ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΟΤΑΞΙΕΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΕΚΠΤΩΣΗΣ ΣΕ ΕΠΙΠΛΕΟΥΣΕΣ ΘΑΛΑΣΣΙΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΘΩΜΑ Π. ΜΑΖΑΡΑΚΟΥ

Διπλωματούχου Ναυπηγού Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π., M.Sc.

Επιβλέπων
Σ. Α. Μαυράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιανουάριος 2010

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΟΤΑΞΙΕΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΕΚΠΤΩΣΗΣ ΣΕ ΕΠΙΠΛΕΟΥΣΕΣ ΘΑΛΑΣΣΙΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΘΩΜΑ Π. ΜΑΖΑΡΑΚΟΥ

Διπλωματούχου Ναυπηγού Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π., M.Sc

Συμβουλευτική επιτροπή: Καθ. Σπύρος Μαυράκος (Επιβλέπων)
Καθ. Γιώργος Τζαμπίρας
Επικ. Καθ. Γιάννης Χατζηγεωργίου

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή στις … Ιανουαρίου 2010:

…….	…….	…….
Σ. Μαυράκος	Γ. Τζαμπίρας	Γ. Χατζηγεωργίου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
…….	…….	…….
Γρ. Γρηγορόπουλος	Γ. Τριανταφύλλου	Κ. Μουτζούρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.
…….		
Γ. Ζαραφωνίτης		
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.		

Αθήνα, Ιανουάριος 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι :
Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Συλλογή βιβλιογραφίας

Το πρώτο στάδιο της εργασίας, ήταν ο καθορισμός του πλαισίου, στο οποίο ήταν σκόπιμο να κινηθεί η έρευνα πάνω στο επιστημονικό αντικείμενο που άπτεται του θέματος της διδακτορικής διατριβής. Έγινε αναζήτηση σε πηγές της διεθνούς επιστημονικής βιβλιογραφίας – αρθρογραφίας, ώστε να αναγνωριστούν οι τάσεις της έρευνας, χρήσιμα εργαλεία και μεθοδολογίες, πάνω στο αντικείμενο, καθώς και οι περιορισμοί και αδυναμίες των τρεχουσών τεχνικών για τις μη γραμμικά αργά μεταβαλλόμενες φορτίσεις και την υδροδυναμική απόσβεση έκπτωσης σε επιπλέουσες θαλάσσιες κατασκευές.

Συλλογή Βιβλιογραφίας

Στο παρόν κεφάλαιο, έχει γίνει συλλογή της τρέχουσας ερευνητικής προσπάθειας σε παγκόσμιο επίπεδο και των ευρημάτων στα οποία έχουν καταλήξει ερευνητές ασχολούμενοι με το συγκεκριμένο ερευνητικό αντικείμενο.

Το πρόβλημα της αργής κίνησης ενός σώματος σε θαλάσσιο περιβάλλον το οποίο ταυτόχρονα δέχεται και τη δράση κυματισμών ή αντίστοιχα η αλληλεπίδραση του ακίνητου σώματος, με θαλάσσιο ρεύμα και πρωτοτάξιους ή δευτεροτάξιους κυματισμούς έχει απασχολήσει την διεθνή ερευνητική κοινότητα σε σημαντικό βαθμό ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια. Ο συνδυασμός ρεύματος και κυματισμών επηρεάζει σημαντικά τον υπολογισμό των μέσων και αργά μεταβαλλόμενων 'δυνάμεων έκπτωσης' (drift forces), της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, καθώς και τους αντίστοιχους δευτεροτάξιους συντελεστές υδροδυναμικής απόσβεσης. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί ότι η παράλειψη αυτού του όρου μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την υποεκτίμηση της συνολικής απόσβεσης που προσφέρεται στην πλωτή κατασκευή και συνακόλουθα στον υπολογισμό μεγάλων και μη ρεαλιστικών κινήσεων, καθώς και καταπονήσεων των κλάδων αγκύρωσής της. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το τελευταίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό για πλωτές αγκυρωμένες κατασκευές για εφαρμογές σε μεγάλα βάθη νερού οι οποίες είναι ιδιαίτερα ευάλωτες σε χαμηλόσυχνες διεγέρσεις οι οποίες μπορεί να εμπίπτουν στην περιοχή των ιδιοσυχνοτήτων τους για τις κινήσεις στο επίπεδο της επιφάνειας της θάλασσας (surge, sway και yaw). Η χαμηλόσυχνη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση συνιστά έναν μηχανισμό διάχυσης ενέργειας κατά τη διάρκεια αργών κινήσεων μεγάλου εύρους. Οι κινήσεις αυτές αποτελούν κυρίαρχη συνιστώσα της υδρομηχανικής συμπεριφοράς πλωτών αγκυρωμένων κατασκευών δεδομένου ότι αυτές οι κατασκευές εκτελούν χαμηλόσυχνες μεγάλου πλάτους κινήσεις, κατά την εκτροπή τους από τη θέση στατικής ισορροπίας τους, υπό τη δράση των περιβαλλοντολογικών φορτίσεων, καθώς και κατά την επαναφορά τους λόγω της επενέργειας των δυνάμεων επαναφοράς που παρέχονται από το σύστημα αγκύρωσης.

Η βιβλιογραφία σχετικά με τα πολυποίκιλα ρευστομηχανικά και δυναμικά προβλήματα που εμφανίζονται κατά την εξέταση των αργά μεταβαλλόμενων δευτεροτάξιων κινήσεων έκπτωσης μιας πλωτής αγκυρωμένης κατασκευής είναι εκτενής. Πολλά από τα θεμελιώδη προβλήματα που αναφέρονται εδώ και η επίλυσή τους αποτελεί αντικείμενο της παρούσας έρευνας, έχουν επισημανθεί και αναφερθεί σε μερικά κλασσικά κείμενα της περιοχής (Newman, Pinkster, 1974; Ogilvie, 1983).

Τα τελευταία χρόνια είναι ευρέως αποδεκτό ότι η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση ή ισοδύναμα οι χαμηλόσυχνες δυνάμεις drift δεν θα πρέπει να μελετώνται ανεξάρτητα από το ρεύμα και τις χαμηλές ταχύτητες drift, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις ογκωδών σωμάτων όπου θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η αλληλεπίδραση μεταξύ των κυματισμών και της τοπικά μόνιμης ροής ή αντίστοιχα της χαμηλής πρόσω ταχύτητας του σώματος (Faltinsen, 1990, 1994, Molin, 1994). Σε αυτό το πλαίσιο, έχουν προταθεί στην διεθνή βιβλιογραφία δύο κυρίως μέθοδοι επίλυσης που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα ενός σώματος κινούμενου με μικρή πρόσω ταχύτητα σε κυματισμούς ή ισοδύναμα η αλληλεπίδραση του σώματος με θαλάσσιο ρεύμα:

(α) Μέθοδοι επίλυσης στο πεδίο των συχνοτήτων που βασίζονται στη **θεωρία διαταραχών** (perturbation-based-frequency domain analysis methods), καθώς και μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης στο πεδίο των χρόνων με τη βοήθεια επίσης της θεωρίας διαταραχών και

(β) Πλήρως μη γραμμικές μέθοδοι επίλυσης στο πεδίο των χρόνων.

Οι μέθοδοι επίλυσης στο πεδίο των συχνοτήτων βασίζονται συνήθως στην εισαγωγή δύο κλιμάκων χρόνου (Emmerhoff *et al*, 1992; Newman, 1993) και στην ανάπτυξη του δυναμικού ταχύτητας ως προς την κλίση των κυματισμών και τον αριθμό Strouhal $\tau = U\omega / g$, όπου U, ω και g είναι η πρόσω ταχύτητα (ή η ταχύτητα του ρεύματος), η συχνότητα συνάντησης και η επιτάχυνση της βαρύτητας αντίστοιχα. Ως αποτέλεσμα, το πρόβλημα οριακών τιμών διαχωρίζεται σε δύο προβλήματα:
(i) **Στο πρόβλημα υπολογισμού του πεδίου ροής το οποίο προκαλείται λόγω ρεύματος σταθερής ταχύτητας (μόνιμη ροή), με οριακή συνθήκη μηδενισμού της κάθετης ταχύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού** και
(ii) **Στο γραμμικό πρόβλημα των προοδευτικών κυματισμών στο παραγόμενο πεδίο ροής από το θαλάσσιο ρεύμα** (Hermans *et al.*; 1996, Huijsmans, 1997). Για σώματα τυχαίας μορφής, οι λύσεις δίνονται μέσω της επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων στις οποίες συμπεριλαμβάνονται οι κατάλληλες συναρτήσεις Green με μικρή πρόσω ταχύτητα (Zhao *et al.*, 1989; Grue *et al.*, 1993b; Wu *et al.*, 1990; Chen *et al.*, 1996; Bratland *et al.*, 1996).

Σε ότι αφορά στον υπολογισμό των μέσων δευτεροτάξιων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces) έχουν προταθεί και χρησιμοποιούνται και στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης κύματος – ρεύματος – κατασκευής ή ισοδύναμα κύματος και μικρής πρόσω ταχύτητας της κατασκευής, δύο μέθοδοι:
(α) **η μέθοδος της απ' ευθείας ολοκλήρωσης πάνω στη στιγμιαία βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος** όλων των όρων της υδροδυναμικής πίεσης που συνεισφέρουν στις δευτεροτάξιες φορτίσεις (Pinkster et al., 1977; Papanikolaou et al. 1987; Zaraphonitis et al. 1993), και
(β) **η μέθοδος της μεταβολής της ορμής**, κατά την οποία απαιτείται η γνώση του δυναμικού ταχύτητας της ροής σε μεγάλη απόσταση από το σώμα (Maruo, 1960; Newman, 1967; Faltinsen et al. 1974; Mavrakos, 1988; Grue *et al*, 1993a).

Η μέθοδος της ανάπτυξης του δυναμικού της ταχύτητας της ροής σε δυναμοσειρές ως προς την κλίση των κυματισμών και τον αριθμό Strouhal με χρήση δύο κλιμάκων του χρόνου εφαρμόσθηκε και στη περίπτωση μεμονωμένων ή συγκροτημάτων σωμάτων με ειδική γεωμετρία, όπως τα κατακόρυφα αξονοσυμμετρικά σώματα (Malenica *et al.*, 1995; Kinoshita *et al.*, 1996). Η κατάλληλη χρήση δύο κλιμάκων χρόνου κατά την ανάπτυξη του δυναμικού ταχύτητας της ροής οδηγεί σε διαχωρισμό των προβλημάτων που περιγράφουν τις γρήγορες και τις αργά μεταβαλλόμενες κινήσεις αγκυρωμένων πλωτών κατασκευών (Sclavounos, 1994).

Οι Rye *et al.* (1975) έκανε καταγραφές του μη γραμμικού κύματος και ανέλυε τις προκύπτουσες δυνάμεις αγκύρωσης με τη βοήθεια της φασματικής ανάλυσης. Στην ίδια λογική οι Aranha *et al.* (1995) καθώς και οι Ohyama et al. (1995), Fusina *et al.* (1997) έκαναν διαχωρισμό των κυμάτων σε κάποιες συχνότητες μέσω παρατήρησης για τρισδιάστατα και δισδιάστατα σώματα αντίστοιχα, με τον Fusina να χρησιμοποιεί μια νέα τεχνική βελτιστοποίησης του υπολογισμού της λύσης για την steady-state κατάσταση της εξίσωσης κίνησης του σώματος. Οι Emmerholf και Sclavounos (1996) προσέγγισαν «κόβοντας» την κλίμακα του χρόνου σε πολλά χρονικά διαστήματα, διαχωρίζοντας τελικά το χρόνο σε δύο κομμάτια, που το καθένα από αυτά να περιλαμβάνει τις αργές και τις γραμμικές κινήσεις του σώματος. Έτσι η ιδεατή ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού προσεγγίζεται από ένα ανάπτυγμα σε σειρά διαταραχών, για μικρές (slow-drift) ταχύτητες και κύματα και λύνονται γύρω από μια στιγμιαία θέση του σώματος. Η γραμμική μηδενική

ταχύτητα και η πρόσω ταχύτητα δυναμικού επιλύονται για κυλίνδρους, χρησιμοποιώντας τη θεωρία της αλληλεπίδρασης. Όσο για τις αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις υπολογίζονται με χρήση της προσέγγισης του Newman (1974). Ο Kim (2005) αναφέρεται στη δυναμική συμπεριφορά σε θαλάσσιους κυματισμούς τρισδιάστατων σωμάτων με μικρή πρόσω ταχύτητα. Η επίλυση γίνεται χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις GREEN, παραλείποντας τους όρους δεύτερης τάξης, πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια της γάστρας του πλοίου.

Οι Ren *et al.* (1997) καθώς και οι Chen *et al.* (1998) κάνουν χρήση των εξισώσεων του Boussinesq σε μια τρισδιάστατη μη γραμμική κυματική διάδοση στο ρηχό νερό. Το μοντέλο του συστήματος των εξισώσεων αυτών μας επιτρέπει να έχουμε χωρικές και χρονικές μεταβλητές στην τοπογραφία του πυθμένα, αλλά και την παρουσία ομογενών ρευμάτων. Οι νέες εξαγόμενες εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να προσομοιώσουν τη διάδοση των κυμάτων και την αλληλεπίδραση τους με ένα ομογενές ρεύμα στην κατεύθυνση του κύματος. Από τις εξισώσεις τύπου Boussinesq για το συνδυασμό κίνησης κύματος-ρεύματος, μπορούμε να υπολογίσουμε την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, την ολική κίνηση κύματος-ρεύματος, τη μη-γραμμικότητα του κύματος και τη διασπορά του.

Ο Teng (1998) παρουσίασε επίσης μία μέθοδο επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων για την εκτίμηση της συνεισφοράς του δευτεροτάξιου δυναμικού στον υπολογισμό των δευτεροτάξιων δυνάμεων drift για σώματα κινούμενα με σταθερή ταχύτητα σε κυματισμούς. Τα αριθμητικά αποτελέσματα αφορούσαν κυλίνδρους που εκτείνονταν καθ' όλο το βάθος του νερού καθώς και κυλίνδρους επιπλέοντες με πεπερασμένο βύθισμα. Επίσης ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί στη χαμηλόσυχνη περιστροφική κίνηση της κατασκευής περί τον κατακόρυφο άξονά της (yaw motion) σε κυματισμούς. Οι Finne *et al.* (1998) παρουσίασαν επίσης λύση για το πλήρες πρόβλημα περίθλασης και ακτινοβολίας καθώς και τη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση για την περιστροφική κίνηση περί τον κατακόρυφο άξονα (yaw) σωμάτων κινούμενων σε κυματισμούς. Οι Sunahara *et al.* (1999) ασχολήθηκαν με τη χαμηλόσυχνη κίνηση yaw συγκροτήματος πολλαπλών αλληλεπιδρώντων κυλίνδρων μέσα σε κυματισμούς. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε και σε θεωρητικό και σε πειραματικό επίπεδο. Οι Aranha *et al.* (2001) , έλυσαν το πρόβλημα της δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς seakeeping και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με την προσέγγιση του Newman, για να ελεγχθεί το πώς επηρεάζει η πρώτης τάξης αλληλεπίδραση κύματος-ρεύματος τη δεύτερης τάξης αλληλεπίδραση σε χαμηλές συχνότητες, για φάσματα κυματικών δυνάμεων, χρησιμοποιώντας το στατικό κομμάτι για τις δυνάμεις έκπτωσης, σε διάφορες πλωτές κατασκευές.

Αναφορικά τώρα με τη εφαρμογή της μεθόδου διαταραχών στο πεδίο των χρόνων οι Kim *et al.* (1997) διερεύνησαν την επίδραση ομοιόμορφου ρεύματος σταθερής ταχύτητας στην αλληλεπίδραση τρισδιάστατων σωμάτων μεγάλου μεγέθους με κυματισμούς. Το πεδίο ροής υπολογίζεται σε κάθε χρονική στιγμή μέσω μίας μεθόδου ολοκληρωτικών εξισώσεων ενώ οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται μέσω μίας χρονικής βηματικής διαδικασίας. Η ελεύθερη επιφάνεια ολοκληρώνεται σε κάθε χρονική στιγμή ενώ η συνθήκη ακτινοβολίας ενσωματώνεται αριθμητικά με τη χρήση ενός 'αριθμητικού' κυματοθραύστη ο οποίος αποσβένει όλη την ενέργεια των κυματισμών στο ανοικτό όριο.

Όλες οι μέθοδοι επίλυσης στο πεδίο των χρόνων και στο πεδίο των συχνοτήτων που αναφέρθηκαν έως τώρα βασίστηκαν σε διαδικασίες διαταραχών και έχουν ακρίβεια πρώτης τάξης για την ταχύτητα του ρεύματος και ακρίβεια πρώτης τάξης για την κλίση των κυματισμών. Επακόλουθα, επετεύχθη σημαντική βελτίωση με την εργασία των Buchmann *et al.* (1998), οι οποίοι ανέπτυξαν μία μέθοδο επίλυσης στο πεδίο των χρόνων η οποία

βασίζεται σε μία διαδικασία διαταραχών και η οποία είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας για την κλίση των κυματισμών και πρώτης τάξης ακρίβειας για την ταχύτητα του ρεύματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα επικεντρώνονται στον υπολογισμό της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας μπροστά από έναν ομοιόμορφο και σταθερά τοποθετημένο στον πυθμένα κύλινδρο.

Εκτός από τις μθόδους διαταραχών είτε στο πεδίο των χρόνων είτε στο πεδίο των συχνοτήτων, έχουν παρουσιαστεί στη διεθνή βιβλιογραφία και πλήρως μη γραμμικές μέθοδοι επίλυσης για την αντιμετώπιση του προβλήματος της αλληλεπίδρασης κυματισμών και σωμάτων σε περιβάλλον θαλάσσιου ρεύματος. Σε αυτό το πλαίσιο οι Kim *et al.* (1998) ανέπτυξαν μία 'αριθμητική' δεξαμενή κυματισμών (numerical wave tank) η οποία χρησιμοποιούσε μία 'έμμεση' Μέθοδο Ολοκληρωτικών Εξισώσεων με Μη-ιδιόμορφες Οριακές Συνθήκες (Desingularized Boundary Integral Equation Method – DBIEM) και ένα συνδυασμένο σχήμα βηματικής επίλυσης στο πεδίο των χρόνων Lagrangian-Eulerian. Η εξίσωση Laplace επιλύεται σε κάθε χρονική στιγμή και οι μη γραμμικές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας ολοκληρώνονται στο χρόνο ώστε να επικαιροποιείται κατάλληλα η θέση της καθώς και οι συνοριακές τιμές. Μία πλήρης μη γραμμική μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων αναπτύχθηκε επίσης από τον Ferrant (1998) για την επίλυση του προβλήματος περίθλασης του πεδίου ροής, το οποίο συνίσταται από κυματισμούς και ρεύμα μπροστά από το σώμα. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η ροϊκή συνάρτηση για την περιγραφή της προσπίπτουσας ροής των μη γραμμικών κυματισμών με το θαλάσσιο ρεύμα. Το μη γραμμικό χρονικά μεταβαλλόμενο πρόβλημα περίθλασης και οριακών τιμών επιλύεται με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων με τριγωνικά ισοπαραμετρικά στοιχεία. Για την βηματική επίλυση στο πεδίο των χρόνων χρησιμοποιείται η αριθμητική μέθοδος ολοκλήρωσης Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Οι Li *et al.* (1996), παρουσίασαν μια ημιαναλυτική μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για ένα τρισδιάστατο υδροδυναμικό μοντέλο που υπολογίζει αλληλεπίδραση κύματος-ρεύματος σε όλο το φάσμα των οριακών συνθηκών και συνέκριναν πειράματα και υπολογισμούς. Προβλήματα παρουσιάστηκαν μόνο στις τιμές του surge.

Πέραν των υπολογιστικών μεθόδων, έχουν παρουσιαστεί στην διεθνή βιβλιογραφία και πειραματικές μελέτες. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσεται και η εργασία των Hsiao *et al.* (1999). Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν με σταθερό καθώς και μεταβαλλόμενο βάθος νερού και διαπιστώθηκε ότι εξ' αιτίας του μεταβαλλόμενου βάθους οι πιέσεις γύρω από τους κυλίνδρους ήταν μεγαλύτερες από αυτές που αντιστοιχούσαν σε σταθερό βάθος νερού. Οι Wolf *et al.* (1999), έκαναν ορισμένες παρατηρήσεις σε σχέση με το βάθος και τις μεταβολές του ρεύματος και του κύματος και περιέγραψαν το μηχανισμό των μεγάλων και απότομων κυμάτων και του ρεύματος.

Οι Park *et al*. (2001), Respero (2001), Carmo *et al.* (2002), Zhang *et al*. (2004), έδωσαν μια νέα διάσταση στο πρόβλημα, κατασκευάζοντας ένα μοντέλο δεύτερης τάξης για τις αλληλεπιδράσεις κύματος και ρεύματος, λαμβάνοντας υπόψη και φαινόμενα τριβής στον πυθμένα και κίνηση του κύματος επιφάνειας στην βρεχόμενη επιφάνεια, με χρήση πεπερασμένων στοιχείων δεύτερης τάξης. Τα συγκεκριμένα μοντέλα όμως, κάνουν προσομοίωση μόνο κοντά στην ακτή και σε ρεύματα που βρίσκονται πολύ κοντά στην πλωτή κατασκευή.

Οι Langtangen *et al*. (1998) και Malarkey *et al*. (1998), επικεντρώνονται σε συγκριτικά αποτελέσματα μεταξύ των διαφόρων μεθόδων υπολογισμού της αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος, και εξηγούν ορισμένα από τα αναλυτικά και αριθμητικά αποτελέσματα προηγουμένων δημοσιεύσεων, ενώ επίσης αναφέρονται σε ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο για

μικρές μεταβολές οριζόντιων κινήσεων μιας αγκυρωμένης πλωτής κατασκευής, μη γραμμικά διεγερμένης, που εξάγει δυνάμεις κυμάτων δεύτερης τάξης. Οι μέθοδοι αυτές περικλείουν την χρονική ιστορία, και ουσιαστικά κάνουν επίλυση των πεπερασμένων στοιχείων από την εξίσωση του Kolmogorov.

Αναφορικά τώρα με τον υπολογισμό της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης (slow drift damping), ένας συνεπής τρόπος υπολογισμού αρχίζει με την επίλυση του προβλήματος αλληλεπίδρασης σώματος με κυματισμούς και μικρή πρόσω ταχύτητα και τον υπολογισμό της μέσης δευτεροτάξιας δύναμης. Ο αντίστοιχος συντελεστής slow drift damping λαμβάνεται στη συνέχεια μέσω αριθμητικής διαφόρισης ανάμεσα στις δυνάμεις drift και σε δύο μικρές διαφορετικές πρόσω ταχύτητες. Οι εργασίες που αφορούσαν τη λύση του προβλήματος περίθλασης και ακτινοβολίας με μικρή πρόσω ταχύτητα έχουν ήδη αναφερθεί προηγούμενα. Επιπλέον αυτών όμως, έχουν γίνει και ερευνητικές προσπάθειες που αφορούσαν τον προσεγγιστικό υπολογισμό της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης. Σχετική είναι η εργασία του Kaasen (1999) στην οποία παρουσιάζεται μία τροποποιημένη διατύπωση της μεθόδου Newman (1974) για τον προσεγγιστικό υπολογισμό των χαμηλόσυχνων δυνάμεων εξαλείφοντας τον 'θόρυβο' που προκαλείται λόγω των υψηλών συχνοτήτων. Οι Zhao *et al*. (1998) χρησιμοποίησαν ένα μοντέλο Volterra για τη δημιουργία χρονοσειρών δευτεροτάξιων μη γραμμικών δυνάμεων λόγω κυματισμών. Η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της μη γραμμικής απόκρισης μίας πλατφόρμας TLP. Οι Martin *et al.* (1999) χρησιμοποίησαν μία 'αυτοευρετική' (heuristic) διατύπωση που είχε προταθεί από τον Aranha (1994) λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση ρεύματος-κυματισμών για να υπολογίσουν τα φορτία drift σε μία κατασκευή VLCC η οποία λειτουργούσε σε βαθύ νερό. Ο Mathisen *et al.* (1984), παρουσιάζει δύο μη γραμμικά μοντέλα απόσβεσης, με ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας στην εξίσωση για την κίνηση roll. Τα μοντέλα απόσβεσης αναφέρονται σε ένα άθροισμα γραμμικού και τετραγωνικού, καθώς και σε ένα άθροισμα γραμμικού και κυβικού όρου απόσβεσης, δηλαδή της μορφής $\beta_2 = D_1\dot{x} + D_2\dot{x}|\dot{x}|, \beta_3 = B_1\dot{x} + B_2\dot{x}^3$. Τα πειραματικά αποτελέσματα σε σύγκριση με τα δύο παραπάνω μοντέλα συγκλίνουν περισσότερο προς το γραμμικό μοντέλο και το τετραγωνικό, παρά προς το κυβικό. Ο Bao (2000), υπολογίζει το wave drift damping στις κινήσεις surge-sway-yaw, σε έναν κύλινδρο, λύνοντας στην σχεδόν μόνιμη (quasisteady) κατάσταση, παίρνοντας σταθερό κύμα. Το δυναμικό ταχύτητας εξάγεται, εξαρτώμενο από δύο μικρές παραμέτρους, οι οποίες μετρούν την κλίση του κύματος και την ταχύτητα του σταθερού ρευστού, αντιστοίχως. Τέλος ο Park (2004) χρησιμοποιεί μια αριθμητική μέθοδο DVM (Discrette Vortex Method) για να υπολογίσει την υδροδυναμική απόσβεση στο roll. Η κίνηση αυτή μοντελοποιείται με την διανομή πηγών πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια της γάστρας του πλοίου.

Οι Trassoudaine *et al.* (1999) επανεξέτασαν την 'αυτοευρετική' (heuristic) προσέγγιση για τον υπολογισμό του slow-drift damping στις κινήσεις surge, sway και yaw συγκρίνοντας θεωρητικά με πειραματικά αποτελέσματα.

Από τα παραπάνω γίνεται εμφανής η σημαντικότητα του αντικειμένου δεδομένου ότι ελκύει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών διεθνώς. Και αυτό διότι οι πλωτές κατασκευές για εφαρμογές μεγάλου βάθους δέχονται συνδυασμό δράσεων κυμάτων και θαλάσσιου ρεύματος. Ο υπολογισμός μόνο των κυματικών φορτίσεων, παρ' όλο που αυτές αποτελούν το μεγαλύτερο και σημαντικότερο τμήμα της επίδρασης του περιβάλλοντος, αποτελεί κατά βάση προσέγγιση του πραγματικού φαινομένου. Επιπλέον το πεδίο ροής με την προσθήκη ρεύματος ή ισοδύναμα θεωρώντας την κατασκευή κινούμενη με μικρή πρόσω ταχύτητα, θα έχει τελείως διαφορετική διαμόρφωση η οποία θα αντανακλάται στο φαινόμενο run-up

μπροστά από την κατασκευή αλλά και στη χαμηλόσυχνη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση (slow drift damping).

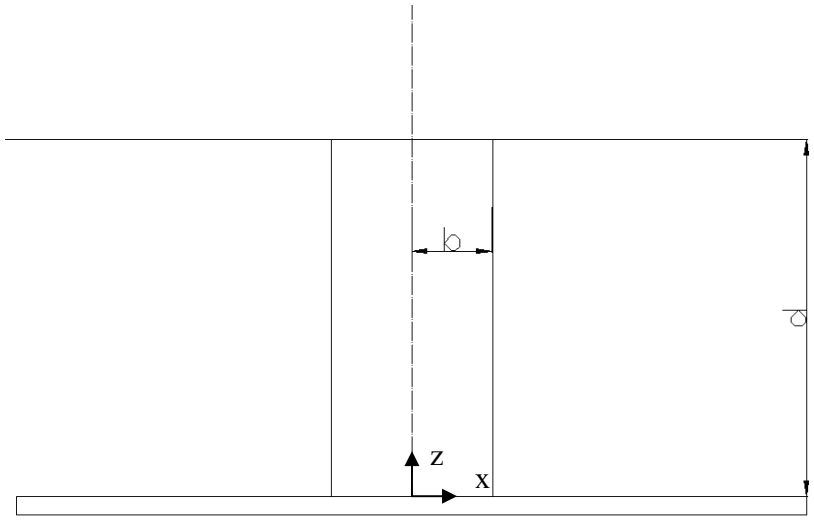
Η μέθοδος προσέγγισης του προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί πρωτοποριακή. Η καινοτομία έγκειται στο γεγονός ότι η λύση η οποία θα αναζητηθεί θα έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς το δυναμικό περίθλασης. Με άλλα λόγια, θα επιλυθεί το συζευγμένο πρόβλημα ρεύματος-κυματισμών για τον υπολογισμό των πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης και των μέσων δυνάμεων έκπτωσης δεύτερης τάξης. Επιπλέον η μεθοδολογία επίλυσης θα είναι ημιαναλυτική, γεγονός το οποίο την καθιστά λιγότερο χρονοβόρα και γρήγορα συγκλίνουσα σε σχέση με τις πλήρως μη γραμμικές αριθμητικές λύσεις αφού αποφεύγονται τα προβλήματα αστάθειας τα οποία συνήθως απαντώνται στους πλήρως αριθμητικούς αλγορίθμους επίλυσης. Πιο συγκεκριμένα η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος θα γίνει μέσω της εξίσωσης Laplace την οποία θα πρέπει να ικανοποιεί το δυναμικό ταχυτήτων του πεδίου ροής. Στη συνέχεια, μέσω κατάλληλων και ισχυουσών θεωρήσεων για την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών, το πρόβλημα θα αποσυντεθεί σε επί μέρους υπο-προβλήματα τα οποία θα επιλυθούν αυτόνομα. Η ακολουθούμενη μεθοδολογία θα καταλήξει σε σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων οι οποίες επιλυόμενες θα παράγουν το συνολικό δυναμικό και εξ' αυτού τις δευτεροτάξιες φορτίσεις, τη δευτεροτάξια ανύψωση μπροστά από την κατασκευή καθώς και την δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση. Απαραίτητη προϋπόθεση θα είναι η κατασκευή της συνάρτησης GREEN η οποία θα περιλαμβάνει και τον επιπλέον όρο της ταχύτητας του θαλάσσιου ρεύματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ:
Υδροδυναμική ανάλυση κατακόρυφων αξονοσυμμετρικών σωμάτων απλής γεωμετρίας

2.1. Πακτωμένος κύλινδρος. Αναλυτικός υπολογισμός πρωτοτάξιων φορτίσεων καθώς και μέσων φορτίσεων έκπτωσης δεύτερης τάξης.

2.1.1. Αναλυτικός υπολογισμός των συντελεστών Fourier

Θεωρούμε απλό κατακόρυφο κύλινδρο πακτωμένο στον πυθμένα της θάλασσας, με ακτίνα *b*, ο οποίος βρίσκεται σε βάθος νερού *d* και δέχεται την επίδραση ακολουθίας επίπεδων απλών αρμονικών κυματισμών, πλάτους H/2 (ή H/2 =*A*) και κυκλικής συχνότητας ω. Η ροή που αποκαθίσταται γύρω από τον κατακόρυφο κύλινδρο θεωρείται ασυμπίεστη, αστρόβιλη και μη συνεκτική, οπότε μπορεί να περιγραφεί από δυναμικό ταχύτητας, ϕ, που αποτελεί τον άγνωστο του προβλήματος. Λόγω της γεωμετρίας του σώματος για την περιγραφή της ροής χρησιμοποιούνται κυλινδρικές συντεταγμένες, με αρχή στον πυθμένα της θάλασσας και θετικό άξονα z διευθυνόμενο προς τα πάνω (βλέπε Σχήμα 2.1.1).



Σχήμα 2.1. 1: Ο πακτωμένος κύλινδρος.

Το ζητούμενο δυναμικό οφείλει να αποτελεί λύση της εξίσωσης του Laplace στο πεδίο ροής και να ικανοποιεί κατάλληλες συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια, τον πυθμένα της θάλασσας, στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος καθώς και κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας σε μεγάλη απόσταση από το σώμα που να επιτρέπει απομακρυνόμενους κυματισμούς από αυτό. Οι συνθήκες αυτές για το ζητούμενο δυναμικό περίθλασης περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις στη περίπτωση του γραμμικού προβλήματος:

$$\frac{\partial^2 \phi^D}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi^D}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi^D}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi^D}{\partial z^2} = 0 \text{, στο πεδίο ροής} \tag{2.1.1}$$

$$-\omega^2 \phi^D + g\frac{\partial \phi^D}{\partial z} = 0 \text{, για } z = d \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial z} = 0 \text{, για } z = 0 \tag{2.1.3}$$

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial r} = -\frac{\partial \phi^I}{\partial r}, \text{ για } r = b \tag{2.1.4}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι το δυναμικό πρόσπτωσης του απλού αρμονικού κυματισμού δίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από τη σχέση (Mei, 1983) :

$$\phi^I = -i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(kz)}{k\sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m J_m(kr)\cos(m\vartheta) \tag{2.1.5}$$

ενώ το αντίστοιχο δυναμικό περίθλασης του κυματισμού γύρω από τον πακτωμένο στον πυθμένα της θάλασσας κατακόρυφο κύλινδρο που φθάνει μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια δίνεται από τη σχέση (MacCamy et al, 1954):

$$\phi^D = i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(kz)}{k\sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)} H_m(kr)\cos(m\vartheta) \tag{2.1.6}$$

J_m και H_m είναι οι συναρτήσεις *Bessel* και *Hankel* πρώτου είδους και m τάξης αντίστοιχα.

Συνεπώς γνωρίζουμε ακριβώς την έκφραση του συνολικού δυναμικού για την περίπτωση του πακτωμένου κυλίνδρου, που είναι η παρακάτω:

$$\phi = \phi^1 + \phi^D \tag{2.1.7}$$

$$\begin{aligned} \phi = & -i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(kz)}{k\sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m J_m(kr)\cos(m\vartheta) \\ & - i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(kz)}{k\sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \left[-\frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)} H_m(kr) \right] \cos(m\vartheta) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

$$\phi = -i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(kz)}{k\sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \left[J_m(kr) - \frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)} H_m(kr) \right] \cos(m\vartheta) \tag{2.1.9}$$

2.1.2. Αναλυτικός υπολογισμός των δυνάμεων και ροπών πρώτης τάξης

Οριζόντια δύναμη πρώτης τάξης

Η οριζόντια δύναμη δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

Γνωρίζουμε ότι η υδροδυναμική πίεση *p,* μπορεί να περιγραφεί μέσω του δυναμικού ταχύτητας Φ από την εξίσωση του Bernoulli:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \frac{\partial (\phi e^{-i\omega t})}{\partial t} = -i\omega\rho\phi(r,\theta,z) \tag{2.1.10}$$

Οπότε η οριζόντια δύναμη, είναι η ακόλουθη:

$$F_x = -\iint_{S_B} p n_x dS = -i\omega\rho \iint_{S_B} \Phi(r,\theta,z) n_x dS = -i\omega\rho \iint_{S_B} \cos\vartheta \phi(r,\theta,z) dS \tag{2.1.11}$$

$$\begin{aligned}
F_x &= -i\omega\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{d} \phi_A(b,\theta,z)\cos\vartheta b d\vartheta dz \\
&= -i\omega\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{d} -i\omega \frac{H}{2}\frac{\cosh(kz)}{k\sinh(kd)} \times \\
&\quad \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \left[J_m(kb) - \frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)} H_m(kb) \right] \cos(m\vartheta)\cos\vartheta b d\vartheta dz \\
&= -i\omega\rho \left(-i\omega b \frac{H}{2k}\frac{1}{\sinh(kd)} \right) \times \\
&\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{d} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \left[J_m(kb) - \frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)} H_m(kb) \right] \cosh(kz)\cos(m\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta dz
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

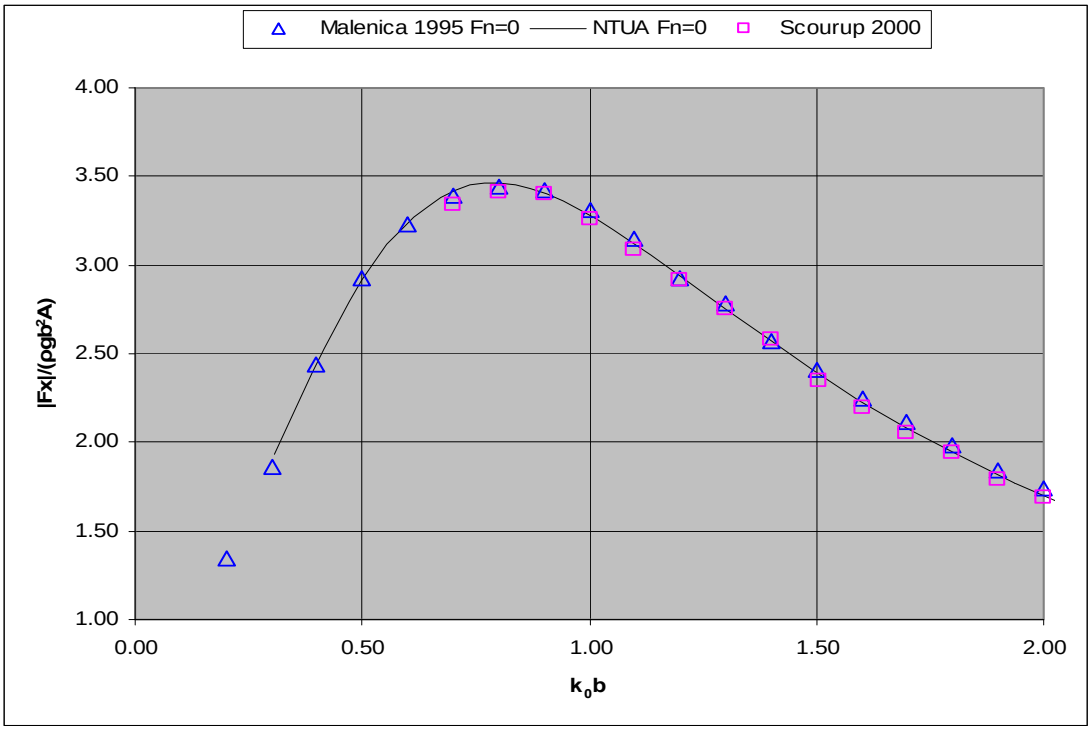
Αδιαστατοποιώντας ως προς $\rho g b^2 \frac{H}{2}$, ή $\rho g b^2 A$ $(H/2=A)$, έχουμε τελικά τον αναλυτικό τύπο υπολογισμού της οριζόντιας δύναμης στον κατακόρυφο πακτωμένο κύλινδρο:

$$\boxed{\frac{F_x}{\rho g b^2 A} = -\frac{2i\tanh(kd)}{(kb)^2}\frac{i^{-1} - i^{+1}}{H'_1(kb)}} \tag{2.1.13}$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

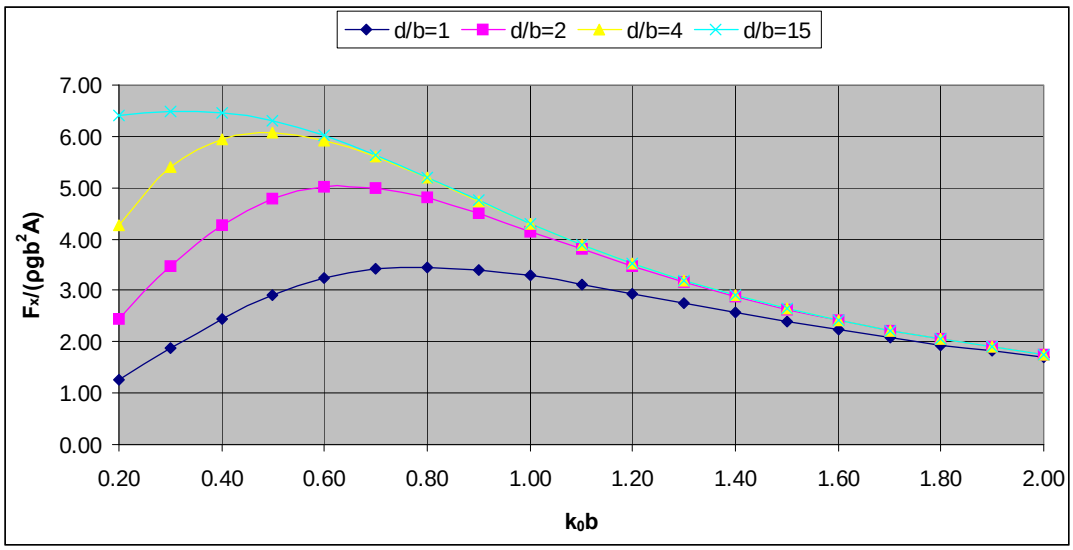
$$J_m(kb) - \frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)} H_m(kb) = \frac{2i}{\pi k b H'_m(kb)} \tag{2.1.14}$$

Από τις ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel.



Σχήμα 2.1. 2: Οριζόντια δύναμη σε πακτωμένο κύλινδρο με *d/b*=1, για γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες.

Οι συγκρίσεις έγιναν με τις δημοσιεύσεις των Malenica et al. (1995) και Scourup et al. (2000).



Σχήμα 2.1. 3: Δυνάμεις διέγερσης σε πακτωμένο κύλινδρο με *d/b*=1, 2, 4, 15, για γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες.

Κατακόρυφη δύναμη πρώτης τάξης

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο κύλινδρος είναι πακτωμένος, συνεπώς η κατακόρυφη δύναμη πρώτης τάξης είναι μηδενική.

Ροπή πρώτης τάξης

Η ροπή υπολογίζεται γενικά από τον παρακάτω τύπο:

$$M_y = -\iint_{S_B} p n_j dS \text{ , με } n_5 = (z-e)\cos\theta$$

Οπότε η ροπή πρώτης τάξης για την περίπτωση του πακτωμένου κυλίνδρου ως προς σημείο που βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του σώματος και απέχει απόσταση *e* από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} M_y &= -i\omega\rho \iint_{S_B} b\phi(r,\theta,z)(z-e)\cos\theta d\theta dz \\ &= -i\omega\rho b \iint_{S_B} \phi(r,\theta,z) z\cos\theta d\theta dz + i\omega\rho b e \iint_{S_B} \phi(r,\theta,z)\cos\theta d\theta dz \\ &= \quad = -i\omega\rho b \iint_{S_B} \phi(r,\theta,z) z\cos\theta d\theta dz - eF_x \end{aligned}$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το πρώτο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -i\omega\rho b \iint_{S_B} \phi(r,\theta,z) z\cos\theta d\theta dz \\ &= -i\omega\rho b \int_0^{2\pi}\int_0^{d} (-i\omega \mathrm{A}) \frac{cosh(kz)}{k\sinh(kd)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \frac{2i}{\pi k b H'_m(kb)} z\cos\theta d\theta dz \\ &= -i\omega\rho b \frac{4i\omega\pi A}{k^4 b\pi \sinh(kd) H'_1(kb)} \left[1 - cosh(kd) + kd\sinh(kd)\right] \end{aligned}$$

Αδιαστατοποιώντας ως προς $\rho g b^3 \frac{H}{2}$, ή $\rho g b^3 \mathrm{A}$ $(H/2=A)$, έχουμε τελικά τον αναλυτικό τύπο υπολογισμού της ροπή πρώτης τάξης για την περίπτωση του πακτωμένου κυλίνδρου:

$$\boxed{M_y = \frac{4vb}{(kb)^4 \sinh(kd) H'_1(kb)} \left[1 - cosh(kd) + kd\sinh(kd)\right] - eF_x} \qquad (2.1.15)$$

2.1.3. Αναλυτικός υπολογισμός των μέσων δυνάμεων και ροπών έκπτωσης δεύτερης τάξης

Ο γενικός τύπος υπολογισμού των δυνάμεων έκπτωσης με χρήση της μεθοδολογίας της απ' ευθείας ολοκλήρωσης όλων των όρων της υδροδυναμικής πίεσης που συνεισφέρουν στις μέσες δυνάμεις δεύτερης τάξης, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$F_{20_j} = \frac{\rho}{4}\iint_S \nabla\phi\nabla\bar{\phi}\, n_j dS + \frac{\omega^2\rho}{4g}\int_\Gamma \phi\bar{\phi}\, n_j d\Gamma$$
$$F_{20_j} = F^{\mathrm{I}}_{20_j} + F^{\Gamma}_{20_j} \tag{2.1.16}$$

Με $j=1, 3, 5$

Οριζόντια δύναμη έκπτωσης

Η οριζόντια δύναμη έκπτωσης θα υπολογιστεί χάριν πληρότητας με δύο τρόπους, με τη «**μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης**» και με τη «**μέθοδο μεταβολής της ορμής**».

Η μέθοδος της απ' ευθείας ολοκλήρωσης

Το δυναμικό φ, αποτελείται από δύο επί μέρους δυναμικά, το δυναμικό πρόσπτωσης φ^I και το δυναμικό περίθλασης φ^D, τα οποία είναι τα παρακάτω:

$$\phi^{\mathrm{I}}(r,\theta,z) = \frac{-i\omega\, H\cosh(k\, z)}{2k\sinh(k\, d)}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m J_m(kr)\cos(m\theta) \tag{2.1.17}$$

$$\phi^{D}(r,\theta,z) = \frac{-i\omega\, H\cosh(k\, z)}{2k\sinh(k\, d)}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m \left[-\frac{J'_m(k\, b)}{H'_m(k\, b)}H_m(k\, r)\right]\cos(m\theta) \tag{2.1.18}$$

$$\phi^{\mathrm{I}}(r,\theta,z)+\phi^{D}(r,\theta,z) = \frac{-i\omega H\cosh(k\, z)}{2k\sinh(k\, d)}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m \left[J_m(k\, r)-\frac{J'_m(k\, b)}{H'_m(k\, b)}H_m(kr)\right]\cos(m\theta) \tag{2.1.19}$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα της Εξ. (2.1.16)

$$F^{I}_{20_1} = -\frac{\rho}{4}\Re\iint_S \nabla\phi\nabla\bar{\phi}\;\, n_1 dS \;\text{ και }\; F^{\Gamma}_{20_1} = \frac{\rho\omega^2}{4g}\Re\int_\Gamma \phi\bar{\phi}\, n_1 d\Gamma\,.$$

Μετά από εκτενείς μαθηματικούς υπολογισμούς, προκύπτουν τελικά οι παρακάτω τιμές για τα ολοκληρώματα αυτά, σε αδιάστατη μορφή :

$$\boxed{\frac{F_{20_1}^{\mathrm{I}}}{\rho g b \mathrm{A}^2} = \frac{-2}{\pi(kb)} \left[\begin{array}{l} \left(1 - \dfrac{2kd}{\sinh(2kd)}\right) \Im\left\{ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{H'_{m+1}(kb)\bar{H}'_m\,(kb)} \right\} \\ + \dfrac{1}{(kb)^2}\left(1 + \dfrac{2kd}{\sinh(2kd)}\right) \Im\left\{ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m+1)}{H'_{m+1}(kb)\bar{H}'_m\,(kb)} \right\} \end{array} \right]} \tag{2.1.20}$$

$$\boxed{\frac{F_{20_1}^{\Gamma}}{\rho g b A^2} = \frac{4}{\pi(kb)^2} \Im\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{H'_{m+1}(kb)\bar{H}'_m\,(kb)} \right\}} \tag{2.1.21}$$

Με ω τη συχνότητα του κύματος, k τον αριθμό κύματος, A $(H/2=A)$ το πλάτος του κυματισμού, με $\varepsilon_m=1$ για m=0 και $\varepsilon_m=2$ για m>1, (m=0,1,2,3..), J_m είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και m τάξης, H_m είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και m τάξης. Ο τόνος αναφέρεται σε παραγώγιση ως προς το όρισμα και το * (ή άνω παύλα) δηλώνει το συζυγή μιγαδικού αριθμού.

Η μέθοδος μεταβολής της ορμής

Ο τύπος υπολογισμού των δυνάμεων έκπτωσης με τη μέθοδο της μεταβολής της ορμής, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$F_x^D = -\frac{\rho}{2}\Re\left\{\iint_S\left[\nabla\phi\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n} - \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\bar{\phi}\right]n_j dS - \frac{\omega^2}{2g}\int_\Gamma \phi\bar{\phi}\ n_j d\Gamma\right\} \tag{2.1.22}$$

Όπου S κατακόρυφη κυλινδρική επιφάνεια αναφοράς με ακτίνα τείνουσα στο άπειρο που περιβάλει το σώμα και Γ η τομή της επιφάνειας S με την ηρεμούσα επιφάνεια του νερού. Το δυναμικό φ, αποτελείται από δύο επί μέρους δυναμικά, το δυναμικό πρόσπτωσης φ^I και το δυναμικό περίθλασης φ^D, τα οποία είναι τα παρακάτω:

$$\phi^{\mathrm{I}}(r,\theta,z) = \frac{-i\omega H\cosh(kz)}{2k\sinh(kd)}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m J_m(kr)\cos(m\theta) \tag{2.1.23}$$

ή

$$\phi^{\mathrm{I}}(r,\theta,z) = \frac{-iH\cosh(kz)}{2\omega\cosh(kd)}e^{i(kr\cos\theta)} \tag{2.1.24}$$

$$\phi^D(r,\theta,z) = \frac{-i\omega H\cosh(kz)}{2k\sinh(kd)}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m\left[-\frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)}H_m(kr)\right]\cos(m\theta) \tag{2.1.25}$$

Θα πρέπει όμως να εκφραστούν με τις ασυμπτωτικές τους μορφές όταν το $r \to \infty$.
Οπότε οι συναρτήσεις Bessel θα γραφούν ως εξής (Abramowitz et al., 1970):

$$H_m(kr) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{1}{2}m\pi-\frac{1}{4}\pi)} \tag{2.1.26}$$

Και το δυναμικό περίθλασης σε μεγάλη απόσταση από το σώμα θα γραφεί ως

$$\phi^D(r,\theta,z) = \frac{-i\omega H\cosh(kz)}{2k\sinh(kd)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varepsilon_m i^m\left[-\frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{1}{2}m\pi-\frac{1}{4}\pi)}\right]\cos(m\theta) \tag{2.1.27}$$

ή

$$\phi^D(r,\theta,z) = F(\theta)e^{i\phi(\theta)}z(z)\sqrt{\frac{1}{r}}e^{ikr} \tag{2.1.28}$$

Με

$$F(\theta)e^{i\phi(\theta)} = \frac{-i\omega Hd}{2}\left\{-\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)}\frac{1}{dz'(z)}e^{-i(\frac{1}{2}m\pi+\frac{1}{4}\pi)}\cos(m\theta)\right\} \tag{2.1.29}$$

$$Z_k(z) = N_k^{-1/2}\cosh(kz) \qquad \text{και} \;\; N = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sinh(2kd)}{2kd}\right] \tag{2.1.30}$$

Συνεπώς το συνολικό δυναμικό δίνεται από την Εξ. (2.1.31)

$$\phi(r,\theta,z;t) = -i\frac{gH}{2\omega}\frac{\cosh(kz)}{\cosh(kd)}e^{i(kr\cos\theta-\omega t)} + F(\theta)e^{i\phi(\theta)}z(z)\sqrt{\frac{1}{r}}e^{i(kr-\omega t)} \tag{2.1.31}$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα της Εξ. (2.1.22)

$$F_x^{D1} = -\frac{\rho}{2}\Re\left\{\iint_S\left[\nabla\phi\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}\right]n_1 dS\right\},\; F_x^{D2} = \frac{\rho}{4}\Re\iint_{S_B}\nabla\phi\nabla\bar{\phi}\; n_1 dS \;\; \text{και}\; F_x^{D3} = \frac{\rho\nu}{4}\Re\int_\Gamma \phi\bar{\phi}\; n_0 d\Gamma\,.$$

Με χρήση του Θεωρήματος της σταθερής φάσης (stationary phase) (Stoker, 1957), καταλήγουμε τελικά στον απλό τύπο υπολογισμού της δύναμης έκπτωσης στη x- διεύθυνση (Kokkinowrachos et al., 1982):

$$F_x^D = \frac{1}{2}\rho k^2 d\int_0^{2\pi} F^2(\theta)(1-\cos\theta)d\theta \tag{2.1.32}$$

Όπου

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} F^2(\theta)(1-\cos\theta)d\theta = \omega^2 A^2\frac{1}{k^2\sinh^2(kd)}\frac{2}{\pi k}\\ &\left\{2\pi\left|\mathrm{A}_0\right|^2 + 4\pi\sum_{m=0}^{\infty}\left|\mathrm{A}_{m+1}\right|^2 - 4\pi\sum_{m=0}^{\infty}\left|\mathrm{A}_m\right|\left|\mathrm{A}_{m+1}\right|\cos(\delta_m-\delta_{m+1})\right\}\end{aligned} \tag{2.1.33}$$

$$\text{Με}\;\boxed{\left|A_m\right| = i^m\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\frac{J'_m(kb)}{H'_m(kb)}\frac{1}{dz'(d)}} \qquad \text{και} \qquad \boxed{\delta_m = -\frac{m\pi}{2}}$$

Τελικά η αναλυτική έκφραση που υπολογίζει τη δύναμη έκπτωσης στη x- διεύθυνση με τη μέθοδο των ροπών είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{\frac{F_x^D}{\rho g b A^2} = (kd)^3\frac{\tanh(kd)}{2b}\pi\left\{2\left|\mathrm{A}_0\right|^2 + 4\sum_{m=0}^{\infty}\left|\mathrm{A}_{m+1}\right|^2 - 4\sum_{m=0}^{\infty}\left|\mathrm{A}_m\right|\left|\mathrm{A}_{m+1}\right|\cos(\delta_m-\delta_{m+1})\right\}} \tag{2.1.34}$$

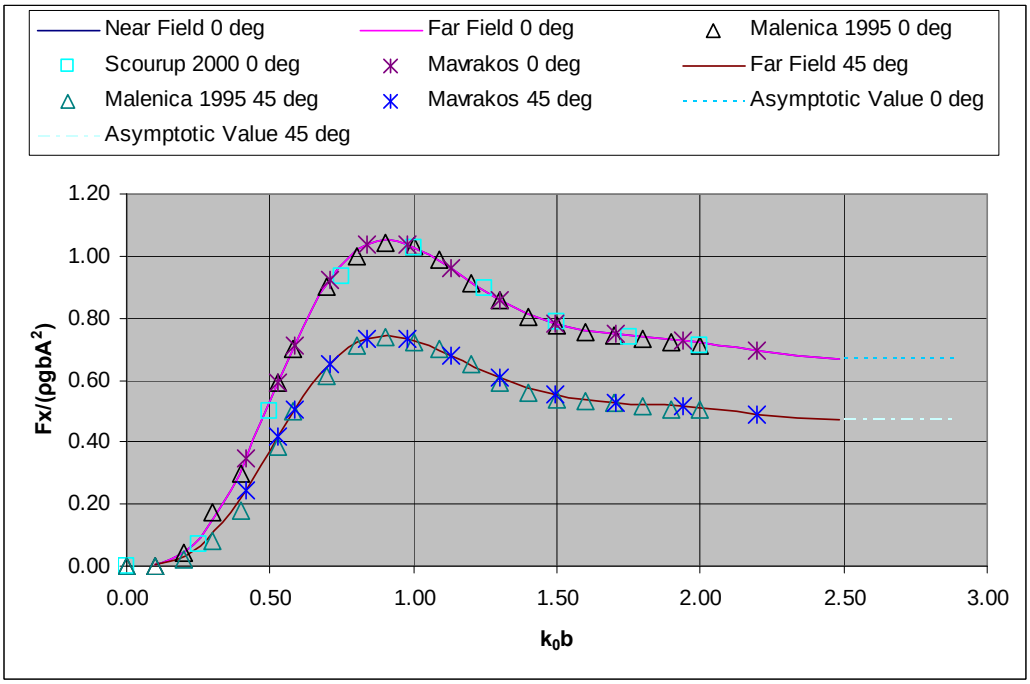
Παρακάτω παρουσιάζουμε αποτελέσματα των οριζόντιων δυνάμεων έκπτωσης, με τις δύο προαναφερθείσες μεθοδολογίες. Όπως παρατηρούμε οι δύο αυτές μεθοδολογίες για το ακίνητο σώμα, δίνουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα.

Οι συγκρίσεις έγιναν με τις δημοσιεύσεις των Emmerhoff et al. (1992) Malenica et al. (1995) Scourup et al. (2000), καθώς και με αυτά που παρήγαγε ο κώδικας CYLINDER (Mavrakos, 1988).

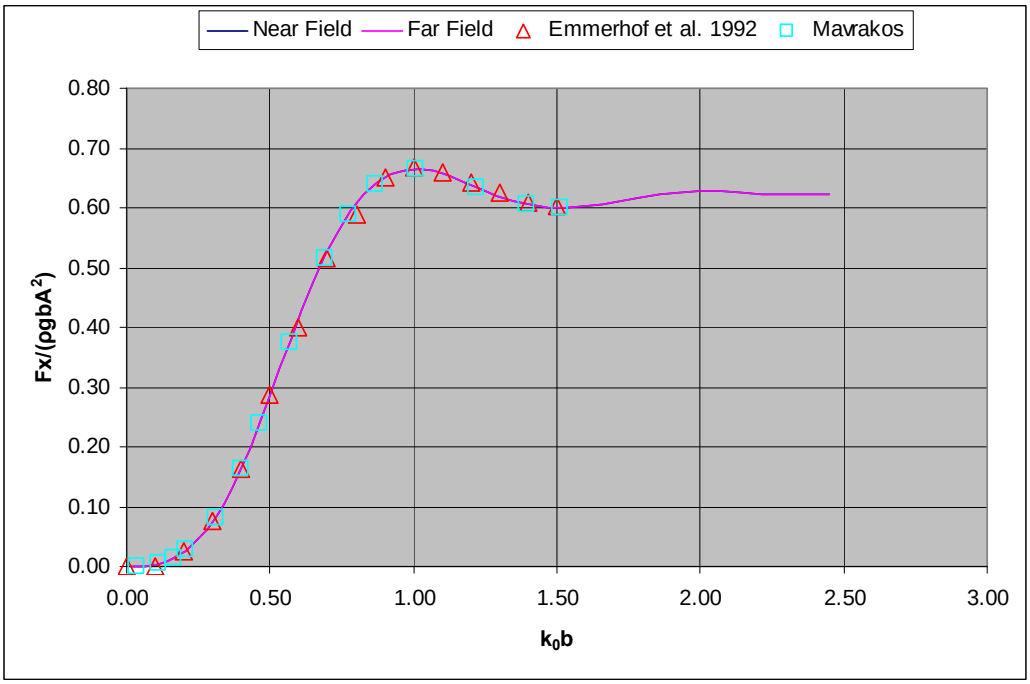
Στα διαγράμματα αυτά, διαφαίνεται και η **ασυμπτωτική τιμή** (για T→0), της οριζόντιας δύναμης έκπτωσης, (Pinkster, 1980; Faltinsen 1990) η οποία έχει τιμή ίση με:

$$\frac{F_x^D}{\rho g b \left(H/2 \right)^2} = \frac{2}{3}\cos(\beta) \qquad (2.1.35)$$

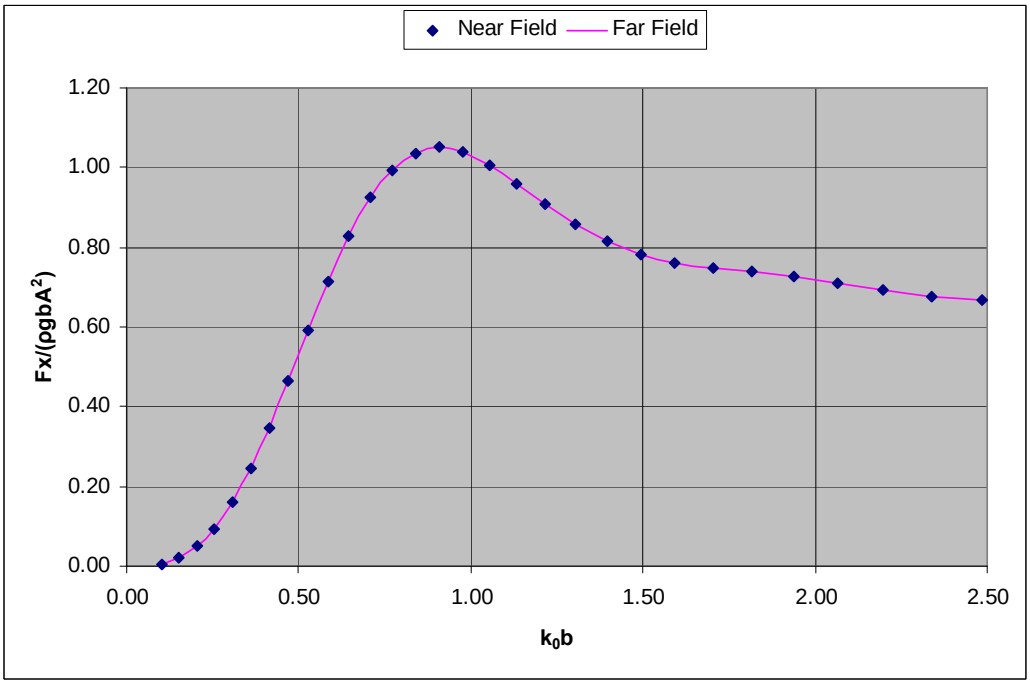
Ενδεικτικές συγκρίσεις με διάφορες δημοσιεύσεις φαίνονται παρακάτω.



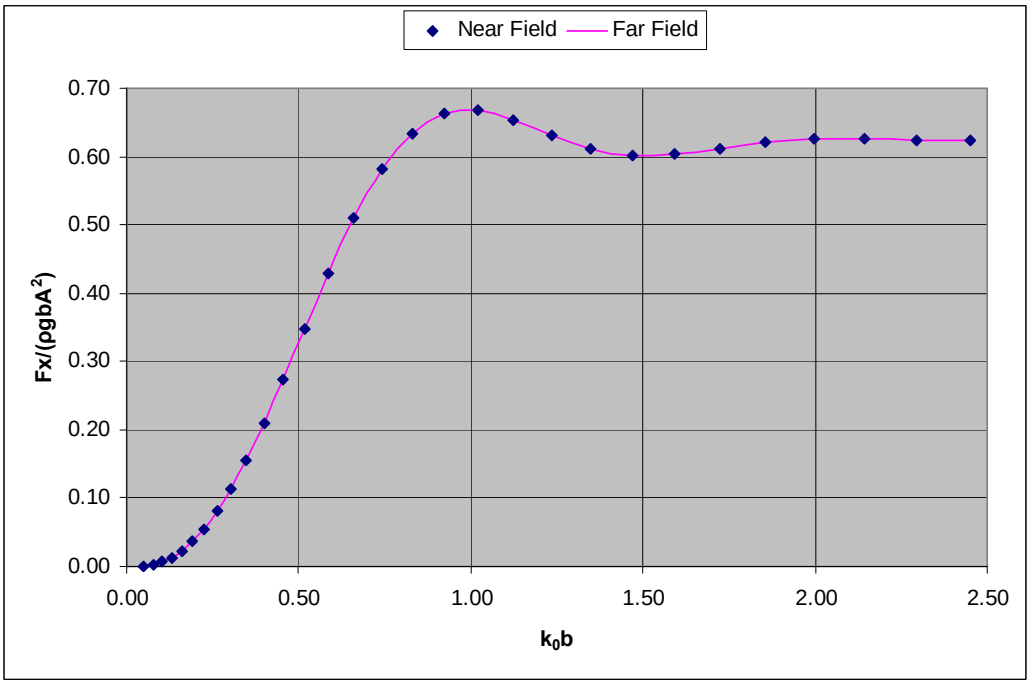
Σχήμα 2.1. 4: Drift δυνάμεις σε πακτωμένο κύλινδρο με *d/b*=1, για γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 και 45 μοίρες.



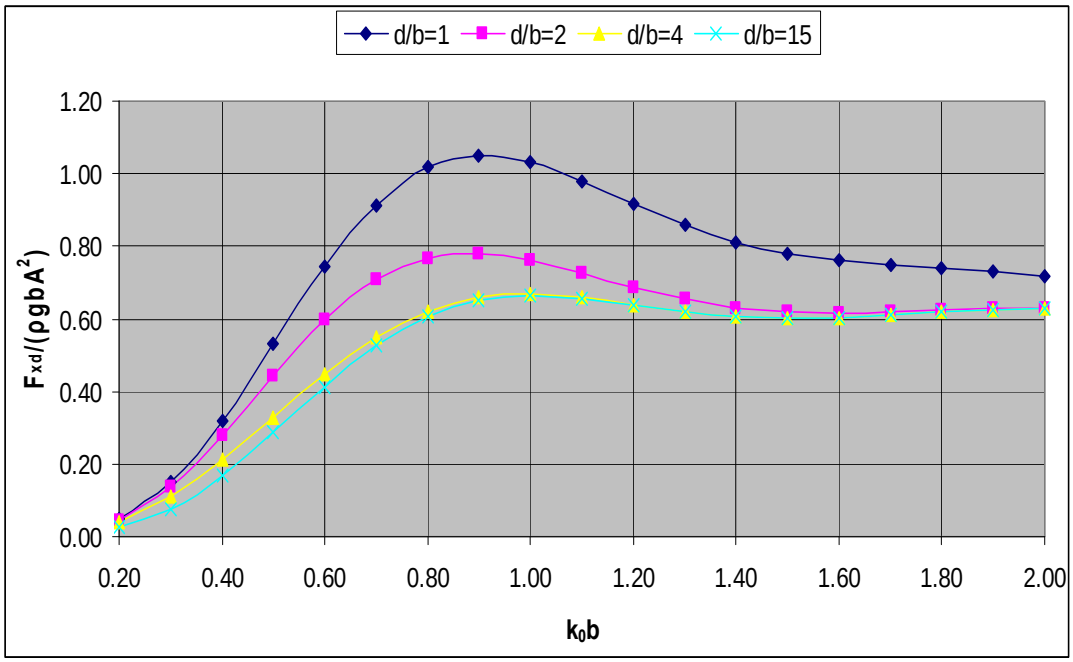
Σχήμα 2.1. 5: Drift δυνάμεις σε πακτωμένο κύλινδρο με *d/b*=∞, για γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες.



Σχήμα 2.1. 6: Drift δυνάμεις σε πακτωμένο κύλινδρο με *d/b*=2, για γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες.



Σχήμα 2.1. 7: Drift δυνάμεις σε πακτωμένο κύλινδρο με *d/b*=4, για γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες.



Σχήμα 2.1. 8: Συγκεντρωτικό διάγραμμα με τις Drift δυνάμεις σε πακτωμένο κύλινδρο με *d/b*=1,2,4,∞, για γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες.

Κατακόρυφη δύναμη έκπτωσης

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο κύλινδρος είναι πακτωμένος, συνεπώς η κατακόρυφη δύναμη έκπτωσης είναι μηδενική.

Ροπή έκπτωσης

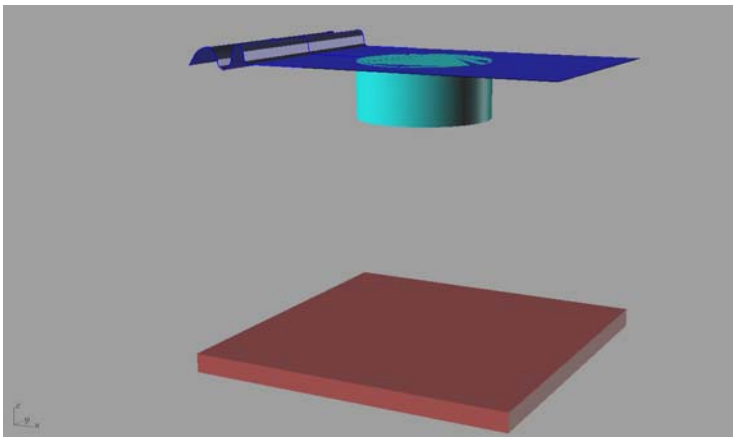
Η ροπή έκπτωσης, με τη μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης, μετά από εκτενείς μαθηματικούς υπολογισμούς, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{F^{\mathrm{I}}_{20_5}}{\rho g b^2 \mathrm{A}^2} &= -\frac{4}{\pi (kb)^2}\left[\frac{d-e}{2b^2 k} - \frac{\tanh(kd)}{(2kb)^2}\right]\Im\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left(1+\frac{(m+1)m}{(kb)^2}\right)\frac{1}{H'_{m+1}(kb)\bar{H}'_m\ (kb)}\right\} \\ &-\frac{4d(\frac{d}{2}-e)}{\pi (kb) b^2 \sinh(2kd)}\Im\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(m+1)m}{(kb)^2}-1\right)\frac{1}{H'_{m+1}(kb)\bar{H}'_m\ (kb)}\right\}\end{aligned}} \qquad (2.1.36)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{F^{\Gamma}_{20_5}}{\rho g b^2 A^2} &= \frac{4(d-e)}{\pi (kb)^2 b}\Im\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{H'_{m+1}(kb)\bar{H}'_m\ (kb)}\right\} \\ \\ \frac{F^{\Gamma}_{20_5}}{\rho g b^2 A^2} &= \frac{(d-e)}{b}\frac{F^{\Gamma}_{20_1}}{\rho g b A^2}\end{aligned}} \qquad (2.1.37)$$

Με ω τη συχνότητα του κύματος, k τον αριθμό κύματος, A *(H/2=A)* το πλάτος του κυματισμού, με ε_m=1 για m=0 και ε_m=2 για m>1, (m=0,1,2,3..), J_m είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και m τάξης, H_m είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και m τάξης. Ο τόνος αναφέρεται σε παραγώγιση ως προς το όρισμα και το * (ή άνω παύλα) δηλώνει το συζυγή μιγαδικού αριθμού.

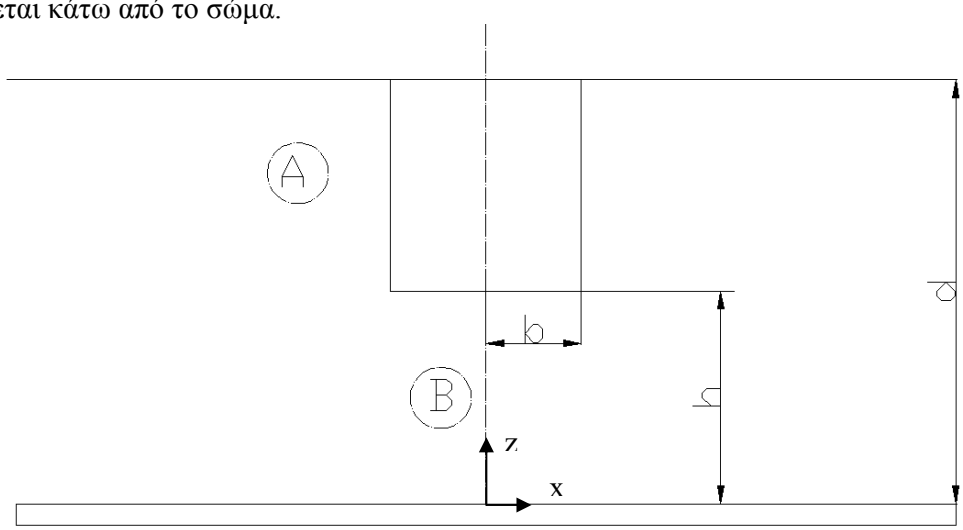
2.2. Απλός κατακόρυφος κύλινδρος. Αναλυτικός υπολογισμός πρωτοτάξιων δυνάμεων και ροπών διέγερσης καθώς και μέσων φορτίσεων έκπτωσης δεύτερης τάξης.



Σχήμα 2.2. 1: Τρισδιάστατη αναπαράσταση κατακόρυφου κυλίνδρου

2.2.1. Αναλυτικός υπολογισμός των συντελεστών Fourier

Στη παράγραφο αυτή, θα παρουσιατεί εν συντομία η ημιαναλυτική μέθοδος υπολογισμού του πεδίου ροής γύρω από έναν κατακόρυφο, αμετάθετο κύλινδρο που δέχεται την επίδραση απλών αρμονικών κυματισμών σε πεπερασμένο βάθος νερού. Η μέθοδος παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Garrett (1971) και αναπαράγεται εδώ για λόγους πληρότητας. Θεωρούμε απλό κατακόρυφο κύλινδρο, με ακτίνα *b*, ο οποίος βρίσκεται σε βάθος νερού *d* και ο πυθμένας του απέχει από τον πυθμένα της θάλασσας απόσταση *h*. Το πεδίο ροής, ακολουθώντας την γεωμετρική μορφή του σώματος, χωρίζεται σε δύο περιοχές που παριστάνονται με τα στοιχεία A και B στο σχήμα 2.2.2. Το πεδίο ροής A που περιβάλλει το σώμα, εκτείνεται μέχρι το άπειρο, ενώ το πεδίο ροής B, περιλαμβάνει τον όγκο ρευστού που βρίσκεται κάτω από το σώμα.



Σχήμα 2.2. 2: Ο κατακόρυφος κύλινδρος.

Το δυναμικό ταχύτητας πέραν της εξίσωσης του Laplace που πρέπει να ικανοποιεί σε όλο το πεδίο ροής, καθώς και τις γραμμικοποιημένες συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια της

θάλασσας, τον πυθμένα, και την βρεχόμενη επιφάνεια της κατασκευής, θα πρέπει να ικανοποιεί και τη συνθήκη συνέχειας της ροής και της παραγώγου του στο όριο παρακείμενων περιοχών (συνθήκες συμβιβαστού). Οι τελευταίες εκφράζονται με τις εξής εξισώσεις:

$$\frac{\partial \Psi_m^B}{\partial r}|_{r=b} = \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b}\text{, στο όριο } 0 \le z \le h \tag{2.2.1}$$

$$\Psi_m^B|_{r=b} = \Psi_m^A|_{r=b}\text{, στο όριο } 0 \le z \le h \text{ (συνθήκη συνέχειας στα όρια των χωρίων)} \tag{2.2.2}$$

$$\frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b} = 0\text{, στο όριο } h \le z \le d \tag{2.2.3}$$

Με βάση το δυναμικό του προσπίπτοντος κυματισμού που δίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από την εξίσωση (2.1.23), εκφράζουμε το δυναμικό της ροής στο εξωτερικό πεδίο Α ως:

$$\phi_A = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \Psi_m^A(r,z)\cos(m\vartheta) \tag{2.2.4}$$

Όπου:

$$\frac{1}{d}\Psi_m^{\mathrm{A}}(r,z) = \left\{ J_m(\alpha_0 r) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H_m(\alpha_0 r) \right\} \frac{Z_0(z)}{dZ_0'(z)} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K_m(a_j r)}{K_m(a_j b)} Z_j(z) \tag{2.2.5}$$

H_m και K_m είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους και m τάξης και οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους m τάξης αντίστοιχα.

Επιπλέον $Z_j(z)$ είναι οι ορθοκανονικές συναρτήσεις στο διάστημα [0,d] οι οποίες ορίζονται ως εξής :

$$Z_0(z) = N_0^{-1/2}\cosh(a_0 z) \quad \text{, με } a_0 = -ik \tag{2.2.6}$$

$$Z_j(z) = N_j^{-1/2}\cos(a_j z), a_j : real, j \ge 1 \tag{2.2.7}$$

Όπου

$$N_0 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sinh(2a_0 d)}{2a_0 d}\right] \tag{2.2.8}$$

$$N_j = \frac{1}{2}\left[1+\frac{\sin(2a_j d)}{2a_j d}\right], a_j = real, j \geq 1 \tag{2.2.9}$$

Και

$$\phi_{\mathrm{B}} = -i\omega\frac{H}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m \Psi_m^{\mathrm{B}}(r,z)\cos(m\vartheta) \tag{2.2.10}$$

Με

$$\frac{1}{d}\Psi_m^{\mathrm{B}}(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\in_n F_{mn}^{(B)}\frac{I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}\cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \tag{2.2.11}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις των δυναμικών στις συνθήκες συνέχειας του δυναμικού της ροής και της παραγώγου του στα όρια παρακείμενων περιοχών, προκύπτει από την (2.2.1):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\in_n F_{mn}^{(B)}\frac{I'_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}\cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) =$$

$$\left\{J'_m(\alpha_0 r) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)}H'_m(\alpha_0 r)\right\}\frac{Z_0(z)}{dZ'_0(z)} + \sum_{j=0}^{\infty}F_{mj}^{(A)}\frac{K'_m(a_j r)}{K_m(a_j b)}Z_j(z) \tag{2.2.12}$$

Ενώ από τη σχέση (2.2.2) στο όριο $0 \leq z \leq h$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\in_n F_{mn}^{(B)}\cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}F_{mj}^{(A)}Z_j(z) \tag{2.2.13}$$

Από τη σχέση (2.2.3), στο όριο $h \leq z \leq d$:

$$\left\{J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)}H'_m(\alpha_0 b)\right\}\frac{Z_0(z)}{dZ'_0(z)} + \sum_{j=0}^{\infty}F_{mj}^{(A)}\frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)}Z_j(z) = 0 \tag{2.2.14}$$

Συνεπώς από (2.2.1) θα έχουμε ολοκληρώνοντας στο $0 \leq z \leq h$:

$$\int_0^h \frac{\partial\Psi_m^B}{\partial r}\Big|_{r=b} Z_l(z)dz = \int_0^h \frac{\partial\Psi_m^A}{\partial r}\Big|_{r=b} Z_l(z)dz \tag{2.2.15}$$

Από (2.2.3) θα έχουμε ολοκληρώνοντας στο $h \le z \le d$:

$$\int_h^d \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz = 0 \tag{2.2.16}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.2.15) και (2.2.16) θα έχουμε:

$$\int_0^d \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz = \int_0^h \frac{\partial \Psi_m^B}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz \tag{2.2.17}$$

Από (2.2.2) θα έχουμε ολοκληρώνοντας στο $0 \le z \le h$:

$$\int_0^h \Psi_m^B|_{r=b} \cos(\frac{l\pi z}{h})dz = \int_0^h \Psi_m^A|_{r=b} \cos(\frac{l\pi z}{h})dz \tag{2.2.18}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.2.17) θα έχουμε:

$$\int_0^d \left[\left\{J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H'_m(\alpha_0 b)\right\} \frac{Z_0(z)}{dZ'_0(z)} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)} Z_j(z)\right] Z_l(z)dz =$$

$$\int_0^h \sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{mn}^{(B)} \frac{I'_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) Z_l(z)dz \tag{2.2.19}$$

$$\left\{J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H'_m(\alpha_0 b)\right\} \frac{1}{dZ'_0(d)} \int_0^d Z_0(z)Z_l(z)dz + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)} \int_0^d Z_j(z)Z_l(z)dz =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{mn}^{(B)} \frac{I'_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \int_0^h \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) Z_l(z)dz$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left\{J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H'_m(\alpha_0 b)\right\} \frac{\delta_{0l}}{Z'_0(d)} + d\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{j,l} F_{mj}^{(A)} \frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)} = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{mn}^{(B)} \frac{I'_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} hL_{nl}^{(1)} \end{aligned}} \tag{2.2.20}$$

Με

$$L_{nl}^{(1)} = \frac{(-1)^n}{(a_l h)^2 - (n\pi)^2} N_l^{-1/2} a_l h \sin(a_l h) \tag{2.2.21}$$

Από τη σχέση (2.2.18) θα έχουμε:

$$\int_0^h \Psi_m^B |_{r=b} \cos(\frac{l\pi z}{h}) dz = \int_0^h \Psi_m^A |_{r=b} \cos(\frac{l\pi z}{h}) dz \Rightarrow$$

$$\boxed{F_{mn}^{(B)} = \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} L_{nj}^{(1)}} \tag{2.2.22}$$

Θέτοντας την (2.2.22) στην (2.2.20), θα λάβουμε:

$$\left\{ J_m'(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H_m'(\alpha_0 b) \right\} \frac{\delta_{0l}}{Z_0'(d)} + d \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K_m'(a_j b)}{K_m(a_j b)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \in_n \left(\sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} L_{nj}^{(1)} \right) \frac{I_m'\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} h L_{nl}^{(1)}$$

Μαζεύοντας τους συντελεστές $F_{mj}^{(A)}$ στο αριστερό μέλος θα έχουμε:

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \left\{ \delta_{j,l} d \frac{K_m'(a_j b)}{K_m(a_j b)} - h \sum_{n=0}^{\infty} \in_n \frac{I_m'\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} L_{nj}^{(1)} L_{nl}^{(1)} \right\} = -\left\{ J_m'(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H_m'(\alpha_0 b) \right\} \frac{\delta_{0l}}{Z_0'(d)}$$

Η παραπάνω σχέση μας υπολογίζει επακριβώς τους συντελεστές Fourier $F_{mj}^{(A)}$, οι οποίοι μπορούν να γραφούν και εναλλακτικά ως εξής:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} E_{jl} F_{mj}^{(A)} = B_l} \tag{2.2.23}$$

Με

$$B_l = \frac{2i\delta_{0l}}{a_0 b \pi \mathrm{H}_m(a_0 b) N_0^{-1/2} \sinh(a_0 d)} \tag{2.2.24}$$

Και

$$E_{jl} = \frac{a_0 d}{a_0 b}\left[-a_j b \frac{K_{m+1}(a_j b)}{K_m(a_j b)} + m\right]\delta_{jl} - \frac{a_0 h}{a_0 b} m L_{0j}^{(1)} L_{0l}^{(1)}$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\pi \frac{\mathrm{I}_{m+1}(\frac{n\pi b}{h})}{\mathrm{I}_m(\frac{n\pi b}{h})} + m\frac{a_0 h}{a_0 b}\right] L_{nj}^{(1)} L_{nl}^{(1)} \qquad (2.2.25)$$

Τα B_l και E_{jl}, έχουν προκύψει, μετά από εκτενείς μαθηματικούς υπολογισμούς, που έγιναν στη σχέση (2.2.23)

2.2.2. Αναλυτικός υπολογισμός των γενικευμένων δυνάμεων πρώτης τάξης

Οριζόντια δύναμη πρώτης τάξης

Η οριζόντια δύναμη δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

Γνωρίζουμε ότι η πίεση *p,* μπορεί να περιγραφεί μέσω του δυναμικού ταχύτητας Φ,

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \frac{\partial (\phi e^{-i\omega t})}{\partial t} = i\omega\rho\phi(r,\theta,z) \tag{2.2.26}$$

Οπότε η οριζόντια δύναμη, είναι η ακόλουθη:

$$F_x = -\iint_{S_B} p n_x dS = -i\omega\rho \iint_{S_B} \phi(r,\theta,z) n_x dS = -i\omega\rho \iint_{S_B} \cos\vartheta \phi(r,\theta,z) dS \tag{2.2.27}$$

$$\begin{aligned} F_x &= -i\omega\rho \int_0^{2\pi}\int_h^d \phi_A(b,\theta,z)\cos\vartheta b d\vartheta dz \\ &= -i\omega\rho \int_0^{2\pi}\int_h^d -i\omega \frac{H}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \Psi_m^A(r,z)\cos(m\vartheta)\cos\vartheta b d\vartheta dz \\ &= -i\omega\rho\left(-i\omega\frac{H}{2}bd\right)\int_0^{2\pi}\int_h^d \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} Z_j(z)\cos(m\vartheta)\cos\vartheta b d\vartheta dz \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους έχουμε:

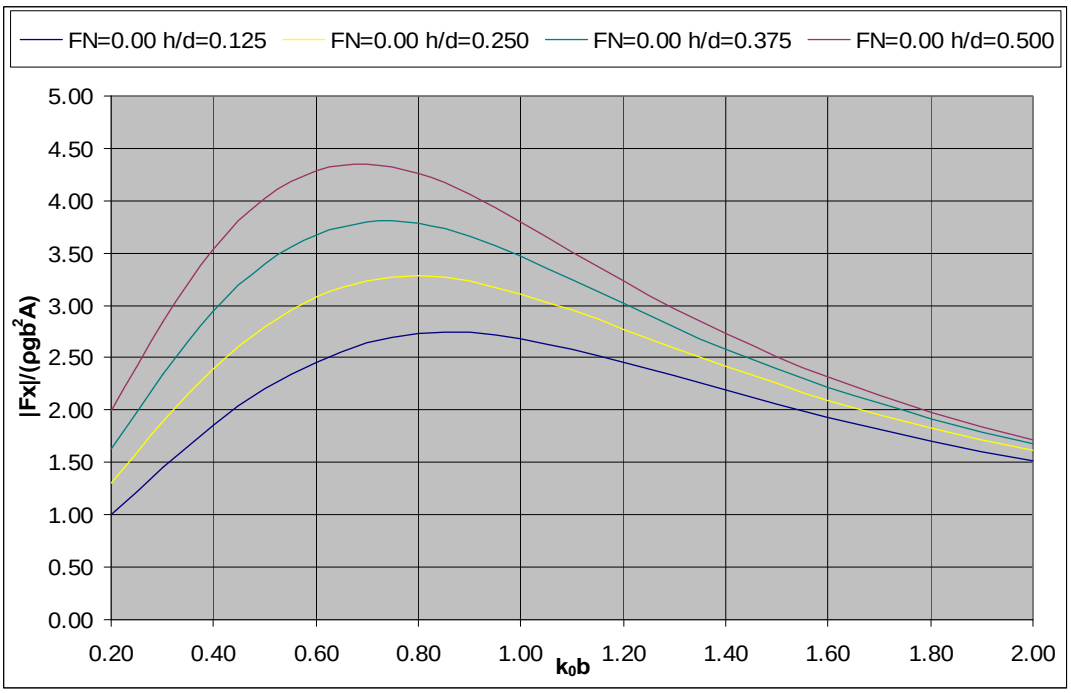
$$F_x = -2\frac{\omega^2}{g} g\rho \frac{H}{2}\frac{b^2}{b} d\pi \int_h^d \sum_{j=0}^{\infty} i F_{1j}^{(A)} Z_j(z) dz \tag{2.2.29}$$

Και αδιαστατοποιώντας ως προς $\rho g b^2 \frac{H}{2}$, ή $\rho g b^2$A (*H/2=A*) ,

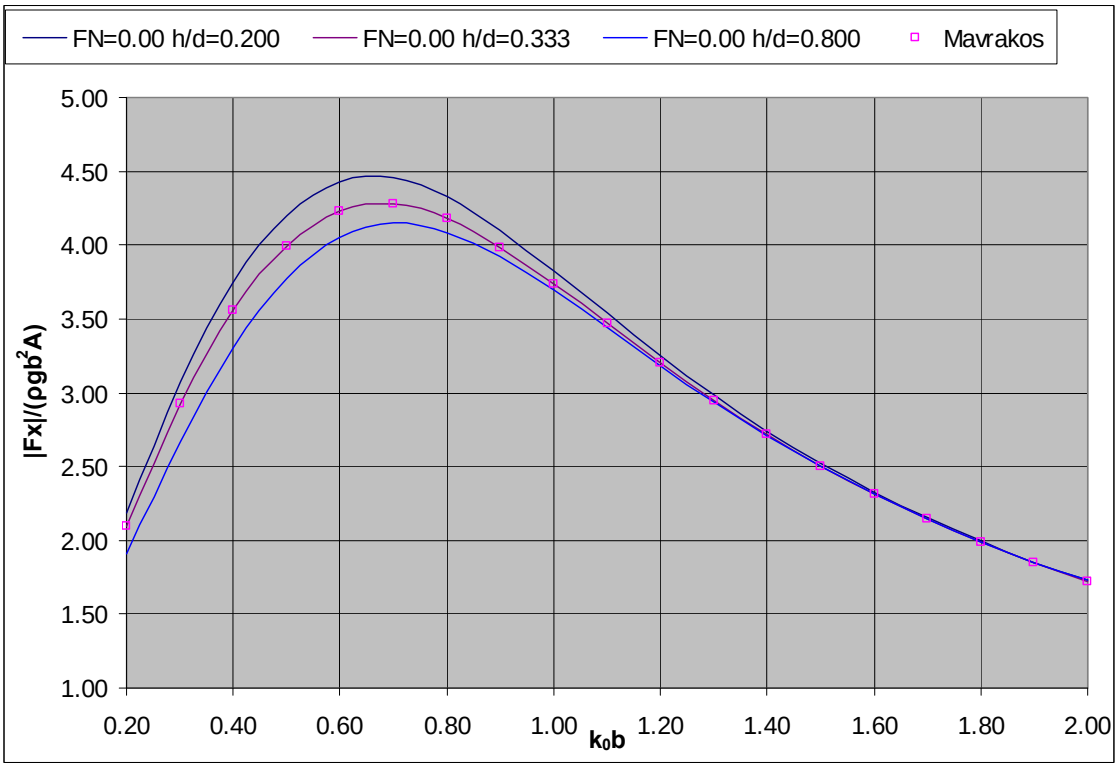
$$\frac{F_x}{\rho g b^2 A} = -2i\nu \frac{d}{b}\pi \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(A)} \int_h^d N_j^{-1/2}\cos(a_j z) dz$$

έχουμε τελικά τον αναλυτικό τύπο υπολογισμού της οριζόντιας δύναμης στον κατακόρυφο κύλινδρο ($\nu=\omega^2/g$):

$$\boxed{\frac{F_x}{\rho g b^2 A} = -2i\nu d\pi \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(A)} N_j^{-1/2} \frac{1}{a_j b}\Big(\sin(a_j d) - \sin(a_j h)\Big) \right\}} \tag{2.2.30}$$



Σχήμα 2.2. 3: Δυνάμεις διέγερσης σε κατακόρυφο κύλινδρο με *h/d*=0.125, 0.250, 0.375, 0.500.



Σχήμα 2.2. 4: Δυνάμεις διέγερσης σε κατακόρυφο κύλινδρο με *h/d*=0.200, 0.333, 0.800.

Κατακόρυφη δύναμη πρώτης τάξης

Η κατακόρυφη δύναμη δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

Η πίεση *p,* μπορεί να περιγραφεί μέσω του δυναμικού ταχύτητας Φ,

$$p = i\omega\rho\phi(r,\theta,z) \tag{2.2.31}$$

Οπότε η κατακόρυφη δύναμη, είναι η ακόλουθη:

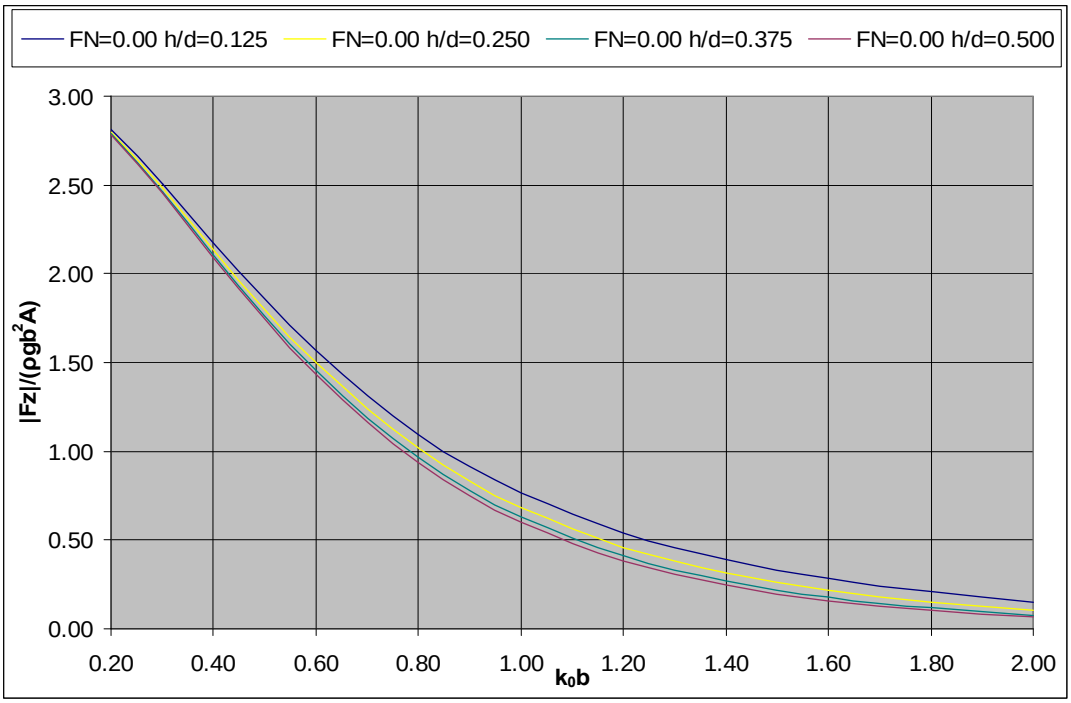
$$\begin{aligned}
F_z &= -i\omega\rho\int_0^{2\pi}\int_0^b \phi_B(r,\theta,h)(-1)rd\vartheta dr \\
&= -i\omega\rho\int_0^{2\pi}\int_0^b -i\omega\frac{H}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^B(r,h)(-1)rdr\cos(m\vartheta)d\vartheta \\
&= -i\omega\rho i\omega\frac{H}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^b \sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^B(r,h)r\cos(m\vartheta)d\vartheta dr \\
&= \omega^2\rho\frac{H}{2}\int_0^b \sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^B(r,h)\int_0^{2\pi}\cos(m\vartheta)d\vartheta rdr \\
&= \omega^2\rho\frac{H}{2}2\pi\int_0^b \in_0 i^0\Psi_0^B(r,h)rdr \\
&= 2\pi\omega^2\rho\frac{H}{2}\int_0^b \Psi_0^B(r,h)rdr
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^b \Psi_0^B(r,h)rdr$, μετά από εκτενείς μαθηματικούς υπολογισμούς δίνει:

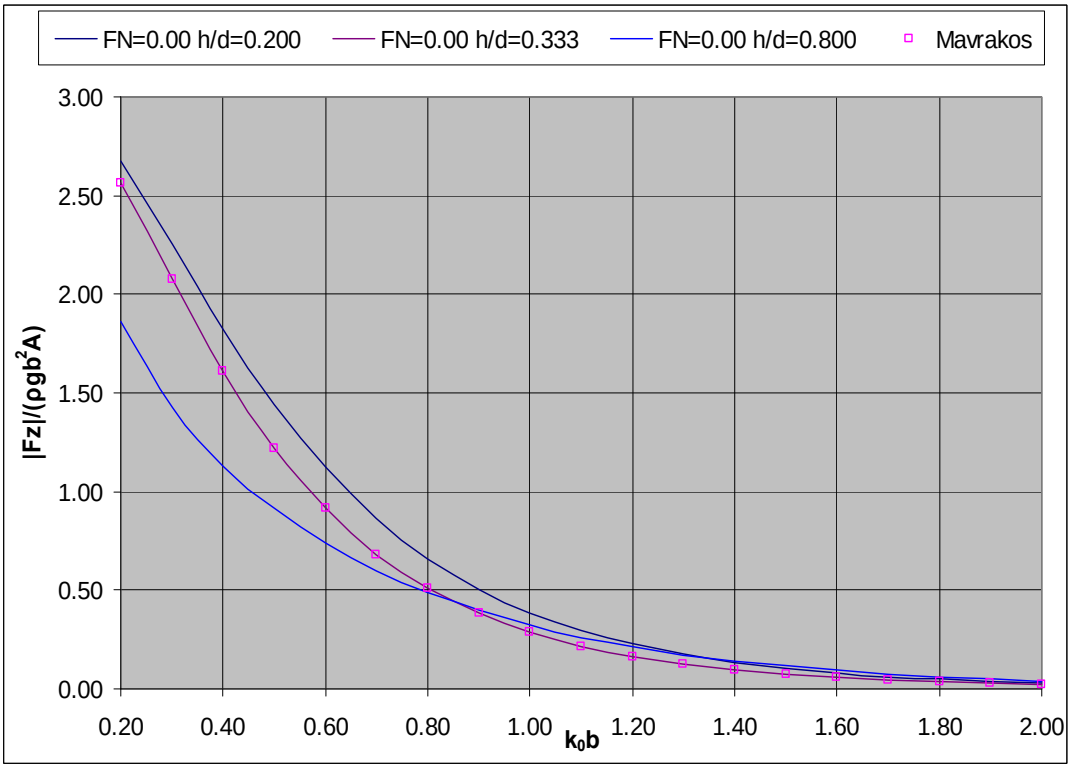
$$\int_0^b \Psi_0^B(r,h)rdr = db^2\left[\frac{1}{2}F_{00}^{(B)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} F_{0n}^{(B)}\frac{1}{\frac{n\pi b}{h}}\frac{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}\right]$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους και αδιαστατοποιώντας ως προς $\rho g b^2\frac{H}{2}$, ή $\rho g b^2$A (*H/2=A*) , έχουμε τελικά τον αναλυτικό τύπο υπολογισμού της κατακόρυφης δύναμης στον κατακόρυφο κύλινδρο ($\nu=\omega^2/g$):

$$\boxed{\frac{F_z}{\rho g b^2 A} = 2\pi\nu d\left\{\frac{1}{2}F_{00}^{(B)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} F_{0n}^{(B)}\frac{1}{\frac{n\pi b}{h}}\frac{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}\right\}} \tag{2.2.33}$$



Σχήμα 2.2. 5: Κατακόρυφες δυνάμεις διέγερσης σε κατακόρυφο κύλινδρο με *h/d*=0.125, 0.250, 0.375, 0.500



Σχήμα 2.2. 6: Κατακόρυφες δυνάμεις διέγερσης σε κατακόρυφο κύλινδρο με *h/d*=0.200, 0.333, 0.800.

