Κατασκευή Μέτρων Πιθανότητας Σε Απειροδιάστατους Χώρους

Δραγάζη Ευαγγελία

Επιβλέπων: Σπηλιώτης Ιωάννης, Αναπλ. Καθηγητής

Αθήνα, 2011

Στη μνήμη του Μαντά Γ.

Εισαγωγή

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας επικεντρώνεται, όπως επισημαίνει και ο τίτλος, στην κατασκευή Radon μέτρων πιθανότητας σε χώρους απείρων διαστάσεων.
Γνωρίζουμε ήδη, από κλασσικά πλέον συγγράμματα στο χώρο της Θεωρίας Μέτρου, τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο σε έναν αφηρημένο χώρο ξεκινώντας από μια συνολοσυνάρτηση η οποία πληροί κάποιες προϋποθέσεις. Το ζήτημα έγκειται στην κατασκευή μέτρων Radon ώστε να ληφθεί υπόψιν και η τοπολογική δομή που διαθέτει ο εκάστοτε χώρος.
Δεδομένου τώρα ότι οι περισσότεροι αλλά και σημαντικότεροι τοπολογικοί χώροι είναι απείρων διαστάσεων, δημιουργήθηκε η ανάγκη για τη μοντελοποίηση μιας τέτοιας θεωρίας. Η μετάβαση από χώρους πεπερασμένης διάστασης ή τοπικά συμπαγείς, σε απειροδιάστατους Banach ή Hilbert δεν γίνεται κατά προφανή τρόπο.
Αναζητούμε λοιπόν όχι μόνο Θεωρήματα κατασκευής μέτρων αλλά και έννοιες μετρησιμότητας στους χώρους αυτούς που θα συνδέσουν τις τοπολογικές τους ιδιότητες με τη "μέτρηση" των συνόλων τους.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται οι βασικοί ορισμοί και ιδιότητες των μέτρων σε αφηρημένους χώρους. Ιδιαίτερης σημασίας είναι το Θεώρημα Καραθεοδωρή το οποίο μας παρέχει τις απαραίτητες συνθήκες ώστε μια συνολοσυνάρτηση να επεκτείνεται σε μέτρο. Αναφέρεται επίσης και το μέτρο Lebesgue το οποίο αποτελεί το βασικό μέτρο στον $\mathbb{R}^n$.
Στο 2ο Κεφάλαιο οι χώροι που συζητούμε είναι τοπολογικοί χώροι και δίνονται οι ορισμοί και ιδιότητες των κανονικών μέτρων και των μέτρων Radon, καθώς επίσης και Θεωρήματα κατασκευής τους. Ξεχωριστή παράγραφος αφιερώνεται στα μέτρα σε μετρικούς χώρους λόγω της πλούσιας δομής που μας παρέχουν αυτοί.
Το Κεφάλαιο 3 αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας εργασίας, μιας και αναφέρεται σε μέτρα σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους απείρων διαστάσεων. Γίνεται λόγος για τα λεγόμενα κυλινδρικά μέτρα τα οποία είναι η βάση της κατασκευής μέτρων Radon στους χώρους αυτούς. Σημαντικό αποτελέσμα που κινείται προς την κατεύθυνση αυτή είναι το Θεώρημα Prohorov αλλά και το Θεώρημα Weil το οποίο μας αποτρέπει από την αναζήτηση αναλλοίωτων στην πρόσθεση μέτρων σε απειροδιάστατους χώρους.
Στο Κεφάλαιο 4 συζητούμε για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις μέτρων πιθανότητας, οι οποίες σύμφωνα με το Θεώρημα Bochner μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη

αντίστοιχων μέτρων όταν πρόκειται για χώρους πεπερασμένης διάστασης. Επιπλέον ορίζουμε τα χαρακτηριστικά συναρτησοειδή των κυλινδρικών μέτρων και διαπιστώνουμε την αμφιμονοσήμαντη σχέση που τα συνδέει.
Το Θεώρημα Sazonov που παρατίθεται στο Κεφάλαιο 5 αποτελεί ουσιαστικά το ανάλογο του Θεωρήματος Bochner σε χώρους απείρων διαστάσεων. Εξετάζονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα χαρακτηριστικό συναρτησοειδές να αντιστοιχίζεται σε ένα Radon μέτρο πιθανότητας. Για την ανάπτυξή του χρειάζονται οι ορισμοί των χαρακτηριστικών συναρτησοειδών σε χώρους Hilbert καθώς επίσης και ο ορισμός της λεγόμενης τοπολογίας Sazonov.
Τέλος στο Κεφάλαιο 6, εξειδικεύουμε στην κατασκευή Radon μέτρων πιθανότητας Gauss. Ορίζουμε καταρχήν τα μέτρα και κυλινδρικά μέτρα Gauss σε χώρους απείρων διαστάσεων και παραθέτουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα χαρακτηριστικό συναρτησοειδές να αντιστοιχίζεται σε ένα τέτοιο μέτρο. Σημαντικό είναι το Θεώρημα Mourier το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη Radon μέτρων Gauss σε χώρους Hilbert δεδομένων κάποιων συνθηκών. Τέλος, ιδιαίτερης σημασίας είναι το Θεώρημα Gross σύμφωνα με το οποίο κατασκευάζεται το κλασσικό μέτρο Wiener σε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach δεδομένου ότι το συγκεκριμένο μέτρο δεν πληρούσε τις προϋποθέσεις των Θεωρημάτων Sazonov - Mourier.

Ευχαριστίες

Για τη συγγραφή της παρούσας εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τη βαθύτατη ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα μου καθηγητή κ. Σπηλιώτη Ι. για την πολύτιμη βοήθεια του καθ΄ολη τη διαδικασία προετοιμασίας, την καθοδήγηση, τις σημαντικές συμβουλές, αλλά κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.
Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τους γονείς μου για τη συμπαράσταση και εμψύχωσή τους με κάθε δυνατό τρόπο, καθώς επίσης και το νονό μου Δραγάζη Δ. ως εμπνευστή και "χορηγό" της ακαδημαϊκής μου ζωής.
Δεν θα μπορούσα να παραβλέψω την υποψήφια διδάκτορα Ζησιμοπούλου Δ.Ι. για τη βοήθειά της σε θέματα Συναρτησιακής Ανάλυσης και για τις ατελείωτες ώρες ηθικής υποστήριξης.
Τέλος να ευχαριστήσω ξεχωριστά τους καθηγητές Τσινιά Ι. και Αθανασούλη Γ. για το χρόνο που διέθεσαν κατά τη διάρκεια της παρουσίασης της παρούσας εργασίας.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2011
Δραγάζη Ευαγγελία

Περιεχόμενα

1 Μέτρα και σ-άλγεβρες **1**
1.1 Μέτρα σε αφηρημένους χώρους 1
1.2 Μέτρα στον $\mathbb{R}^m$. Το μέτρο Lebesgue 9
1.3 Μετρήσιμες Απεικονίσεις 11

2 Μέτρα Radon (πιθανότητας) σε Τοπ. Χώρους Hausdorff **13**
2.1 Μέτρα Radon σε τοπολογικούς χώρους 13
2.2 Κατασκευή μέτρων Radon 18
2.3 Μέτρα σε μετρικούς τοπολογικούς χώρους 37
2.4 Αξιοσημείωτοι Μετρικοί Χώροι στη Θεωρία Πιθανοτήτων 40

3 Μέτρα πιθανότητας σε τοπ. διαν. χώρους **43**
3.1 Στοιχεία θεωρίας τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων 43
3.2 σ-άλγεβρες και κυλινδρικές σ-άλγεβρες σε τοπ. διαν. χώρους . . . 46
3.2.1 Μετρήσιμοι διανυσματικοί χώροι 46
3.2.2 κυλινδρικές σ-άλγεβρες σε τοπ. διαν. χώρους 47
3.3 Κυλινδρικές σ-άλγεβρες στον δυϊκό χώρο 52
3.4 Μέτρα και κυλινδρικά μέτρα πιθανότητας σε τ.δ.χ. Θεώρημα Prohorov 52
3.5 Θεώρημα Weil 57

4 Χαρακτηριστικά συναρτησοειδή μέτρων πιθανότητας **61**
4.1 Ορισμοί και ιδιότητες των χαρακτηριστικών συναρτησοειδών 61
4.2 Χαρακτηριστικά συναρτησοειδή κυλινδρικών μέτρων 65

5 Θεώρημα Sazonov **69**
5.1 Συμμετρικοί τελεστές 69
5.2 Η τοπολογία Sazonov 72

6 Μέτρα Πιθανότητας Gauss **79**
6.1 Μέτρα Πιθανότητας Gauss στον $\mathbb{R}^n$ 79
6.2 Μέτρα πιθανότητας Gauss σε διανυσματικούς χώρους απείρων διαστάσεων 80
6.3 Θεώρημα Mourier 84
6.4 Θεώρημα Gross 87

Κεφάλαιο 1

Μέτρα και σ-άλγεβρες

1.1 Μέτρα σε αφηρημένους χώρους

Έστω σύνολο $\Omega \neq \emptyset$. Θα ορίσουμε ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω του οποίου τα στοιχεία επιδέχονται "μέτρηση".

Ορισμός 1.1.1. *Έστω $\mathscr{F}$ ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω. Η $\mathscr{F}$ λέγεται* ***σ-άλγεβρα*** *όταν :*

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. *Αν* $A \in \mathscr{F}$ *τότε* $A^c \in \mathscr{F}$
3. *Αν* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ *τότε* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

Τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας λέγονται μετρήσιμα σύνολα.

Προφανώς

- $\emptyset \in \mathscr{F}$
- Αν $A, B \in \mathscr{F}$ τότε $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ A \triangle B \in \mathscr{F}$
- Αν $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ τότε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

Παράδειγμα 1.1.2. (Τετριμμένων σ-αλγεβρών)

1. $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ όπου $A \subset \Omega$ με $A \neq \emptyset, \Omega$
3. Αν $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$ στο $\{1, ...k\}$ τότε η $\mathscr{F} = \left\{ \bigcup\limits_{i\in I} A_i : I \subset \{1, ..., k\} \right\}$ είναι σ-άλγεβρα και μάλιστα $card\mathscr{F} = 2^k$

4. $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω.

Πρόταση 1.1.3. *Αν $\{\mathscr{F}_i, i \in I\}$ είναι οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων του Ω τότε η $\mathscr{F} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{F}_i$ είναι σ-άλγεβρα. (Να σημειωθεί ότι η $\mathscr{F}$ δεν είναι κενή αφού $\emptyset, \Omega \in \mathscr{F}_i$ για όλα τα $i \in I$.)*

Παρατήρηση 1.1.4. Δεν ισχύει το ίδιο για την $\bigcup_{i \in I} \mathscr{F}_i$.

Ορισμός 1.1.5. *Έστω $\mathscr{C}$ μη κενή κλάση υποσυνόλων του Ω.*
*Ονομάζεται **σ-άλγεβρα παραγόμενη από την** $\mathscr{C}$ η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$ που είναι τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την κλάση $\mathscr{C}$ (υπάρχει τουλάχιστον μια τέτοια , η $\mathscr{P}(\Omega)$).*
Για την $\sigma(\mathscr{C})$ ισχύουν:

- $\sigma(\mathscr{C}) \supset \mathscr{C}$
- *αν η σ-άλγεβρα $\mathscr{F} \supset \mathscr{C}$ τότε $\mathscr{F} \supset \sigma(\mathscr{C})$*
  δηλαδή η $\sigma(\mathscr{C})$ είναι η ελάχιστη (με την έννοια του εγκλεισμού) σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathscr{C}$.

Πρόταση 1.1.6.

1. *Αν $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$ τότε $\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$*
2. *Αν $\mathscr{C}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$*
3. *Αν $\mathscr{C} \subset \mathscr{E} \subset \sigma(\mathscr{C})$ τότε $\sigma(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{C})$*

Ιδιαίτερης σημασίας παραγόμενη σ-άλγεβρα είναι η **σ-άλγεβρα** Borel του $\mathbb{R}^m$ η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.1.7. *Έστω $\mathscr{E}$ το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$.*
*Ονομάζεται **σ-άλγεβρα** Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$ η σ-άλγεβρα $\mathscr{B}^m \equiv \sigma(\mathscr{E})$.*

Πρόταση 1.1.8. *Έστω $\mathscr{F}$ η οικογένεια όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και ορίζουμε:*

- $\Delta_1 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$
- $\Delta_2 = \{(a, b] : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$
- $\Delta_3 = \{(a, b) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Τότε

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{F}) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3)$$

Απόδειξη. [14] □

Παρατήρηση 1.1.9. Όλα τα ανοικτά, όπως και όλα τα κλειστά υποσυνολα του $\mathbb{R}^m$ ανήκουν στην $\mathscr{B}^m$. Συνεπώς και όλα τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$. Ιδιαίτερα :

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ ισχύει $\{x\} \in \mathscr{B}^m$ (ως κλειστό)

- Στο $\mathbb{R}$ το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q} \in \mathscr{B}^1$ αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$.

Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{C})$, η παραγόμενη από μια κλάση $\mathscr{C}$, ορίστηκε "ύπαρξιακά" και **δεν** "κατασκευάστηκε". Η μέθοδος κατασκευής της ξεκινώντας από την κλάση $\mathscr{C}$ είναι με **Υπερπεπερασμένη Επαγωγή** (transfinite induction) ([11] ή [3]).
Η δια αυτού του τρόπου κατασκευή της σ-άλγεβρας Borel αποκαλύπτει και τον πληθάριθμό της:

$$card\mathscr{B}^m = card\mathbb{R} \equiv c$$

Γενικότερο για τον πληθάριθμο μιας σ-άλγεβρας είναι το εξής:

Αν μια σ-άλγεβρα έχει άπειρα στοιχεία τότε είναι υπεραριθμήσιμη.

Ορισμός 1.1.10. *Έστω $\Omega \neq \emptyset$ και $\mathscr{F}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Το ζεύγος $(\Omega, \mathscr{F})$ ονομάζεται* **μετρήσιμος χώρος**.
Ένα **μέτρο** *μ στον $(\Omega, \mathscr{F})$ είναι εξόρισμού μια απεικόνιση*

$$\mu : \mathscr{F} \mapsto [0, \infty]$$

που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *Αν $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για όλα τα $i \neq j$ στο $\mathbb{N}$ τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Αν $\mu(\Omega) < +\infty$ το μέτρο μ ονομάζεται **πεπερασμένο**.
Αν υπάρχουν $E_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ με $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $\mu(E_n) < +\infty$ το μέτρο μ ονομάζεται **σ-πεπερασμένο**.
Ειδικότερα αν $\mu(\Omega) = 1$ τότε το μ λέγεται **μέτρο πιθανότητας**.

Πρόταση 1.1.11. *(Ιδιότητες)*
Έστω μέτρο μ στον $(\Omega, \mathscr{F})$. Τότε :

1. *Αν $A \subset B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$*
2. *Αν $A \subset B$ και $\mu(A) < +\infty$ τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$*
3. *Αν $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$*
4. *Αν $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ και $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

5. *Αν* $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ *και* $A_n \supset A_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ *και* $\mu(A_k) < +\infty$ *για κάποιο* $k \in \mathbb{N}$ *τότε*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Ορισμός 1.1.12. *Δύο μέτρα* μ_1, μ_2 *στον* $(\Omega, \mathscr{F})$ *λέγονται ίσα όταν και μόνο όταν συμπίπτουν σε κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του* Ω*, δηλαδή*

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \text{ για κάθε } A \in \mathscr{F}.$$

Η απόδειξη της ισότητας δυο μέτρων βάσει του ορισμού απαιτεί τον έλεγχο σε κάθε μετρήσιμο σύνολο. Εντούτοις, σύμφωνα με το παρακάτω Θεώρημα αρκεί ο έλεγχος σε μια μικρότερη κλάση υποσυνόλων, το λεγόμενο **Σύστημα Dynkin** [2].

Θεώρημα 1.1.13. *Έστω* μ_1, μ_2 *μέτρα στον* $(\Omega, \mathscr{F})$ *με* $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$ *όπου για την κλάση* $\mathscr{C}$ *ισχύουν:*

- *Αν* $A, B \in \mathscr{C}$ *τότε* $A \cap B \in \mathscr{C}$
- *Υπάρχουν* $E_n \in \mathscr{C}, n \in \mathbb{N}$ *με* $E_n \subset E_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ *και* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$

Αν $\mu_1(A) = \mu_2(A) \ \forall \ A \in \mathscr{C}$ *και αν* $\mu_1(E_k) = \mu_2(E_k) < \infty \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ *τότε τα μέτρα* μ_1, μ_2 *είναι ίσα.*

Παράδειγμα 1.1.14. Έστω μ_1, μ_2 μέτρα στον $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ τέτοια ώστε

$$\mu_1\left((a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m]\right) = \mu_2\left((a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m]\right) < +\infty$$

για οποιοδήποτε " ορθογώνιο" $(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$.
Τότε τα μέτρα μ_1, μ_2 είναι ίσα, δηλαδή $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ για κάθε $B \in \mathscr{B}^m$.
Πράγματι $\mathscr{B}^m = \sigma(\mathscr{P}^m)$, όπου η κλάση
$\mathscr{P}^m = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] : a_i < b_i \text{ στο } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ ικανοποιεί την απαίτηση:
$A, B \in \mathscr{P}^m \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{P}^m$.

Έστω χώρος μέτρου $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ και $N \in \mathscr{F}$ με $\mu(N) = 0$. Έστω ακόμα $\Lambda \subset \Omega$ με $\Lambda \subset N$. Αν δεν γνωρίζουμε ότι $\Lambda \in \mathscr{F}$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το μέτρο του Λ (αν και από μονοτονία διαισθανόμαστε ότι $\mu(\Lambda) = 0$). Για αυτό είναι σημαντική η έννοια της **πληρότητας**.

Ορισμός 1.1.15. *Έστω ένας* ***χώρος μέτρου*** $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$.
Αυτός λέγεται ***πλήρης*** *αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο* $\Lambda \subset \Omega$ *για το οποίο υπάρχει* $N \in \mathscr{F}$ *με* $\Lambda \subset N$ *και* $\mu(N) = 0$ *, ισχύει* $\Lambda \in \mathscr{F}$ *(και άρα* $\mu(\Lambda) = 0$*).*

Θεώρημα 1.1.16. *(Πλήρωση ενός χώρου μέτρου)*
Έστω χώρος μέτρου $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$*. Θέτουμε*

$$\mathcal{N}_\mu = \{\Lambda \subset \Omega : \text{υπάρχει } N \in \mathscr{F} \text{ με } \mu(N) = 0 \text{ και } \Lambda \subset N\}$$
$$\mathscr{F}_\mu = \{A \cup N : A \in \mathscr{F} \text{ και } N \in \mathcal{N}\}$$

και ορίζουμε $\bar{\mu} : \bar{\mathscr{F}}_\mu \mapsto [0, \infty] : (A \cup N) \mapsto \bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$.
Τότε

- $\bar{\mathscr{F}}_\mu$ *είναι σ-άλγεβρα που περίεχει την* $\mathscr{F}$.
- $\bar{\mu}$ *είναι καλά ορισμένη και είναι μέτρο στον* $(\Omega, \bar{\mathscr{F}})$ *που επεκτείνει το* μ
- *Ο χώρος μέτρου* $(\Omega, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ *είναι πλήρης.*
- *Η πλήρης επέκταση* $(\Omega, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ *είναι minimal*
  (δηλαδή αν $(\Omega, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ *είναι πλήρης χώρος μέτρου και* $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}$ *και* $\mu_1|\mathscr{F} = \mu$ *τότε* $\mathscr{F}_1 \supset \bar{\mathscr{F}}_\mu$ *και* $\mu_1|\bar{\mathscr{F}}_\mu = \bar{\mu}$*).*

Παρατήρηση 1.1.17. Ισχύει $\bar{\mathscr{F}}_\mu = \sigma(\mathscr{F} \cup \mathscr{N}_\mu)$.
Ακόμα
$\bar{\mathscr{F}}_\mu = \{A \subset \Omega$ υπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$ με $B_1 \subset A \subset B_2$ και $\mu(B_1) = \mu(B_2)\}$

Απόδειξη. [13] □

Σημαντικό αποτέλεσμα στη Θεωρία Πιθανοτήτων είναι το Θεώρημα Επέκτασης. Σύμφωνα με αυτό κατασκευάζεται ή καλύτερα επεκτείνεται ένα μέτρο σε ένα μετρήσιμο χώρο δεδομένου ότι προϋπήρχε μια απεικόνιση ορισμένη σε μια κλάση $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$. Η απεικόνιση αυτή λέγεται **εξωτερικό μέτρο**.

Ορισμός 1.1.18. *Έστω* $\Omega \neq \emptyset$ *και* $\mathscr{P}(\Omega)$ *το σύνολο όλων των υποσυνόλων του* Ω. *Ονομάζεται* **εξωτερικό μέτρο** *στον* Ω *μια συνάρτηση* $\nu : \mathscr{P}(\Omega) \mapsto [0, \infty]$ *που ικανοποιεί τα παρακάτω:*

1. $\nu(\emptyset) = 0$
2. *Αν* $A \subset B$ *τότε* $\nu(A) \leq \nu(B)$
3. *Αν* $A_n \subset \Omega, n \in \mathbb{N}$ *τότε* $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$

Η έννοια του εξωτερικού μέτρου είναι βοηθητική για την κατασκευή μέτρων και αυτό χάρη στα παρακάτω αποτελέσματα:

Ορισμός 1.1.19. *Έστω* ν *ένα εξωτερικό μέτρο ορισμένο στα υποσύνολα του* Ω. *Ένα υποσύνολο* $A \subset \Omega$ *ονομάζεται* **ν-μετρήσιμο** *όταν και μόνο όταν*

$$\nu(A \cap E) + \nu(A^c \cap E) = \nu(E) \ \forall E \subset \Omega \qquad (\star)$$

Το σύνολο των ν-μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω *γράφεται* $\mathcal{M}_\nu$, *είναι δηλαδή*

$$\mathcal{M}_\nu = \{A \subset \Omega : \nu(A \cap E) + \nu(A^c \cap E) = \nu(E) \ \ \forall E \subset \Omega\}$$

Παρατήρηση 1.1.20. 1. Τα σύνολα $\emptyset, \Omega$ είναι πάντα $\mathcal{M}_\nu$ μετρήσιμα.

2. Η σχέση $\star$ ισοδυναμεί ,λόγω σ-υποπροσθετικότητας, με την

$$\nu(A \cap E) + \nu(A^c \cap E) \leq \nu(E) \quad \forall\ E \subset \Omega$$

Άμεση συνέπεια είναι ότι: Αν $\nu(B) = 0$ τότε $B \in \mathcal{M}_\nu$ και συνεπώς αν $\Lambda \subset B$ και $\nu(B) = 0$ τότε $\Lambda \in \mathcal{M}_\nu$

Θεώρημα 1.1.21. *(Καραθεοδωρή)*
Η κλάση υποσυνόλων $\mathcal{M}_\nu$ είναι σ-άλγεβρα και η συνάρτηση ν περιορισμένη στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_\nu$ είναι μέτρο,δηλαδή η τριάδα $(\Omega, \mathcal{M}_\nu, \nu)$ είναι χώρος μέτρου και μάλιστα πλήρης.

Απόδειξη. [6] ή [13] ή [2] ή [3] ή ... □

Το δεύτερο θεμελιώδες γνώρισμα της έννοιας του εξωτερικού μέτρου είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.1.22. *(και ορισμός)*
Έστω $\mathscr{C}$ μη–κενή κλάση υποσυνόλων του Ω με $\emptyset \in \mathscr{C}$.
Έστω $\mu_0 : \mathscr{C} \mapsto [0, \infty]$ εις τρόπον ώστε $\mu_0(\emptyset) = 0$.
Ορίζουμε την $\mu^* : \mathscr{P}(\Omega) \mapsto [0, \infty]$ ως ακολούθως:

$$\mu^*(A) = inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) : B_n \in \mathscr{C} \quad \mu\epsilon \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\nu \supset A \right\}$$

με την ακόλουθη σύμβαση: $inf \emptyset = +\infty$
Τότε η μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο Ω και ονομάζεται **εξωτερικό μέτρο παραγόμενο** *από το ζεύγος $(\mathscr{C}, \mu_0)$*

Απόδειξη. [24] □

Η συνάρτηση μ_0 με τις ιδιότητες που ορίστηκε ονομάζεται **προ-μέτρο** και σκοπός του Θεωρήματος είναι η κατασκευή ενός εξωτερικού μέτρου μ^* το οποίο θα βασίζεται στο μ_0 και την κλάση $\mathscr{C}$. Τέλος με το Θεώρημα Καραθεοδωρή περιορίζουμε το μ^* στην κλάση $\mathcal{M}_\nu$ και λαμβάνουμε το μ το οποίο είναι μέτρο στην σ-άλγεβρα πλέον $\mathcal{M}_\nu$. Προκειμένου όμως να είναι η επέκταση αυτή μοναδική απαιτούνται κάποιες επιπλέον συνθήκες. Αυτό εξυπηρετεί η παρακάτω έννοια του **ημιδακτυλίου** (ή της **ημιάλγεβρας**).

Ορισμός 1.1.23. *Μια μη κενή κλάση $\mathscr{C}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται* **ημιδακτύλιος** *όταν και μόνο όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:*

1. *$\emptyset \in \mathscr{C}$*
2. *Αν $A, B \in \mathscr{C}$ τότε $A \cap B \in \mathscr{C}$*
3. *Αν $A, B \in \mathscr{C}$ με $A \subset B$ τότε υπάρχουν $E_1, E_2, ..., E_k \in \mathscr{C}$ ξένα ανά δύο τέτοια ώστε $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$*

Αν επιπλέον $\Omega \in \mathscr{C}$ τότε η $\mathscr{C}$ λέγεται **ημιάλγεβρα**

Παράδειγμα 1.1.24.

1. $\Omega = \mathbb{R}^m$ και $\mathscr{P}^m = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] : \ a_i < b_i$ στο $\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$
   Η κλάση $\mathscr{P}^m$ είναι ημιδακτύλιος.

2. Έστω οι μετρήσιμοι χώροι $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ και $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ όπου βέβαια $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ είναι σ-άλγεβρες υποσυνόλων των Ω_1, Ω_2 αντίστοιχα. Ορίζουμε:

   $$\mathscr{C} = \{A \times B : \ A \in \mathscr{F}_1 \text{και} B \in \mathscr{F}_2\}$$

   Η κλάση είναι ημιάλγεβρα.
   Το συμπέρασμα ισχυέι ακόμα και αν $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ είναι ημιάλγεβρες.

Θεώρημα 1.1.25. *(Επέκτασης)*
Έστω $\mathscr{C}$ ημιδακτύλιος υποσυνόλων του Ω και μια συνολοσυνάρτηση $\mu_0 : \mathscr{C} \mapsto [0, \infty]$ για την οποία ισχύουν:

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$

2. *Αν $A_n \in \mathscr{C}, n \in \mathbb{N}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ και $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$*
   τότε $\mu_0\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$.

3. *Υπάρχουν $E_n \in \mathscr{C}, n \in \mathbb{N}$ με $E_n \subset E_{n+1}$ και $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ και $\mu_0(E_n) < +\infty$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.*

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Υπάρχει ένα και **μοναδικό** *μέτρο μ στον $(\Omega, \sigma(\mathscr{C}))$ τέτοιο ώστε $\mu|\mathscr{C} = \mu_0$ (Το μ επεκτείνει την μ_0 στην σ-άλγεβρα $\mathscr{C}$).*
Το μέτρο μ είναι **σ-πεπερασμένο**.

ii. Αν μ^* το εξωτερικό μέτρο,το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathscr{C}, \mu_0)$ τότε $\mathcal{M}_{\mu^*} \supset \sigma(\mathscr{C})$ και $\mu^*|\sigma(\mathscr{C}) = \mu$

iii. Αν $(\Omega, (\overline{\sigma(\mathscr{C})}, \bar{\mu})$ η πλήρωση του χώρου $(\Omega, \sigma(\mathscr{C}), \mu)$ τότε $\overline{\sigma(\mathscr{C})} = \mathcal{M}_{\mu^*}$ και $\mu^* = \bar{\mu}$

Θεώρημα 1.1.26. *(Για μέτρα πιθανότητας)*
Στις υποθέσεις η (3) συμπληρώνεται με την υπόθεση

"...και $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_0(E_n) = 1$".

Στα συμπεράσματα η φράση "το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο" στο τέλος του συμπεράσματος (i.) αντικαθίσταται από τη φράση "το μ είναι μέτρο πιθανότητας, δηλαδή $\mu(\Omega) = 1$".
Όλα τα υπόλοιπα παραμένουν ως έχουν.

Απόδειξη. [1] ή [3] ή [24] □

Παρατήρηση 1.1.27.

1. Υπό τις προϋποθέσεις του τελευταίου θεωρήματος

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \subset \Omega : \mu^*(A) + \mu^*(\Omega \setminus A) = 1\}$$

2. Αν η $\mathscr{C}$ είναι ημιάλγεβρα (δηλ. ημιδακτύλιος με $\Omega \in \mathscr{C}$) τότε στο Θεώρημα 1.1.26 η (3) **και** το συμπλήρωμά της αντικαθίστανται από την : $\mu_0(\Omega) = 1$.

Παρατήρηση 1.1.28. Μια ισοδύναμη μορφή του Θεωρήματος Επέκτασης για μέτρα πιθανότητας είναι η εξής: Έστω $\mathscr{F}_0$ **άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω, δηλαδή μια κλάση υποσυνόλων του Ω που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

1. $\Omega \in \mathscr{F}_0$
2. Αν $A \in \mathscr{F}_0$ τότε $A^c \in \mathscr{F}_0$
3. Αν A,B $\in \mathscr{F}_0$ τότε $A \cup B \in \mathscr{F}_0$.

Έστω τώρα $\mu_0 : \mathscr{F}_0 \mapsto [0,1]$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:

i. $\mu_0(\Omega) = 1$

ii. Αν $A_1, ..., A_k \in \mathscr{F}_0$ ξένα μεταξύ τους τότε
$\mu_0(A_1 \cup ... \cup A_k) = \mu_0(A_1) + ... + \mu_0(A_k)$

iii. Αν $A_n \in \mathscr{F}_0, n \in \mathbb{N}$ με $A_n \supset A_{n+1}$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ τότε $\lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = 0$

Τότε το ζεύγος $(\mathscr{F}_0, \mu_0)$ ικανοποιεί τις προϋποθεσεις του Θεωρήματος 1.1.26 όπως τροποποιείται από την παραπάνω παρατήρηση.

Τα παραπάνω Θεωρήματα μας προμηθεύουν με μεθόδους κατασκευής μέτρων ως επεκτάσεις κάποιων συνολοσυναρτήσεων. Τώρα, αντίθετα θα περιορίσουμε κάποιες συνολοσυναρτήσεις ώστε να γίνουν μέτρα.

Πρόταση 1.1.29. *Έστω $(\Omega, \mathscr{F})$ μετρήσιμος χώρος,δηλ.η $\mathscr{F}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Έστω ότι $E \subset \Omega$. Τότε η κλάση υποσυνόλων του E που ορίζεται ως $\mathscr{F}_E = \{A \cap E : A \in \mathscr{F}\}$ είναι σ-άλγεβρα και μάλιστα αν $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$ τότε $\mathscr{F}_E = \sigma(\mathscr{C}_E)$ όπου $\mathscr{C}_E = \{B \cap E : B \in \mathscr{C}\}$. Η σ-άλγεβρα $\mathscr{F}_E$ ονομάζεται* ***ίχνος*** *της $\mathscr{F}$ στο E.*

Απόδειξη. [3] σελίδα 132 □

Το σημαντικό όμως αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο ([13] σελιδα 164 ή [2])

Θεώρημα 1.1.30. *Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, P)$* **χώρος πιθανότητας** *και P^* το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathscr{F}, P)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο σύνολο $E \subset \Omega$ ισχύει*

$$P^*(E) = 1 \qquad (\triangle)$$

και στην σ-άλγεβρα $\mathscr{F}_E = \{A \cap E : A \in \mathscr{F}\}$ *ορίζουμε* $P_0 : \mathscr{F}_E \mapsto [0,1]$ *ως εξής:*

$$P_0(A \cap E) = P(A).$$

Τότε $(E, \mathscr{F}_E, P_0)$ *είναι χώρος πιθανότητας.*
(Να σημειωθεί ότι δεν είναι κατάνάγκη $E \in \mathscr{F}$*).*

Παρατήρηση 1.1.31.

1. Το θεώρημα ισχύει για **πεπερασμένους** χώρους μέτρου $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ όπου δηλαδή $\mu(\Omega) < +\infty$. Αρκεί η υποθεση $(\triangle)$ να αντικατασταθεί από την $\mu^*(E) = \mu(\Omega)$ (και όταν $E \in \mathscr{F}$ αυτή γράφεται $\mu(E) = \mu(\Omega)$).

2. Το Θεώρημα αυτό δείχνει ότι σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ η σ-άλγεβρα μπορεί να επεκταθεί και να περιλαμβάνει κάθε σύνολο E που δεν της άνηκε και το οποίο έχει εξωτερικό μέτρο 1. Το αποτέλεσμα είναι να "ξεφορτωθούμε" όλα τα σημεία του Ω που δεν ανήκουν στο E. Το συγκεκριμένο χρησιμοποιείται στη Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασιών όπου με κατάλληλη επιλογή του E μπορούμε να έχουμε μια πιθανότητα ορισμένη σε συγκεκριμένη κλάση υποσυνόλων. Ιδιαίτερα για τα μέτρα Wiener στον $\mathbb{R}^T$ μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο C των συνεχών συναρτήσεων έχει εξωτερικό μέτρο 1 και έτσι μπορούμε να πάρουμε την επέκταση της $\mathscr{F}$ θέτοντας $E = C$.

1.2 Μέτρα στον $\mathbb{R}^m$. Το μέτρο Lebesgue

Στον χώρο $\mathbb{R}^m$ η κλάση

$$\mathscr{P}^m = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m] : a_i < b_i \text{ στο } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$$

είναι ημιδακτύλιος και μάλιστα $\mathcal{B}^m = \sigma\left((P^m)\right)$.
Ορίζουμε $\lambda_0 : \mathscr{P}^m \mapsto [0, \infty)$ ως εξής:

$$\lambda_0(\emptyset) = 0$$
$$\lambda_0\left((a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m]\right) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

Ο κατά αυτόν τον τρόπο ορισμός του λ_0 (πάνω σε έναν ημιδακτύλιο, με $\lambda_0(\emptyset) = 0$ και $\lambda_0(E_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Επέκτασης 1.1.25. (Μένει να δειχτεί ότι ισχύει η σ-υποπροσθετικότητα του λ_0 πάνω σε σύνολα της $\mathscr{P}^m$. [3])
Αν τώρα λ^* είναι το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathscr{P}^m, \lambda_0)$ ισχύουν τα παρακάτω:

Θεώρημα 1.2.1. *Υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο* λ *στον* $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ *τέτοιο ώστε* $\lambda\left((a_1, b_1] \times ... \times (a_m, b_m]\right) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$.

