ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές

Αγγελοπούλου Ιουλία

Επιβλέπων καθηγητής: Πολυράκης Ιωάννης

Τριμελής Επιτροπή:

Ι. Πολυράκης, Σ. Καρανάσιος, Π. Ψαρράκος

Αθήνα 2014

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως θέμα την Θεωρία Παιγνίων και τις εφαρμογές της. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στην θεωρία παιγνίων όπου παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία που την αποτελούν, καθώς και ορισμένες σημαντικές εξελίξεις που έχουν διαδραματίσει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της.

Τα παίγνια μπορούν να ταξινομηθούν σε ποικίλες κατηγορίες, βάση διάφορων κριτηρίων. Στην συγκεκριμένη εργασία, τα παίγνια έχουν χωριστεί, με βάση τον τρόπο αναπαράστασης τους, σε δύο κατηγορίες· στα παίγνια κανονικής μορφής και στα παίγνια εκτεταμένης μορφής.

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στα παίγνια κανονικής μορφής ή στρατηγικά παίγνια και περιγράφουν τις καταστάσεις αλληλεπίδρασης των ατόμων που λαμβάνουν τις αποφάσεις τους ταυτόχρονα. Τα παίγνια αυτά γίνονται πιο εύκολα κατανοητά με την αναπαράσταση τους μέσω πινάκων. Οι στρατηγικές των παικτών διακρίνονται είτε σε αμιγείς στρατηγικές, όταν οι παίκτες έχουν προαποφασίσει την στρατηγική που θα χρησιμοποιήσουν, ή σε μικτές στρατηγικές, όταν οι παίκτες επιλέγουν τις στρατηγικές τους με τυχαίο τρόπο. Στην συνέχεια μελετώνται οι τρόποι επίλυσης αυτών των παιγνίων. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η μέθοδος της διαδοχικής απαλοιφής των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών και η ισορροπία $Nash$ σε αμιγείς και μικτές στρατηγικές. Στην συνέχεια, αναφερόμαστε στην πιθανότητα οι παίκτες να κάνουν λάθη και εξετάζουμε την ισορροπία τρεμάμενου χεριού. Τέλος, εξετάζεται η περίπτωση παιγνίων ατελούς πληροφόρησης στα οποία κάποιοι παίκτες δεν γνωρίζουν όλες τις πληροφορίες που αφορούν τους αντιπάλους τους.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στα παίγνια εκτεταμένης μορφής ή διαδοχικών κινήσεων. Πρόκειται για παίγνια στα οποία οι παίκτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους διαδοχικά. Αυτά τα παίγνια αναπαρίστανται με την βοήθεια των δένδρων παιγνίων και διακρίνονται σε παίγνια με πλήρη πληροφόρηση ή ελλιπή πληροφόρηση.

Στην περίπτωση των παιγνίων με πλήρη πληροφόρηση οι παίκτες γνωρίζουν όλη την «ιστορία» του παιγνίου, οπότε όταν έρθει η σειρά τους να κινηθούν είναι ικανοί να προσδιορίζουν σε ποια κορυφή του δένδρου βρίσκονται. Για την επίλυση αυτών των παιγνίων χρησιμοποιείται η έννοια της ισορροπίας *Nash*, την οποία μπορούμε να την προσδιορίσουμε με την βοήθεια της μεθόδου της προς τα πίσω επαγωγής.

Στα παίγνια με ελλιπή πληροφόρηση, υπάρχουν παίκτες οι οποίοι δεν γνωρίζουν όλες τις κινήσεις που έχουν λάβει χώρα στο παίγνιο και έτσι όταν έρθει η σειρά τους να κινηθούν δεν είναι ικανοί να προσδιορίσουν ακριβώς σε ποια κορυφή του συνόλου πληροφόρησης τους βρίσκονται. Για να εξασφαλίσουμε την αρχή της διαδοχικής ορθολογικότητας στα παίγνια αυτά μελετάμε μια πιο ισχυρή έννοια, την ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου. Ωστόσο, υπάρχουν παίγνια που δεν διαθέτουν υποπαίγνια. Τότε, για την επίτευξη μιας λύσης που θα εξασφαλίζει ότι οι παίκτες είναι διαδοχικά ορθολογικοί εισάγεται η έννοια της διαδοχικής ισορροπίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετώνται οι δημοπρασίες τέλειας πληροφόρησης χρησιμοποιώντας εργαλεία από την θεωρία παιγνίων. Συγκεκριμένα, αναφέρεται στις δημοπρασίες σφραγισμένης προσφοράς πρώτης τιμής και σφραγισμένης προσφοράς δεύτερης τιμής, και περιγράφει πως αυτές οι δημοπρασίες μπορούν να γραφούν ως παίγνια κανονικής μορφής.

Στο σημείο αυτό θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας μου, κ. Ιωάννη Πολυράκη, για τον χρόνο που μου αφιέρωσε κατά την εκπόνηση της και την διαρκή προθυμία του να μου λύσει οποιαδήποτε απορία αφορά στο αντικείμενο, βοηθώντας έτσι στην δημιουργία ιδανικού κλίματος έρευνας.

Abstract

This thesis is a study on game theory and its applications. The first chapter is an introduction to game theory showing the basic elements that constitute it, and some significant developments that have played a crucial role in its development.

Based on different criteria, games can be classified into various categories. Here, we have separate the games based on the way they are represented in two categories, in normal form games and extensive form games.

The second chapter deals with the normal form games or strategic games, that are games where all players move simultaneously. These games are usually represented by a matrix. The players's strategies can are either pure strategies (when players have decided the strategy that they will use before the game's beginning) or mixed strategies (where players choose their strategies randomly). Then, we focus on the solution of these games by introducing the method of iterated deletion of strictly dominated strategies and the concept of Nash equilibrium in pure and mixed strategies. Then, we examine the possibility that players might make a mistake in choosing their strategies and we introduce the notion of a trembling hand perfect Nash equilibrium. Finally, we consider the case of incomplete information games in which some players do not know all the information about their opponents.

The third chapter refers to the extensive form games or dynamic games. These are games in which players take their decisions sequentially. These games are represented by game trees and distinguished in games with perfect information or imperfect information.

In the case of games with perfect information, all players know the history of the game, so when it is their turn to move is able to identify in which node of the tree he is. To solve these games we use the concept of Nash equilibrium, which can be determined by using the method of backward induction.

In games with imperfect information, there are players who do not know all the moves that have occurred in the game, so when it is their turn to move is not able to determine exactly in which node of their information set they are. To ensure the principle of sequential rationality in those games we

study a more powerful notion, known as subgame perfect Nash equilibrium. However, there are games that they have not any subgame. Then, in order to achieve a solution that it will ensure that the players are sequentially rational we introduce the concept of sequential equilibrium.

In the fourth chapter we study auctions with complete information using tools from game theory. In particular, we discuss the first price sealed bid and the second price sealed bid auctions, and we describe how these auctions can be written as a normal form game.

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων αποτελεί έναν κλάδο των μαθηματικών ο οποίος χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα και αναζητώντας πρότυπα από την ανθρώπινη συμπεριφορά προσπαθεί να μελετήσει τον τρόπο λήψης αποφάσεων σε καταστάσεις σύγκρουσης και συνεργασίας. Το κύριο αντικείμενό της είναι η ανάλυση των αποφάσεων σε καταστάσεις στρατηγικής αλληλεπίδρασης και εστιάζει στην αλληλεπίδραση των αποφάσεων ομάδων ανθρώπων, όπου η απόφαση του καθενός επηρεάζει τους υπόλοιπους.

Η θεωρία παιγνίων, όπως και οι υπόλοιπες επιστήμες, αποτελείται από μια συλλογή μοντέλων. Ένα μοντέλο είναι μια αφηρημένη έννοια που χρησιμοποιείται για να κατανοήσουμε τις παρατηρήσεις και τις εμπειρίες μας από την καθημερινή μας ζωή. Ένα μοντέλο δεν πρόκειται να μας βοηθήσει να καταλάβουμε ένα φαινόμενο αν οι υποθέσεις του είναι αντίθετες με τις παρατηρήσεις μας. Επίσης, ένα μοντέλο αντλεί δύναμη από την απλότητα, καθώς οι υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζεται θα πρέπει να αποτυπώνουν την ουσία της κατάστασης και όχι άσχετες λεπτομέρειες, δηλαδή είναι σημαντικό ένα μοντέλο να είναι απλό, να εστιάζει σε ουσιώδη στοιχεία και να βασίζεται σε υποθέσεις που δεν απέχουν υπερβολικά από την πραγματικότητα. Δεν μπορούμε να πούμε ότι ένα μοντέλο είναι σωστό ή λάθος με απόλυτα κριτήρια, αλλά για το αν είναι χρήσιμο ή όχι ένα μοντέλο εξαρτάται κάθε φορά από τον σκοπό που το χρησιμοποιούμε. Η κατανόηση ενός μοντέλου της θεωρίας παιγνίων είναι ιδιαίτερα σημαντική στους οικονομικούς, πολιτικούς και κοινωνικούς τομείς. Από την μελέτη αυτών των μοντέλων ενδέχεται να προκύψουν τρόποι συμπεριφοράς τέτοιοι ώστε να βελτιώσουν την ευημερία μας.

Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στην θεωρία παιγνίων είναι ακριβείς εκφράσεις των ιδεών που μπορούν να παρουσιαστούν λεκτικά. Ωστόσο, προφορικές περιγραφές τείνουν να είναι μακράς διάρκειας και ανακριβής. Οπότε, για λόγους λακωνικότητας και ακριβείας συχνά χρησιμοποιούνται, για την περιγραφή των μοντέλων αυτών, μαθηματικά σύμβολα. Για την μοντελοποίηση μιας κατάστασης αλληλεπίδρασης ακολουθούμε την εξής διαδικασία: θέλουμε το μοντέλο να περιλαμβάνει αρκετά γνωρίσματα ώστε να έχει ουσιαστική σημασία και να έχει όσο το δυνατόν πιο απλή δομή. Επιλπέον, κατά την ανάλυση του μοντέλου μπορεί να προκύψει ότι πρέπει να γίνουν προσαρμογές στο μοντέλο.

Η θεωρία παιγνίων έχει μια ευρεία γκάμα εφαρμογών. Για παράδειγμα μπορεί να εφαρμοστεί σε καταστάσεις οι οποίες περιγράφουν εταιρείες που ανταγωνίζονται, πολιτικούς που διεκδικούν ψήφους, ένορκους που αποφασίζουν για μια ετυμηγορία, ζώα που μάχονται για λεία, παίκτες που συμμετέχουν σε έναν πλειστηριασμό και πολλές άλλες.

Για να περιγράψουμε μια κατάσταση στρατηγικής αλληλεπίδρασης, δηλαδή ένα παίγνιο, πρέπει να γνωρίζουμε τέσσερα στοιχεία:

- **Τους παίκτες:** τα άτομα που συμμετέχουν στο παίγνιο.
- **Τους κανόνες:** οι οποίοι καθορίζουν ποιος κινείται πότε, τι γνωρίζουν οι παίκτες όταν είναι η σειρά τους να παίξουν όπως επίσης και τι πιθανές επιλογές έχουν.
- **Τα αποτελέσματα:** τα οποία προκύπτουν από κάθε δυνατή κίνηση των παικτών.
- **Την απόδοση:** δηλαδή, ποιες είναι οι προτιμήσεις των παικτών στα πιθανά αποτελέσματα (π.χ. συναρτήσεις χρησιμότητας).

Παίγνιο είναι μια κατάσταση στην οποία συμμετέχουν περισσότεροι του ενός παίκτες, οι οποίοι λειτουργούν ορθολογικά και κάνουν κάποιες επιλογές με στόχο ο καθένας να ικανοποιήσει το συμφέρον του και το αποτέλεσμα για τον κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνον από τη δική του επιλογή αλλά και από τις επιλογές των υπολοίπων παικτών. **Παίκτης** μπορεί να είναι ένα πρόσωπο, μία οργάνωση, ένα κράτος, μια επιχείρηση ή ένας συνασπισμός. Καταστάσεις όπου υπάρχει μόνο ένας παίκτης ή καταστάσεις όπου υπάρχουν πάρα πολλοί παίκτες, έτσι ώστε η επίδραση της απόφασης του ενός παίκτη στο σύνολο να είναι αμελητέα, δεν αποτελούν παίγνια.

Συγκεκριμένα, σε κάθε παίγνιο υπάρχουν δύο (**παίγνια δύο προσώπων**) ή και περισσότεροι παίκτες (**παίγνια n-προσώπων**). Οι κινήσεις κάθε παίκτη επηρεάζουν τους υπόλοιπους. Κάθε παίκτης προσπαθεί να χρησιμοποιήσει όλα τα μέσα που διαθέτει, για να εμποδίσει τον αντίπαλό του να αποκτήσει πλεονεκτήματα που θα περιορίσουν τα κέρδη του, δηλαδή, σκοπός κάθε παίκτη είναι η μεγιστοποίηση των κερδών του. Όλα τα παίγνια περιέχουν το χαρακτηριστικό του ανταγωνισμού μεταξύ των παικτών τους και το αποτέλεσμα τους οδηγεί σε «κέρδη» ή «απώλειες». Φυσικά ένα παίγνιο διαφέρει από μία πραγματική κατάσταση απλού ανταγωνισμού ή σύγκρουσης στο ότι η πραγμάτωσή του γίνεται ακριβώς κάτω από ορισμένες συνθήκες και σύμφωνα με ορισμένους κανόνες.

1.2 Ιστορική αναδρομή

- Η πρώτη γνωστή αναφορά στην Θεωρία Παιγνίων έγινε το 1838 από τον Γάλλο οικονομολόγο Augustin Cournot, ο οποίος κατάφερε να αναλύσει τις ολιγοπωλιακές καταστάσεις με τρόπο παρόμοιο με τις σύγχρονες μεθόδους της θεωρίας παιγνίων (μοντέλο Cournot).

- Το 1881 ο Άγγλος οικονομολόγος Francis Edgeworth ασχολήθηκε με την εφαρμογή των μαθηματικών στις κοινωνικές επιστήμες.

- Παρόλο που οι πρώτες παιγνιοθεωτητικές ιδέες είχαν αρχίσει να εμφανίζονται από τον 18^o αιώνα, η σημαντική ανάπτυξη της Θεωρίας Παιγνίων ξεκίνησε την δεκαετία του 1920 με το έργο του μαθηματικού Emile Borel (1871-1956) και του John von Neumann (1903-1957).

- Ο John von Neumann το 1928 απέδειξε ότι τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος έχουν πάντα λύση.

- Το 1944 η δημοσίευση του βιβλίου «Theory of games and economic behavior» από τους John von Neumann και Oskar Morgenstern αποτέλεσε ένα καθοριστικό γεγονός για την ανάπτυξη της Θεωρίας Παιγνίων. Στο βιβλίο αυτό, όρισαν την θεωρία της χρησιμότητας, ανέλυσαν τις βέλτιστες λύσεις στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος και εισήγαγαν τα συνεργατικά παίγνια.

- Στη δεκαετία του 1950 παιγνιοθεωρητικά μοντέλα άρχισαν να χρησιμοποιούνται στην οικονομική θεωρία, στην πολιτική επιστήμη και στην ψυχολογία. Επίσης, στις αρχές της δεκαετίας του 1950 ο Αμερικανός μαθηματικός και οικονομολόγος John Forbes Nash εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας σε παιχνίδια μη-μηδενικού αθροίσματος, γνωστή ως ισορροπία

Nash. Πρόκειται για μια κατάσταση, όπως θα δούμε και συνέχεια, από την οποία κανένας παίκτη δεν έχει συμφέρον να απομακρυνθεί, δεδομένου των επιλογών των αντιπάλων τους.

- Το 1965 ο Reinhard Selten μελέτησε τα δυναμικά παίγνια (δηλαδή, τα παίγνια που εξελίσσονται στο χρόνο) και γενίκευοντας τις ιδέες του *Nash* σε αυτά εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας στα υποπαίγνια (Subgame Perfect Nash Equilibrium) και της ισορροπίας τρεμάμενου χεριού (Trembling Hand Perfect Equilibrium).

- Το 1975 ο John Harsanyi γενίκευσε τις ιδέες του *Nash* σε παίγνια ελλιπής πληροφόρησης.

- Στη δεκαετία του 1970 η θεωρία των παιγνίων για πρώτη φορά χρησιμοποιείται ως ένα εργαλείο στην εξελικτική βιολογία.

- Στα τέλη της δεκαετίας του 1990 η θεωρία παιγνίων εφαρμόστηκε στον σχεδιασμό δημοπρασιών.

- Στη συνέχεια, παιγνιοθεωρητική μέθοδοι κυριαρχούν στην μικροοικονομική θεωρία, καθώς και σε πολλούς άλλους τομείς της οικονομίας, και σε ένα ευρύ φάσμα άλλων κοινωνικών επιστημών.

- Το 1994 τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ οικονομικών οι John C. Harsanyi (1920-2000), John F. Nash (1928) και Reinhard Selten (1930) για την συμβολή τους στην θεωρία παιγνίων.

Τα τελευταία χρόνια, η θεωρία παιγνίων έχει βρει ευρύτατη εφαρμογή στα οικονομικά, όπου ολόκληροι κλάδοι στηρίζονται στις μεθόδους της, όπως η βιομηχανική οργάνωση, ο σχεδιασμός μηχανισμών με σπουδαιότερο υποκλάδο τον σχεδιασμό δημοπρασιών κ.α. Επίσης, η θεωρία παιγνίων χρησιμοποιείται και στην Πολιτική Οικονομία και ειδικά στη θεωρία της συλλογικής δράσης όπου εξηγεί ενδεχόμενα συνεργασίας μεταξύ των παικτών (παίγνια συνεργασίας) και βρίσκεται σε άμεση συσχέτιση με τον ρόλο του κράτους και των θεσμών σε θέματα συνεργασίας, όπως παραδείγματος χάρη στη παροχή δημόσιων αγαθών,στη φορολογία. Ακόμα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στον συνδυασμό της θεωρίας παιγνίων και της επιστήμης των υπολογιστών.

1.3 Είδη παιγνίων

Τα παίγνια μπορούν να ταξινομηθούν σε ποικίλες κατηγορίες, ανάλογα με τα κριτήρια που θέτουμε κάθε φορά. Τα κριτήρια αυτά, παραδείγματος χάρη, μπορεί να είναι το πλήθος των παικτών, ο τρόπος αναπαράστασης τους, οι πληροφορίες που γνωρίζουν οι παίκτες σε ένα παίγνιο, ο τρόπος με τον οποίο παίζονται. Στην συνέχεια, παρουσιάζονται ορισμένες κατηγορίες παιγνίων.

Ταυτόχρονων κινήσεων - Διαδοχικών κινήσεων

Στα παίγνια ταυτόχρονων κινήσεων (simultaneous-move games) οι παίκτες επιλέγουν την στρατηγική τους όλοι μαζί ταυτόχρονα και κάθε παίκτης επιλέγει τη στρατηγική του χωρίς να γνωρίζει τις επιλογές των άλλων, ονομάζονται και παίγνια κανονικής μορφής και περιγράφονται με την βοήθεια πινάκων. Αντίθετα, τα παίγνια διαδοχικών κινήσεων (dynamic games) εξελίσονται με την πάροδο του χρόνου, οι παίκτες κινούνται διαδοχικά και κάθε παίκτης διαθέτει κάποια πληροφόρηση σχετικά με τις επιλογές των προηγούμενων παικτών. Ονομάζονται και παίγνια εκτεταμένης μορφής, αναπαρίστανται γραφικά μέσω δένδρων και διακρίνονται σε παίγνια με πλήρη ή ελλιπή πληροφόρηση.

Πλήρης πληροφόρησης - Ελλιπής πληροφόρησης

Στα παίγνια πλήρους πληροφόρησης (perfect information) κάθε παίκτης γνωρίζει την δομή του παιγνίου, δηλαδή γνωρίζει όλες τις πληροφορίες για τους άλλους παίκτες του παιγνίου όπως τις στρατηγικές τους, τις αποδόσεις τους. Επίσης, όταν έρθει η σειρά του να κινηθεί γνωρίζει όλες τις κινήσεις που έχουν προηγηθεί. Συχνά συγχέονται με τα παίγνια τέλειας (*complete*) πληροφόρησης, στα οποία οι παίκτες γνωρίζουν τη δομή του παιγνίου αλλά δεν γνωρίζουν απαραίτητα τι ενέργειες έχουν πραγματοποιηθεί κατά την διάρκεια του παιγνίου.

Στα παίγνια ελλιπούς πληροφόρησης (imperfect information) ναι μεν οι παίκτες γνωρίζουν την δομή του παιγνίου αλλά δεν γνωρίζουν όλες τις κινήσεις που έχουν γίνει στο παίγνιο, δεν γνωρίζουν όλη την ιστορία του. Συχνά συγχέονται με τα παίγνια ατελούς (*incomplete*) πληροφόρησης, στα οποία οι παίκτες δεν γνωρίζουν όλες τις σχετικές πληροφορίες που αφορούν τους άλλους παίκτες του παιγνίου.

Μηδενικού αθροίσματος

Παίγνια στα οποία όταν ο ένας παίκτης κερδίζει τότε ο άλλος παίκτης χάνει, δηλαδή το κέρδος ενός παίκτη ισούται με την ζημιά του άλλου, καλούνται παίγνια μηδενικού αθροίσματος (zero-sum games). Στα παίγνια αυτά το συνολικό κέρδος των παικτών, για οποιοδήποτε συνδιασμό στρατηγικών, είναι μηδέν.

Συνεργατικά - Μη συνεργστικά

Στα συνεργατικά παίγνια (cooperative games) επιτρέπεται η επικοινωνία μεταξύ των παικτών και έτσι οι παίκτες μπορούν να συνάψουν μια συμφωνία μεταξύ τους, την οποία θα ακολουθήσουν πιστά. Στα μη συνεργατικά παίγνια (noncooperatives games) οι παίκτες δεν μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους και επιλέγουν την στρατηγική τους με γνώμονα αυστηρά το συμφέρον τους με σκοπό να μεγιστοποιήσουν την απόδοση τους.

Επαναλλαμβανόμενα Παίγνια

Τα επαναλλαμβανόμενα παίγνια προκύπτουν από τα παίγνια κανονικής μορφής όταν αυτά παίζονται σε πολλές περιόδους. Οι παίκτες λαμβάνουν την απόδοση τους μετά από κάθε περίοδο, οπότε η συνολική απόδοση κάθε παίκτη είναι το άθροισμα των αποδόσεων που λαμβάνει ο παίκτης σε κάθε περίοδο.

Παίγνια σημάτων

Πρόκειται για παίγνια με δυο παίκτες που δεν διαθέτουν υποπαίγνια. Η φύση παίζει πρώτη και κάνει την επιλογή της, την οποία αποκαλύπτει στον παίκτη 1, ο οποίος με την σειρά του ενημερώνει τον παίκτη 2 σχετικά με τις πληροφορίες που έλαβε και τέλος ο παίκτης 2 κάνει την επιλογή του.

Κεφάλαιο 2

ΠΑΙΓΝΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε παίγνια στα οποία όλοι οι παίκτες κινούνται μόνο μια φορά και ταυτόχρονα (simultaneous-move games).

2.1 Παίγνια σε κανονική μορφή

Μια κεντρική έννοια της θεωρίας παιγνίων είναι αυτή της στρατηγικής ενός παίκτη. Μια στρατηγική είναι ένα πλήρη ενδεχόμενο σχέδιο ή ένας κανόνας αποφάσεων, ο οποίος προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο θα ενεργήσει ο παίκτης σε κάθε πιθανή κατάσταση που ενδεχομένως κληθεί να κινηθεί. Δηλαδή, μια στρατηγική ενός παίκτη προσδιορίζει πως ο παίκτης σκοπεύει να κινηθεί σε καθένα από τα σύνολα πληροφόρησης του. Συχνά οι παίκτες προσδιορίζουν τις ενέργειες τους σε σύνολα πληροφόρησης που ίσως να μην φτάσουν κατά την διάρκεια του παιγνιδιού.

Ορισμός 2.1.1. *Ένα παίγνιο σε κανονική μορφή ή παίγνιο στρατηγικής μορφής είναι ένα σύνολο I ατόμων, οποίοι καλούνται παίκτες του παιγνίου, τέτοιο ώστε κάθε παίκτης i έχει: ένα σύνολο στρατηγικών S_i (με $s_i \in S_i$) και μια συνάρτηση απόδοσης $u_i(s_1, s_2, \dots, s_I)$ με $u_i : S_1 \times S_2 \times \dots S_I \to \mathbb{R}$.*

Ένα παίγνιο σε κανονική μορφή με I παίκτες, σύνολα στρατηγικών $\{S_i\} = (S_1, \dots, S_I)$ και συναρτήσεις απόδοσης $\{u_i\} = (u_1, \dots, u_I)$ θα συμβολίζεται με $\mathbf{\Gamma_N} = [\mathbf{I}, \{\mathbf{S_i}\}, \{\mathbf{u_i}(.)\}]$.

Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων στρατηγικής $S_1 \times S_2 \times \dots S_I$ ονομάζεται **σύνολο οριζόντων στρατηγικής ή σύνολο εκβάσεων** του παιγνίου. Τα στοιχεία του $s = (s_1, \dots, s_I)$, όπου s_i η στρατηγική του i

παίκτη, καλούνται **ορίζοντες στρατηγικής ή συνδιασμοί στρατηγικής**. Συχνά, για λόγους συντομίας ένα προφίλ στρατηγικής s το γράφουμε ώς $s = (s_i, s_{-i})$, όπου s_{-i} είναι το $(I-1)$ διάνυσμα των στρατηγικών όλων των άλλων παικτών εκτός του i παίκτη.

Ένα παίγνιο κανονικής μορφής παίζεται ως εξής: αρχικά, κάθε παίκτης n επιλέγει ταυτόχρονα μια στρατηγική s_n από το σύνολο στρατηγικών του S_n και στην συνέχεια κάθε παίκτης i λαμβάνει την απόδοση $u_i(s_1, \ldots, s_I)$ που προκύπτει από τον συγκεκριμένο ορίζοντα στρατηγικής.

Παρατηρούμε, οπότε για να περιγράψουμε ένα παίγνιο σε κανονική μορφή χρειαζόμαστε τα σύνολα στρατηγικών και τις συναρτήσεις απόδοσεις των παικτών.

Ο στόχος κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει την απόδοση του. Δηλαδή, κάθε παίκτης καλείται να επιλύσει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της απόδοσης του, γεγονός που δεν είναι τόσο εύκολο καθώς το αποτέλεσμα για κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνο από τις δικές του επιλογές αλλά και από τις επιλογές των υπόλοιπων παικτών.

Για αυτό κάθε παίκτης αναζητά έναν ορίζοντα στρατηγικής που προκύπτει από την ταυτόχρονη μεγιστοποίηση της απόδοσης του καθενός έτσι ώστε κανένας παίκτης να μην έχει κίνητρο να παρεκκλίνει. Ένας τέτοιος ορίζοντας καλείται ισορροπία $Nash$.

Ορισμός 2.1.2. *Σε ένα παιγνίο κανονικής μορφής $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ ένας ορίζοντας στρατηγικής $(s_1^*, \ldots, s_I^*)$ τέτοιος ώστε*

$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_I^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \ldots, s_I^*)$

για κάθε παίκτη i και για κάθε στρατηγική s από το σύνολο στρατηγικών του S_i ονομάζεται ισορροπία κατά $Nash$.

Ένας παίκτης επιλέγει τη στρατηγική της ισορροπίας $Nash$ μόνο αν είναι σίγουρος ότι και οι υπόλοιποι παίκτες θα παίξουν σύμφωνα με την ισορροπία $Nash$. Δηλαδή, θα πρέπει να είναι κοινή γνώση ότι οι παίκτες θα κινηθούν βάση της ισορροπίας κατά $Nash$. Πράγματι, αν κάθε παίκτης γνωρίζει ότι οι άλλοι παίκτες θα επιλέξουν την ισορροπία και γνωρίζει επίσης ότι και οι υπόλοιποι παίκτες το γνωρίζουν, τότε τελικά όλοι οι παίκτες θα επιλέξουν τον ορίζοντα στρατηγικής της ισορροπίας $Nash$. Για τον παραπάνω λόγω ένας ορίζοντας στρατηγικής της ισορροπίας $Nash$ χαρακτηρίζεται αυτοεπιβαλλόμενος.

