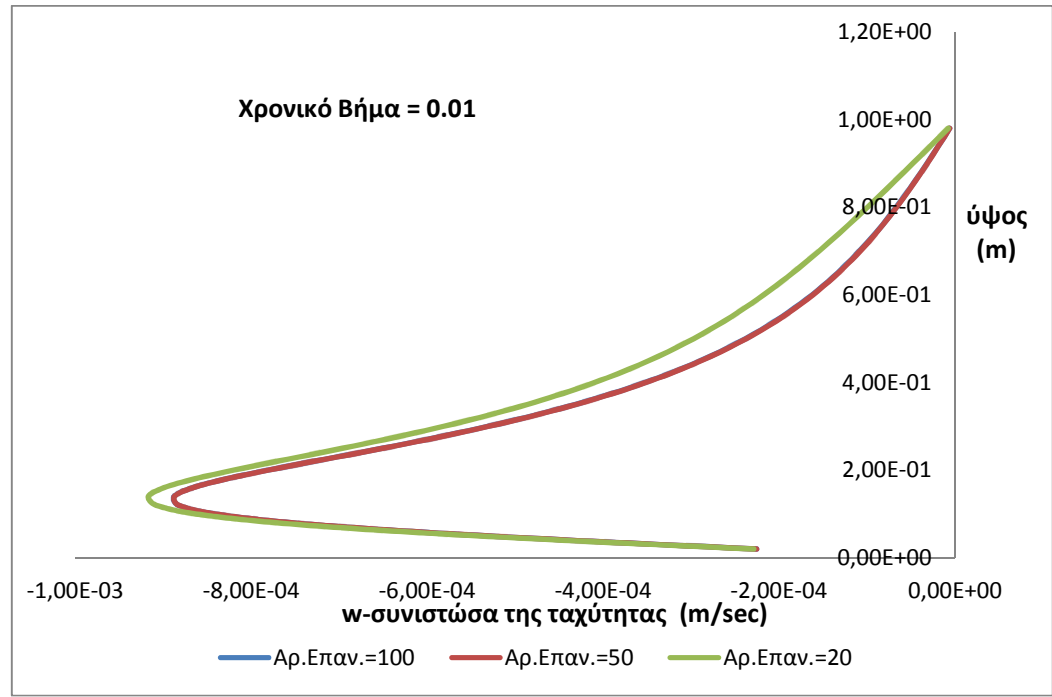
**Διάγραμμα 5.13:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,05 sec.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.025$  sec ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20,50,100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $z$  δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 50.



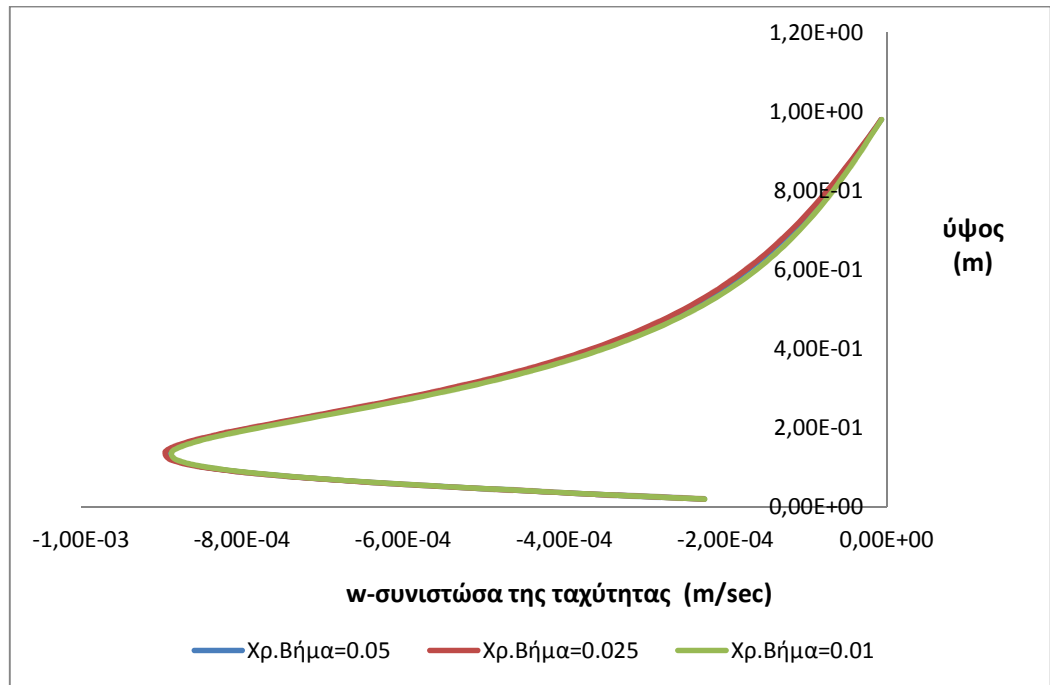
**Διάγραμμα 5.14:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,025 sec.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.01\text{sec}$  ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20,50,100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση z δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 50.



**Διάγραμμα 5.15:** Κατανομή της ταχύτητας w, ως προς τον άξονα Z για χρονικό βήμα 0,01 sec.

Στη συνέχεια κατασκευάζεται διάγραμμα για τα τρία διαφορετικά χρονικά βήματα και τους βέλτιστους αριθμούς επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα.



**Διάγραμμα 5.16:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικά βήματα 0.05, 0.025, 0.01 sec.

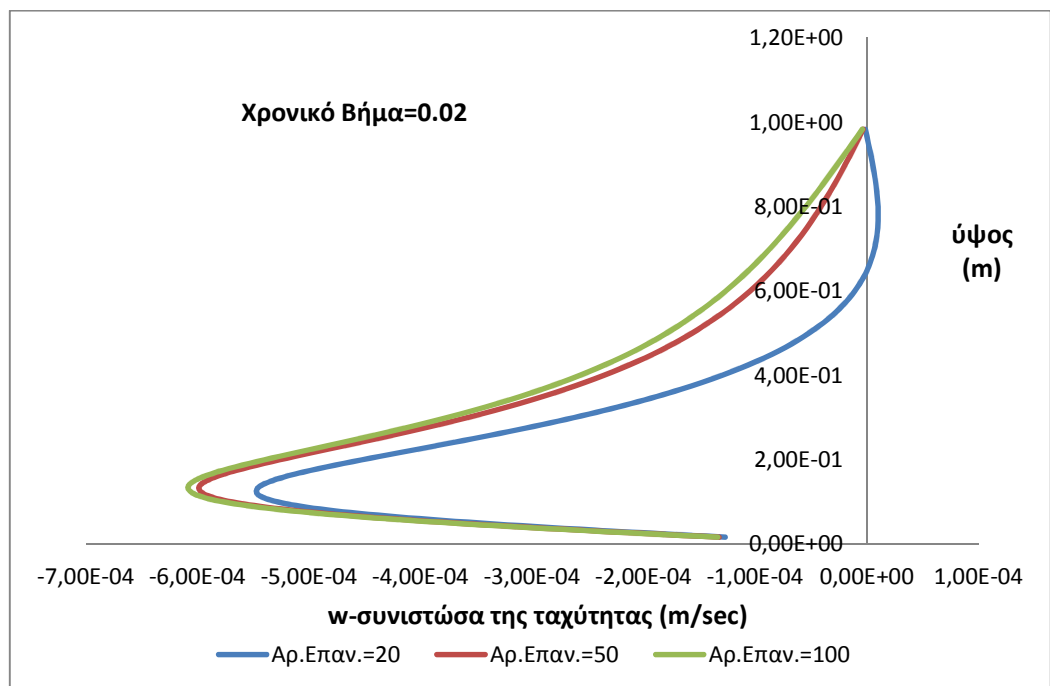
**Πίνακας 5.4**

<b>Πλέγμα 4° (25000κελιά)</b>			
<b>Χρονικό βήμα</b>	0.05	0.025	0.01
<b>Αριθμός επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα</b>	100,50,20	150,100,50,20	100,50,20
<b>Βέλτιστος αριθμός επαν. Ανά χρονικό βήμα</b>	100	50	50
<b>Βέλτιστο χρονικό βήμα</b>	0.05		