Αν $\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(A_n) : \ A_n \in \mathscr{P}^m \ \mu\epsilon \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$ *το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος* $(\mathscr{P}^m, \lambda_0)$
τότε $\mathcal{M}_{\lambda^*} \supset \sigma(\mathscr{P}^m) = \mathscr{B}^m$ *και* $\lambda^*(A) = \lambda(A) \ \ \forall A \in \mathscr{B}^m$.
Αν $(\mathbb{R}^m, \bar{\mathscr{B}}^m, \bar{\lambda})$ *είναι η πλήρωση του χώρου* $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m, \lambda)$ *τότε* $\bar{\mathscr{B}}^m = \mathcal{M}_{\lambda^*}$ *και* $\lambda^* = \bar{\lambda}$.
Το μέτρο $\bar{\lambda} = \lambda^*$ *στον* $(\mathbb{R}^m, \bar{\mathscr{B}}^m) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ *ονομάζεται μέτρο Lebesgue στον* $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη. [14] □

Άλλες ιδιότητες του μέτρου Lebesgue λ στο $\mathbb{R}^m$ φαίνονται στα παρακάτω:

Θεώρημα 1.2.2.

1. $\lambda(K) < +\infty$ *για κάθε συμπαγές* $K \subset \mathbb{R}^m$

2. *Για κάθε* $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ *ισχύει*

$$\lambda^*(A) = inf\,\{\lambda(U) : U \ \textit{ανοικτό} \ \subset \mathbb{R}^m \ \mu\epsilon \ U \supset A\}$$

   και συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ *υπάρχει ανοικτό υποσύνολο* U_ϵ *του* $\mathbb{R}^m$ *έτσι ώστε:* $U_\epsilon \supset A$ *και* $\lambda^*(U_\epsilon \setminus A) < \epsilon$.

3. *Για κάθε* $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ *ισχύει*

$$\lambda^*(A) = sup\,\{\lambda(K) : K \ \textit{συμπαγές υποσύνολο του} \ A\}$$

   και άρα αν $\lambda^*(A) < \infty$ *τότε* $\forall \epsilon > 0$ *υπάρχει συμπαγές* $K_\epsilon \subset \mathbb{R}^m$ *έτσι ώστε* $K_\epsilon \subset A$ *και* $\lambda^*(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon$.

4. *Για κάθε* $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ *υπάρχει ένα* F_σ*-σύνολο* E *και ένα* G_δ*-σύνολο* H *έτσι ώστε* $E \subset A \subset H$ *και* $\lambda(E) = \lambda^*(A) = \lambda(H)$. *Προφανώς* $\lambda(H \setminus E) = 0$.

Οι παραπάνω ιδιότητες του μέτρου Lebesgue αναφέρονται στην τοπολογική δομή του $\mathbb{R}^m$. Οι επόμενες στην αλγεβρική δομή του.

Θεώρημα 1.2.3.

1. *Αν* $A \subset \mathbb{R}^m$ *και* $x \in \mathbb{R}^m$ *τότε ισχύει:*

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathscr{B}^m) \Leftrightarrow A + x \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathscr{B}^m).$$

2. $\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$ *για κάθε* $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ *και* $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *Αν* μ *είναι μέτρο στον* $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ *με* $\mu(K) < +\infty$ *για κάθε συμπαγές* $K \subset \mathbb{R}^m$ *και ισχύει* $\mu(I + x) = \mu(I)$ *για κάθε "διάστημα"* $I \subset \mathbb{R}^m$ *και* $x \in \mathbb{R}^m$ *τότε υπάρχει σταθερά* $a \geq 0$ *έτσι ώστε* $\mu(A) = a\lambda(A), \forall A \in \mathscr{B}^m$.

Το τελευταίο Θεώρημα δηλώνει ότι το μέτρο Lebesgue στο $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ είναι το "μοναδικό" (παρά μια πολλαπλασιαστική σταθερα) **μέτρο Haar** (αναλλοίωτο στις μεταθέσεις) που (οφείλει να) υπάρχει στην "τοπικά συμπαγή Τοπολογική αβελιανή ομάδα" $(\mathbb{R}^m, +)$.
Το επόμενο θεώρημα αφορά σε κατασκευή μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.
Προηγουμένως όμως ο ορισμός:

Ορισμός 1.2.4. *Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής** όταν και μόνο όταν είναι αύξουσα,δεξιά συνεχής και* $\lim_{t \mapsto -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \mapsto +\infty} F(t) = 1$.

Αν τώρα F είναι μια σ.κ. ορίζουμε $P_0 : \mathscr{P}^1 \mapsto [0,1]$ ως εξής:

$$P_0(\emptyset) = 0 \quad \text{και} \quad P_0\left((a,b]\right) = F(b) - F(a)$$

Αποδεικνύεται ότι το ζεύγος $(\mathscr{P}^1, P_0)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος Επέκτασης 1.1.26. για μέτρα πιθανότητας . Συνεπώς:

Θεώρημα 1.2.5. *Δοθείσης μιας σ.κ. F, υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ τέτοιο ώστε $P\left((a,b]\right) = F(b) - F(a)$ για όλα τα $a < b$ στο $\mathbb{R}$.*

Παρατήρηση 1.2.6. Το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα,δηλαδή:
Δοθέντος ενός μέτρου πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ υπάρχει μια μοναδική σ.κ. τέτοια ώστε $P\left((a,b]\right) = F(b) - F(a)$.
Πρόκειται βέβαια για την $F(t) = P\left((-\infty, t]\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ώστε η σχέση $P((a,b]) = F(b) - F(a)$ ορίζει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου μέτρων πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ και του συνόλου των συναρτήσεων κατανομής στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή μέτρα πιθανότητας και συναρτήσεις κατανομής στο $\mathbb{R}$ "ταυτίζονται".

1.3 Μετρήσιμες Απεικονίσεις

Ορισμός 1.3.1. *Έστω μετρήσιμοι χώροι $(X, \mathscr{F})$ και $(Y, \mathscr{H})$. Μια απεικόνιση $f : X \mapsto Y$ ονομάζεται **$\mathscr{F} - \mathscr{H}$ μετρήσιμη** όταν και μόνο όταν $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ για κάθε $B \in \mathscr{H}$.*

Πρόταση 1.3.2. *Στα πλαίσια του ορισμού υποθέτουμε ότι $\mathscr{H} = \sigma(\mathscr{E})$.Τότε ισχύει: Η f είναι $\mathscr{F} - \mathscr{H}$ μετρήσιμη όταν και μόνο όταν $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ για κάθε $B \in \mathscr{E}$.*

Απόδειξη. Η κλάση $\mathscr{A} = \{B \in \mathscr{H} : f^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$ επαληθεύεται ότι είναι σ-άλγεβρα και αφού $\mathscr{A} \supset \mathscr{E}$ έχουμε ότι $\mathscr{A} \supset \mathscr{H}$. □

Πρόταση 1.3.3. *Στα πλαίσια του ορισμού υποθέτουμε ότι Y είναι μετρικός χώρος με μετρική d και ότι $\mathscr{H} = \sigma(\mathscr{E})$ όπου $\mathscr{E}$ το σύνολο των ανοικτών (δηλαδή η $\mathscr{H}$ είναι η σ-άλγεβρα Borel).*

Έστω ακολουθία $\mathscr{F}-\mathscr{H}$ μετρήσιμων απεικονίσεων $f_n : X \mapsto Y$, $n \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι για την $f : X \mapsto Y$ ισχύει :$f(x) = \lim\limits_{n}^{d} f_n(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε η $f : X \mapsto Y$ είναι $\mathscr{F}-\mathscr{H}$ μετρήσιμη.

Απόδειξη. (Σύντομη):
Για τυχόν ανοικτό $U \in \mathscr{E}$ θέτουμε $U_k = \left\{y \in Y : d(y, U^c) > \frac{1}{k}\right\}$, $k = 1, 2, \ldots$.
Τότε $U = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ και συνεπώς $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f^{-1}(U_k)$.
Όμως $f^{-1}(U_k) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n \geq m} f_n^{-1}(U_k)$ και $U_k \in \mathscr{E}$.

□

Ορισμός 1.3.4. *Έστω τυχόν σύνολο $X \neq \emptyset$ και $(Y, \mathscr{H})$ μετρήσιμος χώρος. Έστω ακόμα $\Gamma \subset Y^X$ μη-κενό σύνολο συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το X και πεδίο τιμών το Y. Ως* ***σ-άλγεβρα παραγόμενη από τις συναρτήσεις Γ*** *ορίζεται η*

$$\sigma(\Gamma) = \sigma\left(\{f^{-1}(A) : f \in \Gamma, A \in \mathscr{H}\}\right)$$

Πρόκειται βέβαια για την ελάχιστη σ-άλγεβρα (με την έννοια του $\subset$) που καθιστά μετρήσιμες τις συναρτήσεις Γ. Αποδεικνύεται ότι· αν $\mathscr{H} = \sigma(\mathscr{E})$ τότε

$$\sigma(\Gamma) = \sigma\left(\{f^{-1}(A) : f \in \Gamma, A \in \mathscr{E}\}\right)$$

Κεφάλαιο 2

Μέτρα Radon (πιθανότητας) σε Τοπ. Χώρους Hausdorff

2.1 Μέτρα Radon σε τοπολογικούς χώρους

Ένα μέτρο είναι κανονικό αν όλες οι τιμές του μπορούν να υπολογιστούν από τις τιμές του στα σύνολα με τοπολογικό ενδιαφέρον (ανοικτά και συμπαγή).Αν επιθυμούμε να συνδέσουμε τη μετροθεωρητική δομή του X με την τοπολογική του δομή τότε αυτό μπορεί να γίνει μόνο μέσω των κανονικών μέτρων. Η μετροθεωρητική συμπεριφορά μη κανονικών μέτρων είναι παθολογική.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ονομάζεται σ-άλγεβρα Borel η παραγόμενη από το σύνολο των ανοικτών του X, είναι δηλαδή*

$$\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T}).$$

Προφανώς στη σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T})$ ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ περιλαμβάνονται όλα τα ανοικτά, κλειστά και συμπαγή, δηλαδή $\mathcal{T}, \mathscr{G}, \mathscr{K} \subset \mathscr{B}$.

Παρατήρηση 2.1.2. Αν $\mathscr{E}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση του τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ τότε $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{B}$.

Ορισμός 2.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset \mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T})$ όπου $\mathscr{B}$ η σ-άλγεβρα Borel.*

- *Ονομάζεται* **μέτρο Borel** *στον X ένα μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathscr{B})$. Ένα μέτρο μ στον $(X, \mathscr{A})$ ονομάζεται* **κανονικό μέτρο** *όταν και μόνο όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:*

  1. *$\mu(K) < +\infty$ για κάθε συμπαγές $K \in \mathscr{K}$*

2. *Για κάθε* $A \in \mathscr{A}$ *ισχύει:*

$$\mu(A) = inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό με } U \supset A\} \quad \text{εξωτερική κανονικότητα}$$

3. *Για κάθε ανοικτό* $U \in \mathcal{T}$ *ισχύει:*

$$\mu(U) = sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές με } K \subset U\} \quad \text{εσωτερική κανονικότητα}$$

Ο χώρος $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *λέγεται* **χώρος κανονικού μέτρου**.

- *Ονομάζεται* **μέτρο Radon** *στον* X *ένα μέτρο* μ *στον* $(X, \mathscr{B})$ *που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

  i. *Για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει ανοικτή περιοχή* U *του* x *με* $\mu(U) < +\infty$.

  ii. $\mu(A) = sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές} \subset A\}$ *για κάθε* $A \in \mathscr{B}$.

Προφανώς αν δύο κανονικά μέτρα στον $(X, \mathscr{A})$,έστω μ, ν συμπίπτουν στο $\mathscr{K}$ (κλάση κλειστή στις πεπερασμένες τομές) τότε συμπίπτουν στο $\mathscr{A}$.

Παρατήρηση 2.1.4.

1. Έστω ότι ο χώρος X είναι Hausdorff. Τότε κάθε συμπαγές είναι κλειστό άρα ανήκει στην $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}(X)$. Έτσι οι απαιτήσεις 1,3 έχουν νόημα.

2. Αν μ είναι μέτρο Radon τότε από την 1 συνάγεται άμεσα ότι $\mu(K) < +\infty$ για κάθε $K \in \mathscr{K}$. Ακόμα περισσότερο αν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ με $U_n \in \mathcal{T}$ και $\mu(U_n) < +\infty, n \in \mathbb{N}$ τότε το μέτρο Radon μ είναι κανονικό.
   Συνεπώς κάθε πεπερασμένο μέτρο Radon είναι και κανονικό μέτρο.

Πρόταση 2.1.5. *Έστω τοπολογικός χώρος* $(X, \mathcal{T})$ *και σ-άλγεβρα* $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$. *Έστω* μ *μέτρο Radon στον* $(X, \mathscr{A})$. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Αν* $A \in \mathscr{A}$ *με* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *όπου* $A_n \in \mathscr{A}$ *και* $\mu(A_n) < +\infty$ *(το* A *είναι σ-πεπερασμένου μέτρου* μ*) τότε*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές } \subset A\} \quad (*)$$

   Ιδιαίτερα η $(*)$ *ισχύει για όλα τα* $A \in \mathscr{A}$ *όταν* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *με* $E_n \in \mathscr{A}$ *και* $\mu(E_n) < +\infty$ *(δηλ. όταν το μέτρο είναι σ-πεπερασμένο).*

2. *Για κάθε* $A \in \mathscr{A}$ *όπως παραπάνω ισχύει:*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό } \subset A\}$$

   Η ιδιότητα αυτή θα αναφέρεται ως "κλειστή κανονικότητα".

Απόδειξη.

1. • Έστω $\mu(A) < \infty$ και $\epsilon > 0$. Τότε αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $K, G \subset X$ όπου K συμπαγές, G ανοικτό τέτοια ώστε $K \subset A \subset G$ και $\mu(G \setminus K) < \epsilon$.
Αφού το μ είναι μέτρο Radon τότε υπάρχει G ανοικτό τέτοιο ώστε $A \subset G$ και $\mu(G) < \mu(A) + \epsilon$. Ακόμα λόγω κανονικότητας υπάρχει K συμπαγές τέτοιο ώστε $K \subset G$ και $\mu(K) > \mu(G) - \epsilon$. Αφού $\mu(G \setminus A) < \epsilon$ μπορούμε να επιλέξουμε $W \supset G \setminus A$ τέτοιο ώστε $\mu(W) < \epsilon$. Το σύνολο $K \setminus W$ είναι συμπαγές υποσύνολο του A και ικανοποιεί

$$\mu(K \setminus W) = \mu(K) - \mu(K \cap W) > \mu(G) - 2\epsilon \geq \mu(A) - 2\epsilon$$

Αφού ϵ αυθαίρετο τότε ισχύει

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \subset A, K \text{ συμπαγές}\}$$

• Έστω ότι το A είναι σ-πεπερασμένο, δηλαδή $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \ A_n \in \mathscr{A}, \ \mu(A_n) < \infty$. Τότε $\mu(A) = \sup\{\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n), m = 1, 2, ...\}$ και αφού $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n) < \infty$ τότε λόγω της προηγούμενης περίπτωσης $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n \ K \text{ συμπαγές}\}$.
Άρα

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \text{ συμπαγές } K \subset \bigcup_{n=1}^{m} A_m \text{ για κάποιο } m = 1, 2, ...\}$$

2. Προφανές αφού $\mathscr{K} \subset \mathscr{G}$ και η μ είναι μονότονη.

□

Αντίστροφα τώρα, αν έχουμε ένα μέτρο Borel μ στον $(X, \mathscr{B})$ το οποίο είναι πεπερασμένο (ή σ-πεπερασμένο) και για κάθε μετρήσιμο σύνολο ισχύει η εσωτερική κανονικότητα, τότε το μέτρο είναι Radon.

Πρόταση 2.1.6. *Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ και μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:*

1. $\mu(A) = sup\{\mu(K) : K$ *συμπαγές* $\subset A\}$ *για κάθε* $A \in \mathscr{B}$.

2. $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ *με* U_n *ανοικτό και* $\mu(U_n) < +\infty$.

Τότε το μέτρο μ είναι Radon. Ιδιαίτερα το συμπέρασμα ισχύει αν αντί της 2. υποθέσουμε απλώς ότι $\mu(X) < +\infty$.

Απόδειξη. Για τυχόν συμπαγές $K \in \mathscr{K}$ είναι $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ και συνεπώς $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k}$ άρα $\mu(K) \leq \sum_{k=1}^{m} \mu(U_{n_k}) < +\infty$.
Ακόμα $\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό} \subset B\}$ για τυχόν $B \in \mathscr{B}$ αφού $\mathscr{K} \subset \mathscr{G}$ και μ είναι μονότονη. Αν τώρα το $A \in \mathscr{B}$ είναι υποσύνολο ενός U_k τότε $\mu(U_k \setminus A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό} \subset U_k \setminus A\}$ και συνεπώς για τυχόν $\theta > 0$ υπάρχει κλειστό υποσύνολο $F \subset U_k \setminus A$ με

$$\mu(U_k) - \mu(A) - \theta < \mu(F) \leq \mu(U_k) - \mu(A)$$

και γράφοντας $\mu(F) = \mu(U_k) - \mu(U_k \setminus F)$ και $V = U_k \setminus F$ έχουμε

$$\mu(A) \leq \mu(V) < \mu(A) + \theta \quad \text{όπου } V \text{ ανοικτό } \supset A$$

Από την 2 μπορούμε να έχουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ με $\Gamma_n \in \mathscr{B}$, ξένα μεταξύ τους και $\Gamma_n \subset U_n, n \in \mathbb{N}$. (Αρκεί να πάρουμε $\Gamma_1 = U_1$ και $\Gamma_n = U_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i), n > 1$).Συνεπώς το τυχόν $B \in \mathscr{B}$ μπορεί να γραφεί ως $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap \Gamma_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ όπου $B_n = B \cap \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα μεταξύ τους και $B_n \subset U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω για κάθε B_n και τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $V_n \supset B_n$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mu(V_n) < \mu(B_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

Θέτοντας $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ έχουμε U ανοικτό $\supset B$ και

$$\mu(B) \leq \mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \mu(B) + \epsilon$$

δηλαδή $\mu(B) = inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό} \supset B\}$ για τυχόν $B \in \mathscr{B}$.
Ώστε το μέτρο μ είναι Radon.

□

Παρατήρηση 2.1.7. Οι δύο αυτές Προτάσεις μας υποδεικνύουν ότι αν για ένα μέτρο Radon μ ισχύει $\mu(X) < \infty$ τότε αυτό είναι και κανονικό αλλά και αντίστροφα ότι ένα σ-πεπερασμένο κανονικό μέτρο μ είναι μέτρο Radon .

Πρόταση 2.1.8. *Έστω $(X, \mathcal{T}_x)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \mapsto Y$ συνεχής. Έστω μ μέτρο Radon στον $(X, \mathscr{B}_X)$, $\mu(X) < \infty$ και ορίζουμε*

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \ , \ B \in \mathscr{B}_Y$$

Τότε το ν είναι μέτρο Radon στον $(Y, \mathscr{B}_Y)$ και $\nu(Y) = \mu(X)$.

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύεται ότι το ν είναι μέτρο στον $(Y, \mathscr{B}_Y)$.
Τώρα, αφού f συνεχής τότε θα είναι και μετρήσιμη άρα για κάθε $B \in \mathscr{B}_Y$ θα έχουμε ότι $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}_X$ οπότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset f^{-1}(B)$ με $\mu(f^{-1}(B) \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ λόγω της εσωτερικής κανονικότητας του μ.
Ακόμα έχουμε ότι το σύνολο $f(K_\epsilon)$ είναι συμπαγές στον Y (αφού f συνεχής)και ισχύει

$$\begin{aligned}\nu(B \setminus f(K_\epsilon)) &= \mu(f^{-1}(B \setminus f(K_\epsilon))) \\ &= \mu(f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(f(K_\epsilon))) \\ &\leq \mu(f^{-1}(B) \setminus K_\epsilon) < \epsilon\end{aligned}$$

δηλαδή $\nu(B) \setminus \nu(f(K_\epsilon)) < \epsilon$ όπου K_ϵ συμπαγή, οπότε $\nu(B)\nu(f(K_\epsilon)) + \epsilon$
Συνεπώς

$$\nu(B) = \sup\{\nu(f(K_\epsilon)) \ : \ f(K_\epsilon) \text{ συμπαγές} \subset B\}$$

και επιπλέον $\nu(Y) = \mu(X) < +\infty$.
Άρα ισχύει η εσωτερική κανονικότητα για κάθε $B \in \mathscr{B}_Y$ και $\nu(Y) < +\infty$ οπότε το μέτρο ν είναι Radon στον $(Y, \mathscr{B}_Y)$. □

Πρόταση 2.1.9. *Έστω τοπ.χώρος $(X, \mathcal{T})$ και μ μέτρο Radon στον $(X, \mathscr{B})$. Έστω $I \neq \emptyset$ και $\{U_i, i \in I\} \subset \mathcal{T}$ τέτοιο ώστε: για οποιαδήποτε $i, j \in I$ υπάρχει $k \in I$ με $U_i \cup U_j \subset U_k$. Τότε ισχύει:*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \sup\{\mu(U_i) : i \in I\}$$

Ιδιαίτερα αν $\Lambda \neq \emptyset$ και $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$.
τότε

$$\mu(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) = \sup\left\{\mu(\bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda) : i \quad \textit{πεπερασμένο υποσύνολο } \subset \Lambda\right\}$$

Απόδειξη. Έστω $s = \sup\{\mu(U_i) : i \in I\}$. Προφανώς $s \leq \mu(\bigcup\limits_{i \in I} U_i)$.
Από την άλλη $\mu(\bigcup\limits_{i \in I} U_i) = sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές} \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i\}$. Όμως για τυχόν $K \in \mathscr{K}$ με $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ ισχύει $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k}$ και από υπόθεση υπάρχει $j \in I$ τέτοιο ώστε $\bigcup\limits_{k=1}^{m} U_{i_k} \subset U_j$ και συνεπώς $\mu(K) \leq \mu(U_j)$ για κάποιο $j \in I$.
Άρα $\mu(K) \leq \sup\{\mu(U_i) : i \in I\} = s$ για κάθε $K \in \mathscr{K}$ με $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ και συνεπώς $\mu(\bigcup\limits_{i \in I} U_i) \leq s$. Όμως ήδη έχουμε $s \leq \mu(\bigcup\limits_{i \in I} U_i)$.
Για τον δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να πάρουμε $I = \{i \subset \Lambda : i \text{ πεπερασμένο}\}$, $U_i = \bigcup\limits_{\lambda \in I} V_\lambda$ και να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα.

□

Πρόταση 2.1.10. *Έστω μ, ν πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathscr{B})$ όπου X τοπ. χώρος και υποθέτουμε ότι το μ είναι Radon, ότι $\mu(X) = \nu(X)$ και ότι $\nu \leq \mu$. Τότε $\nu = \mu$.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν είναι $\nu = \mu$, δηλαδή υπάρχει $A \in \mathscr{B}$ με $\nu(A) < \mu(A)$. Επειδή μ είναι μέτρο Radon για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K \subset A$ με $\mu(A) < \mu(K) + \epsilon$ οπότε για $\epsilon = \mu(A) - \nu(A)$ έχουμε

$$\nu(A) < \mu(K) \text{ με } K \subset A.$$

Από τις σχέσεις :

- $K^c \supset A^c$
- την μονοτονία του μ
- και $\nu \leq \mu$

συμπεραίνουμε ότι $\nu(A^c) \leq \mu(K^c)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες συμπεραίνουμε ότι $\nu(X) < \mu(X)$ - Άτοπο. □

2.2 Κατασκευή μέτρων Radon

Σε αντιστοιχία με την κατασκευή μέτρων σε αυθαίρετους χώρους, θα αναπτύξουμε αποτελέσματα κατασκευής κανονικών μέτρων και μέτρων Radon σε τοπ. χώρους Hausdorff .

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ (Hausdorff) και μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathscr{B} \mapsto [0, \infty)$ τέτοια ώστε:*

i. Αν $A, B \in \mathscr{B}$ με $A \cap B = \emptyset$ τότε $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

ii. Αν $A \in \mathscr{B}$ τότε $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K$ συμπαγές $\subset A\}$

Τότε το μ είναι κανονικό μέτρο στον $(X, \mathscr{B})$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε κατὰρχήν ότι για τυχαία $\{B_n\} \subset \mathscr{B}$ με $B_n \supset B_{n+1}$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ ισχύει

$$\lim_n \mu(B_n) = 0$$

Πράγματι λόγω της (ii.) για τυχόν $\epsilon > 0$ και έκαστο $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν συμπαγή $K_n \in \mathscr{K}$ με $K_n \subset B_n$ και $\mu(B_n - K_n) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Προφανώς $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$ και συνεπώς (χαρακτηριστική ιδιότητα των συμπαγών) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\bigcap_{i=1}^{n_0} K_i = \emptyset$. Συνεπώς έχουμε:

$$B_{n_0} = B_{n_0} \setminus \bigcap_{i=1}^{n_0} K_i = \bigcap_{i=1}^{n_0} B_i \setminus \bigcap_{i=1}^{n_0} K_i \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} (B_i \setminus K_i)$$

και άρα

$$\mu(B_{n_0}) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \mu(B_i \setminus K_i) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \epsilon.$$

Όμως η $\{B_n\}$ φθίνουσα άρα $\mu(B_n) < \epsilon \ \ \forall n \geq n_0$.
Τότε έχουμε ότι το ζεύγος $(\mathscr{B}, \mu)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος Επέκτασης άρα το μ είναι μέτρο στο $\mathscr{B}$, δηλαδή η μ είναι σ-προσθετική για την $\{A_n\}_n$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.
Συνεπώς έχουμε μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$ τέτοιο ώστε $\mu : \mathscr{B} \mapsto [0, \infty)$ (πεπερασμένο) και $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \subset A$ συμπαγές$\}$ (εσωτερική κανονικότητα).
Τότε το μ είναι κανονικό. □

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff και συνολοσυνάρτηση $\tau : \mathscr{K} \mapsto [0, \infty)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

i. $K_1 \subset K_2 \Rightarrow \tau(K_1) \leq \tau(K_2)$

ii. $\tau(K_1 \cup K_2) \leq \tau(K_1) + \tau(K_2)$

iii. $\tau(K_1 \cup K_2) = \tau(K_1) + \tau(K_2)$ *όταν* $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

iv. $\forall \epsilon > 0$ *και* $\forall K \in \mathscr{K}$ *υπάρχει ανοικτό* $U \supset K$ *με* $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ *για κάθε* $C \in \mathscr{K}$ *με* $K \subset C \subset U$.

Τότε η τ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε ένα κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$. Αν επιπλέον η τ είναι φραγμένη και ισχύει $sup\{\tau(K) : K \in \mathscr{K}\} = 1$ τότε το μέτρο μ είναι μέτρο πιθανότητας.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η συνολοσυνάρτηση τ επεκτείνεται σε ένα μοναδικό κανονικό μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$ θα πρέπει πρώτα να αποδειθχούν τα παρακάτω Λήμματα:

Λήμμα 2.2.3. *Έστω τοπολογικός χώρος Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ και ανοικτά $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Έστω συμπαγές $K \in \mathcal{K}$ με $K \subset U_1 \cup U_2$. Τότε υπάρχουν συμπαγή $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ με $K = K_1 \cup K_2$ και $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$.*

Απόδειξη. Τα σύνολα $K \cap U_1^c$, $K \cap U_2^c$ είναι ξένα και συμπαγή και άρα (X Hausdorff) υπάρχουν ανοικτά V_1, V_2 με $V_1 \supset K \cap U_1^c$,$V_2 \supset K \cap U_2^c$ και $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Θέτουμε $K_1 = K \cap V_1^c$ και $K_2 = K \cap V_2^c$.
Τα K_1, K_2 είναι συμπαγή και είναι τα ζητούμενα.

□

Λήμμα 2.2.4. *Έστω $\mathcal{H}$ κλάση υποσυνόλων του συνόλου S με $\emptyset \in \mathcal{H}$. Έστω $\lambda : \mathcal{H} \mapsto [0, \infty]$ με $\lambda(\emptyset) = 0$ και έστω μ το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathcal{H}, \lambda)$. Έστω $\mathcal{M}_\mu = \{X \subset S : \mu(A \cap X) + \mu(A \cap X^c) = \mu(A) \ \forall \ A \subset S\}$ η σ-άλγεβρα των μετρήσιμων υποσυνόλων του S.*
Τότε $X \in \mathcal{M}_\mu \Leftrightarrow \lambda(A) \geq \mu(A \cap X) + \mu(A \cap X^C)$ για κάθε $A \in \mathcal{H}$ με $\lambda(A) < \infty$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $X \in \mathcal{M}_\mu$ τότε $\mu(A \cap X) + \mu(A \cap X^c) = \mu(A)$. Όμως $\mu(A) \leq \lambda(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{H}$. Άρα $\mu(A \cap X) + \mu(A \cap X^c) \leq \lambda(A)$.
($\Leftarrow$) Έστω τυχόν $T \subset S$. Έχουμε ότι $\mu(T) \leq \mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^c)$ διότι το μ είναι υποπροσθετικό.
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\mu(T) \geq \mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^C)$ και μάλιστα για την περίπτωση $\mu(T) < +\infty$. Πράγματι για τυχόν $\epsilon > 0$ από τον ορισμό του μ υπάρχει μια οικογένεια $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ με $\bigcup\limits_n A_n \supset T$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \mu(T) + \epsilon \tag{1}$$

Επειδή $T \cap X \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \bigcap X$ και $T \cap X^c \subset \bigcup\limits_n A_n \cap X^c$ θα είναι:
$\mu(T \cap X) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap X)$ και $\mu(T \cap X^c) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap X^c)$ άρα

$$\mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A_n \cap X) + \mu(A_n \cap X^c)] \tag{2}$$

Από την (1) επειδή $\mu(T) < +\infty$ έχουμε ότι $\sum \lambda(A_n) < +\infty$ άρα $\lambda(A_n) < \infty$ και από την υπόθεση ότι $\mu(A_n \cap X) + \mu(A_n \cap X^c) \leq \lambda(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Έτσι από (2), (1) έχουμε για κάθε $\epsilon > 0$

$$\mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \mu(T) + \epsilon$$

Ώστε $\mu(T) \geq \mu(T \cap X) + \mu(T \cap X^c)$ για κάθε $T \subset S$.

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.2. :
Ορίζουμε $\tau_* : \mathcal{T} \mapsto [0, \infty]$ ως ακολούθως

$$\tau_*(U) = \sup\{\tau(K) : K \in \mathcal{K} \text{ με } K \subset U\} \quad , \ U \in \mathcal{T}$$

Έστω μ το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mathcal{T}, \tau_*)$. Προφανώς ισχύει ότι

$$\mu(U) \leq \tau_*(U) \quad \forall U \ \in \mathcal{T}$$

1. $\mathcal{M}_\mu \supset \mathcal{T}$
   Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.4. αρκεί να δείξουμε ότι
   $\tau_*(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c)$ για όλα τα $A, B \in \mathcal{T}$ με $\tau_*(A) < +\infty$.
   Πράγματι:
   Για τυχόν $D \in \mathcal{K}$ με $D \subset A \cap B$ ισχύουν τα παρακάτω:
   για όλα τα $E \in \mathcal{K}$ με $E \subset A \cap D^C$ έχουμε

$$D \cup E \in \mathcal{K} \quad , D \cup E \subset A \quad \text{και} \quad D \cap E = \emptyset$$

και άρα $\tau_*(A) \geq \tau(D \cup E) = \tau(D) + \tau(E)$
(η τ είναι απλά προσθετική στο $\mathcal{K}$).
Από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\sup\{\tau(E) : E \in \mathcal{K} \text{ με } E \subset A \cap D^c\} \leq \tau_*(A) - \tau(D)$$

και επειδή $A \cap D^C \in \mathcal{T}$ τότε

$$\tau_*(A) \geq \tau_*(A \cap D^c) + \tau(D) \text{ για κάθε } D \in \mathcal{K} \text{ με } D \subset A \cap B \qquad (\star)$$

Τώρα για όλα τα $D \in \mathcal{K}$ με $D \subset A \cap B$ έχουμε τα εξής: $A \cap D^c \supset A \cap B^c$ και $A \cap D^c \in \mathcal{T}$ άρα $\mu(A \cap B^c) \leq \tau_*(A \cap D^c)$ οπότε λόγω της $(\star)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\tau_*(A) \geq \mu(A \cap B^c) + \tau(D) \text{ για όλα τα } D \in \mathcal{K} : D \subset A \cap B$$

Από αυτή και το $\sup\{\tau(D) : D \in \mathcal{K} \text{ με } D \subset A \cap B\} = \tau_*(A \cap B)$ έχουμε $\tau_*(A) \geq \mu(A \cap B^c) + \tau_*(A \cap B)$.
Όμως $\tau_*(A \cap B) \geq \mu(A \cap B)$ και συνεπώς το ζητούμενο.

2. Η τ_* είναι μονότονη και σ-υποπροσθετική στο $\mathcal{T}$.
Η μονοτονία είναι άμεση λόγω της μονοτονίας της τ.
Θα δείξουμε τώρα ότι η τ_* είναι απλά υποπροσθετική στο $\mathcal{T}$. Πράγματι:
Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Για τυχόν $K \subset U_1 \cup U_2$ και σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.3. υπάρχουν συμπαγή K_1, K_2 με $K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$ και $K = K_1 \cup K_2$. Άρα:

$$\tau(K) = \tau(K_1 \cup K_2) \leq \tau(K_1) + \tau(K_2) \leq \tau_*(U_1) + \tau_*(U_2)$$

και συνεπώς $\sup\{\tau(K) : K \in \mathcal{K} \text{ με } K \subset U_1 \cup U_2\} \leq \tau_*(U_1) + \tau_*(u_2)$.
Όμως $\sup\{\tau(K) \ : \ K \subset U_1 \cup U_2, \ K \text{ συμπαγές}\} = \tau_*(U_1 \cup U_2)$.
Οπότε

$$\tau_*(U_1 \cup U_2) \leq \tau_*(U_1) + \tau_*(U_2)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η τ_* είναι σ-υποπροσθετική στο $\mathcal{T}$.
Έστω $\{U_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$. Για τυχόν $K \in \mathcal{K}$ με $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλαδή $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k}$ οπότε $\tau(K) \leq \tau_*(\bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k})$.
Λόγω (απλής) υποπροσθετικότητας της τ_* ισχύει
$\tau_*(\bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{m} \tau_*(U_{n_k})$ άρα $\tau(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(U_n)$ για όλα τα συμπαγή $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.
Συνεπώς η τ_* είναι σ-υποπροσθετική στο $\mathcal{T}$.

3. $\mu(U) = \tau_*(U)$ για κάθε $U \in \mathcal{T}$.
Προφανώς $\mu(U) \leq \tau_*(U), U \in \mathcal{T}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(U) \geq \tau_*(U)$ για $\mu(U) < +\infty$.

Τότε :

$$\mu(U) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(V_n) : V_n \in \mathcal{T} \text{ και } \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \supset U\right\}.$$

Όμως η τ_* είναι σ-υποπροσθετική και μονότονη, άρα για οποιαδήποτε οικογένεια $\{V_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ με $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \supset U$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(V_n) \geq \tau_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n) \geq \tau_*(U).$$

Άρα $\qquad \mu(U) \geq \tau_*(U) \quad \forall U \in \mathcal{T}.$

4. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{T} \text{ με } U \supset A\} \quad \forall A \subset X$ (εξωτερική κανονικότητα).