Εύρεση ισορροπίας Nash σε παίγνια κανονικής μορφής

Θεωρούμε ένα παίγνιο σε κανονική μορφή $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ του οποίου τα σύνολα στρατηγικής είναι ανοικτά διαστήματα και οι συναρτήσεις απόδοσεις δύο φορές παραγωγίσιμες. Τότε ο ορίζοντας στρατηγικής $(s_1^*, \ldots, s_I^*)$ είναι μια ισορροπία *Nash* αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- $\dfrac{\partial u_i(s_1^*, \ldots, s_I^*)}{\partial s_i} = 0$ για κάθε παικτη i,
- κάθε s_i^* είναι το μόνο στάσιμο σημείο της συνάρτησης $u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \ldots, s_I^*)$ με $s \in S_i$
- $\dfrac{\partial^2 u_i(s_1^*, \ldots, s_I^*)}{\partial s_i^2} < 0$ για κάθε i.

Παράδειγμα 2.1.1. *(Το μοντέλο του Δυοπώλειου Cournot)*

Το συγκεκριμένο παράδειγμα περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο δυο εταιρείες που παράγουν παρόμοια προϊόντα καθορίζουν την ποσότητα παραγωγή τους. Μελετήθηκε το 1838 από τον Augustin Cournot και αποτελεί ένα από τα πρωτοεμφανιζόμενα παίγνια στα οικονομικά.

Πρόκειται για ένα παίγνιο κανονικής μορφής με δύο παίκτες, την εταιρία 1 και την εταιρία 2. Οι δυο αυτές εταιρίες παράγουν παρόμοια προϊόντα και αποφασίζουν ταυτόχρονα ποιά θα είναι η ποσότητα του προϊόντος που θα παράγουν. Θεωρούμε ότι η εταιρία 1 παράγει ποσότητα προϊόντος q_1 και η εταιρία 2 ποσότητα q_2. Άρα, η συνολική ποσότητα προϊόντων που παράγουν οι δυο εταιρίες είναι $q = q_1 + q_2$. Η τιμή ανά μονάδα προϊόντος στην αγορά είναι $p(q) = A - q$, με A μια σταθερή ποσότητα. Το συνολικό κόστος παραγωγής κάθε εταιρίας είναι $c_i q_i$, $i = 1, 2$, όπου $q_i \geq 0$ και c_i θετικές σταθερές.

Το σύνολο στρατηγικών κάθε εταιρίας είναι το σύνολο των ποσοτήτων που ενδεχομένως επιλέξει η εταιρία να παράγει. Άρα, το σύνολο στρατηγικών κάθε εταιρίας είναι το $(0, \infty)$. Σκοπός κάθε εταιρίας είναι να επιλέξει την βέλτιστη στρατηγική, δηλαδή να παράγει εκείνη την ποσότητα προϊόντος που θα μεγιστοποιεί το κέρδος της.

Το κέρδος κάθε εταιρίας δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} u_i(q_1, q_2) &= q_i[p(q) - c_i] \\ &= q_i[A - q_1 - q_2 - c_i], \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Από την παραπάνω σχέση γίνεται φανερό ότι το κέρδος κάθε εταιρίας εξαρτάται από την παραγωγή της άλλης, γεγονός που είναι αναμενόμενο αφού οι δύο αυτές εταιρίες προσφέρουν στην αγορά ίδιου είδους προϊόντα.

Συγκεκριμένα, το κέρδος της εταιρίας 1 είναι:

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2) &= q_1[A - q_1 - q_2 - c_1] \\ &= -q_1^2 + (A - q_2 - c_1)q_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Το κέρδος της εταιρίας 2 είναι:

$$\begin{aligned} u_2(q_1, q_2) &= q_2[A - q_1 - q_2 - c_2] \\ &= -q_2^2 + (A - q_1 - c_2)q_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Οι δύο εταιρίες επιλέγουν την ποσότητα προϊόντων που θα παράγουν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα η μια με τη άλλη, οπότε για να προσδιορίσουμε την λύση αυτού του παιγνίου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ισορροπία $Nash$.

Εφαρμόζοντας την διαδικασία που αναφέραμε προηγουμένως έχουμε ότι η ισορροπία $Nash$ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2q_1 - q_2 + A - c_1 = 0 \\ -2q_2 - q_1 + A - c_2 = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\iff \begin{cases} q_1 = \dfrac{c_2 + A - 2c_1}{3} \\ q_2 = \dfrac{c_1 + A - 2c_2}{3} \end{cases}$$

Άρα, ο ορίζοντας στρατηγικής (q_1^*, q_2^*) με $q_1^* = \dfrac{c_2 + A - 2c_1}{3}$ και

$q_2^* = \dfrac{c_1 + A - 2c_2}{3}$ είναι η ισορροπία $Nash$ του παιγνίου.

2.2 Παίγνια πινάκων 2 ατόμων

Ορισμός 2.2.1. *Ένα παίγνιο πίνακα δυο ατόμων είναι μια κατάσταση στην οποία συμμετέχουν δύο παίκτες, που καλούνται παίκτης 1 και παίκτης 2, τέτοιο ώστε:*

- *Ο παίκτης 1 έχει πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών* $S_1 = \{s_1^1, s_2^1, ..., s_m^1\}$ *με* m *στοιχεία.*
- *Ο παίκτης 2 έχει πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών* $S_2 = \{s_1^2, s_2^2, ..., s_n^2\}$ *με* n *στοιχεία.*
- *Οι αποδόσεις των παικτών όταν ο παίκτης 1 ακολουθήσει την στρατηγική* s_i^1 *και ο παίκτης 2 τη στρατηγική* s_j^2 *είναι οι πραγματικές συναρτήσεις* $u_1(s_i^1, s_j^2)$ *και* $u_2(s_i^1, s_j^2)$.

Το παίγνιο παίζεται ως εξής:
Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν, δηλαδή ο παίκτης 1 επιλέγει την στρατηγική $s_i^1 \in S_1$ και ο παίκτης 2 επιλέγει την στρατηγική $s_j^2 \in S_2$. Στην συνέχεια, ο κάθε παίκτης λαμβάνει την απόδοση που προκύπτει από την στρατηγική που ακολούθησε, έτσι στον παίκτη 1 απονέμεται απόδοση $u_1(s_i^1, s_j^2)$ και στον παίκτη 2 απόδοση $u_2(s_i^1, s_j^2)$.

Σε παίγνια πίνακα συνήθως αναπαριστούμε τις αποδόσεις των παικτών με πίνακες A και B. Θέτοντας $a_{ij} = u_1(s_i^1, s_j^2)$ και $b_{ij} = u_2(s_i^1, s_j^2)$ έχουμε ότι οι αποδόσεις του παίκτη 1 είναι ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ και του παίκτη 2 ο πίνακας $B = [b_{ij}]$, οι οποίοι δεδομένων των διαστάσεων των συνόλων στρατηγικής είναι mxn πίνακες.
Ένα παίγνιο πινάκων δυο ατόμων μπορεί να περιγραφεί με ένα mxn πίνακα ως εξής:

	Παίκτης 2				
	Στρατηγική	s_1^2	s_2^2	$\dots$	s_n^2
Παίκτης 1	s_1^1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\dots$	(a_{1n}, b_{1n})
	s_2^1	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\dots$	(a_{2n}, b_{2n})
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	s_m^1	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\dots$	(a_{mn}, b_{mn})

Πρόκειται για έναν πίνακα δύο εισόδων, όπου ο ένας παίκτης επιλέγει στρατηγικές μεταξύ των γραμμών (Παίκτης 1) και ο άλλος επιλέγει στρατηγικές μεταξύ των στηλών (Παίκτης 2). Τα στοιχεία του πίνακα είναι οι αποδόσεις του κάθε παίκτη που αντιστοιχούν σε κάθε στρατηγική. Συγκεκριμένα, το

πρώτο στοιχείο του διατεταγμένου ζεύγους αναπαριστά την απόδοση του παίκτη 1 και το δεύτερο του παίκτη 2.
Ένα παίγνιο πίνακα μπορούμε να το προσδιορίσουμε πλήρως από το ζεύγος των πινάκων απόδοσης A και B. Όταν ένα παίγνιο πίνακα το περιγράφουμε με το ζεύγος (A,B), τότε λέμε ότι το παίγνιο είναι σε **μορφή δύο πινάκων**. Επίσης, τον παίκτη 1 τον καλούμε παίκτη γραμμή και τον παίκτη 2 παίκτη στήλη. Θα συμβολίζουμε με τον δείκτη i, όπου $i = 1, \ldots, m$ τις στρατηγικές του παίκτη γραμμή και με τον δείκτη j, όπου $j = 1, \ldots, n$ τις στρατηγικές του παίκτη στήλη.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός παιγνίου κανονικής μορφής, τις οποίες και θα μελετήσουμε εκτενώς στις επόμενες ενότητες, είναι:

1. **Μέθοδος διαδοχικών απαλοιφών των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών**, η οποία εφαρμόζεται σε παίγνια τα οποία έχουν αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές.

2. **Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές**, η οποία εφαρμόζεται σε παίγνια τα οποία δεν έχουν αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές.

3. **Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές**, η οποία εφαρμόζεται σε παίγνια τα οποία δεν διαθέτουν κάποια ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές.

2.3 Αμιγείς και Μικτές στρατηγικές

Μέχρι αυτό το σημείο, έχουμε υποθέσει ότι οι παίκτες κάνουν τις επιλογές τους με βεβαιότητα. Συγκεκριμένα, κάθε παίκτης έχει προαποφασίσει τη στρατηγική που θα ακολουθήσει και οι παίκτες παίζουν ταυτόχρονα χωρίς να γνωρίζουν τις επιλογές των άλλων παικτών. Τα παίγνια αυτά ονομάζονται **παίγνια καθαρής (αμιγής) στρατηγικής ή στρατηγικά παίγνια**. Τα παίγνια αυτά είναι δύο περιόδων 0,1 όπου την χρονική στιγμή 0 κάθε παίκτης μελετά το παίγνιο, δηλαδή προσπαθεί να προβλέψει τι θα συμβεί για τις διάφορες επιλογές των άλλων παικτών και με γνώμονα την μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας του αποφασίζει ποια στρατηγική θα ακολουθήσει την χρονική στιγμή 1. Την χρονική στιγμή 1 οι παίκτες παίζουν ταυτόχρονα την στρατηγική που αποφάσισαν και λαμβάνουν τα κέρδη ή τις ζημιές που αντιστοιχούν στην στρατηγική αυτή.

Παρόλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες οι παίκτες επιλέγουν τις κινήσεις τους με τυχαίο τρόπο, για παράδειγμα ρίχνοντας ένα νόμισμα. Σε αυτή την περίπτωση, ο παίκτης μπορεί να μην είναι βέβαιος σχετικά με το ποια είναι η βέλτιστη καθαρή στρατηγική οπότε μπορεί να επιλέξει στην τύχη μεταξύ δύο ή περισσότερων καθαρών στρατηγικών. Δηλαδή, να επιλέξει τυχαία υιοθετώντας τη μικτή στρατηγική, η οποία περιλαμβάνει συνδυασμό στρατηγικών, κάθε μία από τις οποίες επιλέγεται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας. Τα παίγνια κανονικής μορφής στα οποία τα σύνολα στρατηγικών έχουν αντικατασταθεί με ορίζοντες πιθανότητας πάνω στις στρατηγικές καλούνται **παίγνια μικτής στρατηγικής**. Άρα, τα παίγνια μικτής στρατηγικής είναι σαν τα παίγνια στρατηγικής μορφής με τη διαφορά οτι ο i παίκτης προεπιλέγει ένα διάνυσμα πιθανότητας $P_i = (p_1, ..., p_{vi})$, όπου v_i το πλήθος των στρατηγικών του παίκτη με το οποίο θα επιλέξει την στρατηγική του την κατάλληλη χρονική στιγμή.

Ορισμός 2.3.1.

Έστω S_i το σύνολο (πεπερασμένο) των αμιγών στρατηγικών του παίκτη i. Μια **μικτή στρατηγική** για τον παίκτη ι είναι μια συνάρτηση $\sigma_i : S_i \to [0, 1]$, η οποία εκχωρεί σε κάθε αμιγή στρατηγική $s_i \in S_i$ μια πιθανότητα $\sigma_i(s_i) \geq 0$ με την οποία ενδεχομένως αυτή να παιχτεί, όπου $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Υποθέτουμε ότι ο παίκτης i έχει m αμιγείς στρατηγικές στο σύνολο στρατηγικών του $S_i = \{s_1^i, \dots, s_m^i\}$. Τότε, το σύνολο των πιθανών μικτών στρατηγικών του παίκτη i μπορεί να συνδεθεί με τα στοιχεία του ακόλουθου $simplex$:
$\Delta(S_i) = \{(\sigma_1^i, \dots, \sigma_m^i) \in \mathbb{R}^m : \sigma_k^i \geq 0, \forall k = 1, \dots, m$ και $\sum_{k=1}^m \sigma_k^i = 1\}$
Αυτό το $simplex$ ονομάζεται **μικτή επέκταση** του συνόλου S_i.

Σε αυτή την περίπτωση, η αναπαράσταση ενός παίγνιου σε κανονική μορφή είναι $\mathbf{\Gamma_N} = [\mathbf{I}, \{\mathbf{\Delta(S_i)}\}, \{\mathbf{u_i}(.)\}]$, όπου το σύνολο των στρατηγικών των παικτών έχει επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει και αμιγείς και μικτές στρατηγικές.

2.4 Μέθοδος διαδοχικών απαλοιφών των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών

Αρχικά, αγνοούμε την πιθανότητα ότι οι παίκτες ίσως επιλέγουν με τυχαίο τρόπο την στρατηγική που θα ακολουθήσουν. Άρα, εστιάζουμε σε παίγνια κανονικής μορφής $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ των οποίων τα σύνολα στρατηγικής επιτρέπουν μόνο αμιγείς στρατηγικές.

Ορισμός 2.4.1. *Μια στρατηγική $s_i \in S_i$ καλείται αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη i σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ αν για κάθε άλλη στρατηγική $s_i^{'} \neq s_i$ και για όλα τα προφίλ στρατηγικών των αντιπάλων του $s_{-i} \in S_{-i}$ (με $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_I)$) ισχύει ότι: $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^{'}, s_{-i})$.*

Με πιο απλά λόγια, μια στρατηγική s_i είναι μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη i εάν μεγιστοποιεί με μοναδικό τρόπο την απόδοση του για οποιαδήποτε πιθανή στρατηγική που ίσως επιλέξουν οι αντίπαλοι του. Αν ένας παίκτης έχει μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική τότε το αναμενόμενο θα είναι να επιλέξει να κινηθεί βάση αυτής.

Αν και είναι αναγκαστικό το γεγονός ότι αν κάποιος παίκτης έχει μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική τότε θα παίξει με αυτήν, είναι σπάνιο να υπάρχουν τέτοιου είδους στρατηγικές. Συχνά, μια στρατηγική για τον παίκτη i ίσως είναι βέλτιστη αν οι αντίπαλοι του παίζουν s_{-i} και άλλοτε όταν παίζουν κάποιες άλλες στρατηγικές. Παρόλα αυτά, μπορούμε ακόμα να αποκλείσουμε κάποιες στρατηγικές από το να είναι πιθανές επιλογές χρησιμοποιώντας την ιδέα της κυριαρχίας. Συγκεκριμένα, προσδοκούμε ότι ο παίκτης i δεν πρόκειται να παίξει κυριαρχημένες στρατηγικές, δηλαδή στρατηγικές για τις οποίες υπάρχει κάποια άλλη εναλλακτική στρατηγική που αποφέρει στον παίκτη μεγαλύτερη απόδοση ανεξάρτητα από το τι κάνουν οι υπόλοιποι παικτες. Ο ακριβής ορισμός των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 2.4.2. *Μια στρατηγική $s_i \in S_i$ καλείται αυστηρά κυριαρχημένη (strictly dominated) στρατηγική για τον παίκτη i σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ αν υπάρχει μια άλλη στρατηγική $s_i^{'} \in S_i$ τέτοια ώστε για όλα τα προφίλ στρατηγικών των αντιπάλων του $s_{-i} \in S_{-i}$ ισχύει ότι: $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i^{'}, s_{-i})$.*
Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η στρατηγική $s_i^{'}$ κυριαρχεί αυστηρά της στρατηγικής s_i.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να πούμε ότι: Μια στρατηγική $s_i \in S_i$ αποτελεί μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη i σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ αν αυτή κυριαρχεί αυστηρά όλων των άλλων στρατηγικών του συνόλου στρατηγικών του παίκτη S_i.

Στον επόμενο ορισμό, παρουσιάζουμε μια πιο ασθενή έννοια της αυστηρά κυριαρχημένης στρατηγικής.

Ορισμός 2.4.3. *Μια στρατηγική $s_i \in S_i$ καλείται ασθενώς κυριαρχημένη (weakly dominated) στρατηγική για τον παίκτη i σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ αν υπάρχει μια άλλη στρατηγική $s_i^{'} \in S_i$ τέτοια ώστε για όλα τα προφίλ στρατηγικών των αντιπάλων του $s_{-i} \in S_{-i}$ ισχύει ότι: $u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$, με αυστηρή ανισότητα για κάποια s_{-i}.*
Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η στρατηγική $s_i^{'}$ κυριαρχεί ασθενώς της στρατηγικής s_i. Επίσης, μια στρατηγική είναι ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική για έναν παίκτη αν κυριαρχεί ασθενώς όλων των άλλων στρατηγικών του συνόλου στρατηγικών του παίκτη.

Στην περίπτωση που έχουμε ένα παίγνιο πίνακα δυο ατόμων, οι παραπάνω ορισμοί απλουστεύονται ως εξής:

Ορισμός 2.4.4.
- *Λέμε ότι η στρατηγική $s_i \in S_1$ του παίκτη 1 κυριαρχεί της στρατηγικής $s_j \in S_1$ του παίκτη 1 αν $u_1(s_i, s) \geq u_1(s_j, s), \forall s \in S_2$.*
- *Η στρατηγική $s_i \in S_1$ του παίκτη 1 κυριαρχεί αυστηρά της στρατηγικής $s_j \in S_1$ του παίκτη1 αν $u_1(s_i, s) > u_1(s_j, s), \forall s \in S_2$.*
- *Λέμε ότι η στρατηγική $s_i \in S_2$ του παίκτη 2 κυριαρχεί της στρατηγικής $s_j \in S_2$ του παίκτη 2 αν $u_2(s, s_i) \geq u_2(s, s_j), \forall s \in S_1$.*
- *Η στρατηγική $s_i \in S_1$ του παίκτη 2 κυριαρχεί αυστηρά της στρατηγικής $s_j \in S_2$ του παίκτη2 αν $u_2(s, s_i) > u_2(s, s_j), \forall s \in S_1$.*

Περιγραφή μεθόδου: Αν η στρατηγική s_i του παίκτη 1 κυριαρχεί αυστηρά της στρατηγικής s_j , αυτό σημαίνει ότι η s_i δίνει στον παίκτη 1 μεγαλύτερη απόδοση από την s_j για οποιαδήποτε επιλογή του παίκτη 2. Οπότε θεωρούμε ότι η στρατηγική s_j δεν θα χρησιμοποιηθεί ποτέ από τον παίκτη 1 και έτσι την διαγράφουμε από τις επιλογές του.
Η μέθοδος της διαγραφής των αυστηρά κυρίαρχων στρατηγικών απαιτεί μόνο οι παίκτες να είναι ορθολογικοί. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί και ότι οι αποδόσεις των παικτών είναι κοινή γνώση, δηλαδή όλοι να γνωρίζουν ότι όλοι ξέρουν ότι όλοι είναι ορθολογικοί, τότε δεν είναι ανάγκη να σταματήσουμε μόνο μετά από δύο επαναλήψεις. Ωστόσο, σε κάθε πρόσθετη επανάληψη της μεθόδου κάθε παίκτης πρέπει να γνωρίζει όχι μόνο ότι οι αντίπαλοι του είναι ορθολογικοί αλλά επίσης ότι γνωρίζουν ότι και ο ίδιος είναι ορθολογικός. Ένα ακόμη χαρακτηριστικό αυτής της διαδικασίας είναι ότι η

σειρά των διαγραφών δεν επηρεάζει το σύνολο των στρατηγικών που απομένει στο τέλος του παιγνίου. Αυτό είναι αρκετά χρήσιμο καθώς αν σε οποιοδήποτε σημείο του παιγνίου υπάρχουν αρκετές στρατηγικές, ενός ή περισσοτέρων παικτών, οι οποίες είναι αυστηρά κυριαρχημένες τότε μπορούμε να τις διαγράψουμε όλες μαζί ή με οποιαδήποτε σειρά χωρίς να αλλάξει το σύνολο των στρατηγικών που τελικά θα πάρουμε στο τέλος.

Το πιο γνωστό παράδειγμα της θεωρίας παιγνίων και το πιο ευρέως αναλυόμενο παίγνιο για την εισαγωγή στις θεμελιώδεις έννοιες της είναι το δίλημμα του φυλακισμένου το οποίο διατυπώθηκε το 1950 από τους *H.W.Kuhn* και *A.W.Tucker*.

Παράδειγμα 2.4.1. *(Το δίλλημα του φυλακισμένου)*

Πρόκειται για ένα παίγνιο δυο παικτών στρατηγικής μορφής, αποτελεί το πιο γνωστό παράδειγμα στην θεωρία παιγνίων.

Δύο κρατούμενοι έχουν συλληφθεί από την αστυνομία για κάποιο έγκλημα. Το δίλλημα στο οποίο βρίσκονται είναι ποια στρατηγική (κατάθεση) θα ακολουθήσουν στο δικαστήριο ώστε να έχουν την μικρότερη ποινή. Οι δυο κρατούμενοι βρίσκονται σε διαφορετικά κελιά οπότε δεν μπορεί να υπάρξει κάποια συνεννόηση μεταξύ τους αλλά το μόνο που γνωρίζουν είναι ότι:

- Αν και οι δυο επιλέξουν να κατηγορήσει ο ένας τον άλλον τότε και οι δύο θα καταδικαστούν σε 3 χρόνια φυλάκισης.
- Αν ο ένας κατηγορήσει τον άλλο και ο άλλος αρνηθεί την κατηγορία τότε ο πρώτος θα αφεθεί ελεύθερος και ο δεύτερος θα καταδικαστεί σε 8 χρόνια φυλάκισης.
- Αν και οι δυο αρνηθούν την κατηγορία τότε και οι δύο θα καταδικαστούν σε 1 χρόνο φυλάκισης.

Η παρουσίαση του παιγνίου γίνεται με την μορφή πίνακα όπου ο ένας παίκτης επιλέγει στρατηγικές μεταξύ των γραμμών (Παίκτης γραμμή) και ο άλλος επιλέγει στρατηγικές μεταξύ των στηλών (Παίκτης στήλη). Συμβολίζουμε με **K** την στρατηγική **«κατηγορία»** και με **A** την στρατηγική **«άρνηση»**. Άρα το παίγνιο περιγράφεται με τον ακόλουθο πίνακα:

	Παίκτης 2		
Παίκτης 1	Στρατηγική	A	K
	A	(-1,-1)	(-8,0)
	K	(0,-8)	(-3,-3)

Λύση του παιγνίου:
Κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική του με γνώμονα αυστηρά το συμφέρον του και αποκλείει στρατηγικές με γνώμονα την απόδοση τους.

Ο παίκτης 1 θα επιλέξει την βέλτιστη στρατηγική του κοιτάζοντας το συμφέρον του για κάθε επιλογή του παίκτη 2. Συγκεκριμένα, δεδομένου ότι ο παίκτης 2 έχει επιλέξει την στρατηγική άρνηση, ο παίκτης 1 θα επιλέξει την στρατηγική κατηγορία γιατί τότε θα αφεθεί ελεύθερος διαφορετικά αν επιλέξει άρνηση θα καταδικαστεί ένα χρόνο. Αν ο παίκτης 2 επιλέξει τη στρατηγική κατηγορία τότε και ο παίκτης 1 θα επιλέξει κατηγορία και θα καταδικαστεί 3 χρόνια (αντί 8 χρόνια που θα καταδικαζόταν αν επέλεγε άρνηση). Άρα, ο παίκτης 1 θα ακολουθήσει την στρατηγική κατηγορία όποια στρατηγική και αν επιλέξει ο παίκτης 2 καθώς του δίνει καλύτερη απόδοση για κάθε επιλογή του παίκτη 2. Οπότε,η στρατηγική κατηγορία είναι αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη 1.

Αντίστοιχα ο παίκτης 2 επιλέγει την στρατηγική του με κριτήριο το συμφέρον για κάθε δυνατή επιλογή του παίκτη 1. Για τους ίδιους λόγους με πριν, αν ο παίκτης 1 επιλέξει την στρατηγική άρνηση τότε ο παίκτης 2 θα επιλέξει την στρατηγική κατηγορία και αν ο παίκτης 1 επιλέξει τη στρατηγική κατηγορία τότε και ο παίκτης 2 θα επιλέξει κατηγορία. Άρα, ο παίκτης 2 θα επιλέξει την στρατηγική κατηγορία όποια και αν είναι η στρατηγική του παίκτη 1. Δηλαδή, η στρατηγική κατηγορία είναι μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική και για τον παίκτη 2.

Επομένως η λύση του παιγνίου με την μέθοδο των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών είναι η στρατηγική (Κ,Κ).

Παρατηρούμε ότι αν οι κατηγορούμενοι επέλεγαν την στρατηγική (Α,Α) θα καταδικάζονταν μόνο σε ένα χρόνο φυλάκισης, παρόλα αυτά θα επιλέξουν (Κ,Κ) και θα καταδικαστούν σε τρία χρόνια φυλάκισης. Επίσης, η στρατηγική (Κ,Κ) είναι η μοναδική ισορροπία κατά $Nash$ διότι κανένας παίκτης δεν έχει συμφέρον να την εγκαταλείψει δεδομένου ότι ο άλλος ακολούθησε την στρατηγική αυτή.

Μερικές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή του παραπάνω παίγνιου είναι :

- Η επιλογή δύο αντιμαχόμενων μερών σε μια αμφισβήτηση σχετικά με το αν θα χρησιμοποιήσουν δικηγόρους ή/και θα καταφύγουν στα δικαστήρια για να λύσουν για την αντιδικία τους.

- Κούρσα εξοπλισμών μεταξύ δύο κρατών.

2.5 Ορθολογικές στρατηγικές

Στην θεωρία παιγνίων θεωρούμε ότι οι παίκτες έχουν «ορθολογική συμπεριφορά». Αυτό σημαίνει ότι κάθε παίκτης επιλέγει μία βέλτιστη κίνησή του με βάση τις προτιμήσεις που έχει και ανεξάρτητα από τη φύση αυτών των προτιμήσεων του, προσπαθεί να τις ικανοποιήσει. Συνήθως, οι προτιμήσεις των παικτών δίνονται με τη μορφή των συναρτήσεων απόδοσης. Υποθέσαμε ότι οι παίκτες είναι ορθολογικοί και ο καθένας επιλέγει το καλύτερο σύμφωνα με τις προτιμήσεις του, ωστόσο, η έκβαση του παιγνίου για κάθε παίκτη εξαρτάται από τις επιλογές όλων των παικτών. Άρα, ένας ορθολογικός παίκτης πρέπει να λάβει υπόψη του και τι ενέργειες θα επιλέξουν οι υπόλοιποι παίκτες. Επίσης, οι παίκτες, ως ορθολογικές οντότητες, επιλέγουν την καλύτερη δυνατή κίνηση ο καθένας. Επειδή όμως, σε ένα παίγνιο η καλύτερη κίνηση για οποιοδήποτε παίκτη εξαρτάται από τις κινήσεις των υπολοίπων παικτών, κάθε παίκτης θα πρέπει να έχει μία εκτίμηση ($belief$) για τις κινήσεις των άλλων παικτών.

