Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΨΕΥΔΟΦΑΣΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ

Διπλωματική Εργασία

ΚΟΥΤΡΑ ΕΛΕΝΗ

Επιβλέπων Καθηγητής : Παναγιώτης Ψαρράκος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΨΕΥΔΟΦΑΣΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ

Διπλωματική Εργασία

ΚΟΥΤΡΑ ΕΛΕΝΗ

Τριμελής επιτροπή

Νικόλαος Γιαννακάκης
Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος
Παναγιώτης Ψαρράκος (επιβλέπων)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες ii

Πρόλογος iii

Κεφάλαιο 1. Στοιχεία Ανάλυσης Πινάκων

1.1 Νόρμες Πινάκων στον $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ 1

1.2 Φασματική Ακτίνα και Νόρμες 6

1.3 Παραγοντοποίηση SVD 10

Κεφάλαιο 2. Από το Φάσμα στο Ψευδοφάσμα

2.1 Ορισμός Ψευδοφάσματος 13

2.2 14 Θεωρήματα για το Ψευδοφάσμα 15

Κεφάλαιο 3. Σχεδίαση Ψευδοφάσματος

3.1 Αλγόριθμος Ιχνηλάτισης Καμπύλης 25

3.2 Αλγόριθμος Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου 31

Κεφάλαιο 4. Αριθμητικά Παραδείγματα

4.1 Πίνακας Kahan 44

4.2 Πίνακας Frank 49

4.3 Πίνακας Redheffer 59

Βιβλιογραφία 64

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή γίνεται μια προσπάθεια μελέτης του ψευδοφάσματος πίνακα. Σε θεωρητικό επίπεδο, παραθέτουμε τους ορισμούς και τα θεωρήματα για τα ψευδοφάσματα, κατά κανόνα με τις αποδείξεις τους, εργαλεία απαραίτητα για την πλήρη κατανόηση του αντικειμένου. Σε πρακτικό επίπεδο, επιλέγουμε τετραγωνικούς πίνακες για να σχεδιάσουμε τα ψευδοφάσματά τους, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικούς αλγορίθμους, τον Αλγόριθμο Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου και τον Αλγόριθμο Ιχνηλάτισης Συνόρου.

Στο πρώτο Κεφάλαιο δίνονται βασικοί ορισμοί και θεωρήματα της Γραμμικής Άλγεβρας έτσι ώστε ο αναγνώστης να κατανοήσει τα κεφάλαια που ακολουθούν.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα 14 βασικά θεωρήματα για το ψευδοφάσμα με τις αποδείξεις τους καθώς και τα αντίστοιχα θεωρήματα για το φάσμα. Στο σημείο αυτό, αναφέρουμε ότι η μελέτη του ψευδοφάσματος πίνακα στην παρούσα εργασία, γίνεται αποκλειστικά με χρήση της νόρμας $\| \cdot \|_2$.

Στο τρίτο Κεφάλαιο ασχολούμαστε με τη σχεδίαση των ψευδοφασμάτων και προς αυτή την κατεύθυνση παρουσιάζουμε δύο μεθόδους, τον Αλγόριθμο Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου και τον Αλγόριθμο Ιχνηλάτισης Καμπύλης. Για καθέναν από τους αλγορίθμους, μελετάμε, με τη βοήθεια του Matlab, δύο παραδείγματα διαφορετικών πινάκων και παραθέτουμε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματά μας.

Τέλος, στο τέταρτο Κεφάλαιο εφαρμόζουμε τις μεθόδους σε τρεις διαφορετικούς τύπους πινάκων, τους Kahan, Frank και Redheffer για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των μεθόδων αυτών σε πίνακες μεγάλων διαστάσεων.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας αποτελεί αναμφισβήτητα μια πρόκληση πνευματική αλλά και συναισθηματική για τον φοιτητή. Αυτό συμβαίνει διότι οι δυσκολίες που αναπόφευκτα ανακύπτουν κατά τη συγγραφή της, τον αναγκάζουν να διευρύνει τη σκέψη του και να ξεφύγει από τα στεγανά της μελέτης ενός συγκεκριμένου αντικειμένου. Όμως η δημιουργική διαδικασία δεν είναι μοναχική υπόθεση˙ όπως κάθε εγχείρημα, έτσι και η παρούσα διπλωματική εργασία, για να ολοκληρωθεί και να είναι αντάξια του κόπου που καταβλήθηκε, στηρίχθηκε από ανθρώπους τους οποίους ευχαριστώ από καρδιάς.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου, κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, ο οποίος στήριξε εμπράκτως την προσπάθειά μου καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Η αρμονική συνεργασία μας και η καθοδήγηση που μου προσέφερε, στάθηκαν καταλυτικοί παράγοντες στην ομαλή εξέλιξη της διαδικασίας αυτής.

Τέλος, πολλά ευχαριστώ αξίζουν στους γονείς μου, που πάντα με εμψυχώνουν, υποστηρίζουν τις επιλογές μου, και με ενθαρρύνουν να κάνω το «επόμενο βήμα».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.1 Νόρμες Πινάκων στον $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$

Το σύνολο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ των $\nu\times\nu$ μιγαδικών πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης ν^2, ο οποίος είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{\nu^2}$. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε τις νόρμες πινάκων με τρόπο ανάλογο με αυτόν που ορίζονται οι νόρμες διανυσμάτων.

Ορισμός 1.1.1. *Μία συνάρτηση* $\|\cdot\|:\mathbb{C}^{\nu\times\nu}\to\mathbb{R}$ *ονομάζεται νόρμα πινάκων αν για κάθε* $A,B\in\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ικανοποιεί τα ακόλουθα :*

i. $\|A\|\geq 0$ *(μη αρνητική)*
ii. $\|A\|=0$ *αν και μόνο αν* $A=0$
iii. $\|aA\|=|a|\|A\|$ *για κάθε* $a\in\mathbb{C}$
iv. $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$ *(τριγωνική ανισότητα)*
v. $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$ *(υπο-πολλαπλασιαστική)*

Ειδικότερα, για κάθε νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ και για το μοναδιαίο πίνακα I_ν, ισχύει

$$\|I_\nu\|=\|I_\nu^2\|\leq\|I_\nu\|^2\Rightarrow\|I_\nu\|\geq 1.$$

Επομένως, για κάθε $A\in\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$,

$$1\leq\|I_\nu\|=\|A\,A^{-1}\|\leq\|A\|\|A^{-1}\|\Rightarrow\|A^{-1}\|\geq\frac{1}{\|A\|}.$$

Κάποιες από τις νόρμες διανυσμάτων αποτελούν νόρμες πινάκων όταν εφαρμόζονται στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, ενώ κάποιες άλλες όχι. Τα πιο γνωστά παραδείγματα είναι οι l_p-νόρμες, για $p=1,2,\infty$.

- Η l_1-*νόρμα* ενός πίνακα $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ ορίζεται ως $\|A\|_{l_1}=\sum_{i,j=1}^{\nu}|a_{ij}|$.
- Η *νόρμα Frobenius* (ή l_2-*νόρμα*) ενός πίνακα $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ ορίζεται ως $\|A\|_F=\left(\sum_{i,j=1}^{\nu}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}=\sqrt{\operatorname{trace}\left(A^*A\right)}$, όπου με $\operatorname{trace}(\cdot)$ συμβολίζουμε το ίχνος πίνακα.
- Η l_∞-νόρμα ενός πίνακα $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ ορίζεται ως $\|A\|_{l_\infty}=\max\left\{|a_{ij}|:i,j=1,2,\ldots,\nu\right\}$.

Με απλές πράξεις, μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι οι συναρτήσεις $\|\cdot\|_{l_1}$ και $\|\cdot\|_{l_2}$ αποτελούν πράγματι νόρμες πινάκων. Αντίθετα, η $\|\cdot\|_{l_\infty}$ αν και ικανοποιεί τα i - iv του Ορισμού 1.1.1, δεν ικανοποιεί το v του ορισμού και δεν είναι νόρμα πινάκων. Για παράδειγμα,

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \right\|_{l_\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\|_{l_\infty} = 2 \geq 1 = 1^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_{l_\infty}^2 .$$

Αν για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, συμβολίσουμε με $a_1, a_2, ..., a_\nu \in \mathbb{C}^\nu$ τις στήλες του A, τότε ο A γράφεται $A = [a_1\ a_2\ ...\ a_\nu]$. Έτσι μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι $\|A\|_F^2 = \|a_1\|_2^2 + \|a_2\|_2^2 + ... + \|a_\nu\|_2^2$. Δεδομένου ότι η l_2-*νόρμα* διανυσμάτων είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, ισχύει

$$\begin{aligned} \|U\ A\|_F^2 &= \|[Ua_1\ Ua_2\ ...\ Ua_\nu]\| \\ &= \|Ua_1\|_2^2 + \|Ua_2\|_2^2 + ... + \|Ua_\nu\|_2^2 \\ &= \|a_1\|_2^2 + \|a_2\|_2^2 + ... + \|a_\nu\|_2^2 \\ &= \|A\|_F^2 . \end{aligned}$$

Επίσης, επειδή $\|A^*\|_F = \|A\|_F$ για κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, έπεται ότι για κάθε ζεύγος ορθομοναδιαίων πινάκων $U, V \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, ισχύει

$$\|U\ A\ V\|_F = \|A\ V\|_F = \|(A\ V)^*\|_F = \|V^* A^*\|_F = \|A^*\|_F = \|A\|_F .$$

Αυτό σημαίνει ότι η νόρμα Frobenius στο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη. Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στις νόρμες πινάκων παίζουν οι επαγόμενες νόρμες , ή αλλιώς φυσικές νόρμες.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω* $\|\cdot\|$ *μία νόρμα διανυσμάτων στο* $\mathbb{C}^\nu$. *Η επαγόμενη από την* $\|\cdot\|$ *νόρμα στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *ορίζεται ως*

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

Θεώρημα 1.1.3. *Έστω* $\|\cdot\|$ *μία νόρμα διανυσμάτων στο* $\mathbb{C}^\nu$ *και* $\|\circ\|$ *η επαγόμενη από την* $\|\cdot\|$ *νόρμα στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε ισχύουν τα ακόλουθα :*

i. *Η* $\| \circ \|$ *είναι νόρμα πινάκων.*

ii. $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ *για κάθε* $x \in \mathbb{C}^{\nu}$.

iii. $\|I_{\nu}\| = 1$

Απόδειξη. i) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\| \circ \|$ είναι νόρμα πινάκων, αρκεί να επαληθεύσουμε τον Ορισμό 1.1. Τα i) – iv) του ορισμού προκύπτουν άμεσα από τη σχέση

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}).$$

Για το v) του Ορισμού 1.1, θεωρούμε δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|A\,B\| &= \max_{x\neq 0} \frac{\|A\,B\,x\|}{\|x\|} = \max_{x\neq 0}\left(\frac{\|A(B\,x)\|}{\|B\,x\|}\frac{\|B\,x\|}{\|x\|}\right)\\ &\le \left(\max_{B\,x\neq 0}\frac{\|A(B\,x)\|}{\|B\,x\|}\right)\left(\max_{x\neq 0}\frac{\|B\,x\|}{\|x\|}\right) = \|A\|\|B\|.\end{aligned}$$

ii) Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. Τότε για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^{\nu}$, ισχύει

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|A\,x\| \le \|A\|\|x\|.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο για $x = 0$.
iii) Προφανώς, έχουμε ότι

$$\|I_{\nu}\| = \max_{\|x\|=1}\|I_{\nu}x\| = \max_{\|x\|=1}\|x\| = 1.$$

Το θεώρημα αυτό παρέχει την αναγκαία συνθήκη $\|I_{\nu}\| = 1$ για μια νόρμα πινάκων στο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ ώστε να επάγεται από κάποια νόρμα διανυσμάτων στο $\mathbb{C}^{\nu}$, η οποία όμως δεν είναι και ικανή συνθήκη. □

Πόρισμα 1.1.4. *Έστω* $\| \circ \|$ *μία επαγόμενη (φυσική) νόρμα πινάκων στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$.

i. *Για κάθε πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει* $\|A^k\| \le \|A\|^k$, $k = 1, 2, \ldots$

ii. *Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει* $\|A\|^{-1} \le \|A^{-1}\|$.

Στη συνέχεια, αναφέρουμε τα σημαντικότερα παραδείγματα νορμών πινάκων που επάγονται από τις γνωστές l_p-νόρμες και οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν χωρίς να απαιτείται χρήση του Ορισμού 1.1.2. Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα $A = \left[a_{ij} \right] \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$.

Η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά στήλη στο $\mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ ορίζεται ως

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le \nu} \sum_{i=1}^{\nu} |a_{ij}|.$$

Η νόρμα $\| \circ \|_1$ επάγεται από τη διανυσματική l_1-νόρμα. Πράγματι αν θεωρήσουμε τον πίνακα A γραμμένο ως προς τις στήλες , $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_\nu]$, τότε για κάθε διάνυσμα $x = [x_i] \in \mathbb{C}^\nu$, ισχύει

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \|x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_\nu a_\nu\|_1 \\ &\le |x_1| \|a_1\|_1 + |x_2| \|a_2\|_1 + \dots + |x_\nu| \|a_\nu\|_1 \\ &\le \left(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_\nu| \right) \max_{1 \le k \le \nu} \|a_k\|_1 \\ &= \|x\|_1 \|A\|_1 . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 \le \|A\|_1 .$$

Αν τώρα επιλέξουμε $x = e_k$ το διάνυσμα της κανονικής βάσης που αντιστοιχεί στη στήλη a_k του A με τη μεγαλύτερη l_1-νόρμα, τότε παρατηρούμε ότι $\|Ae_k\|_1 = \|a_k\|_1 = \|A\|_1$. Δηλαδή,

$$\max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \|A\|_1 .$$

Συνεπώς, η νόρμα $\| \circ \|_1$ επάγεται από τη διανυσματική l_1-νόρμα και αποτελεί νόρμα πινάκων .

Η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά γραμμή στο $\mathbb{C}^{\nu \times \nu}$ ορίζεται ως

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le \nu} \sum_{j=1}^{\nu} |a_{ij}|.$$

Η νόρμα $\| \circ \|_\infty$ επάγεται από τη διανυσματική l_∞-νόρμα, δηλαδή

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty .$$

Η απόδειξη αυτής της παρατήρησης ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης του προηγούμενου παραδείγματος. Προφανώς, και η νόρμα $\| \circ \|_\infty$ (ως επαγόμενη) αποτελεί νόρμα πινάκων.
Η φασματική (τελεστική) νόρμα πινάκων στο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ ορίζεται ως

$$\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^*A)\right\}$$

όπου με $\sigma(A)$ συμβολίζουμε το φάσμα ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του A. Παρατηρούμε ότι αν $\lambda \in \sigma(A^*A)$ και $x \in \mathbb{C}^\nu$ ένα (μη μηδενικό) ιδιοδιάνυσμα του A^*A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε

$$(Ax)^*(Ax) = x^*A^*Ax = x^*\lambda x = \lambda(x^*x) \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \lambda\|x\|_2^2 .$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα A^*A είναι μη αρνητικές κι έτσι μπορούν να οριστούν οι (μη αρνητικές) τετραγωνικές ρίζες τους. Επιπλέον, η φασματική νόρμα $\| \circ \|_2$ είναι νόρμα πινάκων η οποία επάγεται από την Ευκλείδια νόρμα $\| \circ \|_2$, δηλαδή

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 ,$$

και είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, δηλαδή $\|UAV\|_2 = \|A\|_2$ για κάθε ζεύγος ορθομοναδιαίων πινάκων $U, V \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$.

Πρόταση 1.1.5. *Μια νόρμα πινάκων* $\| \circ \| : \mathbb{C}^{\nu\times\nu} \to [0,+\infty)$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση των στοιχείων του πίνακα.*

Η ισοδυναμία των νορμών πινάκων στο $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ ορίζεται και αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που ορίζεται και αποδεικνύεται η ισοδυναμία των νορμών διανυσμάτων στο $\mathbb{C}^\nu$. Επιπλέον, για τις νόρμες πινάκων $\| \circ \|_1$, $\| \circ \|_2$, $\| \circ \|_\infty$, $\| \circ \|_F$ και $\| \circ \|_{l_1}$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.1.6. *Για κάθε πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύουν οι ανισότητες*

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \text{ ή } \|A\|_\infty \le \sqrt{\nu}\,\|A\|_2 ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|A\|_F \le \|A\|_1 \text{ ή } \|A\|_\infty \le \sqrt{\nu}\,\|A\|_F ,$$
$$\frac{1}{\nu}\|A\|_\infty \le \|A\|_1 \le \nu\|A\|_\infty ,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F ,$$

και

$$\|A\|_1 \text{ ή } \|A\|_\infty \text{ ή } \|A\|_F \le \|A\|_{l_1} \le \nu\|A\|_1 \text{ ή } \nu\|A\|_\infty \text{ ή } \nu\|A\|_F .$$

1.2 Φασματική Ακτίνα και Νόρμες

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ με φάσμα $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I_\nu - A) = 0\}$. Η φασματική ακτίνα του A ορίζεται ως

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω* $\|\circ\|$ *μία νόρμα πινάκων στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε για κάθε* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει* $\rho(A) \le \|A\|$.

Απόδειξη. Για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A, ισχύει $|\lambda| \le \rho(A)$. Επιπλέον υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \sigma(A)$ τέτοια ώστε $|\lambda_0| = \rho(A)$. Θεωρούμε ακόμη ένα ιδιοδιάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^\nu$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 και τον $\nu\times\nu$ πίνακα $X_0 = [x_0\ x_0\ \dots\ x_0]$ (δηλαδή, με όλες τις στήλες του ίσες με x_0). Τότε έχουμε

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0 \text{ και } |\lambda_0|\|X_0\| = \|\lambda_0 X_0\| = \|AX_0\| \le \|A\|\|X_0\|.$$

Επομένως, $\rho(A) = |\lambda_0| \le \|A\|$. □

Η φασματική ακτίνα δεν αποτελεί νόρμα πινάκων. Είναι αξιοσημείωτο ότι η σχέση $\rho(A) = 0$ δεν συνεπάγεται ότι $A = 0$, ενώ μπορεί κανείς να βρει δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ τέτοιους ώστε $\rho(A+B) > \rho(A) + \rho(B)$. Παρ' όλα αυτά, η σχέση $\rho(A) \le \|A\|$ (για οποιαδήποτε νόρμα πινάκων) του Θεωρήματος 1.2 εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση $\rho(\cdot) : \mathbb{C}^{\nu\times\nu} \to [0, +\infty)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση των στοιχείων του πίνακα. Από το σημείο αυτό και για τη συνέχεια, μας είναι απαραίτητο το γνωστό Λήμμα του Schur.

Λήμμα 1.2.1. *(Schur) Έστω ένας τυχαίος πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε υπάρχουν ένας ορθομοναδιαίος πίνακας* $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *κι ένας διαγώνιος πίνακας* $\Lambda \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του* A *(λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες), τέτοιοι ώστε*

$$A = U\Lambda U^*.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ οι (όχι κατ'ανάγκη διακεκριμένες) ιδιοτιμές του A και $x_1 \in \mathbb{C}^\nu$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A, με $x_1^* x_1 = 1$, το οποίο αντιστοιχεί

στην ιδιοτιμή λ_1 του A. Θεωρούμε επίσης μια ορθοκανονική βάση $\{x_{1,} w_2, w_3, ... w_\nu\}$ του $\mathbb{C}^\nu$ και τον αντίστοιχο ορθομοναδιαίο πίνακα

$$W_1 = \left[x_1 \ w_2 \ w_3 \ ... \ w_\nu\right] = \left[x_1 \hat{W}_1\right] \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu},$$

όπου $\hat{W}_1 = \left[w_2 \ w_3 \ ... \ w_\nu\right] \in \mathbb{C}^{\nu\times(\nu-1)}$. Αφού $w_2^* x_1 = w_3^* x_1 = ... = w_\nu^* x_1 = 0$, έπεται ότι $\hat{W}_1 x_1 = 0$. Κατά συνέπεια, με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\hat{W}_1 A W_1 &= \begin{bmatrix} x_1^* \\ \hat{W}_1^* \end{bmatrix} A \left[x_1 \ \hat{W}_1\right] = \begin{bmatrix} x_1^* \\ \hat{W}_1^* \end{bmatrix} \left[A x_1 \ A\hat{W}_1\right] \\ &= \begin{bmatrix} x_1^* \lambda_1 x_1 & x_1^* A \hat{W}_1 \\ \hat{W}_1 \lambda_1 x_1 & \hat{W}_1^* A \hat{W}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x_1^* A \hat{W}_1 \\ 0 & \hat{W}_1^* A \hat{W}_1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ο $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακας $A_2 = \hat{W}_1^* A \hat{W}_1$ έχει ιδιοτιμές ακριβώς τις $\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_\nu$. Ομοίως με παραπάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν $(\nu-1)\times(\nu-1)$ ορθομοναδιαίο πίνακα

$$W_2 = \left[x_2 \hat{W}_2\right] \in \mathbb{C}^{(\nu-1)\times(\nu-1)} \text{ (όπου } \hat{W}_2 \in \mathbb{C}^{(\nu-1)\times(\nu-2)}\text{)},$$

τέτοιον ώστε

$$W_2^* A_2 W_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & x_2^* A_2 \hat{W}_2 \\ 0 & \hat{W}_2^* A_2 \hat{W}_2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}^* W_1^* A W_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & x_2^* A_2 \hat{W}_2 \\ 0 & 0 & \hat{W}_2^* A_2 \hat{W}_2 \end{bmatrix},$$

όπου ο $(\nu-2)\times(\nu-2)$ πίνακας $A_3 = \hat{W}_2^* A_2 \hat{W}_2$ έχει ιδιοτιμές ακριβώς τις $\lambda_3, ..., \lambda_\nu$. Επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε συνολικά $\nu-1$ ορθομοναδιαίους πίνακες

$$W_1 \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu},\ W_2 \in \mathbb{C}^{(\nu-1)\times(\nu-1)},\ W_3 \in \mathbb{C}^{(\nu-2)\times(\nu-2)}, ...,\ W_{\nu-1} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

τέτοιους ώστε ο πίνακας

$$U = W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & W_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{\nu-2} & 0 \\ 0 & W_{\nu-1} \end{bmatrix}$$

να ικανοποιεί τη σχέση

$$U^* A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\nu \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Ο πίνακας U είναι προφανώς ορθομοναδιαίος και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Στο θεώρημα που ακολουθεί αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα των νορμών πινάκων.

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω ένας πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *κι ένας πραγματικός αριθμός* $\varepsilon > 0$. *Τότε υπάρχει μια νόρμα πινάκων* $\| \circ \|$ *τέτοια ώστε* $\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.2 του Schur, υπάρχουν ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και ένας άνω τριγωνικός πίνακας $T \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ τέτοιοι ώστε $A = UTU^*$. Τα διαγώνια στοιχεία του T, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\nu$, είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες.

Θεωρούμε ένα διαγώνιο πίνακα $D_t = diag\left\{t, t^2, ..., t^\nu\right\}$ για κάποιον πραγματικό αριθμό $t \ne 0$. Ο αντίστροφος του D_t είναι ο $D_t^{-1} = \mathrm{diag}\left\{t^{-1}, t^{-2}, ..., t^{-\nu}\right\}$.

Υπολογίζουμε τον πίνακα

$$D_t T D_t^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t^{-1}* & t^{-2}* & \dots & t^{-\nu+1}* \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}* & \dots & t^{-\nu+2}* \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & t^{-\nu+3}* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\nu \end{bmatrix},$$

όπου με “ $*$ ” συμβολίζουμε (μιγαδικούς) αριθμούς ανεξάρτητους του t. Για $t > 0$ αρκετά μεγάλο, το άθροισμα των μέτρων όλων των μη διαγωνίων στοιχείων του $D_t T D_t^{-1}$ είναι μικρότερο ή ίσο του $\varepsilon > 0$ και συνεπώς, $\left\|D_t T D_t^{-1}\right\|_1 \le \rho(A) + \varepsilon$. Ας ορίσουμε τώρα τη συνάρτηση $\| \circ \|_{U\ D_t^{-1}} : \mathbb{C}^{\nu\times\nu} \to [0, +\infty)$, με

$$\|M\|_{U\ D_t^{-1}} = \left\|D_t U^* M\ U\ D_t^{-1}\right\|_1 = \left\|\left(U\ D_t^{-1}\right)^{-1} M\ U\ D_t^{-1}\right\|_1,\ \forall M \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}.$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι, αφού ο πίνακας $U\,D_t^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος, η συνάρτηση $\|\circ\|_{U\,D_t^{-1}}$, είναι μία νόρμα πινάκων, για την οποία προφανώς ισχύει ότι $\|A\|_{U\,D_t^{-1}} = \|D_t T D_t^{-1}\|_1 \le \rho(A)+\varepsilon$. □

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω ένας πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Τότε* $\lim A^k = 0$ *αν και μόνο αν* $\rho(A) < 1$.

Απόδειξη. Αν $\lim A^k = 0$, τότε είναι προφανές ότι για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$, ισχύει $\lim A^k = 0$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν μέτρο μικρότερο του 1 κι επομένως, $\rho(A) < 1$.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $\rho(A) < 1$. Τότε, από το Θεώρημα 1.3, υπάρχει μια νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ τέτοια ώστε $\|A\| < 1$. Αφού για κάθε φυσικό αριθμό k, ισχύει $\|A^k\| \le \|A\|^k$, έπεται ότι $\lim\|A^k\| \le \lim\|A\|^k = 0$. □

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες ενδιαφέρουσες (κυρίως από μεριάς εφαρμογών) ιδιότητες των νορμών πινάκων.

Θεώρημα 1.2.4. *Αν* $\|\circ\|$ *είναι μια ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα πινάκων στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *τότε* $\|A\|_2 \le \|A\|$ *για κάθε πίνακα* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Επιπλέον, η φασματική νόρμα* $\|\circ\|_2$ *είναι η μοναδική νόρμα πινάκων στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *η οποία είναι επαγόμενη και ορθομοναδιαία αναλλοίωτη.*

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω ένας πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$.

i. *Για κάθε νόρμα πινάκων* $\|\circ\|$ *στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, *ισχύει* $\rho(A) = \lim\|A^k\|^{1/k}$.
ii. *Αν υπάρχει νόρμα πινάκων* $\|\circ\|$ *στο* $\mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ *τέτοια ώστε* $\|I_\nu - A\| < 1$, *τότε ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος και* $A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(I_\nu - A)^k$.

Αν θεωρήσουμε την υπόθεση του ii του θεωρήματος αυτού για τη νόρμα πινάκων $\|\circ\|_1$, τότε καταλήγουμε άμεσα στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.2.6. *Έστω ένας πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$. *Αν για τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του* A *ισχύει*

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{i,\nu}|,\ \forall i = 1,2,\ldots,\nu,$$

τότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Ένας πίνακας που ικανοποιεί την υπόθεση του παραπάνω πορίσματος λέμε ότι έχει *ισχυρή διαγώνια κυριαρχία.*

1.3 Παραγοντοποίηση SVD

Η σημαντικότερη, ως προς τις εφαρμογές, παραγοντοποίηση πινάκων είναι η γνωστή παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών (singular value decomposition), την οποία και θα καλούμε παραγοντοποίηση SVD.