   - Για $\mu(A) = +\infty$ είναι άμεση.
   - Για $\mu(A) < +\infty$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $\{U_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ με $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset A$ με

     $$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(U_n) < \mu(A) + \epsilon$$

     Αν θέσουμε $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ τότε $V \supset A, V \in \mathcal{T}$ και

     $$\mu(A) \leq \mu(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(U_n)$$

     συνεπώς $\qquad \mu(A) \leq \mu(V) < \mu(A) + \epsilon$

5. $\mu(K) = \tau(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}$
   Έστω τυχόν $K \in \mathcal{K}$. Σύμφωνα με το 3,4

   $$\mu(K) = \inf\{\tau_*(U) : U \in \mathcal{T} \text{ με } U \supset K\}$$

   Όμως από τον ορισμό της τ_* ισχύει $\tau_*(U) \geq \tau(K)$ όταν $U \in \mathcal{T}, K \in \mathcal{K}$ και $U \supset K$. Άρα $\mu(K) \geq \tau(K)$.
   Εξάλλου για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει από υπόθεση $U_\epsilon \in \mathcal{T}$ με $U_\epsilon \supset K$ και $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ όταν $C \in \mathcal{K}$ και $K \subset C \subset U_\epsilon$. Τότε λόγω της μονοτονίας της τ και επειδή $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ έχουμε:

   $$\tau_*(U) = \sup\{\tau(C) : C \in \mathcal{K} \text{ με } K \subset C \subset U_\epsilon\} \leq \tau(K) + \epsilon$$

   Όμως $\tau_*(U_\epsilon) = \mu(U_\epsilon)$ για κάθε $U_\epsilon \in \mathcal{T}$
   Άρα $\mu(U_\epsilon) \leq \tau(K) + \epsilon$.
   και $U_\epsilon \supset K$ άρα $\mu(K) \leq \mu(U_\epsilon) \leq \tau(K) + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$
   Συνεπώς $\mu(K) \leq \tau(K) + \epsilon$.

Παρατήρηση 2.2.5. Η συνθήκη $(iv.) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \;\; \forall K \in \mathscr{K}$ υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ με $U \supset K$ και $\tau(C) \leq \tau(K) + \epsilon \;\; \forall C \in \mathscr{K} : C \subset U$.
Πράγματι αν ισχύει η $(iv.)$ και συνεπώς $\tau(\Lambda) < \tau(K) + \epsilon \;\; \forall \Lambda \in \mathscr{K} : K \subset \Lambda \subset U$ και για τυχόν $C \in \mathscr{K}$ με $C \subset U$ έχουμε $K \cup C \in \mathscr{K}$ και $K \subset K \cup C \subset U$ και συνεπώς $\tau(K \cup C) < \tau(K) + \epsilon$ και αφού η τ μονότονη $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$

Ένα ακόμα **σημαντικό** για τη συνέχεια αποτέλεσμα κατασκευής κανονικών μέτρων είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπ. χώρος Hausdorff και $\mathscr{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X με $\mathcal{A} \subset \mathscr{B}_X$. Έστω συνολοσυνάρτηση $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0, \infty)$ που ικανοποιεί τις*

i. $\tau(X) = 1$

ii. *Αν $A, B \in \mathscr{A}$ με $A \cap B = \emptyset$ τότε $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$ (απλά προσθετική)*

iii. *Για κάθε $B \in \mathscr{A}$ είναι $\tau(B) = \sup\{\tau(F) : F$ κλειστό, $F \in \mathscr{A}, F \subset B\}$*

iv. *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset X$ τέτοιο ώστε $\tau(B) > 1 - \epsilon$ για κάθε $B \in \mathscr{A}$ με $B \supset K_\epsilon$*

v. *Η άλγεβρα $\mathscr{A}$ περιέχει μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$.*

Τότε υπάρχει μοναδικό κανονικό μέτρο (πιθανότητας) μ στον $(X, \mathscr{B}_X)$ που επεκτείνει την τ.

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε τα εξής:

Ορισμός 2.2.7. *Έστω X ένα οποιοδήποτε σύνολο και $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. οικογένεια αυτή λέγεται* ***ανοδικά διευθυνόμενη*** *όταν ισχύει η εξής ιδιότητα:*

> *Για οποιαδήποτε A_a, A_b από αυτήν υπάρχει $A_\gamma \in \{A_\lambda\}$ με $A_a \cup A_b \subset A_\gamma$.*

Λήμμα 2.2.8. *Έστω ανοδική* ***ανοικτών*** *$\{U_\lambda\} \subset \mathscr{A}$ με $\bigcup_\lambda U_\lambda = X$.*

Τότε ισχύει: $\sup_\lambda \tau(U_\lambda) = 1$.

Απόδειξη. Πράγματι· Έστω $\epsilon > 0$ και συμπαγές $K_\epsilon \subset X$ τέτοιο ώστε: $\tau(B) > 1 - \epsilon \; \forall B \in \mathscr{A}$ με $B \supset K_\epsilon$. Τότε υπάρχει πεπερασμένο $I \subset \Lambda$ με $K_\epsilon \subset \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda \in \mathscr{A}$ και από τη μονοτονία της τ έχουμε

$$1 \geq \tau(\bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda) > 1 - \epsilon$$

Όμως $\{U_\lambda\}$ ανοδική άρα υπάρχει $\gamma \in \Lambda$ με $\bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda \subset U_\gamma \in \mathscr{A}$ και για το οποίο θα είναι

$$1 \geq \tau(U_\gamma) > 1 - \epsilon$$

Οπότε $\sup_\lambda \tau(U_\lambda) = 1$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.6. :
Για τα ανοικτά $U \in \mathcal{T}_X$ ορίζουμε

$$\tau_*(U) = \sup\{\tau(B) : B \subset U, B \in \mathscr{A}\}$$

και έστω μ το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau_*, \mathcal{T}_X)$.

1. Έστω $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\tau_*(U) - \sup_\lambda \tau(U_\lambda) > 2\epsilon \tag{1}$$

Από τον ορισμό της τ_* υπάρχει $B_\epsilon \in \mathscr{A}$ με $B_\epsilon \subset U$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \tau_*(U) &= \sup\{\tau(B_\epsilon),\ B_\epsilon \subset U,\ B_\epsilon \in \mathscr{A}\} \\ &\Leftrightarrow \tau_*(U) < \tau(B_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} \\ &\Leftrightarrow \tau(B_\epsilon) > \tau_*(U) - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Από την υπόθεση iii υπάρχει κλειστό $F_\epsilon \in \mathscr{A}$ με $F_\epsilon \subset B_\epsilon$ τέτοιο ώστε $\tau(F_\epsilon) > \tau(B_\epsilon) - \frac{\epsilon}{2}$ και συνεπώς

$$\tau(F_\epsilon) > \tau_*(U) - \epsilon \tag{2}$$

Η οικογένεια $\{U_\lambda \cup F_\epsilon^c\} \subset \mathscr{A}$ είναι ανοδική και $\bigcup_\lambda (U_\lambda \cup F_\epsilon^c) = X$ θα έχουμε (από το Λήμμα 2.2.8.) ότι

$$\sup_\lambda \tau(U_\lambda \cup F_\epsilon^c) = 1 \tag{3}$$

όμως λόγω των (2), (1)

$$\begin{aligned} \sup_\lambda \tau(U_\lambda \cup F_\epsilon^c) &\leq \sup_\lambda [\tau(U_\lambda) + 1 - \tau(F_\epsilon)] \\ &\leq \sup_\lambda \tau(U_\lambda) + 1 - \tau_*(U) + \epsilon \\ &< -2\epsilon + 1 + \epsilon \\ &= 1 - \epsilon < 1 \quad \text{Άτοπο} \end{aligned}$$

Συνεπώς $\tau_*(U) = \sup_\lambda \tau(U_\lambda)$ με $\bigcup_\lambda U_\lambda = U$.

2. Αν $\{U_\lambda\} \subset \mathcal{T}_X$ είναι ανοδική με $\bigcup_\lambda U_\lambda = U$ τότε

$$\tau_*(U) = \sup_\lambda \tau_*(U_\lambda)$$

Έστω $\mathscr{H} = \{A \subset X : A \in \mathscr{A}, A \text{ ανοικτό} \subset U_\lambda \text{ για κάποιο } \lambda\}$.
Η $\mathscr{H}$ είναι ανοδική και ακόμα $\bigcup_{A \in \mathscr{H}} A = U$.

Το τελευταίο διότι για τυχόν $x \in U$ έχουμε ότι $x \in U_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda$ και αφού η $\mathscr{A}$ περιέχει βάση θα είναι $U_\lambda = \bigcup_{i \in I} A_i$ με ανοικτά $A_i \in \mathscr{A}$, οπότε $x \in A_i \equiv A \subset U_\lambda$. Όμως $A \in \mathscr{H}$.
Ο αντίθετος εγκλεισμός είναι προφανής. Ώστε κατά το 1

$$\tau_*(U) = \sup\{\tau(A) : A \in \mathscr{H}\} \tag{4}$$

Επειδή τώρα για τυχόν $A \in \mathscr{H}$ είναι $A \subset U_\lambda$ για κάποιο λ και συνεπώς $\tau(A) \leq \tau_*(U_\lambda)$ για κάποιο λ, τότε $\sup\{\tau(A) \ : \ A \in \mathscr{H}\} \leq \sup_\lambda \tau_*(U_\lambda)$.
Ώστε

$$\tau_*(U) \leq \sup_\lambda \tau_*(U_\lambda)$$

Η αντίθετη ανισότητα προκύπτει από την $\tau_*(U_\lambda) \leq \tau_*(U) \ \ \forall \lambda$.

3. Η τ_* είναι (απλά) προσθετική, υποπροσθετική και σ-υποπροσθετική.
Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ με $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Αφού η $\mathscr{A}$ περιέχει βάση της τοπολογίας θα είναι

$$U_1 = \bigcup_{a \in I} V_a^1 \text{ με } V_a^1 \in \mathscr{A} \text{ , ανοικτά}$$

Συνεπώς

$$U_1 = \bigcup (\bigcup_{a \in i} V_a^1 : i \text{ πεπερασμένο } \subset I) = \bigcup_i U_i^1$$

με την $\{U_i^1\} \subset \mathscr{A} \cap \mathcal{T}$ προφανώς ανοδική.
Όμοια $U_2 = \bigcup_j U_j^2$ με την $\{U_j^2\} \subset \mathscr{A} \cap \mathcal{T}$ επίσης ανοδική και αναγκαστικά

$$U_i^1 \cap U_j^2 = \emptyset \ \ \forall \ i, j$$

Η οικογένεια $\{\Psi_{(i,j)} = U_i^1 \cup U_j^2\} \subset \mathscr{A} \cap \mathcal{T}$ είναι ανοδική και προφανώς $\bigcup_{(i,j)} \Psi_{(i,j)} = U_1 \cup U_2$ οπότε κατά το 1

$$\begin{aligned}
\tau_*(U_1 \cup U_2) &= \sup_{(i,j)} \tau(U_i^1 \cup U_j^2) \\
&= \sup_{(i,j)} [\tau(U_i^1) + \tau(U_j^2)] \\
&= \sup_i \tau(U_i^1) + \sup_j \tau(U_j^2) \\
&= \tau_*(U_1) + \tau_*(U_2)
\end{aligned}$$

Για την σ-υποπροσθετικότητα, ας είναι $U_n \in \mathcal{T}_X, \ n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\tau_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \tau_*(\bigcup \{\bigcup_{n \in i} U_n : i \text{ πεπερ. } \subset \mathbb{N}\})$$

και συνεπώς κατά το 2 και την υποπροσθετικότητα της τ_* (που συνάγεται όπως η απλή προσθετικότητα) είναι

$$\begin{aligned}\tau_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) &= \sup\{\tau_*(\bigcup_{n\in i} U_n) : i \text{ πεπερ. } \subset \mathbb{N}\} \\ &\leq \sup_i \sum_{n\in i} \tau_*(U_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_*(U_n)\end{aligned}$$

4.
$$\mu(U) = \tau_*(U) \quad \forall\, U \in \mathcal{T}_X$$

Αφού μ είναι το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau_*, \mathcal{T}_X)$ τότε $\mu(U) \leq \tau_*(U)$ $\forall\, U$ ανοικτό $\subset X$.
Για τυχούσα $\{V_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}_X$ με $\bigcup_n V_n \supset U \in \mathcal{T}_X$ και επειδή η τ_* είναι σ-υποπροσθετική έχουμε

$$\sum_n \tau_*(V_n) \geq \tau_*(\bigcup_n V_n) \geq \tau_*(U)$$

Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου συμπεραίνουμε ότι $\mu(U) \geq \tau_*(U)$.

5. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon : \mu(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$.
Από την υπόθεση iv υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset X$ με

$$\tau(B) > 1 - \epsilon \quad \forall\, B \in \mathscr{A} \text{ με } B \supset K_\epsilon \tag{5}$$

Αφού K_ϵ^c ανοικτό και η $\mathscr{A}$ περιέχει βάση της τοπολογίας θα έχουμε ότι $K_\epsilon^c = \bigcup_i U_i$ με $\{U_i\} \subset \mathscr{A} \cap \mathcal{T}$ ανοδική. Από 1,4 έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\mu(K_\epsilon^c) &= \tau_*(K_\epsilon^c) \\ &= \sup_i \tau(U_i) \\ &= \sup_i (1 - \tau(U_i^c)) \\ &= 1 - \inf_i \tau(U_i^c)\end{aligned}$$

Από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου είναι

$$\mu(K_\epsilon^c) \geq 1 - \mu(K_\epsilon)$$

και συνεπώς

$$\mu(K_\epsilon) \geq \inf_i \tau(U_i^c)$$

Όμως $U_i^c \in \mathscr{A}$ και $U_i^c \supset K_\epsilon$ άρα $\tau(U_i^c) > 1 - \epsilon$.
Οπότε, λόγω της 5, ισχύει $\mu(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$.

6.

$$\mathcal{M}_\mu \supset \mathscr{B}_X$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχόν $U \in \mathcal{T}$ ισχύει

$$\tau_*(A) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) \text{ για όλα τα } A \in \mathcal{T}$$

- Έστω $U \in \mathcal{T}$ και έχει συμπαγές συμπλήρωμα $U^c = L$. Τότε για κάθε $x \in U$ υπάρχουν ανοικτές περιοχές N_x του x και N_L του L ώστε $N_x \cap N_L = \emptyset$. Επιλέγουμε $N_x \subset U$ και $N_x \in \mathscr{A}$ αφού η $\mathscr{A}$ περιέχει βάση της τοπολογίας. Φανερά τώρα έχουμε $\bar{N}_x \subset \overline{N_L^c} = N_L^c \subset U$ και συνεπώς $U = \bigcup\limits_{x \in U} N_x$ με $N_x \in \mathscr{A}$ και $\bar{N}_x \subset U$.
  Τελικά $U = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ με $V_\lambda \in \mathscr{A}$ και $\bar{V}_\lambda \subset U$ οπότε

  $$U = \bigcup (\bigcup_{\lambda \in i} V_\lambda : i \text{ πεπερ. } \subset \Lambda) = \bigcup_i U_i$$

  όπου $\{U_i\} \subset \mathscr{A}$ ανοδική με $\bar{U}_i = F_i \subset U$.
  Τώρα το $A = (A \cap U_i) \cup (A \cap U_i^c) \supset (A \cap U_i) \cup (A \cap F_i^c)$.
  Άρα από το 3 και 4 έχουμε

  $$\begin{aligned} \tau_*(A) &\geq \tau_*[(A \cap U_i) \cup (A \cap F_i^c)] \\ &= \tau_*(A \cap U_i) + \tau_*(A \cap F_i^c) \\ &\geq \tau_*(A \cap U_i) + \mu(A \cap F_i^c) \quad \forall i \end{aligned}$$

  και αφού $F_i^c \supset U^c$

  $$\tau_*(A) \geq \tau_*(A \cap U_i) + \mu(A \cap U^c) \quad \forall i$$

  Όμως από 2 και 4

  $$\sup_i \tau_*(A \cap U_i) = \tau_*(A \cap U) = \mu(A \cap U)$$

  και συνεπώς

  $$\tau_*(A) \geq \mu(A \cap U) + \mu(A \cap U^c) \text{ για όλα τα } A \in \mathcal{T}_X$$

  Ώστε τα $U \in \mathcal{T}_X$ με U^c συμπαγές ανήκουν στην $\mathcal{M}_\mu$ και συνεπώς $\mathcal{M}_\mu \supset \mathcal{K}_X$.
- Τώρα από την 5 μπορούμε να βρούμε ακολουθία συμπαγών $K_n \subset X, n \in \mathbb{N}$ με $\mu(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$ και συνεπώς με $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ θα είναι $Y \in \mathcal{M}_\mu$ και $\mu(Y) = 1$. Έτσι για τυχόν $U \in \mathcal{T}$ το $F = U^c$ είναι κλειστό και $F = (F \cap Y) \cup (F \cap Y^c)$. Οπότε αφενός μεν $\mu(F \cap Y^c) \leq \mu(Y^c) = 0$ άρα $F \cap Y^c \in \mathcal{M}_\mu$ αφετέρου δε $F \cap Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (F \cap K_n)$ και $F \cap K_n \in \mathcal{K}_X$.

7.
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{T} \text{ με } U \subset A\} \ , A \subset X$$
Για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει $\{U_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}_X$ με $\bigcup_n U_n \supset A$ εις τρόπον ώστε
$$\mu(A) \leq \sum_n \tau_*(U_n) < \mu(A) + \epsilon$$
Θέτουμε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ τότε $U \in \mathcal{T}_X \ , U \supset A$
και άρα
$$\mu(A) \leq \mu(U) < \mu(A) + \epsilon$$

8. $\mu = \tau$ στην $\mathscr{A}$
Έστω $B \in \mathscr{A}$. Τότε για τυχόν $U \in \mathcal{T}_X$ με $U \supset B$
$$\mu(U) = \tau_*(U) = \sup\{\tau(\Gamma) : \Gamma \subset U, \Gamma \in \mathscr{A}\} \geq \tau(B)$$
και συνεπώς
$$\inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{T}_X \text{ με } U \supset B\} \geq \tau(B)$$
Επικαλούμενοι την 7 παίρνουμε την $\mu(B) \geq \tau(B)$. Εξάλλου από τις ii, iii
$$\tau(B) = \inf\{\tau(U) : U \in \mathscr{A}, U \text{ ανοικτό με } U \supset B\}$$
Άρα για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει $U_\epsilon \in \mathscr{A} \cap \mathcal{T}_X$ με
$$U_\epsilon \supset B \quad \text{και } \tau(U_\epsilon) < \tau(B) + \epsilon$$
και από τη μονοτονία της τ στην $\mathscr{A}$ θα έχουμε
$$\tau(\Gamma) < \tau(B) + \epsilon \ \ \forall \Gamma \in \mathscr{A} \text{ με } \Gamma \subset U_\epsilon$$
Από τον ορισμό της τ_*, το 4 και το $U_\epsilon \supset B$ συμπεραίνουμε τώρα ότι για κάθε $\epsilon > 0$
$$\mu(B) \leq \mu(U_\epsilon) = \tau_*(U_\epsilon) \leq \tau(B) + \epsilon$$
Ώστε
$$\mu(B) \leq \tau(B)$$
Σύμφωνα με τα 5,6,7 το μέτρο μ στον $(X, \mathcal{M}_\mu)$ είναι κανονικό και η μοναδικότητά του προκύπτει από τη συνθήκη v.

Είναι φανερό ότι το Θεώρημα παραμένει ισχυρό αν η i αντικατασταθεί από την $\tau(X) = a > 0$ και στην iv η ανισότητα $\tau(B) > 1 - \epsilon$ από την $\tau(B) > a - \epsilon$. Στην περίπτωση αυτή βέβαια το μέτρο μ δεν είναι μέτρο πιθανότητας.
Το παρακάτω αποτελεί Θεώρημα κατασκευής μέτρου Radon.

Θεώρημα 2.2.9. *Έστω τοπ. χώρος Hausdorff* $(X, \mathcal{T})$ *και συνολοσυνάρτηση* $\tau : \mathscr{K} \mapsto [0, \infty)$ *που ικανοποιεί τις απαιτήσεις:*

1. *Αν* $K, L \in \mathscr{K}$ *με* $K \subset L$ *τότε* $\tau(K) \leq \tau(L)$ *(μονοτονία)*
2. $\tau(K \cup L) \leq \tau(K) + \tau(L)$ *για όλα τα* $K, L \in \mathscr{K}$
3. $\tau(K \cup L) = \tau(K) + \tau(L)$ *για όλα τα* $K, L \in \mathscr{K}$ *με* $K \cap L = \emptyset$
4. *Για οποιαδήποτε* $\{K_a, a \in I\} \subset \mathscr{K}$ *τέτοια ώστε :* $a, b \in I \Rightarrow$ *υπάρχει* $\gamma \in I$ *με* $K_a \cap K_b \supset K_\gamma$ *ισχύει* $\tau(\bigcap_{a \in I} K_a) = \inf_{a \in I} \tau(K_a)$

Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο Radon μ *στον* $(X, \mathscr{B})$ *τέτοιο ώστε* $\mu(K) = \tau(K)$ *για κάθε* $K \in \mathscr{K}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι οι απαιτήσεις 1-3 είναι όμοιες με τις απαιτήσεις $i - iii$ του Θεωρήματος 2.2.2. Συνεπώς για την απόδειξη αρκεί να δειχθεί ότι η συνθήκη iv συνεπάγεται την 4. Πρέπει δηλαδή να δείξουμε ότι:

> Για κάθε $\epsilon > 0$, για κάθε $K \in \mathscr{K}$ υπάρχει ανοικτό $U \supset K$ με $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ για κάθε $C \in \mathscr{K}$, $K \subset C \subset U$
> $\Rightarrow$ Για $\{K_a\}_{\{} a \in I\} \subset \mathscr{K}$ τέτοια ώστε για κάθε $a, b \in I$ τότε υπάρχει $\gamma \in I$ με $K_\gamma \subset K_a \cap K_b$ ισχύει $\tau(\bigcap_a K_a = \inf_a \tau(K_a)$.

Έστω $K = \bigcap_a K_a$ συμπαγές. Για $\epsilon > 0$ υπάρχει $U_\epsilon \subset K$ ανοικτό με $\tau(C) < \tau(K) + \epsilon$ για κάθε $C \in \mathscr{K}$, $K \subset C \subset U_\epsilon$. Αφού $U^c \cap K = \emptyset$ οπότε $\bigcap_a (U^c \cap K_a) = \emptyset$ θα υπάρχει πεπερασμένο $E \subset I$ με $\bigcap_{a \in E} (U^c \cap K_a) = \emptyset$.
Έστω τώρα $b \in I$ με $K_b \subset \bigcap_{a \in E} K_a$. Τότε $U^c \cap K_b \subset \bigcap_{a \in E} (U^c \cap K_a) \Rightarrow K_b \subset U$ οπότε $\tau(K_b) < \tau(K) + \epsilon$ που είναι και το ζητούμενο. □

Συναφές αποτέλεσμα είναι το γνωστό ως Θεώρημα Henry .

Θεώρημα 2.2.10. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπ. χώρος Hausdorff και* $\mathscr{A}$ *μια άλγεβρα υποσυνόλων του* X *με* $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$. *Έστω συνολοσυνάρτηση* $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0, \infty)$ *που ικανοποιεί:*

(α′) *Αν* $A, B \in \mathscr{A}$ *με* $A \cap B = \emptyset$ *τότε* $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$ *(απλά προσθετική).*

(β′) *Για κάθε* $A \in \mathscr{A}$ $\tau(A) = \sup\{\tau(K) : K$ *συμπαγές* $\subset A$ *με* $K \in \mathscr{A}\}$.

Τότε η τ *επεκτείνεται σε ένα μέτρο Radon* μ *στον* $(X, \mathscr{B})$. *Αν επιπλέον η* $\mathscr{A}$ ***περιέχει μια βάση της τοπολογίας*** $\mathcal{T}$ *τότε το* μ *είναι το μόνο στον* $(X, \mathscr{B})$ *για το οποίο ισχύει* $\mu(A) = \tau(A)$ *για κάθε* $A \in \mathscr{A}$.

Απόδειξη. [26] ή [23] □

Παρατήρηση 2.2.11.

1. Έχουμε ότι $\tau(X) < +\infty$ (αφού $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0, \infty)$) και επιπλέον έχουμε ότι οι υποθέσεις (α′) ,(β′) μας οδηγούν στις ii, iii, iv του προηγούμενου Θεωρήματος (προφανώς (α′) $\equiv ii$ και (β′) $\Leftarrow iii, iv$) με $\tau(B) > \tau(X) - \epsilon$ αντί για $\tau(B) > 1 - \epsilon$, δηλαδή:

$$\text{Αν για κάθε } A \in \mathscr{A} \ \tau(A) = \sup\{\tau(K) \ : \ K \subset A, \ K \in \mathscr{A}, \ K \text{ συμπαγές}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} iii. \ \forall B \in \mathscr{A} \ \tau(B) = \sup\{\tau(F), \ F \subset B, \ F \in \mathscr{A}, \ F \text{ κλειστό}\} \\ iv. \ \forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon \subset X \text{ συμπαγές } : \tau(B) > \tau(X) > \epsilon \ \forall B \in \mathscr{A}, \ B \supset K_\epsilon \end{cases}$$

Προφανώς προκύπτει το ερώτημα αν ισχύει το αντίστροφο.
Στα πλαίσια λοιπον του Θεωρήματος Henry η απαίτηση (β′) μπορεί να αντικατασταθεί από τις εξής:

$$(\gamma) \ : \ \tau(A) = \sup\{\tau(F) \ : \ F \subset A, F \in \mathscr{A}, \ F \text{ κλειστό}\}$$

$$(\gamma)' \ \ \forall \epsilon > 0 \text{ υπάρχει συμπαγές } K_\epsilon \in \mathscr{A} \text{ τέτοιο ώστε } \tau(K_\epsilon) > \tau(X) - \epsilon.$$

Για την απόδειξη παρατηρούμε τα εξής:
Λόγω του (α′) του Θεωρήματος Henry η τ είναι απλά προσθετική. Επίσης για τυχόν $\epsilon > 0$ και τυχόν $A \in \mathscr{A}$ έχουμε από $(\gamma), (\gamma)'$

$$\tau(A \setminus F_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2} \text{ με } F_\epsilon \text{ κλειστό } \subset A \text{ και } F_\epsilon \in \mathscr{A}$$

$$\tau(X \setminus K_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2} \text{ με } K_\epsilon \text{ συμπαγές στο } \mathscr{A}$$

Όμως $A \setminus F_\epsilon \cap K_\epsilon = X \cap A \setminus F_\epsilon \cap K_\epsilon \subset (X \setminus K_\epsilon) \cup (A \setminus F_\epsilon)$
και συνεπώς με $\Lambda = F_\epsilon \cap K_\epsilon$ ισχύει $\tau(A \setminus \Lambda) < \epsilon$.
Όμως $\Lambda = F_\epsilon \cap K_\epsilon \in \mathscr{A}$ και είναι συμπαγές.

2. Επειδή η τ είναι απλά προσθετική στην άλγεβρα $\mathscr{A}$ (η οποία είναι και ημιδακτύλιος) μπορεί να επεκταθεί (από Θεώρημα Καραθεοδωρή) στο μ στον $(X, \mathscr{B})$. Για την ακρίβεια, η τ επεκτείνεται στη $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{B}$ και από Λήμμα Zorn παίρνουμε τη maximal επέκταση η οποία περίεχει τα κλειστά και άρα όλη τη $\mathscr{B}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά την κατασκευή Radon μέτρων πιθανότητας σε τοπικά κυρτούς διανυσματικούς τοπολογικούς χώρους.
Υπενθυμίζουμε :

Ορισμός 2.2.12.

1. *Ένας τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται* **κανονικός** *αν για κάθε $F \subset X$ κλειστό, για κάθε $x \in X$ με $x \notin F$ υπάρχουν $G_1, G_2 \subset X$ ανοικτά με $x \in G_1, \ F \subset G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

2. *Ένας τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ ονομάζεται* **πλήρως κανονικός** *(completely regular)$\Leftrightarrow$ είναι Hausdorff και για κάθε $x \in X$ και κάθε κλειστό $F \subset X$ με $x \notin F$ υπάρχει συνεχής $f : X \mapsto [0,1]$ με $f(x) = 1$ και $f(y) = 0$ για κάθε $y \in F$.*

3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ πλήρως κανονικός τοπ. χώρος και $C(X) = \{f : X \mapsto \mathbb{R}, f$ συνεχής $\}$ το σύνολο των πραγματικών, συνεχών συναρτήσεων. Μια οικογένεια $\Gamma \subset C(X)$* **διαχωρίζει σημεία** *αν για $x \neq y$ με $x, y \in X$ υπάρχει $f \in \Gamma$ με $f(x) \neq f(y)$.*

Προφανώς κάθε πλήρως κανονικός χώρος είναι κανονικός.

Παράδειγμα 2.2.13. Κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρως κανονικός. Αρκεί να θεωρήσουμε την $f(y) = \frac{d(y,A)}{d(x,A)}, y \in X$.

Θεώρημα 2.2.14. *(Prohorov)*
Έστω $(X, \mathcal{T})$ **πλήρως κανονικός** *(completely regular) τοπ. χώρος και $\Gamma \subset C(X)$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων που διαχωρίζει σημεία. Έστω $\mathscr{A}$ η κλάση των υποσυνόλων του X της μορφής $\{x \in X : (f_1(x), ..., f_n(x)) \in B\}$ όπου $\{f_1, ..., f_n\} \subset \Gamma$ και $B \in \mathscr{B}^n$- η σ-άλγεβρα Borel του $\mathbb{R}^n$. Η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X και $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$. Υποθέτουμε τώρα ότι ορίζεται συνολοσυνάρτηση $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0,1]$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

i. $\tau(X) = 1$

ii. Αν $A, B \in \mathscr{A}$ με $A \cap B = \emptyset$ τότε $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$

iii. Για κάθε $A \in \mathscr{A}$ ισχύει $\tau(A) = \sup\{\tau(F) : F$ κλειστό $\subset A$ με $F \in \mathscr{A}\}$

iv. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές K_ϵ τέτοιο ώστε: $\tau(B) > 1 - \epsilon$ για κάθε $B \in \mathscr{A}$ με $B \supset K_\epsilon$.

Τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας Radon μ στον $(X, \mathscr{B})$ που επεκτείνει την τ.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τα παρακάτω Λήμματα των οποίων η απόδειξη θα παρατεθεί στο τέλος.

Λήμμα 2.2.15. *Έστω τοπ. χώρος Hausdorff X και σύνολο συνεχών συναρτήσεων $\Delta \subset \mathbb{R}^X$. Αν μ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(X, \sigma(\Delta))$ τότε για κάθε $A \in \sigma(\Delta)$ είναι*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό } \subset X \ , F \in \sigma(\Delta)\}$$

Λήμμα 2.2.16. *Έστω πλήρως κανονικός τοπ. χώρος X και η σ-άλγεβρα Baire $\mathscr{B}_0(X) = \sigma(C(X, \mathbb{R}))$. Τότε η $\mathscr{B}_0(X)$ περιέχει μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_X$ του X.*

Λήμμα 2.2.17. *Έστω Y τοπ. χώρος Hausdorff σ-συμπαγής, δηλαδή υπάρχουν συμπαγή $K_n, n \in \mathbb{N}$ με $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ και σύνολο $\Gamma \subset C(Y, \mathbb{R})$ που διαχωρίζει σημεία του Y. Τότε για τη σ-άλγεβρα Baire $\mathscr{B}_0(Y) \equiv \sigma(C(Y, \mathbb{R}))$ ισχύει ότι $\mathscr{B}_0(Y) = \sigma(\Gamma)$.*

Η άλγεβρα $\mathscr{A}$ της εκφώνησης θα γράφεται $a(X, \Gamma)$. Είναι δηλαδή $\mathscr{A} = a(X, \Gamma)$ και ισχύει ότι:

$$\sigma(\Gamma) = \sigma(a(X, \Gamma)) = \sigma(\mathscr{A})$$

Επίσης προκύπτει (από τις ii, iii) ότι για τη συνολοσυνάρτηση τ της εκφώνησης ισχύει:

$$\tau(\Gamma) = \inf\{\tau(U) : U \text{ ανοικτό } \supset \Gamma,\ U \in \mathscr{A}\} \quad , \Gamma \in \mathscr{A}. \tag{1}$$

Πράγματι· Έστω $\Gamma \in \mathscr{A}$ με $\Gamma \subset U_k$.
Τότε $U_k \setminus \Gamma \in \mathscr{A}$ και $\tau(U_k \setminus \Gamma) = \sup\{\tau(F) \ : \ F \text{ κλειστό } \subset U_k \setminus \Gamma\}$.
Συνεπώς για $\epsilon > 0$ υπάρχει $F \subset U_k \setminus \Gamma$ κλειστό τέτοιο ώστε

$$\tau(U_k \setminus \Gamma) = \tau(U_k) - \tau(\Gamma) - \theta < \tau(F) \leq \tau(U_k) - \tau(\Gamma)$$

Γράφοντας $\tau(F) = \tau(U_k) - \tau(U_k \setminus F)$ και $V = U_k \setminus F$ έχουμε

$$\tau(\Gamma) \leq \tau(V) < \tau(\Gamma) + \theta$$

όπου $U_k \setminus F$ ανοικτό $\supset \Gamma$. Άρα ισχύει η εξωτερική κανονικότητα.
Ακόμα η συνολοσυνάρτηση $\tau : \mathscr{A} \mapsto [0, 1]$ είναι σ-προσθετική.
Πράγματι· Έστω $\{B_n\}_n \subset \mathscr{A}$ φθίνουσα με $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.
Λόγω της iii υπάρχουν κλειστά $F_n \subset B_n$ με $F_n \in \mathscr{A}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \tau(B_n) &= \sup\{\tau(F_n) \ : \ F_n \subset B_n \text{ κλειστά με } F_n \in \mathscr{A}\} \\ &\Leftrightarrow \tau(B_n) - \tau(F_n) < \frac{\epsilon}{4 \cdot 2^n} \end{aligned}$$

Αφού $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ και $F_n \subset B_n$ τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ άρα θα υπάρχει πεπερασμένο $J \subset \mathbb{N}$ με $\tau(\bigcap_{i \in J} F_i) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Αν $n_0 = \max J$ τότε

$$B_{n_0} \setminus \bigcap_{i \in J} F_i = \bigcap_{i \in J} B_i \setminus \bigcap_{i \in J} F_i \subset \bigcup_{i \in J} (B_i \setminus F_i)$$

και επειδή η τ είναι απλά προσθετική έχουμε

$$\tau(B_{n_0}) - \tau(\bigcap_{i \in J} F_i) \leq \sum_{i \in J} \tau(B_i \setminus F_i) \leq \sum_n \frac{\epsilon}{4 \cdot 2^n} = \frac{\epsilon}{2}$$

Άρα $\tau(B_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2} + \tau(\bigcap_{i \in J} F_i) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Έστω τώρα τ^o το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau, \mathscr{A})$. Από το Θεώρημα Καραθεοδωρή η τ^o είναι το μοναδικό μέτρο (πιθανότητας) στον $(X, \sigma(\mathscr{A}))$ εις τρόπον ώστε

$$\tau^o|\mathscr{A} = \tau$$

Θα δείξουμε τώρα το εξής βοηθητικό αποτέλεσμα:
Αν K συμπαγές $\subset X$ με $\tau(B) > \lambda \ \forall \ B \in \mathscr{A}$ με $B \supset K$ τότε $\tau^o(K) \geq \lambda$ όπου $\lambda \in (0,1)$. Πράγματι για $\delta, \theta > 0$ από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου προκύπτει ότι υπάρχουν $\Gamma_n \in \mathscr{A}$ με $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \supset K$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(\Gamma_n) < \tau^o(K) + \delta \tag{2}$$

Επίσης από την (1) προκύπτουν ανοικτά $U_n \in \mathscr{A}$ με $U_n \supset \Gamma_n$ και $\tau(U_n) < \tau(\Gamma_n) + \frac{\theta}{2^n}$ οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(U_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \tau(\Gamma_n) + \theta \tag{3}$$

Επειδή $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n \supset K$-συμπαγές υπάρχει πεπερασμένο $I \subset \mathbb{N}$ με $V = \bigcup\limits_{i \in I} U_i \supset K$ και βέβαια $V \in \mathscr{A}$ οπότε

$$\tau(V) > \lambda \tag{4}$$

Ακόμα ισχύει

$$\tau(V) = \tau^o(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(U_n) \tag{5}$$

Από τις (2),(4),(5) έχουμε

$$\tau(V) < \tau^o(K) + \theta + \delta$$

και συνεπώς από την (4) ότι

$$\tau^o(K) + \theta + \delta > \lambda \text{ για όλα τα } \theta, \delta > 0$$

που συνεπάγεται το βοηθητικό ζητούμενο.
Τώρα από την υπόθεση iv προκύπτει ότι $\forall \ n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συμπαγές $K_n \subset X$ με $\tau(B) > 1 - \frac{1}{n}$ για όλα τα $B \in \mathscr{A}$ με $B \supset K_n$. Σύμφωνα με όσα δείξαμε είναι $\tau^o(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς αν τεθεί $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ τότε

$$\tau^o(Y) = 1$$

Από το Θεώρημα 1.1.30. έχουμε ότι η τ^o ορίζει ένα μέτρο $\tilde{\tau}$ πιθανότητας στον $(Y, \sigma(\mathscr{A})_Y)$ όπου $\sigma(\mathscr{A})_Y = \{\Gamma \cap Y : \Gamma \in \sigma(\mathscr{A})\}$ και $\tilde{\tau}(\Gamma \cap Y) = \tau^o(\Gamma)$. Επίσης κατά την Πρόταση 1.1.29.

$$\sigma(\mathscr{A})_Y = \sigma(\mathscr{A}_Y) \text{ όπου } \mathscr{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathscr{A}\}$$

Θεωρούμε τώρα τον Y εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}_X\}$ και την οικογένεια συναρτήσεων $\Gamma_Y = \{f|Y : f \in \Gamma\} \subset C(Y, \mathbb{R})$. Εύκολα φαίνεται ότι $\mathscr{A}_Y = a(Y, \Gamma_Y)$ και συνεπώς ότι

$$\sigma(\mathscr{A})_Y = \sigma(\Gamma_Y)$$

Επειδή ο χώρος Y είναι σ-compact και Γ_Y διαχωρίζει σημεία του Y , κατά το Λήμμα 2.3.17 θα είναι

$$\sigma(\Gamma_Y) = \mathscr{B}_0(Y) - \text{η σ-άλγεβρα Baire του } Y$$

Έχουμε λοιπόν ένα χώρο πιθανότητας $(Y, \mathscr{B}_0(Y), \tilde{\tau})$ για τον οποίο ισχύουν τα παρακάτω:

α΄. $\tilde{\tau}(A) = \sup\{\tilde{\tau}(F) : F \text{ κλειστό} \subset X,\ F \in \mathscr{B}_0(Y)\}$
Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της $\mathscr{B}_0(Y)$ και το Λήμμα 2.2.15. με $\Delta = C(Y, \mathbb{R})$.