Το σύνολο των ορθολογικών στρατηγικών περιλαμβάνει με ακρίβεια τις στρατηγικές που ίσως παιχτούν σε ένα παίγνιο του οποίου η δομή και η ορθολογικότητα των παικτών αποτελεί κοινή γνώση για όλους τους παίκτες.

Θεωρούμε παίγνια κανονικής μορφής στα οποία επιτρέπονται οι μικτές στρατηγικές. Θα λέμε ότι μια στρατηγική σ_i αποτελεί μια βέλτιστη απόκριση στην στρατηγική σ_{-i} αν αυτή είναι μια βέλτιστη επιλογή όταν ο παίκτης i πιστεύει ότι οι αντίπαλοι του θα παίξουν την σ_{-i} ενώ αποτελεί μια ποτέ βέλτιστη απόκριση αν ο παίκτης i δεν πιστεύει ότι θα επικρατήσει στην στρατηγική των αντιπάλων του επιλέγοντας αυτή την στρατηγική. Ο ακριβής ορισμός των παραπάνω εννοιών είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 2.5.1. *Σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής* $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i\}]$ *στο οποίο επιτρέπονται οι μικτές στρατηγικές, μια στρατηγική* σ_i *του παίκτη* i *ονομάζεται*

- *βέλτιστη απόκριση (best response) στις στρατηγικές* σ_{-i} *των αντιπάλων του αν για κάθε* $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$ *έχουμε ότι* $u_i(\sigma_i, \sigma-i) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$.

- *ποτέ βέλτιστη απόκριση (never a best response) αν δεν υπάρχει κάποια στρατηγική* σ_{-i} *για την οποία η* σ_i *να είναι μια βέλτιστη απόκριση.*

Προφανώς, ένας παίκτης δεν θα επιλέξει να παίξει μια στρατηγική που είναι ποτέ βέλτιστη απόκριση. Παρατηρούμε ότι μια στρατηγική που είναι αυστηρώς κυριαρχημένη αποτελεί μια ποτέ βέλτιστη απόκριση. Παρόλα αυτά, μια στρατηγική μπορεί να είναι ποτέ βέλτιστη απόκριση ενώ δεν είναι αυστηρά κυριαρχημένη. Επίσης, όπως στην περίπτωση των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών, η κοινή γνώση της ορθολογικότητας και της δομής του παιγνίου συνεπάγεται την διαδοχική διαγραφή των στρατηγικών που είναι ποτέ βέλτιστες αποκρίσεις. Αυτό έχει ως συνέπεια, το σύνολο των στρατηγικών που απομένουν μετά από αυτή την διαδοχική διαγραφή να είναι το σύνολο των στρατηγικών που μπορεί να παιχτεί από ορθολογικούς παίκτες σε ένα παίγνιο όπου η ορθολογικότητα των παικτών και η δομή του παιγνίου αποτελεί κοινή γνώση. Αυτές οι στρατηγικές είναι γνωστές ως **ορθολογικές στρατηγικές**.

Παρατηρούμε ότι, το σύνολο των ορθολογικών στρατηγικών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των στρατηγικών που απομένουν μετά την διαδοχική απαλοιφή των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών, καθώς όπως αναφέραμε προηγουμένως οι αυστηρά κυριαρχημένες στρατηγικές είναι ποτέ βέλτιστες αποκρίσεις αλλά μια ποτέ βέλτιστη απόκριση μπορεί να είναι και μια στρατηγική που δεν είναι αυστηρά κυριαρχημένη. Επίσης, η σειρά με την οποία γίνεται η διαγραφή των στρατηγικών που είναι ποτέ βέλτιστες αποκρίσεις δεν επηρεάζει το σύνολο των στρατηγικών που θα απομείνει στο τέλος.

Επιπλέον, μπορεί να αποδειχτεί ότι κάτω από αρκετά ασθενείς συνθήκες ένα παίκτης έχει πάντα τουλάχιστον μια ορθολογική στρατηγική, δηλαδή ένας παίκτης ενδέχεται να έχει πολλές ορθολογικές στρατηγικές.

2.6 Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές

Δυστυχώς, υπάρχουν παίγνια που δεν έχουν αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές οπότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της διαδοχικής απαλοιφής των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών για την επίλυση τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις η εύρεση της λύσης του παιγνίου επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την ισορροπία κατά *Nash*. Η ισορροπία *Nash* αποτελεί την πιο ερεύως γνωστή μέθοδο για την επίλυση ενός παιγνίου. Πήρε το όνομα της από τον John Fordes Nash.

Σε αυτή την ενότητα, αγνοούμε την πιθανότητα ότι οι παίκτες μπορεί να χρησιμοποιούν μικτές στρατηγικές και εστιάζουμε σε παίγνια όπου χρησιμοποιούνται μόνο αμιγείς στρατηγικές.

Ορισμός 2.6.1. *Σε ένα παίγνιο κανονικής μοφής* $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ *ένας ορίζοντας στρατηγικής* $s = (s_1, \ldots, s_I)$ *καλείται ισορροπία Nash αν για κάθε* $i = 1, \ldots, I$ *και για κάθε* $s_i' \in S_i$ *ισχύει ότι:*

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}).$$

Παρατηρούμε ότι η ισορροπία *Nash* είναι ένα διάνυσμα στρατηγικής που κανένας παίκτης δεν έχει συμφέρον να εγκαταλείψει δεδομένου ότι ο άλλος παίκτης ακολούθησε την στρατηγική αυτή. Έχει δηλαδή την ιδιότητα να είναι αυτοεπιβαλλόμενη.

Σε μια ισορροπία *Nash* η στρατηγική κάθε παίκτη αποτελεί μια βέλτιστη απόκριση στις στρατηγικές που θα επιλεγούν από τους αντιπάλους του. Αυτό που διακρίνει μια ισορροπία *Nash* από την έννοια της ορθολογοκότητας είναι το εξής: η ορθολογικότητα το μόνο που απαιτεί είναι ότι η στρατηγική ενός παίκτη είναι μια βέλτιστη απόκριση σε κάποια λογική εικασία σχετικά με το τι θα επιλέξουν οι αντίπαλοι του να παίξουν, χωρίς όμως να οδηγεί απαραίτητα τους παίκτες σε σωστές προβλέψεις, η ισορροπία *Nash*, όμως, προσθέτει σε αυτή την απαίτηση ότι αυτές οι εικασίες των παικτών είναι σωστές.

Κάθε στρατηγική η οποία είναι μέρος μιας ισορροπίας *Nash* είναι ορθολογική διότι η στρατηγική κάθε παίκτη σε μια ισορροπία *Nash* μπορεί να δικαιολογηθεί από τις στρατηγικές των υπόλοιπων παικτών. Επομένως, η έννοια μιας ισορροπίας *Nash* προσφέρει μια πιο ακριβή πρόβλεψη από την έννοια της ορθολογικότητας.

Η ισορροπία *Nash* είναι απαραίτητη συνθήκη αν υπάρχει μια μοναδική προβλεπόμενη έκβαση του παιγνίου. Συγκεκριμένα, αν προβλέται ότι το παίγνιο θα καταλήξει σε ένα μοναδικό αποτέλεσμα, τότε οι ορθολογικοί παίκτες θα το συνειδητοποιήσουν αυτό και δεν θα επιθυμούν να αποκλίνουν από αυτό. Δηλαδή, αν οι παίκτες έχουν την πεποίθηση ότι υπάρχει ένας προφανής τρόπος να παιχτεί το παίγνιο, τότε αυτός πρέπει να είναι μια ισορροπία *Nash*.

Πώς όμως οι παίκτες συμπεραίνουν ότι υπάρχει ένας «προφανής» τρόπος για να παίξουν το παίγνιο; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από τα γνωστά σημεία εστίασης. Ένα **σημείο εστίασης** (focal point) στην θεωρία παιγνίων είναι μια λύση που οι παίκτες τείνουν να χρησιμοποιούν όταν υπάρχει έλλειψη επικοινωνίας μεταξύ τους, επειδή τους φαίνεται φυσική ή σχετική με αυτούς. Την έννοια αυτή την εισήγαγε ο Αμερικανός οικονομολόγος Thomas Schelling στο βιβλίο του «The Strategy of Conflict» (1960). Αργότερα, αυτού του είδους τα σημεία ανομάστηκαν σημεία *Schelling*, προς τιμή του. Επίσης, αυτά τα σημεία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στις διαπραγματεύσεις, καθώς δεν μπορούμε να εμπιστευόμαστε πλήρως τις λέξεις των διαπραγματευτικών μας εταίρων.

Επίσης, υπάρχουν παίγνια τα οποία έχουν περισσότερες από μια ισορροπίες κατά *Nash*. Σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν γνωρίζουμε μια από αυτές τις ισορροπίες θα επιλεγεί από τους παίκτες τελικά.

Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα παιγνίου που δεν έχει αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές είναι το ακόλουθο:

Παράδειγμα 2.6.1. *(Η μάχη των φύλων)*

Ένα ζευγάρι θέλει να κανονίσει μια απογευματινή έξοδο και έχει δύο επιλογές, η μια είναι να πάνε στο θέατρο και η άλλη να πάνε σε αγώνα ποδοσφαίρου. Το κορίτσι προτιμά το θέατρο ενώ το αγόρι τον αγώνα ποδοσφαίρου. Παρόλα αυτά θέλουν να περάσουν μαζί το απόγευμα. Έστω ότι ο πίνακας αποδόσεων είναι ο ακόλουθος:

	Κορίτσι (Κ)		
Αγόρι (Α)	Στρατηγική	Θ	Π
	Θ	(1,10)	(0,0)
	Π	(0,0)	(10,1)

Οι γραμμές του πίνακα αναφέρονται στις δυνατές επιλογές (στρατηγικές) που έχει το αγόρι ενώ οι στήλες στις επιλογές που έχει το κορίτσι και συμβολίζουμε με Θ: θέατρο και Π : αγώνα ποδοσφαίρου.

Είναι φανερό ότι, το συγκεκριμένο παίγνιο δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική για κάποιον παίκτη, οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών των αυστηρά κυριαρχημένων σταρτηγικών.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δυο ισορροπίες κατά Nash οι οποίες είναι τα ζεύγη (Θ,Θ) και (Π,Π). Από αυτά το πρώτο προτιμάται από το κορίτσι και το δεύτερο από το αγόρι. Συγκεκριμένα έχουμε:

Δεδομένου ότι το κορίτσι θα επιλέξει θέατρο τότε και το αγόρι θα επιλέξει θέατρο, αφού: $u_A(\Theta, \Theta) = 1 > u_A(\Pi, \Theta) = 0$

Και δεδομένου ότι το αγόρι θα επιλέξει θέατρο τότε και το κορίτσι θα επιλέξει θέατρο, αφού: $u_K(\Theta, \Theta) = 10 > u_K(\Theta, \Pi) = 0$

Άρα η στρατηγική (Θ,Θ) είναι ισορροπία κατά Nash.

Ομοίως , δεδομένου ότι το αγόρι θα επιλέξει τον αγώνα ποδοσφαίρου και το κορίτσι θα επιλέξει τον αγώνα και αν το κορίτσι επιλέξει τον αγώνα ποδοσφαίρου το ίδιο θα κάνει και το αγόρι.Άρα και η στρατηγική (Π,Π) είναι ισορροπία κατά Nash.

Παρατήρηση: Αν ένα παίγνιο μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών, τότε η λύση που προκύπτει είναι ισορροπία κατά $Nash$ και είναι μοναδική. Το αντίστροφο, όμως, δεν ισχύει. Δηλαδή, μια ισορροπία $Nash$ δεν είναι ισορροπία σε κυρίαρχες στρατηγικές.

Ωστόσο, δεν έχουν όλα τα παίγνια πίνακα μια ισορροπία $Nash$. Σε αυτή την περίπτωση για την επίλυση τους χρησιμοποιούνται συχνά μικτές στρατηγικές όπως θα δούμε στην συνέχεια.

2.7 Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές

Σε αυτή την ενότητα θα επεκτείνουμε την έννοια της ισορροπίας *Nash* σε παίγνια στα οποία οι παίκτες επιτρέπεται να χρησιμοποιούν μικτές στρατηγικές.

Ορισμός 2.7.1. *Σε ένα παίγνιο κανονικής μοφής* $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(.)\}]$ *ένας ορίζοντας μικτής στρατηγικής* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$ *θα καλείται ισορροπία* *Nash* *αν για κάθε* $i = 1, \ldots, I$ *και για κάθε* $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$ *ισχύει ότι:*

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}).$$

Ένα χαρακτηριστικό της ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές είναι ότι οι παίκτες είναι αδιάφοροι σχετικά με ποια στρατηγική θα επιλέξουν για να παίξουν από το σύνολο των μικτών τους στρατηγικών. Άρα, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας ορίζοντας μικτών στρατηγικών ισορροπία *Nash* του παιγνίου είναι η εξής: κάθε παίκτης είναι αδιάφορος προς όλες τις αμιγείς στρατηγικές που παίζει με θετική πιθανότητα, και επίσης, αυτές οι αμιγείς στρατηγικές είναι τουλάχιστον τόσο καλές όσο οποιαδήποτε αμιγής στρατηγική την οποία παίζει με μηδενική πιθανότητα, δεδομένου της κατανομής των στρατηγικών που παίζονται από τους αντιπάλους του.

Ύπαρξη ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ένα παίγνιο σε αμιγείς στρατηγικές ενδέχεται να μην έχει ισορροπία *Nash*, αλλά έχει πάντα μια ισορροπία μικτών στρατηγικών. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα, η απόδειξη του οποίου βασίζεται στα θεωρήματα σταθερού σημείου του *Kakutani*:

Θεώρημα 2.7.1. *Κάθε παίγνιο κανονικής μορφής* $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(.)\}]$, *στο οποίο τα σύνολα στρατηγικών όλων των παικτών έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, έχει μια ισορροπία* *Nash* *σε μικτές στρατηγικές.*

Επίσης, κάθε ισορροπία *Nash* σε αμιγείς στρατηγικές είναι επίσης ισορροπία του παιγνίου σε μικτές στρατηγικές. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Μέχρι αυτό το σημείο, έχουμε μελετήσει παίγνια με πεπερασμένα σύνολα στρατηγικών. Στις περισσότερες, όμως, εφαρμογές των οικονομικών συναντάμε συχνά παίγνια στα οποία οι στρατηγικές των παικτών μοντελοποιούνται ως συνεχής μεταβλητές. Σε αυτές τις περιπτώσεις το επόμενο θεώρημα συνεπάγεται την ύπαρξη μια ισορροπίας *Nash* σε αμιγείς στρατηγικές.

Θεώρημα 2.7.2. *Θεωρούμε ένα παίγνιο κανονικής μορφής* $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ *στο οποίο για κάθε* $i = 1, \ldots, I$ *ισχύουν τα εξής:*

- *Το σύνολο στρατηγικών κάθε παίκτη* S_i *είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο ενός Ευκλείδιου χώρου* $\mathbb{R}^n$.

- *Η συνάρτηση απόδοσης* $u_i(s_1, \ldots, s_I)$ *είναι συνεχής στο* $(s_1, \ldots, s_I)$ *και σχεδόν κοίλη στο* s_i.

  Τότε υπάρχει μια ισορροπία Nash στο παίγνιο.

Έρευση ισορροπίας Nash ενός παιγνίου πίνακα σε μικτές στρατηγικές

Για λόγους ευκολίας, θα παρουσιάσουμε την διαδικασία που ακολουθούμε για την εύρεση της ισορροπίας *Nash* σε παίγνια κανονικής μορφής με μικτές στρατηγικές για την περίπτωση που το παίγνιο αποτελείται από δυο παίκτες. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες και στην συνέχεια θα προχωρήσουμε στην περιγραφή της μεθόδου.

- Μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη γραμμή είναι κάθε διάνυσμα $\mathbf{p}{=}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ τέτοιο ώστε για κάθε στρατηγική i, $p_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.
- Μια μικτή στρατηγική για τον παικτη στήλη είναι κάθε διάνυσμα $\mathbf{q}{=}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ τέτοιο ώστε για κάθε στρατηγική i, $q_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$.
- Αναμενόμενη απόδοση του παίκτη γραμμή $u_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$.
- Αναμενόμενη απόδοση του παίκτη στήλη, $u_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}$.
- Μια μικτή στρατηγική $\mathbf{p}$ για τον παίκτη γραμμή ονομάζεται **αμιγής στρατηγική** αν για κάποια στρατηγική i έχουμε $p_i = 1$ και $p_k = 0$, $\forall k \neq i$. Δηλαδή, είναι η στρατηγική βάση της οποίας ο παίκτης επιλέγει την στρατηγική i με πιθανότητα 1 και οποιαδήποτε άλλη με πιθανότητα 0.
- Μια μικτή στρατηγική $\mathbf{q}$ για τον παίκτη στήλη ονομάζεται **αμιγής στρατηγική** αν για κάποια στρατηγική i έχουμε $q_i = 1$ και $q_k = 0$, $\forall k \neq i$. Δηλαδή, είναι η στρατηγική βάση της οποίας ο παίκτης επιλέγει την στρατηγική i με πιθανότητα 1 και οποιαδήποτε άλλη με πιθανότητα 0.

Η διαδικασία που ακολουθούμε για την εύρεση μιας ισορροπίας *Nash* σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής δύο παικτών με μικτές στρατηγικές είναι η ακόλουθη:

- Φέρνω το παίγνιο σε μορφή δύο πινάκων.
- Υπολογίζω τις αποδόσεις των παικτών $u_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$ και $u_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}$.

- Εκφράζω τις u_1, u_2 συναρτήσει των μεταβλητών $p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}$ θέτοντας στις συναρτήσεις των αποδόσεων $p_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_i$ και $q_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1}$.

- Λύνω το σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial p_i} = 0, & i = 1, \ldots, m-1 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial q_j} = 0, & j = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Κάθε λύση $p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}$ του παραπάνω συστήματος για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$p_i \geq 0 \; \forall i, \; \sum_{i=1}^{m-1} p_i \leq 1 \text{ και } q_j \geq 0 \; \forall j, \; \sum_{j=1}^{n-1} q_j \leq 1$$

αποτελεί μια ισορροπία μικτών στρατηγικών.

Στην συνέχεια, για να κατανοήσουμε τα προαναφερθέντα παραθέτονται ορισμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.7.1. *(Ρίψη νομίσματος)*

Θεωρούμε ένα παίγνιο δύο παικτών. Κάθε παίκτης ρίχνει ταυτόχρονα ένα νόμισμα . Αν και οι δύο παίκτες φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα (δηλαδή και οι δυο φέρουν κορώνα ή και οι δύο φέρουν γράμματα) τότε ο παίκτης 2 κερδίζει ένα ευρώ από τον παίκτη 1. Διαφορετικά, ο παίκτης 1 κερδίζει ένα ευρώ από τον παίκτη 2. Αυτό το παίγνιο περιγράφεται με τον ακόλουθο πίνακα:

	Παίκτης 2		
Παίκτης 1	Στρατηγική	Κ	Γ
	Κ	(-1,1)	(1,-1)
	Γ	(1,-1)	(-1,1)

Παρατηρούμε ότι το παίγνιο αυτό δεν έχει ισορροπία Nash. Πράγματι, αν ο παίκτης 1 φέρει Κ τότε και ο παίκτης 2 θα προτιμούσε να φέρει Κ, αλλά σε αυτή την περίπτωση ο παίκτης 1 θα ήθελε να φέρει Γ και τότε παίκτης 2 θα ήθελε να φέρει και αυτός Γ κ.ο.κ. Επομένως, οι παίκτες θέλουν να αλλάζουν στρατηγικές συνεχώς.

Το παραπάνω παίγνιο δεν έχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές αλλά έχει πάντα μια ισορροπία μικτών στρατηγικών. Για την εύρεση αυτής υπολογίζουμε αρχικά τις συναρτήσεις αναμενόμενης απόδοσης των παικτών.

Έστω $\mathbf{p}$=(p_1, p_2) με $p_1, p_2 \geq 0$ και $p_1 + p_2 = 1$ μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη 1 και $\mathbf{q}$=(q_1, q_2) με $q_1, q_2 \geq 0$ και $q_1 + q_2 = 1$ μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη 2.

Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 είναι:

$$\begin{aligned} u_1 &= -1p_1q_1 + 1p_2q_1 + 1p_1q_2 - 1p_2q_2 \\ &= -p_1q_1 + (1-p_1)q_1 + p_1(1-q_1) - (1-p_1)(1-q_1) \\ &= -4p_1q_1 + 2p_1 + 2q_1 - 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2 είναι:

$$\begin{aligned} u_2 &= 1p_1q_1 - 1p_2q_1 - 1p_1q_2 + 1p_2q_2 \\ &= p_1q_1 - (1-p_1)q_1 - p_1(1-q_1) + (1-p_1)(1-q_1) \\ &= 4p_1q_1 - 2p_1 - 2q_1 + 1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial p_1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial q_1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4q_1 + 2 = 0 \\ \\ 4p_1 - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{2} \\ \\ p_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2.7}$$

Άρα, $p_2 = 1 - p_1 = \dfrac{1}{2}$ και $q_2 = 1 - q_1 = \dfrac{1}{2}$.

Συνεπώς, η ισορροπία $Nash$ μικτών στρατηγικών του παιγνίου είναι το ζεύγος $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

Παράδειγμα 2.7.2. *(Τέννις)*

Έστω δύο παίκτες που παίζουν τέννις: οι Α και Β. Κάθε φορά που είναι η σειρά του Α να χτυπήσει την μπάλα, πρέπει να επιλέξει εάν θα σημαδέψει το μπροστά ή το πίσω μέρος του γηπέδου του Β. Αντίστοιχα, ο Β πρέπει να αποφασίσει αν θα τοποθετηθεί στο μπροστά ή στο πίσω μέρος του γηπέδου. Η πιθανότητα για τον Α να έχει ένα επιτυχημένο χτύπημα αυξάνει όταν «ξεγελάσει» τον Β. Θεωρούμε ως όφελος κάθε παίκτη την (εκατοστιαία) πιθανότητα να κερδίσει τον γύρο ανάλογα με τις επιλογές και των δύο παικτών.
Έστω p και q οι πιθανότητες με τις οποίες ο Α και ο Β επιλέγουν την στρατηγική «Εμπρός» αντίστοιχα και $1-p$,$1-q$ οι πιθανότητες με τις οποίες ο Α και ο Β επιλέγουν την στρατηγική «Πίσω» αντίστοιχα. Το παίγνιο περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα:

	Παίκτης Β		
Παίκτης Α	Στρατηγική	Εμπρός (q)	Πίσω ($1-q$)
	Εμπρός (p)	(30,70)	(80,20)
	Πίσω ($1-p$)	(70,30)	(40,60)

Εάν ο παίκτης Α επιλέγει πάντα «Εμπρός», τότε ο παίκτης Β μπορεί και αυτός με τη σειρά του να επιλέγει πάντα «Εμπρός» κερδίζοντας στο 70% των περιπτώσεων.

Οι παίκτες χρησιμοποιούν ένα τυχαίο τρόπο για να επιλέξουν την στρατηγική τους στο παίγνιο (*παίγνιο μικτής στρατηγικής*). Έστω ότι η μικτή στρατηγική του παίκτη Α είναι το διάνυσμα πιθανότητας $P_1 = (p, 1-p)$ και η μικτή στρατηγική του παίκτη Β είναι το διάνυσμα πιθανότητας $P_2 = (q, 1-q)$.
Άρα, ένα διάνυσμα στρατηγικής είναι το (P_1, P_2) με $P_1, P_2 \in \Delta_2$,
όπου $\Delta_2 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \| \sum_{i=1}^2 x_i = 1\}$

Το διάνυσμα στρατηγικής (P_1^*, P_2^*) είναι ισορροπία κατά Nash αν

$$\begin{aligned} u_1(P_1^*, P_2^*) &\geq u_1(P_1, P_2^*)\, \forall P_1 \in \Delta_2 \text{ και} \\ u_2(P_1^*, P_2^*) &\geq u_2(P_1^*, P_2)\, \forall P_2 \in \Delta_2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη Α είναι:

$$\begin{aligned} u_1(P_1, P_2) &= 30pq + 70q(1-p) + 80p(1-q) + 40(1-p)(1-q) \\ &= -80pq + 30q + 40p + 40 \end{aligned} \tag{2.9}$$

και η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη Β:

$$\begin{aligned} u_2(P_1, P_2) &= 70pq + 30q(1-p) + 20p(1-q) + 60(1-p)(1-q) \\ &= 80pq - 30q - 40p + 60 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους έχουμε:

$$\frac{\partial u_1}{\partial p} = 0 \Longrightarrow -80q + 40 = 0 \Longrightarrow q = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial q} = 0 \Longrightarrow 80p - 30 = 0 \Longrightarrow p = \frac{3}{8}$$

Άρα το ζεύγος στρατηγικών $P_1^* = (p, 1-p) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ για τον Α και $P_2^* = (q, 1-q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ για τον Β αποτελούν σημείο ισορροπίας κατα $Nash$.

Τα αναμενόμενα κέρδη των δύο παικτών στο σημείο αυτό είναι:

$$u_1(P_1^*, P_2^*) = -80\frac{3}{8}\frac{1}{2} + 30\frac{1}{2} + 40\frac{3}{8} + 40 = 55$$
$$u_2(P_1^*, P_2^*) = 80\frac{3}{8}\frac{1}{2} - 30\frac{1}{2} - 40\frac{3}{8} + 60 = 45$$

Ακόμη, παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (2.8) αφού έχουμε ότι:

$$u_1(P_1, P_2^*) = -80p\frac{1}{2} + 30\frac{1}{2} + 40p + 40 = 55$$

$$u_2(P_1^*, P_2) = 80q\frac{3}{8} - 30q - 40\frac{3}{8} + 60 = 45$$

Μια εξήγηση του τρόπου με τον οποίο οι δύο παίκτες επιλέγουν το διάνυσμα στρατηγικής που ήδη αναφέραμε είναι ο ακόλουθος:

- Για να μειώσει τη δυνατότητα πρόβλεψης του Β, ο Α επιλέγει την πιθανότητα p έτσι ώστε να είναι ισοδύναμες για τον Β οι δύο αποφάσεις του. Υπολογίζοντας την αναμενόμενη απόδοση για κάθε πιθανή στρατηγική του Β και εξισώνοντας τες έχουμε:

$$E[u_B(\text{Εμπρός})] = 70p + 30(1-p)$$
$$E[u_B(\text{Πίσω})] = 20p + 60(1-p)$$
$$E[u_B(\text{Εμπρός})] = E[u_B(\text{Πίσω})]) \Longrightarrow p = \frac{3}{8} \qquad (2.11)$$

- Παρόμοια, ο παίκτης Β επιλέγει την πιθανότητα q με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ισοδύναμες για τον Α οι δύο αποφάσεις του. Δηλαδή, έτσι ώστε η αναμενόμενη απόδοση του Α να είναι ίδια όποια στρατηγική και να επιλέξει:

$$\begin{aligned} E[u_A(\text{Εμπρός})] &= 30q + 80(1-q) \\ E[u_A(\text{Πίσω})] &= 70q + 40(1-q) \\ E[u_A(\text{Εμπρός})] = E[u_A(\text{Πίσω})]) &\Longrightarrow q = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Σχόλια:

Στο σημείο ισορροπίας η μικτή στρατηγική που ακολουθεί κάθε παίκτης έχει τα ίδια αναμενόμενα οφέλη με κάθε επιμέρους καθαρή στρατηγική, με την προϋπόθεση ότι ο αντίπαλος δεν θα αλλάξει τη δική του μικτή στρατηγική.

Το συγκεκριμένο παράδειγμα πρόκειται για παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Στα παίγνια αυτά όταν ο ένας παίκτης κερδίζει κάποιο ποσό τότε ο άλλος χάνει το ίδιο ποσό. Καλούνται και ανταγωνιστικά παίγνια (*competitive games*) Επίσης, το σημείο μικτής ισορροπίας *Nash* μοιάζει αρκετά με τα αντίστοιχα σημεία καθαρής ισορροπίας *Nash*, αφού οποιοσδήποτε παίκτης ξεφύγει από αυτό κινδυνεύει να χάσει.