Θεώρημα 1.3.1. *Αν A είναι ένας $\nu \times \mu$ μιγαδικός πίνακας, τότε υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ και $V \in \mathbb{C}^{\mu\times\mu}$ τέτοιοι ώστε*

$$A = U\mathrm{diag}\left\{s_1, s_2, \ldots, s_{\min\{\nu,\mu\}}\right\}V^*$$

όπου $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_{\min\{\nu,\mu\}} \geq 0$.

Απόδειξη. Αρχικά θεωρούμε μοναδιαία διανύσματα $x \in \mathbb{C}^{\mu}$ και $y \in \mathbb{C}^{\nu}$ τέτοια ώστε $Ax = \|A\|_2\, y$. Τότε υπάρχουν πίνακες $V_2 \in \mathbb{C}^{\mu\times(\mu-1)}$ και $U_2 \in \mathbb{C}^{\nu\times(\nu-1)}$ τέτοιοι ώστε οι $V = \left[x\ V_2\right]$ και $U = \left[y\ U_2\right]$ να είναι ορθομοναδιαίοι. Εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι

$$U^*AV = \begin{bmatrix} y^*Ax & w^* \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|A\|_2 & w^* \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$\begin{aligned}(\|A\|_2^2 + w^*w)^2 &\leq \left\| \begin{bmatrix} \|A\|_2 & w^* \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|A\|_2 \\ w \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &\leq \left\| \begin{bmatrix} \|A\|_2 & w^* \\ 0 & B \end{bmatrix} \right\| \left(\|A\|_2^2 + \|w\|_2^2\right),\end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\left\| \begin{bmatrix} \|A\|_2 & w^* \\ 0 & B \end{bmatrix} \right\|_2^2 \geq \|A\|_2^2 + \|w\|_2^2.$$

Όμως, επειδή οι πίνακες U και V είναι ορθομοναδιαίοι, έχουμε ότι

$$\left\| \begin{bmatrix} \|A\|_2 & w^* \\ 0 & B \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|A\|_2^2.$$

και για το λόγο αυτό πρέπει $w = 0$. Δηλαδή, ισχύει

$$U^*AV = \begin{bmatrix} \|A\|_2 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή.
Ο διαγώνιος πίνακας $\operatorname{diag}\left\{s_1, s_2, ..., s_{\min\{\nu,\mu\}}\right\}$ συμβολίζεται με Σ και οι τιμές

$$s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_{\min\{\nu,\mu\}} \geq 0$$

καλούνται ιδιάζουσες τιμές του A. Αν γράψουμε $U = \left[u_1\ u_2\ \ldots\ u_\nu\right]$ και $V = \left[v_1\ v_2\ \ldots\ v_\nu\right]$, τότε τα διανύσματα στήλες u_i και v_i $\left(1 \leq i \leq \min\{\nu, \mu\}\right)$ λέγονται *αριστερά* και *δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα* που αντιστοιχούν στην ιδιάζουσα τιμή s_i. Από τις σχέσεις $AV = U\Sigma$ και $A^*U = V\Sigma^T$ προκύπτει ότι $Av_i = s_i v_i$ και $A^*u_i = s_i v_i$ $\left(1 \leq i \leq \min\{\nu, \mu\}\right)$. Ένα απλό παράδειγμα παραγοντοποίησης SVD είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0.96 & 1.72 \\ 2.28 & 0.96 \end{bmatrix} = U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{bmatrix}^*.$$

Η παραγοντοποίηση SVD δίνεις πολλές πληροφορίες για τη δομή ενός πίνακα. Αν θεωρήσουμε ότι η ιδιάζουσα τιμή s_r είναι η ελάχιστη μη μηδενική ιδιάζουσα τιμή ενός $\nu \times \mu$ πίνακα A, δηλαδή αν

$$s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_r > s_{r+1} = \ldots = s_{\min\{\nu,\mu\}} = 0,$$

τότε

$$\operatorname{rank}(A) = r,$$

ο πυρήνας του A είναι

$$\left(\operatorname{Ker}(A) =\right)\ \operatorname{Null}(A) = \operatorname{span}\left\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_\mu\right\}$$

και η εικόνα του A είναι

$$\left(\operatorname{Image}(A) =\right)\ \operatorname{Range}(A) = \operatorname{span}\left\{u_1, u_2, \ldots, u_r\right\}.$$

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 είναι φανερό ότι $s_1 = s_1(A) = \|A\|_2$, ενώ μπορεί κανείς να δει ότι η (ορθομοναδιαία αναλλοίωτη) νόρμα Frobenius του A, $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} \left|a_{ij}^2\right|}$, γράφεται

$$\|A\|_F = \sqrt{s_1 + s_2 + \ldots + s_{\min\{\nu,\mu\}}}.$$

Επιπλέον, για $\nu \geq \mu$, ισχύει

$$\min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = s_\mu,$$

ενώ για $\nu = \mu$,

$$|\det(A)| = s_1 s_2 \ldots s_\nu.$$

Από τις σχέσεις

$$AA^* = U \operatorname{diag}\left\{ s_1^{\,2}, s_2^{\,2}, \ldots, s^2_{\min\{\nu,\mu\}} \right\} U^*$$

και

$$AA^* = V \operatorname{diag}\left\{ s_1^{\,2}, s_2^{\,2}, \ldots, s^2_{\min\{\nu,\mu\}} \right\} V^*$$

συμπεραίνουμε ότι

1. Οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του A είναι οι τετραγωνικές ρίζες των μη μηδενικών ιδιοτιμών των (θετικά ημιορισμένων) ερμιτιανών πινάκων AA^* και A^*A.
2. Τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του A είναι τα ιδιοδιανύσματα του AA^*.
3. Τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του A είναι τα ιδιοδιανύσματα του A^*A.

Κάθε $\nu \times \mu$ μιγαδικός πίνακας A γράφεται

$$A = U\Sigma V = U\Sigma U^* UV = \left(U\Sigma U^*\right)(UV),$$

όπου ο πίνακας $P = U\Sigma U^*$ είναι ερμιτιανός και θετικά ημιορισμένος, ενώ ο $W = UV^*$ είναι ορθομοναδιαίος. Δηλαδή, κάθε $\nu \times \nu$ πίνακας A γράφεται ως γινόμενο $A = PW$ ενός θετικά ημιορισμένου πίνακα P με $\operatorname{rank}(P) = \operatorname{rank}(A)$ και ενός ορθομοναδιαίου πίνακα W. Η παραγοντοποίηση αυτή είναι γνωστή ως πολική παραγοντοποίηση (polar decomposition) του πίνακα A και αποτελεί ανάλογο της πολικής γραφής ενός μιγαδικού αριθμού $z = |z| e^{i\theta}$, όπου το μέτρο $|z| \geq 0$ αντιστοιχεί στον θετικά ημιορισμένο πίνακα P και το $e^{i\theta}$ στον ορθομοναδιαίο πίνακα W.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΣΤΟ ΨΕΥΔΟΦΑΣΜΑ

Ψευδοφάσμα

Παρόλο που μιλάμε για γραμμική άλγεβρα, οι επαναληπτικές μέθοδοι πίνακα ανήκουν στον τομέα της γραμμικής ανάλυσης. Το ενδιαφέρον έγκειται στη σύγκλιση των σφαλμάτων ή των υπολοίπων στο μηδέν, και αυτή η διαδικασία έχει νόημα λόγω του ότι το αλγεβρικό πρόβλημα είναι εμφυτευμένο σε χώρο με νόρμα. Εκτός από ερωτήσεις που αφορούν πεπερασμένο τερματισμό, τα απαραίτητα εργαλεία για την ανάλυση της σύγκλισης δεν είναι αυτά της άλγεβρας, όπως οι ιδιοτιμές, που έχουν ανεξάρτητη βάση, αλλά αυτά της ανάλυσης, όπως οι ιδιάζουσες τιμές, οι οποίες ορίζονται μέσω νορμών και απαραιτήτως αλλάζουν με τη βάση.

Σ'αυτήν την εργασία θεωρούμε τα συγκεκριμένα εργαλεία της γραμμικής ανάλυσης γνωστά ως ψευδοφάσματα, τα οποία εφευρέθηκαν για να δίνουν πληροφορίες για πίνακες που δε διαθέτουν καλά ορισμένη βάση ιδιοδιανυσμάτων. Για απλότητα, η νόρμα μας θα είναι πάντα διανυσματική 2-νόρμα και η 2-νόρμα πίνακα την οποία επάγει. Με αυτή την επιλογή νόρμας, οι πίνακες που μας ενδιαφέρουν είναι κάθε άλλο παρά κανονικοί, υπό την έννοια ότι τα ιδιοδιανύσματά τους, αν υπάρχει πλήρες σύνολο, είναι κάθε άλλο παρά ορθογώνια. Πολλά από τα αποτελέσματά μας μπορούν να επεκταθούν σε άλλες νόρμες και σε τελεστές καθώς και σε πίνακες, αλλά δε θα ασχοληθούμε με αυτές τις γενικεύσεις.

2.1 Ορισμός Ψευδοφάσματος

Καθ'όλη την έκταση της εργασίας , ο A είναι ένας $N \times N$ πίνακας, και το $\Lambda(A)$ δηλώνει το φάσμα του δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του, ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$. Τα ψευδοφάσματα του A είναι εγκιβωτισμένα υποσύνολα του $\mathbb{C}$ που επεκτείνονται για να συμπληρώσουν το επίπεδο καθώς $\varepsilon \to \infty$. Με άλλα λόγια, για ένα δεδομένο $\varepsilon > 0$, το ψευδοφάσμα ενός $N \times N$ μιγαδικού πίνακα A είναι το σύνολο όλων των ιδιοτιμών όλων των πινάκων που απέχουν από τον A απόσταση (κατά νόρμα) μικρότερη ή ίση του ε.

Ορισμός 2.1.1. *Για κάθε $\varepsilon \geq 0$, το ε-ψευδοφάσμα $\Lambda_\varepsilon(A)$ του A είναι το σύνολο των αριθμών $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν οποιαδήποτε από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:*

i. $\left\|(zI - A)^{-1}\right\| \geq \varepsilon^{-1}$;

ii. $\sigma_{\min}(zI - A) \leq \varepsilon$;

iii. $\|(A - zI)u\| \leq \varepsilon$ *για κάποιο διάνυσμα* u *με* $\|u\| = 1$;

iv. z *είναι μια ιδιοτιμή του* $A + E$ *για κάποιον πίνακα* E *με* $\|E\| \leq \varepsilon$.

Επειδή αναφερόμαστε στη νόρμα $\| \ \|_2$, συμβολίζοντας με $\sigma_{\min}$ την ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή ενός πίνακα, ισχύει ο ισοδύναμος ορισμός *ii.* *και* μεταχειριζόμαστε τη σύμβαση ότι $\left\|\left(zI-A\right)^{-1}\right\| = \infty$ για $z \in \Lambda(A)$.

Απόδειξη της ισοδυναμίας των ορισμών. Αρχικά θα αποδείξουμε τις συνεπαγωγές $i. \Rightarrow iii. \Rightarrow iv. \Rightarrow i.$ και στη συνέχεια την ισοδυναμία $i. \Leftrightarrow ii.$

$i. \Rightarrow iii.$ Υποθέτουμε ότι $\left\|(zI-A)^{-1}\right\| \geq \varepsilon^{-1}$. Τότε υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^{\nu}$ τέτοιο ώστε $\left\|(zI-A)^{-1}\right\| = \left\|(zI-A)^{-1}u\right\|$. Αν ορίσουμε $w = (zI-A)^{-1}u$, τότε

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq \left\|(zI-A)^{-1}\right\| = \frac{\left\|(zI-A)^{-1}u\right\|}{\|u\|} = \frac{\|w\|}{\|(zI-A)w\|}.$$

Συνεπώς το διάνυσμα $u = w/\|w\|$ είναι μοναδιαίο και ικανοποιεί τη σχέση

$$\|(zI-A)u\| \leq \varepsilon .$$

$iii. \Rightarrow iv.$ Υποθέτουμε ότι υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $v \in \mathbb{C}^{\nu}$ τέτοιο ώστε $\left\|\left(A-zI\right)v\right\| \leq \varepsilon$. Θεωρούμε ακόμη ένα μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^{\nu}$ που ικανοποιεί τη σχέση $\left(A-zI\right)v = \hat{\varepsilon}u,$ για κάποιον θετικό αριθμό $\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$. Αφού το διάνυσμα v είναι μοναδιαίο, μπορούμε να γράψουμε $\lambda v = Av - \hat{\varepsilon}uv^*v = \left(A - \hat{\varepsilon}uv^*\right)v$. Αυτό σημαίνει ότι $z \in \Lambda(A+E)$, όπου $E = \hat{\varepsilon}uv^*$ και $\|E\| \leq \varepsilon$.

$iii. \Rightarrow i.$ Υποθέτουμε ότι $z \in \Lambda(A+E)$ για κάποιον πίνακα E με $\|E\| \leq \varepsilon$. Τότε υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $v \in \mathbb{C}^{\nu}$ για το οποίο ισχύει $(A+E)v = zv.$ Με απλές πράξεις επαληθεύουμε ότι $v = \left(zI-A\right)^{-1}Ev$ και $1 = \|v\| = \left\|\left(zI-A\right)^{-1}Ev\right\| \leq \left\|\left(zI-A\right)^{-1}\right\|\|Ev\| \leq \left\|\left(zI-A\right)^{-1}\right\|\varepsilon.$

Συνεπώς, ισχύει ότι $\left\|\left(zI-A\right)^{-1}\right\| \geq \varepsilon^{-1}.$

$i. \Leftrightarrow ii.$ Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$. Αν $\sigma_1(A)(=\sigma_{\max}(A)) \geq \sigma_2(A) \geq \sigma_3(A) \geq \ldots \geq \sigma_{\nu-1}(A) \geq \sigma_{\nu}(A)(=\sigma_{\min}(A))$ είναι οι θετικές ιδιάζουσες τιμές ενός $\nu \times \nu$ αντιστρέψιμου πίνακα A, τότε οι ιδιάζουσες τιμές του A^{-1} είναι οι

$$\frac{1}{\sigma_1(A)} \leq \frac{1}{\sigma_2(A)} \leq \frac{1}{\sigma_3(A)} \leq \ldots \leq \frac{1}{\sigma_{\nu-1}(A)} \leq \frac{1}{\sigma_{\nu}(A)}.$$

Επιπλέον, $\|A\|_2 = \sigma_1(A)$ και $\left\|A^{-1}\right\|_2 = 1/\sigma_{\nu}(A)$. Εύκολα λοιπόν βλέπει κανείς ότι

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \sigma_{\max}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(A)} .$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\left\|(zI-A)^{-1}\right\| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

αν και μόνο αν

$$\sigma_{\max}\left((zI-A)^{-1}\right) = \frac{1}{\sigma_{\min}(zI-A)} \geq \frac{1}{\varepsilon},$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\sigma_{\min}(zI-A) \leq \varepsilon\,. \qquad \square$$

2.2 14 Θεωρήματα για το Ψευδοφάσμα

Τα ψευδοφάσματα εισήχθησαν το 1975 και έγιναν διάσημο εργαλείο κατά τη δεκαετία του 1990. Αυτή η εργασία είναι αφιερωμένη σε μια απλή ιδέα: Πολλά θεωρήματα που αφορούν ιδιοτιμές είναι ειδικές περιπτώσεις $\varepsilon = 0$ θεωρημάτων ε-ψευδοφάσματος.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από μια παρουσίαση 14 θεωρημάτων αυτού του είδους. Αυτά τα θεωρήματα στο μεγαλύτερο μέρος τους δεν είναι ούτε μαθηματικά βαθιά ούτε καν καινούρια, παρόλο που σε κάποιες περιπτώσεις δεν έχουν δηλωθεί στη γλώσσα του ψευδοφάσματος προηγουμένως. Ωστόσο, για πρακτικές εφαρμογές που συμπεριλαμβάνουν μη κανονικούς πίνακες, μπορεί να φανούν πιο χρήσιμα από τις ειδικές περιπτώσεις των ιδιοτιμών τους. Αυτό τείνει να συμβαίνει σε περιπτώσεις όπου οι ιδιοτιμές του A είναι παραπλανητικές, δηλαδή όταν πληρώνουν μια περιοχή του $\mathbb{C}$ μικρότερη από αυτή που το A «ζει» στην πραγματικότητα. Το επόμενο είναι ένα ακραίο παράδειγμα. Αν ο A είναι μηδενοδύναμος, με $A^K = 0$ για κάποιο $K \geq 1$, τότε $\Lambda(A) = \{0\}$. Κάποιοι τέτοιοι πίνακες θα έχουν νόρμες $\left\|A^k\right\|$ που ελαττώνονται σταθερά ως το 0 καθώς το k τείνει στο K, ενώ για κάποιους άλλους , μπορεί να μην υπάρξει μείωση μέχρι $k = K$ ή αξιοσημείωτη μεταβατική αύξηση πριν την αναπόφευκτη εξασθένηση. Οι ιδιοτιμές από μόνες τους δεν μπορούν να διακρίνουν μεταξύ αυτών των συμπεριφορών, αλλά το ψευδοφάσμα μπορεί.

Η παρουσίαση αυτή θα τηρήσει σταθερό μοτίβο. Σε κάθε περίπτωση, αρχικά καταγράφουμε ένα θεώρημα για ιδιοτιμές, με μια σύντομη απόδειξη όπου είναι απαραίτητο, το οποίο είτε είναι βασικό είτε είναι ευρέως διαδεδομένο. Ακολουθούμε με ένα γενικευμένο θεώρημα για το ψευδοφάσμα μαζί με ένα περίγραμμα της απόδειξής του. Κάποιες υποδείξεις ως προς τη βιβλιογραφία περιέχονται παρακάτω, με τις οποίες δεν έχουμε στόχο να είμαστε εξαντλητικοί, καθώς είναι συνήθως δύσκολο, με ένα κατ'ουσίαν στοιχειώδες υλικό, να εντοπίσουμε την πρώτη έντυπη εμφάνιση ενός αποτελέσματος.

Ελπίδα μας είναι αυτό το κεφάλαιο να αποτελέσει χρήσιμο οδηγό για όσους ενδιαφέρονται για μη-κανονικούς πίνακες και συσχετιζόμενες επαναλήψεις, παρόλα αυτά δίνουμε έμφαση στο γεγονός ότι αυτή η συλλογή δεν περιέχει όλα τα πιθανώς χρήσιμα θεωρήματα που συμπεριλαμβάνουν ψευδοφάσματα. Περιορίζοντας την προσοχή μας σε θεωρήματα που ελαττώνονται για $\varepsilon = 0$, σε αληθείς προτάσεις για ιδιοτιμές παραλείπουμε κάποιους λιγότερο σημαντικούς υπολογισμούς που μπορεί να έχουν προκύψει από ψευδοφάσματα, κυρίως αυτά που βασίζονται σε ολοκληρώματα σε

κλειστή καμπύλη. Ένα παράδειγμα είναι το θεώρημα πίνακα του Kreiss το οποίο συμπεριλαμβάνει μια σταθερά eN η οποία δεν ελαττώνεται σταθερά στο 1 καθώς $\varepsilon \to 0$. Άλλο παράδειγμα είναι το φράγμα μιας πολυωνυμικής νόρμας $\|\rho(\mathrm{A})\|$, άμεσης συσχέτισης με επαναλήψεις όπως η GMRES, που μπορούν να αποκτηθούν, ολοκληρώνοντας την $\rho(z)$ πάνω στο σύνορο της περιφέρειας του $\Lambda_\varepsilon(A)$.

15 Θεωρήματα: Το πρώτο θεώρημα υποδεικνύει τη σύνδεση μεταξύ της κακής κατάστασης για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με A και την ύπαρξη ψευδοϊδιοτιμής κοντινής στην αρχική τιμή. Αυτό το αποτέλεσμα έχει αποδοθεί στον Gastinel.

Θεώρημα 2.2.1. *Ο A είναι μη αντιστρέψιμος* $\Leftrightarrow$ $0 \in \Lambda(A)$

Απόδειξη. Ο A έχει εξ'ορισμού ορίζουσα ίση με 0. Δηλαδή ο πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος και άρα $0 \in \Lambda(A)$. Για το αντίστροφο έχουμε ότι το 0 είναι ιδιοτιμή του A οπότε προκύπτει $\det A = 0$ και άρα ο A είναι ιδιάζων. □

Θεώρημα 2.2.1ε. $\|A^{-1}\| \geq \varepsilon^{-1} \Leftrightarrow 0 \in \Lambda_\varepsilon(A)$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από τον Ορισμό 2.1.1.i του ψευδοφάσματος.

Τα ψευδοφάσματα κατέχουν την ικανοποιητική ιδιότητα ότι κάθε συναφές στοιχείο του ε-ψευδοφάσματος πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή. □

Αυτή η ιδιότητα διαμορφώνει τη βάση για το αποτέλεσμα που ακολουθεί.

Θεώρημα 2.2.2. *Ο A έχει N διακριτές ιδιοτιμές* $\Rightarrow$ *Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος*

Απόδειξη. Έστω ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, οπότε υπάρχει πίνακας P τέτοιος ώστε $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \Leftrightarrow AP = PD.$ (1)

Αν με $x_1, x_2, \ldots, x_n$ συμβολίσουμε τις στήλες του πίνακα P, τότε η ισότητα (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} D$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \ldots & Ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \ldots & \lambda_n x_n \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow Ax_i = \lambda_i x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\ ,$$

οπότε ο πίνακας A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τις στήλες του πίνακα P που διαγωνοποιεί τον A, αντίστοιχα των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα D (ιδιοτιμές του A).

Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα x_i, $i = 1, 2, \ldots, n.$ Τότε έχουμε

$$Ax_i = \lambda_i x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\ ,$$

όπου λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ιδιοτιμές του πίνακα A, οι οποίες δεν είναι κατ'ανάγκη διακεκριμένες. Επομένως έχουμε την ισότητα πινάκων

$$\begin{aligned}
&\left[Ax_1 \;\; Ax_2 \;\; \dots \;\; Ax_n\right] = \left[\lambda_1 x_1 \;\; \lambda_2 x_2 \;\; \dots \;\; \lambda_n x_n\right] \\
&\Leftrightarrow A\left[x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n\right] = \left[x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n\right] D,\; D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \\
&\Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),
\end{aligned}$$

όπου ο πίνακας P έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. □

Θεώρημα 2.2.2ε. *Το* $\Lambda_\varepsilon(A)$ *έχει* N *διακριτά στοιχεία* $\Rightarrow$ *ο* A *είναι διαγωνοποιήσιμος*

Απόδειξη. Εξ'ορισμού από τα ψευδοφάσματα είναι σαφές ότι για κάθε $\delta > 0$, το $\Lambda_\varepsilon(A)$ περιέχεται στο εσωτερικό του $\Lambda_{\varepsilon+\delta}(A)$. Από τη συνέχεια του πίνακα των ιδιοτιμών ως προς τις διαταραχές, η ίδια συνθήκη υπονοεί ότι αν $\Lambda_\varepsilon(A)$ έχει N διακριτά στοιχεία, έτσι και το $\Lambda_{\varepsilon+\delta}(A)$ για επαρκώς μικρά $\delta > 0$. Επιπλέον βλέπουμε ότι $\left\|(zI - A)^{-1}\right\|$ πρέπει να επιτύχει τοπικό μέγιστο αυστηρά στο εσωτερικό του καθενός από τα N στοιχεία του $\Lambda_{\varepsilon+\delta}(A)$. Τώρα η $\log\left\|(zI - A)^{-1}\right\|$ είναι μια υποαρμονική συνάρτηση του z στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τις ιδιοτιμές του A και ως εκ τούτου η $\log\left\|(zI - A)^{-1}\right\|$ και ομοίως $\left\|(zI - A)^{-1}\right\|$ ικανοποιούν την αρχή του μέγιστου ανεξάρτητα από τις ιδιοτιμές του A.

Συνυπολογίζοντας αυτά τα γεγονότα, βλέπουμε ότι κάθε στοιχείο του $\Lambda_\varepsilon(A)$ πρέπει να περιέχει μια ιδιοτιμή του A, πράγμα που υπονοεί ότι ο A έχει N διακριτές ιδιοτιμές και γι'αυτό είναι διαγωνοποιήσιμος. □

Ο Gallestey έχει αναπτύξει έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό ψευδοφασμάτων που βασίζεται στην αρχή μεγίστου που χρησιμοποιήθηκε στην αμέσως προηγούμενη απόδειξη. Ένας απλούστερος αλγόριθμος αποκλεισμού, πρόσφατα προτεινόμενος από τους Koutis και Gallopoulos βασίζεται στο επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2.3. $\left\|(zI - A)^{-1}\right\| \geq \dfrac{1}{\mathrm{dist}(z,\, \Lambda(A))}$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και $z \in \partial\Lambda_\varepsilon(A)$. Δηλαδή το z δεν ανήκει στο φάσμα του πίνακα A. Επομένως για την απόσταση του z από το $\Lambda(A)$ έχουμε

$$dist(z, \Lambda(A)) \geq \varepsilon \Rightarrow dist(z, \Lambda(A)) \geq \left\|\left(zI - A\right)^{-1}\right\|^{-1} \Rightarrow \left\|\left(zI - A\right)^{-1}\right\| \geq \frac{1}{dist(z, \Lambda(A))},$$

λόγω του τρόπου αύξησης του $\Lambda_\varepsilon(A)$, με την ισότητα να ισχύει όταν ο A είναι κανονικός. □

Θεώρημα 2.2.3ε. $\left\|(zI - A)^{-1}\right\| \geq \dfrac{1}{\mathrm{dist}(z,\, \Lambda_\varepsilon(A)) + \varepsilon}$

Απόδειξη. Έστω ένα z εκτός του $\Lambda_\varepsilon(A)$, w ένα συνοριακό σημείο του $\Lambda_\varepsilon(A)$ με $|z - w| = dist(z, \Lambda_\varepsilon(A))$ και E ένας πίνακας τέτοιος ώστε και το w είναι ιδιοτιμή της διαταραχής . Τότε ισχύει ότι το z ανήκει στο φάσμα

$\Lambda(A+E+(z-w)I)$ δηλαδή το z ανήκει στο ψευδοφάσμα $\Lambda_{E+(z-w)I}(A)$. Έχουμε ότι

$$\frac{1}{\left\|(zI-A)^{-1}\right\|} \le \left\|E+(z-w)I\right\| \le \|E\|+|z-w| \text{ (από τριγωνική ανισότητα)}$$

$= \varepsilon + |z-w| = \varepsilon + dist(z,\Lambda_\varepsilon(A))$. Οπότε προκύπτει το ζητούμενο. □

Στο επόμενο θεώρημα, ο S είναι ένας αυθαίρετος ανώμαλος πίνακας και ο $\kappa(S)$ είναι ο δείκτης κατάστασής του, $\kappa(S) \equiv \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$. Παρόλο που το θεώρημα παρουσιάζεται μόνο για την μια κατεύθυνση, εφαρμόζεται και στην άλλη, και με αυτή την έννοια το θεώρημα 2.2.4 συντηρεί το συνηθισμένο «σχέδιο» της ειδικής περίπτωσης $\varepsilon = 0$ του Θεωρήματος 2.2.4ε. Το αποτέλεσμα δείχνει ότι τα ψευδοφάσματα είναι αμετάβλητα υπό ορθομοναδιαίες απεικονίσεις και επίσης αντικατοπτρίζει το σημείο στο οποίο ένας κακώς ορισμένος μετασχηματισμός ομοιότητας μπορεί να διαφοροποιήσει ψευδοφάσματα. Όταν ο B είναι διαγώνιος έτσι ώστε ο SBS^{-1} συμβολίζει μια διαγωνοποίηση του A, το Θεώρημα 2.2.4ε είναι ισότιμο με την πιο οικεία εκδοχή του θεωρήματος Bauer – Fike.

