ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL, LEGENDRE ΚΑΙ HERMITE

Διπλωματική εργασία του

Βαγγέλη Βασιλείου

Επιβλέπων: Δ.Χ. Κραββαρίτης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιανουάριος 2011

Πρόλογος

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη των βασικότερων ειδικών συναρτήσεων, της Bessel, της Legendre και της Hermite. Σε κάθε συνάρτηση θα αφιερώνεται και από ένα κεφάλαιο.

Στην πρώτη παράγραφο του πρώτου κεφαλαίου αναφέρεται η εξίσωση Bessel και βρίσκονται αναλυτικά οι λύσεις της που αποτελούν και τις συναρτήσεις Bessel τις οποίες και θα μελετήσουμε. Στη δεύτερη παράγραφο παρουσιάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel· μια από τις πιο βασικές ιδιότητες είναι η ορθογωνιότητα, γιατί χωρίς αυτή δεν θα είχαμε τις σειρές Fourier-Bessel, οι οποίες χρειάζονται στις εφαρμογές. Τέλος αναφέρεται μια εφαρμογή, το πρόβλημα Diriclet σε κύλινδρο, όπου χρησιμοποιούνται οι σειρές Fourier-Bessel.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται η διαφορική εξίσωση Legendre και βρίσκονται τα πολυώνυμα Legendre, που αποτελούν και τις λύσεις της. Στη δεύτερη παράγραφο παρουσιάζονται οι ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre· μία από τις βασικότερες ιδιότητες είναι και πάλι η ορθογωνιότητα, που χρειάζεται για να αναπτυχθεί μία συνάρτηση σε σειρά Legendre, η οποία είναι χρήσιμη για τις εφαρμογές. Στη τρίτη παράγραφο εξετάζεται μία εφαρμογή, το πρόβλημα Diriclet σε σφαίρα (συμμετρική περίπτωση).

Το τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο αναφέρεται στη συνάρτηση Hermite. Ξεκινώντας από τη διαφορική εξίσωση Hermite καταλήγουμε στα πολυώνυμα Hermite, που αποτελούν και τις λύσεις της. Στη δεύτερη παράγραφο παρουσιάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων Hermite. Τέλος θα εξετάσουμε μία εφαρμογή από την κβαντομηχανική, τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή, από τη μελέτη του οποίου προκύπτει η εξίσωση του Schrödinger την οποία και θα επιλύσουμε.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Συναρτήσεις Bessel

Α. Η εξίσωση Bessel και οι λύσεις της

Η διαφορική εξίσωση Bessel τάξεως p με $p \in [0,\infty)$ είναι,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0 . \tag{A.1}$$

Κάθε μη μηδενική λύση της (Α.1) ονομάζεται συνάρτηση Bessel ή κυλινδρική συνάρτηση.

Θα βρούμε την εξίσωση των δεικτών της (Α.1).

Η εξίσωση (Α.1) παίρνει την μορφή

$$x^2 y'' + xP(x) y' + Q(x) y = 0$$

όπου οι συναρτήσεις $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν τα αναπτύγματα:

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu x^\nu ,\ Q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu$$

όμως από την (Α.1) έχουμε $P(x) = 1$ και $Q(x) = x^2 - p^2$.

Η γενική εξίσωση των δεικτών είναι

$$k(k-1) + \beta k + \gamma = 0$$

όμως $\beta = 1$ και $\gamma = -p^2$ άρα η εξίσωση των δεικτών είναι

$$k(k-1) + k - p^2 = 0$$

που σημαίνει ότι οι δείκτες της είναι $k_1 = p$, $k_2 = -p$.

Πρόταση Α.1: Έστω ότι οι συναρτήσεις $P(x),\ Q(x)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0$$

έχουν τα αναπτύγματα $P(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu x^\nu,\ Q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu$ και $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ είναι ρίζες της εξίσωσης των δεικτών με $k_1 \geq k_2$.

(i) Αν $k_1 - k_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, τότε η διαφορική εξίσωση έχει δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$y_1(x) = x^{k_1} \sum a_\nu x^\nu,\ \ y_2(x) = x^{k_2} \sum a'_\nu x^\nu,\ \ 0 < x < \rho .$$

(ii) Αν $k_1 - k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, τότε η διαφορική εξίσωση έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$y_1(x) = x^{k_1} \sum a_\nu x^\nu,\ \ y_2(x) = a y_1(x) \ln x + x^{k_2} \sum a'_\nu x^\nu,\ \ 0 < x < \rho .$$

Όλες οι σειρές συγκλίνουν (τουλάχιστον) για $|x| < \rho$.

(i) Αν $k_1 - k_2 = 2p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, τότε σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Η λύση της (Α.1) που αντιστοιχεί στο δείκτη k_1, είναι της μορφής

$$y_1(x) = x^p \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,\ x > 0 .$$

Αντικαθιστούμε την y_1 και τις παραγώγους της στην (Α.1), οπότε παίρνουμε την ταυτότητα

$$(1+2p)a_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} [\nu(\nu+2p)a_\nu + a_{\nu-2}]x^\nu = 0 .$$

Επομένως $a_1 = 0$, αφού $p \geq 0$, και

$$a_\nu = -\frac{a_{\nu-2}}{\nu(\nu+2p)},\ \ \nu = 2,3,...$$

ή

$$a_1 = a_3 = \ldots = 0$$

και

$$a_{2r} = -\frac{a_{2r-2}}{4r(r+p)}, \ \mathrm{r} = 1, 2, \ldots .$$

Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r a_0}{2^{2r} r!(r+p)(r+p-1)\ldots(1+p)}, \ \mathrm{r} = 1, 2, \ldots \ .$$

Για να απλοποιήσουμε την τελευταία έκφραση θέτουμε $a_0 = \dfrac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$,

όπου $\Gamma(t)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα για την οποία ισχύει

$$(p+1)(p+2)\ldots(p+r)\Gamma(p+1) = \Gamma(p+r+1),$$

οπότε οι συντελεστές της λύσεως γράφονται

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r}{2^{2r+p} r!\Gamma(p+r+1)} .$$

Επομένως για τον δείκτη $k_1 = p$ η λύση της εξίσωσης (Α.1) είναι

$$J_p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(p+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p} \text{ με } x>0 . \tag{A.2}$$

Η συνάρτηση $J_p(x)$ ονομάζεται συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξεως p. Είναι φανερό ότι, αν $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, τότε η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για να βρούμε μια δεύτερη λύση της (Α.1), γραμμικώς ανεξάρτητη από την $J_p(x)$, που να αντιστοιχεί στον δείκτη $-p$, εργαζόμαστε ως εξής:

β) Η λύση της (Α.1) που αντιστοιχεί στο δείκτη k_2, είναι της μορφής

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu x^\nu .$$

Η λύση αυτή βρίσκεται από την $J_p(x)$, αν θέσουμε στη θέση του p το $-p$, οπότε παίρνουμε

$$J_{-p}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-p+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-p} \text{ με } x>0 . \qquad (A.3)$$

(ii) Αν $r_1 - r_2 = 2p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $p = \mu + \frac{1}{2}$, όπου $\mu = 0,1,2,...$ τότε αναζητούμε μια λύση της μορφής

$$y_1(x) = x^p \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v \quad \text{με} \quad x > 0 .$$

Αντικαθιστούμε την y_1 και τις παραγώγους της στην (A.1), οπότε παίρνουμε την ταυτότητα

$$(1+2p)a_1 + \sum_{v=2}^{\infty} [v(v+2p)a_v + a_{v-2}]x^v = 0 .$$

Επομένως $a_1 = 0,$ αφού $p \ge 0$, και

$$a_v = -\frac{a_{v-2}}{v(v+2p)}, \; v = 2,3,...$$

άρα

$$v(v+2p)a_v + a_{v-2} = 0, \; v = 2,3,...$$

αφού $p = \mu + \frac{1}{2}$ έχουμε

$$v(v+2\mu+1)a_v + a_{v-2} = 0, \; v = 2,3,...$$

παρατηρούμε ότι

$$a_1 = a_3 = ... = a_{2\mu-1} = 0$$

και για $v = 2\mu + 1$ όπου $\mu = 0,1,2,...$ έχουμε

$$(2\mu+1)(2\mu+1+2\mu+1)a_{2\mu+1} + a_{2\mu-1} = 0$$

άρα

$$(2\mu+1)(2\mu+1+2\mu+1)a_{2\mu+1} + 0 = 0$$

άρα θα πρέπει $a_{2\mu+1}=0$

άρα η ζητούμενη λύση είναι η

$$J_p(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(p+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p} \text{ με } x>0,$$

η οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητη της J_{-p}.

β) Αν $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ τότε η διαφορική εξίσωση Bessel σύμφωνα με την πρόταση έχει μια δεύτερη λύση της μορφής:

$$y_2(x)=aJ_p(x)\ln x+x^{-p}\sum_{v=0}^{\infty}a'_v x^v,\ a\neq 0$$

βρίσκουμε ότι

$$y_2(x)=J_p(x)\ln x-\frac{1}{2}\sum_{v=0}^{p-1}\frac{(p-v-1)!}{v!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2v-p}-\frac{1}{2}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v(h_v+h_{v+p})}{v!(p+v)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2v+p},\ \ x>0,\ \ p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

όπου $h_v=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{v}$.

Συνήθως αντί της λύσεως $y_2(x)$ χρησιμοποιούμε έναν κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των λύσεων $y_2(x)$ και $J_p(x)$, τη λύση

$$Y_p(x)=\frac{2}{\pi}[y_2(x)+(C-\ln 2)J_p(x)] \text{ με } x>0 \tag{A.4}$$

όπου $C=\lim_{v\to\infty}(h_v-\ln v)\cong 0,5772$ είναι η σταθερά Euler.

Ένας άλλος τρόπος ορισμού της Y_p είναι ο εξής: Για $p>0$, $p\notin\mathbb{N}$, θέτουμε

$$Y_p(x)=\frac{1}{\sin p\pi}[J_p(x)\cos p\pi-J_{-p}(x)]$$

ενώ για $p_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ θέτουμε

$$Y_{p_0}(x)=\lim_{p\to p_0}Y_p(x). \tag{A.5}$$

Αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις (Α.4) και (Α.5) ορίζουν την ίδια συνάρτηση. Οι συναρτήσεις $Y_p,\ p \geq 0$ ονομάζονται συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους τάξεως p ή συναρτήσεις Neuman τάξεως p. Έχουμε λοιπόν αποδείξει την πρόταση:

Πρόταση Α.2:

(i) Αν $p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, τότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel τάξεως p είναι

$$Z_p(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x), \quad C_1, C_2 \text{ σταθερές.}$$

(ii) Αν $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, τότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel τάξεως p είναι

$$Z_p(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_p(x), \quad C_1, C_2 \text{ σταθερές.}$$

B. Ιδιότητες συναρτήσεων Bessel

B.1. Συμπεριφορά των συναρτήσεων Bessel στην περιοχή του μηδενός

Για τις συναρτήσεις Bessel $J_p(x),\ p \geq 0$ ισχύει

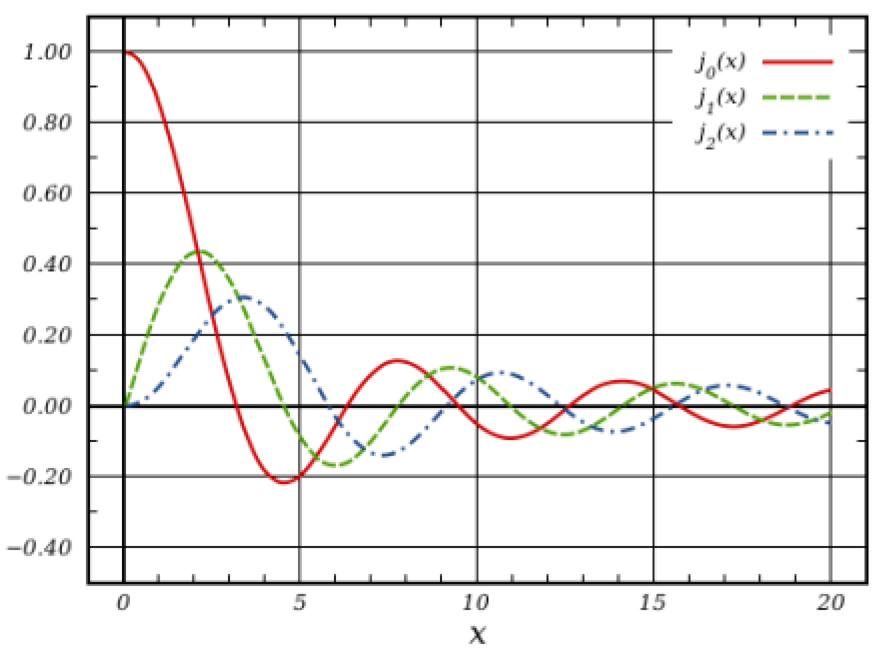
$$\lim_{x\to 0} J_p(x) = 0\,, \text{ όταν } \ p > 0 \qquad \text{(σχήμα B.1.1)}$$

$$\lim_{x\to 0} J_p(x) = 1,\ \text{ όταν } \ p = 0\,. \qquad \text{(σχήμα B.1.1)}$$

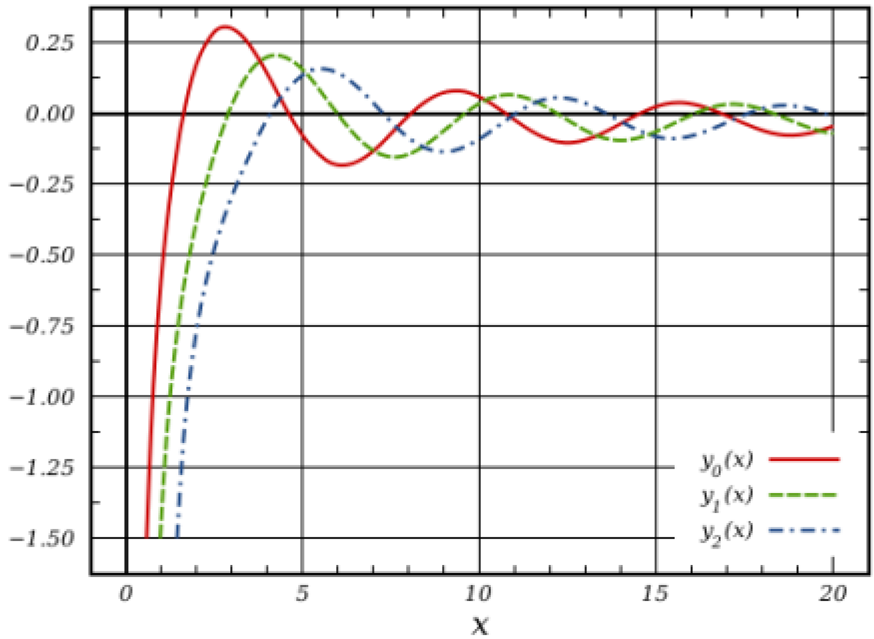
Για τις συναρτήσεις Bessel $Y_p(x),\ p \geq 0$ ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+} Y_p(x) = -\infty\,. \qquad \text{(σχήμα B.1.2)}$$

Όλες οι συναρτήσεις Bessel που δεν είναι πολλαπλάσια του J_p, δεν είναι φραγμένες στην περιοχή του 0, αφού περιέχουν το λογαριθμικό όρο, όταν $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, και τον όρο x^{-p}, όταν $p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.



