ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΤΩΝ *ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Θ. Καντούτσης

Επιβλέπων : Βασίλειος, Λ. Καρασμάνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2014

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΤΩΝ *ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ* ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Θ. Καντούτσης

Επιβλέπων : Βασίλειος, Λ. Καρασμάνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 17η Ιουλίου 2014

....	....	....
Β. Καρασμάνης	Γ. Κολέτσος	Αρ. Αραγεώργης
Καθηγητής ΕΜΠ	Καθηγητής ΕΜΠ	Επικ. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2014

....

Κωνσταντίνος Θ. Καντούτσης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Ἓν οἶδα ὅτι οὐδὲν οἶδα

-Σωκράτης (470 π.Χ-399 π.Χ.)-

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι κοινώς αποδεκτό, ότι ο σημερινός παγκόσμιος πολιτισμός βασίζεται κατά ένα σημαντικό ποσοστό ή εξ ολοκλήρου, στον Αρχαίο Ελληνικό. Και ιδιαίτερα τα μαθηματικά που σιγά σιγά διαφαίνεται ότι είναι η βάση για όλες τις επιστήμες, στηρίζονται εξ ολοκλήρου στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.

Η ιδέα της μαθηματικής απόδειξης που πρωτοδιατυπώθηκε από τον Θαλή τον Μιλήσιο, το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τα συστηματικά βιβλία γεωμετρίας και αριθμητικής, αλλά και άλλες μαθηματικές ιδέες των Αρχαίων Ελλήνων αποτελούν τη βάση για όλες τις σημερινές θετικές, τεχνολογικές και ίσως θεωρητικές επιστήμες. Οφείλουμε ένα μεγάλο ευχαριστώ τόσο σε αυτούς που μας τις μετέδοσαν με την πάροδο των χρόνων, αλλά κυρίως σε αυτούς που τις πρωτοσκέφτηκαν και τις πρωτοδιατύπωσαν.

Όποιος διαβάζει τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, που είναι το δεύτερο πιο δημοφιλές βιβλίο όλων των εποχών μετά τη Βίβλιο, και δεν «ανατριχιάζει», απλά δεν το καταλαβαίνει. Η ουσία είναι προσπαθήσεις να μπεις στο μυαλό και τη σκέψη του Ευκλείδη τη στιγμή που γράφει ή οργανώνει τα βιβλία των *Στοιχείων*.

Πιστεύεται ότι το πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* είναι εξ ολοκλήρου δημιούργημα του Ευκλείδη. Το δεύτερο προέρχεται από την Πυθαγόρεια παράδοση, ενώ το τρίτο από την Ιωνική και μάλλον από τον Ιπποκράτη τον Χίο. Υπάρχει ελάχιστη έως μηδαμινή εξάρτηση του τρίτου βιβλίο από το δεύτερο. Πάντως τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη δεν είναι το πρώτο συστηματικό βιβλίο γεωμετρίας στην αρχαιότητα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Μαθηματικά, Γεωμετρία, Αριθμητική, Αρχαία, Αρχαίοτητα, Αρχαία Ελλάδα, Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, Στοιχεία, Ευκλείδης, Πυθαγόρεια, Ιωνικά, Ιστορία, Πολιτισμός, Επιστήμη, Λογική, Μαθηματική Λογική, Ελλάδα

ABSTRACT

It is commonly accepted that the current global culture relies to a large proportion or entirely on Ancient Greek Civilization. And especially mathematics, which slowly transpires that is the basis for all sciences, relies entirely on Ancient Greek Mathematics.

The idea of mathematical proof which first formulated by Thales of Miletus, the Pythagorean Theorem, the systematic books of geometry and arithmetic and other mathematical ideas of Ancient Greeks are the basis for all the current exact, technological and probably theoritical sciences. We owe a big praise to those who transmited these ideas to us over the time, but especially to those who first imagined and formulated those ideas.

Everyone who reads the *Elements* of Euclid, which is the second most popular book all the time after Bible and does not «thrill», simply does not understand it. The sense is to try to get into the mind and thought of Euclid at the moment he was writing or organizing the books of *Elements*.

It is believed that the first book of *Elements* is entirely creation of Euclid. The second originated from Pythagorean tradition, while the third from Ionic and probably from Hippocrates of Chios. There is minimum or minimal dependence of the third book in the second one. In any case, the Euclid's *Elements* is not the first systematic geometry book in antiquity.

KEYWORDS

Mathematics, Geometry, Arithmetic, Ancient, Antiquity, Ancient Greece, Ancient Greek Mathematics, Elements, Euclid, Pythagorean, Ionic, History, Culture, Science, Logic, Mathematical Logic, Greece

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε το ακαδημαϊκό έτος 2013 – 2014 στον τομέα Ανθρωπιστικών, Κοινωνικών Επιστημών και Δικαίου, της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π. υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Βασίλειου Καρασμάνη και τη βοήθεια του Επίκουρου Καθηγητή κ. Αριστείδη Αραγεώργη. Επίσης, στην τριμελή επιτροπή συμμετείχε και ο τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών της σχολής Η.Μ.Μ.Υ του Ε.Μ.Π. με τον καθηγητή κ. Γεώργιο Κολέτσο.

Θέλω να ευχαριστήσω για την ανάθεση της διπλωματικής εργασίας, την εμπιστοσύνη, τη στήριξη και τη βοήθεια που μου παρείχε ο κύριος Καρασμάνης κατά τη διάρκεια εκπόνησής της. Επίσης, θέλω να τον συγχαρώ για την απίστευτη δουλειά και έρευνα που έχει κάνει στη ζωή του πάνω στα Αρχαία Ελληνικά (Μαθηματικά, Φιλοσοφία κτλ) αλλά και γενικά στην ιστορία και την φιλοσοφία της επιστήμης και της τεχνολογίας.

Συνεχίζοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Κολέτσο τόσο για τη βοήθειά του στη διπλωματική, όσο και για την άψογη και όμορφη διδασκαλία του μαθήματος Μαθηματική Λογική για Υπολογιστές, που ουσιαστικά ήταν η πρώτη μου επαφή με τη Λογική, καθώς και τον κύριο Αραγεώργη που με τη διδασκαλία του με βοήθησε να γνωρίσω την Φιλοσοφία,.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον φίλο μου Γιαννακίδη Χρήστο και τον συνάδελφο και επίσης φίλο Θεοδωρακάτο Νικόλαο για τη βοήθειά τους.

Τέλος, ευχαριστώ από τα βάθη της καρδιάς μου, τους γονείς μου και την οικογένειά μου, στους οποίους αφιερώνω και τη διπλωματική, για τη στήριξη που μου παρείχαν κατά τη φοίτησή μου στο Πολυτεχνείο.

Κωνσταντίνος Θ. Καντούτσης
Αθήνα, Ιούλιος 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΙΒΛΙΟ Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΒΙΒΛΙΟ Β

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΒΙΒΛΙΟ Γ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η δομή της διπλωματικής εργασίας βασίζεται σε πέντε κεφάλαια, τα οποία περιγράφονται παρακάτω:

Κεφάλαιο 1: Μια εισαγωγή, στην οποία υπάρχει γενική περιγραφή των Ελληνικών μαθηματικών με μια χρονολόγηση, καθώς και εξιστόρηση για τον Ευκλείδη και τα έργα του με έμφαση στα *Στοιχεία*. Αναφέρονται τα προευκλείδεια στοιχεία καθώς και τα δύο ανεξάρτητα ρεύματα της προπλατωνικής διανόησης: Πυθαγόρεια και Ιωνικά Μαθηματικά.

Κεφάλαιο 2: Το βιβλίο α των *Στοιχείων* το οποίο θεωρείται εξ ολοκλήρου δημιούργημα του Ευκλείδη. Στην αρχή υπάρχουν οι ορισμοί, τα αιτήματα, οι κοινές έννοιες και μετά οι προτάσεις. Το βιβλίο τελειώνει με το περίφημο Πυθαγόρειο θεώρημα.

Κεφάλαιο 3: Αφορά το βιβλίο β των *Στοιχείων* το οποίο θεωρείται ότι το πήρε αυτούσιο ο Ευκλείδης και το έβαλε μετά το α. Το βιβλίο αυτό μας δίνει ένα μήνυμα για το πνεύμα της Πυθαγόρειας παράδοση στην προπλατωνική διανόηση, ωστόσο οι ψήφοι έχουν αντικατασταθεί με γραμμές. Αυτό έγινε γενικά μετά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας.

Κεφάλαιο 4: Το βιβλίο γ των *Στοιχείων* το οποίο θεωρείται ότι ανήκει στην Ιωνική παράδοση και μάλιστα πολλοί πιστεύουν ότι το πήρε ο Ευκλείδης αυτούσιο από τον Ιπποκράτη τον Χίο. Ωστόσο οι τρεις τελευταίες προτάσεις αποδεικνύονται με βάση δύο προτάσεις του βιβλίου β, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι ή ο Ευκλείδης τις συμπλήρωσε στο τέλος μόνος του ή οι μαθηματικοί της Ιωνικής παράδοσης τις αποδείκνυαν με άλλον, καθαρά Ιωνικό τρόπο.

Κεφάλαιο 5: Σε αυτό το κεφάλαιο εξάγουμε τα συμπεράσματα από όλη τη διπλωματική. Περιγράφουμε αναλυτικά όλες τις εξαρτήσεις μεταξύ των προτάσεων στα τρία πρώτα βιβλία, καθώς και μια πρώτη εκτίμηση για τους ορισμούς, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες. Βλέπουμε πραγματικά ότι η εξάρτηση των βιβλίων β και γ είναι μικρή έως μιδαμινή. Βιβλίο β: Πυθαγόρεια Παράδοση. Βιβλίο γ: Ιωνική Παράδοση. Η διαφορά που έχουν αυτά τα δύο βιβλία, είναι μεγαλύτερη διαφορά βιβλίων που συναντάμε σε όλα τα *Στοιχεία*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ελληνικά Μαθηματικά

Με τον όρο Ελληνικά Μαθηματικά (Greek Mathematics) εννοούμε τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν την περίοδο από τον 7^{ο} αιώνα π.Χ. μέχρι τον τον 4^{ο} αιώνα μ.Χ. στις ανατολικές ακτές της Μεσογείου. Οι Έλληνες μαθηματικοί ήταν διασκορπισμένοι σε πόλεις κατά μήκος όλης της Ανατολικής Μεσογείου, από την σημερινή Ιταλία μέχρι τη Βόρεια Αφρική, ωστόσο ήταν ενωμένοι και από άποψη πολιτισμού, αλλά και γλώσσας. Τα Ελληνικά Μαθηματικά από την περίοδο μετά τον Μέγα Αλέξανδρο, μερικές φορές καλούνται Ελληνιστικά Μαθηματικά (Hellenistic Mathematics).

Η καταγωγή των Ελληνικών Μαθηματικών δεν είναι εύκολο να τεκμηριωθεί. Οι αρχαιότεροι πολιτισμοί στην Ελλάδα και γενικά στην Ευρώπη ήταν ο Μινωικός και αργότερα ο Μυκηναϊκός. Και οι δύο άνθισαν κατά την περίοδο της δεύτερης χιλιετίας π.Χ.. Παρά το γεγονός ότι αυτοί οι πολιτισμοί είχαν γραπτά και ήταν ικανοί για προχωρημένη μηχανική, συμπεριλαμβανομένων τετραόροφων παλατιών με αποχεύτευση και θολωτούς τάφους, δεν άφησαν μαθηματικά έγγραφα. Παρόλο που δεν υπάρχει άμεση απόδειξη, υποστηρίζεται γενικά ότι οι γειτονικοί πολιτισμοί των Βαβυλώνιων και των Αιγύπτιων είχαν μια μορφή επιρροής στον Ελληνικό πολιτισμό.

Παραδοσιακά οι ιστορικοί τοποθετούν την αρχή των Ελληνικών Μαθηματικών στην εποχή του Θαλή του Μιλήσιου (624 – 548 π.Χ), ο οποίος θεωρείται ο πρώτος από τους 7 σοφούς της αρχαιότητας. Μια άλλη σημαντική μορφή των Ελληνικών Μαθηματικών ήταν ο Πυθαγόρας ο Σάμιος, με το σημαντικό ακόμα και στη σημερινή εποχή Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Ακολουθεί μια χρονολόγηση των Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών:

1. 624 π.Χ. – 546 π.Χ. Θαλής ο Μιλήσιος
2. 585 π.Χ. – 525 π.Χ. Αναξιμένης
3. 582 π.Χ. – 507 π.Χ. Πυθαγόρας
4. 490 π.Χ. – 420 π.Χ. Οινοπίδης
5. 480 π.Χ. – 411 π.Χ. Αντίφων ο Ραμνούσιος
6. 470 π.Χ. – 410 π.Χ. Ιπποκράτης ο Χίος
7. 465 π.Χ. – 398 π.Χ. Θεόδωρος ο Κυρηναίος
8. 450 π.Χ. – 370 π.Χ. Δημόκριτος
9. 417 π.Χ. – 398 π.Χ. Θεαίτητος
10. 408 π.Χ. – 355 π.Χ. Εύδοξος ο Κνίδιος
11. 400 π.Χ. – 350 π.Χ. Θυμαρίδας
12. 390 π.Χ. – 320 π.Χ. Δεινόστρατος
13. 384 π.Χ. – 322 π.Χ. Αριστοτέλης
14. 380 π.Χ. – 320 π.Χ. Μέναιχμος
15. 370 π.Χ. – 300 π.Χ. Αριστέας ο Γέρων
16. 370 π.Χ. – 300 π.Χ. Κάλλιπος
17. 360 π.Χ. – 290 π.Χ. Αυτόλυκος ο Πιταναίος
18. 340 π.Χ. – 278 π.Χ. Πολύαινος Λαμψακηνός
19. 323 π.Χ. – 283 π.Χ. Ευκλείδης
20. 287 π.Χ. – 212 π.Χ. Αρχιμήδης
21. 280 π.Χ. – 220 π.Χ. Κόνων ο Σάμιος
22. 276 π.Χ. – 194 π.Χ. Ερατοσθένης
23. 262 π.Χ. – 190 π.Χ. Απολλώνιος ο Περγαίος
24. 190 π.Χ. – 120 π.Χ. Ίππαρχος
25. 160 π.Χ. – 100 π.Χ. Θεοδόσιος ο Βυθίνιος
26. 150 π.Χ. – ? Περσέας
27. $1^{ο}$ αιώνα π.Χ. Γεμίνος ο Ρόδιος
28. 60 μ.Χ. – 120 μ.Χ. Νικόμαχος
29. 70 μ.Χ. – 135 μ.Χ. Θέων ο Σμυρναίος
30. 70 μ.Χ. – 140 μ.Χ. Μενέλαος ο Αλεξανδρεύς
31. 90 μ.Χ. – 168 μ.Χ. Κλαύδιος Πτολεμαίος
32. 200/214 μ.Χ. – 284/298 μ.Χ. Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς
33. 290 μ.Χ. – 350 μ.Χ. Πάππος ο Αλεξανδρεύς

34. 335 μ.Χ. – 405 μ.Χ. Θέων ο Αλεξανδρεύς
35. 370 μ.Χ. – 415 μ.Χ. Υπατία
36. 412 μ.Χ. – 485 μ.Χ. Πρόκλος ο Διάδοχος
37. 420 μ.Χ. – 480 μ.Χ. Δομνίνος
38. 480 μ.Χ. – 540 μ.Χ. Ευτόχιος ο Ασκαλωνίτης

Τα Ελληνικά Μαθηματικά αποτελούν μια κύρια και ξεχωριστή περίοδο στην ιστορία των μαθηματικών, στην οποία θεμελιώθηκε η γεωμετρία (geometry) και η έννοια της μαθηματικής απόδειξης (mathematical proof). Επίσης, τα Ελληνικά Μαθηματικά συνεισέφεραν σημαντικά στις ιδέες της θεωρίας των αριθμών (number theory), μαθηματικής ανάλυσης (mathematical analysis), εφαρμοσμένα μαθηματικά (applied mathematics) και κάποιες φορές υπήρξε μια μορφή προσέγγισης στον απειροστικό λογισμό (calculus). Για παράδειγμα, ο Εύδοξος ο Κνίδιος χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης (method of exhaustion), η οποία προμηνύει την έννοια του ορίου για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Επίσης, ο Αρχιμήδης ανάπτυξε την ιδέα της Μεθόδου των Μηχανικών Θεωρημάτων (The Method of Mechanical Theorems), επινοώντας τις Ευρετικές Μεθόδους (Heuristic Methods) για τη λύση προβλημάτων, βάση των οποίων μπορεί να θεωρηθεί ως ο πρόδρομος του ολοκληρωτικού λογισμού.

Ο Ευκλείδης, στο βιβλίο του *Στοιχεία*[1], συνέλεξε όλη τη μαθηματική γνώση της εποχής του για την γεωμετρία και την στοιχειώδη θεωρία αριθμών.

Η πιο χαρακτηριστική επινόηση των Ελληνικών μαθηματικών, ίσως είναι η θεωρία των Κωνικών Τομών (Conic Sections), η οποία σε μεγάλο βαθμό αναπτύχθηκε την Ελληνιστική Περίοδο (Hellenistic Period).

Ο Εύδοξος ο Κνίδιος ανέπτυξε τη θεωρία των πραγματικών αριθμών εντυπωσιακά παρόμοια με την σύγχρονη θεωρία που αναπτύχθηκε από τον Dedekind, ο οποίος και αναγνώρισε τον Εύδοξο ως εμπνευστή του.

[1] Όταν η λέξη αναφέρεται στο βιβλίο θα την γράφουμε με κεφαλαίο σίγμα και πλάγια γράμματα.

Παρόλο που τα Ελληνικά κείμενα που έχουν διασωθεί μέχρι σήμερα γράφτηκαν μετά την Ελληνιστική περίοδο, πολλά από αυτά είναι αντιγραφές από κείμενα κατά τη διάρκεια ή πριν από αυτή.

Οι δύο κύριες πηγές μας στη σημερινή εποχή είναι:

1) Οι Βυζαντινοί κώδικες (Byzantine codices) που γράφτηκαν από 500 έως και 1500 χρόνια μετά τα πρωτότυπα, και

2) Οι Συριακές ή Αραβικές μεταφράσεις καθώς και οι Λατινικές μεταφράσεις από τα Αραβικά.

Ωστόσο, παρά την έλλειψη των πρωτότυπων χειρογράφων, οι χρονολογίες των Ελληνικών Μαθηματικών είναι περισσότερο καθορισμένες από τις αντίστοιχες των Βαβυλώνιων ή των Αιγύπτιων.

1.2 Πυθαγόρεια και Ιωνικά Μαθηματικά

Είναι κοινή αντίληψη ανάμεσα στους μελετητές των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, ότι από τον Θαλή ως τους κλασσικούς χρόνους, υπήρξε μια συνεχής και ομοιόμορφη ανάπτυξη αυτής της επιστήμης. Ωστόσο εδώ θα αναφέρουμε εν ολίγοις μια προσπάθεια του καθηγητή του ΕΜΠ, κ. Βασίλειου Καρασμάνη[2] να δειχθεί ότι στα πρώιμα μαθηματικά μπορούμε να διακρίνουμε δύο διαφορετικές παραδόσεις: α) μια Ιωνική, που είναι κυρίως γεωμετρική, και β) μια Πυθαγόρεια, η οποία δίνει ουσιώδη έμφαση στην αριθμητική. Ότι ειπωθεί σε αυτή την παράγραφο είναι επί της ουσίας μια περίληψη του παραπάνω άρθρου.

Αντανάκλαση αυτών των δύο παραδόσεων, βρίσκουμε στα βιβλία γ και β των Στοιχείων, όπως φαίνεται και στο κεφάλαιο 5 των συμπερασμάτων.

---

[2] *Πυθαγόρεια και Ιωνικά Μαθηματικά: Δύο ανεξάρτητα ρεύματα στην προπλατωνική διανόηση*. Μια πρώτη εκδοχή του κειμένου αυτού δημοσιεύθηκε στο Κ.Ι. Βουδούρης (επιμ.), *Ιωνική Φιλοσοφία*, Αθήνα 1990. Επαναδημοσιεύθηκε στα αγγλικά με διορθώσεις και προσθήκες στο *Revue de Federation des Professeurs de Grec et Latin*, 1998.

Η παρατήρηση ότι αυτά τα δύο βιβλία αντανακλούν δύο ουσιωδώς διαφορετικές μαθηματικές παραδόσεις διατυπώθηκε από τον Knorr στο βιβλίο του *The Evolution of the Euclidean Elements* (Reidel 1975). Ο Knorr υποστηρίζει ότι η γεωμετρική παράδοση του βιβλίου β αποτελεί εξέλιξη της πυθαγόρειας γεωμετρίζουσας αριθμητικής των ψήφων, και εμφανίστηκε μετά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Επιπλέον, θεωρεί ότι το βιβλίο γ ανάγεται στον μαθηματικό του 5ου αιώνα π.Χ., Ιπποκράτη τον Χίο. Εν τούτοις διστάζει να μιλήσει για μια συνεχή ιωνική παράδοση στα ελληνικά μαθηματικά, δεν εξετάζει τις δύο παραδόσεις στην πρώιμη φάση τους και ούτε δίνει εξήγηση της καταγωγής των δύο αυτών παραδόσεων.

Από ότι φαίνεται, ο Ευκλείδης ενσωμάτωσε σχεδόν αυτούσια στο έργο του αυτά τα δύο βιβλία (ίσως έβαλε τις τελευταίες τρεις προτάσεις του γ ο ίδιος). Η ιωνική παράδοση που φαίνεται να είναι παλαιότερη χαρακτηρίζεται από προβλήματα έμμεσης μέτρησης μήκων ή γωνιών, ίσων ή όμοιων τριγώνων, προβλήματα με κύκλους και τρίγωνα. Στην πυθαγόρεια παράδοση κυριαρχεί η αριθμητική που στηρίζεται στη χρήση των ψήφων. Μετά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας, τα μαθηματικά αυτά μεταμορφώνονται και παίρνουν τη γεωμετρική μορφή του τύπου που βρίσκουμε στο βιβλίο β. Την εποχή του Πλάτωνα, τα δύο αυτά ρεύματα συγκλίνουν και ενοποιούνται, κυρίως με τις εργασίες του Θεαίτητου και του Εύδοξου.

Μεγάλες μορφές της Ιωνικής παράδοσης ήταν ο Θαλής ο Μιλήσιος και ο Ιπποκράτης ο Χίος. Φαίνεται ότι ο Ιπποκράτης γνώριζε σχεδόν το σύνολο των προτάσεων του γ βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, καθώς και ένα μεγάλο μέρος των προτάσεων των βιβλίων α, δ και ς[3].

Επίσης τα τρία μεγάλα προβλήματα των ελληνικών μαθηματικών (διπλασιασμός κύβου, τετραγωνισμός κύκλου και τριχοτόμηση γωνίας, ανήκουν στην Ιωνική παράδοση.

Ειπωθηκε – και είναι κυριάρχουσα αντίληψη – ότι τα πυθαγόρεια

[3] Βλ. Van der Waerden, 1954, σελ. 146-7. Heath, 1921, Τόμος I, σελ. 201-2.

μαθηματικά γεμίζουν το χάσμα που υπάρχει ανάμεσα στον Θαλή και τον Ιπποκράτη τον Χίο, ή τουλάχιστον ανάμεσα στον Αναξίμανδρο και τον Αναξαγόρα, και ότι οι πυθαγόρειοι έθεσαν τα θεμέλια των ελληνικών μαθηματικών. Όλη αυτή η παραπάνω ιστορική αναδρομή έγινε και για να δείξει ότι δεν υπάρχει χάσμα ή ασυνέχεια στην Ιωνική μαθηματική παράδοση. Οι Ίωνες ανακάλυψαν τον κόσμο των θεωρητικών μαθηματικών. Συγχρόνως ήταν πρακτικοί άνθρωποι, έτοιμοι να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε άλλα σημεία (αστρονομία, προοπτική, γεωγραφία, αρχιτεκτονική, πολεοδομία, μηχανικά έργα κτλ). Πράγματι, οι Ίωνες επιστήμονες του έκτου αιώνα δύσκολα μπορούν να διακριθούν σε θεωρητικούς μαθηματικούς από τη μία και σε φυσικούς, αστρονόμους, γεωγράφους ή μηχανικούς από την άλλη. Όλα αυτά βρίσκονται σε έναν πλήρη αλληλοσυσχετισμό[4].

Η δεύτερη παράδοση των ελληνικών μαθηματικών είναι η πυθαγόρεια. Γνωρίζουμε ελάχιστα για τα πρώιμα πυθαγόρεια μαθηματικά, και ακόμα λιγότερα για τον ίδιο τον Πυθαγόρα[5]. Όλες σχεδόν οι μαρτυρίες που μας δίνουν πληροφορίες για τα πρώιμα πυθαγόρεια μαθηματικά, ανήκουν σε νεοπυθαγόρειους των πρώτων αιώνων μ.Χ., όπως ο Ιάμβλιχος[6], οι οποίοι είναι αρκετά αναξιόπιστοι γιατί συνήθιζαν να αποδίδουν τα πάντα στον ιδρυτή της σχολής και ακόμα να κατατάσσουν όλους σχεδόν τους μετέπειτα σημαντικούς φιλοσόφους και μαθηματικούς ως πυθαγόρειους.

Δεν έχουμε καμία πρώιμη μαρτυρία για τα επιτεύγματα του Πυθαγόρα στα μαθηματικά. Ο Πλάτων αναφέρει τον Πυθαγόρα μόνο μία φορά (Πολιτεία 600a-b), επαινώντας τον για τον τρόπο ζωής του και ο Αριστοτέλης δύο. Δηλαδή φαίνεται ότι ακόμα και ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης γνώριζαν πολύ

---

[4] Πολλοί τεχνικοί όροι της γεωμετρίας, όπως «γωνία», «ορθή γωνία», «τετράγωνο», καθώς επίσης και γεωμετρικά όργανα όπως «κανόνας», «διαβήτης» και «γνώμων» είναι δανεισμένοι από την αρχιτεκτονική, βλ. Burkert, 1972, σελ. 419.

[5] Βλ. Burketr, 1972, σελ. 208-217, 401-480 και Knorr, 1975, κεφ. V. Σταθμό στη μελέτη του Πυθαγόρα και των πρώιμων Πυθαγόρειων αποτέλεσε το βιβλίο του Walter Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism* (1972). Ο Burkert, μετά από ενδελεχή μελέτη όλων των πηγών που αναφέρονται στον Πυθαγόρα και τους πρώιμους Πυθαγόρειους, κατέληξε ότι οι πληροφορίες που μας δίνουν οι πολύ μεταγενέστεροι Νεοπυθαγόρειοι συγγραφείς είναι σε μεγάλο βαθμό αναξιόπιστες. Έως τότε οι μελετητές συνήθιζαν να δέχονται λίγο – πολύ άκριτα όλες τις πληροφορίες που είχαμε για τον Πυθαγόρα και τους πρώτους Πυθαγόρειους. Μια παλαιότερη κριτική στάση απέναντι στα μαθηματικά των πυθαγόρειων βρίσκουμε στον Heidel, 1940, 1970.

[6] Για την αναξιοπιστία του Ιάμβλιχου, βλ. Zhmud, 1989, σελ. 254.

λίγα για τον ίδιο τον Πυθαγόρα.

Από τις μελέτες φαίνεται αδύνατον να ξέρουμε κατά πόσον ο Πυθαγόρας και οι πρώτοι πυθαγόρειοι (πριν το 440 π.Χ.) είχαν κάνει σοβαρές μαθηματικές ανακαλύψεις, πέρα από τον μαθηματικό μυστικισμό τους. Επίσης είναι σχεδόν βέβαιο ότι οι πυθαγόρειοι δεν έδειξαν ενδιαφέρον για τη γεωμετρία. Όλες οι πρώιμες μαρτυρίες συνδέουν τους πυθαγόρειους με αριθμούς και αριθμητική. Όμως η αριθμητική τους, με τη γεωμετρική παράσταση των αριθμών, έχει κάποιο γεωμετρικό χαρακτήρα.

Τα γεωμετρικά θεωρήματα που αποδίδονται στον Πυθαγόρα ή στους πρώτους πυθαγόρειους είναι τα ακόλουθα:

α) το λεγόμενο πυθαγόρειο
β) τα θεωρήματα εφαρμογής χωρίων
γ) το θεώρημα ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν ήδη το πυθαγόρειο θεώρημα και είχαν τεχνικές αριθμητικού υπολογισμού πλευρών ορθογωνίων τριγώνων. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι οι πρώτοι Πυθαγόρειοι γνώριζαν τέτοιες τεχνικές και μπορούσαν να δείξουν το θεώρημα σε συγκεκριμένες περιπτώσεις χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους. Ο Πρόκλος αποδίδει στους Πυθαγόρειους έναν εύκολο τρόπο εύρεσης «πυθαγόρειων τριάδων» μέσω της αριθμητικής των ψήφων και τη χρήση του γνώμονα. Ωστόσο, φαίνεται δύσκολο να αποδώσουμε στον ίδιο τον Πυθαγόρα ή στους πρώτους τους πυθαγόρειους την απόδειξη του θεωρήματος που βρίσκουμε στον Ευκλείδη (πρόταση α.μζ), παρ' όλο που πιο απλές και εμπειρικές αποδείξεις είναι δυνατές.

Στο Ευκλείδη, η πρόταση α.μζ αποδεικνύεται με τη χρήση του αιτήματος των παραλλήλων το οποίο ήταν μάλλον απίθανο να είχε διατυπωθεί ρητά από τους Πυθαγόρειους, παρ' όλο που εμπειρικά χρησιμοποιούσαν τις παράλληλες ευθείες.

Γενικά, όλα τα γεωμετρικά θεωρήματα που αποδίδονται στον Πυθαγόρα ή στους πρώτους Πυθαγόρειους δεικνύονται εύκολα με απλές αριθμητικές μεθόδους.

Οι Πυθαγόρειοι δίνουν προτεραιότητα στην αριθμητική και η γεωμετρία παίρνει αριθμητικό χαρακτήρα μέσω των γεωμετρικών αριθμών. Γεωμετρικές σχέσεις που δεν υπόκεινται αριθμητικού χειρισμού αγνοούνται. Για αυτό βλέπουμε και την επιμονή των πυθαγόρειων σε ορθογώνια, μετατροπές σχημάτων και ισότητες. Ακριβώς επειδή τα διάφορα σχήματα αποτελούνται από ψήφους, τα ίσα σχήματα θεωρούνται ως ισεμβαδικά και όχι ως εφαρμόσιμα όπως στην Ιωνική παράδοση.

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας (γύρω στο 430 – 420 π.Χ.) έκανε αδύνατη τη μελέτη γεωμετρικών σχημάτων με αριθμητικές μεθόδους ψήφων. Φαίνεται, ότι μετά την ανακάλυψη οι ψήφοι αντικαταστάθηκαν από ευθύγραμμα τμήματα και η γεωμετρίζουσα αριθμητική των ψήφων μετατράπηκε στο είδος της γεωμετρίας που βρίσκουμε κυρίως στο βιβλίο β των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, μεγάλο μέρος του οποίου καλύπτουν θεωρήματα εφαρμογών χωρίων. Αυτή η γεωμετρία είναι ένα είδος μετρικής γεωμετρίας που διατηρεί αρκετά από τα χαρακτηριστικά της πυθαγόρειας αριθμητικής των ψήφων, όπως την επιμονή στη σύγκριση και μετατροπή χωρίων, τη σημασία της ορθής γωνίας, τη χρήση του γνώμονα, την εμφάνιση ισοτήτων και όχι ανισοτήτων, μαζί με την απουσία κύκλων και την επιμονή σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Συνοψίζοντας, υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι γεωμετρίας στα βιβλία του Ευκλείδη. Η Ιωνική παράδοση που την βρίσκουμε κυρίως στα βιβλία α (κυρίως α.α – α.κς), γ και ς. Η μετρική (πυθαγόρεια) παράδοση της γεωμετρίας είναι φανερή στα βιβλία β, ι και στα αριθμητικά ζ,η και θ. Το υλικό των βιβλίων δ και α (α.κζ – α.μη) έχει χαρακτηριστικά και των δύο παραδόσεων. Το βιβλίο α είναι πολύ καλά οργανωμένο, οι προτάσεις του παρουσιάζουν μεγάλο βαθμό αλληλεξάρτησης και το υλικό του, παρ’ όλο που είναι πρώιμο, φαίνεται ότι έχει οργανωθεί εξ αρχής από τον Ευκλείδη.

Η μεγαλύτερη διαφορά σε στυλ ανάμεσα στα γεωμετρικά βιβλία των

Στοιχείων, βρίσκεται στα βιβλία β και γ τα οποία πρέπει να είναι αρκετά προγενέστερα του Ευκλείδη.

1.3 Ο Ευκλείδης

Ο Ευκλείδης, επίσης γνωστός και ως Ευκλείδης ο Αλεξανδρεύς, ήταν Έλληνας μαθηματικός, που συχνά αναφέρεται ως «ο πατέρας της Γεωμετρίας». Έζησε στην Αλεξάνδρια, κατά την περίοδο της βασιλείας του Πτολεμαίου Σωτήρος. Τα βιβλίο του με τον τίτλο «*Στοιχεία*» είναι μία από τις πιο ισχυρές επιρροές στην ιστορία των μαθηματικών, χρησιμεύοντας σαν το κύριο βιβλίο για τη διδασκαλία των μαθηματικών (ιδιαίτερα της Γεωμετρίας), από την εποχή που εκδόθηκε μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αιώνα ή τις αρχές του 20^{ου}.

Λίγα είναι γνωστά για τη ζωή του Ευκλείδη, δεδομένου ότι υπάρχουν πολύ λίγες αναφορές. Μερικές ιστορικές αναφορές γράφτηκαν αιώνες μετά από αυτόν από τον Πρόκλο τον Διάδοχο (450 μ.Χ.) και από τον Πάππο τον Αλεξανδρέα (320 μ.Χ.).

Ο Πρόκλος περιγράφει μόνο εισαγωγικά και εν ολίγοις τον Ευκλείδη στο βιβλίο του «*Σχολιασμός των Στοιχείων*» (*Commentary on the Elements*, εκδ. Friedlein). Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Ευκλείδης ανήκει στην παράδοση του Πλάτωνα. Επίσης πίστευε ότι έπρεπε να ζούσε στην εποχή του Πτολεμαίου Σωτήρος, επειδή τον είχε αναφέρει ο Αρχιμήδης (282 π.Χ. – 212 π.Χ.). Η παγκόσμια επιστημονική κοινότητα μέχρι στιγμής δέχεται ότι ο Ευκλείδης έγραψε τα βιβλία του πολύ πριν από τον Αρχιμήδη.

Επίσης ο Πρόκλος αναφέρει μια ιστορία, όπου ο Πτολεμαίος Σωτήρ ρώτησε τον Ευκλείδη, αν υπάρχει πιο γρήγορος δρόμος να μάθει κάποιος γεωμετρία από το να διαβάσει τα *Στοιχεία* και ο Ευκλείδης του απάντησε: «Δεν υπάρχει βασιλικός δρόμος στην Γεωμετρία»[7].

[7] Πρόκλος, σελ 68

Ο Πάππος αναφέρει ότι ο Απολλώνιος ο Περγαίος πέρασε πολύ χρόνο με τους μαθητές του Ευκλείδη στην Αλεξάνδρεια και έτσι απέκτησε την συνήθεια της επιστημονικής σκέψης.

Παρόλο που πολλά αποτελέσματα στα *Στοιχεία* προέρχονται από προγενέστερα μαθηματικά, ένα από τα κατορθώματα του Ευκλείδη ήταν ότι τα παρουσίασε με έναν απλό, λογικά συνεκτικό τρόπο, κάνοντάς τα χρήσιμα και εύκολα στην αναφορά, συμπεριλαμβανομένου ενός συστήματος με αυστηρά μαθηματικές αποδείξεις, που παραμένει η βάση των μαθηματικών 23 αιώνες μετά.

Εκτός από τα *Στοιχεία*, τουλάχιστον άλλα πέντε έγγραφα του Ευκλείδη έχουν διασωθεί σήμερα. Ακολουθούν τη λογική δομή των Στοιχείων με ορισμούς και προτάσεις αποδεδειγμένες:

1. ***Δεδομένα***, ασχολείται με την ουσία και τα συμπεράσματα «δοσμένων» πληροφοριών σε γεωμετρικά προβλήματα. Σχετίζεται με τα πρώτα τέσσερα βιβλία των Στοιχείων.

2 ***Περί διαιρέσεων***, το οποίο έχει διασωθεί μερικώς στην αραβική μετάφραση, και το οποίο ασχολείται με διαιρέσεις γεωμετρικών σχημάτων σε δύο ή περισσότερα μέρη ή σε μέρη με δοσμένο λόγο. Είναι παρόμοιο με του τρίτου αιώνα μ.Χ. έργο του Ήρων του Αλεξανδρεύς.

3. ***Κατοπτρικά***, ασχολείται με τη μαθηματική θεωρία του «καθρέπτη» και ιδιαίτερα με τις εικόνες που σχηματίζονται σε επίπεδους ή σφαιρικά κυρτούς καθρέπτες.

4. ***Φαινόμενα***, μία διατριβή στη σφαιρική γεωμετρία, η οποία διασώθηκε στην Ελληνική γλώσσα και η οποία είναι αρκετά όμοια με την «κινούμενη σφαίρα», του Αυτόλυκου του Πιταναίου που άνθισε το 310 π.Χ..

5. ***Οπτικά***. Στους ορισμούς, ο Ευκλείδης ακολουθεί την Πλατωνική παράδοση, όπου η όραση είναι αποτέλεσμα διακριτών ακτίνων που πηγάζουν

από το μάτι.

Άλλα διασωθέντα έγγραφα του Ευκλείδη είναι η ***κατατομή κανόνος*** και η ***εισαγωγή αρμονική***.

Άλλες εργασίες που αξιόπιστα αποδίδονται στον Ευκλείδη, αλλά έχουν χαθεί, είναι οι ακόλουθες:

1. ***Κωνικά***. Είναι μια δουλειά που αφορά τις κωνικές τομές που αργότερα επεκτάθηκε από τον Απολλώνιο τον Περγαίο. Ο Πάππος αναφέρει ότι ο Απολλώνιος είχε ολοκληρωμένα τα τέσσερα βιβλία του Ευκλείδη για τους κώνους και πρόσθεσε άλλα τέσσερα, δηλαδή συνολικά 8 βιβλία για κώνους.

2. ***Πορίσματα***. Είναι ένα είδος «αποτελέσματος» του Ευκλείδη από τις κωνικές τομές, ωστόσο το ακριβές νόημα του τίτλου είναι αμφιλεγόμενο.

3. ***Ψευδάρια ή Βιβλίο των Απατών***. Ένα στοιχειώδες βιβλίο για τα λάθη στους συλλογισμούς.

4. ***Τόποι προς επιφάνεια***. Αφορά τους γεωμετρικούς τόπους.

Επίσης άλλη, μη διασωθείσα εργασία είναι τα Μηχανικά.

1.4 Τα Προευκλείδεια Στοιχεία Γεωμετρίας

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια περιγραφή της δημοσίευσης του καθηγητή του ΕΜΠ, κ. Βασίλη Καρασμάνη, *«Περί των Προευκλείδειων Στοιχείων της Γεωμετρίας»*, που δημοσιεύθηκε στο βιβλίο *«Στιγμές και Διάρκειες: 13 Κείμενα Φιλοσοφίας και Ιστορίας των Μαθηματικών και της Λογικής»*, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 2009.

Είναι κοινώς αποδεκτό ότι ο Ευκλείδης στηρίχθηκε σε προγενέστερο υλικό και βιβλία μαθηματικών για την συγγραφή των *Στοιχείων*, και ειδικά στη γεωμετρία δεν είναι το πρώτο συστημικό βιβλίο της αρχαιότητας. Ο

Εύδημος ο Ρόδιος, μαθητής του Αριστοτέλη, έγραψε την πρώτη ιστορία της Γεωμετρίας, στην οποία αναφέρει ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρία προευκλείδεια *Στοιχεία* τα οποία αποδίδονται στους μαθηματικούς Ιπποκράτη τον Χίο, Λέοντα και Θεύδιο.

Στις μέρες μας δεν έχει διασωθεί πλήρως το βιβλίο του Εύδημου ήταν όμως αρκετά γνωστό σε όλη την αρχαιότητα και πολλοί μεταγενέστεροι συγγραφείς αναφέρονται σε αυτό παραθέτοντας πολλές φορές εκτενή αποσπάσματα[8].

Μια άλλη, αρκετά μεταγενέστερη και όχι τόσο αξιόπιστη πιθανή μαρτυρία για *Στοιχεία* μαθηματικών πριν από τον Ευκλείδη, βρίσκουμε στο Μαρίνο (5^{ος} αιώνας μ.Χ.), στο υπόμνημά του στα Δεδομένα του Ευκλείδη[9], όπου αναφέρεται στις πρώτες «στοιχειώσεις».

1.5 Η λέξη «στοιχεία»

Σύμφωνα με το λεξικό των Liddell και Scott, η λέξη «στοιχεία» στην αρχή φαίνεται να δήλωνε τα πράγματα που βρίσκονται σε μια σειρά (στοίχος). Από τον Αριστοτέλη και μετά η λέξη καθιερώνεται για τα τέσσερα «στοιχεία» της φύσης (γη, νερό, αέρα, φωτιά).

Πολλές φορές η λέξη «στοιχείο» χρησιμοποιείται ως ισοδύναμη με την «αρχή», ενώ υπό την έννοια «στοιχεία» στη γεωμετρία είναι τα απλούστερα γεωμετρικά όντα (σημεία, γραμμές κτλ) από τα οποία σχηματίζονται τα πιο σύνθετα διαγράμματα. Από την εποχή του Αριστοτέλη, η λέξη «στοιχεία» αρχίζει να χρησιμοποιείται, στο πλαίσιο μια επιστήμης, για να δηλώσεις ένα σύνολο βασικών προτάσεων και αποδείξεων χρήσιμων για περίπλοκες αποδείξεις.

Ο Πρόκλος μας λέει ότι σύμφωνα με τον Μέναιχμο, η λέξη «στοιχείο» έχει

[8] Τα σωζόμενα αποσπάσματα του Εύδημου βρίσκονται στο βιβλίο του Fritz Wehrli, *Die Schule des Aristoteles*, vol. 7, *Eudemos von Rhodos*, Basel/Stuttgart, 1969.
[9] Ed. Henricus Menge, Lipsiae, 1894, σελ 236-4

δύο σημασίες στη γεωμετρία. Κατ' αρχάς, κάθε τι που αποδεικνύει είναι στοιχείο του αποδεικνυόμενου. Έτσι η πρώτη πρόταση του Ευκλείδη είναι στοιχείο της δεύτερης, και η τέταρτη της πέμπτης. Από την άλλη στοιχείο λέγεται το απλούστερο στο οποίο αναλύεται το σύνθετο. Με αυτή την έννοια στοιχεία είναι μόνο οι τελείως αρχικές προτάσεις, όπως τα αιτήματα είναι στοιχεία των θεωρημάτων. Συνεχίζοντας ο Πρόκλος μας λέει ότι με αυτήν τη σημασία της λέξης έχουν συνταχθεί τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη[10], τόσο για την επίπεδη γεωμετρία όσο και για τη στερεομετρία. Και κλείνει λέγοντας ότι *«αυτή είναι η σημασία που η λέξη έχει στις αριθμητικές και αστρονομικές στοιχειώσεις που πολλοί έχουν γράψει»*.

Συνεπώς, σύμφωνα με τα παραπάνω, η λέξη «στοιχεία» χρησιμοποιείται για να δηλώσει είτε κάποιες βασικές και σημαντικές προτάσεις μιας μαθηματικής επιστήμης, είτε ένα βιβλίο που περιέχει αυτές τις προτάσεις. Για να δηλωθεί ένα βιβλίο που περιέχει στοιχεία, χρησιμοποιείται και ιδιαίτερη λέξη, η στοιχείωσις.

Καταλήγοντας, μπορούμε να πούμε ότι τα Στοιχεία ή στοιχείωση γεωμετρίας είναι ένα βιβλίο που δίνει μια εισαγωγή στην επιστήμη με συνοπτικό και λιτό τρόπο και στο οποίο οι προτάσεις (θεωρήματα) βρίσκονται σε αλληλεξάρτηση μεταξύ τους προχωρώντας από τις πιο απλές προς τις πιο σύνθετες. Μια στοιχείωση φυσιολογικά, θα πρέπει να ξεκινά με απαρίθμηση των πρώτων αρχών (αξιώματα, αριθμοί), αλλά οι μαρτυρίες δεν επιμένουν πάνω σε αυτό το θέμα και μάλλον αυτό το χαρακτηριστικό δεν είναι αναγκαίο[11].

