



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

**“ Development of a numerical-computational methodology
for the simulation of unsteady flows with heat transfer ”**

Doctoral Dissertation

KONSTANTINOS G. STOKOS

Mechanical Engineer

M.Sc. in Computational Fluid Dynamics

SUPERVISOR:

SOKRATES TSANGARIS

Professor at National Technical University of Athens

Athens 2015



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

**“ Development of a numerical-computational methodology
for the simulation of unsteady flows with heat transfer ”**

Doctoral Dissertation

KONSTANTINOS G. STOKOS

Mechanical Engineer

M.Sc. in Computational Fluid Dynamics

ADVISORY COMMITTEE:

1. Professor S. Tsangaris (supervisor)
2. Associate Professor S. Voutsinas
3. Associate Professor J. Anagnostopoulos

EXAMINATION COMMITTEE:

1. Professor S. Tsangaris (supervisor)
2. Associate Professor S. Voutsinas
3. Associate Professor J. Anagnostopoulos
4. Professor D. Mathioulakis
5. Professor D. Papantonis
6. Assistant Professor D. Bouris
7. Lecturer V. Riziotis

Athens 2015

Approval of the doctoral dissertation from the School of Mechanical Engineering of the National Technical University of Athens does not imply acceptance of the opinions of the author (Law. 5343/1932, Article 202).

" "Knowledge is power". Rather, knowledge is happiness, because to have knowledge - broad, deep knowledge - is to know true ends from false, and lofty things from low. To know the thoughts and deeds that have marked man's progress is to feel the great heart-throbs of humanity through the centuries; and if one does not feel in these pulsations a heavenward striving, one must indeed be deaf to the harmonies of life."

Helen Keller

« Η γνώση είναι δύναμη», λένε. Αλλά η γνώση είναι και ευτυχία, γιατί αν αποχτάς τη γνώση - την πλατειά, βαθειά γνώση - ξεχωρίζεις τα αληθινά ιδανικά απ' τα ψεύτικα και τα μεγαλόπρεπα απ' τα χαμηλά. Το να γνωρίζεις τις σκέψεις και τις πράξεις, που σημάδεψαν την πρόοδο του ανθρώπου, είναι σα να αισθάνεσαι τους παλμούς της μεγάλης καρδιάς της ανθρωπότητας στο πέρασμα των αιώνων. Κι' άμα κανείς δε νοιώθει σ' αυτούς τους παλμούς μια πάλη για την κατάκτηση των ουρανών, είναι στ' αλήθεια κουφός στις αρμονίες της ζωής.»

Helen Keller

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Κατά τη διάρκεια της παρούσας διδακτορικής διατριβής σημαντική ήταν η καθοδήγηση που μου προσέφερε ο καθηγητής κ. Σωκράτης Τσαγγάρης. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερος για την εμπιστοσύνη που έδειξε προς το πρόσωπό μου όλα αυτά τα χρόνια, για την επιστημονική και ηθική υποστήριξή του.

Επίσης, ευχαριστώ τη Δρ. Θεοδώρα Πάππου και το Δρ. Σωκράτη Βραχλιώτη για την ουσιαστική συνεργασία που είχαμε. Χωρίς τη συνεισφορά τους η προσπάθεια αυτή θα ήταν λειπή. Ευχαριστώ ακόμα τον αναπληρωτή καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης κ. Ιωάννη Νικολό και τον Υπ. Δρ. Γεώργιο Λυγιδάκη για τη βοήθεια που μου προσέφεραν στο αντικείμενο της ακτινοβολίας. Πρέπει να αναφερθεί ρητά ότι η μέθοδος πεπερασμένων όγκων για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς ακτινοβολίας αναπτύχθηκε από αυτούς και μου δόθηκε σε μορφή υπορουτινών στα πλαίσια της συνεργασίας μας σε ερευνητικό πρόγραμμα. Ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη του εργαστηρίου, το Δρ. Χρήστο Μανόπουλο, τον Υπ. Δρ. Ιωσήφ Μουλίνο και τον Υπ. Δρ. Εμμανουήλ Αγγελίδη για ότι ο καθένας τους προσέφερε.

Επίσης, ευχαριστώ τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Σπυρίδωνα Βουτσινά και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Ιωάννη Αναγνωστόπουλο, για τις πολύτιμες συμβουλές τους κατά την τελική φάση της διατριβής.

Ευχαριστώ ακόμα τα μέλη της επταμελούς επιτροπής εξέτασης, τον καθηγητή κ. Δημήτριο Μαθιουλάκη, τον καθηγητή κ. Δημήτριο Παπαντώνη, τον επίκουρο καθηγητή κ. Δημήτριο Μπούρη και τον Λέκτορα κ. Βασίλειο Ριζιώτη για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν σε αυτή.

Ακόμα, πρέπει να αναφερθεί ότι κατά τη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών υπήρξα υπότροφος του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (I.K.Y.). Η προσφορά του I.K.Y. ήταν ιδιαίτερα σημαντική.

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της προσπάθειας θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους αυτούς που με στήριξαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, από το 2004 όπου εισήλθα στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ως προπτυχιακός φοιτητής μέχρι την περάτωση της παρούσας διατριβής.

Αυτοί λοιπόν οι οποίοι αισθάνομαι ότι με στήριξαν αυτά τα χρόνια είναι αρχικά τα μέλη της οικογένειάς μου, οι γονείς μου π. Γεώργιος και Νικολέττα και τα αδέρφια μου Ζωή, Θεόδωρος, Ελένη, Μαρία-Μαύρα και Επιφάνιος. Είναι αυτοί που με τις θυσίες τους διαμόρφωσαν το υπόβαθρο για να ασχοληθώ απρόσκοπτα με τις σπουδές μου. Επίσης, πολύ σημαντική ήταν η υποστήριξη που μου προσφέρθηκε από φίλους, από τη «μεγάλη παρέα». Είναι αυτοί που με «έσπρωξαν» με το δικό τους καλοπροαίρετο και διακριτικό τρόπο στο ανηφορικό μονοπάτι που οδήγησε στη μικρή αυτή κορυφή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την πλειοψηφία των καθηγητών της σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών και του διατμηματικού μεταπτυχιακού της Υπολογιστικής Μηχανικής. Τους ευχαριστώ για το μεράκι τους στη διδασκαλία και για την ίση αντιμετώπιση του φοιτητή στο πρόσωπο του οποίου έβλεπαν ένα συνάδελφό τους.

ACKNOWLEDGMENTS

During the period of the present doctoral dissertation, the guidance offered from Professor Sokrates Tsangaris was very important. I would like to thank him for his trust, his scientific and moral support.

I would also like to thank Dr. Theodora Pappou and Dr. Socrates Vrahliotis for the substantial cooperation we had. Without their contribution this effort would be deficient. The assistance provided in the field of radiation from the Associate Professor of Technical University of Crete Ioannis Nikolos and Ph.D. Candidate Georgios Lygidakis is acknowledged. It should be noted explicitly that the finite volume solver of the radiative transfer equation was developed by them and was given to us under our cooperation in a research project. I would also like to thank the colleagues of the laboratory, Dr. Christos Manopoulos, Ph.D. Candidate Iosif Moulinos and Ph.D. Candidate Emmanouil Angelidis.

Additionally, I would like to thank the other two members of the advisory committee, the Associate Professor Spyridon Voutsinas and the Associate Professor John Anagnostopoulos, and the members of the examination committee, Professor Dimitrios Mathioulakis, Professor Dimitrios Papantonis, Assistant Professor Dimitrios Bouris and Lecturer Vasilis Riziotis for their remarks on my work.

The financial support of the State Scholarships Foundation with a scholarship during my Ph.D. studies is also acknowledged.

Last but not least, I would like to thank my parents, siblings and friends for their support during the period of my studies in the National Technical University of Athens, from 2004 until today.

ABSTRACT

The aim of the present doctoral dissertation was the development of a numerical-computational methodology for the simulation of generally unsteady flows with concurrent heat transfer.

The developed flow solver is used for the simulation of two-dimensional or three-dimensional, incompressible, laminar or turbulent flows of a viscous and Newtonian fluid. For the necessary pressure and velocity coupling the artificial compressibility approach is applied. For the prediction of the buoyant flows of the incompressible fluid, density differences due to temperature differences are taken into account according to the Boussinesq approximation. For the turbulent flows two widely applied Reynolds averaged Navier-Stokes models are used; the $k-\omega$ SST model in its low-Re or high-Re version and the high-Re standard $k-\epsilon$ model.

The solver applies a node-centered finite volume discretization technique, using an edge-based and transparent approach on hybrid numerical meshes. For the calculation of the inviscid fluxes a Roe's approximate scheme have been developed. Temporal accuracy is achieved by an implicit dual time stepping scheme for the pseudo-time and physical-time marching.

All mean flow equations, i.e. continuity, momentum and energy equations, are solved strongly coupled. The strongly coupled solution was selected after the comparison with the loosely coupled one, which to the best of our knowledge has not been presented in the literature before for this set of equations. It showed faster convergence for significant inviscid effects and permitted us to use greater CFL numbers making convergence even faster.

For the radiative heat transfer two methods were applied. The first one is an analytical view factor based model and the second one a finite volume model.

After the development of the numerical methodology a series of representative benchmark test cases was solved for the validation of the solver, with quite promising results. The parallelization of the solver showed significant reduction in the time needed for the prediction of the flow/heat transfer problems.

After the validation and the confirmation of the high performance of the parallel solver we continued to the simulation of two fire cases in a ventilated tunnel. Fire events were simulated either taking into account radiation and wall conduction or not. Radiation and wall conduction modeling seemed to be necessary for the prediction of realistic temperature fields.

CONTENTS

EYXAPIΣTIEΣ	i
ACKNOWLEDGMENTS	iii
ABSTRACT	v
CONTENTS	ix
LIST OF FIGURES AND TABLES	xix
ΣΧΗΜΑΤΑ & ΠΙΝΑΚΕΣ	xxx
CHAPTER 1	
1. INTRODUCTION - LITERATURE SURVEY	1-1
1.1 Introduction	1-1
1.2 Modeling of convective heat transfer	1-5
1.3 Modeling of radiative heat transfer	1-7
1.3.1 View factor based methods	1-7
1.3.2 Flux methods	1-9
1.4 Thesis structure	1-15
CHAPTER 2	
2. MATHEMATICAL MODEL	2-1
2.1 Mean flow equations	2-2

2.1.1 Continuity equation	2-2
2.1.2. Momentum equations	2-2
2.1.3 Energy equation	2-4
2.2 Radiative transfer equation	2-4
2.3 Turbulence models	2-5
2.3.1 Standard k- ϵ turbulence model	2-6
2.3.2 k- ω SST turbulence model	2-8
2.3.3 Wall functions	2-10
2.4 Non-dimensionalization	2-11
2.5 Meaning of the dimensionless parameters	2-15
2.6 Vector form of equations	2-17

CHAPTER 3

3. NUMERICAL METHODOLOGY	3-1
3.1 Computational domain discretization	3-1
3.2. Mean flow equations spatial discretization	3-2
3.2.1 Inviscid fluxes term calculation	3-3
<i>Two-dimensional version</i>	3-4
<i>Three-dimensional version</i>	3-5
3.2.2 Viscous fluxes term calculation	3-8
3.2.3 Source term calculation	3-9
3.3 Turbulence equations spatial discretization	3-12
3.3.1 Inviscid fluxes term calculation	3-13

3.3.2 Viscous fluxes term calculation	3-13
3.3.3 Source term calculation	3-13
3.4 Temporal discretization, solution procedure	3-13
3.4.1 Linearization procedure	3-16
3.5 Radiation modeling	3-17
3.5.1 View factor based model	3-17
3.5.2 Finite Volume Method (FVM) model	3-20
3.6 Boundary conditions	3-23
3.6.1 Mean flow equations	3-23
<i>Inlet</i>	3-23
<i>Outlet</i>	3-24
<i>Solid walls</i>	3-24
<i>Symmetry boundaries</i>	3-26
3.6.2 Turbulence equations	3-26
3.6.3 Radiative transfer equation	3-27
<i>Inlet/Outlet</i>	3-27
<i>Solid walls</i>	3-27
<i>Symmetry walls</i>	3-29
3.7 Slope limiters	3-29
3.8 Schemes for preserving temperature within realistic bounds	3-31

CHAPTER 4

4. VALIDATION OF THE NUMERICAL METHODOLOGY	4-1
---	------------

4.1 Laminar flows	4-2
4.1.1 Extended Graetz problem 1	4-2
4.1.2 Extended Graetz problem 2	4-4
4.1.3 Differentially heated cubic cavity	4-8
4.1.4 Differentially heated square cavity	4-15
4.1.5 Internally heated cavity	4-25
4.1.6 Unsteady mixed convection past a square cylinder	4-27
4.1.7 Coupling methods comparison	4-33
4.1.8 Slope limiters use	4-37
4.2 Turbulent flows	4-38
4.2.1 Differentially heated cavities	4-38
4.3 Radiative heat transfer	4-55
4.3.1 Prismatic enclosure with equilateral triangular bases	4-55
4.3.2 Hexahedral enclosure with trapezoidal bases	4-57
4.3.3 Hexahedral enclosure with quadratic bases	4-59
4.3.4 Hexahedral enclosure with trapezoidal bases	4-64
4.4 Combined heat transfer	4-65
4.4.1 Combined heat transfer in a square cavity	4-66
4.4.2 Combined heat transfer in a cubic cavity	4-71
4.5 Conclusions	4-75

CHAPTER 5

5. PARALLEL PROCESSING	5-1
-------------------------------	------------

5.1 Two-dimensional cases	5-4
5.1.1 Differentially heated square cavity	5-4
5.2 Three-dimensional cases	5-10
5.2.1 Laminar flow in a differentially heated cubic cavity without radiation	5-11
5.2.2 Pure radiation in a differentially heated cubic cavity	5-11
5.2.3 Laminar flow in a differentially heated cubic cavity with radiation	5-12

CHAPTER 6

6. NUMERICAL STUDY: VENTILATED TUNNEL FIRES	6-1
6.1 Introduction	6-1
6.2 Test cases description	6-5
6.2.1 Boundary and initial conditions	6-6
6.3 Numerical solution	6-7
6.4 Results without radiation and wall conduction	6-8
6.4.1 Transient results	6-8
6.4.2 Steady state results	6-12
6.5 Simulations with radiation	6-16
6.5.1 Independence from the angular discretization	6-16
6.5.2 Radiative transfer equation solution	6-19
6.5.3 Results with radiation	6-19
6.6 Wall heat conduction	6-21
6.6.1 Results with wall heat conduction and radiation	6-24

CHAPTER 7

7. RECAPITULATION, CONCLUSIONS AND FUTURE WORK	7-1
7.1 Recapitulation and conclusions	7-1
7.2 Future work	7-6
Publications	7-7

ΕΚΤΕΝΗΣ ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή - Βιβλιογραφική επισκόπηση	ΕΠ-3
1.1 Εισαγωγή	ΕΠ-3
1.2 Μοντελοποίηση της συναγωγής	ΕΠ-5
1.3 Μοντελοποίηση της θερμικής ακτινοβολίας	ΕΠ-7
1.3.1 Μέθοδοι γωνιακών παραγόντων	ΕΠ-7
1.3.2 Μέθοδοι ροής	ΕΠ-9
1.4 Δομή της εργασίας	ΕΠ-15

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Μοντέλο	ΕΠ-19
2.1 Εξισώσεις μέσης ροής	ΕΠ-21
2.1.1 Εξίσωση συνέχειας	ΕΠ-21
2.1.2 Εξισώσεις ορμής	ΕΠ-21

2.1.3	Ενεργειακή εξίσωση	ΕΠ-22
2.2	Εξισώσεις μοντέλων τύρβης	ΕΠ-22
2.2.1	Εξισώσεις μοντέλου τύρβης k-ε	ΕΠ-22
2.2.2	Εξισώσεις μοντέλου τύρβης k-ω SST	ΕΠ-23
2.2.3	Συναρτήσεις τοιχώματος	ΕΠ-24
2.3	Εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας (EMA)	ΕΠ-25
2.4	Ερμηνεία αδιάστατων παραμέτρων	ΕΠ-26
2.5	Διανυσματική μορφή εξισώσεων	ΕΠ-27
Κεφάλαιο 3		
Αριθμητική Μεθοδολογία		ΕΠ-31
3.1	Διακριτοποίηση υπολογιστικού χωρίου	ΕΠ-31
3.2	Χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων μέσης ροής	ΕΠ-32
3.2.1	Υπολογισμός μη-συνεκτικών όρων	ΕΠ-32
3.2.2	Υπολογισμός συνεκτικών όρων	ΕΠ-34
3.2.3	Υπολογισμός όρων πηγής	ΕΠ-34
3.3	Χωρική διακριτοποίηση εξισώσεων τύρβης	ΕΠ-35
3.4	Χρονική διακριτοποίηση, διαδικασία επίλυσης	ΕΠ-36
3.5	Μοντελοποίηση της ακτινοβολίας	ΕΠ-37
3.5.1	Μοντέλο γωνιακών παραγόντων	ΕΠ-38
3.5.2	Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων (ΜΠΟ)	ΕΠ-39
3.6	Οριακές συνθήκες	ΕΠ-40
3.6.1	Εξισώσεις μέσης ροής	ΕΠ-40

3.6.2 Εξισώσεις τύρβης	ΕΠ-41
3.6.3 Εξίσωση Μεταφοράς Ακτινοβολίας (EMA)	ΕΠ-42
3.7 Περιοριστές	ΕΠ-42
 Κεφάλαιο 4	
Επικύρωση της Αριθμητικής Μεθοδολογίας	ΕΠ-45
4.1 Στρωτές ροές	ΕΠ-45
4.1.1 Πρόβλημα Graetz	ΕΠ-45
4.1.2 Ανωστική ροή σε κυβική κοιλότητα	ΕΠ-48
4.1.3 Μη-μόνιμη μικτή συναγωγή γύρω από αγωγό τετραγωνικής διατομής	ΕΠ-51
4.1.4 Σύγκριση μεθόδων σύζευξης εξισώσεων	ΕΠ-53
4.1.5 Επίδραση περιοριστών	ΕΠ-56
4.2 Τυρβώδεις ροές	ΕΠ-57
4.2.1 Ανωστική ροή σε κοιλότητες	ΕΠ-57
4.3 Μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία	ΕΠ-60
4.3.1 Εξαεδρική κοιλότητα με τετραγωνικές βάσεις	ΕΠ-60
4.4 Συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας	ΕΠ-65
4.4.1 Συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα	ΕΠ-65
4.4.2 Συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας σε κυβική κοιλότητα	ΕΠ-68
 Κεφάλαιο 5	
Παράλληλη Επεξεργασία	ΕΠ-71
5.1 Δισδιάστατες περιπτώσεις	ΕΠ-72

5.1.1 Ανωστική ροή σε τετραγωνική κοιλότητα	ΕΠ-72
5.2 Τρισδιάστατες περιπτώσεις	ΕΠ-73
5.2.1 Στρωτή ανωστική ροή σε κυβική κοιλότητα χωρίς την ακτινοβολία	ΕΠ-74
5.2.2 Μεταφορά θερμότητας αμιγώς με ακτινοβολία σε κυβική κοιλότητα	ΕΠ-74
5.2.3 Στρωτή ανωστική ροή σε κυβική κοιλότητα με ακτινοβολία	ΕΠ-75

Κεφάλαιο 6

Αριθμητική Μελέτη: Πυρκαγιά Αεριζόμενης Σήραγγας	ΕΠ-77
6.1 Περιγραφή περιπτώσεων	ΕΠ-77
6.1.1 Οριακές και αρχικές συνθήκες	ΕΠ-78
6.2 Αποτελέσματα χωρίς ακτινοβολία και αγωγή τοιχώματος	ΕΠ-79
6.2.1 Αποτελέσματα μεταβατικού σταδίου	ΕΠ-79
6.2.2 Αποτελέσματα μόνιμης κατάστασης	ΕΠ-82
6.3 Προσομοίωση με ακτινοβολία	ΕΠ-85
6.3.1 Επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς ακτινοβολίας	ΕΠ-85
6.3.2 Αποτελέσματα με την ακτινοβολία	ΕΠ-86
6.4 Αγωγή θερμότητας στο τοίχωμα	ΕΠ-87
6.4.1 Αποτελέσματα με την αγωγή και την ακτινοβολία	ΕΠ-87

Κεφάλαιο 7

Ανακεφαλαίωση, Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία	ΕΠ-89
7.1 Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα	ΕΠ-89
7.2 Μελλοντική εργασία	ΕΠ-91

Δημοσιεύσεις

ΕΠ-92

APPENDIX A

JACOBIANS OF VISCOUS FLUXES

A-1

REFERENCES

REF-1

LIST OF FIGURES AND TABLES

FIGURES

Figure 1-1 [Cen02]. Heat conduction through a solid wall ($\dot{Q} = Ak \frac{T_1 - T_2}{\Delta x}$).

Figure 1-2 [Cen02]. Heat convection types. Natural convection (left), forced convection (middle) and mixed convection (right).

Figure 1-3 [Mod03]. Electromagnetic wave spectrum.

Figure 1-4 [Cen02]. Radiative heat transfer between two surfaces in a closed cavity.

Figure 1-5. Angular discretization domain. Uniform angular discretization (left), FT_n angular discretization (right).

Figure 1-6 [Kim10]. Construction of the polygonal meshes.

Figure 3-1. Construction of dual volumes in two and three dimensions.

Figure 3-2. Comparison of energy equation source term distribution along x axis for one-dimensional cases, using both discretization schemes.

Figure 3-3. Comparison of energy equation source term distribution for two-dimensional cases, using both discretization schemes.

Figure 3-4 [Alb08]. Sketch of possible boundary surfaces formation. Parallel boundary faces (left), perpendicular boundary surfaces (right).

Figure 3-5 [Lyg12]. Angular discretization and solid angle S .

Figure 3-6. Definition of the control volume of a boundary node i .

Figure 3-7. Flow chart of the Bartnicki's algorithm.

Figure 4-1. Graetz problem 1. Sketch of the duct and boundary conditions [Sch70].

Figure 4-2. Graetz problem 1. Typical numerical mesh at a cross section.

Figure 4-3. Graetz problem 1. Comparison of radial temperature profile at two axial positions ζ .

Figure 4-4. Graetz problem 1. Temperature field on mid-plane $y=0$.

Figure 4-5. Graetz problem 2. Velocity profiles at three different positions along duct (left) and axial pressure drop along the duct (right).

Figure 4-6. Graetz problem 2. Radial temperature profiles at various axial positions ζ . Comparison with the analytical solution of the literature [Pap80].

Figure 4-7. Graetz problem 2. Axial temperature along the duct.

Figure 4-8. Graetz problem 2. Nusselt number as a function of axial position.

Figure 4-9. Graetz problem 2. Temperature field on mid-plane $y=0$.

Figure 4-10. Graetz problem 2. Pressure field on mid-plane $y=0$.

Figure 4-11. Differentially heated cubic cavity. Sketch of the cubic cavity and the boundary conditions (left) [Tri00]. A typical numerical mesh (right).

Figure 4-12. Differentially heated cubic cavity. Comparison of temperature profiles on $y=0.5$ and $z=0.5$, $Ra=10^3$ (left), $Ra=10^4$ (middle), $Ra=10^5$ (right) (o: [Rav08], continuous line: Present solver).

Figure 4-13. Differentially heated cubic cavity. Comparison of velocities profiles. u velocity profile on $x=0.5$ and $y=0.5$ (top row). w velocity profile on $y=0.5$ and $z=0.5$ (bottom row). $Ra=10^3$ (left column), $Ra=10^4$ (middle column), $Ra=10^5$ (right column) (o: [Rav08], continuous line: Present solver).

Figure 4-14. Differentially heated cubic cavity. u velocity field on mid-plane $y=0.5$ (left column). w velocity field on mid-plane $y=0.5$ (right column). $Ra=10^3$ (top row), $Ra=10^4$ (middle row), $Ra=10^5$ (bottom row).

Figure 4-15. Differentially heated cubic cavity. Pressure field on mid-plane $y=0.5$ (left column). temperature field on mid-plane $y=0.5$ (right column). $Ra=10^3$ (top row), $Ra=10^4$ (middle row), $Ra=10^5$ (bottom row).

Figure 4-16. Differentially heated square cavity. Sketch of the square cavity and the boundary conditions (left) [deV83a]. A typical numerical mesh (right).

Figure 4-17. Differentially heated square cavity. Comparison of temperature and velocities profiles. Temperature profile (left column). u velocity profile on $x=0.5$ (middle column). v velocity profile on $y=0.5$ (right column). $Ra=10^3$ (1st row), $Ra=10^4$ (2nd row), $Ra=10^5$ (3rd row), $Ra=10^6$ (4th row) (o: [Bar94], continuous line: Present solver).

Figure 4-18. Differentially heated square cavity. Velocity vectors for the cases of $Ra=10^3$ (left) and $Ra=10^6$ (right).

Figure 4-19. Differentially heated square cavity for $Ra=10^3$. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field (left column, bottom row), temperature field (right column, bottom row).

Figure 4-20. Differentially heated square cavity for $Ra=10^4$. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field (left column, bottom row), temperature field (right column, bottom row).

Figure 4-21. Differentially heated square cavity for $Ra=10^5$. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field (left column, bottom row), temperature field (right column, bottom row).

Figure 4-22. Differentially heated square cavity for $Ra=10^6$. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field (left column, bottom row), temperature field (right column, bottom row).

Figure 4-23. Internally heated cavity. Independence of the solution from the numerical mesh.

Figure 4-24. Internally heated cavity. Comparison of the temperature profile along the symmetry axis (left) (o: [Des11], \square Present solver). Isolines of temperature (right).

Figure 4-25. Internally heated cavity. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field (bottom row).

Figure 4-26. Mixed convection past a square cylinder. Sketch of the computational domain and the boundary conditions [Sha04b].

Figure 4-27. Mixed convection past a square cylinder. A typical mesh that was used (left). Mesh near the cylinder (right).

Figure 4-28. Mixed convection past a square cylinder. Comparison of Str for various Re , when $Ri=0$ (left) (\blacklozenge : [Rob99], \blacksquare : [Sha04], \bullet : Present solver). Comparison of Str for various Ri , when $Re=100$ (right) (\circ : [Sha04], \square : Present solver).

Figure 4-29. Mixed convection past a square cylinder. Streamlines for various Ri numbers.

Figure 4-30. Mixed convection past a square cylinder. Variation of coefficient of total drag C_D and rms values of the drag and lift coefficients fluctuations with Richardson number at $Re=100$ (\circ : [Sha04], \square Present solver).

Figure 4-31. Differentially heated square cavity. Convergence histories for the cases of $Ra=10^3$ (left column), $Ra=10^5$ (middle column) and $Ra=10^6$ (right column) through pseudo-time.

Figure 4-32. Differentially heated cubic cavity for $Ra=10^6$. Convergence histories through pseudo-time for u velocity (left column, top row), v velocity (middle column, top row) w velocity (right column, top row), pressure (left column, bottom row) and temperature (right column, bottom row).

Figure 4-33. Differentially heated cubic cavity for $Ra=10^6$. Convergence histories through pseudo-time for u velocity (left column, top row), v velocity (middle column, top row), w velocity (right column, top row), pressure (left column, bottom row) and temperature (right column, bottom row).

Figure 4-34. Numerical meshes in two-dimensions (left) and in three-dimensions (right).

Figure 4-35. Mean Nusselt number at the hot wall as a function of Ra number.

Figure 4-36. Differentially heated cavities. Comparison of two-dimensional and three-dimensional results. Temperature profiles (left column), u velocity profiles (middle column), v velocity profile (right column). $Ra=10^7$ (1st row), $Ra=10^8$ (2nd row), $Ra=10^9$ (3rd row), $Ra=10^{10}$ (4th row).

Figure 4-37. Turbulent natural convection; standard k- ϵ turbulence model; $Ra=10^7$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-38. Turbulent natural convection; standard k- ϵ turbulence model; $Ra=10^8$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-39. Turbulent natural convection; standard k- ϵ turbulence model; $Ra=10^9$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-40. Turbulent natural convection; standard k- ϵ turbulence model; $Ra=10^{10}$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-41. Turbulent natural convection; k- ω SST with wall functions; $Ra=10^7$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-42. Turbulent natural convection; k- ω SST with wall functions; $Ra=10^8$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-43. Turbulent natural convection; k- ω SST with wall functions; Ra=10⁹. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-44. Turbulent natural convection; k- ω SST with wall functions; Ra=10¹⁰. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-45. Turbulent natural convection; low-Re k- ω SST; Ra=10⁷. u velocity contour and numerical mesh (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row).

Figure 4-46. Turbulent natural convection; low-Re k- ω SST; Ra=10⁸. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row).

Figure 4-47. Turbulent natural convection; low-Re k- ω SST; Ra=10⁹. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-48. Turbulent natural convection; low-Re k- ω SST; Ra=10¹⁰. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

Figure 4-49. Schematic representation of the prismatic enclosure [Lyg12] (left). Numerical mesh in the middle cross section z=5 (right).

Figure 4-50. Dimensionless radiative heat flux at the bottom wall in the middle of the z distance ($z=5$).

Figure 4-51. Schematic representation of the prismatic enclosure [Lyg12] (left). Numerical mesh in the middle cross section $z=5$ (right).

Figure 4-52. Dimensionless radiative heat flux at the inclined wall in the middle of the z distance ($z=5$).

Figure 4-53. Schematic representation of the prismatic enclosure [Lyg12] (left). Numerical mesh in the middle cross section $z=5$ (right).

Figure 4-54. Independence of the average incident radiation for isotropic scattering from the angular mesh.

Figure 4-55. Comparison of the dimensionless radiative heat flux in y direction (top) and the dimensionless average incident radiation (bottom) for isotropic and anisotropic scattering along the center-line $x=0.5$ for $z=5$.

Figure 4-56. Comparison of the dimensionless radiative heat flux along the center-line $x=0.5$ when $z=0.5$ for anisotropic scattering.

Figure 4-57. Comparison of the dimensionless radiative heat flux along the center-line $x=0.5$ for anisotropic scattering for various emission coefficients ϵ .

Figure 4-58. Schematic representation of the hexahedral enclosure [Lyg12] (left). Numerical mesh (right).

Figure 4-59. Comparison of the dimensionless radiative heat flux onto the bottom face in the middle of the enclosure ($z=0.5$) (left). Independence of the solution (right).

Figure 4-60. Temperature profiles along the top wall ($z=1$) and bottom wall ($z=0$) in the middle of the y direction ($y=5$) for the case of the laminar convection without radiation effects.

Figure 4-61. Comparison of temperature profiles along the top wall ($z=1$) and bottom wall ($z=0$) in the middle of the y direction ($y=5$) when radiation effects are included and calculated using the VFBM.

Figure 4-62. Comparison of temperature profiles when radiative heat transfer is calculated using either the VFBM or the FVM.

Figure 4-63. Contours inside the enclosure for transparent (left column) and participating (right column) medium. u velocity (1st row), w velocity (2nd row), temperature (3rd row).

Figure 4-64. Radiative divergence contour for participating medium.

Figure 4-65. Distribution of the average heat flux in z direction along y axis for transparent medium ($T_o^* = 15$, $Pr=0.043$, $\tau=0$).

Figure 4-66. Distribution of the average heat flux in z direction along y axis for participating medium ($T_o^* = 17$, $Pr=0.016$, $\tau=1$, $Ra=10^6$).

Figure 4-67. Isothermal surfaces when radiation effects are not taken into account (left column) and when radiation effects are included (right column) ($T_o^* = 15$, $Pr=0.043$, $\tau=0$). $Ra=10^3$ (1st row), $Ra=10^4$ (2nd row), $Ra=10^5$ (3rd row), $Ra=10^6$ (4th row).

Figure 4-68. Dimensionless radiative heat flux onto the walls (left) and dimensionless radiative divergence on mid-plane $y=0.5$ ($T_o^* = 17$, $Pr=0.016$, $\tau=1$).

Figure 5-1. Mesh2 (10083 nodes and 15044 cells) decomposed into 8 partitions.

Figure 5-2. Speed-up (left column) and efficiency (right column) of the parallelization for mesh1 (1686 nodes and 2578 cells), using the k- ω SST turbulence model (up row) and the standard k- ϵ turbulence model (bottom row).

Figure 5-3. Speed-up (left column) and efficiency (right column) of the parallelization for mesh2 (10083 nodes and 15044 cells), using the k- ω SST turbulence model (up row) and the standard k- ϵ turbulence model (bottom row).

Figure 5-4. Speed-up (left column) and efficiency (right column) of the parallelization for mesh3 (18812 nodes and 34622 cells), using the k- ω SST turbulence model (up row) and the standard k- ϵ turbulence model (bottom row).

Figure 5-5. Comparison of the speed-ups (left column) and efficiencies (right column) of the parallelization among the numerical meshes.

Figure 5-6. Cubic cavity decomposed into 8 partitions.

Figure 5-7. Speed-up (left) and efficiency (right) of the parallelization for the laminar flow in a differentially heated cubic cavity without radiative heat transfer.

Figure 5-8. Speed-up (left) and efficiency (right) of the parallelization for the pure radiation in a differentially heated cubic cavity.

Figure 5-9. Speed-up (left) and efficiency (right) of the parallelization for the laminar flow in the differentially heated cubic cavity with radiative heat transfer.

Figure 6-1 [Kum04]. Mont Blanc tunnel fire.

Figure 6-2 [Kαβ99]. Operation of the three major mechanically induced ventilation types.

Figure 6-3. Sketch of the tunnel and heat source.

Figure 6-4. Numerical mesh used for the standard $k-\epsilon$ turbulence model with wall functions simulations. Section $y=2.7\text{m}$ near the vicinity of the heat source (top). Cross section $x=60\text{m}$ (bottom).

Figure 6-5. Numerical mesh used for the low-Re $k-\omega$ SST simulations. Section $y=2.7\text{m}$ near the vicinity of the heat source (top). Cross section $x=60\text{m}$ (bottom).

Figure 6-6. Temperature isolines through time for case 1. a) standard $k-\epsilon$ at 0.5s, b) low-Re $k-\omega$ SST at 0.5s, c) standard $k-\epsilon$ at 2s, d) low-Re $k-\omega$ SST at 2s, e) standard $k-\epsilon$ at 5s, f) low-Re $k-\omega$ SST at 5s, g) standard $k-\epsilon$ at 10s and h) low-Re $k-\omega$ SST at 10s.

Figure 6-7. Temperature isolines through time for case 2. a) standard $k-\epsilon$ at 0.5s, b) low-Re $k-\omega$ SST at 0.5s, c) standard $k-\epsilon$ at 2s, d) low-Re $k-\omega$ SST at 2s, e) standard $k-\epsilon$ at 5s, f) low-Re $k-\omega$ SST at 5s, g) standard $k-\epsilon$ at 10s and h) low-Re $k-\omega$ SST at 10s.

Figure 6-8. Velocity vectors at characteristic sections and moments for case 1 predicted by the standard $k-\epsilon$ model (left column) and the low-Re $k-\omega$ SST model (right column). Section $y=2.7\text{m}$ near the heat source at 0.5s (top row), cross section $x=60\text{m}$ at 1s (middle row) and cross section $x=60\text{m}$ at 5s (bottom row).

Figure 6-9. Velocity vectors at characteristic sections and moments for case 2 predicted by the standard $k-\epsilon$ model (left column) and the low-Re $k-\omega$ SST model

(right column). Section $y=2.7\text{m}$ near the heat source at 0.5s (top row), cross section $x=62\text{m}$ at 1s (middle row) and cross section $x=62\text{m}$ at 5s (bottom row).

Figure 6-10. Vertical temperature profiles at a distance of 18m (top) and 30m (bottom) downstream from the heat source for case 2, twenty seconds after fire breaking.

Figure 6-11. Flame shape comparison for case1. Present solver with the $k-\omega$ model (top), Ansys Fluent with the $k-\varepsilon$ model (bottom).

Figure 6-12. Flame shape comparison for case2. Present solver with the $k-\varepsilon$ model (top), Ansys Fluent with $k-\varepsilon$ model (bottom). Definition of the flame angle.

Figure 6-13. Comparison of temperature profiles along height when steady state was reached. Case1(top) and case2 (bottom).

Figure 6-14. Velocity vectors at section $y=2.7\text{m}$ and stagnation point (red circle).

Figure 6-15. Source term $\frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla Q_r$ along the length of the tunnel for $y=2.7\text{m}$ and $z=0.165\text{m}$ (half of the heat source height).

Figure 6-16. Radiative heat flux q_{x_j} along the length of the tunnel for $y=2.7\text{m}$ and $z=2.4\text{m}$ (ceiling of the tunnel).

Figure 6-17. Comparison of temperature profiles along height with the numerical results of Miloua et al. [Mil11] and the experimental results of Fletcher et al. [Fle94].

Figure 6-18. Temperature profiles along height calculated for adiabatic and conductive walls [Mil11].

Figure 6-19. Comparison of temperature profiles along height when radiation and wall heat conduction are taken into account with the numerical results of Miloua et al. [Mil11] and the experimental results of Fletcher et al. [Fle94].

TABLES

Table 4-1. Differentially heated cubic cavity. Maxima values of velocities compared to other researchers' results.

Table 4-2. Differentially heated cubic cavity. Nusselt number values compared to other researchers' results.

Table 4-3. Differentially heated square cavity. Nusselt number values compared to other researchers' results.

Table 4-4. Differentially heated square cavity. Maxima values of u and v velocities on the vertical and horizontal mid-planes respectively.

Table 4-5. Differentially heated square cavity. Total CPU time needed in seconds for each simulation using the Loosely Coupled (L-C) and Strongly Coupled (S-C) methods.

Table 4-6. δ parameter of wall functions for each Ra case.

Table 6-1 [Bea05]. Data on three of the most catastrophic tunnel fire accidents.

Table 6-2. Ventilation velocity and total heat release rate for case1 and case2.

Table 6-3. Calculated flame angle and back-layering length.

ΣΧΗΜΑΤΑ & ΠΙΝΑΚΕΣ

ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχήμα 1-1. Σφαίρα γωνιακής διακριτοποίησης. Ομοιόμορφη γωνιακή διακριτοποίηση (αριστερά), FT_n γωνιακή διακριτοποίηση (δεξιά).

Σχήμα 1-2 [Kim10]. Δημιουργία του πολυγωνικού πλέγματος.

Σχήμα 4-1. Προφίλ ταχυτήτων σε τρεις διαφορετικές θέσεις κατά το μήκος του αγωγού (αριστερά) και αξονική πτώση πίεσης κατά το μήκος του αγωγού (δεξιά).

Σχήμα 4-2. Ακτινικό θερμοκρασιακό προφίλ σε διάφορες αξονικές θέσεις ζ. Σύγκριση με την αναλυτική λύση της βιβλιογραφίας [Pap80].

Σχήμα 4-3. Αξονικό θερμοκρασιακό προφίλ.

Σχήμα 4-4. Αριθμός Nusselt συναρτήσει της αξονική θέσης του αγωγού.

Σχήμα 4-5. Σύγκριση των θερμοκρασιακών προφίλ για $y=z=0,5$. $Ra=10^3$ (αριστερά), $Ra=10^4$ (μέση), $Ra=10^5$ (δεξιά) (ο: [Rav08], συνεχής γραμμή: παρών επιλύτης).

Σχήμα 4-6. Σύγκριση θερμοκρασιακών προφίλ. Προφίλ u ταχύτητας για $x=y=0,5$ (πάνω γραμμή). Προφίλ w ταχύτητας για $y=z=0,5$ (κάτω γραμμή). $Ra=10^3$ (αριστερή στήλη), $Ra=10^4$ (μεσαία στήλη), $Ra=10^5$ (δεξιά στήλη) (ο: [Rav08], συνεχής γραμμή: παρών επιλύτης).

Σχήμα 4-7. Σύγκριση του Str συναρτήσει του Re , όταν $Ri=0$ (αριστερά) (♦:[Rob99], ■:[Sha04], ●: παρών επιλύτης). Σύγκριση του Str συναρτήσει του Ri , όταν $Re=100$ (δεξιά) (ο:[Sha04], □: παρών επιλύτης).

Σχήμα 4-8. Γραμμές ροής για διάφορους αριθμούς Ri .

Σχήμα 4-9. Συντελεστής αντίστασης C_D και rms τιμές των διακυμάνσεων του συντελεστή αντίστασης και άνωσης με τον αριθμό Ri για $Re=100$ (ο: [Sha04], □ παρών επιλύτης).

Σχήμα 4-10. Ιστορικό σύγκλισης στον ψευδοχρόνο για $Ra=10^3$ (αριστερή στήλη), $Ra=10^5$ (μεσαία στήλη) και $Ra=10^6$ (δεξιά στήλη).

Σχήμα 4-11. Μέσος αριθμός Nu στο θερμό τοίχωμα σαν συνάρτηση του αριθμού Ra .

Σχήμα 4-12. Σύγκριση των 2-Δ και 3-Δ αποτελεσμάτων. Θερμοκρασιακό προφίλ (αριστερή στήλη), προφίλ u ταχύτητας (μεσαία στήλη), προφίλ v ταχύτητας (δεξιά στήλη). $Ra=10^7$ (1^η γραμμή), $Ra=10^8$ (2^η γραμμή), $Ra=10^9$ (3^η γραμμή), $Ra=10^{10}$ (4^η γραμμή).

Σχήμα 4-13. Σχηματική αναπαράσταση της πρισματικής κοιλότητας [Lyg12] (αριστερά). Αριθμητικό πλέγμα στο επίπεδο $z=5$ (δεξιά).

Σχήμα 4-14. Μελέτη ανεξαρτησίας της μέσης προσπίπτουσας ακτινοβολίας για ισοτροπική σκέδαση από τη γωνιακή διακριτοποίηση.

Σχήμα 4-15. Σύγκριση της αδιάστατης ακτινοβολούμενης ροής θερμότητας στην y διεύθυνση (πάνω) και της αδιάστατης μέσης προσπίπτουσας ακτινοβολίας (κάτω) για ισοτροπική και ανισοτροπική σκέδαση κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ για $z=5$.

Σχήμα 4-16. Σύγκριση της αδιάστατης ακτινοβολούμενης ροής θερμότητας κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ για $z=5$ για ανισοτροπική σκέδαση.

Σχήμα 4-17. Σύγκριση της αδιάστατης ακτινοβολούμενης ροής θερμότητας κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ για ανισοτροπική σκέδαση για διάφορους συντελεστές εκπομπής τοιχωμάτων ϵ .

Σχήμα 4-18. Σύγκριση των θερμοκρασιακών προφίλ κατά μήκος του πάνω τοιχώματος ($z=1$) και κάτω τοιχώματος ($z=0$) στο μέσο της y διεύθυνσης ($y=5$) όταν η ακτινοβολία υπολογίζεται με τη ΜΓΠ (VFBM).

Σχήμα 4-19. Σύγκριση των θερμοκρασιακών προφίλ όταν η ακτινοβολία υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη ΜΓΠ (VFBM) και τη ΜΠΟ (FVM).

Σχήμα 4-20. Κατανομή της μέσης ροής θερμότητας στη z διεύθυνση κατά μήκος του y άξονα για διαφανές ρευστό ($T_o^* = 15$, $Pr=0,043$, $\tau=0$).

Σχήμα 4-21. Κατανομή της μέσης ροής θερμότητας στη z διεύθυνση κατά μήκος του y άξονα για συμμετέχον ρευστό ($T_o^* = 17$, $Pr=0,016$, $\tau=1$, $Ra=10^6$).

Σχήμα 5-1. Σύγκριση επιτάχυνσης (αριστερά) και βαθμού απόδοσης (δεξιά) της παραλληλίας μεταξύ των αριθμητικών πλεγμάτων.

Σχήμα 5-2. Επιτάχυνση (αριστερά) και βαθμός απόδοσης (δεξιά) της παραλληλίας για την περίπτωση της στρωτής ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα χωρίς την ακτινοβολία.

Σχήμα 5-3. Επιτάχυνση (αριστερά) και βαθμός απόδοσης (δεξιά) για την περίπτωση μεταφοράς θερμότητας αμιγώς με ακτινοβολία.

Σχήμα 5-4. Επιτάχυνση (αριστερά) και βαθμός απόδοσης (δεξιά) της παραλληλίας για την περίπτωση της στρωτής ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα με την επίδραση της ακτινοβολίας.

Σχήμα 6-1. Σχηματική παράσταση της σήραγγας και της πηγής θερμότητας.

Σχήμα 6-2. Διανύσματα ταχύτητας σε χαρακτηριστικές τομές και χρονικές στιγμές για την περίπτωση 1 με το standard k-ε μοντέλο (αριστερή στήλη) και το χαμηλών Reynolds k-ω SST μοντέλο (δεξιά στήλη). Τομή $y=2,7\text{m}$ κοντά στην πηγή θερμότητας στα 0,5s (πάνω γραμμή), τομή $x=60\text{m}$ στο 1s (μεσαία γραμμή) και τομή $x=60\text{m}$ στα 5s (κάτω γραμμή).

Σχήμα 6-3. Διανύσματα ταχύτητας σε χαρακτηριστικές τομές και χρονικές στιγμές για την περίπτωση 2 με το standard k-ε μοντέλο (αριστερή στήλη) και το χαμηλών Reynolds k-ω SST μοντέλο (δεξιά στήλη). Τομή $y=2,7\text{m}$ κοντά στην πηγή θερμότητας στα 0,5s (πάνω γραμμή), τομή $x=60\text{m}$ στο 1s (μεσαία γραμμή) και τομή $x=60\text{m}$ στα 5s (κάτω γραμμή).

Σχήμα 6-4. Σύγκριση σχημάτων φλόγας για την περίπτωση 1. Παρόν επιλύτης με το k-ω SST μοντέλο (πάνω), Ansys Fluent με το k-ε μοντέλο (κάτω).

Σχήμα 6-5. Σύγκριση σχημάτων φλόγας για την περίπτωση 2. Παρόν επιλύτης με το k-ω SST μοντέλο (πάνω), Ansys Fluent με το k-ε μοντέλο (κάτω). Ορισμός γωνίας φλόγας.

Σχήμα 6-6. Σύγκριση των προφίλ θερμοκρασίας κατά το ύψος. Περίπτωση 1 (πάνω) και περίπτωση 2 (κάτω).

Σχήμα 6-7. Διανύσματα ταχυτήτων στην τομή $y=2,7\text{m}$ και σημείο ανακοπής (κόκκινος κύκλος).

Σχήμα 6-8. Σύγκριση των θερμοκρασιακών προφίλ κατά το ύψος όταν η ακτινοβολία λαμβάνεται υπόψη με τα αποτελέσματα των Miloua et al. [Mil11] και Fletcher et al. [Fle94].

Σχήμα 6-9. Σύγκριση θερμοκρασιακών προφίλ κατά το ύψος όταν η ακτινοβολία και η αγωγή στο τοίχωμα λαμβάνονται υπόψη με τα αριθμητικά αποτελέσματα των Miloua et al. [Mil11] και τα πειραματικά αποτελέσματα των Fletcher et al. [Fle94].

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας 4-1. Σύγκριση μεγίστων τιμών ταχυτήτων με άλλους ερευνητές.

Πίνακας 4-2. Σύγκριση αριθμού Nu με άλλους ερευνητές.

Πίνακας 4-3. Χρόνος CPU σε δευτερόλεπτα για κάθε προσομοίωση χρησιμοποιώντας τις L-C και S-C μεθόδους.

Πίνακας 6-1. Ταχύτητα αερισμού και ισχύς για τις περιπτώσεις 1 και 2.

Πίνακας 6-2. Υπολογισμένη κλίση φλόγας και μήκος οπισθοροής.

CHAPTER 1

INTRODUCTION - LITERATURE SURVEY

1.1 Introduction

Flows with heat transfer, as all engineering multiphysics problems, can be studied experimentally, theoretically or computationally. Experimental investigation provides reliable data, limited only by the experimental error. However, experimental investigation is often prohibitive due to the necessary high cost and the fact that it may be time-consuming. Theoretical and computational methods are the most affordable and permit the investigation of various alternative cases with proper modifications on the model. Their applicability is mainly restricted by the assumptions made.

This doctoral dissertation aimed at developing a numerical-computational methodology for the simulation of generally unsteady incompressible and turbulent flows with concurrent heat transfer.

Heat transfer is the science that deals with the determination of spatial and temporal field of temperature and the rate of heat transfer. Heat is the form of energy that can be transferred from one system to another as a result of spatial temperature difference [Cen02]. The temperature difference is the driving force of heat transfer and the second law of thermodynamics requires that heat be transferred from systems of higher temperature to systems of lower temperature. In uniform temperature fields there is thermal equilibrium. Engineers', dealing with heat transfer problems, scope is to facilitate or to reduce the heat transfer. There are three ways of heat transfer that may occur simultaneously or not. These are conduction, convection and radiation. Below a brief description of each one is given.

Heat transfer through conduction is attributed to the microscopic motion of atoms or molecules. Conduction takes place at all states of matter; solid, liquid and gas. In

figure 1-1 an example of heat conduction in a solid is given, where macroscopic motion is absent.

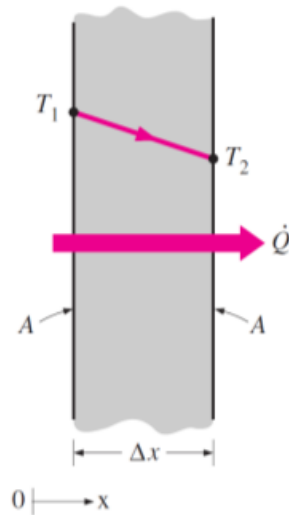


Figure 1-1 [Cen02]. Heat conduction through a solid wall ($\dot{Q} = Ak \frac{T_1 - T_2}{\Delta x}$).

Heat transfer due to convection is a result of the macroscopic motion of fluid and not of the microscopic motion of atoms or molecules, which also exists. Convection is divided into the natural (free) convection, forced convection and mixed convection. Natural convection is induced by buoyancy forces because of density differences caused due to temperature variations. Forced convection takes place when fluid motion is due to external means, such as a fan or a pump. Mixed convection is called when both natural and forced convection coexist. Examples of all convective heat transfer mechanisms are given in figure 1-2.

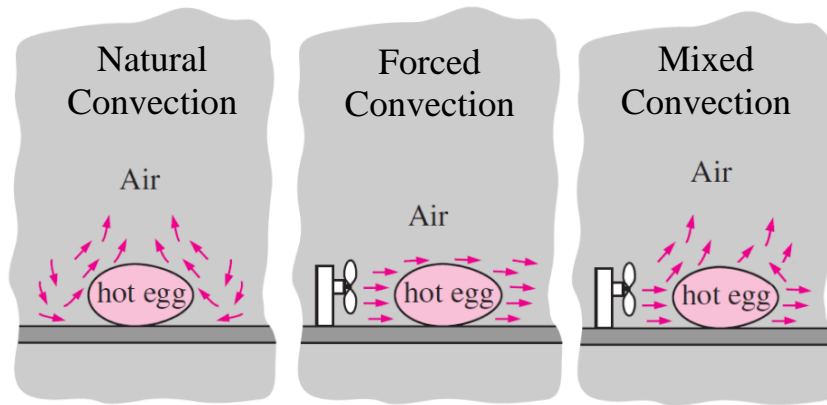


Figure 1-2 [Cen02]. Heat convection mechanisms. Natural convection (left), forced convection (middle) and mixed convection (right).

Thermal radiation is the energy emitted by bodies which temperature is above absolute zero, in the form of electromagnetic waves (alternative photons). Thermal radiation differs from other forms of electromagnetic radiation found in the electromagnetic spectrum. Its wavelength is between $0.1\mu\text{m}$ and $100\mu\text{m}$ (figure 1-3).

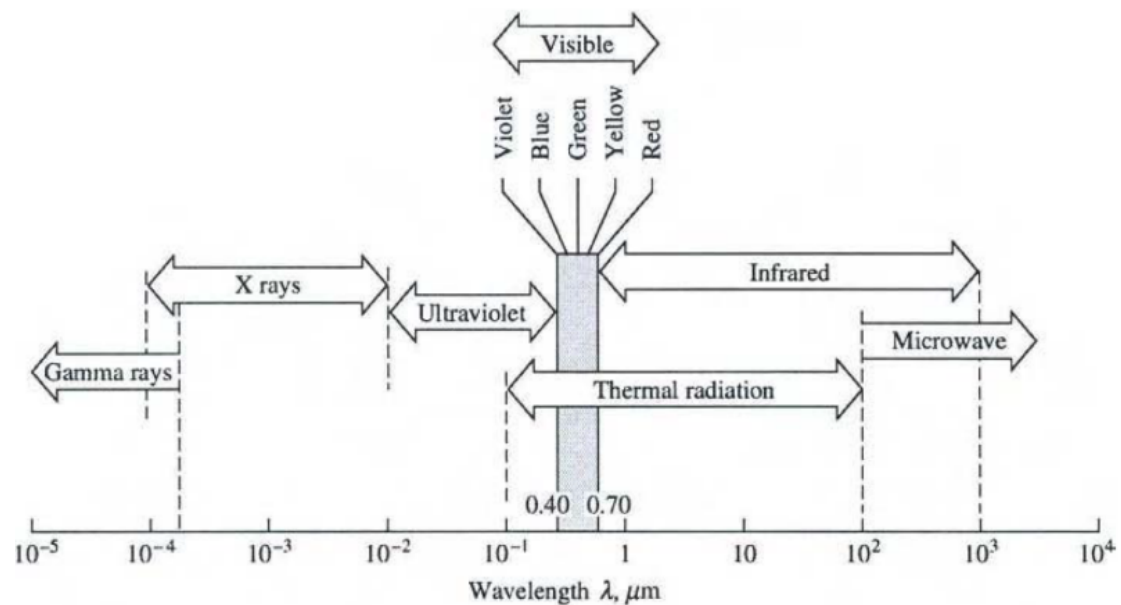


Figure 1-3 [Mod03]. Electromagnetic wave spectrum.

Thermal radiation differs from conduction and convection in that it does not require an intervening medium. On the contrary, thermal radiation is faster in the vacuum. Although thermal radiation have been studied in depth by several researchers, its mechanism is not fully understood [Φου03]. An example of how thermal radiation acts is the following. The sun, with its extremely high surface temperature (approximately equal to 6,000 °C) heats the earth through thermal radiation. In a case of a cold day, a man that stands under the shadow of a shelter feels cold. If he moves away from the shadow he feels warmer. Nevertheless, under the shadow or not the atmospheric temperature is the same. In figure 1-4 the radiative heat transfer between a surface and the surfaces surrounding it is shown.

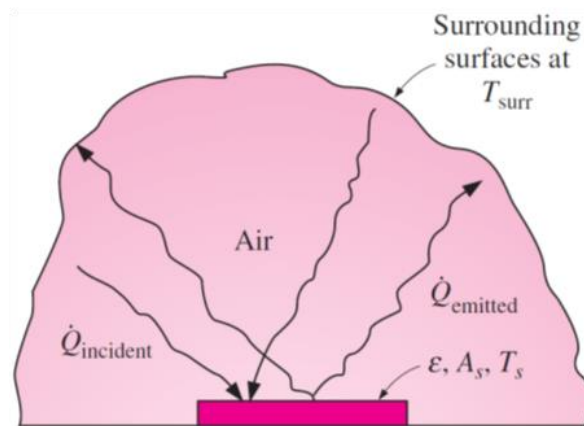


Figure 1-4 [Cen02]. Radiative heat transfer between two surfaces in a closed cavity ($\dot{Q}_e = \epsilon A_s \sigma (T_s^4 - T_{surr}^4)$).

As it was mentioned before, in this dissertation heat transfer and fluid flow are studied through the development of a numerical-computational methodology.

1.2 Modeling of convective heat transfer

Convective heat transfer is dominant in a wide variety of practical engineering problems, such as cooling of electronic chips [Xie14], design of heat exchangers [Ali14] and fire simulation in tunnels [Sto13a]. Nowadays, with the great progress in computer science, Computational Fluid Dynamics (CFD) has become a valuable tool for the simulation of such cases.

Many numerical studies have been published in the literature on the development of solvers for the simulation of convective heat transfer problems. Hortmann et al. [Hor90] applied a loosely coupled method¹ based on the SIMPLE algorithm for the prediction of the differentially heated square cavity case. Convergence to a grid-independent solution was achieved by a multigrid technique with high accuracy. Malan et al. ([Mal02a], [Mal02b]) developed and tested a finite volume method based on the artificial compressibility approach for the solution of laminar isothermal or non-isothermal viscous flows using unstructured grids. Their proposed method showed accuracy and robustness in a wide range of flow parameters. Liu et al. [Liu03] presented a fourth order finite difference method for the prediction of 2D buoyancy flows. Buoyancy was introduced in the vorticity transport equation by means of Boussinesq approximation. Below a brief description of issues concerning the development of an incompressible convective heat transfer solver are given.

The difficulty with the incompressible flows is on the coupling of the pressure and velocity fields during the numerical solution. For this coupling many techniques have been developed [Lak91]. The most popular approaches are the pressure correction method originally introduced by Harlow and Welch [Har65] and the artificial compressibility method originally introduced by Chorin [Cho67]. A thorough comparison of these two methods has been done by Tamamidis et al. [Tam96].

¹ Loosely and strongly coupled solution: The loose and strong coupling of a set of equations refers to the way that these equations are solved. When the loosely coupled solution is applied, equations are solved separately and iteratively until their convergence. When the strongly coupled solution is applied, equations are solved simultaneously. In this dissertation loose and strong coupling refers to the coupling of the continuity and momentum equations with the energy equation (heat transfer equation). Specifically, when the loosely coupled solution is applied continuity and momentum equations are first solved with the temperature field fixed and then the energy equation is solved with the velocity field fixed until convergence in pseudo-time. The antithesis of loosely coupled solution is the strongly coupled solution where all mean flow equations are solved simultaneously.

According to this study, the most attractive feature of the artificial compressibility method is the faster convergence as continuity and momentum equations are fully coupled.

Today, hybrid meshes are widely used ([And95], [Has00], [Kal05], [Vra12], [Sto12], [Sto13b]). Hybrid numerical meshes can combine efficient viscous layer resolving capability obtained from their structured elements, with the geometric flexibility of unstructured meshes [Kal05]. Therefore, they lead to significant savings in memory and computational time with satisfactory results.

Inviscid fluxes evaluation has received considerable attention in the CFD community. Developed schemes are distinguished into central and upwind schemes [Hir88]. Hybrid schemes, combining central and upwind schemes, are also found [Fer13]. Many works have been found in the literature based on central differencing schemes ([Swa92], [Lin06], [Mal02a], [Mal02b], [Kal05], [Lin97]). They gain in simplicity but they are susceptible to the odd-even mode decoupling, making artificial dissipation necessary. The most dominant in the upwind schemes is the scheme that is based on the Roe's approximate Riemann solver ([Kal05], [Liu98], [Yua02], [And95], [Shi01], [Azh08]). This approach is more complicated, but relieves us from artificial dissipation, since upwind schemes introduce artificial dissipation implicitly.

Our solver is based on a node centered finite volume discretization technique applying the artificial compressibility approach for the necessary pressure and velocity coupling. It utilizes an edge-based approach on hybrid numerical meshes containing triangles and quadrilaterals in the two-dimensional version and hexahedra, prisms, tetrahedra and pyramids in the three-dimensional version. Density variations due to temperature differences are simulated by means of the Boussinesq approximation.

Attention was paid to the strong coupling of the mean flow equations and the development of an efficient upwind scheme for the calculation of the inviscid fluxes. The Navier-Stokes and energy equations are solved simultaneously leading to the concurrent convergence of flow and temperature fields. A Roe's approximate Riemann solver was developed for the evaluation of the inviscid fluxes. For the discretization of the viscous fluxes a CPU-time efficient central scheme is used. Temporal accuracy is achieved by a fully implicit, dual time stepping scheme. The

algorithms for spatial and temporal discretization of the equations are mesh transparent².

1.3 Modeling of radiative heat transfer

Radiative heat transfer is present in a wide range of practical engineering problems. A simple rule for whether or not radiative heat transfer should be accounted for derives from the quantity $Q_{\text{rad}} = \sigma(T_{\text{max}}^4 - T_{\text{min}}^4)$, where σ is the Stefan Boltzmann constant. Radiative heat transfer should be accounted for if Q_{rad} is of comparable magnitude to the convection and conduction heat transfer rates.

For the computational simulation of radiation transfer plenty of methods have been proposed. These are mainly categorized in methods that are based on view factors and flux methods. Latter of them demand the satisfaction of the radiant energy conservation law in each control volume, in a similar way as CFD integral methods do.

1.3.1 View factor based methods

The first method based on view factors was Hottel's zone method [Hot67]. After the spatial discretization of the computational domain, the calculation of the view factors is required. The calculation of the view factors is computationally demanding. As the number of discrete boundary surfaces increases, the time needed for their calculation increases exponentially. This fact makes Hottel's zone method inappropriate for multidimensional problems, though view factors are geometric quantities and they are calculated once before the main calculation procedure. Analytical expressions could also be found in the literature for the view factors among surfaces ([Gro81], [Mod03]).

² Mesh transparent schemes: Mesh transparent are the schemes that have the same behavior to the different types of elements of hybrid meshes.

Monte Carlo method was introduced as a method for finding view factors in radiative heat transfer problems by Howell [How68]. It shows geometric flexibility but suffers from slow convergence rates [Ker94].

Many improvements and applications of view factor based methods have been found in the literature.

Balaji, Venkateshan and Singh ([Bal93], [Bal94], [Bal95], [Sin04]) studied laminar free convection in open and closed cavities taking into consideration the surface radiation. The same Cartesian and non-uniform grid was used for the calculation of fluid flow, convective heat transfer and radiation. View factors were calculated using crossed-string method [Mod03].

Ridouane et al. [Rid04] studied the interaction of surface radiation and natural convection in a Rayleigh-Benard type problem in a square enclosure. View factors were calculated using crossed-string method.

Sharma et al. [Sha07] studied the interaction of surface radiation and turbulent natural convection in a square cavity heated from below. View factors were calculated using crossed-string method.

Albanakis and Bouris [Alb08] used an analytical approach for thermal radiation modeling. This model applies in building enclosures with high wall emissivities and limited number of reflections among surfaces. View factors were calculated with analytical expressions for the boundary surfaces of a Cartesian grid.

Alvarado et al. [Alv08] studied the interaction of surface radiation and laminar natural convection in 2-D tilted cavities. View factors were calculated using crossed string method.

Rabhi et al. [Rab08] studied surface radiation and natural convection in inclined rectangular enclosures. View factors were calculated using the Monte Carlo method.

Ridouane et al. [Rid06] studied a Rayleigh-Benard type problem in a square enclosure. View factors were calculated using crossed-string method.

Something that should be mentioned is that all above studies were based on the assumption of non-participating medium³. Only thermal radiation among solid surfaces was modeled. Finally, the main advantage of view factor based methods is their simple programming.

1.3.2 Flux methods

Radiative flux methods operate in a similar way to CFD integral methods. The only difference is that radiative flux methods require angular discretization except for the spatial discretization. The dominant flux methods for the radiative heat transfer are the Discrete Ordinates Method (DOM) and the Finite Volume Method (FVM).

DOM was first used for the simulation of 3-D radiative heat transfer with isotropically and anisotropically scattering medium by Fiveland ([Fiv87], [Fiv88]). Many improvements and applications of the DOM have been found in the literature.

Yucel et al. [Yuc89] studied the laminar and steady natural convection in a differentially heated square cavity. A gray⁴, absorbing, emitting and isotropically scattering medium was assumed. Walls were assumed to be black⁵. A cell-centered scheme was used for the calculation of both mean flow equations and radiative transfer equation (RTE). Cell center radiation intensities and cell boundary radiation intensities were related using both the diamond scheme and the step (or upwind) scheme.

In 1994, Chai et al. [Cha94] presented a comparison of the most popular spatial differencing schemes⁶, i.e. positive, step and diamond schemes, using DOM in two

³ Non-participating or transparent is the medium that has no effect on the radiation passing through it. It acts like being vacuum.

