



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΚΤΙΑ ΖΩΝΗ



Θεοχάρης Τσιούρης

Αθήνα, Οκτώβριος 2014

Επιβλέπων: Σ. Αζοράκος, Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Συνεπιβλέπων: Κ. Μέμος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΚΤΙΑ ΖΩΝΗ

Το Περιεχόμενο της ανά χείρας διπλωματικής εργασίας αποτελεί προϊόν δικής μου πνευματικής προσπάθειας. Η ενσωμάτωση σε αυτήν υλικού τρίτων, δημοσιευμένου ή μη, γίνεται με δόκιμη αναφορά στις πηγές, που δεν επιτρέπει ασάφειες ή παρερμηνείες.

Θεοχάρης Β. Τσιούρης

Αθήνα, Οκτώβριος 2014

Επιβλέπων: Σ. Αζοράκος, Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Συνεπιβλέπων: Κ. Μέμος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

“Η επιτυχία είναι γλυκιά και είναι ακόμα πιο γλυκιά αν ήρθε με καθυστέρηση και μετά από πολλές μάχες και ήττες.”

Amos Bronson Alcott, 1799-1888, Αμερικανός φιλόσοφος & ακαδημαϊκός

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη Διπλωματική Εργασία μου, με την οποία ολοκληρώνω τις σπουδές μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, στη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, αλλά και των σπουδών μου γενικότερα.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Κωνσταντίνο Μέμο, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την άρτια συνεργασία και το χρόνο που διέθεσε συμβάλλοντας καθοριστικά στην επίλυση όλων των εμποδίων και των προβληματισμών που προέκυψαν και που οδήγησαν τελικά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον κ. Σαμψών Αζοράκο, Λέκτορα Ε.Μ.Π., για την τελική επίβλεψη του τεύχους και τη γενικότερη βοήθειά του στην εκπόνηση της εργασίας.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Μιχάλη Χονδρό, υποψήφιο Διδάκτορα, Πολιτικό Μηχανικό Ε.Μ.Π. και φίλο, για τη συνεισφορά του στη βιβλιογραφική αναζήτηση, για τον αμέτρητο και πολύτιμο χρόνο, που μου διέθεσε ανιδιοτελώς, και για την συνεχή στήριξή του στα χρόνια των σπουδών μου.

Ευχαριστίες στους φίλους και συνάδελφους μου, Αποστόλου Σπύρο, Βλαχάκη Γιάννη, Καμπανή Πολάκη, Κοτσίφη Φιλοκλή, Ποτουρίδη Στέφανο, Ρομποτή Νίκο, Σιανούδη Αλέξανδρο και Χατζηγιακουμή Μιχάλη για τη βοήθεια, τη συμπαράσταση, τη στήριξη και τη συνεχή παρουσία τους από την αρχή των φοιτητικών μου χρόνων. Ειδικές ευχαριστίες στο προσωπικό του Εργαστηρίου Λιμενικών Έργων Ε.Μ.Π. για τη βοήθεια τους και τη φιλοξενία τους κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου και στο σύνολο των καθηγητών της σχολής Πολιτικών Μηχανικών για τις επιστημονικές βάσεις που μου έδωσαν.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ στον Τοπογράφο Μηχανικό και φίλο Κλαδευτήρα Γιώργο, για το χρόνο που διέθεσε διορθώνοντας τυπογραφικά λάθη και συμβάλλοντας στην τελική μορφοποίηση του τεύχους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συνεχή, υλική και ψυχική, στήριξη και την υπομονή τους όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περιεχόμενα	iii
Σύνοψη.....	ix
Abstract	xi
1. Εισαγωγή.....	1
1.1. Αντικείμενο εργασίας	1
1.2. Διάρθρωση εργασίας	1
2. Θεωρίες διάδοσης κυματισμών	5
2.1. Εισαγωγή	5
2.2. Θεμελιώδεις εξισώσεις και οριακές συνθήκες.....	5
2.3. Θεωρίες δισδιάστατων προωθούμενων κυματισμών.....	7
2.3.1. Θεωρία γραμμικών κυματισμών απειροστού εύρους (Airy ή Stokes 1ης τάξης)	9
2.3.2. Θεωρίες μη γραμμικών κυματισμών	13
2.3.2.1. Θεωρία Stokes 2 ^{ης} τάξης.....	13

3. Μαθηματικά ομοιώματα διάδοσης κυματισμών τύπου Boussinesq	15
3.1. Εισαγωγή στα ομοιώματα τύπου Boussinesq	15
3.2. Περιγραφή της εξέλιξης των μοντέλων Boussinesq	16
3.3. Κλασικές εξισώσεις Boussinesq (Peregrine 1967).....	21
3.4. Μοντέλα Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς.	22
3.4.1. Εξισώσεις Boussinesq των Madsen et al. (1991).....	24
3.4.2. Εξισώσεις Boussinesq του Nwogu (1993)	28
3.4.3. Εξισώσεις Boussinesq του Zou (1999).....	31
3.5. Εξισώσεις Boussinesq υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς.....	33
3.5.1. Πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις Boussinesq των Wei et al. (1995)	33
3.5.2. Πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις Boussinesq των Madsen et al. (2002 & 2003)	34
3.5.3. Μέθοδος Fourier-Boussinesq για μη γραμμικούς κυματισμούς των Bingham & Agnon (2005).....	38
3.6. Εισαγωγή της θραύσης στα μοντέλα Boussinesq	40
4. Μαθηματικό ομοίωμα τύπου Boussinesq (Chondros & Memos, 2014)	47
4.1. Εισαγωγή	47

4.2. Θεωρητική διατύπωση του μοντέλου Boussinesq Chondros & Memos, 2014	48
4.2.1. Εξισώσεις Boussinesq των Madsen & Schäffer (MS98-1998)	48
4.2.2. Παραγωγή νέων συντελεστών (α_1, β_1) , (α_2, β_2)	50
4.2.3. Πρώτης τάξης ανάλυση	51
4.2.4. Δεύτερης τάξης ανάλυση	52
4.2.5. Ανάλυση γραμμικής ρήγωσης.....	54
4.2.6. Διάδοση κανονικών και μη κανονικών κυματισμών	58
4.2.7. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης	60
4.2.8. Οριακές συνθήκες.	60
4.2.8.1. Όρια γένεσης κύματος.....	60
4.2.8.2. Απορροφητικά όρια	62
4.2.8.3. Ανακλαστικά όρια	62
4.2.8.4. Θραύση κυματισμών.....	63
4.2.8.5. Τριβή πυθμένα	64

5. Θεωρητικό υπόβαθρο υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW	67
5.1. Εισαγωγή	67
5.2. Γενική περιγραφή	67

5.3.	Βασικές εξισώσεις.....	70
5.4.	Θραύση κυματισμών (Madsen et al. 1997)	73
5.5.	Οριακές συνθήκες.....	78
5.6.	Αριθμητικό σχήμα επίλυσης.....	79
6.	Αριθμητικές προσομοιώσεις & συγκρίσεις	81
6.1.	Εισαγωγή	81
6.2.	Πείραμα Beji and Batjjes (1994)	81
6.2.1.	Περιγραφή πειραματικής διάταξης Beji and Batjjes (1994).....	81
6.2.2.	Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα για μη θραυόμενους κυματισμούς (non breaking waves)	83
6.2.3.	Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα για θραυόμενους κυματισμούς (spilling waves)	86
6.3.	Πείραμα Berkhoff et al. (1982).....	90
6.3.1.	Περιγραφή πειραματικής διάταξης Berkhoff et al. (1982)	90
6.3.2.	Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα.....	91
6.4.	Πείραμα Vincent and Briggs (1989).....	96
6.4.1.	Περιγραφή πειραματικής διάταξης Vincent and Briggs (1989)	96
6.4.2.	Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα.....	97
6.5.	Πείραμα Ohyama et al. (1995).....	100

6.5.1.	Περιγραφή πειραματικής διάταξης πειράματος	100
6.5.2.	Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα	101
7.	Σχολιασμός των διαγραμμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων	103
7.1.	Σχολιασμός διαγραμμάτων στο πείραμα Beji and Batjjes	103
7.1.1.	Σχολιασμός διαγραμμάτων για μη θραυόμενους κυματισμούς στο πείραμα των Beji and Batjjes.....	103
7.1.2.	Σχολιασμός διαγραμμάτων για θραυόμενους κυματισμούς στο πείραμα των Beji and Batjjes.....	104
7.2.	Σχολιασμός διαγραμμάτων στο πείραμα Berkhoff et al.	105
7.3.	Σχολιασμός διαγραμμάτων στο πείραμα Vincent and Briggs.....	106
7.4.	Σχολιασμός διαγραμμάτων στο πείραμα Ohyama et al.....	107
7.5.	Συμπεράσματα για το υπολογιστικό πρόγραμμα MIKE21 BW...	107
7.6.	Συμπεράσματα για το μοντέλο Chondros and Memos, 2014	108
7.7.	Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα του μαθηματικού μοντέλου Chondros and Memos, 2014.....	109
8.	Βιβλιογραφία.....	111

Σύνοψη

Η γνώση της διάδοσης των κυματισμών και των δυνάμεων που αυτά παράγουν αποτελεί σημαντικό στοιχείο για το σχεδιασμό των παράκτιων έργων. Τα κύματα αποτελούν το πιο σπουδαίο παράγοντα, ο οποίος καθορίζει τη γεωμετρία των ακτών, το σχεδιασμό των λιμενικών έργων, την κατασκευή παράκτιων έργων προστασίας και γενικότερα πολλών έργων Πολιτικού Μηχανικού. Επομένως, κρίνεται αναγκαίος ο ποσοτικός προσδιορισμός των κυμάτων και των δυνάμεων τους.

Οι κυματισμοί, κατά τη διάδοσή τους στο παράκτιο χώρο, υφίστανται μια σειρά από μετασχηματισμούς, οι οποίοι οφείλονται κατά κύριο λόγο στο συνδυασμό σύνθετων φαινομένων, μερικά από τα οποία είναι η διάθλαση, η περίθλαση, η ρήχωση και η θραύση. Για το λόγο αυτόν, για να προσομοιωθεί δηλαδή όσον το δυνατόν ορθότερα η διάδοση των κυματισμών, αναπτύχθηκαν πολλές μαθηματικές θεωρίες και μοντέλα, καθώς και διάφορα αριθμητικά προσομοιώματα και προγράμματα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, λοιπόν, εξετάζεται η συμπεριφορά και απόδοση δυο μαθηματικών μοντέλων Boussinesq για τη διάδοση κυματισμών που βασίζονται σε ένα σύστημα εξισώσεων συνέχειας και ορμής, με μεταβλητές την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και τη μέση οριζόντια ταχύτητα. Τα δυο μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν είναι το MIKE21 BW, που είναι ένα υπολογιστικό πρόγραμμα ευρέως διαδεδομένο για την προσομοίωση των κυματισμών στην παράκτια ζώνη και ουσιαστικά είναι ένα προσομοίωμα με χαρακτηριστικά βελτιστοποιημένης διασποράς και ελαφρώς μη γραμμικών κυματισμών, ενώ το δεύτερο μοντέλο των Chondros and Memos (2014) υπολογίζει κυματισμούς με υψηλή μη γραμμικότητα, ακριβή χαρακτηριστικά διασποράς συχνοτήτων και εύρους και με ακριβή χαρακτηριστικά κυματογένεσης και γραμμικής ρήχωσης.

Σκοπός της εργασίας είναι η σύγκριση των δύο μοντέλων σε σχέση με πειραματικά δεδομένα της διεθνούς βιβλιογραφίας, με σενάρια μονοδιάστατης κυματικής διάδοσης πάνω από ύφαλα εμπόδια, απότομης και ήπιας κλίσης, με θραύση και χωρίς, άλλα και δισδιάστατης διάδοσης με ταυτόχρονη εμφάνιση φαινομένων όπως ρήχωση, διάθλαση και περίθλαση. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν απεικονίζονται σε ανυψώσεις της ελεύθερης επιφάνειας, χωρικής μεταβολής υψών κυματισμού και χωρικής μεταβολής φασμάτων.

Abstract

The knowledge of both the wave propagation and the forces it produces is an important element of the design of coastal projects. Waves are the most important factor in determining the geometry of the coast, in designing marine works and in the construction of coastal protection projects. Therefore, it is necessary for the majority of the civil engineering projects to identify and qualify the waves and their forces.

Waves, when propagating in the coastal area, they face a series of transformations, which are mainly due to the combination of complex phenomena, some of which are refraction, diffraction, shoaling and breaking. Thus, in order the spread of the waves to be simulated correctly, there have been developed many mathematical theories, models and programs.

In this thesis, therefore, what it is examined is the behavior and the performance of two mathematical models, Boussinesq type, for the calculation of the spread of the waves. Both the programs are based on the equations of the continuity and the momentum, while using as variables the surface elevation and the mean horizontal velocity. The programs that have been used in this thesis are the following: MIKE21 BW, a calculating program, which is widely used for simulating waves at coastal regions and it is essentially a model that uses optimized dispersion, while the second program is Chondros & Memos (2014), which is a program that calculates waves with high nonlinearity, accurate dispersion of frequencies characteristics and accurate characteristics of kymatogenesis and linear shoaling.

The purpose of this thesis is the comparison of these two models, using experimental data of the international bibliography with scenarios of one-dimension wave propagation over obstacle hulls, of both sharp and smooth slope, both with breaking and not, moreover a two-dimension comparison using simultaneously phenomena like shoaling, diffraction and refraction. The results of the calculations are shown via the elevation of the surface, the spatial variation of the heights of the waves and finally the spatial variation of the spectra.

1. Εισαγωγή

1.1. Αντικείμενο εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται η αριθμητική προσομοίωση των κυματισμών στην παράκτια ζώνη. Η γνώση της διάδοσης κυματισμών και των δυνάμεων που αυτά παράγουν αποτελεί σημαντικό στοιχείο για το σχεδιασμό παράκτιων έργων. Τα κύματα αποτελούν το σημαντικότερο παράγοντα που καθορίζει τη γεωμετρία των ακτών, το σχεδιασμό των λιμενικών έργων, την κατασκευή παράκτιων έργων προστασίας και άλλων έργων Πολιτικού Μηχανικού.

Συγκεκριμένα, εξετάζεται η συμπεριφορά και η απόδοση ενός υπολογιστικού προγράμματος (MIKE21 BW) και ενός μαθηματικού μοντέλου τύπου Boussinesq (Chondros and Memos, 2014) στη διάδοση κυματισμών, μονοδιάστατων και δισδιάστατων, και τα αριθμητικά αποτελέσματα αυτών των δύο συγκρίνονται με δημοσιευμένα πειραματικά δεδομένα, με σκοπό να συμπεράνουμε ποιο είναι ικανότερο να προσομοιάσει επαρκώς και χωρίς μεγάλες αποκλίσεις τη διάδοση των κυματισμών.

1.2. Διάρθρωση εργασίας

Η εργασία περιλαμβάνει, συμπεριλαμβανόμενης της παρούσας Εισαγωγής (κεφάλαιο 1), οχτώ κεφάλαια.

Αρχικά, στο κεφάλαιο 2 πραγματοποιείται εκτεταμένη παρουσίαση των θεωριών διάδοσης κυματισμών και των εξισώσεων που τις διέπουν. Γίνεται ένας διαχωρισμός των κυμάτων σε σύνθετα και απλά και παρουσιάζονται οι θεωρίες περιγραφής της διάδοσης γραμμικών κυματισμών (Airy, Stokes 1^{ης}) καθώς και μη γραμμικών (Stokes 2^{ης}).

Στο κεφάλαιο 3 εισάγεται η έννοια των μαθηματικών ομοιωμάτων διάδοσης κυματισμών τύπου Boussinesq. Με βάση τη διεθνή βιβλιογραφία αναλύεται η εξέλιξη των μοντέλων αυτών σε σχέση με το χρόνο ξεκινώντας από τις πρώτες εξισώσεις που διατυπώθηκαν από τον ίδιο το 1872 και αφορούσαν μόνο τα ρηχά νερά και στη συνέχεια αναλύεται η τροποποίησή τους από πολλούς ερευνητές, που είχαν σαν στόχο τη βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς και μη γραμμικότητας, φτάνοντας τελικά στις μέρες μας που οι εξισώσεις περιγράφουν κυματισμούς υψηλής μη-γραμμικότητας και πλήρους διασποράς.

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 4 αναλύεται το αριθμητικό μοντέλο τύπου Boussinesq Chondros and Memos, 2014. Γίνεται η θεωρητική διατύπωση του μοντέλου και παρατίθενται οι εξισώσεις με βάση τις οποίες καταστρώθηκε και περιγράφεται το θεωρητικό υπόβαθρο τόσο για τη μονοδιάστατη όσο και για τη δισδιάστατη περίπτωση.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο του προγράμματος MIKE21 BW, το οποίο χρησιμοποιήθηκε στην εργασία αυτή και ο τρόπος λειτουργίας της διεπιφάνειάς του για τη μονοδιάστατη και δισδιάστατη περίπτωση. Συγκεκριμένα, αναλύονται οι επιστημονικές βάσεις που διέπουν το πρόγραμμα, οι μαθηματικές βασικές εξισώσεις ορμής και συνέχειας, το κριτήριο θραύσης Madsen et al. (1997) και το αριθμητικό σχήμα επίλυσης που χρησιμοποιείται στο 1DH BW module και στο 2DH BW module.

Στο κεφάλαιο 6 γίνονται οι αριθμητικές προσομοιώσεις και η παράθεση των διαγραμμάτων. Στο πρώτο μέρος γίνεται η περιγραφή της πειραματικής διάταξης και των τεσσάρων πειραμάτων της διεθνούς βιβλιογραφίας που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων. Έπειτα, παρουσιάζονται τα συγκριτικά διαγράμματα και τα δεδομένα που προέκυψαν από τα πειράματα των Beji and Batjjes (1994), Berkhoff et al. (1982), Vincent and Briggs (1989) και Ohyama et al. (1995) συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του μαθηματικού μοντέλου τύπου Boussinesq Chondros and Memos 2014 (CM14) και του υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW.

Στο κεφάλαιο 7 αναλύονται τα διαγράμματα του προηγούμενου κεφαλαίου. Γίνεται σχολιασμός των αποτελεσμάτων και εξάγονται συμπεράσματα ως προς το μοντέλο τύπου Boussinesq Chondros and Memos 2014 και του υπολογιστικού προγράμματος MIKE 21 BW σε κάθε πείραμα ξεχωριστά. Το κεφάλαιο κλίνει με προτάσεις για εξέλιξη του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία αυτήν και με τον σχολιασμό για το υπολογιστικό πρόγραμμα MIKE21 BW.

Τέλος, στο κεφάλαιο 8 πραγματοποιείται η βιβλιογραφική ανασκόπηση και η εκτενής καταγραφή των δημοσιεύσεων, συγγραμάτων, εργασιών και βιβλίων στα οποία βασίστηκε η ανάπτυξη της παρούσας εργασίας.

2. Θεωρίες διάδοσης κυματισμών

2.1. Εισαγωγή

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες κυματισμών. Η πρώτη εκφράζεται μαθηματικά με διαφορικές εξισώσεις υπερβολικής μορφής και γι' αυτό το λόγο τα κύματα αυτά τα ονομάζουμε υπερβολικά. Η δεύτερη είναι αυτή των διασπειρόμενων κυμάτων, και ονομάζονται έτσι λόγω της μορφής και όχι της εξίσωσης που τα περιγράφει. Η σχέση διασποράς που χαρακτηρίζει τη λύση των εξισώσεών τους συνδέει τη συχνότητα ω με τον αριθμό κύματος k ($\omega = \omega(k)$). Τα θαλάσσια κύματα είναι κατά κανόνα διασπειρόμενα.

2.2. Θεμελιώδεις εξισώσεις και οριακές συνθήκες

Κατά την ανάπτυξη των διαφορών διασπειρόμενων κυματισμών γίνονται οι παρακάτω παραδοχές:

- ρευστό ομογενές και ασυμπίεστο
- ρευστό ιδεατό
- ροή αστρόβιλη
- πυθμένας σταθερός, οριζόντιος και αδιαπέρατος

Οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής και η εξίσωση της συνέχειας για ένα ασυμπίεστο, ιδεατό ρευστό, χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, εκτός της βαρύτητας, γράφονται αντίστοιχα:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla_3)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p - gk \quad (2.1)$$

$$\nabla_3 \cdot u = 0 \quad (2.2)$$

όπου u διάνυσμα της ταχύτητας $u = (u, v, w)$, με u, v τις οριζόντιες ταχύτητες κατά x και y αντίστοιχα, p η πίεση, $k = (0, 0, 1)$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση

και $\nabla_3 = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ο τελεστής βαθμίδας στις τρεις διευθύνσεις. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.1) είναι γνωστή και ως εξίσωση του Euler.

Η συνθήκη αστόβιλης ροής συνεπάγεται την ύπαρξη συνάρτησης δυνμικού $\Phi(x, y, z, t)$ των ταχυτήτων, η οποία ορίζεται από τη σχέση :

$$u = \nabla_3 \Phi \quad (2.3)$$

Έτσι με αντικατάσταση της u από την (2.3), η εξίσωση συνεχείας (2.2) γράφεται ως συνάρτηση της Φ :

$$\nabla_3^2 \Phi = 0 \quad (2.4)$$

που είναι η γνωστή εξίσωση Laplace.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.1) κατά μήκος μιας γραμμής ροής προκύπτει η εξίσωση Bernoulli, η οποία συσχετίζει το πεδίο πιέσεων με το πεδίο ταχυτήτων :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla_3 \Phi|^2 + gz + \frac{p}{\rho} = B(t) \quad (2.5)$$

όπου $B(t)$ η σταθερά Bernoulli.

Κινηματικοί περιορισμοί στην ελεύθερη επιφάνεια και στον πυθμένα, μας οδηγούν στις κινηματικές οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και πυθμένα αντίστοιχα οι οποίες γράφονται :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \cdot \nabla \zeta = w \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad z = \zeta(x, y, t) \quad (2.6)$$

$$w = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = -d \quad (2.7)$$

όπου $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ο τελεστής βαθμίδας στις διευθύνσεις x, y .

Στην ελεύθερη επιφάνεια η πίεση, αγνοώτας την δυναμική αλληλεπίδραση με τον αέρα, θεωρείται σταθερή, οπότε :

$$p = 0 \quad z = \zeta(x, y, t) \quad (2.8)$$

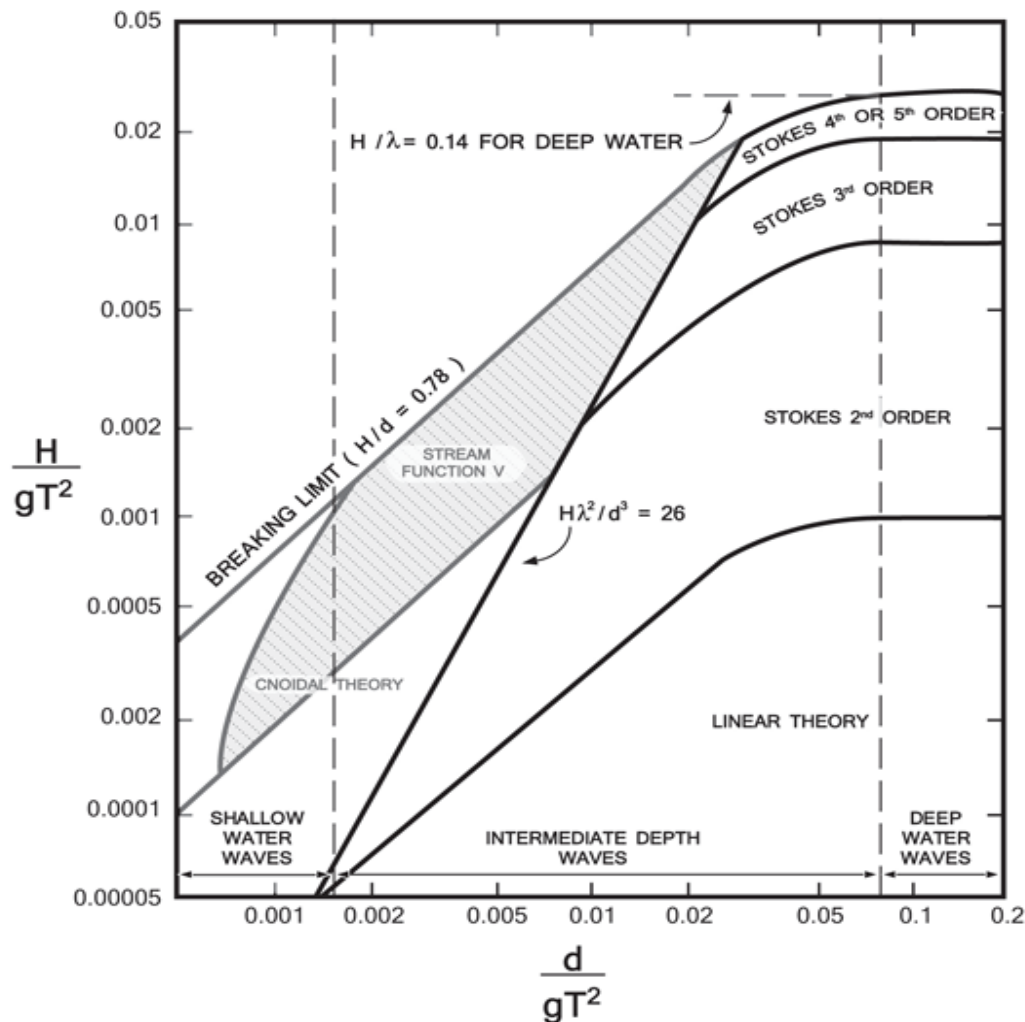
Εφαρμόζοντας την εξίσωση (2.5) στην ελεύθερη επιφάνεια και λαμβάνοντας υπόψη την συνθήκη (2.8) οδηγούμαστε στη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla_3 \Phi|^2 + g\zeta = 0 \quad (2.9)$$

με τη σταθερά $B(t)$ να απορροφάται κάνοντας την υπόθεση ότι η ελεύθερη επιφάνεια συμπίπτει με το επίπεδο $z = 0$, όταν δεν υφίσταται κυματισμός ή ρεύμα (Kirby, 1997).

2.3. Θεωρίες δισδιάστατων προωθούμενων κυματισμών

Κατά το παρελθόν έχουν αναπτυχθεί διάφορες μαθηματικές θεωρίες με σκοπό την ποσοτική περιγραφή των υδροδυναμικών χαρακτηριστικών προωθούμενων δισδιάστατων κυματισμών που διαδίδονται στο κατακόρυφο επίπεδο (Oxz) με αμετάβλητη μορφή κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Ο LeMehaute (1996), καθόρισε τις περιοχές εφαρμογής των θεωριών ανάλογα με τις τιμές των αδιάστατων παραμέτρων H/gT^2 και d/gT^2 , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Παράλληλα, η ταξινόμηση της περιοχής ισχύος μπορεί να γίνει με βάση τις τιμές των αδιάστατων παραμέτρων ε και σ^2 και της παραγωγής παραμέτρου Ursell, $U_R = \varepsilon/\sigma^2$. Η παράμετρος ε ορίζεται σαν ο λόγος του ύψους κύματος προς το βάθος, $\varepsilon = H/d$, ενώ η σ^2 είναι το τετράγωνο του λόγου του βάθους προς ένα χαρακτηριστικό οριζόντιο μήκος (λαμβάνεται συνήθως ίσο με το μήκος κύματος), $\sigma^2 = (d/L)^2$, οπότε $U_R = L^2 H/d^3$.



Σχ 2.1 Περιοχές εφαρμογής των διαφόρων θεωριών κυματισμών.

Στη συνέχεια, αναπτύσσονται οι βασικές αρχές των θεωριών των γραμμικών και μη γραμμικών διασπειρόμενων κυματισμών. Με τον όρο γραμμικοί χαρακτηρίζονται κυματισμοί των οποίων το προφίλ παρουσιάζει συμμετρία και προς τον οριζόντιο (Ox) και προς τον κατακόρυφο (Oz) άξονα, περιγράφεται δε από μία αρμονική (ημιτονοειδή) συνάρτηση. Αντίθετα, οι μη γραμμικοί κυματισμοί παρουσιάζουν ασυμμετρία ως προς την οριζόντια διεύθυνση, ενώ το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται από μία μη γραμμική εξίσωση.

2.3.1. Θεωρία γραμμικών κυματισμών απειροστού εύρους (Airy ή Stokes 1ης τάξης)

Για μικρές διαταραχές της ελεύθερης επιφάνειας (μικρό εύρος κύματος $\alpha/L \ll 1$) οι οριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια γραμμακοποιούνται, και μαζί με την εξίσωση Laplace αποτελούν ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο επιλύεται με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών (Δερμίσης, 1998). Η λύση που προκύπτει είναι αρμονική ως προς το χρόνο t και την οριζόντια απόσταση x και δίνεται από τη σχέση :

$$\Phi = \frac{Hg}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.10)$$

Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι της μορφής :

$$\zeta = \frac{H}{2} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (2.11)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2.10) και (2.11) στην κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (2.6), προκύπτει η παρακάτω σχέση :

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (2.12)$$

η οποία είναι γνωστή σαν εξίσωση διασποράς, γιατί σε παράγωγη μορφή

$$c = \frac{gT}{2\pi} \cdot \tanh kd \quad (2.13)$$

υποδουλώνει ότι η φυσική ταχύτητα είναι αύξουσα συνάρτηση της περιόδου του κύματος και κατά συνέπεια, ένας κυματισμός που συντίθεται από μία σειρά ημιτονοειδών κυμάτων με διαφορετικές περιόδους κατά τη διάδοσή του, διασπείρεται καθώς οι συνιστώσες με τις μεγαλύτερες περιόδους διαδίδονται ταχύτερα (Κουτίτας, 1994).

Από την εξίσωση διασποράς προκύπτει και η έκφραση για το μήκος κύματος L :

$$L = \frac{gT}{2\pi} \cdot \tanh kd \tag{2.14}$$

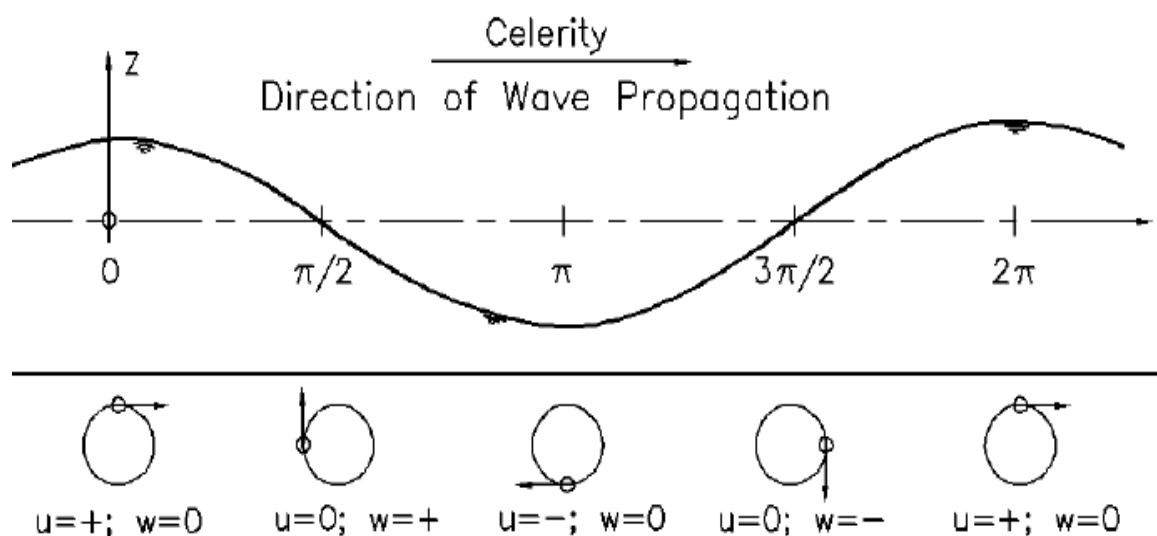
Οι συνιστώσες της ταχύτητας των ρευστών σωματιδίων, u και w κατά τη διεύθυνση x και z αντίστοιχα, προκύπτουν σαν παράγωγα μεγέθη από τη συνάρτηση δυναμικού Φ και είναι :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\cosh k(d+z)}{\sinh kd} \cdot \cos(kx - \omega t) \tag{2.15\alpha, \beta}$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd} \cdot \sin(kx - \omega t)$$

Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας u έχει την ίδια φάση με την ελεύθερη επιφάνεια ζ . Επομένως, τα στοιχεία του νερού κινούνται κατά την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος όταν βρίσκονται κάτω από την κορυφή, ενώ αντίθετα προς αυτήν όταν βρίσκονται κάτω από κοιλιά. Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει διαφορά φάσης 90° με την ελεύθερη επιφάνεια (Δερμίσης, 1988).

Στο **Σχ. 2.2** δίνεται η διεύθυνση και φορά των u και w για διάφορες τιμές της γωνίας θ (Δερμίσης, 1988).



Σχ. 2.2 Διεύθυνση και φορά των u και w συναρτήσει της θ .

Αν θεωρήσουμε τη $\vartheta = kx - \omega t$ σταθερή και θέσουμε

$$u_o = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{1}{\tanh kd} \cdot \cos \vartheta, \quad w_o = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{1}{\tanh kd} \cdot \sin \vartheta \quad (2.16\alpha, \beta)$$

τότε οι παραπάνω σχέσεις μετασχηματίζονται στις :

$$u = u_o \cdot \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd}, \quad w = w_o \cdot \frac{\sinh k(d+z)}{\cosh kd} \quad (2.17\alpha, \beta)$$

Από τις σχέσεις αυτές γίνεται φανερό ότι το εύρος των συνιστωσών της ταχύτητας μειώνεται εκθετικά με το βάθος z . Μάλιστα, για βάθη μεγαλύτερα του $L/2$ τα $[u(z)]$ και $[w(z)]$ είναι αμελητέα. Πράγματι :

$$\frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} = \frac{e^{kd+kz} + e^{-kd-kz}}{e^{kd} + e^{-kd}} < \frac{e^{kd} \cdot e^{kz} + e^{-kd} \cdot e^{-kz}}{e^{kd}} = e^{kz} + e^{-2kd} \cdot e^{-kz} = e^{kz} \cdot (1 + e^{-2kd} \cdot e^{-2kz}) \quad (2.18)$$

όποτε για $z = -L/2$, δηλαδή $d \geq L/2$:

$$\frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} < 2e^{-\pi} = 0,086 \quad (2.19)$$

Ειδικότερα, η τιμή $[u(z)]$ στην ελεύθερη επιφάνεια είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης τιμής της στο βάθος $L/2$ τουλάχιστον κατά μία τάξη μεγέθους. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και για την $[w(z)]$ (Δερμίσης, 1988).

Οι πιο πάνω εξισώσεις για τα c , L , u και w ισχύουν γενικά αλλά για τις ακραίες περιπτώσεις βαθιών νερών ($d/L > 0,5$) ή ρηχών νερών ($d/L < 0,05$) η ασυμπτωτική τάση του $\tanh kd$ προς τη μονάδα και το όρισμά του αντίστοιχα, οδηγεί στις εξισώσεις «βαθιών» και «ρηχών» νερών αντίστοιχα :

➤ Εξισώσεις «βαθιών» νερών

$$c_o = \frac{gT}{2\pi} \quad (2.20)$$

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi} \tag{2.21}$$

$$u = \frac{\pi H}{T} \cdot e^{kz} \cdot \cos(kx - \omega t) \tag{2.22}$$

$$w = \frac{\pi H}{T} \cdot e^{kz} \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{2.23}$$

➤ Εξισώσεις «ρηχών» νερών

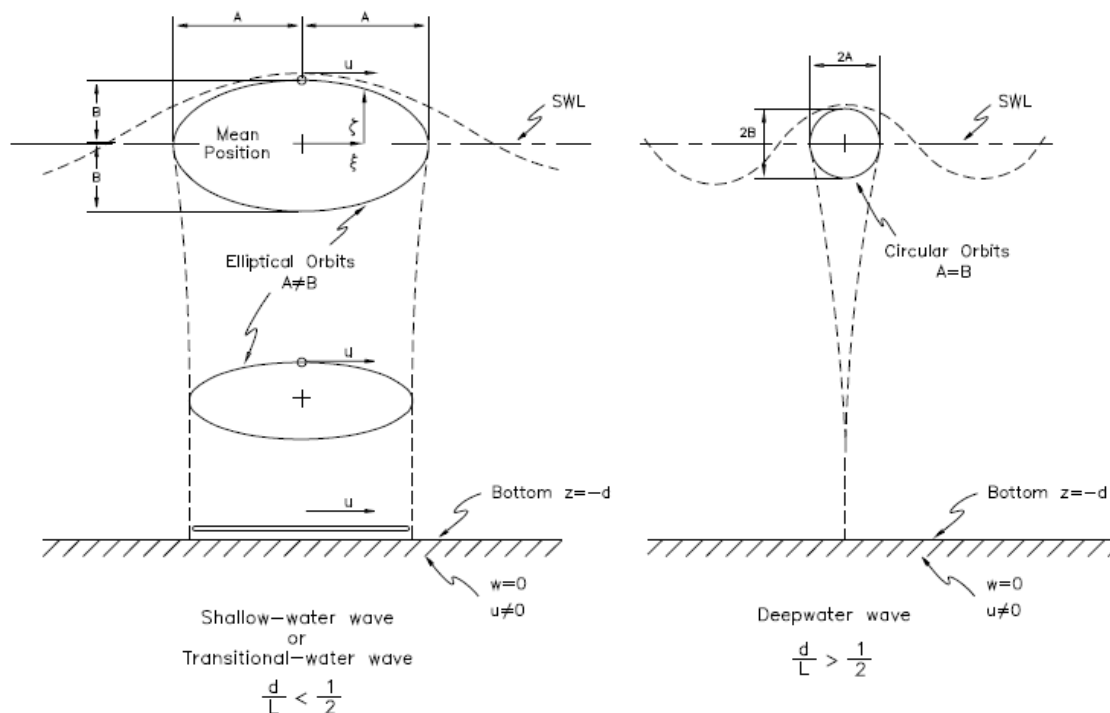
$$c = \sqrt{gd} \tag{2.24}$$

$$L = T \cdot \sqrt{gd} \tag{2.25}$$

$$u = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{1}{kd} \cdot \cos(kx - \omega t) \tag{2.26}$$

$$w = \frac{\pi H}{T} \cdot \left(1 + \frac{z}{d}\right) \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{2.27}$$

Σχηματοποίηση των τροχιών των στοιχείων του ρευστού για τις περιπτώσεις, μεγάλου και μικρού βάθους, δίνεται στο παρακάτω Σχ. 2.3 :



Σχ. 2.3 Τροχιές των στοιχείων του ρευστού στα βαθιά και ρηχά νερά.

2.3.2. Θεωρίες μη γραμμικών κυματισμών

Οι πρώτες προσεγγίσεις του προβλήματος των μη γραμμικών προωθούμενων κυματισμών σε νερά σταθερού βάθους έγιναν από τον Stokes (1847) και τους Korteweg και De Vries (1895). Με βάση τις εργασίες αυτές, αναπτύχθηκαν οι θεωρίες ανώτερης τάξης Stokes, 2^{ης} έως και 5^{ης} τάξης για βαθιά νερά και Cnoidal, 1^{ης} έως και 5^{ης} τάξης για ρηχά νερά. Πρόσφατα παρουσιάστηκε και μία σειρά από θεωρίες που βασίζονται στην ανάπτυξη σε πεπερασμένες σειρές Fourier της ροϊκής συνάρτησης Ψ , γνωστές σαν «Θεωρίες της Ροϊκής Συνάρτησης» (Stream Function Theories). Οι παραπάνω θεωρίες μη γραμμικών κυματισμών προβλέπουν συμμετρικά ως προς την κατακόρυφο προφίλ ελεύθερης επιφάνειας, όμως γενικότερα στη φύση οι μη γραμμικοί κυματισμοί παρουσιάζουν και κατακόρυφη ασυμμετρία. Σε αυτές τις περιπτώσεις ένα αριθμητικό μοντέλο μη-γραμμικών κυματισμών (τύπου Boussinesq) μπορεί να δώσει ικανοποιητικότερα αποτελέσματα.

2.3.2.1. Θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης

Οι θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης δίνουν μία προσεγγιστική λύση στο μη γραμμικό πρόβλημα βασιζόμενες στην κλασική μέθοδο των μικρών διαταραχών (perturbation method). Κατά τη μέθοδο αυτή, κάθε εξαρτημένη μεταβλητή εκφράζεται σαν μία πεπερασμένη σειρά δυνάμεων (δυναμοσειρά) μίας μικρής αδιάστατης παραμέτρου ϵ , η οποία, στην περίπτωση των κυματισμών, σχετίζεται με το ύψος και το μήκος κύματος. Οι όροι της σειράς υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων, που προκύπτουν από την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια.