Ροπή πρώτης τάξης

Η ροπή πρώτης τάξης, θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\boxed{\frac{M_y}{\rho g b^3 A} = 2\pi i k d \tanh(kd) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(A)} N_j^{-1/2} \frac{1}{\left(a_j b\right)^2} \times \\ \begin{pmatrix} a_j(e-d)\sin(a_j d) - a_j(e-h)\sin(a_j h) \\ -\cos(a_j d) + \cos(a_j h) \end{pmatrix} \end{array} \right\}} \tag{2.2.34}$$

2.2.3. Αναλυτικός υπολογισμός των μέσων δυνάμεων και ροπών έκπτωσης δεύτερης τάξης

Ο γενικός τύπος υπολογισμού των δυνάμεων έκπτωσης με βάση τη μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης όλων των όρων της πίεσης που συνεισφέρουν στη μέση δευτεροτάξια δύναμη, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} F_{20_j} &= \frac{\rho}{4} \iint_S \nabla\phi \nabla\bar{\phi} n_j dS + \frac{\omega^2 \rho}{4g} \int_\Gamma \phi\bar{\phi} n_j d\Gamma \\ F_{20_j} &= F_{20_j}^{\mathrm{I}} + F_{20_j}^{\Gamma} \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Με $j=1, 3, 5$

Οριζόντια δύναμη έκπτωσης

$$\boxed{\frac{F_{20_1}^{I}}{\rho g b A^2} = \pi k d \tanh(kd) \Re \left\{ \begin{array}{l} i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha}^{\infty} F_{m+1,\alpha} \sum_{\beta}^{\infty} \bar{F}_{m,\beta} \times \\ (\alpha d)(\beta d) L_{\alpha\beta}^{ss} + m(m+1)(\frac{d}{b})^2 L_{\alpha\beta}^{cc} \end{array} \right\}} \tag{2.2.36}$$

Με

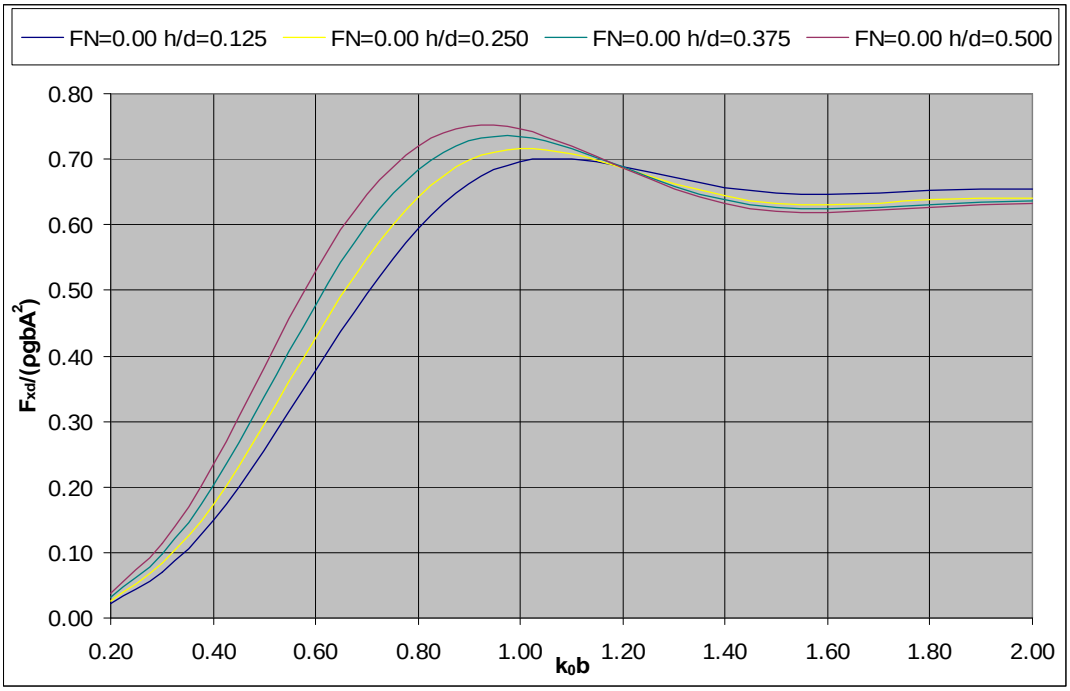
$$L_{\alpha\beta}^{ss} = \frac{N_\alpha^{-1/2} N_\beta^{-1/2}}{d} \int_h^d \sin(\alpha z)\sin(\beta z) dz \tag{2.2.37}$$

Και

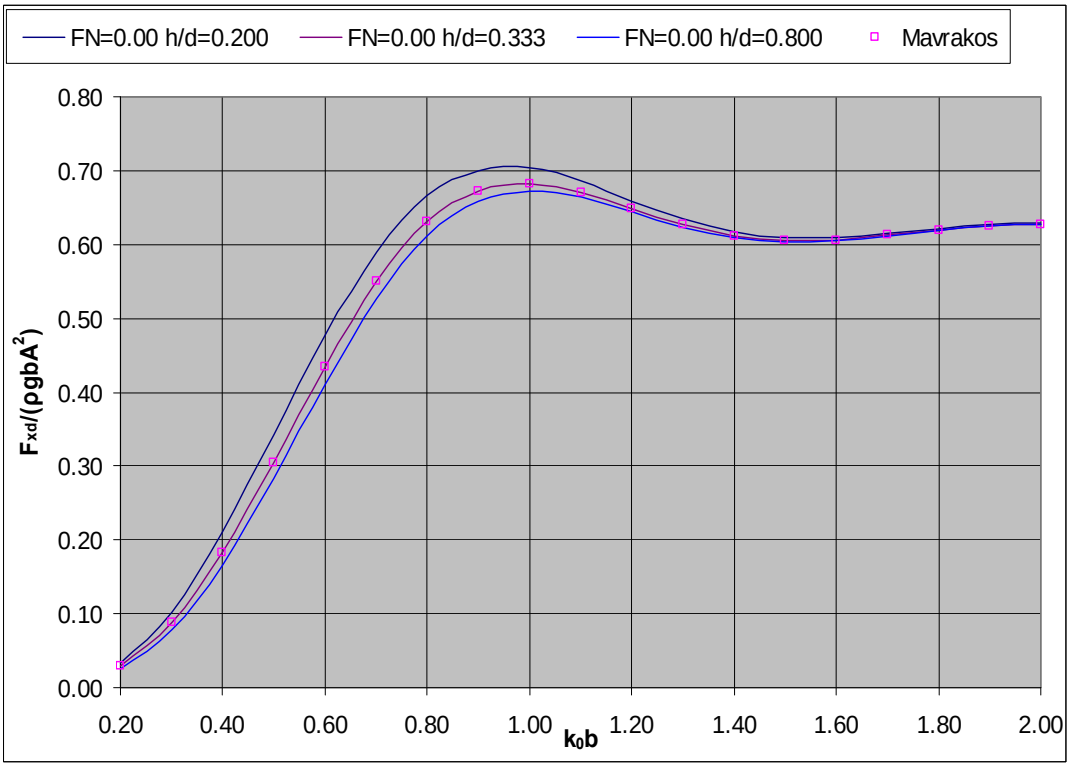
$$L_{\alpha\beta}^{cc} = \frac{N_\alpha^{-1/2} N_\beta^{-1/2}}{d} \int_h^d \cos(\alpha z)\cos(\beta z) dz \tag{2.2.38}$$

Επίσης $\bar{F}$ είναι ο συζυγής του μιγαδικού F.

$$\boxed{\frac{F_{20_1}^{\Gamma}}{\rho g b A^2} = \pi \left(kd \tanh(kd)\right)^2 \Re \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1}^{\infty} \sum_{\beta_1}^{\infty} F_{m+1,\alpha_1} \bar{F}_{m,\beta_1} z_{\alpha_1}(d) z_{\beta_1}(d) \right\}} \tag{2.2.39}$$



Σχήμα 2.2. 7: Drift δυνάμεις σε κατακόρυφο κύλινδρο με *h/d*=0.125, 0.250, 0.375, 0.500



Σχήμα 2.2. 8: Drift δυνάμεις σε κατακόρυφο κύλινδρο με *h/d*=0.200, 0.333, 0.800.

Κατακόρυφη μέση δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{F^{I}_{20_3}}{\rho g b A^2} = \frac{\omega^2 \pi d^2}{2gb} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sum_{\alpha_l}^{\infty} N_{\alpha_l}^{-1/2} \sum_{\beta_l}^{\infty} N_{\beta_l}^{-1/2} \times \\ \int_0^b \left[\frac{m^2}{r} \Lambda_{m,a_l}(r) \bar{\Lambda}_{m,\beta_l}(r) + r \Lambda'_{m,a_l}(r) \bar{\Lambda}'_{m,\beta_l}(r) \right] dr\end{aligned}} \tag{2.2.40}$$

Με

$$\boxed{\begin{aligned}\Lambda'_{m,a_l}(r) &= \frac{\partial \Lambda_{m,a_l}(r)}{\partial r} \\ \Lambda_{m,a_l}(r) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l F^{(B)}_{ml} I_m(a_l r)}{I_m(a_l b)}\end{aligned}} \tag{2.2.41}$$

Μέση Ροπή έκπτωσης δεύτερης τάξης:

Για $h < z < d$, $r = b$ και e το σημείο, μετρούμενο από τον πυθμένα, περί το οποίο, υπολογίζουμε τη ροπή έκπτωσης:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{F^{I}_{20_5}}{\rho g b^2 A^2} = \pi k d \tanh\left(\frac{d}{b}\right) \Re \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha}^{\infty} F_{m+1,\alpha} \sum_{\beta}^{\infty} \bar{F}_{m,\beta} \times \right. \\ \left. (\alpha d)(\beta d) L^{ss}_{\alpha\beta} + m(m+1)\left(\frac{d}{b}\right)^2 L^{cc}_{\alpha\beta} \right\}\end{aligned}} \tag{2.2.42}$$

Με

$$L^{ss}_{\alpha\beta} = \frac{N_\alpha^{-1/2} N_\beta^{-1/2}}{d^2} \int_h^d (z-e) \sin(\alpha z) \sin(\beta z) dz \tag{2.2.43}$$

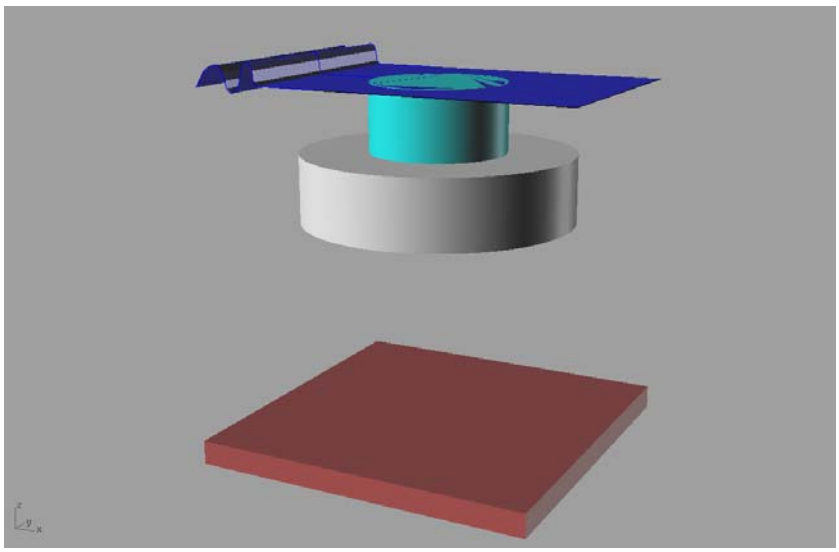
Και

$$L^{cc}_{\alpha\beta} = \frac{N_\alpha^{-1/2} N_\beta^{-1/2}}{d^2} \int_h^d (z-e) \cos(\alpha z) \cos(\beta z) dz \tag{2.2.44}$$

Και για το ολοκλήρωμα στην ίσαλο του σώματος, έχουμε:

$$\boxed{\frac{F^{\Gamma}_{20_5}}{\rho g b^2 A^2} = \frac{(d-e)}{b} \frac{F^{\Gamma}_{20_1}}{\rho g b A^2}} \tag{2.2.45}$$

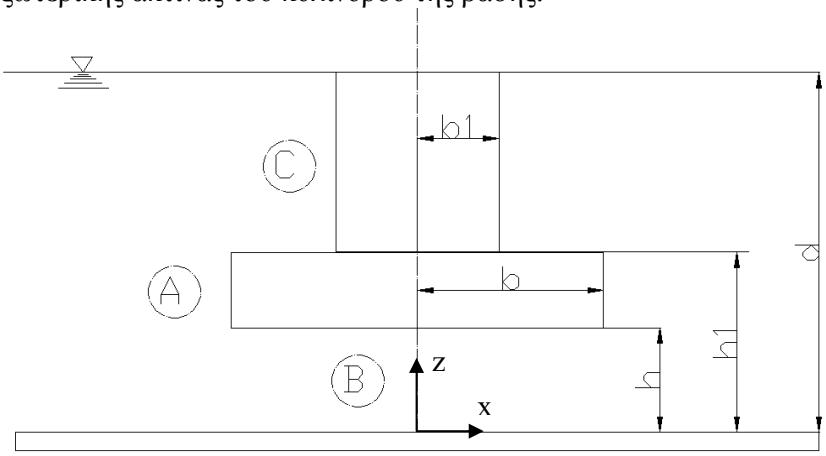
2.3. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα. Αναλυτικός υπολογισμός πρωτοτάξιων δυνάμεων και ροπών διέγερσης καθώς και μέσων φορτίσεων έκπτωσης δεύτερης τάξης.



Σχήμα 2.3. 1: Τρισδιάστατη αναπαράσταση, σύνθετου κατακόρυφου κυλινδρικού σώματος.

2.3.1. Αναλυτικός υπολογισμός των συντελεστών Fourier

Θεωρούμε σύνθετο κατακόρυφο κύλινδρο, με ακτίνες b και b_1, ο οποίος βρίσκεται σε βάθος νερού d . Ο πυθμένας του κυλινδρικού σώματος απέχει από τον πυθμένα της θάλασσας απόσταση h, ενώ του κυλίνδρου με την μικρότερη ακτίνα απέχει h_1. Με βάση τη γεωμετρία του σώματος, το πεδίο ροής χωρίζεται σε τρεις διακριτές περιοχές, που συμβολίζονται με τα στοιχεία Α, Β και Γ, όπως φαίνονται στο σχήμα 2.3.2. Το πεδίο Α, εξωτερικό πεδίο του κυλίνδρου εκτείνεται μέχρι το άπειρο, το πεδίο Β βρίσκεται κάτω από το κυλινδρικό σώμα, ενώ το δακτυλιοειδές πεδίο Γ περιορίζεται καθ' ύψος μεταξύ της επάνω επιφάνειας της βάσης του κυλινδρικού σώματος και της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού. Στην ακτινική διεύθυνση περιορίζεται μεταξύ της μικρής ακτίνας του ανώτερου κυλινδρικού σώματος και της εξωτερικής ακτίνας του κυλίνδρου της βάσης.



Σχήμα 2.3. 2: το σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα.

Οι συνθήκες συνέχειας του δυναμικού της ροής και της πρώτης παραγώγου του, καθώς και οι αντίστοιχες συνθήκες στα κατακόρυφα όρια της βρεχόμενης επιφάνειας του κυλίνδρου, περιγράφονται από τις ακόλουθες μαθηματικές σχέσεις:

$$\frac{\partial \Psi_m^B}{\partial r}\Big|_{r=b} = \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}\Big|_{r=b}, \text{ στο όριο } 0 \le z \le h \tag{2.3.1}$$

$$\Psi_m^B\big|_{r=b} = \Psi_m^A\big|_{r=b}, \text{ στο όριο } 0 \le z \le h \text{ (συνθήκη συνέχειας στα όρια των χωρίων)} \tag{2.3.2}$$

$$\frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0, \text{ στο όριο } h \le z \le h_1 \tag{2.3.3}$$

$$\frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}\Big|_{r=b} = \frac{\partial \Psi_m^\Gamma}{\partial r}\Big|_{r=b}, \text{ στο όριο } h_1 \le z \le d \tag{2.3.4}$$

$$\Psi_m^A\big|_{r=b} = \Psi_m^\Gamma\big|_{r=b}, \text{ στο όριο } h_1 \le z \le d \tag{2.3.5}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι:

$$\phi_A = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \Psi_m^A(r,z)\cos(m\vartheta) \tag{2.3.6}$$

Όπου:

$$\frac{1}{d}\Psi_m^{\mathrm{A}}(r,z) = \left\{ J_m(\alpha_0 r) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H_m(\alpha_0 r) \right\} \frac{Z_0(z)}{dZ_0'(z)} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K_m(a_j r)}{K_m(a_j b)} Z_j(z) \tag{2.3.7}$$

H_m και K_m είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους και m τάξης και οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους m τάξης αντίστοιχα.

Επιπλέον $Z_j(z)$ είναι οι ορθοκανονικές συναρτήσεις στο διάστημα [0,d] οι οποίες ορίζονται ως εξής :

$$Z_0(z) = N_0^{-1/2}\cosh(a_0 z) \quad \text{, με } a_0 = -ik \tag{2.3.8}$$

$$Z_j(z) = N_j^{-1/2}\cos(a_j z), a_j : real, j \ge 1 \tag{2.3.9}$$

Όπου

$$N_0 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sinh(2a_0 d)}{2a_0 d}\right] \tag{2.3.10}$$

$$N_j = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin(2a_j d)}{2a_j d}\right], a_j = real, j \geq 1 \tag{2.3.11}$$

$$\phi_{\mathrm{B}} = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \Psi_m^{\mathrm{B}}(r,z)\cos(m\vartheta) \tag{2.3.12}$$

Με

$$\frac{1}{d}\Psi_m^{\mathrm{B}}(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{mn}^{(B)} \frac{I_m\left(\frac{n\,\pi r}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\,\pi b}{h}\right)} \cos\left(\frac{n\,\pi z}{h}\right) \tag{2.3.13}$$

Και

$$\phi_{\Gamma} = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \Psi_m^{\Gamma}(r,z)\cos(m\vartheta) \tag{2.3.14}$$

Με

$$\frac{1}{d}\Psi_m^{\Gamma}(r,z) = \sum_{l=0} \left[R_{ml}(r)F_{ml}^{\Gamma} + R_{ml}^{*}(r)F_{ml}^{\Gamma}\right] Z_{a_l}(z) \tag{2.3.15}$$

Όπου

$$R_{ml}(r) = \frac{I_m(a_l r)K_m(\alpha_l b_1) - I_m(\alpha_l b_1)K_m(\alpha_l r)}{I_m(\alpha_l b)K_m(\alpha_l b_1) - I_m(\alpha_l b_1)K_m(\alpha_l b)} \tag{2.3.16}$$

$$R_{ml}^{*}(r) = \frac{I_m(\alpha_l b)K_m(\alpha_l r) - K_m(\alpha_l b)I_m(\alpha_l r)}{I_m(\alpha_l b)K_m(\alpha_l b_1) - I_m(\alpha_l b_1)K_m(\alpha_l b)} \tag{2.3.17}$$

όπου I_m είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και m τάξης και $Z_{a_l}(z)$ είναι οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις στο διάστημα $z = [h_1, d]$ που ορίζονται ως εξής :

$$Z_{a_l}(z) = N_l^{-1/2} \cos\left[a_l\left(z - h_1\right)\right] \tag{2.3.18}$$

Όπου

$$N_{a_l} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin[2a_l(d-h_1)]}{2a_l(d-h_1)}\right] \tag{2.3.19}$$

και a_l είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

$$\frac{\omega^2}{g} + a_l \tan\left[a_l\left(d - h_1\right)\right] = 0 \tag{2.3.20}$$

με το φανταστικό $a_0 = -ik_l$ να θεωρείται όπως και προηγούμενα.

Αρχικά θα πρέπει:

$$\frac{1}{d}\Psi_m^\Gamma\,|_{r=b_1} = 0 \Rightarrow \sum_{l=0}\left[R'_{ml}(b_1)F_{ml}^\Gamma + R'^*_{ml}(b_1)F_{ml}^{*\Gamma}\right]Z_{a_l}(z) = 0$$

$$F_{ml}^{*\Gamma} = -\frac{R'_{ml}(b_1)}{R'^*_{ml}(b_1)}F_{ml}^\Gamma$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{d}\Psi_m^\Gamma(r,z) = \sum_{l=0}\left[R_{ml}(b_1)F_{ml}^\Gamma + R^*_{ml}(b_1)F_{ml}^{*\Gamma}\right]Z_{a_l}(z) \Rightarrow \\
&\frac{1}{d}\Psi_m^\Gamma(r,z) = \sum_{l=0}\left[R_{ml}(b_1)F_{ml}^\Gamma - \frac{R'_{ml}(b_1)}{R'^*_{ml}(b_1)}F_{ml}^\Gamma R^*_{ml}(b_1)\right]Z_{a_l}(z) \Rightarrow \\
&\frac{1}{d}\Psi_m^\Gamma(r,z) = \sum_{l=0}F_{ml}^\Gamma\left[R_{ml}(b_1)R'^*_{ml}(b_1) - R'_{ml}(b_1)R^*_{ml}(b_1)\right]Z_{a_l}(z) \Rightarrow \\
&\frac{1}{d}\Psi_m^\Gamma(r,z) = \sum_{l=0}F_{ml}^\Gamma\Re_{ml}(r)Z_{a_l}(z)
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Με $\Re_{ml}(r) = \left[R_{ml}(b_1)R'^*_{ml}(b_1) - R'_{ml}(b_1)R^*_{ml}(b_1)\right]$

ή εναλλακτικά

$$\frac{1}{d}\Psi_m^\Gamma(r,z) = \sum_{l=0}\Lambda_{ml}(r)Z_{a_l}(z)$$

Με
$$\begin{aligned}
\Lambda_{ml}(r) &= \left[R_{ml}(b_1)F_{ml}^\Gamma + R^*_{ml}(b_1)F_{ml}^{*\Gamma}\right] \\
\Lambda'_{ml}(r) &= \frac{\partial\Lambda_{ml}(r)}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις των δυναμικών στις αρχικές και οριακές συνθήκες του προβλήματός μας θα έχουμε:

Από τη σχέση (2.3.1) στο όριο $0 \le z \le h$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \in_n \; F_{mn}^{(B)} \frac{I'_m\left(\frac{n\,\pi r}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\,\pi b}{h}\right)} \cos\left(\frac{n\,\pi z}{h}\right) =$$

$$\left\{ J'_m(\alpha_0 r) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H_m(\alpha_0 r) \right\} \frac{Z_0(z)}{dZ'_0(z)} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K'_m(a_j r)}{K_m(a_j b)} Z_j(z) \tag{2.3.23}$$

Από τη σχέση (2.3.2) στο όριο $0 \le z \le h$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \in_n \; F_{mn}^{(B)} = \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} Z_j(z) \tag{2.3.24}$$

Από τη σχέση (2.3.3), στο όριο $h \le z \le h_1$:

$$\left\{ J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H'_m(\alpha_0 b) \right\} \frac{Z_0(z)}{dZ'_0(z)} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)} Z_j(z) = 0 \tag{2.3.25}$$

Από τη σχέση (2.3.4), στο όριο $h_1 \le z \le d$:

$$\left\{ J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H'_m(\alpha_0 b) \right\} \frac{Z_0(z)}{dZ'_0(z)} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)} Z_j(z) =$$

$$\sum_{j=0} F_{mj}^{\Gamma} \Re'_{mj}(r) Z_{a_l}(z) \tag{2.3.26}$$

Από τη σχέση (2.3.5), στο όριο $h_1 \le z \le d$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} Z_j(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(\Gamma)} Z_{a_j}(z) \tag{2.3.27}$$

Συνεπώς από (2.3.1) θα έχουμε ολοκληρώνοντας στο $0 \le z \le h$:

$$\int_0^h \frac{\partial \Psi_m^B}{\partial r}\Big|_{r=b} Z_l(z)dz = \int_0^h \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}\Big|_{r=b} Z_l(z)dz \tag{2.3.28}$$

Από (2.3.3) θα έχουμε ολοκληρώνοντας στο $h \le z \le h_1$:

$$\int_h^{h_1} \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz = 0 \tag{2.3.29}$$

Από (2.3.4) θα έχουμε ολοκληρώνοντας στο $h_1 \le z \le d$:

$$\int_{h_1}^{d} \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz = \int_{h_1}^{d} \frac{\partial \Psi_m^\Gamma}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz \tag{2.3.30}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.3.28) και (2.3.30) θα έχουμε:

$$\int_0^{d} \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz = \int_0^{h} \frac{\partial \Psi_m^B}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz + \int_{h_1}^{d} \frac{\partial \Psi_m^\Gamma}{\partial r}|_{r=b} Z_l(z)dz \tag{2.3.31}$$

Από (2.3.2) θα έχουμε ολοκληρώνοντας στο $0 \le z \le h$:

$$\int_0^{h} \Psi_m^B|_{r=b} \cos(\frac{l\pi z}{h})dz = \int_0^{h} \Psi_m^A|_{r=b} \cos(\frac{l\pi z}{h})dz \tag{2.3.32}$$

Από (2.3.5) θα έχουμε ολοκληρώνοντας στο $h_1 \le z \le d$:

$$\int_{h_1}^{d} \Psi_m^A|_{r=b} Z_{a_l}(z)dz = \int_{h_1}^{d} \Psi_m^\Gamma|_{r=b} Z_{a_l}(z)dz \tag{2.3.33}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.3.31) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{d} \left[\left\{ J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H'_m(\alpha_0 b) \right\} \frac{Z_0(z)}{dZ'_0(z)} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)} Z_j(z) \right] Z_l(z)dz = \\
&\int_0^{h} \sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{mn}^{(B)} \frac{I'_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) Z_l(z)dz + \int_{h_1}^{d} \sum_{j=0}^{\infty} \in_n F_{mj}^{(\Gamma)} \Re'_{mj}(b) Z_{\alpha_j}(z) Z_l(z)dz
\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H'_m(\alpha_0 b) \right\} \frac{1}{dZ'_0(d)} \int_0^{d} Z_0(z) Z_l(z)dz + \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)} \int_0^{d} Z_j(z) Z_l(z)dz = \\
&\sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{mn}^{(B)} \frac{I'_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \int_0^{h} \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) Z_l(z)dz + \sum_{j=0}^{\infty} \in_n F_{mj}^{(\Gamma)} \Re'_{mj}(b) \int_{h_1}^{d} Z_{\alpha_j}(z) Z_l(z)dz
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\left\{J'_m(\alpha_0 b)-\frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)}H'_m(\alpha_0 b)\right\}\frac{\delta_{0l}}{Z'_0(d)}+d\sum_{j=0}^{\infty}\delta_{j,l}F_{mj}^{(A)}\frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)}=\\&\sum_{n=0}^{\infty}\in_n\ F_{mn}^{(B)}\frac{I'_m\left(\frac{n\,\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\,\pi b}{h}\right)}hL_{nl}^{(1)}+\sum_{j=0}^{\infty}F_{mj}^{(\Gamma)}\Re'_{mj}(b)dH_{jl}^{(1)}\end{aligned}} \tag{2.3.35}$$

Με

$$L_{nl}^{(1)}=\frac{(-1)^n}{(a_l h)^2-(n\pi)^2}N_l^{-1/2}a_l h\sin(a_l h) \tag{2.3.36}$$

$$H_{jl}^{(1)}=\frac{N_{a_j}{}^{-1/2}N_l^{-1/2}}{2\left[(a_l d)^2-(a_j d)^2\right]}\begin{bmatrix}-2a_l d\sin(a_l h_1)+(a_l d+a_j d)\sin(a_l d-a_j d+a_j h_1)\\+(a_j d-a_l d)\sin(a_j h_1-a_l d-a_j d)\end{bmatrix} \tag{2.3.37}$$

Από τη σχέση (2.3.32) θα έχουμε:

$$\int_0^h \Psi_m^B|_{r=b}\cos(\frac{l\pi z}{h})dz=\int_0^h \Psi_m^A|_{r=b}\cos(\frac{l\pi z}{h})dz\Rightarrow$$

$$\boxed{F_{mn}^{(B)}=\sum_{j=0}^{\infty}F_{mj}^{(A)}L_{nj}^{(1)}} \tag{2.3.38}$$

Από τη σχέση (2.3.33) θα έχουμε:

$$\int_{h_1}^d \Psi_m^A|_{r=b}Z_{a_l}(z)dz=\int_{h_1}^d \Psi_m^\Gamma|_{r=b}Z_{a_l}(z)dz\Rightarrow$$

$$\boxed{F_{ml}^{(\Gamma)}=\frac{d}{d-h_1}\sum_{j=0}^{\infty}F_{mj}^{(A)}H_{lj}^{(1)}} \tag{2.3.39}$$

Θέτοντας τις (2.3.38) και (2.3.39) στην (2.3.35), θα λάβουμε:

$$\left\{J'_m(\alpha_0 b)-\frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)}H'_m(\alpha_0 b)\right\}\frac{\delta_{0l}}{Z'_0(d)}+d\sum_{j=0}^{\infty}\delta_{j,l}F_{mj}^{(A)}\frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\in_n\left(\sum_{j=0}^{\infty}F_{mj}^{(A)}L_{nj}^{(1)}\right)\frac{I'_m\left(\frac{n\,\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\,\pi b}{h}\right)}hL_{nl}^{(1)}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{d}{d-h_1}\sum_{j=0}^{\infty}F_{mj}^{(A)}H_{lj}^{(1)}\right)\Re'_{mj}(b)dH_{jl}^{(1)}$$

Μαζεύοντας τους συντελεστές $F_{mj}^{(A)}$ στο αριστερό μέλος θα έχουμε:

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} \left\{ d\delta_{j,l} \frac{K'_m(a_j b)}{K_m(a_j b)} - h \sum_{n=0}^{\infty} \in_n \frac{I'_m\left(\frac{n\,\pi b}{h}\right)}{I_m\left(\frac{n\,\pi b}{h}\right)} L_{nj}^{(1)} L_{nl}^{(1)} - \frac{d}{d-h_1} \sum_{p=0}^{\infty} \Re'_{mj}(b) d H_{pl}^{(1)} H_{pj}^{(1)} \right\} =$$
$$-\left\{ J'_m(\alpha_0 b) - \frac{J_m(\alpha_0 b)}{H_m(\alpha_0 b)} H'_m(\alpha_0 b) \right\} \frac{\delta_{0l}}{Z'_0(d)} \tag{2.3.40}$$

Η παραπάνω σχέση μας υπολογίζει επακριβώς τους συντελεστές Fourier $F_{mj}^{(A)}$, οι οποίοι μπορούν να γραφούν και εναλλακτικά ως εξής:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} E_{jl} F_{mj}^{(A)} = B_l} \tag{2.3.41}$$

Με

$$B_l = \frac{2i\delta_{0l}}{a_0 b \pi \mathrm{H}_m(a_0 b) N_0^{-1/2} \sinh(a_0 d)} \tag{2.3.42}$$

Και

$$E_{jl} = \frac{a_0 d}{a_0 b} \left[-a_j b \frac{K_{m+1}(a_j b)}{K_m(a_j b)} + m \right] \delta_{jl} - \frac{a_0 h}{a_0 b} m L_{0j}^{(1)} L_{0l}^{(1)}$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty} \left[n\pi \frac{\mathrm{I}_{m+1}(\frac{n\pi b}{h})}{\mathrm{I}_m(\frac{n\pi b}{h})} + m \frac{a_0 h}{a_0 b} \right] L_{nj}^{(1)} L_{nl}^{(1)} - -\frac{a_0 d}{a_0 d - a_0 h_1} \sum_{p=0}^{\infty} d \Re'_{mj}(b) H_{pl}^{(1)} H_{pj}^{(1)} \tag{2.3.43}$$

Τα B_l και E_{jl}, έχουν προκύψει, μετά από εκτενείς μαθηματικούς υπολογισμούς, που έγιναν στη σχέση (2.3.41).

2.3.2. Αναλυτικός υπολογισμός των γενικευμένων δυνάμεων πρώτης τάξης

Οριζόντια δύναμη πρώτης τάξης

Η οριζόντια δύναμη δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

Γνωρίζουμε ότι η πίεση *p,* μπορεί να περιγραφεί μέσω του δυναμικού ταχύτητας Φ,

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \frac{\partial (\phi e^{-i\omega t})}{\partial t} = i\omega\rho\phi(r,\theta,z) \tag{2.3.44}$$

Οπότε η οριζόντια δύναμη, είναι η ακόλουθη:

$$F_x = -\iint_{S_B} p n_x dS = -i\omega\rho \iint_{S_B} \phi(r,\theta,z) n_x dS = -i\omega\rho \iint_{S_B} \cos\vartheta \phi(r,\theta,z) dS \tag{2.3.45}$$

$$\begin{aligned}
F_x &= -i\omega\rho \int_0^{2\pi}\int_h^{h_1} \phi_A(b,\theta,z)\cos\vartheta b d\vartheta dz - i\omega\rho \int_0^{2\pi}\int_{h_1}^{d} \phi_\Gamma(b_1,\theta,z)\cos\vartheta b_1 d\vartheta dz \\
&= -i\omega\rho \int_0^{2\pi}\int_h^{h_1} -i\omega \frac{H}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \Psi_m^A(b,z)\cos(m\vartheta)\cos\vartheta b d\vartheta dz \\
&\quad -i\omega\rho \int_0^{2\pi}\int_h^{h_1} -i\omega \frac{H}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \Psi_m^\Gamma(b_1,z)\cos(m\vartheta)\cos\vartheta b_1 d\vartheta dz \\
&= -i\omega\rho\left(-i\omega\frac{H}{2}bd\right)\int_0^{2\pi}\int_h^{d} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(A)} Z_j(z)\cos(m\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta dz \\
&\quad -i\omega\rho\left(-i\omega\frac{H}{2}b_1 d\right)\int_0^{2\pi}\int_h^{d} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj}^{(\Gamma)} Z_{a_j}(z)\cos(m\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta dz
\end{aligned} \tag{2.3.46}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους έχουμε:

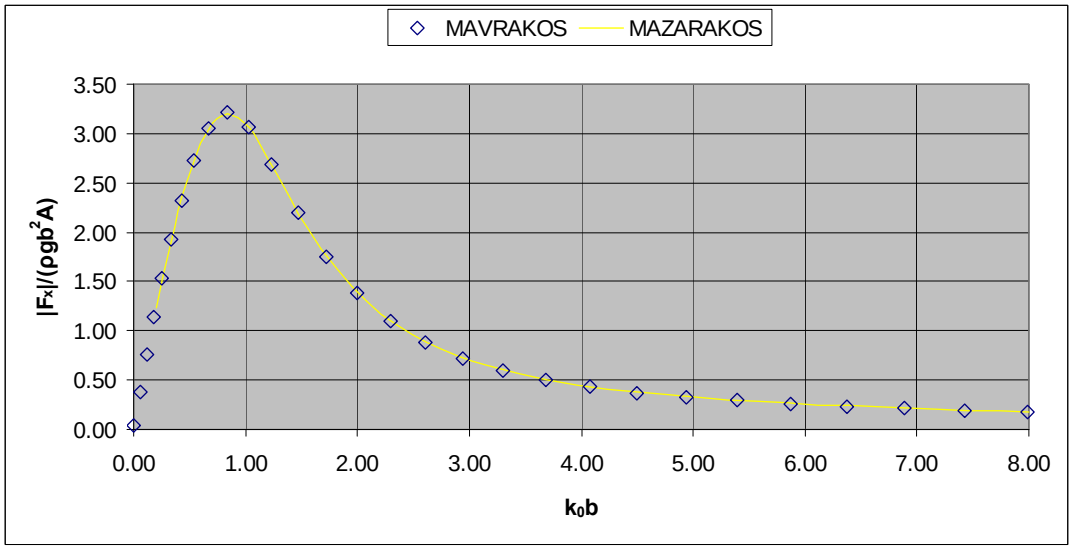
$$F_x = -2\frac{\omega^2}{g} g\rho \frac{H}{2} bd\pi \int_h^{h_1} \sum_{j=0}^{\infty} iF_{1j}^{(A)} Z_j(z) dz - 2\frac{\omega^2}{g} g\rho \frac{H}{2} b_1\, d\pi \int_{h_1}^{d} \sum_{j=0}^{\infty} iF_{1j}^{(\Gamma)} Z_{a_j}(z) dz \tag{2.3.47}$$

Και αδιαστατοποιώντας ως προς $\rho g b^2 \frac{H}{2}$, ή $\rho g b^2 \mathrm{A}$ $(H/2=A)$,

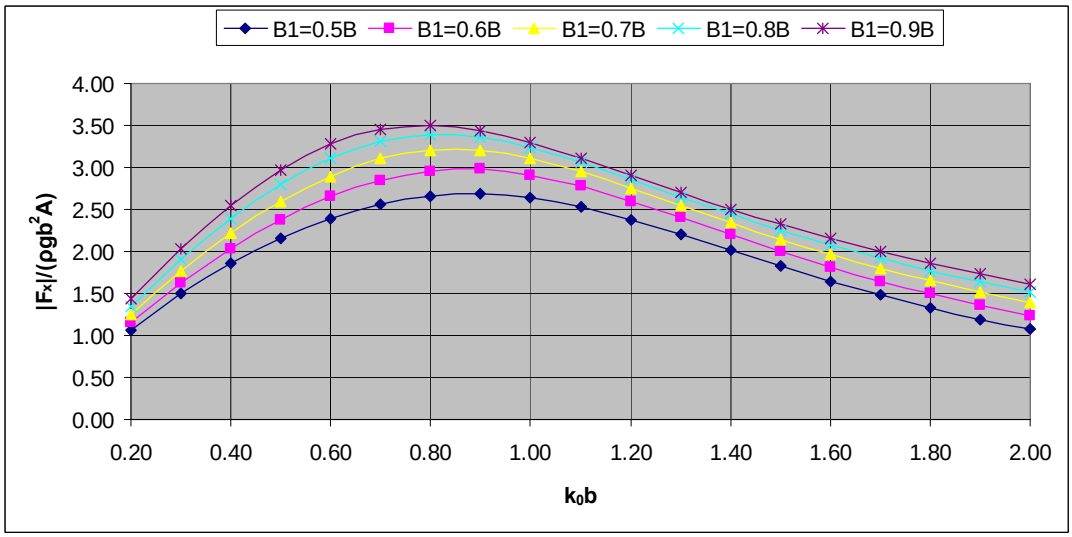
$$\begin{aligned}
\frac{F_x}{\rho g b^2 A} &= -2i\nu \frac{d}{b}\pi \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(A)} \int_h^{h_1} N_j^{-1/2}\cos(a_j z) dz \\
&\quad -2i\nu \frac{db_1}{b^2}\pi \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(\Gamma)} \int_{h_1}^{d} N_{a_j}^{-1/2}\cos\left[a_j(z-h_1)\right] dz
\end{aligned}$$

έχουμε τελικά τον αναλυτικό τύπο υπολογισμού της οριζόντιας δύναμης στον κατακόρυφο κύλινδρο ($\nu=\omega^2/g$):

$$\frac{F_x}{\rho g b^2 A} = -2i\nu d\pi \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(A)} N_j^{-1/2} \frac{1}{a_j b}\left(\sin(a_j h_1) - \sin(a_j h)\right) \\ + \frac{a_0 b_1}{a_0 b} \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(\Gamma)} N_{a_j}^{-1/2} \frac{1}{a_j b} \sin\left(a_j d - a_j h_1\right) \end{array} \right\} \tag{2.3.48}$$



Σχήμα 2.3. 3: Δυνάμεις διέγερσης σε κατακόρυφο κύλινδρο με *b/d*=0.333, *h/d*=0.500, h_1/d=0.833 και b_1/b=0.7. Συγκρίσεις με Σ. Α. Μαυράκο (*cylinder3.f,* Mavrakos, 1989)



Σχήμα 2.3. 4: Δυνάμεις διέγερσης σε κατακόρυφο κύλινδρο με *b/d*=0.333, *h/d*=0.500, h_1/d=0.833 και b_1/b=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9.

Κατακόρυφη δύναμη πρώτης τάξης

Η κατακόρυφη δύναμη δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

Η πίεση *p,* μπορεί να περιγραφεί μέσω του δυναμικού ταχύτητας Φ,

$$p = i\omega\rho\phi(r,\theta,z) \tag{2.3.49}$$

Οπότε η κατακόρυφη δύναμη, είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}
F_z &= -i\omega\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{b} \phi_B(r,\theta,h)(-1)rd\vartheta dr - i\omega\rho\int_0^{2\pi}\int_{b_1}^{b} \phi_\Gamma(r,\theta,h_1)(+1)rd\vartheta dr \\
&= -i\omega\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{b} -i\omega\frac{H}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^B(r,h)(-1)rdr\cos(m\vartheta)d\vartheta \\
&\quad -i\omega\rho\int_0^{2\pi}\int_{b}^{b_1} -i\omega\frac{H}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^\Gamma(r,h_1)rdr\cos(m\vartheta)d\vartheta \\
&= -i\omega\rho i\omega\frac{H}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{b} \sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^B(r,h)r\cos(m\vartheta)d\vartheta dr \\
&\quad +i\omega\rho i\omega\frac{H}{2}\int_0^{2\pi}\int_{b_1}^{b} \sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^\Gamma(r,h_1)r\cos(m\vartheta)d\vartheta dr \\
&= \omega^2\rho\frac{H}{2}\int_0^{b} \sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^B(r,h)\int_0^{2\pi} \cos(m\vartheta)d\vartheta rdr \\
&\quad -\omega^2\rho\frac{H}{2}\int_{b_1}^{b} \sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\Psi_m^\Gamma(r,h_1)\int_0^{2\pi} \cos(m\vartheta)d\vartheta rdr \\
&= \omega^2\rho\frac{H}{2}2\pi\int_0^{b} \in_0 i^0\Psi_0^B(r,h)rdr \\
&\quad -\omega^2\rho\frac{H}{2}2\pi\int_{b}^{b_1} \in_0 i^0\Psi_0^\Gamma(r,h_1)rdr \\
&= 2\pi\omega^2\rho\frac{H}{2}\int_0^{b} \Psi_0^B(r,h)rdr - 2\pi\omega^2\rho\frac{H}{2}\int_{b}^{b_1} \Psi_0^\Gamma(r,h_1)rdr
\end{aligned} \tag{2.3.50}$$

Τα ολοκληρώματα $\int_0^b \Psi_0^B(r,h)rdr$ και $\int_{b_1}^b \Psi_0^\Gamma(r,h_1)rdr$ μετά από εκτενείς μαθηματικούς υπολογισμούς δίνουν:

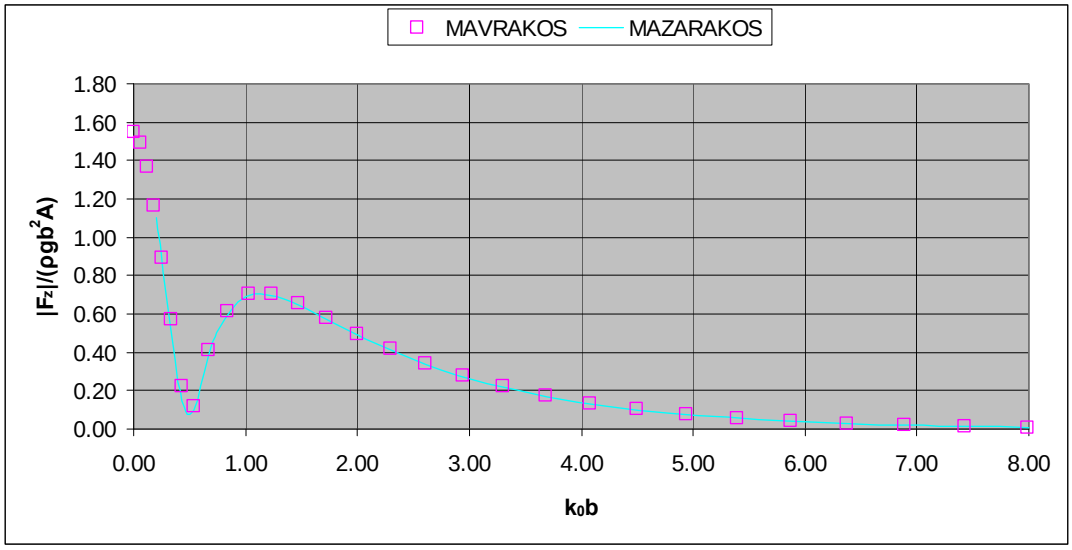
$$\int_0^b \Psi_0^B(r,h)rdr = db^2\left[\frac{1}{2}F_{00}^{(B)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} F_{0n}^{(B)}\frac{1}{\frac{n\pi b}{h}}\frac{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}\right]$$

Και $\int_{b_1}^{b} \Psi_0^B(r,h_1)rdr = d\left[\sum_{j=0}^{\infty} F_{0j}^{(\Gamma)} N_{a_j}^{-1/2} \int_{b_1}^{b} \Re_{0j}(r)rdr\right]$

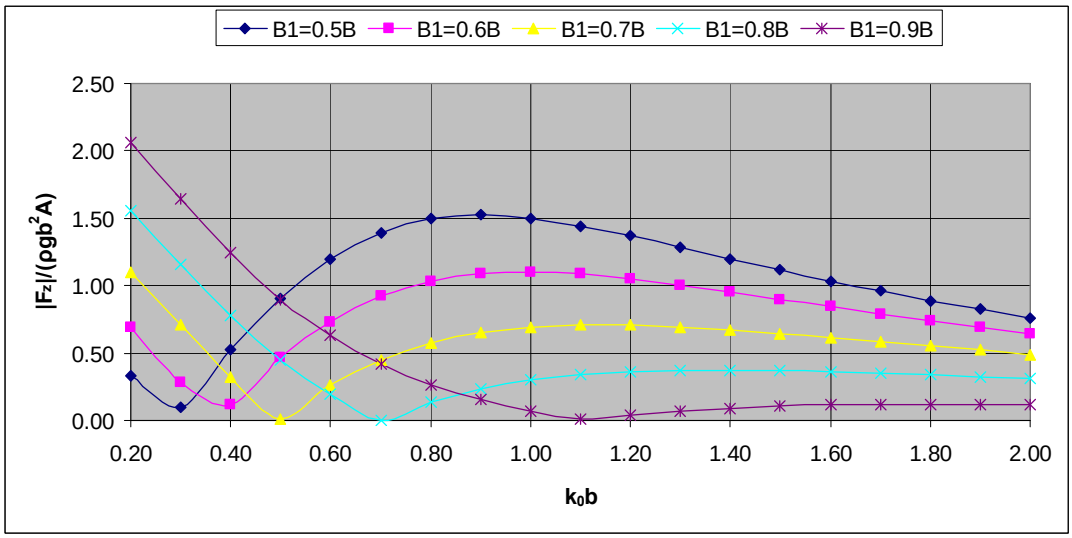
Με $\int_{b_1}^{b} \Re_{0j}(r)rdr = \frac{b}{a_j} \frac{I_1(a_j b)\left[1 - \frac{I_1(a_j b_1)}{I_1(a_j b)} \frac{K_1(a_j b)}{K_1(a_j b_1)}\right]}{I_0(a_j b)\left[1 + \frac{I_1(a_j b_1)}{I_0(a_j b)} \frac{K_0(a_j b)}{K_1(a_j b_1)}\right]}$

Αναδιατάσσοντας τους όρους και αδιαστατοποιώντας ως προς $\rho g b^2 \frac{H}{2}$, ή $\rho g b^2$A ($H/2=A$) , έχουμε τελικά τον αναλυτικό τύπο υπολογισμού της κατακόρυφης δύναμης στον κατακόρυφο κύλινδρο ($\nu=\omega^2/g$):

$$\boxed{\frac{F_z}{\rho g b^2 A} = 2\pi \nu d \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} F_{00}^{(B)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} F_{0n}^{(B)} \frac{1}{\frac{n\pi b}{h}} \frac{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \\ -\sum_{j=0}^{\infty} F_{0j}^{(\Gamma)} N_{a_j}^{-1/2} \frac{1}{a_j b} \frac{I_1(a_j b)\left[1 - \frac{I_1(a_j b_1)}{I_1(a_j b)} \frac{K_1(a_j b)}{K_1(a_j b_1)}\right]}{I_0(a_j b)\left[1 + \frac{I_1(a_j b_1)}{I_0(a_j b)} \frac{K_0(a_j b)}{K_1(a_j b_1)}\right]} \end{array} \right\}} \qquad (2.3.51)$$



Σχήμα 2.3. 5: Κατακόρυφες δυνάμεις διέγερσης σε κατακόρυφο κύλινδρο με *b/d*=0.333, *h/d*=0.500, h_1/d=0.833 και b_1/b=0.7. Συγκρίσεις με Σ. Α. Μαυράκο (*cylinder3.f*, Mavrakos, 1989)



Σχήμα 2.3. 6: Κατακόρυφες δυνάμεις διέγερσης σε κατακόρυφο κύλινδρο με *b/d*=0.333, *h/d*=0.500, h_1/d=0.833 και b_1/b=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9.

Ροπή πρώτης τάξης

Η ροπή πρώτης τάξης θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\boxed{\frac{M_y}{\rho g b^3 A} = 2\pi i k d \tanh(kd)\frac{b_1}{b^3}\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=0}^{\infty} F^*_{1j} N_j^{-1/2}\frac{1}{\left(a_j b\right)^2}\times \\ \left(\begin{array}{l} a_j(e-h\ )\sin\left[a_j(h-h_1)\right] \\ -\cos\left[a_j(h\ -h_1)\right]+1\end{array}\right)\end{array}\right\}} \tag{2.3.52}$$

2.3.3. Αναλυτικός υπολογισμός των μέσων δυνάμεων και ροπών έκπτωσης δεύτερης τάξης

Οριζόντια δύναμη έκπτωσης

Η οριζόντια δύναμη έκπτωσης στο σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα, δίνεται ως:

$$\frac{F^I_{20_1}}{\rho g b A^2} = \pi k d \tanh(kd)\left(\frac{b_1}{b}\right)\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha_l}^{\infty} F^*_{m+1,\alpha_l}\sum_{\beta_l}^{\infty}\ \overline{F}^*_{m,\beta_l}\times \\ (\alpha_l d)(\beta_l d)L^{ss}_{\alpha_l\beta_l} + m(m+1)(\frac{d}{b_1})^2 L^{cc}_{\alpha_l\beta_l}\end{array}\right\} \tag{2.3.53}$$

Με

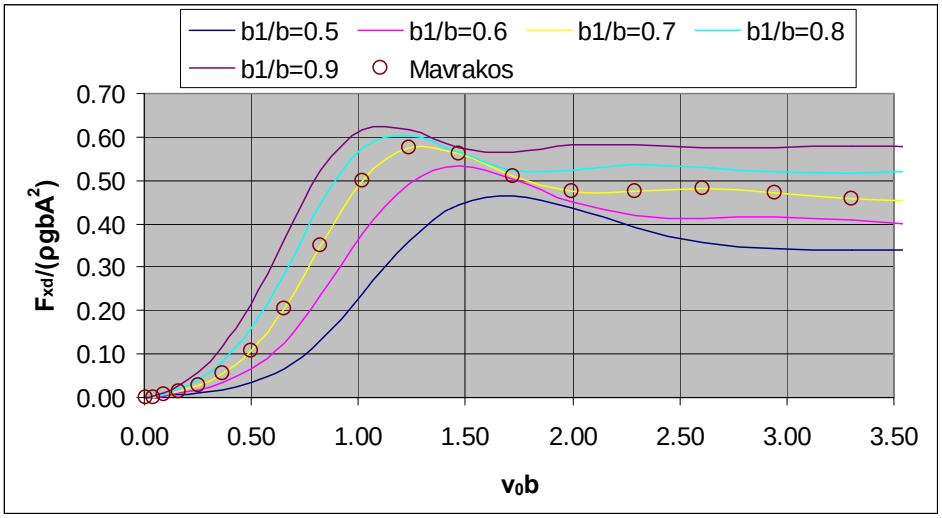
$$L^{ss}_{\alpha_l\beta_l} = \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2}N_{\beta_l}^{-1/2}}{d}\int_h^{h_1}\sin\left[\alpha_l(z-h\ )\right]\sin\left[\beta_l(z-h)\right]dz \tag{2.3.54}$$

Και

$$L^{cc}_{\alpha_l\beta_l} = \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2}N_{\beta_l}^{-1/2}}{d}\int_h^{h_1}\cos\left[\alpha_l(z-h\ )\right]\cos\left[\beta_l(z-h\ )\right]dz \tag{2.3.55}$$

Για το ολοκλήρωμα πάνω στην ίσαλο του σώματος, έχουμε

$$\frac{F^\Gamma_{20_1}}{\rho g b A^2} = \pi\left(kd\tanh(kd)\right)^2(\frac{b_1}{b})\Re\left\{i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha_1}^{\infty}\sum_{\beta_1}^{\infty}F^*_{m+1,\alpha_1}\overline{F}^*_{m,\beta_1}z_{\alpha_1}(d)z_{\beta_1}(d)\right\} \tag{2.3.56}$$



Σχήμα 2.3. 7: Drift δυνάμεις, σε σύνθετους κατακόρυφους κυλίνδρους, με:
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.5
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.6
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.7
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.8
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.9

Κατακόρυφη δύναμη έκπτωσης

Η κατακόρυφη δύναμη έκπτωσης στο σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα, δίνεται ως:

$$\frac{F^{I}_{20_3}}{\rho g b A^2} = \frac{\omega^2 \pi d^2}{2gb} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m \sum_{\alpha_l}^{\infty} N_{\alpha_l}^{-1/2} \sum_{\beta_l}^{\infty} N_{\beta_l}^{-1/2} \times \int_{b_l}^{b_{l+1}} \left[\frac{m^2}{r} \Lambda_{m,a_l}(r) \bar{\Lambda}_{m,\beta_l}(r) + r \Lambda'_{m,a_l}(r) \bar{\Lambda}'_{m,\beta_l}(r) \right] dr \tag{2.3.57}$$

Με

$$\Lambda'_{m,a_l}(r) = \frac{\partial \Lambda_{m,a_l}(r)}{\partial r}$$
$$\Lambda_{m,a_l}(r) = R_{ma_l}(r) F_{ma_l} + R^*_{ma_l}(r) F^*_{ma_l} \tag{2.3.58}$$

Ροπή έκπτωσης

Η ροπή έκπτωσης στο σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα, δίνεται ως:

$$\boxed{\frac{F^{I}_{20_5}}{\rho g b^2 A^2} = \pi k d \tanh(kd)\left(\frac{b_1 d}{b^2}\right)\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha_l}^{\infty} F^{*}_{m+1,\alpha_l}\sum_{\beta_l}^{\infty} \bar{F}^{*}_{m,\beta_l} \times \\ (\alpha_l d)(\beta_l d) L^{ss}_{\alpha_l\beta_l} + m(m+1)(\frac{d}{b_1})^2 L^{cc}_{\alpha_l\beta_l} \end{array}\right\}} \tag{2.3.59}$$

Με

$$L^{ss}_{\alpha_l\beta_l} = \frac{N^{-1/2}_{\alpha_l} N^{-1/2}_{\beta_l}}{d^2}\int_h^{h_1}(z-e)\sin\left[\alpha_l(z-h\ )\right]\sin\left[\beta_l(z-h\ )\right]dz \tag{2.3.60}$$

Και

$$L^{cc}_{\alpha_l\beta_l} = \frac{N^{-1/2}_{\alpha_l} N^{-1/2}_{\beta_l}}{d^2}\int_h^{h_1}(z-e)\cos\left[\alpha_l(z-h\ )\right]\cos\left[\beta_l(z-h\ )\right]dz \tag{2.3.61}$$

Και για το ολοκλήρωμα στην water line του σώματος, έχουμε:

$$\boxed{\frac{F^{\Gamma}_{20_5}}{\rho g b^2 A^2} = \frac{(d-e)}{b}\frac{F^{\Gamma}_{20_1}}{\rho g b A^2}} \tag{2.3.62}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ:
Υδροδυναμική ανάλυση κατακόρυφων αξονοσυμμετρικών σωμάτων τυχαίας γεωμετρίας

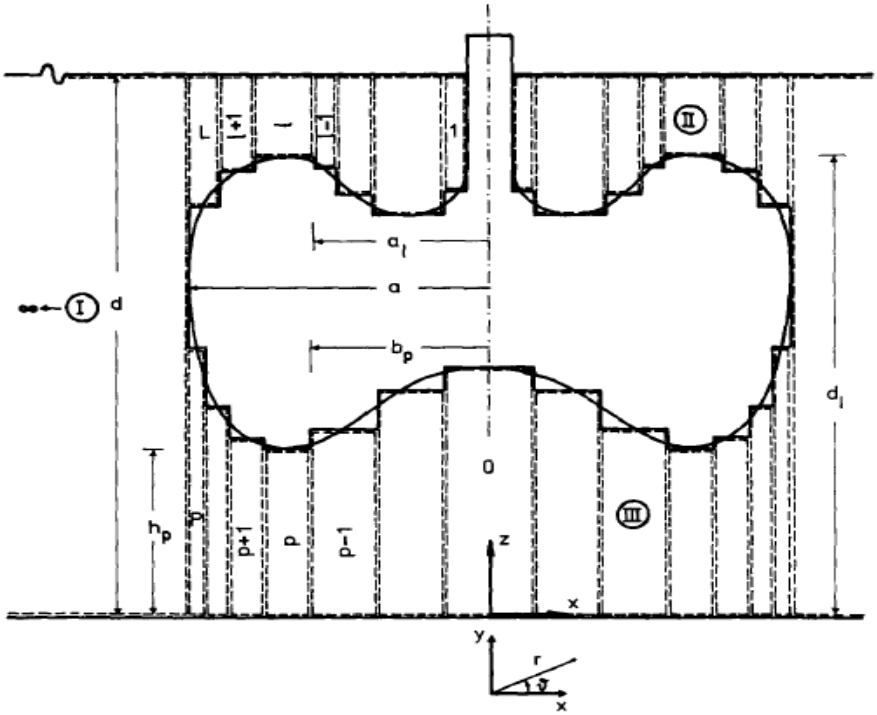
3.1. Μέθοδος διαχωρισμού ροής με ομοαξονικά δακτυλιοειδή στοιχεία

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται εν συντομία η μέθοδος των συζευγμένων ιδιοδιανυσματικών αναπαραστάσεων ή των «δακτυλιοειδών μακροστοιχείων» για την επίλυση του γραμμικοποιημένου υδροδυναμικού προβλήματος αλληλεπίδρασης περίθλασης και ακτινοβολίας (diffraction and radiation) απλών ημιτονοειδών κυματισμών μικρού πλάτους που προσπίπτουν σε μεγάλα αξονοσυμμετρικά σώματα, με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Η ανάπτυξη βασίζεται στην εργασία των Kokkinowrachos et al. (1986), στην οποία παρουσιάσθηκε για πρώτη φορά η συγκεκριμένη μεθοδολογία επίλυσης. Κρίθηκε σκόπιμο δε να παρουσιαθεί εν συντομία η μεθοδολογία επίλυσης του γραμμικοποιημένου προβλήματος και στο παρόν κεφάλαιο της διδακτορικής διατριβής, σε τρόπο ώστε να συνδεθεί με τον υπολογισμό των μέσων δυνάμεων έκπτωσης δεύτερης τάξης που παρουσιάζονται στη παράγραφο 3.6.

Η μέθοδος βασίζεται στο διαχωρισμό του πεδίου της ροής γύρω από το σώμα, χρησιμοποιώντας ομοαξονικά δακτυλιοειδή στοιχεία τα οποία δημιουργούνται όταν προσεγγίζουμε την γενέτειρα του σώματος με κατάλληλη «κλιμακοειδή» καμπύλη.

Παρατηρούμε ότι κάθε σώμα που εμφανίζει συμμετρία ως προς κατακόρυφο άξονα, μπορεί να προσεγγιστεί με ομοαξονικά κυλινδρικά δακτυλιοειδή στοιχεία και ταυτόχρονα το πεδίο ροής γύρω του διαχωρίζεται από αντίστοιχα κυλινδρικά δακτυλιοειδή στοιχεία, τα οποία ορίζονται τώρα από την βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος, και τον πυθμένα ή την ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας.

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων «έκπτωσης» (drift forces), χρησιμοποιείται σαν όγκος ελέγχου ένας κύλινδρος μεγάλης ακτίνας γύρω από το σώμα που περιορίζεται από τον πυθμένα της θάλασσας και την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού (μέθοδος μεταβολής της ορμής). Επομένως έχουμε πεπερασμένα δακτυλιοειδή στοιχεία, που καλύπτουν το πεδίο ροής γύρω από το σώμα αλλά και αυτά που επεκτείνονται στο άπειρο. Τα τελευταία «απείρου μεγέθους» δακτυλιοειδή στοιχεία χαρακτηρίζονται σαν τύπου Ι ενώ τα «πεπερασμένα» δακτυλιοειδή στοιχεία διακρίνονται σε δύο τύπους, ΙΙ και ΙΙΙ. Τύπου ΙΙ είναι αυτά που εκτείνονται μεταξύ του σώματος και ελεύθερης επιφάνειας ενώ τύπου ΙΙΙ είναι αυτά που εκτείνονται μεταξύ σώματος και πυθμένα.



Σχήμα 3. 1: Διαχωρισμός ροής γύρω από αξονοσυμμετρικό σώμα με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας (από το Kokkinowrachos et al., 1986).

3.2. Διατύπωση του υδροδυναμικού προβλήματος πρώτης τάξης (προβλήματα περίθλασης και ακτινοβολίας)

Θεωρούμε ένα ελεύθερα επιπλέον εκ περιστροφής συμμετρικό στερεό σώμα με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας, το οποίο δέχεται προσπίπτοντα αρμονικό κυματισμό. Για την περίπτωση κατασκευής αυτής της μορφής, εισάγεται ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων (r, ϑ, z) το οποίο στην συγκεκριμένη περίπτωση έχει την αρχή του στον πυθμένα της θάλασσας. Επίσης θεωρούμε ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο και ότι δεν υπάρχουν φαινόμενα συνεκτικότητας. Θεωρείται ότι το βάθος του νερού d είναι σταθερό και ότι η ελεύθερη επιφάνεια είναι άπειρη προς όλες τις κατευθύνσεις. Οι κινήσεις του σώματος και του περιρρέοντος ρευστού θεωρούνται μικρές ώστε το πρόβλημα των οριακών τιμών για την περίθλαση και την ακτινοβολία να θεωρείται γραμμικό.

Υπό την επίδραση ενός αρμονικού κυματισμού και με βάση την παραδοχή ότι το σώμα έχει ισοκατανεμημένη μάζα, το τελευταίο εκτελεί υπό την επίδραση απλών απλών αρμονικών κυματισμών κίνηση σε τρεις βαθμούς ελευθερίας στο επίπεδο διάδοσης του κυματισμού, για παράδειγμα δύο μεταφορικές κινήσεις (στον άξονα x, χ_1 ,καθ' ύψος μετατόπιση στον άξονα z, χ_3) και μια περιστροφή γύρω από τον άξονα z, χ_5 .

Υποθέτοντας ιδανικό ρευστό, μπορούμε να περιγράψουμε το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού γύρω από το σώμα κάνοντας χρήση του δυναμικού ταχύτητας, το ανάδελτα του οποίου, δίνει την ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο του πεδίου.

Το δυναμικό της ταχύτητας πρώτης τάξης για αμετάβλητες συνθήκες μπορεί να εκφραστεί :

$$\Phi\left(r,\vartheta,z,t\right)=\phi_0\left(r,\vartheta,z\right)e^{-i\omega t}+\phi_7\left(r,\vartheta,z\right)e^{-i\omega t}+\sum_{i=1,3,5}\dot{x}_{i0}\phi_i\left(r,\vartheta,z\right)e^{-i\omega t} \tag{3.2.1}$$

όπου $\phi_0\left(r,\vartheta,z\right)e^{-i\omega t}$ είναι το δυναμικό της ταχύτητας του προσπίπτοντος αρμονικού κυματισμού, $\phi_7\left(r,\vartheta,z\right)e^{-i\omega t}$ είναι το δυναμικό περίθλασης γύρω από το σώμα όταν αυτό είναι ακίνητο στον κυματισμό, $\phi_j e^{-i\omega t},\left(j=1,3,5\right)$ είναι το δυναμικό ακτινοβολίας, το οποίο προκύπτει από την ταλάντωση του σώματος στην *j*-διεύθυνση της κίνησης με μοναδιαίο πλάτος ταχύτητας και $\dot{x}_{i0}$ είναι το μιγαδικό πλάτος ταχύτητας της κίνησης του σώματος στην *j*-διεύθυνση.

Το δυναμικό της περίθλασης περιγράφεται :

$$\Phi_D\left(r,\vartheta,z,t\right)=\phi_D e^{-i\omega t}=(\phi_0+\phi_7)e^{-i\omega t} \tag{3.2.2}$$

Το δυναμικό της ταχύτητας προσπίπτοντος κυματισμού μπορεί να εκφραστεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες κάνοντας χρήση του αναπτύγματος του *Jacobi* ως εξής (βλέπε και σχέση 2.1.23):

$$\phi_0\left(r,\vartheta,z\right)e^{-i\omega t}=-i\omega\frac{H}{2}\frac{\cosh\left(kz\right)}{k\sinh\left(kd\right)}\left[\sum_{m=0}^{x}\in_m i^m J_m(kr)\cos(m\vartheta)\right]e^{-i\omega t} \tag{3.2.3}$$

όπου J_m είναι συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και m τάξης και $\in_m$ είναι το σύμβολο του Neumann για το οποίο ισχύει :

$$\in_0=1,\in_m=2(m\geq 1) \tag{3.2.4}$$

Η κυκλική συχνότητα ω και ο κυματικός αριθμός συνδέονται μέσω της εξίσωσης διασποράς :

$$\omega^2=gk\tanh(kd) \tag{3.2.5}$$

Σε συμφωνία με τη σχέση (3.2.3) το συνολικό δυναμικό της ταχύτητας της ροής γύρω από την κατασκευή, η οποία παραμένει ακίνητη αποδεχόμαστε ότι μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$\phi_D e^{-i\omega t}=-i\omega\frac{H}{2}\left[\sum_{m=0}^{x}\in_m i^m\psi_{Dm}(r,z)\cos(m\vartheta)\right]e^{-i\omega t} \tag{3.2.6a}$$

ενώ τα δυναμικά ακτινοβολίας γράφονται αντίστοιχα:

$$\phi_j e^{-i\omega t}=-i\omega\frac{H}{2}\left[\sum_{m=0}^{x}\in_m i^m\psi_{jm}(r,z)\cos(m\vartheta)\right]_{j=1,3,5}e^{-i\omega t} \tag{3.2.6b}$$

Η ροή του ρευστού, που προκαλείται από την ταλαντωτική καθ' ύψος κίνηση του σώματος, σε ήρεμο νερό είναι συμμετρική με αναφορά το επίπεδο $\vartheta = 0^{\circ}$ και αντισυμμετρική αναφορικά με το επίπεδο $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ για την μετατόπιση στον x-άξονα (surge, j=1) και για την περιστροφή γύρω από τον y (pitch, j=5), ενώ είναι συμμετρική αναφορικά και με τα δύο επίπεδα για την καθ' ύψος μετατόπιση στον άξονα z (heave, j=3). Για το λόγο αυτό τα αντίστοιχα δυναμικά ακτινοβολίας για τις τρεις γενικευμένες κινήσεις, μπορούν να εκφραστούν :

$$\phi_1 e^{-i\omega t} = \psi_{11}(r,z)\cos\vartheta e^{-i\omega t} \tag{3.2.7}$$

$$\phi_3 e^{-i\omega t} = \psi_{30}(r,z) e^{-i\omega t} \tag{3.2.8}$$

$$\phi_5 e^{-i\omega t} = \psi_{51}(r,z)\cos\vartheta e^{-i\omega t} \tag{3.2.9}$$

Στις συναρτήσεις ψ_{jm} των εξισώσεων (3.2.6)-(3.2.9) ο πρώτος δείκτης $j = D,1,3,5$ δηλώνει το αντίστοιχο πρόβλημα οριακών τιμών, ενώ ο δεύτερος τις τιμές m που πρέπει να ληφθούν υπ' όψη στη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος. Για τον λόγο αυτό οι συναρτήσεις $\psi_{Dm}(m = 0,1,2...), \psi_{11}, \psi_{30}$ και ψ_{51} παραμένουν οι βασικοί άγνωστοι του προβλήματος.

3.3. Γραμμικοποιημένες οριακές συνθήκες

Τα μιγαδικά δυναμικά της ταχύτητας $\varphi_j (j = 0,1,3,5,7)$ πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις :

$$\Delta\varphi_j = \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{, σε όλο τον όγκο ελέγχου του ρευστού} \tag{3.3.1}$$

$$-\omega^2\varphi_j + g\frac{\partial\varphi_j}{\partial z} = 0 \quad \text{για} \quad z = d \quad \text{(συνθήκη ελεύθερης επιφανείας)} \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial z} = 0 \quad \text{για} \quad z = 0 \quad \text{(συνθήκη για τον πυθμένα της θάλασσας)} \tag{3.3.3}$$

Επιπλέον τα δυναμικά φ_j με $j = 1,3,5,7$ πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας :

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{kr} = \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial r} - ik\varphi_j\right) = 0 \tag{3.3.4}$$

Η τελευταία συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται από τα δυναμικά περίθλασης και ακτινοβολίας, εξασφαλίζοντας έτσι ότι δεν θα δημιουργείται διαταραχή από την κίνηση του σώματος σε άπειρη απόσταση από αυτό, κάτι που δεν θα είχε φυσική σημασία. Η εξίσωση Laplace (3.3.1) είναι ουσιαστικά η συνθήκη συνέχειας του ρευστού, ενώ η συνθήκη στον πυθμένα, εκφράζει το φυσικό μέγεθος της κάθετης μηδενικής ταχύτητας του ρευστού που βρίσκεται σε επαφή με τον πυθμένα της θάλασσας.

Τέλος οι κινηματικές συνθήκες για την βρεχόμενη επιφάνεια, στη μέση θέση ισορροπίας του σώματος , πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις :

$$\left.\frac{\partial \varphi_7}{\partial n}\right|_{S_0} = -\left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right|_{S_0} \quad \text{ή} \quad \left.\frac{\partial \varphi_D}{\partial r}\right|_{S_0} = 0 \tag{3.3.5}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\right|_{S_0} = n_j, (j = 1,3,5) \tag{3.3.6}$$

Στις εξισώσεις (3.3.5) και (3.3.6) το $\partial/\partial n$ δηλώνει την παράγωγο του μοναδιαίου διανύσματος n πάνω στη επιφάνεια S_0 του σώματος με κατεύθυνση προς το ρευστό, και το n_j προσδιορίζεται ως :

$$\left(n_1, n_2, n_3\right) = n, \qquad \left(n_4, n_5, n_6\right) = r \times n \tag{3.3.7}$$

όπου r είναι το διάνυσμα θέσης αναφορικά με την αρχή των αξόνων.

Θεωρώντας τώρα τη συγκεκριμένη διακριτοποίηση της κατασκευής με ομοαξονικά μακροστοιχεία, η συνθήκη μη εισχώρησης της βρεχόμενης επιφάνειας όπως αυτή εκφράστηκε στις εξισώσεις (3.3.5) και (3.3.6) μπορεί να διατυπωθεί για τα επιμέρους προβλήματα περίθλασης $\left(j = D\right)$ και ακτινοβολίας $\left(j = 1,3,5\right)$ όπως φαίνεται παρακάτω:

Οριζόντια όρια

για $l = 1,2,...,L$ και $p = 0.1,...,P\left(b_0 = 0, a_{L+1} = b_{P+1} = a\right)$:

$$\frac{\partial \psi_{jm}}{\partial z} = V_j \quad \text{,στο } z = d_j \text{ για } a_j \le r \le a_{j+1} \tag{3.3.8}$$

$$\text{,στο } z = h_P \text{ για } b_p \le r \le b_{p+1}$$

όπου $V_D = V_1 = 0$, $V_3 = 1$ και $V_5 = -r$ (3.3.9)

Κάθετα όρια

για $l = 1,2,...,L$ και $p = 1,2,...,P\left(d_0 = d\right)$:

$$\frac{\partial \psi_{jm}}{\partial z} = U_j \qquad \begin{array}{l} \text{στο } r = a \text{ για } h_p \le z \le D_L \\ \text{στο } r = a_l \text{ για } \min\left\{d_l, d_{l-1}\right\} \le z \le \max\left\{d_l, d_{l-1}\right\} \\ \text{στο } r = b_P \text{ για } \min\left\{h_p, h_{p-1}\right\} \le z \le \max\left\{h_p, h_{p-1}\right\} \end{array} \tag{3.3.10}$$

όπου $U_D = U_1 = 0, U_3 = 1, U_5 = \left(z - e\right)$ (3.3.11)

Η εξαναγκασμένη πρόνευση $(j=5)$, της κατασκευής, θεωρείται ότι εκτελείται γύρω από τον οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από σημείο κείμενο στον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της κατασκευής σε απόσταση από τον πυθμένα $z=e$.

Επιπλέον, το δυναμικό της ταχύτητας καθώς και η παράγωγός του $\partial\varphi_j/\partial r,(j=D,1,3,5)$, πρέπει να είναι συνεχείς στα κάθετα όρια των γειτονικών στοιχειών. Κατά συνέπεια :

$$\psi_{jm}^{I}(a,z)=\psi_{jm}^{(L)}(a,z) \qquad \text{για} \quad d_L \le z \le d \tag{3.3.12}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_{jm}^{I}}{\partial r}\right|_{r=a}=\left.\frac{\partial\psi_{jm}^{(L)}}{\partial r}\right|_{r=a} \tag{3.3.13}$$

$$\psi_{jm}^{I}(a,z)=\psi_{jm}^{(P)}(a,z) \qquad \text{για} \quad 0 \le z \le h_p \tag{3.3.14}$$

$$\left.\frac{\partial\psi_{jm}^{I}}{\partial r}\right|_{r=a}=\left.\frac{\partial\psi_{jm}^{(P)}}{\partial r}\right|_{r=a} \tag{3.3.15}$$

$$\psi_{jm}^{(l)}(a_l,z)=\psi_{jm}^{(l-1)}(a_{l-1},z) \quad \text{για} \quad \max\{d_l,d_{l-1}\} \le z \le d \tag{3.3.16}$$

$$l=2,3,\ldots,L$$

$$\left.\frac{\partial\psi_{jm}^{(l)}}{\partial r}\right|_{r=a_l}=\left.\frac{\partial\psi_{jm}^{(l-1)}}{\partial r}\right|_{r=a_l} \qquad \text{για} \quad \max\{d_l,d_{l-1}\} \le z \le d \tag{3.3.17}$$

$$l=2,3,\ldots,L$$

$$\psi_{jm}^{(P)}(b_p,z)=\psi_{jm}^{(P-1)}(b_{P-1},z) \quad \text{για} \quad 0 \le z \le \min\{h_P,h_{P-1}\} \tag{3.3.18}$$

$$p=1,2,\ldots,P$$

$$\left.\frac{\partial\psi_{jm}^{(p)}}{\partial r}\right|_{r=b_p}=\left.\frac{\partial\psi_{jm}^{(p-1)}}{\partial r}\right|_{r=b_p} \tag{3.3.19}$$

Στην παραπάνω ανάλυση οι εκθέτες l και p που χρησιμοποιούνται υποδηλώνουν ποσότητες που αντιστοιχούν στο l-οστό και p-οστό μακροστοιχείο τύπου ΙΙ και ΙΙΙ αντίστοιχα, ενώ ο εκθέτης I σχετίζεται με τα μακροστοιχεία του απειροστού δακτυλιοειδούς στοιχείου.

Ξεκινώντας με την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών της διαφορικής εξίσωσης Laplace , μπορούν να δημιουργηθούν κατάλληλες εκφράσεις για τα δυναμικά ταχύτητας σε κάθε μακροστοιχείο όπως για παράδειγμα για τις συναρτήσεις ψ_{jm}. Οι εκφράσεις αυτές αναλυμένες σε σειρές Fourier επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται:

- η κινηματική οριακή συνθήκη στα οριζόντια τοιχώματα του εξιδανικευμένου σώματος
- η γραμμικοποιημένη συνθήκη στην επιφάνεια τις θάλασσας
- η κινηματική συνθήκη για τον πυθμένα
- η συνθήκη ακτινοβολίας σε άπειρο ρευστό.

3.4. Δυναμικά ταχύτητας περίθλασης και ακτινοβολίας για διαφορετικούς τύπους δακτυλιοειδών στοιχείων

Το δυναμικό ταχύτητας πρώτης τάξης είναι υπέρθεση των δυναμικών περίθλασης και ακτινοβολίας όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.2.1). Για κάθε είδος μακροστοιχείου παράγονται οι ακόλουθες εκφράσεις για τις συναρτήσεις $\psi_{Dm}, \psi_{11}, \psi_{30}$ και ψ_{51} οι οποίες προσδιορίζονται στις εξισώσεις (3.2.6)-(3.2.9).

(a) απειροστό δακτυλιοειδές στοιχείο Τύπου I $\left(r \geq a, 0 \leq z \leq d\right)$

$$\frac{1}{d_j}\psi_{jm}^{I}(r,z) = g_{jm}^{I}(r,z) + \sum_{a} F_{j,ma}\frac{K_m(\alpha r)}{K_m(a\alpha)}Z_a(z) \tag{3.4.1}$$

Όπου

$$g_{jm}^{I}(r,z) = \left\{J_m(kr) - \frac{J_m(ka)}{H_m(ka)}H_m(kr)\right\}\frac{Z_k(z)}{dZ_k'(z)} \tag{3.4.2}$$

$$g_{11}^{I}(t,z) = g_{30}^{I}(r,z) = g_{51}^{I}(r,z) = 0 \tag{3.4.3}$$

$$\delta_D = \delta_1 = \delta_3 = d, \delta_5 = d^2 \tag{3.4.4}$$

H_m και K_m είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους και m τάξης και οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους m τάξης αντίστοιχα.

Επιπλέον $Z_a(z)$ είναι οι ορθοκανονικές συναρτήσεις στο διάστημα [0,d] οι οποίες ορίζονται ως εξής :

$$Z_k(z) = N_k^{-1/2}\cosh(kz) \tag{3.4.5}$$

$$Z_a(z) = N_k^{-1/2}\cos(az), a : real \tag{3.4.6}$$

Όπου

$$N_k = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sinh(2kd)}{2kd}\right] \tag{3.4.7}$$

$$N_a = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin(2ad)}{2ad}\right], a = real \tag{3.4.8}$$

και α είναι οι ρίζες της εξίσωσης διασποράς :

$$\frac{\omega^2}{g} + a\tan(ad) = 0 \tag{3.4.9}$$

Η εξίσωση (3.3.9) έχει μια φανταστική και άπειρο αριθμό πραγματικών λύσεων. Στην συγκεκριμένη περίπτωση λαμβάνονται υπ' όψη η φανταστική ρίζα $a = -ik$,k>0 και οι θετικές πραγματικές ρίζες. Αντικαθιστώντας το $a = -ik$ στις εξισώσεις (3.4.8) και (3.4.6), παράγονται άμεσα οι εξισώσεις (3.4.7) και (3.4.5).

Η προσέγγιση του δυναμικού ταχύτητας για ψ_{Dm}^{I} όπως μοντελοποιήθηκε στις εξισώσεις (3.4.1) και (3.4.10) ταυτίζεται με την παρουσίαση του *Garrett (1971).*

(b) *l*-οστό δακτυλιοειδές στοιχείο τύπου II $\left(a_l \le r \le a_{l+1}, d_l \le z \le d, l = 1,2,...,L\right)$

$$\frac{1}{\delta_j}\psi_{jm}^{(l)}(r,z) = g_{jm}^{(l)}(r,z) + \sum_{a_l}\left[R_{ma_l}(r)F_{j,ma_l} + R_{ma_l}^{*}(r)F_{j,ma_l}^{*}\right]Z_{a_l}(z)\frac{K_m(\alpha r)}{K_m(a\alpha)} \tag{3.4.10}$$

όπου το δ_j έχει οριστεί στην εξίσωση (3.4.4).

$$g_{Dm}^{(l)}(r,z) = g_{11}^{(l)}(r,z) = 0 \tag{3.4.11}$$

$$g_{30}^{(l)}(r,z) = \frac{z}{d} - 1 + \frac{g}{\omega^2} \tag{3.4.12}$$

$$g_{51}^{(l)}(r,z) = -\frac{z}{d^2}\left[\left(z-d\right) + \frac{g}{\omega^2}\right] \tag{3.4.13}$$

$$R_{ma_l}(r) = \frac{I_m(a_l r)K_m(\alpha_l a_l) - I_m(\alpha_l a_l)K_m(\alpha_l r)}{I_m(\alpha_l a_{l+1})K_m(\alpha_l a_l) - I_m(\alpha_l a_l)K_m(\alpha_l a_{l+1})} \tag{3.4.14}$$

$$R_{ma_l}^{*}(r) = \frac{I_m(\alpha_l a_{l+1})K_m(\alpha_l r) - K_m(\alpha_l \alpha_{l+1})I_m(\alpha_l r)}{I_m(\alpha_l a_{l+1})K_m(\alpha_l a_l) - I_m(\alpha_l a_l)K_m(\alpha_l a_{l+1})} \tag{3.4.15}$$

όπου I_m είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και m τάξης και $Z_{\alpha_l}(z)$ είναι οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις στο διάστημα $\left[z = d - d_l, d\right]$ που ορίζονται ως εξής :

$$Z_{k_l}(z) = N_k^{-1/2}\cosh\left[k_l\left(z - d_l\right)\right] \tag{3.4.16}$$

$$Z_{a_l}(z) = N_k^{-1/2}\cos\left[a_l\left(z - d_l\right)\right], a_l : real \tag{3.4.17}$$

Όπου

$$N_{k_l} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sinh[2k_l(d-d_l)]}{2k_l(d-d_l)}\right] \tag{3.4.18}$$

$$N_{a_l} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin[2a_l(d-d_l)]}{2a_l(d-d_l)}\right], a_l = real \tag{3.4.19}$$

και a_l είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

$$\frac{\omega^2}{g} + a_l \tan\left[a_l\left(d-d_l\right)\right] = 0 \tag{3.4.20}$$

με το φανταστικό $a_l = -ik_l$ να θεωρείται όπως και προηγούμενα.

Στην εξίσωση (3.4.10), $g_{jm}^{(l)}$ αντιπροσωπεύει συγκεκριμένες λύσεις για διάφορες καταστάσεις κίνησης, οι οποίες ικανοποιούν τις κινηματικές συνθήκες στα οριζόντια σύνορα των στοιχείων του τύπου ΙΙ, $\left[z = d_l, d\right]$, για παράδειγμα εξισώσεις (3.4.2) και (3.4.8).

(c) p-οστό δακτυλιοειδές στοιχείο Τύπου ΙΙΙ $\left(b_p \le r \le b_{p+1}, 0 \le z \le h_p, p = 1,2,...,P\right)$

Για τον τύπο δακτυλιοειδούς στοιχείου αυτού η συνάρτηση δυναμικού $\psi_{jm}^{(p)}(r,z)$ προσεγγίζεται ως εξής :

$$\frac{1}{\delta_j}\psi_{jm}^{(p)}(r,z) = g_{jm}^{(p)}(r,z) + \sum_{n_p=0}^{\infty} \in_{n_p} \left[R_{mn_p}(r)F_{j,mn_p} + R_{ma_p}^{*}(r)F_{j,ma_p}^{*}\right]\cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right) \tag{3.4.21}$$

όπου το δ_j προσδιορίζεται στην εξίσωση (3.4.4).

$$g_{Dm}^{(p)}(r,z) = g_{11}^{(p)}(r,z) = 0 \tag{3.4.22}$$

$$g_{30}^{(p)}(r,z) = \frac{z^2 - \left(1/2\right)r^2}{2h_p d} \tag{3.4.23}$$

$$g_{51}^{(p)}(r,z) = \frac{-r\left[z^2 - \left(4\right)r^2\right]}{2h_p d^2} \tag{3.4.24}$$

$$R_{m0}(r)=\frac{\left(\frac{r}{b_p}\right)^m-\left(\frac{b_p}{r}\right)^m}{\left(\frac{b_{p+1}}{b_p}\right)^m-\left(\frac{b_p}{b_{p+1}}\right)^m},R^*_{m0}(r)=\frac{\left(\frac{b_{p+1}}{r}\right)^m-\left(\frac{r}{b_{p+1}}\right)^m}{\left(\frac{b_{p+1}}{b_p}\right)^m-\left(\frac{b_p}{b_{p+1}}\right)^m}\ \text{για}\ n_p=0 \tag{3.4.25}$$

$$R_{mn_p}(r)=\frac{K_m\left(\frac{n_p\pi b_p}{h_p}\right)I_m\left(\frac{n_p\pi r}{h_p}\right)-I_m\left(\frac{n_p\pi b_p}{h_p}\right)K_m\left(\frac{n_p\pi r}{h_p}\right)}{I_m\left(\frac{n_p\pi b_{p+1}}{h_p}\right)K_m\left(\frac{n_p\pi b_p}{h_p}\right)-I_m\left(\frac{n_p\pi b_p}{h_p}\right)K_m\left(\frac{n_p\pi b_{p+1}}{h_p}\right)},n_p\neq 0 \tag{3.4.26}$$

$$R^*_{mn_p}(r)=\frac{I_m\left(\frac{n_p\pi b_{p+1}}{h_p}\right)K_m\left(\frac{n_p\pi r}{h_p}\right)-K_m\left(\frac{n_p\pi b_{p+1}}{h_p}\right)I_m\left(\frac{n_p\pi r}{h_p}\right)}{I_m\left(\frac{n_p\pi b_{p+1}}{h_p}\right)K_m\left(\frac{n_p\pi b_p}{h_p}\right)-I_m\left(\frac{n_p\pi b_p}{h_p}\right)K_m\left(\frac{n_p\pi b_{p+1}}{h_p}\right)},n_p\neq 0 \tag{3.4.27}$$

Ειδικά για $p=0$ το δυναμικό της ταχύτητας δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$\frac{1}{\delta_j}\psi^{(0)}_{jm}(r,z)=g^{(0)}_{jm}(r,z)+\sum_{n_0=0}^{\infty}\in_{n_0}F_{j,mn_0}\frac{I_m\left(\frac{n_0\pi r}{h_0}\right)}{I_m\left(\frac{n_0\pi b_1}{h_0}\right)}\cos\left(\frac{n_0\pi z}{h_0}\right) \tag{3.4.28}$$

όπου $g^{(0)}_m$ προσδιορίζεται στις εξισώσεις (3.4.22)-(3.4.26). Η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel K_m δεν εμφανίζεται στην έκφραση για τον τύπο του στοιχείου αυτού (με $p=0$). Η συνάρτηση K_m έχει μια αναλογική συνεισφορά στο λόγο $(b_1/r)^m$ για $m\neq 0$ και ο λογάριθμος $\log(r)$ για $m=0$ στο $r\to 0$ *(Abramowitz and Stegun, 1970)*. Παρόλα αυτά αναλογιζόμενοι τις οριακές μορφές των συναρτήσεων Bessel για $b_p\to 0$ παρατηρούμε ότι το δυναμικό της ταχύτητας το οποίο περιγράφηκε στην εξίσωση (3.4.28) μπορεί να εξαχθεί κατευθείαν από τις εξισώσεις (3.4.26) και (3.4.27). Στην συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούνται οι ακόλουθες οριακές τιμές :

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{b_p\to 0}R^*_{mn_p}(r)\to 0\\&\lim_{b_p\to 0}R_{mn_p}(r)=\frac{I_m\left(\frac{n_p\pi r}{h_p}\right)}{I_m\left(\frac{n_p\pi b_{p+1}}{h_p}\right)}\end{aligned}\right\} \tag{3.4.29}$$

Οι συναρτήσεις δυναμικού ψ_{Dm} που εκφράστηκαν μέσω των εξισώσεων (3.4.1), (3.4.10), (3.4.21) και (3.4.28) έχουν το πλεονέκτημα ότι μπορούν να περιγραφούν για όλες τις κάθετες οριακές συνθήκες $r = a_l, (l = 1, 2, ..., L), r = b_p, (p = 1, 2, ..., P)$ και $r = a$ με απλή σειρά Fourier όπως φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις :

$$\frac{1}{d}\psi_{Dm}^{I}(a,z) = \sum_{a}^{\infty} F_{D,m\alpha} Z_{\alpha}(z) \text{, για } 0 \le z \le d \tag{3.4.30}$$

$$\frac{1}{d}\psi_{Dm}^{(l)}(a_l,z) = \sum_{a_l}^{\infty} F_{D,m\alpha_l}^{*} Z_{\alpha_l}(z) \text{ ,για } d_l \le z \le d \tag{3.4.31}$$

$$\frac{1}{d}\psi_{Dm}^{(l)}(a_{l+1},z) = \sum_{a_l}^{\infty} F_{D,m\alpha} Z_{\alpha_l}(z) \text{ , για } d_l \le z \le d \tag{3.4.32}$$

$$\frac{1}{d}\psi_{Dm}^{(p)}(b_p,z) = \sum_{n_p=0}^{\infty} \in_{n_p} F_{D,mn_p}^{*} \cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right), \ 0 \le z \le h_p \tag{3.4.33}$$

Και

$$\frac{1}{d}\psi_{Dm}^{(p)}(b_{p+1},z) = \sum_{n_p=0}^{\infty} \in_{n_p} F_{D,mn_p} \cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right), 0 \le z \le h_p \tag{3.4.34}$$

Επιπλέον οι λύσεις για τις συναρτήσεις $\psi_{jm}, (j = D, 1, 3, 5)$ επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε οι συνθήκες για όλα τα οριζόντια όρια να ικανοποιούνται εκ των προτέρων.

Οι κινηματικές συνθήκες στα κάθετα τοιχώματα του σώματος (εξίσωση 3.4.10), καθώς και η απαίτηση για συνέχεια της συνάρτησης δυναμικού και της παραγώγου της, εξισώσεις (3.4.12)-(3.4.19), στα κάθετα όρια των γειτονικών μακροστοιχείων απομένουν να εκπληρωθούν. Με βάση αυτά παράγεται ένα σύστημα εξισώσεων για τους άγνωστους συντελεστές Fourier. Από τη στιγμή που οι συντελεστές αυτού προσδιοριστούν, οι συναρτήσεις $\psi_{jm}(r,z)$ και αντίστοιχα τα δυναμικά ταχύτητας για όλες τις περιοχές του ρευστού είναι δυνατόν να προσδιοριστούν.

3.5. Γενικευμένες Δυνάμεις Διέγερσης

Οι γενικευμένες δυνάμεις διέγερσης F_1, F_3 και F_5 μπορούν να εκφραστούν ως εξής :

$$F_k(t) = -\iint_{S_0} p n_k dS = -i\omega\rho e^{-i\omega t} \iint_{S_0} \phi_D n_k dS$$

$$= -\omega^2 \rho \frac{H}{2} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \iint_{S_0} \psi_{Dm}(r,z) \cos(m\vartheta) n_k dS \text{ για } k = 1,3 \tag{3.5.1}$$

Και

$$F_5 = M_1(t) + M_3(t) \tag{3.5.2}$$

Με

$$M_k(t) = -\iint_{S_0} p(r \times n_k) dS = -i\omega\rho e^{-i\omega t} \iint_{S_0} \varphi_D (r \times n_k) dS$$

$$= -\omega^2 \rho \frac{H}{2} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \iint_{S_0} \psi_{Dm}(r,z) \cos(m\vartheta)(r \times n_k) dS \tag{3.5.3}$$

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων και των ροπών απαιτείται ο υπολογισμός των παρακάτω ολοκληρωμάτων :

$$F_{kj} = \iint_{S_0} \psi_{jm}(r,z) \cos(m\vartheta) n_k dS \tag{3.5.4}$$

και

$$M_{kj} = \iint_{S_0} \psi_{jm}(r,z) \cos(m\vartheta)(r \times n_k) dS \tag{3.5.5}$$

με $j = D,1,3,5$.

Εισάγοντας τις αντίστοιχες διατυπώσεις για τις συναρτήσεις των δυναμικών στα παραπάνω ολοκληρώματα και έπειτα από ολοκλήρωση των εξισώσεων (3.5.4) και (3.5.5) σε όλη τη βρεχόμενη επιφάνεια προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις :

$$F_{1j} = \pi\delta_j \left\{ \begin{array}{l} a \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha} N_{\alpha}^{-1/2} F_{j,1\alpha} (\sin(\alpha h_L) - \sin(\alpha h_P)) \\ + \sum_{l=1}^{L} \left[f_{1,j}^{(l)} + (\mu - \lambda) a_l \sum_{\alpha_\mu} \frac{1}{\alpha_\mu} N_{\alpha_\mu}^{-1/2} F_{j,1\alpha_\mu} \sin(\alpha_\mu (d_\lambda - d_\mu) \right] \\ + \sum_{p=1}^{P} \left[f_{1,j}^{(p)} + (\mu - \lambda) b_p F_{j,10_\mu} (h_\mu - h_\lambda) - 2b_p (\mu - \lambda) \sum_{n_\mu = 1} \frac{h_\mu}{n_\mu \pi} F_{j,1n_\mu} \sin(\frac{n_\mu \pi h_\lambda}{h_\mu}) \right] \end{array} \right\} \tag{3.5.6}$$

$$M_{1j}=\pi\delta_j\left\{\begin{array}{l} a\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha}N_{\alpha}^{-1/2}F_{j,1\alpha}[\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha h_L)+h_L\sin(\alpha h_L)-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha h_P)-h_P\sin(\alpha h_P)] \\ +\sum_{l=1}^{L}\ \{m_{1,j}^{(l)}+a_l(\mu-\lambda)\sum_{\alpha_\mu}\ \frac{1}{\alpha_\mu}N_{\alpha_\mu}^{-1/2}F_{j,1\alpha_\mu}\times \\ \qquad [\frac{1}{\alpha_\mu}\cos(\alpha_\mu(d_\lambda-d_\mu))+d_\lambda\sin(\alpha_l(d_\lambda-d_\mu))-\frac{1}{\alpha_\mu}]\} \\ +\sum_{p=1}^{P}\ \{m_{1,j}^{(p)}+\frac{1}{2}(h_\mu^2-h_\lambda^2)b_p(\mu-\lambda)F_{j,10_\mu}+2b_p(\mu-\lambda)\sum_{n_\mu=1}\ \frac{h_\mu}{n_\mu\pi}F_{j,1n_\mu}\times \\ \qquad [\frac{h_\mu}{n_\mu\pi}\left((-1)^{n_\mu}-\cos(\frac{n_\mu\pi h_\lambda}{h_\mu})-h_\lambda\sin(\frac{n_\mu\pi h_\lambda}{h_\mu})\right)]\} \end{array}\right\}-eF_{1j} \qquad (3.5.7)$$

$$\begin{aligned} F_{3j}=2\pi\delta_j\{&\sum_{l=1}^{L}\ \{f_{3,j}^{(l)}+\sum_{a_l}\ \frac{1}{\alpha_l^2}N_{a_l}^{-1/2}[F_{j,0a_l}(A_{0a_l}+A_{0a_l}^*)-F_{j,0a_l}^*(D_{0a_l}+D_{0a_l}^*)]\} \\ &-\sum_{p=1}^{P}\ \{f_{3,j}^{(p)}+\frac{1}{2}D_{j,00_p}[F_{j,0a_l}\{b_{p+1}^2(\ln(b_{p+1}/b_p)-1/2)+\frac{1}{2}b_p^2\} \\ &+F_{j,00_p}^*\{\frac{1}{2}b_{p+1}^2+b_p^2(\ln(b_p/b_{p+1})-1/2\}] \\ &+2\sum_{n_p+1}\ (-1)^{n_p}\frac{h_p^2}{n_p^2\pi^2}[F_{j,0n_p}(A_{0n_p}+A_{0n_p}^*)-F_{j,0n_p}^*(D_{0n_p}+D_{0n_p}^*)]\} \\ &-f_{3,j}^{(0)}-\frac{1}{2}b_l^2F_{j,00_0}-2\sum_{n_0=1}\ (-1)^{n_0}\frac{h_0^2}{n_0^2\pi^2}F_{j,0n_0}A_{0n_0}\} \end{aligned} \qquad (3.5.8)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις γίνεται χρήση των ακόλουθων εκφράσεων :

$$f_{k,j}^{(s)}=\iint_{S_0}g_{jm}^{(s)}(r,z)n_k dS \qquad (3.5.9)$$

και

j=1,3,5

για S=0,1,2,…,P ή

S=1,2,…,L

$$m_{k,j}^{(s)}=\iint_{S_0}g_{jm}^{(s)}(r,z)(r\times n_k)dS \qquad (3.5.10)$$

Όπου οι συναρτήσεις $g_{jm}^{(s)}$ ορίζονται στην παράγραφο 3.4.

3.6. Μέσες Δυνάμεις και ροπές έκπτωσης δεύτερης τάξης

Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι με τις οποίες μπορούν να υπολογιστούν οι μέσες δευτεροτάξιες δυνάμεις (drift forces) σε απλούς αρμονικούς κυματισμούς.. Η πρώτη, βασίζεται στην απ' ευθείας ολοκλήρωση όλων των όρων της συνολικής πίεσης που συνεισφέρουν σε δευτεροτάξιες δυνάμεις πάνω στη στιγμιαία βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος και η δεύτερη, βασίζεται στο θεώρημα μεταβολής της ορμής.