⁴ Generally, gray is the body with uniform transmission, absorption and reflection of radiation for all wavelengths. Specifically, gray medium is the medium with constant absorption and scattering coefficients.

⁵ Black body absorbs all the radiation reaching it, i.e. emissivity coefficient is equal to unity.

⁶ Spatial differencing schemes are used to relate the cell center intensities (for a cell centered scheme) or node intensities (for a vertex centered scheme) to the face intensities that appear after the application of the divergence theorem in the radiative transfer equation.

dimensions. The step scheme was recommended as it produces realistic results. Diamond scheme produced in some cases negative intensities, which required a fix-up procedure (negative intensities were set equal to zero or a small value). In some cases both diamond and positive schemes occurred unrealistic overshoots for radiation intensity.

Colomer et al. [Col04] and Scarella et al. [Sca08] studied the interaction between radiation and laminar natural convection in a cubic differentially heated cavity. Medium was assumed to be absorbing and emitting but non-scattering. Walls were assumed to be black.

Lari et al. [Lar12] studied the interaction of thermal radiation and laminar natural convection in a 2-D differentially heated cavity, under the assumption of non-gray medium. RTE was solved using the DOM and the non-gray part of radiation was simulated using the full spectrum k-distribution method. Medium was assumed to be absorbing and emitting but non-scattering and walls were diffusely⁷ reflecting and emitting with constant emissivities.

FVM was first introduced by Raithby and Chui in 1990 [Rai90]. Many improvements and applications of the FVM have been found in the literature.

Chui and Raithby [Chu93] and Chai et al. [Cha95] applied the FVM on non-orthogonal, quadrilateral grids in two dimensions.

Baek et al. [Bae98] applied the FVM in 3D non-orthogonal enclosures. Medium was assumed to be absorbing, emitting and isotropically-scattering. Walls were diffusely emitting and reflecting. To overcome the control angle overlaps⁸ the overlapping

⁷ Diffuse reflection is the isotropic reflection of a wall, where there is no preferred direction for outgoing rays.

⁸ Control angle overlap is the bisection of a control angle by the control volume face. In such a control angle, incoming and outgoing radiations are overlapped. Methods found for the treatment of control angle overlap are the bold approximation method, the pixelation method and the exact method. When bold approximation is applied the overlapped control angle is assumed to be wholly either incoming or outgoing. Pixelation method requires the division of the control angle into smaller ones and then applies the bold approximation for the smaller overlapped angle. Finally, the exact approach exactly separates the angle into the incoming and outgoing part. For more information on the control angle overlap issue the reader is referred to [Kim01].

angles were divided into incoming and outgoing parts. Step spatial differencing scheme was applied.

In 1999 Rithby [Rai99] presented a comparison between DO and FV methods. Some of the weaknesses of the DOM were mentioned on the conservation of the radiant energy at boundaries when anisotropically-scattering medium is assumed. Furthermore, it was stated that careless angular discretization may lead to large errors.

Han and Baek [Han00] studied the effect of radiation to the steady laminar natural convection in an enclosure with two baffles. Fluid was assumed to be absorbing, emitting and isotropically scattering. Walls were assumed to be diffusive. The step spatial differencing scheme was used.

In 2000 Kim and Huh [Kim00] introduced a new non-uniform angular discretization scheme applied with the FVM. The FT_n FVM is compatible with absorbing, emitting and anisotropically scattering fluid. This scheme implies that if the polar angle is divided uniformly in an even number n , then the azimuthal angle is uniformly divided into the numbers of the sequence of 4, 8, 12, ..., $2n-4$, $2n$, $2n-4$, ..., 8, 4 (figure 1-5). The number of all control angles results to be $n(n+2)$. The FT_n scheme results in a better distribution of the discretized control angles compared to the uniform angular discretization with N_θ polar and N_ϕ azimuthal subdivisions ($N_\theta \times N_\phi$). The FT_n FVM gave more accurate results than the DOM and the FVM with uniform angular discretization for the same total number of angles, apart from the case of optically thick medium (large absorption coefficient).

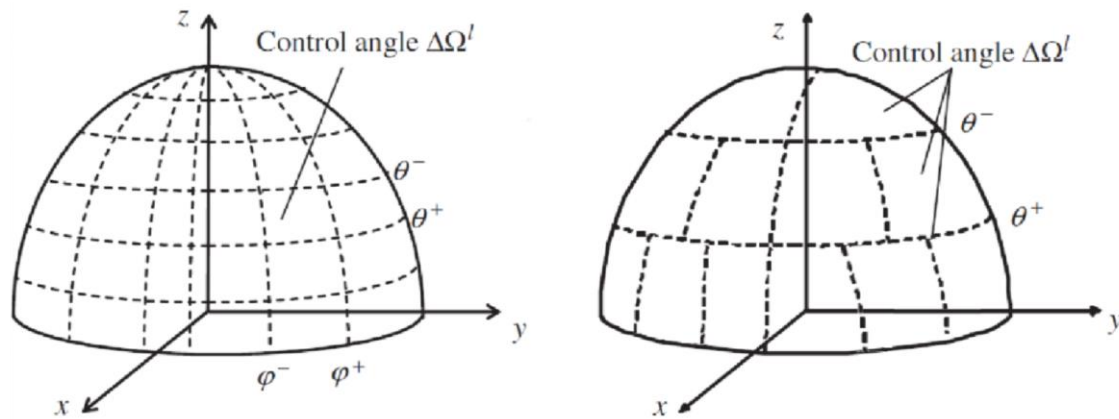


Figure 1-5. Angular discretization domain. Uniform angular discretization (left), FT_n angular discretization (right).

Kim et al. [Kim01] applied the FVM in 2-D geometries with obstacles, discretized with unstructured triangular grids. The step spatial differencing scheme was applied. Regarding the treatment of the unavoidable control angle overlap (unstructured grid), three different schemes were compared for their accuracy and computational cost; the bold approximation scheme, the pixelation method and the exact treatment scheme. Pixelation method and exact treatment scheme showed better accuracy than the bold approximation method for a small number of control angles, but with a higher computational cost.

In 2004 Trivic [Tri04] combined the FVM for the radiative transfer equation with a weighted sum of gray gases model (WSGGM) used for non-gray mediums.

Kim et al. [Kim05] applied the FVM for the radiation transfer on hybrid grids in two and three dimensions. Medium was assumed to be gray, absorbing and emitting. Walls were diffusely emitting and reflecting. Pixelation method was adopted for the unavoidable control angle overlapping. Step differencing scheme was adopted. Computations were performed in parallel using a spatial domain decomposition approach. Apart from the pure radiation transfer cases studied, the cases of laminar natural convection and laminar natural convection-radiation in a cavity were simulated. Parallelization of the code showed a considerable reduction in the computational load. Speed-up calculated for the laminar natural convection-radiation was less than the speed-up for the pure natural convection case for the same number

of processes. This was attributed to the higher message-passing load, because of the angular discretization of the RTE.

Kumar and Eswaran [Kum08] used the FVM to study the interaction of radiation and fluid flow in a conical diffuser. The flow was assumed to be laminar and incompressible. Natural convection was neglected. The medium was assumed to be gray, absorbing, emitting and scattering. The spatial differencing scheme used was a combination of the step scheme and the diamond scheme.

Borjini et al. [Bor08] studied the interaction of radiation and natural convection in a differentially heated cubic cavity. For the discretization of the radiative transfer equation the FT_n FVM method was used. The medium was assumed to be gray, absorbing, emitting and isotropically scattering. Gray and diffusive surfaces were assumed. For the validation of the developed methodology, the cases solved with the DOM by Colomer et al. [Col04] were used. Remarkable differences were observed.

Ko and Anand [Ko08] studied the conjugate case of forced convection and radiation in a backward facing step using the FVM both for the radiative transfer equation and the mean flow equations. Flow was assumed to be steady, incompressible and laminar. Medium was assumed to be gray, absorbing, emitting and scattering. Variation of the thermophysical properties with temperature was also considered. Walls were assumed to be opaque⁹ and diffusive. The effect of the optical thickness and scattering albedo on the flow were studied. The diamond spatial differencing scheme was applied.

Mondal and Mishra [Mon09] studied the conjugate natural convection and radiation in a square cavity. The medium was assumed to be gray, absorbing, emitting and isotropically scattering and walls were gray-diffusively reflecting and emitting.

Kim et al. [Kim10] applied the FVM in an axisymmetric enclosure, spatially discretized using unstructured polygonal meshes. For the creation of the polygonal meshes, an unstructured triangular mesh was first produced. Then centers of triangles were connected creating the polygonal mesh (figure 1-6). Fluid was assumed to be

⁹ Opaque wall: In normal conditions, part of the radiation that reaches a wall is transmitted, absorbed and reflected. Opaque is the idealized wall that does not allow radiation to be transmitted through it, but only absorbs and reflects radiation.

absorbing, emitting and isotropically scattering. Step spatial differencing scheme was applied.

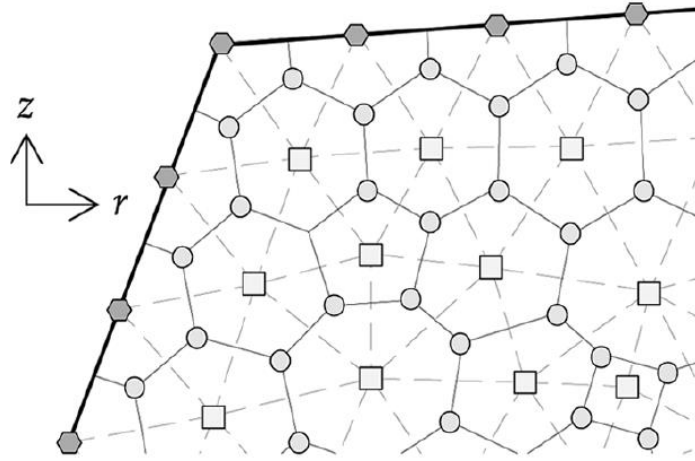


Figure 1-6 [Kim10]. Construction of the polygonal meshes.

Kolsi et al. [Kol11] studied the combined natural convection and radiation in three dimensional cavities. Flow was assumed to be incompressible and laminar. The FT_n FVM was applied for the discretization of the radiative transfer equation. Medium was gray, absorbing, emitting and isotropically scattering. Walls were diffusively reflecting and emitting. For the validation of the developed method the case presented by Colomer et al. [Col04] was used, with remarkable differences.

In 2012 Lygidakis and Nikolos [Lyg12] presented a three dimensional solver for the steady radiative transfer equation, based on the FVM. This solver could be applied for gray, absorbing, emitting and scattering (isotropically or anisotropically) media and diffusive opaque boundaries. It is a node-centered solver for hybrid grids. The step spatial differencing scheme is adopted with the bold approximation for the control angle overlapping. The parallelization of the solver, based on the domain decomposition approach, showed remarkable reduction of the computational load. The solver was validated through five benchmark test cases. Afterwards, Lygidakis and Nikolos [Lyg13b] enhanced their FVM solver, using a second order accurate spatial and temporal approach and a grid adaptation technique. Specifically, the second order Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws (MUSCL) was

applied with either the Van Albada-Van Leer limiter or the Min-Mod limiter, to facilitate monotonicity. Since radiation intensity is a positive quantity by definition, negative values coming from the second-order scheme were fixed-up setting them to zero. They stated that although the fixing practice assure greater or equal to zero values for the radiative intensity, oscillations may be produced. In order to face them they turned to the time dependent RTE, for the solution of which the second-order accurate four stage Runge-Kutta was utilized. Regarding the grid adaptation they applied the h-refinement approach, which constitutes a grid refinement approach. For the treatment of the overlapped control angles the pixelation method was added as an alternative to the bold approximation approach. Finally, they proposed an implicit way for the boundary conditions in opaque and diffusive surfaces and symmetric planes.

Two of the above mentioned methods were incorporated into our code. Firstly, we developed the method of Albanakis and Bouris [Alb08] which is an analytical one, applicable in enclosures with high wall emissivities and limited number of reflections among the boundary surfaces. The medium is taken as transparent. This method was easily programmed but showed to be quite costly in terms of computational time and storage when used with the serial version of the solver. The second method has been presented ([Lyg12], [Lyg13]) and programmed into code by Lygidakis and Nikolos. It is a node centered FVM, applicable for gray, absorbing, emitting and scattering medium. The fact that the radiation code was based on a node centered edge-based algorithm facilitated its incorporation into the flow solver. More details on both methods are given in chapter 3.

1.4 Thesis structure

The structure of the thesis is the following:

- In chapter 1 the aim of the dissertation and the literature survey was given. A general description of the heat transfer modes was presented. Then, the literature survey and our modeling on convective and radiative heat transfer were described.

- In chapter 2 the mathematical background regarding the incompressible flow of viscous and Newtonian fluids combined with heat transfer with all modes (conduction, convection and radiation) is presented.
- In chapter 3 the numerical methodology is outlined. Specifically, the techniques used for the spatial and temporal discretization of the equations are presented. Models used for the radiative heat transfer and the application of the boundary conditions are analyzed.
- In chapter 4 the validation of the solver is presented. Specifically, cases of buoyant laminar and turbulent flow, pure radiative heat transfer and combined heat transfer are given. The effect of two slope limiters and coupling methods is also discussed. Test cases with a wide range of input parameters were simulated in order to estimate the general applicability of the solver.
- In chapter 5 the performance of both the two-dimensional and three-dimensional parallel solver is tested. What interests us is the variation of speed-up and efficiency with the number of processes.
- In chapter 6 the application of the solver for the prediction of smoke flow and temperature field in ventilated tunnel fire scenarios is presented. The importance of modeling all heat transfer modes (convection, radiation, wall conduction) is revealed in a series of simulations.
- Finally, in chapter 7 the main findings and the innovative elements of the thesis are summarized and future improvements of the developed solver are discussed.

CHAPTER 2

MATHEMATICAL MODEL

In this chapter the mathematical model of the dissertation is presented. The development of the mathematical model into computational code, will give us the opportunity to simulate conjugate flow and heat transfer problems with all means (conduction, convection and/or radiation). Equations are written in Cartesian coordinates and tensorial form to distinguish the two dimensional and three dimensional versions.

Flow equations describe the unsteady incompressible laminar or turbulent flow. Viscous and Newtonian fluid was assumed. Viscous dissipation in the energy equation is neglected, because the thermal energy due to viscous shear in incompressible flows is small [Mal02a]. For the prediction of buoyant flows the Boussinesq buoyant approximation [Bou07] is implemented, while for the turbulence modeling the Boussinesq eddy viscosity approximation [Bou07] is adopted. The difference between the two Boussinesq approximations is in their scope. The first one is used for the prediction of buoyancy in incompressible buoyant flows and the latter for the prediction of turbulent flows under the concept of eddy viscosity.

Mean flow equations, turbulence equations and radiative transfer equation (RTE) are written in their dimensional and dimensionless form under the application of reference scales. The physical meaning of the dimensionless parameters is given and finally mean flow and turbulence equations are presented in vector form under the concept of artificial compressibility, which is used for the pressure-velocity coupling.

2.1 Mean flow equations

2.1.1 Continuity equation

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2-1)$$

where subscript $j=1, 2, 3$. Cartesian velocity components are $(u_1, u_2, u_3)=(u, v, w)$ and Cartesian coordinates are $(x_1, x_2, x_3)=(x, y, z)$.

2.1.2 Momentum equations

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \rho g \delta_{i\kappa} \quad (2-2)$$

where t is the physical time, ρ is the density, p is the static pressure, $\mu_{\text{eff}}=\mu+\mu_t$ is the effective dynamic viscosity composed of the molecular dynamic viscosity μ and the eddy dynamic viscosity μ_t , g is the gravitational acceleration and $\delta_{i\kappa}$ is Kronecker's delta. Subscript κ is a constant equal to 2 in the two dimensional version of the momentum equations and 3 in the three dimensional version. Through this constant, gravity force acts in the y direction in the two dimensional version of the momentum equations and in the z direction in the three dimensional version.

The first term of the left-hand side expresses the rate of change of the momentum in time, while the second term of the left-hand side expresses the convection of momentum. The right-hand side expresses the forces that act in the fluid which are the forces due to the pressure gradient, due to the shear stresses and due to the gravity.

As mentioned before both continuity and momentum equations correspond to incompressible fluid, which implies that density remains constant. Under this assumption gravity force term remains also constant. However, for buoyant flows induced due to temperature variations this has no physical meaning and density differences need to be taken into account in the direction that gravity acts. For the prediction of buoyant flows of incompressible fluids many approximations have been proposed ([Bou07], [Han00], [Hun02], [Spa03], [Sca08]). In this dissertation density

differences due to temperature variations are simulated by means of the Boussinesq buoyant approximation.

According to the Boussinesq buoyant approximation, in the momentum equation where gravity force acts, we introduce a fictive hydrostatic state defined by

$$-\frac{\partial p_o}{\partial x_i} \delta_{ik} = \rho_o g \delta_{ik} \quad (2-3)$$

where p_o and ρ_o denote the hydrostatic pressure and density respectively.

Then momentum equation becomes

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial (p - p_o \delta_{ik})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - (\rho - \rho_o) g \delta_{ik} \quad (2-4)$$

Defining the reduced pressure $p' = p - p_o \delta_{ik}$ we have

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - (\rho - \rho_o) g \delta_{ik} \quad (2-5)$$

Below, prime (') is removed from the pressure.

According to Boussinesq equation of state

$$(\rho - \rho_o) = -\beta_T \rho (T - T_o) \quad (2-6)$$

where β_T is the thermal expansion coefficient and T_o is the temperature for which $\rho = \rho_o$, called the reference temperature. Then momentum equation becomes

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \beta_T \rho (T_o - T) g \delta_{ik} \quad (2-7)$$

Dividing all terms with the density ρ we conclude to

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \beta_T (T_o - T) g \delta_{ik} \quad (2-8)$$

where $\nu_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} / \rho$ is the effective kinematic viscosity composed of the molecular kinematic viscosity ν and the eddy kinematic viscosity ν_t .

2.1.3 Energy equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(Tu_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + \frac{\dot{q}_c}{\rho C_p} - \frac{\nabla Q_r}{\rho C_p} \quad (2-9)$$

where T is the temperature, Pr is the Prandtl number, Pr_t is the turbulent Prandtl number, C_p the specific heat at constant pressure, \dot{q}_c is the heat release rate per unit volume and ∇Q_r is the radiative divergence which is active only for participating medium in radiative heat transfer. The definition of the radiative divergence is given below, in the section of the radiative transfer equation (RTE).

The left-hand side expresses the rate of change of the temperature in time and the convection of temperature. The first term of the right-hand side expresses the diffusion of temperature, the second term the volumetric heat source and the last one the radiative energy, for participating medium in radiative heat transfer.

2.2 Radiative transfer equation

For absorbing, emitting and scattering gray media the integro-differential time-dependent Radiative Transfer Equation (RTE) is

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(\vec{r}, \hat{s})}{\partial t_r} + \frac{\partial I(\vec{r}, \hat{s})}{\partial s} = -(\kappa_a + \sigma_s)I(\vec{r}, \hat{s}) + \kappa_a I_b(\vec{r}) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I'(\vec{r}, \hat{s}') \Phi(\hat{s}, \hat{s}') d\omega \quad (2-10)$$

In the RTE the dependent variable is the radiation intensity I which is a function of the spatial position \vec{r} and the angular direction \hat{s} . t_r is the physical time, but in this dissertation it is used as a pseudo-time, called RTE pseudo-time. More information on the RTE pseudo-time will be given in chapter 3. c is the speed of light in the medium, \hat{s} is the unit vector in s direction of a solid angle, κ_a is the absorption coefficient of the medium, σ_s is the scattering coefficient and Φ is the scattering phase function. I_b is the blackbody intensity which depends only on the temperature of the medium and it is defined as

$$I_b(\vec{r}) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (2-11)$$

where σ is the Stefan-Boltzmann constant ($5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$).

The first term in the left-hand side expresses the rate of change of the radiative intensity in time, while the second term expresses the rate of change of the radiative intensity in direction s . The first right-hand side term describes the attenuation by absorption and scattering to other directions, the second is the emission source term and the last one is the in-scattering integral, describing the intensity gained by scattering from all other directions s' to the examined direction s .

Because of the large magnitude of the speed of light the first term of the left-hand side can be neglected. However, in practice the solution of the pseudo-time-dependent RTE showed more stable operation than the steady RTE.

The radiative divergence in the energy equation is defined as the difference between the emitted and absorbed radiative energy

$$\nabla Q_r = \kappa_a \left[4\pi I_b(\bar{r}) - \int_{4\pi} I(\bar{r}, \hat{s}) d\omega \right] \quad (2-12)$$

2.3 Turbulence models

Turbulence is present in a wide variety of flows. From the point of view of the Computational Fluid Dynamics (CFD), turbulence modeling is a very demanding issue and many approaches/models have been developed. The Direct Numerical Simulation (DNS) constitute the most exact way for the simulation of a turbulent flow, as flow equations are solved without any turbulence model. Thereby, errors inserted through turbulence modeling are skipped. However, DNS of the Navier-Stokes equations demands that the whole range of the spatial and temporal scales must be resolved. Computational cost of a DNS approach grows with the cubic power of the Re number (Re^3). Besides this, the mesh needed for the resolution of the spatial scales increases significantly the memory storage requirements. Thus, DNS is prohibitively expensive for application in complex geometries and flows with high Re numbers. For the turbulence modeling of incompressible flows two major categories of models have been developed. The Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) models and the Large Eddy Simulation (LES) models. RANS models under the eddy

viscosity concept arise from the need of simulation of the Reynolds stresses found in the time-averaged equations. Two equation turbulence models, that require the solution of two extra transport equations, are the most common for the simulation of the Reynolds stresses under the eddy viscosity concept. In the LES approach large eddies are explicitly resolved, while small eddies are modeled through a sub-grid-scale (SGS) model. Hybrid techniques, called Detached Eddy Simulation (DES) models, using RANS concept near walls and LES concept for the rest of the domain have also been developed.

An effective turbulence model should be sufficiently accurate and numerically robust, without excessive amounts of computational time compared to the mean-flow solver. Moreover, it should be independent of ambiguous quantities, such as the free-stream values [Men93]. Nowadays, two equation turbulence RANS models are widely used as they fulfill the above requirements.

In this dissertation, for the simulation of the turbulent flows two two-equation RANS turbulence models were developed; the $k-\omega$ SST in its low-Re version and high-Re version and the high-Re standard $k-\varepsilon$ model. Only pure turbulent flows were studied; transition from laminar to turbulent flow was not modeled. Below the set of equations of each model is presented.

2.3.1 Standard $k-\varepsilon$ turbulence model

Standard $k-\varepsilon$ turbulence model is a wide range model first presented by Launder and Spalding [Lau74]. A serious drawback of it is its weakness in the prediction of complicated flows, such as flow separations.

The dependent variables of this model are the turbulent kinetic energy k and the turbulent dissipation ε .

The transport equation for the kinetic energy k is

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \varepsilon \quad (2-13)$$

The left-hand side expresses the rate of change of the kinetic energy in time and the convection of the turbulent kinetic energy. The first term of the right-hand side expresses the diffusion of the turbulent kinetic energy, the second and third terms correspond to shear and buoyancy production rates of the turbulent kinetic energy respectively and the last one expresses the destruction of turbulent kinetic energy.

Production terms are defined as

$$P_k = v_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2-14)$$

$$G_k = -\frac{v_t}{Pr_t} g \beta_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \delta_{jk} \quad (2-15)$$

The transport equation for the turbulent dissipation ε is

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + [C_{\varepsilon 1} (P_k + C_{\varepsilon 3} G_k) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} \quad (2-16)$$

where the terms from left to right expresses the rate of change of the turbulent dissipation in time, the convection of the turbulent dissipation the diffusion of turbulent dissipation, the production of turbulent dissipation due to shear and buoyancy and the destruction of turbulent dissipation.

Turbulent kinematic viscosity is calculated as

$$\nu_t = \frac{c_\mu k^2}{\varepsilon} \quad (2-17)$$

Model's constants are $\sigma_k=1$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $C_{\varepsilon 1}=1.44$, $C_{\varepsilon 2}=1.92$, $C_{\varepsilon 3}=1$, $C_\mu=0.09$. For the value of the $C_{\varepsilon 3}$ constant many different approaches have been proposed ([Bar94], [Wu00], [Xue01], [Kuy93], [Hua07], [Fle94], [Alb08]). In the tunnel fire cases, only for $C_{\varepsilon 3}=1$ realistic values for the turbulent kinematic viscosity were produced.

2.3.2 k- ω SST turbulence model

As it was mentioned above the main drawback of the standard k- ϵ turbulence model is the weakness in accurate prediction of flow separation under adverse pressure gradients. This fact led to the development of the Wilcox k- ω model, which performs significantly better under adverse pressure gradients [Wil88]. Nevertheless, Wilcox k- ω model showed a strong dependency on the arbitrary free-stream values [Wil88]. In 1993 Menter proposed a new k- ω turbulence model, called k- ω SST turbulence model. It is similar to the Wilcox k- ω model in the inner half of a boundary layer, with an even better ability in the prediction of flow separation under adverse pressure gradients, and gradually changes to the less free-stream dependent standard k- ϵ model in the outer boundary layer region. The cost against the Wilcox k- ω model is that it consumes little more computing time [Men93]. The dependent variables of the k- ω SST turbulence model is the turbulent kinetic energy k and the specific dissipation rate ω .

The transport equation for the kinetic energy k is

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \beta^* \omega k \quad (2-18)$$

This equation is the same with the transport equation for the kinetic energy of the standard k- ϵ turbulence model, taking into account that dissipation rate is defined as

$$\omega = \frac{\epsilon}{\beta^* k} \quad (2-19)$$

where $\beta^* = 0.09$ (constant value).

The transport equation for the turbulent dissipation rate ω is

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\gamma}{\nu_t} P_k + CD_\omega + C_{\epsilon 3} \frac{\gamma}{\nu_t} G_k - \beta \omega^2 \quad (2-20)$$

where

$$CD_\omega = 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2-21)$$

The constants of this model are calculated through linear interpolation between the constants of the Wilcox k- ω turbulence model and the transformed standard k- ϵ turbulence model. If ϕ_1 is any constant of the Wilcox k- ω model, ϕ_2 any constant of the transformed standard k- ϵ model and ϕ is the corresponding constant of the k- ω SST turbulence model the relation between them is

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2 \quad (2-22)$$

Blending function F_1 is defined as follows:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min\left(\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega}\right), \frac{4\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}d^2}\right) \quad (2-23)$$

where d is the distance of each node from the nearest wall and the cross-diffusion term is defined as:

$$CD_{k\omega} = \max\left(2\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20}\right) \quad (2-24)$$

Starting from the wall the blending function is equal to unity and gradually goes to zero, in order to gain from the less free-stream dependent standard k- ϵ model.

Constants of the Wilcox k- ω model are $\sigma_{k1}=1/0.85$, $\sigma_{\omega 1}=2$, $\beta_1=0.0750$, $\alpha_1=0.31$, $\beta^*=0.09$, $\kappa=0.41$, $\gamma_1 = \beta_1/\beta^* - \sigma_{\omega 1} \kappa^2/\sqrt{\beta^*} \approx 0.5532$.

Constants of the transformed standard k- ϵ model are $\sigma_{k2}=1.0$, $\sigma_{\omega 2}=1/0.856$, $\beta_2=0.0828$, $\beta^*=0.09$, $\kappa=0.41$, $\gamma_2 = \beta_2/\beta^* - \sigma_{\omega 2} \kappa^2/\sqrt{\beta^*} \approx 0.4404$.

Turbulent kinematic viscosity is calculated as

$$\nu_t = \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, \Omega F_2)} \quad (2-25)$$

where Ω is the absolute vorticity.

F_2 function is given by:

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega}\right) \quad (2-26)$$

2.3.3 Wall functions

In order to achieve faster simulations and less storage, the usage of coarser meshes in the vicinity of walls by means of wall functions is sometimes adopted.

When wall functions are used the dimensionless velocity and temperature are given by the following expressions.

$$u^+ = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.5, & y^+ \geq 11.6 \\ y^+ & , y^+ \leq 11.6 \end{cases} \quad (2-27)$$

$$T^+ = \text{Pr } y^+ e^{-\Gamma} + \left[2.12 \ln(1 + y^+) + \beta(\text{Pr}) \right] e^{-1/\Gamma} \quad (2-28)$$

where

$$\beta(\text{Pr}) = (3.85 \text{Pr}^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln(\text{Pr}), \quad \Gamma = \frac{0.01(\text{Pr } y^+)^4}{1 + 5 \text{Pr}^3 y^+} \quad (2-29)$$

Dimensionless velocity is defined as $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$, where u_τ is the friction velocity

$u_\tau = \sqrt{\rho \tau_w}$ (τ_w is the laminar shear stress in the wall and ρ is the density).

Dimensionless distance from the wall is $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$. For $y^+ \leq 11.6$ the first grid point

is in the viscous sub-layer and for $y^+ > 11.6$ in the logarithmic region. When standard k- ϵ model is applied, it is desirable that the first grid point belongs to the logarithmic region of the boundary layer, where the viscous effects are weaker compared to the turbulent ones [Lau74].

For the dimensionless temperature, the formulation proposed by Kader is used (2-28), (2-29), which is valid in all zones of the boundary layer and for a large range of Prandtl numbers [Kad81]. Dimensionless temperature is defined as $T^+ = \frac{T_w - T}{T_\tau}$

where T_w is the wall temperature and $T_\tau = \frac{q_w}{\rho C_p u_\tau}$ where q_w is the wall heat flux.

Turbulent variables were calculated using the below expressions

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (2-30)$$

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (2-31)$$

$$\omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{C_\mu} \kappa y} \quad (2-32)$$

where $C_\mu=0.09$ and $\kappa=0.41$ (von Karman constant).

More details on the numerical implementation of wall functions is given in chapter 3.

2.4 Non-dimensionalization

All the above equations and boundary conditions were non-dimensionalized. For the non-dimensionalization the reference scales used are the following ([Col04], [Bpα12]):

- for the Cartesian coordinates L_{ref}
- for the velocities u_{ref}
- for the physical time $t_{\text{ref}} = L_{\text{ref}} / u_{\text{ref}}$
- for the density ρ_{ref}
- for the dynamic viscosity $\mu_{\text{ref}} = \mu$ (molecular dynamic viscosity)
- for the pressure $P_{\text{ref}} = \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2$
- for the temperature $\Delta T = T_h - T_c$ (difference between hot and cold temperatures)

- for the molecular and eddy kinematic viscosities $\nu_{\text{ref}} = \nu$ (molecular kinematic viscosity)
- for the pseudo-time of the RTE $t_{\text{r,ref}} = L_{\text{ref}} / c$
- for the radiative intensity $I_{\text{ref}} = \sigma_B T_c^4$
- for the radiative heat flux $Q_{\text{ref}} = \frac{k\Delta T}{L_{\text{ref}}}$
- for the absorption coefficient $\frac{1}{L_{\text{ref}}}$
- for the scattering coefficient $\frac{1}{L_{\text{ref}}}$
- for the turbulent kinetic energy u_{ref}^2
- for the turbulent dissipation $\frac{u_{\text{ref}}^3}{L_{\text{ref}}}$
- for the turbulent dissipation rate $\frac{u_{\text{ref}}}{L_{\text{ref}}}$

Applying this non-dimensionalization we conclude to the below equations. All variables are dimensionless and for the rest of the dissertation dimensionless variables will be given, except for the cases where it is explicitly mentioned.

- Continuity equation

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2-33}$$

- Momentum equations

1st version

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1 + \alpha_t}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \delta_{ik} \quad (2-34)$$

when the dimensional reference temperature $T_o = T_c$.

2nd version

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1 + \alpha_t}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \left(T - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} \quad (2-35)$$

when the dimensional reference temperature $T_o = \frac{T_h + T_c}{2}$.

α_t is the dimensionless turbulent kinematic viscosity.

- Energy equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(T u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\alpha_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + S_{\dot{q}} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla Q_r \quad (2-36)$$

where the dimensionless heat source is

$$S_{\dot{q}} = \frac{\dot{q}_c}{\rho C_p} \frac{L_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}} \Delta T} \quad (2-37)$$

and the dimensionless radiative divergence is

$$\nabla Q_r = \frac{\tau}{\text{Pl}} \left[4 \left(\frac{T}{T_0^*} + 1 \right)^4 - \int_{4\pi} I d\omega \right] \quad (2-38)$$

where τ is the optical thickness (dimensionless absorption coefficient).

- Radiative transfer equation

$$\frac{\partial I}{\partial t_r} + \frac{\partial I}{\partial s} = -(\tau + \sigma_s)I + \frac{\tau}{\pi} \left(\frac{T}{T_o^*} + 1 \right)^4 + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I \Phi d\omega \quad (2-39)$$

- standard k-ε equations

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k \text{Re}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \varepsilon \quad (2-40)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon \text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + [C_{\varepsilon 1} (P_k + C_{\varepsilon 3} G_k) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} \quad (2-41)$$

where

$$P_k = \frac{\alpha_t}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2-42)$$

$$G_k = -\frac{\alpha_t}{\text{Pr}_t} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^3} \frac{\partial T}{\partial x_j} \delta_{jk} \quad (2-43)$$

Dimensionless turbulent kinematic viscosity is $\alpha_t = \text{Re} \frac{c_\mu k^2}{\varepsilon}$.

- k-ω SST equations

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k \text{Re}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \beta^* \omega k \quad (2-44)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega \text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\gamma}{\alpha_t} \text{Re} P_k + \text{CD}_\omega + C_{\varepsilon 3} \frac{\gamma}{\alpha_t} \text{Re} G_k - \beta \omega^2 \quad (2-45)$$

Dimensionless functions of k-ω SST model are given below:

$$\text{CD}_\omega = 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad \arg_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega d}, \frac{500}{\text{Re} d^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_{\omega 2} k}{\text{CD}_{k0} d^2} \right),$$

$$CD_{k\omega} = \max\left(2\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20}\right), \alpha_t = \text{Re} \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, \Omega F_2)},$$

$$\text{arg}_2 = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega d}, \frac{500}{\text{Re} d^2 \omega}\right)$$

After having applied the non-dimensionalization the below dimensionless parameters aroused.

- Reynolds number $\text{Re} = \frac{\rho_{\text{ref}} \mathbf{u}_{\text{ref}} L_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}} = \frac{\mathbf{u}_{\text{ref}} L_{\text{ref}}}{\nu_{\text{ref}}}$

- Prandtl number $\text{Pr} = \frac{\mu_{\text{ref}} C_p}{k_t} = \frac{\nu_{\text{ref}}}{\alpha}$

where k_t is the thermal conductivity and α is the thermal diffusivity of the fluid.

- Grashof number $\text{Gr} = \frac{L_{\text{ref}}^3 \rho_{\text{ref}}^2 g \beta \Delta T}{\mu_{\text{ref}}^2}$

- Planck number $\text{Pl} = \frac{k \Delta T}{(L \sigma_B T_c^4)}$

- Reference temperature ratio $T_o^* = \frac{T_c}{\Delta T}$

2.5 Meaning of the dimensionless parameters

In this section a brief description of the dimensionless parameters meaning is given, in order to facilitate the understanding of the limits of the developed code and its results. Apart from the above mentioned parameters six additional parameters, that we will meet in the rest of the dissertation, are explained.

Reynolds Number (Re) represents the relative importance of the inertial forces in comparison with the viscous forces. For low Re numbers viscous forces dominate over inertial forces and the flow is characterized as laminar. On the contrary, for high

Re numbers inertial forces dominate over viscous ones and the flow is characterized as turbulent.

Prandtl Number (Pr) is defined as the ratio of momentum diffusivity to thermal diffusivity and expresses the relation between thicknesses of the hydrodynamic and thermal boundary layers. When Pr number is greater than one the thickness of the thermal boundary layer is smaller than the thickness of the hydrodynamic boundary layer. When Pr number is equal to one thicknesses are equal and for Pr number less than one thermal boundary layer is bigger [Kακ06]. The mass transfer analogous dimensionless parameter is Schmidt number.

Grashof number (Gr) expresses the ratio of the buoyancy forces to the viscous forces. For low Gr numbers viscous forces dominate over buoyancy forces and the flow is laminar. On the contrary, for high Gr numbers buoyancy forces dominate over viscous ones and the flow becomes turbulent.

Planck number (Pl) in heat transfer represents the relative importance of conductive heat transfer in comparison with the radiative heat transfer. For low Pl numbers radiative heat transfer dominates over conductive heat transfer and the opposite happens for high Pl numbers.

Rayleigh number (Ra) is the product of the Grashof number and the Prandtl number ($Ra = Gr Pr = \frac{L_{ref}^3 g \beta_T \Delta T}{\nu \alpha}$), and represents the relative importance of the natural convective heat transfer in comparison with the conductive heat transfer. For low Ra numbers conductive heat transfer dominates over convective heat transfer and the opposite happens for high Ra numbers.

Richardson number (Ri) in heat transfer is the ratio of the Grashof number to the Reynolds number raised to the second power ($Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{g \beta_T \Delta T L_{ref}}{u_{ref}^2}$) and represents the importance of natural convection to forced convection. For small Ri numbers natural convection can be neglected.

Nusselt number (Nu) is defined as the ratio of the convective heat transfer to the conductive heat transfer of the fluid normal to the boundary ($Nu = \frac{hL}{k}$, where h is the convective heat transfer coefficient of the fluid).

Mach number (M) is defined as the ratio of the speed of fluid to the local speed of sound ($M = \frac{u}{c}$). Flows with M number less than 0.3 can be characterized as incompressible flows, which are studied in this dissertation.

Strouhal number (St) expresses the dimensionless frequency when dealing with oscillating flow problems and is defined as $St = \frac{fL_{ref}}{u_{ref}}$, where f is the vortex shedding frequency.

Peclet number (Pe) in heat transfer is the product of the Reynolds number and the Prandtl number ($Pe = Re Pr = \frac{u_{ref} L_{ref}}{\alpha}$) and expresses the importance of forced convection in comparison with the diffusive heat transfer.

Fourier number ($Fo = \frac{\alpha t_{ref}}{L_{ref}^2}$) is the ratio of the heat conduction rate to the rate of thermal energy storage in a solid. For large values of Fo number conduction is significant and steady state is quickly achieved.

2.6 Vector form of equations

In this section continuity equation, momentum equations, energy equation and turbulent equations which are numerically solved under the concept of artificial compressibility are written in vector form.

Introducing the artificial compressibility terms, continuity, momentum and energy equations are:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2-46)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{x_i x_j}}{\partial x_j} + \frac{Gr}{Re^2} T \delta_{ik} \quad (2-47)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(T u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial q_{x_j}}{\partial x_j} + S_q - \frac{1}{Re Pr} \nabla Q_r \quad (2-48)$$

where τ is the pseudo-time, β is the artificial compressibility parameter, $\tau_{x_i x_j}$ are the shear stresses

$$\tau_{x_i x_j} = \frac{1 + \alpha_t}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-49)$$

and q_{x_j} are the heat fluxes

$$q_{x_j} = \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\alpha_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2-50)$$

The second version of the momentum equation is obvious and it is omitted.

Now in vector form equations are written

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau} + E \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \nabla \vec{F}_{inv} - \nabla \vec{F}_{vis} = \vec{S} \quad (2-51)$$

where

$$E = \text{diag}(0, 1, 1, 1, 1) \quad (2-52)$$

the dependent variables vector is

$$\vec{Q} = \begin{Bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \\ T \end{Bmatrix} \quad (2-53)$$

the inviscid fluxes vector is

$$\vec{F}_{inv} = \begin{Bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \\ uw \\ uT \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} \beta v \\ v^2 + p \\ vw \\ vT \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} \beta w \\ w^2 + p \\ wv \\ wT \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-54)$$

the viscous fluxes vector is

$$\vec{F}_{vis} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ q_x \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ q_y \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ q_z \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-55)$$

and the source term vector is

$$\vec{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr}{Re^2} T \delta_{2\kappa} \\ \frac{Gr}{Re^2} T \delta_{3\kappa} \\ S_q - \frac{1}{Re Pr} \nabla Q_r \end{Bmatrix} \quad (2-56)$$

Similarly equations of the standard k-ε turbulence model are written

$$\frac{\partial \vec{Q}_t}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{Q}_t}{\partial t} + \nabla \vec{F}_{inv,t} - \nabla \vec{F}_{vis,t} = \vec{S}_t \quad (2-57)$$

where the dependent variables vector is

$$\vec{Q}_t = \begin{Bmatrix} k \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (2-58)$$

the inviscid fluxes vector is

$$\vec{F}_{inv,t} = \begin{Bmatrix} uk \\ u\varepsilon \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} vk \\ v\varepsilon \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} wk \\ w\varepsilon \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-59)$$

the viscous fluxes vector is

$$\vec{F}_{vis,t} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon Re} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon Re} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial z} \\ \frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon Re} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-60)$$

and the source term vector is

$$\vec{S} = \begin{Bmatrix} P_k + G_k - \varepsilon \\ [C_{\varepsilon 1}(P_k + C_{\varepsilon 3}G_k) - C_{\varepsilon 2}\varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} \end{Bmatrix} \quad (2-61)$$

Equations of the k- ω SST turbulence model are written

$$\frac{\partial \vec{Q}_t}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{Q}_t}{\partial t} + \nabla \vec{F}_{inv,t} - \nabla \vec{F}_{vis,t} = \vec{S}_t \quad (2-62)$$

where the dependent variables vector is

$$\vec{Q}_t = \begin{Bmatrix} k \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (2-63)$$

the inviscid fluxes vector is

$$\vec{F}_{inv,t} = \begin{Bmatrix} uk \\ u\omega \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} vk \\ v\omega \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} wk \\ w\omega \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-64)$$

the viscous fluxes vector is

$$\vec{F}_{vis,t} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega Re} \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega Re} \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial z} \\ \frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega Re} \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-65)$$

and the source term vector is

$$\bar{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_k + \mathbf{G}_k - \beta^* \omega \mathbf{k} \\ \frac{\gamma}{\alpha_t} \text{Re } \mathbf{P}_k + \text{CD}_\omega + C_{\varepsilon^3} \frac{\gamma}{\alpha_t} \text{Re } \mathbf{G}_k - \beta \omega^2 \end{array} \right\} \quad (2-66)$$

CHAPTER 3

NUMERICAL METHODOLOGY

In this chapter the numerical methodology used for the solution of the mathematical model, given in chapter 2, is presented. A node-centered (or vertex-centered), finite volume discretization technique is applied for hybrid numerical meshes for all equations (mean flow equations, turbulence equations and radiative transfer equation). Therefore, all equations are integrated in the same numerical mesh. The numerical methodology is based on the artificial compressibility approach for the mean flow and turbulence equations.

Specifically, the techniques used for the spatial and temporal discretization of the mean flow and turbulence equations are presented. We mention the two alternatives for the modeling of radiative heat transfer, the boundary conditions of all equations, the slope limiters used and two schemes developed in order to preserve temperature field within realistic bounds. It should be noted that for the rest of the dissertation writing mean flow equations we refer to the continuity equation, the momentum equations and the energy equation.

3.1 Computational domain discretization

The numerical solution of the conservation laws under the concept of the finite volume method demands the discretization of the computational domain into a numerical mesh. For the integration of the equations it is necessary to define control volumes.

In this dissertation a node-centered technique is applied, which means that dependent variables are calculated and stored in the nodes of the numerical mesh. Every node i is associated to a median dual volume Ω_i , being its control volume. For the construction of this dual volume in two dimensions, we connect edge midpoints and centroids of the cells sharing a common node i , and in three dimensions we connect faces defined

by edge midpoints, cell centers and face centers sharing a common node i , as it is shown in figure 3-1.

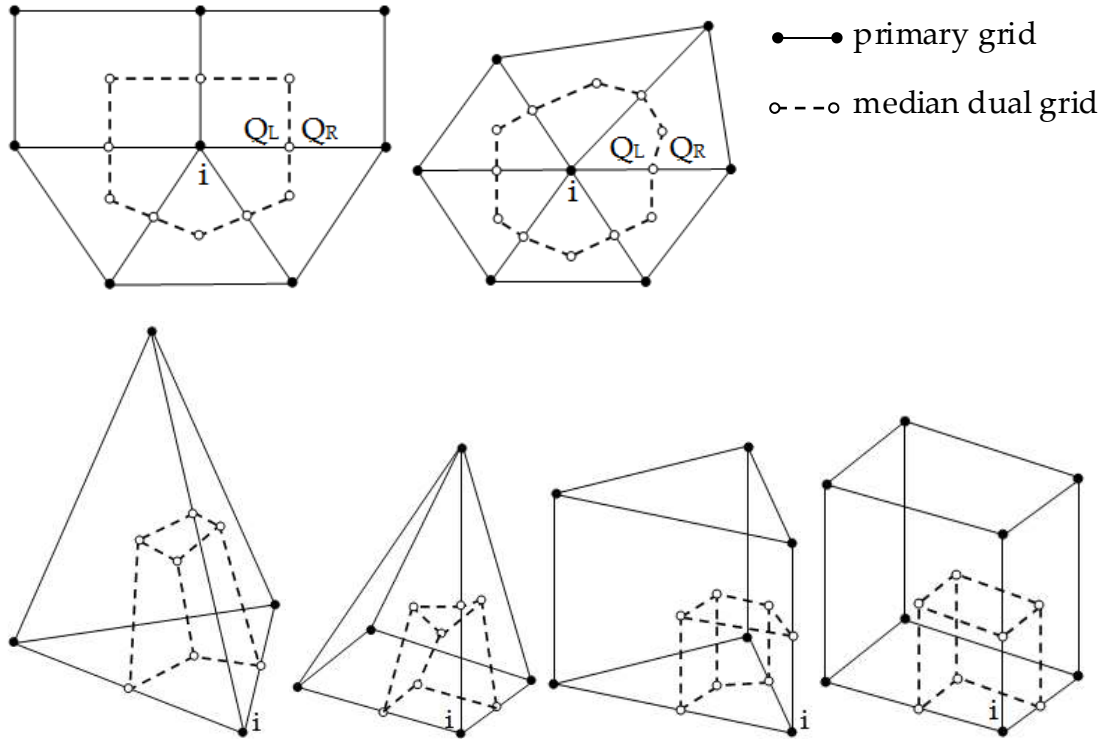


Figure 3-1. Construction of dual volumes in two and three dimensions.

3.2 Mean flow equations spatial discretization

Integrating the mean flow conservation laws, presented in chapter 2, on the finite control volume Ω_i , we have:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega} \bar{Q} d\Omega + E \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{Q} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \bar{F}_{inv} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \bar{F}_{vis} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{S} d\Omega \quad (3-1)$$

Applying the divergence theorem, the volume integrals of inviscid and viscous fluxes terms turn into surface integrals:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega} \bar{Q} d\Omega + E \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{Q} d\Omega + \oint_{\partial \Omega} \bar{F}_{inv} \cdot \hat{n} dS - \oint_{\partial \Omega} \bar{F}_{vis} \cdot \hat{n} dS = \int_{\Omega} \bar{S} d\Omega \quad (3-2)$$

Assuming that the values of the dependent variables inside the control volume Ω_i are homogeneous and equal to the respective values of the node i we have:

$$\frac{\partial(\bar{Q}_i \Omega_i)}{\partial \tau} + E \frac{\partial(\bar{Q}_i \Omega_i)}{\partial t} = \int_{\Omega} \bar{S} d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{inv} \cdot \hat{n} dS + \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{vis} \cdot \hat{n} dS = RHS_i \quad (3-3)$$

where RHS_i is defined the right hand side term of equation (3-3) corresponding to node i and

$$\bar{F}_{inv} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \beta V_n \\ uV_n + n_x p \\ vV_n + n_y p \\ wV_n + n_z p \\ TV_n \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_{vis} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \tau_{zz} n_z \\ q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

where $V_n = un_x + vn_y + wn_z$ is the normal velocity.

3.2.1 Inviscid fluxes term calculation

The system of conservation laws is transformed from parabolic-elliptic to hyperbolic-parabolic with the introduction of the artificial compressibility. Therefore, numerical treatment similar to compressible flow equations can be applied. For the calculation of the inviscid fluxes two upwind schemes were developed.

The inviscid fluxes term is numerically approximated as:

$$\oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{inv} \cdot \hat{n} dS \approx \sum_{j=1}^{nedge(i)} (\bar{F}_{inv})_{ij} \cdot \hat{n}_j \Delta S_j = FINV_i \quad (3-5)$$

where $(\bar{F}_{inv})_{ij}$ is the numerical inviscid flux vector evaluated at the mid-point of edge ij , \hat{n}_j is the unit normal vector of the control volume Ω_i surface associated with edge ij .

In [Roe81] Roe proposed an approximate Riemann solver for the solution of the hyperbolic type compressible Euler problem $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \nabla \bar{F}_{inv} = 0$. The first alternative for the calculation of the inviscid fluxes is based on the characteristics' method of Roe's

approximate Riemann solver [Roe81]. An earlier attempt for the discretization of the incompressible inviscid fluxes by means of Roe's approximate Riemann solver was made by Azhdarzadeh and Razavi ([Azh07], [Azh08]) in two dimensions.

Inviscid fluxes are formed from data on either side of control volume's faces as it is presented below.

$$(\bar{F}_{inv})_{ij} \cdot \hat{n}_j = \frac{1}{2} \left(\bar{F}_{inv}(\bar{Q}_L) \cdot \hat{n} + \bar{F}_{inv}(\bar{Q}_R) \cdot \hat{n} \right) + \frac{1}{2} \tilde{A}(\bar{Q}_L, \bar{Q}_R, \hat{n}) (\bar{Q}_L - \bar{Q}_R) \quad (3-6)$$

where $\bar{F}_{inv}(\bar{Q}_L)$ and $\bar{F}_{inv}(\bar{Q}_R)$ are the inviscid fluxes vectors calculated from the values of the dependent variables on the left and right side (\bar{Q}_L and \bar{Q}_R respectively) of the control volume's face associated with edge ij . Inviscid fluxes Jacobian, known as Roe's matrix is defined as $\tilde{A} = \tilde{T} \tilde{\Lambda} \tilde{T}^{-1}$, where Λ is a diagonal matrix with the eigenvalues of Roe's matrix, T is the eigenvectors matrix of inviscid fluxes Jacobian and T^{-1} is the inverse matrix of T .

According to Roe, Jacobian A should satisfy the following properties:

1. The eigenvectors of the inviscid fluxes Jacobian A must be real and linearly independent.

2. As $Q_L, Q_R \rightarrow Q$ then $\tilde{A} \rightarrow A = \frac{\partial \bar{F}_{inv}}{\partial \bar{Q}}$

3. $\tilde{A} \Delta \bar{Q} = \Delta \bar{F}_{inv} \Rightarrow \tilde{A}(\bar{Q}_L - \bar{Q}_R) = \bar{F}_{inv}(\bar{Q}_L) - \bar{F}_{inv}(\bar{Q}_R)$ for any Q_L, Q_R

Roe's properties are satisfied if matrices with “ \sim ” (Greek circumflex) are calculated using the algebraic average of \bar{Q}_L and \bar{Q}_R [Tay91]. The eigenvalues and eigenvectors of the Jacobian matrix in two and three dimensions are presented in the next two subsections.

Two-dimensional version

The eigenvalues are: $\lambda_1 = V_n - c, \lambda_2 = V_n + c, \lambda_3 = V_n, \lambda_4 = V_n$, where $c = \sqrt{V_n^2 + \beta}$.

Matrices T and T⁻¹ are the following:

$$T = \begin{bmatrix} c\lambda_2 & -c\lambda_1 & 0 & 0 \\ -(cn_x + n_y\varphi) & (cn_x - n_y\varphi) & n_y & 0 \\ -(cn_y - n_x\varphi) & (cn_y + n_x\varphi) & -n_x & 0 \\ T & T & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2c^2} & \frac{\lambda_1 n_x}{2c^2} & \frac{\lambda_1 n_y}{2c^2} & 0 \\ \frac{1}{2c^2} & \frac{\lambda_2 n_x}{2c^2} & \frac{\lambda_2 n_y}{2c^2} & 0 \\ \frac{\varphi}{c^2} & \frac{(c^2 n_y + \varphi \Theta n_x)}{c^2} & \frac{(-c^2 n_x + \varphi \Theta n_y)}{c^2} & 0 \\ -\frac{T}{c^2} & -\frac{\Theta n_x T}{c^2} & -\frac{\Theta n_y T}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

where $\varphi = vn_x - un_y$.

Three-dimensional version

The eigenvalues are: $\lambda_1 = V_n - c, \lambda_2 = V_n + c, \lambda_3 = V_n, \lambda_4 = V_n, \lambda_5 = V_n$, where $c = \sqrt{V_n^2 + \beta}$.

Matrices T and T⁻¹ are the following:

$$T = \begin{bmatrix} c\lambda_2 & -c\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -(cn_x + n_y\varphi_z + n_z\varphi_y) & (cn_x - n_y\varphi_z - n_z\varphi_y) & a_1 & a_2 & 0 \\ -(cn_y - n_x\varphi_z + n_z\varphi_x) & (cn_y + n_x\varphi_z - n_z\varphi_x) & b_1 & b_2 & 0 \\ -(cn_z - n_x\varphi_y - n_y\varphi_x) & (cn_z + n_x\varphi_y + n_y\varphi_x) & c_1 & c_2 & 0 \\ T & T & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2c^2} & \frac{\lambda_1 n_x}{2c^2} & \frac{\lambda_1 n_y}{2c^2} & \frac{\lambda_1 n_z}{2c^2} & 0 \\ \frac{1}{2c^2} & \frac{\lambda_2 n_x}{2c^2} & \frac{\lambda_2 n_y}{2c^2} & \frac{\lambda_2 n_z}{2c^2} & 0 \\ -\frac{\sigma_1}{2c^2} & -\frac{\sigma_3}{2c^2} & -\frac{\sigma_5}{2c^2} & -\frac{\sigma_7}{2c^2} & 0 \\ -\frac{\sigma_2}{2c^2} & -\frac{\sigma_4}{2c^2} & -\frac{\sigma_6}{2c^2} & -\frac{\sigma_8}{2c^2} & 0 \\ -\frac{T}{c^2} & -\frac{T\Theta n_x}{c^2} & -\frac{T\Theta n_y}{c^2} & -\frac{T\Theta n_z}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

where

$$\varphi_x = wn_y - vn_z, \varphi_y = wn_x - un_z, \varphi_z = vn_x - un_y,$$

$$\bar{X}_1 \times \bar{X}_2 = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = \hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

and

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & 2(a_2\varphi_x n_y^2 + a_2\varphi_x n_z^2 - b_2\varphi_y n_x^2 - b_2\varphi_y n_z^2 + c_2\varphi_z n_x^2 + c_2\varphi_z n_y^2 \\ & + a_2\varphi_y n_x n_y - a_2\varphi_z n_x n_z - b_2\varphi_z n_y n_z - b_2\varphi_x n_x n_y + c_2\varphi_y n_y n_z - c_2\varphi_x n_x n_z) \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & -2(a_1\varphi_x n_y^2 + a_1\varphi_x n_z^2 - b_1\varphi_y n_x^2 - b_1\varphi_y n_z^2 + c_1\varphi_z n_x^2 + c_1\varphi_z n_y^2 \\ & + a_1\varphi_y n_x n_y - a_1\varphi_z n_x n_z - b_1\varphi_z n_y n_z - b_1\varphi_x n_x n_y + c_1\varphi_y n_y n_z - c_1\varphi_x n_x n_z) \end{aligned} \quad (3-10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 = & -(cc_2\lambda_1 n_y - cc_2\lambda_2 n_y + b_2\varphi_y \lambda_1 n_x + b_2\varphi_y \lambda_2 n_x + b_2\varphi_x \lambda_1 n_y + b_2\varphi_x \lambda_2 n_y \\ & - c_2\varphi_z \lambda_1 n_x - c_2\varphi_z \lambda_2 n_x + c_2\varphi_x \lambda_1 n_z + c_2\varphi_x \lambda_2 n_z - b_2c\lambda_1 n_z + b_2c\lambda_2 n_z) \end{aligned} \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_4 = & cc_1\lambda_1 n_y - cc_1\lambda_2 n_y + b_1\varphi_y \lambda_1 n_x + b_1\varphi_y \lambda_2 n_x + b_1\varphi_x \lambda_1 n_y + b_1\varphi_x \lambda_2 n_y \\ & - c_1\varphi_z \lambda_1 n_x - c_1\varphi_z \lambda_2 n_x + c_1\varphi_x \lambda_1 n_z + c_1\varphi_x \lambda_2 n_z - b_1c\lambda_1 n_z + b_1c\lambda_2 n_z \end{aligned} \quad (3-12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_5 = & cc_2\lambda_1 n_x - cc_2\lambda_2 n_x + a_2\varphi_y \lambda_1 n_x + a_2\varphi_y \lambda_2 n_x + a_2\varphi_x \lambda_1 n_y + a_2\varphi_x \lambda_2 n_y \\ & + c_2\varphi_z \lambda_1 n_y + c_2\varphi_z \lambda_2 n_y + c_2\varphi_y \lambda_1 n_z + c_2\varphi_y \lambda_2 n_z - a_2c\lambda_1 n_z + a_2c\lambda_2 n_z \end{aligned} \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_6 = & -(cc_1\lambda_1 n_x - cc_1\lambda_2 n_x + a_1\varphi_y \lambda_1 n_x + a_1\varphi_y \lambda_2 n_x + a_1\varphi_x \lambda_1 n_y + a_1\varphi_x \lambda_2 n_y \\ & + c_1\varphi_z \lambda_1 n_y + c_1\varphi_z \lambda_2 n_y + c_1\varphi_y \lambda_1 n_z + c_1\varphi_y \lambda_2 n_z - a_1c\lambda_1 n_z + a_1c\lambda_2 n_z) \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_7 = & -(a_2\varphi_z \lambda_1 n_x + a_2\varphi_z \lambda_2 n_x - a_2\varphi_x \lambda_1 n_z - a_2\varphi_x \lambda_2 n_z + b_2\varphi_z \lambda_1 n_y + b_2\varphi_z \lambda_2 n_y \\ & + b_2\varphi_y \lambda_1 n_z + b_2\varphi_y \lambda_2 n_z - a_2c\lambda_1 n_y + a_2c\lambda_2 n_y + b_2c\lambda_1 n_x - b_2c\lambda_2 n_x) \end{aligned} \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_8 = & a_1\varphi_z \lambda_1 n_x + a_1\varphi_z \lambda_2 n_x - a_1\varphi_x \lambda_1 n_z - a_1\varphi_x \lambda_2 n_z + b_1\varphi_z \lambda_1 n_y + b_1\varphi_z \lambda_2 n_y \\ & + b_1\varphi_y \lambda_1 n_z + b_1\varphi_y \lambda_2 n_z - a_1c\lambda_1 n_y + a_1c\lambda_2 n_y + b_1c\lambda_1 n_x - b_1c\lambda_2 n_x \end{aligned} \quad (3-16)$$

Vectors \bar{X}_1 and \bar{X}_2 are tangential to the surface where the flux is calculated, as can be seen from their definition. For their calculation we perform the following algorithm: We find the largest in magnitude component of normal vector \hat{n} and we set equal to zero the next in cyclic order component of vector \bar{X}_1 . For the calculation of the other two components we know that the scalar product of vector \bar{X}_1 with the normal vector \hat{n} is equal to zero and we impose that the length of \bar{X}_1 is equal to one. Vector \bar{X}_2 is calculated by using the cross product properties as: $\bar{X}_2 = \hat{n} \times \bar{X}_1$.

The second inviscid fluxes upwind scheme (IFUS) that was developed is presented below:

$$\sum_{j=1}^{\text{nedge}(i)} (\bar{F}_{\text{inv}})_{ij} \cdot \hat{n}_j \Delta S_j = \sum_{j=1}^{\text{nedge}(i)} (V_{\text{ne}}^+ \bar{Q}_L + V_{\text{ne}}^- \bar{Q}_R)_{ij} \Delta S_j \quad (3-17)$$

where

$$V_{\text{ne}}^+ = \max(V_{\text{ne}}, 0), \quad V_{\text{ne}}^- = \min(V_{\text{ne}}, 0) \quad (3-18)$$

$$V_{\text{ne}} = u_e (n_x)_e + v_e (n_y)_e + w_e (n_z)_e \quad (3-19)$$

$$u_e = \frac{(u_L + u_R)}{2}, \quad v_e = \frac{(v_L + v_R)}{2}, \quad w_e = \frac{(w_L + w_R)}{2} \quad (3-20)$$

Index e is used for the quantities that correspond to edge ij.

For the reconstruction of the dependent variables vectors \bar{Q}_L and \bar{Q}_R of the mean flow equations, first order schemes are not suggested [Men93]. For both upwind schemes, either a second order scheme proposed by [Kal05] was used:

$$\bar{Q}_L = \bar{Q}_i + \frac{1}{2} \nabla \bar{Q}_i \cdot \vec{ij} \quad \text{and} \quad \bar{Q}_R = \bar{Q}_j - \frac{1}{2} \nabla \bar{Q}_j \cdot \vec{ij} \quad (3-21)$$

or a third order scheme proposed by [Tai05]:

$$\bar{Q}_L = \bar{Q}_i + \frac{1}{2} [(1-k)\vec{ij} \cdot \nabla \bar{Q}_i + k\bar{\Delta}_i^+] \quad \text{and} \quad \bar{Q}_R = \bar{Q}_j - \frac{1}{2} [(1-k)\vec{ij} \cdot \nabla \bar{Q}_j + k\bar{\Delta}_j^-] \quad (3-22)$$

where $\bar{\Delta}_i^+ = \bar{\Delta}_i^- = \bar{Q}_j - \bar{Q}_i$ and $k = \frac{1}{3}$. The gradients $\nabla \bar{Q}_i$ and $\nabla \bar{Q}_j$ were calculated using either the least square method or the Green-Gauss method as they are presented in [Bpa12].

The first upwind scheme (Roe's Riemann solver) was used when all mean flow equations (continuity, momentum and energy equations) were strongly coupled. The second upwind scheme (IFUS) was used when continuity and momentum equations were loosely coupled to the energy equation.

A comparison of the coupling methods was conducted and is presented in chapter 4 for the cases of natural convection in square and cubic cavities. The first upwind

scheme together with the strongly coupled solution of the equations showed superiority compared to the second one with the loosely coupled solution of the equations. Therefore, Roe's approximate Riemann solver was adopted for the calculation of mean flow equations' inviscid fluxes.

3.2.2 Viscous fluxes term calculation

The viscous fluxes term is numerically approximated as:

$$\oint_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{F}}_{\text{vis}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \approx \sum_{j=1}^{\text{nedge}(i)} (\bar{\mathbf{F}}_{\text{vis}})_{ij} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j \Delta S_j = \text{VIS}_i \quad (3-23)$$

where $(\bar{\mathbf{F}}_{\text{vis}})_{ij}$ is the numerical viscous flux evaluated at the midpoint of edge ij . As it can be seen from equations (2-49), (2-50) and (2-55), for the calculation of the viscous fluxes through the control volume boundary ΔS it is necessary to calculate the gradients of the velocities and temperature at the mid-point of every edge. A combined method is used for the calculation of these gradients ([Bpa12], [Vra12]). Cell gradients are first evaluated using Green's theorem. A face-wise loop is performed for the calculation of the contribution of every face to the surface integral and this contribution is distributed with the appropriate sign to the cells that share that face. After this face-wise loop every cell has gathered the sum of the surface integrals from the faces that it is consisted of. By dividing this sum with the volume of the corresponding cell we find the gradients of the variables for that particular cell:

$$(\nabla\Phi)_{\text{cell}} = \frac{1}{V_{\text{cell}}} \oint_{\partial V_{\text{cell}}} \Phi \hat{\mathbf{n}} dS \quad (3-24)$$

Afterwards, a cell-wise loop is performed for the calculation of nodal gradients via volume averaging (the cell to nodes information is needed):

$$(\nabla\Phi)_i = \frac{\sum_{k=1}^{\text{ncell}(i)} (V_k (\nabla\Phi)_k)}{\sum_{k=1}^{\text{ncell}(i)} V_k} \quad (3-25)$$

Having found the nodal gradients we compute the gradients at edge midpoints with the formula proposed by Weiss et al. [Wei97]:

$$(\nabla\Phi)_{ij} = (\overline{\nabla\Phi})_{ij} - [(\overline{\nabla\Phi})_{ij} \cdot \hat{t}_{ij} - (\frac{\partial\Phi}{\partial\ell})_{ij}] \cdot \hat{t}_{ij} \quad (3-26)$$

where

$$(\overline{\nabla\Phi})_{ij} = \frac{1}{2}[(\nabla\Phi)_i + (\nabla\Phi)_j], \quad (\frac{\partial\Phi}{\partial\ell})_{ij} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{\ell_{ij}} \quad (3-27)$$

\hat{t}_{ij} is the unit vector along edge ij , $\Phi = u, v, w, T$ and ℓ_{ij} denotes the length of edge ij .