(σχήμα B.1.1)



(σχήμα Β.1.2)

Β.2. Αναγωγικοί τύποι

Έχουμε ορίσει μέχρι τώρα τις συναρτήσεις J_p για κάθε $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$ (βλέπε τύπους (Α.2) και (Α.3)). Θα επεκτείνουμε τον ορισμό για κάθε $p \in \mathbb{R}$ ορίζοντας

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \text{ για } n \text{ θετικό ή αρνητικό ακέραιο.}$$

Απόδειξη: Για $n > 0$.
Σε αυτήν τη περίπτωση έχουμε

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n},$$

όμως το $\Gamma(-n+r+1)$ τείνει στο άπειρο (και έτσι το $\frac{1}{\Gamma(-n+r+1)}$ τείνει στο 0) για αρνητικό r ή $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (αυτό είναι δυνατό επειδή το n είναι ακέραιος) έτσι το άθροισμα του r στην παραπάνω έκφραση μπορούμε ισοδύναμα να το πάρουμε από το n ως το άπειρο

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{1}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2(m+n)-n}$$

(όπου έχουμε αλλάξει την μεταβλητή άθροισης σε $m = r - n$)

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n}$$

αλλά

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+n} \quad \text{από (A.2).}$$

Οπότε αυτό που μένει για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη είναι να δείξουμε ότι

$$(m+n)!\Gamma(m+1) = m!\Gamma(n+m+1) \text{ για } n \text{ και } m \text{ ακέραιους}$$

αλλά

$$(m+n)!\Gamma(m+1) = (m+n)(m+n-1)...(m+1)m!\Gamma(m+1) = m!\Gamma(m+n+1)$$

χρησιμοποιούμε επανειλημμένα τη σχέση $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ και έτσι το αποτέλεσμα αποδείχθηκε.

Για $n < 0$.
Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε $n = -p$ με $p > 0$. Μετά αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι

$$J_p(x) = (-1)^{-p} J_{-p}(x)$$

ή

$$(-1)^p J_p(x) = J_{-p}(x)$$

το οποίο φυσικά, εφόσον το p είναι θετικό είναι το αποτέλεσμα που αποδείξαμε παραπάνω.

Ας ανακεφαλαιώσουμε τι έχουμε δείξει μέχρι στιγμής:
Έχουμε δείξει ότι εάν το n δεν είναι ακέραιος τότε η $J_n(x)$ και η $J_{-n}(x)$ είναι ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel (τότε λοιπόν η γενική λύση δίνεται από την σχέση $C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$) ενώ εάν το n είναι ένας ακέραιος η $J_n(x)$ και η $J_{-n}(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης Bessel και συνδέονται με τη σχέση

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Μετά από αυτήν την επέκταση ισχύουν, για κάθε $p \in \mathbb{R}$, οι αναγωγικοί τύποι

(i) $\dfrac{d(x^n J_n(x))}{dx} = x^n J_{n-1}(x)$

(ii) $\dfrac{d(x^{-n} J_n(x))}{dx} = -x^n J_{n+1}(x)$

(iii) $J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{n}{x} J_n(x)$

(iv) $J_n'(x) = \dfrac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$

(v) $J_n'(x) = \dfrac{1}{2}(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x))$

(vi) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x} J_n(x)$

<u>Απόδειξη:</u>

(i) Παίρνουμε την εξίσωση $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \dfrac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2r+n}$ και την πολλαπλασιάζουμε με το x^n και παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς x.

$$\frac{d(x^n J_n(x))}{dx} = \frac{d\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \frac{1}{2^{2r+n}} x^{2r+2n}}{dx}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)2^{2r+n}} (2r+2n)x^{2r+2n-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!(n+r)\Gamma(n+r)2^{2r+n}} 2(r+n)x^{2r+n-1}$$

(γνωρίζουμε ότι $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$)

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n-1}$$

$= x^n J_{n-1}(x)$ (με χρήση της εξίσωσης (A.2)).

Σημείωση: Σε αυτό το θεώρημα δεν υπάρχει περιορισμός για το n, το οποίο μπορεί να είναι ακέραιος μπορεί και όχι, θετικός ή αρνητικός.

(ii) Έχουμε

$$\frac{d(x^{-n}J_n(x))}{dx}=\frac{d\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\frac{1}{2^{2r+n}}x^{2r}}{dx}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\frac{1}{2^{2r+n}}2rx^{2r-1}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\frac{1}{2^{2r+n-1}}rx^{2r-1}$$

(αφού υπάρχει η μεταβλητή r στον αριθμητή. Για $r=0$ το δεξί μέλος εξαφανίζεται αφού $0!=1$)

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{1}{(s+1)!\Gamma(n+s+2)}\frac{1}{2^{2(s+1)+n-1}}(s+1)x^{2(s+1)-1}$$

(έχουμε θέσει $s=r-1$)

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{1}{s!\Gamma(n+s+2)}\frac{1}{2^{2s+n+1}}x^{2s+1}$$

$$=-x^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{1}{s!\Gamma(n+s+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1}$$

$$=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

(με χρήση της εξίσωσης (Α.2)).

(iii) Παραγωγίζοντας το αριστερό μέλος της σχέσης (i) παίρνουμε

$$nx^{n-1}J_n(x)+x^nJ_n'(x)=x^nJ_{n-1}(x)$$

η διαίρεση με το x^n δίνει

$$\frac{n}{x}J_n(x)+J_n'(x)=J_{n-1}(x)$$

και έτσι

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \ .$$

(iv) Παραγωγίζοντας το αριστερό μέλος της σχέσης (ii) παίρνουμε

$$-nx^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

του οποίου ο πολλαπλασιασμός με το x^n δίνει

$$-\frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x) = -J_{n+1}(x)$$

έτσι

$$J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \,.$$

(v) Προσθέτουμε τις σχέσεις (iii) και (iv)

$$\begin{aligned}
& x^{-n} \frac{d\left(x^n J_n(x)\right)}{dx} + x^n \frac{d\left(x^{-n} J_n(x)\right)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\
& x^{-n}\left(nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x)\right) + x^n\left(-nx^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x)\right) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& nx^{-1} J_n(x) + J_n'(x) - nx^{-1} J_n(x) + J_n'(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& 2J_n'(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& J_n'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right).
\end{aligned}$$

(vi) Αφαιρούμε την (iv) από την (iii)

$$\begin{aligned}
& x^{-n} \frac{d\left(x^n J_n(x)\right)}{dx} - x^n \frac{d\left(x^{-n} J_n(x)\right)}{dx} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& x^{-n}\left(nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x)\right) - x^n\left(-nx^{-n-1} J_n + x^{-n} J_n'(x)\right) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& nx^{-1} J_n(x) + J_n'(x) + nx^{-1} J_n(x) - J_n'(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \\
& J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x).
\end{aligned}$$

Όλες οι παραπάνω σχέσεις παραμένουν όταν οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους αντικατασταθούν με τις ανάλογες συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους.

Όταν το n είναι ακέραιος ισχύει

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) .$$

<u>Απόδειξη:</u> Από την εξίσωση

$$Y_n(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}$$

έχουμε

$$Y_{-n}(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^{-n} \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=-n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial(-v)} - (-1)^{-n} \frac{\partial J_{v}(x)}{\partial(-v)}\right]_{v=n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[-\frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v} + (-1)^{n} \frac{\partial J_{v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n}\left[\frac{\partial J_{v}(x)}{\partial v} - (-1)^{n} \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}$$

άρα

$$Y_n(x) = (-1)^n Y_n(x) .$$

Τα ίδια ισχύουν και για τους υπόλοιπους αναγωγικούς τύπους.
Θα αποδείξουμε ότι το αποτέλεσμα (i) ισχύει για το $Y_n(x)$ με παρόμια μέθοδο αποδεικνύεται το (ii) και στην συνέχεια οι σχέσεις (iii)-(vi) αποδεικνύονται όπως πριν.
Έτσι αυτό που έχουμε να αποδείξουμε εδώ είναι ότι

$$\frac{d(x^n Y_n(x))}{dx} = x^n Y_{n-1}(x) .$$

Πρέπει να θεωρήσουμε ξεχωριστά τις υποθέσεις του ακέραιου και μη ακέραιου n.
α) Μη ακέραιος n.
Εδώ μπορούμε να γράψουμε

$$Y_n(x) = \frac{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

έτσι ώστε

$$\frac{d(x^n Y_n(x))}{dx} = \frac{1}{\sin n\pi}\left[\cos n\pi \frac{d(x^n J_n(x)}{dx} - \frac{d(x^n J_{-n}(x))}{dx}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin n\pi}\left[\cos n\pi (x^n J_{n-1}(x)) - (-x^n J_{n+1}(x))\right]$$

(όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το (i) για την 1η παράγωγο και το (ii) για την 2η παράγωγο)

$$= \frac{1}{\sin n\pi} x^n \left[\cos n\pi J_{n-1}(x) + J_{-(n-1)}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin[(n-1)\pi+\pi]} x^n \{\cos[(n-1)\pi+\pi] J_{n-1}(x) + J_{-(n-1)}(x)\}$$

$$= \frac{1}{-\sin(n-1)\pi} x^n [-\cos(n-1)\pi J_{n-1}(x) + J_{-(n-1)}(x)]$$

$$= \frac{x^n \cos(n-1)\pi J_{n-1}(x) + J_{-(n-1)}(x)}{\sin(n-1)\pi}$$

$$= x^n Y_{n-1}(x).$$

β) Ακέραιος n.
Από το (α) μέρος της απόδειξης έχουμε

$$\frac{dx^\nu Y_\nu(x)}{dx} = x^\nu Y_{\nu-1}(x).$$

Παίρνοντας το όριο αυτού του αποτελέσματος για $\nu \to n$ γνωρίζοντας ότι $Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x)$ παίρνουμε το απαιτούμενο αποτέλεσμα.

Β.3. Η γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$

Απόδειξη: Αναλύουμε την $e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ σε γινόμενο δυναμοσειρών και δείχνουμε ότι ο συντελεστής του t^n είναι η $J_n(x)$

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}=e^{\frac{1}{2}xt}e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{t}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}xt\right)^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{t}\right)^s}{s!}=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^r x^r t^r(-1)^s\left(\frac{1}{2}\right)^s x^s t^{-s}}{r!s!}=\sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{2}\right)^{r+s}\frac{x^{r+s}t^{r-s}}{r!s!}$$

Τώρα θέλουμε να πάρουμε τον συντελεστή του t^n για $n\geq 0$. Για να προκύψει το ζητούμενο θέτουμε $s=r-n$. Έτσι ο συντελεστής του t^n είναι

$$(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}.$$

Παίρνουμε τον πλήρη συντελεστή του t^n αθροίζοντας όλες τις επιτρεπόμενες τιμές του r. Αφού $s=r-n$ και απαιτούμε $s\geq 0$, θα πρέπει $r\geq n$. Έτσι ο πλήρης συντελεστής του t^n είναι

$$\sum_{r=n}^{\infty}(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!\,p!}$$

(όπου έχουμε θέσει $p=r-n$)

$$=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{\Gamma(p+n+1)\,p!}$$

(αφού το p και το n είναι ακέραιοι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\Gamma(p+n+1)=(p+n)!$)

$$=J_n(x)$$

(από τη σχέση (A.2)).

Εάν $n<0$ έχουμε τον συντελεστή του t^n για συγκεκριμένη τιμή του r που δίνεται από

$$(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}.$$

Αλλά τώρα η απαίτηση ότι $s\geq 0$ με $s=r-n$ ικανοποιείται για όλες τις τιμές του r. Έτσι ο συντελεστής του t^n είναι

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}=(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}}{r!\Gamma(r-n+1)}=(-1)^n J_{-n}(x)=J_n(x)\ .$$

Αποδείχθηκε.

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση των $J_n(x)$ ισχύει και όταν $t\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Για $t=e^{i\theta}$ έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=i\sin\theta\ ,$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση γίνεται

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=e^{ix\sin\theta}=\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)\ .$$

Εξάλλου ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t^{2n}+(-1)^{2n}t^{-2n}&=2\cos(2n\theta)\\ t^{2n-1}+(-1)^{2n-1}t^{-(2n-1)}&=2i\sin(2n-1)\theta \end{aligned}$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση δίνει

$$e^{ix\sin\theta}=\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos(2n\theta)+2i\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta\ .$$

Έχουμε καταλήξει λοιπόν στους τύπους

$$\left.\begin{aligned} \cos(x\sin\theta)&=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos(2n\theta),\\ \sin(x\sin\theta)&=2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta. \end{aligned}\right\}\quad \text{με } x,\theta\in\mathbb{R}$$

B.4. Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους

1η ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi \text{, όπου } n \text{ ακέραιος}$$

<u>Απόδειξη:</u> Αφού $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ για n ακέραιο το $e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[t^n + (-1)^n t^{-n}\right] J_n(x) .$$

Εάν τώρα γράψουμε $t = e^{i\varphi}$ τότε

$$t - \frac{1}{t} = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi .$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi}]J_n(x)$$

όμως όταν το n είναι άρτιος έχουμε

$$e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi} = e^{in\varphi} + e^{-in\varphi} = 2\cos n\varphi$$

ενώ όταν το n είναι περιττός έχουμε

$$e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi} = e^{in\varphi} - e^{-in\varphi} = 2i\sin n\varphi$$

έτσι έχουμε

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + \sum_{n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma} 2\cos n\varphi J_n(x) + \sum_{n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} 2i\sin n\varphi J_n(x)$$

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cos 2k\varphi J_{2k}(x) + i\sum_{k=1}^{\infty} 2\sin(2k-1)\varphi J_{2k-1}(x) .$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη αυτής της εξίσωσης έχουμε

$$\cos(x\sin\varphi) = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cos 2k\varphi J_{2k}(x) \tag{B.4.1}$$

$$\sin(x\sin\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\sin(2k-1)\varphi J_{2k-1}(x) \tag{B.4.2}$$

εάν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (B.4.1) με $\cos n\varphi,\ (n \geq 0)$

και εάν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (B.4.1) με $\cos n\varphi,\ (n \geq 0)$ και τα δύο μέλη της εξίσωσης (B.4.2) με $\sin n\varphi,\ (n \geq 1)$ και ολοκληρώσουμε από το 0 έως το π και χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες έχουμε

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = 0 \ \ (m \neq n)$$

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \ \ (m = n \neq 0)$$

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \pi \ \ (m = n = 0)$$

και

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi = 0 \ \ (\mathrm{m} \neq \mathrm{n})$$

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \ \ (m = n \neq 0)$$

παίρνουμε τα αποτελέσματα

$$\int_0^{\pi} \cos n\varphi \cos\left(x\sin\varphi\right) d\varphi = \pi J_n(x) \ \ (n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma)$$

$$\int_0^{\pi} \cos n\varphi \cos\left(x\sin\varphi\right) d\varphi = 0 \ \ (n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma)$$

και

$$\int_0^{\pi} \sin n\varphi \sin(x\sin\varphi) d\varphi = 0 \ \ (n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma)$$

$$\int_0^{\pi} \sin n\varphi \sin(x\sin\varphi) d\varphi = \pi J_n(x) \ \ (n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma).$$

Η πρόσθεση των δύο τελευταίων εξισώσεων δίνει

$$\int_0^{\pi} [\cos n\varphi \cos(x\sin\varphi) + \sin n\varphi \sin(x\sin\varphi)]d\varphi = \pi J_n(x)$$

για όλους τους θετικούς ακέραιους n έχουμε

$$\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi = \pi J_n(x)$$

το οποίο είναι το απαιτούμενο αποτέλεσμα για θετικό n.