1.6 Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη

Τα *Στοιχεία* είναι μια μαθηματική και γεωμετρική διατριβή που αποτελείται από 13 βιβλία γραμμένα από τον αρχαίο Έλληνα Μαθηματικό Ευκλείδη στην Αλεξάνδρεια, περίπου τον 3$^{\text{ο}}$ αιώνα π.Χ.. Είναι μια συλλογή από όρους,

[10] Όταν ο Πρόκλος λέει «με αυτή τη σημασία της λέξης», δεν πρέπει να θεωρήσουμε ότι εννοεί τη δεύτερη σημασία της λέξης (δηλ. τα αιτήματα) σύμφωνα με τον Μέναιχμο, αλλά με τη σημασία που ο ίδιος ο Πρόκλος δίνει στη λέξη. Εξ άλλου τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη περιέχουν κυρίως θεωρήματα.

[11] Για παράδειγμα η *Θεολογική Στοιχείωσις* του Πρόκλου δεν ξεκινά με απαρίθμηση πρώτων αρχών.

αξιώματα, κοινές έννοιες, προτάσεις (θεωρήματα και κατασκευές) και μαθηματικές αποδείξεις των προτάσεων. Τα 13 βιβλία καλύπτουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία και την αρχαία Ελληνική εκδοχή της στοιχειώδους θεωρίας των αριθμών. Επίσης περιλαμβάνουν ένα σύστημα αριθμητικής είναι αρκετά ισχυρό ώστε να λύσει ένα μεγάλο εύρος αριθμητικών προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένου αυτού της εύρεσης μιας τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού. Με εξαίρεση το έργο του Αυτόλυκου του Πιταναίου, «Στην κινούμενη σφαίρα», τα *Στοιχεία* είναι μία από τις αρχαιότερες σωζόμενες Ελληνικές διατριβές. Έχει αποδειχτεί ως ένα συντελεστικό εργαλείο για την ανάπτυξη της λογικής, των μαθηματικών και γενικά της σύγχρονης επιστήμης.

Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αναφέρονται ως το πιο επιτυχημένο και με την μεγαλύτερη επιρροή βιβλίο που έχει γραφτεί ποτέ. Πιστεύεται ότι μετά από τη Βίβλο είναι το δεύτερο βιβλίο ως προς τον αριθμό εκδόσεων όλων των εποχών, με πάνω από 1.000 εκδόσεις.

Οι μελετητές πιστεύουν ότι τα *Στοιχεία* είναι μια μεγάλη συλλογή από θεωρήματα αποδεδειγμένα από άλλους μαθηματικούς, στα οποία βεβαίως συμπεριλαμβάνονται μερικές αυθεντικές δουλειές του Ευκλείδη.

Τον τέταρτο αιώνα μ.Χ., ο Θέων ο Αλεξανδρεύς παρήγαγε μια έκδοση του Ευκλείδη που ήταν τόσο πολύ διαδεδομένη που έγινε η μόνη πηγή που είχε η ανθρωπότητα μέχρι το 1808, οπότε και ο François Peyrard ανακάλυψε στο Βατικανό ένα χειρόγραφο που δεν προέρχεται από τον Θέων, αλλά σύμφωνα με τον ιστορικό Johan Ludvig Heiberg, από το Βυζάντιο τον $9^{ο}$ αιώνα, και το οποίο αποτελεί τη βάση για τις σύγχρονες εκδόσεις.

Ακόμα και σήμερα τα *Στοιχεία* θεωρούνται ως αριστούργημα της Λογικής και των μαθηματικών. Στο ιστορικό πλαίσιο, έχουν σημαντική επιρροή σε διάφορες περιοχές της επιστήμης. Ο Κοπέρνικος, ο Κέπλερ, ο Γαλιλαίος και ο Νεύτωνας επηρεάστηκαν από τα *Στοιχεία* και εφάρμοσαν αυτή την πολύτιμη γνώση στα έργα τους.

Ο Άινστάιν, ανέφερε ότι τα *Στοιχεία* του άσκησαν την μεγαλύτερη επιρροή στη ζωή του και μάλιστα τα χαρακτήρισε ως «ιερό βιβλίο».

1.7 Η μέθοδος και το ύφος παρουσίασης του Ευκλείδη

Η αξιωματική προσέγγιση και οι κατασκευαστικές μέθοδοι του Ευκλείδη, είχαν, έχουν και θα έχουν ευρεία και μεγάλη επιρροή.

Υπάρχουν δύο είδη προτάσεων στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Τα θεωρήματα που τελειώνουν με την φράση: *«ὅπερ ἔδει δεῖξαι»*, και τα προβλήματα που τελειώνουν με την φράση: *«ὅπερ ἔδει ποιῆσαι»*.

Όπως ήταν σύνηθες στα αρχαία μαθηματικά έγγραφα, όταν μια πρόταση χρειαζόταν απόδειξη σε αρκετές διαφορετικές περιπτώσεις, ο Ευκλείδης συχνά αποδείκνυε μόνο μία από αυτές και συνήθως την πιο δύσκολη, αφήνοντας τις υπόλοιπες στον αναγνώστη. Τα μετέπειτα χρόνια, διάφοροι συγγραφείς σαν τον Θέων, συχνά έβαζαν τις δικές τους αποδείξεις για αυτές τις περιπτώσεις.

Η παρουσίαση κάθε αποτελέσματος δίνεται με μια συγκεκριμένη μορφή, που παρόλο που δεν επινοήθηκε από τον Ευκλείδη, του αναγνωρίζεται τυπικά και κλασσικά. Έχει έξι μέρη[12], τα οποία και παρουσιάζουμε επί παραδείγματι στην πρόταση α.α:

1) Το πρώτο είναι η **έκφραση** ή **πρόταση**, στο οποίο δηλώνεται το αποτέλεσμα σε γενικούς όρους (π.χ. η δήλωση – εκφώνηση της πρότασης).

2) Μετά ακολουθεί η **έκθεση**.

3) Μετά ο **διορισμός**.

4) Στη συνέχεια ακολουθεί η **κατασκευή**.

[12] Mueller, 1981, σελ. 11

5) Μετά η **<u>απόδειξη</u>** αυτούσια.

6) Τέλος, το **<u>συμπέρασμα</u>** που πάντα τελειώνει με μία από τις εξής δύο φράσεις: 1) *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* – (Which is) the very thing it was required to show, 2) *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι* – (Which is) the very thing it was required to do.

1.8 Τα βιβλία των *Στοιχείων*

Παραδοσιακά τα *Στοιχεία* έχουν χωριστεί σε 4 μέρη:

1. Επιπεδομετρία, Βιβλία α,β,γ,δ,ε,ς
2. Αριθμητική, Βιβλία ζ, η, θ
3. Θεωρία ασσυμέτρων, Βιβλίο ι
3. Στερεομετρία, Βιβλία ια, ιβ, ιγ

Αξίζει να αναφέρουμε, ότι τα βιβλία ε και ι δεν ταιριάζουν απόλυτα με αυτόν τον διαχωρισμό, ωστόσο είναι βολικό να επιμείνουμε σε αυτόν.

Το **<u>βιβλίο α</u>** περιέχει 10 αξιώματα (axioms), για την ακρίβεια 5 αιτήματα (postulates) και 5 κοινές έννοιες (common notions ή named axioms) και τις βασικές προτάσεις της γεωμετρίας: Οι γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες (pons asinorum ή bridge of fools) (Πρόταση α.ε), το πυθαγόρειο θεώρημα (Pythagorean theorem) (Προτάσεις α.μς – α.μη), ισότητα γωνιών και εμβαδών, παραλληλισμός, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, και τρεις περιπτώσεις όπου τρίγωνα είναι «ίσα» (έχουν το ίδιο εμβαδόν).

Το **<u>βιβλίο β</u>**, με 14 προτάσεις και το οποίο αφορά την πυθαγόρεια μετρική γεωμετρία.

Το **<u>βιβλίο γ</u>** ασχολείται με τους κύκλους και τις ιδιότητές τους, εγγεγραμμένες γωνίες (inscribed angles), εφαπτομένες (tangents), καθώς και το θεώρημα του Θαλή (Thales’ theorem).

Το **βιβλίο δ** κατασκευάζει τον εγγεγραμμένο κύκλο (incircle ή inscribed circle), τον περιγεγραμμένο κύκλο (circumscribed circle) και επίσης κατασκευάζει κανονικά πολύγωνα με 4, 5, 6 και 15 πλευρές.

Το **βιβλίο ε** είναι μια διατριβή στις αναλογίες των μέτρων. Η πρόταση κε έχει μια ειδική περίπτωση της ανισότητας των αριθμητικών και γεωμετρικών μέσων (Inequality of arithmetic and geometric means).

Το **βιβλίο ς** εφαρμόζει τις αναλογίες στη γεωμετρία με απλά σχήματα και γενικά περιγράφει την ομοιότητα σχημάτων.

Το **βιβλίο ζ** ασχολείται αυστηρά με τη στοιχειώδη θεωρία αριθμών: διαιρετότητα (divisibility) και πρώτους αριθμούς (prime numbers). Περιλαμβάνει τον αλγόριθμο του Ευκλείδη για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη (greatest common divisor), αλλά και του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιο (least common multiple). Οι προτάσεις λ και λβ μαζί κατ' ουσίαν ισοδύναμες με το θεμελιώδες θεώρημα αριθμητικής (fundamental theorem of arithmetic), σύμφωνα με το οποίο κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων κατά ένα και μοναδικό τρόπο.

Το **βιβλίο η** ασχολείται με τις αναλογίες στη θεωρία αριθμών και τη γεωμετρική πρόοδο (geometric progression ή geometric sequence).

Το **βιβλίο θ** εφαρμόζει τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων βιβλίων και δίνει μια μορφή απειρίας για τους πρώτους αριθμούς (πρόταση θ.κ), το άθροισμα των γεωμετρικών σειρών (geometric series) (πρόταση θ.λε) και την κατασκευή των τέλειων αριθμών (perfect numbers) (πρόταση θ.λς).

Το **βιβλίο ι** επιχειρεί να ταξινομήσει τα ασύμμετρα μεγέθη (incommensurable magnitudes) ή αλλιώς στην μοντέρνα ορολογία άρρητους αριθμούς (irrational numbers), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης (method of exhaustion), η οποία είναι ένας «προάγγελος» της ολοκλήρωσης (integration).

Το **βιβλίο ια** γενικεύει τα αποτελέσματα των βιβλίων α – ς στον χώρο: παραλληλισμός (parallelism) και όγκος των παραλληλεπίπεδων (parallelepipeds).

Το **βιβλίο ιβ** μελετάει τους όγκους των κώνων (cones), των πυραμίδων (pyramids) και των κύλινδρων (cylindres) με λεπτομέρειες και δείχνει για παράδειγμα ότι ο όγκος του κώνου είναι το ένα τρίτο του όγκου του αντίστιχου κυλίνδρου. Αυτό προκύπτει δείχνοντας ότι ο όγκος της σφαίρας (sphere) είναι αναλογικός του κύβου (cube) με πλευρά την ακτίνα της σφαίρας, τον οποίο τον προσεγγίζει με μια ένωση πολλών πυραμίδων.

Το **βιβλίο ιγ** κατασκευάζει τα πέντε κανονικά Πλατωνικά Στερεά (Platonic Solids), εγγεγραμμένα σε μια σφαίρα, υπολογίζοντας τον λόγο των πλευρών με την ακτίνα της σφαίρας και αποδεικνύοντας ότι δεν υπάρχουν άλλα κανονικά στερεά.

1.9 Το βιβλίο α

Το βιβλίο α θεωρείται ότι είναι εξ ολοκλήρου του Ευκλείδη. Οι προτάσεις α.α –α.κς ανήκουν στην Ιωνική παράδοση, ενώ οι προτάσεις α.κζ – α.μη έχουν χαρακτηριστικά και της Ιωνικής και της Πυθαγόρειας παράδοσης.

Ξεκινάει με ένα σύνολο ορισμών. Βασικές έννοιες όπως σημείο, γραμμή και γωνία περιγράφονται με γενικούς όρους και χρησιμοποιούνται για να ορίσουν διάφορα είδη τριγώνων, τετράπλευρων κτλ. Ο ορισμός ιζ, που η απόδειξή του εγινε από τον Θαλή είναι μία από τις πρώτες μαθηματικές αποδείξεις όλων εποχών, αλλά στα *Στοχεία* ίσως θα ήταν πιο βολικό να έχει μπει στα αιτήματα. Ο τελευταίος ορισμός, ο κγ, περιγράφει ως παράλληλες ευθείες σε ένα επίπεδο τις ευθείες που *ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις*.

Μετά τους ορισμούς ακολουθούν τα αιτήματα, τα οποία στη σημερινή εποχή τα θεωρούμε ως τα αξιώματα της Γεωμετρίας. Το τελευταίο αίτημα, δηλαδή το ε, είναι το φημισμένο 5ο αίτημα – αξίωμα του Ευκλείδη, στην άρνηση του οποίου βασίζονται οι σύγχρονες μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Οι κοινές έννοιες είναι και αυτά αξιώματα με πιο γενικές σημασίες: *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα*.

Οι προτάσεις του βιβλίου α μπορούν να χωριστούν σε 4 τμήματα:

1. (Προτάσεις α.α ... α.κς) (Ιωνική παράδοση) Θεμελιώδη θεωρήματα και βασικές κατασκευές τις επιπεδομετρίας όπως η αναλογία – ισότητα των τριγώνων και η διχοτόμηση της γωνίας. Μέχρι και την πρόταση α.κς δεν χρησιμοποιείται καμία παράλληλη ευθεία, ούτε το 5ο αίτημα του Ευκλείδη.

2. (Προτάσεις α.κζ ... α.λβ) Η θεωρία των παράλληλων ευθειών, συμπεριλαμβανομένου του θεωρήματος ότι *αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν* (α.λβ), το οποίο προέρχεται από την Πυθαγόρεια παράδοση.

3. (Προτάσεις α.λγ ... α.με) Η θεωρία των παραλληλογράμμων και επίσης συγκρίσεις των εμβαδών παραλληλογράμμων και τριγώνων.

4. (Προτάσεις α.μς ... α.μη) Το πυθαγόρειο θεώρημα.

1.10 Το βιβλίο β

Το βιβλίο β παρουσιάζει την πυθαγόρεια μετρική γεωμετρία των τελευταίων χρόνων του πέμπτου αιώνα, όταν οι ψήφοι αντικαταστάθηκαν από γραμμές (λόγω της ανακάλυψης της ασυμμετρίας). Αυτό το βιβλίο έχει πολύ χαλαρή οργάνωση και οι προτάσεις του έχουν τον μεγαλύτερο βαθμό ανεξαρτησίας από όλα τα βιβλία των *Στοιχείων*.

Οι ορισμοί αφορούν το παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον και τον γνώμονα. Το βιβλίο β παρουσιάζει ένα είδος γεωμετρίας που μπορεί σήμερα να αναχθεί σε αλγεβρικές ταυτότητες. Αλλά τα αποτελέσματα πάντα εκφράζονται στη γεωμετρική γλώσσα των υποδιαιρέσεων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων και των εμβαδών αυτών. Οι προτάσεις β.ιβ και β.ιγ είναι γενικεύσεις του Πυθαγορείου θεωρήματος (α.μζ) (σύγχρονη ονομασία: τριγωνομετρικοί νόμοι). Η πρόταση β.ιδ δίνει μια λύση στο σημαντικό πρόβλημα της κατασκευής ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με ένα δοσμένο.

1.11 Το βιβλίο γ

Το βιβλίο γ ανήκει στην Ιωνική παράδοση και μάλλον το έβαλε αυτούσιο ο Ευκλείδης μετά το β. Ο πιο πιθανός δημιουργός του βιβλίου γ θεωρείται ο Ιπποκράτης ο Χίος. Ωστόσο οι τρεις τελευταίες προτάσεις μπορούν να θεωρηθούν ότι οφείλονται κατά μεγάλο βαθμό στον Ευκλείδη (προσωπική εκτίμηση).

Μετά από μερικούς ορισμούς στην αρχή, στη συνέχεια παρουσιάζονται γεωμετρικές προτάσεις για κύκλους, εφαπτομένες αλλά και κύκλους σε επαφή. Το δεύτερο μισό του βιβλίου γ, αφορά τις βασικές έννοιες για τετράπλευρα και κύκλους, συμπεριλαμβανομένης της πρόταση γ.κα η οποία αναφέρει: *Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*. Η πρόταση γ.κβ δίνει την πρώτη περιγραφή των τετράπλευρων σε κύκλους: *Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΙΒΛΙΟ Α

2.1 Ορισμοί

Ορισμός α: *Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.*

Ορισμός β: *Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.*

Ορισμός γ: *Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.*

Ορισμός δ: *Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.*

Ορισμός ε: *'Επιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.*

Ορισμός ς: *'Επιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.*

Ορισμός ζ: *'Επίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.*

Ορισμός η: *'Επίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.*

Ορισμός θ: *῞Οταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.*

Ορισμός ι: *῞Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.*

Ορισμός ια: *'Αμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.*

Ορισμός ιβ: *'Οξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.*

Ορισμός ιγ: *῞Ορος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.*

Ορισμός ιδ: *Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.*

Ορισμός ιε: *Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.*

Ορισμός ις: *Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.*

Ορισμός ιζ: *Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.*

Ορισμός ιη: *Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.*

Ορισμός ιθ: *Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.*

Ορισμός κ: *Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.*

Ορισμός κα: *Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.*

Ορισμός κβ: *Τὼν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.*

Ορισμός κγ: *Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.*

Ο ορισμός ιζ, θεωρεί άμεσα ως δεδομένο ότι η διάμετρος δίχα τέμνει τον κύκλο, κάτι το οποίο δεν έχει αποδειχθεί, συνεπώς θα ήταν καλύτερο να υπήρχε στα αιτήματα και όχι στους ορισμός. Η απόδειξή του είναι μία από τις πρώτες αποδείξεις στην ιστορία της ανθρωπότητας και έγινε από τον Θαλή.

Σε όλον τον Ευκλείδη φαίνεται ότι οι ορισμοί αποτελούν σιωπηρή παραδοχή της ύπαρξης των οριζομένων μαθηματικών όντων. Ωστόσο, δεν έχουμε αξιώματα ύπαρξης των βασικών μαθηματικών όντων. Κάποιοι ορισμοί (π.χ.

γωνίας) μας δίνουν τον κανόνα κατασκευής του συγκεκριμένου μαθηματικού όντος. Κάποιοι άλλοι την ουσιαστική ιδιότητα μέσω της οποίας μπορεί να γίνει αυτή η κατασκευή (π.χ. ισόπλευρο τρίγωνο – βλ. Πρόβλημα α.α).

Οι ορισμοί όμως των πιο στοιχειωδών εννοιών ή όντων δεν φαίνεται να εμφανίζουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Μας δίνουν μόνο μια διαισθητική εικόνα για το τι είναι αυτά τα όντα. Έτσι δε χρησιμοποιούνται καθόλου στις αποδείξεις και φαίνεται να έχουν φιλοσοφική και όχι μαθηματική προέλευση.[13]

2.2 Αιτήματα

Αίτημα α: *Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.*
Αίτημα β: *Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.*
Αίτημα γ: *Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.*
Αίτημα δ: *Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.*
Αίτημα ε: *Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.*

Η λέξη συνεχές στο αίτημα β, ίσως έχει καποία έμμεση σχέση με τη συνέχεια που λέμε στη σύγχρονη μαθηματική ανάλυση. Ωστόσο αξίωμα συνέχειας δεν υπάρχει στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, αλλά ίσως θα μπορούσαμε να βγάλουμε τη συνέχεια από τον ορισμό α και το αίτημα α.

Το ε αίτημα, είναι το περίφημο πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη, το οποίο έχουν αρνηθεί οι σύγχρονες μη Ευκλείδειες γεωμετρίες. Επίσης είναι ισοδύναμο με το εξής: Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται ακριβώς μία παράλληλη.

[13] V. Karasmanis, *The hypothesis of mathematics in Plato's Republic and his Contribution to the axiomatization of Geometry*, (στο P. Nicolacopoulos (ed.), *Greek Studies in the Philosophy and History of Science*, Kluwer, Netherlands, 1990)

2.3 Κοινές Έννοιες

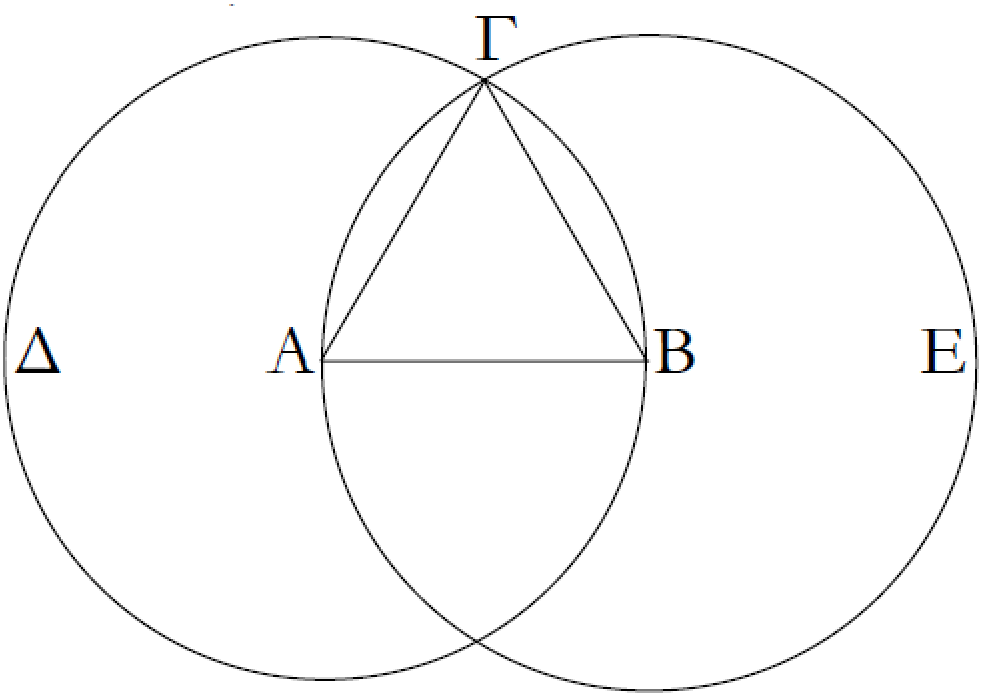
Κοινή Έννοια α: *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.*
Κοινή Έννοια β: *Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.*
Κοινή Έννοια γ: *Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.*
Κοινή Έννοια δ: *Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*
Κοινή Έννοια ε: *Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].*

Η ουσιαστική διαφορά που έχουν τα αιτήματα με τις κοινές έννοιες είναι ότι οι κοινές έννοιες είναι γενικού περιεχομένου ενώ τα αιτήματα αφορούν καθαρά την γεωμετρία.

2.4 Προτάσεις

<u>1) Πρόταση α.α (Πρόβλημα)</u>

'Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Σχήμα α.α

Σε αυτή την πρόταση, αν δοθεί πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα, μπορεί να παραχθεί ισόπλευρο τρίγωνο με μήκος πλευράς το μήκος του πεπερασμένου τμήματος. Χρησιμοποιεί στην απόδειξή της το αίτημα γ, σε δύο σημεία: 1) *Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ*, 2) *καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ*. Επίσης, χρησιμοποιεί το αίτημα α, σε ένα σημείο: *ἐπί τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ*. Ακόμα, χρησιμοποιεί τον όρο ιε σε δύο σημεία: 1) *Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ·*, 2) *πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ*. Τέλος, χρησιμοποεί την κοινή έννοια α στο εξής σημείο: *ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*. Σε αυτό το σημείο θέλω να σχολιάσω τη φράση: *καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπί τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ*. Αυτή θεωρεί ως δεδομένο χωρίς απόδειξη τους κύκλους που τέμνονται αλλήλοι, αλλά και ότι δε γίνεται δύο ευθείες (ευθύγραμμα τμήματα που λέμε σήμερα) να έχουν κάποιο κοινό τμήμα – μέρος.

Για την πρόταση αυτή θα κάνουμε τον διαχωρισμό σε 6 τμήματα: Πρόταση, Έκθεση, Διορισμός, Κατασκευή, Απόδειξη και Συμπέρασμα, που ισχύουν γενικά στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Ωστόσο σε αυτή την πρόταση δεν υπάρχει Διορισμός.

1) Πρόταση: *'Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.*

2) Έκθεση: *Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.*

3) Κατασκευή: *Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπί τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.*

<u>4) Απόδειξη</u>: *Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.*

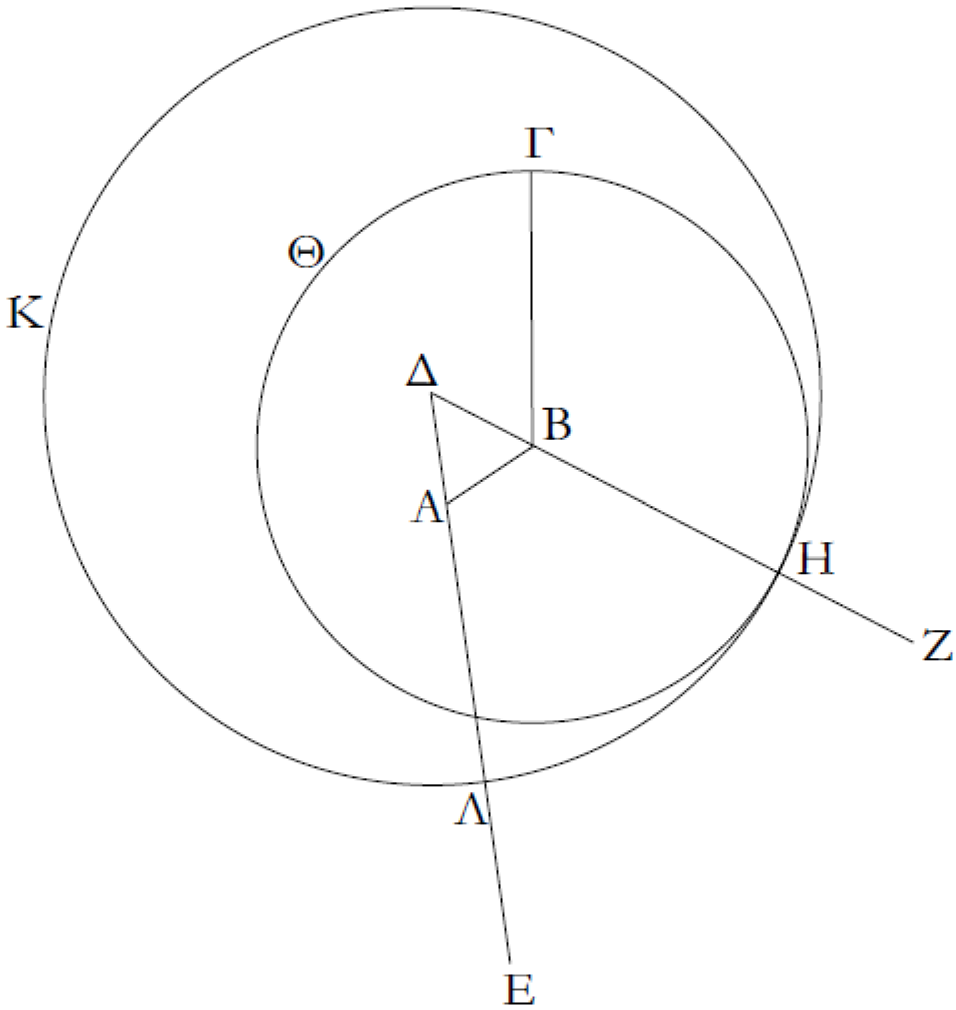
<u>5) Συμπέρασμα</u>: *Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.*

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο Ευκλείδης θεωρεί δεδομένο ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται στο Γ, χωρίς να το έχει αποδείξει, αλλά και χωρίς να έχει θεωρήσει το γεγονός αξίωμα – αίτημα. Επίσης σε αυτή την πρόταση δεν υπάρχει διορισμός.

Η πρόταση α.α χρησιμοποιείται συνολικά 4 φορές σε 4 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.β, 1 φορά στην πρόταση α.θ, 1 φορά στην πρόταση α.ι, 1 φορά στην πρόταση α.ια).

<u>2) Πρόταση α.β (Πρόβλημα)</u>

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



Σχήμα α.β

Σε αυτή την πρόταση δίνεται ένα σημείο (Α) και μια ευθεία (ΒΓ) και δημιουργείται μια ευθεία (ΑΛ) η οποία είναι ίση με τη ΒΓ. Χρησιμοποιεί το αίτημα α στο εξής σημείο: *'Επεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπί τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ*. Χρησιμοποιείται η πρόταση α.α, στο εξής σημείο: *καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ*. Επίσης χρησιμοποιεί το αίτημα β*: καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ*. Και το αίτημα γ σε δύο σημεία: 1) *καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ*, 2) *καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ*. Ακόμα, χρησιμοποεί τον όρο ιε σε δύο σημεία: 1) *'Επεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ·*, 2) *πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ*. Και από κοινές έννοιες χρησιμοποιούνται γ και α στα εξής σημεία αντίστοιχα: γ*) λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση και* α) *ἑκατέρα ἄρα τῶν*

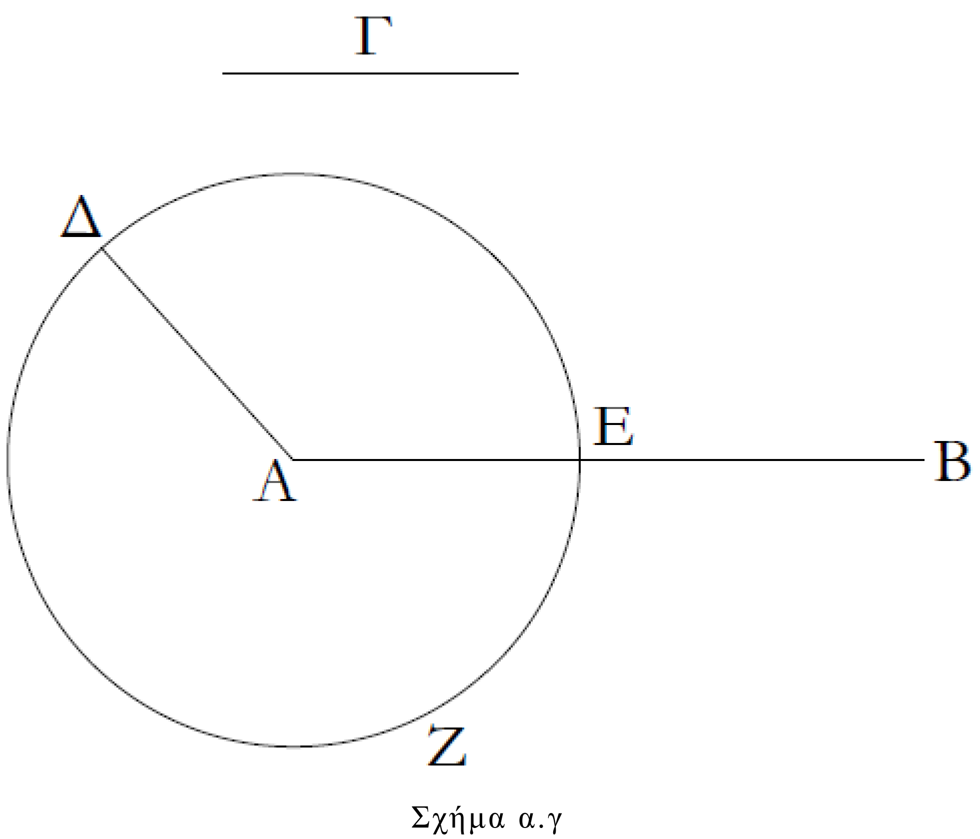
ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση.

Αυτή η πρόταση δίνει στον Πρόκλο τη δυνατότητα, όπως συνήθιζαν οι Έλληνες σχολιαστές, να ξεχωρίσει ένα πλήθος περιπτώσεων. Όπως είναι αναμενόμενο ο Ευκλείδης απέδειξε την πιο δύσκολη.[14] Οι άλλες αποδεικνύονται παρόμοια.

Η πρόταση α.β χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση α.γ).

3) Πρόταση α.γ (Πρόβλημα)

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



Σχήμα α.γ

[14] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 245

Σε αυτή την πρόταση δίνονται δύο άνισες ευθείες, η ΑΒ που είναι μεγαλύτερη από τη Γ και δημιουργείται πάνω στην ΑΒ, η ΑΕ που είναι ίση με τη Γ. Η απόδειξη χρησιμοποιεί την πρόταση α.β: *Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ*. Το αίτημα γ: *καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ*. Ο όρος ιε: *Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ*. Τέλος χρησιμοποιείται η κοινή έννοια α: *ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστιν ἴση*.

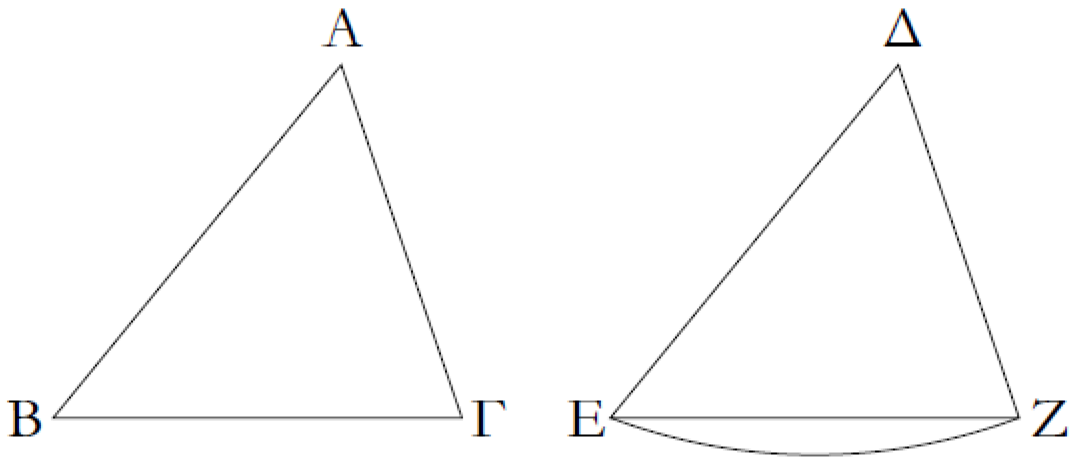
Σε αυτή την πρόταση ο Πρόκλος κατάφερε να φτιάξει έναν αριθμό πιθανών περιπτώσεων. Συγκεκριμένα έφτιαξε 8 δυνατά σχήματα.[15]

Η πρόταση α.γ χρησιμοποιείται συνολικά 20 φορές σε 19 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.ε, 1 φορά στην πρόταση α.ς, 1 φορά στην πρόταση α.θ, 1 φορά στην πρόταση α.ια, 1 φορά στην πρόταση 1.ις, 1 φορά στην πρόταση α.ιη, 1 φορά στην πρόταση α.κ, 1 φορά στην πρόταση α.κβ, 1 φορά στην πρόταση α.κδ, 2 φορές στην α.κς, 1 φορά στην πρόταση α.μς, 1 φορά στην πρόταση α.μη, 1 φορά στην πρόταση β.α, 1 φορά στην πρόταση β.η, 1 φορά στην πρόταση β.θ, 1 φορά στην πρόταση β.ι, 1 φορά στην πρόταση β.ια, 1 φορά στην πρόταση β.ιδ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιε).

4) Πρόταση α.δ (Θεώρημα)

᾽Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

[15] [15] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 247



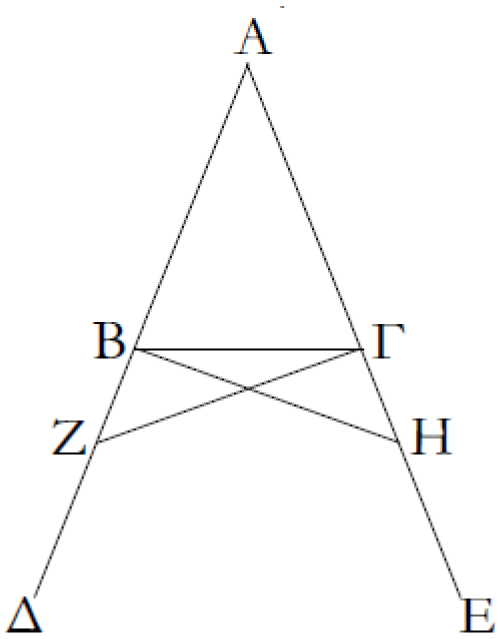
Σχήμα α.δ

Η πρόταση αυτή αποδεικνύει ότι δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες και την περιεχόμενη γωνία ίση, είναι ίσα (ταύτιση). Καταρχάς, αυτή η πρόταση χρησιμοποεί την κοινή έννοια δ, που προσωπικά τη θεωρώ εμπειρική. Επίσης, μπορούσε να μπει στην αρχή του βιβλίου α, μιας και δεν χρησιμοποιεί στην απόδειξή της καμία από τις ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις α,β,γ. Συγκεκριμένα λέει: *Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ*. Επίσης, στη φράση: *εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*, χρησιμοποιεί το αίτημα α και μάλιστα υπονοεί ότι η ευθεία που ενώνει δύο δοθέντα σημεία είναι μοναδική. Τέλος χρησιμοποιεί την κοινή έννοια δ, σε 3 επιπλέον σημεία: 1) *ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται·*, 2) *ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται*, 3) *καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ*.

Η πρόταση α.δ χρησιμοποιείται συνολικά 24 φορές σε 19 προτάσεις (2 φορές στην πρόταση α.ε, 1 φορά στην πρόταση α.ς, 1 φορά στην πρόταση α.ι, 1 φορά στην πρόταση α.ις, 1 φορά στην πρόταση α.κδ, 1 φορά στην πρόταση α.κε, 4 φορές στην πρόταση α.κς, 1 φορά στην πρόταση α.λγ, 1 φορά στην α.λδ, 1 φορά στην πρόταση α.λε, 1 φορά στην πρόταση α.μζ, 1 φορά στην πρόταση γ.ζ, 1 φορά στην πρόταση γ.η, 1 φορά στην πρόταση γ.ιζ, 1 φορά στην πρόταση γ.κε, 1 φορά στην πρόταση γ.κς, 1 φορά στην πρόταση γ.κθ, 1 φορά στην πρόταση γ.λ, 2 φορές στην πρόταση γ.λγ).

<u>5) Πρόταση α.ε (Θεώρημα)</u>

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ τρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Σχήμα α.ε

Η πρόταση αυτή αποδεικνύει ότι οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Αυτό το έκανε πρώτα ο Θαλής ο Μιλήσιος. Χρησιμοποιεί το αίτημα β: *καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ*. Χρησιμοποιεί την πρόταση α.γ: *Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ*. Χρησιμοποιεί το αίτημα α: *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι*. Την πρόταση α.δ σε δύο σημεία: 1) 2) *καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ* *ὑποτείνουσιν*. Τέλος, χρησιμοποιεί την κοινή έννοια γ σε δύο σημεία: 1) *καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση*, 2) *ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση*.

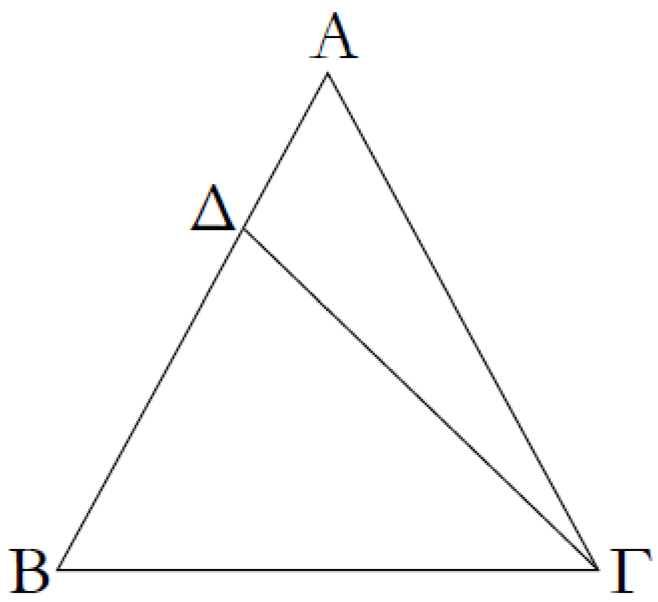
Σύμφωνα με τον Πρόκλο[16], η ανακάλυψη ότι στο ισοσκελές τρίγωνο, οι γωνίες της βάσης είναι ίσες, ήταν του Θαλή, ο οποίος ωστόσο λέγεται ότι είχε πει ότι οι γωνίες είναι όμοιες, όχι ίσες. Σύμφωνα με τον Πρόκλο το παρόμοιο ταυτίζεται με το ίσο.

Η πρόταση α.ε χρησιμοποιείται συνολικά 16 φορές σε 13 προτάσεις (2 φορές στην πρόταση α.ζ, 1 φορά στην πρόταση α.ιη, 1 φορά στην πρόταση α.ιθ, 1 φορά στην πρόταση α.κ, 1 φορά στην πρόταση α.κδ, 1 φορά στην πρόταση β.δ, 1 φορά στην πρόταση β.θ, 1 φορά στην πρόταση β.ι, 2 φορές στην πρόταση γ.β, 1 φορά στην πρόταση γ.γ, 1 φορά στην πρόταση γ.ις, 1 φορά στην πρόταση γ.κ, 2 φορές στην πρόταση γ.λα).

6) Πρόταση α.ς (Θεώρημα)

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

[16] Πρόκλος, Πρότασης 3, Θεώρημα β, σελ. 250



Σχήμα α.ς

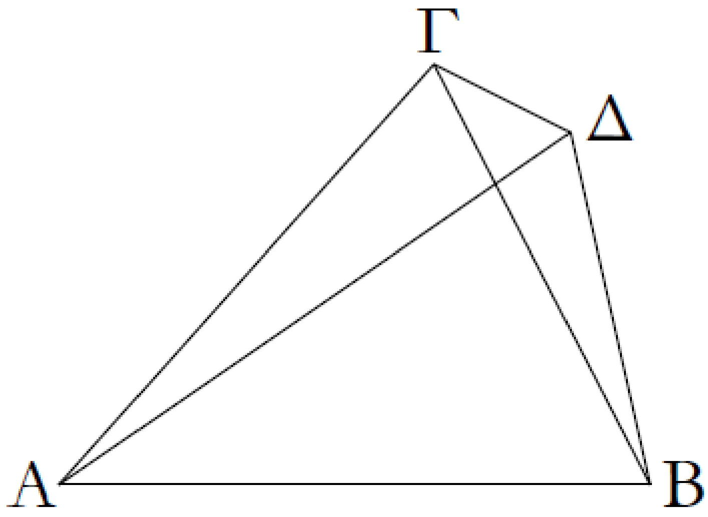
Η πρόταση αυτή αποδεικνύει ότι δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες ίσες και την κοινή πλευρά ίση, είναι ίσα, δηλαδή ταυτίζονται. Είναι η αντίστροφη της πρόταση ε. Είναι η πρώτη απόδειξη με άτοπο στα στοιχεία. Χρησιμοποιεί την πρόταση α.γ: *ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ*. Το αίτημα α: *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ*. Επίσης, χρησιμοποιεί την πρόταση α.δ: *᾽Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται*. Και το πρώτο άτοπο στα στοιχεία, δηλαδή η κοινή έννοια ε: *τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον*.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι θεωρείται δεδομένο χωρίς απόδειξη, ότι αν δύο “ποσότητες” δεν είναι άνισες, τότε είναι ίσες. Είναι μια μορφή δηλαδή, της Αρχής του αποκλειόμενου μέσου ή Αρχής της του τρίτου αποκλείσεως (Law of excluded middle or Principle of excluded middle).

Η πρόταση α.ς χρησιμοποιείται συνολικά 7 φορές σε 4 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση β.δ, 2 φορές στην πρόταση β.θ, 2 φορές στην πρόταση β.ι, 2 φορές στην πρόταση γ.κε)

7) Πρόταση α.ζ (Θεώρημα)

’Επὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Σχήμα α.ζ

Αυτή η ωραία πρόταση αποδεικνύει ότι δεν μπορούν να κατασκευαστούν δύο τρίγωνα άνισα που έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες. Δηλαδή έμμεσα αποδεινύει ότι δύο τρίγωνα που έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες είναι ίσα, μαζί με την πρόταση α.η. Επίσης εμφανίζεται ο διορισμός. Χρησιμοποιεί την πρόταση α.ε χωρίς να χρησιμοποιεί την πρόταση α.ς, δηλαδή μπορεί να έμπαινε και πριν την α.ς. Πιο συγκεκριμένα, στο σημείο: *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ*, χρησιμοποιεί το αίτημα α. Επίσης χρησιμοποιεί δύο φορές την πρόταση α.ε: 1) *’Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ*, 2) *πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ*. Ακόμα, χρησιμοποεί δύο φορές την κοινή έννοια ε: 1) *μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ·*, 2) *πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστί τῆς ὑπὸ*

ΔΓΒ.