β΄. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές $K_\epsilon \subset Y$ με $\tilde{\tau}(A) > 1 - \epsilon$ όταν $A \in \mathscr{B}_0(Y)$ με $A \supset K_\epsilon$.
Πράγματι όπως είδαμε παραπάνω για $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \epsilon$ θα είναι $\tau^o(K_m) > 1 - \epsilon$. Συνεπώς για $A \in \mathscr{B}_0(Y)$ με $A \supset K_\epsilon \equiv K_m$ θα είναι $\tilde{\tau}(A) = \tilde{\tau}(A \cap Y) = \tau^o(A) \geq \tau^o(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$

γ΄. Η $\mathscr{B}_0(Y)$ παριέχει μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_Y$. Αυτό διότι ο χώρος X είναι πλήρως κανονικός και συνεπώς κατά το Λήμμα 2.2.16. η σ-άλγεβρα $\mathscr{B}_0(X)$ περιέχει μια βάση $\mathscr{E}$ της τοπολογίας $\mathcal{T}_X$. Είναι δηλαδή $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}_0(X)$ και συνεπώς $\mathscr{E}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{E}\} \subset \mathscr{B}_0(X)_Y$. Όμως η $\mathscr{E}_Y$ είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_Y$ και επαληθεύεται ότι $\mathscr{B}_0(X)_Y \subset \mathscr{B}_0(Y)$

Από τα (α΄),(β΄),(γ΄) προκύπτει ότι μπορούμε να επικαλεστούμε το Θεώρημα 2.2.6. για την τριάδα $(Y, \mathscr{B}_0(Y), \tilde{\tau})$ και συνεπώς η $\tilde{\tau}$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε Radon μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mu}$ στον $(Y, \mathscr{B}_Y)$. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι $\mathscr{B}_Y = \mathscr{B}(X)_Y$ και να ορίσουμε την $\mu : \mathscr{B}_X \mapsto [0, 1]$ως $\mu(B) = \tilde{\mu}(B \cap Y)$. Το μ είναι Radon μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B}_X)$ και επεκτείνει την τ αφού για τυχόν $A \in \mathscr{A}$ είναι $A \cap Y \in \mathscr{B}_0(Y)$ και εκ κατασκευής διαδοχικά

$$\mu(A) = \tilde{\mu}(A \cap Y) = \tilde{\tau}(A \cap Y) = \tau^o(A) = \tau(A)$$

Απομένει η μοναδικότητα της επέκτασης.
Έστω τα Radon μέτρα πιθανότητας μ_1,μ_2 στον $(X, \mathscr{B}_X)$ με $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{A}$. Λόγω κανονικότητας για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συμπαγές $K_n \subset X$ με $\mu_1(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$ και $\mu_2(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$. Θέτουμε $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Τότε $\mu_1(Y) = \mu_2(Y) = 1$.
Άρα από Θεώρημα Επέκτασης 1.1.30. ορίζουμε μέτρα πιθανότητας $\tilde{\mu}_i$ $(i = 1, 2)$ στην $\mathscr{B}(X)_Y$ ως ακολούθως

$$\tilde{\mu}_i(B \cap Y) = \mu_i(B)$$

Φανερά $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ στην $\mathscr{A}_Y$ οπότε θα είναι και

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 \quad \text{στην} \quad \sigma(\mathscr{A}_Y) \tag{6}$$

Εφοδιάζουμε το Y με την επαγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}_Y$ και επαληθεύεται ότι $\mathscr{B}(X)_Y = \mathscr{B}_Y$ και ότι τα $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ είναι Radon μέτρα πιθανότητας στον $(Y, \mathscr{B}_Y)$. Επιπλέον, όπως διαπιστώσαμε παραπάνω $\sigma(\mathscr{A}_Y) = \mathscr{B}_0(Y)$ και ακόμη ότι: η σ-άλγεβρα Baire $\mathscr{B}_0(Y)$ περιέχει μια βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}_Y$. Επικαλούμενοι την (6) συμπεραίνουμε ότι

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 \text{ στην } \mathscr{B}_Y$$

και συνεπώς ότι $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{B}_X$. □

Ακολουθεί η απόδειξη των Λημμάτων της αρχής.

Απόδειξη. Λήμμα 2.2.15.
Έστω $A \in \sigma(\Delta)$. Από ιδιότητες σ-αλγεβρών που ορίζονται σε καρτεσιανά γινόμενα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $(\gamma_1, \gamma_2, ...)$ από το Δ τέτοια ώστε

$$A = \gamma^{-1}(B) \text{ όπου } \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ...) : X \mapsto \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ και } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Φανερά η γ είναι $\sigma(\Delta) - \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ μετρήσιμη και συνεχής για την $\mathcal{T}_X$ και την τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Αν τώρα θεωρήσουμε στον $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ το μέτρο πιθανότητας

$$\nu(B) = \mu(\gamma^{-1}(B))$$

αυτό είναι Radon και συνεπώς για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε

$$\nu(B \setminus E) < \epsilon$$

και άρα

$$\mu(\gamma^{-1}(B) \setminus \gamma^{-1}(E)) < \epsilon$$

Όμως $\gamma^{-1}(B) = A$ και $\gamma^{-1}(E)$ κλειστό $\subset X$. □

Απόδειξη. Λήμμα 2.2.16.
Έστω τυχόν $z \in X$ και U ανοικτή περιοχή του z. Τότε $z \notin U^c$ και συνεπώς υπάρχει $f \in C(X, \mathbb{R})$ με $f(z) = 1$ και $f(x) = 0$ $\forall x \in U^c$. Προφανώς για το σύνολο $V = \{x \in X : f(x) > 0\}$ ισχύουν:

$$V \text{ ανοικτό και } z \in V \subset U$$

Συνεπώς κάθε ανοικτό γράφεται ως ένωση συνόλων της μορφής $\{x \in X : f(x) > 0\}$ με $f \in C(X, \mathbb{R})$. Όμως τα σύνολα αυτής της μορφής ανήκουν στην σ-άλγεβρα Baire $\mathscr{B}_0(X) = \sigma(C(X, \mathbb{R}))$. □

Απόδειξη. Λήμμα 2.2.17.
Επειδή $\Gamma \subset C(Y, \mathbb{R})$ θα είναι και $\sigma(\Gamma) \subset \mathscr{B}_0(Y)$. Έστω τώρα Δ το σύνολο των συναρτήσεων που ορίζονται στο Y και είναι συνεχείς και $\sigma(\Gamma) - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμες. Προφανώς $\Gamma \subset \Delta$ και άρα το Δ διαχωρίζει τα σημεία του Y. Ακόμα περιέχει τις σταθερές και επαληθεύεται ότι είναι υποάλγεβρα της άλγεβρας $C(Y, \mathbb{R})-$ για τις αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Αν τώρα ο χώρος $C(Y, \mathbb{R})$ εφοδιαστεί με την τοπολογία της ομοιόμορφης στα συμπαγή σύγκλισης τότε κατά το Θεώρημα Stone-Weirstrass το Δ είναι πυκνό στον $C(Y, \mathbb{R})$ άρα για κάθε $f \in C(Y, \mathbb{R})$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta$ ώστε για τυχόν συμπαγές $K \subset Y$ να ισχύει

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Επειδή ο χώρος $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ με $K_n \subset Y$ συμπαγή για τυχόν $y \in Y$ θα είναι $y \in K_\ell$ για κάποιο $\ell \in \mathbb{N}$ και άρα $f_n(y) \to f(y)$. Ώστε για κάθε $f \in C(Y, \mathbb{R})$ είναι $f = \lim_n f_n$ με $f_n \in \Delta$ και συνεπώς κάθε $f \in C(Y, \mathbb{R})$ είναι $\sigma(\Gamma) - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη. Αυτό αρκεί για να συμπεράνουμε ότι

$$\mathscr{B}_0(Y) \subset \sigma(\Gamma).$$

□

Από το τελευταίο θεώρημα διαβλέπουμε την πρόθεση κατασκευής μέτρου Radon σε απειροδιάστατους χώρους. Παράδειγμα αποτελεί ένας τοπ. κυρτός τοπ. διαν. χώρο X και $\Gamma = X'$ ο δυϊκός του.

Πρόταση 2.2.18. *Έστω τοπ. χώρος $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff (οπωσδήποτε) και ένα* ***πεπερασμένο*** *μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B})$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι:*

i. $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F$ *κλειστό* $\subset A\} \quad \forall A \in \mathscr{B}$

ii. $\forall \epsilon > 0 \; \exists$ *συμπαγές* K_ϵ *εις τρόπον ώστε* $\mu(K_\epsilon) > \mu(X) - \epsilon$ ***(tightness)***

Τότε το μέτρο μ είναι Radon και μάλιστα για κάθε $A \in \mathscr{B}$ ισχύει:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές } \subset A\}$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει ότι i, ii μας δίνουν την εσωτερική κανονικότητα. Όμως αν για ένα μέτρο μ ισχύει εσωτερική κανονικότητα στα συμπαγή και είναι και πεπερασμένο τότε είναι Radon. □

Σχηματικά οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να αποδοθούν όπως παρακάτω. X είναι τοπ. χώρος και $A \in \mathscr{B}$.

1. $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U$ ανοικτό $\supset A\}$
2. $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F$ κλειστό $\subset A\}$

3. $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K$ συμπαγές $\subset A\}$

4. $\forall \epsilon > 0\ \exists$ συμπαγές K με $\mu(K) > \mu(X) - \epsilon$

- Για **πεπερασμένα** μέτρα μ και X **Hausdorff**

$$\begin{array}{c} (3) \Leftrightarrow (2) + (4) \\ \Updownarrow \\ (1) \end{array}$$

- Για **μη πεπερασμένα κανονικά** μέτρα ανακαλούμε την Πρόταση 2.1.6.

Παρατήρηση 2.2.19. Η έννοια του tightness ειναι ιδιαίτερα σημαντική αφού κάθε μέτρο Radon είναι κανονικό και tight αλλά ισχύει και το αντίστροφο.

2.3 Μέτρα σε μετρικούς τοπολογικούς χώρους

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Για $x \in X$ και $r > 0$ σημειώνουμε $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ και η κλάση $\mathscr{E} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ είναι **βάση** της τοπολογίας του. Επίσης η κλάση υποσυνόλων $\mathscr{E}' = \{B(x, r) : x \in X, r$ ρητός $> 0\}$ είναι μια βάση. Ακόμα για $x \in X$ η κλάση $\mathcal{N}_x = \{B(x, r), r > 0\}$ είναι τοπική βάση περιοχών του x και συνεπώς η κλάση $\mathcal{N}'_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι τοπική βάση περιοχών του x η οποία μάλιστα είναι **αριθμήσιμη** και συνεπώς **κάθε** μετρικός χώρος είναι first countable. Ένας μετρικός χώρος λέγεται second countable όταν και μόνο όταν διαθέτει μια **αριθμήσιμη** βάση για την τοπολογία του (την παραγόμενη από την μετρική d). Προφανώς κάθε δεύτερος αριθμήσιμος είναι και πρώτος αριθμήσιμος. Τέλος ένας μετρικός χώρος ονομάζεται **διαχωρίσιμος** (separable) όταν και μόνο όταν υπάρχει **αριθμήσιμο** $D \subset X$ τέτοιο ώστε $\bar{D} = X$. Ισχύει το παρακάτω:

Πρόταση 2.3.1. *Αν ο μετρικός χώρος (X, d) είναι διαχωρίσιμος τότε έχει μια αριθμήσιμη βάση (είναι second countable).*

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή η αριθμήσιμη βάση είναι η $\mathscr{E} = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in D, n \in \mathbb{N}\}$.
Με χρήση του αξιώματος επιλογής αποδεικνύεται και το αντίστροφο.
Ένας μετρικός χώρος είναι πάντοτε:

- normal δηλαδή: για οποιαδήποτε κλειστά E, F με $E \cap F = \emptyset$ υπάρχουν ανοικτά U, V με $U \supset E,\ V \supset F$ και $U \cap V = \emptyset$.

Συνεπώς είναι και:

- **κανονικός** (regular) δηλαδή: για οποιοδήποτε κλειστό F και $x \notin F$ υπάρχουν ανοικτά U, V με $U \supset F,\ x \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

Σε ένα μετρικό χώρο ισχύει το:

Λήμμα 2.3.2. *(Urysohn)*
Για οποιαδήποτε κλειστά E, F με $E \cap F = \emptyset$ υπάρχει συνεχής $f : X \mapsto [0,1]$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in E$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in F$.

Συνεπώς κάθε μετρικός χώρος είναι:

- **πλήρως κανονικός** (completely regular) δηλαδή: για οποιοδήποτε κλειστό F και $x \notin F$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \mapsto [0,1]$ με $f(x) = 1$ και $f(y) = 0$ για κάθε $y \in F$.

Ορισμός 2.3.3. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται:*

- ***πλήρης*** *όταν και μόνο όταν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει (για τη μετρική d).*
- ***ολικά φραγμένος*** *όταν και μόνο όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο $F \subset X$ εις τρόπον ώστε: $X = \bigcup_{y \in F} B(y, \epsilon)$.*

Πρόταση 2.3.4. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής όταν και μόνο όταν είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Έστω τώρα (X, d) μετρικός χώρος και $\mathcal{T}$ η παραγόμενη τοπολογία. Έστω $C(X)$ το σύνολο όλων των **συνεχών, πραγματικών** συναρτήσεων που ορίζονται στον X, δηλαδή:

$$C(X) = \{f : X \mapsto \mathbb{R}, f \text{ συνεχής}\}$$

Επίσης $C_b(X)$ το σύνολο των **συνεχών, φραγμένων** πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο X, δηλαδή:

$$C_b(X) = \{f : X \mapsto \mathbb{R}, f \text{ συνεχής, φραγμένη}\}$$

Ορίζουμε τις παρακάτω κλάσεις υποσυνόλων του X:

$$\mathscr{A}_1 = \{f^{-1}(U) : f \in C(X), U \text{ ανοικτό} \subset \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{A}_2 = \{f^{-1}(U) : f \in C_b(X), U \text{ ανοικτό} \subset \mathbb{R}\}$$

Πρόταση 2.3.5. *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $\mathcal{T}$ η παραγόμενη τοπολογία. Έστω $\mathscr{B}$ η σ-άλγεβρα Borel δηλαδή: $\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T})$.*
Τότε $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A}_1) = \sigma(\mathscr{A}_2)$.

Απόδειξη. [7] □

Ορισμός 2.3.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε σ-άλγεβρα Baire και συμβολίζουμε $\mathscr{B}_0$ την ελάχιστη σ-άλγεβρα για την οποία όλες οι πραγματικές, συνεχείς συναρήσεις είναι μετρήσιμες, είναι δηλαδή*

$$\mathscr{B}_0 \equiv \sigma(C(X, \mathbb{R}))$$

Ισχύει ακόμα ότι η σ-άλγεβρα Baire είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα για την οποία κάθε $f \in C_b(X)$ είναι μετρήσιμη. Προφανώς κάθε σύνολο Baire είναι και Borel σύνολο, δηλαδή

$$\mathscr{B}_0(X) \subset \mathscr{B}(X)$$

Οι δύο σ-άλγεβρες συμπίπτουν στους μετρικούς χώρους. Ισχύει δηλαδή το εξής:

Πρόταση 2.3.7. *Σε κάθε μετρικό χώρο (X, d) κάθε σύνολο Borel είναι και σύνολο Baire έτσι*

$$\mathscr{B}_0(X) = \mathscr{B}(X) \text{ για την τοπολογία της } d$$

Απόδειξη. Έστω $F \subset X$ κλειστό και
$f(x) = d(x, F) = \inf\{d(x, y) : \ y \in F\}$, $x \in X$. Τότε για κάθε $x, w, \in X$ έχουμε $|d(x, F) - d(w, F)| \leq d(x, w)$.
Έτσι η f είναι συνεχής.
Αφού F κλειστό , $F = f^{-1}\{0\}$ τότε F είναι σύνολο Baire καθώς και το συμπλήρωμά του. □

Πρόταση 2.3.8. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) με την τοπολογία $\mathcal{T}$ και $\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{T})$ η σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του. Αν μ είναι πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathscr{B})$ τότε ισχύουν:*

1. *Για κάθε $A \in \mathscr{B}$*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ κλειστό} \subset A\} = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό} \supset A\}.$$

2. *Αν το μέτρο μ είναι tight, δηλαδή αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές K_ϵ με $\mu(X \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ τότε το μέτρο μ είναι Radon*
   Συνεπώς εκτός των παραπάνω ισχύει:

$$\mu(A) = sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές } \subset A\}$$

Απόδειξη.

1. Έστω $U \subset X$ ανοικτό και $F = U^c$. Θέτουμε
   $f_n = \{x : \ d(x, F) \geq \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, ...$ ώστε F_n κλειστά και $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = U$.
   Τότε η σ-άλγεβρα $\mathscr{R} = \{A \in \mathscr{S} : \ A, \ X \setminus A$ είναι "κλειστά" κανονικά στο $\mu\}$ όπου $\mathscr{S}$ μια σ-άλγεβρα στο X, περιέχει όλα τα ανοικτά και άρα όλα τα Borel . Συνεπώς για το μ ισχύει η "κλειστή" κανονικότητα. Τότε όμως, αφού ισχύει η "κλειστή" κανονικότητα και το μέτρο μ ειναι πεπερασμένο, ισχύει η εξωτερική κανονικότητα.

2. Έστω μ tight . Τότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει K_ϵ συμπαγές με $\mu(X \setminus K_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$.
   Για κάθε $B \in \mathscr{B}$ έστω $F \subset B$ κλειστό με $\mu(B \setminus F) < \frac{\epsilon}{2}$ (λόγω κλειστής κανονικότητας).
   Έστω $L = K_\epsilon \cap F$ (συμπαγές), $L \subset B$ και $\mu(B \setminus L) < \epsilon$.
   Άρα

$$\mu(B) = \sup\{\mu(L) \ : \ L \subset B \text{ συμπαγές}\}$$

□

Θεώρημα 2.3.9. *(Ulam - Prohorov)*
Έστω ένας ***πλήρης,διαχωρίσιμος μετρικός*** *χώρος* (X, d). *Κάθε* ***Borel μέτρο πιθανότητας*** *στον* $(X, \mathscr{B})$ *είναι* ***tight*** *(και συνεπώς Radon) .*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια πυκνή ακολουθία στον X. Για κάθε $\delta > 0$, $x \in X$ θέτουμε $\overline{B}(x, \delta) = \{y : \ d(x, y) \leq \delta\}$. Για δοσμένο $\epsilon > 0$, για κάθε $m = 1, 2, ...$ θεωρούμε $n(m) < \infty$ τέτοιο ώστε:

$$\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{n(m)} \overline{B}(x_n, \frac{1}{m})) < \frac{\epsilon}{2^m}$$

και ορίζουμε

$$K = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n=1}^{n(m)} \overline{B}(x_n, \frac{1}{m})$$

Τότε το K είναι ολικά φραγμένο, κλειστό σε ένα πλήρη μετρικό χώρο και άρα είναι συμπαγές.
Ακόμα $\mu(X \setminus K) \leq \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon$
Άρα το μέτρο μ είναι tight και λόγω του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε ότι αν το μ είναι Borel πεπερασμένο τότε έχει την ιδιότητα της κλειστής κανονικότητας. Όμως tightness + κλειστή κανονικότητα + πεπερασμένο μέτρο = μέτρο Radon. □

Πόρισμα 2.3.10. Ένα Borel μέτρο πιθανότητας σε ένα πλήρη μέτρικό χώρο X είναι μέτρο Radon αν και μόνο αν υπάρχει ένα διαχωρίσιμο υποσύνολο $Y \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $\mu(Y) = 1$.

2.4 Αξιοσημείωτοι Μετρικοί Χώροι στη Θεωρία Πιθανοτήτων

1. $$X = C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R} \text{ συνεχής}\}$$
$$\|f\| = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$$
Ο χώρος $X = C([0, 1])$ είναι **πλήρης, διαχωρίσιμος, μετρικός** χώρος και ως διανυσματικός χώρος με norm είναι Banach.

2. $$X = C([0, \infty)) = \{f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R} \text{ συνεχής }\}$$
Για $f \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\|f\|_n = \sup\limits_{0\leq t\leq n} |f(t)|$.

Η οικογένεια $\{\| \|_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια οικογένεια seminorm στον διανυσματικό χώρο X που είναι χώρος Frechet με μετρική:

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n}$$

Ο χώρος X είναι **πλήρης** και **διαχωρίσιμος**.

3.
$$X = C([0,1], \mathbb{R}^m) = \{f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^m \text{ συνεχής } \}$$

4.
$$X = C([0,\infty), \mathbb{R}^m) = \{f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^m \text{συνεχής}\}$$

Όμοια όπως για τις περιπτώσεις 1. και 2. όπου όμως με $|\cdot|$ εννοείται η συνήθης Ευκλείδια norm του $\mathbb{R}^m$.
Το παρακάτω Θεώρημα που διατυπώνεται για το χώρο $X = C([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ αφορά και τις άλλες περιπτώσεις με προφανή τρόπο.

Θεώρημα 2.4.1. *Για κάθε $t \in [0,\infty)$ ορίζουμε $\pi_t : C([0,\infty), \mathbb{R}^m) \mapsto \mathbb{R}^m$ ως εξής $\pi_t(\omega) = \omega(t)$ (πρόκειται για την **t-προβολή** στο $\mathbb{R}^m$).*
Θέτουμε $\mathscr{C} = \{\pi_t^{-1}(B) : t \geq 0$ και $B \in \mathscr{B}^m\}$. Τότε για την σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B}$ του τοπολογικού χώρου $X = C([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ ισχύει:

$$\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C}) \equiv \sigma(\pi_t, t \geq 0).$$

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$ όπου $\mathscr{C}$ η κλάση των μετρήσιμων προβολών. Αφού $\pi_t \in C[0,\infty)$ τότε η π_t είναι συνεχής άρα $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(X)$.
Μένει να δειθχεί ότι $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{A}$. Για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\mathscr{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα του X. Αφού $C[0,\infty)$ είναι διαχωρίσιμος, κάθε ανοικτό του σύνολο U είναι ένωση από αριθμήσιμες κλειστές μπάλες ($U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B(x,r)}$ όπου $\overline{B(x,r)} = \{y \in X : \ d(x,y) \leq r\}$). Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι η κλάση $\mathscr{A}$ περιέχει όλες τις κλειστές μπάλες (και ως σ-άλγεβρα θα περιέχει και τις αριθμήσιμες ενώσεις τους).
Έστω λοιπόν $a > 0$, $x_0 \in X$ και $r_1, r_2, ...$ μια απαρίθμηση των ρητών του $[0,\infty)$ τότε

$$\{x : \ \|x - x_0\| \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : \ |x(r_n) - x_0(r_n)| \leq a\}$$

Όμως

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : \ |x(r_n) - x_0(r_n)| \leq a\} \in \mathscr{A} \quad \Rightarrow \{x : \ \|x - x_0\| \leq a\} \in \mathscr{A}$$

Άρα $\mathscr{A} = \mathscr{B}_X$. □

Κεφάλαιο 3

Μέτρα πιθανότητας σε τοπ. διαν. χώρους

3.1 Στοιχεία θεωρίας τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων

Έστω X διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. Ένα υποσύνολο $A \subset X$ λέγεται:

- **κυρτό** όταν για όλα τα $x, y \in A$ και $t \in [0,1]$ ισχύει ότι $tx + (1-t)y \in A$.
- **ισόρροπο** (balanced) όταν για όλα τα $x \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| \leq 1$ ισχύει $\lambda x \in A$. (προφανώς $0 \in A$)
- **απορροφών** (absorbent) όταν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\lambda > 0$ με $\lambda x \in A$.

Ένας τοπολογικός Hausdorff διανυσματικός χώρος X ονομάζεται **τοπικά κυρτός** όταν έχει μια τοπική βάση του 0 από κυρτά, ισόρροπα σύνολα ή ισοδύναμα όταν παράγεται από μια οικογένεια seminorn $\{\rho_a, a \in \Lambda\}$ που διαχωρίζει σημεία (δηλαδή για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει $a \in \Lambda$ με $\rho_a(x) > 0$). Τότε τα σύνολα της μορφής:

$$\bigcap_{a \in i} \{x \in X : \rho_a(x) < \epsilon_a\}$$

με i πεπερασμένο $\subset \Lambda$ και $\epsilon_a > 0$ είναι κυρτά, ισόρροπα, και αποτελούν τοπική βάση του 0.
Παρά το γεγονός ότι οι χώροι αυτοί δεν έχουν νόρμα, η ύπαρξη τοπικής κυρτής βάσης για το 0 είναι αρκετή για να ισχύει το Θεώρημα Hahn-Banach . Οι χώροι Frechet είναι τοπικά κυρτοί οι οποίοι είναι μετρικοί και πλήρεις (πρόκειται για γενίκευση των χώρων Banach).
Έστω τώρα (X, ξ) ένας τοπικά κυρτός διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο $A \subset X$ ονομάζεται **φραγμένο** για την τοπολογία ξ ή απλά **ξ-φραγμένο** όταν για κάθε περιοχή U του 0 υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε: $A \subset \nu U$ για κάθε $\nu > \lambda$.

Έστω τοπικά κυρτός τοπ. διαν. χώρος X με τοπολογία ξ. Συμβολίζουμε με X' τον δυϊκό του X δηλαδή το σύνολο των ξ-συνεχών γραμμικών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το X. Προκειμένου να διευκρινιστεί (όπου χρειάζεται) η τοπολογία ως προς την οποία είναι συνεχείς οι συναρτήσεις του X' θα γράφουμε:

$$(X, \xi)' = X'$$

Όλες οι παρακάτω τοπολογίες είναι τοπικά κυρτές και παράγονται από την οικογένεια seminorm που αναφέρεται:

- $\sigma(X, X')$ **ασθενής** τοπολογία του X

  $$\{\rho(\cdot) = | < \cdot, x' > |, x' \in X'\}$$

  Είναι η ασθενέστερη τοπολογία του X για την οποία όλες οι παραπάνω seminorm είναι συνεχείς συναρτήσεις στο X.
  Προφανώς $\quad \sigma(X, X') \subset \xi$
  και ισχύει ότι $\quad (X', \sigma(X', X))' = X'$
  Η σύγκλιση ενός δικτύου $\{x_i, i \in I\} \subset X$ στην τοπολογία $\sigma(X, X')$ έχει ως ακολούθως:

  $$x_i \to x \Leftrightarrow x'(x_i) \to x'(x) \text{ για κάθε } x' \in X'.$$

- $\sigma(X', X)$ **ασθενής** τοπολογία του X' (weak*)

  $$\{q(\cdot) = | < x, \cdot > |, x \in X\}$$

  Για την $\sigma(X', X)$ ισχύει:

  $$(X', \sigma(X', X))' = X$$

  και η σύγκλιση δικτύου $\{x'_i, i \in I\} \subset X'$ έχει ως εξής:

  $$x'_i \to x' \Leftrightarrow x'_i(x) \to x'(x) \text{ για κάθε } x \in X$$

  (πρόκειται για κατά σημείο σύγκλιση)

- $\mathscr{C}(X, X')$ **ισχυρή** τοπολογία του X

  $$\{\rho'_B(\cdot) = \sup_{x' \in B} | < \cdot, x' > |, B \in \mathscr{D}'\}$$

  όπου $\mathscr{D}' = \{B \subset X' : B \text{ είναι } \sigma(X', X)\text{-φραγμένο}\}$.
  Για την $\mathscr{C}(X, X')$ ισχύει:

  $$\sigma(X, X') \subset \mathscr{C}(X, X')$$

  και για τη σύγκλιση

  $$x_i \to x \Leftrightarrow x'(x_i) \to x'(x) \text{ ομοιόμορφα ως προς } x' \in B$$

  και αυτό για κάθε $\sigma(X', X)$-φραγμένο $B \in \mathscr{D}'$.

- $\mathscr{C}(X', X)$ **ισχυρή** τοπολογία του X'

$$\{q'_A(\cdot) = \sup_{x \in A} | < x, \cdot > |, A \in \mathscr{D}\}$$

όπου $\mathscr{D} = \{A \subset X : A$ είναι $\sigma(X, X')$-φραγμένο$\}$
Για την $\mathscr{C}(X', X)$ ισχύει:

$$\sigma(X', X) \subset \mathscr{C}(X', X)$$

Για την αντίστοιχη σύγκλιση έχουμε:

$$x'_i \to x' \Leftrightarrow x'_i(x) \to x'(x) \text{ ομοιόμορφα για } x \in A$$

και αυτό για κάθε $\sigma(X, X')$-φραγμένο $A \in \mathscr{D}$.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω τοπικά κυρτός τοπ. διαν. χώρος X. Ονομάζεται* ***δισδυϊκός*** *του X ο δυϊκός του $(X', \mathscr{C}(X', X))$. Είναι δηλαδή $X'' = (X', \mathscr{C}(X', X))'$.*

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στο ζεύγος (X', X'') μπορούμε να ορίσουμε μια ακόμα ασθενή τοπολογία στον X', την $\sigma(X', X'')$. Σχετικά ισχύει:

$$\sigma(X', X) \subset \sigma(X', X'')$$

Ο χώρος X μπορεί να θεωρηθεί υποσύνολο του X'' υπό την έννοια της απεικόνισης $\Phi : X \mapsto X''$ που ορίζεται από την

$$[\Phi(x)](y) = y(x), y \in X'$$

Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική αλλά **όχι πάντα** συνεχής για τις τοπολογίες ξ και $\mathscr{C}(X'', X')$. Όταν η Φ είναι τοπολογικός ισομορφισμός του X **επί** τον X'' τότε ο χώρος X ονομάζεται **ανακλαστικός**.
Όταν ο X είναι **χώρος με norm** $\|\cdot\|$ και την αντίστοιχη παραγόμενη τοπολογία $\xi \equiv \tau(\|\cdot\|)$ τότε ισχύουν επιπλέον τα ακόλουθα:

1. $\tau(X, X') = \xi$
2. $\mathscr{C}(X', X) = \xi' \equiv \tau(\|\cdot\|')$
   όπου η norm $\|\cdot\|'$ του X' ορίζεται κατά τον γνωστό τρόπο

$$\|x'\|' = sup\{| < x, x' > | : \|x\| \leq 1\}$$

3. Η απεικόνιση Φ είναι τοπολογικός ισομορφισμός του X επί τον $\Phi(X)$ που είναι κλειστός υπόχωρος του $(X'', \mathscr{C}(X'', X'))$. Έτσι αν $\Phi(X) = X''$ ο χώρος X είναι ανακλαστικός.

Παρατήρηση 3.1.2. Τα συμπεράσματα (1),(2) ισχύουν ακόμα και όταν ο χώρος X με την αρχική τοπολογία ξ είναι Frechet, δηλαδή τοπικά κυρτός, μετρικοποιήσιμος (metrizable) και πλήρης.

Στους τοπικά κυρτούς χώρους ισχύει και το παρακάτω:

Πρόταση 3.1.3. *Κάθε τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος X είναι πλήρως κανονικός.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειθχεί ότι για κάθε κλειστό $F \subset X$ και $x_0 \notin F$ υπάρχει μια απεικόνιση $g : X \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής με $g(x_0) = 1$ και $g(y) = 0$ για κάθε $y \in F$.
Επειδή $x_0 \notin F \Rightarrow 0 \notin F - x_0$. Άρα επειδή ο χώρος X είναι τοπικά κυρτός υπάρχει $U \in \mathscr{B}$ (κυρτό) τέτοιο ώστε $0 \in U$ και $U \cap (F - x_0) = \emptyset$.
Έστω $p_U : X \mapsto \mathbb{R}$ οριζόμενο από τη σχέση

$$p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda U\}$$

Τότε p_u είναι συνεχής με $p_U(0) = 0$ και $p_U(y) \geq 1$ για κάθε $y \notin U$.
(Διαφορετικά αν $p_U(y) < 1$ για κάποιο $y \notin U$ τότε από τον ορισμό του p_U θα είχαμε ότι $y \in U$. Άτοπο!)
Θέτουμε την απεικόνιση $g : X \mapsto [0, 1]$ τέτοια ώστε:

$$g(x) = \min\{1, p_U(x - x_0)\} \ \ \forall \ x \in X$$

Τότε η g είναι επίσης συνεχής και παρατηρούμε τα εξής:

1. $g(x_0) = \min\{1, p_U(x_0 - x_0)\} = 0$
2. Για $y \in F$ έχουμε $p_U(y - x_0) \geq 1$ αφού $y - x_0 \in F - x_0$ και άρα $y - x_0 \notin U$. Οπότε $g(y) = 1$ για κάθε $y \in F$.

