ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BLACK-SCHOLES ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΣΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΛΜΑΤΟΣ-ΔΙΑΧΥΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
της Σοφίας Χρυσικοπούλου

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Ανδρέας Γ.Μπουντουβής

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2014

Ευχαριστίες

Με την ευκαιρία της ολοκλήρωσης της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον κ. Ανδρέα Μπουντουβή, Καθηγητή και Κοσμήτορα της σχολής Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π., για το ενδιαφέρον που έδειξε κατά την εκπόνηση της εργασίας, αλλά και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση κατά τη διάρκεια της έρευνας.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την κ. Ελένη Κορωνάκη για την πολύτιμη συμβολή της στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Οι κατευθύνσεις που παρείχε και το διαρκές ενδιαφέρον που έδειχνε υπήρξαν κρίσιμες.

Περίληψη

Η πρόβλεψη και η αποτίμηση της αξίας των δικαιωμάτων προαίρεσης αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης των ερευνητών από τις αρχές του 1970, όταν και άρχισε η πρώτη μαζική διαπραγμάτευση τέτοιων δικαιωμάτων. Βασικό εργαλείο για την πρόβλεψη της αξίας των δικαιωμάτων προαίρεσης αποτέλεσε η εξίσωση Black – Scholes, η οποία αναπτύχθηκε από τους οικονομολόγους Fisher Black και Myron Scholes και εκδόθηκε το 1973 στο "Journal of Political Economy". Έκτοτε, η εξίσωση αυτή έχει γίνει αντικείμενο έντονης κριτικής έως και κατηγορηθεί για την παραγωγή λανθασμένων αποτελεσμάτων εξαιτίας των ιδιαίτερα απλοϊκών παραδοχών στις οποίες στηρίζεται.

Ένα από τα βασικότερα αντικείμενα μελέτης όσων ασχολούνται με την τιμολόγηση δικαιωμάτων τις τελευταίες δεκαετίες, αποτελεί η μαθηματική θεμελίωση ενός μοντέλου, το οποίο στηριζόμενο στην εξίσωση Black - Scholes, θα βελτιώνει τις προβλέψεις για την τιμή των δικαιωμάτων. Μια τέτοια προσέγγιση πραγματοποιήθηκε από τον Robert Merton. Σύμφωνα με το μοντέλο του, η Black-Scholes ακολουθεί ένα μοντέλο διάχυσης-άλματος (jump-diffusion). Η μετατροπή αυτή, οδηγεί στην παραγωγή μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης με ολοκληρωτικό όρο(Partial Integro-Differential Equation).

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, προσομοιώνεται και αξιολογείται το μοντέλο του Robert Merton. Αρχικά, παρατίθενται τα χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης και αναλύεται η απλή Black-Scholes. Στη συνέχεια, εισάγονται τα μοντέλα jump-diffusion και μελετάται το μαθηματικό υπόβαθρο του μοντέλου του Merton που ανήκει σε αυτή την κατηγορία. Ακολουθεί η αριθμητική επίλυση του μοντέλου του Merton με χρήση Matlab. Τέλος, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου jump-diffusion κατά τον Merton με τα αποτελέσματα της κλασικής εξίσωσης Black - Scholes και με πραγματικά δεδομένα τιμών δικαιωμάτων προαίρεσης. Σκοπός της μελέτης είναι η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του μοντέλου jump-diffusion της Black-Scholes κατά τον Merton καθώς και της απλής Black-Scholes και η εξαγωγή συμπερασμάτων.

Abstract

It is widely recognized that the classic option pricing model proposed in 1973 by Black and Scholes does not ideally fit observed empirical market data. That's because comparing theoretical Black–Scholes prices of derivatives with their actually traded prices reveals that the model assumptions are oversimplifying the market mechanism. In order to reflect the market properties in more detail, several modifications of the Black–Scholes model have been suggested and discussed in recent years.

In this thesis, we introduce the Merton jump-diffusion model, based on a stochastic approximation that seems to provide an adequate description of option price fluctuations and market risks. This model is described by a partial integro-differential equation which is an extension of the Black-Scholes equation combined with integral terms based on a random variable of jump size. Furthermore, we study an efficient numerical approximation of that partial integro-differential equation that arises in option pricing theory as well as in various scientific modeling. Finally, we compare the results of the linear Black - Scholes model and the jump-diffusion Merton model with actual market option prices. The aim is to evaluate the Merton's jump-diffusion model and draw conclusions regarding the appropriate use of them.

Περίγραμμα εργασίας

Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας περιγράφεται παρακάτω:

Στο πρώτο κεφάλαιο πραγματοποιείται ιστορική αναδρομή των χρηματοοικονομικών παραγώγων, αναλύονται τα είδη αυτών καθώς και οι τύποι των επενδυτών που τα εξασκούν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια πιο στοχευμένη ανάλυση των δικαιωμάτων προαίρεσης επί μετοχών καθώς αποτελούν το αντικείμενο στο οποίο εστιάζεται η μελέτη μας. Για τον λόγο αυτό, αναλύονται τα χαρακτηριστικά καθώς και οι παράγοντες που επηρρεάζουν τα δικαιώματα προαίρεσης επί μετοχών.

Στο τρίτο κεφάλαιο διατυπώνεται η διαφορική εξίσωση που αναπτύχθηκε το 1973 από τους Black και Scholes. Δίνεται έμφαση στην απόδειξή της καθώς και στις παραδοχές της.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγονται τα μοντέλα διάχυσης-αλμάτων(jump-diffusion) και διατυπώνεται το μαθηματικό υπόβαθρο που τα περικλείει.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, επικεντρωνόμαστε στην εφαρμογή ενός jump-diffusion μοντέλου για την Black-Scholes όπως αυτό ορίστηκε κατά τον Merton.

Στο έκτο κεφάλαιο παρατίθεται η μεθοδολογία της αριθμητικής επίλυσης του jump-diffusion μοντέλου της Black-Scholes κατά τον Merton, η οποία και εφαρμόστηκε σε γλώσσα matlab.

Στο έβδομο κεφάλαιο προσομοιώνεται το μοντέλο jump-diffusion με την ακόλουθη μεθοδολογία. Αρχικα εισήχθησαν οι βασικές παράμετροι στο εξεταζόμενο μοντέλο και έπειτα πραγματοποιήθηκε μεταβολή αυτών με στόχο την αξιολόγηση της επίδρασής τους και το σχολιασμό τους. Έπειτα, συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα του μοντέλου μας καθώς και της κλασσικής Black-Scholes με τις πραγματικές τιμές με στόχο την αξιολόγηση αυτών και την εξαγωγή συμπερασμάτων

Table of Contents

Λίστα Διαγραμμάτων – Πινάκων-Εικόνων

Λίστα Διαγραμμάτων

Λίστα Πινάκων

Λίστα Εικόνων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1.Ιστορική Αναδρομή

Τα τελευταία 30 χρόνια η δυναμική των χρηματοοικονομικών παραγώγων ολοένα και αυξάνεται. Συγκεκριμένα, κατά τις δεκαετίες του 1970 και του 1980, η απελευθέρωση των αγορών συναλλάγματος αλλά και η συμβολή των ακαδημαϊκών στην τιμολόγηση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και κυρίως των δικαιωμάτων προαίρεσης, κατόρθωσαν να αλλάξουν ριζικά το τοπίο και να διευρύνουν σημαντικά τη χρήση τους.

Τα βασικά πλεονεκτήματα τους τα οποία συνέβαλαν στην εξέλιξή τους είναι δύο. Πρώτον, χρησιμοποιούνται ευρύτατα για τη διαχείριση και την αντιστάθμιση κινδύνου με αποτέλεσμα οι εταιρείες να είναι πλέον σε θέση να κάνουν επενδύσεις που, χωρίς την χρήση παραγώγων προϊόντων και τις προηγμένες τεχνικές διαχείρησης κινδύνου που αυτά προσφέρουν, θα ήταν ακατόρθωτο να τολμήσουν να κάνουν. Δεύτερον, η διαπραγμάτευση παράγωγων προϊόντων μπορεί να προσφέρει πληροφόρηση για την πραγματική αξία επενδυτικών στοιχείων(συνήθως των υποκείμενων τίτλων) αλλά και να δώσει μια πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς της οικονομίας[20].

Ιστορικά τα παράγωγα ήταν πάντοτε βασισμένα σε εμπορεύματα(commodities) όπως πετρέλαιο, σιτάρι , καφές ή ζάχαρη. Η πρώτη απόπειρα για οργανωμένη διαπραγμάτευση τέτοιων παραγώγων έγινε στο χρηματιστήριο του Άμστερνταμ(Amsterdam Bourse) το 1688 όταν ξεκίνησε η διαπραγμάτευση των πρώτων δικαιωμάτων προαίρεσης πάνω στο βολβό της τουλίπας[9].

Χρειάστηκαν αρκετά χρόνια από τότε ώστε το 1973 στο Σικάγο να λειτουργήσει το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων από το Chicago Board of Trades και το Chicago Mercantile Exchange. Ακολούθησαν στη συνέχεια τα χρηματιστήρια της Νέας Υόρκης του Μόντρεαλ, του Τόκιο [9]κ.ά.

Καθώς οι αγορές παραγώγων σε ολόκληρο το κόσμο γιγαντώθηκαν το 1999 ιδρύθηκε από το ελληνικό χρηματιστήριο η πρώτη οργανωμένη αγορά παραγώγων στην Ελλάδα το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών. Η διαπραγμάτευση των πρώτων προϊόντων ξεκίνησε τον Αύγουστο του ίδιου έτους.

1.2.Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

Παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν(derivative) καλείται ένα συμβόλαιο, η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου βασικότερου υποκείμενου προϊόντος(underlying asset). Πρόκειται δηλαδή για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου προϊόντος. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (long position) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position).

1.3.Είδη Παραγώγων

1.3.1. Προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts)

Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (ΠΣ) είναι η απλούστερη μορφή παραγώγου. Τέτοια συμβόλαια συνήθως πραγματοποιούνται μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, δηλαδή μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή μεταξύ δύο μεγάλων εταιρειών και συνήθως η διαπραγμάτευση τους γίνεται εκτός χρηματιστηριακής αγοράς (over-the-counter market). Σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου, ο ένας αντισυμβαλλόμενος και πιο συγκεκριμένα αυτός που έχει τη θέση αγοράς (long position) συμφωνεί να αγοράσει μια ποσότητα ενός συγκεκριμένου αγαθού σε μια προκαθορισμένη τιμή σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον. Ο αντισυμβαλλόμενος που σύμφωνα με το συμβόλαιο έχει τη θέση πώλησης (short position) είναι υποχρεωμένος να πουλήσει τη συγκεκριμένη ποσότητα του αγαθού στη προκαθορισμένη τιμή και στο προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον[9].

1.3.2. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (future contracts)

Όπως και το Προθεσμιακό Συμβόλαιο, ένα Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) είναι μία συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, ο ένας εκ των οποίων υπόσχεται να αγοράσει (long position) και ο άλλος να πουλήσει (short position), μία συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία καθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον και σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής (delivery price). Αυτός που λαμβάνει long position προσδοκά άνοδο της τιμής του αγαθού ενώ αντίθετα αυτός που λαμβάνει short position προσδοκά πτώση της τιμής του αγαθού. Το υποκείμενο περιουσιακό αγαθό μπορεί να είναι εμπόρευμα (π.χ. ζάχαρη, μαλλί, ξυλεία, χαλκός, αλουμίνιο, χρυσός, κασσίτερος κ.α.) ή χρηματοοικονομικό αγαθό (μετοχές, συνάλλαγμα, ομόλογα κ.α.). Μερικές φορές η ημερομηνία παράδοσης δεν είναι απόλυτα προκαθορισμένη. Για παράδειγμα, μπορεί να καθορίζεται μόνο ο μήνας παράδοσης ενώ η ακριβής ημερομηνία παράδοσης να καθορίζεται από το Χρηματιστήριο Παραγώγων (συνήθως αυτό γίνεται για εμπορεύματα)[9].

Η διαφορά των προθεσμιακών συμβολαίων με τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης έγκειται στο γεγονός ότι τα δεύτερα συναλλάσσονται καθημερινά στο Χρηματιστήριο Παραγώγων και επομένως έχουν κάποια τυποποιημένα χαρακτηριστικά καθώς και εγγύηση του χρηματιστηρίου για την εκπλήρωση των συμβολαίων. Αντίθετα, η διαπραγμάτευση των προθεσμιακών συμβολαίων γίνεται κυρίως στην εξωχρηματιστηριακή αγορά, σε ένα οργανωμένο δίκτυο μεταξύ θεσμικών επενδυτών οι οποίοι αξιολογούν μόνοι τους και έχουν την ευθύνη για την φερεγγυότητα του αντισυμβαλλομένου[9].

Στην περίπτωση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης οι δύο συμβαλλόμενοι είναι δυνατόν να μην γνωρίζουν ο ένας τον άλλον και για το λόγο το χρηματιστήριο Παραγώγων έχει το ρόλο του μεσολαβητή ενώ έχει θεσπίσει κάποιο μηχανισμό που εγγυάται ότι το συμβόλαιο θα εκπληρωθεί. Αυτό γίνεται με την χρήση των λογαριασμών περιθωρίων (margin accounts). Ο αγοραστής και ο πωλητής του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης υποχρεούνται να ανοίξουν ένα λογαριασμό περιθωρίων και να καταθέσουν ένα ποσό ως εγγύηση (ένα ποσοστό της τιμής συναλλαγής).

Τα συμβόλαια μελλοντικής προαίρεσης συναλλάσσονται καθημερινά στο χρηματιστήριο παραγώγων και η τιμή συναλλαγής τους μεταβάλλεται ανάλογα με τις μεταβολές της τιμής του υποκείμενου αγαθού (π.χ. μετοχής) και τις προσδοκίες των επενδυτών. Αγοραστές και πωλητές μπορούν να κλείσουν τη θέση τους οποιαδήποτε στιγμή πριν τη λήξη του συμβολαίου κάνοντας την αντίστροφη κίνηση (π.χ. ΣΜΕ για πώληση ή αγορά αντίστοιχα του ίδιου αγαθού).

1.3.3. Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων (Stock Repo και Stock Reverse Repo)

Ο Δανεισμός Τίτλων αφορά τις παρακάτω δύο διαδικασίες:

1. Την παραχώρηση μετοχών ως «δάνειο» (stock lending – Repo). Ένας επενδυτής που δε σκοπεύει να ρευστοποιήσει τις μετοχές του άμεσα μπορεί να τις μεταβιβάσει προσωρινά στο χρηματιστήριο παραγώγων. Ο επενδυτής εισπράττει ένα έσοδο σε μηνιαία βάση χωρίς κίνδυνο. Ο επενδυτής επίσης δικαιούται να λάβει τεχνητό μέρισμα από τις μετοχές του repos, το οποίο του δίνει το χρηματιστήριο παραγώγων.
2. Την απόκτηση μετοχών από «δάνειο» (stock borrowing - Reverse Repo). Ένας επενδυτής μπορεί να δανειστεί μετοχές από το χρηματιστήριο παραγώγων (είναι αυτές που του «δάνεισε» κάποιος επενδυτής μέσω repo) για ένα χρονικό διάστημα έναντι ημερήσιου κόστους (ο δανειζόμενος παρέχει και ένα περιθώριο ασφάλισης).

Το μηνιαίο έσοδο του επενδυτή από το Stock Repo δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων (μπορεί όμως να είναι μόνο θετικό). Για παράδειγμα, ο επενδυτής σε repo δεν λαμβάνει έσοδο αν δεν υπάρχει ζήτηση για συμβόλαια Reverse Repo επί της συγκεκριμένης μετοχής.

1.3.4. *Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)*

Δικαίωμα προαίρεσης καλείται μία συμφωνία (ή ένα συμβόλαιο) μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων (τον αγοραστή και τον πωλητή του δικαιώματος) με τη μεσολάβηση του Χρηματιστηρίου Παραγώγων. Η συμφωνία αυτή δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει (ή να πωλήσει) από τον πωλητή του δικαιώματος (ή στον αγοραστή) ένα συγκεκριμένο αγαθό σε μία προκαθορισμένη τιμή , κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου ή σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον. Ένα δικαίωμα προαίρεσης δύναται να έχει ως υποκείμενο τίτλο μετοχή, χρηματιστηριακό δείκτης ή συνάλλαγμα.

Το δικαίωμα είναι πιο σύνθετο παράγωγο από τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και τα προθεσμιακά συμβόλαια διότι τώρα ο αγοραστής(holder) του δικαιώματος δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του (δηλαδή να αγοράσει ή να πωλήσει) παρά μόνο εάν τον συμφέρει. Αντίθετα ο πωλητής (writer) του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πράξει ό,τι τελικά αποφασίσει ο αγοραστής του δικαιώματος. Το γεγονός αυτό θέτει σε πλεονεκτική θέση τον αγοραστή και για αυτό ο αγοραστής θα πρέπει να καταβάλει ένα αντίτιμο το οποίο καλείται ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος (Option price, option premium) στον πωλητή (ο οποίος ουσιαστικά αναλαμβάνει ρίσκο) για να αποκτήσει το δικαίωμα.

1.4.Τύποι επενδυτών

Στη χρηματιστηριακή αγορά οι επενδυτές ανάλογα με τη στρατιγική την οποία ακολουθούν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις τύπους .