Σύμφωνα με τη θεωρία Stokes 2^{ης} τάξης, η συνάρτηση δυναμικού Φ δίνεται από τη σχέση :

$$\Phi = \frac{Hg}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \cdot \sin(kx - \omega t) + \frac{3\pi H^2}{16T} \cdot \frac{\cosh 2k(d+z)}{\sinh^4 kd} \cdot \sin 2(kx - \omega t) \quad (2.28)$$

Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας έχει τη μορφή :

$$\zeta = \frac{H}{2} \cdot \cos(kx - \omega t) + \frac{\pi H^2}{8} \cdot \frac{\cosh kd}{\sinh^3 kd} \cdot (\cos 2d + 2) \cdot \cos 2(kx - \omega t) \quad (2.29)$$

Η σχέση διασποράς της θεωρίας δεύτερης τάξης ταυτίζεται με την αντίστοιχη της πρώτης τάξης, είναι δηλαδή :

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (2.30)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός ρευστού στοιχείου, σε οποιαδήποτε θέση x , z της μάζας του ρευστού, είναι :

$$u = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\cosh k(d+z)}{\sinh kd} \cdot \cos(kx - \omega t) + \frac{3}{4} \frac{\pi^2 H^2}{TL} \cdot \frac{\cos 2k(d+z)}{\sinh^4 kd} \cdot \cos 2(kx - \omega t) \quad (2.31\alpha, \beta)$$

$$w = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd} \cdot \sin(kx - \omega t) + \frac{3}{4} \frac{\pi^2 H^2}{TL} \cdot \frac{\sinh 2k(d+z)}{\sinh^4 kd} \cdot \sin 2(kx - \omega t)$$

3. Μαθηματικά ομοιώματα διάδοσης κυματισμών τύπου Boussinesq

3.1. Εισαγωγή στα ομοιώματα τύπου Boussinesq

Η προσομοίωση της διάδοσης των κυματισμών και η ακριβής περιγραφή των μετασχηματισμών που υφίστανται στις παράκτιες περιοχές είναι απαραίτητη σε σχέση με τον σχεδιασμό των θαλάσσιων κατασκευών καθώς και με την πρόβλεψη της εξέλιξης του προφίλ της ακτογραμμής και του πυθμένα.

Τα τελευταία χρόνια έχει παρουσιαστεί ένας μεγάλος αριθμός ομοιωμάτων διάδοσης κυματισμών που βασίζονται στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων τύπου Boussinesq. Οι εξισώσεις Boussinesq προκύπτουν από την ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler (ορμής) στο βάθος ροής με την παραδοχή σχετικά μακρών κυματισμών. Οι εξαρτημένες μεταβλητές που υπεισέρχονται στις εξισώσεις αυτές είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και η οριζόντια ταχύτητα του ρευστού, υπό μορφή μερικών παραγώγων διαφόρων τάξεων. Με τη χρήση των παραπάνω ομοιωμάτων είναι δυνατή η προσομοίωση της διάδοσης μη γραμμικών κυματισμών διασποράς στα ρηχά νερά και η περιγραφή των κυματικών φαινομένων της παράκτιας ζώνης όπως της ρήχωσης, της διάθλασης, της ανάκλασης, της περίθλασης, καθώς επίσης της θραύσης και της αναρρίχησης στην ακτή.

Όπως αναφέρθηκε και στο δεύτερο κεφάλαιο, η ανάλυση των κυματισμών διασποράς χαρακτηρίζεται από δύο σημαντικές παραμέτρους κλίμακας. Η πρώτη είναι η παράμετρος ϵ που εκφράζει τη διασπορά εύρους (amplitude dispersion) και κατ' επέκταση τη μη γραμμικότητα (non-linearity) και ορίζεται σαν ο λόγος του ύψους κύματος προς το βάθος $\epsilon=H/d$, ενώ η δεύτερη είναι το τετράγωνο του λόγου του βάθους προς ένα χαρακτηριστικό οριζόντιο μήκος (λαμβάνεται συνήθως ίσο με το μήκος κύματος) $\sigma^2=(d/L)^2$ και εκφράζει τη διασπορά συχνοτήτων (frequency dispersion) (Karambas 1999). Λόγω της μαθηματικής τους διατύπωσης οι πρωταρχικές μορφές των εξισώσεων Boussinesq αναφέρονται σε κυματισμούς

ελαφρά μη γραμμικούς (weakly nonlinear) και με ελαφρά διασπορά συχνοτήτων (weak dispersion).

Πρέπει να τονιστεί ότι η μορφή των εξισώσεων Boussinesq δεν είναι συγκεκριμένη, αντιθέτως στη σχετική βιβλιογραφία απαντώνται διαφορετικές εκδοχές των εξισώσεων, οι οποίες συνιστούν το αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης εξελικτικής διαδικασίας. Οι διαφορές μεταξύ τους σχετίζονται κυρίως με τη διαφορετική επιλογή – θεώρηση της οριζόντιας ταχύτητας και τους διαφορετικούς όρους ανώτερης τάξης που διατηρούνται κατά την κατάστρωση των εξισώσεων. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις ως προς την επιλογή της οριζόντιας ταχύτητας:

- Μέση στο βάθος ταχύτητα (depth-averaged velocity)
- Ταχύτητα στη στάθμη ηρεμίας ύδατος (velocity at the still water level)
- Ταχύτητα σε τυχαίο βάθος (velocity at an arbitrary depth)
- Ταχύτητα στον πυθμένα (bottom velocity)

Στα ομοιώματα Boussinesq η κατακόρυφη (στο βάθος) κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού και η αντίστοιχη κατανομή της κατακόρυφης ταχύτητας γραμμική.

3.2. Περιγραφή της εξέλιξης των μοντέλων Boussinesq

Η διάδοση των κυματισμών σε νερά σταθερού βάθους μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Boussinesq (1872) που παρουσίασε ένα σετ εξισώσεων με ισχύ σε μία οριζόντια διάσταση. Πιο πρόσφατα, οι Mei και Le Méhauté (1966) επέκτειναν τις εξισώσεις αυτές στην περίπτωση κεκλιμένου πυθμένα. Η σταθερή και αυστηρή μαθηματική λύση που έδωσαν βασίστηκε στην υπόθεση ότι οι χωρικές παράγωγοι του βάθους που αντιστοιχεί στη στάθμη ηρεμίας ($\Sigma.H.$) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το λόγο του βάθους στη $\Sigma.H.$ προς το μήκος κύματος. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την ανάπτυξη σχετικά μακρών κυματισμών, ελαφρά μη γραμμικών σε νερά μεταβαλλόμενου βάθους. Παρόμοιο σετ εξισώσεων παρουσιάστηκε από τον Peregrine (1967), ο οποίος ολοκλήρωσε την εξίσωση συνεχείας και τις εξισώσεις Euler σε δύο οριζόντιες διαστάσεις, χρησιμοποιώντας μια τεχνική

αναπτυγμάτων η οποία πρώτο-εφαρμόστηκε από τον Keller (1948). Οι εξισώσεις του Peregrine αποτέλεσαν το πρότυπο για μια σειρά από μεταγενέστερες εργασίες και γι' αυτό χαρακτηρίζονται ως «κλασικές» .

Οι κλασικές εξισώσεις Boussinesq ισχύουν στα ρηγά νερά. Το γεγονός αυτό θέτει σοβαρούς περιορισμούς σε πρακτικές εφαρμογές και για το λόγο αυτό έγιναν σοβαρές προσπάθειες ώστε να βελτιωθούν τα χαρακτηριστικά διασποράς στα βαθιά νερά. Ο Witting (1984) χρησιμοποίησε μια εκδοχή της ακριβούς πλήρως μη γραμμικής ολοκληρωμένης στο βάθος εξίσωση ορμής, διαμορφωμένης σε όρους της οριζόντιας ταχύτητας σε κάποιο βάθος. Μια τεχνική προσέγγισης Padé χρησιμοποιήθηκε για να συσχετιστούν οι διαφορετικές μεταβλητές ταχύτητας με συντελεστές επιλεγμένους ώστε να δίνουν τα καλύτερα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς (linear dispersion). Η προσπάθεια αυτή είχε εξαιρετικά αποτελέσματα, όμως περιορίζεται σε νερά σταθερού βάθους. Επιπλέον φαίνεται ότι είναι δύσκολη η εφαρμογή της τεχνικής σε δύο οριζόντιες διαστάσεις.

Εμπνευσμένοι από την ιδέα του Witting (1984), οι Madsen et al. (1991), τροποποίησαν τις εξισώσεις Boussinesq που μελετήθηκαν από τους Abbott et al. (1984), έτσι ώστε να περιλαμβάνουν βελτιωμένα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς στα βαθιά νερά (§2.4.1). Ωστόσο, δεδομένου ότι στις αρχικές εξισώσεις έγινε η υπόθεση ότι ο πυθμένας είναι οριζόντιος δεν μοντελοποιήθηκε η διάδοση των κυματισμών από τα βαθιά στα ρηγά νερά (μεταβλητό βάθος). Αυτός ο περιορισμός παρακάμφθηκε εν μέρει από τους Madsen and Sørensen (1992) οι οποίοι σε αντίθεση με τους προηγούμενους συμπεριέλαβαν χωρικές παραγώγους πρώτης τάξης του βάθους στη Σ.Η. για την προσέγγιση των όρων διασποράς, αλλά οι παράγωγοι ανώτερης τάξης και παράγωγοι όροι αγνοήθηκαν, περιορίζοντας έτσι τους υπολογισμούς σε ομαλά κεκλιμένο πυθμένα.

Οι Yoon και Liu (1989) μελέτησαν την αλληλεπίδραση ρευμάτων και ελαφρά μη γραμμικών κυμάτων και παρουσίασαν μια διαφορετική διαδικασία ολοκλήρωσης από αυτή του Peregrine (1967). Η μέθοδος τους υιοθετήθηκε από τον Nwogu (1993) ο οποίος υπέθεσε επίσης ότι οι χωρικές παράγωγοι του βάθους στη Σ.Η. είναι της ίδιας τάξης με το λόγο του βάθους στη Σ.Η. προς το μήκος κύματος. Ο Nwogu εργαζόμενος σε σταθερή και αυστηρή βάση ανέπτυξε ένα σετ εξισώσεων Boussinesq που ισχύουν σε δύο οριζόντιες διαστάσεις.

Οι Beji and Battjes (1994) μελέτησαν τη διάδοση κυματισμών πάνω από μια τραπεζοειδή διατομή χρησιμοποιώντας ένα ομοίωμα τύπου Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς στα βαθιά νερά. Παρόλο που οι εξισώσεις διαφέρουν απ' αυτές που ανέπτυξαν οι Madsen et al. (1991), έγινε με παρόμοια τεχνική χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Peregrine (1967). Η ισχύς του ομοιώματος επιβεβαιώθηκε σε σύγκριση με πειράματα που έγιναν σε κανάλι.

Μια εναλλακτική προσέγγιση υιοθετήθηκε από τους Wei και Kirby (1994) που κατάστρωσαν τις εξισώσεις του Nwogu (1993) με ένα πιο άμεσο τρόπο. Αντί να συμπεριληφθούν οι όροι σφαλμάτων αποκοπής τρίτης παραγωγού, οι πρώτες παράγωγοι διακριτοποιήθηκαν σε τέταρτη τάξη τόσο στο χρονικό όσο και στο χωρικό βήμα. Μια εμπειριστατωμένη ανάλυση των ιδιοτήτων της μεθόδου επίλυσης και των συσχετιζόμενων οριακών συνθηκών δίνεται σε παρακάτω παράγραφο βασιζόμενη στους Wei και Kirby (1995).

Πρόσθετες βελτιώσεις των εξισώσεων Boussinesq έγιναν από τους Kirby and Wei (1994) που επέκτειναν τις εξισώσεις του Nwogu ώστε να περιλαμβάνουν όλες τις τάξεις της μη γραμμικής παραμέτρου. Σε σχέση με τις τυπικές, οι πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις περιλαμβάνουν πολλές πρόσθετες παραγωγούς, καθιστώντας την αριθμητική επίλυση πιο περίπλοκη. Παρόλα αυτά, οι εξισώσεις επιλύθηκαν αριθμητικά σε μια οριζόντια διάσταση από τους Wei et al. (1995) που χρησιμοποίησαν τη μέθοδο εκτίμησης-διόρθωσης των Wei and Kirby (1994). Σε σύγκριση με τα αποτελέσματα μιας ακριβούς αριθμητικά μεθόδου οριακών στοιχείων των Grilli et al. (1989) έγινε φανερό ότι οι νέες εξισώσεις βελτιώνουν την περιγραφή του μετασχηματισμού του ύψους κύματος κατά τη ρήχωση.

Μια νέα προσέγγιση έγινε από τους Nadaoka et al. (1994), που κατέστρωσαν ένα σετ εξισώσεων Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες διαδικασίες χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Galerkin για να προκύψει μια βέλτιστη μορφή του προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας, γεγονός που οδήγησε σε εξισώσεις με εξαιρετικά χαρακτηριστικά διασποράς σε ένα μεγάλο εύρος βαθών. Σε μία οριζόντια διάσταση, η σύγκριση αρκετών αριθμητικών παραδειγμάτων με πειραματικά αποτελέσματα σε κανάλι, κατέδειξε την ικανότητα του ομοιώματος να αναπαράγει σωστά το κυματικό προφίλ και το πεδίο ταχυτήτων. Οι Beji and Nadaoka (1994) διαμόρφωσαν το υπολογιστικό ομοίωμα ώστε να περιλαμβάνει και τη δεύτερη οριζόντια διάσταση. Στο όριο του υπολογιστικού πεδίου, τα

εξερχόμενα κύματα φιλτράρονταν με τη χρήση μιας συνθήκης ακτινοβολίας ανώτερης τάξης που προτάθηκε αρχικά από τους Engquist και Majda (1977). Τέλος, οι Beji and Nadaoka (1996) παρουσίασαν ένα σετ εξισώσεων Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά χαρακτηριστικά διασποράς, η διαδικασία κατάστρωσης των οποίων είναι εξαιρετικά σύντομη.

Οι Schäffer και Madsen (1995), συνδυάζοντας τις ιδέες του Nwogu (1993) και των Madsen και Sørensen (1992), ενσωμάτωσαν πρόσθετες βελτιώσεις σε ένα σετ εξισώσεων Boussinesq. Διατηρώντας όρους ανώτερης τάξης στη συχνότητα διασποράς αλλά και στη διασπορά εύρους, οι Madsen et al. (1996), κατάστρωσαν ένα νέο σετ εξισώσεων Boussinesq. Με σκοπό να βελτιώσουν τα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς στα βαθιά νερά, οι εξισώσεις διαμορφώθηκαν με μια τεχνική που περιγράφηκε από τους Schäffer και Madsen (1995). Δεδομένου ότι οι εξισώσεις περιλαμβάνουν όρους παραγώγων πέμπτης τάξης, τα υπολογιστικά σχήματα είναι σχετικά περίπλοκα. Οι Chen et al. (1996) εφήρμοσαν την ίδια τεχνική για να βελτιώσουν τη γραμμική συχνότητα διασποράς που προκαλείται από την αλληλεπίδραση κύματος-ρεύματος. Εξάλλου, οι Madsen και Schäffer (1998) κατέληξαν σε νέες μορφές εξισώσεων Boussinesq ανώτερης τάξης, τις οποίες ανέπτυξαν τόσο σε όρους της οριζόντιας ταχύτητας στη στάθμη ηρεμίας, όσο και της μέσης στο βάθος οριζόντιας ταχύτητας και της οριζόντιας ταχύτητας σε τυχαίο βάθος.

Ο Karambas (1999) αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρά την κατακόρυφη ταχύτητα και επιλύοντας αναλυτικά την εξίσωση Laplace, διατύπωσε ένα σετ εξισώσεων Boussinesq. Οι εξισώσεις που πρότεινε περιλαμβάνουν βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς για μονοχρωματικούς κυματισμούς. Επίσης στην εργασία του ο Zou (1999) (§2.4.5) καταλήγει σε ένα σετ εξισώσεων με ακρίβεια τρίτης τάξεως ($O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4)$, όπου $\mu = d/L_0$). Οι εκφράσεις για τις κάθετες κατανομές της κάθετης και της οριζόντιας ταχύτητας είναι τρίτης και τέταρτης τάξης πολυώνυμα αντίστοιχα. Στην εξίσωση συνέχειας, όπως λεπτομερειακά αναλύεται παρακάτω, έχει προστεθεί ένας όρος για να αυξήσει την ακρίβεια διάδοσης του κυματισμού από τα ρηγά στα βαθιά νερά.

Άλλες έρευνες, όπως των Madsen & Schäffer (1998) και Gobbi, Kirby & Wei (2000) αύξησαν το όριο του σχετικού βάθους μέχρι την τιμή $kd=6$. Οι Agnon, Madsen & Schäffer (1999) παρουσίασαν μια νέα προσέγγιση στην οποία είναι δυνατόν να πετύχει η ίδια ακρίβεια και στις μη γραμμικές και στις γραμμικές ιδιότητες. Στην εργασία τους

βασιστήκανε σε μια ακριβή λύση των οριακών συνθηκών, της ελεύθερης επιφάνειας και του πυθμένα, συνδυάζοντας μια προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Laplace. Το πεδίο ταχυτήτων εκφράζεται σε όρους και της κάθετης και της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας στη (Σ.Η.). Οι εξισώσεις τους επιτρέπουν μια ακριβή περιγραφή μη γραμμικών κυμάτων διασποράς μέχρι και $kd=6$. Όμως ένα πρόβλημα, που δεν λύθηκε από τους Agnon, Madsen & Schäffer (1999), ήταν να αποδώσουν μια ακριβή διανομή του κατακόρυφου πεδίου ταχυτήτων.

Πιο πρόσφατες έρευνες έχουν πρακτικά εξαλείψει τον περιορισμό του βάθους νερού και αναλύουν υψηλής μη γραμμικότητας κυματισμούς με μεγάλη ακρίβεια και αποτελεσματικότητα. Οι εξισώσεις που κατέληξαν οι Madsen et al. (2002, 2003) (§2.5.1) περιγράφουν κυματισμούς υψηλής μη γραμμικότητας σε βάθη $kd \approx 25$ (k =αριθμός κύματος, d =βάθος νερού) με αποτελεσματικό και ακριβή τρόπο και υπολογίζοντας τα κινηματικά χαρακτηριστικά (ταχύτητες) των κυματισμών σε αδιάστατα βάθη $kd \approx 12$. Αυτό το πέτυχαν, όπως θα δούμε στη συνέχεια της παρούσης εργασίας, γενικεύοντας την προσέγγιση των Agnon, Madsen & Schäffer (1999), και επεκτείνοντας την λύση Laplace από ένα ακαθόριστο επίπεδο- z παρά από τη (Σ.Η.).

Ο Schäffer (2004) πρότεινε ένα καινούριο μονοδιάστατο, μη-γραμμικό, πλήρους διασποράς, μοντέλο post-Boussinesq. Με όρους την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και την οριζόντια ταχύτητα στη (Σ.Η.). Το μοντέλο βασίζεται σε ρητές και ακριβείς εκφράσεις των εσωτερικών κινηματικών χαρακτηριστικών, τα οποία επεξεργάστηκαν συνελκτικά στο χώρο με κατάλληλες συναρτήσεις παλμού. Μια παρόμοια προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς και στη μελέτη του Schäffer (2003) για τον υπολογισμό του πεδίου των ταχυτήτων στη (Σ.Η.).

Οι Bingham και Agnon (2005) επίσης παρήγαγαν μια μέθοδο Boussinesq πλήρους διασποράς, με ελάχιστο ποσοστό λάθους προσέγγισης για όλα τα βάθη $kd < \infty$. Αυτό το πέτυχαν εισάγοντας τη γενικευμένη (2D) μετατροπή Hilbert η οποία εκτιμάται χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Fourier. Συνεπώς οι τελευταίες εξισώσεις Boussinesq έχουν ξεπεράσει κάθε πρακτικό περιορισμό στο σχετικό βάθος νερού.

Όμως, διάφορα πρακτικά προβλήματα εμφανίζονται σχετικά με την αποτελεσματικότητα, ακρίβεια και σταθερότητα του αριθμητικού σχήματος επίλυσης των εξισώσεων. Πολλές απ'

αυτές τις δυσλειτουργίες εμφανίζονται λόγω της πολυπλοκότητας του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες περιλαμβάνουν ένα μεγάλο αριθμό όρων με υψηλής τάξεως παραγώγους. Ως εκ τούτου τα αριθμητικά σχήματα επίλυσης τους είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα και περιέχουν συστήματα διακριτοποιημένων γραμμικών εξισώσεων.

3.3. Κλασικές εξισώσεις Boussinesq (Peregrine 1967)

Ο Peregrine (1967, 1972) παρουσίασε μια επέκταση των εξισώσεων Boussinesq για σχετικά μακρούς κυματισμούς σε νερά μεταβαλλόμενου βάθους, ολοκληρώνοντας την εξίσωση συνέχειας και τις εξισώσεις Euler σε δύο οριζόντιες διαστάσεις, χρησιμοποιώντας μια τεχνική αναπτυγμάτων η οποία πρωτοεμφανίστηκε από τον Keller (1948). Οι εξισώσεις αυτές είναι για μικρού εύρους κυματισμούς και βασίζονται στην παραδοχή ότι οι παράμετροι ϵ και σ^2 είναι μικρές ($O(\epsilon) \ll 1$ και $O(\sigma^2) \ll 1$) και της ίδιας τάξης ($\epsilon = O(\sigma^2)$).

Το σετ των εξισώσεων τύπου Boussinesq που κατέστρωσε ο Peregrine (1967) έχει τη μορφή:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(d + \zeta)\mathbf{u}] = 0 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\zeta = \frac{d}{2} \nabla[\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})] - \frac{d^2}{6} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \tag{3.2}$$

Όπου $\mathbf{u} = (U, V)$ είναι το διάνυσμα της μέσης στο βάθος οριζόντιας ταχύτητας, $d = d(x, y)$ είναι το μεταβαλλόμενο βάθος μετρούμενο από τη στάθμη ηρεμίας και $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ είναι ο οριζόντιος τελεστής βαθμίδας.

Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν την εξίσωση συνέχειας (διατήρησης μάζας) και ορμής αντίστοιχα. Οι παραπάνω εξισώσεις σε μια διάσταση (1D) και στην περίπτωση οριζόντιου πυθμένα μετασχηματίζονται στις εξής:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{d^3}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \quad (3.4)$$

Όπου $h=d+\zeta$.

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων αυτών με τη βοήθεια ενός ακριβούς αριθμητικού σχήματος, δίνει καλά αποτελέσματα χωρίς να είναι απαραίτητο να συμπεριληφθούν πρόσθετοι μη γραμμικοί όροι (Karambas και Koutitas, 1992).

Στα βαθιά νερά η παράμετρος σ^2 γίνεται σημαντική και συνεπώς οι εξισώσεις Boussinesq δεν έχουν ισχύ. Στην περίπτωση γραμμικών κυματισμών ($O(\varepsilon)=0$) η σχέση διασποράς που προκύπτει από τις παραπάνω εξισώσεις είναι:

$$\omega^2 = gdk^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(kd)^2} \quad (3.5)$$

Η εξίσωση (3.5) συμπίπτει με την ακριβή αναλυτική έκφραση της γραμμικής θεωρίας (Airy) ($\omega^2 = gk \tanh kd$) για μικρές τιμές του kd . Μεγαλύτερες τιμές του kd δίνουν σημαντικές διαφοροποιήσεις από την ακριβή γραμμική λύση. Για το λόγο αυτό οι κλασσικές εξισώσεις Boussinesq περιορίζονται στα ρηχά νερά, με ένα ποσοστό λάθους ταχύτητας φάσης περίπου 4%, αν το όριο επεκταθεί στο $d/L_0=0,2$ (L_0 , μήκος κύματος στα βαθιά νερά) (Madsen et al. 1991).

3.4. Μοντέλα Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενες ενότητες, ο σημαντικότερος περιορισμός που τίθεται στην πρακτική εφαρμογή των κλασσικών εξισώσεων Boussinesq (Peregrine 1967) σχετίζεται με τα χαρακτηριστικά διασποράς τους σε σύγκριση με αυτά της γραμμικής θεωρίας (Airy). Έτσι, οι κλασσικές εξισώσεις περιγράφουν με ικανοποιητική ακρίβεια τη μετάδοση των κυματισμών μόνο στα ρηχά νερά.

Αρκετοί ερευνητές με πρώτο τον Witting (1984) προχώρησαν στη διατύπωση νέων μορφών των εξισώσεων Boussinesq που περιλαμβάνουν βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς, επεκτείνοντας κατά αυτό τον τρόπο την εφαρμοσιμότητά τους σε βάθη συγκρίσιμα ή αντίστοιχα του μήκους κύματος (ενδιάμεσα και βαθιά νερά).

Με χρονολογική σειρά αναφέρουμε τις εργασίες των:

- 1) Madsen et al. (1991)
- 2) Madsen & Sørensen (1992)
- 3) Nwogu (1993)
- 4) Beji & Battjes (1994)
- 5) Wei & Kirby 1995
- 6) Schäffer & Madsen (1995)
- 7) Wei et al. (1995)
- 8) Madsen & Schäffer (1998)
- 9) Karambas (1999)
- 10) Zou (1999)

Στην πλειονότητά των εργασιών η τεχνική της βελτίωσης συνιστάται στην εισαγωγή στην εξίσωση ορμής πρόσθετων όρων, ανάλογων μίας παραμέτρου διασποράς και στην ταύτιση των σχέσεων διασποράς που προκύπτουν από τις προτεινόμενες εξισώσεις με το ανάπτυγμα Padé της σχέσης διασποράς της γραμμικής θεωρίας, που έχει τη μορφή (Witting, 1984):

$$\omega^2 = gk^2 \frac{1 + \frac{1}{15}(kd)^2}{1 + \frac{2}{5}(kd)^2} \quad (3.6)$$

Η παράμετρος διασποράς υπεισέρχεται στις σχέσεις διασποράς με τη μορφή πολλαπλασιαστικού συντελεστή των όρων kd . Η παράμετρος αυτή συναντάται στις εργασίες 1 και 2 ως B , στην 3 ως α και σε άλλες ως β . Εξάλλου οι Schäffer & Madsen (1995), χρησιμοποίησαν σε ένα σετ εξισώσεων Boussinesq παρόμοιο με αυτό των Madsen & Sørensen (1992), δύο παραμέτρους του τύπου (B_1, B_2) .

Από τις παραπάνω εργασίες αυτή των Schäffer & Madsen (1995) έχει γενικότερο χαρακτήρα, αφού όπως διαπιστώνεται για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων (B_1, B_2)

προκύπτουν οι σχέσεις διασποράς άλλων εργασιών. Μάλιστα, συνδυάζοντας τις προσεγγίσεις των Madsen & Sørensen (1992) και Nwogu (1993) κατέληξαν σε νέες εξισώσεις με χαρακτηριστικά διασποράς που αντιστοιχούν σε ανάπτυγμα Padé της σχέσης γραμμικής διασποράς. Οι παράμετροι που υπεισέρχονται στην περίπτωση αυτή είναι πέντε ($\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$).

Τέλος αναφέρουμε ότι κατά την κατάστρωση των εξισώσεων των προηγούμενων εργασιών όπως και στην περίπτωση των κλασικών εξισώσεων Boussinesq διατηρούνται όροι μέχρι και $O(\varepsilon, \sigma^2)$ ενώ γίνεται η βασική παραδοχή ότι $\varepsilon = O(\sigma^2)$ (εκτός της εργασίας 7, που όπως θα δούμε στη συνέχεια περιέχει μεγαλύτερους όρους μη γραμμικότητας).

3.4.1. Εξισώσεις Boussinesq των Madsen et al. (1991)

Η συγκεκριμένη μελέτη παρουσίασε ένα καινούριο μοντέλο εξισώσεων Boussinesq ικανό να προσομοιάσει σύνθετους κυματισμούς σε δύο διαστάσεις, παρόμοιο με εκείνο των Abbott et al. (1978), αλλά παρουσιάζοντας βελτιωμένες ιδιότητες ταχύτητας φάσης και ομάδας (c, c_g) γραμμικών κυματισμών στα βαθιά νερά. Η καινούρια φόρμουλα των εξισώσεων τους ικανοποιεί τις δυο παρακάτω απαιτήσεις:

1. Οι εξισώσεις εκφράζονται σε δύο οριζόντιες διαστάσεις σε όρους της ελεύθερης επιφάνειας και της μέσης ολοκληρωμένης ταχύτητας.
2. Η προκύπτουσα γραμμική διασπορά θα πρέπει να ακολουθεί την εξίσωση:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + Bk^2h^2}{1 + \left(B + \frac{1}{3}\right)k^2h^2} \quad (3.7)$$

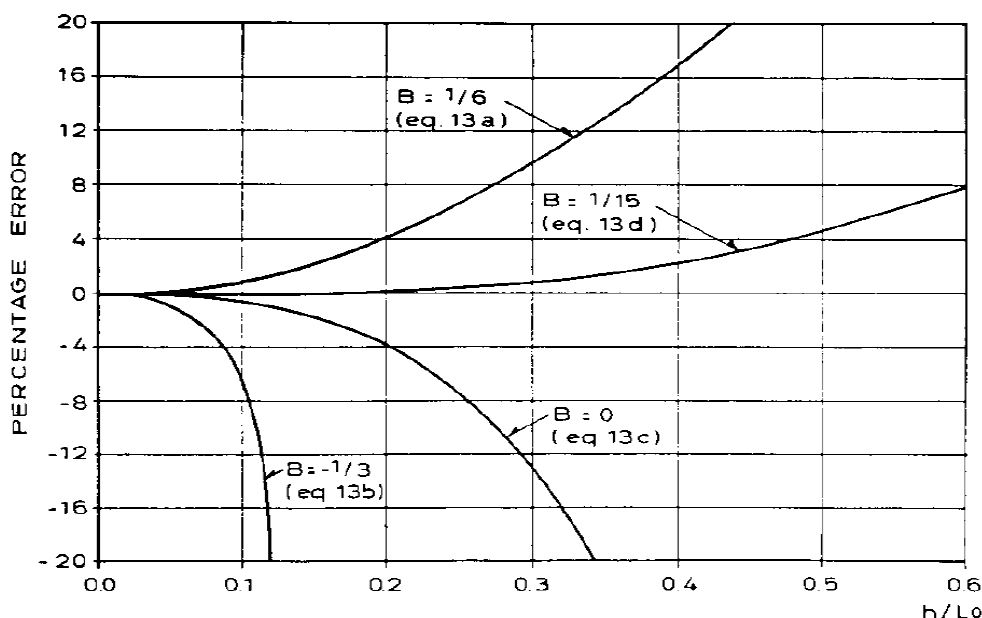
Όπου η τιμή του συντελεστή B επιλέγεται κατάλληλα για βελτιωθεί η ακρίβεια του μοντέλου στα βαθιά νερά..

Μέχρι τη συγκεκριμένη έρευνα των Madsen et al. (1991) οι τιμές του συντελεστή B είχαν τις τιμές:

$$B = \begin{cases} 1/6 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/15 \end{cases}$$

Όπου $B=1/6$ προέκυπτε εάν η ταχύτητα εκφραζόταν σε όρους ταχύτητας πυθμένα U_b (Svedsen 1974, Witting 1984), $B=-1/3$ εάν η ταχύτητα εκφραστεί σε όρους επιφανειακής ταχύτητας U_s (Svedsen 1974), για $B=0$ προκύπτει η σχέση γραμμικής διασποράς των κλασσικών εξισώσεων Boussinesq για μέση ταχύτητα \bar{U} , και τέλος για τιμή του συντελεστή $B=1/15$ προκύπτει η προσέγγιση Padé του Witting (1984) η οποία όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα (Σχ. 3.1) δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα από τις παραπάνω.

Στο διάγραμμα, ο κάθετος άξονας είναι το ποσοστό λάθους της ταχύτητας φάσης για τις διάφορες μορφές των εξισώσεων Boussinesq σε σχέση με τη γραμμική θεωρία πρώτης τάξης Stokes ($100(c-c_{STOKES})/c_{STOKES}$) και ο οριζόντιος είναι ο λόγος του βάθους προς το μήκος κύματος στα βαθιά h/L_0 .



Σχ. 3.1 Ποσοστιαίο λάθος ταχύτητας φάσης ($100(c-c_{STOKES})/c_{STOKES}$) για διάφορες μορφές εξισώσεων Boussinesq συγκριτικά με τη γραμμική θεωρία Stokes.

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι για να περιορίσουμε το λάθος σύγκρισης της ταχύτητας φάσης σε ένα αποδεκτό ποσοστό του 5% οι κλασικές εξισώσεις Boussinesq είναι ικανοποιητικές για $h/L_0 < 0.22$ ενώ με τη προσέγγιση Padé του Witting ο περιορισμός του βάρους γίνεται $h/L_0 < 0.5$.

Οι Madsen et al. (1991) προσπάθησαν να επεκτείνουν αυτό το όριο, έχοντας ως βάση την κλασική μορφή των εξισώσεων Boussinesq που επιλύθηκαν από τους Abbott et al. (1984):

$$S_t + P_x + Q_y = 0 \quad (3.8)$$

$$P_t + \left(\frac{P^2}{d}\right)_x + \left(\frac{PQ}{d}\right)_y + gdS_x - \frac{1}{3}h^2(P_{xxt} + Q_{xyt}) = 0 \quad (3.9)$$

$$Q_t + \left(\frac{Q^2}{d}\right)_y + \left(\frac{PQ}{d}\right)_x + gdS_y - \frac{1}{3}h^2(Q_{yyt} + P_{xyt}) = 0 \quad (3.10)$$

Όπου d είναι το συνολικό βάθος νερού, h το βάθος στη Σ.Η., S η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, και P, Q οι ταχύτητες ολοκληρωμένες στο βάθος στη διεύθυνση x - και y - αντίστοιχα. Η σχέση της γραμμικής διασποράς των εξισώσεων αυτών είναι η (3.7) με $B=0$.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μια κλασική μέθοδος είναι η απλοποίηση υψηλότερης τάξης όρων, εισάγοντας τις εξισώσεις μακρών κυματισμών σαν πρώτη προσέγγιση (Mei 1983). Για μια ακτή ήπιας κλίσης οι χωρικές παράγωγοι του βάρους στη Σ.Η. μπορούν να παραμεληθούν και σαν πρώτη προσέγγιση να έχουμε:

$$(P_{xxt} + Q_{xyt}) \approx -gh(S_{xxx} + S_{xyy}) \quad (3.11)$$

$$(Q_{yyt} + P_{xyt}) \approx -gh(S_{yyy} + S_{yxx}) \quad (3.12)$$

Έτσι μια διαφορετική μορφή των εξισώσεων (3.8), (3.9) και (3.10) επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις (3.11) και (3.12). Στα ρηχά νερά αυτή η διαφορά δεν επιφέρει αλλαγές στην αριθμητική λύση, αλλά στα βαθιά νερά τα χαρακτηριστικά διασποράς

είναι πολύ «φτωχά», χρησιμοποιώντας την τιμή του συντελεστή $B=-1/3$ στη σχέση (3.7) (βλ. Σχ. 3.1).

Αντιθέτως στην εργασία τους οι Madsen et al. (1991) έλαβαν υπόψη τις εξής ποσότητες:

$$\epsilon_1 = -Bh^2 [P_{xx} + Q_{yy} + gh(S_{xxx} + S_{yyy})] \quad (3.13)$$

$$\epsilon_2 = -Bh^2 [Q_{yy} + P_{xx} + gh(S_{yyy} + S_{xxx})] \quad (3.14)$$

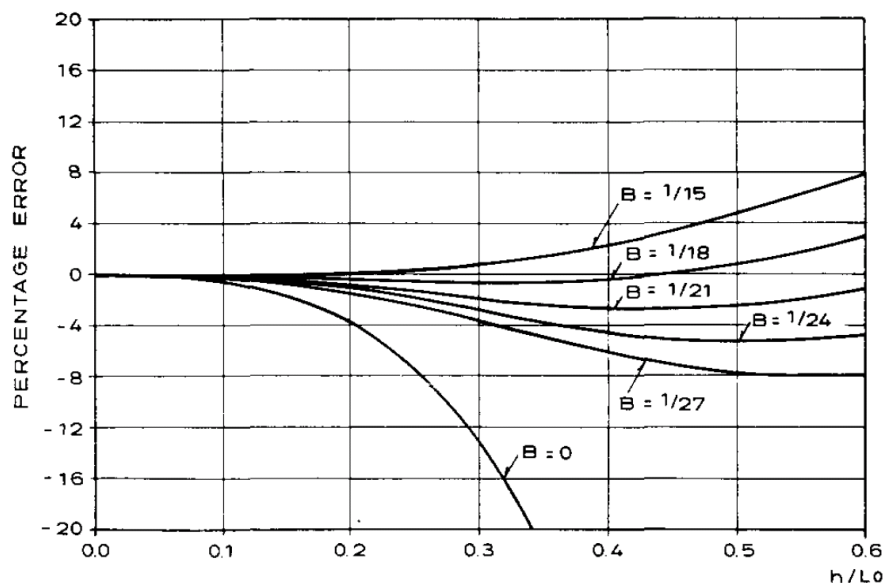
Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.11) και (3.12) αυτοί οι όροι είναι ασήμαντοι στα ρηχά νερά και μπορούν να προστεθούν στις εξισώσεις Boussinesq χωρίς να επηρεάσουν την ακρίβεια του μοντέλου. Οπότε οι νέες εξισώσεις είναι της μορφής:

$$S_t + P_x + Q_y = 0 \quad (3.15)$$

$$P_t + \left(\frac{P^2}{d}\right)_x + \left(\frac{PQ}{d}\right)_y + gdS_x - \left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(P_{xx} + Q_{yy}) - Bgh^3(S_{xxx} + S_{yyy}) = 0 \quad (3.16)$$

$$Q_t + \left(\frac{Q^2}{d}\right)_y + \left(\frac{PQ}{d}\right)_x + gdS_y - \left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(Q_{yy} + P_{xx}) - Bgh^3(S_{yyy} + S_{xxx}) = 0 \quad (3.17)$$

Η τιμή του συντελεστή B δεν περιορίζεται στις προαναφερθείσες και στο διάγραμμα (Σχ. 3.2) που ακολουθεί φαίνεται ότι επιλέγοντας την τιμή $B=1/21$ με ποσοστό λάθους ταχύτητας φάσης 3%, ο λόγος h/L_o μπορεί να αποδώσει καλύτερα αποτελέσματα μέχρι και $h/L_o < 0.75$.



Σχ. 3.2 Ποσοστιαίο λάθος ταχύτητας φάσης $(100(c-c_{\text{STOKES}})/c_{\text{STOKES}})$ όπου η ταχύτητα c υπολογίζεται από την (3.7) (Madsen et al. 1991)

3.4.2. Εξισώσεις Boussinesq του Nwogu (1993)

Οι εξισώσεις Boussinesq του Nwogu (1993) προκύπτουν με συνεχή διαφορίση της εξίσωσης συνέχειας και των εξισώσεων κίνησης του Euler. Στην κατάστρωση των εξισώσεων χρησιμοποιείται σαν εξαρτημένη μεταβλητή η οριζόντια ταχύτητα σε ένα τυχαίο βάθος z_α . Το βάθος στο οποίο λαμβάνεται η ταχύτητα, καθορίζεται στη συνέχεια από την προκύπτουσα σχέση διασποράς σε σύγκριση με τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας. Με αυτό τον τρόπο, οι εξισώσεις περιγράφουν καλύτερα τη διάδοση των κυματισμών σε νερά μεγαλύτερου βάθους σε σχέση με τις κλασσικές εξισώσεις Boussinesq. Οι εξισώσεις του Nwogu (1993) γράφονται:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(d + \zeta)u_\alpha] + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{d^2}{6} \right) d \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) + \left(z_\alpha + \frac{d}{2} \right) d \nabla [\nabla \cdot (du_\alpha)] \right\} = 0$$

$$u_{\alpha t} + (u_\alpha \cdot \nabla)u_\alpha + g \nabla \zeta + z_\alpha \left\{ \frac{z_\alpha}{2} \nabla (\nabla \cdot u_{\alpha t}) + \nabla [\nabla \cdot (du_{\alpha t})] \right\} = 0 \tag{3.18\alpha-\beta}$$

Όπου $u_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)$ είναι το διάνυσμα της οριζόντιας ταχύτητας σε ένα τυχαίο βάθος z_α .

Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζουν την εξίσωση συνέχειας (διατήρησης μάζας) και ορμής αντίστοιχα. Σε σχέση με τις κλασσικές εξισώσεις Boussinesq του Peregrine (1967) υπάρχει στην εξίσωση συνεχείας ένας πρόσθετος όρος διασποράς που την καθιστά μη ακριβή, ενώ οι συντελεστές των όρων διασποράς στην εξίσωση ορμής είναι διαφορετικές.

Θεωρούμε την περίπτωση διάδοσης του κύματος σε μία διεύθυνση (1D) με σταθερό βάθος. Τότε οι εξισώσεις του Nwogu παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + d \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta u_\alpha)}{\partial x} + \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) d^3 \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} &= 0 \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \alpha d^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19 \text{ α-β})$$

$$\text{Όπου } \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z_\alpha}{d} \right)^2 + \frac{z_\alpha}{d}$$

Γραμμικοποιώντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων και αντικαθιστώντας μία δοκιμαστική λύση της μορφής

$$\zeta = a \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad u = u_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

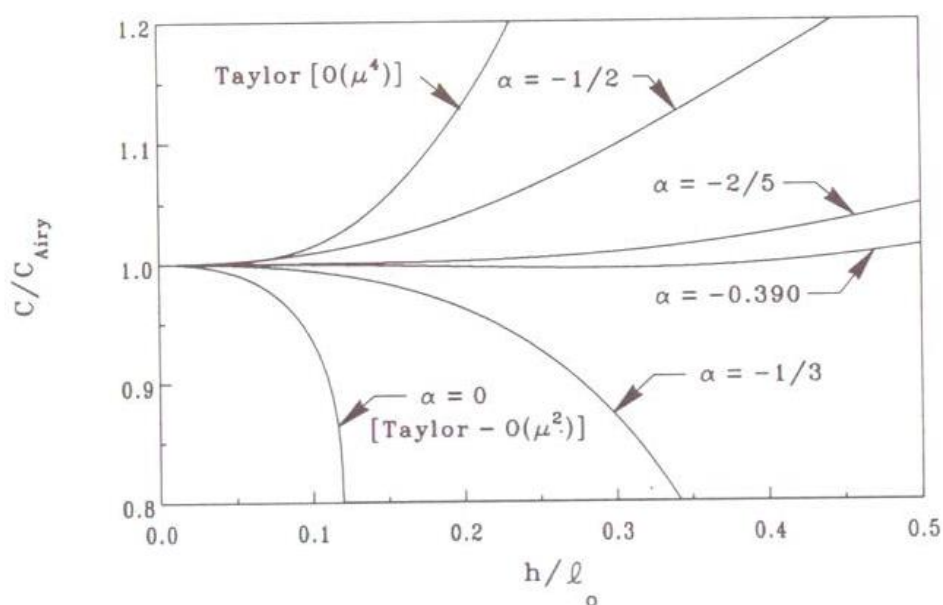
Οδηγούμαστε στη σχέση γραμμικής διασποράς:

$$\omega^2 = g d k^2 \frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) (k d)^2}{1 - \alpha (k d)^2} \quad (3.20)$$

Στο **Σχ. 3.3** γίνεται μια σύγκριση με τη σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας $\omega^2 = g k \tanh k d$, για διάφορες τιμές του α .