## Πλέγμα 5°

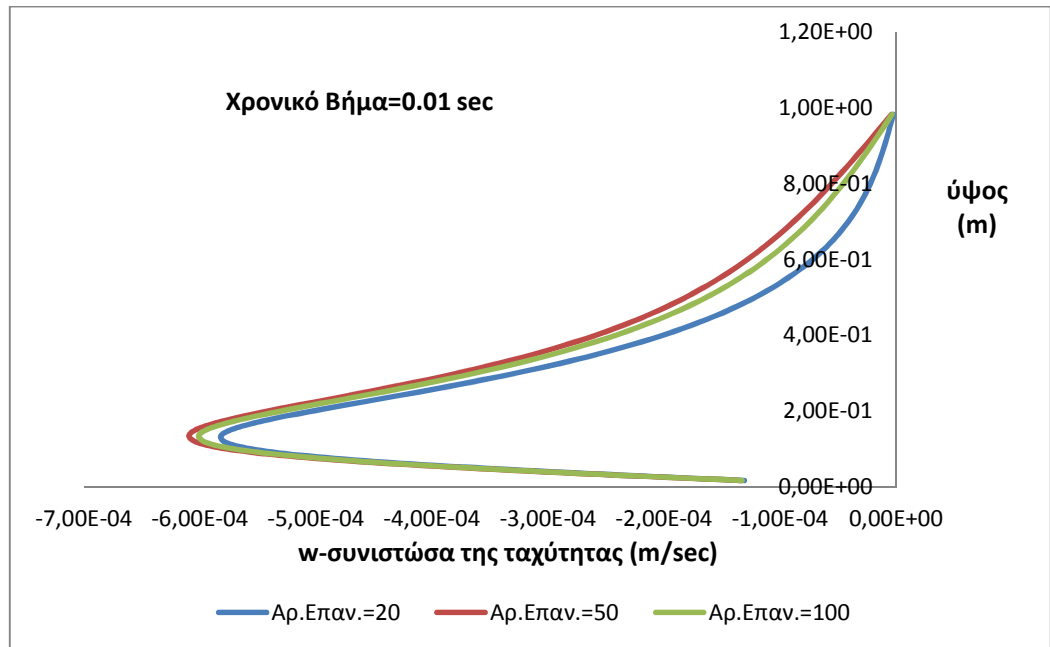
Για το πέμπτο πλέγμα επιλέχθηκαν τρία διαφορετικά χρονικά βήματα ( $\Delta t = 0.02, 0.01, 0.005 \text{ sec}$ ) και ανά χρονικό βήμα εφαρμόστηκε διαφορετικός αριθμός επαναλήψεων. Τα διαγράμματα που ακολουθούν περιγράφουν τη μελέτη ανεξαρτησίας για κάθε χρονικό βήμα ξεχωριστά.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$  ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20, 50 και 100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $z$  δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 50.



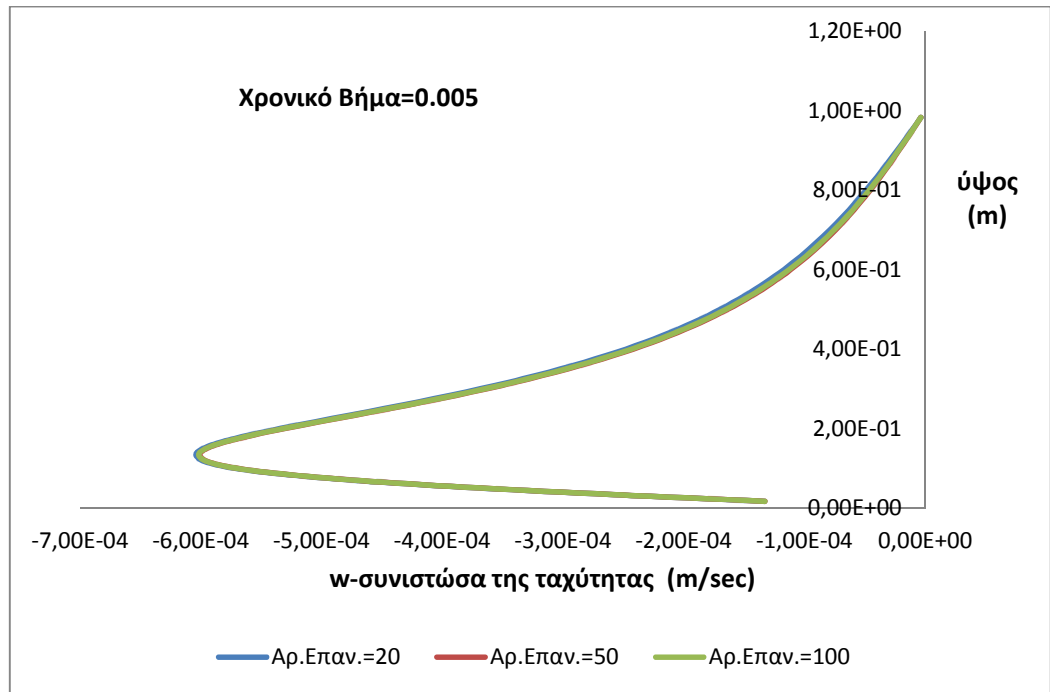
**Διάγραμμα 5.17:** Η κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,02 sec.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$  ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20,50,100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $z$  δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 50.



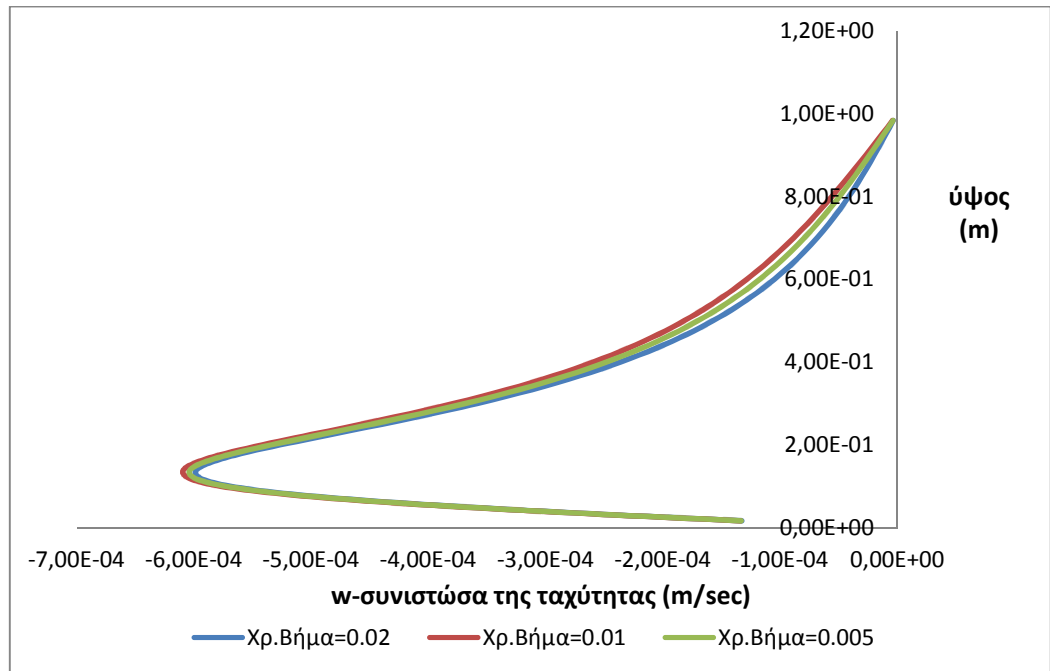
**Διάγραμμα 5.18:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,01 sec.