Θεώρημα 2.2.4. $A=SBS^{-1} \Rightarrow \Lambda(A) = \Lambda(B)$.
Απόδειξη. Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, επομένως έχουν ίσα χαρακτηριστικά πολυώνυμα άρα και ίδιες ιδιοτιμές. □

Θεώρημα 2.2.4ε. $A=SBS^{-1} \Rightarrow \Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Lambda_{\kappa(S)\varepsilon}(B)$.
Απόδειξη. Εφόσον $(z-A)^{-1} = S(z-B)^{-1}S^{-1}$, $\left\|(z-A)^{-1}\right\| \le \kappa(S)\left\|(z-B)^{-1}\right\|$. Οπότε αν $\left\|(z-A)^{-1}\right\| \ge \varepsilon^{-1}$, τότε $\left\|(z-B)^{-1}\right\| \ge (\kappa(S)\varepsilon)^{-1}$. □

Το επόμενο ζευγάρι αποτελεσμάτων απαιτεί ορισμό του δείκτη κατάστασης $\kappa_A(\Sigma(A))$ ενός συμπαγούς συνόλου $\Sigma = \Sigma(A) \subset \mathbb{C}$ που εξαρτάται από τον A ως προς τις διαταραχές του A. Αν Σ_1 και Σ_2 είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$, ας θεωρηθεί ότι η $d(\Sigma_1,\Sigma_2)$ υποδηλώνει την απόσταση Hausdorff $d(\Sigma_1,\Sigma_2) = \max\left\{\max_{s\in\Sigma_1} d(s,\Sigma_2), \max_{s\in\Sigma_2} d(s,\Sigma_1)\right\}$, όπου $d(s,\Sigma)$ είναι η συνηθισμένη απόσταση ενός σημείου s από ένα σύνολο Σ. Τότε

$$\kappa_A(\Sigma(A)) = \lim_{\delta\to 0} \sup(\delta^{-1} \sup_{\|D\|\le\delta} d(\Sigma(A+D),\Sigma(A))).$$

Θεώρημα 2.2.5. *Το* $\Lambda(A)$ *εξαρτάται συνεχώς από τον* A, *με δείκτη κατάστασης* $\kappa_A(\Lambda(A)) = 1$ *αν ο* A *είναι κανονικός.*
Απόδειξη. Οι ιδιοτιμές είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi(\lambda)$ άρα είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντελεστών του $\chi(\lambda)$. Οι συντελεστές του $\chi(\lambda)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις των στοιχείων του A αφού είναι αθροίσματα και γινόμενά τους. Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι συνεχείς συναρτήσεις των στοιχείων του A. Το ότι $\kappa_A(\Lambda(A)) = 1$ όταν ο A είναι

κανονικός πίνακας προκύπτει με την ίδια απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.6ε για $\varepsilon = 0$.

Θεώρημα 2.2.5ε. *Το* $\Lambda_\varepsilon(A)$ *εξαρτάται συνεχώς από τον* A, *με δείκτη κατάστασης* $\kappa_A(\Lambda_\varepsilon(A)) = 1$ *αν ο* A *είναι κανονικός.*

Απόδειξη. Η συνέχεια του $\Lambda_\varepsilon(A)$ στη μετρική Hausdorff απορρέει από την ανάλογη συνέχεια του $\Lambda(A)$. Ας υποθέσουμε ότι ο A είναι κανονικός έτσι ώστε το ε-ψευδοφάσμα του είναι η ένωση των ε-δίσκων με κέντρο κάθε ιδιοτιμή. Για κάθε $\delta \geq 0$ και $D \in \mathbb{C}^{N\times N}$ με $\|D\| \leq \delta$, έχουμε $\max_{s\in\Lambda_\varepsilon(A+D)} d(s, \Lambda_\varepsilon(A)) \leq \delta$ και ομοίως $\max_{s\in\Lambda_\varepsilon(A)} d(s, \Lambda_\varepsilon(A+D)) \leq \delta$. Έτσι,

$$\sup_{\|D\|\leq\delta} d(\Lambda_\varepsilon(A+D), \Lambda_\varepsilon(A)) \leq \delta.$$

Επειδή $\bigcup_{\|D\|\leq\delta} \Lambda_\varepsilon(A+D) = \Lambda_{\varepsilon+\delta}(A)$, υπάρχει πάντα κάποιο A με $\|D\| \leq \delta$ τέτοιο ώστε $\max_{s\in\Lambda_\varepsilon(A+D)} d(s, \Lambda_\varepsilon(A)) \leq \delta$, και για κάθε τέτοιο D θα πρέπει να έχουμε $\|D\| = \delta$, εφόσον τα ψευδοφάσματα είναι αυστηρώς εγκιβωτισμένα σύνολα.
Έπεται ότι

$$\kappa_A(\Lambda_\varepsilon(A)) = \lim_{\|D\|\leq\delta} \sup(\delta^{-1} \sup_{\|D\|\leq\delta} d(\Lambda_\varepsilon\left(A+D\right), \Lambda_\varepsilon(A))) = 1. \qquad \square$$

Οι ιδιοτιμές μπορούν να αλλάξουν δραματικά με μικρές διαταραχές, μια προειδοποίηση ότι μια ανάλυση βασισμένη σ'αυτές μπορεί να αποδειχθεί παραπλανητική. Το επόμενο θεώρημα υποδεικνύει ότι τα ψευδοφάσματα είναι πιο ανθεκτικά.

Θεώρημα 2.2.6. $\Lambda(A+E) \subseteq \Lambda_{\|E\|}(A)$.

Απόδειξη. Από την ισοδύναμη μορφή *iv.* του Ορισμού 2.1.1 του ψευδοφάσματος, για κάθε E με $\|E\| \leq \varepsilon$, ισχύει $\Lambda(A+E) \subseteq \Lambda_{\|E\|}(A)$. $\square$

Θεώρημα 2.2.6ε. $\Lambda_\varepsilon(A+E) \subseteq \Lambda_{\varepsilon+\|E\|}(A)$.

Απόδειξη. Αν $z \in \Lambda_\varepsilon(A+E)$, τότε υπάρχει ένας πίνακας F με $\|F\| \leq \varepsilon$ τέτοιος ώστε $(A+E+F)u = z\cdot u$ για κάποιο $u \neq 0$. Εφόσον $\|E+F\| \leq \varepsilon + \|E\|$, $z \in \Lambda_{\varepsilon+\|E\|}(A)$. Επιστρέφουμε τώρα στα προβλήματα εκτίμησης της συμπεριφοράς ενός πίνακα από το φάσμα του και από το ψευδοφάσμα του. $\square$

Θεώρημα 2.2.7. $\lambda \in \Lambda(A) \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$.

Απόδειξη. Για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A, ισχύει $|\lambda| \leq \rho(A)$ (όπου $\rho(A)$ η φασματική ακτίνα του A). Επιπλέον υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\lambda_0 \in \sigma(A)$ τέτοια ώστε $|\lambda_0| = \rho(A)$. Θεωρούμε ακόμη ένα ιδιοδιάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^\nu$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 και τον $\nu\times\nu$ πίνακα

$X_0 = [x_0 x_0 \dots x_0]$. Τότε έχουμε $AX_0 = \lambda_0 X_0$ και $|\lambda_0| \|X_0\| = \|\lambda_0 X_0\| = \|AX_0\| \le \|A\| \|X_0\|$. Επομένως, $\rho(A) = |\lambda_0| \le \|A\|$. Άρα $|\lambda| \le \|A\|$. □

Θεώρημα 2.2.7ε. $\lambda_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon(A) \Rightarrow \|A\| \ge |\lambda_\varepsilon| - \varepsilon$.

Απόδειξη. Αν $\lambda_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon(A)$, τότε $Au = \lambda_\varepsilon u + \varepsilon v$ για κάποια διανύσματα $u, v \in \mathbb{C}$ με $\|u\| = \|v\| = 1$. Έπεται ότι $\|Au\| \ge |\lambda_\varepsilon| - \varepsilon$. □

Η ανάλυση σύγκλισης στατικών επαναληπτικών μεθόδων βασίζεται στη συμπεριφορά των δυνάμεων του επαναληπτικού πίνακα. Είναι καιρό γνωστό ότι η παροδική αύξηση μπορεί να συμβεί ακόμα και όταν η φασματική ακτίνα του επαναληπτικού πίνακα είναι μικρότερη από ένα. Τα επόμενα δύο θεωρήματα χρησιμοποιούν ψευδοφάσματα για να περιγράψουν την παροδική αύξηση. Το πρώτο είναι «το εύκολο μισό του θεωρήματος πίνακα Kreiss», δηλαδή το μισό του θεωρήματος που δεν εξαρτάται από το N και που η απόδειξή του είναι βασική.

Θεώρημα 2.2.8. $\max_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda| > 1 \Rightarrow \sup_{k>0} \|A^k\| = \infty$.

Απόδειξη. Έστω $\lambda_0 \in \Lambda(A)$ με $|\lambda_0| = \rho(A) > 1$. Ισχύει ότι $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ διότι οι ιδιοτιμές του A^k είναι οι k-τάξης δυνάμεις των ιδιοτιμών του A. Αφού $\rho(A) > 1$ έχουμε ότι

$$\lim_k \rho(A^k) = \lim_k \rho(A)^k = +\infty .$$

Όμως $\rho(A^k) \le \|A^k\|$. Άρα $\lim \|A^k\| = \infty$. □

Θεώρημα 2.2.8ε. $\max_{\lambda_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon(A)} |\lambda_\varepsilon| > 1 + C\varepsilon \Rightarrow \sup_{k>0} \|A^k\| > C$.

Απόδειξη. Αφού $\|A^0\| = 1$, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο για $C < 1$, οπότε υποθέτουμε $C \ge 1$. Αν $\max_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda_\varepsilon| > 1$, τότε το συμπέρασμα ισχύει οπωσδήποτε, άρα υποθέτουμε $\max_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda| \le 1$, στην οποία περίπτωση έχουμε την απεικόνιση συγκλινουσών σειρών

$$(z - A)^{-1} = z^{-1}(I + z^{-1}A + z^{-2}A^2 + \dots),$$

η οποία ισχύει για όλα τα z με $|z| > 1$. Τώρα θα επιχειρηματολογήσουμε το αντίστροφο. Αν $\|A^k\| \le C$ για όλα τα $k \ge 0$, τότε

$$\|(z - A)^{-1}\| \le \frac{|z^{-1}| C}{1 - |z^{-1}|} = \frac{C}{|z| - 1}$$

για οποιαδήποτε z με $|z| > 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο $\Lambda_\varepsilon(A)$ περιέχεται στο δίσκο που σχετίζεται με την προέλευση της ακτίνας $1 + C\varepsilon$, δηλαδή, $\max_{\lambda_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon(A)} |\lambda_\varepsilon| \le 1 + C\varepsilon$. □

Θεώρημα 2.2.9. $\lambda \in \Lambda(A) \Rightarrow \|A^k\| \geq |\lambda|^k$ *για όλα τα* k.

Απόδειξη. Το λ ανήκει στο φάσμα του πίνακα A άρα θα δείξουμε ισοδύναμα ότι $\lambda \in \Lambda(A) \Rightarrow \|A^k\| \geq \rho(A)^k$, όπου $\rho(A)$ η φασματική ακτίνα του A. Έστω ότι για κάποια $\kappa > 0$, $\|A^\kappa\| = \nu < \rho(A)^\kappa$, και θεωρούμε ότι $\gamma \leq 1$(υπάρχουν $\gamma > 0$ και $M \geq 1$ τέτοια ώστε $\|A^k\| \leq M\gamma^k$, $\forall k \geq 0$) για απλότητα. Βλέπουμε ότι το $\|A^k\|$ είναι φραγμένο από το M για $0 \leq k < \kappa$, από το $M\nu$ για $\kappa \leq k < 2\kappa$, και από το $M\nu^2$ για $2\kappa \leq k < 3\kappa$, κ.ο.κ. Έτσι για όλα τα $k \geq 0$, το $\|A^k\|$ φράσεται από μια συνάρτηση $\hat{M}\hat{\gamma}^k$ με $\hat{\gamma} < \rho(A)$, που έρχεται σε αντίθεση με τον ισχυρισμό του θεωρήματος που χρησιμοποιήσαμε, που αφορά το σύνολο της επιλύουσας. □

Θεώρημα 2.2.9ε. $\lambda_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon(A) \Rightarrow \|A^k\| \geq |\lambda_\varepsilon|^k - \dfrac{k\varepsilon\|A\|^{k-1}}{1-k\varepsilon/\|A\|}$ *για όλα τα* k *τέτοια ώστε* $k\varepsilon < \|A\|$.

Απόδειξη. Επιλέξτε E τέτοιο ώστε $\|E\| \leq \varepsilon$ και $\lambda_\varepsilon \in \Lambda(A+E)$. Τότε $\|(A+E)^k\| \geq |\lambda_\varepsilon|^k$, το οποίο συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\|A^k\| &\geq |\lambda_\varepsilon|^k - k\varepsilon\|A\|^{k-1} - \binom{k}{2}\varepsilon^2\|A\|^{k-2} - \dots \\ &\geq |\lambda_\varepsilon|^k - k\varepsilon\|A\|^{k-1}\left((1+k\varepsilon/\|A\|) + (k\varepsilon)^2/\|A\|^2 + \dots\right).\end{aligned}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι $k\varepsilon < \|A\|$, η σειρά στην τελευταία εξίσωση συγκλίνει, δίνοντας

$$\|A^k\| \geq |\lambda_\varepsilon|^k - \frac{k\varepsilon\|A\|^{k-1}}{1-k\varepsilon/\|A\|}.$$

Τα θεωρήματα 2.2.8 και 2.2.8ε έχουν ακριβή ανάλογα για συνεχή χρόνο. □

Θεώρημα 2.2.10. $\max_{\lambda\in\Lambda(A)} \operatorname{Re}\lambda > 0 \Rightarrow \sup_{t>0}\|e^{tA}\| = \infty$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ίδια με του Θεωρήματος 2.2.11ε με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace (ολοκλήρωμα) για τυχαίο $C > 1$ και $\varepsilon = 0$.

Θεώρημα 2.2.10ε. $\max_{\lambda_\varepsilon\in\Lambda_\varepsilon(A)} \operatorname{Re}\lambda_\varepsilon > C\varepsilon \Rightarrow \sup_{t>0}\|e^{tA}\| > C$.

Απόδειξη. Όπως είναι στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.9ε, το συμπέρασμα είναι άμεσο αν $C < 1$ ή αν $\max_{\lambda\in\Lambda(A)} \operatorname{Re}\lambda > 0$, οπότε υποθέτουμε ότι $C \geq 1$ και $\max_{\lambda\in\Lambda(A)} \operatorname{Re}\lambda \leq 0$ και χρησιμοποιούμε τον ταυτοτικό μετασχηματισμό Laplace

$$(zI - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-zt} e^{tA} dt ,$$

που ισχύει για $\operatorname{Re} z > 0$. Υποστηρίζοντας πάλι το αντίστροφο, παρατηρούμε ότι αν $\left\| e^{tA} \right\| \le C$ για όλα τα $t > 0$, τότε $\left\| (zI - A)^{-1} \right\| \le C / \operatorname{Re} z$ για z με $\operatorname{Re} z > 0$, συνεπάγεται ότι το $\Lambda_\varepsilon(A)$ περιέχεται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από $\operatorname{Re} z \le C\varepsilon$. □

Το επόμενό μας αποτέλεσμα είναι μια ψευδοφασματική γενίκευση του θεωρήματος του Gerschgorin, το οποίο πιστεύουμε ότι είναι νέο. Συνεπάγεται ότι αν ο $\Lambda_\varepsilon(A)$ περιέχει σημεία απομακρυσμένα από τον $\Lambda(A)$ για επαρκώς μικρά ε, τότε τα όρια που δίνονται από το θεώρημα του Gerschgorin θα είναι πιο έντονα περιγραφικά για τα ψευδοφάσματα παρά για το φάσμα. Συνδέοντας αυτό με τα Θεωρήματα 8ε και 9ε, διαπιστώνει κανείς ότι οι εκτιμήσεις των ιδιοτιμών από τον Gerschgorin μπορεί κάποιες φορές να οδηγήσουν σε πιο ακριβείς προβλέψεις παροδικής συμπεριφοράς των επαναληπτικών μεθόδων πινάκων απ'ότι θα συνέβαινε με τις ακριβείς ιδιοτιμές. Αυτό το περίεργο φαινόμενο είναι πρακτικής σημασίας, καθότι διαφωτίζει το πώς οι επαναληπτικές μέθοδοι όπως η GMRES μπορεί κάποιες φορές να συγκλίνει αβίαστα ακόμα και όταν οι σχετικές τιμές Ritz ή οι αρμονικές τιμές Ritz είναι μακριά από τις ακριβείς εκτιμήσεις των ιδιοτιμών. Για αυτά τα θεωρήματα, ορίζονται $d_j = a_{jj}$ και $r_j = \sum_{k \ne j} |a_{jk}|$, και για κάθε μιγαδικό αριθμό z και πραγματικό αριθμό $r \ge 0$, ο $D(z,r)$ δηλώνει τον κλειστό δίσκο του z με ακτίνα r.

Θεώρημα 2.2.11. $\Lambda(A) \subseteq \bigcup_j D(d_j, r_j)$. (δηλαδή κάθε ιδιοτιμή του A ανήκει τουλάχιστον σε ένα από τους δίσκους Gerschgorin $D(d_j, r_j)$.

Απόδειξη. Έστω λ μια ιδιοτιμή του A και έστω $x = x(j)$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Επιλέγουμε $i \in \{1, \ldots, n\}$ έτσι ώστε $|x_i| = \max_j |x_j|$. (Δηλαδή, επιλέγουμε i έτσι ώστε το x_i είναι ο μεγαλύτερος (κατά απόλυτη τιμή) αριθμός στο διάνυσμα x.) Τότε $|x_i| > 0$, αλλιώς $x = 0$. Επειδή το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα, $Ax = \lambda x$, και έτσι

$$\sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} .$$

Διασπώντας το άθροισμα, παίρνουμε

$$\sum_{j \ne i} a_{ij} x_j = \lambda x_i - a_{ii} x_i .$$

Διαιρούμε κατά μέλη με x_i (επιλέγοντας το i όπως αναφέραμε, είναι βέβαιο ότι $x_i \ne 0$) και παίρνουμε την απόλυτη τιμή έτσι ώστε

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \frac{\sum_{j \ne i} a_{ij} x_j}{x_i} \right| \le \sum_{j \ne i} \left| \frac{a_{ij} x_j}{x_i} \right| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}| = r_i$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή $\left|\frac{x_j}{x_i}\right| \le 1$ για $j \ne i$. □

Θεώρημα 2.2.11ε. $\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \bigcup_j D(d_j, r_j + \sqrt{N}\varepsilon)$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gerschgorin στον $A+E$ με $\|E\| \le \varepsilon$ παράγει έγκλειστους δίσκους κέντρου $d_j + e_{jj}$ με ακτίνα $\sum_{k\ne j}\left|a_{jk}+e_{jk}\right| \le r_j + \sum_{k\ne j}\left|e_{jk}\right|$. Κάθε τέτοιος δίσκος περιέχεται στον δίσκο που έχει κέντρο στο d_j με ακτίνα $r_j + \sum_{k=1}^{N}\left|e_{jk}\right| = r_j + \left\|E_j\right\|_\infty$, όπου E_j υποδηλώνουν πίνακα ίσο με E στην j-οστή γραμμή και μηδέν αλλού. Ο όρος $\sqrt{N}\varepsilon$ προέρχεται από την ανισότητα $\left\|E_j\right\|_\infty \le \sqrt{N}\left\|E_j\right\|_2 \le \sqrt{N}\left\|E\right\|_2$. □

Το θεώρημα φασματικής απεικόνισης είναι ένα στολίδι στην κορυφή των θεωρημάτων ιδιοτιμών˙ είναι θεωρητικά ελκυστική και πρακτικά σχετική, διαμορφώνοντας τη βάση για τεχνικές λογικού μετασχηματισμού για τον υπολογισμό ιδιοτιμών. Το αριθμητικό εύρος υπακούει ένα παρόμοιο, παρότι μονόπλευρο, θεώρημα απεικόνισης. Τα Θεωρήματα 2.2.13 και 2.2.13ε υποδηλώνουν ότι ένα παραπλήσιο αποτέλεσμα μπορεί να σταθεί για τα ψευδοφάσματα. Το επόμενό μας θεώρημα είναι ένα συγκρατημένο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση, ένα θεώρημα απεικόνισης για γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Θεώρημα 2.2.12. $\Lambda(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta\Lambda(A)$ *για* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Από ιδιότητα γραμμικών μετασχηματισμών προκύπτει το παραπάνω αποτέλεσμα. □

Θεώρημα 2.2.12ε. $\Lambda_{\varepsilon|\beta|}(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta\Lambda_\varepsilon(A)$ *για* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο όταν $\beta = 0$ ή $\varepsilon = 0$. Υποθέτουμε ότι $\beta \ne 0$ και $\varepsilon > 0$. Από τον Ορισμό 2.1.1.i του ψευδοφάσματος, έχουμε ότι $z \in \Lambda_{\varepsilon|\beta|}(\alpha I + \beta A)$ αν και μόνο αν

$$\frac{1}{\varepsilon|\beta|} \le \left\|\left(zI - (\alpha I + \beta A)\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\beta|}\left\|\left(\frac{z-\alpha}{\beta}I - A\right)^{-1}\right\|,$$

$$|\beta|\left\|\left(zI - \left(\alpha I + \beta A\right)\right)^{-1}\right\| = \left\|\left(\beta^{-1}\left(z-\alpha\right) - A\right)^{-1}\right\|.$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $(z - A)/\beta \in \Lambda_\varepsilon(A)$. □

Για τα Θεωρήματα 13 και 14, ας υποθέσουμε ότι ο V είναι ένας $N \times k$ ορθογώνιος πίνακας με ορθοκανονικές στήλες για $k \le N$, όπως θα έχουν προκύψει από την Arnoldi ή υποδιαστημική επανάληψη, και ότι ο H είναι $k \times k$ τετραγωνικός πίνακας. Στην επανάληψη Arnoldi, ο H θα είχε τη μορφή Hessenberg αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο γι'αυτά τα θεωρήματα. Πρώτον, υποθέτουμε ότι οι στήλες του V παράγουν ένα αμετάβλητο υπόχωρο του A. Το προκύπτον αποτέλεσμα διαμορφώνει τη βάση για αλγόριθμους που

υπολογίζουν ψευδοφάσματα προβάλλοντας τον A σε έναν προσεκτικά επιλεγμένο αμετάβλητο υπόχωρο.

Θεώρημα 2.2.13. $AV = VH \Rightarrow \Lambda(H) \subseteq \Lambda(A)$.

Απόδειξη. Έστω λ_0 μια ιδιοτιμή του πίνακα H και x_0 το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Έχουμε $VH = AV \Rightarrow VHx_0 = AVx_0 \Rightarrow V\lambda_0 x_0 = AVx_0$. Άρα $\lambda_0(Vx_0) = A(Vx_0)$, όπου $Vx_0 \neq 0$. Άρα $\lambda_0 \in \Lambda(A)$. □

Θεώρημα 2.2.13ε. $AV = VH \Rightarrow \Lambda_\varepsilon(H) \subseteq \Lambda_\varepsilon(A)$.

Απόδειξη. Αν $\|Hu - zu\| \leq \varepsilon$ για $u \in \mathbb{C}^N$ με $\|u\| = 1$, τότε και $\|VHu - Vzu\| \leq \varepsilon$, και αυτό συνεπάγεται $\|AVu - zVu\| \leq \varepsilon$. □

Οι πρακτικοί αλγόριθμοι όπως η έμμεση μέθοδος Arnoldi ή η υποδιαστημική επανάληψη, μπορεί να μην παράγουν εύκολα μια ακριβή βάση για τον αναλλοίωτο υπόχωρο. Αντιθέτως, οι στήλες του V διαμορφώνουν μια ορθοκανονική βάση για κάποιον κατά προσέγγιση αναλλοίωτο υπόχωρο του A. Ας υποθέσουμε ότι ο H δηλώνει το γενικευμένο πηλίκο Rayleigh που σχηματίζει αυτή η βάση, $H \equiv V^* AV$. Με αυτή την παρατήρηση, το Θεώρημα 14 ιδιοτιμών έχει μια εναλλακτική, πιο πρακτική ψευδοφασματική γενίκευση. Αυτό το θεώρημα είναι ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα στη θεωρία διαταραχών αναλλοίωτων υποχώρων.

Θεώρημα 2.2.14. $AV = VH \Rightarrow \Lambda(H) \subseteq \Lambda(A)$.

Απόδειξη. Βλ. απόδειξη Θεωρήματος 2.2.14.

Θεώρημα 2.2.14ε. $AV = VH + R \Rightarrow \Lambda(H) \subseteq \Lambda_\varepsilon(A)$ *για* $\varepsilon = \|R\|$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα $E = -RV^*$. Τότε $(A+E)V = AV - R = VH$, οπότε από το Θεώρημα 2.2.14, οι ιδιοτιμές του H είναι ιδιοτιμές του $A+E$ και ως εκ τούτου οι ε-ψευδο-ιδιοτιμές του A για $\varepsilon = \|-RV^*\| = \|R\|$.

Για μια Arnoldi παραγοντοποίηση με k βασικά διανύσματα, $V \in \mathbb{C}^{n\times k}$, το Θεώρημα 14ε περιορίζεται σε ένα γνωστό αποτέλεσμα: $\varepsilon = \|R\| = |h_{k+1,k}|$, όπου $h_{k+1,k}$ είναι το $(k+1,k)$ στοιχείο στον διευρυμένο άνω πίνακα Hessenberg. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΨΕΥΔΟΦΑΣΜΑΤΟΣ

Από τον Ορισμό 2.1.1 το σύνορο του $\Lambda_\varepsilon(A)$ ταυτίζεται σχεδόν με το σύνολο $\left\{z \in \mathbb{C} : \left\|(zI - A)^{-1}\right\| = \varepsilon^{-1}\right\}$ ή ισοδύναμα $\left\{z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min}(zI - A) = \varepsilon\right\}$. Άρα, ο υπολογισμός συνόρου του $\Lambda_\varepsilon(A)$ περιορίζεται στον καθορισμό της καμπύλης στο μιγαδικό επίπεδο που ορίζεται εμμέσως από την $g(z) = \varepsilon$, όπου $g(z) = \sigma_{\min}(zI - A)$. Δύο τυπικές τεχνικές για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων είναι ο Αλγόριθμος Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου και ο Αλγόριθμος Ιχνηλάτισης Συνόρου με τη χρήση του σχήματος πρόβλεψης-διόρθωσης.