Εάν το n είναι αρνητικό μπορούμε να θέσουμε $n=-m$ όπου m είναι θετικό, έτσι ώστε το απαιτούμενο αποτέλεσμα να είναι

$$\int_0^{\pi} \cos(-m\varphi - x\sin\varphi)d\varphi = \pi J_{-m}(x)$$

(όπου m είναι θετικό)

αλλά

$$\int_0^{\pi} \cos(-m\varphi - x\sin\varphi)d\varphi = \int_{\pi}^{0} \cos[-m(\pi-\theta) - x\sin(\pi-\theta)](-d\theta)$$

(όπου έχουμε αλλάξει την μεταβλητή θέτοντας $\theta = \pi - \varphi$)

$$= \int_0^{\pi} \cos\left(-m\pi + m\theta - x\sin\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} [\cos(m\theta - x\sin\theta)\cos m\pi + \sin(m\theta - x\sin\theta)\sin m\pi]d\theta$$

$$= (-1)^m \int_0^{\pi} \cos(m\theta - x\sin\theta)d\theta$$

$$= (-1)^m \pi J_m(x)$$

(εφόσον γνωρίζουμε ότι ισχύει για θετικό m)

$$= \pi J_{-m}(x)$$

$$=\pi J_n(x).$$

2η ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$J_n(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt,\ (n>-\frac{1}{2})$$

<u>Απόδειξη:</u> Θεωρώντας το ολοκλήρωμα I οριζόμενο από

$$I=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(ixt)^r}{r!}dt=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(ix)^r}{r!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt.$$

Τώρα εάν το r είναι περιττός, το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt$ είναι μια περιττή συνάρτηση του t άρα το ολοκλήρωμα είναι μηδέν ενώ εάν το r είναι άρτιος (δηλαδή να ισούται με το 2s), η ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι άρτια, έτσι έχουμε

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^{2s}dt=2\int_{0}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^{2s}dt=\int_{0}^{1}(1-u)^{n-\frac{1}{2}}u^{s-\frac{1}{2}}du$$

(όπου κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u=t^2,\ du=2tdt$)

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt=B\left(n+\frac{1}{2},s+\frac{1}{2}\right)$$

(από τον ορισμό της συνάρτησης Beta θα πρέπει να έχουμε $n>-\frac{1}{2}$ για να εξασφαλίσουμε τη σύγκλιση του ολοκληρώματος)

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r dt=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+s+1)}.$$

Έτσι

$$I=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2s}}{(2s)!}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+s+1)}=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{1}{\Gamma(n+s+1)}\frac{(2s)!}{2^{2s}s!}\sqrt{\pi}$$

(χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2x)!}{2^{2x}x!}\sqrt{\pi}$)

άρα

$$I=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}}{\Gamma(n+s+1)s!}$$

άρα

$$I=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}J_n(x)$$

(από την εξίσωση $J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$)

έτσι

$$J_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}I$$

άρα

$$J_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt\ .$$

B.5. Οι ρίζες των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους

Όσον αφορά τις ρίζες των συναρτήσεων $J_n(x)$ ισχύει:

<u>Πρόταση B.5.1:</u> (i) Οι συναρτήσεις Bessel $J_n(x),\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, έχουν αριθμήσιμο πλήθος θετικών απλών ριζών $x_k,\ k\in\mathbb{N}$, με $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\infty$.
(ii) Μεταξύ δύο διαδοχικών θετικών ριζών της $J_n(x)$ υπάρχει ακριβώς μια πολλαπλή ρίζα της $J_{n-1}(x)$ και ακριβώς μια ρίζα της $J_{n+1}(x)$.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Οι ρίζες είναι απλές.
Πράγματι· αν το $x_0>0$ ήταν μια πολλαπλή ρίζα της $J_n(x)$, τότε θα έπρεπε $J_n(x_0)=J_n'(x_0)=0$. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0,\ y(x_0)=y'(x_0)=0$$

έχει, σύμφωνα με το θεώρημα υπάρξεως και μοναδικότητας, μια μοναδική λύση, την $y(x)\equiv 0$. Επειδή η $J_n(x)$ είναι λύση του παραπάνω προβλήματος, θα έπρεπε $J_n(x)=0$ για κάθε $x>0$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $J_0(x)$, η οποία γράφεται:

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta \xrightarrow{t=x\sin\theta} J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{x}\frac{\cos t}{\sqrt{x^2-t^2}}dt$$

ή

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{x}K(t,x)dt\,, \tag{B.5.1}$$

όπου $K(t,x)=\dfrac{\cos t}{\sqrt{x^2-t^2}}$.

Έστω $t_k=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, οι θετικές ρίζες του $\cos t$. Τότε για $x=t_\lambda$ από την (B.5.1) παίρνουμε

$$J_0(t_\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{t_0}K(t,t_\lambda)dt+\sum_{k=0}^{\lambda-1}\frac{2}{\pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}}K(t,t_\lambda)dt=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{t_0}\left|K(t,t_\lambda)\right|dt}_{=:A_0}+\sum_{k=0}^{\lambda-1}(-1)^{k+1}\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|K(t,t_\lambda)\right|dt}_{:=A_{k+1}}=$$

$$=A_0-A_1+A_2+\ldots+(-1)^{\lambda}A_\lambda\,.$$

Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα A_k διαπιστώνεται εύκολα ότι για $k = 0,1,...,\lambda - 1$ ισχύει $0 < A_k < A_{k+1}$. Επομένως

$$J_0(t_\lambda) = A_0 + \left(A_2 - A_1\right) + ... + \left(A_\lambda - A_{\lambda-1}\right) > 0, \text{ όταν } \lambda \text{ άρτιος}$$
$$J_0(t_\lambda) = \left(A_0 - A_1\right) + \left(A_2 - A_3\right) + ... + \left(A_{\lambda-1} - A_\lambda\right) < 0, \text{ όταν } \lambda \text{ περιττός}$$

που σημαίνει ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $\cos t$ υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $J_0(t_\lambda)$. Μια δυναμοσειρά, όπως η $J_0(x)$, δεν μπορεί να έχει απείρου πλήθους ρίζες σε ένα φραγμένο διάστημα. Επομένως η $J_0(x)$ έχει στα διαστήματα της μορφής $\left[(2k-1)\dfrac{\pi}{2},\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$ πεπερασμένου πλήθους ρίζες, που σημαίνει ότι συνολικά οι ρίζες της $J_0(x)$ είναι αριθμήσιμου πλήθους. Επειδή $\lim_k (2k-1)\dfrac{\pi}{2} = +\infty$ έπεται ότι η ακολουθία των ριζών της $J_0(x)$ συγκλίνει στο $+\infty$.

Η αντίστοιχη ιδιότητα για της συναρτήσεις $J_1, J_2, ...$ προκύπτει αμέσως επαγωγικά από το (ii).

(ii) Έστω x_1, x_2, με $x_1 < x_2$, δύο διαδοχικές ρίζες της συναρτήσεως $J_n(x)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle και τους αναγωγικούς τύπους (i) και (ii), θα υπάρχει στο διάστημα (x_1, x_2) τουλάχιστον μια ρίζα της $J_{n-1},\ n \geq 1,$ και τουλάχιστον μία ρίζα της $J_{n+1},\ n \geq 0$. Επίσης προκύπτει ότι υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της J_{n-1} και ακριβώς μια ρίζα της J_{n+1}.

B.6. Ορθογωνιότητα συναρτήσεων Bessel

Η συνάρτηση Bessel $J_p(x)$, για σταθερό $p \geq 0,$ έχει αριθμήσιμο πλήθος απλών θετικών ριζών $(\rho_n),\ n \in \mathbb{N}$, με την ιδιότητα $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = +\infty$. Για τις ρίζες της $J_p(x)$ ισχύει ο ακόλουθος προσεγγιστικός τύπος

$$\rho_k \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} p + k\pi .$$

Στο γραμμικό χώρο $C[\alpha, \beta]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$ εισάγουμε ένα εσωτερικό γινόμενο ως εξής:

Για $f(x), g(x) \in C[\alpha, \beta]$

$$< f, g > := \int_\alpha^\beta f(x)g(x)r(x)dx,$$

όπου $r(x) \in C[\alpha, \beta]$ είναι μια αυθαίρετη και αυστηρά θετική συνάρτηση, την οποία ονομάζουμε συνάρτηση βάρους. Για το παραπάνω γινόμενο ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $f(x), g(x) \in C[\alpha, \beta]$ είναι ορθογώνιες, όταν $<f, g>=0$. Μια ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $C[\alpha, \beta]$ θα λέμε ότι αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα ως προς τη συνάρτηση βάρους $r(x)$, όταν

$$<F_n, F_m>=0 \text{ για } n \neq m$$

Ισχύει το επόμενο βασικό θεώρημα, που αφορά στην ορθογωνιότητα των συναρτήσεων Bessel.

<u>Θεώρημα Β.6.1:</u> Δίνονται $p \geq 0$ και $a > 0$. Για την ακολουθία των συναρτήσεων Bessel $\left(J_p(\lambda_n x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $\lambda_n = \dfrac{\rho_n}{\alpha}$ και ρ_n η n-ιοστή θετική ρίζα της $J_p(x)$, ισχύουν:

$$\int_0^a J_p(\lambda_n x) J_p(\lambda_m x) x dx = 0, \text{ όταν } n \neq m \tag{B.6.1}$$

και

$$\int_0^a J_p^2(\lambda_n x) x dx = \frac{a^2}{2} J_{p+1}^2(\rho_n), \text{ όταν } m = n \tag{B.6.2}$$

Η ισότητα (Β.6.1) δηλώνει ότι οι συναρτήσεις $\left(J_p(\lambda_n x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα στο διάστημα $[0, a]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $r(x) = x$.
Στην ειδική περίπτωση που $a = 1$ οι ισότητες (Β.6.1) και (Β.6.2) παίρνουν την μορφή

$$\int_0^1 J_p(\rho_n x) J_p(\rho_m x) x dx = 0, \text{ όταν } m \neq n$$

$$\int_0^1 J_p(\rho_n x) J_p(\rho_m x) x dx = \frac{1}{2} J_{p+1}^2(\rho_n), \text{ όταν } m = n.$$

Β.7. Σειρές Fourier-Bessel

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$, ορισμένη στο διάστημα $[0, a]$. Σε πολλά προβλήματα εφαρμογών είναι ενδιαφέρον να αναπτύξουμε τη συνάρτηση αυτή σε μια σειρά της μορφής

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n J_p(\lambda_n x), \tag{B.7.1}$$

όπου τα λ_n έχουν οριστεί στο προηγούμενο θεώρημα. Η παραπάνω σειρά ονομάζεται σειρά Fourier-Bessel τάξεως p της f και οι A_n συντελεστές Fourier-Bessel της f.
Αν υποθέσουμε ότι το ανάπτυγμα της (B.7.1) ισχύει, τότε για τον υπολογισμό των συντελεστών A_n θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των συναρτήσεων J_p, που αναφέρονται στο προηγούμενο θεώρημα.

Πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της (B.7.1) με $J_p(\lambda_m x)x$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0,a]$ παίρνουμε

$$\int_0^a f(x)J_p(\lambda_m x)xdx=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_o^a J_p(\lambda_n x)J_p(\lambda_m x)xdx \xrightarrow{(B.8.1)} \int_0^a f(x)J_p(\lambda_m x)xdx = A_m\int_0^a J_p^2(\lambda_m x)xdx\,.$$

Επομένως από την (B.7.2), βρίσκουμε

$$A_n=\frac{2}{a^2J_{p+1}^2(\rho_n)}\int_0^a f(x)J_p(\lambda_n x)xdx\,. \tag{B.7.2}$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Fourier-Bessel.

<u>Θεώρημα B.7.1:</u> Δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$ τμηματικά λεία στο διάστημα $[0,a]$. Για κάθε $x\in(0,a)$ ισχύει

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n J_p(\lambda_n x),$$

όπου $\lambda_n=\dfrac{\rho_n}{a}$ και ρ_n η n-ιοστή θετική ρίζα της συναρτήσεως Bessel $J_p(x)$.

Οι συντελεστές A_n δίνονται από τον τύπο (B.7.2).

<u>Παρατήρηση:</u> Για $x=0$ η σειρά συγκλίνει στο $f(0+0)$, ενώ για $x=a$ συγκλίνει στο 0.

<u>Παράδειγμα B.7.1:</u> Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier-Bessel τάξεως 2 η συνάρτηση $f(x)=x^2,\ 0<x<1.$

<u>Λύση:</u> Σύμφωνα με το θεώρημα, το ανάπτυγμα δίνεται από την ισότητα

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_2(\rho_n x),\ \ 0 < x < 1,$$

όπου ρ_n η n-ιοστή θετική ρίζα της $J_2(x)$.

Οι συντελεστές, σύμφωνα με την (B.7.2) θα είναι

$$A_n = \frac{2}{J_3^2(\rho_n)} \int_0^1 x^2 J_2(\rho_n x) x dx \,.$$

Επειδή

$$\int_0^1 x^3 J_2(\rho_n x) dx = \left(\text{θέτουμε } t = \rho_n x\right) = \frac{1}{\rho^4} \int_0^{\rho_n} t^3 J_2(t) dt$$

από $(x^p J_p(x))' = x^p J_{p-1}(x)$ έχουμε

$$\frac{1}{\rho_n^4} [t^3 J_3(t)]_0^{\rho_n} = \frac{1}{\rho_n} J_3\left(\rho_n\right)$$

άρα

$$A_n = \frac{2}{J_3^2(\rho_n)} \frac{J_3(\rho_n)}{\rho_n} = \frac{2}{\rho_n J_3(\rho_n)}$$

και τελικά

$$x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n J_3(\rho_n)} J_2(\rho_n x),\ \ 0 < x < 1 \,.$$

<u>Σημείωση:</u> Σύμφωνα με την παρατήρηση, η σειρά για $x = 0$ συγκλίνει στο 0 και για $x = 1$ επίσης στο 0, αφού το $J_2(\rho_n 1) = J_2(\rho_n) = 0$.

B.8. Παραμετρική μορφή της εξίσωσης Bessel

Πολλές φορές, χρησιμοποιώντας το χωρισμό των μεταβλητών για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, καταλήγουμε σε προβλήματα ιδιοτιμών της μορφής:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda^2 x^2 - p^2) y(x) = 0,\ \ 0 \le x \le a \qquad \text{(B.8.1)}$$

$$y(0) < +\infty \qquad \text{(B.8.2)}$$

$$y(a) = 0 \tag{B.8.3}$$

όπου $p \geq 0$ σταθερός αριθμός και λ παράμετρος.

Για την επίλυση του προβλήματος κάνουμε την αλλαγή της μεταβλητής $z = \lambda x$ και γράφουμε $u(z) = y(x) = y\left(\frac{z}{\lambda}\right)$, οπότε η (B.8.1) παίρνει την μορφή

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - p^2)u(z) = 0$$

η οποία είναι εξίσωση Bessel τάξεως p με γενική λύση

$$u(z) = C_1 J_p(z) + C_2 Y_p(z).$$

Επομένως η γενική λύση της (B.8.1) είναι

$$y(z) = C_1 J_p(\lambda x) + C_2 Y_p(\lambda x).$$

Ένεκα της συνθήκης (B.8.2) και επειδή $\lim_{x \to 0^+} Y_p(x) = -\infty$ έπεται ότι $C_2 = 0$. Η συνθήκη (B.8.3) μας δίνει $J_p(\lambda a) = 0$, που σημαίνει ότι οι τιμές της παραμέτρου λ που ικανοποιούν το πρόβλημα είναι $\lambda_n = \frac{\rho_n}{a}$ $\left(\lambda_n a = \rho_n\right)$, $n \in \mathbb{N}$ όπου ρ_n είναι οι θετικές ρίζες της συναρτήσεως Bessel $J_p(x)$.