1.4.1. *Hedgers*

Αυτοί οι επενδυτές προσπαθούν να προστατεύσουν μία θέση τους στην αγορά χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη θέση στην αγορά των παραγώγων με στόχο την αντιστάθμιση κινδύνου (Hedging). Με άλλα λόγια, έχουν ως σκοπό την μείωση του κινδύνου που ενδεχομένως αντιμετωπίζουν. Ένα παράδειγμα είναι το ακόλουθο. Μια εταιρία με έδρα την Ελλάδα έχει την υποχρέωση να καταβάλλει σε τρεις μήνες 1.000.000 δολλάρια στους προμηθευτές της. Η τρέχουσα ισοτιμία ευρώ – δολαρίου είναι 1 δολλάριο = 0.869 ευρώ. Επομένως η εταιρία θα πρέπει σε τρεις μήνες να πληρώσει 869.000 ευρώ (σε αυτό το παράδειγμα δεν συνυπολογίζουμε την χρονική αξία του χρήματος). Ο κίνδυνος εδώ προέρχεται από την ισοτιμία δολλαρίου – ευρώ που μπορεί σε τρεις μήνες να έχει αλλάξει εις βάρος της εταιρίας (δηλ. το 0.869 να αυξηθεί). Η εταιρία μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει με ένα Προθεσμιακό Συμβόλαιο. Με το συμβόλαιο αυτό συμφωνεί να αγοράσει σε τρεις μήνες 1.000.000 δολλάρια προς 869000 ευρώ. Με τον τρόπο αυτό σταθεροποιεί («κλειδώνει») το ποσό που θα κληθεί να πληρώσει σε τρεις μήνες (τελικά μπορεί να κερδίσει ή να χάσει ανάλογα με την τελική ισοτιμία). Εναλλακτικά, θα μπορούσε να είχε αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς επί συναλλάγματος (συγκεκριμένα δολλαρίου) το οποίο θα έδινε το δικαίωμα στην εταιρία να αγοράσει δολλάρια μετά από τρεις μήνες στην τιμή 0.869 (ή π.χ. 0.870) ευρώ το ένα. Αν το δολλάριο ανέβει τότε μπορεί ακόμη να αγοράσει στην ίδια τιμή, 0.869, ενώ αν πέσει θα το αγοράσει φθηνότερο από την αγορά (ακόμη καλύτερα). Αντίθετα όμως από το προθεσμιακό συμβόλαιο, στην περίπτωση του δικαιώματος η εταιρία θα πρέπει να καταβάλλει και ασφάλιστρο[8-9].

1.4.2. Speculators *(κερδοσκόποι)*

Ενώ οι Hedgers προσπαθούν να μειώσουν τον κίνδυνο που διαχειρίζονται (π.χ. με το να μειώσουν την μέγιστη ζημιά που μπορούν να έχουν), οι κερδοσκόποι αναλαμβάνουν ρίσκα τα οποία ευελπιστούν ότι θα τους οδηγήσουν σε κέρδη. Ουσιαστικά δηλαδή, κάνουν κινήσεις που αυξάνουν τη διασπορά του τυχαίου κέρδους τους. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι «στοιχηματίζουν» στην άνοδο ή στην πτώση ή στην στασιμότητα της τιμής μιας μετοχής. Για παράδειγμα, αν ένας κερδοσκόπος πιστεύει ότι η τιμή του δολλαρίου ως προς το ευρώ θα ανέβει τότε μπορεί να αγοράσει ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης με βάση το οποίο θα αγοράσει σε τρεις μήνες 1.000.000 δολλάρια προς 0.87 ευρώ το ένα. Αν η τιμή του δολλαρίου όντως ανέβει πάνω από τα 0.87 ευρώ τότε ο επενδυτής αυτός θα έχει κέρδος ενώ αντίθετα αν κατέβει θα έχει ζημιά. Η διαφορά με το να αγοράσει τα δολλάρια σήμερα στην τρέχουσα ισοτιμία είναι ότι σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να πληρώσει τώρα ενώ με το ΣΜΕ θα κληθεί να πληρώσει σε τρεις μήνες, ουσιαστικά μόνο αν έχει ζημία[9].

1.4.3. Arbitrageurs

Οι συγκεκριμένοι συναλλασσόμενοι δεν προσδοκούν κέρδος αναλαμβάνοντας ρίσκο όπως οι κερδοσκόποι (και με αυτή την έννοια οι κερδοσκόποι μπορούν να θεωρηθούν ως «δίκαιοι παίκτες» της αγοράς), αλλά προσπαθούν να εντοπίσουν πρόσκαιρες ανισορροπίες της αγοράς και να τις εκμεταλλευτούν αποκομίζοντας σίγουρο κέρδος, χωρίς ρίσκο (ο όρος arbitrage μεταφράζεται και ως εξισορροποιητική κερδοσκοπία). Ένας arbitrageur μπορεί, εκμεταλλευόμενος κάποιες συγκυρίες και ακολουθώντας μια συγκεκριμένη στρατηγική αγοράς μετοχών, ομολόγων και παραγώγων να έχει σίγουρο κέρδος. Ένα απλό παράδειγμα είναι το εξής: έστω ότι η μετοχή ΑΑΑ διατίθεται ταυτόχρονα σε δύο αγορές, στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και στο χρηματιστήριο του Λονδίνου με τιμή 168 δολλάρια και 100 λίρες Αγγλίας αντίστοιχα, ενώ η τρέχουσα ισοτιμία Δολαρίου - Λίρας είναι 1 λίρα = 1.7 δολάριο. Ένας arbitrageur μπορεί να αγοράσει 1.000 μετοχές της ΑΑΑ από την Νέα Υόρκη και να τις πωλήσει άμεσα στο Λονδίνο. Το κέρδος που θα έχει θα είναι 1.000*(−168 + 100*1.7) = 2.000 δολλάρια χωρίς να συνυπολογίζονται τα έξοδα συναλλαγών. Επομένως θα έχει σίγουρο κέρδος (χωρίς ρίσκο). Η ευκαιρία αυτή σύντομα θα εκλείψει διότι, αντιλαμβανόμενοι το γεγονός, θα σπεύσουν πολλοί να αγοράσουν από την Νέα Υόρκη και να πωλήσουν στο Λονδίνο, αυξάνοντας της αξία της ΑΑΑ στο μεν και μειώνοντάς τη στο δε. Το αποτέλεσμα θα είναι να φτάσει η τιμή της ΑΑΑ σε ένα σημείο ισορροπίας που δεν θα επιτρέπει σίγουρο κέρδος. Επομένως οι ευκαιρίες για arbitrage που τυχόν εμφανίζονται στην αγορά, πολύ γρήγορα εξαφανίζονται[9].

Κλείνοντας, σημειώνεται ότι η αγορά των παραγώγων αναπτύχθηκε για δύο κυρίως λόγους: για την αντιστάθμιση των κινδύνων (hedging) σε χαρτοφυλάκια διαχειριστών (π.χ. ώστε ο κάτοχος ενός χαρτοφυλακίου μετοχών να αντιμετωπίσει μια επικείμενη κρίση) και φυσικά για κερδοσκοπία λόγω της αβεβαιότητας της αγοράς (π.χ. ώστε ένας επενδυτής να εκμεταλλευτεί μία επικείμενη άνοδο της αγοράς). Παράγωγα προϊόντα μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον ιδιώτη επενδυτή αλλά κυρίως χρησιμοποιούνται από τράπεζες, αμοιβαία κεφάλαια, διαχειριστές μεγάλων ιδιωτικών κεφαλαίων, ασφαλιστικά ταμεία και εταιρίες, δημόσιες εταιρίες, επενδυτικές εταιρίες, ιδιωτικές επιχειρήσεις, κ.ά. που αποσκοπούν περισσότερο στην αντιστάθμιση των κινδύνων στα χαρτοφυλάκια τους και λιγότερο στην κερδοσκοπία.

2. ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΕΠΙ ΜΕΤΟΧΩΝ

2.1.Ορισμός

Τα δικαιώματα προαίρεσης επί μετοχών είναι συμβόλαια τα οποία έχουν ως υποκείμενο τίτλο μετοχές και δίνουν το δικαίωμα στον κάτοχό του συμβολαίου να αγοράσει ή να πουλήσει μετοχές στην τιμή άσκησης που συμφωνήθηκε. Το μέγεθος του συμβολαίου είναι συνήθως 100 μετοχές και ο μεγαλύτερος όγκος συναλλαγών δικαιωμάτων σε μετοχές λαμβάνει χώρα σε χρηματιστηριακές αγορές[24].

2.2.Βασικές θέσεις στην αγορά δικαιωμάτων

Υπάρχουν τέσσερις βασικές θέσεις στην αγορά δικαιωμάτων και είναι οι εξής:

- ✓ long call, όπου κάποιος αγοράζει το δικαίωμα να αγοράσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον και σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής.[9]

- ✓ short call, όπου κάποιος πωλεί το δικαίωμα αγοράς. Σε αυτή τη θέση ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να πωλήσει μια προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον και σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής.[9]

- ✓ long put, όπου κάποιος αγοράζει το δικαίωμα να πωλήσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον και σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής.[9]

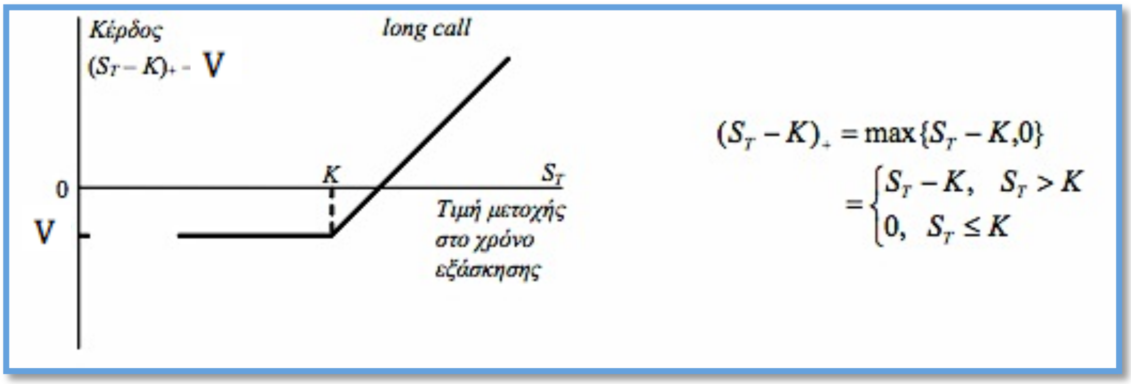
- ✓ short put, όπου κάποιος πουλάει το δικαίωμα να πωλήσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον και σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής.[9]

Αλλά ας δούμε τα παραπάνω μέσα από ένα παραδείγμα. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει στην αγορά μια μετοχή ΑΑΑ η οποία στις 10 Ιανουαρίου έχει χρηματιστηριακή αξία 97 ευρώ. Επίσης διατίθενται στην αγορά παραγώγων διάφορα δικαιώματα αγοράς και πώλησης επί της μετοχής αυτής (ας υποθέσουμε ότι τα δικαιώματα της συγκεκριμένης αγοράς είναι Ευρωπαϊκού τύπου). Έστω ότι υπάρχουν δικαιώματα αγοράς και δικαιώματα πώλησης (επί 50 μετοχών ΑΑΑ) με ημερομηνία λήξης τον Φεβρουάριο, τον Μάρτιο, τον Απρίλιο και τον Μάιο, ενώ για κάθε ημερομηνία λήξης υπάρχουν δικαιώματα με strike price K = 80, 90, 100, 110, 120 ευρώ, δηλαδή 4×5 = 20 διαφορετικά είδη (20 option series, το σύνολο τους καλείται και option class). Το αντίτιμο V διαμορφώνεται από την προσφορά και τη ζήτηση του κάθε δικαιώματος και προφανώς θα είναι διαφορετικό σε κάθε είδος δικαιώματος (option series). Ας δούμε ως παράδειγμα την στρατηγική που ακολουθούν γύρω από τη μετοχή ΑΑΑ και με βάση αυτά που πιστεύουν τέσσερις τύποι επενδυτών Α, Β, Γ και Δ.

Ο επενδυτής Α (Αγορά Δικαιώματος Αγοράς - Long call). Ο επενδυτής Α προβλέπει ανοδική τάση στην μετοχή ΑΑΑ τους επόμενους μήνες. Παρότι προσδοκά άνοδο, δεν επιθυμεί να ρισκάρει την αγορά μετοχών και εναλλακτικά αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής αυτής. Έτσι τελικά, ο επενδυτής αυτός αγοράζει (γίνεται holder, λαμβάνει long position) στις 10 Ιανουαρίου ένα δικαίωμα αγοράς (call option) λήξης Μαρτίου επί της μετοχής ΑΑΑ με τιμή άσκησης (strike price) K = 100 ευρώ καταβάλλοντας αντίτιμο V. Ο συγκεκριμένος επενδυτής μπορεί τώρα, αν τον συμφέρει, να αγοράσει την μετοχή ΑΑΑ (δηλ. 50 μετοχές ΑΑΑ αφού το μέγεθος του συμβολαίου είναι 50) τον μήνα Μάρτιο (από τον πωλητή του δικαιώματος) στην τιμή 100 ευρώ ανά μετοχή.

Αν τώρα η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος ανέβει στα 120 ευρώ τότε ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προφανώς θα εξασκήσει το δικαίωμα του και θα αγοράσει στην τιμή 100. Ο αγοραστής θα έχει κέρδος 120 – 100 ευρώ ανά μετοχή (μείον το ασφάλιστρο V) διότι θεωρητικά μπορεί να πουλήσει αμέσως τις μετοχές ΑΑΑ που αγόρασε με 100 ευρώ στην τιμή των 120 ευρώ. Αντίθετα, αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος είναι 80 ευρώ τότε ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προφανώς δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα (αν θέλει μπορεί να αγοράσει φθηνότερα από την αγορά). Σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής δεν θα έχει κανένα κέρδος (αντίθετα έχει ζημία V από το αντίτιμο).

Γενικά, αν συμβολίσουμε με S την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ στο χρόνο εξάσκησης T τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (call option) για τον αγοραστή (long position) θα είναι $(S_T - K) - V$. Έτσι ο επενδυτής Α (ο holder), αν τελικά αυξηθεί η τιμή της μετοχής όπως προσδοκά, θα κερδίσει χωρίς να ρισκάρει να χάσει αν η τιμή της μετοχής πέσει (πράγμα που θα γίνονταν αν αντί του δικαιώματος αγόραζε τις πραγματικές μετοχές ΑΑΑ). Δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ότι εξασφαλίζεται από τον κίνδυνο πτώσης της τιμής της μετοχής ΑΑΑ και γι' αυτό καταβάλλει το ασφάλιστρο V.

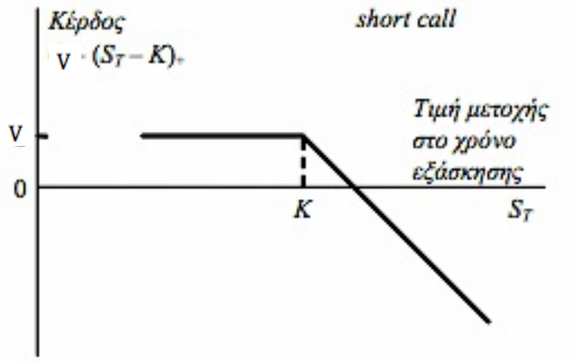


Εικόνα 1. Διαγραμματική απεικόνιση της στρατηγικής του επενδυτή Α

Ο επενδυτής Β (Πώληση Δικαιώματος Αγοράς - Short Call). Ο επενδυτής Β που είναι κάτοχος ενός αριθμού μετοχών της εταιρίας ΑΑΑ προβλέπει στάσιμη ή ελαφρά καθοδική τάση στην μετοχή αυτή. Προκειμένου λοιπόν να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του σε περίοδο στασιμότητας πωλεί ένα δικαίωμα αγοράς λήξης Μαρτίου επί της μετοχής ΑΑΑ με τιμή άσκησης (strike price) K = 100 ευρώ εισπράττοντας το αντίτιμο V.

Αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος παραμείνει στάσιμη (κάτω από τα 100 ευρώ) τότε ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του (δεν τον συμφέρει) και επομένως ο πωλητής θα έχει κερδίσει το αντίτιμο V. Στην αντίθετη περίπτωση που η τιμή της μετοχής ΑΑΑ αυξηθεί πάνω από 100 ευρώ, (π.χ. 120 ευρώ) τότε ο αγοραστής του δικαιώματος θα εξασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής θα υποχρεωθεί να πουλήσει στην τιμή των 100 ευρώ χάνοντας 120–100 ευρώ (αφού θα μπορούσε να είχε πουλήσει στην αγορά στην τιμή των 120 αντί 100 που υποχρεώνεται τώρα).

Στην περίπτωση αυτή το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (call option) για τον πωλητή (short position) θα είναι V – (S_T – K). Έτσι ο επενδυτής Β (ο πωλητής, writer), αν τελικά μείνει στάσιμη η τιμή της μετοχής όπως προσδοκά, θα κερδίσει από το αντίτιμο που θα εισπράξει. Με αυτή όμως την στρατηγική αυξάνει το ρίσκο που έχει λάβει, ιδιαίτερα αν δεν κατέχει τις μετοχές ΑΑΑ αλλά περιμένει να τις αγοράσει την ημέρα της εξάσκησης για να τις δώσει στον αγοραστή του δικαιώματος.



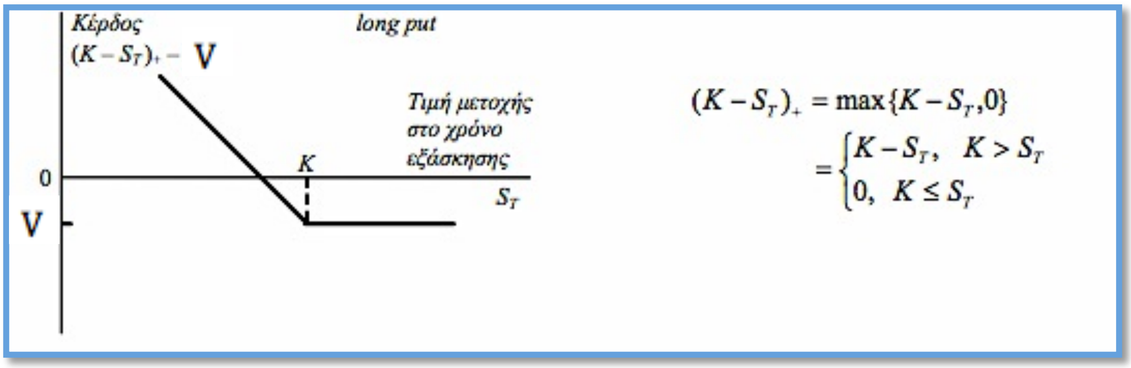
$$-(S_T - K)_+ = -\max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} K - S_T, & S_T > K \\ 0, & S_T \le K \end{cases}$$

Εικόνα 2. Διαγραμματική απεικόνιση της στρατηγικής του επενδυτή Β

Ο επενδυτής Γ (Αγορά Δικαιώματος Πώλησης - Long Put). Ο επενδυτής Γ κατέχει έναν αριθμό μετοχών της ΑΑΑ και προβλέπει καθοδική τάση στην μετοχή ΑΑΑ τους επόμενους μήνες. Δεν επιθυμεί όμως να πωλήσει ακόμη τις μετοχές και εναλλακτικά αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης λήξης Μαρτίου επί της μετοχής ΑΑΑ με τιμή άσκησης (strike price) K = 100 ευρώ καταβάλλοντας αντίτιμο V. Ο συγκεκριμένος επενδυτής μπορεί τώρα, *αν τον συμφέρει*, να πωλήσει την μετοχή ΑΑΑ (50 τεμ.) τον μήνα Μάρτιο στην τιμή 100 ανά μετοχή.