3.1 Αλγόριθμος Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου

Η πιο «πρωτόγονη» μεθοδολογία (βασισμένη στην απλή εφαρμογή του ορισμού) που θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει για το σχεδιασμό του ψευδοφάσματος ενός πίνακα A είναι ο ορισμός ενός κατάλληλου χωρίου που περιέχει ολόκληρο ή μέρος του $\Lambda_\varepsilon(A)$ και ο υπολογισμός της ποσότητας $\sigma_{\min}(zI - A)$ πάνω στα σημεία μιας διαμέρισης αυτού. Έπειτα, ο σχεδιασμός της καμπύλης $g(z) = \sigma_{\min}(zI - A) = \varepsilon$ είναι άμεσος, με την αντίστοιχη εντολή του Matlab.

Ο Αλγόριθμος Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου μπορεί να σκιαγραφηθεί ως εξής:

INPUT: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, *epsilons*

xrange:	αριστερό όριο x-άξονα, δεξί όριο x-άξονα
yrange:	κάτω όριο y-άξονα, άνω όριο y-άξονα
hx:	μήκος πλέγματος για τον x-άξονα
hy:	μήκος πλέγματος για τον y-άξονα

ΒΗΜΑ 0: Κατασκευή πλέγματος.
n1 = ((xrange(2)-xrange(1))/hx)
n2 = ((yrange(2)-yrange(1))/hy)

ΒΗΜΑ 1: Εύρεση ελάχιστης ιδιαζουσας τιμής σε κάθε σημείο διαμέρισης.
x= xrange(1):hx:xrange(2) (εύρεση x-συντεταγμένης σημείου)
y = yrange(1):hy:yrange(2) (εύρεση y-συντεταγμένης σημείου)
Εφαρμόζουμε την SVD στο σημείο mu=x+(y*i) και βρίσκουμε την ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή.

ΒΗΜΑ 2: Κατασκευή διαγράμματος των ελάχιστων ιδιαζουσών τιμών.

ΒΗΜΑ 3: Υπολογισμός και γράφημα φάσματος.

Το παρακάτω m-file υλοποιεί τον Αλγόριθμο Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου.

```
function c = psegridA(A,epsilons,xrange,yrange,hx,hy)
% PSEGRID(A,epsilon,xrange,yrange,hx,hy) estimates the spectrum and,
% for several epsilons, the boundaries of the epsilon-pseudospectra of
% a square matrix A.
```

```
% (Note that the command tic-toc prints the execution time.)
% INPUT:          A is the matrix, epsilons
% xrange:         left bound on x-axis, right bound on x-axis
% yrange:         lower bound on y-axis, upper bound on y-axis
% hx:             length of the grid for the x-axis,
% hy:             length of the grid for the y-axis.
%
% OUTPUT:         c = contour plot points


figure, hold on, tic
% Detaching the epsilons (e1>=...>=eN)
epsilons = detach(epsilons);
N = length(epsilons);
eps = epsilons(N);    % the minimum epsilon
[t,d] = size(A);
% Constructing the grid
n1 = round((xrange(2)-xrange(1))/hx);
n2 = round((yrange(2)-yrange(1))/hy);
% Setting initial values on the grid
Z = zeros(n1+1,n2+1);
Iterations = 0; expoints = 0; inpoints = 0;
% Main part of the program
for x = xrange(1):hx:xrange(2)
I = round(((x-xrange(1))/hx)+1);
for y = yrange(1):hy:yrange(2)
J = round(((y-yrange(1))/hy)+1);
mu = x+(y*i);
Z(I,J) = min(svd(mu*eye(d,d)-A));
Iterations = Iterations+1;
Y(J) = yrange(1)+(J-1)*hy;
end  % for
X(I) = xrange(1)+(I-1)*hx;
end  % for
% Giving the number of iterations and plotting the figure
number_of_total_grid_points=(n1+1)*(n2+1)
number_of_iterations=Iterations
hold on
for j = 1:N
ZZ = Z-epsilons(j)*ones(size(Z));
contour(X,Y,ZZ',[0 0],'b')
end  % for
axis([xrange(1),xrange(2),yrange(1),yrange(2)])
xlabel('Real  Axis')
ylabel('Imaginary  Axis')
% Computing the eigenvalues
eigen = eig(A);
plot(real(eigen),imag(eigen),'r+')
hold off, toc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function D = detach(V)
N = length(V);
for i = 1:N-1
for j = 1:N-1
if  V(j)<V(j+1)
temp = V(j);
V(j) = V(j+1);
V(j+1) = temp;
end  % if
end  % for
end  % for
D = V;
```

Παράδειγμα 1

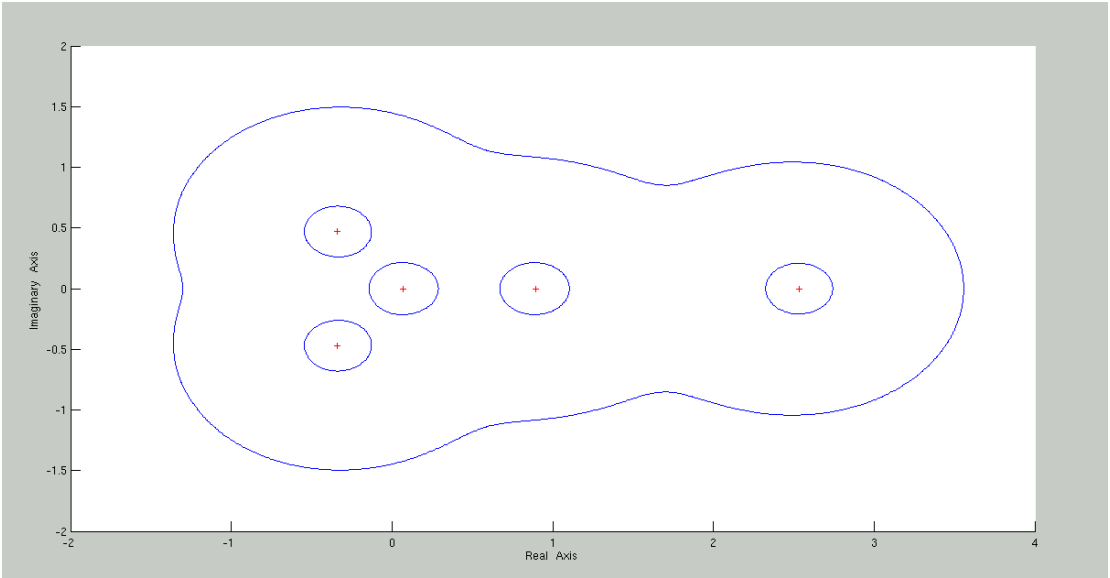
Ορίζουμε τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Καλούμε τη συνάρτηση psegridA με εύρος τιμών στον άξονα x το $[0,5]$, στον άξονα y το $[-2,2]$ και τα μήκη του πλέγματος τα $0,01$ και $0,01$ στους άξονες x και y. Επιπλέον, θέτουμε σε πρώτη φάση $\varepsilon = 0.2,\ 1$ για να βρούμε τα αντίστοιχα ψευδοφάσματα του πίνακα A.

>> c=psegridA(A,[0.2,1],[-2,4],[-2,2],0.01,0.01)

Η psegridA για τα δεδομένα μας απέδωσε 241001 σημεία σε 241001 επαναλήψεις ενώ ο χρόνος που παρήλθε είναι 6.293793 δευτερόλεπτα. Ακολουθεί το γράφημα για τα 0.2-ψευδοφάσμα και 1-ψευδοφάσμα του A καθώς και το φάσμα του.

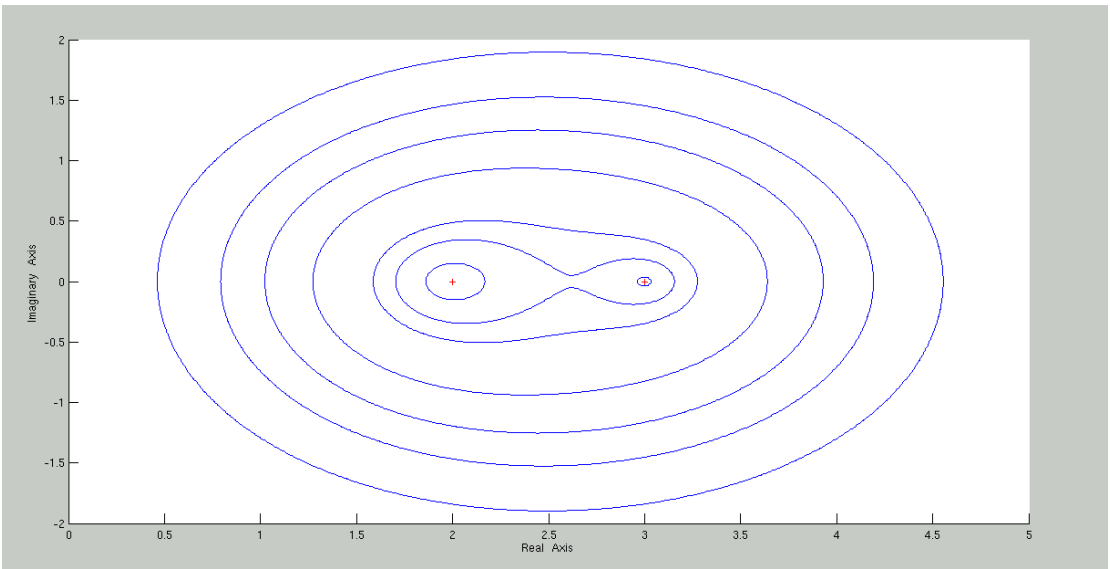


Εικόνα 1: Ψευδοφάσματα πίνακα A *για* $\varepsilon = 0.2,\ 1.$

Στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε τη δυνατότητα που μας δίνεται από τη μέθοδο και εφαρμόζουμε την psegridA για πολλά ε. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τα ψευδοφάσματα του A καθώς και για την μεταξύ τους αλληλεπίδραση.

>> c=psegridA(A,[0.01,0.05,0.1,0.2,0.5,0.7,1],[0,5],[-2,2],0.01,0.01)

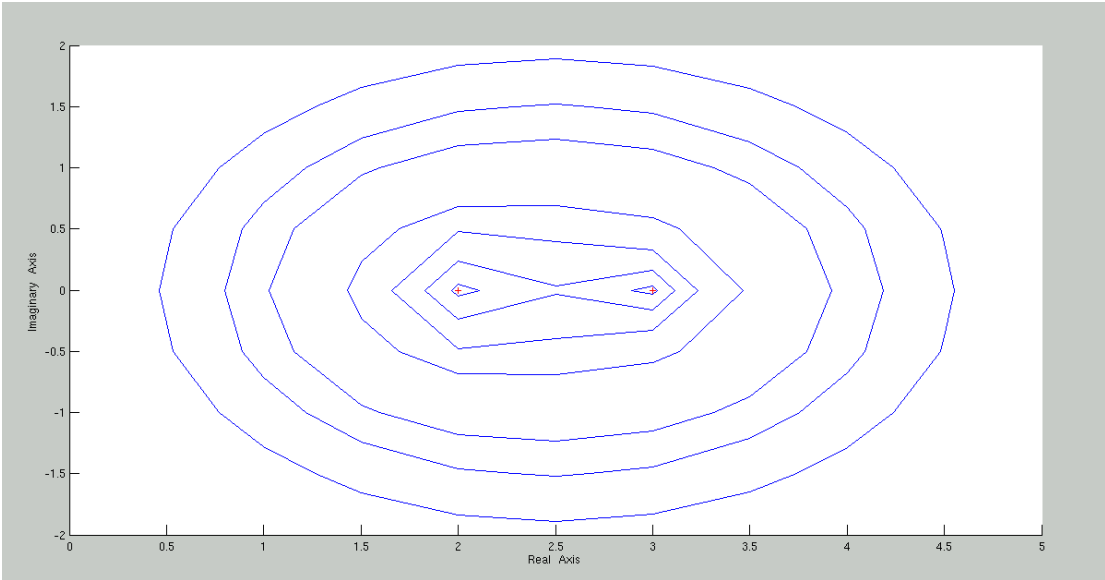
Η εκτέλεση της εντολής αυτής δίνει 200901 σημεία πάνω στο πλέγμα σε 200901 επαναλήψεις οι οποίες ολοκληρώνονται σε χρόνο 3.813547 δευτερόλεπτα καθώς και το γράφημα του ψευδοφάσματος του πίνακα A για τα ε που ορίσαμε.



Εικόνα 2: Ψευδοφάσματα πίνακα A *για* $\varepsilon = 0.01,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.7,\ 1.$

Αν καλέσουμε τη psegridA για $hx = hy = 0.5$, ο αλγόριθμος εκτελείται σε 99 επαναλήψεις και χρόνο 0.074924 δευτερόλεπτα και το γράφημα που προκύπτει, δίνει με λιγότερη ακρίβεια, σε σχέση με το προηγούμενο, τα ψευδοφάσματα του πίνακα για τα δεδομένα ε.

>> c=psegridA(A,[0.01,0.05,0.1,0.2,0.5,0.7,1],[0,5],[-2,2],0.5,0.5)



Εικόνα 3: Ψευδοφάσματα πίνακα A *για* $\varepsilon = 0.01,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.7,\ 1$ *και* $hx = hy = 0.5$. *Το γράφημα χάνει τη καμπυλότητά του.*

Παράδειγμα 2

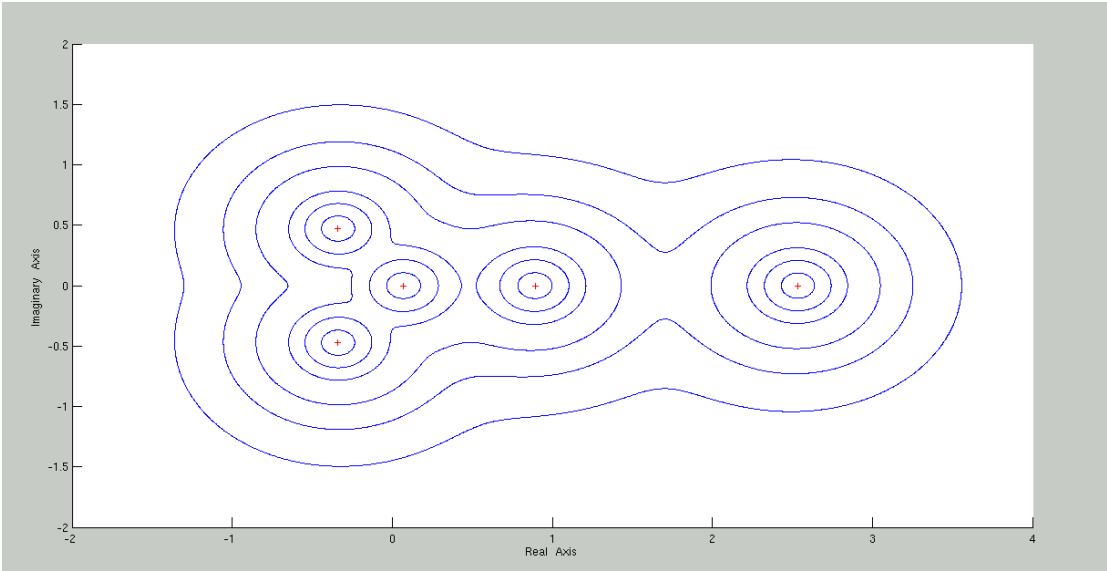
Ορίζουμε τον επόμενο πίνακα με τη βοήθεια της εντολής του Matlab rand(n) η οποία επιστρέφει ένα $n \times n$ τυχαίο πίνακα. Εκτελώντας την εντολή για $n = 5$ προκύπτει ο πίνακας που ακολουθεί:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2760 & 0.4984 & 0.7513 & 0.9593 & 0.8407 \\ 0.6797 & 0.9597 & 0.2551 & 0.5472 & 0.2543 \\ 0.6551 & 0.3404 & 0.5060 & 0.1386 & 0.8143 \\ 0.1626 & 0.5853 & 0.6991 & 0.1493 & 0.2435 \\ 0.1190 & 0.2238 & 0.8909 & 0.2575 & 0.9293 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια καλούμε τη psegridA με διαστάσεις πλέγματος 0.005×0.005.

>> c=psegridA(A,[0.1,0.2,0.3,0.5,0.7, 1],[-2,4],[-2,2],0.005,0.005)

Η εκτέλεση διαρκεί 26.344032 δευτερόλεπτα, χρόνος που δικαιολογείται από τον αριθμό των επαναλήψεων της μεθόδου και των σημείων του πλέγματος. (962001 επαναλήψεις και 962001 σημεία) Τα ψευδοφάσματα του πίνακα απεικονίζονται στο γράφημα που ακολουθεί.

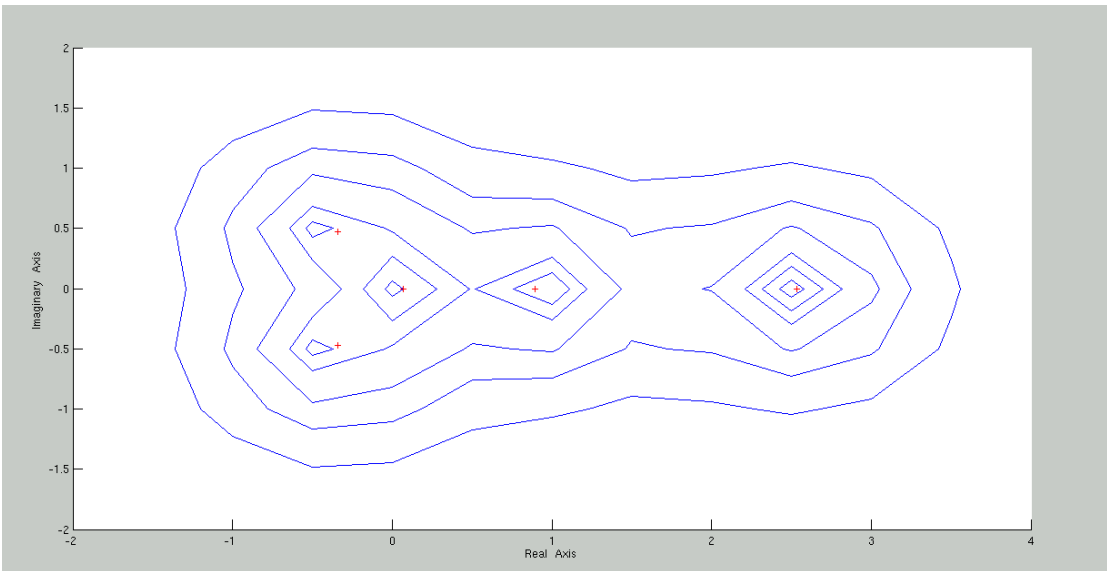


Εικόνα 4: Ψευδοφάσματα πίνακα A *για* $\varepsilon = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.7,\ 1$.

Η σημασία των διαστάσεων του πλέγματος αποδεικνύεται από την ακόλουθη εικόνα η οποία δείχνει το γράφημα του ψευδοφάσματος για $hx = hy = 0.5$. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το h, έχοντας κρατήσει όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές, τόσο μικραίνει η ευκρίνεια των καμπυλών. Εκτελούμε τη psegridA για τις νέες διαστάσεις.

>> c=psegridA(A,[0.1,0.2,0.3,0.5,0.7, 1],[-2,4],[-2,2],0.5,0.5)

Η διαδικασία ολοκληρώθηκε σε 0.069805 δευτερόλεπτα και 117 επαναλήψεις.



Εικόνα 5: Ψευδοφάσματα πίνακα A *για* $hx = hy = 0.5$.

3.2 Αλγόριθμος Ιχνηλάτισης Συνόρου

Πριν διατυπώσουμε τον αλγόριθμο θα παρουσιάσουμε ένα πόρισμα που είναι καθοριστικό για την κατανόηση της μεθόδου. Προσδιορίζουμε το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ με $\mathbb{R}^2$ και χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $g(z) = g(x+iy) = g(x,y)$. Η συνάρτηση $g(z)$ είναι πραγματική και μη αρνητική˙ οι ρίζες του g είναι οι ιδιοτιμές του A.

Πόρισμα 3.1.1. *Έστω* $x+iy \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(A)$. *Τότε* $g(x,y)$ *είναι πραγματική αναλυτική σε μια γειτονιά του* (x,y), *αν* $\sigma_{\min}((x+iy)I - A)$ *είναι μια απλή ιδιάζουσα τιμή. Για την κλίση του* $g(x,y)$ *ισχύει*

$$\nabla g(x,y) = (\mathrm{Re}(v_{\min}^* u_{\min}), \mathrm{Im}(v_{\min}^* u_{\min})) = v_{\min}^* u_{\min}, \tag{3.1}$$

όπου $u_{\min}$ *και* $v_{\min}$ *δηλώνουν αντίστοιχα τα αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα που σχετίζονται με τη* $g(x,y) = \sigma_{\min}$.

Τώρα θα προχωρήσουμε στη μέθοδο ιχνηλάτισης καμπύλης. Για την εφαρμογή μιας μεθόδου συνέχισης στον υπολογισμό της εμμέσως δοθείσης καμπύλης $g(z) = \varepsilon$, πρώτα προσδιορίζεται ένα απλό σημείο z_1 σ'αυτήν την καμπύλη. Έπειτα, με το z_1 ως σημείο εκκίνησης ακολουθούμε την επιθυμητή καμπύλη με ένα απλό σχήμα πρόβλεψης-διόρθωσης. Ο αλγόριθμος μπορεί να σκιαγραφηθεί όπως ακολουθεί:

Βήμα 0: Υπολογισμός ενός πρώτου σημείου z_1 πάνω στη $\partial\Lambda_\varepsilon(A)$.

Για $k = 2,3,\ldots$

Βήμα 1: Προσδιορισμός μιας διεύθυνσης $r_k \in \mathbb{C}$, $|r_k| = 1$ και ένα μήκος βήματος τ_k και υπολογισμός της πρόβλεψης $\tilde{z}_k = z_{k-1} + \tau_k r_k$.

Βήμα 2: Διόρθωση του $\tilde{z}_k$ στην διεύθυνση του $d_k \in \mathbb{C}$, $|d_k| = 1$, θέτοντας $z_k = \tilde{z}_k + \theta_k d_k$ με κατάλληλο θ_k.

Πριν περιγράψουμε τα διαφορετικά βήματα με λεπτομέρεια, εστιάζουμε στο κύριο των δύο βημάτων 0 και 2. Εκεί, το κεντρικό συστατικό είναι η εφαρμογή της μεθόδου Newton για να γίνουν μη γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής του τύπου $h(\theta) = 0$, όπου $h(\theta) = g(\lambda + \theta d) - \varepsilon$ με $\lambda, d \in \mathbb{C}$, $|d| = 1$. Με άλλα λόγια, ψάχνουμε για μια λύση του $g(z) = \varepsilon$ κατά μήκος της ευθείας $\{\lambda + \theta d : \theta \in \mathbb{R}\}$ στο μιγαδικό επίπεδο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αρχική τιμή είναι $\theta_0 = 0$˙ Επιπλέον υποθέτουμε ότι η g είναι διαφορίσιμη στο λ και $\nabla g(\lambda) = v_{\min}^* u_{\min} \neq 0$. Η πρώτη επανάληψη θ_1 ορίζεται τότε

$$\theta_1 = \theta_0 - \frac{h(\theta_0)}{h'(\theta_0)} = -\frac{g(\lambda) - \varepsilon}{h'(0)}$$

Επειδή από την εξίσωση (3.1) $g(\lambda)=\sigma_{\min}$ και $h'(0)=\partial g/\partial d=\mathrm{Re}(\bar{d}v_{\min}^{*}u_{\min})$, όπου $u_{\min}$ και $v_{\min}$ είναι τα ελάχιστα ιδιάζοντα διανύσματα του $\lambda I-A$, βρίσκουμε

$$\theta_1=-\frac{\sigma_{\min}-\varepsilon}{\mathrm{Re}(\bar{d}v_{\min}^{*}u_{\min})},$$

που αντιστοιχεί στο σημείο

$$z_1=\lambda+\theta_1 d=\lambda-\frac{\sigma_{\min}-\varepsilon}{\mathrm{Re}(\bar{d}v_{\min}^{*}u_{\min})}d\ . \tag{3.2}$$

Από την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι η απαίτηση $|d|=1$ εγκαταλείπεται και ως εκ τούτου, δεν χρειάζεται να επιβληθεί. Στην ειδική περίπτωση $d=\nabla g(\lambda)=v_{\min}^{*}u_{\min}$, δηλαδή η κατεύθυνση της πιο απότομης κλίσης στο σημείο λ, η (3.2) απλοποιείται σε

$$z_1=\lambda-\frac{\sigma_{\min}-\varepsilon}{\left|v_{\min}^{*}u_{\min}\right|^2}v_{\min}^{*}u_{\min}=\lambda-\frac{\sigma_{\min}-\varepsilon}{u_{\min}^{*}v_{\min}}\ . \tag{3.3}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να περιγράψουμε την εφαρμογή των διαφόρων βημάτων του αλγορίθμου ιχνηλάτισης καμπύλης. Στο Βήμα 0 πρέπει να ψάξουμε για ένα αυθαίρετο σημείο z_1 στο $\partial\Lambda_\varepsilon(A)$. Για το σκοπό αυτό λύνουμε τη μη γραμμική μονομεταβλητή εξίσωση $h_1(\theta)=0$, όπου $h_1(\theta)=g(\lambda_0+\theta d_0)-\varepsilon$ και $\lambda_0\in\mathbb{C}$, $|d_0|=1$ επιλεγμένο με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση του προβλήματος να υπάρχει δηλαδή πρέπει να προσδιορίσουμε μια ευθεία $\{\lambda_0+\theta d_0:\theta\in\mathbb{R}\}$ στο μιγαδικό επίπεδο που να τέμνει τη συνοριακή καμπύλη $\partial\Lambda_\varepsilon$. Για παράδειγμα, αν $\lambda_0\in\Lambda_\varepsilon(A)$, τότε η κατεύθυνση d_0 μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα (σημειώνουμε ότι οι ιδιοτιμές του A δεν χρειάζεται να είναι γνωστές, όμως κάποιες φορές υποσύνολα του Λ_ε μπορούν να υπολογιστούν πιο εύκολα ακόμα και για πολύ μεγάλους πίνακες. Για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης $h_1(\theta)=0$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton όπως περιγράφηκε παραπάνω.

Ο κύριος σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε μόνο μια ιδιάζουσα τριπλέτα $(\sigma_{\min},u_{\min},v_{\min})$ ανά σημείο καμπύλης z_k, $k\geq 2$. Επειδή το βήμα της διόρθωσης απαιτεί πληροφορίες για το σφάλμα σχετικά με το σημείο πρόβλεψης $\tilde{z}_k$, αυτός ο υπολογισμός πραγματοποιείται στο $\tilde{z}_k$.