3.2.3 Source term calculation

For the numerical approximation of the source term integral found in equation (3-3) two approaches have been used.

The first and simpler approach is to assume that the value of the source term inside the control volume Ω_i of node i is homogeneous and equal to its value at node i .

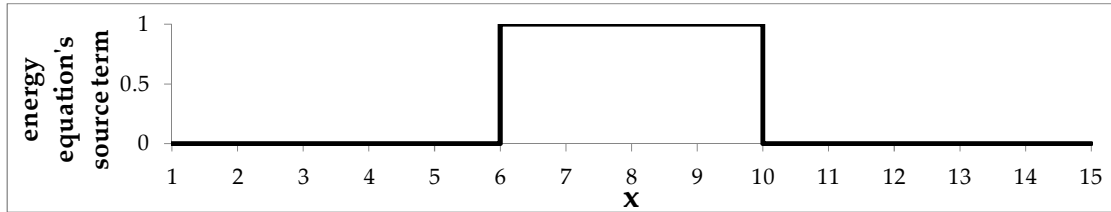
Then:

$$\int_{\Omega} \bar{S} d\Omega = \bar{S}_i \Omega_i \quad (3-28)$$

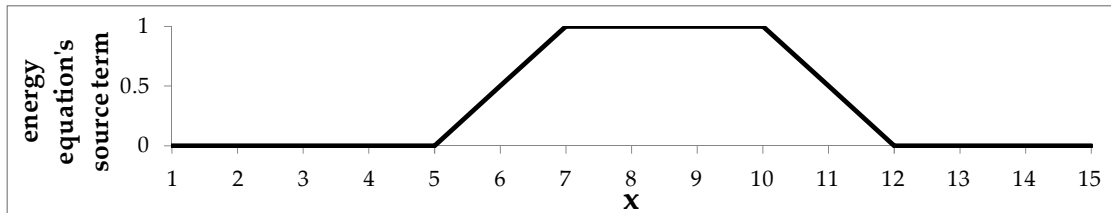
However, this discretization way may be susceptible to spurious numerical waves, ([Ber94], [Moh99], [Vaz99], [Hub00]).

The second scheme that was used handles the source term vector in a similar way as the inviscid fluxes vector. More precisely, source term is discretized using an upwind Roe's approximate Riemann solver. This method have been presented by Bermudez and Vasquez [Ber94] who applied it in the one-dimensional shallow water problem. In 1998 [Ber98] it was extended for the solution of the two-dimensional Saint-Venant (shallow water) equations. Using this method smoother distribution for the energy equation source term was produced. However, simulations were not stable, because small but non-zero values were calculated for the zero terms of the source vector. Therefore, the first alternative for the discretization of the source term vector was adopted with negligible side-effects.

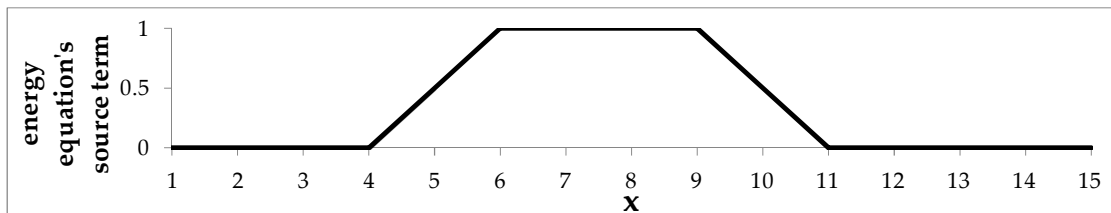
In figure 3-2 and figure 3-3 examples of the distribution of the energy equation source term using both discretization methods are presented and compared for one-dimensional and two-dimensional cases respectively. We observe that energy equation source term "follows" the velocity field and its smoother distribution.



a. Homogeneous discretization scheme for any velocity field.

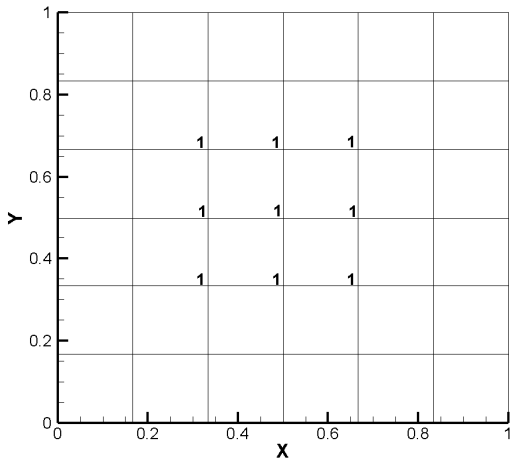


b. Upwind scheme for $u=1$.

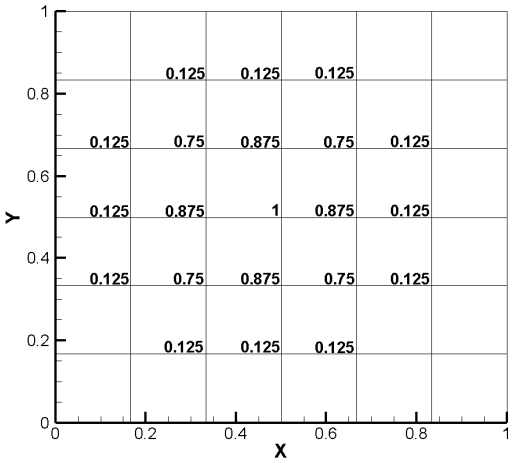


c. Upwind scheme for $u=-1$.

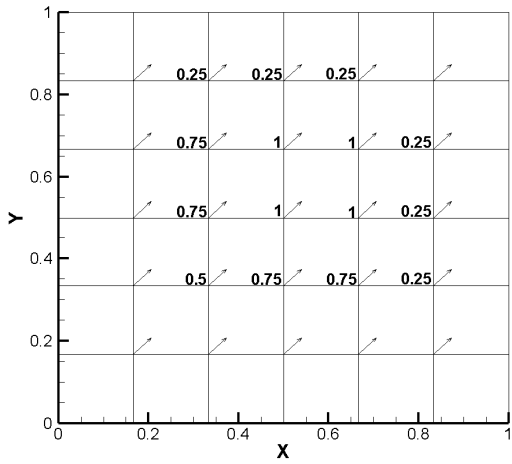
Figure 3-2. Comparison of energy equation source term distribution along x axis for one-dimensional cases, using both discretization schemes.



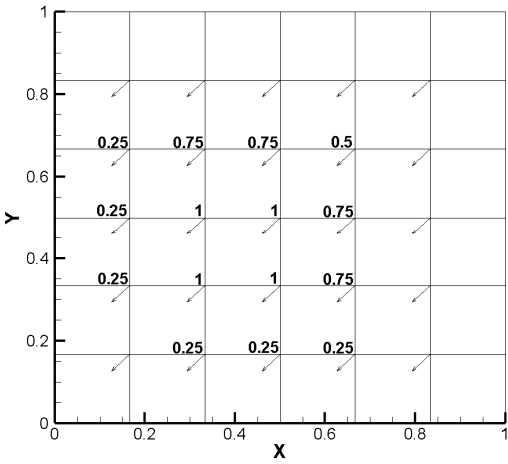
a. Homogeneous scheme.



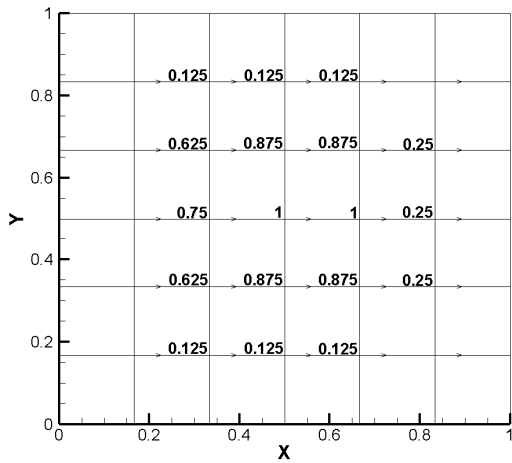
b. Upwind scheme for $u=v=0$.



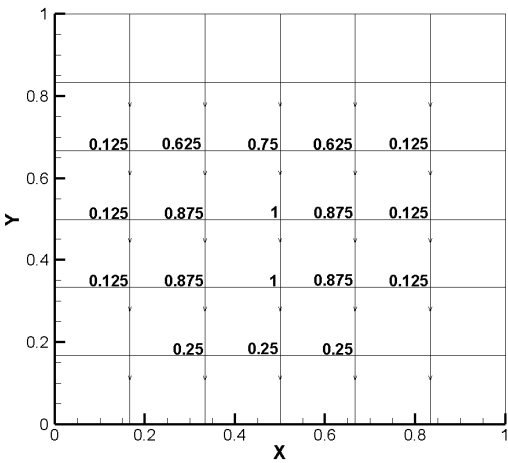
c. Upwind scheme for $u=v=1$.



d. Upwind scheme for $u=v=-1$.



e. Upwind scheme for $u=1$ and $v=0$.



f. Upwind scheme for $u=0$ and $v=-1$.

Figure 3-3. Comparison of energy equation source term distribution for two-dimensional cases, using both discretization schemes.

3.3 Turbulence equations spatial discretization

Turbulence equations spatial discretization was applied in a similar manner as for the mean flow equations was done, using the same numerical mesh. The basics of the spatial discretization are presented below.

Integrating the turbulence equations, presented in chapter 2, on the finite control volume Ω_i of node i , we have:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega} \bar{Q}_t d\Omega + E \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{Q}_t d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \bar{F}_{inv,t} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \bar{F}_{vis,t} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{S}_t d\Omega \quad (3-29)$$

where index t mean turbulence quantities. Therefore, \bar{Q}_t is the turbulent dependent variables vector, $\bar{F}_{inv,t}$ is the turbulent inviscid fluxes vector, $\bar{F}_{vis,t}$ is the turbulent viscous fluxes vector and \bar{S}_t is the source term vector.

Applying the divergence theorem, the volume integrals of inviscid and viscous terms turn into surface integrals and assuming that the values of the turbulence variables inside the control volume Ω_i are equal to the respective values of the node i we have:

$$\frac{\partial(\bar{Q}_{t,i}\Omega_i)}{\partial \tau} + E \frac{\partial(\bar{Q}_{t,i}\Omega_i)}{\partial t} = \int_{\Omega} \bar{S}_t d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{inv,t} \cdot \hat{n} dS + \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{vis,t} \cdot \hat{n} dS \quad (3-30)$$

where for the k - ε turbulence model:

$$\bar{F}_{inv,t} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} kV_n \\ \varepsilon V_n \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_{vis,t} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k \text{Re}} \left(\frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y + \frac{\partial k}{\partial z} n_z \right) \\ \frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} n_y + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} n_z \right) \end{pmatrix} \quad (3-31)$$

and for the k - ω turbulence model:

$$\bar{F}_{inv,t} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} kV_n \\ \omega V_n \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_{vis,t} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k \text{Re}} \left(\frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y + \frac{\partial k}{\partial z} n_z \right) \\ \frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega \text{Re}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y + \frac{\partial \omega}{\partial z} n_z \right) \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

3.3.1 Inviscid fluxes term calculation

For the calculation of the inviscid fluxes of the turbulence equations the IFUS scheme was used. In contrast to the mean flow equations, for the reconstruction of the dependent variables vectors “ \bar{Q}_L ” and “ \bar{Q}_R ” of the mean flow equations, a first order scheme was implemented because inviscid fluxes are not the leading order terms of turbulence equations [Men93].

$$\bar{Q}_{t,L} = \bar{Q}_{t,i} \text{ and } \bar{Q}_{t,R} = \bar{Q}_{t,j} \quad (3-33)$$

3.3.2 Viscous fluxes term calculation

Viscous fluxes term is calculated in the same manner as for the mean flow equations was done. Coefficients of turbulence in the middle of an edge ij are calculated as the average value between the side nodes i and j. Turbulence variables gradients $\frac{\partial k}{\partial x_j}$ and

$\frac{\partial \omega}{\partial x_j}$ found in the cross diffusion term of the k- ω SST turbulence model are calculated

in the middle of an edge ij using modified average equation (3-26).

3.3.3 Source term calculation

For the calculation of turbulence source term, we assumed that its value inside the control volume is homogeneous and equal to its value at node i.

$$\int_{\Omega} \bar{S}_t d\Omega = \bar{S}_{t,i} \Omega_i \quad (3-34)$$

3.4 Temporal discretization, solution procedure

For the temporal discretization of both the mean flow and turbulence equations a dual-time stepping scheme is used, which constitutes a fully implicit time integration procedure. Specifically, for the physical time marching we apply an implicit second order backward difference scheme and for the pseudo-time marching an implicit first

order backward Euler scheme. This way we avoid the severe CFL number restrictions associated with explicit time integration schemes.

Below, the solution procedure implemented for the mean flow equations is presented which is the same to the procedure used for the turbulence equations. After the spatial and temporal discretization and applying Newton's method for the necessary linearization, equation (3-3) becomes:

$$[A]^{n+1,k} \delta \vec{q} = \vec{b}^{n+1,k} \quad (3-35)$$

where

$$[A]^{n+1,k} = \frac{\Omega_i}{\Delta \tau_i} + E \frac{3\Omega_i}{2\Delta t} - \frac{\partial \text{RHS}_i^{n+1,k}}{\partial q} \quad (3-36)$$

$$\vec{b}^{n+1,k} = \text{RHS}_i^{n+1,k} - \Omega_i \left(\frac{q_i^k - Q_i^{n+1,m}}{\Delta \tau_i} \right) + E \Omega_i \frac{-3q_i^k + 4Q_i^n - Q_i^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3-37)$$

$$\delta \vec{q} = q^{k+1} - q^k \quad (3-38)$$

“ $\delta \vec{q}$ ” is the variation vector of the dependent variables between two successive Newton iterations “k” and “k+1”.

To pass from the pseudo-time step m to the next pseudo-time step m+1, one or two Newton iterations are applied. To pass from one physical time step to another, either a predefined number of pseudo-time steps is completed or convergence in pseudo-time is achieved. The calculation of the local pseudo-time step for every node is the same with the one applied by Kallinderis and Ahn ([Kal96], [Kal05]):

$$\Delta \tau_i = \text{CFL} \frac{\Omega_i}{A_x + A_y + A_z + D} \quad (3-39)$$

where

$$A_x = (|u_i| + c_x) S_x, \quad A_y = (|v_i| + c_y) S_y, \quad A_z = (|w_i| + c_z) S_z, \quad D = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\Omega_i}{S_x + S_y + S_z} \quad (3-40)$$

the artificial speeds of sound are

$$c_x = \sqrt{u_i^2 + \beta}, \quad c_y = \sqrt{v_i^2 + \beta}, \quad c_z = \sqrt{w_i^2 + \beta} \quad (3-41)$$

and the projected areas are

$$S_x = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\text{nedge}(i)} |S_{x,ij}|, \quad S_y = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\text{nedge}(i)} |S_{y,ij}|, \quad S_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\text{nedge}(i)} |S_{z,ij}| \quad (3-42)$$

Summations take into consideration each edge ij passing through node i .

Matrix $[A]$ is written as a linear combination of two matrices, that contain the diagonal ($[D]$ matrix) and off-diagonal ($[O]$ matrix) terms of $[A]$:

$$[D]_i^{n+1,k} \delta q_i = \bar{b}_i^{n+1,k} - [O]_{ij}^{n+1,k} \delta q_j = \bar{R}_i^{n+1,k} \quad (3-43)$$

Each node j connected to node i contributes for the calculation of matrix $[O]$. Equation (3-43) is solved using Jacobi iterations. For each node the following system in expanded form is solved using Gauss elimination.

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_i \\ \delta u_i \\ \delta v_i \\ \delta w_i \\ \delta T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} \quad (3-44)$$

Mean flow equations and turbulence equations are loosely coupled. At each Newton step they are solved separately. Mean flow equations are firstly solved and give to the turbulence equations the velocity field and turbulence equations are sequentially integrated and give the eddy kinematic viscosity to the mean flow equations. The loosely coupled solution of the equations is preferred as it makes easier the introduction of new turbulence models and the use of different methods for the solution of the mean flow equations and the turbulence equations [Bpα12]. Additionally, the loosely coupled technique for the mean flow and turbulence equations is easier in programming terms compared to the strongly coupled solution which is not widely accepted to perform better ([Lee06a], [Bar98], [Liu96], [Lin97]).

3.4.1 Linearization procedure

The linearization procedure of the inviscid and viscous terms of the mean flow and turbulence equations and the source term of turbulence equations have been presented in [Bpα12]. Jacobians of our viscous fluxes are given in appendix A.

The linearization procedure of the mean flow equations source term vector is given [Ko08]. The source term vector of the mean flow equations is:

$$\bar{S} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr}{Re^2} T\delta_{2k} \\ \frac{Gr}{Re^2} T\delta_{3k} \\ S_{\dot{q}} - \frac{1}{Re Pr} \nabla Q_r \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr}{Re^2} T\delta_{2k} \\ \frac{Gr}{Re^2} T\delta_{3k} \\ S_{\dot{q}} - \frac{\tau}{Re Pr Pl} \left[4 \left(\frac{T}{T_0^*} + 1 \right)^4 - \int_{4\pi} Id\omega \right] \end{array} \right\} \quad (3-45)$$

We separate the positive and negative part of the source term

$$\bar{S} = \bar{S}^+ + \bar{S}^- \quad (3-46)$$

and we will linearize the negative part in order to facilitate the diagonal dominance that ensures the solution of the linear system (3-44).

The third and fourth terms of the vector could be either positive or negative. However, their linearization does not contribute to the main diagonal of matrix [A] and they are not linearized.

In linear form the source term of the energy equation is written as:

$$\bar{S}_i^{k+1} = \bar{S}_i^k + \left(\frac{\partial \bar{S}^-}{\partial T} \right)_i^k (T_i^{k+1} - T_i^k) \quad (3-47)$$

From the source term of the energy equation we keep the second term for the calculation of the gradient $\left(\frac{\partial \bar{S}^-}{\partial T} \right)_i^k$ which constitutes an explicit function of temperature and takes negative values.

Then:

$$\left(\frac{\partial S^-}{\partial T}\right)_i^k = -\left(\frac{16\tau}{\text{Re Pr Pr} T_0^*} \left(\frac{T}{T_0^*} + 1\right)^3\right)_i^k \quad (3-48)$$

3.5 Radiation modeling

For the simulation of radiative heat transfer many approaches have been proposed in the literature, some of which have been presented in chapter 1. In our code two of them have been included. Below their implementation and some characteristics are discussed.

3.5.1 View factor based model

The first radiation model is an analytical view factor based model that uses algebraic equations. It was presented by Albanakis and Bouris [Alb08]. It is a three dimensional method that could also be applied in two dimensional cases with symmetry boundary conditions. This model is applicable in buildings and tunnels with high wall emissivities ($\epsilon > 0.8$), limited number of reflections among walls and non-participating (transparent) medium. For the calculation of the view factors we use algebraic equations appropriate for the boundary faces of a Cartesian mesh. This method was easily programmed. However, it was found to be quite costly in terms of both computational time and storage, when applied with the serial version of the solver.

Specifically, for N boundary faces, the calculation and storage of $\frac{N^2 - N}{2}$ view factors and $\frac{N^2 - N}{2}$ geometric factors (geometric factors definition is given below) is necessary. View factors and geometric factors were stored in an economic way in two different vectors. Reliable results were produced using this method, but in three dimensions the cost of computational time and storage becomes prohibitively large.

The radiative heat exchange between surface m and surface n , in linearized form is:

$$q_{m,n} = h_{m,n} A_n (T_m - T_n) \quad (3-49)$$

where $h_{m,n}$ is the radiative heat transfer coefficient:

$$h_{m,n} = (T_m^2 + T_n^2)(T_m + T_n) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m \sigma F_{n \rightarrow m}}{[1 - (1 - \varepsilon_n)(1 - \varepsilon_m)F_{n \rightarrow m}^2 A_n / A_m]} + \\ \varepsilon_n \varepsilon_m \sigma A_m \sum_{i=1}^N \frac{(1 - \varepsilon_i)F_{n \rightarrow i} F_{m \rightarrow i}}{A_i [1 - (1 - \varepsilon_n)(1 - \varepsilon_m)(1 - \varepsilon_i)F_{n \rightarrow i} F_{i \rightarrow m} F_{m \rightarrow n}]} \end{array} \right\} \quad (3-50)$$

In the summation for the calculation of the radiative heat transfer coefficient boundary faces m and n are excluded.

Between boundary faces m and n the following equalities apply that make calculations faster:

$$q_{m,n} = -q_{n,m} \quad \text{and} \quad h_{m,n} = h_{n,m} A_m / A_n$$

Then only half of the heat exchanges and radiative heat transfer coefficients need to be calculated.

Moreover, the terms inside the brackets that contain computationally expensive summations are only geometry dependent (geometric factors). Therefore, they are calculated only once at the beginning of the basic computational procedure. During the computational procedure, coefficients $h_{m,n}$ are calculated using the current temperature field and the geometric factors.

For each surface n, the net radiative heat flux is given from the summation:

$$q_n = \sum_{m=1}^N q_{m,n} \quad (3-51)$$

The calculation of the view factors is computationally demanding. However, when the computational domain is discretized using a Cartesian mesh (quadrilateral boundary faces) and contains walls that are parallel or perpendicular to each other, view factors are calculated faster using analytical expressions presented by Howell [How01]. In addition to this, taking into account the reciprocity relation $A_n F_{n \rightarrow m} = A_m F_{m \rightarrow n}$ the computational load is further reduced.

The following relations were used for the view factors calculation (figure 3-4):

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{(i+j+k+1)} G(x_i, y_j, \eta_k, \xi_l) \quad (3-52)$$

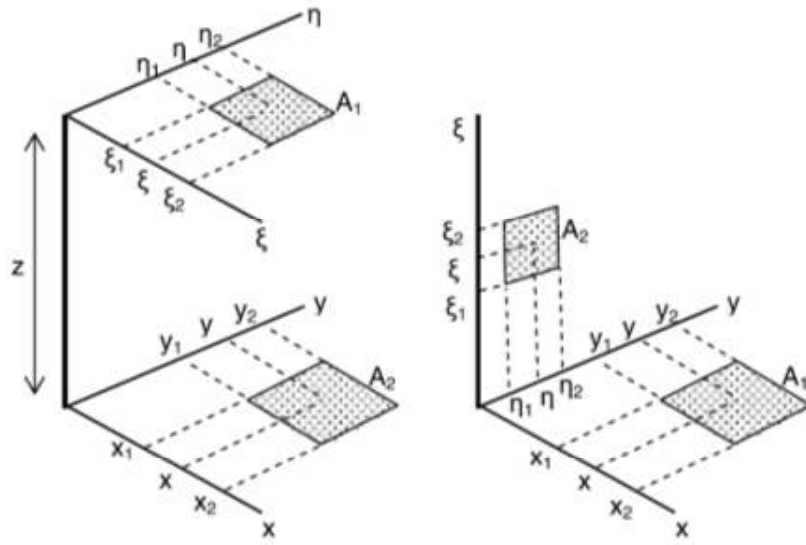


Figure 3-4 [Alb08]. Sketch of possible boundary surfaces formation. Parallel boundary faces (left), perpendicular boundary surfaces (right).

For parallel boundary faces G term is given by:

$$G = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} (y - \eta)\sqrt{(x - \xi)^2 + z^2} \tan^{-1} \left[\frac{y - \eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + z^2}} \right] \\ + (x - \xi)\sqrt{(y - \eta)^2 + z^2} \tan^{-1} \left[\frac{x - \xi}{\sqrt{(y - \eta)^2 + z^2}} \right] \\ - \frac{z^2}{2} \ln \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \right] \end{array} \right\} \quad (3-53)$$

while for perpendicular boundary faces G term is given by:

$$G = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} (y - \eta)\sqrt{x^2 + \xi^2} \tan^{-1} \left[\frac{(y - \eta)}{\sqrt{x^2 + \xi^2}} \right] \\ - \frac{1}{4} [x^2 + \xi^2 - (y - \eta)^2] \ln [x^2 + \xi^2 + (y - \eta)^2] \end{array} \right\} \quad (3-54)$$

As mentioned before this method is valid when non-participating fluid is assumed. Therefore, radiative heat transfer is taken into account only among boundary faces.

The boundary condition at each boundary node i of an adiabatic wall in dimensional form is:

$$k(\hat{n} \cdot \vec{\nabla} T_i) + (q_{\text{rad}})_i = 0 \quad (3-55)$$

and it is either implicitly applied in the calculation of the boundary viscous flux or explicitly. k is the thermal conductivity of the fluid and \hat{n} is the unit normal vector.

From the application of equation (3-51) we calculate the radiative heat flux at each boundary face n . Then, this flux is shared to the nodes of the boundary face using a weighted average. Specifically, we perform a "do loop" for the boundary faces in order to give their contribution to their nodes. We calculate the sum of the

temperatures of their nodes $S_T = \sum_{i=1}^{\text{node}(n)} T_i$. $\text{node}(n)$ is the number of nodes of each

boundary face and it is 4 for quadrilaterals. Then weights are $w_i = \frac{T_i}{S_T}$ and radiative

heat flux at node i is equal to:

$$(q_{\text{rad}})_i = w_i q_n \quad (3-56)$$

3.5.2 Finite Volume Method (FVM) model

The second method have been presented and developed into code from Lygidakis and Nikolos. It is a three dimensional finite volume method, applicable for gray, absorbing, emitting and scattering (either isotropically or anisotropically) mediums. A node-centered edge-based algorithm for hybrid meshes was adopted which is compatible with our flow solver. Thus, radiative transfer equation is integrated with the other equations in the same numerical mesh. It applies the step differencing scheme (equivalent to the upstream schemes used by flow solvers) to relate the midpoint face intensity to node intensity and either the bold approximation or the pixelation method when control angle overlapping problem is present. It is a second order spatial and temporal scheme and for the avoidance of under-predictions or over-predictions of the radiation intensity one of the limiters Min-Mod and Van Albada-Van Leer could be used. If negative radiative intensities are calculated a fix-up procedure is used and these are set equal to zero.

A brief description of the method is presented below. For more information the reader is referred to Lygidakis' and Nikolos' papers ([Lyg12], [Lyg13a]).

Integrating the radiative transfer equation (RTE) (2-10) for a node P over its control volume V_P and over the finite solid angle Ω^{mn} and applying the step scheme combined with a second order spatial discretization the following equation need to be solved:

$$\Delta I_P^{mn} \frac{V_P \Delta \Omega^{mn}}{c \Delta t_r} = \left[-(\kappa_a + \sigma_s) I_P^{mn} + S_R^{mn} \right] V_P \Delta \Omega^{mn} - \sum_i \left(I_{PQ}^{mn} \right)^L D_{ci,out}^{mn} \Delta A_i - \sum_i \left(I_{PQ}^{mn} \right)^R D_{ci,in}^{mn} \Delta A_i = R_P^{mn} \quad (3-57)$$

where I is the radiation intensity, V_P is the control volume of node P and $\Delta \Omega^{mn}$ is the

discrete control angle $\Delta \Omega^{mn} = \int_{\theta^{m-}}^{\theta^{m+}} \int_{\phi^{n-}}^{\phi^{n+}} \sin \theta d\theta d\phi$. Each solid angle mn is obtained

equally dividing the 4π steradians into $N_\theta \times N_\phi$ directions, i.e.

$\Delta \theta^m = \theta^{m+} - \theta^{m-} = \pi / N_\theta$ and $\Delta \phi^n = \phi^{n+} - \phi^{n-} = 2\pi / N_\phi$ (figure 3-5). c is the speed of

light in the medium, Δt_r is the pseudo-time step of the RTE, κ_a is the absorption coefficient of the medium, σ_s is the scattering coefficient, PQ is the edge with endpoints P and Q, superscripts L and R denote the left and right state at the midpoint

of an edge PQ, ΔA_i is the part of surface area corresponding to edge PQ, and R_P^{mn} is called the right hand side of equation (3-57). With the summations the contribution of

all surface areas of the control volume of node P is gathered.

The sum of emissive and in-scattering terms S_R^{mn} is:

$$S_R^{mn} = \kappa_a I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I_P^{m'n'} \Phi(m'n', mn) d\omega = \kappa_a \frac{\sigma T^4}{\pi} + \frac{\sigma_s}{4\pi} \sum_{m_i=1}^{N_\theta} \sum_{n_i=1}^{N_\phi} I_P^{m_i n_i} \bar{\Phi}(m_i n_i, mn) \Delta \Omega^{m_i n_i} \quad (3-58)$$

where $\bar{\Phi}$ is the average of the scattering function Φ , called normalized or average scattering phase function:

$$\bar{\Phi}(m_i n_i, mn) = \frac{1}{\Delta \Omega^{mn} \Delta \Omega^{m_i n_i}} \int_{mn} \int_{m_i n_i} \Phi(m_i n_i, mn) d\omega' d\omega \quad (3-59)$$

The scattering phase function Φ is equal to unity for isotropic scattering, while for anisotropic scattering is calculated using Legendre polynomial expansions [Lyg12].

$D_{ci,out}^{mn}$ and $D_{ci,in}^{mn}$ are the directional weights calculated using either the bold approximation or the pixelation method [Lyg13a].

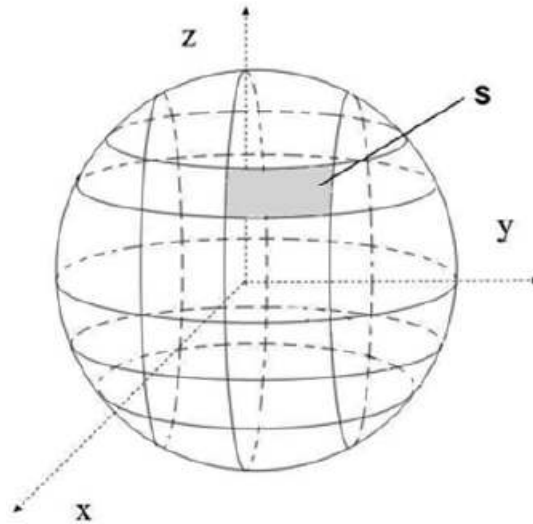


Figure 3-5 [Lyg12]. Angular discretization and solid angle S.

For the pseudo-time marching a second-order four stage Runge-Kutta method was developed [Lyg13a], where the pseudo-time step for each node P is defined as:

$$c\Delta t_p = \frac{1}{2} c_r \min(a_{edge,p}) \quad (3-60)$$

where $a_{edge,p}$ is the length of the shortest edge around node P and c_r takes values less or equal to unity.

3.6 Boundary conditions

3.6.1 Mean flow equations

In this subsection the boundary conditions for the mean flow equations when they are strongly coupled is presented. The types of boundary conditions are flow inlet, flow

outlet, solid walls and symmetry boundaries. The treatment of the boundary conditions is presented in three dimensions (3D). In two dimensions (2D) the treatment of the boundary conditions is obvious. In figure 3-6 the definition of the control volume of a boundary node i is given.

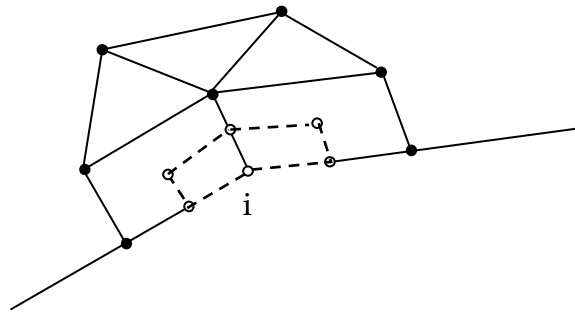


Figure 3-6. Definition of the control volume of a boundary node i .

Inlet

At the flow inlet velocity vector and temperature are prescribed and their variations are set to zero. Pressure is determined according to equation (3-38). Thus, the system of equations (3-44) becomes:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-61)$$

Outlet

Outflow conditions are applied with prescribed pressure. At the outlet, the flow pressure variation is set equal to zero and variations of the velocity vector and temperature are calculated according to equation (3-38).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} \quad (3-62)$$

Solid walls

At the solid walls no-slip boundary conditions are applied, which means that velocities and variations of them are equal to zero. The pressure variation is calculated.

For the temperature either it has a certain value (Dirichlet condition) or a certain heat flux is assumed (Neumann condition). When radiation and/or wall conduction are taken into account the heat flux differs from zero, while it is equal to zero when they are not taken into account. The Dirichlet case is applied explicitly, while for the Neumann case temperature is obtained through the solution of the energy equation.

When temperature has a certain value equation (3-44) becomes:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-63)$$

For a node that belongs in an adiabatic wall we put the heat flux in the viscous vector when contribution of its boundary face is calculated and the system of equations (3-44) is of the following form:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \end{pmatrix} \quad (3-64)$$

The above way of imposing boundary conditions at solid walls is used for laminar flows and turbulent flows with low-Re models.

When wall functions are used, we assume that nodes in the predefined distance from the wall $y=\delta$ coincide with the boundary nodes, because in practice δ has a small value. Then, boundary conditions are applied on the wall [Kou98]. δ distance is given a common value for every node. It is desirable that "wall" nodes (in δ distance from the wall) belong in the logarithmic region ($11.6 < y^+ < 400$). However, acceptable results were produced when $y^+ < 11.6$ as appropriate functions for the viscous sub-layer are also given. Our experience at the use of wall functions impose that δ distance have to be larger than the distance of the first from the "wall" grid node, but not large enough to produce values for y^+ larger than 400.

Having found the velocity \vec{V} at the boundary nodes we calculate the tangential to the wall velocity $\vec{V}_t = \vec{V} - \vec{V}_n$, where \vec{V}_n is the normal to the wall velocity. Then we calculate the friction velocity solving equation (2-27) (when $y^+ > 11.6$ an iterative Newton-Raphson procedure is required). Then the wall shear stress $\tau_w = u_\tau^2 \rho$ (τ_w is given in dimensional form) is inserted in the viscous fluxes vector of the boundary node.

The contribution of the energy equation in the boundary viscous fluxes vector is missing. In the boundary either the heat flux or the temperature is known. When the heat flux is known we insert it in the viscous fluxes vector. When the temperature is known we calculate the dimensionless temperature T^+ from equation (2-28) for the current y^+ and then $T_\tau = \frac{T_w - T}{T^+}$, where T_w is the wall temperature and T is node's temperature. The heat flux which is inserted in the boundary viscous fluxes vector is $q_w = T_\tau \rho C_p u_\tau$ (in dimensional form).

When we calculate the contribution of the boundary faces in the inviscid vector the normal to the wall velocity is assumed to be zero. Then inviscid vector becomes:

$$\vec{F}_{inv} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x p \\ n_y p \\ n_z p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-65)$$

Symmetry boundaries

In the symmetry boundaries the normal to the boundary velocity is zero. Symmetry boundary conditions are applied implicitly ([Kou98], [Br012]). When we calculate the contribution of a boundary node we neglect the viscous fluxes vector and for zero normal to the wall velocity V_n the inviscid fluxes vector is the same to the one of the wall functions (equation (3-65)).

3.6.2 Turbulence equations

At the inlet, Dirichlet boundary conditions for the turbulence variables are set explicitly. The values of the turbulence variables are given (k and ε for the k - ε , k and ω for the k - ω SST), or the turbulent to laminar kinematic viscosity ratio $\alpha_t = \nu_t/\nu$ and the inlet turbulent intensity Tu , or the inlet turbulent intensity Tu and the integral length scale l , or the turbulent to laminar kinematic ratio $\alpha_t = \nu_t/\nu$ and the integral length scale l .

When the kinematic viscosity ratio and the inlet turbulent intensity are given then turbulence variables are calculated for the k - ε turbulence model as:

$$k = \frac{3}{2} Tu^2 \quad \text{and} \quad \varepsilon = Re \frac{C_\mu k^2}{\alpha_t} \quad (3-66)$$

and for the k - ω turbulence model as:

$$k = \frac{3}{2} Tu^2 \quad \text{and} \quad \omega = Re \frac{k}{\alpha_t} \quad (3-67)$$

When the turbulence intensity and the integral length scale l are given then turbulence variables are calculated for the k - ε turbulence model as:

$$k = \frac{3}{2} Tu^2 \quad \text{and} \quad \varepsilon = \frac{C_\mu k^{3/2}}{l} \quad (3-68)$$

and for the k - ω turbulence model as:

$$k = \frac{3}{2} Tu^2 \quad \text{and} \quad \omega = \frac{\sqrt{k}}{l} \quad (3-69)$$

When the kinematic viscosity ratio and the integral length scale l are given then turbulence intensity is $Tu = \frac{\alpha_t}{\sqrt{\frac{3}{2}} Re l}$ and the turbulence variables are calculated using

expressions (3-66) or (3-67).

At the flow outlet turbulence variables are calculated. At the solid walls when the low-Re $k-\omega$ SST turbulence model is used the turbulence variables are defined by Dirichlet boundary conditions explicitly as:

$$k = 0 \quad \text{and} \quad \omega = 10 \frac{6}{\beta_1 Re (\Delta y)^2}, \text{ where } \Delta y \text{ is the dimensionless distance to the next}$$

point away from the wall and $\beta_1=0.0750$. When wall functions are applied turbulence variables are defined by the following expressions given in dimensional form:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{and} \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}, \text{ for the } k-\varepsilon \text{ turbulence model or}$$

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{and} \quad \omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{C_\mu} \kappa y}, \text{ for the } k-\omega \text{ turbulence model}$$

At the symmetry boundaries we neglect the turbulent viscous fluxes vector as we do for the mean flow equations and the inviscid fluxes vector is calculated similar to (3-65).

3.6.3 Radiative transfer equation

Inlet/Outlet

Open boundaries are assumed to have emissivity coefficient equal to unity (black walls) and a constant temperature equal to the ambient one.

Solid walls

Solid walls are assumed to be opaque and diffusively emitting and reflecting, which means that there is no preferred direction for outgoing rays. When wall emissivity is equal to unity the wall only emits radiative energy, while for values of the emissivity less than one the wall emits and reflects radiative energy concurrently. Therefore, the total radiative energy leaving a solid wall can be calculated as:

$$q_{w,out} = \varepsilon_w q_{w,b} + (1 - \varepsilon_w) q_{w,r} \quad (3-70)$$

where $q_{w,b}$ is the emitted blackbody radiative energy and $q_{w,r}$ is the reflected radiative energy. Moreover, it should be mentioned that walls are assumed to be gray, emitting only monochromatically.

Solid wall boundary conditions are implemented in an implicit way. For a node P belonging in the wall the radiation intensity is calculated adding to equation (3-57) the contribution of the wall.

$$\Delta I_P^{mn} \frac{V_p \Delta \Omega^{mn}}{c \Delta t_r} = \left[-(\kappa_a + \sigma_s) I_P^{mn} + S_R^{mn} \right] V_p \Delta \Omega^{mn} - \sum_i \left(I_{PQ}^{mn} \right)^L \left(D_{ci,out}^{mn} \Delta A_i + D_{ci,out,w}^{mn} \Delta A_w \right) - \sum_i \left(\left(I_{PQ}^{mn} \right)^R D_{ci,in}^{mn} \Delta A_i + I_w^{mn} D_{ci,in,w}^{mn} \Delta A_w \right) \quad (3-71)$$

where I_w^{mn} is the radiative intensity of an assumed "ghost" node outside the grid which is:

$$I_w^{mn} = \varepsilon_w I_{b,P} + \frac{1 - \varepsilon_w}{\pi} \sum_{m_i=1}^{N_\theta} \sum_{n_i=1}^{N_\phi} I_P^{m_i, n_i} D_{ci,out,w}^{m_i, n_i} \quad (3-72)$$

Symmetry walls

In the symmetry boundary walls the normal radiative heat flux is equal to zero.

3.7 Slope limiters

The application of first order reconstruction schemes introduce large amounts of numerical diffusion that may lead to unrealistic solutions. There are two alternatives to cure this inability. The first one is to use denser numerical meshes. The denser the numerical mesh the less the numerical diffusion. However, denser meshes require more computing time and storage. The second alternative is the introduction of higher order schemes for the reconstruction of the dependent variables. Although higher order schemes reduce the numerical diffusion, they may lead to spurious oscillations. Wiggles happen because of under-predictions or over-predictions of the dependent variables in regions of discontinuities, such as near shock waves, or in regions of bad quality numerical mesh ([Kov98], [Swe84]). In such cases pure higher order schemes may lead to instabilities or unrealistic solutions.

The main idea behind slope limiters is to preserve the monotonicity of the reconstruction schemes controlling the spatial derivatives to realistic values. The selection of the appropriate limiter depends on the studied problem and is done through a trial and error procedure.

In our work two slope limiters are applied for the reconstruction of the dependent variables necessary for the inviscid fluxes calculation and for the reconstruction of the radiation intensity of the FVM radiation model. These slope limiters are the Van Albada-Van Leer and the Min-Mod [Bla01].

If Q is the under reconstruction dependent variable (radiation intensity, pressure, velocity or temperature) then the left and right sides are calculated using the 2nd order reconstruction scheme under the following functions:

$$Q_L = Q_i + \frac{1}{2} \text{Lim} \left\{ (\nabla Q_i)^u \cdot \vec{i}_j, (\nabla Q_{ij})^c \cdot \vec{i}_j \right\} \quad (3-73)$$

$$Q_R = Q_j - \frac{1}{2} \text{Lim} \left\{ (\nabla Q_j)^u \cdot \vec{i}_j, (\nabla Q_{ij})^c \cdot \vec{i}_j \right\} \quad (3-74)$$

where the upwind gradients at nodes i and j are:

$$(\nabla Q_i)^u = 2(\nabla Q_i) - (\nabla Q_{ij})^c \quad (3-75)$$

$$(\nabla Q_j)^u = 2(\nabla Q_j) - (\nabla Q_{ij})^c \quad (3-76)$$

and the centered gradient at edge ij is:

$$(\nabla Q_{ij})^c \cdot \vec{ij} = Q_j - Q_i \quad (3-77)$$

The gradients $\nabla \bar{Q}_i$ and $\nabla \bar{Q}_j$ were calculated using either the least square method or the Green-Gauss method when Q was one of the dependent variables of the mean flow equations and using the following expression when Q was the radiation intensity of a solid angle mn:

$$\nabla Q_i = \frac{1}{\Omega_i} \left(\sum_{j=1}^{nedge(i)} \frac{1}{2} (Q_i + Q_j) \cdot \hat{n}_j \Delta S_j + \sum_{j=1}^{nedge_w(i)} Q_i \cdot \hat{n}_{j,w} \Delta S_{j,w} \right) \quad (3-78)$$

where $nedge(i)$ is the number of edges connected to current node i and $nedge_w(i)$ is the number of boundary edges connected to current node i. When node i is an internal node the second sum is not taken into account.

Lim is the limiter function, defined for Van Albada-Van Leer limiter as [van82]:

$$\text{Lim}(a, b) = \begin{cases} \frac{(a^2 + e)b + (b^2 + e)a}{a^2 + b^2 + 2e}, & ab > 0 \\ 0, & ab \leq 0 \end{cases} \quad (3-79)$$

and for Min-Mod limiter as [Swe84]:

$$\text{Lim}(a, b) = \begin{cases} a, |a| < |b| & \text{and } ab > 0 \\ b, |b| < |a| & \text{and } ab > 0 \\ 0, ab \leq 0 \end{cases} \quad (3-80)$$

A significant drawback of slope limiters is that they slowdown or even stall the convergence to a certain degree which is more pronounced when slope limiters use non-differentiable functions [Ven93]. This phenomenon is obvious in subsection 4.1.8 where the application of slope limiters for the case of the differentially heated cubic cavity is presented. Limiters were also applied on the tunnel fire cases for the reconstruction of the mean flow and turbulent dependent variables without auxiliary effects. Therefore, slope limiters were removed from the calculation of the inviscid fluxes, but constitute a choice for the reconstruction of the radiation intensity.

3.8 Schemes for preserving temperature within realistic bounds

In some simulations, under-predictions or/and over-predictions of the temperature were produced. Specifically, this happened in the cases of the differentially heated cavities, presented in chapter 4, and in the tunnel fire cases, presented in chapter 6. In the cases of the differentially heated cavities, smaller and greater values of temperature than the lower and upper bounds gradually fade away and in the steady state under-predictions and over-predictions of temperature were not found. In the tunnel fire cases, a bit smaller values of temperature than the ambient temperature were produced near the region of the heat source. This is unrealistic because initial temperature inside the tunnel was equal to the ambient temperature and there was not any heat "sink".

Under-predictions of the dependent variables have been reported in a wide range of computational problems, such as for the turbulence variables [Bpα12], the radiation intensity ([Lyg12], [Lyg13a]) and the dependent variables of advection-diffusion equations [Bar89]. This under-predictions are not only unrealistic but can make the numerical solution unstable or even lead to failure of the final steady state.

We applied two schemes for the treatment of unphysical temperatures; the first one was used by Vrahliotis [Bpα12] for the treatment of lower than zero values of the turbulent variables and the second one was used by Bartnicki [Bar89] for the treatment of lower than zero values of the dependent variable of an advection-diffusion equation.

The first scheme is very simple and requires inconsiderable additional computational time. According to this, we check for temperatures smaller than the ambient temperature after each Newton step. If temperatures smaller than the ambient one are found we replace them with the temperature value at the previous Newton step.

The second scheme is simple and requires little additional computational time too. If N_1 is the number of nodes with temperature greater than the ambient temperature ($T > T_{amb}$), N_2 is the number of nodes with temperature equal to the ambient temperature ($T = T_{amb}$) and N_3 the number of nodes with temperature smaller than the ambient temperature ($T < T_{amb}$), obviously:

$$N_1 + N_2 + N_3 = N \quad (3-81)$$

where N is the total number of nodes.

We define the quantity T_s :

$$T_s = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ T_j < T_{amb}}}^N (T_j - T_{amb}) \right| \quad (3-82)$$

Then the filtering procedure when applied in serial is given in the following flow chart:

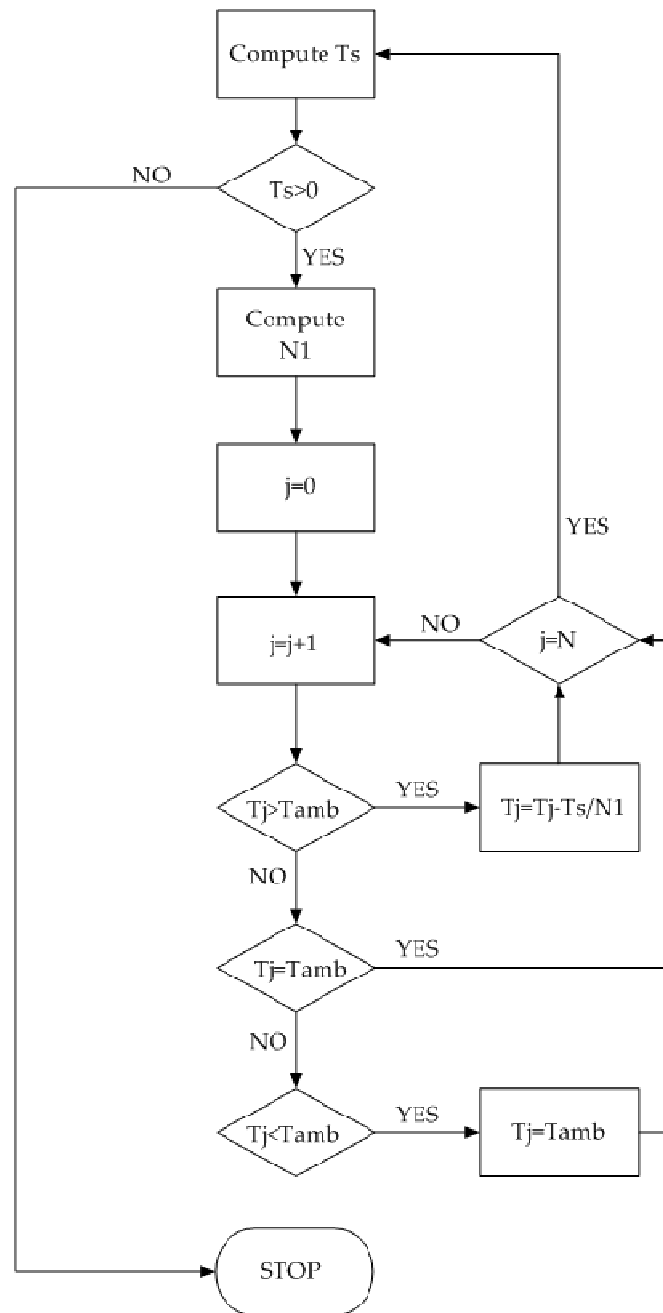


Figure 3-7. Flow chart of the Bartnicki's algorithm.

We found negligible differences between these two schemes. However, the second scheme when applied in parallel requires extra information to be transferred among sub-domains for the calculation of the overall T_s and N_1 , making it more complex. Therefore, the first scheme was adopted for the preservation of temperatures greater or equal to the ambient temperature.

CHAPTER 4

VALIDATION OF THE NUMERICAL METHODOLOGY

In chapter 4 we present some representative test cases solved for the validation of the developed solver. These cases are two-dimensional or three-dimensional, steady or unsteady, laminar or turbulent, with the effect of radiation or not. Specifically, we simulated two extended Graetz problems, the steady laminar and turbulent flow in a differentially heated cubic cavity, the steady laminar and turbulent flow in a differentially heated square cavity, the steady laminar flow in an internally heated square cavity and the unsteady laminar flow past a square cylinder, under the influence of aiding and opposing buoyancy. All above mentioned test cases were simulated using the strongly coupled solution of the mean flow equations (continuity equation, momentum equations and energy equation). We concluded to the superiority of their strongly coupled solution after the comparison between the strongly coupled and the loosely coupled solution methods, which is presented below. The effect of the use of two slope limiters was also studied. In all the above mentioned cases radiation was not taken into account. Then, we present some cases of pure radiative heat transfer in enclosures and some cases of conjugated flow and heat transfer with all means (conduction, convection and radiation) in cavities.

For the prediction of the steady flows two approaches were applied. In the first approach we set an extremely large physical-time step (physical-time term in equation (3-36) become negligible), CFL number between 0.1 and 100 and many pseudo-time steps in order to achieve convergence of all dependent variables in the first physical-time step. In the second approach we set a smaller physical-time step (10^{-2} was a typical value), CFL number between 1 and 100 and approximately 100 pseudo-time steps for each physical-time step. After some physical-time steps convergence of all dependent variables was achieved.

The artificial compressibility parameter β controls the artificial speed of sound, as it can be seen in equations (3-41), and is crucial in determining the convergence rate and stability of the simulations [Hir90]. The value of 1 was chosen for the artificial compressibility parameter, as it have been proposed in [Bpa12].

4.1. Laminar flows

4.1.1 Extended Graetz problem 1

First of all an extended Graetz problem was solved. The classic Graetz problem is the well known problem of forced convection (buoyancy is negligible) in a duct, without taking into account the axial conduction. The fluid enters the duct with a uniform temperature and the velocity profile is considered to be fully developed. No internal heat generation is present and the temperature of the duct is constant. The extended Graetz problem refers to the classic Graetz problem when axial conduction becomes important, which happens for small values of the Peclet number ($Pe=RePr$) [Sch70], [Pap80]. When Pe number is smaller than 200 axial conduction cannot be neglected [Sch70].

This extended Graetz problem and the following Graetz problem in subsection 4.1.2 were selected in order to test the introduction and discretization of the energy equation in the 3-D solver. They are cases that the energy equation is not coupled with the other mean flow equations.

In this test case, laminar fully developed flow is assumed in a circular duct of radius equal to 1 and length equal to 20 (figure 4-1). Fluid enters the duct at $x=0$ with the parabolic profile of dimensionless velocity $u(r)=2(1-r^2)$ ($v=w=0$) and uniform temperature profile, $T_h=1$. Velocity was non-dimensionalized by means of the mean velocity, $V_o=u_m$. At the outlet cross section ($x=20$) pressure is constant. On the duct walls temperature is $T_w=0$. No-slip boundary conditions are applied at all walls ($u=v=w=0$).

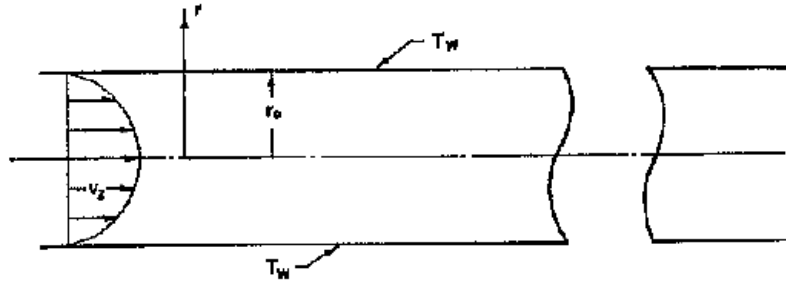


Figure 4-1. Graetz problem 1. Sketch of the duct and boundary conditions [Sch70].

As initial conditions all dependent variables were set equal to zero except for the u velocity that was equal to two for faster convergence to the steady state. Three different hexahedral meshes were used in order to achieve independent results. The finer was consisted of 540949 nodes and 513600 cells. A typical mesh at a cross section of the duct that was used is presented in figure 4-2.

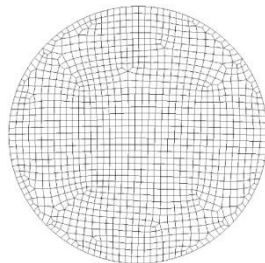


Figure 4-2. Graetz problem 1. Typical numerical mesh at a cross section.

In figure 4-3 radial temperature profiles are given and compared to the results presented by Schmidt and Zeldin [Sch71] at two axial positions ζ , defined as $\zeta = \frac{x}{Pe}$.

Schmidt and Zeldin [Sch71] used a finite difference technique with equal subdivisions for the prediction of this case. Negligible differences between our results and those given by Schmidt and Zeldin are encountered.

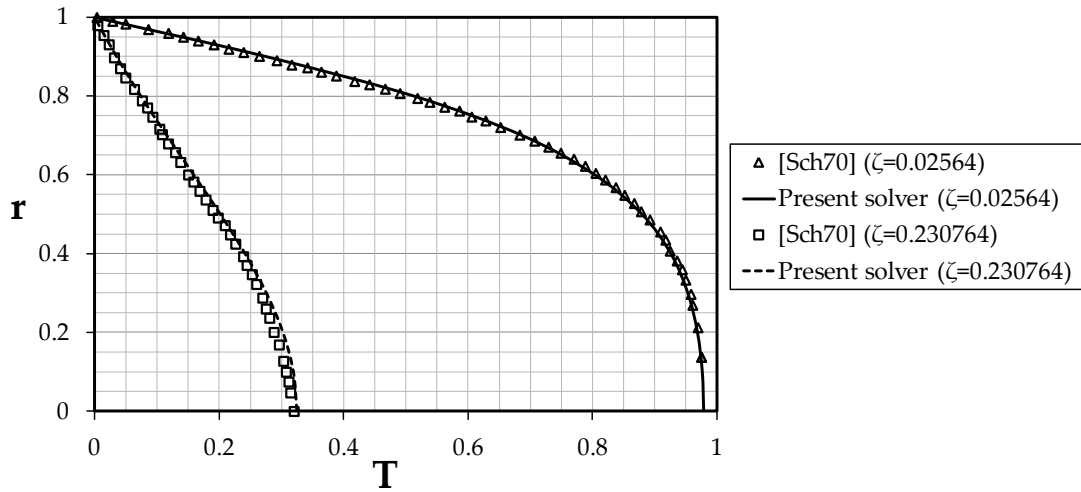


Figure 4-3. Graetz problem 1. Comparison of radial temperature profile at two axial positions ζ .

In figure 4-4 the temperature field on mid-plane $y=0$ is given.

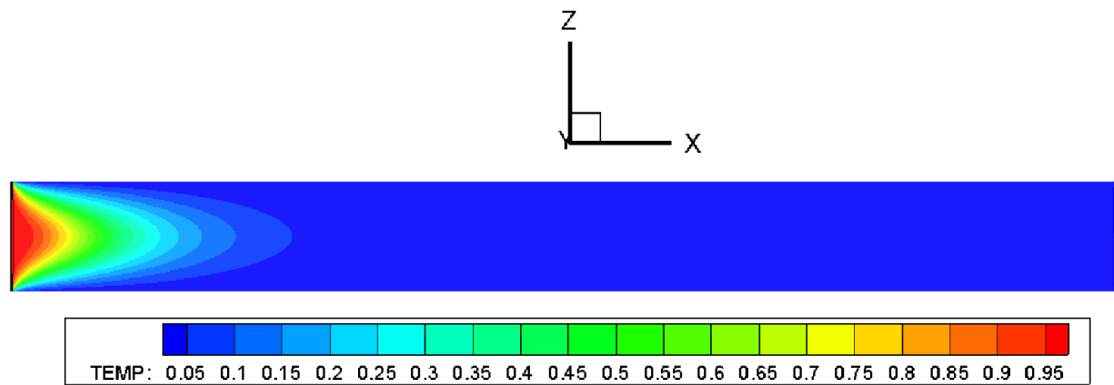


Figure 4-4. Graetz problem 1. Temperature field on mid-plane $y=0$.

4.1.2 Extended Graetz problem 2

The second Graetz problem is similar to the first one. The differences are that x counts from -10 to 10 , fluid enters the duct with uniform temperature $T_c=0$ and that the wall temperature is $T_c=0$ for $x \leq 0$ and $T_h=1$ for $x > 0$. The same to the first Graetz problem initial conditions were set and the same numerical meshes were used.

As mentioned, the flow is assumed to be fully developed, which means that the velocity profile at the inlet is parabolic, and along the duct, should remain parabolic. In addition to this, a linear axial pressure drop along the duct should exist for this fully developed flow, according to Poiseuille's law, as Navier-Stokes and energy equations are decoupled for this forced convection case. In figure 4-5 velocity profiles at positions $x=-10$ (duct inlet), $x=0$, $x=10$ (duct outlet) are given. Pressure along the axis of the duct ($r=0$) is also presented. Velocity profiles at these three cross sections coincide. Therefore, the parabolic profile remains along the duct, indicating flow rate conservation. Moreover, pressure drop is observed to be linear.

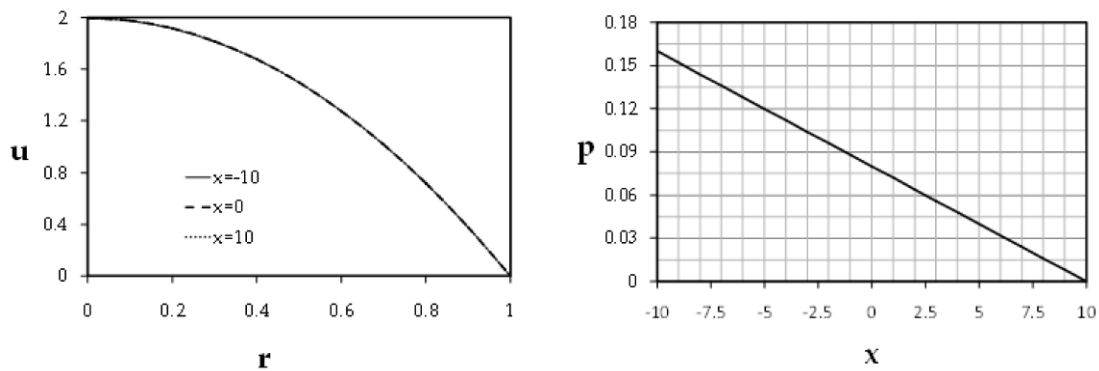


Figure 4-5. Graetz problem 2. Velocity profiles at three different positions along duct (left) and axial pressure drop along the duct (right).

In figure 4-6 radial profiles of temperature are compared to the analytical results presented by Papoutsakis et al. [Pap80] at various axial positions ζ , where ζ is defined as $\zeta = \frac{x}{Pe}$. Temperature along the axis of the duct is given and compared in figure 4-7.

Satisfactory comparisons are observed. Papoutsakis et al. managed to find an analytical solution to the extended Graetz problem using functional analysis principles.

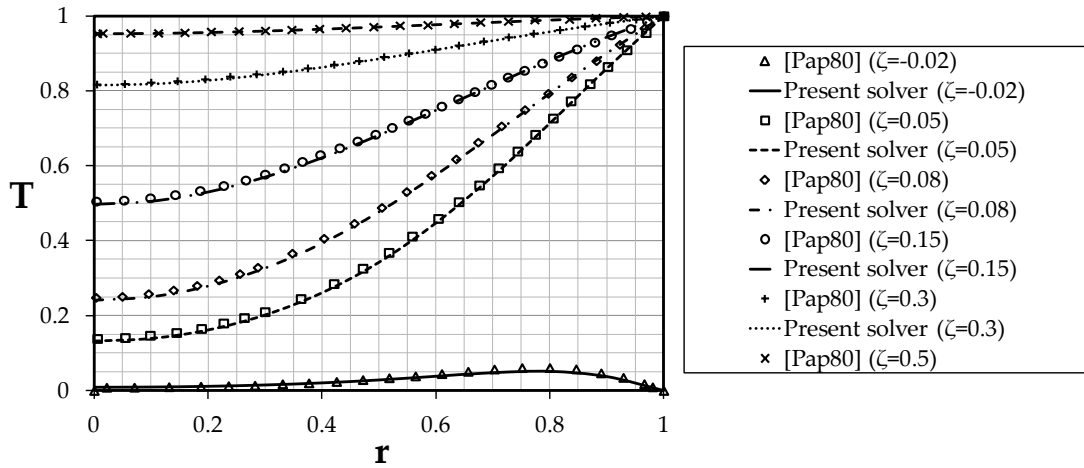


Figure 4-6. Graetz problem 2. Radial temperature profiles at various axial positions ζ . Comparison with the analytical solution of the literature [Pap80].

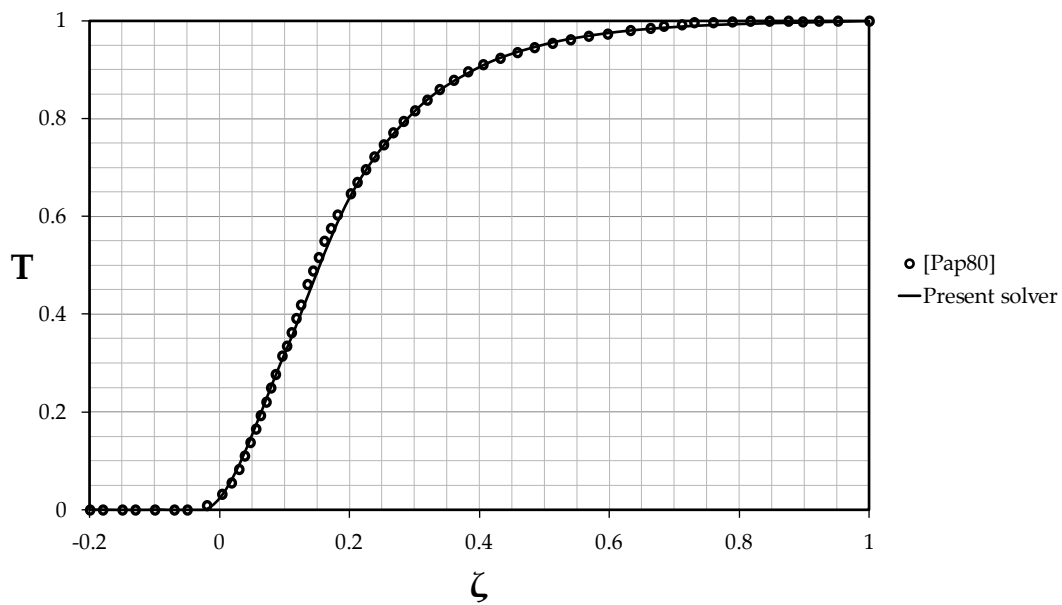


Figure 4-7. Graetz problem 2. Axial temperature along the duct.