Οι κλασσικές εξισώσεις Boussinesq όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως αντιστοιχούν σε $\alpha = -1/3$. Στα ρηχά νερά όπου $k d \rightarrow 0$ όλες οι σχέσεις διασποράς συγκλίνουν ασυμπτωτικά. Ωστόσο σε πιο βαθιά νερά όπου το γινόμενο $k d$ αυξάνει, η σχέση διασποράς για τυχαίες τιμές του α , αποκλίνει σημαντικά από τη γραμμική θεωρία.

Οι εξισώσεις του Nwogu έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι δυνατόν να προσδιοριστεί μία βέλτιστη τιμή για την παράμετρο α , τέτοια ώστε η σχέση διασποράς σε μια καθορισμένη περιοχή τιμών kd να προσεγγίζει αυτήν της γραμμικής θεωρίας. Μια τιμή για το $\alpha = -2/5$ μετατρέπει την (3.20) σε προσέγγιση Padé της διασποράς της γραμμικής θεωρίας όπως έδειξε ο Witting (1984). Οι τιμές του α μπορούν να βαθμονομηθούν περαιτέρω χρησιμοποιώντας ένα κριτήριο ελαχιστοποίησης λάθους. Ο Nwogu προσδιόρισε μία βέλτιστη τιμή για το α ίση με -0.39 η οποία αντιστοιχεί σε βάθος $z_a = -0,531d$ και δίνει μέγιστη διαφορά από τη γραμμική θεωρία 2% (Σχ. 3.3). Οι κλασικές εξισώσεις Boussinesq, που προκύπτουν για $\alpha = -1/3$, έχουν ποσοστό λάθους 85% για μέγιστο λόγο $h/L_o < 0.48$.



Σχ. 3.3 Σύγκριση της κανονικοποιημένης ταχύτητας φάσης για διάφορες τιμές του α (Nwogu 1993).

Ο Nwogu έλυσε αριθμητικά το καινούργιο σετ εξισώσεων σε μια οριζόντια διάσταση χρησιμοποιώντας ένα προσεγγιστικό σχήμα Crank – Nickolson. Όροι σφαλμάτων αποκοπής τρίτης παραγώγου συμπεριλήφθησαν εσκεμμένα σαν διαταραχές με επανατοποθέτηση στο αριθμητικό σχήμα.

Μια εναλλακτική προσέγγιση υιοθετήθηκε από τους Wei και Kirby (1995) που κατάστρωσαν τις εξισώσεις του Nwogu (1993) με ένα πιο άμεσο τρόπο από αυτόν που περιγράφηκε προηγουμένως. Αντί να συμπεριληφθούν οι όροι σφαλμάτων αποκοπής τρίτης

παραγώγου, οι πρώτες παράγωγοι διακριτοποιήθηκαν σε τέταρτης τάξης τόσο στο χρονικό όσο και στο χωρικό βήμα. Με τον τρόπο αυτό προέκυψε ένα πολύ ακριβές (Adams – Bashforth - Moulton) αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιήθηκε από πολλούς ερευνητές.

3.4.3. Εξισώσεις Boussinesq του Zou (1999)

Ο Zou στην εργασία του (1999) έχοντας ως βάση τις εξισώσεις του Mei (1983), παρουσίασε ένα καινούριο μοντέλο εξισώσεων Boussinesq τρίτης τάξεως ακρίβειας, εκφράζοντας τις χωρικές παραγώγους τετάρτης τάξεως με παραγώγους δεύτερης τάξης. Οι εξισώσεις ανταποκρίνονται σε οριζόντιο πυθμένα αλλά και σε μεταβαλλόμενο βάθος με την υπόθεση ήπιας κλίσης. Τα χαρακτηριστικά της διασποράς είναι ακριβή μέχρι και $O(\sigma^4)$ και η μη γραμμικότητα ως $O(\varepsilon^2)$, τα οποία δίνουν λάθη ταχύτητας φάσης $< 5\%$ για ένα εύρος του λόγου $0 < h/L_o < 0.5$.

Για την περίπτωση οριζόντιου πυθμένα οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής του Zou είναι:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(h + \zeta)\bar{u}] = 0 \quad (3.21)$$

$$\bar{u}_t + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} + g\nabla\zeta + G = \frac{1}{3}(h + \zeta)^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{u}_t) + \frac{1}{15}h^2 \nabla[\nabla \cdot (\bar{u}_t + g\nabla\zeta)] \quad (3.22\alpha)$$

$$G = \frac{1}{3} \nabla \left\{ h^2 \left[(\nabla \cdot \bar{u})^2 - \bar{u} \cdot \nabla^2 \bar{u} - \frac{1}{10} \nabla^2 (\bar{u} \cdot \bar{u}) \right] \right\} - h \nabla \zeta \nabla \cdot \bar{u}_t \quad (3.22\beta)$$

Όπου h το βάθος νερού και ζ η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας.

Για την περίπτωση όπου το ε είναι μικρότερο από το σ^2 σε μέγεθος εισάγονται τα ακόλουθα αναπτύγματα:

$$\zeta = \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon^2 \zeta_2 + O(\varepsilon^3) \quad \kappa' \quad \bar{u} = \varepsilon \bar{u}_1 + \varepsilon^2 \bar{u}_2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.23)$$

Αντικαθιστώντας τη (3.23) για τα ζ και \bar{u} στις (3.21), (3.22α) και (3.22β) και εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ε , παίρνουμε τις πρώτης τάξεως εξισώσεις:

$$\zeta_{1t} + h\bar{u}_{1x} = 0 \text{ και } \bar{u}_{1t} + g\zeta_{1x} - \frac{2}{5}h^2\bar{u}_{1xxt} - \frac{1}{15}gh^2\zeta_{1xxx} = 0 \quad (3.24)$$

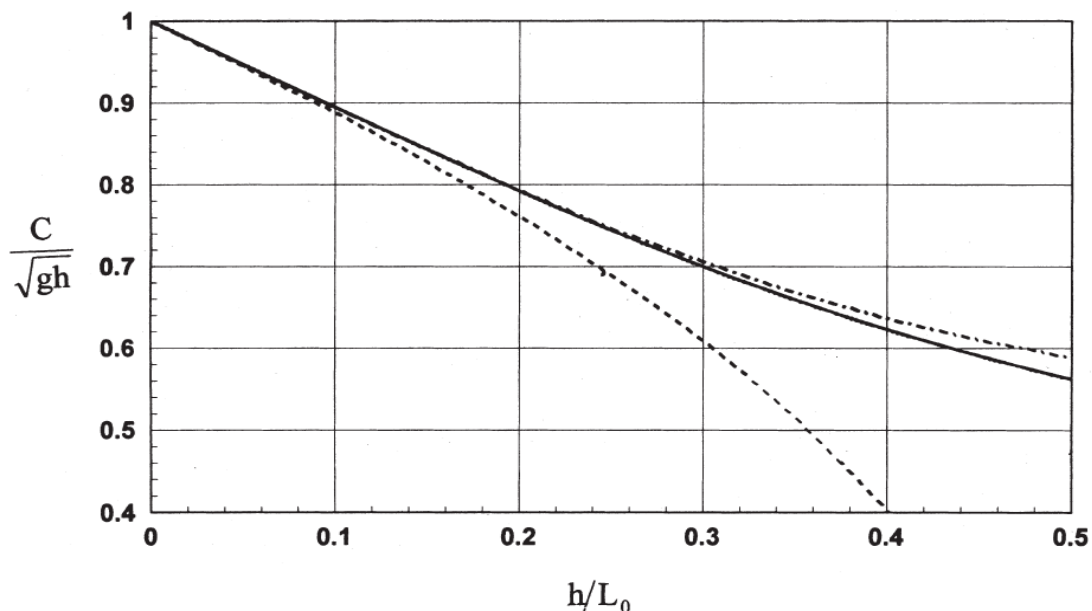
Υποθέτοντας ένα μονοχρωματικό κύμα με :

$$\zeta_1 = \zeta_\alpha \exp[i(kx - \omega t)] \text{ και } \bar{u}_1 = \bar{u}_\alpha \exp[i(kx - \omega t)] \quad (3.25)$$

Και αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στη (2.24) έχουμε για την ταχύτητα φάσης c:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \left[1 - \frac{1}{3}k^2h^2 + \frac{2}{15}k^4h^4 + O(k^6h^6) \right] \quad (3.26)$$

Στο **Σχ. 3.4** γίνεται σύγκριση των χαρακτηριστικών διασποράς (3.26) των εξισώσεων Ζου με τη γραμμική θεωρία του Airy και τις κλασικές εξισώσεις Boussinesq. Όπως διαπιστώνεται οι συγκεκριμένες εξισώσεις μπορούν να εφαρμοστούν και να δώσουν αποτελέσματα ταχύτητας φάσης λιγότερο από 5% σε βάθος $h < 0.5L_0$ (συγκριτικά με τις κλασικές που όπως προαναφέραμε περιορίζονται στο $h < 0.22L_0$).



Σχ 3.4 Σύγκριση κανονικοποιημένων ταχυτήτων φάσης. Stokes 1st (συνεχής γραμμή), εξισώσεις Ζου (διακεκομμένη-τελείες), κλασικές εξισώσεις Boussinesq (διακεκομμένη).

3.5. Εξισώσεις Boussinesq υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς

Στις παραπάνω παραγράφους τα μοντέλα Boussinesq που παρουσιάστηκαν, αναφέρονταν στην προσομοίωση διάδοσης κυματισμών ελαφρώς μη γραμμικών και μικρής διασποράς. Είχε γίνει, όπως αναλύθηκε, η υπόθεση ότι $O(\varepsilon) = O(\sigma^2) \ll 1$. Πιο πρόσφατες μελέτες ανέπτυξαν εξισώσεις με όρους ανώτερων τάξεων μη-γραμμικότητας και διασποράς και έτσι καταργήθηκε πρακτικά ο περιορισμός του βάθους, μέχρι το οποίο είχαν ικανοποιητική εφαρμογή στα ομοιώματα Boussinesq.

Οι Wei et al. (1995) κατέληξαν σε ένα σετ εξισώσεων πλήρως μη γραμμικών, δηλαδή διατηρήθηκαν όροι όλων των τάξεων της μη γραμμικής παραμέτρου ε , αλλά οι όροι της διασποράς παρέμειναν της τάξης $O(\sigma^2)$. Οι μελέτες όμως που επέκτειναν αποτελεσματικά ή αφαίρεσαν κάθε όριο του σχετικού βάθους, που συμβατικά σχετιζόταν με όλες τις προηγούμενες εξισώσεις Boussinesq, είναι αυτές των (με χρονολογική σειρά):

1. Madsen & Schäffer (1998)
2. Agnon, Madsen & Schäffer (1999)
3. Gobbi, Kirby & Wei (2000)
4. Madsen et al. (2002)
5. Madsen et al. (2003)
6. Schäffer (2003)
7. Schäffer (2004)
8. Bingham and Agnon (2005)

3.5.1. Πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις Boussinesq των Wei et al. (1995)

Οι Wei et al. (1995) ακολουθώντας την προσέγγιση του Nwogu (1993) κατέληξαν στη διατύπωση ενός πλήρως μη γραμμικού ομοιώματος Boussinesq στο οποίο διατηρούνται όροι $O(\sigma^2)$ και όλων των τάξεων της μη γραμμικής παραμέτρου ε . Οι πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις έχουν τη μορφή:

$$\zeta_t + \nabla \cdot M = 0 \quad (3.27)$$

Όπου

$$M = (d + \varepsilon^{\zeta}) \left[u_{\alpha} + \sigma^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} z_{\alpha}^2 - \frac{1}{6} (d^2 - d\varepsilon^{\zeta} + (\varepsilon^{\zeta})^2) \right] \nabla(\nabla \cdot u_{\alpha}) + \left[z_{\alpha} + \frac{1}{2} (d - \varepsilon^{\zeta}) \right] \nabla(\nabla \cdot (du_{\alpha})) \right\} \right] + O(\sigma^4) \quad (3.28)$$

και

$$u_{\alpha t} + \varepsilon(u_{\alpha} \cdot \nabla)u_{\alpha} + \nabla \zeta + \sigma^2 V_1 + \varepsilon \sigma^2 V_2 = O(\sigma^4) \quad (3.29)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} z_{\alpha}^2 \nabla(\nabla \cdot u_{\alpha t}) + z_{\alpha} \nabla[\nabla \cdot (du_{\alpha t})] - \nabla \left[\frac{1}{2} (\varepsilon^{\zeta})^2 \nabla \cdot u_{\alpha t} + \varepsilon^{\zeta} \nabla \cdot (du_{\alpha t}) \right] \quad \mu\epsilon \quad (3.30)$$

$$V_2 = \nabla \left\{ (z_{\alpha} - \varepsilon^{\zeta})(u_{\alpha} \cdot \nabla)[\nabla \cdot (du_{\alpha})] + \frac{1}{2} [z_{\alpha}^2 - (\varepsilon^{\zeta})^2] (u_{\alpha} \cdot \nabla)(\nabla \cdot u_{\alpha}) \right\} + \frac{1}{2} \nabla \{ \nabla \cdot (du_{\alpha}) + \varepsilon^{\zeta} \nabla \cdot u_{\alpha} \}$$

Σημειώνουμε ότι κατά την ανάπτυξη των παραπάνω εξισώσεων αίρεται η βασική υπόθεση ότι $\varepsilon = O(\sigma^2)$.

Οι εξισώσεις του Nwogu προκύπτουν παραλείποντας από τις παραπάνω εξισώσεις όρους $O(\sigma^4, \varepsilon \sigma^2)$.

3.5.2. Πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις Boussinesq των Madsen et al. (2002 & 2003)

Στην εργασία τους οι Madsen, Bingham & Liu (2002) παρουσίασαν μια μέθοδο τύπου Boussinesq για να βελτιώσουν την ακρίβεια της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας καθώς και των γραμμικών και μη γραμμικών ιδιοτήτων, έχοντας ως βάση την προσέγγιση των Agnon, Madsen & Schäffer (1999). Η μέθοδος είναι εφαρμόσιμη σε υψηλής μη γραμμικότητας κυματισμούς σε ρηγά νερά καθώς και σε υψηλής μη γραμμικότητας κυματισμούς πλήρους διασποράς στα βαθιά. Τα βήματα που ακολούθησαν είναι τα εξής:

- 1) Οι δυναμικές και κινηματικές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια εκφράζονται σε όρους ταχυτήτων της ελεύθερης επιφάνειας, το χρονικό βήμα αυτών των εξισώσεων

διαφυλάσσει ότι οι ιδιότητες (γραμμικές και μη) είναι εξίσου ακριβείς, σε αντίθεση με τις συμβατικές φόρμουλες Boussinesq.

- 2) Το πεδίο ταχυτήτων βρέθηκε ως μια προσεγγιστική λύση στην εξίσωση Laplace και εκφράζεται σε όρους πεπερασμένων σειρών, περιέχοντας την κάθετη και οριζόντια ταχύτητα σε ένα ακαθόριστο επίπεδο-z, \hat{z} . Αυτό το επίπεδο-z καθορίζεται ελαχιστοποιώντας το ολοκληρωμένο στο βάθος σφάλμα του γραμμικού προφίλ ταχυτήτων, οδηγώντας έτσι στη λύση $\hat{z} = -0.5d$.
- 3) Η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο \hat{z} κρατήθηκε ως άγνωστη, και δεν εκφράστηκε σε όρους της οριζόντιας (μέσω του tan-operator) στο πυθμένα. Αυτό όπως αναφέρουν, είναι το «κλειδί» για την αποφυγή εισαγωγής διάφορων περιορισμών στο πεδίο σύγκλισης των επεκτάσεων της ταχύτητας.
- 4) Η εισαγωγή μεταβλητών ψευδό-ταχύτητας και ενός επιπλέον operator manipulation των κινηματικών συνθηκών στον πυθμένα, επιφέρει τις προσεγγίσεις Padé μέσα στη σχέση της γραμμικής διασποράς και βελτιώνει την ακρίβεια του προφίλ της ταχύτητας.

Αποτέλεσμα της μεθόδου αυτής και των διαφορετικών βημάτων προσέγγισης της λύσης, από τα συμβατικά μοντέλα Boussinesq, η σχέση της γραμμικής διασποράς γίνεται μια ανάλυση Padé της λύσης πλήρους διασποράς. Δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\omega^2}{ghk^2} = \frac{1}{kh} \left(\frac{\text{sh}(k(h + \hat{z}))\text{ch}(k\hat{z}) - \text{ch}(k(h + \hat{z}))\text{sh}(k\hat{z})}{\text{ch}(k(h + \hat{z}))\text{ch}(k\hat{z}) - \text{sh}(k(h + \hat{z}))\text{sh}(k\hat{z})} \right) \quad (3.31)$$

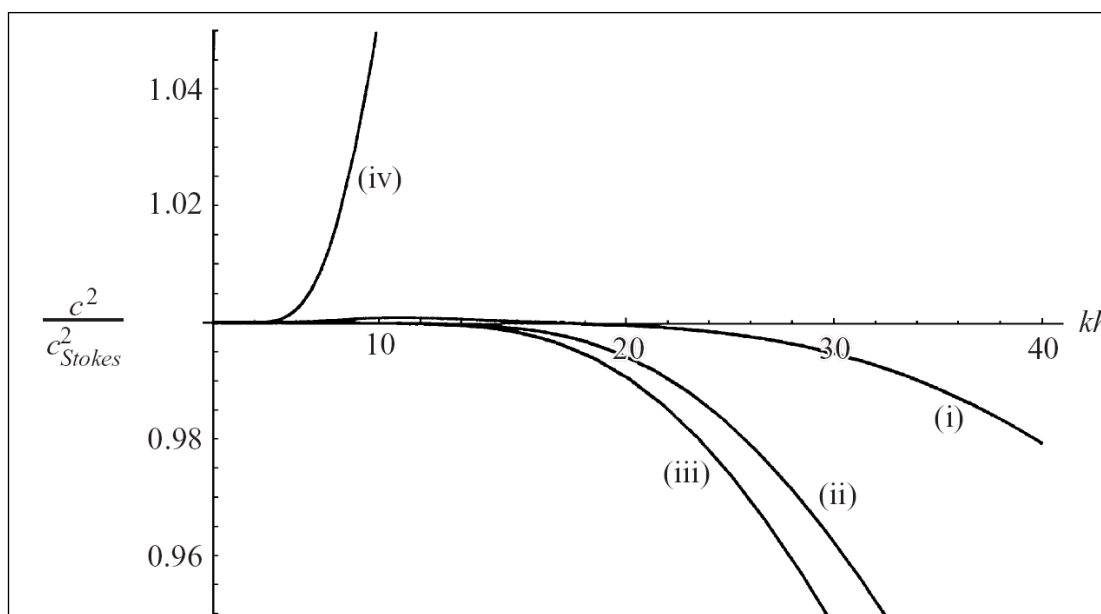
Όπου h το βάθος και $\hat{z} = \sigma h$ (arbitrary depth), τα ch και sh ορίζονται:

$$\text{ch}(\lambda) \equiv \left(1 + \frac{4}{9}\lambda^2 + \frac{1}{63}\lambda^4 \right), \quad \text{sh}(\lambda) \equiv \left(\lambda + \frac{1}{9}\lambda^3 + \frac{1}{945}\lambda^5 \right) \quad (3.32)$$

Σημειώνουμε ότι εάν χρησιμοποιηθούν άπειροι operators, οι συναρτήσεις ch και sh αντικαθιστώνται από τις \cosh - και \sinh - αντίστοιχα και η (3.31) γίνεται η ακριβής σχέση γραμμικής διασποράς:

$$\frac{\omega^2}{ghk^2} = \frac{1}{kh} \left(\frac{\sinh(k(h + \hat{z})) - (k\hat{z})}{\cosh(k(h + \hat{z})) - (k\hat{z})} \right) = \frac{\tanh(kh)}{kh} \tag{3.33}$$

Στο σχήμα 3.5 φαίνεται η ακρίβεια της σχέσης γραμμικής διασποράς για $kh < 25$ όταν $\sigma = -0.5$ $kh < 40$ όταν $\sigma = -0.2$. Επίσης στο σχήμα φαίνεται μια προσέγγιση Padé [4,4] της (3.33) όταν $\sigma = 0$, και μια προσέγγιση Padé [8,10] της ίδιας.



Σχ. 3.5 Η ακρίβεια του τετραγώνου της ταχύτητας φάσης χρησιμοποιώντας τις (3.31)-(3.32). (i) $\sigma = -0.2$ (ii) $\sigma = -0.5$ (iii) Padé [8,10] (iv) $\sigma = 0$, Padé [4,4] (Madsen et al. 2002)

Οι μη γραμμικές ιδιότητες είναι το ίδιο ακριβείς με τις γραμμικές και με περιορισμό λάθους 2% στην ταχύτητα κορυφής, επιτρέπεται η εφαρμογή της μεθόδου μέχρι και $kh \approx 25$ όταν $\sigma = -0.5$ ενώ για $\sigma = -0.2$ γίνεται $kh \approx 39$. Εάν η κατακόρυφη διακύμανση του προφίλ της ταχύτητας και της πίεσης δεν είναι ιδιαίτερα απαραίτητες θα πρέπει να χρησιμοποιείται η τιμή $\sigma = -0.5$, επιτυγχάνοντας μεγάλη ακρίβεια των αποτελεσμάτων για κυματισμούς υψηλής μη γραμμικότητας μέχρι και $kh \approx 12$.

Τέλος, αναφέρουμε ότι η συγκεκριμένη φόρμουλα που ανέπτυξαν οι Madsen et al. (2002) περιέχει παραγώγους 5^{ης} τάξης, όμως είναι συχνά πιο πρακτικά εύκολο για τη λύση του συστήματος η τάξη των παραγώγων να περιορίζεται στην 3^η. Σε αυτή την περίπτωση οι υπολογιστικές πράξεις είναι μικρότερες αλλά και με μικρότερη ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Σε αυτή την κατεύθυνση κινήθηκε η μελέτη των Madsen, Bingham & Schäffer (2003), οι οποίοι παρουσίασαν τρεις διαφορετικές μεθόδους περικοπής των αναλυτικών σειρών 5^{ης} τάξης:

- I. Στη πρώτη μέθοδο γίνεται μια απλή περικοπή όλων των σειρών-Taylor.
- II. Στη δεύτερη, στην οριακή συνθήκη του πυθμένα ενσωματώνεται μια προσέγγιση Padé σε συνδυασμό με όρους κλίσης.
- III. Στην τελευταία, επίσης μια προσέγγιση Padé ενσωματώνεται στο επίπεδο της Σ.Η.

Για καθεμία από τις μεθόδους, η επιλογή του σ καθορίζεται, όπως και παραπάνω, ελαχιστοποιώντας δηλαδή το σφάλμα του γραμμικού προφίλ της ταχύτητας, το οποίο οδηγεί στην τιμή $\sigma = -0.5$. Η αποτελεσματικότητα της κάθε μεθόδου απεικονίζεται περιληπτικά στον πίνακα 3.A. Προφανώς οι μέθοδοι I,II και III μπορούν να εφαρμοστούν και για εξισώσεις χαμηλότερης τάξης. Συνεπώς στον πίνακα 3.B παρουσιάζονται τα αντίστοιχα σφάλματα που προέκυψαν από αποκοπή (truncation) που περιείχε μόνο, μέχρι και τρίτης τάξεως παραγώγους

Πίνακας 3.A Αποκοπή εξίσωσης μέχρι και 5^{ης} τάξης παραγώγων. (Madsen et al. 2003)

method	formal accuracy	error < 2% in c^2	error < 1% in $\sqrt{F_1}$	error < 5% in A_3	error < 2% in \tilde{u}_c
I ($\sigma = -0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 8.8$	$kh < 4.7$	—	—
II ($\sigma = -0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 17$	$kh < 5.2$	$kh < 14$	$kh < 16.5$
III ($\sigma = -0.5$)	$k^8 h^8$	$kh < 25$	$kh < 9.5$	$kh < 21$	$kh < 25$
III ($\sigma = -0.2$)	$k^8 h^8$	$kh < 40$	$kh < 10$	$kh < 32$	$kh < 39$

Πίνακας 3.Β Αποκοπή εξίσωσης μέχρι και 3^{ης} τάξης παραγώγων. (Madsen et al. 2003)

method	formal accuracy	error < 2% in c^2	error < 1% in $\sqrt{F_1}$	error < 5% in A_3	error < 2% in \tilde{u}_c
II ($\sigma = -0.5$)	$k^2 h^2$	$kh < 7.5$	$kh < 2.2$	$kh < 6.5$	$kh < 7.5$
III ($\sigma = -0.5$)	$k^4 h^4$	$kh < 10$	$kh < 3.5$	$kh < 8.3$	$kh < 10$

Στους παραπάνω πίνακες η τρίτη και η τέταρτη στήλη βασίζονται στη γραμμική ανάλυση και ειδικότερα:

$$F_I(\sigma, kh) \equiv \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \left(\frac{u(z) - u_s(z)}{u_s(0)} \right)^2 dz \tag{3.34}$$

Η πέμπτη στήλη αποδίδει το σφάλμα στο 3^ο αρμονικό της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και στη τελευταία στήλη παρουσιάζεται το σφάλμα της οριζόντιας ταχύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια ενός μη γραμμικού στάσιμου κυματισμού με κλίση H/L=0.12. Συμπερασματικά από τους δύο πίνακες παρατηρούμε ότι η μέθοδος III, είτε για $\sigma = -0.5$ είτε $\sigma = -0.2$, είναι η πιο ακριβής μέθοδος

3.5.3. Μέθοδος Fourier-Boussinesq για μη γραμμικούς κυματισμούς των Bingham & Agnon (2005)

Στη μέθοδο που ακολούθησαν οι Bingham & Agnon (2005) υπέθεσαν ότι η ροή μπορεί να περιγραφεί από ένα δυναμικό ταχύτητας $\phi(x,z,t)$ το οποίο ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα οριακών τιμών:

$$\nabla^2 \phi + \phi_{zz} = 0 \text{ στη } V \tag{3.34}$$

$$\phi_z + \nabla \phi \cdot \nabla h = 0 \text{ } z=-h \tag{3.35}$$

$$\zeta_t + \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla \zeta - (1 + \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) \tilde{\phi} = 0 \tag{3.36}$$

$$\tilde{\phi}_t + \frac{1}{2} \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla \tilde{\phi} - \frac{1}{2} (1 + \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) \tilde{\phi}_z^2 + g\zeta = 0 \quad (3.37)$$

Όπου $V(x,z,t)$ ο όγκος του ρευστού και περιορίζεται από την ελεύθερη επιφάνεια $z=\zeta(x,t)$ και από τον πυθμένα $z=-h(x)$. Οι οριακές συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας εκφράζονται σε όρους του δυναμικού στην ελεύθερη επιφάνεια $\tilde{\phi} = \phi(x, \zeta(x,t), t)$ (Zakharov 1968) και οι αρχικές συνθήκες των ζ και $\tilde{\phi}$ πρέπει να δίνονται.

Γενικά χρησιμοποιείται μια προσέγγιση με σειρές Taylor των Dommermuth & Yue (1987) για την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας, αφού αυτή οδηγεί σε ένα μόνιμο $N \times N$ γραμμικό σύστημα εξισώσεων που μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των άμεσων μητρών (direct matrix method). Σε αυτή την περίπτωση η προσέγγιση του δυναμικού της ταχύτητας γίνεται με σειρές αποκοπής στη μη γραμμική παράμετρο $\varepsilon = ka \ll 1$. Ως εκ τούτου $\phi = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}$, όπου $\phi^{(m)} = O(\varepsilon^m)$. Η τιμή του $\phi^{(m)}$ στην ελεύθερη επιφάνεια υπολογίζεται από τη σειρά Taylor από $z=0$ δίνοντας:

$$\tilde{\phi} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{M-m} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \hat{\phi}^{(m)} \quad (3.38)$$

Όπου $\hat{\phi} = \phi(x, 0, t)$.

Συλλέγοντας όρους κάθε τάξης του ε παρέχεται μια ρητή ακολουθία για την εκτίμηση των δυναμικών:

$$\hat{\phi}^{(1)} = \tilde{\phi} \quad , \quad (3.39)$$

$$\hat{\phi}^{(m)} = - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \hat{\phi}^{(m-n)} \quad , \quad m=2,3,\dots,M. \quad (3.40)$$

Εκφράζοντας τις εξισώσεις με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα μετατρέπεται στον υπολογισμό του $\hat{\phi}_z^{(m)}$ από το $\hat{\phi}^{(m)}$, και μετέπειτα οι πρόσθετες z -παράγωγοι υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την αρνητική οριζόντια Laplacian σε αυτές τις δύο ποσότητες. Τέλος η z -παράγωγος της (3.38) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του $\tilde{\phi}_z$.

Αυτή η προσέγγιση περιέχει την υπόθεση ελαφρύς μη γραμμικότητας (weak nonlinearity) αλλά δεν περιορίζει το kd . Το αριθμητικό σχήμα που κατασκεύασαν φαίνεται να συγκλίνει μη γραμμικούς κυματισμούς σταθερού προφίλ έως και το 80% της οριακής κλίσης του κύματος, για κάθε kd .

Το πρόβλημα λοιπόν, λύνεται χρησιμοποιώντας ένα μέσο για τον υπολογισμό της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας, στο επίπεδο της Σ.Η., από το δυναμικό του ίδιου επιπέδου. Γι' αυτό το λόγο κατάστρωσαν μια μέθοδο Boussinesq η οποία είναι ασυμπτωτικά σωστή και στα δύο όρια του kd . Όλες οι υπάρχουσες μέθοδοι Boussinesq ικανοποιούν τη σχέση γραμμικής διασποράς, σε όρους της αδιάστατης ταχύτητας κύματος $c^2/(gd)$, η οποία είναι συνάρτηση του $(kd)^2$. Αυτό τις κάνει εφαρμόσιμες σε προβλήματα ποικίλων βαθών d . Όμως η ακριβής σχέση της γραμμικής διασποράς είναι υπερβατική, $c^2/(gd)=\tanh(kd)/(kd)$, και τείνει στο $1/kd$ στα βαθιά νερά. Συνεπώς, οι μέθοδοι Boussinesq αποκλίνουν σε αυτό το όριο.

Έτσι για να διορθωθεί το ασυμπτωτικό όταν $kd \rightarrow \infty$, εισάγονται στην προσέγγιση περιττές δυνάμεις του kd , καθώς και ο γενικευμένος (2D) Hilbert μετασχηματισμός H , ο οποίος είναι ένα μέσο για τον υπολογισμό αυτών στο φυσικό χώρο. Ο γενικευμένος Hilbert τελεστής πιο κατάλληλα εκφράζεται ως:

$$H\nabla\phi = F^{-1}\{kF\{\phi\}\}, \tag{3.41}$$

όπου το F είναι ο σταθερός 2D ($x:k$) μετασχηματισμός Fourier και F^{-1} ο αντίστροφος.

3.6. Εισαγωγή της θραύσης στα μοντέλα Boussinesq

Η συνέπεια της εφαρμογής των ομοιωμάτων Boussinesq στη ζώνη θραύσης είναι προβληματική. Στην περιοχή αυτή η μη γραμμικότητα γίνεται σημαντική ($\epsilon \rightarrow O(1)$) ενώ οι όροι διασποράς τείνουν να απαλειφθούν ($\sigma^2 \rightarrow 0$). Συνεπώς σε αυτό το όριο το ομοίωμα Boussinesq προσεγγίζει τις συνήθεις μη γραμμικές εξισώσεις των κυματισμών στα ρηχά νερά. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την ανέλιξη και τη θραύση οποιασδήποτε αρχικής μορφής κύματος και για το λόγο αυτό δεν επιτρέπουν τη μοντελοποίηση σε αρκετά

σημαντική απόσταση μη θραυόμενων κυματισμών. Με τις εξισώσεις των ρηχών νερών είναι δυνατόν να προσομοιωθεί με επιτυχία η σκέδαση των κυμάτων στη ζώνη θραύσης και η αναρρίχηση τους στην ακτή. Η αριθμητική επίλυση βασίζεται συνήθως στο σχήμα Lax-Wendroff, το οποίο διατηρεί τις συντηρητικές ιδιότητες της μάζας και της ορμής αλλά επιτρέπει τη σκέδαση της ενέργειας. Η αντιμετώπιση αυτή δίνει προβλέψεις που βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία με μετρήσεις και αφορούν το ύψος των θραυόμενων κυμάτων, τις ταχύτητες του ρευστού, τη λοξότητα και τα χαρακτηριστικά ασυμμετρίας των κυμάτων.

Η θραύση των κυματισμών συμπεριλήφθηκε αρχικά στις εξισώσεις τύπου Boussinesq από τον Tao (1983) και τους Abbott et al. (1983), οι οποίοι εισήγαγαν έναν όρο τυρβώδους συνεκτικότητας στην ολοκληρωμένη στο βάθος εξίσωση ορμής (Hamm et al. 1993). Ο όρος αυτός εκφράστηκε σαν γινόμενο των οριζόντιων βαθμίδων της θεωρούμενης ροϊκής μεταβλητής και ενός τοπικού συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας, σχετιζόμενου με το βάθος του νερού και την τυρβώδη κινητική ενέργεια. Μια εξίσωση μεταφοράς εφαρμόστηκε για την περιγραφή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Ο Zelt (1991) χρησιμοποίησε επίσης έναν όρο τυρβώδους συνεκτικότητας για να περιγράψει με ικανοποιητική ακρίβεια τη διάδοση μοναχικών θραυόμενων κυμάτων και την αναρρίχηση τους στην ακτή. Στην εργασία του Zelt ο τοπικός συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας υπολογιζόταν συναρτήσει ενός μήκους ανάμιξης. Οι Karambas et al. (1990,1991) ακολούθησαν την ίδια τεχνική, όμως ο τοπικός συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας, προσδιορίστηκε χρησιμοποιώντας ένα απλό αλγεβρικό κλείσιμο που ήταν ανάλογο με το γινόμενο της γραμμικής ταχύτητας φάσης στα ρηχά νερά και το βάθος νερού. Οι Karambas και Koutitas (1992) υιοθέτησαν μία πιο περίπλοκη μεθοδολογία στην οποία η τυρβώδης συνεκτικότητα προσδιορίστηκε υποθέτοντας ότι η τύρβη παράγεται στο μέτωπο του θραυόμενου κύματος και στα απόνερα του προηγούμενου κύματος. Η θέση του σημείου θραύσης και το πλάτος της ζώνης θραύσης προσδιορίστηκαν βάσει εμπειρικών σχέσεων.

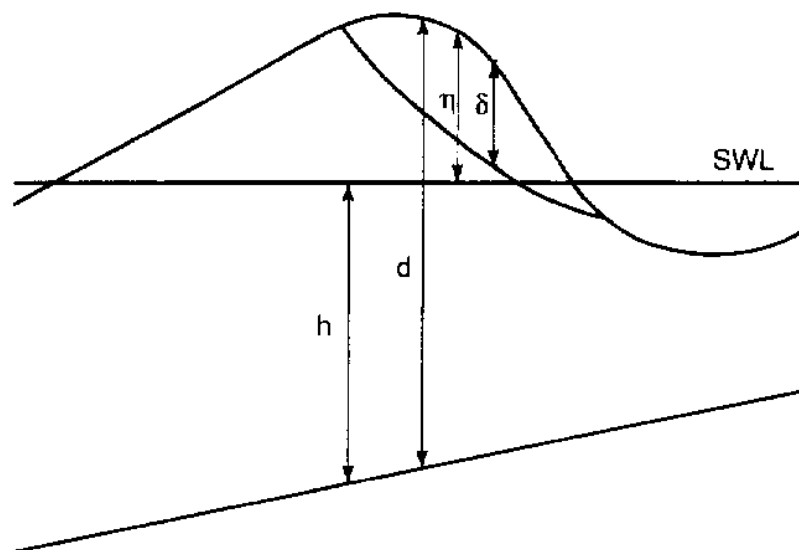
Οι Schäffer et al. (1993) σημείωσαν ότι το κύριο μειονέκτημα των παραπάνω μεθόδων είναι η υποτιθέμενη σχέση μεταξύ της σκέδασης της ενέργειας και των οριζοντίων βαθμίδων της οριζόντιας ροϊκής μεταβλητής. Η σκέδαση την ενέργειας εξαρτάται γενικά από τις κατακόρυφες βαθμίδες του οριζόντιου προφίλ της ταχύτητας (Madsen 1981) και γι' αυτό οι μέθοδοι διαφοροποιούνται οριακά μόνο στη χρησιμοποίηση της διεπιφάνειας σκέδασης.

Ο Engelund (1981) περιέγραψε ένα ελαφρύ υδραυλικό άλμα θεωρώντας ένα επιπλέον όρο πίεσης στην ολοκληρωμένη στο βάθος εξίσωση ορμής που προέρχονταν από την παρουσία ενός επιφανειακού υδάτινου κυλίνδρου (surface roller). Χρησιμοποιώντας την αναλογία μιας ξεχωριστής ροής διαχυτήρων η κλίση της διεπιφάνειας ανάμεσα στον κύλινδρο και την επικείμενη οργανωμένη ροή εκτιμήθηκε περίπου ίση με 10° . Ο Deigaard (1989) ακολούθησε τις ιδέες του Engelund και εισήγαγε τη θεώρηση του επιφανειακού κυλίνδρου σε ένα ομοίωμα Boussinesq που βασιζόταν αρχικά στις εξισώσεις των Abbott et al. (1978). Έγινε η υπόθεση ότι ο επιφανειακός κύλινδρος είναι μία μάζα νερού που ταξιδεύει με την ταχύτητα του κύματος. Η θραύση του κύματος ξεκινούσε όταν η τοπική κλίση του μετώπου του κύματος ξεπερνούσε την οριακή τιμή που προσδιόρισε ο Engelund. Παρόμοια η θραύση σταματούσε όταν η μέγιστη κλίση του μετώπου του κύματος έπαιρνε τιμή μικρότερη της εφαιπτομένης των 10° . Προκαταρκτικά παραδείγματα μη γραμμικών κυμάτων θραυόμενων πάνω από έναν πυθμένα με γραμμικές υβώσεις κατέδειξαν τις δυνατότητες του ομοιώματος.

Οι Brocchini et al. (1991,1992) ποσοτικοποίησαν τη διατμητική τάση στη διεπιφάνεια του επιφανειακού κυλίνδρου και της υποκείμενης ροής κάνοντας την υπόθεση ότι πίεση μέσα στον κύλινδρο είναι υδροστατική. Αυτό συμπεριλήφθηκε στις εξισώσεις τύπου Boussinesq και συνδυάστηκε με μία εμπειρική σχέση για τον εντοπισμό και την ανάπτυξη του επιφανειακού κυλίνδρου. Δόθηκαν παραδείγματα που έδειξαν ικανοποιητική συμφωνία με πειραματικά δεδομένα.

Οι Madsen και Svendsen (1983) και οι Svendsen και Madsen (1984), διαδοχικά, ανέπτυξαν ένα θεωρητικό μοντέλο για την περιγραφή του μετώπου ενός τυρβώδους κατακόρυφου μετώπου που κινείται πάνω σε οριζόντιο ή κεκλιμένο πυθμένα. Σε αυτή την προσέγγιση, μια πλήρως τυρβώδης διατμητική ροή θεωρήθηκε στο ανώτερο στρώμα της στήλης του νερού, ενώ μια πρακτικά αστρόβιλη ροή θεωρήθηκε στο κατώτερο στρώμα. Εκτός από μια εξίσωση ορμής ολοκληρωμένη μόνο στην τυρβώδη περιοχή και οι ολοκληρωμένες στο βάθος εξισώσεις συνέχειας, ορμής και ενέργειας επιλύονταν ταυτόχρονα. Χωρίς την τύρβη το σύστημα των εξισώσεων μετασχηματίζεται στις μη γραμμικές εξισώσεις των κυματισμών στα ρηγά νερά. Ένα σημαντικό συμπέρασμα που βγήκε απ' αυτές τις μελέτες είναι το γεγονός ότι το απλοποιημένο φαινόμενο της θραύσης μπορεί να συμπεριληφθεί στις εξισώσεις ορμής με την υπόθεση της αναδιανομής της οριζόντιας ταχύτητας πάνω στην κατακόρυφη ταχύτητα. Αυτό οδηγεί σε πρόσθετους όρους συναγωγής στις ολοκληρωμένες στο βάθος εξισώσεις ορμής.

Οι ιδέες που περιγράφηκαν προηγουμένων ακολουθήθηκαν από τους Schäffer et al. (1993), που συμπεριέλαβαν το φαινόμενο της υπερχειλίζουσας θραύσης κύματος σε ένα σετ εξισώσεων τύπου Boussinesq όμοιες με αυτές του Peregrine. Οι υπολογισμοί έγιναν σε μία οριζόντια διάσταση χρησιμοποιώντας τη θεώρηση του επιφανειακού κυλίνδρου (βλ. Σχ.3.6). Βασιζόμενοι στην υπόθεση μιας ομοιόμορφης κατακόρυφης κατανομής της οριζόντιας ταχύτητας σε ένα μη θραυόμενο κύμα, ένας πρόσθετος συναγωγικός όρος ορμής που οφείλεται στη θραύση συμπεριλήφθηκε στην ολοκληρωμένη στο βάθος εξίσωση ορμής θεωρώντας το ανομοιόμορφο προφίλ ταχύτητας που πρότεινε ο Svendsen (1984).