Για διευκόλυνση, περιγράφουμε πρώτα το βήμα της διόρθωσης. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη υπολογίσει τη τιμή πρόβλεψης $\tilde{z}_k$. Το βήμα της διόρθωσης αποτελείται από ένα βήμα Newton ως προς την εξίσωση $h_k(\theta)=0$, όπου $h_k(\theta)=g(\tilde{z}_k+\theta d_k)-\varepsilon$ με μια κατάλληλη κατεύθυνση d_k και αρχική τιμή $\theta=0$ στην επανάληψη Newton. Λαμβάνοντας τα παραπάνω υπόψην, μπορούμε να εκφράσουμε, με τον τύπο (3.2), τη διόρθωση z_k με

βάση τη μικρότερη ιδιάζουσα τιμή του $\tilde{z}_k I - A$ και τα αντίστοιχα ιδιάζοντα διανύσματα. Μια φυσική επιλογή για το d_k είναι η κατεύθυνση της πιο απότομης κλίσης˙ έτσι η διορθωμένη τιμή z_k μπορεί να υπολογιστεί άμεσα από τη (3.3) παρέχοντας τη μεγαλύτερη δυνατή αριθμητική σταθερότητα για την ανανέωση Newton.

Η πιο προφανής επιλογή για το r_k θα ήταν η κατεύθυνση που είναι εφαπτομενικά στην επίπεδη καμπύλη του g στο σημείο z_{k-1}, δηλαδή η κατεύθυνση κάθετη στην κλίση. Ωστόσο, αυτός ο πρόσθετος υπολογισμός του $\nabla g(z_{k-1})$ σχεδόν θα διπλασίαζε την υπολογιστική δουλειά στον αλγόριθμο. Για την αποφυγή αυτού, θέτουμε το r_k να είναι ορθογώνιο στην κλίση του g στο $\tilde{z}_{k-1}$, το οποίο θα επιτευχθεί θέτοντας $r_k = i\nabla g(\tilde{z}_{k-1}) / \left|\nabla g(\tilde{z}_{k-1})\right|$.

Τα διαφορετικά συστατικά μπορούν να συνδυαστούν τώρα σε έναν ολοκληρωμένο αλγόριθμο.

INPUT: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\varepsilon > 0$

K : αριθμός σημείων που θα προσδιοριστούν στην $\partial\Lambda_\varepsilon(A)$

λ_0 : ε -ψευδοϊδιοτιμή του A

d_0, $\left|d_0\right| = 1$: διεύθυνση για το πρώτο σημείο

tol : σχετική ακρίβεια του πρώτου σημείου

ΒΗΜΑ 0: Υπολογισμός του πρώτου σημείου z_1

$\theta_0 = \varepsilon, \quad z_1^{new} = \lambda_0 + \theta_0 d_0$

while $\left|g(z_1^{new}) - \varepsilon\right| / \varepsilon > tol$

- $z_1^{old} = z_1^{new}$
- Υπολογισμός ιδιάζουσας τριπλέτας $(\sigma_{\min}, u_{\min}, v_{\min})$ για $z_1^{old} I - A$
- Υπολογισμός της επόμενης Newton επανάληψης z_1^{new} σύμφωνα με την εξίσωση (3.2)

endwhile

$z_1 = z_1^{new}$

για $k = 2, 3, \ldots, K$

ΒΗΜΑ 1: Πρόβλεψη

- $r_k = i v_{\min}^* u_{\min} / \left|v_{\min}^* u_{\min}\right|$
- Προσδιορισμός μήκους βήματος τ_k
- $\tilde{z}_k = z_{k-1} + \tau_k r_k$

ΒΗΜΑ 2: Διόρθωση

- Υπολογισμός ιδιάζουσας τριπλέτας $(\sigma_{\min}, u_{\min}, v_{\min})$ για $\tilde{z}_k I - A$

- Υπολογισμός του διορθωμένου σημείου z_k σύμφωνα με την εξίσωση (3.3)

endfor

Αντί να καθοριστεί το K για την ακολουθία (z_k), είναι δυνατό να εφαρμοστεί ένα κριτήριο τερματισμού για να διευκρινιστεί αν η υπολογισθείσα καμπύλη έχει φτάσει στο αρχικό σημείο z_1. Για παράδειγμα, αν το ψευδοφάσμα ενός πραγματικού πίνακα αποτελείται από μόνο ένα τμήμα, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του $\Lambda_\varepsilon(A)$ ως προς τον πραγματικό άξονα και χρειάζεται μόνο να υπολογίσουμε το κομμάτι της καμπύλης με $\operatorname{Im} z > 0$, που προτείνει με φυσικό τρόπο ένα κριτήριο τερματισμού.

Ένα άλλο ακόμα σημείο που δεν έχει θικτεί στον αλγόριθμο είναι ο υπολογισμός της ιδιάζουσας τριπλέτας $(\sigma_{\min}, u_{\min}, v_{\min})$. Για μεγάλους πίνακες αυτή η εργασία πρέπει να γίνει με επαναληπτικές μεθόδους, και στα προγράμματά μας έχουμε εφαρμόσει αντίστροφη επανάληψη στον πίνακα $(\tilde{z}_k I - A)^*(\tilde{z}_k I - A)$. Λόγω της συνεχούς εξάρτησης των ιδιοδιανυσμάτων από την παράμετρο $\tilde{z}_k$ χρησιμοποιούμε το προηγούμενο διάνυσμα $v_{\min}$, που αντιστοιχεί στο $\tilde{z}_{k-1}$, σαν την αρχική εκτίμηση της αντίστροφης επανάληψης ως προς το $\tilde{z}_k$. Σαν αποτέλεσμα, πολύ συχνά απαιτούνται μόνο μία ή δύο αντίστροφες επαναλήψεις, αλλά, δυστυχώς, αυτά τα αρχικά διανύσματα μπορεί να προκαλέσουν σημαντικά προβλήματα στη γειτονιά των σημείων διακλάδωσης, όπου η g δεν είναι διαφορίσιμη και τα μονοπάτια των δύο μικρότερων ιδιαζουσών τιμών διασταυρώνονται.

Τώρα θα θίξουμε εν συντομία το ζήτημα του μήκους βήματος τ_k στη διαδικασία συνέχισης. Όσο για τις μεθόδους συνέχισης γενικά, η κατάλληλη επιλογή των μεγεθών βήματος συνιστά ένα από τα πιο κρίσιμα σημεία του αλγορίθμου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μέγεθος του τ_k επηρεάζει την ακρίβεια του αλγορίθμου όπως και την ανάλυση και ως εκ τούτου το υπολογιστικό κόστος. Δυστυχώς, δεν είμαστε σε θέση να δώσουμε μια γενική αρχή γιατί μια κατάλληλη επιλογή των μεγεθών βήματος εξαρτάται κυρίως από τις γεωμετρικές ιδιότητες της συνοριακής καμπύλης $\partial\Lambda_\varepsilon(A)$, οι οποίες είναι εκ των προτέρων άγνωστες.

Το παρακάτω m-file υλοποιεί τον Αλγόριθμο Ιχνηλάτισης Συνόρου για πίνακες $n \times n$ που περιγράψαμε πιο πάνω:

```
function [z1,z] = pseudo(A,epsilon,lambda0,d0,tol,K)
% pseudo            - Curve tracing method for computing pseudospectra
% of matrix A
% INPUT:              epsilon>0
%   A               - matrix nxn
%   lambda0         - eigenvalue of A
%   d0              - search direction for the first point
%   tol             - relative accuracy of the first point
%   K               - number of points to be determined
```

```
% STEP 0: Computation of the first point
figure, hold on, tic
tk = 10^(-2);
[n,m] = size(A);
lambda = lambda0 + (epsilon/10);
z1new = lambda + (epsilon*d0);
I = eye(size(A));
snew = svd(z1new*I-A);
snewmin = min(snew);
soldmin = snewmin;
while (abs((soldmin - epsilon)/epsilon)) >tol,
z1old = z1new;
sold = svd(z1old*I-A);
soldmin = min(sold);
[U,~,V] = svd(z1old*I-A);
umin = U(:,n);
vmin = V(:,m);
z1new = z1old - ((soldmin - epsilon)/(real((vmin')*umin)));
end
z1 = z1new;
% STEP 1 & 2: Computation of zk points
z = zeros(1,K);
z(1,1) = z1;
r = (1i*(vmin')*umin)/(abs((vmin')*umin));
for k = 2:K
zpr(k) = z(1,k-1)+tk*r;
skpr = svd(zpr(k)*I-A);
skprmin = min(skpr);
[Upr,~,Vpr] = svd(zpr(k)*I-A);
ukmin = Upr(:,n);
vkmin = Vpr(:,m);
zcor(k) = zpr(k)-((skprmin-epsilon)/((ukmin')*vkmin));
z(1,k) = zcor(k);
r = (1i*(vkmin')*ukmin)/(abs((vkmin')*ukmin));
end
% STEP 3: Plot boundary
spectrum = eig(A);
plot(real(spectrum),imag(spectrum),'r+')
plot(real(z),imag(z),'b.')
xlabel('Real Axis');
ylabel('Imaginary Axis');
hold off, toc
```

Παράδειγμα 1

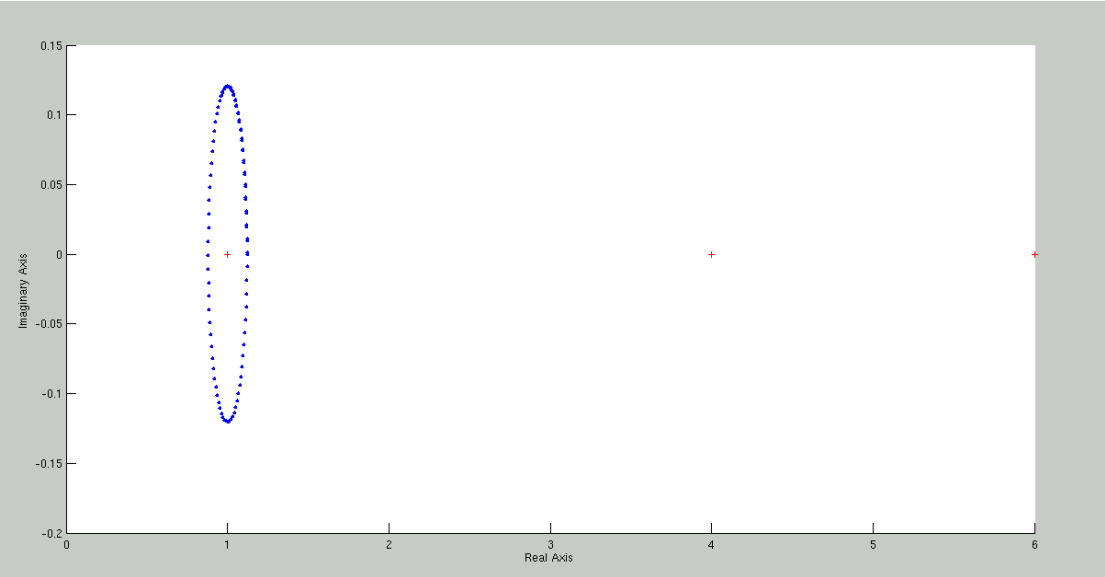
Ορίζουμε τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο A είναι άνω τριγωνικός. Είναι προφανές ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $1, 4, 6$. Η εύρεση των ιδιοτιμών του υπό μελέτη πίνακα είναι απαραίτητη για την εύρεση του αρχικού σημείου της καμπύλης. Εν συνεχεία καλούμε τη συνάρτηση pseudo για την ιδιοτιμή 1, με $epsilon = 0.1$, αρχική διεύθυνση 1 , απαιτούμενη σχετική ακρίβεια του πρώτου σημείου 0.0001 και $K = 100$.

>> [z1,z] = pseudo(A,0.1,1,1,0.0001,100)

Η εκτέλεση της παραπάνω εντολής δίνει ως αρχικό σημείο το z1 = 1.1222 και ολοκληρώνεται σε χρόνο 0.010939 δευτερόλεπτα. Ακολουθεί το γράφημα όλων των σημείων και του φάσματος.

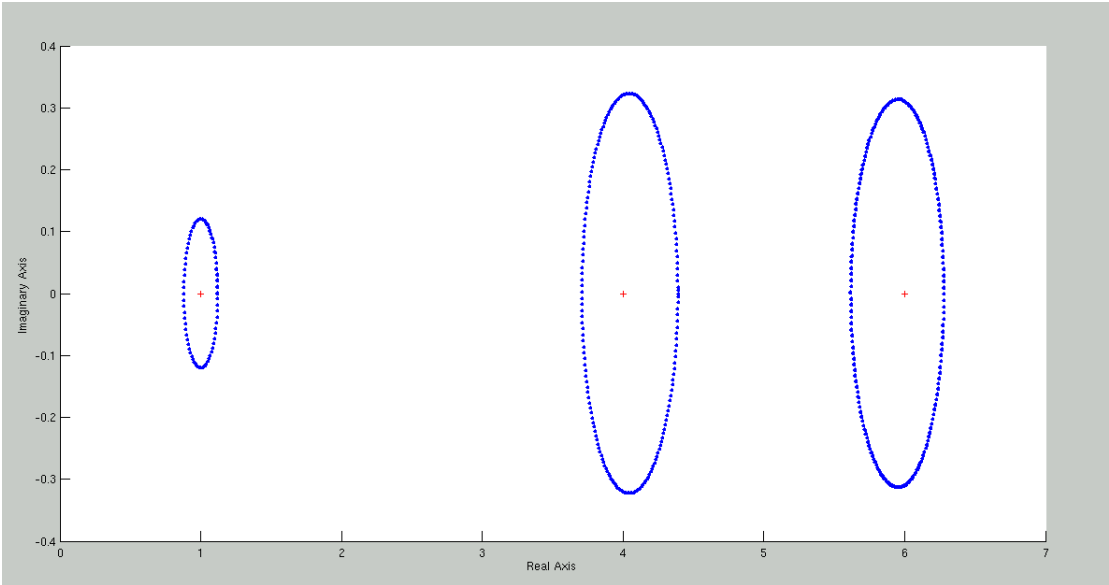


Εικόνα 6: Σύνορο περί την ιδιοτιμή 1 για $\varepsilon = 0.1$.

Διατηρώντας την τιμή του ε, προχωράμε στην εφαρμογή της εντολής pseudo δύο φορές ακόμα για τις υπολοιπόμενες ιδιοτιμές.

>> [z1,z] = pseudo(A,0.1,4,1,0.0001,210)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.1,6,1,0.0001,400)

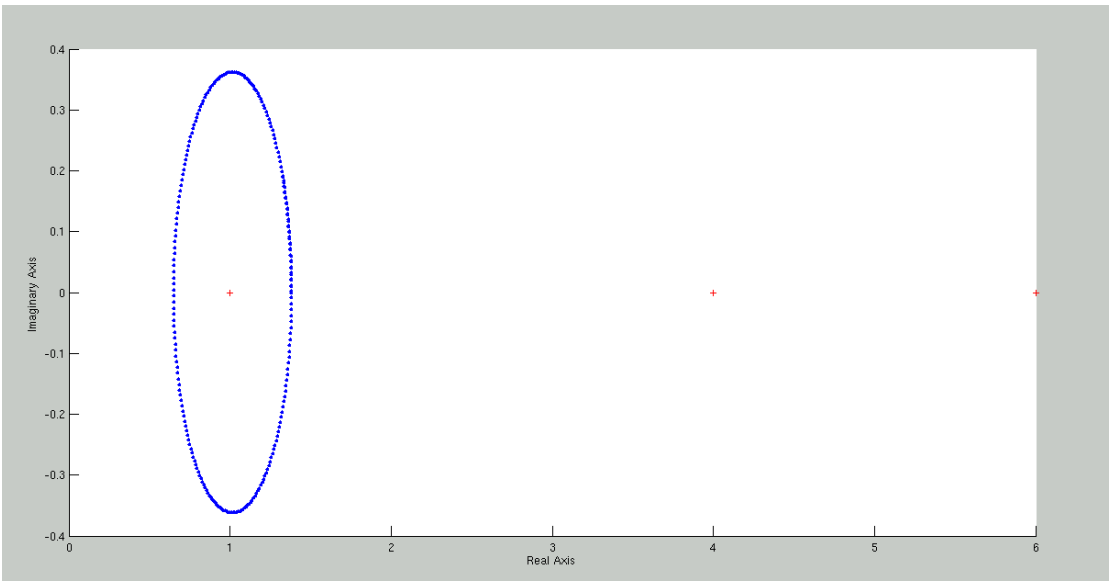
Για την ιδιοτιμή 4 η διαδικασία διαρκεί 0.020410 δευτερόλεπτα με σημείο εκκίνησης το $z1 = 4.3904$ ενώ για την 6, 0.034670 δευτερόλεπτα και $z1 = 6.2790$.



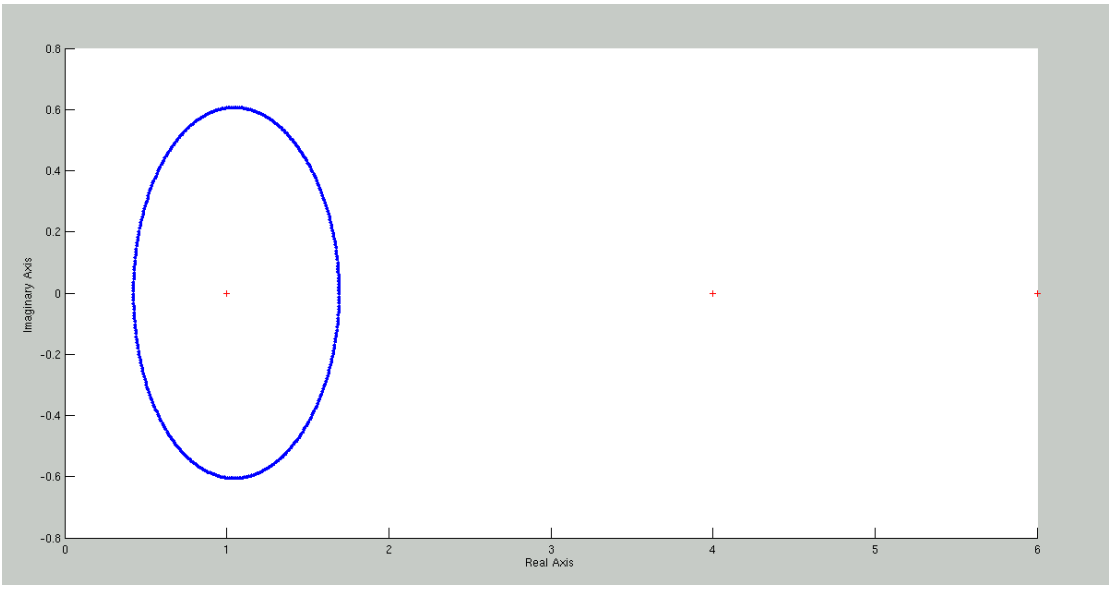
Εικόνα 7: 0.1-Ψευδοφάσμα του πίνακα A.

Χρησιμοποιώντας τώρα την ιδιοτιμή 1, εκτελούμε τη συνάρτηση άλλες τρεις φορές για $\varepsilon = 0.3$, $\varepsilon = 0.5$ και $\varepsilon = 0.7$ για $K = 250$, $K = 400$ και $K = 1900$ σημεία αντίστοιχα έτσι ώστε να ολοκληρωθούν οι καμπύλες. Ακολουθούν τα plots για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, καθώς και ένα συνδυαστικό για όλα τα ε που χρησιμοποιήθηκαν.

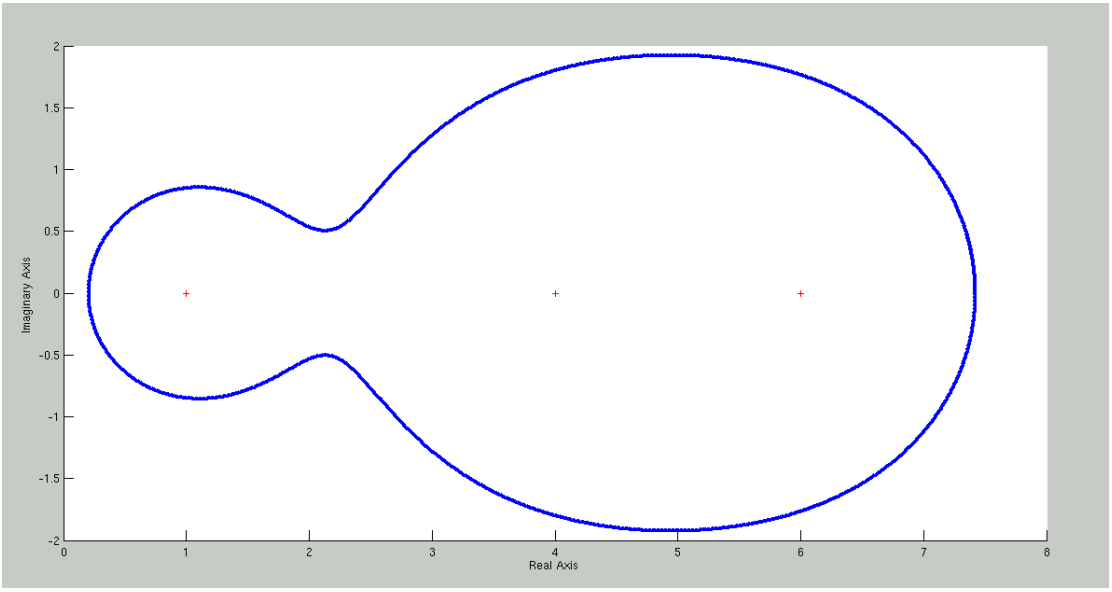
```
>> [z1,z] = pseudo(A,0.3,1,1,0.0001,250)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.5,1,1,0.0001,400)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.7,1,1,0.0001,1900)
```



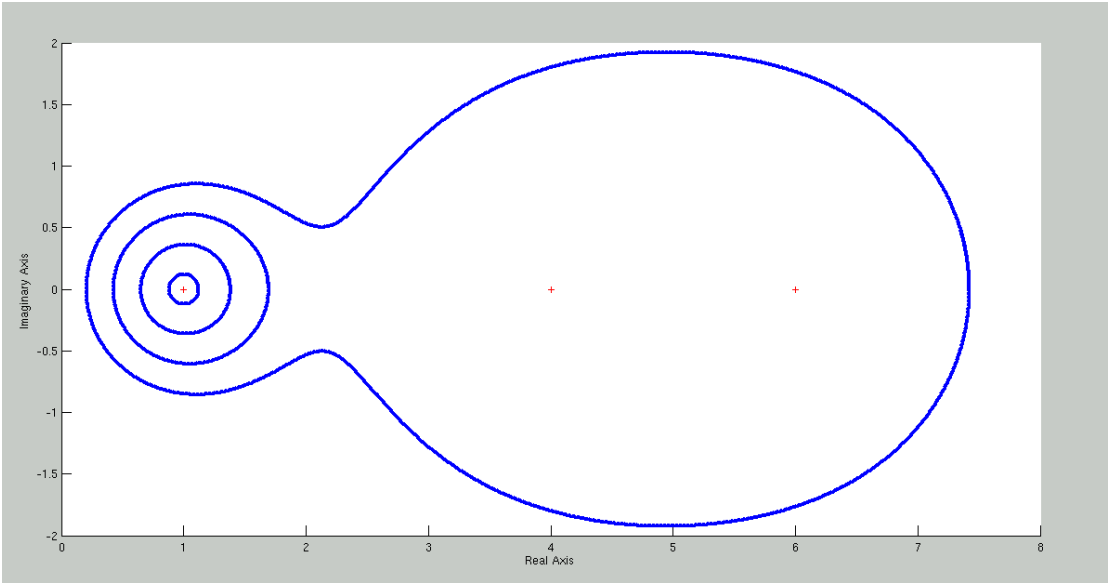
Εικόνα 8: Σύνορο περί την ιδιοτιμή 1 για $\varepsilon = 0.3$.



Εικόνα 9: Σύνορο περί την ιδιοτιμή 1 για $\varepsilon = 0.5$.



Εικόνα 10: Σύνορο περί την ιδιοτιμή 1 για $\varepsilon = 0.7$.



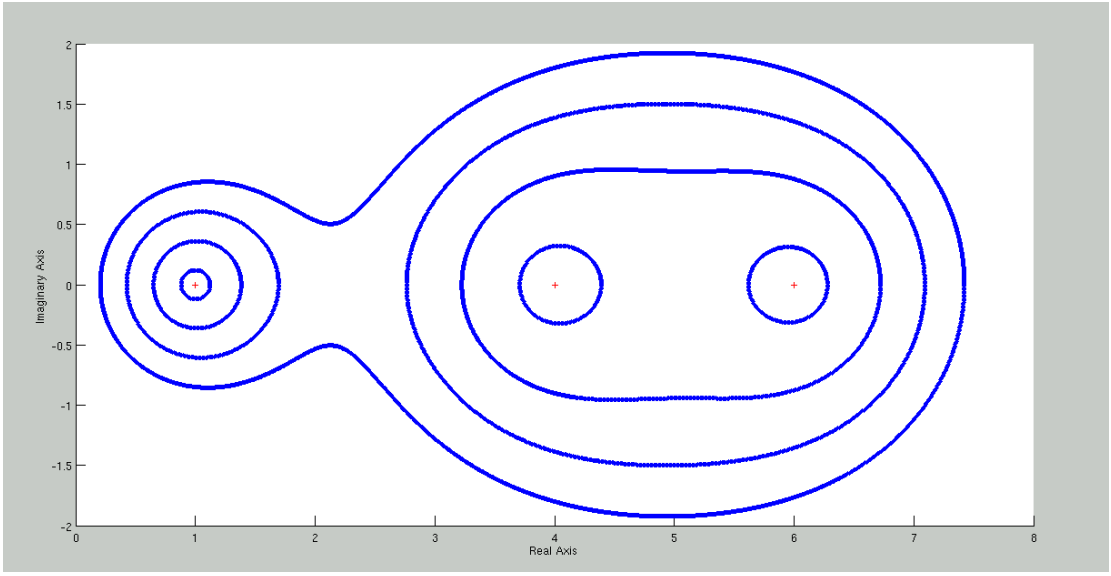
Εικόνα 11: Σύνορα περί την ιδιοτιμή 1 για $\varepsilon = 0.1,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.7$ *.(από μέσα προς τα έξω)*

Ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει τα αρχικά σημεία και τους χρόνους ολοκλήρωσης των εντολών για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

epsilon	**z1**	**elapsed time(sec)**
0.1	1.1222	0.010939
0.3	1.3828	0.023640
0.5	1.6948	0.034718
0.7	7.4224	0.148278

Παρακάτω φαίνονται τα ψευδοφάσματα του πίνακα A για τα $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$,τα οποία αυξάνονται αντίστοιχα με τα σύνορα, καθώς και οι εντολές στο Matlab.

```
>> [z1,z] = pseudo(A,0.1,1,1,0.0001,100)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.3,1,1,0.0001,250)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.5,1,1,0.0001,400)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.7,1,1,0.0001,1900)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.1,4,1,0.0001,250)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.3,4,1,0.0001,910)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.5,4,1,0.0001,2000)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.7,4,1,0.0001,3500)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.1,6,1,0.0001,300)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.3,6,1,0.0001,600)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.5,6,1,0.0001,1000)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.7,6,1,0.0001,3000)
```

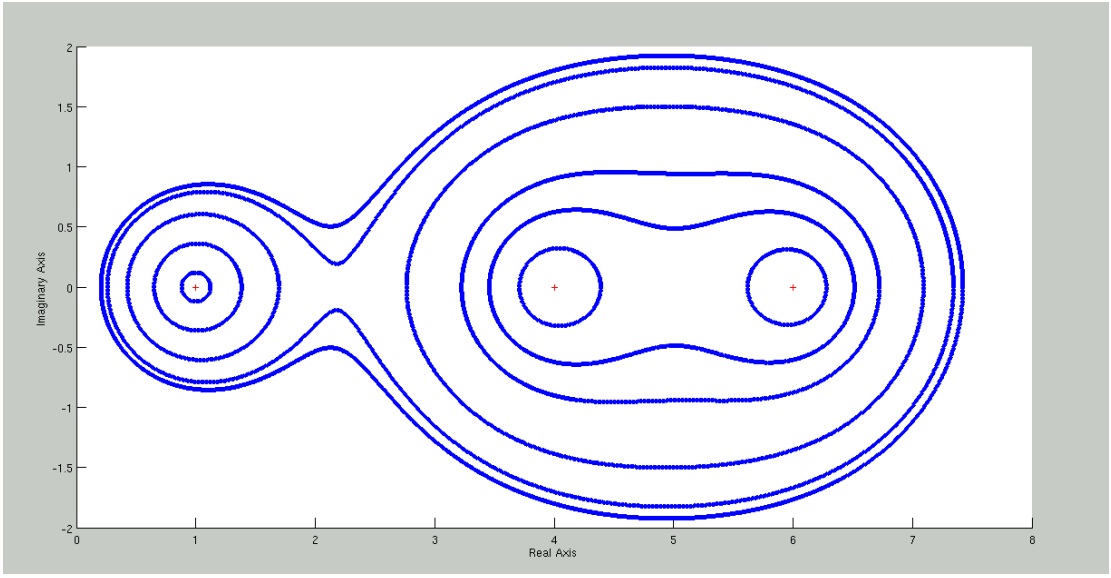


Εικόνα 12: Ψευδοφάσματα του πίνακα A για $\varepsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$.