Αν η τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημερομηνία της λήξης γίνει 80 ευρώ τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης θα εξασκήσει το δικαίωμα του και θα πωλήσει (στον πωλητή του δικαιώματος) στην τιμή 100. Ο αγοραστής θα έχει κέρδος 100 – 80 ευρώ ανά μετοχή (μείον το αντίτιμο) διότι θεωρητικά μπορεί να αγοράσει αμέσως τις μετοχές ΑΑΑ που πώλησε στην τιμή των 100 ευρώ καταβάλλοντας μόνο 80 ευρώ (διατηρεί δηλαδή το ίδιο χαρτοφυλάκιο και έχει και το κέρδος από τη διαφορά 100 – 80). Αντίθετα, αν η τιμή της μετοχής ΑΑΑ γίνει 120 ευρώ τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης προφανώς δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα (μπορεί να πωλήσει τις μετοχές στην αγορά υψηλότερα από Κ). Σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής δεν θα έχει κανένα κέρδος από το δικαίωμα (αντίθετα έχει ζημία από το αντίτιμο).

Στην περίπτωση αυτή το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (put option) για τον αγοραστή (long position) θα είναι $(K - S_T) - V$. Έτσι ο επενδυτής Γ (ο holder) μπορεί να θεωρηθεί ότι εξασφαλίζει μια ελάχιστη τιμή στην οποία μπορεί να πωλήσει την μετοχή ΑΑΑ (μειώνει τον κίνδυνο που διαχειρίζεται και για αυτό καταβάλλει αντίτιμο V).

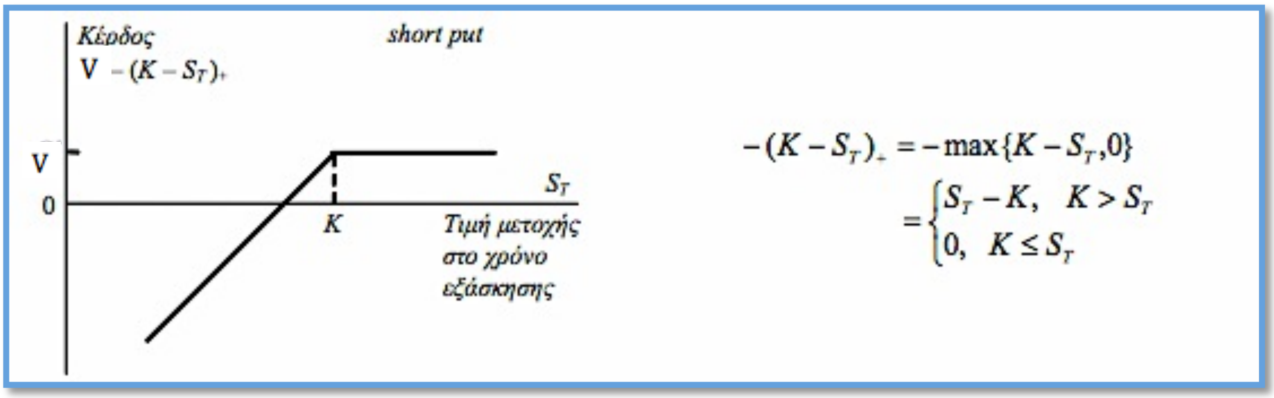


Εικόνα 3. Διαγραμματική απεικόνιση της στρατηγικής του επενδυτή Γ

Ο επενδυτής Δ (Πώληση Δικαιώματος πώλησης - Short put). Ο επενδυτής Δ προβλέπει στάσιμη ή ελαφρά ανοδική τάση στην μετοχή αυτή. Πωλεί λοιπόν ένα δικαίωμα πώλησης λήξης Μαρτίου επί της μετοχής ΑΑΑ με τιμή άσκησης (strike price) K = 100 ευρώ εισπράττοντας το ασφάλιστρο V.

Αν η τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημέρα της λήξης του δικαιώματος είναι ελαφρά ανοδική ή παραμείνει στάσιμη (πάνω από τα 100 ευρώ) τότε ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του και επομένως ο πωλητής θα έχει κερδίσει το ασφάλιστρο V. Στην αντίθετη περίπτωση που η τιμή της μετοχής

ΑΑΑ πέσει κάτω από 100 ευρώ, (π.χ. 80 ευρώ) τότε ο αγοραστής του δικαιώματος θα εξασκήσει το δικαίωμά του και ο Δ θα υποχρεωθεί να αγοράσει στην τιμή των 100 ευρώ χάνοντας 100 – 80 ευρώ ανά μετοχή (αφού στην αγορά θα τις έβρισκε τις μετοχές στα 80 ευρώ). Γενικά το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (put option) για τον πωλητή (short position) θα είναι V – (K – S_T). Έτσι ο επενδυτής Δ (ο πωλητής, writer), αν τελικά μείνει περίπου στάσιμη η τιμή της μετοχής όπως προσδοκά, θα κερδίσει από το ασφάλιστρο που θα εισπράξει. Όπως όμως και ο επενδυτής Β, ο επενδυτής Δ αναλαμβάνει μεγάλο ρίσκο με αυτή την κίνηση.



Εικόνα 4. Διαγραμματική απεικόνιση της στρατηγικής του επενδυτή Δ

2.3.Χαρακτηριστικά δικαιωμάτων προαίρεσης

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα δικαίωμα προαίρεσης χαρακτηρίζεται από τα εξής:

1. Το είδος του δικαιώματος (δικαίωμα αγοράς – call option ή δικαίωμα πώλησης – put option). Στην αγορά μπορεί κανείς να αγοράσει ένα call option (long call) ή να πουλήσει ένα call option (short call) ή να αγοράσει ένα put option (long put) ή να πουλήσει ένα put option (short put).
2. Ο υποκείμενος τίτλος (π.χ. δείκτης FTSE/ASE-20 , μετοχή ΟΤΕ κ.λπ.)
3. Το μέγεθος του συμβολαίου (π.χ. ένα συμβόλαιο με υποκείμενο τίτλο τη μετοχή του ΟΤΕ, μπορεί να αντιστοιχεί σε 100 μετοχές του ΟΤΕ).
4. Η ημερομηνία λήξης (exercise date, maturity). Ανάλογα με το χρόνο εξάσκησης Τ υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης:

- *Ευρωπαϊκού τύπου* (*European option*) όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης.
- *Αμερικανικού τύπου* (*American option*) όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης. Τα American Options διαπραγματεύονται σε σχετικά υψηλότερη τιμή (ή οριακά ίση τιμή) από τα αντίστοιχα European, καθώς δίνουν το επιπλέον πλεονέκτημα της πρόωρης εξάσκησης.

5. Η τιμή εξάσκησης K (strike price ή exercise price) η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς/πώλησης θα αγοράσει/πωλήσει (εάν επιλέξει να εξασκήσει το δικαίωμα) το συγκεκριμένο αγαθό (π.χ. μετοχή) στο οποίο αναφέρεται το δικαίωμα.

6. Το αντίτιμο V (option premium) το οποίο καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του δικαιώματος. Είναι η χρηματική αξία που πρέπει να πληρώσει ο αγοραστής του δικαιώματος προαίρεσης στον πωλητή προκειμένου να αποκτήσει το δικαίωμα να αγοράσει η να πουλήσει το υποκείμενο προιόν σε συγκεκριμένη τιμή. Η πληρωμή στον πωλητή του δικαιώματος προαίρεσης γίνεται αναξαρτήτως αν το δικαίωμα εξασκηθεί η όχι, κατά συνέπεια αυτό είναι και το μέγιστο κέρδος που μπορεί να επιτύχει ο πωλητής του δικαιώματος. Δηλαδή οι αγοραστές των δικαιωμάτων πληρώνουν την χρηματική αξία του δικαιώματος (premium) προκειμένου να αποκτήσουν το δικαίωμα για την εξάσκηση ενώ οι πωλητές λαμβάνουν αυτό το ποσό σαν αμοιβή για την παραχώρηση αυτού του δικαιώματος. Η τιμή του δικαιώματος καθορίζεται από την προσφορά και την ζήτηση στην αγορά την οποία διαπραγματεύεται.

2.4.Παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης σε μετοχές

Υπάρχουν έξι διαφορετικοί παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης σε μετοχές (stock options):

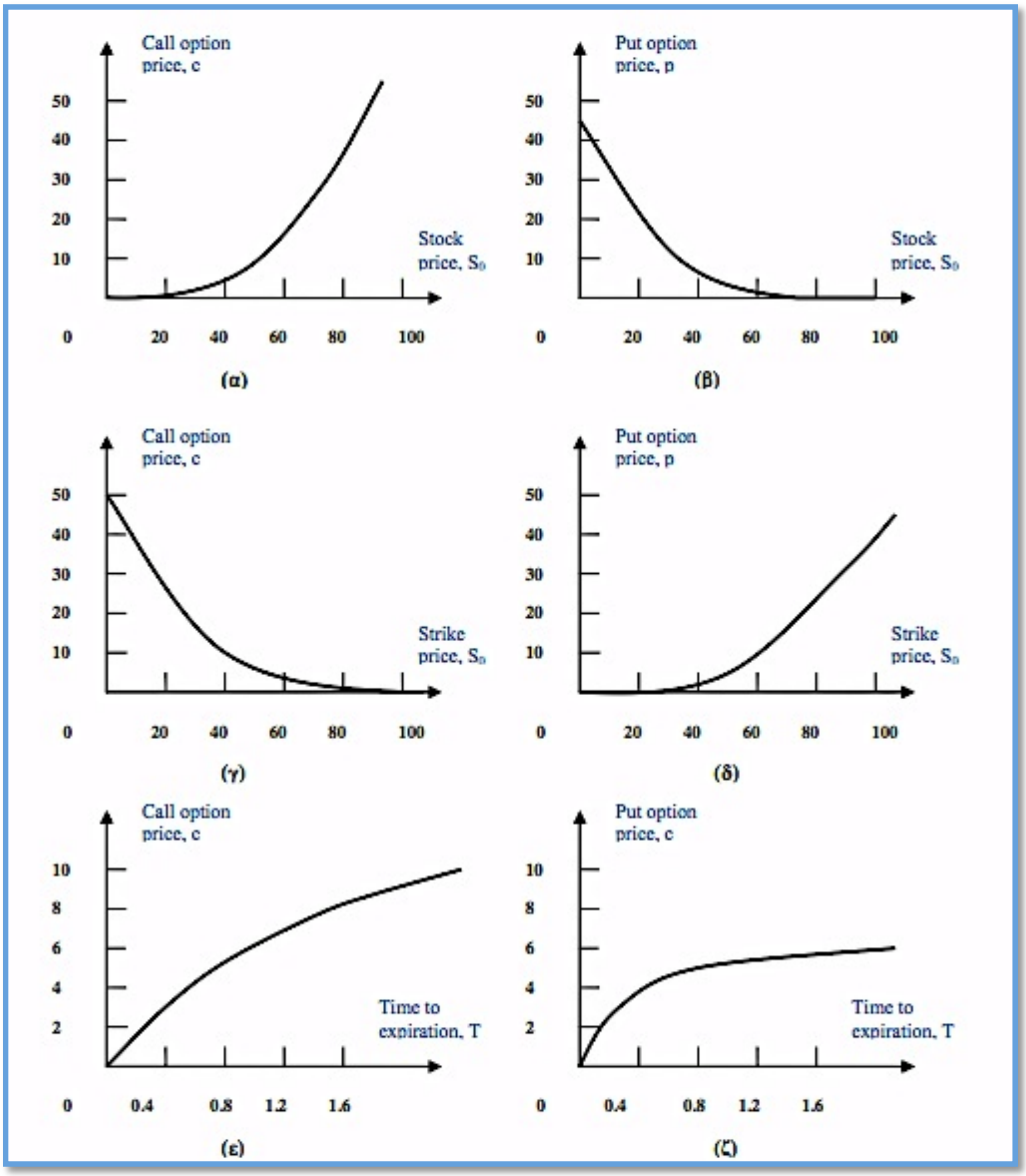
1. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής (stock price), S_0

Το κέρδος που θα αποφέρει ένα δικαίωμα αγοράς έγκειται στην διαφορά της τρέχουσας τιμής της μετοχής και της συμφωνημένης τιμής άσκησης. Έτσι, λοιπόν, ένα δικαίωμα αγοράς αποκτά μεγαλύτερη χρηματική αξία όσο η τιμή της μετοχής αυξάνεται. Τα δικαιώματα πώλησης λειτουργούν εντελώς αντίθετα καθώς όσο αυξάνεται η τρέχουσα τιμή της μετοχής τόσο το κέρδος του κατόχου του δικαιώματος πώλησης περιορίζεται μόνο στο τίμημα V.

2. Η τιμή άσκησης (strike price), K

Όσον αφορά στη τιμή άσκησης ενός δικαιώματος αγοράς ισχύει ότι όσο αυτή μειώνεται τόσο μειώνεται η χρηματική αξία του. Αντίθετα, ένα δικαίωμα πώλησης αποκτά μεγαλύτερη χρηματική αξία όσο η τιμή άσκησης αυξάνεται.

Στη παρακάτω εικόνα παρατίθεται διαγραμματικά η εξάρτηση των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης τόσο από την τιμή της μετοχής όσο και από την τιμή άσκησης του συμβολαίου.



Εικόνα 5.Απεικόνιση της εξάρτησης των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης από την τιμή της μετοχής, την τιμή άσκησης του συμβολαίου και το χρόνο λήξης τους

3. Η χρονική περίοδος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, Τ

Τόσο τα δικαιώματα αγοράς όσο και τα δικαιώματα πώλησης Αμερικανικού τύπου αποκτούν μεγαλύτερη αξία όσο ο χρόνος για την λήξη αυξάνεται . Αυτό συμβαίνει καθώς όσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος μέχρι την λήξη του συμβολαίου τόσες περισσότερες ευκαιρίες έχει ο κάτοχος του να το ασκήσει . Αυτό ισχύει στα δικαιώματα Αμερικάνικου τύπου των οποίων ο κάτοχος μπορεί να ασκήσει το δικαίωμά του σε περισσότερες από μια χρονικές στιγμές. Για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα συνήθως ισχύει η ίδια συμπεριφορά καθώς ο χρόνος μέχρι τη λήξη του αυξάνεται.

4. Η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, σ

Η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής αποτελεί ένα μέτρο το οποίο επιτρέπει να εκτιμηθεί η αβεβαιότητα στην κίνηση της τιμής της μετοχής μελλοντικά. Ως εκ τούτου καθώς η μεταβλητότητα αυξάνεται η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να κινηθεί σε πολύ υψηλά ή σε πολύ χαμηλά επίπεδα αυξάνει . Για τον κάτοχο της μετοχής οι δύο αυτές πιθανότητες απαλείφονται μεταξύ τους , ωστόσο δεν ισχύει το ίδιο και για τον κάτοχο κάποιου δικαιώματος. Πιο συγκριμένα ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς (call option) επωφελείται αρκετά από επικείμενη άνοδο της τιμής της μετοχής ενώ έχει περιορισμένες απώλειες σε περίπτωση επικείμενης πτώσης της. Αντίστροφα, ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης (put option) θα αποκομίσει μεγάλα κέρδη από επικείμενη πτώση της τιμής της μετοχής και περιορισμένη απώλεια σε επικείμενη άνοδο της [3] .Έτσι, λοιπόν, η αξία τόσο των δικαιωμάτων αγοράς όσο και των δικαιωμάτων πώλησης αυξάνονται καθώς αυξάνεται η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής.

5. Το επιτόκιο με μηδενικό ρίσκο (risk-free interest rate), r

Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο επηρεάζει την αξία των δικαιωμάτων με ένα λιγότερο ξεκάθαρο τρόπο. Όσο τα επιτόκια στην οικονομία αυξάνονται τόσο το αναμενόμενο κέρδος από την τάση των μετοχών για τους επενδυτές μειώνεται. Παράλληλα κάθε παρούσα αξία οποιαδήποτε χρηματικής ροής λαμβάνουν μειώνεται επίσης. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω είναι καθώς τα επιτόκια αυξάνονται η αξία των δικαιωμάτων αγοράς αυξάνεται ενώ η αξία των δικαιωμάτων πώλησης μειώνεται.

6. Τα μερίσματα επί της μετοχής κατά τη διάρκεια ισχύος του δικαιώματος

Η αποκοπή μερίσματος τείνει να ρίχνει σε χαμηλότερα επίπεδα την τιμή της μετοχής με αποτέλεσμα να επηρεάζεται θετικά η αξία των δικαιωμάτων αγοράς και αρνητικά η αξία των δικαιωμάτων πώλησης .

2.5.Καθαρή Αξία Δικαιωμάτων (moneyness)

Τα δικαιώματα προαίρεσης λαμβάνουν έναν χαρακτηρισμό, κατά το χρονικό διάστημα μέχρι την εκπνοή τους, σχετικό με τη καθαρή χρηματική τους αξία δηλαδή τη σχέση τους με το χρηματικό τους ισοδύναμο. Οι χαρακτηρισμοί που μπορούν να λάβουν είναι τρεις και είναι οι ακόλουθοι:

- In-the-money (εντός του χρηματικού ισοδύναμου)
- Out-of-the-money(εκτός του χρηματικού ισοδύναμου)
- At-the-money(επί του χρηματικού ισοδύναμου)

Ο χαρακτηρισμός αυτός προκύπτει από τη διαφορά της τρέχουσας τιμής της μετοχής με τη τιμή άσκησης του δικαιώματος. Με άλλα λόγια το θετικό ή αρνητικό πρόσημο της χρηματορροής που προκύπτει μας δίνει τη δυνατότητα να χαρακτηρίσουμε τη τρέχουσα δυναμική του δικαιώματός μας.