Σχ. 3.6 Προσομοίωση θραύσης με την τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου (Surface roller, Madsen et al. 1997a).

Σε συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα του Stive (1980) η ταχύτητα του επιφανειακού κυλίνδρου μοντελοποιήθηκε ως 1,3 φορές η ταχύτητα του γραμμικού κύματος στα ρηχά νερά. Η θραύση του κύματος ξεκινούσε όταν η μέγιστη κλίση του μετώπου του κύματος ξεπερνούσε μία αποδιδόμενη αρχική τιμή. Παρόμοια, η θραύση τερματιζόταν, όταν η μέγιστη κλίση έπαιρνε μία μικρότερη τελική τιμή. Η χρονική εξέλιξη του πάχους του επιφανειακού κυλίνδρου προσδιοριζόταν γεωμετρικά περιγράφοντας μία διαφοροποίηση στο χρόνο της κλίσης της διεπιφάνειας ανάμεσα στον κύλινδρο και την υποκείμενη οργανωμένη κίνηση του κύματος. Εκτός από τις παραμέτρους που περιγράφουν την έναρξη και τη λήξη της θραύσης, το ομοίωμα ενσωματώνει μια χρονική κλίμακα για την ανάπτυξη του

επιφανειακού κυλίνδρου όπως επίσης και μια παράμετρο σχήματος που αναφέρεται στον πρωτόλειο τρόπο διαχωρισμού του κυλίνδρου από την υποκείμενη ροή. Σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα καταδείχθηκε ότι το ομοίωμα προβλέπει ικανοποιητικά τη διαφοροποίηση της μέσης στάθμης ύδατος και του ύψους κύματος πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την έναρξη της θραύσης. Ιδιαίτερα δόθηκε έμφαση στο ότι το ομοίωμα αποδείχθηκε ικανό να εκτιμήσει την αρχή της εσωτερικής περιοχής, δηλαδή του σημείου όπου η μέση στάθμη ύδατος αρχίζει να αυξάνει. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι το ομοίωμα αναπαράγει το φαινόμενο της ραγδαίας μετατροπής της δυναμικής ενέργειας σε κινητική στην εξωτερική μεταβατική περιοχή. Οι Schäffer et al. (1992) επέκτειναν το ομοίωμα της ζώνης θραύσης ώστε να περιλαμβάνει τη δεύτερη οριζόντια διάσταση και παρουσίασαν ένα προκαταρκτικό παράδειγμα.

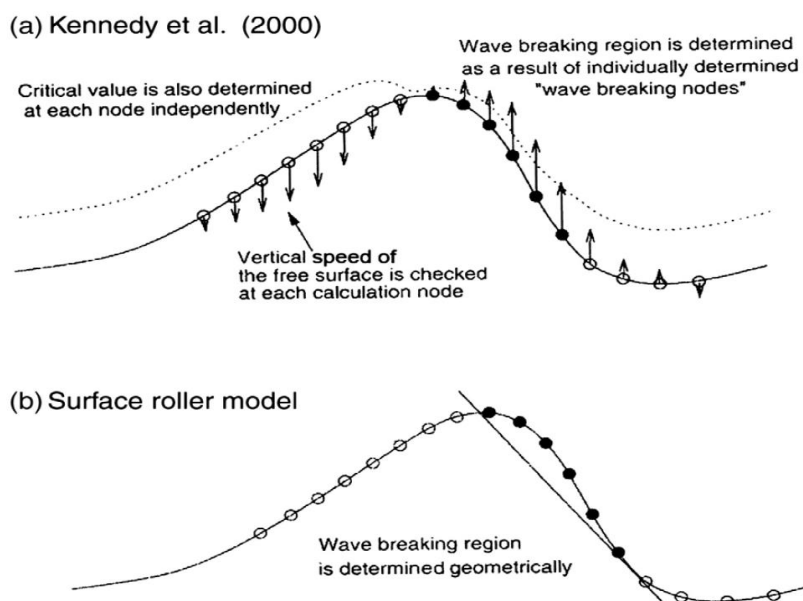
Ο Nwogu (1996) χρησιμοποίησε ένα πλήρως μη γραμμικό σετ εξισώσεων Boussinesq (Kirby & Wei 1994) για να προσομοιάσει το μετασχηματισμό των θραυόμενων κυμάτων σε δύο οριζόντιες διαστάσεις. Η θραύση ξεκινούσε όταν η οριζόντια ταχύτητα κορυφής ξεπερνούσε την ταχύτητα μετάδοσης του κύματος. Το φαινόμενο της θραύσης ενσωματώθηκε στις εξισώσεις ορμής χρησιμοποιώντας έναν όρο τυρβώδους συνεκτικότητας ανάλογο της κατακόρυφης βαθμίδας της οριζόντιας ταχύτητας κορυφής. Σε κάθε χρονικό βήμα υπολογισμού, η τυρβώδης συνεκτικότητα προσδιοριζόταν επιλύοντας μία πρόσθετη εξίσωση μεταφοράς για την τυρβώδη κινητική ενέργεια που παρήγαγε η θραύση του κύματος.

Οι Yu και Svendsen (1996) ανέπτυξαν ένα συνεπές μαθηματικό ομοίωμα για τη ζώνη θραύσης στο οποίο η ροή θεωρήθηκε στροβιλή. Ένα σετ εξισώσεων τύπου Boussinesq καταστρώθηκε διαχωρίζοντας τη στήλη ύδατος σε μία στροβιλή περιοχή ροής κοντά στην επιφάνεια και ένα χαμηλότερο πυρήνα αστροβίλης ροής. Το στροβιλό κομμάτι της ροής που συσχετιζόταν με τον επιφανειακό κύλινδρο, χρησίμευσε ως μία πηγή στροβιλότητας και τύρβης, με τη στροβιλότητα να προσδιορίζεται επιλύοντας μια πρόσθετη εξίσωση μεταφοράς στροβιλότητας.

Συνοψίζοντας, για την περιγραφή της θραύσης στα ομοιώματα Boussinesq προστίθενται στην ολοκληρωμένη στο βάθος εξίσωση ορμής ένας πρόσθετος όρος είτε τυρβώδους συνεκτικότητας είτε επιφανειακού κυλίνδρου (Σχ. 3.7). Ο όρος τυρβώδους συνεκτικότητας

είναι ένας όρος διάχυσης που εκφράζει τη σκέδαση της ενέργειας λόγω τύρβης (Abbott et al., 1983, Zelt, 1991, Karambas & Koutitas, 1992, Kennedy et al. 2000).

Από την άλλη πλευρά η τεχνική του επιφανειακού κυλίνδρου οδηγεί σε ένα πρόσθετο όρο συναγωγής στη εξίσωση ορμής που εκφράζει την πίεση που ασκείται στο κύμα από τον επιφανειακό κύλινδρο (Deigaard, 1989, Brocchini et al., 1991) ή την ανομοιομορφη κατακόρυφη κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας (Schäffer et al., 1993). Τα μοντέλα αυτού του τύπου αγνοούν την επίδραση των τυρβωδών διακυμάνσεων στο μέσο πεδίο ροής που εκφράζεται με τις τάσεις Reynolds. Σημειώνεται ότι σε ένα δυσδιάστατο μοντέλο, οι τυρβώδεις τάσεις Reynolds είναι οι μοναδικοί όροι σκέδασης που εισάγονται στις εξισώσεις ορμής.



Σχ. 3.7 Σχηματική απεικόνιση εναλλακτικών κριτηρίων θραύσης.

Τέλος, οι Karambas & Tozer 2001 πρότειναν έναν συνδυασμό των δύο παραπάνω τεχνικών, θεωρώντας κατακόρυφη κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας ίδια με αυτή των Madsen και Svendsen (1983) και οι Svendsen και Madsen (1984).

4. Μαθηματικό ομοίωμα τύπου Boussinesq (Chondros & Memos, 2014)

4.1. Εισαγωγή

Οι ανεμογενείς κυματισμοί αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στο θαλάσσιο περιβάλλον. Η κατανόηση των υδροδυναμικών χαρακτηριστικών των κυμάτων και της επίδρασης τους είναι σημαντική για τον σχεδιασμό θαλάσσιων κατασκευών καθώς και της παράκτιας διαχείρισης εν γένει. Πολλοί είναι οι ερευνητές που συνέβαλλαν στην ανάπτυξη μαθηματικών θεωριών και αριθμητικών μοντέλων με στόχο την προσομοίωση της διάδοσης των κυματισμών και την περιγραφή της παραμόρφωσής τους λόγω φαινομένων, όπως η ρήγωση, η περίθλαση, η διάθλαση, η θραύση κλπ. Τα ομοιώματα τύπου Boussinesq περιγραφής κυματισμών (Boussinesq-type wave models) έχουν αποδειχθεί αρκετά ακριβή, ειδικά όταν εφαρμόζεται σε περιοχές σχετικά ρηχών νερών. Μπορούν να ενσωματώσουν σε μεγάλο βαθμό μη-γραμμικά χαρακτηριστικά κυμάτων και προσομοιώνουν τις συνθήκες πλήρους διασποράς. Ωστόσο, τα μοντέλα αυτά κατά τη διαδικασία προσομοίωσης διάδοσης κυματισμών σε πολύ βαθιά νερά, τείνουν να χάνουν μέρος από την αποτελεσματικότητά τους. Έτσι, καθένα από αυτά τα μοντέλα έχει περιορισμούς και συγκεκριμένο πεδίο εφαρμογής, π.χ. $kd \leq 3$, όπου d είναι το βάθος νερού και k ο αριθμός κύματος. Αυτό θεωρείται ένα σημαντικό μειονέκτημα δεδομένου ότι φυσιολογικά οι ανεμογενείς κυματισμοί δημιουργούνται και ξεκινούν να διαδίδονται στα βαθιά νερά.

Τα μοντέλα Boussinesq δεν μπορούν, επομένως, να καλύψουν επαρκώς το σύνολο της περιοχής διάδοσης που εκτείνεται από τα βαθιά νερά προς την ακτογραμμή. Το πρόβλημα γίνεται πολύπλοκο αν ληφθεί υπόψη η ανάπτυξη ενός πραγματικού κυματισμού. Αυτοί θεωρούνται ότι αποτελούνται από πολλά επιμέρους κύματα με διαφορετικά χαρακτηριστικά, τα οποία ταξιδεύοντας με ανόμοιες ταχύτητες συμβάλλουν στη ρήγωση (wave shoaling) το καθένα σαν μια συνιστώσα με ξεχωριστή χρονική και χωρική συνεισφορά στο σύνολο του πραγματικού φαινομένου.

4.2. Θεωρητική διατύπωση του μοντέλου Boussinesq Chondros & Memos, 2014

4.2.1. Εξισώσεις Boussinesq των Madsen & Schäffer (MS98-1998)

Οι Madsen & Schäffer (1998) παρήγαγαν ένα σύστημα εξισώσεων τύπου Boussinesq περιγραφής της διασποράς και διάδοσης κυμάτων ανώτερης τάξης, καθώς και μη γραμμικότητας, το οποίο προέκυψε για κύματα πάνω από ανομοιόμορφο πυθμένα. Κατέληξαν σε νέες μορφές εξισώσεων Boussinesq ανώτερης τάξης, τις οποίες ανέπτυξαν σε σχέση με τις διάφορες μεταβλητές ταχύτητας. Τόσο σε όρους της οριζόντιας ταχύτητας στη στάθμη ηρεμίας, όσο και της μέσης ως προς το βάθος οριζόντιας ταχύτητας και της οριζόντιας ταχύτητας σε τυχαίο βάθος. Οι εξισώσεις καταρτίστηκαν με έμφαση στη γραμμική διασπορά, ρήγωσης και μη γραμμικές ιδιότητες για μεγάλους αριθμούς κύματος.

Η εξίσωση συνέχειας σε δύο διευθύνσεις γράφεται:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + (\nabla(d + \varepsilon\zeta)U) = 0 \quad (4.1)$$

Όπου U είναι η μέση ως προς το βάθος οριζόντια ταχύτητα, ζ η ανύψωση της επιφάνειας, και ε η παράμετρος μη γραμμικότητας (παράμετρος κλίμακας) ίση με H/d (όπου H το ύψος κύματος). Λαμβάνοντας υψηλή μη γραμμικότητα, δηλ. $\varepsilon = O(\mu)$ με μ (ή σ) την παράμετρο κλίμακας που εκφράζει τη διασπορά συχνοτήτων ίση με d/L , και θεωρώντας πυθμένα ήπιας κλίσης όπου μόνο οι πρώτες παράγωγοι του d συμπεριλαμβάνονται, η εξίσωση ορμής σε δύο οριζόντιες διευθύνσεις δίνεται, σύμφωνα με τις εξισώσεις MS98 ως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\zeta + \frac{1}{2}\varepsilon\nabla(U^2) + \mu^2(\Lambda_{20}^{\text{II}} + \varepsilon\Lambda_{21}^{\text{II}} + \varepsilon^2\Lambda_{22}^{\text{II}} + \varepsilon^3\Lambda_{23}^{\text{II}}) \\ + \mu^4(\Lambda_{40}^{\text{II}} + \varepsilon\Lambda_{41}^{\text{II}}) + O(\mu^6, \varepsilon^2\mu^4) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Για να βελτιωθεί η γραμμική και μη διασπορά καθώς και τα χαρακτηριστικά της γραμμικής ρήγωσης, στις εξισώσεις MS98 εισήχθησαν τέσσερις ελεύθερες παράμετροι ($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$) και εφαρμόστηκε η ακόλουθη διαδικασία:

Αρχικά εφαρμόζεται ο τελεστής $\nabla(\nabla \cdot)$ στην Εξ.4.2 και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με $(\alpha_2 - \alpha_1)\mu^2 d^2$. Στη συνέχεια ο δεύτερος μετασχηματισμός υπεισέρχεται στον πολλαπλασιασμό της Εξ.4.2 με d , εφαρμογή του τελεστή $\nabla(\nabla \cdot)$ και πολλαπλασιασμός του αποτελέσματος με $-\alpha_2 \mu^2 d$, ενώ κατά το τρίτο βήμα συνίσταται στην εφαρμογή του τελεστή $\nabla^2(\nabla \cdot)$ στην Εξ.4.2 και τον πολλαπλασιασμό του αποτελέσματος με $-\beta_1 \mu^4 d^3$. Τέλος εφαρμόζεται ο τελεστής $\nabla^2(\nabla \cdot)$ στην Εξ.4.2 και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με $\beta_2 \mu^4 d^3 \nabla d$. Από αυτήν τη διαδικασία οι προκύπτουν τέσσερις εξισώσεις οι οποίες συμπληρώνοντας την Εξ.4.2 παρέχουν μια εναλλακτική εξίσωση ορμής ανώτερης τάξης (higher-order):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon \nabla(U^2) + \mu^2 (\Lambda_{20}^{\text{III}} + \varepsilon \Lambda_{21}^{\text{III}} + \varepsilon^2 \Lambda_{22}^{\text{III}} + \varepsilon^3 \Lambda_{23}^{\text{III}}) \\ + \mu^4 (\Lambda_{40}^{\text{III}} + \varepsilon \Lambda_{41}^{\text{III}}) + O(\mu^6, \varepsilon^2 \mu^4) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Το ζεύγος (α_1, β_1) καθορίζει τη σχέση γραμμικής διασποράς (linear dispersion relation), ενώ το ζεύγος (α_2, β_2) δύναται να χρησιμοποιηθεί για τη βελτιστοποίηση της γραμμικής ρήχωσης. Κατά την ανάπτυξη του MS98 έγινε προσπάθεια βελτιστοποίησης των χαρακτηριστικών γραμμικής διασποράς μέσω της επιλογής του ζεύγους (α_1, β_1) ώστε το αποτέλεσμα να συγκλίνει σε γραμμικό κύμα Stokes:

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2 d} \right)^{\text{Stokes}} = \frac{\tanh(\kappa)}{\kappa} \quad (4.4)$$

όπου $\kappa = kd$ και ω η γωνιακή συχνότητα.

Για τιμές $(\alpha_1, \beta_1) = (1/9, 1/945)$ η ακρίβεια της γραμμικής διασποράς είναι αξιοσημείωτη για τιμές του kd έως 6, η οποία είναι διπλάσια από το κανονικό όριο των εξισώσεων Boussinesq για τα βαθιά νερά. Με βάση τη προσέγγιση MS98 έγινε προσπάθεια βελτιστοποίησης των χαρακτηριστικών γραμμικής ρήχωσης επιλέγοντας (α_2, β_2) ώστε το αποτέλεσμα να συγκλίνει σε τελεστή Stokes γραμμικής ρήχωσης:

$$\gamma_o^{\text{Stokes}} = \frac{2\kappa \sin h 2\kappa + 2\kappa^2(1 - \cos h 2\kappa)}{(2\kappa + \sin h 2\kappa)^2} \quad (4.5)$$

Για τιμές $(\alpha_2, \beta_2) = (0.146488, 0.00798359)$ η ακρίβεια που επετεύχθη είναι εξαιρετική για τιμές του kd έως 6.

4.2.2. Παραγωγή νέων συντελεστών $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$

Οι Chondros and Memos, (2014) στην εργασία τους επιχείρησαν μια διαφορετική προσέγγιση, η οποία επιτρέπει συντελεστές ως συνάρτηση του κ , $(\alpha_1, \beta_1) = f(kd)$, και όχι μία σταθερά, όπως στην προαναφερθείσα μελέτη MS98. Η μονοδιάστατη περίπτωση των Εξ.4.1 και 4.3, γράφονται μέσω της μετατροπής του τελεστή ∇ σε $\frac{\partial}{\partial x}$ όπως σημειώνεται ακολούθως:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (d + \varepsilon \zeta) \frac{\partial U}{\partial x} + U \left(\frac{\partial d}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \\ & \sigma^2 \left[\frac{1}{3} d \left(3 \frac{\partial d}{\partial x} \left((1 + 2\alpha_2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + 2\alpha_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + d \left((1 + 3\alpha_1) \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + 3\alpha_1 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon \sigma^2 \left[\frac{1}{3} \left(-3\zeta \frac{\partial d}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x \partial t} + d \left(6\alpha_2 \frac{\partial d}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - \zeta \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right) + 3\alpha_1 d^2 \left(3 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right) \right) \right] \right] \\ & \left. + \varepsilon^2 \sigma^2 \left[\frac{1}{3} \left(-d \frac{\partial U}{\partial x} \left(3 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2\zeta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \zeta \left(3 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \zeta \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + U \left(\frac{\partial d}{\partial x} \left(3 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 7\zeta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + 3d \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right) \right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon^3 \sigma^2 \left[-\frac{1}{3} \zeta \left(3 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U \left(3 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right) \right) \right] \\
 & + \sigma^4 \left[-\frac{1}{45} d^3 \left(5 \frac{\partial d}{\partial x} \left((-2 + 21\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\beta_2) \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial t} + 9\beta_2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. d \left((-1 + 15\alpha_1 + 45\beta_1) \frac{\partial^5 U}{\partial x^4 \partial t} + 45\beta_1 \frac{\partial^5 \zeta}{\partial x^5} \right) \right) \right] \\
 & + \varepsilon \sigma^4 \left[\frac{1}{45} d^3 \left(5(1 - 24\alpha_1) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - 45\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial x \partial t} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + 5(2 - 21\alpha_1) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial t} + \right. \right. \\
 & \left. \left. 2(2 - 15\alpha_1) \zeta \frac{\partial^5 U}{\partial x^4 \partial t} + d \left(5(-5 + 12\alpha_1 - 90\beta_1) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. (-13 + 45\alpha_1 - 225\beta_1) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 3(-1 + 5\alpha_1 - 15\beta_1) U \frac{\partial^5 U}{\partial x^5} \right) \right) \right] \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Με βάση τη γραμμική διασπορά και τη εύρος της διασποράς των δεύτερων αρμονικών (second harmonic amplitude) που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση, χρησιμοποιούνται λύσεις 1^{ns} και 2^{ns} τάξης της μορφής, ως απαιτούμενα της παραγωγής αυτής:

$$\zeta = \eta_1 \cos \theta + \varepsilon \eta_2 \cos 2\theta \quad , \quad U = U_1 \cos \theta + \varepsilon U_2 \cos 2\theta \tag{4.8}$$

όπου $\theta = (\omega t - kx)$ και η_1, η_2 τα εύρη των πρώτων και δεύτερων αρμονικών της ανύψωσης της επιφάνειας, και U_1, U_2 οι αντίστοιχες ολοκληρωμένες ως προς βάθος ταχύτητες (depth integrated velocity).

4.2.3. Πρώτης τάξης ανάλυση

Εισάγοντας την Εξ.4.8 στις Εξ.4.6 και Εξ.4.7 και ομαδοποιώντας όρους του $O(\varepsilon^0)$ η σχέση διασποράς καταλήγει στην παρακάτω μορφή:

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2 d}\right) = \frac{1 + \alpha_1 k^2 + \beta_1 k^4}{1 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)k^2 + \left(\beta_1 + \frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{45}\right)k^4} \quad (4.9)$$

Η ποσότητα αυτή πρέπει να ισούται με το δεξί μέλος της Εξ. 4.4 μέσω της οποίας παράγεται η πρώτη εξίσωση του συστήματος:

$$\frac{1 + \alpha_1 k^2 + \beta_1 k^4}{1 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)k^2 + \left(\beta_1 + \frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{45}\right)k^4} = \frac{\tanh(\kappa)}{\kappa} \quad (4.10)$$

4.2.4. Δεύτερης τάξης ανάλυση

Κατά την ανάλυση δεύτερης τάξης, αντικαθιστώντας την Εξ.4.8 στις Εξ.4.6 και Εξ.4.7 και με ομαδοποίηση των όρων $O(\varepsilon)$ προκύπτει:

$$\eta_2 = \left(\frac{\eta_1^2}{d}\right) \frac{3(1 + \alpha_1 k^2 + \beta_1 k^4)(15 + (5 + 60\alpha_1)k^2 + (1 + 20\alpha_1 + 240\beta_1)k^4)}{4k^2(15 + (-5 + 75\alpha_1)k^2 + (-4\alpha_1 + 60\alpha_1^2 - 60\beta_1)k^4)} \quad (4.11)$$

όπου η αντίστοιχη έκφραση Stokes είναι:

$$\eta_2^{\text{Stokes}} = \left(\frac{\eta_1^2}{d}\right) \frac{1}{4} \kappa \cot h(\kappa) (3 \cot h^2(\kappa) - 1) \quad (4.12)$$

Η ποσότητα η_2 που παράγεται από το μοντέλο (Εξ.4.11) απαιτείται να συμπίπτει με αυτήν της Εξ.4.12. Μέσω της προϋπόθεσης αυτής παράγεται η δεύτερη εξίσωση του συστήματος:

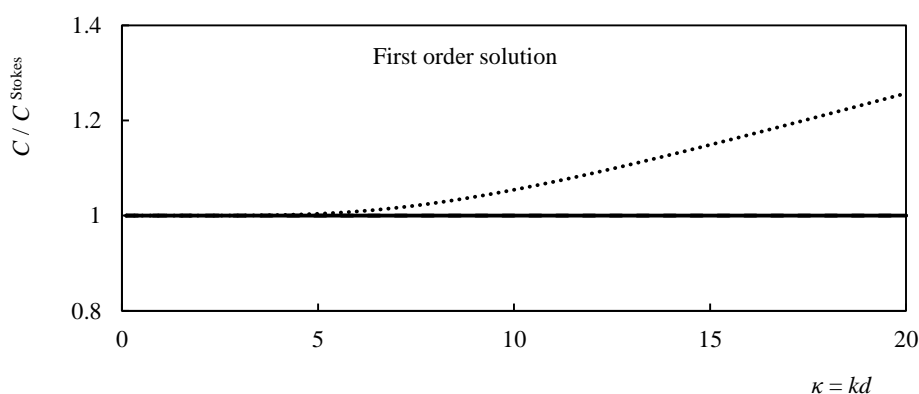
$$\begin{aligned} & \left(\frac{\eta_1^2}{d}\right) \frac{3(1 + \alpha_1 k^2 + \beta_1 k^4)(15 + (5 + 60\alpha_1)k^2 + (1 + 20\alpha_1 + 240\beta_1)k^4)}{4k^2(15 + (-5 + 75\alpha_1)k^2 + (-4\alpha_1 + 60\alpha_1^2 - 60\beta_1)k^4)} = \\ & = \left(\frac{\eta_1^2}{d}\right) \frac{1}{4} \kappa \cot h(\kappa) (3 \cot h^2(\kappa) - 1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Λύνοντας το σύστημα των Εξ. 4.11 και 4.13, προκύπτουν οι βέλτιστες επιδιωκόμενες τιμές των συντελεστών:

$$\alpha_1 = \frac{(6\kappa(75 - 1115\kappa^2 + \kappa^4)\cos h(\kappa) - 9\kappa(-75 + 395\kappa^2 + \kappa^4)\cos h(3\kappa) + 10800 \sin h(\kappa)^5 + \kappa(3(-375 - 185\kappa^2 + \kappa^4)\cos h(5\kappa) + 10\kappa(585 + 29\kappa^2)\sin h(\kappa) + 5\kappa(675 + 139\kappa^2)\sin h(3\kappa) + \kappa(1125 + 101\kappa^2)\sin h(5\kappa))}{(60\kappa^2(2\kappa(-3 + 47\kappa^2)\cos h(\kappa) + 9\kappa(-1 + 5\kappa^2)\cos h(3\kappa) - 144 \sin h(\kappa)^5 + \kappa(5(3 + \kappa^2)\cos h(5\kappa) - 3\kappa(26 \sin h(\kappa) + 15 \sin h(3\kappa) + 5 \sin h(5\kappa))))}$$

$$\beta_1 = \frac{(-18\kappa(15 - 155\kappa^2 + 33\kappa^4)\cos h(\kappa) + 27\kappa(-15 + 105\kappa^2 + 17\kappa^4)\cos h(3\kappa) - 6480 \sin h(\kappa)^5 + \kappa(45(15 + 19\kappa^2 + 3\kappa^4)\cos h(5\kappa) - 2\kappa(2430 + 1020\kappa^2 + 13\kappa^4)\sin h(\kappa) - 5\kappa(270 + 426\kappa^2 + 31\kappa^4)\sin h(3\kappa) - \kappa(810 + 474\kappa^2 + 17\kappa^4)\sin h(5\kappa))}{(180\kappa^4(2\kappa(-3 + 47\kappa^2)\cos h(\kappa) + 9\kappa(-1 + 5\kappa^2)\cos h(3\kappa) - 144 \sin h(\kappa)^5 + \kappa(5(3 + \kappa^2)\cos h(5\kappa) - 3\kappa(26 \sin h(\kappa) + 15 \sin h(3\kappa) + 5 \sin h(5\kappa))))}$$

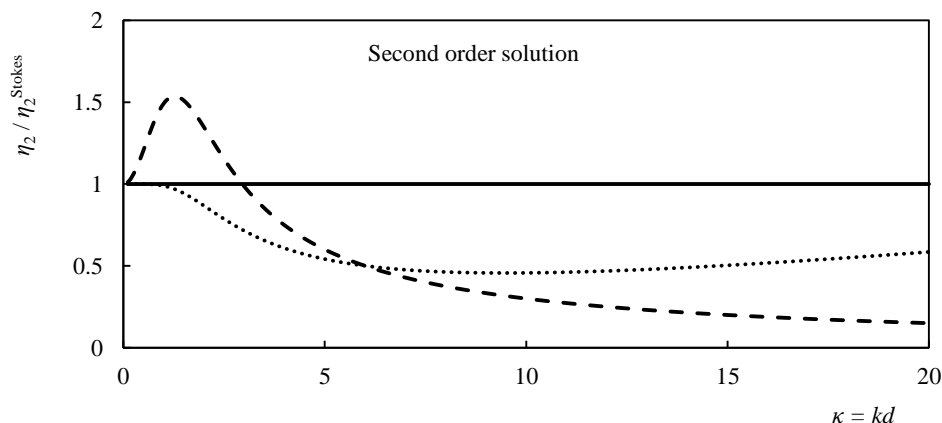
Με αυτόν τον τρόπο τα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς αναπαριστούν επακριβώς τις θεωρητικές τιμές για κάθε $kd > 0$ όπως απεικονίζεται στο **Σχ.4.1** όπου εμφανίζονται και τα αποτελέσματα των μοντέλων MS98 και KM09. Σημειώνεται ότι το τελευταίο επίσης ταιριάζει επακριβώς με τα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς των κυμάτων Stokes 1ης τάξης.



Σχ. 4.1. 1^{ης} τάξης ανάλυση, αδιάστατη ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του κ : MS98 (γραμμή με στιγμές), KM09 και προτεινόμενο μοντέλο (συμπαγής γραμμή).

Για την αξιολόγηση της συμπεριφοράς των μοντέλων, στο επίπεδο της 2^{ης} τάξης ανάλυσης, ο λόγος μεταξύ του η_2 και του στόχου κατά Stokes (Stokian target) σε συνάρτηση

του κ παρατίθεται στο Σχ.4.2 για τα τρία μοντέλα. Όπως φαίνεται το KM09 αποκλίνει πολύ γρήγορα ενώ το MS98 δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο για $\kappa < 1$. Αντιθέτως το προτεινόμενο μοντέλο παραμένει στον αναμενόμενο στόχο κατά Stokes για κάθε τιμή του κ .



Σχ. 4.2. 2^{ης} τάξης ανάλυση, αδιάστατο εύρος διασποράς δεύτερων αρμονικών (non-dimensional amplitude second harmonic) ως συνάρτηση του κ : MS98 (γραμμή με σιγμές), KM09 (διακεκομμένη γραμμή), προτεινόμενο μοντέλο (συμπαγής γραμμή).

4.2.5. Ανάλυση γραμμικής ρήχωσης

Επόμενο βήμα αποτελεί η απόκτηση του επιθυμητού ζεύγους (α_2, β_2) με στόχο τη βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών της γραμμικής ρήχωσης. Οι Madsen & Sørensen (1992) εισήγαγαν τον τελεστή γραμμικής ρήχωσης ως μια επιπλέον σημαντική ποσότητα ικανή να εκτιμήσει την εφαρμοσιμότητα των εξισώσεων Boussinesq, ορισμένο με:

$$\frac{A_x}{A} = -\frac{d_x}{d} \gamma_0 \tag{4.15}$$

όπου A είναι το πλάτος του τοπικού κύματος (local wave amplitude), και ο τελεστής ρήχωσης (shoaling gradient) γ_0 είναι συνάρτηση του αριθμού κ του τοπικού κύματος (local wave number). Ο δείκτης x υποδεικνύει την χωρική παράγωγο στη διεύθυνση x . Συνδυάζοντας τη γραμμική θεωρία Stokes με τη διατήρηση της ροής ενέργειας, προσδιόρισαν έναν τελεστή αναφοράς γραμμικής ρήχωσης (reference gradient) (Εξ. 4.5). Για τον καθορισμό των υπολοίπων δύο ελεύθερων συντελεστών α_2 και β_2 έγινε θεώρηση

πυθμένα ήπιας κλίσης, διατηρώντας τις πρώτες παραγώγους του βάθους και αμελώντας όλους τους μη γραμμικούς όρους. Με αυτόν τον τρόπο, οι Εξ. 4.6 και 4.7 περιορίστηκαν στις ακόλουθες μορφές:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + d \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial d}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} =$$

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \left[\frac{1}{3} d \left(3 \frac{\partial d}{\partial x} \left((1+2\alpha_2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + 2\alpha_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + d \left((1+3\alpha_1) \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + 3\alpha_1 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) \right) \right] \\ & + \sigma^4 \left[-\frac{1}{45} d^4 \left((-1+15\alpha_1+45\beta_1) \frac{\partial^5 U}{\partial x^4 \partial t} + 45\beta_1 \frac{\partial^5 \zeta}{\partial x^5} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το μοντέλο MS98 το αποτέλεσμα των εξισώσεων συνέχειας και ορμής οδηγεί σε:

$$\gamma_1 \frac{A_x}{A} + \gamma_2 \frac{k_x}{k} + \gamma_3 \frac{d_x}{d} = 0 \quad (4.18)$$

όπου

$$\gamma_1 = 1 + \varphi^2 + \kappa^2 \left(3\alpha_1 - \varphi^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \right) + \kappa^4 \left(5\beta_1 - 3\varphi^2 \left(\beta_1 + \frac{1}{3} \alpha_1 - \frac{1}{45} \right) \right) \quad (4.19)$$

$$\gamma_2 = -\varphi^2 + 3\alpha_1 \kappa^2 + \kappa^4 \left(10\beta_1 - 3\varphi^2 \left(\beta_1 + \frac{1}{3} \alpha_1 - \frac{1}{45} \right) \right) \quad (4.20)$$

$$\gamma_3 = \kappa^2 \left(2\alpha_2 + \varphi^2 \left(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \frac{1}{3} \right) \right) + \kappa^4 \left(\beta_2 + \varphi^2 \left(4\beta_1 - \beta_2 - \alpha_1 - \frac{2}{3} \alpha_2 + \frac{2}{15} \right) \right) \quad (4.21)$$

Και φ ορίζεται ως

$$\varphi \equiv \frac{\omega}{k\sqrt{d}} \quad (4.22)$$

Η πρώτη παράγωγος του αριθμού κύματος k μπορεί να εκφραστεί σε όρους πρώτης παραγώγου ως προς d , παραγωγίζοντας τη σχέση διασποράς (Εξ. 4.9) ως προς x . Η διαδικασία αυτή είναι πανομοιότυπη με την παραγωγή της σχέσης γραμμικής διασποράς (Εξ.4.4) λαμβανομένων υπόψη των καινούργιων τιμών των (α_1, β_1) , οδηγώντας σε:

$$\gamma_4 \frac{k_x}{k} + \gamma_5 \frac{d_x}{d} = 0 \tag{4.23}$$

όπου

$$\gamma_4 = 2\kappa + \sinh 2\kappa \tag{4.24}$$

$$\gamma_5 = 2\kappa \tag{4.25}$$

Επιλύοντας την Εξ. 4.23 ως προς $\frac{k_x}{k}$ και αντικαθιστώντας το στην Εξ. 4.18, λαμβάνουμε την έκφραση για τον τελεστή γραμμικής ρήχωσης (linear shoaling gradient):

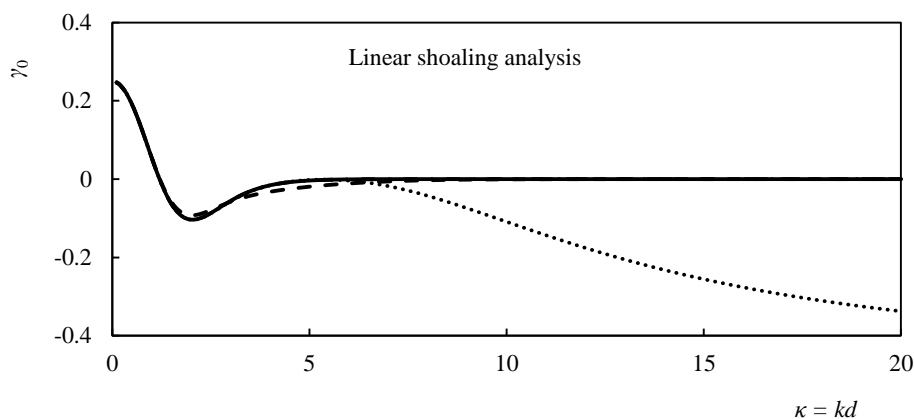
$$\frac{A_x}{A} = -\frac{d_x}{d} \gamma_0, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma_3 \gamma_4 - \gamma_2 \gamma_5}{\gamma_1 \gamma_4} \tag{4.26}$$

Τέλος θέτοντας το γ_0 από την Εξ. 4.26 ίσο με γ_0^{Stokes} από την Εξ. 4.5 προκύπτει:

$$\frac{\gamma_3 \gamma_4 - \gamma_2 \gamma_5}{\gamma_1 \gamma_4} = \frac{2\kappa \sinh 2\kappa + 2\kappa^2 (1 - \cosh 2\kappa)}{(2\kappa + \sinh 2\kappa)^2}$$

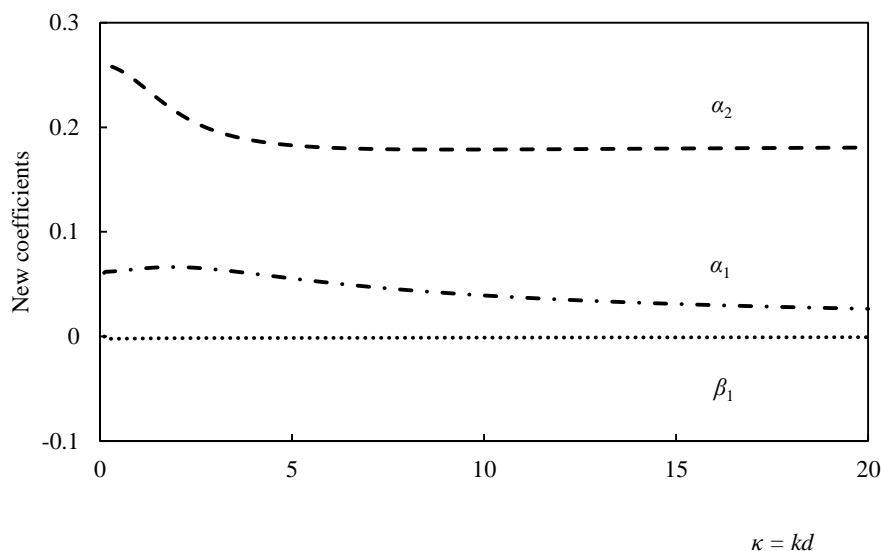
Οδηγούμαστε σε μία εξίσωση δύο αγνώστων. Θέτοντας αυθαίρετα το συντελεστή $\beta_2 = 0$, λόγω του ότι στο μοντέλο MS98 ο συντελεστής αυτός παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν, και επιτρέποντας μόνο στο α_2 να καθορίζει τα χαρακτηριστικά της γραμμικής ρήχωσης, λαμβάνουμε την καινούργια του τιμή. Μία σύγκριση για το γ_0 παρουσιάζεται στο **Σχ. 4.3** και όπως αναμέναμε το προτεινόμενο μοντέλο είναι πανομοιότυπο με το Stokes για όλα τα βάθη νερού.

$$\alpha_2 = \frac{\begin{aligned} & (2(-17010+175905\kappa^2+234867\kappa^4+299909\kappa^6+6696\kappa^8)\cosh(2\kappa) \\ & -8(2430+40365\kappa^2+47949\kappa^4+12007\kappa^6+13854\kappa^8)\cosh(4\kappa) \\ & +2(17010-79245\kappa^2+46023\kappa^4+262957\kappa^6+52462\kappa^8+15795\cosh(6\kappa)-7290\cosh(8\kappa)+1215\cosh(10\kappa))+ \\ & \kappa(-25920(48\cosh(\kappa)-5\cosh(3\kappa))+5\cosh(5\kappa)\sinh(\kappa)^5+\kappa((164565-120153\kappa^2-13103\kappa^4-10064\kappa^6)\cosh(6\kappa) \\ & +6(-6165-9009\kappa^2+3493\kappa^4+430\kappa^6)\cosh(8\kappa)+(2025-3981\kappa^2-731\kappa^4)\cosh(10\kappa) \\ & \sinh(2\kappa)+16\kappa(15525+5007\kappa^2+19267\kappa^4+2273\kappa^6)\sinh(4\kappa)+2\kappa(-299295-61665\kappa^2+255139\kappa^4+19944\kappa^6) \\ & +\kappa(-58185+55737\kappa^2+30597\kappa^4+2576\kappa^6)\sinh(6\kappa) \\ & -8\kappa(-8235+255\kappa^2+1379\kappa^4+17\kappa^6)\sinh(8\kappa)+3\kappa(855+761\kappa^2+37\kappa^4)\sinh(10\kappa))) \\ & 960\kappa^2(-3\kappa\cosh(\kappa)+(3+\kappa^2)\sinh(\kappa))(2\kappa+\sinh(2\kappa))^2(2\kappa(-3+47\kappa^2)\cosh(\kappa) \\ & +9\kappa(-1+5\kappa^2)\cosh(3\kappa)-144\sinh(\kappa)^5+\kappa(5(3+\kappa^2)\cosh(5\kappa)-3\kappa(26\sinh(\kappa)+15\sinh(3\kappa)+5\sinh(5\kappa)))) \end{aligned}}{\quad} \quad (4.27)$$



Σχ. 4.3 Τελεστής γραμμικής ρήκωσης (Linear shoaling gradient) γ_0 : 1^{ης} τάξης Stokes, προτεινόμενο μοντέλο (συμπαγής γραμμή); MS98 (γραμμή με στιγμές); Li (2008) (διακεκομμένη γραμμή).

Στο **Σχ. 4.4** παρουσιάζονται οι καινούργιοι συντελεστές, σε σχέση με τον κανονικοποιημένο αριθμό κύματος κ . Ο καινούργιος συντελεστής α_2 βρίσκεται μεταξύ του διαστήματος $[0.257966, 0.178779]$ για $0.314 \leq \kappa \leq 20$, λαμβάνοντας δηλαδή τιμές σχεδόν διπλάσιες από την προβλεπόμενη του MS98 (τίθεται με 0.146488), όταν προσεγγίζουμε πολύ ρηγά νερά. Αναφερόμενοι στο καινούργιο ζεύγος (α_1, β_1) αυτό εντοπίζεται μεταξύ των διαστημάτων $[0.062147, 0.026426]$, $[-0.0022, -0.00073]$ αντίστοιχα (για $0.314 \leq \kappa \leq 20$), δηλαδή τιμές σχεδόν μισές από τις μικρότερες του α_1 που εξάγονται από το μοντέλο MS98 (όπου $\alpha_1=0.1111$).