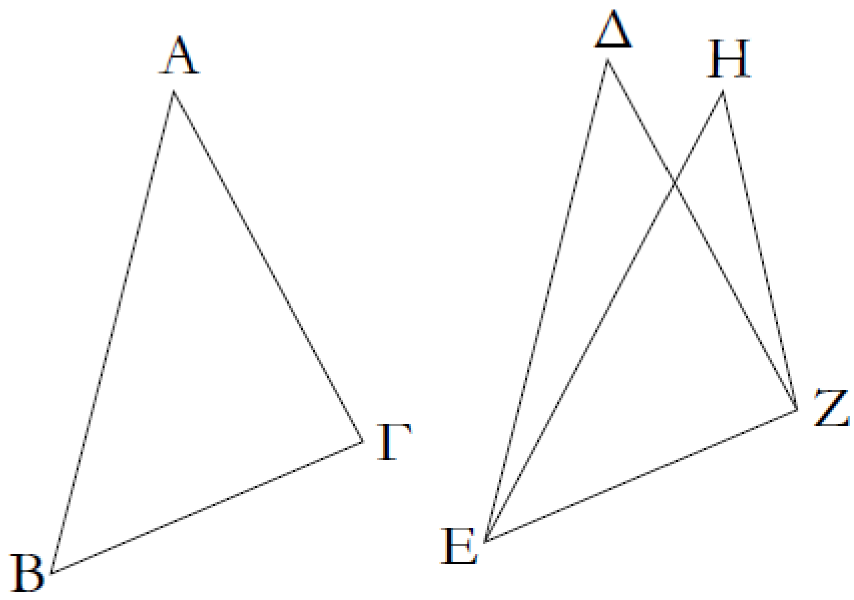
Ο Πρόκλος[17] δίνει μια συγκεκριμένη χρησιμότητα της παραπάνω πρότασης. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι οι αστρονόμοι την χρησιμοποίησαν για να αποδείξουν ότι τρεις διαδοχικές εκλείψεις δεν μπορούν να συμβούν με την ίδια χρονική διαφορά, δηλαδή ότι η τρίτη δεν μπορεί να ακολουθήσει την δεύτερη στο ίδιο χρονικό διάστημα που η δεύτερη ακολούθησε την πρώτη. Και μάλιστα υποστηρίζεται ότι ο Ευκλείδης είχε μια βλέψη για αστρονομική εφαρμογή αυτής της πρότασης. Το γεγονός ότι η πρόταση α.ζ χρησιμοποιείται για την απόδειξη μόνο μιας άλλης πρότασης (στα βιβλία α,β,γ), είναι μια βάση για την πιθανή αστρονομική ιδέα του Ευκλείδη.

Η πρόταση α.ζ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση α.η).

<u>8) Πρόταση α.η (Θεώρημα)</u>

'Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

[17] Πρόκλος, σελ. 268 – 269



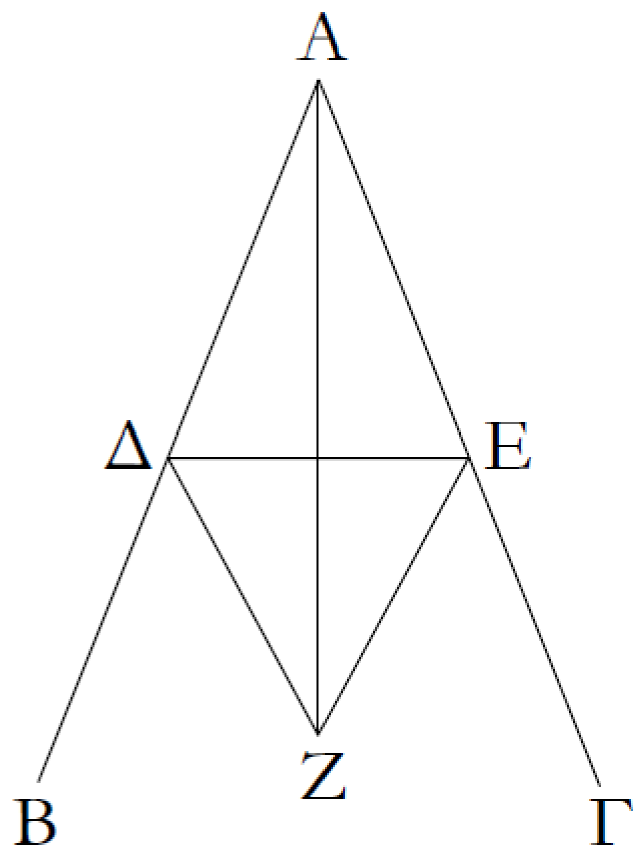
Σχήμα α.η

Αυτή η πρόταση αποδεικνύει ότι δύο τρίγωνα που έχουν τις τρεις πλευρές ίσες έχουν και τις γωνίες ίσες, δηλαδή είναι ίσα. Χρησιμοποιείται η μέθοδος εφαρμογής και η εις άτοπον απαγωγή. Επίσης, αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Ευκλείδης ποτέ δεν αναφέρει τρεις πλευρές, αλλά δύο πλευρές και μία βάση. Αυτό μας δείχνει μια ομορφιά που είχε στην αντίληψή του για τη γεωμετρία. Η βάση ίσως είναι στη έδαφος της Γης και οι πλευρές στον αέρα. Στην απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιεί μόνο την πρόταση α.ζ και την κοινή έννοια δ: α.ζ: *συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ·*, κοινή έννοια δ: *ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.*

Η πρόταση α.η χρησιμοποιείται συνολικά 10 φορές σε 10 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.θ, 1 φορά στην πρόταση α.ια, 1 φορά στην πρόταση α.ιβ, 1 φορά στην πρόταση α.κγ, 1 φορά στην πρόταση α.μη, 1 φορά στην πρόταση γ.α, 1 φορά στην πρόταση γ.γ, 1 φορά στην πρόταση γ.θ, 1 φορά στην πρόταση γ.κη, 1 φορά στην πρόταση γ.λζ).

9) Πρόταση α.θ (Πρόβλημα)

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.



Σχήμα α.θ

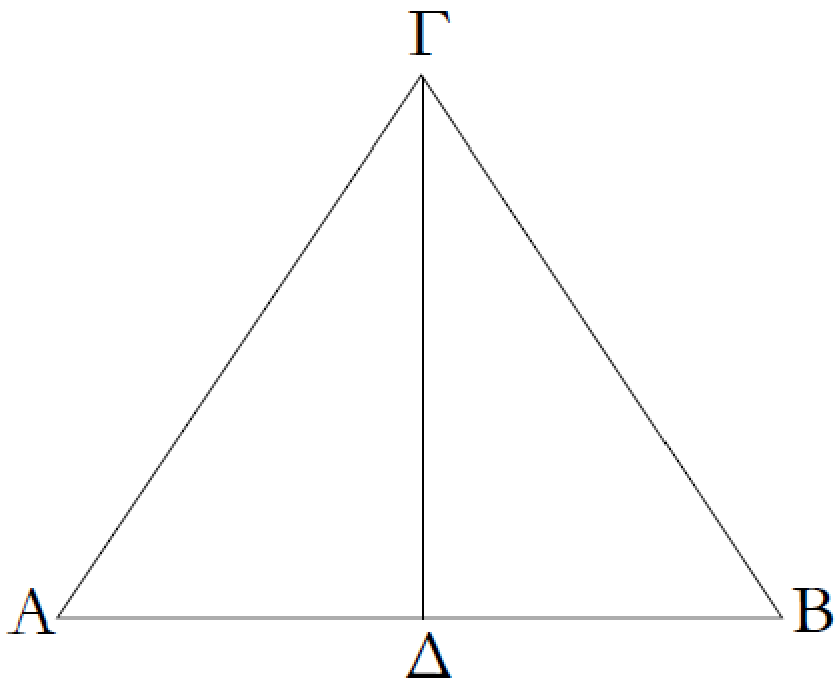
Χρησιμοποιούνται οι προτάσεις α.γ, α.α και α.η, ως εξής (αντίστοιχα): α.γ) *Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ*, α.α) *καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ*, α.η) *'Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν*. Επίσης στη φράση: καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, χρησιμοποιείται το αίτημα α.

Σε αυτήν την πρόταση, δίνεται η ευκαιρία στον Πρόκλο[18] να δώσει έμφαση στο γεγονός ότι η δοσμένη γωνία πρέπει να είναι ευθύγραμμη.[19]

Η πρόταση α.θ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση α.ι).

10) Πρόταση α.ι (Πρόβλημα)

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



Σχήμα α.ι

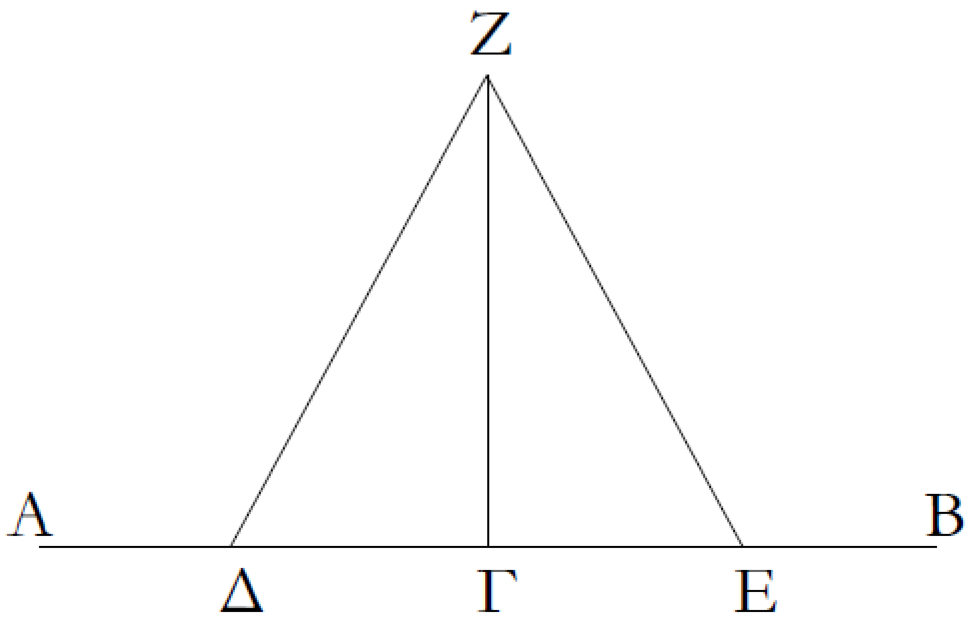
Χρησιμοποιείται η πρόταση α.α στο σημείο: *Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ*, και η α.θ: *καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ*. Τέλος η πρόταση α.δ: *'Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν*.

[18] Πρόκλος σελ. 271
[19] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 265

Η πρόταση α.ι χρησιμοποιείται συνολικά 13 φορές σε 10 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.ιβ, 1 φορά στην πρόταση 1.ις, 1 φορά στην πρόταση α.μβ, 1 φορά στην πρόταση β.ια,1 φορά στην πρόταση β.ιδ, 2 φορές στην πρόταση γ.α, 1 φορά στην πρόταση γ.θ, 1 φορά στην πρόταση γ.κε, 1 φορά στην πρόταση γ.λ, 3 φορές στην πρόταση γ.λγ).

11) Πρόταση α.ια (Πρόβλημα)

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



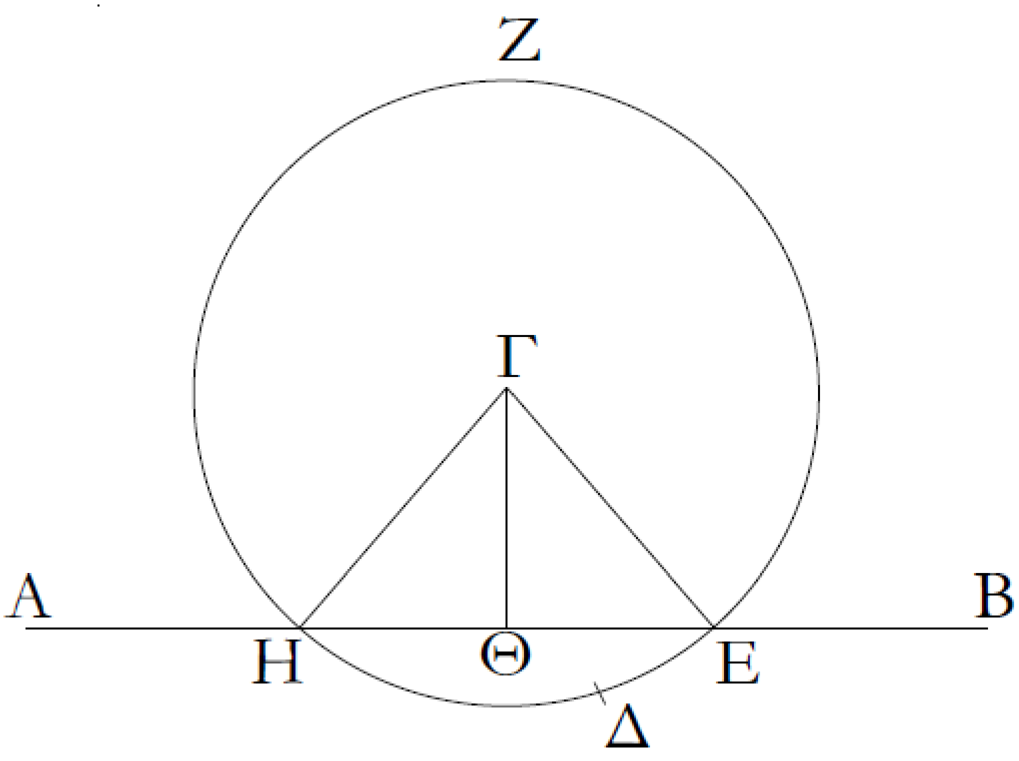
Σχήμα α.ια

Χρησιμοποιείται η πρόταση α.γ: *Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ*, η α.α: *καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, το αίτημα α: καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ*. Επίσης, η πρόταση α.η: *Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν*. Τέλος χρησιμοποιείται ο όρος ι, στο εξής σημείο: *καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς* *ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.*

Η πρόταση α.ια χρησιμοποιείται συνολικά 18 φορές σε 15 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.ιγ, 1 φορά στην πρόταση α.μς, 1 φορά στην πρόταση α.μη, 1 φορά στην πρόταση β.α, 1 φορά στην πρόταση β.θ, 1 φορά στην πρόταση β.ι, 1 φορά στην πρόταση γ.α, 1 φορά στην πρόταση γ.ι, 1 φορά στην πρόταση γ.ις, 1 φορά στην πρόταση γ.ιζ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιθ, 1 φορά στην πρόταση γ.κε, 1 φορά στην πρόταση γ.λ, 1 φορά στην πρόταση γ.λβ, 4 φορές στην πρόταση γ.λγ).

12) Πρόταση α.ιβ (Πρόβλημα)

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



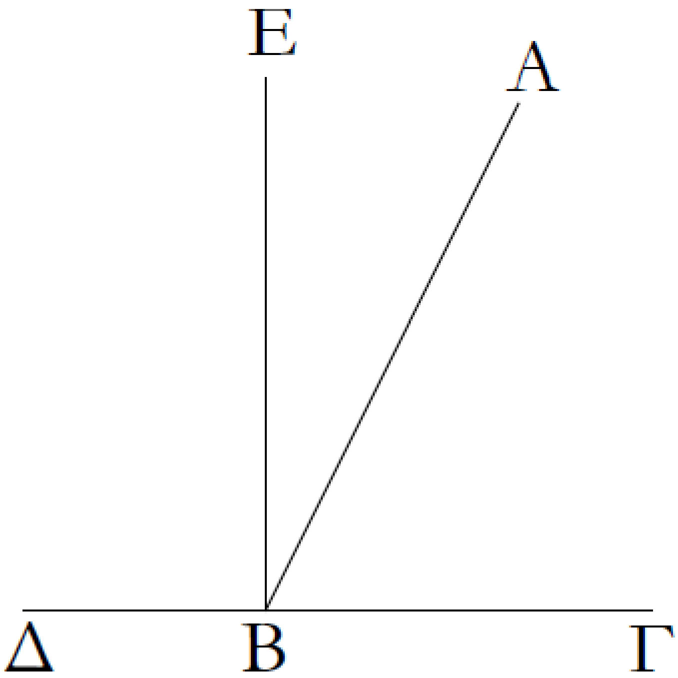
Σχήμα α.ιβ

Πρώτα χρησιμοποιείται ο αίτημα γ: *Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ*, η πρόταση α.ι: *καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ.* Η πρόταση α.η: *Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστιν ἴση*. Ο όρος α,ι: καί εἰσιν ἐφεξῆς. *ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν*.
Σύμφωνα με τον Πρόκλο, αυτό το πρόβλημα ερευνήθηκε πρώτα από τον Οινοπίδη τον Χίο, περίπου τον $5^{ο}$ αιώνα π.Χ., ο οποίος πίστευε ότι είναι χρήσιμο για την αστρονομία.

Η πρόταση α.ιβ χρησιμοποιείται συνολικά 8 φορές σε 8 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση β.ιβ, 1 φορά στην πρόταση β.ιγ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιδ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιε, 1 φορά στην πρόταση γ.ις, 1 φορά στην πρόταση γ.ιη, 1 φορά στην πρόταση γ.λε, 1 φορά στην πρόταση γ.λς)

<u>13) Πρόταση α.ιγ (Θεώρημα)</u>

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.



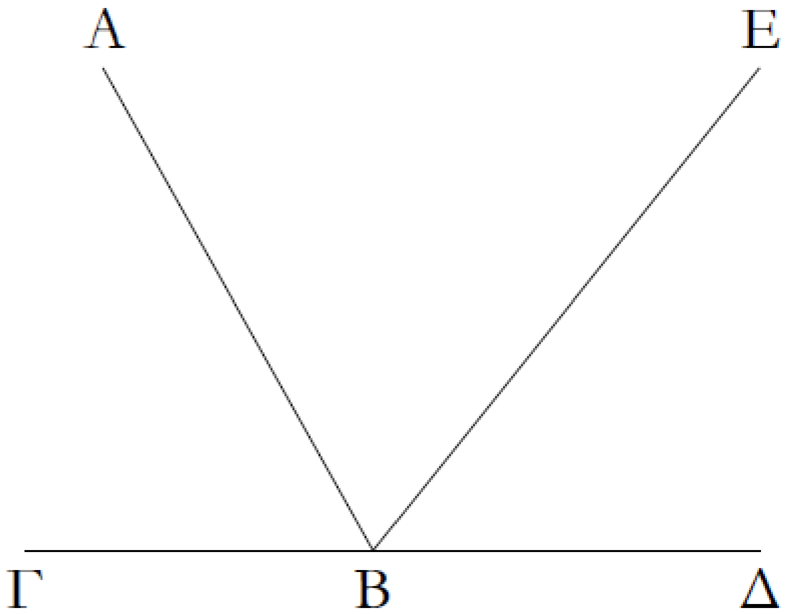
Σχήμα α.ιγ

Εδώ αποδεικνύεται ότι οι δύο γωνίες μιας ευθείας ή θα είναι και οι δύο ορθές ή θα έχουν άθροισμα δύο ορθών. Δηλαδή ο Ευκλείδης χωρίζει τις δύο ορθές από τη γενικότερη έννοια του αθροίσματος δύο ορθών. Ο όρος ι χρησιμοποιείται στο εξής σημείο: *Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν*. Η πρόταση α.ια: *εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ*. Η κοινή έννοια β δύο φορές: 1) *καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν*. 2) *πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν*. Η κοινή έννοια α: *ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν*.

Η πρόταση α.ιγ χρησιμοποιείται συνολικά 9 φορές σε 7 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.ιδ, 2 φορές στην πρόταση α.ιε, 1 φορά στην πρόταση α.ιζ, 1 φορά στην πρόταση α.κη, 2 φορές στην πρόταση α.κθ, 1 φορά στην πρόταση α.λβ, 1 φορά στην πρόταση γ.λβ).

14) Πρόταση α.ιδ (Θεώρημα)

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Σχήμα α.ιδ

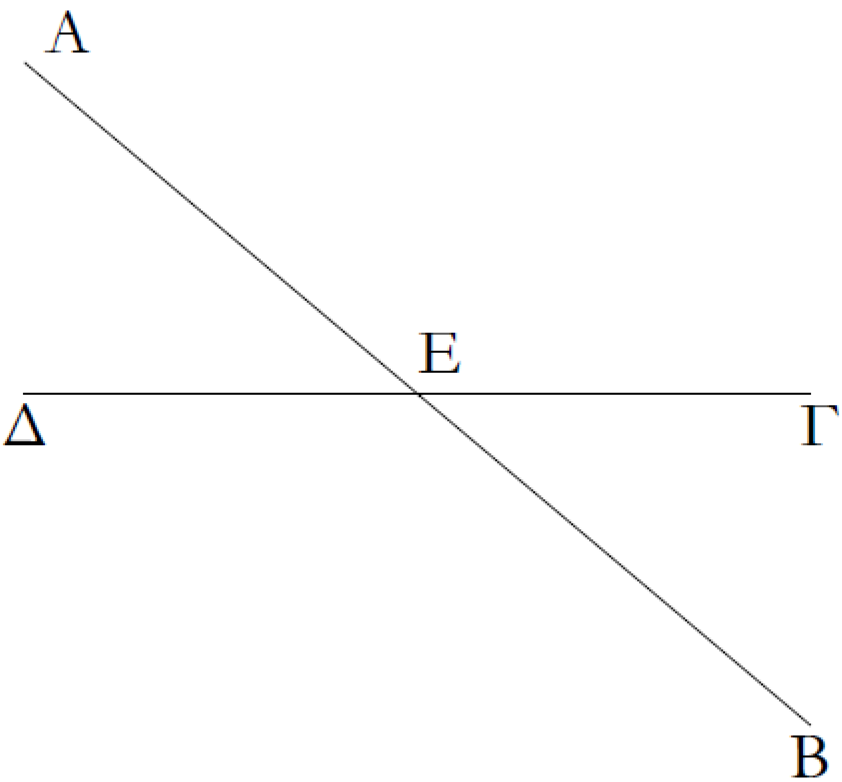
Σε αυτή την πρόταση αποδεικνύεται το αντίστροφο της α.ιγ. Δηλαδή αν σε μια ευθεία σχηματιστούν δύο γωνίες που έχουν άθροισμα δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες που τις δημιουργούν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Βέβαια θα ήταν καλύτερα στη δημοτική Ελληνική, την πρώτη περίπτωση να την πούμε ευθύγραμμο τμήμα και όχι ευθεία. Εκτός από το ότι χρησιμοποιείται η κοινή έννοια α: *αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν*, και η κοινή έννοια γ: *κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση*, η απόδειξη γίνεται μέσω του άτοπου -

ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, με βάση την πρόταση α.ιγ: *’Επεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ’ εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.*

Η πρόταση α.ιδ χρησιμοποιείται συνολικά 3 φορές σε 2 προτάσεις (2 φορές στην πρόταση α.με, 1 φορά στην πρόταση α.μζ)

<u>15) Πρόταση α.ιε (Θεώρημα)</u>

’Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.



Σχήμα α.ιε

Εδώ είναι άλλη μια πρόταση όπου ο Πρόκλος[20] λέει ότι είναι του Θαλή του Μιλήσιου. Χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιγ δύο φορές: *’Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ’ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*, 2) *πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ’*

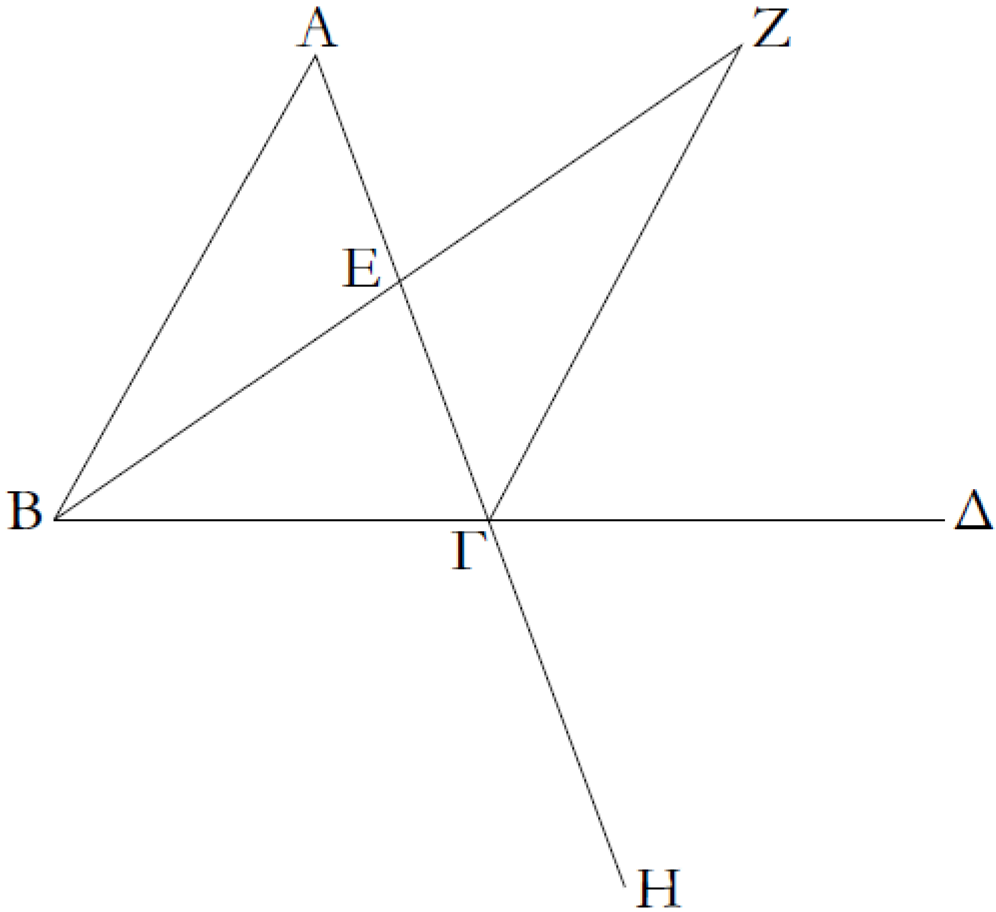
[20] Πρόκλος, σελ. 297

εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Επίσης χρησιμοποιείται η κοινή έννοια α: *αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν*. Τέλος χρησιμοποιείται η κοινή έννοια γ: *κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν*.

Η πρόταση α.ιε χρησιμοποιείται συνολικά 5 φορές σε 5 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.ις, 1 φορά στην πρόταση α.κη, 1 φορά στην πρόταση α.κθ, 1 φορά στην πρόταση α.μδ, 1 φορά στην πρόταση β.ι).

16) Πρόταση α.ις (Θεώρημα)

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.



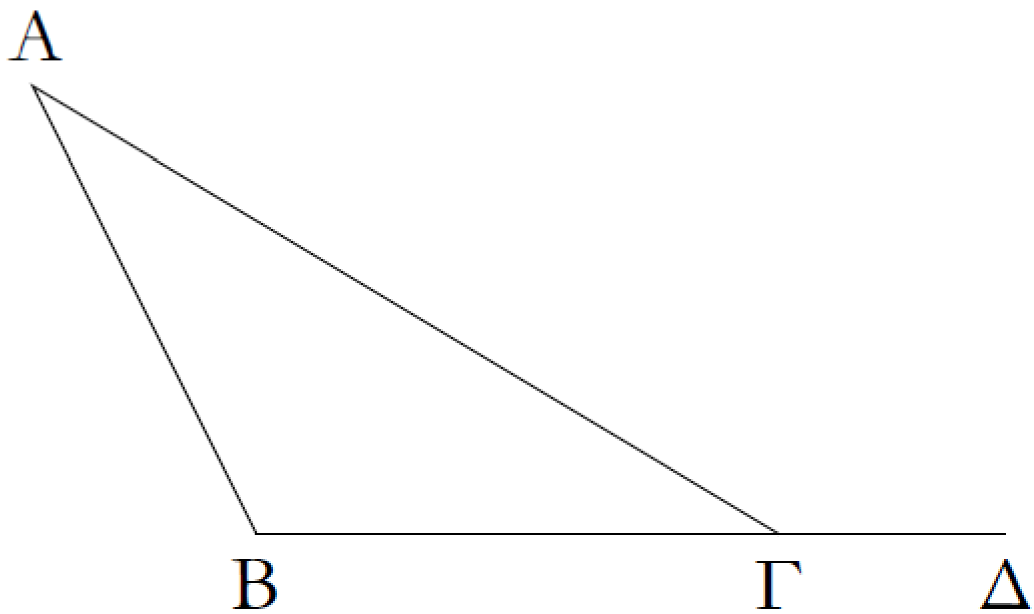
Σχήμα α.ις

Εδώ αποδεικνύεται αυτό που λέμε σήμερα ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές. Χρησιμοποιείται η πρόταση α.ι: *Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε* και η πρόταση α.γ: καὶ *κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ*, το αίτημα α: *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ*. Επίσης, η πρόταση α.ιε: *καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.δ στο εξής σημείο: *βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον*.

Η πρόταση α.ις χρησιμοποιείται συνολικά 7 φορές σε 7 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.ιζ, 1 φορά στην πρόταση α.ιη, 1 φορά στην πρόταση α.κα, 1 φορά στην πρόταση α.κς, 1 φορά στην πρόταση α.κζ, 1 φορά στην πρόταση γ.β, 1 φορά στην πρόταση γ.κγ).

<u>17) Πρόταση α.ιζ (Θεώρημα)</u>

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



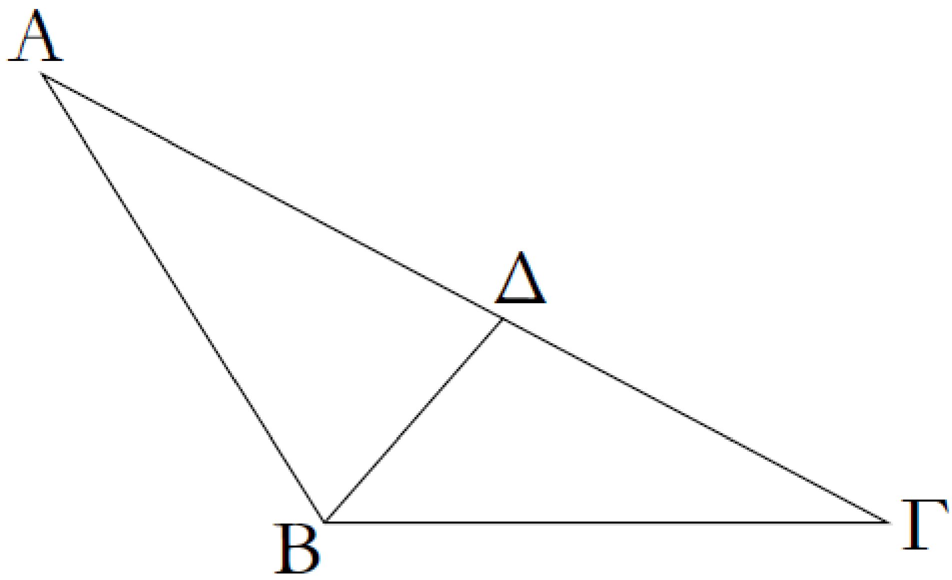
Σχήμα α.ιζ

Η πρόταση α.ιζ αποδεικνύει ότι το άθροισμα των δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι πάντα μικρότερο από δύο ορθές. Η πρόταση α.ις χρησιμοποιείται στο σημείο: *Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ*. Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιγ στο σημείο: *ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*.

Η πρόταση α.ιζ χρησιμοποιείται συνολικά 3 φορές σε 3 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.ις, 1 φορά στην πρόταση γ.ιη, 1 φορά στην πρόταση γ.λα)

<u>18) Πρόταση α.ιη (Θεώρημα)</u>

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.



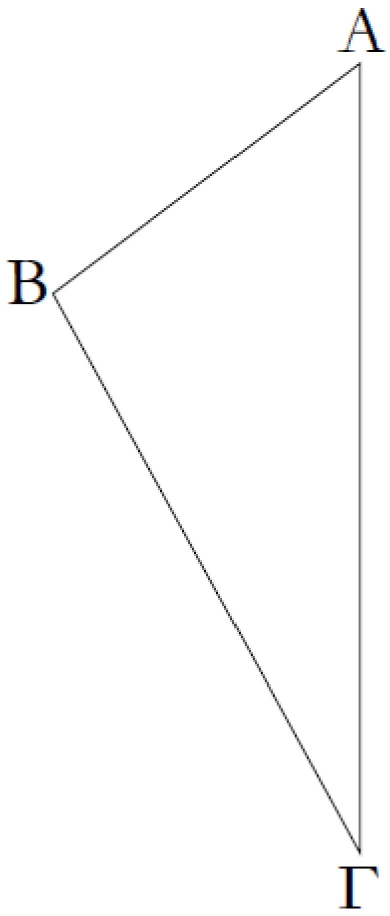
Σχήμα α.ιη

Χρησιμοποιείται η πρόταση α.γ: *'Επεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ*, και το αίτημα α: *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ*. Η πρόταση α.ις: *Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ε: *ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση*.

Η πρόταση α.ιη χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση α.ιθ).

19) Πρόταση α.ιθ (Θεώρημα)

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.



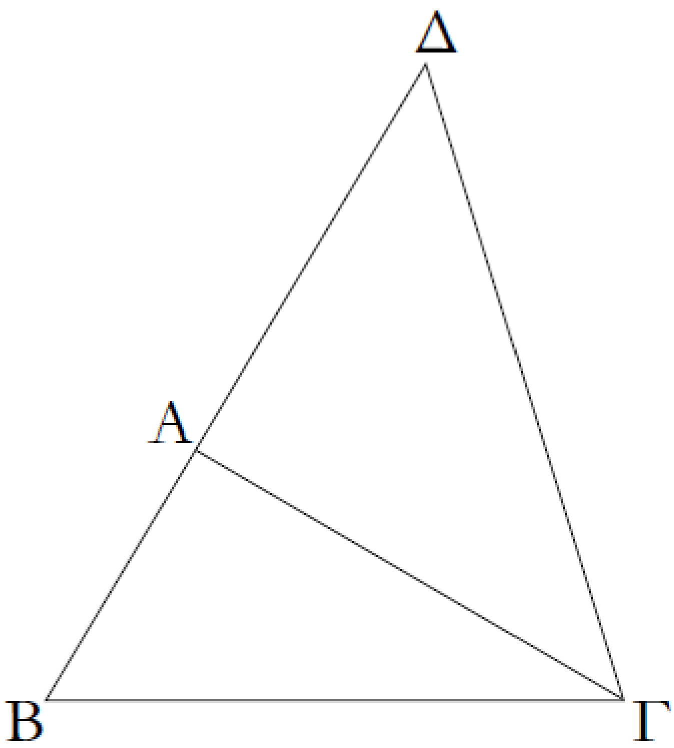
Σχήμα α.ιθ

Η πρόταση αυτή συμπληρώνει την α.ιη. Χρησιμοποιείται η πρόταση α.ε: *Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ*. Και επίσης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιη: *οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ*.

Η πρόταση α.ιθ χρησιμοποιείται συνολικά 5 φορές σε 5 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.κ, 1 φορά στην πρόταση α.κδ, 1 φορά στην πρόταση γ.β, 1 φορά στην πρόταση γ.ις, 1 φορά στην πρόταση γ.ιη).

20) Πρόταση α.κ (Θεώρημα)

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



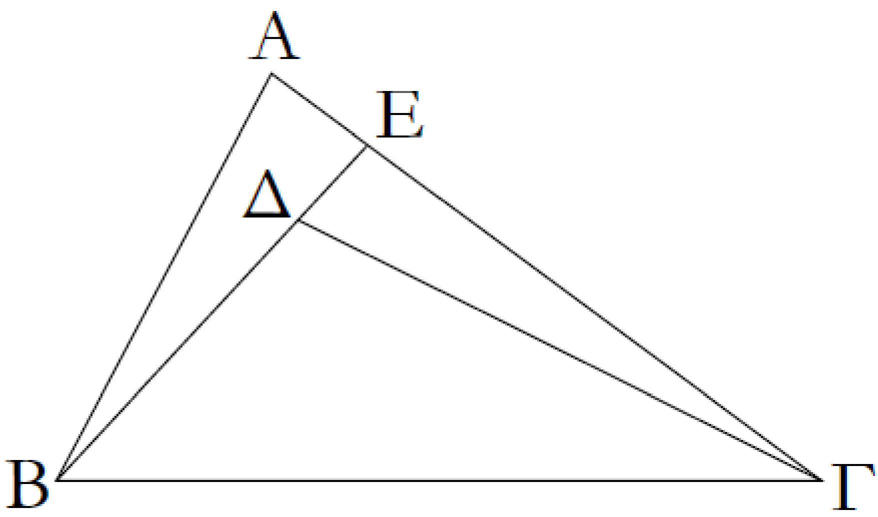
Σχήμα α.κ

Χρησιμοποιείται η πρόταση: α.γ: *καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ*. Η πρόταση α.ε: *'Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ*. Τέλος, ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την πρόταση α.ιθ: *ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει*.

Η πρόταση α.κ χρησιμοποιείται συνολικά 9 φορές σε 7 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.κα, 1 φορά στην πρόταση α.κβ, 2 φορές στην πρόταση γ.ζ, 2 φορές στην πρόταση γ.η, 1 φορά στην πρόταση γ.ια, 1 φορά στην πρόταση γ.ιβ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιε).

21) Πρόταση α.κα (Θεώρημα)

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.



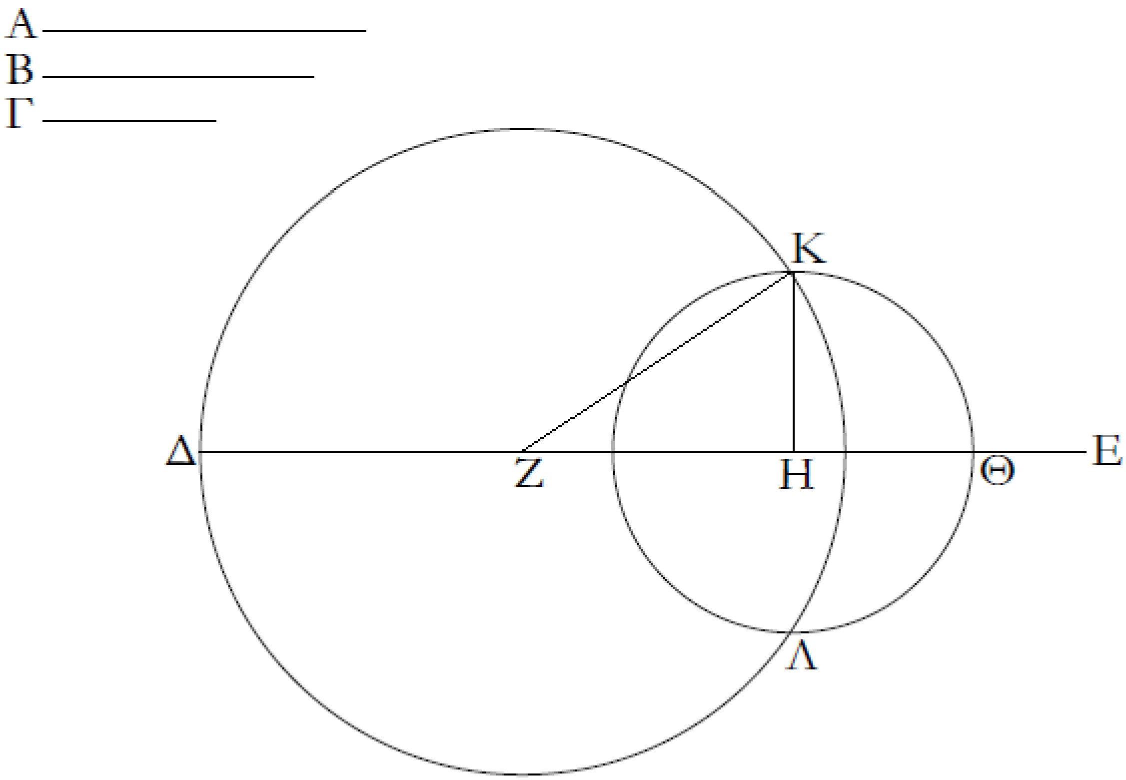
Σχήμα α.κα

Χρησιμοποιείται η πρόταση α.κ: *Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν*. Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση α.ις: *Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ*.

Η πρόταση α.κα χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.η)

22) Πρόταση α.κβ (Πρόβλημα)

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας].



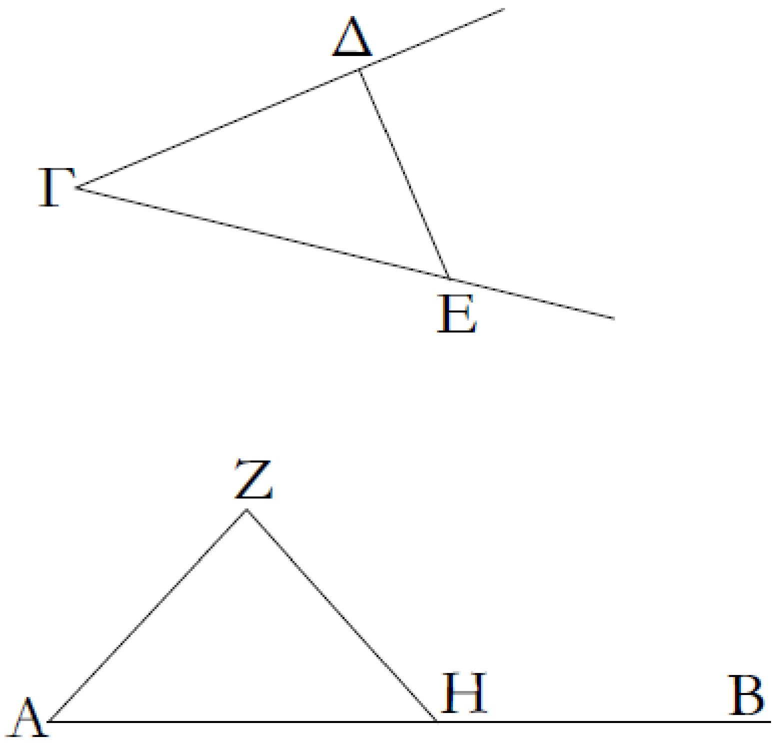
Σχήμα α.κβ

Αυτή είναι πραγματικά πολύ ωραία πρόταση. Κατασκευάζεται τρίγωνο με δοσμένα τα μήκη των τριών πλευρών, αρκεί να καλύπτεται η εξής υπόθεση: Το άθροισμα δύο οποιονδήποτε πλευρών είναι μεγαλύτερο από την άλλη - *δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας* (πρόταση α.κ). Επίσης για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.γ: *καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ.*

Η πρόταση α.κβ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.κγ).

23) Πρόταση α.κγ (Πρόβλημα)

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Σχήμα α.κγ

Χρησιμοποιείται η πρόταση α.κβ: *καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.η: *’Επεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστιν ἴση*.

Ο Πρόκλος αναφέρει ότι σύμφωνα με τον Εύδημο,[21] αυτό το πρόβλημα διατυπώθηκε μάλλον πρώτα από τον Οινοπίδη και μάλιστα δικιά του είναι και η ιδέα της κατασκευής που παρουσιάζει ο Ευκλείδης.

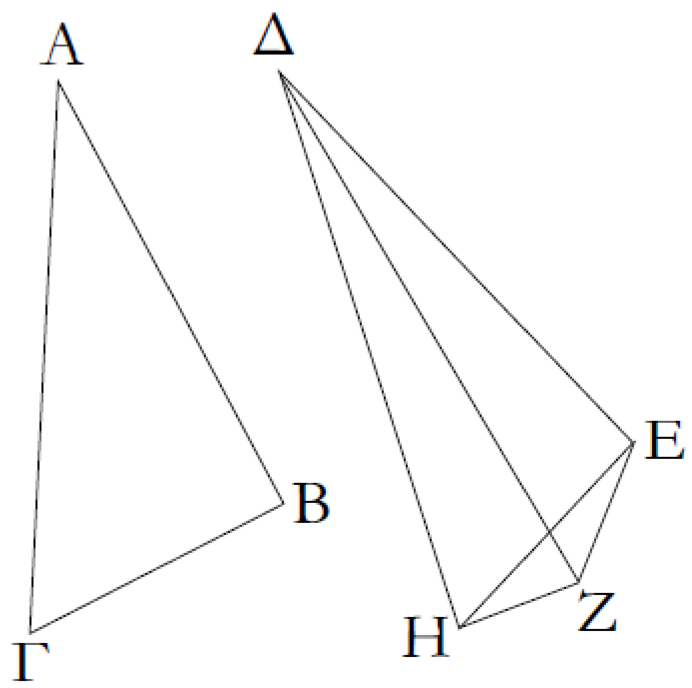
Η πρόταση α.κγ χρησιμοποιείται συνολικά 12 φορές σε 9 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.κδ, 1 φορά στην α.λα, 1 φορά στην πρόταση α.μβ, 1 φορά στην πρόταση γ.ζ, 1 φορά στην πρόταση γ.η, 2 φορές στην πρόταση γ.κε, 1 φορά στην πρόταση γ.κζ, 3 φορές στην πρόταση γ.λγ, 1 φορά στην πρόταση

[21] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 295 – 296

γ.λδ)

24) Πρόταση α.κδ (Θεώρημα)

᾿Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.