Nusselt number is defined for this problem as: $Nu = -2 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}$, where the bulk

temperature is $T_b = 2 \int_{r=0}^{r=1} ru(r)T(r)dr$. The asymptotic tendency of the Nusselt number

is a basic characteristic of a Graetz problem. In figure 4-8 Nusselt number along the duct is given. It takes the value of 3.73 at duct's outlet. It is worth noting that Nusselt number is very sensitive to the value of the bulk temperature when reaching duct's outlet.

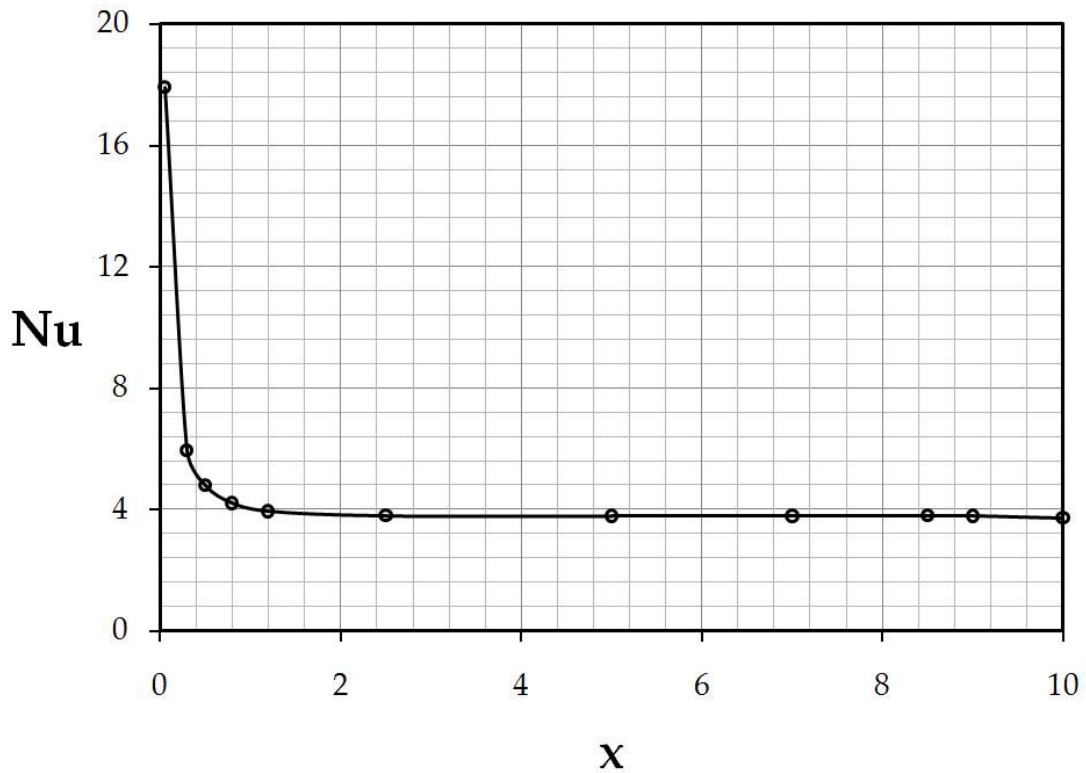


Figure 4-8. Graetz problem 2. Nusselt number as a function of axial position.

In figure 4-9 and figure 4-10 the temperature field and the pressure field on the mid-plane $y=0$ are given respectively. The linear pressure drop along the duct is obvious.

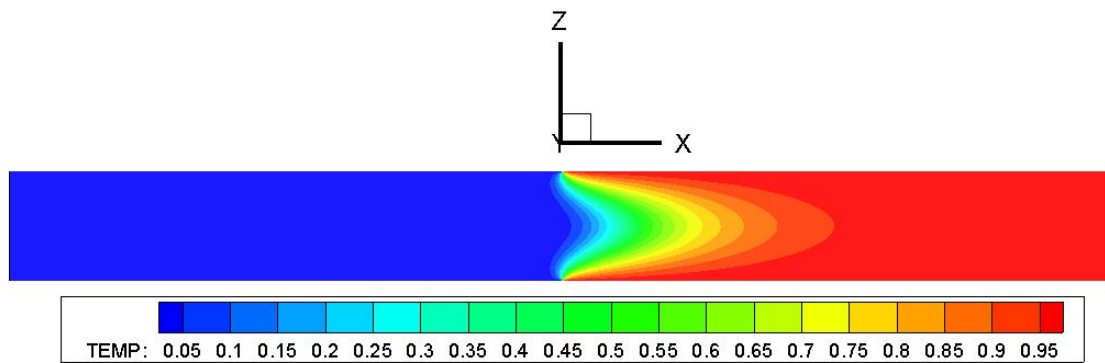


Figure 4-9. Graetz problem 2. Temperature field on mid-plane $y=0$.

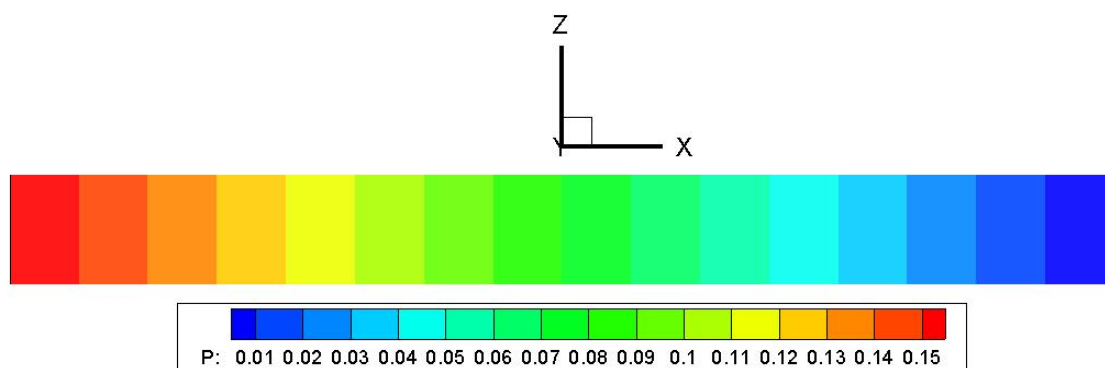


Figure 4-10. Graetz problem 2. Pressure field on mid-plane $y=0$.

4.1.3 Differentially heated cubic cavity

The case of the differentially heated cubic cavity has already been studied by several investigators ([Tri00], [Lo07], [Rav08]). Tric et al. [Tri00] solved the case of the differentially heated cubic cavity using a pseudo-spectral Chebyshev solver, based on the projection-diffusion method. They applied the Chebyshev Gauss-Lobatto method for the spatial discretization and the second order Crank-Nicolson Adams-Bashforth scheme for time marching. Lo et al. [Lo07] developed a differential quadrature algorithm for the solution of the velocity-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations. Ravnik et al. [Rav08] also solved the velocity-vorticity equations coupled with the energy equation, applying a subdomain boundary element method. For the determination of the boundary conditions a single domain boundary element method was used. Buoyancy force was introduced in the vorticity transport equation using the Boussinesq law.

The case of the differentially heated cubic cavity was chosen in order to test the integration of the buoyancy force in the momentum equation and the coupling of the mean flow equations in the 3-D solver.

A closed cube of size W (figure 4-11) is assumed, with a fluid subjected to a temperature difference between two opposite vertical walls and four adiabatic walls. The fluid near the hot wall is heated and due to density difference goes up, while the reverse phenomenon takes place near the cold wall with the fluid going down.

Specifically, temperature $T_h=0.5$ is prescribed at $x=1$ (hot wall) and $T_c=-0.5$ at $x=0$ (cold wall). Air is the working fluid with Prandtl number of $Pr=0.71$. The reference value used for the non-dimensionalization of the velocity is $v_o = \frac{a_o}{W}$, where $a_o = \frac{k}{\rho_o C_p}$ is the thermal diffusivity of air. Thus Reynolds number is $Re = \frac{1}{Pr}$. There is not any heat source or sink in the cube ($S_q = 0$). Grashof number is calculated for the Rayleigh values of 10^3 , 10^4 and 10^5 ($Gr = Ra/Pr$).

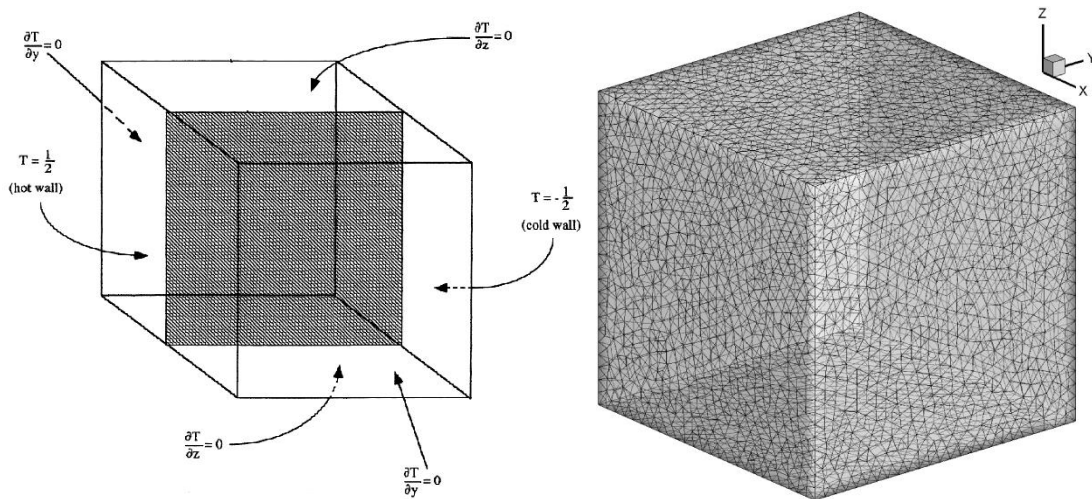


Figure 4-11. Differentially heated cubic cavity. Sketch of the cubic cavity and the boundary conditions (left) [Tri00]. A typical numerical mesh (right).

The three Rayleigh varied cases were run successively for increasing Rayleigh number. For each case the converged flow field of the previous case was used as initial condition, except for the first case ($Ra=10^3$) where all variables were set equal to zero.

The finer numerical mesh, for which solution was satisfactorily independent from the mesh, consisted of 357911 nodes and 343000 cells. For the prismatic region of the hybrid meshes used, the first layer thickness was equal to 0.01 and the growing factor equal to 1.2. The prismatic region was extended from the wall about 10% of the size of the cube.

Our results are presented and compared to those of other researchers. Figure 4-12 presents temperature profiles on $y=0.5$ and $z=0.5$ line for $0 \leq x \leq 1$. Figure 4-13 presents velocities profiles. u velocity profiles are given on $x=0.5$ and $y=0.5$ line for $0 \leq z \leq 1$. w velocity profiles are given on $y=0.5$ and $z=0.5$ line for $0 \leq x \leq 1$. The comparisons are satisfactory.

In figure 4-14 and figure 4-15 velocities u and w , pressure and temperature fields on mid-plane $y=0.5$ for all Ra number cases are given. As is evident from the plots the contours are generally smooth. From the temperature fields the zero gradient for the temperature at the adiabatic walls is obvious.

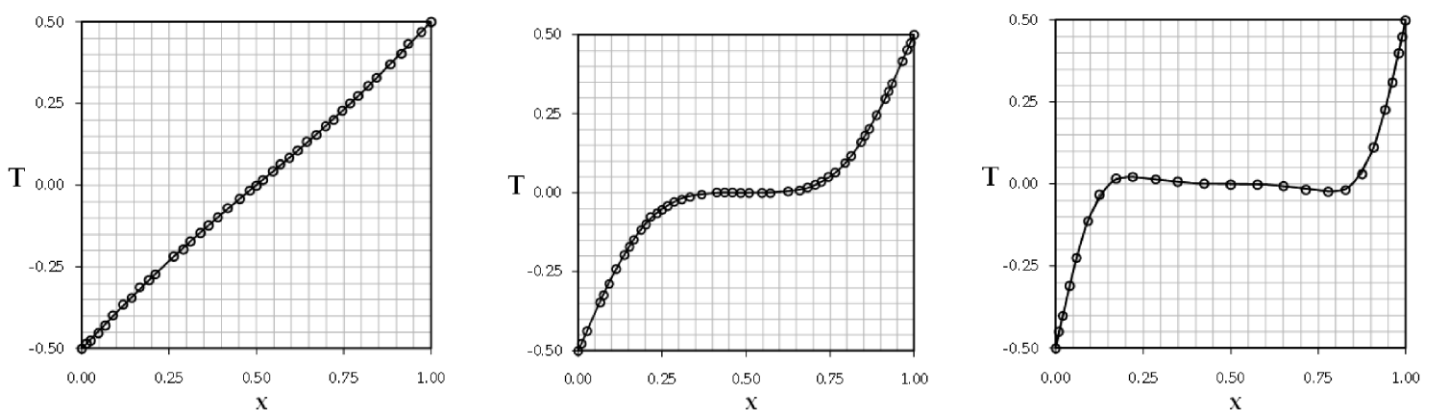


Figure 4-12. Differentially heated cubic cavity. Comparison of temperature profiles on $y=0.5$ and $z=0.5$, $Ra=10^3$ (left), $Ra=10^4$ (middle), $Ra=10^5$ (right) (o: [Rav08], continuous line: Present solver).

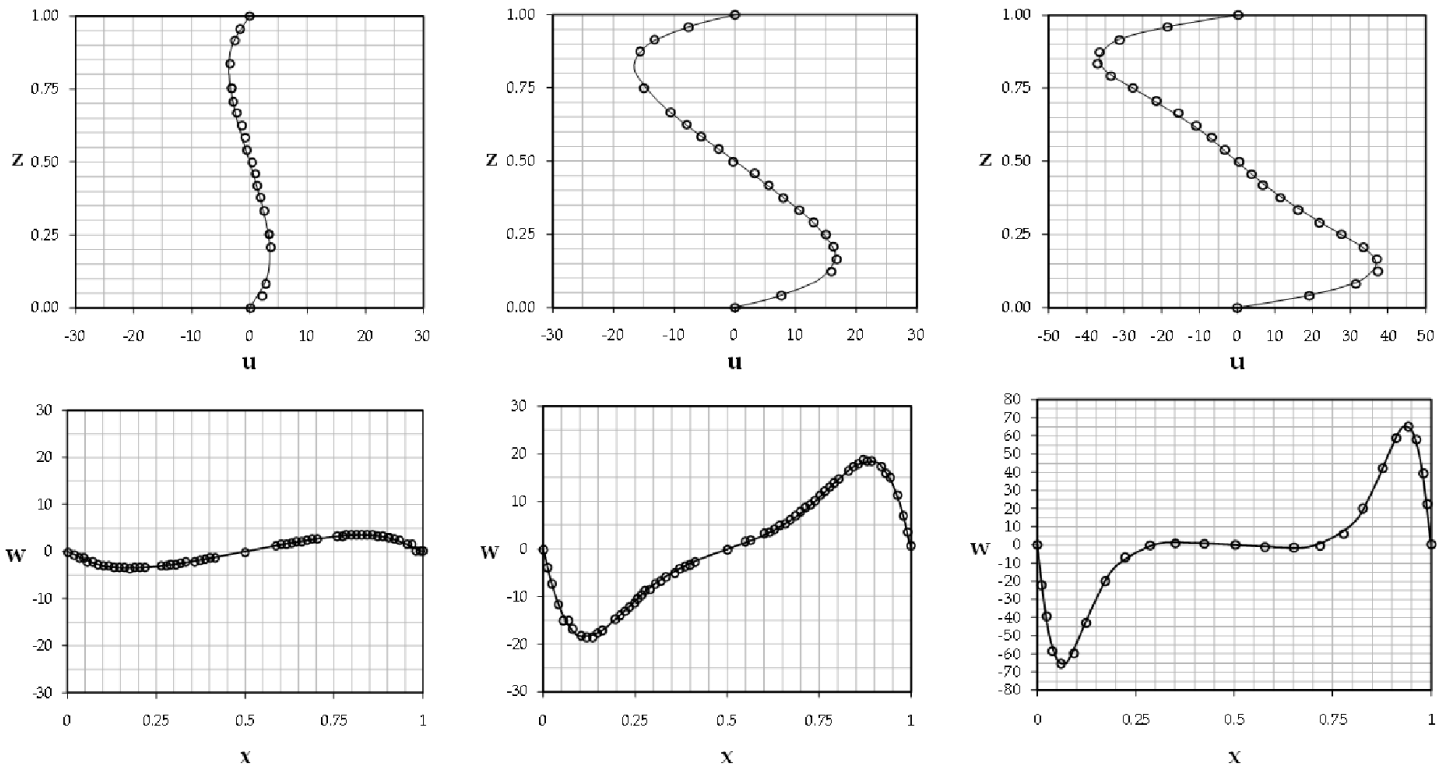


Figure 4-13. Differentially heated cubic cavity. Comparison of velocities profiles. u velocity profile on $x=0.5$ and $y=0.5$ (top row). w velocity profile on $y=0.5$ and $z=0.5$ (bottom row). $Ra=10^3$ (left column), $Ra=10^4$ (middle column), $Ra=10^5$ (right column) (o: [Rav08], continuous line: Present solver).

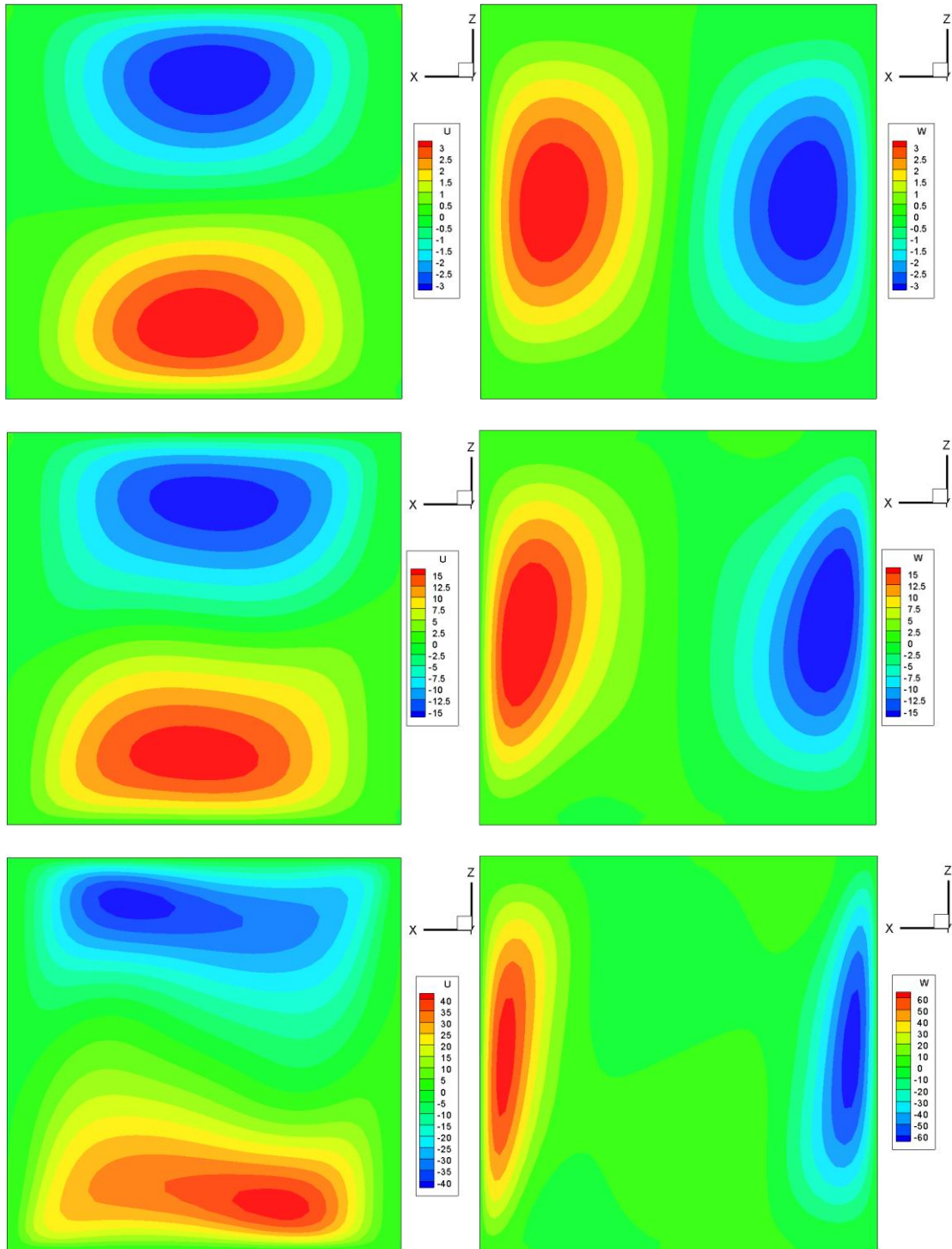


Figure 4-14. Differentially heated cubic cavity. u velocity field on mid-plane $y=0.5$ (left column). w velocity field on mid-plane $y=0.5$ (right column). $Ra=10^3$ (top row), $Ra=10^4$ (middle row), $Ra=10^5$ (bottom row).

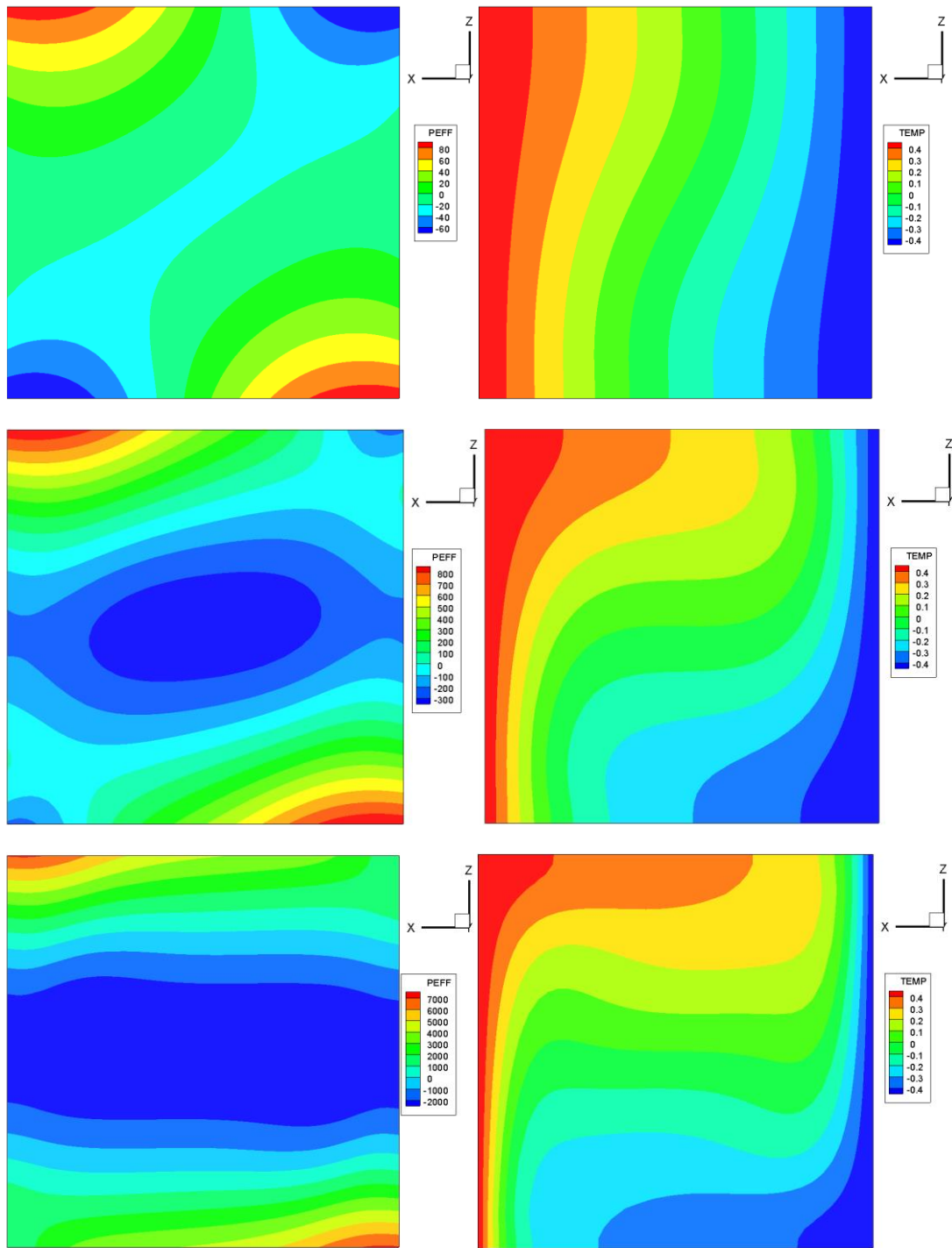


Figure 4-15. Differentially heated cubic cavity. Pressure field on mid-plane $y=0.5$ (left column). Temperature field on mid-plane $y=0.5$ (right column). $Ra=10^3$ (top row), $Ra=10^4$ (middle row), $Ra=10^5$ (bottom row).

Maxima values of velocities and global Nusselt number ($Nu = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dy dz$) values at the hot wall are presented at table 4-1 and table 4-2 respectively. Nusselt number expresses the heat flux through a wall. Due to the conservation of energy, Nusselt number at the hot wall and cold wall should be equal, since all other walls are adiabatic and heat sources or sinks do not exist. Differences between Nusselt numbers at hot and cold walls were approximately equal to 10^{-7} for all Rayleigh varied cases.

Velocities	Ra=10 ³			Ra=10 ⁴			Ra=10 ⁵		
	[Tri00]	[Lo07]	Present solver	[Tri00]	[Lo07]	Present solver	[Tri00]	[Lo07]	Present solver
u _{max}	3.5435	3.5227	3.5255	16.7198	16.5312	16.7108	43.9037	43.6877	43.7705
v _{max}	0.1733	0.1726	0.1694	2.15657	2.1092	2.1143	9.6973	9.3720	9.4812
w _{max}	3.5446	3.5163	3.5312	18.9835	18.6971	18.8822	71.0680	70.6267	71.2915

Table 4-1. Differentially heated cubic cavity. Maxima values of velocities compared to other researchers' results.

Ra	[Tri00]	[Lo07]	[Rav08]	Present solver
10 ³	1.0700	1.0710	1.0713	1.0713
10 ⁴	2.0542	2.0537	2.0591	2.0659
10 ⁵	4.3370	4.3329	4.3570	4.3932

Table 4-2. Differentially heated cubic cavity. Nusselt number values at the hot wall compared to other researchers' results.

4.1.4 Differentially heated square cavity

The case of the differentially heated square cavity is a widely studied case ([deV83a], [deV83b], [Mar84], [Bar94], [Fus91]). De Vahl Davis ([deV83a], [deV83b]) applied a finite difference method to solve the stream function-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations. Specifically, a central differencing scheme was applied for all spatial derivatives and forward differences for time derivatives. Markatos and Pericleous [Mar84] applied a finite volume technique. A pressure correction equation combined with the SIMPLEST method was used for pressure-velocity coupling. Barakos et al. [Bar94] also applied a finite volume method. Velocity components were calculated at a staggered grid and the scalar variables at the main grid. SIMPLEC method was used for pressure prediction. Fusegi et al. [Fus91] used a finite volume approach. A staggered grid was introduced for the velocity components, while pressure and temperature were calculated and stored in the main grid points. A third order accurate spatial scheme and a first order accurate temporal scheme were applied.

The case of the differentially heated square cavity was chosen in order to test the introduction and discretization of the energy equation, the integration of the buoyancy force in the y direction momentum equation and the coupling of the mean flow equations in the 2-D solver.

A 2D square cavity of size H is assumed, with a fluid subjected to a temperature difference at the two vertical walls and the horizontal walls being adiabatic (figure 4-16). Density differences, produced by temperature differences, results in a recirculating flow in the interior of the cavity.

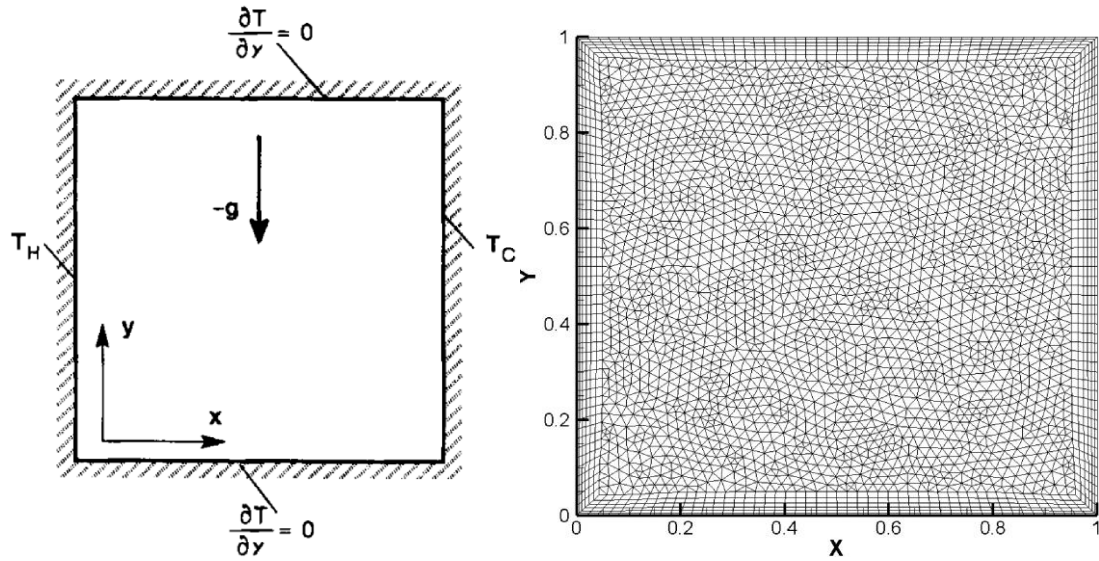


Figure 4-16. Differentially heated square cavity. Sketch of the square cavity and the boundary conditions (left) [deV83a]. A typical numerical mesh (right).

More specifically, temperature $T_h=1$ is prescribed at $x=0$ (hot wall) and $T_c=0$ at $x=1$ (cold wall). At all walls no-slip boundary conditions are applied ($u=v=0$). Air is the working fluid with Prandtl number equal to $Pr=0.71$. The reference value used for the non-dimensionalization of the velocity is $v_o = \sqrt{g\beta_r\Delta T_o H}$. Thus Reynolds number is $Re = \sqrt{Gr}$. There is not any heat source or sink in the cavity ($S_q = 0$). Rayleigh number values are equal to 10^3 , 10^4 , 10^5 and 10^6 .

The four Rayleigh number varied cases were run successively for increasing Rayleigh number. For faster convergence to the steady state the converged flow field of the previous case was used as initial condition of the next one, except for the first case ($Ra=10^3$) where velocities and pressure were equal to zero and temperature equal to 0.5.

The finer numerical mesh consisted of 7626 nodes and 10962 cells. For its structured region, consisted of quadrilaterals, the first layer thickness was equal to 0.001 and the growing factor equal to 1.2. The prismatic region was extended from the wall about 5% of the size of the square cavity.

Our results are presented and compared to those presented by other researchers. Figure 4-17 presents temperature and velocities profiles. Temperature profile is given

on $y=0.5$ line for $0 \leq x \leq 1$. u velocity profile is given on $x=0.5$ line for $0 \leq y \leq 1$. v velocity profile is given on $y=0.5$ line for $0 \leq x \leq 1$. Average Nusselt number ($Nu = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dy$) values at the hot (or cold) wall and maxima values of velocities are presented at table 4-3 and table 4-4 respectively. Our results match very well with the results of other researchers.

Figure 4-18 shows velocity vectors for the cases of $Ra=10^3$ and $Ra=10^6$. A huge stagnation region exists at the center of the cavity for the $Ra=10^6$ case. Generally, stagnation region increases with increasing Rayleigh number and a highly convective region is created near side walls. This is attributed to the decrease of boundary layer thickness by increasing the Rayleigh number. The satisfactory simulation of this case shows the general applicability of our solver, as highly diffusive and highly convective regions coexist in the same cavity.

Ra	[Mar84]	[deV83a]	[Fus91]	[Bar94]	Present solver
10^3	1.108	1.118	1.105	1.114	1.1175
10^4	2.201	2.243	2.302	2.245	2.2459
10^5	4.430	4.519	4.646	4.510	4.5085
10^6	8.754	8.799	9.012	8.806	8.8194

Table 4-3. Differentially heated square cavity. Nusselt number values compared to other researchers' results.

Solvers	Ra= 10^3		Ra= 10^4		Ra= 10^5		Ra= 10^6	
	u_{\max}	v_{\max}	u_{\max}	v_{\max}	u_{\max}	v_{\max}	u_{\max}	v_{\max}
[deV83a]	0.136	0.138	0.192	0.234	0.153	0.261	0.079	0.262
[Fus91]	0.132	0.131	0.201	0.225	0.147	0.247	0.084	0.259
[Bar94]	0.153	0.155	0.193	0.234	0.132	0.258	0.077	0.262
Present solver	0.137	0.139	0.192	0.233	0.130	0.256	0.076	0.262

Table 4-4. Differentially heated square cavity. Maxima values of u and v velocities on the $x=0.5$ and $y=0.5$ lines respectively.

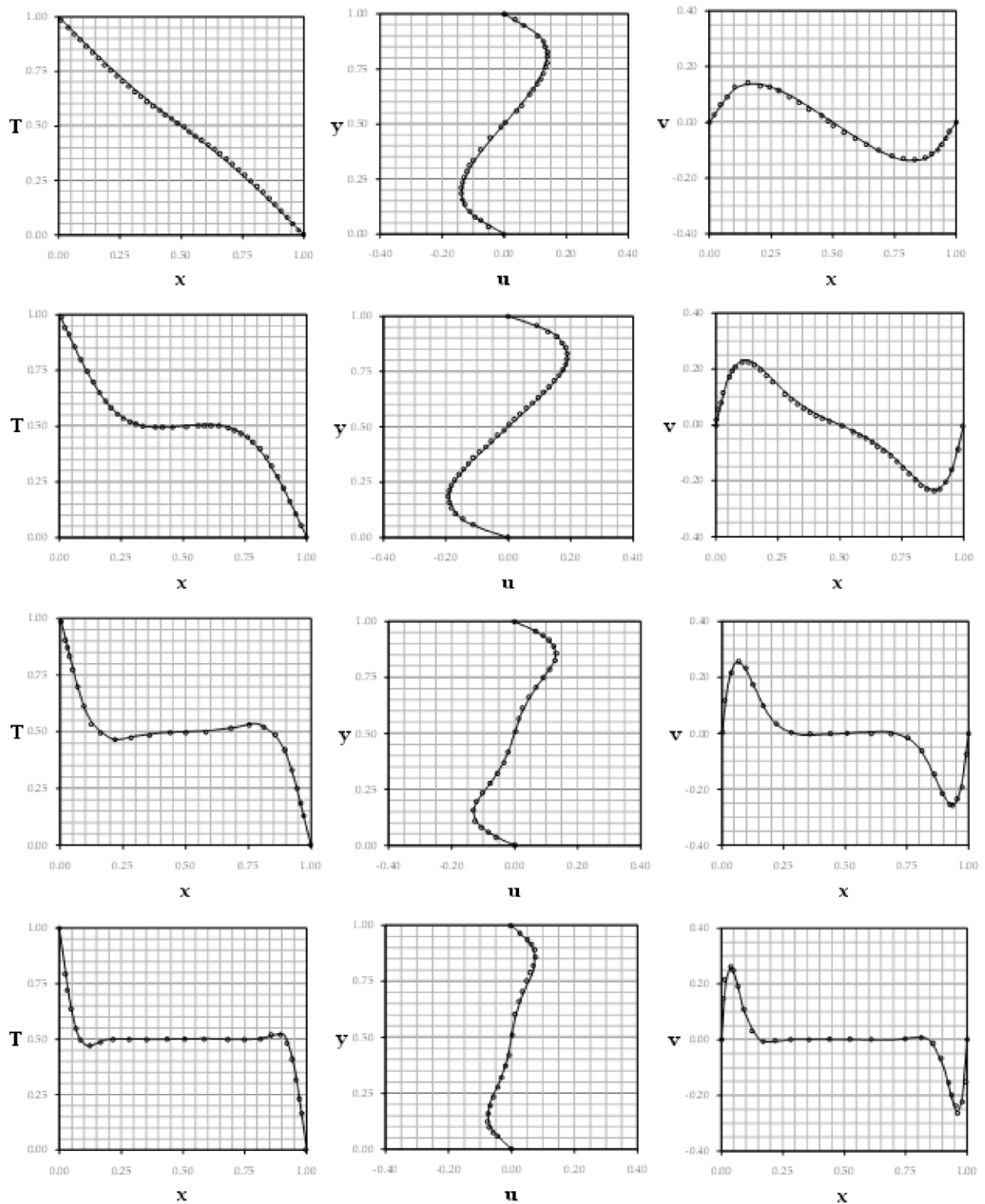


Figure 4-17. Differentially heated square cavity. Comparison of temperature and velocities profiles. Temperature profile (left column), u velocity profile on $x=0.5$ (middle column), v velocity profile on $y=0.5$ (right column). $Ra=10^3$ (1st row), $Ra=10^4$ (2nd row), $Ra=10^5$ (3rd row), $Ra=10^6$ (4th row) (o: [Bar94], continuous line: Present solver).

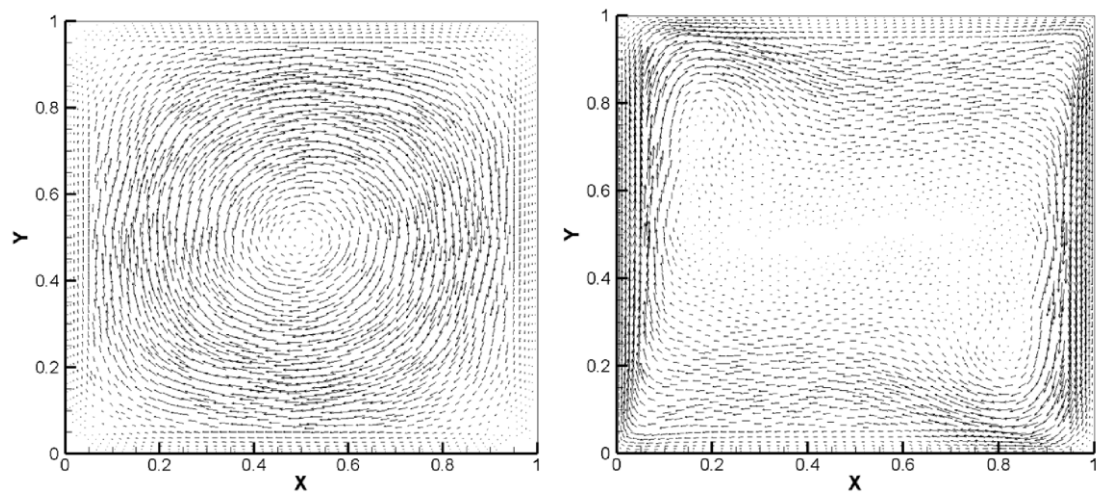


Figure 4-18. Differentially heated square cavity. Velocity vectors for the cases of $Ra=10^3$ (left) and $Ra=10^6$ (right).

In figures 4-19 to 4-22 velocities u and v , pressure and temperature fields for all Ra number cases are given. Generally smooth contours were calculated passing from the structured region of the numerical mesh to the unstructured. Zero temperature gradients at the adiabatic walls were produced from the implicit way of implementing boundary conditions. Velocities and temperature contours are similar to the respective case of the cubic cavity. The differences in the values of the velocities are because of the different reference scales used for the non-dimensionalization of the velocities.

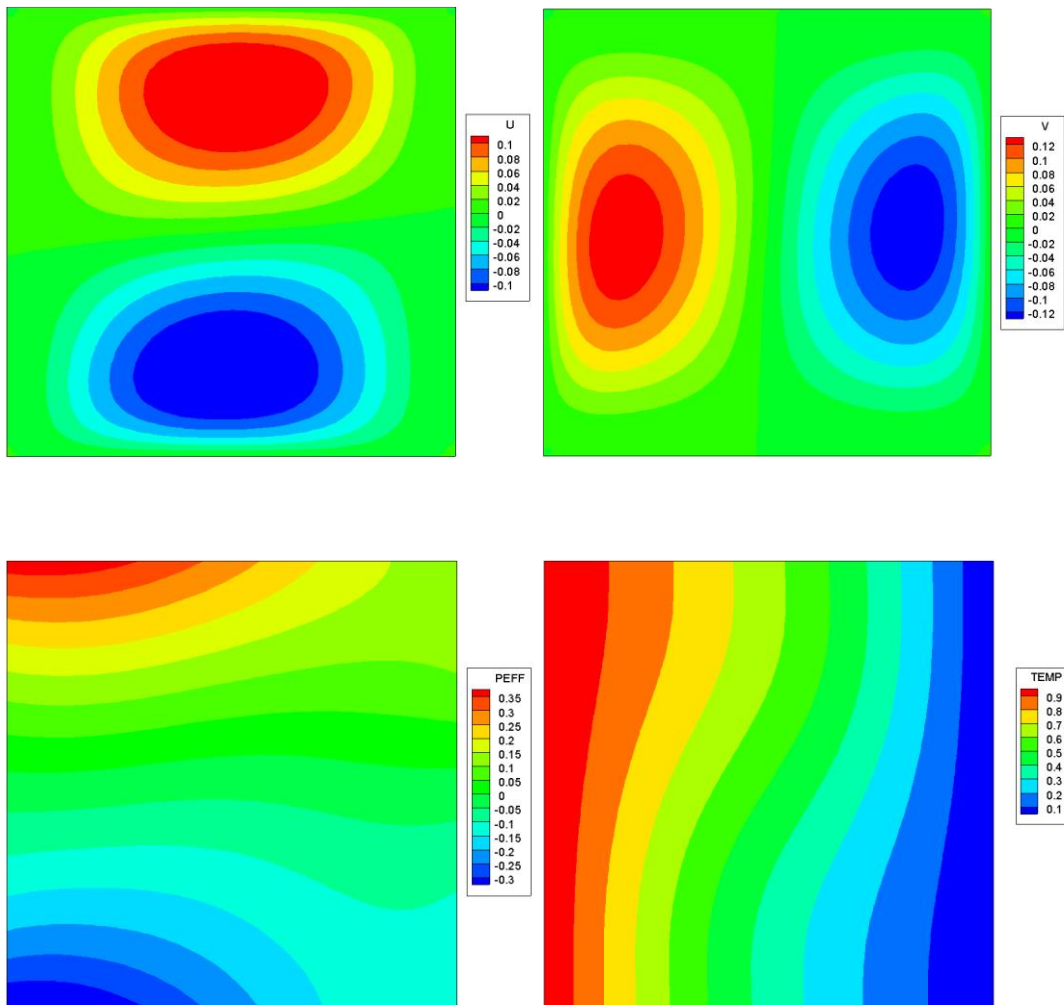


Figure 4-19. Differentially heated square cavity for $Ra=10^3$. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field(left column, bottom row), temperature field (right column, bottom row).

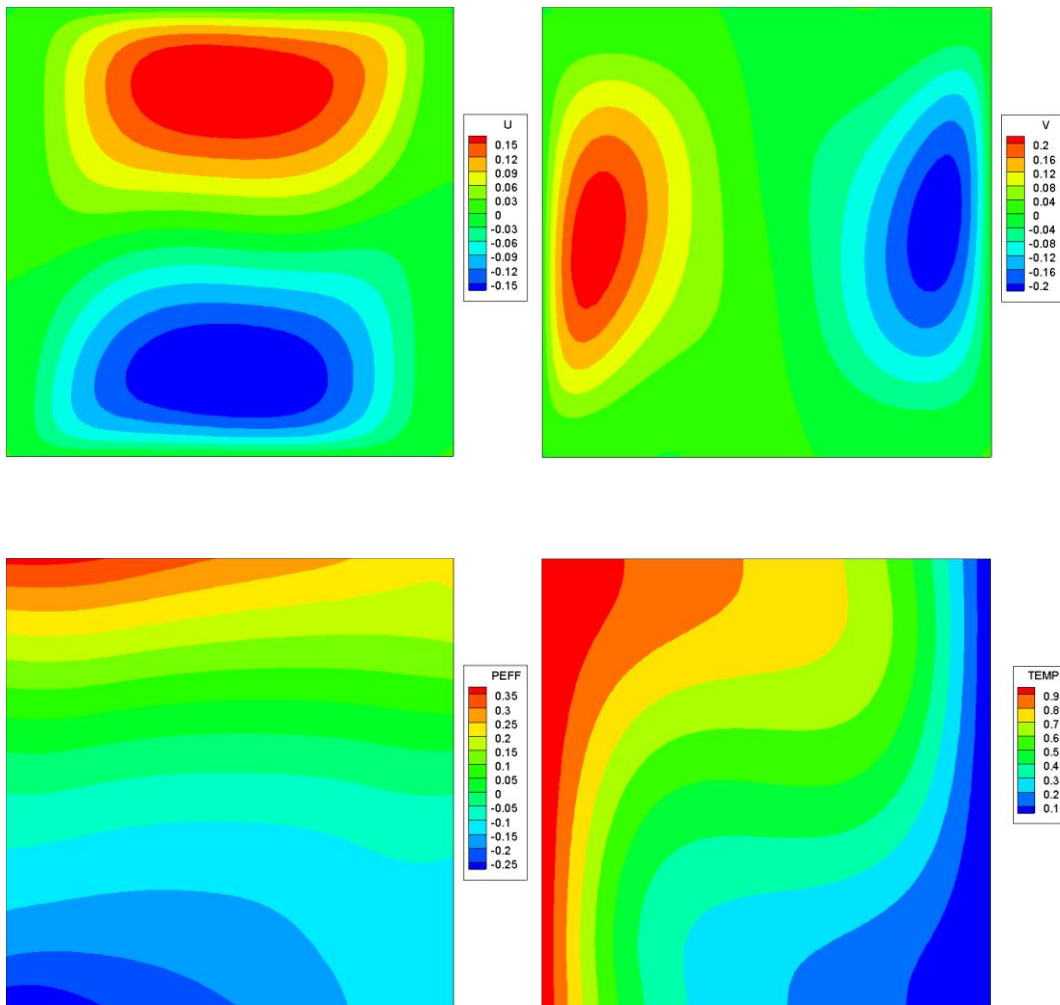


Figure 4-20. Differentially heated square cavity for $Ra=10^4$. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field(left column, bottom row), temperature field (right column, bottom row).

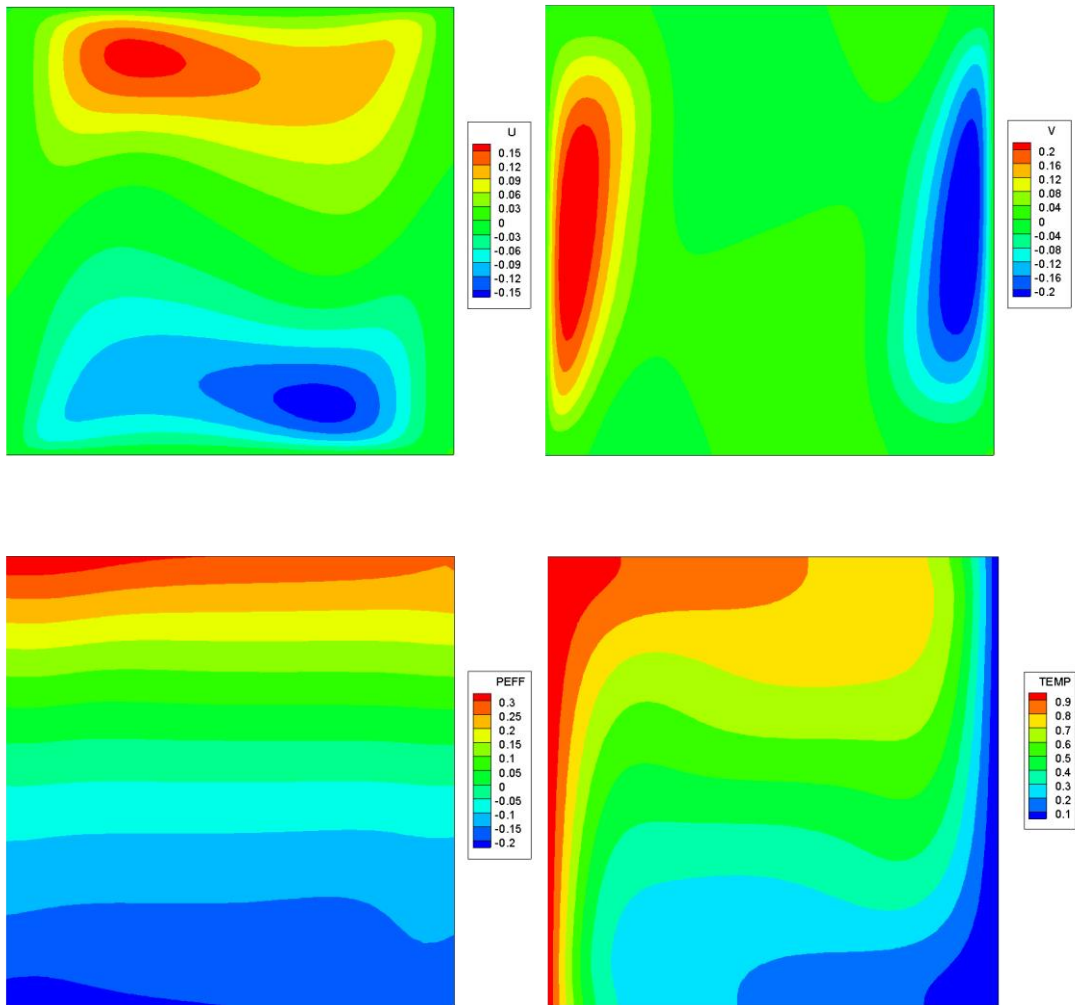


Figure 4-21. Differentially heated square cavity for $Ra=10^5$. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field (left column, bottom row), temperature field (right column, bottom row).

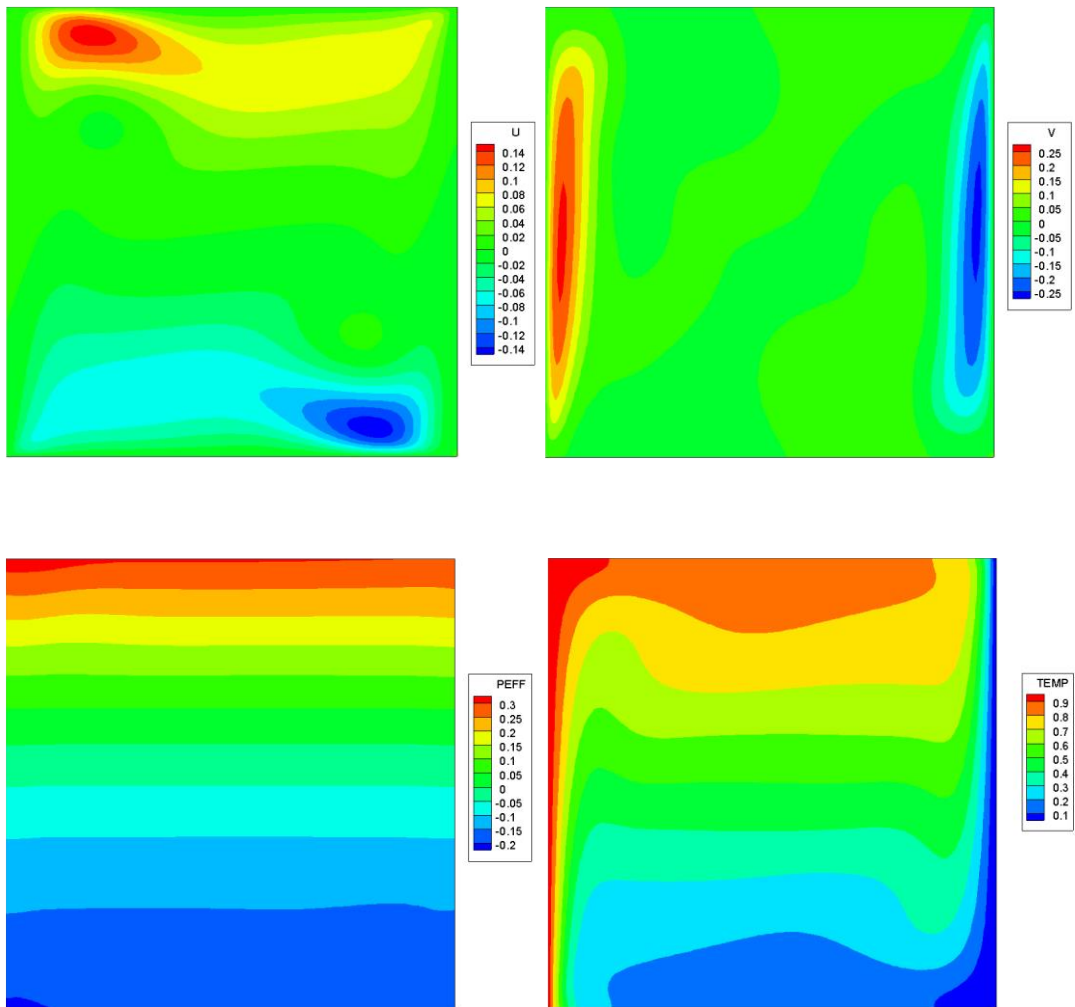


Figure 4-22. Differentially heated square cavity for $Ra=10^6$. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field(left column, bottom row), temperature field (right column, bottom row).

4.1.5 Internally heated cavity

The next test problem deals with the natural convection in a cavity due to uniform heat generation throughout the fluid. A square cavity of size H internally heated is assumed, leading to a circulating flow of the fluid. This case was selected in order to test the incorporation of the heat source term in the energy equation.

No-slip boundary conditions are applied at all walls which are maintained isothermal with the temperature equal to zero ($T_c=0$). Water is the working fluid with $Pr=1$. The reference value used for the non-dimensionalization of the velocity is $v_o = \frac{\nu}{H}$, where ν is the kinematic viscosity of the fluid ($Re=1$). The reference value used for the non-dimensionalization of the temperature is $\Delta T_o = \frac{\dot{q}_c H^2}{8k}$. The performed simulation corresponds to $Ra=8 \cdot 10^4$. The dimensionless heat source is $S_q = \frac{8}{Pr}$. As initial conditions all variables were set equal to zero.

For this case three structured, uniform numerical meshes were used, in order to achieve independent results from the numerical mesh (figure 4-23). Figure 4-24 presents temperature on some points of the symmetry axis $x=0.5$, compared with that of Deshmukh et al. [Des11]. Isolines of temperature, inside the square cavity are also given. Deshmukh et al. applied a finite volume formulation for the prediction of velocity components on a staggered grid and scalar variables on the main grid. A first order upwind scheme was used for the convective terms.

In figure 4-25 the velocities and pressure fields are given. Generally smooth and symmetric contours were calculated.

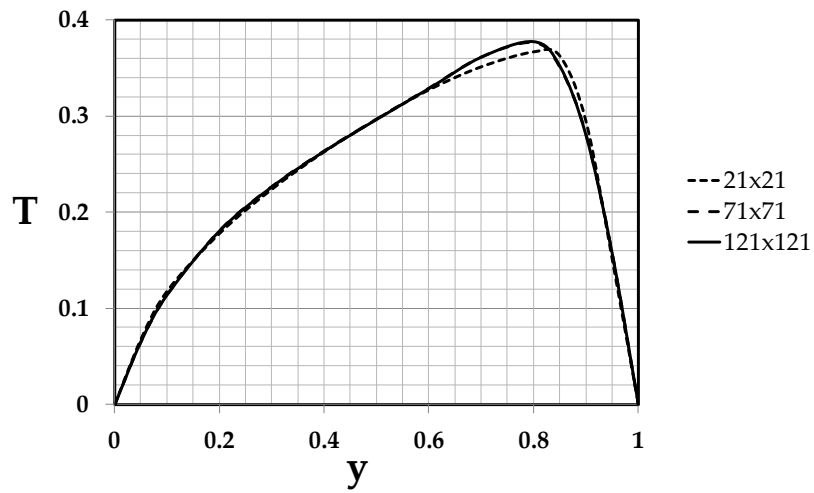


Figure 4-23. Internally heated cavity. Independence of the solution from the numerical mesh.

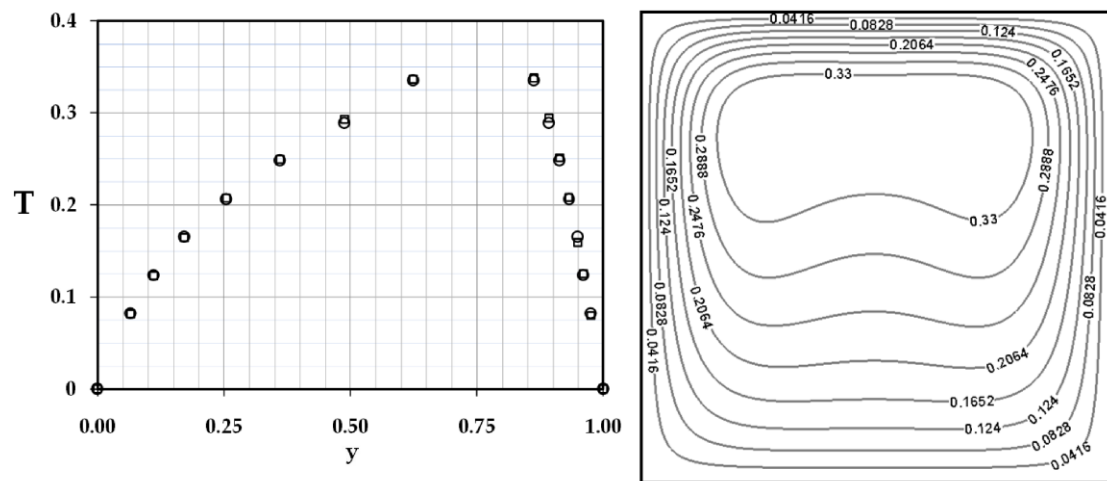


Figure 4-24. Internally heated cavity. Comparison of the temperature profile along the symmetry axis (left) (o: [Des11], □ Present solver). Isolines of temperature (right).

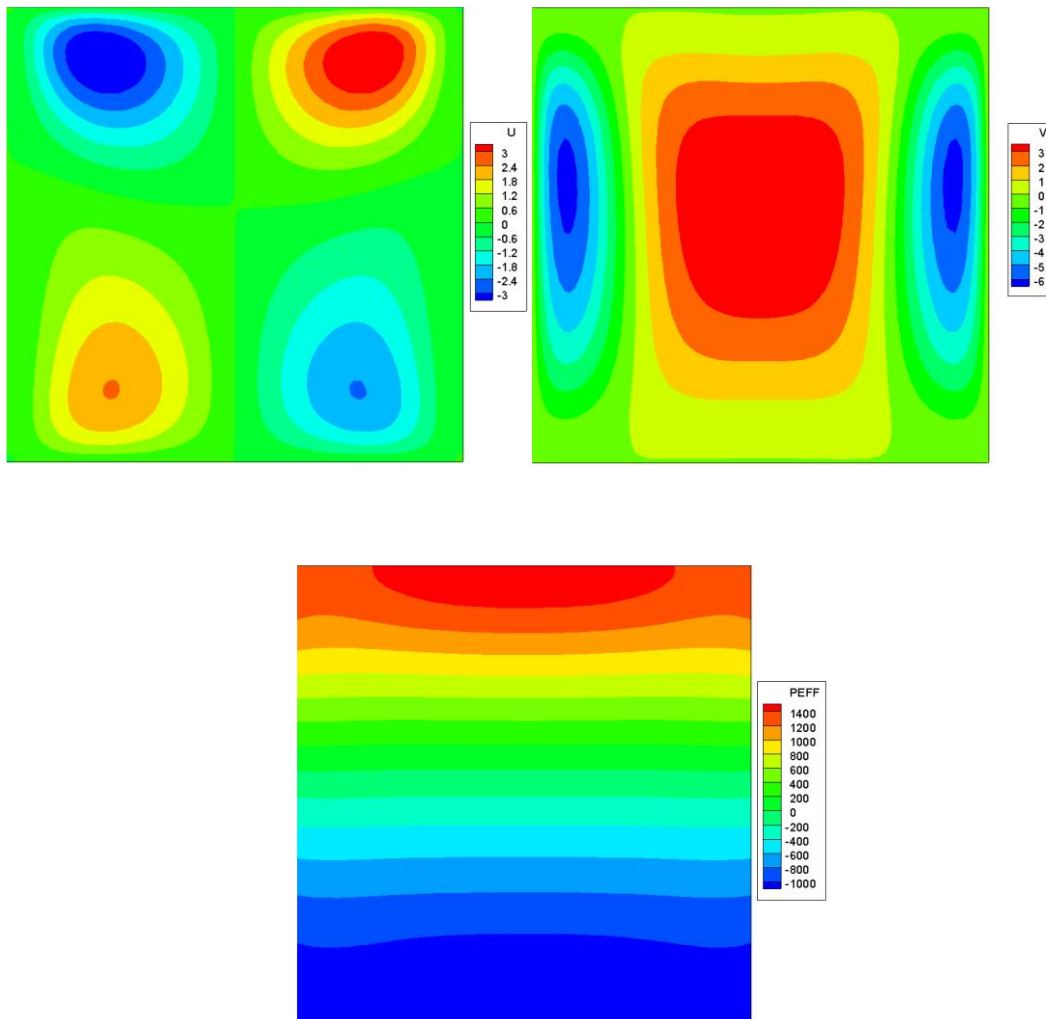


Figure 4-25. Internally heated cavity. u velocity field (left column, top row), v velocity field (right column, top row), pressure field (bottom row).

4.1.6 Unsteady mixed convection past a square cylinder

To evaluate the transient capabilities of the proposed methodology, the two-dimensional case of mixed convection past a square cylinder was simulated. This problem is challenging as it contains a stagnation point in front of the cylinder and a recirculation region in the wake. Turki et al. [Tur03] numerically investigated the flow field produced in a horizontal channel with a built-in heated square cylinder, under forced ($Ri=0$) and mixed convection ($Ri \neq 0$). They concluded to some formulas for the averaged Nusselt number. Sharma and Eswaran have also published a series of studies on heat transfer across a square cylinder for unconfined and channel-confined flows either in the vertical or in the horizontal direction ([Sha04a], [Sha04b],

[Sha05a], [Sha05b]). They applied a finite volume approach using a pressure correction method for the coupling of pressure and velocity. Energy equation was loosely coupled to the other mean flow equations.

In our case the square cylinder is heated or cooled to a constant temperature $T_h=1$ and is exposed to a constant and uniform free-stream upward velocity ($u=0$, $v=1$) and temperature ($T_c=0$). Free-slip boundary conditions are implemented on left and right computational boundaries. Pressure is constant at the outlet (figure 4-26). This flow is periodical with the Strouhal number St being dependent on the Richardson number Ri .

The governing flow parameters are: $Re=100$, $Pr=0.7$ and $S_q = 0$. Richardson number is defined as $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$, from which Gr number is calculated. CFL number was equal to 100 for all simulations conducted.

The first studied case was the case of $Ri=0$. As initial conditions for all other cases the results predicted from the solved case with the closer Ri was used.

For the simulation of the flow three different numerical meshes were used, in order to find a solution satisfactorily independent from the mesh. The finer numerical mesh consisted of 36395 nodes and 71524 cells. For its structured region, consisted of quadrilaterals, the first layer thickness was equal to 0.001 and the growing factor equal to 1.2. The structured region was extended from the wall about 20% of the size of the square cylinder. Each edge of the cylinder was divided into 40 boundary edges. Figure 4-27 presents a typical mesh that was used and the mesh in the vicinity of the cylinder, where the structured region is obvious. The numerical mesh was denser in the region around the cylinder that extended 3 units upstream and sideways and till the outlet of the computational domain.