Σχ. 4.4 Συμπεριφορά των νέων συντελεστών συναρτήσει του κ .

4.2.6. Διάδοση κανονικών και μη κανονικών κυματισμών

Όπως είναι προφανές από τις Εξ. 4.14 και 4.27 οι καινούργιοι προτεινόμενοι συντελεστές εκφράζονται συναρτήσει του αριθμού κύματος k . Κατά συνέπεια, ένα νέο πρόβλημα προκύπτει όσον αφορά το χειρισμό του $k(x, y, t)$ που εμφανίζεται στη λύση που διέπεται από την εξίσωση ορμής. Για κανονικά κύματα, το μήκος κύματος και επομένως και το k μπορεί να προσδιοριστεί ρητά, σε οποιαδήποτε θέση, π.χ. σε κάθε κόμβο ενός υπολογιστικού πεδίου, δεδομένου ότι η περίοδος κύματος και το τοπικό βάθος είναι παντού γνωστά.

Ωστόσο, για τη μοντελοποίηση των μη κανονικών κυματισμών, η περίοδος κύματος δεν μπορεί να προσδιοριστεί εύκολα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τη διαχείριση του αριθμού κύματος από τον Li (2008) για μη κανονικά κύματα, στο k δόθηκε αυθαίρετα μια μικρή σταθερή τιμή (π.χ. $k = 0.00001 \text{ m}^{-1}$). Αυτό επέτρεψε στην εξίσωση ορμής που κατέστρωσε να καταστεί πανομοιότυπη με την βελτιωμένη εξίσωση Boussinesq του Nwogu (1993). Μία διαφορετική προσέγγιση χρησιμοποιείται εδώ δίνοντας έμφαση περισσότερο στους φυσικούς εμπειρικούς κανόνες. Μια πρώτη σκέψη για την αριθμητική αντιμετώπιση του ζητήματος ήταν ο υπολογισμός σε κάθε κόμβο και χρονικό βήμα των k_x και k_y διαδραστικά από το στιγμιαίο κυματικό πεδίο. Η προσέγγιση αυτή θεωρεί ότι για σχετικά μικρά χωρικά και χρονικά διαστήματα, το εξελισσόμενο κύμα αντιστοιχεί σε ένα κανονικό

κύμα με την ανύψωση της επιφάνειας εκφρασμένη ως $\zeta = \zeta(\omega t - k_x x - k_y y)$ και η ταχύτητα κύματος σε όρους ανύψωσης της επιφάνειας δίνεται από:

$$c_x = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{Z}$$

$$c_y = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{1}{Z} \tag{4.28}$$

όπου $Z = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2$

Η μόνη υπόθεση στην παραπάνω ανάλυση αναφέρεται σε διαδιδόμενο κυματικό πεδίο και ισχύει τόσο για κανονικά όσο και για μη κανονικά κύματα. Η προσέγγιση που εφαρμόστηκε στο CM14 χρησιμοποιεί τη γραμμική σχέση διασποράς για να μεταφράσει την ταχύτητα φάσης του κύματος, όπως καθορίζεται από τις προηγούμενες σχέσεις, σε μια συμβατική τιμή αριθμού κυμάτων. Έτσι, οι τοπικοί κυματαριθμοί $\mathbf{k} (k_x, k_y)$ λαμβάνονται μέσω των σχέσεων:

$$c_x = \left[\frac{g}{k_x} \tanh(k_x d) \right]^{1/2}$$

$$c_y = \left[\frac{g}{k_y} \tanh(k_y d) \right]^{1/2} \tag{4.29}$$

όπου οι δείκτες υποδηλώνουν τους αντίστοιχους άξονες.

Αυτή η μέθοδος παρέχει μια φυσικώς ορθή τιμή του αριθμού κύματος για κανονικά και μη κανονικά διαδιδόμενα κύματα και έχει χρησιμοποιηθεί σε αριθμητικές προσομοιώσεις του παρόντος μοντέλου.

Το νέο μοντέλο αποτελείται από εξίσωση συνέχειας (Εξ. 4.1), και εξίσωση ορμής (Εξ. 4.3) με το προτεινόμενο ζεύγος συντελεστών (Εξ.4.14 και 4.27). Έχει πεδίο εφαρμογής σε κανονικά και μη κανονικά πλήρους διασποράς διαδιδόμενα κύματα χωρίς κανένα περιορισμό στο βάθος του νερού, με σημαντικά μη γραμμικά χαρακτηριστικά και λαμβάνοντας υπόψη ήπια κλίση πυθμένα.

4.2.7. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης

Το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται εδώ έχει προταθεί από τους Wei και Kirby (1995). Η χρονική εξέλιξη του πεδίου επιτυγχάνεται μέσω ενός σχήματος εκτίμησης τρίτου βαθμού των Adams – Bashforth συνοδευόμενο από ένα σχήμα διόρθωσης 4^{ης} τάξης των Adams – Moulton. Σημειώνεται ότι στο παρόν μοντέλο αποτελέσματα για δύο οριζόντιες διευθύνσεις δίνονται για εξισώσεις που περιλαμβάνουν όρους μέχρι $O(\epsilon m^2)$, σύμφωνα με την εργασία των Memos et al. (2013) κατά την οποία διαφαίνεται ότι μεγαλύτερης τάξης όροι δεν συνεισφέρουν απαραίτητα σε ακρίβεια για μικρά kd, γλιτώνοντας έτσι υπολογιστικό χρόνο. Ο επιπρόσθετος υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό των νέων συντελεστών ($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$) στον κώδικα είναι ασήμαντος αφού εμπεριέχουν απλές αλγεβρικές πράξεις.

4.2.8. Οριακές συνθήκες

4.2.8.1. Όρια γένεσης κύματος

Τα κύματα παράγονται μέσα στο υπολογιστικό πεδίο με απλή προσθήκη μιας σημειακής πηγής (point source) στην εξίσωση συνέχειας. Σύμφωνα με μια τεχνική, αρχικά προταθείσα από τους Wei et al. (1999), η συνάρτηση πηγής γράφεται:

$$f_s(\mathbf{x}, y, t) = F(y, t) \exp(-\beta_s (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)^2) \quad (4.30)$$

όπου \mathbf{x}_s είναι η κεντρική θέση της συνάρτησης πηγής στην κατά x- διεύθυνση, $F(y, t)$ είναι μια συνάρτηση πηγής για μια πηγή προσανατολισμένη παράλληλα στον y-άξονα, β_s είναι ένας συντελεστής σχήματος ίσος $80/L^2$. Η χρονοσειρά της συνάρτησης πηγής δίνεται από (Wei et al. 1999):

$$F(y, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M D_{si,j} \cos(\omega_i t - k_i y \sin\theta_j + \epsilon_{i,j}) \quad (4.31)$$

Όπου $D_{s,i,j}$ είναι το μέτρο της συνάρτησης πηγής, k_i είναι ο αριθμός κύματος, θ_j η γωνία μεταξύ της (διεύθυνσης) διάδοσης κύματος και του x -άξονα. Τέλος όπου $\varepsilon_{i,j}$ είναι μια τυχαία φάση μεταξύ $(0, 2\pi)$. Οι Memos et al. (2005) ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία πρότειναν μια ανάγνωση του μέτρου της συνάρτησης πηγής ως εξής:

$$D_s = \frac{2\eta_0(1+B(kd)^2)(\omega^2 + Bgk^4d^3)\cos\theta}{\omega I_1 k \left(1 + \left(B + \frac{1}{3}\right)(kd)^2\right)} \quad (4.32)$$

όπου η_0 είναι το αντίστοιχο εύρος κύματος, I_1 δίνεται από τη σχέση $I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\beta_s}} \exp\left(-\frac{(k\cos\theta)^2}{4\beta_s}\right)$ και B είναι σταθερά ίση με $\frac{1}{15}$ όπως προτάθηκε από τους Madsen et al. (1991).

Για το παρόν μοντέλο προτείνεται μια επιπρόσθετη βελτίωση της κυματογεννήτριας (wave generator) στην ίδιο σκεπτικό με τα προηγούμενα. Ο συντελεστής B ορίζεται σαν μεταβλητή και όχι σταθερά, εξαρτώμενη από τον αριθμό κύματος k . Συνταιριάζοντας (αντιπαραβάλλοντας) τη σχέση γραμμικής διασποράς η οποία συνδέεται με το μοντέλο των Memos et al. (2005) και την αντίστοιχη του Stokes, λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2d}\right) = \frac{1+Bk^2}{1+\left(B+\frac{1}{3}\right)k^2} = \left(\frac{\omega^2}{k^2d}\right)^{\text{Stokes}} = \frac{\tanh(k)}{k} \quad (4.33)$$

Και λύνοντας ως προς B :

$$B = \frac{k\cosh k - \sinh k \left(\frac{1}{3}k^2 + 1\right)}{k^2\sinh k - k^3\cosh k} \quad (4.34)$$

Με αυτόν τον τρόπο κάθε παραγόμενο κύμα έχει τη σωστή ταχύτητα φάσης, καθιστώντας την κυματογεννήτρια εφαρμοστέα για κάθε βάθος νερού.

4.2.8.2. Απορροφητικά όρια

Για την απορρόφηση των κυματισμών στα ανοιχτά όρια εφαρμόστηκε η τεχνική μιας στοιβάδας απορρόφησης (sponge layer scheme-Larsen and Dancy 1983), με την οποία η ανύψωση της επιφάνειας ζ , και η ταχύτητα U περιορίστηκαν από τη συνάρτηση $\mu(x)$ για κάθε χρονικό βήμα στις γραμμές του πλέγματος της στοιβάδας απορρόφησης (grid lines of the sponge layer), με:

$$\mu(x) = \begin{cases} \exp\left[\left(2^{\frac{x}{\Delta x}} - 2^{\frac{x_s}{\Delta x}}\right) \ln \alpha\right] & 0 \leq x \leq x_s \\ 1 & x_s < x \end{cases} \quad (4.35)$$

όπου $\alpha = \frac{x_s}{\Delta x}$, δηλ. ο αριθμός των γραμμών πλέγματος εντός του πλάτους της στοιβάδας απορρόφησης x_s , θεωρούμενο εδώ σαν ένα μήκος κύματος. Στις εφαρμογές χρησιμοποιήθηκε η τιμή $\alpha=2$.

4.2.8.3. Ανακλαστικά όρια

Για την υπόθεση ανακλαστικού ορίου εφαρμόστηκαν τρεις συνθήκες όπως προτάθηκαν από τους Wei and Kirby (1995) που να ικανοποιούν την κινηματική των οριακών συνθηκών (kinematic boundary condition). Αν \mathbf{n} είναι ένα εξωτερικό διάνυσμα στο υπολογιστικό πεδίο, κανονικό στο όριο, τότε στα εν λόγω όρια θα είναι:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla \zeta \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{U}_t}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.36)$$

Για κάθε σημείο $\in \partial \Omega$, όπου Ω το υπολογιστικό πεδίο.

4.2.8.4. Θραύση κυματισμών

Για την προσομοίωση της θραύσης κυματισμών έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες. Μία εξ αυτών συνίσταται στην μοντελοποίηση της τυρβώδους συνεκτικότητας-μίξης και διάχυσης (eddy viscosity formulation) ενός φαινομένου θραύσης εισάγοντας έτσι έναν πρόσθετο όρο στην εξίσωση διατήρησης της ορμής. Αυτή η αναλογία τυρβώδους συνεκτικότητας-μίξης και διάχυσης (eddy viscosity analogy) αρχικά αναπτύχθηκε από τους Kennedy et al. (2000) οι οποίοι πέτυχαν να αποδώσουν τη διάδοση και εξασθένιση κανονικών κυματισμών πάνω από κεκλιμένους πυθμένες, παρέχοντας μία ρεαλιστική περιγραφή της έναρξης, της διάδοσης και διακοπής της θραύσης. Μία άλλη προσέγγιση, γνωστή ως κριτήριο του ‘επιφανειακού κυλίνδρου’, προτάθηκε αρχικά από τον Svendsen (1984) και υλοποιήθηκε και εφαρμόστηκε, μεταξύ άλλων, επιτυχώς από τους Schäffer et al. (1993). Σύμφωνα με αυτήν ο κύλινδρος αντιστοιχεί σε έναν επιπλέον όρο στην εξίσωση ορμής συνδεδεμένο με το πάχος του καθώς και το εμπρόσθιο μέτωπο του κύματος (wave front slope). Και τα δύο κριτήρια λειτουργούν ομαλά στο βασικό αριθμητικό μοντέλο, χωρίς να παράγουν αστάθειες και γενικά το τροποποιούν με επιτυχία ώστε να συμβαδίζει με αυτά που έχουν σημειωθεί από τους Chondros et al. (2011).

Στον παρόν μοντέλο χρησιμοποιείται μία απλή διατύπωση τυρβώδους μίξης σε δύο οριζόντιες διευθύνσεις. Εφαρμογές της μεθοδολογίας των Kennedy et al. (2000) καταδεικνύουν το ακόλουθους επιπρόσθετους όρους στην Εξ. 4.3:

$$R_{bx} = \frac{1}{d+\zeta} \left\{ \left[v((d+\zeta)U)_x \right]_x + \frac{1}{2} \left[v((d+\zeta)U)_y + v((d+\zeta)V)_x \right]_y \right\} \quad (4.37)$$

$$R_{by} = \frac{1}{d+\zeta} \left\{ \left[v((d+\zeta)V)_y \right]_y + \frac{1}{2} \left[v((d+\zeta)U)_y + v((d+\zeta)V)_x \right]_x \right\} \quad (4.38)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις ορμής με $(d+\zeta)$ και ολοκληρώνοντας σε ένα περιστατικό θραύσης, αυτοί οι πρόσθετοι όροι φαίνεται να διατηρούνται στην ορμή. Στις παραπάνω εξισώσεις ο όρος v είναι η τυρβώδης συνεκτικότητα που εντοπίζεται στο εμπρόσθιο μέτωπο της θραύσης, εκφρασμένη ως μια συνάρτηση του χώρου και του χρόνου από:

$$v = B\delta_b^2(d+\zeta)\zeta_t \quad (4.39)$$

με τον συντελεστή μήκους μίξης ίσο με την τιμή $\delta_b=1.2$. Η ποσότητα B ελέγχει την απότομη εκκίνηση της θραύσης και της συνεπαγόμενης αστάθειας. Ορίζεται από:

$$B = \begin{cases} 1 & \zeta_t \geq 2\zeta_t^* \\ \frac{\zeta_t}{\zeta_t^*} - 1 & \zeta_t^* < \zeta_t \leq 2\zeta_t^* \\ 0 & \zeta_t \leq \zeta_t^* \end{cases} \quad (4.40)$$

Η παράμετρος ζ_t^* καθορίζει την αρχή και τη διακοπή της θραύσης. Αυτή είναι η ακόλουθη:

$$\zeta_t^* = \begin{cases} \zeta_t^{(F)} & t \geq T^* \\ \zeta_t^{(I)} + \frac{t-t_o}{T^*} (\zeta_t^{(F)} - \zeta_t^{(I)}) & 0 \leq t-t_o < T^* \end{cases} \quad (4.41)$$

όπου $T^* = 5\sqrt{\left(\frac{d}{g}\right)}$ είναι ο χρόνος μετάβασης από την έναρξη στην παύση της θραύσης, t_o η χρονική στιγμή έναρξης της θραύσης, και $t-t_o$ το χρονικό του γεγονότος της . Οι τιμές του $\zeta_t^{(I)}$ κυμαίνονται από $0.35\sqrt{gd}$ για παραλίες με αναβαθμούς μέχρι $0.65\sqrt{gd}$ για παραλίες μονοσήμαντης κλίσης και $\zeta_t^{(F)} = 0.15\sqrt{gd}$ για όλες των περιπτώσεων. Σημειώνεται ότι η εφαρμογή του μοντέλου τυρβώδους μίξης (eddy viscosity model) καταλήγει σε μια διεύρυνση του κύματος λόγω επίδρασης της διάχυσης.

4.2.8.5. Τριβή πυθμένα

Οι στιγμιαίες τάσεις διάτμησης στον πυθμένα προσεγγίστηκαν με βάση τον ακόλουθο τετραγωνικό κανόνα:

$$\tau_{bx} = \frac{1}{2} \rho f_w u_o |w| \quad (4.42)$$

$$\tau_{by} = \frac{1}{2} \rho f_w v_o |w| \quad (4.43)$$

όπου

$$|w| = \sqrt{u_o^2 + v_o^2} \tag{4.44}$$

Η ταχύτητα ροής ρ , και οι ταχύτητες u_o, v_o κοντά στον πυθμένα εξήχθησαν από την κατανομή ταχυτήτων του Dingemans (1997) για μη θραυόμενους, μη γραμμικούς κυματισμούς και ο συντελεστής τριβής πυθμένα (bottom friction factor) f_w εκφράστηκε ως (Jonsson, 1966):

$$f_w = \left\{ \begin{array}{ll} \exp \left[-5.977 + 5.213 \left(\frac{K_N}{A_b} \right)^{0.194} \right] & \frac{K_N}{A_b} < 0.63 \\ 0.3 & \frac{K_N}{A_b} \geq 0.63 \end{array} \right\} \tag{4.45}$$

όπου A_b είναι το πλάτος της ταλάντωσης των σωματιδίων του νερού στο βυθό της θάλασσας και K_N είναι η τραχύτητα πυθμένα.

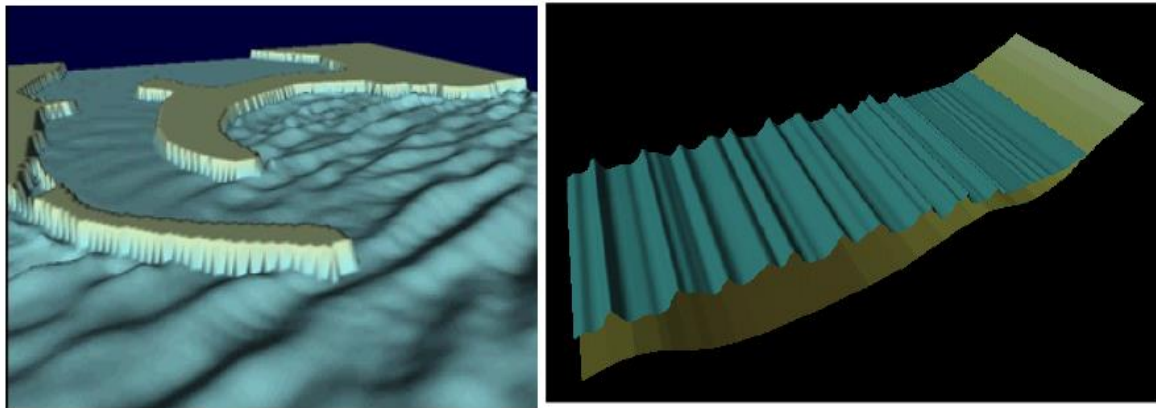
5. Θεωρητικό υπόβαθρο υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW

5.1. Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι επιστημονικές βάσεις οι οποίες διέπουν το υπολογιστικό πρόγραμμα MIKE21 BW. Το πρόγραμμα αυτό αποτελεί ένα προηγμένης τεχνολογίας πρότυπο αριθμητικό προσομοίωμα για τον υπολογισμό και την ανάλυση βραχέων και μακρών κυματισμών σε λιμενικές εγκαταστάσεις και παράκτιες ζώνες. Περιγράφονται οι εξισώσεις ορμής και συνέχειας, αναλυτικά το κριτήριο θραύσης (Madsen et al. 1997a) στο οποίο βασίζεται καθώς και το αριθμητικό σχήμα επίλυσης του προγράμματος. Στόχος του κεφαλαίου είναι να αποδώσει το θεωρητικό υπόβαθρο του προγράμματος, ώστε να γίνουν κατανοητές οι βασικές διαφορές από το μοντέλο τύπου Boussinesq Chondros and Memos, 2014. Έτσι θα επιτευχθεί αντικειμενική σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο μοντέλων τόσο με πειραματικές μετρήσεις όσο και μεταξύ τους, όπως αυτές θα αναλυθούν στα κεφάλαια 6 και 7.

5.2. Γενική περιγραφή

Το MIKE21 BW εμπεριέχει δυο modules, ένα μονοδιάστατο (1DH) και ένα δισδιάστατο (2DH), τα οποία βασίζονται στην επίλυση των μετασχηματισμών της περιοχής του χρόνου των εξισώσεων τύπου Boussinesq (Σχ. 5.1). Αυτές περιλαμβάνουν μη γραμμικά χαρακτηριστικά καθώς και διασπορά συχνοτήτων. Ουσιαστικά η διασπορά των συχνοτήτων εισάγεται στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης (momentum equations) παίρνοντας υπόψη την επίδραση που έχουν οι κατακόρυφες επιταχύνσεις στην κατανομή των πιέσεων.



Σχ. 5.1 Το MIKE21BW περιέχει 2 modules. Αριστερά: (2DH) εφαρμόζεται συνήθως για τον υπολογισμό της κυματικής διαταραχής σε λιμάνια. Δεξιά: (1DH) χρησιμοποιείται συνήθως για την προσομοίωση της κυματικής διάδοσης από τα βαθιά στα ρηχά (πηγή: DHI).

Αμφότερα τα modules επιλύουν τις κλασσικές εξισώσεις τύπου Boussinesq χρησιμοποιώντας μια έκφραση ροής (flux-formulation) με βελτιστοποιημένα τα χαρακτηριστικά της γραμμικής διασποράς. Η νέα αναβαθμισμένη μορφή των εξισώσεων (Madsen et al., 1991; Madsen & Sørensen, 1992) κάνουν τα δυο modules ικανά για προσομοίωση της κατευθυντικής διάδοσης κυματοσειράς από τα βαθιά στα ρηχά νερά. Ο μέγιστος επιτρεπόμενος λόγος θαλάσσιου βάθους προς μήκος κύματος στα βαθιά: $d/L_0 \approx 0.5$ (ή $kd \approx 3.1$, όπου kd είναι ο σχετικός αριθμός κύματος και αποτελεί δείκτη όρων διασποράς). Για την κλασσική μορφή των εξισώσεων τύπου Boussinesq, ο μέγιστος επιτρεπόμενος λόγος θαλάσσιου βάθους προς μήκος κύματος στα βαθιά είναι: $d/L_0 \approx 0.22$ (ή $kd \approx 1.4$). Οι εξισώσεις του μοντέλου έχουν επεκταθεί (Madsen et al., 1997; Sørensen et al. 1998, 2004) για να υπολογίζουν μεταβολή της ακτογραμμής και θραύση κυματισμών.

Το 2DH BW module (δυο οριζόντιες διαστάσεις) επιλύει τις τροποποιημένες εξισώσεις τύπου Boussinesq μέσω ενός πεπλεγμένου αριθμητικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών με τις μεταβλητές να ορίζονται πάνω σε έναν εναλλασσόμενο ορθογωνικό κάναβο. Το μοντέλο είναι ικανό να αναπαράγει τα περισσότερα συνδυαστικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε λιμενικές εγκαταστάσεις και παράκτιες ζώνες. Αυτά είναι:

- Διάθλαση (refraction)
- Ρήγωση (shoaling)
- Περίθλαση (diffraction)
- Μερική ανάκλαση (partial reflection)
- Μερική μετάδοση (partial transmission)
- Τριβή στον πυθμένα (bottom dissipation)
- Θραύση κυματισμών (wave breaking)
- Μεταβολή της ακτογραμμής (moving shoreline)
- Μη γραμμική αλληλεπίδραση κυμάτων (non-linear wave-wave interaction)
- Διασπορά συχνοτήτων (frequency spreading)
- Κατευθυντική διασπορά (directional spreading)

Επιπρόσθετα, πρέπει να σημειωθεί ότι η διασπορά συχνοτήτων και κατευθύνσεων γίνεται με γραμμική υπέρθεση (Linear superposition). Συνεπώς προβλήματα όπως ομαδοποίηση κυμάτων (wave grouping), ‘surf beats’, δημιουργία δεσμευμένων χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων (generation of sub- and super- harmonics) και αλληλεπιδράσεις τριάδων συντονισμού (near-resonant triad interactions) μπορούν να εξεταστούν μέσω του MIKE21 BW. Ακόμα και λεπτομέρειες όπως η γένεση και η απελευθέρωση ταλαντώσεων χαμηλών συχνοτήτων λόγω μετασχηματισμού του αρχικού κύματος περιγράφονται αρκετά ικανοποιητικά από το μοντέλο.

Η θραύση των κυμάτων (τύπου κυλίσεως-spilling) εφαρμόζεται στη βάση της υπόθεσης «επιφανειακού κυλίνδρου» (surface roller concept), όπως αυτή περιγράφεται αναλυτικά σε επόμενη παράγραφο. Η κίνηση της ακτογραμμής (moving shoreline) βασίζεται στην παρακάτω προσέγγιση: η εξεταζόμενη περιοχή επεκτείνεται τεχνητά με την αντικατάσταση του στερεού ορίου της ακτής με μία διαπερατή ζώνη με πολύ μικρό πορώδες. Κοντά στην κινούμενη ακτογραμμή η θαλάσσια επιφάνεια εισχωρεί στον πορώδη πυθμένα. Συνακόλουθα η στιγμιαία θέση της ακτογραμμής καθορίζεται από αυτήν την αλληλεπίδραση.

Το 1DH BW module επιλύει τις αναβαθμισμένες εξισώσεις τύπου Boussinesq μέσω μίας κλασσικής μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων Galerkin με πεπλεγμένη παρεμβολή των μεταβλητών σε εναλλασσόμενο ή μη εναλλασσόμενο πλέγμα υπολογισμού (κάναβο). Η

δυναμική της ζώνης θραύσης και οι μεταβολές στη ζώνη απόπλυσης (ζώνη διαβροχής) για οποιοδήποτε παράκτιο προφίλ μπορούν να προσομοιωθούν μέσω αυτού του μοντέλου. Αναπαράγει εξάλλου τα περισσότερα συνδυαστικά φαινόμενα στην παράκτια ζώνη όπως και η 2-D έκδοση. Το πρόβλημα της εμφάνισης υψηλότερης τάξης χωρικών διαφορικών αντιμετωπίζεται με το να γράφουν οι εξισώσεις τύπου Boussinesq σε χαμηλότερη τάξη (γραμμικοποίηση) αφού εισαχθεί μια επιπρόσθετη μεταβλητή και μια επιπρόσθετη αλγεβρική εξίσωση. Οι εξισώσεις στις οποίες καταλήγουμε εμπεριέχουν όρους μόνο με δεύτερης τάξης διαφορικά όσον αφορά τις χωρικές συντεταγμένες (Sørensen et al., 2004).

5.3. Βασικές εξισώσεις

Το MIKE21 BW επιλύει τις τροποποιημένες εξισώσεις τύπου Boussinesq σε μία ή δύο διαστάσεις σε όρους ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ζ , και κατά το βάθος ολοκληρωμένων συνιστωσών ταχύτητας, P και Q .

- Το σύστημα εξισώσεων για το 2DH BW module είναι:

Εξίσωση συνέχειας:

$$n \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

Εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά x :

$$n \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{P^2}{h} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{PQ}{h} \right)}{\partial y} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} + F_x n^2 gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} + n^2 P \left[\alpha + \beta \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{h} \right] + \frac{gP \sqrt{P^2 + Q^2}}{h^2 C^2} + n \Psi_1 = 0 \quad (5.2)$$

Εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά y :

$$\begin{aligned}
& n \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{Q^2}{h} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{PQ}{h} \right)}{\partial x} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} + F_y n^2 g h \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \\
& + n^2 P \left[\alpha + \beta \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{h} \right] + \frac{gQ\sqrt{P^2 + Q^2}}{h^2 C^2} + n \Psi_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Όπου οι όροι διασποράς Ψ_1 και Ψ_2 δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 \equiv & - \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 (P_{xxt} + Q_{xyt}) - nBgd^3 (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) - \\
& - dd_x \left(\frac{1}{3} P_{xt} + \frac{1}{6} Q_{yt} + nBgd(2\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) \right) - dd_y \left(\frac{1}{6} Q_{xt} + nBgd\zeta_{xy} \right)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_2 \equiv & - \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 (P_{xyt} + Q_{yyt}) - nBgd^3 (\zeta_{yyy} + \zeta_{xxy}) - \\
& - dd_y \left(\frac{1}{3} Q_{yt} + \frac{1}{6} P_{xt} + nBgd(2\zeta_{yy} + \zeta_{xx}) \right) - dd_x \left(\frac{1}{6} P_{yt} + nBgd\zeta_{xy} \right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Οι δείκτες x,y και t υποδηλώνουν μερικά διαφορικά αναφορικά με το χώρο και το χρόνο αντίστοιχα. Οι όροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις ερμηνεύονται ως:

- P πυκνότητα ροής κατά x σε m³/(msec)
- Q πυκνότητα ροής κατά y σε m³/(msec)
- B Boussinesq όρος διασποράς
- F_x όρος οριζόντιας τάσης κατά x
- F_y όρος οριζόντιας τάσης κατά y
- x,y καρτεσιανές συντεταγμένες
- t χρόνος σε sec
- h συνολικό βάθος (h=d+ζ)
- d βάθος μέσης στάθμης ηρεμίας
- g επιτάχυνση βαρύτητας
- n πορώδες

- C αριθμός αντίστασης Chezy σε $m^{1/2}/sec$
- α συντελεστής αντίστασης για στρωτή ροή σε πορώδες μέσο
- β συντελεστής αντίστασης για τυρβώδη ροή σε πορώδες μέσο
- ζ ανύψωση θαλάσσιας επιφάνειας πάνω από σημείο αναφοράς σε m

Οι όροι R_{xx} , R_{xy} , και R_{yy} αναλύονται στην επόμενη υποενότητα.

Οι όροι οριζόντιας τάσης περιγράφονται με τη χρήση μιας σχέσης κλίσης της τάσης (gradient-stress) η οποία δίνει:

$$F_x = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v_t \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (5.6)$$

$$F_y = - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_t \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) \right] \quad (5.7)$$

Όπου το v_t είναι η οριζόντια τυρβώδης συνεκτικότητα.

- Αντίστοιχα το σύστημα εξισώσεων για το BW 1DH module είναι:

Εξίσωση συνέχειας:

$$n \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (5.8)$$

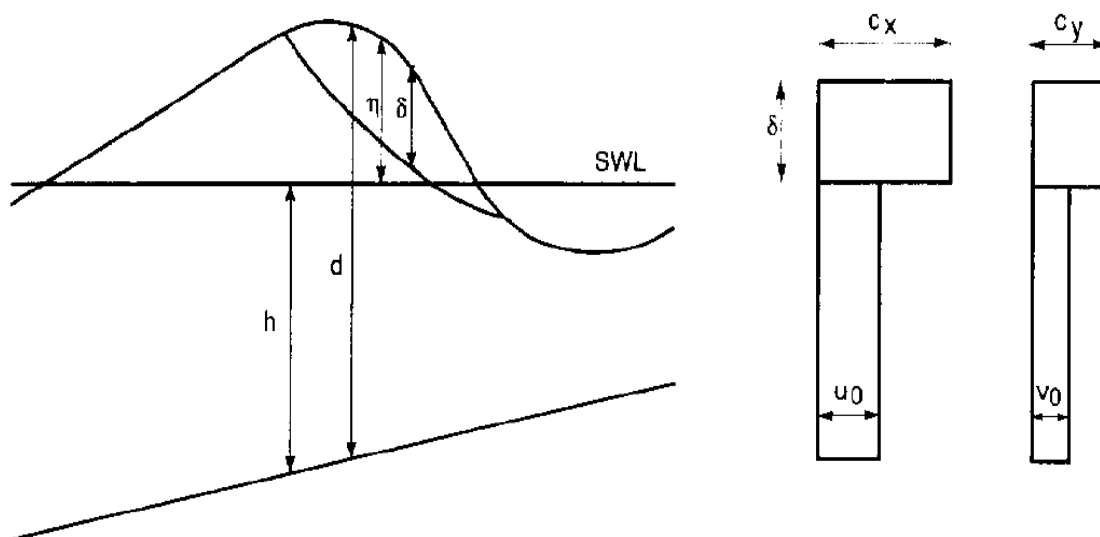
Εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά x:

$$\begin{aligned} n \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{P^2}{h} \right)}{\partial x} + \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + n^2 gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} - n \left(B + \frac{1}{3} \right) d^2 \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial x \partial x} - \\ - \frac{1}{3} d \frac{\partial d}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} - n^2 B g d^2 \frac{\partial w}{\partial x} + n^2 P \left(\alpha + \beta \frac{|P|}{h} \right) + \frac{gP|P|}{h^2 C^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \quad (5.10)$$

5.4. Θραύση κυματισμών (Madsen et al. 1997)

Ένας μηχανισμός για την προσομοίωση της απώλειας ενέργειας λόγω θραύσης, στα μοντέλα Boussinesq, είναι ο «επιφανειακός κύλινδρος» (surface roller). Η ιδέα αυτή, της επιρροής του επιφανειακού κυλίνδρου στην κίνηση του κυματισμού, προτάθηκε από τον Svendsen (1984a). Οι Madsen et al. (1997), βασιζόμενοι στην αρχή ότι ο επιφανειακός κύλινδρος παίρνεται υπόψη σαν ένας όγκος νερού που «μεταφέρεται» από το κύμα με την ταχύτητα του κυματισμού, εξέλιξαν αυτό το κριτήριο. Η αρχή αυτή έχει σαν αποτέλεσμα την κάθετη διανομή της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας που απεικονίζεται στο Σχ. 5.2. Θεωρώντας αυτό το προφίλ ταχύτητας να ισχύει κατά τη θραύση εξήγαγαν τις εξισώσεις (5.1), (5.2) και (5.3).



Σχ. 5.2 Κάθετο προφίλ οριζόντιας ταχύτητας θραυόμενου κυματισμού (Madsen et al. 1997).

Οι όροι R_{xx} , R_{xy} , και R_{yy} αντιστοιχούν στην επιπρόσθετη ορμή η οποία προκύπτει από την ανομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας λόγω της παρουσίας του επιφανειακού κυλίνδρου (surface roller) και ορίζονται ως:

$$R_{xx} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \left(c_x - \frac{P}{d} \right)^2 \tag{5.11}$$

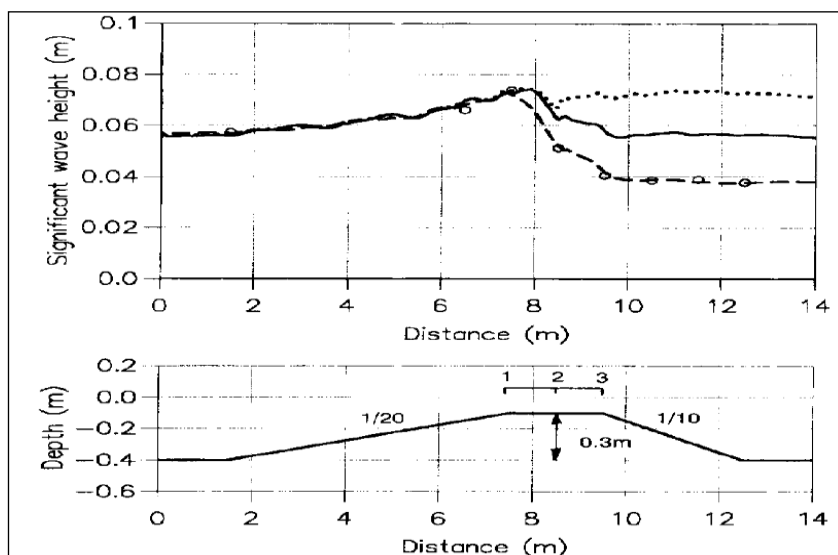
$$R_{xy} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \left(c_x - \frac{P}{d} \right) \left(c_y - \frac{Q}{d} \right) \quad (5.12)$$

$$R_{yy} = \frac{\delta}{1 - \delta/d} \left(c_y - \frac{Q}{d} \right)^2 \quad (5.13)$$

Εδώ $\delta = \delta(x, y, t)$ είναι το πάχος του επιφανειακού κυλίνδρου και c_x, c_y οι συνιστώσες της ταχύτητας φάσης του.

Η αρχή της θραύσεως επιτυγχάνεται όταν η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας υπερβεί μια αρχική κρίσιμη τιμή, $\tan \phi_B$ όπως πρότεινε ο Deigaard (1989). Οι Schäffer et al. (1993), ύστερα από πολλές δοκιμές θραύσεων κυλίσεως σε ακτές με επίπεδη κλίση πυθμένα, κατέληξαν ότι προκύπτουν αποδεκτά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας την τιμή $\phi_B = 20^\circ$. Οι Madsen et al. (1997) απέδειξαν ότι αυτή η τιμή είναι κατάλληλη για θραύσεις αυτού του τύπου αλλά όχι και για θραύσεις εκτινάξεως (plunging). Βασιζόμενοι στις μετρήσεις τους σημείωσαν ότι ο τύπος θραύσης εκτινάξης απαιτεί μια ελαφρά αύξηση στις γωνίες θραύσης ενώ η θραύση πάνω από ύφαλο τραπέζιο απαιτεί μείωση.

Για παράδειγμα στο **Σχ. 5.3** απεικονίζεται η χωρική μεταβολή του χαρακτηριστικού ύψους κύματος για τρία διαφορετικά σετ παραμέτρων του μοντέλου: α) θραυόμενος κυματισμός με $(\phi_B, \phi_0) = (14^\circ, 7^\circ)$ β) θραυόμενος κυματισμός με τις συνήθεις τιμές $(\phi_B, \phi_0) = (20^\circ, 10^\circ)$ και γ) τέλος προσομοίωση χωρίς θραύση. Από τη σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα είναι προφανές ότι η περίπτωση α) δίνει πολύ καλά αποτελέσματα ενώ οι τιμές της β) υποεκτιμούν τη διάχυση της ενέργειας.



Σχ. 5.3 Χωρική μεταβολή του ύψους κύματος και βαθυμετρία του πειράματος Beji και Battjes (1993) (κύκλοι). α) μοντέλο Madsen et al. (1997) με αρχικές τιμές ($20^\circ, 10^\circ$) παραμέτρων (συνεχής γραμμή) β) με μειωμένες τιμές ($14^\circ, 7^\circ$) (διακεκομμένη γραμμή) γ) χωρίς θραύση (τελείες). (Madsen et al. 1997)

Η επιλογή της παραμέτρου φ_B , είναι προφανώς άμεσα συνδεδεμένη με την τελική ακρίβεια των υπολογισμών της ελεύθερης επιφάνειας πριν ξεκινήσει η θραύση και όπως σημειώνουν οι Madsen et al. (1997) αυτό είναι ένα από τα αδύναμα σημεία στα συμβατικά μοντέλα Boussinesq: καθώς αυτά δίνουν πολύ καλά χαρακτηριστικά γραμμικής ρήγωσης για $kd=3$, η μεταφορά της ενέργειας στα super-harmonics γενικά υποεκτιμάται.

Ο χωρικός και χρονικός προσδιορισμός των κυλίνδρων βασίζεται σε μια γεωμετρική προσέγγιση που περιγράφηκε λεπτομερώς από τους Schäffer et al. (1993). Κατά τη μετάδοση από το αρχικό σημείο θραύσης σε μία κατάσταση ‘bore’ (τύπος παλιρροϊκού κύματος), η κρίσιμη γωνία φ , αλλάζει βαθμιαία από φ_B σε φ_0 ($\varphi_0 < \varphi_B$). Η στιγμιαία τιμή της φ εξαρτάται από την περίοδο του κυλίνδρου και ακολουθεί μια εκθετική χρονική μεταβολή:

$$\tan \varphi(t) = \tan \varphi_0 + (\tan \varphi_B - \tan \varphi_0) \exp \left[- \ln 2 \frac{t - t_B}{t_{1/2}} \right] \quad (5.14)$$

Όπου το $t_{1/2}$ ρυθμίζει τη χρονική κλίμακα για την ανάπτυξη του κυλίνδρου και t_B είναι ο χρόνος έναρξης της θραύσης. Τοπικά, ο κύλινδρος ορίζεται σαν το νερό πάνω από την εφαπτομένη της κλίσης $\tan \varphi$ και η θραύση τελειώνει όταν η μέγιστη από την τοπική κλίση

γίνει μικρότερη της $\tan\phi$. Μετά τον προσδιορισμό του κυλίνδρου σε κάθε χρονικό βήμα, το πάχος (roller thickness) δ του, πολλαπλασιάζεται με ένα συντελεστή σχήματος f_δ πριν τον υπολογισμό του στις βασικές εξισώσεις.

Ένα μειονέκτημα αυτού του προσδιορισμού των επιφανειακών κυλίνδρων είναι ότι επιπλέον με το $\tan\phi_B$ στηρίζεται σε τρεις παραμέτρους ϕ_0 , f_δ , και $t_{1/2}$. Οι Madsen et al. (1997) δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές για την κάθε παράμετρο κατέληξαν στα επόμενα:

1. Η τιμή του ϕ_0 δεν είναι κρίσιμη για εφαρμογές όπου η θραύση συνεχίζεται προς την ακτή. Βασιζόμενος στην αναλογία με το υδραυλικό άλμα ο Deiggard (1989) εκτίμησε τη $\phi_0=10\text{deg}$. την οποία υιοθέτησαν αν και σε ορισμένες περιπτώσεις όπως είδαμε (π.χ. θραύση πάνω από το οριζόντιο μέρος ύφαλου τραπεζίου) η τιμή μειώνεται στις 7-8deg. με ανάλογη μείωση της ϕ_B .
2. Η παράμετρος $t_{1/2}$ καθορίζει το χρονικό διάστημα μεταφοράς μεταξύ των δυο γωνιών θραύσης και λαμβάνεται ίση με $T/5$, όπου T η χαρακτηριστική περίοδος του εισερχόμενου συρμού κυματισμών.
3. Το πάχος του 'surface roller' δ , πολλαπλασιάζεται με 1,5 για θραύσεις τύπου κύλισης (spilling) ενώ για εκτινάξεως (plunging) οι Ozsanne et al. (2000) προτείνουν μια τιμή κοντά στο 2.0.