Επομένως μη τετριμμένες λύσεις του προβλήματος είναι

$$y(x) = J_p(\lambda_n x), \text{ όπου } \lambda_n = \frac{\rho_n}{a}.$$

<u>Σημείωση:</u> Πιο σωστά θα έπρεπε τις θετικές ρίζες της συναρτήσεως Bessel $J_p(x)$ να τις συμβολίσουμε με ρ_{pn}, $n \in \mathbb{N}$, οπότε και $\lambda_{pn} = \frac{\rho_{pn}}{a}$. Όμως χρησιμοποιούμε την πιο πάνω γραφή όταν δεν υπάρχει περίπτωση συγχύσεως.

Γ. Εφαρμογή: Το πρόβλημα Diriclet σε κύλινδρο

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα Diriclet σε κυλινδρικά πεδία. Η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες τις συναρτήσεως $u(r,\theta,z)$ είναι

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0\,.$$

Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε μία ειδική περίπτωση, όπου η λύση δε θα εξαρτάται από τη γωνία θ, οπότε η εξίσωση Laplace θα έχει τη μορφή

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0$$

και θα μηδενίζουμε τη συνάρτηση u στην παράπλευρη επιφάνεια.
Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται από τις συνθήκες

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0,\ 0<r<a,\ 0<z<h \tag{E}$$

$$\begin{aligned} &u(r,0)=0,\ 0<r<a\\ &u(r,h)=\varphi(r),\ 0<r<a\\ &u(a,z)=0,\ 0<z<h \end{aligned} \tag{Σ}$$

Θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $u(r,z)=R(r)Z(z)$ (χωριζόμενων μεταβλητών), οπότε από την εξίσωση (Ε) και τις συνοριακές συνθήκες $u(r,0)=0$ και $u(a,z)=0$ προκύπτουν οι εξισώσεις

$$r^2R''+rR'-\mu r^2R=0,\ R(a)=0, \tag{Γ.1}$$

$$Z''+\mu Z=0,\ Z(0)=0, \tag{Γ.2}$$

όπου μ είναι η σταθερά χωρισμού των μεταβλητών.

Αν $\mu=0$, τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι $R(r)=0$, δηλαδή έχουμε τετριμμένη λύση.

Αν $\mu=\lambda^2>0$, τότε η (Γ.1) είναι μια παραμετρική μορφή της τροποποιημένης εξίσωσης Bessel τάξεως 0, με γενική λύση

$$R(r)=AI_0(\lambda r)+BK_0(\lambda r)\,. \tag{Γ.3}$$

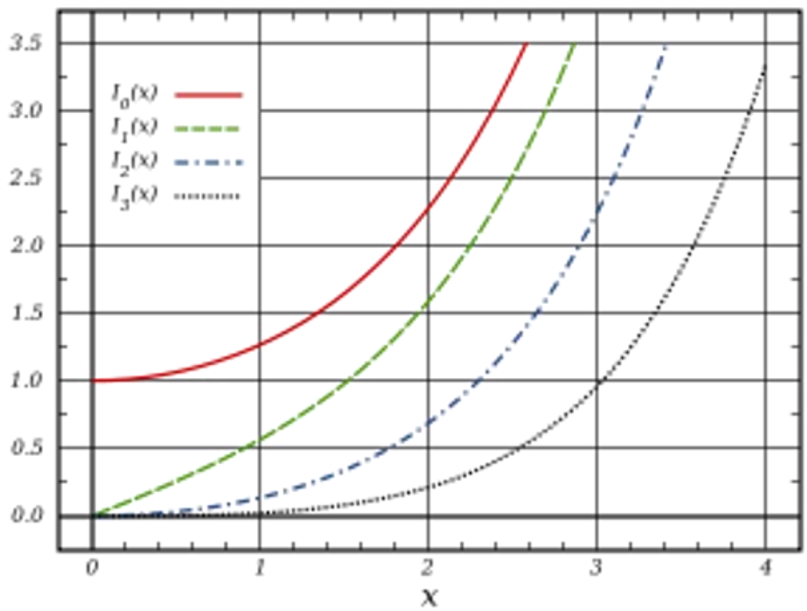
Οι συναρτήσεις I_0 και K_0 είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Σημείωση: Η τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Bessel είναι

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2) y = 0$$

και ικανοποιείται από την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξεως p

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!\Gamma(k+p+1)} \qquad \text{(σχήμα Γ.1)}$$

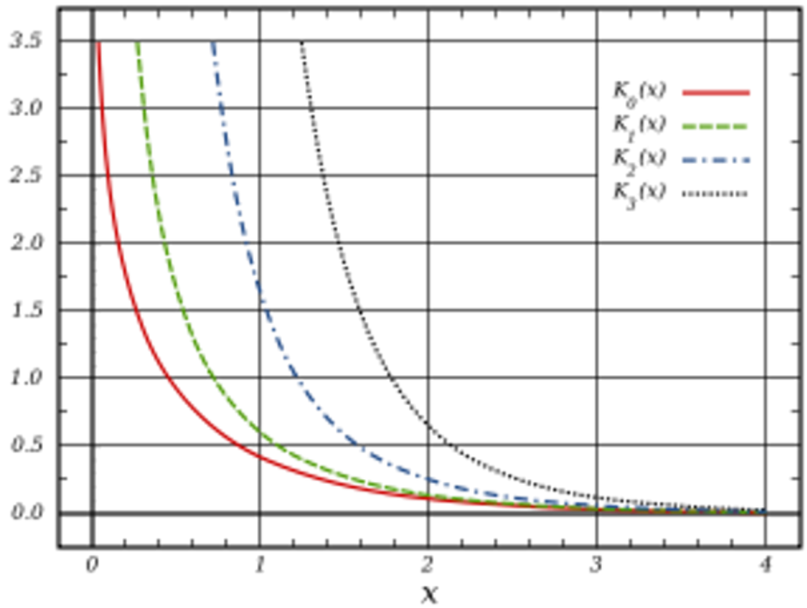


(σχήμα Γ.1)

Αν ο p δεν είναι ακέραιος μια δεύτερη λύση της εξίσωσης αυτής γραμμικώς ανεξάρτητη της $I_p(x)$ είναι η

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2\sin(p\pi)}[I_{-p}(x) - I_p(x)] \qquad \text{(σχήμα Γ.2)}$$

που ονομάζεται τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους τάξεως p .



(σχήμα Γ.2)

Επειδή οι συναρτήσεις αυτές δεν φραγμένες, συμπεραίνουμε ότι η (Γ.3) δε δίνει μη τετριμμένες φραγμένες λύσεις. Επομένως θα πρέπει $\mu = -\lambda^2 < 0$. Στην περίπτωση αυτή οι (Γ.1) και η (Γ.2) παίρνουν τη μορφή

$$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0,\ R(a) = 0, \tag{Γ.4}$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0,\ Z(0) = 0. \tag{Γ.5}$$

Μη τετριμμένες λύσεις της (Γ.4) είναι οι συναρτήσεις

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r),$$

όπου $\lambda_n = \dfrac{\rho_n}{\alpha}$, $n = 1, 2, ..., \rho_n$ είναι η n-ιοστή θετική ρίζα της συναρτήσεως Bessel J_0.

Η εξίσωση (Γ.5) έχει λύσεις της μορφής

$$Z_n(z) = \sinh(\lambda_n z),\ n = 1, 2, \ldots .$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, μια (τυπική) λύση του προβλήματος είναι

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \sinh(\lambda_n z).$$

Αν στη τελευταία ισότητα θέσουμε $z = h$, τότε παίρνουμε

$$\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n h),$$

που σημαίνει ότι οι συντελεστές $A_n \sinh(\lambda_n h)$ πρέπει να είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος της $\varphi(r)$ σε σειρά Fourier-Bessel.

Από τη παραπάνω μελέτη συμπεραίνουμε ότι:

Η λύση του προβλήματος (Ε)-(Σ) είναι

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n z),$$

όπου

$$A_n = \frac{2}{\sinh(\lambda_n h) a^2 J_1^2(\rho_n)} \int_0^a \varphi(r) J_0(\lambda_n r) r dr,$$

$\lambda_n = \frac{\rho_n}{a}$ και ρ_n η n-ιοστή θετική ρίζα της συναρτήσεως Bessel J_0.

Παράδειγμα Γ.1: Να λυθεί το πρόβλημα (Ε)-(Σ) στην περίπτωση $a=1,\ h=2$ και $\varphi(r)=50$.

Λύση: Σύμφωνα με την παραπάνω λύση έχουμε

$$A_n = \frac{2}{\sinh(2\rho_n) J_1^2(\rho_n)} \int_0^1 50 J_0(\rho_n r) r dr.$$

Επειδή

$$\int_0^1 J_0(\rho_n r) r dr = (\rho_n r = t) = \frac{1}{\rho_n^2}\int_0^{\rho_n} J_0(t) t dt = \frac{1}{\rho_n^2}[tJ_1(t)]_0^{\rho_n} = \frac{1}{\rho_n} J_1(\rho_n)$$

άρα για τους συντελεστές A_n έχουμε

$$A_n = \frac{100}{\rho_n \sinh(2\rho_n) J_1(\rho_n)},\ n = 1,2,...$$

οπότε η λύση του προβλήματος είναι

$$u(r,z) = 100\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n r)}{\rho_n J_1(\rho_n)\sinh(2\rho_n)} \sinh(\rho_n z).$$

Κεφάλαιο 2: Συναρτήσεις Legendre

Α. Η εξίσωση Legendre και οι λύσεις της

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση Legendre τάξεως a

$$(1-x^2)y''-2xy'+a(a+1)y=0,\ a\in\mathbb{R}$$

κάθε λύση της οποίας ονομάζεται συνάρτηση Legendre για $x\in(-1,1)$ γράφεται υπό τη μορφή

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{a(a+1)}{1-x^2}y=0.$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $p(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2}$ και $q(x)=\dfrac{a(a+1)}{1-x^2}$ αναπτύσσονται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και ακτίνα 1. Επομένως, κάθε λύση της εξίσωσης Legendre μπορεί να γραφεί με τη μορφή δυναμοσειράς

$$y(x)=\sum a_\nu x^\nu ,$$

η οποία συγκλίνει τουλάχιστον στο διάστημα $(-1,1)$,

επομένως θα ικανοποιείται η εξίσωση

$$(1-x^2)\sum(\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2}x^\nu-2x\sum(\nu+1)a_{\nu+1}x^\nu+a(a+1)\sum a_\nu x^\nu=0$$

ή, θέτοντας $a(a+1)=b$,

$$2a_2+ba_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}[(\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2}-\nu(\nu-1)a_\nu-2\nu a_\nu+ba_\nu]x^\nu=0.$$

Επομένως θα πρέπει

$$2a_2+ba_0=0$$

και

$$(\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2}-[\nu(\nu+1)-b]a_\nu=0,\ \nu=1,2,\ldots$$

από τις οποίες προκύπτει ο αναγωγικός τύπος

$$a_{\nu+2} = \frac{\nu(\nu+1)-b}{(\nu+2)(\nu+1)}a_\nu,\ \nu = 0,1,2,\dots.$$

Έτσι οι συντελεστές θα είναι

$$a_2 = -\frac{b}{2}a_0$$
$$a_4 = \frac{2\cdot 3 - b}{3\cdot 4}a_2 = -\frac{b}{4}\left(1-\frac{b}{2\cdot 3}\right)a_o$$
$$a_6 = \frac{4\cdot 5 - b}{5\cdot 6}a_4 = \dots = -\frac{b}{6}\left(1-\frac{b}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{b}{4\cdot 5}\right)a_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{2k} = \frac{b}{2k}\left(1-\frac{b}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{b}{4\cdot 5}\right)\dots\left(1-\frac{b}{(2k-2)(2k-1)}\right)a_0,\ k = 2,3,\dots$$

με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\left(1-\frac{b}{1\cdot 2}\right)\left(1-\frac{b}{3\cdot 4}\right)\dots\left(1-\frac{b}{(2k-1)2k}\right)a_1,\ k = 1,2,\dots$$

επομένως η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως Legendre είναι

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),\ x\in(-1,1)$$

όπου

$$y_1(x) = 1 - \frac{a(a+1)}{2}x^2 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{a(a+1)}{2k}\left(1-\frac{a(a+1)}{2\cdot 3}\right)\dots\left(1-\frac{a(a+1)}{(2k-2)(2k-1)}\right)x^{2k},$$
$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(1-\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\right)\dots\left(1-\frac{a(a+1)}{(2k-1)2k}\right)x^{2k+1}$$

και a_0, a_1 αυθαίρετες σταθερές.

Παρατηρούμε ότι αν ο a είναι ένας άρτιος $n = 2k$, τότε $a_{n+2} = a_{n+4} = \dots = 0$, οπότε η λύση $y_1(x)$ εκφυλίζεται σε ένα πολυώνυμο $\Pi_n(x)$ βαθμού $n = 2k$. Ανάλογα· αν ο a είναι ένας περιττός $n = 2k+1$, τότε η λύση $y_2(x)$ εκφυλίζεται σε ένα πολυώνυμο Π_n βαθμού $n = 2k+1$. Επομένως όταν ο a είναι ένας φυσικός n, δηλαδή η εξίσωση Legendre είναι της μορφής

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

για $n=0,1,2,...$ η οποία γράφεται συνήθως με τη μορφή

$$((1-x^2)y')'+n(n+1)y=0$$

τότε η εξίσωση έχει λύση ένα πολυώνυμο Π_n βαθμού n, που περιέχει όρους μόνο άρτιου ή περιττού βαθμού. Οι συντελεστές του πολυωνύμου ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$a_v=-\frac{(v+1)(v+2)}{(n-v)(n+v+1)}a_{v+2},\ v=0,1,2,...,n-2\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε το πολυώνυμο Π_n επί ένα σταθερό αριθμό κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ο συντελεστής του x^n να είναι

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,,$$

ή ισοδύναμα θέτουμε στον προηγούμενο αναγωγικό τύπο $a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$,

οπότε βρίσκουμε τους συντελεστές του νέου πολυωνύμου $P_n(x)$:

$$\begin{aligned}
a_{n-2}&=-\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n=\frac{-(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}\\
a_{n-4}&=-\frac{(n-3)(n-2)}{4(2n-3)}a_{n-2}=\frac{(2n-4)!}{2^n2!(n-2)!(n-4)!}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-2k}&=\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}.
\end{aligned}$$

Επομένως το πολυώνυμο $P_n(x)$, που προφανώς είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Legendre (αφού είναι πολλαπλάσιο του Π_n), γράφεται

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{A.1}$$

όπου $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ είναι το ακέραιο μέρος του $\dfrac{n}{2}$.

Τα παραπάνω πολυώνυμα ονομάζονται πολυώνυμα Legendre βαθμού n.

B. Ιδιότητες των συναρτήσεων Legendre

B.1. Γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-2tx+t^2\right)}}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) \text{ εάν } |t|<1 \text{ και } |x|\leq 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι όταν το $\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ αναλύεται σε δυνάμεις του t, ο συντελεστής του t^n είναι ο $P_n(x)$. Το $\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ ονομάζεται γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre.