Το διάνυσμα της μέσης δευτεροτάξιας (drift) δύναμης, σύμφωνα με την προσέγγιση της πρώτης μεθόδου (ολοκλήρωση της πίεσης πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος) από τους Pinkster και Van Oortmenssen (1977), δίνεται από τον τύπο:

$$\overline{F_0^{(2)}} = \frac{1}{2}\rho g \overline{\int_{WL}\left[\zeta_n^{(1)}\right]^2 \vec{n}dl}^{t} + \frac{1}{2}\rho \overline{\int_{S_0}\left[\overrightarrow{\nabla\phi^{(1)}}\right]^2 \vec{n}ds}^{t} + \rho \overline{\int_{S_0}\left[\overrightarrow{x^{(1)}}\overrightarrow{\nabla\phi^{(1)}}\right]\vec{n}ds}^{t} + \overline{M.R^{(1)}x_g^{(1)}}^{t}$$

Όπου -t δείχνει την μέση χρονική τιμή, ζ_r είναι η σχετική ανύψωση του κύματος $\vec{x}$ και $\vec{x}_g$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου στην βρεχόμενη επιφάνεια και του κέντρου βάρους του σώματος, αντίστοιχα, $\phi^{(1)}$ είναι το δυναμικό πρώτης τάξης, M είναι ο πίνακας της μάζας και $R^{(1)}$ ο πίνακας μετασχηματισμού, που περιέχει τις περιστροφές του σώματος ως προς τους τρεις άξονες.

Από τους τέσσερις όρους της εξίσωσης ο πρώτος, που είναι και ο σημαντικότερος, αποτελεί τη συνεισφορά στη δύναμη του σχετικού ύψους κύματος. Ο δεύτερος εκφράζει τη συνεισφορά των μη γραμμικών όρων (τα τετράγωνα των ταχυτήτων) της εξίσωσης του Bernoulli που στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας παραλείπονται, ο τρίτος περιγράφει την επίδραση της πρωτοτάξιας πίεσης σε συνδυασμό με την πρωτοτάξια μετακίνηση και ο τέταρτος οφείλεται σε μη γραμμικούς όρους που προέρχονται από τη σύζευξη πρωτοτάξιων κινήσεων.

Ο υπολογισμός της drift δύναμης, σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο, γίνεται με τη χρήση του θεωρήματος της μεταβολής της ορμής μέσα σ' έναν όγκο αναφοράς του ρευστού που περικλείεται από την ελεύθερη επιφάνεια, τον πυθμένα, τη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος και μια κατακόρυφη κυλινδρική επιφάνεια που περιβάλλει το εξεταζόμενο σώμα. Η μέθοδος αυτή, εισήχθη από τον Maruo (1960) για τις οριζόντιες δυνάμεις, επεκτάθηκε από τον Newman (1967), που περιέλαβε και τις ροπές περί τον κατακόρυφο άξονα (yaw drift moments) για την περίπτωση άπειρου βάθους νερού και επεκτάθηκε στη συνέχεια από τους Faltinsen & Michelsen (1974), για την περίπτωση πεπερασμένου βάθους νερού. Η μέθοδος υπολογισμού των μέσων δευτεροτάξιων δυνάμεων με χρήση του θεωρήματος μεταβολής της ορμής προτάθηκε και εφαρμόσθηκε αρχικά για τον υπολογισμό των οριζόντιων δυνάμεων εκπεσμού και της αντίστοιχης ροπής περί τον κατακόρυφο άξονα σε επιπλέουσες κατασκευές, διευθύνσεις για τις οποίες εξάλλου οι δυνάμεις αυτές έχουν ιδιαίτερη σημασία στον υπολογισμό του συστήματος αγκύρωσης λόγω των ελλειπουσών υδροστατικών δυνάμεων επαναφοράς. Για τον υπολογισμό των δυνάμεων αυτών, απαιτείται ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων στην κατακόρυφη κυλινδρική επιφάνεια αναφοράς και μόνον. Σε αντίθεση με αυτό, ο υπολογισμός των υπόλοιπων δυνάμεων εκπεσμού με την μέθοδο μεταβολής της ορμής στην κατακόρυφη διεύθυνση και στις ροπές εκπεσμού περί τον x- και y- άξονα της κατασκευής, που σε περιπτώσεις επιπλεόντων σωμάτων μικρής ισάλου επιφανείας ή

βυθισμένων σωμάτων μπορεί να έχει σημασία, περιλαμβάνει εκτενείς ολοκληρώσεις παραστάσεων στην ελεύθερη επιφάνεια και στον πυθμένα της θάλασσας (για την περίπτωση πεπερασμένου βάθους νερού), οι οποίες για τυχαίας μορφής σώματα πρέπει να γίνουν αριθμητικά και είναι πολύ εκτενείς.

Για την περίπτωση αξονοσυμμετρικών σωμάτων όμως με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας ο Mavrakos (1988), αφού αρχικά έδωσε τις γενικές εκφράσεις για τον υπολογισμό των κατακόρυφων δυνάμεων και ροπών ανατροπής στον προνευτασμό και τον διατοιχισμό με την μέθοδο της μεταβολής της ορμής, έδειξε ότι οι προκύπτουσες εκφράσεις ολοκληρώνονται αναλυτικά. Έτσι, παρουσίασε σχετικά αριθμητικά αποτελέσματα για τυχαίας μορφής κατακόρυφα αξονοσυμμετρικά σώματα (επιπλέοντες απλούς ή σύνθετους κυλίνδρους ή γενικότερης μορφής αξονοσυμμετρικά σώματα). Στο βαθμό που οι προκύπτουσες εκφράσεις ολοκληρώνονται αναλυτικά, τα αποτελέσματα είναι απαλλαγμένα αριθμητικών σφαλμάτων ή σφαλμάτων οφειλόμενων στη διακριτοποίηση των εξεταζόμενων κατασκευών. Για τον λόγο αυτό αποτελέσματα που έχουν προκύψει με αναλυτικές ή ημι-αναλυτικές μεθόδους για τον υπολογισμό του πρωτοτάξιου δυναμικού και στη συνέχεια κάνουν χρήση του θεωρήματος μεταβολής της ορμής για τον υπολογισμό των μέσων δευτεροτάξιων δυνάμεων εκπεσμού, χρησιμοποιούνται πολλές φορές σε benchmark tests με σκοπό την αξιολόγηση άλλων μεθοδολογιών ή γεωμετρικών διακριτοποιήσεων των εξεταζόμενων κατασκευών.

Σε όλες τις μεθοδολογίες που αναφέρθηκαν προηγούμενα και βασίζονται στη χρήση του θεωρήματος της μεταβολής της ορμής για τον υπολογισμό των δευτεροτάξιων δυνάμεων εκπεσμού, η κατακόρυφη κυλινδρική επιφάνεια που περιβάλλει το σώμα τέθηκε σε μεγάλη απόσταση (άπειρη) από αυτό. Με τον τρόπο αυτό, για την ολοκλήρωση των παραγώγων του απαιτούμενου πρωτοτάξιου δυναμικού στην κατακόρυφη κυλινδρική επιφάνεια απαιτείται η γνώση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του δυναμικού αυτού για $R \to \infty$ (όπου R η ακτίνα του «θεωρητικού» κυλίνδρου). Αυτή προκύπτει από ασυμπτωτική θεώρηση του πρωτοτάξιου δυναμικού που περιγράφει το πεδίο ροής γύρω από το σώμα και είναι πολύ απλούστερης μαθηματικά μορφής από την αντίστοιχη που ισχύει κοντά στο σώμα.

Ένας περαιτέρω περιορισμός που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου της μεταβολής της ορμής, είναι ότι στην περίπτωση των πολλών σωμάτων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, η τοποθέτηση της κατακόρυφης κυλινδρικής επιφάνειας μακριά από το σώμα και η θεώρηση του συνολικού δυναμικού εκεί, έχει σαν αποτέλεσμα τον υπολογισμό της συνολικής δύναμης εκπεσμού στο συγκρότημα των αλληλεπιδρουσών κατασκευών και όχι σε κάθε μεμονωμένο σώμα της διάταξης που απαιτείται πολλές φορές. Επίσης στη περίπτωση των αλληλεπιδρώντων σωμάτων η χρήση του θεωρήματος μεταβολής της ορμής για τον υπολογισμό των κατακόρυφων δυνάμεων και των ροπών ανατροπής στις διευθύνσεις του προνευτασμού και του διατοιχισμού, είναι εξαιρετικά δυσχερής λόγω του γεγονότος ότι η επιφάνεια ολοκλήρωσης (ελεύθερη επιφάνεια) διακόπτεται από τις ισάλους των σωμάτων που συμμετέχουν στην διάταξη.

Για τον λόγο αυτό, ο Mavrakos (1995) για την περίπτωση των κατακόρυφων αξονοσυμμετρικών σωμάτων, εισήγαγε τη χρήση του θεωρήματος μεταβολής της ορμής σε πεπερασμένης έκτασης όγκους αναφοράς που περιβάλλουν κάθε σώμα της διάταξης σε τρόπο ώστε να υπολογίζονται οι δυνάμεις και ροπές εκπεσμού σε κάθε ένα εκ των

αλληλεπιδρώντων σωμάτων χωριστά. Στη συνέχεια οι δυνάμεις σε κάθε μεμονωμένο σώμα της διάταξης μπορούν να συντεθούν κατάλληλα για να ευρεθεί η δύναμη εκπεσμού στη συνολική κατασκευή.

3.6.1. Οριζόντιες Δυνάμεις Έκπτωσης

Στοιχεία τύπου Ι

$$\frac{F_{20_1}^{I}}{\rho g a A^2} = \pi kd \tanh(kd) \Re \left\{ \begin{array}{l} i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha}^{\infty} F_{m+1,\alpha} \sum_{\beta}^{\infty} \overline{F}_{m,\beta} \times \\ (\alpha d)(\beta d) L_{\alpha\beta}^{ss} + m(m+1)(\frac{d}{a})^2 L_{\alpha\beta}^{cc} \end{array} \right\} \tag{3.6.1}$$

Με

$$L_{\alpha\beta}^{ss} = \frac{N_{\alpha}^{-1/2} N_{\beta}^{-1/2}}{d} \int_{h_P}^{h_L} \sin(\alpha z) \sin(\beta z) dz \tag{3.6.2}$$

Και

$$L_{\alpha\beta}^{cc} = \frac{N_{\alpha}^{-1/2} N_{\beta}^{-1/2}}{d} \int_{h_P}^{h_L} \cos(\alpha z) \cos(\beta z) dz \tag{3.6.3}$$

Επίσης $\overline{F}$ είναι ο συζυγής του μιγαδικού F .

$$\frac{F_{20_1}^{\Gamma}}{\rho g a A^2} = \pi \left(kd \tanh(kd) \right)^2 (\frac{a_1}{a}) \Re \left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1}^{\infty} \sum_{\beta_1}^{\infty} F_{m+1,\alpha_1}^{*} \overline{F}_{m,\beta_1}^{*} z_{\alpha_1}(d) z_{\beta_1}(d) \right\} \tag{3.6.4}$$

Στοιχεία τύπου ΙΙ

Για τα στοιχεία τύπου ΙΙ, έχουμε δύο περιπτώσεις:

Α) όταν $h_{l-1} > h_l$, και $r = a_l$:

$$\frac{F_{20_1}^{I}}{\rho g a A^2} = \pi kd \tanh(kd) \left(\frac{a_l}{a} \right) \Re \left\{ \begin{array}{l} i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_l}^{\infty} F_{m+1,\alpha_l}^{*} \sum_{\beta_l}^{\infty} \overline{F}_{m,\beta_l}^{*} \times \\ (\alpha_l d)(\beta_l d) L_{\alpha_l \beta_l}^{ss} + m(m+1)(\frac{d}{a_l})^2 L_{\alpha_l \beta_l}^{cc} \end{array} \right\} \tag{3.6.5}$$

Με

$$L^{ss}_{\alpha_l\beta_l} = \frac{N^{-1/2}_{\alpha_l} N^{-1/2}_{\beta_l}}{d} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \sin\left[\alpha_l(z-h_l)\right]\sin\left[\beta_l(z-h_l)\right]dz \tag{3.6.6}$$

Και

$$L^{cc}_{\alpha_l\beta_l} = \frac{N^{-1/2}_{\alpha_l} N^{-1/2}_{\beta_l}}{d} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \cos\left[\alpha_l(z-h_l)\right]\cos\left[\beta_l(z-h_l)\right]dz \tag{3.6.7}$$

B) όταν $h_{l-1} < h_l$, και $r = a_l$:

$$\frac{F^{I}_{20_1}}{\rho g a A^2} = \pi kd \tanh(kd)\left(\frac{a_l}{a}\right)\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha_{l-1}}^{\infty} F_{m+1,\alpha_{l-1}} \sum_{\beta_l-1}^{\infty} \overline{F}_{m,\beta_{l-1}} \times \\ (\alpha_{l-1}d)(\beta_{l-1}d)L^{ss}_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} + m(m+1)(\frac{d}{a_l})^2 L^{cc}_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} \end{array}\right\} \tag{3.6.8}$$

Με

$$L^{ss}_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} = \frac{N^{-1/2}_{\alpha_{l-1}} N^{-1/2}_{\beta_{l-1}}}{d} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \sin\left[\alpha_{l-1}(z-h_{l-1})\right]\sin\left[\beta_{l-1}(z-h_{l-1})\right]dz \tag{3.6.9}$$

Και

$$L^{cc}_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} = \frac{N^{-1/2}_{\alpha_{l-1}} N^{-1/2}_{\beta_{l-1}}}{d} \int_{h_l}^{h_{l-1}} \cos\left[\alpha_{l-1}(z-h_{l-1})\right]\cos\left[\beta_{l-1}(z-h_{l-1})\right]dz \tag{3.6.10}$$

Θέτοντας όπου $a_l = a_1$, για το ολοκλήρωμα πάνω στην water line του σώματος, έχουμε

$$\frac{F^{\Gamma}_{20_1}}{\rho g a A^2} = \pi\left(kd\tanh(kd)\right)^2 (\frac{a_1}{a})\Re\left\{i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha_1}^{\infty}\sum_{\beta_1}^{\infty} F^{*}_{m+1,\alpha_1}\overline{F}^{*}_{m,\beta_1} z_{\alpha_1}(d) z_{\beta_1}(d)\right\} \tag{3.6.11}$$

Στοιχεία τύπου ΙΙΙ

Για τα στοιχεία τύπου ΙΙΙ, έχουμε δύο περιπτώσεις:

Α) όταν $h_{p-1} > h_p$, και $r = b_p$:

$$\frac{F_{20_1}^I}{\rho g a A^2} = \pi kd \tanh(kd)\left(\frac{b_p}{a}\right)\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_p=0}^{\infty} F_{m+1,n_p}^{*}\sum_{j_p}^{\infty} \bar{F}_{m,j_p}^{*} \times \\ (\frac{n_p\pi}{h_p}d)(\frac{j_p\pi}{h_p}d)L_{n_p j_p}^{ss} + m(m+1)(\frac{d}{b_p})^2 L_{n_p j_p}^{cc} \end{array}\right\} \tag{3.6.12}$$

Με

$$L_{n_p j_p}^{ss} = \frac{\in_{n_p}\in_{j_p}}{d}\int_{h_{p-1}}^{h_p} \sin(\frac{n_p\pi z}{h_p})\sin(\frac{j_p\pi z}{h_p})dz \tag{3.6.13}$$

Και

$$L_{n_p j_p}^{cc} = \frac{\in_{n_p}\in_{j_p}}{d}\int_{h_{p-1}}^{h_p} \cos(\frac{n_p\pi z}{h_p})\cos(\frac{j_p\pi z}{h_p})dz \tag{3.6.14}$$

Β) όταν $h_{p-1} < h_p$, και $r = b_p$:

$$\frac{F_{20_1}^I}{\rho g a A^2} = \pi kd \tanh(kd)\left(\frac{b_p}{a}\right)\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_{p-1}=0}^{\infty} F_{m+1,n_{p-1}}\sum_{j_{p-1}=0}^{\infty} \bar{F}_{m,j_{p-1}} \times \\ (\frac{n_{p-1}\pi}{h_{p-1}}d)(\frac{j_{p-1}\pi}{h_{p-1}}d)L_{n_{p-1}j_{p-1}}^{ss} + m(m+1)(\frac{d}{b_p})^2 L_{n_{p-1}j_{p-1}}^{cc} \end{array}\right\} \tag{3.6.15}$$

Με

$$L_{n_{p-1}j_{p-1}}^{ss} = \frac{\in_{n_{p-1}}\in_{j_{p-1}}}{d}\int_{h_{p-1}}^{h_p} \sin(\frac{n_{p-1}\pi z}{h_{p-1}})\sin(\frac{j_{p-1}\pi z}{h_{p-1}})dz \tag{3.6.16}$$

Και

$$L_{n_{p-1}j_{p-1}}^{cc} = \frac{\in_{n_{p-1}}\in_{j_{p-1}}}{d}\int_{h_{p-1}}^{h_p} \cos(\frac{n_{p-1}\pi z}{h_{p-1}})\cos(\frac{j_{p-1}\pi z}{h_{p-1}})dz \tag{3.6.17}$$

3.6.2. Κατακόρυφες Δυνάμεις Έκπτωσης

Στοιχεία τύπου Ι

Όπως είναι φυσικό για κυλινδρικά στοιχεία από την ελεύθερη επιφάνεια μέχρι τον πυθμένα, δεν υπάρχουν κατακόρυφες δυνάμεις έκπτωσης.

Στοιχεία τύπου ΙΙ

$$\frac{F_{20_3}^{I}}{\rho g a A^2} = \frac{\omega^2 \pi d^2}{2ga} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m \sum_{\alpha_l}^{\infty} N_{\alpha_l}^{-1/2} \sum_{\beta_l}^{\infty} N_{\beta_l}^{-1/2} \times \int_{a_l}^{a_{l+1}} \left[\frac{m^2}{r} \Lambda_{m,a_l}(r) \overline{\Lambda}_{m,\beta_l}(r) + r \Lambda'_{m,a_l}(r) \overline{\Lambda}'_{m,\beta_l}(r) \right] dr \tag{3.6.18}$$

Με

$$\Lambda'_{m,a_l}(r) = \frac{\partial \Lambda_{m,a_l}(r)}{\partial r}$$
$$\Lambda_{m,a_l}(r) = R_{ma_l}(r) F_{ma_l} + R^*_{ma_l}(r) F^*_{ma_l} \tag{3.6.19}$$

Στοιχεία τύπου ΙΙΙ

όταν $b_p \le r \le b_{p+1}$, και $r = b_p$:

$$\frac{F_{20_3}^{I}}{\rho g a A^2} = \frac{\omega^2 \pi d^2}{2ga} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m \sum_{n_p=0}^{\infty} \in_{n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \in_{j_p} (-1)^{n_p + j_p} \times \int_{b_p}^{b_{p+1}} \left[\frac{m^2}{r} \Lambda_{m,n_p}(r) \overline{\Lambda}_{m,j_p}(r) + r \Lambda'_{m,n_p}(r) \overline{\Lambda}'_{m,j_p}(r) \right] dr \tag{3.6.20}$$

Με

$$\Lambda'_{m,n_p}(r) = \frac{\partial \Lambda_{m,n_p}(r)}{\partial r}$$
$$\Lambda_{m,n_p}(r) = R_{mn_p}(r) F_{mn_p} + R^*_{mn_p}(r) F^*_{mn_p} \tag{3.6.21}$$

3.6.3. Ροπές Έκπτωσης

Στοιχεία τύπου Ι

Για $h_P < z < h_L$, $r = a$ και e το σημείο, μετρούμενο από τον πυθμένα, περί το οποίο, υπολογίζουμε τη ροπή έκπτωσης:

$$\frac{F^{I}_{20_5}}{\rho g a^2 A^2} = \pi k d \tanh(\frac{d}{a}) \Re \left\{ \begin{array}{l} i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha}^{\infty} F_{m+1,\alpha} \sum_{\beta}^{\infty} \overline{F}_{m,\beta} \times \\ (\alpha d)(\beta d) L^{ss}_{\alpha\beta} + m(m+1)(\frac{d}{a})^2 L^{cc}_{\alpha\beta} \end{array} \right\} \tag{3.6.22}$$

Με

$$L^{ss}_{\alpha\beta} = \frac{N_\alpha^{-1/2} N_\beta^{-1/2}}{d^2} \int_{h_P}^{h_L} (z-e) \sin(\alpha z) \sin(\beta z) dz \tag{3.6.23}$$

Και

$$L^{cc}_{\alpha\beta} = \frac{N_\alpha^{-1/2} N_\beta^{-1/2}}{d^2} \int_{h_P}^{h_L} (z-e) \cos(\alpha z) \cos(\beta z) dz \tag{3.6.24}$$

Στοιχεία τύπου ΙΙ

Για τα στοιχεία τύπου ΙΙ, έχουμε τρεις περιπτώσεις:

Α) όταν $h_{l-1} > h_l$, και $r = a_l$:

$$\frac{F^{I}_{20_5}}{\rho g a^2 A^2} = \pi k d \tanh(kd) \left(\frac{a_l d}{a^2} \right) \Re \left\{ \begin{array}{l} i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha_l}^{\infty} F^*_{m+1,\alpha_l} \sum_{\beta_l}^{\infty} \overline{F}^*_{m,\beta_l} \times \\ (\alpha_l d)(\beta_l d) L^{ss}_{\alpha_l\beta_l} + m(m+1)(\frac{d}{a_l})^2 L^{cc}_{\alpha_l\beta_l} \end{array} \right\} \tag{3.6.25}$$

Με

$$L^{ss}_{\alpha_l\beta_l} = \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2} N_{\beta_l}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_l}^{h_{l-1}} (z-e) \sin\left[\alpha_l (z-h_l)\right] \sin\left[\beta_l (z-h_l)\right] dz \tag{3.6.26}$$

Και

$$L^{cc}_{\alpha_l\beta_l} = \frac{N_{\alpha_l}^{-1/2} N_{\beta_l}^{-1/2}}{d^2} \int_{h_l}^{h_{l-1}} (z-e) \cos\left[\alpha_l (z-h_l)\right] \cos\left[\beta_l (z-h_l)\right] dz \tag{3.6.27}$$

Β) όταν $h_{l-1} < h_l$, και $r = a_l$:

$$\frac{F^I_{20_5}}{\rho g a^2 A^2} = \pi kd \tanh(kd)\left(\frac{a_l d}{a^2}\right)\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha_{l-1}}^{\infty} F_{m+1,\alpha_{l-1}} \sum_{\beta_l-1}^{\infty} \bar{F}_{m,\beta_{l-1}} \times \\ (\alpha_{l-1}d)(\beta_{l-1}d)L^{ss}_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} + m(m+1)(\frac{d}{a_l})^2 L^{cc}_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} \end{array}\right\} \tag{3.6.28}$$

Με

$$L^{ss}_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} = \frac{N^{-1/2}_{\alpha_{l-1}} N^{-1/2}_{\beta_{l-1}}}{d^2}\int_{h_l}^{h_{l-1}} (z-e)\sin\left[\alpha_{l-1}(z-h_{l-1})\right]\sin\left[\beta_{l-1}(z-h_{l-1})\right]dz \tag{3.6.29}$$

Και

$$L^{cc}_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} = \frac{N^{-1/2}_{\alpha_{l-1}} N^{-1/2}_{\beta_{l-1}}}{d^2}\int_{h_l}^{h_{l-1}} (z-e)\cos\left[\alpha_{l-1}(z-h_{l-1})\right]\cos\left[\beta_{l-1}(z-h_{l-1})\right]dz \tag{3.6.30}$$

Γ) όταν $z = h_l$, και $a_l < r < a_{l+1}$:

$$\frac{F^I_{20_5}}{\rho g a^2 A^2} = -\pi kd \tanh(kd)\left(\frac{d}{a}\right)^2\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha_l}^{\infty}\sum_{\beta_l}^{\infty} N^{-1/2}_{\alpha_l} N^{-1/2}_{\beta_l} \times \\ \frac{1}{\mathrm{d}}\int_{a_l}^{a_{l+1}}\left[m(m+1)\Lambda_{m+1,a_l}(r)\bar{\Lambda}_{m,\beta_l}(r) + r^2\Lambda'_{m+1,a_l}(r)\bar{\Lambda}'_{m,\beta_l}(r)\right]dr \end{array}\right\} \tag{3.6.31}$$

Στοιχεία τύπου ΙΙΙ

Για τα στοιχεία τύπου ΙΙΙ, έχουμε τρεις περιπτώσεις:

Α) όταν $h_{p-1} < h_p$, και $r = b_p$:

$$\frac{F^I_{20_5}}{\rho g a^2 A^2} = \pi kd \tanh(kd)\left(\frac{b_p d}{a^2}\right)\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_p=0}^{\infty} F^*_{m+1,n_p} \sum_{j_p=0}^{\infty} \bar{F}^*_{m,j_p} \times \\ (\frac{n_p\pi}{h_p}d)(\frac{j_p\pi}{h_p}d)L^{ss}_{n_p j_p} + m(m+1)(\frac{d}{b_p})^2 L^{cc}_{n_p j_p} \end{array}\right\} \tag{3.6.32}$$

Με

$$L^{ss}_{n_p j_p} = \frac{\in_{n_p}\in_{j_p}}{d^2}\int_{h_{p-1}}^{h_p} (z-e)\sin(\frac{n_p\pi z}{h_p})\sin(\frac{j_p\pi z}{h_p})dz \tag{3.6.33}$$

Και

$$L_{n_p j_p}^{cc} = \frac{\in_{n_p} \in_{j_p}}{d^2} \int_{h_{p-1}}^{h_p} (z-e)\cos(\frac{n_p \pi z}{h_p})\cos(\frac{j_p \pi z}{h_p})dz \tag{3.6.34}$$

Β) όταν $h_{p-1} > h_p$, και $r = b_p$:

$$\frac{F_{20_5}^I}{\rho g a^2 A^2} = \pi kd \tanh(kd)\left(\frac{b_p d}{a^2}\right)\Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_{p-1}=0}^{\infty} F_{m+1,n_{p-1}} \sum_{j_{p-1=0}}^{\infty} \bar{F}_{m,j_{p-1}} \times \\ (\frac{n_{p-1}\pi}{h_{p-1}} d)(\frac{j_{p-1}\pi}{h_{p-1}} d) L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{ss} + m(m+1)(\frac{d}{b_p})^2 L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{cc} \end{array}\right\} \tag{3.6.35}$$

Με

$$L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{ss} = \frac{\in_{n_{p-1}} \in_{j_{p-1}}}{d^2} \int_{h_{p-1}}^{h_p} (z-e)\sin(\frac{n_{p-1}\pi z}{h_{p-1}})\sin(\frac{j_{p-1}\pi z}{h_{p-1}})dz \tag{3.6.36}$$

Και

$$L_{n_{p-1} j_{p-1}}^{cc} = \frac{\in_{n_{p-1}} \in_{j_{p-1}}}{d^2} \int_{h_{p-1}}^{h_p} (z-e)\cos(\frac{n_{p-1}\pi z}{h_{p-1}})\cos(\frac{j_{p-1}\pi z}{h_{p-1}})dz \tag{3.6.37}$$

Γ) όταν $z = h_P$, και $b_p < r < b_{p+1}$:

$$\frac{F_{20_5}^I}{\rho g a^2 A^2} = -\pi kd \tanh(kd)\left(\frac{d}{a}\right)^2 \Re\left\{\begin{array}{l} i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_p=0}^{\infty}\sum_{j_p=0}^{\infty} \in_{n_p} (-1)^{n_p} \in_{j_p} (-1)^{j_p} \times \\ \frac{1}{\mathrm{d}}\int_{b_p}^{b_{p+1}} \left[m(m+1)\Lambda_{m+1,n_p}(r)\bar{\Lambda}_{m,j_p}(r) + r^2 \Lambda'_{m+1,n_p}(r)\bar{\Lambda}'_{m,j_p}(r)\right]dr \end{array}\right\} \tag{3.6.38}$$

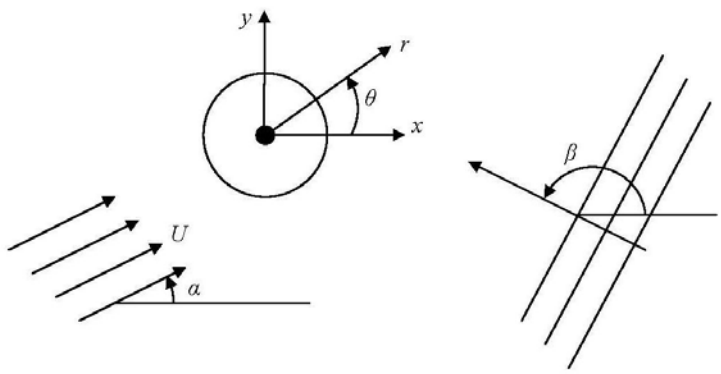
Και για το ολοκλήρωμα στην water line του σώματος, έχουμε:

$$\frac{F_{20_5}^\Gamma}{\rho g a^2 A^2} = \frac{(d-e)}{a}\frac{F_{20_1}^\Gamma}{\rho g a A^2} \tag{3.6.39}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV:
Διατύπωση του προβλήματος κύματος-ρεύματος και δυναμικό μόνιμης ροής

4.1. Θεωρητικό υπόβαθρο για τον χωρισμό των δυναμικών, κατά τον αναλυτικό υπολογισμό του προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος

Θεωρείται αξονοσυμμετρικο σώμα τυχαίας μορφής, το οποίο εκτίθεται στη δράση μονοχρωματικών κυματισμών συχνότητας ω_0 και πλάτους $H/2$ (ή A) καθώς και σε ομοιόμορφο σταθερό ρεύμα μικρής ταχύτητας U, σε βάθος νερού d. Όπως φαίνεται και στο σχήμα οι διευθύνσεις του κύματος και του ρεύματος ως προς την οριζόντιο είναι β και α αντιστοίχως. Έχει επιλεγεί σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων (r,θ,z) το οποίο είναι σταθερό στον πυθμένα και ο άξονας Oz έχει κατεύθυνση προς τα πάνω. Το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο αστρόβιλο και μη συνεκτικό. Υπ' αυτές τις προϋποθέσεις μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία δυναμικού. Το πεδίο ταχυτήτων μπορεί να περιγραφεί από το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r,\theta,z)$ το οποίο πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, τη συνθήκη μηδενισμού της ταχύτητας στον πυθμένα και στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος και τέλος τη συνδυασμένη μη γραμμική δυναμική και κινηματική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή στο $z=d+\zeta$.



Σχήμα 4. 1: Σκαριφηματική αναπαράσταση κίνησης κυλινδρικού σώματος σε πεδίο ροής προερχόμενο από την αλληλεπίδραση κυματισμών βαρύτητας και θαλάσσιου ρεύματος

Από το σχήμα που φαίνεται παραπάνω, ισχύουν τα εξής:

Ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας: ζ (x,y)

Εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{4.1.1}$$

Δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια για τα ζ, Φ:

$$\zeta = -\frac{1}{g}\left\{\Phi_t + \frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi - \frac{1}{2}U^2\right\} \quad \text{για } z=\zeta \tag{4.1.2}$$

Κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια :

$$\frac{D\zeta(x,y,t)}{Dt} = \Phi_z \quad \text{για } z=\zeta \tag{4.1.3}$$

Τελικά η μη γραμμική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια γράφεται (Bannister, 1993):

$$\Phi_{tt} + 2\nabla\Phi_t \cdot \nabla\Phi + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot (\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) + g\Phi_z = 0 \qquad \text{για } z=\zeta \tag{4.1.4}$$

Το δυναμικό Φ, πρέπει να ικανοποιεί ακόμα τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

$$\nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \ \text{ στο } S_B \tag{4.1.5}$$

Και στον πυθμένα

$$\Phi_Z=0, \ \text{ για } z=0. \tag{4.1.6}$$

Το δυναμικό ταχύτητας Φ, χωρίζεται σε τρία τμήματα:

(i) **ομοιόμορφο δυναμικό ρεύματος *U(xcosα+ysinα).***

(ii) **Δυναμικό μόνιμης ροής, που περιγράφει τη διαταραχή του ομοιόμορφου ρεύματος λόγω της παρουσίας του σώματος και δίνεται στη μορφή *$U\bar{\phi}$ (x,y,z)***

(iii) **Χρονικά εξαρτημένο δυναμικό που περιγράφει το προσπίπτον κύμα και την περίθλαση του από το σώμα $\phi^{(1)}(x,y,z,t)$, και είναι της ίδιας τάξης όπως και το πλάτος του προσπίπτοντος κυματισμού*A*.**

Επομένως :

$$\Phi = U(\bar{\phi} + x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \phi^{(1)} \tag{4.1.7}$$

Τα $\bar{\phi}$ (x,y,z*)* και $\phi^{(1)}(x,y,z,t)$ ικανοποιούν την εξίσωση Laplace:

$$\nabla\bar{\phi} = 0$$

$$\nabla\phi^{(1)} = 0$$

Από τις (4.1.3) και (4.1.5) παίρνουμε τη συνδυασμένη δυναμική και κινηματική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας και γραμμικοποιώντας (κρατάμε τους όρους *0(A), 0(U), 0(UA),)* καταλήγουμε στις:

$$gU\bar{\phi}_z + g\phi_z^{(1)} + \phi_{tt}^{(1)} = -2U\nabla\phi_t^{(1)}\nabla\bar{\phi} - 2U\cos\alpha\nabla\phi_t^{(1)}\nabla x - 2U\sin\alpha\nabla\phi_t^{(1)}\nabla y + U\phi_t^{(1)}\bar{\phi}_{zz}$$

ή

$$gU\bar{\phi}_z + g\phi_z^{(1)} + \phi_{tt}^{(1)} = U\phi_t^{(1)}\bar{\phi}_{zz} - 2U\nabla\phi_t^{(1)}\nabla(\bar{\phi} + x\cos\alpha + y\sin\alpha) \tag{4.1.8}$$

Η παραπάνω γραμμικοποίηση του δυναμικού της μόνιμης ροής $U\bar{\phi}$ *(x,y,z)*, επιτρέπει να καθοριστεί και να υπολογιστεί χωριστά, θέτοντας $\phi^{(1)}(x,y,z,t)$ =*0* και να δώσει τις συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας και πάνω στο σώμα ως:

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z}=0, z=d$$

$$\textit{και} \tag{4.1.9}$$

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}=-n_1\cos\alpha-n_2\sin\alpha, S_{B.}$$

Με $\vec{n}=(n_1,n_2), \frac{\partial}{\partial n}$ τη μερική παράγωγο του $\vec{n}=(n_1,n_2)$ και $\bar{\phi}\propto\sqrt{\frac{1}{r}}$ που είναι η συνθήκη στο άπειρο (μακριά από το σώμα).

Τελικά η οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια για το δυναμικό $\phi^{(1)}(x,y,z,t)$ γίνεται:

$$\phi_{tt}^{(1)}+g\phi_z^{(1)}+2U(\phi_{xt}^{(1)}\bar{\phi}_x+\phi_{yt}^{(1)}\bar{\phi}_y)+2U(\phi_{xt}^{(1)}\cos\alpha+\phi_{yt}^{(1)}\sin\alpha)-U\bar{\phi}_{zz}\phi_t^{(1)}=0, \quad z=d \tag{4.1.10}$$

Μακριά από το σώμα όπου η διαταραχή είναι μηδενική, (δηλαδή $\bar{\phi}$ (x,y,z)=0) η (4.1.10) γράφεται:

$$\phi_{tt}^{(1)}+g\phi_z^{(1)}+2U(\phi_{xt}^{(1)}\cos\alpha+\phi_{yt}^{(1)}\sin\alpha)=0, \quad z=d \tag{4.1.11}$$

Το χρονικά εξαρτημένο δυναμικό $\phi^{(1)}(x,y,z,t)$ εκφράζεται τώρα ως το άθροισμα του προσπίπτοντος κυματισμού και του περιθλώμενου κυματισμού

$$\phi^{(1)}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left\{A\left[\phi_0(x,y,z)+\phi_7(x,y,z)\right]\cdot e^{-i\omega t}\right\} \tag{4.1.12}$$

Όπου το δυναμικό του προσπίπτοντος κύματος που ικανοποιεί την (4.1.10) είναι:

$$\phi_0=-\frac{iAg}{\omega_0}\cdot\frac{\cosh(k_0z)}{\cosh(k_0d)}\cdot e^{ik_0(x\cos\beta+y\sin\beta)} \tag{4.1.13}$$

Η συχνότητα συνάντησης ω, μετά την υπέρθεση κύματος- ρεύματος και η συχνότητα του κύματος ω_0 συνδέονται με τη σχέση:

$$\omega=\omega_0+Uk_0\cos\gamma \text{ , με } \gamma=\beta\text{-}\alpha \tag{4.1.14}$$

Ο αριθμός κύματος $k_0=\frac{2\pi}{\lambda}$ και η συχνότητα κύματος ω_0 ικανοποιούν την εξίσωση διασποράς:

$$\omega_0^2=gk_0\tanh(k_0d) \tag{4.1.15}$$

Εισάγοντας την (4.1.12) στην συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας (4.1.10) που δίνει τη γραμμική διαφορική εξίσωση για το $\phi^{(1)}(x,y,z,t)$ και απαλείφοντας τον όρο $Ae^{-i\omega t}$ προκύπτει:

$$(-\frac{\omega^2}{g}+\frac{\partial}{\partial z})\phi_7-2i\tau(\cos a\frac{\partial}{\partial x}+\sin a\frac{\partial}{\partial y})\phi_7+i\tau(\bar{\phi}_{zz}-2\bar{\phi}_x\frac{\partial}{\partial x}-2\bar{\phi}_y\frac{\partial}{\partial y})\cdot(\phi_0+\phi_7)=0\text{, για } z=d \tag{4.1.16}$$

Στην παραπάνω έχουμε θέσει $\tau=\frac{U\omega}{g}$.

Τα φαινόμενα λόγω του ρεύματος στη συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας, μπορούν να διαχωριστούν από τους όρους μηδενικής ταχύτητας, ορίζοντας τη αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος $\tau_0=\frac{U\omega_0}{g}$ και χρησιμοποιώντας τη συχνότητα συνάντησης (4.1.14). Αντικαθιστώντας λοιπόν το $\tau_0=\tau$ στην οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας (4.1.16), έχουμε:

$$(-\frac{\omega^2}{g}+\frac{\partial}{\partial z})\phi_7-2i\tau_0(\cos a\frac{\partial}{\partial x}+\sin a\frac{\partial}{\partial y})\phi_7+i\tau_0(\bar{\phi}_{zz}-2\bar{\phi}_x\frac{\partial}{\partial x}-2\bar{\phi}_y\frac{\partial}{\partial y})\cdot(\phi_0+\phi_7)=0\text{, για z=d.}$$

Όμως $\omega=\omega_0+Uk_0\cos\gamma$ δηλαδή: $\frac{\omega^2}{g}=\frac{\omega_0^2}{g}+\frac{(Uk_0\cos\gamma)^2}{g}+\frac{2\omega_0Uk_0\cos\gamma}{g}$

άρα:

$$(\nu_0+\frac{\partial}{\partial z})\phi_7-2i\tau_0(ik_0\cos\gamma-\cos a\frac{\partial}{\partial x}-\sin a\frac{\partial}{\partial y})\phi_7+i\tau_0(\bar{\phi}_{zz}-2\bar{\phi}_x\frac{\partial}{\partial x}-2\bar{\phi}_y\frac{\partial}{\partial y})\cdot(\phi_0+\phi_7)=0 \tag{4.1.17}$$

Με $\nu_0=\frac{\omega_0^2}{g}$

Στην (4.1.17) μόνον οι δύο πρώτοι όροι συνεισφέρουν στην οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας στο άπειρο. Έτσι στο άπειρο και σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\left\{-\nu_0-2k_0\tau_0\cos\gamma+\frac{\partial}{\partial z}-2i\tau_0\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r}\right\}\phi_7=0 \text{ για z=d και } r\to\infty \tag{4.1.18}$$

4.2. Το δυναμικό της μόνιμης ροής (steady state) $\bar{\phi}$

Το δυναμικό $\bar{\phi}$, είναι η διαταραχή της ομοιόμορφης ροής που προκαλείται από το σώμα και δε σχετίζεται με το κύμα. Το σταθερό δυναμικό διαταραχής ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στο σταθερό όριο στην ελεύθερη επιφάνεια

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 0 \text{, για z=d} \tag{4.2.1}$$

Αυτό υπονοεί ότι τα κύματα του *Kelvin* αμελούνται λόγω της μικρής ταχύτητας ρεύματος.

Το σταθερό δυναμικό διαταραχής $\bar{\phi}$, ικανοποιεί την οριακή συνθήκη μηδενικής ταχύτητας επάνω στο σώμα

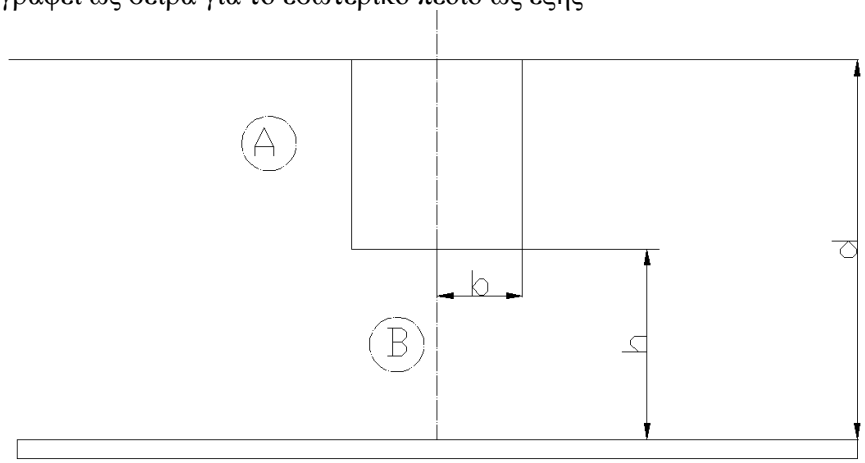
$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = -n_1 = -\cos(\theta - \alpha) \text{, στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος} \tag{4.2.2}$$

Επιπλέον, η $\bar{\phi}$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και τη συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον πυθμένα και ο όρος

$\nabla \bar{\phi}$ μηδενίζεται στο άπειρο.

4.3. Το Πρόβλημα μόνιμης ροής

Στην παρούσα ενότητα το δυναμικό της μόνιμης ροής (steady state) $\bar{\phi}$ που περιγράφει την διαταραχή του ρεύματος από το σώμα, υπολογίζεται μέσω της μεθόδου των ιδιοσυναρτήσεων. Έτσι το δυναμικό $\bar{\phi}$ για την περίπτωση του κατακόρυφου κυλίνδρου, μπορεί να γραφεί ως σειρά για το εσωτερικό πεδίο ως εξής



$$\bar{\phi}^{(B)} = \psi^{(B)}(r,z)\cos(\theta - a) \tag{4.3.1}$$

Με

$$\psi^{(B)}(r,z) = F_0^{(B)}\frac{r}{b} + 2\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(B)} \frac{I_1(\frac{n\pi r}{h})}{I_1(\frac{n\pi b}{h})}\cos(\frac{n\pi z}{h}) \tag{4.3.2}$$

Όπου I_n είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και 1ης τάξης, b η ακτίνα του κυλίνδρου και h το βύθισμα του κυλίνδρου.

Για το εξωτερικό πεδίο, όταν αυτό ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στο σταθερό όριο στην ελεύθερη επιφάνεια, η έκφραση για τον υπολογισμό του δίνεται

$$\bar{\phi}^{(A)} = \psi^{(A)}(r,z)\cos(\theta - a) \tag{4.3.3}$$

Με

$$\psi^{(A)}(r,z) = F_0^{(A)}\frac{b}{r} + 2\sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(A)} \frac{K_1(\frac{m\pi r}{d})}{K_1(\frac{m\pi b}{d})}\cos(\frac{m\pi z}{d}) \tag{4.3.4}$$

Όπου K_n είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους και 1ης τάξης, b η ακτίνα του κυλίνδρου και d το βάθος του ρευστού.

Οι άγνωστοι συντελεστές $F_m^{(A)}, F_n^{(B)}$ των σειρών, μπορούν εύκολα να υπολογιστούν, μέσω των λύσεων των εσωτερικού και εξωτερικού πεδίου, ως εξής:

Μέσω της ισότητας των

$$\bar{\phi}^{(A)} = \bar{\phi}^{(B)}$$

και της ισότητας των παραγώγων αυτών ως προς r, στην κοινή τους επιφάνεια $r=b$,

$$\frac{\partial\bar{\phi}^{(A)}}{\partial r}\Big|_{r=b} = \frac{\partial\bar{\phi}^{(B)}}{\partial r}\Big|_{r=b},\ 0 \le z \le h$$

Αλλά και κάνοντας χρήση της οριακής συνθήκης στο σταθερό όριο, για $r=b$, στο διάστημα $h \le z \le d$.

Υπενθυμίζεται και πάλι ότι d είναι το βάθος του ρευστού και h το βύθισμα του κυλίνδρου.

Χάριν πληρότητας παρουσιάζουμε ενδεικτικά τον υπολογισμό του συντελεστή $F_m^{(A)}$, για την περίπτωση του κυλίνδρου που εδράζεται στον πυθμένα της θάλασσας.

Το σταθερό δυναμικό διαταραχής $\overline{\phi}$, ικανοποιεί την οριακή συνθήκη μηδενικής ταχύτητας επάνω στο σώμα

$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial n} = -n_1 = -\cos(\theta - \alpha)$, στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος

Οπότε από την $\overline{\phi}^{(A)} = \psi^{(A)}(r,z)\cos(\theta - a)$ θα έχουμε:

$$\left[-F_0^{(A)} \frac{b}{r^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{d} F_m^{(A)} \frac{K_1'(\frac{m\pi r}{d})}{K_1(\frac{m\pi b}{d})} \cos(\frac{m\pi z}{d}) \right] \cos(\theta - a) = -\cos(\theta - a)$$

$$\left[-F_0^{(A)} \frac{b}{b^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{d} F_m^{(A)} \frac{K_1'(\frac{m\pi b}{d})}{K_1(\frac{m\pi b}{d})} \cos(\frac{m\pi z}{d}) \right] = -1$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\cos(\frac{q\pi z}{d})$ και ολοκληρώνουμε στο υπό μελέτη διάστημα [*0,d*], οπότε:

$$-F_0^{(A)} \frac{1}{b} \int_0^d \cos(\frac{q\pi z}{d}) dz + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{d} F_m^{(A)} \frac{K_1'(\frac{m\pi b}{d})}{K_1(\frac{m\pi b}{d})} \int_0^d \cos(\frac{m\pi z}{d}) \cos(\frac{q\pi z}{d}) dz = -\int_0^d \cos(\frac{q\pi z}{d}) dz$$

$$-F_0^{(A)} \frac{d}{b} \delta_{0,q} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{d} F_m^{(A)} \frac{K_1'(\frac{m\pi b}{d})}{K_1(\frac{m\pi b}{d})} \delta_{m,q} = -d\delta_{0,q}$$

Για q=0: $F_0^{(A)} = b$

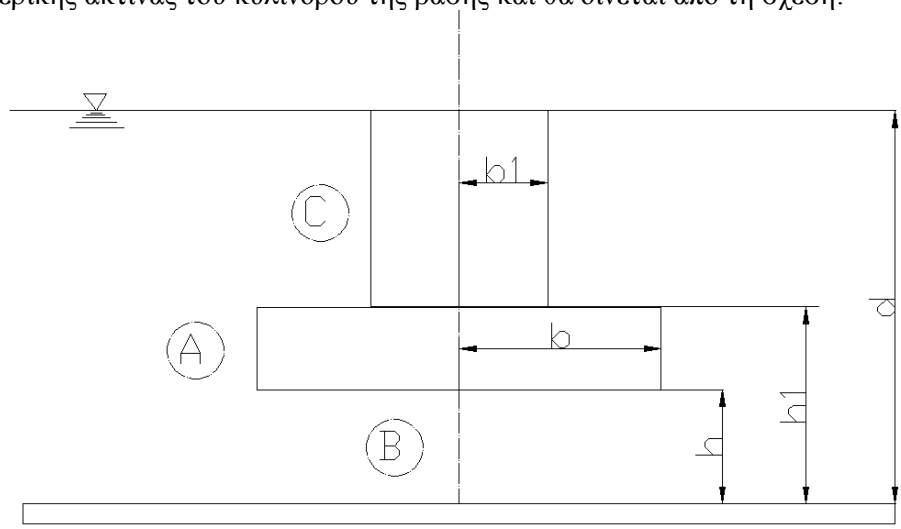
Για q=1: $F_1^{(A)} = 0$

Για q=2: $F_2^{(A)} = 0$

...

Άρα $F_0^{(A)} = b$ και $F_m^{(A)} = 0, \quad \forall \ m \geq 1$

Κατ' αντιστοιχία για την περίπτωση του σύνθετου κατακόρυφου κυλινδρικού σώματος, θα έχουμε μια αντίστοιχη έκφραση, η οποία θα περιγράφει το δυναμικό της μόνιμης ροής του εσωτερικού πεδίου Γ, που περιορίζεται καθ' ύψος μεταξύ της επάνω επιφάνειας της βάσης του κυλινδρικού σώματος και της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού. Στην ακτινική διεύθυνση περιορίζεται μεταξύ της μικρής ακτίνας του ανώτερου κυλινδρικού σώματος και της εξωτερικής ακτίνας του κυλίνδρου της βάσης και θα δίνεται από τη σχέση:



$$\bar{\phi}^{(\Gamma)} = \psi^{(\Gamma)}(r,z)\cos(\theta - a) \tag{4.3.5}$$

Με

$$\begin{aligned}\psi^{(\Gamma)}(r,z) &= F_0^{(\Gamma)}\frac{r^2 - b_1^2}{r} + F_0^{*(\Gamma)}\frac{b^2 - r^2}{r}\cos\theta \\ &+ 2\sum_{l=1}^{\infty}\left[R_{1l}(r)F_n^{(\Gamma)} + R_{1l}^*(r)F_n^{*(\Gamma)}\right]\cos\left(\frac{n\pi z}{d - h_1}\right)\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

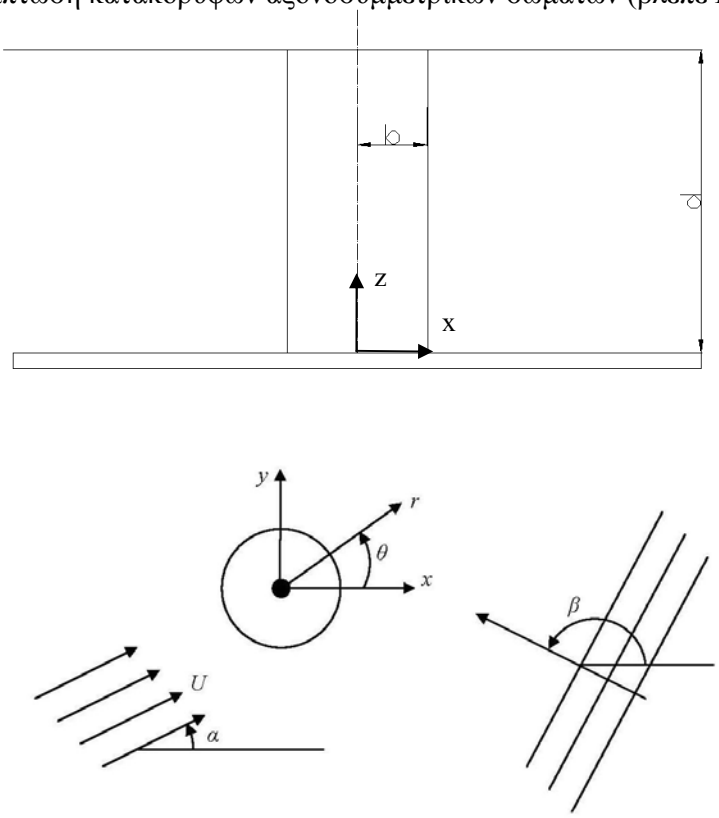
Οι άγνωστοι συντελεστές $F_m^{(\Gamma)}, F_n^{*(\Gamma)}$ των σειρών, μπορούν να υπολογιστούν, μέσω των λύσεων των εσωτερικού (Β), εξωτερικού (Α) και άνω πεδίου (Γ). Οι εκφράσεις των $R_{ml}(r), R_{ml}^*(r)$, δίνονται στις σχέσεις (2.3.16) και (2.3.17).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V:
Αλληλεπίδραση κύματος- ρεύματος για κατακόρυφα αξονοσυμμετρικά σώματα. Προσδιορισμός του χρονικά μεταβαλλόμενου δυναμικού διαταραχής.

5.1. Διατύπωση του υδροδυναμικού προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος- ρεύματος-πακτωμένος κύλινδρος.

5.1.1. Πεδίο ροής προερχόμενο από την αλληλεπίδραση κυματισμών βαρύτητας και θαλασσίου ρεύματος

Η διατύπωση του προβλήματος, παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4.1 της παρούσας διδακτορικής διατριβής, μαζί με τη μεθοδολογία υπολογισμού του δυναμικού της μόνιμης ροής για την περίπτωση κατακόρυφων αξονοσυμμετρικών σωμάτων (βλέπε Κεφάλαιο 4.2)



Σχήμα 5.1. 1: Σκαριφηματική αναπαράσταση κυλινδρικού σώματος σε πεδίο ροής στο οποίο συνυπάρχουν μονοχρωματικοί κυματισμοί βαρύτητας και θαλάσσιο ρεύμα

Το συνολικό δυναμικό ταχύτητας του εξεταζόμενου πεδίου ροής θα προέρχεται από την υπέρθεση των επιμέρους συνιστωσών του:

$$\Phi = U\left(\overline{\phi} + r\cos(\theta - \alpha)\right) + \varphi \qquad (5.1.1)$$

Όπου:

(i) $Ur\cos(\theta-\alpha)$ **το δυναμικό του προσπίπτοντος ρεύματος**

(ii) $U\bar{\phi}(r,\theta,z)$ **το δυναμικό της μόνιμης ροής λόγω της ροής του ρεύματος**

(iii) $\varphi(r,\theta,z;t)$ **το χρονικά εξαρτώμενο δυναμικό που περιγράφει τον προσπίπτοντα κυματισμό και την προκαλούμενη διαταραχή λόγω της παρουσίας του σώματος**

Οι οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $\bar{\phi}$ και φ, περιγράφονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις (4.1.10), (4.1.11) και (4.1.9), που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 4.1. τις σχέσεις αυτές τις αναπαράγουμε εδώ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Η γραμμικοποιημένη οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια, για μικρές τιμές των *H/2 (ή A)* και U, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\phi_{tt}+g\phi_z+2U\nabla\phi_t\nabla\left(\bar{\varphi}+r\cos(\theta-a)\right)+gU\bar{\varphi}_z-U\bar{\varphi}_{zz}\phi_t=0,\quad z=d \tag{5.1.2}$$

Η παραπάνω γραμμικοποιημένη συνθήκη επιτρέπει τη διατύπωση της οριακής συνθήκης για τον υπολογισμό του δυναμικού της μόνιμης ροής $U\bar{\phi}(r,\theta,z)$ θέτοντας $\varphi(r,\theta,z;t)$=0 ήτοι εν απουσία κυματισμού. Κατά συνέπεια οι οριακές συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούνται από το $\bar{\phi}$ θα είναι (Newman 1978):

$$\bar{\varphi}_z=0,\quad z=d \text{ (στην ελεύθερη επιφάνεια)} \tag{5.1.3}$$

και

$$\bar{\phi}_r=-\cos(\theta-\alpha) \tag{5.1.4}$$

Επιπλέον στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος, η $\bar{\phi}$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και τη συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον πυθμένα

Μακριά από το σώμα όπου η διαταραχή είναι μηδενική, (δηλαδή $\bar{\phi}(r,\theta,z)$=0) η Εξ. (5.1.2) γράφεται:

$$\phi_{tt}+g\phi_z+2U\left(\phi_{tr}\cos(\theta-a)-\frac{1}{r}\phi_{t\theta}\sin(\theta-a)\right)=0,\quad z=d \tag{5.1.5}$$

5.1.2. Προσπίπτοντες και περιθλώμενοι κυματισμοί

Το συνολικό δυναμικό εξ' αιτίας του προσπίπτοντος κυματισμού γράφεται (βλέπε και σχέση 4.1.12):

$$\varphi(r,\theta,z;t) = \mathrm{Re}\left\{\left(\varphi^I + \varphi^D\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \tag{5.1.6}$$

όπου οι δείκτες I και D συμβολίζουν τα δυναμικά πρόσπτωσης και περίθλασης αντίστοιχα. Επιπλέον ω είναι η συχνότητα συνάντησης, η οποία διαφέρει από τη συχνότητα του κυματισμού πρόσπτωσης ω_0, λόγω της παρουσίας του ρεύματος. Ο χωρικός όρος του δυναμικού πρόσπτωσης φ^I, μπορεί να γραφεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\phi^I\left(r,\theta,z\right) = -\mathrm{i}\frac{H}{2}\frac{g}{\omega_0}\frac{\cosh\left(k_0 z\right)}{\cosh\left(k_0 d\right)}e^{\mathrm{i}k_0 r\cos(\theta-\beta)} \tag{5.1.7}$$

με k_0 τον αριθμό κύματος , ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση διασποράς, με χρήση της συχνότητας ω_0. Στην περίπτωση υπολογισμού της συχνότητας συνάντησης ω συναρτήσει της ω_0, αρκεί να αντικαταστήσουμε το $\varphi^I e^{-\mathrm{i}\omega t}$ στην Εξ. (5.1.5), την οποία οφείλει να ικανοποιεί το δυναμικό πρόσπτωσης. Μετά από πράξεις, μπορούμε να καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση, η οποία δίνει την αδιάστατη έκφραση για τη συχνότητα συνάντησης:

$$\nu = \nu_0 + 2\tau k_0\cos\gamma \tag{5.1.8}$$

Όπου $\nu = \omega^2/g$, $\nu_0 = \omega_0^2/g$ και τ είναι η αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος, ίση με $\tau = U\omega/g$ και $\gamma = \beta - \alpha$. Η Εξ. (5.1.8), μετά την απαλοιφή του μη γραμμικού όρου U^2 μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\omega = \omega_0 + Uk_0\cos\gamma \tag{5.1.9}$$

Η συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας η οποία θα πρέπει να ικανοποιείται από το δυναμικό περίθλασης φ^D μόνο, περιγράφεται από την Εξ. (5.1.2) λαμβάνοντας υπόψη ότι στο άπειρο η τελευταία θα πρέπει να ικανοποιείται μόνο από το δυναμικό του προσπίπτοντος κυματισμού καθώς και το γεγονός ότι η διαταραχή του ρεύματος εκφυλίζεται πολύ μακριά από το σώμα. Η τελική συνθήκη θα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&-\nu_0\phi^D + \phi_z^D - \mathrm{i}\tau_0\begin{pmatrix} 2\overline{\varphi}_r\phi_r^D + \dfrac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_\theta^D + 2\phi_r^D\cos\left(\theta-\alpha\right) - \dfrac{2}{r}\phi_\theta^D\sin\left(\theta-\alpha\right) \\ -\overline{\varphi}_{zz}\phi^D + 2k_0\cos(\beta)\phi^D \end{pmatrix} \\
&\qquad = \mathrm{i}\tau_0\left(2\overline{\varphi}_r\phi_r^I + \frac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_\theta^I - \overline{\varphi}_{zz}\phi^I\right), \quad z = d
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Το υδροδυναμικό πρόβλημα της αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος με ένα κατακόρυφο αξονοσυμμετρικό σώμα, θα μπορέσει να λυθεί επακριβώς, μετά τον ακριβή υπολογισμό του δυναμικού φ^D. Το δυναμικό περίθλασης φ^D, ικανοποιεί επίσης την εξίσωση του Laplace, τη συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον πυθμένα, ενώ τα δυναμικά ταχύτητας $\varphi^I + \varphi^D$ ικανοποιούν την απαίτηση της μηδενικής ταχύτητας στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος προσδιορισμού του δυναμικού περίθλασης φ^D βασίζεται στην ανάλυσή του σε σειρά διαταραχών ως προς την αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος τ. Αν όμως η ανάλυση του δυναμικού περίθλασης φ^D βασιστεί στην ανάλυσή του σε σειρά διαταραχών ως προς την αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος τ_0, αυτό διευκολύνει και για τον υπολογισμό της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης που θα ακολουθήσει στη συνέχεια. Κατά συνέπεια λαμβάνοντας μόνο τον μη γραμμικό όρο το δυναμικό ταχυτήτων φ^D γράφεται ως εξής:

$$\varphi^D = \varphi_0^D + \mathrm{i}\tau_0\varphi_1^D \tag{5.1.11}$$

Με την εισαγωγή της Εξ. (5.1.11) στην Εξ. (5.1.10), αμελώντας τους μη γραμμικούς όρους $O(\tau^2)$ και διατηρώντας τους όρους $O(\tau^0)$ και $O(\tau^1)$ και τέλος εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης ως προς την αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος λαμβάνονται τα εξής:

$$-\nu_0\phi_0^D + \phi_{0z}^D = 0, \quad z = d \tag{5.1.12}$$

$$-\nu_0\phi_1^D + \phi_{1z}^D = 2\overline{\varphi}_r\phi_r^I + \frac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_\theta^I - \overline{\varphi}_{zz}\phi^I$$

$$+2\overline{\varphi}_r\phi_{0r}^D + \frac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_{0\theta}^D + 2\phi_{0r}^D\cos\left(\theta-\alpha\right) - \frac{2}{r}\phi_{0\theta}^D\sin\left(\theta-\alpha\right) \tag{5.1.13}$$

$$-2ik_0\cos(\beta-a)\varphi_0^D - \overline{\varphi}_{zz}\phi_0^D, \quad z = d$$

Επιπλέον, τα δυναμικά φ_0^D και φ_1^D πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace και τη συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον πυθμένα για z=0. Αφού λοιπόν τα φ_0^D και φ_1^D ικανοποιούν την ομογενή συνθήκη (Εξ (5.1.12)) και την μη ομογενή (Εξ. (5.1.13)) συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια αντίστοιχα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το φ_0^D ικανοποιεί την μη ομογενή συνθήκη στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος, ενώ το φ_1^D ικανοποιεί την ομογενή. Οπότε τα δυναμικά περίθλασης φ_0^D και φ_1^D μπορούν να παραχθούν από την επίλυση των παρακάτω συστημάτων:

$$\nabla^2\phi_0^D = 0\text{, στο πεδίο ροής} \tag{5.1.14}$$

$$-\nu\phi_0^D + \phi_{0z}^D = 0, \qquad z = d \tag{5.1.15}$$

$$\varphi_{0z}^{D} = 0, \qquad z = 0 \tag{5.1.16}$$

$$\phi_{0r}^{D} = -\phi_{r}^{I}, \quad r = b, \quad 0 \le z \le d \tag{5.1.17}$$

$$\nabla^2 \phi_1^D = 0 \text{, στο πεδίο ροής} \tag{5.1.18}$$

$$\begin{aligned} -\nu\phi_1^D + \phi_{1z}^D &= 2\overline{\varphi}_r\phi_r^I + \frac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_\theta^I - \overline{\varphi}_{zz}\phi^I + 2\overline{\varphi}_r\phi_{0r}^D + \frac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_{0\theta}^D \\ &+2\phi_{0r}^D\cos(\theta-\alpha) - \frac{2}{r}\phi_{0\theta}^D\sin(\theta-\alpha) - \overline{\varphi}_{zz}\phi_0^D, \qquad z = d \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

$$\varphi_{1z}^{D} = 0, \qquad z = 0 \tag{5.1.20}$$

$$\phi_{1r}^{D} = 0, \qquad 0 \le z \le d \tag{5.1.21}$$

όπου το b συμβολίζει την ακτίνα του κυλίνδρου. Είναι προφανές ότι τα παραπάνω συστήματα των Εξ. (5.1.14)-(5.1.17) και (5.1.18)-(5.1.21) θα πρέπει να επιλυθούν ξεχωριστά. Είναι επίσης φανερό ότι υπολογίζοντας πρώτα τον όρο του φ_0^D, σε δεύτερο στάδιο θα αντικατασταθεί στο σύστημα των εξισώσεων για την παραγωγή του δυναμικού της διαταραχής του κυματισμού από το σώμα (Εξ. (5.1.18)-(5.1.21)). Αυτό βέβαια μπορεί να γίνει εάν γνωρίζουμε και την έκφραση του δυναμικού φ^I και της διαταραχής από το ρεύμα $\overline{\phi}$. Το δυναμικό φ^I δίνεται από την Εξ. (5.1.7) η οποία σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων τροποποιείται στην

$$\phi^I = -\mathrm{i}\frac{H}{2}\omega_0\frac{\cosh(k_0 z)}{\nu_0\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^m \mathrm{J}_m(k_0 r)e^{\mathrm{i}m\theta}e^{-\mathrm{i}m\beta} \tag{5.1.22}$$

Για τον υπολογισμό του δυναμικού της μόνιμης ροής, που αποκαθίσταται κατά την αλληλεπίδραση ομοιόμορφου ρεύματος με κατακόρυφο αξονοσυμμετρικό σώμα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Κεφάλαιο 4.2. Ειδικά για την περίπτωση κατακόρυφου ομοιόμορφου κυλίνδρου, πακτωμένου στον πυθμένα της θάλασσας, που διαπερνά την ελεύθερη επιφάνεια, το δυναμικό της μόνιμης ροής δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{\phi} = \frac{b^2}{r}\cos(\theta-\alpha) = \frac{1}{2}\frac{b^2}{r}\left(e^{\mathrm{i}(\theta-\alpha)} + e^{-\mathrm{i}(\theta-\alpha)}\right) \tag{5.1.23}$$

Αναλύοντας περαιτέρω τις Εξ. (5.1.14)-(5.1.17) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το φ_0^D μπορεί να επιλυθεί από ένα σύστημα το οποίο περιγράφει το πρόβλημα περίθλασης γύρω από έναν κύλινδρο χωρίς την παρουσία ρεύματος. Κατά συνέπεια, η γενική έκφραση που θα ικανοποιεί τις Εξ. (5.1.14)-(5.1.16) και την απαίτηση για λύση φραγμένη στο άπειρο θα γράφεται ως εξής:

$$\varphi_0^D = -\mathrm{i}\omega_0 \frac{H}{2} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \sum_{j=0}^{\infty} F_{mj} \frac{\mathrm{K}_m(a_j r)}{\mathrm{K}_m(a_j b)} Z_j(z) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.1.24}$$

όπου a_j είναι οι λύσεις της τραπεζοειδούς εξίσωσης

$$\nu_0 + a_j \tan\left(a_j d\right) = 0 \tag{5.1.25}$$

η οποία έχει μοναδική φανταστική λύση την $-ia_0$ και άπειρες πραγματικές για j=1,2,… Οι αντίστοιχες ορθογωνικές ιδιοσυναρτήσεις $Z_j(z)$ δίνονται παρακάτω.

$$Z_j(z) = N_j^{-1/2} \cos\left(a_j z\right), \quad N_j = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin\left(2a_j d\right)}{2a_j d}\right) \tag{5.1.26}$$

Ειδικά για την φανταστική λύση, οι ιδιοσυναρτήσεις μετασχηματίζονται στη μορφή

$$Z_0(z) = N_0^{-1/2} \cosh\left(a_0 z\right), \quad N_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sinh\left(2a_0 d\right)}{2a_0 d}\right) \tag{5.1.27}$$

Οι άγνωστοι συντελεστές Fourier στην Εξ. (5.1.24) μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από την Εξ (5.1.17) χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνικότητας των κατακόρυφων ιδιοσυναρτήσεων $Z_j(z)$.

$$F_{mj} = -\frac{k_0 d}{a_j d} \frac{1}{\nu_0 d \cos(k_0 d)} J'_m\left(k_0 b\right) \frac{\mathrm{K}_m(a_j b)}{\mathrm{K}'_m(a_j b)} e^{-\mathrm{i}m\beta} W_j \tag{5.1.28}$$

Οι σταθεροί συντελεστές W_j θα δίνονται από την ακόλουθη παράσταση:

$$W_j = N_j^{-1/2} \frac{a_j d \cosh\left(k_0 d\right) \sin\left(a_j d\right) + k_0 d \sinh\left(k_0 d\right) \cos\left(a_j d\right)}{\left(k_0 d\right)^2 + \left(a_j d\right)^2} \tag{5.1.29}$$

5.1.3. Επίλυση του δυναμικού της διαταραχής φ_1^D

5.1.3.1. Μετασχηματισμός των μη ομογενών όρων σε σειρές.

Για να επιλυθεί επακριβώς το υδροδυναμικό πρόβλημα της αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος, θα πρέπει όπως είναι λογικό, να βρεθεί μια έκφραση για το δυναμικό της διαταραχής το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος των Εξ. (5.1.18)-(5.1.21). Αυτό είναι και το πιο δύσκολο κομμάτι ως προς την επίλυσή του, γιατί περιλαμβάνει τον μη ομογενή όρο στη συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας. Ο συζευγμένος μη ομογενής όρος μπορεί να θεωρηθεί ως μια διανομή πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια η οποία εκτείνεται ως το άπειρο και προκαλείται από το steady state δυναμικό $\overline{\phi}$, το δυναμικό πρόσπτωσης του κυματισμού φ^I και το δυναμικό περίθλασης φ_0^D. Από την ανάλυση που έχει γίνει στις παραπάνω παραγράφους, όλοι οι προηγούμενα αναφερόμενοι όροι είναι γνωστοί. Για να διευκολύνουμε την διαδικασία της ακριβούς επίλυσης-έκφρασης του όρου φ_1^D, ο μη ομογενής όρος στην Εξ. (5.1.19) μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια πιο απλή έκφραση, γράφοντας τα δυναμικά υπό μορφή σειρών (ανάλογων προς τις εξισώσεις (5.1.22) και (5.1.24)). Οπότε το δυναμικό του μόνιμου πεδίου ροής $\overline{\phi}$ (Εξ. (5.1.23)) μπορεί να γραφεί

$$\overline{\phi} = \frac{1}{2}\frac{b^2}{r}\left(e^{-\mathrm{i}\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{\mathrm{i}m\theta} + e^{\mathrm{i}\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m e^{\mathrm{i}m\theta} \right) \tag{5.1.30}$$

όπου f_1=1 και $f_{m,m\neq 1}$=0 και g_{-1}=1 και $g_{m,m\neq -1}$=0. Επίσης χρησιμοποιώντας τον γενικό κανόνα των σειρών (Chau and Taylor, 1992), που περιγράφεται από την Εξ (5.1.31), οι διπλές σειρές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της Εξ. (5.1.19) αφού εισαχθούν σ' αυτή οι Εξ. (5.1.22), (5.1.24) και (5.1.30), μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m e^{\mathrm{i}m\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{\mathrm{i}n\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m-n} S_n \right\} e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.1.31}$$

Μετά από εκτενείς μετασχηματισμούς η οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας Εξ. (5.1.19) τροποποιείται στην ακόλουθη:

$$-\nu\varphi_1^D + \varphi_{1z}^D = \tilde{q}_m(r,\theta) = -\mathrm{i}\omega_0 \frac{H}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m q_m(r) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.1.32}$$

Όπου η $q_m(r)$ είναι μια αρκετά εκτενής αδιάστατη παράσταση η οποία περιγράφει την ακτινική μεταβολή της ενεργούς διανομής της πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια. Η λεπτομερής αναγραφή της αποφεύγεται λόγω του μεγέθους της.

5.1.3.2. Ημιαναλυτική διατύπωση του δυναμικού της διαταραχής φ_1^D

Η ανάπτυξη που παρουσιάζεται στη συνέχεια, βρίσκεται σε στενή συνάφεια με τις παρουσιάσεις στις εργασίες Chatjigeorgiou et al. 2006, 2007a, 2007b.

Μία γενική έκφραση η οποία θα ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στον πυθμένα και την ελεύθερη επιφάνεια (Εξ. (5.1.20) και (5.1.22)) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\phi_1^D = \frac{\cosh(\lambda z)}{\nu \cosh(\lambda d)} \tilde{q}_m(r,\theta) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} R_{mj}(r) Z_j(z) e^{im\theta} \tag{5.1.33}$$

όπου

$$\lambda \tanh(\lambda d) = 2\nu \tag{5.1.34}$$

Επιπλέον, η Εξ. (5.1.33) πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace (Εξ. (5.1.18)), η οποία σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από την

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^D}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1^D}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi_1^D}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1^D}{\partial z^2} = 0 \tag{5.1.35}$$

Εισάγοντας την Εξ. (5.1.33) στην (5.1.35), εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης ως προς *m* και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνικότητας των κατακόρυφων ιδιοσυναρτήσεων *Zj*(*z*) η Εξ. (5.1.35) απλοποιείται στην παρακάτω:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 R_{mj}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_{mj}(r)}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + a_j^2\right) R_{mj}(r) = \\ &- B_j \left(\frac{d^2 \tilde{q}_m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{q}_m(r)}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} - \lambda^2\right) \tilde{q}_m(r) \right) \end{aligned} \tag{5.1.36}$$

όπου

$$B_j = \frac{1}{d}\int_0^d \frac{\cosh(\lambda z)}{\nu \cosh(\lambda d)} Z_j(z) dz \tag{5.1.37}$$

θέτοντας $\Psi_{mj}(r) = R_{mj}(r) + B_j \tilde{q}_m(r)$ και αναπτύσσοντας το ολοκλήρωμα B_j, η Εξ. (5.1.36) καταλήγει στην ακόλουθη:

$$\frac{d^2 \Psi_{mj}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_{mj}(r)}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + a_j^2\right) \Psi_{mj}(r) = -\frac{1}{d} Z_j(d) \tilde{q}_m(r) \tag{5.1.38}$$

Η επίλυση της Εξ. (5.1.38) απαιτεί την επίλυση του συσχετιζόμενου προβλήματος Sturm-Liouville. Κατά συνέπεια, αναζητούμε μια λύση της μορφής

$$\Psi_{mj}(r) = \frac{Z_j(d)}{d}\int_b^\infty \xi \tilde{q}_m(\xi) G_{mj}(r;\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{5.1.39}$$

όπου $G_{mj}(r;\xi)$ είναι η μονοδιάστατη συνάρτηση του Green.

5.1.3.3. Κατασκευή της συνάρτησης Green

Η πρώτη απαίτηση για τη συνάρτηση του Green, είναι ότι θα πρέπει να ικανοποιεί το ομογενές πρόβλημα.

$$\left(rG'_{mj}\right)' - \left(\frac{m^2}{r} + a_j^2 r\right) G_{mj} = 0 \tag{5.1.40}$$

Η G_{mj} θα πρέπει να είναι συνεχής στο $r=\xi$ και η G'_{mj} θα πρέπει να είναι ασυνεχής στο $r=\xi$, με ασυνέχεια

$$G'_{mj}(r;r+) - G'_{mj}(r;r-) = -\frac{1}{r} \tag{5.1.41}$$

Ο τόνος στην Εξ. (5.1.40) συμβολίζει παραγώγιση ως προς την ανεξάρτητη συντεταγμένη r. Τέλος η G_{mj} θα πρέπει να ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες με την $\Psi_{mj}(r)$. Σαν αποτέλεσμα τώρα, η G'_{mj} θα πρέπει να είναι ίση με το μηδέν για $r=b$ και θα πρέπει να είναι φραγμένη στο άπειρο.

Υπενθυμίζεται ότι η Εξ. (5.1.40) είναι η διαφορική εξίσωση ορισμού της τροποποιημένης συνάρτησης Bessel. Οι ιδιότητες των συναρτήσεων Green (Hildebrand, 1962, Dettman, 1988) και οι οριακές συνθήκες στο $r=b$, αλλά και στο άπειρο αντικαθίστανται στην Εξ. (5.1.40) και δίνουν

$$G_{mj}(r;\xi) = \mathrm{K}_m(a_j\xi)\left[\mathrm{I}_m(a_j r) - \frac{\mathrm{I}'_m(a_j b)}{\mathrm{K}'_m(a_j b)}\mathrm{K}_m(a_j r)\right], \quad r < \xi \tag{5.1.42}$$

$$G_{mj}(r;\xi) = \mathrm{K}_m(a_j r)\left[\mathrm{I}_m(a_j \xi) - \frac{\mathrm{I}'_m(a_j b)}{\mathrm{K}'_m(a_j b)}\mathrm{K}_m(a_j \xi)\right], \quad r > \xi \tag{5.1.43}$$

Είναι προφανές ότι η παραπάνω μορφή της συνάρτησης Green, ικανοποιεί και την ιδιότητα της συμμετρίας $G_{mj}(r;\xi) = G_{mj}(\xi;r)$.

Κάνοντας χρήση της ανάλυσης που αναφέρθηκε στο παρόν κεφάλαιο, καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση για το δυναμικό περίθλασης φ_1^D:

$$\phi_1^D = -i\omega_0 \frac{H}{2} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(z) Z_j(d) \int_1^{\infty} Q_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\xi}{b}\right) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.1.44}$$

$$Q_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) = \frac{b^2}{d^2}\frac{\xi}{b} q_m\left(\frac{\xi}{b}\right) G_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) \tag{5.1.45}$$

5.1.4. Αριθμητική επίλυση

Αν και υποτέθηκε ότι το δυναμικό της διαταραχής πρέπει να είναι φραγμένο στο άπειρο, η Εξ. (5.1.44) συμπεριφέρεται διαφορετικά. Αυτό συμβαίνει γιατί ο όρος $2\nabla\varphi_0^D \cdot \nabla(r\cos(\theta-\alpha))$ που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της Εξ. (5.1.19), είναι κανονικά ο $2\varphi_{0r}^D \cos(\theta-\alpha) - 2/r\varphi_{0\theta}^D \sin(\theta-\alpha)$. Στην πραγματικότητα , το φ_1^D αυξάνεται σταδιακά, όσο αυξάνεται και το r λόγω του πρώτου όρου της τελευταίας σχέσης. Για να γίνει κατανοητό αυτό, πρέπει να αναφερθούμε και πάλι στη Εξ. (5.1.24) η οποία μας παρέχει το μηδενικής τάξης δυναμικό περίθλασης, καθώς και στην τελική μορφή του φ_1^D. Από αυτά φαίνεται πώς το δυναμικό της διαταραχής, περιλαμβάνει και έναν όρο ανάλογο του $\rho \mathrm{K}'_m(a_j b\rho)/\mathrm{K}_m(a_j b)$ όπου $\rho=\xi/b$. Κάνοντας χρήση των ασυμπτωτικών μορφών των συναρτήσεων Bessel, για μεγάλα ορίσματα (Abramowitz et al. 1970), καταλήγουμε στην έκφραση που ακολουθεί:

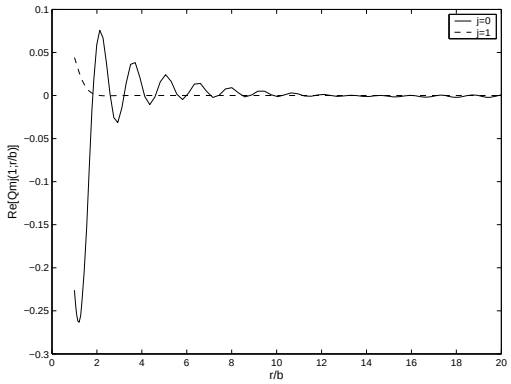
$$\rho \mathrm{K}'_m(a_j b\rho)/\mathrm{K}_m(a_j b) \propto -\sqrt{\rho} e^{-a_j b(\rho-1)} \tag{5.1.46}$$

Αυτός ο όρος τείνει στο μηδέν πολύ γρήγορα, όταν το $a_j b$ είναι πραγματικό. Εντούτοις, για την μιγαδική λύση της εξίσωσης διασποράς, ο όρος $-\mathrm{i}a_0 b$, αυξάνεται τείνοντας στο $\sqrt{\rho}$. Αυτό οφείλεται, στον τρόπο με τον οποίο δόθηκε η έκφραση τη δυναμικού περίθλασης *(Chatzigeorgiou I.K., Mavrakos S.A. and Xiros N.I. 2006)*. Στην πραγματικότητα, η αύξηση του φ_1^D ανάλογα του $\sqrt{\rho}$, μακριά από το σώμα, μπορεί να εξηγηθεί και από την παρουσία του ρεύματος, με την οποία αλλάζει το μήκος κύματος για τους περιθλώμενους κυματισμούς. Κατά συνέπεια, η Εξ. (5.1.11) δίνει σωστή τιμή στο δυναμικό περίθλασης μόνο κοντά στο σώμα, όπου η οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια για το δυναμικό της διαταραχής, προσεγγίζεται από την:

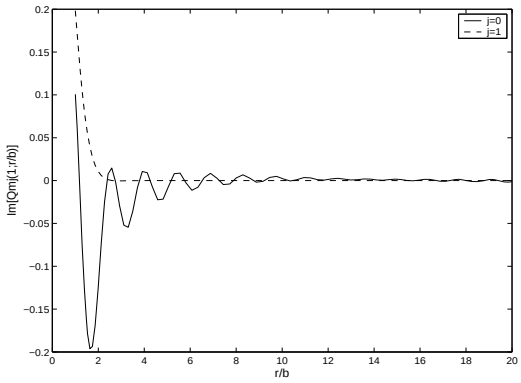
$$-\nu\phi_1^D + \phi_{1z}^D = 2\nabla\bar{\varphi}\cdot\nabla\tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi} = \phi^I + \phi_0^D, \quad r \geq b, \quad z = d \tag{5.1.47}$$

Ο μη ομογενής όρος της Εξ. (5.1.47), δεν δημιουργεί προβλήματα στον υπολογισμό των διαταραχών για το δυναμικό περίθλασης, αφού τείνει στο μηδέν πολύ γρήγορα. Τα Σχήματα 5.1.2-5.1.5, παρουσιάζουν και επαληθεύουν τον παραπάνω ισχυρισμό (Chatjigeorgiou et al., 2006b).. Πράγματι έχει υπολογιστεί η φθίνουσα τάση του όρου Q_{mj} (Εξ. (5.1.45)) για μια μεγάλη απόσταση μακριά από τη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος. Τα αποτελέσματα αυτά έχουν εξαχθεί για την περίπτωση κυλίνδρου με χαρακτηριστικά b/d=1, $k_0 b$=2.0 και Fn=0.05 όπου $Fn = U/\sqrt{gb}$ είναι ο αριθμός Froude. Η γωνία πρόσπτωσης του κύματος είναι β=0°. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται, το πραγματικό (Σχήματα 5.1.2 και 5.1.4) και το φανταστικό (Σχήματα 5.1.3 και 5.1.5) μέρος του ολοκληρώματος Q_{mj} για τη φανταστική $-ia_0$ και την πρώτη πραγματική ρίζα της εξίσωσης διασποράς. Είναι προφανές ότι για την πραγματική ρίζα (και αναλόγως για όλες τις πραγματικές ρίζες) το ολοκλήρωμα της Εξ.

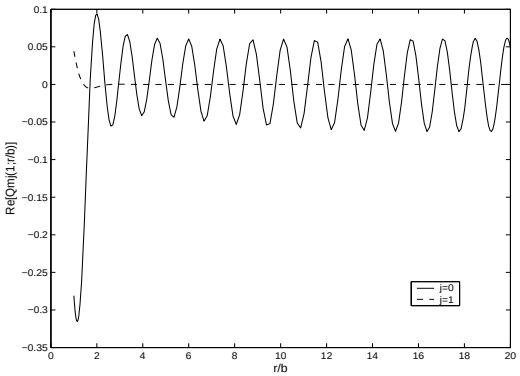
(5.1.44) συγκλίνει αμέσως. Εντούτοις, για τη μιγαδική ρίζα, το ολοκλήρωμα παρουσιάζει μια αυξητική τάση, που όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, είναι της τάξεως του $\sqrt{\rho}$. Απ' την άλλη πλευρά, όταν η συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας για το φ_1^D περιγράφεται από την Εξ. (5.1.47), το ολοκλήρωμα τείνει γρήγορα στο μηδέν και χρειάζονται πολύ λίγα σημεία ολοκλήρωσης (κάνοντας χρήση της ολοκληρωτικής μεθόδου των Gauss-Legendre).



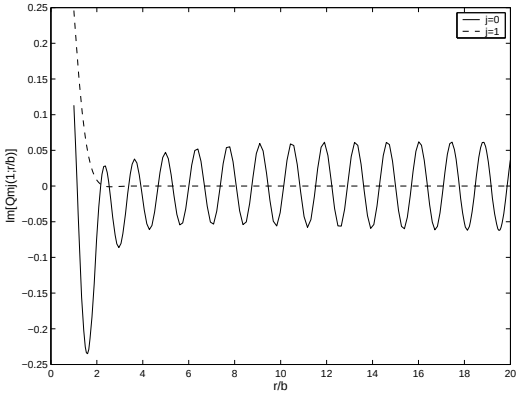
Σχήμα 5.1. 2: Πραγματικό μέρος του ολοκληρώματος Q_{mj} (Εξ. (5.1.45)) χωρίς τον όρο
$2\varphi_{0r}^D \cos(\theta-\alpha) - 2/r\,\varphi_{0\theta}^D \sin(\theta-\alpha)$.
(b=d, k_0b=2.0, Fn=0.05, β=0°, m=0).



Σχήμα 5.1. 3: Φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος Q_{mj} (Εξ. (5.1.45)) χωρίς τον όρο
$2\varphi_{0r}^D \cos(\theta-\alpha) - 2/r\,\varphi_{0\theta}^D \sin(\theta-\alpha)$.
(b=d, k_0b=2.0, Fn=0.05, β=0°, m=0).



Σχήμα 5.1. 4: Πραγματικό μέρος του ολοκληρώματος Q_{mj} (Εξ. (5.1.45)), (b=d, k_0b=2.0, Fn=0.05, β=0°, m=0).



Σχήμα 5.1. 5: Φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος Q_{mj} (Εξ. (5.1.45)), (b=d, k_0b=2.0, Fn=0.05, β=0°, m=0).

5.1.5. Πρωτοτάξιες δυνάμεις στον κύλινδρο

Η γραμμική υδροδυναμική πίεση δίνεται στη γενικότητα της από τον παρακάτω τύπο

$$p = -\rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{5.1.48}$$

με ρ_w την πυκνότητα του νερού και Φ το συνολικό δυναμικό που μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\Phi = \mathrm{Re}\left\{\left(\varphi^I + \varphi_0^D + \mathrm{i}\,\tau\varphi_1^D\right)e^{-\mathrm{i}\,\omega t}\right\}$$

$$\phi_0 = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{b^2}{r} + r\right)e^{\mathrm{i}(\theta-\alpha)}\right\} = \left(\frac{b^2}{r} + r\right)\cos(\theta - a) \tag{5.1.49}$$

Τελικά η οριζόντια δύναμη πρώτης τάξης σε κύλινδρο μπορεί στην γενική της μορφή να γραφεί ως εξής (Malenica et al., 1995):

$$F_x = \rho \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U\nabla\phi_0\nabla\Phi\right)n_x \mathrm{d}S \tag{5.1.50}$$

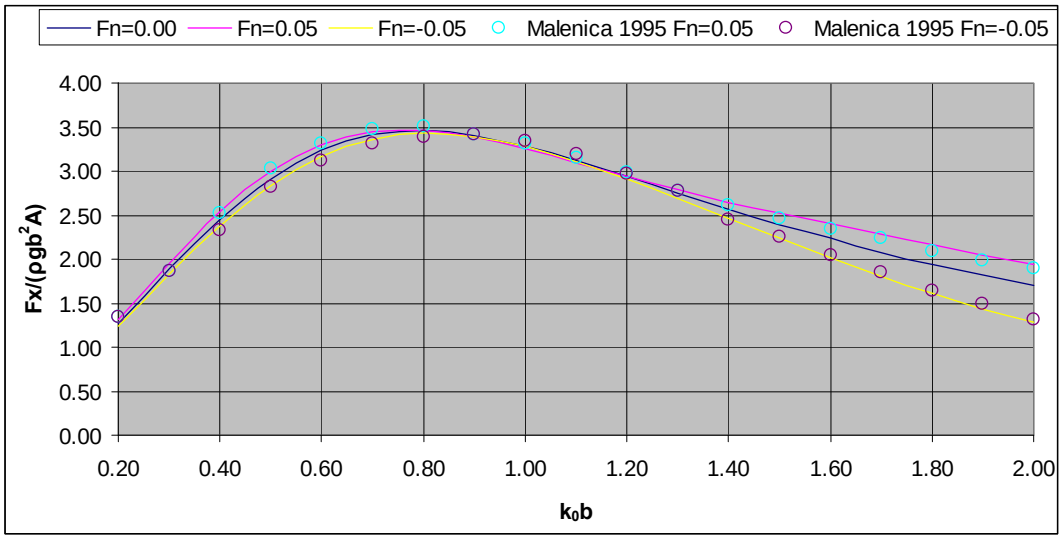
Η Εξ. (5.1.50) μας δίνει σε αδιάστατη μορφή την ακριβή έκφραση της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης σε κύλινδρο:

$$\begin{aligned}
\frac{F_x}{\rho_w g b^2 H/2} = &-\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{k_0 b}2\pi i \tanh(k_0 d)J_1(k_0 b)e^{-i\beta} \\
&-\frac{\omega}{\omega_0}\frac{v_0 d}{a_j b}2\pi i\sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}N_j^{-1/2}\sin(a_j d) \\
&-i\frac{\omega}{\omega_0}\frac{v_0 d}{a_j b}\tau 2\pi i\sum_{j=0}^{\infty} z_j(d)N_j^{-1/2}\sin(a_j d)\int_1^{\infty} Q_{1J}(b) \\
&+4i\pi\tau_0\frac{k_0 d}{(k_0 b)^2 v_0 d}\tanh(k_0 d)J_2(k_0 b)\cos a e^{-2i\beta} \\
&+4i\pi\tau_0\left(\frac{k_0 d}{k_0 b}\right)^2\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j}N_j^{-1/2}\frac{\sin(a_j d)}{a_j d}\cos a \\
&-4\pi\tau_0\tau\left(\frac{k_0 d}{k_0 b}\right)^2\sum_{j=0}^{\infty} z_j(d)N_j^{-1/2}\frac{\sin(a_j d)}{a_j d}\cos a\int_1^{\infty} Q_{2J}(b)
\end{aligned} \tag{5.1.51}$$

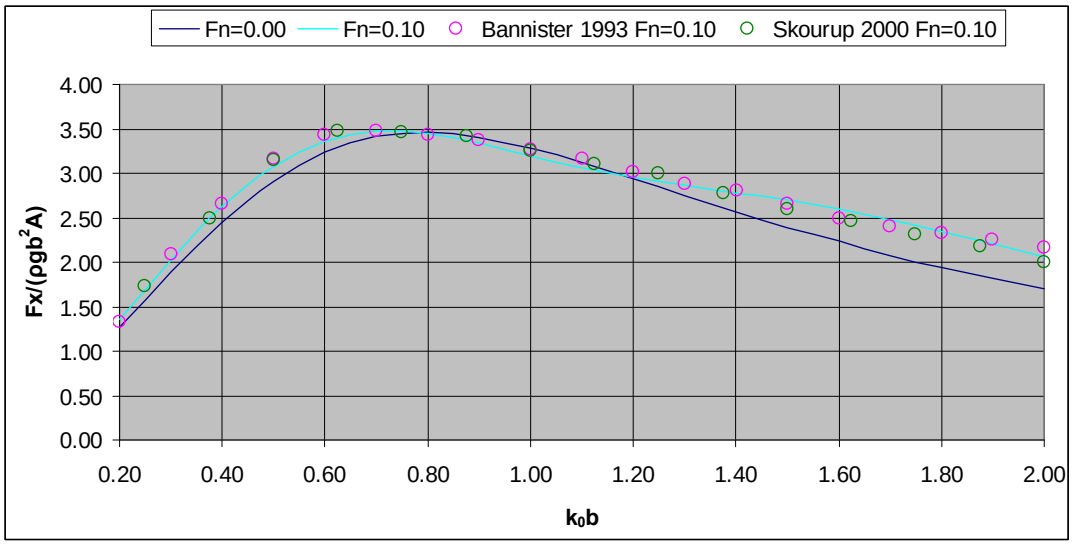
Στην Εξ. (5.1.50) n_x είναι η μοναδιαία x-συνιστώσα η οποία έχει φορά προς το σώμα.

Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται αποτελέσματα για τις πρωτοτάξιες δυνάμεις διέγερσης που ασκούνται σε έναν πακτωμένο στον πυθμένα, κύλινδρο. Οι υπολογισμοί έγιναν με χρήση 5 σταθερών Fourier και 10 ιδιοσυναρτήσεων, θεωρώντας ότι οι

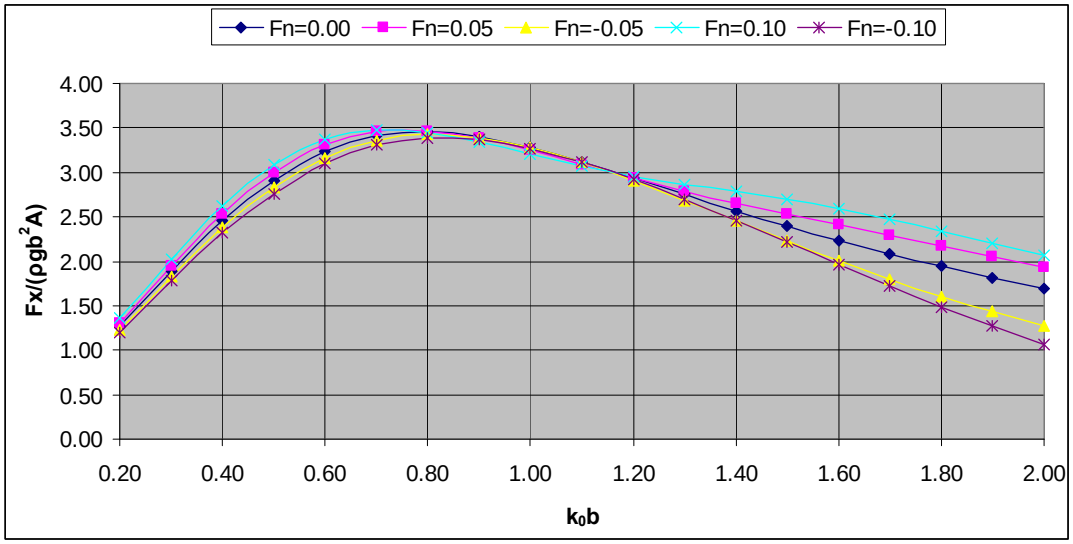
προσπίπτοντες κυματισμοί προσέκρουαν στην κατασκευή υπό γωνία *0°*. Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι η παρουσία του ρεύματος μικρής ταχύτητας αλλάζει τη συνολική υδροδυναμική δύναμη που ασκείται πάνω στον κύλινδρο. Τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.1.6 έχουν συγκριθεί με αυτά των *Malenica, S. et al., (1995), Scourup, J. et al.,(2000)* και *Bannister, G., (1993),* με πολύ καλή συμφωνία.



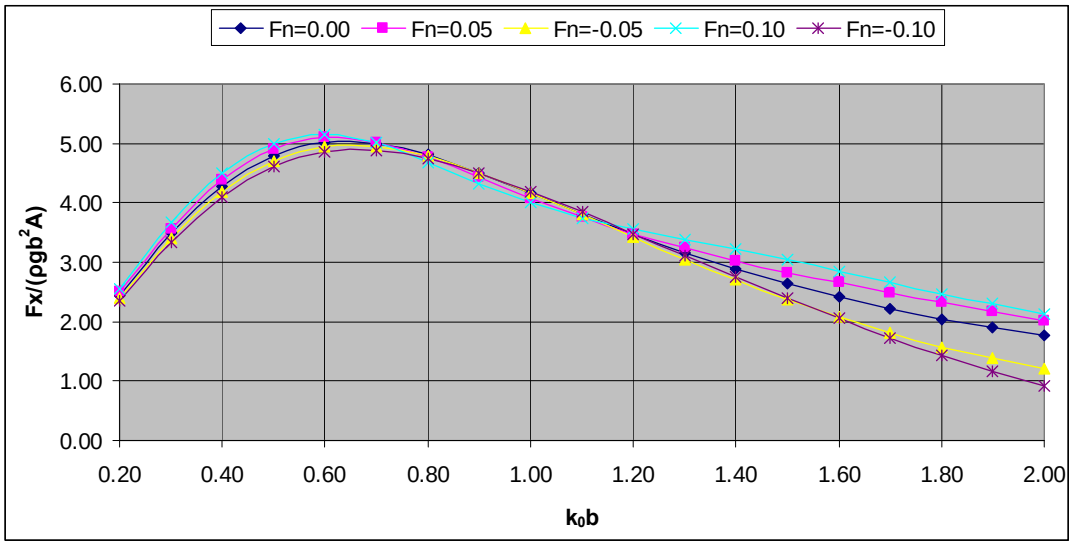
Σχήμα 5.1. 6: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν πακτωμένο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *d/b=1*, *β*=0°, παρουσία ρεύματος και κύματος.