2.8 Ισορροπία Τρεμάμενου Χεριού

Η έννοια του Τρεμάμενου Χεριού επινοήθηκε από τον οικονομολόγο Reinhard Selten το 1975 θέλοντας να θίξει το γεγονός ότι όταν κάποιος παίκτης επιλέγει μία στρατηγική, υπάρχει μία μικρή πιθανότητα, να κάνει κάποιος λάθος. Η ιδέα αυτή προέκυψε από την παρατήρηση ότι μερικές φορές υπάρχει μια μικρή πιθανότητα η απόφαση που θα λάβει ένας παίκτης και η στρατηγική τελικά που θα ακολουθήσει να διαφέρουν. Έτσι, ενώ ο παίκτης έχει αποφάσισει να κάνει μία συγκεκριμένη ενέργεια τελικά εκτελεί μια διαφορετική ενέργεια καθώς κατά την διάρκεια της εκτέλεσής της το χέρι του τρέμει.

Επίσης, η έννοια του τρεμάμενου χεριού οδηγεί σε μια εκλέπτυνση της ισορροπίας *Nash* που ονομάζεται τέλεια ισορροπία τρεμάμενου χεριού κατά *Nash* και η οποία λαμβάνει υπόψην την πιθανότητα ένας παίκτης να ακολουθήσει μια διαφορετική στρατηγική από αυτή που υπαγορεύει η εκάστοτε ισορροπία *Nash*.

Πριν δώσουμε τον τυπικό ορισμό της τέλειας ισορροπίας *Nash* του τρεμάμενου χεριού, θα ορίσουμε πρώτα την έννοια του ε-διαταραγμένου παιγνίου.

Θεωρούμε ένα παίγνιο κανονικής μορφής $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(.)\}]$.

- Για κάθε παίκτη i και για κάθε στρατηγική $s_i \in S_i$ επιλέγουμε έναν αριθμό $\varepsilon_i(s_i)$ με τιμές στο (0,1) και $\sum_{s_i \in S_i} \varepsilon_i(s_i) < 1$
- Ορίζουμε το ε-διαταραγμένο σύνολο στρατηγικών του παίκτη i να είναι το σύνολο

$$\Delta_\varepsilon(S_i) = \{\sigma_i : \sigma_i(s_i) \geq \varepsilon_i(s_i) \; \forall s_i \in S_i \text{ και } \textstyle\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}$$

Τότε ένα παίγνιο της μορφής $\Gamma_\varepsilon = [I, \{\Delta_\varepsilon(S_i)\}, \{u_i(.)\}]$ θα καλείται **ε-διαταραγμένο παίγνιο**.

Ο αριθμός $\varepsilon_i(s_i)$ αντιπροσωπεύει την αναπόφευκτη πιθανότητα με την οποία η στρατηγική s_i επιλέγεται κατά λάθος από τον παίκτη. Επομένως, απαιτώντας κάθε παίκτης i να επιλέγει κάθε μια από τις στρατηγικές του s_i με τουλάχιστον την ελάχιστη θετική πιθανότητα $\varepsilon_i(s_i)$, κατορθώνουμε να εξάγουμε ένα ε-διαταραγμένο παίγνιο από το αρχικό παίγνιο Γ_N.

Ορισμός 2.8.1. *Σε ένα παίγνιο κανονικής μορφής* $\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(.)\}]$ *μια ισορροπία Nash* σ *θα λέμε ότι είναι τέλεια ισορροπία τρεμάμενου χεριού (Trembling-Hand Perfect) αν υπάρχει κάποια ακολουθία* ϵ*-διαταραγμένων παιγνίων* $\{\Gamma_{\varepsilon^k}\}_{k=1}^{\infty}$ *η οποία συγκλίνει στο αρχικό παίγνιο* Γ_N *και για την οποία υπάρχει μία ακολουθία ισορροπιών Nash η οποία συγκλίνει στην* σ.

Παρατηρούμε ότι, ο παραπάνω ορισμός απαιτεί τον υπολογισμό της ισορροπίας πολλών πιθανών ε-διαταραγμένων παιγνίων, γεγονός που είναι αρκετά επίπονο και δύσκολο. Επιπλέον, απαιτούμε την ύπαρξη μόνο μερικών ε-διαταραγμένων παιγνίων τα οποία έχουν ισορροπία αυθαίρετα κοντα στην σ· το οποίο είναι ένα κριτήριο όχι και τόσο ισχυρό.

Επίσης, ο *Selten* απέδειξε ότι κάθε παίγνιο κανονικής μορφής με μικτές στρατηγικές του οποίου τα σύνολα στρατηγικών είναι πεπερασμένα, έχει μια τέλεια ισορροπία *Nash* τρεμάμενου χεριού.

2.9 Μπεϋζιανά παίγνια

Όλα τα παίγνια διακρίνονται σε παίγνια τέλειας πληροφόρησης και σε παίγνια ατελούς πληροφόρησης. Συγκεκριμένα, τα παίγνια στα οποία οι παίκτες γνωρίζουν όλες τις σχετικές πληροφορίες για τους άλλους παίκτες, όπως τις στρατηγικές, τις προτιμήσεις και τις αποδόσεις τους για κάθε πιθανή έκβαση του παιγνίου, ονομάζονται **παίγνια τέλειας πληροφόρησης** (complete information games). Αντίθετα, τα παίγνια στα οποία δεν είναι γνωστές όλες οι πληροφορίες που αφορούν τους παίκτες που λαμβάνουν μέρος στο παίγνιο ονομάζονται **παίγνια ατελούς πληροφόρησης** (incomplete information games). Τα παίγνια ατελούς πληροφόρησης καλούνται επίσης μπεϋζιανά παίγνια.

Σύμφωνα με τον *Harsanyi* ένα Μπεϋζιανό παίγνιο μοντελοποιείται εισάγοντας την Φύση ως παίκτη στο παίγνιο. Η Φύση εκχωρεί μια τυχαία μεταβλητή σε κάθε παίκτη που καθορίζει το είδος της προτίμησης του και κάθε παίκτης είνα σε θέση να παρατηρεί την υλοποίηση μόνο της δικής του τυχαίας μεταβλητής. Με αυτή την προσέγγιση του *Harsanyi* τα παίγνια ατελούς πληροφόρησης μετατρέπονται σε παίγνια ελλιπούς πληροφόρησης (δηλαδή, σε παίγνια όπου η ιστορία του παιγνίου δεν είναι διαθέσιμη για όλους τους παίκτες) και έτσι μπορούμε να τα αναπαραστίσουμε σαν παίγνια εκτεταμένης μορφής με ελλιπή πληροφόρηση

Ορισμός 2.9.1. *Μπεϋζιανό παίγνιο (Bayesian game) ονομάζεται ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης, στο οποίο η Φύση κάνει την πρώτη κίνηση εισάγοντας τις πληροφορίες που δεν είναι γνωστές στους παίκτες του παιγνίου, ώστε οι παίκτες να μπορούν να κάνουν πιθανολογικές εκτιμήσεις σχετικά με το ποιός θα είναι ο βέλτιστος τρόπος να κινηθούν κατά την διάρκεια του παιγνίου και στην συνέχεια μπορούν να αναθεωρήσουν τις αρχικές τους πεποιθήσεις χρησημοποώντας τον κανόνα του Bayes.*

Σε ένα μπεϋζιανό παίγνιο η έλλειψη πληροφοριών σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας παίκτης δεν είναι ενήμερος για το είδος, οπότε και την συνάρτηση απόδοσης, κάποιου άλλου παίκτη. Καλούνται μπεϋζιανά λόγω της πιθανολογικής ανάλυσης τους. Αρχικά, οι παίκτες έχουν κάποιες πεποιθήσεις σχετικά με το είδος κάθε παίκτη τις οποίες μπορούν να τις αναθεωρήσουν χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Bayes*. Λόγω της έλλειψης πληροφοριών και της χρήσης των πεποιθήσεων, αυτά τα παίγνια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση παιγνίων ελλιπής πληροφόρησης.

Δομή ενός μπεϋζιανού παιγνίου

Σε ένα Μπεϋζιανό παίγνιο κάθε παίκτης i έχει μια συνάρτηση χρησιμότητας $u_i(s_i, s_{-i}, \theta_i)$, όπου $\theta_i \in \Theta_i$ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία επιλέγεται από την φύση και παρατηρείται μόνο από τον i παίκτη. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής θ_i δίνεται από την συνάρτηση $F(\theta_1, \ldots, \theta_I)$, η οποία υποθέτουμε ότι αποτελεί κοινή γνώση για όλους τους παίκτες. Επομένως, ένα Μπεϋζιανό παίγνιο περιγράφεται συνοπτικά ως εξής: $[I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}, \Theta, F(.)]$, όπου $\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_I$.

- Σε ένα μπεϋζιανό παίγνιο μια συνάρτηση $s_i(\theta_i)$, η οποία παρέχει την στρατηγική του παίκτη i για κάθε υλοποίηση του θ_i, θα ονομάζεται καθαρή στρατηγική για τον παίκτη i.

- Το σύνολο που περιέχει όλες τις καθαρές στρατηγικές του i παίκτη καλείται σύνολο καθαρών στρατηγικών του παικτη i και συμβολίζεται με T_i.

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη i που προκύπτει από τον ορίζοντα καθαρής στρατηγικής $(s_1(.), \ldots, s_I(.))$ των I παικτών δίνεται από την σχέση $\tilde{u}_i(s_1(.), \ldots, s_I(.)) = E_\theta[u_i(s_1(\theta_1), \ldots, s_I(\theta_I), \theta_i]$.

Μπεϋζιανή ισορροπία κατά Nash

Στα μπεϋζιανά παίγνια μπορούμε να προσδιορίσουμε μια ισορροπία $Nash$, η οποία καλείται μπεϋζιανή ισορροπία κατά $Nash$. Η μπεϋζιανή ισορροπία κατά $Nash$ αποτελεί μια γενίκευση της ισορροπίας $Nash$ σε παίγνια ατελούς πληροφόρησης στα οποία συμμετέχει η Φύση. Για την επίλυση ενός τέτοιου παιγνίου, αρχικά μετατρέπουμε το παίγνιο σε ένα παίγνιο ελλιπούς πληροφόρησης και στην συνέχεια προσδιορίζουμε την ισορροπία $Nash$ σε αυτό, η οποία και θα αποτελεί την λύση του παιγνίου.

Ορισμός 2.9.2. *Μια Μπεϋζιανή ισορροπία κατά Nash για ένα Μπεϋζιανό παίγνιο $[I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}, \Theta, F(.)]$ είναι ένας ορίζοντας στρατηγικής $(s_1(.), \ldots, s_I(.))$ ο οποίος αποτελεί μια ισορροπία κατα Nash του παιγνίου $\Gamma_N = [I, \{T_i\}, \{\tilde{u}_i(.)\}]$. Αυτό σημαίνει δηλαδή, ότι για κάθε $i = 1, \ldots, I$*
$\tilde{u}_i(s_i(.), s_{-i}(.)) \geq \tilde{u}_i(s_i^{'}(.), s_{-i}(.))$ για όλα τα $s_i^{'}(.) \in T_i$.

Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι ότι σε μια Μπεϋζιανή ισορροπία κατά $Nash$ (καθαρής στρατηγικής) κάθε παίκτης πρέπει να παίζει με μια βέλτιστη απόκριση στην δεσμευμένη κατανομή των στρατηγικών των αντιπάλων του για κάθε είδος που τελικά μπορεί να έχει.

Κεφάλαιο 3

ΠΑΙΓΝΙΑ ΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε παίγνια ταυτόχρονων κινήσεων, στα οποία οι παίκτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους ταυτόχρονα. Παρόλα αυτά, υπάρχουν καταστάσεις στις οποίες οι παίκτες παίρνουν τις αποφάσεις τους διαδοχικά και η απόδοση για κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνο από τις δικές του επιλογές, αλλά και από τη σειρά των επιλογών που ελήφθησαν από τους υπόλοιπους παίκτες. Παίγνια στα οποία οι κινήσεις περισσοτέρων του ενός παικτών γίνονται διαδοχικά, δηλαδή παίγνια τα οποία παίζονται σε στάδια, ονομάζονται **παίγνια εκτεταμένης μορφής ή παίγνια διαδοχικών κινήσεων ή παίγνια πολλών σταδίων**.

Μια προσέγγιση τέτοιων παιγνίων είναι να αποκτήσουμε την κανονική τους αναπαράσταση και στην συνέχεια να εφαρμόσουμε σε αυτά τις ιδέες επίλυσης που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο, ένα σημαντικό ζήτημα που προκύπτει κατά την μελέτη παιγνίων διαδοχικών κινήσεων είναι αυτό της αξιοπιστίας της στρατηγικής ενός παίκτη. Για τον σκοπό αυτό θα εισάγουμε μια πιο ισχυρή έννοια της ισορροπίας $Nash$, γνωστή ως ισορροπία $Nash$ τέλειου υποπαιγνίου η οποία στηρίζεται στην αρχή της διαδοχικής ορθολογικότητας, η οποία με τη σειρά της συνδέεται με την διαδικασία της προς τα πίσω επαγωγής.

Παρόλα αυτά, σε παίγνια με ελλιπή πληροφόρηση η έννοια της τελειότητας υποπαιγνίου δεν συλλαμβάνει πλήρως την έννοια της διαδοχικής ορθολογικότητας σε αυτά. Για αυτό θα εισάγουμε μια νέα έννοια, αυτής της διαδοχικής ισορροπίας.

Θα ξεκινήσουμε την μελέτη μας με τον τρόπο αναπαράστασης ενός παιγνίου διαδοχικών κινήσεων.

3.1 Αναπαράσταση παιγνίων εκτεταμένης μορφής

Η εκτεταμένη μορφή ενός παιγνίου απεικονίζει πότε κάποιος παίκτης κινείται, τι επιλογές έχει, τι γνωρίζουν οι παίκτες όταν παίρνουν τις αποφάσεις τους, ποια είναι η έκβαση του παιγνίου ως συνάρτηση των επιλογών που έχουν λάβει οι παίκτες και την απόδοση κάθε πιθανής έκβασης. Τα παίγνια εκτεταμένης μορφής αναπαρίστανται με δενδροδιαγράμματα, τα οποία είναι γνωστά ως δένδρα παιγνίου, στα οποία οι παίκτες κινούνται διαδοχικά.

Πριν δώσουμε τον ακριβή ορισμό ενός δένδρου παιγνίου θα αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες από τα διατεταγμένα γραφήματα και τα δένδρα.

Ορισμός 3.1.1. *Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων V και E ένα σύνολο ζευγών του V. Τότε το ζεύγος $G = (V, E)$ καλείται διατεταγμένο γράφημα. Τα στοιχεία του συνόλου V ονομάζονται κορυφές ή κόμβοι του γραφήματος ενώ τα στοιχεία του συνόλου E πλευρές ή ακμές του γραφήματος.*

Ένα διατεταγμένο γράφημα απεικονίζεται μέσω του διαγράμματος του, το οποίο αποτελείται από τις κορυφές του και από προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία αντιστοιχούν στα ζεύγη των πλευρών.

Ορισμός 3.1.2. *Θα λέμε ότι ένα διατεταγμένο γράφημα είναι δένδρο αν υπάρχει μια διακεκριμένη κορυφή η οποία δεν έχει πλευρές να καταλήγουν σε αυτή (η κορυφή αυτή καλείται ρίζα του δένδρου) και για κάθε άλλη κορυφή του γραφήματος υπάρχει ακριβώς μια διαδρομή από την ρίζα προς την συγκεκριμένη κορυφή.*

- Αν το ζεύγος (α , β) αποτελεί μια πλευρά ενός δένδρου, τότε θα λέμε ότι το α είναι **γονέας** της κορυφής β και το β είναι **παιδί** της κορυφής α.
- Αν υπάρχει διαδρομή από την κορυφή α στην β (δηλαδή, αν μπορούμε να ενώσουμε την κορυφή α με την β), τότε θα λέμε ότι η κορυφή α είναι **πρόγονος** της β ενώ η β είναι **απόγονος** της α.
- Υπάρχει το πολύ μια διαδρομή από μια κορυφή α σε μια κορυφή β.
- Η ρίζα είναι πρόγονος κάθε κορυφής και κάθε κορυφή είναι απόγονος της ρίζας.
- Κάθε κορυφή εκτός της ρίζας έχει μοναδικό γονέα.
- Μια κορυφή ενός δένδρου από την οποία δεν αρχίζει καμία πλευρά ονομάζεται **τερματική κορυφή**.

- Κάθε μη τερματική κορυφή έχει για απόγονο τουλάχιστον μια τερματική κορυφή.
- **Κλάδος** ενός δένδρου που αρχίζει από την κορυφή α, T_a, ονομάζεται ένα διατεταγμένο γράφημα που αποτελείται από τις κορυφές του δένδρου που αρχίζουν από την κορυφή α και περιέχουν όλους τους απογόνους μαζί με τις αρχικές τους πλευρές.

Ορισμός 3.1.3. *Δέντρο παιγνίου I παικτών καλείται ένα δέντρο στο οποίο κάθε μη τερματική κορυφή του δέντρου ανήκει σε ακριβώς έναν από τους παίκτες και σε κάθε τερματική κορυφή του δέντρου αντιστοιχεί ένα I-διάστατο διάνυσμα απόδοσης.*

- Οι μη τερματικές κορυφές ενός δένδρου παιγνίου ονομάζονται **κορυφές απόφασης**.
- Σε ένα δένδρο παιγνίου I παικτών καμία τερματική κορυφή δεν ανήκει σε κανέναν παίκτη και ενδέχεται να υπάρχουν παίκτες που δεν κατέχουν καμία κορυφή απόφασης.
- Δυο κορυφές K_1καιK_2 ενός παίκτη P ονομάζονται **ισοδύναμες** για τον παίκτη P αν ισχύουν τα εξής: το πλήθος των πλευρών που αρχίζουν από αυτές είναι το ίδιο, έστω k, και οι πλευρές $\{e_1^1, \ldots, e_k^1\}$ και $\{e_1^2, \ldots, e_k^2\}$ που αρχίζουν από τις κορυφές K_1 και K_2 αντίστοιχα μπορούν να αναδιαταχθούν ώστε οι πλευρές e_i^1 και e_i^2 για κάθε i να θεωρούνται ίδιες από τον παίκτη P.

Ορισμός 3.1.4. *Το σύνολο κορυφών $X = \{K_1, \ldots, K_m\}$ ενός δένδρου παιγνίου ονομάζεται σύνολο πληροφοριών για έναν παίκτη i αν*

1. *όλες οι κορυφές του X είναι μη τερματικές και ανήκουν στον παίκτη i,*
2. *καμιά κορυφή του X δεν συσχετίζεται με οποιαδήποτε άλλη κορυφή του X, και*
3. *όλες οι κορυφές του X είναι ισοδύναμες για τον παίκτη i.*

Ορισμός 3.1.5. *Ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής ή παίγνιο διαδοχικών κινήσεων είναι ένα δένδρο παιγνίου I παικτών τέτοιο ώστε οι κορυφές αποφάσεων να έχουν διαμεριστεί σε σύνολα πληροφοριών που ανήκουν στους παίκτες.*

Επιπλέον, ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής εκτός από την γραφική του περιγραφή, μέσω ενός δένδρου παιγνίου, μπορεί να περιγραφεί και με μαθηματικό τρόπο ως εξής:

$$\Gamma_E = \{X, A, I, p(.), \alpha(.), \mathcal{H}, H(.), \iota(.), \rho(.), u\}$$

Όπου τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται είναι τα ακόλουθα:

- Ένα πεπερασμένο σύνολο κορυφών X, ένα πεπερασμένο σύνολο πιθανών ενεργειών A και ένα πεπερασμένο σύνολο παικτών $\{1, \ldots, I\}$.

- Μια συνάρτηση $p : X \to \{X \cup \emptyset\}$ η οποία προσδιορίζει τον άμεσο πρόγονο κάθε κορυφής, το $p(x)$ είναι διάφορο του κενού για όλες τις κορυφές $x \in X$, εκτός από τον αρχικό κόμβο x_0 ο οποίος δεν έχει κανένα πρόγονο. Το $s(x) = p^{-1}(x)$ δίνει τον άμεσο απόγονο της κορυφής x . Το σύνολο όλων των προγόνων και όλων των απογόνων της κορυφής x προσδιορίζεται επαναλαμβάνοντας τα $p(x)$ και $s(x)$. Το σύνολο των τερματικών κορυφών αποτελείται από όλες τις κορυφές που δεν έχουν κανένα απόγονο, δηλαδή $T = \{x \in X : s(x) = \emptyset\}$ ενώ οι υπόλοιπες κορυφές $X \setminus T$ αποτελούν τις κορυφές αποφάσεων.

- Μια συνάρτηση $\alpha : X \setminus \{x_0\} \to A$ η οποία μας δίνει την ενέργεια που οδηγεί σε κάθε μη αρχικό κόμβο x από τον άμεσο πρόγονο του $p(x)$ και ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in s(x)$ και $y \neq z$ τοτε $\alpha(y) \neq \alpha(z)$. Τότε το σύνολο των επιλογών που είναι διαθέσιμες στην κορυφή απόφασης x είναι $c(x) = \{\alpha \in A : \alpha = \alpha(y) \text{ για καποια } y \in s(x)\}$.

- Μια συλλογή από σύνολα πληροφοριών $\mathcal{H}$ και μια συνάρτηση $H : X \to \mathcal{H}$, η οποία αντιστοιχεί κάθε κορυφή αποφάσεων σε ένα σύνολο πληροφοριών. Απαιτούμε όλες οι κορυφές απόφασης που ανήκουν σε ένα σύνολο πληροφοριών να έχουν τις ίδιες δυνατές επιλογές.
Οπότε, οι πιθανές επιλογές στο σύνολο πληροφοριών H είναι
$C(H) = \{\alpha \in A : \alpha \in c(x) \text{ για } x \in H\}$.

- Μια συνάρτηση $\iota : \mathcal{H} \to \{0, 1, \cdots, I\}$, η οποία αντιστοιχεί κάθε σύνολο πληροφοριών του $\mathcal{H}$ στον παίκτη που κινείται στην κορυφή αποφάσεων που ανήκει σε εκείνο το σύνολο.
Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}_i = \{H \in \mathcal{H} : i = \iota(H)\}$, την συλλογή των συνόλων πληροφοριών του παίκτη i.

- Μια συνάρτηση $\rho : \mathcal{H}_0 \times A \to [0, 1]$, η οποία εκχωρεί πιθανότητες στις ενέργειες των συνόλων πληροφοριών όταν κινείται η φύση. Η συγκεκριμένη συνάρτηση ικανοποιεί τα εξής: $\rho(H, \alpha) = 0$, αν $\alpha \notin C(H)$ και $\sum_{\alpha \in C(H)} \rho(H, \alpha) = 1$ για όλα $H \in \mathcal{H}_0$.

- Μια συνάρτηση απόδοσης $u = \{u_1(.), \ldots, u_I(.)\}$,η οποία προσδιορίζει τις αποδόσεις των παικτών σε κάθε τερματική κορυφή που ενδέχεται να φτάσουν κατά την διάρκεια του παιγνίου, με $u_i : T \to \mathbb{R}$.

Μια στρατηγική ενός παίκτη σε ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής δείχνει τις επιλογές που σκοπεύει να πάρει ο παίκτης σε κάθε σύνολο πληροφοριών του. Με άλλα λόγια, προσδιορίζει τις επιλογές που έχει προγραμματίσει ο παίκτης να λάβει εκ των προτέρων σε περίπτωση που φτάσει σε κάποιο από τα σύνολα πληροφοριών του. Το σύνολο των στρατηγικών κάθε παίκτη $(s_1, \ldots, s_I)$ αποτελεί έναν ορίζοντα στρατηγικής του παιγνίου.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τον ακριβή ορισμό της στρατηγικής ενός παίκτη.

Ορισμός 3.1.6. *Έστω με $\mathcal{H}_i$ συμβολίζουμε την συλλογή των συνόλων πληροφόρησης του παίκτη i, $\mathcal{A}$ το σύνολο των πιθανών ενεργειών στο παίγνιο και $C(H) \subset \mathcal{A}$ το σύνολο των πιθανών ενεργειών στο σύνολο πληροφόρησης H. Μια στρατηγική για τον παίκτη i είναι μια συνάρτηση $s_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $s_i(H) \in C(H)$ για όλα τα $H \in \mathcal{H}_i$.*

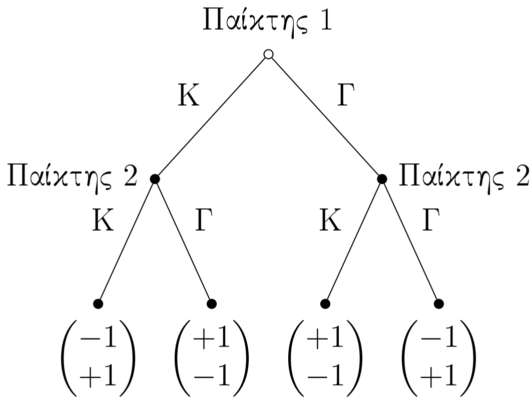
Ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής παίζεται ως εξής:
Ο παίκτης που κατέχει την ρίζα ξεκινά το παίγνιο επιλέγοντας μια κορυφή με βάση την στρατηγική που έχει προαποφασίσει να χρησιμοποιήσει. Αν η κορυφή δεν είναι τερματική τότε θα ανήκει σε κάποιον άλλον παίκτη ο οποίος θα επιλέξει σύμφωνα με την στρατηγική του μια κορυφή. Ομοίως, αν η κορυφή δεν είναι τερματική θα ανήκει σε κάποιον άλλον παίκτη ο οποίος και με την σειρά του θα επιλέξει κάποια κορυφή. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να επιλεγεί μια τερματική κορυφή έτσι ώστε το παίγνιο να τελειώσει και κάθε παίκτης να λάβει την απόδοση που του αντιστοιχεί.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα απλό παράδειγμα παιγνίου σε εκτεταμένη μορφή.

Παράδειγμα 3.1.1. *(Ρίψη νομίσματος - Εκτεταμένη μορφή)*

Πρόκειται για μια παραλλαγή του παραδείγματος 2.7.1 που είχε αναφερθεί στο προηγουμένο κεφάλαιο. Τώρα οι παίκτες κινούνται διαδοχικά, και όχι ταυτόχρονα όπως είχαμε δει. Συγκεκριμένα, ο παίκτης 1 κινείται πρώτος επιλέγοντας κορώνα ή γράμματα και στην συνέχεια ο παίκτης 2, αφού δει την επιλογή του παίκτη 1, επιλέγει με τη σειρά του κορώνα ή γράμματα. Η εκτεταμένη μορφή αυτού του παιγνίου παρουσιάζεται μέσω του δένδρου παιγνίου του σχήματος 3.1.

Το παίγνιο ξεκινά στον αρχικό κόμβο απόφασης, ο οποίος αναπαρίσταται με έναν ανοικτό κύκλο, όπου ο παίκτης 1 επιλέγει την κίνηση του. Οι πιθανές

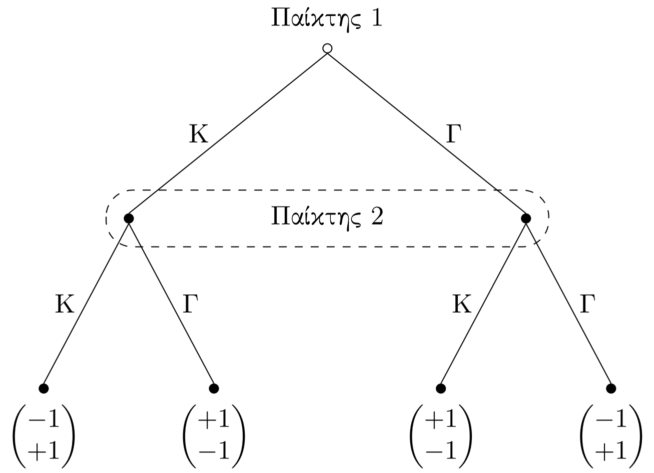


Σχήμα 3.1: Ρίψη νομίσματος - Πλήρης πληροφόρηση

επιλογές του παίκτη 1 (Κ: κορώνα ή Γ: γράμματα) παρουσιάζονται με τους κλάδους που ξεκινούν από τον αρχικό κόμβο απόφασης. Στο τέλος κάθε κλάδου υπάρχει ένας άλλος κόμβος απόφασης, ο οποίος αναπαρίσταται με μια μαύρη κουκίδα, όπου ο παίκτης 2 καλείται να λάβει μια απόφαση ανάμεσα στις δύο δυνατές επιλογές που έχει, αφού πρώτα δει τι έχει επιλέξει ο παίκτης 1. Αφού και ο παικτης 2 κάνει την επιλογή του φτάνουμε στο τέλος του παιγνίου, που αναπαρίσταται από τους τερματικούς κόμβους. Σε κάθε τερματικό κόμβο φαίνονται οι αποδόσεις των παικτών που προκύπτουν από την διαδοχική κίνηση των παικτών μέχρι να φτάσουν σε αυτόν. Παρατηρούμε, επίσης, ότι το μονοπάτι που συνδέει την ρίζα του δένδρου με οποιοδήποτε άλλη κορυφή του είναι μοναδικό.