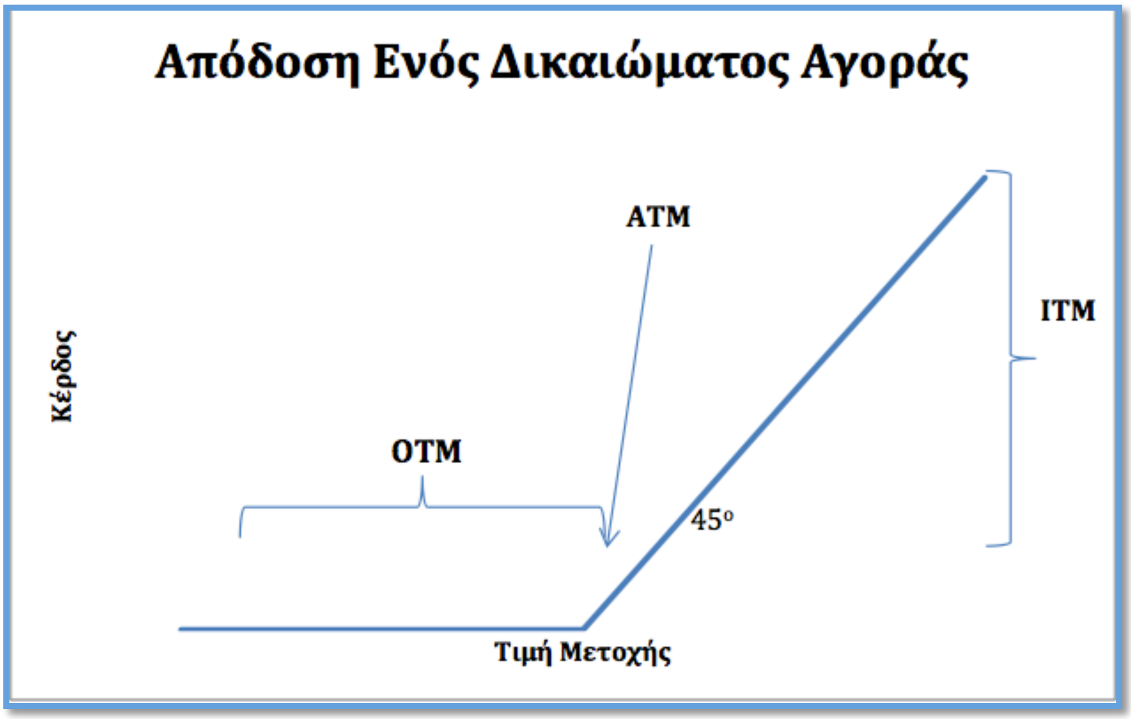
Έτσι, λοιπόν, ένα δικαίωμα αγοράς θεωρείται εντός του χρηματικού του ισοδύναμου (in-the-money), αν η τρέχουσα τιμή μετοχής είναι υψηλότερη από την τιμή άσκησης. Στην αντίθετη περίπτωση, το δικαίωμα αγοράς θεωρείται εκτός του χρηματικού του ισοδύναμου (out-of-the-money). Τέλος, όταν οι δύο τιμές είναι σχεδόν ίσες το δικαίωμα θεωρείται είτε επί είτε κοντά στο χρηματικό του ισοδύναμο (at-the-money).

Αντίθετα, ένα δικαίωμα πώλησης, θεωρείται in the money όταν η τιμή μετοχής είναι χαμηλότερη από την τιμή άσκησης, και out of the money στην αντίθετη περίπτωση. Η περίπτωση που θεωρείται at the money συμπίπτει για τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης.

Η σχέση της τιμής της υποκείμενης μετοχής με την τιμή άσκησης και των δύο τύπων δικαιωμάτων προαίρεσης, συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 1. Σχέση τιμής μετοχής με τιμή άσκησης.

Καθαρή Χρηματική Αξία	**Δικαίωμα Αγοράς**	**Δικαίωμα Πώλησης**
In-the-money	S>K	S<K
Out-of-the-money	S<K	S>K
At-the-money	S=K	S=K



Εικόνα 6. Διαγραμματική απεικόνιση της απόδοσης ενός δικαιώματος αγοράς

Τονίζεται, ότι η κλίση της ευθείας που ξεκινάει από την τιμή άσκησης είναι 45° καθώς το κέρδος από την άσκηση ενός δικαιώματος αγοράς που είναι εντός του χρηματικού του ισοδύναμου, είναι ίσο με τη διαφορά της τιμής άσκησης από την τρέχουσα τιμή της μετοχής.

Η τιμή ενός δικαιώματος το οποίο βρίσκεται εκτός του χρηματικού του ισοδύναμου ουσιαστικά αντικατοπτρίζει τη χρονική αξία που απομένει στο δικαίωμα και εμμέσως την πιθανότητα το δικαίωμα αυτό να βρεθεί την ημέρα εκπνοής του εντός του χρηματικού του ισοδύναμου.

Η αξία ενός δικαιώματος αγοράς μια δεδομένη χρονική στιγμή πριν την εκπνοή του, για οποιαδήποτε τιμή μετοχής, αποτυπώνεται ως μία καμπύλη, πάνω από την γραμμή απόδοσης του δικαιώματος αγοράς κατά την εκπνοή του, η οποία τείνει να την πλησιάσει όσο μειώνεται ο χρόνος που απομένει στο συμβόλαιο μέχρι την ημερομηνία εκπνοής του.[20]

3. Η εξίσωση Black-Scholes

3.1.Εισαγωγή

Από την πρώτη στιγμή της εισαγωγής των δικαιωμάτων προαίρεσης ως έννοια στη σύγχρονη αγορά, προέκυψε η ανάγκη αποτίμησης της αξίας αυτών. Τις δεκαετίες του 1960, 1970 έγιναν σημαντικές προσπάθειες για να βρεθεί ένας μηχανισμός να τιμολογηθούν τα διάφορα option που αγοράζονταν ή πωλούνταν.

Η εξίσωση Black – Scholes αναπτύχθηκε τα έτη 1970 - 1971 από τους οικονομολόγους Fisher Black και Myron Scholes, και ενώ στην αρχή δέχθηκε έντονη κριτική από τον ακαδημαϊκό κόσμο, εν τέλει εκδόθηκε το 1973, στο "Journal of Political Economy" [4].

Ο Robert Merton, συνέβαλε στην τελική μορφή της εξίσωσης και γι' αυτό το 1997 του απονεμήθηκε μαζί με τον Myron Scholes το βραβείο Νόμπελ για τις οικονομικές επιστήμες. Ο Fisher Black απεβίωσε δύο χρόνια νωρίτερα και παρότι αναφέρθηκε στην απονομή του βραβείου, δεν μπορούσε να θεωρηθεί ένας εκ των αποδεκτών του.

Οι Black και Scholes, κατά την περίφημη πλέον θεωρία που ανέπτυξαν, προσπάθησαν να διατυπώσουν μία εξίσωση που να μπορεί να αποτιμήσει την αξία ενός δικαιώματος. Η βάση στην οποία στηρίχτηκαν δεν είναι άλλη, από την εξέταση της αγοράς υπό το πρίσμα ότι σε αυτή δεν υπάρχουν arbitrage ευκαιρίες.

Το μοντέλο που αναπτύσσεται στο σημείο για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς στηρίζεται στην κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς και ένα αριθμό των μετοχών που υπόκεινται του δικαιώματος, τέτοιο ώστε η αξία του χαρτοφυλακίου να μην εξαρτάται από την τιμή της μετοχής [4].

3.2.Εξαγωγή εξίσωσης

Έστω ότι η τιμή μίας μετοχής ακολουθεί μία γεωμετρική κίνηση Brown, δηλαδή ο φυσικός της λογάριθμος ακολουθεί μία κίνηση Brown (αναλύεται εκτενώς στο κεφάλαιο 4).

Σε αυτή την περίπτωση, η τιμή της μετοχής ακολουθεί την διαφορική, στοχαστική εξίσωση:

$$dS = a \cdot S \cdot dt + \cdot \sigma \cdot S \cdot dW \tag{3.1}$$

όπου:

α → σταθερά που εκφράζει τη τάση(drift)

σ → σταθερά που εκφράζει τη μεταβλητότητα(volatility)

W → μία κατανομή Wiener

S → η τιμής της μετοχής

dS → διαφορική μεταβολή στην τιμή της υποκείμενης μετοχής

dt → διαφορική μεταβολή του χρόνου

Ο μαθηματικός Ito απέδειξε, ότι για μια διεργασία της μορφής

$$\Delta x = b(x,t) \cdot \Delta t + c(x,t) \cdot \Delta z \tag{3.2}$$

υπάρχει συνάρτηση f(t,x), με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια ώστε

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot c^2\right) \cdot \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot c \cdot \Delta z \tag{3.3}$$

Έτσι, στην περίπτωση της μεταβολής της τιμής της μετοχής, συμβολίζοντας με V την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς και θεωρώντας ότι η συνάρτηση V έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο ως προς την τιμή της υποκείμενης μετοχής και πρώτη ως προς το χρόνο, στο διάστημα $D_V = [(S,t): S \geq 0, 0 < t < T]$, εξάγουμε ότι:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) \cdot dt + \frac{\partial V}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot dW \tag{3.4}$$

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο Π, το οποίο αποτελείται από μία θέση πώλησης ενός δικαιώματος αγοράς αξίας V, και θέση αγοράς σε Δ μονάδες της υποκείμενης μετοχής αξίας S.

Μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή t της ζωής του χαρτοφυλακίου, η αξία του υπολογίζεται ως:

$$\Pi = -V + \Delta \cdot S \tag{3.5}$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$d\Pi = -dV + \Delta \cdot dS \tag{3.6}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.1) και (3.4) έχουμε ότι:

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial S} aS + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt - \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW \quad + \Delta(aSdt + \sigma SdW) \tag{3.7}$$

Όπως γίνεται φανερό για αριθμό μετοχών ίσο με $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου γίνεται:

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt \tag{3.8}$$

Η εξίσωση αυτή είναι καθαρά ντετερμινιστική, καθώς έχει απαλειφθεί ο στοχαστικός όρος dW.

η ποσότητα Π αυξάνεται σε χρόνο t σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$\Pi = \Pi_0 \cdot e^{r(t-t_0)} \tag{3.9}$$

Συνεπώς, διαφορίζοντας την εξίσωση αυτή, υπολογίζεται ότι σε απειροστό χρόνο η μεταβολή της ποσότητας Π είναι:

$$d\Pi = r \cdot \Pi \cdot dt \tag{3.10}$$

Λόγω της εξίσωσης (3.5) προκύπτει

$$d\Pi = r \cdot (-V + \Delta \cdot S) \cdot dt \tag{3.11}$$

και αντικαθιστώντας $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ έχουμε ότι

$$d\Pi = r \cdot \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S\right) \cdot dt \tag{3.12}$$

Θεωρώντας ως δεδομένο ότι η αγορά λειτουργεί εύρυθμα, συνεπάγεται ότι σε αυτή δεν εμφανίζονται ευκαιρίες arbitrage κερδών. Για δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου, όπου δεν υπάρχει η δυνατότητα πρόωρης άσκησης, η θεωρία μη ύπαρξης ευκαιριών arbitrage υπαγορεύει την ισότητα μεταξύ της ποσότητας που αποκομίζεται από την επένδυση χωρίς κίνδυνο και αυτής που προκύπτει από την επένδυση στο χαρτοφυλάκιο Π. Εξισώνοντας την (3.8) και την (3.12) μετά από αλγεβρικές πράξεις προκύπτει η ακόλουθη η οποία ισχύει στο διάστημα $D_v = [(S,t): S \geq 0{,}0 < t < T]$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \cdot S \frac{\partial V}{\partial S} - r \cdot V = 0 \tag{3.13}$$

3.3.Παραδοχές εξίσωσης

Η ανάπτυξη της εξίσωσης Black-Scholes, στηρίχτηκε σε ορισμένες παραδοχές οι οποίες αναφέρονται συγκεντρωτικά εδώ:

1. Το δικαίωμα αγοράς πωλείται σε μία αγορά που λειτουργεί εύρυθμα και στην οποία εκλείπουν δυνατότητες επενδύσεων που εκμεταλλεύονται ευκαιρίες arbitrage(*Σημείωση 2*) και οδηγούν σε κέρδη δίχως κίνδυνο.

2. Ο επενδυτής δεν χρειάζεται να πληρώσει κόστη συναλλαγής για τις αγορές – πωλήσεις του, αλλά και για να ακολουθήσει την τακτική αντιστάθμισης ρίσκου.

3. Οι συναλλαγές είναι συνεχείς και η μετοχή δεν αποκόπτει μερίσματα κατά την περίοδο που εξετάζεται. (*Σημείωση 3*)

4. Οποιοσδήποτε επενδυτής μπορεί να δανείσει αλλά και να δανειστεί οποιοδήποτε κεφάλαιο με επιτόκιο αποπληρωμής στο ύψος του επιτοκίου χωρίς ρίσκο, το οποίο παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

5. Η μετοχή ακολουθεί μία γεωμετρική κίνηση Brown, δηλαδή μία

στοχαστική διαδικασία. Αυτό συνεπάγεται μία λογαριθμική κατανομή της τιμής της μετοχής με σταθερό αναμενόμενο λόγο επιστροφής μ και απόκλιση σ.

Η εξίσωση στην οποία καταλήγουμε για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι τόσο ευσταθής, όσο και οι υποθέσεις που γίνονται. Στην πραγματικότητα, ορισμένες από αυτές τις υποθέσεις, όπως η διατήρηση σταθερής τιμής μεταβλητότητας σ, αλλά και επιτοκίου χωρίς κίνδυνο r κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος διαψεύδονται. Αυτό φυσικά έχει ως αποτέλεσμα, οι τιμές που προκύπτουν από την εξίσωση αυτή να διαφέρουν από τις τιμές που ανταλλάσσονται τα δικαιώματα στα διάφορα χρηματιστήρια ανά τον κόσμο.

Να τονιστεί ότι μελετώνται οι ακραίες τιμές που μπορεί να λάβει η τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης, σε μία οικονομία που λειτουργεί εύρυθμα. Ακόμα και στην πραγματικότητα, τα όρια που θα διατυπωθούν δεν παραβιάζονται, τουλάχιστον όχι συστηματικά.

Σημείωση 1:

Κατά την ανάπτυξη του μοντέλου τιμολόγησης δικαιώματος αγοράς που αναπτύχθηκε από τους Black και Scholes, συμβολίζεται ως r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι ένα θεωρητικό επιτόκιο που αντικατοπτρίζει την προβλεπόμενη απόδοση μίας επένδυσης που δεν έχει καθόλου ρίσκο. Ουσιαστικά, πρόκειται για την απόδοση που αναμένει ένας επενδυτής να έχει το κεφάλαιο του, αν αυτός δεν λάβει κανένα ρίσκο.

Το ύψος του επιτοκίου αυτού υπολογίζεται θεωρητικά, με βάση τις τιμές επιτοκίων που ανακοινώνονται. Για παράδειγμα για την Αμερική, πηγή για δεδομένα σχετικά με το ύψος του επιτοκίου είναι το Υπουργείο Οικονομικών (U.S. Treasury).

Η τιμή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο δεν είναι σταθερή, και εξαρτάται από τις συνθήκες που επικρατούν στην αγορά. Για παράδειγμα, σε περιόδους κρίσεις, όπως η πρόσφατη παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση του 2008, το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο μειώνεται σημαντικά, ενώ σε περιόδους ανάπτυξης αυξάνεται. Ενδεικτικά, αναφέρεται, ότι το 2008 το επιτόκιο είχε τιμές της τάξης του 0.20%, ενώ προηγούμενα χρόνια είχε φτάσει μέχρι και το 5%.

Η πραγματική σημασία του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο για την οικονομία, είναι η υπόθεση ότι όλοι οι επενδυτές έχουν πρόσβαση σε οποιοδήποτε χρηματικό ποσό, και το δανείζονται επιβαρυνόμενοι κατά το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Αντίστοιχα, θεωρείται ότι όλοι οι επενδυτές δύνανται να δανείσουν κεφάλαια και να επωφεληθούν κατά το ύψος που καθορίζει το επιτόκιο.

Σημείωση 2:

Ακόμη θεωρούμε ότι η οικονομία μας λειτουργεί εύρυθμα και δεν εμφανίζονται ευκαιρίες arbitrage.

Σύμφωνα με τον ντετερμινιστικό ορισμό, arbitrage είναι μια επενδυτική ευκαιρία που επιφέρει κέρδος χωρίς ρίσκο. Ουσιαστικά, πρόκειται για ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από λήψη θέσεων σε αντικρουόμενα προϊόντα, και αποδίδει κέρδη σε μία ή περισσότερες από τις περιόδους ζωής τους, ενώ σε όλες τις υπόλοιπες εμφανίζει είτε κέρδη είτε μηδενική ζημία (σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να εμφανίζει ζημία, η οποία μπορεί να μην υπερβαίνει κατά απόλυτη τιμή τα κέρδη που εμφανίζονται σε άλλα διαστήματα).

Επιπλέον, σύμφωνα με το στατιστικό ορισμό του όρου, arbitrage αποκαλείται μία επενδυτική ευκαιρία που αποδίδει, κατά μέσο όρο, κέρδος μεγαλύτερο από το επίπεδο ρίσκου που λαμβάνεται.

Στα οικονομικά συστήματα, αξιωματικά θεωρείται, ότι δεν εμφανίζονται ευκαιρίες arbitrage. Δηλαδή, όλα τα προϊόντα είναι τιμολογημένα έτσι ώστε να μην επιτρέπουν σε έναν επενδυτή να ακολουθεί μία συγκεκριμένη στρατηγική που θα του αποφέρει κέρδος χωρίς να λάβει κάποιο επίπεδο ρίσκου.