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται αναλυτικά τα δεδομένα που προκύπτουν από την εκτέλεση των εντολών για το ψευδοφάσμα.

Ιδιοτιμές	**z1**	**elapsed time(sec)**
1		
epsilon		
0.1	1.1222	0.010939
0.3	1.2490	0.018857
0.5	1.3828	0.024697
0.7	7.4224	0.148278
4		
epsilon		
0.1	4.3904	0.128479
0.3	3.2248	0.073313
0.5	7.0922	0.154599
0.7	7.4224	0.269809
6		
epsilon		
0.1	6.2790	0.030566
0.3	6.7224	0.050486
0.5	7.0922	0.081337
0.7	7.4224	0.230837

Αν προσθέσουμε δύο ακόμα καμπύλες στο γράφημα της Εικόνας 12, εκτελώντας την pseudo μία φορά ακόμα για την ιδιοτιμή 4 με $\varepsilon = 0.2$ και για την ιδιοτιμή 6 με $\varepsilon = 0.65$ προκύπτει το γράφημα της *Εικόνας 13* που αποτυπώνει σαφώς την σύνδεση των συνόρων γύρω από τις ιδιοτιμές 4 και 6 με το σύνορο γύρω από την ιδιοτιμή 1.



Εικόνα 13: Αλληλεπίδραση μεταξύ συνόρων.

Παράδειγμα 2

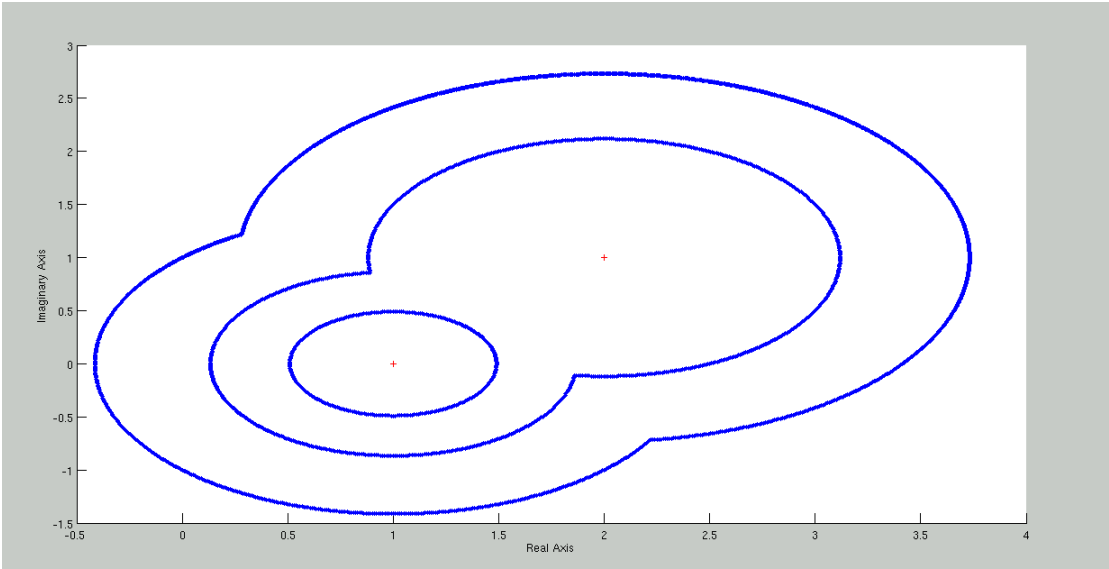
Ορίζουμε τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός επομένως οι ιδιοτιμές του είναι οι $1,\ 1,\ 2+i,\ 2+i$. Καλούμε τη συνάρτηση pseudo για την ιδιοτιμή 1 τρεις φορές με $\varepsilon = 0.2,\ 0.5,\ 1$, με αρχική διεύθυνση 1, απαιτούμενη σχετική ακρίβεια 0.0001 και $K = 350,\ 1000,\ 2000$ για το κάθε ε αντίστοιχα.

```
>> [z1,z] = pseudo(A,0.2,1,1,0.0001,350)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.5,1,1,0.0001,1000)
>> [z1,z] = pseudo(A,1,1,1,0.0001,2000)
```

Στη συνέχεια φαίνεται το γράφημα και για τα τρία ε.

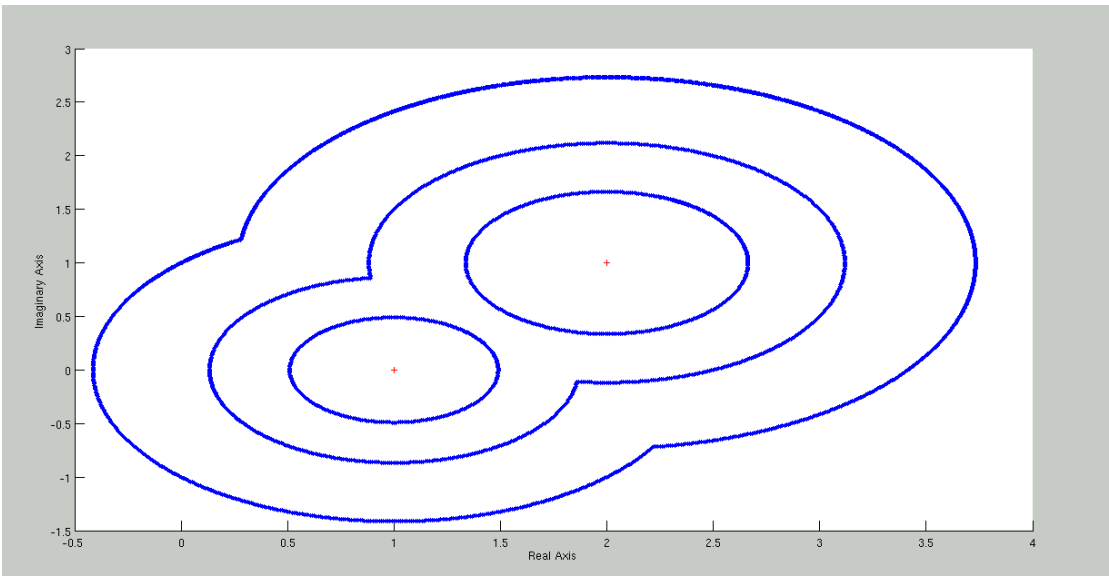


Εικόνα 14: Σύνορα γύρω από την ιδιοτιμή 1 για $\varepsilon = 0.2,\ 0.5,\ 1$.

Για τα ε-ψευδοφάσματα του πίνακα A εκτελούμε τις παρακάτω εντολές

```
>> [z1,z] = pseudo(A,0.2,1,1,0.0001,350)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.5,1,1,0.0001,1000)
>> [z1,z] = pseudo(A,1,1,1,0.0001,2000)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.2,2+i,1,0.0001,500)
>> [z1,z] = pseudo(A,0.5,2+i,1,0.0001,1000)
>> [z1,z] = pseudo(A,1,2+i,1,0.0001,800)
```

Το γράφημα για τα ψευδοφάσματα του A είναι το παρακάτω:



Εικόνα 15: Τα ε-ψευδοφάσματα του A.

Τα δεδομένα που προκύπτουν από την εκτέλεση του αλγορίθμου περιέχονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Ιδιοτιμές	**z1**	**elapsed time(sec)**
1		
epsilon		
0.2	1.4899	0.038975
0.5	0.1340	0.083627
1	3.4142	0.152857
2+i		
epsilon		
0.2	2.6633+1.0000i	0.047168
0.5	3.1180+1.0000i	0.079766
1	3.7321+1.0000i	0.116800

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Στο παρόν κεφάλαιο εφαρμόζουμε τους αλγορίθμους που περιγράψαμε προηγουμένως, σε γνωστούς πίνακες μεγάλης διάστασης και καταγράφουμε, όπου κρίνεται απαραίτητο, τα αξιοσημείωτα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από τις μεθόδους.

4.1 Πίνακας Kahan

Το επόμενο παράδειγμα που θεωρούμε είναι ο *πίνακας Kahan* διάστασης $n = 64$, ο οποίος δίνεται από

$$K_n = \begin{bmatrix} 1 & -c & -c & -c & -c \\ & s & -sc & -sc & -sc \\ & & s^2 & -s^2c & -s^2c \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & s^{n-1} \end{bmatrix},$$

όπου $s^{n-1} = 0.1$ και $s^2 + c^2 = 1$. Για να πάρουμε τον K_{64}, καλούμε στο Matlab την ακόλουθη εντολή

```
>> A=gallery('kahan',64)
```

Ο πίνακας K_{64} είναι πραγματικός και ως εκ τούτου τα ψευδοφάσματά του είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα. Στις *Εικόνα 17* και *Εικόνα 18* , απεικονίζονται τα ε-ψευδοφάσματα του K_{64} για $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ όπως υπολογίστηκαν από τις δύο διαφορετικές μεθόδους του Κεφαλαίου 3. Τα τμήματα των ψευδοφασμάτων κάτω από τον πραγματικό άξονα υπολογίστηκαν από την μέθοδο διαμέρισης χωρίου πάνω σε ομοιόμορφο πλέγμα, με πλάτος πλέγματος 0.05, ενώ στο άνω μισό επίπεδο, το σύνορο υπολογίστηκε από τον αλγόριθμο ιχνηλάτισης συνόρου με μήκος βήματος $\tau_k = \min\left\{0.1,\ \frac{1}{2} dist(z_{k-1}, \Lambda(K))\right\}$. Αυτή η αναπροσαρμοστική επιλογή του τ_k εγγυάται μια καλή προσέγγιση για το έντονα καμπύλο μέρος του συνόρου που βρίσκεται κοντά στη δεξιότερη ιδιοτιμή. Το πεδίο τιμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι το ορθογώνιο $\{z \in \mathbb{C} : -1.7 \le \operatorname{Re} z \le 1.3,\ |\operatorname{Im} z| \le 1.4\}$, από το οποίο είναι ξεκάθαρο ότι η μέθοδος διαμέρισης χωρίου χρειάζεται $61 \times 29 = 1,769$ εκτιμήσεις του $g(z) = \sigma_{\min}(zI - K_{64})$. Ο υπολογισμός των τεσσάρων συνοριακών καμπυλών στο άνω μέρος απαίτησε συνολικά 149 εκτιμήσεις.

Από τις Εικόνα 16 και Εικόνα 17 μπορεί κανείς να δει ότι οι καμπύλες για $\varepsilon = 0.001$ και $\varepsilon = 0.0001$ διαφέρουν κοντά στο δεξί τέρμα του φάσματος. Αυτό θέτει το ερώτημα της ακρίβειας μεταξύ των διαφόρων μεθόδων.

Για να εξυπηρετηθεί η ανάγκη αλλαγής του μήκους βήματος, η pseudo τροποποιήθηκε και μετονομάστηκε pseudo2 της οποίας το m-file παρατείθεται στη συνέχεια.

```
function [z1,z] = pseudo2(A,epsilon,lambda,d0,tol,K)
% pseudo2 - Curve tracing method for computing pseudospectra
% of matrix A
%
% INPUT: e>0
%   A          - matrix nxn
%   lambda0    - eigenvalue of A
%   d0         - search direction for the first point
%   tol        - relative accuracy of the first point
%   K          - number of points to be determined
% STEP 0: Computation of the first point

hold on, tic
[n,m]=size(A);
lambda0=lambda+(epsilon/10);
z1new=lambda0+(epsilon*d0);
I=eye(size(A));
snew=svd(z1new*I-A);
snewmin= min(snew);
soldmin=snewmin;
while (abs((soldmin-epsilon)/epsilon))>tol,
z1old=z1new;
sold=svd(z1old*I-A);
soldmin=min(sold);
[U,~,V]=svd(z1old*I-A);
umin=U(:,n);
vmin=V(:,m);
z1new=z1old-((soldmin-epsilon)/(real((vmin')*umin)));
end
z1=z1new;
z=zeros(1,K);
z(1,1)=z1;
r=(1i*(vmin')*umin)/(abs((vmin')*umin));
spectrum=eig(A);
for k=2:K
t(k)=min(0.1,(1/2)*norm((z(1,k-1))-spectrum,2));
zpr(k)=z(1,k-1)+t(k)*r;
skpr=svd(zpr(k)*I-A);
skprmin=min(skpr);
[Upr,~,Vpr]=svd(zpr(k)*I-A);
ukmin=Upr(:,n);
vkmin=Vpr(:,m);
zcor(k)=zpr(k)-((skprmin-epsilon)/((ukmin')*vkmin));
z(1,k)=zcor(k);
r=(1i*(vkmin')*ukmin)/(abs((vkmin')*ukmin));
```

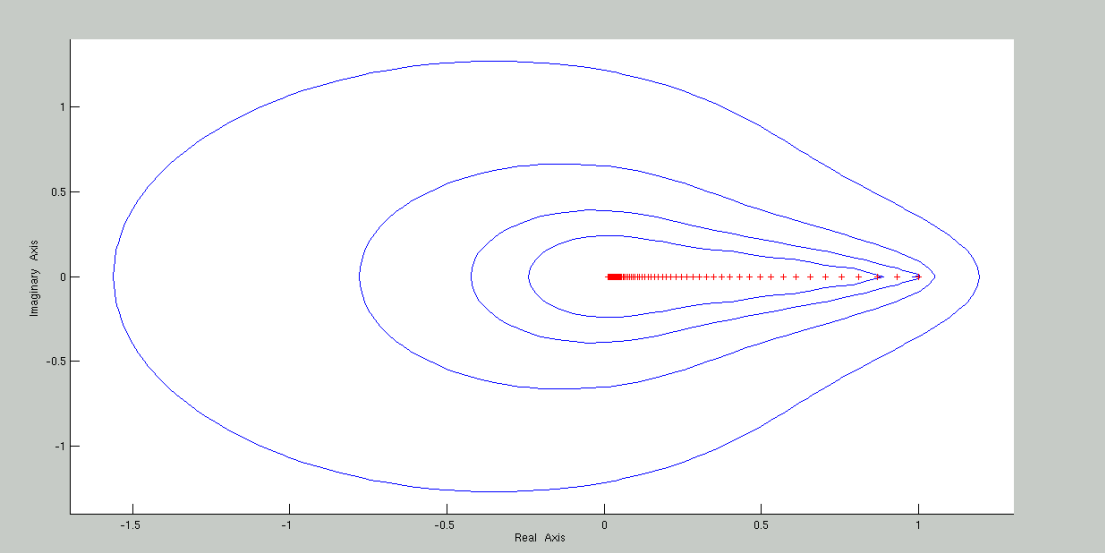
```
end
plot(real(spectrum),imag(spectrum),'r+')
ylim([-1.4,1.4])
plot(real(z),imag(z),'b.')
xlabel('Real Axis');
ylabel('Imaginary Axis');

hold off, toc
```

Αρχικά εκτελούμε την psegridA για να δούμε ολοκληρωμένα τα ε-ψευδοφάσματα του K_{64}.

>> c=psegridA(A,[0.0001,0.001,0.01,0.1],[-1.7,1.3],[-1.4,1.4],0.05,0.05)

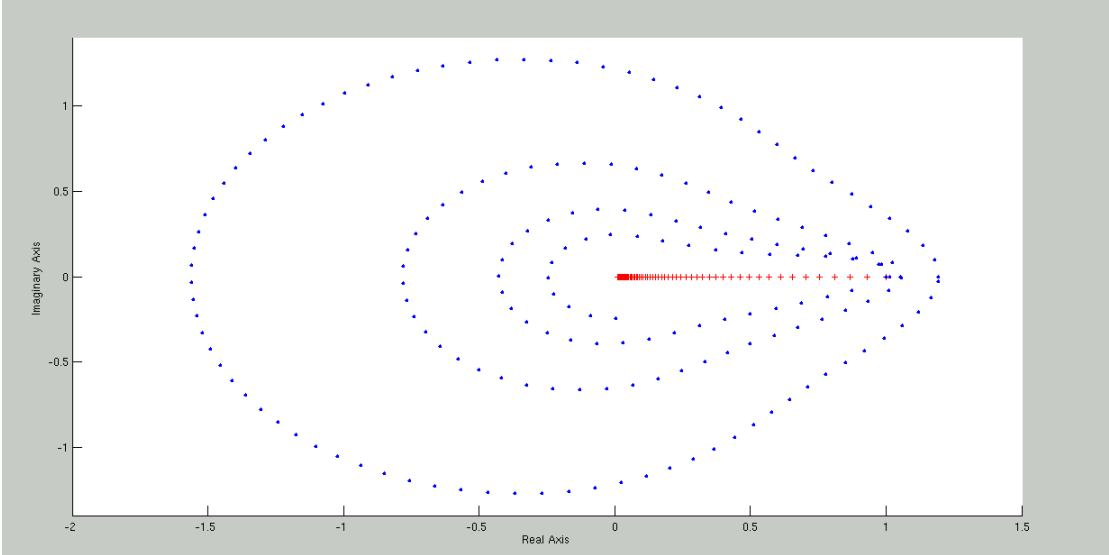
Το ακόλουθο γράφημα χρειάστηκε 3477 επαναλήψεις σε χρόνο 6.450573 δευτερόλεπτα για να ολοκληρωθεί.



Εικόνα 16: Τα ε-ψευδοφάσματα του K_{64} για $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ έτσι όπως προέκυψαν από τον αλγόριθμο διαμέρισης χωρίου.

Στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο χρησιμοποιώντας τη pseudo2 με όρια [-1.4,1.4] στον φανταστικό άξονα και την ιδιοτιμή 1. Εκτελούμε τις παρακάτω εντολές:

>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1,1,1,0.0001,82)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.01,1,1,0.0001,50)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.001,1,1,0.0001,35)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.0001,1,1,0.0001,20)



Εικόνα 17: Τα ε-ψευδοφάσματα του K_{64} για $\varepsilon = 10^{-1}$, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} έτσι όπως προέκυψαν από τον αλγόριθμο ιχνηλάτισης συνόρου.

Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τα αποτελέσματα της pseudo2 για τον K_{64}.

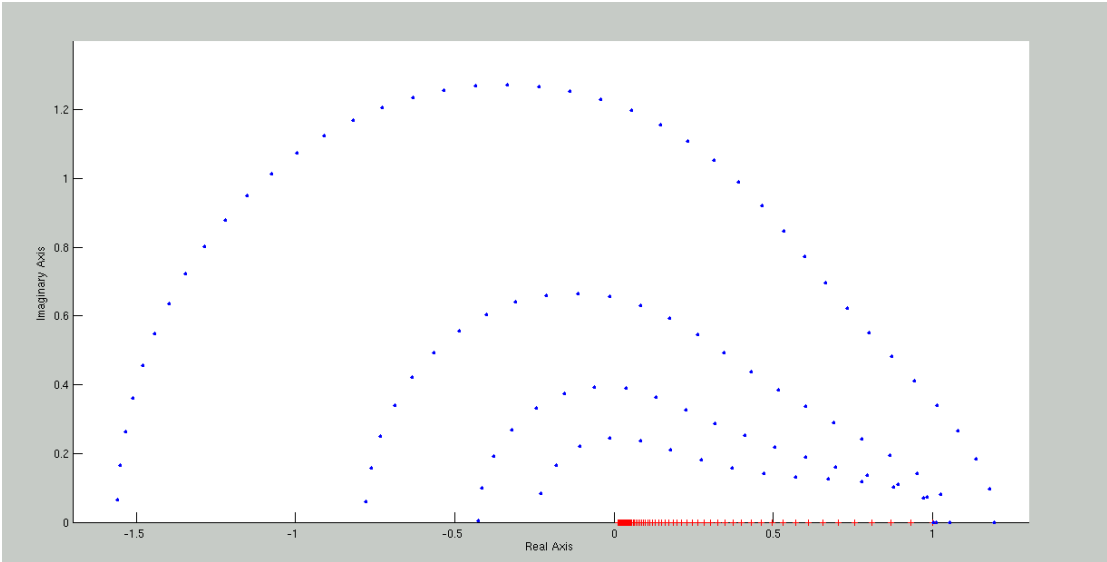
epsilon	z1	elapsed time(sec)
0.1	1.1930	0.479654
0.01	1.0525	0.440255
0.001	1.0119	0.500219
0.0001	1.0016	0.223162

Παρακάτω εκτελούμε τις δύο μεθόδους, τη pseudo2 τροποποιώντας το m-file προσθέτοντας όρια xlim([-1.7,1.3]), ylim([0,1.4]) για να μας δώσει το γράφημα στο άνω μισό του επιπέδου και τη psegridA με όρια στον φανταστικό άξονα [-1.4,0], όπως αναφέραμε πιο πάνω.

```
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1,1,1,0.0001,46)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.01,1,1,0.0001,40)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.001,1,1,0.0001,35)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.0001,1,1,0.0001,30)
```

Ο πίνακας με τα αποτελέσματα που επιστρέφονται από τις εντολές.

epsilon	z1	elapsed time(sec)
0.1	1.1930	0.263966
0.01	1.0525	0.254744
0.001	1.0119	0.223418
0.0001	1.0016	0.225608

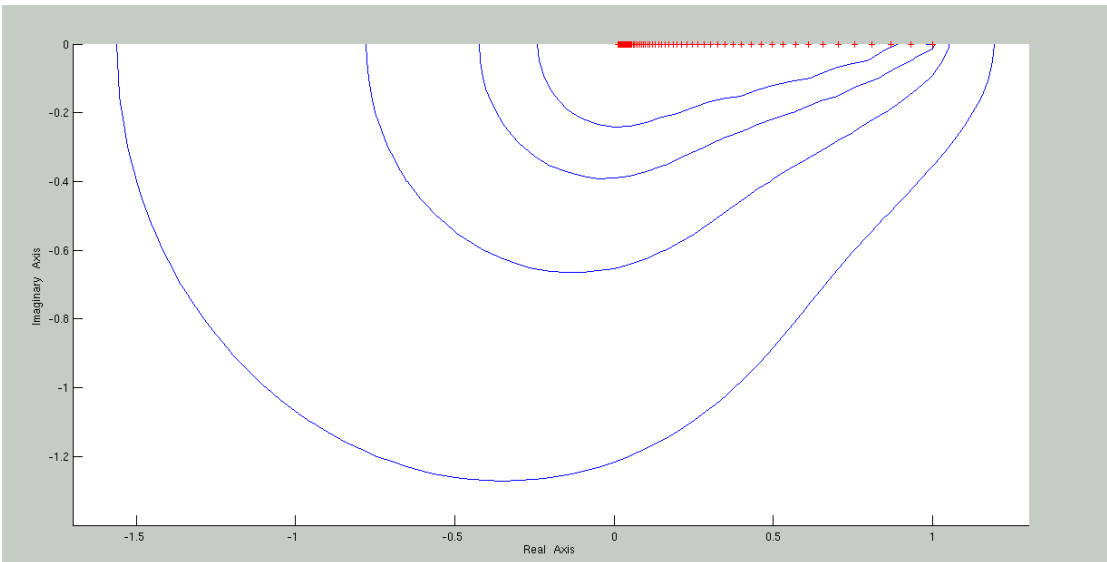


Εικόνα 18:Πάνω μισό των ε-ψευδοφασμάτων του K_{64} για $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ έτσι όπως προέκυψαν από τον αλγόριθμο ιχνηλάτισης συνόρου

Με την εκτέλεση της επόμενης εντολής προκύπτει το παρακάτω γράφημα.

>> c=psegridA(A,[0.0001,0.001,0.01,0.1],[-1.7,1.3],[-1.4,0],0.05,0.05)

Η διαδικασία ολοκληρώθηκε σε 3.552974 δευτερόλεπτα και έδωσε 1769 σημεία.



Εικόνα 19: Κάτω μισό των ε-ψευδοφασμάτων του K_{64} για $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ έτσι όπως προέκυψαν από τον αλγόριθμο διαμέρισης χωρίου.