Για χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.005\text{sec}$  ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι 20,50,100. Από το διάγραμμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι η κατανομή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $z$  δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων. Για το λόγο αυτό επιλέγεται αριθμός επαναλήψεων 20.



**Διάγραμμα 5.19:** Κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικό βήμα 0,005 sec.

Στη συνέχεια κατασκευάζεται διάγραμμα για τα τρία διαφορετικά χρονικά βήματα και τους βέλτιστους αριθμούς επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα.



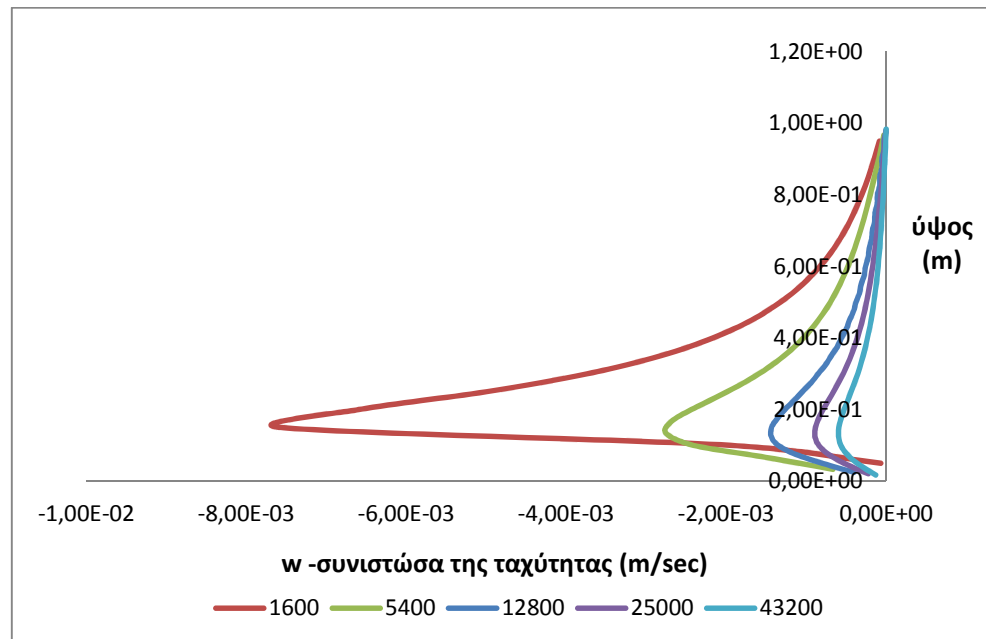
**Διάγραμμα 5.20:** Η κατανομή της ταχύτητας  $w$ , ως προς τον άξονα  $Z$  για χρονικά βήματα 0.02, 0.01 και 0.005 sec.

**Πίνακας 5.5**

<b>Πλέγμα 5° (43200κελιά)</b>			
<b>Χρονικό βήμα</b>	0.02	0.01	0.005
<b>Αριθμός επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα</b>	100,50,20	150,100,50,20	100,50,20
<b>Βέλτιστος αριθμός επαν. Ανά χρονικό βήμα</b>	50	50	20
<b>Βέλτιστο χρονικό βήμα</b>	0.02		

Η επίλυση πραγματοποιήθηκε και για τα πέντε πλέγματα με σκοπό να μελετηθεί η ανεξαρτησία της λύσης ως προς τη χωρική και χρονική διακριτοποίηση. Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η κατακόρυφη κατανομή της w-συνιστώσας της ταχύτητας στο ίδιο κρίσιμο σημείο του πεδίου ροής και για τα πέντε πλέγματα. Το κρίσιμο σημείο βρίσκεται στην περιοχή όπου παρατηρούνται μεγαλύτερες μεταβολές στη ροή, δηλαδή πολύ κοντά στο σημείο που γίνεται η αναρρόφηση.

Στο τελευταίο στάδιο της μελέτης ανεξαρτησίας σχεδιάζεται το παρακάτω διάγραμμα, το οποίο παριστάνει την κατανομή της w-συνιστώσας της ταχύτητας στη διεύθυνση z και για τα πέντε πλέγματα. Με βάση το διάγραμμα 5.21 το πλέγμα που εξασφαλίζει ανεξαρτησία της λύσης είναι το τέταρτο πλέγμα, το οποίο περιέχει 25.000 κελιά με χρονικό βήμα 0.05 sec και αριθμό επαναλήψεων 100. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, στην περίπτωση που επιλέξουμε να μελετήσουμε τις κατακόρυφες κατανομές και των υπόλοιπων μεταβλητών του προβλήματος στο κρίσιμο σημείο. Τα αποτελέσματα, τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια, βασίζονται στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος με την εφαρμογή του βέλτιστου πλέγματος και του αντίστοιχου βέλτιστου χρονικού βήματος.

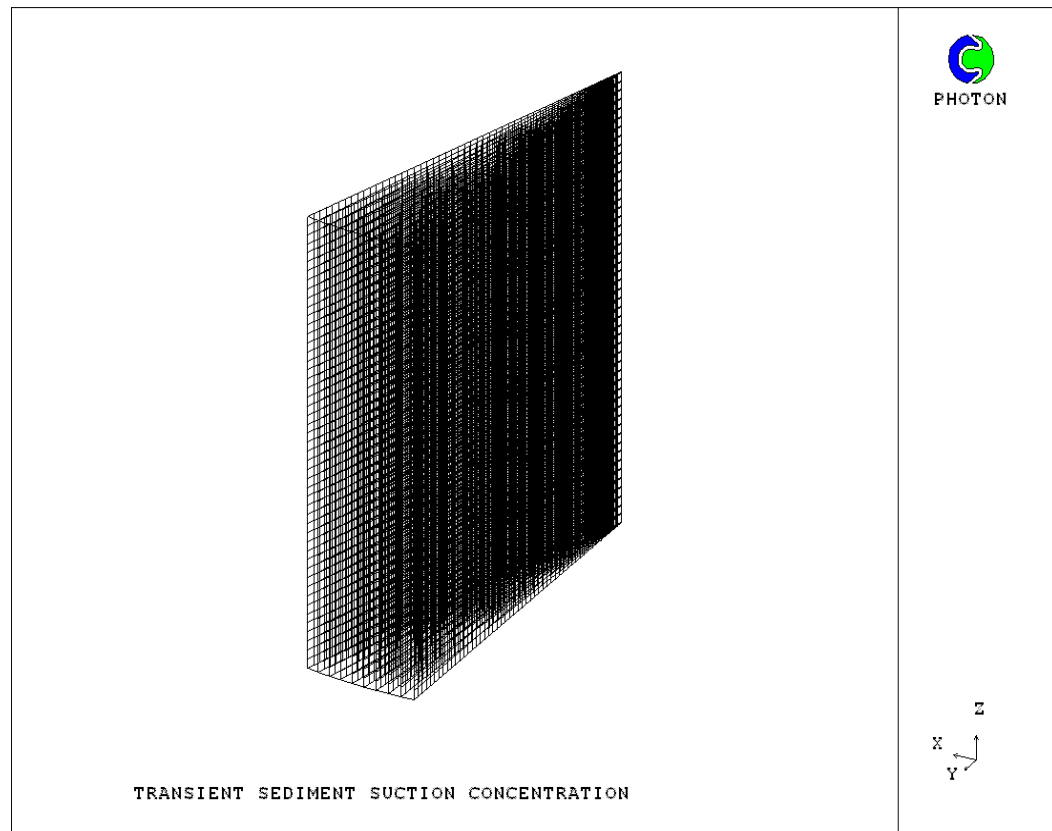


**Διάγραμμα 5.21:** Κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας w, ως προς τον άξονα Z για τα πέντε πλέγματα του προβλήματος.