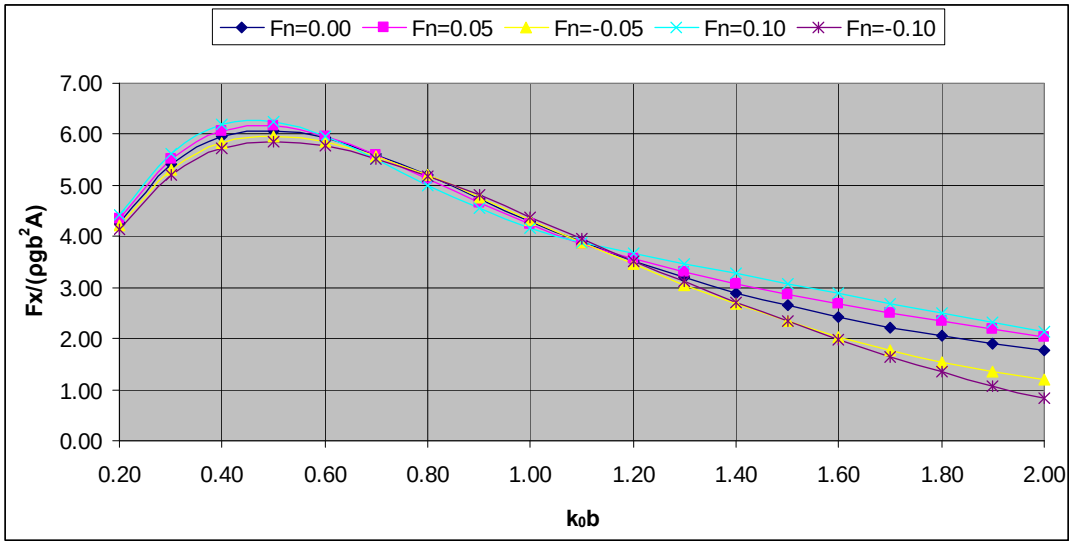
Σχήμα 5.1. 7: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν πακτωμένο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *d/b=1*, *β*=0°, παρουσία ρεύματος και κύματος.



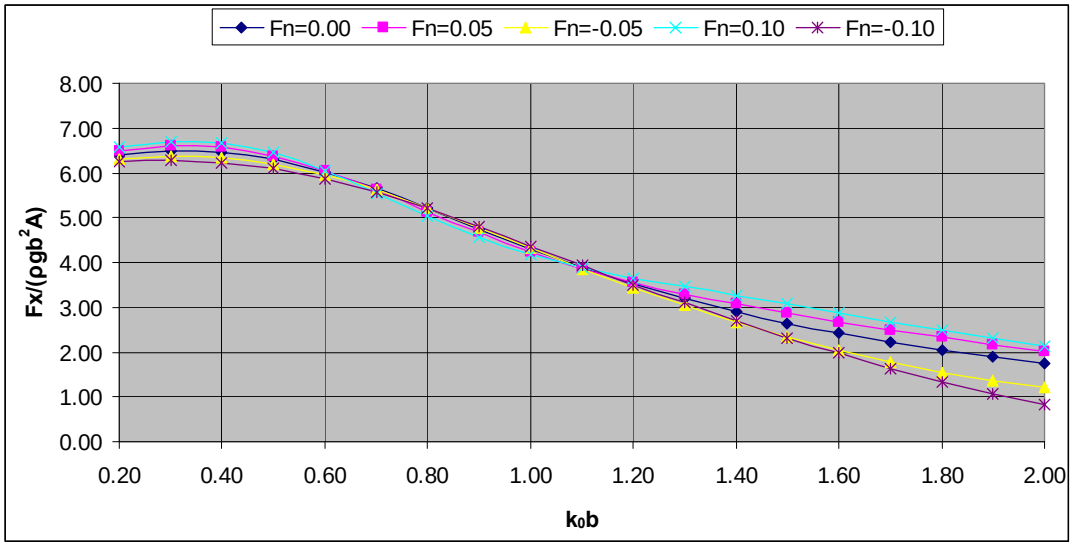
Σχήμα 5.1. 8: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης σε έναν πακτωμένο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *d/b=1*, *β*=0°, Fn=-0.10,-0.05,0.05,0.10.



Σχήμα 5.1. 9: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης σε έναν πακτωμένο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *d/b=2*, *β*=0°, Fn=-0.10,-0.05,0.05,0.10.



Σχήμα 5.1. 10: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν πακτωμένο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *d/b=4*, *β*=0°, Fn=-0.10,-0.05,0.05,0.10.



Σχήμα 5.1. 11: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν πακτωμένο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *d/b=15*, *β*=0°, Fn=-0.10,-0.05,0.05,0.10.

5.2. Αλληλεπίδραση κύματος ρεύματος για την περίπτωση πακτωμένου κυλίνδρου. Θεωρία δυναμικού (εναλλακτική διατύπωση)

5.2.1. Γενική Περιγραφή του Προβλήματος

Η ανάλυση που ακολουθεί θεωρεί ότι η ταχύτητα του ρεύματος U είναι αρκετά μικρή ώστε ο αριθμός Strouhal $\tau_0=U\omega_0/g<<1$. Στην περίπτωση αυτή μέσω της συχνότητας συνάντησης

$$\omega = \omega_0 + Uk_0 \cos\gamma \text{ , } \gamma=\beta-\alpha \tag{5.2.1}$$

μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι $\tau\approx\tau_0$. Επιπρόσθετα, για τον μηδενικό όρο της διαταραχής φ_0^D ισχύει η οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια στην ακόλουθη μορφή (βλέπε και σχέση 5.1.15)

$$\left\{\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi_0^D = 0\right\}_{z=d} \tag{5.2.2}$$

ενώ για τον όρο της διαταραχής πρώτης τάξης η αντίστοιχη οριακή συνθήκη σε κυλινδρικές συντεταγμένες γίνεται (βλέπε και σχέση 5.1.19)

$$\begin{aligned}\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_1^D &= \left(-2ik_0\cos\gamma + 2\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi_0^D \\ &+\left(2\bar{\phi}_r\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right)\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

από την οποία έχει παραληφθεί ο όρος $-\bar{\phi}_{zz}\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right)$ δεδομένου ότι η διαταραχή της μόνιμης ροής λόγω του ρεύματος από το σώμα $\bar{\phi}$ είναι ανεξάρτητη του z (βλέπε και σχέση 5.1.23)

Επίσης θα πρέπει να ισχύουν

$$\frac{\partial\varphi_0^D}{\partial r} = -\frac{\partial\varphi^I}{\partial r} \tag{5.2.4}$$

και

$$\frac{\partial\varphi_1^D}{\partial r} = 0 \tag{5.2.5}$$

στο όριο $r=b$ ώστε να ικανοποιείται η κινηματική συνθήκη πάνω στο σώμα. Προφανώς θα πρέπει να ικανοποιείται και από τα δύο δυναμικά φ_0^D και φ_1^D η οριακή συνθήκη στον οριζόντιο πυθμένα.

Το δυναμικό ϕ^{I} του αδιατάρακτου απλού αρμονικού κυματισμού, εκφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες δόθηκε από τις σχέσεις (2.1.5) και (5.1.8) και δεν θα επαναληφθεί εδώ. Επίσης το δυναμικό περίθλασης φ_0^D, μηδενικής τάξης, δηλαδή για την περίπτωση της απουσίας ρεύματος, είναι γνωστό από τη λύση των MacCamy and Fuchs (1954), έχει δοθεί και μ ετη σχέση (2.1.6) και (5.1.24), οπότε δεν θα επαναληφθεί εδώ.

5.2.2. Επίλυση του Προβλήματος Πρώτης Τάξης για τον Υπολογισμό του Δυναμικού φ_1^D

Για τον υπολογισμό του δυναμικού φ_1^D απαιτείται η γνώση του συνολικού δυναμικού $\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right)$ καθώς και του δυναμικού περίθλασης μηδενικής τάξης φ_0^D. Αυτά θα δίνονται αντίστοιχα από την Εξ. (2.1.9) και την Εξ. (2.1.6), οπότε:

$$\varphi^I + \varphi_0^D = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \left\{ J_m(k_0 r) - \frac{J'_m(k_0 b)}{H'_m(k_0 b)} H_m(k_0 r) \right\} e^{im\theta} \tag{5.2.6}$$

Επανερχόμενοι στην οριακή συνθήκη (5.2.3) της ελεύθερης επιφάνειας παρατηρείται ότι ο δεύτερος όρος του δεξιού μέρους

$$\left(2\bar{\phi}_r \frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right)$$

τείνει πολύ μακριά από το σώμα στο μηδέν, λαμβάνοντας υπόψη την οριακή συνθήκη στο άπειρο για το δυναμικό φ_0^D. Το ίδιο όμως δεν ισχύει και για τον πρώτο όρο

$$\left(-2ik_0\cos\gamma + 2\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\varphi_0^D$$

ο οποίος μεταβάλλεται ασυμπτωτικά με το $r^{1/2}$ (Bannister, 1993). Κατά συνέπεια το θεώρημα του Green δεν μπορεί να εφαρμοστεί λαμβάνοντας υπόψη τον πλήρη μη ομογενή όρο.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος το δυναμικό διαταραχής πρώτης τάξης φ_1^D διασπάται ως εξής (Emmerhoff et al. 1992):

$$\varphi_1^D = \Psi + \psi \tag{5.2.7}$$

Για την πλήρη ικανοποίηση της οριακής συνθήκης της ελεύθερης επιφάνειας υιοθετούνται τα παρακάτω:

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi = \left(-2ik_0\cos\gamma + 2\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\varphi_0^D \tag{5.2.8}$$

και

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = \left(2\bar{\phi}_r \frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right) \tag{5.2.9}$$

Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η διαταραχή του ρεύματος θα δίνεται από την εξίσωση του δίπολου

$$\bar{\phi} = \frac{b^2}{r}\cos(\theta - \alpha) \tag{5.2.10}$$

όπου α η γωνία πρόσπτωσης του ρεύματος (Σχήμα 4.1). Επίσης θα πρέπει και τα δύο δυναμικά ψ και Ψ να ικανοποιούν την κινηματική συνθήκη μηδενικής ταχύτητας πάνω στο σώμα

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \tag{5.2.11}$$

και

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \tag{5.2.12}$$

για $r=b$ και $0 \leq z \leq d$.

5.2.3. Υπολογισμός του δυναμικού του μακρινού πεδίου (far field) Ψ

Το δυναμικό far field θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας που δίνεται με τη μορφή της Εξ. (5.2.8) όπου το δυναμικό περίθλασης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\varphi_0^D = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\Upsilon(r,\theta) \tag{5.2.13}$$

Που για μεγάλα βάθη νερού οι ιδιοσυναρτήσεις $\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}$ μπορούν να αντικατασταθούν από τις αντίστοιχες $e^{\nu_0 z}$, όπου $\nu_0=k_0$, δηλαδή

$$\varphi_0^D = -i\frac{gA}{\omega_0}e^{\nu_0 z}\Upsilon(r,\theta) \tag{5.2.14}$$

Επίσης ισχύει

$$\Upsilon(r,\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(r)e^{im\theta} \tag{5.2.15}$$

όπου

$$F_m(r) = -i^m \frac{J'_m(k_0 b)}{H'_m(k_0 b)} H_m(k_0 r) \tag{5.2.16}$$

και

$$F'_m(r) = -i^m \frac{J'_m(k_0 b)}{H'_m(k_0 b)} H'_m(k_0 r) \tag{5.2.17}$$

$$F''_m(r) = -i^m \frac{J'_m(k_0 b)}{H'_m(k_0 b)} H''_m(k_0 r) \tag{5.2.18}$$

$$F'''_m(r) = -i^m \frac{J'_m(k_0 b)}{H'_m(k_0 b)} H'''_m(k_0 r) \tag{5.2.19}$$

Επίσης θα πρέπει το δυναμικό Ψ πέραν της συνθήκης της ελεύθερης επιφάνειας, Εξ. (5.2.8), οφείλει να ικανοποιεί την οριακή συνθήκη επάνω στο σώμα Εξ.(5.2.12)

Προς τούτο θεωρείται ότι το δυναμικό του μακρινού πεδίου Ψ συντίθεται ως εξής (Emmerhoff et al. 1992):

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{5.2.20}$$

για τα οποία ισχύει

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_1 = \left(-2ik_0 \cos\gamma + 2\cos(\theta - \alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta - \alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\varphi_0^D \tag{5.2.21}$$

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_2 = 0 \tag{5.2.22}$$

και

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial r} \tag{5.2.23}$$

στο όριο $r=b$.

Για τον υπολογισμό των ψ_1 και ψ_2 ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

Έστω ότι το δυναμικό ψ_1 γράφεται στο μορφή

$$\psi_1 = L\chi \tag{5.2.24}$$

όπου το L είναι τελεστής που δίνεται από τη σχέση

$$L = -2ik_0 \cos\gamma + 2\cos(\theta - \alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta - \alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{5.2.25}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (2.5.24) στην οριακή συνθήκη (2.5.21) λαμβάνεται

$$\left(-\nu_0+\frac{\partial}{\partial z}\right)L\chi = L\varphi_0^D \Leftrightarrow L\left(-\nu_0+\frac{\partial}{\partial z}\right)\chi = L\varphi_0^D \tag{5.2.26}$$

Κατά συνέπεια το ισοδύναμο δυναμικό του μακρινού πεδίου χ θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$\left(-\nu_0+\frac{\partial}{\partial z}\right)\chi = \varphi_0^D \tag{5.2.27}$$

Η λύση που προτάθηκε για το δυναμικό χ από τους Emmerhoff and Sclavounos (1992) και χρησιμοποιήθηκε και από τους Malenica et al. (1995) είναι η ακόλουθη:

$$\chi = \frac{\partial\varphi_0^D}{\partial\nu_0} \tag{5.2.28}$$

Μετά από εκτενή μαθηματική επεξεργασία αποδεικνύεται ότι το δυναμικό του μακρινού πεδίου $\psi_1 = L\chi$ μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$\psi_1 = \frac{gA}{\omega_0}\left\{\frac{z}{d}e^{\nu_0 z}\sum_{m=-\infty}^{\infty}Q_m^{(1)}(r)e^{im\theta} + e^{\nu_0 z}\sum_{m=-\infty}^{\infty}Q_m^{(2)}(r)e^{im\theta}\right\} \tag{5.2.29a}$$

Ή και ως:

$$\psi_1 = \frac{gA}{\omega_0}\left\{\frac{z}{d}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}Q_m^{(1)}(r)e^{im\theta} + \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}Q_m^{(2)}(r)e^{im\theta}\right\} \tag{5.2.29b}$$

όπου

$$\begin{aligned} Q_m^{(1)}(r) &= -2k_0 d\cos(\gamma)F_m(r) - ie^{i\alpha}k_0 dF'_{m+1}(r) - ie^{-i\alpha}k_0 dF'_{m-1}(r) \\ &-ie^{i\alpha}(m+1)\frac{d}{r}F_{m+1}(r) + ie^{-i\alpha}(m-1)\frac{d}{r}F_{m-1}(r) \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

$$\begin{aligned} Q_m^{(2)}(r) &= -2k_0 r\cos(\gamma)F'_m(r) - ie^{i\alpha}F'_{m+1}(r) - ie^{-i\alpha}k_0 r\,F''_{m+1}(r) \\ &- ie^{-i\alpha}F'_{m-1}(r) - ie^{-i\alpha}k_0 r\,F''_{m-1}(r) - ie^{i\alpha}(m+1)F'_{m+1}(r) \\ &+ ie^{-i\alpha}(m-1)F'_{m-1}(r) \end{aligned} \tag{5.2.31}$$

Η οριζόντια δύναμη διέγερσης λόγω του δυναμικού του μακρινού πεδίου $i\tau_0\psi_1$ θα δίνεται τώρα από τη σχέση

$$F_x = -i\omega\rho \iint_{S_B} i\tau_0 \psi_1 \left(b,\theta,z\right)\cos\theta \, b \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z \tag{5.2.32}$$

Ενδεικτικά αναγράφεται το πλήρες ανάπτυγμα της δύναμης διέγερσης στη διεύθυνση x το οποίο είναι το παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{F_x}{\rho g A b^2} = \frac{\omega}{\omega_0}\tau_0 \pi \frac{1}{\nu_0 b}\Big[&\left(1 - e^{-\nu_0 d}\right)\left(Q_{-1}^{(2)}(b) + Q_1^{(2)}(b)\right) \\ &+ \frac{1}{\nu_0 d}\left(-1 + e^{-\nu_0 d} + \nu_0 h e^{-\nu_0 d}\right)\left(Q_{-1}^{(1)}(b) + Q_1^{(1)}(b)\right)\Big] \end{aligned} \tag{5.2.33}$$

Για τον υπολογισμό τώρα του δυναμικού ψ_2 θα ακολουθεί διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθήθηκε για τον υπολογισμό του δυναμικού μηδενικής τάξης φ_0^D.

Η μορφή του δυναμικού που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στον πυθμένα και την ομογενή οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας για πεπερασμένου βάθους νερό είναι:

$$\psi_2 = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m H_m\left(k_0 r\right)e^{im\theta} \tag{5.2.34}$$

Που για μεγάλα βάθη νερού οι ιδιοσυναρτήσεις $\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}$ μπορούν να αντικατασταθούν από τις αντίστοιχες $e^{\nu_0 z}$, όπου $\nu_0 = k_0$, δηλαδή

$$\psi_2 = -i\frac{gA}{\omega_0}e^{\nu_0 z}\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m H_m\left(\nu_0 r\right)e^{im\theta} \tag{5.2.35}$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογιστεί το D_m.

Για το δυναμικό ψ_2 γνωρίζουμε τα παρακάτω:

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_2 = 0 \tag{5.2.36}$$

και

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial r} \tag{5.2.37}$$

στο όριο $r=b$.

Άρα:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}k_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m H'_m(k_0 b)e^{im\theta} \tag{5.2.38}$$

Από την Εξ. (5.2.29), το δυναμικό ψ_1, άρα και η παράγωγός του είναι γνωστά.

Μετά από εκτενή μαθηματική επεξεργασία, και κάνοντας εφαρμογή της ιδιότητας της ορθογωνικότητας των ιδιοσυναρτήσεων $\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}$, στο διάστημα [*0,d*], προκύπτει η τιμή του D_m, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$D_m = \frac{i}{H'_m(k_0 b)}\left[\begin{array}{l} 2\cos\gamma\{k_0 A F'_m(b) + F'_m(b) + k_0 b F''_m(b)\} + \\ ie^{-ia}k_0 A F'''_{m-1}(b) + ie^{-ia}F''_{m-1}(b) + ie^{-ia}k_0 b F'''_{m-1}(b) + ie^{-ia}F''_{m-1}(b) + \\ ie^{ia}k_0 A F''_{m+1}(b) + ie^{ia}F''_{m+1}(b) + ie^{ia}k_0 b F'''_{m+1}(b) + ie^{ia}F''_{m+1}(b) - \\ ie^{-ia}(m-1)\frac{A}{b}F'_{m-1}(b) - ie^{-ia}(m-1)F''_{m-1}(b) + ie^{-ia}(m-1)\frac{A}{k_0 b^2}F_{m-1}(b) + \\ ie^{ia}(m+1)\frac{A}{b}F'_{m+1}(b) + ie^{ia}(m+1)F''_{m+1}(b) - ie^{ia}(m+1)\frac{A}{k_0 b^2}F_{m+1}(b) \end{array}\right] \tag{5.2.39}$$

με

$$A = \frac{1}{2k_0}\frac{\sinh(2k_0 d) - 2k_0 d\cosh(2k_0 d)}{\sinh(2k_0 d) + 2k_0 d} \tag{5.2.40}$$

Η οριζόντια δύναμη διέγερσης λόγω του δυναμικού του μακρινού πεδίου $i\tau_0\psi_2$ θα δίνεται τώρα από τη σχέση

$$F_x = -i\omega\rho\iint_{S_B} i\tau_0\psi_2\left(b,\theta,z\right)\cos\theta\, b\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \tag{5.2.41}$$

Ενδεικτικά αναγράφεται το πλήρες ανάπτυγμα της δύναμης διέγερσης στη διεύθυνση *x* το οποίο είναι το παρακάτω:

$$\frac{F_x}{\rho g A b^2} = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{\tau_0\pi}{k_0 b}\tanh(k_0 d)[D_{-1}H_{-1}(k_0 b) + D_{+1}H_{+1}(k_0 b)] \tag{5.2.42}$$

5.2.4. Υπολογισμός του δυναμικού του κοντινού πεδίου (near field) ψ

Δεδομένου ότι ο μη ομογενής όρος της Εξ. (5.2.3) που ικανοποιείται από το δυναμικό ψ βάσει της (5.2.9), τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα το θεώρημα του Green. Προς τούτο ακολουθείται η διαδικασία που αναπτύχθηκε από τους Malenica et al. (1999) και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά για συστοιχίες κυλίνδρων και την επίλυση του σχετικού δευτεροτάξιου υδροδυναμικού προβλήματος διπλής συχνότητας.

Το θεώρημα του Green γράφεται για ένα σημείο έξω από το πεδίο του ρευστού

$$\iint_{S_B} \psi\, \partial G/\partial r\, dS = \iint_{S_F} G Q_D\, dS \tag{5.2.43}$$

όπου Q_D είναι ο μη ομογενής όρος της Εξ. (5.2.3), που περιγράφεται από την εξίσωση

$$Q_D = \left(2\bar{\phi}_r \frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \right)\left(\varphi^I + \varphi_0^D \right) \tag{5.2.44}$$

Η συνάρτηση Green (Fenton, 1978) γράφεται ως ανάπτυγμα ιδιοσυναρτήσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} G = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{i}{2} C_0 \begin{pmatrix} H_m(a_0 r) J_m(a_0 \rho) \\ J_m(a_0 r) H_m(a_0 \rho) \end{pmatrix} f_0(z) f_0(\zeta) \right. \\ & \left. -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \begin{pmatrix} K_m(a_n r) I_m(a_n \rho) \\ I_m(a_n r) K_m(a_n \rho) \end{pmatrix} f_n(z) f_n(\zeta) \right\} e^{im(\theta - \vartheta)}, \quad \begin{pmatrix} r > \rho \\ r < \rho \end{pmatrix} \right. \end{aligned} \tag{5.2.45}$$

όπου I_m και K_m είναι αντίστοιχα οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel m τάξης και πρώτου και δευτέρου είδους.

Στην Εξ. (5.2.52) οι ιδιοσυναρτήσεις στη z διεύθυνση θα δίνονται από

$$f_0(z) = \frac{\cosh(a_0 z)}{\cosh(a_0 d)} \tag{5.2.46}$$

και

$$f_n(z) = \frac{\cos(a_n z)}{\cos(a_n d)} \tag{5.2.47}$$

όπου a_n είναι οι ρίζες της τραπεζοειδούς εξίσωσης

$$\nu_0 = -a_n \tan(a_n d) \tag{5.2.48}$$

ενώ η a_0 αντιστοιχεί στη φανταστική ρίζα της προηγούμενης και θα βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης διασποράς

$$\nu_0 = a_0 \tanh(a_0 d) \tag{5.2.49}$$

Δεδομένου ότι το ν_0 υπολογίζεται με βάση τη θεμελιώδη συχνότητα του προσπίπτοντος κυματισμού και όχι τη συχνότητα συνάντησης θα ισχύει $a_0=k_0$.

Επίσης θα ισχύει

$$C_l = \left[2\int_0^d f_l(z) f_l(z) \mathrm{d}z \right]^{-1} \tag{5.2.50}$$

και

$$C_0 = \left[2\int_0^d f_0(z) f_0(z) \mathrm{d}z \right]^{-1} \tag{5.2.51}$$

Για το C_l συγκεκριμένα το οποίο άλλωστε υπολογίζει αυτόματα και το C_0 θέτοντας όπου a_l το $-ia_0$ ισχύει το εξής ανάπτυγμα

$$C_l = \frac{1}{2} a_l \left[\frac{1}{2} \frac{\cos(a_l d)\sin(a_l d) + a_l d}{\cos^2(a_l d)} \right]^{-1} \tag{5.2.52}$$

Στη συνέχεια το δυναμικό ψ επάνω στον κύλινδρο, υποτίθεται ότι περιγράφεται με τη βοήθεια του ακόλουθου αναπτύγματος σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων:

$$\psi\ (b\ ,\theta\ ,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[B_{m_0} f_0(z) + \sum_{l=1}^{\infty} B_{m_l} f_l(z) \right] e^{im\theta} \tag{5.2.53}$$

Η προηγούμενη αντικαθίσταται στην Εξ. (5.2.43) για ένα σημείο μέσα στον κύλινδρο, δηλαδή για $r=b-\delta$, $0<\delta\leq b$ και η παραγόμενη παράσταση ολοκληρώνεται ως προς το ζ με χρήση της ορθογωνικότητας των ιδιοσυναρτήσεων $f_l(\zeta)$. Αξιοποιώντας επίσης την ορθογωνικότητα των συναρτήσεων $e^{im\theta}$ και αναδιατάσσοντας τους διάφορους όρους λαμβάνουμε την παρακάτω έκφραση για τους αγνώστους συντελεστές B_{m0}

$$B_{m_0} = -\frac{C_0}{\pi a_0 b H'_m(a_0 b\ )} \iint_{S_F} H_m(a_0 \rho\ ) e^{-im\vartheta}\, Q_D(\rho\ ,\vartheta) \mathrm{d}S \tag{5.2.54}$$

Πιο συγκεκριμένα το δεύτερο μέρος της Εξ. (5.2.54) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως με χρήση του συνολικού δυναμικού μηδενικής τάξης φ_0^D

$$-\frac{C_0}{\pi a_0 b\, H'_m(a_0 b)}\iint_{S_F} H_m(a_0\rho)e^{-im\vartheta}\, Q_D(\rho,\vartheta)\mathrm{d}S$$

$$= k_0 b\ \frac{N_0}{H'_m(a_0 b)}\int_b^\infty \frac{H_m(a_0\rho)}{\rho/b}\left\{ i^{m-1}\left(J'_{m-1}(a_0\rho) - \frac{J'_{m-1}(a_0 b)}{H'_{m-1}(a_0 b)} H'_{m-1}(a_0\rho)\right)\right.$$

$$\left. + i^{m+1}\left(J'_{m+1}(a_0\rho) - \frac{J'_{m+1}(a_0 b)}{H'_{m+1}(a_0 b)} H'_{m+1}(a_0\rho)\right)\right\}\mathrm{d}(\rho/b) + \tag{5.2.55}$$

$$\frac{N_0}{H'_m(a_0 b)}\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_b^\infty \frac{H_m(a_0\rho)}{(\rho/b)^2}\left\{ i^{m-1}\left(J_{m-1}(a_0\rho) - \frac{J'_{m-1}(a_0 b)}{H'_{m-1}(a_0 b)} H_{m-1}(a_0\rho)\right)(m-1)\right. \\ \left. -i^{m+1}\left(J_{m+1}(a_0\rho) - \frac{J'_{m+1}(a_0 b)}{H'_{m+1}(a_0 b)} H_{m+1}(a_0\rho)\right)(m+1)\right. \end{array}\right\}\mathrm{d}(\rho/b)$$

όπου

$$N_0 = 4\frac{\cosh^2(a_0 d)}{\sinh(2a_0 d) + 2a_0 d} \tag{5.2.56}$$

Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών B_{m0} μέσω της Εξ. (5.2.54) και (5.2.55), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το δυναμικό του κοντινού πεδίου (near filed) ψ μέσω της Εξ. (5.2.53) μόνο πάνω στο σώμα. Το γεγονός αυτό μας δίνει την δυνατότητα υπολογισμού των σημαντικότερων υδροδυναμικών μεγεθών, δηλαδή, της υδροδυναμικής φόρτισης και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας (*run-up*) επάνω στο σώμα.

Ακολούθως μπορεί να υπολογιστεί το τμήμα της οριζόντιας δύναμης λόγω του δυναμικού του κοντινού πεδίου από την ακόλουθη σχέση:

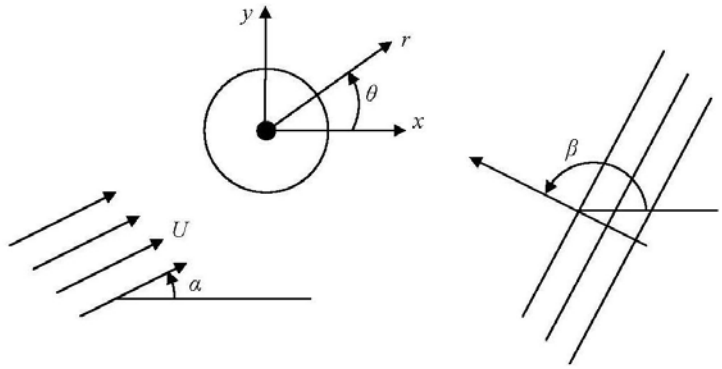
$$F_x = -i\omega\rho\iint_{S_B}\frac{gA}{\omega_0} i\tau_0\psi\ (b,\theta,z)\cos\theta\ b\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z \tag{5.2.57}$$

Η αναλυτική έκφραση για την οριζόντια δύναμη θα δίνεται από την

$$\frac{F_x}{\rho g A b^2} = \frac{\omega}{\omega_0}\tau_0\pi\frac{\tanh(a_0 d)}{a_0 b}(B_{-1,0} + B_{+1,0}) \tag{5.2.58}$$

5.3. Κύματα και ρεύμα σε κύλινδρο εδρασμένο στον πυθμένα και η συμβολή των όρων ταχύτητας υψηλότερης τάξης υπό την επίδραση σταθερού ρεύματος

Στην παρούσα ενότητα γίνεται αναφορά στο πρόβλημα της αλληλεπίδρασης ενός κυλίνδρου εδραζόμενου σταθερά στον πυθμένα της θάλασσας σε πεδίο ροής το οποίο δημιουργείται από την αλληλεπίδραση κυματισμών και θαλασσίου ρεύματος, λαμβάνοντας υπόψη και τους όρους δεύτερης τάξης στη ταχύτητα του ρεύματος Η μεθοδολογία παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην εργασία των Chatjigeorgiou et al (2007a), ενώ αποτελέσματα παρουσιάστηκαν και στις εργασίες των Chatjigeorgiou et al (2007b, 2007c). Η ταχύτητα του ρεύματος θεωρείται σταθερή και ομοιόμορφη. Κατά συνέπεια η γενική λύση θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ταχύτητες υψηλότερης τάξης ή ακόμα να επεκταθεί για επιπλέοντα αξονοσυμμετρικά σώματα που κινούνται σε κυματικά πεδία με σχετικά υψηλές ταχύτητες. Η επίλυση του υδροδυναμικού προβλήματος γίνεται μέσω της εφαρμογής της γραμμικής θεωρίας δυναμικού ενώ η ακολουθούμενη μεθοδολογία βασίζεται στην ημι-αναλυτική διατύπωση των συνιστωσών του συνολικού δυναμικού οι οποίες διαμορφώνονται έτσι ώστε να ικανοποιούν τη μη ομογενή μορφή της οριακής συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια. Το πρόβλημα τελικά καταλήγει στην διαμόρφωση επιμέρους προβλημάτων Sturm- Liouville, τα οποία αντιμετωπίζονται διαδοχικά. Η επίλυση αυτών προϋποθέτει τον προσδιορισμό της κατάλληλης συνάρτησης Green, που έχει την ίδια μορφή για όλα τα δυναμικά που πολλαπλασιάζονται με τις μη μηδενικές τιμές της ταχύτητας του ρεύματος.



Σχήμα 5.3. 1: Σκαριφηματική αναπαράσταση κυλινδρικού σώματος σε πεδίο ροής το οποίο προέρχεται από την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος

Είναι εμφανές ότι η αποκοπή των τμημάτων ταχύτητας του ρεύματος, υψηλότερης τάξης, δεν δίνει τις απαντήσεις όσον αφορά τη συμβολή των όρων $O(\tau^2)$, στην υδροδυναμική φόρτιση και γενικά στην περιγραφή της ροής γύρω από την κατασκευή. Επιπλέον, οι διατυπώσεις που αγνοούν τους μη γραμμικούς όρους όσον αφορά την ταχύτητα του ρεύματος χάνουν εξ ορισμού τα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της ροής όπως τα *V waves*. Ο μόνος τρόπος να εμφανιστεί και να τονιστεί η επίδραση των όρων $O(\tau^2)$ είναι να περιληφθούν στη διατύπωση του προβλήματος. Αν και τα φαινόμενα λόγω ιξώδους αμελούνται και χρησιμοποιείται η θεωρία δυναμικού, ο συνυπολογισμός των όρων $O(\tau^2)$ στη διατύπωση συνεχίζει να αποτελεί έναν πολύ δύσκολο και περίπλοκο στόχο. Επιπλέον, η λύση στο πρόβλημα επιδιώκεται μέσω της αναλυτικής επεξεργασίας του κλασικού υδροδυναμικού συστήματος. Κατά συνέπεια, εξετάζεται το απλούστερο πιθανό πρότυπο για μια θαλάσσια κατασκευή, δηλαδή ένας κύλινδρος εδραζόμενος στον πυθμένα της θάλασσας. Η ροή στην ελεύθερη επιφάνεια καθώς

επίσης και το συνολικό δυναμικό ταχύτητας, προσεγγίζονται από μια επέκταση σε σειρά διαταραχών, που διατηρεί τους όρους όσον αφορά την ταχύτητα του ρεύματος μέχρι τη δεύτερη τάξη, δηλαδή $O(\tau^2)$. Μια παρόμοια διαδικασία λύσης αλλά μέχρι $O(\tau)$, ακολουθήθηκε από τους Malenica *et al.* (1995).

Δεδομένου ότι η μαθηματική διατύπωση και η επίλυση του προβλήματος παρουσιάστηκε στις εργασίες που προαναφέρθηκαν, εδώ για λόγους πληρότητας παρουσιάζονται ορισμένα ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα.

5.3.1. Υδροδυναμικές φορτίσεις και ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας

Υπολογίζοντας όλους τους όρους της διαταραχής, μέχρι και δεύτερης τάξης όσον αφορά την αδιάστατη ταχύτητα τ, το συνολικό δυναμικό ταχύτητας Φ θα μας επιτρέψει τον υπολογισμό της πίεσης και κατά συνέπεια και τις πρωτοτάξιες δυνάμεις διέγερσης πάνω στο σώμα:

$$p = -\rho\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\right] \tag{5.3.6}$$

$$F^{(1)} = \rho\iint_{S_B}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t} + U\nabla\phi_0\nabla\phi^{(1)}\right)\vec{n}dS + \frac{1}{2}\rho U^2\iint_{S_B}\nabla\phi_0\nabla\phi_0\vec{n}dS + O\left((H/2)^2\right) \tag{5.3.7}$$

όπου S_B είναι η βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος μέχρι την αδιατάραχτη ελεύθερη επιφάνεια και το ρ δίνει την πυκνότητα του νερού. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$ έχει φορά προς τα έξω. Επιπλέον, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας πρώτης τάξης, θα είναι η:

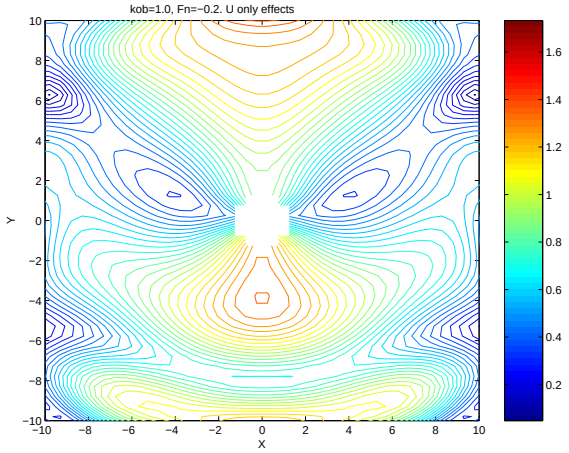
$$\eta^{(1)} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t} + U\nabla\phi_0\nabla\phi^{(1)} + \frac{1}{2}U^2\nabla\phi_0\nabla\phi_0\right) + O\left((H/2)^2\right) \tag{5.3.8}$$

Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται οι απόλυτες τιμές των οριζόντιων δυνάμεων διέγερσης (σχήματα 5.3.4-5.3.9) για *d/b=10* και (σχήματα 5.3.10-5.3.15) για *d/b=1*

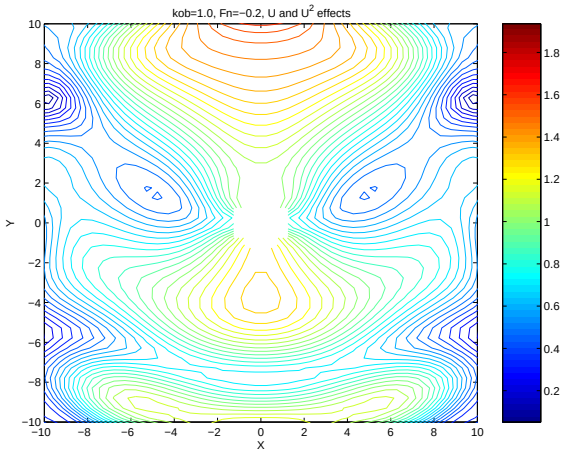
Παρατηρώντας τα σχήματα σε ζεύγη ως προς το *d/b* για τους ίδιους αριθμούς Froude, μπορεί εύκολα να φανεί ότι υπάρχουν προφανείς ομοιότητες στις τάσεις όλων των καμπύλων. Για τις μικρές ταχύτητες ρεύματος η συμβολή των όρων $O(\tau^2)$ είναι σχεδόν ασήμαντη (*Fn=0.05*). Η επίδραση του ρεύματος είναι σημαντική ως ένα ορισμένο βαθμό, μόνο για τις υψηλές συχνότητες κυμάτων στις οποίες ένα θετικό ρεύμα ενισχύει τη συνολική υδροδυναμική φόρτιση και ένα αρνητικό ρεύμα, μειώνει τη δράση του κύματος.

Όπως αναμενόταν, οι όροι διαταραχής δεύτερης τάξης, γίνονται σημαντικότεροι όταν αυξάνει η ταχύτητα του ρεύματος. Εντούτοις, για θετικό αριθμό Froude δεν παρατηρείται καμία εμφανής διαφορά.

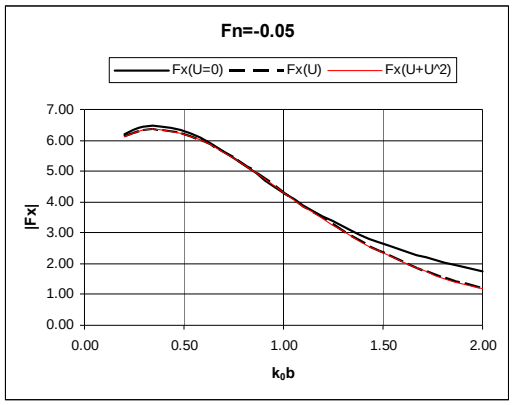
Η επίδραση του ρεύματος είναι εμφανής για υψηλότερο *Fn*. Οι όροι $O(\tau^2)$ μειώνουν την αρχικά προσδοκώμενη συμβολή του ρεύματος για τους θετικούς αριθμούς Froude λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους όρους $O(\tau)$, ενώ για τους αρνητικούς αριθμούς Froude αυτοί οι όροι ενεργούν αντίθετα. Για θετικό *Fn*, η καμπύλη παρουσιάζει μια σημαντική μείωση στη μέση περίπου των συχνοτήτων. Ανάλογα χαρακτηριστικά μπορούν να βρεθούν για *Fn* $=\pm 0.20$, καθώς η συμβολή των δευτεροτάξιων όρων διαταραχής $O(\tau^2)$ γίνεται όλο και περισσότερο σημαντική.



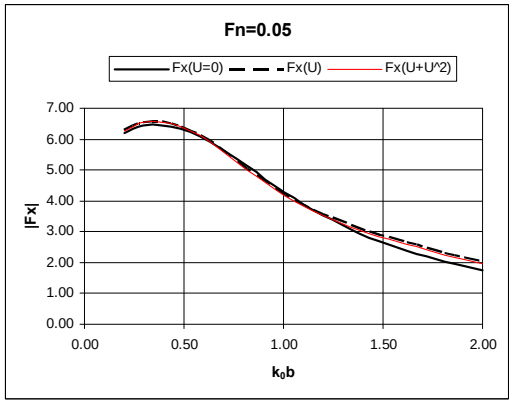
Σχήμα 5.3. 2: Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, λαμβάνοντας υπόψη, μόνο τους γραμμικούς όρους του ρεύματος



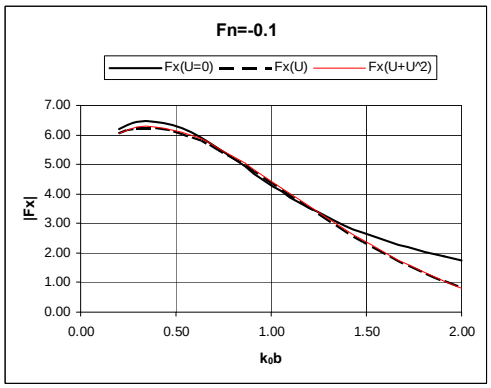
Σχήμα 5.3. 3: Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, λαμβάνοντας υπόψη, τους γραμμικούς και τους μη γραμμικούς όρους του ρεύματος



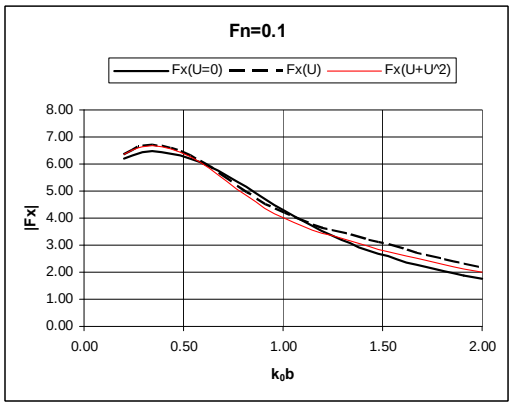
Σχήμα 5.3. 4: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=10b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=-0.05 (α=0°, β=0°).



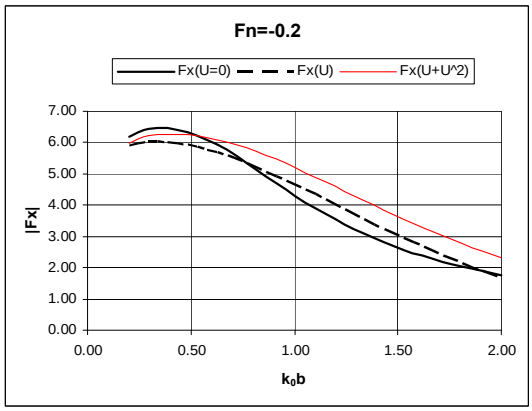
Σχήμα 5.3. 5: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=10b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=0.05 (α=0°, β=0°).



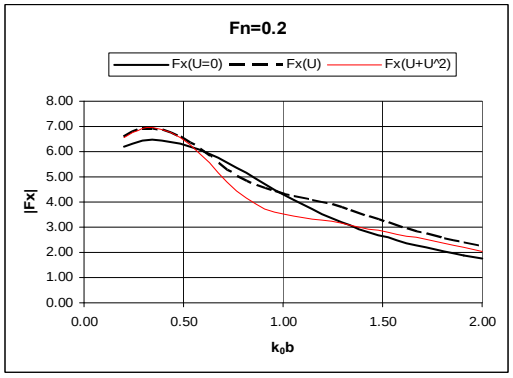
Σχήμα 5.3. 6: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=10b Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=-0.10 (α=0°, β=0°).



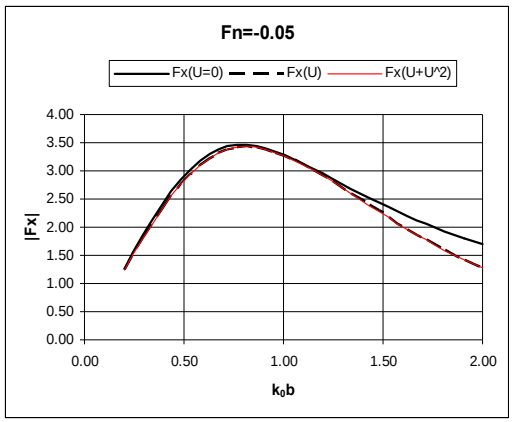
Σχήμα 5.3. 7: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=10b Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=0.10 (α=0°, β=0°).



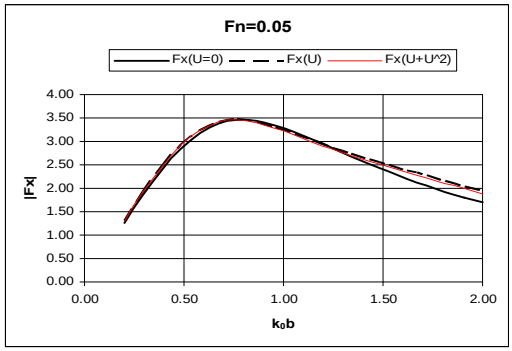
Σχήμα 5.3. 8: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=10b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=-0.20 (α=0°, β=0°).



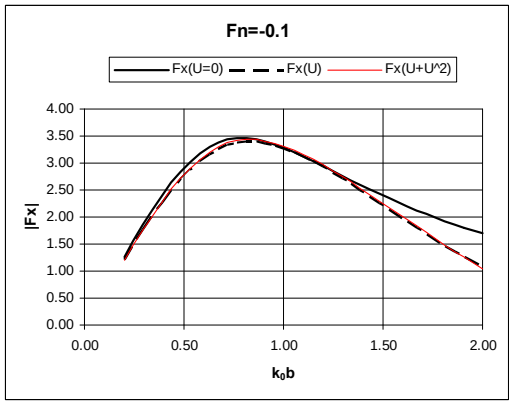
Σχήμα 5.3. 9: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=10b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=0.20 (α=0°, β=0°).



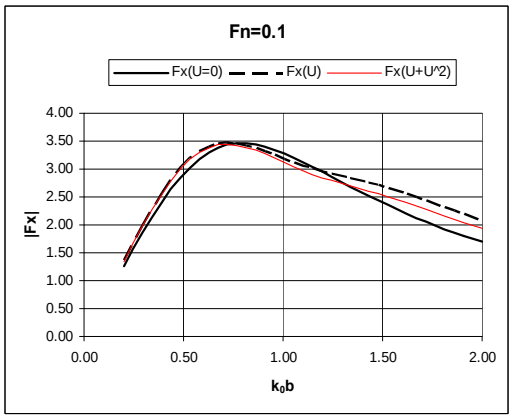
Σχήμα 5.3. 10: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=-0.05 (α=0°, β=0°).



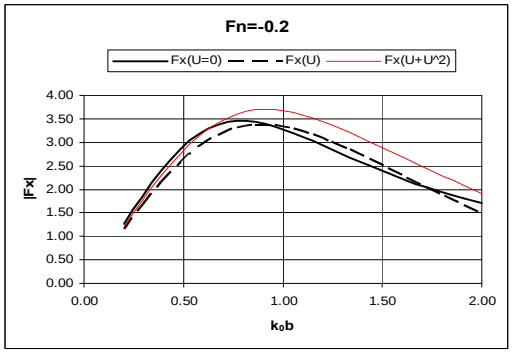
Σχήμα 5.3. 11: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=0.05 (α=0°, β=0°).



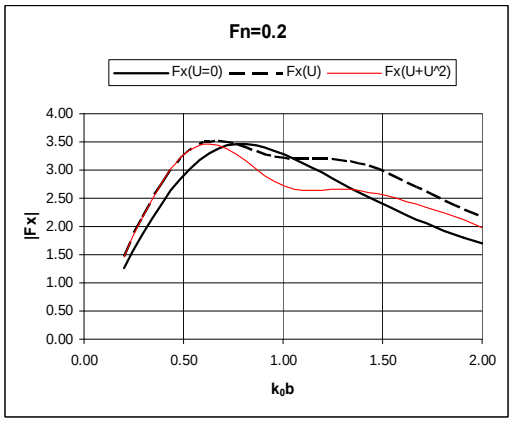
Σχήμα 5.3. 12: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=-0.10 (α=0°, β=0°).



Σχήμα 5.3. 13: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=0.10 (α=0°, β=0°).



Σχήμα 5.3. 14: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=-0.20 (α=0°, β=0°).

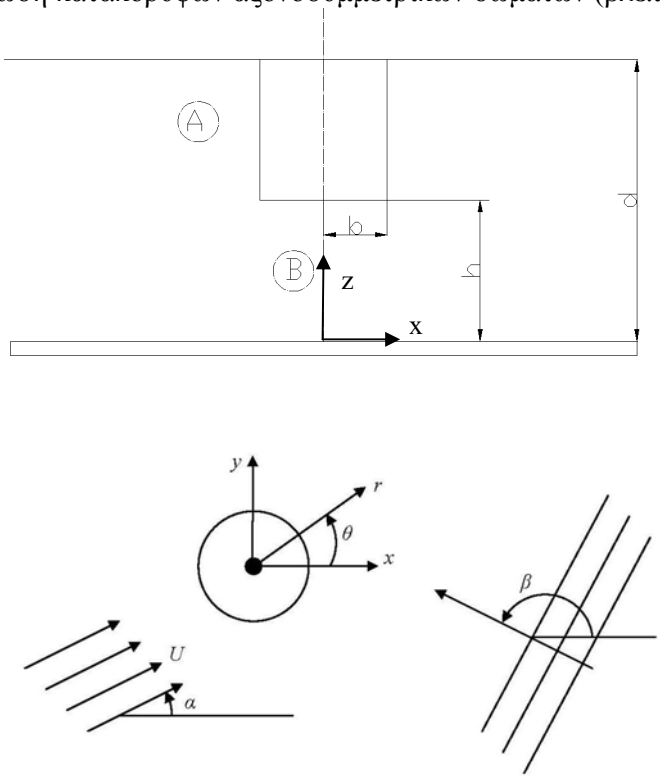


Σχήμα 5.3. 15: Οριζόντια δύναμη σε κύλινδρο εδραζόμενο στον πυθμένα της θάλασσας με d=b. Συγκριτικά αποτελέσματα για Fn=0.20 (α=0°, β=0°).

5.4. Διατύπωση του υδροδυναμικού προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος- ρεύματος-κατακόρυφος κύλινδρος

5.4.1. Πεδίο ροής προερχόμενο από την αλληλεπίδραση κυματισμών βαρύτητας και θαλασσίου ρεύματος

Η διατύπωση του προβλήματος, παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4.1 της παρούσας διδακτορικής διατριβής, μαζί με τη μεθοδολογία υπολογισμού του δυναμικού της μόνιμης ροής για την περίπτωση κατακόρυφων αξονοσυμμετρικών σωμάτων (βλέπε Κεφάλαιο 4.2)



Σχήμα 5.4. 1: Σκαριφηματική αναπαράσταση κυλινδρικού σώματος σε πεδίο ροής στο οποίο συνυπάρχουν μονοχρωματικοί κυματισμοί βαρύτητας και θαλάσσιο ρεύμα

Το συνολικό δυναμικό ταχύτητας του εξεταζόμενου πεδίου ροής θα προέρχεται από την υπέρθεση των επιμέρους συνιστωσών του:

$$\Phi = U\left(\overline{\phi} + r\cos(\theta - \alpha)\right) + \varphi \tag{5.4.1}$$

Όπου:

(i) $Ur\cos(\theta-\alpha)$ **το δυναμικό του προσπίπτοντος ρεύματος**

(ii) $U\bar{\phi}(r,\theta,z)$ **το δυναμικό της μόνιμης ροής λόγω της ροής του ρεύματος**

(iii) $\varphi(r,\theta,z;t)$ **το χρονικά εξαρτώμενο δυναμικό που περιγράφει τον προσπίπτοντα κυματισμό και την προκαλούμενη διαταραχή λόγω της παρουσίας του σώματος**

Οι οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $\bar{\phi}$ και φ, περιγράφονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις (4.1.10), (4.1.11) και (4.1.9), που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 4.1. και έχουν αναπαραχθεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες, μέσω των σχέσεων (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4). Μακριά από το σώμα που η διαταραχή είναι μηδενική ισχύει η (5.1.5).

5.4.2. Προσπίπτοντες και περιθλώμενοι κυματισμοί

Το συνολικό δυναμικό εξ' αιτίας του προσπίπτοντος κυματισμού γράφεται (βλέπε και σχέση 4.1.12):

$$\varphi(r,\theta,z;t)=\mathrm{Re}\left\{\left(\varphi^{I}+\varphi^{D}\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \tag{5.4.2}$$

όπου οι δείκτες I και D συμβολίζουν τα δυναμικά πρόσπτωσης και περίθλασης αντίστοιχα. Επιπλέον ω είναι η συχνότητα συνάντησης, η οποία διαφέρει από τη συχνότητα του κυματισμού πρόσπτωσης ω_0, λόγω της παρουσίας του ρεύματος. Ο χωρικός όρος του δυναμικού πρόσπτωσης φ^{I}, μπορεί να γραφεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\phi^{I}(r,\theta,z)=-\mathrm{i}\frac{H}{2}\frac{g}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}e^{\mathrm{i}k_0 r\cos(\theta-\beta)} \tag{5.4.3}$$

με k_0 τον αριθμό κύματος , ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση διασποράς, με χρήση της συχνότητας ω_0.

Η αδιάστατη έκφραση για τη συχνότητα συνάντησης είναι η:

$$\nu d=\nu_0 d+2\tau k_0 d\cos\gamma \tag{5.4.4}$$

Όπου $\nu=\omega^2/g$,$\nu_0=\omega_0^2/g$ και τ είναι η αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος, ίση με $\tau=U\omega/g$ και $\gamma=\beta-\alpha$.

Η συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας η οποία θα πρέπει να ικανοποιείται από το δυναμικό περίθλασης φ^{D} μόνο, προέρχεται από την Εξ. (5.1.2) λαμβάνοντας υπόψη ότι στο άπειρο η τελευταία θα πρέπει να ικανοποιείται μόνο από το δυναμικό του προσπίπτοντος κυματισμού καθώς και το γεγονός ότι η διαταραχή του ρεύματος εκφυλίζεται πολύ μακριά από το σώμα. Η τελική συνθήκη θα γράφεται ως εξής (βλέπε και σχέση (5.1.10)):

$$-\nu_0\phi^D+\phi_z^D-\mathrm{i}\tau_0\begin{pmatrix}2\overline{\varphi}_r\phi_r^D+\dfrac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_\theta^D+2\phi_r^D\cos\left(\theta-\alpha\right)-\dfrac{2}{r}\phi_\theta^D\sin\left(\theta-\alpha\right)\\-\overline{\varphi}_{zz}\phi^D+2k_0\cos(\beta)\phi^D\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{i}\tau_0\left(2\overline{\varphi}_r\phi_r^I+\frac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_\theta^I-\overline{\varphi}_{zz}\phi^I\right),\quad z=d \tag{5.4.5}$$

Το υδροδυναμικό πρόβλημα της αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος με ένα κατακόρυφο αξονοσυμμετρικό σώμα, θα μπορέσει να λυθεί επακριβώς, μετά τον ακριβή υπολογισμό του δυναμικού φ^D. Το δυναμικό περίθλασης φ^D, ικανοποιεί επίσης την εξίσωση του Laplace, τη συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον πυθμένα, ενώ τα δυναμικά ταχύτητας $\varphi^I+\varphi^D$ ικανοποιούν την απαίτηση της μηδενικής ταχύτητας στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος. Ο τρόπος προσδιορισμού του δυναμικού περίθλασης φ^D βασίζεται στην ανάλυσή του σε σειρά διαταραχών ως προς την αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος τ_0. Κατά συνέπεια λαμβάνοντας μόνο τον μη γραμμικό όρο το δυναμικό ταχυτήτων φ^D γράφεται ως εξής:

$$\varphi^D=\varphi_0^D+\mathrm{i}\tau_0\varphi_1^D \tag{5.4.6}$$

Με την εισαγωγή της Εξ. (5.4.6) στην Εξ. (5.4.5), αμελώντας τους μη γραμμικούς όρους $O(\tau^2)$ και διατηρώντας τους όρους $O(\tau^0)$ και $O(\tau^1)$ και τέλος εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης ως προς το την αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος λαμβάνονται τα εξής (βλέπε και σχέσεις (5.1.12), (5.1.13)):

$$-\nu_0\phi_0^D+\phi_{0z}^D=0,\quad z=d \tag{5.4.7}$$

$$-\nu_0\phi_1^D+\phi_{1z}^D=2\overline{\varphi}_r\phi_r^I+\frac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_\theta^I-\overline{\varphi}_{zz}\phi^I$$

$$+2\overline{\varphi}_r\phi_{0r}^D+\frac{2}{r^2}\overline{\varphi}_\theta\phi_{0\theta}^D+2\phi_{0r}^D\cos\left(\theta-\alpha\right)-\frac{2}{r}\phi_{0\theta}^D\sin\left(\theta-\alpha\right) \tag{5.4.8}$$

$$-2ik_0\cos(\beta-a)\varphi_0^D-\overline{\varphi}_{zz}\phi_0^D,\quad z=d$$

Επιπλέον, τα δυναμικά φ_0^D και φ_1^D πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace και τη συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον πυθμένα για z=0. Αφού λοιπόν τα φ_0^D και φ_1^D ικανοποιούν την ομογενή συνθήκη (Εξ (5.1.12)) και την μη ομογενή (Εξ. (5.1.13)) συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια αντίστοιχα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το φ_0^D ικανοποιεί την μη ομογενή συνθήκη στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος, ενώ το φ_1^D ικανοποιεί την ομογενή. Οπότε τα δυναμικά περίθλασης φ_0^D και φ_1^D μπορούν να παραχθούν από την επίλυση των παρακάτω συστημάτων:

$$\frac{\partial \Psi_m^B}{\partial r}|_{r=b} = \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b}\text{, στο όριο } 0 \le z \le d \tag{5.4.9}$$

$$\Psi_m^B|_{r=b} = \Psi_m^A|_{r=b}\text{, στο όριο } 0 \le z \le d \text{ (συνθήκη συνέχειας στα όρια των χωρίων)} \tag{5.4.10}$$

$$\frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}|_{r=b} = 0\text{, στο όριο } d \le z \le h \tag{5.4.11}$$

$$\nabla^2 \varphi_1^D = 0, \quad r \ge b, \quad 0 \le z \le h \tag{5.4.12}$$

$$\begin{aligned} -\nu\varphi_1^D + \varphi_{1z}^D &= 2\bar{\phi}_r \varphi_r^I + \frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta \varphi_\theta^I - \bar{\phi}_{zz}\varphi^I + 2\bar{\phi}_r \varphi_{0r}^D + \frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta \varphi_{0\theta}^D \\ &+ 2\varphi_{0r}^D \cos(\theta-\alpha) - \frac{2}{r}\varphi_{0\theta}^D \sin(\theta-\alpha) - \bar{\phi}_{zz}\varphi_0^D, \quad r \ge b, \quad z = h \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

$$\varphi_{1z}^D = 0, \quad r \ge b, \quad z = 0 \tag{5.4.14}$$

$$\varphi_{1r}^D = 0, \quad r = b, \quad 0 \le z \le h \tag{5.4.15}$$

όπου το b συμβολίζει την ακτίνα του κυλίνδρου. Είναι προφανές ότι τα παραπάνω συστήματα των Εξ. (5.4.9)-(5.4.11) και (5.4.12)-(5.4.15) θα πρέπει να επιλυθούν ξεχωριστά. Είναι επίσης φανερό ότι υπολογίζοντας πρώτα τον όρο του φ_0^D, σε δεύτερο στάδιο θα αντικατασταθεί στο σύστημα των εξισώσεων για την παραγωγή του δυναμικού της διαταραχής του κυματισμού από το σώμα. Αυτό βέβαια μπορεί να γίνει εάν γνωρίζουμε και την έκφραση του δυναμικού φ^I και της διαταραχής από το ρεύμα $\bar{\phi}$. Το δυναμικό φ^I δίνεται από την Εξ. (5.1.7) η οποία σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων τροποποιείται στην (5.1.22). Το δυναμικό $\bar{\phi}^{(A)}$ του εξωτερικού πεδίου, έχει υπολογιστεί στο Κεφάλαιο 4.3 και δίνετε από τη σχέση (4.3.3). Το δυναμικό $\bar{\phi}^{(B)}$ του εσωτερικού πεδίου, έχει υπολογιστεί στο Κεφάλαιο 4.3 και δίνετε από τη σχέση (4.3.1).

Αναλύοντας περαιτέρω τις Εξ. (5.4.9)-(5.4.12) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το φ_0^D μπορεί να επιλυθεί από ένα σύστημα το οποίο περιγράφει το πρόβλημα περίθλασης γύρω από έναν κύλινδρο χωρίς την παρουσία ρεύματος. Ο υπολογισμός του φ_0^D,έχει παρουσιαστεί αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο και δίνεται από τη σχέσεις (2.2.4) και (2.2.10).

5.4.3. Επίλυση του δυναμικού της διαταραχής φ_1^D

5.4.3.1. Μετασχηματισμός των μη ομογενών όρων σε σειρές.

Για να επιλυθεί επακριβώς το υδροδυναμικό πρόβλημα της αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος, θα πρέπει όπως είναι λογικό, να βρεθεί μια έκφραση για το δυναμικό της διαταραχής το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος των Εξ. (5.1.12)-(5.1.15). Αυτό είναι και το πιο δύσκολο κομμάτι ως προς την επίλυσή του, γιατί περιλαμβάνει τον μη ομογενή όρο στη συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας. Ο συζευγμένος μη ομογενής όρος μπορεί να θεωρηθεί ως μια διανομή πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια η οποία εκτείνεται ως το άπειρο και προκαλείται από το steady state δυναμικό $\overline{\phi}$, το δυναμικό πρόσπτωσης του κυματισμού φ^I και το δυναμικό περίθλασης φ_0^D. Από την ανάλυση που έχει γίνει στις παραπάνω παραγράφους, όλοι οι προηγούμενα αναφερόμενοι όροι είναι γνωστοί. Για να διευκολύνουμε την διαδικασία της ακριβούς επίλυσης-έκφρασης του όρου φ_1^D, ο μη ομογενής όρος στην Εξ. (5.1.13) μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια πιο απλή έκφραση, γράφοντας τα δυναμικά υπό μορφή σειρών (ανάλογων προς τις εξισώσεις (5.1.22) και (5.1.24)). Με όλα τα δυναμικά γνωστά, μετά από εκτενείς μετασχηματισμούς η οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας Εξ. (5.4.13) τροποποιείται στην ακόλουθη:

$$-\nu\varphi_1^D + \varphi_{1z}^D = \tilde{q}_m(r,\theta) = -\mathrm{i}\omega_0 \frac{H}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m q_m(r) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.4.16}$$

Όπου η $q_m(r)$ είναι μια αρκετά εκτενής αδιάστατη παράσταση η οποία περιγράφει την ακτινική μεταβολή της ενεργούς διανομής της πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια. Η λεπτομερής αναγραφή της αποφεύγεται λόγω του μεγέθους της.

5.4.3.2. Ημιαναλυτική διατύπωση του δυναμικού της διαταραχής φ_1^D

Η έκφραση η οποία θα ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στον πυθμένα και την ελεύθερη επιφάνεια, θα είναι η ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε και στο Κεφάλαιο 5.1.3.2.

5.4.3.3. Κατασκευή της συνάρτησης Green

Η συνάρτηση Green που θα χρησιμοποιήσουμε, θα είναι και πάλι η ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5.1.3.3.

Οπότε καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση για το δυναμικό περίθλασης φ_1^D:

$$\phi_1^D = -i\omega_0 \frac{H}{2} d \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(z) Z_j(d) \int_1^{\infty} Q_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\xi}{b}\right) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.4.17}$$

$$Q_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) = \frac{b^2}{d^2}\frac{\xi}{b} q_m\left(\frac{\xi}{b}\right) G_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) \tag{5.4.18}$$

5.4.4. Πρωτοτάξιες δυνάμεις στον κύλινδρο

Η γραμμική υδροδυναμική πίεση δίνεται στη γενικότητα της από τον παρακάτω τύπο

$$p = -\rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{5.4.19}$$

με ρ_w την πυκνότητα του νερού και Φ το συνολικό δυναμικό που μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\Phi = \mathrm{Re}\left\{\left(\varphi^I + \varphi_0^D + \mathrm{i}\,\tau\varphi_1^D\right)e^{-\mathrm{i}\,\omega t}\right\} \tag{5.4.20}$$

Τελικά η οριζόντια δύναμη πρώτης τάξης σε κύλινδρο μπορεί στην γενική της μορφή να γραφεί ως εξής (Malenica et al., 1995):

$$F_x = \rho \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U\nabla\phi_0\nabla\Phi\right) n_x \mathrm{d}S \tag{5.4.21}$$

Η Εξ. (5.4.22) μας δίνει σε αδιάστατη μορφή την ακριβή έκφραση της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης σε κύλινδρο:

$$\begin{aligned}
\frac{F_x}{\rho_w g b^2 H/2} = & -\frac{\omega}{\omega_0}\frac{v_0 h}{a_j b} 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} F^{(A)}{}_{1j} N_j^{-1/2}\left(\sin(a_j h) - \sin(a_j d)\right) \\
& -i\frac{\omega}{\omega_0}\frac{v_0 h}{a_j b}\tau 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} z_j(h) N_j^{-1/2} \int_1^{\infty} Q_{1J}(b)\left(\sin(a_j h) - \sin(a_j d)\right) \\
& +4i\pi\tau_0\left(\frac{k_0 h}{k_0 b}\right)\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j} N_j^{-1/2}\frac{1}{a_j b}\left(\sin(a_j h) - \sin(a_j d)\right)\cos\alpha \\
& -4\pi\tau_0\tau\left(\frac{k_0 h}{k_0 b}\right)\sum_{j=0}^{\infty} z_j(h) N_j^{-1/2}\frac{1}{a_j b}\left(\sin(a_j h) - \sin(a_j d)\right)\cos\alpha \int_1^{\infty} Q_{2J}(b)
\end{aligned} \tag{5.4.22}$$

Στην Εξ. (5.4.21) n_x είναι η μοναδιαία x-συνιστώσα η οποία έχει φορά προς το σώμα.

Η κατακόρυφη δύναμη πρώτης τάξης σε κύλινδρο μπορεί στην γενική της μορφή να γραφεί ως εξής:

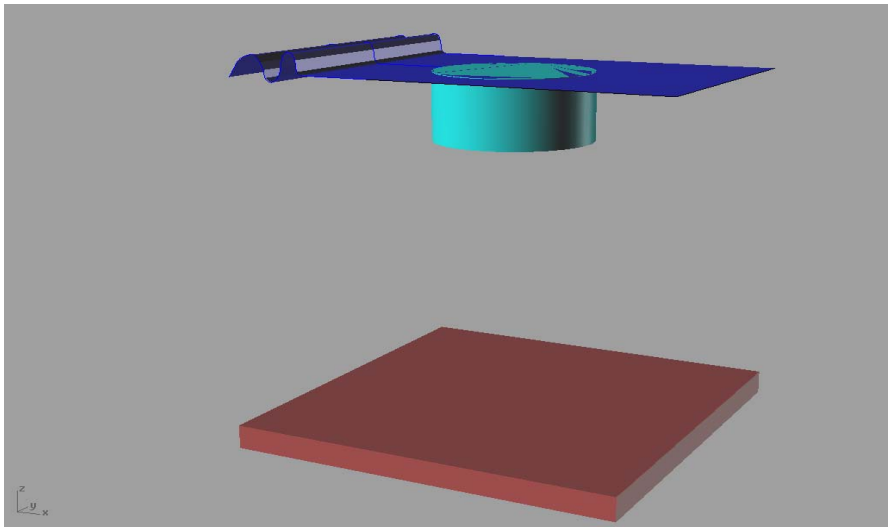
$$F_z = \rho \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \nabla \phi_0 \nabla \Phi\right) n_z \mathrm{d}S \tag{5.4.23}$$

Η εξ. (5.4.24) μας δίνει σε αδιάστατη μορφή την ακριβή έκφραση της κατακόρυφης δύναμης πρώτης τάξης σε κατακόρυφο κύλινδρο:

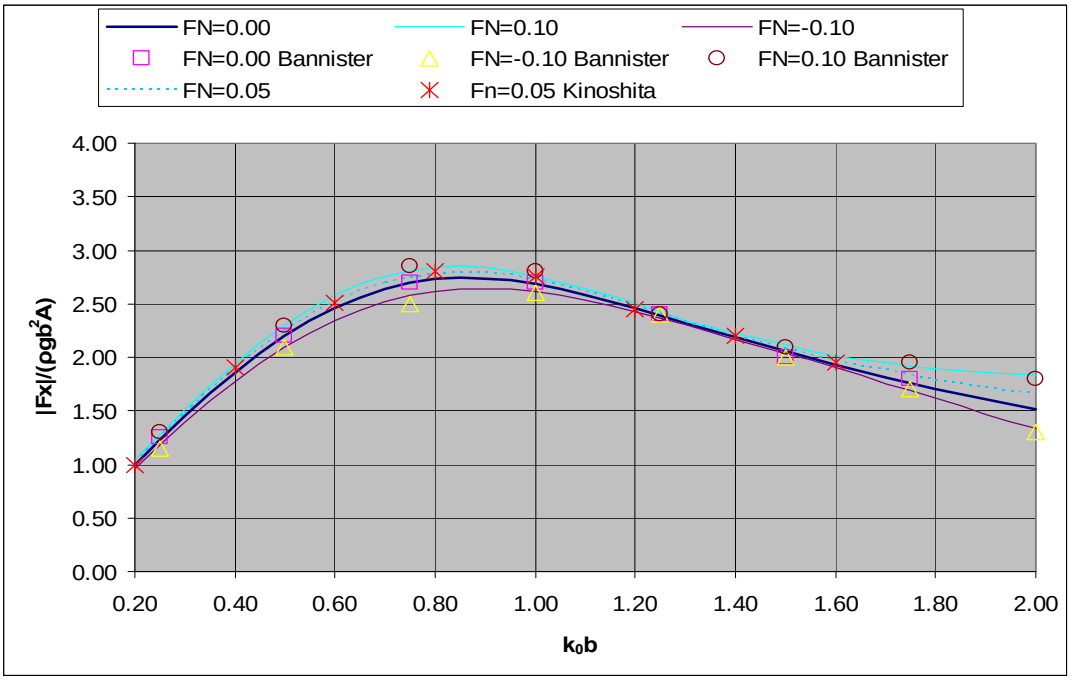
$$\begin{aligned}
\frac{F_z}{\rho g b^2 A} = {} & 2\pi \frac{\tau}{\tau_0} \nu_0 d \left\{ \frac{1}{2} F_{00}^{(B)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F_{0n}^{(B)} \frac{1}{\frac{n\pi b}{h}} \frac{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \right\} + \\
& + \tau_0 \pi \cos\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{1n}^{(B)} \frac{n\pi d}{h} \frac{(-1)^n}{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \int_0^b \frac{1}{\frac{r}{b}} I_1'\left(\frac{n\pi r}{h}\right) d\left(\frac{r}{b}\right) \\
& - \tau_0 \pi \cos\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{1n}^{(B)} \frac{n\pi d}{h} \frac{(-1)^n}{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \int_0^b \frac{r}{b} I_1'\left(\frac{n\pi r}{h}\right) d\left(\frac{r}{b}\right) \\
& - \tau_0 \pi \cos\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{1n}^{(B)} \frac{(-1)^n}{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} d \int_0^b I_1\left(\frac{n\pi r}{h}\right) dr \\
& - \tau_0 \pi \cos\alpha \frac{k_0 d}{k_0 b} \sum_{n=0}^{\infty} \in_n F_{1n}^{(B)} \frac{(-1)^n}{I_1\left(\frac{n\pi b}{h}\right)} \frac{1}{b} \int_0^b r^2 I_1\left(\frac{n\pi r}{h}\right) dr \\
& 4\pi i \tau \nu_0 d \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{z_j}(d) \mathrm{z_j}(h) \int_0^b Q_{0j}(r) \frac{r}{b} d\left(\frac{r}{b}\right)
\end{aligned} \tag{5.4.24}$$

Στην Εξ. (5.4.23) n_z είναι η μοναδιαία z-συνιστώσα η οποία έχει φορά προς τα έξω.

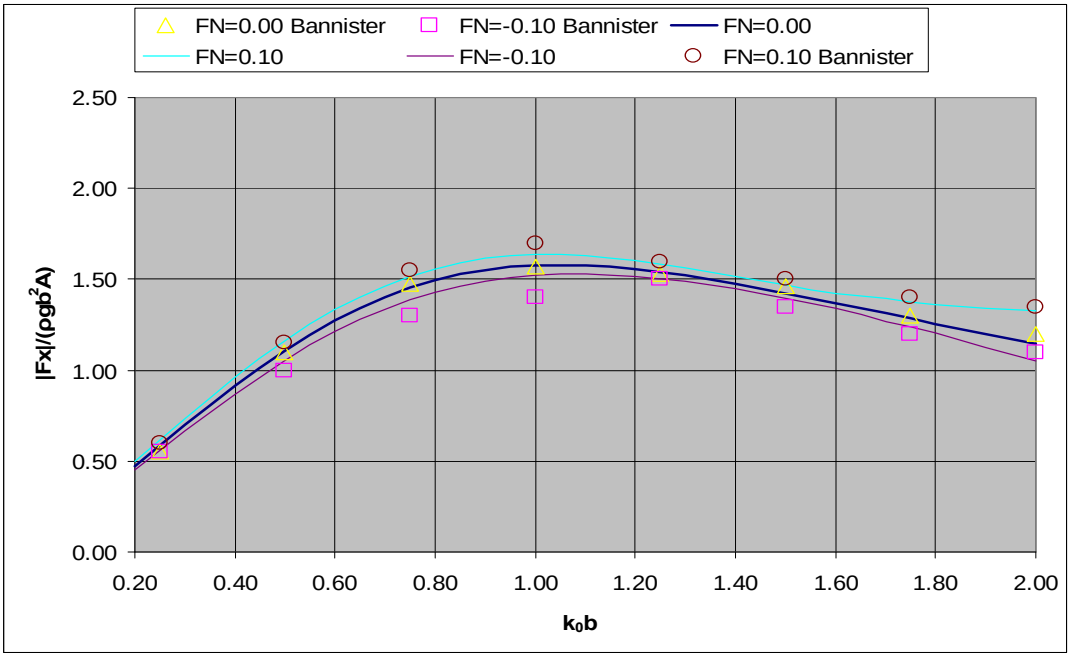
Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται αποτελέσματα για τις πρωτοτάξιες δυνάμεις διέγερσης που ασκούνται σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο. Οι υπολογισμοί έγιναν με χρήση 5 σταθερών Fourier και 10 ιδιοσυναρτήσεων, θεωρώντας ότι οι προσπίπτοντες κυματισμοί προσέκρουαν στην κατασκευή υπό γωνία 0°. Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι η παρουσία του ρεύματος μικρής ταχύτητας αλλάζει τη συνολική υδροδυναμική δύναμη που ασκείται πάνω στον κύλινδρο. Τα αποτελέσματα των Σχημάτων 5.4.2.- 5.4.9 έχουν συγκριθεί με αυτά των *Kinoshita et al.* (1996) και *Bannister G.,* (1993), με πολύ καλή συμφωνία. Σε επόμενο κεφάλαιο, θα παρουσιαστούν και συγκρίσεις με πειραματικά αποτελέσματα που έγιναν στην Πειραματική Δεξαμενή της ***DHI***, που βρίσκεται στο ***Hoersholm*** της Δανίας. Οι συγκρίσεις τους με τα αριθμητικά αποτελέσματα και πάλι ήταν πολύ καλές.



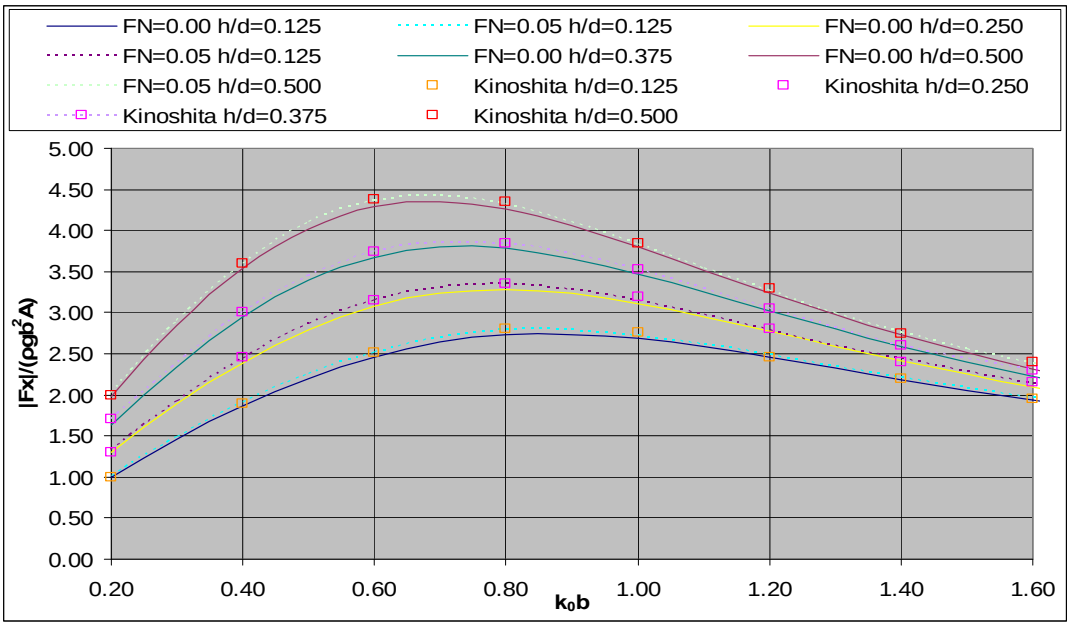
Τρισδιάστατη αναπαράσταση κατακόρυφου κυλίνδρου



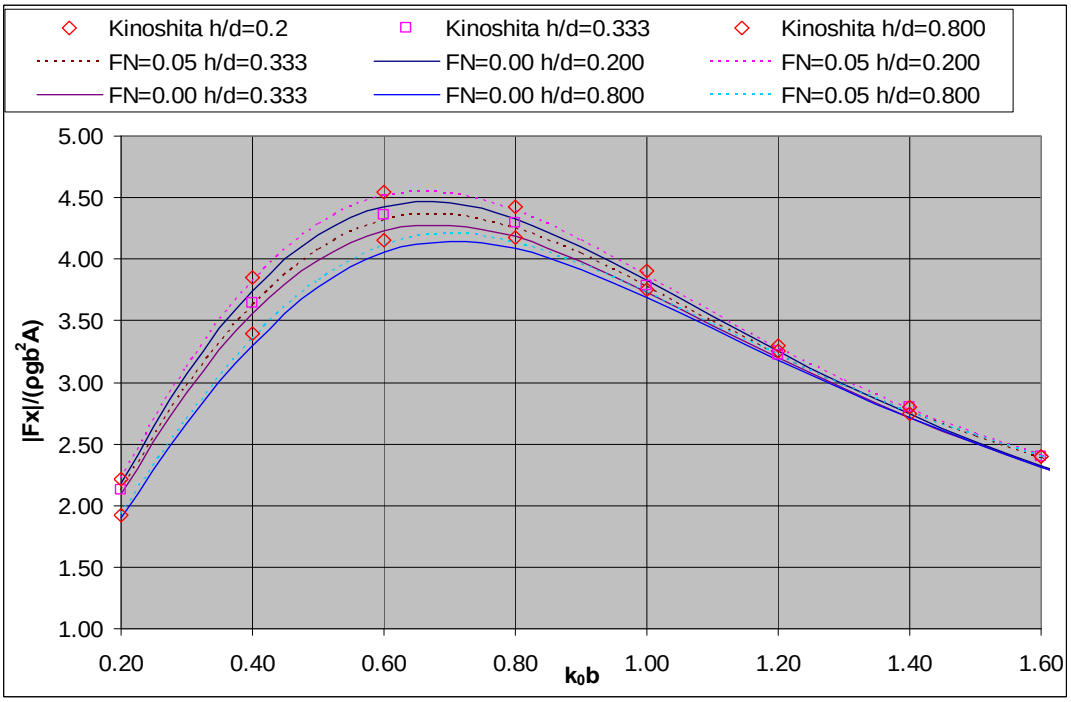
Σχήμα 5.4. 2: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *h=b, β=0°, b=10m, d=20m, h/d=0.5* , παρουσία ρεύματος και κύματος



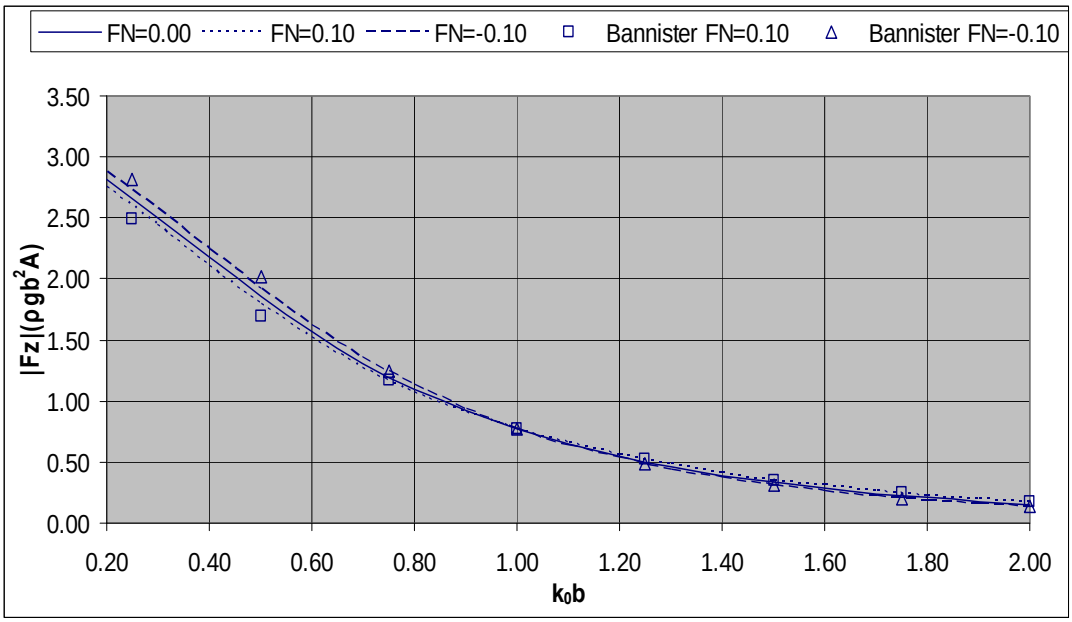
Σχήμα 5.4. 3: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *h=b, β=0°* , *b=10m, d=10m, h/d=0.5*, παρουσία ρεύματος και κύματος



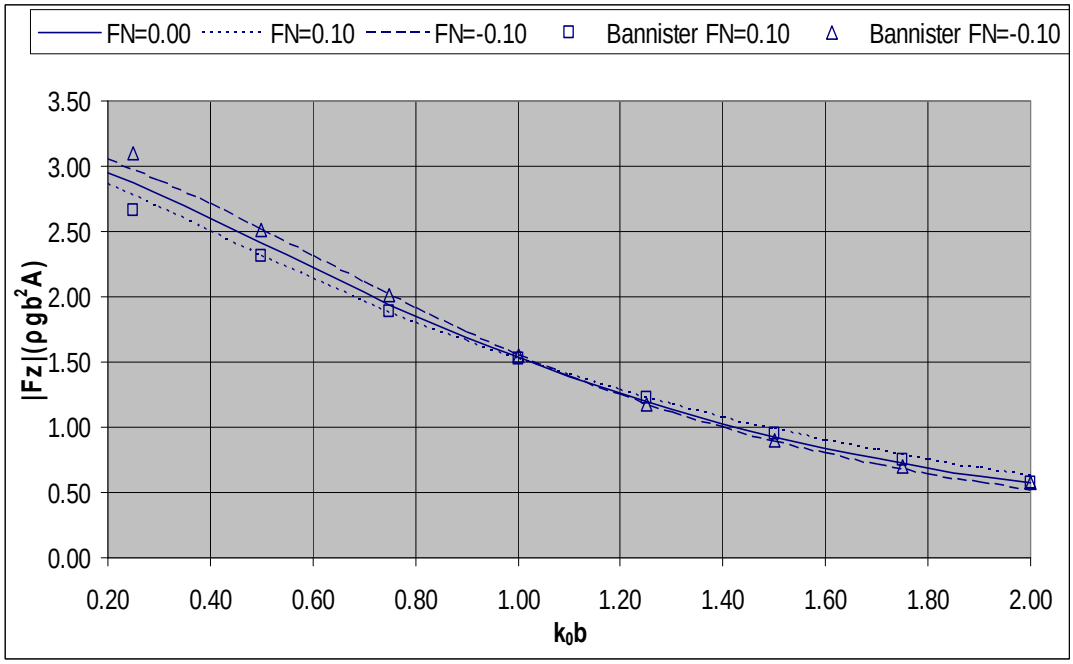
Σχήμα 5.4. 4: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$ **, *h=b, β=0°* , *b=10m, d=20m, h/d=0.125, 0.250, 0.375, 0.500, Fn=0.05*.**



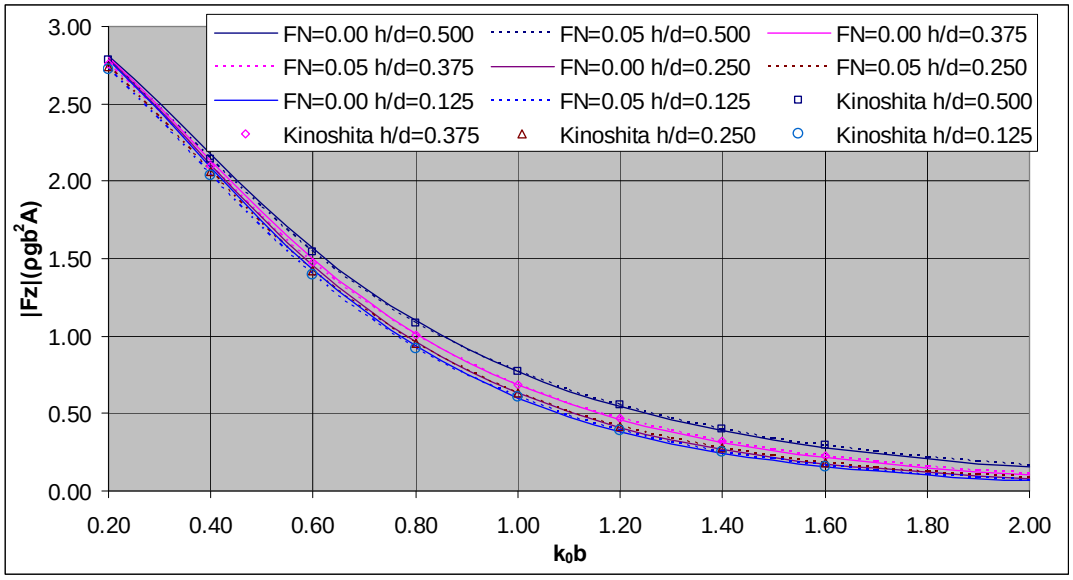
Σχήμα 5.4. 5: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$ **, *h=b, β=0° b=10m, d=25m, h/d=0.200, d=30m, h/d=0.333, d=100m, h/d=0.800, Fn=0.05*.**



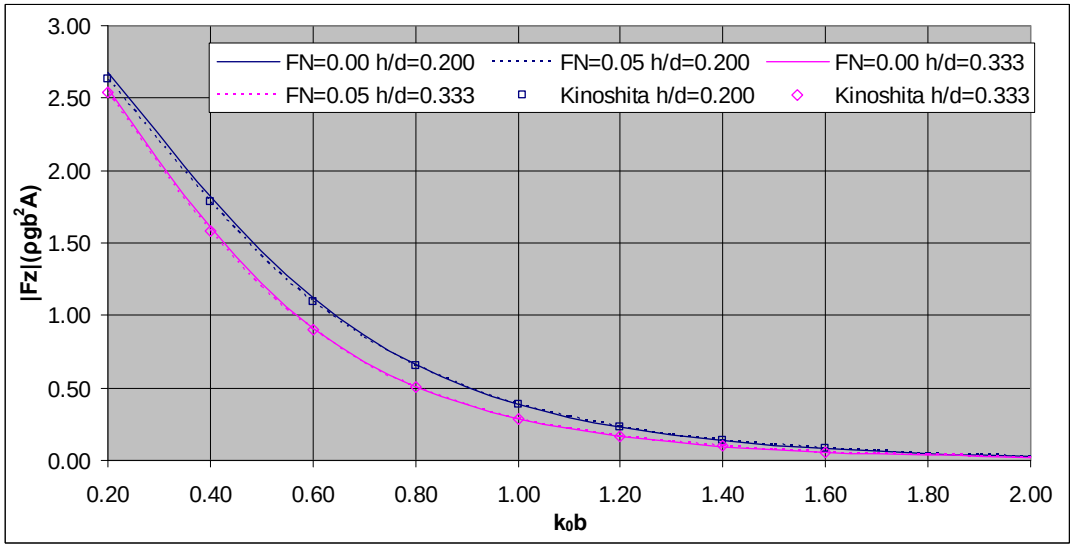
Σχήμα 5.4. 6: Μέτρο της κατακόρυφης δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο $|F_z|/\rho_w g(H/2)b^2$, *h=b*, *β*=0°, *b=10m, d=20m, h/d=0.5* παρουσία ρεύματος και κύματος



Σχήμα 5.4. 7: Μέτρο της κατακόρυφης δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο $|F_z|/\rho_w g(H/2)b^2$, *h=b*, *β*=0° , *b=10m, d=10m, h/d=0.5*, παρουσία ρεύματος και κύματος



Σχήμα 5.4. 8: Μέτρο της κατακόρυφης δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο $|F_z|/\rho_w g(H/2)b^2$**, *h=b, β=0°, b=10m, d=20m, h/d=0.125, 0.250, 0.375, 0.500, Fn=0.05.***



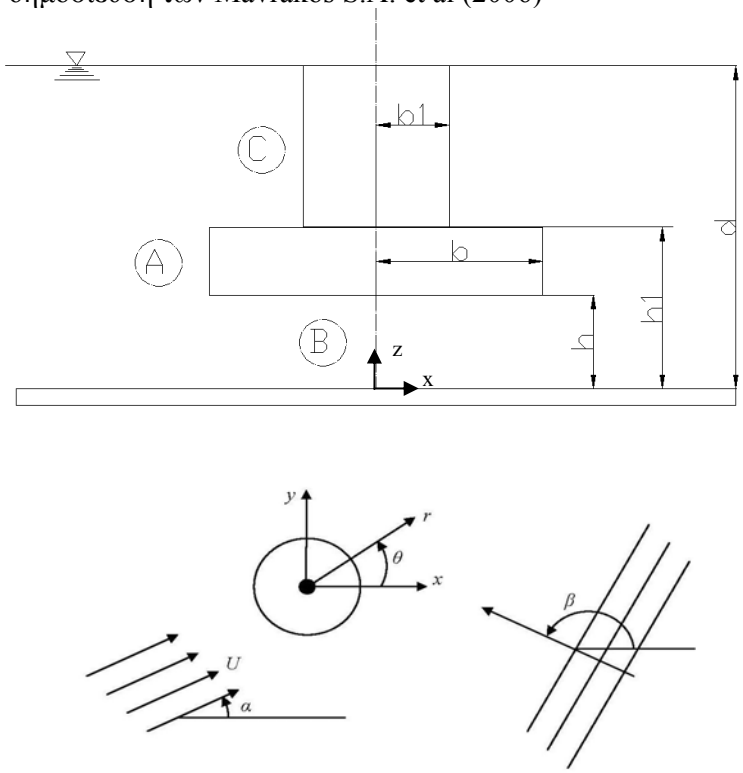
Σχήμα 5.4. 9: Μέτρο της κατακόρυφης δύναμης πρώτης τάξης, σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο $|F_z|/\rho_w g(H/2)b^2$**, *h=b, β=0° b=10m, d=25m, h/d=0.200, d=30m, h/d=0.333, Fn=0.05.***

5.5. Διατύπωση του υδροδυναμικού προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος- ρεύματος- σύνθετο κατακόρυφο αξονοσυμμετρικό σώμα

5.5.1. Πεδίο ροής προερχόμενο από την αλληλεπίδραση κυματισμών βαρύτητας και θαλασσίου ρεύματος

Η διατύπωση του προβλήματος, παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4.1 της παρούσας διδακτορικής διατριβής, μαζί με τη μεθοδολογία υπολογισμού του δυναμικού της μόνιμης ροής για την περίπτωση κατακόρυφων αξονοσυμμετρικών σωμάτων (βλέπε Κεφάλαιο 4.2).

Η ιδέα, με βάση την οποία επιλύθηκε το υδροδυναμικό πρόβλημα που παρουσιάζεται στη παρούσσα παράγραφο, ιδιάιτερα σε ότι αφορά στη κατασκευή της συνάρτησης Green προήλθε από τη δημοσίευση των Mavrakos S.A. et al (2006)



Σχήμα 5.5. 1: Σκαριφηματική αναπαράσταση κυλινδρικού σώματος σε πεδίο ροής στο οποίο συνυπάρχουν μονοχρωματικοί κυματισμοί βαρύτητας και θαλάσσιο ρεύμα

Το συνολικό δυναμικό ταχύτητας του εξεταζόμενου πεδίου ροής θα προέρχεται από την υπέρθεση των επιμέρους συνιστωσών του:

$$\Phi = U\left(\bar{\phi} + r\cos(\theta - \alpha)\right) + \varphi \qquad (5.5.1)$$

Όπου:

(i) $Ur\cos(\theta-\alpha)$ **το δυναμικό του προσπίπτοντος ρεύματος**

(ii) $U\bar{\phi}(r,\theta,z)$ **το δυναμικό της μόνιμης ροής λόγω της ροής του ρεύματος**

(iii) $\varphi(r,\theta,z;t)$ **το χρονικά εξαρτώμενο δυναμικό που περιγράφει τον προσπίπτοντα κυματισμό και την προκαλούμενη διαταραχή λόγω της παρουσίας του σώματος**

Οι οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $\bar{\phi}$ και φ, περιγράφονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις (4.1.10), (4.1.11) και (4.1.9), που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 4.1. και έχουν αναπαραχθεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες, μέσω των σχέσεων (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4). Μακριά από το σώμα που η διαταραχή είναι μηδενική ισχύει η (5.1.5).

5.5.2. Προσπίπτοντες και περιθλώμενοι κυματισμοί

Το συνολικό δυναμικό εξ' αιτίας του προσπίπτοντος κυματισμού γράφεται:

$$\varphi(r,\theta,z;t)=\mathrm{Re}\left\{\left(\varphi^{I}+\varphi^{D}\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \tag{5.5.2}$$

όπου οι δείκτες I και D συμβολίζουν τα δυναμικά πρόσπτωσης και περίθλασης αντίστοιχα. Επιπλέον ω είναι η συχνότητα συνάντησης, η οποία διαφέρει από τη συχνότητα του κυματισμού πρόσπτωσης ω_0, λόγω της παρουσίας του ρεύματος.

$$\omega=\omega_0+Uk_0\cos\gamma \tag{5.5.3}$$

Η συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας η οποία θα πρέπει να ικανοποιείται από το δυναμικό περίθλασης φ^D μόνο, περιγράφεται από την Εξ. (5.1.3) λαμβάνοντας υπόψη ότι στο άπειρο η τελευταία θα πρέπει να ικανοποιείται μόνο από το δυναμικό του προσπίπτοντος κυματισμού καθώς και το γεγονός ότι η διαταραχή του ρεύματος εκφυλίζεται πολύ μακριά από το σώμα. Η τελική συνθήκη θα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}-\nu_0\varphi^D+\varphi_z^D-\mathrm{i}\tau_0&\left(\begin{array}{l}2\bar{\phi}_r\varphi_r^D+\dfrac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta\varphi_\theta^D+2\varphi_r^D\cos(\theta-\alpha)-\dfrac{2}{r}\varphi_\theta^D\sin(\theta-\alpha)\\-\bar{\phi}_{zz}\varphi^D+2k_0\cos(\beta)\varphi^D\end{array}\right)\\&=\mathrm{i}\tau_0\left(2\bar{\phi}_r\varphi_r^I+\frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta\varphi_\theta^I-\bar{\phi}_{zz}\varphi^I\right),\quad z=h\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Το υδροδυναμικό πρόβλημα της αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος με ένα κατακόρυφο αξονοσυμμετρικό σώμα, θα μπορέσει να λυθεί επακριβώς, μετά τον ακριβή υπολογισμό του δυναμικού φ^D. Το δυναμικό περίθλασης φ^D, ικανοποιεί επίσης την εξίσωση του Laplace, τη συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον πυθμένα, ενώ τα δυναμικά ταχύτητας $\varphi^I+\varphi^D$ ικανοποιούν την απαίτηση της μηδενικής ταχύτητας στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος.