<u>Απόδειξη:</u> Αναλύουμε το $\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ με το διωνυμικό θεώρημα

$$\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[1-t(2x-t)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-t(2x-t)\right]+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left[-t(2x-t)\right]^2+\ldots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{r!}\left[-t(2x-t)\right]^r+\ldots$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2r-1)}{2^r\,r!}(-1)^r t^r(2x-t)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}t^r(2x-t)^r.$$

Τώρα αναλύουμε το $(2x-t)^r$ με το διωνυμικό θεώρημα (γνωρίζουμε ότι ο r είναι ακέραιος)

$$(2x-t)^r=\sum_{p=0}^{r}{}^rC_p(2x)^{r-p}(-t)^p$$

όπου το ${}^rC_p$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής $\dfrac{r!}{p!(r-p)!}$

έτσι τώρα έχουμε

$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}\sum_{p=0}^{r}{}^rC_p(-1)^P t^{r+p}(2x)^{r-p}\ . \qquad \text{(B.1.1)}$$

Για να βρούμε τον συντελεστή του t^n, πρέπει να θέσουμε $r+p=n$ και έτσι για μια ορισμένη τιμή του r παίρνουμε $p=n-r$. Αλλά το p παίρνει τιμές $0 \le p \le r$. Θα πρέπει να πάρουμε μόνο εκείνες τις τιμές του r που ικανοποιούν τη σχέση $0 \le n-r \le r$ άρα $\frac{1}{2}n \le r \le n$. Έτσι εάν n είναι άρτιος το r παίρνει τιμές μεταξύ του $\frac{1}{2}(n+1)$ και n. Για κάθε μια από αυτές τις τιμές του r τον συντελεστή του t^n στην εξίσωση (B.1.1) τον παίρνουμε θέτοντας $p=n-r$ άρα

$$\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2}\,{}^{r}C_{n-r}(-1)^{n-r}(2x)^{r-(n-r)}$$

και τον πλήρη συντελεστή του t^n τον παίρνουμε αθροίζοντας όλες τις επιτρεπόμενες τιμές του r άρα ο συντελεστής του t^n είναι

$$\sum_{\substack{r=\frac{n}{2}\ (\text{για n άρτιος})\\ r=\frac{n+1}{2}\ (\text{για n περιττός})}}^{n} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} C_{n-r}(-1)^{n-r}(2x)^{2r-n}\ .$$

Εάν τώρα αλλάξουμε την μεταβλητή άθροισης από r σε $k=n-r$ ο συντελεστής του t^n είναι ο

$$\sum_{\substack{r=\frac{n}{2}\ (\text{για n άρτιος})\\ r=\frac{n+1}{2}\ (\text{για n περιττός})}}^{n} \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}[(n-k)!]^2}\,{}^{n-k}C_k(-1)^k(2x)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}[(n-k)!]^2}\frac{(n-k)!}{(n-2k)!k!}(-1)^k 2^{n-2k}x^{n-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n(n-k)!(n-2k)!k!}x^{n-2k}$$

$$= P_n(x)$$

έτσι το ζητούμενο αποτέλεσμα αποδείχτηκε. Ο περιορισμός στις τιμές του x προέρχεται από την συνθήκη σύγκλισης της διωνυμικής ανάλυσης του $[1-t(2x-t)]^{-\frac{1}{2}}$ δηλαδή $|t(2x-t)|<1$. Όταν $|x|\le 1$ αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με $|t|<1$.

B.2. Άλλες εκφράσεις για τα πολυώνυμα Legendre

Ο τύπος του Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

<u>Απόδειξη:</u> Μπορούμε να αναλύσουμε το $(x^2-1)^n$ με το διωνυμικό θεώρημα

$$(x^2-1)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r (-1)^r x^{2(n-r)} .$$

Έτσι

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r (-1)^r x^{2n-2r}}{dx^n} \tag{B.2.1}$$

αλλά η n-ιοστή παράγωγος μια δύναμης του x μικρότερης από το n είναι μηδέν έτσι ώστε

$$\frac{d^n x^{2n-2r}}{dx^n} = 0 \text{ εάν } 2n-2r < n \text{ άρα } r > \frac{n}{2} .$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\sum_{r=0}^{n}$ με το $\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}$ εάν το n είναι άρτιος και με το $\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}$ εάν το n είναι περιττός άρα το $\sum_{r=0}^{n}$ το αντικαθιστούμε με το $\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ όπου το $\left[\frac{n}{2}\right]$ ορίστηκε παραπάνω.

Ακόμα

$$\frac{d^n x^p}{dx^n} = p(p-1)(p-2)...(p-n+1)x^{p-n} = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$$

έτσι ώστε

$$\frac{d^n x^{2n-2r}}{dx^n} = \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r}$$

την αντικαθιστούμε στην εξίσωση (B.2.1) και έχουμε

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}=\frac{1}{2^n n!}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{r!(n-r)!}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}x^{n-2r}=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}=P_n(x)$$

(από (Α.1))

Ολοκληρωτική αναπαράσταση του Laplace

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n\,d\theta$$

Απόδειξη: Μπορεί να φανεί από στοιχειώδης μεθόδους (για παράδειγμα μέσω της αντικατάστασης $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$)

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\lambda\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,. \qquad \text{(Β.2.2)}$$

Εάν τώρα θέσουμε $\lambda=-\dfrac{u\sqrt{x^2-1}}{1-ux}$ και αναλύσουμε και τα δύο μέρη της εξίσωσης (Β.2.2) σε δυνάμεις του u και εξισώσουμε τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του u θα πάρουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα

$$\frac{1}{1+\lambda\cos\theta}=\frac{1}{1-\dfrac{u\sqrt{x^2-1}}{1-ux}\cos\theta}$$

$$=(1-ux)\left[1-u\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)\right]^{-1}$$

$$=(1-ux)\sum_{n=0}^{\infty}u^n\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^n$$

(από το διωνυμικό θεώρημα $(1-\alpha)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n$)

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\lambda^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2\left(x^2-1\right)}{(1-ux)^2}}}$$

$$= \frac{1-ux}{\sqrt{(1-ux)^2 - u^2(x^2-1)}}$$

$$= \frac{1-ux}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$$

(το αντικαθιστούμε στην εξίσωση (Β.2.2) και παίρνουμε)

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} u^n \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta \right)^n d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta \right)^n d\theta = \pi \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n(x)$$

(από τη γεννήτρια συνάρτηση).

Εξισώνοντας τους συντελεστές του u^n έχουμε

$$\pi P_n(x) = \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta \right) d\theta$$

το οποίο είναι το απαιτούμενο αποτέλεσμα.

Β.3. Αναλυτικές εκφράσεις των πολυωνύμων Legendre

Από τη σχέση

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} ,$$

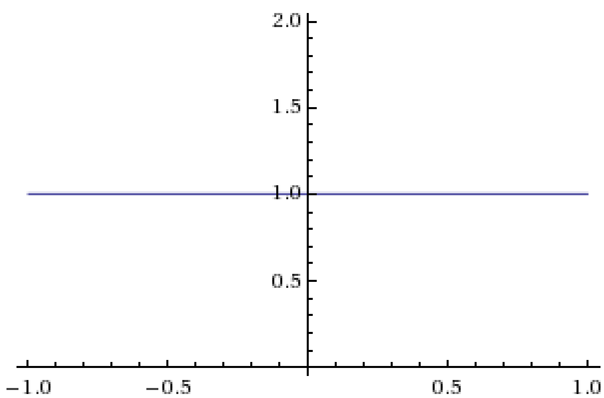
όπου $\left[\frac{n}{2}\right]$ είναι το ακέραιο μέρος του $\frac{n}{2}$.

Μπορούμε να γράψουμε τα πολυώνυμα Legendre σε οποιαδήποτε σειρά. Για $n = 0,1,2,3,4$ τα πρώτα πέντε πολυώνυμα Legendre είναι:

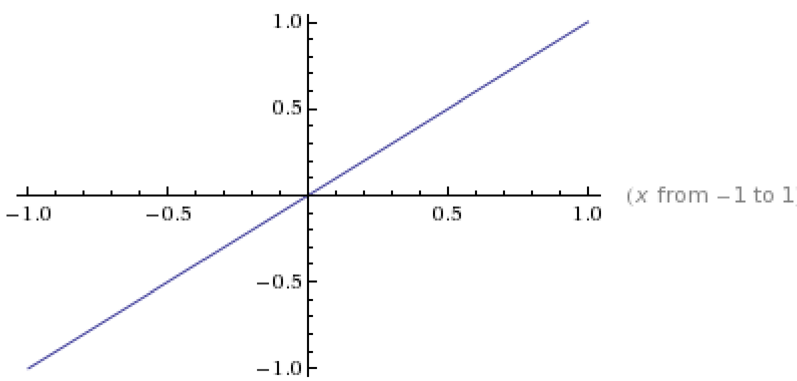
$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

και οι γραφικές τους παραστάσεις είναι:

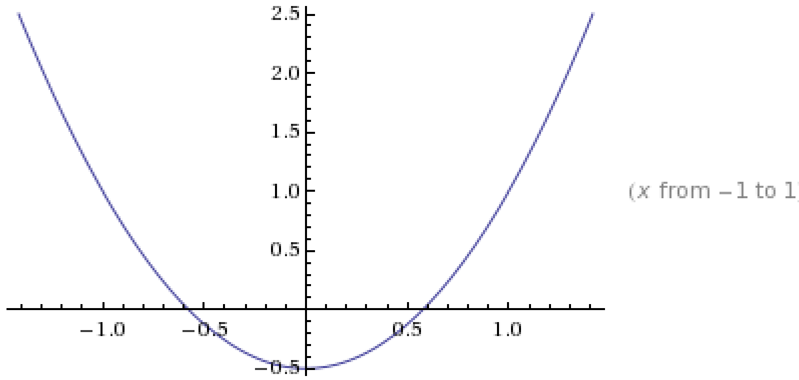
$$P_0(x) = 1$$



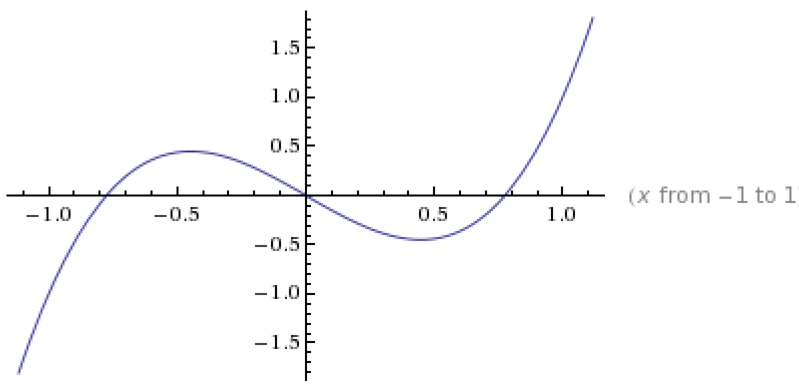
$$P_1(x) = x$$



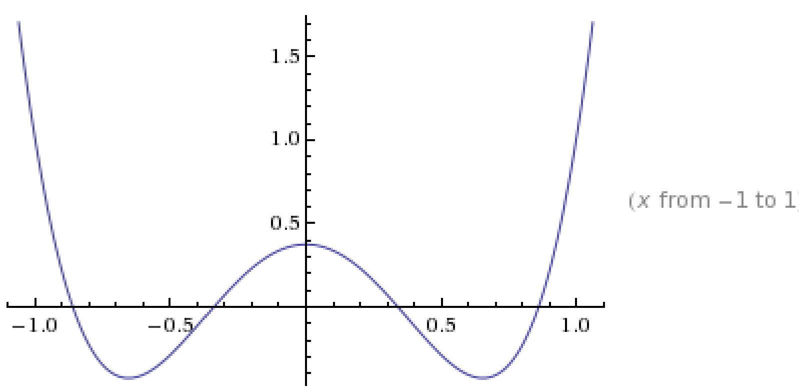
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$



$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$



$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$



B.4. Ειδικές τιμές των πολυωνύμων Legendre

(i) $P_n(1)=1$

(ii) $P_n(-1)=(-1)^n$

(iii) $P_n'(1)=\frac{1}{2}n(n+1)$

(iv) $P_n'(-1)=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$

(v) $P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

(vi) $P_{2n+1}(0)=0$

<u>Απόδειξη:</u>

(i) Για $x=1$ στη γεννήτρια συνάρτηση παίρνουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(1)$$
$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(1)$$

αλλά $\frac{1}{1-t}=\sum_{t=0}^{\infty}t^n$ (από το διωνυμικό θεώρημα ή θεωρώντας το δεξί μέλος σαν άπειρο άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου) έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(1)$. Για να ισχύει για όλες τις τιμές του t σε κάποιο διάστημα (σε αυτή την περίπτωση $|t|<1$) πρέπει να εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δυνάμεων του t, εδώ προκύπτει $P_n(1)=1$.

(ii) Ακριβώς το ίδιο με το (i) αλλά θέτουμε $x=-1$ στην γεννήτρια συνάρτηση.

(iii) Η $P_n(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση Legendre $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$

άρα έχουμε

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}+n(n+1)P_n(x)=0 \qquad \text{(B.4.1)}$$

για $x=1$ σε αυτήν την εξίσωση παίρνουμε

$$-2P_n'(1)+n(n+1)P_n(1)=0$$

χρησιμοποιώντας το (i) έχουμε

$$P_n'(1)=\frac{1}{2}n(n+1).$$

(iv) Ακριβώς όπως στο (iii), θέτουμε $x=-1$ στην εξίσωση (B.4.1) και χρησιμοποιούμε το (ii).

(v),(vi) Για $x=0$ στην γεννήτρια συνάρτηση παίρνουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(0)$$

αναλύοντας το αριστερό μέλος με το διωνυμικό θεώρημα παίρνουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(t^2)^2+\ldots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left[-\frac{(2n-1)}{2}\right]}{n!}(t^2)^n+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}t^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2^n n!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)2n}t^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!2^n n!}t^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}$$

έτσι έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(0)$$

και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των δυνάμεων του t και στα δύο μέλη παίρνουμε

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$
$$P_{2n+1}(0) = 0.$$

B.5.

Η συνάρτηση $P_n(x)$ είναι άρτια για άρτιο n και περιττή για περιττό n.

B.6. Σειρά Legendre

Εάν η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n τότε

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x) \text{ με } c_r = \left(r + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx .$$

Επίσης εάν η $f(x)$ είναι άρτια (ή περιττή), μόνο εκείνα τα c_r με άρτιο (ή περιττό) δείκτη είναι μη μηδενικά.

Απόδειξη: Έχουμε $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ και μπορούμε να γράψουμε $P_n(x) = k_n x^n + k_{n-2}x^{n-2} + ...$ (από την εξίσωση (Α.1) η $P_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, που περιέχει μόνο άρτιες ή περιττές δυνάμεις του x ανάλογα με το εάν το n είναι άρτιος ή περιττός) έτσι ώστε εάν πάρουμε το $f(x) - \left(\frac{a_n}{k_n}\right)P_n(x)$ προκύπτει είτε μηδέν (σε αυτήν την περίπτωση το πρώτο μέρος του θεωρήματος αποδείχθηκε) είτε ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Αυτό σημαίνει ότι

$$f(x) = c_n P_n(x) + g_{n-1}(x)$$

όπου $c_n = \frac{a_n}{k_n}$ και $g_{n-1}(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί στο $g_{n-1}(x)$ και δίνει

$$g_{n-1}(x) = c_{n-1}P_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

και έτσι

$$f(x) = c_n P_n(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x) + g_{n-2}(x) .$$

Το ίδιο επιχείρημα μπορούμε να εφαρμόσουμε στο g_{n-2} κ.ο.κ. για να καταλήξουμε τελικά

$$f(x)=c_nP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+...+c_1P_1(x)+c_0P_0(x)=\sum_{r=0}^{n}c_rP_r(x)\,.$$

Εάν τώρα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το $P_s(x)$ και ολοκληρώσουμε από το -1 έως το 1 παίρνουμε

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_s(x)dx=\sum_{r=0}^{n}c_r\int_{-1}^{1}P_r(x)P_s(x)dx$$

αλλά το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι μη μηδενικό μόνο για την τιμή του r η οποία ισούται με το s, στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι $\frac{2}{2s+1}$

επομένως

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_s(x)dx=c_s\frac{2}{2s+1}$$

που μας δίνει

$$c_r=\left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}f(x)P_r(x)dx\,,$$

όπως απαιτείται.