Στο παραπάνω παίγνιο, βλέπουμε ότι όταν έρχεται η σειρά ενός παίκτη να κινηθεί, αυτός είναι ικανός να παρατηρεί όλες τις προηγούμενες κινήσεις του αντιπάλου του και έτσι να μπορεί να προσδιορίζει κάθε φορά που καλείται να κινηθεί τον ακριβή κόμβο του δένδρου στον οποίο θα βρίσκεται. Τέτοιου είδους παίγνια καλούνται **παίγνια πλήρους πληροφόρησης**. Ωστόσο, υπάρχουν παίγνια στα οποία ένας παίκτης ενδέχεται να μην μπορεί να προσδιορίσει την ακριβή κορυφή που θα βρίσκεται όταν έρθει η σειρά να κινηθεί.

Παραδείγματος χάρη, ας υποθέσουμε ότι στο παράδειγμα που μόλις είδαμε, ότι όταν ο παίκτης 1 ρίξει το νόμισμα θα το καλύψει αμέσως με το χέρι του, ώστε να μην το δει ο παίκτης 2, και θα αποκαλύψει την επιλογή του αφού ο παίκτης 2 έχει πραγματοποιήσει την κίνηση του. Έτσι, όταν έρθει η σειρά του παίκτη 2 να κινηθεί, αυτός δεν είναι σε θέση να προσδιορίσει ακριβώς σε ποια από τις δύο κορυφές του παιγνίου βρίσκεται, καθώς δεν γνωρίζει ποιά



Σχήμα 3.2: Ρίψη νομίσματος - Ελλιπής πληροφόρηση

ήταν η επιλογή του προηγούμενου παίκτη. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι το σύνολο πληροφόρησης του παίκτη 2 αποτελείται από δύο κορυφές. Το γεγονός αυτό δηλώνεται είτε ενώνοντας τις κορυφές αυτές με μια διακεκομμένη γραμμή είτε σχεδιάζοντας έναν κύκλο που τις περιλαμβάνει. Τέτοιου είδους παίγνια ονομάζονται **παίγνια με ελλιπή πληροφόρηση**.

Επομένως, η εκτεταμένη μορφή αυτού του παιγνίου περιγράφεται γραφικά με ένα δένδρο, το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2, παρόμοιο με το προηγούμενο, αλλά με την μόνη διαφορά ότι σχεδιάσαμε τις κορυφές απόφασης του παίκτη 2 μέσα σε έναν κύκλο για να δηλώσουμε ότι ανήκουν στο ίδιο σύνολο πληροφοριών.

Στις ενότητες που ακολουθούν θα μελετήσουμε εκτενώς τόσο τα παίγνια εκτεταμένης μορφής με πλήρη πληροφόρηση, όσο και αυτά με ελλιπή πληροφόρηση.

3.2 Παίγνια με πλήρη πληροφόρηση

Ορισμός 3.2.1. *Ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής καλείται παίγνιο με πλήρη πληροφόρηση αν κάθε σύνολο πληροφοριών είναι μονοσύνολο. Διαφορετικά, καλείται παιγνιο με ελλιπή πληροφόρηση.*

Με άλλα λόγια, αν κάθε παίκτης την στιγμή που πρέπει να κάνει την επιλογή του γνωρίζει ακριβώς τι έχουν επιλέξει οι υπόλοιποι παίκτες κατά την διάρκεια του παιγνίου, δηλαδή κάθε παίκτης γνωρίζει όλες τις προηγούμενες πληροφορίες, έτσι ώστε να μπορεί να προσδιορίσει ακριβώς την κορυφή στην οποία θα βρίσκεται όταν θα πρέπει να επιλέξει τον τρόπο με τον οποίο θα κινηθεί, τότε πρόκειται για ένα παίγνιο με πλήρη πληροφόρηση. Στην περίπτωση όμως των παιγνίων με ελλιπή πληροφόρηση οι παίκτες ή δεν μπορούν να δουν κάποιες από τις επιλογές που έγιναν στα προηγούμενα στάδια ή ορισμένοι από τους παίκτες δεν θέλουν να αποκαλύπτουν τις κινήσεις τους στους επόμενους παίκτες και τότε εδεχομένως οι παίκτες να μην είναι σε θέση να προσδιορίσουν την ακριβή κορυφή που βρίσκονται όταν θα πρέπει να κάνουν την επιλογή τους καθώς το σύνολο πληροφοριών τους αποτελείται από περισσότερες της μιας κορυφές.

3.2.1 Ισορροπία Nash

Όπως και τα παιγνια κανονικής μορφής έτσι και τα παίγνια εκτεταμένης μορφής μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας την ισορροπία κατά $Nash$.

Ορισμός 3.2.2. *Σε ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής με I παίκτες με πλήρη ή ελλιπή πληροφόρηση ένας ορίζοντας στρατηγικής $(s_1^*, \cdots, s_I^*)$ καλείται ισορροπία $Nash$ αν για κάθε παίκτη i ισχύει το ακόλουθο:*
$u_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_I^*) = \max_{s \in S_i} u_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \cdots, s_I^*)$

Δηλαδή, ο ορίζοντας στρατηγικής $(s_1^*, \cdots, s_I^*)$ είναι ισορροπία $Nash$ αν κανένας παικτης δεν μπορεί να βελτιώσει γνήσια την απόδοση του αλλάζοντας στρατηγική δεδομένου ότι οι υπόλοιποι παίκτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική. Κάθε ορίζοντας στρατηγικής ορίζει κατά μοναδικό τρόπο μια διαδρομή στο δένδρο του παιγνίου, δηλαδή ορίζει κατά μοναδικό τρόπο ένα τελικό κόμβο. Ωστόσο, το αντίστροφο δεν ισχύει καθώς μια διαδρομή μπορεί να ορίζεται από διαφορετικούς ορίζοντες στρατηγικής. Μια διαδρομή υποστηριζόμενη από μια ισορροπία $Nash$ θα καλείται **διαδρομή ισορροπίας**.

Ένας τρόπος για να προσδιορίσουμε την ισορροπία $Nash$ σε ένα πεπερασμένο παίγνιο εκτεταμένης μορφής με πλήρη πληροφόρηση είναι να καταγράψουμε τις στρατηγικές κάθε παίκτη, να προσδιορίσουμε το αποτέλεσμα κάθε ορίζοντα στρατηγικής και να αναλύσουμε αυτές τις πληροφορίες σαν να επρόκειτο για ένα παίγνιο κανονικής μορφής. Έτσι, κατασκευάζουμε ένα παίγνιο κανονικής μορφής με: παίκτες το σύνολο των παικτών του παιγνίου εκτεταμένης μορφής, σύνολο ενεργειών κάθε παίκτη να είναι το σύνολο των στρατηγικών τους στην εκτεταμένη μορφή και συναρτήσεις απόδοσης κάθε ορίζοντα ενεργειών να είναι οι αποδόσεις στους τερματικούς κόμβους του δένδρου παιγνίου που προκύπτουν από κάθε ορίζοντα ενεργειών. Το παίγνιο αυτό που προκύπτει είναι γνωστό ως η κανονική μορφή ενός παιγνίου εκτεταμένης μορφής. Στην συνέχεια, προσδιορίζοντας την ισορροπία $Nash$ σε αυτό το παίγνιο κανονικής μορφής έχουμε ουσιαστικά υπολογίσει την ισορροπία $Nash$ του παιγνίου εκτεταμένης μορφής.

Ύπαρξη ισορροπίας Nash

Η ύπαρξη μιας ισορροπίας κατά $Nash$ σε παίγνια εκτεταμένης μορφής με πλήρη πληροφόρηση εξασφάλιζεται από το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο διατυπώθηκε από τον Αμερικανό μαθηματικό Harold W. Kuhn και η απόδειξη του πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας την μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής.

Θεώρημα 3.2.1 (Kuhn). *Σε κάθε παίγνιο εκτεταμένης μορφής με πλήρη πληροφόρηση υπάρχει μια ισορροπία κατά Nash.*

Επίσης, ένα άλλο θεώρημα που εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ισορροπίας $Nash$ καθαρών στρατηγικών σε πεπερασμένα παίγνια πλήρους πληροφόρησης διατυπώθηκε το 1913 από τον Γερμανό μαθηματικό Ernst Zermelo.

Θεώρημα 3.2.2 (Zermelo). *Κάθε πεπερασμένο παίγνιο εκτεταμένης μορφής με πλήρη πληροφόρηση έχει μια ισορροπία $Nash$ καθαρών στρατηγικών, η οποία προκύπτει από την μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής. Επιπλέον, αν κανένας παίκτης δεν έχει τις ίδιες αποδόσεις σε δύο οποιεσδήποτε τερματικές κορυφές, τότε αυτή η ισορροπία $Nash$ είναι μοναδική.*

3.2.2 Μέθοδος της προς τα πίσω επαγωγής

Η μέθοδος της προς τα πίσω επαγωγής αποτελείται από μια βήμα προς βήμα οπισθοδρόμηση ξεκινώντας από τις τερματικές κορυφές του δένδρου παιγνίου και συνεχίζοντας ένα βήμα κάθε φορά μέχρις ότου φτάσουμε στην ρίζα. Η κεντρική ιδέα στην οποία στηρίζεται είναι ότι κάθε παίκτης επιλέγει σε κάθε κορυφή την επιλογή εκείνη που του δίνει το καλύτερο αποτέλεσμα από το σημείο εκείνο και πέρα. Δηλαδή, προσδιορίζουμε αρχικά την βέλτιστη συμπεριφορά των παικτών στο τέλος του παιγνίου και στην συνέχεια την βέλτιστη συμπεριφορά τους σε νωρίτερα στάδια του παιγνίου, θεωρώντας δεδομένο την μετέπειτα συμπεριφορά τους.

Η μέθοδος της προς τα πίσω επαγωγής είναι συνδεδεμένη με την έννοια της διαδοχικής ορθολογικότητας, καθώς εξασφαλίζει ότι οι στρατηγικές κάθε παίκτη αποτελούν μια βέλτιστη επιλογή σε κάθε κορυφή απόφασης του παιγνίου.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί ώστε να συλλάβει την έννοια της διαδοχικής ορθολογικότητας σε πεπερασμένα παίγνια πλήρους πληροφόρησης, δηλαδή σε παίγνια των οποίων τα σύνολα πληροφόρησης περιέχουν μόνο μια κορυφή απόφασης και το πλήθος των κορυφών αποφάσεων του παιγνίου είναι πεπερασμένο.

Τα βήματα που περιγράφουν την συγκεκριμένη μέθοδο είναι τα ακόλουθα:

- Αρχικά, επιλέγουμε όλες τις κορυφές του δένδρου παιγνίου των οποίων οι πλευρές καταλήγουν σε τερματικές κορυφές. Εκχωρούμε σε κάθε μια από αυτές τις κορυφές το διάνυσμα απόδοσης της τερματικής κορυφής που προσφέρει το βέλτιστο αποτέλεσμα στον παίκτη που κατέχει αυτή την κορυφή και διαγράφουμε τις υπόλοιπες τερματικές κορυφές. (Παρατηρούμε ότι, στο σημείο αυτό δεν υπάρχει αλληλεπίδραση των στρατηγκών μεταξύ των παικτών, οπότε ο προσδιορισμός της βέλτιστης συμπεριφοράς στους κόμβους μοιάζει με ένα πρόβλημα αποφάσεων ενός ατόμου).

- Σο επόμενο βήμα, επιλέγουμε τις αμέσως προηγούμενες κορυφές των προκατόχων των τερματικών κορυφών. Κοιτάμε τις δυνατές επιλογές που έχει κάθε παίκτης που κατέχει κάποια από αυτές τις κορυφές, εκχωρούμε σε καθεμία το διάνυσμα με την καλύτερη απόδοση για τον παίκτη που την κατέχει και διαγράφουμε τις υπόλοιπες.

- Συνεχίζουμε αυτή την ανάστροφη διαδικασία μέχρι να φτάσουμε σε ένα στάδιο όπου οι πρόγονοι των κορυφών αυτού του βήματος αποτελούνται ακριβώς από την ρίζα.

- Τέλος, μια διαδρομή από τη ρίζα προς την κορυφή αυτού του βήματος η οποία προσδίδει την βέλτιστη απόδοση για τον παίκτη που κατέχει την ρίζα, αποτελεί μια βέλτιστη διαδρομή αποφάσεων, την οποία τώρα είμαστε σε θέση να την εντοπίσουμε και στην αντίθετη κατεύθυνση.

Για λόγους διευκόλυνσης, κατά την εκτέλεση αυτής της διαδικασίας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περικομμένα δένδρα παιγνίου. Συγκεκριμένα, σε κάθε στάδιο αφού προσδιορίσουμε την βέλτιστη ενέργεια των παικτών που κατέχουν τις κορυφές που εξετάζουμε, εκχωρούμε σε αυτές την συνάρτηση απόδοσης που αντιστοιχεί στην βέλτιστη ενέργεια για κάθε παίκτη και διαγράφουμε τις υπόλοιπες κορυφές. Έτσι σε κάθε στάδιο προκύπτει ένα όλο και μικρότερο δένδρο (με λιγότερους κόμβους) από το αρχικό, το οποίο θα το αποκαλούμε περικομμένο δένρο παιγνίου.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι, όταν σε ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής τότε αυτή θα μας δώσει πάντα μια διαδρομή ισορροπίας. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο να μας δώσει όλες τις διαδρομές ισορροπίας.

3.2.3 Εφαρμογές

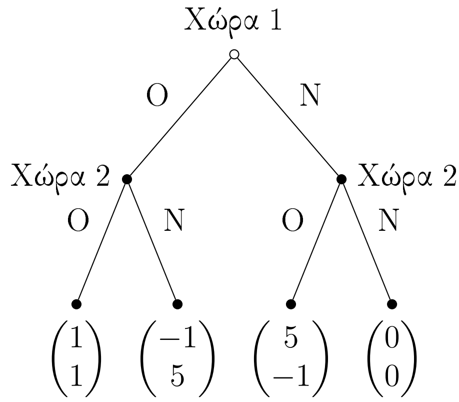
Στην συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα παιγνίων εκτεταμένης μορφής με πλήρη πληροφόρηση.

Παράδειγμα 3.2.1. *(Τρίλιζα)*

Πρόκειται για ένα *μη συνεργατικό παίγνιο* δύο παικτών: τους Χ και Ο. *Οι κανόνες του παιγνίου είναι*: Οι παίκτες είναι αντιμέτωποι με ένα πίνακα που περιέχει εννέα τετράγωνα διατεταγμένα σε τρεις γραμμές. Κάθε παίκτης όταν έρθει η σειρά του συμπληρώνει ένα άδειο τετράγωνο με το σύμβολο του (ένα Χ ή ένα Ο). Θεωρούμε ότι πρώτος παίζει ο παίκτης Χ. Επίσης, και οι δύο παίκτες γνωρίζουν όλες τις επιλογές που έχουν προηγηθεί.

Αποτελέσματα: Ο πρώτος παίκτης που κατόρθωσε να συμπληρώσει μια γραμμή οριζόντια, κάθετη ή διαγώνια με το σύμβολο του (δηλαδή, έχει γεμίσει μια τριάδα τετραγώνων με το σημάδι του) κερδίζει και λαμβάνει 1 ευρώ από τον άλλον παίκτη. Εάν και τα εννέα τετράγωνα του πίνακα έχουν συμπληρωθεί αλλά κανένας παίκτης δεν έχει κατορθώσει να σχηματίσει μια τριάδα με το σύμβολο του, το παιχνίδι λήγει ισόπαλο και κανένας παίκτης δεν λαμβάνει κάποια αμοιβή.

Απόδοση: Οι προτιμήσεις των παικτών περιγράφονται από την συνάρτηση χρησιμότητας, η οποία καθορίζει ένα επίπεδο χρησιμότητας για κάθε πιθανό αποτέλεσμα. Συχνά αναφέρεται ως συνάρτηση απόδοσης. Στο συγκεκριμένο παίγνιο θεωρούμε ότι η απόδοση κάθε παίκτη είναι ίση με την ποσότητα των χρημάτων που κερδίζει ή χάνει. Παρατηρούμε ότι οι ενέργειες που μεγιστοποιούν την απόδοση ενός παίκτη εξαρτώνται από το τι περιμένει να πράξει ο



Σχήμα 3.3: Ανταγωνισμός εξοπλισμών-Εκτεταμένη μορφή

άλλος παίκτης. Πρόκειται για παίγνιο *μηδενικού αθροίσματος*, αφού ότι κερδίζει ο ένας παίκτης το χάνει ο άλλος.

Το παραπάνω παίγνιο μπορούμε το περιγράψουμε σε **εκτεταμένη μορφή** με την βοήθεια ενός δένδρου παιγνίου όπου κάθε μονοπάτι στο δένδρο θα παριστάνει μια μοναδική ακολουθία κινήσεων των παικτών. Συγκεκριμένα, όταν μπορούμε να φτάσουμε σε μια δοσμένη θέση του πίνακα (π.χ. οι δυο αριστερές γωνίες συμπληρωμένες με X και οι δυο δεξιές γωνίες με O) από μια ακολουθία διάφορων διαφορετικών κινήσεων τότε κάθε τέτοια ακολουθία αναπαριστάται ξεχωριστά στο δένδρο του παιγνίου. Οι κόμβοι αναπαριστούν την τωρινή θέση καθώς επίσης και το πώς φτάσαμε σε αυτήν. Ακόμη, όταν έρθει η σειρά του παίκτη να παίξει, μπορεί να παρατηρεί όλες τις προηγούμενες κινήσεις που έχουν γίνει, οπότε είναι ένα παίγνιο με *πλήρη πληροφόρηση*.

Παράδειγμα 3.2.2. *(Ανταγωνισμός εξοπλισμών)*

Θεωρούμε δυο χώρες που βρίσκονται σε ανταγωνισμό εξοπλισμών και οι οποίες θέλουν να εφοδιαστούν με πυρηνικά όπλα. Θα εξετάσουμε την ορθολογικότητα μιας τέτοιας στρατηγικής από την πλευρά και των δυο χωρών.

Θεωρούμε ότι η χώρα 1 επιλέγει πρώτη την κίνηση της και στην συνέχεια η χώρα 2, αφού δει την επιλογή της χώρας 1, κάνει και αυτή με τη σειρά της την κίνηση της. Οι χώρες έχουν δύο επιλογές : αγορά πυρηνικών όπλων(N) και όχι αγορά πυρηνικών όπλων (O). Πρόκειται για *παίγνιο διαδοχικών κινήσεων με πλήρη πληροφόρηση* και παριστάνεται με το δένδρο παιγνίου που παρατίθεται στο σχήμα 3.3.

Κάθε χώρα επιλέγει την στρατηγική που θα ακολουθήσει με κριτήριο το συμφέρον της, λαμβάνοντας υπόψη την απόδοση των στρατηγικών.

	Χώρα 2		
Χώρα 1	Στρατηγική	Ν	Ο
	Ν	(0,0)	(5,-1)
	Ο	(-1,5)	(1,1)

Πίνακας 3.1: Ανταγωνισμός εξοπλισμών-Κανονική μορφή

Παρατηρούμε ότι η χώρα 2 προτιμά την αγορά όπλων (Ν) ανεξάρτητα την επιλογή της χώρας 1.
Η χώρα 1 επιλέγει την στρατηγικής της με γνώμονα αυστηρά το συμφέρον της μελετώντας τη βέλτιστη επιλογή για τις διάφορες στρατηγικές της χώρας 2 ως εξής: γνωρίζει ότι αν επιλέξει Ο τότε η χώρα 2 θα επιλέξει Ν και θα αποκτήσει πλεονεκτική θέση έναντι της χώρας 1 (οπότε δεν την συμφέρει να κάνει αυτή την κίνηση), ενώ αν επιλέξει Ν τότε και η χώρα 2 θα επιλέξει Ν ώστε να αποτρέψει μια μελλοντική πυρηνική επίθεση από την χώρα 1. Επομένως, αφού η χώρα 1 γνωρίζει το σκεπτικό της 2, η βέλτιστη επιλογή που μπορεί να κάνει είναι Ν.

Χρησιμοποιώντας την **προς τα πίσω επαγωγή** η λύση του παιγνίου είναι: Η χώρα 2 επιλέγει Ν όποια και αν είναι η επιλογή της χώρας 1. Η χώρα 1 επιλέγει Ν. Άρα η στρατηγική που θα ακολουθήσουν οι χώρες είναι (Ν,Ν) και η οποία είναι η μόνη διαδρομή ισορροπίας κατά Nash του παιγνίου, αφού καμιά χώρα δεν έχει συμφέρον να την εγκαταλείψει δεδομένου ότι η άλλη χώρα ακολούθησε αυτή τη στρατηγική.

Επομένως, και οι δύο χώρες θεωρούν λογικό να αυξήσουν το πυρηνικό του οπλοστάσιο παρόλο που θα είχαν μεγαλύτερο κέρδος αν δεν διαθέσουν χρήματα για την αγορά πυρηνικών όπλων.

Επίσης, το συγκεκριμένο παίγνιο θα μπορούσε να περιγραφεί και ως *παίγνιο στρατηγικής μορφής* όπου οι παίκτες παίζουν ταυτόχρονα χωρίς να γνωρίζουν την στρατηγική που θα επιλέξει ο άλλος (όπως το δίλλημα του φυλακισμένου). Σε αυτή την περίπτωση, οι στρατηγικές κάθε χώρας καθώς και οι αποδόσεις αυτών παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1. Επομένως, χρησιμοποιώντας την μέθοδο των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών η λύση του παιγνίου είναι όπως και πριν η στρατηγική (Ν,Ν) η οποία είναι η μοναδική ισορροπία κατά $Nash$, παρόλο που η πιο οικονομικά συμφέρουσα στρατηγική θα ήταν η (Ο,Ο) .

Παράδειγμα 3.2.3. *(Το μοντέλο του Δυοπώλειου Stackelberg)*

Πρόκειται για ένα παίγνιο διαδοχικών κινήσεων δύο σταδίων με πλήρη πληροφόρηση, το οποίο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο δύο εταιρείες που πωλούν παρόμοια προϊόντα αποφασίζουν ποιό θα είναι το μέγεθος της παραγωγής τους.

Θεωρούμε ότι έχουμε δυο εταιρίες: την εταιρία 1 και την εταιρία 2 , οι οποίες παράγουν παρόμοια προϊόντα. Αρχικά η εταιρία 1 επιλέγει την ποσότητα του προϊόντος που θέλει να παράγει, έστω $q_1 \geq 0$. Στην συνέχεια η εταιρία 2, δεδομένου ότι η εταιρία 1 παράγει q_1, επιλέγει την ποσότητα που θα παράγει, έστω $q_2 \geq 0$.
Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής θα βρούμε την λύση του παιγνίου. Θα ξεκινήσουμε μελετώντας την στρατηγική της εταιρίας 2 σε κάθε επιλογή της εταιρίας 1, δηλαδή, θα βρούμε την ποσότητα που πρέπει να παράγει η 2 ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της, δεδομένου ότι γνωρίζει ότι η εταιρία 1 παράγει q_1.

Γνωρίζουμε ότι το κέρδος κάθε εταιρίας δίνεται από την σχέση:

$$u_i(q_1, q_2) = q_i[p(q) - c_i], \quad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

όπου $q = q_1 + q_2$ η συνολική ποσότητα του προϊόντος που διατίθεται στην αγορά και $p(q) = A - q$ η τιμή εκκαθάρισης της αγοράς, A μια σταθερή ποσότητα και c_i το οριακό κόστος παραγωγής του προϊόντος q_i . Οπότε, το κέρδος κάθε εταιρίας είναι:

$$u_i(q_1, q_2) = q_i[A - q_1 - q_2 - c_i], \quad i = 1, 2 \tag{3.2}$$

Άρα, έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης για την εταιρία 2:
Εύρεση $q_2^* = q_2^*(q_1)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} u_2(q_1, q_2^*) &= \max u_2(q_1, q_2) \\ &= \max q_2[A - q_1 - q_2 - c_2] \\ &= \max[-q_2^2 + (A - q_1 - c_2)q_2] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Υπολογίζουμε το μέγιστο της συνάρτησης:

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 0 \Longrightarrow -2q_2 + A - q_1 - c_2 = 0 \Longrightarrow q_2 = \frac{A - q_1 - c_1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial q_2^2} = -2 < 0 \quad \text{(πράγματι πρόκειται για μέγιστο)}$$

Άρα, η ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος της εταιρίας 2 είναι η

$$q_2^* = \frac{A - q_1 - c_2}{2} \quad \text{με} \quad q_1 < A - c_2 \tag{3.4}$$

Η εταιρία 1 αν επιλέξει να παράγει q_1 θα πρέπει να περιμένει ότι τότε η εταιρία 2 θα επιλέξει να παράγει q_2^*, οπότε θα προτιμήσει να παράγει την ποσότητα προϊόντος q_1^* που μεγιστοποιεί το κέρδος της, το οποίο προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} u_1(q_1, q_2^*) &= q_1[A - q_1 - q_2^* - c_1] = q_1[A - q_1 - \frac{A - q_1 - c_2}{2} - c_1] \\ &= \frac{1}{2} q_1[A - q_1 + c_2 - 2c_1] = \frac{1}{2}[-q_1^2 + (A - 2c_1 + c_2)q_1] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Υπολογίζουμε το μέγιστο της συνάρτησης:

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0 \Longrightarrow -q_1 + \frac{A - 2c_1 + c_2}{2} = 0 \Longrightarrow q_1 = \frac{A - 2c_1 + c_2}{2}$$

και

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial q_1^2} = -1 < 0 \quad (\text{πράγματι πρόκειται για μέγιστο})$$

Άρα,

$$q_1^* = \frac{A - 2c_1 + c_2}{2}$$

Συνεπώς, η (3.4) γράφεται

$$q_2^* = \frac{A + 2c_1 - 3c_2}{4}$$

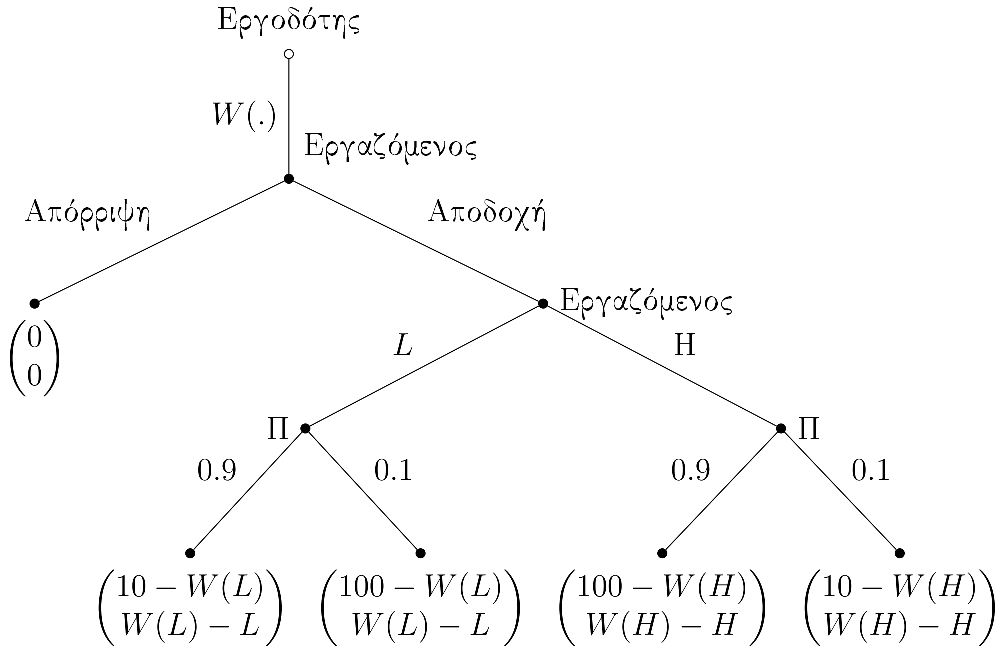
Επομένως, η λύση του παιγνίου είναι ο ορίζοντας στρατηγικής (q_1^*, q_2^*).