Ο τρόπος προσδιορισμού του δυναμικού περίθλασης φ^D βασίζεται στην ανάλυσή του σε σειρά διαταραχών ως προς την αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος τ_0. Κατά συνέπεια λαμβάνοντας μόνο τον μη γραμμικό όρο το δυναμικό ταχυτήτων φ^D γράφεται ως εξής:

$$\varphi^D = \varphi_0^D + \mathrm{i}\,\tau_0 \varphi_1^D \tag{5.5.5}$$

Με την εισαγωγή της Εξ. (5.5.12) στην Εξ. (5.5.11), αμελώντας τους μη γραμμικούς όρους $O(\tau^2)$ και διατηρώντας τους όρους $O(\tau^0)$ και $O(\tau^1)$ και τέλος εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης ως προς το την αδιάστατη ταχύτητα του ρεύματος λαμβάνονται τα εξής:

$$-\nu_0 \varphi_0^D + \varphi_{0z}^D = 0, \quad z = h \tag{5.5.6}$$

$$-\nu_0 \varphi_1^D + \varphi_{1z}^D = 2\bar{\phi}_r \varphi_r^I + \frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta \varphi_\theta^I - \bar{\phi}_{zz}\varphi^I$$

$$+2\bar{\phi}_r \varphi_{0r}^D + \frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta \varphi_{0\theta}^D + 2\varphi_{0r}^D \cos(\theta - \alpha) - \frac{2}{r}\varphi_{0\theta}^D \sin(\theta - \alpha) \tag{5.5.7}$$

$$-2ik_0 \cos(\beta - a)\phi_0^D - \bar{\phi}_{zz}\varphi_0^D, \quad z = h$$

Επιπλέον, τα δυναμικά φ_0^D και φ_1^D πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace και τη συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον πυθμένα για z=0. Αφού λοιπόν τα φ_0^D και φ_1^D ικανοποιούν την ομογενή συνθήκη (Εξ (5.5.13)) και την μη ομογενή (Εξ. (5.5.14)) συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια αντίστοιχα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το φ_0^D ικανοποιεί την μη ομογενή συνθήκη στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος, ενώ το φ_1^D ικανοποιεί την ομογενή. Οπότε τα δυναμικά περίθλασης φ_0^D και φ_1^D μπορούν να παραχθούν από την επίλυση των παρακάτω συστημάτων:

$$\frac{\partial \Psi_m^B}{\partial r}\Big|_{r=b} = \frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}\Big|_{r=b}, \text{ στο όριο } 0 \le z \le h \tag{5.5.8}$$

$$\Psi_m^B\big|_{r=b} = \Psi_m^A\big|_{r=b}, \text{ στο όριο } 0 \le z \le h \text{ (συνθήκη συνέχειας στα όρια των χωρίων)} \tag{5.5.9}$$

$$\frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0, \text{ στο όριο } h \le z \le h_1 \tag{5.5.10}$$

$$\frac{\partial \Psi_m^A}{\partial r}\Big|_{r=b} = \frac{\partial \Psi_m^\Gamma}{\partial r}\Big|_{r=b}, \text{ στο όριο } h_1 \le z \le d \tag{5.5.11}$$

$$\Psi_m^A\big|_{r=b} = \Psi_m^\Gamma\big|_{r=b}, \text{ στο όριο } h_1 \le z \le d \tag{5.5.12}$$

Για το εξωτερικό πεδίο, πρέπει να ισχύουν και τα παρακάτω (πεδίο Α):

$$\nabla^2 \varphi_1^D = 0, \quad r \geq b, \quad 0 \leq z \leq h \tag{5.5.13}$$

$$\begin{aligned} -\nu_0 \varphi_1^D + \varphi_{1z}^D &= 2\bar{\phi}_r \varphi_r^I + \frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta \varphi_\theta^I - \bar{\phi}_{zz}\varphi^I + 2\bar{\phi}_r \varphi_{0r}^D + \frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta \varphi_{0\theta}^D \\ &+ 2\varphi_{0r}^D \cos(\theta - \alpha) - \frac{2}{r}\varphi_{0\theta}^D \sin(\theta - \alpha) - \bar{\phi}_{zz}\varphi_0^D, \quad r \geq b \end{aligned} \tag{5.5.14}$$

$$\varphi_{1z}^D = 0, \quad r \geq b \tag{5.5.15}$$

$$\varphi_{1r}^D = 0, \quad r = b, \quad 0 \leq z \leq h_1 \tag{5.5.16}$$

Για το από πάνω πεδίο, πρέπει να ισχύουν και τα παρακάτω (πεδίο Γ):

$$\nabla^2 \varphi_1^D = 0, \quad b_1 \leq r \leq b, \quad h_1 \leq z \leq h \tag{5.5.17}$$

$$\begin{aligned} -\nu_0 \varphi_1^D + \varphi_{1z}^D &= 2\bar{\phi}_r \varphi_r^I + \frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta \varphi_\theta^I - \bar{\phi}_{zz}\varphi^I + 2\bar{\phi}_r \varphi_{0r}^D + \frac{2}{r^2}\bar{\phi}_\theta \varphi_{0\theta}^D \\ &+ 2\varphi_{0r}^D \cos(\theta - \alpha) - \frac{2}{r}\varphi_{0\theta}^D \sin(\theta - \alpha) - \bar{\phi}_{zz}\varphi_0^D, \quad b_1 \leq r \leq b \end{aligned} \tag{5.5.18}$$

$$\varphi_{1z}^D = 0, \quad b_1 \leq r \leq b \tag{5.5.19}$$

$$\varphi_{1r}^D = 0, \quad r = b_1, \quad h_1 \leq z \leq h \tag{5.5.20}$$

Είναι προφανές ότι τα παραπάνω συστήματα, θα πρέπει να επιλυθούν ξεχωριστά. Είναι επίσης φανερό ότι υπολογίζοντας πρώτα τον όρο του φ_0^D, σε δεύτερο στάδιο θα αντικατασταθεί στο σύστημα των εξισώσεων για την παραγωγή του δυναμικού της διαταραχής του κυματισμού από το σώμα. Αυτό βέβαια μπορεί να γίνει εάν γνωρίζουμε και την έκφραση του δυναμικού φ^I και της διαταραχής από το ρεύμα $\bar{\phi}$. Το δυναμικό φ^I δίνεται από την Εξ. (5.1.7) η οποία σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων τροποποιείται στην (5.1.22). Το δυναμικό $\bar{\phi}^{(A)}$ του εξωτερικού πεδίου, έχει υπολογιστεί στο Κεφάλαιο 4.3 και δίνεται από τη σχέση (4.3.3). Το δυναμικό $\bar{\phi}^{(B)}$ του εσωτερικού πεδίου, έχει υπολογιστεί στο Κεφάλαιο 4.3 και δίνετε από τη σχέση (4.3.1) και το δυναμικό του από πάνω πεδίου $\bar{\phi}^{(\Gamma)}$ δίνεται από τη σχέση (4.3.5).

5.5.3. Αναλυτικός υπολογισμός των συντελεστών Fourier

Αναλύοντας περαιτέρω τις Εξ. (5.4.9)-(5.4.12) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το φ_0^D μπορεί να επιλυθεί από ένα σύστημα το οποίο περιγράφει το πρόβλημα περίθλασης γύρω από έναν κύλινδρο χωρίς την παρουσία ρεύματος. Ο υπολογισμός του φ_0^D ,έχει παρουσιαστεί αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο και δίνεται από τη σχέσεις (2.2.4), (2.2.10) και (2.3.14).

5.5.4. Επίλυση του δυναμικού της διαταραχής φ_1^D, στο εξωτερικό πεδίο.

5.5.4.1. Μετασχηματισμός των μη ομογενών όρων σε σειρές.

Για να επιλυθεί επακριβώς το υδροδυναμικό πρόβλημα της αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος, θα πρέπει όπως είναι λογικό, να βρεθεί μια έκφραση για το δυναμικό της διαταραχής το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος των Εξ. (5.5.13)-(5.5.16). Αυτό είναι και το πιο δύσκολο κομμάτι ως προς την επίλυσή του, γιατί περιλαμβάνει τον μη ομογενή όρο στη συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας. Ο συζευγμένος μη ομογενής όρος μπορεί να θεωρηθεί ως μια διανομή πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια η οποία εκτείνεται ως το άπειρο και προκαλείται από το steady state δυναμικό $\overline{\phi}$, το δυναμικό πρόσπτωσης του κυματισμού φ^I και το δυναμικό περίθλασης φ_0^D . Από την ανάλυση που έχει γίνει στις παραπάνω παραγράφους, όλοι οι προηγούμενα αναφερόμενοι όροι είναι γνωστοί. Για να διευκολύνουμε την διαδικασία της ακριβούς επίλυσης-έκφρασης του όρου φ_1^D, ο μη ομογενής όρος στην Εξ. (5.5.14) μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια πιο απλή έκφραση, γράφοντας τα δυναμικά υπό μορφή σειρών. Με όλα τα δυναμικά γνωστά, μετά από εκτενείς μετασχηματισμούς η οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας Εξ. (5.5.14) τροποποιείται στην ακόλουθη:

$$-\nu_0\varphi_1^D + \varphi_{1z}^D = \tilde{q}^{(A)}{}_m(r,\theta) = -\mathrm{i}\omega_0 \frac{H}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^m q^{(A)}{}_m(r)e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.5.21}$$

όπου η $q^{(A)}{}_m(r)$ είναι μια αρκετά εκτενής αδιάστατη παράσταση η οποία περιγράφει την ακτινική μεταβολή της ενεργούς διανομής της πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια. Η λεπτομερής αναγραφή της αποφεύγεται λόγω του μεγέθους της.

5.5.4.2. Ημιαναλυτική διατύπωση του δυναμικού της διαταραχής φ_1^D, στο εξωτερικό πεδίο

Η έκφραση η οποία θα ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στον πυθμένα και την ελεύθερη επιφάνεια, θα είναι η ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε και στο Κεφάλαιο 5.1.3.2.

5.5.4.3. Κατασκευή της συνάρτησης Green

Η συνάρτηση Green που θα χρησιμοποιήσουμε, θα είναι και πάλι η ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5.1.3.3.

Οπότε καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση για το δυναμικό περίθλασης φ_1^D, στο εξωτερικό πεδίο:

$$\varphi_1^D = -i\omega_0 \frac{H}{2} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(z) Z_j(h) \int_1^{\infty} Q_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\xi}{b}\right) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.5.22}$$

$$Q_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) = \frac{b^2}{h^2}\frac{\xi}{b} q_m\left(\frac{\xi}{b}\right) G_{mj}\left(\frac{r}{b};\frac{\xi}{b}\right) \tag{5.5.23}$$

5.5.5. Επίλυση του δυναμικού της διαταραχής φ_1^D, στο από πάνω πεδίο.

5.5.5.1. Μετασχηματισμός των μη ομογενών όρων σε σειρές.

Για να επιλυθεί επακριβώς το υδροδυναμικό πρόβλημα της αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος, θα πρέπει όπως είναι λογικό, να βρεθεί μια έκφραση για το δυναμικό της διαταραχής το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος των Εξ. (5.5.17)-(5.5.20). Αυτό είναι και το πιο δύσκολο κομμάτι ως προς την επίλυσή του, γιατί περιλαμβάνει τον μη ομογενή όρο στη συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας. Ο συζευγμένος μη ομογενής όρος μπορεί να θεωρηθεί ως μια διανομή πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια η οποία εκτείνεται ως το άπειρο και προκαλείται από το steady state δυναμικό $\overline{\phi}$, το δυναμικό πρόσπτωσης του κυματισμού φ^I και το δυναμικό περίθλασης φ_0^D. Από την ανάλυση που έχει γίνει στις παραπάνω παραγράφους, όλοι οι προηγούμενα αναφερόμενοι όροι είναι γνωστοί. Για να διευκολύνουμε την διαδικασία της ακριβούς επίλυσης-έκφρασης του όρου φ_1^D, ο μη ομογενής όρος στην Εξ. (5.5.18) μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια πιο απλή έκφραση, γράφοντας τα δυναμικά υπό μορφή σειρών. Με όλα τα δυναμικά γνωστά, μετά από εκτενείς μετασχηματισμούς η οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας Εξ. (5.5.18) τροποποιείται στην ακόλουθη:

$$-\nu_0 \varphi_1^D + \varphi_{1z}^D = \tilde{q}^{(\Gamma)}{}_m(r,\theta) = -\mathrm{i}\omega_0 \frac{H}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m q^{(\Gamma)}{}_m(r) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.5.24}$$

όπου η $q^{(\Gamma)}{}_m(r)$ είναι μια αρκετά εκτενής αδιάστατη παράσταση η οποία περιγράφει την ακτινική μεταβολή της ενεργούς διανομής της πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια. Η λεπτομερής αναγραφή της αποφεύγεται λόγω του μεγέθους της.

5.5.5.2. Ημιαναλυτική διατύπωση του δυναμικού της διαταραχής φ_1^D, στο από πάνω πεδίο

Μία γενική έκφραση η οποία θα ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στον πυθμένα και την ελεύθερη επιφάνεια, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\varphi_1^D = \frac{\cosh(\beta(z-h_1))}{\nu_0 \cosh(\beta(z-h_1))}\tilde{q}^{(\Gamma)}{}_m(r,\theta) + \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\mathrm{j}=0}^{\infty} R_{mj}(r) Z_j(z) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.5.25}$$

όπου

$$\beta \tanh(\beta(d-h_1)) = 2\nu_0 \tag{5.5.26}$$

Επιπλέον, η Εξ. (5.5.27) πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, η οποία σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από την

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^D}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1^D}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi_1^D}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1^D}{\partial z^2} = 0 \tag{5.5.27}$$

Εισάγοντας την Εξ. (5.5.25) στην (5.5.27), εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης ως προς *m* και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνικότητας των κατακόρυφων ιδιοσυναρτήσεων *Zj*(*z*) η Εξ. (5.5.27) απλοποιείται στην παρακάτω:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{mj}(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi_{mj}(r)}{\mathrm{d}r} - \left(\frac{m^2}{r^2} + a_j^2\right)\Phi_{mj}(r) = -B_j \tilde{q}^{(\mathrm{B})}{}_m(r)\left(\beta^2 + a_j^2\right) \tag{5.5.28}$$

Όπου

$$B_j = \frac{1}{d-h_1}\int_{h_1}^{d} \frac{\cosh(\beta(z-h_1))}{\nu_0 \cosh(\beta(z-h_1))} Z_j(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{d-h_1}\frac{1}{\beta^2 + a_j^2} Z_j(d) \tag{5.5.29}$$

θέτοντας $\Phi_{mj}(r) = R_{mj}(r) + B_j \tilde{q}^{(\Gamma)}{}_m(r)$ και αναπτύσσοντας το ολοκλήρωμα B_j, η Εξ. (5.5.28) καταλήγει στην ακόλουθη:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{mj}(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi_{mj}(r)}{\mathrm{d}r} - \left(\frac{m^2}{r^2} + a_j^2\right)\Phi_{mj}(r) = -\frac{r}{d-h_1} Z_j(d)\tilde{q}^{(\Gamma)}{}_m(r) \tag{5.5.30}$$

Η επίλυση της Εξ. (5.5.30) απαιτεί την επίλυση του συσχετιζόμενου προβλήματος Sturm-Liouville. Κατά συνέπεια, αναζητούμε μια λύση της μορφής

$$\Phi_{mj}(r) = \frac{Z_j(d)}{d-h_1}\int_b^{\infty} \xi \tilde{q}^{(\Gamma)}{}_m(\xi) G_{mj}(r;\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.5.31}$$

όπου $G_{mj}(r;\xi)$ είναι η μονοδιάστατη συνάρτηση του Green.

5.5.5.3. Κατασκευή της συνάρτησης Green

Η πρώτη απαίτηση για τη συνάρτηση του Green, είναι ότι θα πρέπει να ικανοποιεί το ομογενές πρόβλημα.

$$\left(rG'_{mj}\right)' - \left(\frac{m^2}{r} + a_j^2 r\right)G_{mj} = 0 \tag{5.5.32}$$

Η G_{mj} θα πρέπει να είναι συνεχής στο $r=\xi$ και η G'_{mj} θα πρέπει να είναι ασυνεχής στο $r=\xi$, με ασυνέχεια

$$G'_{mj}(r;r+) - G'_{mj}(r;r-) = -\frac{1}{r} \tag{5.5.33}$$

Ο τόνος στην Εξ. (5.5.32) συμβολίζει παραγώγιση ως προς την ανεξάρτητη συντεταγμένη r. Τέλος η G_{mj} θα πρέπει να ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες με την $\Phi_{mj}(r)$ στα όρια $r=b_1$, $r=b$. Σαν αποτέλεσμα τώρα, η G'_{mj} θα πρέπει να είναι ίση με το μηδέν για $r=b$ και $r=b_1$ και θα πρέπει να είναι φραγμένη στο άπειρο.

Υπενθυμίζεται ότι η Εξ. (5.5.32) είναι η διαφορική εξίσωση ορισμού της τροποποιημένης συνάρτησης Bessel. Οι ιδιότητες των συναρτήσεων Green (Hildebrand, 1962, Dettman, 1988) και οι οριακές συνθήκες στα $r=b$, $r=b_1$, αλλά και στο άπειρο αντικαθίστανται στην Εξ. (5.5.32) και δίνουν

$$G_{mj}(r;\xi) = \frac{1}{\gamma_{mj} - \delta_{mj}}\left[\mathrm{I}_m(a_j r) - \delta_{mj}\mathrm{K}_m(a_j r)\right]\left[\mathrm{I}_m(a_j \xi) - \gamma_{mj}\mathrm{K}_m(a_j \xi)\right], \quad b_1 < \xi < r \tag{5.5.34}$$

$$G_{mj}(r;\xi) = \frac{1}{\gamma_{mj} - \delta_{mj}}\left[\mathrm{I}_m(a_j r) - \gamma_{mj}\mathrm{K}_m(a_j r)\right]\left[\mathrm{I}_m(a_j \xi) - \delta_{mj}\mathrm{K}_m(a_j \xi)\right], \quad r < \xi < b \tag{5.5.35}$$

Με

$$\gamma_{mj} = \frac{\mathrm{I}'_m(a_j b_1)}{\mathrm{K}'_m(a_j b_1)}, \quad \delta_{mj} = \frac{\mathrm{I}'_m(a_j b)}{\mathrm{K}'_m(a_j b)} \tag{5.5.36}$$

Είναι προφανές ότι η παραπάνω μορφή της συνάρτησης Green, ικανοποιεί και την ιδιότητα της συμμετρίας $G_{mj}(r;\xi) = G_{mj}(\xi;r)$.

Κάνοντας χρήση της ανάλυσης που αναφέρθηκε στο παρόν κεφάλαιο, καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση για το δυναμικό περίθλασης φ_1^D, στο από πάνω πεδίο:

$$\varphi_1^D = -i\omega_0 \frac{H}{2} d \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(z) Z_j(d) \int_1^{\infty} Q_{mj}\left(\frac{r}{b_1};\frac{\xi}{b_1}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\xi}{b_1}\right) e^{\mathrm{i}m\theta} \tag{5.5.37}$$

$$Q_{mj}\left(\frac{r}{b_1};\frac{\xi}{b_1}\right) = \frac{b_1^{\,2}}{d(d-h_1)}\frac{\xi}{b_1} q_m\left(\frac{\xi}{b_1}\right) G_{mj}\left(\frac{r}{b_1};\frac{\xi}{b_1}\right) \tag{5.5.38}$$

5.5.6. Αναλυτικός υπολογισμός των δυνάμεων πρώτης τάξης

Οριζόντια δύναμη πρώτης τάξης

Η γραμμική υδροδυναμική πίεση δίνεται στη γενικότητα της από τον παρακάτω τύπο

$$p = -\rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{5.5.39}$$

με ρ_w την πυκνότητα του νερού και Φ το συνολικό δυναμικό που μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\Phi = \mathrm{Re}\left\{\left(\varphi^I + \varphi_0^D + \mathrm{i}\,\tau\varphi_1^D\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \tag{5.5.40}$$

Τελικά η οριζόντια δύναμη πρώτης τάξης σε κύλινδρο μπορεί στην γενική της μορφή να γραφεί ως εξής (Malenica et al., 1995):

$$F_x = \rho \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U\nabla\phi_0\nabla\Phi\right) n_x \mathrm{d}S \tag{5.5.41}$$

Η Εξ. (5.5.41) μας δίνει σε αδιάστατη μορφή την ακριβή έκφραση της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης σε κύλινδρο:

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{F_x}{\rho g b^2 A} = -2i\nu_0 d\pi \frac{\tau}{\tau_0} & \left\{\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(A)} N_j^{-1/2} \frac{1}{a_j b}\left(\sin(a_j h_1) - \sin(a_j h)\right) \\ &+ \frac{a_0 b_1}{a_0 b}\sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(\Gamma)} N_{a_j}^{-1/2} \frac{1}{a_j b} \sin\left(a_j d - a_j h_1\right)\end{aligned}\right\} \\
& 2\pi\tau_0\nu_0 d \sum_{j=0}^{\infty} z_j(d) N_j^{-1/2} \frac{1}{a_j b}\int_1^{\infty} Q_{1j}^{(A)}(b)\left(\sin(a_j h_1) - \sin(a_j h)\right) \\
& +4i\pi\tau_0\left(\frac{a_0 d}{a_0 b}\right)\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j}^{(A)} N_j^{-1/2} \frac{1}{a_j b}\left(\sin(a_j h_1) - \sin(a_j h)\right)\cos a \\
& +4i\pi\tau_0\left(\frac{a_0 d}{a_0 b}\right)\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j}^{(\Gamma)} \mathrm{M}_j^{-1/2} \frac{1}{\mu_j b}\left(\sin(\mu_j d) - \sin(\mu_j h_1)\right)\cos a \\
& 2\pi\tau_0\nu_0 d\left(\frac{a_0 b_1}{a_0 b}\right)\sum_{j=0}^{\infty} z_j(d) \mathrm{M}_j^{-1/2} \frac{1}{\mu_j b}\int_1^{\infty} Q_{1j}^{(\Gamma)}(b)\left(\sin(\mu_j d - \mu_j h_1)\right)
\end{aligned}} \tag{5.5.42}$$

Στην Εξ. (5.5.41) n_x είναι η μοναδιαία x-συνιστώσα η οποία έχει φορά προς το σώμα.

Κατακόρυφη δύναμη πρώτης τάξης

Η οριζόντια δύναμη πρώτης τάξης σε κύλινδρο μπορεί στην γενική της μορφή να γραφεί ως εξής:

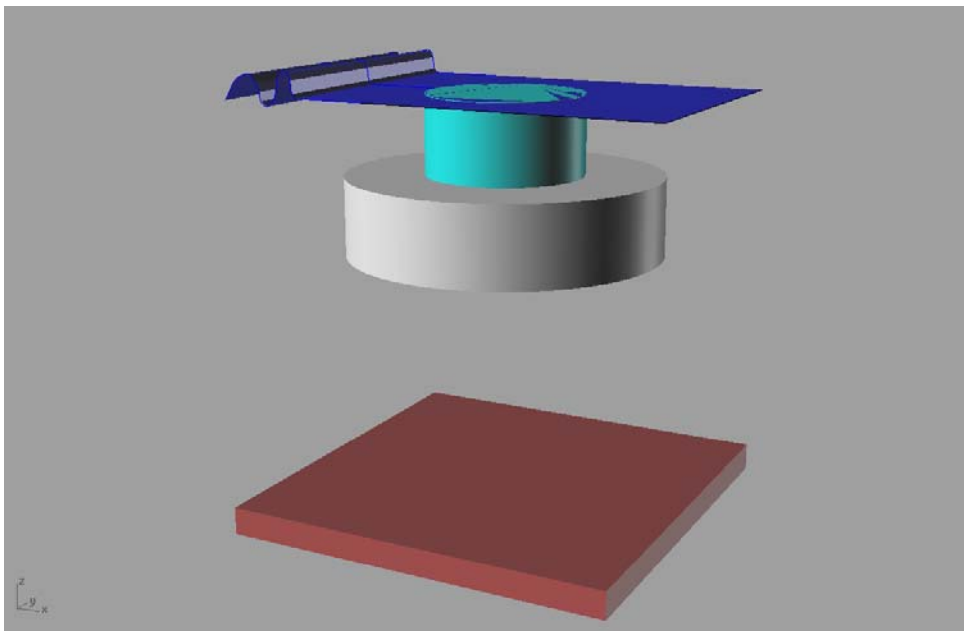
$$F_x = \rho \iint_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \nabla \phi_0 \nabla \Phi\right) n_x \mathrm{d}S \tag{5.5.43}$$

Στην Εξ. (5.4.43) n_z είναι η μοναδιαία z-συνιστώσα η οποία έχει φορά προς τα έξω.

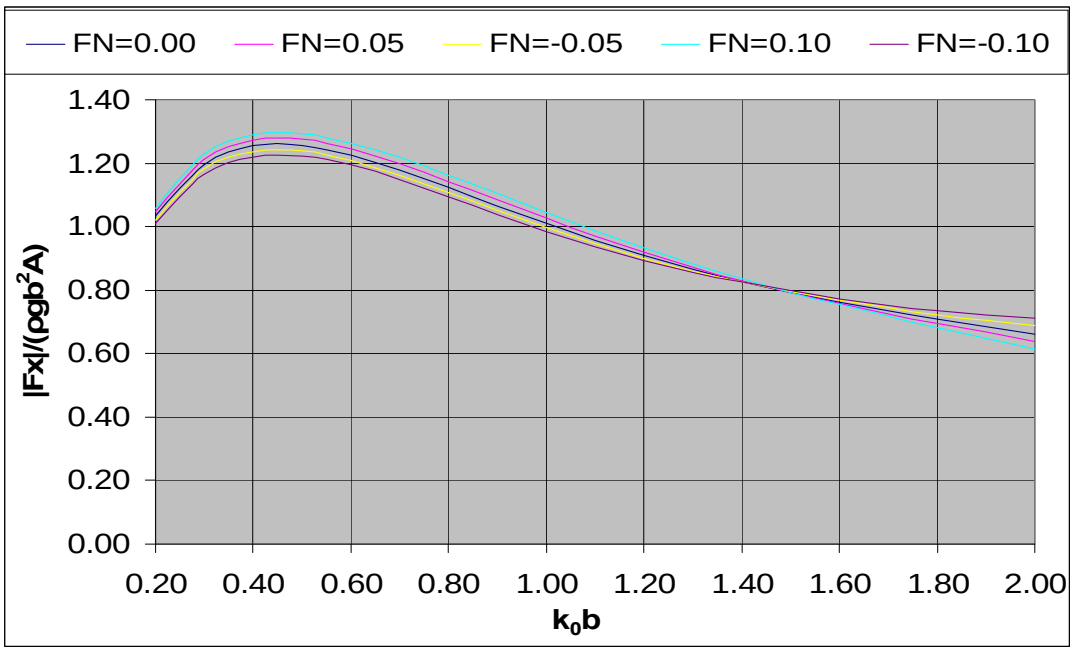
Το πρώτο κομμάτι της κατακόρυφης δύναμης, με άκρα ολοκλήρωσης [*0, b*]. έχει υπολογιστεί αναλυτικά και έχει παρουσιαστεί στη σχέση (5.4.24). Ομοίως υπολογίζεται και το ολοκλήρωμα με άκρα ολοκλήρωσης [*b1, b*].

$$\begin{aligned}
\frac{F_z}{\rho g b^2 A} = {} & 2\pi \frac{\tau}{\tau_0} \nu_0 d \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} F_{0j}^{(\Gamma)} N_{a_j}^{-1/2} \frac{1}{a_j b} \frac{I_1(a_j b)\left[1 - \frac{I_1(a_j b_1)}{I_1(a_j b)} \frac{K_1(a_j b)}{K_1(a_j b_1)}\right]}{I_0(a_j b)\left[1 + \frac{I_1(a_j b_1)}{I_0(a_j b)} \frac{K_0(a_j b)}{K_1(a_j b_1)}\right]} \right\} + \\
& - \tau_0 \pi \cos\alpha \frac{k_0 d}{k_0 b} \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(\Gamma)} \mathrm{Z_j}(h_1) \int_{b_1}^{b} \frac{1}{\frac{r}{b}} \Re'_{1j}(r) d\left(\frac{r}{b}\right) \\
& + \tau_0 \pi \cos\alpha \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(\Gamma)} \mathrm{Z_j}(h_1) \int_{b_1}^{b} \frac{r}{b} \Re_{1j}(r) d\left(\frac{r}{b}\right) \\
& + \tau_0 \pi \cos\alpha \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(\Gamma)} \mathrm{Z_j}(h_1) d \int_{b_1}^{b} \Re'_{1j}(r) dr \\
& - \tau_0 \pi \cos\alpha \frac{k_0 d}{k_0 b} \sum_{j=0}^{\infty} F_{1j}^{(\Gamma)} \mathrm{Z_j}(h_1) \frac{1}{b} \int_{b_1}^{b} r^2 \Re_{1j}(r) dr \\
& - 4\pi i \tau \nu_0 d \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{Z_j}(d) \mathrm{Z_j}(h_1) \int_{b_1}^{b} Q_{0j}^{(\Gamma)}(r) \frac{r}{b} d\left(\frac{r}{b}\right)
\end{aligned} \tag{5.4.44}$$

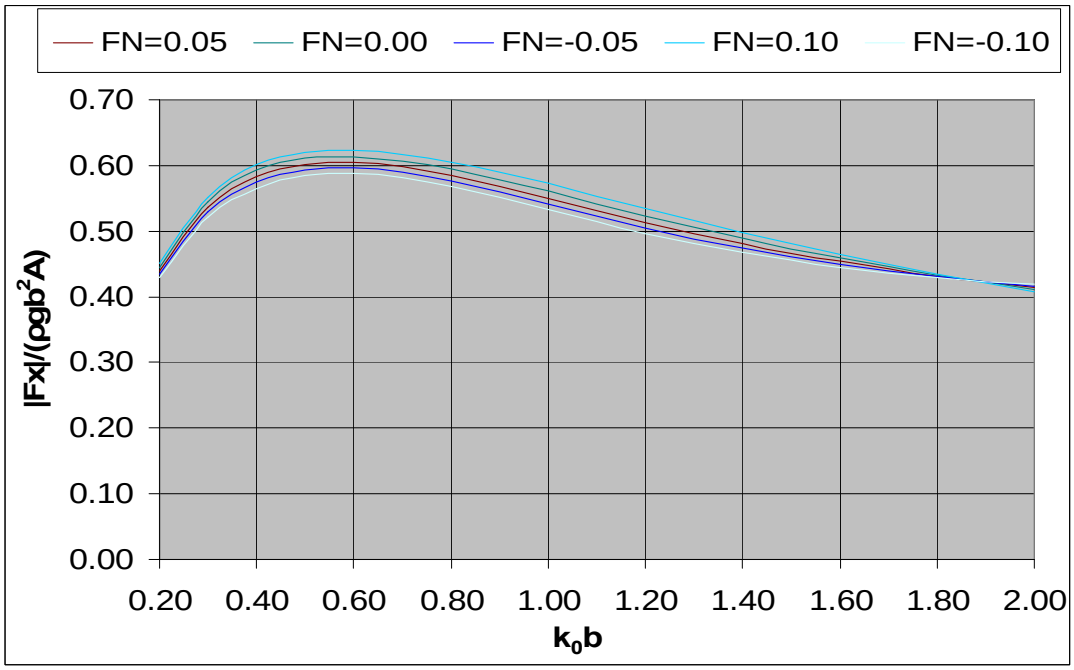
Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται αποτελέσματα για τις πρωτοτάξιες δυνάμεις διέγερσης που ασκούνται σε έναν κατακόρυφο κύλινδρο. Οι υπολογισμοί έγιναν με χρήση 5 σταθερών Fourier και 10 ιδιοσυναρτήσεων, θεωρώντας ότι οι προσπίπτοντες κυματισμοί προσέκρουαν στην κατασκευή υπό γωνία 0°. Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι η παρουσία του ρεύματος μικρής ταχύτητας αλλάζει τη συνολική υδροδυναμική δύναμη που ασκείται πάνω στον κύλινδρο.



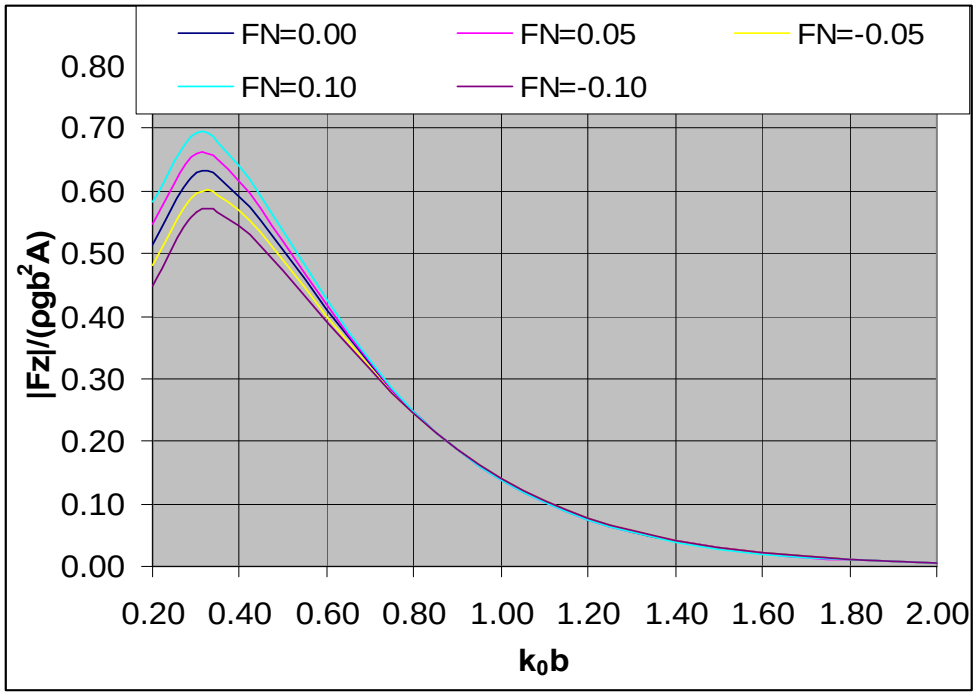
Τρισδιάστατη αναπαράσταση, σύνθετου κατακόρυφου κυλινδρικού σώματος



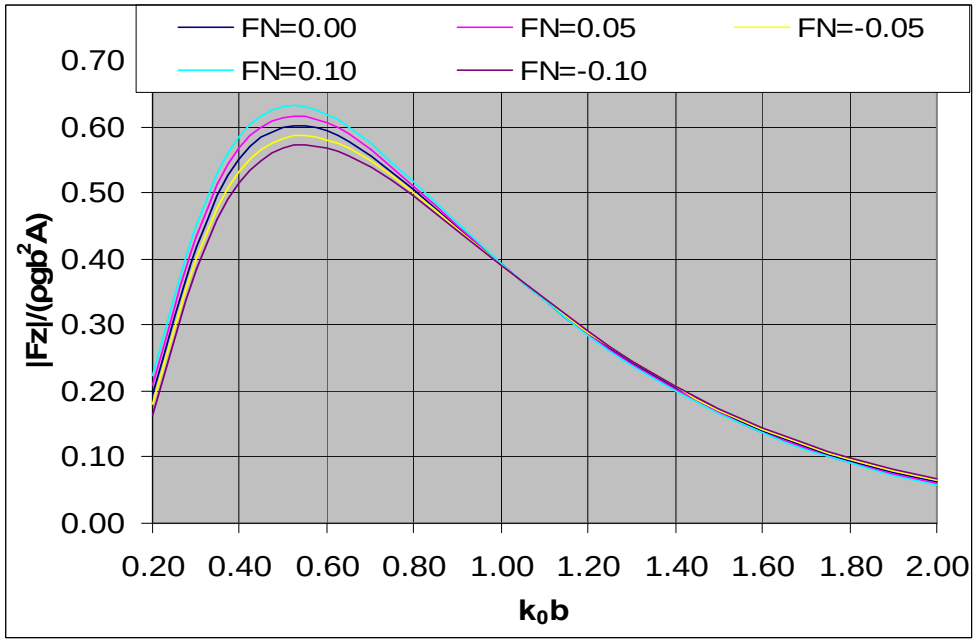
Σχήμα 5.5. 2: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα, με χαρακτηριστικά: d=100m, b=10m, b_1=5m, h=50m, h_1=68.75m (h/d=0.5, h_1/d=0.6875, b_1/b=0.333)



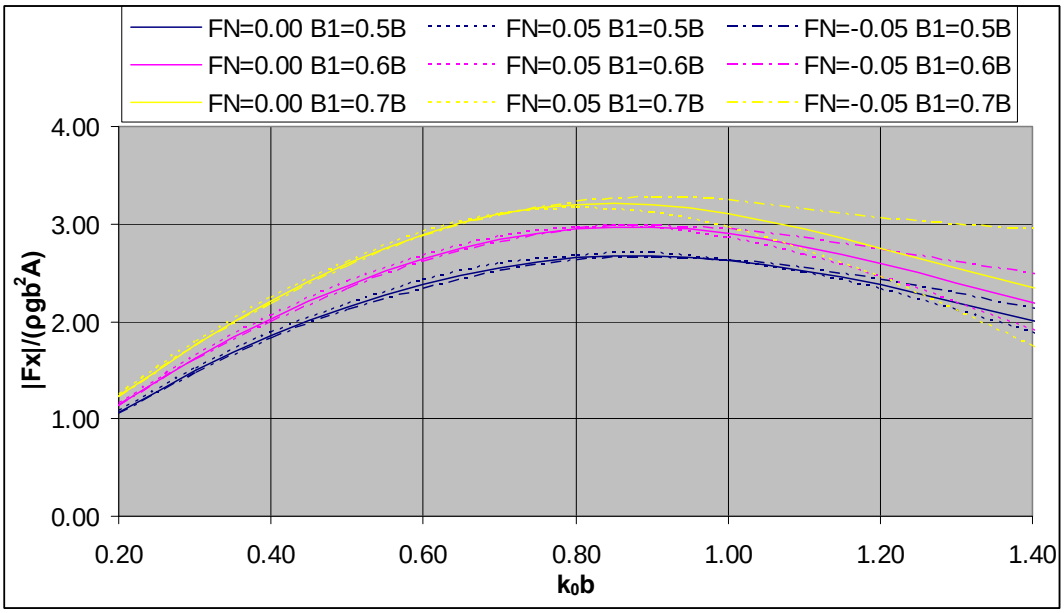
Σχήμα 5.5. 3: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα, με χαρακτηριστικά: d=100m, b=20m, b_1=5m, h=50m, h_1=60m (h/d=0.5, h_1/d=0,6, b_1/b=0.250)



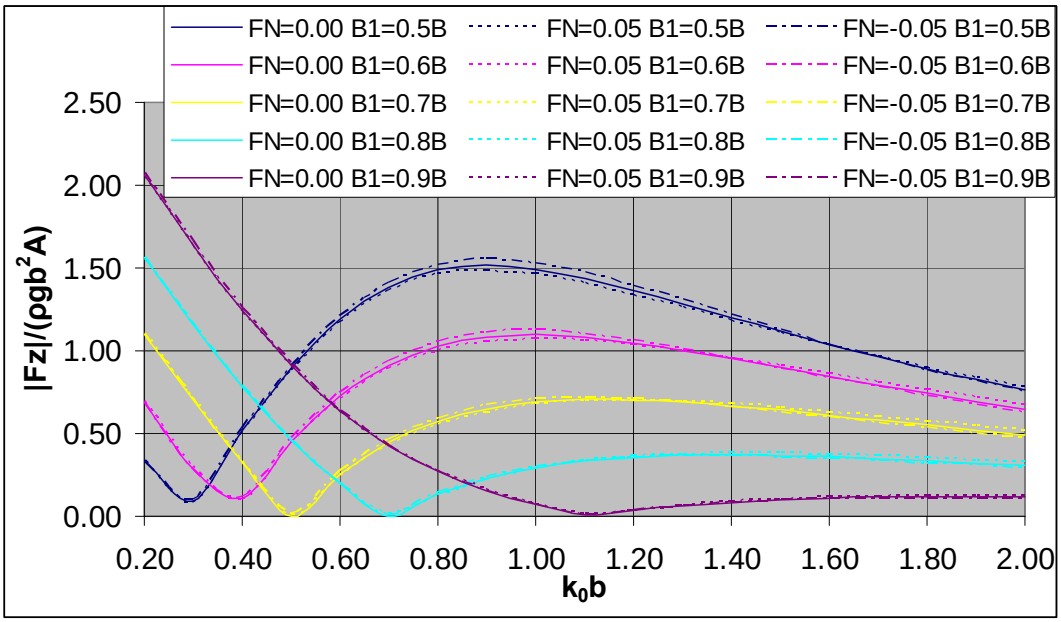
Σχήμα 5.5. 4: Μέτρο της κατακόρυφης δύναμης πρώτης τάξης. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα, με χαρακτηριστικά: d=100m, b=10m, b_1=3m, h=50m, h_1=68.75m (h/d=0.5, h_1/d=0.6875, b_1/b=0.300)



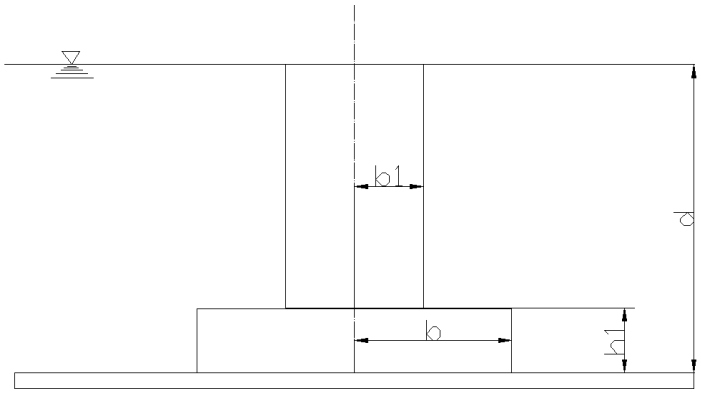
Σχήμα 5.5. 5: Μέτρο της κατακόρυφης δύναμης πρώτης τάξης.. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα, με χαρακτηριστικά: d=100m, b=20m, b_1=5m, h=50m, h_1=60m (h/d=0.5, h_1/d=0,6, b_1/b=0.250)



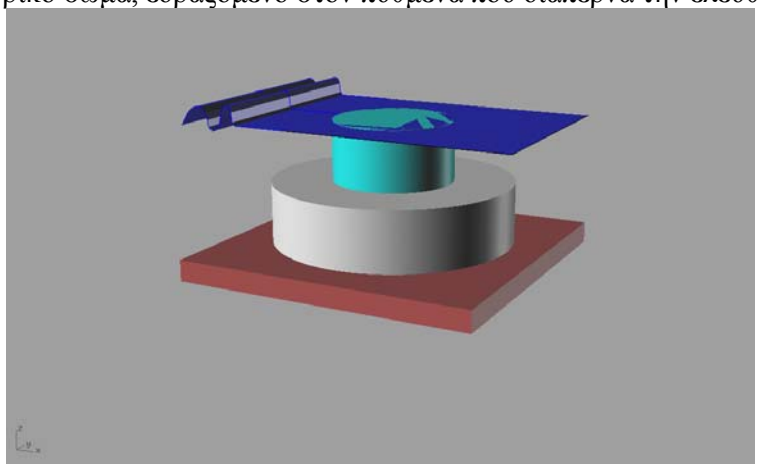
Σχήμα 5.5. 6: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης, σε σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα με *b/d*=0.333, *h/d*=0.500, h_1/d=0.833 και b_1/b=0.5, 0.6, 0.7.



Σχήμα 5.5. 7: Μέτρο της κατακόρυφης δύναμης πρώτης τάξης, σε σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα με *b/d*=0.333, *h/d*=0.500, h_1/d=0.833 και b_1/b=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9.

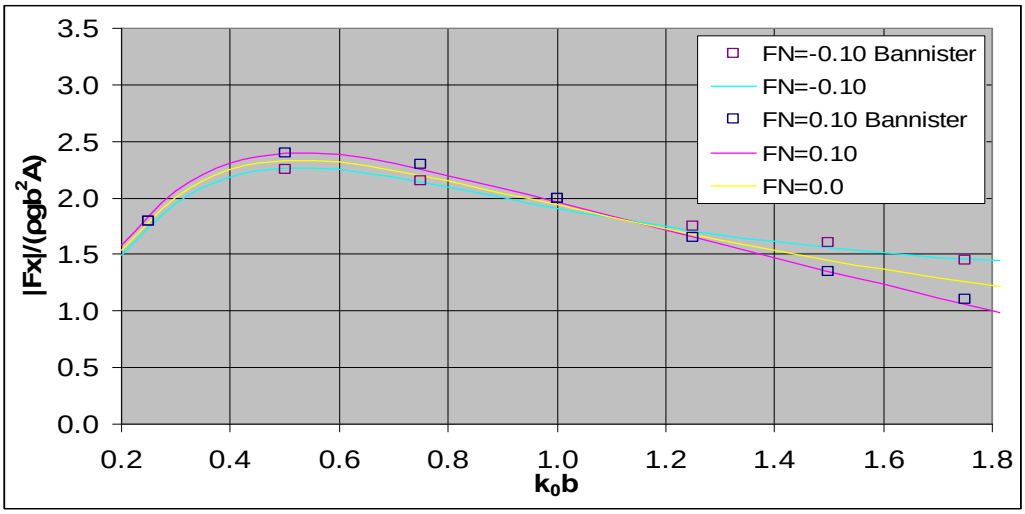


Σύνθετο κυλινδρικό σώμα, εδραζόμενο στον πυθμένα που διαπερνά την ελεύθερη επιφάνεια.



Τρισδιάστατη αναπαράσταση σύνθετου κυλινδρικού σώματος, εδραζόμενου στον πυθμένα που διαπερνά την ελεύθερη επιφάνεια

Η παραπάνω γεωμετρία, έχει συγκριθεί με τη δημοσίευση του *Bannister G., (1993)*, δίνοντας πολύ καλά αποτελέσματα.



Σχήμα 5.6. 1: Μέτρο της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης σε έναν σύνθετο κατακόρυφο κύλινδρο $|F_x|/\rho_w g(H/2)b^2$, *h=b*, *β*=0°,με χαρακτηριστικά *b=10m, d=30m,* $b_1/b=0.5$, *h/d=0,* $h_1/d=0.333$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI:
Αλληλεπίδραση κύματος- ρεύματος σε συστοιχίες κατακόρυφων αξονοσυμμετρικών σωμάτων.

Αλληλεπίδραση πολλαπλών κυλίνδρων- η μέθοδος της αντιστροφής του πίνακα

6.1. Αλληλεπίδραση πολλαπλών πακτωμένων κυλίνδρων- Θεωρία δυναμικού

6.1.1. Γενική Περιγραφή του Προβλήματος

Από τη θεωρία δυναμικού, γνωρίζουμε ότι:

για τον μηδενικό όρο της διαταραχής φ^D ισχύει η οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια στην ακόλουθη μορφή

$$\left\{\left(-\nu_0+\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi^D=0\right\}_{z=d} \tag{6.1.1}$$

Επίσης θα πρέπει σε κάθε σώμα της διάταξης να ισχύει

$$\frac{\partial\varphi^D}{\partial r}=-\frac{\partial\varphi^I}{\partial r} \tag{6.1.2}$$

στο όριο $r=b$ ώστε να ικανοποιείται η κινηματική συνθήκη πάνω στο σώμα. Προφανώς θα πρέπει να ικανοποιείται και η οριακή συνθήκη στον οριζόντιο πυθμένα.

Ο προσπίπτων κυματισμός φ^I σε τυχαίο σώμα k της συστοιχίας ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (x, y) μπορεί να λάβει την μορφή

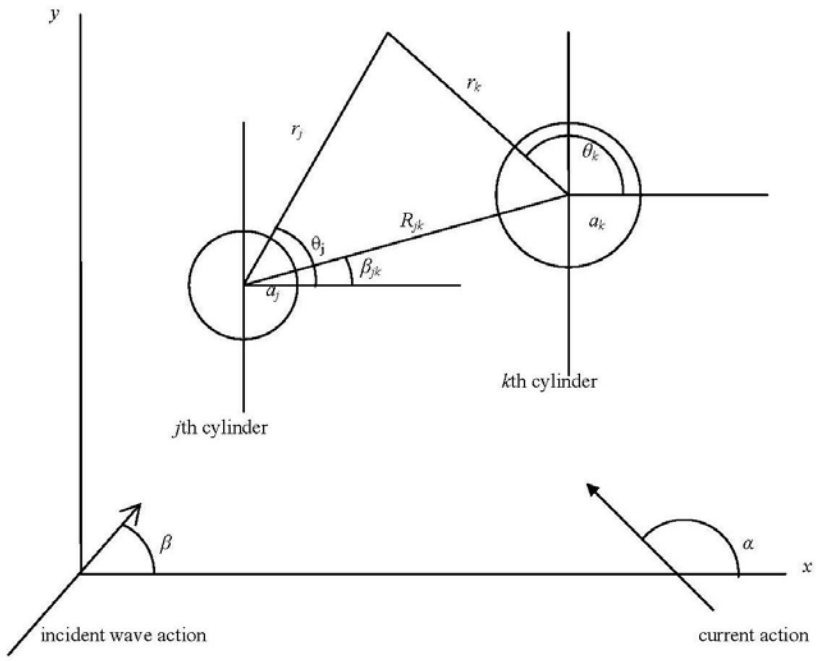
$$\varphi^I=-i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0z)}{\cosh(k_0d)}I_k\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m\left(k_0r_k\right)e^{im(\pi/2-\beta)}e^{im\theta_k} \tag{6.1.3}$$

Όπου:
d είναι το βάθος του νερού
g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας
b_k είναι η ακτίνα του κυλίνδρου k
A είναι το πλάτος του κυματισμού
k_0 είναι ο αριθμός κύματος
β είναι η γωνία πρόσπτωσης του κύματος
J_m είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και m τάξης και
I_k θα δίνεται από την

$$I_k=e^{ik_0\left(X_k\cos\beta+Y_k\sin\beta\right)} \tag{6.1.4}$$

όπου X_k και Y_k είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου του κυλίνδρου k ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο Σχήμα (6.1.1).
Για την επίλυση του προβλήματος περίθλασης του κυματικού πεδίου όπως αυτό τροποποιείται από κάθε σώμα της διάταξης θα ακολουθηθεί η διαδικασία που περιγράφεται

από τους *Linton and Evans (1990)*. Η διαδικασία αυτή θα παρέχει τα δυναμικά φ^D για κάθε ένα από τα σώματα της διάταξης είτε ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είτε ως προς το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων κάθε σώματος.



Σχήμα 6.1. 1: Κάτοψη δύο κυλίνδρων υπό την επίδραση ρεύματος και κύματος

Για σταθερά εδραζόμενο κύλινδρο *j* το δυναμικό περίθλασης μηδενικής τάξης μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\varphi^{(j)} = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)}\frac{J'_m(k_0 b_j)}{H'_m(k_0 b_j)}H_m(k_0 r_j)e^{im\theta_j} \tag{6.1.5}$$

Στην Εξ. (6.1.5) H_m είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και *m* τάξης, J'_m είναι η παράγωγος της συνάρτησης *J*, H'_m είναι η παράγωγος της συνάρτησης Hankel πρώτου είδους και *m* τάξης και $A_m^{(j)}$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές Fourier.
Οι τόνοι στην προηγούμενη εξίσωση συμβολίζουν παραγώγιση ως προς το όρισμα.

Κατά συνέπεια το συνολικό δυναμικό περίθλασης θα γράφεται ως

$$\varphi = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(k)}\frac{J'_m(k_0 b_k)}{H'_m(k_0 b_k)}H_m(k_0 r_k)e^{im\theta_k} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)}\frac{J'_m(k_0 b_j)}{H'_m(k_0 b_j)}H_m(k_0 r_j)e^{im\theta_j}\right\} \tag{6.1.6}$$

Θα συνίσταται δηλαδή από το δυναμικό περίθλασης του σώματος *k* συν τα αντίστοιχα δυναμικά όλων των σωμάτων *N* πλην του *k*. Η παραπάνω σχέση δεν εκφράζεται ως προς ενιαίο σύστημα συντεταγμένων. Λύση σε αυτό το πρόβλημα μπορεί να δοθεί μέσω του

προσθετικού θεωρήματος των συναρτήσεων Bessel (*Abramowitz and Stegun, 1971*) και συγκεκριμένα της συνάρτησης Hankel πρώτου είδους.

$$H_m(k_0 r_j)e^{im\theta_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}\left(k_0 R_{jk}\right) J_n\left(k_0 r_k\right) e^{i(m-n)\beta_{jk}} e^{in\theta_k} \tag{6.1.7}$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη στην Εξ. (6.1.6) και αντιστρέφοντας τους δείκτες *m* και *n* λαμβάνεται η ακόλουθη

$$\varphi = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{A_m^{(k)}\frac{J'_m(k_0 b_k)}{H'_m(k_0 b_k)}H_m(k_0 r_k) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(j)} H_{n-m}\left(k_0 R_{jk}\right) J_m\left(k_0 r_k\right) e^{i(n-m)\beta_{jk}}\right\} e^{im\theta_k} \tag{6.1.8}$$

Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (6.1.2) και εξισώνοντας τις αρμονικές *m* παράγεται το ακόλουθο σύστημα ως προς τους αγνώστους συντελεστές Fourier

$$A_m^{(k)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(j)} H_{n-m}\left(k_0 R_{jk}\right) e^{i(n-m)\beta_{jk}} = -I_k e^{im(\pi/2-\beta)} \tag{6.1.9}$$

Αυτό το σύστημα επιλυόμενο θα δώσει τους συντελεστές Fourier και κατά συνέπεια τα δυναμικά περίθλασης για κάθε σώμα ως προς το δικό του κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Αντικαθιστώντας την Εξ. (6.1.9) στην Εξ. (6.1.8) το συνολικό δυναμικό περίθλασης μηδενικής τάξης για το σώμα *k* γράφεται στην εξής μορφή

$$\varphi_D^{(k)} = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{A_m^{(k)}\left(\frac{J'_m(k_0 b_k)}{H'_m(k_0 b_k)}H_m(k_0 r_k) - J_m\left(k_0 r_k\right)\right) - I_k J_m\left(k_0 r_k\right) e^{im(\pi/2-\beta)}\right\} e^{im\theta_k} \tag{6.1.10}$$

Εάν επιθυμούμε το συνολικό δυναμικό στο οποίο συμμετέχει και ο προσπίπτων κυματισμός, στην προηγούμενη θα πρέπει να προστεθεί και η Εξ. (6.1.3). Τελικά το συνολικό δυναμικό μηδενικής τάξης λαμβάνει την εξής απλή μορφή

$$\varphi^{(k)}\left(r_k,\theta_k,z\right) = -i\frac{gA}{\omega_0}\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{A_m^{(k)}\left(\frac{J'_m(k_0 b_k)}{H'_m(k_0 b_k)}H_m(k_0 r_k) - J_m\left(k_0 r_k\right)\right)\right\} e^{im\theta_k} \tag{6.1.11}$$

Επαλήθευση

Στην περίπτωση όπου θέταμε *N=1*, δηλαδή στην περίπτωση του μεμονωμένου κυλίνδρου, θα είχαμε ότι:

$$A_m^1 = -I_1 e^{im(\pi/2-\beta)}$$

Με αντικατάσταση αυτού, στις σχέσεις (6.1.11), (6.1.8) και (6.1.5) και θεωρώντας χάριν ευκολίας ότι το κέντρο του κυλίνδρου βρίσκεται στο σημείο (0,0) και ότι η γωνία πρόσπτωσης του κύματος είναι μηδέν, τότε θα λάβουμε ότι:

$$A_m^1 = -i^m$$

Δηλαδή θα καταλήξουμε στον γνωστό τύπο υπολογισμού των *MacCamy και Fuchs (1954)*.

6.1.2. Υπολογισμός της οριζόντιας δύναμης πρώτης τάξης

Τέλος, η οριζόντια δύναμη σε κάθε σώμα *k* της διάταξης μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω σχέση

$$F_x = -i\omega_0 \rho \iint_{S_B} \varphi^{(k)}\left(b_k, \theta_k, z\right) \cos\theta_k b_k \mathrm{d}\theta_k \mathrm{d}z \tag{6.1.12}$$

όπου S_B είναι η βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα της παραπάνω η οριζόντια δύναμη σε αδιάστατη μορφή γίνεται

$$\boxed{\frac{F_x}{\rho g A b_k^2} = \frac{-2i\tanh\left(k_0 d\right)}{k_0^2 b_k^2} \frac{A_{-1}^{(k)} - A_1^{(k)}}{H_1'(k_0 b_k)}} \tag{6.1.13}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί και η δύναμη στην y διεύθυνση ως

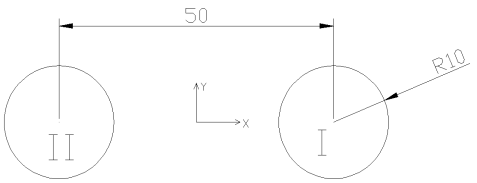
$$\boxed{F_y = -i\omega_0 \rho \iint_{S_B} \varphi^{(k)}\left(b_k, \theta_k, z\right) \sin\theta_k b_k \mathrm{d}\theta_k \mathrm{d}z} \tag{6.1.14}$$

Οι συγκρίσεις έγιναν με τις δημοσιεύσεις των *Emmerhoff et al.* (1992), καθώς και με το πρόγραμμα HAMVAB (Mavrakos, 1996).

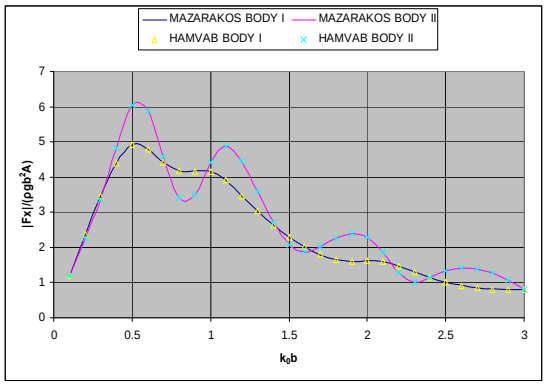
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται ακολούθως αφορούν διατάξεις δύο, τριών και τεσσάρων σταθερά εδραζόμενων κυλίνδρων ίδιου μεγέθους, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, σε κάτοψη, αλλά και τρισδιάστατα.

Για τη συστοιχία των δύο κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 20m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 50m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (25m, 0m)
Σώμα II: (-25m, 0m)



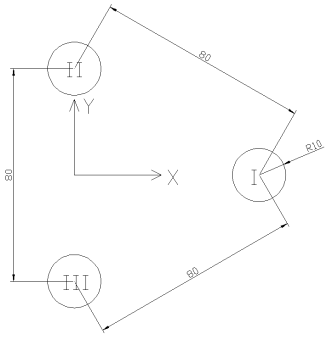
Σχήμα 6.1. 1: Διάταξη δύο όμοιων κυλίνδρων



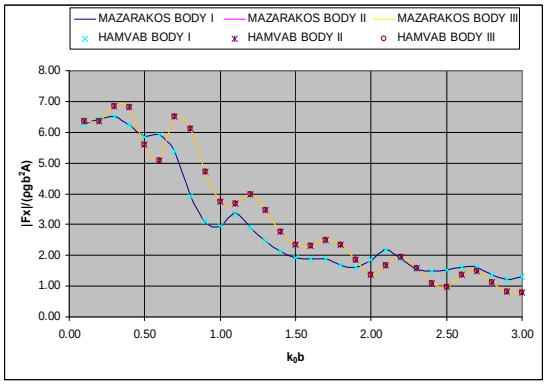
Σχήμα 6.1. 2: Διάταξη δύο όμοιων κυλίνδρων, οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης.

Για τη συστοιχία των τριών κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 400m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 80m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (69.28m, 0m)
Σώμα II: (0, 40)
Σώμα III: (0, -40m)



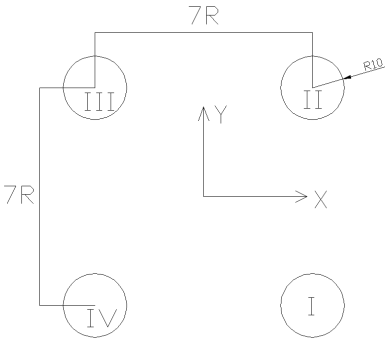
Σχήμα 6.1. 3: Διάταξη τριών όμοιων κυλίνδρων



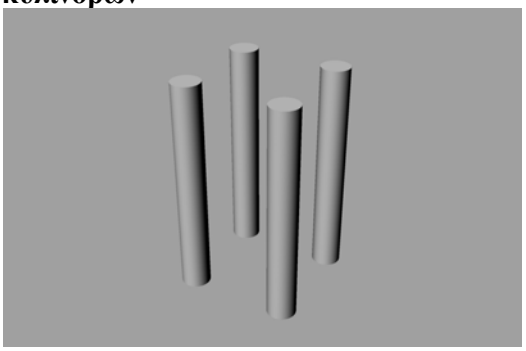
Σχήμα 6.1. 4: Διάταξη τριών όμοιων κυλίνδρων, οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης.

Για τη συστοιχία των τεσσάρων κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

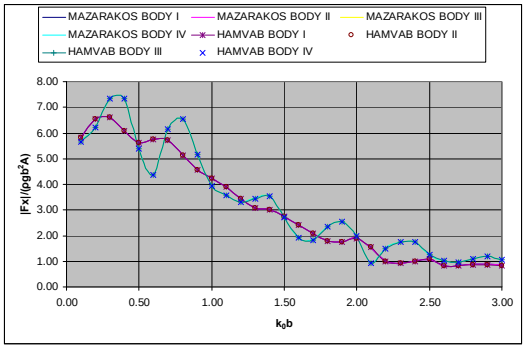
Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 150m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 70m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (34.335m, -34.335m)
Σώμα II: (34.335m, 34.335m)
Σώμα III: (-34.335m, 34.335m)
Σώμα IV: (-34.335m, -34.335m)



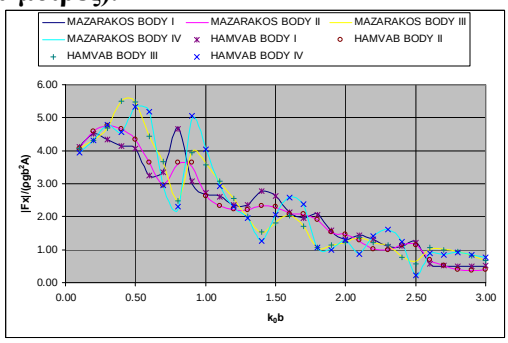
Σχήμα 6.1. 5: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων



Σχήμα 6.1. 6: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων (τρισδιάστατη αναπαράσταση)



Σχήμα 6.1. 7: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων, οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης (γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες).



Σχήμα 6.1. 8: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων, οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης (γωνία πρόσπτωσης κύματος 45 μοίρες).

6.1.3. Υπολογισμός της μέσης δύναμης έκπτωσης δεύτερης τάξης- Η μέθοδος της απ' ευθείας ολοκλήρωσης

Προφανώς με την έκφραση του δυναμικού γνωστή, ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία, όπως και στον υπολογισμό των δυνάμεων έκπτωσης δεύτερης τάξης, για ένα σώμα με τη μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης, θα έχουμε, ότι η δύναμη έκπτωσης σε κάθε σώμα *k* της διάταξης μπορεί να υπολογιστεί από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\boxed{\frac{F_x^{D1}}{\rho g b_k (H/2)^2} = \frac{-2}{\pi (k_0 b_k)} \left[\begin{array}{l} \left(1 - \dfrac{2k_0 d}{\sinh(2k_0 d)}\right) \Im \left\{ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^{(k)}}{H'_{m+1}(k_0 b_k) H'^{*}_m (k_0 b_k)} \right\} \\ + \dfrac{1}{(k_0 b_k)^2} \left(1 + \dfrac{2k_0 d}{\sinh(2k_0 d)}\right) \Im \left\{ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^{(k)} m(m+1)}{H'_{m+1}(k_0 b_k) H'^{*}_m (k_0 b_k)} \right\} \end{array} \right]} \tag{6.1.15}$$

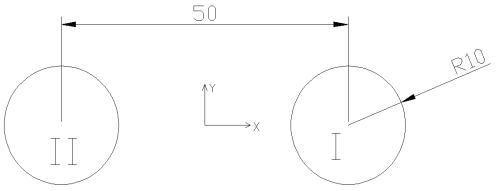
$$\boxed{\frac{F_x^{D2}}{\rho g b_k (H/2)^2} = \frac{4}{\pi (k_0 b_k)^2} \Im \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^{(k)}}{H'_{m+1}(k_0 b_k) H'^{*}_m (k_0 b_k)} \right\}} \tag{6.1.16}$$

Οι συγκρίσεις έγιναν με τις δημοσιεύσεις των Οι συγκρίσεις έγιναν με τις δημοσιεύσεις των *Emmerhoff et al. (1992)*, καθώς και με το πρόγραμμα HAMVAB (Mavrakos, S.A., 1996), το οποίο υπολογίζει τις δυνάμεις έκπτωσης με τη μέθοδο της μεταβολής της ορμής.

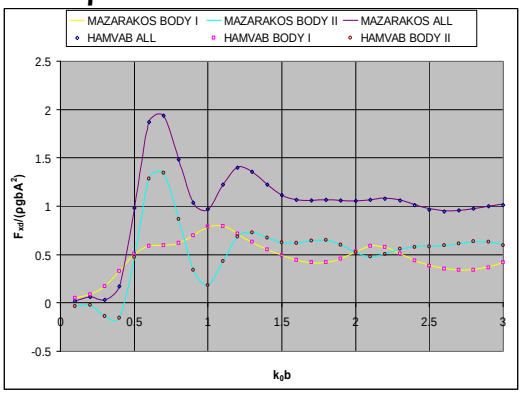
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται ακολούθως αφορούν διατάξεις δύο, τριών και τεσσάρων σταθερά εδραζόμενων κυλίνδρων ίδιου μεγέθους, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

Για τη συστοιχία των δύο κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 20m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 50m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (25m, 0m)
Σώμα II: (-25m, 0m)



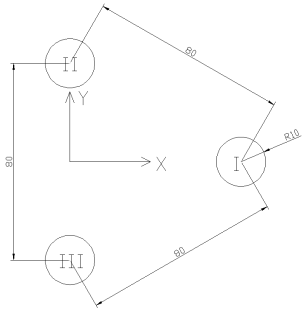
Σχήμα 6.1. 9: Διάταξη δύο όμοιων κυλίνδρων



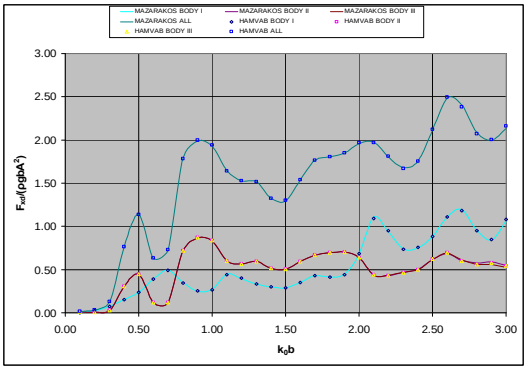
Σχήμα 6.1. 10: Διάταξη δύο όμοιων κυλίνδρων, μέσες οριζόντιες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης.

Για τη συστοιχία των τριών κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 400m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 80m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (69.28m, 0m)
Σώμα II: (0, 40)
Σώμα III: (0, -40m)



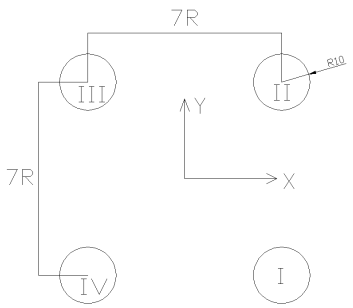
Σχήμα 6.1. 11: Διάταξη τριών όμοιων κυλίνδρων



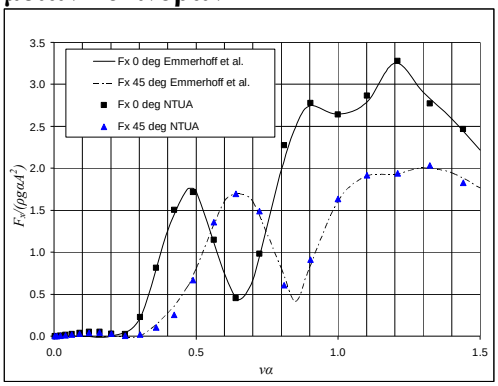
Σχήμα 6.1. 12: Διάταξη τριών όμοιων κυλίνδρων, μέσες οριζόντιες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης

Για τη συστοιχία των τεσσάρων κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

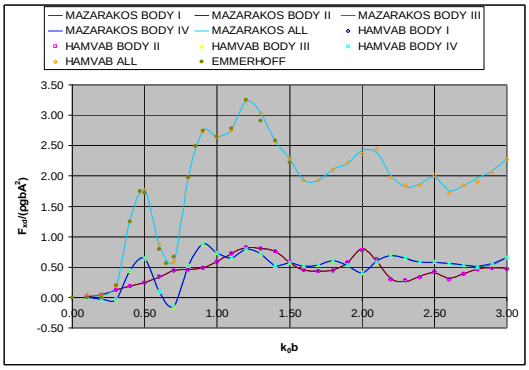
Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 150m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 70m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (34.335m, -34.335m)
Σώμα II: (34.335m, 34.335m)
Σώμα III: (-34.335m, 34.335m)
Σώμα IV: (-34.335m, -34.335m)



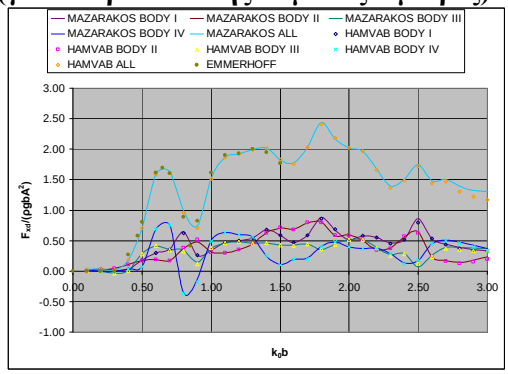
Σχήμα 6.1. 13: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων



Σχήμα 6.1. 16: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων, μέσες οριζόντιες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης (γωνίες πρόσπτωσης κύματος 0 και 45 μοίρες).



Σχήμα 6.1. 14: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων, μέσες οριζόντιες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης (γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες).



Σχήμα 6.1. 15: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων, μέσες οριζόντιες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης (γωνία πρόσπτωσης κύματος 45 μοίρες).

6.1.4. Υπολογισμός της μέσης ροπής έκπτωσης δεύτερης τάξης- Η μέθοδος της απ' ευθείας ολοκλήρωσης

Προφανώς με την έκφραση του δυναμικού γνωστή, ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία, όπως και στον υπολογισμό των δυνάμεων έκπτωσης δεύτερης τάξης, για ένα σώμα με τη μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης, θα έχουμε, ότι η ροπή έκπτωσης σε κάθε σώμα *k* της διάταξης μπορεί να υπολογιστεί από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{F^{\mathrm{I}}_{20_5}}{\rho g b_k^{\,2} \mathrm{A}^2} = -\frac{4}{\pi (k_0 b_k)^2}\left[\frac{d-e}{2 b_k^{\,2} k_0} - \frac{\tanh(k_0 d)}{(2 k_0 b_k)^2}\right] \Im\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left(1+\frac{(m+1)m}{(k_0 b_k)^2}\right)\frac{A_m^{(k)}}{H'_{m+1}(k_0 b_k)\bar{H}'_m\ (k_0 b_k)}\right\}$$
$$-\frac{4d(\frac{d}{2}-e)}{\pi (k_0 b_k) b_k^{\,2}\sinh(2k_0 d)} \Im\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(m+1)m}{(k_0 b_k)^2}-1\right)\frac{A_m^{(k)}}{H'_{m+1}(k_0 b_k)\bar{H}'_m\ (k_0 b_k)}\right\} \tag{6.1.17}$$

$$\frac{F^{\Gamma}_{20_5}}{\rho g b_k^{\,2} A^2} = \frac{4(d-e)}{\pi (k_0 b_k)^2 b_k} \Im\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m^{(k)}}{H'_{m+1}(k_0 b_k)\bar{H}'_m\ (k_0 b_k)}\right\}$$
$$\frac{F^{\Gamma}_{20_5}}{\rho g b_k^{\,2} A^2} = \frac{(d-e)}{b_k}\frac{F^{\Gamma}_{20_1}}{\rho g b_k A^2} \tag{6.1.18}$$

Με ω_0 τη συχνότητα του κύματος, k_0 τον αριθμό κύματος, *k* το *k* σώμα, *A* το πλάτος του κυματισμού, με ε_m=1 για m=0 και ε_m=2 για m>1, (m=0,1,2,3..), J_m είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και *m* τάξης, H_m είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και *m* τάξης. Ο τόνος αναφέρεται σε παραγώγιση ως προς το όρισμα και το * (ή άνω παύλα) δηλώνει το συζυγή μιγαδικού αριθμού.

6.2. Αλληλεπίδραση κύματος- ρεύματος σε συστοιχίες πολλαπλών αξονοσυμμετρικών σωμάτων

6.2.1. Γενική Περιγραφή του Προβλήματος

Η ανάλυση που ακολουθεί θεωρεί ότι η ταχύτητα του ρεύματος U είναι αρκετά μικρή ώστε ο αριθμός Strouhal $\tau_0=U\omega_0/g<<1$. Στην περίπτωση αυτή μέσω της συχνότητας συνάντησης

$$\omega = \omega_0 + Uk_0 \cos\gamma \text{ , } \gamma=\beta-\alpha \tag{6.2.1}$$

μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι $\tau\approx\tau_0$. Επιπρόσθετα, για τον μηδενικό όρο της διαταραχής φ_0^D ισχύει η οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια στην ακόλουθη μορφή (βλέπε και σχέση 5.1.15)

$$\left\{\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_0^D = 0\right\}_{z=d} \tag{6.2.2}$$

ενώ για τον όρο της διαταραχής πρώτης τάξης η αντίστοιχη οριακή συνθήκη σε κυλινδρικές συντεταγμένες γίνεται (βλέπε και σχέση 5.1.19)

$$\begin{aligned}\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_1^D &= \left(-2ik_0\cos\gamma + 2\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi_0^D \\ &+ \left(2\bar{\phi}_r\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right)\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

από την οποία έχει παραληφθεί ο όρος $-\bar{\phi}_{zz}\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right)$ δεδομένου ότι η διαταραχή του ρεύματος από το σώμα $\bar{\phi}$ είναι ανεξάρτητη του z (βλέπε και σχέση 5.1.23).

Επίσης θα πρέπει σε κάθε σώμα της διάταξης να ισχύουν

$$\frac{\partial\varphi_0^D}{\partial r_k} = -\frac{\partial\varphi^I}{\partial r_k} \tag{6.2.4}$$

και

$$\frac{\partial\varphi_1^D}{\partial r_k} = 0 \tag{6.2.5}$$

στο όριο $r=b$ ώστε να ικανοποιείται η κινηματική συνθήκη πάνω στο σώμα. Προφανώς θα πρέπει να ικανοποιείται και από τα δύο δυναμικά φ_0^D και φ_1^D η οριακή συνθήκη στον πυθμένα.

Με αναφορά τώρα στο Σχήμα 6.1.1, ο προσπίπτων κυματισμός φ^I σε τυχαίο σώμα k της συστοιχίας ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (x, y) μπορεί να λάβει την μορφή που έχει δοθεί από τη σχέση (6.1.3).

6.2.2. Επίλυση του Προβλήματος Μηδενικής Τάξης για τον Υπολογισμό του Δυναμικού φ_0^D

Για την επίλυση του προβλήματος περίθλασης του κυματικού πεδίου όπως αυτό τροποποιείται με την ύπαρξη του ρεύματος από κάθε σώμα της διάταξης θα ακολουθηθεί κατ' αρχήν η διαδικασία που περιγράφεται από τους *Linton and Evans (1990)*. Η διαδικασία αυτή θα παρέχει τα δυναμικά μηδενικής τάξης φ_0^D για κάθε ένα από τα σώματα της διάταξης είτε ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είτε ως προς το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων κάθε σώματος.

Το πρόβλημα αυτό έχει επιλυθεί αναλυτικά, στην προηγούμενη ενότητα (6.1).

6.2.3. Επίλυση του Προβλήματος Πρώτης Τάξης για τον Υπολογισμό του Δυναμικού φ_1^D

Για τον υπολογισμό του δυναμικού φ_1^D απαιτείται η γνώση του συνολικού δυναμικού $\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right)$ καθώς και του δυναμικού περίθλασης μηδενικής τάξης φ_0^D. Αυτά θα δίνονται αντίστοιχα για κάθε σώμα της διάταξης από την Εξ. (6.1.11) και την ακόλουθη η οποία προέρχεται μέσω της Εξ. (6.1.10)

$$\varphi_D^{(k)} = -i\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{A_m^{(k)}\left(Z_m^{(k)}H_m(k_0 r_k) - J_m(k_0 r_k)\right) - I_k J_m(k_0 r_k)e^{im(\pi/2-\beta)}\right\}e^{im\theta_k} \tag{6.2.6}$$

Επανερχόμενοι στην οριακή συνθήκη (6.2.3) της ελεύθερης επιφάνειας παρατηρείται ότι ο δεύτερος όρος του δεξιού μέρους

$$\left(2\bar{\phi}_r\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\varphi^I + \varphi_0^D\right)$$

τείνει πολύ μακριά από το σώμα στο μηδέν. Το ίδιο όμως δεν ισχύει και για τον πρώτο όρο

$$\left(-2ik_0\cos\gamma + 2\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi_0^D$$

ο οποίος μεταβάλλεται ασυμπτωτικά με το $r^{1/2}$ (Bannister, 1993). Κατά συνέπεια το θεώρημα του Green δεν μπορεί να εφαρμοστεί λαμβάνοντας υπόψη τον πλήρη μη ομογενή όρο.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος το δυναμικό διαταραχής πρώτης τάξης φ_1^D διασπάται ως εξής (Emmerhoff et al. 1992):

$$\varphi_1^D = \Psi + \psi \tag{6.2.7}$$

Για την πλήρη ικανοποίηση της οριακής συνθήκης της ελεύθερης επιφάνειας υιοθετούνται τα παρακάτω:

$$\left(-\nu_0+\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi=\left(-2ik_0\cos\gamma+2\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r}-2\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi_0^D \tag{6.2.8}$$

και

$$\left(-\nu_0+\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi=\left(2\bar{\phi}_r\frac{\partial}{\partial r}+2\frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\varphi^I+\varphi_0^D\right) \tag{6.2.9}$$

Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η διαταραχή του ρεύματος από κάθε σώμα θα δίνεται από την εξίσωση του δίπολου (Emmerhoff et al. 1992)

$$\bar{\phi}=\frac{b^2}{r}\cos(\theta-\alpha) \tag{6.2.10}$$

όπου α η γωνία πρόσπτωσης του ρεύματος (Σχήμα 6.1.1). Επίσης θα πρέπει και τα δύο δυναμικά ψ και Ψ να ικανοποιούν την κινηματική συνθήκη μηδενικής ταχύτητας πάνω στο σώμα

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \tag{6.2.11}$$

και

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}=0 \tag{6.2.12}$$

για $r=b$ και $0\leq z\leq d$.

Είναι προφανές ότι οι παραπάνω σχέσεις θα πρέπει να ισχύουν για κάθε σώμα της διάταξης ξεχωριστά.

6.2.4. Υπολογισμός του δυναμικού του κοντινού πεδίου (near field) ψ

Δεδομένου ότι ο μη ομογενής όρος της Εξ. (6.2.9) τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα το θεώρημα του Green. Προς τούτο ακολουθείται η διαδικασία που αναπτύχθηκε από τους *Malenica et al. (1999)* και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά για συστοιχίες κυλίνδρων και την επίλυση του σχετικού δευτεροτάξιου υδροδυναμικού προβλήματος διπλής συχνότητας.

Το θεώρημα του Green γράφεται για ένα σημείο έξω από το πεδίο του ρευστού

$$\iint_{S_B}\psi\,\partial G/\partial r\,dS=\iint_{S_F}GQ_D\,dS \tag{6.2.13}$$

όπου Q_D είναι ο μη ομογενής όρος της Εξ. (6.2.9)

$$Q_D=\left(2\bar{\phi}_r\frac{\partial}{\partial r}+2\frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\varphi^I+\varphi_0^D\right) \tag{6.2.14}$$

Η συνάρτηση Green *(Fenton, 1978)* γράφεται ως ανάπτυγμα ιδιοσυναρτήσεων ως εξής:

$$G = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{i}{2} C_0 \begin{pmatrix} H_m(a_0 r_k) J_m(a_0 \rho_k) \\ J_m(a_0 r_k) H_m(a_0 \rho_k) \end{pmatrix} f_0(z) f_0(\zeta) \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \begin{pmatrix} K_m(a_n r_k) I_m(a_n \rho_k) \\ I_m(a_n r_k) K_m(a_n \rho_k) \end{pmatrix} f_n(z) f_n(\zeta) \right\} e^{im(\theta_k - \vartheta_k)}, \quad \begin{pmatrix} r_k > \rho_k \\ r_k < \rho_k \end{pmatrix} \right. \tag{6.2.15}$$

όπου I_m και K_m είναι αντίστοιχα οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel m τάξης και πρώτου και δευτέρου είδους.

Στην Εξ. (6.2.15) οι ιδιοσυναρτήσεις στη z διεύθυνση θα δίνονται από

$$f_0(z) = \frac{\cosh(a_0 z)}{\cosh(a_0 d)} \tag{6.2.16}$$

και

$$f_n(z) = \frac{\cos(a_n z)}{\cos(a_n d)} \tag{6.2.17}$$

όπου a_n είναι οι ρίζες της τραπεζοειδούς εξίσωσης

$$\nu_0 = -a_n \tan(a_n d) \tag{6.2.18}$$

ενώ η a_0 αντιστοιχεί στη φανταστική ρίζα της προηγούμενης και θα βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης διασποράς

$$\nu_0 = a_0 \tanh(a_0 d) \tag{6.2.19}$$

Δεδομένου ότι το ν_0 υπολογίζεται με βάση τη θεμελιώδη συχνότητα του προσπίπτοντος κυματισμού και όχι τη συχνότητα συνάντησης θα ισχύει a_0=k_0.

Επίσης θα ισχύει

$$C_l = \left[2\int_0^d f_l(z) f_l(z) \mathrm{d}z \right]^{-1} \tag{6.2.20}$$

και

$$C_0 = \left[2\int_0^d f_0(z) f_0(z) \mathrm{d}z \right]^{-1} \tag{6.2.21}$$

Για το C_l συγκεκριμένα το οποίο άλλωστε υπολογίζει αυτόματα και το C_0 θέτοντας όπου a_l το $-\mathrm{i}a_0$ ισχύει το εξής ανάπτυγμα

$$C_l = \frac{1}{2} a_l \left[\frac{1}{2} \frac{\cos(a_l d)\sin(a_l d) + a_l d}{\cos^2(a_l d)} \right]^{-1} \tag{6.2.22}$$

Στη συνέχεια το δυναμικό ψ επάνω σε κάθε έναν κύλινδρο k της διάταξης υποτίθεται ότι περιγράφεται με τη βοήθεια του ακόλουθου αναπτύγματος σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων:

$$\psi^{(k)}(b_k, \theta_k, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[B_{m_0}^{(k)} f_0(z) + \sum_{l=1}^{\infty} B_{m_l}^{(k)} f_l(z) \right] e^{im\theta_k} \tag{6.2.23}$$

Η προηγούμενη αντικαθίσταται στην Εξ. (6.2.13) για ένα σημείο μέσα στον κύλινδρο k, δηλαδή για $r_k = b_k - \delta$, $0 < \delta \leq b_k$ και η παραγόμενη παράσταση ολοκληρώνεται ως προς το ζ με χρήση της ορθογωνικότητας των ιδιοσυναρτήσεων $f_l(\zeta)$. Χρησιμοποιώντας επίσης το προσθετικό θεώρημα των συναρτήσεων Bessel του Graf και αξιοποιώντας την ορθογωνικότητα των συναρτήσεων $e^{im\theta}$ και αναδιατάσσοντας τους διάφορους όρους λαμβάνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων για τους αγνώστους συντελεστές Fourier

$$\begin{aligned} & B_{m_0}^{(k)} + \sum_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{N} \frac{b_j}{b_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n_0}^{(j)} \frac{J_n'(a_0 b_j)}{H_n'(a_0 b_j)} H_{n-m}(a_0 R_{jk}) e^{i(n-m)\beta_{jk}} \\ & = -\frac{C_0}{\pi a_0 b_k H_m'(a_0 b_k)} \iint_{S_F} H_m(a_0 \rho_k) e^{-im\vartheta_k} Q_D(\rho_k, \vartheta_k) \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{6.2.24}$$

$$\begin{aligned} & B_{m_l}^{(k)} + (-1)^m \sum_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{N} \frac{b_j}{b_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n_l}^{(j)} \frac{I_n'(a_0 b_j)}{K_n'(a_0 b_j)} K_{n-m}(a_l R_{jk}) e^{i(n-m)\beta_{jk}} \\ & = -\frac{C_l}{\pi a_l b_k K_m'(a_l b_k)} \iint_{S_F} K_m(a_l \rho_k) e^{-im\vartheta_k} Q_D(\rho_k, \vartheta_k) \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

Πιο συγκεκριμένα το δεύτερο μέρος της Εξ. (6.2.25) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως με χρήση του συνολικού δυναμικού μηδενικής τάξης φ_0^D

$$-\frac{C_l}{\pi a_l b_k K'_m(a_l b_k)}\iint_{S_F} K_m(a_l\rho_k)e^{-im\vartheta_k}Q_D(\rho_k,\vartheta_k)\mathrm{d}S$$

$$=ik_0 b_k\frac{N_l}{K'_m(a_l b_k)}\int_{b_k}^{\infty}\frac{K_m(a_l\rho_k)}{\rho_k/b_k}\Big\{A^{(k)}_{m-1,0}\Big(Z^{(k)}_{m-1,0}H'_{m-1}(k_0\rho_k)-J'_{m-1}(k_0\rho_k)\Big)$$
$$+A^{(k)}_{m+1,0}\Big(Z^{(k)}_{m+1,0}H'_{m+1}(k_0\rho_k)-J'_{m+1}(k_0\rho_k)\Big)\Big\}\mathrm{d}(\rho_k/b_k) \tag{6.2.26}$$

$$i\frac{N_l}{K'_m(a_l b_k)}\int_{b_k}^{\infty}\frac{K_m(a_l\rho_k)}{(\rho_k/b_k)^2}\Big\{A^{(k)}_{m-1,0}(m-1)\Big(Z^{(k)}_{m-1,0}H_{m-1}(k_0\rho_k)-J_{m-1}(k_0\rho_k)\Big)$$
$$-A^{(k)}_{m+1,0}(m+1)\Big(Z^{(k)}_{m+1,0}H_{m+1}(k_0\rho_k)-J_{m+1}(k_0\rho_k)\Big)\Big\}\mathrm{d}(\rho_k/b_k)$$

όπου

$$N_l=\left[\frac{1}{2}\frac{\cos(a_l d)\sin(a_l d)+a_l d}{\cos^2(a_l d)}\right]^{-1} \tag{6.2.27}$$

Η Εξ. (6.2.26) υπολογίζει επίσης και το δεξιό μέρος της Εξ. (6.2.24) για l=0 με την αντικατάσταση όπου a_l, το $-\mathrm{i}a_0$.

Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών $B^{(k)}_{m_l}$ μέσω του συστήματος των Εξ. (6.2.24) και (6.2.25), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το δυναμικό του κοντινού πεδίου (*near filed*) ψ μέσω της Εξ. (6.2.23) για κάθε σώμα k αλλά μόνο πάνω στο σώμα. Το γεγονός αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό των δυνάμεων και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας πάνω σε κάθε σώμα αλλά δεν δίνει πληροφορίες σχετικά με τις τιμές του δυναμικού στο ενδιάμεσο πεδίο μεταξύ των σωμάτων. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε και να απεικονίσουμε τις διαταραχές στην ελεύθερη επιφάνεια μεταξύ των σωμάτων. Σε κάθε περίπτωση όμως η γνώση των συντελεστών Fourier $B^{(k)}_{m_l}$ μας δίνει την δυνατότητα υπολογισμού των σημαντικότερων υδροδυναμικών μεγεθών, ήτοι της υδροδυναμικής φόρτισης και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας (*run-up*) επάνω στα σώματα της διάταξης.

Ακολούθως μπορεί να υπολογιστεί το τμήμα της οριζόντιας δύναμης λόγω του δυναμικού του κοντινού πεδίου από την ακόλουθη σχέση:

$$F_x=-i\omega\rho\iint_{S_B}\frac{gA}{\omega_0}i\tau_0\psi^{(k)}(b_k,\theta_k,z)\cos\theta_k b_k\mathrm{d}\theta_k\mathrm{d}z \tag{6.2.28}$$

ενώ η δύναμη στη διεύθυνση y θα υπολογίζεται από την

$$F_y=-i\omega\rho\iint_{S_B}\frac{gA}{\omega_0}i\tau_0\psi^{(k)}(b_k,\theta_k,z)\sin\theta_k b_k\mathrm{d}\theta_k\mathrm{d}z \tag{6.2.29}$$

Η αναλυτική έκφραση για την οριζόντια δύναμη θα δίνεται από την

$$\frac{F_x}{\rho g A b_k^2} = \frac{\omega}{\omega_0} \tau_0 \pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tan(a_l d)}{a_l b_k} \left(B_{-1,l}^{(k)} + B_{1,l}^{(k)} \right) \tag{6.2.30}$$

ενώ αντίστοιχη σχέση θα ισχύει για την δύναμη στη διεύθυνση y.

6.2.5. Υπολογισμός του δυναμικού του μακρινού πεδίου (far field) Ψ

Το δυναμικό far field θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας που δίνεται με τη μορφή της Εξ. (6.2.8) όπου το δυναμικό περίθλασης για κάθε σώμα θα προέρχεται από την αφαίρεση του δυναμικού του προσπίπτοντος κυματισμού από το συνολικό δυναμικό. Αυτό το δυναμικό περίθλασης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\varphi_{D_0}^{(k)} = e^{\nu_0 z} \Upsilon(r_k, \theta_k) \tag{6.2.31}$$

Στην προκειμένη περίπτωση οι ιδιοσυναρτήσεις $\frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 d)}$ αντικαταστάθηκαν από τις αντίστοιχες $e^{\nu_0 z}$ με την υπόθεση νερού μεγάλου βάθους, όπου $\nu_0 = k_0$.

Επίσης ισχύει

$$\Upsilon(r_k, \theta_k) = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m^{(k)}(r_k) e^{im\theta_k} \tag{6.2.32}$$

όπου

$$F_m^{(k)}(r_k) = A_m^{(k)} \left(Z_m^{(k)} H_m(k_0 r_k) - J_m(k_0 r_k) \right) - I_k J_m(k_0 r_k) e^{im(\pi/2-\beta)} \tag{6.2.33}$$

και

$$F_m'^{(k)}(r_k) = k_0 \left\{ A_m^{(k)} \left(Z_m^{(k)} H_m'(k_0 r_k) - J_m'(k_0 r_k) \right) - I_k J_m'(k_0 r_k) e^{im(\pi/2-\beta)} \right\} \tag{6.2.34}$$

$$F_m''^{(k)}(r_k) = k_0^2 \left\{ A_m^{(k)} \left(Z_m^{(k)} H_m''(k_0 r_k) - J_m''(k_0 r_k) \right) - I_k J_m''(k_0 r_k) e^{im(\pi/2-\beta)} \right\} \tag{6.2.35}$$

$$F_m'''^{(k)}(r_k) = k_0^3 \left\{ A_m^{(k)} \left(Z_m^{(k)} H_m'''(k_0 r_k) - J_m'''(k_0 r_k) \right) - I_k J_m'''(k_0 r_k) e^{im(\pi/2-\beta)} \right\} \tag{6.2.36}$$

Επίσης θα πρέπει το δυναμικό Ψ πέραν της συνθήκης της ελεύθερης επιφάνειας Εξ. (6.2.8) θα πρέπει να ικανοποιεί την οριακή συνθήκη επάνω στο σώμα

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \tag{6.2.37}$$

για κάθε σώμα k στο όριο $r_k = b_k$.

Προς τούτο θεωρείται ότι το δυναμικό του μακρινού πεδίου Ψ συντίθεται ως εξής:

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{6.2.38}$$

για τα οποία ισχύει

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_1 = \left(-2ik_0 \cos\gamma + 2\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\varphi_0^D \tag{6.2.39}$$

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_2 = 0 \tag{6.2.40}$$

και

$$\frac{\partial \psi_1^{(k)}}{\partial r_k} = -\frac{\partial \psi_2^{(k)}}{\partial r_k} \tag{6.2.41}$$

στο όριο r_k=b_k.

Για τον υπολογισμό των ψ_1 και ψ_2 ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

Έστω ότι το δυναμικό ψ_1 γράφεται στο μορφή

$$\psi_1 = L\chi \tag{6.2.42}$$

όπου το L είναι τελεστής που δίνεται από τη σχέση

$$L = -2ik_0 \cos\gamma + 2\cos(\theta-\alpha)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{6.2.43}$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (6.2.43) στην οριακή συνθήκη (6.2.39) λαμβάνεται

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)L\chi = L\varphi_0^D \Leftrightarrow L\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\chi = L\varphi_0^D \tag{6.2.44}$$

Κατά συνέπεια το ισοδύναμο δυναμικό του μακρινού πεδίου χ θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right)\chi = \varphi_0^D \tag{6.2.45}$$

Η λύση που προτάθηκε για το δυναμικό χ από τους *Emmerhoff et al.(1992*) είναι η ακόλουθη:

$$\chi = \frac{\partial \varphi_0^D}{\partial \nu_0} \tag{6.2.46}$$

Μετά από εκτενή μαθηματική επεξεργασία αποδεικνύεται ότι το δυναμικό του μακρινού πεδίου $\psi_1^{(k)} = L\chi$ μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$\psi_1^{(k)} = \frac{z}{d} e^{\nu_0 z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m^{(1)}(r_k) e^{im\theta_k} + e^{\nu_0 z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m^{(2)}(r_k) e^{im\theta_k} \tag{6.2.47}$$

όπου

$$\begin{aligned} Q_m^{(1)}(r_k) &= -2k_0 d\cos(\gamma) F_m^{(k)}(r_k) - ie^{i\alpha} k_0 d F_{m+1}^{\prime(k)}(r_k) - ie^{-i\alpha} k_0 d F_{m-1}^{\prime(k)}(r_k) \\ &- ie^{i\alpha}(m+1)\frac{d}{r_k} F_{m+1}^{(k)}(r_k) + ie^{-i\alpha}(m-1)\frac{d}{r_k} F_{m-1}^{(k)}(r_k) \end{aligned} \tag{6.2.48}$$

$$\begin{aligned} Q_m^{(2)}(r_k) &= -2k_0 r_k \cos(\gamma) F_m^{\prime(k)}(r_k) - ie^{i\alpha} F_{m+1}^{\prime(k)}(r_k) - ie^{-i\alpha} k_0 r_k F_{m+1}^{\prime\prime(k)}(r_k) \\ &- ie^{-i\alpha} F_{m-1}^{\prime(k)}(r_k) - ie^{-i\alpha} k_0 r_k F_{m-1}^{\prime\prime(k)}(r_k) - ie^{i\alpha}(m+1) F_{m+1}^{\prime(k)}(r_k) \\ &+ ie^{-i\alpha}(m-1) F_{m-1}^{\prime(k)}(r_k) \end{aligned} \tag{6.2.49}$$

Η οριζόντια δύναμη διέγερσης λόγω του δυναμικού του μακρινού πεδίου $i\tau_0\psi_1$ θα δίνεται τώρα από τη σχέση

$$F_x = -i\omega\rho \iint_{S_B} \frac{gA}{\omega_0} i\tau_0 \psi_1^{(k)}(b_k, \theta_k, z) \cos\theta_k b_k \, \mathrm{d}\theta_k \, \mathrm{d}z \tag{6.2.50}$$

ενώ για τη δύναμη στη διεύθυνση y θα ισχύει αντίστοιχα

$$F_y = -i\omega\rho \iint_{S_B} \frac{gA}{\omega_0} i\tau_0 \psi_1^{(k)}(b_k, \theta_k, z) \sin\theta_k b_k \, \mathrm{d}\theta_k \, \mathrm{d}z \tag{6.2.51}$$

Ενδεικτικά αναγράφεται το πλήρες ανάπτυγμα της δύναμης διέγερσης στη διεύθυνση x το οποίο είναι το παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{F_x}{\rho g A b_k^2} &= \frac{\omega}{\omega_0} \tau_0 \pi \frac{1}{\nu_0 b_k} \Big[\left(1 - e^{-\nu_0 d}\right) \left(Q_{-1}^{(2)}(b_k) + Q_1^{(2)}(b_k)\right) \\ &+ \frac{1}{\nu_0 d} \left(-1 + e^{-\nu_0 d} + \nu_0 h e^{-\nu_0 d}\right) \left(Q_{-1}^{(1)}(b_k) + Q_1^{(1)}(b_k)\right) \Big] \end{aligned} \tag{6.2.52}$$

σε κάθε σώμα της διάταξης

Για τον υπολογισμό τώρα του δυναμικού ψ_2 θα ακολουθεί διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθήθηκε για τον υπολογισμό του δυναμικού μηδενικής τάξης φ_0^D.

Η μορφή του δυναμικού που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στον πυθμένα και την ομογενή οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας για βαθύ νερό είναι:

$$\psi_2 = e^{\nu_0 z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^{(k)} H_m(\nu_0 r_k) e^{im\theta_k} \tag{6.2.53}$$

για τυχαίο σώμα k της διάταξης.