Τώρα υποθέτουμε ότι η $f(x)$ είναι άρτια. Αφού η $P_r(x)$ είναι άρτια όταν το r είναι άρτιο και περιττή όταν το r είναι περιττό. Οπότε και η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)P_r(x)$ είναι άρτια ή περιττή ανάλογα με το αν το r είναι άρτιο ή περιττό. Αλλά το ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης από το -1 έως το 1 κάνει μηδέν αφού οι θετικές και οι αρνητικές τιμές αλληλοαναιρούνται. Έτσι το c_r είναι μηδέν όταν το r είναι περιττός. Ομοίως όταν η $f(x)$ είναι περιττή το c_r είναι μηδέν όταν το r είναι άρτιο.

<u>Πόρισμα Β.6.1:</u> Εάν η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από n, τότε

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx=0\,.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ είναι βαθμού n τότε έχουμε

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x)$$

έτσι ώστε

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx=\sum_{r=0}^{n} c_r \int_{-1}^{1} P_r(x)P_l(x)dx$$

το $r \le n \le l$ έτσι ώστε το r να μην ισούται ποτέ με το l.

Θεώρημα Β.6.1: Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες στο διάστημα $-1 \le x \le 1$.

(i) Η $f(x)$ είναι συνεχής εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό από ασυνέχειες (και λέμε ότι η $f(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής).

(ii) Η $f(x)$ έχει ένα πεπερασμένο αριθμό από μέγιστα και ελάχιστα.

Επομένως η σειρά

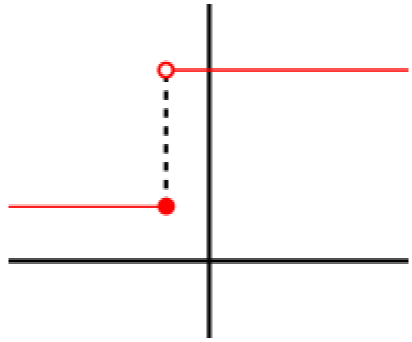
$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r P_r(x)$$

όπου $c_r=\left(r+\dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx$

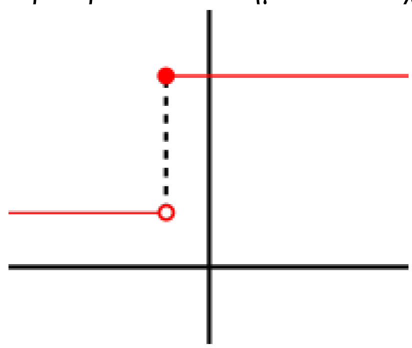
συγκλίνει στην $f(x)$ εάν το x δεν είναι σημείο ασυνέχειας της $f(x)$ και στο $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$ εάν το x είναι σημείο ασυνέχειας.

Σημείωση: Με το $f(x_0^+)$ εννοούμε $\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0+\varepsilon)$ όπου $\varepsilon \to 0$ μέσω θετικών τιμών και με το $f(x_0^-)$ εννοούμε $\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0-\varepsilon)$ όπου πάλι $\varepsilon \to 0$ μέσω θετικών τιμών.

Παράδειγμα Β.6.1:



Αριστερό όριο σε ένα σημείο ασυνέχειας.



Δεξί όριο σε ένα σημείο ασυνέχειας.

Ακόμα στα σημεία $x=+1$ και $x=-1$ η σειρά συγκλίνει στο $f(1^-)$ και στο $f(-1^+)$ αντίστοιχα. Αυτή η σειρά ονομάζεται σειρά Legendre για την $f(x)$.

Παράδειγμα Β.6.2: Να υπολογιστούν οι τρείς πρώτοι μη μηδενικοί συντελεστές Legendre της συναρτήσεως $f(x)=|x|,\ -1\le x\le 1$.

Λύση: Χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$c_r=\left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx \text{ για } r=0,1,2$$

άρα

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,dx = \int_{0}^{1} x dx = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,x dx = 0$$ επειδή είναι ολοκλήρωμα από το -1 έως το 1 περιττής συνάρτησης

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}|x|\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)dx = \frac{5}{2}\int_{0}^{1} x\left(3x^2-1\right)dx = \frac{5}{8}\ .$$

Αφού το c_1 είναι 0 θα υπολογίσουμε και το c_4

$$c_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}|x|\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)dx = -\frac{3}{16}$$

Β.7. Σχέσεις μεταξύ των πολυωνύμων Legendre και των παραγώγων τους.

Αναγωγικοί τύποι

(i) $P_n'(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (2n-4r-1)P_{n-2r-1}(x)$

(ii) $xP_n(x) = \dfrac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \dfrac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)$

(iii) $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$

(iv) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$

(v) $xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$

(vi) $P_n'(x) - xP_{n-1}'(x) = nP_{n-1}(x)$

(vii) $(x^2-1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

(viii) $(x^2-1)P_n'(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - (n+1)xP_n(x)$

(ix) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = \dfrac{n+1}{x-y}(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y))$

<u>Απόδειξη:</u>

(i) Γνωρίζουμε ότι η $P_n(x)$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n και περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x εάν το n είναι άρτιος και μόνο περιττές δυνάμεις του x εάν το n είναι περιττός. Έτσι η $P_n'(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$ που περιέχει είτε περιττές είτε άρτιες δυνάμεις του x ανάλογα με το εάν το n είναι άρτιο ή περιττό. Έτσι από το σειρά Legendre έχουμε

$$P_n'(x) = c_{n-1}P_{n-1}(x) + c_{n-3}P_{n-3}(x) + \ldots + c_{n-2r-1}P_{n-2r-1}(x) + \ldots + c_1P_1(x) \ \ (n \text{ άρτιος})$$

$$P_n'(x) = c_{n-1}P_{n-1}(x) + c_{n-3}P_{n-3}(x) + \ldots + c_{n-2r-1}P_{n-2r-1}(x) + \ldots + c_0P_0(x) \ \ (n \text{ περιττός})$$

με

$$c_s = \left(s+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} P_n'(x)P_s(x)ds$$

$$= \left(s+\frac{1}{2}\right)\left\{\left[P_n(x)P_s(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n(x)P_s'(x)dx\right\}$$

(με ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$$= \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(P_n(1)P_s(1) - P_n(-1)P_s(-1) - 0\right)$$

(όπου το ολοκλήρωμα εξαφανίζεται από το πόρισμα B.7.1, αφού $P_s(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $s-1$, και $s-1$ είναι πάντα μικρότερο από n)

$$= \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(1-(-1)^{s+n}\right)$$

(από τους αναγωγικούς τύπους (i) και (ii))

αλλά το s παίρνει τις τιμές $n-1, n-3, \ldots$ άρα το $s+n$ παίρνει τις τιμές $2n-1, 2n-3, \ldots$ οι οποίες είναι πάντα περιττές ανεξάρτητα από τις τιμές του n ή του s.
Άρα $(-1)^{s+n} = -1$ και έχουμε

$$c_s = \left(s+\frac{1}{2}\right)\left[1-(-1)\right] = (2s+1)$$

έτσι

$$c_{n-2r-1} = 2(n-2r-1)+1 = 2n-4r-1$$

και έτσι έχουμε

$$P_n'(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + \ldots + (2n-4r-1)P_{n-2r-1}(x) + \ldots + 3P_1(x) \text{ (αν } n \text{ άρτιος)}$$

$$P_n'(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + \ldots + (2n-4r-1)P_{n-2r-1}(x) + \ldots + P_0(x) \text{ (αν } n \text{ περιττός)}$$

άρα

$$P_n'(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (2n-4r-1)P_{n-2r-1}(x)\,.$$

(ii) $xP_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n+1$, περιττό εάν το n είναι άρτιο και άρτιο εάν το n είναι περιττό. Έτσι από τη σειρά Legendre έχουμε

$$xP_n(x) = c_{n+1}P_{n+1}(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x) + \ldots + c_1P_1(x) \text{ (} n \text{ άρτιος)}$$

$$xP_n(x) = c_{n+1}P_{n+1}(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x) + \ldots + c_0P_0(x) \text{ (} n \text{ περιττός)}$$

όπου

$$c_r = \left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_r(x)dx = \left(r+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} P_n(x)xP_r(x)dx$$

αλλά το ολοκλήρωμα είναι μηδέν από το πόρισμα B.6.1 εάν $r+1<n$ (αφού $xP_r(x)$ είναι ένα πολυώνυμου βαθμού μικρότερου από n) άρα εάν $r<l-1$ έχουμε

$$xP_n(x) = c_{n+1}P_{n+1}(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x)\,. \tag{B.7.1}$$

Για να βρούμε τα c_{n+1} και c_{n-1} παραγωγίζουμε ως προς x την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή

$$P_n(x) + xP_n'(x) = c_{n+1}P_{n+1}'(x) + c_{n-1}P_{n-1}'(x)\,. \tag{B.7.2}$$

Θέτουμε $x=1$ στις δύο παραπάνω εξισώσεις και χρησιμοποιώντας τους αναγωγικούς τύπους (i) και (iii) παίρνουμε

$$1 = c_{n+1} + c_{n-1} \tag{B.7.3}$$

$$1+\frac{1}{2}n(n+1)=c_{n+1}\left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]+c_{n-1}\left[\frac{1}{2}(n-1)n\right]. \qquad (B.7.4)$$

Λύνοντας τις εξισώσεις (B.7.3) και (B.7.4) για c_{n+1} και c_{n-1} παίρνουμε

$$c_{n+1}=\frac{n+1}{2n+1},\ c_{n-1}=\frac{n}{2n+1}$$

με χρήση των δύο παραπάνω τιμών στην εξίσωση (B.7.1) παίρνουμε

$$xP_n(x)=\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)$$

το οποίο είναι το απαιτούμενο αποτέλεσμα.

(iii) Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (ii) με $2n+1$ παίρνουμε

$$(2n+1)xP_n(x)=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x) \qquad (B.7.5)$$

από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

το οποίο είναι το απαιτούμενο αποτέλεσμα.

(iv) Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (i) για το $P'_{n+1}(x)$ και το P'_{n-1}

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= (2n+1)P_n(x)+(2n-3)P_{n-2}(x)+(2n-7)P_{n-4}(x)+\ldots \\ P'_{n-1}(x) &= \qquad\qquad\qquad\ (2n-3)P_{n-2}(x)+(2n-7)P_{n-4}(x)+\ldots \end{aligned}$$

αφαιρώντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=\left(2n+1\right)P_n(x)\,.$$

(v) Εάν παραγωγίσουμε την (iii) ως προς x παίρνουμε

$$\left(n+1\right)P'_{n+1}(x)-\left(2n+1\right)\left(P_n(x)+xP'_n(x)\right)+nP'_{n-1}(x)=0$$

εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε την (iv) για να αντικαταστήσουμε το $P'_{n+1}(x)$ θα έχουμε

$$\left(n+1\right)\left[P'_{n-1}(x)+\left(2n+1\right)P_n(x)\right]-\left(2n+1\right)\left(P_n(x)+xP'_n(x)\right)+nP'_{n-1}(x)=0$$

με αναγωγή ομοίων όρων παίρνουμε

$$\left(2n+1\right)P'_{n-1}(x)+\left(2n+1\right)\left(n+1-1\right)P_n(x)-\left(2n+1\right)xP_n{}'(x)=0$$

το οποίο καταλήγει σε

$$P'_{n-1}(x)+nP_n(x)-xP'_n(x)=0$$

από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$xP'_n(x)-P'_{n-1}(x)=P_n(x)\,.$$

(vi) Εάν πολλαπλασιάσουμε την (iv) με το x παίρνουμε

$$xP'_{n+1}(x)-xP'_{n-1}(x)=\left(2n+1\right)xP_n(x)$$

και αντικαθιστώντας την έκφραση $\left(2n+1\right)xP_n(x)$ στην (Β.7.5) παίρνουμε

$$\left(n+1\right)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=xP'_{n+1}(x)-xP'_{n-1}(x)\,. \qquad \text{(Β.7.6)}$$

Εάν τώρα ξαναγράψουμε την (v) και αντικαταστήσουμε το n με το $n+1$ έχουμε

$$xP'_{n+1}(x)-P'_n(x)=\left(n+1\right)P_{n+1}(x)$$

και εάν αντικαταστήσουμε την έκφραση $\left(n+1\right)P_{n+1}(x)$ στην εξίσωση (Β.7.6) παίρνουμε

$$xP'_{n+1}(x)-P'_n(x)+nP_{n-1}(x)=xP'_{n+1}(x)-xP'_{n-1}(x)$$

από την προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε

$$P'_n(x)-xP'_{n-1}(x)=nP_{n-1}(x)$$

το οποίο είναι το απαιτούμενο αποτέλεσμα.

