ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

Μέθοδος Εξομάλυνσης Πλεγμάτων Πεπερασμένων Στοιχείων Βασισμένη σε Γεωμετρικούς Μετασχηματισμούς

Δ Ι Δ Α Κ Τ Ο Ρ Ι Κ Η Δ Ι Α Τ Ρ Ι Β Η

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΒΑΡΤΖΙΩΤΗ
Διπλωματούχου Πολιτικού Μηχανικού (M.Sc.)
Διπλωματούχου Αεροναυπηγού Μηχανικού (M.Sc.)
Πανεπιστήμιο Στουτγκάρδης

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ ΜΑΡΤΙΟΣ 2013

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΥΝΟΨΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Η μέθοδος μετασχηματισμού γεωμετρικών στοιχείων GETMe (**G**eometric **E**lement **T**ransformation **Me**thod) που αναλύεται και περιγράφεται στην παρούσα διατριβή έχει εισαχθεί ως νέα προσέγγιση για αποτελεσματική και αποδοτική εξομάλυνση πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Βασικός στόχος της μεθόδου είναι η βελτίωση της σταθερότητας, της αποτελεσματικότητας και της ακρίβειας των υπολογισμών πεπερασμένων στοιχείων. Βασίζεται σε κανονικοποιητικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στοιχείων, οι οποίοι βελτιώνουν επαναληπτικά την κανονικότητά τους και κατά συνέπεια την ποιότητα των στοιχείων. Οι μετασχηματισμοί ορίζονται και αναλύονται για τυχαία πολυγωνικά στοιχεία, καθώς και για τους πιο κοινούς τύπους τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Σε ένα πρώτο στάδιο, η νέα μέθοδος εξομάλυνσης βελτιώνει τη συνολική ποιότητα του πλέγματος εξάγοντας το μέσο όρο των νέων θέσεων κόμβων που προκύπτουν από μετασχηματισμούς που εφαρμόζονται σε κάθε στοιχείο. Σε ένα δεύτερο στάδιο, η ελάχιστη ποιότητά τους βελτιώνεται μέσω διαδοχικών μετασχηματισμών των χαμηλής ποιότητας στοιχείων του πλέγματος. Αυτά τα στάδια γενικεύονται από μια προσαρμοστική παραλλαγή της εξομάλυνσης GETMe και συζητούνται πτυχές της εφαρμογής και της παραλληλοποίησης. Ικανός αριθμός αριθμητικών παραδειγμάτων που παρουσιάζονται σε αυτό το έργο επιβεβαιώνουν ότι η προταθείσα μέθοδος οδηγεί σε πλέγματα ανώτερης ποιότητας σε σύγκριση με άλλες μεθόδους βασιζόμενες στη γεωμετρία, όπως οι διάφορες παραλλαγές της εξομάλυνσης Laplace. Όσον αφορά την ποιότητα των πλεγμάτων που προκύπτει, μπορεί να ανταγωνιστεί ακόμη και τις υπερσύγχρονες τεχνικές βασιζόμενες στην καθολική βελτιστοποίηση (Global Optimization), ενώ είναι σημαντικά απλούστερη ως προς τη σύλληψη και πολύ ταχύτερη. Από τη σκοπιά της υπολογιστικής μηχανικής στο παράδειγμα της εξίσωσης του Poisson, τεκμηριώνεται επίσης αριθμητικά ότι η μέθοδος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική στη βελτίωση της απόδοσης της ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, αφού οδηγεί σε σημαντική μείωση των σφαλμάτων διακριτοποίησης εντός των πρώτων λίγων βημάτων εξομάλυνσης που απαιτούν μικρή μόνο υπολογιστική προσπάθεια. Η σύγκριση με αναλυτικές λύσεις επιβεβαιώνει την ισχύ της μεθόδου.

Η δημιουργία ποιοτικών πλεγμάτων διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο στους υπολογισμούς με βάση τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, αφού η ποιότητά τους επηρεάζει την ακρίβεια της προσομοίωσης, την ακρίβεια των άμεσων επιλυτών και τη σύγκλιση των επαναληπτικών επιλυτών των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτουν. Έχει προταθεί ένας μεγάλος αριθμός γενετών για επίπεδα πολυγωνικά πλέγματα, τρισδιάστατα επιφανειακά και πλέγματα όγκου. Μεταξύ των τελευταίων, οι βασιζόμενες στον Delaunay προσεγγίσεις στη δημιουργία τετραεδρικών πλεγμάτων είναι αρκετά δημοφιλείς, αφού είναι συγκριτικά κατάλληλες για την αυτοματοποίηση, εύλογης πολυπλοκότητας και εφόσον οδηγούν σε πλέγματα καλής ποιότητας. Ωστόσο, προτιμάται η χρήση εξαεδρικών πλεγμάτων, για παράδειγμα, στην ανάλυση ελαστικού/ελαστοπλαστικού στερεού συνεχούς ή σε εφαρμογές υπολογιστικής ρευστομηχανικής (CFD), αφού μπορούν να επιτευχθούν ακριβέστερα αποτελέσματα με μικρότερο αριθμό στοιχείων. Σε σύγκριση με την περίπτωση της δημιουργίας τετραεδρικών πλεγμάτων, η διακριτοποίηση πολύπλοκων μοντέλων όγκου από εξάεδρα είναι σημαντικά δυσκολότερη και ο βαθμός γενίκευσης και αυτοματοποίησης που επιτυγχάνεται υστερεί σημαντικά της τετραεδρικής διακριτοποίησης. Ως εκ τούτου, έχει προταθεί η χρήση υβριδικών πλεγμάτων και των αντίστοιχων γενετών πλεγμάτων, προκειμένου να συνδυαστούν τα πλεονεκτήματα και των δύο τύπων στοιχείων. Επιπλέον, οι πυραμίδες ή τα πρίσματα χρησιμεύουν ως στοιχεία μετάβασης για σύνδεση όψεων τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων.

Συνήθως οι τεχνικές βελτίωσης των πλεγμάτων είναι ενσωματωμένες στις αντίστοιχες διαδικασίες παραγωγής πλεγμάτων ή εφαρμόζονται σε δεύτερο στάδιο. Μπορούν να βασίζονται σε λειτουργίες μεταβολής της τοπολογίας πλεγμάτων, όπως εναλλαγή όψεων, εισαγωγή και απομάκρυνση κόμβων ή τεχνικές εξομάλυνσης. Οι τελευταίες βελτιώνουν την ποιότητα των πλεγμάτων μόνο μέσω της τοπολογίας τους που διατηρεί τις κινήσεις των κόμβων. Η διατήρηση της τοπολογίας των πλεγμάτων εφαρμόζεται στις διαδραστικές διαδικασίες επίλυσης μοντέλων καθώς και στην βελτιστοποίησή τους. Η πιο γνωστή προσέγγιση αυτού του είδους είναι η εξομάλυνση Laplace, όπου οι θέσεις των κόμβων ενημερώνονται επαναληπτικά από τον αριθμητικό μέσο όρο των γειτονικών θέσεων των κόμβων. Ως εκ τούτου, η εξομάλυνση Laplace είναι μη δαπανηρή υπολογιστικά και κατάλληλη αλγοριθμικά για πλέγματα που συνδυάζουν διάφορους τύπους στοιχείων. Ωστόσο, λόγω του απλού συστήματος εξαγωγής μέσου όρου των κόμβων πλεγμάτων, η εξομάλυνση Laplace δεν ενσωματώνει ποιοτικές πτυχές των στοιχείων και κατά συνέπεια μπορεί να οδηγήσει σε υποβάθμιση της ποιότητας των πλεγμάτων και στη δημιουργία αντεστραμμένων στοιχείων. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί με την κατάλληλη μετακίνηση των κόμβων ή με χρήση τεχνικών χαλάρωσης.

Καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με ένα δεδομένο κριτήριο ποιότητας μπορούν να επιτευχθούν μέσω τοπικής βελτιστοποίησης, δηλαδή μέσω τοποθέτησης κόμβων, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η ποιότητα γειτονικών στοιχείων. Επειδή αυτό έχει ως αποτέλεσμα υψηλότερη υπολογιστική προσπάθεια, προτάθηκε μια συνδυασμένη προσέγγιση της εξομάλυνσης Laplace και της τοπικής βελτιστοποίησης, όπου η βελτιστοποίηση επιτυγχάνεται μόνο σε προβληματικές περιοχές του πλέγματος.

Εστιάζοντας στη συνολική ποιότητα των πλεγμάτων, μια φυσική επιλογή είναι να χρησιμοποιείται μια συνολική προσέγγιση βελτιστοποίησης (Global Optimization) που ενσωματώνει αριθμούς ποιότητας όλων των στοιχείων σε μια αντικειμενική συνάρτηση (functional). Στην περίπτωση αυτή, όλες οι ελεύθερες κορυφές μετακινούνται ταυτόχρονα εντός μίας και μοναδικής επανάληψης. Και πάλι, αυτό γίνεται με τίμημα την πολυπλοκότητα υλοποίησης και αυξημένη υπολογιστική προσπάθεια. Επιπλέον, διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο μαθηματικές πτυχές, όπως οι τεχνικές βελτιστοποίησης και η ορθή επιλογή μετρήσεων ποιότητας. Για παράδειγμα, στην περίπτωση εξομάλυνσης μεικτών πλεγμάτων, οι μετρήσεις ποιότητας πρέπει είναι εφαρμόσιμες και ισορροπημένες στη συμπεριφορά τους για όλους τους τύπους των υπό εξέταση στοιχείων. Επιπλέον, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη πρόσθετες απαιτήσεις ειδικές για τη βελτιστοποίηση, όπως η διαφορισιμότητα των αντικειμενικών συναρτήσεων, ή απαιτήσεις προσανατολισμένες στις πρακτικές εφαρμογές. Μια πιο γενικευμένη προσέγγιση στην κατασκευή κατάλληλων και ευέλικτων αντικειμενικών συναρτήσεων σε σχέση με τους στόχους βελτιστοποίησης δίνεται από το πρότυπο στόχου-πίνακα. Εδώ, για κάθε σημείο δείγματος του πλέγματος απαιτούνται δύο πίνακες. Ο ένας είναι ο πίνακας Jacobi του τρέχοντος πλέγματος, ο άλλος είναι ένας πίνακας-στόχος που αναπαριστά τον επιθυμητό πίνακα Jacobi στο βέλτιστο πλέγμα. Συνήθως τα σημεία δείγματος δίνονται από κόμβους στοιχείων και οι πίνακες-στόχοι προέρχονται από τα εξαρτώμενα από τον τύπο στοιχεία αναφοράς. Η χρήση αντικειμενικών συναρτήσεων βασιζόμενων σε αυτούς τους πίνακες επιτρέπει τον ορισμό της ποιότητας του πλέγματος σε υψηλότερο εννοιολογικό επίπεδο.

Σε σύγκριση με την απλή, βασιζόμενη στη γεωμετρία προσέγγιση της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace, οι μέθοδοι που βασίζονται σε συνολική βελτιστοποίηση Global Optimization έχουν ως αποτέλεσμα πλέγματα υψηλότερης ποιότητας με τίμημα το σημαντικά υψηλότερο αλγοριθμικό και υπολογιστικό κόστος. Αυτός είναι ένας από τους λόγους για τους οποίους η έξυπνη εξομάλυνση Laplace μπόρεσε να διατηρήσει τη δημοτικότητά της, παρόλο που η ποιότητα των πλεγμάτων που προκύπτουν είναι κατώτερη. Ως διέξοδος από αυτό το δίλημμα μεταξύ της ποιότητας των πλεγμάτων και της υπολογιστικής προσπάθειας, η μέθοδος μετασχηματισμού γεωμετρικών στοιχείων (GETMe), η οποία είναι το κύριο αντικείμενο του παρόντος έργου, έχει προταθεί ως μια νέα βασιζόμενη στη γεωμετρία προσέγγιση της εξομάλυνσης πλεγμάτων. Πολλαπλές αριθμητικές δοκιμές δείχνουν ότι έχει ως αποτέλεσμα υψηλής ποιότητας πλέγματα, συγκρίσιμα με εκείνα που προκύπτουν από συνολικές προσεγγίσεις που βασίζονται στη βελτιστοποίηση, εντός σημαντικά συντομότερων χρόνων εκτέλεσης. Επειδή βασίζεται σε κανονικοποιητικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς μεμονωμένων στοιχείων, είναι εύκολη στην εφαρμογή και κατάλληλη για παραλληλοποίηση. Επιπλέον, λόγω της γενικής προσέγγισης, η εξομάλυνση GETMe έχει αποδείξει την αποτελεσματικότητα και την πρακτικότητά της για διάφορα είδη τύπων πλεγμάτων, που περιλαμβάνουν επίπεδα ή επιφανειακά πλέγματα τριγωνικών και μικτών πλεγμάτων, καθώς και πλέγματα αμιγώς τετραεδρικά, αμιγώς εξαεδρικά και μεικτά.

Για την αντικειμενική σύγκριση των μεθόδων εξομάλυνσης Laplace, Global Optimization και της προτεινόμενης μεθόδου GETMe χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο μέσης αναλογίας (mean ratio) το οποίο παρέχει μια γενική προσέγγιση για τη μέτρηση της κανονικότητας των πολυγωνικών και πολυεδρικών στοιχείων. Οι ιδιότητες όλων των μετασχηματισμών αναλύονται και το κανονικοποιητικό αποτέλεσμα τεκμηριώνεται με αριθμητικές δοκιμές, οι οποίες θα χρησιμεύουν επίσης ως βάση για μια προσαρμοστική επιλογή των παραμέτρων μετασχηματισμού στο πλαίσιο της εξομάλυνσης πλεγμάτων.

Η κινητήρια δύναμη που βρίσκεται πίσω από την εξομάλυνση GETMe είναι οι κανονικοποιητικοί μετασχηματισμοί στοιχείων οι οποίοι, αν εφαρμοστούν επαναληπτικά, οδηγούν σε στοιχεία πιο κανονικά, άρα καλύτερης ποιότητας. Τέτοιοι μετασχηματισμοί για πολύγωνα με αυθαίρετο αριθμό κόμβων έχουν προταθεί, αναλυθεί στο παρόν έργο και δημοσιευθεί. Στην περίπτωση των πολυεδρικών στοιχείων, προτείνεται ένας ειδικός μετασχηματισμός για τετράεδρα βασιζόμενος σε καθέτους απέναντι όψεων και αναπτύσσεται ένας πιο γενικευμένος μετασχηματισμός βασιζόμενος σε δυαδικά στοιχεία, ο οποίος είναι εφαρμόσιμος σε όλα τα κοινά πολυεδρικά στοιχεία.