### 5.3 Βέλτιστα πλέγματα

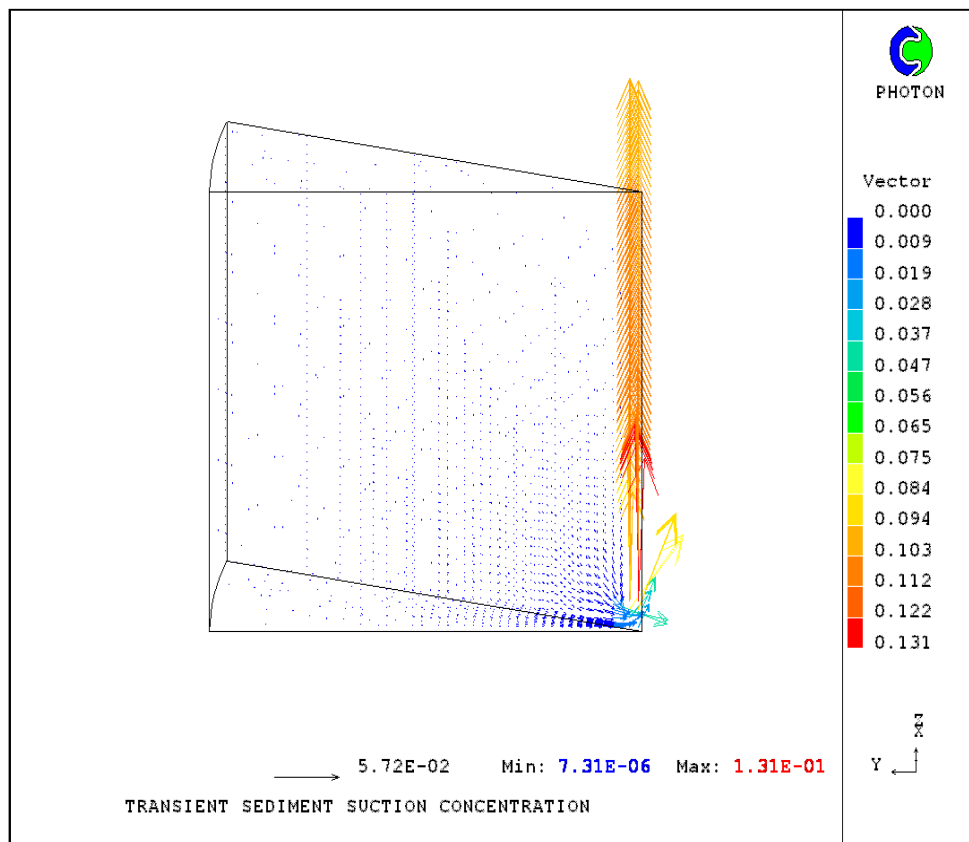
Το ανεξάρτητο πλέγμα το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τη μαθηματική επίλυση του προβλήματος απεικονίζεται στα σχήματα που ακολουθούν :



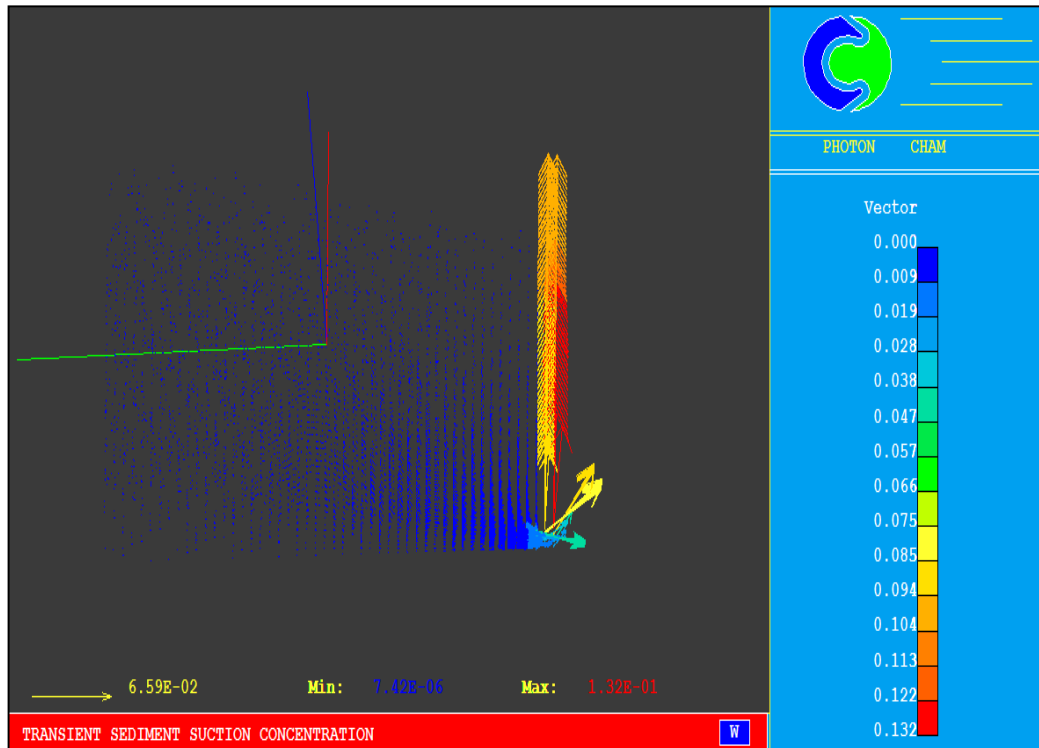
Σχήμα 5.1 : Όψη συνολικού πλέγματος

#### 5.4 Πεδίο ροής της ταχύτητας

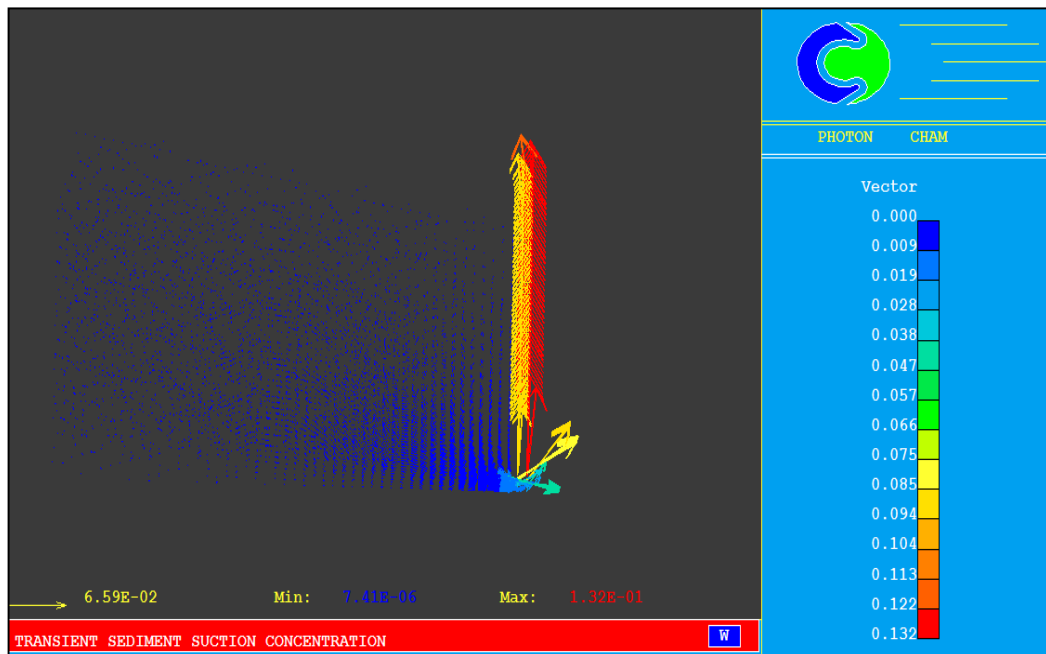
Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η κατανομή της ταχύτητας  $w$  με την οποία αναρροφάται το στερεό ίζημα. Στο πεδίο ροής της ταχύτητας παρατηρείται ο σχηματισμός ενός βρόγχου κυκλοφορίας στερεού ιζήματος γύρω από το σημείο που γίνεται η αναρρόφηση. Στο υπόλοιπο πεδίο ροής η κυκλοφορία του ιζήματος είναι περιορισμένη. Στην περιοχή που βρίσκεται εγκατεστημένος ο σωλήνας αναρρόφησης εντοπίζονται οι πιο έντονες μεταβολές των τιμών της ταχύτητας. Συνεπώς παρατηρούνται περιοχές με έντονη κυκλοφορία ρευστού και περιοχές με περιορισμένη κυκλοφορία, όπου το ρευστό φαίνεται να είναι σε ηρεμία. Στα διαγράμματα 5.2 – 5.4 απεικονίζεται το πεδίο ροής της ταχύτητας για πραγματικούς χρόνους 1, 5 και 10 sec αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι οι τιμές του πεδίου ταχύτητας δε μεταβάλλονται όσο αυξάνεται ο πραγματικός χρόνος επίλυσης του προβλήματος.