Η ταχύτητα κυματισμού c , η οποία θεωρείται ταυτόσημη με την ταχύτητα κυλίνδρου, είναι μια ουσιαστική παράμετρος της μεθόδου «επιφανειακού κυλίνδρου». Οι Schäffer et al. (1993) χρησιμοποίησαν τη σχέση:

$$c = 1.3\sqrt{gh} \quad (5.15)$$

Η οποία δίνει καλά αποτελέσματα για απλούς κυματισμούς (εντός της ζώνης θραύσης) όχι όμως και για σύνθετους. Γι' αυτό οι Madsen et al. (1997) χρησιμοποίησαν μια καινούρια προσέγγιση προσδιορίζοντας την ταχύτητα c αμφίδρομα από το στιγμιαίο κυματικό πεδίο. Υποθέτοντας ότι η ελεύθερη επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί σαν $\zeta = \zeta(\omega t - k_x x - k_y y)$ που αντιστοιχεί σε διάδοση απλού κυματικού πεδίου. Με τον ορισμό:

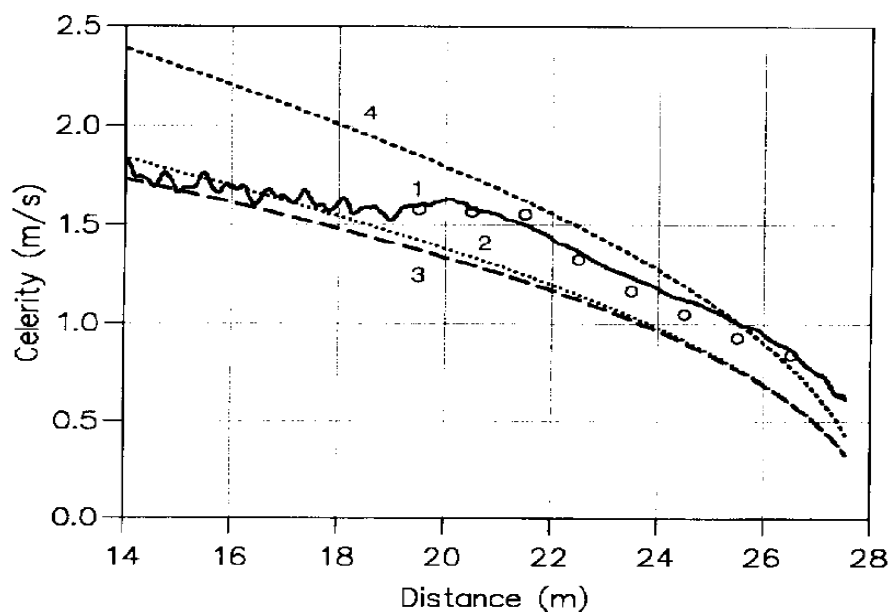
$$(c_x, c_y) = (k_x, k_y) \frac{\omega}{k^2} \tag{5.16}$$

Όπου k ο αριθμός κύματος και ω η γωνιακή συχνότητα. Σε όρους της ελεύθερης επιφάνειας αυτό μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\zeta/\partial x \\ \partial\zeta/\partial y \end{pmatrix} \frac{-\partial\zeta/\partial t}{(\partial\zeta/\partial x)^2 + (\partial\zeta/\partial y)^2} \tag{5.17}$$

Το οποίο εφαρμόζεται στο υψηλότερο σημείο του μετώπου του κύματος.

Η μέθοδος αυτή κατάφερε να δώσει καλές τιμές για την ταχύτητα τόσο για τους απλούς όσο και για τους σύνθετους κυματισμούς. Όμως ένα γενικό πρόβλημα με κάθε αμφίδρομο προσδιορισμό της ταχύτητας είναι ότι μπορεί να οδηγήσει σε αστάθειες και θορύβους κάνοντας απαραίτητη τη χρήση low-pass φίλτρων. Τέλος στο Σχ. 5.4 θεωρώντας απλούς κυματισμούς θραυόμενους σε ακτή με κλίση 1/40 παρουσιάζονται: η μετρούμενη ταχύτητα κύματος από το πείραμα του Stive (1984), η ταχύτητα σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία και οι $c = 1.3\sqrt{gh}$, $c = \sqrt{gh}$.



Σχ. 5.4 Χωρική μεταβολή της ταχύτητας κυματισμού για το πείραμα του Stive (1980) (1) ταχύτητα προσδιορισμένη αμφίδρομα (2) γραμμική θεωρία (3) $c = \sqrt{gh}$ (4) $c = 1.3\sqrt{gh}$ (O) πειραματικά δεδομένα Stive. (Madsen et al. 1997)

5.5. Οριακές συνθήκες

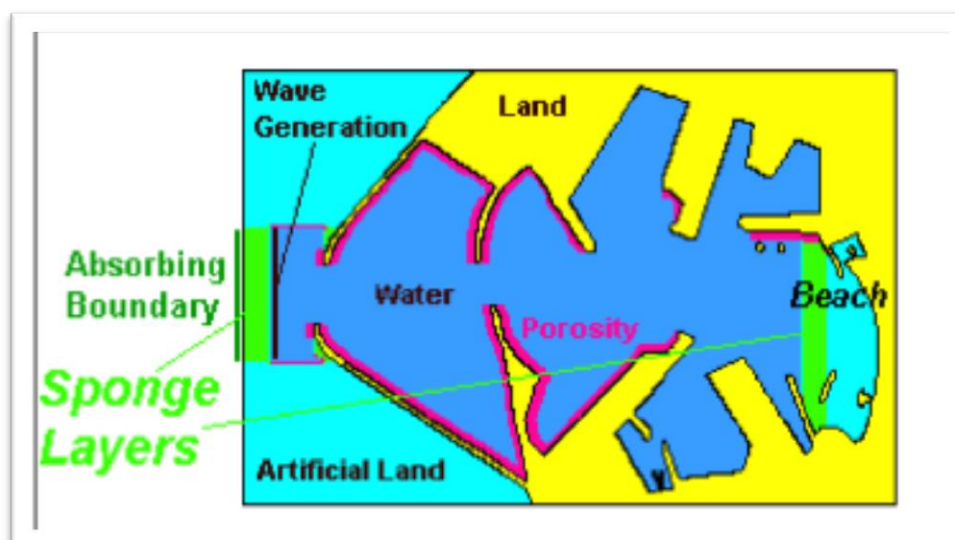
Στο MIKE21 BW οι συνθήκες στο όριο προσομοιώνονται με τη μέθοδο των στρώσεων απορρόφησης ενέργειας ή sponge/absorbing layers, δηλαδή με το να ανατίθενται σε έναν αριθμό κελιών του ορίου τέτοιες συνθήκες ακτινοβολίας οι οποίες απομειώνουν σταδιακά όλη την ενέργεια του κυματικού πεδίου που διαδίδεται προς τις έξω περιοχές από το χώρο προσομοίωσης, ενώ ταυτόχρονα εξασφαλίζουν μηδενική ανάκλαση.

Η επόμενη σχέση δίνει την τιμή του συντελεστή απομείωσης (sponge layer coefficient):

$$C_{\text{sponge}} = \alpha^{(r^{i-1})}, i=1, N_{\text{sponge}}$$

Όπου α, r είναι σταθερές προς προσδιορισμό και N_{sponge} ο αριθμός των γραμμών απορρόφησης (Larsen and Dancy, 1983).

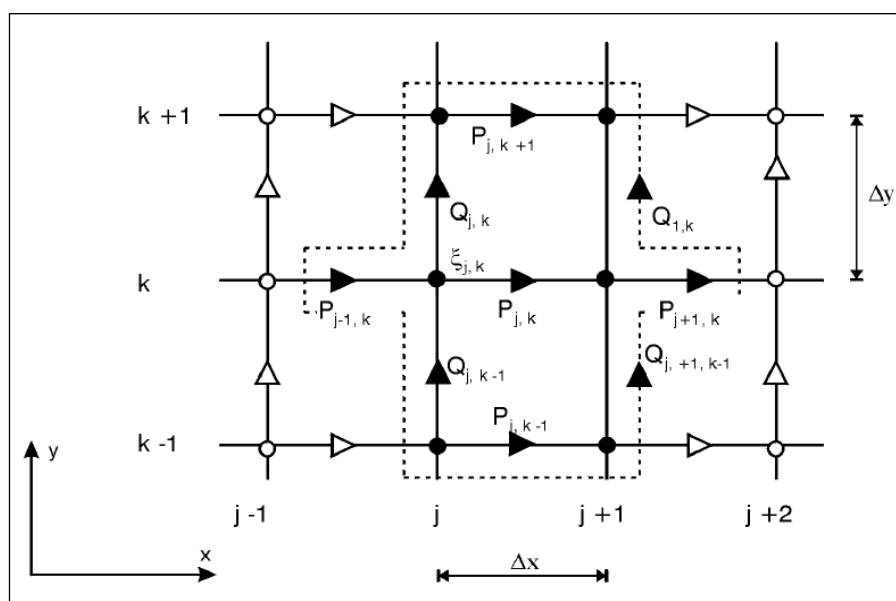
Παραπλεύρως του απορροφητικού πεδίου 'sponge layer' τοποθετείται μια γραμμή γένεσης των κυμάτων σύνθετων ή και μονοχρωματικών (wave generation line) σε εκείνο το όριο από το οποίο θεωρούμε ότι εισάγεται το κυματικό πεδίο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση ως προς το χώρο προσομοίωσης, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.5.



Σχ.5.5 Παράδειγμα εφαρμογής οριακών συνθηκών (απορροφητικών ορίων-sponge layers) σε κάποια περιοχή προσομοίωσης.

5.6. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης

Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται στο 2DH BW module βασίζεται στο αποκαλούμενο SYSTEM21 σχήμα, το οποίο εφευρέθηκε από τους Abbott et al. (1973) και επεκτάθηκε για προσομοίωση βραχέων κυμάτων από τους Abbott et al. (1978). Από τότε το εύρωστο σχήμα έχει υποστεί συνεχή βελτίωση (Madsen et al., 1991; Madsen and Sørensen, 1992). Οι διαφορικές εξισώσεις διακριτοποιούνται χωρικά σε ορθογωνικό κανάβο σταθερού βήματος. Τα μονόμετρα (βαθμωτά) μεγέθη, όπως η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, ορίζονται στους κόμβους του κανάβου, ενώ οι συνιστώσες της ροής ορίζονται στο μέσο γειτονικών κόμβων (επί των πλευρών βρόχων) όπως παρουσιάζεται στο Σχ. 5.6.



Σχ. 5.6 Απεικόνιση κανάβου για το 2DH BW module.

Η ολοκλήρωση στο χρόνο γίνεται χρησιμοποιώντας ένα πεπλεγμένο κεντρικό σχήμα. Ο αλγόριθμος είναι εναλλασσόμενης διεύθυνσης Alternating Direction Implicit (ADI), με ‘fractional step’ τεχνική και ‘side-feeding’ (semi-linearization of non-linear terms). Το τελικό τριδιαγώνιο σύστημα εξισώσεων λύνεται με τον ‘double-sweep’ αλγόριθμο.

Στο 1DH BW module γίνεται χρήση μιας μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση των 1-D εξισώσεων. Η επίλυση αυτή μπορεί να αποδώσει σοβαρά λάθη ειδικά όταν εφαρμόζονται ίσης τάξης συναρτήσεις παρεμβολής για τον υπολογισμό των παροχών και της

ανύψωσης. Για να πάρουμε σταθερές λύσεις χωρίς διακυμάνσεις χρησιμοποιείται μικτή παρεμβολή. Στοιχεία με τετραγωνικές παροχές και γραμμική ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας καθώς και επιπρόσθετοι όροι εφαρμόζονται σε αυτή την κατεύθυνση. Η χρονική ολοκλήρωση γίνεται μέσω ενός ρητού Taylor-Galerkin τριών βημάτων ή μέσω μιας τέταρτης τάξης μεθόδου πρόβλεψης-διόρθωσης Adams-Bashforth-Moulton. Ένα σετ τριών γραμμικών εξισώσεων πρέπει να επιλυθεί. Για μικρά προβλήματα αυτά τα συστήματα επιλύονται με απαλοιφή κατά Gauss. Για πιο μεγάλα συστήματα πρέπει να εφαρμόζονται πιο χρονοβόρες μέθοδοι, όπως η Krylov επαναληπτική μέθοδος (GMRES) σε συνδυασμό με μία επαρκή προϋπόθεση (π.χ. μια LU παραγοντοποίηση) όπως περιγράφεται αναλυτικά από τους Sørensen et al. (2004). Το παρόν μοντέλο υποστηρίζει σταθερό και μεταβαλλόμενο πλέγμα (mesh) για μέγιστο βαθμό προσαρμοστικότητας.

6. Αριθμητικές προσομοιώσεις & συγκρίσεις

6.1. Εισαγωγή

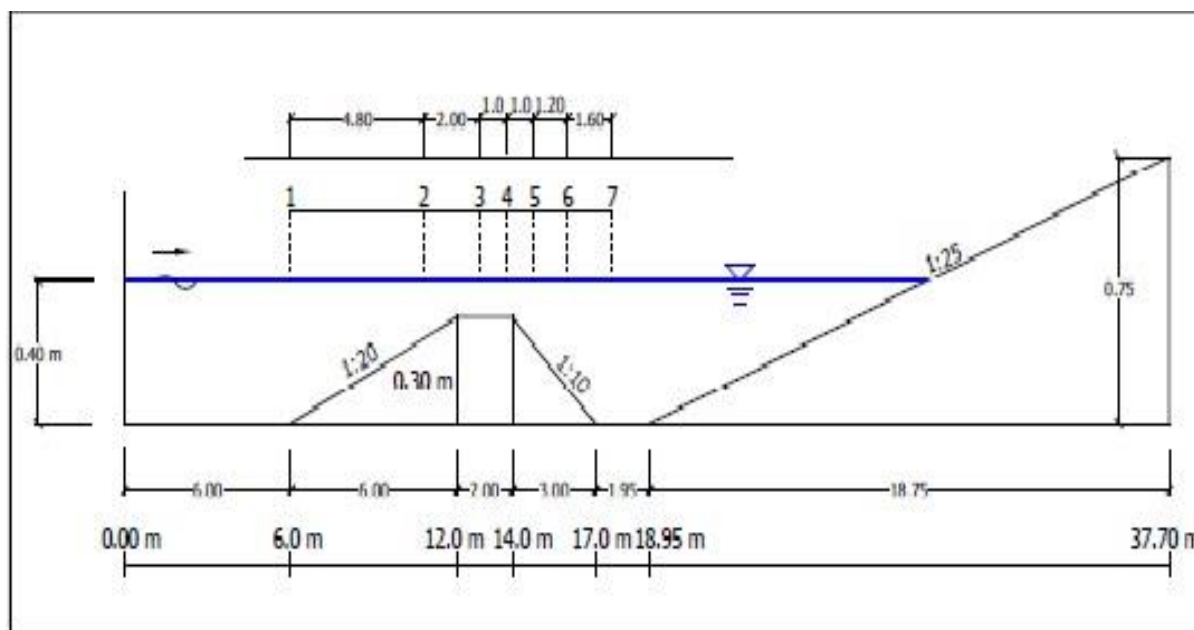
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται και αναλύονται τα πειράματα των Beji and Batjjes (1994), Berkhoff et al (1982), Vincent and Briggs (1989) και Ohyama et al. (1995) και τα αριθμητικά δεδομένα που προκύπτουν από αυτά συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του μοντέλου τύπου Boussinesq (Chondros and Memos, 2014) και του υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW.

6.2. Πείραμα Beji and Batjjes (1994)

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η ακρίβεια προσομοίωσης του αριθμητικού μοντέλου τύπου Boussinesq (Chondros and Memos, 2014) και του MIKE21 BW, στη διάδοση βραχέων μονοχρωματικών κυματισμών, θραυόμενων και μη, σε ύφαλο τραπέζιο. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τις μετρήσεις του πειράματος Beji & Batjjes (1994).

6.2.1. Περιγραφή πειραματικής διάταξης Beji and Batjjes (1994)

Τα πειράματα των Beji & Battjes διεξήχθησαν σε κανάλι κυματισμών που περιείχε ύφαλο εμπόδιο τραπεζοειδούς διατομής. Η τομή της διάταξης φαίνεται στο ακόλουθο **Σχ. 6.1**. Η μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας μετρήθηκε με μετρητές μεταβολής της ηλεκτρικής αντίστασης σε σύρμα (parallel-wire resistance gage), οι οποίοι ήταν τοποθετημένοι στις θέσεις που διακρίνονται στο **Σχ. 6.2**. Τα πειράματα αφορούσαν θραυόμενους και μη κυματισμούς. Στα πειράματα διερευνήθηκαν μονοχρωματικοί κυματισμοί συχνότητας $f=0.5$ Hz και ύψους $H=2.0$ cm, καθώς επίσης και τυχαίοι κυματισμοί (φάσματος JONSWAP, με συχνότητα κορυφής $f_p=0.5$ Hz και σημαντικό ύψος $H_s \sim 1.8$ cm).



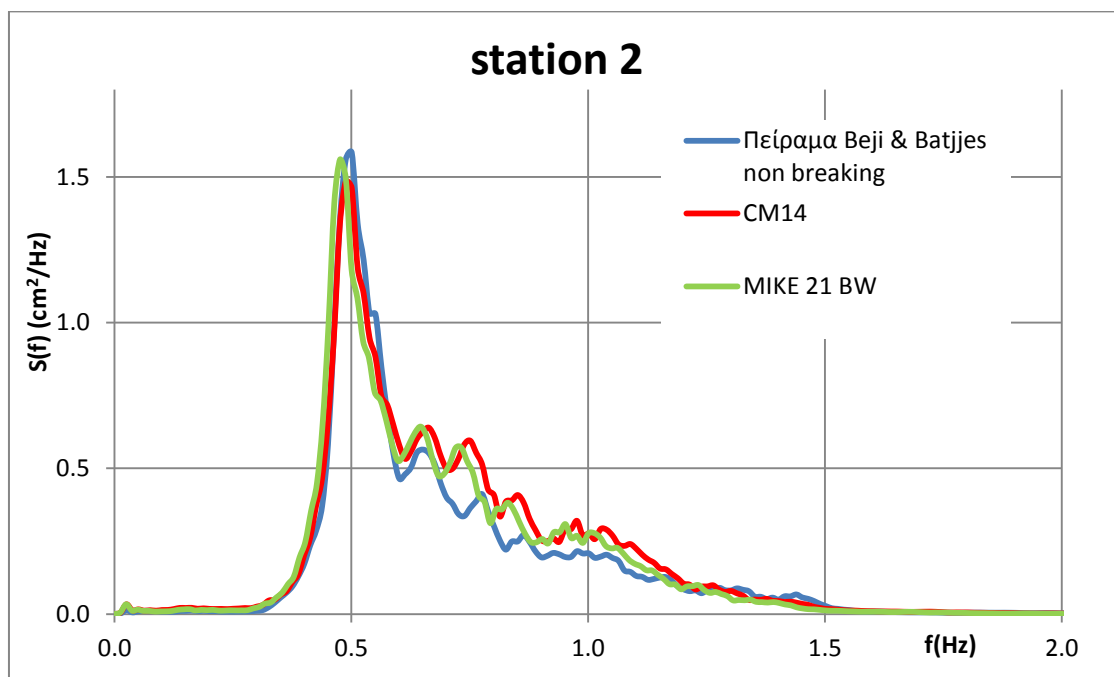
Σχ. 6.1 Κατά μήκος τομή καναλιού του πειραματος των Beji and Batjjes (1994). Οι αριθμοί 1-7 είναι οι θέσεις των αισθητήρων.

Αισθητήρας	Απόσταση από την κυματογεννήτρια (m)	Βάθος νερού (m)
1	6.00	0.40
2	10.80	0.16
3	12.80	0.10
4	13.80	0.10
5	14.80	0.18
6	16.00	0.30
7	17.60	0.40

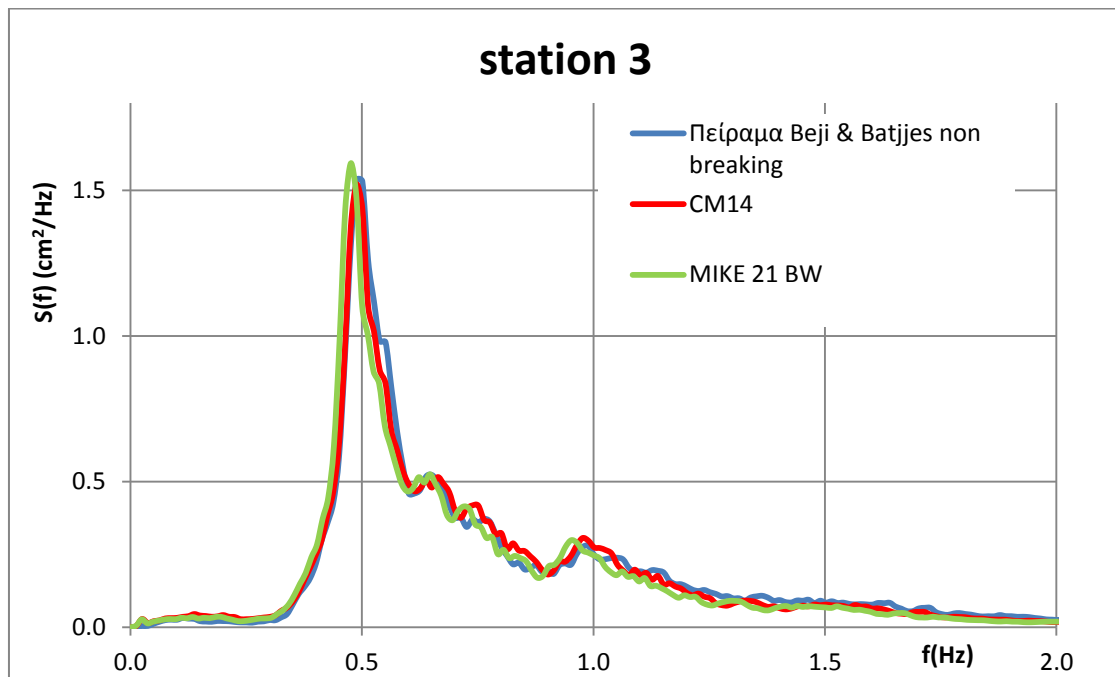
Σχ. 6.2 Θέση και βαθυμετρία αισθητήρων του πειράματος των Beji and Betjjes (1994).

6.2.2. Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα για μη θραυόμενους κυματισμούς (non breaking waves)

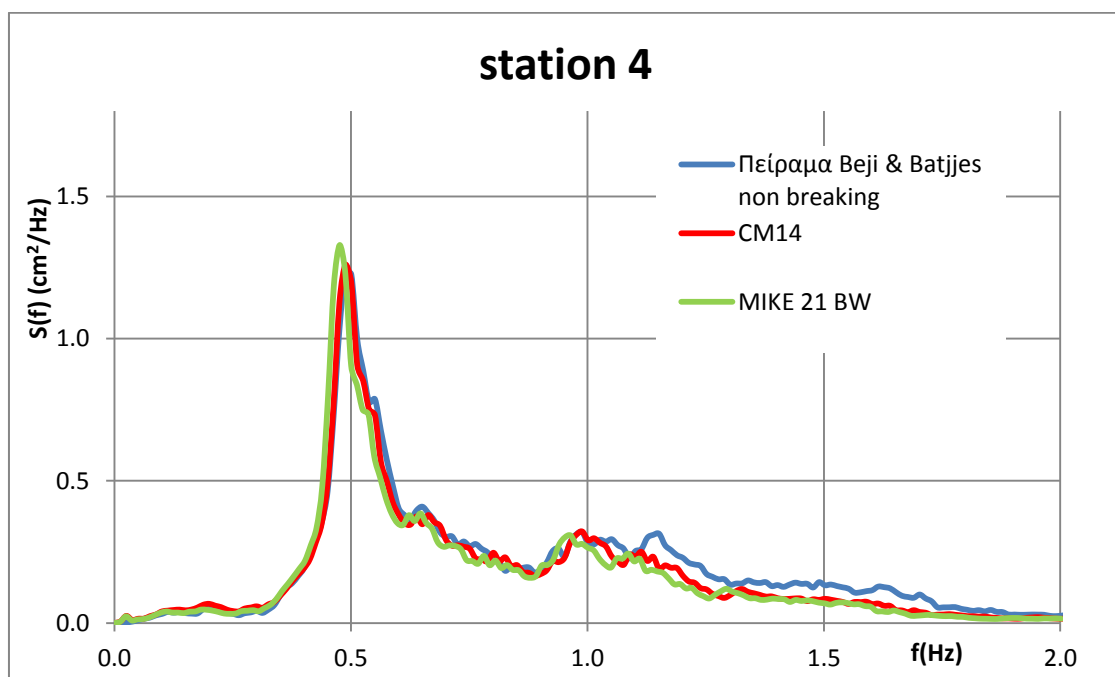
Παρουσιάζονται σε κοινούς άξονες τα φάσματα $S(f)$ (για τους έξι αισθητήρες του πειράματος 2-7), σε σχέση με τη συχνότητα f , όπως προκύπτουν από τις εργαστηριακές μετρήσεις των Beji & Batjjes (1994) non breaking, την εφαρμογή του μοντέλου CM14 και του υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW.



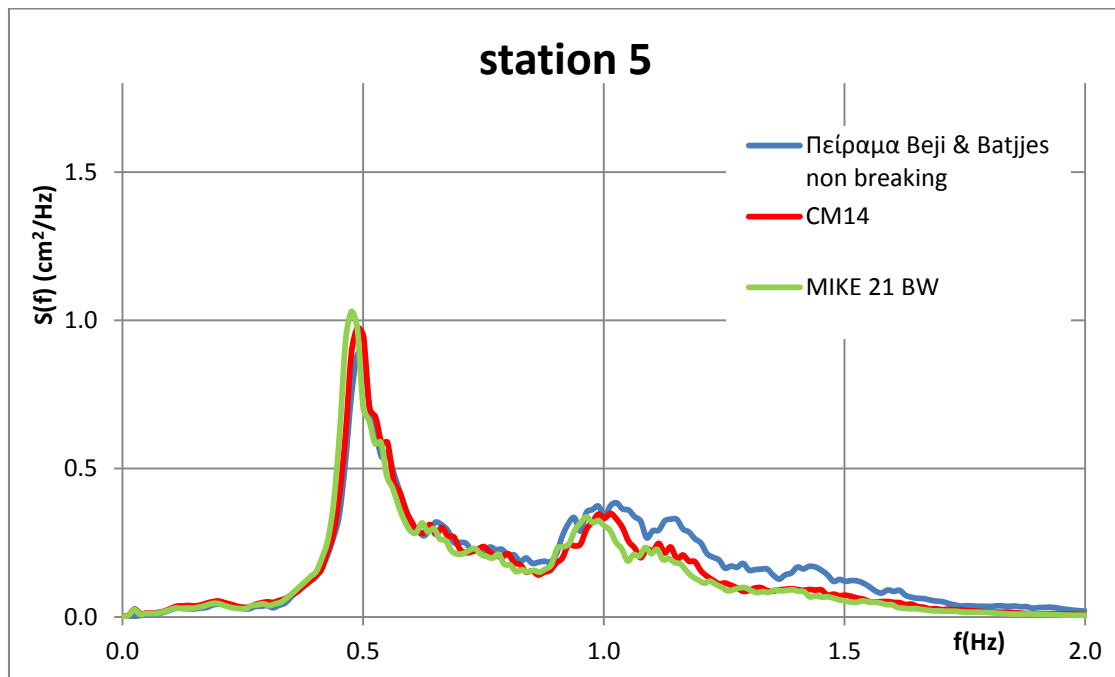
Σχ.6.3 Αισθητήρας 2: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0 \text{ cm}$ και $f_p=0.5 \text{ Hz}$.



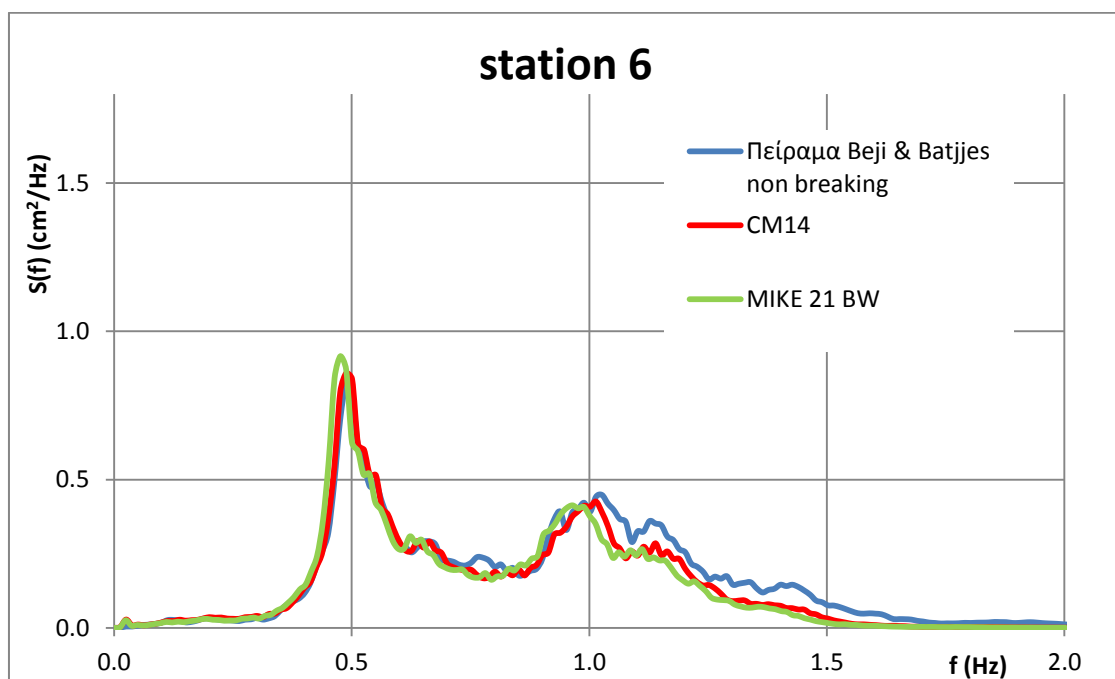
Σχ.6.4 Αισθητήρας 3: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_r=0.5$ Hz.



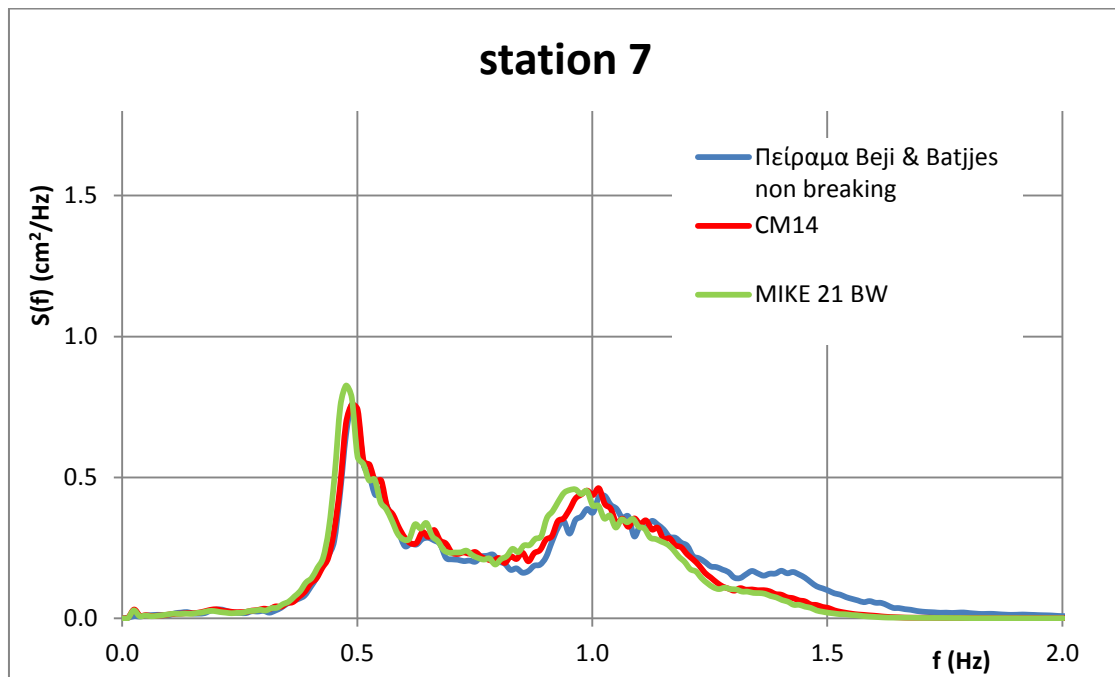
Σχ.6.5 Αισθητήρας 4: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_r=0.5$ Hz.



Σχ.6.6 Αισθητήρας 5: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_r=0.5$ Hz.



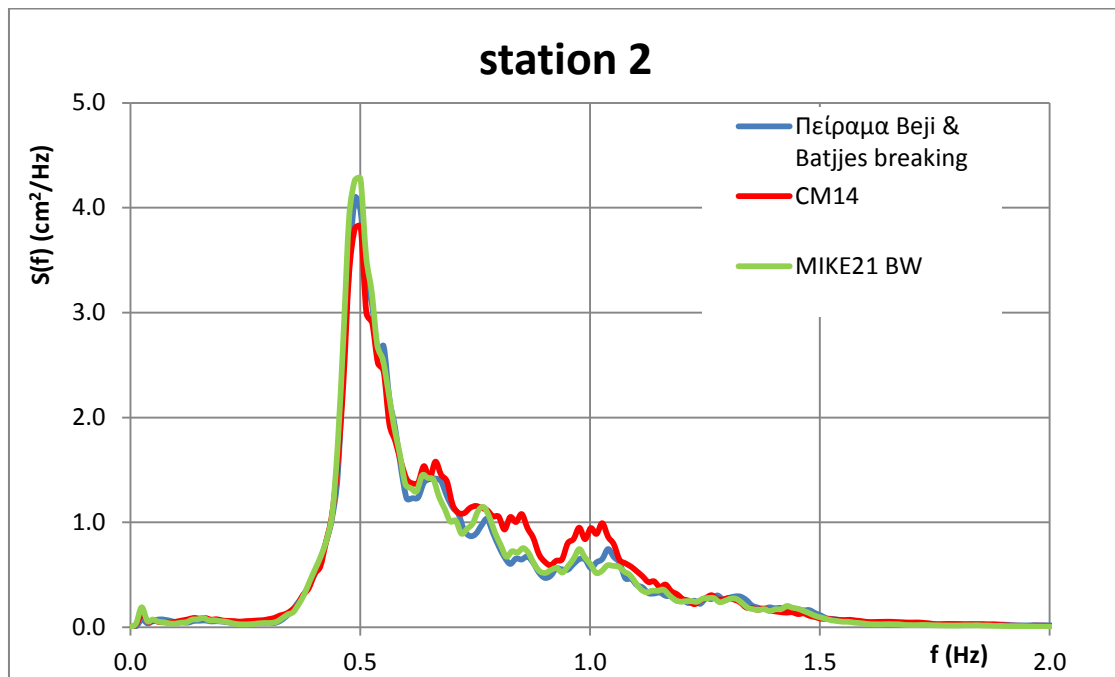
Σχ.6.7 Αισθητήρας 6: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_r=0.5$ Hz.



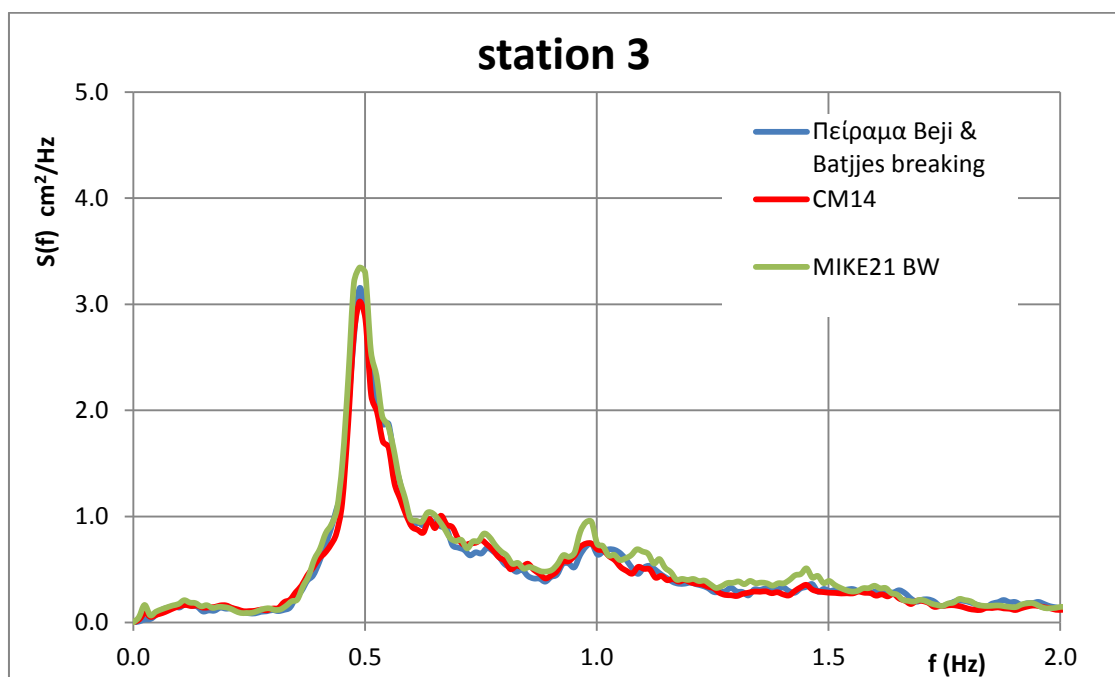
Σχ.6.8 Αισθητήρας 7: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_p=0.5$ Hz.

6.2.3. Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα για θραυόμενους κυματισμούς (spilling waves)

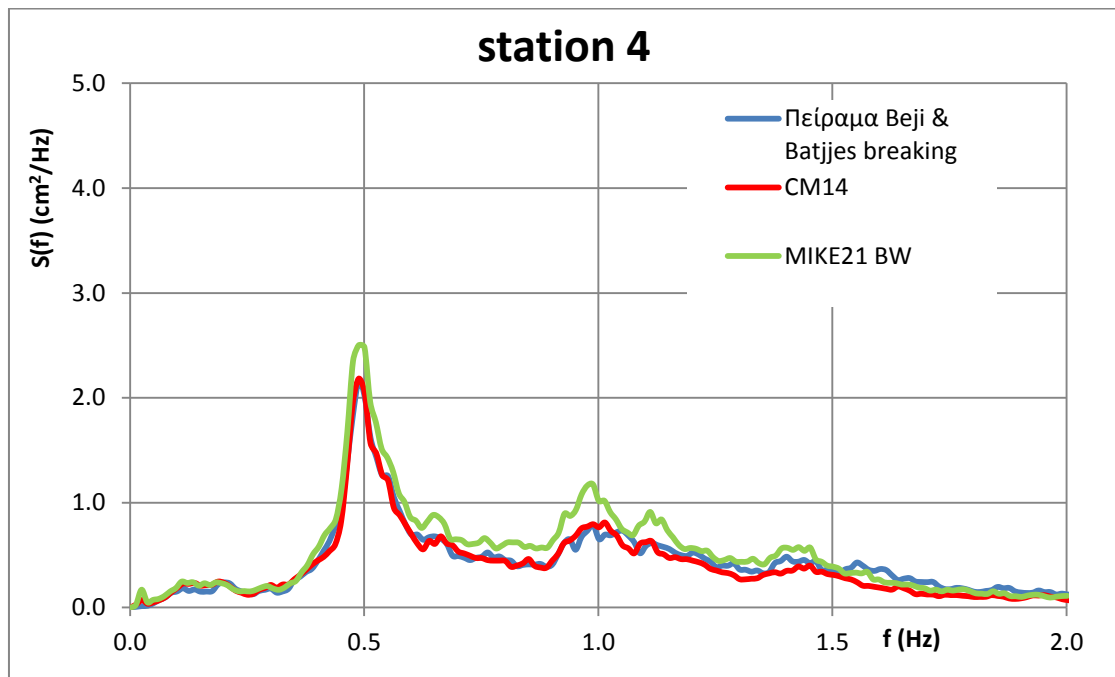
Παρουσιάζονται σε κοινούς άξονες τα φάσματα (για τους έξι αισθητήρες του πειράματος 2-7), σε σχέση με τη συχνότητα, όπως προκύπτουν από τις εργαστηριακές μετρήσεις των Beji & Batjjes (1994) Spilling, την εφαρμογή του μοντέλου CM14 και του υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW.