Σχήμα α.κδ

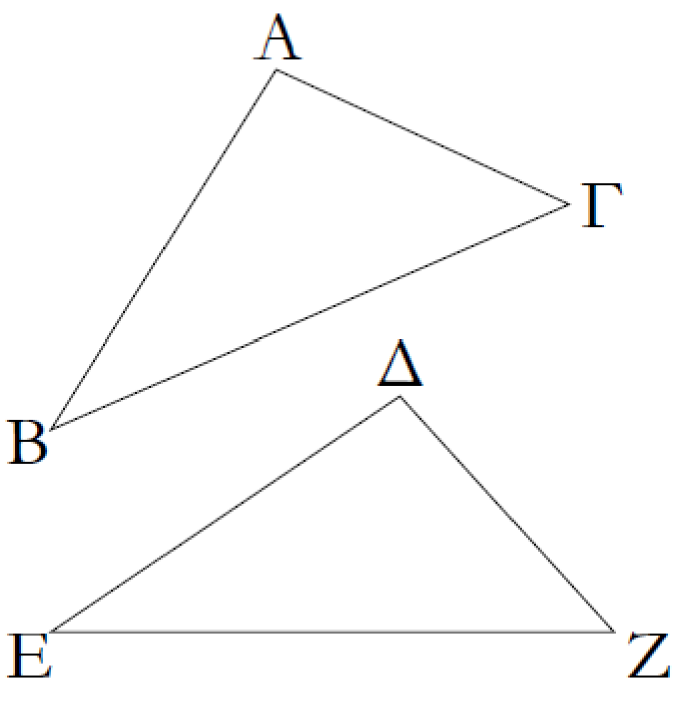
Αυτή η πρόταση μας λέει ότι σε δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες, αν η εσωτερική γωνία του ενός είναι μεγαλύτερη από του άλλου, τότε το ίδιο ισχύει και τις αντίστοιχες βάσεις (τρίτες πλευρές). Πρόταση α.κγ: *᾿Επεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ*. Η πρόταση α.γ: καὶ *κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ*. Το αίτημα α: *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ*. Πρόταση α.δ: *καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση*. Πρόταση α.ε: *πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ*. Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιθ: *ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει*.

Και σε αυτήν την πρόταση ο Πρόκλος[22] δίνει άλλες δύο περιπτώσεις (τις οποίες και αποδεικνύει), όπου στη μία το Ζ βρίσκεται πάνω στην ΗΕ και στην άλλη το Ζ βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου. Προφανώς, αυτές οι δύο περιπτώσεις είναι πολύ απλούστερες από αυτή του Ευκλείδη.[23]

Η πρόταση α.κδ χρησιμοποιείται συνολικά 4 φορές σε 4 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.κε, 1 φορά στην πρόταση γ.ζ, 1 φορά στην πρόταση γ.η, 1 φορά στην πρόταση γ.ιε).

25) Πρόταση α.κε (Θεώρημα)

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



Σχήμα α.κε

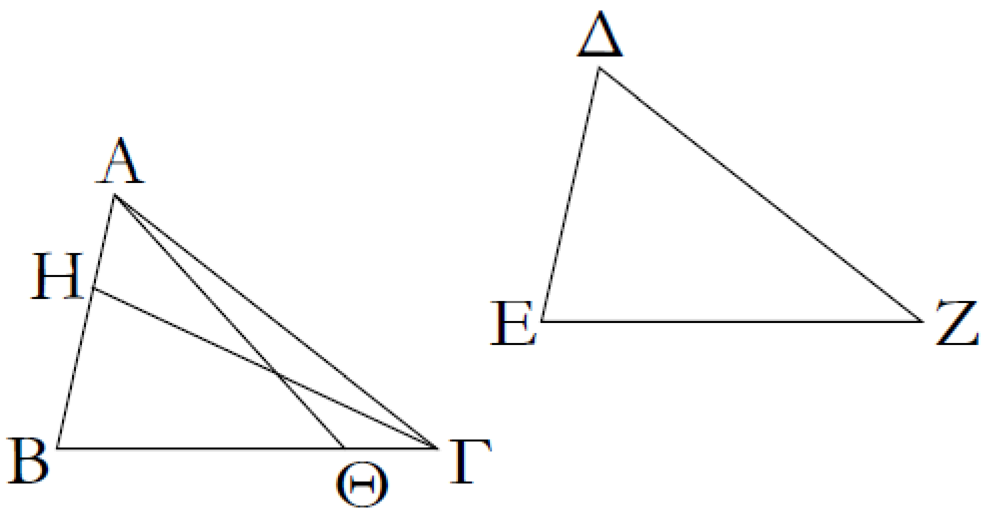
[22] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 297
[23] Πρόκλος, σελ. 339

Αυτή η πρόταση συμπληρώνει την α.κδ με το αντίστροφο της. Χρησιμοποιεί την πρόταση α.δ: *ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ* και όπως είναι αναμενόμενο χρησιμοποιεί και την πρόταση α.κδ: *οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ.*

Η πρόταση α.κε δεν χρησιμοποιείται πουθενά αλλού στα βιβλία α,β,γ.

26) Πρόταση α.κς (Θεώρημα)

'Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.



Σχήμα α.κς

Σε αυτή την πρόταση αποδεικνύεται ότι δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες ίσες και μία πλευρά (αντίστοιχη) ίση, είναι ίσα (ταυτίζονται). Χρησιμοποιείται η πρόταση α.γ, 2 φορές: 1) *καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ*, 2) *καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ*. Η πρόταση α.δ, 4 φορές: 1) *δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΗΒΓ* *τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ*, 2) *δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν*, 3) *δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκαρέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ*, 4) *δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπὴ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση*. Τέλος, χρησιμοποιείται μία φορά η πρόταση α.ις: *ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστιν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον*.

Ο Πρόκλος έκανε την ακόλουθη ενδιαφέρουσα σημείωση[24]: Ο Εύδημος στη γεωμετρική ιστορία που έγραψε αποδίδει αυτό το θεώρημα στον Θαλή. Αυτό το υποστηρίζει από το γεγονός ότι η μέθοδος υπολογισμού της απόστασης των πλοίων στη θάλασσα που χρησιμοποιούσε ο Θαλής ήταν απαραίτητο να κάνει χρήση αυτού του θεωρήματος.

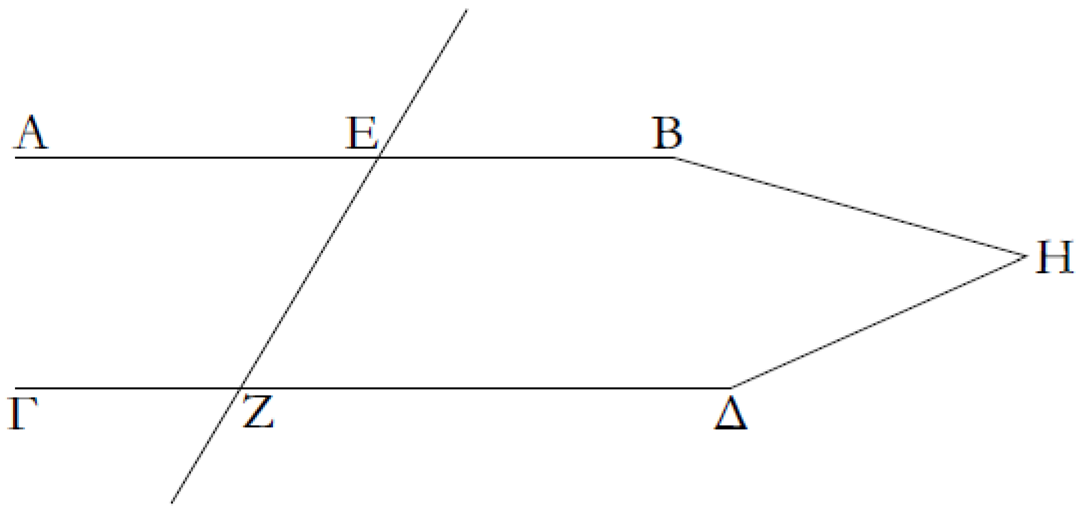
Επίσης, αυτή η πρόταση είναι η τελευταία από μια συνεχόμενη σειρά προτάσεων που θεωρούμε ότι ανήκουν στην Ιωνική παράδοση. Από αυτήν την πρόταση και μετά για όλο το υπόλοιπο βιβλίο α, οι προτάσεις περιέχουν χαρακτηριστικά και των δύο παραδόσεων.

Η πρόταση α.κς χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.λδ, 1 φορά στην πρόταση γ.γ).

[24] Πρόκλος, σελ. 352

27) Πρόταση α.κζ (Θεώρημα)

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



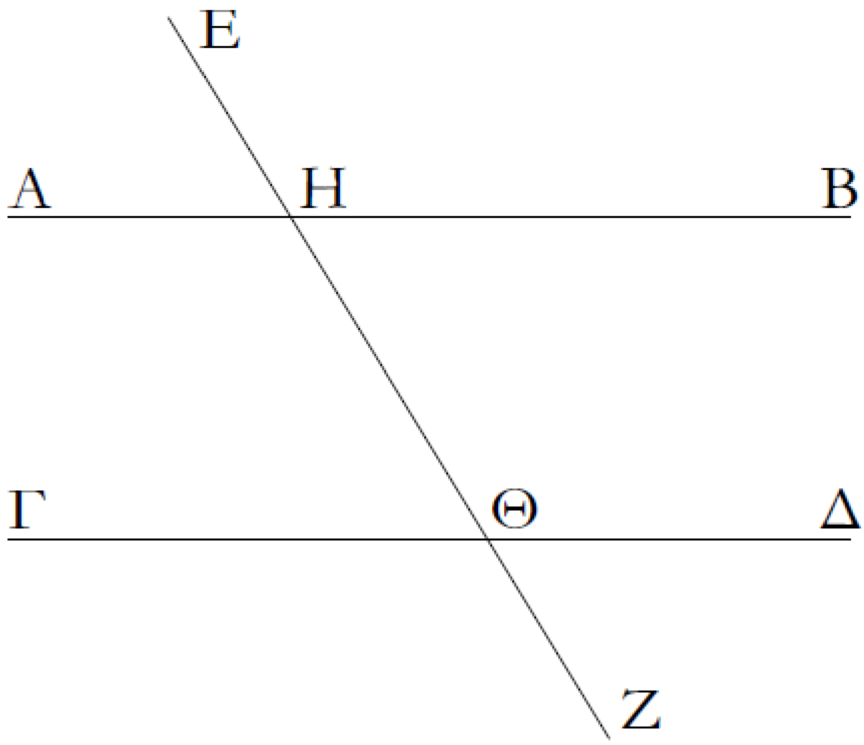
Σχήμα α.κζ

Αυτή η πρόταση αποδεικνύει ότι αν οι εναλλάξ γωνίες σε δύο ευθείες που τέμνονται από μία τρίτη είναι ίσες, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες. Το τρομερό είναι ότι αυτή η πρόταση δεν χρησιμοποιεί το ε αίτημα για να αποδειχθεί. Το ίδιο και η πρόταση α.κη. Χρησιμοποιεί τον όρο α.κγ, 2 φορές: 1) *Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ*, 2) *οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΔΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ*. Επίσης χρησιμοποιείται η πρόταση α.ις: *τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*.

Η πρόταση α.κζ χρησιμοποιείται συνολικά 5 φορές σε 4 προτάσεις (2 φορά στην πρόταση α.κη, 1 φορά στην πρόταση α.λ, 1 φορά στην πρόταση α.λα, 1 φορά στην πρόταση α.λγ).

28) Πρόταση α.κη (Θεώρημα)

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



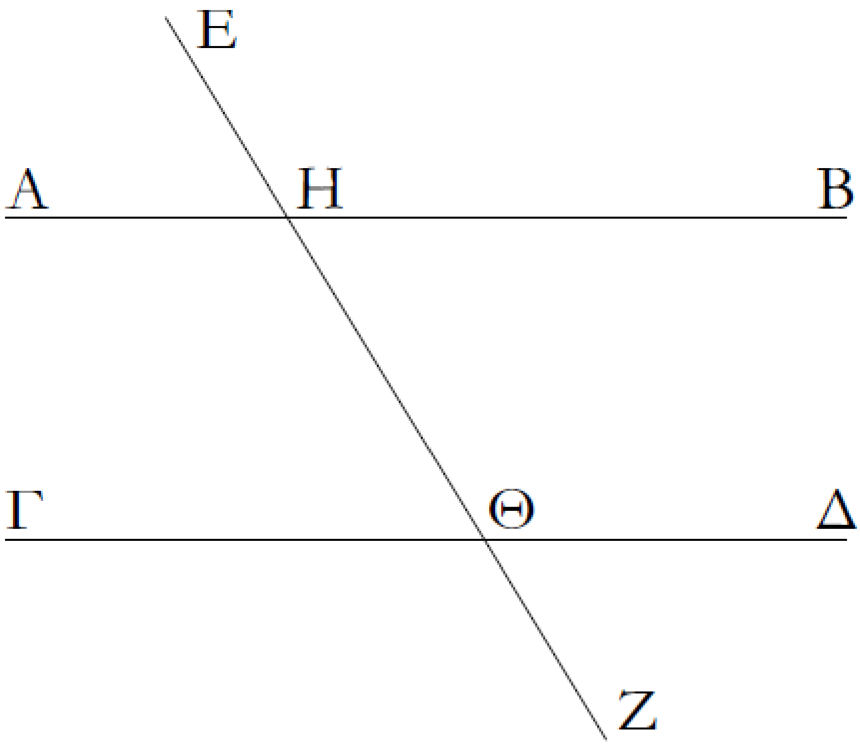
Σχήμα α.κη

Αυτή η πρόταση συμπληρώνει την προηγούμενη και επίσης για την απόδειξή της δεν χρησιμοποιεί το ε αίτημα. Αυτή η πρόταση εκτός από την πρόταση α.ιε στο σημείο: *Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση*, και την πρόταση α.ιγ στο σημείο: *Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι*, χρησιμοποιεί, όπως είναι αναμενόμενο, την πρόταση α.κζ δύο φορές: 1,2) *καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.*

Η πρόταση α.κη δεν χρησιμοποιείται πουθενά αλλού στα βιβλία α,β,γ.

29) Πρόταση α.κθ (Θεώρημα)

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



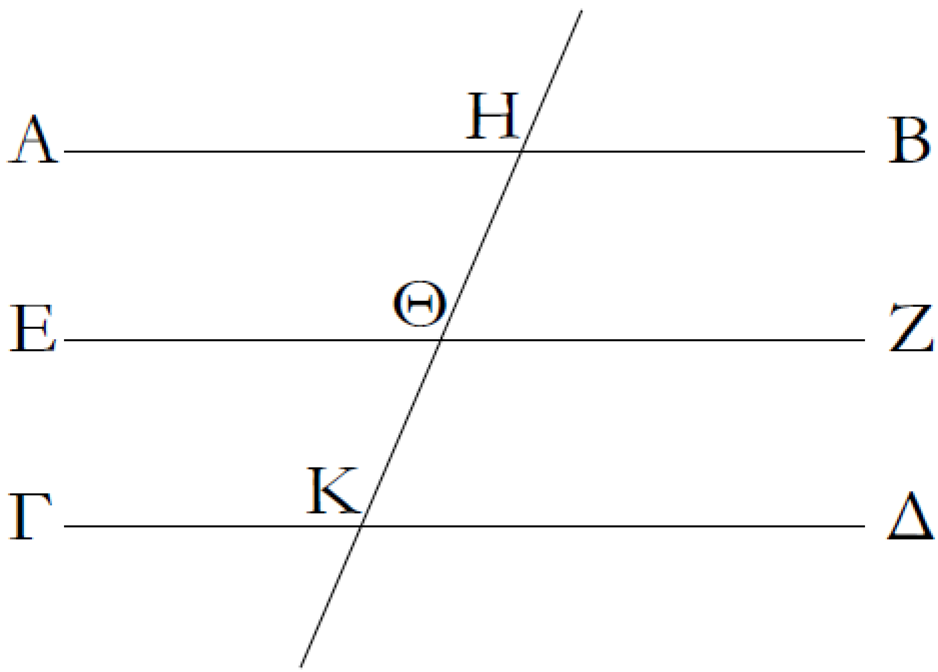
Σχήμα α.κθ

Εδώ για πρώτη φορά χρησιμοποιείται στην απόδειξη το ε αίτημα. Συγκεκριμένα ο Ευκλείδης λέει: *αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν*. Δηλαδή μέχρι και την πρόταση α.κη είναι η γενική θεωρία και για τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες. Φαίνεται καθαρά ότι ο Ευκλείδης ήθελε να αποφύγει όσο μπορούσε το ε αίτημα. Εκτός από το ε αίτημα, για την απόδειξη της α.κη πρότασης χρησιμοποιούνται επίσης: Πρόταση α.ιγ, 2 φορές: 1) ἀλλὰ *αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*, 2) *ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*. Όρος α.κγ: *αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιε: *ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστιν ἴση*.

Η πρόταση α.κθ χρησιμοποιείται συνολικά 19 φορές σε 11 προτάσεις (2 φορές στην πρόταση α.λ, 2 φορές στην πρόταση α.λβ, 1 φορά στην πρόταση α.λγ, 2 φορές στην πρόταση α.λδ, 1 φορά στην πρόταση α.λε, 1 φορά στην πρόταση α.μδ, 3 φορές στην πρόταση α.με, 1 φορά στην πρόταση α.μς, 2 φορές στην πρόταση β.δ, 2 φορές στην πρόταση β.θ, 2 φορές στην πρόταση β.ι).

30) Πρόταση α.λ (Θεώρημα)

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



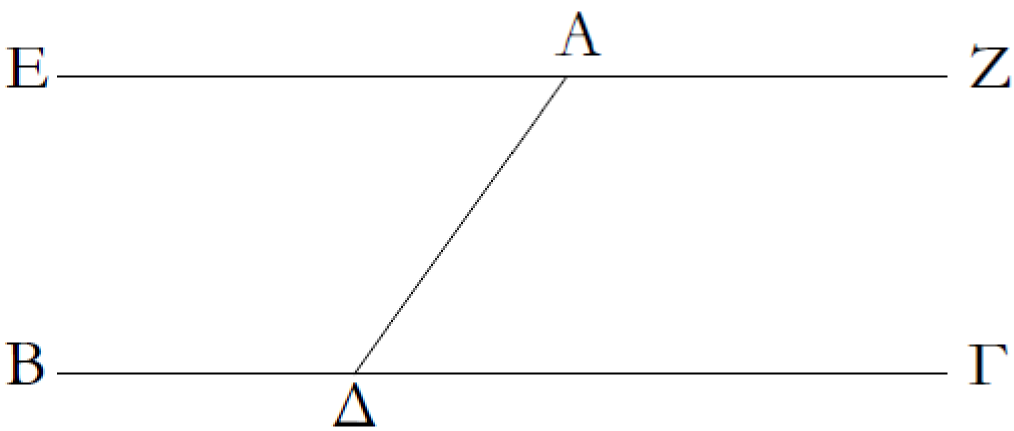
Σχήμα α.λ

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται δύο προτάσεις: α.κθ, 2 φορές: 1) *Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ*, 2) *πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ*. α.κζ: *καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ*.

Η πρόταση α.λ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση α.με).

<u>31) Πρόταση α.λα (Πρόβλημα)</u>

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Σχήμα α.λα

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.κγ: *καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ*. Επίσης χρησιμοποιείται η πρόταση α.κζ: *Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.*

Εδώ ο Πρόκλος[25] σωστά σημειώνει ότι από την πρόταση α.ιβ μόνο μία κάθετη μπορεί να υπάρξει που να να περνάει από ένα εξωτερικό σημείο μιας ευθείας, συνεπώς εδώ συνεπάγεται ότι μόνο μία παράλληλη μπορεί να υπάρξει που να διέρχεται από ένα σημείο εκτός μιας ευθείας.

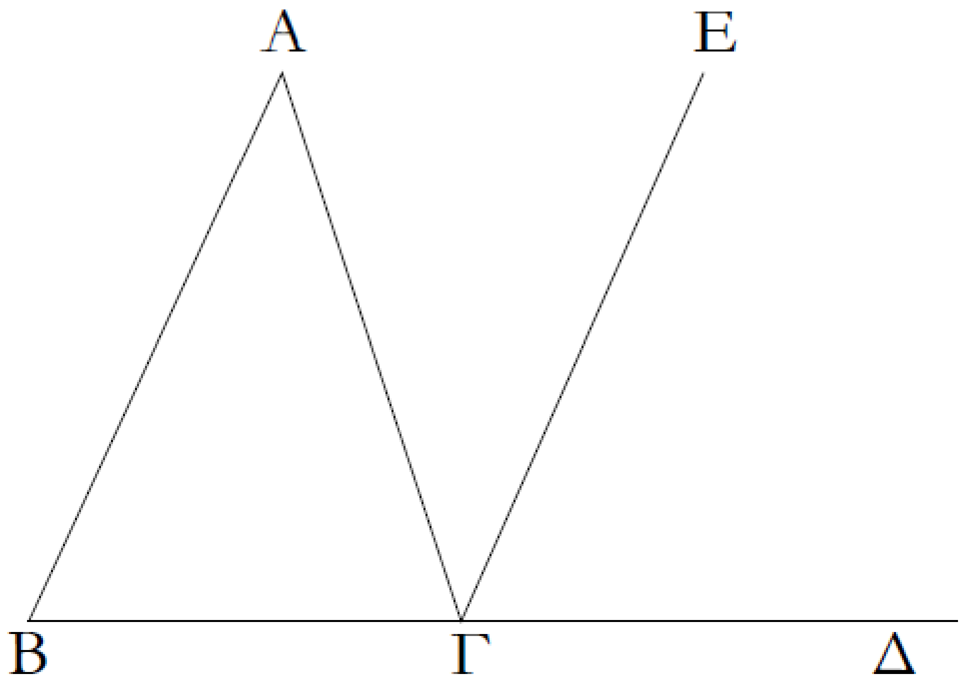
Η πρόταση α.λα χρησιμοποιείται συνολικά 30 φορές σε 17 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.λβ, 2 φορές στην πρόταση α.λζ, 2 φορές στην πρόταση α.λη, 1 φορά στην πρόταση α.λθ, 1 φορά στην πρόταση α.μ, 2 φορές στην

[25] Πρόκλος, σελ. 376

πρόταση α.μβ, 2 φορές στην πρόταση α.μδ, 2 φορές στην πρόταση α.μς, 1 φορά στην πρόταση α.μζ, 2 φορές στην πρόταση β.α, 1 φορά στην πρόταση β.β, 1 φορά στην πρόταση β.γ, 2 φορές στην πρόταση β.δ, 3 φορές στην πρόταση β.ε, 3 φορές στην πρόταση β.ς, 2 φορές στην πρόταση β.θ, 2 φορές στην πρόταση β.ι).

32) Πρόταση α.λβ (Θεώρημα)

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Σχήμα α.λβ

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι δύο ορθές και η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών. Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.λα: *Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ*. Η πρόταση α.κθ, 2 φορές: 1) *Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*. 2) *πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ* *ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιγ: *ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*.

Αυτό το θεώρημα ανακαλύφθηκε πολύ νωρίς στην Ελληνική γεωμετρία. Η ιστορία του που γνωρίζουμε σήμερα προέρχεται από τρεις πηγές[26]:

α) Ευτόχιος ο Ασκαλωνίτης
β) Πρόκλος
γ) Διογένης ο Λαέρτιος

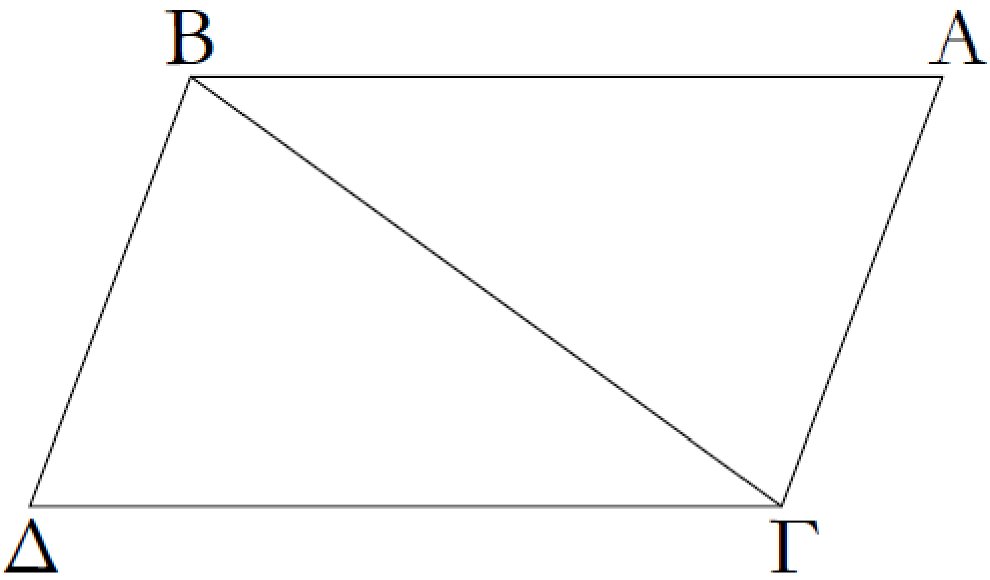
Σύμφωνα με τον Πρόκλο[27], ο Εύδημος αναφέρει ότι αυτή η ανακάλυψη του θεωρήματος έγινε από τον Πυθαγόρα, συνεπώς είναι βάσιμο να υποθέσουμε ότι αυτό το θεώρημα ανήκει στην Πυθαγόρεια παράδοση. Μάλιστα ο Πρόκλος αναφέρει και την απόδειξη του Εύδημου.

Η πρόταση α.λβ χρησιμοποιείται συνολικά 8 φορές σε 6 προτάσεις (3 φορές στην πρόταση β.θ, 1 φορά στην πρόταση β.ι, 1 φορά στην πρόταση γ.κ, 1 φορά στην πρόταση γ.κβ, 1 φορά στην πρόταση γ.λα, 1 φορά στην πρόταση γ.λβ)

33) Πρόταση α.λγ (Θεώρημα)

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

[26] Heath, 1908, Τόμος Ι, σελ 317 - 8
[27] Πρόκλος, σελ. 379



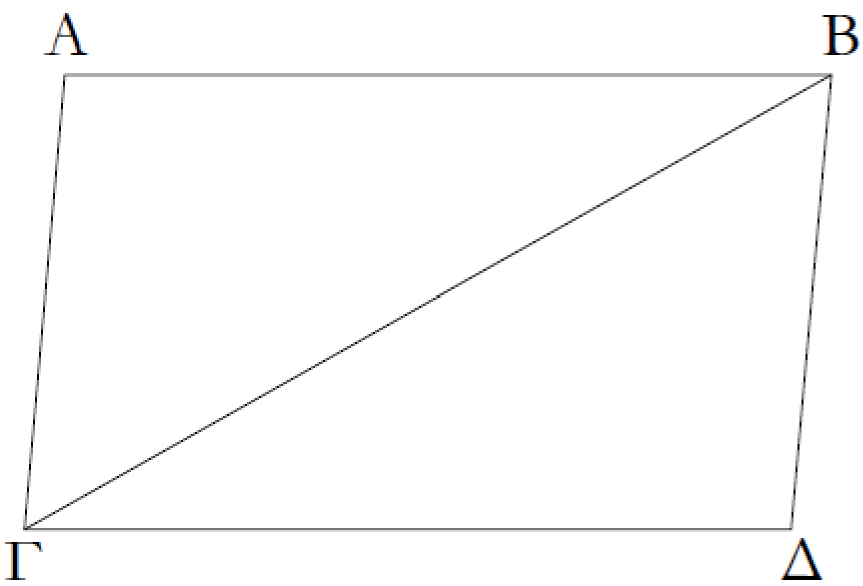
Σχήμα α.λγ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.κθ: *καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*. Η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.κζ: *καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ*.

Η πρόταση α.λγ χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.λς, 1 φορά στην πρόταση α.με).

34) Πρόταση α.λδ (Θεώρημα)

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.



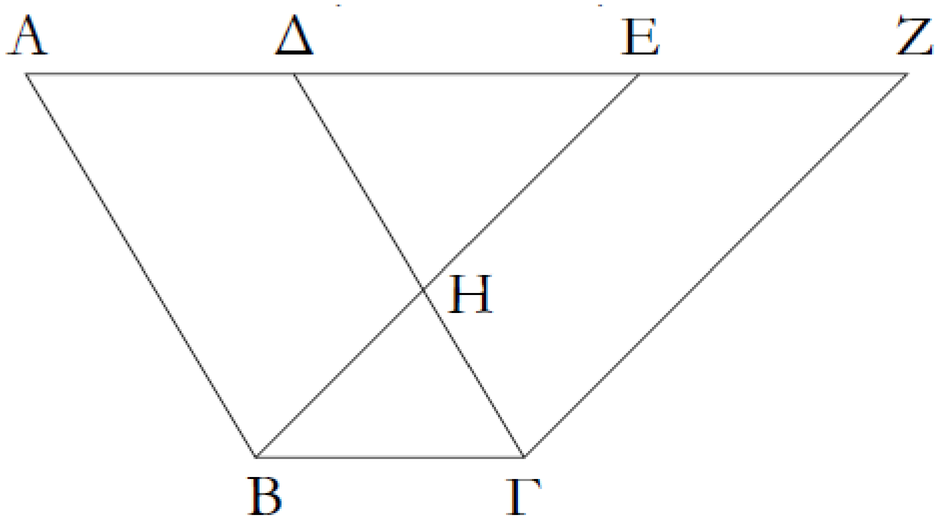
Σχήμα α.λδ

Αυτή η πρόταση αποδεικνύει ότι στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές και γωνίες είναι ίσες, ενώ η διάμετρος χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα (καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει). Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.κθ, 2 φορές: 1) *᾽Επεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*. 2) *πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*. Επίσης χρησιμοποιείται η πρόταση α.κς: *δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ*. Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση. καὶ τὸ ΑΒΓ [ἄρα] τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν*.

Η πρόταση α.λδ χρησιμοποιείται συνολικά 25 φορές σε 13 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.λε, 3 φορές στην πρόταση α.λς, 2 φορές στην πρόταση α.λζ, 2 φορές στην πρόταση α.λη, 1 φορά στην πρόταση α.μα, 3 φορές στην πρόταση α.μγ, 2 φορές στην πρόταση α.με, 2 φορές στην πρόταση α.μς, 1 φορά στην πρόταση β.α, 3 φορές στην πρόταση β.δ, 1 φορά στην πρόταση β.θ, 2 φορές στην πρόταση β.η, 2 φορές στην πρόταση β.ι).

35) Πρόταση α.λε (Θεώρημα)

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Σχήμα α.λε

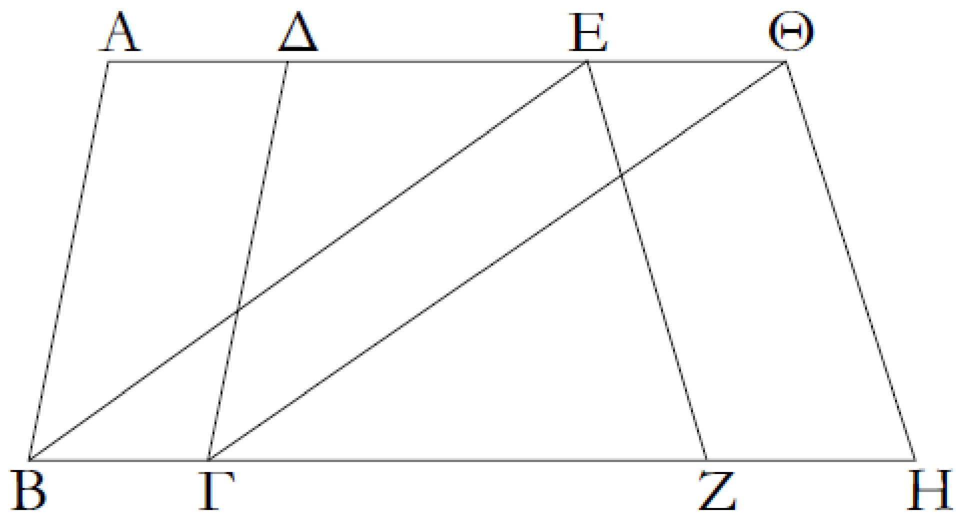
Για πρώτη φορά, στο πρώτο βιβλίο των στοιχείων, αλλά και γενικά στα στοιχεία η ισότητα σημαίνει ίσα εμβαδά και όχι ολική ταύτιση. Στην απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.λδ: *’Επεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.* Η πρόταση α.κθ: *καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστιν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός.* Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστιν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται*.

Δεδομένου ότι η λέξη «ίσον» χρησιμοποιείται για ισεμβαδικά σχήματα (όχι πλήρης ταύτιση), αυτή η πρόταση ανήκει στην πυθαγόρεια παράδοση.

Η πρόταση α.λε χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.λς, 1 φορά στην πρόταση α.λζ).

36) Πρόταση α.λς (Θεώρημα)

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



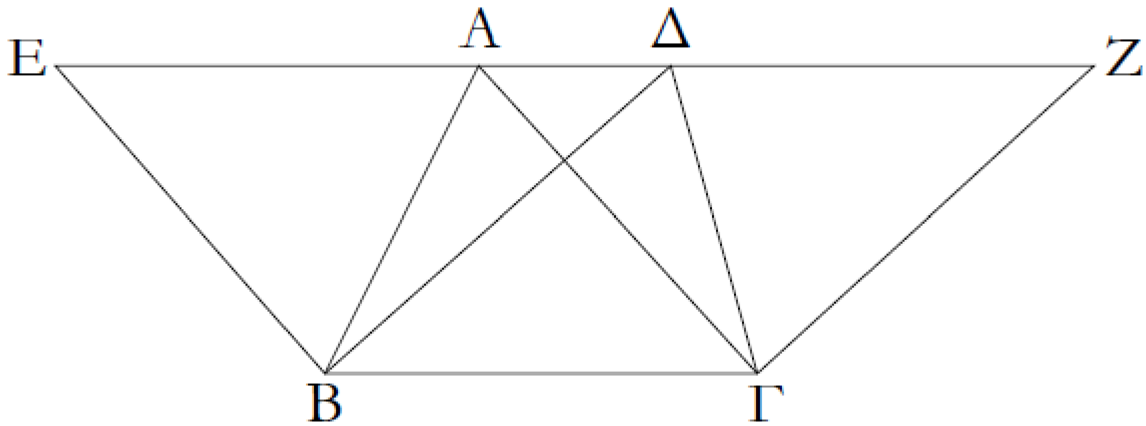
Σχήμα α.λς

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.λδ, 3 φορές: 1) *ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστιν ἴση*, 2) *[καὶ αἱ ΕΒ, ΘΓ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι]. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ*, 3) *δὶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστιν ἴσον*. Επίσης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.λγ: *αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.λε: *παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ, ΑΘ*.

Η πρόταση α.λς χρησιμοποιείται συνολικά 5 φορές σε 4 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.λη, 1 φορά στην πρόταση β.ε, 1 φορά στην πρόταση β.ς, 2 φορές στην πρόταση β.η).

37) Πρόταση α.λζ (Θεώρημα)

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



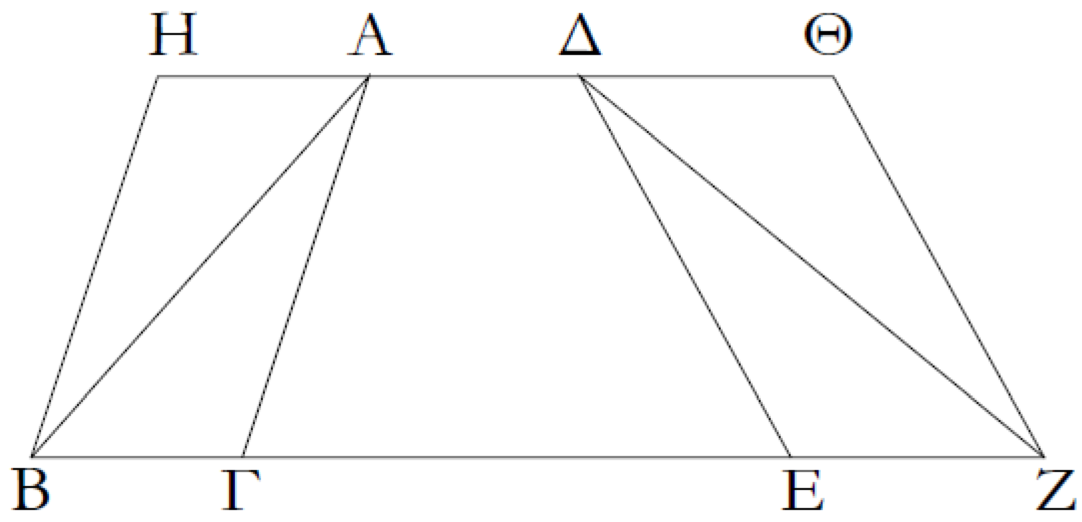
Σχήμα α.λζ

Έμμεσα εδώ υπολογίζεται το εμβαδόν ενός τριγώνου μαζί με την επόμενη πρόταση. Επίσης, η πρόταση τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν ίσως μπορεί να θεωρηθεί μία ακόμη κοινή έννοια Στην απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.λα, 2 φορές: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ*, 2) *δὶα δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ*. Επίσης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.λε: *παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καί εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.λδ, 2 φορές: 1) *καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει·* 2) *τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει*.

Η πρόταση α.λζ χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.λθ, 1 φορά στην πρόταση α.μα).

38) Πρόταση α.λη (Θεώρημα)

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



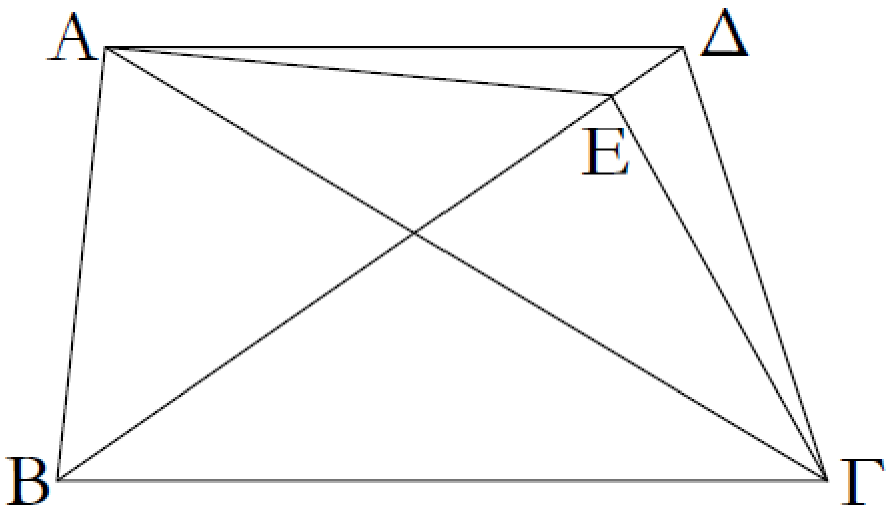
Σχήμα α.λη

Χρησιμοποιείται η πρόταση α.λα, 2 φορές: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ*, 2*) δὶα δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ. Η πρόταση α.λς: παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ*. Η πρόταση α.λς, 1 φορά: *καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ·*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.λδ, 2 φορές: 1) *καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει·*, 2) *τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ δίαμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.*

Η πρόταση α.λη χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.μ, 1 φορά στην πρόταση α.μβ).

39) Πρόταση α.λθ (Θεώρημα)

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



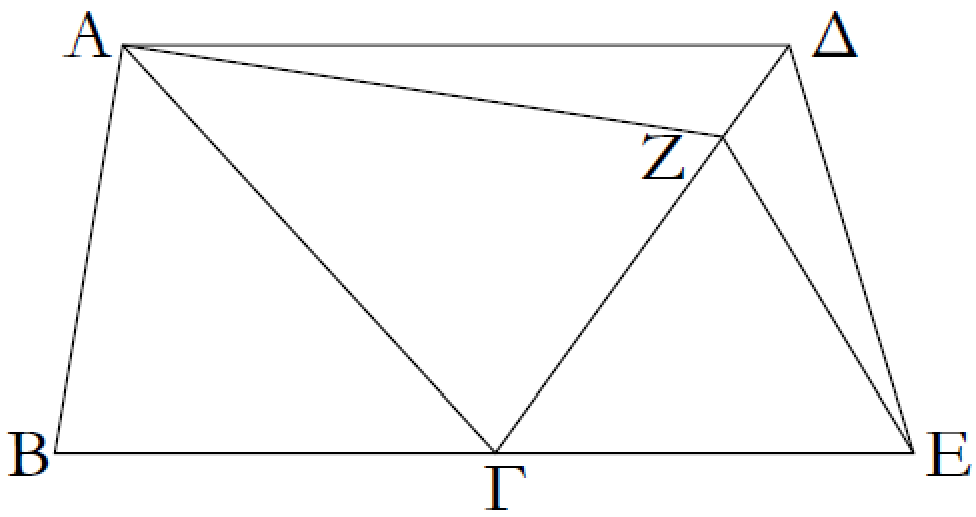
Σχήμα α.λθ

Πρόταση α.λα: *ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ.*
Πρόταση α.λζ: *ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις.*

Η πρόταση α.λθ δεν χρησιμοποιείται πουθενά αλλού στα βιβλία α,β,γ.

<u>40) Πρόταση α.μ (Θεώρημα)</u>

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



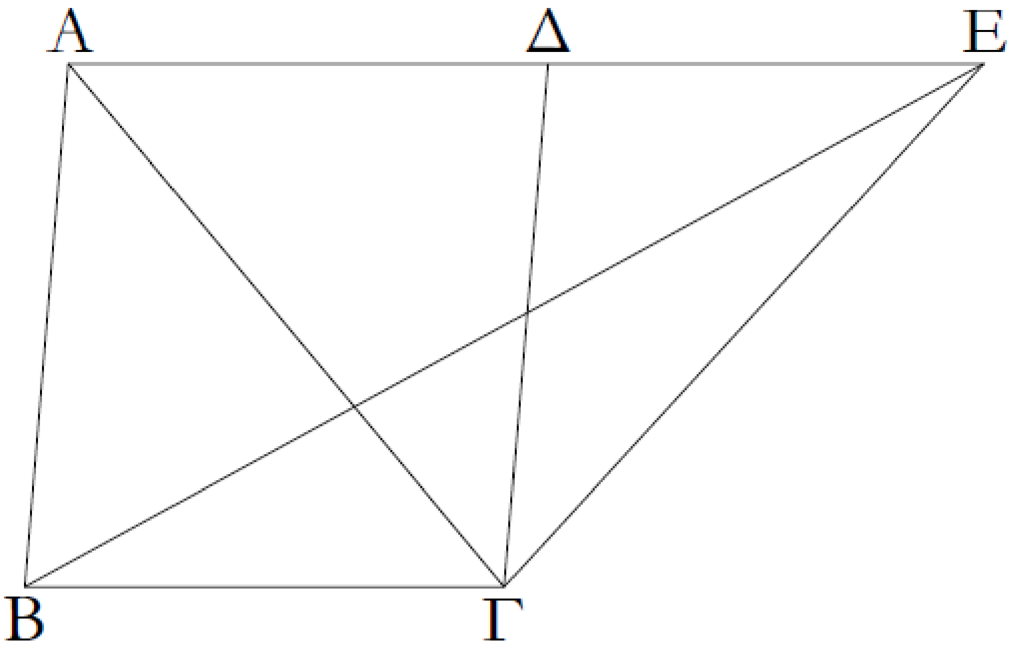
Σχήμα α.μ

Πρόταση α.λα: ἤχθω *διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ*. Πρόταση α.λη: *ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ.*

Η πρόταση α.μ δεν χρησιμοποιείται πουθενά αλλού στα βιβλία α,β,γ.

41) Πρόταση α.μα (Θεώρημα)

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστί τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.



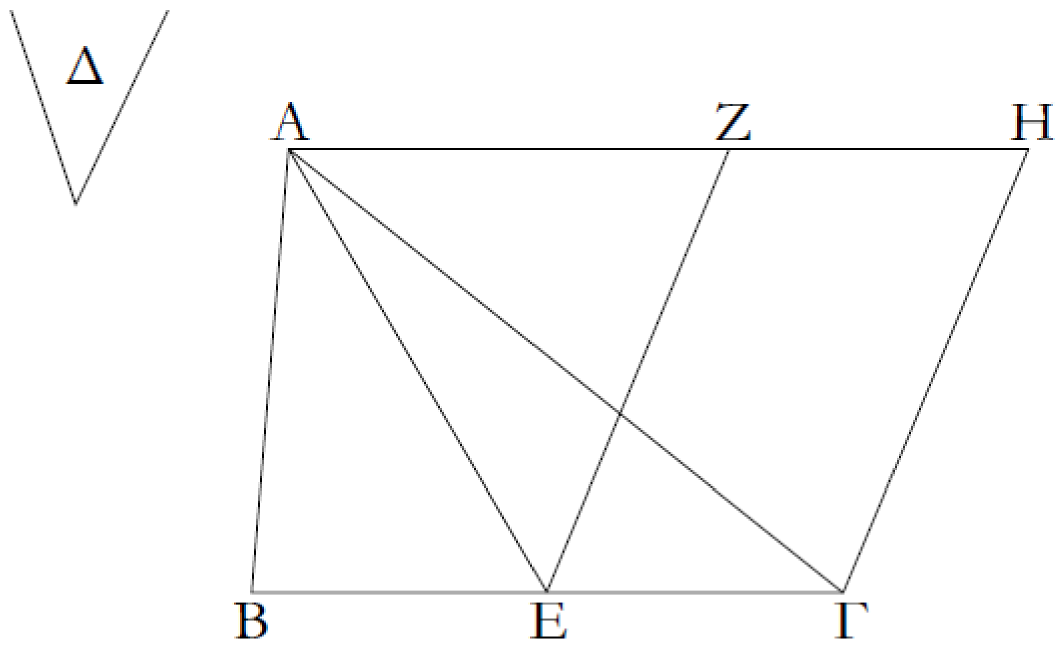
Σχήμα α.μα

Εάν ένα παραλληλόγραμμο και ένα τρίγωνο έχουν την ίδια βάση καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιο είναι το παραλληλόγραμου του τριγώνου. Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.λζ: *ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ*. Επίσης χρησιμοποιείται και η πρόταση α.λδ: *ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει*.