□

3.2 σ-άλγεβρες και κυλινδρικές σ-άλγεβρες σε τοπ. διαν. χώρους

3.2.1 Μετρήσιμοι διανυσματικοί χώροι

Αν X είναι διανυσματικός χώρος και $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του. Ενδιαφερόμαστε στη συμβιβαστότητα της μετρησιμότητας της σ-άλγεβρας $\mathscr{A}$ με τη διανυσματική δομή του χώρου (κάτω υπό ποιά έννοια τα στοιχεία του τ.δ.χ. X καθίστανται μετρήσιμα).

Ορισμός 3.2.1. *Έστω διαν. χώρος X και σ-άλγεβρα $\mathscr{A}$ του X. Το ζεύγος $(X, \mathscr{A})$ λέγεται* ***μετρήσιμος διανυσματικός χώρος*** *όταν και μόνο όταν οι απεικονίσεις $(x, y) \mapsto x + y, x \mapsto -x$ και $(a, x) \mapsto ax$ είναι αντίστοιχα $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} - \mathscr{A}, \mathscr{A} - \mathscr{A}$ και $\mathscr{B}^1 \otimes \mathscr{A} - \mathscr{A}$ μετρήσιμες.*

Έστω τ.δ.χ. $(X, \mathcal{T})$ και $\mathscr{B}_X$ η σ-άλγεβρα Borel που παράγεται από την τοπολογία του. Τότε η απεικόνιση $(x, y) \mapsto x + y$ είναι συνεχής και άρα $\mathscr{B}_{X \times X} - \mathscr{B}_X$ μετρήσιμη και όχι $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X - \mathscr{B}_X$ μετρήσιμη όπως απαιτεί ο ορισμός. Επιπλέον είναι $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X \subset \mathscr{B}_{X \times X}$. Η παρακάτω Πρόταση μαω δίνει την ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει η μετρησιμότητα στον $(X, \mathscr{B}_X)$.

Πρόταση 3.2.2. *Έστω* **διαχωρίσιμος μετρικός** *τοπολογικός διανυσματικός χώρος X και $\mathscr{B}_X$ η σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του. Τότε ο $(X, \mathscr{B}_X)$ είναι μετρήσιμος διαν. χώρος.*

Απόδειξη. Αφού X διαχωρίσιμος μετρικός τότε η τοπολογία του έχει μια αριθμήσιμη βάση και άρα $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X = \mathscr{B}_{X\times Y}$ και $\mathscr{B}^1 \otimes \mathscr{B}_X = \mathscr{B}_{\mathbb{R}\times X}$. Ακόμα οι απεικονίσεις $(x, y) \mapsto x + y,\ (a, x) \mapsto ax,\ x \mapsto -x$ είναι συνεχείς.

□

Παρατήρηση 3.2.3. Όμως οι απεικονίσεις "μεταφορά" $x \mapsto x + b$ και "όμοιοθεσία" $x \mapsto \lambda x$ είναι προφανώς $\mathscr{B}_X - \mathscr{B}_X$ μετρήσιμες.

Σημείωση: Αποδεικνύεται [28] ότι αν X είναι τοπ. χώρος Hausdorff με $cardX > c$ τότε το κλειστό σύνολο $\Delta = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$ **δεν** ανήκει στην $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X$. Έτσι αν X είναι τοπολ. διαν. χώρος με $cardX > c$ τότε $(X, \mathscr{B}_X)$ **δεν** είναι μετρήσιμος διαν. χώρος διότι αν ήταν τέτοιος η συνάρτηση $f(x, y) = x - y$ θα ήταν $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X - \mathscr{B}_X$ μετρήσιμη.
Όμως $f^{-1}(\{0\}) = \Delta \notin \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X$.

3.2.2 κυλινδρικές σ-άλγεβρες σε τοπ. διαν. χώρους

Ένα κυλινδρικό σύνολο είναι το "φυσικό" ανοικτό σύνολο της τοπολογίας γινόμενο. Τα κυλινδρικά σύνολα μας παρέχουν μια βάση της φυσικής τοπολογίας του γινομένου ενός αριθμήσιμου πλήθους αντιγράφων του συνόλου.

Ορισμός 3.2.4. *Έστω $X = \prod_a X_a$ γινόμενο τ.χ. και $p_a : X \mapsto X_a$ η κανονική προβολή. Τότε για $U \subset X_a$ ανοικτό το σύνολο $p_a^{-1}(U) \subset X$ ονομάζεται ανοικτός κύλινδρος. Η τομή πεπερασμένου αριθμού ανοικτών κυλίνδρων αποτελούν μια υποβάση της τοπολογίας γινόμενο του X. Η οικογένεια των κυλινδρικών συνόλων αποτελεί βάση.*

Παρατήρηση 3.2.5. Οι ανοικτοί κύλινδροι σε έναν οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο (όχι μόνο σε τοπολογικούς χώρους γινόμενο) μπορούν να οριστούν μέσω οποιαδήποτε συνεχούς (για τη συγκεκριμένη τοπολογία) απεικόνισης. Αυτός θα είναι άλλωστε και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω.

Σκοπός μας είναι να σχετίσουμε τα κυλινδρικά σύνολα με την έννοια της μετρησιμότητας και για αυτό θα εισάγουμε ένα νέο είδος σ-άλγεβρων τις **κυλινδρικές σ-άλγεβρες**. Βέβαια, σε κάθε τοπολογία που ορίζεται σε έναν διαν. χώρο X αντιστοιχεί και μια σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του X. Θα γράφουμε $\mathscr{B}(X, \tau)$ τη σ-άλγεβρα Borel υποσυνόλων του X που παράγεται από τα ανοικτά της τοπολογίας τ. Οι σχέσεις μεταξύ διαφόρων σ-αλγεβρών είναι άμεση συνέπεια της σχέσης μεταξύ τοπολογιών. Έτσι αν ξ είναι η τοπολογία ενός τοπικά κυρτού τοπολ. διαν. χώρου X θα ισχύει π.χ.:

$$\mathscr{B}(X, \sigma(X, X')) \subset \mathscr{B}(X, \xi) \subset \mathscr{B}(X, \tau(X, X'))$$

Έστω λοιπόν $X \neq \emptyset$ και $\Gamma \subset \mathbb{R}^X = \{f : X \mapsto \mathbb{R}\}$, $\Gamma \neq \emptyset$. Ας είναι τώρα $\Lambda = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$.

Για τυχόν $f = (f_1, ...f_m) \in \Lambda$ θέτουμε

$$\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^m\}$$

Η $\mathscr{A}_f$ είναι σ-άλγεβρα και μάλιστα $\mathscr{A}_f = \sigma(\{f^{-1}(A_1 \times ... \times A_m) : A_i \in \mathscr{B}^1\})$. Αν τώρα $f = (f_1, ..., f_m) \in \Lambda$ και $g = (g_1, ..., g_n) \in \Lambda$ και θεωρήσουμε τη διάταξη $h = (f_1, ..., f_m, g_1, ...g_n)$ τότε $h \in \Lambda$ και για τυχόν $B \in \mathscr{B}^m$ είναι $f^{-1}(B) = h^{-1}(B \times \mathbb{R}^n)$ και συνεπώς $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_h$. Όμοια είναι $\mathscr{A}_g \subset \mathscr{A}_h$ και συνεπώς η οικογένεια σ-αλγεβρών $\{\mathscr{A}_f, f \in \Lambda\}$ είναι **δεξιά διευθυνόμενη** (δηλαδή για $f, g \in \Lambda$ υπάρχει $h \in \Lambda$ με $\mathscr{A}_f \cup \mathscr{A}_g \subset \mathscr{A}_h$). Αυτό εξασφαλίζει ότι η $\bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$ είναι άλγεβρα. Πρόκειται ακριβώς για την **άλγεβρα κυλίνδρων** του X την παραγόμενη από το $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$.

Ορισμός 3.2.6. *Έστω $X \neq \emptyset$ και μη κενό $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$. Η άλγεβρα $\bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$ ονομάζεται **άλγεβρα των κυλίνδρων** (ή κυλινδρική) παραγόμενη από την Γ και σημειώνεται $C(X, \Gamma) = \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$. Ακόμα η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X η παραγόμενη από την $C(X, \Gamma)$ ονομάζεται **σ-άλγεβρα κυλίνδρων** (ή κυλινδρική) **παραγόμενη από την Γ** και σημειώνεται $\hat{C}(X, \Gamma)$. Είναι δηλαδή $\hat{C}(X, \Gamma) = \sigma(C(X, \Gamma))$.*

Στα πλαίσια των συμβολισμών αυτών και για τυχόν $f = (f_1, ..., f_m) \in \Lambda$ μπορούμε να γράψουμε $\hat{C}(X, f_1, ..., f_m) = C(X, f_1, ..., f_m) = \mathscr{A}_f$ (δηλαδή στην πεπερασμένη περίπτωση $C(X, \Gamma)$ συμπίπτει με την $\hat{C}(X, \Gamma)$).

Παρατήρηση 3.2.7. Αποδεικνύεται ότι μια ισοδύναμη γραφή της κυλινδρικής σ-άλγεβρας είναι η εξής:

$$\hat{C}(X, \Gamma) = \hat{C}_1(X, \Gamma) \equiv \sigma(\Gamma) = \sigma\{\gamma^{-1},\ \gamma \in \Gamma,\ B \in \mathscr{B}^1\}$$

Πρόταση 3.2.8. *Έστω X διαν. χώρος και ένα μη κενό σύνολο **γραμμικών** συναρτησοειδών Γ. Τότε ο $(X, \hat{C}(X, \Gamma))$ είναι μετρήσιμος διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $\gamma \in \Gamma$ και ορίζουμε $\Psi_\gamma : X \times X \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\Psi_\gamma(x, y) = (\gamma(x), \gamma(y))$$

Η Ψ_γ είναι $\hat{C}(X, \Gamma) \otimes \hat{C}(X, \Gamma) - \mathscr{B}^2$ μετρήσιμη αφού για τυχόντα $A, B \in \mathscr{B}^1$ έχουμε $\Psi_\gamma^{-1}(A \times B) = \gamma^{-1}(A) \times \gamma^{-1}(B) \in \hat{C}(X, \Gamma) \otimes \hat{C}(X, \Gamma)$. Ορίζουμε τώρα $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με την $\phi(x, y) = x + y$. Η φ είναι προφανώς $\mathscr{B}^2 - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη και συνεπώς η σύνθεση $\phi \circ \Psi_\gamma$ είναι $\hat{C}(X, \Gamma) \otimes \hat{C}(X, \Gamma) - \mathscr{B}^1$ μετρήσιμη. Αν τώρα $\Phi : X \times X \mapsto X$ είναι η οριζόμενη ως $\Phi(x, y) = x + y$ τότε $\gamma \circ \Phi = \phi \circ \Psi_\gamma$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\gamma^{-1}(B)) &= (\gamma \circ \Phi)^{-1}(B) \\ &= (\phi \circ \Psi_\gamma)^{-1}(B) \in \hat{C}(X, \Gamma) \otimes \hat{C}(X, \Gamma)\end{aligned}$$

λόγω μετρησιμότητας της $\phi \circ \Psi_\gamma$.

Όμως λόγω της Παρατήρησης 3.2.7. έχουμε ότι
$\hat{C}(X,\Gamma) = \sigma(\{\gamma^{-1}(B) : \gamma \in \Gamma, B \in \mathscr{B}^1\})$.
Όμοια ενεργούμε και για την απεικόνιση $\Phi_1 : \mathbb{R} \times X \mapsto X : \Phi_1(a,x) = ax$.

□

Παρατήρηση 3.2.9. Από την παραπάνω Πρόταση προκύπτει ότι για τυχόντα $b \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ οι απεικονίσεις $x \mapsto x + b, x \mapsto \lambda x$ είναι $\hat{C}(X,\Gamma) - \hat{C}(X,\Gamma)$ μετρήσιμες.

Έστω τώρα X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. με τοπολογία ξ. Έστω $X' = (X,\xi)'$ ο δυϊκός του. Τότε όπως $\sigma(X,X') \subset \xi$ και άρα $\mathscr{B}(X,\sigma(X,X')) \subset \mathscr{B}(X,\xi) \equiv \mathscr{B}_X$. Ακόμα η σ-άλγεβρα $\hat{C}(X,X')$ είναι η ελάχιστη που καθιστά μετρήσιμες τις $x' \in X'$. Συνεπώς $\hat{C}(X,X') \subset \mathscr{B}(X,\sigma(X,X')) \subset \mathscr{B}_X$. Ισότητα δεν ισχύει εν γένει. Όμως:

Θεώρημα 3.2.10. *(E. Mourier)*
Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με norm. Τότε $\hat{C}(X,X') = \mathscr{B}_X$.

Απόδειξη. Έστω $\|\cdot\|$ η norm του X και $\|\cdot\|'$ η norm του X'. Έστω $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό στον X. Από το θεώρημα Hahn-Banach προκύπτει ότι υπάρχει $\{x'_n, n \in \mathbb{N}\} \subset X'$ με $\|x'_n\|' = 1$ και $| < x_n, x'_n > | = \|x_n\|$. Θα δείξουμε ότι:

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} | < x, x'_n > | \text{ για κάθε } x \in X.$$

Από την $\|x'_n\|' = \sup_{y\neq 0} \frac{|<y,x'_n>|}{\|y\|} = 1$ προκύπτει ότι

$$| < y, x'_n > | \leq \|y\| \quad \text{για κάθε} \quad y \in X \tag{1}$$

Τώρα για τυχόν $x \in X$ και τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει x_m:

$$\|x - x_m\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

Από τις ιδιότητες της norm και τις ιδιότητες της $\{x'_n, n \in \mathbb{N}\}$ έχουμε:

$$\|x\| - \frac{\epsilon}{2} < \|x_m\| = | < x_m, x'_m > | \leq | < x, x'_m > | + | < x_m - x, x'_m > |$$

και επικαλούμενοι τις (1),(2):

$$\|x\| - \frac{\epsilon}{2} < | < x, x'_m > | + \frac{\epsilon}{2}$$

και πάλι την (1) οπότε:

$$\|x\| - \epsilon < | < x, x'_m > | \leq \|x\|$$

Συνεπώς $\|x\| = \sup_n | < x, x'_n > |, x \in X$ και άρα

$$B_X \equiv \{x \in X : \|x\| < 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : | < x, x'_n > | < 1\}$$

Όμως $\{x \in X : | < x, x'_n > | < 1\} \in \hat{C}(X, X')$ και άρα $B_X \in \hat{C}(X, X')$.
Ακόμα, επειδή ο χώρος $(X, \hat{C}(X, X'))$ είναι μετρήσιμος διανυσματικός χώρος έχουμε ότι για κάθε $y \in X$ και κάθε $a > 0$ το σύνολο $y + aB_X \in \hat{C}(X, X')$ και συνεπώς κάθε "μπάλα" $B(y, r) = \{x \in X : \|x - y\| < r\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα $\hat{C}(X, X')$. Λόγω διαχωρισιμότητας του X κάθε ανοικτό του X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση από τέτοιες "μπάλες" και συνεπώς κάθε ανοικτό του X ανήκει στην $\hat{C}(X, X')$. Ώστε $\mathscr{B}_X \subset C(X, X')$.
Όμως ήδη γνωρίζουμε ότι $C(X, X') \subset \mathscr{B}_X$.
Άρα τελικά $\mathscr{B}_X = \hat{C}(X, X')$. □

Συναφές είναι και το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.2.11. *Έστω X τοπολογικός πολωνικός χώρος και Γ μια οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού X. Αν η οικογένεια Γ διαχωρίζει τα σημεία του X τότε ισχύει:*

$$\hat{C}(X, \Gamma) = \mathscr{B}_X$$

Απόδειξη. [28] □

Θα δούμε τώρα τις επιπλέον δυνατότητες περιγραφής και παραλλαγής της σ-άλγεβρας $\hat{C}(X, \Gamma)$ όταν X, Γ είναι διαν. χώροι π.χ. X τοπικά κυρτός τοπολ. διαν. χώρος και $\Gamma = X'$. Υπενθυμίζουμε ότι για τυχόν $f = (f_1, ..., f_k) \in \Lambda \equiv \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$ γράφουμε:

$$\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^k\}$$

Όπως θα δούμε η σ-άλγεβρα $\hat{C}(X, \Gamma)$ μπορεί να προκύψει θεωρώντας $f = (f_1, ..., f_k) \in \Lambda$ με $f_1, ..., f_k$ γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόταση 3.2.12. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ διαν. χώρος. Έστω $L = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma$ γραμμικά ανεξάρτητα$\}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\hat{C}(X, \Gamma) = \sigma(\bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f)$

2. *Για τυχόντα $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $g = (g_1, ..., g_r) \in L$ υπάρχει $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ με $\mathscr{A}_f \cup \mathscr{A}_g \subset \mathscr{A}_h$.*
   Μάλιστα υπάρχουν γραμμικές $\phi_1 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ και $\phi_2 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^r$ εις τρόπον ώστε να ισχύει :

$$f = \phi_1 \circ h \quad \text{και} \quad g = \phi_2 \circ h$$

3. $\bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f = \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f = C(X, \Gamma)$.

Απόδειξη.

1. Έχουμε ότι $\{\gamma^{-1}(B) : \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}, B \in \mathscr{B}^1\} \subset \bigcup_{f\in L} \mathscr{A}_f \subset \bigcup_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f$ και έτσι ισχύει $\hat{C}_1(X, \Gamma \setminus \{0\}) \subset \sigma(\bigcup_{f\in L} \mathscr{A}_f) \subset \sigma(\bigcup_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f)$.
   Όμως εξ ορισμού $\sigma(\bigcup_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f) = \hat{C}(X, \Gamma)$ και από την άλλη $\hat{C}_1(X, \Gamma \setminus \{0\}) = \hat{C}_1(X, \Gamma) = \hat{C}(X, \Gamma)$.

2. Έστω E ο υπόχωρος ο παραγόμενος από τα $\{f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_r\}$ και μια βάση του $\{h_1, ..., h_m\} \subset E$. Τότε
$$f_k = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell^k h_\ell \quad , \quad k = 1, ...n$$
   Αν τώρα $h = (h_1, ..., h_m)$ και $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\phi(u_1, ..., u_m) = [a_\ell^k](u_1, ..., u_m)^\top$ τότε $h \in L$ και $f = \phi \circ h$ οπότε για τυχόν $B \in \mathscr{B}^n$ έχουμε $f^{-1}(B) = h^{-1}(\phi^{-1}(B))$ με $\phi^{-1}(B) \in \mathscr{B}^m$ και άρα $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_h$.
   Όμοια για την g.

3. Έστω F μια βάση του χώρου Γ. Τότε για τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ θα ισχύει
$$f_k = \sum_{\ell=1}^{m_k} b_\ell^k g_\ell^k \quad , \quad k = 1, ..., n$$
   όπου $\{g_1^k, ..., g_{m_k}^k\} \subset F$ γραμμικά ανεξάρτητα $(k = 1, ..., n)$.
   Αν E ο υπόχωρος ο παραγόμενος από τα $\{g_\ell^k : \ell = 1, ..., m_k, k = 1, ..., n\}$ τότε $f_k \in E, k = 1, ..., n$ και συνεπώς αν $\{h_1, ..., h_m\}$ βάση του E τότε
$$f_k = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell^k h_\ell \quad , \quad k = 1, ..., n$$
   Αν τώρα $h = (h_1, ..., h_m)$ και $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ οριζόμενη από την $\phi(u_1, ..., u_m) = [a_\ell^k](u_1, ..., u_m)^\top$ τότε $f = \phi \circ h$ και εύκολα $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_h$ με $h \in L$.

□

Παρατήρηση 3.2.13. Τα παραπάνω ισχύουν ασφαλώς όταν $\Gamma = X'$ όπου X' ο δυϊκός ενός τοπικά κυρτού τοπολ. διαν. χώρου X με τοπολογία ξ, δηλαδή $X' = (X, \xi)'$. Όπως ήδη αναφέραμε ισχύουν :
$$\hat{C}(X, X') \subset \mathscr{B}(X, \sigma(X, X')) \subset \mathscr{B}_X$$
όπου $\mathscr{B}_X = \mathscr{B}(X, \xi)$.

3.3 Κυλινδρικές σ-άλγεβρες στον δυϊκό χώρο

Έστω X τ.δ.χ. τοπικά κυρτός και ξ η τοπολογία του. Ορίζουμε $X' = (X, \xi)'$ τον δυϊκό του και πάνω σε αυτόν θα ορίσουμε τις κυλινδρικές άλγεβρες και σ-άλγεβρες. Συγκεκριμένα:
$I = \{i \subset X : i$ πεπερασμένο$\}$ και για $i = \{x_1, ..., x_n\} \in I$
$\mathscr{A}_i = \{g_i^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^n\}$ όπου $g_i : X' \mapsto \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε
$g_i(x') = (< x_1, x' >, ..., < x_n, x' >)$. Ορίζουμε $C(X', X) = \bigcup_{i \in I} \mathscr{A}_i$ και
$\hat{C}(X', X) = \sigma(\bigcup_{i \in I} \mathscr{A}_i)$.
Η $\hat{C}(X', X)$ ονομάζεται **σ-άλγεβρα κυλίνδρων** του X' και απλώς **άλγεβρα κυλίνδρων** (είναι) η $C(X', X)$. Απεικονίνοντας το X στο υποσύνολο $\Phi(X) \subset X''$ μέσω της $\Phi : X \mapsto X''$ τέτοια ώστε

$$\Phi(x)(\ell) = \ell(x) \quad , \quad \ell \in X'$$

τότε προκύπτει ότι

$$\hat{C}(X', X) \subset \hat{C}(X', X'') \subset \mathscr{B}(X', \mathscr{C}(X', X))$$

όπου $\mathscr{C}(X', X)$ η ισχυρή τοπολογία του X'.
Για το νόημα της $\hat{C}(X', X'')$ δεν χρειάζεται να πούμε παρά ότι πρόκειται για την **σ-άλγεβρα κυλίνδρων** του X' όταν $\Gamma = X''$. Έτσι το θεώρημα της E. Mourier εφαρμόζεται και στον δυϊκό X'.

Θεώρημα 3.3.1. *Αν X είναι χώρος με norm και ο X' είναι διαχωρίσιμος τότε*

$$\hat{C}(X', X) = \mathscr{B}_{X'}$$

(Η τοπολογία του X' ορίζεται από την $\|x'\| = \sup\{| < x, x' > | : \|x\| \leq 1\}$).

3.4 Μέτρα και κυλινδρικά μέτρα πιθανότητας σε τ.δ.χ. Θεώρημα Prohorov

Η έννοια του μέτρου Radon αναφέρεται σε μια τοπολογία του χώρου στου οποίου τα υποσύνολα ορίζεται. Είναι λοιπόν βασικό όταν σε ένα χώρο ορίζονται περισσότερες της μιας τοπολογίες να προσδιορίζεται η τοπολογία στην οποία αναφέρεται η κανονικότητά του. Προκειμένου να εξυπηρετηθεί αυτή η ανάγκη θα χρησιμοποιούμε (όταν είναι απαραίτητο) την ορολογία **ξ-Radon μέτρο μ** και θα εννοούμε ότι το μέτρο μ είναι κανονικό μέτρο στη σ-άλγεβρα Borel που παράγουν τα ανοικτά της τοπολογίας ξ. Έτσι αν π.χ. X είναι τοπικά κυρτός τ.δ.χ. με τοπολογία ξ τότε $\mathscr{C}(X, X')$- Radon μέτρο μ είναι ένα μέτρο που ορίζεται στη σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B}(X, \mathscr{C}(X, X'))$ και είναι Radon.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω τοπολογίες τ_1, τ_2 στον χώρο X με σύνολο ανοικτών $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ (η τ_2 είναι* **λεπτότερη** *της τ_1). Τότε ένα τ_2-Radon μέτρο μ είναι τ_1-Radon.*

Απόδειξη. Καταρχήν $\mathscr{B}_1 \equiv \sigma(\mathcal{T}_1) \subset \sigma(\mathcal{T}_2) \equiv \mathscr{B}_2$ και συνεπώς το μέτρο μ ορίζεται στην $\mathscr{B}_1$. Αν τώρα $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ είναι τα σύνολα συμπαγών για τις τοπολογίες τ_1, τ_2 αντίστοιχα τότε διαπιστώνεται άμεσα ότι $\mathscr{K}_2 \subset \mathscr{K}_1$ οπότε για τυχόν $A \in \mathscr{B}_1$ θα είναι

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}_2, K \subset A\} \\ &\leq \sup\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}_1, K \subset A\} \\ &\leq \mu(A)\end{aligned}$$

δηλαδή το μέτρο μ είναι είναι πεπερασμένο και ισχύει η εσωτερική κανονικότητα, άρα είναι Radon. □

Παρατήρηση 3.4.2. Η ίδια Πρόταση μάς επιτρέπει μια επέκταση του προηγούμενου συμπεράσματος σε μη-πεπερασμένα μέτρα. Αρκεί να είναι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ με U_n τ_1-ανοικτά και $\mu(U_n) < \infty$.

Ο στόχος μας είναι η κατασκευή μέτρων Radon σε τ.δ.χ. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση των λεγόμενων κυλινδρικών "μέτρων" ο ορισμός των οποίων ακολουθεί.

Ορισμός 3.4.3. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ διαν. χώρος. Ονομάζεται* **κυλινδρικό μέτρο** *πιθανότητας μ στον X μια συνολοσυνάρτηση $\mu : C(X, \Gamma) \mapsto [0, 1]$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. *είναι απλά προσθετική*
2. *$\mu(X) = 1$*
3. *Ο περιορισμός της σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathscr{A}_f$, $f \in \Lambda$ είναι μέτρο*

όπου $\Lambda = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$, $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$, $\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^n\}$ και $C(X, \Gamma) \equiv \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$

Παρατήρηση 3.4.4.

1. Η απαίτηση (1) εξασφαλίζεται από την (3) και από το γεγονός ότι η $\mathscr{A}_f$ είναι δεξιά διευθυνόμενη.
2. Ένα κυλινδρικό μέτρο **δεν** είναι μέτρο αφού **δεν** απαιτείται να είναι σ-προσθετικό στην άλγεβρα $C(X, \Gamma)$.

Θα παραθέσουμε τώρα μια μέθοδο κατασκευής κυλινδρικών μέτρων πιθανότητας "ξεκινώντας" από μέτρα πιθανότητας σε πεπερασμένης διάστασης διαν. χώρους. Προηγουμένως όμως είναι απαραίτητο το:

Λήμμα 3.4.5. *Έστω διανυσματικός χώρος X και διανυσματικός χώρος $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ του οποίου τα στοιχεία είναι γραμμικά συναρτησοειδή ($\Gamma \subset X^*$- ο αλγεβρικός δυϊκός του X). Έστω γραμμικά ανεξάρτητα $\{f_1, ..., f_n\} \subset \Gamma$ και $f = (f_1, ..., f_n)$. Τότε η απεικόνιση $f : X \mapsto \mathbb{R}^n$ είναι "επί".*

Απόδειξη. Έστω τυχόν $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Επειδή $\{f_1, ..., f_n\}$ είναι ανεξάρτητα υπάρχουν $a_1, ..., a_n$ στον X τέτοια ώστε $f_i(a_i) = 1$ και $f_i(a_j) = 0$ για κάθε $j \neq i \in (i = 1, ..., n)$. Θεωρούμε το $x = y_1 a_1 + ... + y_n a_n$.
Τότε $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j(a_j) = y_i$ και άρα $f(x) = y$.

□

Θεώρημα 3.4.6. *Έστω διαν. χώρος X και διαν. χώρος γραμμικών συναρτησοειδών $\Gamma \subset X^*$ (X^* ο αλγεβρικός δυϊκός του X). Υποθέτουμε ότι για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ ορίζεται ένα μέτρο πιθανότητας μ_f στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω* **συνθήκη συμβιβαστότητας:**

> *Για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ με $f = \phi \circ h$ όπου $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$* ***γραμμική*** *ισχύει:*
>
> $$\mu_h(\phi^{-1}(B)) = \mu_f(B) \quad , \quad B \in \mathscr{B}^n \qquad (\Sigma)$$

Τότε υπάρχει μοναδική συνολοσυνάρτηση $\mu : \bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f \mapsto [0, 1]$ με $\mu(X) = 1$ και σ-προσθετική όταν περιορίζεται στις σ-άλγεβρες $\mathscr{A}_f, f \in L$ έτσι ώστε να ισχύει η:

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B) \text{ για κάθε } f = (f_1, ..., f_n) \in L \quad , \quad B \in \mathscr{B}^n \qquad (\mathrm{A})$$

Επιπλέον η μ ειναι σ-προσθετική σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathscr{A}_f, f \in \Lambda$ είναι δηλαδή ένα κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στην $C(X, \Gamma)$.

Απόδειξη.

Ορίζουμε $\quad \mu : C(X, \Gamma) \equiv \bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f \mapsto [0, 1]$
ως εξής $\mu(A) = \mu_f(B)$ αν $A = f^{-1}(B) \in \mathscr{A}_f$

Καταρχήν θα δείξουμε ότι η μ είναι καλά ορισμένη.
Έστω ότι $A = f^{-1}(B_1) = g^{-1}(B_2)$ όπου $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $g = (g_1, ..., g_r) \in L, B_1 \in \mathscr{B}^n$ και $B_2 \in \mathscr{B}^r$. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.11. υπάρχει
$h = (h_1, ..., h_m) \in L$ με $f = \phi_1 \circ h$ και $g = \phi_2 \circ h$ όπου $\phi_1 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ και $\phi_2 : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^r$ γραμμικές και συνεπώς:

$$A = h^{-1}(\phi_1^{-1}(B_1)) = h^{-1}(\phi_2^{-1}(B_2))$$

Άρα $h^{-1}(\phi_1^{-1}(B_1) \setminus \phi_2^{-1}(B_2)) = \emptyset$ και επειδή κατά το προηγηθέν Λήμμα η h είναι "επί" θα ισχύει

$$\phi_1^{-1}(B_1) \subset \phi_2^{-1}(B_2)$$

Λόγω συμμετρίας θα ισχύει και ο αντίθετος εγκλεισμός. Άρα

$$\phi_1^{-1}(B_1) = \phi_2^{-1}(B_2) \tag{1}$$

Εξάλλου από τη συνθήκη συμβιβαστότητας (Σ) έχουμε:

$$\mu_f(B_1) = \mu_h(\phi_1^{-1}(B_1)) \quad \text{και} \quad \mu_g(B_2) = \mu_h(\phi_2^{-1}(B_2))$$

και άρα από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\mu_f(B_1) = \mu_g(B_2)$.
Θα δείξουμε τώρα ότι η μ είναι σ-προσθετική στην σ-άλγεβρα $\mathscr{A}_f$ για τυχόν $f \in L$. Πράγματι αν $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}_f$ είναι ξένα μεταξύ τους και $A_n = f^{-1}(B_n), B_n \in \mathscr{B}^k$ τότε $f^{-1}(B_i \cap B_j) = \emptyset$ και αφού η f είναι επί θα είναι $B_i \cap B_j = \emptyset$ για $i \neq j$.
Άρα:

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_n A_n) &= \mu(f^{-1}(\bigcup_n B_n)) = \mu_f(\bigcup_n B_n) \\ &= \sum_n \mu_f(B_n) = \sum_n \mu(A_n)\end{aligned}$$

Η απαίτηση $\mu(X) = 1$ και η μοναδικότητα προκύπτουν άμεσα.
Απομένει να δειθχεί ότι το μ είναι κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στο $C(X, \Gamma)$.
Έστω τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$. Αν ένα τουλάχιστον $f_i \neq 0$ θεωρούμε τον υπόχωρο τον παραγόμενο από τα $\{f_1, ..., f_n\}$ και έστω $\{h_1, ..., h_m\}$ μια βάση του. Αν θέσουμε $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ τότε έχουμε ότι $f = \phi \circ h$ όπου $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ και συνεπώς για τυχόν $B \in \mathscr{B}^n$ είναι $f^{-1}(B) = h^{-1}(\phi^{-1}(B))$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_h$ και άρα η συνολοσυνάρτηση μ είναι σ-προσθετική στην $\mathscr{A}_f$ με $f \in \Lambda$. Αν $f_i = 0$ για $i = 1, ..., n$ τότε η $\mathscr{A}_f = \{\emptyset, X\}$ και συμβαίνει το ίδιο. Λαμβάνοντας υπόψην ότι $C(X, \Gamma) = \bigcup_{f \in L} \mathscr{A}_f = \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$ συμπεραίνουμε ότι η συνολοσυνάρτηση μ είναι κυλινδρικό μέτρο. □

Παρατήρηση 3.4.7. Ο τελευταίος ισχυρισμός αποσκοπεί στο χαρακτηρισμό της συνολοσυνάρτησης μ ως κυλινδρικό μέτρο όπως το προβλέπει ο Ορισμός 3.4.3.

Πόρισμα 3.4.8. Έστω διαν. χώρος X και διανυσματικός χώρος γραμμικών συναρτησοειδών $\Gamma \subset X^*$ (όπου X^* ο αλγεβρικός δυϊκός του X). Υποθέτουμε ότι για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ ορίζεται ένα μέτρο πιθανότητας μ_f στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιείται η **συνθήκη συμβιβαστότητας**:

> Για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ και $h = (h_1, ..., h_m) \in \Lambda$ με $f = \phi \circ h$ όπου $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ γραμμική ισχύει:
>
> $$\mu_h(\phi^{-1}(B)) = \mu_f(B) \quad , \quad B \in \mathscr{B}^n \tag{Σ'}$$

Τότε υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας $\mu : C(X, \Gamma) = \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f \mapsto [0, 1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B) \text{ για κάθε } f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda \text{ και } B \in \mathscr{B}^n \tag{A'}$$

Απόδειξη. Καταρχήν $L \subset \Lambda$ και κατά το προηγούμενο Θεώρημα τα μέτρα $\mu_f, f \in L$ ορίζουν ένα κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ στην $C(X, \Gamma)$ που ικανοποιεί την (A).
Απομένει να επαληθευτεί η (A'). Πράγματι για τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ με ένα τουλάχιστον $f_i \neq 0$ και $B \in \mathscr{B}^n$ ισχύει κατά τα προηγηθέντα $f = \phi \circ h$ όπου $h \in L$ και συνεπώς $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(h^{-1}(\phi^{-1}(B))) = \mu_h(\phi^{-1}(B))$.
Επικαλούμενοι την (Σ') έχουμε $\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B)$. Αν πάλι $f = (0, ..., 0)$ τότε από την (Σ') συνάγεται ότι $\mu_f = \delta_0$. Αλλά επίσης φανερά $\mu(f^{-1}(B)) = \delta_0$. □

Παρατήρηση 3.4.9. Από το Θεώρημα και το Πόρισμα που προηγήθηκαν προκύπτει:

> Αρκούν τα μέτρα $\mu_f, f \in L$ για να προσδιοριστεί ένα κυλινδρικό μέτρο.