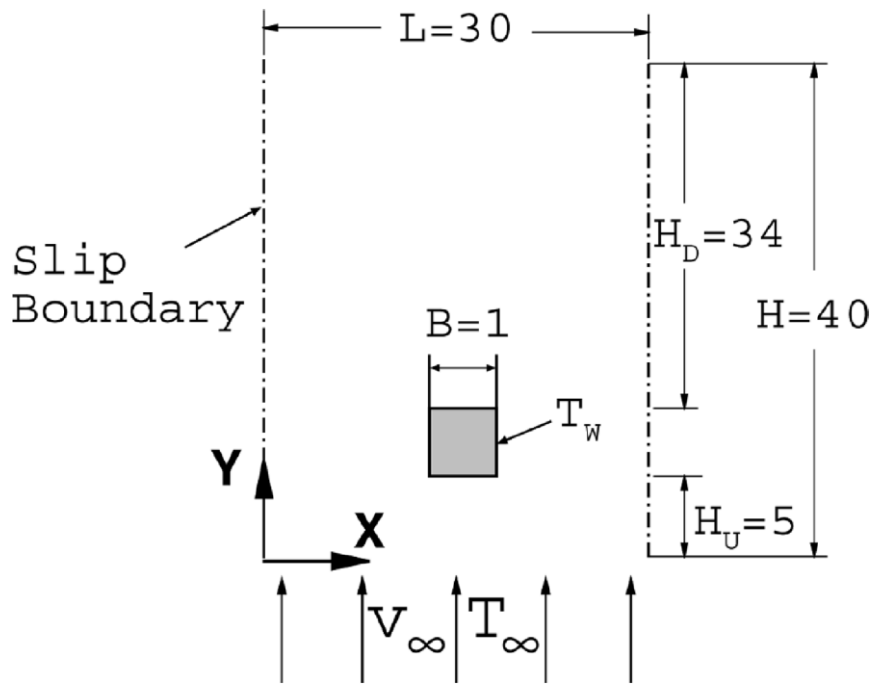


Figure 4-26. Mixed convection past a square cylinder. Sketch of the computational domain and the boundary conditions [Sha04b].

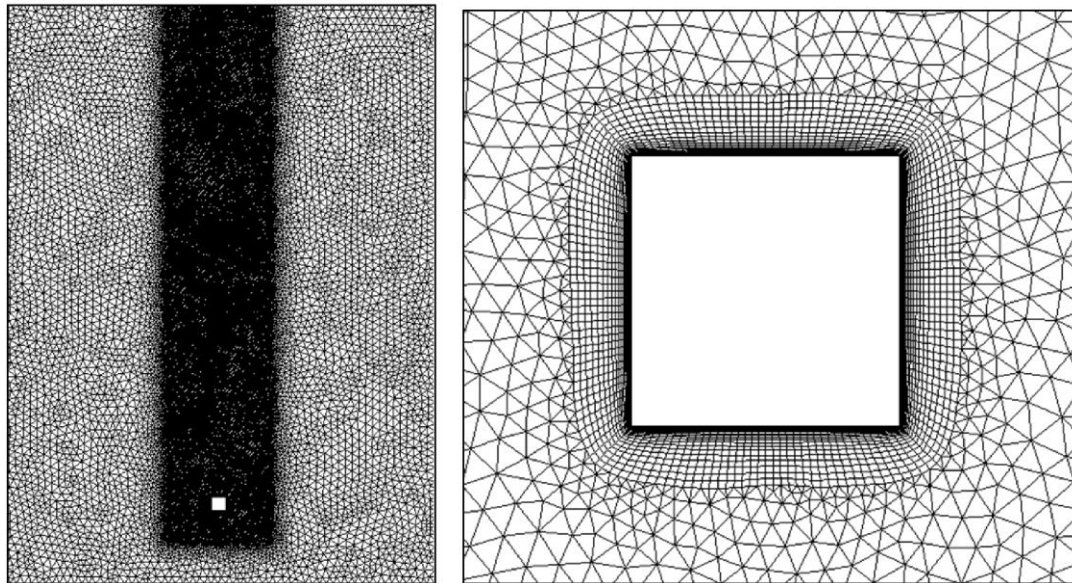


Figure 4-27. Mixed convection past a square cylinder. A typical mesh that was used (left). Mesh near the cylinder (right).

Strouhal number for Reynolds number ranging from 70 to 150 and without taking into account buoyancy effects ($Ri=0$) is presented in figure 4-28, compared to the

numerical results of Robichaux et al. [Rob99] and Sharma and Eswaran [Sha04b]. Figure 4-28 also shows Strouhal number dependency ($Str = L_o f / V_o$, where f is the vortex shedding frequency) for various Richardson numbers ranging from -1 to 0.1 , compared to the results of Sharma and Eswaran [Sha04b]. Differences are less than 5%. It is evident that increasing buoyancy leads to an increase in the shedding frequency. For $Ri=0.15$ breakdown of vortex shedding was observed. Generally, for $Ri \geq 0.15$ the flow turns to steady as it happens and for the circular cylinder [Cha89].

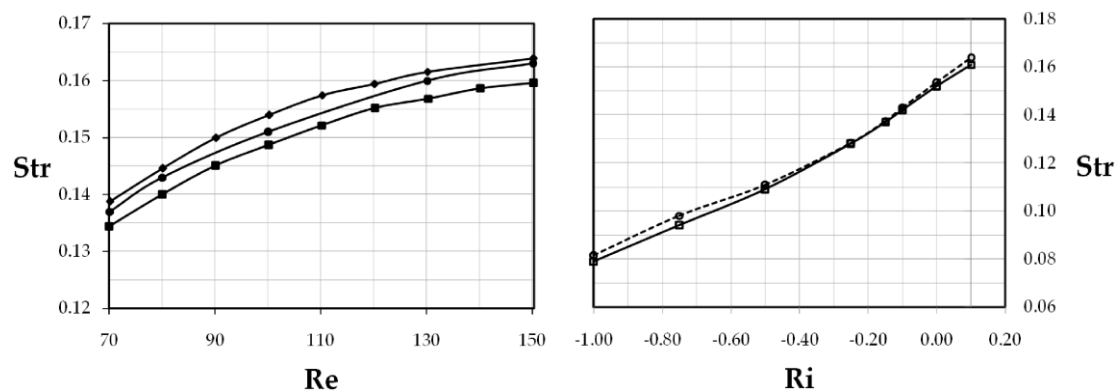


Figure 4-28. Mixed convection past a square cylinder. Comparison of Str for various Re, when $Ri=0$ (left) (\diamond : [Rob99], \blacksquare : [Sha04], \bullet : Present solver). Comparison of Str for various Ri, when $Re=100$ (right) (\circ : [Sha04], \square : Present solver).

In figure 4-29 streamlines for various Ri are presented. It is obvious that cooling the cylinder, which means decreasing Richardson number, the wake region increases in width. Heating the cylinder the wake region decreases and vortices gradually fade away. For $Ri=0.15$ vortex shedding is vanished. In figure 4-30 variation of coefficient of total drag C_D and rms (root mean square) values of the fluctuations of drag and lift coefficients with Richardson number at $Re=100$, are given. It is obvious that there is a value of Ri number near -0.15 for which total drag C_D takes its lowest value. In addition to this, rms values become zero for Ri number greater or equal to 0.15 , meaning that steady state is reached.

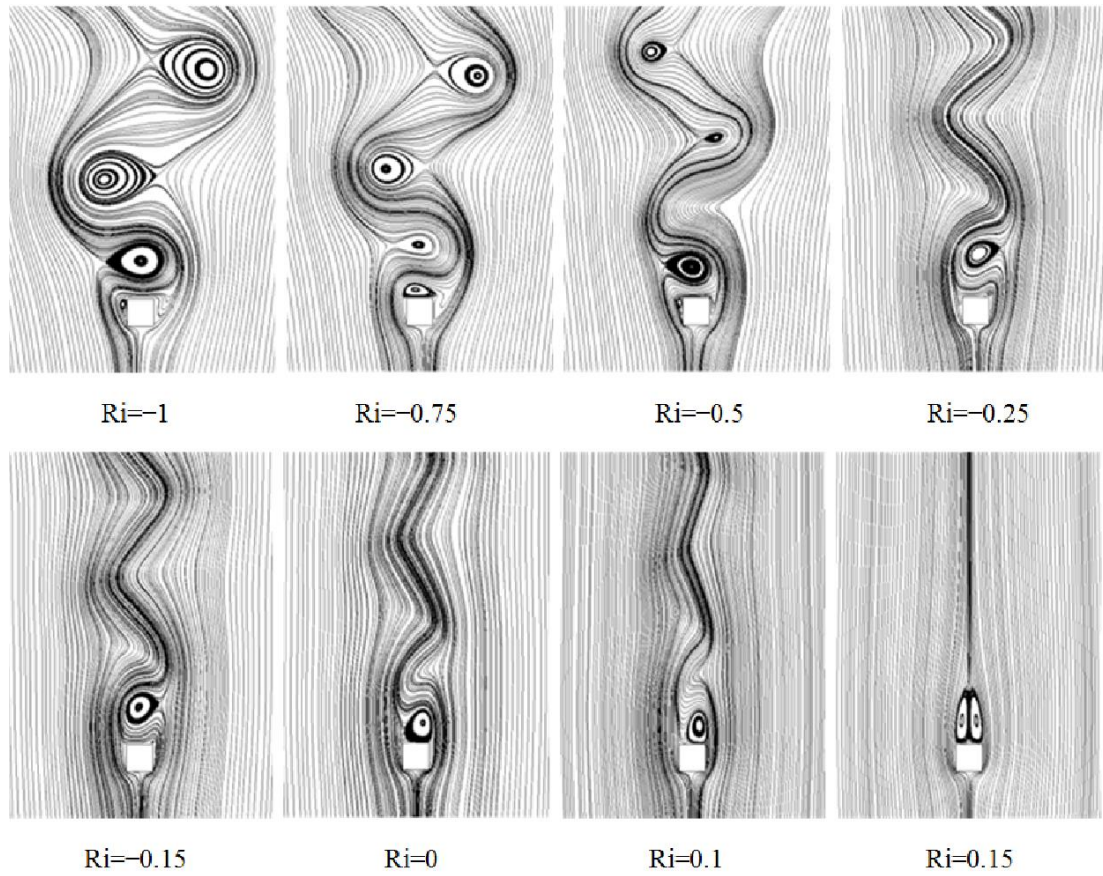


Figure 4-29. Mixed convection past a square cylinder. Streamlines for various Ri numbers.

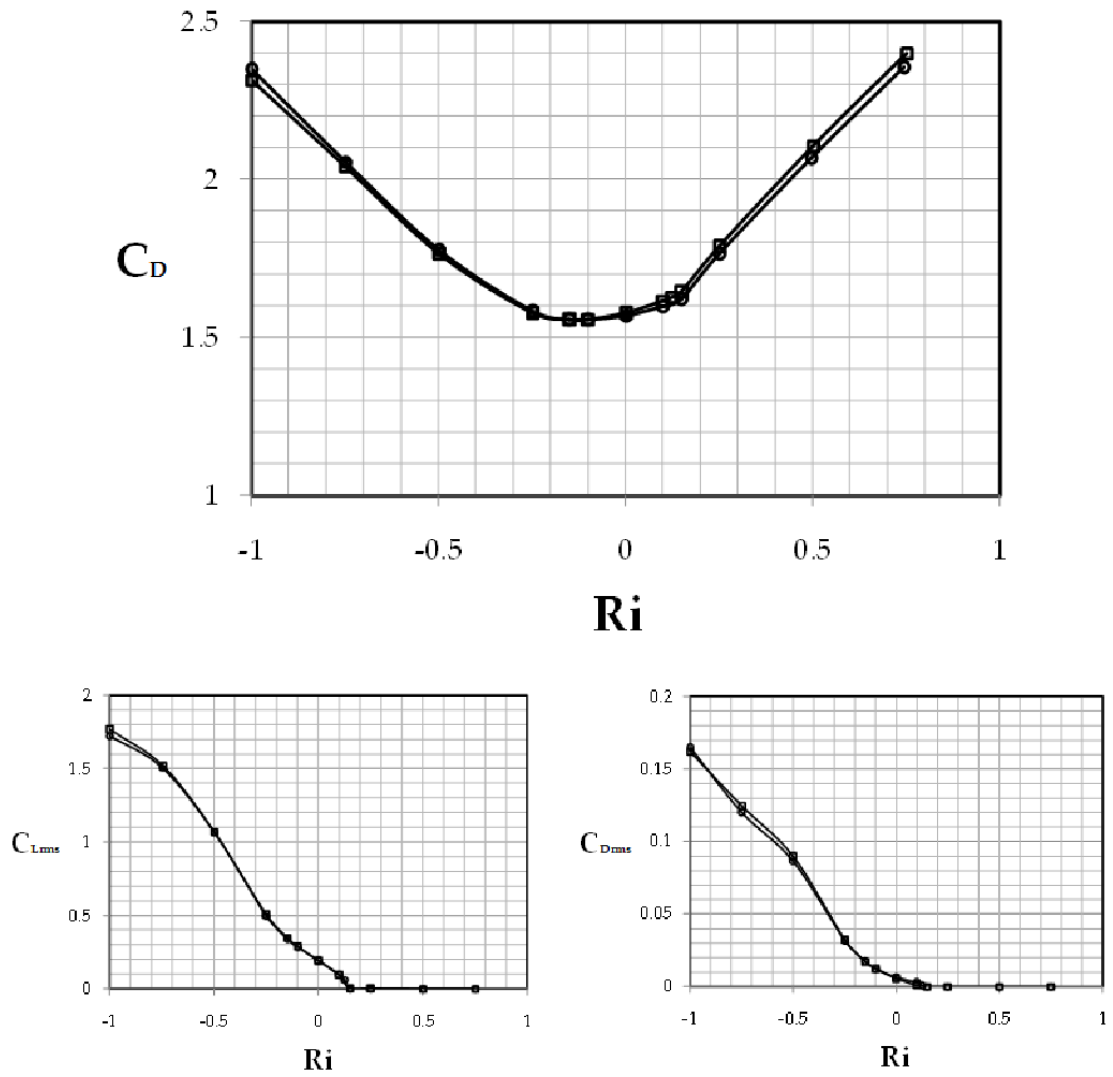


Figure 4-30. Mixed convection past a square cylinder. Variation of coefficient of total drag C_D and rms values of the drag and lift coefficients fluctuations with Richardson number at $Re=100$ (o: [Sha04], \square Present solver).

4.1.7. Coupling methods comparison

In this section we present a comparison of both coupling methods regarding their convergence behaviour and their stability. When Roe scheme is used equations are strongly coupled (S-C) (simultaneous solution of the mean flow equations), while when IFUS scheme is used equations are loosely coupled (L-C). For the L-C method continuity and momentum equations are firstly solved with the temperature field fixed. Then, the energy equation is solved with the velocity field fixed. This procedure is repeated until convergence in pseudo-time is achieved.

The two aforementioned methods were compared at the case of the differentially heated square cavity for Ra number ranging from 10^3 to 10^6 . This range is chosen in order to evaluate the performance of both methods as inviscid fluxes increase. All dependent variables were set equal to zero as initial condition field for each simulation. Runs were conducted as being steady, setting an extremely large physical time step and CFL number was equal to 100 from the beginning till the end of the simulations. Figure 4-31 shows the convergence histories of both methods for the three different Rayleigh cases. For the case of $Ra=10^3$ both methods produce approximately equal convergence rates. However, as inviscid fluxes dominate over viscous fluxes (with increasing Rayleigh number) the S-C method requires less pseudo-time steps compared to the L-C one. This benefit is attributed to the fact that all dependent variables of the inviscid fluxes are "alive" in the S-C approach and not fixed as it happens in the L-C one. For the converged flow fields, differences between the maximum and minimum u and v velocities, predicted by the two methods were less than 0.3%.

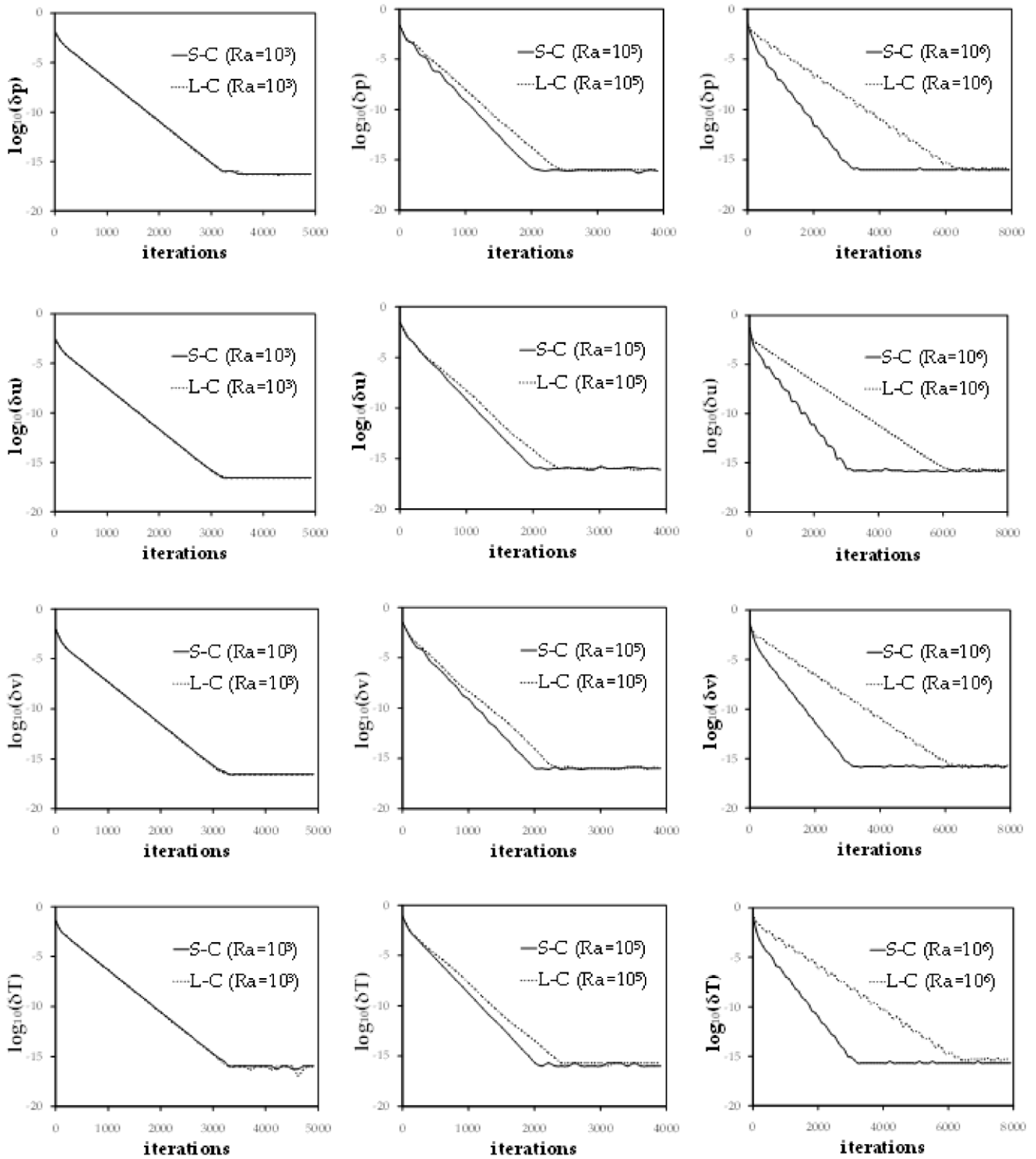


Figure 4-31. Differentially heated square cavity. Convergence histories for the cases of $Ra=10^3$ (left column), $Ra=10^5$ (middle column) and $Ra=10^6$ (right column) through pseudo-time.

The L-C method requires less CPU time. This is because of the less numerically demanding calculation of the convective terms and Jacobi iterations. Specifically, for each node in each Jacobi iteration a system of 4 equations needs to be solved, when the S-C method in two dimensions is implemented. On the contrary when the L-C method is implemented a system of 3 equations needs to be solved followed by the solution of one equation. Since it takes longer to solve a 4x4 system than a 3x3 system followed by a 1x1 system, the CPU time for each Jacobi iteration using the S-C method is augmented. After some numerical experiments with the serial version of our code (it is difficult to assess the time needed for message passing), the CPU time per pseudo-time step for the strongly coupled method and the loosely coupled method were approximately determined as 0.057s and 0.035s respectively. Table 4-5 shows the total CPU time needed for each simulation. The convergence criterion was that corrections between two successive pseudo-time steps of all dependent variables reach machine zero. For the case of $Ra=10^6$ the S-C method gives a speed-up approximately equal to 1.255 compared to the L-C method.

Ra	L-C	S-C
10^3	106.75 s	174.99 s
10^5	78.75 s	109.44 s
10^6	211.75 s	168.72 s

Table 4-5. Differentially heated square cavity. Total CPU time needed in seconds for each simulation using the Loosely Coupled (L-C) and Strongly Coupled (S-C) methods.

The same comparison was conducted for the three-dimensional case of the differentially heated cubic cavity, using this time the parallel version of our code (in 4 processors). Below we present (figure 4-32) the convergence history of both coupling methods for $Ra=10^6$. It should be noted that when equations were loosely coupled, CFL number was equal to 10. When equations were strongly coupled, CFL number was equal to 100. The solution experienced convergence problems when we used CFL number equal to 100 for the loosely coupled solution. This fact gives precedence to the S-C method regarding the CPU time needed.

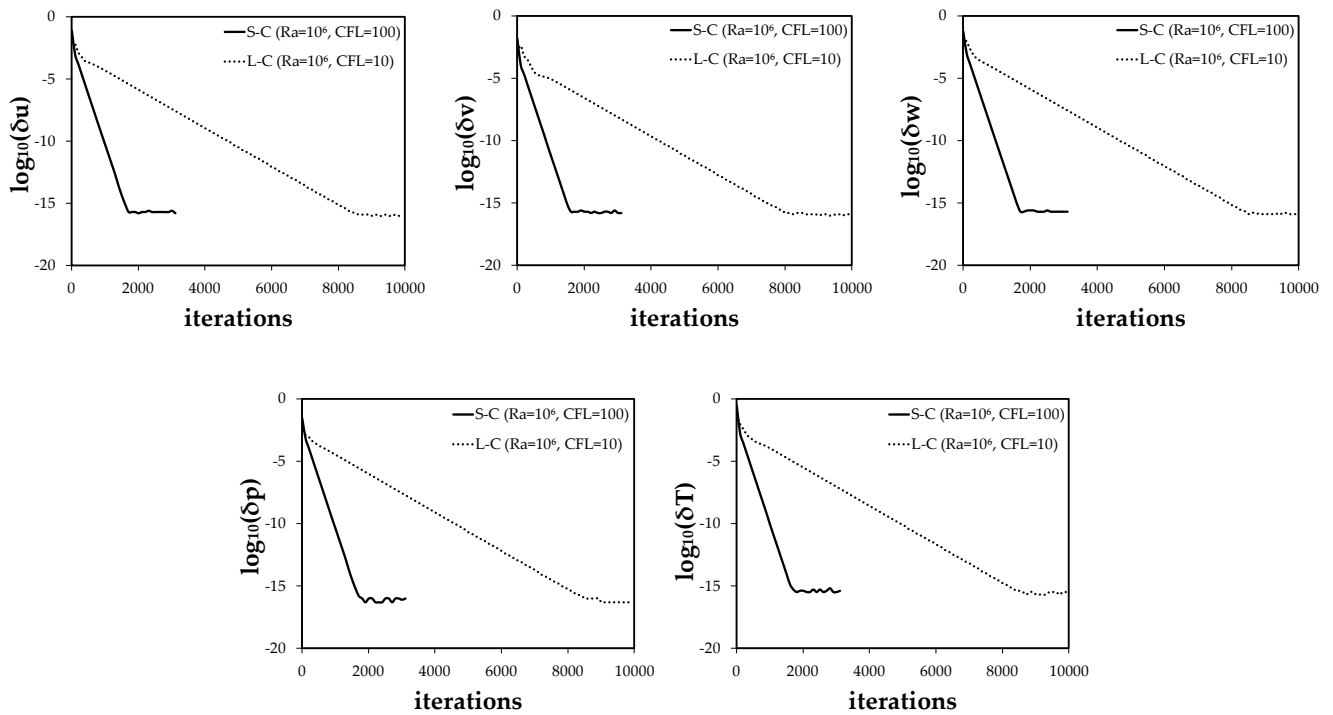


Figure 4-32. Differentially heated cubic cavity for $Ra=10^6$. Convergence histories through pseudo-time for u velocity (left column, top row), v velocity (middle column, top row) w velocity (right column, top row), pressure (left column, bottom row) and temperature (right column, bottom row).

The CPU time per pseudo-time step for the strongly coupled method and the loosely coupled method were approximately determined as 0.487s and 0.316s respectively. The speed-up is approximately equal to 3.087.

Apart from the CPU time, we compared the coupling methods as to the density of the numerical mesh needed for their convergence. Specifically, we tried to find the coarser numerical mesh that would lead to convergence. The L-C method required denser numerical meshes. This fact shows one more advantage of the S-C method to the L-C one.

4.1.8. Slope limiters use

Slope limiters are used in order to preserve the monotonicity of the higher order reconstruction schemes controlling the spatial derivatives to realistic values. However, a significant drawback of slope limiters is that they slowdown or even stall the convergence to a certain degree [Ven93]. In this subsection the performance of the slope limiters van Albada-van Leer and Min-Mod is tested. We apply the slope limiters combined with the second order reconstruction scheme and compare them to the second order reconstruction scheme without the inclusion of a limiter.

For the comparison we used the case of the differentially heated cubic cavity for $Ra=10^6$. The second order reconstruction scheme (equation (3-21)) was used combined or not with a slope limiter. Simulations were conducted as being steady, setting an extremely large physical time step and CFL number was equal to 100 from the beginning till the end of the simulations. Figure 4-33 shows the convergence histories. It is evident that the use of slope limiters stall the convergence and corrections perform oscillations. Slope limiters were also applied on the tunnel fire cases for the reconstruction of the mean flow dependent variables without auxiliary effects. Therefore, slope limiters were removed as a choice for the reconstruction of the mean flow dependent variables.

When slope limiters are used and lead to oscillations physical parameters are observed to test the convergence [Kou98]; for example the lift coefficient when dealing with external aerodynamic flows. Oscillations because of the use of slope limiters does not imply that the final solution will be fault. For the case of the differentially heated cubic cavity small differences were encountered in the profiles of velocities and temperature among the three reconstruction approaches.

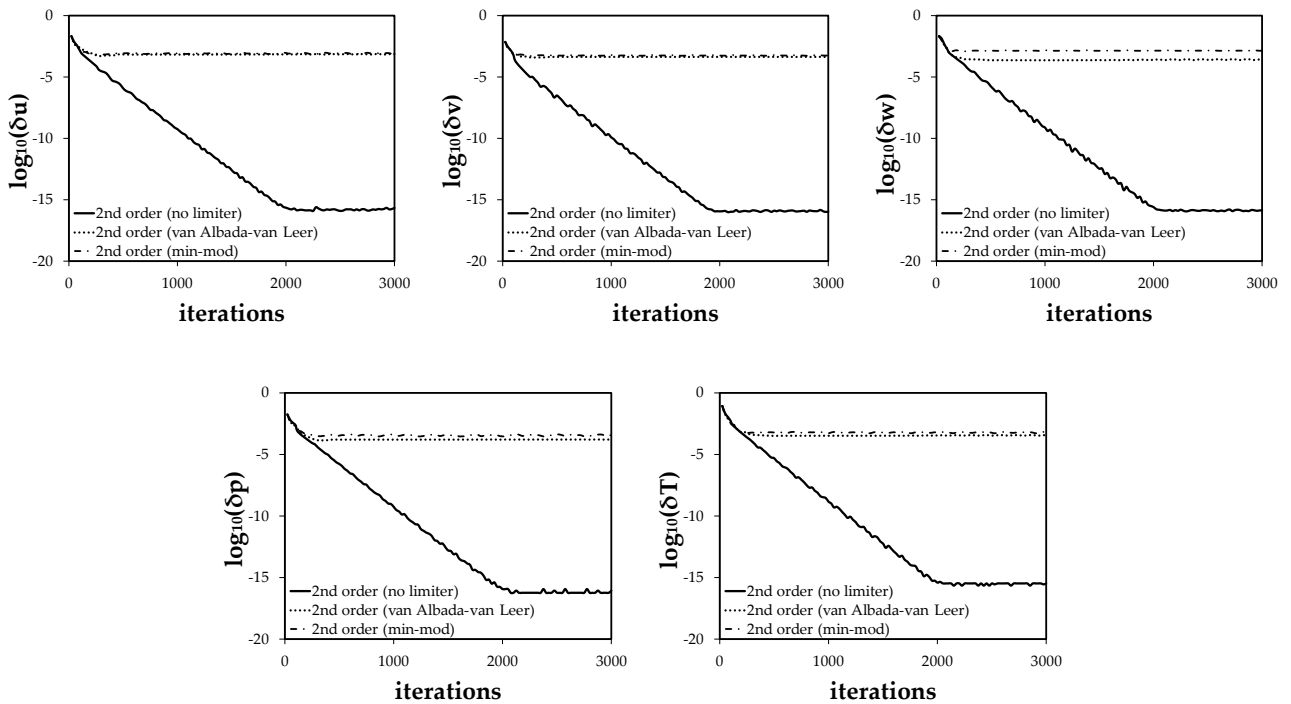


Figure 4-33. Differentially heated cubic cavity for $Ra=10^6$. Convergence histories through pseudo-time for u velocity (left column, top row), v velocity (middle column, top row), w velocity (right column, top row), pressure (left column, bottom row) and temperature (right column, bottom row).

4.2. Turbulent flows

4.2.1 Differentially heated cavities

The laminar flow in square and cubic cavities was presented in the previous subsections. In this subsection, the results of the simulation of the natural convection in cavities for Ra numbers that lead to turbulent flows ($Ra=10^7-10^{10}$) [Eld65] will be presented. The turbulent natural convection have been studied widely before ([Mar84], [Hen91], [Bar94]). Markatos and Pericleous [Mar84] and Barakos et al. [Bar94] solvers have been described before in subsection 4.1.4. Henkes et al. [Hen91] applied a finite volume technique on a staggered grid for velocity components and on the main grid for all other scalar variables (pressure, temperature, turbulence kinetic energy and turbulence dissipation).

This case was selected to test the application of the turbulence models in the 2-D and 3-D solvers. Nusselt number was calculated for the differentially heated square cavity turbulent case. After the validation of the proper operation in two dimensions the differentially heated 3-D, symmetric cavity case was solved and compared to the 2-D case.

Turbulence models that were used are the standard $k-\epsilon$ model with wall functions, the low-Re $k-\omega$ SST model and the $k-\omega$ SST model with wall functions. For all turbulence models the production term due to buoyancy was included only in the k -equation, which means that parameter $C_{\epsilon 3}$ of equation (2-16) was equal to zero.

Results produced in the square cavity using the standard $k-\epsilon$ turbulence model will be compared to the results for the same model and parameters in a three-dimensional hexahedral cavity. The three-dimensional mesh was created after the extrusion of the two-dimensional mesh. The two-dimensional mesh consisted of quadrilaterals near the walls and triangular. After its extrusion to the third dimension hexahedral and prismatic cells were created. The two-dimensional and the three-dimensional numerical meshes are given in figure 4-34.

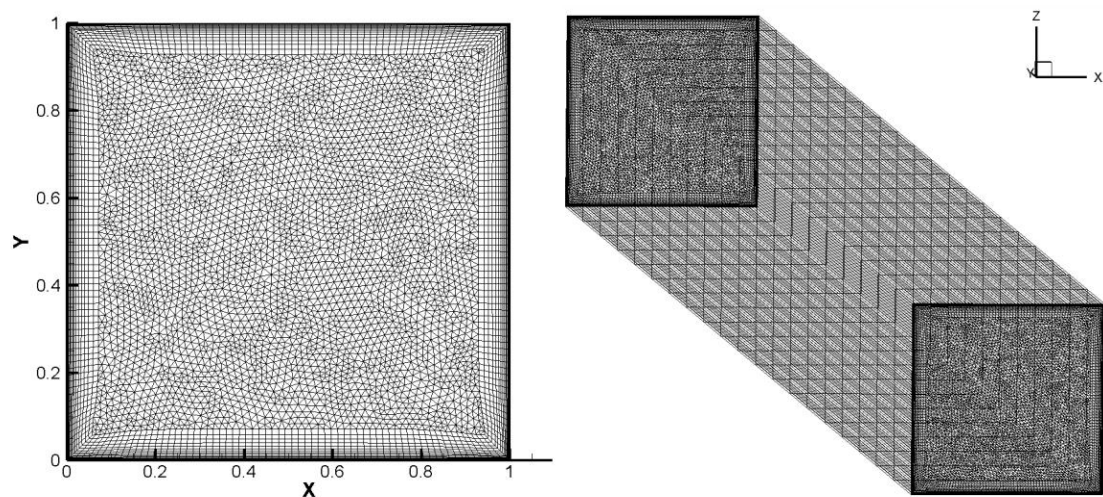


Figure 4-34. Numerical meshes in two-dimensions (left) and in three-dimensions (right).

The four Rayleigh number varied cases were run successively for increasing Rayleigh number. For faster convergence, the converged flow field of the previous case was

used. In the three-dimensional case symmetry boundary conditions were applied at planes $y=y_{\min}$ and $y=y_{\max}$.

The numerical mesh used for the wall function simulations was the same used for the simulation of the laminar natural convection in the square cavity. It consisted of 7626 nodes and 10962 cells. The first layer height was 10^{-3} . The numerical mesh for the low-Re $k-\omega$ SST simulations was consisted of 4914 nodes and 5610 cells (figure 4-45). The first layer height was 10^{-4} but the internal mesh was coarser.

Markatos and Pericleous [Mar84], who applied the $k-\epsilon$ turbulence model with wall functions, claimed that for this case the first numerical node should be close enough to the wall so as $1 < y^+ < 12$. Indeed, we observed that correct Nusselt values were predicted after the choice of δ parameter of the wall functions that led to $1 < y^+ < 12$. Nusselt number was very sensitive to the value of δ parameter. In table 4-6 we give the values of δ parameter that were selected.

Ra	10^7	10^8	10^9	10^{10}
δ	0.005	0.005	0.001	0.001

Table 4-6. δ parameter of wall functions for each Ra case.

In figure 4-35 Nusselt number is presented and compared to the results of other researchers. Our Nusselt numbers are too close to the results of Markatos and Pericleous [Mar84] and Henkes et al. [Hen91] when the standard $k-\epsilon$ turbulence model with wall functions and the $k-\omega$ SST with wall functions are applied. Nusselt numbers calculated using the low-Re $k-\omega$ SST model seem to be closer to the results of Barakos et al. [Bar94] produced under the hypothesis of laminar flow. Indeed, using the low-Re $k-\omega$ SST turbulence model small eddy kinematic viscosities were calculated. However, differences are not larger than the differences of the $k-\epsilon$ turbulence model with wall functions used by Barakos et al. [Bar94]. In figure 4-36 we present and compare velocities and temperature profiles of the two and three dimensional cases. Good agreement of the results is observed. In figures 4-37 to 4-48 the contours of the dependent variables for each Ra case and turbulence model are given.

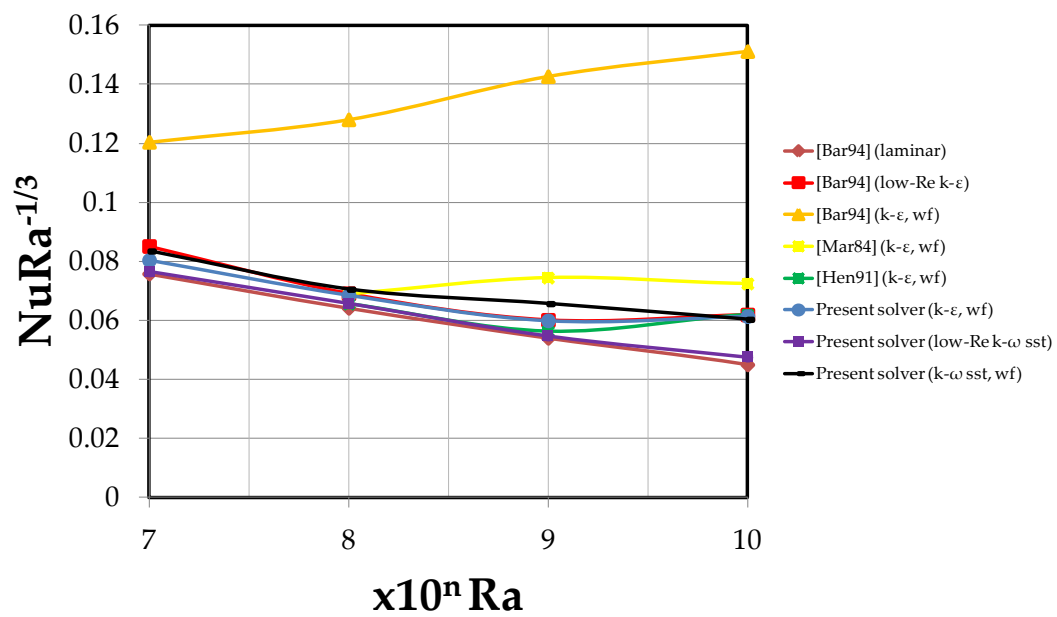


Figure 4-35. Mean Nusselt number at the hot wall as a function of Ra number.

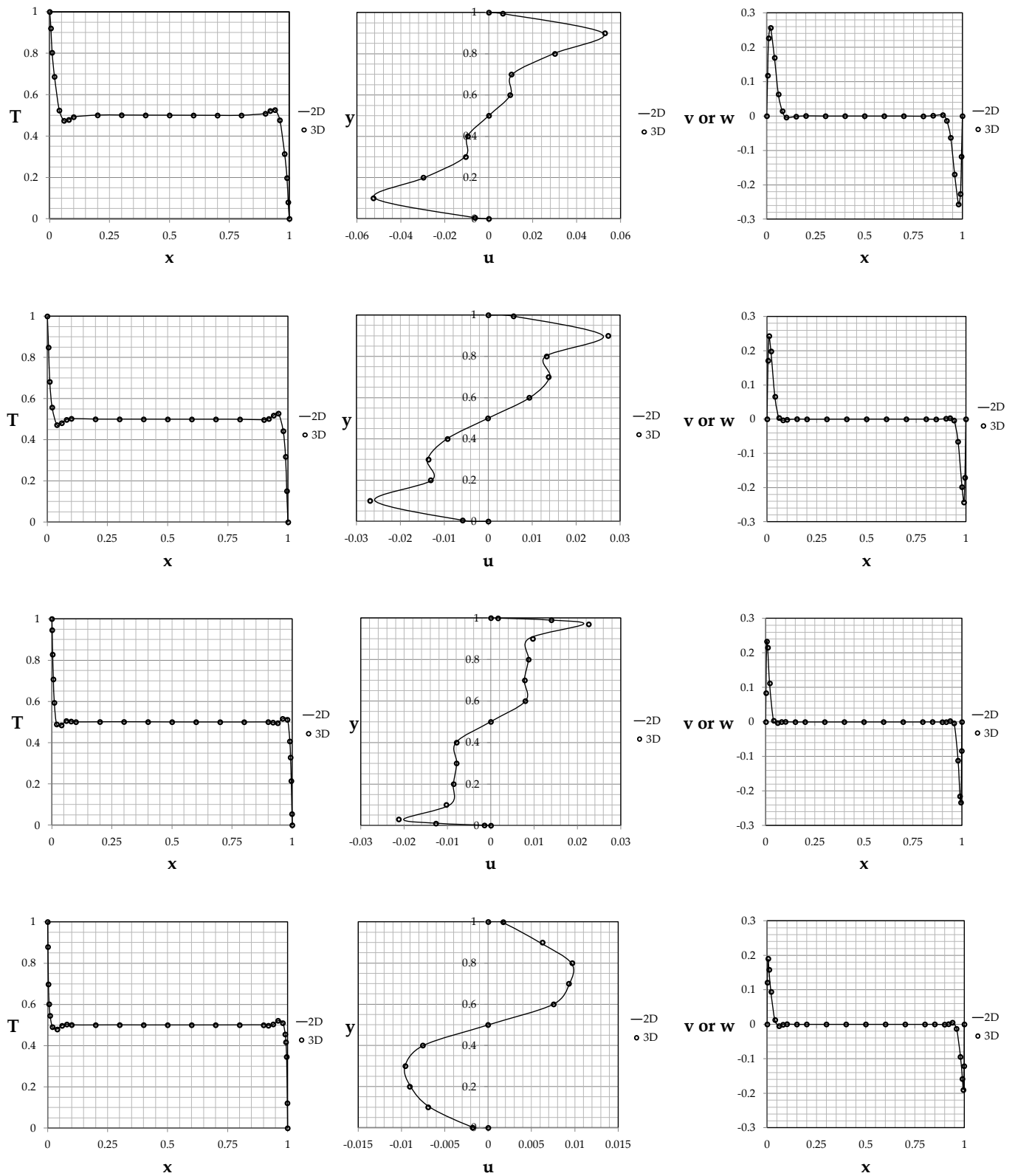


Figure 4-36. Differentially heated cavities. Comparison of two-dimensional and three-dimensional results. Temperature profiles (left column), u velocity profiles (middle column), v velocity profile (right column). $Ra=10^7$ (1st row), $Ra=10^8$ (2nd row), $Ra=10^9$ (3rd row), $Ra=10^{10}$ (4th row).

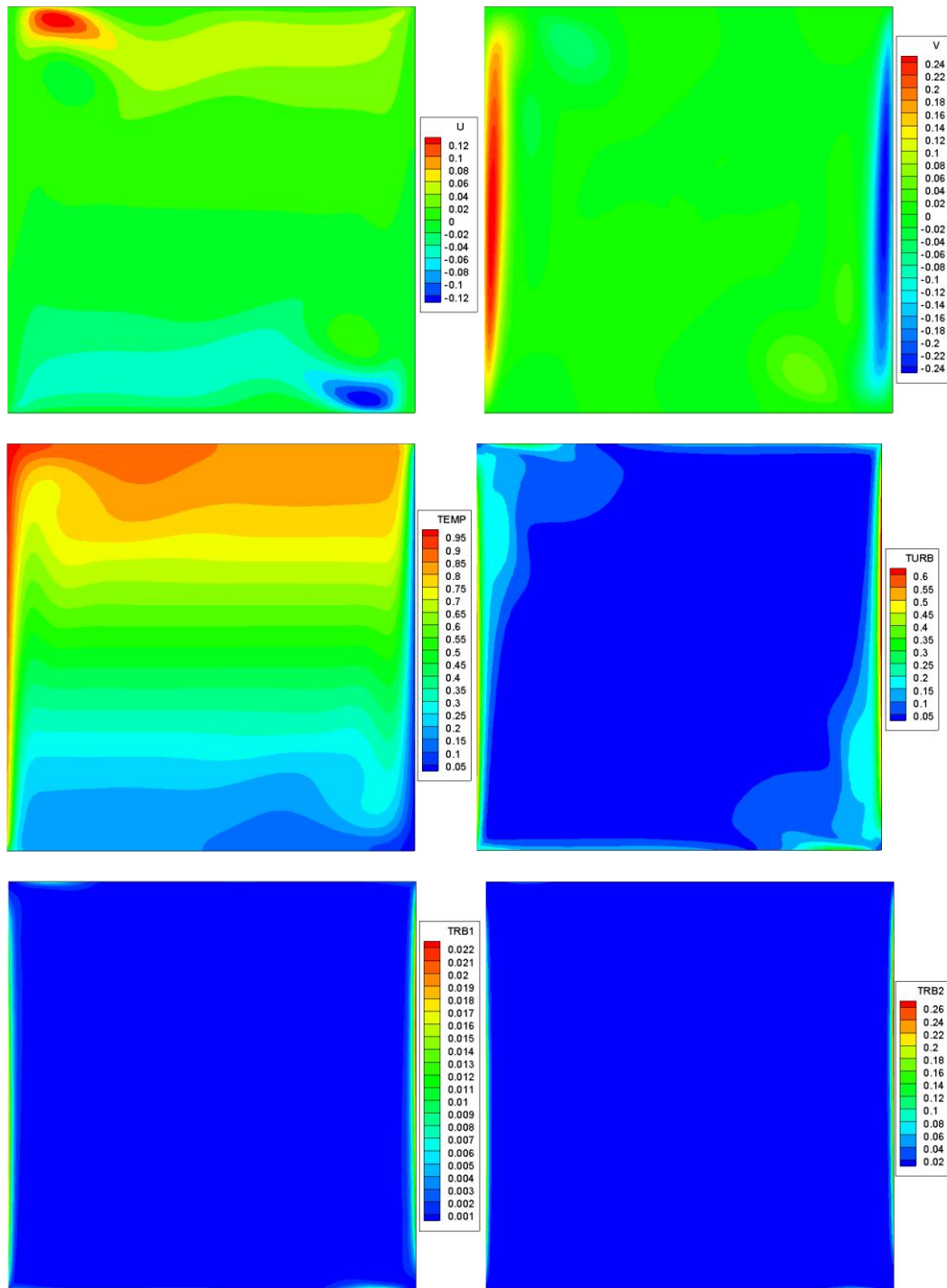


Figure 4-37. Turbulent natural convection; standard $k-\epsilon$ turbulence model; $Ra=10^7$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

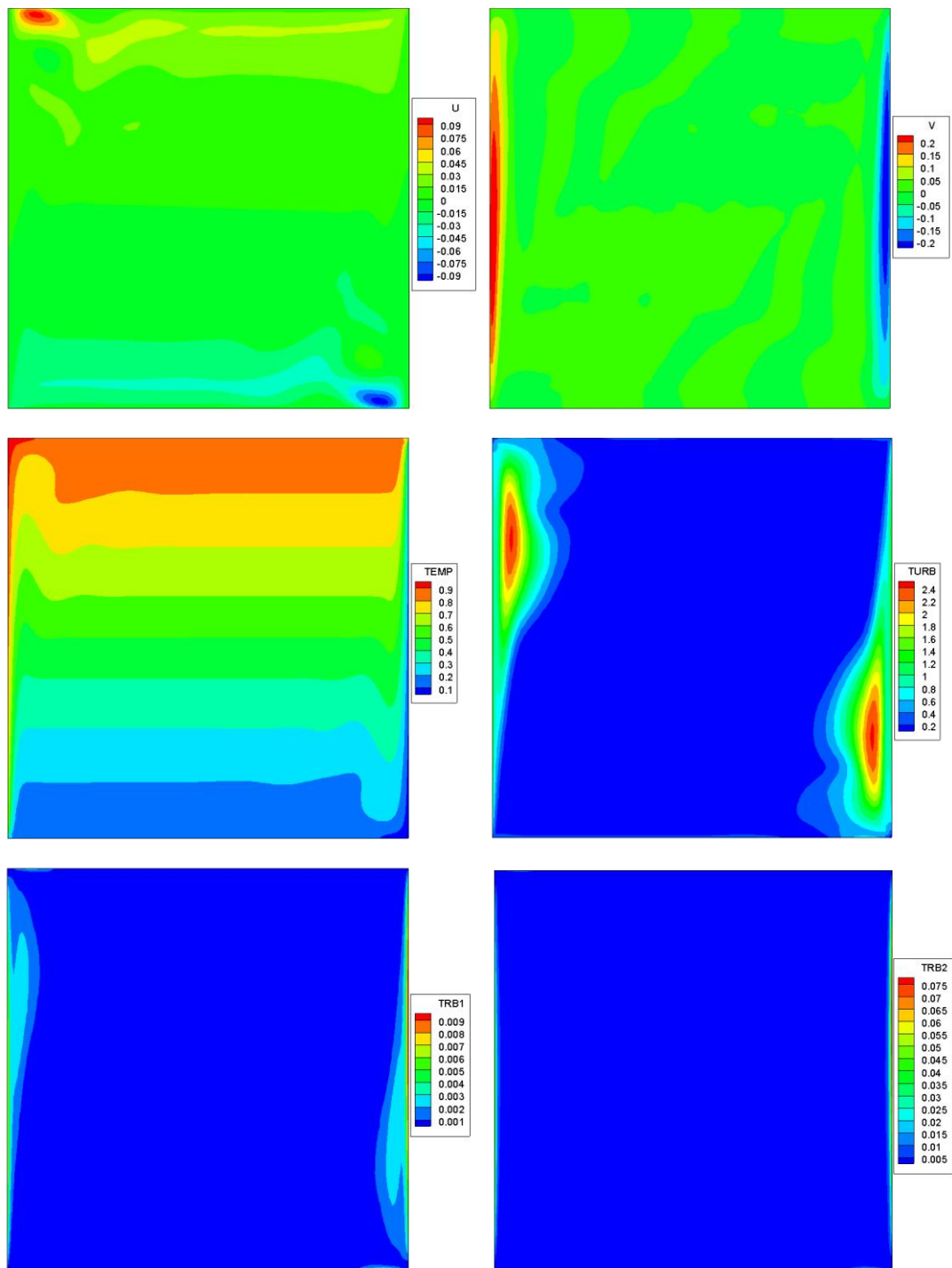


Figure 4-38. Turbulent natural convection; standard k-ε turbulence model; $Ra=10^8$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

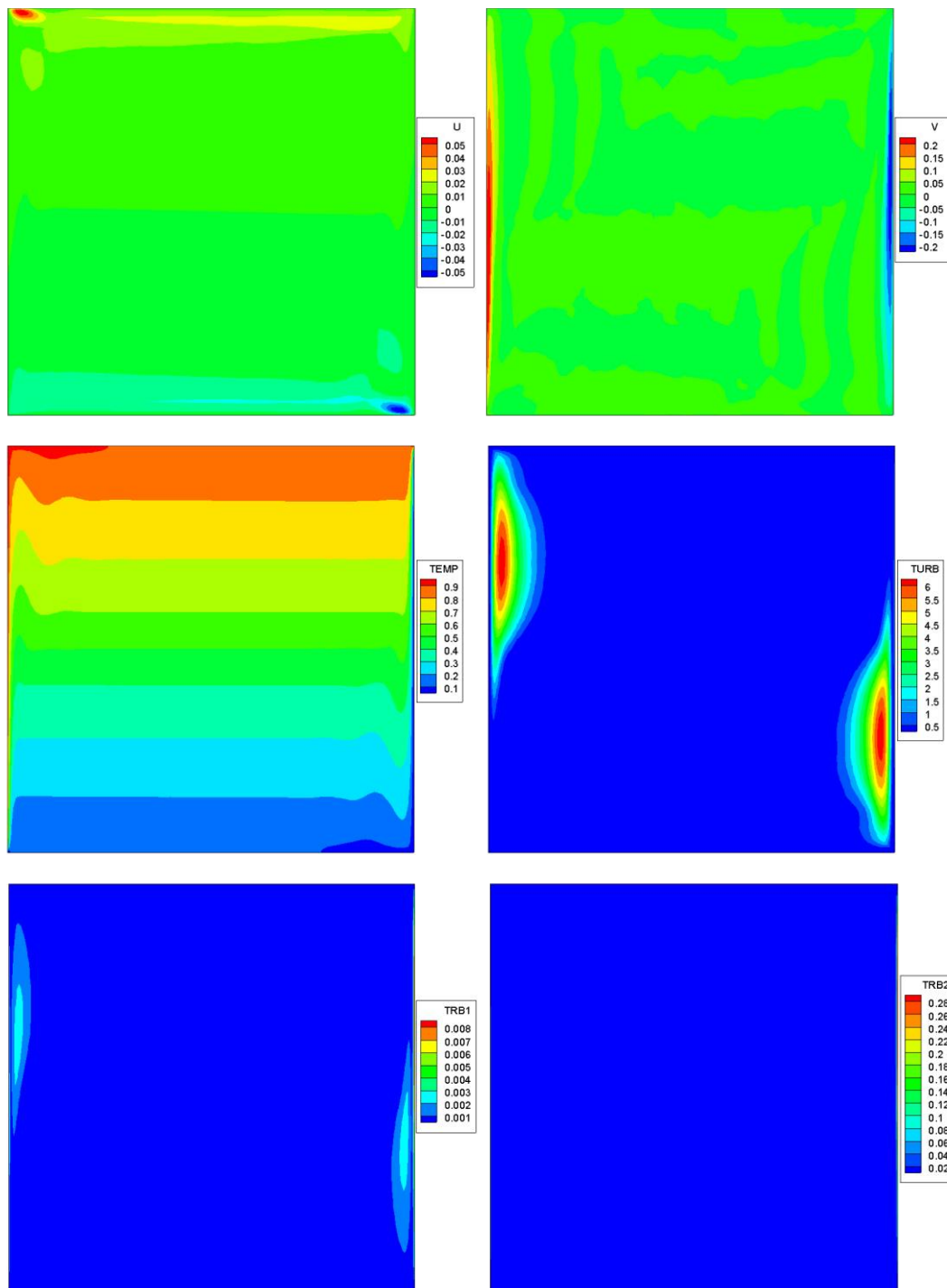


Figure 4-39. Turbulent natural convection; standard k-ε turbulence model; $Ra=10^9$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

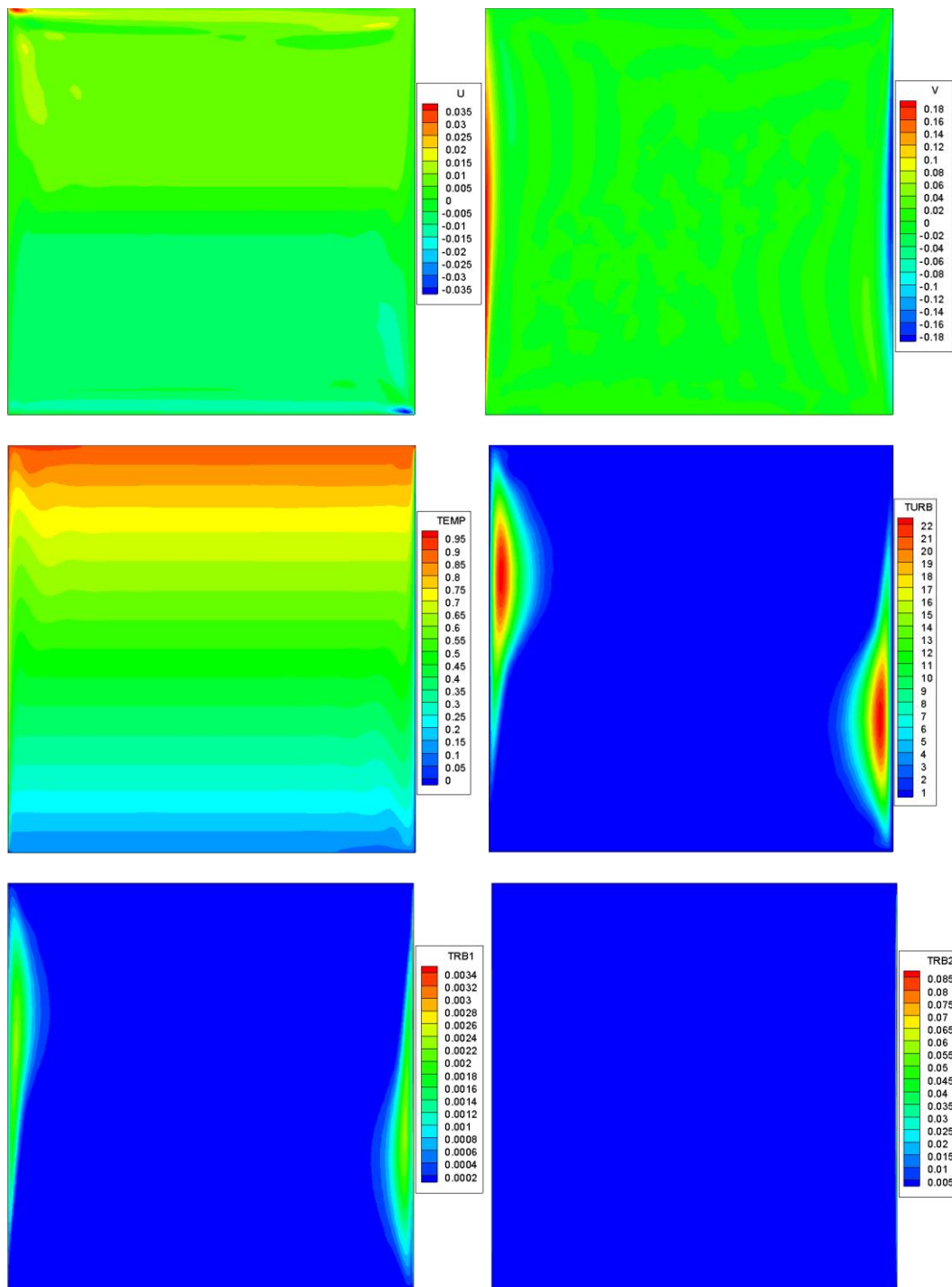


Figure 4-40. Turbulent natural convection; standard $k-\epsilon$ turbulence model; $Ra=10^{10}$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

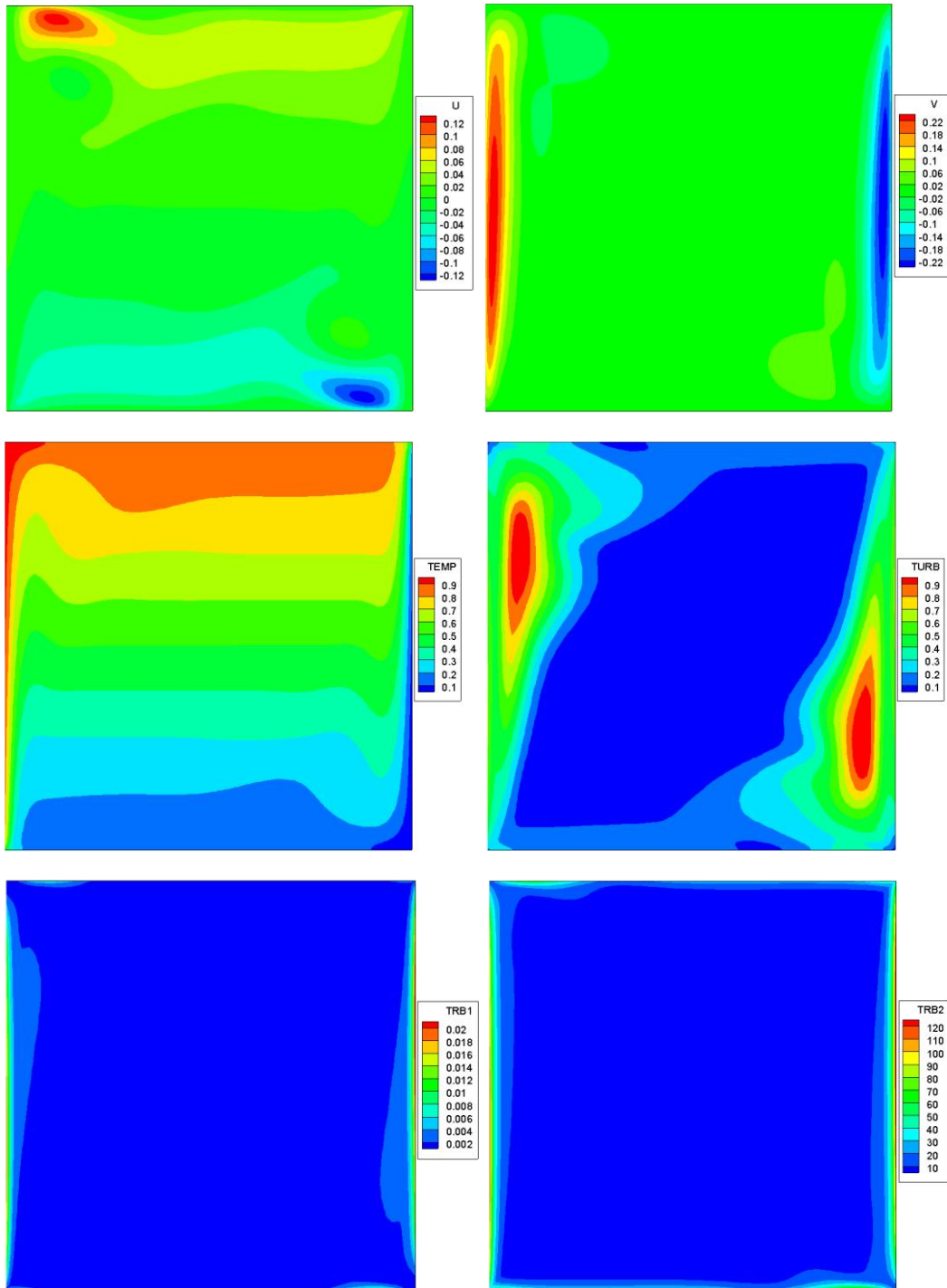


Figure 4-41. Turbulent natural convection; $k-\omega$ SST with wall functions; $Ra=10^7$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

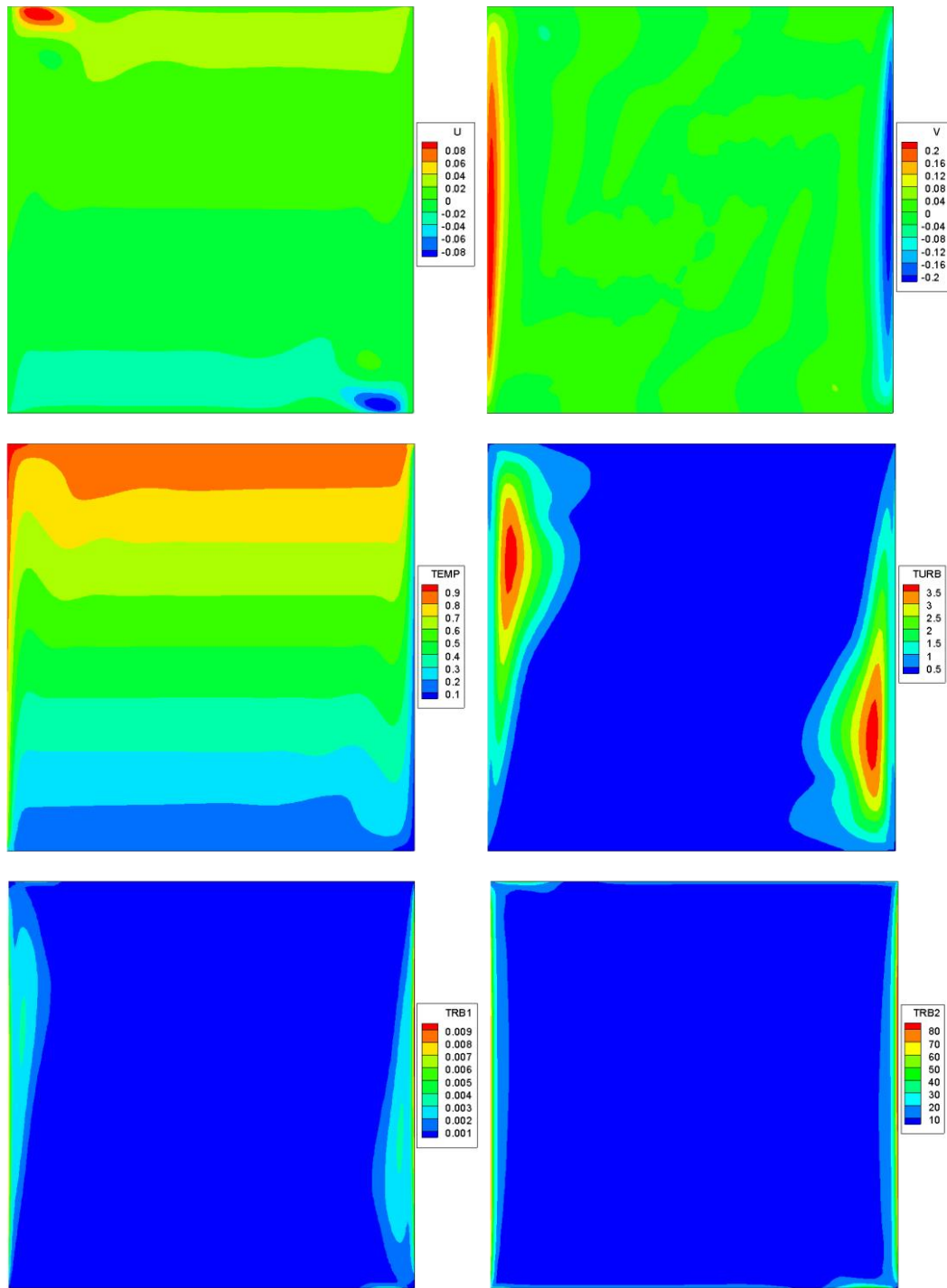


Figure 4-42. Turbulent natural convection; $k-\omega$ SST with wall functions; $Ra=10^8$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