Η πρόταση α.μα χρησιμοποιείται συνολικά 3 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.μβ, 2 φορές στην πρόταση α.μζ).

42) Πρόταση α.μβ (Πρόβλημα)

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



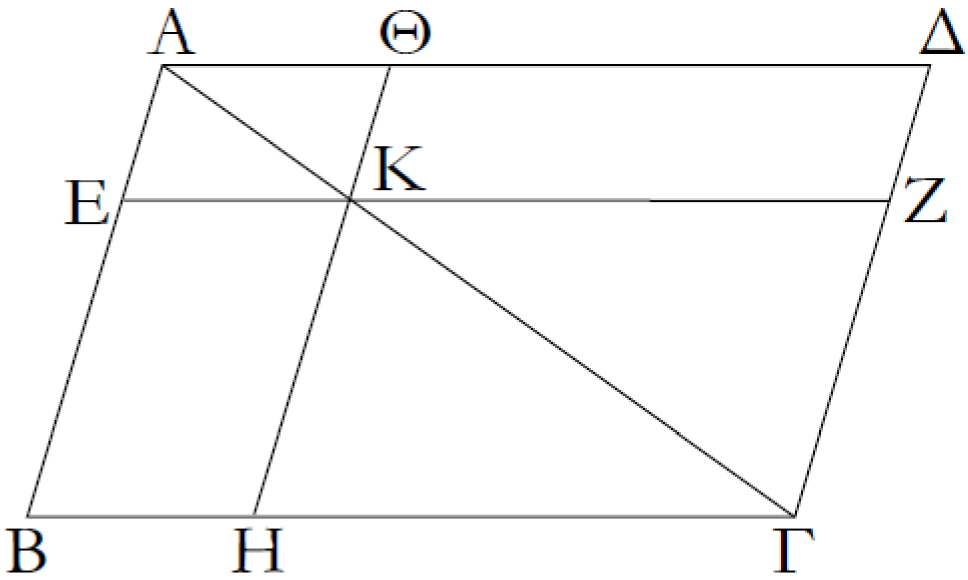
Σχήμα α.μβ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.ι: *Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε*. Η πρόταση α.κγ: *καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ*. Η πρόταση α.λα, 2 φορές: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ*, 2) *διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ*. Η πρόταση α.λη: *παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α:μα: *ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις*.

Η πρόταση α.μβ χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.μδ, 1 φορά στην πρόταση α.με).

<u>43) Πρόταση α.μγ (Θεώρημα)</u>

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



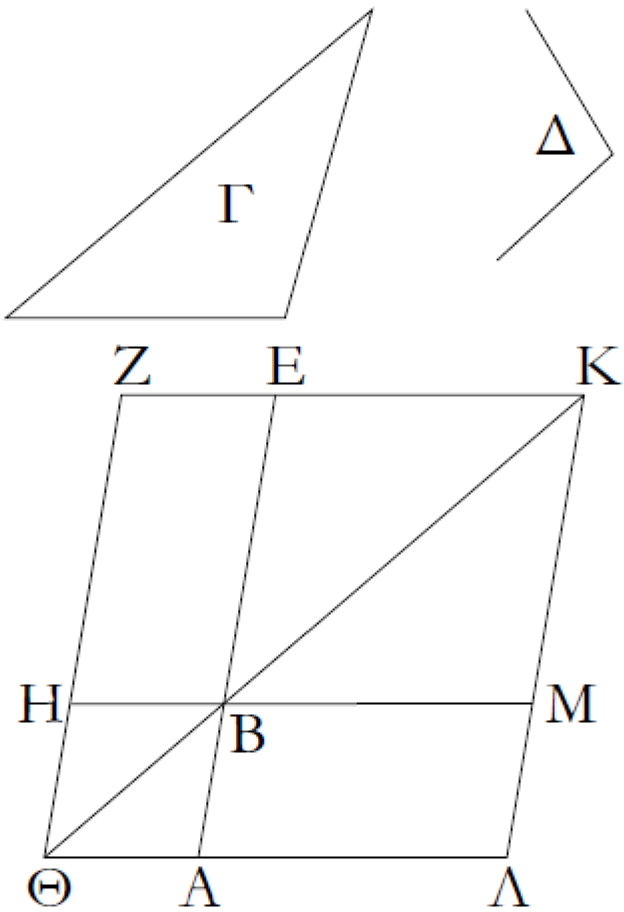
Σχήμα α.μγ

Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται μόνο η πρόταση α.λδ, 3 φορές: 1) *'Επεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ*. 2) *πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ*. 3) *διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστιν ἴσον*. Επίσης χρησιμοποιούνται οι κοινές έννοιες στην υπόλοιπη απόδειξη (κοινή έννοια γ).

Η πρόταση α.μγ χρησιμοποιείται συνολικά 7 φορές σε 6 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.μδ, 1 φορά στην πρόταση β.δ, 1 φορά στην πρόταση β.ε, 1 φορά στην πρόταση β.ς, 1 φορά στην πρόταση β.ζ, 2 φορές στην πρόταση β.η)

<u>44) Πρόταση α.μδ (Πρόβλημα)</u>

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



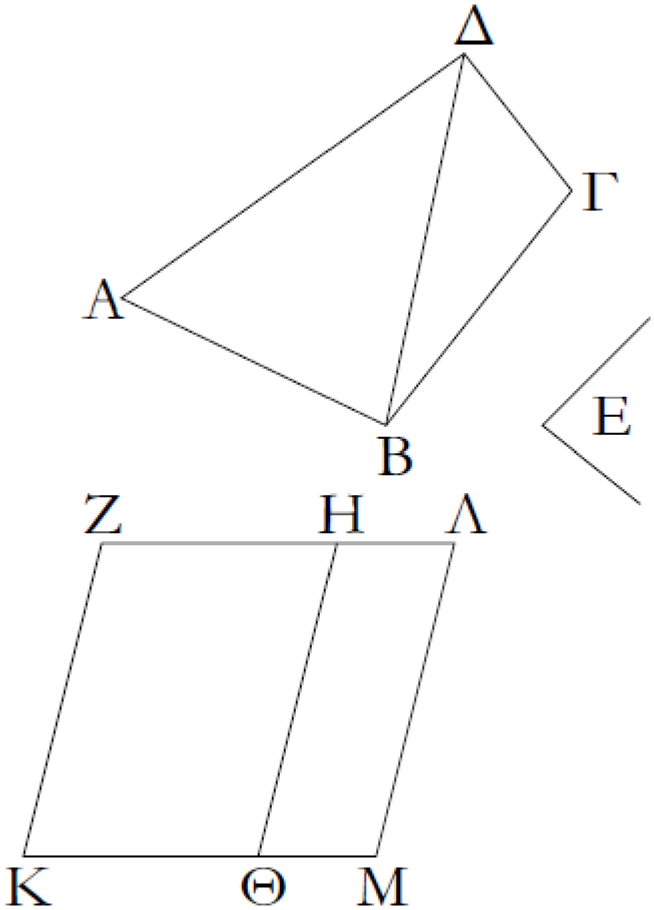
Σχήμα α.μδ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.μβ: *Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ*. Για την φράση: *καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ*, χρησιμοποιούνται οι προτάσεις α.γ, α.κγ και α.λα. Επίσης η πρόταση α.λα χρησιμοποιείται στα εξής δύο σημεία: 1) *καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ*, 2) *καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ*. Η πρόταση α.κθ χρησιμοποιείται στο εξής σημείο: *καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι*. Το ε αίτημα: *αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται*. Η πρόταση α.μγ: *παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα* *παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ.* Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιε: *καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ.*

Η πρόταση α.μδ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση α.με).

45) Πρόταση α.με (Πρόβλημα)

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



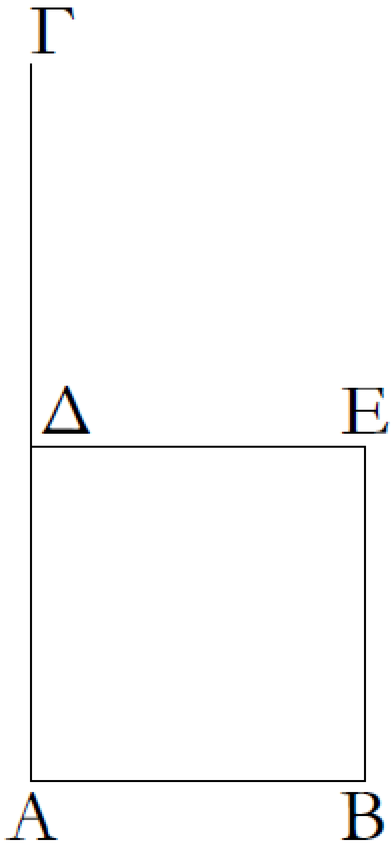
Σχήμα α.με

Η πρόταση α.μβ: *καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε.* Η πρόταση α.μδ: *καὶ* *παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε*. Η πρόταση α.κθ, 3 φορές: 1) *ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν (γιατί ΖΚ, ΘΗ είναι παράλληλες)*, 2) *καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*, 3) *ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν (γιατί ΜΘ, ΗΛ παράλληλες)*. Επίσης στην ίδια απόδειξη χρησιμοποιείται 2 φορές η πρόταση α.ιδ: 1) *πρὸς δή τινι εὐθεῖᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ*, 2) *ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ*. Η πρόταση α.λδ, 2 φορές: 1) *καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν*, 2) *ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ.* Η πρόταση α.λ: *καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν*. Τέλος, για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.λγ: *καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν*.

Η πρόταση α.με χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση β.ιδ)

46) Πρόταση α.μς (Πρόβλημα)

'Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.



Σχήμα α.μς

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.ια: *Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ*. Η πρόταση α.γ: *καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ*. Χρησιμοποιείται η πρόταση α.λα, 2 φορές: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ*, 2) *διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ*. Η πρόταση α.λδ, 2 φορές: 1) *παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ*, 2) *τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.κθ: *ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*.

Εδώ ο Πρόκλος[28] αποδεικνύει ότι τα τετράγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες,

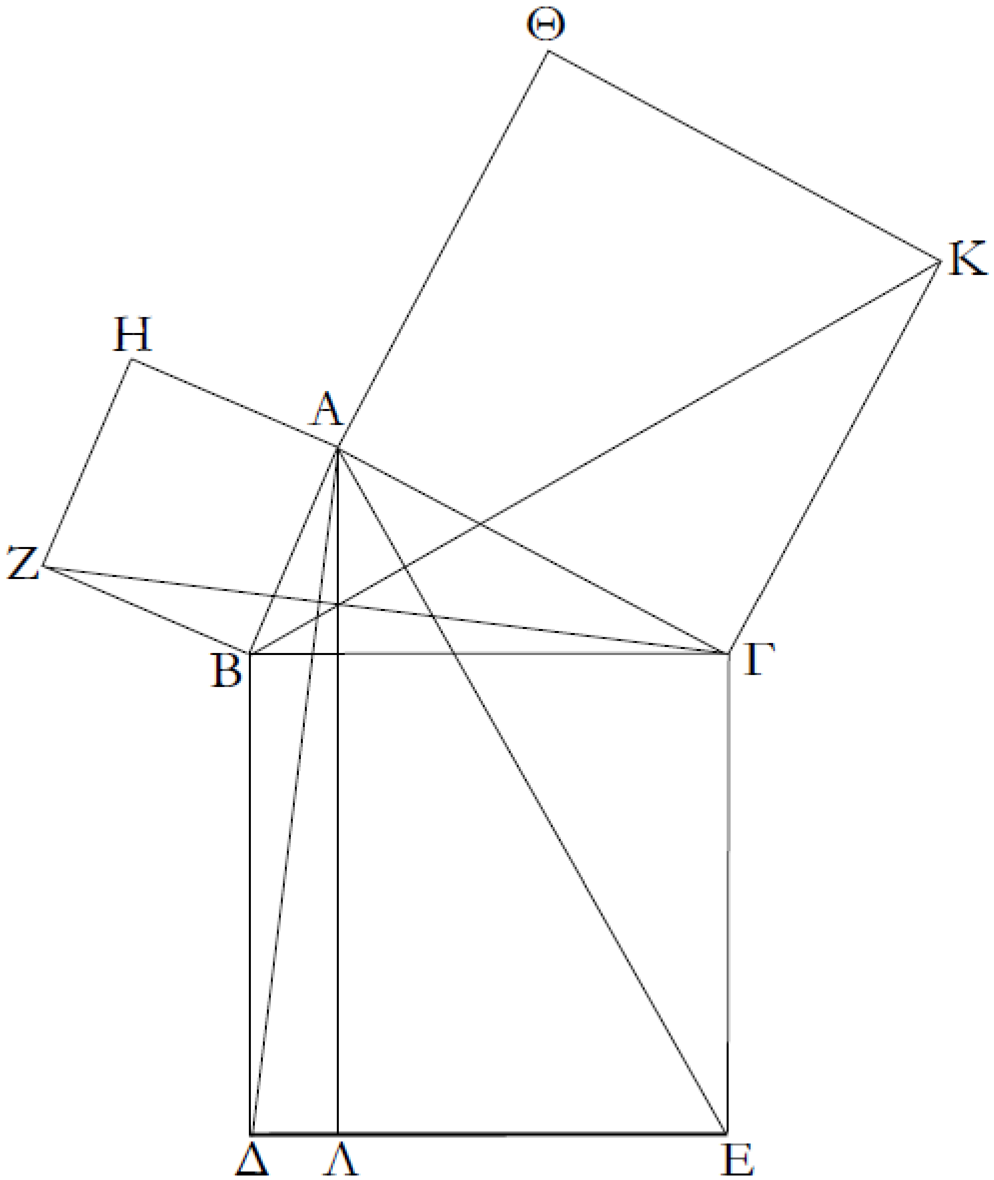
[28] Πρόκλος, σελ. 423

είναι επίσης ίσα, και αντίστροφα.

Η πρόταση α.μς χρησιμοποιείται συνολικά 10 φορές σε 9 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.μζ, 1 φορές στην πρόταση β.β, 1 φορά στην πρόταση β.γ, 1 φορά στην πρόταση β.δ, 1 φορά στην πρόταση β.ε, 1 φορά στην πρόταση β.ς, 1 φορά στην πρόταση β.ζ, 1 φορά στην πρόταση β.η, 2 φορές στην πρόταση β.ια).

47) Πρόταση α.μζ (Θεώρημα)

’Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τε τραγώνοις.



Σχήμα α.μζ

ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ. Αλληλοσυμπλήρωση με την πρόταση α.μη. Χρησιμοποιείται η πρόταση α.μς: *᾿Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ*. Η πρόταση α.λα: *καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ*. Η πρόταση α.ιδ: *καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ' εὐθείας*. Η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.μα, 2 συνεχόμενες φορές: 1) *καί [ἐστι] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τ. ΒΛ παραλληλόγραμμον. βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ·* 2) *τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ*.

Αξίζει να σημείωσουμε ότι για την απόδειξη αυτής της πρόταση χρησιμοποιείται ακόμα μία κοινή έννοια: *τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*.

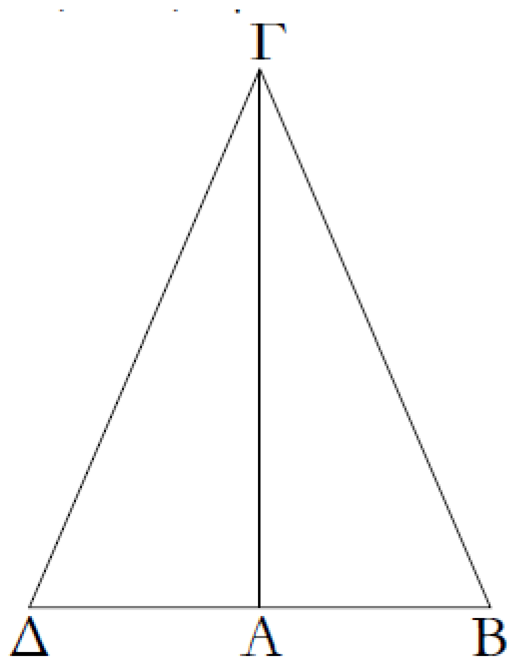
Ο Πρόκλος[29] αναφέρει ότι αυτό το θεώρημα το οφείλουμε στον Πυθαγόρα.

Η πρόταση α.μζ χρησιμοποιείται συνολικά 25 φορές σε 10 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση α.μη, 4 φορές στην πρόταση β.θ, 4 φορές στην πρόταση β.ι, 1 φορά στην πρόταση β.ια, 2 φορές στην πρόταση β.ιβ, 2 φορές στην πρόταση β.ιγ, 1 φορά στην πρόταση β.ιδ, 4 φορές στην πρόταση γ.ιδ, 2 φορές στην πρόταση γ.λε, 4 φορές στην πρόταση γ.λς).

48) Πρόταση α.μη (Θεώρημα)

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

[29] Πρόκλος, σελ. 426



Σχήμα α.μη

Για την απόδειξη της πρότασης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ια: *Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ*. Η πρόταση α.γ: *καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ*. Προφανώς χρησιμοποιείται η προηγούμενη πρόταση α.μζ: *ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.η: *δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ [ἐστιν] ἴση*.

Η πρόταση α.μη δεν χρησιμοποιείται πουθενά στα βιβλία β,γ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΙΒΛΙΟ Β

3.1 Ορισμοί

Ορισμός α: *Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.*

Η πλήρης έκφραση για τη φράση: «η γωνία ΒΑΓ» στα αρχαία Ελληνικά είναι: «*ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένη γωνία*», ενώ για την φράση «το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχεται από της ΒΑ, ΑΓ» είναι: «*τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένον ὀρθογώνιον*». Και στις δύο περιπτώσεις το ουσιαστικό και η μετοχή παραλείπονται επειδή το θηλυκό ή το ουδέτερο άρθρο μας βοηθάει να διακρίνουμε αν πρόκειται για γωνία ή για ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Πάντως στη φρασεολογία του Ευκλείδη, η φράση «*ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ*» όταν εμφανίζεται στην πλήρη μορφή πάντα αφορά το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ενώ η μικρή φράση «*ὑπὸ ΒΑΓ*» χρησιμοποιείται για να περιγράψει γωνία. Αντίθετα ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος, συχνά χρησιμοποιούν τη φράση «*τὸ ὑπὸ ΒΑΓ*» για το ορθογώνιο ΒΑ, ΑΓ και την «*ἡ ὑπὸ ΒΑΓ*» για τη γωνία ΒΑΓ.[30]

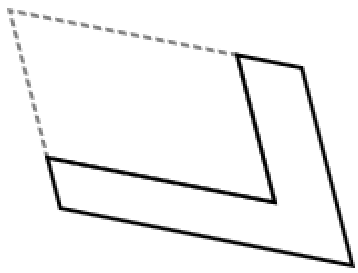
Ορισμός β: *Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.*

Η λέξη γνώμον ή γνώμονας (gnomon) εμφανίστηκε στην Ελλάδα από τον Αναξίμαδρο (610 π.Χ. – 547 π.Χ.). Πολύ αργότερα, ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς όρισε ως γνώμονα (σε γενικούς όρους) το οποιοδήποτε σχήμα, που αν προστεθεί σε οποιοδήποτε άλλο σχήμα κάνει το ολικό σχήμα παρόμοιο με

[30] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 370

αυτό που προστέθηκε.[31]

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε έναν γνώμονα στο επίπεδο, όπου αν του προσθέσεις ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, προκύπτει πάλι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το παρακάτω σχήμα συμβαδίζει και με τον ορισμό του Ευκλείδη:

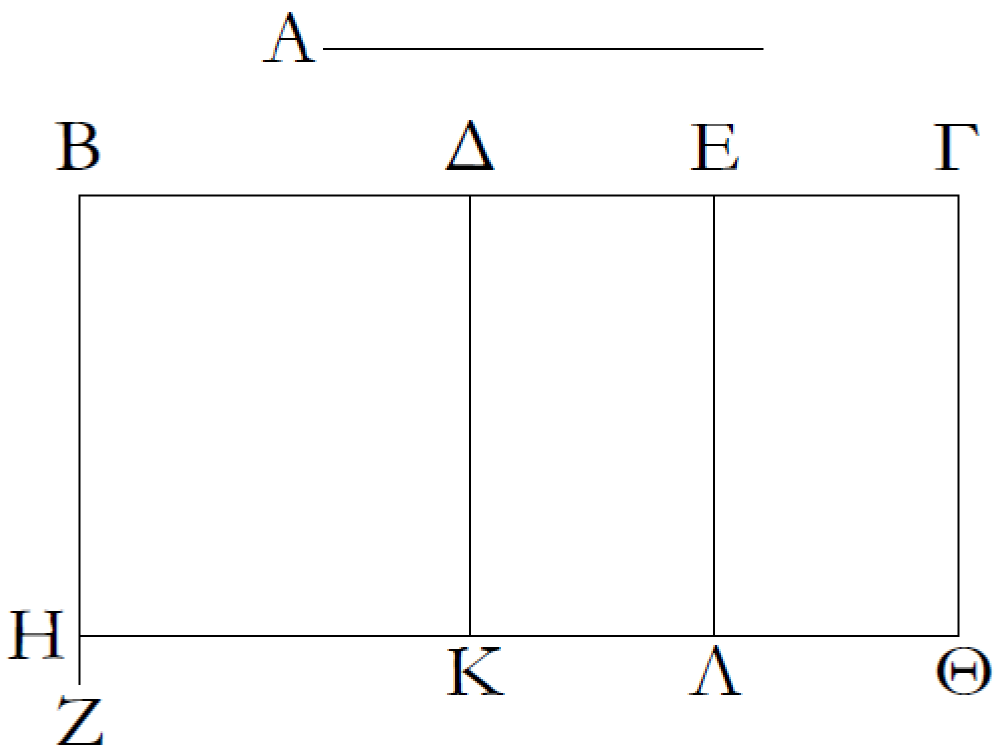


3.2 Προτάσεις

<u>1) Πρόταση β.α (Θεώρημα)</u>

᾿Εὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

[31] Heath, 1908: Τόμος I, σελ. 370



Σχήμα β.α

Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρική ταυτότητας: α(β+γ+δ+...) = αβ+αγ+αδ+... . Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.ια: *Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ* και η πρόταση α.γ: *καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ*. Επίσης χρησιμοποιείται η πρόταση α.λα, 2 φορές: 1) καὶ *διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ*, 2) *διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ*. Τέλος για την απόδειξη χρησιμοποιείται και η πρόταση α.λδ: *ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ*.

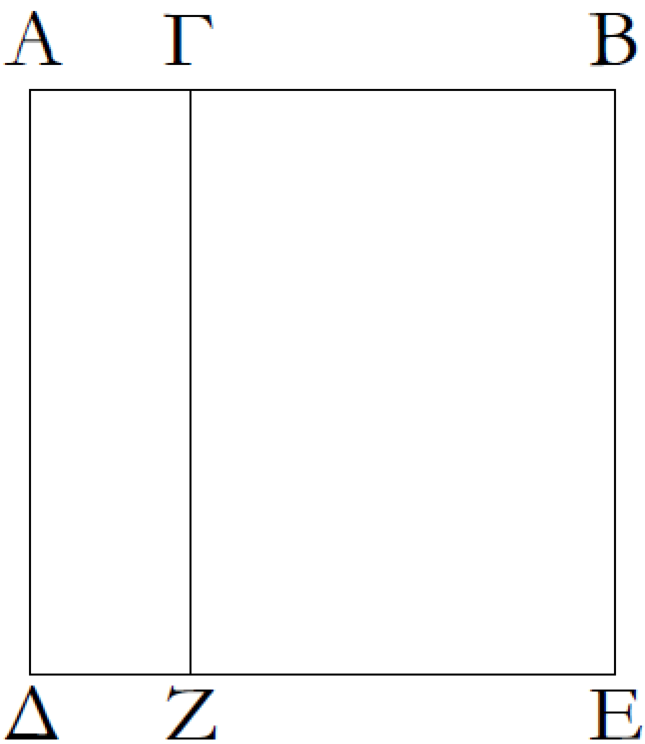
Ο Ευκλείδης αναφέρει: *καί ἐστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ·* όπου παραλείπονται οι λέξεις *περιεχόμενον* και *παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον*. Σε αυτή την πρόταση παρατηρούμε ότι στην απόδειξη, τα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ΒΛ και ΓΛ που συνθέτουν το ΒΓ, είναι τα ορθογώνια που περιέχονται από την ΒΓ, και τα δύο μέρη αντίστοιχα που χωρίζονται από την κάθετη Α (ΕΛ = Α) στη ΒΓ.

Προφανώς οι προτάσεις β.β και β.γ είναι ειδική περίπτωση της β.α (όπως θα δούμε στη συνέχεια). Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο Ευκλείδης τις έβαλε ξεχωριστά για να μπορέσει να τις χρησιμοποιήσει άμεσα στη συνέχεια. Δηλαδή αν δεν είχαν δημιουργηθεί σαν ξεχωριστές προτάσεις θα ήταν δύσκολο μετέπειτα να χρησιμοποιηθούν με παράθεση ως ειδική περίπτωση της β.α.

Η πρόταση β.α δεν χρησιμοποιείται για καμία άλλη απόδειξη στα βιβλία β και γ.

2) Πρόταση β.β (Θεώρημα)

’Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.



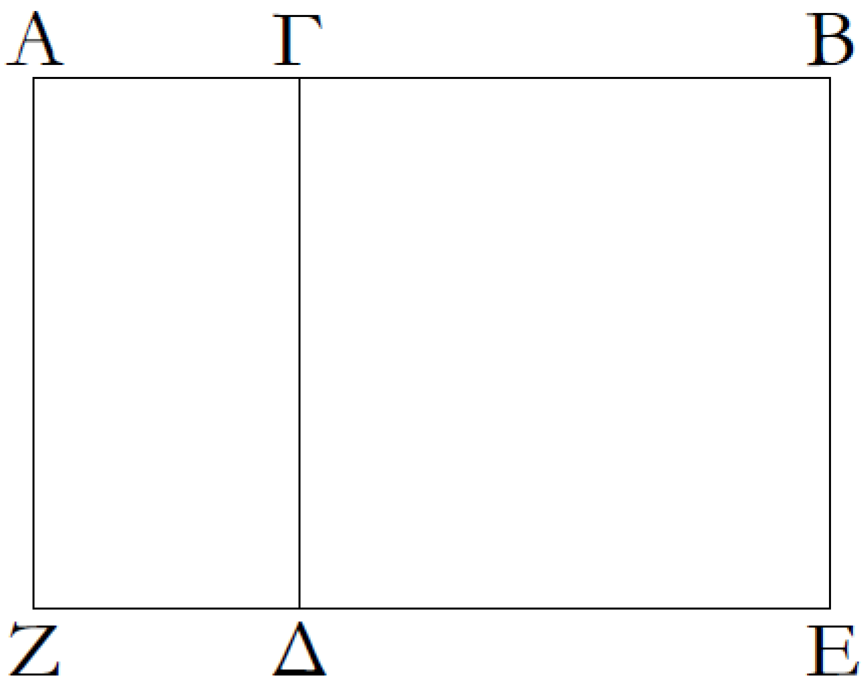
Σχήμα β.β

Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρικής ταυτότητας: Αν α=β+γ, τότε αβ+αγ=α^2. Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.μς: *’Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ*. Και η πρόταση α.λα: *καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ* *παράλληλος ἡ ΓΖ.*

Η πρόταση β.β δεν χρησιμοποιείται για καμία άλλη απόδειξη στα βιβλία β και γ, ωστόσο χρησιμοποιείται για την απόδειξη της πρότασης ιγ.ι.

3) Πρόταση β.γ (Θεώρημα)

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.



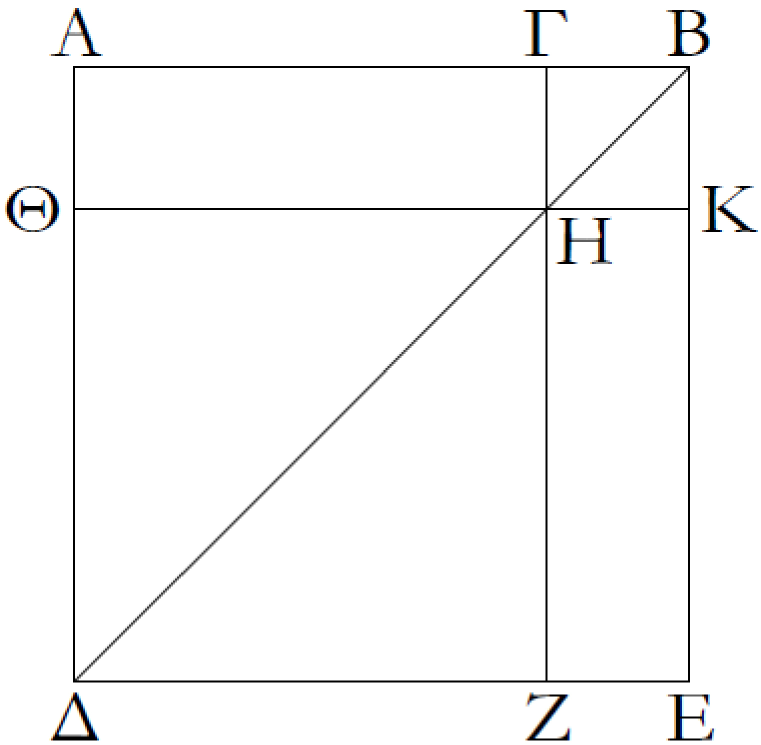
Σχήμα β.γ

Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρικής ταυτότητας: (α+β)α = αβ+α^2. Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.μς: *Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ*, και η πρόταση α.λα: *καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ.*

Η πρόταση β.γ δεν χρησιμοποιείται για καμία άλλη απόδειξη στα βιβλία β και γ, ωστόσο χρησιμοποιείται για την απόδειξη της πρότασης θ.ιε. Επίσης την χρησιμοποιεί ο Πάππος πολλές φορές.

4) Πρόταση β.δ (Θεώρημα)

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Σχήμα β.δ

Αυτή η πρόταση είναι η σύγρονη τετραγωνική ταυτότητα: (α+β)^2 = α^2 + β^2 +2αβ. Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.μς: *Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ*. Επίσης, χρησιμοποιείται 2 φορές η πρόταση α.λα: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ*, 2) *διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ*. Ακόμα, χρησιμοποιείται η πρόταση α.κθ, 2 φορές: 1) *καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ*, 2) *ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΓΒ], αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι*. Η πρόταση α.ε: *ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση*. Η πρόταση α.ς: *καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνιά τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση*. Η πρόταση α.λδ, 3 φορές: 1) *ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση. ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΚΒ*, 2) *ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν*, 3) *καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς ΑΓ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.μγ μία φορά: *καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ*.

Μια δεύτερη απόδειξη για αυτήν την πρόταση παρουσιάστηκε από τον August (1826 – 1829)[32]. Η διαφορά με την πρόταση του Ευκλείδη είναι στην απόδειξη ότι το ΓΗΚΒ είναι τετράγωνο.

Η πρόταση β.δ, μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση όπου η γραμμή ΑΒ χωριστεί σε πολλά τμήματα. Συνεπώς το τετράγωνο όλης της γραμμής ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων του κάθε μέρους συν το διπλάσιο των επιμέρους ορθογώνιων. Τουτέστιν:

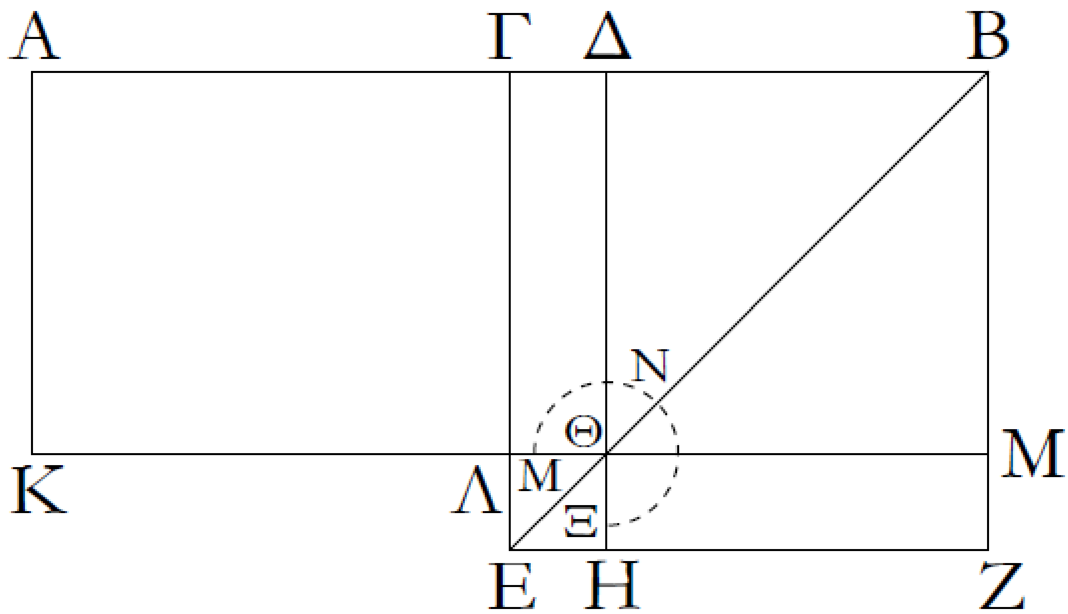
$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \ldots + 2\beta\gamma + \ldots + \ldots$

Η πρόταση β.δ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση β.ιβ).

5) Πρόταση β.ε (Θεώρημα)

'Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

[32] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 381



Σχήμα β.ε

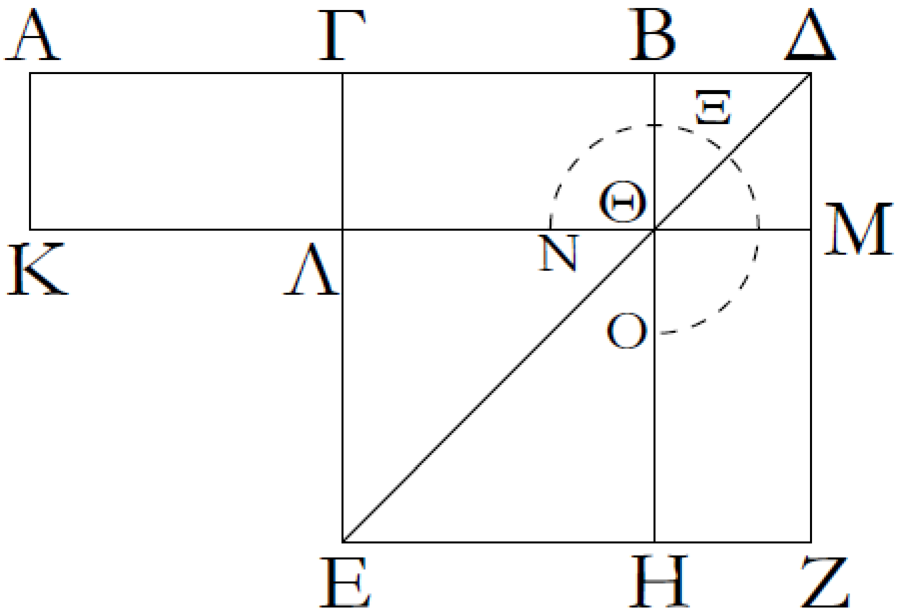
Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρικής ταυτότητας: αβ + [(α+β)/2-β]^2 = [(α+β)/2]^2. Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.μς: *'Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ*. Η πρόταση α.λα, 3 φορές: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΗ*, 2) *διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος πάλιν ἤχθω ἡ ΚΜ*, 3) *καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ*. Η πρόταση α.μγ: *καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι*. Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση α.λς: *ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση*.

Η πρόταση β.ε χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση β.ιδ, 1 φορά στην πρόταση γ.λε).

6) Πρόταση β.ς (Θεώρημα)

'Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς

συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.



Σχήμα β.ς

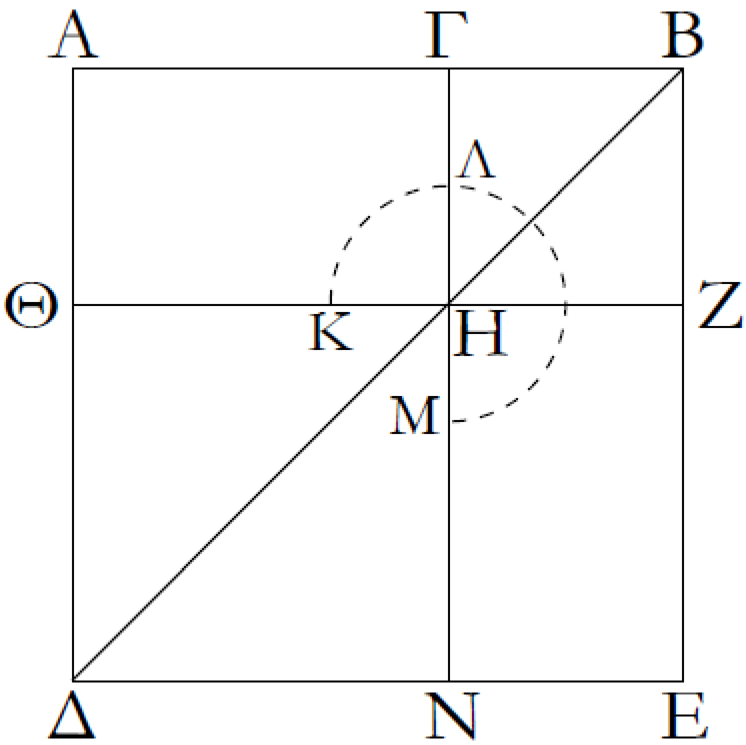
Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρικής ταυτότητας: (2α+β)β+α^2 = (α+β)^2. Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.μς: *᾿Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ*. Επίσης χρησιμοποιείται 3 φορές η πρόταση α.λα: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΓ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ*, 2) *διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ*, 3) *καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ*. Τέλος χρησιμοποιείται μία φορά η πρόταση α.λς: *᾿Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ*, και μία φορά η πρόταση α.μγ: *ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν*.

Σε αυτή την πρόταση το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΔ, ΔΒ, είναι το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στη δοσμένη ευθεία γραμμή (ΑΒ), αφαιρώντας το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με τη ΒΔ.

Η πρόταση β.ς χρησιμοποιείται συνολικά 3 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση β.ια, 2 φορές στην πρόταση γ.λς).

7) Πρόταση β.ζ (Θεώρημα)

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Σχήμα β.ζ

Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρικής ταυτότητας: (α+β)^2+α^2 = 2(α+β)α+β^2. Για την απόδειξη της χρησιμοποιείται μόνο η πρόταση α.μς: *Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ*, αλλά και η πρόταση α.μγ: *Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ*.

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή της μορφής αυτής της πρότασης[33], μπορεί να αποκτηθεί αντικαθιστώντας τις δύο δοσμένες ευθείες γραμμές ΑΒ, ΒΓ όπου η ΑΒ είναι μεγαλύτερη με το ότι η ΑΓ είναι η διαφορά μεταξύ των δύο

[33] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 389

δοσμένων ευθείων γραμμών. Έτσι, η πρόταση δείχνει ότι το τετράγωνο δύο ευθείων γραμμών είναι ίσο με δύο φορές το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχεται από αυτές συν το τετράγωνο της διαφοράς τους. Δηλαδή, το τετράγωνο της διαφοράς δύο ευθείων γραμμών ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο ευθείων γραμμών με αφαίρεση του διπλασίου του ορθογώνιου παραλληλογράμμου που περιέχεται από αυτές.

Τουτέστιν, δεδομένου ότι η πρόταση β.δ στη σημερινή εποχή προκύπτει από την η αλγεβρική ταυτότητα:

(α+β)^2 = α^2 + β^2 + 2αβ

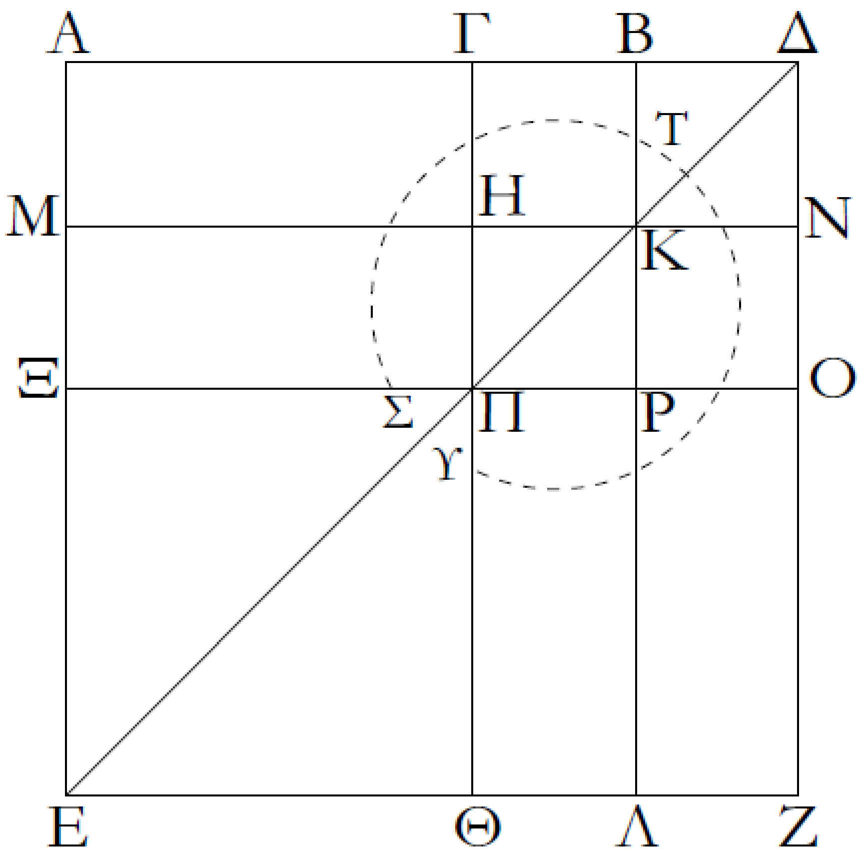
η πρόταση β.ζ, γίνεται αντίστοιχα η εξής αλγεβρική ταυτότητα:

(α – β)^2 = α^2 + β^2 – 2αβ

Η πρόταση β.ζ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση β.ιγ)

8) Πρόταση β.η (Θεώρημα)

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



Σχήμα β.η

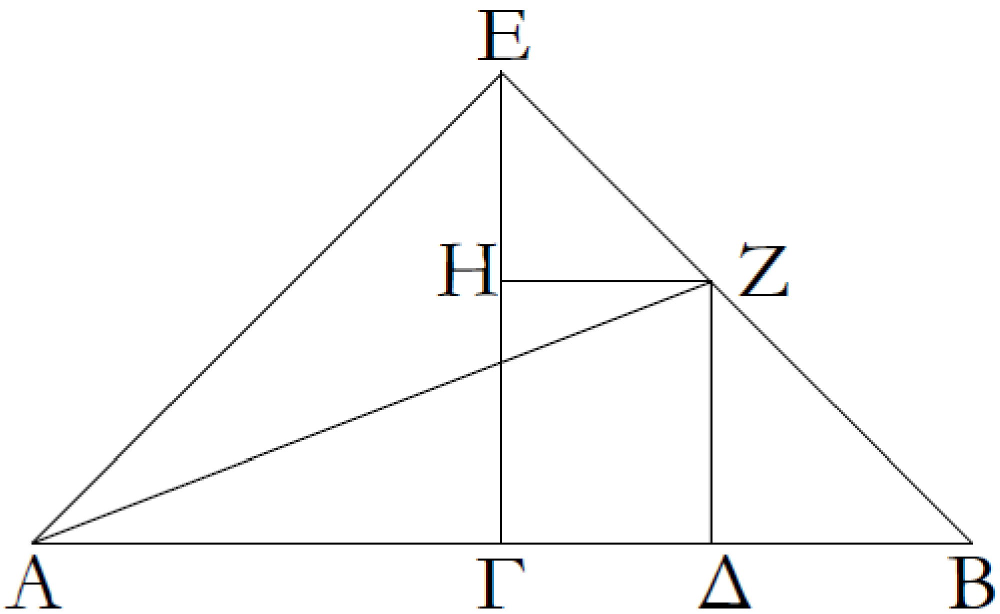
Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρικής ταυτότητας: 4(α+β)α+β^2=[(α+β)+α]^2. Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.γ: *'Εκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας [τῇ ΑΒ εὐθεῖα] ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ*. Η πρόταση α.μς: *καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ*. Χρησιμοποιείται η πρόταση α.λδ, 2 φορές: 1) *ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση*, 2) *ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ*. Η πρόταση α.λς, 2 φορές: 1) *καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τὴ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΓΚ τῷ ΚΔ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΡΝ*, 2) *καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ*. Η πρόταση α.μγ, 2 φορές: 1) *ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου*, 2) *ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου*.