4.2 Πίνακας Frank

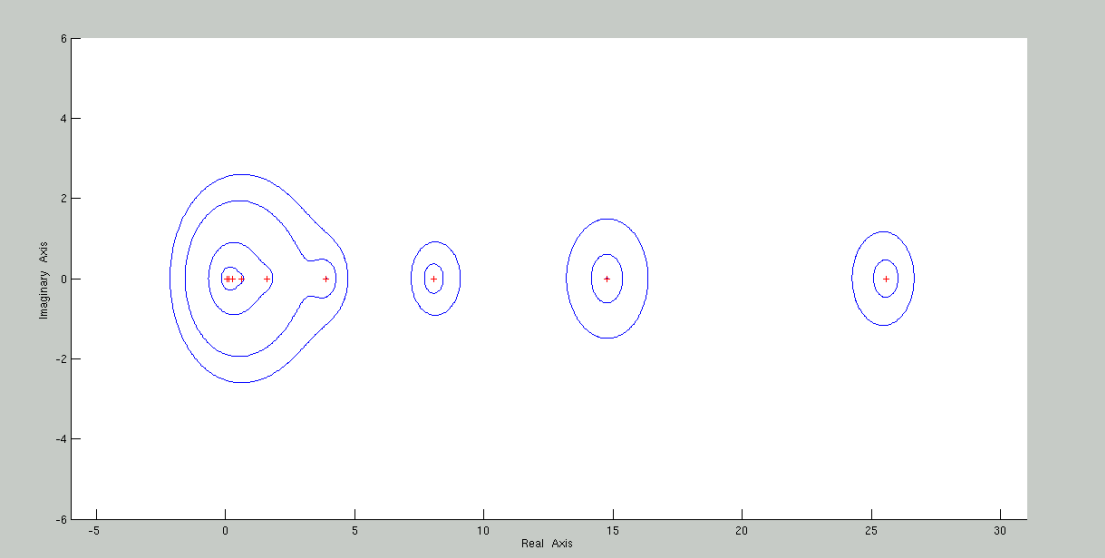
Ορίζουμε τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

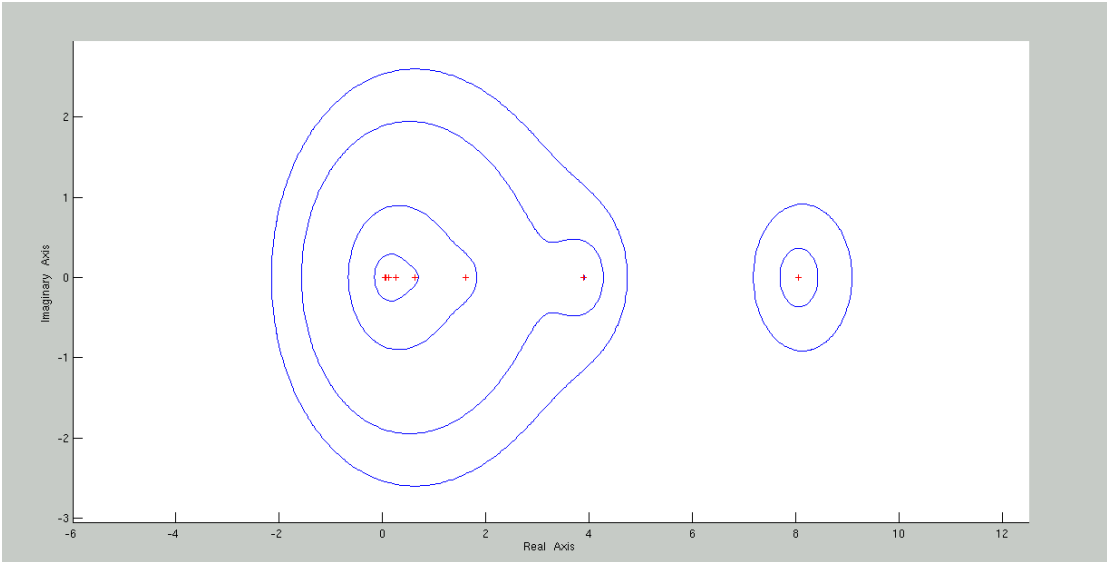
Αρχικά εκτελούμε την psegridA για $\varepsilon = 0.0001,\ 0.01,\ 0.2,\ 0.5$ και διαστάσεις πλέγματος 0.05×0.05. Στη συνέχεια παρατίθεται η εντολή για την κλήση της συνάρτησης όπως και το γράφημα με τα ε-ψευδοφάσματα του A.

>> c=psegridA(A,[0.0001,0.01,0.2,0.5],[-6,31],[-6,6],0.05,0.05)

Η διαδικασία ολοκληρώθηκε σε 9.242318 δευτερόλεπτα και έδωσε 178581 σημεία στο πλέγμα.



Εικόνα 20: Τα ε-ψευδοφάσματα του A για $\varepsilon = 0.0001,\ 0.01,\ 0.2,\ 0.5$ και το φάσμα του.

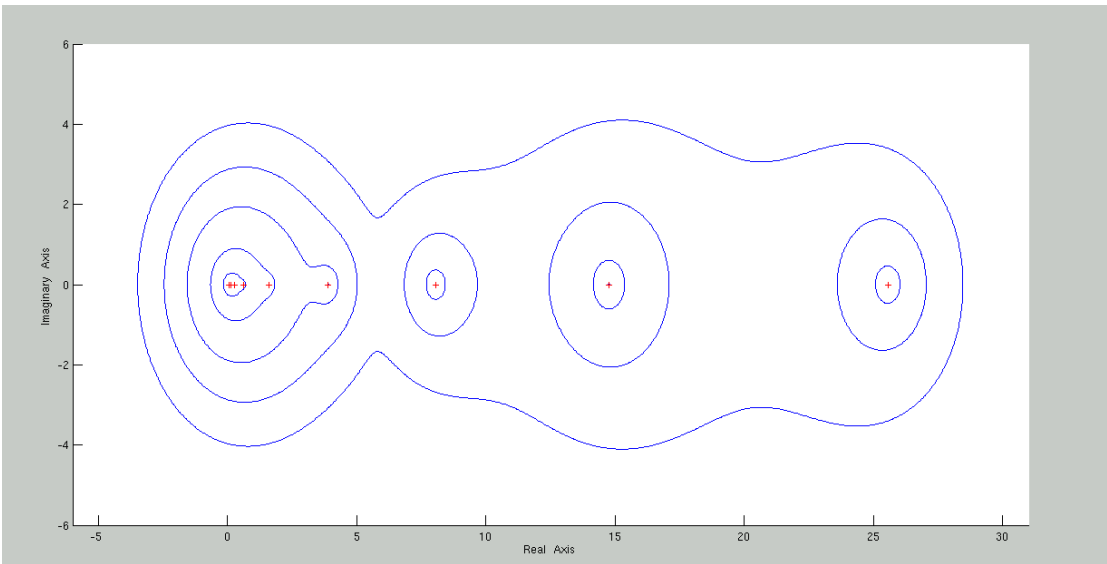


Εικόνα 21: Τα σύνορα που περικλείουν τις 7 από τις 10 ιδιοτιμές του πίνακα A, στο αριστερό μέρος των ε-ψευδοφασμάτων της Εικόνας 20.

Συνεχίζουμε προσθέτοντας δύο ακόμα τιμές στο διάνυσμα των ε, 0.7 και 1.5, για να επιτύχουμε ένα γράφημα των ψευδοφασμάτων του πίνακα που περικλείει το σύνολο του φάσματος.

>> c=psegridA(A,[0.0001,0.01,0.2,0.7,1.5],[-6,31],[-6,6],0.05,0.05)

Η παραπάνω εντολή δίνει το γράφημα σε 9.323670 δευτερόλεπτα και χρησιμοποιεί 178581 σημεία στο πλέγμα.



Εικόνα 22: Τα ε-ψευδοφάσματα του A για $\varepsilon = 0.0001,\ 0.01,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.7,\ 1.5$.

Για τον ίδιο πίνακα Frank εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο ιχνηλάτισης συνόρου και τη συνάρτηση pseudo2, τροποποιώντας το m-file έτσι ώστε στον φανταστικό άξονα να κινηθούμε στο διάστημα $[-6,6]$ όπως έχει γίνει στο γράφημα της psegridA. Πριν καλέσουμε τη συνάρτηση, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το φάσμα του A.

>> **eig(A)**

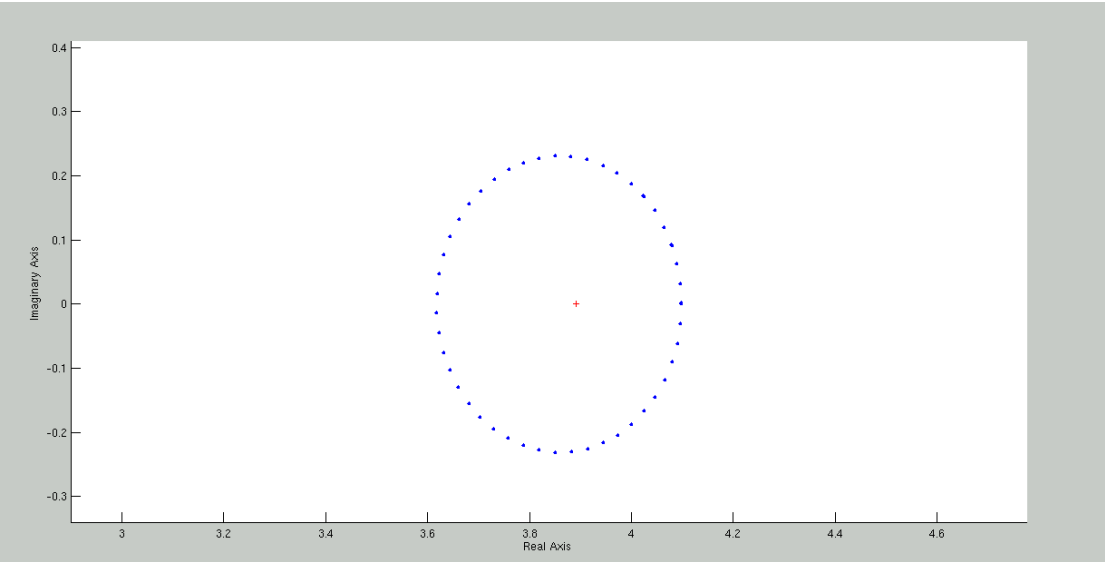
Η εντολή αυτή δίνει το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A.

Ιδιοτιμές του A
25.5753
14.7617
8.0476
3.8922
1.6166
0.6186
0.0391
0.0677
0.1243
0.2569

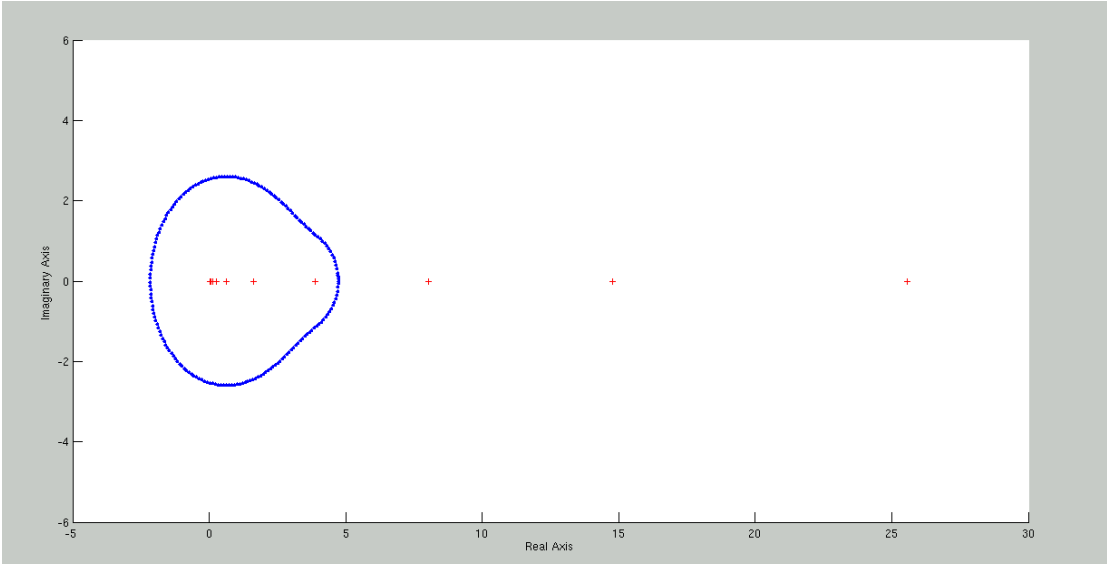
Επιλέγουμε την ιδιοτιμή 3.8922 και καλούμε τη pseudo2 για $\varepsilon = 0.1,\ 0.5,\ 1,\ 2$.

>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1,3.8922,1,0.0001,50)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.5,3.8922,1,0.0001,190)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,3.8922,1,0.0001,240)
>> [z1,z] = pseudo2(A,2,3.8922,1,0.0001,800)

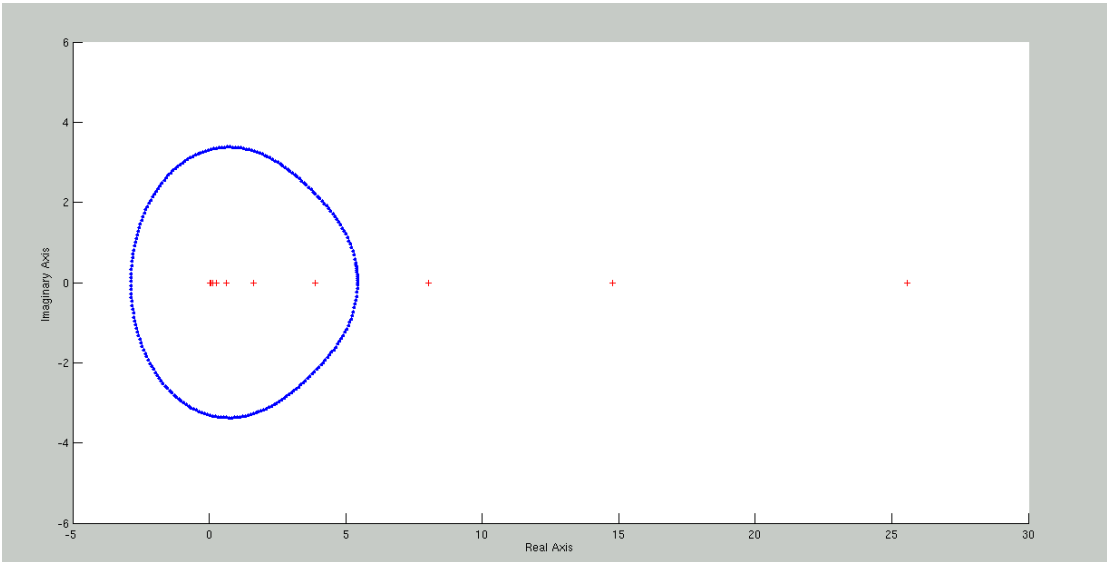
Ακολουθούν τα γραφήματα για κάθε ε ξεχωριστά και ένα συνδυαστικό για όλα τα ε.



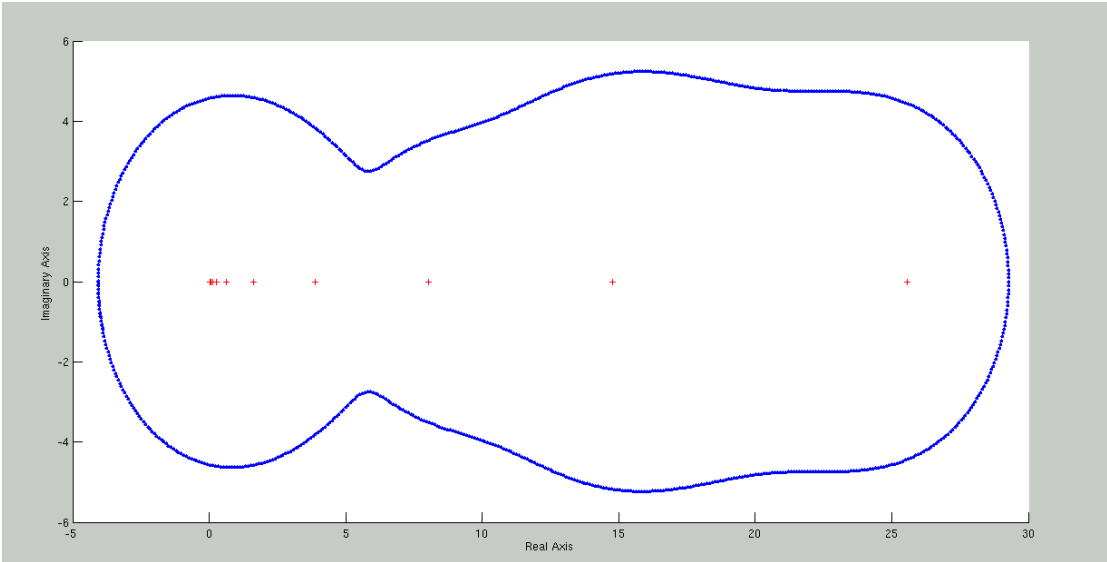
Εικόνα 23: Το σύνορο για ε=0.1.



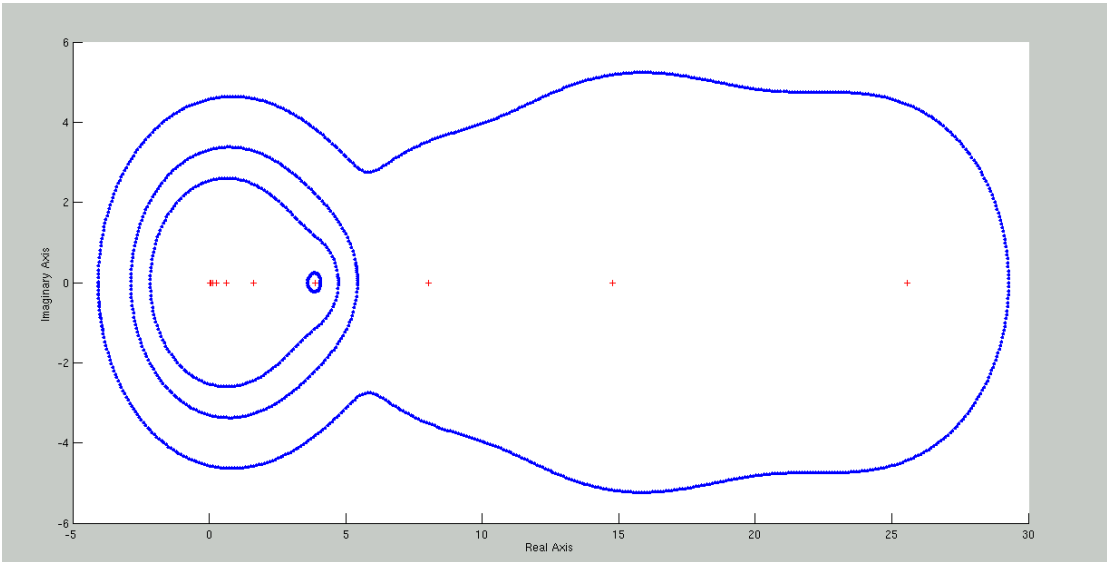
Εικόνα 24: Το σύνορο για ε=0.5.



Εικόνα 25: Το σύνορο για ε=1.



Εικόνα 26: Το σύνορο για ε=2.



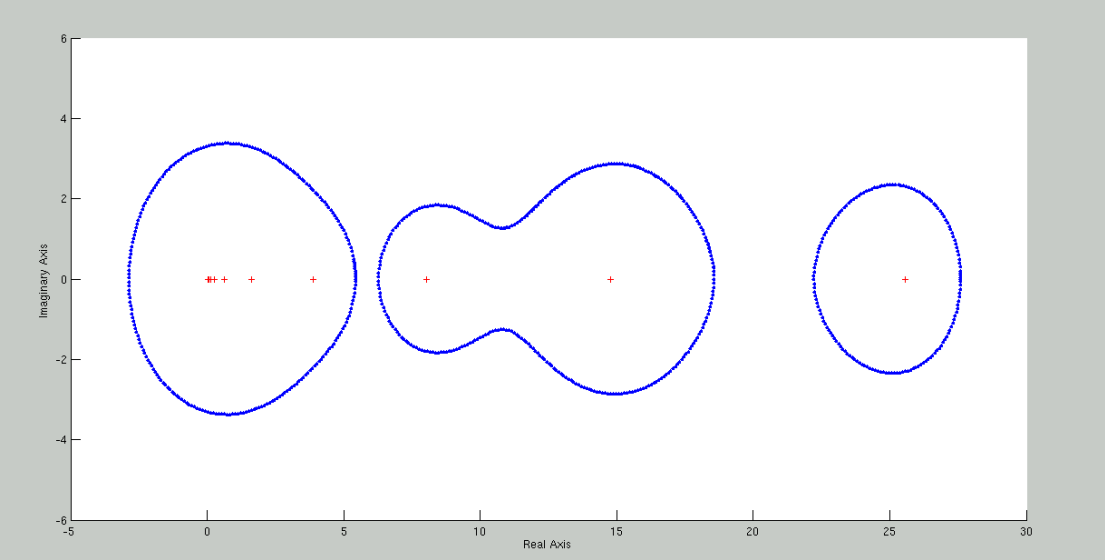
Εικόνα 27: Τα σύνορα που περικλείουν την ιδιοτιμή 1 για τα δεδομένα ε.

Ακολουθεί πίνακας με τα αποτελέσματα της μεθόδου.

epsilon	**z1**	**elapsed time**
0.1	4.0985	0.014557
0.5	4.7370	0.039173
1	5.4399	0.048043
2	-4.0591	0.153034

Έπειτα, κάνοντας δοκιμές στο Matlab, με σκοπό να βρούμε το 1-ψευδοφάσμα του πίνακα A, διαπιστώνουμε ότι τα σύνορα γύρω από κάποιες ιδιοτιμές αλληλοεπικαλύπτονται. Οπότε αρκεί να εκτελέσουμε τις τρεις πρώτες εντολές που ακολουθούν, για να ολοκληρωθεί το 1-ψευδοφάσμα.

>> [z1,z] = pseudo2(A,1,8.0476,1,0.0001,160)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,3.8922,1,0.0001,240)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,1.6166,1,0.0001,320)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,0.6186,1,0.0001,180)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,0.2569,1,0.0001,250)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,0.1243,1,0.0001,180)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,0.0677,1,0.0001,160)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,0.0391,1,0.0001,160)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,14.7617,1,0.0001,400)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,25.5753,1,0.0001,160)



Εικόνα 28: Το 1-ψευδοφάσμα του πίνακα A.

Παραθέτουμε πίνακα με τα αποτελέσματα της μεθόδου.

Ιδιοτιμές	**z1**	**elapsed time**
1.6166	6.2821	0.067071
3.8922	5.4399	0.047902
8.0476	27.6037	0.039034

Τώρα για τον πίνακα που ορίσαμε, όπως κάναμε και προηγουμένως, θα κάνουμε μια γραφική σύγκριση των δύο αλγορίθμων. Εφαρμόζουμε τις συναρτήσεις για $\varepsilon = 0.1,\ 0.5,\ 1,\ 2$, την psegrid στο διάστημα [-6,0] του φανταστικού άξονα και την pseudo2 στο [0,6] θέτοντας στο m-file ylim([0,6]) και xlim([-6,31]).

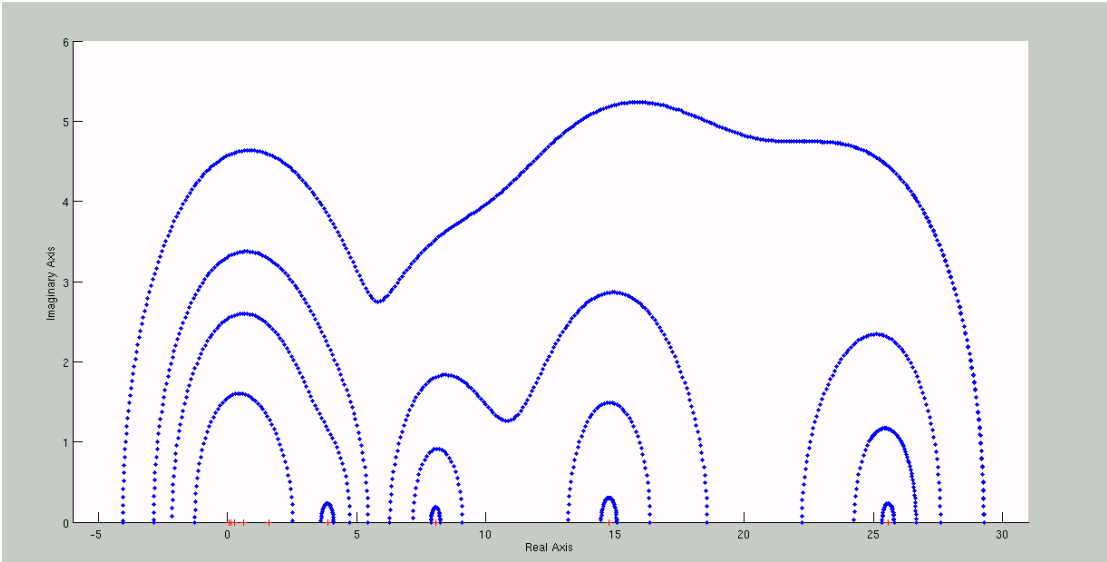
Οι εντολές που εκτελέστηκαν για τη μέθοδο ιχνηλάτισης συνόρου είναι:

>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1,3.8922,1,0.0001,50)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.5,3.8922,1,0.0001,130)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,3.8922,1,0.0001,120)
>> [z1,z] = pseudo2(A,2,3.8922,1,0.0001,800)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1,8.0476,1,0.0001,50)

```
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.5,8.0476,1,0.0001,50)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,8.0476,1,0.0001,100)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.5,25.5753,1,0.0001,50)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,25.5753,1,0.0001,100)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1,14.7617,1,0.0001,200)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1,14.7617,1,0.0001,50)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.5,14.7617,1,0.0001,50)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1,0.1243,1,0.0001,150)
```

Τα αποτελέσματα των εντολών φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Ιδιοτιμές	**z1**	**elapsed time(sec)**
0.1243		
epsilon		
0.1	-1.2689	0.031539
3.8922		
epsilon		
0.1	4.0985	0.014170
0.5	4.7370	0.028048
1	5.4399	0.025738
2	-4.0591	0.150851
8.0476		
epsilon		
0.1	8.2337	0.013716
0.5	9.0875	0.014774
1	27.6037	0.024845
14.7617		
epsilon		
0.1	15.0659	0.013839
0.5	16.3537	0.014051
1	18.5703	0.042918
25.5753		
epsilon		
0.5	26.6539	0.013654
1	27.6037	0.024200

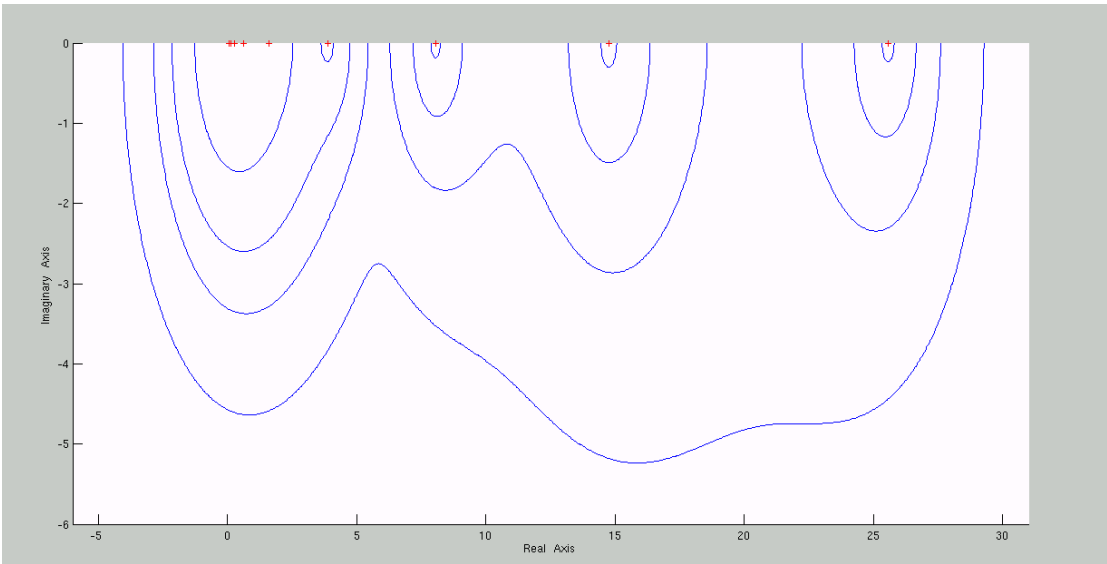


Εικόνα 29: Πάνω μισό ε-ψευδοφασμάτων του πίνακα Frank έτσι όπως υπολογίστηκαν από τον Αλγόριθμο Ιχνηλάτισης Συνόρου.