Η εξομάλυνση GETMe αποτελείται από δύο διαδοχικά εφαρμοζόμενα βήματα που επικεντρώνονται σε διαφορετικές εκδοχές της ποιότητας των πλεγμάτων. Στο πρώτο βήμα εξομάλυνσης GETMe, όλα τα στοιχεία μετασχηματίζονται ταυτόχρονα και προκύπτουν νέες θέσεις κόμβων ως σταθμισμένοι μέσοι όροι των μετασχηματισμένων κόμβων στοιχείων που προκύπτουν, βελτιώνοντας με αυτό τον τρόπο τη συνολική ποιότητα των πλεγμάτων. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι να συγκλίνει η συνολική ποιότητα. Στο δεύτερο στάδιο εξομάλυνσης GETMe, μόνο τα χαμηλής ποιότητας στοιχεία μετασχηματίζονται επαναληπτικά, προκειμένου να βελτιωθούν οι αριθμοί ποιότητάς τους, βελτιώνοντας με αυτό τον τρόπο ειδικά την ελάχιστη ποιότητα των στοιχείων. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, η ποιότητα των πλεγμάτων ενσωματώνεται στη διαδικασία εξομάλυνσης με απλές παραμέτρους εξαρτώμενες από την ποιότητα των στοιχείων και μηχανισμούς ελέγχου. Λόγω της γενικής προσέγγισής της, η εξομάλυνση GETMe μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους τους τύπους πλεγμάτων με στοιχεία για τα οποία αναπτύχθηκαν κανονικοποιητικοί μετασχηματισμοί. Στοχεύοντας στη δημιουργία κανονικών στοιχείων, η εξομάλυνση GETMe μειώνει σημαντικά τον αριθμό των ακραίων γωνιών, γεγονός που καθιστά αυτή την προσέγγιση ιδιαίτερα κατάλληλη για εφαρμογές πεπερασμένων στοιχείων.

Περαιτέρω προτείνεται μια προηγμένη έκδοση της εξομάλυνσης της μεθόδου, που ονομάζεται προσαρμοστική GETMe, η οποία βελτιώνει την προηγούμενη έκδοση σε σχέση με τις ακόλουθες εκδοχές: Ενισχυμένη εφαρμοσιμότητα και ευελιξία με προσαρμοστικό έλεγχο εξομάλυνσης, ενιαία προσέγγιση μέσω ενσωμάτωσης και των δύο σταδίων εξομάλυνσης μέσα σε έναν κύριο βρόχο εξομάλυνσης, εξομάλυνση υποπλεγμάτων αντί της εξομάλυνσης του χειρότερου στοιχείου, διευκολύνοντας περαιτέρω την παραλληλοποίηση και προσαρμοστική χαλάρωση κόμβων αντί της επαναφοράς των άκυρων κόμβων στοιχείων. Επιπλέον, απλοποιείται από αλγοριθμικής άποψης ο έλεγχος της εξομάλυνσης και μειώνεται σημαντικά ο αριθμός των παραμέτρων σε σύγκριση με την εξομάλυνση GETMe. Από την άποψη των εφαρμογών, η ποιότητα των πλεγμάτων που προκύπτει βελτιώνεται, ενώ μειώνονται σημαντικά οι απαιτήσεις σε μνήμη και ο χρόνος εξομάλυνσης.

Εκτός του πλαισίου της εξομάλυνσης πλεγμάτων, οι κανονικοποιητικοί μετασχηματισμοί διαδραματίζουν επίσης ρόλο στην κλασική γεωμετρία. Για παράδειγμα, η κατασκευή όμοιων σχημάτων στις πλευρές ενός πολυγώνου και τα συμμετρικά πολύγωνα που προκύπτουν συναρπάζουν τους μαθηματικούς εδώ και πάνω από έναν αιώνα. Το πιο δημοφιλές θεώρημα σε αυτόν τον τομέα είναι το Θεώρημα του Ναπολέοντα, όπου ένα κανονικό τρίγωνο κατασκευάζεται σε ένα μόνο βήμα μετασχηματισμού, μέσω σύνδεσης των κέντρων ισόπλευρων τριγώνων που έχουν ανυψωθεί σε κάθε πλευρά του αρχικού τριγώνου. Από τότε, αυτή η προσέγγιση έχει γενικευτεί σε σχέση με τον αριθμό των κορυφών του αρχικού πολυγώνου, τα γεωμετρικά συστήματα κατασκευής, τις προκύπτουσες συμμετρίες ή τον αριθμό των βημάτων μετασχηματισμού. Ένα παράδειγμα είναι το θεώρημα Petr-Douglas-Neumann, το οποίο μετασχηματίζει ένα n-γωνο σε ένα ισόπλευρο πολύγωνο σε n - 2 βήματα. Μια άλλη κατηγορία συστημάτων μετασχηματισμού χρησιμοποιεί έναν άπειρο αριθμό βημάτων επανάληψης.

Ακολουθώντας την προσέγγιση βάσει παραμέτρων, πιο γενικοί μετασχηματισμοί πολυγώνων με βάση όμοια τρίγωνα αναπτύσσονται και αναλύονται περαιτέρω. Αυτό γίνεται με χρήση όχι μόνο μιας δεδομένης γωνίας βάσης $\theta \in (0, \pi/2)$, όπως στην περίπτωση των ισοσκελών τριγώνων, αλλά και μιας αναλογίας υποδιαίρεσης $\lambda \in (0, 1)$ που ορίζει την κάθετο της κορυφής. Εδώ η αναπαράσταση πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού προκύπτει σε σχέση με τις κατασκευαστικές παραμέτρους θ και λ. Επιπλέον, ορίζεται ένας συνδυασμένος μετασχηματισμός που αναπαρίσταται με έναν κυκλικό Ερμιτιανό πίνακα, ο οποίος εξαλείφει την περιστροφική δράση του βασικού μετασχηματισμού, γεγονός που είναι αρνητικό στο πλαίσιο της εξομάλυνσης πλεγμάτων. Αυτοί οι κυκλικοί ερμιτιανοί πίνακες του διπλού μετασχηματισμού αναπτύχθηκαν και εφαρμόστηκαν με επιτυχία σαν βάση για την εξομάλυνση πλεγμάτων των προτεινόμενων μεθόδων. Αποδείχθηκε ότι τα θεωρήματα του Ναπολέοντα και των Petr-Douglas-Neumann μπορούν να συναχθούν φυσιολογικά ως υποπεριπτώσεις μέσω εύρεσης των ριζών μιας ρητής αναπαράστασης των ιδιοτιμών και ότι δεν υπάρχουν άλλοι συνδυασμοί παραμέτρων που να οδηγούν σε ισοδύναμα συστήματα. Επιπρόσθετα, περιγράφονται χαρακτηριστικά πολύγωνα, οι βασικές ιδιότητες τους, και η αποσύνθεση των πολυγώνων σε χαρακτηριστικά πολύγωνα. Επίσης αναλύονται αλληλουχίες μετασχηματισμένων πολυγώνων. Συνάγονται ρητές αναπαραστάσεις των υποτομέων παραμέτρων, για τους οποίους η αλληλουχία συγκλίνει σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά πολύγωνα. Επιπλέον, εξάγονται σύνολα παραμέτρων διασταυρώσεων ιδιοτιμών, για τις οποίες γραμμικοί συνδυασμοί μέχρι τριών χαρακτηριστικών πολυγωνών εμφανίζονται ως οριακά πολύγωνα. Αυτό οδήγησε σε πλήρη ταξινόμηση παρόμοιων μετασχηματισμών που βασίζονται στις μαθηματικές παραμέτρους σε σχέση με τις παραμέτρους κατασκευής και τα προκύπτοντα οριακά πολύγωνα. Μετά τις μαθηματικές αποδείξεις των μετασχηματισμών πολυγώνων, θεμελιώθηκε θεωρητικά η βάση κανονικοποίησης των επιφανειακών στοιχείων για οποιονδήποτε συνδυασμό πλεγμάτων.

Μια εκτενής συλλογή των αριθμητικών αποτελεσμάτων εξομάλυνσης αναλύεται και τεκμηριώνεται για επίπεδα πολυγωνικά πλέγματα, πλέγματα πολυγωνικής επιφάνειας, πλήρως τετραεδρικά, πλήρως εξαεδρικά και μικτά τρισδιάστατα πλέγματα. Τα συνθετικά καθώς και τα ρεαλιστικά μοντέλα και πλέγματα θεωρείται ότι καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα ζητημάτων και αριθμών στοιχείων πλεγμάτων. Επιλέγησαν μοντέλα από διάφορες περιοχές εφαρμογών της υπολογιστικής μηχανικής. Οι συγκρίσεις σε σχέση με την ποιότητα πλεγμάτων που προκύπτει, το χρόνο εκτέλεσης της εξομάλυνσης, τη συμπεριφορά σύγκλισης και τις απαιτήσεις μνήμης δεν δίνονται μόνο για τις περιγραφόμενες παραλλαγές της εξομάλυνσης GETMe, αλλά και για τις παραλλαγές της εξομάλυνσης Laplace και μια εξελιγμένη συνολική προσέγγιση που βασίζεται στη βελτιστοποίηση, η οποία χρησιμοποιείται για σύγκριση.

Παρουσιάζεται διεξοδικά μια λεπτομερής περιγραφή της επίπτωσης της εξομάλυνσης πλεγμάτων στην αποτελεσματικότητα της λύσης πεπερασμένων στοιχείων και στην ακρίβεια της προσομοίωσης στο πλαίσιο της εξίσωσης Poisson. Αυτό αποδεικνύεται για έναν αριθμό συγκριτικά μεγάλων, προσανατολισμένων στην πράξη, τριγωνικών, τετράπλευρων, τετραεδρικών και εξαεδρικών πλεγμάτων, με χρήση συναρτήσεων γραμμικής και τετραγωνικής βάσης. Εκτελούνται λεπτομερείς συγκρίσεις με τα αποτελέσματα σταθμισμένης κατά επιφάνεια ή κατ' όγκο εξομάλυνσης Laplace, έξυπνης εξομάλυνσης Laplace και της συνολικής προσέγγισης Global Optimization που βασίζεται στη βελτιστοποίηση σε όρους κανόνων σφαλμάτων λύσεων, βαθμών κατάστασης και απόδοσης επιλυτών γραμμικών εξισώσεων. Μέσω εστίασης στις διαφορές στη συμπεριφορά του χρόνου εκτέλεσης εξομάλυνσης, σε μια νέα προσέγγιση, τα σφάλματα λύσεων πεπερασμένων στοιχείων προκύπτουν ύστερα από κάθε επανάληψη εξομάλυνσης. Ως αποτέλεσμα, αυτή η προσέγγιση επιτρέπει να αναλυθεί η επίδραση της εξομάλυνσης πλεγμάτων στην ποιότητά τους και την ακρίβεια της λύσης πεπερασμένων στοιχείων σε σχέση με το χρόνο εξομάλυνσης. Η σύγκριση των αναλυτικών λύσεων της εξίσωσης Poisson μέσω εκτεταμένης συλλογής αριθμητικών δεδομένων με τα αποτελέσματα τις ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων βασισμένης σε πλέγματα των μεθόδων εξομάλυνσης Laplace, Global Optmization και GETMe, κατέδειξαν την αποτελεσματικότητα και αποδοτικότητα της αναπτυχθείσας μεθόδου.

Από την άποψη της υπολογιστικής μηχανικής μια περαιτέρω εξελιγμένη έκδοση της μεθόδου μπορεί να εφαρμοστεί στην εξομάλυνση πλεγμάτων ανισότροπων στοιχείων προσαρμόζοντας κατάλληλα τις παραμέτρους των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Επιπλέον, θα πρέπει να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό η ενσωμάτωση εκτιμητών σφαλμάτων εκ των προτέρων ή ο συνδυασμός με τις εκτιμήσεις σφαλμάτων εκ των υστέρων μπορεί να διευκολύνει τη διαδικασία εξομάλυνσης για την επίτευξη καλύτερης ποιότητας προσέγγισης της λύσης των πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο, επειδή η εξομάλυνση περιορίζεται από την αρχική τοπολογία των πλεγμάτων, μια προσέγγιση προσανατολισμένη στην πράξη θα πρέπει επίσης να συνδυαστεί με τεχνικές τροποποίησης της τοπολογίας των πλεγμάτων που επιτρέπει τοπική πύκνωση και αραίωση. Από θεωρητική άποψη, πρέπει να γίνει πρόσθετη εργασία προκειμένου να επιτευχθεί απόδειξη της σύγκλισης για τους μετασχηματισμούς τρισδιάστατων στοιχείων. Παρόλο που τα συστήματα μετασχηματισμού είναι απλά από γεωμετρική άποψη, η συμπερίληψη διανυσματικών γινομένων και ομαλοποίησης σε μια αναδρομική προσέγγιση οδηγεί σε πολύπλοκες, μη γραμμικές εκφράσεις. Το ίδιο ισχύει για την εκκρεμούσα απόδειξη του αποτελέσματος βελτίωσης των πλεγμάτων και της σύγκλισης ολόκληρης της διαδικασίας εξομάλυνσης GETMe. Στην περίπτωση αυτή ενδεχομένως οι μέθοδοι της Ανωτέρας Ανάλυσης και Διακριτής Γεωμετρίας, μπορούν να φωτίσουν τη μαθηματική συμπεριφορά των μετασχηματισμών των τρισδιάστατων στοιχείων. Η κατανόηση του μαθηματικού υποβάθρου των μετασχηματισμών κανονικοποίησης (συμμετρικοποίησης) μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία νέων γενετών πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Από τη σκοπιά της πρακτικής εφαρμογής της μεθόδου, μόνο οι υψηλές απαιτήσεις προβλημάτων της υπολογιστικής μηχανικής θα της δώσουν τη θέση που της αρμόζει.

1 Μετασχηματισμός τετραέδρων και αποτελέσματα

1.1. Μετασχηματισμός τετραέδρου

Έστω ότι το $T := (p_1, p_2, p_3, p_4)^t$ παριστά ένα τετράεδρο με τους τέσσερις ανά δύο συνδεδεμένους κόμβους $p_i \in R^3$, $i \in \{1, \dots, 4\}$ το οποίο είναι θετικά προσανατολισμένο. Δηλαδή $\det(D(T)) > 0$ με τον

$$D(T) := (p_2 - p_1, p_3 - p_1, p_4 - p_1) \qquad (1)$$

να παριστά τον πίνακα (3×3) των διανυσμάτων των διαφορών, τα οποία δίνουν το ανάπτυγμα του τετράεδρου *T*. Επιπρόσθετα, έστω ότι τα

$$\begin{aligned}
n_1 &:= (p_4 - p_2) \times (p_3 - p_2),\\
n_2 &:= (p_4 - p_3) \times (p_1 - p_3),\\
n_3 &:= (p_2 - p_4) \times (p_1 - p_4),\\
n_4 &:= (p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1),
\end{aligned}$$

παριστούν τα προσανατολισμένα προς τα μέσα κανονικά διανύσματα προς τις πλευρές του *T*.

Ένα νέο τετράεδρο T' με κόμβους p_i' εξάγεται από το *T* κατασκευάζοντας το κανονικό διάνυσμα n_i προς την αντίθετη πλευρά κάθε κόμβου p_i, με αλλαγή κλίμακας κατά $\sigma/\sqrt{|n_i|}$, όπου σ είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Δηλαδή

$$\mathrm{T}' = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ p_4' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|n_1|}} n_1 \\ \frac{1}{\sqrt{|n_2|}} n_2 \\ \frac{1}{\sqrt{|n_3|}} n_3 \\ \frac{1}{\sqrt{|n_4|}} n_4 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Ένα αρχικό τετράεδρο T και το μετασχηματισμένο αντίστοιχό του T' χρησιμοποιώντας $\sigma = 1$ απεικονίζονται ως παράδειγμα στο Σχ. 1. Σε αυτό οι πλευρές και τα κανονικά διανύσματα που σχετίζονται, απεικονίζονται με το ίδιο χρώμα. Οι ακμές του τετράεδρου T' που προκύπτει απεικονίζονται με έντονες μαύρες γραμμές.