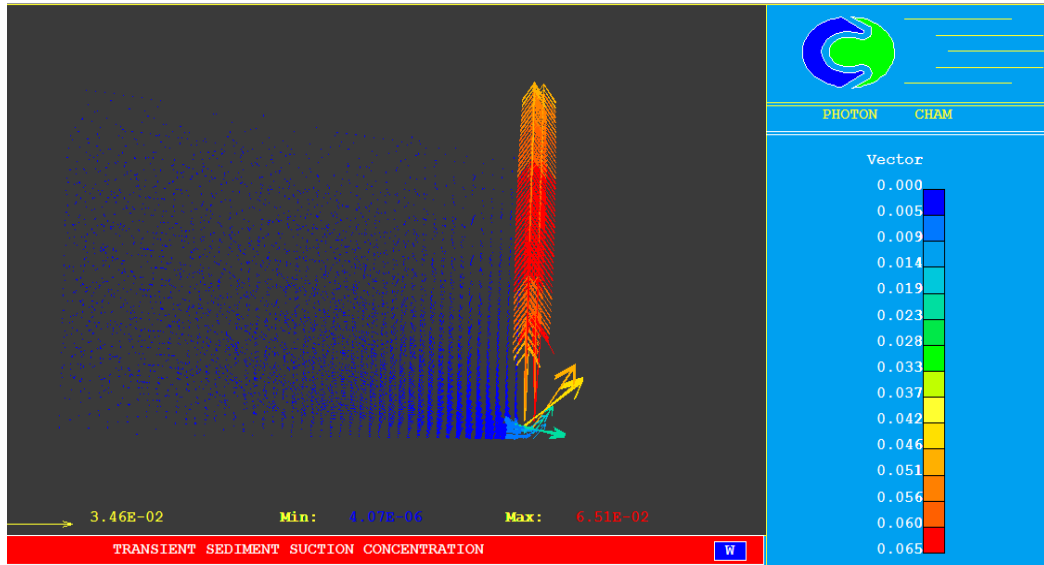
**Εικόνα 5.2 :** Πεδίο ροής της ταχύτητας στο επίπεδο Y-Z για πραγματικό χρόνο 1sec και  $w_1=0.1\text{m/s}$ . Απεικονίζεται η κρίσιμη περιοχή της δεξαμενής.



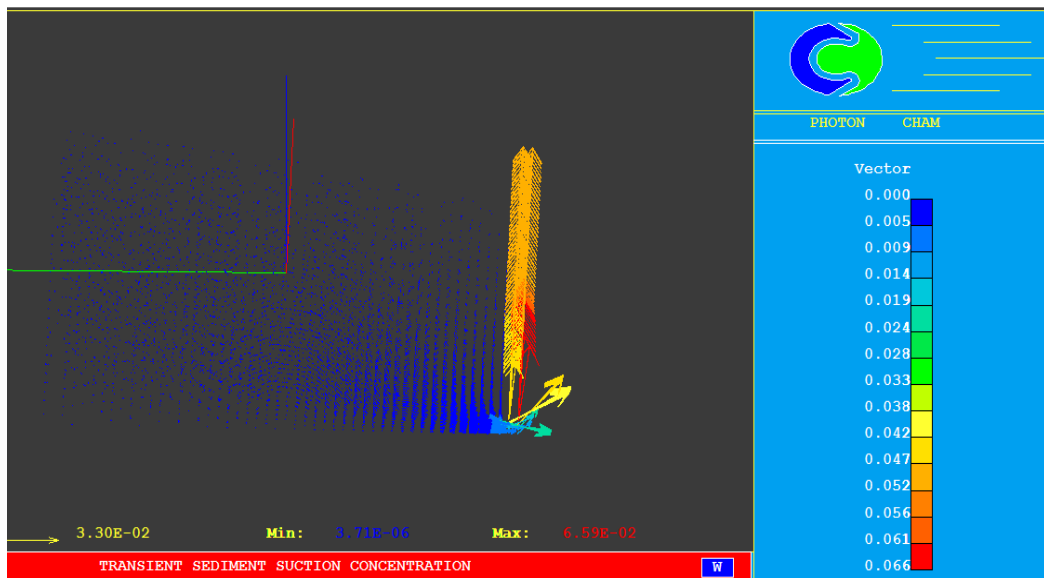
**Εικόνα 5.3 :** Πεδίο ροής της ταχύτητας στο επίπεδο Y-Z για πραγματικό χρόνο 5sec και  $w_1=0.1\text{m/s}$ . Απεικονίζεται η κρίσιμη περιοχή της δεξαμενής.



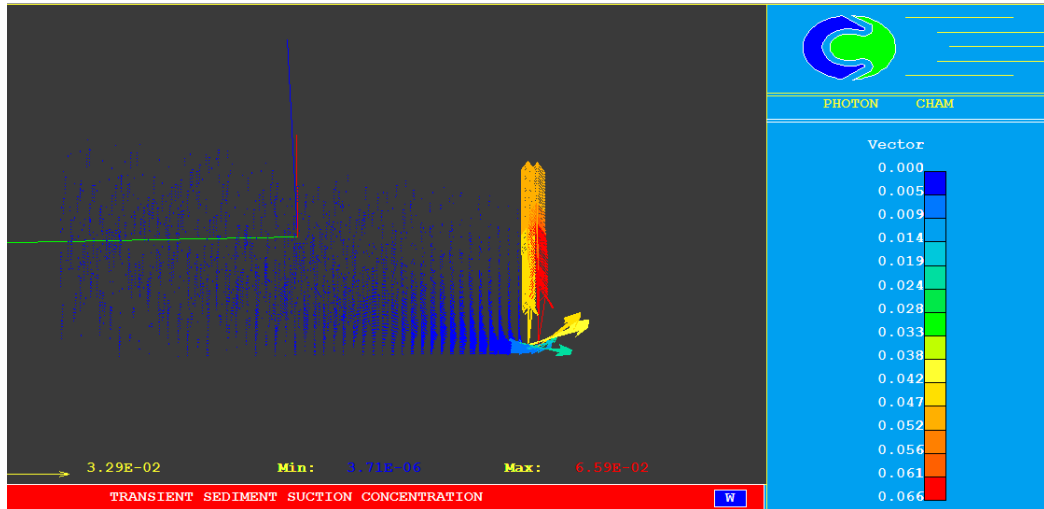
**Εικόνα 5.4 :** Πεδίο ροής της ταχύτητας στο επίπεδο Y-Z για πραγματικό χρόνο 10sec και  $w_1=0.1\text{m/s}$ . Απεικονίζεται η κρίσιμη περιοχή της δεξαμενής.



**Εικόνα 5.5 :** Πεδίο ροής της ταχύτητας στο επίπεδο Y-Z για πραγματικό χρόνο 1sec και  $w_1=0.05\text{m/s}$ . Απεικονίζεται η κρίσιμη περιοχή της δεξαμενής.