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός οτι η εταιρία που κινείται πρώτη φαίνεται να αποκτά κάποιο πλεονέκτημα. Αυτό είναι συχνό φαινόμενο στα ακολουθιακά παίγνια και καλείται *πλεονέκτημα της πρώτης κίνησης*.

Παράδειγμα 3.2.4. *(Βέλτιστα Συμβόλαια - Πλήρης Πληροφόρηση)*

Πρόκειται για παίγνιο διαδοχικών κινήσεων μεταξύ δύο παικτών: του Εργοδότη και του Εργαζόμενου. Ο εργοδότης θέλει να αναθέσει κάποια εργασία στον εργαζόμενο, για αυτό του προτείνει ένα συμβόλαιο. Ο εργαζόμενος έχει την δυνατότητα είτε να αποδεχθεί το συμβόλαιο είτε να το απορρίψει. Αν το αποδεχθεί έχει δύο επιλογές ή να εργαστεί σκληρά (H) ή να τεμπελιάσει (L). Θεωρούμε ότι τα H, L μετρώνται σε ευρώ και ότι $H > L$. Θεωρούμε ακόμη ότι ο εργοδότης έχει τη δυνατότητα να παρατηρεί αν ο εργαζόμενος εργάζεται σκληρά ή τεμπελιάζει, οπότε έχουμε πλήρη πληροφόρηση. Επίσης, στην περίπτωση που ο εργαζόμενος επιλέξει να εργαστεί σκληρά ο εργοδότης θα λάβει 100 ευρώ με πιθανότητα 0.9 ή 10 ευρώ με πιθανότητα 0.1 από το πρόγραμμα ενώ στην περίπτωση που ο εργαζόμενος τεμπελιάσει ο εργοδότης θα λάβει 10 ευρώ με πιθανότητα 0.9 ή 100 ευρώ με πιθανότητα 0.1. Το συμβόλαιο που προτείνει ο εργοδότης εκφράζεται μέσω της συνάρτησης αποδοχών W(), η οποία είναι μια συνάρτηση της προσπάθειας που καταβάλει ο εργαζόμενος, οπότε μπορεί να πάρει δυο τιμές: W(H) ή W(L). Το συμβόλαιο αυτό καθορίζει τον μισθό τόσο του εργαζόμενου όσο και του εργοδότη. Σκοπός του εργοδότη είναι να προτείνει ένα συμβόλαιο το οποίο θα γίνει αποδεκτό από τον εργαζόμενο και θα τον προτρέπει ή να εργαστεί σκληρά ή να τεμπελιάσει. Η εκτεταμένη μορφή αυτού του παιγνίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4.

Το παίγνιο παίζεται ως εξής:
Ο εργοδότης προτείνει ένα συμβόλαιο στον εργαζόμενο. Ο εργαζόμενος αποφασίζει αν θα το απορρίψει ή αν θα το δεχθεί. Αν το απορρίψει και οι δύο θα έχουν μηδενική απόδοση (η απόδοση εκφράζεται από την αμοιβή). Αν το αποδεχθεί καλείται να επιλέξει αν θα εργαστεί σκληρά (H) ή αν θα τεμπελιάσει (L). Αν επιλέξει να εργαστεί σκληρά τότε με πιθανότητα 0.9 η αμοιβή του θα είναι $W(H) - H$ και του εργοδότη $100 - W(H)$ ή με πιθανότητα 0.1 η αμοιβή του θα είναι $W(H) - H$ και του εργοδότη $10 - W(H)$. Αν επιλέξει να τεμπελιάσει τότε με πιθανότητα 0.9 η αμοιβή του θα είναι $W(L) - L$ και του εργοδότη $10 - W(L)$ ή με πιθανότητα 0.1 η αμοιβή του θα είναι $W(L) - L$ και του εργοδότη $100 - W(L)$.



Σχήμα 3.4: Βέλτιστα συμβόλαια - Πλήρης πληροφόρηση

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. **Σκοπός του εργοδότη να κάνει τον εργαζόμενο να εργαστεί σκληρά**
   Σε αυτή την περίπτωση το συμβόλαιο πρέπει να εξασφαλίζει στον εργαζόμενο ότι η αμοιβή του θα είναι μεγαλύτερη αν επιλέξει να εργαστεί σκληρά σε σχέση με αυτήν που θα λάμβανε αν τεμπέλιαζε και επίσης ότι η αποδοχή του συμβολαίου είναι συμφέρουσα για αυτόν.

   Επομένως, το συμβόλαιο θα πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$W(H) - H \geq W(L) - L$$

   και

$$W(H) - H \geq 0$$

   Ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι το εξής:

$$W(H) > H,\ W(H) \cong H,\ W(L) = L$$

   Στο οποίο η αμοιβή του εργαζόμενου είναι σχεδόν μηδενική ενώ η αναμενόμενη αμοιβή του εργοδότη, δεδομένου ότι ο εργαζόμενος εργάζεται σκληρά είναι η μέγιστη δυνατή και εκτιμάται ως εξής:

$$0.9[100 - W(H)] + 0.1[10 - W(H)] = 91 - W(H)$$

2. **Σκοπός του εργοδότη να κάνει τον εργαζόμενο να τεμπελιάσει**
   Σε αυτή την περίπτωση το συμβόλαιο πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη

   $$W(L) - L \geq W(H) - H$$

   η οποία εξασφαλίζει οτι η αμοιβή του εργαζόμενου θα είναι μεγαλύτερη αν τεμπελιάσει και την συνθήκη

   $$W(L) - L \geq 0$$

   η οποία εξασφαλίζει ότι η αποδοχή του συμβολαίου είναι συμφέρουσα για τον εργαζόμενο. Ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι το εξής:

   $$W(H) = H,\ W(L) = L$$

   Στο οποίο η αμοιβή του εργαζόμενου είναι μηδενική είτε εργαστεί σκληρά είτε τεμπελιάσει (οπότε θα προτιμήσει να τεμπελιάσει) ενώ η μέγιστη δυνατή αναμενόμενη αμοιβή του εργοδότη, δεδομένου ότι ο εργαζόμενος τεμπελιάζει, είναι:

   $$0.9[10 - W(L)] + 0.1[100 - W(L)] = 19 - W(L)$$

Η λύση του παιγνίου είναι:
Ο εργοδότης με γνώμονα το συμφέρον του, το οποίο είναι η μεγιστοποίηση των κερδών του, θα επιλέξει το συμβόλαιο που θα προτείνει στον εργαζόμενο. Συγκεκριμένα, αν $91 - W(H) > 19 - W(L)$ θα προτείνει το πρώτο συμβόλαιο που αναφέραμε και ο εργαζόμενος θα δεχθεί να εργαστεί σκληρά, διαφορετικά αν $91 - W(H) \leq 19 - W(L)$ θα προτιμήσει το δεύτερο συμβόλαιο και ο εργαζόμενος θα δεχθεί να τεμπελιάσει.

3.3 Παίγνια με ελλιπή πληροφόρηση

Ορισμός 3.3.1. *Ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής καλείται παίγνιο με ελλιπή πληροφόρηση (imperfect information) αν έχει τουλάχιστον ένα σύνολο πληροφοριών το οποίο δεν είναι μονοσύνολο.*

Στην συνέχεια, θα μελετήσουμε μια ειδική περίπτωση της ισορροπίας *Nash*, οποία μας βοηθάει να αποκλείουμε ισορροπίες *Nash* που συχνά συμπεριφέρονται «παράλογα» σε συγκεκριμένα υποπαίγνια και η οποία είναι γνωστή ως ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου κατά Nash. Πρόκειται, δηλαδή, για μια ισορροπία που μας εξασφαλίζει ότι οι παίκτες συνεχίζουν να παίζουν ορθολογικά κατά την εξέλιξη ενός παιγνίου και είναι ικανή να εντοπίσει ποιές στρατηγικές είναι μη αξιόπιστες. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος εύρεσης μιας τέτοιας ισορροπίας είναι η μέθοδος της προς τα πίσω επαγωγής. Ωστόσο, δεν έχουν όλα τα παίγνια εκτεταμένης μορφής με ελλιπή πληροφόρηση μη τετριμμένα υποπαίγνια. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η έννοια της ισορροπίας τέλειου υποπαιγνίου δεν έχει νόημα, καθώς κάθε ισορροπία *Nash* είναι ταυτόχρονα και τέλεια ισορροπία για το υποπαίγνιο. Στα παίγνια αυτά που δεν έχουν υποπαίγνια, για να εξετάσουμε αν μια ισορροπία *Nash* είναι διαδοχικά ορθολογική χρησημοποιούμε την έννοια της διαδοχικής ισορροπίας.

3.3.1 Ισορροπία Τέλειου Υποπαιγνίου κατά Nash

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της διαδοχικής ορθολογικότητας σε πεπερασμένα παίγνια εκτεταμένης μορφής με ελλιπή πληροφόρηση. Συγκεκριμένα, θα δούμε πως μπορούμε να αναγνωρίσουμε μια ισορροπία *Nash* που ικανοποιεί την έννοια της διαδοχικής ορθολογικότητας σε τέτοιου είδους παίγνια.

Για να μελετήσουμε παίγνια με ελλιπή πληροφόρηση χρησιμοποιούμε την έννοια του υποπαιγνίου.

Ορισμός 3.3.2. *Ένα υποπαίγνιο ενός παιγνίου εκτεταμένης μορφής I παικτών είναι ένα άλλο παίγνιο εκτεταμένης μορφής I παικτών, τέτοιο ώστε:*

- *Το δένδρο του είναι κλάδος του αρχικού δένδρου.*
- *Τα σύνολα πληροφοριών του κλάδου είναι ίδια με τα σύνολα πληροφοριών του αρχικού παιγνίου και δεν περιλαμβάνουν κορυφές που είναι εκτός του κλάδου.*
- *Τα διανύσματα απόδοσης των τερματικών κορυφών του κλάδου είναι ίδια με αυτά του αρχικού παιγνίου σε αυτές τις τερματικές κορυφές.*

Με άλλα λόγια, ένα υποπαίγνιο ενός παιγνίου διαδοχικών κινήσεων είναι ένα παίγνιο, υποσύνολο του αρχικού, το οποίο ξεκινά από ένα σύνολο πληροφοριών που περιέχει μόνο μια κορυφή, περιέχει όλους τους απογόνους αυτής της κορυφής, άμεσους και επόμενους, και δεν περιέχει καμία άλλη κορυφή. Επιπλέον, αν κάποια κορυφή ενός συνόλου πληροφόρησης H ανήκει στο υποπαίγνιο τότε πρέπει να ανήκουν σε αυτό και όλες οι υπόλοιπες κορυφές του συνόλου H. Δηλαδή, δεν επιτρέπεται να σπάμε τα σύνολα πληροφοριών.

Κάθε δένδρο μπορεί να θεωρηθεί ως κλάδος, άρα κάθε παίγνιο εκτεταμένης μορφής είναι ένα υποπαίγνιο, το οποίο καλείται **τετριμμένο υποπαίγνιο**.

Επίσης, ένα παίγνιο ενδέχεται να έχει πολλά υποπαίγνια, με το ένα υποπαίγνιο να είναι εμφωλευμένο μέσα στο άλλο. Τα υποπαίγνια τα οποία δεν έχουν άλλα υποπαίγνια εμφωλευμένα μέσα σε αυτά, θα τα ονομάζουμε **τελικά υποπαίγνια**.

Σε ένα πεπερασμένο παίγνιο πλήρους πληροφόρησης, κάθε κορυφή απόφασης μπορεί να παράγει ένα υποπαίγνιο. Αυτό δεν συμβαίνει, όμως, στα παίγνια με ελλιπή πληροφόρηση.

Οι ορίζοντες στρατηγικής ενός υποπαιγνίου είναι οι περιορισμοί των οριζόντων στρατηγικής του παιγνίου στο υποπαίγνιο.

Η έννοια, λοιπόν, που συλλαμβάνει την αρχή της διαδοχικής ορθολογικότητας στα παίγνια ελλιπής πληροφόρησης είναι αυτή της ισορροπίας τέλειου υποπαιγνίου κατά *Nash*, η οποία διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1965 από τον *Selten*. Ο ακριβής ορισμός της είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 3.3.3. *Αν ένας ορίζοντας στρατηγικής ενός παιγνίου εκτεταμένης μορφής είναι ισορροπία Nash για κάθε υποπαίγνιο του αρχικού παιγνίου τότε ο ορίζοντας αυτός καλείται ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου κατά Nash.*

Δηλαδή, ένας ορίζοντας στρατηγικής είναι μια ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου αν είναι ισορροπία Nash του παιγνίου και επίσης είναι ισορροπία Nash για κάθε υποπαίγνιο.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι, κάθε ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου κατά *Nash* είναι ισορροπία *Nash* αλλά μια ισορροπία *Nash* δεν είναι απαραίτητα ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου.

Επίσης, μια ισορροπία *Nash* που δεν είναι τέλεια ισορροπία για κάποιο υποπαίγνιο καλείται ισορροπία *Nash* που υποστηρίζεται από μη αξιόπιστη συμπεριφορά.

Για τον προσδιορισμό μιας ισορροπίας τέλειου υποπαιγνίου κατά *Nash* σε πεπερασμένα παίγνια εκτεταμένης μορφής με ελλιπή πληροφόρηση, χρησιμοποιούμε μια γενίκευση της μεθόδου της προς τα πίσω επαγωγής που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση παιγνίων με ελλιπή πληροφόρηση.

Τα βήματα που περιγράφουν την διαδικασία της **γενικευμένης μεθόδου της προς τα πίσω επαγωγής** είναι τα ακόλουθα:

- Αρχίζοντας από το τέλος του δένδρου παιγνίου, προσδιορίζουμε την ισορροπία $Nash$ για κάθε τελικό υποπαίγνιο.

- Σε κάθε ένα από τα τελικά υποπαίγνια επιλέγουμε μια ισορροπία $Nash$ και αντικαθιστώντας αυτά τα τελικά υποπαίγνια, με τις αποδόσεις που προκύπτουν σε αυτά όταν οι παίκτες χρησιμοποιούν τις συγκεκριμένες στρατηγικές ισορροπίας, εξάγουμε το περικομμένο δένδρο του παιγνίου.

- Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα για το περικομμένο παίγνιο και συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι όλες οι κινήσεις στο αρχικό παίγνιο να έχουν προσδιοριστεί. Αυτή η συλλογή των κινήσεων στα διάφορα σύνολα πληροφόρησης του αρχικού μας παιγνίου αποτελούν μια ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου κατά $Nash$.

- Αν σε κανένα στάδιο της παραπάνω διαδικασίας δεν συναντήσουμε πολλαπλές ισορροπίες, τότε η ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου κατά $Nash$ που προσδιορίσαμε είναι μοναδική. Διαφορετικά, αν σε κάποιο στάδιο συναντήσουμε πολλαπλές ισορροπίες, θα επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για κάθε πιθανή ισορροπία που θα μπορούσε να προκύψει και με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε προσδιορίσει το σύνολο όλων των ισορροπιών τέλειου υποπαιγνίου.

Στην περίπτωση παιγνίων με πλήρη πληροφόρηση η παραπάνω διαδικασία ανάγεται στην απλή μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής. Επιπλέον, στα παίγνια με πλήρη πληροφόρηση αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα μια ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου. Αυτό προκύπτει από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.3.1. *Σε κάθε πεπερασμένο παίγνιο εκτεταμένης μορφής με πλήρη πληροφόρηση υπάρχει μια ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου κατά* $Nash$ *καθαρής στρατηγικής. Επιπλέον, αν κανένας παίκτης δεν έχει τις ίδιες αποδόσεις σε δύο οποιεσδήποτε τερματικές κορυφές, τότε η ισορροπία αυτή είναι μοναδική.*

3.3.2 Διαδοχική ορθολογικότητα

Η τελειότητα υποπαιγνίου εξασφαλίσει σε ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής με ελλιπή πληροφόρηση ότι καθώς το παίγνιο εξελίσσεται οι παίκτες συνεχίζουν να παίζουν ορθολογικά. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετά παίγνια διαδοχικών κινήσεων χωρίς υποπαίγνια. Σε αυτή την περίπτωση δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει σχετικά με την διαδοχική ορθολογικότητα των παικτών και την ισορροπία κατά $Nash$. Στην συνέχεα θα δούμε ότι για την επίτευξη μιας λύσης ισορροπίας ο ρόλος των πεποιθήσεων είναι καθοριστικός.

Πεποιθήσεις και στρατηγικές

Ορισμός 3.3.4. • *Έστω $X = \{K_1, \ldots, K_m\}$ ένα σύνολο πληροφοριών για τον παίκτη i. Ένα σύστημα πεποιθήσεων μ για τον παίκτη i είναι μια συνάρτηση η οποία προσδίδει μια κατανομή πιθανότητας $\mu_X : X \longrightarrow [0, 1]$ σε κάθε κορυφή απόφασης των συνόλων πληροφοριών του παίκτη, τέτοια ώστε $\sum_{x \in X} \mu_X(x) = 1$, για όλα τα σύνολα πληροφοριών του X.*

- *Ο αριθμός $\mu_X(x)$ εκφράζει την πεποίθηση του παίκτη ότι το παιγνίο έχει φτάσει στην κορυφή x του συνόλου πληροφοριών του X.*

- *Ένα σύστημα πεποιθήσεων για ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής Γ_E με I παίκτες και με ελλιπή πληροφόρηση είναι ένα διάνυσμα $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_I)$ με I συνιστώσες, όπου η κάθε συνιστώσα μ_i αποτελεί ένα σύστημα πεποιθήσεων για τον παίκτη i, $i = 1, \ldots, I$.*

Η έννοια του ορίζοντα στρατηγικής ενός παίκτη επεκτείνεται στα παίγνια εκτεταμένης μορφής με την έννοια του ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς του παίκτη.

Ορισμός 3.3.5. • *Έστω $X = \{K_1, \ldots, K_m\}$ ένα σύνολο πληροφοριών για τον παίκτη i και $E = \{e_1, \ldots, e_l\}$ το σύνολο πλευρών που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή του X. Μια στρατηγική συμπεριφοράς π για έναν παίκτη i είναι μια συνάρτηση που προσδίδει μια κατανομή πιθανότητας $\pi_E : E \longrightarrow [0, 1]$ στις πλευρές κάθε κορυφής που ανήκει στον παίκτη i και είναι σύμφωνη με το σύνολο πληροφοριών του.*

- *Ο αριθμός $\pi_E(e_k)$ εκφράζει την πιθανότητα ο παίκτης να επιλέξει την πλευρά e_k όταν φτάσει στο σύνολο πληροφοριών X.*

- *Ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεροφοράς σε ένα παίγνιο I ατόμων είναι ένα διάνυσμα $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_I)$, όπου π_i είναι η στρατηγική συμπεριφοράς για τον παίκτη i, με $i = 1, \ldots, I$.*

- *Αν κάθε επιλογή σε κάθε κορυφή θεωρούμε ότι μπορεί να επιλεγεί με θετική πιθανότητα, τότε ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς π καλείται πλήρως αναμεμιγμένος.*

Συνέπεια πεποιθήσεων

Σε ένα παίγνιο εκτεταμένης μορφής με ελλιπή πληροφόρηση η έννοια της ισορροπίας θα πρέπει να περιλαμβάνει την έννοια των συνεπών πεποιθήσεων και οριζόντων στρατηγικής καθώς η έννοια της συνέπειας αποτελεί ένα σημαντικό συστατικό της διαδοχικής ορθολογικότητας. Παρόλα αυτά, δεν επαρκεί για να χαρακτηρίσει μια ισορροπία ως διαδοχικά ορθολογική καθώς ένα συνεπές σύστημα πεποιθήσεων είναι ένα βήμα μόνο προς μια λογική λύση και επίσης, ένας ορίζοντας στρατηγικής ισορροπίας $Nash$ δεν περιλαμβάνει απαραίτητα τη βέλτιστη ενέργεια σε κάθε σύνολο πληροφοριών. Παρακάτω, δίνουμε τον ακριβή ορισμό της συνέπειας.

Ορισμός 3.3.6. *Ένα σύστημα πεποιθήσεων μ καλείται συνεπές κατά Bayes σε σχέση με ένα πλήρως αναμεμιγμένο ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς π εάν ισχύει ότι $\mu = \mu^{\pi}$, δηλαδή αν το μ παράγεται από το π.*

Ορισμός 3.3.7. *Ένα σύστημα πεποιθήσεων μ και ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς π καλούνται συνεπή αν υπάρχει μια ακολουθία πλήρως αναμεμιγμένων οριζόντων στρατηγικής συμπεριφοράς $\{\pi^n\}$ τέτοια ώστε η ακολουθία (π^n, μ^{π^n}), όπου μ^{π^n} είναι το σύστημα πεποιθήσεων που είναι συνεπές κατά Bayes με το $\{\pi^n\}$, να συγλίνει στο (π, μ) με την έννοια ότι:*
$\pi^n(e_i) \longrightarrow \pi(e_i)$ για κάθε πλευρά e_i και $\mu^{\pi^n}(K_i) \longrightarrow \mu(K_i)$ για κάθε κορυφή K_i.

Διαδοχική ισορροπία

Θεωρούμε ένα παίγνιο διαδοχικών κινήσεων με I παίκτες το οποίο παίζεται με έναν ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_I)$. Στόχος κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει την απόδοση του. Ένας παίκτης μπορεί να κερδίσει στο παίγνιο, αν μπορεί να βελτιώσει την αναμενόμενη απόδοση του αλλάζοντας την στρατηγική συμπεριφοράς του σε κάποιο από τα σύνολα πληροφοριών του, δεδομένου ότι οι υπόλοιποι παίκτες δεν αλλάζουν την στρατηγική τους. Άρα, οι ορθολογικοί παίκτες θα παίζουν έναν ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς τέτοιον ώστε κανένας παίκτης να μην μπορεί να βελτιώσει την αναμενόμενη απόδοση του σε οποιοδήποτε από τα σύνολα πληροφοριών του, δεδομένου ότι οι άλλοι παικτες συνεχίζουν να παίζουν τον ίδιο ορίζοντα στρατηγικής.

Θα λέμε ότι ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς και ένα σύστημα πεπεοιθήσεων είναι μια διαδοχική ισορροπία αν αρχίζοντας από οποιοδήποτε σύνολο πληροφοριών του παιγνίου, ο ορίζοντας στρατηγικής, δεδομένου του συστήματος πεποιθήσεων με το οποίο είναι συνεπής, εξακολουθεί να είναι ένας ορίζοντας στρατηγικής ισορροπίας.

Ορισμός 3.3.8. *Έστω ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς π και ένα σύστημα πεποιθήσεων μ συνεπές με το π, τέτοια ώστε κανένας παίκτης να μην μπορεί να κερδίσει αποκλίνοντας από το π σε οποιοδήποτε από τα σύνολα πληροφοριών του, τότε το ζεύγος (π, μ) αποτελεί μια διαδοχική ισορροπία ενός παιγνίου εκτεταμένης μορφής.*

Μια διαδοχική ισορροπία είναι μια λύση που περιέχει μια ισχυρή έννοια ορθολογικότητας. Άρα, οι παίκτες είναι διαδοχικά ορθολογικοί αν παίζουν μια διαδοχική ισορροπία. Η έννοια της διαδοχικής ισορροπίας γενικεύει την έννοια της τελειότητας υποπαιγνίου σε παίγνια διαδοχικών κινήσεων τα οποία δεν διαθέτουν υποπαίγνια καθώς κάθε διαδοχική ισορροπία είναι μια ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου.

Η ύπαρξη της διαδοχικής ισορροπίας σε παίγνια με ελλιπή πληροφόρηση εξασφαλίζεται από το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο διατυπώθηκε από τους $Kreps$ και $Wilson$ το 1982.

Θεώρημα 3.3.2 «Kreps-Wilson». *Κάθε παίγνιο εκτεταμένης μορφής με ελλιπή πληροφόρηση διαθέτει μια διαδοχική ισορροπία.*

3.3.3 Εφαρμογές

Παράδειγμα 3.3.1. *(Αγορά μεταχειρισμένων αυτοκινήτων)*

Πρόκειται για ένα παίγνιο διαδοχικών κινήσεων με ελλιπή πληροφόρηση το οποίο δεν διαθέτει τέλεια υποπαίγνια. Θα δούμε ότι για την εύρεση μιας λύσης ισορροπίας του παιγνίου καθοριστικό ρόλο θα έχουν οι πεποιθήσεις των παικτών.

Το συγκεκριμένο παράδειγμα περιγράφει την διαδικασία που πραγματοποιείται κατά την αγοραπωλησία ενός μεταχειρισμένου αυτοκινήτου. Οι παίκτες που λαμβάνουν μέρος είναι δύο, ο πωλητής και ο αγοραστής. Τα αυτοκίνητα που υπάρχουν στην αγορά διακρίνονται σε αυτοκίνητα κακής ποιότητας και αυτοκίνητα καλής ποιότητας και τα οποία βρίσκονται στην ίδια αναλογία. Ο πωλητής έχει περισσότερη πληροφόρηση από τον αγοραστή, καθώς γνωρίζει την ποιότητα του αυτοκινήτου. Και οι δυο παίκτες έχουν καθορίσει κάποιες τιμές επιφύλαξης. Όσο αφορά τον πωλητή έχει ορίσει μια τιμή p_h ως την χαμηλότερη τιμή που είναι διατεθειμένος να δεχτεί για ένα αυτοκίνητο καλής ποιότητας και μια τιμή p_l ως την χαμηλότερη τιμή που είναι διατεθειμένος να δεχτεί για ένα αυτοκίνητο κακής ποιότητας. Αντίστοιχα, ο αγοραστής έχει ορίσει μια τιμή H ως την υψηλότερη τιμή που είναι πρόθυμος να πληρώσει για ένα αυτοκίνητο καλής ποιότητας και μια τιμή L ως την υψηλότερη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για ένα αυτοκίνητο κακής ποιότητας .

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ακόλουθη: Η φύση παίζει πρώτη αποκαλύπτοντας την κατάσταση του αυτοκινήτου στον πωλητή (παίκτης 1), ο οποίος με τη σειρά του στέλνει ως σήμα στον αγοραστή (παίκτης 2) την τιμή που απαιτεί ώστε να αγοράσει το αυτοκίνητο και τέλος ο αγοραστής αποφασίζει αν θα αγοράσει το αυτοκίνητο ή όχι.

Κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

- Οι τιμές επιφύλαξης είναι γνωστές σε όλους τους παίκτες .
- $H > p_h$ και $L > p_l$ για λόγους βιωσιμότητας της αγοράς.
- $p_l < p_h$ και $L < H$ για προφανείς λόγους.

Το παίγνιο παίζεται ως εξής:
Θεωρούμε ότι ένα μεταχειρισμένο αυτοκίνητο διατίθεται στην αγορά. Αρχικά η φύση αποκαλύπτει στον πωλητή αν πρόκειται για αυτοκίνητο καλής ποιότητας «G» ή κακής ποιότητας «B». Ο πωλητής στην συνέχεια καθορίζει αν η τιμή αγοράς του αυτοκινήτου θα είναι p_h (υψηλή) ή p_l (χαμηλή) και τέλος ο αγοραστής αποφασίζει αν θα το αγοράσει ή όχι. Ο αγοραστής έχει ελλιπή πληροφόρηση καθώς αφού γνωστοποιηθεί η τιμή που καθορίστηκε από τον πωλητή δεν είναι σε θέση να προσδιορίσει ακριβώς σε ποιόν κόμβο του συνόλου πληροφοριών του βρίσκεται μιας και δεν γνωρίζει για τί ποιότητας αυτοκίνητο πρόκειται, οπότε δεν είναι σαφές τι είναι ορθολογικό να πράξει. Παρόλα αυτά, οι πεποιθήσεις του πρέπει να είναι ορθολογικές, δηλαδή, πρέπει να είναι συνεπείς με τις επιλογές που θα έκαναν οι παίκτες.