Η πρόταση αυτή παρατέθηκε από τον Πάππο[34] και την χρησιμοποίησε και ο ίδιος ο Ευκλείδης στα Δεδομένα, πρόταση πς (86). Τέλος, έχουν διατυπωθεί άλλες δύο αποδείξεις για αυτήν την πρόταση.

Η πρόταση β.η δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στα βιβλία β και γ.

<u>9) Πρόταση β.θ (Θεώρημα)</u>

᾿Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.



Σχήμα β.θ

Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρικής ταυτότητας: $\alpha^2 + \beta^2 = 2\{[(\alpha+\beta)/2]^2 + [(\alpha+\beta)/2-\beta]^2\}$. Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.ια: *Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ*. Η πρόταση α.γ: *καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ*. Η πρόταση α.λα, 2 φορές: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ*, 2) *διὰ δὲ τοῦ Ζ*

[34] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 245

τῇ ΑΒ ἡ ΖΗ. Η πρόταση α.ε: *καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ.* Η πρόταση α.λβ, 3 φορές: 1) *καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν*, 2) *λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς*, 3) *λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς*. Η πρόταση α.κθ, 2 φορές: 1) *ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ*, 2) *ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ· ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ*. Η πρόταση α.ς, 2 φορές: 1) *ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση*, 2*) ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση*. 4 φορές η πρόταση α.μζ: 1) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία*, 2) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον*, 3) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία*, 4) *τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία*. Τέλος για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιείται μία φορά η πρόταση α.λδ: ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός, ότι ενώ οι πρώτες 8 προτάσεις του βιβλίου β, αποδεικνύονται ανεξάρτητα από το πυθαγόρειο θεώρημα (πρόταση α.μζ), όλες οι υπόλοιπες με πρώτη την θ, αποδεικνύονται με ευρεία χρήση αυτού.

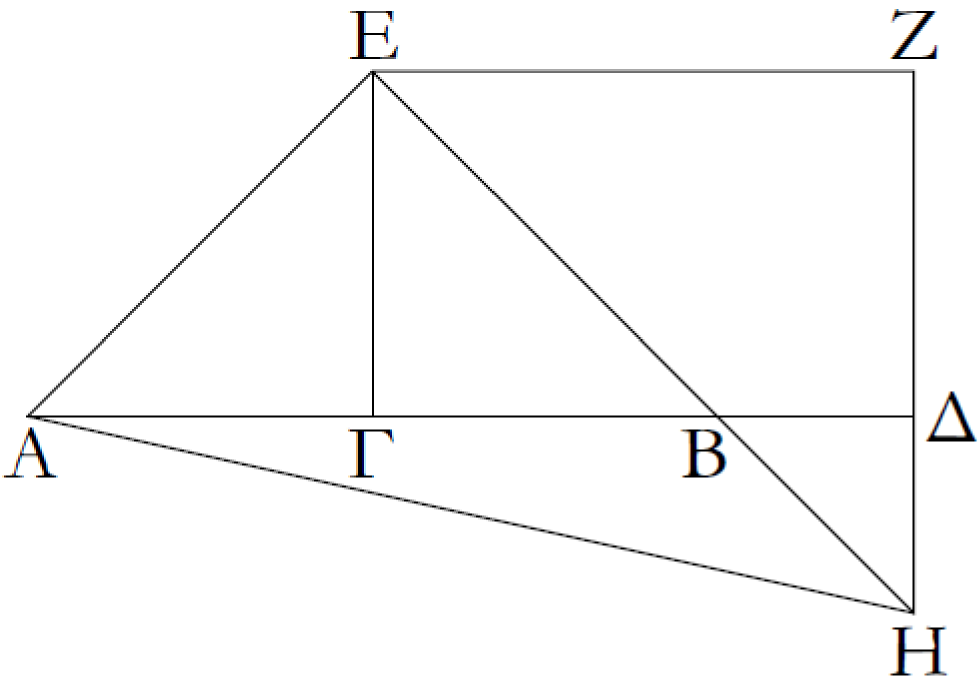
Επίσης, οι προτάσεις β.θ και β.ι σχετίζονται μεταξύ τους με τον ίδιο τρόπο που σχετίζονται οι προτάσεις β.ε και β.ς. Αποδεικνύουν το ίδιο αποτέλεσμα που μπορεί να εκφραστεί με μια απλή μορφή: Το άθροισμα των τετραγώνων του αθροίσματος και της διαφοράς δύο δοσμένων ευθείων γραμμών ισούται με το διπλάσειο του αθροίσματος των τετραγώνων των ευθείων γραμμών.

Η πρόταση β.θ δεν χρησιμοποείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στα βιβλία β και γ.

10) Πρόταση β.ι (Θεώρημα)

᾿Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾿ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ

συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.



Σχήμα β.ι

Αυτή η πρόταση είναι η γεωμετρική έκδοση της εξής αλγεβρικής ταυτότητας: (2α+β)^2+β^2=2[α^2+(α+β)^2]. Σε αυτή για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.ια: *Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ*, η πρόταση α.γ: *καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ*, η πρόταση α.λα, 2 φορές: 1) *καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ*, 2) *διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔ*. Η πρόταση α.κθ, 2 φορές: 1) *καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*, 2) *ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή· ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ· ἐναλλὰξ γάρ*. Το ε αίτημα: *αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη συμπεσοῦνται*. Η πρόταση α.ε: *καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΕΓ*. Η πρόταση α.λβ: *καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς [ἐστιν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ*. Η πρόταση α.ιε: *καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ*. Η πρόταση α.ς, 2 φορές: 1) *ἡ* *ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση*, 2) *ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση*. Η πρόταση α.λδ, 2 φορές: 1) *πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ*, 2) *ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ*. Τέλος, χρησιμοποιείται 4 φορές η πρόταση α.μζ: 1) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ*, 2) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ*, 3) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον*, 4) *τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ*.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι τις προτάσεις β.θ και β.ι τις χρησιμοποιεί ο Πάππος για να αποδείξη το εξής γνωστό θεώρημα[35]:

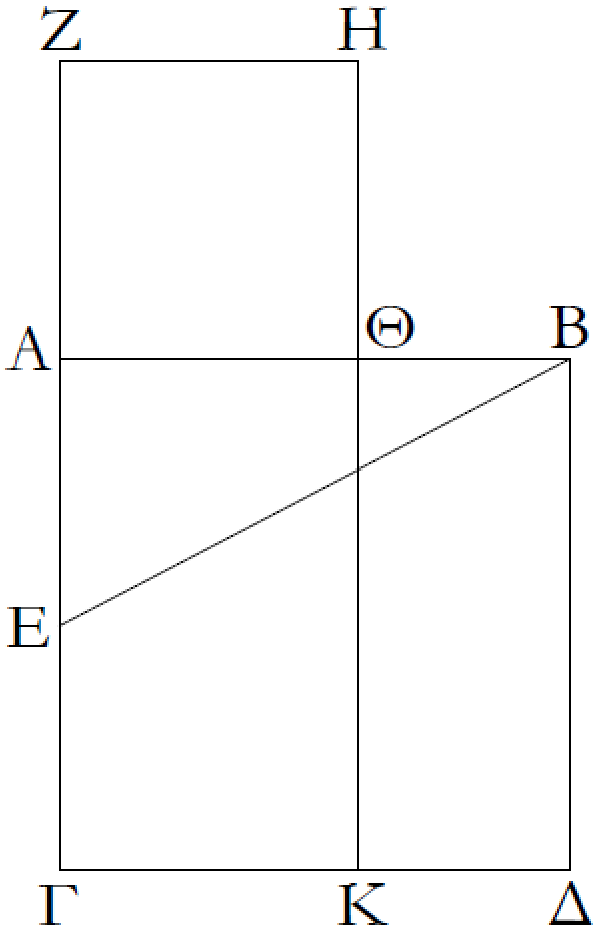
Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με δύο φορές το τετράγωνο της μισής βάσης, συν δύο φορές το τετράγωνο της αντίστοιχης διαμέσου.

Η πρόταση β.ι δεν χρησιμοποείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στα βιβλία β και γ.

11) Πρόταση β.ια (Πρόβλημα)

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

[35] Heath, 1908: Τόμος Ι, σελ. 401



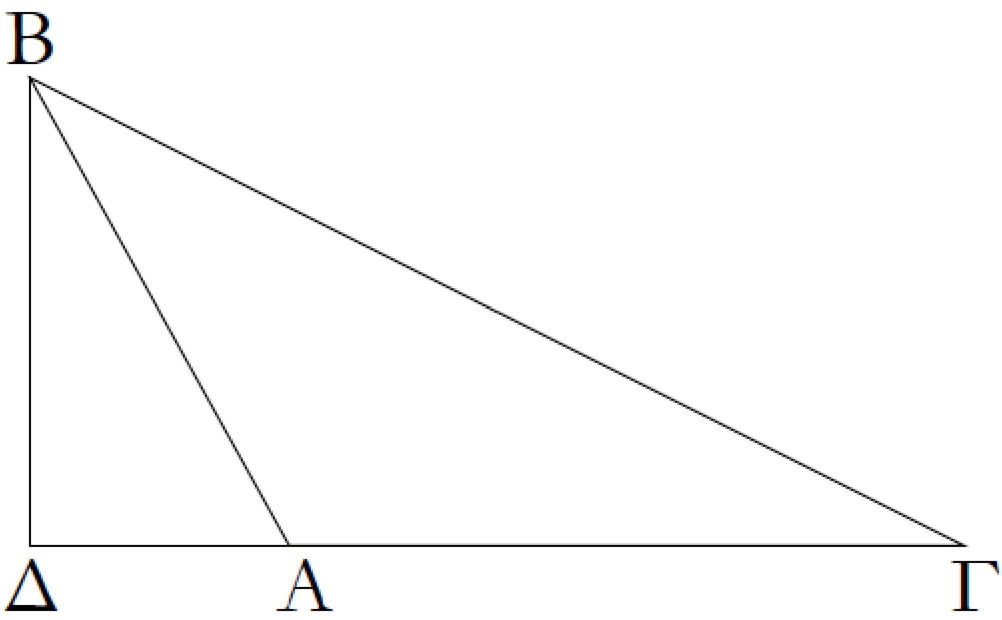
Σχήμα β.ια

Σε αυτή την πρόταση αποδεικνύεται ότι: Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.μς, 2 φορές: 1) *᾿Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ*, 2) *καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ*. Η πρόταση α.ι: *καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον*, η πρόταση α.γ: *καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ*. Εδώ για πρώτη φορά στο βιβλίο β, για την απόδειξη μιας πρότασης χρησιμοποιείται πρόταση του ίδιου βιβλίου. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται η πρόταση β.ς: *᾿Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΖΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ*. Τέλος για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση α.μζ: *ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία*.

Η πρόταση β.ια δεν χρησιμοποείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στα βιβλία β και γ.

12) Πρόταση β.ιβ (Θεώρημα)

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.



Σχήμα β.ιβ

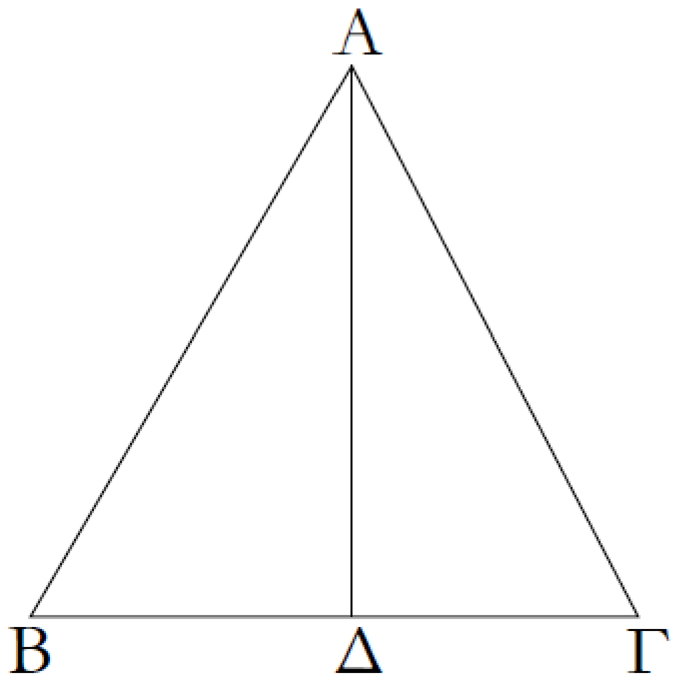
Με βάση το σχήμα, σε αυτή την πρόταση αποδεικνύεται το εξής: ΒΓ^2 = ΑΒ^2 +ΑΓ^2 – 2ΑΒΑΓ cos (ΒΑΓ). Δεδομένης της αλληλοσυμπλήρωσης των προτάσεων β.ιβ – β.ιγ, για την απόδειξή τους χρησιμοποιούνται οι ίδιες προτάσεις του βιβλίου α: α.ιβ και α.μζ. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιβ: *καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ*. Η πρόταση β.δ: *Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Α σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.μζ, 2 φορές: 1) *ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ προς τῷ Δ γωνία*, 2) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ*.

Και ενώ σε αυτή την πρόταση και την επόμενη έχουμε να κάνουμε με τετράγωνα στις πλευρές τριγώνων, η ιδιαίτερη μορφή της γραφικής αναπαράστασης εμβαδών που είχαμε στο βιβλίο β μέχρι αυτό το σημείο δε μας βοηθάει να εικονίσουμε τις προτάσεις με τον ίδιο τρόπο.

Η πρόταση β.ιβ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στα βιβλία β και γ.

13) Πρόταση β.ιγ (Θεώρημα)

’Εν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ’ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.



Σχήμα β.ιγ

Με βάση το σχήμα, σε αυτή την πρόταση αποδεικνύεται το εξής: ΑΓ^2 = ΑΒ^2 +ΒΓ^2 – 2ΑΒΒΓ cos (ΑΒΓ). Δεδομένης της αλληλοσυμπλήρωσης των προτάσεων β.ιβ – β.ιγ, για την απόδειξή τους χρησιμοποιούνται οι ίδιες προτάσεις του βιβλίου α: α.ιβ και α.μζ. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιβ: καὶ *ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ*. Η πρόταση β.ζ: *'Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ*. Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση α.μζ, 2 φορές: 1) *ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ*, 2) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ*.

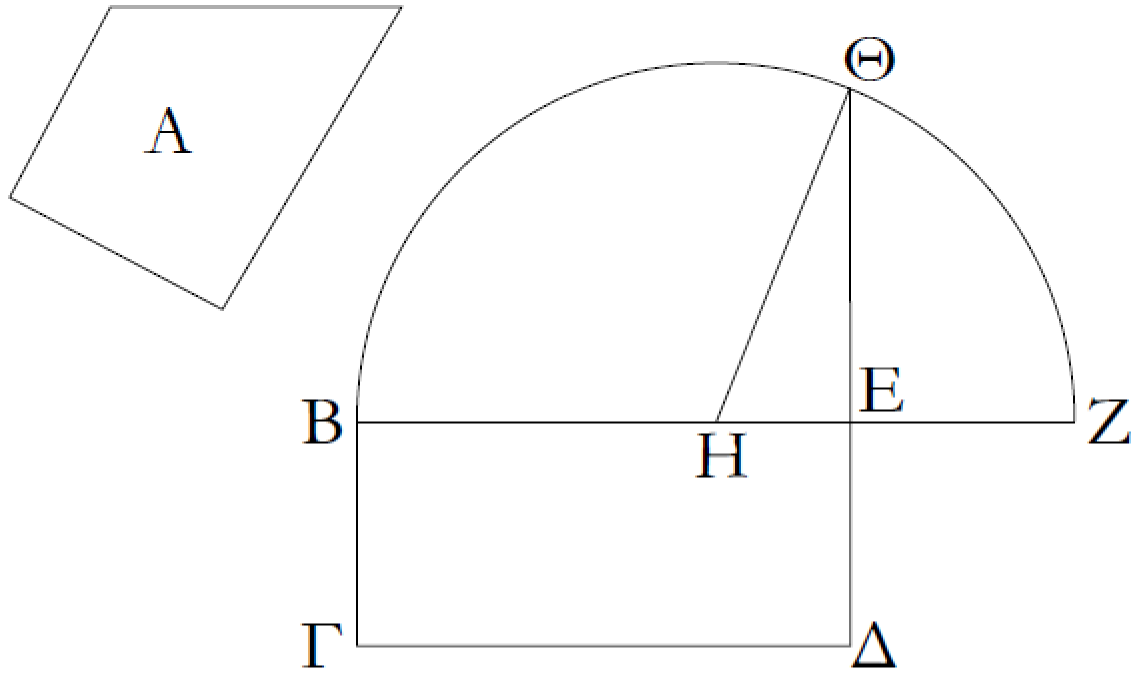
Όπως φαίνεται από το κείμενο, αυτή η πρόταση είναι απερίφραστα διατυπωμένη για οξυγώνια τρίγωνα. Και αν υπάρχει οποιαδήποτε αμφιβολία για το αν ο περιορισμός είναι πλήρως επιθυμητός, η πρόταση μιλάει για ένα τρίγωνο που περιέχεται από μία από τις πλευρές που περιέχει την οξεία γωνία και την ευθεία γραμμή που φτάνει μέχρι τη μεσοκάθετο αυτής της οξείας γωνίας.

Αντίθετα, είναι παράξενο το ότι μιλάει για τετράγωνο στην πλευρά απέναντι από την οξεία γωνία. Και ξανά η έκθεση (settling-out) ξεκινάει με: Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν. Δηλαδή ποιό το νόημα να πει ότι η γωνία Β είναι οξεία, δεδομένου ότι πριν λέει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο;

Η πρόταση β.ιγ δεν χρησιμοποείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στα βιβλία β και γ.

14) Πρόταση β.ιδ (Πρόβλημα)

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.



Σχήμα β.ιδ

Στην τελευταία πρόταση αυτού του βιβλίου γίνεται το εξής: Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. Χρησιμοποιείται η πρόταση α.με: *Συνεστάτω γὰρ τῷ Α ἐυθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ*. Η πρόταση α.γ: *καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ*. Η πρόταση α.ι: *καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η*. Η πρόταση β.ε: *’Επεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ* *ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ*. Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση α.μζ: *τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ τετράγωνα*.

Ενώ οι προτάσεις β.ιβ και β.ιγ είναι συμπληρώματα του πυθαγόρειου θεωρήματος (πρόταση α.μζ), δηλαδή αυτό που λέμε σήμερα γενικευμένα πυθαγόρεια θεωρήματα, η πρόταση β.ιδ συμπληρώνει τη θεωρία των μετασχηματισμών εμβαδών. Όπως έχουμε δει οι προτάσεις α.μβ, α.μδ και α.με μας βοηθάνε να κατασκευάσουμε ένα παραλληλόγραμμο που έχει τι δοσμένη πλευρά και γωνία, αλλά και ένα δοσμένο τυχαίο εμβαδόν. Επίσης, το παραλληλόγραμμο μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισεμβαδικό τρίγωνο με την ίδια δοσμένη πλευρά και γωνία. Έτσι μπορούμε να φτιάξουμε ένα ισεμβαδικό τετράγωνο.

Επίσης η πρόταση α.μζ μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο ίσο με το άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού άλλων τετραγώνων ή τη διαφορά μεταξύ δύο τετραγώνων.

Το πρόβλημα που παρέμενε άλυτο[36], ήταν αυτό του μετασχηματισμού ενός ορθογωνίου σε ένα τετράγωνο με ίσο εμβαδόν. Η λύση αυτού του προβλήματος που δόθηκε στην πρόταση β.ιδ, είναι προφανώς ισοδύναμη με την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας, ή με την επίλυση της καθαρά τετραγωνικής εξίσωσης: x^2 = ab.

Ο μαθηματικός Robert Simson[37] (1687 – 1768), επισήμανε ότι στην κατασκευή που δίνεται από τον Ευκλείδη, δεν ήταν απαραίτητο να τοποθετηθεί η φράση: *ἔστω μείζων ἡ ΒΕ*, δεδομένου ότι η κατασκευή δεν επηρεάζεται από την ερώτηση αν η ΒΕ ή η ΕΔ είναι μεγαλύτερη.

Αυτό είναι σωστό και επιστημονικά αποδεκτό στη σημερινή εποχή, αλλά δεδομένου ότι όλες οι λέξεις κάνουν μικρή βλάβη, ο Ευκλείδης ίσως είχε θεωρήσει ότι είναι πιο βολικό και καθαρό να έχει τα σημεία Β, Η, Ε, Ζ στην ίδια σχετική θέση με τα αντίστοιχα Α, Γ, Δ, Β στο σχήμα της πρόταση β.ε,

[36] Heath, 1908: Τόμος I, σελ. 409
[37] Heath, 1908: Τόμος I, σελ. 410

που παρατίθεται για την απόδειξη της β.ιδ.[38]

Η πρόταση β.ιδ δεν χρησιμοποείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στα βιβλία β και γ.

[38] Heath, 1908: Τόμος I, σελ. 409

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΙΒΛΙΟ Γ

4.1 Ορισμοί

Ορισμός α: *Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.*

Ορισμός β: *Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.*

Ορισμός γ: *Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.*

Ορισμός δ: *Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν.*

Ορισμός ε: *Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.*

Ορισμός ϛ: *Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.*

Ορισμός ζ: *Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.*

Ορισμός η: *Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.*

Ορισμός θ: *Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.*

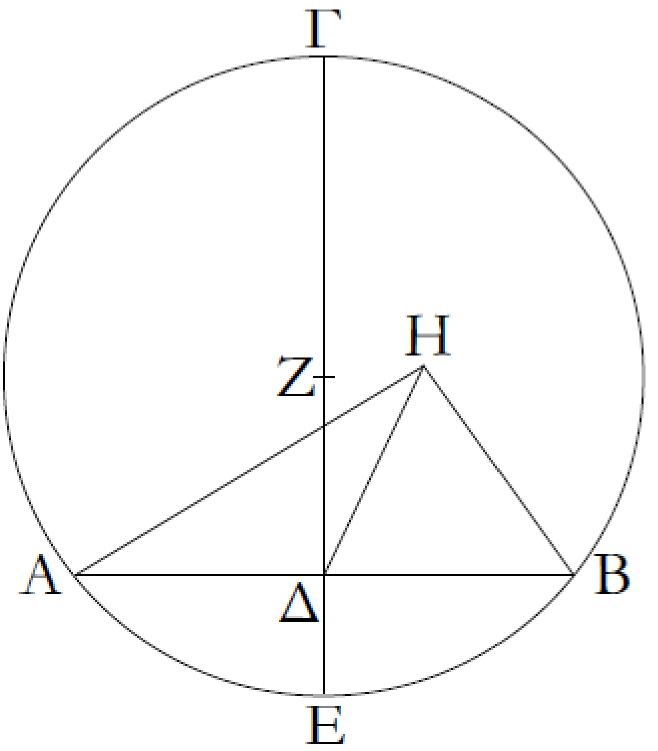
Ορισμός ι: *Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.*

Ορισμός ια: *Ὅμοία τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.*

4.2 Προτάσεις

1) Πρόταση γ.α (Πρόβλημα)

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.



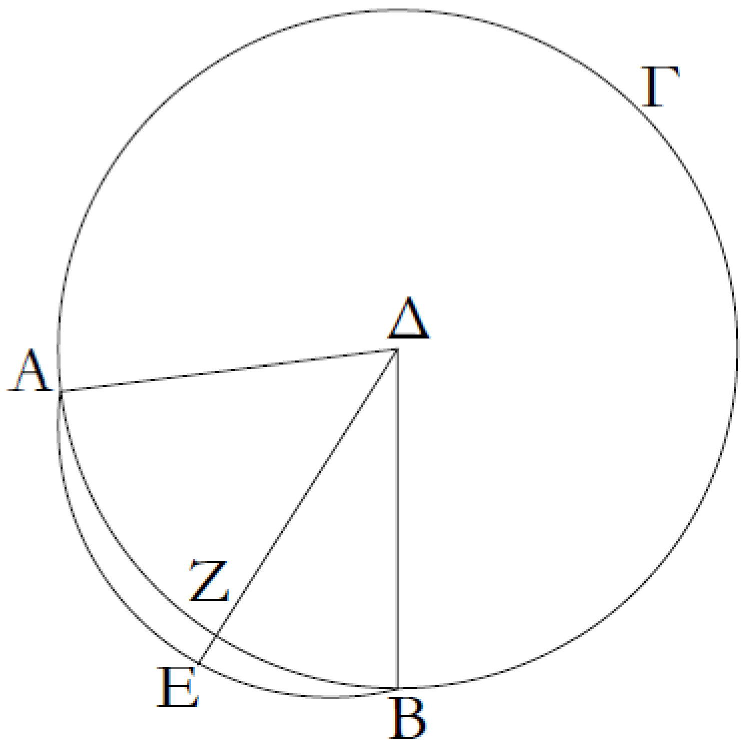
Σχήμα γ.α

Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.ι, 2 φορές: 1) *εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον*, 2) *καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ*. Η πρόταση α.ια: *καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ*. Η πρόταση α.η: *δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δύο ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστιν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἴση ἐστίν*. Τέλος, χρησιμοποιείται ο όρος α.ι: *ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ’ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν*.

Η πρόταση γ.α χρησιμοποιείται συνολικά 21 φορές σε 17 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.β, 1 φορά στην πρόταση γ.γ, 1 φορά στην πρόταση γ.δ, 1 φορά στην πρόταση γ.η, 1 φορά στην πρόταση γ.θ, 2 φορές στην πρόταση γ.ι, 2 φορές στην πρόταση γ.ια, 2 φορές στην πρόταση γ.ιβ, 2 φορές στην πρόταση γ.ιγ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιδ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιζ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιη, 1 φορά στην πρόταση γ.κα, 1 φορά στην πρόταση γ.κη, 1 φορά στην πρόταση γ.κθ, 1 φορά στην πρόταση γ.λε, 1 φορά στην πρόταση γ.λζ)

2) Πρόταση γ.β (Θεώρημα)

᾿Εὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



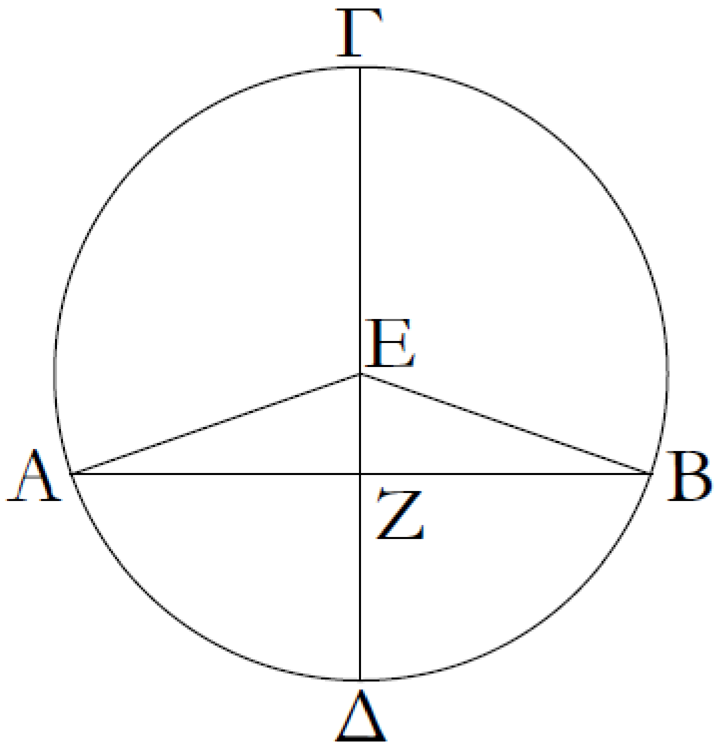
Σχήμα γ.β

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου*. Η πρόταση α.ε, 2 φορές: 1) *᾿Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ*, 2) *ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ*. Η πρόταση α.ις: *καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιθ: *μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ*.

Η πρόταση γ.β χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.ιγ, 1 φορά στην πρόταση γ.ις)

3) Πρόταση γ.γ (Θεώρημα)

'Εὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.



Σχήμα γ.γ

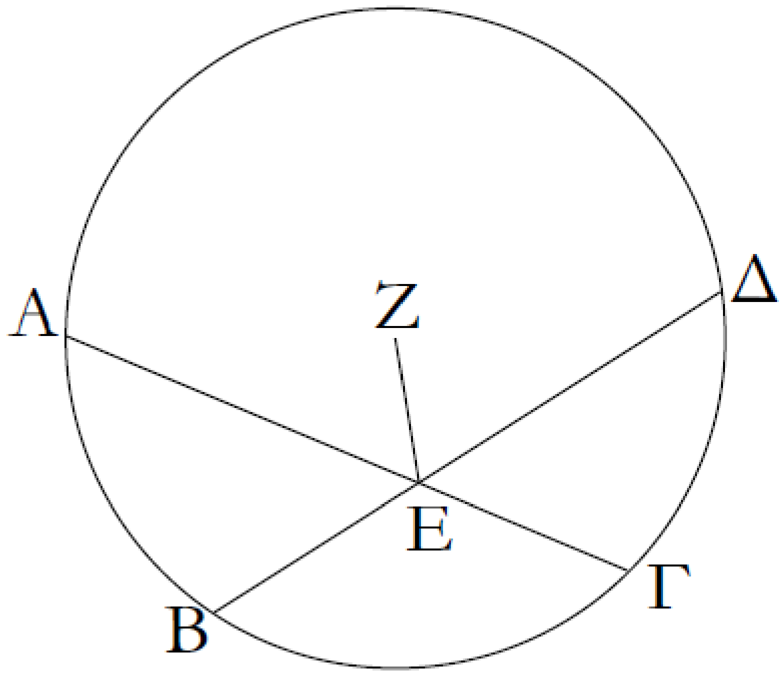
Για την απόδειξη της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε*. Η πρόταση α.η: *Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δυσὶν ἴσαι [εἰσίν]· καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση ἐστίν*. Ο όρος α.ι: *ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν*. Η πρόταση α.ε: *ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ*

ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.κς: *δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι ΕΑΖ, ΕΖΒ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.*

Η πρόταση γ.γ χρησιμοποιείται συνολικά 5 φορές σε 4 προτάσεις (2 φορές στην πρόταση γ.δ, 1 φορά στην πρόταση γ.ιδ, 1 φορά στην πρόταση γ.λε, 1 φορά στην πρόταση γ.λς)

4) Πρόταση γ.δ (Θεώρημα)

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ δὶα τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



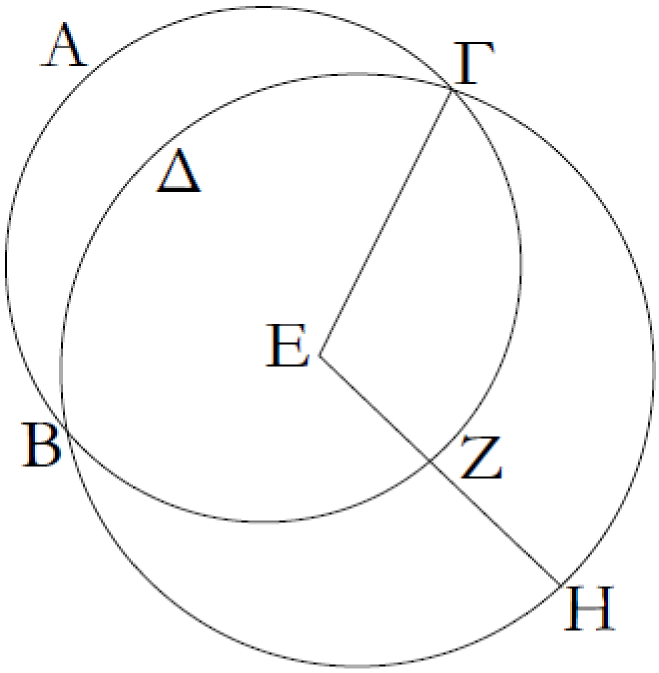
Σχήμα γ.δ

Αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας την πρόταση γ.α: *καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ.* Την πρόταση γ.γ, 2 φορές: 1) *Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΑ*, 2) *πάλιν,* *ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.*

Η πρόταση γ.δ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

5) Πρόταση γ.ε (Θεώρημα)

’Εὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



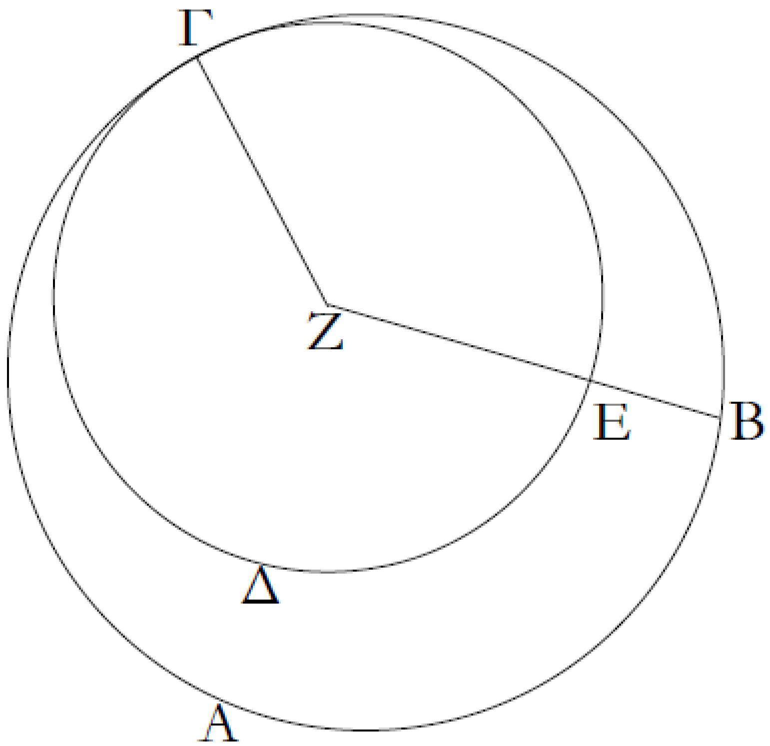
Σχήμα γ.ε

Αυτή η πρόταση όπως και η γ.ς αποδεικνύεται χωρίς να χρησιμοποιηθεί κάποια προηγούμενη πρόταση. Χρησιμοποιούνται οι βασικοί όροι και αιτήματα του βιβλίου α που αφορούν τον κύκλο.

Η πρόταση γ.ε χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.ι)

6) Πρόταση γ.ς (Θεώρημα)

᾿Εὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Σχήμα γ.ς

Αυτή η πρόταση όπως και η γ.ε αποδεικνύεται χωρίς να χρησιμοποιηθεί κάποια προηγούμενη πρόταση. Χρησιμοποιούνται οι βασικοί όροι και αιτήματα του βιβλίου α που αφορούν τον κύκλο.

Ίσως οι προτάσεις γ.ε και γ.ς θα μπορούσαν να τοποθετηθούν μαζί[39].

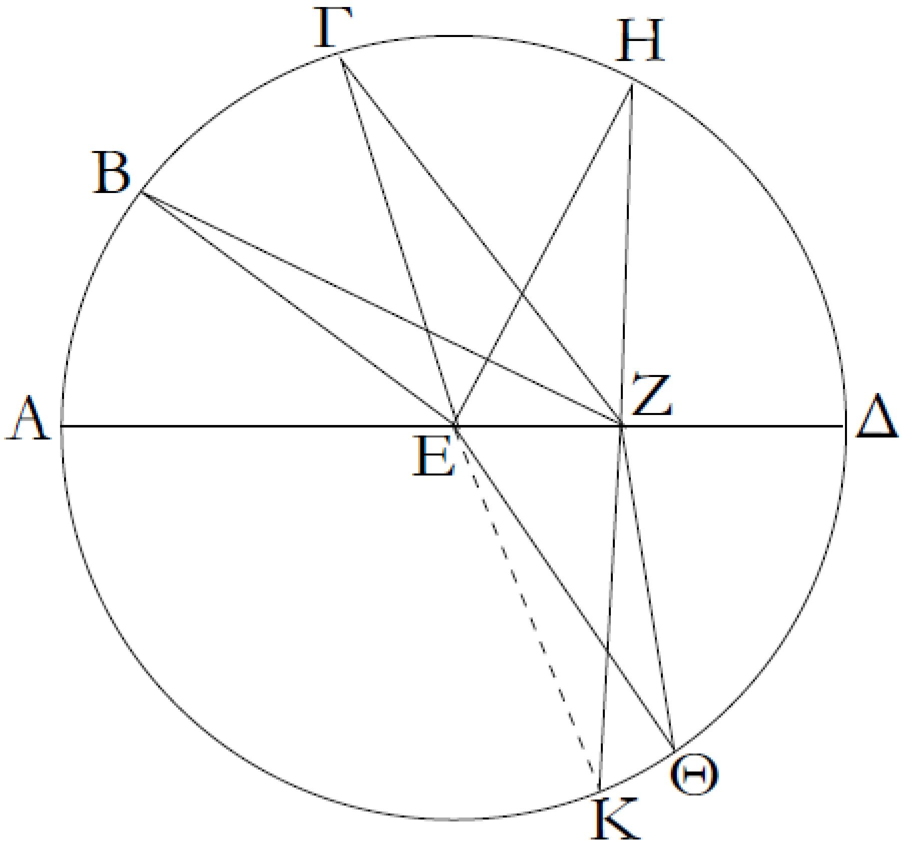
Η πρόταση γ.ς δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

7) Πρόταση γ.ζ (Θεώρημα)

᾿Εὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ

[39] Heath, 1908: Τόμος ΙΙ, σελ. 12

κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς δὶα τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.



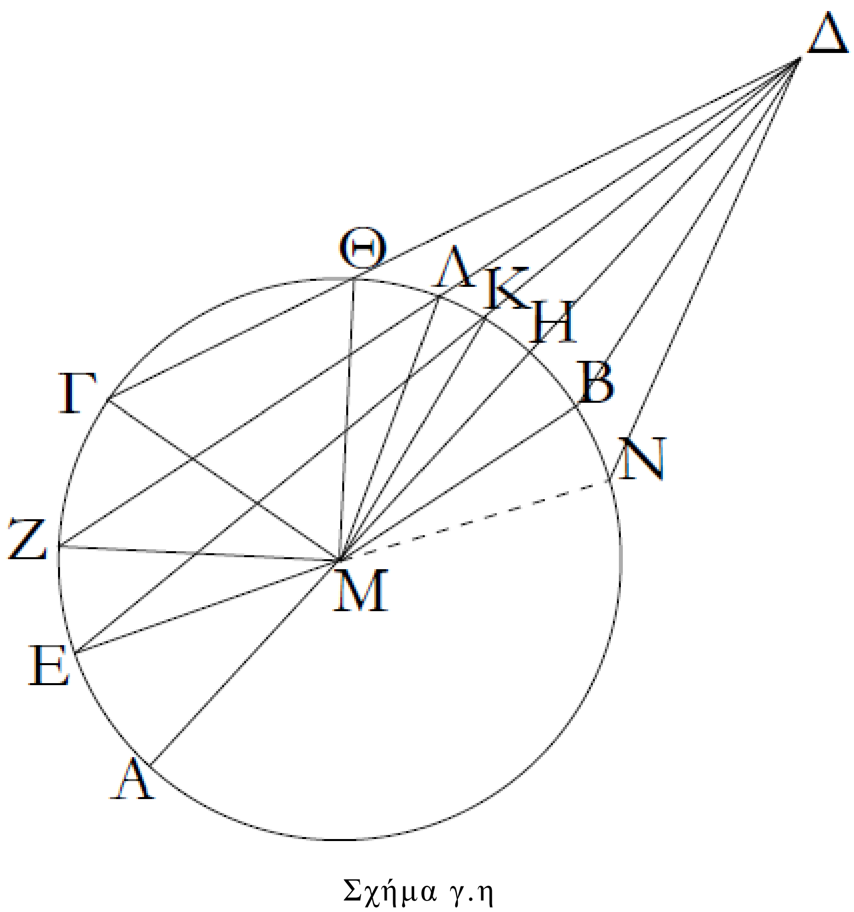
Σχήμα γ.ζ

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση α.κ, 2 φορές: 1) *καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα ΕΒ, ΕΖ τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν*, 2) *Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν*. Η πρόταση α.κδ: *δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστίν*. Η πρόταση α.κγ: *συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν*.

Η πρόταση γ.ζ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

8) Η πρόταση γ.η (Θεώρημα)

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.



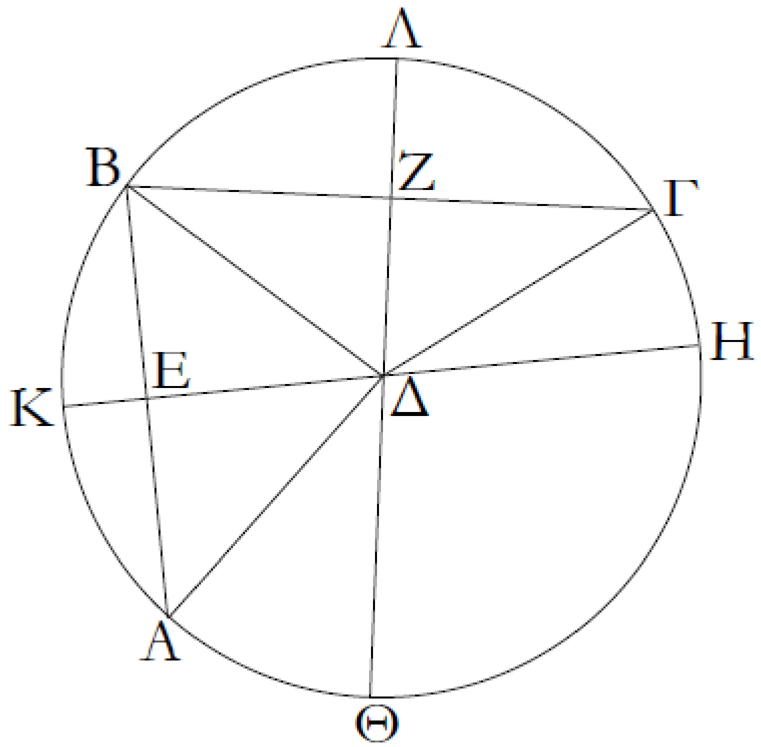
Σχήμα γ.η

Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Μ*. Η πρόταση α.κ, 2 φορές: 1) *ἀλλ’ αἱ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσιν*, 2) *Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν*. Η πρόταση α.κδ: *αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν*. Η πρόταση α.κα: *καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν*. Η πρόταση α.κγ: *συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ*. Τέλος, στην απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δύο ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν*.

Η πρόταση γ.η δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

9) Πρόταση γ.θ (Θεώρημα)

’Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπο δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.



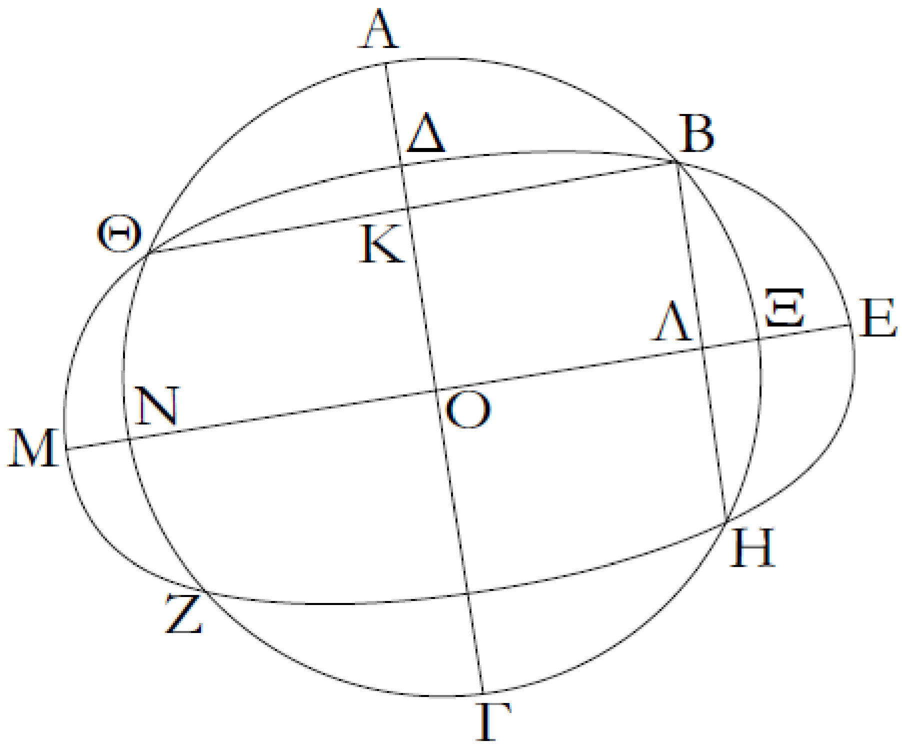
Σχήμα γ.θ

Για την απόδειξη της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση α.ι: *'Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα*. Η πρόταση α.η: *δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δύο ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν.* *Ο όρος α.ι: ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν*. Η πρόταση γ.α: *καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου*.