Σημείωση 3:

Κόστος Συναλλαγών:

Κατά την ανάπτυξη του μοντέλου, κατασκευάστηκε ένα χαρτοφυλάκιο, η αξία του οποίου δεν εξαρτάται από την τιμή της υποκείμενης μετοχής. Για να διατηρηθεί αυτό σε βάθος χρόνου, μεταβάλλεται ο αριθμός των μετοχών ή των δικαιωμάτων, από τα οποία αποτελείται το χαρτοφυλάκιο. Στην πραγματικότητα, αυτή η συνεχής αγορά και πώληση χρεογράφων δημιουργεί ένα επιπρόσθετο κόστος συναλλαγών το οποίο επιβαρύνει τον επενδυτή και στην πράξη δεν επιτρέπει τη δημιουργία αυτού του χαρτοφυλακίου. Ο μη υπολογισμός του κόστους συναλλαγών, ειδικά στις περιπτώσεις που αυτό είναι σημαντικό, οδηγεί φυσικά σε λανθασμένο υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος.

4. Μοντέλα διάχυσης-άλματος (jump-diffusion)

4.1.Εισαγωγή

Τα μοντέλα διάχυσης-άλματος βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορα επιστημονικά πεδία και η δυναμική τους ολοένα και αυξάνεται. Στο κλάδο των χρηματοοικονομικών, εισήχθησαν για τη καλύτερη πρόβλεψη της μεταβολής της τιμής μιας μετοχής συναρτήσει του χρόνου. Τα περισσότερα μοντέλα από τη βιβλιογραφία τα οποία σχετίζονται με τη πρόβλεψη παραγώγων περιγράφουν τη μεταβολή της τιμής του υποκείμενου προϊόντος με γεωμετρική κίνηση Brown. Εμπειρικές μελέτες πάνω στα μοντέλα πρόβλεψης τεκμηριώνουν ότι τα μοντέλα αυτά προβάλλονται ως ανεπαρκή τόσο στη παραστατική δυναμική τους όσο και στην εκτίμηση, πρόβλεψη της τελικής τιμής. Αυτό συμβαίνει διότι η μεταβολή μιας μετοχής εξαρτάται από δυο ενδεχόμενες καταστάσεις που θα προκαλέσουν μεταβολή[11-13]. Η πρώτη ενδεχόμενη κατάσταση είναι αυτή όπου θα παρατηρηθούν μεταβολές οι οποίες όμως εξαρτώνται από τη ζήτηση και τη προσφορά, αλλαγές στην ισοτιμία, αλλαγές στα ποσοστά κεφαλαιοποίησης κ.ά. Αυτοί οι παράγοντες όμως προκαλούν μικρές μεταβολές στην τιμή και προσομοιώνονται επαρκώς με τη γεωμετρική κίνηση Brown. Ωστόσο άλλοι παράγοντες όπως μια απότομη έξαρση της αγοράς ή μια νέα πληροφορία, σχετική με την εταιρεία της οποίας εξετάζουμε τις μετοχές, προκαλούν απότομες μεταβολές της τιμής οι οποίες δε μπορουν να προσομοιωθούν με μια κίνηση Brown. Επιπλέον, τέτοια γεγονότα είναι δυνατόν να εμφανιστούν σε διακριτές χρονικές στιγμές και κατανέμονται με πιθανοτικό τρόπο. Για την ενσωμμάτωση, λοιπόν, αυτών των απότομων μεταβολών εισάγουμε τα μοντέλα jump-diffusion η δομή των οποίων αποτελείται από δυο μέρη. Το πρώτο μέρος (diffusion) περιγράφει τις φυσιολογικά προβλεπόμενες μεταβολές που προκαλούνται από τις ανισορροπίες προσφοράς-ζήτησης με τη βοήθεια μιας στοχαστικής ανέλιξης που καλείται γεωμετρική κίνηση Brown με σταθερή τάση (constant drift), μεταβλητότητα (volatility) και συνεχή μονοπάτια (paths). Το δεύτερο μέρος (jump) λαμβάνει υπόψιν πιθανές απότομες αλλαγές λόγω καινούργιων δεδομένων που μπορούν να επηρεάσουν την αγορά και περιγράφεται με ανέλιξη Poisson (Poisson process). Ας δούμε τώρα πιο αναλυτικά τους όρους κίνηση Brown και ανέλιξη Poisson.

4.2.Κίνηση Brown (Brownian Motion)

Η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλά φυσικά φαινόμενα. Έχει το όνομα του Άγγλου βοτανολόγου Robert Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε το 1827 την «ακανόνιστη» κίνηση ενός σωματιδίου μέσα σε ένα υγρό ή αέριο. Το 1905 Ο Γερμανός φυσικός Albert Einstein έδειξε ότι η κίνηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί θεωρώντας ότι το σωματίδιο «βομβαρδίζεται» από τα μόρια του υγρού ή του αερίου και για αυτό κινείται ακανόνιστα με «τυχαίο» τρόπο στο χώρο[6]. Τέλος, ο Αμερικανός μαθηματικός Norbert Wiener το 1918 όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος την ανέλιξη αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητές της (για αυτό και η ανέλιξη είναι γνωστή και ως Wiener Process).

Μία στοχαστική ανέλιξη X_t, $t \geq 0$ (με τιμές στο R) καλείται *κίνηση Brown* με παραμέτρους τάση (drift) μ∈R και μεταβλητότητα(volatility) $\sigma > 0$ αν ισχύει ότι, για κάθε $y \geq 0, t > 0$,

1. Η ανέλιξη αυτή ακολουθεί κανονική κατανομή δηλαδή η τυχαία μεταβλητή $X_{t+y} - X_y \sim N(\mu, \sigma^2)$.
2. Σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα, η αύξηση ή η μείωση της X_t είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν, και άρα η τ.μ. $X_{t+y} - X_y$, $t > 0$ θα είναι ανεξάρτητη από τις X_u ,$0 \leq u \leq y$ (δηλ. ανεξ. της $\sigma(Xu, u \leq y)$).

Η κίνηση Brown είναι η μοναδική στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο που οι διαδρομές της είναι συνεχείς συναρτήσεις και έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις(dt=constant).

Αν και ο Γάλλος μαθηματικός Bachelier, στη διδακτορική του διατριβή το 1900, πρώτος χρησιμοποίησε την κίνηση Brown για να περιγράψει την εξέλιξη τιμών αγαθών ή μετοχών, η συγκεκριμένη ανέλιξη παρουσιάζει μειονεκτήματα στην περιγραφή τέτοιων φαινομένων διότι:

(i)μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές, κάτι που δεν είναι αποδεκτό, ενώ

(ii)η αύξηση ή μείωση μιας τιμής είναι, σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή

Στη περίπτωσή μας, όπου η μετασχηματισμένη τιμή της μετοχής συνδέεται λογαριθμικά με την αρχική τιμή της μετοχής(πριν το μετασχηματισμό), παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $X_t = \ln S_t$ τότε η ανέλιξη αυτή ακολουθεί μια κίνηση Brown καθώς ισχύει ότι

1. Η τυχαία μεταβλητή $X_{t+y} - X_t = \ln S_{t+y} - \ln S_y = \ln(S_{t+y}/S_y)$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ και
2. Η τυχαία μεταβλητή $\ln S_{t+y} - \ln S_y$ είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν Su, $0 \leq u < y$.

Επομένως η ανέλιξη $X_t = \ln S_t$ $t \geq 0$ είναι μια κίνηση Brown με την ειδοποιό διαφορά ότι πλέον η τιμή μας ακολουθεί λογαριθμική κατανομή και καλείται ***γεωμετρική κίνηση Brown***.

4.3.Ανέλιξη Poisson(Poisson process)

Η ανέλιξη Poisson, η οποία πήρε το όνομά της από τον Γάλλο μαθηματικό Simeon Denis Poisson, είναι μια στοχαστική διαδικασία η οποία μετράει τον αριθμό κάποιων γεγονότων και τις χρονικές στιγμές που συμβαίνουν αυτά σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα[1]. Τα κύρια χαρακτηριστικά της είναι τα έξης:

- Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δυο γεγονότα ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και
- τα χρονικά διαστήματα ανάμεσα στα γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των λεωφορείων που περνούν από μια στάση σε μια χρονική περίοδο. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δυο αφίξεις λεωφορείων είναι εκθετικά κατανεμημένο και ανεξάρτητο από τα προηγούμενα διαστήματα. Αντίστροφα, για σταθερά χρονικά διαστήματα το πλήθος των λεωφορείων που περνούν είναι εκθετικά κατανεμημένο και ανεξάρτητο από το πλήθος των λεωφορείων στα προηγούμενα χρονικά διαστήματα. Σε κάθε χρονική στιγμή καταφθάνει το πολύ 1 λεωφορείο(jump size 1) και άρα για κάθε χρονική στιγμή t ο αριθμός των λεωφορείων εκφράζεται από την εξίσωση

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n} \tag{4.1}$$

Ο όρος N_t ακολουθεί διαδικασία Poisson και η εξίσωση που μου δίνει τη πιθανότητα να έχουν περάσει n πλήθος λεωφορείων την χρονική στιγμή t είναι η ακόλουθη:

$$P[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{4.2}$$

Σε αντίθεση με το παράδειγμα των λεωφορείων που περιγράψαμε παραπάνω, στις χρηματοοικονομικές εφαρμογές και συγκεκριμένα μελετώντας τη τιμή μιας μετοχής, το ύψος της μεταβολής της(jump) δεν είναι απαραίτητα σταθερό και ίσο με 1. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε μια γενίκευση της Poisson process τη Compound Poisson όπου το μέγεθος του άλματος(jump) είναι αυθαίρετο και η διαφορά της επόμενης με τη προηγούμενη τιμή της μετοχής, σε σταθερά χρονικά διαστήματα, παραμένει εκθετικά κατανεμημένη. Συνεπώς η παραπάνω εξίσωση για μεταβολή μεγαλύτερη του 1 σε κάθε χρονική στιγμή t μετατρέπεται στην

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{4.3}$$

Όπου X_t :το άθροισμα των μεταβολών έως τη χρονική στιγμή t και Y_i: το ύψος της μεταβολής τη χρονική στιγμή i

Στη παρούσα εργασία, η μεταβολή της τιμής της μετοχής περιγράφεται όπως έχουμε ήδη αναφέρει με τις ανελίξεις Brown και Poisson οι οποίες εντάσσονται στις Levy ανελίξεις καθώς διαθέτουν ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις. Ανελίξεις με *ανεξάρτητες* και *ισόνομες* (όχι κατ’ανάγκη κανονικές) προσαυξήσεις, καλούνται **ανελίξεις Lévy.** Αναλυτικότερα, στη γεωμετρική κίνηση Brown όπως και στη Compound Poisson η μεταβολή της τιμής της μετοχής μια χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητη με τη μεταβολή της την προηγούμενη χρονική στιγμή και τα χρονικά διαστήματα είναι σταθερά.

5. Jump-Diffusion Merton's Model

Αναμφισβήτητα, η εξίσωση Black-Scholes αποτέλεσε ορόσημο στη πρόβλεψη χρηματοοικονομικών παραγώγων και συγκεκριμένα δικαιωμάτων προαίρεσης. Η προσέγγισή τους όμως βασίζεται στην υπόθεση ότι η τιμή του υποκείμενου προϊόντος του δικαιώματος ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown. Είναι προφανές ότι η γεωμετρική κίνηση Brown δε μπορεί να αποδόσει τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής και συγκεκριμένα τις απότομες προσαυξήσεις αυτής. Για τον λόγο αυτό το 1976 ο Merton ανέπτυξε την μια προσέγγιση της Black-Scholes συμπεριλαμβάνοντας μια ανέλιξη Poisson για την περιγραφή των απρόβλεπτων εκφάνσεων της αγοράς[15-18].

Έστω ότι δεχόμαστε ότι συμβαίνουν άλματα της τιμής της μετοχής και επιπλέον κατανέμονται ανεξάρτητα. Η πιθανότητα Pr{ }, λοιπόν, να παρουσιάσει μεγάλη μεταβολή η τιμή σε μικρό χρονικό διάστημα μπορεί να εκφραστεί μέσω μιας ανέλιξης Poisson όπως φαίνεται παρακάτω:

- ✓ Pr{η τιμή της μετοχής να παρουσιάσει ένα άλμα}=Pr{dN_t=1}=λdt+O(dt)
- ✓ Pr{η τιμή της μετοχής να παρουσιάσει πάνω από ένα άλμα}=Pr{dN_t≥2}=0+O(dt)
- ✓ Pr{η τιμή της μετοχής να μην παρουσιάσει άλμα}=Pr{dN_t=0}=1-λdt+O(dt)

Όπου λ είναι η ένταση του άλματος, δηλαδή ο μέσος όρος των αλμάτων ανά μονάδα χρόνου και O(dt) ο αλγοριθμικός όρος που μας δείχνει τη τάξη μεγέθους(asymptotic order symbol).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε μικρό χρονικό διάστημα dt η τιμή μεταβάλλεται από S_t σε J_tS_t ,όπου J_t είναι το απόλυτο μέγεθος του άλματος, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \frac{J_tS_t - S_t}{S_t} = J_t - 1 \tag{5.1}$$

Έτσι, λοιπόν, κατά το μοντέλο jump diffusion του Merton η τιμή της μετοχής ορίζεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS}{S} = (a - \lambda\kappa)dt + \sigma dW + (J_t - 1)dN_t \tag{5.2}$$

όπου:

α → η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής

λ → ο μέσος αριθμός αλμάτων σε dt

κ → ισούται με $E(J_t-1)=e^{\mu+\frac{1}{2}\delta^2} - 1$ όπου Ε το ενδεχόμενο και (J_t -1) είναι το ποσοστό μεταβολής της τιμής της μετοχής εάν συμβαίνει ανέλιξη Poisson

σ → η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής

dW → μια κατανομή Wiener

dN_t → μια κατανομή Poisson

Πιο συγκεκριμένα, δεχόμαστε ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής περιγράφεται από τον ακόλουθο τύπο στην περίπτωση που έχουμε συμβάν ανέλιξης Poisson:

$$\frac{dS}{S} = (a - \lambda\kappa)dt + \sigma dW + (\mathrm{Jt} - 1) \tag{5.3}$$

και αντίστοιχα στην περίπτωση που δεν έχουμε συμβάν ανέλιξης Poisson:

$$\frac{dS}{S} = (a - \lambda\kappa)dt + \sigma dW \tag{5.4}$$

Το λήμμα του Ito για jump-diffusion μοντέλα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$df(X_{t,}t) = \frac{\partial f(X_{t,}t)}{\partial t}dt + b_t\frac{\partial f(X_{t,}t)}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{\partial^2 f(X_{t,}t)}{\partial x^2}dt + \sigma_t\frac{\partial f(X_{t,}t)}{\partial x}dz_t + [f(X_{t-} + \Delta X_t) - f(X_{t-})]dN_t \tag{5.5}$$

και μετά από εφαρμογή προκύπτει η εξίσωση για το δικαίωμα προαίρεσης:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + (a - \lambda\kappa)S\frac{\partial V}{\partial S}dt + \frac{\sigma^2\, S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dz + [V(J_t S_t, t) - V(S_t, t)]dN_t \tag{5.6}$$

Δεχόμαστε ότι για μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t της ζωής του χαρτοφυλακίου, η αξία του υπολογίζεται ως:

$$\Pi = V - \Delta \cdot S \tag{5.7}$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$d\Pi = dV - \Delta \cdot dS \tag{5.8}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + (a - \lambda\kappa)S\frac{\partial V}{\partial S}dt + \frac{\sigma^2\, S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dz + [V(J_t S_t, t) - V(S_t, t)]dN - \Delta[(\alpha - \lambda\kappa)Sdt + \sigma Sdz + (J_t - 1)SdN] \tag{5.9}$$

Επιλύοντας καταλήγουμε:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (a - \lambda\kappa)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2\, S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta(\alpha - \lambda\kappa)S\right)dt + \left(\sigma S\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\sigma S\right)dz + (V(J_t S_t, t) - V(S_t, t) - \Delta(J_t - 1)S)dN \tag{5.10}$$

Στην περίπτωση όπου δεν πραγματοποιείται άλμα και άρα dN=0 η εξίσωσή επανέρχεται στη απλή Black-Scholes και με $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ έχουμε:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2\, S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \tag{5.11}$$

Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή για dN#0 έχουμε:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2\, S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \left(V(J_t S_t, t) - V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S}(J_t - 1)S\right)dN \tag{5.12}$$

Η αξία του χαρτοφυλακίου Π αυξάνεται σε χρόνο t σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\Pi = \Pi_0 \cdot e^{r(t-t_0)} \tag{5.13}$$

Συνεπώς, διαφορίζοντας την εξίσωση αυτή, υπολογίζεται ότι σε απειροστό χρόνο η μεταβολή της ποσότητας Π είναι:

$$d\Pi = r \cdot \Pi \cdot dt \tag{5.14}$$

Άρα προκύπτει:

$$d\Pi = r \cdot \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S\right) \cdot dt \tag{5.15}$$

και εξισώνοντας τις (5.15) και (5.12) μετά από αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στη μερική διαφορική εξίσωση με ολοκληρωτικό όρο (PIDE) που εισήγαγε ο Merton για τη Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV + \lambda E\big(V(J_t S_t, t) - V(S_t, t)\big) - \lambda \frac{\partial V}{\partial S} E(J_t - 1)S = 0$$

6. Αριθμητική Επίλυση της Black-Scholes κατά το μοντέλο του Merton

Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζεται η αριθμητική επίλυση της Black-Scholes σύμφωνα με το μοντέλο του Merton. Λαμβάνουμε, λοιπόν, τη μετασχηματισμένη εξίσωση[2]:

$$u_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta\right)u_x + (r+\lambda)u - \lambda \int_R u(t, x+y)dF(y) = 0$$

Καθώς η παραπάνω μορφή της εξίσωσης είναι σε συνεχή μορφή, στόχος μας είναι να τη διακριτοποιήσουμε ώστε να την επιλύσουμε.

Έτσι, λοιπόν, επιλέγουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών η οποία στηρίζεται στην προσέγγιση των παραγώγων της εξίσωσής μας με λόγους διακριτών διαφορών[6]. Για το σκοπό αυτό απαιτείται η διακριτοποίηση των μεταβλητών του προβλήματος, οι οποίες είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Το πεδίο που ορίζονται οι μεταβλητές τ, x κατόπιν διακριτοποίησης γίνεται:

$$\tau = j\Delta\tau, \qquad \Delta\tau = \frac{T}{N}, j = 0, \dots, N$$

$$A = x_0, x_1, x_2, \dots, x_M = B$$

Όπου, M, N η διακριτοποίηση που επιλέγουμε για το πεδίο του χρόνου και του χώρου αντίστοιχα (όπου χώρο εννοείται η μεταβλητή x). Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών x, ορίζεται ως h = (B – A) / M.