Θεωρούμε, λογικό αρχικά, ο αγοραστής να πιστεύει ότι όταν η τιμή καταλόγου είναι κοντά στην p_h τότε το πιο πιθανό είναι να πρόκειται για αυτοκίνητο καλής ποιότητας ενώ όταν η τιμή πώλησης είναι κοντά στην p_l είναι πιο πιθανό το αυτοκίνητο να είναι κακής ποιότητας. Επειδή, όμως, ο πωλητής το γνωρίζει αυτό, το πιο πιθανό είναι να ζητήσει μια υψηλή τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο ανεξάρτητα την ποιότητα του. Άρα, παρατηρούμε ότι οι συγκεκριμένες πεποιθήσεις του αγοραστή δεν είναι συνεπείς με τις επιλογές που θα έκανε ο πωλητής με δεδομένες τις πεποιθήσεις του αγοραστή. Συνεπώς, ο αγοραστής θα πρέπει να πιστεύει ότι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητο που πωλείται σε υψηλή τιμή να είναι καλής ποιότητας είναι ισοπίθανο με το ενδεχόμενο να είναι κακής ποιότητας. Οπότε, ενεργώντας ορθολογικά θα αγοράσει το αυτοκίνητο μόνο αν η αναμενόμενη αξία της αγοράς του είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη αξία της μη αγοράς του. Συγκεκριμένα μόνο όταν:

$$\frac{1}{2}(H-p)+\frac{1}{2}(L-p)\geq 0 \Longleftrightarrow p\leq \frac{1}{2}(H+L)$$

όπου με p συμβολίζουμε την προσδοκώμενη αξία αγοράς του αυτοκινήτου.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $p \geq p_h \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(H+L) \geq p_h$

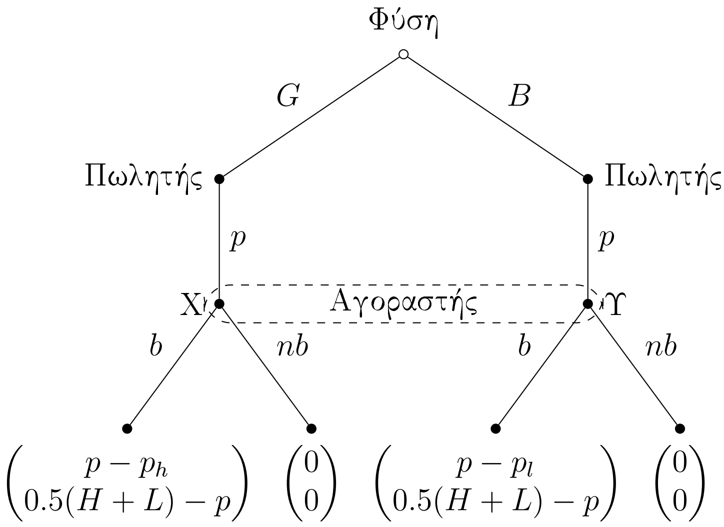
   Ο πωλητής θα προσφέρει κα τους δύο τύπους αυτοκινήτων σε αυτή την τιμή. Ο αγοραστής πιστεύει ότι είναι εξ' ίσου πιθανό το αυτοκίνητο που προσφέρεται σε αυτή την τιμή να είναι καλής ή κακής ποιότητας δηλαδή θεωρεί ότι μπορεί να αξίζει H με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και L με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Οπότε και οι δύο τύποι αυτοκινήτων θα προσφερθούν και θα αγοραστούν στην τιμή $p = \frac{1}{2}(H+L)$.

2. $p_l \leq p < p_h$, δηλαδή, $p_h > \frac{1}{2}(H+L)$

   Ο πωλητής δεν θα διαθέσει τα καλής ποιότητας αυτοκίνητα. Ο αγοραστής γνωρίζει ότι μόνο τα κακής ποιότητας αυτοκίνητα βρίσκονται στην αγορά, οπότε με βεβαιότητα (δηλαδή, με πιθανότητα 1) ξέρει σε ποιόν κόμβο του συνόλου πληροφοριών του βρίσκεται. Άρα είναι διατεθειμένος να δώσει το πολύ L ευρώ για την αγορά του αυτοκινήτου. Επομένως, μόνο τα κακής ποιότητας αυτοκίνητα θα πωλούνται και θα αγοράζονται σε τιμή που θα κυμαίνεται από p_l ως L.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, δεδομένης της τιμής p, οι πεποιθήσεις του αγοραστή είναι συνεπείς με τα κίνητρα του πωλητή και η στρατηγική του αγοραστή είναι βέλτιστη δεδομένων των πεποιθήσεων του σχετικά με τη βέλτιστη στρατηγική του πωλητή. Επομένως, έχουμε καταλήξει σε μια ισορροπία που προέρχεται από ένα σύστημα συνεπών πεποιθήσεων, δηλαδή σε μια διαδοχική ισορροπία. Στην συνέχεια θα δούμε ότι αυτή η ισορροπία είναι μια ισορροπία κατά Nash του παιγνίου.

Το παίγνιο παριστάνεται πλήρως με ένα δένδρο παιγνίου, το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.5, σύμφωνα με το οποίο η φύση αρχικά ορίζει την ποιότητα του αυτοκινήτου στον πωλητή και στην συνέχεια ο πωλητής ορίζει την τιμή p. Αν πρόκειται για καλής ποιότητας αυτοκίνητο οδηγούμαστε στην κορυφή X ενώ αν πρόκειται για κακής ποιότητας οδηγούμαστε στην κορυφή Υ. Οι κορυφές X και Υ έχουν απείρως πολλές δυνατότητες καθώς η τιμή p μπορεί να πάρει άπειρες μη αρνητικές τιμές. Το σύνολο πληροφοριών του αγοραστή είναι



Σχήμα 3.5: Αγορά μεταχειρισμένων αυτοκινήτων

το {Χ,Υ}, καθώς δεν είναι ικανός να προσδιορίσει σε ποιά από αυτές τις δύο κορυφές βρίσκεται όταν καλείται να λάβει την απόφαση του.

Ο κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική του με γνώμονα αυστηρά το συμφέρον του μελετώντας τη βέλτιστη επιλογή για τις διάφορες στρατηγικές του άλλου παίκτη. Άρα, η στρατηγική του πωλητή είναι η τιμή p ($0 \leq p < \infty$) που ορίζει κάθε φορά ενώ η στρατηγική του αγοραστή είναι μια συνάρτηση των κορυφών Χ και Υ με τιμές αγορά (b) ή μη αγορά (nb) η οποία ορίζεται ως $s : [0, \infty) \to \{n, nb\}$. Οι αποδόσεις των παικτών υπολογίζονται αναλυτικά παρακάτω.

Για την περίπτωση 1 έχουμε:

Η συνάρτηση απόδοσης του πωλητή είναι

$$u_1(p,s) = \begin{cases} p - p_h, & s(X) = b \\ 0, & s(X) = nb \\ p - p_l, & s(Y) = b \\ 0, & s(Y) = nb \end{cases}$$

Η συνάρτηση απόδοσης του αγοραστή είναι

$$u_2(p,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(H+L) - p, & s = b \\ 0, & s = nb \end{cases}$$

Επομένως, η ισορροπία κατα Nash είναι η στρατηγική (p^*, s^*) όπου $p^* = \frac{1}{2}(H+L)$ και

$$s^*(p) = \begin{cases} b, & \frac{1}{2}(H+L) \geq p \\ nb, & \frac{1}{2}(H+L) < p \end{cases}$$

Για την περίπτωση 2 όπου στην αγορά διατίθενται μόνο τα κακής ποιότητας αυτοκίνητα έχουμε: Η συνάρτηση απόδοσης του πωλητή είναι

$$u_1(p,s) = \begin{cases} p - p_l, & s = b \\ 0, & s = nb \end{cases}$$

Η συνάρτηση απόδοσης του αγοραστή είναι

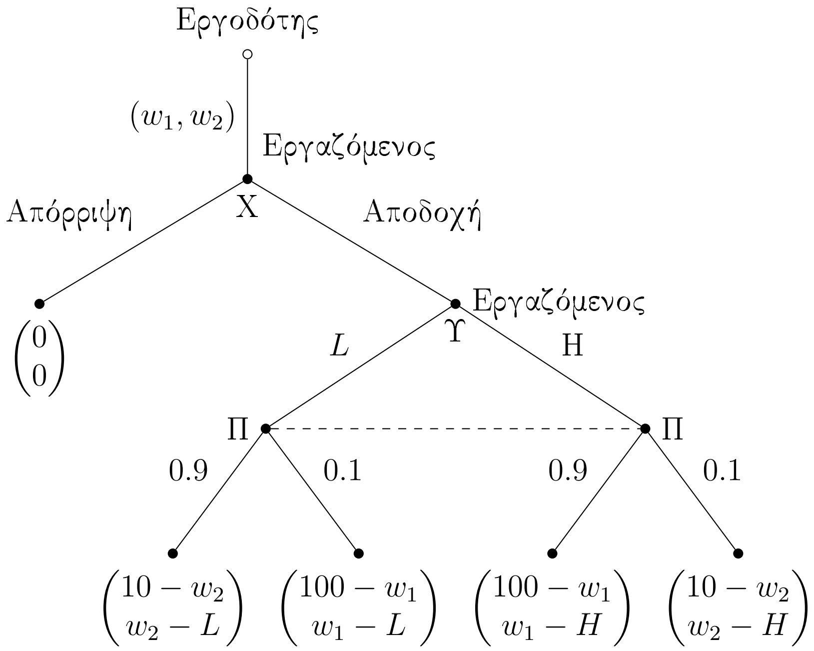
$$u_2(p,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(H+L) - p, & s = b \\ 0, & s = nb \end{cases}$$

Επομένως, η ισορροπία κατα Nash είναι η στρατηγική (p^*, s^*) όπου $p^* = L$ και

$$s^*(p) = \begin{cases} b, & L \geq p \\ nb, & L < p \end{cases}$$

Παράδειγμα 3.3.2. *(Βέλτιστα Συμβόλαια-Ελλιπής Πληροφόρηση)*

Στο παράδειγμα που μελετήσαμε στην περίπτωση της πλήρους πληροφόρησης, είχαμε υποθέσει ότι ο εργοδότης μπορεί να παρατηρεί αν ο εργαζόμενος εργάζεται σκληρά ή αν τεμπελιάζει. Αυτό στην πραγματικότητα είναι πολλές φορές αδύνατο ή αρκετά δαπανηρό, με συνέπεια ο εργοδότης να μην μπορεί να επιβλέπει το βαθμό προσπάθειας του εργαζόμενου αλλά μόνο το αποτέλεσμα αυτής. Πρόκειται, δηλαδή, για ένα παίγνιο με ελλιπή πληροφόρηση. Στην περίπτωση αυτή το συμβόλαιο που προτείνει ο εργοδότης είναι συνάρτηση του αποτελέσματος της εργασίας του εργαζομένου και έχει την μορφή (w_1, w_2), με
w_1: η αμοιβή του εργαζόμενου όταν η εργασία του έχει υψηλή απόδοση,
w_2: η αμοιβή του εργαζόμενου όταν η εργασία του έχει χαμηλή απόδοση και $w_1, w_2 \geq 0$.



Σχήμα 3.6: Βέλτιστα συμβόλαια - Ελλιπής πληροφόρηση

Το παίγνιο παίζεται ως εξής:
Η στρατηγική του εργοδότη συνίσταται από την προσφορά του συμβολαίου (w_1, w_2) που θα κάνει στον εργαζόμενο. Αντίστοιχα, η στρατηγική του εργαζόμενου συνίσταται από τις επιλογές που θα κάνει σχετικά με το αν θα αποδεχθεί ή αν θα απορρίψει το συμβόλαιο (έστω στην κορυφή Χ) και αν θα εργαστεί σκληρά ή όχι στην περίπτωση που αποδεχθεί το συμβόλαιο (έστω στην κορυφή Υ). Παρατηρούμε ότι η κορυφή Χ που φτάνουμε μετά από την προσφορά του συμβολαίου έχει άπειρες δυνατές θέσεις (κάθε φορά που αλλάζει το προτεινόμενο συμβόλαιο αλλάζει και η θέση της κορυφής Χ). Η εκτεταμένη μορφή του παιγνίου απεικονίζεται στο Σχήμα 3.6.

Σε ένα παίγνιο διαδοχικών κινήσεων η στρατηγική ενός παίκτη ορίζεται ως μια συνάρτηση από τις κορυφές που ανήκουν στον παίκτη προς τα παιδιά αυτών των κορυφών. Άρα, μια στρατηγική για τον εργαζόμενο είναι μια συνάρτηση $s(w_1, w_2) = (X(w_1, w_2), Y)$, με $X(w_1, w_2)$ η επιλογή που κάνει στην κορυφή Χ, δηλαδή, αν θα αποδεχθεί (Α) ή αν θα απορρίψει (R) το συμβόλαιο και Υ η επιλογή που κάνει στην κορυφή Υ, δηλαδή, αν θα εργαστεί σκληρά (H) ή όχι (L). Αν το απορρίψει και οι δύο θα έχουν μηδενική απόδοση. Αν το αποδεχθεί και επιλέξει να εργαστεί σκληρά τότε με πιθανότητα 0.9 η αμοιβή του θα είναι $w_1 - H$ και του εργοδότη $100 - w_1$ ή με πιθανότητα 0.1 η αμοιβή του θα είναι $w_2 - H$ και του εργοδότη $10 - w_2$. Αν επιλέξει να τεμπελιάσει τότε με πιθανότητα 0.9 η αμοιβή του θα είναι $w_2 - L$ και του εργοδότη $10 - w_2$ ή με πιθανότητα 0.1 η αμοιβή του θα είναι $w_1 - L$ και του εργοδότη $100 - w_1$.

Υπολογισμός αναμενόμενων αποδόσεων:
Έστω $u_1((w_1, w_2), s)$ η αναμενόμενη απόδοση του εργοδότη (παίκτης 1) και $u_2((w_1, w_2), s)$ η αναμενόμενη απόδοση του εργαζόμενου (παίκτης 2), για το συμβόλαιο (w_1, w_2) και την στρατηγική s του δεύτερου.

Αν ο εργαζόμενος ακολουθήσει την στρατηγική (A, H), δηλαδή, αποδεχτεί το συμβόλαιο και εργαστεί σκληρά τότε:

$$u_1((w_1, w_2), s) = 0.9[100 - w_1] + 0.1[10 - w_2] = 91 - 0.1(9w_1 + w_2)$$

$$u_2((w_1, w_2), s) = 0.9[w_1 - H] + 0.1[w_2 - H] = 0.1(9w_1 + w_2 - 10H)$$

Αν ακολουθήσει την στρατηγική (A, L), δηλαδή, αποδεχτεί το συμβόλαιο και τεμπελιάσει τότε:

$$u_1((w_1, w_2), s) = 0.1[100 - w_1] + 0.9[10 - w_2] = 19 - 0.1(w_1 + 9w_2)$$

$$u_2((w_1, w_2), s) = 0.1[w_1 - L] + 0.9[w_2 - L] = 0.1(w_1 + 9w_2 - 10L)$$

Ενώ, αν ο εργαζόμενος απορρίψει το συμβόλαιο τότε και οι δυο θα έχουν μηδενική απόδοση.

Μια ισορροπία κατά Nash του παιγνίου είναι ένα ζεύγος στρατηγικής $((w_1^*, w_2^*), s^*)$ τέτοιο ώστε:

$$u_1((w_1^*, w_2^*), s^*) \geq \ u_1((w_1, w_2), s^*) \quad \forall((w_1, w_2)$$

$$u_2((w_1^*, w_2^*), s^*) \geq \ u_2((w_1^*, w_2^*), s) \quad \forall s$$

Επίσης, μια ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου είναι ένας ορίζοντας στρατηγικής μιας ισορροπίας $Nash$ που είναι ισορροπία $Nash$ για κάθε υποπαίγνιο.

Ο εργαζόμενος, λειτουργώντας ορθολογικά, θα επιλέξει την στρατηγική του με γνώνομα το συμφέρον του. Αυτό σημαίνει ότι θα επιλέξει μια στρατηγική που θα μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση του, δηλαδή, θα επιλέξει μια στρατηγική $s^* = s^*(w_1, w_2)$, δεδομένου του συμβολαίου (w_1, w_2), τέτοια ώστε:

$$u_2((w_1, w_2), s^*) = \max\{0.1(w_1 + 9w_2 - 10L), 0.1(9w_1 + w_2 - 10H), 0\}$$

$$= \begin{cases} 0.1(9w_1 + w_2 - 10H), & \text{αν} \quad 9w_1 + w_2 - 10H \geq \max\{w_1 + 9w_2 - 10L, 0\} \\ 0.1(w_1 + 9w_2 - 10L), & \text{αν} \quad w_1 + 9w_2 - 10L \geq \max\{9w_1 + w_2 - 10H, 0\} \\ 0, & \text{αν} \quad \max\{w_1 + 9w_2 - 10L, 9w_1 + w_2 - 10H\} < 0 \end{cases}$$

Επομένως, η στρατηγική του θα είναι:

$$s^* = s^*(w_1, w_2) = \begin{cases} (A, H), & \text{αν} \quad 9w_1 + w_2 - 10H \geq \max\{w_1 + 9w_2 - 10L, 0\} \\ (A, L), & \text{αν} \quad w_1 + 9w_2 - 10L \geq \max\{9w_1 + w_2 - 10H, 0\} \\ \text{απόρριψη}, & \text{αν} \quad \max\{w_1 + 9w_2 - 10L, 9w_1 + w_2 - 10H\} < 0 \end{cases}$$

- Ο εργαζόμενος θα επιλέξει (A,H) αν το συμβόλαιο (w_1, w_2) βρίσκεται στην περιοχή που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} 9w_1 + w_2 - 10H \geq w_1 + 9w_2 - 10L \\ 9w_1 + w_2 - 10H \geq 0 \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w_1 - w_2 \geq 1.25(H - L) \\ 9w_1 + w_2 \geq 10H \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

- Ενώ, θα επιλέξει (A, L) αν το συμβόλαιο (w_1, w_2) βρίσκεται στην περιοχή που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} w_1 + 9w_2 - 10L \geq 9w_1 + w_2 - 10H \\ w_1 + 9w_2 - 10L \geq 0 \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w_2 - w_1 \geq 1.25(L - H) \\ w_1 + 9w_2 \geq 10L \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Ο εργοδότης, ενεργώντας ορθολογικά, θα επιλέξει και αυτός την στρατηγική του με γνώνομα το συμφέρον του, οπότε θα επιλέξει ένα συμβόλαιο (w_1, w_2) που θα μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση του.

- Αν ο εργοδότης θέλει να αναγκάσει τον εργαζόμενο να επιλέξει την στρατηγική (A,H).

  Τότε πρέπει να επιλέξει ένα συμβόλαιο που θα μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση του $91 - 0.1(9w_1 + w_2)$ λαμβάνοντας υπόψην τους περιορισμούς (3.6).
  Συγκεκριμένα, ο περιορισμός $w_1 - w_2 \geq 1.25(H - L)$ καλείται *περιορισμός κινήτρου* και εξασφαλίζει οτι ο εργαζόμενος κάνει την σωστή επιλογή μεταξύ H, L, δεδομένου οτι θα αποδεχθεί το συμβόλαιο ενώ ο περιορισμός $9w_1 + w_2 \geq 10H$ καλείται *περιορισμός ατομικής ορθολογικότητας* και εξασφαλίζει οτι ο εργαζόμενος θα αποδεχθεί το συμβόλαιο.
  Τελικά προκύπτει οτι η μέγιστη αναμενόμενη απόδοση του εργοδότη είναι $91 - H$ όταν το συμβόλαιο ικανοποιεί τις συνθήκες $9w_1 + w_2 = 10H$ και $0 \leq w_1 \leq \frac{9H-L}{8}$

- Αν ο εργοδότης θέλει να αναγκάσει τον εργαζόμενο να επιλέξει την στρατηγική (A, L).

  Τότε πρέπει να επιλέξει ένα συμβόλαιο που θα μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση του $19 - 0.1(w_1 + 9w_2)$ λαμβάνοντας υπόψην τους περιορισμούς (3.7).
  Συγκεκριμένα, ο περιορισμός $w_2 - w_1 \geq 1.25(L - H)$ καλείται *περιορισμός κινήτρου* και εξασφαλίζει οτι ο εργαζόμενος κάνει την σωστή επιλογή μεταξύ H, L, δεδομένου οτι θα αποδεχθεί το συμβόλαιο ενώ ο περιορισμός $w_1 + 9w_2 \geq 10L$ καλείται *περιορισμός ατομικής ορθολογικότητας* και εξασφαλίζει οτι ο εργαζόμενος θα αποδεχθεί το συμβόλαιο.
  Τελικά προκύπτει οτι η μέγιστη αναμενόμενη απόδοση του εργοδότη είναι $19 - L$ όταν το συμβόλαιο ικανοποιεί τις συνθήκες $w_1 + 9w_2 = 10L$ και $0 \leq w_1 \leq \frac{9H-L}{8}$

Τελικά το βέλτιστο συμβόλαιο, έστω (w_1^*, w_2^*), που θα επιλέξει ο εργοδότης είναι αυτό που θα του προσφέρει την καλύτερη απόδοση. Συγκεκριμένα, θα είναι:

- το πρώτο, αν $91 - H \geq 19 - L \iff 72 + L \geq H$ με $9w_1^* + w_2^* = 10H$ και $0 \leq w_1^* \leq \frac{9H-L}{8}$ και η στρατηγική του εργαζομένου θα είναι $s^*(w_1^*, w_2^*) = (A, H)$.

- το δεύτερο, αν $19 - L > 91 - H \iff 72 + L < H$ με $0 \leq w_1^* \leq \frac{9H-L}{8}$ και $w_1^* + 9w_2^* = 10L$ και η στρατηγική του εργαζομένου θα είναι $s^*(w_1^*, w_2^*) = (A, L)$

Παρατηρούμε οτι η στρατηγική $((w_1^*, w_2^*), s^*)$ αποτελεί μια ισορροπία κατά Nash του παιγνίου καθώς το συμβόλαιο που προτείνεται από τον εργοδότη είναι τέτοιο ώστε ο προσφερόμενος μισθός να μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση του εργοδότη σε κάθε περίπτωση, δεδομένης της στρατηγικής του εργαζόμενου. Αντίστοιχα η στρατηγική που επιλέγει ο εργαζόμενος μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση του, με δεδομένο τον προσφερόμενο μισθό. Επίσης, αποτελεί και ισορροπία τέλειου υποπαιγνίου για το παίγνιο.

Παράδειγμα 3.3.3. *(Χρηματοδότηση Προγράμματος)*

Πρόκειται για ένα παίγνιο σήματος, δηλαδή, για ένα παίγνιο με ελλιπή πληροφόρηση χωρίς υποπαίγνια.

Ένας επιχειρηματίας ζητά χρηματοδότηση για την διεξαγωγή ενός προγράμματος το οποίο δεν μπορεί να χρηματοδοτήσει ο ίδιος. Η αξία του προγράμματος μπορεί να είναι H ή L μετά από επένδυση I ευρώ. Ο επιχειρηματίας είναι ο μόνος που γνωρίζει ακριβώς την αξία του προγράμματος και αφού δεν έχει τα χρήματα να το χρηματοδοτήσει ο ίδιος αναζητά έναν χρηματοδότη υψηλού ρίσκου, στον οποίο για αντάλλαγμα θα προσφέρει ένα δικαίωμα εξαγοράς $e, 0 \leq e \leq 1$. Θεωρούμε ότι η διαδικασία πραγματοποιείται σε δυο περιόδους όπου στην πρώτη γίνεται η επένδυση από τον χρηματοδότη και στην δεύτερη η απόδοσή της. Έστω i ο ρυθμός απόδοσης της επένδυσης (π.χ. τρέχον επιτόκιο, ευκαιριακό κόστος κεφαλαίου).

Το παίγνιο παίζεται ως εξής:
Η φύση παίζει πρώτη και αποκαλύπτει στον επιχειρηματία (παίκτης 1) την αξία του προγράμματος: H ή L . Στην συνέχεια ο επιχειρηματίας προσφέρει ένα δικαίωμα εξαγοράς e στον χρηματοδότη (παίκτης 2). Ο χρηματοδότης την στιγμή που γίνεται η προσφορά το μόνο που γνωρίζει είναι ότι με πιθανότητα p η αξία του προγράμματος είναι H ενώ με πιθανότητα $1-p$ η αξία του είναι L (το p θεωρείται παράμετρος), οπότε λαμβάνοντας αυτό υπόψη του καθώς και την προσφορά e θα αποφασίσει αν θα την αποδεχθεί ή όχι.
Έστω u_1 η απόδοση του επιχειρηματία και u_2 η απόδοση του χρηματοδότη.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν η αξία του προγράμματος είναι H και ο χρηματοδότης αποδεχθεί την προσφορά τότε

  $$u_1 = H - eH = (1-e)H \quad \text{και} \quad u_2 = eH - I$$

  Ενώ αν την απορρίψει

  $$u_1 = 0 \quad \text{και} \quad u_2 = I + iI = (1+i)I$$

- Αν η αξία του προγράμματος είναι L και ο χρηματοδότης αποδεχθεί την προσφορά τότε

  $$u_1 = L - eL = (1-e)L \quad \text{και} \quad u_2 = eL - I$$

  Ενώ αν την απορρίψει

  $$u_1 = 0 \quad \text{και} \quad u_2 = I + iI = (1+i)I$$

Θεωρούμε ότι $H - I > L - I > (1+i)I$ τότε ο χρηματοδότης θα δεχθεί την προσφορά e αν και μόνο αν ικανοποιεί την σχέση:

$$p(eH - I) + (1-p)(eL - I) \geq (1+i)I \tag{3.8}$$

Δηλαδή, θα την δεχθεί μόνο αν η αναμενόμενη απόδοση που θα έχει όταν αποδεχθεί την προσφορά e είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αναμενόμενη απόδοση που θα έχει όταν την απορρίψει.

Παρατηρούμε ότι, δεδομένης της πληροφορίας που έχει ο χρηματοδότης, οι πεποιθήσεις του είναι διαδοχικά ορθολογικές. Γνωρίζοντας αυτό ο επιχειρηματίας, το δικαίωμα εξαγοράς e που προσφέρει ικανοποιεί την παραπάνω σχέση, οπότε οδηγούμαστε σε μια διαδοχική ισορροπία. Συγκεκριμένα έχουμε:

- Ο χρηματοδότης πιστεύει ότι με πιθανότητα p το πρόγραμμα αξίζει H ενώ με πιθανότητα $1-p$ αξίζει L ευρώ.

- Ο επιχειρηματίας προσφέρει ένα δικαίωμα εξαγοράς λίγο μεγαλύτερο από το ελάχιστο δικαίωμα εξαγοράς, έστω $e^* < 1$, το οποίο μετατρέπει την σχέση (3.8) σε ισότητα ανεξαρτήτως της αξίας του προγράμματος.

- Αφού η προσφορά είναι διαδοχικά ορθολογική, ο χρηματοδότης την αποδέχεται και χρηματοδοτεί το πρόγραμμα λαμβάνοντας ένα δικαίωμα εξαγοράς λίγο μεγαλύτερο από e^* .

Από την (3.8) για $e = e^*$ υπολογίζουμε το e^* ως εξής:

$$\begin{aligned} p(e^*H - I) + (1-p)(e^*L - I) &= (1+i)I \\ \Longrightarrow e^*[pH + (1-p)L) &= (2+i)I \\ \Longrightarrow e^* &= \frac{(2+i)I}{pH + (1-p)L} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Κεφάλαιο 4

ΔΗΜΟΠΡΑΣΙΕΣ ΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗ

Μια **δημοπρασία** είναι μια συλλογή από I άτομα η οποία έχει σκοπό την αγορά ενός αντικειμένου ή αγαθού. Ένα άτομα ανακηρύσσεται νικητής με βάση συγκεκριμένους κανόνες, οι οποίοι είναι γνωστοί εκ των προτέρων.