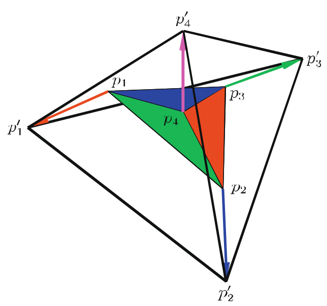
1.2. Ιδιότητες του μετασχηματισμού

Εξαιτίας του προσανατολισμού των κανονικών διανυσμάτων, ο μετασχηματισμός μεγεθύνει το τεράεδρο. Συνεπώς, η μεγέθυνση έχει ως κλίμακα τον παράγοντα σ. Στην περίπτωση όπου $\sigma = 0$ ισχύει ότι $T = T'$. Επιπλέον, από τη στιγμή που τα κανονικά διανύσματα n_i αλλάζουν κλίμακα κατά $1/\sqrt{|n_i|}$, ο μετασχηματισμός δεν μεταβάλλεται λόγω κλίμακας, π.χ. για $s > 0$ ισχύει ότι $(sT)' = sT'$.

Για την εφαρμογή εξομάλυνσης πλεγμάτων το αποτέλεσμα κανονικοποίησης του μετασχηματισμού είναι ιδιαίτερης σημασίας. Δηλαδή, αν ο μετασχηματισμός εφαρμοστεί επαναληπτικά, τα τετράεδρα που θα προκύπτουν θα είναι ολοένα και πιο κανονικά. Για να υπολογιστεί αριθμητικά η κανονικότητα ενός τετράεδρου T, θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο ποιότητας μέσου λόγου [18,20]. Δίνεται από την

$$q(T) := \frac{3\det(S)^{2/3}}{\|S\|_F^2} \qquad (3)$$

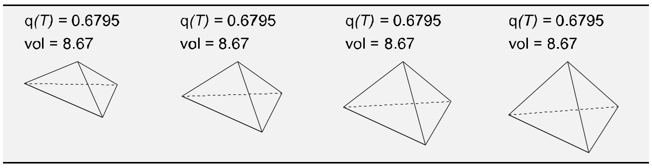
με την $\|S\|_F := \sqrt{ίχνος(S^t S)}$ να παριστά τη νόρμα του Frobenius για τον πίνακα $S := D(T)W^{-1}$. Σύμφωνα με αυτό, ο $D(T)$ αντιπροσωπεύει τον πίνακα διαφορών που δίνεται από την (1) και ο



Σχ. 1. *Μετασχηματισμός ενός τετραέδρου χρησιμοποιώντας σ = 1.*

Πίνακας 1

Ακολουθία των διαδοχικών μετασχηματισμών τετραέδρων χρησιμοποιώντας σ = 1/10.



$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6 \\ 0 & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

παριστά τον πίνακα διαφορών ενός κανονικού τετράεδρου αναφοράς. Ισχύει ότι $q(T) \in [0,1]$, όπου οι πολύ μικρές τιμές υποδηλώνουν σχεδόν εκφυλισμένα στοιχεία και οι μεγαλύτερες τιμές στοιχεία καλής ποιότητας. Ειδικότερα ισχύει ότι $q(T) = 1$, αν το T είναι κανονικό. Στην περίπτωση του παραδείγματος που απεικονίζεται στο Σχ. 1, οι αριθμητικές τιμές των μέσων λόγων δίνονται από την $q(T) = 0{,}6795$ and $q(T') = 0{,}9937$ για το αρχικό και το μετασχηματισμένο τετράεδρο αντίστοιχα. Τα τετράεδρα που προκύπτουν μετά από τρεις διαδοχικές εφαρμογές βημάτων μετασχηματισμού χρησιμοποιώντας $\sigma = 1/10$ καθώς και οι τιμές και οι όγκοι μέσου λόγου που προκύπτουν απεικονίζονται στον Πίνακα 1.

1.3 Εξομάλυνση GETMe τετραεδρικών πλεγμάτων

Η προηγούμενη παράγραφος έδειξε πώς ο μετασχηματισμός στοιχείων κανονικοποιεί επαναληπτικά ένα αυθαίρετο μεμονωμένο τετράεδρο. Αυτό το κεφάλαιο περιγράφει πώς η ιδιότητα κανονικοποίησης του μετασχηματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξομαλυνθούν τετραεδρικά πλέγματα.

Σε αυτή την εργασία ένα τετραεδρικό πλέγμα M ορίζεται από $n_p \in N$ κόμβους $p_i \in R^3$ με $i \in \{1,..., n_p\}$ και $n_t \in N$ τετράεδρα $T_j = (p_{i1,j}, p_{i1,j}, p_{i1,j}, p_{i1,j})^t$ με $j \in \{1,..., n_t\}$ και $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1,. . . , n_p\}$. Οι δείκτες των κόμβων για κάθε τετράεδρο βρίσκονται σε τέτοια σειρά που να εξασφαλίζει ότι όλα τα τετράεδρα T_j είναι έγκυρα, υπό την έννοια ότι είναι θετικά προσανατολισμένα, όπως ορίζεται στο Κεφάλαιο 2. Επιπρόσθετα, ένα έγκυρο τετράεδρο δεν είναι εκφυλισμένο κάτι που σημαίνει ότι ο όγκος του είναι μεγαλύτερος του μηδενός. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν ανεστραμμένα στοιχεία το πλέγμα θα πρέπει να αποπλεχτεί σε ένα προδιαδικαστικό βήμα. Οι αλγόριθμοι που ακολουθούν διατηρούν την εγκυρότητα όλων των τετράεδρων έπειτα από κάθε επαναληπτικό βήμα.

Η ελάχιστη αριθμητική τιμή μέσου λόγου

$$q_{\min} : \min_{j \in (1 \ldots n_t)} q(T_1) \qquad (5)$$

και ο μέσος όρος όλων των αριθμητικών τιμών μέσου λόγου

$$q_{mean} : \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} q(t_1) \qquad (6)$$

αποτελούν μέτρα για την ποιότητα ενός τετραεδρικού πλέγματος.

Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι εφαρμογής του γεωμετρικού μετασχηματισμού σε ένα τετραεδρικό πλέγμα, που είναι παρόμοιοι με τις προσεγγίσεις GETMe για τα επιφανειακά πλέγματα που δίνονται στις [23,24]. Η πρώτη προσέγγιση είναι να εφαρμοστεί διαδοχικά ο μετασχηματισμός σε μεμονωμένα τετράεδρα (για παράδειγμα πάντοτε στο τετράεδρο με τη χειρότερη ποιότητα). Συνήθως αυτή η στρατηγική επιτρέπει την επίτευξη μίας πολύ καλής $q_{\min}$, αλλά δεν είναι η καλύτερη για τη βελτίωση της q_{mean} ενός τετραεδρικού πλέγματος.

Η δεύτερη προσέγγιση είναι η εφαρμογή του μετασχηματισμού ταυτόχρονα σε όλα τα στοιχεία του πλέγματος. Αντίθετα με την διαδοχική προσέγγιση, αυτή η στρατηγική επιτρέπει την επίτευξη καλύτερων αποτελεσμάτων q_{mean}. Ένας αλγόριθμος που ακολουθεί αυτή την προσέγγιση περιγράφεται λεπτομερώς στο παρακάτω υποκεφάλαιο.

1.4 Αλγόριθμος ταυτόχρονης εξομάλυνσης

Ο αλγόριθμος ταυτόχρονης εξομάλυνσης που ακολουθεί αποτελείται κυρίως από περισσότερα του ενός βήματα, τα οποία εφαρμόζονται επαναληπτικά στο τετραεδρικό πλέγμα μέχρι να πληρούνται κάποια συγκεκριμένα κριτήρια τερματισμού. Αυτά τα βήματα δεν μεταβάλλουν την τοπολογία του τετραεδρικού πλέγματος, άρα μπορούν να πραγματοποιηθούν, σε ένα αρχικό βήμα, κάποιοι χρονοβόροι υπολογισμοί συγκεντρώνοντας κάποιες τοπολογικές πληροφορίες.

2 Παραδείγματα

Σε αυτήν την παράγραφο παραθέτονται αρκετά παραδείγματα τετραεδρικών πλεγμάτων που εξομαλύνθηκαν με τη μέθοδο μετασχηματισμού γεωμετρικών στοιχείων. Ενώ το πρώτο παράδειγμα εξετάζει ένα μάλλον συνθετικό πλέγμα για να δοθεί μία πρώτη σύγκριση και να σχολιαστούν βασικές ιδιότητες των εν λόγω μεθόδων, στο δεύτερο παράδειγμα εξετάζεται ένα πλέγμα αρθρωτής ενδοπρόσθεσης ισχίου με μία πιο δυσμενή τοπολογική διάταξη. Στο τρίτο παράδειγμα, διάφορα διαβαθμισμένα πλέγματα ενός μοντέλου ημιαξόνιου εξομαλύνονται, αναπαριστώντας μία ακόμη εφαρμογή πραγματικών συνθηκών. Τέλος, δίνονται αποτελέσματα για ένα σύνολο διαφορετικών πλεγμάτων για να τεκμηριωθούν ακόμη περισσότερο οι δυνατότητες της βασιζόμενης στη GETMe εξομάλυνσης.

Στα παραδείγματα που δίνονται, θα συγκριθούν αποτελέσματα των παρακάτω μεθόδων εξομάλυνσης:

- *Έξυπνη Εξομάλυνση Laplace*: Σύμφωνα με αυτή τη βασιζόμενη στη γεωμετρία προσέγγιση εξομάλυνσης, οι εσωτερικοί κόμβοι αντικαθίστανται διαδοχικά από τον αριθμητικό μέσο όρο των άμεσα συνδεδεμένων γειτονικών κόμβων, αν η ενημέρωση οδηγεί σε μία βελτίωση της μέσης ποιότητας των προσκείμενων τετραέδρων. Ο αλγόριθμος τερματίζεται αν δύο διαδοχικές τιμές q_{mean} έχουν απόκλιση μικρότερη από 10^{-6} ή όταν καμία από τις q_{min} και q_{mean} δεν έχει βελτιωθεί κατά τις τελευταίες 50 επαναλήψεις. Το πλέγμα με την καλύτερη τιμή q_{mean} και ο σχετιζόμενος αριθμός επαναλήψεων χρησιμοποιήθηκαν για τη σύγκριση.
- *Συνολική Βελτιστοποίηση*: Η εξομάλυνση πραγματοποιήθηκε με χρήση του εργαλείου αναδίπλωσης για βελτίωση του σχήματος που περιλαμβάνεται στην εργαλειοθήκη βελτίωσης ποιότητας πλεγμάτων Mesquite. Αυτό το εργαλείο αναδίπλωσης βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του μέσου όρου των αντίστροφων τιμών μέσου λόγου $1 = q(T_j)$ όλων των στοιχείων του πλέγματος, άρα ακολουθεί μία προσέγγιση βασιζόμενη σε συνολική βελτιστοποίηση. Εφαρμόστηκαν οι προκαθορισμένες ρυθμίσεις, όπως επίσης και το προκαθορισμένο κριτήριο τερματισμού. Έτσι, η εξομάλυνση συνήθως σταματούσε σε ένα προκαταρκτικό στάδιο. Συνεπώς, η εφαρμογή του εργαλείου αναδίπλωσης για βελτίωση του σχήματος επαναλήφθηκε μέχρι τη σύγκλιση ή την επιδείνωση του μέσου όρου των τιμών μέσου λόγου. Όπως και για τις υπόλοιπες μεθόδους, τα αποτελέσματα του καλύτερου πλέγματος που λάβαμε κατά τη διάρκεια της συνολικής διαδικασίας χρησιμοποιήθηκαν για σύγκριση.
- *GETMe*: Η προσέγγιση GETMe όπως περιγράφηκε εφαρμόστηκε χρησιμοποιώντας τα ίδια κριτήρια τερματισμού με την περίπτωση της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace για το υποβήμα της ταυτόχρονης εξομάλυνσης. Το διαδοχικό υποβήμα που προηγήθηκε τερματιζόταν αν 5.000 διαδοχικοί μετασχηματισμοί στοιχείων δεν βελτίωναν ούτε την q_{min}, ούτε την q_{mean}, ή όταν η q_{mean} επιδεινωνόταν περισσότερο από 1% σε σύγκριση με την αρχική τιμή που δημιουργήθηκε από το ταυτόχρονο υποβήμα.

Για όλα τα παραδείγματα, οι παράμετροι του ταυτόχρονου υποβήματος ορίστηκαν με σταθερό τρόπο ως

$\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = 40$, $\varrho = 0{,}1$, με αλλαγή κλίμακας που να διατηρεί το μέσο όγκο και με εκθέτη απόδοσης μέσης τιμής $\eta = 0$. Για το επακόλουθο διαδοχικό υποβήμα εφαρμόστηκαν οι $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = 0{,}0001$, $\rho = 0{,}75$ με αλλαγή κλίμακας η οποία να διατηρεί το άθροισμα του μήκους των ακμών.

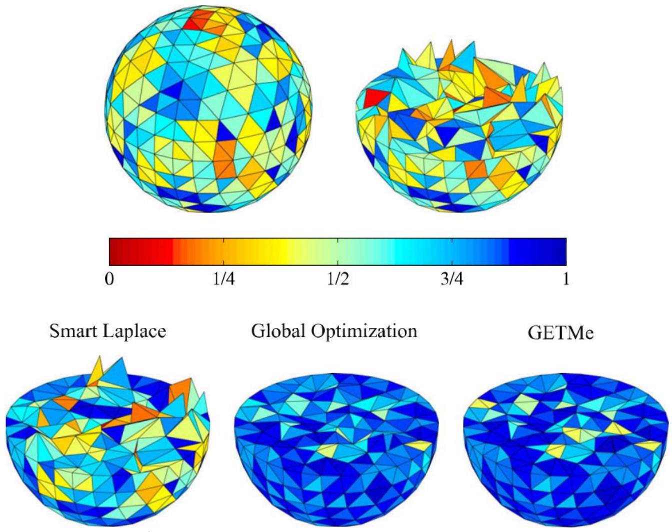
Η χρήση της έξυπνης παραλλαγής στην περίπτωση της εξομάλυνσης Laplace είναι ουσιώδης, από τη στιγμή που στη συνήθη εξομάλυνση Laplace, οι ενημερώσεις των κόμβων που πραγματοποιούνται ανεξάρτητα από τις βελτιώσεις ποιότητας, οδηγούν συχνά σε πλέγματα με ανεστραμμένα στοιχεία. Η εξομάλυνση Laplace είναι δημοφιλής εξαιτίας της απλής προσέγγισής της, αλλά δίνει ως αποτέλεσμα πλέγματα χαμηλότερης ποιότητας σε σύγκριση με κορυφαίου επιπέδου μεθόδους βασιζόμενες σε συνολική βελτιστοποίηση όπως εκείνη που παρέχεται από το Mesquite. Άρα, τα αποτελέσματα της τελευταίας χρησιμοποιήθηκαν ως ποιοτικό σημείο αναφοράς εστιάζοντας ειδικά στη μέση ποιότητα των στοιχείων q_{mean} από τη στιγμή που η προσέγγιση βελτιστοποίησης μεγιστοποιεί αυτόν τον αριθμό ποιότητας.