Ως αποτέλεσμα, το χωρίο των μεταβλητών πλέον δεν είναι συνεχές, αλλά διακριτό, όπως φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί.

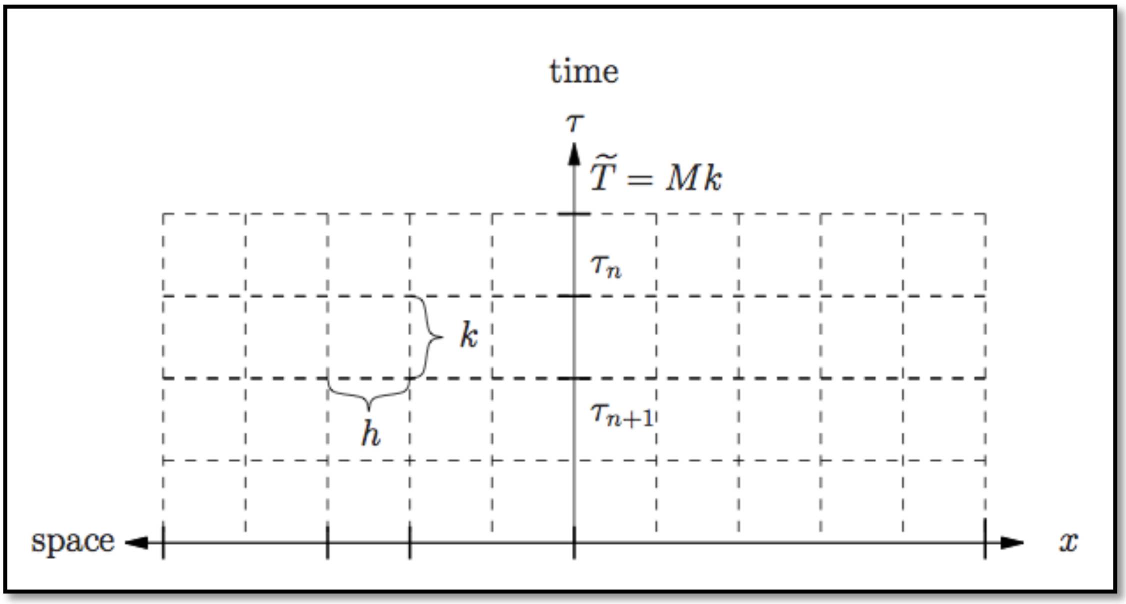


Figure Διακριτό χωρίο μεταβλητών

Για τις μεταβλητές του χώρου και του χρόνου δεχόμαστε τις παρακάτω προσεγγίσεις οι οποίες προκύπτουν εφαρμόζοντας τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών προς τα πίσω(backward differentiation formula) για τη διακριτοποίηση του χρόνου και τη μέθοδο κεντρικών διαφορών(central differentiation formula) για τη διακριτοποίηση του χώρου[2]:

$$u_\tau \approx \frac{\left(\frac{3}{2}u_i^m - 2u_i^{m-1} + \frac{1}{2}u_i^{m-2}\right)}{k} \tag{6.1}$$

$$u_x \approx \frac{(u_{i+1}^m - u_{i-1}^m)}{2h} \tag{6.2}$$

$$u_{xx} \approx \frac{(u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m)}{h^2} \tag{6.3}$$

Σειρά τώρα έχει η διακριτοποίηση του ολοκληρωτικού όρου της εξίσωσης. Για να διακριτιποιήσουμε τον ολοκληρωτικό όρο αλλάζουμε τις μεταβλητές και έχουμε:

$$\int_R u(\tau, x+y) f(y) dy = \int_R u(\tau, z) f(z-x) dz \tag{6.4}$$

Στη συνέχεια, καθώς υπάρχει το πρόβλημα ότι δεν είναι εφικτό να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα σε άπειρο χώρο θέτονται όρια τα οποία οριοθετούύνται από το διάστημα $(-x^*, x^*)$. Έτσι, χωρίζεται το δεξί μέλος $\int_R = \int_{\Omega_*} + \int_{R/\Omega_*}$ $όπου\ \Omega_* \coloneqq (-x^*, x^*)$. Σε περίπτωση όπου διαθέτουμε ένα δικαίωμα αγοράς, η ολοκληρωτέα συνάρτηση u(τ,z) στο $\mathbb{R}\backslash\Omega_*$ περιγράφεται από τις ακόλουθες προσεγγίσεις:

$$u(\tau, x) \to\ e^x - Ke^{-rt}\ όταν\ x \to \infty \tag{6.5}$$

$$u(\tau, x) \to 0\ \ όταν\ x \to -\infty \tag{6.6}$$

Έτσι εισάγεται η παρακάτω εξίσωση:

$$\varepsilon(\tau, x, x^*) = \int_{\Omega_*} (e^z - Ke^{-r\tau})\, f(z - x)dz \tag{6.7}$$

όπου $f(x) = \frac{1}{\sigma_J\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_J)^2/2\sigma_J^2}$ (6.8)

με μ_J και σ_J η τάση και η μεταβλητότητα αντίστοιχα της ανέλιξης Poisson.

Μετά από ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\varepsilon(\tau, x, x^*) = e^{x+\frac{\sigma_J^2}{2}}\Phi\left(\frac{x - x^* + \sigma_J^2}{\sigma_J}\right) - Ke^{-r\tau}\Phi\left(\frac{x - x^*}{\sigma_J}\right) \tag{6.9}$$

όπου $\Phi(y)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cumulative distribution function)[19]:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \tag{6.10}$$

Για την προσέγγιση της λύσης χρησιμοποιήθηκε ο σύνθετος κανόνας του τραπεζίου για το χωρίο που ανήκει στο πεδίο $\mathbb{R}\backslash\Omega_*$ και προστέθηκε στην (6.9) για να συμπεριληφθούν οι τιμές του πεδίου Ω_*. Κατά συνέπεια, έχουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} u(\tau_m, z) f(z - x_i) dz \approx \frac{h}{2}\left[u_1^m f_{i,1} + u_n^m f_{i,n} + 2\sum_{j=2}^{n-1} u_j^m f_{i,j}\right] + \varepsilon(\tau_m, x_i, x^*)$$

$\mu\varepsilon\ i = 2, \dots n - 1$

Αφού διακριτοποιήσαμε την εξίσωση μας τώρα μένει να την επιλύσουμε με τη βοήθεια του υπολογιστικού εργαλείου matlab. Συγκεκριμένα, με αντικατάσταση των εξισώσεων (6.1), (6.2), (6.3), (6.11) στην μετασχηματισμένη Black-Scholes καταστρώνεται η παρακάτω εξίσωση[2], η οποία αποτελείται από τους πίνακες C, D και τα διανύσματα u,b :

$$(\omega_0 \cdot \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{u^m} = \boldsymbol{b^m} \qquad (6.11)$$

όπου

$$\omega_0 = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad m = 1 \\ 3/2 & \alpha\nu \quad m \geq 2 \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{k\sigma^2}{2h^2} + \dfrac{k\left(r - \dfrac{\sigma^2}{2} - \lambda\zeta\right)}{2h} & \alpha\nu\ i = j - 1, 2 \leq i \leq n - 1 \\ \dfrac{k\sigma^2}{h^2} + (r + \lambda)k & \alpha\nu\ i = j, 2 \leq i \leq n - 1 \\ -\dfrac{k\sigma^2}{2h^2} - \dfrac{k\left(r - \dfrac{\sigma^2}{2} - \lambda\zeta\right)}{2h} & \alpha\nu\ i = j + 1, 2 \leq i \leq n - 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} -kh\dfrac{\lambda f_{ij}}{2} & \alpha\nu \quad 2 \leq i \leq n - 1 \ \ \kappa\alpha\iota\ \ j = 1, n \\ -kh\lambda f_{ij} & \alpha\nu \quad 2 \leq i \leq n - 1 \ \ \kappa\alpha\iota\ \ 2 \leq j \leq n - 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Το δεξί μέλος τώρα της εξίσωσής αποτελείται από το διάνυσμα b^m που δίνεται από τη παρακάτω εξίσωση:

$$b_i = k\lambda\varepsilon(\tau_m, x_i, x^*) + \omega_1 u_i^{m-1} + \omega_2 u_i^{m-2}\ , \gamma\iota\alpha\ i = 2, \dots, n - 1$$

όπου $\omega_1 = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad m = 1 \\ 2 & \alpha\nu \quad m \geq 2 \end{cases}$

και $\omega_2 = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad m = 1 \\ -1/2 & \alpha\nu \quad m \geq 2 \end{cases}$

και συνοριακές συνθήκες

$$b_1 = 0$$

$$b_n = \omega_0 \left(e^{x^*} - K e^{-r\tau_m} \right)$$

Στην εξίσωση Black - Scholes, το δεδομένο όριο είναι ότι την ημέρα εκπνοής του δικαιώματος, η αξία του υπολογίζεται από τη συνάρτηση απόδοσης του, η οποία προφανώς εξαρτάται από τον τύπο του δικαιώματος.

Ύστερα από την αντιστροφή του πεδίου του χρόνου, η αρχική πλέον συνθήκη του προβλήματος είναι η ακόλουθη[23]:

$$u(x,0) = Payoff\ function$$

Η αρχική συνθήκη που χρησιμοποιήθηκε είναι η ακόλουθη :

$$u(x,0) = g(x)$$

όπου

$$g(x) = K(e^x - 1)$$

Η μεθοδολογία που αναλύθηκε στο κεφάλαιο αυτό, υλοποιήθηκε με τη χρήση Matlab.

7. Αξιολόγηση της Black-Scholes κατά το μοντέλο του Merton

7.1.Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία σύμφωνα με την οποία αξιολογήθηκε το μοντέλο πρόβλεψης δικαιωμάτων προαίρεσης jump-diffusion κατά τον Merton, που καταστρώθηκε σε γλώσσα matlab, πραγματοποιήθηκε σε τρία επίπεδα.

Σε πρώτο επίπεδο έγινε παραμετροποίηση του μοντέλου jump-diffusion θέτοντας αρχικές τιμές στις παραμέτρους του. Συγκεκριμένα, έγινε εκτίμηση της τιμής της μεταβλητότητας(παράμετρος σ) αλλά και του άλματος(παράμετρος λ) επιλεγμένης μετοχής από τις ιστορικές τιμές κλεισίματος της στο χρηματιστήριο που διαπραγματεύεται. Στη συνέχεια, ορίστηκε το επιτοκίο σύμφωνα με το επιτόκιο αναφοράς που δημοσιεύεται από την Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Τραπεζών και το χρονικό βήμα με κύριο γνώμονα την ευστάθεια του συστήματος. Οι βασικές παράμετροι, λοιπόν, εισήχθησαν στο εξεταζόμενο μοντέλο και έπειτα πραγματοποιήθηκε μεταβολή αυτών με στόχο την αξιολόγηση της επίδρασής τους και το σχολιασμό τους.

Σε δεύτερο επίπεδο, προσομοιώθηκε το jump-diffusion μοντέλο κατά τον Merton για δυο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ με στόχο τη σύγκριση αυτών με τις πραγματικές τιμές του δικαιώματος όπως προέκυψαν από το χρηματιστήριο παραγώγων της Αυστρίας. Στόχος ήταν η αξιολόγηση του μοντέλου και η όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση των πραγματικών τιμών.

Σε τρίτο επίπεδο, προσομοιώθηκε το απλό μοντέλο της Black-Scholes και πραγματοποιήθηκε σύγκριση αυτού με το jump-diffusion μοντέλο. Αυτό συνέβη με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων για τη βέλτιστη προσέγγιση των πραγματικών τιμών του δικαιώματος.

Ουσιαστικά, η μεθοδολογία που ακολουθείται, χρησιμοποιείται συχνά στα οικονομικά, και αποκαλείται στα αγγλικά Back – Testing. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην εφαρμογή των μοντέλων σε κάποια παρελθοντική χρονική περίοδο. Με τον τρόπο αυτό, είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε όλα τα δεδομένα που προηγήθηκαν της εξεταζόμενης περιόδου, να εφαρμόσουμε τα μοντέλα που ελέγχουμε και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα τους με τα πραγματικά. Παρά το γεγονός ότι η εξίσωση Black – Scholes στην απλή αλλά και στην jump-diffusion μορφή της χρησιμοποιείται ευρύτατα από τους περισσότερους επενδυτές παγκοσμίως, ο αριθμός των μελετών που αξιολογούν τα αποτελέσματα σε αντιπαράθεση με πραγματικά δεδομένα, προερχόμενα από χρηματιστήρια παραγώγων, είναι περιορισμένος.

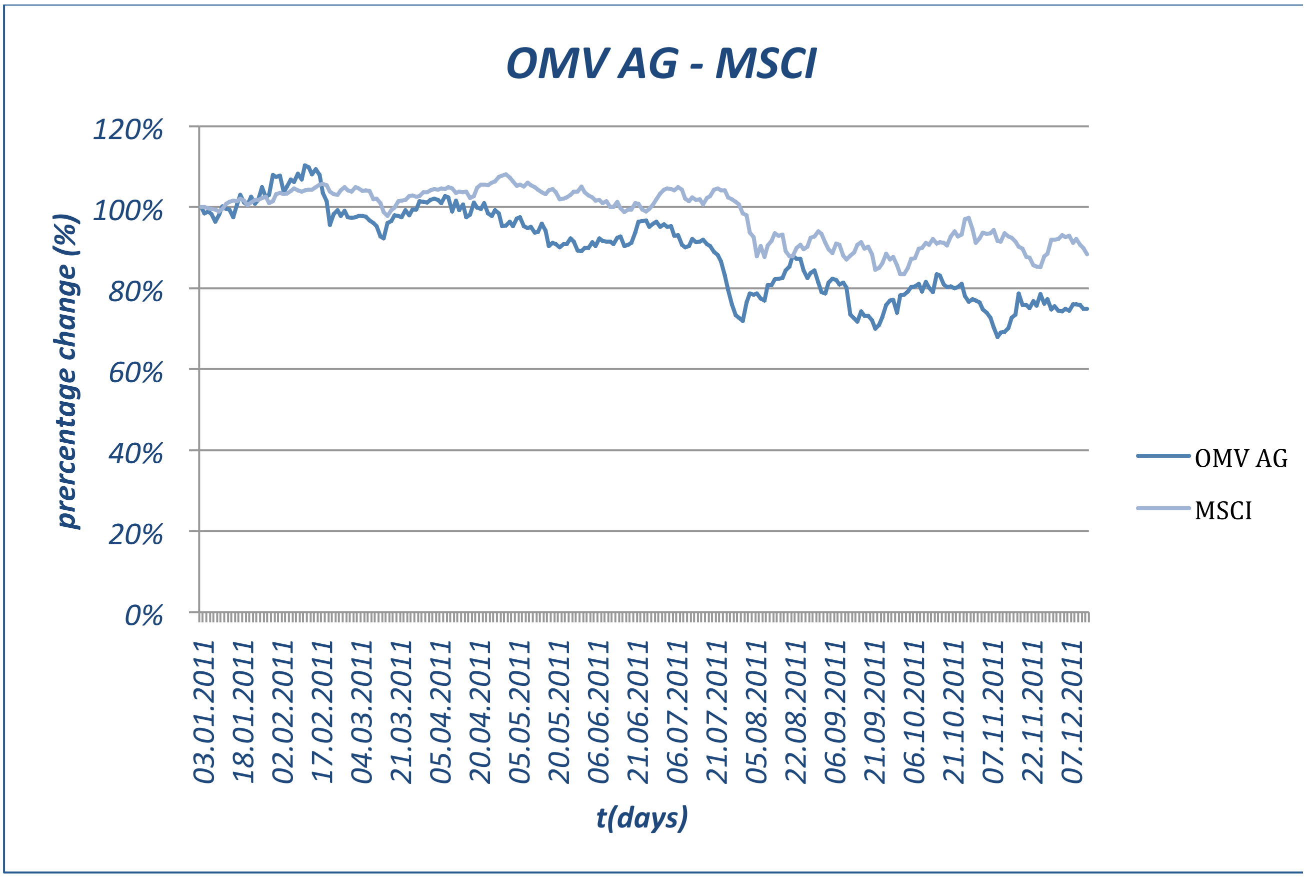
Οι περισσότερες μελέτες, επαφίενται είτε στην ανάλυση των μοντέλων και της απόδοσης τους, είτε στη χρήση δεδομένων τεκμαρτής μεταβλητότητας για την εκτίμηση της τιμής των δικαιωμάτων. Η συγκριτική αξιολόγηση των μοντέλων αυτών με πραγματικά δεδομένα για την εξαγωγή συμπερασμάτων είναι περιορισμένη.

Ωστόσο, στην παρούσα μελέτη, επιδιώκεται η χρήση της πραγματικής τιμής της μεταβλητότητας, όπως αυτή προκύπτει από τα ιστορικά δεδομένα της τιμής της εκάστοτε υποκείμενης μετοχής, για την αξιολόγηση των προτεινόμενων μοντέλων.

7.2.Επιλογή Δεδομένων

Τα δεδομένα που εισήχθησαν στο υπολογιστικό μοντέλο επιλέχθηκαν για μια σειρά από λόγους. Αρχικά, τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν αναφέρονται στο έτος 2011. Το 2011 η Ευρωζώνη αντιμετώπιζε βαθειά ύφεση και τα αποτελέσματα της οικονομικής κρίσης ήταν ιδιαίτερα έντονα. Κατά τη διάρκεια, λοιπόν, μιας τέτοιας κρίσης η αγορά παρουσιάζει έντονη αστάθεια και οι μετοχές διακυμαίνονται με απρόβλεπτο τρόπο. Με στόχο, λοιπόν, την όσο γίνεται καλύτερη πρόβλεψη αυτών των απότομων διακυμάνσεων στην αγορά είναι δόκιμο να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο jump-diffusion κατά τον Merton.