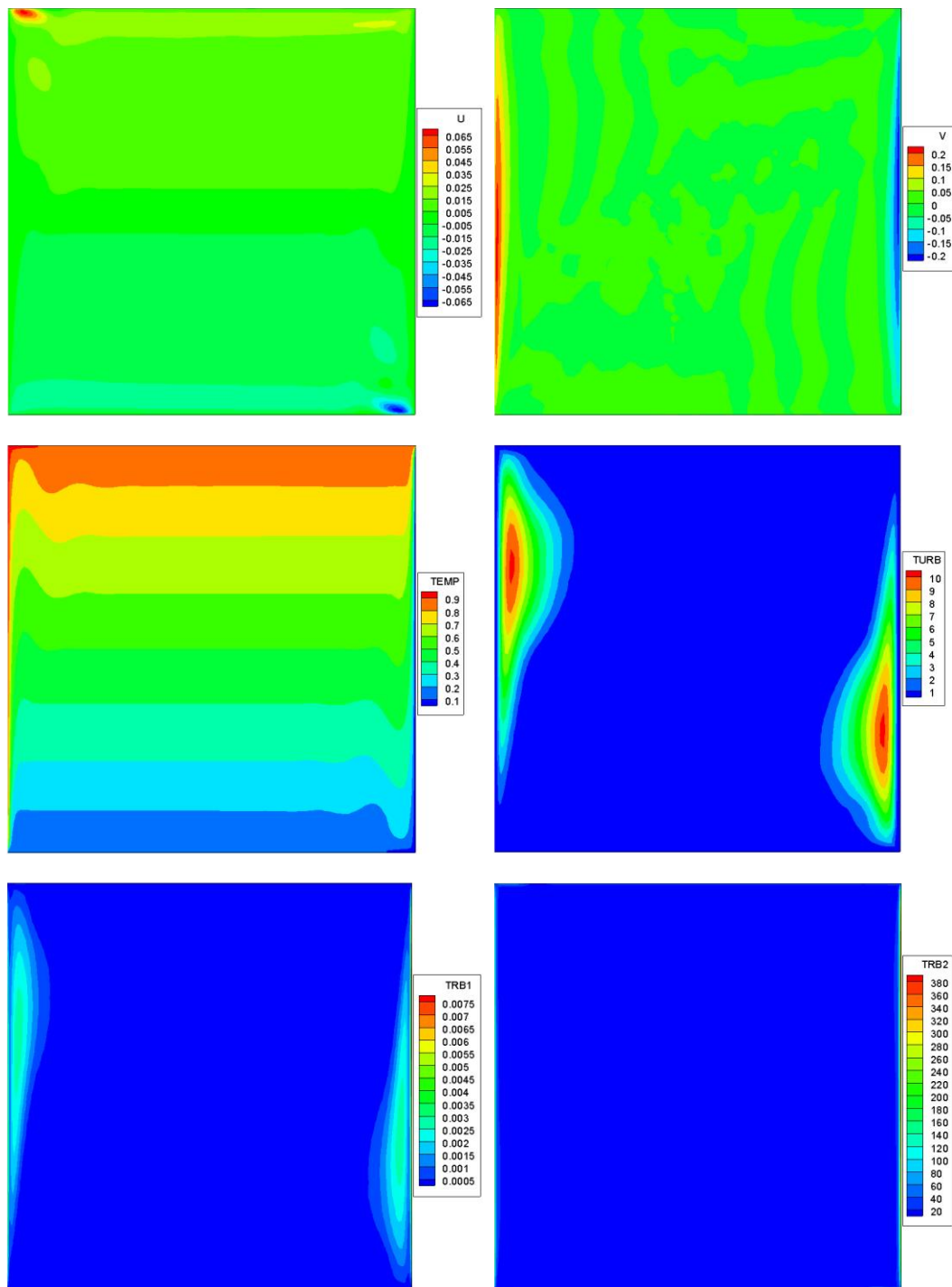


Figure 4-43. Turbulent natural convection; k- ω SST with wall functions; $Ra=10^9$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

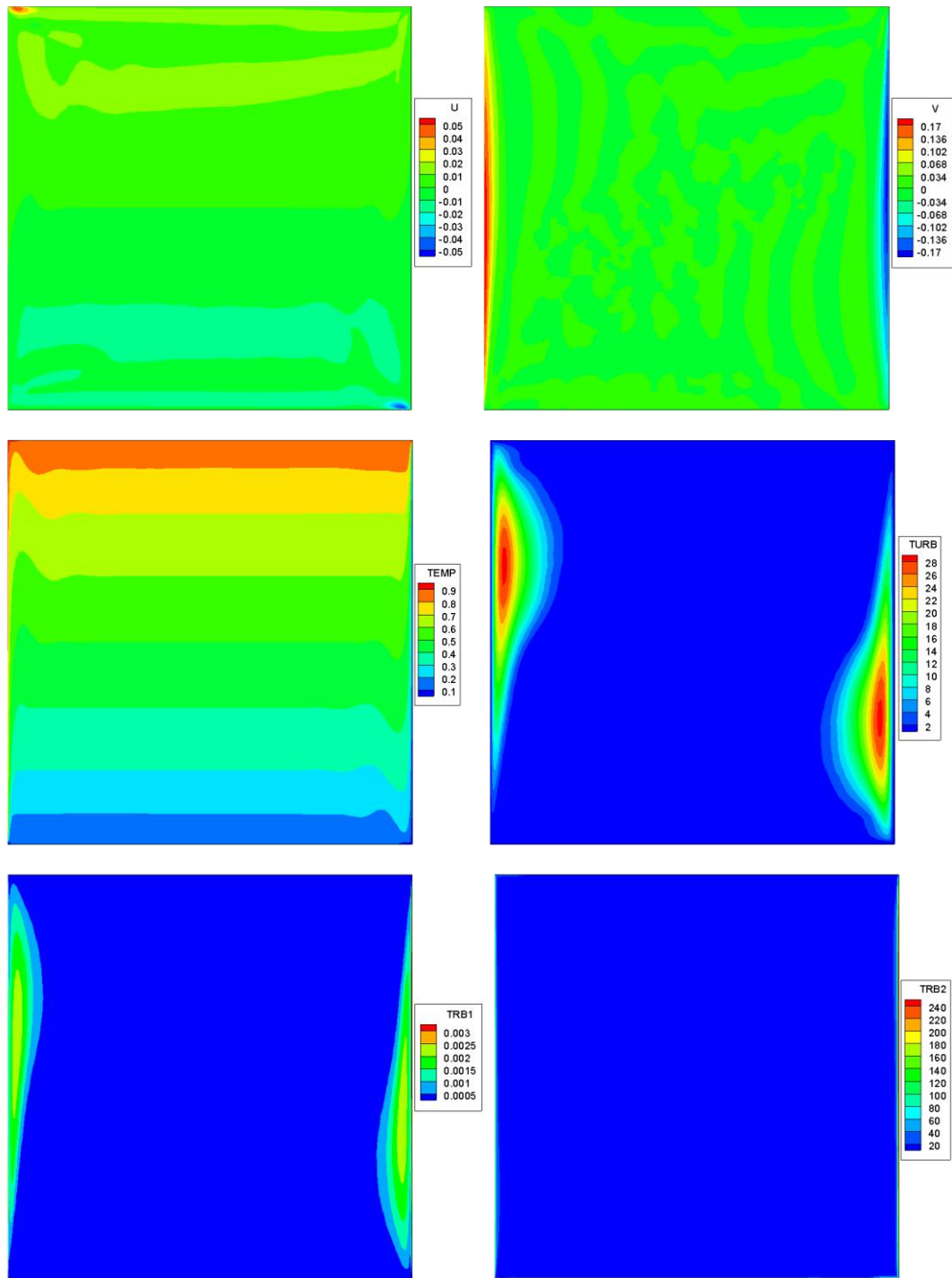


Figure 4-44. Turbulent natural convection; $k-\omega$ SST with wall functions; $Ra=10^{10}$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

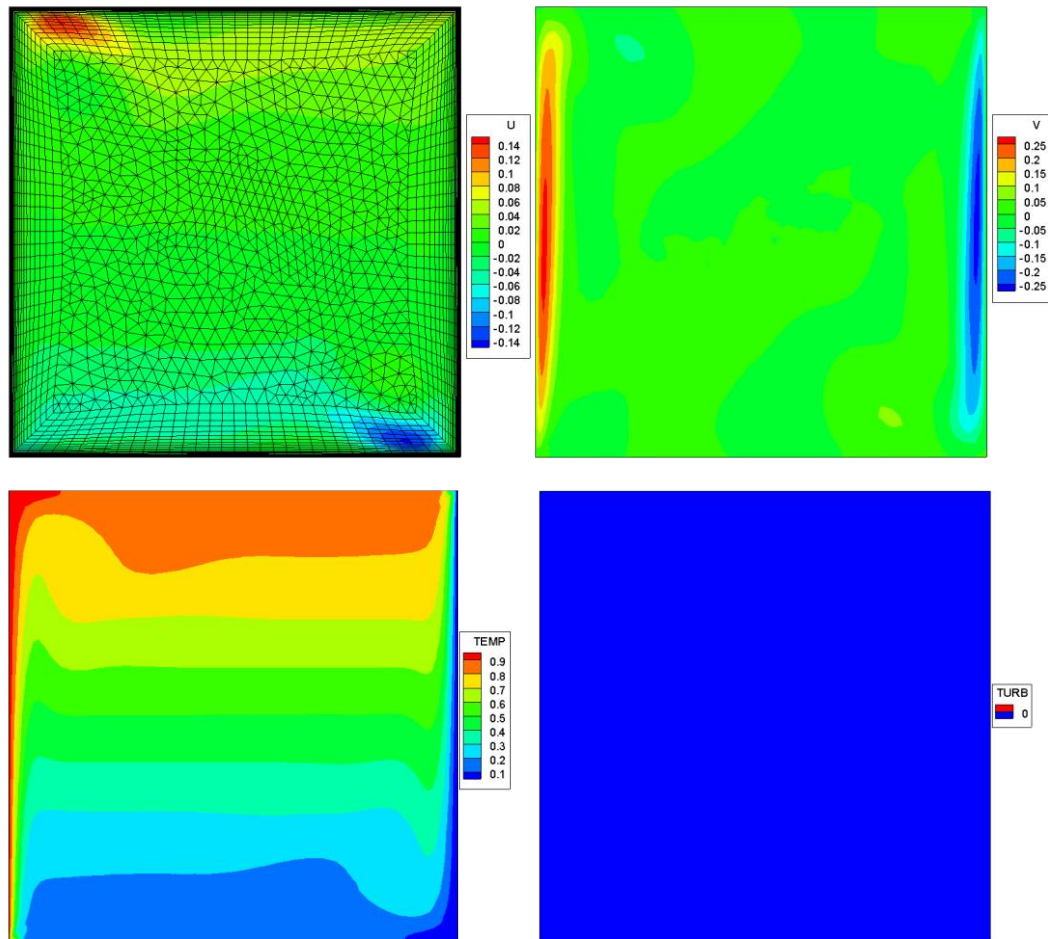


Figure 4-45. Turbulent natural convection; low-Re $k-\omega$ SST; $Ra=10^7$. u velocity contour and numerical mesh (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row).

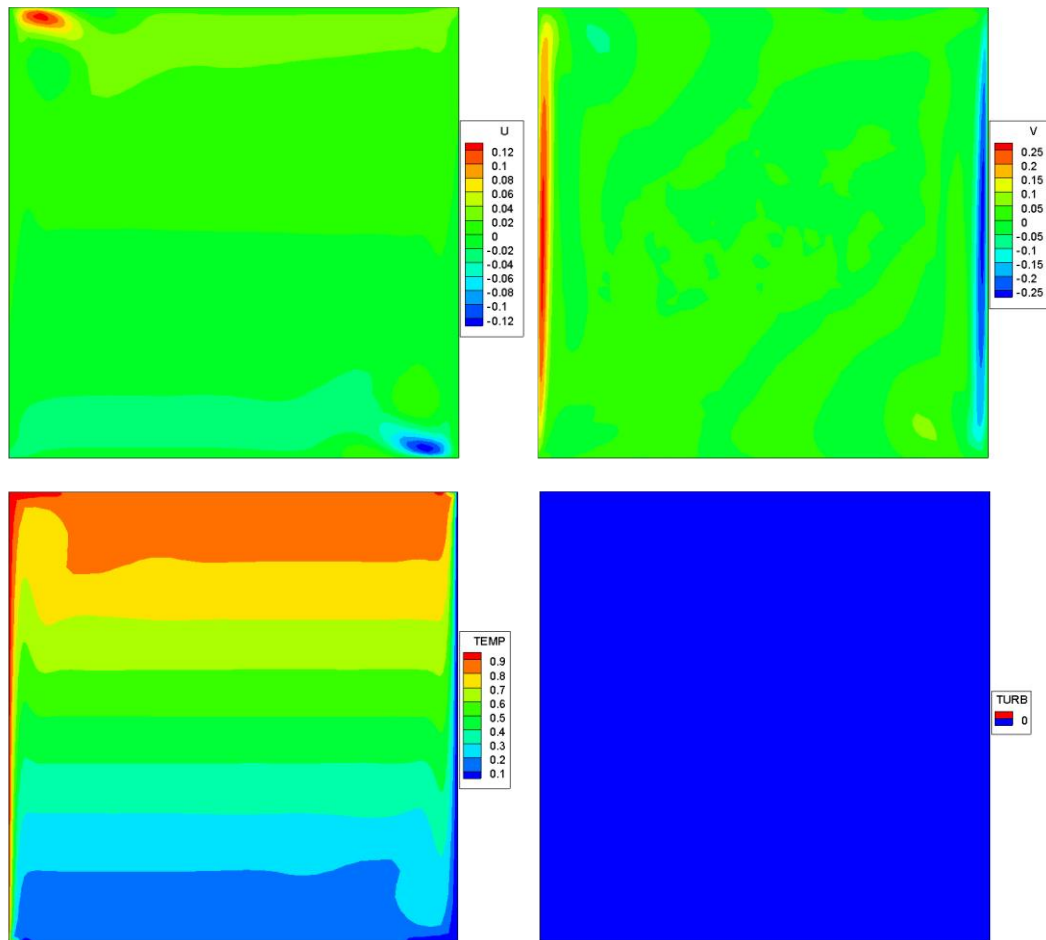


Figure 4-46. Turbulent natural convection; low-Re $k-\omega$ SST; $Ra=10^8$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row).

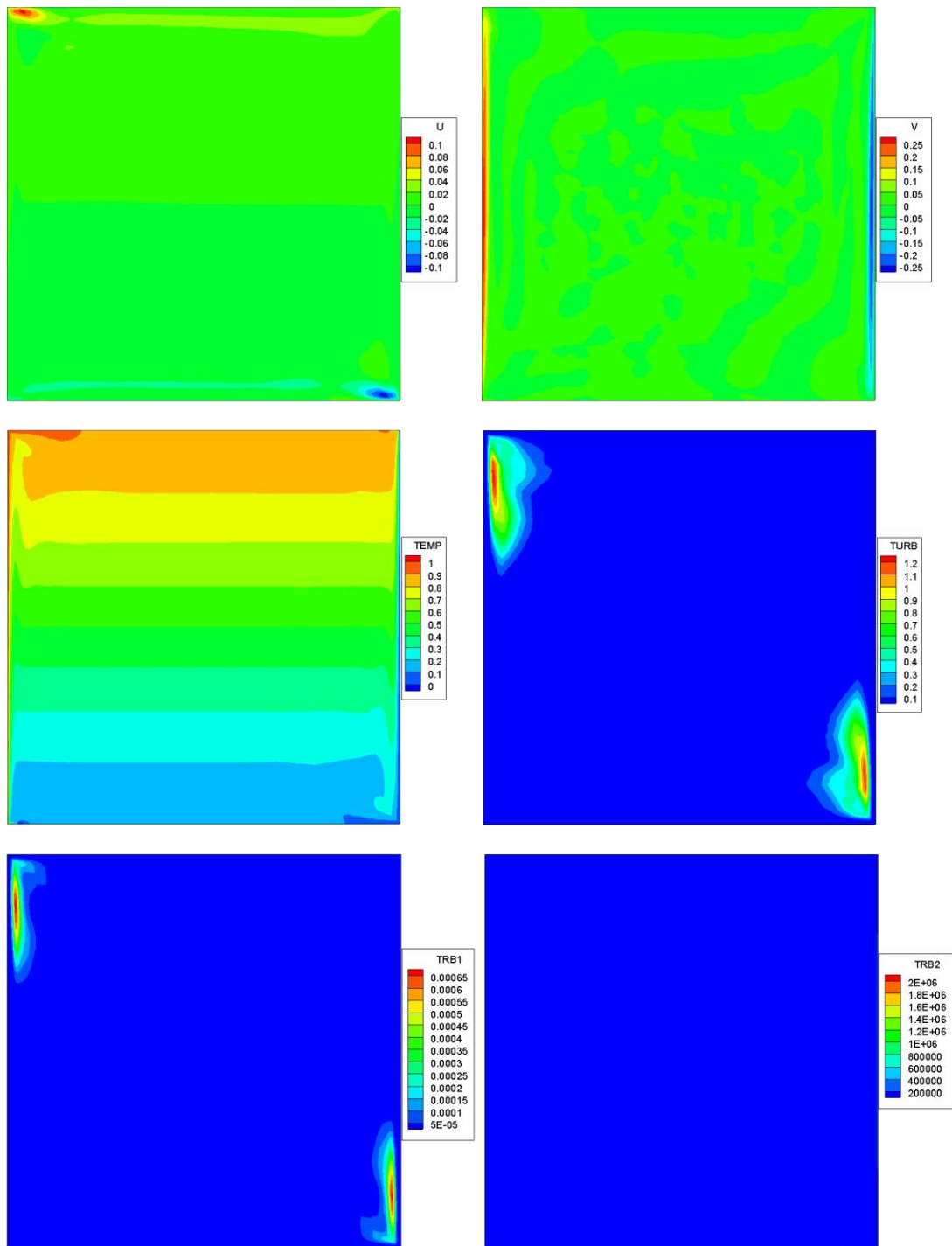


Figure 4-47. Turbulent natural convection; low-Re $k-\omega$ SST; $Ra=10^9$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

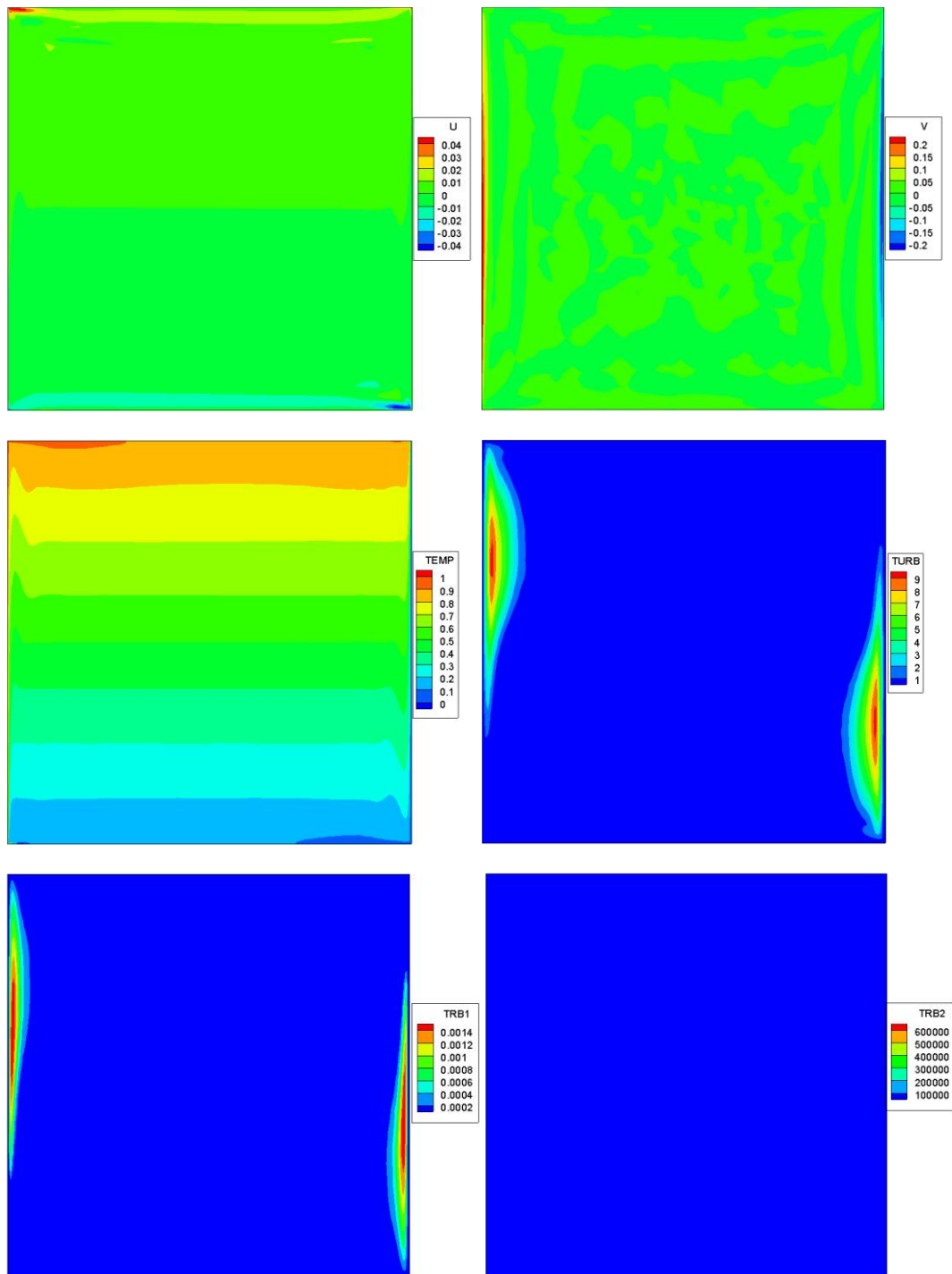


Figure 4-48. Turbulent natural convection; low-Re $k-\omega$ SST; $Ra=10^{10}$. u velocity contour (left column, 1st row), v velocity contour (right column, 1st row), temperature contour (left column, 2nd row), eddy kinematic viscosity (right column, 2nd row), turbulent kinetic energy (left column, 3rd row), turbulent dissipation (right column, 3rd row).

4.3 Radiative heat transfer

In this section some cases of pure radiative heat transfer, simulated using the Finite Volume Method (FVM) presented in chapter 3, will be given. The application of the view factor based model (VFBM) will be presented in a case of conjugated flow and heat transfer in section 4.4.

As it was mentioned, before the FVM is a method applicable for gray, absorbing, emitting and scattering (either isotropically or anisotropically) mediums. It is based on a node-centered edge-type algorithm for hybrid numerical meshes. It applies a second order spatial and temporal scheme. If negative radiative intensities are calculated a fix-up procedure is used and these are set equal to zero.

The results of the code are compared in terms of:

the dimensionless average incident radiation $G^*(\vec{r}) = \frac{\int I(\vec{r}, \hat{s}) d\omega}{4\sigma T_o^4}$

and the dimensionless radiative heat flux $Q^*(\vec{r}) = \frac{\int I(\vec{r}, \hat{s}) \cdot (\hat{s} \cdot \hat{n}_i) d\omega}{\sigma T_o^4}$

where T_o is a reference temperature.

The quantities of the incident radiation and radiative heat flux were selected for the comparison because they are the only quantities of radiation that affect the temperature field. Specifically, subtracting the black body radiation from the incident radiation we have the source term of radiation in the energy equation and the radiative heat flux is applied in the boundary conditions at the walls.

4.3.1 Prismatic enclosure with equilateral triangular bases

As to the first test problem, the FVM was applied to a prismatic enclosure with equilateral triangular bases (figure 4-49), filled with gray purely absorbing and emitting ($\kappa_a=1$) medium (non-scattering, $\sigma_s=0$) maintained at the constant temperature of 1000K. Walls of the enclosure were assumed to be black ($\varepsilon=1$) and cold at the

constant temperature of 0K. At the two side walls of the z direction, symmetry boundary conditions were applied.

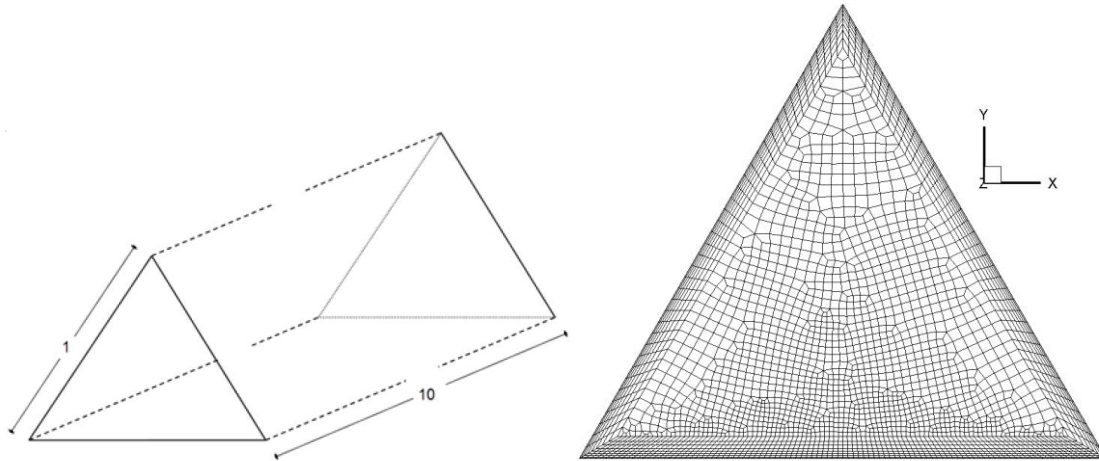


Figure 4-49. Schematic representation of the prismatic enclosure [Lyg12] (left). Numerical mesh in the middle cross section $z=5$ (right).

Three different numerical meshes were used to achieve independent results, with the final spatial grid system composed of 123369 nodes and 116720 cells. The angular grid used was $(N_\theta \times N_\phi) = (12 \times 16)$. As initial condition for the radiative intensity, the black body intensity $I_b = \frac{\sigma T^4}{\pi}$ (in dimensional form) was set for all nodes.

$$I_b = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

We compare the dimensionless radiative heat flux at the bottom wall in the middle of the z distance ($z=5$) to the two-dimensional results of Kim et al. [Kim01] at figure 4-50. Kim et al. applied a finite volume approach. They used the upwind step spatial differencing scheme and the exact treatment scheme for the unavoidable control angle overlap.

The reference temperature used for the non-dimensionalization was equal to the temperature of the fluid, $T_o = 1000\text{K}$. Taking into account that three-dimensional simulations insert larger amounts of numerical diffusion compared to two-dimensional simulations, results seem to agree satisfactorily.

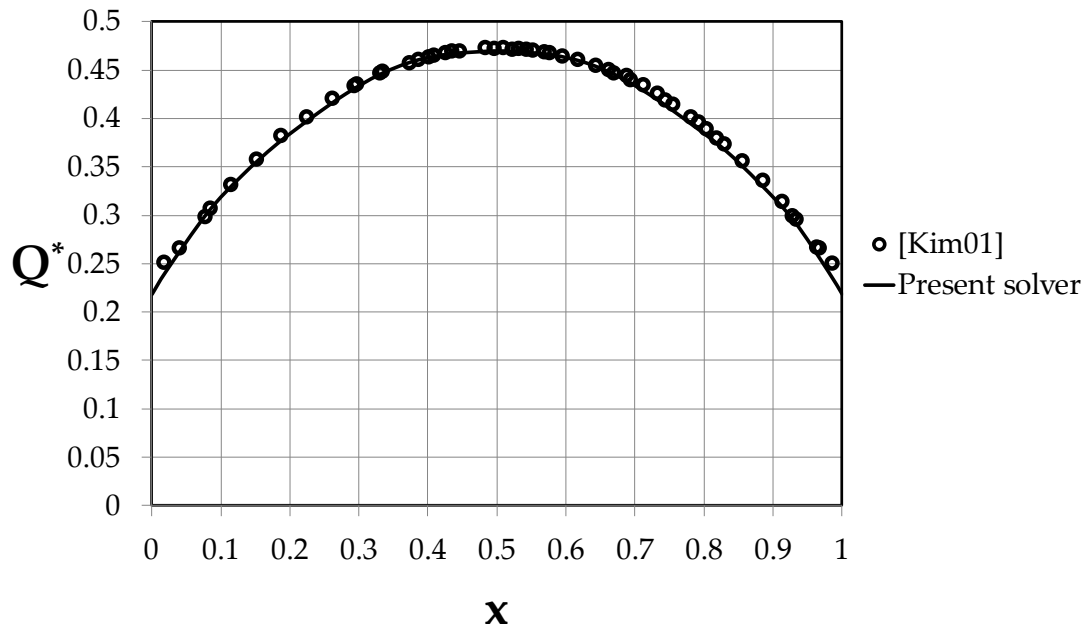


Figure 4-50. Dimensionless radiative heat flux at the bottom wall in the middle of the z distance ($z=5$).

4.3.2 Hexahedral enclosure with trapezoidal bases

The second test case considered deals with the radiative heat transfer in a prismatic enclosure with trapezoidal bases (figure 4-51). The enclosure is filled with gray absorbing, emitting and isotropically scattering medium maintained at the constant temperature of 0K. Black walls were assumed ($\epsilon=1$) maintained at the constant temperature of 0K, apart from the bottom wall the temperature of which was equal to 100K. At the two side walls in z direction symmetry boundary conditions were applied.

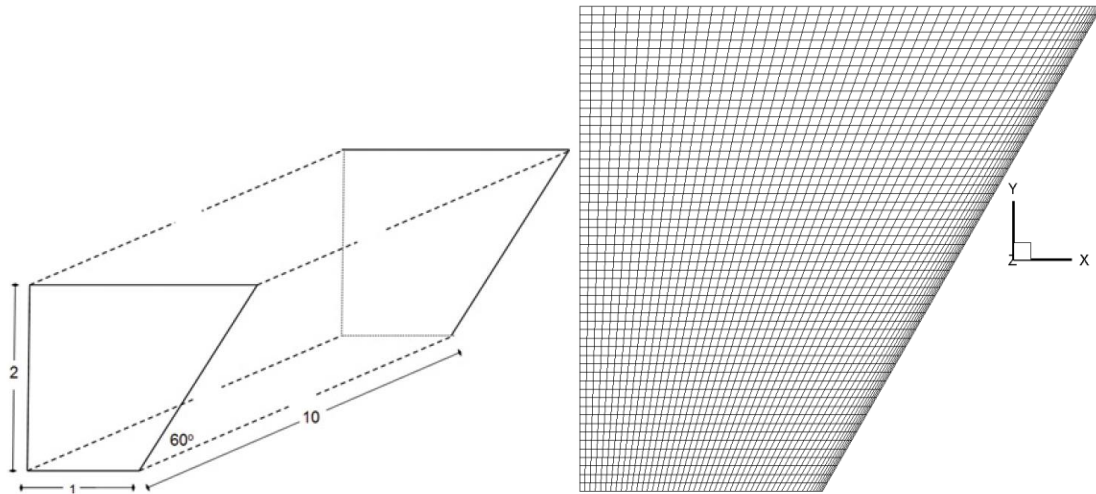


Figure 4-51. Schematic representation of the prismatic enclosure [Lyg12] (left). Numerical mesh in the middle cross section $z=5$ (right).

Initial radiative intensity was equal to the black body radiative intensity I_b . The spatial grid system that gave independent results was composed of 304616 nodes and 290700 cells. For the angular discretization 4 polar and 16 azimuthal angles were used. For this case, the scattering coefficient was equal to $\sigma_s=0.6$ and the absorption coefficient equal to $\kappa_a=0.4$.

In figure 4-52 the independent from the numerical mesh dimensionless radiative heat flux at the inclined wall in the middle of the z distance ($z=5$) is shown and compared to the results of Kim et al. [Kim10]. They used unstructured polygonal meshes and the upwind step spatial differencing scheme.

The reference temperature used for the non-dimensionalization was equal to the temperature of the bottom wall, $T_o = 100\text{K}$. Results seem to agree satisfactorily, compared to the results of the reference two-dimensional solver [Kim10].

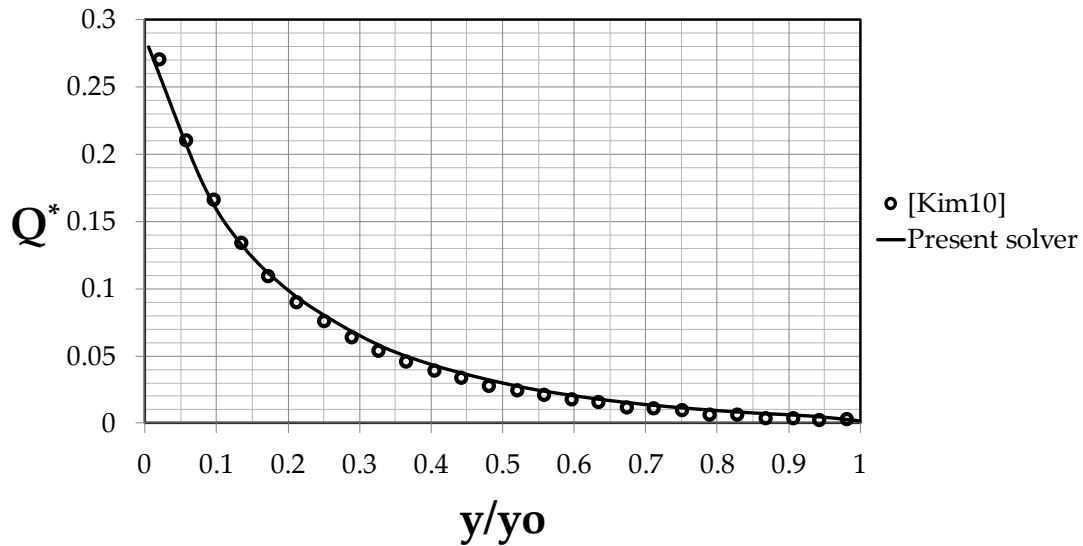


Figure 4-52. Dimensionless radiative heat flux at the inclined wall in the middle of the z distance ($z=5$).

4.3.3 Hexahedral enclosure with quadratic bases

In this test case a hexahedral enclosure with quadratic bases (figure 4-53) was considered filled with fluid at a constant temperature 0K. All walls were maintained cold at a constant temperature of 0K except for the bottom wall, at which a heating energy $E=\sigma T^4=1$ was implemented. σ is the Stefan-Boltzmann constant equal to $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$. At the two side walls of the z direction symmetric boundary conditions were implemented. All walls were assumed to be black ($\epsilon=1$), except for some cases where it is explicitly stated.

As initial radiative intensity the black body intensity I_b was used. The numerical mesh that gave independent solution was composed of 410375 nodes and 386104 cells. The angular mesh was $(N_\theta \times N_\phi)=(8 \times 16)$. For the selection of the number of polar and azimuthal angles an independence study similar to mesh independence study was conducted. In figure 4-54 the dimensionless average incident radiation for isotropic scattering along the center-line $x=0.5$ for $z=5$ is given for four sets of angles. It is evident that satisfactory independence is achieved for the angular mesh of (8x16) angles.

In figure 4-55 the dimensionless incident radiative heat flux in y direction and the dimensionless incident radiation are given for isotropically and anisotropically scattering medium on the center-line $x=0.5$ for $z=5$ (in the middle of the z direction). For the non-dimensionalization the heating energy of the bottom wall was used. Results are also compared to the results of the two-dimensional solver of Kim and Lee [Kim88]. Extinction coefficient $\beta=\kappa_a+\sigma_s$ and the scattering albedo $\omega=\sigma_s/\beta$ for this case are equal to unity. Then the scattering coefficient is $\sigma_s=1$ and the absorption coefficient is $\kappa_a=0$. It is evident that anisotropic scattering leads to greater values for the dimensionless radiative heat flux in y direction compared to the isotropic, while close average incident radiations were calculated for both scattering types. Our results agree satisfactorily with the results of Kim and Lee [Kim88], who applied a discrete ordinates method and anisotropic scattering was handled using Legendre polynomials. In figure 4-56 we compare the dimensionless radiative heat flux in y direction for anisotropic scattering, along the center-line $x=0.5$ for $z=5$. Scattering coefficient is $\sigma_s=0.5$ and absorption coefficient is $\kappa_a=0.5$. Results agree satisfactorily.

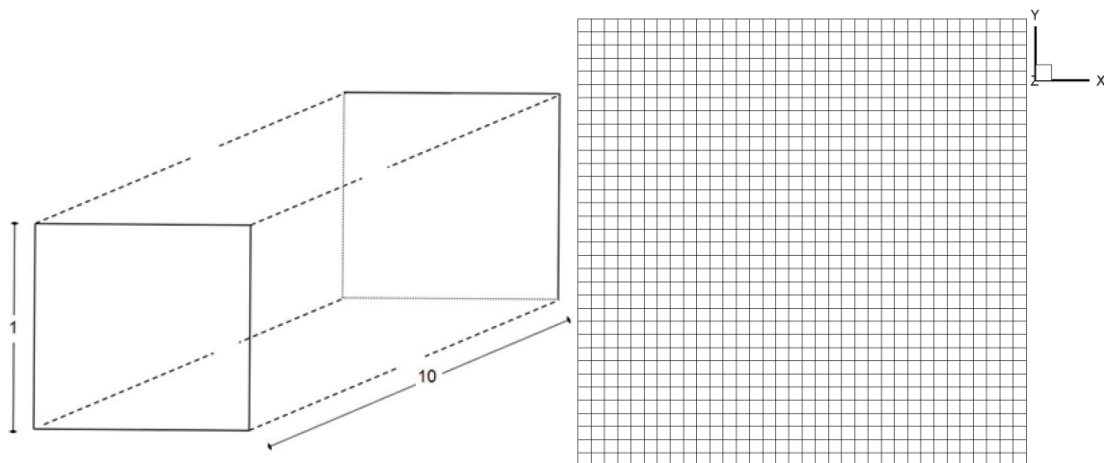


Figure 4-53. Schematic representation of the prismatic enclosure [Lyg12] (left). Numerical mesh in the middle cross section $z=5$ (right).

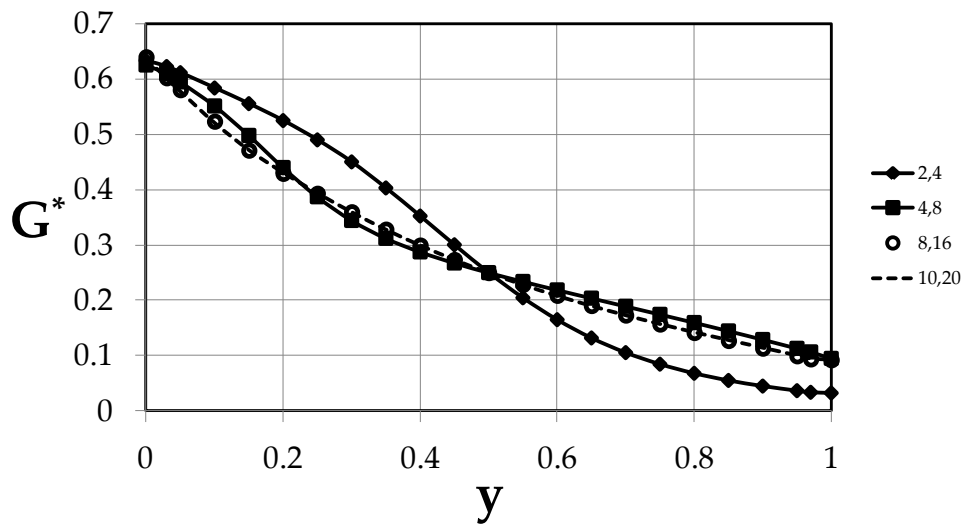


Figure 4-54. Independence of the average incident radiation for isotropic scattering from the angular mesh.

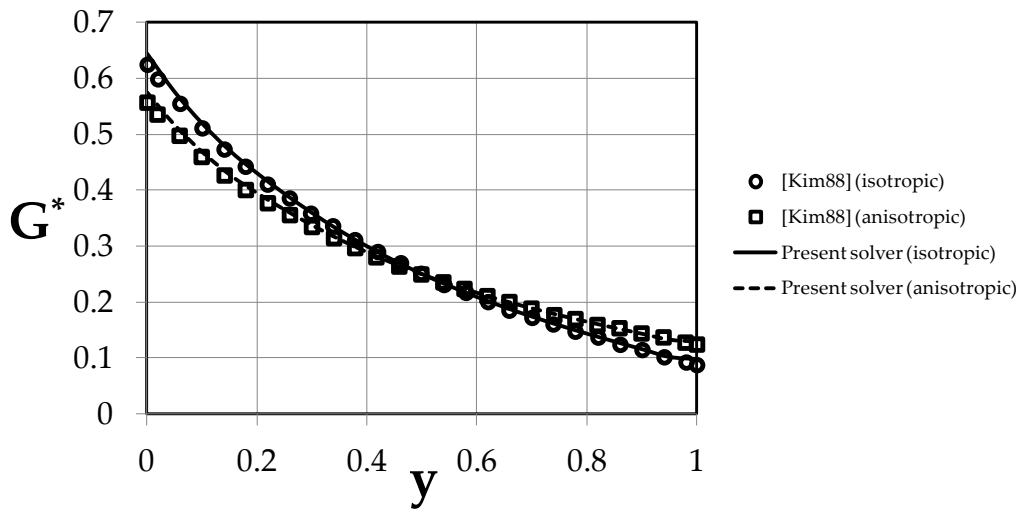
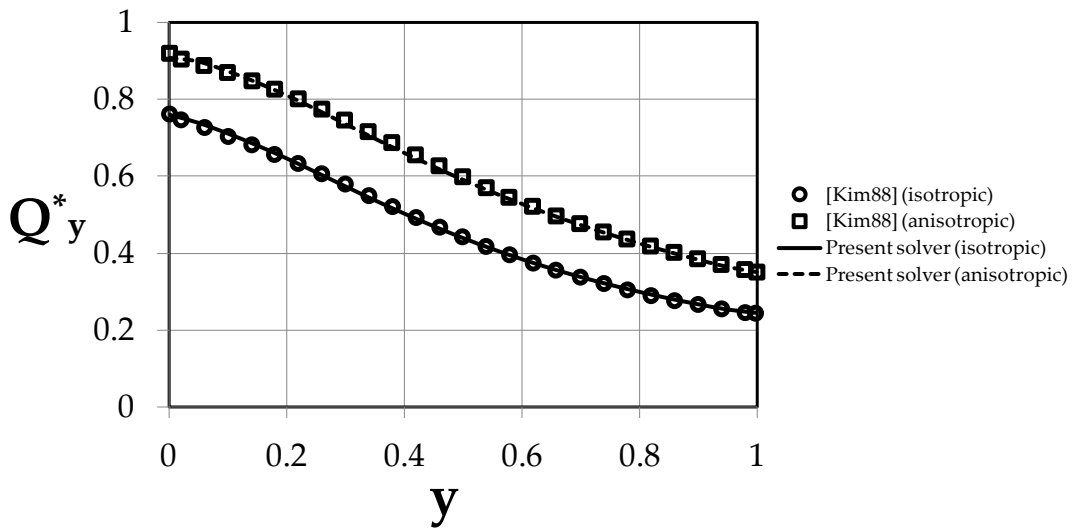


Figure 4-55. Comparison of the dimensionless radiative heat flux in y direction (top) and the dimensionless average incident radiation (bottom) for isotropic and anisotropic scattering along the center-line $x=0.5$ for $z=5$.

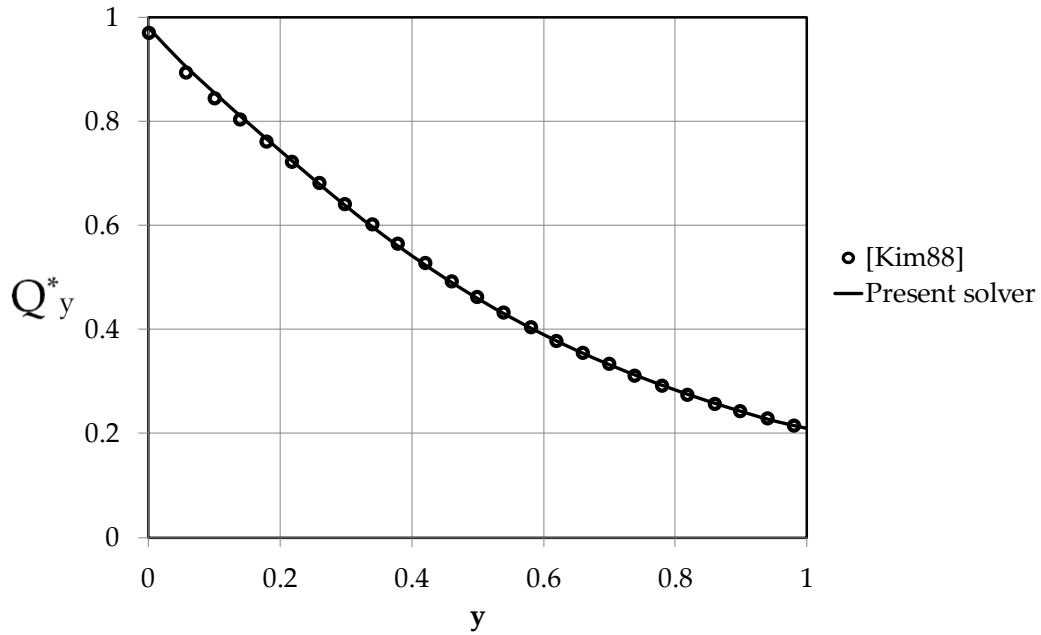


Figure 4-56. Comparison of the dimensionless radiative heat flux along the center-line $x=0.5$ when $z=5$ for anisotropic scattering.

Finally, in figure 4-57 we compare the dimensionless radiative heat flux in the y direction along the center-line $x=0.5$ for various emission coefficients ϵ . The scattering coefficient is $\sigma_s=1$ and the absorption coefficient is $\kappa_a=0$. We observe that reducing the wall emissivity lower values of Q_y^* are calculated.

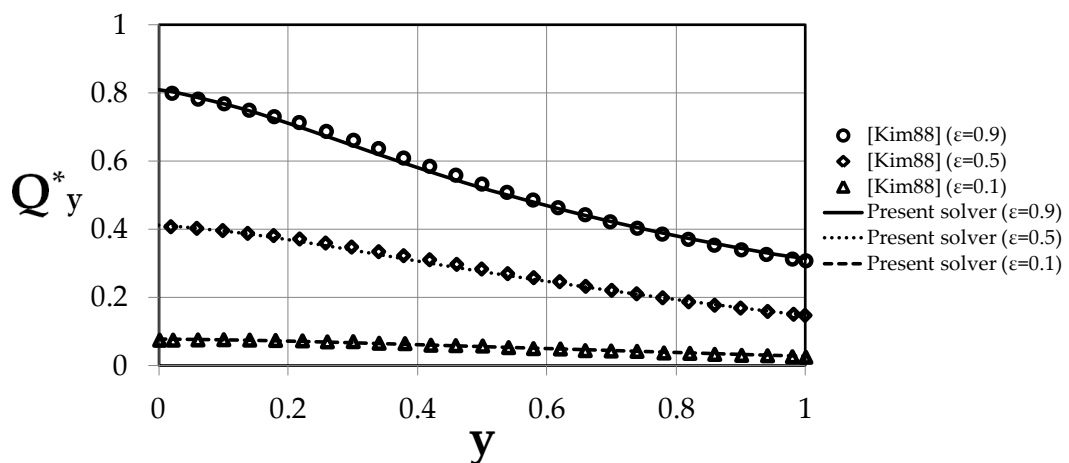


Figure 4-57. Comparison of the dimensionless radiative heat flux along the center-line $x=0.5$ for anisotropic scattering for various emission coefficients ϵ .

4.3.4 Hexahedral enclosure with trapezoidal bases

The last case considered deals with the radiative heat transfer in a hexahedral enclosure with trapezoidal bases (figure 4-58). The enclosure contained an absorbing and emitting but non-scattering medium. The absorption coefficient was $\kappa_a=1$. All walls were black ($\varepsilon=1$). The fluid had a constant temperature equal to 100 K, while all walls were at a constant temperature of 0K.

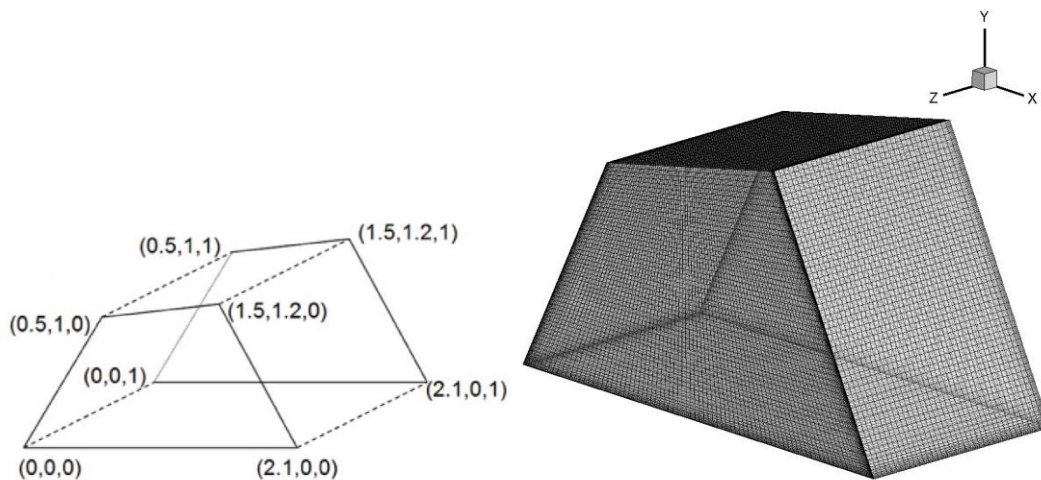


Figure 4-58. Schematic representation of the hexahedral enclosure [Lyg12] (left). Numerical mesh (right).

Initially we considered that the radiative intensity was equal to the black body intensity I_b . The computational domain was discretized in 255645 nodes and 243124 cells in order to achieve independent results. For the angular discretization we used 10 polar and 10 azimuthal control angles.

In figure 4-59 the dimensionless radiative heat flux, onto the bottom face in the middle of the enclosure ($z=0.5$) are given and compared to the results of Baek et al. [Bae98]. Baek et al. applied a finite volume method combined with the step differencing scheme and exact treatment of control angle overlap.

The reference temperature used for the non-dimensionalization was equal to the temperature of the fluid, $T_o=100K$. Our results agree satisfactorily with the results of Baek et al.

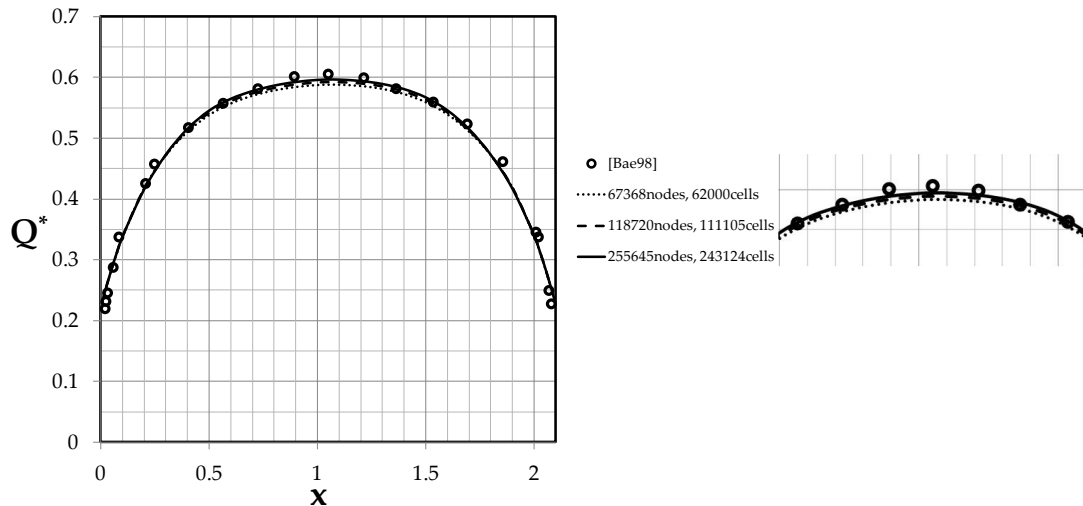


Figure 4-59. Comparison of the dimensionless radiative heat flux onto the bottom face in the middle of the enclosure ($z=0.5$) (left). Independence of the solution (right).

4.4 Combined heat transfer

In this section test cases that involve laminar flow and combined heat transfer (conduction, convection and radiation) in cavities are presented. For the rest of this chapter when combined heat transfer is mentioned, we mean heat transfer with all means. Specifically, in the first case the combined heat transfer in a square cavity is presented. The radiative heat transfer was calculated using both the view factor based method (VFBM) and the Finite Volume Method (FVM). The second case deals with the laminar flow and combined heat transfer in a cubic cavity. In this case the radiative heat transfer was modeled using the FVM. These cases were selected in order to test the coupling of the radiation models to the 3-D solver.

For the reconstruction of the radiation intensity when the FVM had been applied, either the second order scheme without any limiter or one of the Min-Mod and Van Albada-Van Leer limiters had been used. In the below presented test cases negligible differences had been encountered between the usage of one of the limiters or none of them.

4.4.1 Combined heat transfer in a square cavity

The first case deals with the laminar flow and combined heat transfer in a square cavity of edge H , that have been presented by Kasemi et al. [Kas93]. Kasemi et al. applied the discrete exchange factor method for radiation modeling. For the prediction of the flow, they solved the stream function-vorticity form of the Navier Stokes equations and buoyancy was integrated by means of the Boussinesq approximation. Inviscid terms were discretized using the third order accurate QUICK scheme.

This case was simulated using both radiation models. Although the test case constitutes a two-dimensional one, it was simulated using the three-dimensional version of our code where both radiation models are integrated. The two-dimensional numerical mesh was constructed and then we extruded it in the third direction (y direction). The length of the third direction was equal to ten edges of the square. At the side faces of the third direction symmetry boundary conditions were implemented.

An enclosure with two differentially heated walls (the vertical edges) and two adiabatic walls (the horizontal edges) was considered. The hot wall was at a constant temperature of $T_h=1$, while the cold wall's temperature was $T_c=0$. All walls were black ($\epsilon=1$). The cavity was filled with fluid of Prandtl number equal to 0.7. The reference velocity used for the non-dimensionalization of the velocity was $u_{ref} = \frac{\nu}{H}$, where ν is the kinematic viscosity. Then Reynolds number was $Re=1$. There was not any heat source or sink ($S_q = 0$) and Grashof number was $Gr=700$. Finally, for the parameters of radiation, the reference temperature ratio was $T_o^* = 1$ and Planck number was $Pl=1.6$. The enclosure was divided into $35 \times 35 \times 35$ nodes. The angular mesh which is necessary for the discretization of the FVM for radiative heat transfer was composed of 8 polar and 16 azimuthal angles.

In figure 4-60 temperature profiles along the top wall ($z=1$) and bottom wall ($z=0$) in the middle of the y direction ($y=5$) for the case of the laminar convection without radiation are given. Our results agree satisfactorily with those of Kasemi et al. [Kas93].

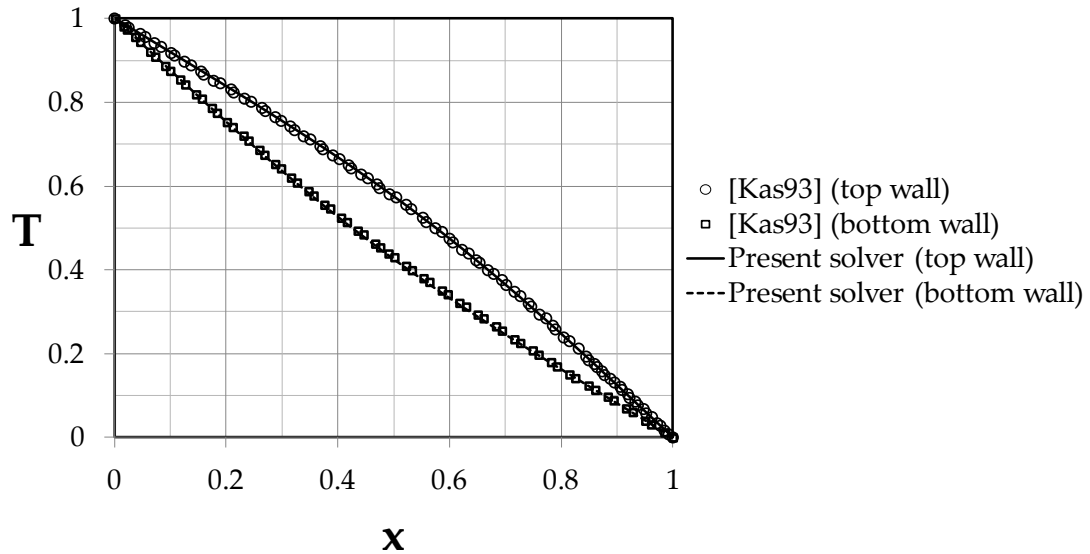


Figure 4-60. Temperature profiles along the top wall ($z=1$) and bottom wall ($z=0$) in the middle of the y direction ($y=5$) for the case of the laminar convection without radiation effects.

In figure 4-61 and figure 4-62 temperature profiles at the top and bottom walls are presented with the effect of radiation. In figure 4-61 temperature profiles using the VFBM are presented, while in figure 4-62 using both methods. The medium is assumed to be transparent (non-participating). Our profiles are compared to the results of Kasemi et al. [Kas93] and Albanakis and Bouris. Albanakis and Bouris presented the same test case, using the same VFBM in [Alb08]. The inclusion of radiation significantly altered the profiles. There is an excellent agreement with the results of Albanakis and Bouris and a small divergence from the results of Kasemi et al. This divergence is permissible as it is less than 5% of the temperature difference ($T_h - T_c$). In figure 4-62 we observe the agreement of our temperature profiles from the VFBM with those of the FVM. Therefore, there is agreement between the results of the FVM and the results of Albanakis and Bouris.

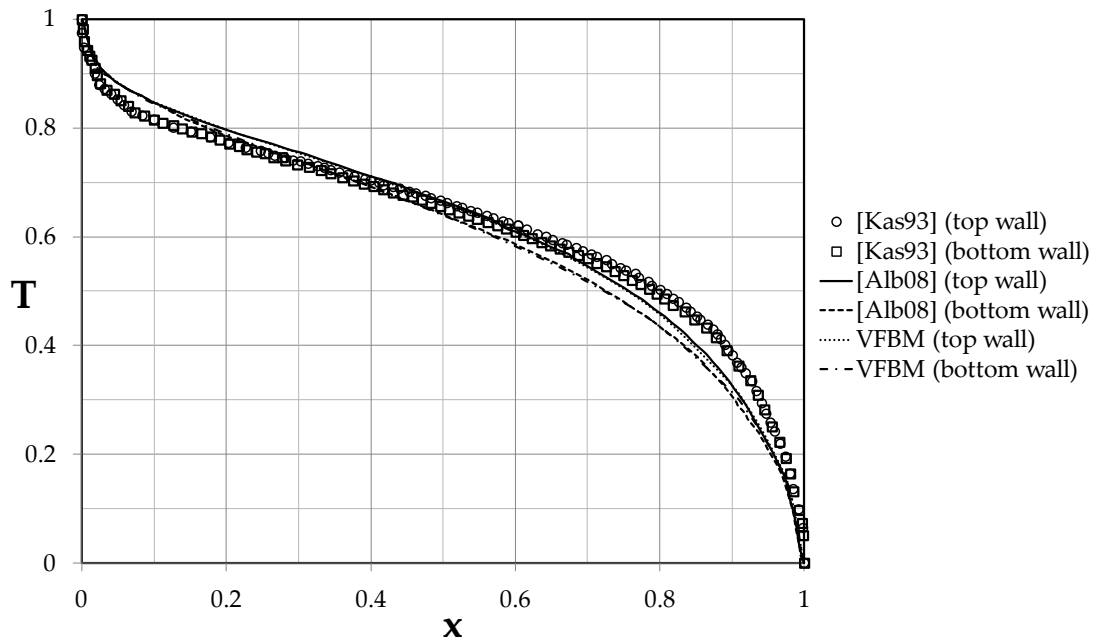


Figure 4-61. Comparison of temperature profiles along the top wall ($z=1$) and bottom wall ($z=0$) in the middle of the y direction ($y=5$) when radiation effects are included and calculated using the VFBM.