(vii) Εάν πολλαπλασιάσουμε την (v) με x παίρνουμε

$$x^2P_n{}'(x)-xP'_{n-1}(x)=nxP_n(x)$$

και αφαιρώντας την (vi) απο την (v) παίρνουμε

$$x^2P'_n(x)-P'_n(x)=nxP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\left(x^2-1\right)P_n'(x)=nxP_n(x)-nP_{n-1}(x).$$

(viii) Εάν αντικαταστήσουμε το n με $n+1$ στην (v) και (vi) παίρνουμε

$$xP_{n+1}'(x)-P_n'(x)=\left(n+1\right)P_{n+1}(x)$$
$$P_{n+1}'(x)-xP_n'(x)=\left(n+1\right)P_n(x)$$

απαλείφουμε το $P_{n+1}'(x)$ (πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη εξίσωση με x και αφαιρώντας την από την πρώτη) και παίρνουμε

$$-P_n'(x)+x^2P_n'(x)=\left(n+1\right)P_{n+1}(x)-\left(n+1\right)xP_n(x)$$

το οποίο καταλήγει σε

$$\left(x^2-1\right)P_n'(x)=\left(n+1\right)P_{n+1}(x)-\left(n+1\right)xP_n(x).$$

(ix) Χρησιμοποιώντας την (iii) έχουμε

$$P_{k+1}(x)P_k(y)-P_k(x)P_{k+1}(y)=\frac{1}{k+1}\left\{\left[\left(2k+1\right)xP_k(x)-kP_{k-1}(x)\right]P_k(y)-P_k(x)\left[\left(2k+1\right)yP_k(y)-kP_{k-1}(y)\right]\right\}$$

$$=\frac{2k+1}{k+1}\left(x-y\right)P_k(x)P_k(y)+\frac{k}{k+1}\left(P_k(x)P_{k-1}(y)-P_{k-1}(x)P_k(y)\right)$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $k+1$ παίρνουμε

$$\left(k+1\right)\left(P_{k+1}(x)P_k(y)-P_k(x)P_{k+1}(y)\right)=\left(2k+1\right)\left(x-y\right)P_k(x)P_k(y)+k\left(P_k(x)P_{k-1}(y)-P_{k-1}(x)P_k(y)\right).$$

Εάν συμβολίσουμε τη $\left(k+1\right)\left(P_{k+1}(x)P_k(y)-P_k(x)P_{k+1}(y)\right)$ με f_k η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$f_k=\left(2k+1\right)\left(x-y\right)P_k(x)P_k(y)+f_{k-1}. \tag{B.7.7}$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει αυστηρά για $k\geq 1$. Γι αυτό το εύρος των τιμών του k όλες οι ποσότητες που περιέχει η εξίσωση είναι καλά ορισμένες. Αλλά θα πρέπει να ισχύει και για $k=0$ υπό την προϋπόθεση ότι θα ορίσουμε $f_{-1}=0$. Στην συνέχεια έχουμε

$$f_0=P_1(x)P_0(y)-P_0(x)P_1(y)=x-y \text{ (από την εξίσωση (B.7.7)).}$$

Το $x-y$ επίσης ισούται με

$$\left(2k+1\right)\left(x-y\right)P_k(x)P_k(y)+f_{k-1} \text{ με } k=0$$

εάν τώρα αθροίσουμε την εξίσωση (Β.7.6) από $k=0$ έως $k=n$ παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=0}^{n}\left(2k+1\right)\left(x-y\right)P_k(x)P_k(y)+\sum_{k=0}^{n} f_{k-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=0}^{n}\left(2k+1\right)\left(x-y\right)P_k(x)P_k(y)+\sum_{k=1}^{n} f_{k-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=0}^{n}\left(2k+1\right)\left(x-y\right)P_k(x)P_k(y)+\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Rightarrow$$

έτσι

$$\sum_{k=0}^{n} f_k - \sum_{k=0}^{n-1} f_k = \sum_{k=0}^{n}\left(2k+1\right)\left(x-y\right)P_k(x)P_k(y)$$

έτσι ώστε

$$f_k = \left(x-y\right)\sum_{k=0}^{n}\left(2k+1\right)P_k(x)P_k(y)$$

και από τον ορισμό του f_n παίρνουμε

$$\frac{\left(n+1\right)}{\left(x-y\right)}\left(P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(2k+1\right)P_k(x)P_k(y)\ .$$

Β.8. Ορθογωνιότητα των πολυωνύμων Legendre

(i) Για $n \neq m$ ισχύει $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$

(ii) ενώ για $n=m$ ισχύει $\int_{-1}^{1} P_n^{\,2}(x)dx = \dfrac{2}{2n+1}$.

Απόδειξη:

(i) Η εξίσωση Legendre γράφεται

$$\left[\left(1-x^2\right)y'\right]' = -n\left(n+1\right)y\ ,$$

οπότε για τα πολυώνυμα $P_n(x)$ και $P_m(x)$ ισχύουν

$$\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]' = -m\left(m+1\right)P_m(x) \quad \text{και} \quad \left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right]' = -n\left(n+1\right)P_n(x)\,.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη με $-P_n(x)$ και τη δεύτερη με $P_m(x)$ και προσθέσουμε κατά μέλη παίρνουμε

$$-\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]' P_n(x) + \left[\left(1-x^2\right)P_n{}'(x)\right]' P_m(x) = \frac{d\left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_n{}'(x) - P_m'(x)P_n(x)\right)\right]}{dx}$$

$$= \left[m\left(m+1\right) - n\left(n+1\right)\right]P_m(x)P_n(x)\,.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη προκύπτει η ισότητα

$$0 = \left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_n{}'(x) - P_m'(x)P_n(x)\right)\right]_{-1}^{1} = \left[m\left(m+1\right) - n\left(n+1\right)\right]\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx\,,$$

από την οποία για $m \neq n$ προκύπτει η

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0\,.$$

(ii) Ο αναγωγικός τύπος

$$\left(n+1\right)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = \left(2n+1\right)xP_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$$

για n και $n-1$ δίνει

$$\left(n+1\right)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = \left(2n+1\right)xP_n(x)$$

και

$$nP_n(x) + \left(n-1\right)P_{n-2}(x) = \left(2n-1\right)xP_{n-1}(x)\,.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη σχέση με $P_{n-1}(x)$, τη δεύτερη με $P_n(x)$, ολοκληρώσουμε τις προκύπτουσες ισότητες και λάβουμε υπόψη μας την (i) βρίσκουμε

$$n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = \left(2n+1\right)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx$$

και

$$n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = (2n-1)\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx$$

από τις οποίες προκύπτει η

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx\,.$$

Για $n=1$ και επειδή $\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = 2$ έχουμε

$$\int_{-1}^{1} P_1^2(x)dx = \frac{2-1}{2+1}2 = \frac{2}{3}\,,$$

δηλαδή ισχύει η

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\,2}(x)dx = \frac{2}{2n+1}\,.$$

Κάνοντας χρήση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής διαπιστώνουμε ότι η

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\,2}(x)dx = \frac{2}{2n+1} \text{ ισχύει για κάθε } n\in\mathbb{N}\,.$$

B.9.

Το πολυώνυμο $P_n(x)$ έχει n διαφορετικές ρίζες στο $[-1,1]$.

Γ. Εφαρμογή: Το πρόβλημα Diriclet σε σφαίρα (συμμετρική περίπτωση)

Θα εξετάσουμε ένα πρόβλημα Diriclet σε μια σφαίρα που είναι ανεξάρτητο της γωνίας φ.
Πρόκειται λοιπόν για το πρόβλημα.

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\left(u_{\theta\theta} + u_\theta \cot\theta\right) = 0,\ 0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi \qquad (E)$$

$$u(a,\theta) = f(\theta),\ 0 < \theta < \pi \qquad (\Sigma)$$

όπου $f(\theta)$ μια τμηματικά λεία δοσμένη συνάρτηση.

Η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\left(u_{\theta\theta} + \cot\theta u_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right) = 0$$

όπου $0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi$ και $0 < \theta < \pi$

και οι λύσεις που επιδέχεται είναι της μορφής

$$u(r,\theta,\varphi) = \left(Ar^n + Br^{-(n+1)}\right)\cdot P_n^m\left(\cos\theta\right)\cdot\left(C\cos(m\varphi) + D\sin(m\varphi)\right)$$

με $n = 1,2,...,m = 0,1,2,...,n$.

Από το γενικό τύπο της παραπάνω λύσεως συμπεραίνουμε ότι

- για να ορίζεται η λύση και για $r = 0$ θα πρέπει $\mathrm{B} = 0$
- για να είναι η λύση ανεξάρτητη της γωνίας φ θα πρέπει $m = 0$.

Επομένως θα έχουμε λύσεις της (Ε) της μορφής

$$u_n(r,\theta) = A_n r^n P_n\left(\cos\theta\right)$$

όπου P_n είναι το πολυώνυμο Legendre βαθμού n.
Αν λάβουμε υπόψη μας και τη συνοριακή συνθήκη θα πρέπει να θεωρήσουμε ως λύση της (Ε) την

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n\left(\cos\theta\right)$$

στην οποία αν θέσουμε $r = a$ παίρνουμε

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n\left(\cos\theta\right)$$

που σημαίνει ότι τα A_n είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος Legendre της $f(\theta)$, οι οποίοι δίνονται από τις ισότητες της παρακάτω πρότασης

<u>Πρόταση Γ.1:</u> Αν m είναι μη αρνητικός ακέραιος και $f(x)$ μία τμηματικά λεία συνάρτηση στο $\left[-1,1\right]$, τότε για κάθε $x \in \left(-1,1\right)$ ισχύει το ανάπτυγμα της $f(x)$ σε συσχετιζόμενη σειρά Legendre

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sum_{n=m}^{\infty} A_n P_n^m(x),$$

όπου οι συντελεστές A_n, συσχετιζόμενοι συντελεστές Legendre, δίνονται από τον τύπο

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^m(x) dx, \quad n = m, m+1, m+2, \dots .$$

Στα σημεία $x = 1$ (αντίστοιχα $x = -1$) η σειρά συγκλίνει στο $f(1-0)$ (αντίστοιχα στο $f(-1+0)$).

Επομένως:

Η λύση του προβλήματος (Ε) και (Σ) είναι

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n\left(\cos\theta\right),$$

όπου είναι το n-ιοστό πολυώνυμο Legendre και

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta, \; n = 0,1,2,\dots .$$

<u>Παράδειγμα Γ.1:</u> Να λυθεί το πρόβλημα (Ε)-(Σ) στην περίπτωση $a = 1$ και $\varphi(\theta) = 2 + \cos^2\theta$.

Λύση: Επειδή

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{2P_2\left(\cos\theta\right)+1}{3}$$

έχουμε

$$\varphi(\theta) = \frac{7}{3} + \frac{3}{2}P_2\left(\cos\theta\right)$$

οπότε η ζητούμενη λύση είναι

$$u(r,\theta) = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}P_2\left(\cos\theta\right).$$

Σημείωση: Γνωρίζουμε ότι

$$\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]' = -n(n+1)P_n$$

ολοκληρώνουμε από 0 έως 1 και έχουμε

$$-P_n'(0) = -\int_0^1 n(n+1)P_n(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_0^1 P_n(x)dx = \frac{P_n'(0)}{n(n+1)},\ n = 1,2,\dots.$$

Παράδειγμα Γ.2: Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης Laplace στη σφαίρα $0 \le r \le a$ που ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$u(a,\theta) = 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u(a,\theta) = -1,\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\ .$$

Ποιά είναι η τιμή $u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)$;

Λύση: Οι συντελεστές A_n δίνονται από τον τύπο

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta - \frac{2n+1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} P_n\left(\cos\theta\right)\sin\theta d\theta.$$

Από την πιο πάνω σημείωση προκύπτει

$$A_n = (2n+1)\frac{P_n'(0)}{n(n+1)},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Επομένως η λύση είναι

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n'(0) \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) .$$

Επειδή $P_n(0) = 0$ όταν n είναι άρτιος και $P_n'(0) = 0$ όταν n είναι περιττός συμπεραίνουμε ότι

$$u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

Κεφάλαιο 3 : Συναρτήσεις Hermite

A. Η εξίσωση Hermite και οι λύσεις της

Η διαφορική εξίσωση Hermite τάξεως n δίνεται από τον τύπο

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0$$

και στις εφαρμογές απαιτείτε να βρούμε λύσεις οι οποίες είναι πεπερασμένες για όλες τις πεπερασμένες τιμές του x και είναι τέτοιες που το $\lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)} y(x) = 0$ και εάν δοκιμάσουμε μια λύση του τύπου

$$z(x,s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r} \ .$$

Βρίσκουμε ότι η αρχική εξίσωση έχει ρίζες $s=0$ και $s=1$ με α_1 αόριστο όταν $s=0$, έτσι λοιπόν $s=0$ δίνει δύο ανεξάρτητες λύσεις. Ο αναγωγικός τύπος των συντελεστών είναι ο:

$$\frac{a_{r+2}}{a_r} = \frac{2(r-n)}{(r+1)(r+2)} \ . \tag{A.1}$$

Αυτός ο αναγωγικός τύπος μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσει δύο λύσεις. Όμως και οι δύο λύσεις συμπεριφέρονται όπως το e^{x^2} για μεγάλες τιμές του x. Έτσι δεν μπορούν να ικανοποιήσουν την απαίτηση ότι $\lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)} y(x) = 0$ αυτό μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο εάν η σειρά συγκλίνει. Από την εξίσωση (A.1) έχουμε δει ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, για a_{n+2} και όλοι οι επόμενοι όροι των αντίστοιχων σειρών θα εξαφανιστούν. Τώρα θα γράψουμε τη σειρά σε φθίνουσες δυνάμεις του x.
Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (A.1) γραμμένη στην παρακάτω μορφή

$$a_r = -\frac{(r+1)(r+2)}{2(n-r)} a_{r+2}$$

παίρνουμε τη σειρά

$$y = a_n\{x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4}x^{n-4} + ... + \frac{(-1)^n n(n-1)...(n-2r+1)}{2^r\cdot 2\cdot 4...2r}x^{n-2r} + ...\}$$

άρα

$$y = a_n \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n(n-1)\ldots(n-2r+1)}{2^r \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2r} x^{n-2r}$$

όπου $\left[\frac{1}{2}n\right] = \frac{1}{2}n$ εάν n είναι άρτιος

$\left[\frac{1}{2}n\right] = \frac{1}{2}(n-1)$ εάν n είναι περιττός

άρα

$$y = a_n \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n!}{2^{2r} r!(n-2r)!} x^{n-2r} \quad .$$

Τη συνήθης λύση την παίρνουμε θέτοντας όπου α_n το 2^n. Η λύση συμβολίζεται με $H_n(x)$ και ονομάζεται πολυώνυμο Hermite τάξεως n

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r} \quad .$$

B. Ιδιότητες συναρτήσεων Hermite

B.1. Γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$$

<u>Απόδειξη:</u> Από την ανάλυση γνωρίζουμε ότι

$$e^{2tx-t^2}=e^{2tx}e^{-t^2}\Rightarrow$$
$$e^{2tx-t^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2tx)^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^s}{s!}\Rightarrow$$
$$e^{2tx-t^2}=\sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(2x)^r}{r!s!}t^{r+2s}.$$

Για μια συγκεκριμένη τιμή του s παίρνουμε το t^n θέτοντας $r+2s=n$ άρα $r=n-2s$ έτσι λοιπόν για αυτή τη τιμή του s ο συντελεστής του t^n δίνεται από το

$$(-1)^s\frac{(2x)^{n-2s}}{(n-2s)!s!}.$$

Τον πλήρη συντελεστή του t^n τον παίρνουμε αθροίζοντας όλες τις επιτρεπόμενες τιμές του s και εφόσον $r=n-2s$ θα πρέπει $n-2s\geq 0$ άρα $s\leq\frac{1}{2}n$. Έτσι εάν το n είναι άρτιος, το s πηγαίνει από το 0 στο $\frac{1}{2}n$, ενώ εάν το n είναι περιττός το s πηγαίνει από το 0 στο $\frac{1}{2}(n-1)$. Αυτό που ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις είναι ότι το s πηγαίνει από το 0 στο $\left[\frac{1}{2}n\right]$ με το $\left[\frac{1}{2}n\right]$ να ορίζεται όπως παραπάνω. Άρα ο συντελεστής του t^n είναι:

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^s\frac{1}{(n-2s)!s!}(2x)^{n-2s}=\frac{1}{n!}H_n(x).$$

Αποδείχθηκε.