Το συνολικό δυναμικό ψ_2 λόγω των αλληλοεπιδράσεων μεταξύ των σωμάτων θα γραφεί επομένως ως

$$\psi_2 = e^{\nu_0 z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^{(k)} H_m(\nu_0 r_k) e^{im\theta_k} + e^{\nu_0 z} \sum_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^{(j)} H_m(\nu_0 r_j) e^{im\theta_j} \tag{6.2.54}$$

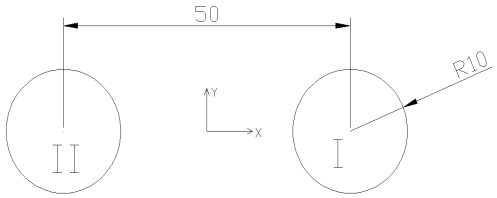
Με χρήση του προσθετικού θεωρήματος Graff των συναρτήσεων Hankel πρώτης τάξης (Εξ. (6.1.7)) η Εξ. (6.2.54) λαμβάνει τη μορφή

$$\psi_2 = e^{\nu_0 z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[D_m^{(k)} H_m(\nu_0 r_k) + \sum_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_n^{(j)} H_{n-m}(\nu_0 R_{jk}) J_m(\nu_0 r_k) e^{i(n-m)\beta_{jk}} \right] e^{im\theta_k} \tag{6.2.55}$$

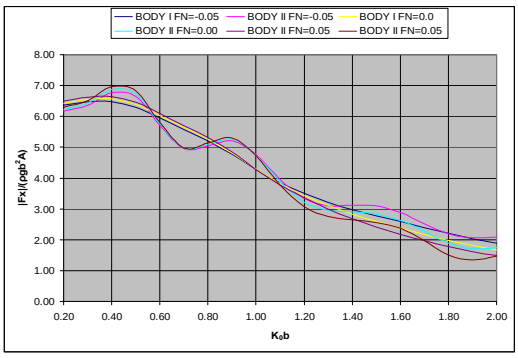
Οι αριθμητικοί υπολογισμοί αφορούν διάφορες μορφές συστοιχιών.

Για τη συστοιχία των δύο κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 20m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 50m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (25m, 0m)
Σώμα II: (-25m, 0m)
Fn=-0.05, 0.00, +0.05



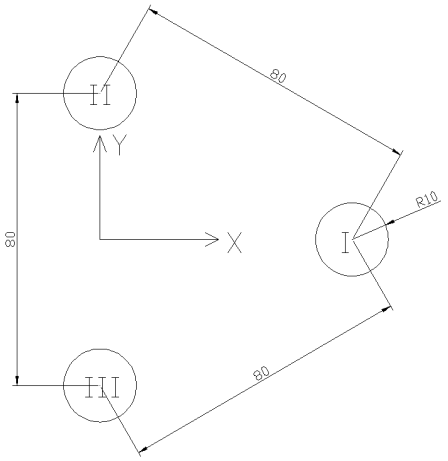
Σκαρίφημα κάτοψης, της συστοιχίας των δύο κυλίνδρων.



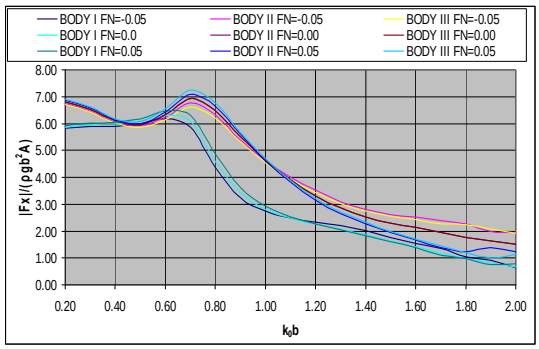
Σχήμα 6.2. 2: Διάταξη δύο όμοιων κυλίνδρων, οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος.

Για τη συστοιχία των τριών κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 400m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 80m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (69.28m, 0m)
Σώμα II: (0, 40)
Σώμα III: (0, -40m)
Fn=-0.05, 0.00, +0.05



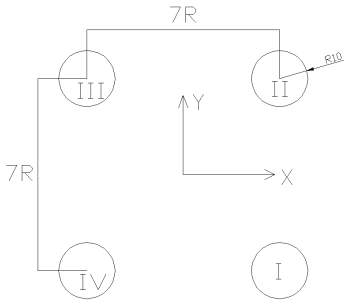
Σχήμα 6.2. 3: Διάταξη τριών όμοιων κυλίνδρων



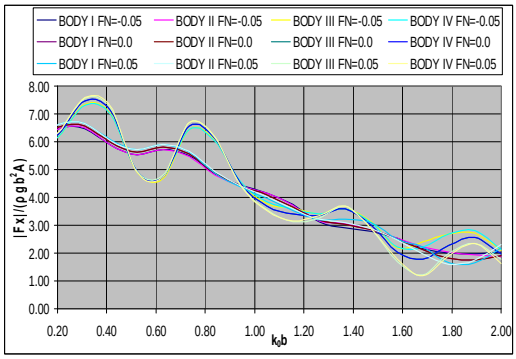
Σχήμα 6.2. 4: Διάταξη τριών όμοιων κυλίνδρων, οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος.

Για τη συστοιχία των τεσσάρων κυλίνδρων δίνονται τα παρακάτω γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 150m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 70m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (34.335m, -34.335m)
Σώμα II: (34.335m, 34.335m)
Σώμα III: (-34.335m, 34.335m)
Σώμα IV: (-34.335m, -34.335m)
Fn=-0.05, 0.00, +0.05



Σχήμα 6.2. 5: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων



Σχήμα 6.2. 6: Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων, οριζόντιες δυνάμεις διέγερσης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII:
Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση Έκπτωσης

7.1. Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση έκπτωσης (Wave Drift Damping)

Η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση προκαλείται από το κύμα και διαφαίνεται και σε συγκριτικά free-decay πειράματα μοντέλων για πλοία σε ακίνητο ρευστό και σε απλούς αρμονικούς κυματισμούς. Οι τρόποι υπολογισμού της, έχουν αναφερθεί αναλυτικά στη βιβλιογραφική ανασκόπιση (Κεφάλαιο Ι). Στις παρακάτω ενότητα θα παρουσιαστούν, ο αναλυτικός υπολογισμός της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης, αλλά και ο υπολογισμός της, μέσω της ευρετικής μεθόδου, των Aranha (1994) και Clark et al. (1992).

7.1.1. Η ευρετική μέθοδος για τον υπολογσιμό της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης

Είναι ευρέως γνωστό ότι υπό την επίδραση του αέρα και των μη γραμμικών κυμάτων οι πλωτές κατασκευές κάνουν μεγάλου πλάτους και χαμηλών-συχνοτήτων κινήσεις συντονισμού. Η αριθμητική πρόβλεψη αυτού του τύπου κινήσεων απαιτεί την αποτίμηση όλων των μηχανισμών απόσβεσης, από τους οποίους η αποκαλούμενη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση λόγω κυμάτων (wave-drift damping) είναι ένα πολύ σημαντικό συστατικό. Από θεωρητικής σκοπιάς αυτό σημαίνει λύση του προβλήματος περίθλασης-ακτινοβολίας με τον όρο της μικρής πρόσω ταχύτητας και παραγωγή της πρόσθετης αντίστασης, η οποία, στη γραμμική της επίλυση με τον όρο της πρόσω ταχύτητας U μπορεί να γραφεί ως:

$$F(U,\omega_0) = F_d(\omega_0) - \mathrm{B}(\omega_0)U \tag{7.1.1}$$

Όπου F_d είναι η μέση δευτεροτάξια δύναμη (drift) χωρίς πρόσω ταχύτητα, B είναι ο παράγοντας της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης λόγω κυμάτων και ω_0 είναι η συχνότητα του προσπίπτοντος κυματισμού στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, χωρίς την επίδραση της πρόσω ταχύτητας ή του θαλάσσιου ρεύματος.

Στο πρόσφατο παρελθόν έχουν γίνει πολλές ερευνητικές εργασίες γι' αυτό το πρόβλημα ακολουθώντας διαφορετικές προσεγγίσεις. Όλοι υποθέτουν τον αριθμό Froude $U/\sqrt{gL}$ και τον αριθμό Brard $\tau = U\omega/g$ μικρούς, όπου $U = |U|$ είναι η πρόσω ταχύτητα στην x-διεύθυνση, L είναι το χαρακτηριστικό μήκος ω είναι η συχνότητα συνάντησης και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Στο βαθύ νερό η συχνότητα συνάντησης συσχετίζεται με την πραγματική συχνότητα κυμάτων με τον τύπο: $\omega = \omega_0 - (U\omega_0^2/g)\cos\beta$, όπου β είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της πρόσω ταχύτητας του σώματος και της διεύθυνσης των προσπιπτόντων κυματισμών. Επομένως το δυναμικό ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως:

$$\Phi(x,y,z,t) = \Phi_0(x,y,z) + \varepsilon\Phi_U(x,y,z,t) + 0(\varepsilon^2)$$

Όπου Φ_0 είναι το δυναμικό σώματος διπλής ροής και Φ_U είναι το δυναμικό του κύματος.

Στην ελεύθερη επιφάνεια το Φ_U ικανοποιεί μια γραμμική οριακή συνθήκη, αλλά με σταθερές εξαρτημένες από το Φ_0, οι οποίες περιπλέκουν το πρόβλημα. Υπάρχουν επίσης προβλήματα σχετικά με την συμπεριφορά το Φ_U στο άπειρο (far-field) όταν οι τάξεις των ε

και *ετ* είναι τυπικά χωρισμένες στον τρόπο που διατυπώνεται και υπολογίζεται η πρόσθετη αντίσταση (με ολοκλήρωση της πίεσης στην ελεύθερη επιφάνεια ή από τη μέθοδο των ροπών στο άπειρο).

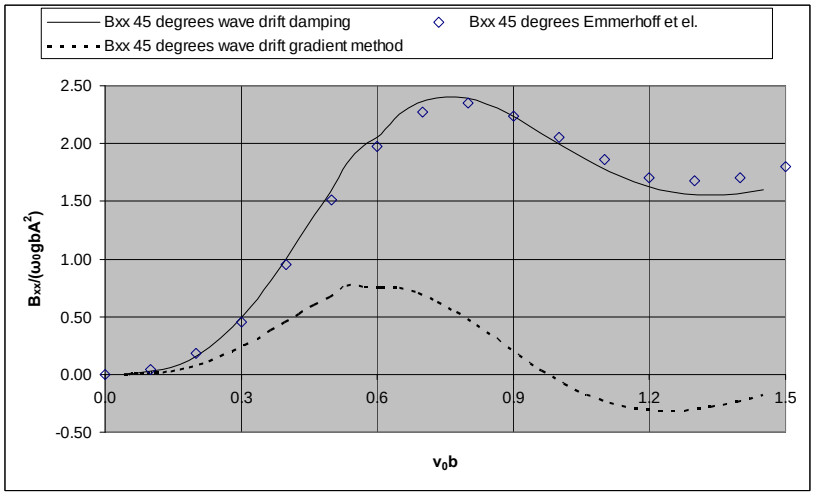
Λόγω της πολυπλοκότητας του προβλήματος, έχουν προταθεί προσεγγιστικές μέθοδοι λύσης όπως η μέθοδος του «drift gradient» των κυμάτων, όπου το $B(\omega_0)$ σε άπειρο βάθος νερού, δίνεται ως:

$$B(\omega_0) = -\frac{\omega_0^2}{g}\frac{\partial F_d}{\partial \omega_0} \tag{7.1.2}$$

Και $F_d = |F_d|$ είναι η μέση δευτεροτάξια δύναμη με μηδενική πρόσω ταχύτητα στην διεύθυνση των κυματισμών. Ο τύπος αυτός υποθέτει ότι τα προσπίπτοντα κύματα είναι συγγραμμικά με την τροχιά του σώματος. Ο Emmerhoff et al (1992) παρήγαγε μια ημι-αναλυτική λύση στο πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός ή περισσότερων κυλίνδρων σε άπειρο βάθος νερού. Στην περίπτωση του ενός κυλίνδρου, διαπιστώθηκε ότι η μέθοδος του «drift gradient», βλέπε εξ. (7.1.2), παρέχει μάλλον άσχημα αποτελέσματα συγκρινόμενα με αυτά των Emmerhoff et al. (1992). Εντούτοις, με μικρή τροποποίηση της εξίσωσης (7.1.2) στην:

$$B(\omega_0) = -\frac{\omega_0^2}{g}\frac{\partial Fd}{\partial \omega_0} - \frac{4\omega_0}{g}F_d \tag{7.1.3}$$

ανακτώνται τα αποτελέσματα των Emmerhoff et al. (με ακρίβεια 6 σημαντικών ψηφίων), όταν η διεύθυνση των κυμάτων και η πρόσω ταχύτητα του σώματος είναι συγγραμμικά. Η σύγκριση μεταξύ της μεθόδου των Emmerhoff et al., των εξισώσεων (7.1.2) και (7.1.3) δίνεται στο σχήμα 7.1.1, στο οποίο το *b* αναφέρεται στην ακτίνα του κυλίνδρου.



Σχήμα 7.1. 1: Κύλινδρος σε βαθύ νερό με γωνία πρόσπτωσης κύματος 45 μοίρες.

Από την εξίσωση (7.1.3) συνάγουμε ότι, όταν η συχνότητα κυμάτων είναι αρκετά μεγάλη και η μέση δευτεροτάξια δύναμη τείνει στην ασυμπτωτική τιμή της, η πρόσθετη αντίσταση δίνεται από τη μηδενικής ταχύτητας drift δύναμη πολλαπλασιασμένη με τον όρο $(1+4U\omega_0/g)$. Αυτό βέβαια δεν συμφωνεί με τον Faltinsen, ο οποίος πολλαπλασιάζει με έναν όρο $(1+2U\omega_0/g)$. Αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα υποστηρίζεται και από τον Hermans

(1991). Αφ' ετέρου ο Aranha (1994), χρησιμοποιεί την αρχή της διατήρησης της ορμής των κυμάτων για να υπολογίσει τη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση (wave drift damping) σε δισδιάστατο σώμα, σε άπειρο βάθος νερού, όπου ως:

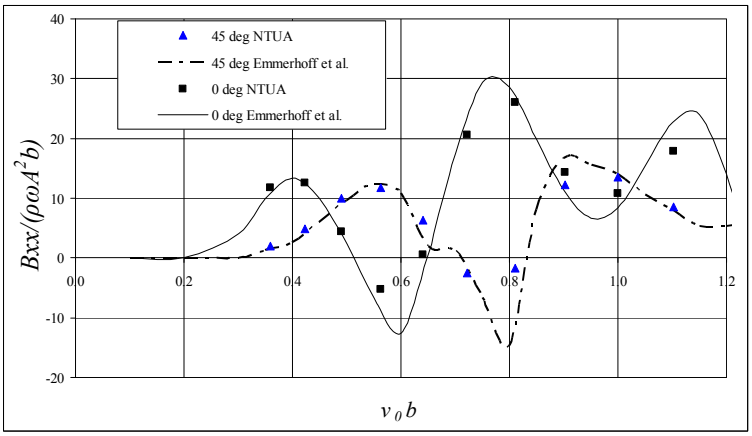
$$B(\omega_0) = \frac{1}{2}\rho g \mathrm{A}^2 \left[\frac{\omega_0^2}{g}\frac{\partial \|R\|^2}{\partial \omega_0} + \frac{4\omega_0}{g}\|R\|^2 \right] \tag{7.1.4}$$

όπου R είναι η σταθερά ανάκλασης και A το ύψος του κύματος. Η σχέση αυτή είναι ακριβώς η ίδια έκφραση όπως και η σχέση (7.1.3). Επιπλέον, οι σχέσεις (7.1.3) και (7.1.4) φαίνεται να δίνουν τα ίδια αποτελέσματα με αυτά των Zhao και Faltinsen (1988).

Στις τρεις διαστάσεις, δείχνουμε ότι η σταθερά της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης (wave drift damping coefficient) στην διεύθυνση της πρόσω ταχύτητας (την x-διεύθυνση) για τυχαίες γωνίες πρόσπτωσης β του κυματισμού, είναι η $B_{xx}(\omega_0, \beta)$. Για κατασκευές που αποτελούνται από έναν ή περισσότερους κάθετους κυλίνδρους που κρατούνται ακίνητοι παρουσία αρμονικών κυματισμών, διαπιστώσαμε ότι οι τιμές που υπολογίζονται με τη μέθοδο των Emmerhoff et al. (1992), λαμβάνονται επίσης από τη σχέση:

$$B_{xx}(\omega_0, \beta) = -\left(\frac{\omega_0^2}{g}\frac{\partial F_{d_x}}{\partial \omega_0} + \frac{4\omega_0}{g} F_{d_x} \right)\cos\beta + \frac{2\omega_0}{g}\frac{\partial F_{d_x}}{\partial \beta}\sin\beta \tag{7.1.5}$$

όπου F_{d_x} είναι η μέση δευτεροτάξια δύναμη drift στην x-κατεύθυνση παρουσία απλών αρμονικών κυματισμών. Το σχήμα 7.1.2, δείχνει τα αποτελέσματα των Emmerhoff et al. (1992), για τέσσερεις κυλίνδρους ακτίνας *α* τοποθετημένους σε ένα τετράγωνο με πλευρά 7*α*. Η εξίσωση (7.1.5) έχει ελεγχθεί με τα διάφορα αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία. Όταν το σώμα είναι ακίνητο παρουσία των κυμάτων τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά, αλλά, είναι λιγότερο καλά όταν το σώμα είναι ελεύθερο (στο να αποκριθεί). Προφανώς ο καλύτερος τρόπος να επιβεβαιώσουμε την εξίσωση (7.1.5) είναι μέσω της θεωρητικής παραγωγής της. Στο μεταξύ ο τύπος αυτός παρέχει μια λογική διαδικασία προσέγγισης για την δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση των κυμάτων (wave drift damping) όταν η τροχιά και οι προσπίπτουσες διευθύνσεις των κυμάτων δεν είναι συγγραμμικές. Επιπλέον η εξίσωση (7.1.5) έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολο να εφαρμόσει και είναι επομένως χρήσιμη για τις πρακτικές εφαρμογές.



Σχήμα 7.1. 2: Αποτελέσματα των Emmerhoff et al. (1992) για τέσσερεις κυλίνδρους ακτίνας α τοποθετημένους σε ένα τετράγωνο με πλευρά 7α

7.1.1.1. Η προσέγγιση για τους όρους ταχύτητας yaw, στον πίνακα της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης

Θεωρώντας ένα λεπτόγραμμο πλοίο με μήκος L και πλάτος B (όπου ε=B/L<<1) και υποθέτοντας ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η x-συντεταγμένη συμπίπτει με το διάμηκες επίπεδο L του πλοίου και η z-συντεταγμένη να είναι κάθετη σε αυτή με κατεύθυνση προς τα πάνω, το κέντρο του συστήματος να είναι στην τομή της ελεύθερης επιφάνειας με το μέσο νομέα, η διατομή του πλοίου ορίζεται από το περίγραμμα των νομέων (cross curves), μέσω της καμπύλης $\partial C(x)$ και η ίσαλος επιφάνεια από την καμπύλη ∂W. Τα σημεία στην καμπύλη $\partial C(x)$ ορίζονται από το διάνυσμα:

$$r_c = y_c j + z_c k \in \partial C(x) \tag{7.1.6}$$

Έστω $p_{20}(x, r_c)$ η δεύτερης τάξης σταθερή πίεση του πεδίου, λόγω του αρμονικού κυματισμού με πλάτος A, συχνότητα ω και γωνία πρόσπτωσης β, υποθέτοντας ότι η $p_{20}(x, r_c)$ περιλαμβάνει τις συναρτήσεις Dirac-δ, στα σημεία, όπου οι $\partial C(x)$ τέμνουν τις ∂W και αυτές οι συγκεντρωμένες δυνάμεις ανά μονάδα μήκους είναι σχετικές με την αλλαγή πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια του πλοίου. Οι τοπικές σταθερής κατάστασης, σταθερές drift, δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\begin{Bmatrix} d_x(x;\omega,\beta) \\ d_y(x;\omega,\beta) \\ d_z(x;\omega,\beta) \end{Bmatrix} = \int_{\partial C(x)} p_{20}(x, r_c) \begin{Bmatrix} n_x(x, r_c) \\ n_y(x, r_c) \\ -y n_y(x, r_c) \end{Bmatrix} d\partial C(x) \tag{7.1.7}$$

Όπου (n_x, n_y) είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος n.

Ορίζουμε τις ροπές από τη σχέση (7.1.7) μέσω των εκφράσεων:

$$\begin{Bmatrix} M_{x,j} \\ M_{y,j} \\ M_{z,j} \end{Bmatrix} = \int_{-L/2}^{-L/2} x^j \begin{Bmatrix} d_x(x;\omega,\beta) \\ d_y(x;\omega,\beta) \\ n_z(x;\omega,\beta) \end{Bmatrix} dx \ , \ j = 0,1,2 \tag{7.1.8}$$

Και ο γενικευμένος πίνακας που περιγράφει την μέση δευτεροτάξια δύναμη drift στο οριζόντιο επίπεδο, έχει τις συνιστώσες:

$$\begin{aligned} D_x(\omega,\beta) &= \mathrm{M}_{x,0}(\omega,\beta) \\ D_y(\omega,\beta) &= \mathrm{M}_{y,0}(\omega,\beta) \\ N_z(\omega,\beta) &= \mathrm{M}_{z,0}(\omega,\beta) + \mathrm{M}_{y,1}(\omega,\beta) \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

Ο στόχος μας είναι να εκφράσουμε όλα τα στοιχεία της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης WDD, λαμβάνοντας υπόψη και τους όρους οι οποίοι είναι σχετικοί με την κίνηση yaw, στο επίπεδο των ροπών $\{M_{x,j}; M_{y,j}; M_{z,j}\}$. Στην παρούσα μελέτη η επίδραση της σύζευξης μεταξύ του χρονικά ανεξάρτητου δευτεροτάξιου τμήματος του συνολικού δευτεροτάξιου δυναμικού και της αργής κίνησης του πλοίου δεν έχει ληφθεί υπόψη, αν και

έχουν παραχθεί από την ολοκλήρωση συναρτήσεων υψωμένων στο τετράγωνο, από την πρώτης τάξεως (γραμμική) επίλυση.

7.1.1.1.1. Οι όροι yaw στον πίνακα των WDD

Η πρώτη στήλη του πίνακα των WDD, που είναι σχετική με την κίνηση surge και την ταχύτητα U_x, δίνεται ακριβώς από την έκφραση:

$$\begin{Bmatrix} B_{11}(\omega,\beta) \\ B_{21}(\omega,\beta) \\ B_{61}(\omega,\beta) \end{Bmatrix} = \frac{\omega}{g}[\omega\cos\beta\frac{\partial}{\partial\omega} - 2\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + 4\cos\beta]\begin{Bmatrix} D_x(\omega,\beta) \\ D_y(\omega,\beta) \\ N_z(\omega,\beta) \end{Bmatrix} \qquad (7.1.10\alpha)$$

Η δεύτερη στήλη του πίνακα των WDD, που είναι σχετική με την κίνηση sway και την ταχύτητα U_y, δίνεται ακριβώς από την έκφραση:

$$\begin{Bmatrix} B_{12}(\omega,\beta) \\ B_{22}(\omega,\beta) \\ B_{62}(\omega,\beta) \end{Bmatrix} = \frac{\omega}{g}[\omega\sin\beta\frac{\partial}{\partial\omega} + 2\cos\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + 4\sin\beta]\begin{Bmatrix} D_x(\omega,\beta) \\ D_y(\omega,\beta) \\ N_z(\omega,\beta) \end{Bmatrix} \qquad (7.1.10\beta)$$

για τα οποία υπάρχουν αποτελέσματα στον Aranha (1996).

Παρατηρώντας το ουσιαστικό διδιάστατο κομμάτι της κυματικής περίθλασης για ένα λεπτό πλοίο, μπορούμε να παρουσιάσουμε εδώ, τις τοπικές σταθερές WDD, επηρεασμένες από την ταχύτητα στην κίνηση του sway, οι οποίοι δίνονται από τη σχέση (βλέπε και τη σχέση (7.1.10β)):

$$\begin{Bmatrix} b_{12}(x;\omega,\beta) \\ b_{22}(x;\omega,\beta) \\ b_{62}(x;\omega,\beta) \end{Bmatrix} = \frac{\omega}{g}[\omega\sin\beta\frac{\partial}{\partial\omega} + 2\cos\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + 4\sin\beta]\begin{Bmatrix} d_x(x;\omega,\beta) \\ d_y(x;\omega,\beta) \\ n_z(x;\omega,\beta) \end{Bmatrix} \qquad (7.1.10\gamma)$$

Η έκφραση (7.1.10γ) μπορεί να αποδειχθεί ακριβώς, σαν μια «μίξη» από τα διδιάστατα αποτελέσματα παραγόμενα από τον Aranha (1994), αλλά και από τρισδιάστατα αποτελέσματα παραγόμενα επίσης από τον Aranha (1996) και μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε σε προσεγγίσεις για λεπτά σώματα, για τα στοιχεία του πίνακα WDD, τα οποία είναι σχετικά με την κίνηση yaw.

Στην πραγματικότητα, για λεπτό σώμα, η κίνηση yaw, στον νομέα κατά τον x (cross section), φαίνεται να είναι, σαν να είχαμε κίνηση στο sway, με πλάτος x.Ω, όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα στο yaw. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουν και οι αντίστοιχες σταθερές WDD, για το νομέα που δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} b_{16}(x;\omega,\beta) &= xb_{12}(x;\omega,\beta) \\ b_{26}(x;\omega,\beta) &= xb_{22}(x;\omega,\beta) \\ b_{66}(x;\omega,\beta) &= xb_{62}(x;\omega,\beta) \end{aligned} \qquad (7.1.10\delta)$$

Ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (7.1.10δ) κατά το μήκος L, παρατηρώντας την συμβολή του όρου b_{26} του sway στην κίνηση του yaw και αμελώντας όρους της τάξεως του ε^2, καταλήγουμε τελικά με τη βοήθεια της σχέσης (7.1.8) στο ότι:

$$\begin{Bmatrix} B_{16}(\omega,\beta) \\ B_{26}(\omega,\beta) \\ B_{66}(\omega,\beta) \end{Bmatrix} = \frac{\omega}{g}[\omega \sin\beta \frac{\partial}{\partial\omega} + 2\cos\beta \frac{\partial}{\partial\beta} + 4\sin\beta] \begin{Bmatrix} M_{x,1}(\omega,\beta) \\ M_{y,1}(\omega,\beta) \\ M_{y,2}(\omega,\beta) \end{Bmatrix} \tag{7.1.11}$$

7.2. Μέσες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και μικρής πρόσω ταχύτητας- αναλυτική λύση.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στις πλωτές κατασκευές, μπορούν να επηρεαστούν σημαντικά από την παρουσία πρόσω ταχύτητας του σώματος ή την παρουσία ωκεάνιου ρεύματος.

Ειδικότερα, αυτό γίνεται φανερό, στις μέσες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης (*drift forces*), οι οποίες, σε ογκώδεις κατασκευές, μπορεί να αλλάξουν ως και 100%, όταν η πρόσω ταχύτητα του σώματος ή η ταχύτητα του ρεύματος, αυξηθεί από το μηδέν στο 1-2m/sec. Η επίδραση της πρόσω ταχύτητας του σώματος, είναι μαθηματικά ισοδύναμη με την παρουσία ομοιόμορφου ωκεάνιου ρεύματος (Grue et al. 1993) για μικρές ταχύτητες, δηλαδή στη γραμμική περιοχή.

Η επίδραση της πρόσω ταχύτητας στις μέσες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης (*wave drift forces*), εισάγει μια σημαντική δύναμη απόσβεσης στην απόκριση των αργά μεταβαλλόμενων κινήσεων (*slow drift motions*), στις αγκυρωμένες κατασκευές. Αυτή η δύναμη απόσβεσης, δίνεται μέσω της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης (*wave drift damping- WDD*).

Γενικά το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί στην περίπτωση που το βάθος εγκατάστασης είναι άπειρο (Huijmans 1986, Zhao et al. 1988, Nossen at al. 1991, Grue 1992, Emmerhoff et al. 1992, Newman 1992).

Στις επόμενες ενότητες θα υπολογιστούν οι μέσες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης, όπως προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος της αλληλεπίδρασης κύματος και μικρής πρόσω ταχύτητας της κατασκευής,

Τέλος δε, θα παρουσιαστούν αριθμητικά αποτελέσματα, για τυχαία αξονοσυμμετρικά σώματα, συγκρίσεις της αναλυτικής επίλυσης με την ευρετική μέθοδο (heuristic method) των Aranha και Clark (1992) και συγκρίσεις της επίλυσης αυτής με πειραματικά αποτελέσματα που έγιναν σε έναν κύλινδρο στην πειραματική δεξαμενή της DHI στη Δανία.

Οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων της πλήρως αναλυτικής επίλυσης με την ευρετική μέθοδο, βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία.

7.2.1. Αναλυτικός υπολογισμός δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης με τη μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης-πακτωμένος κύλινδρος.

Ο γενικός τύπος υπολογισμού της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης με τη μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης (Malenica et al. 1995) είναι:

$$B=\frac{\rho\omega_0}{2g}\Re\left\{\int_{S_{B_0}}\left[\nabla\phi\nabla\phi^*+2\frac{g}{\omega_0}\nabla\bar{\phi}^{(0)}\nabla\bar{\phi}^{(2)}\right]n_0dS-\int_{C_{B_0}}\left[\nu_0\phi\psi^*-k_0\cos\gamma\phi\phi^*-i\phi\nabla\bar{\phi}^{(0)}\nabla\phi^*\right]n_0dC\right\} \qquad (7.2.1)$$

Με γνωστά τα δυναμικά φ, ψ, αρκεί να υπολογίσουμε τα παραπάνω ολοκληρώματα. Ο παράγοντας $\Re\left\{\int_{S_{B_0}}\left[\nabla\bar{\phi}^{(0)}\nabla\bar{\phi}^{(2)}\right]n_0dS\right\}$, στην περίπτωση του πακτωμένου κυλίνδρου είναι ίσος με το μηδέν (Grue et al., 1995).

<u>Απόδειξη</u>

Γνωρίζουμε ότι:

$\phi=\phi^I+\phi^D$

$$\phi=-i\omega_0\frac{H}{2}\frac{\cosh(k_0z)}{k_0\sinh(k_0d)}\sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^mJ_m(k_0r)\cos(m\vartheta)$$
$$-i\omega_0\frac{H}{2}\frac{\cosh(k_0z)}{k_0\sinh(k_0d)}\sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\left[-\frac{J'_m(k_0b)}{H'_m(k_0b)}H_m(k_0r)\right]\cos(m\vartheta)$$

Που γράφεται και ως

$$\phi=-i\omega_0\frac{H}{2}\frac{\cosh(k_0z)}{k_0\sinh(k_0d)}\sum_{m=0}^{\infty}\in_m i^m\left[J_m(k_0r)-\frac{J'_m(k_0b)}{H'_m(k_0b)}H_m(k_0r)\right]\cos(m\vartheta)$$

Υπενθυμίζουμε ότι από τις ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel:

$$J_m(k_0b)-\frac{J'_m(k_0b)}{H'_m(k_0b)}H_m(k_0b)=\frac{2i}{\pi k_0bH'_m(k_0b)}$$

Άρα, θα έχουμε:

$$\phi = -i\omega_0 \frac{H}{2} \frac{\cosh(k_0 z)}{k_0 \sinh(k_0 d)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \frac{2i}{\pi k_0 b H'_m(k_0 b)} \cos(m\vartheta)$$

$$\boxed{\phi = \frac{2\omega_0}{\pi k_0^2 b} \frac{H}{2} \frac{\cosh(k_0 z)}{\sinh(k_0 d)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \frac{e^{-im\beta}}{H'_m(k_0 b)} \cos(m\vartheta)}$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{2\omega_0}{\pi k_0^2 b} \frac{H}{2} \frac{k_0 \cosh(k_0 z)}{\sinh(k_0 d)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \frac{e^{-im\beta}}{H'_m(k_0 b)} \cos(m\vartheta)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{2\omega_0}{\pi k_0^2 b} \frac{H}{2} \frac{k_0^2 \cosh(k_0 z)}{\sinh(k_0 d)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m i^m \frac{e^{-im\beta}}{H'_m(k_0 b)} \cos(m\vartheta)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = \frac{2\omega_0}{\pi k_0^2 b} \frac{H}{2} \frac{k_0^2 \cosh(k_0 z)}{\sinh(k_0 d)} \sum_{m=0}^{\infty} \in_m (-i)^m \frac{e^{im\beta}}{\overline{H}'_m(k_0 b)} \cos(m\vartheta)}$$

Όμως από (Grue, Palm 1995):

$$\frac{d\psi^{(2)}}{dz} = -\frac{\omega_0}{2g} \Im\left\{ \phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} \right\} = -\frac{\omega_0 k_0^2}{2g} \Im\left\{ \phi\phi^* \right\} = 0$$

Διότι γνωρίζουμε από τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών ότι:

Έστω $z=a+ib$, τότε ο συζυγείς του θα είναι ο $z^*=a-ib$

Πολλαπλασιάζοντας τον z με τον συζυγή του z*, προκύπτει ότι:

$zz^*=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=\Re eal$

Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η διαταραχή του ρεύματος θα δίνεται από την εξίσωση του δίπολου

$$\overline{\phi}^{(0)} = \frac{b^2}{r} \cos(\theta - \alpha) \tag{7.2.2}$$

Τελικά, μετά από εκτενείς μαθηματικούς υπολογισμούς, η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, δίνεται ως:

$$
\begin{aligned}
\frac{B}{\rho\omega_0 bA^2} = & \frac{z_j(d)(k_0 d)^2}{(k_0 b)^2 (k_0 b)^2 \cosh(k_0 d)} W_j \Re\left\{ i \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{m i^m}{H'_m(k_0 b)} \left[(m-1)(-i)^{m-1} Q^*_{m-1j}(b) + (m+1)(-i)^{m+1} Q^*_{m+1j}(b) \right] \right\} \\
& + \frac{z_j(d)(k_0 d)^2}{k_0 b \cosh(k_0 d)} W W_j \Re\left\{ i \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{i^m}{H'_m(k_0 b)} \left[(-i)^{m-1} Q^*_{m-1j}(b) + (-i)^{m+1} Q^*_{m+1j}(b) \right] \right\} \\
& + \frac{z^2{}_j(d) v_0 d}{k_0 b} \Re\left\{ i \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{i^m}{H'_m(k_0 b)} \left[(-i)^{m-1} Q^*_{m-1j}(b) + (-i)^{m+1} Q^*_{m+1j}(b) \right] \right\} \\
& + \frac{4 k_0 d \cos\beta}{\pi v_0 d (k_0 b)^2} \Re\left\{ i \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{H'_{m+1}(k_0 b) \bar{H}'_m(k_0 b)} \right\} \\
& + \frac{k_0 d \cos\alpha}{\pi v_0 d (k_0 b)^2} \Re\left\{ i \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{i^m}{H'_m(k_0 b)} \left[\frac{(m-2)(-i)^{m-2}}{\bar{H}'_{m-2}(k_0 b)} - \frac{(m+2)(-i)^{m+2}}{\bar{H}'_{m+2}(k_0 b)} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

7.3. Αναλυτικός υπολογισμός δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης με τη μέθοδο μεταβολής της ορμής.

Ο γενικός τύπος υπολογισμού της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης με τη μέθοδο της μεταβολής της ορμής (Malenica et al. 1995) είναι:

$$B = \frac{\rho\omega_0}{2g}\Re\left\{\int_{S_{B_0}}\left[\nabla_0\phi\frac{\partial\psi^*}{\partial n}+\frac{\partial\phi}{\partial n}\nabla_0\psi^*-\nabla\phi\nabla\psi^*\right]n_0 dS-\int_{C_{B_0}}\left[\nu_0\phi\psi^*-k_0\cos\gamma\phi\phi^*\right]n_0 dC\right\} \tag{7.3.1}$$

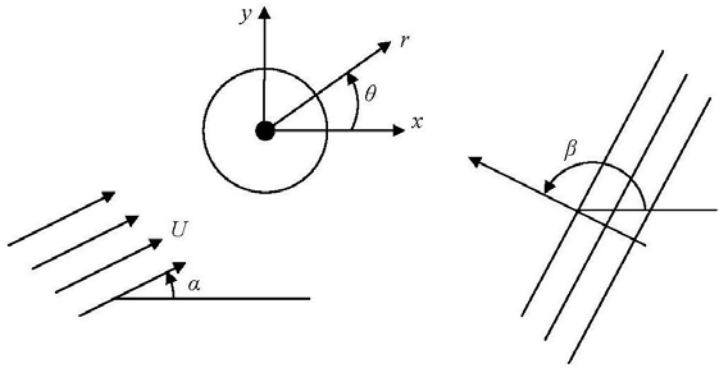
Όμως το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το μηδέν (Emmerhoff et al. 1992). Άρα αρκεί να υπολογιστεί η τιμή του δεύτερου ολοκληρώματος.

Και με αυτό τον τρόπο, λαμβάνουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα, με αυτά της μεθόδου της απ' ευθείας ολοκλήρωσης, για το ακίνητο σώμα.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τη μαθηματική απόδειξη, η οποία θα μας οδηγήσει στη σχέση (7.3.1), επιλύοντας αναλυτικά το πρόβλημα αλληλεπίδρασης κύματος- ρεύματος για τυχαία αξονοσυμμετρικά σώματα.

7.3.1. Μέσες δυνάμεις έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και μικρής πρόσω ταχύτητας. Αναλυτική επίλυση.

Ας θεωρήσουμε ένα αξονοσυμμετρικό σώμα που κινείται με μικρή πρόσω ταχύτητα και οι κυματισμοί διέρχονται προς αυτό υπό γωνία β, ως προς την κατεύθυνση του ρεύματος.



Σχήμα 7.3. 1: Σκαριφηματική αναπαράσταση κυλινδρικού σώματος σε πεδίο ροής στο οποίο συνυπάρχουν μονοχρωματικοί κυματισμοί βαρύτητας και θαλάσσιο ρεύμα

Για το παραπάνω πρόβλημα, θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$\Phi(x,t) = Ux + \bar{\phi}(xU) + \phi(x,tU) \tag{7.3.2}$$

Η ταχύτητα συνάντησης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \omega_0 + k_0 U \cos\beta \tag{7.3.3}$$

Με την εξίσωση διασποράς να γράφετε ως:

$$\omega_0^2 = k_0 g \tanh(k_0 d) \tag{7.3.4}$$

Η θεώρηση που κάνουμε για την επίλυση του προβλήματος αυτού, επιβάλει να βρισκόμαστε στη γραμμική περιοχή, αυτό σημαίνει ότι:

$$\frac{\omega U}{g} < 1 \text{ και } \nu = \frac{gb}{U^2} >> 1 . \tag{7.3.5}$$

Με τις δύο παραπάνω προϋποθέσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία διαταραχών και να χωρίσουμε τα δυναμικά ως εξής:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \tau\phi_1(x) + \bar{\phi}(xU) \tag{7.3.6}$$

Έτσι λοιπόν κάνοντας χρήση του θεωρήματος της σταθερής φάσης (method of stationary phase), το δυναμικό μπορεί να γραφεί (χωρίς τη χρονική εξάρτηση) σε μεγάλη απόσταση από το σώμα, δηλαδή για R>>1:

$$\phi = \frac{gA}{\omega}\frac{\cosh(kz)}{\cosh(kd)} e^{ik\ (x\cos\beta + y\sin\beta)} F(\theta;U) e^{iS(\theta;U)} \sqrt{\frac{1}{R}} \frac{\cosh(k_1(\theta)z)}{\cosh(k_1(\theta)d)} e^{ik_1(\theta)R} \tag{7.3.7}$$

Προφανώς η συνάρτηση $F(\theta;U)e^{iS(\theta;U)}$, προκύπτει από τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των δυναμικών του μακρινού πεδίου, όπως έχει αποδειχθεί και υπολογιστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο ΙΙ).

Επίσης είναι προφανές ότι η συνάρτηση $F(\theta;U)e^{iS(\theta;U)}$, μπορεί να γραφεί και ως:

$$F(\theta;U)e^{iS(\theta;U)} = (1 - 2\tau\cos\theta)F_0(\theta)e^{iS_0(\theta)} + \tau F_1(\theta)e^{iS_1(\theta)} + 0(\tau^2) \tag{7.3.8}$$

Στην περίπτωση όμως που η τιμή του τ_0 (ή τ) είναι μικρή, τότε μπορούμε να γράψουμε και ότι:

$$k_1(\theta) = k_0(1 - 2\tau cos\theta) \tag{7.3.9}$$

Με τ σ' αυτή την περίπτωση: $\tau \approx \dfrac{\tau_0}{\tanh(k_0 d) + \dfrac{k_0 d}{\cosh^2(k_0 d)}}$

$$\tau \approx \frac{\tau_0}{C_g(k_0 d)} \tag{7.3.10}$$

Όπου το $C_g(k_0 d)$, θα είναι ο λόγος μεταξύ της ταχύτητας ομάδας, που για ένα κύμα συχνότητας ω_0, θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$C_g(k_0 d) = \tanh(k_0 d) + \frac{k_0 d}{\cosh^2(k_0 d)} = \frac{d\omega/dk_0}{\frac{1}{2}\frac{g}{\omega_0}} \tag{7.3.11}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το k_0, δίνεται από τη σχέση: $\omega_0^2 = k_0 g \tanh(k_0 d)$.

Από τη σχέση για το $C_g(k_0 d)$ συναρτήσει του $k_0 d$, μπορούμε να συμπεράνουμε, πως η διακύμανση της τιμής του είναι μικρότερη του 5% όταν $k_0 d$ >2 και περισσότερη από 15%, όταν 1< $k_0 d$ <2. Είναι προφανές, ότι η επίδραση του ρεύματος στα χαρακτηριστικά του κυματισμού γίνεται σημαντικότερη όταν $k_0 d$ <1.

Οι οριζόντιες δυνάμεις έκπτωσης, μπορούν να υπολογιστούν με τη «μέθοδο της μεταβολής της ορμής», ως φαίνεται παρακάτω. Κάνοντας χρήση της εξίσωσης του Bernoulli, θα έχουμε:

$$\overline{F}_x = \frac{\rho}{2g}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 Rd\theta + \rho\int_0^{2\pi}\int_{-d}^{0} \left(\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 n - \nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) Rd\theta dz \tag{7.3.12}$$

Με θ, την πολική γωνία.

Μετά από μαθηματικούς υπολογισμούς καταλήγουμε στην έκφραση που δίνει τη μέση δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και μικρής πρόσω ταχύτητας (ή ωκεάνιου ρεύματος):

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{F}_x(\omega,U) \approx (1+2\tau)\bar{F}_x(\omega_0) + \\ &\frac{\rho k_0}{2}\tau\int_0^{2\pi} \{F^2(\theta)\sin^2\theta - \frac{g}{\omega_0}C_g(k_0 d)F(\theta,U)\frac{\partial F(\theta,U)}{\partial U}(\cos\theta - \cos\beta)\}d\theta\end{aligned}} \tag{7.3.13}$$

Από την παραπάνω σχέση, η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, δίνεται:

$$\boxed{b_{xx} \approx \frac{2\omega_0}{g}\left\{\bar{F}_x(\omega_0) + \frac{\rho k_0}{4}\int_0^{2\pi} \left\{F_0^2(\theta)\sin^2\theta - \frac{g}{\omega_0}C_g(k_0 d)F_0^2(\theta)\frac{\partial F(\theta,0)}{\partial U}(\cos\theta - \cos\beta)\right\}d\theta\right\}} \tag{7.3.14}$$

Στην περίπτωση μικρών ανακλάσεων γύρω από το σώμα και μικρής πρόσω ταχύτητας *U,* ο παραπάνω τύπος δίνει τα ίδια αποτελέσματα με τον προσεγγιστικό τύπο του Aranha.

7.3.2. Αριθμητικά αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιαστούν αριθμητικά αποτελέσματα για τυχαία αξονοσυμμετρικά σώματα, συγκρίσεις της αναλυτικής επίλυσης με την ευρετική μέθοδο (heuristic method) των Aranha και Clark και συγκρίσεις της επίλυσης αυτής με πειραματικά αποτελέσματα που έγιναν σε έναν κύλινδρο στην πειραματική δεξαμενή της DHI στη Δανία.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των δυνάμεων έκπτωσης, που προκύπτουν στο πεπερασμένο βάθος.

Για ταχύτητα ίση με το μηδέν, έχουμε:

$$\frac{gk_0}{\omega_0^2} C_g(k_0 d) = 1 + \frac{2k_0 d}{\sinh(2k_0 d)} \tag{7.3.15}$$

Αυτή η σχέση λαμβάνει τιμές, μεταξύ 1.5 και 2 για $k_0 d < 1$, αλλά τείνει πολύ γρήγορα στη μονάδα, όταν $k_0 d > 1$.

Για μικρή πρόσω ταχύτητα, μπορούμε να γράψουμε τη μέση δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης (drift force), ως:

$$\boxed{F_d^{WC} = F_{d|Fn=0} + Fn \frac{\partial F_d^{WC}}{\partial Fn}\Big|_{Fn=0}} \tag{7.3.16}$$

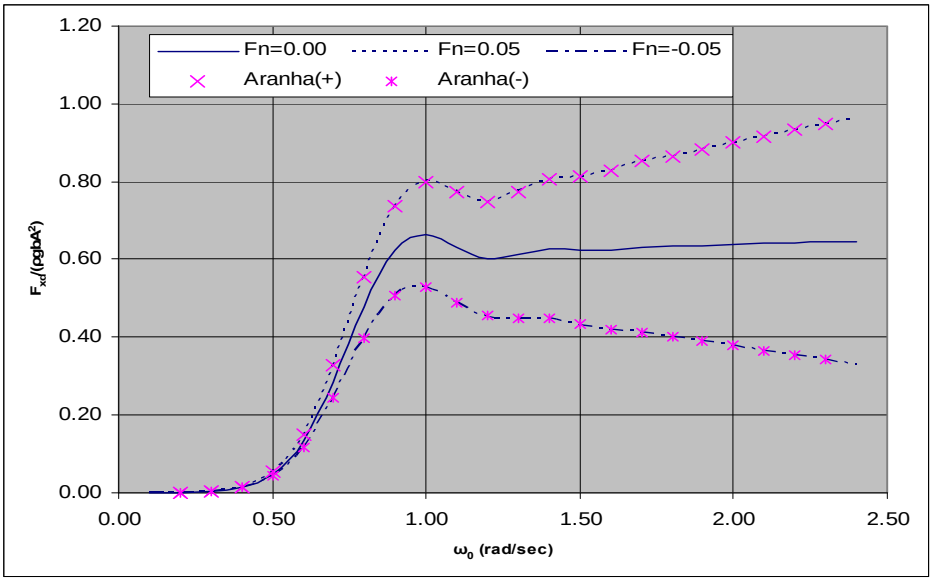
- Όπου ο όρος $Fn \frac{\partial F_d^{WC}}{\partial Fn}\Big|_{Fn=0} = FnB$, δίνει την αλλαγή της δύναμης έκπτωσης, υπό την επίδραση του ρεύματος.

- Ο όρος $B = \frac{\partial F_d^{WC}}{\partial Fn}\Big|_{Fn=0}$, είναι η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση (WDD)

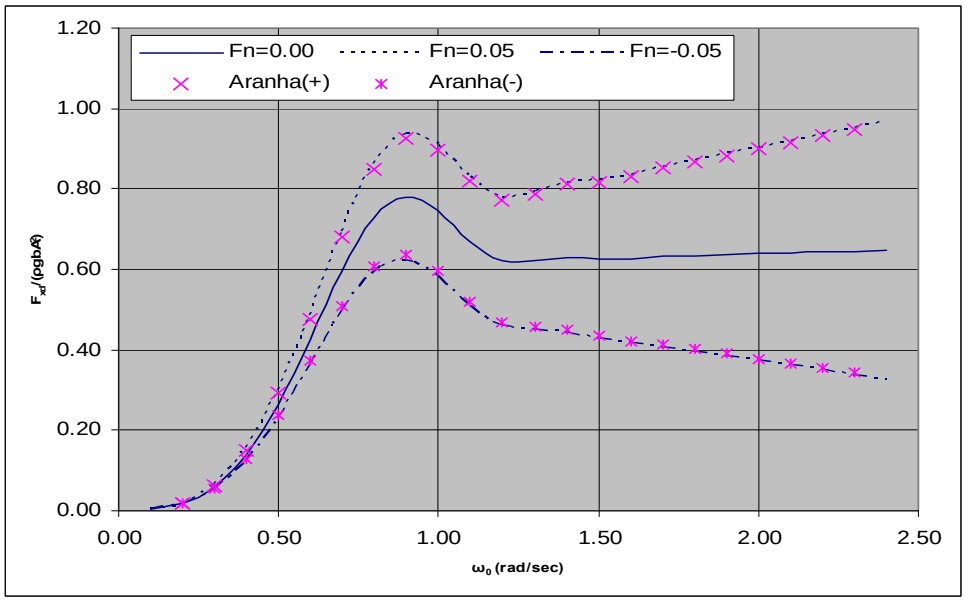
- *Fn* είναι ο αριθμός Froude ($Fn=U/(gb)^{1/2}$), με

  - U : η μικρή πρόσω ταχύτητα του σώματος (ή του ωκεάνιου ρεύματος)
  - g: η επιτάχυνση της βαρύτητας
  - b: η χαρακτηριστική διάσταση του σώματος.

Πακτωμένος κύλινδρος

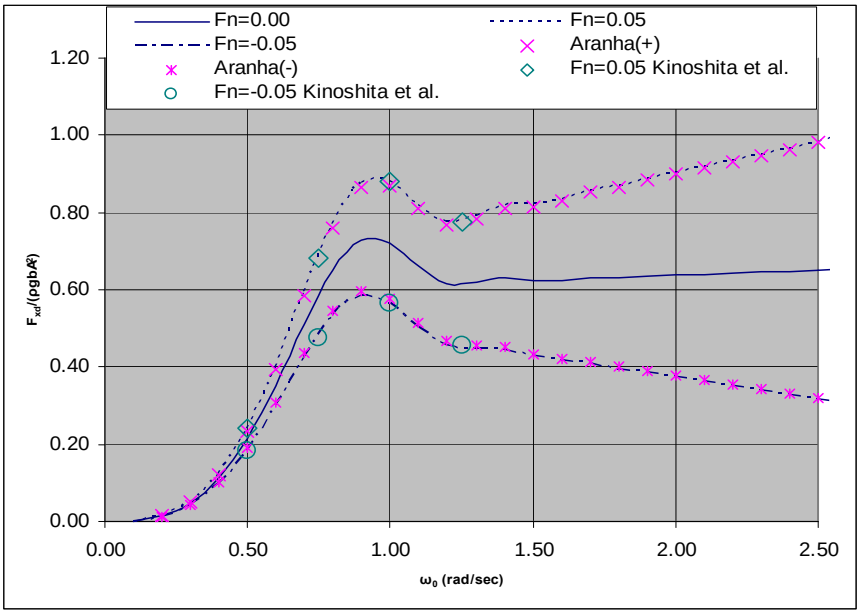


Σχήμα 7.3. 2: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Πακτωμένος κύλινδρος. d/b=15, Fn=|0.05|.

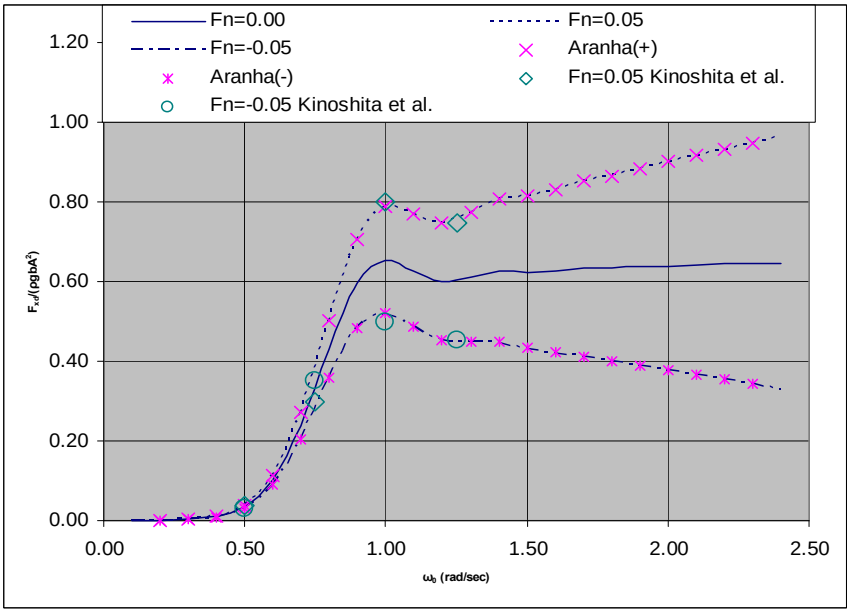


Σχήμα 7.3. 3: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Πακτωμένος κύλινδρος. d/b=2, Fn=|0.05|.

Κατακόρυφος κύλινδρος

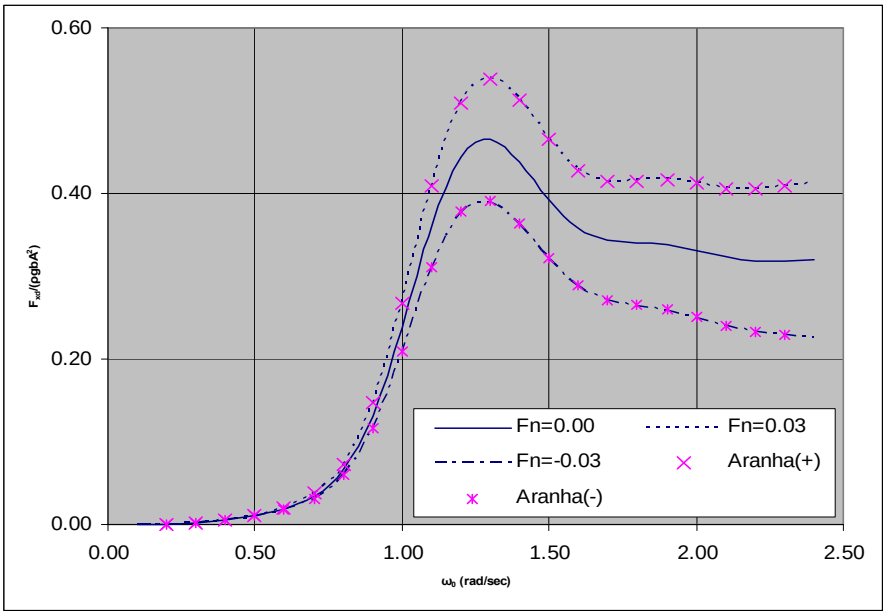


Σχήμα 7.3. 4: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Κατακόρυφος κύλινδρος. d/b=2, h/d=0.125, Fn=|0.05|.

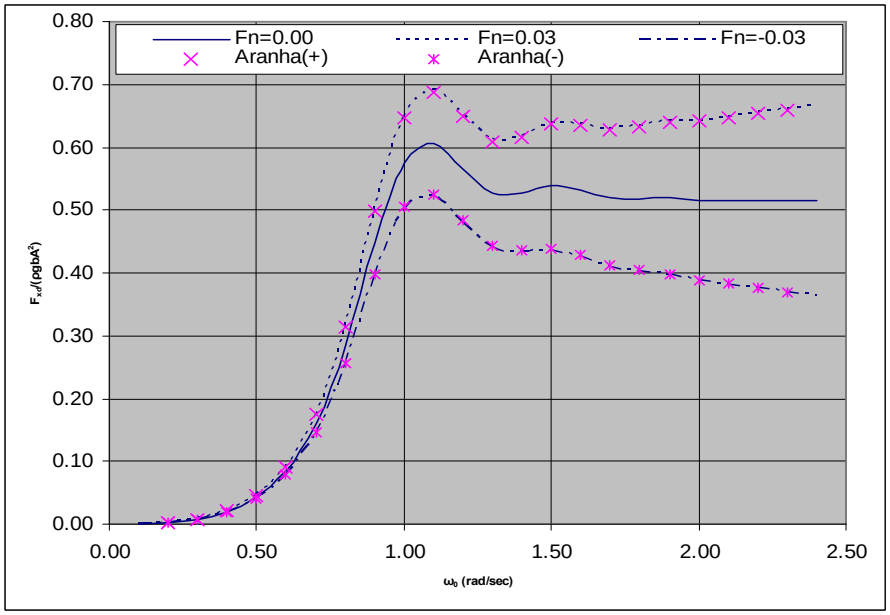


Σχήμα 7.3. 5: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Κατακόρυφος κύλινδρος. d/b=10, h/d=0.800, Fn=|0.05|.

Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα

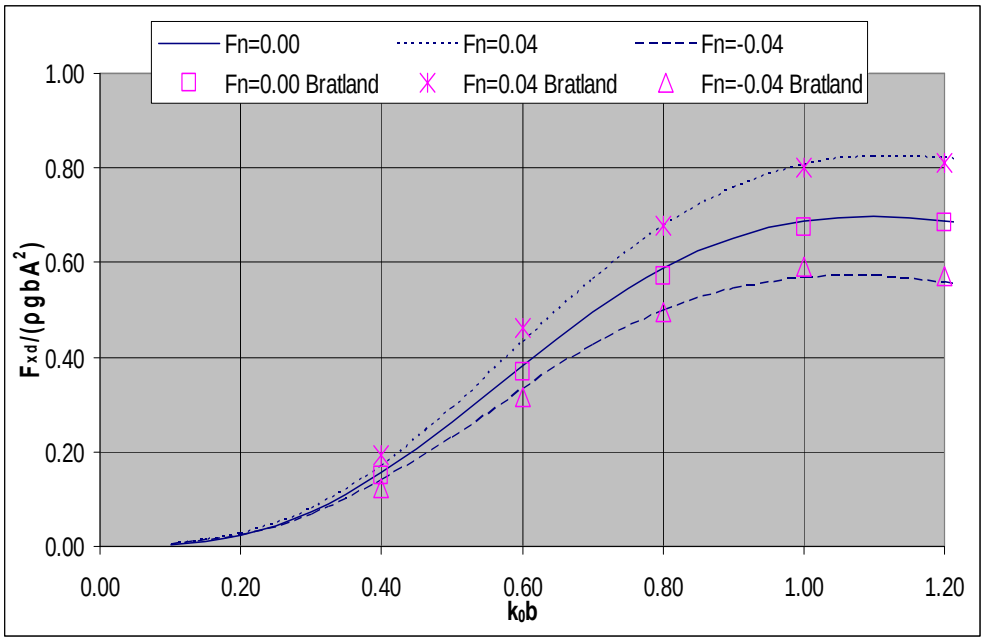


Σχήμα 7.3. 6: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα. d/b=3, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.500, Fn=|0.03|.

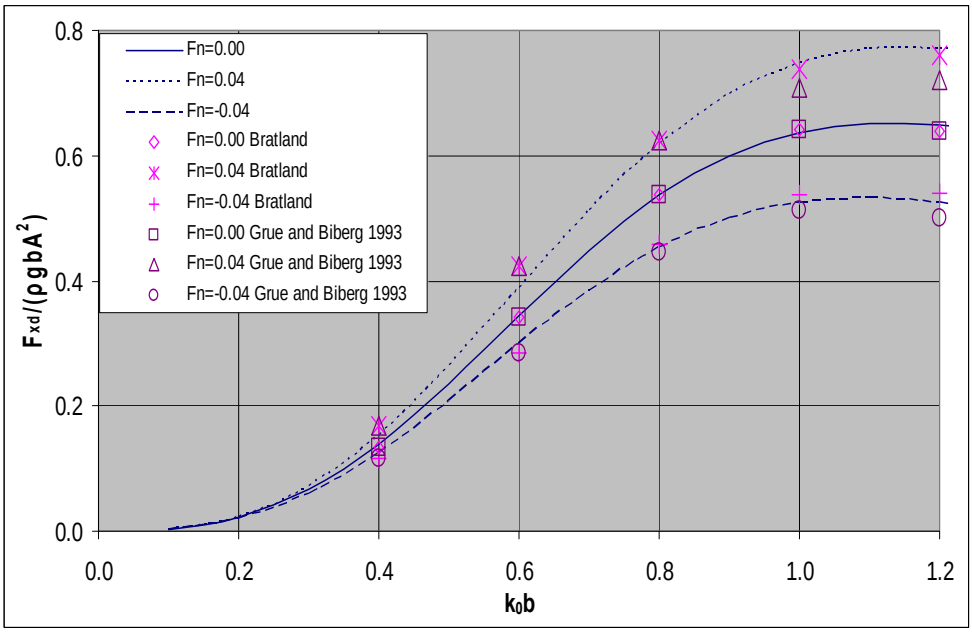


Σχήμα 7.3. 7: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα. d/b=3, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.800, Fn=|0.03|.

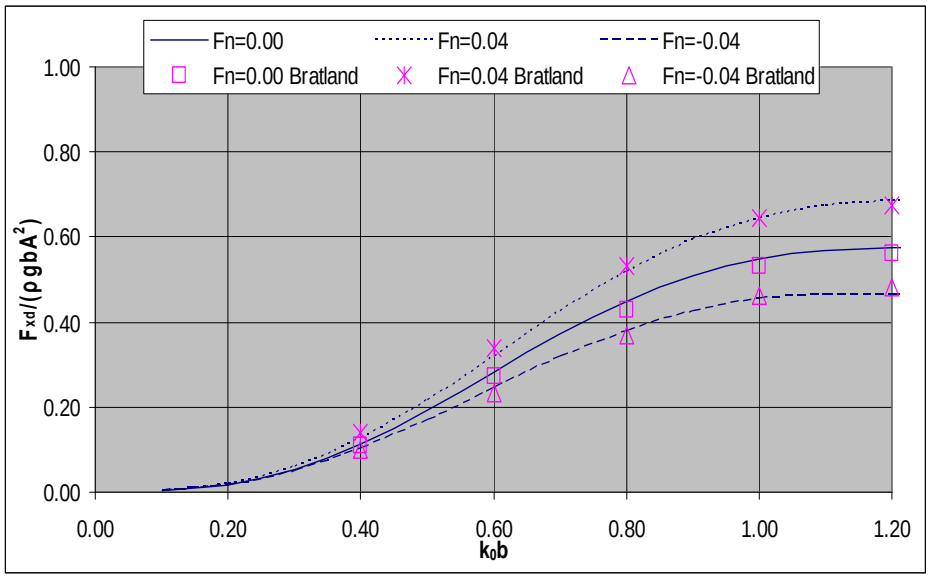
Σφαίρα



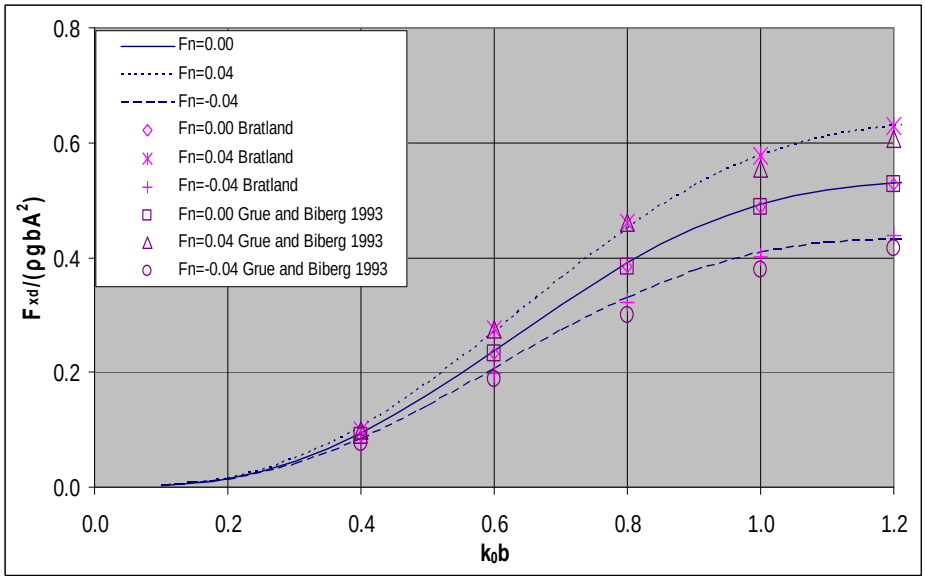
Σχήμα 7.3. 8: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα (σφαίρα). d/b=1.1, Fn=|0.04|.



Σχήμα 7.3. 9: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα (σφαίρα). d/b=1.2, Fn=|0.04|.



Σχήμα 7.3. 10: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα (σφαίρα). d/b=1.5, Fn=|0.04|.



Σχήμα 7.3. 11: Μέση οριζόντια δύναμη έκπτωσης δεύτερης τάξης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος. Σύνθετο κατακόρυφο κυλινδρικό σώμα (σφαίρα). d/b=infinity, Fn=|0.04|.

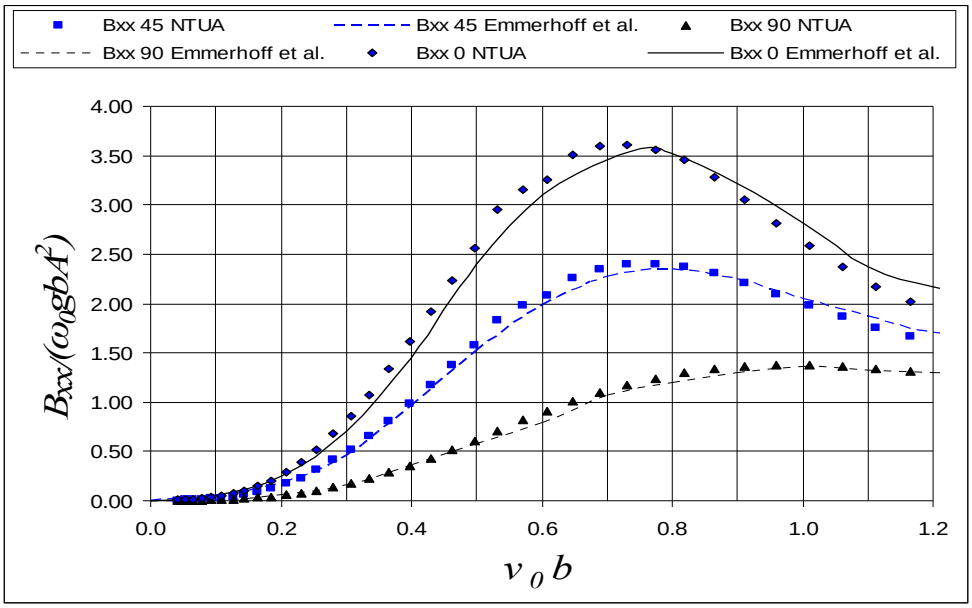
7.3.3. Σχόλια για τη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση (WDD)

Όπως είδαμε στην επίλυση του προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος ρεύματος στο βαθύ νερό, οι δυνάμεις εξαρτώνται από το wave slope (κλίση των κυματισμών), τον κυματαριθμό επί την χαρακτηριστική διάσταση του σώματος *kb* και τον αριθμό Froude ($Fn=U/(gb)^{1/2}$). Στην περίπτωση όμως του πεπερασμένου βάθους, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας δύο ακόμη πολύ σημαντικές παραμέτρους. Η πρώτη είναι το κενό μεταξύ του σώματος και του πυθμένα που δίνεται από τον λόγο *T/d* (με T το βύθισμα του σώματός μας). Η δεύτερη είναι ο λόγος μεταξύ του μήκους κύματος επί το βάθος, που δίνεται από τη σχέση *kd* (όπου *k,* είναι ο κυματαριθμός).

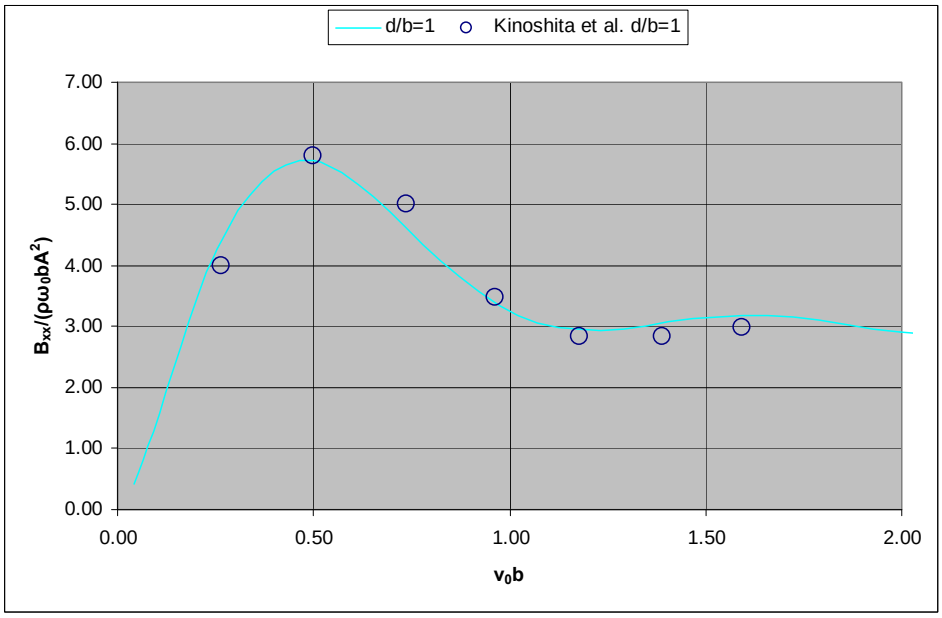
Επίσης εμφανίζεται ο λόγος μεταξύ της ταχύτητας ομάδας στο ρηχό νερό και το άπειρο νερό στις σχέσεις για τα ανακλώμενα κυματικά χαρακτηριστικά. Ο λόγος αυτός είναι περίπου μονάδα όταν $kd>1$, αλλά, μεγαλώνει σημαντικά όταν το $kd<1$, κάτι που πρακτικά σημαίνει πως τα φαινόμενα πεπερασμένου βάθους, γίνονται σημαντικά.

Η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση (*WDD*), είναι ένας από τους σημαντικότερους όρους που πρέπει να υπολογιστεί. Παρατηρήσαμε λοιπόν, πως η *WDD*, για ένα πλωτό ναυπήγημα, μπορεί να είναι και τρεις φορές μεγαλύτερη στο ρηχό νερό, απ' ότι στο βαθύ. Αυτό γίνεται περισσότερο εμφανές, όταν το βάθος του νερού, είναι λίγο μεγαλύτερο, απ' ότι το βύθισμα του πλοίου και το μήκος του κύματος, είναι συγκρίσιμο με το μήκος του πλοίου.

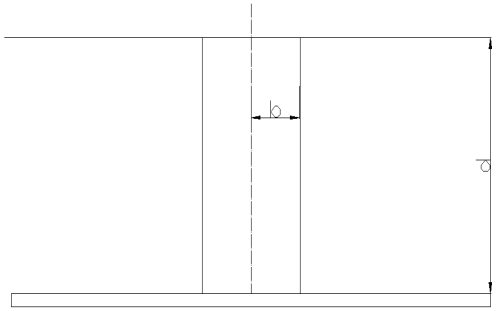
Στην παρακάτω ενότητα, παρουσιάζουμε αποτελέσματα της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης σε διάφορα κατακόρυφα αξονοσυμμετρικά σώματα και συστοιχίες αυτών.



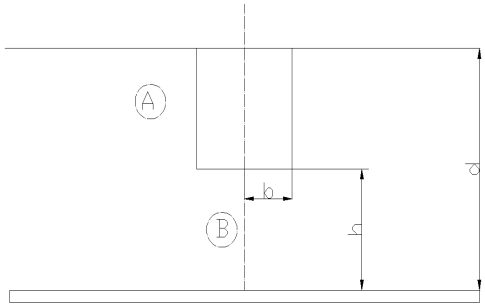
Σχήμα 7.3. 12: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, για πακτωμένο κύλινδρο σε άπειρο βάθος. Συγκρίσεις με τη δημοσίευση των *Emmerhoff et al.* (1992)



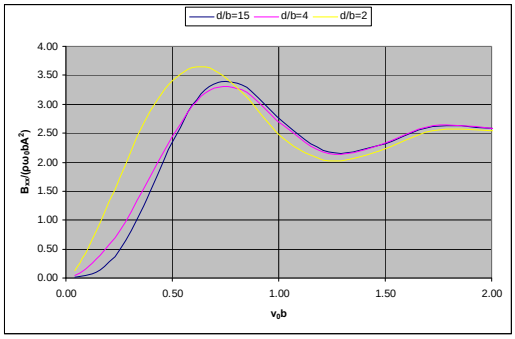
Σχήμα 7.3. 13: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, για πακτωμένο κύλινδρο. Συγκρίσεις με τη δημοσίευση των Kinoshita et al (2002).



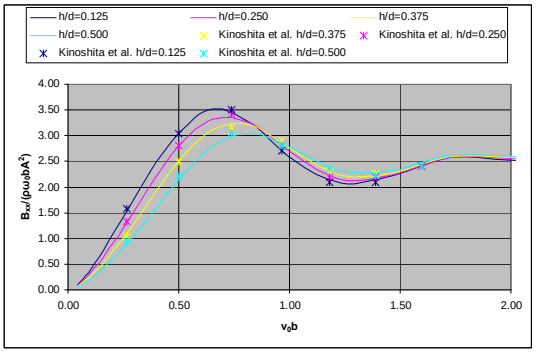
Πακτωμένος κύλινδρος, με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα.



Κατακόρυφος κύλινδρος , με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα.

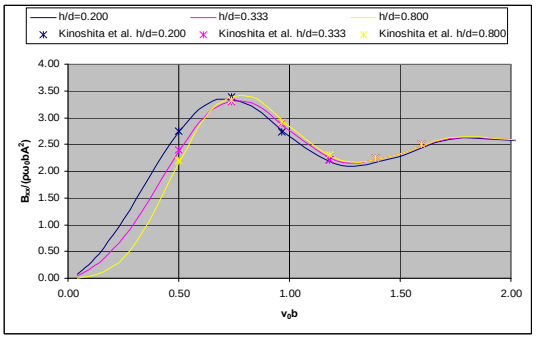


Σχήμα 7.3. 14: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, για πακτωμένο κύλινδρο (αναλυτικοί υπολογισμοί).



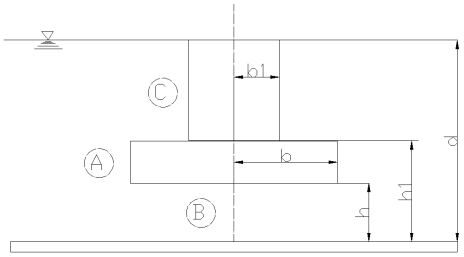
Σχήμα 7.3. 15: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, σε κατακόρυφους κυλίνδρους, με

d/b=2.(αναλυτικοί υπολογισμοί)

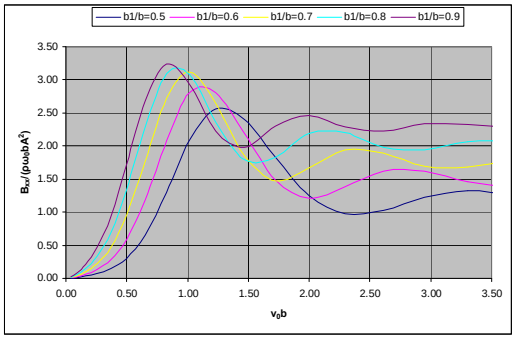


Σχήμα 7.3. 16: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, σε κατακόρυφους κυλίνδρους, με

h/d=0.200 και d/b=25, h/d=0.333 και d/b=3,0, h/d=0.800 και d/b=10 (αναλυτικοί υπολογισμοί).



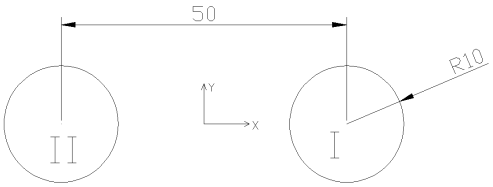
Σύνθετος κατακόρυφος κύλινδρος, με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα.



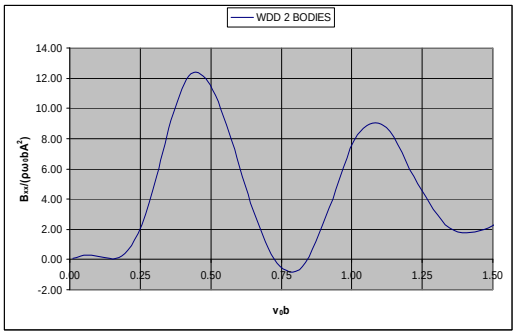
Σχήμα 7.3. 17: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, σε σύνθετους κατακόρυφους κυλίνδρους *(αναλυτικοί υπολογισμοί)*

Με:

b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.5
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.6
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.7
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.8
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.9

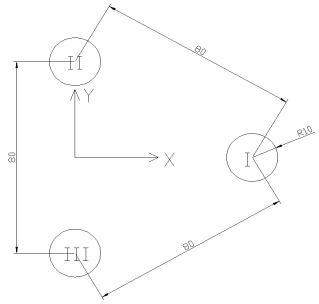


Διάταξη δύο όμοιων κυλίνδρων

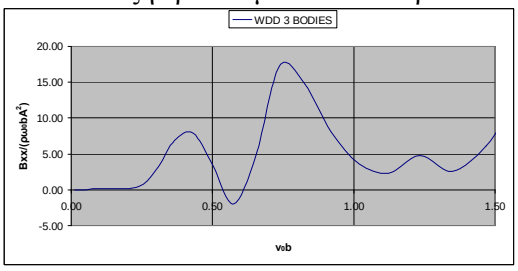


Σχήμα 7.3. 18: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία 2 πακτωμένων κυλίνδρων

Με χαρακτηριστικά:
Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 20m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 50m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (25m, 0m)
Σώμα II: (-25m, 0m)

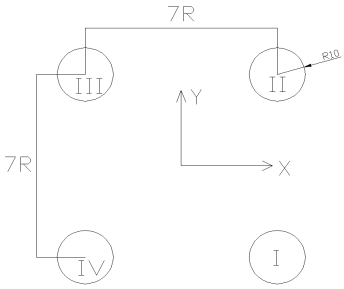


Διάταξη τριών όμοιων κυλίνδρων

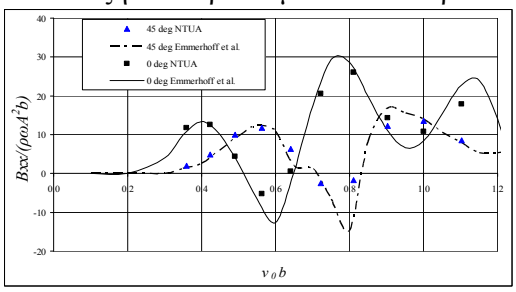


Σχήμα 7.3. 19: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία 3 πακτωμένων κυλίνδρων

Με χαρακτηριστικά:
Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 400m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 80m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (69.28m, 0m)
Σώμα II: (0, 40)
Σώμα III: (0, -40m)

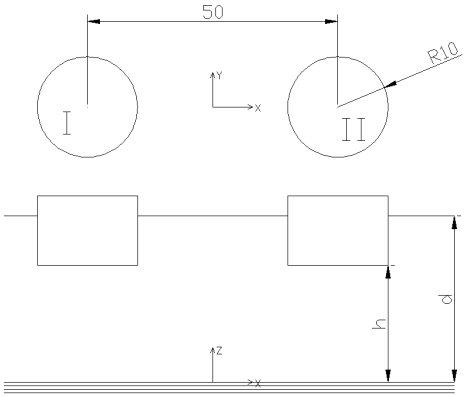


Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων

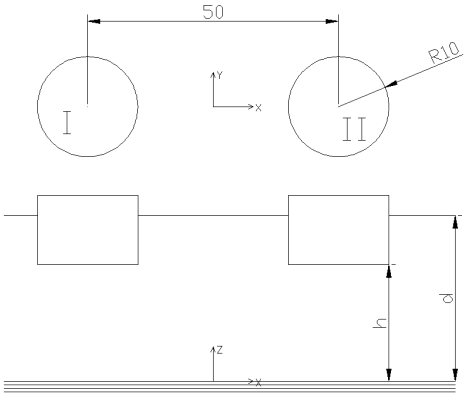


Σχήμα 7.3. 20: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία 4 κυλίνδρων σε άπειρο βάθος.. Συγκρίσεις με τη δημοσίευση των *Emmerhoff et al.(1992)*

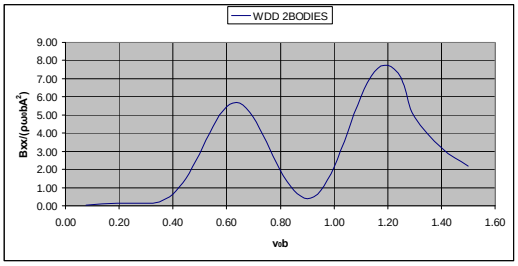
Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 150m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 70m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (34.335m, -34.335m)
Σώμα II: (34.335m, 34.335m)
Σώμα III: (-34.335m, 34.335m)
Σώμα IV: (-34.335m, -34.335m)



Η συστοιχία των δύο όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.95*).



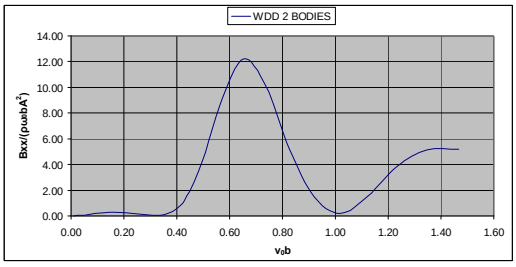
Η συστοιχία των δύο όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.5*).



Σχήμα 7.3. 21: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία 2 κυλίνδρων

Με χαρακτηριστικά:

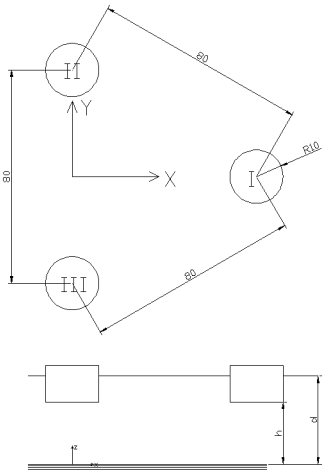
Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 100m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 50m
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 95m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (25m, 0m)
Σώμα II: (-25m, 0m)



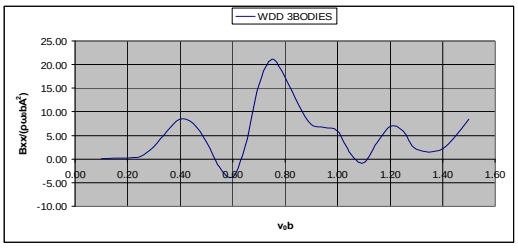
Σχήμα 7.3. 22: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία 2 όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων

Με χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 40m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 20m
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 20m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (20m, 0m)
Σώμα II: (-20m, 0m)



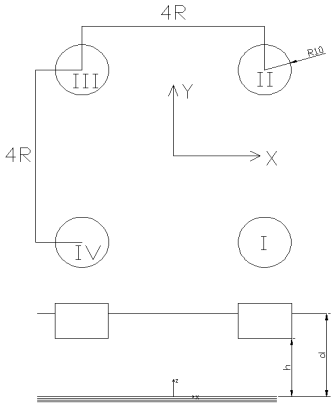
Η συστοιχία των τριών όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.72625*).



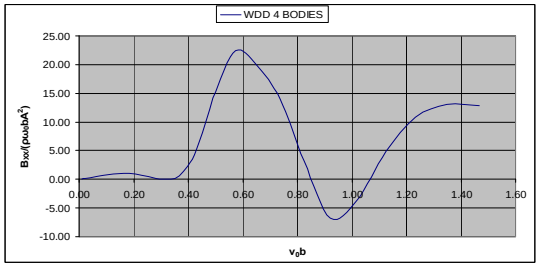
Σχήμα 7.3. 23: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία τεσσάρων όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων

Με χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 400m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 80m
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 290.5m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (69.28m, 0m)
Σώμα II: (0m, 40m)
Σώμα III: (0m, -40m)



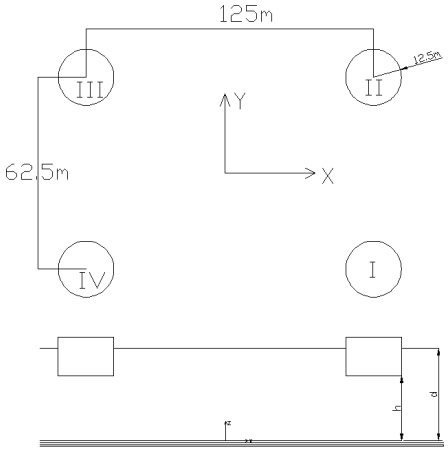
Η συστοιχία των τεσσάρων όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.5*).



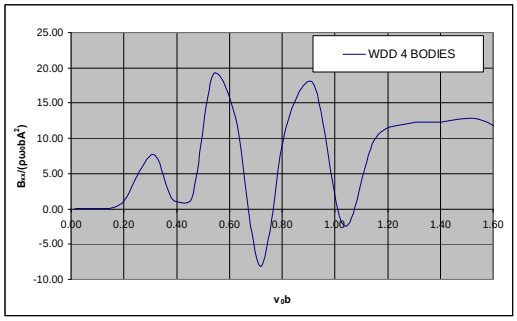
Σχήμα 7.3. 24: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία τεσσάρων όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων

Με χαρακτηριστικά:

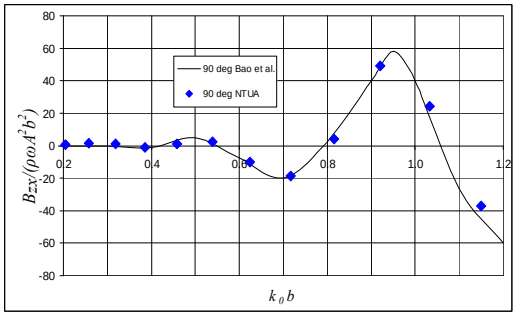
Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 40m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 40m
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 20m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (20m, -20m)
Σώμα II: (20m, 20m)
Σώμα III: (-20m, 20m)
Σώμα IV: (-20m, -20m)



Η συστοιχία των τεσσάρων όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.8125*).



Σχήμα 7.3. 25: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία τεσσάρων όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων



Σχήμα 7.3. 26: Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε συστοιχία 4 κατακόρυφων κυλίνδρων. Συγκρίσεις με τη δημοσίευση των *Bao et al. (2000)*

Με χαρακτηριστικά:

Ακτίνα κάθε σώματος: 12.5m
Βάθος νερού: 200m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: (125m, 62.5m)
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 162.5m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (62.5m, -31.25m)
Σώμα II: (62.5m, 31.25m)
Σώμα III: (-61.25m, 31.25m)
Σώμα IV: (-62.5m, -31.25m)

7.4. Ταχύτητα «έκπτωσης» (drift velocity) για ένα σώμα σε απλούς αρμονικούς κυματισμούς.

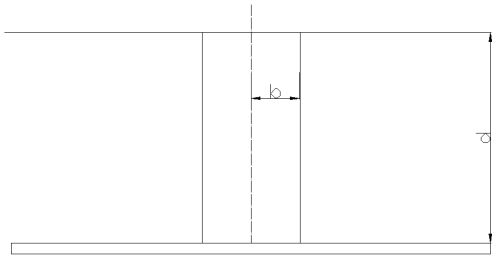
Ένα σώμα το οποίο πλέει ελεύθερα σε απλούς αρμονικούς κυματισμούς, μετατοπίζεται με την ταχύτητα «έκπτωσης» (drift velocity) στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Με προσπίπτοντα κύματα στη διεύθυνση του επιπέδου συμμετρίας του σώματος, το τελευταίο θα υπόκειται σε ευθύγραμμη μεταφορική κίνηση με σταθερή μέση ταχύτητα U. Από το νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει ότι η μέση δύναμη στην διεύθυνση της διάδοσης θα πρέπει να μηδενίζεται. Συνεπώς από τη σχέση:

$$\overline{F_2}(t) = |A|^2 \operatorname{Re}[F_{20}(\omega_0) + F_{21}(\omega_0)] = D(\omega_0) - UB(\omega_0)\,,$$

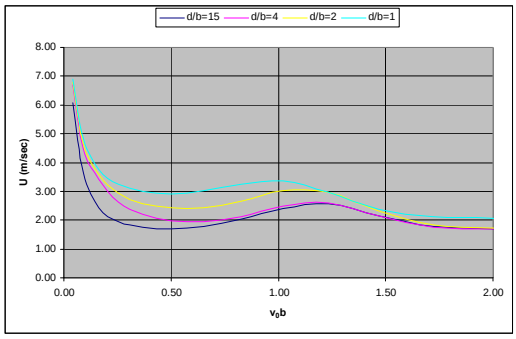
η οποία περιλαμβάνει τη μικρή drift ταχύτητα, το U είναι ίσο με το λόγο της μέσης δευτεροτάξιας δύναμης στον απλό αρμονικό κυματισμό προς τον συντελεστή της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης $U = \dfrac{D(\omega_0)}{B(\omega_0)}$. Η σχέση αυτή υπολογίζει την σταθερή μέση drift ταχύτητα, για ένα σώμα σε απλά αρμονικά κύματα. Ακόμη, η θεωρία του ιδανικού ρευστού που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή της $U = \dfrac{D(\omega_0)}{B(\omega_0)}$ υποδηλώνει ότι η drift ταχύτητα του σώματος στα απλά αρμονικά κύματα είναι ανεξάρτητη του πλάτους! Η συναρτήσει του τετραγώνου του πλάτους του κύματος αύξηση της μέσης δευτεροτάξιας δύναμης, αντισταθμίζεται από τον ίδιο ρυθμό αύξησης της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής δύναμης απόσβεσης, η οποία ανθίσταται στην ευθύγραμμη μεταφορική κίνηση για θετική τιμή του συντελεστή της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης. Όταν δεν έχουμε παρουσία εξωτερικών δυνάμεων για να απορροφήσουν την ροή της ορμής στο ρευστό, η εξισορρόπηση των δύο αυτών αντιτιθέμενων φαινόμενων, οδηγεί σε μια μεταφορική κίνηση με ταχύτητα, η οποία είναι ανεξάρτητη του πλάτους του κυματισμού.

Μια δεύτερη ενδιαφέρουσα παρατήρηση για την ταχύτητα *U*, είναι ότι μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές. Η μέση δευτεροτάξια δύναμη $D(\omega_0)$ που ασκείται σε ένα ελεύθερα κινούμενο σώμα, έχει πάντα διεύθυνση κατά την φορά του προσπίπτοντος κυματισμού . Για μερικές γεωμετρίες η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές στο πεδίο των συχνοτήτων. Στις περιπτώσεις αυτές, το σώμα θα τείνει να κινηθεί σε διεύθυνση αντίθετη από αυτή που προσπίπτει ο κυματισμός! Αυτή είναι η περίπτωση συστοιχίας τεσσάρων κυλίνδρων, για ορισμένα εύρη συχνοτήτων του προσπίπτοντος κυματισμού.

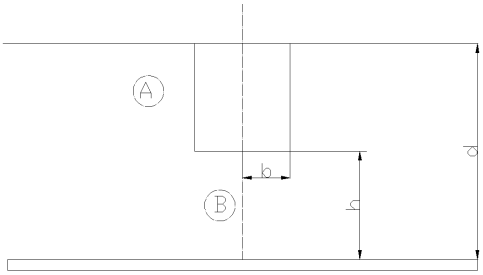
Τα παρακάτω σχήματα παρουσιάζουν την drift ταχύτητα για έναν κύλινδρο συναρτήσει του αδιάστατου αριθμού κύματος $v_0 b$. Οι τιμές είναι όλες θετικές. Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει την drift ταχύτητα για μια συστοιχία τεσσάρων κυλίνδρων. Όπως μπορεί να δει κανείς, υπάρχουν περιοχές συχνοτήτων όπου η τιμή της drift ταχύτητας είναι αρνητική. Πολύ μικρές τιμές για τη σταθερά της δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης, δηλώνουν ότι (τουλάχιστον στη τάξη μεγέθους του *U*) η drift κίνηση του σώματος, είναι χωρίς αντίσταση παρουσία ιδεατού ρευστού. Στις περιπτώσεις αυτές, το παρόν θεωρητικό μοντέλο δίνει μεγάλες τιμές για την drift ταχύτητα, που μπορεί να καταστρατηγούν την υπόθεση των μικρών τιμών του *U*. Ακόμη τα φαινόμενα συνεκτικότητας δεν περιέχονται στο μοντέλο της δυναμικής ροής του ρευστού, που υποτέθηκε και από το οποίο εξάγουμε την τιμή της *U*. Είναι όμως πολύ πιθανό στην πραγματικότητα να επηρεάζεται σημαντικά η τιμή και το πρόσημο της drift ταχύτητας, από τα φαινόμενα αυτά.



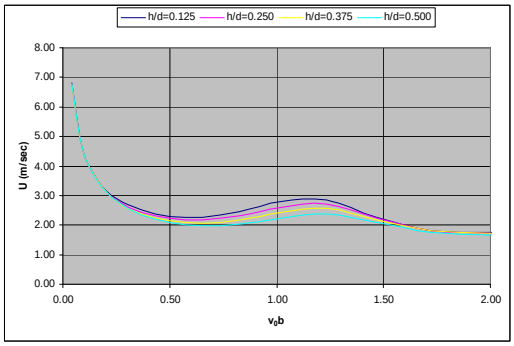
Πακτωμένος κύλινδρος, με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα.



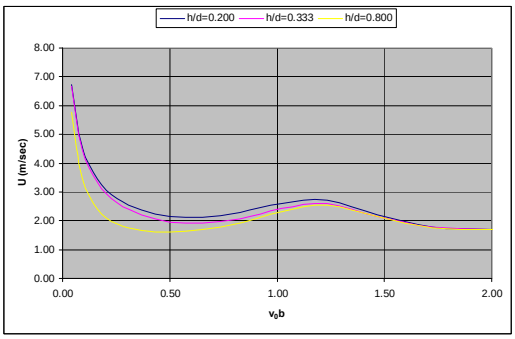
Σχήμα 7.4. 1: Ταχύτητα «έκπτωσης», σε πακτωμένους κυλίνδρους



Κατακόρυφος κύλινδρος, με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα.

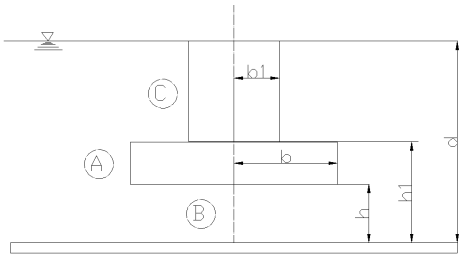


Σχήμα 7.4. 2: Ταχύτητα «έκπτωσης», σε κατακόρυφους κυλίνδρους, με *d/b=2.*

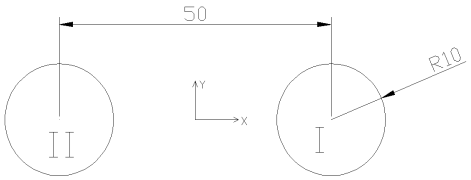


Σχήμα 7.4. 3: Ταχύτητα «έκπτωσης», σε κατακόρυφους κυλίνδρους

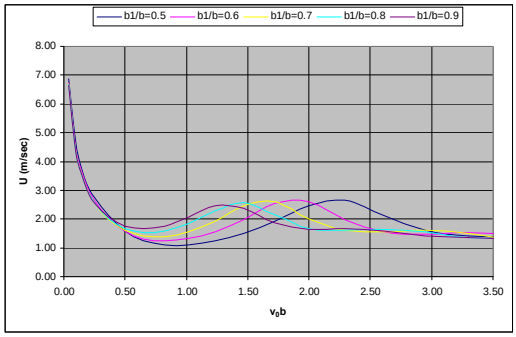
με *h/d=0.200 και d/b=25, h/d=0.333 και d/b=3,0, h/d=0.800 και d/b=10 .*



Σύνθετος κατακόρυφος κύλινδρος, με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στο σχήμα.