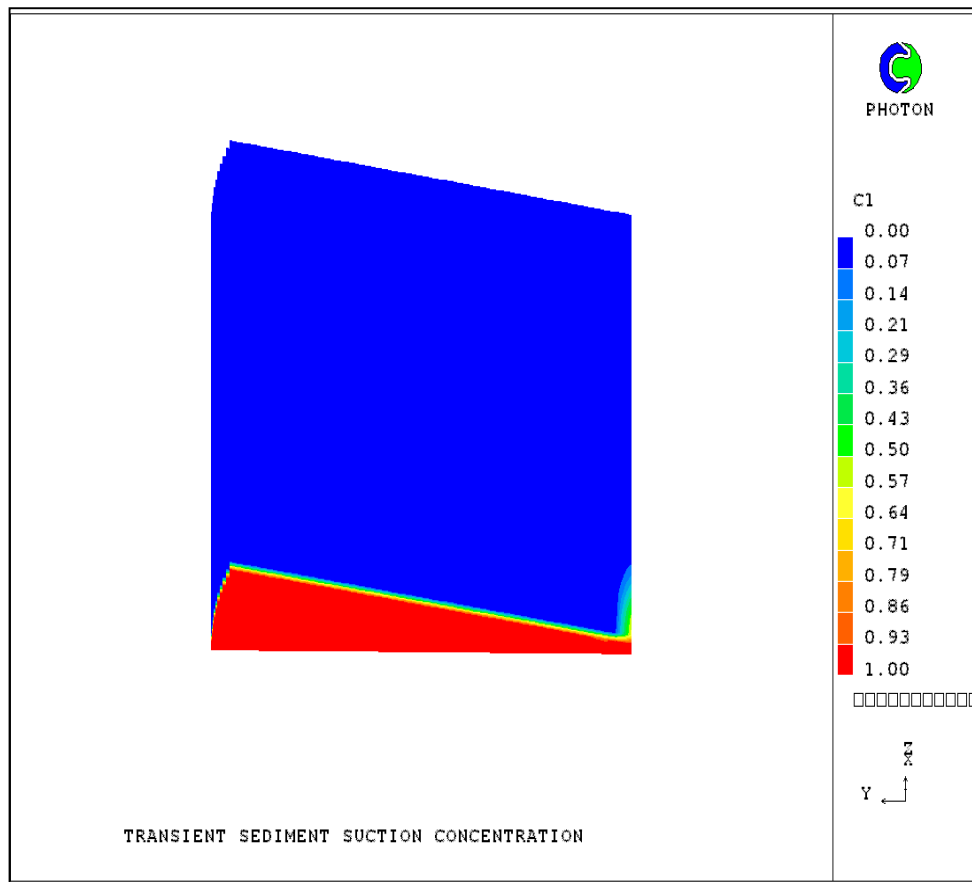
**Εικόνα 5.6 :** Πεδίο ροής της ταχύτητας στο επίπεδο Y-Z για πραγματικό χρόνο 5sec και  $w_1=0.05\text{m/s}$ . Απεικονίζεται η κρίσιμη περιοχή της δεξαμενής.



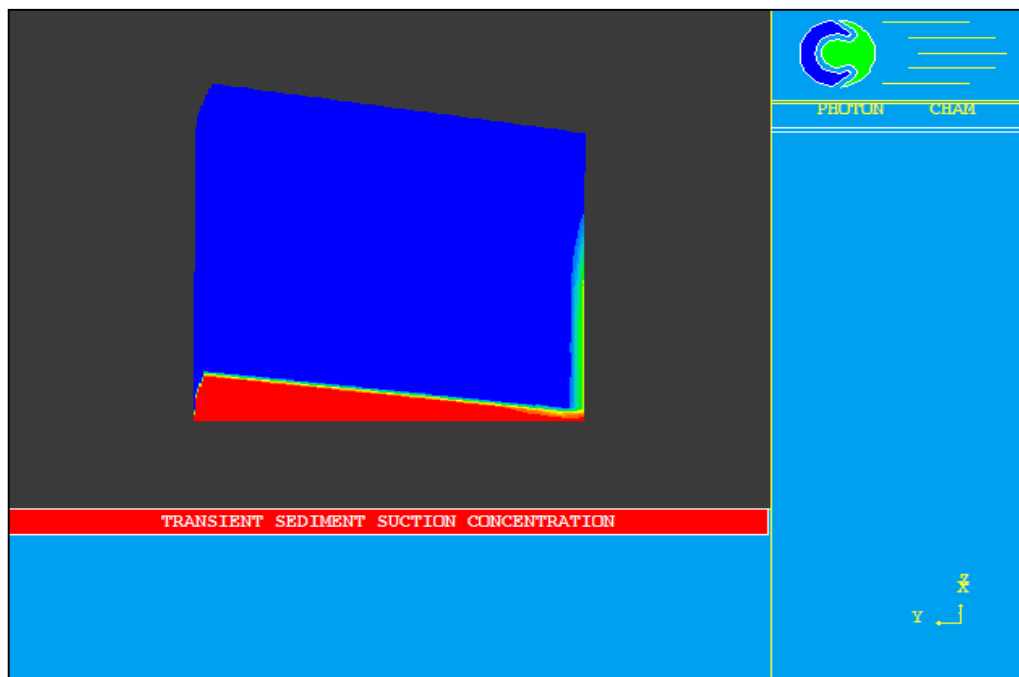
**Εικόνα 5.7 :** Πεδίο ροής της ταχύτητας στο επίπεδο Y-Z για πραγματικό χρόνο 10sec και  $w_1=0.05\text{m/s}$ . Απεικονίζεται η κρίσιμη περιοχή της δεξαμενής.

### 5.5 Κατανομή συγκέντρωσης

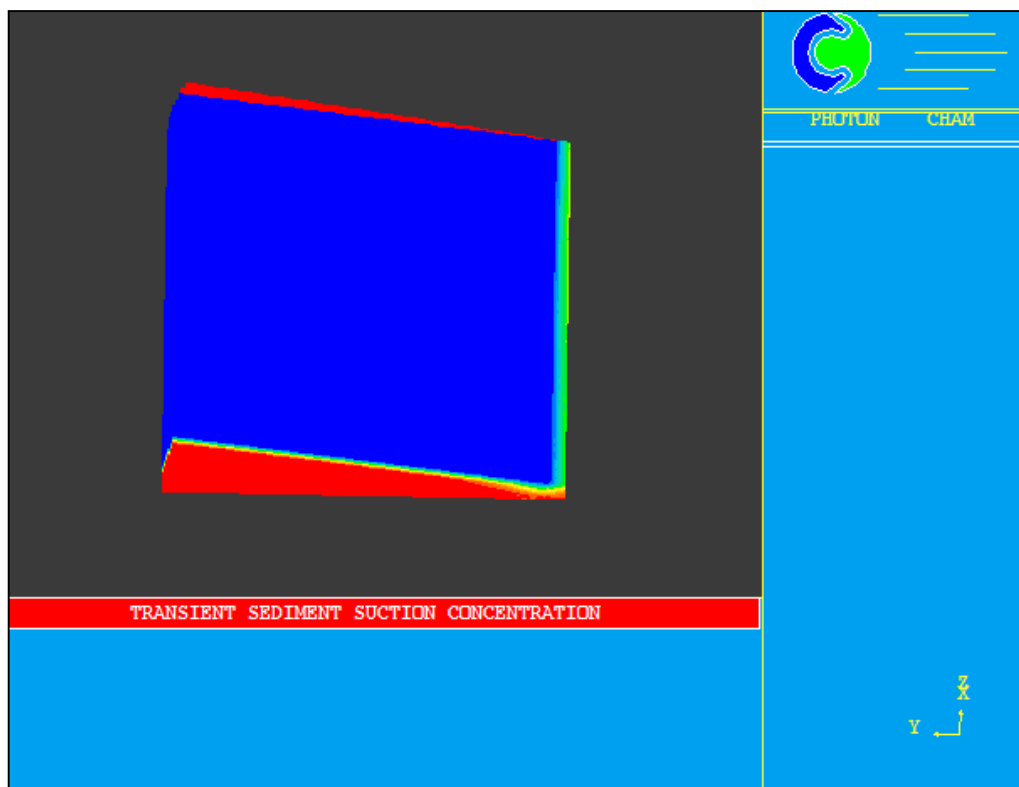
Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η κατανομή της συγκέντρωσης του ιζήματος στην κυλινδρική δεξαμενή. Απεικονίζεται η κρίσιμη περιοχή της δεξαμενής, δηλαδή η περιοχή στην οποία συμβαίνει η αναρρόφηση. Στα διαγράμματα 5.8-5.10 απεικονίζεται η κατανομή της συγκέντρωσης σε πραγματικούς χρόνους 1sec, 5sec και 10sec αντίστοιχα και για ταχύτητα πεδίου ροής 0.1m/s . Παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο πραγματικός χρόνος του προβλήματος, τόσο μεγαλύτερη ποσότητα ιζήματος αναρροφάται από τον πυθμένα προς την επιφάνεια της δεξαμενής μέσω του σωλήνα αναρρόφησης.