Στην περίπτωση της εξομάλυνσης GETMe, μπορούν να ληφθούν ακόμη καλύτερα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας ξεχωριστές παραμέτρους. Παρόλ' αυτά, για χάρη της απλότητας και της καλύτερης συγκρισιμότητας, χρησιμοποιήθηκε μόνο το ενιαίο σύνολο παραμέτρων και κριτηρίων τερματισμού που περιγράφηκε προηγουμένως. Επιπλέον, οι συγκεκριμένες επιλογές του η στην περίπτωση του ταυτόχρονου υποβήματος και της $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$ απλουστεύουν ακόμη περισσότερο τη μέθοδο, από τη στιγμή που η απόδοση μέσης τιμής στους κόμβους και η αλλαγή κλίμακας πραγματοποιούνται χωρίς να ληφθεί υπόψη η ποιότητα, άρα μειώνοντας την υπολογιστική πολυπλοκότητα.

2.1 Σφαιρικό πλέγμα

Το πρώτο παράδειγμα εξετάζει ένα τετραεδρικό πλέγμα της μοναδιαίας σφαίρας. Δημιουργήθηκε μέσω ψηφιδωτού Delaunay 258 επιφανειακών κόμβων που ελήφθησαν υποδιαιρώντας τρεις φορές τις πλευρές ενός οκταέδρου με επακόλουθη επαναπροβολή τους πάνω στη σφαίρα και από 346 εσωτερικούς κόμβους που αντιπροσωπεύουν έναν παραμορφωμένο κανονικό κάνναβο. Το αρχικό τετραεδρικό πλέγμα που προκύπτει αποτελείται από 3108 στοιχεία από τα οποία τα 1745 δεν τέμνουν το όριο. Κάθε κόμβος έχει κατά μέσο όρο 20,6 προσκείμενα τετράεδρα, ενώ ο αριθμός των προσκείμενων στοιχείων ποικίλει από 4 έως 42. Ο μέσος αριθμός των γειτόνων ανά τετράεδρο ανέρχεται σε 72,0 και κυμαίνεται από 33 ως 112. Εξαιτίας της προσέγγισης της εξομάλυνσης, η τοπολογία δεν μεταβάλεται ποτέ και οι οριακοί κόμβοι παραμένουν σταθεροί, άρα οι αριθμοί αυτοί διατηρούνται.

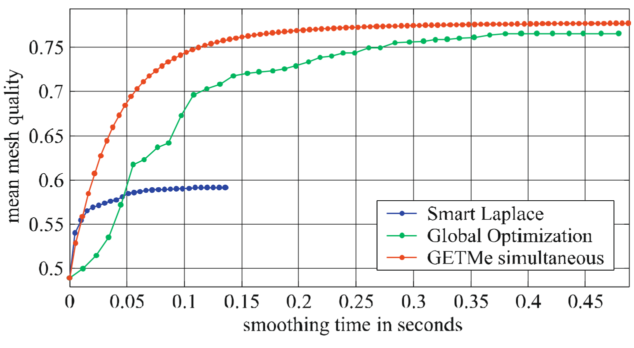
Το μοντέλο συνολικά και το κάτω ημισφαίριο του αρχικού πλέγματος απεικονίζονται στην επάνω γραμμή του Σχ.8. Έτσι, κάθε τετράεδρο T_j είναι χρωματισμένο ανάλογα με την αριθμητική τιμή μέσου λόγου της ποιότητάς του $q(T_j)$. Όπως μπορεί να δει κανείς στη χρωματική μπάρα, η οποία απεικονίζεται κάτω από τα αρχικά πλέγματα, οι αποχρώσεις του κόκκινου δείχνουν στοιχεία κακής ποιοτητας, ενώ οι αποχρώσεις του μπλε επισημαίνουν τα στοιχεία καλής ποιότητας. Τα κάτω ημισφαίρια των πλεγμάτων που ελήφθησαν από την εφαρμογή της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace, της εξομάλυνσης συνολικής βελτιστοποίησης, και της εξομάλυνσης GETMe, με χρήση των προκαθορισμένων ρυθμίσεων που περιγράφηκαν στην αρχή αυτού του κεφαλαίου απεικονίζονται στην κάτω σειρά του Σχ. 8.



Σχ. 8. *Πλήρες αρχικό σφαιρικό πλέγμα (επάνω αριστερά) και το κάτω του ημισφαίριο (επάνω δεξιά) με στοιχεία χρωματισμένα ανάλογα με την αριθμητική τιμή μέσου λόγου ποιότητας και πλέγματα που έχουν εξομαλυνθεί (κάτω γραμμή).*

Πίνακας 2
Στατιστικά ποιότητας σφαιρικού πλέγματος

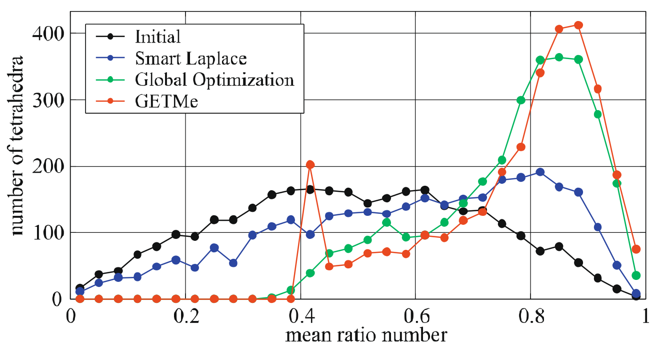
Method/Criterion	q_{min}	q_{mean}
Initial	0.0010	0.4888
Smart Laplace	0.0010	0.5915
Global Optimization	0.3545	0.7657
GETMe	0.4177	0.7701



Σχ. 9. *Βελτίωση μέσης ποιότητας σφαιρικού πλέγματος σε συνάρτηση με τον χρόνο εξομάλυνσης.*

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τις αριθμητικές τιμές ποιότητας που προκύπτουν, οι οποίες παρατίθενται στον Πίνακα 2, η βασιζόμενη στη γεωμετρία προσέγγιση της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace οδηγεί μόνο σε μία μέτρια βελτίωση του αριθμού q_{mean} της μέσης ποιότητας στοιχείων. Επιπρόσθετα, αυτή η προσέγγιση αποτυγχάνει να βελτιώσει τον αριθμό q_{min} της χειρότερης ποιότητας στοιχείου, γεγονός που αποτελεί μία χαρακτηριστική αδυναμία της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace. Από τη στιγμή που η προσέγγιση συνολικής βελτιστοποίησης αποσκοπεί στη βελτίωση του q_{mean} η μέση ποιότητα των στοιχείων βελτιώνεται σημαντικά. Όμως, η αριθμητική τιμή του μέσου όρου της μέσης ποιότητας 0,7779 που λαμβάνεται από το υποβήμα ταυτόχρονης εξομάλυνσης της προσέγγισης της GETMe είναι ελαφρώς μεγαλύτερη. Η επακόλουθη εφαρμογή του υποβήματος διαδοχικής εξομάλυνσης της GETMe ώστε να βελτιωθεί περαιτέρω η αριθμητική τιμή της ποιότητας του χειρότερου στοιχείου, οδηγεί σε μία μικρή μείωση του q_{mean}, από τη στιγμή που ο μετασχηματισμός στοιχείων χαμηλής ποιότητας επηρεάζει και τις αριθμητικές τιμές ποιότητας των γειτονικών στοιχείων. Άρα, οι παράμετροι του μετασχηματισμού $\sigma_{min} = \sigma_{max} = 0{,}0001$, επιλέχθηκαν με συντηρητικό τρόπο ώστε να υπάρξει μία μέτρια μεταβολή της γεωμετρίας. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τα τελικά αποτελέσματα της βασιζόμενης στη γεωμετρία προσέγγισης της GETMe που παρατίθενται στην τελευταία σειρά του Πίνακα 2, αυτή η επιλογή οδηγεί σε πειστικά αποτελέσματα και για την q_{min} και για την q_{mean}.

Στην περίπτωση της συνολικής βασιζόμενης στη βελτιστοποίηση εξομάλυνσης πραγματοποιήθηκε ένα σύνολο 41 επαναλήψεων εφικτών Newton μέσα σε τρεις εκτελέσεις του εργαλείου αναδίπλωσης για βελτίωση σχήματος του Mesquite. Η έξυπνη εξομάλυνση Laplace τερματίστηκε μετά από 26 επαναλήψεις στις οποίες 239 ενημερώσεις κόμβων έπρεπε να απορριφθούν ώστε να αποφευχθεί η δημιουργία μη έγκυρων στοιχείων. Αντίθετα, μόνο έξι ενημερώσεις που θα είχαν οδηγήσει σε μη έγκυρα στοιχεία απορρίφθηκαν στην περίπτωση της εξομάλυνσης GETMe. Παρόλ' αυτά, οι αριθμοί 168 των επαναλήψεων του ταυτόχρονου υποβήματος και 159.800 των επαναλήψεων του διαδοχικού υποβήματος είναι σημαντικά μεγαλύτεροι σε σύγκριση με την εξομάλυνση Laplace. Έτσι, ο αριθμός των μετασχηματισμών στοιχείων που εφαρμόστηκαν κατά τη διάρκεια του διαδοχικού υποβήματος είναι αντίστοιχος με εκείνον που εκτελέστηκαν εντός των περίπου 51 βημάτων της προσέγγισης ταυτόχρονης εξομάλυνσης. Αυτό προκύπτει επειδή χρησιμοποιήθηκε ένα μικρό περιθώριο ανοχής για τον έλεγχο τερματισμού και η ποιότητα του πλέγματος αυξάνεται μάλλον μετρίως μετά από μία απότομη άνοδο κατά τις πρώτες επαναλήψεις.
Αυτό απεικονίζεται στο Σχ. 9 που παρουσιάζει τη μέση ποιότητα πλέγματος q_{mean} σε συνάρτηση με το συνολικό χρόνο εξομάλυνσης σε δευτερόλεπτα. Κάθε δείκτης αντιπροσωπεύει τα αποτελέσματα μετά από μία επανάληψη της σχετικής μεθόδου εξομάλυνσης, ή, στην περίπτωση του πρώτου δείκτη, την αρχική μέση ποιότητα πλέγματος 0,4888. Μόνο οι χρόνοι επανάληψης του κύριου επαναληπτικού βρόχου εξομάλυνσης κάθε προγράμματος καταγράφηκαν ώστε να ελαττωθεί η αλλοίωση του χρόνου εκτέλεσης που προκαλείται για παράδειγμα από διαφορετικές στρατηγικές i/o (εισόδου/εξόδου) για τα αρχεία, από διαφορετικές διαμορφώσεις των αρχείων, και από διαφορετικές διαδικασίες απόδοσης αρχικών τιμών στο πλέγμα.



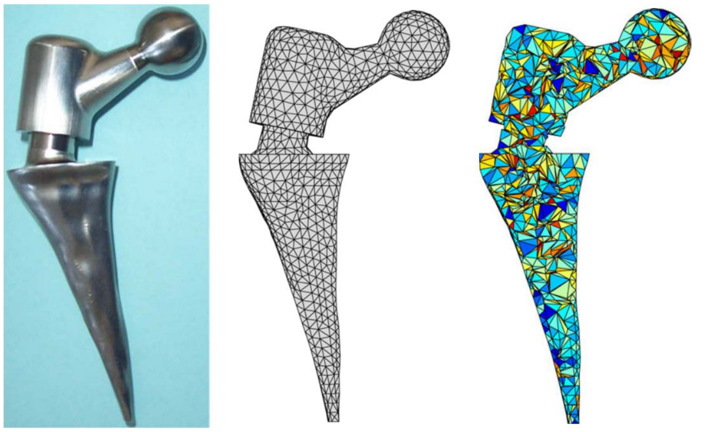
Σχ. 10. *Ιστόγραμμα ποιότητας στοιχείων σφαιρικού πλέγματος.*

Μία υλοποίηση, σε αμιγές περιβάλλον C++, της εξομάλυνσης GETMe και της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace συγκρίνεται με τα αποτελέσματα της, βασιζόμενης στην συνολική βελτιστοποίηση εφικτής Newton του Mesquite, η οποία υλοποιείται επίσης στη C++. Οι χρόνοι εκτέλεσης μετρήθηκαν σε ένα notebook με επεξεργαστή Intel® CoreTM2 Duo CPU T7250 (2 MB cache, 2.00 GHz, 800 MHz FSB), με μνήμη 2 GB RAM, με λειτουργικό σύστημα Linux 32 bit με πυρήνα 2.6.22.19, και με τον μεταγλωτιστή (compiler) GNU της της C++, έκδοση 4.2.1. Από τη στιγμή που η έξυπνη εξομάλυνση Laplace χρησιμοποιεί τις ίδιες δομές δεδομένων με την εξομάλυνση GETMe, και οι δύο μέθοδοι έφτασαν σε ένα μέγιστο 3,9 MB όσον αφορά στη χρήση μνήμης κατά την εξομάλυνση της σφαίρας του παραδείγματος. Για να απλουστεύσουμε τα πράγματα, η δομή των δεδομένων αποθηκεύει πλεονάζουσες πληροφορίες γειτνίασης σε μεγάλο βαθμό. Έτσι, η κατανάλωση μνήμης για αυτή την πρώτη υλοποίηση είναι μεγαλύτερη από τα 2,4 MB που χρησιμοποιήθηκαν από τη βασιζόμενη στη συνολική βελτιστοποίηση προσέγγιση του Mesquite.

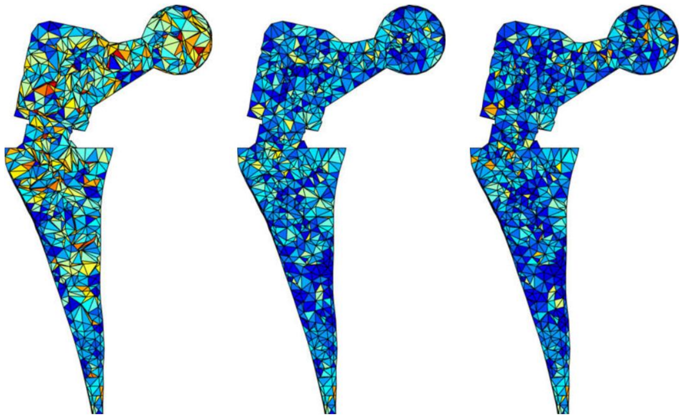
Όσο πιο κοντά βρίσκονται μεταξύ τους οι δείκτες των επαναλήψεων στο Σχ.9 τόσο πιο ταχείες είναι οι επαναλήψεις μίας μεθόδου εξομάλυνσης. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, οι μέσοι χρόνοι εκτέλεσης των επαναλήψεων είναι 0,0052 s, 0,0054 s, και 0,0117 s για την περίπτωση της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace, της ταυτόχρονης εξομάλυνσης GETMe, και της συνολικής βελτιστοποίησης αντίστοιχα. Αντίθετα, ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης της εξομάλυνσης, για την ταυτόχρονη GETMe ανέρχεται σε 0,91 s εξαιτίας του μεγάλου αριθμού επαναλήψεων, σε 0,48 s για την περίπτωση της συνολικής βελτιστοποίησης και σε 0,14 s για την περίπτωση της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace.