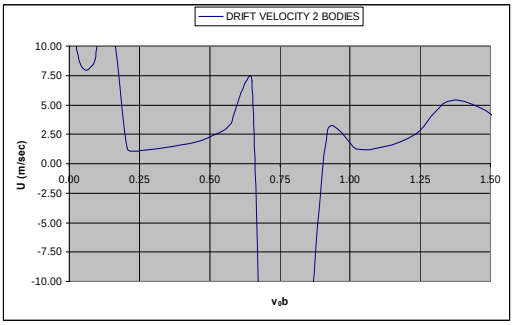
Διάταξη δύο όμοιων κυλίνδρων



Σχήμα 7.4. 4: Ταχύτητα «έκπτωσης», σε σύνθετους κατακόρυφους κυλίνδρους

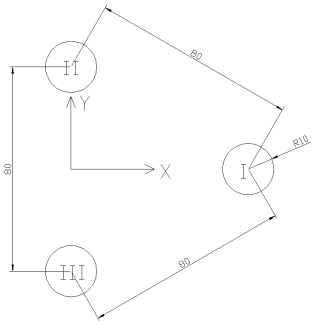
με:

b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.5
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.6
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.7
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.8
b/d=0.333, h/d=0.500, h_1/d=0.833, b_1/b=0.9

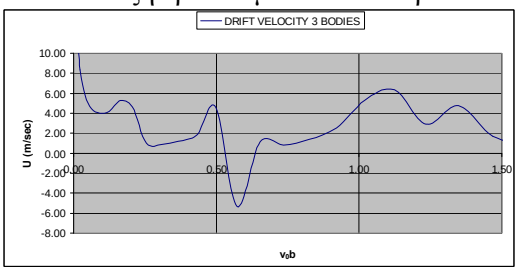


Σχήμα 7.4. 5: Ταχύτητα «έκπτωσης», συστοιχία 2 πακτωμένων κυλίνδρων

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 20m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 50m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (25m, 0m)
Σώμα II: (-25m, 0m)

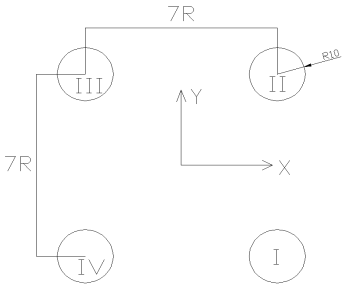


Διάταξη τριών όμοιων κυλίνδρων

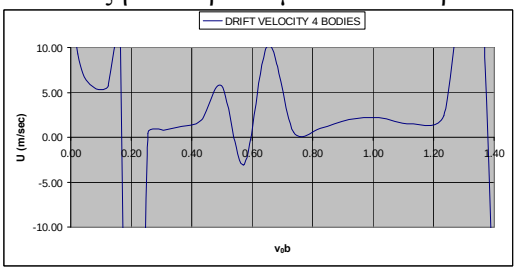


Σχήμα 7.4. 6: Ταχύτητα «έκπτωσης», συστοιχία 3 πακτωμένων κυλίνδρων

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 400m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 80m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (69.28m, 0m)
Σώμα II: (0, 40)
Σώμα III: (0, -40m)

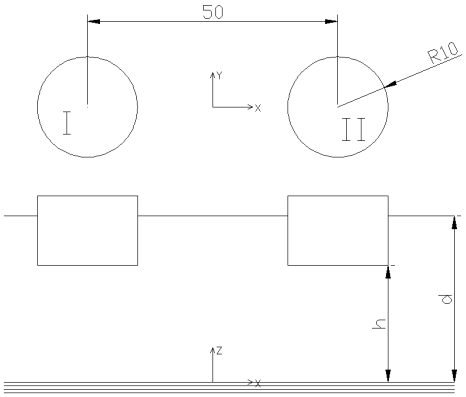


Διάταξη τεσσάρων όμοιων κυλίνδρων

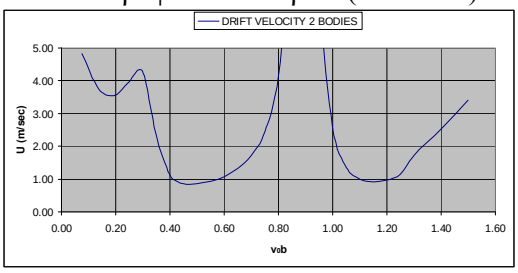


Σχήμα 7.4. 7: Ταχύτητα «έκπτωσης», συστοιχία 4 πακτωμένων κυλίνδρων

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 150m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 70m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (34.335m, -34.335m)
Σώμα II: (34.335m, 34.335m)
Σώμα III: (-34.335m, 34.335m)
Σώμα IV: (-34.335m, -34.335m)

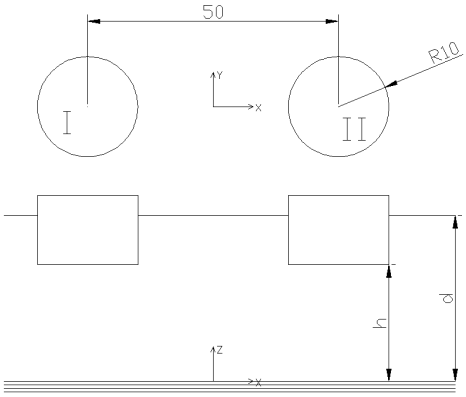


Η συστοιχία των δύο όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.95*).

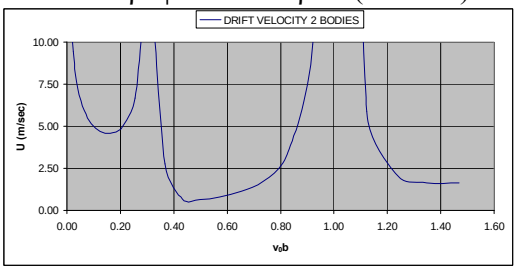


Σχήμα 7.4. 8: Ταχύτητα «έκπτωσης», συστοιχία δύο κατακόρυφων κυλίνδρων

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 100m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 50m
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 95m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (25m, 0m)
Σώμα II: (-25m, 0m)

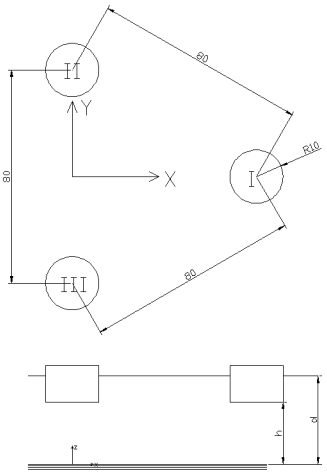


Η συστοιχία των δύο όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.5*).

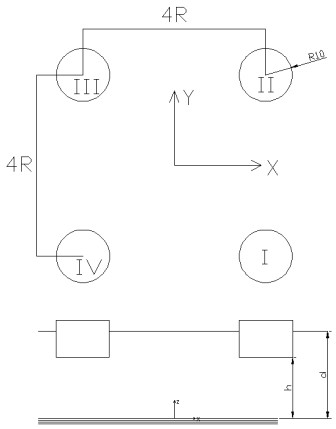


Σχήμα 7.4. 9: Ταχύτητα «έκπτωσης», συστοιχία δύο κατακόρυφων κυλίνδρων

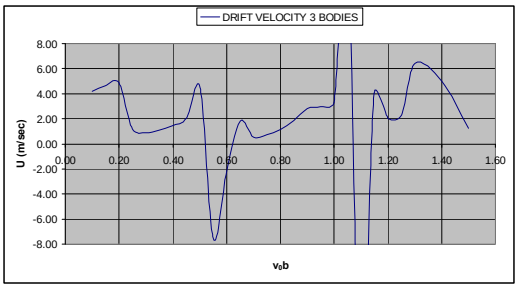
Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 40m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 20m
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 20m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (20m, 0m)
Σώμα II: (-20m, 0m)



Η συστοιχία των τριών όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.72625*).

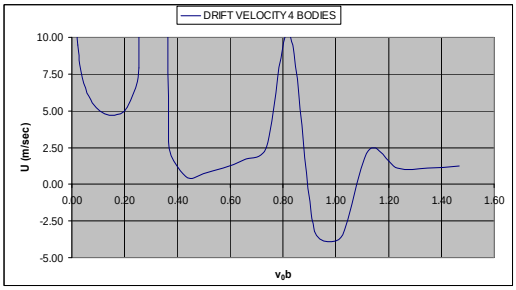


Η συστοιχία των τεσσάρων όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.5*).



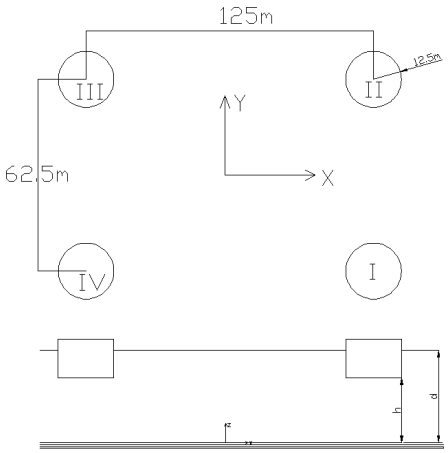
Σχήμα 7.4. 10: Ταχύτητα «έκπτωσης», συστοιχία τριών κατακόρυφων κυλίνδρων

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 400m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 80m
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 290.5m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (69.28m, 0m)
Σώμα II: (0m, 40m)
Σώμα III: (0m, -40m)

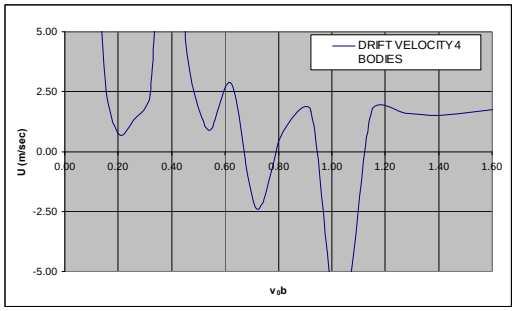


Σχήμα 7.4. 11: Ταχύτητα «έκπτωσης», συστοιχία τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων

Ακτίνα κάθε σώματος: 10m
Βάθος νερού: 40m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: 40m
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 20m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (20m, -20m)
Σώμα II: (20m, 20m)
Σώμα III: (-20m, 20m)
Σώμα IV: (-20m, -20m)



Η συστοιχία των τεσσάρων όμοιων κατακόρυφων κυλίνδρων (*h/d=0.8125*)



Σχήμα 7.4. 12: Ταχύτητα «έκπτωσης», συστοιχία τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων

Ακτίνα κάθε σώματος: 12.5m
Βάθος νερού: 200m
Απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυλίνδρων: (125m, 62.5m)
Απόσταση πυθμένα- κυλίνδρου: 162.5m
Συντεταγμένες σωμάτων:
Σώμα I: (62.5m, -31.25m)
Σώμα II: (62.5m, 31.25m)
Σώμα III: (-61.25m, 31.25m)
Σώμα IV: (-62.5m, -31.25m)

7.5. Μέση δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε φυσικούς θαλάσσιους κυματισμούς

Από την εξίσωση της κίνησης στη κατεύθυνση X (σε surge) για ένα σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας κίνησης μπορούμε να γράψουμε:

$$(M + M_a) \cdot X'' + B \cdot X' + K \cdot X = F^{(2)}(X, X', t)$$

Όπου:

M: μάζα
M_α: πρόσθετη μάζα
B: απόσβεση
K: σταθερά ελατηρίου

Μη λαμβάνοντας υπόψη τη εξάρτηση του X στην $F^{(2)}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$(M + M_a) \cdot X'' + B \cdot X' + K \cdot X = F^{(2)}(0,0,t) + X' \cdot \frac{\partial F^{(2)}(0,0,t)}{\partial X'}$$

ή

$$(M + M_a) \cdot X'' + [B - \frac{\partial \overline{F}^{(2)}(0,0,t)}{\partial X'}] \cdot X' = F^{(2)}(0,0,t) + X' \cdot \frac{\partial F^{(2)}(0,0,t)}{\partial X'}$$

Εδώ έχουμε χωρίσει το $\frac{\partial F^{(2)}}{\partial X'}$ σε μια χρονικά ανεξάρτητη μέση τιμή, που μεταφέρθηκε στο αριστερό μέρος της εξίσωσης, και σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο κομμάτι.

Αν τώρα το $b_{xx}(\omega)$ περιγράψει τη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε γραμμικό κυματισμό με συχνότητα ω και μοναδιαίο πλάτος, είναι προφανές το ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο (Molin, B., 1994):

$$-\frac{\partial \overline{F}^{(2)}(0,0,t)}{\partial X'} = 2\int_0^\infty b_{xx}(\omega) \cdot S(\omega) d\omega \qquad (7.5.1)$$

Όπου το S(ω) είναι το φάσμα του κυματισμού. Εάν βέβαια είναι γνωστή η τιμή του $b_{xx}(\omega)$, είναι πολύ εύκολο να εξάγουμε τη μέση δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση!

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι, έστω και αν έχει πολλαπλασιαστεί με μία μηδενική τιμή, η ταχύτητα X' θα υπάρχει ακόμα στο δεξί μέλος της εξίσωση κίνησης και έτσι αυτός ο όρος μπορεί επίσης να συνεισφέρει στην απόσβεση. Στη λύση στο πεδίο των συχνοτήτων, αυτός ο όρος «πηγαίνει» στο να εξαλειφθεί οπωσδήποτε, με τη δικαιολογία ότι δεν είναι εύκολο να εκτιμηθεί μιας και έχει μικρή τιμή σε σχέση με το $F^{(2)}(0,0,t)$. Σε μια λύση στο πεδίο του χρόνου όμως, μπορεί εύκολα περιληφθεί. Γι' αυτό το λόγο, είναι λογικό να περιμένουμε ορισμένες διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων που παράγονται από αυτές τις δύο μεθόδους.

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε μη γραμμικούς κυματισμούς. Πρέπει λοιπόν αρχικά να υπολογίσουμε τις δυνάμεις έκπτωσης (drift forces), σε επόμενο στάδιο να υπολογίσουμε τη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση και τέλος, ανάλογα με το δεδομένο φάσμα κυματισμού να υπολογίσουμε τη μέση δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση.

Στην παρακάτω ενότητα ακολουθούν παραδείγματα υπολογισμού της μέσης δευτεροτάξιας υδροδυναμικής απόσβεσης, σε διάφορά μεμονωμένα σώματα, αλλά και συστοιχίες σωμάτων.

Χάριν πληρότητας, αρχικά θα παρουσιάζονται οι ενδεικτικά οι δυνάμεις έκπτωσης, η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση και τέλος η μέση δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση.

Τα υπό μελέτη ναυπηγήματα, ήταν ένας Πλωτός Τερματικός Σταθμός (Π.Τ.Σ.), καθώς και ένα LNGC, σε δύο καταστάσεις φόρτωσης, τη full load και την ballasted. Επίσης τα παραπάνω πλοία εξετάστηκαν ως συστοιχία, σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, την περίπτωση Π.Τ.Σ- LNGC full load condition και Π.Τ.Σ.- LNGC ballasted condition.

Όπως αναφέρθηκε θα παρουσιαστούν ενδεικτικά οι δυνάμεις έκπτωσης στις 120 μοίρες, η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση επίσης στις 120 μοίρες και αναλυτικά η μέση δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση από 0 ως 180 μοίρες. Τα αποτελέσματα αφορούν στις δυνάμεις έκπτωσης και στη δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση, έχουν υπολογιστεί και παρουσιαστεί στη Μεταπτυχιακή Εργασία με τίτλο: ««*Αργά μεταβαλλόμενες δευτεροτάξιες δυνάμεις εκπεσμού και δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση σε θαλάσσιες κατασκευές (Slow-drift wave excitation and, damping on marine structures)*», που εκπονήθηκε από τον υπογράφοντα, καθώς και στη δημοσίευση των Mavrakos, et al. (ISOPE, 2007).

7.5.1.Χαρακτηριστικά για τους υδροδυναμικούς υπολογισμούς

<u>Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλωτού τερματικού σταθμού (Π. Τ. Σ.)</u>

Τα κύρια χαρακτηριστικά του πλωτού τερματικού σταθμού GIFT, τα οποία και χρησιμοποιήθηκαν για τους υδροδυναμικούς υπολογισμούς, βρίσκονται συγκεντρωμένα στον παρακάτω πίνακα.

LNG nominal storage capacity	350,000 m^3
Operating displacement	335,400 t
Overall length	410.00 m
Length between perpendiculars	403.00 m
Breadth moulded (excluding appurtenances)	55.00 m
Skirt width	5.00 m
Depth at main deck	37.75 m
Depth at trunk deck	41.75 m
Operating draft	16.00 m

Πίνακας 7.5.1: κύριες διαστάσεις του Π.Τ.Σ.

Για την υδροδυναμική ανάλυση, τα βασικά χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω:

Π.Τ.Σ. (in full loaded condition)			
Displacement		335363.0	to
Volume		327183.0	m^3
Lpp		403.0	m
Beam		55.0	m
draught (loaded)		16.0	m
XG ,XB (from aft pp)	(LCG, LCB)	204.417	m
KG (from kiel)		18.923	m
free surface effects (fse) in Roll		-0.330	m
GM_T in roll(inc. free surface effects)		5.675	m
GM_L in pitch		906.106	m
KB (from Kiel)		8.164	m
Ixx (about G)		1.1700E+08	tm^2
Iyy (about G)		3.8300E+09	tm^2
Izz (about G)		3.8500E+09	tm^2
Waterplane area properties			
Area		21970.	m^2
Centroid	from G	-4.667	m
Area moments of inertia	about G	about LCF	
Iw_xx	5486270.8	5486270.8	m^4
Iw_yy	300461483.0	299982957.0	m^4

Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του LNGC

Τα κύρια χαρακτηριστικά LNGC, τα οποία και χρησιμοποιήθηκαν για τους υδροδυναμικούς υπολογισμούς, βρίσκονται συγκεντρωμένα στους πίνακες που ακολουθούν.

Το LNGC μελετήθηκε για δύο διαφορετικές καταστάσεις φόρτωσης, τις:

Α) κατάσταση πλήρους φόρτωσης
Β) κατάσταση ερματισμού

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του LNGC, παρατίθενται συγκεντρωμένα, στον παρακάτω πίνακα:

Capacity		138 000 m^3
Type		4 GT - Membrane
Displacement loaded	Δ_{load}	95 982 t
Displacement ballasted	Δ_{ball}	81 904 t
Length overall	L_{OA}	286 m
Length between perpendiculars	L_{PP}	271 m
Breadth	B	42.50 m
Dist of LNGC aft / GIFT aft	$X_{LNGCaft/GIFTaft}$	64.50 m
Hull depth at the main deck	D	25.40 m
Total depth		32.50 m
Draft loaded	T_{LOAD}	11.21 m
Draft ballasted	T_{BALL}	9.77 m
Transverse and Longitudinal area *Loaded case*	$A_{T\ LOAD}$ / $A_{L\ LOAD}$	1059 m² / 4152 m²
Transverse and Longitudinal area *Ballasted case*	$A_{T\ BALL}$ / $A_{L\ BALL}$	1093 m² / 4461 m²

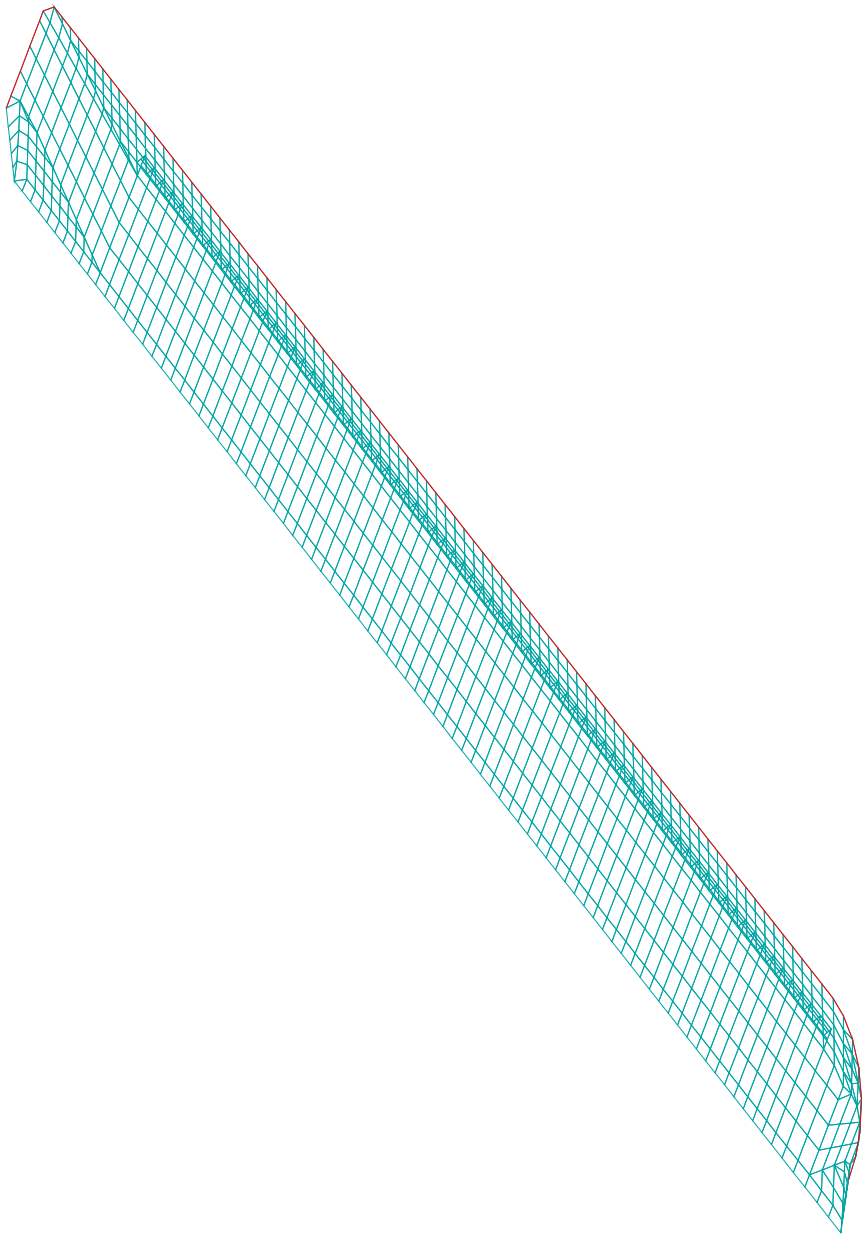
Πίνακας 7.5.2 : κύριες διαστάσεις του LNGC

LNGC σε κατάσταση πλήρους φόρτισης: LNGC_type2 in full loaded condition			
Displacement		96981.5	to
Volume		93640.5	m^3
Lpp		271.00	m
Beam		42.50	m
draught (loaded)		11.210	m
XG ,XB (from aft pp)	(LCG)	136.00	m
KG (from kiel)		15.360	m
free surface effects (fse) in Roll		-0.9500	m
GM_T in roll(inc. free surface effects)		3.680	m
GM_L in pitch			
KB (from Kiel)		5.9448	m
Ixx (about G)		1.5930E+07	tm^2
Iyy (about G)		4.0570E+08	tm^2
Izz (about G)		4.0570E+08	tm^2
Waterplane area properties			
Area		9690.3	m^2
Centroid		-7.3961	m
Area moments of inertia	about G	about LCF	
Iw_xx	1316134.0	1316134.0	m^4
Iw_yy	44723485.0	44193403.3	m^4

LNGC σε κατάσταση ερματισμού:	LNGC_type2 ballast condition		
Displacement		81904.1	to
Volume		79906.43	m^3
Lpp		271.00	m
Beam		42.50	m
draught (ballasted)		9.770	m
XG ,XB (from aft pp)	(LCG)	137.260	m
KG (from kiel)		11.710	m
free surface effects (fse) in Roll		-0.100	m
GM_T in roll(inc. free surface effects)		9.140	m
GM_L in pitch			
KB (from Kiel)			m
Ixx (about G)		2.187E+07	tm^2
Iyy (about G)		3.709E+08	tm^2
Izz (about G)		3.784E+08	tm^2
Waterplane area properties			
Area		9408.	m^2
Centroid		-5.685	m
Area moments of inertia	about G	about LCF	
Iw_xx	1.2671e+06	1.2671E+06	m^4
Iw_yy	4.1647e+07	4.1343E+07	m^4

7.5.1.1. Διακριτοποίηση του Πλωτού Τερματικού Σταθμού (Π.Τ.Σ.)

<u>Διακριτοποίηση του Π. Τ. Σ.</u>

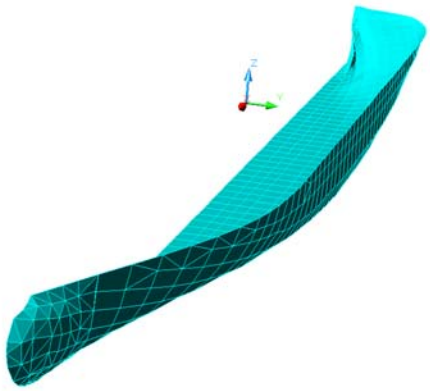


Σχήμα 7.5. 1: διακριτοποίηση του Π.Τ.Σ. για τους υδροδυναμικούς υπολογισμούς (1158 elements για το ½ της κατασκευής)

7.5.1.2. Διακριτοποίηση του LNGC

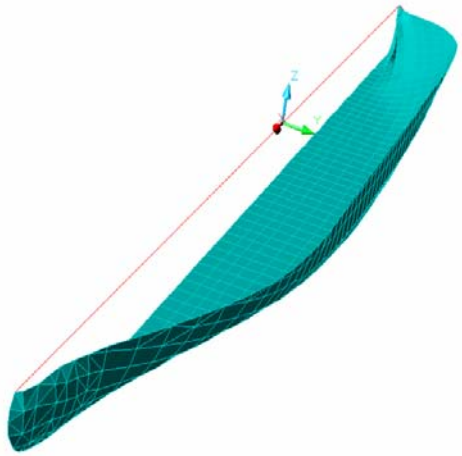
<u>Διακριτοποίηση του LNGC</u>

LNGC σε κατάσταση πλήρους φόρτωσης



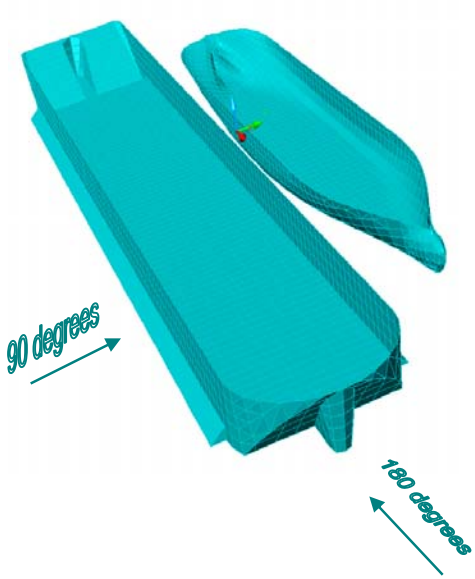
Σχήμα 7.5. 2: διακριτοποίηση του LNGC για τους υδροδυναμικούς υπολογισμούς (1464 panels στο ½ της βρεχόμενης επιφάνειας).

LNGC σε κατάσταση ερματισμού

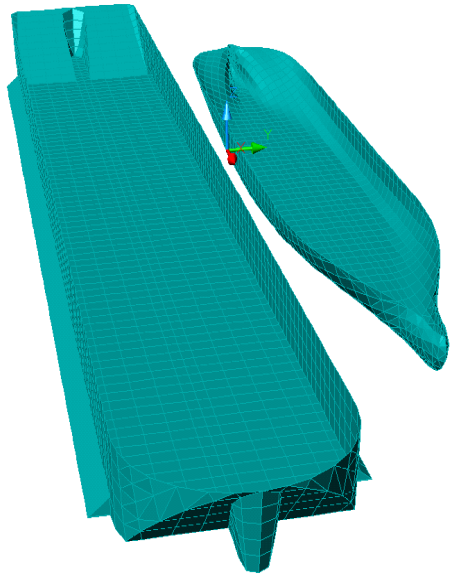


Σχήμα 7.5. 3: διακριτοποίηση του LNGC για τους υδροδυναμικούς υπολογισμούς (1414 panels στο ½ της βρεχόμενης επιφάνειας).

7.6.1.3. Γενική διάταξη και διακριτοποίηση της συστοιχίας του Π.Τ.Σ. και LNGC



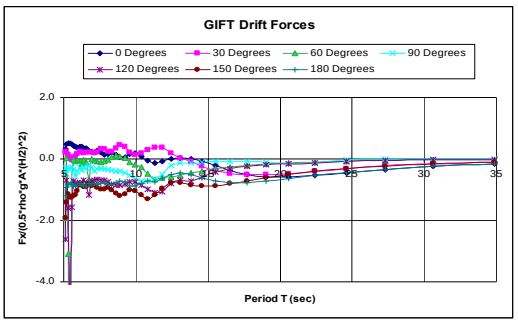
Σχήμα 7.5. 4: διακριτοποίηση της συστοιχίας του Π.Τ.Σ. και LNGC στην κατάσταση πλήρους φόρτωσης (3780 elements).



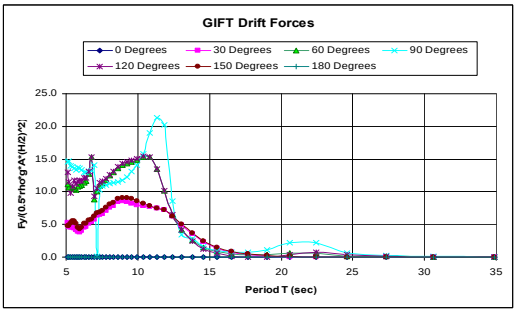
Σχήμα 7.5. 5: διακριτοποίηση της συστοιχίας του Π.Τ.Σ. και LNGC στην κατάσταση ερματισμού (3730 elements).

7.5.2.Δυνάμεις έκπτωσης

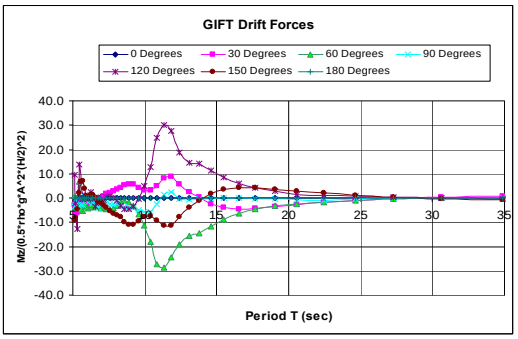
7.5.2.1. Δυνάμεις έκπτωσης στον πλωτό τερματικό σταθμό (Π.Τ.Σ.)



Σχήμα 7.5. 6: δύναμη έκπτωσης στον πλωτό τερματικό σταθμό, στη x-διεύθυνση

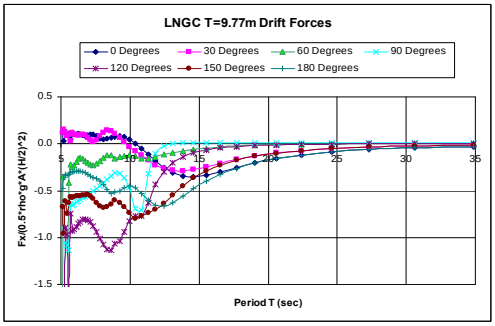


Σχήμα 7.5. 7: δύναμη έκπτωσης στον πλωτό τερματικό σταθμό, στην y-διεύθυνση

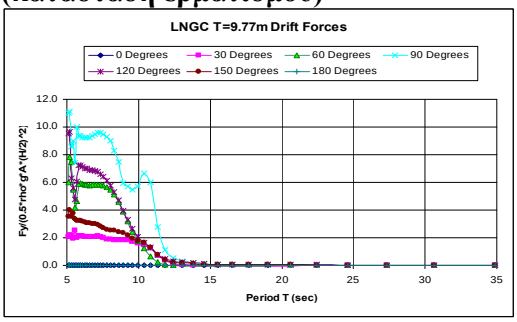


Σχήμα 7.5. 8: Ροπή έκπτωσης στον πλωτό τερματικό σταθμό (yaw moments.), περί τον άξονα z

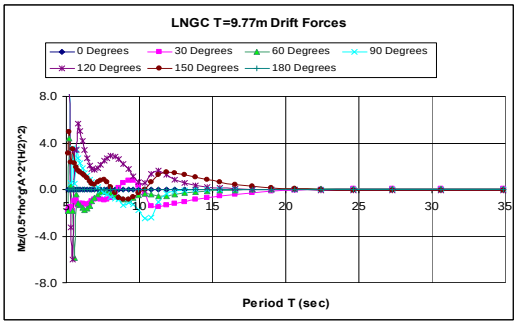
7.5.2.2. Δυνάμεις έκπτωσης στο LNGC, T=9.77m (κατάσταση ερματισμού)



Σχήμα 7.5. 9: Δυνάμεις έκπτωσης στη x-διεύθυνση στο LNGC, T=9.77 m (κατάσταση ερματισμού)



Σχήμα 7.5. 10: Δυνάμεις έκπτωσης στην y- διεύθυνση στο LNGC, T=9.77 m (κατάσταση ερματισμού)

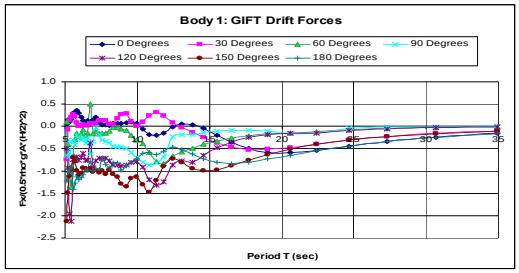


Σχήμα 7.5. 11: Ροπές έκπτωσης περί το COG στο LNGC, T=9.77 m (κατάσταση ερματισμού), (yaw moments)

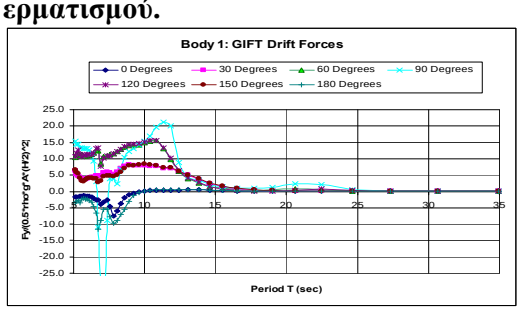
7.5.2.3. Δυνάμεις έκπτωσης (drift forces) στην συστοιχία του πλωτού τερματικού σταθμού και LNGC (including additional roll damping)

Δυνάμεις έκπτωσης (drift forces) στην υδροδυναμικά αλληλεπιδρούσα συστοιχία του πλωτού τερματικού σταθμού και LNGC στην κατάσταση ερματισμού.

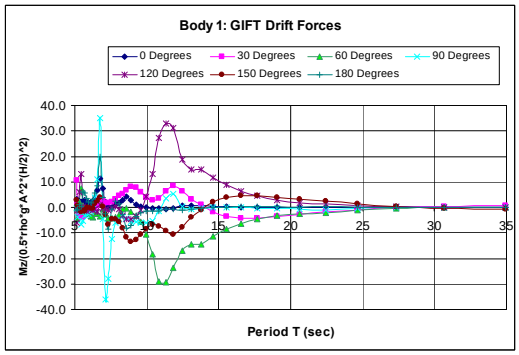
Body1 Π.Τ.Σ.



Σχήμα 7.5. 12: Δύναμη έκπτωσης στον Π.Τ.Σ., στη x- διεύθυνση, υπό την παρουσία του LNGC, στην κατάσταση ερματισμού.

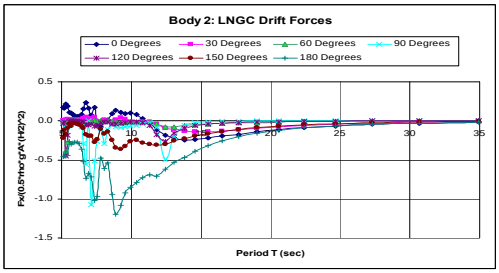


Σχήμα 7.5. 13: Δύναμη έκπτωσης στον Π.Τ.Σ., στη y- διεύθυνση, υπό την παρουσία του LNGC, στην κατάσταση ερματισμού

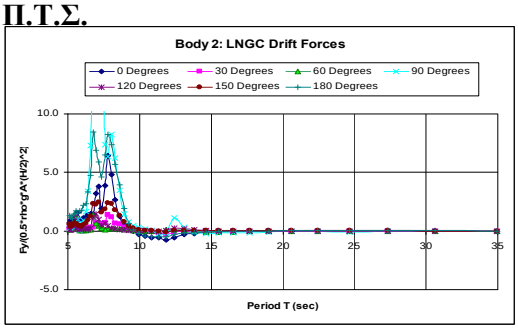


Σχήμα 7.5. 14: Ροπή έκπτωσης στον Π.Τ.Σ., περί τον άξονα z, υπό την παρουσία του LNGC, στην κατάσταση ερματισμού

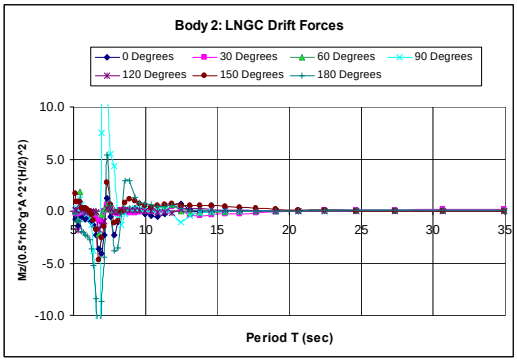
Body 2: LNG, T=9.77m



Σχήμα 7.5. 15: Δύναμη έκπτωσης στο LNGC στην κατάσταση ερματισμού, στη x- διεύθυνση, υπό την παρουσία του Π.Τ.Σ.



Σχήμα 7.5. 16: Δύναμη έκπτωσης στο LNGC στην κατάσταση ερματισμού, στη y- διεύθυνση, υπό την παρουσία του Π.Τ.Σ.

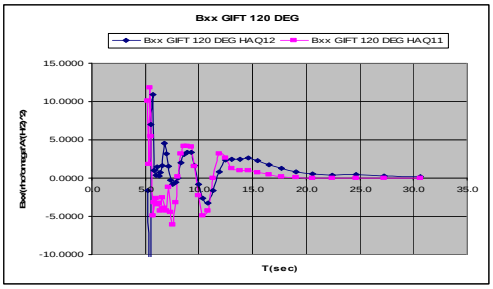


Σχήμα 7.5. 17: Ροπή έκπτωσης στο LNGC στην κατάσταση ερματισμού περί τον άξονα z, υπό την παρουσία του Π.Τ.Σ.

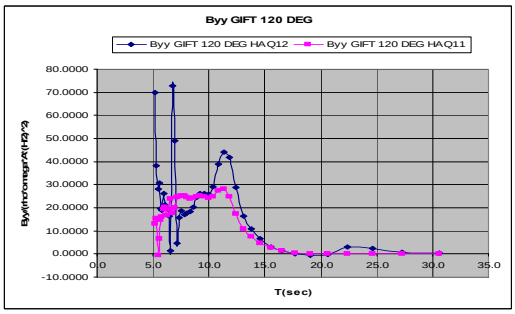
7.5.3. Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση- αριθμητικά αποτελέσματα.

7.5.3.1. Δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση στον Π.Τ.Σ.

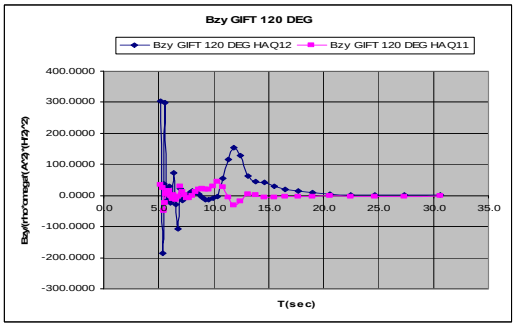
Στην παρακάτω ενότητα παρουσιάζεται δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση στον πλωτό τερματικό σταθμό. Οι μέσες δευτεροτάξιες drift δυνάμεις και ροπές, έχουν υπολογιστεί με δύο μεθοδολογίες. Με απ' ευθείας ολοκλήρωση πάνω στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος (near field method) καθώς και με τη μέθοδο μεταβολής της ορμής -μακριά από το σώμα- (far field method).



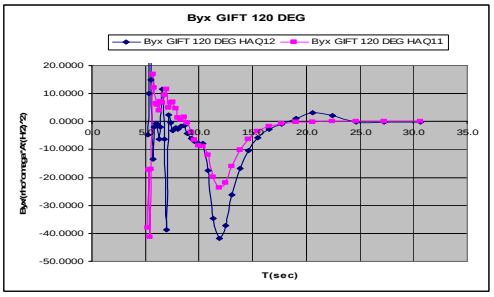
Σχήμα 7.5. 18: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον Π.Τ.Σ. στη x-διεύθυνση.



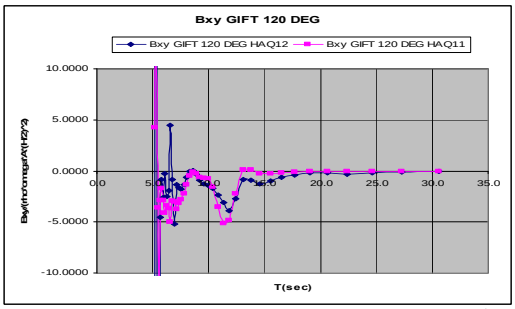
Σχήμα 7.5. 19: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον Π.Τ.Σ. στην y-διεύθυνση.



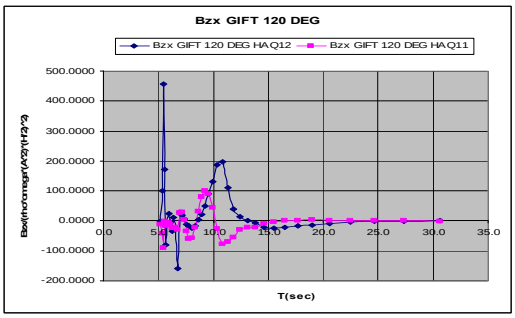
Σχήμα 7.5. 20: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση yaw προκαλούμενη από αργή sway κίνηση στον Π.Τ.Σ.



Σχήμα 7.5. 21: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον Π.Τ.Σ. στη x-διεύθυνση προκαλούμενη από τη sway κίνηση.



Σχήμα 7.5. 22: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον Π.Τ.Σ. στην y-διεύθυνση προκαλούμενη από τη surge κίνηση.

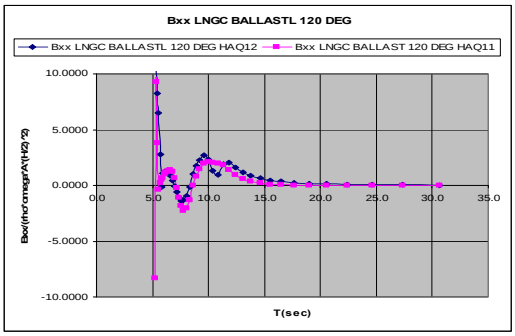


Σχήμα 7.5. 23: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση yaw προκαλούμενη από αργή surge κίνηση στον Π.Τ.Σ.

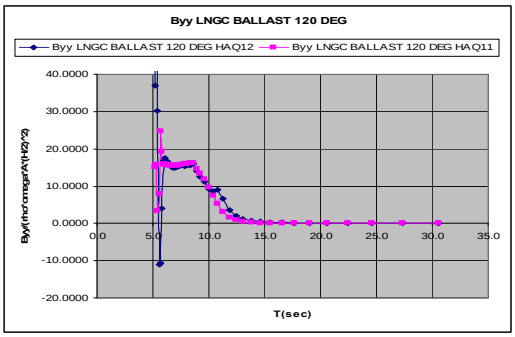
7.5.3.2. Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στο LNGC

Στην παρακάτω ενότητα παρουσιάζεται η δευτεροτάξια υδροδυναμική απόσβεση στο.LNGC. Οι μέσες δευτεροτάξιες drift δυνάμεις και ροπές, έχουν υπολογιστεί με δύο μεθοδολογίες. Με απ' ευθείας ολοκλήρωση πάνω στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος (near field method) καθώς και με τη μέθοδο των ροπών -μακριά από το σώμα- (far field method

Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στο LNGC στην κατάσταση ερματισμού (T=9.77 m)



Σχήμα 7.5. 24: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στη x-διεύθυνση, στο LNGC, για T=9.77 m



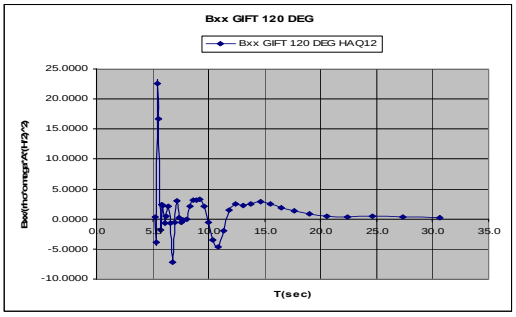
Σχήμα 7.5. 25: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στην y-διεύθυνση, στο LNGC για T=9.77m

7.5.3.3. Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στην υδροδυναμικά αλληλεπιδρούσα συστοιχία του πλωτού τερματικού σταθμού και του LNGC

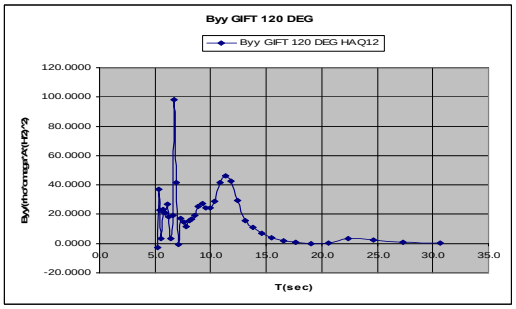
Συστοιχία του Π.Τ.Σ. στην κατάσταση πλήρους φόρτωσης και του LNGC στην κατάσταση ερματισμού.

Εδώ δίνεται η Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στο GIFT (Body 1) και στο LNGC (Body 2) κατά τη διάρκεια της προσέγγισης στην περίπτωση των καταστάσεων λειτουργίας (*operating conditions*). Τα δύο σώματα υπολογίζονται με τις μεταξύ τους υδροδυναμικές αλληλεπιδράσεις. Το LNGC βρίσκεται στην κατάσταση ερματισμού. Για τον υπολογισμό των δυνάμεων έκπτωσης δεύτερης τάξης, έχει χρησιμοποιηθεί, η μέθοδος της απ' ευθείας ολοκλήρωσης πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια κάθε σώματος.

Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στη συστοιχία-Body1 (Π.Τ.Σ.)

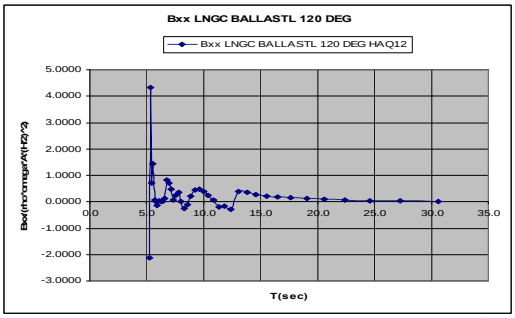


Σχήμα 7.5. 26: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον Π.Τ.Σ. στη x-διεύθυνση, υπό την παρουσία του LNGC σε κατάσταση ερματισμού

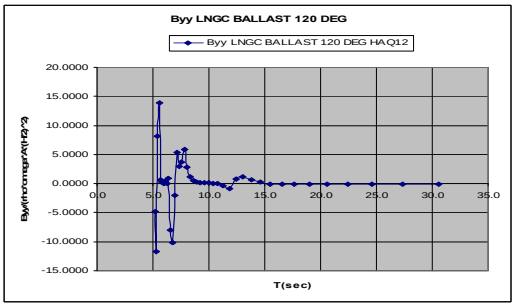


Σχήμα 7.5. 27: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον Π.Τ.Σ. στην y-διεύθυνση, υπό την παρουσία του LNGC σε κατάσταση ερματισμού

Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στη συστοιχία-Body 2: (LNGC με T=9.77m)



Σχήμα 7.5. 28: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στη x-διεύθυνση στο LNGC, το LNGC βρίσκεται στην κατάσταση ερματισμού, στην υπήνεμη πλευρά του Π.Τ.Σ.



Σχήμα 7.5. 29: Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στην y-διεύθυνση στο LNGC, το LNGC βρίσκεται στην κατάσταση ερματισμού στην υπήνεμη πλευρά του Π.Τ.Σ.

7.5.4. Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση σε φυσικούς θαλάσσιους κυματισμούς. Αριθμητικά αποτελέσματα

Η παρακάτω ενότητα υπολογίζει τη Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον πλωτό τερματικό σταθμό GIFT, στο LNGC, αλλά και στη συστοιχία τους στην κατάσταση λειτουργίας καθώς και στην κατάσταση ακραίων συνθηκών. Αποτελέσματα παρουσιάστηκαν και στη δημοσίευση των ***Mavrakos S. et al., 2007***.

<u>Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση σε μη κανονικές- ομαλές θάλασσες.</u>

$$\bar{b}_{ij}^{(2)} = 2\int_0^\infty S(\omega) b_{ij}(\omega) d\omega \quad (i,j=x,y,z) \tag{7.5.2}$$

Με:

$S(\omega)$ το φάσμα του κυματισμού στην συγκεκριμένη περιοχή.

$b_{ij}(\omega)$ συμβολίζει τη Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση σε γραμμικό κύμα συχνότητας ω και μοναδιαίου πλάτους. Στην περίπτωση που γνωρίζουμε το $b_{ij}(\omega)$, είναι πάρα πολύ εύκολο να υπολογιστεί η Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση σε φυσικούς θαλάσσιους κυματισμούς.

<u>Κατάσταση λειτουργίας</u>

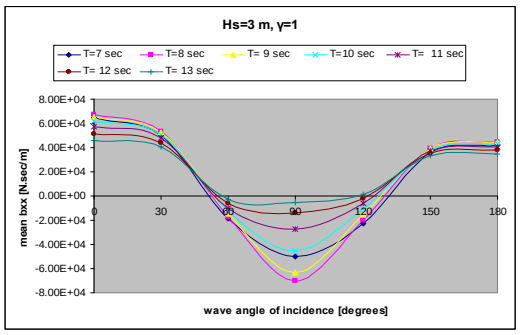
Στην ενότητα αυτή υπολογίζεται η Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση σε φυσικούς θαλάσσιους κυματισμούς, στον πλωτό τερματικό σταθμό, στο LNGC, αλλά και στη συστοιχία τους στην κατάσταση λειτουργίας.

Στον πίνακα παρακάτω, περιγράφονται τα κύρια χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούμε σαν δεδομένα για να υπολογίσουμε το φάσμα της κατάστασης λειτουργίας.

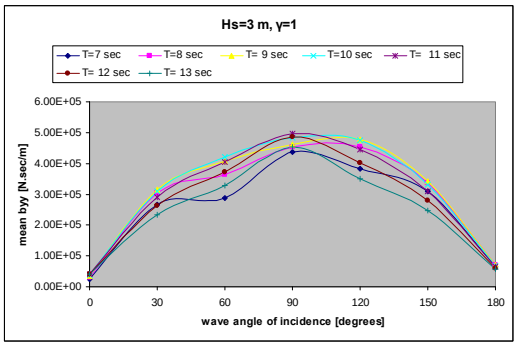
Κατάσταση λειτουργίας		
Περιβάλλον		
Κατάσταση θάλασσας (DNV spectrum)	*Hs (m)*	*3.0*
	Tpeak (s)	*7-13*
	Gamma factor	*1.0*

7.5.4.1. Π.Τ.Σ.

Εδώ υπολογίζεται η Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον πλωτό τερματικό σταθμό, στην κατάσταση λειτουργίας του. Οι υπολογισμοί έχουν γίνει χωρίς την παρουσία του LNGC, κάτι το οποίο θα γίνει στις παρακάτω ενότητες, όπου και θα παρουσιαστούν και τα ανάλογα αποτελέσματα. Και εδώ οι drift δυνάμεις και ροπές που έχουμε χρησιμοποιήσει έχουν υπολογιστεί με τη μέθοδο της μεταβολής της ορμής, σε όγκο αναφοράς που περιβάλλει το σώμα και εκτείνεται μέχρι το άπειρο (far field method).



Σχήμα 7.5. 30: Μέση bxx στον Π.Τ.Σ. στην κατάσταση λειτουργίας – far field method

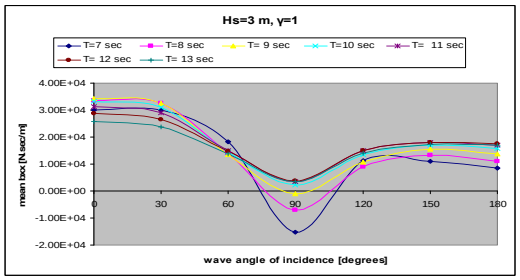


Σχήμα 7.5. 31: Μέση byy στον Π.Τ.Σ. στην κατάσταση λειτουργίας – far field method

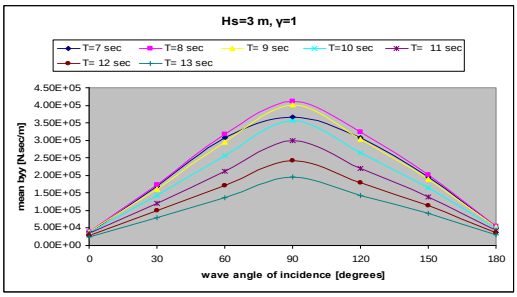
7.5.4.2. LNGC

LNGC στην κατάσταση ερματισμού

Εδώ υπολογίζεται η Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στο LNG όταν βρίσκεται μόνο του (χωρίς την παρουσία του Π.Τ.Σ.) στην κατάσταση ερματισμού. Και στην παράγραφο αυτή, οι υπολογισμοί μας αναφέρονται στην κατάσταση λειτουργίας. Οι drift δυνάμεις και ροπές που χρησιμοποιούνται, έχουν υπολογιστεί με τη μέθοδο της μεταβολής της ορμής, σε όγκο αναφοράς που περιβάλλει το σώμα και εκτείνεται μέχρι το άπειρο (far field method).



Σχήμα 7.5. 32: Μέση bxx στο LNGC στην κατάσταση ερματισμού (operating conditions) – far field method

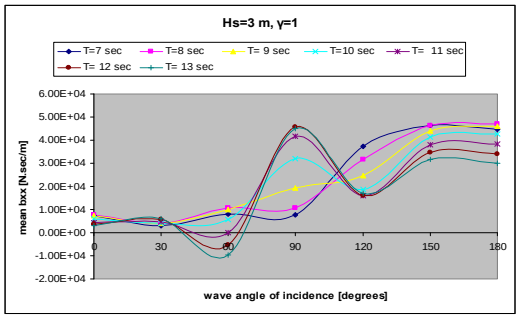


Σχήμα 7.5. 33: Μέση byy στο LNGC στην κατάσταση ερματισμού (operating conditions) far field method

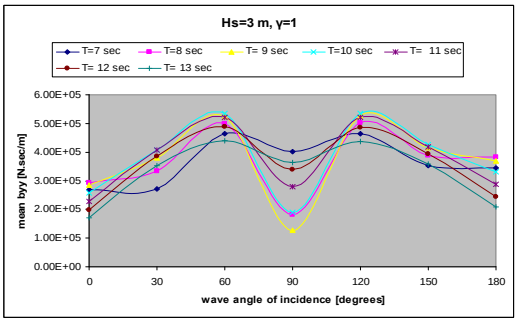
7.5.4.3. Π.Τ.Σ. και LNGC αλληλεπιδρώντα μεταξύ τους.

Π.Τ.Σ. και LNGC στην κατάσταση ερματισμού

Εδώ υπολογίζεται τη Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στον Π.Τ.Σ. υπό την παρουσία του LNGC όταν αυτό έχει προσεγγίσει σε αυτόν, στην κατάσταση λειτουργίας. Οι drift δυνάμεις και οι ροπές πάνω στον Π.Τ.Σ. υπολογίζονται με τη μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης πάνω στην βρεχόμενη επιφάνειά του (direct integration method).

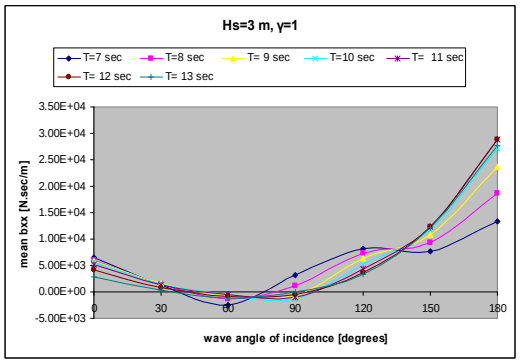


Σχήμα 7.5. 34: Μέση bxx στον Π.Τ.Σ. αλληλεπιδρών με το LNGC στην κατάσταση ερματισμού (operating conditions)

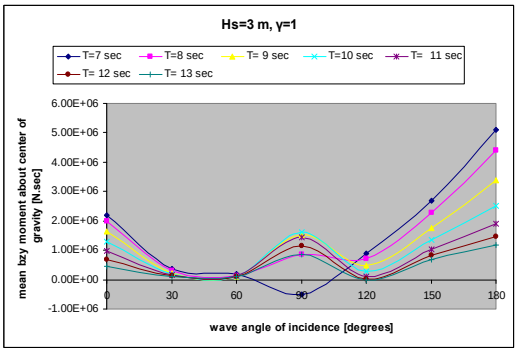


Σχήμα 7.5. 35: Μέση byy στο στον Π.Τ.Σ. αλληλεπιδρών με το LNGC στην κατάσταση ερματισμού (operating conditions).

Στη συνέχεια, υπολογίζεται η Μέση Δευτεροτάξια Υδροδυναμική Απόσβεση στο LNGC υπό την παρουσία του Π.Τ.Σ. όταν αυτό έχει προσεγγίσει τον πλωτό τερματικό σταθμό, στην κατάσταση λειτουργίας. Οι drift δυνάμεις και οι ροπές πάνω στο LNGC υπολογίζονται με τη μέθοδο της απ' ευθείας ολοκλήρωσης πάνω στην βρεχόμενη επιφάνειά του (direct integration method).



Σχήμα 7.5. 36: Μέση bxx στο LNGC στην κατάσταση ερματισμού αλληλεπιδρών με τον Π.Τ.Σ. (operating conditions)



Σχήμα 7.5. 37: Μέση byy στο LNGC στην κατάσταση ερματισμού αλληλεπιδρών με τον Π.Τ.Σ. (operating conditions).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII:
Συγκρίσεις με πειραματικά αποτελέσματα

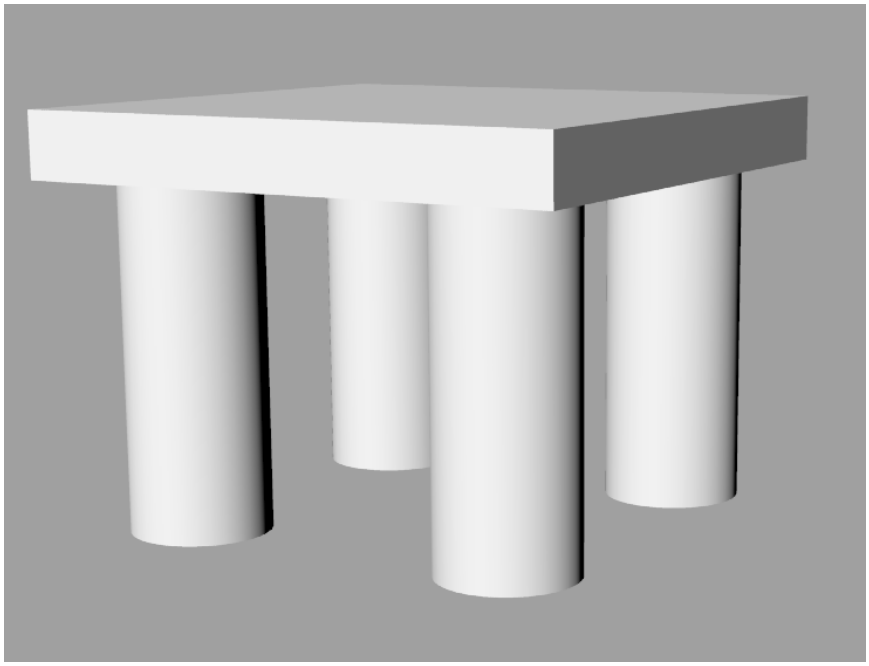
Πειράματα. Στατιστική επεξεργασία πειραματικών αποτελεσμάτων.

8.1. Εισαγωγή- Δοκιμές δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς στην Πειραματική Δεξαμενή της *IFREMER* (*Brest*- France).

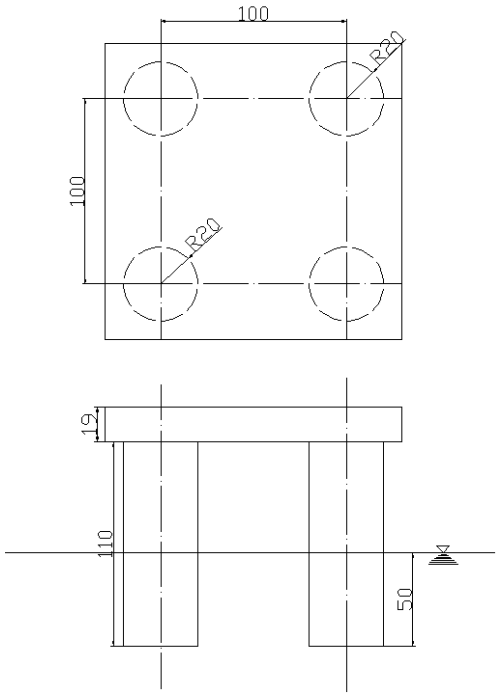
Το παρόν κεφάλαιο, περιγράφει τον τρόπο εκτελέσεως και δίνει τα αποτελέσματα των δοκιμών δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς προτύπου πλωτής κατασκευής αποτελούμενης από τέσσερεις κυλίνδρους. Οι δοκιμές πραγματοποιήθηκαν σε ξύλινο πρότυπο υπό κλίμακα 1:100, στην Πειραματική Δεξαμενή της IFREMER, που βρίσκεται στη Brest της Γαλλίας. Τα χαρακτηριστικά της δεξαμενής είναι: μήκος 50m, πλάτος 12.5m και βάθος 10m στα πρώτα 25m και 20m στα επόμενα 25m.

8.2. Περιγραφή της πλωτής διάταξης

Το κατάστρωμα της πλωτής διάταξης που εξετάζεται, έχει σχήμα τετραγώνου, με προσαρτημένους τέσσερεις κυλίνδρους στις κορυφές του (έναν σε κάθε κορυφή), οι οποίοι εξασφαλίζουν την άντωση που απαιτείται για να επιπλέει το σύστημα. Η πραγματική κατασκευή, φαίνεται στα παρακάτω σχήματα (όλες οι διαστάσεις είναι σε μέτρα).



Σχήμα 8.2 1: τρισδιάστατη αναπαράσταση του μοντέλου της συστοιχίας των τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων



Σχήμα 8.2 2: κάτοψη της συστοιχίας των τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων (διαστάσεις σε cm)

Σχήμα 8.2 3: πλάγια όψη της συστοιχίας των τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων

Οι παραπάνω σχεδιάσεις δοκιμάστηκαν σε αρμονικούς κυματισμούς, αλλά και σε συνδυασμό αρμονικού κυματισμού και πρόσω ή πίσω ταχύτητας.

Στον πίνακα 1 που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά της πλωτής κατασκευής σε φυσική κλίμακα.

Χαρακτηριστικά	Σχεδίαση
Εκτόπισμα Δ, [mt]	257610.6
Ύψος κυλίνδρου [m]	110.0
Διάμετρος κυλίνδρου [m]	40.0
Βύθισμα [m]	50.0

Πίνακας 1.

Σημείωση : Το βύθισμα αναφέρεται στη βασική γραμμή αναφοράς σε κάθε περίπτωση

8.3. Περιγραφή του προτύπου

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, το ξύλινο πρότυπο της πλωτής κατασκευής πολλαπλών κυλίνδρων, υπό κλίμακα 1:100, που χρησιμοποιήθηκε στις δοκιμές δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς κατασκευάστηκε στο ΕΝΘΥ. Οι δοκιμές έγιναν με το πρότυπο ακίνητο, χωρίς υπερκατασκευές αλλά τοποθετώντας βάρη πάνω σε αυτό για να βρίσκεται στο σωστό εκτόπισμα.

Τα χαρακτηριστικά του προτύπου παρουσιάζονται στον Πίνακα 2 που ακολουθεί.

Χαρακτηριστικά	Σχεδίαση
Βάρος όλης της κατασκευής, έξω απ' το νερό [Kg]	160
Εκτόπισμα Δ, [Kg]	257.611
Ύψος κυλίνδρου [m]	1.10
Διάμετρος κυλίνδρου [m]	0.40
Βύθισμα [m]	0.50

Πίνακας 2.

8.4. Παράμετροι Παρεκβολής

Οι ακόλουθοι παράμετροι παρεκβολής χρησιμοποιήθηκαν για την απόκτηση των προβλέψεων στην πλωτή κατασκευή από τις δοκιμές επί του προτύπου.

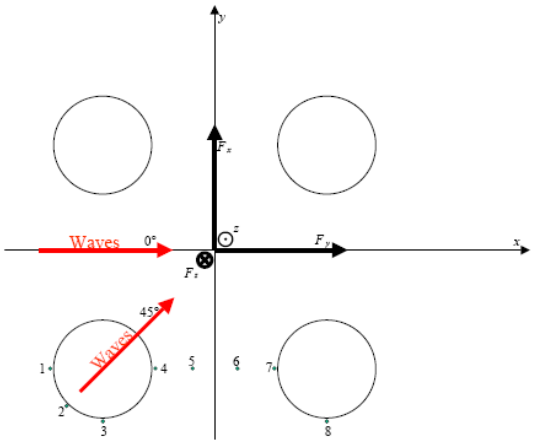
<u>ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΑΡΕΚΒΟΛΗΣ</u>

Μήκος	λ	=	100.0
Επιφάνεια	λ^2	=	10000.0
Όγκος	λ^3	=	1000000.0
Εκτόπισμα	$1.025\ \lambda^3$	=	1025000.0

8.5. Μετρήσεις δυνάμεων διέγερσης σε αρμονικούς κυματισμούς

Οι μετρήσεις των δυνάμεων διέγερσης σε αρμονικούς κυματισμούς έγιναν στην Πειραματική Δεξαμενή της ***IFREMER***, που βρίσκεται στη ***Brest*** της Γαλλίας. Τα χαρακτηριστικά της δεξαμενής είναι: μήκος 50m, πλάτος 12.5m και βάθος 10m στα πρώτα 25m και 20m στα επόμενα 25m. Το πρότυπο προσαρμόστηκε στο δυναμόμετρο του φορείου ρυμουλκήσεως, το οποίο έχει αρθρωτό πέλμα και τοποθετήθηκε στη θέση του γεωμετρικού κέντρου βάρους της κατασκευής. Σημειώνεται, επίσης ότι κατά τη διάρκεια των μετρήσεων, το πρότυπο της πλωτής κατασκευής είχε και πρόσω ή πίσω ταχύτητα.

Κατά τη διάρκεια των πειραμάτων καταγραφόταν και η ***ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας*** σε 8 σημεία επί του μοντέλου (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), όπως φαίνονται στο σχήμα 8.1.4.



Σχήμα 8.5 1: το σύστημα συντεταγμένων, ως προς τους κυματισμούς που προσπίπτουν στην πλωτή κατασκευή

- Οι μετρήσεις έγιναν για βύθισμα της πλωτής κατασκευής ίσο με T=50m (φυσική κλίμακα).

- Οι συχνότητες που έγιναν τα τρεξίματα , φαίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 1.

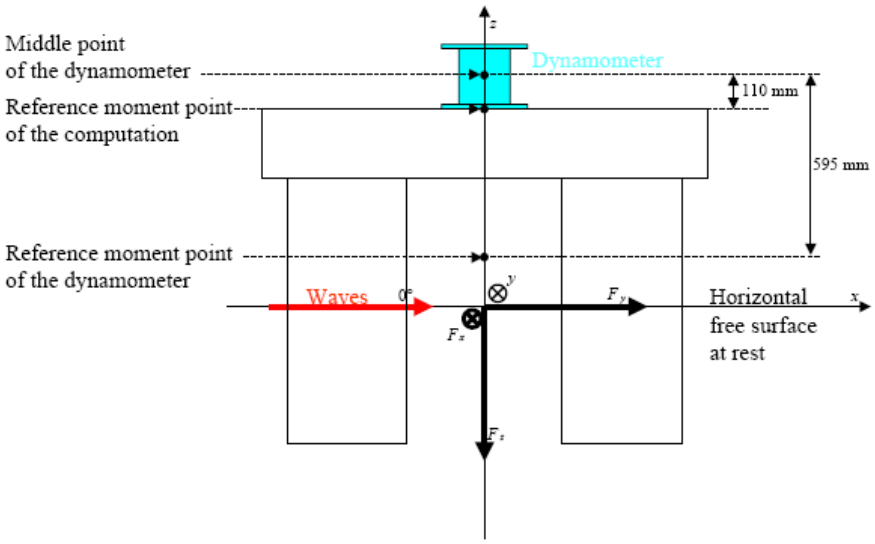
- Τα σημεία πάνω στην πλωτή κατασκευή που έγιναν οι μετρήσεις, φαίνονται στο σχήμα 8.1.4.

- Οι γωνίες περί τον κύλινδρο που μετρήθηκε η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, ήταν: 0°, 45°, 90°, 180° , στο μπροστά πόδι και 0°, 90°, στο πίσω πόδι.

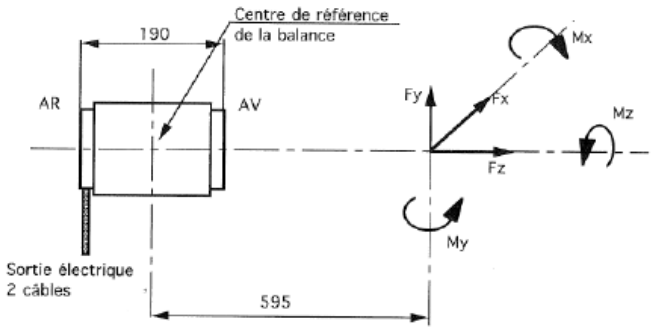
8.5.1 Αρμονικοί κυματισμοί

Το μοντέλο δοκιμάστηκε υπό την επίδραση αρμονικών κυματισμών, αλλά και υπό την επίδραση κύματος και μικρής πρόσω ή πίσω ταχύτητας.

Στα σχήματα 8.1. 4, 8.1.5, 8.1.6, παρουσιάζονται οι γωνίες πρόσπτωσης του κύματος (0° και 45°), το σημείο γύρω από το οποίο υπολογίστηκαν οι ροπές και κάποια πιο ειδικά χαρακτηριστικά του δυναμόμετρου.



Σχήμα 8.5 2: το σύστημα συντεταγμένων, ως προς το δυναμόμετρο.



Σχήμα 8.5 3: διαστάσεις του δυναμόμετρου.

8.6. Στατιστική επεξεργασία των πειραμάτων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν ενδεικτικά αποτελέσματα, από τις χρονικές ιστορίες των πειραμάτων και η στατιστική επεξεργασία αυτών.

Η στατιστική επεξεργασία μπορεί να γίνει με τη βοήθεια τριών διαφορετικών προγραμμάτων που είναι διαθέσιμα στο Εργαστήριο Πλωτών Κατασκευών και Συστημάτων Αγκύρωσης, το πρόγραμμα MATLAB, το πρόγραμμα MINITAB, αλλά και το EXCEL. Διαπιστώθηκε (Mazarakos K., 2008), πως και τα τρία προγράμματα έχουν ακριβώς την ίδια ακρίβεια κατά τον υπολογισμό των ελεγχόμενων στατιστικών μεγεθών.

Number	Variable	Legend	Unit
1	Mx1	Mx1	V
2	Mx2	Mx2	V
3	My1	My1	V
4	My2	My2	V
5	Z	Z	V
6	Mz	Mz	V
7	Free surface elevation 1	E1	cm
8	Free surface elevation 2	E2	cm
9	Free surface elevation 3	E3	cm
10	Free surface elevation 4	E4	cm
11	Free surface elevation 5	E5	cm
12	Free surface elevation 6	E6	cm
13	Free surface elevation 7	E7	cm
14	Free surface elevation 8	E8	cm
15	Incident wave elevation 1	I1	cm
16	Incident wave elevation 2	I2	cm
17	Velocity	V	m/s
18	Force x	Fx	daN
19	Force y	Fy	daN
20	Force z	Fz	daN
21	Moment x	Mx	daN.m
22	Moment y	My	daN.m
23	Moment z	Mz	daN.m

Πίνακας 3.

Ο πίνακας 3, παρουσιάζει τα μετρούμενα μεγέθη ενώ ο αύξων αριθμός υποδηλώνει το κανάλι στο οποίο καταγράφθηκε η αντίστοιχη μέτρηση.

Οι μεταβλητές από 1 ως 6, δίνονται σε Voltages, δηλαδή, δίνουν τις ενδείξεις των τιμών του δυναμόμετρου και χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουν τις τρεις δυνάμεις και τις τρεις ροπές που ασκούνται πάνω στο δυναμόμετρο (μεταβλητές 18 ως 23).

Οι μεταβλητές 7 ως 14, είναι οι ανυψώσεις τις ελεύθερης επιφάνειας γύρω από το μοντέλο, στα σημεία που φαίνονται στο σχήμα 8.1.4.

Οι μεταβλητές 15 και 16, δίνουν της ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας σε δύο σημεία που βρίσκονται σε κάποια απόσταση μακριά από το μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα η μεταβλητή 15, είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας λόγω της πρόσπτωσης του κύματος και βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το κέντρο του μοντέλου. Αυτή η ανύψωση, χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις μεταφοράς, ως το κύμα αναφοράς.

8.6.1 Σύστημα συντεταγμένων

Το σύστημα συντεταγμένων, φαίνεται στο σχήμα 8.1.1, όπου οι συντεταγμένες (x,y,z), βρίσκονται στο επίπεδο της αδιατάρακτης ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού.

Το σύστημα συντεταγμένων του δυναμόμετρου (σχήμα 8.1.5), δεν είναι το ίδιο με το γενικό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) και έχει τις εξής διαφορές:

- Η οριζόντια δύναμη F_y, υπολογίζεται περί τον x- άξονα.
- Η οριζόντια δύναμη F_x, υπολογίζεται περί τον y- άξονα.
- Η κατακόρυφη δύναμη F_z, υπολογίζεται περί τον -z- άξονα.

Με τις παραπάνω αναφορές, μπορούμε να παράγουμε τις δυνάμεις και τις ροπές στο γενικό σύστημα συντεταγμένων (στο ίδιο σύστημα με αυτό της διάδοσης των κυματισμών).

Το σημείο αναφοράς για τις ροπές στο σύστημα συντεταγμένων του δυναμόμετρου, βρίσκεται στα 0.595m, από το μέσο του δυναμόμετρου, περί τον – z- άξονα (σχήμα 8.1.5).

Η απόσταση του δυναμόμετρου από το πάνω μέρος του μοντέλου είναι στα 0.110m (σχήμα 8.1.5).
Αυτό επηρεάζει τις ροπές Mx και My.

Για άμεση σύγκριση με τις υπολογισμένες από τον κώδικα Η/Υ ροπές, οι υπολογισμένες μέσω του πειράματος ροπές, πρέπει να μετατραπούν, μέσω των παρακάτω σχέσεων:

$Mx=Mx-FyZ_B$
$My=My+FxZ_B$
$Z_B=0.595-0110=0.485$ m

Η συνολική οριζόντια δύναμη, η οποία είναι παράλληλη με τη διεύθυνση διάδοσης των κυματισμών, μπορεί να υπολογιστεί:

$F_h=Fy\cos\beta+Fx\sin\beta$

Ομοίως και για τη ροπή η οποία ασκείται κατακόρυφα στη διεύθυνση των κυματισμών.

8.6.2 Στατιστική επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων

Για κάθε δοκιμή, εκτελέσθηκε η ακόλουθη ανάλυση.

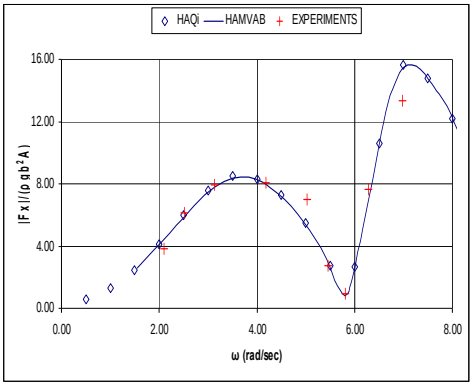
- *Mean, Min, Max* και *Std* σε κάθε κανάλι για την αρχή της δοκιμής.
  (5 s για τους απλούς αρμονικούς κυματισμούς και 1 s στο ήρεμο νερό).
  Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτουν τα:
  Zmean, Zmin, Zmax, Zstd

- *Mean, Min, Max* και *Std* σε κάθε κανάλι για επιλεγμένο διάστημα.
  Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτουν τα:
  Vmean, Vmin, Vmax, Vstd

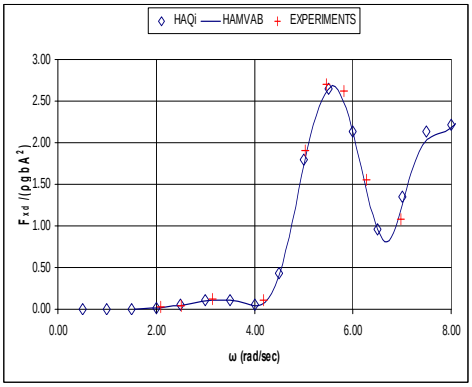
- Οι μέσες τιμές στην αρχή πρέπει να αφαιρεθούν από τις μέσες τιμές κατά τη διάρκεια του επιλεγμένου διαστήματος, ως εξής:
  Vmean-Zmean.

8.7. Συγκρίσεις με αριθμητικά αποτελέσματα.

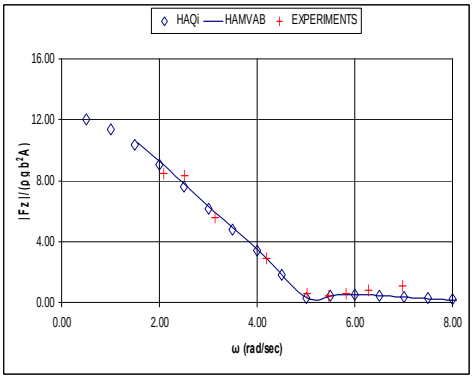
Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε συγκρίσεις των πειραματικών αποτελεσμάτων με αριθμητικά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα και οι συγκρίσεις παρουσιάσθηκαν στο στο 4th Workshop on Water Waves: Innovations in experimental and numerical wave research, Berlin, Germany (2009) από τους Mavrakos et al. (2009). Όπως διαπιστώνεται τα αριθμητικά και τα πειραματικά αποτελέσματα, βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία.



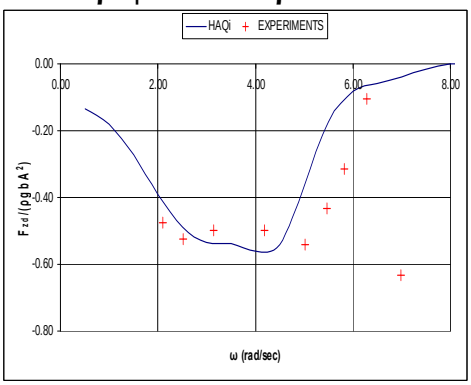
Σχήμα 8.7 1: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, στη συστοιχία των τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων.



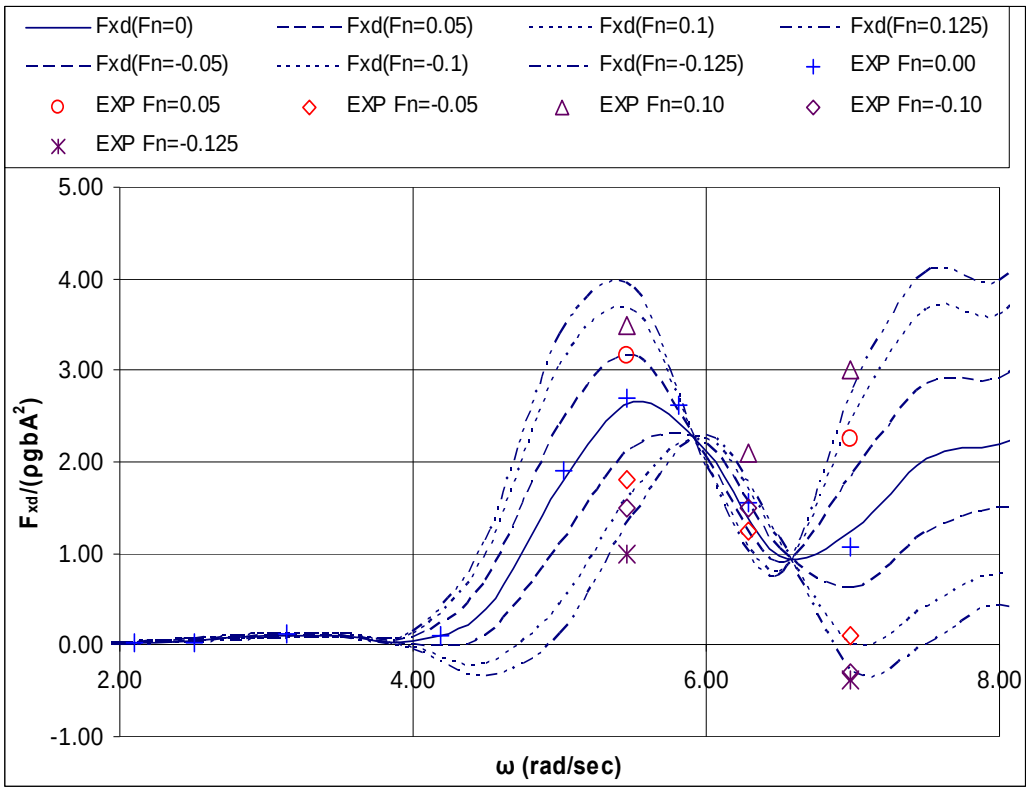
Σχήμα 8.7 3: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στη συστοιχία των τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων.



Σχήμα 8.7 2: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των κατακόρυφων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, στη συστοιχία των τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων.



Σχήμα 8.7 4: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των κατακόρυφων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στη συστοιχία των τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων.



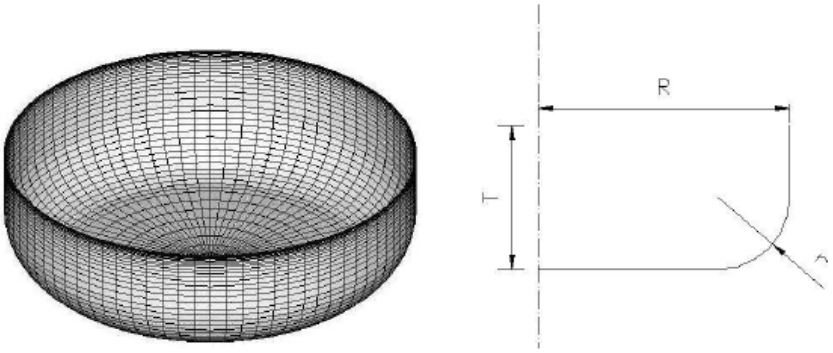
Σχήμα 8.7 5: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στη συστοιχία των τεσσάρων κατακόρυφων κυλίνδρων, υπό τη δράση κυματισμών και μικρής πρόσω (και πίσω) ταχύτητας.

8.8. Εισαγωγή- Δοκιμές δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς στην Πειραματική Δεξαμενή της *DHI* (*Hoersholm- Denmark)*

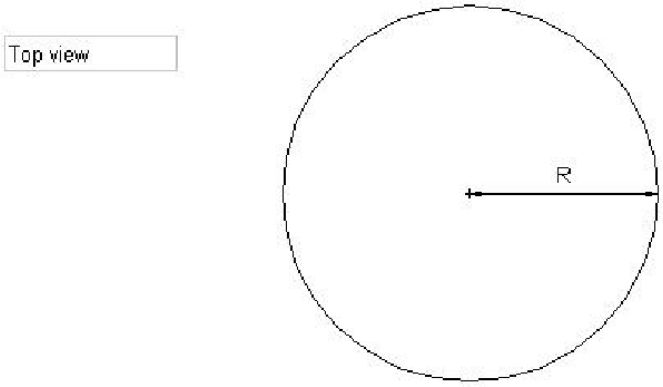
Το παρόν κεφάλαιο, περιγράφει τον τρόπο εκτελέσεως και δίνει τα αποτελέσματα των δοκιμών δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς του προτύπου ενός πλωτού κατακόρυφου κυλίνδρου. Οι δοκιμές πραγματοποιήθηκαν σε ξύλινο πρότυπο, στην Πειραματική Δεξαμενή της DHI, που βρίσκεται στο Hoersholm της Δανίας. Τα χαρακτηριστικά των τριών δεξαμενών που έγιναν τα πειράματα, είναι: μήκος 30m, πλάτος 30m και βάθος 0.4m, 0.55m και 3m.

8.9. Περιγραφή της πλωτής διάταξης

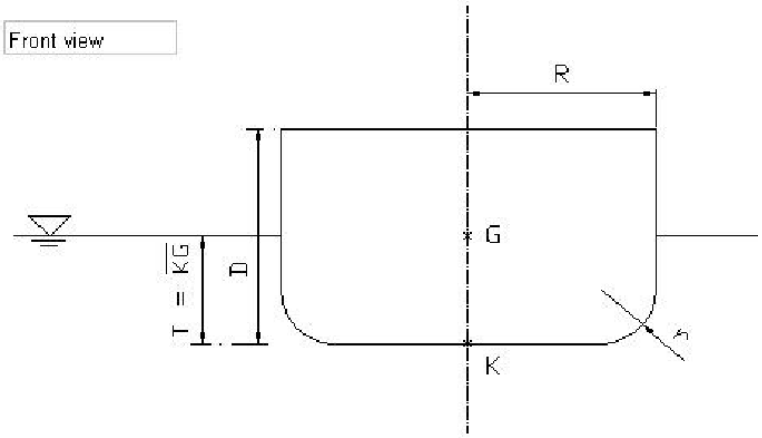
Η πλωτή διάταξη που εξετάζεται, είναι κυλινδρικού σχήματος, το οποίο εξασφαλίζει την άντωση που απαιτείται για να επιπλέει το σώμα. Η κατασκευή, φαίνεται στα παρακάτω σχήματα (όλες οι διαστάσεις είναι σε μέτρα).



Σχήμα 8.9 1: τρισδιάστατη αναπαράσταση του μοντέλου



Σχήμα 8.9 2: κάτοψη του κυλίνδρου



Σχήμα 8.9 3: πλάγια όψη του κυλίνδρου

Οι παραπάνω σχεδιάσεις δοκιμάστηκαν σε αρμονικούς κυματισμούς, αλλά και σε συνδυασμό αρμονικού κυματισμού και ρεύματος

Στον πίνακα 5 που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά της κατασκευής

Radius	(m)	*R*	0.325
Fillet radius	(m)	*r*	0.100
Draught	(m)	*T*	0.200
Volume	(m^3)	∇	0.062
Radee of giration	(m)	*Rx*	0.200
Radee of giration	(m)	*Ry*	0.200
Radee of giration	(m)	*Rz*	0.230

Πίνακας 5.

Σημείωση : Το βύθισμα αναφέρεται στη βασική γραμμή αναφοράς σε κάθε περίπτωση

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, το ξύλινο πρότυπο του κυλίνδρου, που χρησιμοποιήθηκε στις δοκιμές δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς κατασκευάστηκε στην DHI. Οι δοκιμές έγιναν με το πρότυπο ακίνητο, χωρίς υπερκατασκευές αλλά τοποθετώντας βάρη πάνω σε αυτό για να βρίσκεται στο σωστό εκτόπισμα.

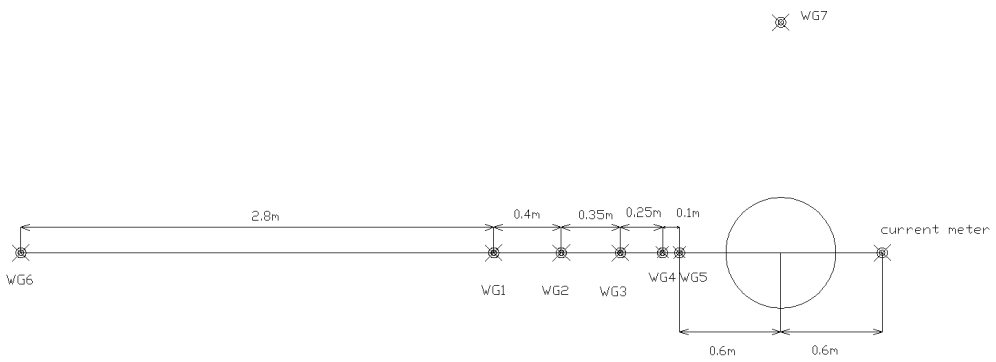
8.10. Δοκιμές δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς

Οι δοκιμές δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς έγιναν στην Πειραματική Δεξαμενή της ***DHI***, που βρίσκεται στο ***Hoersholm*** της Δανίας. Τα χαρακτηριστικά των τριών δεξαμενών που έγιναν τα πειράματα, είναι: μήκος 30m, πλάτος 30m και βάθος 0.4m, 0.55m και 3m.

Το πρότυπο προσαρμόστηκε στο δυναμόμετρο του φορείου ρυμουλκήσεως, το οποίο έχει αρθρωτό πέλμα και τοποθετήθηκε στη θέση του γεωμετρικού κέντρου βάρους της κατασκευής. Σημειώνεται, επίσης ότι κατά τη διάρκεια των μετρήσεων, το

πρότυπο της πλωτής κατασκευής δεχόταν εκτός από κυματισμούς και δράση «ομοιόμορφου» ρεύματος

Κατά τη διάρκεια των πειραμάτων δυναμικής συμπεριφοράς σε κυματισμούς καταγραφόταν η ***ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας*** σε 7 σημεία του μοντέλου, όπως φαίνονται στο σχήμα 8.1.14.



Σχήμα 8.10 1: σκαρίφημα των σημείων όπου μετρήθηκε η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας του κυλίνδρου.

- Οι μετρήσεις έγιναν για βύθισμα της πλωτής κατασκευής ίσο με T=0.2m (κλίμακα μοντέλου).

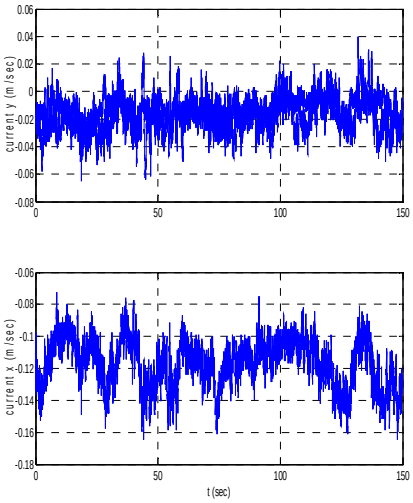
8.10.1 Υπολογισμός της ταχύτητας του ομοιόμορφου ρεύματος

Μία από τις ιδιαιτερότητες της δεξαμενής της DHI, είναι πως έχει μια ειδική διάταξη, για τη δημιουργία του ομοιόμορφου ρεύματος. Αυτό σημαίνει πως τα πειράματα αλληλεπίδρασης κύματος και ρεύματος που συνήθως γίνονται με τη χρήση του κυματιστήρα και του φορείου της δεξαμενής κινούμενου μπροστά ή πίσω, για να προσομοιάσει την μικρή πρόσω ή πίσω ταχύτητα, εδώ γίνονται με τη χρήση του κυματιστήρα και της συσκευής η οποία παράγει ρεύμα.

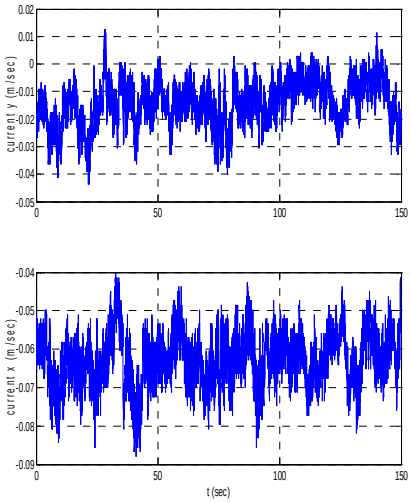
Οπότε ένα από τα βασικότερα προβλήματα που έπρεπε να επιλυθούν ήταν ο υπολογισμός αυτής της ταχύτητας ρεύματος.

Χρησιμοποιηθήκαν δύο ταχύτητες ρεύματος, που ύστερα από στατιστική επεξεργασία υπολογίστηκαν σε U_1***=0.06m/sec*** και U_2***=0.12m/sec***. Η δεύτερη ταχύτητα ήταν και η μέγιστη η οποία μπορούσε να μας δώσει η δεξαμενή και η συγκεκριμένη διάταξη**.**

Παρακάτω βλέπουμε τις χρονικές ιστορίες των ταχυτήτων του ρεύματος



Ταχύτητα ρεύματος ***U_1=0.06m/sec***



Ταχύτητα ρεύματος ***U_2=0.12m/sec***

8.11. Στατιστική επεξεργασία των πειραμάτων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται ενδεικτικά αποτελέσματα, από τις χρονικές ιστορίες των πειραμάτων και η στατιστική επεξεργασία τους.

Η στατιστική επεξεργασία μπορεί να γίνει με τη βοήθεια τριών διαφορετικών προγραμμάτων που είναι διαθέσιμα στο Εργαστήριο Πλωτών Κατασκευών και Συστημάτων Αγκύρωσης, το πρόγραμμα MATLAB, το πρόγραμμα MINITAB, αλλά και το EXCEL. Διαπιστώθηκε (Mazarakos K., 2008), πως και τα τρία προγράμματα έχουν ακριβώς την ίδια ακρίβεια κατά τον υπολογισμό των ελεγχόμενων στατιστικών μεγεθών.

number	legend	unit
1	WG1	cm
2	WG2	cm
3	WG3	cm
4	WG4	cm
5	WG5	cm
6	WG6	cm
7	WG7	cm
8	wave run up	cm
9	Fx	N
10	Fy	N
11	Fz	N

Πίνακας 6.

Ο πίνακας 6, παρουσιάζει τα μετρούμενα μεγέθη και ο αύξων αριθμός υποδηλώνει το κανάλι στο οποίο καταγράφθηκε η αντίστοιχη μέτρηση.

Οι μεταβλητές από 1 ως 7, δίνονται σε cm, δηλαδή, δίνουν τις ανυψώσεις μπροστά από το μοντέλο του κυλίνδρου.

Η μεταβλητή 8, είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας γύρω από το μοντέλο.

Οι μεταβλητές 9 ως 11, δίνουν τις δυνάμεις που ασκούνται στο μοντέλο.

8.11.1 Σύστημα συντεταγμένων

Το σύστημα συντεταγμένων, βρίσκεται στο επίπεδο της αδιατάραχτης ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού.

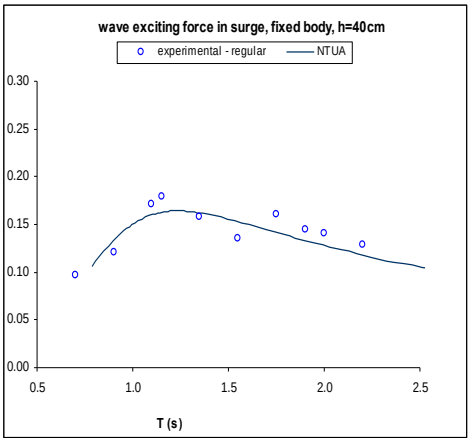
8.12. Στατιστικές τιμές των πειραματικών αποτελεσμάτων

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται η στατιστική επεξεργασία των πειραμάτων που έγινε με το πρόγραμμα ***FFTOM.m***, που έχει γραφεί στο. Το πρόγραμμα αυτό αρχικά σχεδιάζει τις ***χρονικές ιστορίες*** του εκάστοτε μετρούμενου μεγέθους (δύναμη διέγερσης, κινήσεις, ανυψώσεις της ελεύθερης επιφάνειας, κ.τ.λ.).Στη συνέχεια υπολογίζει τα βασικά **στατιστικά μεγέθη**: ***mean, maximum, minimum, standard deviation***, για το κάθε μέγεθος και τέλος κάνει ***Fast Fourier Transformation*** (FFT ή DFT) επίσης για όποιο μέγεθος θέλουμε να υπολογίσουμε.

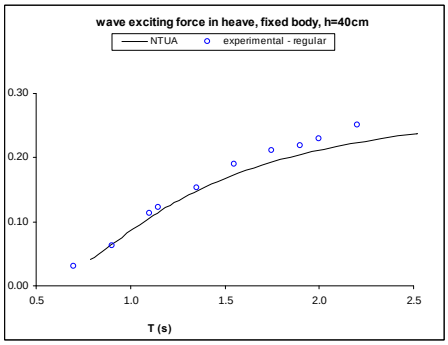
8.13. Συγκρίσεις με αριθμητικά αποτελέσματα.

Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε συγκρίσεις των πειραματικών αποτελεσμάτων με αριθμητικά αποτελέσματα. Όπως θα φανεί και παρακάτω αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα, βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία. Η αδιαστατοποίηση όπου δεν αναγράφεται είναι: $\rho g A$.

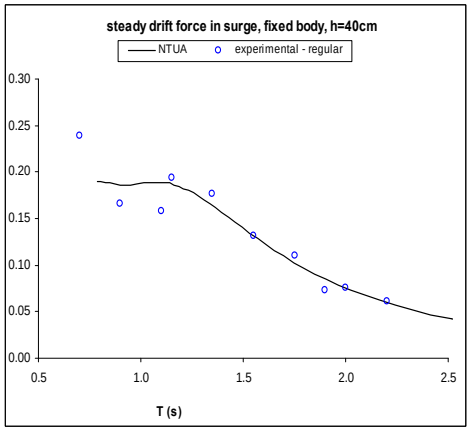
H=40cm



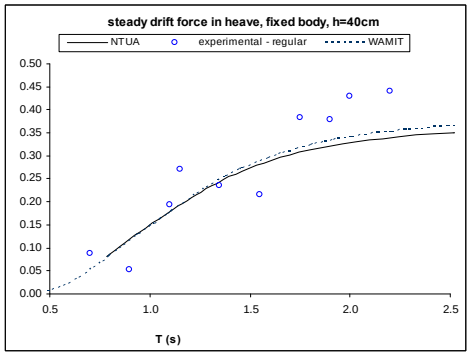
Σχήμα 8.13 1: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, στον κατακόρυφο κύλινδρο (h= 40cm).



Σχήμα 8.13 2: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των κατακόρυφων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, στον κατακόρυφο κύλινδρο (h= 40cm).

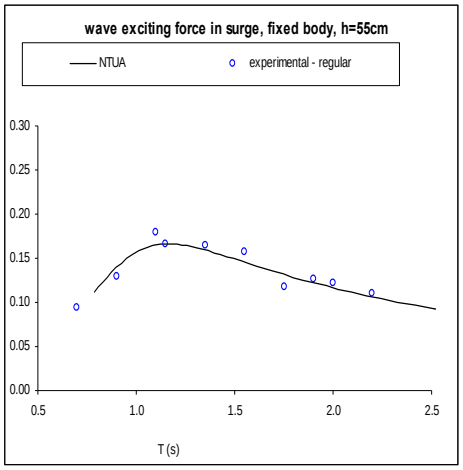


Σχήμα 8.13 3: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στον κατακόρυφο κύλινδρο (h=40cm).