Στη συνέχεια, πάρθηκαν τα ετήσια δεδομένα της χρηματιστηριακής μετοχής της μεγαλύτερης Αυστριακής εταιρείας που ειδικεύεται στην παραγωγή, διύλιση και εμπορία πετρελαιοειδών OMV AG. Οι μετοχές του τομέα της ενέργειας χαρακτηρίζονται από έντονες και απότομες μεταβολές και όπως είναι φυσικό η συμπεριφορά τους είναι ακόμη πιο απρόβλεπτη σε περιόδους κρίσης[5]. Ακόμη, για να έχουμε μια εικόνα της αγοράς τη περίοδο εκείνη επιλέξαμε το δείκτη MSCI (Morgan Stanley Capital International) που αποτελεί το δείκτη 1612 μετοχών παγκοσμίως για το έτος 2011. Στο παρακάτω διάγραμμα παρατίθεται η πορεία της μετοχής OMV AG καθώς και του δείκτη MSCI.



Διάγραμμα 1. Συσχέτιση μετοχής OMV AG και δείκτη MSCI κατά τη διάρκεια του έτους 2011

Το παραπάνω διάγραμμα έχει ως στόχο να συσχετίσει τη μεταβολή της μετοχής που εξετάστηκε με το δείκτη της αγοράς κατά τη χρονική περίοδο που ορίστηκε, δηλαδή καθ'όλη τη διάρκεια του έτους 2011. Για την επίτευξη αυτής της συσχέτισης, καθώς η μετοχή και ο δείκτης δεν έχουν την ίδια τάξη μεγέθους, πήραμε την πρώτη τους τιμή ως σημείο αναφοράς και έπειτα υπολογίσαμε τη ποσοστιαία μεταβολή των επόμενων τιμών συναρτήσει της τιμής αναφοράς. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η ποσοστιαία μεταβολή της μετοχής δε διαφέρει σημαντικά από τη μεταβολή του δείκτη και άρα η μετοχή μας αντιπροσωπεύει επαρκώς την εικόνα της αγοράς.

Ακόμη, το παραπάνω διάγραμμα δίνεται η εικόνα της αγοράς κατά το έτος 2011. Όπως έχει ήδη αναφερθεί το 2011 χαρακτηρίστηκε ως έτος με έντονη διακύμανση, πράγμα που γίνεται αντιληπτό και από το παραπάνω διάγραμμα. Παρατηρείται, λοιπόν, μεγάλη αστάθεια το δεύτερο μισό του έτους, κατά τη διάρκεια του οποίου έλαβαν χώρα αξιοσημείωτα γεγονότα. Τον μήνα Ιούνιο, η Standard and Poor's προχώρησε σε νέα υποβάθμιση της πιστοληπτικής ικανότητας της Ελλάδας. Συγκεκριμένα υποβάθμισε την ελληνική οικονομία κατά δύο βαθμίδες από "B" σε "CCC". Επίσης, ένα μήνα αργότερα ακολούθησε η υποβάθμιση της Πορτογαλίας από τον οίκο αξιολόγησης Moody's.[12]

7.3.Καθορισμός Παραμέτρων μοντέλου

7.3.1. Παράμετρος σ (volatility)

Η παράμετρος σ υπολογίστηκε από τα βιβλιογραφικά δεδομένα της τιμής της μετοχής OMV AG από τον τύπο της τυπικής απόκλισης. Συγκεκριμένα:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(S - S_M)^2}$$

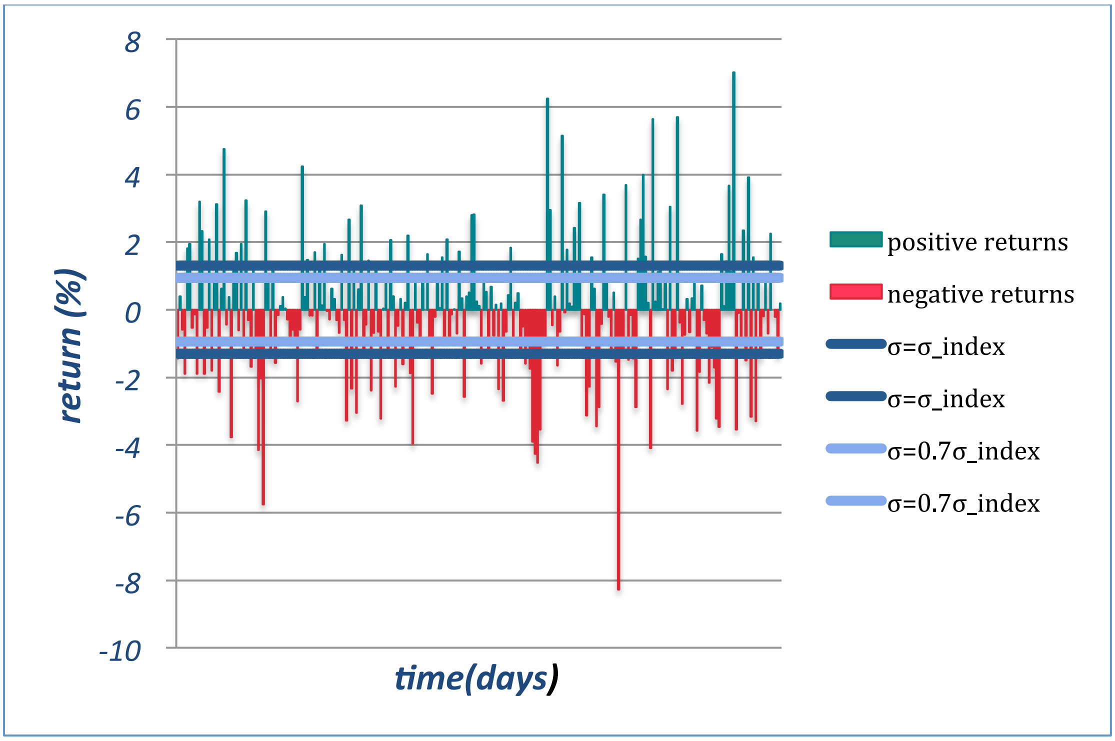
Έτσι, ορίστηκε ως διακύμανση της τιμής η διασπορά των διάφορων τιμών της μετοχής γύρω από τη μέση τιμή της μετοχής. Με τον τρόπο αυτό, μπορούμε να διακρίνουμε αν οι τιμές απέχουν σημαντικά από τον μέσο όρο.

7.3.2. Παράμετρος λ (jump)

Η παράμετρος λ ορίστηκε ως εξής. Αρχικά, υπολογίστηκε για έκαστη μέρα ο δείκτης απόδοσης της μετοχής(return), δηλαδή η μεταβολή της τιμής κλεισίματος της μετοχής σε σχέση με τη προηγούμενη τιμή κλεισίματος(return).

$$\Delta \varepsilon \acute{\iota} \kappa \tau \eta \varsigma \; \alpha \pi \acute{o} \delta o \sigma \eta \varsigma = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

Στη συνέχεια, όποια τιμή(return) ήταν μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από τη διακύμανση της αγοράς(volatility), η οποία εκπροσωπείται από το δείκτη, θεωρήθηκε ότι πραγματοποιεί άλμα(jump). Έτσι, από την αναλογία των ημερών όπου η τιμή παρουσίασε σημαντική μεταβολή, δηλαδή jump, ως προς το συνολικό αριθμό των ημερών ορίστηκε η τιμή της παραμέτρου λ. Εναλλακτικά, ακολουθήθηκε η ίδα ακριβώς διαδικασία με τη διαφορά ότι οι τιμές που πραγματοποιούν άλμα θεωρήθηκαν αυτές που όχι μόνο ξεπερνούν την τιμή του δείκτη της αγοράς αλλά τον ξεπερνούν συγκεκριμένα κατά 70% της τιμής του.



Διάγραμμα 2. Ποσοστιαία μεταβολή της μετοχής συγκριτικά με τη διακύμανση της αγοράς

Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει τη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής κλεισίματος της μετοχής σε σχέση με τη τιμή κλεισίματος της μετοχής της προηγούμενης ημέρας. Παρατηρείται παρόμοια κατανομή αρνητικών και θετικών μεταβολών της μετοχής. Στη συνέχεια, σύμφωνα με τον ορισμό που έχει δωθεί για το λ, είναι εύκολο να διακρίνουμε ποιές παρατηρήσεις από το δείγμα μας ξεπερνούν την διακύμανση της αγοράς αλλά και ποιες ξεπερνούν το 70% της διακύμανσης της αγοράς.

7.3.3. Το μηδενικού ρίσκου επιτόκιο r

Η τιμή του επιτοκίου καθορίστηκε σύμφωνα με το Euro Interbank Offered Rate (Euribor) το οποίο αποτελεί ένα επιτόκιο αναφοράς και δημοσιεύεται από την Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Τραπεζών με βάση το μέσο επιτόκιο με το οποίο οι τράπεζες της Ευρωζώνης δανείζονται κεφάλαια στη διατραπεζική αγορά. Τα επιτόκια Euribor θεωρούνται τα πιο σημαντικά επιτόκια αναφοράς στην ευρωπαϊκή αγορά χρήματος και αποτελούν τη βάση για τη ρύθμιση των επιτοκίων όλων των ειδών των χρηματοοικονομικών προϊόντων.

7.3.4. Το χρονικό βήμα

Το χρονικό βήμα κινήθηκε στη κλίμακα $10^{-5}<k<10^{-4}$ με γνώμονα την εξασφάλιση της αριθμητικής ευστάθειας του μοντέλου μας.

Συγκεντρωτικά παρατίθενται οι τιμές των παραμέτρων στο παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 2. Βασικές παράμετροι που εφαρμόζονται στο μοντέλο jump-diffusion

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
Τιμή εξάσκησης	*25*
λ(άλμα)	*0.57*
σ(διακύμανση)	*2%*
r(επιτόκιο)	*0.602%*

Έπειτα από τον ορισμό των βασικών παραμέτρων του μοντέλου jump-diffusion όπως περιγράφτηκε παραπάνω εφαρμόζονται αυτές στο υπολογιστικό μου εργαλείο με σκοπό τη λήψη αποτελεσμάτων.

7.4.Μεταβολή Παραμέτρων μοντέλου

Στο σημείο αυτό μεταβάλουμε τις τιμές των δυο βασικών παραμέτρων για να δούμε την επίδραση που προκαλούν. Όπως αναλύεται και παρακάτω, συγκεκριμένα μεταβάλλονται η παράμετρος σ, δηλαδή η διακύμανση και η παράμετρος λ, δηλαδή το ποσοστό συχνότητας που πραγματοποιείται μεγάλη μεταβολή(άλμα) στις τιμές της μετοχής που εξετάζεται.

7.4.1. Μεταβολή παραμέτρου σ

Κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους του μοντέλου jump-diffusion προσαρμόστηκε ένα εύρος τιμών της διακύμανσης με στόχο τη παρατήρηση της μεταβολής στο τελικό αποτέλεσμα που λαμβάνουμε. Το εύρος στο οποίο κινηθήκαμε ήταν το 0.013<σ<0.08 και η μεταβολή ήταν στα προβλεπόμενα επίπεδα. Στο παρακάτω διάγραμμα δίνονται τρεις επιλεγμένες τιμές της διακύμανσης που αποτελούν μια επαρκή προσσέγγιση των αποτελεσμάτων μας.

Διάγραμμα 3. Σχέση δικαιώματος-μετοχής για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ

Το εύλογο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι μεταβάλλοντας τη τιμή της διακύμανσης, μεταβάλλεται και η απόδοση του δικαιώματος κατά τον ίδιο τρόπο. Όπως παρατηρείται και από το διάγραμμα, αυξάνοντας τη διακύμανση αυξάνεται και η απόδοση του δικαιώματος καθώς εξετάζουμε την περίπτωση που βρισκόμαστε εντός του χρηματικού ισοδύναμου. Αυτό είναι λογικό καθώς όσο αυξάνεται η διακύμανση των τιμών της μετοχής, δηλαδή η μετοχή λαμβάνει υψηλές τιμές, αυξάνεται η διαφορά της τρέχουσας τιμής της μετοχής από την τιμή εξάσκησης και άρα αυξάνεται το κέρδος. Ένας άλλος τρόπος ερμηνείας έγκειται στο ότι η διακύμανση θεωρείται ένα μέτρο ρίσκου και από αυτή τη σκοπία κατανοούμε ότι αυξάνοντας το ρίσκο θα αυξηθεί και η τελική απόδοση του δικαιώματος μου.

7.4.2. Μεταβολή παραμέτρου λ

Έχοντας ως στόχο να παρατηρηθεί η επίδραση της παραμέτρου λ μεταβλήθηκε η τιμή αυτής, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι κρατήθηκαν σταθερές. Στο παρακάτω διάγραμμα παρατίθεται η μεταβολή στην αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος συναρτήσει της τιμής της μετοχής.

Διάγραμμα 4. Σχέση δικαιώματος-μετοχής για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ

Από το παραπάνω διάγραμμα, συμπεραίνεται ότι η μεταβολή της τιμής της παραμέτρου λ δεν αποφέρει σημαντικές αλλαγές στην αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος στο εύρος των τιμών της μετοχής το οποίο εξετάζουμε.

Αυτό συμβαίνει καθώς η επίδραση της παραμέτρου λ γίνεται εμφανής για μεγάλες τιμές της τιμής της μετοχής μακρυά από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Όπως επιβαιβεώνεται και από τη βιβλιογραφία σε ένα δικαίωμα αγοράς, όπως στη περίπτωσή μας, για μικρές τιμές της μετοχής κοντά στη τιμή άσκησης του δικαιώματος, δεν έχω επίδραση της παραμέτρου λ. Η επίδραση θα ήταν σημαντική αν βρισκόμασταν σε μεγάλες τιμές της μετοχής εντός του χρηματικού ισοδύναμου(in the money). Αντίστοιχα αν αναφερόμασταν σε δικαίωμα πώλησης, η επίδραση του λ θα παρουσιαζόταν για χαμηλές τιμές μετοχής εκεί δηλαδή όπου το δικαίωμα θα είχε το μεγαλύτερο κέρδος.[9]

7.5.Σύγκριση αποτελεσμάτων του μοντέλου jump diffusion με πραγματικές τιμές του δικαιώματος

Από τα δημοσιευμένα δεδομένα του χρηματιστηρίου της Αυστρίας λάβαμε τιμές του δικαιώματος της μετοχής OMV AG σε συγκεκριμένες ημερομηνίες για το χρονικό διάστημα που εξετάστηκε. Τα δεδομένα αυτά, παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3. Πραγματικές τιμές δικαιώματος προαίρεσης επί της μετοχής OMV AG

Date	*Actual Option Price*
20.1.2011	*2.565*
20.2.2011	*13.713*
23.3.2011	*10.108*
19.4.2011	*3.488*

Οι βασικές παράμετροι του μοντέλου έλαβαν τιμές σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4. Βασικές παράμετροι του μοντέλου jump-diffusion

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
Τιμή εξάσκησης	*25*
σ(διακύμανση)	*2%*
r(επιτόκιο)	*0.602%*

Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο jump-diffusion για να αποτιμηθεί η αξία του δικαιώματος ώστε να γίνει σύγκριση με τις πραγματικές τιμές. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε για δυο τιμές της παραμέτρου λ. Χρησιμοποιήθηκαν δύο τιμές της παραμέτρου λ με στόχο την καλύτερη προσέγγιση των πραγματικών τιμών του δικαιώματος που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα για λ=0.57 και για λ=0.72. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στο παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 5. Σύγκριση αποτελεσμάτων του μοντέλου jump-diffusion για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ με τις πραγματικές τιμές

Ημερομηνία	*Jump-diffusion assumption(λ=0.57)*	*Jump-diffusion assumption(λ=0.72)*	*Actual option price*
20.1.2011	*6.89*	*6.62*	*2.57*
20.2.2011	*8.02*	*8.85*	*13.71*
23.3.2011	*5.94*	*4.43*	*10.11*
19.4.2011	*5.40*	*2.99*	*3.49*

Παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου λ επιτυγχάνεται καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής αξίας του δικαιώματος. Η απότομη μεταβολή των πραγματικών τιμών του δικαιώματος κάνουν αρκετά δύσκολη την προσέγγισή τους. Ωστόσο, είναι εμφανές ότι μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο καθώς και τόσο το μοντέλο jump-diffusion που προσομοιώσαμε όσο και οι πραγματικές τιμές παρουσιάζουν αρχικά αύξηση και έπειτα μείωση.

Στο παρακάτω πίνακα, υπολογίζεται η κατά απόλυτη τιμή απόκλιση του μοντέλου μας από τις πραγματικές τιμές και για τις δυο τιμές της παραμέτρου λ.

Πίνακας 6. Απόκλιση του μοντέλου jump-diffusion για τις δυο τιμές της παραμέτρου λ

Απόκλιση Jump-diffusion assumption(λ=0.57)	*Απόκλιση Jump-diffusion assumption(λ=0.72)*
1.69	*1.58*
0.42	*0.35*
0.41	*0.56*
0.55	*0.14*

Όπως φαίνεται από το παραπάνω πίνακα παρατηρούμε μεγαλύτερη απόκλιση του μοντέλου μας για τιμή της παραμέτρου λ ίση με 0.57 σε σχέση με τη απόκλιση για λ ίσο με 0.72. Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω το λ δεν έχει μεγάλη επίδραση στο μοντέλο αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι αρκετή για να προσεγγίσουμε καλύτερα τις πραγματικές τιμές.

7.6.Σύγκριση αποτελεσμάτων μοντέλου jump diffusion με την απλή Black-Scholes

Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε σύγκριση του μοντέλου jump-diffusion με την κλασική Black-Scholes. Χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο jump-diffusion με τη παράμετρο λ ίση με 0.72 καθώς πλησίαζε καλύτερα τις πραγματικές τιμές. Στο παρακάτω πίνακα παρατίθενται τα αποτελέσματα της κλασικής Black-Scholes σε σύγκριση με τις πραγματικές τιμές.