Παρόλ' αυτά, λόγω της αποδοτικότητας των πρώτων βημάτων εξομάλυνσης, η ταυτόχρονη εξομάλυνση GETMe φτάνει ή και ξεπερνά την τελική τιμή της q_{mean} της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace μετά από μόλις τέσσερις επαναλήψεις όντας 6,1 φορές ταχύτερη, και την τελική τιμή της q_{mean} της συνολικής βελτιστοποίησης μετά από 33 επαναλήψεις όντας 2,5 φορές ταχύτερη αν συγκριθούν οι αντίστοιχοι χρόνοι εκτέλεσης. Παρόλο που οι επόμενες 135 επαναλήψεις της ταυτόχρονης εξομάλυνσης GETMe, αύξαναν συνεχώς την q_{mean}, εξαιτίας του μικρού περιθωρίου ανοχής, η συνολική βελτίωση της q_{mean} αυτών των βημάτων που ακολούθησαν ανέρχεται μόλις σε 1,5%. Άρα, στην πράξη, εναλλακτικά κριτήρια τερματισμού με τα οποία αποφεύγονται τέτοιου είδους μη αποδοτικές επαναλήψεις μπορούν να οδηγήσουν σε παρόμοια αποτελέσματα μέσα σε ένα μικρό μέρος του αριθμού των βημάτων της ταυτόχρονης εξομάλυνσης GETMe που εκτελέστηκαν σε αυτό και στα επόμενα παραδείγματα.

Το επακόλουθο υποβήμα διαδοχικής εξομάλυνσης GETMe που εφαρμόστηκε είχε συνολική διάρκεια 4,0 s. Άρα, ο διαδοχικός μετασχηματισμός του ίδιου αριθμού στοιχείων με εκείνα που μετασχηματίστηκαν σε ένα βήμα της ταυτόχρονης προσέγγισης είχε διάρκεια περίπου 0,0778 s. Παρόλο που είναι πιο απλή, η διαδοχική προσέγγιση είναι κατά συνέπεια πιο αργή εξαιτίας της διαχείρισης του σωρού min ώστε να προσδιοριστεί το στοιχείο με τη χειρότερη ποιότητα μετά από κάθε επανάληψη, και του συγκριτικά πιο δαπανηρού υπολογισμού της ποιότητας του πλέγματος μετά από 100 επαναλήψεις για καθεμία από τις μεθόδους. Επιπρόσθετα, από τη στιγμή που οι παράμετροι του μετασχηματισμού επιλέγονται με συντηρητικό τρόπο ώστε να είναι εφαρμόσιμες σε ένα μεγάλο εύρος πλεγμάτων, οδηγούμαστε σε μία αργή σύγκλιση της q_{min}. Μία επιτάχυνση κατά έναν συντελεστή 10,5 θα μπορούσε για παράδειγμα να επιτευχθεί θέτοντας $\sigma_{min} = \sigma_{max} = 0,001$ κάτι που θα οδηγούσε σε 16.000 διαδοχικές επαναλήψεις με συνολικό χρόνο εκτέλεσης 0,4 s και μία παρόμοια ποιότητα χειρότερου στοιχείου q_{min} 0,4170.



Σχ. 11. *Αρθρωτή ενδοπρόσθεση ισχίου και αρχικό μοντέλο.*



Σχ. 12. *Αρθρωτά μοντέλα ενδοπρόσθεσης ισχίου που έχουν εξομαλυνθεί.*

Τα ιστογράμματα ποιότητας στοιχείων για τα σφαιρικά πλέγματα απεικονίζονται στο Σχ.10. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, η έξυπνη εξομάλυνση Laplace (μπλε[1] δείκτες) οδηγεί μόνο σε μία μέτρια μεταβολή στην κατανομή της ποιότητας, αν συγκριθεί με το αρχικό πλέγμα που έχει επισημανθεί με μαύρους δείκτες. Αντίθετα, η προσέγγιση της συνολικής βελτιστοποίησης (πράσινοι δείκτες) και η προσέγγιση GETMe (κόκκινοι δείκτες) έχουν πολύ μεγάλη επίδραση στα ιστογράμματα. Έτσι, για μεγαλύτερες αριθμητικές τιμές ποιότητας το ιστόγραμμα της GETMe εκφράζει κυρίως τα αποτελέσματα του ταυτόχρονου υποβήματος, ενώ για μικρότερες αριθμητικές τιμές επηρεάζεται κυρίως από το διαδοχικό υποβήμα. Ειδικότερα, η κορυφή των στοιχείων με αριθμητικές τιμές ποιότητας κοντά στην $q_{\min}$ είναι χαρακτηριστική για το διαδοχικό υποβήμα, εξαιτίας της προσέγγισης διαδοχικής βελτίωσης των χειρότερων στοιχείων με ήπιο τρόπο, η οποία οδηγεί σε αυτή τη συσσώρευση.

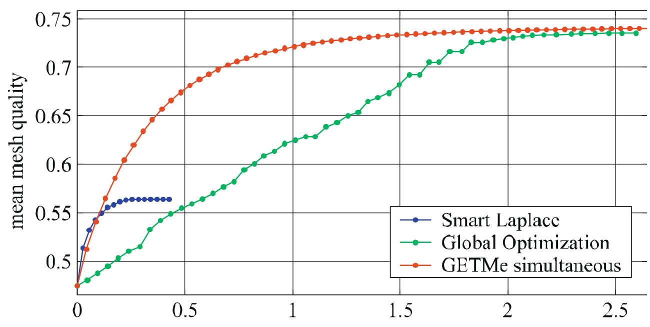
2.2. Αρθρωτή ενδοπρόσθεση ισχίου

Το δεύτερο παράδειγμα εξετάζει την αρθρωτή ενδοπρόσθεση ισχίου που απεικονίζεται στα αριστερά στο Σχ.11. Αναπτύχθηκε από την ΝΙΚΙ ΕΠΕ [29,30] στα πλαίσια της ερευνητικής μελέτης SKELET η οποία χρηματοδοτείται από το πρόγραμμα του 3^{ου} Ευρωπαϊκού Πλαισίου. Το πλήρες αρχικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για εξομάλυνση απεικονίζεται στο κέντρο του Σχ.11 και μία διατομή με στοιχεία χρωματισμένα ανάλογα με τον αριθμητική τιμή μέσου λόγου της ποιότητάς τους απεικονίζεται στα δεξιά.

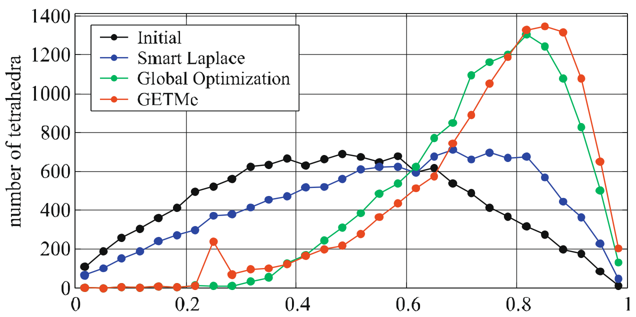
Το πλέγμα αποτελείται από 2669 κόμβους και 13.192 τετραεδρικά στοιχεία. Για άλλη μία φορά, ο καθένας από τους 1228 οριακούς κόμβους παρέμεινε σταθερός κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εξομάλυνσης. Κατά μέσο όρο, ο κάθε κόμβος έχει 19,8 προσκείμενα τετράεδρα, ο αριθμός των οποίων κυμαίνεται από 2 ως 56. Ο μέσος αριθμός των γειτόνων ανά τετράεδρο ανέρχεται σε 72,5, και κυμαίνεται από 16 ως 140. Αντίθετα με το παράδειγμα της σφαίρας στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, χρησιμοποιήθηκαν τυχαίοι εσωτερικοί κόμβοι αντί για κανονικούς εσωτερικούς κόμβους. Εξαιτίας αυτού προκύπτουν πιο δυσμενείς τοπολογικές διατάξεις, οι οποίες αποτελούν πρόβλημα για τις καθαρά εξομαλυντικές μεθόδους.

Πίνακας 3
Στατιστικά στοιχεία ποιότητας πλέγματος αρθρωτής ενδοπρόσθεσης ισχίου

Method/Criterion	q^{*}_{min}	q_{mean}
Initial	0.0010	0.4748
Smart Laplace	0.0022	0.5640
Global Optimization	0.2265	0.7354
GETMe	0.2353	0.7433



Σχ. 13. *Βελτίωση ποιότητας αρθρωτής ενδοπρόσθεσης ισχίου σε συνάρτηση με τον χρόνο εξομάλυνσης.*



Σχ. 14. *Ιστόγραμμα ποιότητας στοιχείων αρθρωτής ενδοπρόσθεσης ισχίου.*

Τα βελτιωμένα πλέγματα που λαμβάνονται από την έξυπνη εξομάλυνση Laplace, από την βασιζόμενη στη συνολική βελτιστοποίηση προσέγγιση και από την GETMe απεικονίζονται στο Σχ.12.

Στην περίπτωση της GETMe πρώτα εφαρμόστηκαν 243 επαναλήψεις ταυτόχρονης εξομάλυνσης. Ακολούθως πραγματοποιήθηκαν 253.400 βήματα διαδοχικής εξομάλυνσης. Οι αριθμητικές τιμές της ποιότητας που προέκυψαν παρατίθενται στον Πίνακα 3. Από τη στιγμή που το πλέγμα περιλαμβάνει σταθερά στοιχεία χαμηλής ποιότητας που αποτελούνται από τέσσερις οριακούς κόμβους, δίνεται ο αριθμός ποιότητας $q^*_{\min}$ του χειρότερου τετραεδρικού στοιχείου με τουλάχιστον έναν εσωτερικό κόμβο, αντί για τον $q_{\min}$. Δηλαδή, η $q^*_{\min}$ αναπαριστά την αριθμητική τιμή ποιότητας του χειρότερου στοιχείου που μπορεί να βελτιωθεί. Στην περίπτωση της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace η $q^*_{\min}$ είναι μικρότερη από την ελάχιστη αριθμητική τιμή ποιότητας σταθερού στοιχείου που δίνεται από τον 0,0253. Αντίθετα, για την GETMe και τη βασιζόμενη στη συνολική βελτιστοποίηση εξομάλυνση ισχύει ότι $q^*_{\min} > q_{\min}$. Ειδικότερα, από αυτό συνεπάγεται ότι οι ελάχιστες αριθμητικές τιμές συνολικής ποιότητας $q_{\min}$ που λαμβάνονται από αυτές τις δύο μεθόδους είναι οι ίδιες.

Σε σύγκριση με τις 15 επαναλήψεις που πραγματοποιήθηκαν από την έξυπνη εξομάλυνση Laplace και τις 52 επαναλήψεις της προσέγγισης εφικτής Newton, ο αριθμός των επαναλήψεων που χρειάζεται στην περίπτωση του ταυτόχρονου υποβήματος της GETMe είναι σημαντικά μεγαλύτερος. Ωστόσο, για άλλη μία φορά τα πρώτα λίγα βήματα της εξομάλυνσης GETMe είναι πολύ αποδοτικά. Για παράδειγμα τρία βήματα του ταυτόχρονου υποβήματος της GETMe αρκούν για να λάβουμε τη μέση αριθμητική τιμή ποιότητας 0,5649, που είναι καλύτερη από το τελικό αποτέλεσμα που επιτυγχάνεται με την έξυπνη εξομάλυνση Laplace, και 16 επαναλήψεις έχουν ως αποτέλεσμα μία $q_{\text{mean}} > 0{,}7$. Τα βήματα που ακολουθούν είναι μειωμένης αποδοτικότητας όπως απεικονίζεται στο Σχ.13. Ο αριθμός των μετασχηματισμών στοιχείων που πραγματοποιοήθηκαν στο επακόλουθο υποβήμα διαδοχικής εξομάλυνσης της GETMe ισούται περίπου με τον αριθμό 19 ταυτόχρονων επαναλήψεων.

Οι μέσοι χρόνοι εκτέλεσης των επαναλήψεων της εξομάλυνσης ανέρχονται σε 0,0285 s, 0,0435 s, και 0,0499 s για τις περιπτώσεις της έξυπνης Laplace, της ταυτόχρονης GETMe, και της συνολικής βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας μία μέγιστη μνήμη 12,4 MB και 5,7 MB, αντίστοιχα.

Εδώ, η ταυτόχρονη GETMe επιτυγχάνει τα τελικά αποτελέσματα για την q_{mean} 3,0 και 1,6 φορές πιο γρήγορα από την έξυπνη εξομάλυνση Laplace και την συνολική βελτιστοποίηση αντίστοιχα. Συνολικά, η διάρκεια της ταυτόχρονης GETMe ήταν 10,57 s και της επακόλουθης διαδοχικής προσέγγισης ήταν 6,02 s.

Όλοι οι αριθμοί αναφέρονται σε μη παραλληλισμένες υλοποιήσεις. Σε σύγκριση με τα προηγούμενα, μία πρώτη απλή παραλληλισμένη εκδοχή της ταυτόχρονης GETMe που λαμβάνεται από την γραμμή εντολής OpenMP **‘‘# pragma omp parallel for”** που εφαρμόστηκε σε μεγάλους επαναληπτικούς βρόχους στοιχείων, όπως ο επαναληπτικός βρόχος μετασχηματισμού στοιχείων και απόδοσης μέσης τιμής κόμβων, είχε ως χρόνο εκτέλεσης τα 6,95 s. Αυτό παρέχει ήδη έναν συντελεστή αύξησης ταχύτητας 1,52 στο σύστημα δοκιμής που αναφέρθηκε νωρίτερα, με ένα θεωρητικό όριο αύξησης ταχύτητας 2. Άρα η εξομάλυνση GETMe παρέχει καλές δυνατότητες τεχνικών παραλληλοποίησης.

Κατά μέσο όρο προέκυψαν 17,1 μη έγκυρα στοιχεία ανά επαναληπτικό βήμα κατά τη διάρκεια της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace. Εξαιτίας των δυσμενών τοπολογικών διατάξεων, έπρεπε επίσης να εφαρμοστούν τεχνικές απαλοιφής μη έγκυρων στοιχείων για την περίπτωση του υποβήματος ταυτόχρονης εξομάλυνσης GETMe. Παρόλ’ αυτά, ο μέσος αριθμός 3,8 μη έγκυρων στοιχείων ανά επαναληπτικό βήμα είναι σημαντικά χαμηλότερος. Επιπλέον, η επακόλουθη προσέγγιση διαδοχικής εξομάλυνσης δεν οδήγησε σε κάποια εκφυλισμένα στοιχεία.