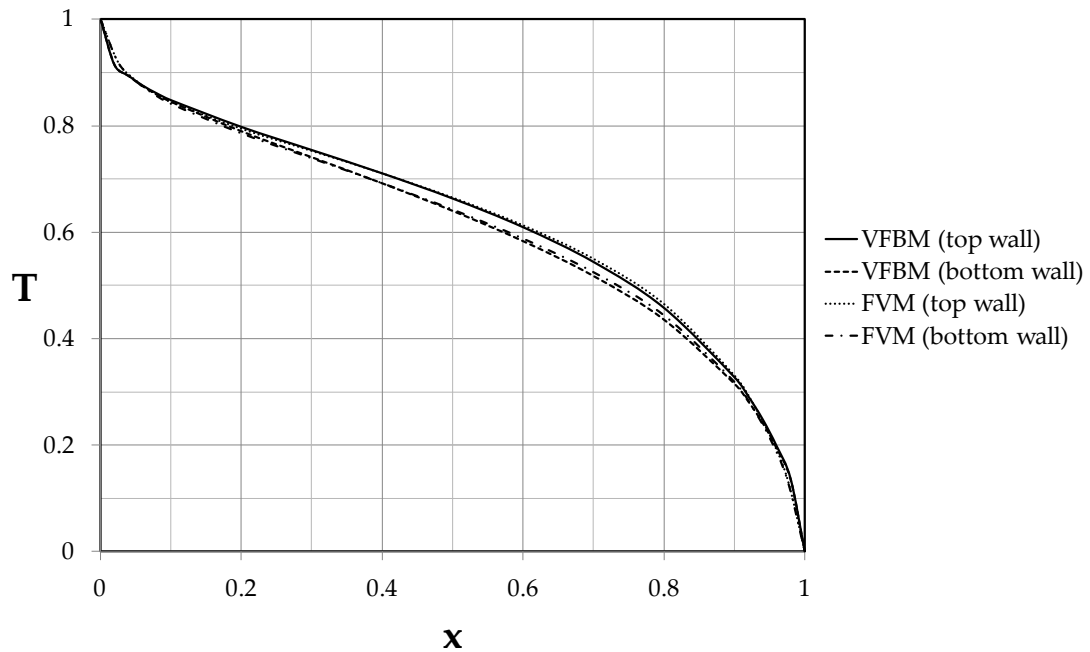
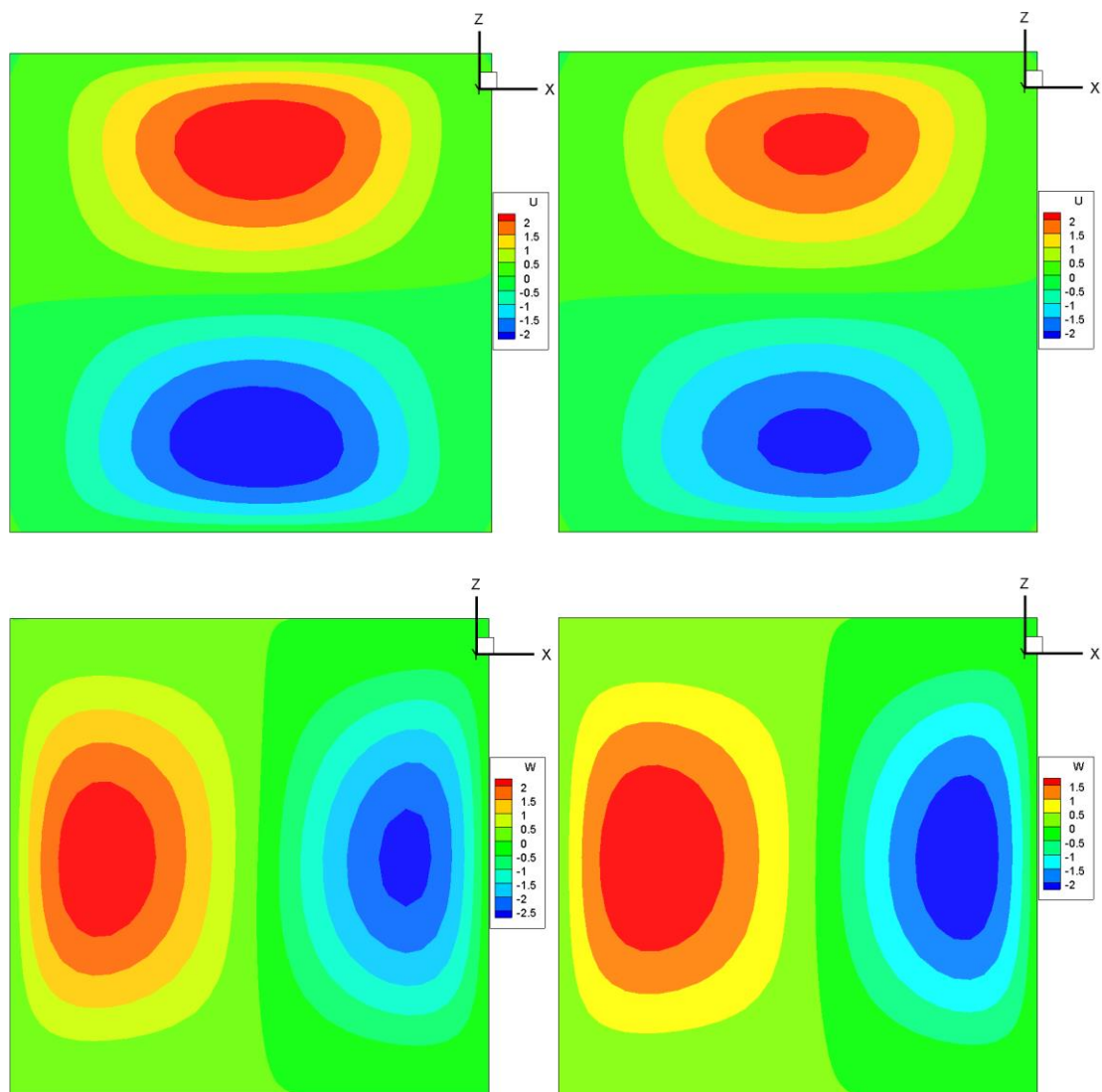


Figure 4-62. Comparison of temperature profiles when radiative heat transfer is calculated using either the VFBM or the FVM.

Afterwards, the case of participating medium was simulated using the FVM. The medium was assumed to be gray absorbing and emitting, but non-scattering. The optical thickness (dimensionless absorption coefficient) was equal to $\tau=1$. In figure 4-63 u and w velocities and temperature contours in the square cavity are presented for transparent and participating medium. The participating medium significantly alters the contours. In the case of participating medium, less thermal radiation reach the adiabatic walls from the hot wall, because part of it is absorbed by the medium. Therefore, temperature gradients at the adiabatic walls are closer to zero for the case of participating medium. In figure 4-64 we present the contour of the dimensionless radiative divergence $\nabla Q_r = \frac{\tau}{PI} \left[4 \left(\frac{T}{T_0^*} + 1 \right)^4 - \int_{4\pi} Id\omega \right]$ for participating medium.

$$\nabla Q_r = \frac{\tau}{PI} \left[4 \left(\frac{T}{T_0^*} + 1 \right)^4 - \int_{4\pi} Id\omega \right]$$



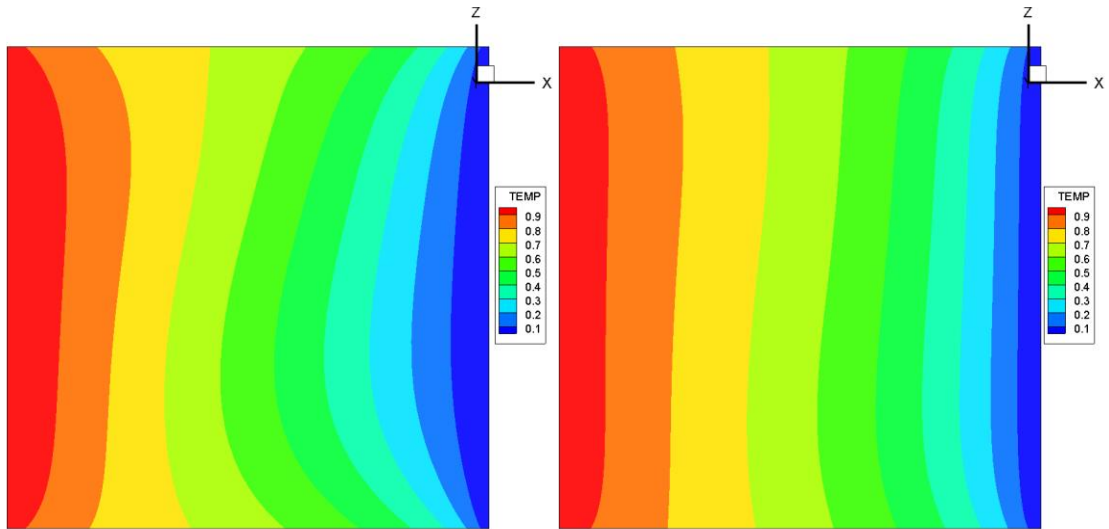


Figure 4-63. Contours inside the enclosure for transparent (left column) and participating (right column) medium. u velocity (1st row), w velocity (2nd row), temperature (3rd row).

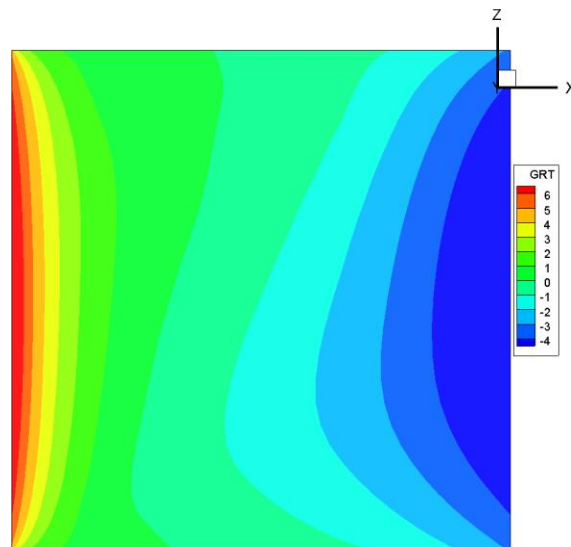


Figure 4-64. Radiative divergence contour for participating medium.

4.4.2 Combined heat transfer in a cubic cavity

The second test case deals with the laminar flow and combined heat transfer in a cubic cavity. This test case was firstly presented by Colomer et al. [Col04] and refers to a cubic cavity with two differentially heated walls. The other four walls were adiabatic. The temperature of the hot wall was $T_h=1$ and the temperature of the cold wall was $T_c=0$. Colomer et al. used a discrete ordinates method to model radiation. Pressure prediction was achieved using a SIMPLE-like algorithm.

Radiative heat transfer was modeled using the FVM. It should be noted that the same test case was tried to be simulated using the VFBM with the serial solver. However, we did not achieve an independent solution because making the numerical mesh denser, the requirements on CPU time became significantly large.

The Prandtl number of the fluid was $Pr=0.71$. The reference velocity used for the non-dimensionalization was $u_{ref} = \sqrt{Lg\beta\Delta T}$. Thus Reynolds number was $Re = \sqrt{Gr}$. There was not any heat source or sink ($s_q = 0$). Grashof number was calculated for Rayleigh numbers of $Ra=10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ ($Ra=GrPr$). As to the parameters of radiation two combinations had been applied. In the first one the reference temperature ratio was $T_o^* = 15$ and Planck number was $Pl=0.043$ for transparent medium, while in the second one the reference temperature was $T_o^* = 17$ and Planck number was $Pl=0.016$ for participating medium with optical thickness $\tau=1$. For the case of $Pl=0.016$ the radiation effects were greater. In both cases black walls were assumed ($\epsilon=1$).

The enclosure was divided into $65 \times 65 \times 65$ nodes. For the angular discretization 8 polar and 16 azimuthal angles were used. In this case we compare the sum of the heat fluxes because of conduction and radiation onto the hot wall. Specifically, in comparison is the averaged sum of the heat fluxes in z direction at the hot wall. In figure 4-65 and figure 4-66 the average heat fluxes at the hot wall as a function of the position along the y axis are given and compared to the results of Colomer et al. [Col04]. There are differences between the results, but in the literature significant divergences among the results of various researchers have been found ([Kol11], [Bor08], [Abi11], [Sca08]). There is not a general agreement on the correct results as this case have not been simulated experimentally.

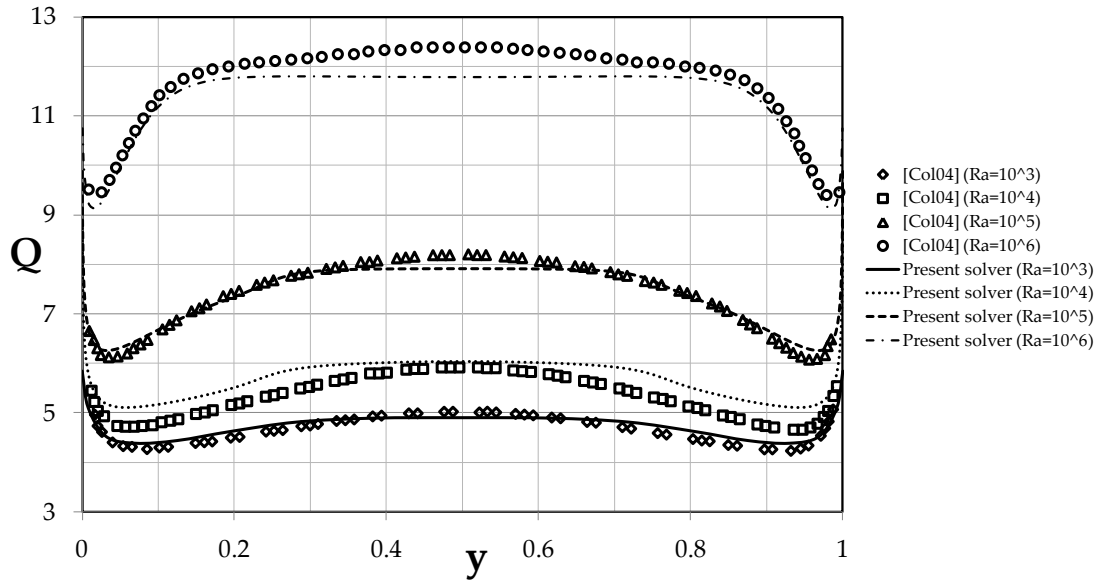


Figure 4-65. Distribution of the average heat flux in z direction along y axis for transparent medium ($T_o^* = 15$, $Pr=0.043$, $\tau=0$).

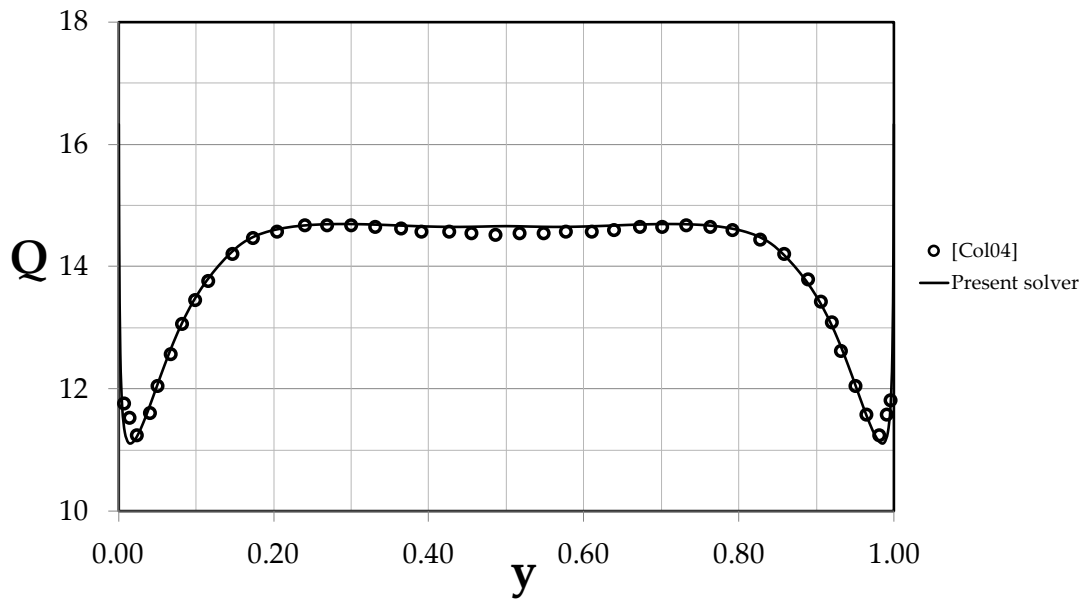
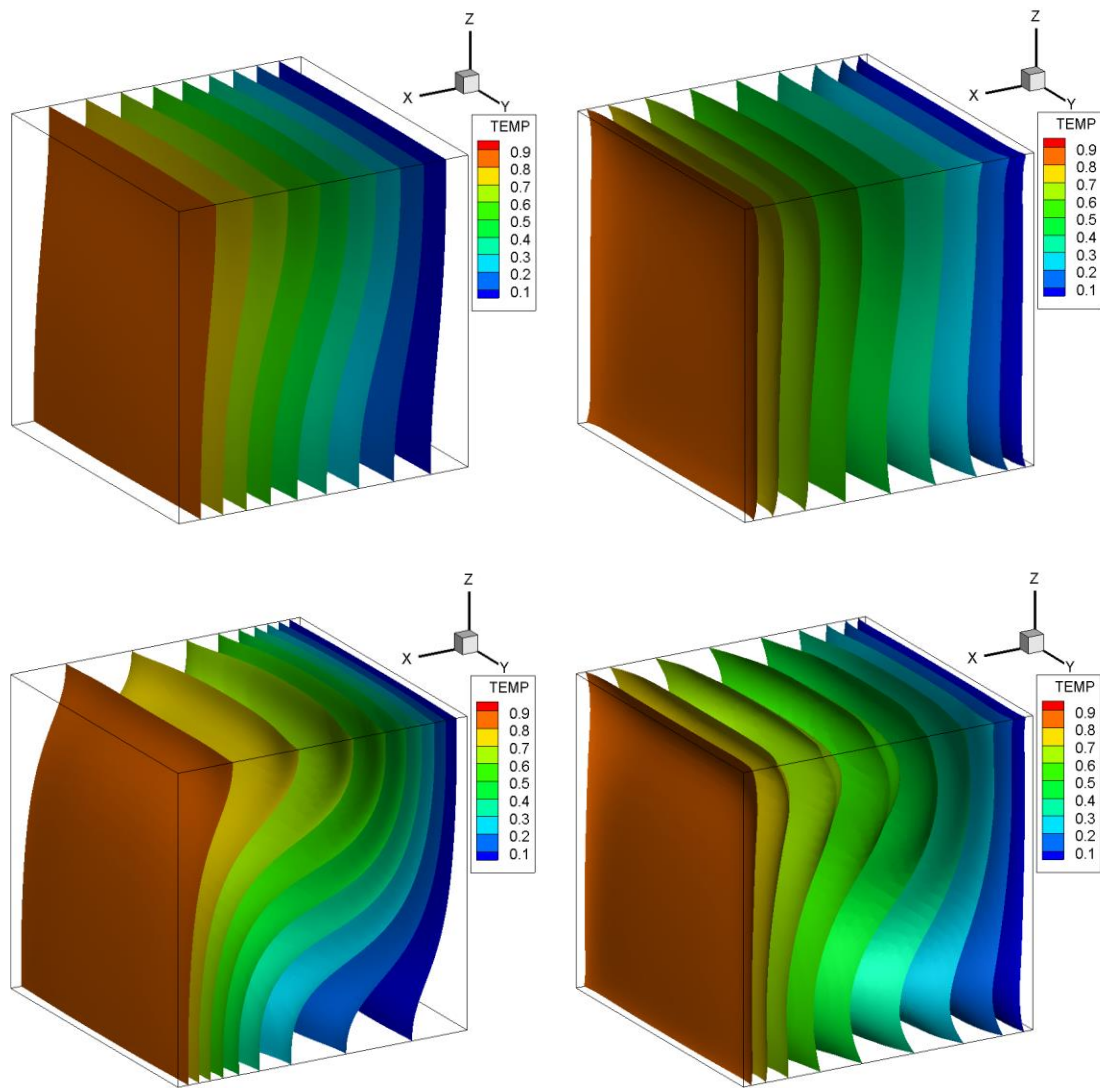


Figure 4-66. Distribution of the average heat flux in z direction along y axis for participating medium ($T_o^* = 17$, $Pr=0.016$, $\tau=1$, $Ra=10^6$).

In figure 4-67 the isothermal surfaces are given for all Rayleigh numbers with and without the radiation, for the case of transparent medium when $T_0^* = 15$ and $Pr=0.016$. We observe that either with the radiation effects or not augmenting the Rayleigh number isothermal surfaces turn gradually from vertical to horizontal. Additionally, isothermal surfaces are normal to the adiabatic walls when radiation is not taken into account, while this does not happen when radiation is included.



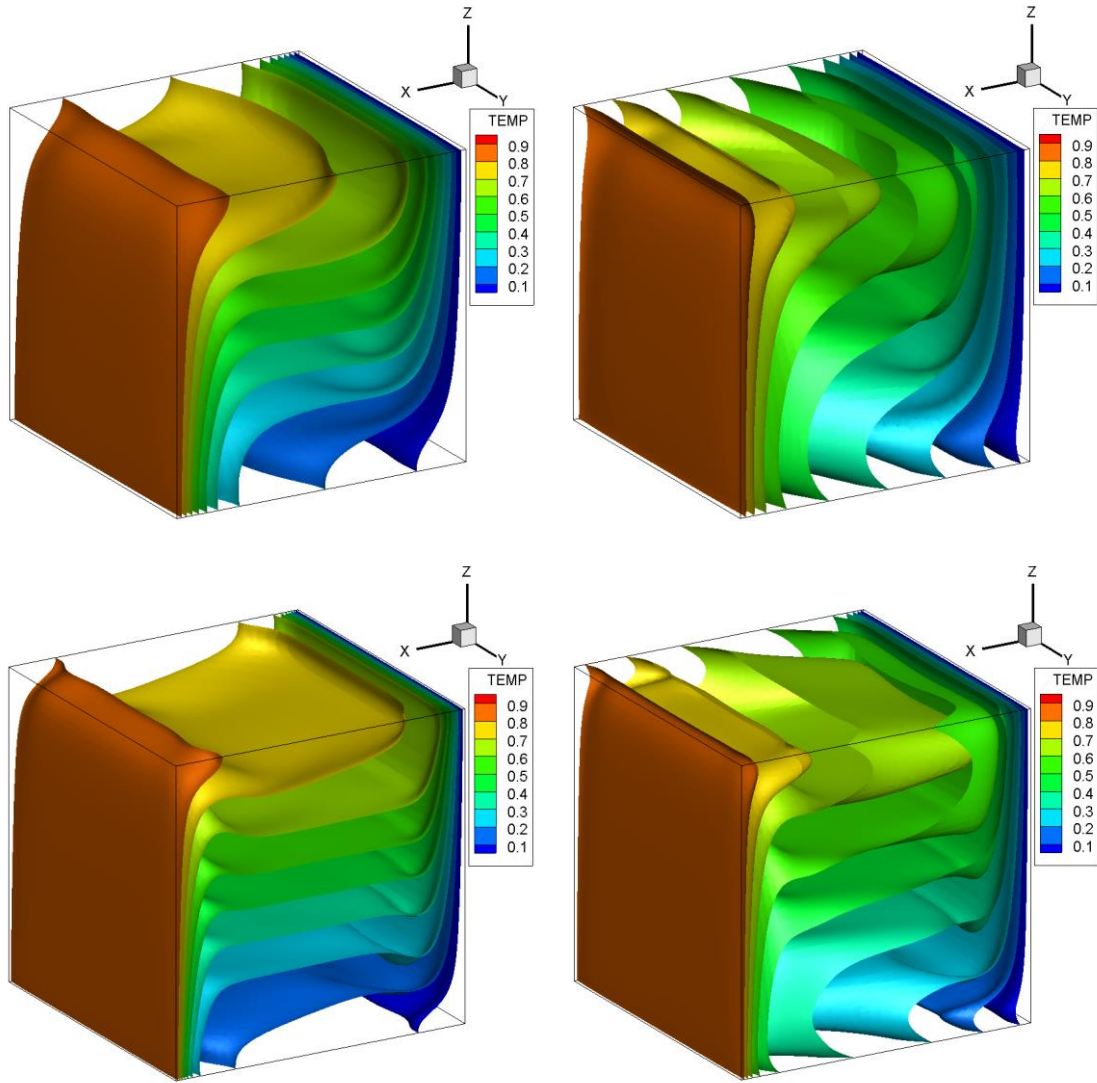


Figure 4-67. Isothermal surfaces when radiation effects are not taken into account (left column) and when radiation effects are included (right column) ($T_o^* = 15$, $Pl=0.043$, $\tau=0$). $Ra=10^3$ (1st row), $Ra=10^4$ (2nd row), $Ra=10^5$ (3rd row), $Ra=10^6$ (4th row).

In figure 4-68 we present the dimensionless radiative heat flux onto the walls and the

dimensionless radiative divergence $\nabla Q_r = \frac{\tau}{Pl} \left[4 \left(\frac{T}{T_o^*} + 1 \right)^4 - \int_{4\pi} Id\omega \right]$ on mid-plane

$y=0.5$ for the case of participating medium ($T_o^* = 17$, $Pr=0.016$, $\tau=1$).

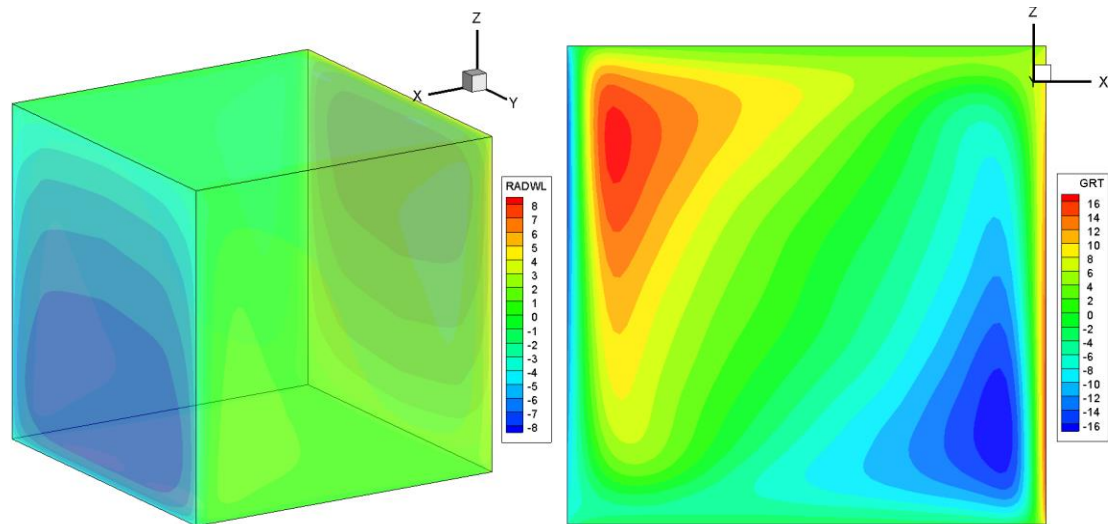


Figure 4-68. Dimensionless radiative heat flux onto the walls (left) and dimensionless radiative divergence on mid-plane $y=0.5$ ($T_o^* = 17$, $Pr=0.016$, $\tau=1$).

4.5 Conclusions

In this chapter some representative test cases for the validation of the developed solver were presented. Specifically, these cases were cases of laminar or turbulent flow, cases of pure radiative heat transfer and cases of laminar flow with combined heat transfer. Radiative heat transfer was simulated using both radiation models, i.e. the view factor based method (VFBM) and the finite volume method (FVM). A wide variety of input parameters was applied in order to test the general applicability of our solver. Details on the numerical meshes, the initial conditions and the parameters of the solver were provided for each case. Satisfactory comparisons with the results of other researchers were observed. Generally smooth contours were calculated using any type of numerical meshes, i.e. hexahedral or hybrid numerical meshes.

Moreover, both coupling methods proposed were compared regarding their convergence behavior and stability. The strongly coupled solution showed significant superiority as less CPU time was needed for highly convective cases and more stable simulations were produced. Afterwards, the effect of the use of slope limiters for the reconstruction of the mean flow dependent variables was tested. Slope limiters showed to stall the convergence to a certain degree. Therefore, slope limiters were removed as a choice for the reconstruction of the mean flow dependent variables, but

still constitute a choice for the radiation intensity. However, the application of the slope limiters or not for the radiation intensity did not show to significantly influence the steady state solutions.

CHAPTER 5

PARALLEL COMPUTING

Something that was not given enough emphasis in the previous chapters is that most of the computations were performed in parallel. Parallel computing raised because of the need for faster calculations and was more systematically studied in the last decades under the Message Passing Interface (MPI) forum [MPI]. It is a form of computation in which calculations are carried out simultaneously, using multiple processors after the spatial domain decomposition of the task.

In this dissertation time consuming problems were encountered and for their simulation parallel computing was necessary. These problems were problems for which independency of the solution from the numerical mesh and time step was tested. They are characterized as time consuming problems because of the huge numerical meshes and small time steps needed. Additionally, three-dimensional turbulent flows and conjugate flow and radiative heat transfer problems were quite demanding. The most demanding simulations were those of the tunnel fire cases. Flows were turbulent and radiation modeling using the finite volume method was applied.

The parallelization of the algorithm was based on the SPMD (Single Program Multiple Data) technique, which requires the division of the task in multiple partitions solved by the equal number of processes. Metis [METIS] was applied for the partitioning of the numerical meshes, providing high-quality partitioning with less CPU time. High-quality partitioning is ensured when the number of nodes of each partition is approximately the same and the number of edges connecting nodes of adjacent partitions is the least possible. MPI (Message Passing Interface) communication protocol was applied for the implementation of the parallelization, which constitutes a common choice in the field of Computational Fluid Dynamics.

In this chapter the performance of our parallel code is tested for various cases. These cases are two-dimensional and three-dimensional. Specifically, the two-dimensional turbulent flow in the differentially heated square cavity was studied for three different numerical meshes in order to test the reaction of the performance of the parallel solver when the size of the mesh increases. The standard k- ϵ with wall functions and the k- ω SST with wall functions turbulence models were applied. Then, the performance of the three-dimensional parallel solver was tested in the case of the differentially heated cubic cavity. We simulated a case of laminar flow without the effect of radiation, a case of pure radiation and a case of laminar flow with the effect of radiation.

The quantities that interested us when testing the parallel solver are the speed-up and the efficiency. They are given in graphs for each of the cases. Speed-up in parallel computing expresses the gain in time from the segmentation of the problem into N partitions. It is defined as

$$S_N = \frac{T_1}{T_N} \quad (5-1)$$

where T_1 is the time needed for the solution of the serial problem (N is one), while T_N is the time needed for the solution of the parallel problem (cut into N partitions). Speed-up is a unit-less quantity. The ideal speed-up is the linear speed-up, when $T_N = \frac{T_1}{N}$. This mean that doubling the number of processors the time needed is halved. However, in reality the ideal speed-up is not achieved because of the dependence of the processes (message passing among them is required) and the fact that there is a fraction of the problem that cannot get parallelized.

According to Amdahl's law the speed-up of a program run in parallel is limited by the time needed for the sequential fraction of the problem. If f is the fraction of the problem that can be executed in parallel, then (1-f) is the fraction of the problem that cannot be executed in parallel. The time needed for the serial part is $T_s = (1-f)T_1$ and for the pure parallelized part is $T_p = f \frac{T_1}{N}$ (when time needed for message passing is neglected).

Then

$$T_N = T_S + T_P = (1-f)T_1 + f \frac{T_1}{N} \quad (5-2)$$

and

$$S_N = \frac{T_1}{T_N} = \frac{T_1}{(1-f)T_1 + f \frac{T_1}{N}} = \frac{1}{(1-f) + \frac{f}{N}} \quad (5-3)$$

f takes values between zero and one. The less the value of f is, the more we move away from the ideal speed-up. From Amdahl's law we could get a prediction of the speed-up if we knew the fraction of the problem that can be executed in parallel. However, this fraction is difficult to be assessed and is dependent on the numerical mesh. It could be estimated if we solve (5-3) equation for f , knowing the speed-up S_N .

Specifically

$$f = \frac{(1-S_N)N}{(1-N)S_N} \quad (5-4)$$

Then we could predict the speed-up for a different number of partitions/processes.

Efficiency is a quantity that provides information on the performance of the parallel solver when executed for N partitions and it is defined as

$$E_N = \frac{T_1}{NT_N} = \frac{S_N}{N} \quad (5-5)$$

E_N takes values between zero and one. The closer to one the efficiency is, the better is the performance of the parallel solver.

According to Amdahl's law efficiency could be predicted by

$$E_N = \frac{1}{(1-f)N + f} \quad (5-6)$$

5.1. Two-dimensional cases

5.1.1 Differentially heated square cavity

The two-dimensional turbulent flow in the differentially heated square cavity was studied for three successively densing numerical meshes. The first mesh was composed of 1686 nodes and 2578 cells (mesh1), while the second mesh of 10083 nodes and 15044 cells (mesh2) and the third mesh of 18812 nodes and 34622 cells (mesh3). Both the standard $k-\varepsilon$ and the $k-\omega$ SST turbulence models were used with wall function treatment near cavity walls. Simulations were conducted in pseudo-time without writing results. CFL number was equal to unity from the beginning till the end of the 3000 pseudo-time steps. At each pseudo-time step 2 Newton iterations and 12 Jacobi iterations for the solution of the linear system were executed. The number of partitions/processes used was 1, 2, 4, 8 and 16. Runs were conducted at the Linux cluster "VELOS" of the Laboratory of Thermal Turbomachines, Parallel CFD and Optimization Unit, using at most two PCs of 8 CPUs at 2 GHz.

Figure 5-2 presents the speed-up and the efficiency achieved using mesh1 and both turbulence models, while figure 5-3 the respective quantities for mesh2 and figure 5-4 for mesh3. All numerical meshes showed approximate speed-ups and efficiencies for the different turbulence models and a steep descent of the efficiency from the eight processes to sixteen. Figure 5-5 presents the comparison among the speed-ups and the efficiencies of the three numerical meshes. It shows that densing the numerical mesh the speed-up and the efficiency of the parallelization increases for the same number of processes. This is in agreement with the literature [Bp α 12]. Generally, augmenting the size of computational load in comparison to the message passing load, with the increase of the size of the numerical mesh, leads to greater speed-ups for the same number of processes.

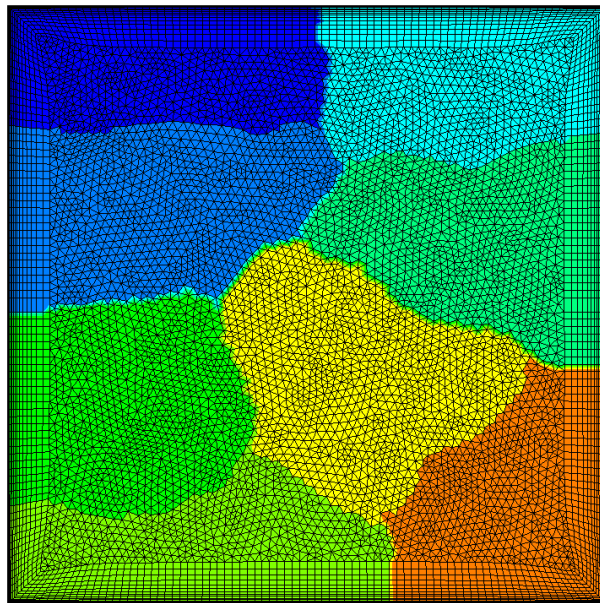


Figure 5-1. Mesh2 (10083 nodes and 15044 cells) decomposed into 8 partitions.

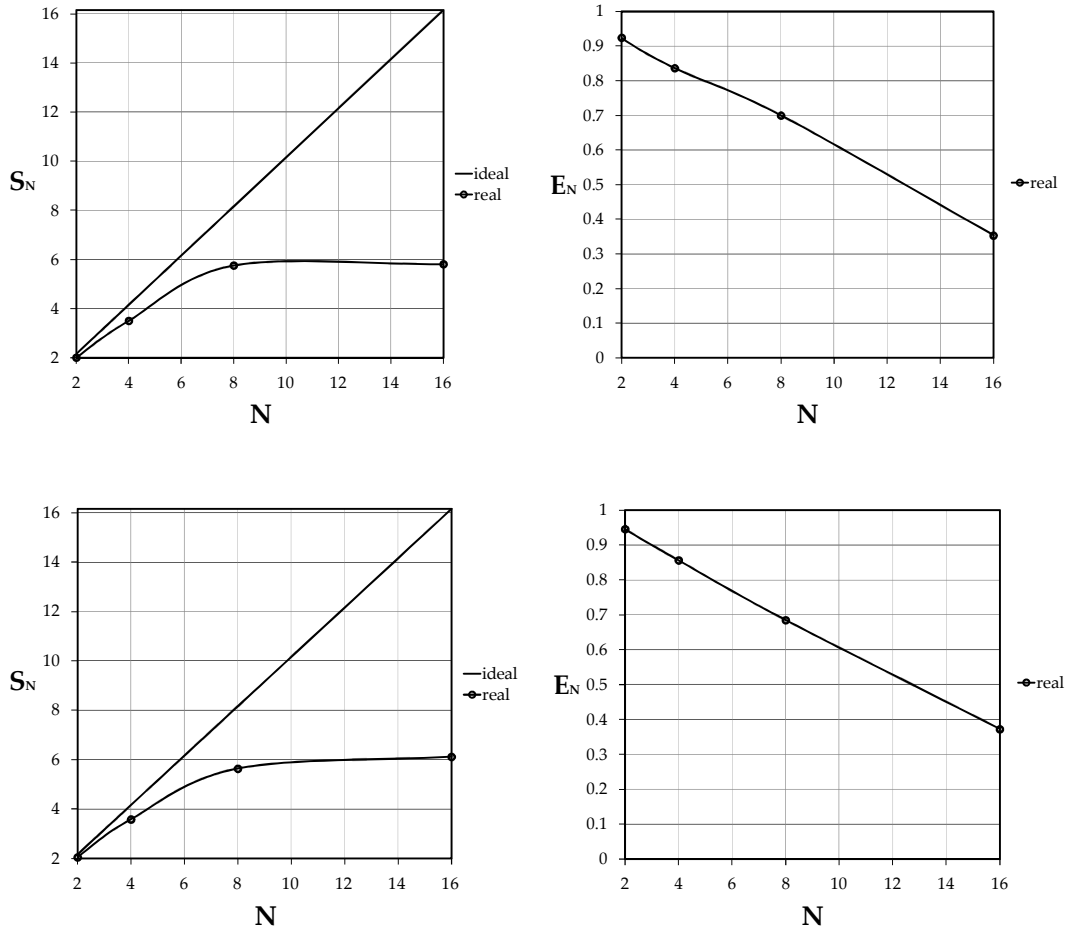


Figure 5-2. Speed-up (left column) and efficiency (right column) of the parallelization for mesh1 (1686 nodes and 2578 cells), using the k- ω SST turbulence model (up row) and the standard k- ϵ turbulence model (bottom row).

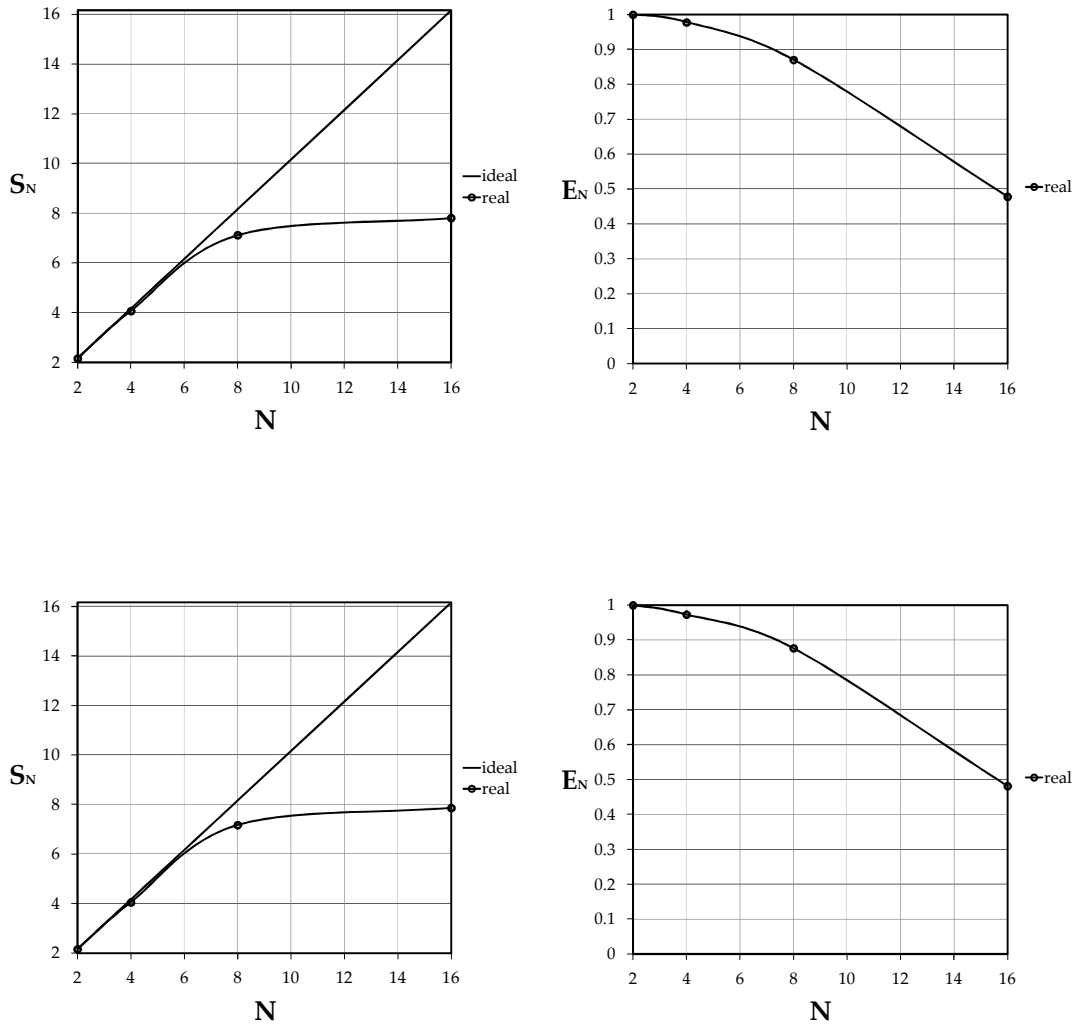


Figure 5-3. Speed-up (left column) and efficiency (right column) of the parallelization for mesh2 (10083 nodes and 15044 cells), using the k- ω SST turbulence model (up row) and the standard k- ϵ turbulence model (bottom row).

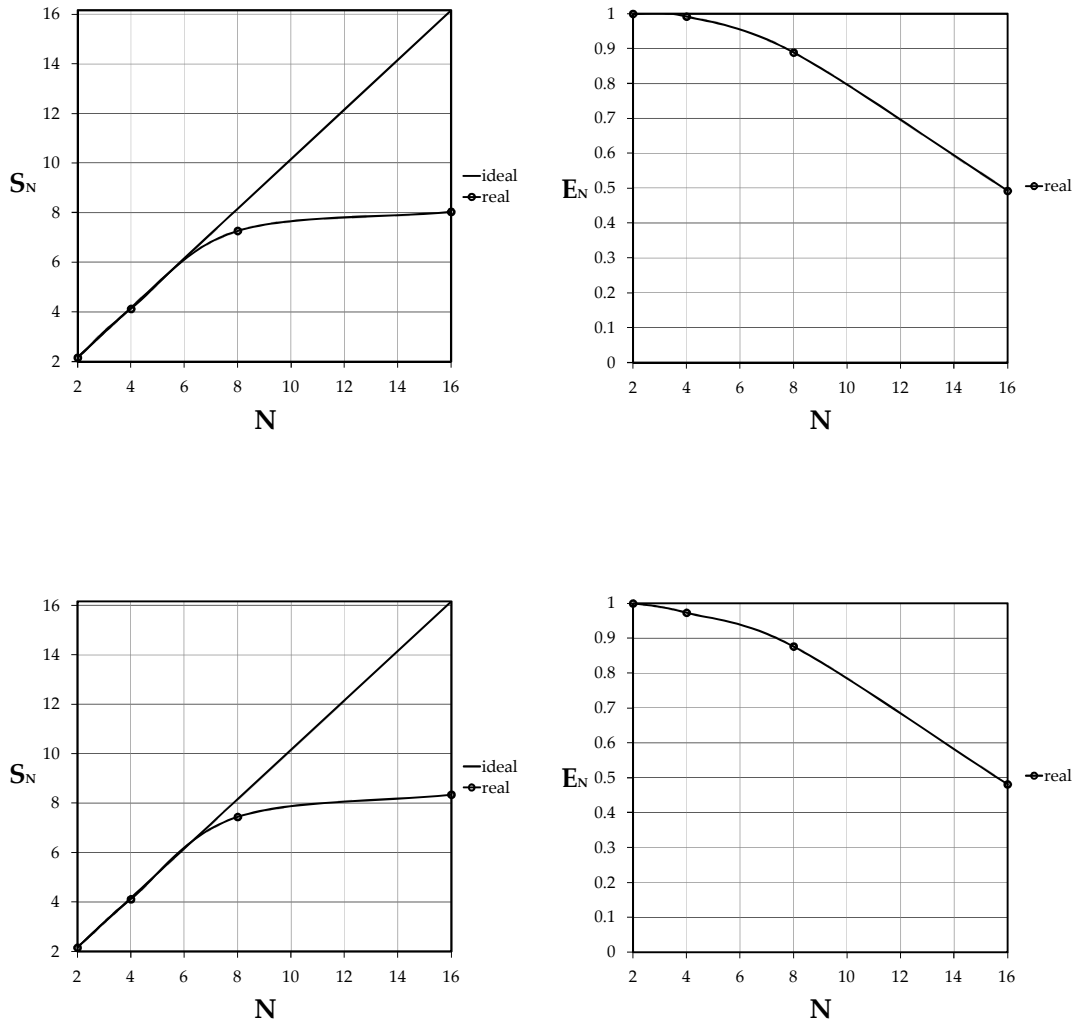


Figure 5-4. Speed-up (left column) and efficiency (right column) of the parallelization for mesh3 (18812 nodes and 34622 cells), using the k- ω SST turbulence model (up row) and the standard k- ϵ turbulence model (bottom row).

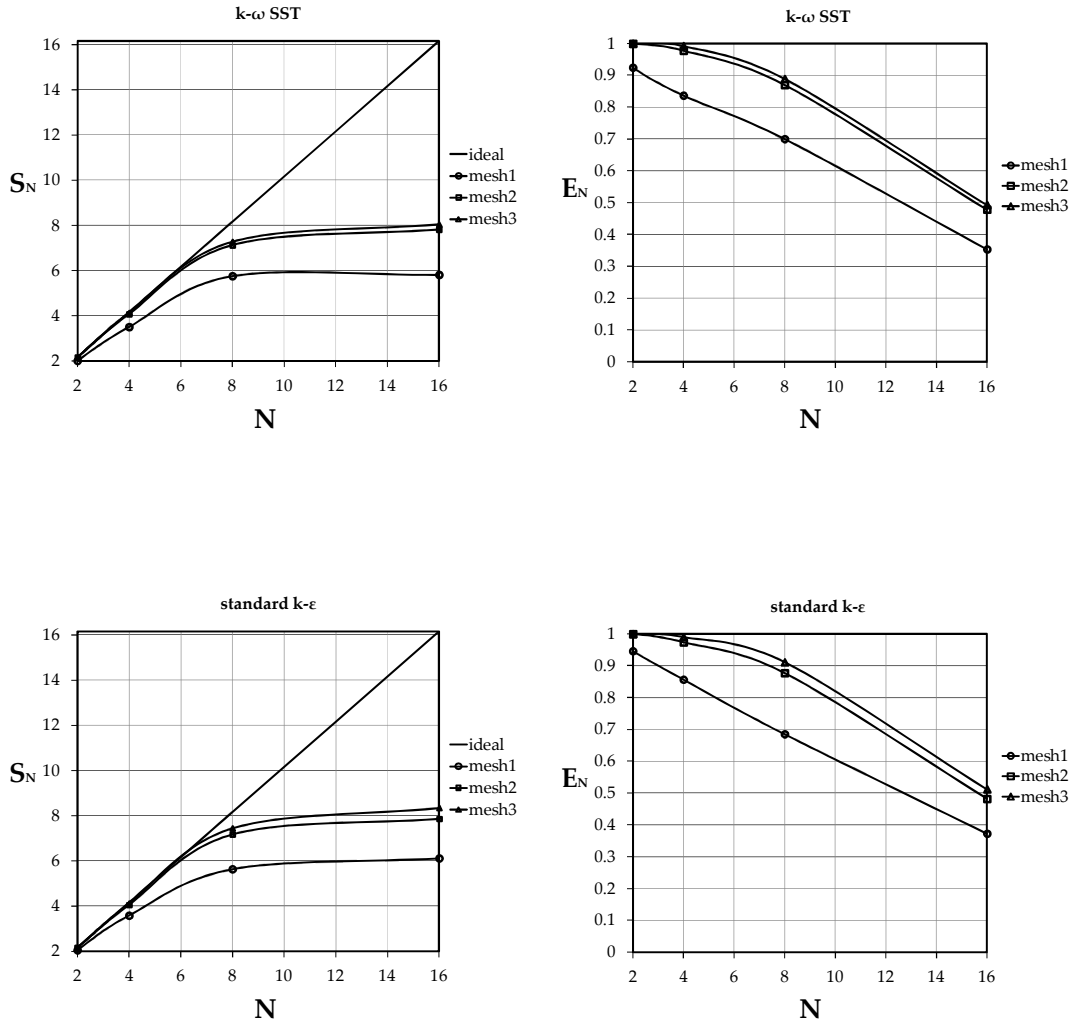


Figure 5-5. Comparison of the speed-ups (left column) and efficiencies (right column) of the parallelization among the numerical meshes.

5.2. Three-dimensional cases

The performance of the three-dimensional parallel solver was tested in the case of the differentially heated cubic cavity for a single numerical mesh. The numerical mesh was composed of 274625 nodes and 262144 cells. A case of laminar flow without radiative heat transfer, a case of pure radiative heat transfer and a case of laminar flow with the effect of radiation were simulated. It was not our aim to compare the speed-ups and efficiencies among the three cases but to generally observe the performance of the parallel solver. Therefore, simulations were conducted in PCs with different characteristics.

For all cases simulations were conducted in pseudo-time without writing results. CFL number was equal to unity from the beginning till the end of the pseudo-time steps. At each pseudo-time step 1 Newton iteration and 3 Jacobi iterations for the solution of the linear system were executed. The number of partitions/processes used was 1, 2, 4, 6, ..., 28, 30, 32.

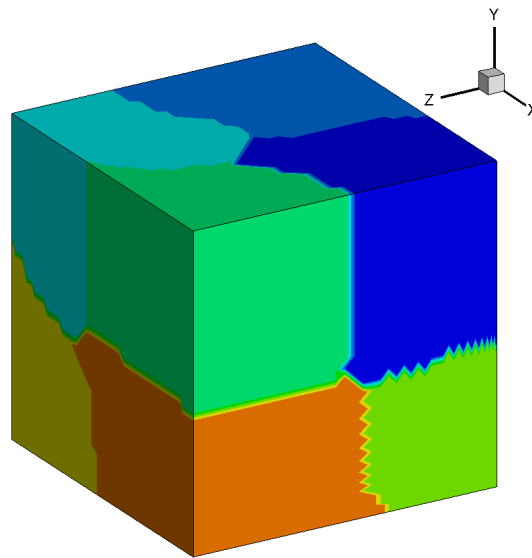


Figure 5-6. Cubic cavity decomposed into 8 partitions.

5.2.1 Laminar flow in a differentially heated cubic cavity without radiation

For the case of the laminar flow in the differentially heated cubic cavity, figure 5-7 presents the speed-up and the efficiency achieved. Even for 22 processes the efficiency of the parallelization remains greater than 0.7.

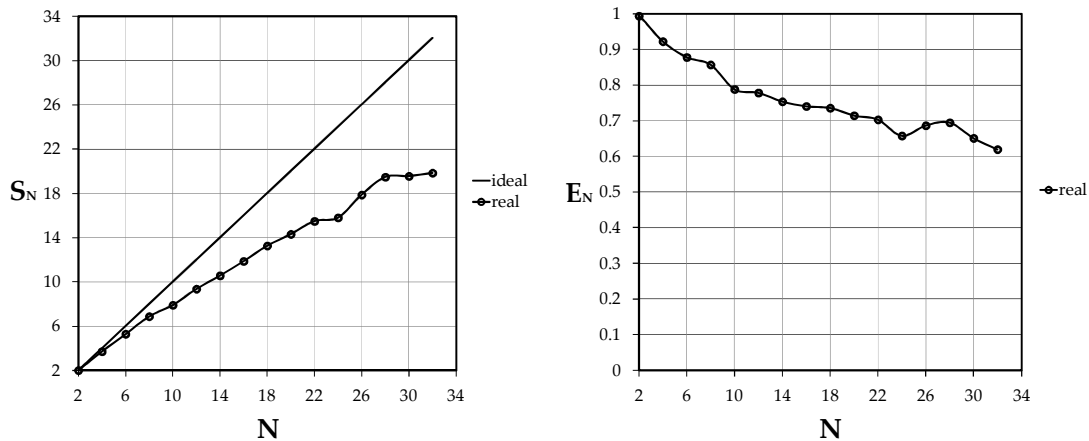


Figure 5-7. Speed-up (left) and efficiency (right) of the parallelization for the laminar flow in a differentially heated cubic cavity without radiative heat transfer.

5.2.2 Pure radiation in a differentially heated cubic cavity

For the case of pure radiation in the differentially heated cubic cavity a sufficient number of iterations of the radiation solver was conducted. Absorption and scattering coefficient were equal to zero. 8 and 4 azimuthal and polar angles were chosen. The Runge-Kutta method was applied with a first order reconstruction scheme and c_r parameter of equation (3-60) was equal to unity.

Figure 5-8 presents the speed-up and the efficiency achieved. Slightly greater speed-up and efficiency was calculated than those of the case of laminar buoyant flow.

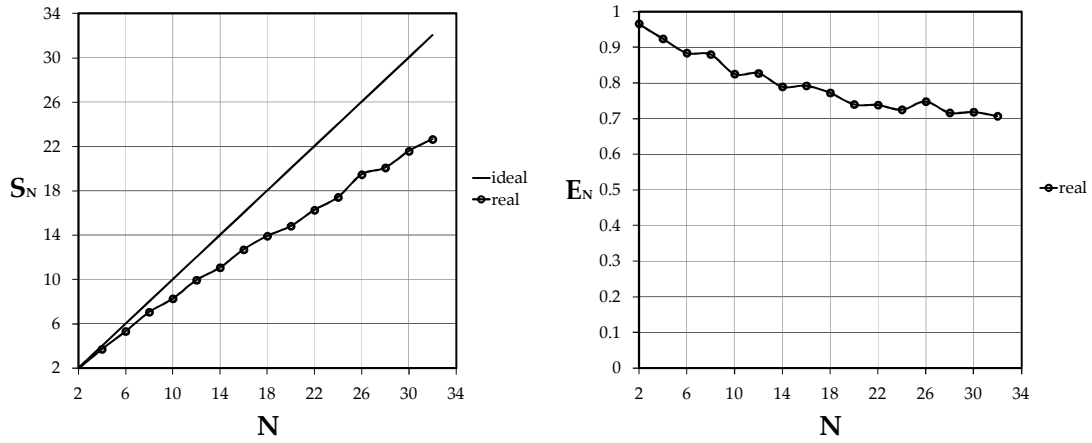


Figure 5-8. Speed-up (left) and efficiency (right) of the parallelization for the pure radiation in a differentially heated cubic cavity.

5.2.3 Laminar flow in a differentially heated cubic cavity with radiation

Finally, for the case of laminar flow in the differentially heated cubic cavity with radiative heat transfer, figure 5-9 presents the speed-up and the efficiency achieved. Even for this case that message passing load is great the performance of the solver is satisfactory.

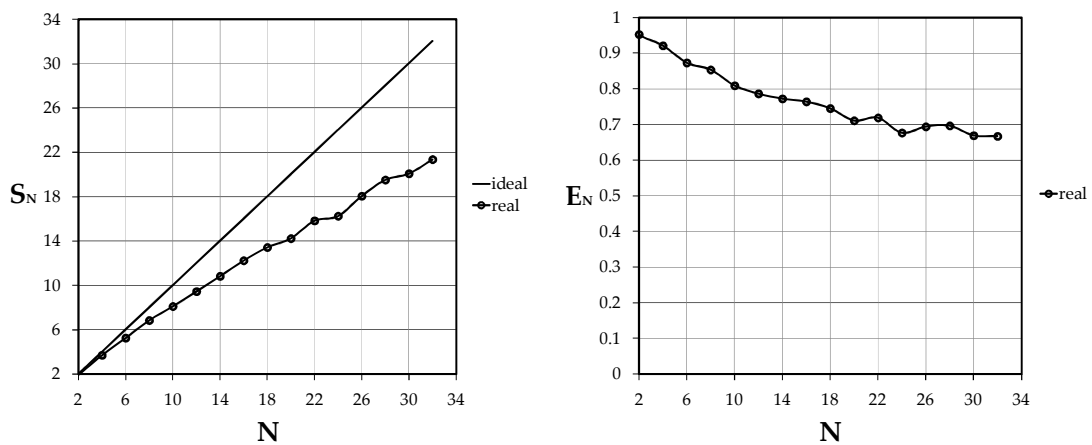


Figure 5-9. Speed-up (left) and efficiency (right) of the parallelization for the laminar flow in the differentially heated cubic cavity with radiative heat transfer.

For all the three-dimensional cases satisfactory speed-ups and efficiencies were calculated, significantly greater than those of the two-dimensional ones, which is attributed to the greater computational load in comparison to the message passing load.

CHAPTER 6

NUMERICAL STUDY: VENTILATED TUNNEL FIRES

After the validation of the developed solver, in this chapter the numerical study of two ventilated tunnel fires is presented. Specifically, our aim is the prediction of the smoke flow and the temperature field produced in two fire scenarios in a ventilated tunnel.

First of all, fire scenarios were simulated without taking into account radiative heat transfer and wall conduction. Two Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) turbulence models were applied; the low-Re $k-\omega$ SST and the standard $k-\epsilon$ with wall functions treatment. Subsequently, one of the fire scenarios was simulated taking into account radiation, using the Finite Volume Solver (FVM) for radiation modeling and the standard $k-\epsilon$ turbulence model with wall functions for turbulence modeling. The application of the low-Re $k-\omega$ SST turbulence model was impossible concurrently with radiation modeling, because of the huge computational load coming from the dense numerical mesh. Finally, radiation and wall conduction were concurrently modeled using the FVM solver and an 1-D conduction solver respectively.

6.1. Introduction

Nowadays, transport tunnels constitute important and necessary infrastructure works which can facilitate the financial growth of a country. Safety measures are of the most major parts during the design and construction of a tunnel. Much attention has been paid on tunnel fires because of their negative consequences. A case of a fire accident in a tunnel constitutes an extremely dangerous situation for people who are inside it, as hot toxic gases are produced. In addition to this, the repair cost and the cost due to the stop of tunnels operation are often huge. In figure 6-1 the damage after the 1999

fire incident in the Mont Blanc tunnel is shown. Table 6-1 gives data on three of the most catastrophic accidents in tunnels.



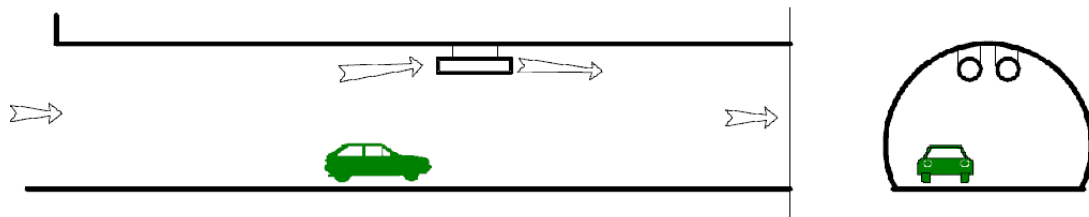
Figure 6-1 [Kum04]. Mont Blanc tunnel fire.

Tunnel	Deads/Injured	Repair cost	Repair period
Mont Blanc	39 / 34	450 million Euros	3 years
Channel Tunnel	0 / 30	250 million Euros	>1 year
Tauern	12 / 49	30 million Euros	-

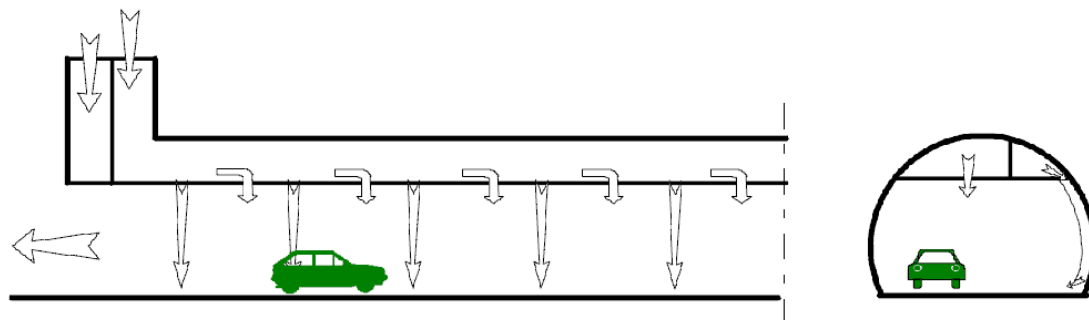
Table 6-1 [Bea05]. Data on three of the most catastrophic tunnel fire accidents.

The most dangerous factor for human lives in tunnel fires is the excess of the concentration limits of the combustion products and not the extreme temperatures. Therefore, the appropriate ventilation system is required for the smoke control. Except for the emergency cases, the ventilation system is responsible to ensure a safe environment under normal conditions. Its aim under normal conditions is to prevent the accumulation of vehicular emissions from dangerous levels.

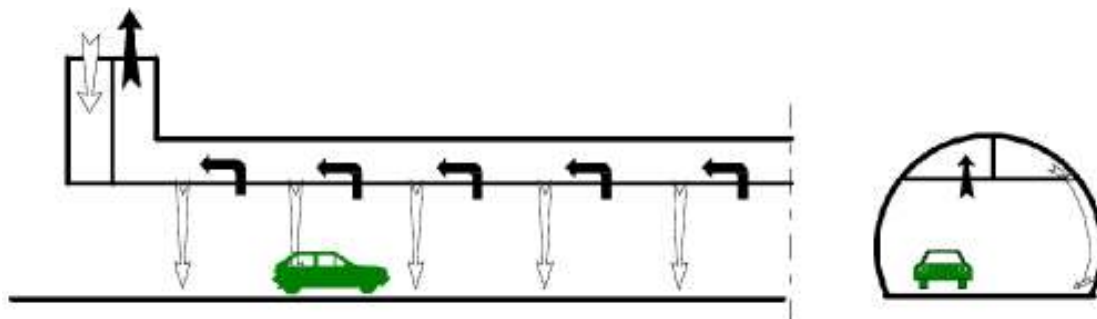
There are four major types of ventilations and combinations of them. The choice of the ventilation type depends on various parameters such as the length of the tunnel and the number of traffic directions (unidirectional or bidirectional) [Li03]. Ventilation may be natural, induced by the traffic piston effect, pressure differences between the entrance and the exit of the tunnel etc, longitudinal, transverse and semi-transverse. In figure 6-2 the three types of mechanically induced ventilation and how they operate are presented.



a. Longitudinal ventilation.



b. Semi-transverse ventilation.



c. Transverse ventilation.

Figure 6-2 [Kαβ99]. Operation of the three major mechanically induced ventilation types.

Both cases examined in this chapter contain longitudinal ventilation. Longitudinal ventilation is installed in unidirectional road tunnels. In a case of a fire, longitudinal ventilation systems drive smoke to tunnel's exit, ensuring the safe escape of passengers through the tunnel's entrance and/or emergency exits.

The methods used for the simulation of a tunnel fire are experimental, theoretical and computational. Full-scale experimental investigation is often prohibitive due to the necessary high cost, but it provides large amounts of reliable data. Many full-scale experiments for the Memorial tunnel are reported in the Memorial tunnel fire ventilation test program-test report [Mas95]. Small-scale experiments cost less and require careful choice of the scaling factors between the prototype and small-scale ([Lee05], [Lee06b]). Analytical methods and Computational Fluid Dynamics (CFD) simulations, are the most affordable and permit the investigation of various alternative cases with proper modifications on the model. Although CFD is the most accurate between them, a CFD simulation of a fire scenario requires fluid dynamics, turbulence, radiation, wall conduction and combustion numerical modeling concurrently.

Plenty CFD simulations of tunnel fires could be found in the literature, using commercial, open source and fewer of them research codes. Abanto et al. [Ab06] used Fluent and a research code to study smoke movement in a case of fire in an underwater tunnel. Hui et al. [Hui09] have modeled the longitudinal ventilation of the 4th Beijing subway line using CFX and have compared their results for the critical velocity to previous formulations proposed. Lee and Ryou [Lee06b] have studied the aspect ratio effect on smoke movement using Fire Dynamics Simulator (FDS) of the National Institute of Standards and Technology (NIST) and compared their results to reduced-scale experimental ones. Hu et al. [Hu07] have compared FDS results with LES turbulence model to full-scale experimental data with promising conclusions for the validity of FDS solver. Hu et al. [Hu08] have studied the effect of the place of the fire in the critical velocity using FDS. Wu and Bakar [Wu00] applied an experimental and CFD investigation, using Fluent, on the critical velocity formulations.

One of the most important aims of a numerical model is the accurate prediction of the back-layering length and critical velocity. The distance of the smoke front from the heat source to the upstream direction is the back-layering length. The critical velocity

refers to longitudinal ventilation systems and it is the lowest ventilation velocity that could prevent smoke back-layering. The ventilation system should prevent back-layering, but high ventilation velocities feed the fire with more oxygen, augmenting the heat release rate [Cho98] and increase the resistance to the passengers, reducing the escaping rate [Hui09]. For the estimation of the critical velocity mostly Froude number based semi-empirical formulae have been proposed. Despite their simplicity they do not account for some specific characteristics of each tunnel such as the existence of lateral evacuation hallways [Ban08], or the conditions of each fire scenario such as the place where accident happened or the obstructions that may exist. It was found that obstructions affect significantly the critical velocity ([Kan06], [Oka95]). In case of not taking into account all these factors, huge investment costs for the ventilation system may be produced, or inadequate safety measures may be adopted.