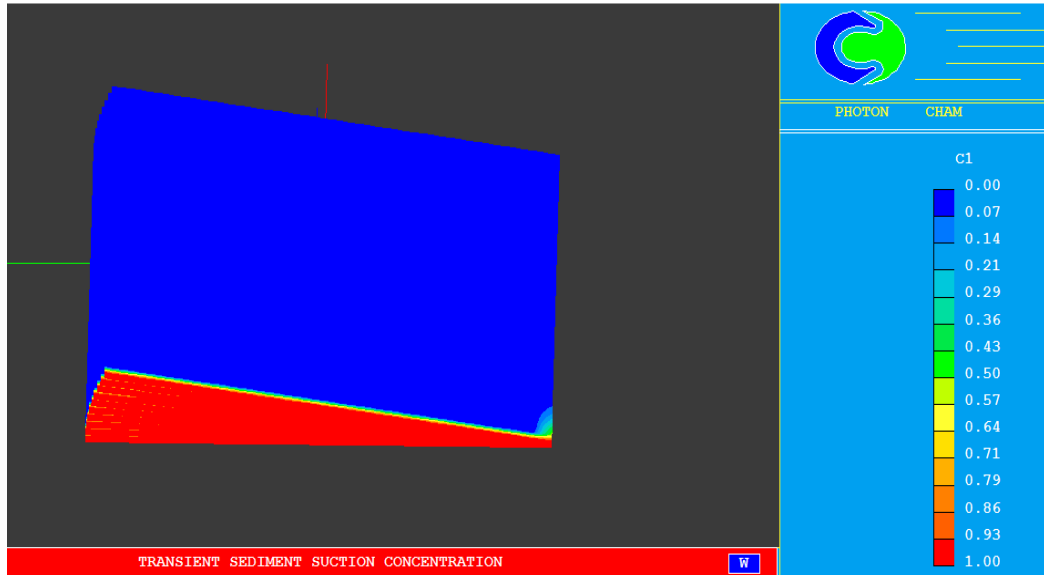
**Εικόνα 5.8 :** Κατανομή της συγκέντρωσης C1 του ιζήματος σε πραγματικό χρόνο 1 sec.



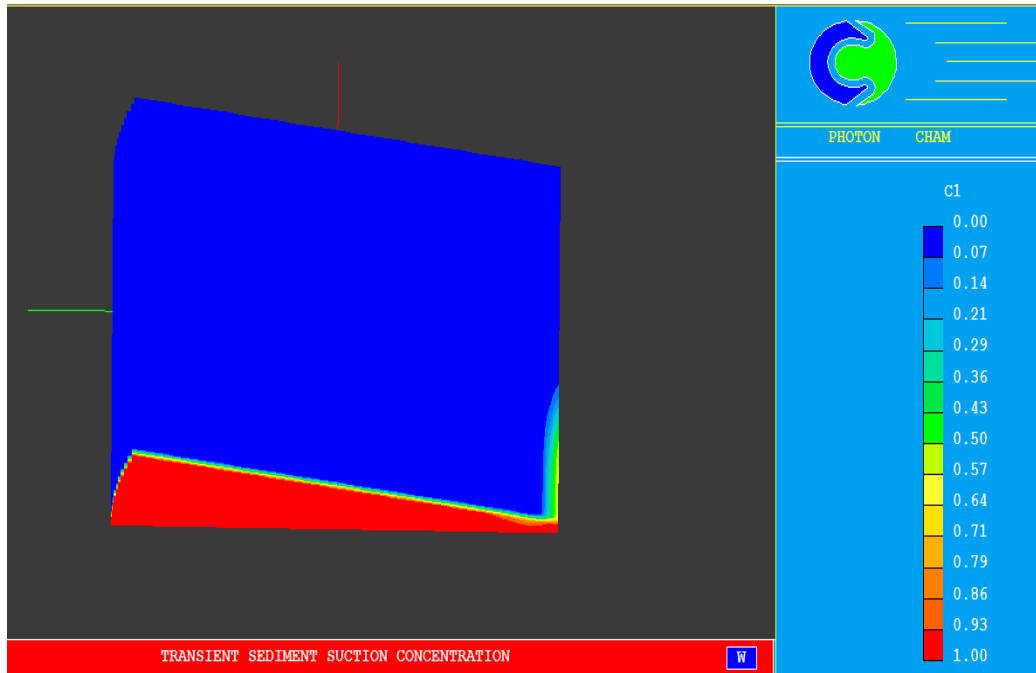
**Εικόνα 5.9 :** Κατανομή της συγκέντρωσης C1 του ιζήματος σε πραγματικό χρόνο 5 sec.



**Εικόνα 5.10 :** Κατανομή της συγκέντρωσης C1 του ιζήματος σε πραγματικό χρόνο 10 sec.

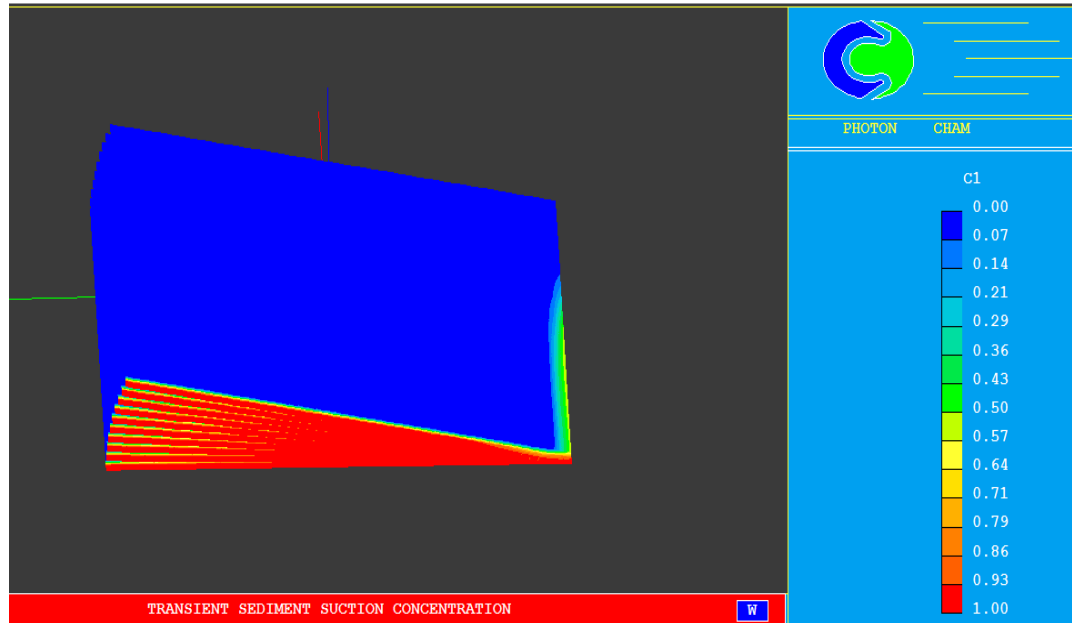


**Εικόνα 5.11 :** Κατανομή της συγκέντρωσης C1 του ιζήματος σε πραγματικό χρόνο 1sec και  $w_1=0.05\text{m/s}$ .



**Εικόνα 5.12 :** Κατανομή της συγκέντρωσης C1 του ιζήματος σε πραγματικό χρόνο 5sec και  $w_1=0.05\text{m/s}$ .





**Εικόνα 5.13 :** Κατανομή της συγκέντρωσης C1 του ιζήματος σε πραγματικό χρόνο 10sec και  $w_1=0.05\text{m/s}$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