Ο στόχος της μελέτης των κυλινδρικών μέτρων είναι η κατασκευή μέτρων Radon, δηλαδή η επεκτασή τους σε μέτρα Radon. Θέλουμε συνεπώς ένα Θεώρημα Prohorov κατάλληλο για το περιβάλλον των διανυσματικών χώρων. Προηγουμένως όμως το παρακάτω:

Λήμμα 3.4.10. *Έστω X τοπικά κυρτός τοπολ. διαν. χώρος και διαν. υπόχωρος $\Gamma \subset C(X, \mathbb{R})$. Έστω μ κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στον X. Τότε ισχύει για κάθε $A \in C(X, \Gamma)$*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \in C(X, \Gamma), F \text{ κλειστό } \subset A\}$$

(η τοπολογία του X είναι δεδομένη και σε αυτήν αναφέρεται ο $C(X, \mathbb{R})$).

Απόδειξη. Έστω $A \in C(X, \Gamma)$. Τότε υπάρχει $f \in L$ με $A \in \mathscr{A}_f$ και άρα $A = f^{-1}(B)$ με $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $B \in \mathscr{B}^n$. Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας $\nu(C) = \mu(f^{-1}(C)), C \in \mathscr{B}^n$ στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$. Όμως το μέτρο ν είναι κανονικό και συνεπώς για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $E \subset \mathbb{R}^n$ με $E \subset B$ και $\nu(B \setminus E) < \epsilon$. Λόγω συνέχειας της f το σύνολο $F = f^{-1}(E)$ είναι κλειστό και επίσης ανήκει στην $C(X, \Gamma)$ (εκ του ορισμού της) και είνα υποσύνολο του $f^{-1}(B) = A$.
Έχουμε τώρα $\mu(A \setminus F) = \mu(f^{-1}(B \setminus E)) = \nu(B \setminus E) < \epsilon$.

□

Θεώρημα 3.4.11. *(Prohorov για διανυσματικούς χώρους)*
Έστω X τοπικά κυρτός τοπολ. διαν. χώρος και διαν. χώρος $\Gamma \subset C(X, \mathbb{R})$ που διαχωρίζει τα σημεία του X. Έστω κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ στον χώρο X που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει συμπαγές } K_\epsilon \subset X \text{ εις τρόπον ώστε}$$
$$\mu(A) > 1 - \epsilon \text{ για κάθε } A \in C(X, \Gamma) \text{ με } A \supset K_\epsilon \qquad (*)$$

Τότε η συνολοσυνάρτηση μ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μέτρο Radon στον $(X, \mathscr{B}_X)$.

Απόδειξη. Διαπιστώνουμε τα παρακάτω:

- Σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.3. ο χώρος X είναι πλήρως κανονικός (completely regular) ως τ.δ.χ.
- $C(X,\Gamma) = \bigcup_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f$ όπου $\Lambda = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$
- Η συνολοσυνάρτηση μ είναι απλά προσθετική
- $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F$ κλειστό $\subset A, F \in C(X,\Gamma)\}$
- Ισχύει η συνθήκη Prohorov (*)

Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε το Θεώρημα Prohorov 2.2.14.

□

Πρόταση 3.4.12. *Η συνθήκη Prohorov*

> *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $K_\epsilon \subset X$ συμπαγές τέτοιο ώστε $\mu(A) > 1-\epsilon$ για κάθε $A \supset K_\epsilon$, $A \in C(X,\Gamma)$*

ισοδυναμεί με την παρακάτω διατύπωση:

> *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $K_\epsilon \subset X$ συμπαγές τέτοιο ώστε $\nu_f(f(K_\epsilon)) > 1-\epsilon$ για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ όπου ν_f μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ με $\nu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)),\ B \in \mathscr{B}^n$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$ Έστω $f = (f_1, ..., f_n) \in L$. Λόγω συνέχειας $f(K_\epsilon) \subset \mathscr{B}^n$.
Άρα $f^{-1}(f(K_\epsilon)) \in C(X,\Gamma)$.
Όμως $f^{-1}(f(K_\epsilon)) \supset K_\epsilon$ και άρα $\nu_f(f(K_\epsilon)) = \mu(f^{-1}(f(K_\epsilon))) > 1-\epsilon$.
$\Leftarrow$ Έστω $A \in C(X,\Gamma)$ με $A \supset K_\epsilon$. Όμως $A = f^{-1}(B)$ για κάποιο $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ άρα $f(f^{-1}(B)) \supset f(K_\epsilon)$.
Ακόμα $B \supset f(f^{-1}(B))$ οπότε $\nu_f(B) \geq \nu_f(f(f^{-1}(B))) \geq \nu_f(f(K_\epsilon)) > 1-\epsilon$.
Όμως $\nu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu(A)$
Άρα $\mu(A) > 1-\epsilon$ □

3.5 Θεώρημα Weil

Ιδιαίτερο είναι το παρακάτω Θεώρημα λόγω του μη αναμενόμενου του αποτελέσματός του. Συγκεκριμένα αποκλείει την ύπαρξη μέτρων Haar (αναλλοίωτων στη μεταφορά) σε απειροδιάστατους χώρους.

Θεώρημα 3.5.1. *(A. Weil)*
Έστω X τοπολ. διαν. χώρος Hausdorff. Αν υπάρχει μέτρο Radon μ στον $(X, \mathscr{B})$ που να είναι **αναλλοίωτο** *για την πρόσθεση (δηλ. $\mu(a+B) = \mu(B)$ για κάθε $a \in X$ και $B \in \mathscr{B}$) τότε ο τοπολ. χώρος X είναι τοπικά συμπαγής.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι το μέτρο μ είναι τοπικά πεπερασμένο, άρα $\mu(K) < \infty$ για κάθε $K \subset X$ συμπαγές. Θα δείξουμε ότι για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset X$ η συνάρτηση $f(x) = \mu((x+K)\Delta K)$, $x \in X$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στον X. Έστω $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε ανοικτό $U \supset K$ τέτοιο ώστε $\mu(U \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}$. Έστω V μια συμμετρική περιοχή του μηδενός τέτοια ώστε $K + V \subset U$. Αν τώρα $x, y \in X$ τέτοια ώστε $x - y \in V$ τότε επειδή το μ είναι αναλλοίωτο στην πρόσθεση ισχύει:

$$\begin{aligned}
\mu((x+K)\Delta(y+K)) &= \mu((x+K) \setminus (y+K)) + \mu((y+K) \setminus (x+K)) \\
&= \mu((-y+x+K) \setminus K) + \mu((-x+y+K) \setminus K) \\
&\leq 2\mu(U \setminus K) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$|\mu((x+K)\Delta K) - \mu((y+K)\Delta K)| \leq \mu((x+K)\Delta(y+K)) < \epsilon$$

Συνεπώς η f είναι συνεχής συνάρτηση.
Έστω τώρα K συμπαγές σύνολο θετικού μέτρου. Τότε το σύνολο

$$V_K = \{x : \mu((x+K)\Delta K) < \mu(K)\}$$

είναι μια ανοικτή περιοχή του μηδενός στον X. Ακόμα έχουμε

$$V_K = \{x : \mu((x+K)\Delta K) < \mu(K)\} \subset \{x : (x+K) \cap K \neq \emptyset\} \subset K - K$$

Οπότε V_K είναι περιοχή του μηδενός με συμπαγή κλειστότητα. Συνεπώς ο X είναι τοπικά συμπαγής. □

Πόρισμα 3.5.2. Έστω X τοπολ. διανυσματικός χώρος Hausdorff **απείρων** διαστάσεων. Τότε δεν υπάρχει μέτρο Radon μ στον $(X, \mathscr{B})$ που να είναι αναλλοίωτο.

Απόδειξη. Αν υπήρχε τότε ο X θα ήταν τοπικά συμπαγής και άρα πεπερασμένης διάστασης - Άτοπο. □

Σχετικό είναι και το παρακάτω αποτέλεσμα το οποίο αποδεικνύει πως δεν υπάρχει ανάλογο του μέτρου Lebesgue σε απειροδιάστατους χώρους Banach .

Θεώρημα 3.5.3. *Έστω $(X, \|.\|)$ απειροδιάστατος χώρος Banach . Τότε το μόνο τοπικά πεπερασμένο και αναλλοίωτο μέτρο Borel μ στον X είναι το εκφυλισμένο με $\mu(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathscr{B}(X)$.*

Απόδειξη. Έστω X απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Banach και μ τοπικά πεπερασμένο αναλλοίωτο μέτρο στον X.
Επειδή το μ είναι τοπικά πεπερασμένο υποθέτουμε ότι για κάποιο $\delta > 0$ η ανοικτή μπάλα $B(\delta)$ έχει πεπεραμένο μέτρο.
Αφού ο χώρος X είναι απειροδιάστατος υπάρχει μια άπειρη ακολουθία ξένων μεταξύ τους ανοικτών μπαλών $B_n(\frac{\delta}{4})$ τέτοιες ώστε $B_n(\frac{\delta}{4}) \subset B(\delta)$.

Επιπλέον το μέτρο μ είναι αναλλοίωτο άρα όλες οι μπάλες $B_n(\frac{\delta}{4})$ έχουν το ίδιο μέτρο. Όμως το μέτρο τους είναι πεπερασμένο άρα θα πρεπει αναγκαστικά $\mu(B_n(\frac{\delta}{4})) = 0$.
Ακόμα ο X είναι διαχωρίσιμος χώρος με norm άρα και δεύτερος διαχωρίσιμος και χώρος Lindelof (κάθε ανοικτό του κάλυμμα έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα). Έτσι μπορεί να καλυφθεί από αριθμήσιμη οικογένεια μπαλών της μορφής $B_n(\frac{\delta}{4})$.
Έτσι $\mu(X) = 0$, άρα το μέτρο μ είναι εκφυλισμένο. $\square$

Κεφάλαιο 4

Χαρακτηριστικά συναρτησοειδή μέτρων πιθανότητας

4.1 Ορισμοί και ιδιότητες των χαρακτηριστικών συναρτησοειδών

Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε η χαρακτηριστική του συνάρτηση ορίζεται ως εξής

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)} d\mu(x) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ είναι **θετικά ορισμένη** στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ δηλαδή:

> Για οποιαδήποτε $t_1, ..., t_m$ στο $\mathbb{R}^n$ και οποιαδήποτε $c_1, ..., c_m$ στο $\mathbb{C}$ ισχύει:
>
> $$\sum_{k,\ell=1}^{m} c_k \bar{c}_\ell \psi(t_k - t_\ell) \geq 0$$

Άμεσα προκύπτει ακόμα ότι $\psi(0) = 1$ και ότι η $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$. Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν κατά μοναδικό τρόπο τη σχέση της ψ και του μ.

Θεώρημα 4.1.1. *(Bochner)*
Οι παρακάτω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:

i Η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένη, συνεχής με $\psi(0) = 1$

ii Υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ με χαρακτηριστική συνάρτηση την ψ.

Απόδειξη. [3] □

Η αμφιμονοσήμαντη σχέση μεταξύ θετικά ορισμένων συναρτήσεων και πεπερασμένων θετικών μέτρων Borel που μας εξασφαλίζει το Θεώρημα Bochner δεν μεταφέρεται κατά προφανή τρόπο σε χώρους απείρων διαστάσεων. Το ανάλογό του είναι το Θεώρημα Bochner-Kolmogorov . Παρολαυτά μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier σε τέτοιους χώρους.

Ορισμός 4.1.2. *Έστω Y μια προσθετική ομάδα (π.χ. διαν. χώρος). Μια συνάρτηση $\mathcal{X} : Y \mapsto \mathbb{C}$ λέγεται* **θετικά ορισμένη** *όταν και μόνο όταν για οποιαδήποτε $m \in \mathbb{N}, t_1, ..., t_m$ στο Y και $c_1, ..., c_m$ στο $\mathbb{C}$ ισχύει:*

$$\sum_{k,\ell=1}^{m} c_k \bar{c}_\ell \mathcal{X}(t_k - t_\ell) \geq 0$$

Ιδιότητες μιας θετικά ορισμένης συνάρτησης $\mathcal{X} : Y \mapsto \mathbb{C}$ που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό είναι μεταξύ άλλων οι:

1. $\mathcal{X}(-t) = \overline{\mathcal{X}(t)}$ για κάθε $t \in Y$
2. $|\mathcal{X}(t)| \leq \mathcal{X}(0)$ για κάθε $t \in Y$
3. $|\mathcal{X}(t_1) - \mathcal{X}(t_2)|^2 \leq 2\mathcal{X}(0)[\mathcal{X}(0) - Re\mathcal{X}(t_1 - t_2)]$ για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in Y$
4. Οι $\mathcal{X}^n, n \in \mathbb{N}$ και $e^{\mathcal{X}}$ είναι θετικά ορισμένες
5. Αν $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ είναι θετικά ορισμένες στις προσθετικές ομάδες Y_1, Y_2 αντίστοιχα τότε η $\mathcal{X}(t_1, t_2) = \mathcal{X}_1(t_1) \cdot \mathcal{X}_2(t_2), \quad (t_1, t_2) \in Y_1 \times Y_2$ είναι θετικά ορισμένη στην $Y_1 \times Y_2$.

Η σχέση (1) έχει νόημα για $t \in X$ όπου X χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)$, αρκεί το μέτρο πιθανότητας μ να ορίζεται σε σ-άλγεβρα για την οποία οι συναρτήσεις $x \mapsto (x, t)$ να είναι μετρήσιμες. Επειδή τώρα στους χώρους Hilbert κάθε γραμμικό συναρτησοειδές ℓ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $\ell(x) = (x, t(\ell))$ από τη σχέση (1) για $t \in X$ έχουμε

$$\mathcal{X}(\ell) \equiv \Psi(t(\ell)) = \int_X e^{i(x,t(\ell))} d\mu(x) = \int_X e^{i\ell(x)} d\mu(x)$$

Αυτές οι παρατηρήσεις εμπνέουν ορισμό χαρακτηριστικού συναρτησοειδούς μέτρων πιθανότητας σε τοπικά κυρτούς τοπ. διαν. χώρους.

Ορισμός 4.1.3. *Έστω τοπικά κυρτός διαν. τοπολ. χώρος X και ένας διαν. χώρος $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$. Έστω μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \hat{C}(X, \Gamma))$. Ορίζεται ως* **χαρακτηριστικό συναρτησοειδές** *(χ.σ.) του μέτρου μ η συνάρτηση $\mathcal{X} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ που ορίζεται από την*

$$\mathcal{X}(f) = \int_X e^{if(x)} d\mu(x) \quad , \quad f \in \Gamma$$

Συχνά το χ.σ. $\mathcal{X}$ του μέτρου μ σημειώνεται $\hat{\mu}$.

Το ολοκλήρωμα του ορισμού υπάρχει πάντα (στο $\mathbb{C}$).
Ακόμα αν ορίσουμε στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ τα μέτρα $v_f, f \in \Gamma$ μέσω της $v_f(B) = \mu(f^{-1}(B)), B \in \mathscr{B}^1$ τότε $\mathcal{X}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iz} dv_f(z), f \in \Gamma$ και συνεπώς

$$\hat{\mu}(f) = \hat{v}_f(1), f \in \Gamma \tag{2}$$

όπου $\hat{v}_f$ η χ.σ. του μέτρου v_f στον $\mathbb{R}$.
Δηλαδή το χαρακτηριστικό συναρτησοειδές $\hat{\mu}$ του μέτρου μ στην σ-άλγεβρα $\hat{C}(X, \Gamma)$ υπολογίζεται μέσω της χαρακτηριστικής συνάρτησης της μονοδιάστατης προβολής v_f.

Πρόταση 4.1.4. *Βασικές ιδιότητες του χ.σ.*

1. *Το χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι θετικά ορισμένη και $\hat{\mu}(0) = 1$*
2. *Αν $\{f, f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ με $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in X$ τότε $\lim\limits_n \hat{\mu}(f_n) = \hat{\mu}(f)$.*

Απόδειξη.

1. Για τυχόν $g = (f_1, ..., f_n) \in \Gamma^n$ ορίζουμε στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ το μέτρο $v_g(B) = \mu(g^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$. Τότε για τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$ και γράφοντας $y \cdot g = y_1 f_1 + ... + y_n f_n$ έχουμε

$$\hat{\mu}(y \cdot g) = \int_X e^{i(y \cdot g)(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot z} dv_g(z)$$

και άρα

$$\hat{\mu}(y \cdot g) = \hat{v}_g(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

όπου $\hat{v}_g$ η χ.σ. του μέτρου v_g στον $\mathbb{R}^n$.
Συνεπώς για τυχόντα $k, \ell \in \{1, ..., n\}$ έχουμε

$$\hat{\mu}(f_k - f_\ell) = \hat{v}_g(z_k - z_\ell)$$

όπου $z_k \in \mathbb{R}^n$ με όλες τις συντεταγμένες 0 εκτός της k που είναι 1.
Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε το θεώρημα Bochner για την χ.σ. $\hat{v}_g$.

2. Αρκεί η επίκληση του θεωρήματος Ελεγχόμενης Σύγκλισης του Lebesgue .

□

Πόρισμα 4.1.5. Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. X και διανυσματικός υπόχωρος $\Gamma \subset X'$.

1. Η χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι **ακολουθιακά συνεχής** για την τοπολογία $\sigma(X', X)$ που επάγεται στον Γ.
2. Αν ο χώρος X είναι με norm τότε η χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για την τοπολογία $\mathscr{C}(X', X)$ που επάγεται στο χώρο Γ (και παράγεται από τη norm $\|x'\| = \sup\{| < x, x' > | : \|x\| \leq 1\}$).

Απόδειξη.

1. Άμεση συνέπεια του (2) της προηγούμενης πρότασης.

2. Αφού η $\hat{\mu}$ είναι ακολουθιακά συνεχής για την $\sigma(X', X)$ στο Γ θα είναι και ακολουθιακά συνεχής για την $\mathscr{C}(X', X)$ στο Γ.
   Όμως η $\mathscr{C}(X', X)$ παράγεται από τη norm $\|x'\|$ και άρα η ακολουθιακή συνέχεια συνεπάγεται συνέχεια για την $\mathscr{C}(X', X)$ στο Γ και ιδιαίτερα συνέχεια της $Re\hat{\mu}$ στο μηδέν. Όμως η χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση και επικαλούμενοι την ιδιότητα (3) των θετικά ορισμένων συναρτήσεων συμπεραίνουμε την ομοιόμορφη συνέχεια της $\hat{\mu}$ (πάντα για την τοπολογία $\mathscr{C}(X', X)$ στο Γ).

□

Η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας μ το προσδιορίζει μονοσήμαντα όπως φαίνεται από το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.6. *Έστω μέτρα πιθανότητας μ_1, μ_2 ορισμένα στον $(X, \hat{C}(X, \Gamma))$ όπου Γ διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^X$ και $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ στο Γ. Τότε: $\mu_1 = \mu_2$ στην $\hat{C}(X, \Gamma)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mu_1 = \mu_2$ στην άλγεβρα $C(X, \Gamma)$ που παράγει την $\hat{C}(X, \Gamma)$. Όμως $C(X, \Gamma) = \bigcup_{f \in \Lambda} \mathscr{A}_f$ όπου $\Lambda = \{(f_1, ..., f_k) : k \in \mathbb{N}, f_i \in \Gamma\}$ και $\mathscr{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^k\}$ με $f = (f_1, ..., f_k)$.
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε $f \in \Lambda$ ισχύει $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{A}_f$.
Πράγματι, για τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in \Lambda$ ορίζουμε τα μέτρα $v_i (i = 1, 2)$ στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ μέσω της $v_i(B) = \mu_i(f^{-1}(B))$. Τότε για τυχόν $y \in \mathbb{R}^n$ και γράφοντας $y \cdot f = y_1 f_1 + ... + y_n f_n$ έχουμε

$$\hat{\mu}_i(y \cdot f) = \hat{v}_i(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2)$$

Όμως από υπόθεση $\hat{v}_1 = \hat{v}_2$ και άρα (θεώρημα Bochner) $v_1 = v_2$ στην $\mathscr{B}^n$ δηλαδή $\mu_1(f^{-1}(B)) = \mu_2(f^{-1}(B))$ για κάθε $B \in \mathscr{B}^n$.
Ώστε $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{A}_f$. □

Πόρισμα 4.1.7. Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. X και διανυσματικός υπόχωρος $\Gamma \subset C(X, \mathbb{R})$ που **διαχωρίζει** τα σημεία του X. Έστω **Radon** μέτρα πιθανότητας ορισμένα στον $(X, \mathscr{B}_X)$. Αν $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ στο Γ τότε $\mu_1 = \mu_2$ στην $\mathscr{B}(X)$.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη Πρόταση είναι $\mu_1 = \mu_2$ στην $\hat{C}(X, \Gamma)$ και άρα $\mu_1 = \mu_2$ στην άλγεβρα $\mathscr{A} = C(X, \Gamma)$. Επειδή ο X είναι τοπ. κυρτός τοπ. διαν. χώρος, είναι πλήρως κανονικός (completely regular) και συνεπώς για τα κανονικά μέτρα μ_1, μ_2 μπορεί να αναπαραχθεί κατά γράμμα η απόδειξη μοναδικότητας του Θεωρήματος Prohorov 2.2.14. □

Πόρισμα 4.1.8. Έστω μ_1, μ_2 μέτρα πιθανότητας στον $(X, \hat{C}(X,\Gamma))$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in \Gamma$ τα μέτρα πιθανότητας v_f^1, v_f^2 στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ που ορίζονται από τις : $v_f^1(B) = \mu_1(f^{-1}(B))$ και $v_f^2(B) = \mu_2(f^{-1}(B))$, $B \in \mathscr{B}^1$ είναι ίσα.
Τότε $\mu_1 = \mu_2$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τη σχέση (2) του Ορισμού 4.1.3. ισχύουν:

$$\hat{\mu}_1(f) = \hat{v}_f^1(1) \quad \text{και} \quad \hat{\mu}_2(f) = \hat{v}_f^2(1) \quad \forall f \in \Gamma$$

Όμως $\hat{v}_f^1, \hat{v}_f^2$ είναι χ.σ. των μέτρων v_f^1, v_f^2 και συνεπώς $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$.
Δηλαδή τα μέτρα ορίζονται μονοσήμαντα από τις μονοδιάστατες προβολές τους. □

4.2 Χαρακτηριστικά συναρτησοειδή κυλινδρικών μέτρων

Τα κυλινδρικά μέτρα πιθανότητας ορίζονται στον $(X, C(X,\Gamma))$ και όπως φαίνεται από τον ορισμό τους **δεν** είναι μέτρα παρά μόνο όταν περιορίζονται στις σ-άλγεβρες $\mathscr{A}_f, f \in \Lambda$ (όπου $\bigcup_{f\in\Lambda} \mathscr{A}_f = C(X,\Gamma)$). Αυτό το γνώρισμα καθιστά δυνατό τον ορισμό του χαρακτηριστικού συναρτησοειδούς. Έτσι, έστω και κατά αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να έχουμε μια οπτική για το τι συμβαίνει στους χώρους απείρων διαστάσεων.

Ορισμός 4.2.1. *Έστω κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο στον $(X, C(X,\Gamma))$ όπου Γ διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^X$. Λέγεται* ***χαρακτηριστικό συναρτησοειδές*** *του μ η συνάρτηση $\mathscr{X} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ που ορίζεται από την*

$$\mathscr{X}(f) = \int_X e^{if(x)} d\mu(x) \quad , f \in \Gamma$$

όπου για κάθε $f \in \Gamma$ το ολοκλήρωμα νοείται στον χώρο μέτρου $(X, \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}^1\}, \mu)$. Συμβολικά γράφουμε $\hat{\mu}$ το χ.σ. του κυλινδρικού μέτρου μ.

Το χ.σ. ενός κυλινδρικού μέτρου πιθανότητας συμπίπτει με το με το χ.σ. ενός "πραγματικού" μέτρου πιθανότητας και κατά συνέπεια απολαμβάνει ανάλογων ιδιοτήτων όπως φαίνεται στην παρακάτω:

Πρόταση 4.2.2. *Έστω Γ διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^X$. Τότε:*

1. *Αν μ_1, μ_2 είναι κυλινδρικά μέτρα πιθανότητας στον $(X, C(X,\Gamma))$ με $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ τότε $\mu_1 = \mu_2$.*
2. *Αν μ είναι κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας στον $(X, C(X,\Gamma))$ τότε το χ.σ. $\hat{\mu} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένο με $\hat{\mu}(0) = 1$ και* ***ψευδοσυνεχές*** *δηλαδή συνεχής συνάρτηση σε κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του Γ.*

Απόδειξη. Όπως του αυτή του Θεωρήματος 4.1.6. και του (1) της Πρότασης 4.1.4.
Για την ψευδοσυνέχεια θεωρούμε μια βάση $\{f_1, ..., f_k\}$ του υποχώρου και την ευκλείδια norm που προκύπτει : $\|g\| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_k^2}$ όταν
$g = y_1 f_1 + ... + y_k f_k = y \cdot f$ με $f = (f_1, ..., f_k)$.
Όπως είναι γνωστό (Robertson & Robertson σελ. 37) η τοπολογία του υποχώρου η επαγόμενη από τον X συμπίπτει με αυτήν που προκύπτει από την norm $\| \ \|$ και όπως εύκολα διαπιστώνεται $g_n = y_n \cdot f \to y \cdot f = g$ στον υπόχωρο $\Leftrightarrow |y_n - y| \to 0$ όπου $| \ |$ η norm του $\mathbb{R}^k$. Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε την (3) της Πρότασης 4.1.4. που ισχύει και για κυλινδρικά μέτρα. □

Από την άποψη της κατασκευής ενός κυλινδρικού μέτρου το σημαντικό αποτέλεσμα περιέχεται στο παρακάτω Θεώρημα για την απόδειξη του οποίου χρειαζόμαστε το στοιχειώδες:

Λήμμα 4.2.3. *Έστω μέτρο πιθανότητας ρ στον $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ και γραμμική $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ με ανάστροφη $\phi^\top : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας ν στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ με την $\nu(B) = \rho(\phi^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$. Τότε:*

$$\hat{\nu}(z) = \hat{\rho}(\phi^\top(z)) \quad , z \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

Αντίστροφα όταν για μέτρα πιθανότητας ν,ρ ορισμένα στους $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ και $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ αντίστοιχα ισχύει η (4) τότε $\nu(B) = \rho(\phi^{-1}(B))$ για κάθε $B \in \mathscr{B}^n$.

Απόδειξη. Έστω $[a_{ij}]$ ο $n \times m$ πίνακας της φ.
Τότε για τυχόντα $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ και $t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ ισχύει
$z \cdot \phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_i a_{ij} t_j = \sum_{j=1}^{m} t_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i = t \cdot [a_{ij}]^\top z$ δηλαδή

$$z \cdot \phi(t) = t \cdot \phi^\top(z) \tag{5}$$

Τώρα για τα μέτρα ν,ρ, ως γνωστόν ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{iz \cdot \phi(t)} d\rho(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz \cdot y} d\nu(y) = \hat{\nu}(z)$$

Όμως λόγω της(5) το πρώτο μέλος γράφεται

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{it \cdot \phi^\top(z)} d\rho(t) = \hat{\rho}(\phi^\top(z))$$

και άρα η ζητούμενη (4).
Αντίστροφα· κατά τα παραπάνω το μέτρο $\lambda(B) = \rho(\phi^{-1}(B)), B \in \mathscr{B}^n$ έχει χ.σ. $\hat{\lambda}(z) = \rho(\phi^\top(z)), z \in \mathbb{R}^n$ και λόγω της (4) θα είναι $\hat{\lambda} = \hat{\nu}$ άρα το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω δ.χ. X και γραμμικός υπόχωρος $\Gamma \subset X^*$ (όπου X^* ο αλγεβρικός δυϊκός του X). Έστω συνάρτηση $\mathscr{X} : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$ θετικά ορισμένη με $\mathscr{X}(0) = 1$ και ψευδοσυνεχής (δηλαδή συνεχής σε κάθε πεπερασμένης διάσταση υπόχωρο του Γ).*
Τότε υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ στον X με χ.σ. $\hat{\mu} = \mathscr{X}$.

Απόδειξη. Ας είναι
$L = \{(f_1, ...f_n) : n \in \mathbb{N}$ και $\{f_1, ..., f_n\} \subset \Gamma$ γραμμικά ανεξάρτητα$\}$.
Για τυχόν $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ θέτουμε $\Psi_f(y) = \mathscr{X}(y \cdot f), y \in \mathbb{R}^n$. Άμεσα είναι $\Psi_f(0) = 1$ και όπως στο (1) της Πρότασης 4.1.4. αποδεικνύεται ότι η Ψ_f είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$.
Θα δείξουμε τώρα ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$. Έστω $V \subset \Gamma$ ο διανυσματικός υπόχωρος ο παραγόμενος από τα $\{f_1, ..., f_n\}$ εφοδιασμένος με την ευκλείδια norm $\|g\| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$ όταν $g = y_1 f_1 + ... + y_n f_n$. Για ακολουθία $y_k \to y$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε $\|y_k \cdot f - y \cdot f\| = \|(y_k - y) \cdot f\| = |y_k - y|$ και συνεπώς $\|y_k f - y f\| \to 0$. Όμως από υπόθεση η $\mathscr{X}$ είναι συνεχής στον υπόχωρο V και άρα $\mathscr{X}(y_k f) \to \mathscr{X}(yf)$ οπότε $\Psi_f(y_k) \to \Psi_f(y)$.
Ώστε η Ψ_f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bochner και συνεπώς υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ_f στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ εις τρόπον ώστε $\hat{\mu}_f = \Psi_f$. Αν τώρα $h = (h_1, ..., h_m) \in L$ και γραμμική $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ με $f = \phi \circ h$ τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $y \cdot \phi \circ h = \phi^\top(y) \cdot h$ που προκύπτει από την (5) έχουμε:

$$\mathscr{X}(y \cdot f) = \mathscr{X}(y \cdot \phi \circ h) = \mathscr{X}(\phi^\top(y) \cdot h)$$

και συνεπώς

$$\Psi_f(y) = \Psi_h(\phi^\top(y)) \quad , y \in \mathbb{R}^n$$

Έτσι κατά το προηγούμενο Λήμμα για τα μέτρα πιθανότητας μ_f και μ_h στους $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ και $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}^m)$ αντίστοιχα ισχύει

$$\mu_f(B) = \mu_h(\phi^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$$

Επικαλούμενοι τώρα το Θεώρημα 3.4.6. συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ τέτοιο ώστε για κάθε $f = (f_1, ..., f_n) \in L$ και $B \in \mathscr{B}^n$

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B) \tag{6}$$

Τώρα για τυχόν $g \in \Gamma$ είναι $\hat{\mu}(g) = \int e^{ig(x)} d\mu(x)$ και λόγω της (6)

$$\hat{\mu}(g) = \int e^{iz} d\mu_g(z) = \hat{\mu}_g(1) = \Psi_g(1) = \mathscr{X}(g).$$

□

Ορισμός 4.2.5. *Έστω μ ένα κυλινδρικό μέτρο ορισμένο στο χώρο $(X, C(X, \Gamma))$. Θα λέμε ότι το μ επιδέχεται Radon επέκταση αν υπάρχει μέτρο $\tilde{\mu}$ Radon στον X που συμπίπτει με το μ στον $(X, C(X, \Gamma))$.*

Παρατήρηση 4.2.6. Αν X είναι πολωνικός χώρος και $\Gamma \subset \mathbb{R}^X$ είναι διαχωρίζουσα τότε ένα κυλινδρικό μέτρο μ στον $C(X, \Gamma)$ επιδέχεται επέκταση Radon αν και μόνο αν είναι αριθμήσιμα προσθετική στον $C(X, \Gamma)$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι εδώ ισχύει $\hat{C}(X, \Gamma) = \mathscr{B}_X$ και επειδή κάθε Borel μέτρο πιθανότητας στον X είναι μέτρο Radon .

Το κυλινδρικό μέτρο χρησιμοποιείται εδώ ώστε να ελέγξουμε αν ένα θετικά ορισμένο, ψευδοσυνεχές συναρτησοειδές $\mathscr{X}$ είναι το χαρακτηριστικό συναρτησοειδές ενός μέτρου Radon .
Πράγματι, κατασκευάζουμε πρώτα ένα κυλινδρικό μέτρο μ τέτοιο ώστε $\hat{\mu} = \mathscr{X}$ και ελέγχουμε με τη χρήση κάποιων κριτηρίων αν η επέκταση είναι πιθανή. Στην περίπτωση αυτή έχουμε το χ. σ. ενός μέτρου Radon . Τα απαραίτητα κριτήρια για την ύπαρξη μιας τέτοιας επέκτασης δίνονται από το Θεώρημα 3.4.11. (Prohorov για διανυσματικούς χώρους).

Κεφάλαιο 5

Θεώρημα Sazonov

Είδαμε ότι ένα θετικά ορισμένο και ψευδοσυνεχές συναρτησοειδές παράγει κατά μοναδικό τρόπο ένα κυλινδρικό μέτρο. Αυτό βέβαια δημιουργεί την προσδοκία ότι μια "καλύτερη" συνέχεια θα εξασφάλιζε ένα (πραγματικό) μέτρο και ει δυνατόν Radon. Στην προσδοκία αυτή απαντούν τα επόμενα Θεωρήματα. Προηγουμένως όμως κάποια στοιχειώδη αποτελέσματα στους συμμετρικούς τελεστές.

5.1 Συμμετρικοί τελεστές

Ορισμός 5.1.1. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και X' ο δυϊκός του. Ένας τελεστής $R : X' \mapsto X$ ονομάζεται* **συμμετρικός** *όταν και μόνο όταν για όλα τα x', y' στο X' ισχύει:*

$$< Rx', y' >=< Ry', x' > \tag{1}$$

Ένας συμμετρικός τελεστής λέγεται **θετικός** *όταν για κάθε $x' \in X'$ ισχύει*

$$< Rx', x' >\geq 0$$

Όταν ο χώρος είναι ***Hilbert*** *τότε λόγω της ισομετρικής ταύτισης $X \simeq X'$ (αναπαράσταση Riesz) η (1) μπορεί να γραφεί*

$$(Rx, y) = (Ry, x) \text{ για όλα τα } x, y, \in X$$

και η θετικότητα αντίστοιχα εξασφαλίζεται από την

$$(Rx, x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in X$$

Σε **όλες** τις παρακάτω Προτάσεις ο τ.δ.χ. X είναι **τοπικά κυρτός**. Ειδικότερες περιπτώσεις θα αναφέρονται ρητά.

Πρόταση 5.1.2. *Ιδιότητες Συμμετρικών Τελεστών*
Έστω $R : X' \mapsto X$ συμμετρικός,θετικός. Τότε:

1. *η $\phi(x', y') =< Rx', y' >$ είναι διγραμμική,θετική*
2. *Ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz*

$$| < Rx', y' > |^2 \leq < Rx', x' >< Ry', y' > \quad \forall x', y' \in X'$$

Απόδειξη.

1. Άμεση
2. Αρκεί να αναπτύξουμε την $< R(\lambda x' + y'), \lambda x' + y' >\geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

□

Πρόταση 5.1.3. *Έστω $R : X' \mapsto X$ συμμετρικός. Τότε είναι:*

1. *Γραμμικός*
2. *$\sigma(X', X) - \sigma(X, X')$ συνεχής*
3. *$\tau(X', X) - \tau(X, X')$ συνεχής*
4. *$\mathscr{C}(X', X) - \mathscr{C}(X, X')$ συνεχής*

Απόδειξη.

1. Για τυχόντα $x', y' \in X'$ και για όλα τα $\ell \in X'$ έχουμε

$$\begin{aligned} \ell(R(x' + y')) &=< R(\ell), x' + y' > \\ &=< R(\ell), x' > + < R(\ell), y' > \\ &=< Rx', \ell > + < Ry', \ell > \\ &= \ell(Rx' + Ry') \end{aligned}$$

2. Για τυχόν δίκτυο $\{x'_a\} \subset X'$ με $x'_a \xrightarrow{\sigma} x'$ έχουμε για όλα τα $y' \in X'$:

$$\begin{aligned} < Rx'_a, y' > &=< Ry', x'_a >\to< Ry', x' > \\ &=< Rx', y' > \end{aligned}$$

   και άρα $Rx'_a \to Rx'$ για την τοπολογία $\sigma(X, X')$.