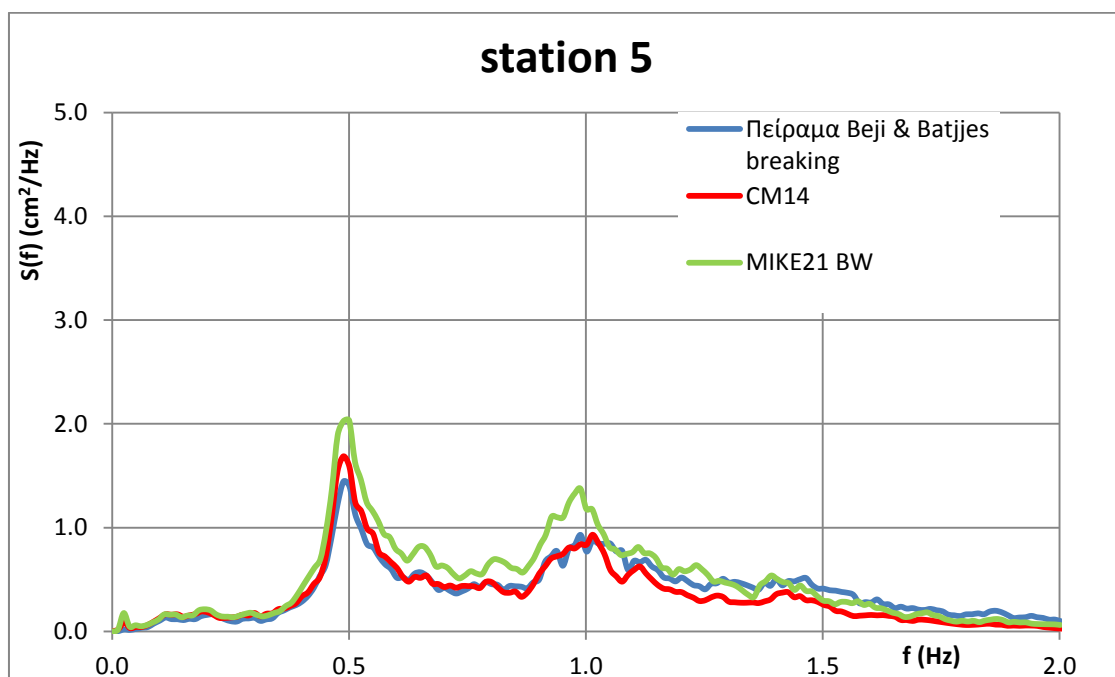
Σχ.6.9 Αισθητήρας 2: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_p=0.5$ Hz.



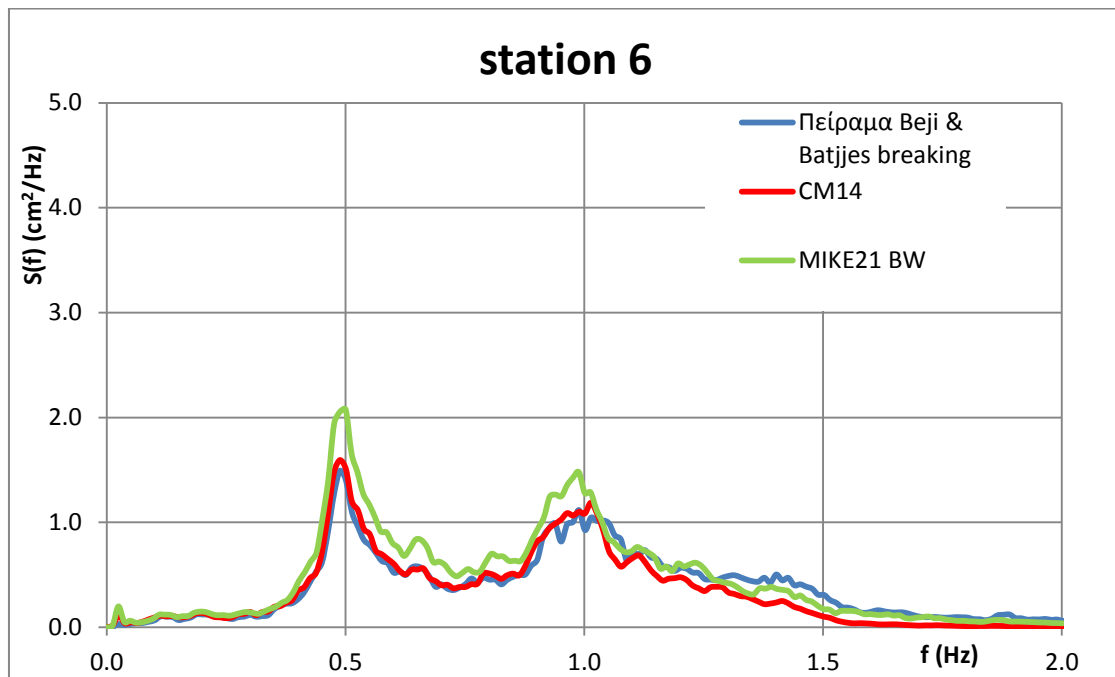
Σχ.6.10 Αισθητήρας 3: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_p=0.5$ Hz.



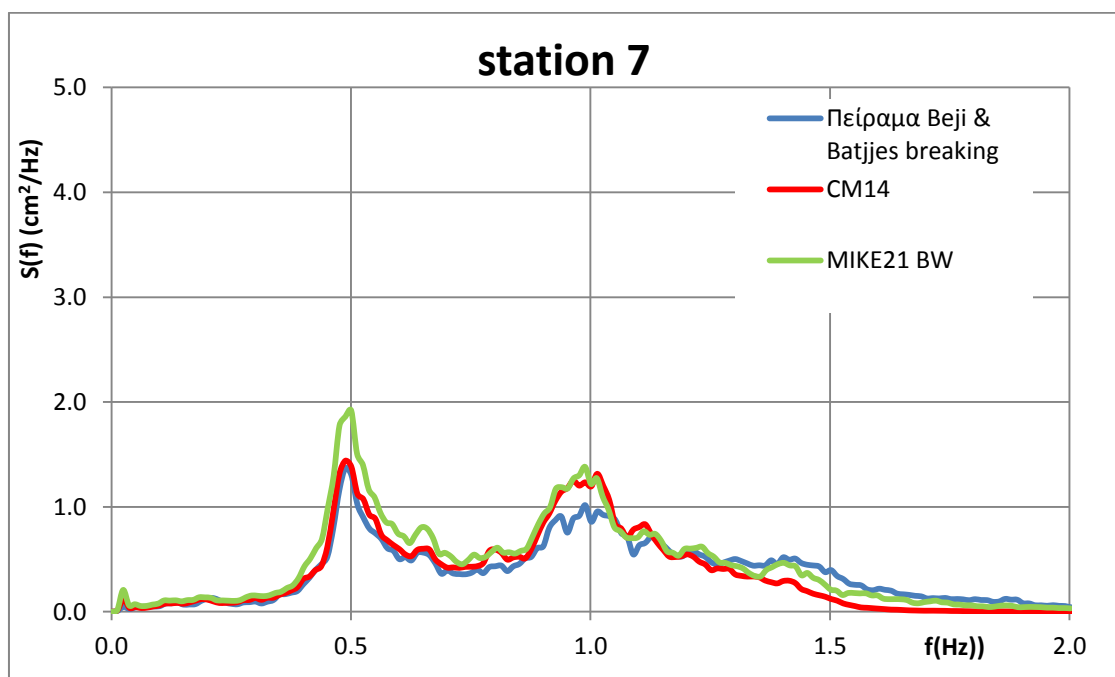
Σχ.6.11 Αισθητήρας 4: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_p=0.5$ Hz.



Σχ.6.12 Αισθητήρας 5: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_p=0.5$ Hz.



Σχ.6.13 Αισθητήρας 6: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_p=0.5$ Hz.



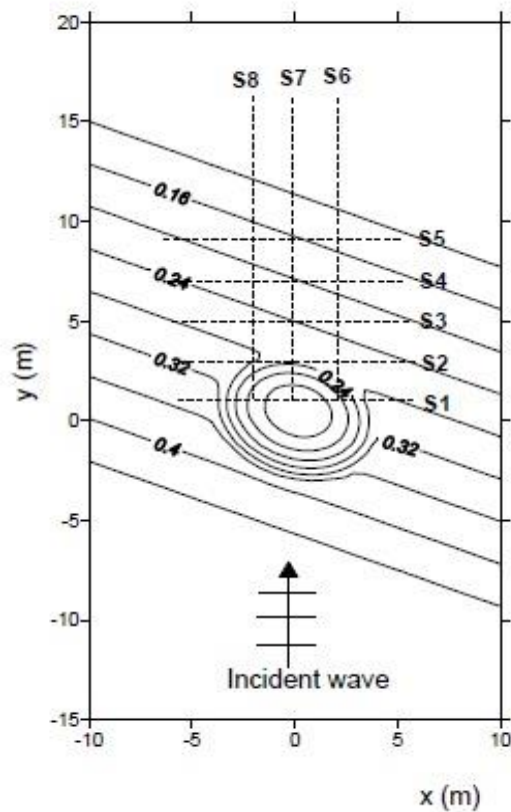
Σχ.6.14 Αισθητήρας 7: Σύγκριση φασμάτων πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_0=2.0$ cm και $f_p=0.5$ Hz.

6.3. Πείραμα Berkhoff et al. (1982)

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η ακρίβεια προσομοίωσης του αριθμητικού μοντέλου τύπου Boussinesq (Chondros and Memos, 2014) και του MIKE21 BW, στη διάδοση δισδιάστατων κυματισμών. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τις μετρήσεις του πειράματος Berkhoff et al (1982).

6.3.1. Περιγραφή πειραματικής διάταξης Berkhoff et al. (1982)

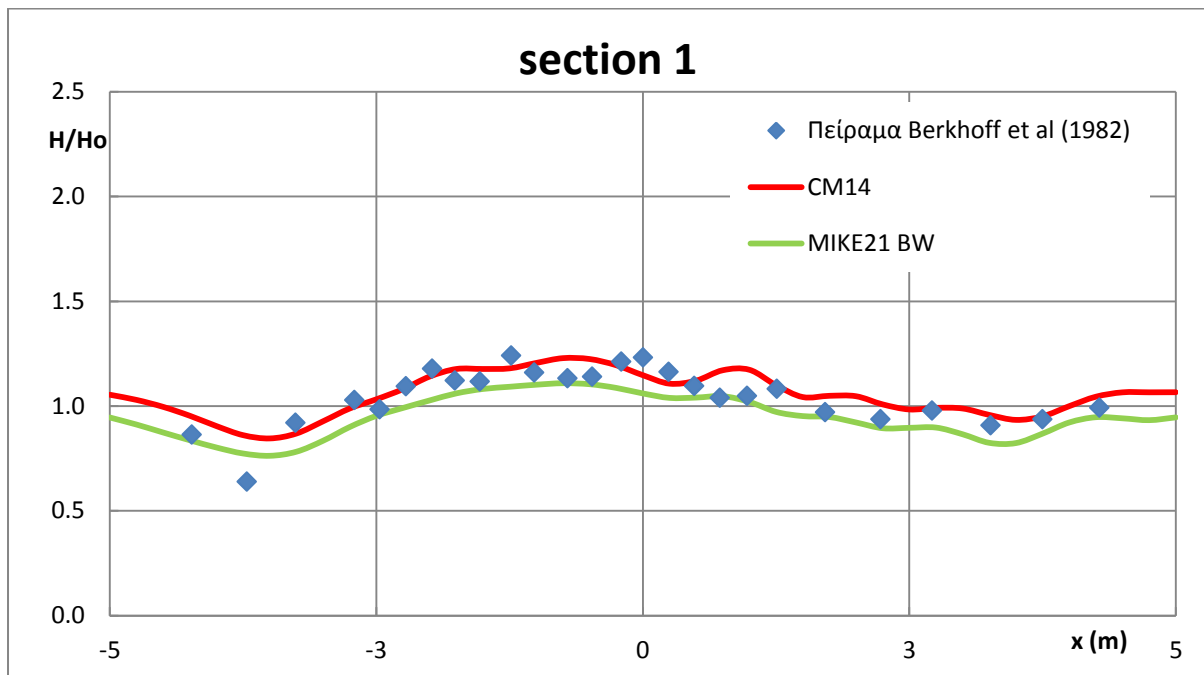
Προκειμένου να μπορεί να εξεταστεί η διασπορά του εύρους στο μοντέλο και στο πρόγραμμα, οι αριθμητικές προσομοιώσεις συγκρίνονται με τα πειραματικά δεδομένα του πειράματος Berkhoff et al. (1982). Η βαθυμετρία του πειράματος αποτελείται από ένα ελλειπτικό ύφαλο εμπόδιο στηριζόμενο σε ένα επίπεδο πυθμένα κλίσης 1:50. Η κλίση του πυθμένα σχηματίζει γωνία -20° με τις πειραματικές κυματογεννήτριες (waves paddles). Τα χωρικά και χρονικά βήματα είναι αντίστοιχα: $\Delta x = \Delta y = 0.05$ m και $\Delta t = 0.0025$ sec. Το εισερχόμενο κύμα είχε ύψος $H_0 = 0.0464$ m και η περίοδος $T = 1.0$ sec. Το μοντέλο έτρεξε για $t = 40$ sec, χωρίς να παρουσιάσει οποιοδήποτε πρόβλημα σταθερότητας. Οι στοιβάδες απορρόφησης 2.5 m τοποθετούνται ανάντη της γραμμής παραγωγής κυματισμών και κατάντη στο τέλος του υπολογιστικού πεδίου. Το υπολογιζόμενο κυματικό πεδίο έφτασε σε μόνιμη κατάσταση μετά από 30 sec. Το ύψος κύματος μετρήθηκε κατά μήκος των οκτώ τομέων (S1-S8). Τα αδιαστατοποιημένα (με το εισερχόμενο ύψος κύματος) ύψη κυμάτων H/H_0 , κατά μήκος των τομέων 1 έως 8, δίνονται στα διαγράμματα που ακολουθούν και για τα πρότυπα αποτελέσματα και για τις πειραματικές μετρήσεις. Η πειραματική διάταξη και η βαθυμετρία φαίνονται στο **Σχ. 6.15**



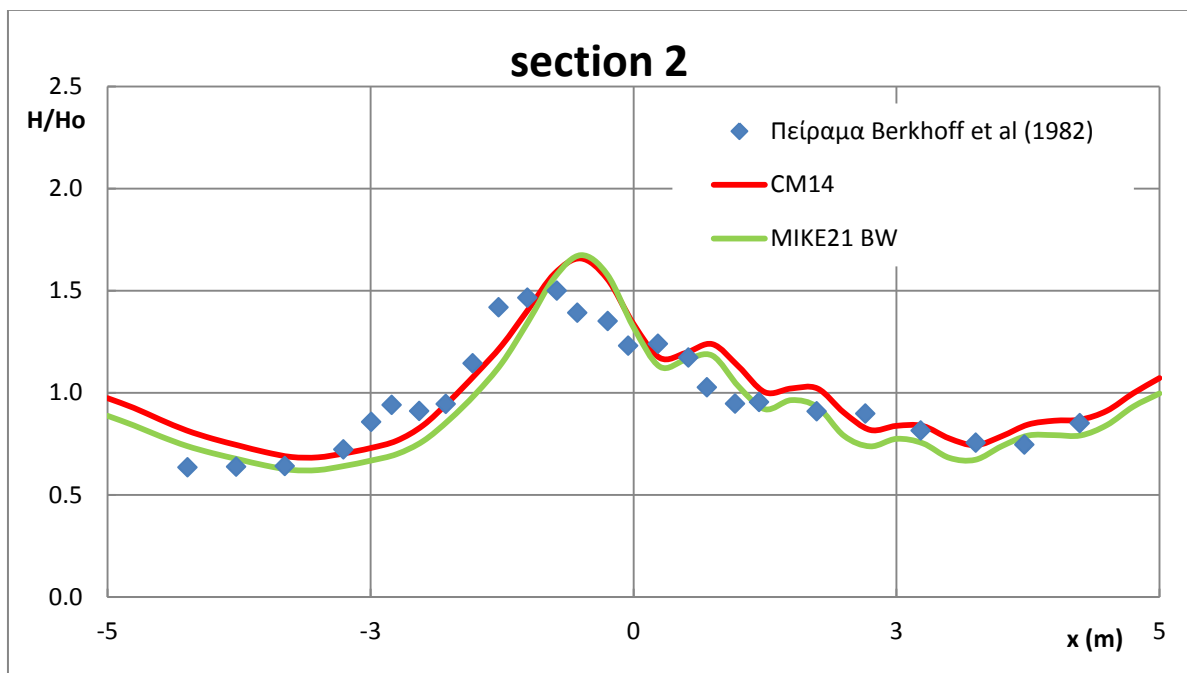
Σχ. 6.15: Πειραματική διάταξη και βαθυμετρία πειράματος Berkhoff et al. (1982).

6.3.2. Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα

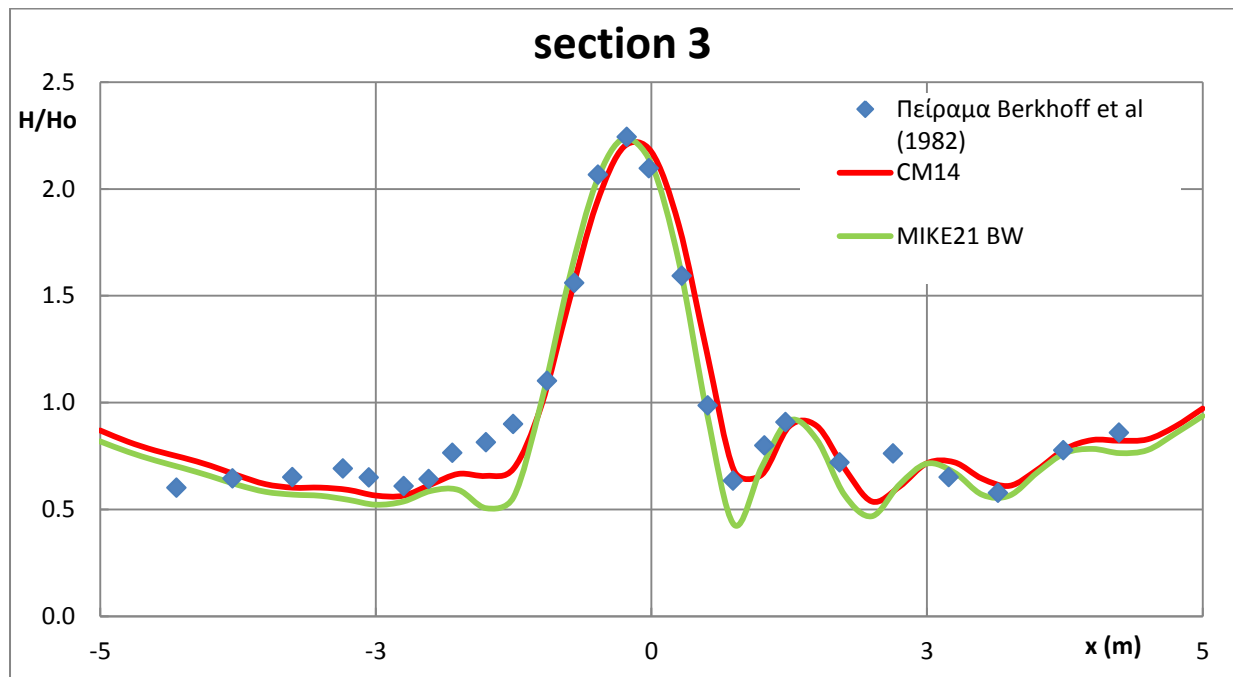
Παρουσιάζονται σε κοινούς άξονες τα αδιαστατοποιημένα ύψη κύματων (για τους οκτώ τομείς του πειράματος 1-8), όπως προκύπτουν από τις εργαστηριακές μετρήσεις των Berkhoff et al. (1982), την εφαρμογή του μοντέλου CM14 και του υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW.



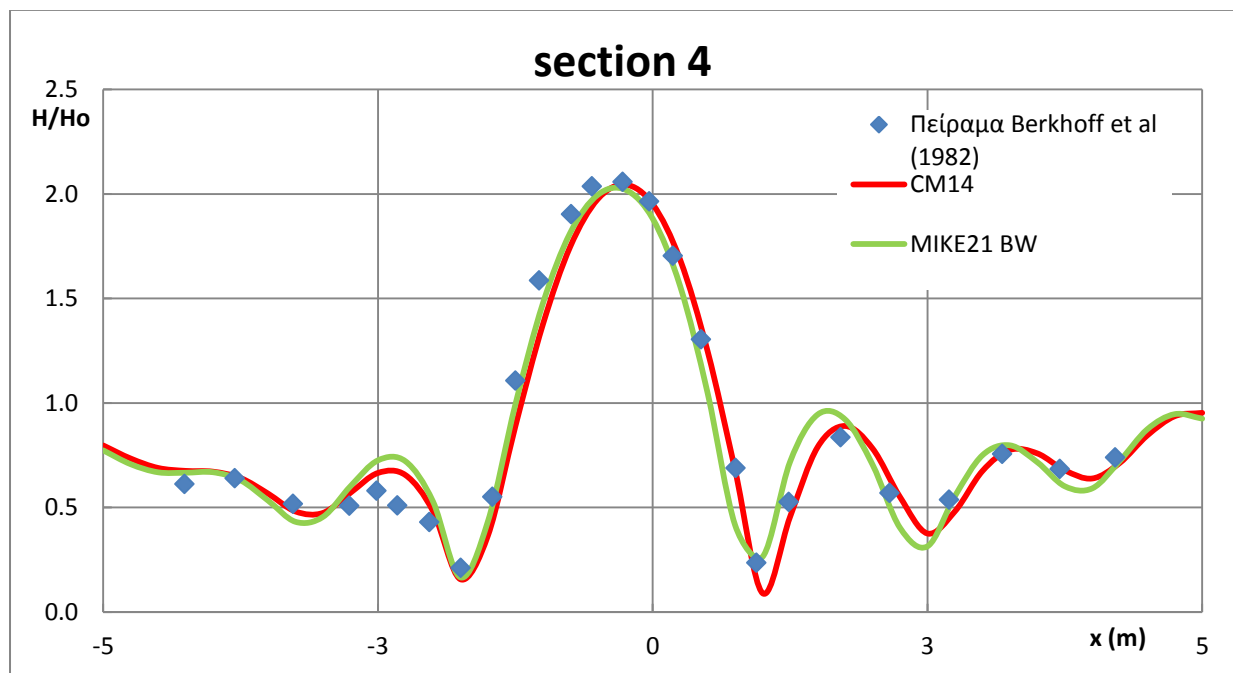
Σχ.6.16 Τομέας 1: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0464$ m και $T=1.0$ sec



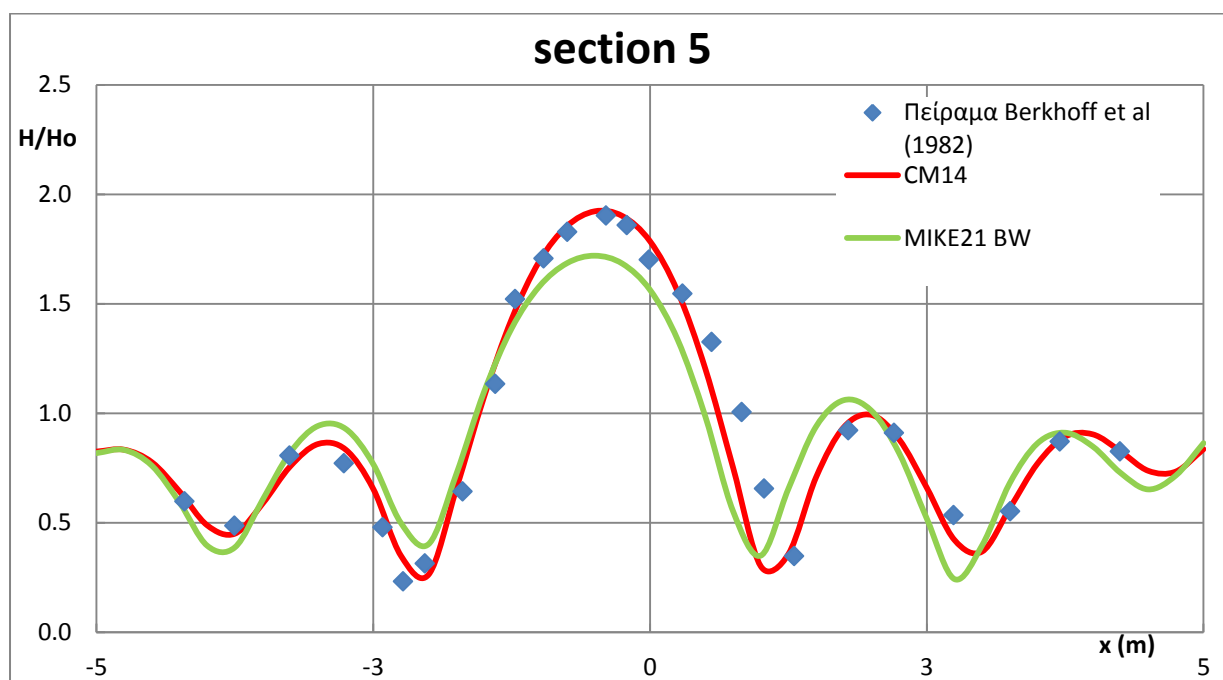
Σχ. 6.17 Τομέας 2: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0464$ m και $T=1.0$ sec



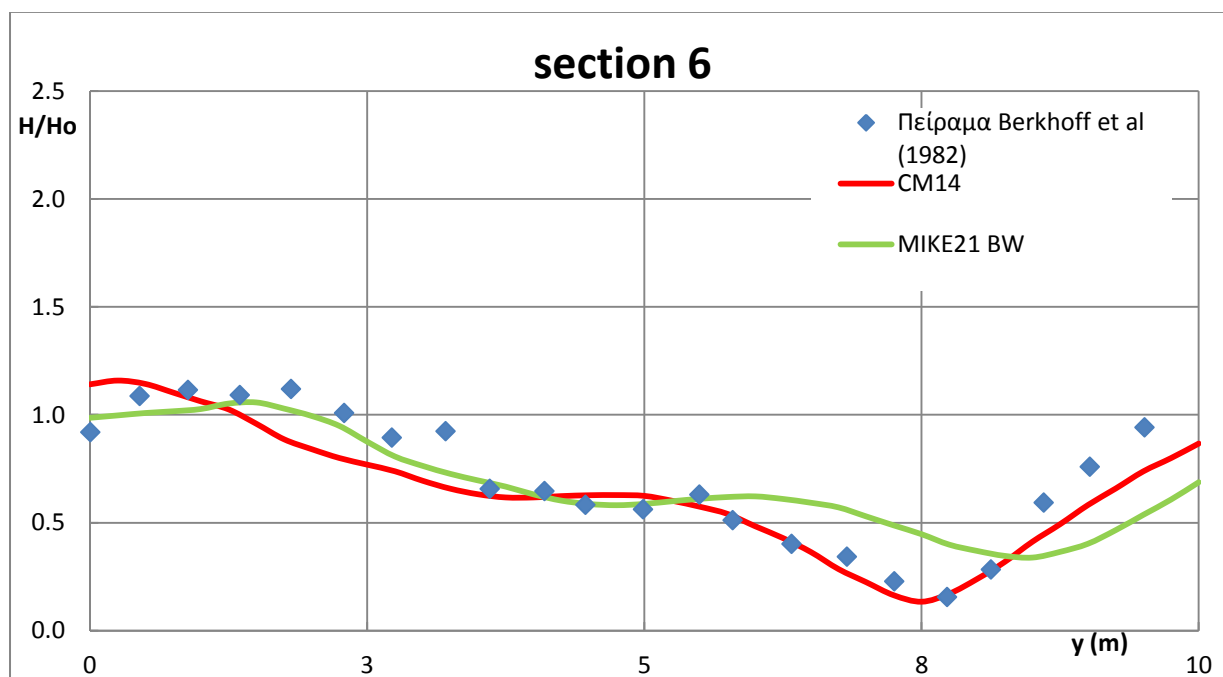
Σχ. 6.18 Τομέας 3: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0464$ m και $T=1.0$ sec



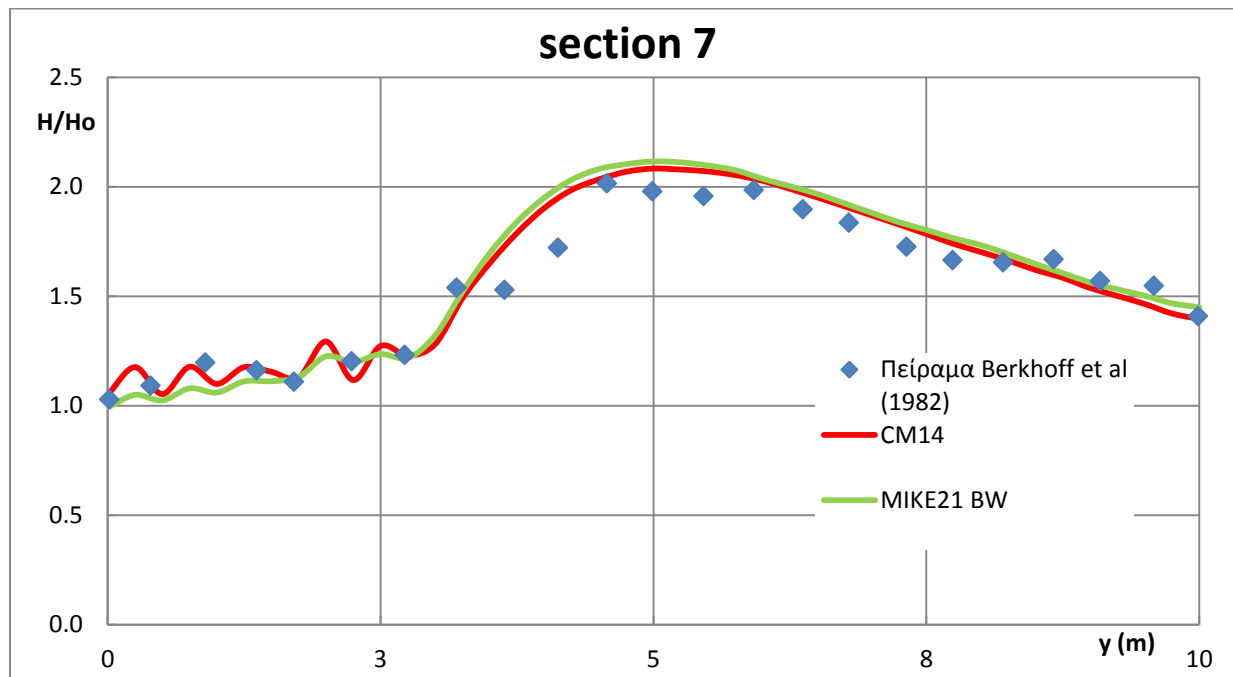
Σχ. 6.19 Τομέας 4: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0464$ m και $T=1.0$ sec



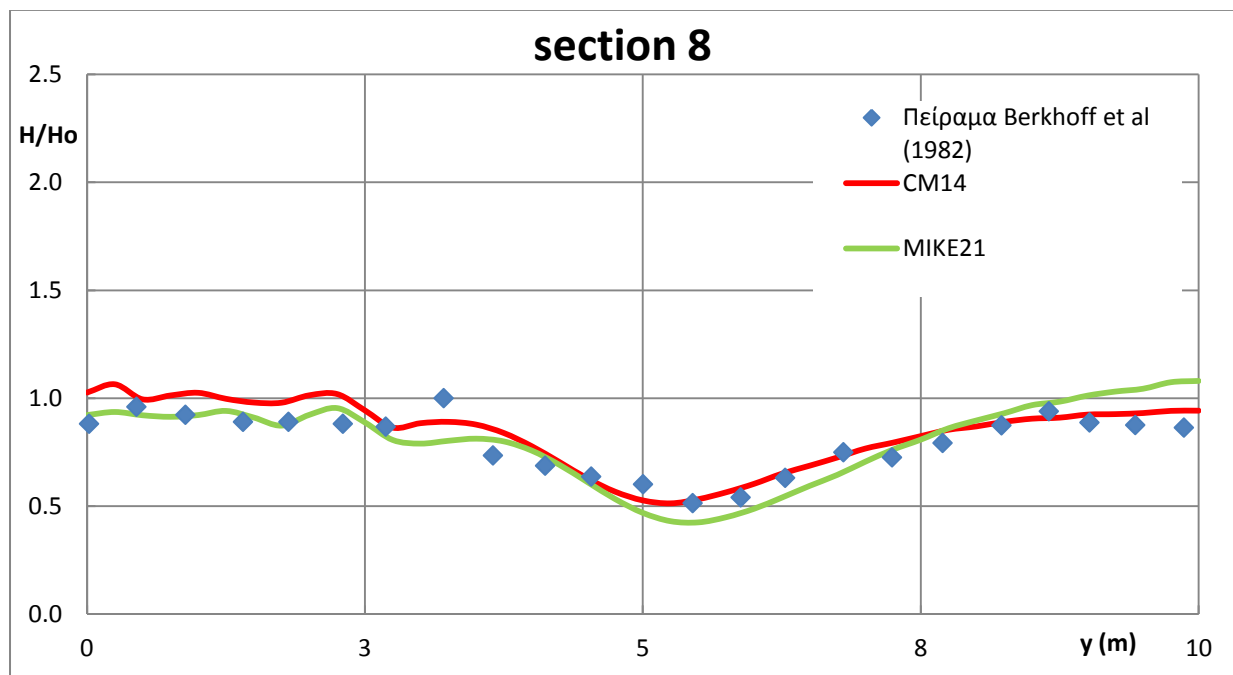
Σχ. 6.20 Τομέας 5: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0464$ m και $T=1.0$ sec



Σχ. 6.21 Τομέας 6: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0464$ m και $T=1.0$ sec



Σχ. 6.22 Τομέας 7: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0464$ m και $T=1.0$ sec



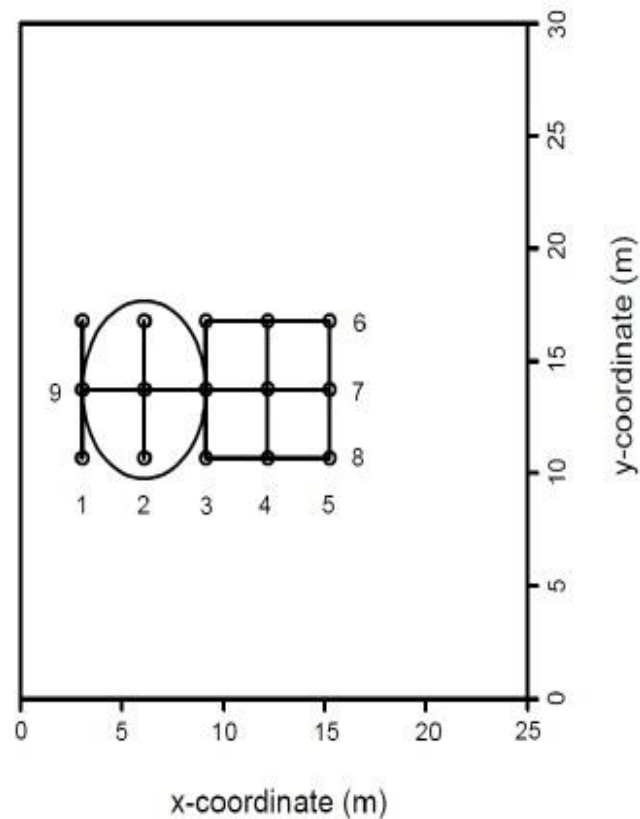
Σχ. 6.23 Τομέας 8: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0464$ m και $T=1.0$ sec

6.4. Πείραμα Vincent and Briggs (1989)

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η ακρίβεια προσομοίωσης του αριθμητικού μοντέλου τύπου Boussinesq (Chondros and Memos, 2014) και του MIKE21 BW, στη διάδοση δισδιάστατων κυματισμών. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τις μετρήσεις του πειράματος Vincent and Briggs (1989).

6.4.1. Περιγραφή πειραματικής διάταξης Vincent and Briggs (1989)

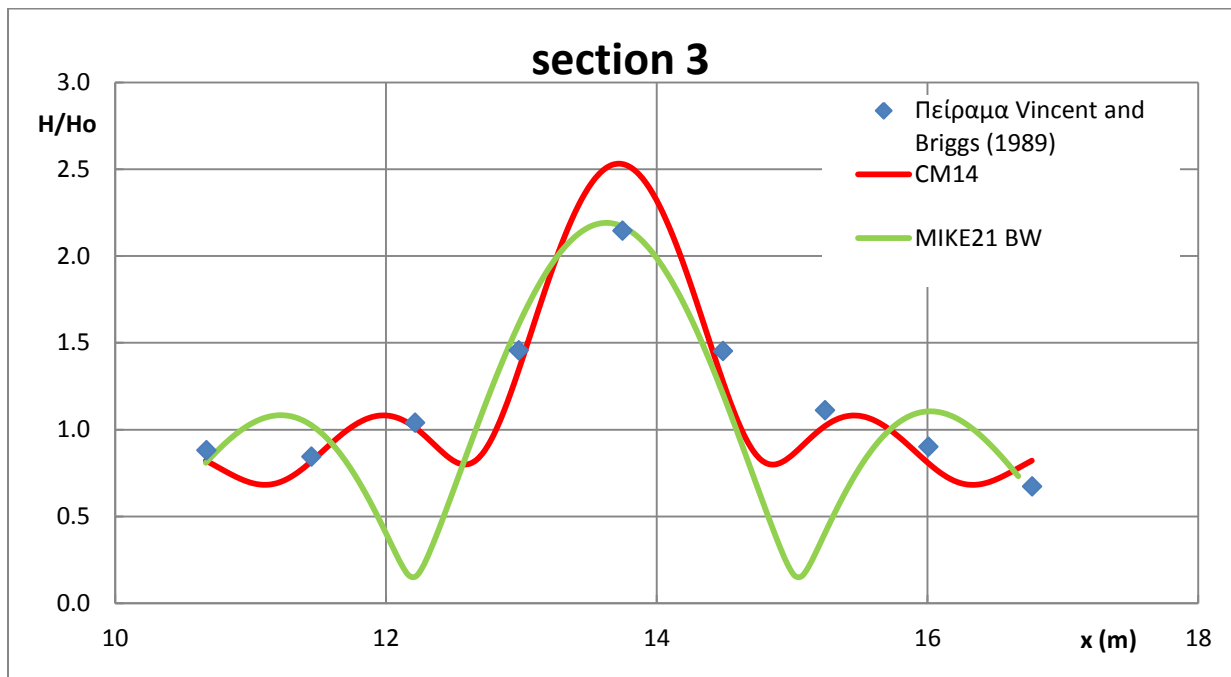
Οι Vincent and Briggs (1989) διενεργήσαν πειράματα διάδοσης μονοχρωματικών κυματισμών και τυχαίων κυματισμών που περνούν πάνω από ύφαλο ελληπτικό εμπόδιο, χρησιμοποιώντας μια κατευθυντήρια φασματική γεννήτρια κυματισμών, σε μια δεξαμενή του εργαστηρίου υδραυλικής του ερευνητικού κέντρου του Αμερικάνικου Στρατού. Οι όροι κυμάτων, που χρησιμοποιήθηκαν για την προσομοίωση σε αυτήν την μελέτη, είναι ένα ημιτονοειδές κύμα με αρχικό ύψος $H_0=0.0254$ m και περίοδο $T=1.3$ sec. Για τις αριθμητικές προσομοιώσεις αυτού του πειράματος, η βαθυμετρία αποτελούνταν από σταθερό πυθμένα με ένα ελληπτικό ύφαλο εμπόδιο, όπως φαίνεται στο **Σχ.6.24**. Το υπολογιστικό βήμα επιλέχθηκε $\Delta x=\Delta y=0.05$, ενώ το χρονικό βήμα $\Delta t=0.01$ sec. Το κέντρο του ύφαλου που χρησιμοποιήθηκε στο πείραμα βρίσκεται σε συντεταγμένες $x=6.1$ m και $y=13.72$ m. Η προσομοίωση πραγματοποιήθηκε για 30 sec και οι τελευταίες 5 περίοδοι χρησιμοποιήθηκαν για να εξαχθούν τα αριθμητικά αποτελέσματα των υψών κυμάτων, που παρουσιάζονται στα διαγράμματα που ακολουθούν, σε σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις σε τέσσερις τομείς.



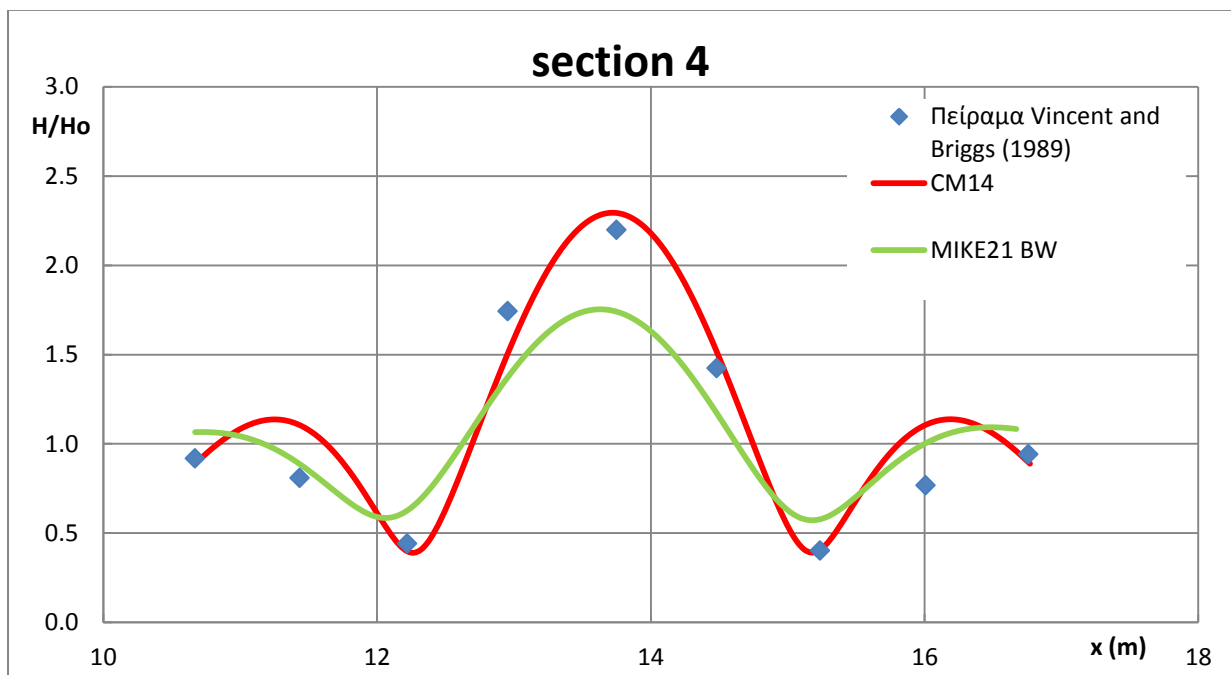
Σχ.6.24 Εργαστηριακή ρύθμιση του πειράματος του Vincent και Briggs (1989). Τα κύματα διαδίδουν στην κατεύθυνση του X.