Ορισμένες έννοιες που συναντώνται σε μια δημοπρασία είναι οι εξής: Πωλητής: το άτομο που προσφέρει προς πώληση σε μια δημοπρασία κάποιο ή κάποια αγαθά. Οργανωτής (ή δημοπράτης): ο επικεφαλής της δημοπρασίας και είναι υπεύθυνος για την διεξαγωγή της. Συμμετέχοντες: οι υποψήφιοι αγοραστές οι οποίοι κάνουν προσφορές με σκοπό την αγορά του αντικειμένου που προσφέρεται. Προσφορά: το χρηματικό ποσό που προσφέρει κάθε συμμετέχων για να αγοράσει το αντικείμενο.

Υπάρχουν διάφορα είδη δημοπρασιών. Ανάλογα με το πλήθος των αντικειμένων ή αγαθών που διατίθονται προς πώληση χωρίζονται σε δημοπρασίες που πωλείται μόνο μια μονάδα ενός αδιαίρετου αγαθού και σε δημοπρασίες που πωλούνται ν διαφορετικά αγαθά από έναν πωλητή.

Ανάλογα με το ποσό που πληρώνει ο πλειοδότης για να αγοράσει το αντικείμενο, δηλαδή, το άτομο που έκανε την μεγαλύτερη προσφορά, διακρίνονται σε δημοπρασίες **πρώτης τιμής**, όταν ο πλειοδότης πληρώνει την μεγαλύτερη προσφορά και σε δημοπρασίες **δεύτερης τιμής**, όταν ο πλειοδότης πληρώνει την δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.

Ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιούνται οι προσφορές για το αντικείμενο διακρίνονται σε δημοπρασίες **ταυτόχρονων προσφορών** ή **κλειστές δημοπρασίες**, στις οποίες οι παίκτες κλείνουν τις προσφορές τους σε φακέλους και στην συνέχεια ο οργανωτής ανοίγει τους φακέλους και ανακοινώνει τις προσφορές ταυτόχρονα και δημοπρασίες **διαδοχικών προσφορών** που ο οργανωτής ανακοινώνει τις προσφορές διαδοχικά και οι παίκτες δηλώνουν τις προσφορές που θέλουν να κάνουν. Παραδείγματα δημοπρασιών διαδοχικών προσφορών είναι οι Αγγλικές δημοπρασίες και οι Ολλανδικές δημοπρασίες.

Οι **Αγγλικές δημοπρασίες** είναι ο πιο δημοφιλής τρόπος για δημοπρασίες. Σε αυτές ο οργανωτής ανεβάζει διαδοχικά τις προφορές και ο ενδιαφερόμενος δηλώνει αν επιθυμεί να κάνει αυτή την προσφορά. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να απομείνει μόνο ένας που κάνει την τελευταία προσφορά, ο οποίος κερδίζει την δημοπρασία και πληρώνει αυτή την προσφορά για να αγοράσει το αντικείμενο. Σε κάθε στιγμή είναι γνωστό ποια είναι η υψηλότερη τρέχουσα προσφορά και κάθε συμμετέχων μπορεί να υποβάλλει διαδοχικά πολλές προσφορές.

Στις **Ολλανδικές δημοπρασίες** χρησιμοποείται μια διαδικασία διαδοχικών προσφορών, στην οποία όμως ο οργανωτής ανακοινώνει αρχικά μια υψηλή τιμή και στη συνέχεια η τιμή αυτή μειώνεται συνεχώς μέχρι κάποιος ενδιαφερόμενος να δεχθεί να πληρώσει την προσφορά.

Επίσης, διακρίνονται σε δημοπρασίες **τέλειας πληροφόρησης** (complete information), όταν οι παίκτες γνωρίζουν ο ένας την κοστολόγηση του άλλου για το αντικείμενο και σε δημοπρασίες **ατελούς πληροφόρησης**, όταν οι παίκτες δεν γνωρίζουν όλες τις πληροφορίες σχετικά με την κοστολόγηση των άλλων παικτών για το αντικείμενο. Περιπτώσεις δημοπρασιών ατελούς πληροφόρησης είναι οι δημοπρασίες **ατομικής εκτίμησης**, στις οποίες κάθε παίκτης γνωρίζει μόνο τη δική του κοστολόγηση και δημοπρασίες **κοινής τιμής**, στις οποίες κάθε παίκτης γνωρίζει ελάχιστες πληροφορίες για την αξία του αντικειμένου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως οι δημοπρασίες μπορούν να γραφούν ως παίγνια. Θα ασχοληθούμε με δημοπρασίες τέλειας πληροφόρησης και συγκεκριμένα με δημοπρασίες σφραγισμένης προσφοράς πρώτης τιμής και σφραγισμένης προσφοράς δεύτερης τιμής. Στις δημοπρασίες αυτές θα δούμε ότι η νίκη κάποιου παίκτη εξαρτάται από τις προσφορές των άλλων παικτών, οπότε η απόδοση κάθε παίκτη εξαρτάται από ολόκληρη τη σειρά προσφορών. Άρα, οι δημοπρασίες μπορούν να γραφούν ως παίγνια κανονικής μορφής με I παίκτες, όπου οι παίκτες του παιγνίου θα είναι οι συμμετέχοντες στην δημοπρασία.

Θεωρούμε ότι η κοστολόγηση του προς πώληση αντικειμένου για τον παίκτη i είναι c_i, οπότε το διάνυσμα κοστολόγησης του αντικειμένου είναι
$c = (c_1, \ldots, c_I)$. Υποθέτουμε ότι $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_I$. Επίσης, η προσφορά που θα κάνει ο παίκτης i για να αγοράσει το αντικείμενο είναι p_i , με $p_i \in [0, \infty)$. Οπότε, το διάνυσμα $p = (p_1, \ldots, p_I)$ θα καλείται διάνυσμα προσφορών.

4.1 Σφραγισμένης προσφοράς πρώτης τιμής

Οι κανόνες που διέπουν την συγκεκριμένη δημοπρασία είναι:
Ένας πωλητής διαθέτει προς πώληση σε μια δημοπρασία ένα σπάνιο έργο τέχνης. Κάθε παίκτης κάνει μια εκτίμηση της αξίας του έργου και αναπτύσσει την δική του κοστολόγηση $c_i > 0$ για αυτό. Στην συνέχεια κάθε παίκτης i κάνει μια προσφορά p_i και την τοποθετεί σε ένα σφραγισμένο φάκελο. Όταν όλοι οι παίκτες έχουν κάνει την προσφορά τους, ο οργανωτής της δημοπρασίας συγκεντρώνει όλους τους φακέλους, τους ανοίγει και αποκαλύπτει σε όλους τις προσφορές που έχουν πραγματοποιηθεί. Ο παίκτης που έχει κάνει την μεγαλύτερη προσφορά ανακηρύσσεται νικητής και αγοράζει το έργο τέχνης πληρώνοντας στον οργανωτή την προσφορά που έκανε. Στην περίπτωση που ο παίκτης με την μεγαλύτερη προσφορά δεν είναι μόνο ένας αλλά περισσότεροι, έστω k παίκτες, ο νικητής προκύπτει μετά από κλήρωση ανάμεσα στους k παίκτες με την υψηλότερη τιμή, τους οποίους θα καλούμε φιναλίστ. Άρα, κάθε ένας παίκτης από τους k φιναλίστ έχει πιθανότητα $\frac{1}{k}$ να αγοράσει το έργο.

Σε μια τέτοια δημοπρασία έχουμε ότι οι παίκτες που έχουν κάνει μια προσφορά μικρότερη της υψηλότερης, θα χάσουν και η απόδοση που θα λάβουν θα είναι μηδέν. Ο νικητής, δηλαδή, ο παίκτης με την μεγαλύτερη προσφορά θα έχει απόδοση ίση με τη διαφορά της κοστολόγησης του και των χρημάτων που πρόσφερε να το αγοράσει. Αν δεν υπάρχει μόνο ένας φιναλίστ, τότε οι αποδόσεις αυτών θα είναι ίσες με τις αναμενόμενες αποδόσεις τους.

Θα συμβολίζουμε την υψηλότερη προσφορά με $s = \max\{p_1, \dots, p_I\}$.

Επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε μια δημοπρασία σφραγισμένης προσφοράς πρώτης τιμής ως ένα παίγνιο κανονικής μορφής με I παίκτες, με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Παίκτες: οι I υποψήφιοι αγοραστές, ο οργανωτής δεν θεωρείται παίκτης.

- Στρατηγικές: το σύνολο στρατηγικών του παίκτη i είναι το σύνολο των πιθανών προσφορών που ενδέχεται να κάνει, οπότε είναι το σύνολο $S_i = [0, \infty)$.

- Αποδόσεις: η συνάρτηση απόδοση του παίκτη i δίνεται από την σχέση

$$u_i(p_1, \dots, p_I) = \begin{cases} 0, \text{ αν } p_i < s \\ \dfrac{c_i - p_i}{k}, \text{αν ο παίκτης } i \text{ είναι ανάμεσα στους } k \text{ φιναλίστ} \end{cases} \tag{4.1}$$

Είναι φανερό ότι ένας παίκτης έχει κέρδος μόνο αν είναι ο νικητής και η προσφορά που έχει κάνει είναι μικρότερη από την κοστολόγηση του για το αγαθό, καθώς μόνο τότε έχει θετική απόδοση. Συνεπώς, ο παίκτης με την μεγαλύτερη κοστολόγηση, δηλαδή ο παίκτης 1, είναι πάντα φιναλίστ και κερδίζει κάνοντας μια προσφορά μεγαλύτερη από την δεύτερη υψηλότερη κοστολόγηση αλλά αρκετά κοντά της. Οι προσφορές που πρέπει να κάνει ένας παίκτης προσδιορίζονται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.1. *Σε μια δημοπρασία σφραγισμένης προσφοράς πρώτης τιμής με τέλεια πληροφόρηση ισχύουν τα εξής:*

1. *Κάθε παίκτης κάνει μια προσφορά μικρότερη από την κοστολόγηση του,* $p_i \leq c_i$.

2. *Αν ο παίκτης 1 είναι ο μοναδικός παίκτης με την υψηλότερη κοστολόγηση, δηλαδή,* $c_1 > c_2$, *τότε κάνοντας μια προσφορά* b_1 *τέτοια ώστε* $c_1 > p_1 > c_2$, *θα είναι ο νικητής. Αν η προσφορά του είναι αρκετά κοντά στην δεύτερη υψηλότερη κοστολόγηση, η απόδοση που θα λάβει θα είναι μεγαλύτερη.*

3. *Αν οι παίκτες με την υψηλότερη κοστολόγηση είναι περισσότεροι του ενός, τότε κάθε ένας από αυτούς θα κάνει μια προσφορά ίση με την υψηλότερη κοστολόγηση, δηλαδή,* $p_i = c_1$.

Απόδειξη. **1.** Αν ο παίκτης i δεν είναι ο νικητής, τότε η απόδοση του είναι $u_i = 0$.
Αν ο παίκτης i είναι ο νικητής και έχει προσφέρει $p_i > c_i$, τότε η απόδοση του θα είναι αρνητική, αφού $u_i = \dfrac{c_i - p_i}{k} < 0$. Οπότε δεν τον συμφέρει να κάνει μια τέτοια προσφορά.
Αν ο παίκτης i είναι ο νικητής και έχει προσφέρει $p_i < c_i$, τότε η απόδοση του θα είναι $u_i > 0$, ενώ αν προσφέρει $p_i = c_i$ η απόδοση του θα είναι $u_i = 0$.
Άρα, για να έχει μη αρνητική απόδοση ένας παίκτης θα πρέπει να κάνει μια προσφορά $p_i \leq c_i$.

2. Έστω ότι έχουμε I παίκτες, από τους οποίους ο παίκτης 1 είναι ο μοναδικός παίκτης με την υψηλότερη κοστολόγηση c_1 και ο παίκτης 2 αυτός με την δεύτερη υψηλότερη κοστολόγηση c_2. Οπότε έχουμε $c_1 > c_2 \geq \cdots \geq c_I$.
Επίσης, από το (1) έχουμε ότι: $p_1 \leq c_1,\ p_2 \leq c_2,\ \ldots,\ p_I \leq c_I$.
Άρα, $c_1 \geq p_1 > c_2 \geq p_2 \geq \cdots \geq c_I \geq p_I$.
Παρατηρούμε ότι, ο παίκτης 1 κάνοντας μια προσφορά p_1 τέτοια ώστε
$c_1 > p_1 > c_2$ κερδίζει καθώς αυτή θα είναι η μοναδική υψηλότερη προσφορά.

Επίσης, όσο πιο κοντά είναι η p_1 στην c_2, η απόδοση του παίκτη 1 μεγαλώνει.

3. Θεωρούμε ότι υπάρχουν k παίκτες με την υψηλότερη κοστολόγηση. Οπότε έχουμε $c_1 = c_2 = \ldots = c_k > c_{k+1} \geq \ldots \geq c_I$. Από την (1) είδαμε ότι κάθε παίκτης κάνει μια προσφορά $p_i \leq c_i$.
Αν κάποιος παίκτης i από τους k κάνει μια προσφορά $p_i < c_i = c_1$, με $i = 1, \ldots, k$, τότε ενδέχεται να χάσει αν κάποιος άλλος παίκτης j από τους φιναλίστ, κάνει μια μεγαλύτερη προσφορά p_j τέτοια ώστε $p_i < p_j \leq c_j = c_1$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$.
Άρα, κάθε φιναλίστ λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω θα πρέπει να κάνει μια προσφορά ίση με την υψηλότερη κοστολόγηση.
Συνεπώς, $p_i = c_1$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

$\square$

Για να ελέγξουμε αν το συγκεκριμένο παίγνιο έχει ισορροπία $Nash$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

I) Στην περίπτωση που στο παίγνιο υπάρχει μόνο ένας παίκτης, ο παίκτης 1, με την υψηλότερη κοστολόγηση $c_1 > c_2$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.1 αυτός θα επιλέξει να κάνει μια προσφορά $p_1 : c_1 > p_1 > c_2$. Τότε, η απόδοση του παίκτη 1 θα είναι $u_1 = c_1 - p_1 < c_1 - c_2$, καθώς θα κάνει πάντα μια προσφορά $p_1 > c_2$. Οπότε, παρατηρούμε ότι θα επιδιώκει να βελτιώνει την απόδοση του συνεχώς επιλέγοντας μια προσφορά όλο και πιο κοντά στην δεύτερη υψηλότερη κοστολόγηση. Άρα, το παίγνιο δεν έχει ισορροπία $Nash$.

Παρόλο που το παίγνιο σε αυτή την περίπτωση δεν έχει κάποια ισορροπία $Nash$, μπορούμε να πούμε ότι έχει κατά προσέγγιση ισορροπία $Nash$, καθώς επιλέγοντας κατάλληλους συνδυασμούς στρατηγικών ο παίκτης 1 μπορεί να πλησιάσει αυθαίρετα κοντά στην υψηλότερη απόδοση του. Συγκεκριμένα, επιλέγοντας έναν αρκετά μικρό αριθμό $\varepsilon > 0$ μπορεί στην συνέχεια να κάνει μια προσφορά p_1 τέτοια ώστε $c_2 < p_1 < c_2 + \varepsilon$ και έτσι να αποκτήσει μια απόδοση που θα απέχει από την μέγιστη κατά ε.

II) Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότεροι από έναν παίκτη με την υψηλότερη κοστολόγηση, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.1 κάθε φιναλίστ θα κάνει μια προσφορά $p_i = c_1$ και με κλήρωση θα προκύψει ο νικητής. Άρα, κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να παρεκλίνει από μια τέτοια προσφορά. Επίσης, δεδομένου ότι κάποιος από τους φιναλίστ έχει επιλέξει να προσφέρει c_1, τότε και οι υπόλοιποι φιναλίστ θα επιλέξουν να κάνουν αυτή την προσφορά γιατί τους προσφέρει καλύτερη απόδοση. Συνεπώς, το διάνυσμα των προσφορών $(c_1, \ldots, c_I)$ αποτελεί μια ισορροπία $Nash$ του παιγνίου, η οποία όμως δεν είναι η μοναδική.

4.2 Σφραγισμένης προσφοράς δεύτερης τιμής

Οι κανόνες που διέπουν την συγκεκριμένη δημοπρασία είναι:
Σε μια δημοπρασία σφραγισμένης προσφοράς δεύτερης τιμής κάθε παίκτης i κάνει μια προσφορά p_i και την τοποθετεί σε ένα σφραγισμένο φάκελο. Όταν όλοι οι παίκτες έχουν κάνει την προσφορά τους, ο οργανωτής της δημοπρασίας συγκεντρώνει όλους τους φακέλους, τους ανοίγει και αποκαλύπτει σε όλους τις προσφορές που έχουν πραγματοποιηθεί. Ο παίκτης που έχει κάνει την μεγαλύτερη προσφορά ανακηρύσσεται νικητής και αγοράζει το έργο τέχνης πληρώνοντας στον οργανωτή την δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά. Στην περίπτωση που ο παίκτης με την μεγαλύτερη προσφορά δεν είναι μόνο ένας αλλά περισσότεροι, έστω k παίκτες (με $1 < k \leq I$) τους οποίους θα καλούμε φιναλίστ, τότε ο νικητής προκύπτει μετά από κλήρωση ανάμεσα σε αυτούς τους k παίκτες με την υψηλότερη τιμή και πληρώνει την υψηλότερη προσφορά. Κάθε ένας παίκτης από τους k έχει πιθανότητα $\frac{1}{k}$ να αγοράσει το έργο.

Συμβολίζουμε με $d_{-i} = \max\{p_j : j \neq i\}$ την υψηλότερη προσφορά ανάμεσα στις προσφορές όλων των παικτών εκτός του παίκτη i. Οπότε, αν ο παίκτης i έχει κάνει την υψηλότερη προσφορά, τότε η d_{-i} είναι η δεύτερη υψηλότερη προσφορά.

Οι παίκτες που έχουν κάνει μια προσφορά μικρότερη της δεύτερης υψηλότερης, οπότε μικρότερη και της πρώτης υψηλότερης, χάνουν και θα έχουν απόδοση μηδέν. Ο νικητής, δηλαδή, ο παίκτης με την μεγαλύτερη προσφορά θα έχει απόδοση ίση με τη διαφορά της κοστολόγησης του και των χρημάτων που πλήρωσε για να το αγοράσει.

Επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε μια δημοπρασία σφραγισμένης προσφοράς δεύτερης τιμής ως ένα παίγνιο κανονικής μορφής $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(.)\}]$ με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Παίκτες: οι I υποψήφιοι αγοραστές, ο οργανωτής δεν θεωρείται παίκτης.

- Στρατηγικές: το σύνολο στρατηγικών του παίκτη i είναι το σύνολο των πιθανών προσφορών που μπορεί να κάνει, οπότε είναι το σύνολο $S_i = [0, \infty)$.

- Αποδόσεις: η απόδοση ενός παίκτη i δίνεται από την σχέση

$$u_i(p_1, \ldots, p_I) = \begin{cases} 0, \text{ αν } p_i < d_{-i} \\ \\ \dfrac{c_i - d_{-i}}{k}, \text{αν } p_i = d_{-i} \text{ και υπάρχουν } k \text{ φιναλίστ} \\ \\ c_i - d_{-i}, \text{ αν } p_i > d_{-i} \end{cases} \tag{4.2}$$

Το επόμενο θεώρημα προσδιορίζει τι θα πρέπει να προσφέρει κάθε παίκτης.

Θεώρημα 4.2.1. *Σε μια δημοπρασία σφραγισμένης προσφοράς δεύτερης τιμής με τέλεια πληροφόρηση ισχύουν τα εξής:*

1. *Κάθε παίκτης κάνει μια προσφορά μικρότερη ή ίση από την κοστολόγηση του, δηλαδή,* $p_i \leq c_i$.

2. *Αν ο παίκτης 1 είναι ο μοναδικός παίκτης με την υψηλότερη κοστολόγηση, δηλαδή* $c_1 > c_2$, *τότε κάνοντας μια προσφορά* b_1 *τέτοια ώστε* $c_1 > p_1 > c_2$, *θα είναι ο νικητής.*

3. *Αν οι παίκτες με την υψηλότερη προσφορά είναι περισσότεροι του ενός και αν το διάνυσμα προσφορών τους είναι το διάνυσμα κοστολόγησης τους* $(c_1, \ldots, c_I)$, *τότε αυτό αποτελεί μια ισορροπία* $Nash$.

Απόδειξη. **1.** Θα δείξουμε ότι ένας παίκτης i κάνοντας μια προσφορά $p_i > c_i$ δεν πρόκειται να κερδίσει ποτέ. Υποθέτουμε ότι $p_i > c_i$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

I). $p_i < d_{-i}$
Τότε κάποιος άλλος παίκτης έχει την υφηλότερη προσφορά, οπότε ο παίκτης i χάνει και λαμβάνει απόδοση $u_i = 0$.
Επίσης, αν πρόσφερε $p_i = c_i$ πάλι η απόδοση του θα ήταν μηδέν.

II). $p_i = d_{-i}$
Τότε ο παίκτης i είναι ανάμεσα στους k φιναλίστ με την υφηλότερη προσφορά και λαμβάνει απόδοση $u_i = \dfrac{c_i - d_{-i}}{k} = \dfrac{c_i - p_i}{k} < 0$, αφού $p_i > c_i$.
Επίσης, προσφέροντας $p_i = c_i$ τότε η απόδοση του είναι $u_i = 0$, δηλαδή, τότε μπορεί να λάβει μεγαλύτερη απόδοση.

III). $c_i \leq d_{-i} < p_i$
Τότε ο παίκτης i είναι ο νικητής, πληρώνει την δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά και λαμβάνει απόδοση $u_i = c_i - d_{-i} \leq 0$.

Επίσης, αν πρόσφερε $p_i = c_i$ τότε ή θα έχανε, αφού κάποιος άλλος ίσως έκανε μεγαλύτερη προσφορά, οπότε η απόδοση του θα ήταν $u_i = 0$ ή θα ήταν ανάμεσα στους k φιναλίστ και η απόδοση του θα ήταν $u_i = 0$. Αλλά, και στις δυο περιπτώσεις η απόδοση που θα λάμβανε θα ήταν τουλάχιστον ίση με αυτήν που θα είχε αν η προσφορά ήταν $c_i \leq d_{-i} < p_i$.

IV). $d_{-i} < c_i < p_i$
Τότε ο παίκτης i είναι ο νικητής, πληρώνει την δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά και λαμβάνει απόδοση $u_i = c_i - d_{-i} > 0$.
Επίσης, θα λάμβανε την ίδια απόδοση και αν είχε προσφέρει c_i.

2. Γνωρίζουμε ότι $p_i \leq c_i$ και $c_1 > c_2$. Τότε θα έχουμε ότι $p_i \leq c_2, \forall i \geq 2$. Άρα, ο παίκτης 1 κερδίζει προσφέροντας p_1 τέτοιο ώστε $c_1 > p_1 > c_2$.

3. Θα δείξουμε ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει την απόδοση του προσφέροντας $p_i \neq c_i$, $\forall 1 \leq i \leq I$. Θεωρούμε ότι υπάρχουν k φιναλίστ με $1 < k \leq I$. Υποθέτουμε ότι $c_1 = \ldots = c_k$.

Για τον παίκτη 1: Γνωρίζουμε ότι θα προσφέρει $p_1 \leq c_1$. Συγκεκριμένα, αν προσφέρει $p_1 < c_1$ τότε έχουμε ότι $p_i = c_i = c_1 > p_1$, $\forall 1 < i \leq k$. Οπότε ο παίκτης 1 χάνει, αφού η προσφορά του είναι μικρότερη από τις προσφορές των άλλων φιναλίστ, και λαμβάνει απόδοση μηδέν. Αν προσφέρει $p_1 = c_1$ τότε υπάρχει πιθανότητα $\frac{1}{k}$ να κερδίσει και αν κερδίσει θα πληρώσει c_1 και θα λάβει απόδοση μηδέν. Άρα, ο παίκτης 1 δεν έχει κέρδος αν αποκλίνει από την προσφορά c_1.

Για τον παίκτη i με $1 < i \leq k$: Γνωρίζουμε ότι θα προσφέρει $p_i \leq c_i$. Συγκεκριμένα, αν προσφέρει $p_i < c_i$ τότε έχουμε ότι $p_j = c_j = c_i > p_i$, $\forall j \neq i, 1 < j \leq k$. Οπότε ο παίκτης i χάνει, αφού η προσφορά του είναι μικρότερη από τις προσφορές των άλλων φιναλίστ, και λαμβάνει απόδοση μηδέν. Αν προσφέρει $p_i = c_i$ τότε υπάρχει πιθανότητα $\frac{1}{k}$ να κερδίσει και αν κερδίσει θα πληρώσει c_i και θα λάβει απόδοση μηδέν. Άρα, ο παίκτης i δεν έχει κέρδος αν αποκλίνει από την προσφορά c_i.

Συνεπώς, δείξαμε ότι κανένας από τους φιναλίστ δεν έχει κέρδος να αποκλίνει από το να κάνει μια προσφορά ίση με την κοστολόγηση του.

Επίσης, θα δείξουμε ότι κανένας και από υπόλοιπους παίκτες δεν έχει κέρδος να αποκλίνει. Πράγματι: Για έναν παίκτη i με $k < i \leq I$ γνωρίζουμε ότι θα προσφέρει $p_i \leq c_i < c_1$. Οπότε, ο παίκτης i χάνει και λαμβάνει απόδοση μηδέν, η οποία δεν μπορεί να βελτιωθεί με προσφορές διαφορετικές του c_i.

Επομένως, κανένας από τους παίκτες δεν μπορεί να βελτιώσει την απόδοση του προσφέροντας $p_i \neq c_i$, οπότε κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει από μια προσφορά η οποία είναι ίση με την κοστολόγηση με την οποία ο ίδιος έχει αξιολογήσει το αντικείμενο. Έτσι, είναι λογικό να περιμένουμε ότι κάθε παίκτης θα προσφέρει το ποσό που αντικατοπτρίζει την αληθινή αξία του αντικειμένου και ο παίκτης με την υψηλότερη κοστολόγηση θα κερδίσει. Άρα, το διάνυσμα προσφορών $(c_1, \ldots, c_I)$ αποτελεί μια ισορροπία $Nash$.

□

Παρατήρηση:
Παρατηρούμε ότι και οι δημοπρασίες πρώτης τιμής και οι δημοπρασίες δεύτερης τιμής αποφέρουν στον οργανωτή περίπου την ίδια απόδοση. Συγκεκριμένα, όταν υπάρχει μόνο ένας παίκτης με την μεγαλύτερη κοστολόγηση τότε και στα δύο είδη δημοπρασιών ο οργανωτής θα λάβει μια απόδοση κοντά στην δεύτερη υψηλότερη κοστολόγηση. Όταν υπάρχουν περισσότεροι του ενός παίκτη με την υψηλότερη κοστολόγηση, τότε και στα δυο είδη δημοπρασιών ο οργανωτής θα λάβει απόδοση ίση με την υψηλότερη κοστολόγηση. Ωστόσο, υπάρχει πιθανότητα με μια δημοπρασία δεύτερης τιμής ο οργανωτής να κερδίσει λιγότερα από ότι με μια δημοπρασία πρώτης τιμής. Για αυτό οι δημοπρασίες δεύτερης τιμής δεν χρησιμοποιούνται συχνά.

Βιβλιογραφία

[1] Πολυράκης Ιωάννης, Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία, Αθήνα 2010.

[2] Χ.Δ. Αλιπράντης και S.K. Chakrabarti, Παίγνια και Λήψη Αποφάσεων, ΕΜΕ, Αθήνα 2004.

[3] A. Mass-Colell, M.D. Whinston and J.R. Green, Microeconomic Theory, Oxford University Press, Cambridge 1995.

[4] G. Owen, Game Theory, 2nd Edition, Academic Press, New York & London, 1982.

[5] J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.

[6] M. Osborne, An introduction to Game Theory, Oxford University Press, 2000.

[7] R. Gibbons, A Primer in Game Theory, 1st Edition, Harvester-Wheatsheaf, New York 1992.