Η πρόταση γ.θ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.κε)

<u>10) Πρόταση γ.ι (Θεώρημα)</u>

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.



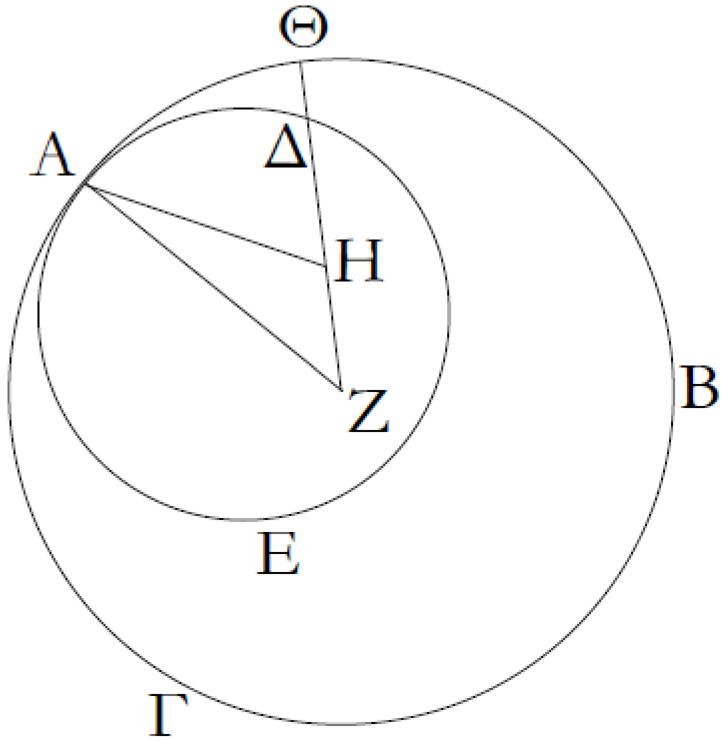
Σχήμα γ.ι

Σε αυτή την πρόταση, χρησιμοποιείται η εις άτοπον απαγωγή. Αλλά ο Ευκλείδης υποθέτει ότι *Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο τὰ Β, Η, Ζ, Θ*. Δηλαδή αποδεικνύτεται ότι δύο κύκλοι τέμνονται το πολύ σε δύο σημεία, γιατί αν υποθέσουμε ότι τέμνονται σε 4 καταλήγουμε σε άτοπο. Η απόδειξη είναι όμοια και πιο εύκολη για 3 σημεία. Για την απόδειξη της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση α.ια: *καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεῖα*. Η πρόταση γ.α, 2 φορές: 1) *'Επεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου*. 2) *πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΝΞ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου*. Τέλος χρησιμοποιείται η πρόταση γ.ε: *δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*.

Η πρόταση γ.ι χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.κδ)

11) Πρόταση γ.ια (Θεώρημα)

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.



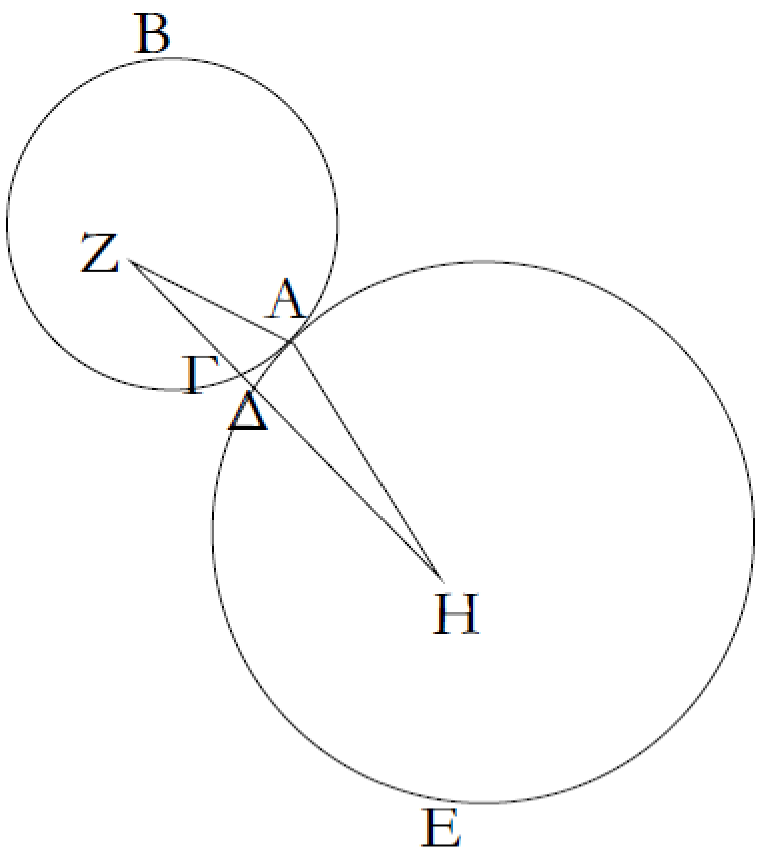
Σχήμα γ.ια

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιούνται οι εξής προτάσεις: Η πρόταση γ.α, 2 φορές: 1) *καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ*, 2) *τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η*. Τέλος, η πρόταση α.κ: *Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ, τουτέστι τῆς ΖΘ, μείζονές εἰσιν.*

Η πρόταση γ.ια συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.ιγ)

12) Πρόταση γ.ιβ (Θεώρημα)

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.



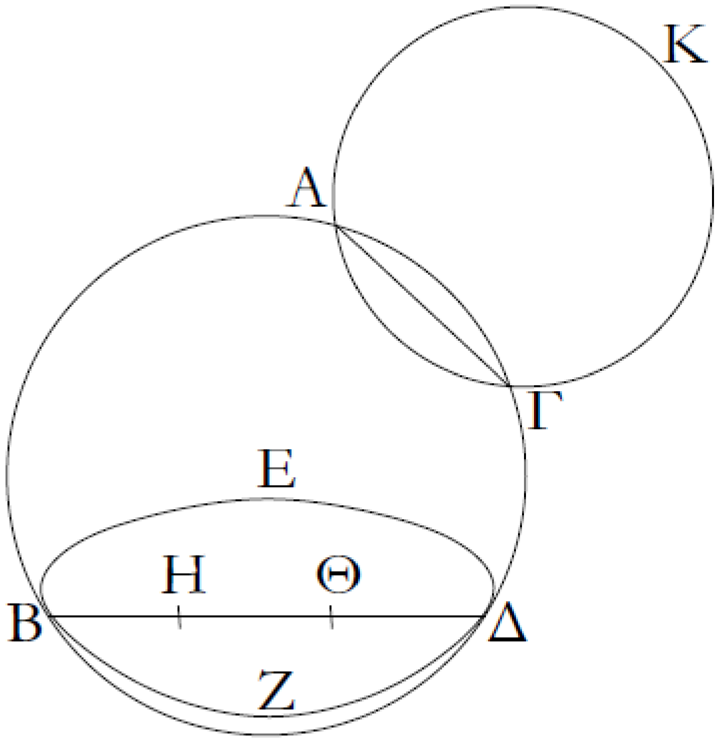
Σχήμα γ.ιβ

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α, 2 φορές: 1) *καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ*, 2) *τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.κ: *ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν· ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*.

Η πρόταση γ.ιβ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

13) Πρόταση γ.ιγ (Θεώρημα)

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.



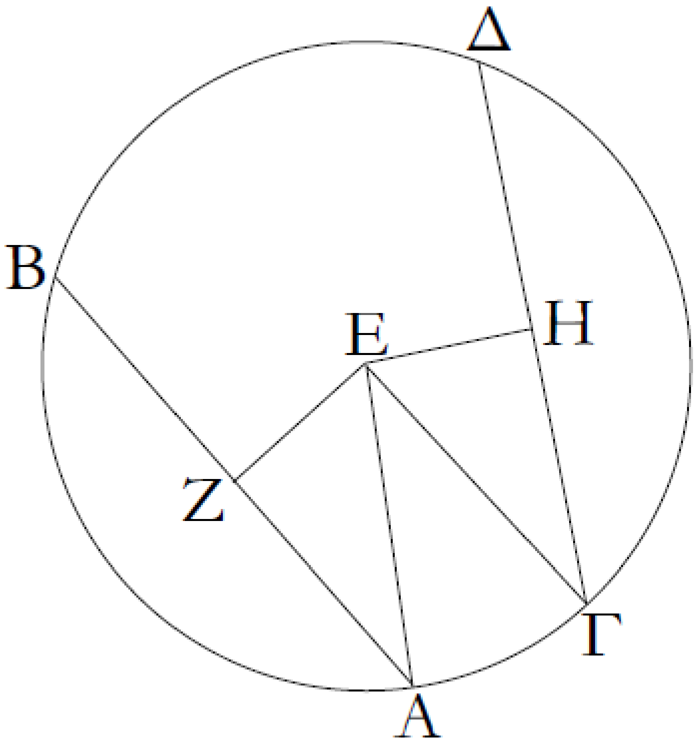
Σχήμα γ.ιγ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α, 2 φορές: 1) *Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου κέντρον τὸ Η*, 2) *τοῦ δὲ ΕΒΖΔ τὸ Θ*. Η πρόταση γ.ια: *Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσεῖται*. Η πρόταση γ.β: *Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται· ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓΔ ἐντὸς ἔπεσεν*. Ο όρος γ.γ: *ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓΔ ἐντὸς ἔπεσεν, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτός· ὅπερ ἄτοπον*.

Η πρόταση γ.ιγ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

14) Πρόταση γ.ιδ (Θεώρημα)

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



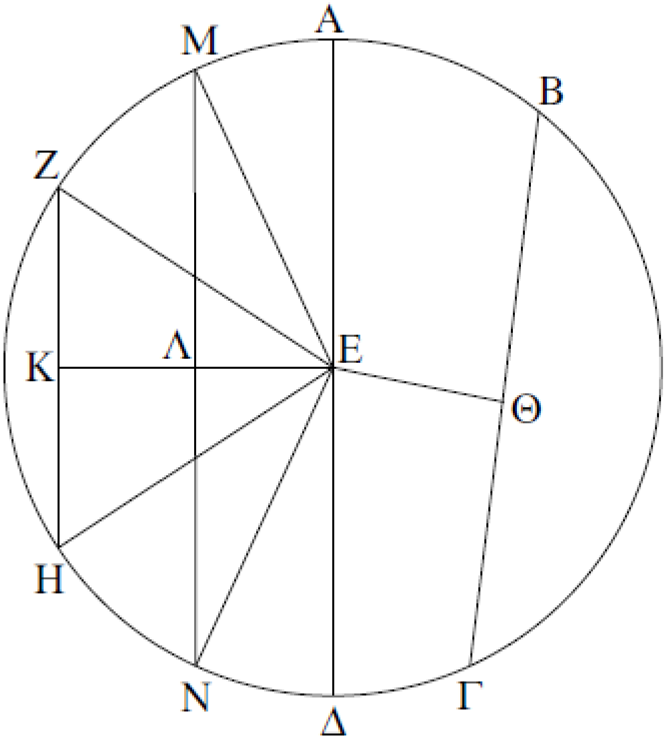
Σχήμα γ.ιδ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Ε.* Επίσης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιβ: *καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ.* Η πρόταση γ.γ: *Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις δὶα τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.* Η πρόταση α.μζ, 4 φορές: 1) *ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΕΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία·*, 2) *τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία*, 3) *ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ*, 4) *τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ.* Τέλος χρησιμοποιείται ο όρος γ.δ: *Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτέστιν ἴση ἔστω ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ.*

Η πρόταση γ.ιδ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.ιε)

15) Πρόταση γ.ιε (Θεώρημα)

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.



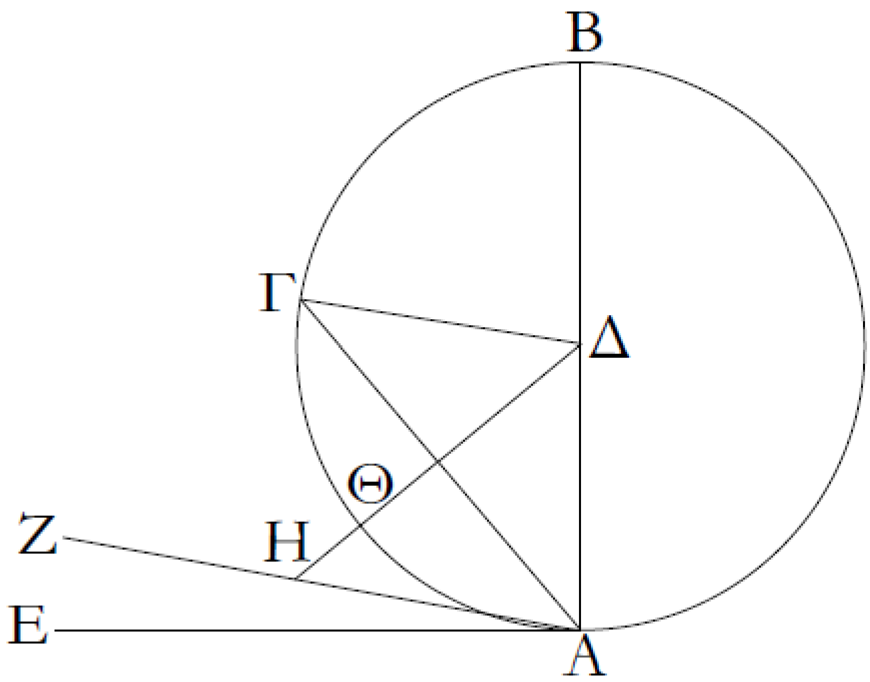
Σχήμα γ.ιε

Εδώ ο Ευκλείδης αναφέρει: *καὶ ἔγγιον μὲν τῆς ΑΔ διαμέτρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ*. Μάλλον θέλει να πει: *καὶ ἔγγιον μὲν του Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ*. Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιβ: *Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ*. Ο όρος γ.ε: *καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ*. Η πρόταση α.γ: *κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ*. Η πρόταση γ.ιδ: *Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ*. Η πρόταση α.κ: *ἀλλ' αἱ μὲν ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσιν*. Η πρόταση α.κδ: *καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων [ἐστίν], βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν*.

Η πρόταση γ.ιε δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

16) Πρόταση γ.ις (Θεώρημα)

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.



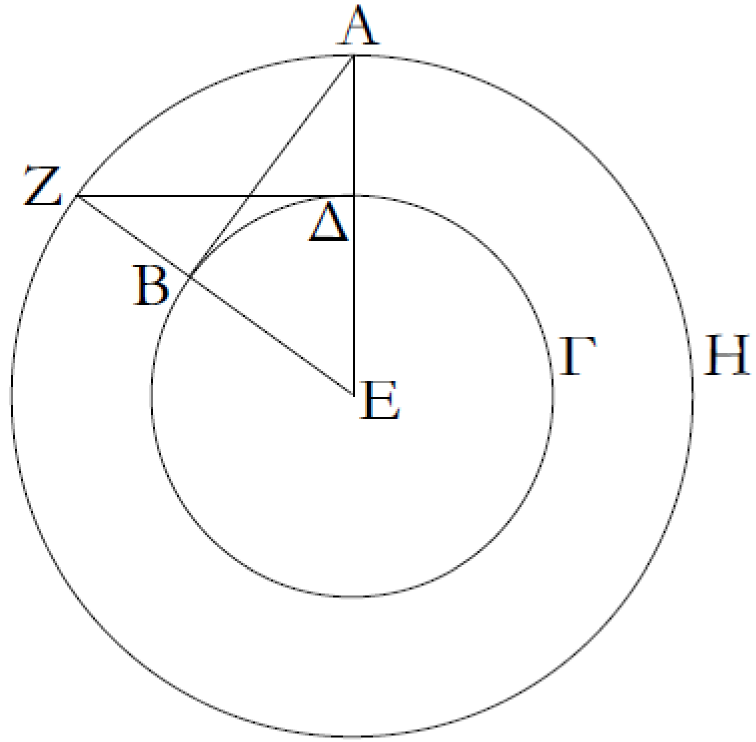
Σχήμα γ.ις

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ια: *ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη*. Η πρόταση α.ε: *'Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ*. Η πρόταση α.ιζ: *τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*. Η πρόταση α.ιβ: *καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ*. Η πρόταση α.ιθ: *καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ, μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ*. Τέλος, στο πόρισμα χρησιμοποιείται η πρόταση γ.β: *ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ* *συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη*.

Η πρόταση γ.ις χρησιμοποιείται συνολικά 5 φορές σε 3 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.ιζ, 3 φορές στην πρόταση γ.λγ, 1 φορά στην πρόταση γ.λζ)

17) Πρόταση γ.ιζ (Πρόβλημα)

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



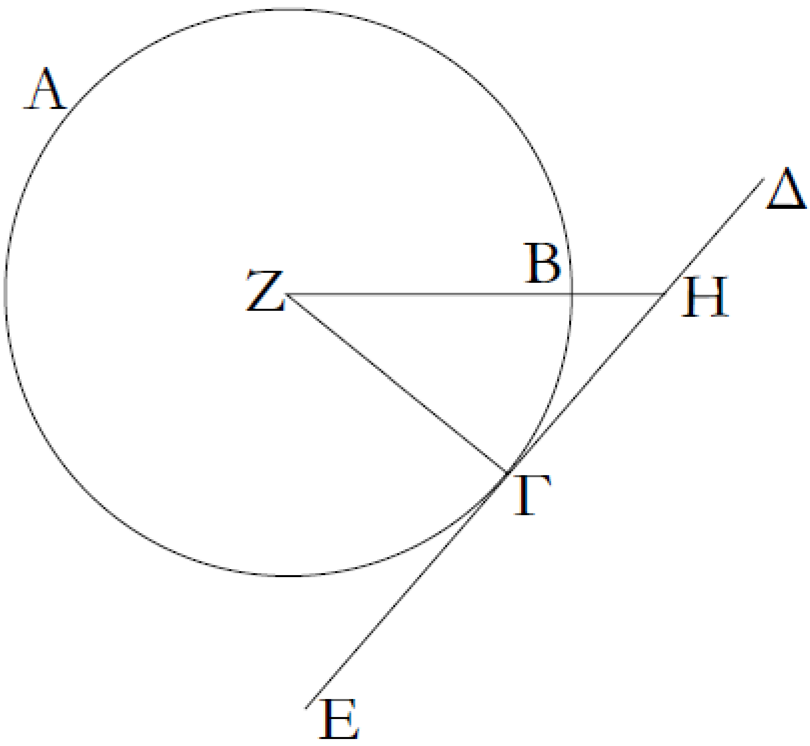
Σχήμα γ.ιζ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε*. Η πρόταση α.ια: *καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ*. Η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν πρὸς τῷ Ε· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ*. Τέλος, χρησιμοποιείται μια φορά το πόρισμα της πρόταση γ.ις: *ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ’ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΔ* *κύκλου.*

Η πρόταση γ.ιζ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.λζ)

18) Πρόταση γ.ιη (Θεώρημα)

᾿Εὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.



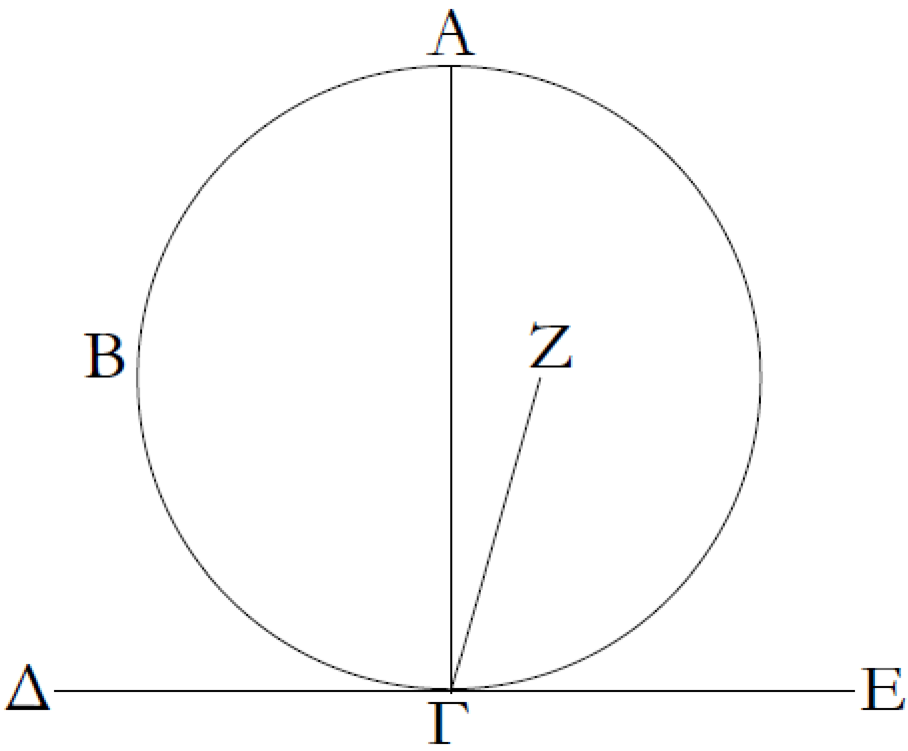
Σχήμα γ.ιη

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ.* Η πρόταση α.ιβ: *ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.* Η πρόταση α.ιζ: *ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ.* Η πρόταση α.ιθ: *ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ.*

Η πρόταση γ.ιη συνολικά 4 φορές σε 3 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.ιθ, 2 φορές στην πρόταση γ.λς, 1 φορά στην πρόταση γ.λζ)

<u>19) Πρόταση γ.ιθ (Θεώρημα)</u>

'Εὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς [γωνίας] εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



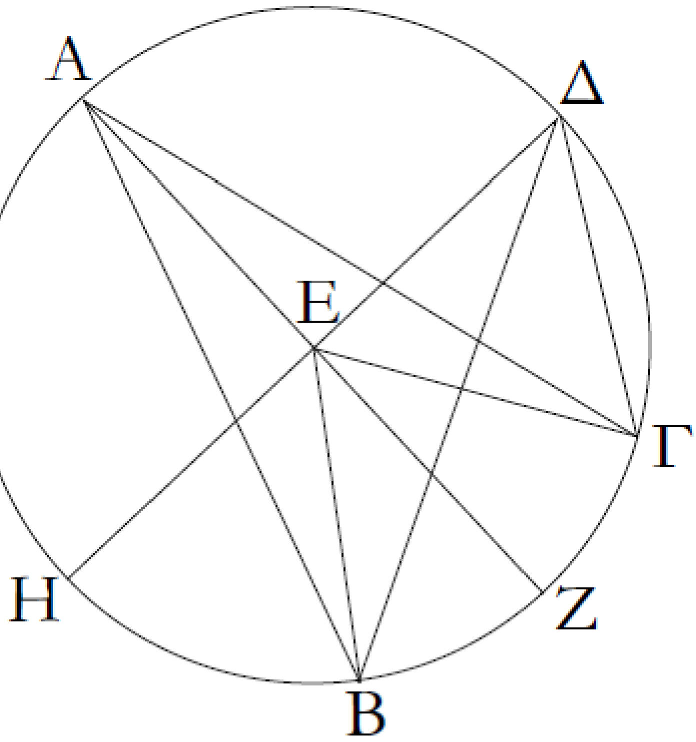
Σχήμα γ.ιθ

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται 2 προτάσεις: Η α.ια: *καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ*, και η γ.ιη: *'Επεὶ [οὖν] κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ.*

Η πρόταση γ.ιθ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.λβ)

<u>20) Πρόταση γ.κ (Θεώρημα)</u>

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχω σιν αἱ γωνίαι.



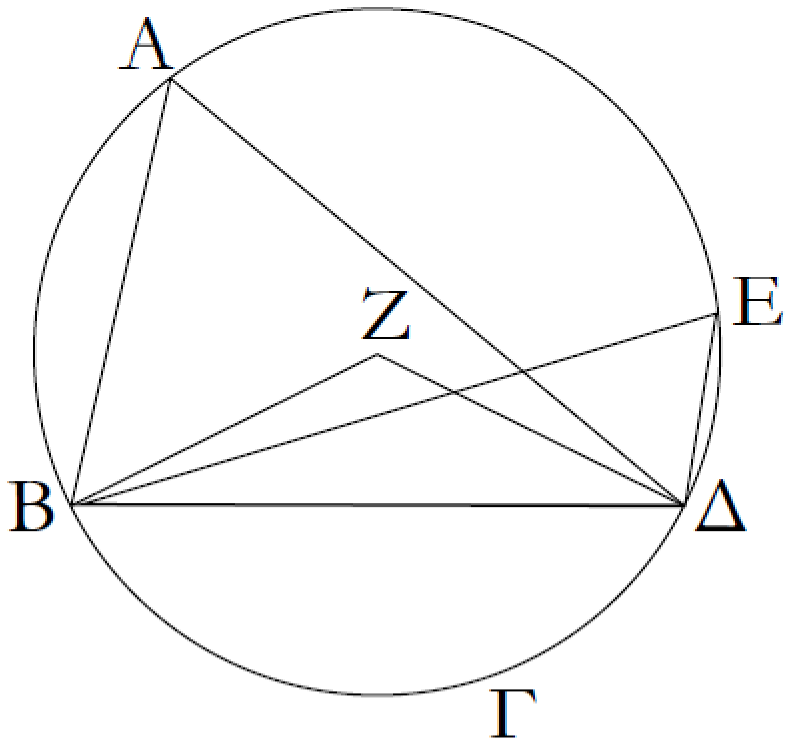
Σχήμα γ.κ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.ε: *Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ*. Η πρόταση α.λβ: *ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ*.

Η πρόταση γ.κ χρησιμοποιείται συνολικά 3 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.κα, 2 φορές στην πρόταση γ.κζ)

<u>21) Πρόταση γ.κα (Θεώρημα)</u>

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



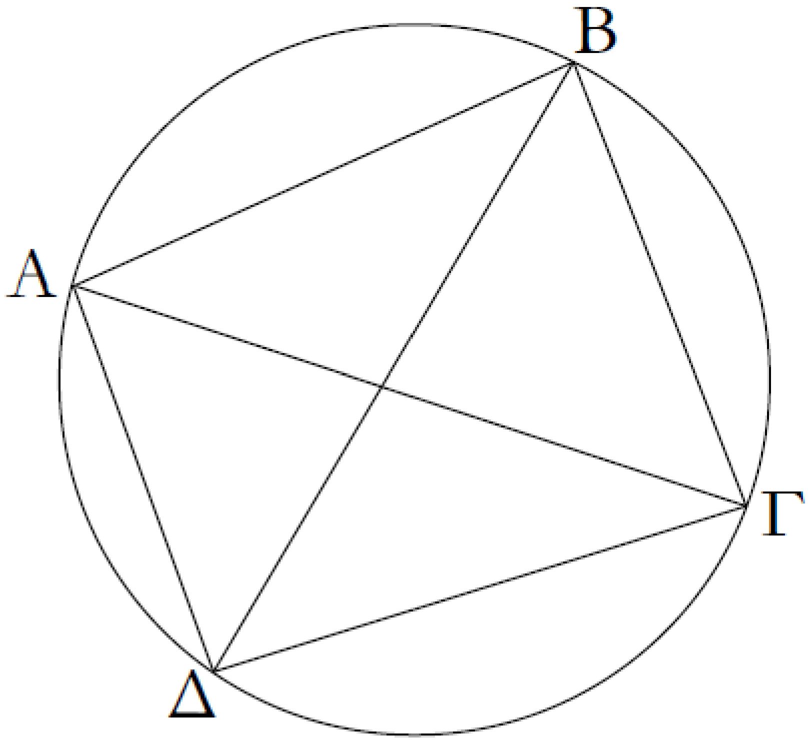
Σχήμα γ.κα

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ*. Και τέλος η πρόταση γ.κ: *Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓΔ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ*.

Η πρόταση γ.κα χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 1 πρόταση (2 φορές στην πρόταση γ.κβ)

22) Πρόταση γ.κβ (Θεώρημα)

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



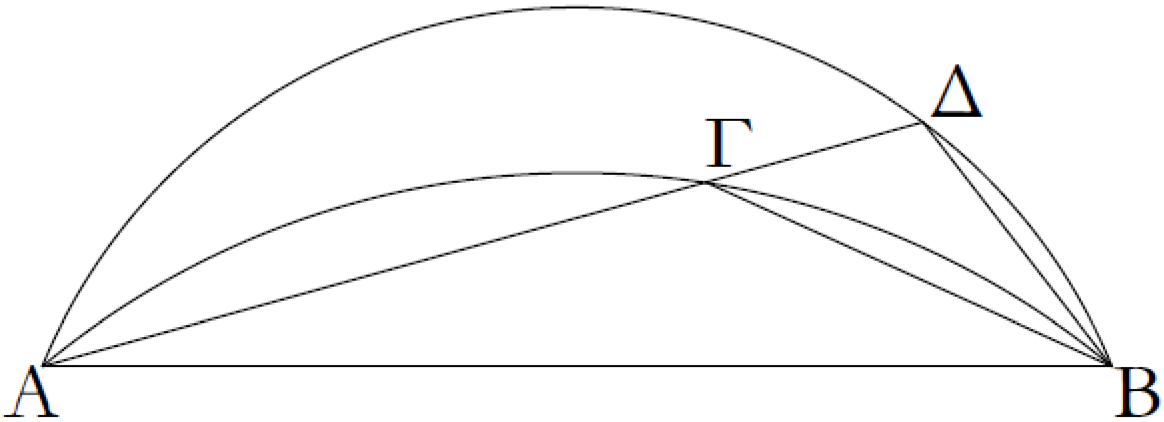
Σχήμα γ.κβ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.λβ: *᾿Επεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*. Και 2 φορές η πρόταση γ.κα: 1) *ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ·*, 2) *ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ*.

Η πρόταση γ.κβ χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορες σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.λα, 1 φορά στην πρόταση γ.λβ)

23) Πρόταση γ.κγ (Θεώρημα)

᾿Επὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.



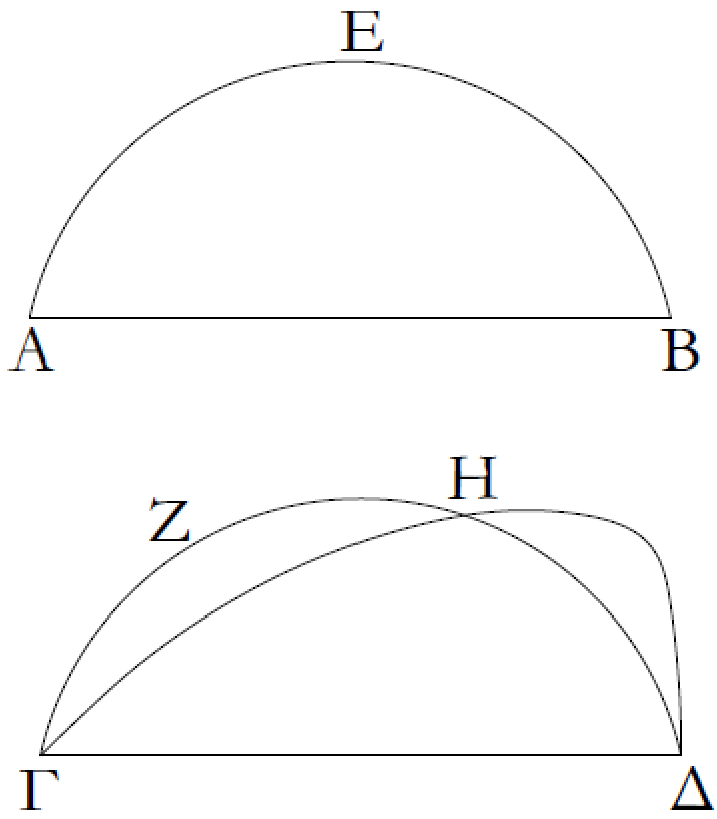
Σχήμα γ.κγ

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιείται ο όρος γ.ια: *ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ*, και η πρόταση α.ις: *ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*.

Η πρόταση γ.κγ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.κδ)

<u>24) Πρόταση γ.κδ (Θεώρημα)</u>

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



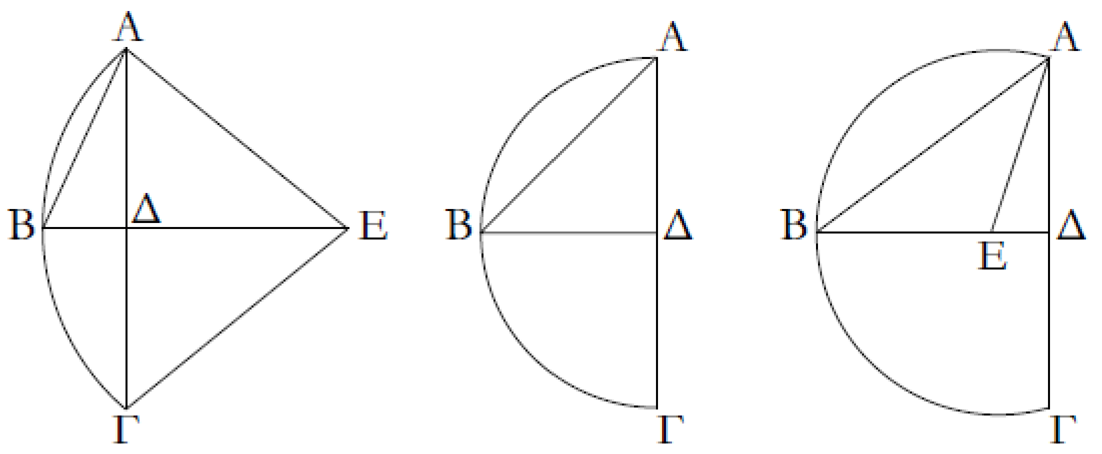
Σχήμα γ.κδ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.κγ: *ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται ἢ ἐκτὸς και μετά ὅπερ ἐστίν ἀδύνατον*. Επίσης, η πρόταση γ.ι: *καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἐστίν ἀδύνατον*. Τέλος, χρησιμοποιείται και η κοινή έννοια δ το α βιβλίου: *ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται*.

Η πρόταση γ.κδ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.κς)

25) Πρόταση γ.κε (Πρόβλημα)

Κύκλου τμήματος δοθέντος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.



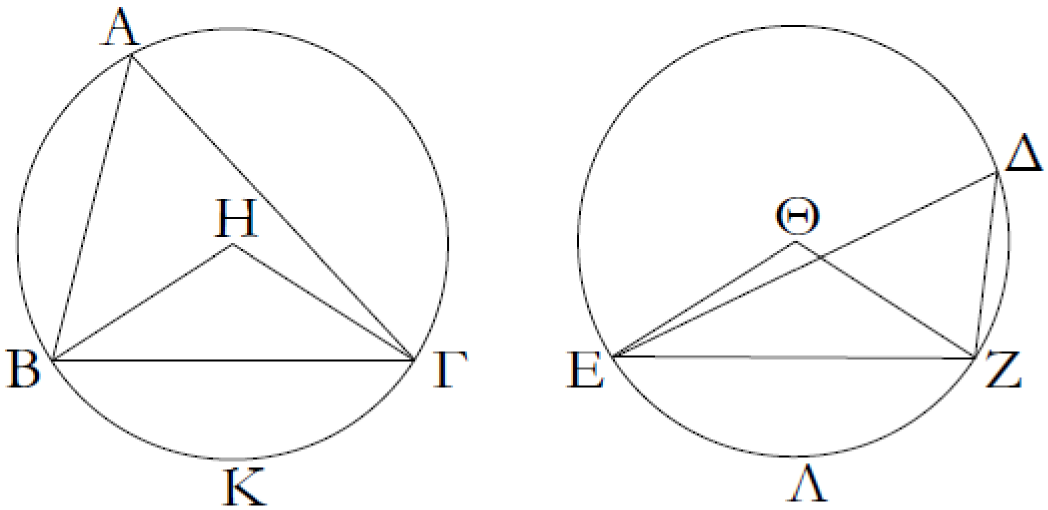
Σχήμα γ.κε

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.ι: *Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ*, η πρόταση α.ια: *καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ*. Η πρόταση α.κγ, 2 φορές: 1) *καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ*, 2) *καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴσην* (εδω ο Ευκλείδης υπονοεί ότι κατασκευάζει τη γωνία ΒΑΕ ή καλύτερα κατασκευάζει γωνία ίση με τη ΒΑΕ). Επίσης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ς, συνολικά 2 φορές: 1) *ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΒ εὐθεῖα τῇ ΕΑ*, 2) *῾Ομοίως [δὲ] κἂν ᾖ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ*. Η πρόταση α.δ*: δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δύο ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταη γ.θ: *αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος*.

Η πρόταση γ.κε χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.κς)

<u>26) Πρόταση γ.κς (Θεώρημα)</u>

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.



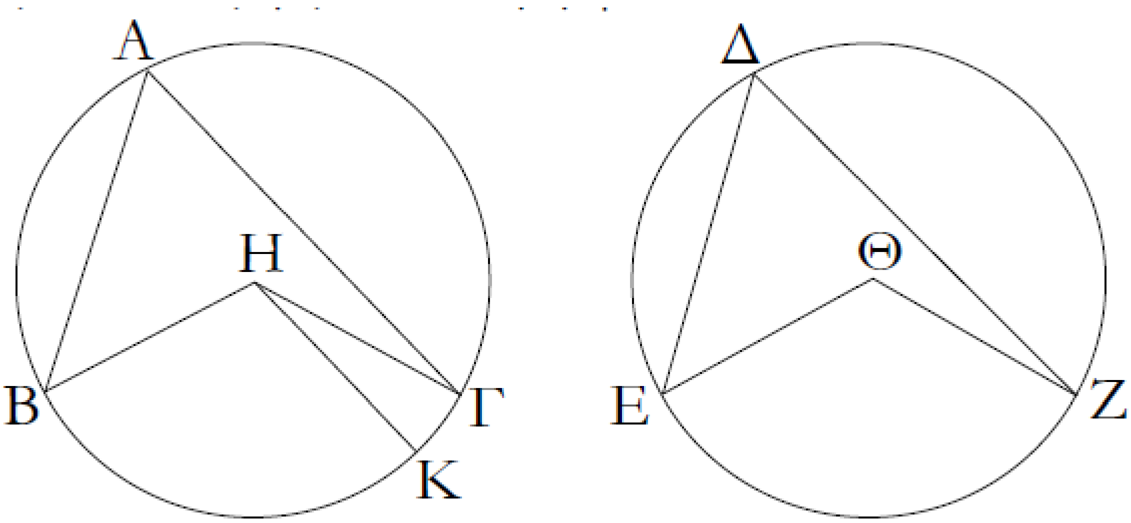
Σχήμα γ.κς

Για την απόδειξη της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση*. Ο όρος γ.ια: *καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι*. Η πρόταση γ.κδ: *τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ*. Η πρόταση γ.κε: *ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος*. Τέλος, χρησιμοποιείται η κοινή έννοια γ του α βιβλίου: *λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση*.

Η πρόταση γ.κς χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.κζ, 1 φορά στην πρόταση γ.κη)

<u>27) Πρόταση γ.κζ (Θεώρημα)</u>

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι *ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.*



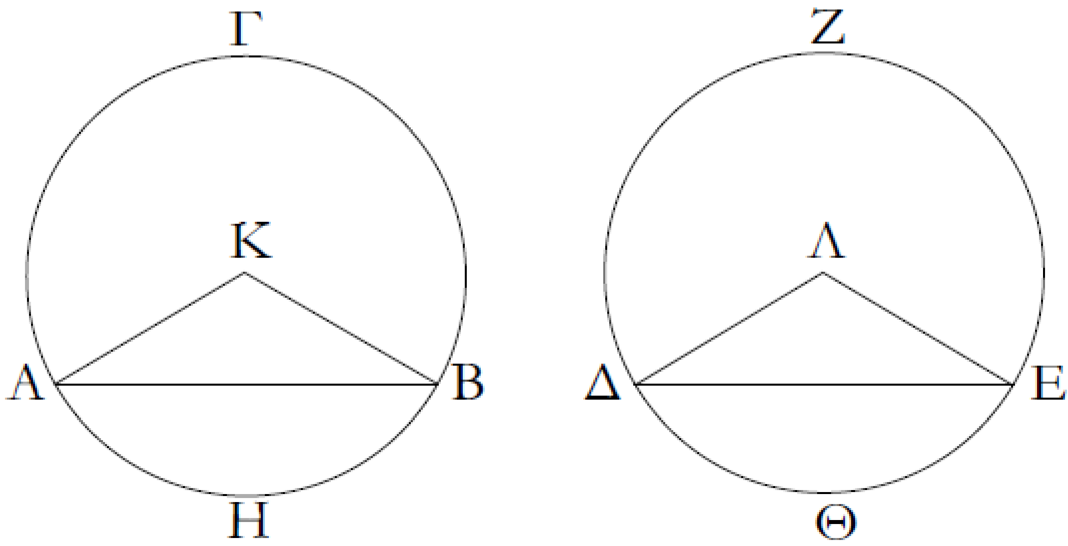
Σχήμα γ.κζ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.κγ: *καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ*. Η πρόταση γ.κς: *αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση γ.κ, 2 φορές: 1) *καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α*, 2) *τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ*.

Η πρόταση γ.κζ χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.κθ)

28) Πρόταση γ.κη (Θεώρημα)

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.



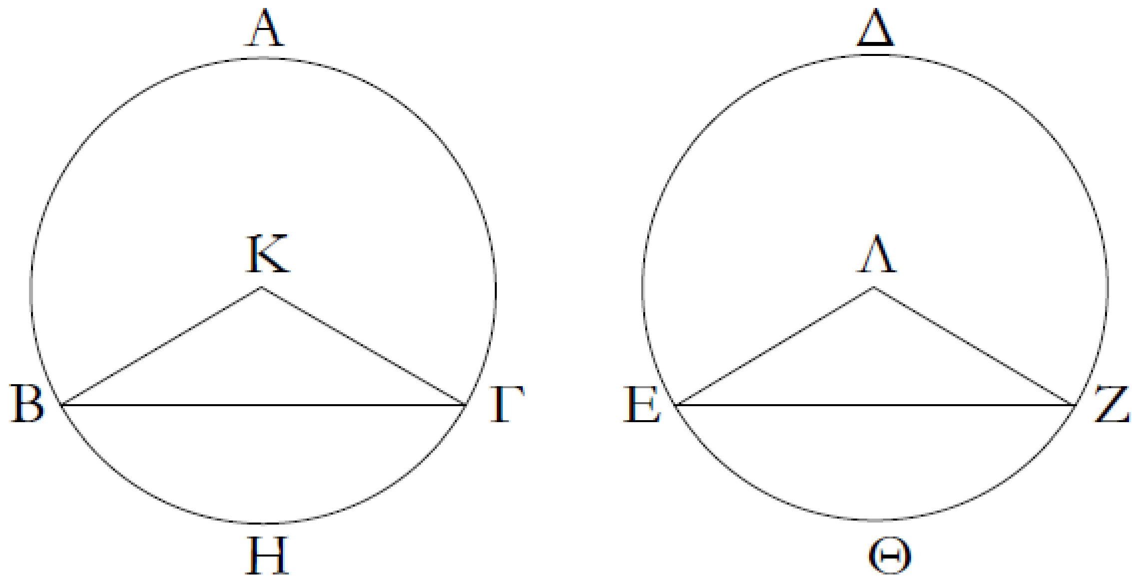
Σχήμα γ.κη

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ, Λ*. Ο όρος γ.α: *Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσίν*. Η πρόταση α.η: *δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΔΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΛΕ ἴση ἐστίν*. Η πρόταση γ.κς: *αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ*.

Η πρόταση γ.κη χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.λ)

29) Πρόταση γ.κθ (Θεώρημα)

'Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.



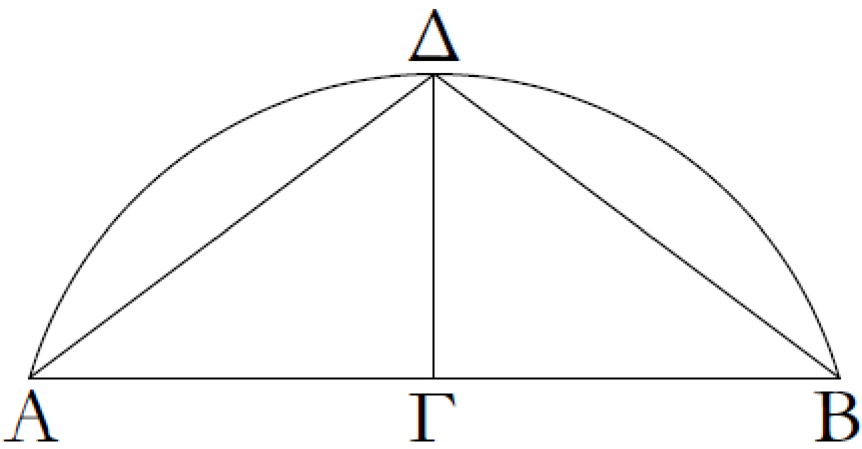
Σχήμα γ.κθ

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ Κ, Λ*. Η πρόταση γ.κζ: *Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ*. Ο όρος γ.α: *καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.δ: *δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν*.