6.4.2. Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα

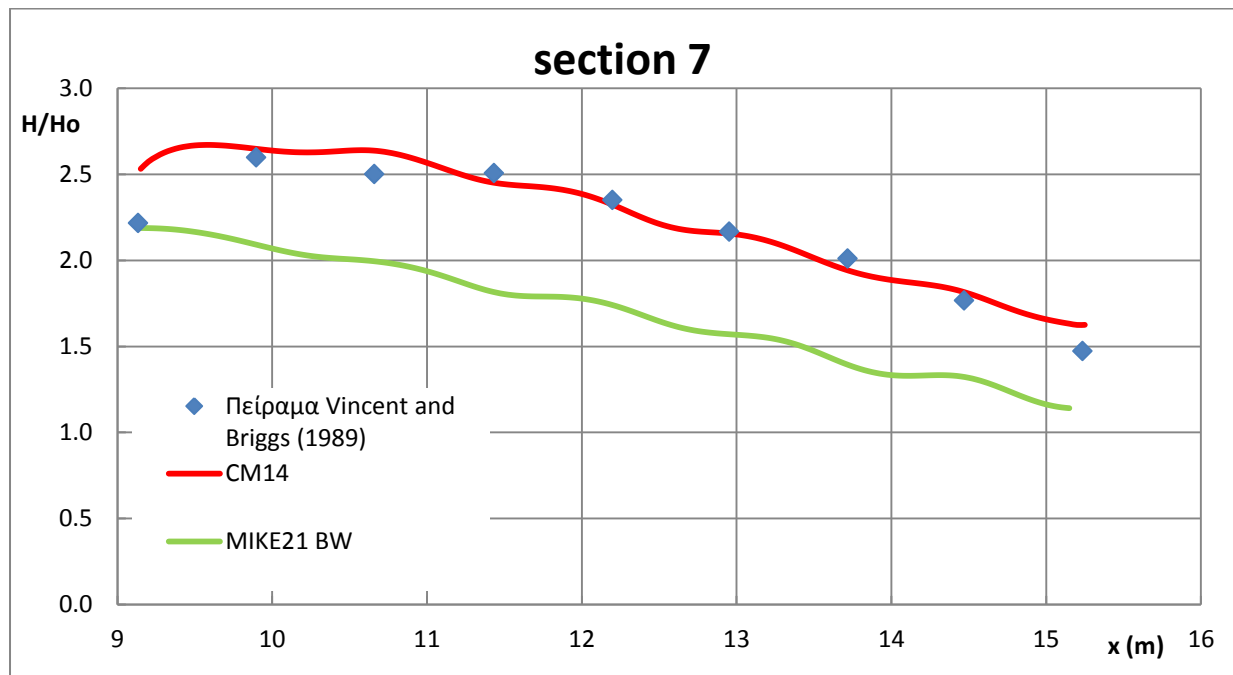
Παρουσιάζονται σε κοινούς άξονες τα αδιαστατοποιημένα ύψη κύματων (για τους τέσσερις τομείς του πειράματος 3,4,7 και 8) H/H_0 , όπως προκύπτουν από τις εργαστηριακές μετρήσεις των Vincent and Briggs (1989), την εφαρμογή του μοντέλου CM14 και του υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW.



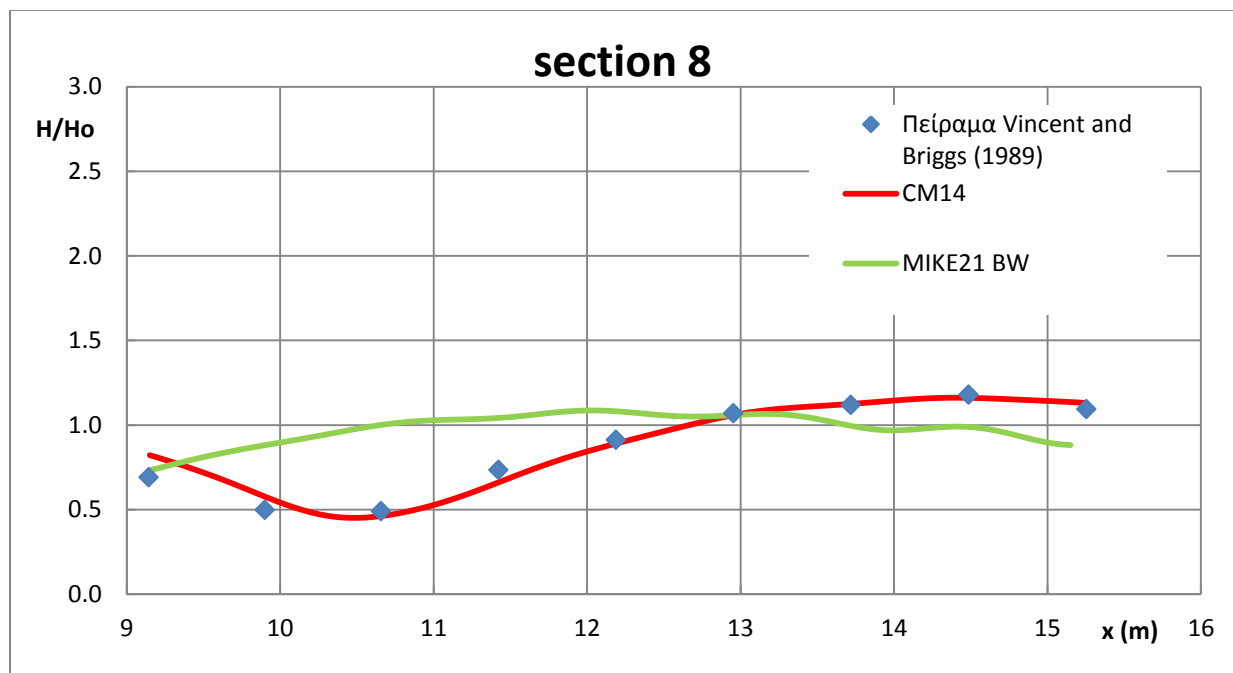
Σχ. 6.25 Τομέας 3: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυμαισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0254$ m και $T=1.3$ sec



Σχ. 6.26 Τομέας 4: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυμαισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0254$ m και $T=1.3$ sec



Σχ. 6.27 Τομέας 7: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυμαισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0254$ m και $T=1.3$ sec



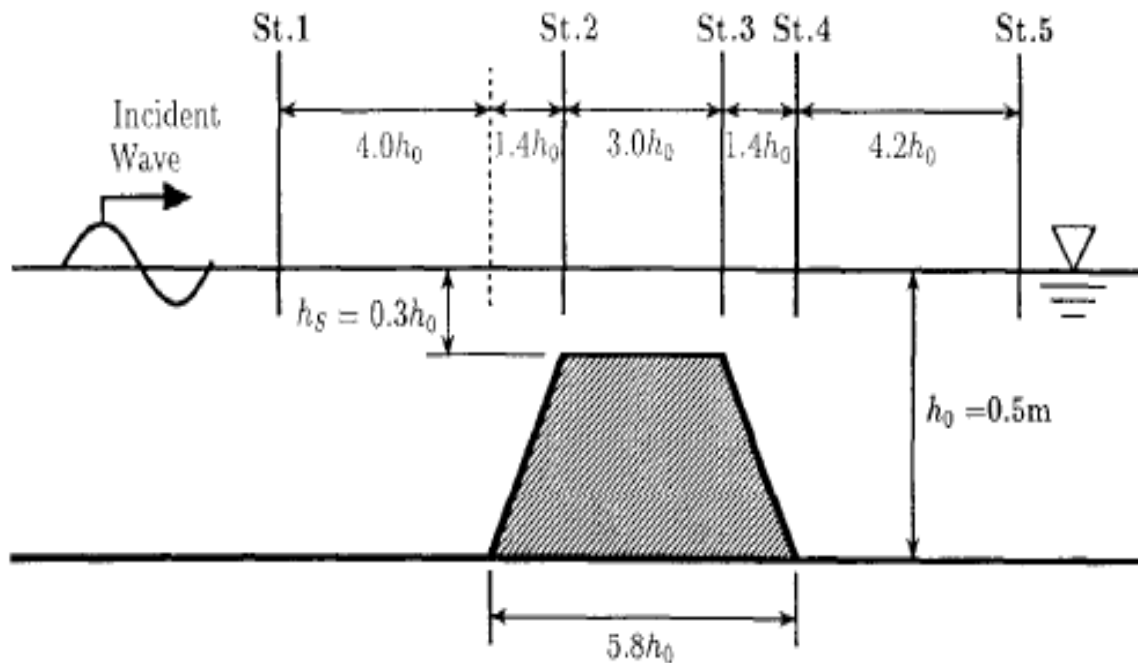
Σχ. 6.28 Τομέας 8: Σύγκριση αδιαστατοποιημένων υψών κύματος πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυμαισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.0254$ m και $T=1.3$ sec

6.5. Πείραμα Ohyama et al. (1995)

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η ακρίβεια προσομοίωσης του αριθμητικού μοντέλου τύπου Boussinesq (Chondros and Memos, 2014) και του MIKE21 BW, στη διάδοση μονοδιάστατων κυματισμών. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τις μετρήσεις του πειράματος Ohyama et al. (1995).

6.5.1. Περιγραφή πειραματικής διάταξης πειράματος

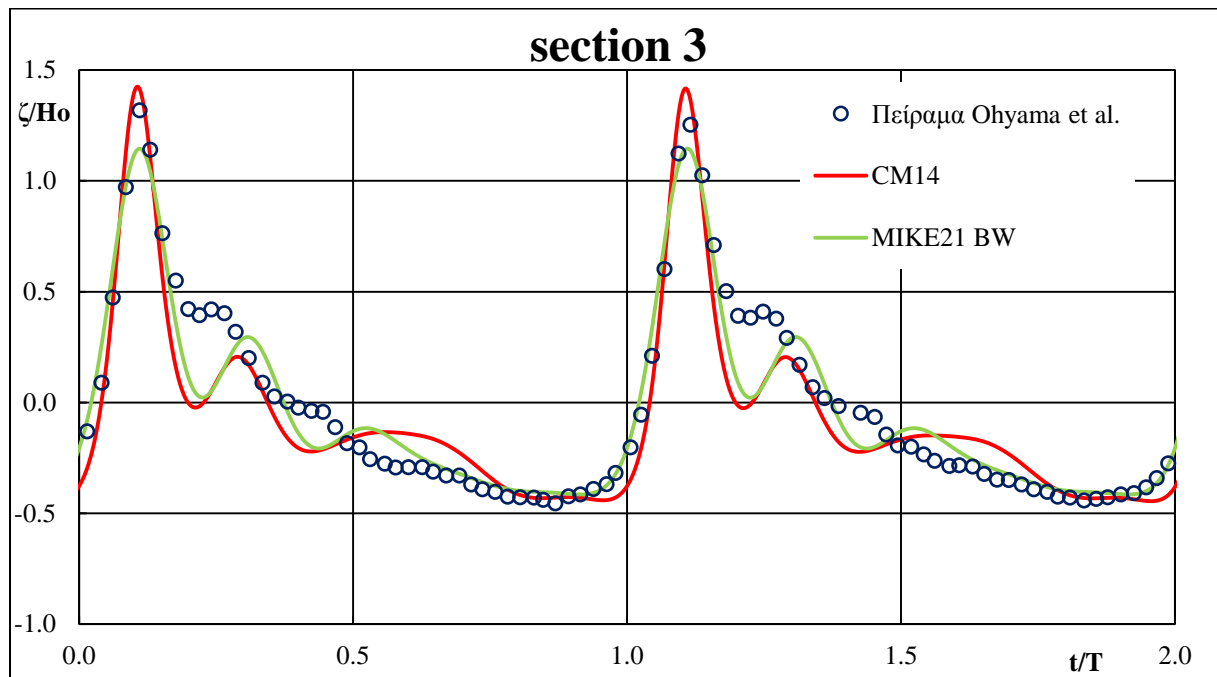
Τα πρότυπα πειράματα των Ohyama et al. (1995) πραγματοποιήθηκαν σε ένα κανάλι μήκους 65 m, πλάτους 1.0 m και ύψους 1.6 m. Η διαμόρφωση της πειραματικής διάταξης του πειράματος παρουσιάζεται στο **Σχ.6.29**. Συγκεκριμένα, αποτελείται από ένα ύφαλο τραπεζοειδές εμπόδιο, ύψους 0.35 m, με μεγάλη πλευρά $B=2.9$ m και μικρή $b=1.5$ m. Το βάθος του ύδατος στο πείραμα ήταν $h_0=0.5$ m στη βαθύτερη περιοχή και 0.15 m πάνω από το οριζόντιο μέρος του εμποδίου. Η απόσταση από την κυματογεννήτρια, καθορίστηκε από τη μία πλευρά του αγωγού ύδατος. Ένας απορροφητής κυμάτων, αποτελούμενος από χονδροειδές υλικό, τοποθετήθηκε στο τέλος του καναλιού. Όπως φαίνεται στο **Σχ. 6.29**, οι ανυψώσεις της ελεύθερης επιφάνειας ύδατος μετρήθηκαν σε πέντε διαφορετικούς τομείς, χρησιμοποιώντας τους μετρητές κυμάτων. Ο εισερχόμενος μονοχρωματικός κυματισμός με βάση τον οποίον έγιναν οι πειραματικές μετρήσεις είχε ύψος $H_0=0.05$ m και περίοδο $T=2.68$ sec.



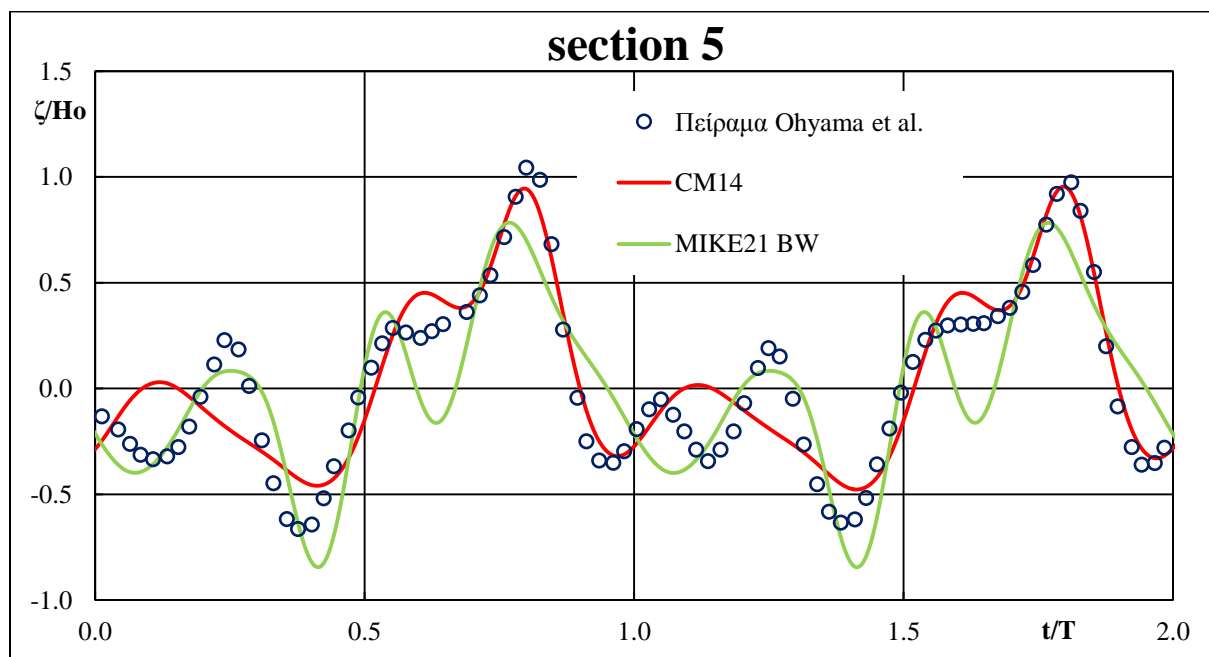
Σχ. 6.29 Πειραματική διάταξη πειράματος Ohyama et al. (1995)

6.5.2. Εφαρμογή MIKE21 BW και CM14 και συγκριτικά διαγράμματα

Παρουσιάζονται σε κοινούς άξονες η αδιάστατη ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας (για τις δύο τομείς του πειράματος 3 και 5) ζ/H , όπως προκύπτει από τις εργαστηριακές μετρήσεις των Ohyama et al. (1995), την εφαρμογή του μοντέλου CM14 και του υπολογιστικού προγράμματος MIKE21 BW.



Σχ. 6.30 Τομέας 3: Σύγκριση αδιάστατης ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.05$ m και $T=2.68$ sec



Σχ. 6.31 Τομέας 5: Σύγκριση αδιάστατης ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας πειράματος, μοντέλου CM14 και MIKE21 BW για εισερχόμενο μονοχρωματικό κυματισμό με χαρακτηριστικά $H_o=0.05$ m και $T=2.68$ sec

7. Σχολιασμός των διαγραμμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων

7.1. Σχολιασμός διαγραμμάτων στο πείραμα Beji and Batjjes

7.1.1. Σχολιασμός διαγραμμάτων για μη θραυόμενους κυματισμούς στο πείραμα των Beji and Batjjes

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα για τους μη θραυόμενους κυματισμούς, μπορεί να ειπωθεί ότι επιτυγχάνεται μία καλή συμφωνία στην προσομοίωση τόσο από το πρόγραμμα MIKE21 BW όσο και από το μοντέλο CM14 και οι αποκλίσεις που εμφανίζονται είναι σχετικά μικρές.

Πιο συγκεκριμένα, στον αισθητήρα 2 φαίνεται ότι το μοντέλο και το πρόγραμμα δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα, κάτι αναμενόμενο σε ανοδική κλίση πυθμένα, με μικρές αποκλίσεις και των δύο στην κύρια κορυφή του διαγράμματος.

Στη συνέχεια και όσο προχωράει ο κυματισμός, παρατηρούμε την αύξηση της μη γραμμικότητας του. Για το λόγο αυτό, στους αισθητήρες 3 και 4, που βρίσκονται στη στέψη, ο κυματισμός έχει αναπτύξει έντονα τα στοιχεία μη γραμματικότητας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μικρές αποκλίσεις των πειραματικών δεδομένων τόσο με το μοντέλο CM14, όσο και με το πρόγραμμα MIKE21 BW, τα οποία δεν μπορούν να περιγράψουν τη μετάδοση ενέργειας σε υψηλές συχνότητες, όπως φαίνεται στα διαγράμματα για $f(\text{Hz})$ 1.0-2.0. Σε γενικές γραμμές, όμως, η προσομοίωση κρίνεται αρκετά ικανοποιητική.

Στους αισθητήρες 5, 6 και 7 και κυρίως στους δύο τελευταίους, εμφανίζεται το φαινόμενο της απελευθέρωσης υψηλότερων αρμονικών. Αυτό συμβαίνει διότι οι αισθητήρες αυτοί βρίσκονται στη καθοδική κλίση του ύφαλου τραπεζίου και ως εκ τούτου ο κυματισμός έχοντας περάσει τη στέψη έχει αποκτήσει έντομα μη γραμμικά στοιχεία. Για αυτό το λόγο παρατηρούμε ότι ενώ η προσομοίωση είναι αρκετά καλή στη συχνότητα 0-0.5 Hz, μετέπειτα εμφανίζονται αποκλίσεις, οι οποίες είναι εντονότερες ανάμεσα στα πειραματικά δεδομένα και στο πρόγραμμα MIKE21 BW, το οποίο υποεκτιμά σε κάποιες συχνότητες το φάσμα και αδυνατεί να περιγράψει ακριβώς τη δημιουργία υψηλών αρμονικών.

7.1.2. Σχολιασμός διαγραμμάτων για θραυόμενους κυματισμούς στο πείραμα των Beji and Batjjes

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα για τους θραυόμενους κυματισμούς στο πείραμα των Beji and Batjjes παρατηρείται ότι επιτυγχάνεται μία καλή συμφωνία στην προσομοίωση των πειραματικών δεδομένων από το μοντέλο CM14, αλλά εμφανίζονται αξιοσημείωτες αποκλίσεις στο αριθμητικό πρόγραμμα MIKE21 BW, κυρίως στους αισθητήρες που βρίσκονται που βρίσκονται σε καθοδική κλίση πυθμένα, μετά το ύφαλο εμπόδιο.

Αναλυτικότερα, στον αισθητήρα 2, στην ανοδική κλίση πυθμένα, φαίνεται ότι τα καλύτερα αποτελέσματα τα δίνει το πρόγραμμα MIKE21 BW, καθώς το μοντέλο CM14 υπερεκτιμά τις κορυφές του διαγράμματος για κάποιες συχνότητες (για $f = 0.5-1.0$ Hz).

Στον αισθητήρα 3 και 4, οι οποίοι βρίσκονται πάνω στη στέψη και έχουμε υψηλά στοιχεία μη γραμμικότητας, επιτυγχάνεται αρκετά ικανοποιητική σύγκλιση των πειραματικών δεδομένων με τα αποτελέσματα του μοντέλου Chondros and Memos, 2014. Αντίθετα, το πρόγραμμα MIKE21 BW υπερεκτιμά το φάσμα και εμφανίζει απόκλιση με το πείραμα, ιδίως στις συχνότητες $f = 0.5$ έως 1.5 Hz.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και στους αισθητήρες 5 και 6, στην καθοδική κλίση του πυθμένα με το μοντέλο CM14 να συμφωνεί σε μεγάλο βαθμό με τα πειραματικά δεδομένα στους σταθμούς αυτούς και το υπολογιστικό πρόγραμμα να εμφανίζει έντονες διαφορές και

αποκλίσεις. Ο κυματισμός έχοντας περάσει τη στέψη έχει αποκτήσει έντομα μη γραμμικά στοιχεία και το MIKE21 BW υπερεκτιμά το φάσμα που δημιουργείται και δεν μπορεί να το προσομοιώσει επαρκώς για τις συχνότητες $f= 0.5$ έως 1.5 Hz, σε αντίθεση με το μοντέλο που παρουσιάζει ικανοποιητική σύγκλιση με τα πειραματικά δεδομένα.

Τέλος, στον αισθητήρα 7, παρατηρούνται αποκλίσεις και των δύο σε σχέση με το πείραμα, με τις αποκλίσεις του προγράμματος MIKE21 BW να είναι πιο εμφανείς στις αρχικές συχνότητες $f= 0.5$ έως 1.0 Hz και του μοντέλου CM14 στις υψηλότερες συχνότητες και κυρίως για $f=1.0$ Hz, όπου υπερεκτιμά τη κορυφή του διαγράμματος.

7.2. Σχολιασμός διαγραμμάτων στο πείραμα Berkhoff et al.

Στον τομέα 1, όπως αποτυπώνεται στα διαγράμματα, παρατηρούμε ότι τα πειραματικά δεδομένα είναι αρκετά κοντά με τα αποτελέσματα τόσο του μοντέλου όσο και του προγράμματος. Εμφανίζεται επομένως μια ταύτιση, η οποία είναι εμφανέστερη ανάμεσα στο πείραμα των Berkhoff et al. και του μοντέλου Chondros and Memos 2014.

Το ίδιο συμβαίνει και στον τομέα 2, με ικανοποιητικά αποτελέσματα και από το μοντέλο και από το πρόγραμμα.

Στους τομείς 3, 4 και 5 την καλύτερη ταύτιση με τα πειραματικά δεδομένα την παρατηρούμε για το μοντέλο CM14. Το πρόγραμμα MIKE21 BW παρουσιάζει και αυτό ικανοποιητικά αποτελέσματα, με τη διαφορά ότι υποεκτιμά τα αδιαστατοποιημένα ύψη και δεν παρουσιάζει απόλυτη ταύτιση με το πείραμα κυρίως στο χωρικό διάστημα -3 με 5 x (m).

Στη συνέχεια, στον τομέα 6 παρατηρούμε στο σχετικό διάγραμμα πως το πρόγραμμα MIKE21 BW αδυνατεί να προσομοιώσει τη χωρική μεταβολή του ύψους κυματισμού επαρκώς και εμφανίζει μεγάλες αποκλίσεις, οι οποίες είναι εντονότερες στο διάστημα $x= (5, 10)$. Στο συγκεκριμένο διάστημα το μοντέλο Chondros and Memos 2014, παρουσιάζει ταύτιση με τα πειραματικά δεδομένα.

Τέλος, στους τομείς 7 και 8, παρουσιάζεται ικανοποιητική ταύτιση των πειραματικών δεδομένων και με το πρόγραμμα και με το μοντέλο, με το CM14 να εμφανίζει ελαφρώς

ορθότερα αποτελέσματα, καθώς επιτυγχάνει ακριβέστερη σύγκλιση. Και τα δύο πάντως, αναπαριστούν σε πολύ καλό βαθμό τη συγκέντρωση των κυματισμών και των υψών τους και η σύγκριση είναι αρκετά καλή λαμβάνοντας υπόψη τη διάθλαση, τη ρήχωση και τη περίθλαση που λαμβάνει μέρος στο πείραμα αυτό.

7.3. Σχολιασμός διαγραμμάτων στο πείραμα Vincent and Briggs

Όπως φαίνεται από το διαγράμμα στον τομέα 3, παρουσιάζεται απόκλιση των πειραματικών δεδομένων σε σχέση με το πρόγραμμα. Συγκεκριμένα, το υπολογιστικό πρόγραμμα MIKE21 BW αποκλίνει στις κοιλίες, υποεκτιμώντας κατά πολύ τα αδιαστατοποιημένα ύψη κύματος. Αντίθετα, το μοντέλο Chondros and Memos 2014 συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα των Vincent and Briggs σε ικανοποιητικό βαθμό, παρουσιάζοντας απόλυτη ταύτιση στις κοιλίες και στις κορυφές, με μόνη διαφοροποίηση για $x=14$ m, όπου υπερεκτιμά κατά λίγο την κορυφή αυτή.

Στη συνέχεια, στον τομέα 4, μπορεί να ειπωθεί ότι επιτυγχάνεται μία καλή συμφωνία στην προσομοίωση τόσο από το μοντέλο CM14 όσο και από το πρόγραμμα MIKE21 BW. Παρουσιάζεται βέβαια μία απόκλιση του προγράμματος στην κορυφή για $x=14$ m, όπου όπως και προηγουμένως στον αισθητήρα 3 το πρόγραμμα υποεκτιμά την κορυφή.

Τέλος, στους σταθμούς 7 και 8 γίνεται εμφανές ότι το πρόγραμμα MIKE21 BW υστερεί σε σημαντικό βαθμό σε σχέση με το CM14. Παρατηρείται μια αρκετά ικανοποιητική ταύτιση των πειραματικών δεδομένων με τα αποτελέσματα του μοντέλου Chondros and Memos 2014, ενώ το υπολογιστικό πρόγραμμα MIKE21 BW αποκλίνει σε σημαντικό βαθμό και τα αποτελέσματά του δεν κρίνονται ικανοποιητικά, καθώς υποεκτιμά κατά πολύ τα αδιαστατοποιημένα ύψη κύματος στον αισθητήρα 7, ενώ στον αισθητήρα 8 εμφανίζει λανθασμένη αποτύπωση των υψών, όπως φαίνεται με ακρίβεια στο σχετικό διάγραμμα.

7.4. Σχολιασμός διαγραμμάτων στο πείραμα Ohyama et al.

Γίνεται εμφανές από το διάγραμμα για το σταθμό 3 που βρίσκεται στη στέγη του ύφαλου τραπέζιου, ότι επιτυγχάνεται σύγκλιση των πειραματικών δεδομένων τόσο με το πρόγραμμα MIKE21 BW όσο και με το μοντέλο τύπου Boussinesq Chondros and Memos 2014. Τα αποτελέσματα και των δύο συμπίπτουν με τα πειραματικά δεδομένα και η προσομοίωση κρίνεται ικανοποιητική, με μια μικρή εξαίρεση στις κοιλίες που παρουσιάζεται μικρή υποεκτίμηση και των δύο.

Στο σταθμό 5, ο οποίος βρίσκεται κατάντη του εμποδίου, στο πέρας του αγωγού, παρατηρούνται αποκλίσεις του μοντέλου και του προγράμματος σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα των Ohyama et al. Οι αποκλίσεις αυτές είναι πιο εμφανείς στις κορυφές και στις κοιλίες, όπου για t/T 0.5 έως 1.0 και 1.5 έως 2.0 το μοντέλο CM14 αποτυπώνει καλύτερα την αδιάστατη ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας ζ , ενώ το πρόγραμμα MIKE21 BW τις υποεκτιμά κατά πολύ. Αντίθετα, στο διάστημα t/T 0.0 έως 0.5 και 1.0 έως 1.5, το πρόγραμμα προσομοιώνει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα και εμφανίζει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε σχέση με το μοντέλο CM14, οι τιμές του οποίου αποκλίνουν εντονότερα.

7.5. Συμπεράσματα για το υπολογιστικό πρόγραμμα MIKE21 BW

Βάσει των αποτελεσμάτων του προγράμματος MIKE21 BW και μέσα από τη σύγκρισή τους με τα αποτελέσματα του μοντέλου τύπου Boussinesq CM14 και των πειραματικών μετρήσεων, μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Από τη σύγκριση με το πείραμα των Beji and Batjjes (1994) παρατηρείται ότι το πρόγραμμα MIKE21 BW είναι σε θέση να περιγράψει σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό την κυματική διάδοση μακρών, μη θραυόμενων σύνθετων κυματισμών σε ύφαλο τραπέζιο, με μικρές αποκλίσεις στο κατάντη τμήμα του λόγω εμφάνισης των υψηλότερων αρμονικών. Αυτό συμβαίνει επειδή το MIKE21 BW δεν περιέχει όρους υψηλής μη γραμμικότητας.

- Επίσης, από τις αναλύσεις για θραυόμενους μακρούς μονοχρωματικούς κυματισμούς, γίνεται εμφανής η αδυναμία πλήρους και ορθής προσομοίωσης του φαινομένου της θραύσης από το πρόγραμμα MIKE21 BW, κάτι που οφείλεται κυρίως στο διαφορετικό κριτήριο θραύσης του προγράμματος. Το MIKE 21 BW, δηλαδή παρουσιάζει πρόβλημα στην απομείωση της κυματικής ενέργειας, η οποία είναι κατά πολλή μικρότερη της επιθυμητής.
- Αξίζει να σημειωθεί πάντως, ότι το πρόγραμμα MIKE 21 BW είναι ένα αρκετά ισχυρό εμπορικό υπολογιστικό εργαλείο, το οποίο όμως εκτελεί τις αναλύσεις σε περισσότερο χρόνο, της τάξης μερικών λεπτών, από το μαθηματικό ομοίωμα τύπου Boussinesq Chondros and Memos, 2014.

7.6. Συμπεράσματα για το μοντέλο Chondros and Memos, 2014

Βάσει των αποτελεσμάτων του μοντέλου τύπου Boussinesq CM14 και μέσα από τη σύγκρισή τους με τα αποτελέσματα του προγράμματος MIKE21 BW και των πειραματικών μετρήσεων, μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Από τη σύγκριση με το πείραμα των Beji and Batjjes (1994) παρατηρείται ότι το μοντέλο CM14 είναι σε θέση να περιγράψει σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό την κυματική διάδοση μακρών, μη θραυόμενων σύνθετων κυματισμών σε ύφαλο τραπέζιο με μεγαλύτερη ακρίβεια από το πρόγραμμα MIKE21 BW, το οποίο εμφανίζει μικρές αποκλίσεις, γιατί το μοντέλο CM14 περιέχει όρους υψηλής μη γραμμικότητας και προσομοιώνει καλύτερα την απελευθέρωση υψηλών αρμονικών.
- Επίσης, από τις αναλύσεις για θραυόμενους μακρούς μονοχρωματικούς κυματισμούς, γίνεται εμφανής η ικανότητα του μοντέλου CM14 να προσομοιάσει το φαινόμενο της θραύσης ορθότερα από το πρόγραμμα MIKE21 BW, λόγω του διαφορετικού κριτηρίου θραύσης που περιέχει.

7.7. Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα του μαθηματικού μοντέλου Chondros and Memos, 2014

Τα τελευταία χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί πολλές ερευνητικές εργασίες με σκοπό τη βελτίωση της εφαρμοσιμότητας των ομοιωμάτων τύπου Boussinesq. Με βάση λοιπόν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη σύγκριση των πειραματικών δεδομένων με τα αποτελέσματα του μοντέλου Chondros and Memos 2014, κρίνεται αναγκαία μια διαδικασία περαιτέρω έρευνας και εξέλιξης του μοντέλου αυτού, κάτι το οποίο είναι εμφανές στη σύγκριση με το πείραμα Ohgama et al. στον τομέα 5, όπου το μοντέλο δεν μπορεί να προσομοιώσει επαρκώς τη διάδοση μακρών κυματισμών που διαδίδονται σε ύφαλο εμπόδιο με απότομη κλίση. Επομένως, ένας μελλοντικός στόχος είναι το μοντέλο CM14 να είναι σε θέση να προσομοιώνει επαρκώς τη διάδοση μακρών κυματισμών με ταυτόχρονη απότομη κλίση του ύφαλου εμποδίου. Επιπρόσθετα, δόκιμη θα ήταν σε μια άλλη εργασία η σύγκριση του μοντέλου με ένα δισδιάστατο πείραμα με τυχαίους κυματισμούς.

8. Βιβλιογραφία

1. Abbott. M.B., Larsen, J., Madsen, P.A., Tao, J., 1983. Simulation of wave breaking and rump. In: Seminar on Hydrodynamics of waves in coastal areas, vol.7. Moscow 146-149
2. Agnon, Y., Madsen, P. A. & Schäffer, H. A., 1999. A new approach to high order Boussinesq models. J. Fluid Mech. Journal of Fluid Mechanics 399
3. Avgeris I., 2001. Διάδοση κυματισμών στην παράκτια ζώνη- Θεωρητική και πειραματική διερεύνηση. Μεταπτυχιακή εργασία ΔΠΜΣ: «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.
4. Battjes, J. 1974. Surf Similarity, Proceedings of the 14th Coastal Engineering Conference, American Society of Civil Engineers, pp 466-480
5. Beji S, Battjes JA., 1993. Experimental investigation of wave propagation over a bar. Coastal Engineering. 19, 151-162
6. Beji S, Battjes JA., 1994. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. Coastal Engineering. 23, 1-16
7. Beji, S., Nadaoka, K., 1996. A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth. Ocean Engineering. 23, 691-704
8. Berkhoff J.C.W., Booy N, Radder A.C., 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. Coastal Engineering, 6, 255-279

9. Bingham H. B. and Y. Agnon, 2005. A Fourier–Boussinesq method for nonlinear water waves. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 24 pp. 255-274
10. Boussinesq, J., 1981. Theorie de L'intumescence Liquide Appelee Onde Solitaire ou de Translation se Propageant dans in Canal Rectangulaire, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, pp 755-759
11. CEM, Coastal Engineering Manual, 2006., <http://chl.erdc.usace.army.mil/cem>.
12. Chondros, M., 2008. Διάδοση και θραύση κυματισμών στην παράκτια ζώνη. Διπλωματική εργασία Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π. Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.
13. Chondros, M., 2010. Διάδοση και θραύση τυχαίων κυματισμών στην παράκτια ζώνη. Μεταπτυχιακή εργασία ΔΠΜΣ: «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου..
14. Chondros, M. Memos, C., 2012. A 2DH Nonlinear Boussinesq Wave Model of Improved Dispersion, Shoaling and Wave Generation Characteristics.
15. Chen, Q., Madsen, P.A., Soresen, O.R., Basco, D.R., 1996. Boussinesq equations with improved Doppler shift and dispersion for wave/current interaction. In: *Book of Abstracts* , 25th Coastal Engineering Conference, Orlando, 168-169
16. Copeland, G. J. M., 1985 A practical alternative to the mild-slope wave equation, *Coastal Engineering* 9, pp. 125-149
17. Dean. R. G. 1965. Stream Function Representation of Nonlinear Ocean Waves, *Journal of Geophysical Research*, vol 70, pp 4561-4572
18. Dean. R. G. 1968. Relative Validity of Water Theories, *Proc. Civil Engineering in Ocean*, ASCE, vol 1, pp 1-30

19. Douglass, S. L., 1990. Influence of Wind on Breaking Waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, Vol 116, pp. 651-663
20. Fenton, J. D. 1972, A Ninth-Order Solution for Solitary Waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol 53, pp. 257-271
21. Fonias, E., 2012. Μελέτη θραύσης κυματισμών με μοντέλο Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις. Μεταπτυχιακή εργασία ΔΠΜΣ: «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.
22. Huang, M-C., 1990. Kinematics prediction by Stokes and Fourier Wave Theories. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.* 116, 137-148
23. Karambas, Th. V. and Koutitas C., 1992. A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations. *Coastal Eng.* 18, 1-19
24. Karambas, Th. V., 1999. A unified model for periodic non linear dispersive wave in intermediate and shallow water. *Journal of Coastal Research*, vol 15, no1, pp. 128-139
25. Karambas, Th. V. and Tozer, N.P., 2001. Breaking waves in the surf and swash zone. *J. of Coastal Research*
26. Karambas, Th. V. and Koutitas C., 2002. Surf and swash zone morphology evolution induced by nonlinear waves, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* 128, no 3, 102-113
27. Karambas, Th.V., Memos, C.D., 2008. A post-Boussinesq model for nonlinear fully dispersive water waves. ICCE

28. Karambas, Th.V., Memos, C.D., 2009. Boussinesq Model for Weakly Non-Linear fully Dispersive Water Waves, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*
29. Kennedy et al. 1999. Part 1. Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and run-up I: 1D. *J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, January/February 2000.
30. Koutsourelakis, I.G., 2009. Προσομοίωση θραύσης μονοχρωματικών κυματισμών και τριβής πυθμένα σε ένα εξελιγμένο ομοίωμα Boussinesq. Μεταπτυχιακή εργασία ΔΠΜΣ: «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων». Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.
31. Koutitas. C., 1988. *Mathematical Models in Coastal Engineering*, Pentech Press.
32. Koutitas. C., 1994. Εισαγωγή στην παράκτια τεχνική και τα λιμενικά έργα, Θεσσαλονίκη.
33. Larsen J., Dancy H., 1983. Open boundaries in short wave simulations- a new approach, *Coastal Engineering* 7, 285-297
34. Le Méhauté, B., 1976. *Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*
35. Madsen, P.A., 1981. A model for a turbulent bore. Series paper No. 28. Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark, Lyngby.
36. Madsen, P.A., Bingham, H.B., Schäffer, H.A.. 2003. Boussinesq type formulations for fully nonlinear and extremely dispersive water waves: derivation and analysis. *Proc. R. Soc. Lond., A.* 459, 1075-1104.

37. Madsen, P.A. and Schäffer H. A., 1998. Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 356, 3123-3184
38. Madsen, P.A., Bingham, H.B., Hua Lui, 2002. A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water *J. Fluid Mech.* 2002, vol. 462, pp. 1-30
39. Makris, C., Wave transmission behind submerged breakwater. National Technical University of Athens, library.
40. Memos, C.D., 2005 Notes on sea-hydrodynamic. National Technical University of Athens, library.
41. Memos, C.D., Th. V. Karambas, I. Avgeris, 2005. Irregular wave transformation in the nearshore zone: experimental investigations and comparison with a higher order Boussinesq model. *Ocean Engineering* 32, 1465-1485
42. Nadaoka, K., Beji, S., Nakagawa, Y., 1994. A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions. In: *Proceedings of the 24th Coastal Engineering Conference*, Kobe, 427-441
43. Nwogu O., 1996. Numerical prediction of breaking waves and currents with a Boussinesq model. In: *Book of Abstracts, 25th Coastal Engineering Conference*, Orlando, 216-217
44. Schäffer, H. A., Madsen, P. A., and Deigaard, R. A., 1993. A Boussinesq model for waves breaking in shallow water. *Coastal Engineering* 20, 185-202
45. Schäffer, H. A., Deigaard, R., Madsen, P. A., 1992. A two dimensional surf zone model based on the Boussinesq equations. In: *Proceedings of the 23th Coastal Engineering Conference on Coastal Engineering*, asce, 1057-1071

46. Schäffer, H. A., 2003. Accurate determination of internal kinematics from numerical wave model results. *Coastal Engineering* 50, pp.199-211
47. Schäffer, H. A., 2004. Another step towards a post-Boussinesq wave model. 29th Int. Conf. on Coastal Engineering, ASCE.
48. Stokes, G. G., 1847. On the Theory of Oscillatory Waves. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, vol 8, pp. 441-455
49. Svendsen, I.A., Madsen, P.A., 1984. A turbelant bore on a beach. *J. Fluid Mech.* 148, 73-96
50. Synolakis, C. E., 1987. The runup of solitary waves. *J. of Fluid Mechanics*, vol 185: 523-545
51. Wei, G., 1997. Simulation of water waves by Boussinesq models. Dissertation, University of Delaware, 202pp.
52. Wei, G., Kirby, J.T., 1994. A high order time-dependent numerical model for the extended Boussinesq equations. In: *Proceedings oh IAHR Symposium: Waves-Physical and Numerical Modelling*, Vancouver, 544-553
53. Wiegel, R. L., 1964. *Oceanographical Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
54. Zelt, J. A., 1991. The run-up on nonbreaking and breaking solitary waves. *Coastal Engineering*, 15, 205-246
55. Zou Z.L., 1999. Higher order Boussinesq equations. *Ocean Engineering*, 26, pp. 767-792.