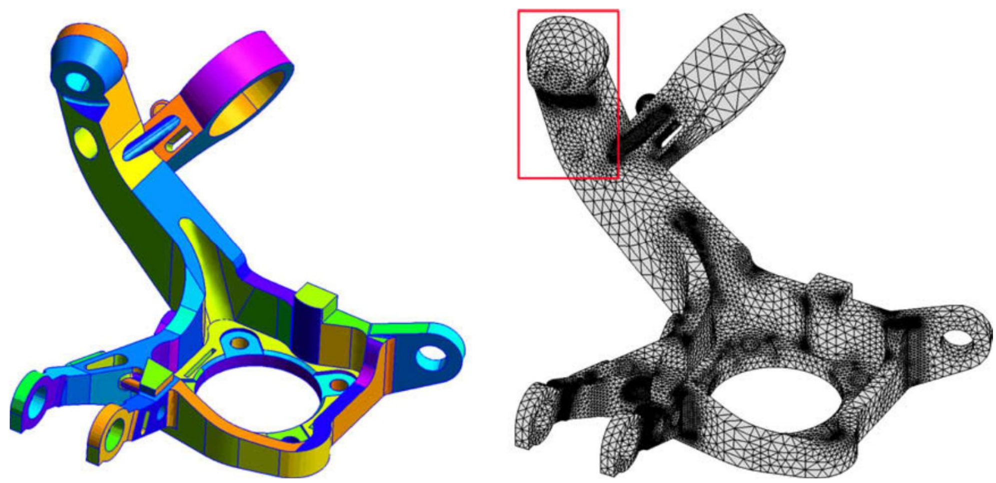
Για άλλη μία φορά, η έξυπνη εξομάλυνση Laplace οδήγησε μόνο σε ανεπαρκείς βελτιώσεις και για τους δύο αριθμούς ποιότητας. Αυτό μπορεί επίσης να παρατηρηθεί από το ιστόγραμμα της ποιότητας που απεικονίζεται στο Σχ. 14. Ειδικότερα, ο αριθμός των υπολειπόμενων στοιχείων χαμηλής ποιότητας απαγορεύει τη χρήση πλεγμάτων τέτοιου είδους για εφαρμογές πεπερασμένων στοιχείων. Αντίθετα, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από δύο κύκλους εκτελέσεων του εργαλείου αναδίπλωσης για βελτίωση σχήματος του Mesquite είναι υψηλής ποιότητας όσον αφορά και στην αριθμητική τιμή της χειρότερης ποιότητας και στην αριθμητική τιμή της μέσης ποιότητας. Παρόλ’ αυτά, η GETMe μπορεί να βελτιώσει περαιτέρω και τις δύο αριθμητικές τιμές.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τον πίνακα της ποιότητας και το ιστόγραμμα, η GETMe οδηγεί σε μία καλύτερη τιμή για την $q^*_{\min}$, αλλά επίσης και σε έναν μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων με αριθμητικές τιμές ποιότητας κοντά σε αυτήν την τιμή σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της συνολικής βελτιστοποίησης. Αυτό συμβαίνει επειδή η διαχείριση του χειρότερου στοιχείου και του αδιεξόδου από την διαδοχική GETMe εστίαζε στη βελτίωση του χειρότερου στοιχείου με επιθετικό τρόπο, χωρίς να βελτιώνει όλα τα στοιχεία με υψηλότερες αριθμητικές τιμές ποιότητας. Εναλλακτικοί μηχανισμοί ελέγχου θα μπορούσαν να εφαρμοστούν, που θα βελτίωναν τα στοιχεία σε μεγαλύτερο εύρος γύρω από την $q^*_{\min}$. Όμως, αυτό συνήθως συμβαίνει με κόστος μία μεγαλύτερη υπολογιστική πολυπλοκότητα και μία περαιτέρω επιδείνωση της υψηλής μέσης αριθμητικής τιμής ποιοτητας που λαμβάνεται από το υποβήμα της ταυτόχρονης GETMe, από τη στιγμή που ο διαδοχικός μετασχηματισμός στοιχείων χαμηλής ποιότητας επηρεάζει και την ποιότητα των γειτονικών στοιχείων.

Περαιτέρω αριθμητικές δοκιμές που θα περιέχουν υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων θα πρέπει να πραγματοποιηθούν, ώστε να κριθεί η επίδραση μίας τέτοιας συσσώρευσης στοιχείων με μία αριθμητική τιμή ποιότητας περίπου $q^*_{\min}$ όσον αφορά στην ακρίβεια των λύσεων πεπερεσμένων στοιχείων. Αυτό θα πρέπει να γίνει για διαφορετικούς τύπους διαφορικών εξισώσεων, δοκιμαστικών συναρτήσεων, και επιλυτών συστημάτων. Το ίδιο ισχύει για να εκτιμηθεί η σημασία των διαφορών ποιότητας του πλέγματος στις $q_{\min}$ και q_{mean}.

2.3. Ημιαξόνιο

Περισσότερα χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων εξομάλυνσης που παρουσιάζονται θα αναλυθούν από διάφορα πλέγματα του μοντέλου του ημιαξόνιου που απεικονίζεται στα αριστερά στο Σχ. 15. Το αρχείο STEP του παρακάτω γεωμετρικού μοντέλου το λάβαμε μετά από ευγενική παραχώρηση της INPG από το καταθετήριο σχημάτων AIM@SHAPE. Το μοντέλο του είδους 17 αποτελείται από 249 πλευρές που οριοθετούνται από κυρτές καμπύλες. Στα αριστερά στο Σχ. 15 αυτές οι πλευρές έχουν απεικονιστεί με διαφορετικά χρώματα.

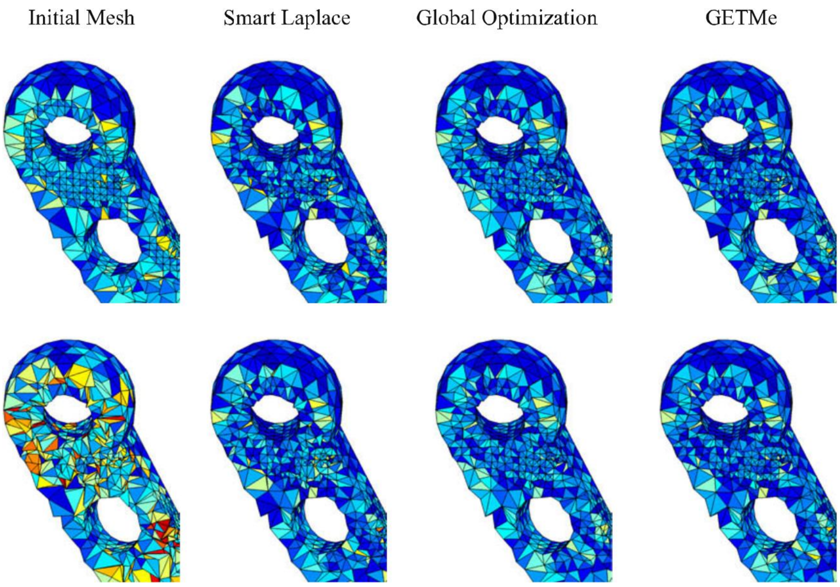


Σχ. 15. *Μοντέλο ημιαξόνιου (αριστερά) και διαβαθμισμένο πλέγμα με 400.128 στοιχεία (δεξιά).*

Πίνακας 4

Αποτελέσματα εξομάλυνσης πλεγμάτων ημιαξόνιων

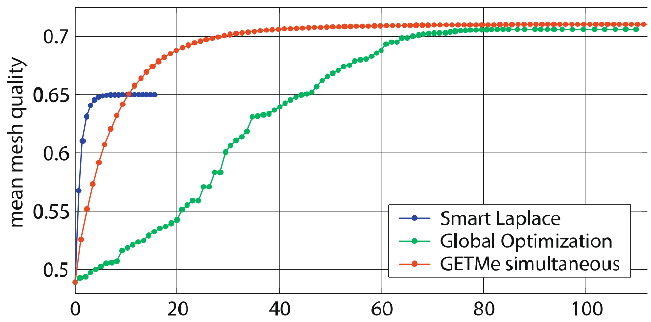
Mesh		Initial		Smart Laplace		Global Optimzation		GETMe	
Tetrahedra	Distorted	q^*_{min}	q_{mean}	q^*_{min}	q_{mean}	q^*_{min}	q_{mean}	q^*_{min}	q_{mean}
110,524	no	0.0003	0.6792	0.0025	0.7169	0.0311	0.7296	0.0293	0.7306
110,524	yes	0.0010	0.5350	0.0037	0.6884	0.0311	0.7296	0.0294	0.7300
274,607	no	0.0157	0.6890	0.0057	0.6975	0.0169	0.7058	0.0174	0.7132
274,607	yes	0.0003	0.4890	0.0004	0.6498	0.0169	0.7058	0.0173	0.7105
400,128	no	0.0448	0.7175	0.0000	0.7667	0.2089	0.7772	0.2680	0.7806
400,128	yes	0.0001	0.5284	0.0002	0.7481	0.2089	0.7772	0.2678	0.7805



Σχ. 16. *Διατομές του αρχικού πλέγματος του ημιαξόνιου και του πλέγματος μετά την εξομάλυνση για την περίπτωση του μη παραμορφωμένου αρχικού πλέγματος (επάνω σειρά) και του παραμορφωμένου αρχικού πλέγματος (κάτω σειρά).*

Τρία διαβαθμισμένα πλέγματα με 110.524, 274.607, και 400.128 τετραεδρικά στοιχεία δημιουργήθηκαν με χρήση του εργαλείου δημιουργίας πλεγμάτων NETGEN, και το πιο λεπτομερές από αυτά απεικονίζεται στα δεξιά στο Σχ.15. Τα επιφανειακά πλέγματα έχουν μόνο βελτιωθεί ελαφρώς οπότε και υπάρχουν διάφορα στοιχεία χαμηλής ποιότητας κοντά στο όριο. Από τη στιγμή που οι οριακοί κόμβοι παραμένουν σταθεροί, η εξομάλυνση γίνεται πιο δύσκολη. Επιπρόσθετα, το εργαλείο βελτιστοποίησης πλεγμάτων όγκου που παρέχεται από την NETGEN δεν εφαρμόστηκε. Ο λόγος του μεγιστου προς το ελάχιστο μέσο μήκος ακμής για όλα τα τετράεδρα ανέρχεται σε 660, 1140, και 441, αντίστοιχα για τα τρία πλέγματα. Επιπλέον, και στις τρεις περιπτώσεις ο λόγος του μέγιστου προς τον ελάχιστο όγκο των στοιχείων είναι της τάξης του 10^{10}. Άρα, όλα τα πλέγματα είναι διαβαθμισμένα σε μεγάλο βαθμό.

Πέρα από τα τρία αρχικά πλέγματα που δημιουργήθηκαν από το NETGEN, δημιουργήθηκαν και εξομαλύνθηκαν επίσης παραμορφωμένες παραλλαγές. Δηλαδή, για κάθε αρχικό πλέγμα, κάποιοι κόμβοι μετακινήθηκαν τυχαία διατηρώντας την εγκυρότητα των στοιχείων. Αυτό δίνει παραμορφωμένα αρχικά πλέγματα χαμηλότερης ποιότητας με διαφορετική γεωμετρία, αλλά με την ίδια τοπολογία σε σύγκριση με τα μη παραμορφωμένα αντίστοιχά τους. Η διερεύνηση των διαφορών των αποτελεσμάτων εξομάλυνσης για τα μη παραμορφωμένα όπως και για τα παραμορφωμένα πλέγματα παρέχει μία ένδειξη της γεωμετρικής ευρωστίας των μεθόδων εξομάλυνσης.



Σχ. 17. *Βελτίωση μέσης ποιότητας παραμορφωμένου ημιαξόνιου μέσου μεγέθους σε συνάρτηση με το χρόνο εξομάλυνσης.*

Στον Πίνακα 4 δίνονται αποτελέσματα για καθένα από τα έξι αρχικά πλέγματα για τις τρεις προσεγγίσεις εξομάλυνσης. Σε αυτόν τον πίνακα, στην πρώτη στήλη δίνεται ο αριθμός των τετραεδρικών στοιχείων για κάθε πλέγμα. Η δεύτερη στήλη καταδεικνύει αν το αρχικό πλέγμα έχει πρόσθετα υποστεί παραμόρφωση (yes) ή όχι (no). Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τις αριθμητικές τιμές ποιότητας των αρχικών πλεγμάτων, η παραμόρφωση οδηγεί σε μία σημαντική μείωση της μέσης αριθμητικής τιμής της ποιότητας στοιχείων q_{mean}, αλλά όχι απαραίτητα σε μία επιδείνωση του αριθμού ποιότητας q^*_{min} όλων των τετραέδρων με τουλάχιστον έναν εσωτερικό, άρα και τροποποιήσιμο κόμβο. Ο τελευταίος αριθμός χρησιμοποιείται αντί για τον αριθμό q_{min} ελάχιστης ποιότητας στοιχείων συνολικά, από τη στιγμή που υπάρχουν οριακά στοιχεία πλήρως σταθερά. Σε όλες τις περιπτώσεις, η εξομάλυνση GETMe παρέχει την καλύτερη αριθμητική τιμή μέσης ποιότητας αν συγκριθεί με την έξυπνη εξομάλυνση Laplace και την προσέγγιση συνολικής βελτιστοποίησης.

Όπως μπορεί επίσης να παρατηρηθεί από τις αριθμητικές τιμές της ποιότητας που παρατίθενται στον Πίνακα 4, η παραμόρφωση του πλέγματος δεν έχει μόνο αντίκτυπο στις αριθμητικές τιμές ποιότητας του αρχικού πλέγματος, αλλά και στα αποτελέσματα που λαμβάνονται από την έξυπνη εξομάλυνση Laplace. Σε όλες τις περιπτώσεις, η αριθμητική τιμή της μέσης ποιοτητας στοιχείων επιδεινώνεται σημαντικά, ενώ η αριθμητική τιμή ελάχιστης ποιότητας στοιχείων βελτιώθηκε σε δύο περιπτώσεις. Αντίθετα, η παραμόρφωση του αρχικού πλέγματος δεν έχει κανένα αντίκτυπο στα αποτελέσματα της βασιζόμενης στη συνολική βελτιστοποίηση προσέγγισης, και μόνο ένα μικρό αντίκτυπο στα αποτελέσματα της εξομάλυνσης GETMe.

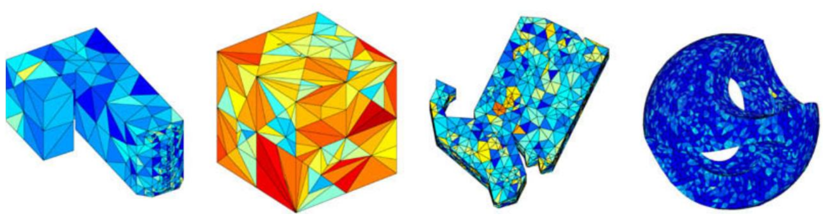
Αυτό μπορεί επίσης να παρατηρηθεί από τις διατομές των πλεγμάτων για το τμήμα του ημιαξόνιου που επισημαίνεται από το κόκκινο παραλληλόγραμμο πλαίσιο στα δεξιά στο Σχ. 15. Διατομές τέτοιου είδους για τα αρχικά πλέγματα με 400.128 στοιχεία καθώς και για εκείνα που λήφθηκαν από όλες τις μεθόδους εξομάλυνσης απεικονίζονται στο Σχ. 16. Ενώ τα πλέγματα της έξυπνης εξομάλυνσης Laplace για το μη παραμορφωμένο όπως και για το παραμορφωμένο πλέγμα διαφέρουν τμηματικά σε σημαντικό βαθμό, στην περίπτωση της συνολικής βελτιστοποίησης και της εξομάλυνσης GETMe το ένα πλέγμα μοιάζει με το άλλο. Αυτό δείχνει ότι, ακόμη και όταν χρησιμοποιείται μία προσέγγιση βασιζόμενη στη γεωμετρία, η εξομάλυνση GETMe είναι σημαντικά λιγότερο επιρρεπής στις παρεμβάσεις όσον αφορά στις γεωμετρικές μεταβολές από την έξυπνη εξομάλυνση Laplace.