Για την μέθοδο διαμέρισης δεδομένου χωρίου εκτελούμε την εντολή,

>> c=psegridA(A,[0.1,0.5,1,2],[-6,31],[-6,0],0.05,0.05)

και λαμβάνουμε 89661 σημεία σε 4.706444 δευτερόλεπτα.



Εικόνα 30: Κάτω μισό των ε-ψευδοφασμάτων του πίνακα Frank έτσι όπως υπολογίστηκαν από τον Αλγόριθμο Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου.

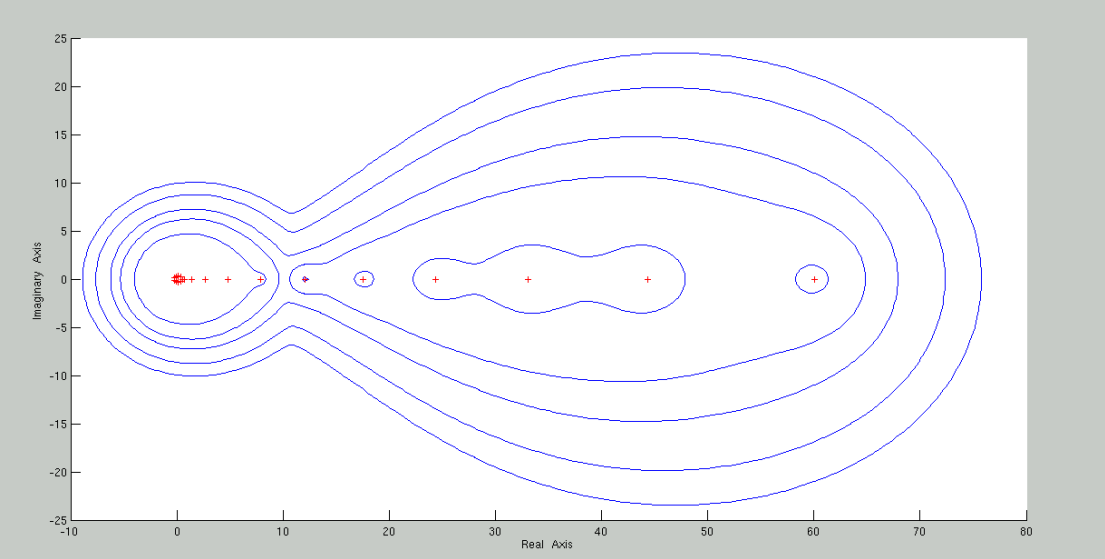
Ας θεωρήσουμε έναν ακόμα πίνακα Frank διάστασης 20×20. Εκτελούμε στο Matlab την εντολή:

>> A = gallery('frank',20)

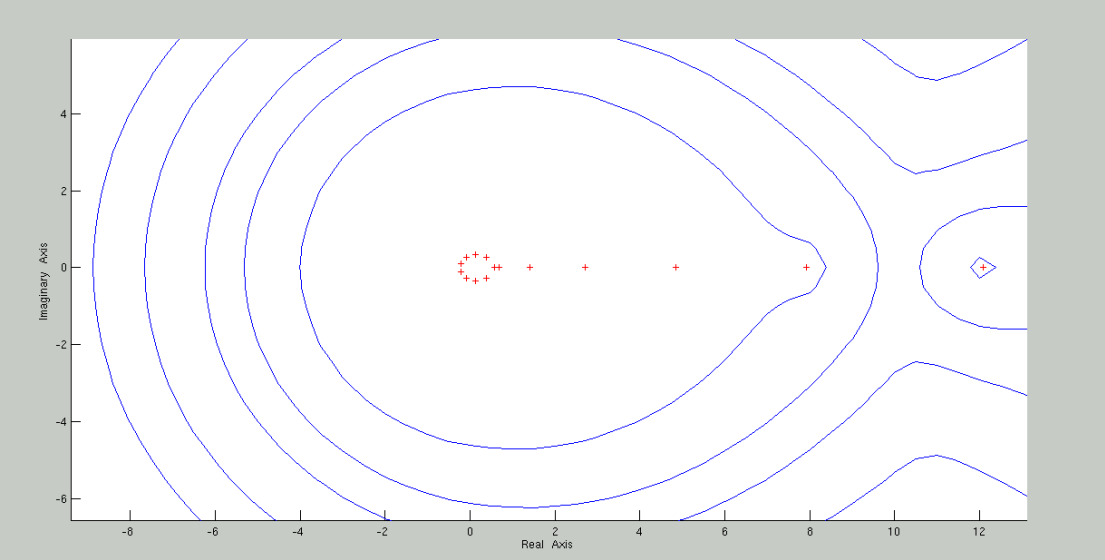
Στη συνέχεια καλούμε τη συνάρτηση psegridA για $\varepsilon = 0.1,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 3$ και διαστάσεις πλέγματος 0.5×0.5.

>> c=psegridA(A,[0.1,0.5,1,2,3],[-10,80],[-25,25],0.5,0.5)

Η διαδικασία ολοκληρώνεται σε 2.671808 δευτερόλεπτα και βρίσκει 18281 σημεία στο πλέγμα. Παρακάτω βλέπουμε τα ε-ψευδοφάσματα γραφικά.



Εικόνα 31: Τα ε-ψευδοφάσματα του πίνακα Frank έτσι όπως προέκυψαν από τον Αλγόριθμο Διαμέρισης Χωρίου.

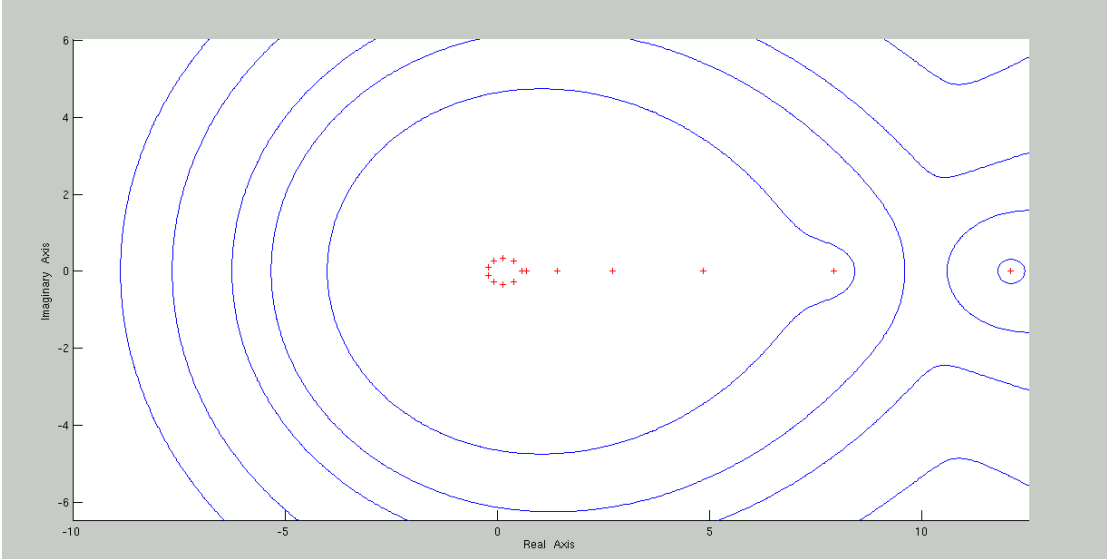


Εικόνα 32: Οι 10 ιδιοτιμές του πίνακα συγκεντρώνονται γύρω από το 0. Οι αδρές κορυφές στο γράφημα, (στις δύο δεξιότερες ιδιοτιμές) οφείλονται στη διαμέριση του πλέγματος.

Στη συνέχεια μικραίνουμε τις διαστάσεις του πλέγματος σε 0.1×0.1.

>> c=psegridA(A,[0.1,0.5,1,2,3],[-10,80],[-25,25],0.05,0.05)

Ο χρόνος που χρειάστηκε για την εκτέλεση της εντολής ήταν 257.466760 δευτερόλεπτα κι έδωσε 1802801 σημεία γεγονός που δείχνει τη λεπτομερέστερη απόδοση στα ψευδοφάσματα.



Εικόνα 33: Η αλλαγή στις διαστάσεις του πλέγματος σε 0.1×0.1 *έδωσε μεγαλύτερη ακρίβεια στην απεικόνιση των καμπυλών.*

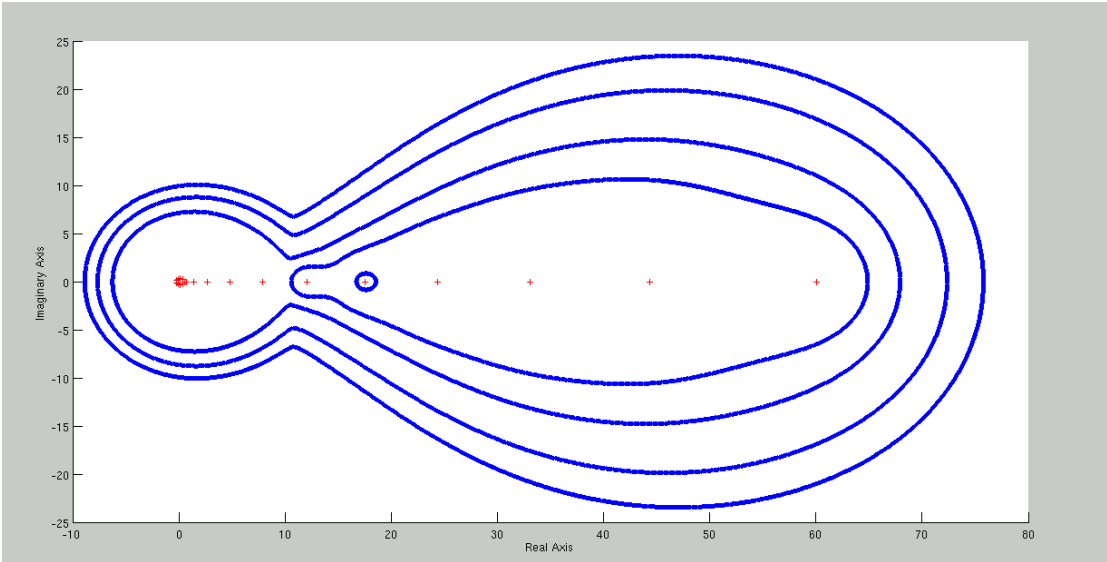
Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη pseudo2 για να βρούμε τα σύνορα που περικλείουν την ιδιοτιμή 4.8392 για $\varepsilon = 0.1, 0.5, 1, 2, 3$ με την μέθοδο ιχνηλάτησης καμπύλης.

>> **eig(A)**

Η εντολή αυτή δίνει τις 20 ιδιοτιμές του πίνακα A που είναι απαραίτητες για την εφαρμογή της μεθόδου.

Ιδιοτιμές			
60.0332	12.0871	-0.2163 + 0.1003i	0.1271 - 0.3348i
44.3652	7.9187	-0.2163 - 0.1003i	0.3779 + 0.2629i
33.0921	4.8392	-0.0911 + 0.2662i	0.3779 - 0.2629i
24.3752	2.7201	-0.0911 - 0.2662i	0.6876
17.4977	1.4124	0.1271 + 0.3348i	0.5762

>> [z1,z] = pseudo2(A,1,4.8392,1,0.0001,2000)
>> [z1,z] = pseudo2(A,2,4.8392,1,0.0001,2000)
>> [z1,z] = pseudo2(A,3,4.8392,1,0.0001,3500)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.5,4.8392,1,0.0001,1500)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1, 4.8392 ,1,0.0001,500)



Εικόνα 34: Σύνορα που περικλείουν την ιδιοτιμή 4.8392.

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα των εντολών.

epsilon	z1	elapsed time
1	-6.2504	1.284536
2	72.3489	0.980041
3	-8.8746	1.691324
0.5	64.8732	0.766024
0.1	16.7219	0.273134

4.3 Πίνακας Redheffer

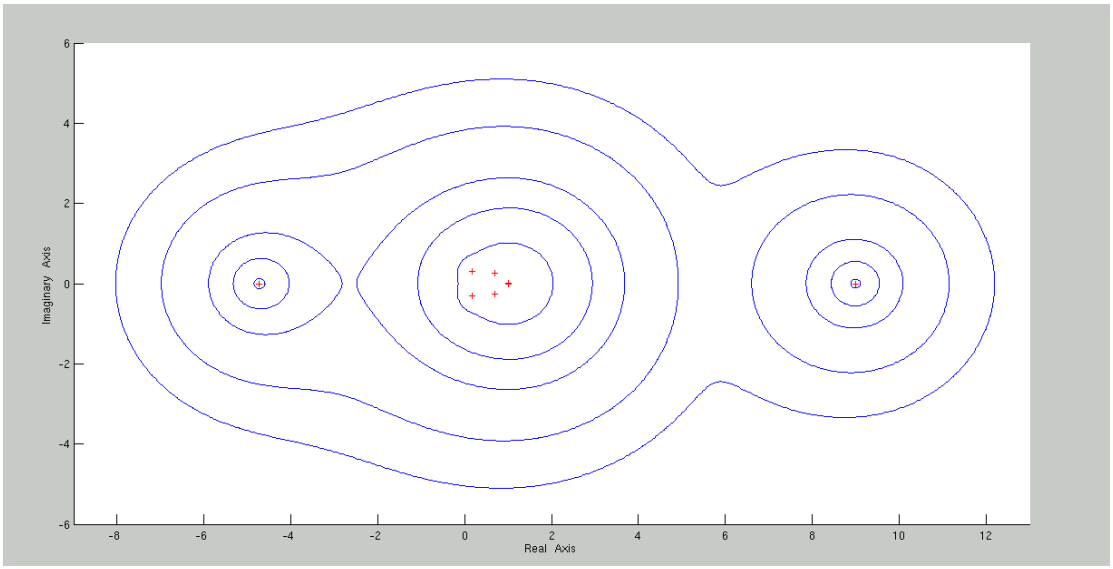
Θεωρούμε τον πίνακα Redheffer 50×50 με χρήση της εντολής του Matlab,

>> A=gallery('redheff',50)

η οποία επιστρέφει ένα τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία 0 και 1 με την ιδιότητα $A(i,j)=1$, αν $j=1$ ή αν i διαιρεί το j αλλιώς $A(i,j)=0$. Καλούμε τη συνάρτηση psegridA με διαστάσεις πλέγματος 0.05×0.05 και για $\varepsilon = 0.1,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 3$.

>> c=psegridA(A,[0.1,0.5,1,2,3],[-9,13],[-6,6],0.05,0.05)

Η psegridA έδωσε 106281 σημεία σε 123.364473 δευτερόλεπτα.



Εικόνα 35: Τα ε-ψευδοφάσματα του πίνακα A για $\varepsilon = 0.1,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 3$.

Για τη μέθοδο ιχνηλάτισης καμπύλης βρίσκουμε αρχικά τις ιδιοτιμές του A.

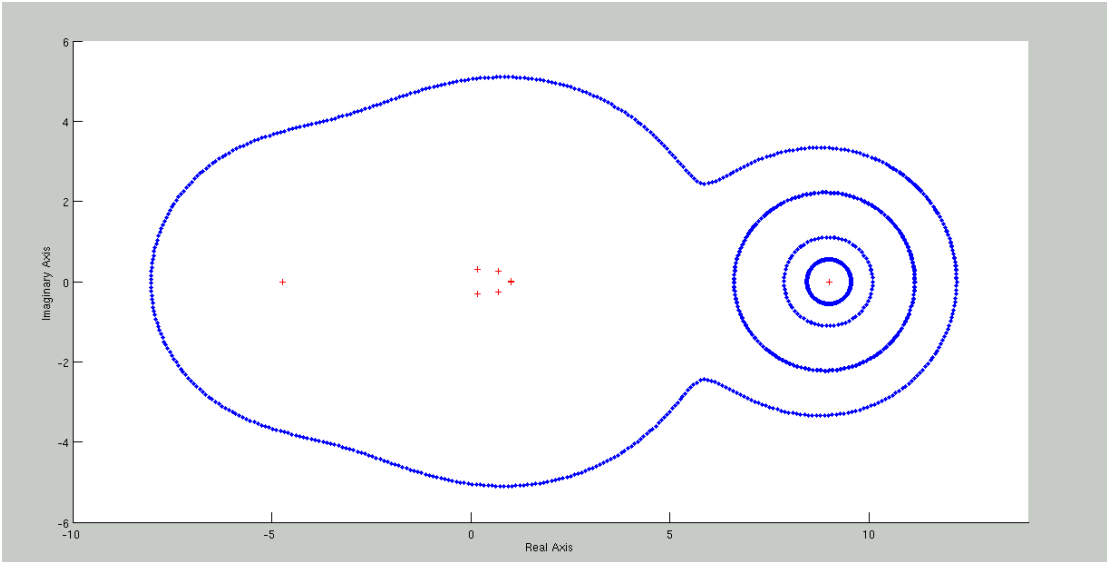
>> **eig(A)**

Η εντολή επιστρέφει 50 ιδιοτιμές.

Ιδιοτιμές				
9.0004	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
-4.7234	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1646 + 0.3152i	1.0000	1.0000 + 0.0000i	1.0000	1.0000
0.1646 - 0.3152i	1.0000	1.0000 - 0.0000i	1.0000	1.0000
0.6969 + 0.2693i	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.6969 - 0.2693i	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000 + 0.0000i	1.0000	1.0000 + 0.0000i	1.0000	1.0000
1.0000 - 0.0000i	1.0000	1.0000 - 0.0000i	1.0000	1.0000
1.0000 + 0.0000i	1.0000 + 0.0000i	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000 - 0.0000i	1.0000 - 0.0000i	1.0000	1.0000	1.0000

Εκτελούμε την pseudo2 για να βρούμε τα σύνορα γύρω από την ιδιοτιμή 9.0004.

>> **[z1,z] = pseudo2(A,0.1,9.0004,1,0.0001,500)**
>> **[z1,z] = pseudo2(A,0.5,9.0004,1,0.0001,500)**
>> **[z1,z] = pseudo2(A,1,9.0004,1,0.0001,500)**
>> **[z1,z] = pseudo2(A,2,9.0004,1,0.0001,300)**
>> **[z1,z] = pseudo2(A,3,9.0004,1,0.0001,500)**



Εικόνα 36: Σύνορα που περικλείουν την ιδιοτιμή 9.0004.

Ακολουθεί πίνακας με τα αποτελέσματα της μεθόδου.

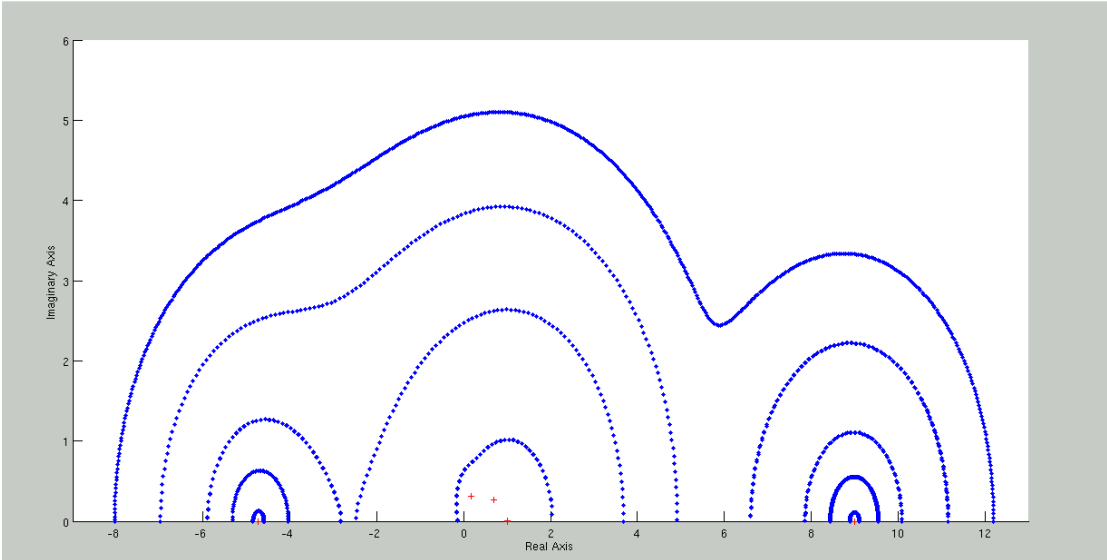
epsilon	z1	elapsed time
0.1	9.1110	1.859066
0.5	9.5494	1.804628
1	10.0900	1.817584
2	11.1537	0.977312
3	12.2015	1.176581

Τέλος, όπως ακριβώς κάναμε στον πίνακα Kahan, εκτελούμε τις δύο μεθόδους, ώστε το γράφημα στο διάστημα [0,6] του φανταστικού άξονα να αντιστοιχεί στον Αλγόριθμο Ιχνηλάτισης Συνόρου και το γράφημα στο διάστημα [-6,0], στον Αλγόριθμο Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου.

>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1, -4.7234,1,0.0001,100)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.5, -4.7234,1,0.0001,100)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1, -4.7234,1,0.0001,200)
>> [z1,z] = pseudo2(A,2, -4.7234,1,0.0001,350)
>> [z1,z] = pseudo2(A,3, -4.7234,1,0.0001,600)
>> [z1,z] = pseudo2(A,1, 1,1,0.0001,100)
>> [z1,z] = pseudo2(A,0.1,0.6969 + 0.2693i,1,0.0001,100)

Στον πίνακα που ακολουθεί περιέχονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των εντολών.

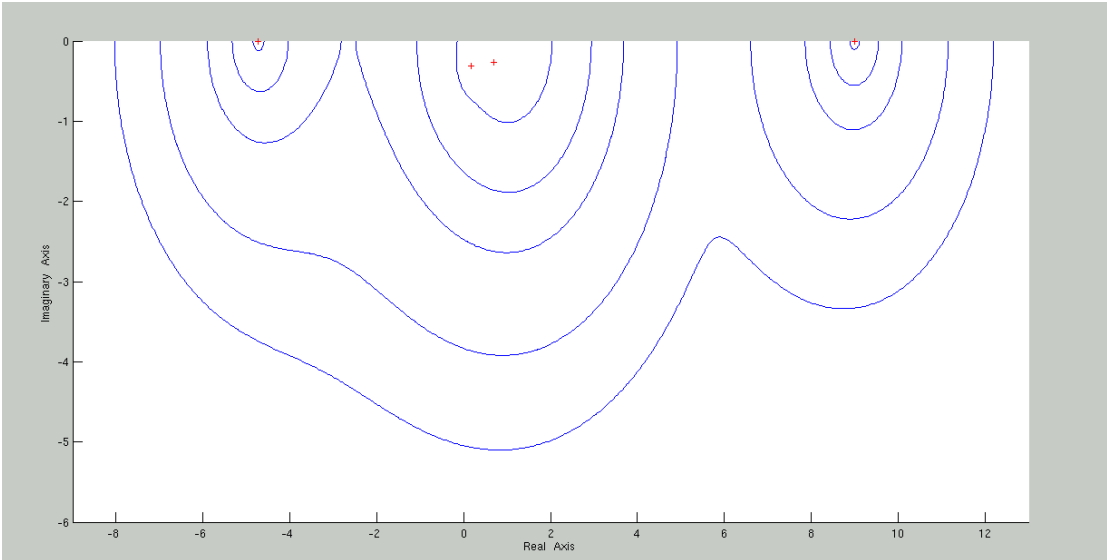
Ιδιοτιμές	z1	elapsed time(sec)
-4.7234		
epsilon		
0.1	-4.5957	0.551172
0.5	-4.0392	0.345894
1	-2.8218	0.830743
2	-6.9807	1.276713
1		
epsilon		
1	3.6844	0.354638
0.6969 + 0.2693i		
epsilon		
0.1	2.0038 + 0.2693i	0.333812



Εικόνα 37: Τα πάνω μισά ε-ψευδοφάσματα του πίνακα Redheffen έτσι όπως υπολογίστηκαν από τον Αλγόριθμο Ιχνηλάτισης Συνόρου.

>> **c=psegridA(A,[0.1,0.5,1,2,3],[-9,13],[-6,0],0.05,0.05)**

Η διαδικασία ολοκληρώνεται σε 59.177665 δευτερόλεπτα και δίνει 53361 σημεία.



Εικόνα 38: Τα κάτω μισά ε-ψευδοφάσματα του πίνακα Redheffen όπως προέκυψαν από τον Αλγόριθμο Διαμέρισης Δεδομένου Χωρίου.

Όπως διαπιστώσαμε στο σύνολο της εργασίας, είναι στη φύση της μεθόδου ιχνηλάτισης συνόρου ότι μόνο ένα μέρος του $\partial\Lambda_\varepsilon$ θα υπολογιστεί, δηλαδή το μέρος που περικλείει την αρχική ψευδοϊδιοτιμή λ_0. Σε αυτή την περίπτωση δεν αντιμετωπίζουμε πολύ σοβαρό πρόβλημα˙ τα διαφορετικά μέρη των ψευδοφασμάτων μπορούν να βρεθούν επανεκκινώντας τη διαδικασία για κατάλληλες αρχικές παραμέτρους λ_0. Ωστόσο, είναι αναγκαίο να τονιστεί ότι δεν είναι πάντα σαφής ο αριθμός των συνιστωσών από τις οποίες αποτελείται το ε-ψευδοφάσμα. Το χαρακτηριστικό αυτό αληθεύει περισσότερο για τους πολύ μεγάλους πίνακες για τους οποίους δεν είναι γνωστό με ακρίβεια το φάσμα τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Generalizing Eigenvalue Theorems to Pseudospectra Theorems, Mark Embree - Lloyd N. Trefethen, 2000.

2. A Curve Tracing Algorithm for Computing the Pseudospectrum, Martin Brühl, 1996.

3. Spectra and Pseudospectra, the Behavior of Nonnormal Matrices and Operators, Lloyd N. Trefethen - Mark Embree, 2005.

4. Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος, Αθήνα 2014.

5. Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Ανάργυρος Γ. Φελλούρης, Αθήνα 2006.

6. Αριθμητική Ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica, Γ. Σ. Παπαγεωργίου – Χ. Γ. Τσίτουρας, Αθήνα 2006.