#### **6.1 Συμπεράσματα**

Στις παραγράφους που ακολουθούν παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη της αναρρόφησης ιζήματος από δεξαμενή κυλινδρικού σχήματος.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της εργασίας, τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι τα ακόλουθα :

- ✓ Από το πεδίο ροής της ταχύτητας συμπεραίνουμε ότι η παροχή αναρρόφησης του ιζήματος από τον πυθμένα της κυλινδρικής δεξαμενής, παραμένει σταθερή εφόσον διατηρούνται σταθερά το πεδίο ροής της ταχύτητας και ο σωλήνας αναρρόφησης έχει σταθερή διατομή ( $Q=V/A$ ).
- ✓ Από την κατανομή της συγκέντρωσης συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνεται ο πραγματικός χρόνος του προβλήματος, τόσο μεγαλύτερη ποσότητα ιζήματος αναρροφάται από τον πυθμένα προς την επιφάνεια της δεξαμενής μέσω του σωλήνα αναρρόφησης.
- ✓ Από το πεδίο ροής της ταχύτητας συμπεραίνουμε ότι οι τιμές του πεδίου ταχύτητας δεν μεταβάλλονται όσο αυξάνεται ο πραγματικός χρόνος επίλυσης του προβλήματος.

#### **6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα**

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας είχε ως κύριο στόχο την προσομοίωση του φαινομένου της αναρρόφησης από τον πυθμένα κυλινδρικής δεξαμενής με την βοήθεια ενός σωλήνα αναρρόφησης. Οι παραδοχές που έγιναν κατά την επίλυση του προβλήματος αποκλείουν τη δράση διαφόρων φαινομένων που συμβαίνουν. Συνεπώς, τα περιθώρια βελτίωσης από την άποψη της μαθηματικής ανάλυσης του προβλήματος και προσέγγισης της φυσικής πραγματικότητας είναι σχετικά μεγάλα. Για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων προτείνονται :

- ✓ Εμβάθυνση στον τρόπο μεταβολής των φυσικών μεγεθών του ρευστού (νερό) ανάλογα με τις θερμοκρασιακές μεταβολές που συμβαίνουν στο πεδίο ροής. Αυτό σημαίνει μοντελοποίηση των φυσικών ιδιοτήτων σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία. Η βελτίωση των φυσικών ιδιοτήτων θα οδηγήσει σε αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια.
- ✓ Εφαρμογή ενός μαθηματικού μοντέλου τυρβώδους ροής.
- ✓ Έλεγχος της ευαισθησίας των αποτελεσμάτων της ταχύτητας εισροής του ιζήματος στο σωλήνα αναρρόφησης σε συνάρτηση με την ογκομετρική παροχή.
- ✓ Επαλήθευση του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει την αναρρόφηση του ιζήματος με πειραματικά δεδομένα. Με αυτό τον τρόπο θα επιβεβαιωθεί η ορθή προσέγγιση του φυσικού προβλήματος.
- ✓ Επέκταση του μαθηματικού μοντέλου σε ροές δύο φάσεων (νερό και στερεό (ίζημα)).

### 6.3 Βιβλιογραφικές αναφορές

- [1] Weisseberg H., Berman A. S., 1995 “ Velocity and Pressure Distributions in Turbulent Pipe Flow with Wall Suction”. Proc. Of Heat Transfer Fluid Mechanics Inst., Un. Of California, Los Angeles
- [2] Brosh Winograd, “Experimental Study of Turbulent Flow in a Tube with Wall Suction” .J of Heat Transfer (ASME)
- [3] Schildkneht M., Miller J.A., Meier G.E. “The Influence of Suction on the Structure of Turbulence in a Fully Developed Pipe Flow”. J. of Fluid Mechanics, 1979
- [4] M. Elena “Suction effects on turbulence statistics in a heated pipe flow” Physics of Fluids, 1989
- [5] M. Mellor, MacLean. “The transpired boundary layer to intensive suction in an adverse pressure gradient”. 1972
- [6] D. Sofialides, P. Prinos “Wall suction effects on the structure of fully developed turbulent pipe flow “, 1996
- [7] Y. Simutani, N. Kasagi, “Direct numerical simulation of turbulent transfer with uniform wall injection and suction” Physics of Fluid
- [8] Park, J., Choi. H., 1999. “Effects of uniform blowing or suction from a spanwise slot on a turbulent boundary layer flow”
- [9] Jalal Heydarpour and Larry S. Slotta, “Modeling erosion and deposition due to suction and jet flows “
- [10] D. B. Spalding, 'Mathematical Modeling of Fluid Mechanics, Heat-transfer and Chemical Reaction Processes: A Lecture Course', Imperial College CFDU Report HTS/80/1, 1980.
- [11] Markatos, N.C., Computational fluid flow capabilities and software, Ironmaking and Steelmaking 16 4 1989 266-273.
- [12] Theologos, K.N., Nikou, I.D., Lygeros, A.I. & Markatos, N.C., Simulation and Design of Fluid – Catalytic Cracking Riser – Type Reactors, *Comp. Chem. Eng.*, Vol.20, (1996), pp. 757 – 762.

[13] Markatos ,N.c., & Spalding, D.B. (1983), Computer simulation of fluid flow and heat/mass transfer phenomena. The Phoenics code system, A lecture course, School of Mathematics, University of Greenwich, UK.

[14] PHOENICS (2010) , VR Reference Guide: Documentation for Phoenics (TR 326), Version 2010, CHAM, London, UK.

[15] Launder, B.E. & Spalding, D.B. (1972), Lectures in Mathematical Models of Turbulence, Academic Press: London, England

[16] Jakobsen, H.A. (2007), *Chemical Reactor Modeling – Multiphase Reactive Flows*, Springer, Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG

[17] Μαρκάτος, Ν. & Ασημακόπουλος, Δ. (1995), Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα

[18] Καραδήμου , Δ.Π. (2008), Προσομοίωση φυσικού αερισμού σε γεωμετρία φυσικής κλίμακας με Τεχνικές Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, Μεταπτυχιακή Εργασία, ΕΜΠ, Αθήνα

[19] Παπαδόπουλος, Π. (2012), Προσομοίωση διφασικής ροής αερίου – υγρού σε αντιδραστήρα πλήρους ανάδευσης με τεχνικές υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.

[20] Ζερής Αθανάσιος (2001), Τυρβώδης ροή σε ανοιχτό αγωγό με αναρρόφηση από τον πυθμένα.

[21] Ξενίδου, Θ.Χ. (2011), Το λογισμικό PHOENICS, υποστηρικτικό υλικό του μαθήματος Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών και Όγκων Ελέγχου, ΕΜΠ, Αθήνα

[22] Μαρκάτος, Ν. (1988), Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα

[23] PHOENICS (2010), VR Reference Guide: Documentation for Phoenix (TR 326), Version 2010, CHAM, London, UK.

[24] Spalding, D.B. (1980), Numerical computation of multi – phase flow and heat transfer, in: C. Taylor (Ed.), Recent Advances in Numerical Methods in Fluids, Pineridge Press, pp. 139 – 168.

[25] Spalding , D.B. (1981), IPSA, New Developments and Computed Results, HTS/81/2, Imperial College, London.