Το Σχ.17 απεικονίζει, ως παράδειγμα, την ανάπτυξη της μέσης ποιότητας σε συνάρτηση με τον χρόνο εκτέλεσης της εξομάλυνσης για το παραμορφωμένο μοντέλο του ημιαξόνιου με τα 274.607 στοιχεία. Η έξυπνη εξομάλυνση Laplace τερματίστηκε μετά από 20 επαναλήψεις που η καθεμία είχε μέση διάρκεια 0,7792 s, η εξομάλυνση συνολικής βελτιστοποίησης μετά από 95 επαναλήψεις με μέσο χρόνο εκτέλεσης 1,1566 s και με μέγιστη χρήση μνήμης 87,9 MB. Αντίθετα, η ταυτόχρονη GETMe τερματίστηκε μετά από 127 επαναλήψεις με μέσο χρόνο εκτέλεσης 1,1718 s και μέγιστη χρήση μνήμης 229,4 MB. Η επακόλουθη προσέγγιση διαδοχικής GETMe πραγματοποίησε 22.900 επαναλήψεις μέσα σε 3,62 s.

2.4. Δοκιμή διαφορετικών πλεγμάτων

Για να τεκμηριώσουμε περαιτέρω την υψηλή ποιότητα πλέγματος που λαμβάνεται από τη βασιζόμενη στη GETMe εξομάλυνση, η μέθοδος εφαρμόστηκε επίσης για τη δωδεκάδα των τετραεδρικών πλεγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τους Klingner και Shewchuk. Τα αρχικά πλέγματα αποτελούνται από τυχαία πλέγματα πολύ χαμηλής ποιότητας μέχρι και πλέγματα υψηλής ποιότητας που δημιουργούνται από κορυφαίου επιπέδου εργαλεία δημιουργίας πλεγμάτων, και από μικρά πλέγματα με περίπου 1.000 τετραεδρικά στοιχεία μέχρι και μεγάλα πλέγματα με περίπου 100.000 τετραεδρικά στοιχεία. Τέσσερα από αυτά τα πλέγματα απεικονίζονται στο Σχ. 18.

Οι αρχικές τιμές ποιότητας όπως και τα αποτελέσματα που λήφθηκαν από τη βασιζόμενη στη συνολική βελτιστοποίηση εξομάλυνση και την εξομάλυνση GETMe παρατίθενται στον Πίνακα 5. Οι στήλες ‘‘Βελτίωση” περιέχουν τη σχετική βελτίωση σε ποσοστιαία αναλογία με τις αρχικές τιμές.



Σχ. 18. *Επιλεγμένα αρχικά πλέγματα από τους Klingner και Shewchuk.*

Πίνακας 5
Αριθμητικές τιμές και βελτιώσεις μέσου λόγου για διαφορετικά πλέγματα και μεθόδους εξομάλυνσης

Mesh		Initial		Global Optimization		Improvement		GETMe		Improvement	
Name	Tetrahedra	$q^*_{\min}$	q_{mean}	$q^*_{\min}$	q_{mean}	$q^*_{\min}$(%)	q_{mean} (%)	$q^*_{\min}$	q_{mean}	$q^*_{\min}$ (%)	q_{mean} (%)
P	926	0.0795	0.7573	0.3656	0.7630	359.75	0.75	0.3942	0.7655	395.68	1.08
TFire	1104	0.4049	0.7595	0.4894	0.7884	20.87	3.81	0.5224	0.7861	29.02	3.50
Cube1k	1184	0.6542	0.8875	0.6467	0.8879	−1.15	0.05	0.7655	0.8796	17.00	−0.89
House2	1389	0.0980	0.7645	0.3695	0.7723	276.95	1.02	0.4010	0.7738	309.12	1.21
Rand1	5104	0.0231	0.4128	0.1683	0.4855	628.85	17.59	0.1999	0.4938	765.67	19.61
Tire	11,098	0.0442	0.7413	0.2801	0.8109	534.11	9.39	0.3611	0.8110	717.57	9.40
Cube10k	11,660	0.5800	0.8938	0.5484	0.8944	−5.46	0.06	0.7087	0.8935	22.18	−0.04
Rand2	25,704	0.0076	0.3345	0.0828	0.4247	986.21	26.96	0.1022	0.4278	1240.69	27.90
Dragon	32,959	0.3588	0.8962	0.4867	0.9047	35.65	0.95	0.4886	0.9046	36.17	0.95
Cow	42,053	0.3831	0.8227	0.4104	0.8478	7.13	3.05	0.4645	0.8470	21.25	2.96
StGallen	50,391	0.3501	0.8897	0.4878	0.9005	39.31	1.21	0.5663	0.9004	61.74	1.20
StayPuft	102,392	0.0843	0.8128	0.2481	0.8256	194.24	1.58	0.3347	0.8242	297.00	1.41

Από τη στιγμή που οι Klingner και Shewchuk χρησιμοποιούν μία προσέγγιση που τροποποιεί την τοπολογία για να βελτιώσει τα χειρότερα τετράεδρα, τα αποτελέσματα δεν μπορούν να συγκριθούν με εκείνα που περιλαμβάνονται στη δημοσίευσή τους. Επιπλέον, τα πλέγματα περιλαμβάνουν στοιχεία χαμηλής ποιοτητας χωρίς εσωτερικούς κόμβους. Αυτά δεν μπορούν να διορθωθούν από μεθόδους εξομάλυνσης που διατηρούν τους οριακούς κόμβους που χρησιμοποιούνται εδώ. Άρα, για άλλη μία φορά δίνεται ο αριθμός ποιότητας $q^*_{\min}$ του χειρότερου στοιχείου με τουλάχιστον έναν εσωτερικό κόμβο αντί για τον αριθμό q_{min} της ποιότητας του χειρότερου στοιχείου συνολικά.

Όπως αναμενόταν, τα ποσοστά βελτίωσης που επιτυγχάνονται και από τις δύο μεθόδους εξαρτώνται από την ποιότητα των αρχικών πλεγμάτων καθώς και από την τοπολογική τους διάταξη. Ειδικότερα, η ποιότητα των πλεγμάτων μπορεί ακόμη και να μειωθεί στην περίπτωση αρχικών πλεγμάτων υψηλής ποιότητας, όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τα αποτελέσματα της συνολικής βελτιστοποίησης για τα πλέγματα των Cube1k και Cube10k. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του γεγονότος ότι η αντικειμενική συνάρτηση που χρησιμοποιείται εστιάζει στη βελτιστοποίηση του q_{mean} αντί για τη βελτιστοποίηση της ποιότητας του χειρότερου στοιχείου q^*_{min}. Συνεπώς, η μέση ποιότητα του πλέγματος βελτιώθηκε σε όλες τις περιπτώσεις.

Εξαιτίας της συνδυαστικής προσέγγισης της εξομάλυνσης GETMe η οποία εφαρμόζει τη διαδοχική εξομάλυνση ως τελικό βήμα, η ποιότητα του χειρότερου στοιχείου βελτιώνεται σε όλες τις περιπτώσεις. Παρόλ' αυτά, εξαιτίας των κριτηρίων τερματισμού αυτό συμβαίνει με κόστος μία επιδείνωση του q_{mean} μέχρι και 1% από την αρχική του τιμή. Αυτή είναι επίσης η αιτία για τη μείωση της αριθμητικής τιμής της μέσης ποιότητας q_{mean} για τα πλέγματα Cube1k και Cube10k, σε σύγκριση με το αρχικό πλέγμα. Οι καλύτερες αριθμητικές τιμές μέσης ποιότητας πλεγμάτων που λαμβάνονται από το υποβήμα ταυτόχρονης εξομάλυνσης της GETMe ανέρχονται σε 0,8879, 0,8944, 0,9047, και 0,9007 για τις περιπτώσεις των Cube1k, Cube10k, Dragon, και StGallen αντίστοιχα. Άρα, στις εννέα από τις δώδεκα περιπτώσεις η προσέγγιση της ταυτόχρονης GETMe οδηγεί σε ίσες ή μεγαλύτερες αριθμητικές τιμές μέσης ποιότητας σε σύγκριση με την προσέγγιση συνολικής βελτιστοποίησης. Παρόλ' αυτά, από τη στιγμή που οι τελικές αριθμητικές τιμές μέσης ποιότητας της GETMe δεν διαφέρουν σε καμία από τις 12 περιπτώσεις περισσότερο από 0,01 από από τις τιμές που λήφθηκαν από την εξομάλυνση συνολικής βελτιστοποίησης, και οι δύο μέθοδοι παρέχουν κατά βάση παρόμοια αποτελέσματα όσον αφορά στο q_{mean}.

Από τη στιγμή που χρησιμοποιήθηκαν ενιαίες παράμετροι σε όλες τις περιπτώσεις, καταδεικνύεται η ευρεία εφαρμοσιμότητα και οι μεγάλες δυνατότητες της εξομάλυνσης GETMe. Επιπρόσθετα, μπορούν να ληφθούν ακόμη και καλύτερα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας σύνολα παραμέτρων ρυθμισμένων για κάθε περίπτωση ή μέσω προηγμένων συνδυαστικών προσεγγίσεων που να αποτελούνται όχι μόνο από ένα κύκλο ταυτόχρονης GETMe/διαδοχικής GETMe αλλά από πολλαπλούς. Παρόλ' αυτά, τα αποτελέσματα δείχνουν επίσης ότι, για να είναι εφαρμόσιμες για αυθαίρετα πλέγματα, οι μέθοδοι εξομάλυνσης θα πρέπει να συνδυαστούν με προσεγγίσεις που τροποποιούν την τοπολογία.

Κατά κύριο λόγο, ο αλγόριθμος της GETMe ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε τα αποτελέσματα να είναι ανεξάρτητα από τη σειρά των τετραέδρων T_j . Όπως και στην περίπτωση της ανεξάρτητης από τη σειρά των κόμβων εξομάλυνσης Laplace, οι νέες θέσεις των κόμβων δεν ορίζονται άμεσα, αλλά αποθηκεύονται ξεχωριστά, από τη στιγμή που σε διαφορετική περίπτωση θα επηρέαζαν τις επακόλουθες ενημερώσεις κόμβων. Οι νέες θέσεις των κόμβων ορίζονται τελικά μετά τον υπολογισμό όλων των νέων κόμβων. Στην περίπτωση της ταυτόχρονης εξομάλυνσης GETMe είναι επίσης συνετό να αποθηκεύσουμε επιπρόσθετα κάθε μετασχηματισμένο τετράεδρο ώστε να υπολογιστούν νέες θέσεις των κόμβων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερες απαιτήσεις μνήμης για να αποθηκευτούν οι $4n_t$ σχετιζόμενοι προσωρινοί κόμβοι. Εναλλακτικά, για να ενημερώσει έναν κόμβο θα μπορούσε κάποιος να προσδιορίσει εν τάχει τις μετασχηματισμένες θέσεις κόμβων των προσκείμενων τετραέδρων. Παρόλ' αυτά, από τη στιγμή που το τετράεδρο θα πρέπει να μετασχηματιστεί για καθένα από τους προσκείμενους σε αυτό κόμβους, θα οδηγούμασταν σε μία μεγάλη υπολογιστική επιβάρυνση.

Οι κόμβοι που βρίσκονται στο όριο αναγνωρίζονται στο βήμα αρχικοποίησης και παραμένουν αμετάβλητοι σε όλα τα επαναληπτικά βήματα. Αυτός είναι ο πιο απλός τρόπος για να διατηρηθεί το όριο ενός τετραεδρικού πλέγματος. Μία επέκταση αυτής της προσέγγισης είναι να επιτρέπονται οι μετακινήσεις κόμβων σε αυτό το αρχικό όριο. Καλύτερα αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν μεταβάλλοντας τους οριακούς κόμβους κατά το βήμα κανονικοποίησης και επαναπροβάλοντας τους πάνω σε μία τοπική παραμετρική περιγραφή της επιφάνειας, ανάλογα με τη διαχείριση των ορίων επιφανειακών 3D πλεγμάτων. Ωστόσο, σε αυτή την εργασία οι οριακοί κόμβοι παραμένουν σταθεροί ώστε να μπορεί να γίνει μία καλύτερη σύγκριση ανάμεσα στα αποτελέσματα της GETMe και σε εκείνα άλλων αλγόριθμων.

Η ιδιότητα ενός αλγόριθμου να παραλληλοποιείται εύκολα έχει γίνει ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα στις μέρες μας, με την ανάπτυξη των υπολογιστών. Ο αλγόριθμος της GETMe που παρουσιάζεται αποτελείται από περισσότερα του ενός βήματα που είναι κατάλληλα για παραλληλισμό. Για παράδειγμα, η κανονικοποίηση των τετραέδρων μπορεί να παραλληλοποιηθεί για την ταυτόχρονη προσέγγιση GETMe, όπως επίσης και για την απόδοση μέσων τιμών στους κόμβους. Και στα δύο υποβήματα, το ταυτόχρονο και το διαδοχικό, η διαχείριση των μη έγκυρων στοιχείων μπορεί να παραλληλιστεί, αν έχει υλοποιηθεί όπως περιγράφηκε παραπάνω.

Συμπεράσματα

Η μέθοδος μετασχηματισμού γεωμετρικών στοιχείων έχει εισαχθεί ως νέα προσέγγιση για αποτελεσματική και αποδοτική εξομάλυνση πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων. Με αυτό τον τρόπο βελτιώνονται η σταθερότητα, η αποτελεσματικότητα και η ακρίβεια υπολογισμών πεπερασμένων στοιχείων. Σε αντίθεση με άλλους αλγορίθμους εξομάλυνσης, η GETMe βασίζεται σε μετασχηματισμούς γεωμετρικών στοιχείων, οι οποίοι οδηγούν σε στοιχεία πιο κανονικά, άρα καλύτερης ποιότητας, αν εφαρμοστούν επαναληπτικά. Στην περίπτωση των πολυγωνικών στοιχείων, οι εν λόγω μετασχηματισμοί μπορούν να βασίζονται σε κλασικές γεωμετρικές κατασκευές με χρήση ομοίων τριγώνων.