3. Έστω $p'_\Gamma, \Gamma \in \mathscr{E}'$ και $q'_\Delta, \Delta \in \mathscr{E}$ οι seminorm που ορίζουν τις τοπολογίες $\tau(X, X')$ και $\tau(X', X)$ αντίστοιχα. Τότε για τυχόν $\Gamma \in \mathscr{E}'$ δηλαδή κυρτό, ισόρροπο και $\sigma(X', X)$ - συμπαγές το $\Delta = R(\Gamma)$ είναι κυρτό, ισόρροπο και λόγω (1) $\sigma(X, X')$-συμπαγές, δηλαδή $\Delta \in \mathscr{E}$.

Επιπλέον για τυχόν $y' \in X'$ είναι

$$\begin{aligned} p'_\Gamma(Ry') &= \sup_{x' \in \Gamma} | < Ry', x' > | \\ &= \sup_{x' \in \Gamma} | < Rx', y' > | \\ &\leq \sup_{x \in \Delta} | < x, y' > | \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$p'_\Gamma(Ry') \leq q'_\Delta(y') \quad \text{για κάθε} \quad y' \in X'$$

4. Παρόμοιος χειρισμός για τις norm $p'_B, B \in \mathscr{D}'$ και $q'_A, A \in \mathscr{D}$ που ορίζουν τις $\mathscr{C}(X, X')$ και $\mathscr{C}(X', X)$ αντίστοιχα.

□

Πρόταση 5.1.4. *Έστω $R : X' \mapsto X$ συμμετρικός, θετικός τελεστής. Η συνάρτηση $\phi : X' \mapsto \mathbb{R}$ η οριζόμενη από την $\phi(x') =< Rx', x' >$ είναι $\mathscr{C}(X', X)$-συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω δίκτυο $\{x'_a\} \subset X'$ με $x'_a \xrightarrow{\mathscr{C}} x' \in X'$. Τότε από τον ορισμό της $\mathscr{C}(X', X)$ θα έχουμε για κάθε $\sigma(X, X')$-φραγμένο $A \subset X$

$$\sup_{u \in A} |x'_a(u) - x'(u)| < \epsilon \text{ για κάθε } a > a_0(\epsilon, A)$$

Εξάλλου το σύνολο $B = \overline{\{x'_a\}}$ είναι $\mathscr{C}(X', X)$-συμπαγές συνεπώς $\sigma(X', X)$-συμπαγές και άρα το $\Gamma = R(B)$ είναι $\sigma(X, X')$-φραγμένο οπότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται

$$| < Rx'_a, x'_a > - < Rx'_a, x' > | < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad a > a_0$$

Έτσι

$$\begin{aligned} &| < Rx'_a, x'_a > - < Rx', x' > | \\ &\qquad \leq | < Rx'_a, x'_a > - < Rx'_a, x' > | + | < Rx'_a, x' > - < Rx', x' > | \\ &\qquad < \epsilon + | < Rx'_a, x' > - < Rx', x' > | \quad \text{για} \quad a > a_0 \end{aligned}$$

Αρκεί τώρα να επικαλεστούμε τη συνέχεια του R όπως προκύπτει από την προηγούμενη Πρόταση.

□

Παρατήρηση 5.1.5. Αν X είναι χώρος Banach τότε η τοπολογία $\mathscr{C}(X', X)$ συμπίπτει με αυτή που προκύπτει από τη norm του X' την οριζόμενη από $\|x'\| = \sup\{| < x, x' > | : \|x\| \leq 1\}$.

Πρόταση 5.1.6. *Έστω $R : X' \mapsto X$ συμμετρικός, θετικός.Τότε η συνάρτηση $q_R(x') = \sqrt{< Rx', x' >}, x' \in X'$ ορίζει seminorm στον X'.*

Απόδειξη. Η συμμετρία και η ανισότητα Cauchy-Schwartz συνεπάγονται

$$\begin{aligned} q_R^2(x'+y') &=< Rx', x' > + < Ry', y' > +2 < Rx', y' > \\ &\leq< Rx', x' > + < Ry', y' > +2\sqrt{< Rx', x' >}\sqrt{< Ry', y' >} \\ &= (q_R(x') + q_R(y'))^2 \end{aligned}$$

Οι άλλες απαιτήσεις μιας seminorm είναι προφανείς. □

5.2 Η τοπολογία Sazonov

Ορισμός 5.2.1. *Έστω H χώρος Hilbert. Ένας γραμμικός τελεστής $T : H \mapsto H$ ονομάζεται* **πυρηνικός** *(nuclear) όταν και μόνο όταν υπάρχουν $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}, \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \subset H$ με $\sum_n \|x_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$ έτσι ώστε*

$$Tx = \sum_n (x, x_n) y_n, x \in H.$$

Με $\mathbf{S}(H)$ θα γράφουμε το σύνολο των **συμμετρικών, θετικών** και **πυρηνικών** τελεστών που ορίζονται στον H. Από τις ιδιότητες των συμμετρικών τελεστών προκύπτει ότι $\mathbf{S}(H) \subset \mathbf{L}(H, H)$-το σύνολο των συνεχών γραμμικών τελεστών του H. Να σημειωθεί ακόμα ότι ένας συμμετρικός,πυρηνικός τελεστής είναι **συμπαγής**.
Έστω τώρα X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. με δυϊκό X'. Με $\mathcal{R}(X', X)$ θα γράφουμε το σύνολο των τελεστών $R : X' \mapsto X$ με την ιδιότητα: Υπάρχει χώρος Hilbert H, γραμμική συνεχής $u : H \mapsto X$ και $S \in \mathbf{S}(H)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$R = u \circ S \circ u'$$

όπου $u' : X' \mapsto H$ η συζυγής της u (οριζόμενη από την $(y, u'(x')) =< u(y), x' >$ για $x' \in X', y \in H$).
Η συνέχεια της $u : H \mapsto X$ αναφέρεται στην τοπολογία της norm του H και στην αρχικώς δοθείσα τοπολογία ξ του τοπικά κυρτού διαν. χώρου X για την οποία $X' = (X, \xi)'$.

Πρόταση 5.2.2. *Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. χώρος X και X' ο δυϊκός του.*

1. *Κάθε τελεστής $R \in \mathcal{R}(X', X)$ είναι συμμετρικός, θετικός.*
2. *Η $q_R(x') = \sqrt{< Rx', x' >}$ ορίζει seminorm.*
3. *Η οικογένεια seminorm $q_R, R \in \mathcal{R}(X', X)$ διαχωρίζει τα σημεία του X'.*

Απόδειξη.

1. Από τον ορισμό του u'έχουμε

$$< Rx', y' >=< u(S(u'(x'))), y' >=< S(u'(x')), u'(y') >$$

   Λόγω της συμμετρίας του S η τελευταία παράσταση ισούται με $< S(u'(y')), u'(x') >$ και αυτή πάλι λόγω συζυγίας με $< u(S(u'(y'))), x' >=< Ry', x' >$. Η πρώτη γραμμή από τις παραπάνω για $x' = y'$ και η θετικότητα του S συνεπάγεται τη θετικότητα του R.

2. Απόδειχτηκε στην Πρόταση 5.1.6.

3. Έστω τυχόν $x'_0 \neq 0$. Προφανώς υπάρχει $x_0 \in X \setminus \{0\}$ με $x'_0(x_0) \neq 0$. Έστω πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος $H \subset X$ με $x_0 \in H$. Όπως είναι γνωστό η τοπολογία του H είναι η συνήθης Ευκλείδια.
   Ορίζουμε $u : H \mapsto X$ με την $u(x) = x$. Από τον ορισμό της u' και το γεγονός ότι $x'_0(x_0) \neq 0$ προκύπτει άμεσα ότι $u'(x'_0) \equiv a \neq 0$.
   Θεωρούμε τον $S_0 : H \mapsto H$ οριζόμενο ως $S_0 y = (y, a)a$. Προφανώς $S_0 \in \mathbf{S}(H)$ και συνεπώς ο τελεστής $R_0 = u \circ S_0 \circ u'$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{R}(X', X)$.Επιπλέον $R_0 x'_0 = u(S_0(a)) = |a|^2 u(a)$ όπου $|\cdot|$ η norm του H οπότε

$$< R_0 x'_0, x'_0 >= |a|^2 < u(a), x'_0 >= |a|^2 (a, u'(x'_0)) = |a|^2 \cdot (a, a) = |a|^4 > 0.$$

□

Ορισμός 5.2.3. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και X' ο δυϊκός του. Ονομάζεται* **τοπολογία Sazonov** *του X' και σημειώνεται $\tau_S(X', X)$ η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια seminorm $\{q_R, R \in \mathcal{R}\}$ όπου $q_r(x') = \sqrt{< Rx', x' >}, x' \in X'$. Ο τ.δ.χ. $(X', \tau_S(X', X))$ είναι Hausdorff τοπικά κυρτός.*

Παρατήρηση 5.2.4. Όπως προκύπτει από την Πρόταση 5.1.4. είναι

$$\tau_S(X', X) \subset \mathscr{C}(X', X)$$

Η συνέχεια για την τοπολογία Sazonov ενός θετικά ορισμένου συναρτησοειδούς είναι όπως θα δούμε παρακάτω ικανή συνθήκη για την ύπαρξη αντίστοιχου Radon μέτρου πιθανότητας. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει παρά μόνο αν ο χώρος X είναι Hilbert .
Σύμφωνα με το παρακάτω γενικότερο Θεώρημα του Minlos το Θεώρημα Sazonov προκύπτει ως Πόρισμα.
Παρολαυτά το Θεώρημα Sazonov μπορεί να διατυπωθεί και να αποδειχθεί αυτοτελώς [21].

Θεώρημα 5.2.5. *Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. με τοπολογία ξ και δυϊκό $X' = (X, \xi)'$. Τότε:*

1. *Έστω μ κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας ορισμένο στην κυλινδρική άλγεβρα $C(X, X')$ του οποίου το χ.σ. $\hat{\mu} : X' \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X', X)$. Τότε το κυλινδρικό μέτρο μ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε ένα $\mathscr{C}(X, X')$- Radon μέτρο στον X.*

2. *Έστω $\mathcal{X} : X' \mapsto \mathbb{C}$ θετικά ορισμένο συναρτησοειδές με $\mathcal{X}(0) = 1$ και συνεχές ως προς την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X', X)$. Τότε υπάρχει $\mathscr{C}(X, X')$-Radon μ στον X εις τρόπον ώστε $\hat{\mu} = \mathcal{X}$. Το μέτρο μ είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το [27] όπως ακολουθεί τη γραμμή απόδειξης του [28]. □

Παρατήρηση 5.2.6. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.4.1. το $\mathscr{C}(X, X')$-Radon μέτρο μ είναι ξ-Radon.

Έστω λοιπόν ότι ο χώρος X είναι **χώρος Hilbert**. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή το σύνολο $\mathcal{R}(X', X)$ συμπίπτει με το σύνολο των συμμετρικών, θετικών και πυρηνικών τελεστών $R : X \mapsto X$ και προφανώς συμπίπτει με το σύνολο $\mathbf{S}(X)$. Η τοπολογία Sazonov στην περίπτωση ενός χώρου Hilbert X θα σημειώνεται απλά $\tau_S(X)$ και είναι προφανές ότι συμπίπτει με την ασθενέστερη τοπολογία που καθιστά συνεχείς όλες τις τετραγωνικές μορφές $x \mapsto (Rx, x), R \in \mathbf{S}(X)$.
Προκειμένου να δείξουμε το θεώρημα Sazonov θα χρειαστούμε την έννοια του τελεστή συσχέτισης ενός μέτρου πιθανότητας καθώς επίσης και τον ορισμό του χ.σ σε χώρους Hilbert .

Ορισμός 5.2.7. *Έστω X πραγματικός χώρος Hilbert εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $(x, y),\ x, y \in X$. Για κάθε μέτρο μ ορισμένο στον X το χαρακτηριστικό του συναρτησοειδές $\hat{\mu}(y),\ y \in X$ δίνεται από τη σχέση:*

$$\hat{\mu}(y) = \int e^{i(x,y)} d\mu(x)$$

Πρόταση 5.2.8. *Ιδιότητες:*

1. *$\hat{\mu}(y)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στην norm τοπολογία.*

2. *Αν $\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y)$ για κάθε $y \in X$ τότε $\mu_1 = \mu_2$.*

Απόδειξη.

1. Για $y_1, y_2 \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(y_1) - \hat{\mu}(y_2)| &\leq \int |e^{i(x,y_1)} - e^{i(x,y_2)}| d\mu(x) \\ &= \int |1 - e^{i(x,y_1-y_2)}| d\mu(x) \\ &= 4 \int sin^2 \frac{1}{2}(x, y_1 - y_2) d\mu(x) \end{aligned}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $K > 0$ σταθερό τέτοιο ώστε
$\mu(x : \ \|x\| > K) < \epsilon$. Τότε από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(y_1) - \hat{\mu}(y_2)| &\leq 4\epsilon + 4\int_{\|x\|\leq K} sin^2\frac{1}{2}(x, y_1 - y_2)d\mu(x) \\ &\leq 4\epsilon + K^2\|y_1 - y_2\|^2\end{aligned}$$

αν $\|y_1 - y_2\| < \sqrt{\frac{\epsilon}{K}}$ τότε

$$|\hat{\mu}(y_1) - \hat{\mu}(y_2)| \leq 5\epsilon$$

Έτσι το χ.σ $\hat{\mu}(y)$ είναι ομοιόμορφα συνεχές.

2. Έστω $\{e_i\}$ μια ορθοκανονική ακολουθία στον X και θέτουμε $x_i = (x, e_i)$ την i-οστη συντεταγμένη του διανύσματος x. Τότε ο χώρος X είναι ισομορφικός με τον ℓ_2 έτσι ώστε $\sum x_i^2 < \infty$. Έστω
$\phi_n^{(j)}(y_1, ..., y_n) = \hat{\mu}_j(y_1e_1 + ... + y_ne_n), \ j = 1, 2.$
Αν $\hat{\mu}_1(y) = \hat{\mu}_2(y)$ για όλα τα $y \in X$ τότε
$\hat{\mu}_1(y_1e_1 + ...y_ne_n) = \hat{\mu}_2(y_1e_1 + ... + y_ne_n)$ για όλα τα $y_1, ..., y_n$ και n. Τα μ_1 και μ_2 επάγουν μέτρα $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ στον ℓ_2 μέσω του κανονικού ισομορφισμού που αντιστοιχεί στη βάση $\{e_i\}$. Τότε οι συναρτήσεις $\phi_n^1(y_1, ..., y_n)$ και $\phi_n^2 y_1, ..., y_n)$ είναι τα χαρακτηριστικά συναρτησοειδή των πεπερασμένων κατανομών των $\tilde{\mu}_1$ και $\tilde{\mu}_2$ αντίστοιχα μέσω της προβολής
$(x_1, x_2, ...) \leftarrow (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Έτσι (από Θεώρημα [21]) έχουμε $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$. Άρα $\mu_1 = \mu_2$.

□

Ορισμός 5.2.9. *Έστω μ Radon μέτρο πιθανότητας στον χώρο Hilbert X που ικανοποιεί την απαίτηση $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < +\infty$. Ονομάζεται* ***τελεστής συσχέτισης*** *του μέτρου μ ο τελεστής $S : X \mapsto X$ που ορίζεται από την διγραμμική μορφή*

$$r_\mu(x, y) = \int_X (u, x)(u, y)d\mu(u)$$

δηλαδή από την $(Sx, y) = r_\mu(x, y) \quad x, y \in X$.

Λήμμα 5.2.10. *Έστω μ Radon μέτρο πιθανότητας στο χώρο Hilbert X που ικανοποιεί την $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < +\infty$. Τότε ο τελεστής συσχέτισης S του μέτρου μ είναι θετικός, συνεχής και πυρηνικός.*

Απόδειξη. Η συμμετρία και η θετικότητα είναι προφανείς και η συνέχεια συνέπεια της πρώτης (Πρόταση 5.1.3.).
Έστω τώρα τυχόν ορθοκανονικό σύστημα $\{e_i, i \in I\} \subset X$. Επειδή για οποιοδήποτε αριθμήσιμο υποσύστημα $e_{i_n}, n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_n (Se_{i_n}, e_{i_n}) = \sum_n \int_X ((u, e_n)^2 d\mu(u) \leq \int_X \|u\|^2 d\mu(u) < \infty$$

συμπεραίνουμε ότι τα σύνολα $\{i : (Se_i, e_i) > \frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένα και άρα $(Se_i, e_i) > 0$ μέχρι και για αριθμήσιμο πλήθος δεικτών $i \in I$. Επιπλέον

$$\sum_{i \in I} (Se_i, e_i) = \sum_i \int (u, e_i)^2 d\mu(u) = \int \|u\|^2 d\mu(u) < \infty$$

Υπό αυτές τις συνθήκες ο τελεστής S είναι πυρηνικός. ([28] σελ. 161)

□

Θεώρημα 5.2.11. *(Sazonov)*
Έστω X χώρος Hilbert. Ένα συναρτησοειδές $\mathcal{X} : X \mapsto \mathbb{C}$ είναι χαρακτηριστικό συναρτησοειδές ενός Radon μέτρου πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{B}_X)$ όταν και μόνο όταν το $\mathcal{X}$ είναι θετικά ορισμένο με $\mathcal{X}(0) = 1$ και συνεχές για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X)$.

Απόδειξη. Ότι η συνθήκη είναι ικανή είναι άμεσο συμπέρασμα του προηγούμενου Θεωρήματος. Θα δείξουμε ότι είναι και αναγκαία. Θα δείξουμε δηλαδή ότι το χ.σ. $\hat{\mu}(x) = \int_X e^{i(x,t)} d\mu(t), x \in X$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $x = 0$ για την τοπολογία $\tau_S(X)$.
Έστω τυχόν $\epsilon > 0$ και συμπαγές $K = K_\epsilon \subset X$ με $\mu(K) > 1 - \frac{\epsilon}{4}$. Ορίζουμε στον $(X, \mathscr{B}_X)$ το μέτρο $\mu_\epsilon(B) = \frac{\mu(B \cap K)}{\mu(K)}$. Τότε $\mu_\epsilon(K) = 1$ και προφανώς $\int_X \|u\|^2 d\mu_\epsilon(u) < +\infty$. Έχουμε διαδοχικά

$$|1 - \hat{\mu}(x)| \leq |\mu(K) - \int_K e^{i(x,t)} d\mu(t)| + \int_{K^c} |1 - e^{i(x,t)}| d\mu(t)$$

και επειδή $\mu(L) = \mu(K)\mu_\epsilon(L)$ για κάθε $L \subset K_\epsilon$ και $|1 - e^{-i(x,t)}| \leq 2$ για κάθε $t \in X$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} |1 - \hat{\mu}(x)| &\leq |\mu(K) - \mu(K) \int_K e^{i(x,t)} d\mu_\epsilon(t)| + 2\mu(K^c) \\ &= \mu(K)|1 - \hat{\mu}_\epsilon(x)| + 2\mu(K^c) \end{aligned}$$

και αφού $\mu(K^c) < \frac{\epsilon}{4}, \mu(K) \leq 1$

$$|1 - \hat{\mu}(x)| < |1 - \hat{\mu}_\epsilon(x)| + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in X \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας τη στοιχειώδη ανισότητα $|1 - e^{iy}| < 2|y|, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$|1 - \hat{\mu}_\epsilon(x)| \leq \int_X 2|(x,t)| d\mu_\epsilon(t) \leq \int 4(x,t)^2 d\mu_\epsilon(t) \tag{2}$$

Αν τώρα S_ϵ είναι ο τελεστής συσχέτισης του μέτρου μ_ϵ τότε κατά το Λήμμα που προηγήθηκε ανήκει στο $\mathbf{S}(X)$ και αφετέρου $(S_\epsilon x, x) = \int_X (x,t)^2 d\mu_\epsilon(t)$ οπότε από τις (1),(2) συμπεραίνουμε

$$|1 - \hat{\mu}(x)| < 4(S_\epsilon x, x) + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in X$$

Αν τώρα θεωρήσουμε την περιοχή του μηδενός της τοπολογίας Sazonov $V = \{x \in X : (S_\epsilon x, x) < \frac{\epsilon}{8}\}$ τότε

$$|1 - \hat{\mu}(x)| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in V$$

□

Παρατήρηση 5.2.12. Στην περίπτωση που ο χώρος H είναι πεπερασμένης διάστασης η τοπολογία $\tau_S(X)$ συμπίπτει με την αρχική τοπολογία.

Το επόμενο αποτέλεσμα αποτελεί επέκταση του Θεωρήματος Sazonov σε χώρους Banach αλλά από την άλλη αφορά μόνο σε μέτρα πιθανότητας με Χιλμπερτιανό φορέα, δηλαδη:

Ορισμός 5.2.13. *Έστω χώρος Banach X και μέτρο πιθανότητας Radon μ στον $(X, \mathscr{B}_X)$. Λέγεται ότι το μέτρο μ έχει* **Χιλμπερτιανό** *φορέα όταν και μόνο όταν υπάρχει χώρος Hilbert H και συνεχής γραμμικός τελεστής $u : H \mapsto X$ και Radon μέτρο πιθανότητας v στον $(H, \mathscr{B}_H)$ έτσι ώστε να είναι*

$$\mu(B) = v(u^{-1}(B)) \quad \textit{για κάθε} \quad B \in \mathscr{B}_X$$

ή όπως γράφεται συμβολικά $\mu = v \circ u^{-1}$.

Όταν τα πράγματα έχουν όπως παραπάνω τότε $u(H)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(u(x), u(y)) = (x, y)$ και $\mu(u(H)) = 1$.
Σχετικό είναι και το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.2.14. *Έστω X χώρος Banach και συνάρτηση $\mathcal{X} : X' \mapsto \mathbb{C}$. Τότε οι παρακάτω διατυπώσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Η $\mathcal{X}$ είναι χ.σ. ενός Radon μέτρου πιθανότητας μ στον $(X, \mathscr{B}_X)$ με Χιλμπερτιανό φορέα.*

2. *Η $\mathcal{X}$ είναι θετικά ορισμένη με $\mathcal{X}(0) = 1$ και $\tau_S(X', X)$-συνεχής.*

Απόδειξη. [28] □

Κεφάλαιο 6

Μέτρα Πιθανότητας Gauss

6.1 Μέτρα Πιθανότητας Gauss στον $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ το μέτρο ρ το οριζόμενο από την

$$\rho(B) = \int_B (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx \quad , B \in \mathscr{B}^n$$

Πρόκειται βέβαια για το Radon μέτρο πιθανότητας με χ.σ.

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{1}{2}|t|^2} \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Ορισμός 6.1.1. *Έστω $a \in \mathbb{R}^n$ και μη-αρνητικός συμμετρικός $n \times n$-πίνακας Σ. Ονομάζεται **μέτρο Gauss στον** $\mathbb{R}^n$ με παραμέτρους a, Σ το μέτρο μ το οριζόμενο στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ από την*

$$\mu(B) = \rho(T^{-1}(B)) \quad , B \in \mathscr{B}^n$$

όπου $T(x) = a + \Sigma^{\frac{1}{2}} x \quad , x \in \mathbb{R}^n$. Είναι φανερό ότι το μέτρο ρ είναι Gauss με παραμέτρους $a = 0$ και $\Sigma = I$.

Όταν ο πίνακας Σ είναι **θετικά ορισμένος** τότε η απεικόνιση T είναι $1-1$ και συνεπώς $T^{-1}(B) = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(B - a)$.
Στην περίπτωση αυτή και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(y - a)$έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \int_{T^{-1}(B)} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx \\ &= \int_B (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}(y-a), y-a)} dy\end{aligned}$$

και ώστε όταν Σ θετικά ορισμένος το μέτρο Gauss με παραμέτρους a, Σ έχει πυκνότητα

$$d(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}(y-a), y-a)} \quad , y \in \mathbb{R}^n$$

Όταν ο Σ είναι **εκφυλισμένος** (δηλαδή $(\Sigma x, x) = 0$ για κάποιο $x \neq 0$) τότε το αντίστοιχο μέτρο Gauss **δεν** έχει πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue (είναι τότε δυνατόν να βρούμε υποσύνολο A με $A \cap T(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ και θετικό μέτρο Lebesgue οπότε $\mu(A) = \rho(T^{-1}(A)) = \rho(\emptyset) = 0$).
Αν τώρα γράψουμε φ την απεικόνιση που ορίζει ο $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot(\phi(z)+a)} d\rho(z) = \int e^{it\cdot y} d\mu(y) = \hat{\mu}(t) \quad , t \in \mathbb{R}^n$$

Εξάλλου όπως στη σχέση (5) στην απόδειξη του Λήμματος 5.2.3.
$t \cdot \phi(z) = z\phi^T(t)$ και συνεπώς το πρώτο ολοκλήρωμα γράφεται

$$e^{it\cdot a} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot\phi(z)} d\rho(z) = e^{it\cdot a} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\phi^T(t)} d\rho(z)$$

και συνεπώς $\hat{\mu}(t) = e^{it\cdot a}\hat{\rho}(\phi^T(t)) \quad , t \in \mathbb{R}^n$.
Όμως $\hat{\rho}(\phi^T(t)) = e^{-\frac{1}{2}|\phi^T(t)|} = e^{-\frac{1}{2}(\Sigma t, t)}$ και τελικά

$$\hat{\mu}(t) = e^{it\cdot a - \frac{1}{2}(\Sigma t, t)} \quad , t \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Ο τύπος αυτός για την χ.σ. ενός μέτρου Gauss ισχύει πάντοτε, ακόμα και όταν ο Σ είναι εκφυλισμένος.
Ιδιαίτερα για $n = 1$ είναι $\Sigma = (\sigma)$ με $\sigma \geq 0$ και για τυχόν $a \in \mathbb{R}$ το μέτρο Gauss με παραμέτρους a, σ είναι

$$\mu(B) = \begin{cases} \delta_a(B) & \text{αν } \sigma = 0 \\ \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-a)^2} dx & \text{αν } \sigma > 0 \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή ($n = 1$) όπως είναι γνωστό

$$\int_{\mathbb{R}} y d\mu(y) = a \quad , \quad \int_{\mathbb{R}} y^2 d\mu(y) - a^2 = \sigma.$$

Παρατήρηση 6.1.2. Δεδομένης της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας μεταξύ μέτρων πιθανότητας και χ.σ. θα μπορούσαμε εναλλακτικα να ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας Gauss με παραμέτρους a, Σ ως εκείνο το μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ του οποίου η χ.σ. $\hat{\mu}$ γράφεται όπως η (1) παραπάνω.

6.2 Μέτρα πιθανότητας Gauss σε διανυσματικούς χώρους απείρων διαστάσεων

Ο ορισμός του μέτρου Gauss σε απειροδιάστατους χώρους δεν μπορεί να επιτευχθεί μέσω της πυκνότητας του. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τα εξής:

Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ και X' ο δυϊκός του. Αν μ είναι μέτρο πιθανότητας ορισμένο σε σ-άλγεβρα που περιέχει την $\hat{C}(X, X')$ ή κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας ορισμένο στην κυλινδρική άλγεβρα $C(X, X')$ τότε για τυχόν $\beta \in X'$ θα γράφουμε μ_β το μέτρο πιθανότητας το οριζόμενο στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$ από την

$$\mu_\beta(A) = \mu(\beta^{-1}(A)) \quad , A \in \mathscr{B}^1 \tag{1}$$

Τότε:

Ορισμός 6.2.1. *Ένα μέτρο πιθανότητας μ (αντ. κυλινδρικό μέτρο πιθανότητας μ) ονομάζεται* **μέτρο Gauss** *(αντ.* **κυλινδρικό μέτρο Gauss***) στον τοπικά κυρτό τ.δ.χ. X όταν είναι ορισμένο σε σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset \hat{C}(X, X')$ (αντ. στην κυλινδρική άλγεβρα $C(X, X')$) και ικανοποιεί την παρακάτω απαίτηση: για κάθε $\beta \in X'$ το μέτρο μ_β το οριζόμενο από την (1) είναι μέτρο Gauss στον $\mathbb{R}$.*

Παρατήρηση 6.2.2.

1. Αν μ είναι ένα μέτρο Gauss τότε εξ ορισμού $\int y^2 d\mu_{x'}(y) < +\infty$ για κάθε $x' \in X'$ και άρα $\int\limits_X | < x, x' > |^2 d\mu(x) < +\infty$ για κάθε $x' \in X'$. Είναι όπως λέγεται **ασθενούς δεύτερης τάξης**.

2. Είναι φανερό ότι ένα μέτρο Gauss μ περιοριζόμενο στην άλγεβρα $C(X, X')$ ορίζει ένα κυλινδρικό μέτρο Gauss . Το αντίστροφο **δεν** ισχύει όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω. Εν τούτοις είτε πρόκειται για μέτρο είτε για κυλινδρικό μέτρο Gauss το χ.σ. ορίζεται από τον ίδιο τύπο:

$$\hat{\mu}(x') = \int\limits_X e^{i<x,x'>} d\mu(x) \quad , x' \in X' \tag{2}$$

   Βέβαια στη δεύτερη περίπτωση το ολοκλήρωμα της (2) νοείται στον χώρο μέτρου $(X, \sigma(x'), \mu)$.

Θεώρημα 6.2.3. *Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ X και X' ο δυϊκός του. Έστω ακόμα μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο σε σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset \hat{C}(X, X')$. Ισχύει το ακόλουθο:*
Το μέτρο μ είναι μέτρο Gauss στον X όταν και μόνο όταν υπάρχουν γραμμική $a(x'), x' \in X'$ και θετική τετραγωνική μορφή $Q(x'), x' \in X'$ εις τρόπον ώστε

$$\hat{\mu}(x') = e^{ia(x') - \frac{1}{2}Q(x')} \quad , x' \in X' \tag{3}$$

Επιπλέον $a(x') = \int\limits_X < x, x' > d\mu(x)$ και
$Q(x') = \int\limits_X | < x, x' > |^2 d\mu(x) - a^2(x') \quad x' \in X'$.

Απόδειξη. Με αλλαγή μεταβλητής διαπιστώνεται ότι

$$\hat{\mu}(yx') = \hat{\mu}_{x'}(y) \quad \text{για τυχόντα} \quad y \in \mathbb{R},\ x' \in X' \tag{4}$$

Αν μ είναι Gauss τότε έκαστο $\mu_{x'}$ είναι εξορισμού Gauss στον $\mathbb{R}^1$ με παραμέτρους $m = \int\limits_{\mathbb{R}} y d\mu_{x'}(y)$ και $\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} y^2 d\mu_{x'}(y) - m^2$ και χ.σ.

$$\hat{\mu}_{x'}(y) = e^{imy - \frac{1}{2}\sigma y^2} \quad , y \in \mathbb{R}$$

Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε (πάλι με αλλαγή μεταβλητής) ότι $m = \int\limits_X x' d\mu,\ \sigma = \int\limits_X (x')^2 d\mu - m^2$ και να επικαλεστούμε την (4) για $y = 1$ οπότε λαμβάνουμε την (3) με $a(x') = \int\limits_X x' d\mu$ και $Q(x') = \int\limits_X (x')^2 d\mu - a^2(x'),\ x' \in X'$.
Αντίστροφα αν για το μέτρο πιθανότητας μ ισχύει η (3) τότε για τυχόν x' ισχύει (πάλι η (4))

$$\mu_{x'}(y) = \hat{\mu}(yx') = e^{ia(x')y - \frac{1}{2}Q(x')y^2} \quad , y \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς το μέτρο $\mu_{x'}$ είναι Gauss στον $\mathbb{R}^1$ με παραμέτρους $a(x')$ και $Q(x')$. Μάλιστα $a(x') = \int\limits_{\mathbb{R}} y d\mu_{x'}(y)$ και $Q(x') = \int\limits_{\mathbb{R}} y^2 d\mu_{x'}(y) - a^2(x')$ οπότε (αλλαγή μεταβλητής) $a(x') = \int\limits_X x' d\mu$ και $Q(x') = \int\limits_X (x')^2 d\mu - a^2(x')$. □

Παρατήρηση 6.2.4. Θα μπορούσαμε λοιπόν να ορίσουμε ένα μέτρο Gauss ως ένα μέτρο πιθανότητας του οποίου η χ.σ. $\hat{\mu}$ γράγεται όπως η (3). Μάλιστα με τον τρόπο αυτό καθίσταται άμεση η αναφορά στις παραμέτρους a, Q.Ακόμα καθίσταται φανερή η συμβατότητα των ορισμών των μέτρων Gauss σε πεπερασμένης και άπειρης διάστασης δ.χ. Παρολαυτά στην περίπτωση των χώρων άπειρης διάστασης κάθε συναρτησοειδές που πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν είναι κατ ανάγκη χ.σ ενός μέτρου Gauss .

Αν ο χώρος X είναι Hilbert και αφού $X' = X$ θα είναι:

Πόρισμα 6.2.5. Έστω X χώρος Hilbert και μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο σε σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset C(X, X')$. Τότε το μέτρο μ είναι μέτρο Gauss όταν και μόνο όταν $\hat{\mu}(x) = e^{ia(x) - \frac{1}{2}Q(x)}$, όπου a γραμμική και Q θετική τετραγωνική μορφή στον X. Επιπλέον $a(x) = \int\limits_X (y, x) d\mu(y)$ και
$Q(x) = \int\limits_X (y, x)^2 d\mu(y) - a^2(x), x \in X$.

Το παραπάνω Θεώρημα παραμένει ισχυρό και στην περίπτωση των κυλινδρικών μέτρων. Δηλαδή:

Θεώρημα 6.2.6. *Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ X και X' ο δυϊκός του. Έστω ακόμα κυλινδρικό μέτρο μ ορισμένο στην άλγεβρα $C(X, X')$. Ισχύει το ακόλουθο:*
Το κυλινδρικό μέτρο μ είναι κυλινδρικό μέτρο Gauss στον X όταν και μόνο όταν υπάρχουν γραμμική $a(x'), x' \in X'$ και θετική τετραγωνική μορφή $Q(x'), x' \in X'$ έτσι ώστε

$$\hat{\mu}(x') = e^{ia(x') - \frac{1}{2}Q(x')} \quad , x' \in X'$$

Επιπλέον $a(x') = \int\limits_X < x, x' > d\mu(x)$ και
$Q(x') = \int\limits_X | < x, x' > |^2 d\mu(x) - a^2(x') \quad x' \in X'$.