Πίνακας 7. Σύγκριση αποτελεσμάτων του μοντέλου Black-Scholes με τις πραγματικές τιμές

Ημερομηνία	*Black-Scholes assumption*	*Real option price*
20.1.2011	*6.01*	*2.57*
20.2.2011	*7.04*	*13.71*
23.3.2011	*6.18*	*10.11*
19.4.2011	*6.30*	*3.49*

Ακολουθεί η κατά απόλυτη τιμή απόκλιση της Black-Scholes σε σχέση με το μοντέλο jump- diffusion με τη παράμετρο λ ίση με 0.72

Πίνακας 8. απόκλιση της απλής Black-Scholes από τις πραγματικές τιμές

Απόκλιση Black-Scholes assumption	*Απόκλιση Jump-diffusion assumption(λ=0.72)*
1.34	*1.58*
0.49	*0.35*
0.39	*0.56*
0.81	*0.14*

Ακολουθεί συγκεντρωτικός πίνακας σύγκρισης μοντέλων με πραγματικές τιμές:

Πίνακας 9. Σύγκριση της απλής Black-Scholes με το μοντέλο jump-diffusion σε σχέση με τις πραγματικές τιμές

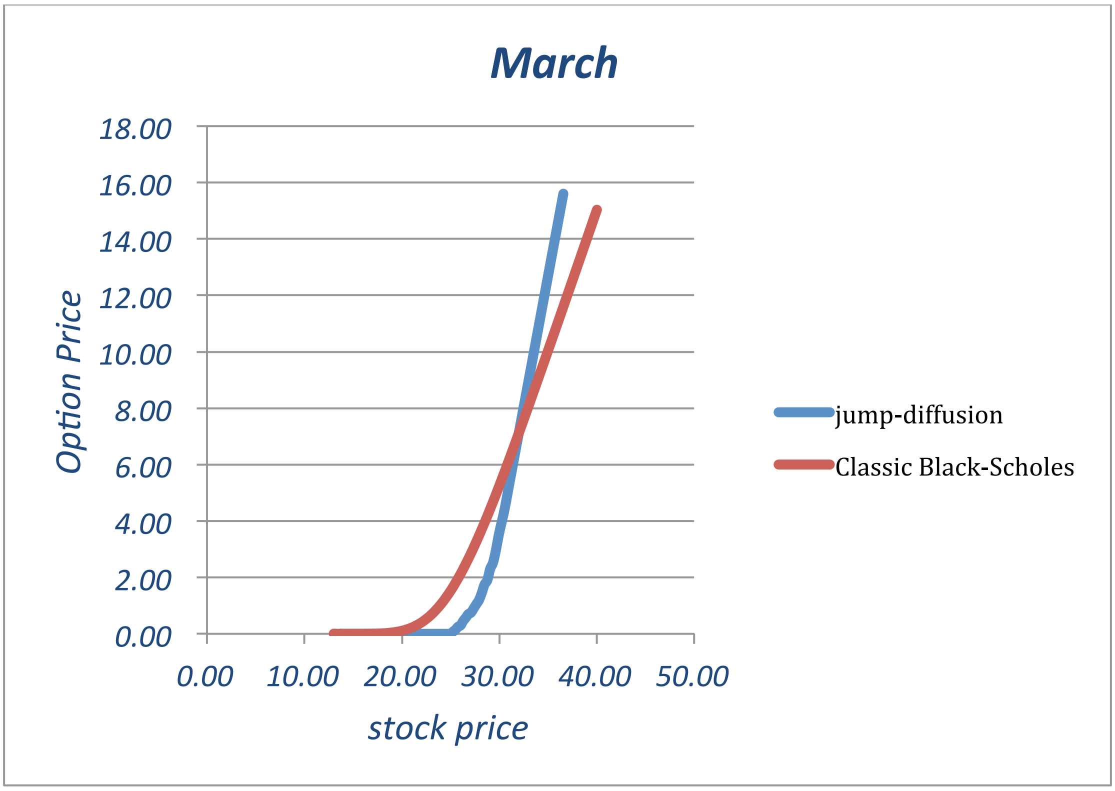
Ημερομηνία	*Black-Scholes assumption*	*Jump-diffusion assumption(λ=0.72)*	*Actual option price*
20.1.2011	*6.01*	*6.62*	*2.57*
20.2.2011	*7.04*	*8.85*	*13.71*
23.3.2011	*6.18*	*4.43*	*10.11*
19.4.2011	*6.30*	*2.99*	*3.49*

Από το παραπάνω πίνακα είναι εμφανές ότι το μοντέλο jump-diffusion ακολουθεί πιο απότομη συμπεριφορά στην αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος ενώ από την άλλη η απλή Black-Scholes δεν εμφάνιζει απότομες αυξομειώσεις. Όπως έχει αναφερθεί και στη θεωρία, η διαφορά των δυο αυτών μοντέλων έγκειται στο ότι το μοντέλο jump-diffusion ενσωματώνει ανέλιξη Poisson. Η σύγκριση, λοιπόν, αυτών των δυο μοντέλων αποτυπώνει τη συνεισφορά της ανέλιξης Poisson.

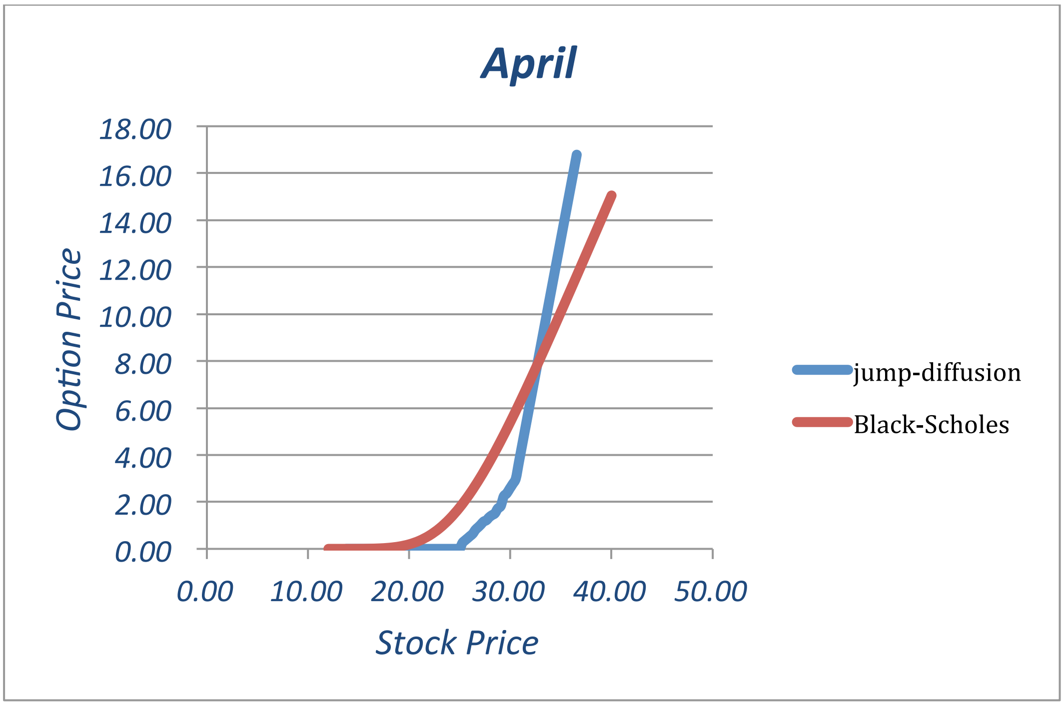
Ακολουθεί διαγραμματική απεικόνιση και για τα δυο μοντέλα, της αξίας του δικαιώματος σε σχέση με την τιμή της μετοχής για κάθε μήνα:

Διάγραμμα 5. Σύγκριση του κλασικού μοντέλου Black-Scholes με το μοντέλο jump-diffusion κατά τον Merton για την αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος κατά τον μήνα Ιανουάριο του 2011

Διάγραμμα 6. Σύγκριση του κλασικού μοντέλου Black-Scholes με το μοντέλο jump-diffusion κατά τον Merton για την αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος κατά τον μήνα Φεβρουάριο του 2011



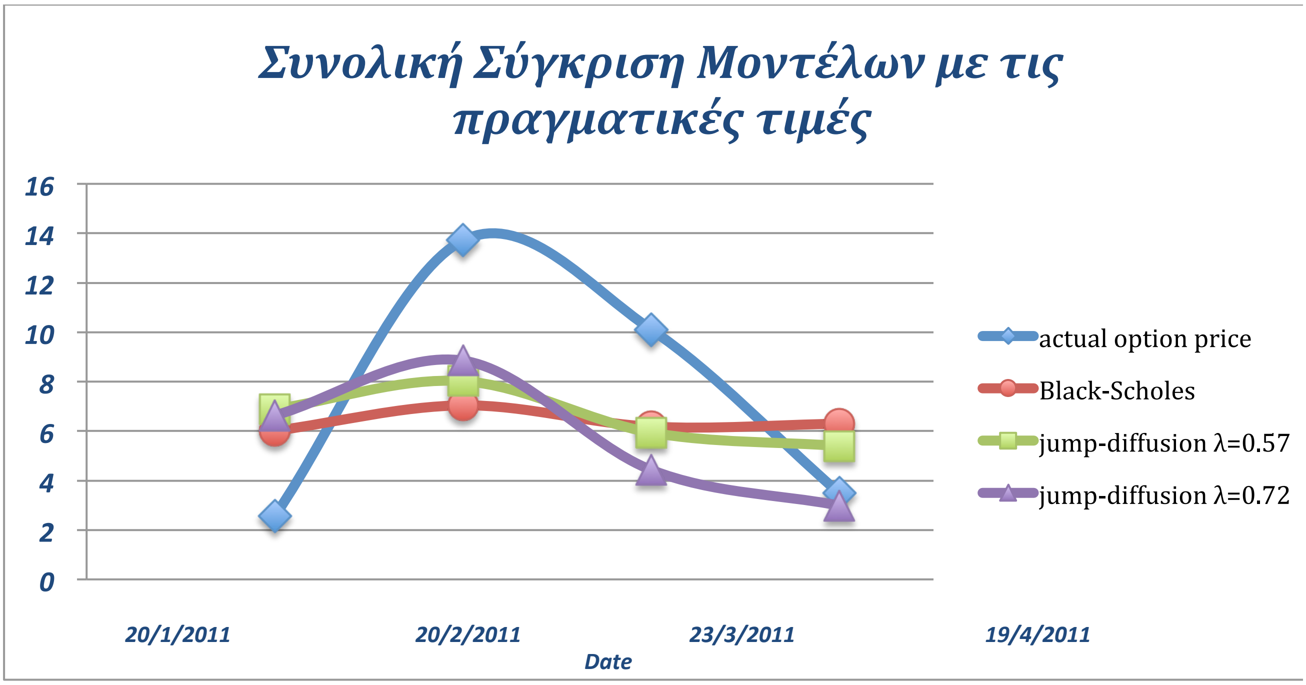
Διάγραμμα 7. Σύγκριση του κλασικού μοντέλου Black-Scholes με το μοντέλο jump-diffusion κατά τον Merton για την αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος κατά τον μήνα Μάρτιο του 2011



Διάγραμμα 8. Σύγκριση του κλασικού μοντέλου Black-Scholes με το μοντέλο jump-diffusion κατά τον Merton για την αποτίμηση της αξίας του δικαιώματος κατά τον μήνα Απρίλιο του 2011

Βλέπουμε ότι η συμπεριφορά των μοντέλων παραμένει σταθερή και για τους τέσσερις μήνες που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα, η απλή Black-Scholes υπερεκτιμά την αξία του δικαιώματος κοντά στην τιμή εξάσκησης, στην περίπτωσή μας είναι ίση του 25, ενώ στη συνέχεια όσο δηλαδή απομακρυνόμαστε από την τιμή εξάσκησης υποεκτιμάται η αξία του. Από την άλλη, το μοντέλο jump-diffusion κατά τον Merton κοντά στην τιμή εξάσκησης ανεβαίνει με χαμηλό ρυθμό ενώ απομακρυνόμενο σε τιμές μετοχής μεγαλύτερες του 25 αποδίδεται μεγάλη αξία στο δικαίωμα.

Τέλος, πραγματοποιείται μια συνολική διαγραμματική σύγκριση και των δυο μοντέλων με στόχο την αξιολόγησή τους ως προς την εκτίμηση της πραγματικής αξίας του δικαιώματος.



Διάγραμμα 9. Διαγραμματική απεικόνιση της αξίας του option όλων των μοντέλων συναρτήσει του χρόνου

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα η διακύμανση της πραγματικής τιμής του δικαιώματος είναι μεγάλη. Το μοντέλο jump-diffusion με τη σειρά του και για τις δυο τιμές της παραμέτρου λ παρουσιάζει σημαντική διακύμανση κάτι που δείχνει ότι τα μοντέλα αυτά προσομοιώνουν σε ικανοποιητικό βαθμό σχετικά μεγάλες και απότομες μεταβολές. Από την άλλη η απλή Black-Scholes έχει μικρή διακύμανση πράγμα που οφείλεται στην απλοποϊημένη μορφή της και στη σταθερή διακύμανση που εφαρμόζεται στο μοντέλο της και τη καθιστά λιγότερο ικανοποιητική στην αποτίμηση των δικαιωμάτων στην περίπτωσή μας.

Συμπεράσματα

Στη παρούσα διπλωματική εργασία έγινε μια προσπάθεια αξιολόγησης της μερικής διαφορικής εξίσωσης με ολοκληρωτικό όρο Black-Scholes αρχικά με τη μεταβολή των βασικών παραμέτρων της και στη συνέχεια συγκρίνοντας τα αποτελέσματά της εκτίμησης της αξίας του δικαιώματος προαίρεσης του μοντέλου αυτού με τις πραγματικές τιμές όπως δημοσιεύτηκαν από το χρηματιστήριο της Βιέννης[25].

Ακόμη, πραγματοποιήθηκε και σύγκριση με την απλή Black-Scholes για την αξιολόγησή της με μια απλούστερη εξίσωση στοχεύοντας στην εξαγωγή συμπερασμάτων. Η μελέτη αυτή αφορούσε δικαιώμα αγοράς επί μετοχών και εξετάστηκε η συμπεριφορά του εντός του χρηματικού ισοδύναμου.

Αναφορικά με τα αποτελέσματα, διαπιστώθηκε ότι στην περίπτωσή μας όπου η αξία του δικαιώματος έχει απότομη εναλλαγή το μοντέλο jump-diffusion προσεγγίζει ικανοποιητικα τις πραγματικές τιμές και συγκεκριμένα η συμπεριφορά του εμφανίζει ίδια τάση με την τάση των πραγματικών τιμών του δικαιώματος.

Από την άλλη πλευρά, η κλασική Black-Scholes δεν απέχει με τόσο σημαντική διαφορά από τις πραγματικές τιμές συγκρινόμενη και με το μοντέλο jump-diffusion. Η διαφορά της όμως έγκειται στο ότι δεν ακολουθεί την τάση της πραγματικής τιμής της αξίας του δικαιώματος, αλλά επειδή το υπερεκτιμά στο εύρος τιμών της μετοχής που εξετάζουμε καταφέρνει και προσεγγίζει καλύτερα στις υψηλές τιμές που διαθέτει.

Η διαφορά των δυο μοντέλων έγκειται στο ότι η απλή Black-Scholes περιγράφεται μόνο από Brownian κίνηση σε αντίθεση με το jump-diffusion μοντέλο το οποίο ενσωματώνει επιπλέον και την ανέλιξη Poisson. Η καλύτερη προσέγγιση στη τάση του δικαιώματος από το μοντέλο jump-diffusion έγκειται στη συνεισφορά της ανέλιξης Poisson[14].

Βιβλιογραφία

[1] Y.Ait-Sahalia, Disentangling diffusion from jumps, Journal of financial Economics 74, p.487-528, 2004

[2] A.Almendral, Cornelis W. Oosterlee, Numerical valuation of options with jumps in the underlying, Applied Numerical Mathematics 53,p.1-18, 2005

[3] L. Andersen, J. Andreasen, Jump-diffusion processes: Volatility smile fitting and numerical methods for option pricing, Kluwer Academic Publishers, p.231-262, 2000

[4] F. Black, M.S. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Economy 7, 1973

[5] S.Degiannakis, G.Filis, R.Kizysoil, price shocks and stock market volatility: evidence from european data, Bank of Greece, 2012

[6] A.Einstein, Investigations on the theory of Brownian movement, Dover pubications,1956

[7] P.Heider, Numerical Methods for Non-Linear Black–Scholes Equations Mathematisches Institut der Universität zu Köln, master thesis, 2009

[8] N.Hinde, Jumping hedges-hedging options under jump-diffusion, University of Oxford, master thesis, 2006

[9] J.C.Hull, Options, Futures, and others derivatives, Volume 7, Pearson Education International, 2009

[10] M.Kliaras, P.Burger, Jump Diffusion Models for Option Pricing vs the Black Scholes Model, University of Applied Sciences bfi Vienna, Working paper Series 81, 2013

[11] S.G.Kou, Jump-diffusion models for asset pricing in Financial Engineering, Columbia University, Handbooks in OR & MS, Vol. 15, 2008

[12] S.Kumar, Fast and efficient numerical methods for an extended Black–Scholes model, master thesis, 2013

[13] Y.Kwon, Numerical Methods of partial integro-differential equations for option price, department of mathematics, Trends in Mathematics - New Series, Volume 13, pages 1–5, 2011

[14] R.M.Lochowski, The Black-Scholes vs. the Merton jump-diffusion model applied to selected WIG20 companies in the year 2011, Warsaw School of Economics,2011

[15] K.Matsuda, Introduction to Merton Jump Diffusion Model, Department of Economics The City University of New York, 2004

[16] R.C.Merton, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1975

[17] R.C.Merton, Theory of racional option pricing, The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973

[18] G.H.Meyer,The numerical valuation of options with underlying jumps, Acta Math. Univ.Comenianae,Vol.LXVII,1,p. 69-82, 1998

[19] S.Salmi, J.Toivanen, An Iterative Method for Pricing American Options under Jump-Diffusion Models, Departement of Mathematical Information technology, Institute for Computational and Mathematical Engineering, Stanford, 2009

[20] S.Svoronos, Numerical solution and evaluation of the non-linear Black-Scholes equation, National Technical University of Athens, master thesis, 2013

[21] P.Tankov, E.Voltchkova, Jump-diffusion models: a practitioner's guide, University of Paris, University Of Toulouse, 2013

[22] D.Tavella, C. Randall, Pricing financial instruments: The finite difference method, John Wiley & Sons, Chichester, 2000

[23] J. Toivanen, Numerical valuation of European and American options under Kou's jump-diffusion model, 2008

[24] P. Wilmott, Derivatives, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1998

[25] http://en.wienerborse.at/static/cms/sites/wbag/media/de/pdf/prices_statistics/yearly_statistics/dm2011.pdf