Σε αυτή τη διατριβή, τα τριγωνικά στοιχεία μετασχηματίστηκαν μέσω ανύψωσης ισοσκελών τριγώνων σε κάθε μία από τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Οι κορυφές των ανυψωμένων τριγώνων είναι οι κόμβοι του προκύπτοντος τριγώνου. Η επανάληψη αυτού του μετασχηματισμού οδηγεί σε μια αλληλουχία τριγώνων. Μέσω ανάλυσης αποδείχθηκε ότι τα σχήματα αυτών των τριγώνων συγκλίνουν σε ένα χαρακτηριστικό σχήμα το οποίο δεν εξαρτάται από την επιλογή του αρχικού τριγώνου, αλλά από το σχήμα των ανυψωμένων ισοσκελών τριγώνων. Απεδείχθη ρητά ότι αυτό το χαρακτηριστικό σχήμα προσεγγίζεται σε κάθε βήμα μετασχηματισμού. Επιπλέον, υπάρχει ένα ανώτατο όριο για την ταχύτητα της σύγκλισης.

Η χρήση του ίδιου συστήματος μετασχηματισμού στην περίπτωση των πολυγώνων με έναν αυθαίρετο αριθμό κόμβων οδηγεί σε μια αναπαράσταση κυκλικού πίνακα, ο οποίος αναλύθηκε με τη βοήθεια της γραμμικής άλγεβρας στην Ενότητα 2.2 της παρούσας διατριβής. Αυτό γίνεται σε σχέση με τη γωνία βάσης των ισοσκελών τριγώνων που έχουν ανυψωθεί στις πλευρές του πολυγώνου. Έχουν προσδιοριστεί όλες οι χαρακτηριστικές γωνίες βάσης που οδηγούν σε αλλαγή στη γεωμετρία του οριακού πολυγώνου που προκύπτει με επαναληπτική εφαρμογή του ίδιου μετασχηματισμού. Επιπροσθέτως, έχει αποδειχθεί ότι αυτά τα οριακά πολύγωνα είναι γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών πολυγώνων του αρχικού πολυγώνου. Δεδομένου ότι όλα τα συστήματα μετασχηματισμού, τα οποία μπορούν να αναπαρασταθούν από κυκλικούς πίνακες, οδηγούν στα ίδια χαρακτηριστικά πολύγωνα, τα αποτελέσματα που προκύπτουν δεν είναι εφαρμόσιμα μόνο στον αναλυόμενο μετασχηματισμό, αλλά σε μια ευρεία ποικιλία γεωμετρικών μετασχηματισμών πολυγώνων. Επιπλέον, τα κλασικά θεωρήματα του Ναπολέοντα καθώς και των Petr-Douglas-Neumann συνήχθησαν φυσιολογικά ως ειδικές περιπτώσεις στην επιλογή των παραμέτρων και του αριθμού των βημάτων μετασχηματισμού. Επιπροσθέτως, εξήχθη το συμπέρασμα ότι αυτά τα αποτελέσματα είναι μοναδικά σε σχέση με την κατασκευή τους και την επιλογή των χαρακτηριστικών παραμέτρων.

Στην Ενότητα 2.3 έχει προταθεί και αναλυθεί ένας συνδυασμένος μετασχηματισμός για πολυγωνικά στοιχεία. Εξαλείφει την περιστροφική επίδραση του αρχικού μετασχηματισμού που βασίζεται σε όμοια τρίγωνα, η οποία είναι δυσμενής στο πλαίσιο της εξομάλυνσης πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων. Αυτός ο μετασχηματισμός συνδυάζει δύο βήματα του ίδιου συστήματος μετασχηματισμού με χρήση αντιστραμμένων όμοιων τριγώνων στο δεύτερο υποβήμα, με αποτέλεσμα έναν κυκλικό Ερμιτιανό πίνακα μετασχηματισμού με θετικές ιδιοτιμές. Επιπλέον, με την εισαγωγή μιας επιπλέον παραμέτρου, προκειμένου να οριστούν όμοια τρίγωνα, αυτός ο μετασχηματισμός είναι πιο γενικός. Όλα τα πιθανά οριακά πολύγωνα που προκύπτουν παράγονται σε σχέση με τον υποκείμενο τομέα παραμέτρων. Αυτό διευκολύνει μια κατευθυνόμενη επιλογή παραμέτρων μετασχηματισμού στο πλαίσιο εξομάλυνσης πλεγμάτων.

Κατά την προετοιμασία της εξομάλυνσης των ογκομετρικών πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων, οι κανονικοποιητικοί μετασχηματισμοί για ογκομετρικά στοιχεία ελήφθησαν υπόψη στο Κεφάλαιο 3. Πρώτον, το κριτήριο της ποιότητας μέσης αναλογίας εισήχθη στην Ενότητα 3.1, ως μέτρο για την κανονικότητα στοιχείων. Εφαρμόζεται όχι μόνο στα σημαντικότερα ογκομετρική στοιχεία, αλλά και στα πολυγωνικά στοιχεία, παρέχοντας με αυτό τον τρόπο μια σωστή βάση για την αξιολόγηση της ποιότητας των πλεγμάτων και τον έλεγχο της εξομάλυνσης.

Οι κανονικοποιητικοί μετασχηματισμοί για τετραεδρικά, εξαεδρικά, πυραμιδικά και πρισματικά πεπερασμένα στοιχεία εισήχθησαν στις Ενότητες 3.2 και 3.3. Ενώ ο αποτελεσματικός μετασχηματισμός με βάση αντίθετες καθέτους εφαρμόζεται μόνο σε τετραεδρικά στοιχεία λόγω της ειδικής τοπολογικής τους διαμόρφωσης, ο γενικότερος μετασχηματισμός δύο στοιχείων είναι κατάλληλος για όλους τους τύπους στοιχείων υπό εξέταση. Αριθμητικές δοκιμές έχουν δείξει ότι αμφότεροι οι μετασχηματισμοί κανονικοποιούν αξιόπιστα και αποτελεσματικά ακόμη και άκυρα στοιχεία όλων των τύπων εντός ενός χαμηλού αριθμού βημάτων. Πρόσθετοι μηχανισμοί, όπως ένα κανονικός παράγοντας κλίμακας και η χαλάρωση, επιτρέπουν τον έλεγχο της ταχύτητας της κανονικοποίησης, γεγονός που είναι λογικό σε σχέση με την εξομάλυνση πλεγμάτων. Επιπλέον, έχουν συζητηθεί οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού που αφορούν την διατήρηση του κεντροειδούς, καθώς και το αναλλοίωτο σε σχέση με την κλιμάκωση, την περιστροφή και την παράλληλη μεταφορά.

Δύο διαφορετικές προσεγγίσεις της εξομάλυνσης πλεγμάτων με βάση μετασχηματισμούς γεωμετρικών στοιχείων και ένα συνδυασμός αυτών παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4. Η πρώτη είναι η ταυτόχρονη προσέγγιση της GETMe που συνδυάζει δύο κινητήριες δυνάμεις. Η μία είναι ο κανονικοποιητικός μετασχηματισμός στοιχείων, η άλλη είναι μια εξομάλυνση Laplace σαν σύστημα εξαγωγής μέσου όρου των κόμβων. Ωστόσο, σε αντίθεση με την εξομάλυνση του Laplace, η οποία βασίζεται σε υπολογισμό αριθμητικών μέσων όρων γειτονικών κόμβων, η ταυτόχρονη εξομάλυνση GETMe βασίζεται σε σταθμισμένο μέσο όρων προσωρινών κόμβων που προκύπτουν μέσω μετασχηματισμού γειτονικών στοιχείων. Ως εκ τούτου, η βελτίωση της ποιότητας προκαλείται κυρίως από τον κανονικοποιητικό μετασχηματισμό στοιχείων που ελέγχεται από την ποιότητα των στοιχείων και το σύστημα εξαγωγής μέσου όρου των κόμβων που σταθμίζεται με την ποιότητα. Η δεύτερη προσέγγιση, που ονομάζεται διαδοχική GETMe, βασίζεται σε διαδοχική βελτίωση του στοιχείου του πλέγματος με χαμηλότερη ποιότητα, μέσω εφαρμογής του μετασχηματισμού απευθείας. Ενώ το ισχυρό σημείο της ταυτόχρονης προσέγγισης είναι η βελτίωση της συνολικής ποιότητας των πλεγμάτων, η διαδοχική προσέγγιση βελτιώνει αποτελεσματικά την ελάχιστη ποιότητα των στοιχείων. Ως εκ τούτου, η εξομάλυνση GETMe, όπως εισήχθη στην Ενότητα 4.4, αποτελείται από την εφαρμογή των δύο μεθόδων διαδοχικά, οδηγώντας σε αποτελέσματα υψηλής ποιότητας σε σχέση με τους δύο αριθμούς ποιότητας.

Μια εξελιγμένη έκδοση της μεθόδου μετασχηματισμού γεωμετρικών στοιχείων για εξομάλυνση πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων εισήχθη στην Ενότητα 4.5. Σε αντίθεση με την τυπική προσέγγιση GETMe, η προσαρμοστική GETMe εμπεριέχει έννοιες προσαρμοστικότητας, εφαρμόζοντας μια ελεγχόμενη από ποιότητα τεχνική εξομάλυνσης δύο σταδίων ενσωματωμένη σε έναν κύριο βρόχο εξομάλυνσης, ένα προσαρμοζόμενο σύστημα χαλάρωσης κόμβων, προκειμένου να αποφεύγεται η δημιουργία άκυρων στοιχείων πλεγμάτων και να επιταχύνεται ο ρυθμός βελτίωσης των πλεγμάτων, καθώς και ένα ποιοτικό σύστημα στάθμισης βασιζόμενο στην αναλογία για ενημέρωση των κόμβων, η οποία τώρα εφαρμόζεται με συνέπεια στα δύο στάδια εξομάλυνσης. Επιπλέον, μέσω της χρήσης σταθερών παραμέτρων μετασχηματισμού και μέσω εξάλειψης των παραμέτρων ποινής για την ποιότητα των στοιχείων, η προσαρμοστική GETMe μειώνει περαιτέρω τον αριθμό των παραμέτρων σε σύγκριση με την τυπική προσέγγιση GETMe.

Επιπλέον, στην Ενότητα 4.6 συζητήθηκε μια βελτιωμένη εφαρμογή κώδικα και παραλληλοποίηση της προσαρμοστικής GETMe. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια μέθοδο εξομάλυνσης πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων, η οποία έχει και τα δύο, ένα συγκριτικά χαμηλό προφίλ μνήμης και σύντομους χρόνους εκτέλεσης της επανάληψης εξομάλυνσης. Σε συνδυασμό με το ισχυρό αποτέλεσμα κανονικοποίησης των ενσωματωμένων μετασχηματισμών στοιχείων, αυτό οδηγεί σε μια αποτελεσματική προσέγγιση εξομάλυνσης για πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων διαφόρων τύπων.
Η αποτελεσματικότητα και η αποδοτικότητα της μεθόδου μετασχηματισμού γεωμετρικών στοιχείων απεδείχθη από την εκτεταμένη συλλογή αριθμητικών αποτελεσμάτων που αποδεικνύεται στο Κεφάλαιο 5. Σε αυτό το Κεφάλαιο δίνονται αποτελέσματα για μια ευρεία ποικιλία τύπων πλεγμάτων που καλύπτουν επίπεδα πολυγωνικά πλέγματα, πλέγματα πολυγωνικής επιφάνειας, πλήρως τετραεδρικά, πλήρως εξαεδρικά πλέγματα και πλέγματα μικτού όγκου. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίθηκαν με παραλλαγές της έξυπνης εξομάλυνσης του Laplace και μια υπερσύγχρονη συνολική προσέγγιση που βασίζεται στη βελτιστοποίηση. Έχει αποδειχθεί ότι η εξομάλυνση GETMe οδηγεί σε πειστικά αποτελέσματα όσον αφορά τόσο την ποιότητα όσο και τον χρόνο εκτέλεσης. Δηλαδή, αυτό οδηγεί σε ποιότητες πλεγμάτων συγκρίσιμες με εκείνες που προκύπτουν από τη συνολική προσέγγιση βελτιστοποίησης, ενώ είναι σημαντικά ταχύτερες από τις άλλες μεθόδους. Επιπλέον, καμία παραλλαγή εξομάλυνσης του Laplace δεν βελτίωσε σημαντικά την ελάχιστη ποιότητα των στοιχείων και ως εκ τούτου συνήθως εκπλήρωνε τις απαιτήσεις ποιότητας πλέγματος των υπολογισμών πεπερασμένων στοιχείων.

Αυτό απεδείχθη με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στο Κεφάλαιο 6. Εδώ τα αποτελέσματα της εξομάλυνσης GETMe όχι μόνο έχουν αξιολογηθεί σε σχέση με την ποιότητα των πλεγμάτων, αλλά και σε σχέση με την ακρίβεια της λύσης πεπερασμένων στοιχείων για έναν αριθμό προβλημάτων του Poisson με αναλυτικές λύσεις. Έχουν ληφθεί υπόψη διαφορετικά πλέγματα όσον αφορά τους τύπους στοιχείων, την ανάλυση των πλεγμάτων, καθώς και τη σειρά των σχετικών λειτουργιών με βάση πεπερασμένα στοιχεία και έχει αποδειχθεί η ευεργετική επίδραση της εξομάλυνσης GETMe σε σχέση με την αποδοτικότητα και τη σταθερότητα της λύσης συστήματος εξισώσεων πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και με την ακρίβεια της λύσης πεπερασμένων στοιχείων.

Από την άποψη της εφαρμογής, πρόσθετο δυναμικό για βελτιώσεις της εξομάλυνσης GETMe βρίσκεται εντός της ενσωμάτωσης προσαρμοσμένων μετασχηματισμών στοιχείων, συνόλων παραμέτρων και βασιζόμενων σε εξισώσεις συστημάτων κλιμάκωσης στοιχείων, που θα μπορούσαν για παράδειγμα να απαιτούνται προκειμένου να εξομαλυνθούν ανισότροπα πλέγματα. Επιπλέον, θα πρέπει να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό η ενσωμάτωση εκτιμήσεων σφαλμάτων εκ των προτέρων ή ο συνδυασμός με τις εκτιμήσεις σφαλμάτων εκ των υστέρων μπορεί να διευκολύνει τη διαδικασία εξομάλυνσης για την επίτευξη καλύτερης ποιότητας προσέγγισης πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο, επειδή η εξομάλυνση περιορίζεται από την αρχική τοπολογία των πλεγμάτων, μια προσέγγιση προσανατολισμένη στην πράξη θα πρέπει επίσης να συνδυαστεί με τεχνικές τροποποίησης της τοπολογίας των πλεγμάτων που επιτρέπει τοπική εκλέπτυνση ή εκτράχυνση.

Από θεωρητική άποψη, πρέπει να γίνει πρόσθετη εργασία προκειμένου να παρασχεθεί απόδειξη σύγκλισης για τους μετασχηματισμούς ογκομετρικών στοιχείων. Παρόλο που τα συστήματα μετασχηματισμού είναι απλά από γεωμετρική άποψη, η συμπερίληψη διανυσματικών γινομένων και ομαλοποίησης σε μια αναδρομική προσέγγιση οδηγεί σε πολύπλοκες, μη γραμμικές εκφράσεις. Το ίδιο ισχύει για την εκκρεμούσα απόδειξη του αποτελέσματος βελτίωσης των πλεγμάτων και της σύγκλισης ολόκληρης της διαδικασίας εξομάλυνσης GETMe.