Η πρόταση γ.κθ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

30) Πρόταση γ.λ (Πρόβλημα)

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.



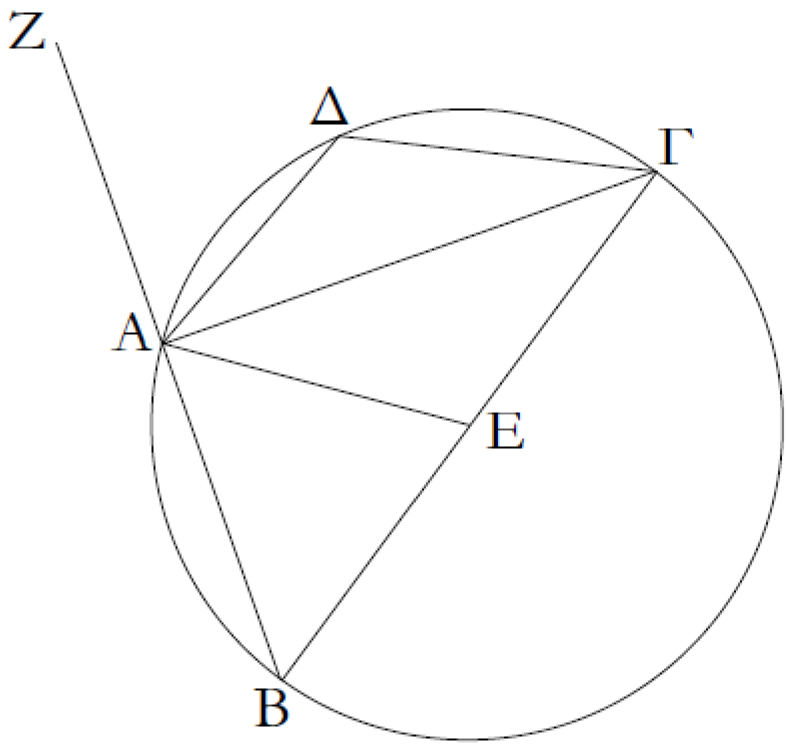
Σχήμα γ.λ

Για την απόδειξή της χρησιμοποιείται η πρόταση α.ι: *καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ*. Η πρόταση α.ια: *καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ*. Η πρόταση α.δ: *δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση γ.κη: *αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι*.

Η πρόταση γ.λ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

31) Πρόταση γ.λα (Θεώρημα)

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔπι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.



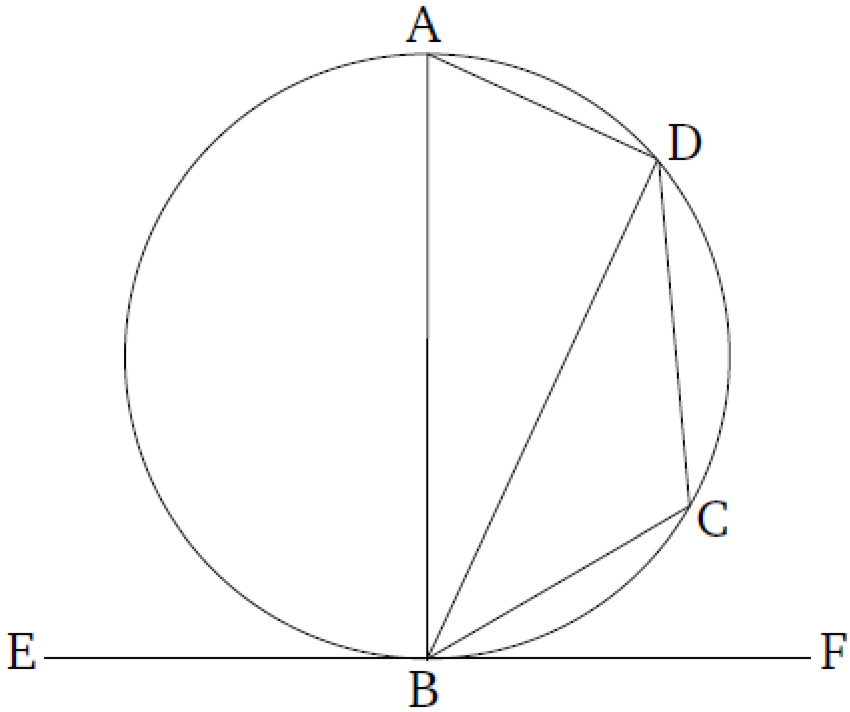
Σχήμα γ.λα

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η πρόταση α.ε, 2 φορές: 1) *Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ*, 2) *πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ*. Η πρόταση α.λβ: *ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαις ἴση*. Ο όρος α.ι: *ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα*. Η πρόταση α.ιζ: *Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τρίγωνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση γ.κβ: *Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν [αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἰσίν]*.

Η πρόταση γ.λα χρησιμοποιείται συνολικά 2 φορές σε 2 προτάσεις (1 φορά στην πρόταση γ.λβ, 1 φορά στην πρόταση γ.λγ)

32) Πρόταση γ.λβ (Θεώρημα)

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.



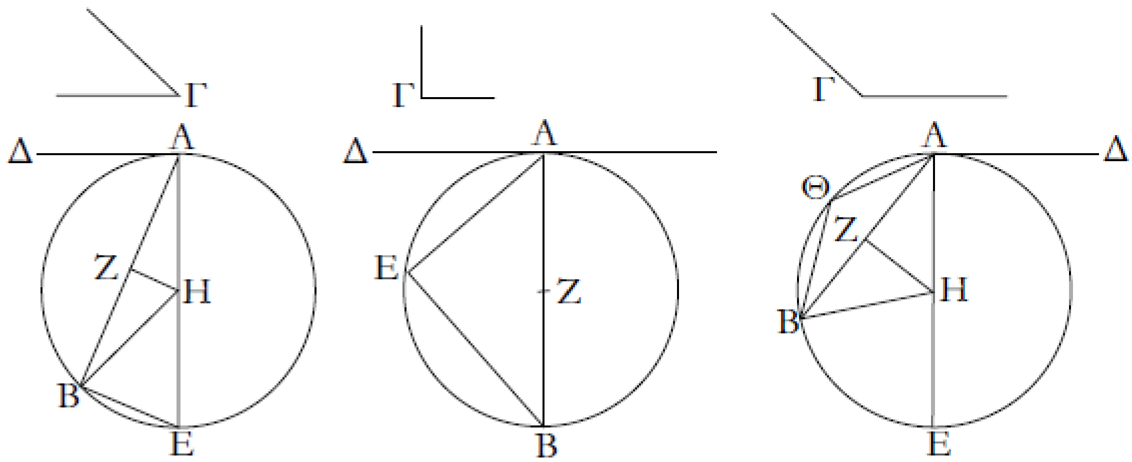
Σχήμα γ.λβ

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση α.ια: *Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ*. Η πρόταση γ.ιθ: *Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου*. Η πρόταση γ.λα: *ἡ ΒΑ ἄρα διάμετός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστιν*. Η πρόταση α.λβ: *λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν*. Η πρόταση γ.κβ: *καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.ιγ: *εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι*.

Η πρόταση γ.λβ χρησιμοποιείται συνολικά 3 φορές σε 2 προτάσεις (2 φορές στην πρόταση γ.λγ, 1 φορά στην πρόταση γ.λδ)

33) Πρόταση γ.λγ (Πρόβλημα)

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



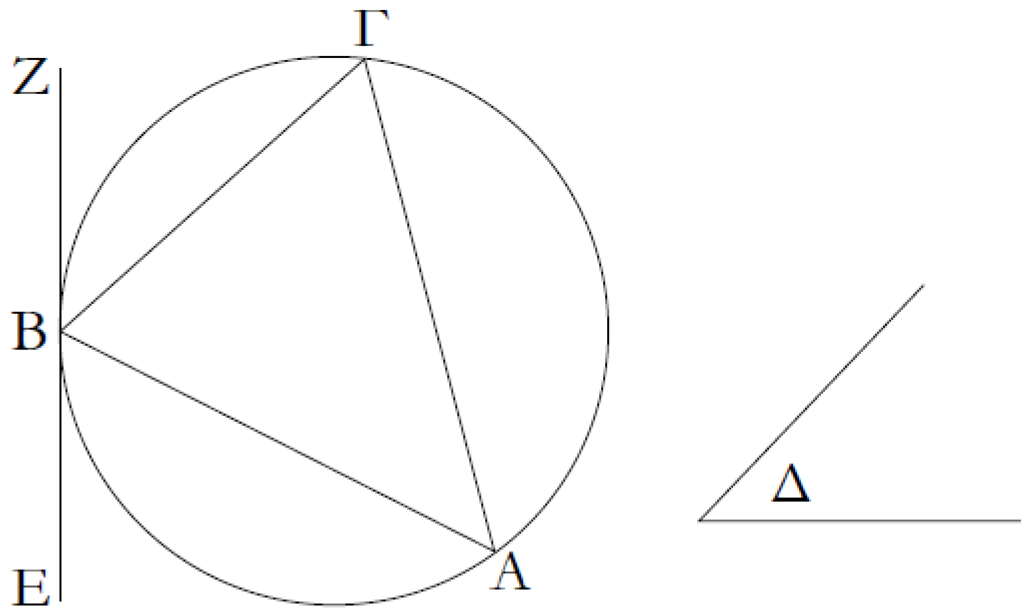
Σχήμα γ.λγ

Για την μεγάλη απόδειξη αυτής της πρότασης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.κγ, 3 φορές: 1) *συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ*, 2) *συνεστάτω [πάλιν] τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ*, 3) *Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω· καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ*. Η πρόταση α.ια, 4 φορές: 1) *ἤχθω τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ*, 2) *καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ*, 3) *καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ*, 4) *καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ*. Η πρόταση α.ι, 3 φορές: 1) *καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ* (3η παράγραφο), 2) *καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ* (6η παράγραφο), 3) *καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ* (9η παράγραφο). Η πρόταση α.δ, 2 φορές: 1) *δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ [γωνίᾳ] τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν* (4η παράγραφο), 2) *δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν* (10 παράγραφο). 3 φορές το πόρισμα της πρότασης γ.ις: 1) *ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας* *τῆς ΑΕ διαμέτρου ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ*, 2) *'Εφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ΑΒΕ κύκλου διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν*, 3) *καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου*. Η πρόταση γ.λβ, 2 φορές: 1) *ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΕ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἁφῆς εἰς τὸν ΑΒΕ κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ*, 2) *ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση γ.λα, 1 φορά: 1) *καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι· ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα*.

Η πρόταση γ.λγ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

<u>34) Πρόταση γ.λδ (Πρόβλημα)</u>

'Απὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



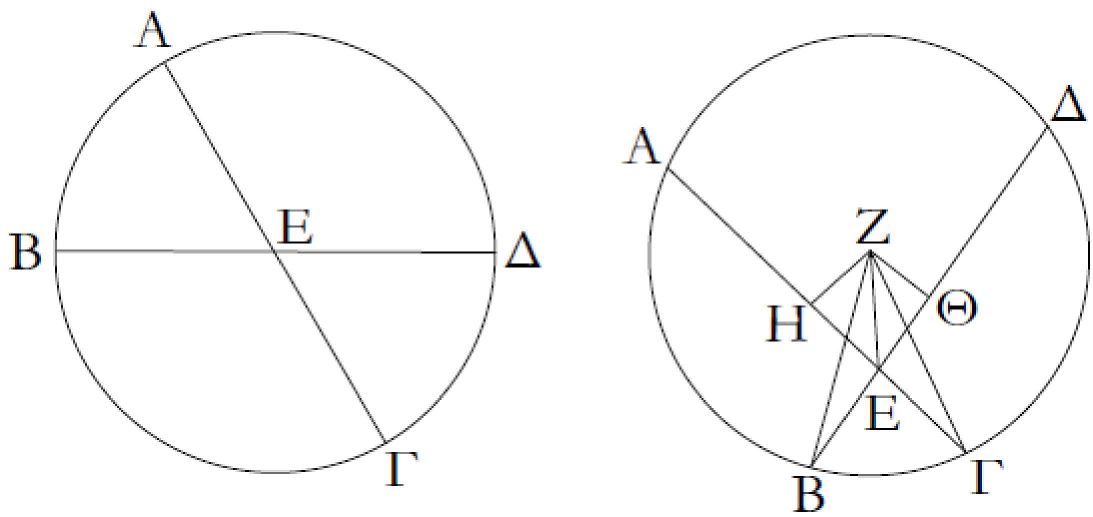
Σχήμα γ.λδ

Για την απόδειξη της πρότασης, χρησιμοποιείται η πρόταση α.κγ: *καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΖΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ*. Η πρόταση γ.λβ: *ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ*.

Η πρόταση γ.λδ δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

35) Πρόταση γ.λε (Θεώρημα)

'Εὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



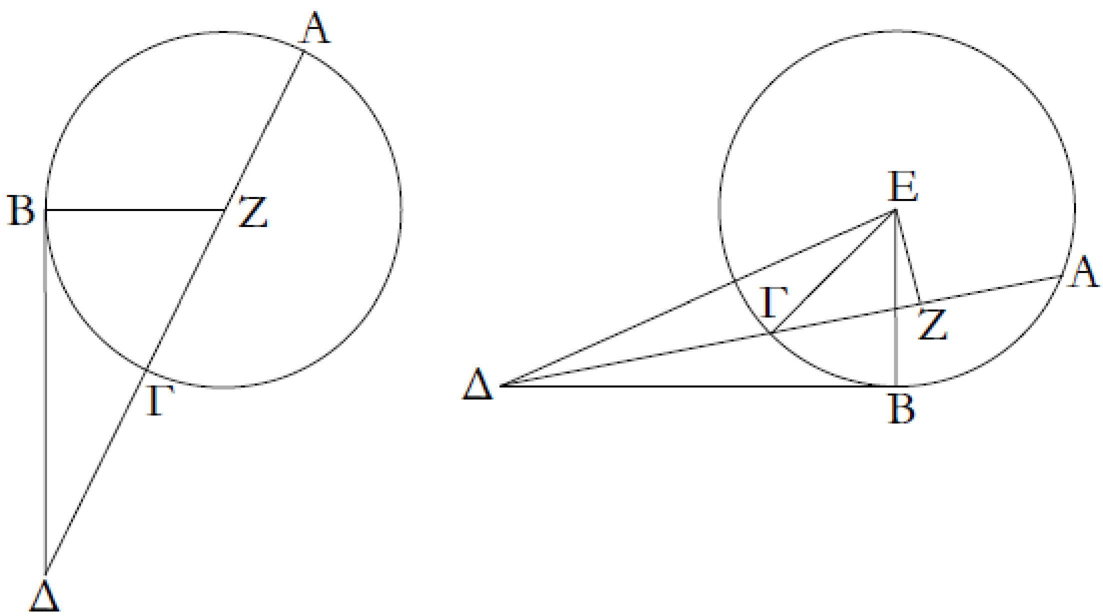
Σχήμα γ.λε

Για την απόδειξη της, χρησιμοποιείται η πρόταση γ.α: *καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ*. Η πρόταση α.ιβ: *καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ*. Η πρόταση γ.γ: *Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ*. Για πρώτη φορά στο βιβλίο γ, για την απόδειξη μιας πρότασης, χρησιμοποιείται μια πρόταση από το βιβλίο β, η β.ε: *ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ΕΗ* τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΗΓ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση α.μζ, 2 φορές: 1) *ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ*, 2) *τοὶς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ*.

Η πρόταση γ.λε δεν χρησιμοποιείται για την απόδειξη καμίας άλλης πρότασης στο βιβλίο γ.

<u>36) Πρόταση γ.λς (Θεώρημα)</u>

᾿Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾿ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.



Σχήμα γ.λς

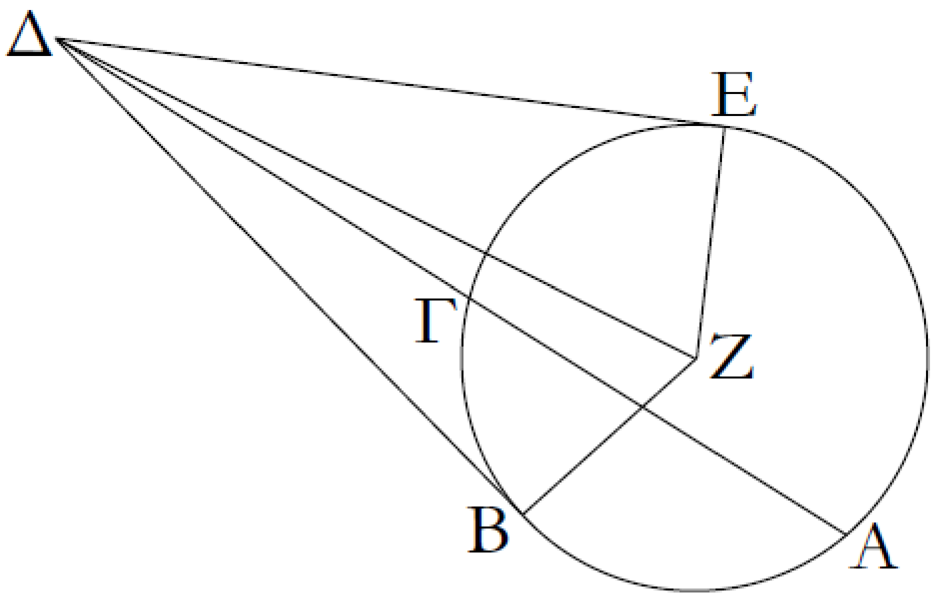
Για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση γ.ιη, 2 φορές: 1) *καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ*, 2) *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, Ε... ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΔ*. Για την απόδειξη αυτής της πρότασης χρησιμοποιείται η πρόταση β.ς, 2 φορές: 1) *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς*

ΖΔ (3η παράγραφο, 2) *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ* (4η παράγραφο). 4 φορές η πρόταση α.μζ: 1) *τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ*, 2) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ· ὀρθὴ γὰρ [ἐστιν] ἡ ὑπὸ ΕΖΓ [γωνία]*, 3) *τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ*, 4) *τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία*. Η πρόταση α.ιβ: *καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ*. Τέλος, χρησιμοποιείται η πρόταση γ.γ: *καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση*.

Η πρόταση γ.λς χρησιμοποιείται συνολικά 1 φορά σε 1 πρόταση (1 φορά στην πρόταση γ.λζ)

37) Πρόταση γ.λζ (Θεώρημα)

'Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ [τῆς] ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.



Σχήμα γ.λζ

Για την απόδειξη της τελευταίας πρότασης του γ βιβλίου, χρησιμοποιείται η πρόταση γ.ιζ: *Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ*. Η πρόταση γ.α: *καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ*. Η πρόταση γ.ιη: *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστιν*. Η πρόταση γ.λς: *καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ*. Η πρόταση α.η: *δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ*. Τέλος, χρησιμοποιείται το πόρισμα της πρότασης γ.ις: *ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Οι πιο χρήσιμες προτάσεις στα τρία πρώτα βιβλία

Παρακάτω ακολουθεί μια φθίνουσα διάταξη των προτάσεων που χρησιμοποιήθηκαν πιο πολύ. Αν μια πρόταση χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη μιας άλλης μ φορές, τότε ο αριθμός της αυξάνετε κατά μ.

Στον παρακάτω 100 x 3 πίνακα, στην 1η στήλη φαίνεται η εκάστοτε πρόταση, πόσες φορές χρησιμοποιήθηκε συνολικά (2η στήλη) και σε πόσες προτάσεις συνολικά (3η στήλη):

α.α	4	4
α.β	1	1
α.γ	20	19
α.δ	24	19
α.ε	16	13
α.ς	7	4
α.ζ	1	1
α.η	10	10
α.θ	1	1
α.ι	13	10
α.ια	18	15
α.ιβ	8	8
α.ιγ	9	7
α.ιδ	3	2
α.ιε	5	5
α.ις	7	7
α.ιζ	3	3

α.ιη	1	1
α.ιθ	5	5
α.κ	9	7
α.κα	1	1
α.κβ	1	1
α.κγ	12	9
α.κδ	4	4
α.κε	0	0
α.κς	2	2
α.κζ	5	4
α.κη	0	0
α.κθ	19	11
α.λ	1	1
α.λα	30	17
α.λβ	8	6
α.λγ	2	2
α.λδ	25	13
α.λε	2	2
α.λς	5	4
α.λζ	2	2
α.λη	2	2
α.λθ	0	0
α.μ	0	0
α.μα	3	2
α.μβ	2	2
α.μγ	7	6
α.μδ	1	1
α.με	1	1
α.μς	10	9
α.μζ	25	10
α.μη	0	0
β.α	0	0
β.β	0	0

β.γ	0	0
β.δ	1	1
β.ε	2	2
β.ς	3	2
β.ζ	1	1
β.η	0	0
β.θ	0	0
β.ι	0	0
β.ια	0	0
β.ιβ	0	0
β.ιγ	0	0
β.ιδ	0	0
γ.α	21	17
γ.β	2	2
γ.γ	5	4
γ.δ	0	0
γ.ε	1	1
γ.ς	0	0
γ.ζ	0	0
γ.η	0	0
γ.θ	1	1
γ.ι	1	1
γ.ια	1	1
γ.ιβ	0	0
γ.ιγ	0	0
γ.ιδ	1	1
γ.ιε	0	0
γ.ις	5	3
γ.ιζ	1	1
γ.ιη	4	3
γ.ιθ	1	1
γ.κ	3	2
γ.κα	2	1

γ.κβ	2	2
γ.κγ	1	1
γ.κδ	1	1
γ.κε	1	1
γ.κς	2	2
γ.κζ	1	1
γ.κη	1	1
γ.κθ	0	0
γ.λ	0	0
γ.λα	2	2
γ.λβ	3	2
γ.λγ	0	0
γ.λδ	0	0
γ.λε	0	0
γ.λς	1	1
γ.λζ	0	0

Παρατηρούμε ότι η πρόταση που χρησιμοποιήθηκε πιο πολύ από όλες είναι η α.λα, η οποία χρησιμοποιήθηκε συνολικά 30 φορές σε 17 προτάσεις: *Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.*

Επίσης, οι προτάσεις α.γ και α.δ χρησιμοποιήθηκαν στις περισσότερες προτάσεις (19), αλλά με λιγότερο πλήθος χρησιμότητας από την α.λα (20, 24 αντίστοιχα).

α.γ: *Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.*

α.δ: *'Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τὴ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται* *ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.*

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε την πρόταση γ.ς: *'Εὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.*

Αυτή η πρόταση αποδεικνύεται χωρίς να χρησιμοποιηθεί καμία άλλη πρόταση, και η ίδια δεν χρησιμοποιείται σε καμία άλλη πρόταση του βιβλίου γ. Κατά κάποιο τρόπο είναι τελείως ανεξάρτητη πρόταση.

5.2 Οι ορισμοί, τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες

Παρακάτω βλέπετε οι ορισμοί του βιβλίου α σε ποιες προτάσεις των τριών πρώτων βιβλίων χρησιμοποιούνται. Αυτό το κομμάτι είναι ίσως το πιο δύσκολο, μακράν πιο δύσκολο από το να εντοπιστεί κάποια πρόταση σε ποια από τις επόμενες χρησιμοποιείται και σε πιο ακριβώς σημείο. Όπως τονίσαμε και στην εισαγωγή, κάποιοι ορισμοί δε χρησιμοποιούνται καθόλου στις αποδείξεις και φαίνεται να έχουν φιλοσοφική και όχι μαθηματική προέλευση. Επίσης όπως είπαμε ίσως ο ορισμός α.α με το αίτημα β να είναι μια πρώτη εκδοχή της μοντέρνας έννοιας της συνέχειας. Σε κάθε περίπτωση ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα εμφανέστερα σημεία όπου ένας ορισμός χρησιμοποιείται σε κάποια πρόταση

α.ι	α.ια(1), α.ιβ(1), α.ιγ(1), γ.α(1), γ.γ(1), γ.λα(1)
α.ιε	α.α(2), α.β(2), α.γ(1)
α.κγ	α.κζ(2), α.κθ(1)

Ακουλουθούν τα αιτήματα σε ποιες προτάσεις των τριών πρώτων βιβλίων χρησιμοποιούνται:

α	α.α(1) α.β(1) α.δ(1) α.ε(1) α.ς(1) α.ζ(1) και οπουδήποτε αλλού χρησιμοποιείται η φράση της μορφής: *Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ*
β	α.β(1) α.ε(1)
γ	α.α(2) α.β(2) α.γ(1) α.ιβ(1)
δ	παντού όπου ο Ευκλείδης αναφέρει ότι δύο ορθές γωνίες είναι ίσες*
ε	α.κθ(1) α.μδ(1) β.ι(1)

* αξίζει να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο τη διαφορά της ορθής γωνίας από τις άλλες. Συγκεκριμένα,

ο ορισμός α.ι, αναφέρει: *Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.*

Το αίτημα δ: *Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.*

Ο ορισμός α.ια: *Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.*

Ο ορισμός α.ιβ: *Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.*

Δηλαδή παρατηρούμαι ότι η ορθή γωνία έχει εμφανώς σημαντικότερη σημασία από τις άλλες γωνίες, δεδομένου του ότι οι άλλες ορίζονται βάση της ορθής, και επίσης από το αίτημα δ, όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες, χωρίς να ισχύει το ίδιο για τις οξείες και τις αβλείες.

Και οι κοινές έννοιες:

α	α.α(1) α.β(1) α.γ(1) α.ιγ(1) α.ιδ(1) α.ιε(1)
β	α.ιγ(2)
γ	α.β(1) α.ε(2) α.ιδ(1) α.ιε(1)
δ	α.δ(4) α.η(1)
ε	α.ς(1) α.ζ(2)

Οι ορισμοί του βιβλίου γ:

α	γ.κη(1), γ.κθ(1)
γ	γ.ιγ(1)
δ	γ.ιδ(1)
ε	γ.ιε(1)
ια	γ.κγ(1), γ.κς(1)

5.3 Η διάταξη των προτάσεων στο πρώτο βιβλίο

Παρακάτω μπορείτε να δείτε κάθε πρόταση που βρίσκεται στην πρώτη στήλη πόσες φορές χρησιμοποιείται στην εκάστοτε πρόταση που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή.

Οι προτάσεις α.α – α.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις α.α – α.ιβ.

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	ια	ιβ
α	-	1							1	1	1	
β		-	1									
γ			-		1	1			1		1	
δ				-	2	1				1		
ε					-		2					
ς						-						
ζ							-	1				
η								-	1		1	1
θ									-	1		
ι										-		1
ια											-	
ιβ												-
ιγ												
ιδ												
ιε												
ις												
ιζ												
ιη												
ιθ												
κ												
κα												
κβ												
κγ												
κδ												

Οι προτάσεις α.α – α.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις α.ιγ – α.κδ.

	ιγ	ιδ	ιε	ις	ιζ	ιη	ιθ	κ	κα	κβ	κγ	κδ
α												
β												
γ				1		1		1		1		1
δ				1								1
ε						1	1	1				1
ς												
ζ												
η											1	
θ												
ι				1								
ια	1											
ιβ												
ιγ	-	1	2		1							
ιδ		-										
ιε			-	1								
ις				-	1	1			1			
ιζ					-							
ιη						-	1					
ιθ							-	1				1
κ								-	1	1		
κα									-			
κβ										-	1	
κγ											-	1
κδ												-

Οι προτάσεις α.α – α.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις α.κε – α.λς.

	κε	κς	κζ	κη	κθ	λ	λα	λβ	λγ	λδ	λε	λς
α												
β												
γ		2										
δ	1	4							1	1	1	
ε												
ς												
ζ												
η												
θ												
ι												
ια												
ιβ												
ιγ				1	2			1				
ιδ												
ιε				1	1							
ις		1	1									
ιζ												
ιη												
ιθ												
κ												
κα												
κβ												
κγ							1					
κδ	1											

Οι προτάσεις α.κε – α.μη πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις α.κε – α.λς.

	κε	κς	κζ	κη	κθ	λ	λα	λβ	λγ	λδ	λε	λς
κε	-											
κς		-								1		
κζ			-	2		1	1		1			
κη				-								
κθ					-	2		2	1	2	1	
λ						-						
λα							-	1				
λβ								-				
λγ									-			1
λδ										-	1	3
λε											-	1
λς												-
λζ												
λη												
λθ												
μ												
μα												
μβ												
μγ												
μδ												
με												
μς												
μζ												
μη												

Οι προτάσεις α.α – α.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις α.λζ – α.μη.

	λζ	λη	λθ	μ	μα	μβ	μγ	μδ	με	μς	μζ	μη
α												
β												
γ										1		1
δ											1	
ε												
ς												
ζ												
η												1
θ												
ι						1						
ια										1		1
ιβ												
ιγ												
ιδ									2		1	
ιε								1				
ις												
ιζ												
ιη												
ιθ												
κ												
κα												
κβ												
κγ						1						
κδ												

Οι προτάσεις α.κε – α.μη πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις α.λζ – α.μη.

	λζ	λη	λθ	μ	μα	μβ	μγ	μδ	με	μς	μζ	μη
κε												
κς												
κζ												
κη												
κθ								1	3	1		
λ									1			
λα	2	2	1	1		2		2		2	1	
λβ												
λγ									1			
λδ	2	2			1		3		2	2		
λε	1											
λς		1										
λζ	-		1		1							
λη		-		1		1						
λθ			-									
μ				-								
μα					-	1					2	
μβ						-		1	1			
μγ							-	1				
μδ								-	1			
με									-			
μς										-	1	
μζ											-	1
μη												-

5.4 Η διάταξη των προτάσεων στο δεύτερο βιβλίο και η εξάρτησή του από το πρώτο

Παρακάτω μπορείτε να δείτε κάθε πρόταση που βρίσκεται στην πρώτη στήλη πόσες φορές χρησιμοποιείται στην εκάστοτε πρόταση που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή.

Οι δύο πρώτοι πίνακες αφορούν την εξάρτηση του δεύτερου βιβλίου από το πρώτο ενώ ο τρίτος πίνακας δείχνει τη διάταξη του βιβλίου β.

Οι προτάσεις α.α – α.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις β.α – β.ιδ.

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	ια	ιβ	ιγ	ιδ
α														
β														
γ	1							1	1	1	1			1
δ												1		
ε				1					1	1				
ς				1					2	2				
ζ														
η														
θ														
ι											1			1
ια	1								1	1				
ιβ												1	1	
ιγ														
ιδ														
ιε										1				
ις														
ιζ														
ιη														
ιθ														
κ														
κα														
κβ														
κγ														
κδ														

Οι προτάσεις α.κε – α.μη πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις β.α – β.ιδ.

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	ια	ιβ	ιγ	ιδ
κε														
κς														
κζ														
κη														
κθ				2					2	2				
λ														
λα	2	1	1	2	3	3			2	2				
λβ									3	1				
λγ														
λδ	1			3				2	1	2				
λε														
λς					1	1		2						
λζ														
λη														
λθ														
μ														
μα														
μβ														
μγ				1	1	1	1	2						
μδ														
με														1
μς		1	1	1	1	1	1	1			2			
μζ									4	4	1	2	2	1
μη														

Οι προτάσεις β.α – β.ιδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις β.α – β.ιδ.

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	ια	ιβ	ιγ	ιδ
α	-													
β		-												
γ			-											
δ				-								1		
ε					-									1
ς						-					1			
ζ							-						1	
η								-						
θ									-					
ι										-				
ια											-			
ιβ												-		
ιγ													-	
ιδ														-

5.5 Η διάταξη των προτάσεων στο τρίτο βιβλίο και η εξάρτησή του από το πρώτο

Παρακάτω μπορείτε να δείτε κάθε πρόταση που βρίσκεται στην πρώτη στήλη πόσες φορές χρησιμοποιείται στην εκάστοτε πρόταση που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή.

Οι έξι πρώτοι πίνακες αφορούν την εξάρτηση του τρίτου βιβλίου από το πρώτο ενώ οι επόμενοι τρεις πίνακες δείχνουν τη διάταξη του βιβλίου γ.

Οι προτάσεις α.α – α.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.α – γ.ιβ.

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	ια	ιβ
α												
β												
γ												
δ							1	1				
ε		2	1									
ς												
ζ												
η	1		1						1			
θ												
ι	2								1			
ια	1									1		
ιβ												
ιγ												
ιδ												
ιε												
ις		1										
ιζ												
ιη												
ιθ		1										
κ							2	2			1	1
κα								1				
κβ												
κγ							1	1				
κδ							1	1				

Οι προτάσεις α.κε – α.μη πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.α – γ.ιβ.

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	ια	ιβ
κε												
κς			1									
κζ												
κη												
κθ												
λ												
λα												
λβ												
λγ												
λδ												
λε												
λς												
λζ												
λη												
λθ												
μ												
μα												
μβ												
μγ												
μδ												
με												
μς												
μζ												
μη												

Οι προτάσεις α.α – α.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.ιγ – γ.κδ.

	ιγ	ιδ	ιε	ις	ιζ	ιη	ιθ	κ	κα	κβ	κγ	κδ
α												
β												
γ			1									
δ					1							
ε				1				1				
ς												
ζ												
η												
θ												
ι												
ια				1	1		1					
ιβ		1	1	1		1						
ιγ												
ιδ												
ιε												
ις											1	
ιζ				1		1						
ιη												
ιθ				1		1						
κ			1									
κα												
κβ												
κγ												
κδ			1									

Οι προτάσεις α.κε – α.μη πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.ιγ – γ.κδ.

	ιγ	ιδ	ιε	ις	ιζ	ιη	ιθ	κ	κα	κβ	κγ	κδ
κε												
κς												
κζ												
κη												
κθ												
λ												
λα												
λβ								1		1		
λγ												
λδ												
λε												
λς												
λζ												
λη												
λθ												
μ												
μα												
μβ												
μγ												
μδ												
με												
μς												
μζ		4										
μη												

Οι προτάσεις α.α – α.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.κε – γ.λζ.

	κε	κς	κζ	κη	κθ	λ	λα	λβ	λγ	λδ	λε	λς	λζ
α													
β													
γ													
δ	1	1			1	1			2				
ε							2						
ς	2												
ζ													
η				1									1
θ													
ι	1					1			3				
ια	1					1		1	4				
ιβ											1	1	
ιγ								1					
ιδ													
ιε													
ις													
ιζ							1						
ιη													
ιθ													
κ													
κα													
κβ													
κγ	2		1						3	1			
κδ													

Οι προτάσεις α.κε – α.μη πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.κε – γ.λζ.

	κε	κς	κζ	κη	κθ	λ	λα	λβ	λγ	λδ	λε	λς	λζ
κε													
κς													
κζ													
κη													
κθ													
λ													
λα													
λβ							1	1					
λγ													
λδ													
λε													
λς													
λζ													
λη													
λθ													
μ													
μα													
μβ													
μγ													
μδ													
με													
μς													
μζ											2	4	
μη													

Οι προτάσεις γ.α – γ.ιβ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.α – γ.ιβ.

	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	ια	ιβ
α	-	1	1	1				1	1	2	2	2
β		-										
γ			-	2								
δ				-								
ε					-					1		
ς						-						
ζ							-					
η								-				
θ									-			
ι										-		
ια											-	
ιβ												-

Οι προτάσεις γ.α – γ.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.ιγ – γ.κδ.

	ιγ	ιδ	ιε	ις	ιζ	ιη	ιθ	κ	κα	κβ	κγ	κδ
α	2	1			1	1			1			
β	1			1								
γ		1										
δ												
ε												
ς												
ζ												
η												
θ												
ι												1
ια	1											
ιβ												
ιγ	-											
ιδ		-	1									
ιε			-									
ις				-	1							
ιζ					-							
ιη						-	1					
ιθ							-					
κ								-	1			
κα									-	2		
κβ										-		
κγ											-	1
κδ												-

Οι προτάσεις γ.α – γ.κδ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.κε – γ.λζ.

	κε	κς	κζ	κη	κθ	λ	λα	λβ	λγ	λδ	λε	λς	λζ
α				1	1						1		1
β													
γ											1	1	
δ													
ε													
ς													
ζ													
η													
θ	1												
ι													
ια													
ιβ													
ιγ													
ιδ													
ιε													
ις									3				1
ιζ													1
ιη												2	1
ιθ								1					
κ			2										
κα													
κβ							1	1					
κγ													
κδ		1											

Οι προτάσεις γ.κε – γ.λζ πόσες φορές χρησιμοποιούνται στις προτάσεις γ.κε – γ.λζ.

	κε	κς	κζ	κη	κθ	λ	λα	λβ	λγ	λδ	λε	λς	λζ
κε	-	1											
κς		-	1	1									
κζ			-		1								
κη				-		1							
κθ					-								
λ						-							
λα							-	1	1				
λβ								-	2	1			
λγ									-				
λδ										-			
λε											-		
λς												-	1
λζ													-

5.6 Η σχέση των βιβλίων β και γ

Ουσιαστικά οι τρεις τελευταίες προτάσεις του βιβλίου γ εξαρτώνται από δύο προτάσεις του βιβλίου β. Συγκεκριμένα για να αποδειχτεί η πρόταση γ.λε, χρησιμοποιείται μία φορά η πρόταση β.ε, ενώ για να αποδειχτεί η πρόταση γ.λς χρησιμοποιείται 2 φορές η πρόταση β.ς. Τέλος για να αποδειχτεί η πρόταση γ.λζ χρησιμοποιείται μία φορά η πρόταση γ.λς.

Συνεπώς, ουσιαστικά δεν υπάρχει εξάρτηση του βιβλίου γ από το β. Ο Ευκλείδης τα πήρε και τα δύο τελείως ξεχωριστά και απλά, ίσως πρόσθεσε τρεις προτάσεις στο τέλος του γ, η απόδειξη των οποίων βασίζεται σε δύο προτάσεις του βιβλίου β.

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, με βάση τη δημοσίευση του καθηγητή του ΕΜΠ κύριου Βασίλη Καρασμάνη *«Πυθαγόρεια και Ιωνικά Μαθηματικά: Δύο ανεξάρτητα ρεύματα στην προπλατωνική διανόηση»*, η μεγαλύτερη διαφορά σε στυλ ανάμεσα στα γεωμετρικά βιβλία των *Στοιχείων*, βρίσκεται στα βιβλία β και γ, τα οποία πρέπει να είναι αρκετά προγενέστερα του Ευκλείδη.

Του βιβλίο β παρουσιάζει την πυθαγόρεια μετρική γεωμετρία των τελευταίων χρόνων του πέμπτου αιώνα, όταν οι ψήφοι αντικαταστάθηκαν από γραμμές (τότε που ανακαλύφθηκε η ασυμμετρία). Οι προτάσεις του μπορούν να εκφρασθούν και να αποδειχθούν αλγεβρικά. Τα σχόλια του βιβλίου β (βλ. Έκδοση Heiberg-Stamatis του Ευκλείδη, τόμος V 1) ερμηνεύουν προτάσεις του βιβλίου αυτού με αριθμητικό τρόπο[40]. Το βιβλίο β έχει πολύ χαλαρή οργάνωση και οι προτάσεις του έχουν τον μεγαλύτερο βαθμό ανεξαρτησίας από όλα τα βιβλία των *Στοιχείων*.

Ο πρώτος ορισμός του βιβλίου β δεν είναι στην κυριολεξία ορισμός, δεν χρησιμοποιείται πουθενά σε αυτό το βιβλίο ή οπουδήποτε αλλού στα Στοιχεία, και αυτό που λέει είναι άμεσο πόρισμα του ορισμού του ορθογωνίου[41].

Ο δεύτερος ορισμός που υπάρχει είναι ο ορισμός του γνώμονα, ο οποίος είναι βασικό χαρακτηριστικό της πυθαγόρειας αριθμητικής.

Τα βασικά χαρακτηριστικά του τύπου της γεωμετρίας του βιβλίου β είναι ότι τα σχήματα λογαριάζονται περισσότερο από την σκοπιά του εμβαδού τους παρά από την σκοπιά της μορφής τους. Έτσι η λέξη «ίσον» χρησιμοποιείται για ισεμβαδικά σχήματα. Το κύριο ζητούμενο είναι μέτρηση, σύγκριση και μετατροπή επιφανειών και όχι σχέσεις μεταξύ ευθειών και γωνιών που δεν επιτρέπουν εύκολα αριθμητική έκφραση. Η επιμονή σε ορθογώνια και στην

[40] Αυτό ίσως ενισχύει την υπόθεση ότι το βιβλίο β είναι εξέλιξη της πυθαγόρειας αριθμητικής των γεωμετρικών αριθμών.

[41] Αυτό έμμεσα επιβεβαιώνει την άποψη ότι το βιβλίο β είναι αρκετά προγενέστερο από τον Ευκλείδη και το έβαλε αυτούσιο μετά το α. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι στο βιβλίο α που μάλλον το οργάνωσε εξ ολοκλήρου ο Ευκλείδης, το έφτιαξε έτσι ώστε να καλύπτονται και όλες οι αποδείξεις του β.

ειδική περίπτωση του τετραγώνου υποδεικνύει τον μετρικό χαρακτήρα αυτής της γεωμετρίας. Μόνο η ορθή γωνία έχει κάποια σημασία, σχέσει ισοτήτων είναι πολύ συχνές, ενώ ανισοτήτων ανύπαρκτες.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι στην Ιωνική παράδοση η ορθή γωνία δεν παρουσιάζει κανένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αυτήν την παράδοση φαίνεται να ακολουθούν τα βιβλία γ, δ και ς. Επιπλέον, όπως έχουμε αναφέρει, οι περισσότερες προτάσεις των βιβλίων αυτών (και κυρίως του βιβλίου γ) πρέπει να ήταν γνωστές στον Ιπποκράτη τον Χίο. Ειδικώς το βιβλίο γ έχει πολύ χαλαρή οργάνωση από άποψη λογικής. Υπάρχει μεγάλος βαθμός ανεξαρτησίας μεταξύ των προτάσεων του, οι περισσότερες από τις οποίες είναι επίσης ανεξάρτητες και από τις προτάσεις των βιβλίων α και β.

Ο Mueller[42] αναφέρει: «Αν αφήσουμε κατά μέρος τη χρήση της πρότασης γ.α, υπάρχουν δεκατέσσερις προτάσεις του βιβλίου γ (β, γ, ε, ς, ζ, η, ιβ, ιγ, ιδ, ιε, ις, ιη, κ, κγ) που δεν εξαρτώνται από τις προηγούμενες προτάσεις του. Υπάρχουν ακόμα δεκατρείς προτάσεις (δ, ζ, η, ιβ, ιγ, ιε, κε, κθ, λ, λγ, λδ, λε, λζ) που δεν χρησιμοποιούνται για να αποδείξουν τίποτε άλλο μέσα στα *Στοιχεία*. Οι αποδείξεις των προτάσεων 7 και 8 κάνουν χρήση της έννοιας της απόστασης μεταξύ τεμνόμενων ευθειών, η οποία ποτέ δεν επεξηγείται».

ὅπερ ἔδει ποιῆσαι

[42] Mueller, 1981, σελίδα 178

Βιβλιογραφία

[1] Β. Καρασμάνης, *Περί των Προευκλείδειων Στοιχείων Γεωμετρίας*, στο Δ. Αναπολιτάνος (Επιμ.), *Στιγμές και Διάρκειες: 13 Κείμενα Φιλοσοφίας και Ιστορίας των Μαθηματικών και της Λογικής*, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα, 2009

[2] Β. Καρασμάνης, *Πυθαγόρεια και Ιωνικά Μαθηματικά: Δύο ανεξάρτητα ρεύματα στην προπλατωνική διανόηση*. Μια πρώτη εκδοχή του κειμένου αυτού δημοσιεύθηκε στο Κ.Ι. Βουδούρης (επιμ.), *Ιωνική Φιλοσοφία*, Αθήνα 1990. Επαναδημοσιεύθηκε στα αγγλικά με διορθώσεις και προσθήκες στο Revue de Federation des Professeurs de Grec et Latin, 1998.

[3] Πρόκλος, 412 μ.Χ – 485 μ.Χ., *Σχόλια στο α βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*

[4] Basel – Stuttgart, 1969, *Eudemos von Rhodos*

[5] W. Burkert, 1972, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press

[6] Fritz Wehrli, 1959, *Die Schuledes Aristoteles*

[7] Heath L. Thomas, 1908, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Cambridge

[8] Heath L. Thomas, 1921, *A history of Greek Mathematics*, Oxford

[9] Heidel – Burkert, 1940, *A Mathematical History of the Golden Number*

[10] Henrikus Menge, 1986, Lipsiae

[11] V. Karasmanis, *The hypothesis of mathematics in Plato's Republic and his Contribution to the axiomatization of Geometry*, στο P. Nicolacopoulos (ed.), *Greek Studies in the Philosophy and History of Science*, Kluwer, Netherlands, 1990

[12] Knorr, 1975, *The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht, Holland

[13] Mueller, 1981, Philosophy *of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, M.I.T. Press, 1981

[14] Wikipedia