Η κατασκευή κυλινδρικών μέτρων Gauss είναι εύκολη όπως εξασφαλίζεται από το παρακάτω:

Θεώρημα 6.2.7. *Έστω τοπικά κυρτός τ.δ.χ. X και X' ο δυϊκός του. Έστω γραμμική $a : X' \mapsto \mathbb{R}$ και θετική τετραγωνική μορφή $Q : X' \mapsto \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο Gauss μ με παραμέτρους a, Q.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathcal{X}(x') = e^{ia(x') - \frac{1}{2}Q(x')} \quad , x' \in X'$$

Είναι φανερό ότι $\mathcal{X}(0) = 1$.
Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{X}(x'), x' \in X'$ είναι θετικά ορισμένη. Επειδή το γινόμενο θετικά ορισμένων συναρτήσεων είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση ([28] σελ. 187) θα δείξουμε χωριστά ότι οι $e^{ia(x')}, e^{-\frac{1}{2}Q(x')},\ x' \in X'$ είναι θετικά ορισμένες.
Πράγματι για $\{c_1, ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$ και $\{x'_1, ..., x'_n\} \subset X'$ έχουμε

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} c_k \bar{c}_\ell e^{ia(x'_k - x'_\ell)} =$$

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} c_k e^{ia(x'_k)} \cdot \overline{c_\ell e^{ia(x'_\ell)}} =$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ia(x_k)} \right|^2 \geq 0$$

Έστω τώρα b διγραμμική, συμμετρική μορφή τέτοια ώστε
$Q(x') = b(x', x'), x' \in X'$. (Αρκεί $b(x', y') = \frac{1}{4}[Q(x' + y') - Q(x' - y')]$). Τότε η b είναι θετική (δηλαδή $b(x', x') \geq 0\ \forall\ x' \in X'$) και άρα θετικά ορισμένη αφού για $\{\xi_1, ..., \xi_n\} \subset \mathbb{R}$ και $\{x'_1, ..., x'_n\} \subset X'$ είναι
$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j b(x'_i, x'_j) = b(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x'_i, \sum_{i=1}^{n} \xi_i x'_i) \geq 0$ (λόγω συμμετρίας αρκεί $\xi_i \in \mathbb{R}$).
Ακόμα από την $Q(x') = b(x', x')$ συνάγουμε ότι
$Q(x'_k - x'_\ell) = Q(x'_k) + Q(x'_\ell) - 2b(x'_k, x'_\ell)$ και συνεπώς η παράσταση

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k,\ell=1}^{n} \xi_k \xi_\ell e^{-\frac{1}{2}Q(x'_k - x'_\ell)} \\ &= \sum_{k,\ell=1}^{n} \xi_k e^{-\frac{1}{2}Q(x'_k)} \cdot \xi_\ell e^{-\frac{1}{2}Q(x'_\ell)} \cdot e^{b(x'_k, x'_\ell)} \end{aligned}$$

και θέτοντας $\xi_m e^{-\frac{1}{2}Q(x'_m)} = \xi'_m$ έχουμε

$$A = \sum_{k,\ell=1}^{n} \xi'_k \xi'_\ell e^{b(x'_k, x'_\ell)}$$

Όμως είναι γνωστό ότι αν φ είναι θετικά ορισμένη τότε e^ϕ είναι θετικά ορισμένη ([28] σελ. 187) και συνεπώς $A \geq 0$.

Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{X}$ είναι ψευδοσυνεχής. Πράγματι έστω πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος $E \subset X'$ και $\{e_1, ..., e_k\}$ βάση του. Επειδή η τοπολογία του E είναι οριζόμενη από τη norm $|x'| = (y_1^2 + ... + y_k^2)^{\frac{1}{2}}$ όταν $x' = y_1e_1 + ... + y_ke_k$ συμπεραίνουμε ότι για ακολουθία $x'_n = y_1^ne_1 + ... + y_k^ne_k$, $n \in \mathbb{N}$ και $x' = y_1e_1 + ... + y_ke_k$ ισχύει $x'_n \to x'$ στον E όταν και μόνο όταν $y_m^n \to y_m$ για κάθε $m = 1, ..., k$. Συνεπώς $a(x'_n) = \sum_{m=1}^{k} y_m^n a(e_m) \to \sum_{m=1}^{k} y_m a(e_m) = a(x')$ όταν $x'_n \to x'$ στον E. Εξάλλου αν b είναι συμμετρική διγραμμική μορφή στον X' έτσι ώστε $Q(x') = b(x', x')$ τότε

$$Q(x'_n) = Q(\sum_{m=1}^{k} y_m^n e_m) = \sum_{i,j=1}^{k} y_i^n y_j^n b(e_i, e_j)$$

και συνεπώς

$$Q(x'_n) \to \sum_{i,j=1}^{k} y_i y_j b(e_i, e_j) = Q(\sum_{m=1}^{k} y_m e_m)$$

και άρα $Q(x'_n) \to Q(x')$.
Ώστε $\mathcal{X}(x'_n) \to \mathcal{X}(x')$ όταν $x'_n \to x'$ στον E.
Άρα η $\mathcal{X}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.4. και άρα υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο μ στον X εις τρόπον ώστε $\hat{\mu} = \mathcal{X}$. Επικαλούμενοι τώρα το Θεώρημα 6.2.6. συμπεραίνουμε ότι το μ είναι κυλινδρικό μέτρο Gauss με παραμέτρους a, Q.

□

Παράδειγμα 6.2.8. Έστω ότι X είναι χώρος Hilbert απείρων διαστάσεων και $\mathcal{X}(x) = e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}, x \in X$. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα υπάρχει μοναδικό κυλινδρικό μέτρο Gauss μ στον X εις τρόπον ώστε $\hat{\mu} = \mathcal{X}$. Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε μήπως το κυλινδρικό μέτρο μ επεκτείνεται σε "πραγματικό" μέτρο μ σε μια σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \supset C(X, X')$. Η απάντηση είναι **αρνητική** διότι αν αυτό ήταν δυνατόν τότε σύμφωνα με το Πόρισμα 4.1.5. η χ.σ. $\hat{\mu} = \mathcal{X}$ θα ήταν ακολουθιακά συνεχής για την ασθενή τοπολογία του X δηλαδή $\mathcal{X}(x_n) \to \mathcal{X}(x)$ όταν $x_n, x \in X$ και $(x_n, y) \to (x, y)$ για κάθε $y \in X$ και συνεπώς θα είχαμε $\|x_n\| \to \|x\|$ όταν $(x_n, y) \to (x, y)$ για κάθε $y \in X$. Όμως είναι δυνατόν να βρούμε ακολουθία $x_n \in X$ που συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$ αλλά δεν ισχύει $\|x_n\| \to \|x\|$.

6.3 Θεώρημα Mourier

Ενώ λοιπόν σε αφηρημένους απειροδιάστατους χώρους δεν έχουμε ορίσει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα συναρτησοειδές να είναι χ.σ ενός μέτρου Gauss , σε χώρους Hilbert το πρόβλημα λύνεται μέσω του Θεωρήματος Mourier .

Όπως είδαμε παραπάνω από τον ορισμό ενός μέτρου Gauss μ απορρέει άμεσα ότι είναι ασθενούς δεύτερης τάξης, δηλαδή:

$$\int_X |<x,x'>|^2 d\mu(x) < +\infty \quad \text{για κάθε} \quad x' \in X'$$

Ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου ο χώρος X είναι **Hilbert** η συνθήκη αυτή καθίσταται

$$\int_X (u,y)^2 d\mu(u) < +\infty \quad \text{για κάθε} \quad y \in X$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι $\int\limits_X |(u,y)| d\mu(u) < +\infty$
και $\int\limits_X |(u,x)(u,y)| d\mu(u) < +\infty$ για όλα τα $x, y \in X$ και συνεπώς ορίζεται η διγραμμική μορφή

$$r(x,y) = \int_X (u,x)(u,y) d\mu(u) - \int_X (u,x) d\mu(u) \cdot \int_X (u,y) d\mu(u)$$

Η δ ιγραμμική μορφή r είναι φανερά συμμετρική, θετική και ορίζει (κατά το συνήθη τρόπο με το Θεώρημα Riesz) έναν τελεστή $R : X \mapsto X$ εις τρόπον ώστε

$$(Rx,y) = r(x,y) \quad \text{για όλα τα} \quad x, y \in X \tag{1}$$

Ο τελεστής R ονομάζεται **τελεστής διακύμανσης** του μέτρου μ και φανερά είναι συμμετρικός, θετικός ($(Rx,x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$) και άρα συνεχής στον X. Ακόμα λαμβάνοντας υπόψη την (1) έχουμε ότι

$$(Rx,x) = \int_X (u,x)^2 d\mu(u) - \left(\int_X (u,x) d\mu(u) \right)^2 \quad , x \in X$$

και συνεπώς το χ.σ. του μέτρου Gauss μ γράφεται (Πόρισμα 6.2.5.)

$$\hat{\mu}(x) = e^{ia(x) - \frac{1}{2}(Rx,x)} \quad , x \in X \tag{2}$$

όπου $a(x) = \int\limits_X (u,x) d\mu(u), x \in X$.
Επίσης είναι γνωστό (ο χώρος είναι Hilbert) ότι υπάρχει $m \in X$ εις τρόπον ώστε

$$a(x) = (m,x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in X$$

(πρόκειται για το ολοκλήρωμα Pettis $m = \int\limits_X x d\mu(x)$)
και έτσι το χ.σ. ενός μέτρου Gauss μ γράφεται

$$\hat{\mu}(x) = \exp^{i(m,x) - \frac{1}{2}(Rx,x)} \quad , x \in X$$

Το στοιχείο $m \in X$ είναι η **μέση τιμή** του μέτρου μ.
Το επόμενο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει πλήρως τα συναρτησοειδή που μπορούν να είναι χ.σ. ενός μέτρου Gauss σε ένα χώρο Hilbert.

Θεώρημα 6.3.1. *(E. Mourier)*
Έστω X χώρος Hilbert και μ μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathscr{B}(X))$. Τότε το μέτρο μ είναι Radon μέτρο Gauss όταν και μόνο όταν το χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι της μορφής

$$\mathcal{X}(x) = e^{i(m,x)-\frac{1}{2}(Rx,x)} \quad , x \in X \tag{3}$$

όπου $m \in X$ και R συμμετρικός, θετικός πυρηνικός (nuclear) τελεστής στον X.

Απόδειξη. Έστω ότι το μ είναι Radon μέτρο Gauss.Σύμφωνα με την προηγηθείσα συζήτηση το χ.σ. είναι της μορφής (3) όπου $m \in X$ και R ο τελεστής διακύμανσης του μ. Αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής R είναι πυρηνικός.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Sazonov το χ.σ. $\hat{\mu}$ είναι συνεχές στο $x = 0$ για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X)$. Συνεπώς για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει τελεστής $S \in \mathbf{S}(X)$ τέτοιος ώστε :$|1 - \hat{\mu}(x)| < 1 - e^{-\frac{1}{2}\epsilon}$ όταν $x \in X$ με $(Sx, x) < 1$.
Όμως $1 - Re\hat{\mu}(x) \leq |1 - \hat{\mu}(x)|$ και $Re\hat{\mu}(x) \leq e^{-\frac{1}{2}(Rx,x)}$ και συνεπώς $1 - e^{-\frac{1}{2}(Rx,x)} < 1 - e^{-\frac{1}{2}\epsilon}$ όταν $(Sx, x) < 1$ και τελικά

$$(Rx, x) < \epsilon \quad \text{όταν} \quad x \in X \quad \text{με} \quad (Sx, x) < 1 \tag{4}$$

Τώρα για τυχόν $x_0 \in X$ και τυχόν $d > \sqrt{(Sx_0, x_0)}$ θα είναι $(S\frac{x_0}{d}, \frac{x_0}{d}) = \frac{1}{d^2}(Sx_0, x_0) < 1$ και άρα από την (4) συμπεραίνουμε ότι $(R\frac{x_0}{d}, \frac{x_0}{d}) < \epsilon$ και συνεπώς

$$(Rx_0, x_0) < \epsilon d^2 \quad \text{για τυχόν} \quad d > \sqrt{(Sx_0, x_0)}$$

Ώστε για τυχόν $x_0 \in X$

$$(Rx_0, x_0) \leq \epsilon(Sx_0, x_0) \tag{5}$$

και άρα για οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση $\{e_j, j \in I\}$ και οποιοδήποτε υποσύστημα $\{e_{j_n}, n \in \mathbb{N}\}$ θα είναι

$$\sum_n (Re_{j_n}, e_{j_n}) \leq \epsilon \sum_n (Se_{j_n}, e_{j_n}) < +\infty$$

αφού ο τελεστής S είναι πυρηνικός.
Όπως στο Λήμμα 5.2.10. συμπεραίνουμε ότι $(Re_j, e_j) > 0$ μέχρι και για αριθμήσιμο πλήθος δεικτών $j \in I$. Συνεπώς και πάλι από την (5) έχουμε ότι $\sum_j (Re_j, e_j) < +\infty$ (αφού S πυρηνικός) και συνεπώς ο R είναι πυρηνικός ([28] σελ. 161).
Αντίστροφα : Έστω συνάρτηση $\mathcal{X}$ της μορφής (3). Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2.3. αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει Radon μέτρο μ για το οποίο $\hat{\mu} = \mathcal{X}$.
Θέτουμε $h(x) = e^{-\frac{1}{2}(Rx,x)}$. Προφανώς $h(0) = 1$ και όπως δείξαμε κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.7. η h είναι θετικά ορισμένη. Θα δείξουμε τώρα ότι είναι συνεχής για την τοπολογία Sazonov $\tau_S(X)$ στο $x = 0$. Πράγματι για τυχόν $\epsilon > 0$ θεωρούμε την περιοχή $V = \{x : (Rx, x) < -2\ln(1 - \epsilon)\}$ και εύκολα επαληθεύεται ότι $|1 - h(x)| < \epsilon$ για όλα τα $x \in V$. Ώστε η h ικανοποιεί τις

απαιτήσεις του Θεωρήματος Sazonov και άρα υπάρχει μοναδικό Radon μέτρο v εις τρόπον ώστε $\hat{v} = h$.
Ορίζουμε τώρα το μέτρο μ στον $(X, \mathscr{B}(X))$ με την $\mu(B) = v(\phi^{-1}(B))$ όπου $\phi(x) = x + m$ ή αλλιώς $\mu(B) = v(B - m)$. Το μέτρο μ είναι Radon και ισχύει:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(x) &= \int_X e^{i(x,y)} d\mu(y) \\ &= \int_X e^{i(x,y+m)} dv(y) \\ &= e^{i(x,m)} \hat{v}(x) \\ &= \mathcal{X}(x) \quad \forall\, x \in X\end{aligned}$$

□

6.4 Θεώρημα Gross

Έστω H διαχωρίσιμος, πραγματικός χώρος Hilbert . Είδαμε ότι όταν ο χώρος H είναι πεπερασμένης διάστασης τότε το μέτρο Gauss W_H στον H είναι το μέτρο Borel που δίνεται από τη σχέση

$$W_H(dh) = (2\pi)^{-\frac{dim(H)}{2}} e^{-\frac{\|h\|_H^2}{2}} \lambda_H(dh) \tag{1}$$

με λ_H το μέτρο Lebesgue .
Όταν ο H είναι χώρος απείρων διαστάσεων το W_H δεν υπάρχει. Πράγματι· έστω ότι υπάρχει τότε για κάθε ορθοκανονική βάση $\{h_m, m \geq 0\}$ οι τυχαιές μεταβλητές $h \in H \mapsto X_m(h) = (h, h_m)_H$ θα ήταν ανεξάρτητες με κατανομή $N(0,1)$. Έτσι από Ισχυρό Νόμο Μεγάλων Αριθμών η norm $\|h\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} X_m(h)^2$ θα ήταν άπειρη για κάθε $h \in H$. Με άλλα λόγια "ο χώρος H είναι πολύ μικρός για να χωρέσει το W_H". Η ιδέα που προτάθηκε από τον Gross [9] είναι η πλήρωση του χώρου H με μια norm τέτοια ώστε ο παραγόμενος χώρος Banach να μπορεί να "στεγάσει" το μέτρο Gauss .
Βέβαια όπως θα δούμε παρακάτω το μέτρο Gauss αποτελεί ειδική περίπτωση ενός γενικότερου αποτελέσματος [30] που μας επιτρέπει το μέτρο αυτό να είναι οποιοδήποτε.
Έστω λοιπόν η *βασική τριπλέτα* (H, B, μ) όπου H είναι πραγματικός, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$ και norm $|\cdot|$, το μ ένα κυλινδρικό μέτρο στον H και B η πλήρωση του H ως προς τη norm $\|\cdot\|$ η οποία είναι ασθενέστερη της $|\cdot|$. Κατά αυτόν τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε τον H ως υποσύνολο του B. Επίσης μπορούμε να ταυτίσουμε τον H' με τον H έτσι ώστε ο B' να αποτελεί υποσύνολο του H, δηλαδή

$$B' = \{y \in H : \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} | < x, y > | < \infty\}$$

Τώρα για το χώρο B ορίζουμε ως $\mathcal{K}(B')$ την οικογένεια όλων των υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης του B' και $\mathscr{A}(K)$ την σ-άλγεβρα όλων των κυλινδρικών συνόλων που βασίζονται στο $K \in \mathcal{K}$.

Αφού λοιπόν $\mathcal{K}(B') \subset \mathcal{K}(H)$ τότε για κάθε κυλινδρικό σύνολο $C \in \mathscr{A}(B)$ το σύνολο $C \cap H$ ανήκει στο $\mathscr{A}(H)$ και έτσι μπορούμε να ορίσουμε ένα κυλινδρικό μέτρο μ^* στο B μέσω της σχέσης

$$\mu^*(C) = \mu(C \cap H)$$

Το μ^* θα λέγεται lifting του μ στον B.
Το ερώτημα που καλούμαστε να απαντήσουμε είναι κάτω από ποιές συνθήκες στο μ και στη norm $\|\cdot\|$ το μ^* γίνεται σ-προσθετικό στην άλγεβρα $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathscr{A}(K) \equiv C(B, B')$.
Την ικανή συνθήκη στο ερώτημα αυτό δίνει η γενίκευση του Θεωρήματος Gross για την διατύπωση και την απόδειξη του οποίου θα χρειαστούμε τον παρακάτω Ορισμό και τα επόμενα Λήμματα.

Ορισμός 6.4.1. *Έστω (H, B, μ) μια βασική τριπλέτα. Η norm $\|\cdot\|$ στον H λέγεται μετρήσιμη ως προς το μ (ή μ-μετρήσιμη) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $P_\epsilon \in \mathcal{P}$ τέτοια ώστε*

$$\mu\{x \in H : \|Px\| > \epsilon\} < \epsilon \quad \forall\ P \perp P_\epsilon$$

όπου $\mathcal{P}$ είναι η οικογένεια όλων των ορθογώνιων προβολών στο H με εικόνα πεπερασμένης διάστασης.

Έστω (H, B, μ) μια βασική τριπλέτα. Αναζητούμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, m)$ και μια απεικόνιση $F : H' \mapsto \mathcal{L}(\Omega, \mathscr{F}, m)$ γραμμική, συνεχή τέτοια ώστε για κάθε $y'_1, ..., y'_n \in H'$ να ισχύει

$$(y'_1, ..., y'_n) \sim (F(y'_1), ..., F(y'_n)) \tag{$\triangle$}$$

Ο χώρος $(\Omega, \mathscr{F}, m, F)$ λέγεται *αναπαρασταση του μ*.
Η F μπορεί να οριστεί γενικότερα σε οποιοδήποτε χώρο X τοπικά κυρτό με κυλινδρική άλγεβρα $C(X, X')$ και κυλινδρικό μέτρο μ και έτσι ο ορισμός της σε χώρο Hilbert να αποτελεί ειδική περίπτωση.
Έστω λοιπόν μια Hamel βάση $\{e_a, a \in I\} \subset X'$ έτσι ώστε $x' = \sum_{a \in I} \lambda_a e_a$. Σε κάθε οικογένεια δεικτών $\{a_1, ..., a_n\} \subset I$ αντιστοιχίζουμε ένα μέτρο $m_{a_1 ... a_n}(A) = \mu((e_{a_1}, ..., e_{a_n})^{-1}(A))$ στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$. Τα μέτρα $m_{a_1, ... a_n}$, $\{a_1, ..., a_n\} \in \mathcal{P}(I)$ είναι consistent οικογένεια διότι αν $f = \{a_1, ..., a_n\} \subset \{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\} = g$ τότε $\mathscr{A}_f \subset \mathscr{A}_g$.
Έχουμε λοιπόν το χώρο $(\Omega = \prod_{i \in I} \mathbb{R}, \mathscr{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathscr{B}, m)$ με

$$m(\pi^{-1}_{a_1 ... a_n}(B)) = m_{a_1 ... a_n}(B) = \mu((e_{a_1}, ..., e_{a_n})^{-1}(B)),\ B \in \mathscr{B}^n$$

όπου $\pi_a : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \omega \mapsto \omega(a)$ η συνήθης προβολή.
Άρα $(e_{a_1}, ..., e_{a_n}) \sim (\pi_{a_1 ... a_n})$.
Για $x' = \sum_{a \in I} \lambda_a e_a$ ορίζουμε $F : X' \mapsto \mathcal{L}(\Omega, \mathscr{F}, m)$ από τη σχέση

$$F(x') = \sum_{a \in I} \lambda_a \pi_a \tag{1}$$

Τότε η F είναι γραμμική, και συνεχής κατά πιθανότητα, δηλαδή αν $x'_b \to x'$ στον X' και ορίσουμε $X_b = F(x'_b)$ και $X = F(x')$ τότε $X_b \xrightarrow{m} X$ δηλαδή $m(|X_b - X| > \epsilon) \to 0$.
Έτσι $F(e_a) = \pi_a \sim e_a$ οπότε $x' = \sum_{a \in I} \lambda_a e_a \sim \sum_{a \in I} \lambda_a \pi_a = F(x')$
διότι $(e_{a_1}, ..., e_{a_n}) \sim (\pi_{a_1 ... a_n}) = (\pi_{a_1}, ..., \pi_{a_n})$.
Όμοια $(x'_1, ..., x'_k) \sim (F(x'_1), ..., F(x'_k))$.
Συνεπώς έχουμε τη ζητούμενη αναπαράσταση.
Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι να ξεκινήσουμε από μια οποιαδήποτε αναπαράσταση του κυλινδρικού μέτρου μ και να μελετήσουμε τη σύγκλιση σε μια τυχαία μεταβλητή στον B.

Θεώρημα 6.4.2. *(Γενικευση Θεωρήματος Gross)*
Έστω μ κυλινδρικό μέτρο στον H και $\hat{\mu}$ το χαρακτηριστικό συναρησοειδές του που είναι συνεχές στον H. Αν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(P_n)_n \subset \mathcal{P}$ τέτοια ώστε $P_n \uparrow I$ και για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει

$$\lim_{n,m \to \infty} \mu\{x \in H : \|P_n x - P_m x\| > \epsilon\} = 0 \qquad (\star)$$

τότε το lifting μ^* του μ είναι σ-προσθετικό στην $C(B, B')$.

Για την απόδειξη του Γενικευμένου Θεωρήματος Gross θα χρειαστούμε τα παρακάτω Λήμματα:

Λήμμα 6.4.3. *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Το χαρακτηριστικό συναρτησοειδές $\hat{\mu}$ του κυλινδρικού μέτρου μ είναι συνεχές στο 0.*

2. *Το χαρακτηριστικό συναρτησοειδές $\hat{\mu}$ του κυλινδρικού μέτρου μ είναι συνεχές στον H.*

3. *Η απεικόνιση $F : H \mapsto \mathcal{L}(\Omega)$ είναι συνεχής κατά πιθανότητα.*

4. *$(h_n \to 0$ στον $H) \Rightarrow (\forall \epsilon > 0 \ \mu\{x \in H : \ | < x, h_n > | > \epsilon\} \to 0)$*

Απόδειξη. Μέσω της αναπαράστασης του κυλινδρικού μέτρου μ έχουμε

$$\mu\{x \in H : \ (< x, y_1 >, ..., < x, y_n >) \in E\} = m\{\omega : \ (F(y_1)(\omega), ..., F(y_n)(\omega)) \in E\} \qquad (\circledast)$$

για κάθε $y_1, ..., y_n \in H$ και $E \in \mathscr{B}^n$.
Τότε $\hat{\mu}(y) = \mathbb{E}_m[e^{iF(y)}]$ για κάθε $y \in H$. Αν λοιπόν το $\hat{\mu}$ είναι συνεχές στο 0 τότε η $F(h_n)$ συγκλίνει κατά νόμο στο 0 όταν $h_n \to 0$ στο H, και αυτό με τη σειρά του ισοδυναμεί με την σύγκλιση κατά πιθανότητα στο 0. Άρα από γραμμικότητα της F έχουμε $1 \Leftrightarrow 3$.
Ακόμα από τη σχέση $\circledast$ έχουμε ότι $3 \Leftrightarrow 4$.
Οι υπόλοιπες ισοδυναμίες είναι προφανείς. $\square$

Λήμμα 6.4.4. *Έστω $P \in \mathcal{P}$ και $(e_1, ..., e_n)$ μια ορθοκανονική βάση του χώρου $P(H)$. Τότε το παρακάτω τυχαίο στοιχείο του $P(H)$*

$$\ell(P) = \sum_{j=1}^{n} F(e_j)e_j$$

είναι ανεξάρτητο της επιλογής της ορθοκανονικής βάσης (e_j). Επιπλέον ισχύουν:

1. $$< \ell(P), h >= F(Ph) \ \ \forall\ h \in H$$

2. $$m\{\omega :\ \ell(P)(\omega) \in C\} = \mu(C) \ \ \forall C \in \mathscr{A}(P(H))$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο τη σχέση 2.
Για $C \in \mathscr{A}(P(H))$ υπάρχει $E \in \mathscr{B}^n$ τέτοιο ώστε

$$C = \{x \in H :\ (< x, e_1 >, ..., < x, e_n >) \in E\}$$

Λόγω της μορφής του τυχαίου στοιχείου $\ell(P)$ έχουμε

$$\{\omega :\ \ell(P)(\omega) \in C\} = \{\omega :\ (F(e_1)(\omega), ..., F(e_n)(\omega)) \in E\}$$

Έτσι η ζητούμενη σχέση προκύπτει από την

$$\mu\{x \in H :\ (< x, y_1 >, ..., < x, y_n >) \in E\} = m\{\omega :\ (F(y_1)(\omega), ..., F(y_n)(\omega)) \in E\}$$

□

Εφοδιάζουμε τώρα την οικογένεια $\mathcal{P}$ με μια σχέση μερικής διάταξης $\prec$ η οποία ορίζεται

$$(P \prec Q) \Leftrightarrow (P(H) \subset Q(H))$$

Τότε θεωρούμε ότι η απεικόνιση $\ell(\cdot)$ ορίζει ένα δίκτυο τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο B και σύνολο δεικτών το διευθυνόμενο σύνολο $(\mathcal{P}, \prec)$.

Παρατήρηση 6.4.5. Προκειμένου να δειχθεί η σύγκλιση κατά πιθανότητα του δικτύου $\ell(\cdot)$ σε μια τυχαία μεταβλητή στο B αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\ell(P_n)$ είναι μια ακολουθία Cauchy κατά πιθανότητα για κάθε ακολουθία προβολών $(P_n) \uparrow I$ με I ο ταυτοτικός τελεστής στο H.

Λήμμα 6.4.6. *Η norm $\|\cdot\|$ είναι μ-μετρήσιμη όταν και μόνο όταν το δίκτυο $\ell(P),\ P \in \mathcal{P}$ των τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο B συγκλίνει κατά πιθανότητα στο B.*

Απόδειξη. Η σχέση διάταξης $P \prec Q$ μεταξύ των προβολών $P,\ Q$ μπορεί να γραφεί ως $Q = P + R$ όπου $R \perp P$. Έτσι έχουμε $\ell(Q) - \ell(P) = \ell(R)$. Επειδή όμως ισχύει $m\{\omega :\ \ell(P)(\omega) \in C\} = \mu(C) \ \ \forall C \in \mathscr{A}(P(H))$ προκύπτει ότι

$$m\{\omega :\ \|\ell(R)(\omega)\| > \epsilon\} = \mu\{x :\ \|Rx\| > \epsilon\}$$

και η απόδειξη είναι προφανής. □

Παρατήρηση 6.4.7. Η σχέση $\star$ του θεωρήματος ικανοποιείται όταν η $\|\cdot\|$ είναι μ-μετρησίμη.

Απόδειξη Γενικευμένου Θεωρήματος Gross :
Από τη συνθήκη

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu\{x \in H : \|P_n x - P_m x\| > \epsilon\} = 0$$

του Θεωρήματος, προκύπτει ότι το δίκτυο $\ell(P_n)$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο B σε μια τυχάια μεταβλητή έστω ξ. Επειδή η απεικόνιση $F : H \mapsto \mathcal{L}(\Omega)$ είναι συνεχής κατά πιθανότητα, τότε για κάθε $y \in H$ η τυχαία μεταβλητά $F(P_n y) =< \ell(P_n), y >$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στην $F(y)$.
Από την άλλη για $y \in B'$ συγκλίνει στο $< \xi, y >$.
Άρα $F(y) =< \xi, y >$ m-σχεδόν βέβαια, δηλαδή η κατανομή ν της τυχαίας μεταβλητής ξ είναι σ-προσθετική επέκταση του μ^* στην $C(B, B')$.
Από Θεώρημα Καραθεοδωρή, εφόσον το μ^* είναι σ-προσθετικό στην $C(B, B')$ τότε επεκτείνεται και στην σ-άλγεβρα την παραγόμενη από την $C(B, B')$.
Από το Θεώρημα 3.2.9. (Mourier) , επειδή ο χώρος B που προκύπτει είναι διαχωρίσιμος τότε $\mathscr{B}_B = \hat{C}(B, B') \equiv \sigma(C(B, B'))$ και το μέτρο μ^* είναι μέτρο Borel . Τέλος επειδή ο χώρος B είναι Banach (άρα πλήρης, μετρικός) και διαχωρίσιμος (πολωνικός) ισχύει το Θεώρημα Ulam - Prohorov συνεπώς το μ^* είναι και μέτρο Radon.
Το Θεώρημα Gross αποτελεί πλέον πόρισμα του παραπάνω γενικότερου αποτελέσματος μιας και εξειδικεύεται για μέτρα Gauss.

Πόρισμα 6.4.8. (Θεώρημα Gross:)
Έστω H πραγματικός, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$ και την προκύπτουσα norm $|\cdot|$. Έστω $\|\cdot\|$ μια μετρήσιμη norm στον H και B η πλήρωση του H ως προς αυτή. Έστω μ^* το κυλινδρικό μέτρο που ορίζεται στην άλγεβρα $C(B, B')$ με χαρακτηριστικό συναρτησοειδές $\mathcal{X}(h) = e^{-\frac{1}{2}\|h\|_H^2}$ στο H. Τότε το μ^* είναι σ-προσθετικό στην $C(B, B')$.

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 6.3.2. δεδομένου ότι το χαρακτηριστικό συναρτησοειδές $\hat{\mu}$ του κυλινδρικού μέτρου Gauss είναι συνεχές. □

Εφαρμογή Ο κλασσικός χώρος Wiener (χώρος των συνεχών τροχιών). Συγκεκριμένα έχουμε

$H = \mathcal{L}_2(0, 1)$ εφοδιασμένος με τη norm

$$\|f\| = \sup_{0\le t\le 1} |\int_0^t f(s)ds|$$

Ο χώρος που προκύπτει από την πλήρωση του $\mathcal{L}_2(0, 1)$ ως προς την παραπάνω norm είναι ισομορφικός με το χώρο των συνεχών

συναρτήσεων στο [0,1] για τις οποίες ισχύει $f(0) = 0$ με τη sup norm μέσω της απεικόνισης

$$Pf(t) = \int_0^t f(s)ds \ , \ 0 \leq t \leq 1$$

Το μέτρο μ^* που προκύπτει είναι το κλασσικό μέτρο Wiener.

Είδαμε ότι η εισαγωγή μιας μ-μετρήσιμης norm στον H είναι ικανή συνθήκη ώστε το κυλινδρικό μέτρο μ να επεκταθεί σε σ-προσθετικό μέτρο. Στο σημείο αυτό θα αναρωτιόταν κανείς αν η συνθήκη αυτή είναι και αναγκαία. Στο ερώτημα αυτό απαντά το Θεώρημα των Dudley - Feldman - LeCam σύμφωνα με το οποίο αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση που το κυλινδρικό μέτρο μ είναι Gauss. (το αντίστροφο του Θεωρήματος Gross.)

Θεώρημα 6.4.9. *(Dudley - Feldman - LeCam): Έστω ότι το μ είναι κυλινδρικό μέτρο Gauss . Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το μ^* είναι σ-προσθετικό στην $C(B, B')$.*
2. *$H \| \cdot \|$ είναι μ-μετρήσιμη norm .*
3. *Υπάρχει μια ακολουθία $P_n \uparrow I$ τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu\{x \in H : \|P_n x - P_m x\| > \epsilon\} = 0 \qquad (\star)$$

4. *Για κάθε ακολουθία $P_n \uparrow I$ η σχέση $\star$ ισχύει.*

Απόδειξη. [8] □

Βιβλιογραφία

[1] Ash , R. : *Real Analysis and Probability* , Academic Press.

[2] Bauer , H : *Probability Theory and Elements of Measure Theory* , Holt, Rinehart and Winston, Inc.

[3] Billingsley , P. : *Probability and Measure* , Wiley.

[4] Bogachev , V.I. : *Measure Theory , Vol. II* , Springer-Verlag.

[5] Bourbaki , N. : *Elements de Mathématique , Integration , Châpitre IX* , Paris 1969.

[6] Cohn , D. : *Measure Theory* , Birkhäuser.

[7] Dudley , R. : *Real Analysis and Probability* , Wadsworth Brooks / Cole.

[8] Dudley R.M - Feldman J. - Le Cam L. : *On seminorms and probabilities, and abstract Wiener spaces* , Annals of Mathematics. Second Series 93: 390-408.

[9] Gross , L. : *Abstract Wiener Space* , Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. , 2 (1965) pp. 31-42.

[10] Halmos, P. : *Measure Theory* , Springer-Verlag.

[11] Hewitt-Stromberg : *Real and Abstract Analysis* , Springer-Verlag.

[12] Jacobs , K. : *Measure and Integral* , Academic Press 1978.

[13] Kingman-Taylor : *Measure and Integration* , Cambridge University Press.

[14] Κουμουλής, Γ. - Νεγρεπόντης, Σ. : *Θεωρία Μέτρου* , Εκδόσεις Συμμετρία

[15] Lang , S. : *Real Analysis* , Addison-Wesley.

[16] Maeda M. - Harai K. - Hagihara R. : *Some examples and the connection between cylindrical measures and measurable norms* , J. Math. Anal. Appl. 288 (2003) 556-564.

[17] Malliavin , P. : *Integration and Probability* , Springer-Verlag.

[18] Marle , C-M. : *Mesures et Probabilités* , Hermann , Paris.

[19] Megginson, R. : *An introduction to Banach Space Theory* , Springer - Verlag.

[20] Neveu , J. : *Calcul de Probabilités* , Paris 1970

[21] Parthasarathy , K.R : *Probability Measures on Metric Spaces* , Academic Press.

[22] Parthasarathy , K.R : *Introduction to Probability and Meausure* , McMillan Company of India.

[23] Rao , M.M : *Measure Theory and integration*, 2nd ed. Marcel-Dekker 2004.

[24] Rogers , C.A : *Hausdorff Measures* , Cambridge University Press.

[25] Rudin , W. : *Functional Analysis* , McGraw-Hill 1973.

[26] Schwartz , L. : *Radon Measures* , Oxford.

[27] Σπηλιώτης , I. : *Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου Σε Απειροδιάστατους Χώρους* , Αθήνα 2010.

[28] Vakhania N.N - Taieladge V.I - Chobanyan S.A. : *Probability Distributions on Banach Spaces* , D. Reidel Publishing Company.

[29] Vulikh , B.Z : *A Brief Course in the Theory of Functions of a Real Variable* , mir editions.

[30] Yan, Jia-An : *Generalisations of Gross's and Minlos's theorems* , Seminaire de probabilites (Strasbourg) , tome 23 (1989) , p. 395-404.