B.2. Άλλες εκφράσεις για τα πολυώνυμα Hermite

1η Έκφραση

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την γεννήτρια συνάρτηση και το θεώρημα Taylor το οποίο λέει ότι

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n F}{dt^n} \right)_{t=0} \frac{t^n}{n!}$$

έχουμε

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n e^{2tx-t^2}}{\partial t^n} \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n e^{x^2-(x-t)^2}}{\partial t^n} \right]_{t=0} = e^{x^2} \left[\frac{\partial^n e^{-(x-t)^2}}{\partial t^n} \right]_{t=0}$$

αλλά

$$\frac{\partial f(x-t)}{\partial t} = -\frac{\partial f(x-t)}{\partial x}$$

έτσι λοιπόν

$$\frac{\partial^n f(x-t)}{\partial t^n} = (-1)^n \frac{\partial f^n (x-t)}{\partial x^n}$$

και έχουμε

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left[\frac{\partial^n e^{-(x-t)^2}}{\partial x^n} \right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n} .$$

2η Έκφραση

$$H_n(x) = 2^n e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}} x^n$$

Σημείωση: Το εκθετικό της παραγώγου μιας συνάρτησης ορίζεται από την ανάλυση σε δυναμοσειρά . Έτσι έχουμε

$$e^{\frac{d}{dx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n} \quad \text{άρα} \quad e^{\frac{d}{dx}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{df^n}{dx^n}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{de^{2tx}}{dx} = te^{2tx}$$

και έτσι

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\right)^n e^{2tx} = t^n e^{2tx}$$

έτσι

$$e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}} e^{2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)^n e^{2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\right)^{2n} e^{2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} e^{2tx} = e^{-t^2} e^{2tx}$$

άρα

$$e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}} e^{2tx} = e^{-t^2+2tx}.$$

Αναπτύσσοντας και τα δύο μέλη σε δυναμοσειρές του t έχουμε

$$e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

(χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση).

Εξισώνοντας τους συντελεστές του t^n και από τα δύο μέλη της εξίσωσης

$$e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}} \frac{2^n x^n}{n!} = \frac{H_n(x)}{n!}$$

και έτσι

$$H_n(x) = 2^n e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}} x^n.$$

Β.3. Αναλυτικές εκφράσεις για τα πολυώνυμα Hermite

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$H_n(x) = 2^n e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}} x^n$$

ή τον τύπο

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n} = n! \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

(όπου $\lambda = \frac{n}{2}$ όταν n άρτιος, και $\lambda = \frac{n-1}{2}$ όταν n περιττός)

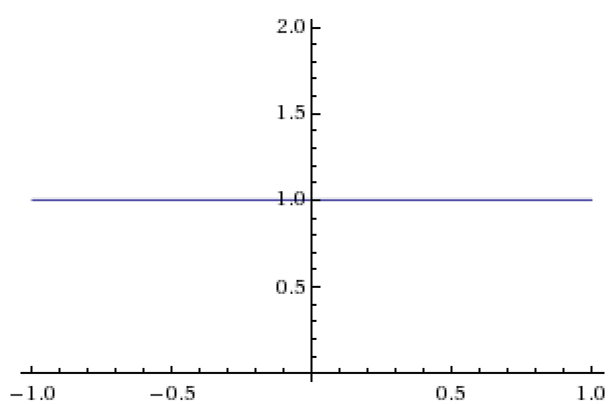
για να γράψουμε αναλυτικές εκφράσεις των πολυωνύμων Hermite.

Τα έξη πρώτα πολυώνυμα είναι:

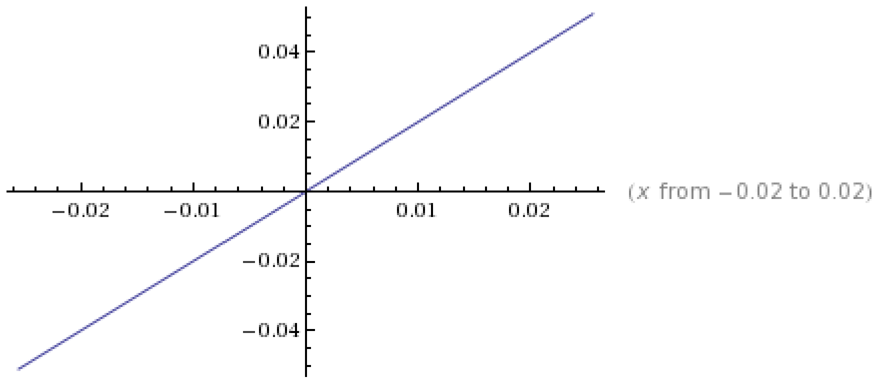
$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

και οι γραφικές τους παραστάσεις είναι:

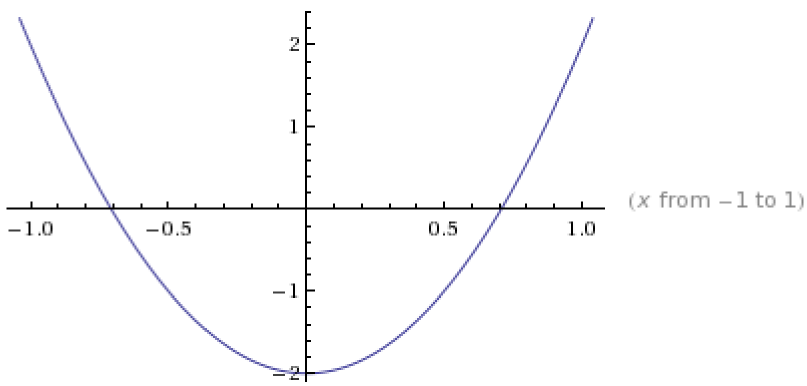
$$H_0(x) = 1$$



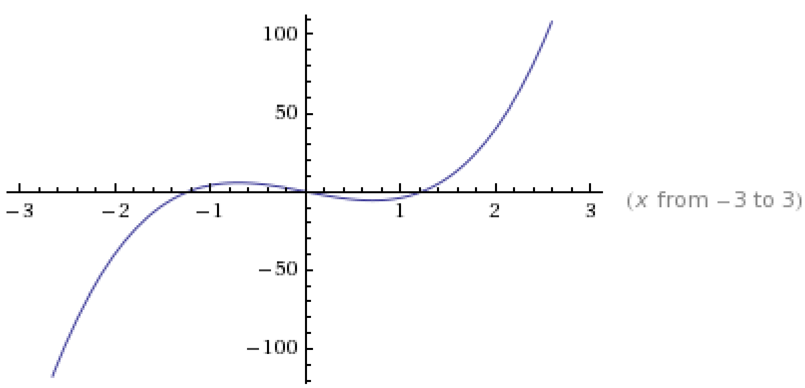
$$H_1(x) = 2x$$



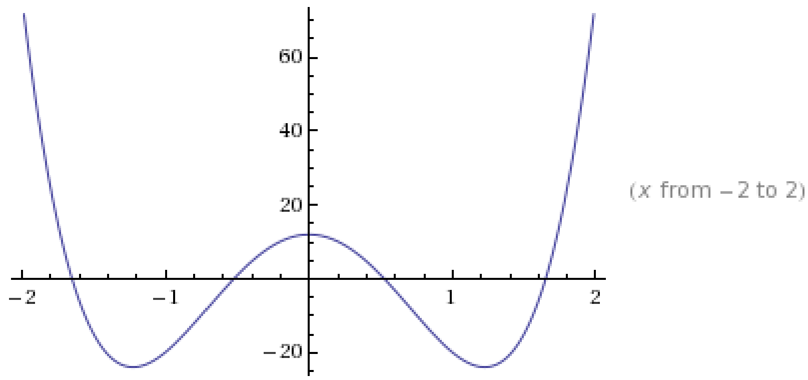
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$



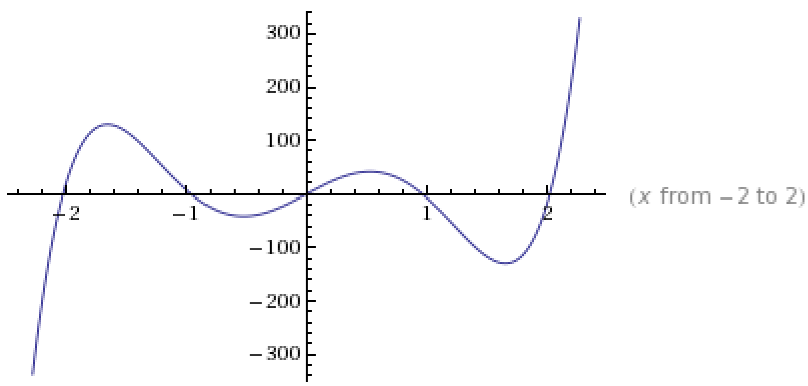
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$



$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$



$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$



B.4. Ειδικές τιμές των πολυωνύμων Hermite

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \ , \ \ H_{2n+1}(0) = 0$$

Απόδειξη: Από τη γεννήτρια συνάρτηση για $x = 0$ έχουμε

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(0) \frac{t^n}{n!}$$

αναλύουμε το αριστερό μέλος σε δυνάμεις του t

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(0) \frac{t^n}{n!}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του t και για τα δύο μέλη έχουμε

$$H_n(0) = 0 \text{ εάν } n \text{ περιττός}$$

(το οποίο είναι ισοδύναμο με $H_{2n+1}(0) = 0$ για n θετικό ακέραιο)

$$(-1)^n \frac{1}{n!} = H_{2n}(0)\frac{1}{(2n)!} \quad \text{(για } n \text{ θετικό ακέραιο)}$$

από το οποίο προκύπτει

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

B.5. Ιδιότητες ορθογωνιότητας πολυωνύμων Hermite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\,\delta_{nm}$$

<u>Σημείωση:</u> Το δέλτα του Kronecker:

$$\delta_{nm} = 1 \text{ αν } n = m$$
$$\delta_{nm} = 1 \text{ αν } n \neq m$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έχουμε

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$
$$e^{-s^2+2sx} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{s^m}{m!}$$

έτσι λοιπόν το

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

είναι ο συντελεστής του $\dfrac{t^n s^m}{n!m!}$ και η ανάλυση του δίνει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx} dx$$

αλλά

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx} dx = e^{-t^2-s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2(s+t)x} dx$$

$$= e^{-t^2-s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[x-(s+t)]^2+(s+t)^2} dx$$

$$= e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[x-(s+t)]^2} dx$$

$$= e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

(αλλάζουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης σε $u = x-(s+t)$)

$$= e^{2st}\sqrt{\pi}$$

(από τη σχέση $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\pi}\, \frac{2^n s^n t^n}{n!} .$$

Έτσι ο συντελεστής του $\frac{t^n s^m}{n!m!}$ είναι 0 όταν $m \neq n$ και είναι $\sqrt{\pi}2^n n!$ όταν $m = n$.

Έτσι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\,\delta_{nm} .$$

B.6. Σχέσεις μεταξύ των πολυωνύμων Hermite και των παραγώγων τους, αναγωγικοί τύποι

(i) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$ για $n \geq 1$ με $H_o'(x) = 0$

(ii) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ για $n \geq 1$ με $H_1(x) = 2xH_0(x)$

<u>Απόδειξη:</u>

(i) Εάν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της γεννήτριας συνάρτησης ως προς x, παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{de^{2tx-t^2}}{dx} = 2te^{2tx-t^2} = 2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}$$

εξισώνοντας τους συντελεστές του t^n για $n=0$ παίρνουμε

$$H_0'(x) = 0$$

και για $n \geq 1$ παίρνουμε

$$\frac{H_n'(x)}{n!} = \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$
$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

(ii) Εάν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της γεννήτριας συνάρτησης ως προς t παίρνουμε

$$\frac{de^{2tx-t^2}}{dx} = \frac{d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)}{dt}$$

και έτσι κάνοντας τις παραγωγίσεις παίρνουμε

$$(2x-2t)e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{t^{n-1}}{n!}H_n(x) .$$

Τώρα παρατηρούμε ότι ο όρος για $n=0$ δεν συνεισφέρει στο άθροισμα του δεξιού μέλους (θυμίζουμε ότι $0!=1$) και έτσι με χρήση της γεννήτριας συνάρτησης και της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}H_n(x)$$

το οποίο είναι ανάλογο με

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x) - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}H_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}H_n(x)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}H_{n-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_{n+1}(x)\,.$$

Έτσι εξισώνοντας τους συντελεστές του t^n για $n \geq 1$ έχουμε

$$2x\frac{1}{n!}H_n(x)-2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}=\frac{1}{n!}H_{n+1}(x)$$

το οποίο αν το πολλαπλασιάσουμε με $n!$ προκύπτει

$$2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)=H_{n+1}(x)$$

ομοίως εξισώνοντας τους συντελεστές του t^0 παίρνουμε

$$2xH_0(x)=H_1(x)\,.$$

Γ. Εφαρμογή: Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής

Στην κβαντομηχανική, μικρές ταλαντώσεις σωματιδίου μάζας m που κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δυνάμεως επαναφοράς περιγράφεται από την εξίσωση Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\Psi \tag{E}$$

όπου $\Psi(x,t)$ είναι η άγνωστη κυματοσυνάρτηση και $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$. Στην περίπτωση αυτή το δυναμικό είναι $V(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$. Θα επιλύσουμε την εξίσωση αυτή, όταν γνωρίζουμε την αρχική συνθήκη (αρχική κυματοσυνάρτηση)

$$\Psi(x,0) = f(x). \tag{A}$$

Αν η λύση της εξίσωσης Schrödinger είναι της μορφής $\Psi(x,t) = u(x)T(t)$ (χωριζόμενων μεταβλητών) τότε οδηγούμαστε στις εξισώσεις

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(x) + \frac{1}{2}kx^2u(x) = Eu(x) \tag{Γ.1}$$

$$\mathrm{T}'(t) = -\frac{i}{\hbar}ET(t), \tag{Γ.2}$$

όπου E είναι η σταθερά χωρισμού, που συμβολίζει την ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή.

Με αλλαγή μεταβλητής $x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}z$ η (Γ.1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\lambda - z^2\right)u = 0, \text{ όπου } \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}, \tag{Γ.3}$$

και με την αντικατάσταση $u(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2}v(z)$ τη μορφή

$$v''(z) - 2zv'(z) + (\lambda - 1)v(z) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή για $\lambda = \lambda_n = 2n+1,\ n = 0,1,2,...$ είναι μια διαφορική εξίσωση Hermite τάξεως n της οποίας λύσεις είναι τα πολυώνυμα Hermite $\mathrm{H}_n(z)$. Επομένως λύσεις της (Γ.3) είναι συναρτήσεις της μορφής

$$u_n(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} H_n(z),\ n = 0,1,2,...$$

και της (Γ.1) της μορφής

$$u_n(x) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right),\ n = 0,1,2,....$$

Οι τιμές τις $E = E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),\ n = 0,1,2,...$ είναι επιτρεπτές αφού για τις αντίστοιχες συναρτήσεις $u_n(x)$ ισχύουν

$$\lim_{x\to\infty} u_n(x) = 0 \ \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty} |u_n(x)|^2\, dx < \infty .$$

Οι λύσεις της (Γ.2) είναι της μορφής

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}},$$

οπότε η διαφορική εξίσωση (Ε) έχει λύσεις της μορφής

$$\Psi_n(x,t) = A_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right).$$

Αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις (Γ.2) και (Γ.3), τότε

Η λύση του προβλήματος (Ε)-(Α) του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή δίνεται από τη κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right),$$

όπου

$$A_n = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{1}{n!2^n\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) dx$$

και $$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),\ n = 0,1,2,...$$

Βιβλιογραφία

1. Asmar N. : Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, Prentice Hall, 2000
2. Bell W. W. : Special Functions for Scientists and Engineers, Dover Publications, 2004
3. Boyce W. E. , Di Prima R. C. : Στοιχειώδης διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα συνοριακών τιμών, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα 1999
4. Κραββαρίτης Δ. Χ. : Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2006
5. Lebedev N. N. : Special Functions and their Applications, New York 1972
6. Παντελίδης Γ. Ν. , Κραββαρίτης Δ. Χ. : Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2003
7. Παντελίδης Γ. Ν. , Κραββαρίτης Δ. Χ. , Χατζησάββα Ν. Σ. : Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα 1990
8. Pinsky M. A. : Partial Differential Equations and Boundary-value problems with applications, McGraw-Hill, 1998
9. Watson G. N. : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1966