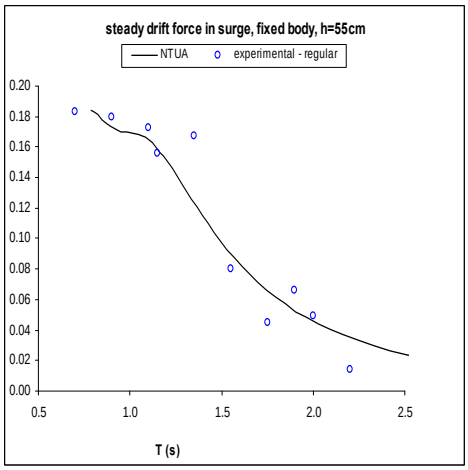


Σχήμα 8.13 4: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των κατακόρυφων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στον κατακόρυφο κύλινδρο (h=40cm).

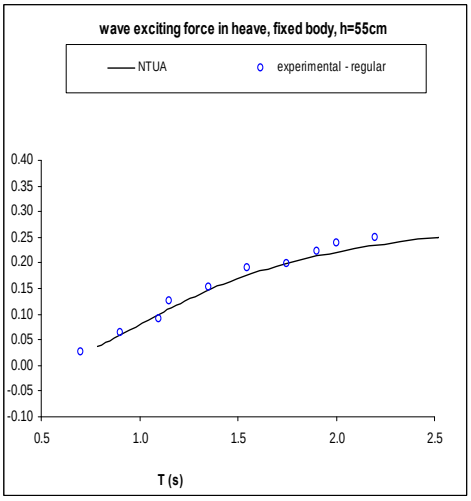
H=0.55cm



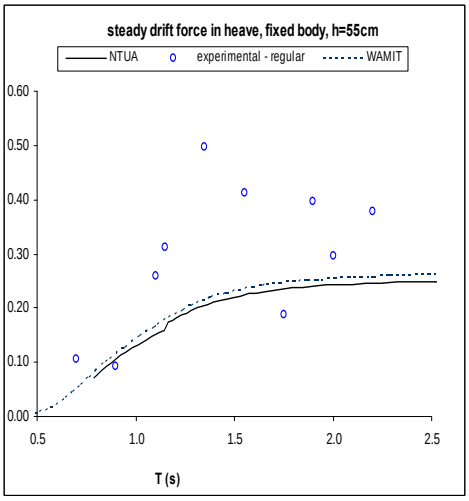
Σχήμα 8.13 5: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, στον κατακόρυφο κύλινδρο (h= 55cm).



Σχήμα 8.13 7:: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στον κατακόρυφο κύλινδρο (h=55 cm).

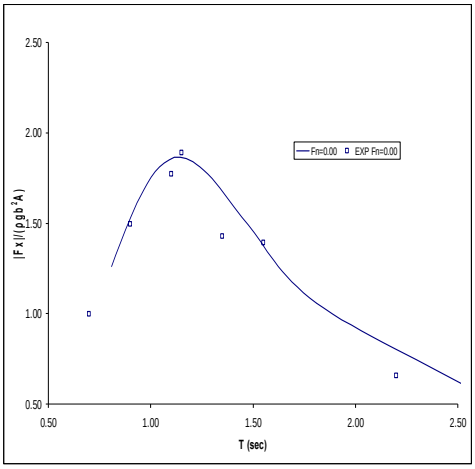


Σχήμα 8.13 6: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των κατακόρυφων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, στον κατακόρυφο κύλινδρο (h= 55cm).

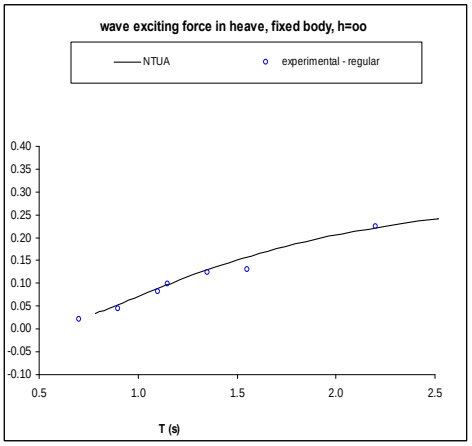


Σχήμα 8.13 8:: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των κατακόρυφων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στον κατακόρυφο κύλινδρο (h= 55cm).

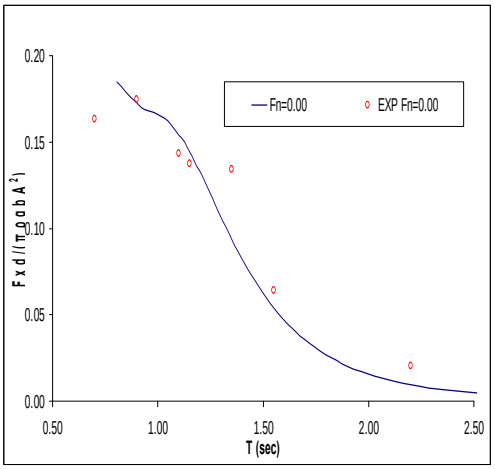
H=∞



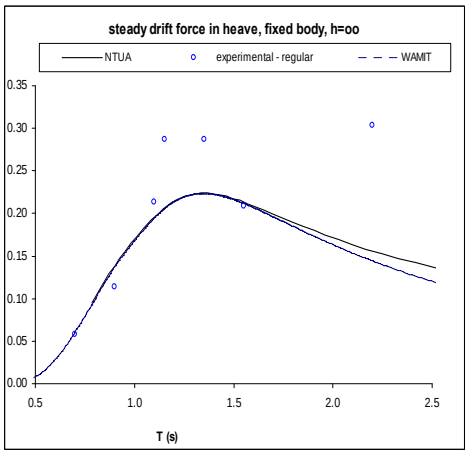
Σχήμα 8.13 9: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, στον κατακόρυφο κύλινδρο (h=∞).



Σχήμα 8.13 10: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των κατακόρυφων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, στον κατακόρυφο κύλινδρο (h=∞).

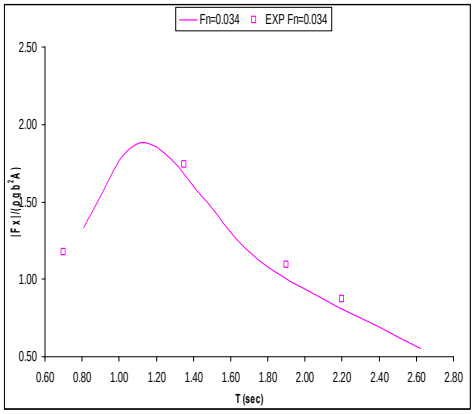


Σχήμα 8.13 11: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στον κατακόρυφο κύλινδρο (h=∞).

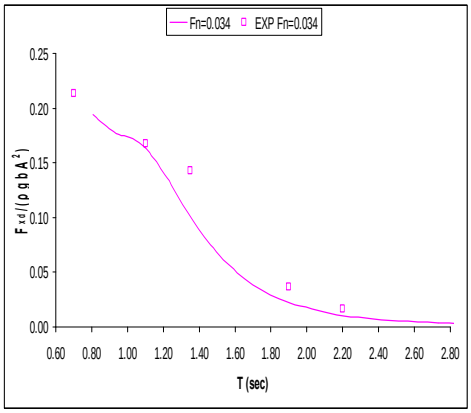


Σχήμα 8.13 12: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των κατακόρυφων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), στον κατακόρυφο κύλινδρο (h=∞).

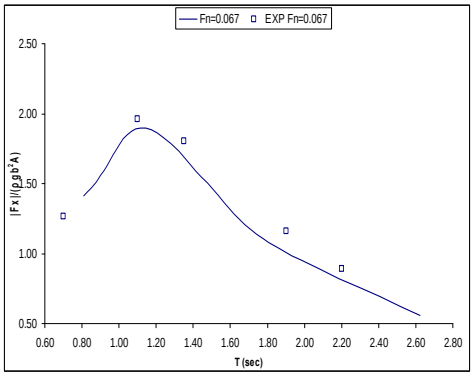
Κύμα και ρεύμα



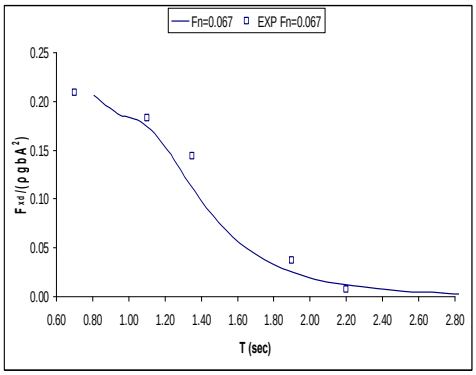
Σχήμα 8.13 13: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος στον κύλινδρο (V=0.06m/sec).



Σχήμα 8.13 15: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος στον κύλινδρο(V=0.06m/sec).



Σχήμα 8.13 14: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων πρωτοτάξιων δυνάμεων διέγερσης, υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος στον κύλινδρο (V=0.12m/sec).



Σχήμα 8.13 16: συγκρίσεις αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων των οριζόντιων δυνάμεων έκπτωσης (drift forces), υπό την αλληλεπίδραση κύματος και ρεύματος στον κύλινδρο(V=0.12m/sec).

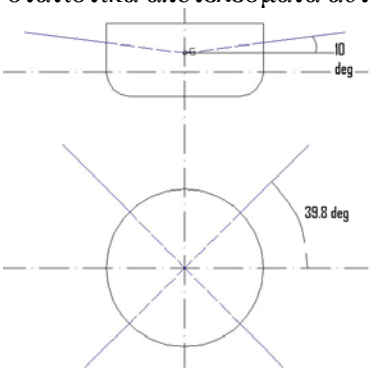
8.14. Τυχαίοι κυματισμοί

Στην ενότητα αυτή, γίνεται η στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων του ελεύθερα πλέοντος αγκυρωμένου κυλίνδρου και οι συγκρίσεις των πειραματικών αποτελεσμάτων με τα δύο προγράμματα υπολογισμού των ***slow drift motions***, αυτό του πεδίου των συχνοτήτων αλλά και αυτό στο πεδίο των χρόνων.

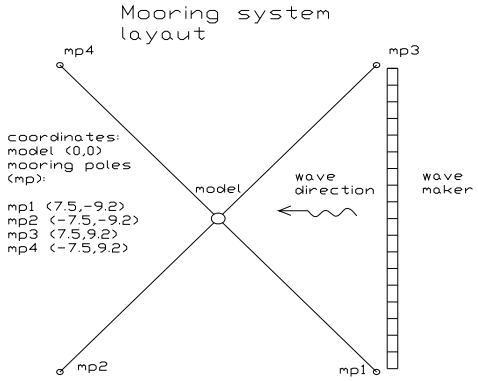
Επειδή τα πειράματα σε τυχαίους κυματισμούς είναι γενικά χρονοβόρος διαδικασία, στην Πειραματική Δεξαμενή της *DHI*, έγιναν μόνον τρεις δοκιμές της δυναμικής συμπεριφοράς της αγκυρωμένης κατασκευής (k_{xx}=*22.51N/m*), διάρκειας 900sec (15min), το κάθε ένα. Τα χαρακτηριστικά του κάθε πειράματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Depth (m)	Tp (sec)	Hs (m)	Duration (sec)	Spectrum
0.55	1.55	3.4	900	Jonswap
inf	1.55	6.8	900	Jonswap
inf	1.55	10.0	900	Jonswap

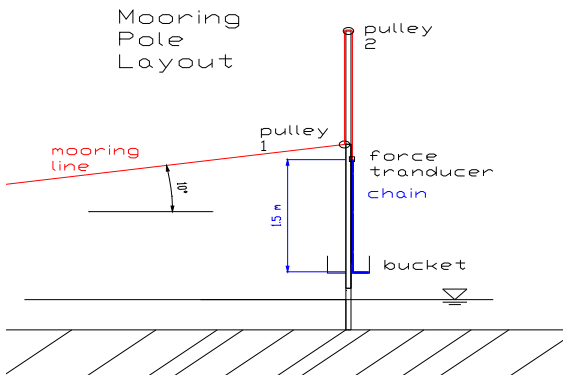
Στα επόμενα διαγράμματα παρουσιάζονται αρχικά οι δυνάμεις που ασκούνται από τους τέσσερις κλάδους αγκύρωσης όπως φαίνονται και ορίζονται στα σχήματα 8.1.31- 33. Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζονται οι κινήσεις του κυλίνδρου και στους έξι βαθμούς ελευθερίας κίνησης και τέλος σε ένα διάγραμμα παρουσιάζουμε μόνον την χρονική ιστορία της κίνησης στο *surge* και τα στατιστικά αποτελέσματα αυτής.



Σχήμα 8.14 1 : το σύστημα αγκύρωσης.

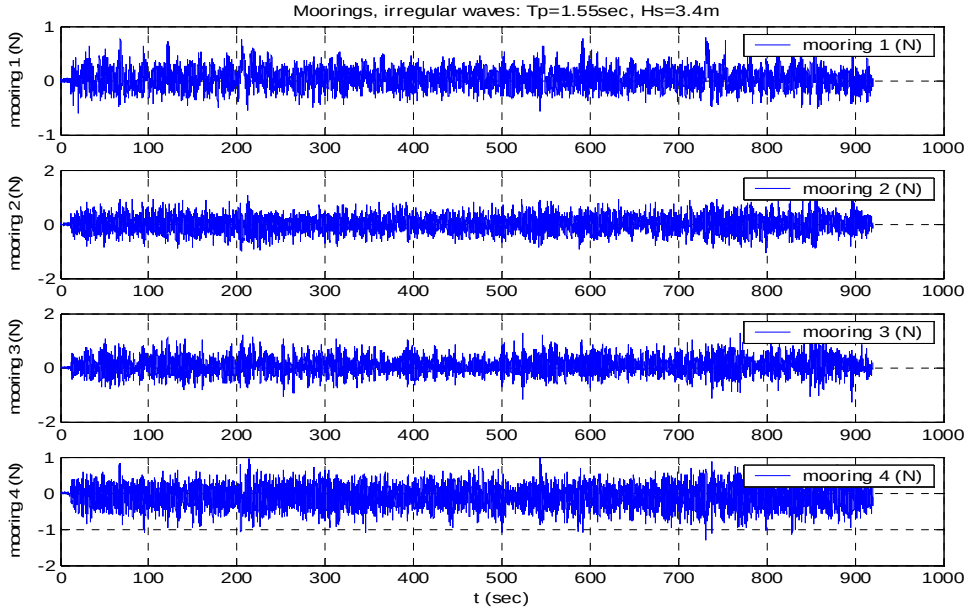


Σχήμα 8.14 2: το σύστημα αγκύρωσης. Οι συντεταγμένες των σημείων πρόσδεσης και οι αρίθμηση των κλάδων.

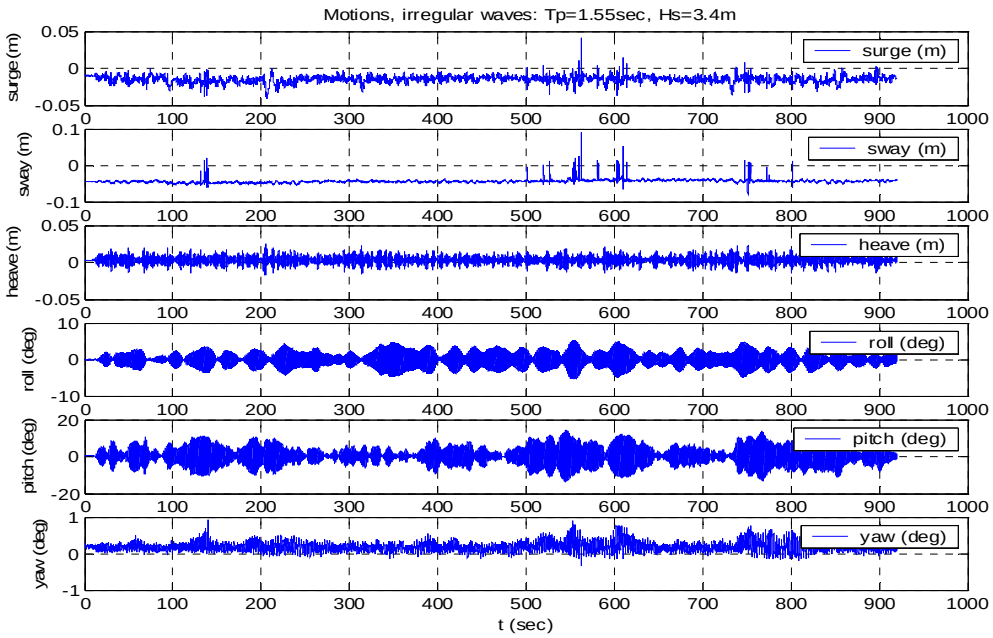


Σχήμα 8.14 3: χαρακτηριστικά του κλάδου αγκύρωσης.

<u>Βάθος νερού 0.55m</u>



Σχήμα 8.14 4: οι δυνάμεις στους κλάδους αγκύρωσης



Σχήμα 8.14 5: Οι κινήσεις του κυλίνδρου στους έξι βαθμούς ελευθερίας.

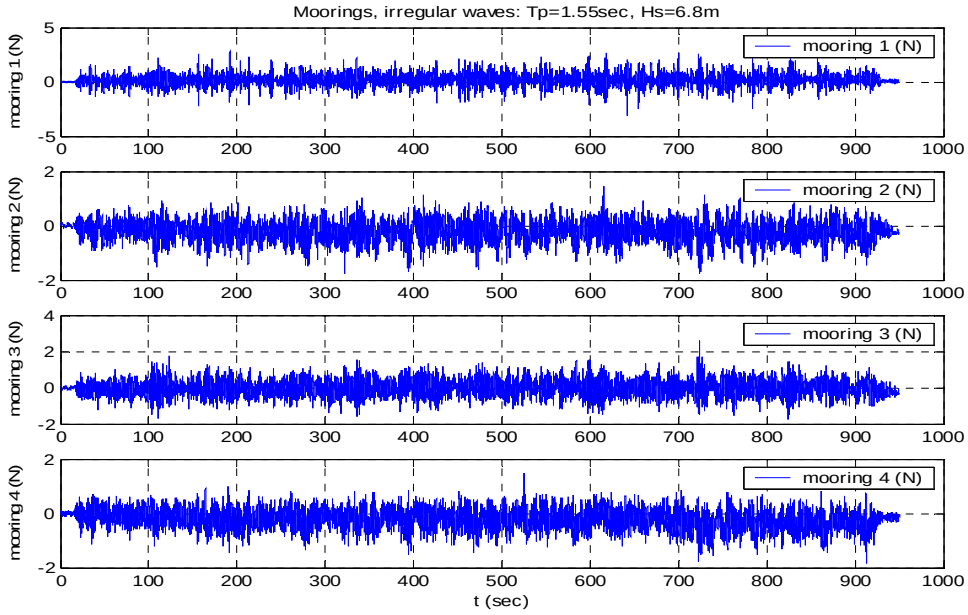
Motions	std
Surge (m)	0.0048
Sway (m)	0.0041
Heave (m)	0.0056
Roll (deg)	1.7948
Pitch (deg)	4.5857
Yaw (deg)	0.1171

Στατιστική ανάλυση των κινήσεων στο χρονικό διάστημα των 900 sec.

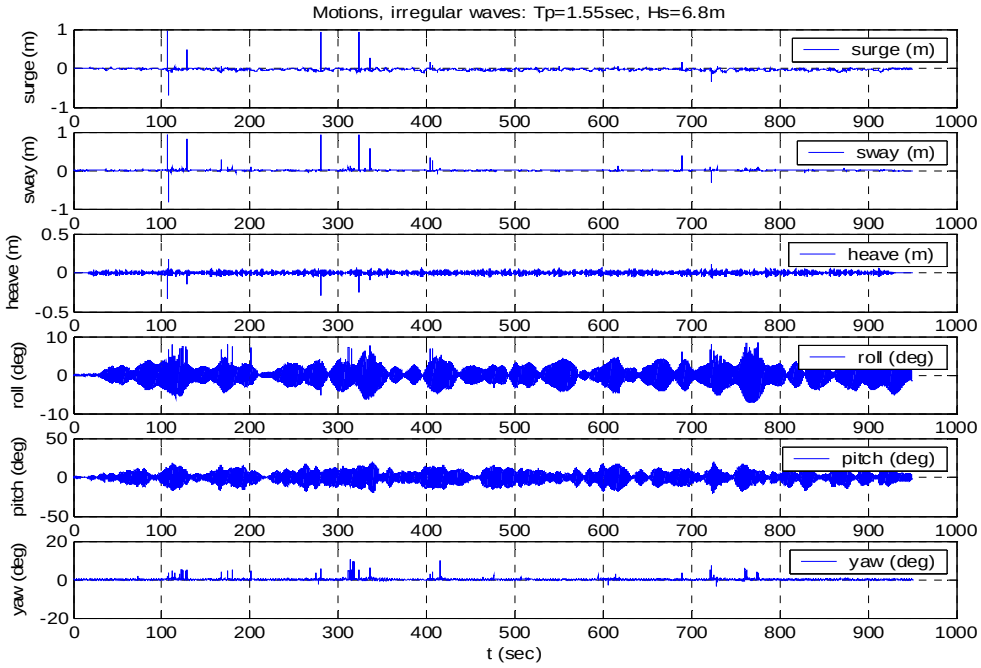
Surge (m)	
Mean	-0.0150
Min	-0.0409
Max	0.0411
std	0.0048

Στατιστική ανάλυση της κίνησης στη x- διεύθυνση στο χρονικό διάστημα των 900 sec.

Βάθος νερού άπειρο



Σχήμα 8.14 6: οι δυνάμεις στους κλάδους αγκύρωσης



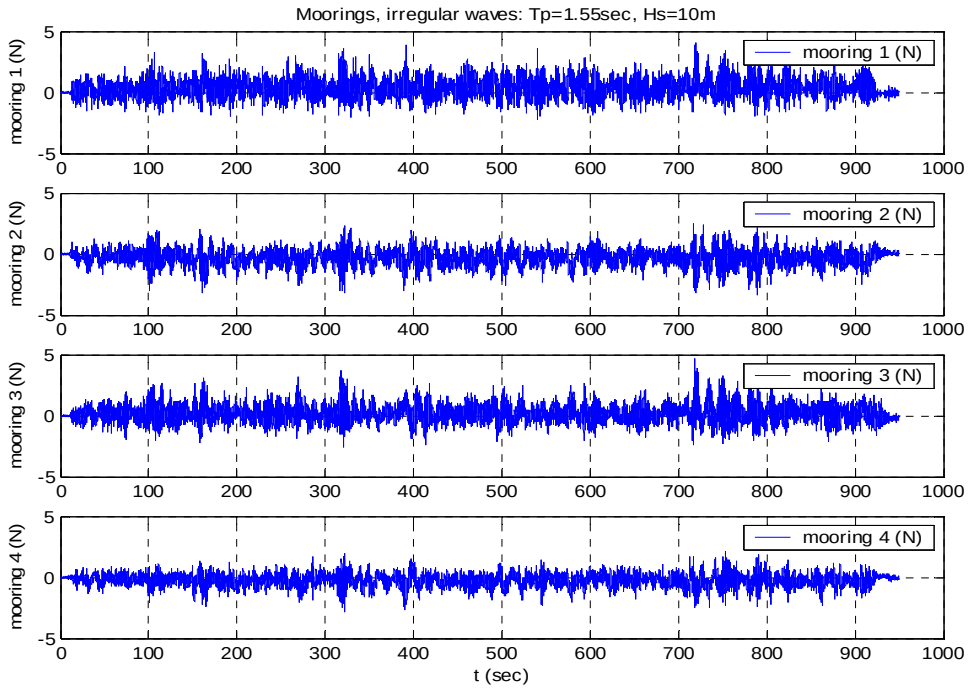
Σχήμα 8.14 7: Οι κινήσεις του κυλίνδρου στους έξι βαθμούς ελευθερίας.

Motions	std
Surge (m)	0.0286
Sway (m)	0.0227
Heave (m)	0.0213
Roll (deg)	2.1537
Pitch (deg)	6.8604
Yaw (deg)	0.4753

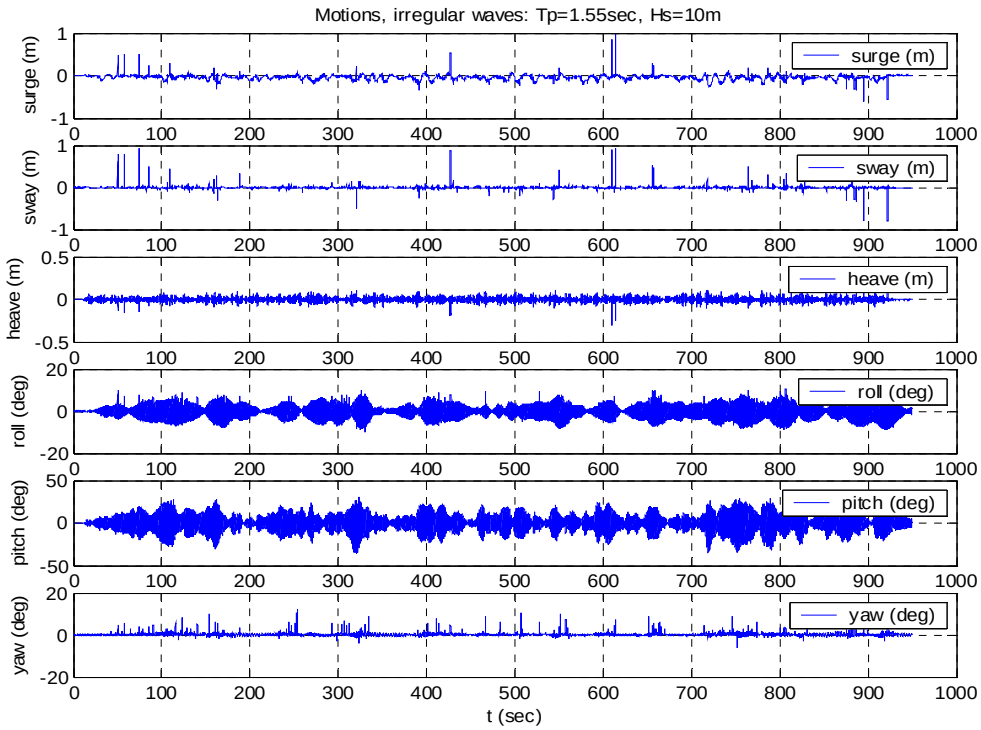
Στατιστική ανάλυση των κινήσεων στο χρονικό διάστημα των 900 sec.

Surge (m)	
Mean	-0.0319
Min	-0.6981
Max	0.9668
std	0.0286

Στατιστική ανάλυση της κίνησης στη x- διεύθυνση στο χρονικό διάστημα των 900 sec.



Σχήμα 8.14 8: οι δυνάμεις στους κλάδους αγκύρωσης



Σχήμα 8.14 9: Οι κινήσεις του κυλίνδρου στους έξι βαθμούς ελευθερίας.

Motions	std
Surge (m)	0.0573
Sway (m)	0.0363
Heave (m)	0.0298
Roll (deg)	3.2268
Pitch (deg)	10.1420
Yaw (deg)	0.8118

Στατιστική ανάλυση των κινήσεων στο χρονικό διάστημα των 900 sec.

Surge (m)	
Mean	-0.422
Min	-0.6193
Max	0.9738
std	0.0573

Στατιστική ανάλυση της κίνησης στη x- διεύθυνση στο χρονικό διάστημα των 900 sec.

8.14.1. Υπολογισμός των κινήσεων στο πεδίο των συχνοτήτων

Αρχικά, θα υπολογιστούν οι ***δυνάμεις έκπτωσης της κατασκευής***, με τη μέθοδο της μεταβολής της ορμής και θα εξαχθούν αποτελέσματα για την ***πρόσθετη μάζα*** του κυλίνδρου στη διεύθυνση x.

Αφού λοιπόν γνωρίζουμε τη δύναμη έκπτωσης και τα ***χαρακτηριστικά του φάσματος***, υπολογίζονται οι αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις (***slowly varying forces***).

Σε επόμενο βήμα υπολογίζεται η ***υδροδυναμική απόσβεση*** (WDD) και η **μέση υδροδυναμική απόσβεση** (mean WDD).

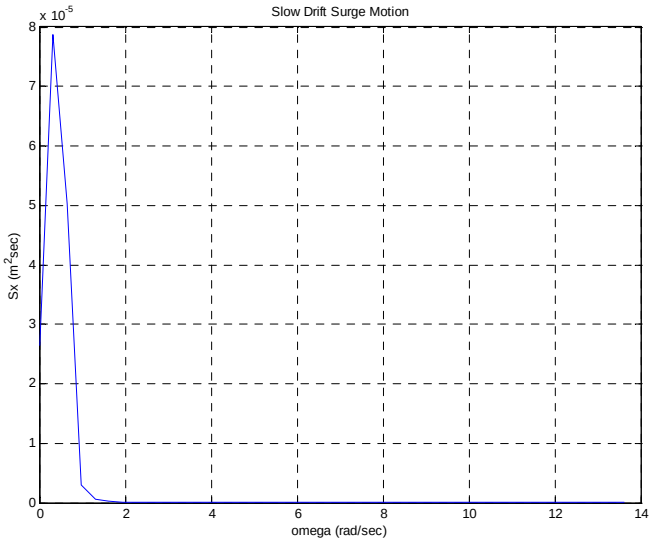
Τα ***χαρακτηριστικά του κλάδου αγκύρωσης*** μας είναι γνωστά από το πείραμα (***k_{xx}=22.51N/m***), συνεπώς, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ***slowly varying frictional damping***. Το άθροισμα του με το WDD, μας δίνει τη ***συνολική δευτεροτάξια απόσβεση***.

Οπότε κάνοντας τελικά χρήση του προγράμματος ***SLOWDRIFT.M,*** το οποίο υπολογίζει τις ***slow drift κινήσεις*** στο **surge (**και **sway)** μέσω του τύπου του **Pinkster (1974)*:***

$$S_{\tilde{x}}(\mu) = S_F(\mu)\frac{1}{\left[k_{xx} - (m + \alpha_{xx})\mu^2\right]^2 + b_{xx}\mu^2}$$

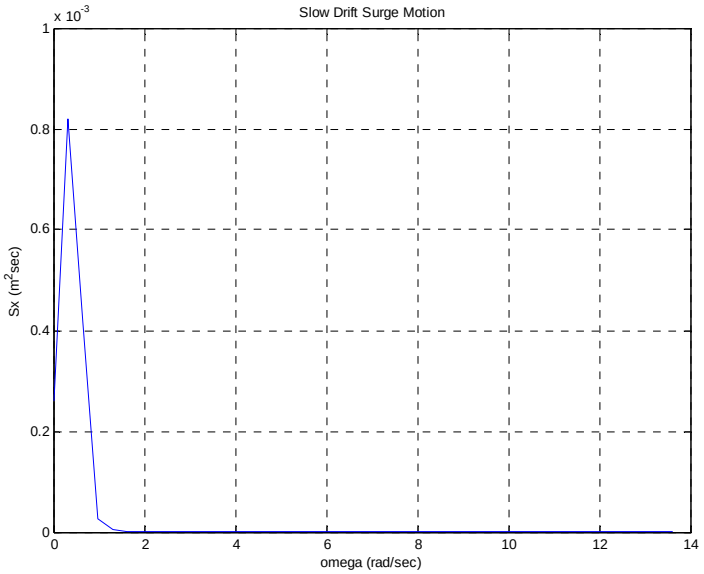
προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα.

<u>Βάθος νερού 0.55m</u>

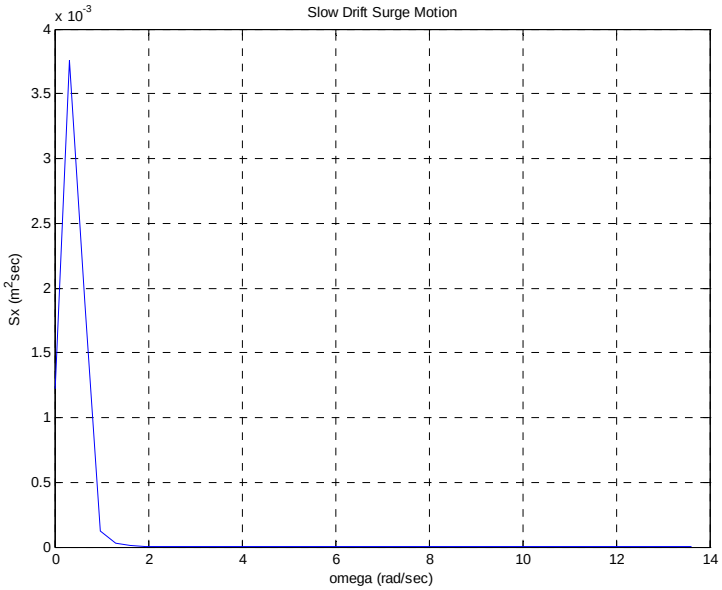


Πού δίνει Xstandard deviation=0.01075m.

Άπειρο Βάθος νερού



Πού δίνει Xstandard deviation=0.02425m.



Πού δίνει Xstandard deviation=0.0400m.

8.14.2. Υπολογισμός των κινήσεων στο πεδίο του χρόνου.

Αρχικά, θα υπολογιστούν οι ***δυνάμεις έκπτωσης της κατασκευής***, με τη μέθοδο της μεταβολής της ορμής και θα εξαχθούν αποτελέσματα για την ***πρόσθετη μάζα*** του κυλίνδρου στη διεύθυνση x.

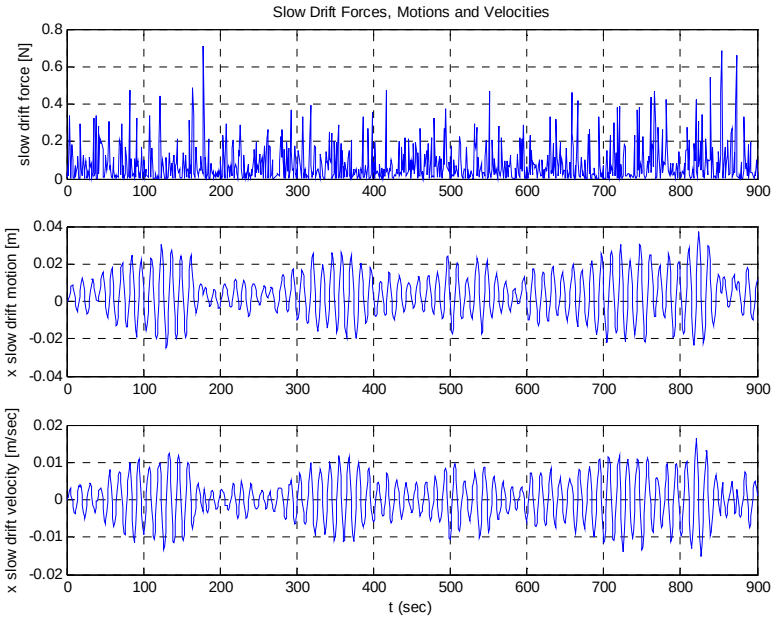
Αφού λοιπόν γνωρίζουμε τη δύναμη έκπτωσης και τα ***χαρακτηριστικά του φάσματος (Jonswap)***, υπολογίζονται οι ***αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις στο πεδίο του χρόνου***, με την προσέγγιση του Newman (1974).

Σε επόμενο βήμα υπολογίζεται η ***υδροδυναμική απόσβεση*** (WDD) και η **μέση υδροδυναμική απόσβεση** (mean WDD).

Τα ***χαρακτηριστικά του κλάδου αγκύρωσης*** μας είναι γνωστά από το πείραμα (***k_{xx}=22.51N/m***), συνεπώς, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ***slowly varying frictional damping***. Το άθροισμα του με το WDD, μας δίνει τη ***συνολική δευτεροτάξια απόσβεση***.

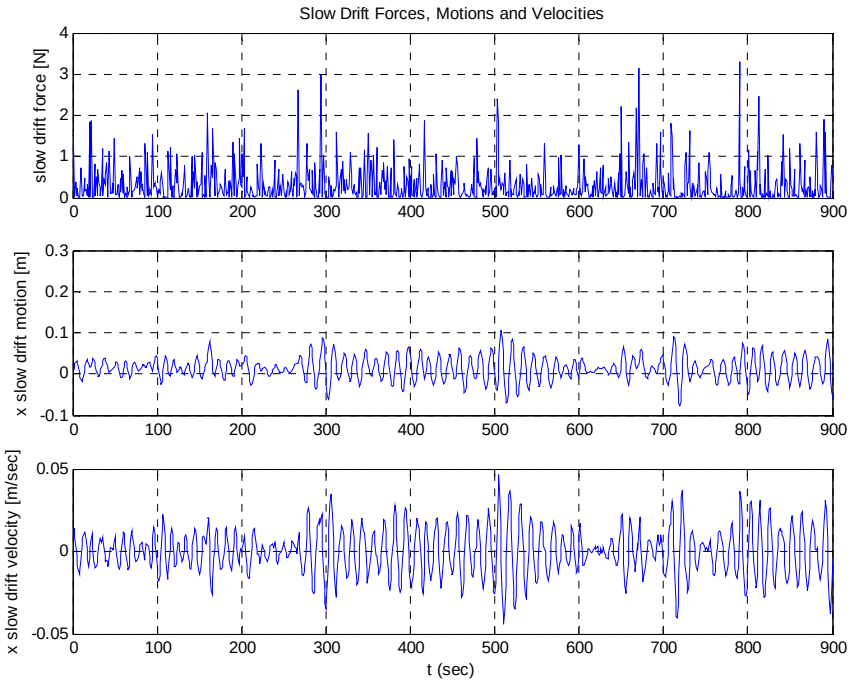
Οπότε κάνοντας τελικά χρήση του προγράμματος ***1DOFTOM.m*** το οποίο έχει γραφεί από τον υπογράφοντα στο **MATLAB** και υπολογίζει τις ***slow drift δυνάμεις, κινήσεις*** και ***ταχύτητες*** στο **surge (**και **sway)** στο ***πεδίου του χρόνου***, προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα. Για τον υπολογισμό, απαιτούνται οι χρονικές ιστορίες των αργά μεταβαλλόμενων δυνάμεων (*slowly varying forces*), οι οποίες για τους σκοπούς της παρούσας επίλυσης, έχουν υπολογιστεί με βάση τη μέθοδο που είχε παρουσιαστεί από τον *Newman* (1974).

<u>Βάθος νερού 0.55m</u>

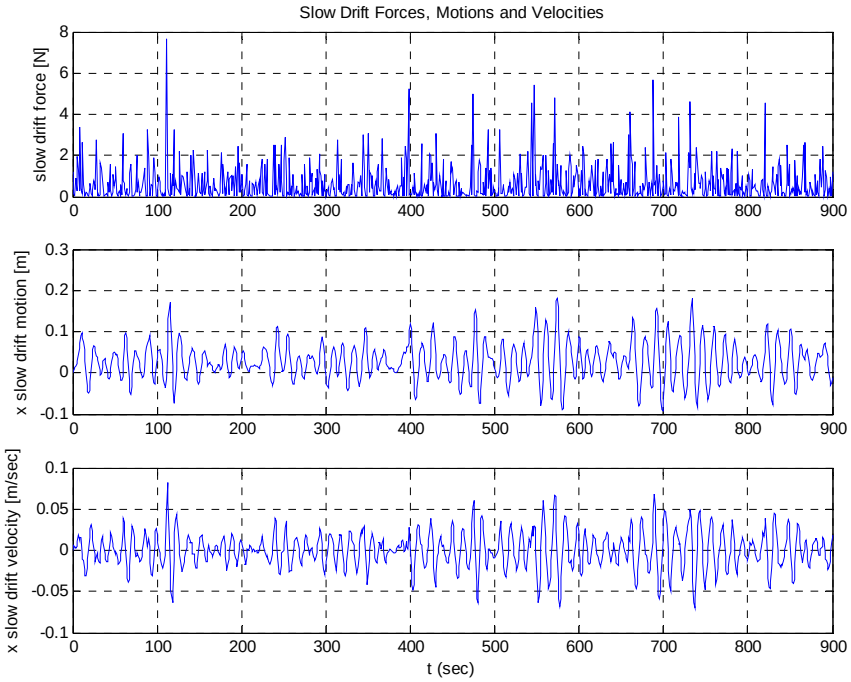


Πού δίνει Xstandard deviation=0.0116m.

Άπειρο Βάθος νερού



Πού δίνει Xstandard deviation=0.02810m.



Πού δίνει Xstandard deviation=0.0460m.

Στον πίνακα που ακολουθεί, μπορούμε να δούμε συγκεντρωμένα τα αποτελέσματα από τις αριθμητικές προσομοιώσεις στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων και τις συγκρίσεις αυτών με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Surge Motion	Experiment (std)	Numerical-frequency domain (std)	Numerical-time domain (std)
Irregular, depth=0.55m, Hs=0.034m, Tp=1.55sec	0.0048	0.01075	0.0116
Irregular, depth=inf, Hs=0.068m, Tp=1.55sec	0.0286	0.02425	0.0281
Irregular, depth=inf, Hs=0.100m, Tp=1.55sec	0.0573	0.04000	0.0460

Πίνακας 1. : Συγκεντρωτικά αποτελέσματα: πειράματα, frequency domain, time domain simulations.

8.14.3. Σχόλια- παρατηρήσεις

Όπως μπορούμε να δούμε στο συγκεντρωτικό πίνακα, μπορούμε να καταλήξουμε σε ορισμένες κατ' αρχήν παρατηρήσεις:

- Γενικά, αυξάνεται η δυσκολία υπολογισμού σε γάστρες με οξείες γωνίες, λόγω προβλημάτων ακριβούς προσδιορισμού της μέσης δευτεροτάξιας δύναμης έκπτωσης (*drift force*). Εξ' άλλου εκτός από τη *WDD*, έχουμε και μεγάλη συνεισφορά λόγω ιξώδους

- Στα πεπερασμένα βάθη (*0.55m*), οι παράγοντες που παίζουν το βασικότερο ρόλο είναι:

$$d/(h-d) \text{ και } k.d$$

όπου

d: το βάθος του νερού
h: το βύθισμα του σώματος και
k: ο αριθμός κύματος

κατά συνέπεια, θα πρέπει να αναπτυχθούν αποτελεσματικές αριθμητικές μέθοδοι προσομοίωσης σε αληθινά φάσματα κύματος παράλληλα με την υδροδυναμική ανάλυση, σε βαθμό που να μπορούμε να εξαλείψουμε στατικά φαινόμενα της *slow-drift* απόκρισης και να αποτιμήσουμε την ευαισθησία της σε ιδεατά φαινόμενα, αλλά και φαινόμενα λόγω ιξώδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΧ:
Αργά μεταβαλλόμενες φορτίσεις και ταχύτητα έκπτωσης στο πεδίο του χρόνου (προσέγγιση κατά Newman)

9.1. Αργά μεταβαλλόμενες δευτεροτάξιες φορτίσεις σε φυσικούς θαλάσσιους κυματισμούς στο πεδίο του χρόνου.

Στο κεφάλαιο αυτό αντιμετωπίζεται σε μια πρώτη προσέγγιση το δυναμικό πρόβλημα των αργά μεταβαλλόμενων φορτίσεων και κινήσεων μιας αγκυρωμένης πλωτής κατασκευής στο πεδίο του χρόνου.

Τα συστήματα αγκύρωσης χρησιμοποιούνται για τη συγκράτηση των πλωτών κατασκευών στον τόπο εγκατάστασης και λειτουργίας τους. Τις συνδέουν με τον πυθμένα της θάλασσας μέσω άγκυρας και αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα τους, η ασφάλεια του οποίου επηρεάζει την ασφάλεια ολόκληρης της αγκυρωμένης κατασκευής. Κύρια στοιχεία των συστημάτων αγκύρωσης είναι:

(α) οι γραμμές ή οι κλάδοι τους και

(β) οι άγκυρες.

Κατά την ανάλυση και σχεδίαση των γραμμών ή κλάδων αγκύρωσης, δεχόμαστε ότι αυτές υφίστανται στην κορυφή τους δύο ειδών κινήσεις από την κατασκευή την οποία συγκρατούν:

(Α) μικρές γρήγορες κινήσεις (πρωτοτάξιες κινήσεις που οφείλονται στις πρωτοτάξιες δυνάμεις κυματισμών

(β) μεγάλες αργές κινήσεις που οφείλονται στις δυνάμεις από τον αέρα και τα θαλάσσια ρεύματα και τις δευτεροτάξιες δυνάμεις κυματισμών.

Οι πρωτοτάξιες δυνάμεις που προκαλούν τις αντίστοιχες κινήσεις είναι τόσο μεγάλες που είναι αδύνατο να παραλειφθούν από τις γραμμές αγκύρωσης. Σαν αποτέλεσμα μπορούμε σχεδόν πάντοτε να υποθέσουμε ότι οι μικρές γρήγορες κινήσεις παραμένουν ανεπηρέαστες από τα συστήματα αγκύρωσης. Οι κινήσεις αυτές επιβάλλονται στην κορυφή κάθε γραμμής και προκαλούν δυναμικές τάσεις.

Οι δευτεροτάξιες δυνάμεις που οφείλονται στη δράση των συνθηκών περιβάλλοντος, είναι μικρότερες κατά μια τάξη μεγέθους. Επειδή όμως στις οριζόντιες μεταφορικές κινήσεις της κατασκευής καθώς και στην περιστροφή περί τον κατακόρυφο άξονα τους δεν υπάρχουν υδροστατικές δυνάμεις επαναφοράς, οι μικρές σε μέγεθος δευτεροτάξιες δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεγάλες κινήσεις δεδομένου ότι οι συχνότητες των δυνάμεων αυτών συμπίπτουν με εκείνες των ιδιοσυχνοτήτων της αγκυρωμένης κατασκευής και πρέπει να περιοριστούν. Γίνεται έτσι προφανές ότι ο σκοπός των συστημάτων αγκύρωσης είναι ο περιορισμός των αργών κινήσεων μεγάλου εύρους, που προκαλούνται από δευτεροτάξιες δυνάμεις, ανάλογες του τετραγώνου του ύψους κύματος. Ο τρόπος υπολογισμού τους αναλύεται στη συνέχεια, ακολουθώντας την προσέγγιση κατά Newman (1974).

Η εκλογή του συστήματος αγκύρωσης μιας πλωτής κατασκευής πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να περιορίζονται οι μεγάλου εύρους κινήσεις μέσα σε αποδεκτά για τη λειτουργία της κατασκευής όρια και παράλληλα να μην υπερβαίνει για λόγους ασφαλείας η μέγιστη αναπτυσσόμενη ένταση στη γραμμή ένα ποσοστό της έντασης θραύσης της και η άγκυρα να μην χάνει τη στήριξή της. Το τελευταίο σημαίνει πως θα πρέπει να παραμένει ένα

ποσοστό της γραμμής της αγκύρωσης ακόμα και στη δυσμενέστερη περίπτωση εξωτερικής φόρτισης.

Οι αγκυρωμένες πλωτές κατασκευές, εκτελούν μεγάλες αργά μεταβαλλόμενες κινήσεις συντονισμού (*slowly varying large motions*) λόγω των μέσων δευτεροτάξιων δυνάμεων έκπτωσης (*second-order low frequency quadratic wave drift forces*). Δεδομένου ότι αυτές οι μεγάλες μετατοπίσεις επηρεάζονται από ποικίλες παραμέτρους, η ακριβής πρόβλεψή τους έχει γίνει ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα στην επιστήμη του μηχανικού των πλωτών κατασκευών

Η λύση του σχετικού δυναμικού προβλήματος θα πραγματοποιηθεί στο κεφάλαιο αυτό, στο πεδίο του χρόνου. Η αντίστοιχη ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων έχει γίνει σε προηγούμενο κεφάλαιο και έχουν παρουσιαστεί αποτελέσματα για διάφορες κατασκευές. Στην προσέγγιση στο πεδίο των χρόνων, πρώτα υπολογίζουμε τις χρονικές των δευτεροτάξιων δυνάμεων έκπτωσης (*drift forces*) και μπορούν να υπολογιστούν στο πεδίο των συχνοτήτων με διάφορες μεθοδολογίες (μέθοδος της απ' ευθείας ολοκλήρωσης ή μέθοδος μεταβολής της ορμής) και στη συνέχεια υπολογίζονται οι κινήσεις, με την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της κίνησης του συστήματος: μάζα- αποσβεστήρας- ελατήριο.

9.2 Το δυναμικό πρόβλημα μιας αγκυρωμένης πλωτής κατασκευής- αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις, κινήσεις και ταχύτητες στο πεδίο του χρόνου.

Μια αγκυρωμένη κατασκευή, υπόκειται πλην των πρωτοτάξιων διεγέρσεων και των συνακόλουθων πρωτοτάξιων αποκρίσεων σε φυσικούς θαλάσσιους κυματισμούς και σε αργά μεταβαλλόμενες κινήσεις συντονισμού, τις οποίες κατά κύριο λόγω καλείται να περιορίσει το σύστημα αγκύρωσης. Οι κινήσεις αυτές που οφείλονται στις δράσεις των συνθηκών περιβάλλοντος (άνεμος, ρεύματα, κυματισμοί), προκαλούνται από δευτεροτάξιες διεγέρσεις, η κύρια συνιστώσα των οποίων οφείλεται στους θαλάσσιους κυματισμούς.

Στο παρόν εδάφιο, επιλύουμε το δυναμικό πρόβλημα μιας αγκυρωμένης πλωτής κατασκευής, υπολογίζοντας τις αργά μεταβαλλόμενες κινήσεις και ταχύτητες, κάνοντας χρήση τεχνικών στο πεδίο του χρόνου. Για τον υπολογισμό, απαιτούνται οι χρονικές ιστορίες των αργά μεταβαλλόμενων δυνάμεων (*slowly varying forces*), οι οποίες για τους σκοπούς της παρούσας επίλυσης, έχουν υπολογιστεί με βάση τη μέθοδο που είχε παρουσιαστεί από τον *Newman* (1974).

Η χρονική ιστορία της αργά μεταβαλλόμενης δευτεροτάξιας δύναμης (*slowly-varying second-order force*) $F_j^{(2)}(t)$ στην οριζόντια διεύθυνση j μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση:

$$F_j^{(2)}(t) = \left|L^{(+)}(t)\right|^2 - \left|L^{(-)}(t)\right|^2 \tag{9.2.1}$$

Όπου:

$$L^{(\pm)}(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_m^{\infty} A_m e^{i(\omega_m t + \varphi_m)}\left[\pm 2R(\omega_m)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{9.2.2}$$

Τα πρόσημα $\pm$, στην εξίσωση (9.2.2) αυτή και κάτω από το υπόριζο, έχουν εισαχθεί για να αντιμετωπιστεί η περίπτωση της αρνητικής τιμής του τελευταίου, σε τρόπο ώστε να έχει νόημα η ύπαρξη της ρίζας.

Επιπλέον:

$$A_m = \left\{2S_\zeta(\omega_m)\,d\omega\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{9.2.3}$$

Όπου $S_\zeta(\omega)$ είναι το φάσμα του κυματισμού στην περιοχή εγκατάστασης της πλωτής κατασκευής, φ_m είναι η τυχαία φάση, η οποία συνδέεται με τη συχνότητα των κυμάτων ω_m και $R(\omega_m) = F^{(2)}{}_{j0}(\omega_m)\big/A^2$ είναι η μέση δύναμη έκπτωσης σε αρμονικό κυματισμό (*mean drift force*).

Η διέγερση μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση ως προς το χρόνο *F(t)*, για την πλωτή κατασκευή. Συνεπώς το η διαφορική εξίσωση της κίνησης, θα δίνεται από τη σχέση:

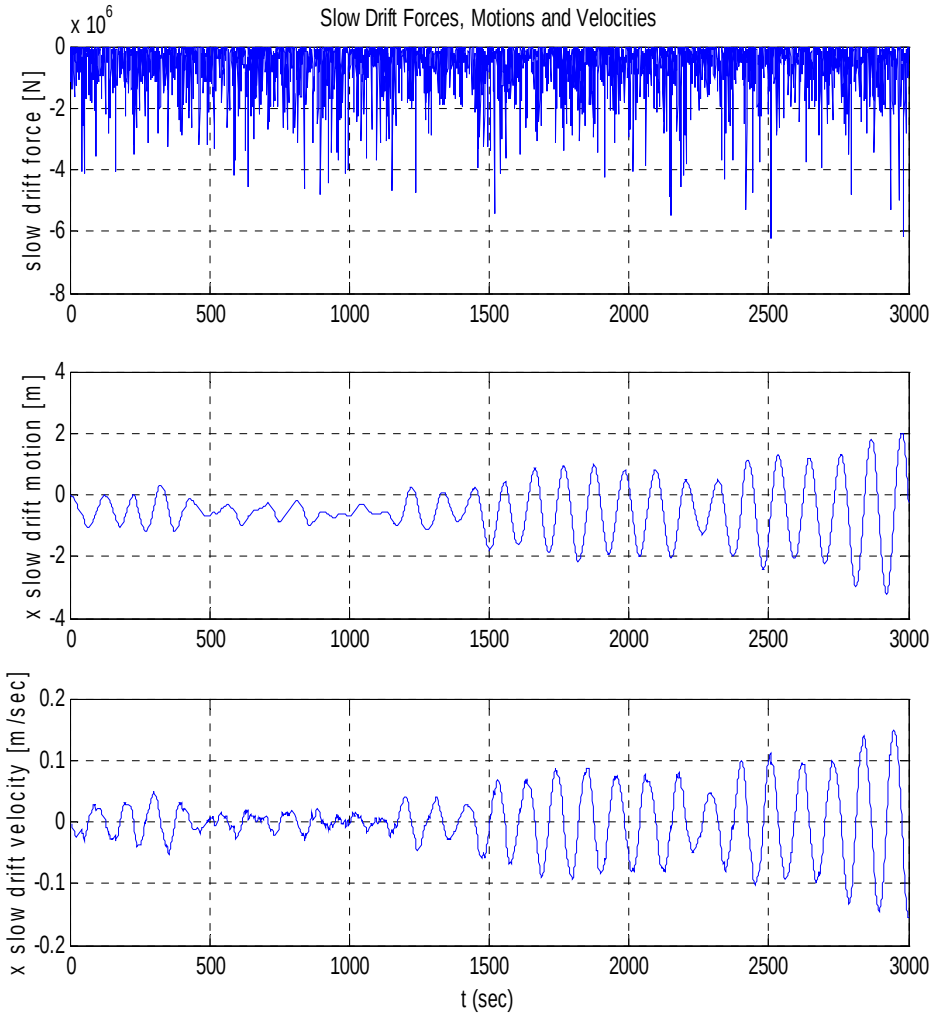
$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1 x = F(t) \tag{9.2.4}$$

Για την επίλυση στο πεδίο του χρόνου, η *F(t)*, αναπαριστά το σήμα της διέγερσης, δηλαδή τη χρονική ιστορία των δυνάμεων έκπτωσης. Για την παραγώγιση των σημάτων της απόκρισης *x(t),* κάνουμε χρήση της μεθόδου των *Runge-Kutta 4^{ης} τάξης*, των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (*Biran,* 2003). Η επίλυση γίνεται με χρήση του προγράμματος MATLAB.

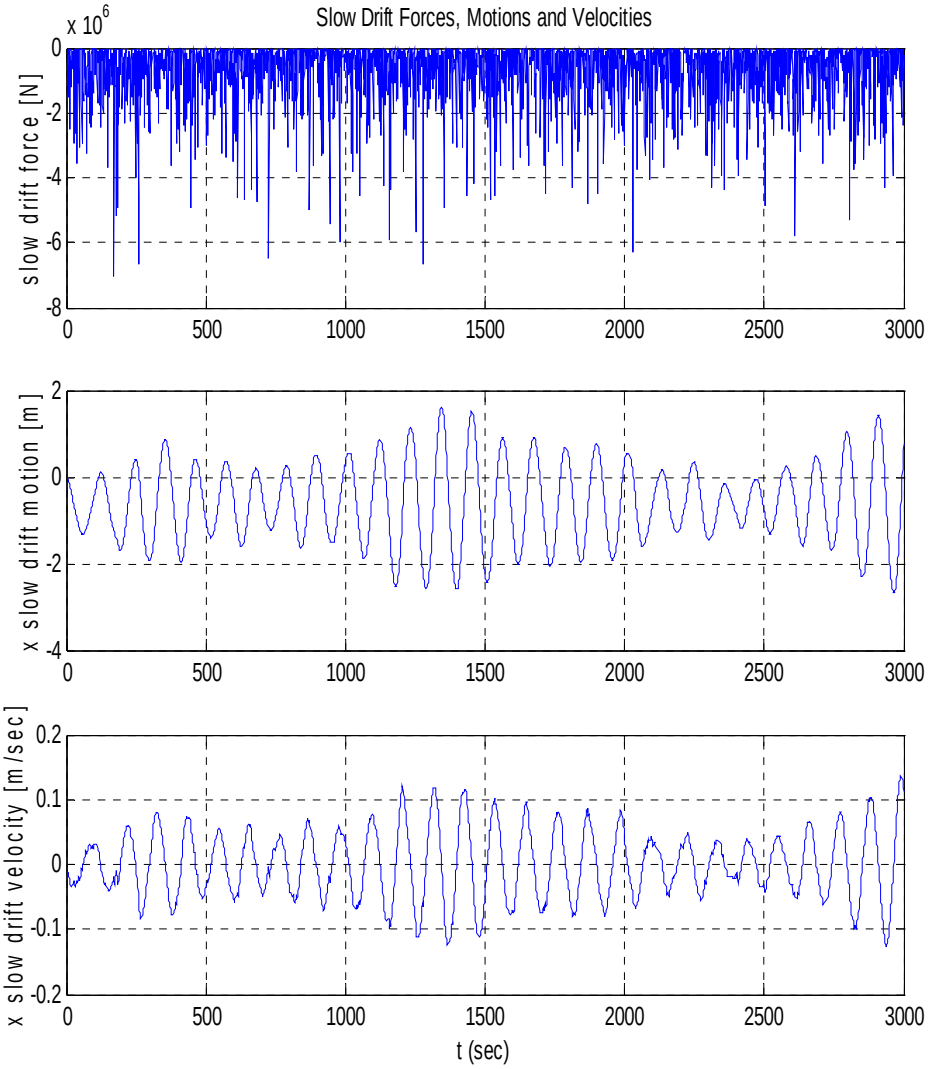
Παρακάτω παρουσιάζονται αποτελέσματα των χρονικών ιστοριών της δύναμης, της κίνησης και της ταχύτητας, για διάφορες περιπτώσεις αγκυρωμένων σωμάτων.

Χάριν πληρότητας, δίνονται και τα χαρακτηριστικά του φάσματος *Jonswap*, του οποίο χρησιμοποιήθηκε (H_s, T_p, γ), αλλά και στατιστικά αποτελέσματα των χρονοϊστοριών.

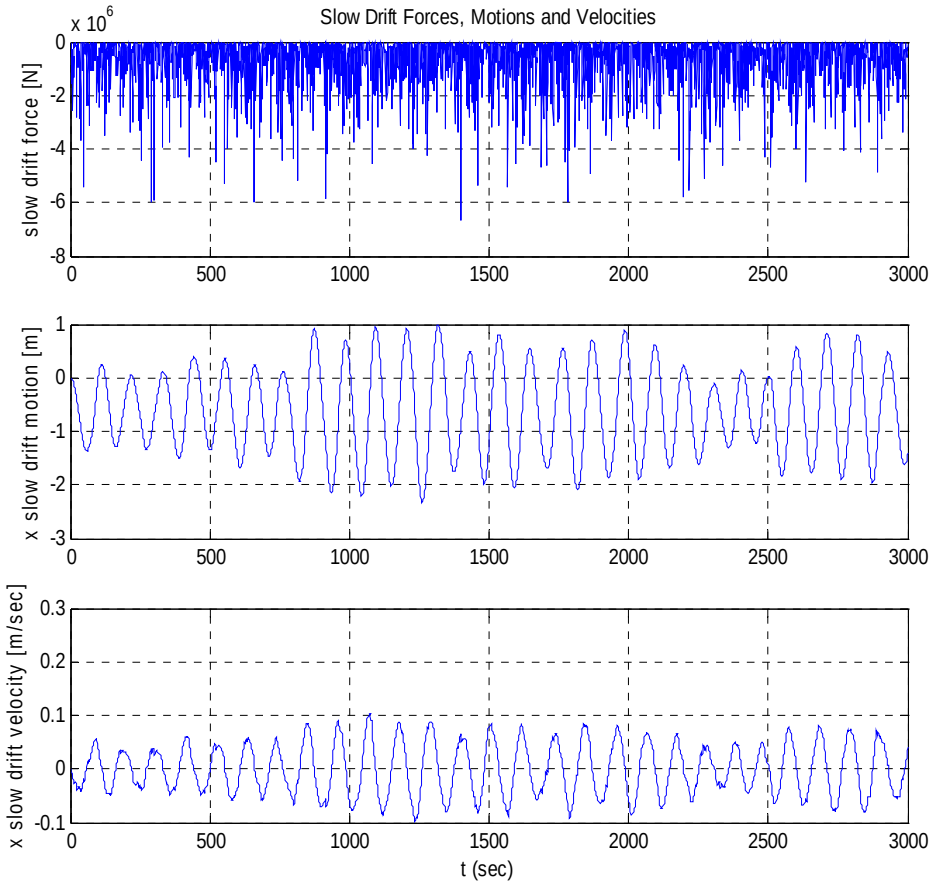
9.3. Αριθμητικά αποτελέσματα για τις αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις, κινήσεις και ταχύτητες στο πεδίο του χρόνου.



Σχήμα 9.3. 1: Αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις, κινήσεις και ταχύτητες στη διεύθυνση x για γωνία πρόσπτωσης κύματος 150 μοίρες, σε έναν πλωτό τερματικό σταθμό (Π.Τ.Σ.), με χαρακτηριστικά φάσματος: H_s=2.5m, T_p=9sec, γ=1).



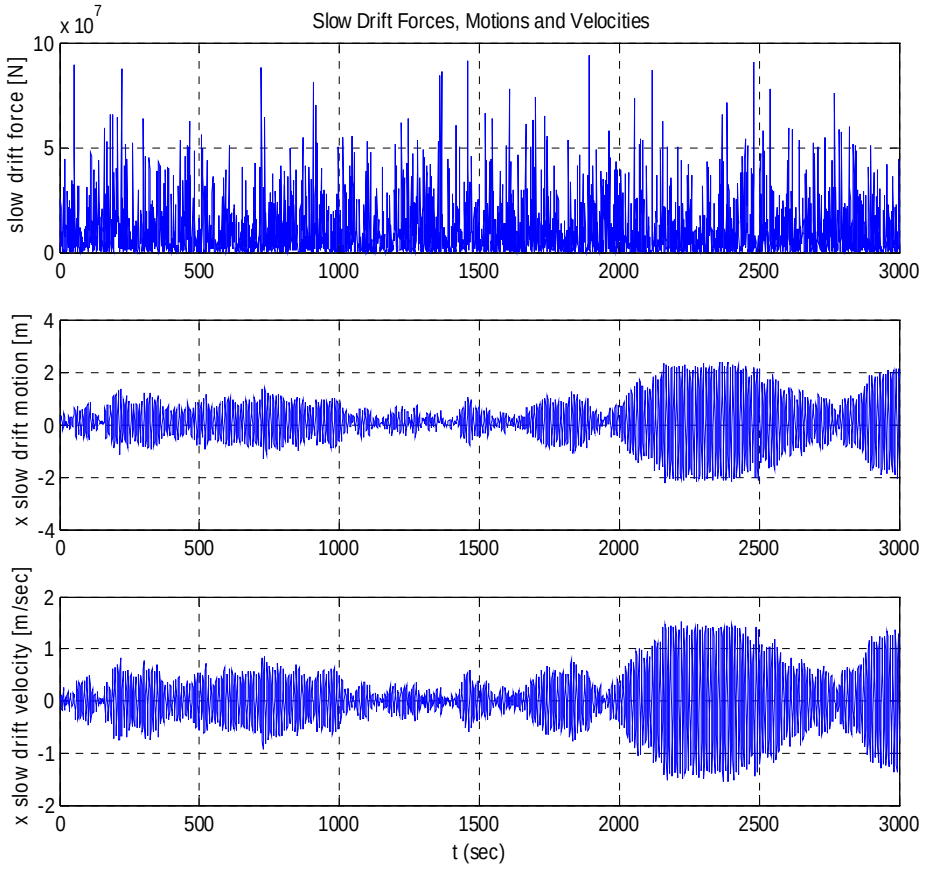
Σχήμα 9.3. 2: Αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις, κινήσεις και ταχύτητες στη διεύθυνση x για γωνία πρόσπτωσης κύματος 150 μοίρες, σε έναν πλωτό τερματικό σταθμό (Π.Τ.Σ.), με χαρακτηριστικά φάσματος: H_s=2.5m, T_p=11sec, γ=1).



Σχήμα 9.3. 3: Αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις, κινήσεις και ταχύτητες στη διεύθυνση x για γωνία πρόσπτωσης κύματος 150 μοίρες, σε έναν πλωτό τερματικό σταθμό (Π.Τ.Σ.), με χαρακτηριστικά φάσματος: H_s=2.5m, T_p=13sec, γ=1).

T_p (sec)	σ_{Fx} (N)	σ_x (m)	σ_u (m/sec)
9	8.31E5	0.8617	0.0496
11	9.18E5	0.9230	0.0529
13	9.29E5	0.8260	0.0470

Στατιστικές τιμές των κινήσεων και των ταχυτήτων, για τον πλωτό τερματικό σταθμό.



Σχήμα 9.3. 4: Αργά μεταβαλλόμενες δυνάμεις, κινήσεις και ταχύτητες στη διεύθυνση x για γωνία πρόσπτωσης κύματος 0 μοίρες, σε μια ορθογωνική φορτηγίδα (box), με χαρακτηριστικά φάσματος: H_s=3.75m, T_p=9.5sec, γ=1.1).

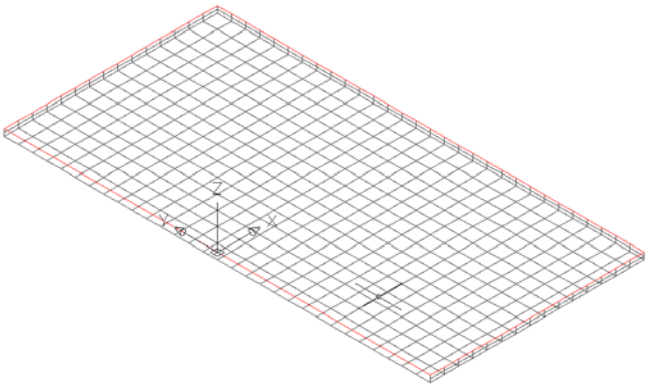
T_p (sec)	σ_{Fx} (N)	σ_x (m)	σ_u (m/sec)
9.5	1.388E7	1.3520	0.6565

Στατιστικές τιμές των κινήσεων και των ταχυτήτων, για την ορθογωνική φορτηγίδα (box).

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ορθογωνικής φορτηγίδας (box):

Για το βύθισμα των T=4.5m, έχουμε:
L=300m
B=300m
DISPLACEMENT=405000t
I_{44}=3.7e+9tm^2
I_{55}=3.7e+9tm^2
I_{66}=2.2e+9tm^2
A_{WL}=90000 m^2

Διακριτοποίηση της ορθογωνικής φορτηγίδας (box)



Διακριτοποίηση της ορθογωνικής φορτηγίδας (box), με 570 Panels και 618 Elements.

9.4. Σχόλια- συμπεράσματα

Τα κύρια σχόλια- συμπεράσματα από την αριθμητική ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς της πλωτής κατασκευής και τις αριθμητικές προβλέψεις είναι πως παρατηρούνται καλά αποτελέσματα για τις κινήσεις στη x διεύθυνση.

Βέβαια, δεν πρέπει να ξεχνάμε και κάποιους παράγοντες οι οποίοι παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στις αργά μεταβαλλόμενες κινήσεις και ταχύτητες, οι οποίοι, μπορούν να δημιουργήσουν αβεβαιότητες και κατά συνέπεια αποκλίσεις στα αποτελέσματά μας, όπως η αξιολόγηση της απόσβεσης, οι συντελεστές αντίστασης (*drag coefficients*), το *viscous damping*. Για την ορθότερη επιλογή τους, θα ήταν χρήσιμη πάντα η σύγκρισή τους με αυτούς που λαμβάνονται από την επίλυση των εξισώσεων ***Navier–Stokes*** (Tzabiras, G. D., 2004, 2008, Tzabiras, G. D. et al. 2009), όπου αυτό είναι δυνατόν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aanesland, V., Faltinsen, O., Zhao, R., 1990. Wave drift damping of a TLP, Society for Underwater Technology, 26, 383-400.

Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 1970. Handbook of mathematical Functions, Dover Publications Inc, New York

Aranha, J.A.P. Wave groups and slow motion of an ocean structure In 6th Int Workshop Water Waves and Floating Bodies, Woods Hole, MA, 5-8, 14-17 April, 1991 Also 'A formula for wave damping in the drift of a floating body', unpublished, 1990

Aranha, J.A.P., 1994. A formula for wave drift damping in the drift of a floating body, Journal of Fluid Mechanics, 275, 147 – 155.

Aranha, J.A.P., Fernandes, A.C., 1995. On the second-order slow drift force spectrum, Applied Ocean Research, 27, 311-313.

Aranha, J.A.P., Martins, M.R., 1997. Slender body approximation for yaw velocity terms in the wave drift damping matrix, I.W.W.W.F.B., 1-7.

Aranha, J.A.P., Martins, M.R., 2001. Low frequency wave force spectrum influenced by wave-current interaction, Applied Ocean Research, 23, 147-157.

Aranha, J.A.P., da Silva, S., Martins, M.R., Leite, A.J.P., 1999. An experimental verification of the wave drift damping formula, I.W.W.W.F.B., 5-8.

Bannister G. 1993. Wave/Current forces on axisymmetrical bodies with vertical axes, Ship Technology Research, 40, 138-156.

Bao, W., Kinoshita, T., Sunahara, S., Li, M., Tsukui, M., 2000. Wave drift damping in slow surge-sway-yaw coupling motions of a cylinder array, Journal of Marine Science and Technology, 5, 189-203.

Bingham, B. H., Maniar, D. H., 1996. Computing the double body m-terms using a B-spline based panel method, Center of Computational Hydrodynamics, Danish Hydraulic Institute, Dept. of Ocean Engineering, M.I.T.

Biran, A., Breiner, M.,(2003), *Matlab 6 for Enginners,* Pearson Education Limited.

Bratland, A.K., Faltinsen, O.M. and Zhao. R., 1996. Three – dimensional harmonically oscillating Green function with small forward speed in finite water depth, Proceedings, 11th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Hamburg, Germany.

Buchmann, B., Ferrant P., Skourup, J., 2000. Run-up on a body in waves and current. Fully nonlinear and finite-order calculations, Applied Ocean Research, 22, 349-360.

Buchmann, B., Skourup, J., and Cheung. K. F., 1998. Run-up on a structure due to second order waves and a current in a numerical tank, Applied Ocean Research, 20:5, 297-308.

Carmo, J.S.A., Seabra-Santos, F.J., Amando-Mendes, P., 2002. Sudden bed changes and wave-current interactions in coastal regions, Advances in Eng. Software 33, 97-107.

Chatjigeorgiou, I. K., Thanos, I., Bourma, P., Mazarakos T. P., and Mavrakos, S. A., 2006a.Mooring System Dynamic Analysis for GIFT Floating Terminal in Survival Conditions, 25th Int. Conf. Offshore Mech. And Arctic Eng. (OMAE 2006), Hamburg, Germany

Chatjigeorgiou, I. K., Mavrakos, S. A., and Xiros, N. I., 2006b. Wave- Current Interaction with a vertical Cylinder in cross flow: Asemi- analytical approach, 5th International Conference on Enginnering Computational Technology, Stirlingshire, Scotland.

Chatjigeorgiou, I.K., Mavrakos, S.A. 2007a. A semi-analytical formulation for the wave-current interaction problem with a vertical bottom-seated cylinder including square velocity terms", 22nd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Plitvice, Croatia.

Chatjigeorgiou, I.K., Mavrakos, S.A., Mazarakos, Th., 2007b. Hydrodynamic loading on a bottom seated, free – surface piercing vertical cylinder under the combined action of surface gravity waves and marine current»(in Greek), PYTHAGORAS, Symposium on the Scientific Research at National Technical University of Athens, July 2007, Plomati, Lesvos, Greece.

Chatjigeorgiou, I. K., Mazarakos T. P., and Mavrakos, S. A., 2007c. First order hydrodynamic loading by a bottom- seated cylinder in a wave- current co existing field, 8th International Congress on Mechanics (HSTAM 2007), Patras, Greece.

Chen, Q., Madsen, P.A., Shaffer, H.A., Basco, D.R., 1998. Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach, Coastal Eng. 33, 11-39.

Chen, X-B., Malenica, S.,1996. Non-linear effects of the local steady flow on wave diffraction-radiation at low forward speed, Proceedings, 6th Int. Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE 1996), Vol. III, Los Angeles, 393 – 400.

Chen XB, Malenica, S., 1998. Interaction effects of local steady flow on wave diffraction-radiation at low forward speed, International Journal of Offshore and Polar Engineering, 8, 102-109.

Clark, P. J., Malenica, S., Molin, B., 1992. An heuristic approach to wave drift damping, Applied Ocean Research 15, 53-55

Eatock Taylor R, Huang J. B., 1997. Semi-analytical formulation for second-order diffraction by a vertical cylinder in bichromatic waves. Journal of Fluids and Structures 11, 465-484

Emmerhoff, O.J. and Sclavounos, P.D., 1992. The slow-drift motion of arrays of vertical cylinders, Journal of Fluid Mechanics, 242, 31 – 50.

Emmerhoff, O.J. and Sclavounos, P.D., 1996. The simulation of slow-drift motions of offshore structures, Applied Ocean Research, 18, 55-64 .

Faltinsen, O.M., Michelsen, F.C., 1974. Motions of large structures in waves at zero Froude number, Proceedings, Int. Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, London.

Faltinsen, O. M. Sea Loads on Ships and Offshore Structures Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

Faltinsen, O.M., 1994. Wave and current induced motions of floating production systems, Applied Ocean Research, 15, 351 – 370.

Fenton, J.D., 1978. Wave forces on vertical bodies of revolution, Journal of Fluid Mechanics, 85, 241-255.

Fernandes, F.C.R, Sawant, H.S, Zheleznykov, V.V., 1996.Decimetric slow drift split pair, Adv. Space Res., 17, 143-146

Ferrant, P., 1998. Run-up on a cylinder due to waves and current: Potential flow solution with fully non-linear boundary conditions, Proceedings of the 8th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE'98), Montreal, Canada.

Finne, S., and Grue, J., 1998. On the complete radiation-diffraction problem and wave-drift damping of marine bodies in the yaw mode motion, Journal of Fluid Mechanics, 375, 289-320.

Fusina, R.A, Cooper, A.L., Chubb, S.R., 1997 High resolution computations of ocean wave spectral modulations due two-dimensional wave-current interactions, Journal of Computational Phisics, 132, 215-225.

Garrett, C.J.R. 1971. Wave forces on a circular dock, Journal of Fluid Mechanics, 46 (1).

Grue, J. and Bilberg D., 1992. Wave forces on marine structures with small speed in water of restricted depth, Applied Ocean Research 15, 121- 135.

Grue, J. and Palm, E., 1993a. The mean drift force and yaw moment on marine structures in waves and current, Journal of Fluid Mechanics, 250, 121 – 142.

Grue, J. and Biberg, D., 1993b. Wave forces on marine structures with small speed in water of restricted depth, Applied Ocean Research, 15, 121 – 135.

Hermans, A. J., 1991. Second order wave forces and wave drift damping Schiffstechnik, Bd, 38, 163-72.

Hermans, A. J. and Sierevogel, L.M., 1996. A discussion on the second order wave forces and wave drift damping, Applied Ocean Research, 18(5), 257-263.

Hildebrand FB, 1962. Methods of applied mathematics (2nd edn). Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs

Hsiao, S. S., Weng W. K. and Lin, M. C., 1999. Wave pressure on a large cylinder in a wave-current coexisting field, proceeding of the 9th International Offshore and Polar Engineering Conference, Brest, France.

Huang JB, Eatock Taylor R, 1996. Semi-analytical solution for second-order wave diffraction by a truncated circular cylinder in monochromatic waves. Journal of Fluid Mechanics 319, 171-196

Huijsmans, R. H. M., 1997. Recent progress in the computation and validation of the wave-drift forces with forward speed, Behavior of Offshore Structures (BOSS' 97), J.H. Vugts (Ed.), Pergamon, 2, 367-382.

Huijsmans R. H. M., Hermans, A. J., 1985. A fast algorithm for computation of 3D ship motions at moderate forward speed. Proceedings 4th International Conference on numerical Ship Hydrodynamics, Washington DC, USA, 24-31.

Kaasen, K. E., 1999. An improvement to Newman's method for approximate calculation of slow drift wave force eliminating the high frequency noise, Proceeding of the 18th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Paper OMAE'99/OFT-4020, St. John's, Newfoundland, Canada.

Kagemoto H., Yue D., K., P., 1985. Interactions among multiple three- dimensional bodies in water waves: an exact algebraic method. Journal of Fluid Mechanics, 166, 189 – 209.

Kaplan, W. Advanced Calculus. Addison- Wesley Publishing Company

Kim DJ, Kim MH, 1997. Wave-current interactions with a large three-dimensional body by THOBEM. Journal of Ship Research, 41, 273-285.

Kim, B., 2005. Some considerations on forward-speed seakeeping calculations in frequency domain, International Journal of Offshore and Polar Engineering (ISSN 1053-5381), 15(3), 189-197.

Kim, M. H., Celebi, M. S. and Kim, D. J., 1998. Fully nonlinear investigations of waves with a three dimensional body in uniform currents, Applied Ocean Research, 20:5, 309-321.

Kim, Y., Kring, D. C. and Sclavounos, P. D., 1997. Linear and nonlinear interactions of surface waves with bodies by a three dimensional Rankine panel method, Applied Ocean Research, 19:5-6, 235-249

Kim, Y., and Sclavounos, P. D., 1998. A finite depth unified theory for the linear and second order problems of slender ships, Journal of Ship Research, 42:4, 297-309.

Kinoshita, T., Bao, W., Yoshida, M., Ishibashi, K., 2002. Wave drift added mass of a cylinder array free to respond to the incident waves, Proceedings, 21th Int. Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE 2002).

Kinoshita, T., Bao, W. and Sunahara, S., 1996. The mean drift forces and yaw moment on multiple cylinders in waves and current, Proceedings, 15th Int. Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE 1996), Vol. I, Part B, 267 – 277.

Kokkinowrachos, K., Bardis, L., Mavrakos, S.A. 1982. "Drift forces on one and two-body structures in waves", Proceedings, *3rd International Conference on the Behaviour of Offshore Structures (BOSS'82),* Hemisphere Publishing Co., New York, Vol. 1, 467-489.

Kokkinowrachos, K., Mavrakos, S., Azorakos, S. 1986. Behaviour of vertical bodies of revolution in waves. Ocean Engineering, Vol. 13, No.6. pp. 505 – 538.

Kriebel D. L., 1990. Nonlinear wave interaction with a vertical circular cylinder. Part I: Diffraction theory, Ocean Engng., 17, 4, 345 – 377.

Langtangen, H.P., Marthinsen, T., Mathiesen, J., 1998. A comparison of methods for the statistics of slow-drift oscillations, Prob. Eng. Mech. 13, 2, 97-106.

Li, Y.S., Zhang, M.Y., 1996. A semi-implicit three-dimensional hydrodynamic model incorporating the influence of flow-dependent eddy viscosity, bottom topography and wave-current interaction, Applied Ocean Research, 18, 173-185.

Lin, P., Li, C.W., 2003. Wave-current interaction with a vertical square cylinder, Ocean Eng., 30, 4, 855-876.

Linton, C.M., Evans, D.V., 1990. The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders, Journal of Fluid Mechanics, 215, 549-569.

Loken, A. E., Olsen, O. A., 1979. The influence of slowly varying wave forces on mooring systems, Offshore Technology conference, paper no. OTC 3626.

MacCamy, R. C., Fuchs, R. A., 1954. Wave forces on piles: A diffraction theory, US Army Coastal Engineering Research Center. Tech. Mem. 69.

Malarkey, J., Davies, A.G., 1998. Modeling wave-current interactions in rough turbulent bottom boundary layers, Ocean Eng., 25, 2-3, 119-141.

Malenica, S., Clark, P.J. and Molin, B., 1995. Wave and current forces on a vertical cylinder free to surge and sway, Applied Ocean Research, 17, 79 – 90.

Malenica, S., Eatock Taylor, R. and Huang, J.B., 1999. Second-order water wave diffraction by an array of vertical cylinders. Journal of Fluid Mechanics, 390, 349-373.

Malenica S, Molin B, 1995. Third harmonic wave diffraction by a vertical cylinder, Journal of Fluid Mechanics, 302, 203-229.

Martin, A. J. and Easson, W. J., 1997. Nonlinear internal wave kinematics, Proceedings of the 7th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE'97), Vol. III: 122-129.

Maruo, H. 1960. The drift of a body floating in waves, Journal of Ship Research, Vol.4, No.3

Mathisen, J.B., Price, W.G., 1984. Estimation of ship roll damping coefficients, The Royal Institution of Naval Architects.

Maruo, H., 1960. The drift force of a body floating in waves, *Journal of Ship Research*, **4**(3), 1 – 10.

Mavrakos, S.A., Bardis, L. (1984). Hydrodynamic Characteristics of Large Offshore Units, Proceedings, *3rd I.M.A.E.M. Int. Congress on Marine Technology,* Athens, Greece, pp. 505-513.

Mavrakos, S.A., 1988. The vertical drift force and pitch moment on axisymmetric bodies in regular waves, *Applied Ocean Research*, **10**(4), 207-218.

Mavrakos, S.A., Koumoutsakos, P., 1987. Hydrodynamic interaction among vertical axisymmetric bodies restrained in waves, Applied Ocean Research, 9(3), 129-140.

Mavrakos, S.A. 1989. User Manual of the computer software CYLINDER for the calculation of first – order loads and motions and the evaluation of the mean drift loads in regular waves on vertical axisymmetric bodies, School of Naval Architecture and Marine Engineering, National Technical University of Athens.

Mavrakos, S.A., 1995. Mean drift loads on multiple vertical axisymmetric bodies in regular waves, Proceedings, *5th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE'95),* The Hage, The Netherlands, 1995, Vol. 3, 547-555.

Mavrakos, S.A. 1996. Users Manual for the software HAMVAB, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Laboratory for Floating Structures and Mooring Systems.

Mavrakos S.A., Chatjigeorgiou IK, 2006. Second-order diffraction by a bottom seated compound cylinder, Journal of Fluids and Structures, 22, 463-492

Mavrakos, S.A., Chatjigeorgiou, I.K., Mazarakos T. and Thanos I. 2007a. Second-order wave drift damping in hydrodynamically interacting large bodies, 17th ISOPE, Lisbon, Portugal.

Mavrakos, S.A., Spyrou, K., Tzabiras, G., Thanos, I., Mazarakos, Th., Tzamtzis, S. 2007b. Towing of large ships through the Corinth Cannel (in Greek), *Annual Symposium on Marine Technology*, Greek Institute on Marine Technology, November 2007, Piraeus, Greece,.

Mavrakos, S. A., Mazarakos T. P. 2009.Numerical and experimental investigation of the first- and second- order loads on a four cylinder configuration in wave- current co-existent fields, 4th Workshop on Water Waves: Innovations in experimental and numerical wave research, Berlin, Germany.

Mavrakos, S. A., Mazarakos T. P., and Konispoliatis, D. 2010. First and second order hydrodynamic effects and wave run- up on a four cylinder configuration at small forward speed, 10th International Congress on Mechanics (HSTAM 2010), Cyprus (accepted).

Mavrakos, S. A., Chatjigeorgiou I.K., Mazarakos T. P., and Konispoliatis, D., 2010. Experimental and Numerical investigation of the hydrodynamic loads and wave elevation on concentric vertical cylinders, HYDROLAB III Workshop, Hannover, Germany (accepted).

Mazarakos, K. (2008). Analysis of loads and motions on a TLP on the time domain and comparisons with experiments, Master Thesis, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Division of Marine Structures, National Technical University of Athens.

Mazarakos, T. (2006). Slow-drift wave excitation and damping on marine structures, Master Thesis, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Division of Marine Structures, National Technical University of Athens.

Mei, C.C. (1983). *The applied dynamics of ocean surface waves*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore

Molin, B, 1994. Second-order Hydrodynamics applied to moored structures: A state of the art review, Ship Technology Research – Schiffstechnik, 41, 59 – 84.

Molin, B, Hairault, J. P., 1983. On Second-order motion and vertical drift forces for three dimensional bodies in irregular waves, Institute Francais du Petrole, Ecole Nationale Superieure de Mecanique, France .

Newman, J.N. 1967. The drift force and moment on ships in waves", Journal of Ship Research, Vol. 11, No.1

Newman, J.N., 1974. Second–order, slowly varying forces on vessels in irregular waves, Proceedings, Int. Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, London.

Newman, J.N.,1993. Wave drift damping of floating bodies, Journal of Fluid Mechanics, 249, 241 – 259.

Newman J.N. 1978. Theory of ship motions, Advances in Applied Mechanics, 18, 221-283.

Noblesse, F, Chen, XB, 1995. Decomposition of free surface effects into wave and near filed components, Journal of Ship Technology Research, 42, 167-185.

Nossen, J., Grue, J. & Palm, E., 1991. Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed J. Fluid Mech, 227, 135-60.

Ogilvie, T.F., 1983. Second-order hydrodynamic effects on ocean platforms, Proceedings, Int. Workshop on Ship and Platform Motions, ed. R.W. Yeung, Univ. Calif. Berkeley, 205 – 265.

Ohkusu, Makoto, 1991. Effect of interaction of wave and forward speed on hydrodynamic forces on marine structures, International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1, 1, 58-62.

Ohyama, T, Hsu, J.R.C., 1995. Non linear wave effect on the slow drift motion of a floating body , Applied Ocean Research, 17, 349-362.

Osuna, P., Monbaliu, J., 2004. Wave-current interaction in the Southern North Sea, Journal of Marine Systems.

Papanikolaou, A., Zaraphonitis, G. 1987. On an improved method for the evaluation of second – order motions and loads on 3D floating bodies in waves, Journal Schiffstechnik, Vol. 34, pp. 170 – 211.

Park, K.Y., Borthwick, A.G.L., 2001. Quadtree grid numerical model of nearshore wave-current interaction, Coastal Eng. 42, 219-239.

Park, J.J., Kim, M.S., Lee, J.H., Ha, M.K., 2004. The estimation of viscous roll damping coefficients for various hull forms using DVM, 9th Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures, Germany.

Pessoa, J., Fonseca, N., Soares, C. G., Le Boullec, M., Ohana, J., Mavrakos, S. A., Mazarakos T. P., Jensen, B., Kirkegaard, J., 2010. Experimental study of the slowly varying wave exciting drift forces on a body of simple geometry, HYDROLAB III Workshop, Hannover, Germany.

Pinkster, J. A., 1974. Low frequency second order wave forces on vessels moored at sea, Netherlands Ship Model Basin, Wageningen.

Pinkster, J.A. 1980. Low frequency second order wave exciting forces on floating structures, Netherlands Ship Model Basin, Wageningen, Publication No.650

Pinkster, J.A. and Oortmersen, G. van. (1977). Computation of the first and the second order wave forces on oscillating bodies in regular waves, Proceedings, *2nd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, 136 – 159.

Pinkster, J.A., (1974). Low frequency phenomena associated with vessels moored at sea, Society of Petr. Engns. AIME, paper SPE4837.

Ren., X., Wang, K.H., Jin, K.R., 1997. A Boussinesq model for simulating wave and current interaction, Ocean Eng., 24, 4, 335-350.

Restrepo, J.M., 2001. Wave-current interactions in shallow waters and shore-connected ridges, Continental Shelf Research 21, 1331-1360.

Rye, H., Rynning, S., Moshagen, H., 1975. On the slow drift oscillations of moored structures, Offshore Technology conference, paper no. OTC 2366.

Schelhn, T. E. & Kirsch, A., 1989. Low frequency damping of a moored semisubmersible obtained from simulated extinction tests and mean wave drift forces Applied Ocean Research, 11, 202-11

Sclavounos, P.D., 1994. Slow-drift oscillation of compliant floating platforms, Proceedings, 7th Int. Conference on the Behaviour of Offshore Structures (BOSS'94), M.I.T., Boston, Vol. II, 525 – 567.

Skourup, J., Cheung, F. K., Bingham, H. B., Buchmann, B., 1999. Loads on a 3D body due to second-order waves and a current, Applied Ocean Research, 27, 707-727.

Standing, R.G., Brendhng, W. J. & Wilson, D., 1982. Recent developments in the analysis of wave drift forces, low-frequency damping and response In Proc. Offshore Technology Conf Houston, Paper 5456.

Stoker, J.J. 1957. Water Waves. Interscience Publishers Inc., N.Y.

Sunahara, S., Kinoshita, T., Bao, W. Li M. and Tsukui, M., 1999. Second order steady drift forces and yaw moment on an array of multiple cylinders slowly yawing in waves, Proceedings of the 18th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Paper OMAE'99/OFT-4142, St. John's, Newfoundland, Canada.

Teng, B., 1998. Calculation of second order steady potential, Proceedings of the 8th International Offshore and polar Engineering Conference, (ISOPE'98), Montreal, Canada.

Trassoudaine, D. and Naciri, M., 1999. A comparison of a heuristic wave-drift damping formula with experimental results, Applied Ocean Research, 21:2, 93-97

Triantafyllou, M. S., Mavrakos, S. A., Bourma, P., Mazarakos, Th. And Thanos, I., 2006. Model Scaling and Testing of a Floating LNG Terminal, MIT and NTU Athens, USA and Greece ,9th International Marine Design Conference (IMDC 2006), Ann Arbor, Michigan.

Tzabiras, G. D., 2004. Resistance and Self-propulsion simulations for a Series-60, C_B=0.6 hull at model and full scale, Ship Technology Research, 51, pp. 21-34

Tzabiras, G. D., 2008. A numerical investigation of free and forced transition effects on hydrofoil characteristics, Ship Technology Research, 51, pp. 21-34

Tzabiras G. D., and Kontogiannis K., 2009. An integrated method for predicting the hydrodynamic performance of low-c_B ships, Accepted for publication in Computer-Aided Design Journal

Wichers, J. E. W. A simulation model for a single point moored tanker MARIN publ 797, 1988

Wolf, J., Prandle, D., 1999. Some observations of wave-current interaction, Coastal Eng. 37 , 471-485.

Wu, G.X. and Eatock-Taylor, R., 1990. The hydrodynamic force on an oscillating ship with low forward speed, Journal of fluid Mechanics, 211, 333 – 353.

Zaraphonitis, G., Papanikolaou, A. 1993. Second-order theory and calculation of motion and load of arbitrarily shaped 3D bodies in waves, Journal of Marine Structures, Vol. 6, pp. 165 – 185.

Zhang, H., Madsen, O.S., Sannasiraj, S.A., Chan, e.s., 2004. Hydrodynamic model with wave-current interaction in coastal regions, Estuarine, Coastal and Shelf Science 61, 317-324.

Zhao, R. and Faltinsen, O., 1988. A comparative study of theoretical models for slow drift sway motion of a marine structure, 7th Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Houston, Texas.

Zhao R, Faltinsen OM, 1988. Wave current interaction effects on large volume structures, Proceedings 3rd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Woods Hall, MA, USA, 187-190

Zhao, R. and Faltinsen, O., 1989. Interaction between current, waves and marine structures, Proceedings, 5th Int. Conf. on Ship Hydrodynamics, ed. K. Mori, National Academy Press, Washington DC, 513 – 527.

Zhao, R. and Faltinsen, O., 1998. Water entry of arbitrary axisymmetric bodies with and without flow separation, Twenty-second Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, USA.

Zhao R, Faltinsen OM, Krokstad, JR, Aanesland V, 1988. Wave current interaction effects on large volume structures, Proceedings 5th Behaviour of Offshore Structures Symposium, Trondheim, Norway, 623-638

Zhao, R. and Faltinsen, O., Jorgen, R. K., Aanesland, V., 1988. Wave-current interaction effects on large volume structures, BOSS .

Zhao, R. & Faltinsen, O. M. 1988. Interaction between waves and current on a two-dimensional body in the free surface, *Applied Ocean Research*, **10**, 87-99

Zhao, R. and Faltinsen, O. M. 1989. Interaction between current, waves and marine structures, Proceedings, *5th Int. Conf. on Numerical Shio Hydrodynamics*, Hiroshima, Japan, pp. 87 – 99

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Επιστημονικές Εργασίες

Σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων με σύστημα των κριτών

Mavrakos, S. A., Mazarakos T. P., and Konispoliatis, D., (2010), **«First and second order hydrodynamic effects and wave run- up on a four cylinder configuration at small forward speed»,** 10th International Congress on Mechanics (HSTAM 2010), **Cyprus.**

Mavrakos, S. A., Chatjigeorgiou I.K., Mazarakos T. P., and Konispoliatis, D., (2010), **«Experimental and Numerical investigation of the hydrodynamic loads and wave elevation on concentric vertical cylinders»,** HYDROLAB III Workshop, **Hannover, Germany.**

Pessoa, J., Fonseca, N., Soares, C. G., Le Boullec, M., Ohana, J., Mavrakos, S. A., Mazarakos T. P., Jensen, B., Kirkegaard, J., (2010), **«Experimental study of the slowly varying wave exciting drift forces on a body of simple geometry»,** HYDROLAB III Workshop, **Hannover, Germany.**

Mavrakos, S. A., Mazarakos T. P. (2009), **«Numerical and experimental investigation of first- and second- order wave loads on a four cylinder configuration at small horizontal drift velocity»,** 4th Workshop on Water Waves: Innovations in experimental and numerical wave research, **Berlin, Germany.**

Mavrakos S.A., Chatjigeorgiou I.K., Mazarakos T. and Thanos I. (2007), **«Second-order wave drift damping in hydrodynamically interacting large bodies»,** 17th ISOPE**, Lisbon, Portugal.**

Chatjigeorgiou, I. K., Mazarakos T. P., and Mavrakos, S. A., (2007), **«First order hydrodynamic loading by a bottom- seated cylinder in a wave- current co existing field»,** 8th International Congress on Mechanics (HSTAM 2007), **Patras, Greece.**

Triantafyllou, M. S., Mavrakos, S. A., Bourma, P., Mazarakos, Th. And Thanos, I., (2006), «**Model Scaling and Testing of a Floating LNG Terminal»**,MIT and NTU Athens, USA and Greece ,9th International Marine Design Conference (IMDC 2006), **Ann Arbor, Michigan.**

Chatjigeorgiou, I. K., Thanos, I., Bourma, P., Mazarakos T. P., and Mavrakos, S. A., (2006), **«Mooring System Dynamic Analysis for GIFT Floating Terminal in Survival Conditions»,** 25th Int. Conf. Offshore Mech. And Arctic Eng. (OMAE 2006), **Hamburg, Germany.**

Συνέδρια με κρίση του πλήρους κειμένου

Mavrakos, S.A., Spyrou, K., Tzabiras, G., Thanos, I., Mazarakos, Th., Tzamtzis, S. (2007), «**Towing of large ships through the Corinth Cannel**» (in Greek), *Annual Symposium on Marine Technology*, Greek Institute on Marine Technology, November 2007, **Piraeus, Greece**,.

Chatjigeorgiou, I.K., Mavrakos, S.A., Mazarakos, Th., (2007), «**Hydrodynamic loading on a bottom seated, free – surface piercing vertical cylinder under the combined action of surface gravity waves and marine current»**(in Greek), PYTHAGORAS, Symposium on the Scientific Research at National Technical University of Athens, July 2007, **Plomati, Lesvos, Greece**.

Τεχνικές εκθέσεις

Chatjigeorgiou, I.K., Mavrakos, S.A., Mazarakos, Th., Bourma, P.: **"Dynamic analysis of mooring lines in maximum excursion (mean + first order + low frequency)",** Report 65-1873-NTM-N-RE-303, Research Project GIFT supported by the EU, Contract No TST4-CT-2004-12404, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Division of Marine Structures, NTUA-NTM, March 2007.

Chatjigeorgiou, I.K., Mavrakos, S.A., Bourma, P., Mazarakos, Th.: **"Low frequency motions and damping components: motion's amplitudes, significant, and maximum values**", Report. 65-1873-NTM-N-RE-302, Research Project GIFT supported by the EU, Contract No TST4-CT-2004-12404, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Division of Marine Structures, NTUA-NTM, January, 2007.

Mavrakos, S.A., Papanikolaou, A., Thanos, I., Spanos, D., Mourkoyiannis, D., Mazarakos, Th., Bourma, P.: **"Analysis of experimental data and validation of simulations from model test results"**, Report 65 – 1873 – NTM – N – TR – 318, Research Project GIFT supported by the EU, Contract No TST4-CT-2004-12404, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Division of Marine Structures, NTUA-NTM, March 2006.

Mavrakos, S.A., Triantafyllou, M.S., Thanos, I., Mazarakos, Th.: **"Thruster Loads Preliminary Estimate"**, Report no: N° 65-1873-NTM-N-CN-301, Technical Report for the Research Project GIFT supported by the EU, Contract No TST4-CT-2004-12404, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Division of Marine Structures, NTUA-NTM, Jul. 2005.

Mavrakos, S.A., Thanos, I., Mazarakos, Th.: **"Hydrodynamics of GIFT Assembly (first-order)"**, Report no: N° 65-1873-NTM-N-TR-305, Technical Report for the Research Project GIFT supported by the EU, Contract No TST4-CT-2004-12404, School of Naval Architecture and Marine Engineering, Division of Marine Structures, NTUA-NTM, Dec. 2005.