6.2. Test cases description

The test cases presented below have been widely studied and they are appropriate for the comparison of our results. Apte et al. [Apt91] have carried out the experimental investigation. Fletcher et al. [Fle94] have also presented experimental results and a numerical investigation using a steady state approach and k- ϵ turbulence model with wall functions. Gao et al. [Gao04] have presented a numerical investigation using an unsteady approach and an LES turbulence model. Miloua et al. [Mil11] also numerically studied these test cases using FDS for the comparison of combustion models and wall boundary conditions.

The tunnel geometry is described in figure 6-3. A pool fire exists at 59.5 m from the entrance of the tunnel. The pool fire was assumed to be a cubic volumetric heat source, with the heat release rate being constant and having its maximum value from the beginning till the end of the simulation. The flow field in all cases tested, was regarded as incompressible, because Mach number remained below 0.3.

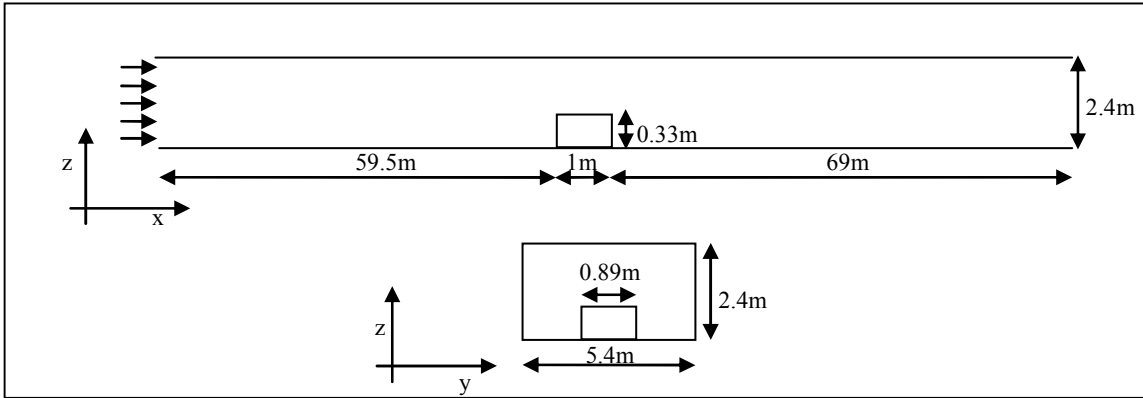


Figure 6-3. Sketch of the tunnel and heat source.

6.2.1 Boundary and initial conditions

As it was mentioned before two test cases were simulated, varying in the total heat release rate of the heat source and the ventilation rate. The total heat release rate and the ventilation velocity for these two cases are given in table 6-2.

Case	Ventilation Velocity	Total heat release rate
1	$u_1 = 0.85 \text{ m/s}$	$\dot{Q}_1 = 2.57 \text{ MW}$
2	$u_2 = 2 \text{ m/s}$	$\dot{Q}_2 = 2.29 \text{ MW}$

Table 6-2. Ventilation velocity and total heat release rate for case1 and case2.

At the inlet of the tunnel uniform velocity profile was prescribed, with the “u” velocity being equal to the ventilation velocity while “v” and “w” velocities were equal to zero ($v = w = 0$). At the outlet of the tunnel, pressure was prescribed and set equal to the ambient pressure. Attention was paid so that y^+ be larger than 11.6 and less than 400 when the k- ϵ turbulence model with wall functions was applied so that the first node belongs in the logarithmic region. y^+ was less than 2 (in the viscous sub-layer of the boundary layer) when the low-Re turbulence model was applied.

As initial condition the converged to steady state flow field of the isothermal case

(without the heat source) was used. The temperature was equal to the ambient temperature.

6.3. Numerical solution

In this subsection the basic parameters concerning the simulations and the numerical meshes that were used are presented. Radiation and conduction parameters are given in subsection 6.5.2 and subsection 6.6 respectively.

For the coupling of the energy equation with the other mean flow equations strongly coupled method was applied. Loosely coupled approximation stopped to be an alternative after the comparison of both methods, presented in subsection 4.1.7.

The parameter $C_{\varepsilon 3}$ for the buoyancy terms of ε and ω equations was equal to unity (equations 2-16, 2-20). Different approaches for the parameter $C_{\varepsilon 3}$ gave unrealistically large values for the turbulent kinematic viscosity. CFL number was equal to unity from the beginning till the end of the simulations. Greater values for CFL number could be used, but sometimes instabilities were produced. One Newton iteration was applied at each pseudo-time step and the number of Jacobi iterations for the solution of the linear system was equal to three. The time step was equal to 0.01 seconds and δ distance from the solid walls for the wall functions was equal to 0.01. More pseudo-time steps were needed for the convergence in pseudo-time for case1. All simulations were run in parallel.

The computing domain was composed of 481950 nodes and 449000 hexahedrons when standard k- ε turbulence model with wall functions was used (figure 6-4). The first layer thickness was approximately equal to 0.01. When low-Re k- ω SST was used the computing mesh was composed of 1094252 nodes and 1075400 hexahedrons (figure 6-5). The first layer thickness was of the order of 10^{-5} and the growing factor equal to 1.2. Both computing meshes were denser near the heat source.

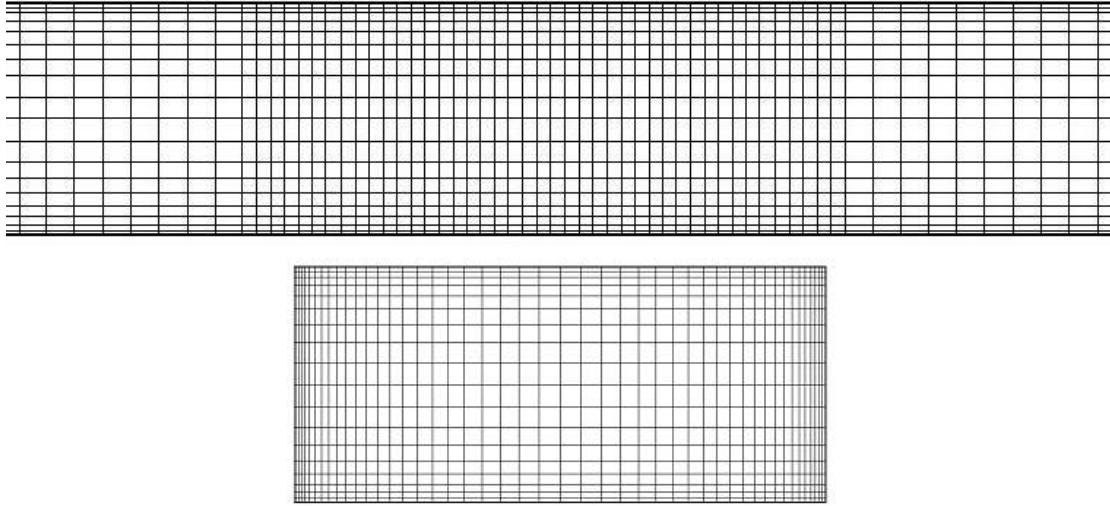


Figure 6-4. Numerical mesh used for the standard k - ϵ turbulence model with wall functions simulations. Section $y=2.7\text{m}$ near the vicinity of the heat source (top). Cross section $x=60\text{m}$ (bottom).

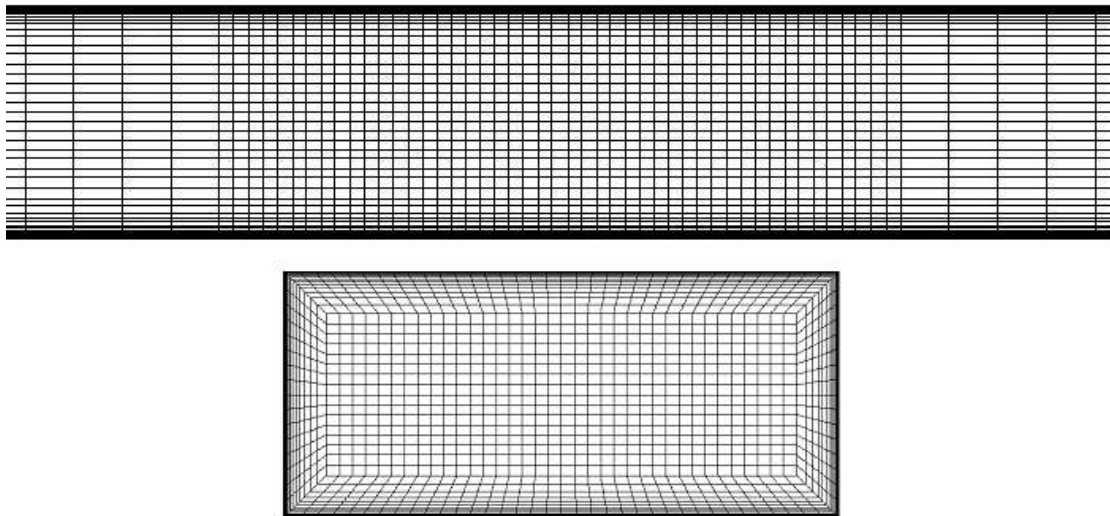


Figure 6-5. Numerical mesh used for the low-Re k - ω SST simulations. Section $y=2.7\text{m}$ near the vicinity of the heat source (top). Cross section $x=60\text{m}$ (bottom).

6.4 Results without radiation and wall conduction

6.4.1 Transient results

When no concentrations of smoke are calculated and radiative heat transfer is not

considered, it could be assumed that smoke movement is analogous to the temperature field. In figure 6-6 and figure 6-7 the evolution of the flame and temperature field for case1 and case 2 respectively for the first 10 seconds are presented. It is obvious that the predicted smoke movement through time by the two turbulence models is similar.

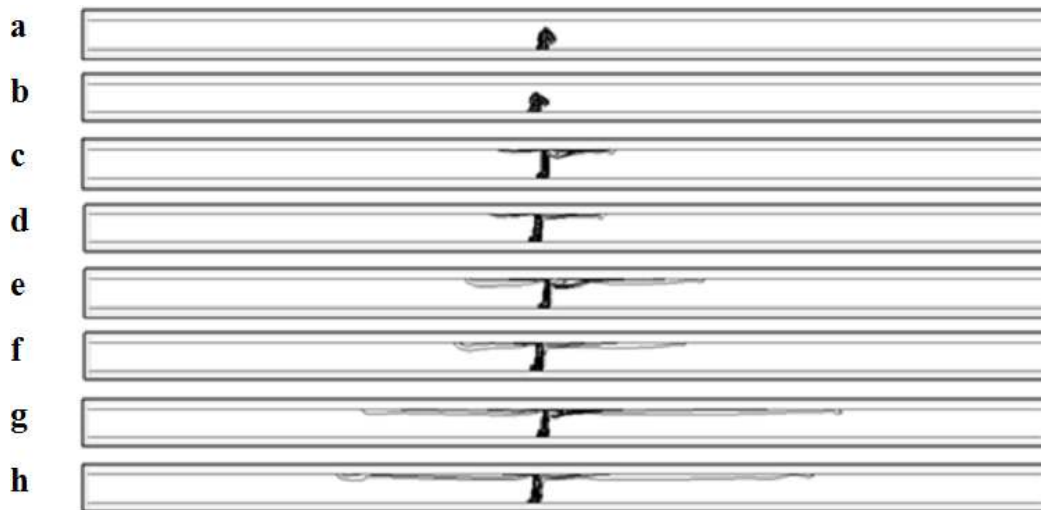


Figure 6-6. Temperature isolines through time for case 1. a) standard k- ϵ at 0.5s, b) low-Re k- ω SST at 0.5s, c) standard k- ϵ at 2s, d) low-Re k- ω SST at 2s, e) standard k- ϵ at 5s, f) low-Re k- ω SST at 5s, g) standard k- ϵ at 10s and h) low-Re k- ω SST at 10s.

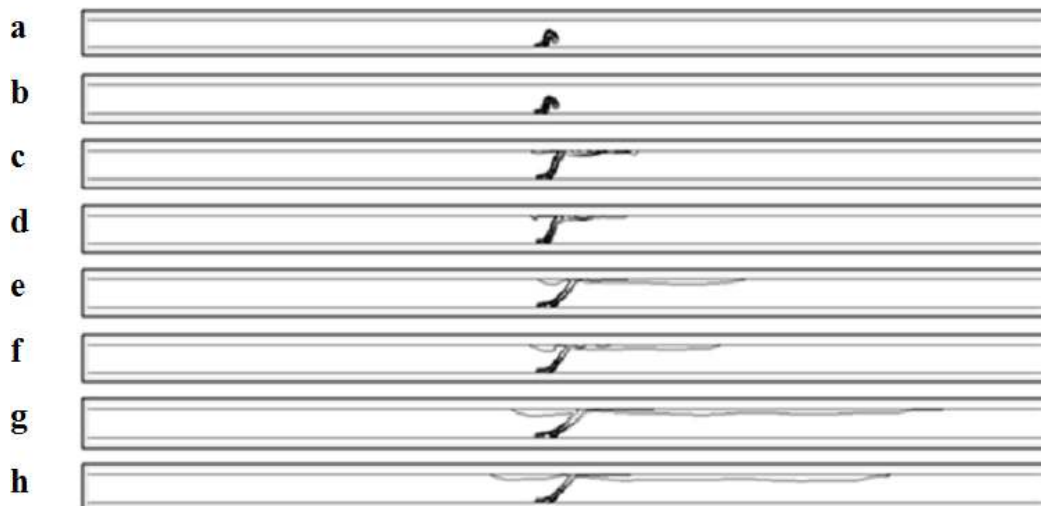


Figure 6-7. Temperature isolines through time for case 2. a) standard k- ϵ at 0.5s, b) low-Re k- ω SST at 0.5s, c) standard k- ϵ at 2s, d) low-Re k- ω SST at 2s, e) standard k- ϵ at 5s, f) low-Re k- ω SST at 5s, g) standard k- ϵ at 10s and h) low-Re k- ω SST at 10s.

In a tunnel fire case surrounding medium (air and smoke) in the vicinity of the heat source is heated and raises up till the ceiling of the tunnel. Then having reached the ceiling moves to the side walls and along the ceiling to the tunnel exit and the tunnel inlet forming the back-layering length. Reaching the side walls, smoke moves downward to the ground. In figure 6-8 and figure 6-9 velocity vectors predicted by both turbulence models are given at characteristic sections and moments. Velocity vectors reveal smoke movement. It is obvious that smoke requires less than 1s to reach the ceiling and less than 5s (~2s) to reach the side wall for both cases. Similar flow patterns were predicted by both turbulence models.

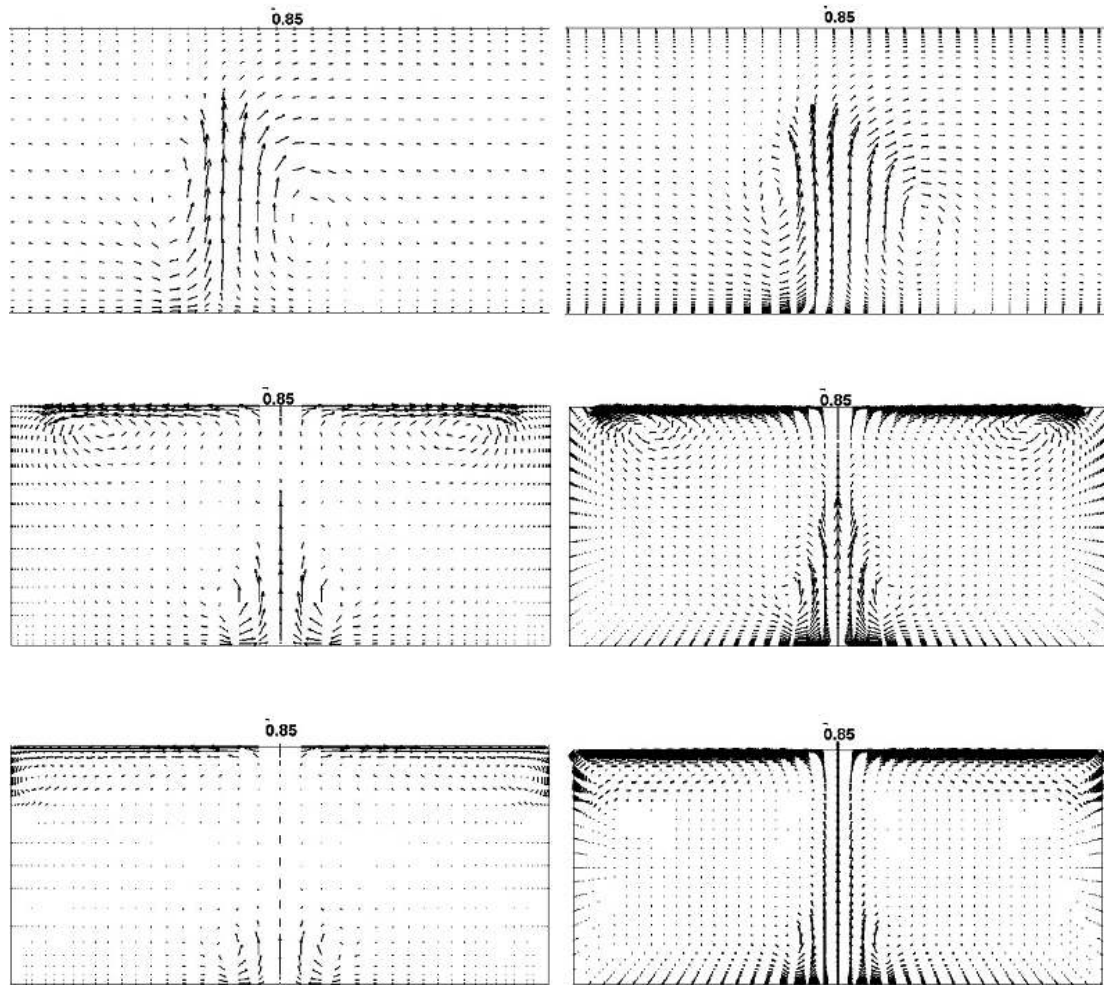


Figure 6-8. Velocity vectors at characteristic sections and moments for case 1 predicted by the standard $k-\epsilon$ model (left column) and the low-Re $k-\omega$ SST model (right column). Section $y=2.7\text{m}$ near the heat source at 0.5s (top row), cross section $x=60\text{m}$ at 1s (middle row) and cross section $x=60\text{m}$ at 5s (bottom row).

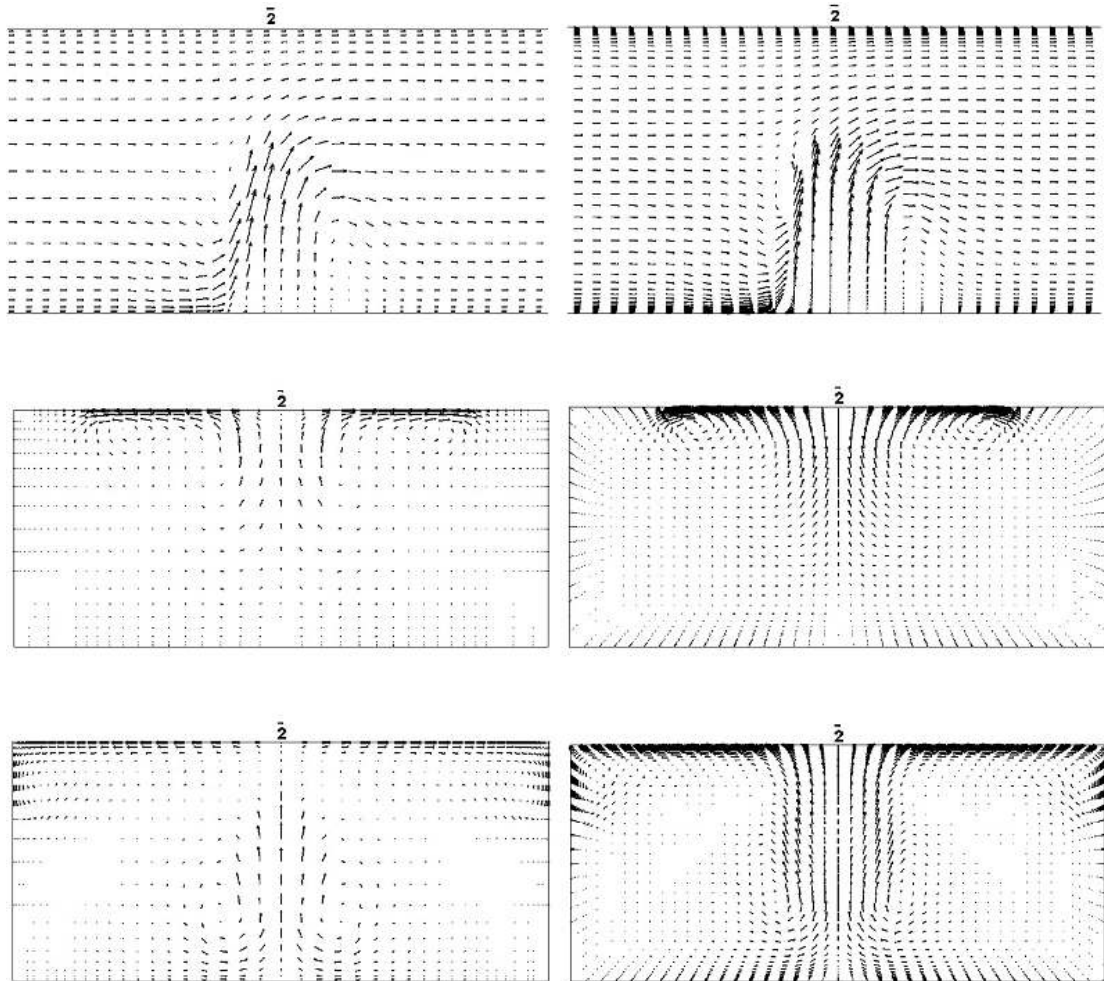


Figure 6-9. Velocity vectors at characteristic sections and moments for case 2 predicted by the standard $k-\epsilon$ model (left column) and the low-Re $k-\omega$ SST model (right column). Section $y=2.7\text{m}$ near the heat source at 0.5s (top row), cross section $x=62\text{m}$ at 1s (middle row) and cross section $x=62\text{m}$ at 5s (bottom row).

In figure 6-10 we present the predicted, using both turbulence models, temperature vertical profiles at 18m and 30m downstream from the heat source for case 2, twenty seconds after fire breaking. Small differences (less than 6%) are observed for the vertical temperature profiles.

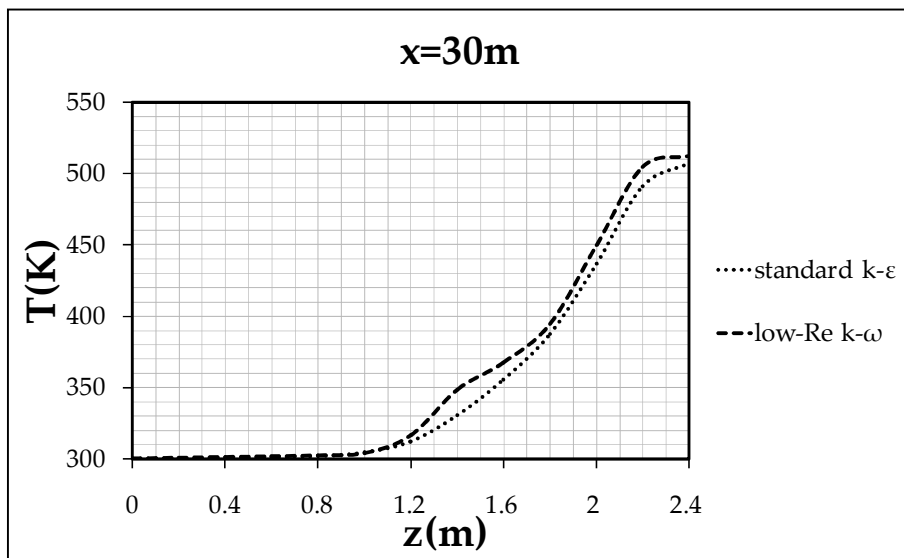
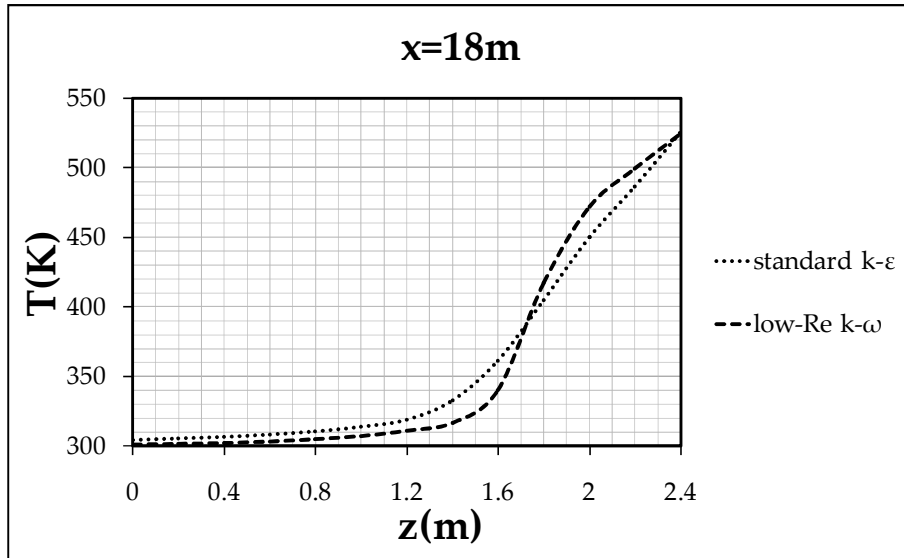


Figure 6-10. Vertical temperature profiles at a distance of 18m (top) and 30m (bottom) downstream from the heat source for case 2, twenty seconds after fire breaking.

6.4.2. Steady state results

Gao et al. [Gao04] claim that flame shape is defined by the maximum temperature gradients. In the literature many definitions for the flame angle have been found [And06]. In figure 6-11 and figure 6-12 flame shapes and the definition used for the calculation of the flame angle are given. Flame angle β_t is defined by the vertical line passing through the core of the heat source and the line connecting the core of the heat source with the upper point of the flame. In the same figures temperature fields in the

vicinity of the heat source are compared to those predicted by Ansys Fluent. The greatest temperature values, flame shapes, flame angles and back-layering length seem to agree satisfactorily. Flame angles and back-layering lengths predicted by our solver and Ansys Fluent are given in table 6-3. It is evident that the back-flow is less and flame tilt greater for higher ventilation velocities. The time needed for the smoke front to reach the steady state back-layering length was about 50s and 15s for case 1 and case 2 respectively.

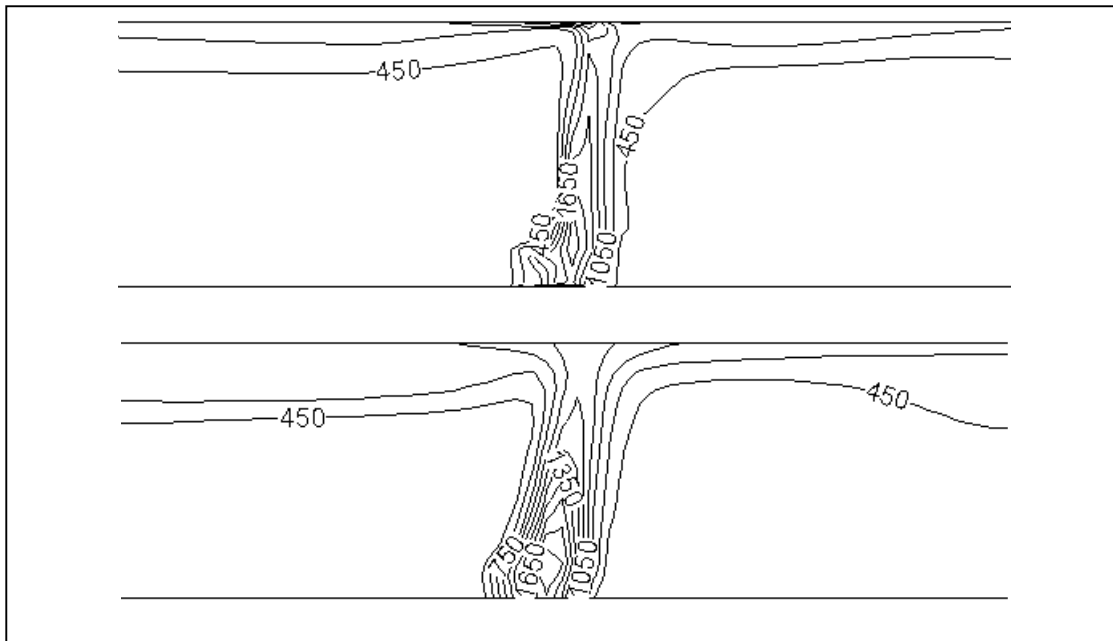


Figure 6-11. Flame shape comparison for case 1. Present solver with the k- ω model (top), Ansys Fluent with the k- ϵ model (bottom).

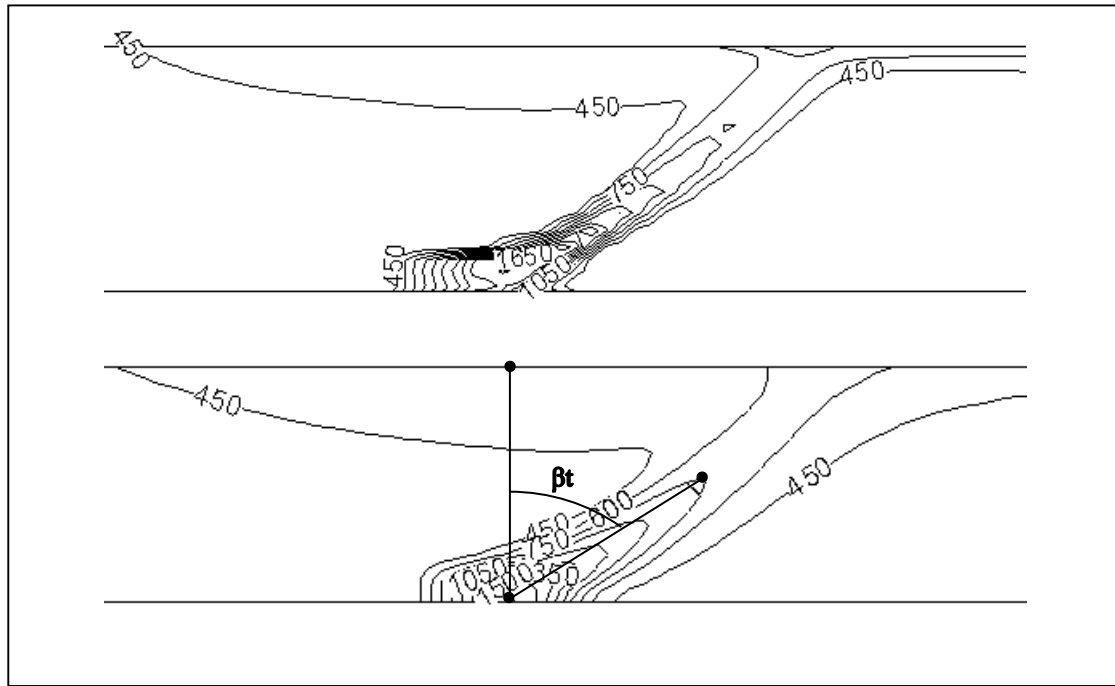


Figure 6-12. Flame shape comparison for case2. Present solver with the k-ε model (top), Ansys Fluent with k-ε model (bottom). Definition of the flame angle.

Case	Solver	Flame angle (°)	Back-layering length (m)
1	Present solver	8	till entrance
	Ansys Fluent	9	till entrance
2	Present solver	58	3.2
	Ansys Fluent	58	3.7

Table 6-3. Calculated flame angle and back-layering length.

Radiation plays a significant role in a case of fire in a tunnel. The fraction of the heat release from a heat source in a tunnel fire in form of radiation is in the order of 20% to 50% ([Bet01], [Gra98], [Hos08]) or even larger. However, the solution of the radiative heat transfer equation is time consuming because a great number of radiation intensities have to be calculated at each computational node. Consequently, heat transfer due to radiation is often not taken into account, or the assumed amount of radiation loss is subtracted from the heat release rate [Koz09].

In figure 6-13 temperature profiles are given 18m and 40m downstream from the heat

source. Greater values for the temperature are computed compared to the experimental values of Fletcher et al. [Fle94]. This discrepancy is attributed to the omission of radiation modeling, according to the aforementioned role of radiation, and the omission of heat conduction inside tunnel walls. However, the curves calculated are of the same “s” form. Temperature increases with increasing height and reaches its maximum values inside the smoke plume.

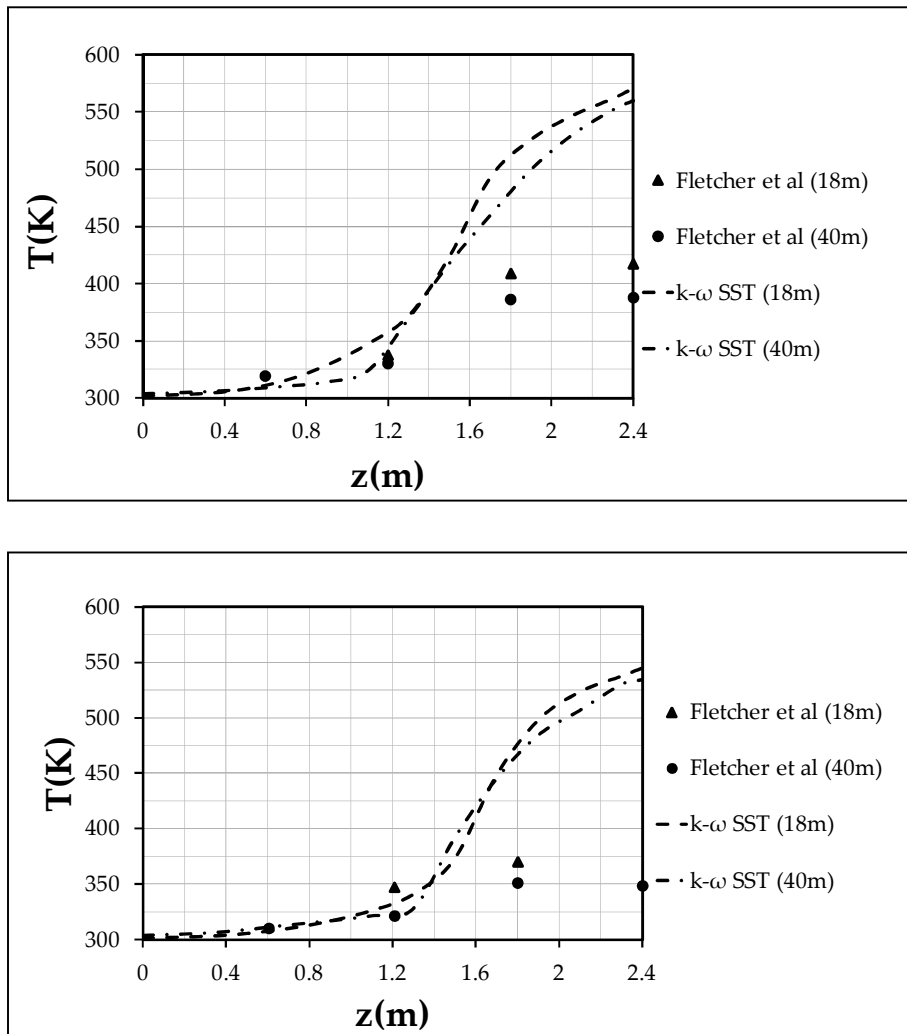


Figure 6-13. Comparison of temperature profiles along height when steady state was reached. Case1(top) and case2 (bottom).

Velocity vectors for case 2 with the standard k- ϵ model when steady state was achieved are presented in figure 6-14. The stagnation point which define the back-

layering length is marked with a red circle.

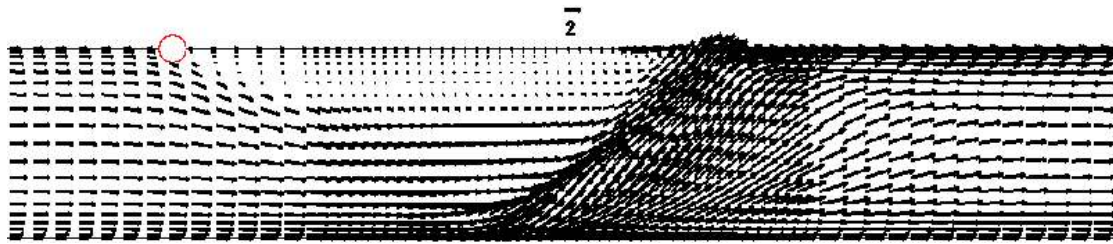


Figure 6-14. Velocity vectors at section $y=2.7\text{m}$ and stagnation point (red circle).

6.5 Simulation with radiation

Having simulated cases without taking into account radiation and conduction, we proceeded to the solution of the second case with the radiative heat transfer. Turbulence was modeled using the standard $k-\epsilon$ turbulence model with wall functions, because the numerical mesh needed from the low-Re $k-\omega$ SST model was prohibitively dense. The simulation of the cases with the radiation modeling provides us the opportunity to compare the results of both approaches and draw conclusions on the necessity of radiation modeling.

The numerical mesh used was much coarser because of the huge computational cost of radiation modeling. It consisted of 64350 nodes and 56000 hexahedrons.

6.5.1 Independence from the angular discretization

Before proceeding to the simulation of the tunnel fires with the radiative heat transfer we should have selected a number of control angles. Therefore, we studied the independency of the solution from the angular discretization for three sets of control angles (8x4, 16x8, 32x16 azimuthal x polar angles). Sets of control angles were selected so as not to give control angle overlapping with the faces of the hexahedral numerical mesh. In the case of control angle overlapping, pixelation method would have to be adopted augmenting the computational load.

The quantities coming from the solution of the Radiative Transfer Equation (RTE) which affect the temperature field are the radiative divergence

$$\nabla Q_r = \frac{\tau}{\text{PI}} \left[4 \left(\frac{T}{T_0^*} + 1 \right)^4 - \int_{4\pi} \text{Id}\omega \right] \text{ and the radiative heat flux at walls } Q_r = \frac{1}{\text{PI}} \int_{4\pi} \text{Id}\omega.$$

Both quantities are calculated in the radiation subroutine of the code and then they are divided by Reynolds and Prandtl numbers to form the source term of the energy

equation $\frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla Q_r$ (equation 2-56) and the heat fluxes

$$q_{x_j} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{\text{Re Pr}} Q_{r,j}$$

(equation 2-50 without taking into account the contribution of turbulence).

The study for the independence of the solution from the angular discretization was conducted in the coarse mesh. For this numerical mesh case 2 without radiation was simulated till the 5th second. Then, for the developed temperature field the source term and the radiative heat flux were calculated.

In figure 6-15 source term $\frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla Q_r$ is presented along the length of the tunnel for $y=2.7\text{m}$ and $z=0.165\text{m}$ (half of the heat source height). In figure 6-16 radiative heat flux q_{x_j} is given along the length of the tunnel for $y=2.7\text{m}$ and $z=2.4\text{m}$ (ceiling of the tunnel). We observe that the source term is approximately equal for the three sets of control angles but there are differences for the radiative heat flux for x being between 57.5m and 67.5m. Since differences for the radiative heat flux are not extremely large and for computational load reasons the set of 8 azimuthal and 4 polar control angles was selected.

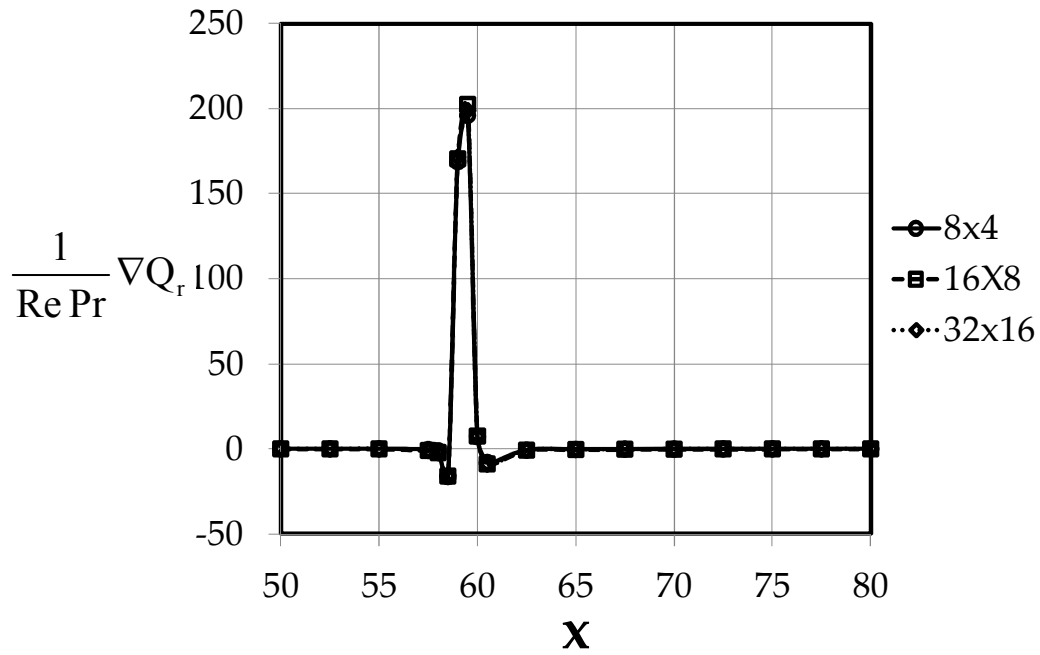


Figure 6-15. Source term $\frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla Q_r$ along the length of the tunnel for $y=2.7\text{m}$ and $z=0.165\text{m}$ (half of the heat source height).

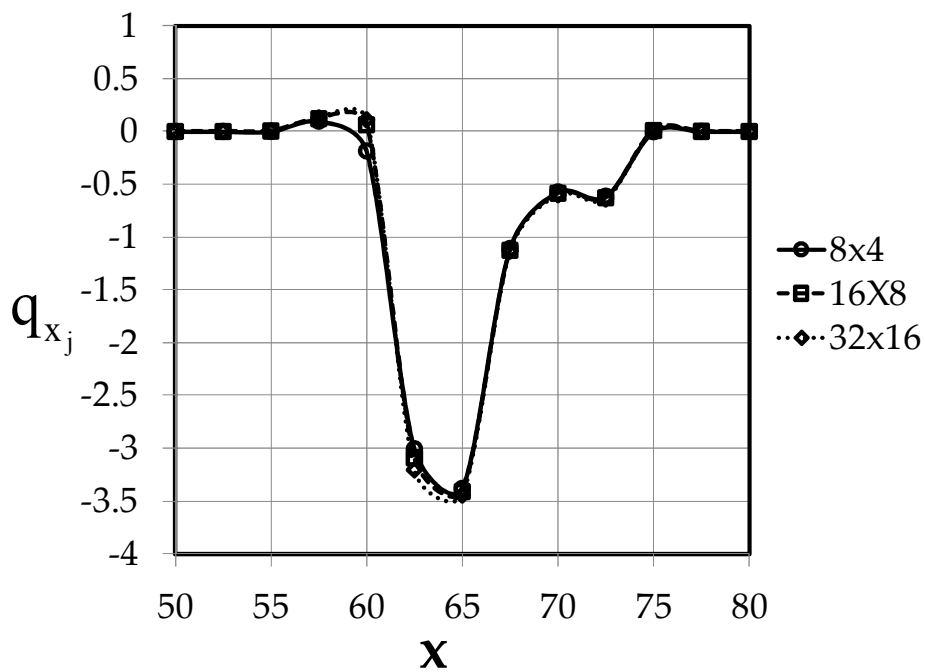


Figure 6-16. Radiative heat flux q_{x_j} along the length of the tunnel for $y=2.7\text{m}$ and $z=2.4\text{m}$ (ceiling of the tunnel).

6.5.2 Radiative transfer equation solution

When radiation was taken into account, emissivity of the walls was equal to unity because all walls had been blackened, before the experimental investigation [Fle94]. Medium was assumed to be gray absorbing and emitting but non-scattering. Absorption coefficient was equal to unity [Se12]. Scattering effect due to soot particles was neglected because of their smaller size compared with the thermal radiation wavelength. When water mist suppression systems are applied scattering of radiation by water droplets cannot be neglected [Hos08].

Inlet and outlet of the tunnel are treated as black walls, where the incoming intensity is the black body intensity of the ambient temperature. As initial condition for radiation intensity, it was set equal to the black-body intensity.

As it was mentioned before, the solution of the radiative transfer equation (RTE) is quite computationally demanding. Therefore, it is a common practice to solve the RTE only every N^{th} iteration. For example SOFIE solves the RTE every 10 internal iterations, while FDS solves the RTE every 3rd time step and only for a subset of the directions [Hos08]. In our tunnel fire simulations the RTE was solved every N^{th} pseudo-time iteration. For the first 2 seconds (before high temperatures reach the upper and side walls of the tunnel) the RTE was solved at each pseudo-time step. The first 2 seconds showed to be quite crucial. Afterwards, the RTE was solved every $N=3$ pseudo-time steps in order to speed-up the solution. For every N^{th} pseudo-time step, only one iteration of the RTE was performed. The value of the parameter c_r of equation 3-60, that controls the pseudo-time step for the RTE was increasing from 0.05 to 0.2 with a linear rate.

The second order spatial scheme combined with the Min-Mod limiter was applied for the reconstruction of the radiation intensities.

6.5.3 Results with radiation

In figure 6-17 temperature profiles are given 18m and 40m downstream from the heat source, this time taking into account radiation. At the same figure the numerical results of Miloua et al. [Mil11] and the experimental results of Fletcher et al. [Fle94]

are also given. Although smaller temperature values from the simulations without the radiation have been calculated, they are still greater compared to the results of Miloua et al. and Fletcher et al. This discrepancy is attributed to the omission of heat conduction inside tunnel's walls. To support this opinion in figure 6-18 we present the temperature profiles for a tunnel fire case that was simulated by Miloua et al. Temperature profiles are calculated either for adiabatic walls or for conductive walls. It is evident that for the adiabatic boundary conditions the profiles are shifted to greater temperatures, but keep their form.

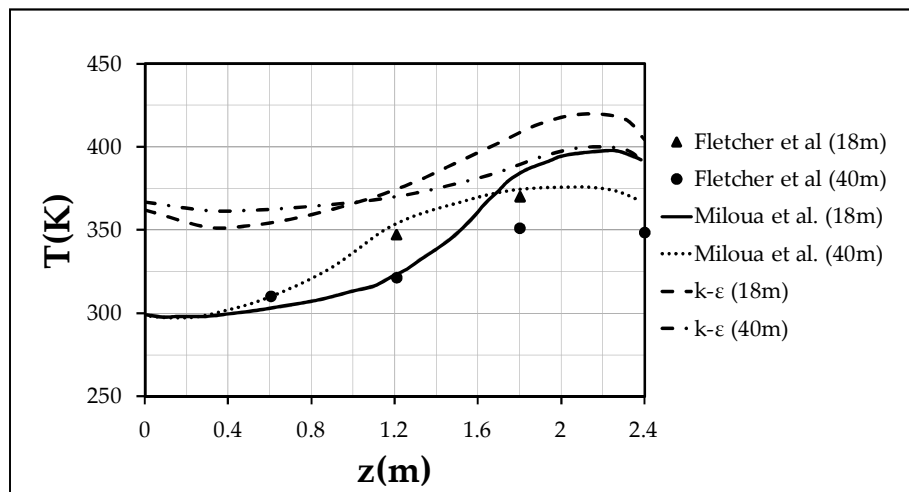


Figure 6-17. Comparison of temperature profiles along height when radiation is taken into account with the numerical results of Miloua et al. [Mil11] and the experimental results of Fletcher et al. [Fle94].

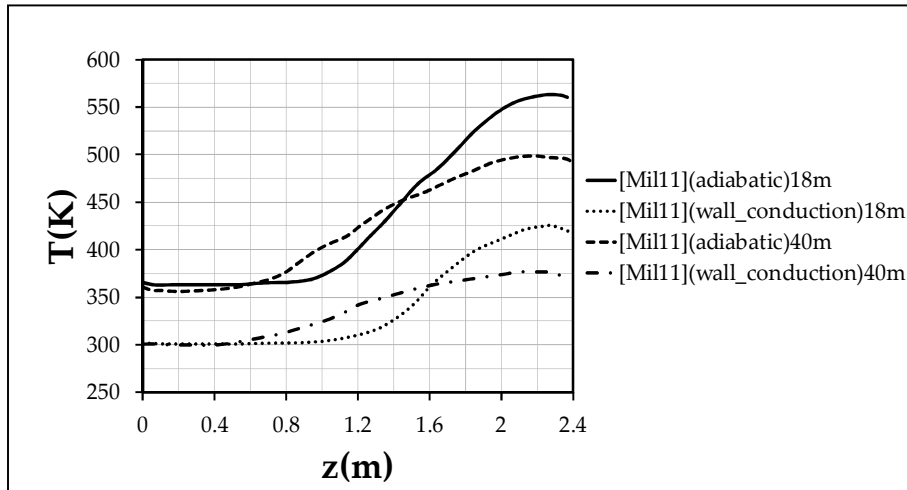


Figure 6-18. Temperature profiles along height calculated for adiabatic and conductive walls [Mil11].

6.6 Wall heat conduction

As it was presented in the previous subsection, the omission of wall heat conduction results in great values for temperature inside the tunnel. Therefore, a more realistic simulation demands the development and incorporation into the solver of a wall heat conduction model.

For simplicity and computational time reasons an one dimensional (1-D) wall heat conduction model have been developed. The equation that describes the wall heat conduction is the time dependent diffusion equation (in dimensional form):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{k_t}{\rho C_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (6-1)$$

where k_t , ρ and C_p are the heat conduction, density and the specific heat at constant pressure of the wall. This equation is the energy equation (2-9) without the convection term, the heat source term and the radiation source term. Moreover, in the viscous term the eddy viscosity has been removed.

The 1-D version of equation (6-1) is:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{k_t}{\rho C_p} \frac{\partial T}{\partial n} \right] \quad (6-2)$$

where n is the normal to the wall direction.

When wall properties are assumed to be constant, equation (6-2) becomes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_t}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \quad (6-3)$$

which in dimensionless form is:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = Fo \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \quad (6-4)$$

where $Fo = \frac{\alpha t_{ref}}{L_{ref}^2}$ is the Fourier number and $\alpha = \frac{k_t}{\rho C_p}$ is the thermal diffusivity of the wall.

The second spatial derivative of temperature was numerically approximated using finite differences on generally non-uniform 1-D grid:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \right)_i = \frac{2\Delta n_{i-1} T_{i+1} - 2(\Delta n_{i-1} + \Delta n_i) T_i + 2\Delta n_i T_{i-1}}{\Delta n_i^2 \Delta n_{i-1} + \Delta n_{i-1}^2 \Delta n_i} \quad (6-5)$$

For a uniform grid ($\Delta n_i = \Delta n_{i-1}$) equation (6-5) turns to:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \right)_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta n_i^2} \quad (6-6)$$

which is the well known expression with central differences and accuracy of second order ($O(\Delta n^2)$).

The time derivative of temperature is numerically approximated as:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (6-7)$$

Then, according to the Crank-Nicolson scheme (combination of forward Euler-explicit scheme and backward Euler-implicit scheme) [Hir88] equation (6-4) in discretized form is:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \text{Fo} \left(\frac{\Delta n_{i-1} T_{i+1}^{n+1} - (\Delta n_{i-1} + \Delta n_i) T_i^{n+1} + \Delta n_i T_{i-1}^{n+1}}{\Delta n_i^2 \Delta n_{i-1} + \Delta n_{i-1}^2 \Delta n_i} + \frac{\Delta n_{i-1} T_{i+1}^n - (\Delta n_{i-1} + \Delta n_i) T_i^n + \Delta n_i T_{i-1}^n}{\Delta n_i^2 \Delta n_{i-1} + \Delta n_{i-1}^2 \Delta n_i} \right) \quad (6-8)$$

or

$$AT_{i-1}^{n+1} + BT_i^{n+1} + CT_{i+1}^{n+1} = R \quad (6-9)$$

where

$$A = -\text{Fo}\Delta t\Delta n_i \quad (6-10)$$

$$B = D + \text{Fo}\Delta t\Delta n_{i-1} + \text{Fo}\Delta t\Delta n_i \quad (6-11)$$

$$C = -\text{Fo}\Delta t\Delta n_{i-1} \quad (6-12)$$

$$D = \Delta n_i^2 \Delta n_{i-1} + \Delta n_{i-1}^2 \Delta n_i, \quad (6-13)$$

$$R = DT_i^n + \text{Fo}\Delta t\Delta n_{i-1} T_{i+1}^n - \text{Fo}\Delta t(\Delta n_{i-1} + \Delta n_i) T_i^n + \text{Fo}\Delta t\Delta n_i T_{i-1}^n \quad (6-14)$$

Equation (6-9) expresses a tridiagonal system. For the closure of the system of equations, boundary conditions need to be implemented in the first and last nodes normal to the wall. For the first node ($i=1$) the temperature is equal to the wall temperature coming from the flow solver. For the last node ($i=N$) temperature is equal to the temperature of the previous node ($T_N = T_{N-1}$), which corresponds to an adiabatic boundary condition. The system was solved according to Thomas algorithm for tridiagonal systems [Aρ103].

For the coupling of the wall conduction to the rest of the solver the conductive heat flux was taken into account in the fluid-solid interface:

$$k_{t,s} \frac{\partial T_s}{\partial n} = k_{t,f} \frac{\partial T_f}{\partial n} + q_{\text{rad}} \quad (6-15)$$

Index s is for solid and f for fluid.

1-D wall conduction for each boundary wall node was solved implicitly at each pseudo-time step. The solver was calculating the wall temperature for the wall conduction problem and the wall conduction model was giving the conductive heat flux to the solver.

6.6.1 Results with wall heat conduction and radiation

We did not find sufficient data for the surrounding wall of the under consideration tunnel. Then, we assumed thickness of the wall equal to 1.5m, thermal conductivity equal to 0.1W/(mK), density equal to 1750kg/m³ and specific heat at constant pressure equal to 960J/(kgK). The 1-D grid that was used was denser near the fluid-solid interface. It should be noted that the assumed thickness of the wall was adequate so that the exterior wall thermal boundary condition has negligible influence on the flow solver.

In figure 6-19 we present temperature profiles at 18m and 40m downstream from the heat source, when radiation and wall heat conduction were taken into account concurrently. At the same figure the numerical results of Miloua et al. [Mil11] and the experimental results of Fletcher et al. [Fle94] are also given. As expected, temperature profiles are shifted to lower values compared to those estimated for the adiabatic boundary condition with the radiation only taken into account. With the heat conduction our results agree to a better degree to the experimental ones.

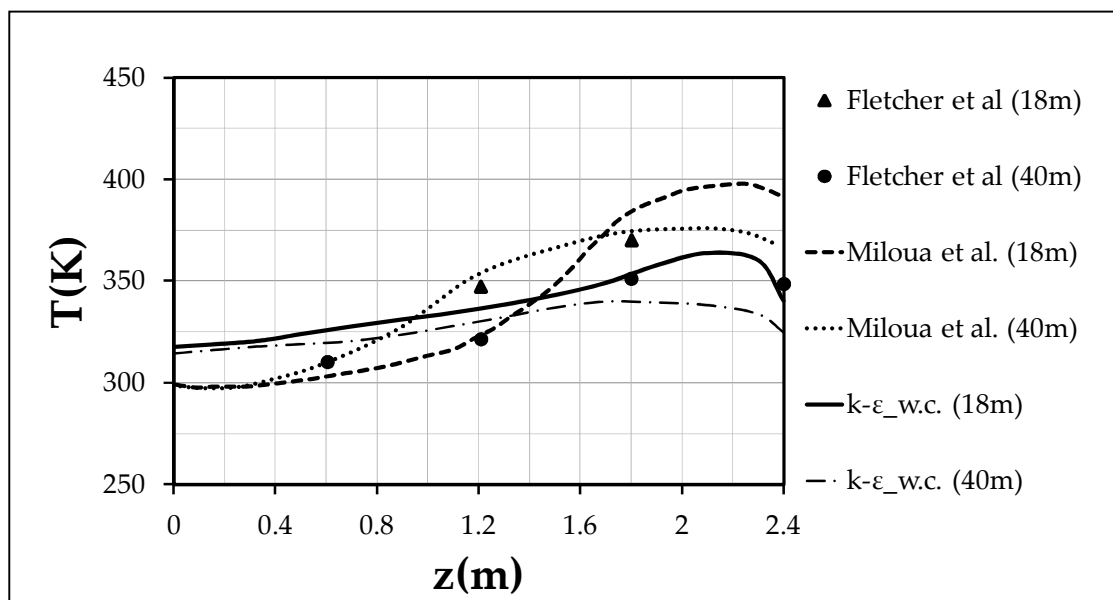


Figure 6-19. Comparison of temperature profiles along height when radiation and wall heat conduction are taken into account with the numerical results of Miloua et al. [Mil11] and the experimental results of Fletcher et al. [Fle94].

CHAPTER 7

RECAPITULATION, CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

In the final chapter of the thesis we recapitulate in brief the work presented in the previous chapters. The conclusions coming from our research and its contribution with the innovative elements are presented. Finally, some thoughts for the improvement and extension of the present methodology are given.

7.1. Recapitulation and conclusions

In this dissertation combined flow and heat transfer was studied through the development of a methodology into computational code. The same code could be used for the prediction of concentrations, rather than temperatures. With slight modifications the prediction of both temperature and concentration fields would be able.

Firstly, a brief description and some examples of all the modes of heat transfer were given in order to introduce the unskilled reader and explain some terms that were used systematically in the dissertation. Then, various approaches and studies from the literature for the discretization of the mean flow equations (continuity, momentum and energy equations) and the prediction of the radiative heat transfer were presented.

Our flow solver is used for the simulation of two-dimensional or three-dimensional, steady or unsteady, incompressible, laminar or turbulent flows of a viscous and Newtonian fluid. It applies a node-centered finite volume discretization technique appropriate for the integration of all mean flow equations in the same mesh and utilizes an edge-based and transparent approach on hybrid numerical meshes. For the necessary pressure and velocity coupling the artificial compressibility approach is applied which transforms the system of conservation laws from parabolic/elliptic to

hyperbolic/parabolic and because of this allows treatment similar to compressible flow equations. Therefore, for the evaluation of the inviscid fluxes a Roe's approximate Riemann solver was developed. For the viscous fluxes a CPU-time efficient central scheme was used. It had been developed for the continuity and momentum equations and applied for the energy equation successfully. For the integration of the source terms we assumed that their value inside the control volume of a node was homogeneous and equal to the value at the node. Temporal accuracy was achieved by an implicit dual time stepping scheme for the pseudo-time and physical-time marching. All mean flow equations are strongly coupled.

For the prediction of the buoyant flows, density differences due to temperature differences are simulated according to the Boussinesq approximation.

For the turbulent flows two widely applied RANS models were used; the $k-\omega$ SST model using either wall functions or not and the high-Re standard $k-\epsilon$ model. Mean flow equations and turbulence equations are loosely coupled. Mean flow equations are firstly solved and give to the turbulence equations the velocity field and turbulence equations are sequentially integrated and give the eddy kinematic viscosity to the mean flow equations. The loose coupling of the turbulence equations was preferred because it is easier in programming terms and makes easier the introduction of new turbulence models. Additionally, the strongly coupled solution of mean flow and turbulence equations is not widely accepted in the literature to perform better.

The strongly coupled solution of the mean flow equations was selected after a comparison with the loosely coupled solution. The strongly coupled solution of the mean flow equations means that all equations are solved simultaneously with all the dependent variables at each Newton step alive. When the loosely coupled solution of the mean flow equations is applied, continuity and momentum equations are firstly solved with the temperature field fixed. Then, the energy equation is solved with the velocity field fixed. This procedure is repeated until convergence in pseudo-time is achieved. Inviscid fluxes were calculated using the Roe's approximate Riemann solver when mean flow equations were strongly coupled and the IFUS upwind scheme when they were loosely coupled. The comparison of the coupling methods was conducted for the cases of natural convection in square and cubic cavities. The comparison concluded to the superiority of the strongly coupled solution. Strongly coupled

solution showed faster convergence when inviscid effects becoming larger. It let us use greater CFL numbers decreasing the time needed for the convergence in pseudo-time. One more advantage of the strongly coupled solution to the loosely coupled one is that it leads to convergence for coarser numerical meshes. Generally, the strongly coupled solution combined with the Roe's approximate Riemann solver showed superiority regarding the convergence behavior and stability. Therefore, we adopted the strongly coupled solution of the mean flow equations and the Roe's approximate Riemann solver for the evaluation of the inviscid fluxes.

For the reconstruction of the dependent variables necessary for the inviscid fluxes calculation higher order schemes were applied. The effect of the usage of slope limiters was also studied. The slope limiters tested were the van Albada-van Leer and Min-Mod limiters and were applied combined with the second order reconstruction scheme. Slope limiters stalled the convergence to a certain degree and corrections performed oscillations. However, the second order reconstruction scheme without slope limiters led the convergence to machine zero. The steady state results coming from the usage of slope limiters or not were approximately the same. Slope limiters were also applied on the tunnel fire cases for the reconstruction of the mean flow dependent variables without auxiliary effects. Therefore, slope limiters were removed as a choice for the reconstruction of the mean flow dependent variables.

Moreover, for the treatment of the small unrealistic under-predictions of the temperature calculated in the cases of tunnel fires, we applied and compared two schemes. They did not present significant differences in their results. Then the simplest of them was finally adopted for the preservation of temperatures greater or equal to the ambient temperature. According to this, we check for temperatures smaller than the ambient temperature after each Newton step performing a "do loop" for the nodes. If temperatures smaller than the ambient one are found we replace them with the temperature value at the previous Newton step.

For the radiative heat transfer two methods were applied. The first one was an analytical view factor based model that uses algebraic equations. It is applicable in building and tunnels with high wall emissivities, limited number of reflections among walls and non-participating medium. For the calculation of the view factors algebraic equations appropriate for the boundary faces of a Cartesian mesh were used. Although

this method was easily programmed, it showed to be costly in terms of both computational time and storage when applied with the serial solver.

The second method was a node-centered finite volume method, applicable for gray absorbing, emitting and scattering (either isotropically or anisotropically) mediums. It applies an edge-based algorithm for hybrid meshes making it compatible with our flow solver. It is a second order spatial and temporal scheme and for the avoidance of under-predictions or over-predictions of the radiation intensity one of the limiters Min-Mod and Van Albada-Van Leer could be used. The application of slope limiters for the radiation intensity did not show to significantly influence the steady state solutions but still constitute a choice. If negative radiative intensities are calculated a fix-up procedure is used and these are set equal to zero. The angular discretization is achieved by equally dividing the 4π steradians into $N_\theta \times N_\phi$ directions.

After the presentation of the numerical methodology and all of its aspects, some representative benchmark test cases were solved for the validation of the solver. These cases were two-dimensional or three-dimensional, steady or unsteady, laminar or turbulent, with the effect of radiation or not. A wide range of input parameters was applied to test the general applicability of our solver.

Results were in good agreement to those presented by other researchers and generally smooth contours were calculated for all the dependent variables, using any type of numerical meshes, i.e. tetrahedral/hexahedral or hybrid.

Afterwards, we tested the performance of the parallel solver for various cases, regarding the speed-up and efficiency. In the dissertation time consuming problems were encountered and for their simulation parallel computing was necessary. The most demanding simulations were those of the tunnel fire cases. Flows were turbulent and radiation modeling using the finite volume method was applied. Satisfactory speed-up of the simulations was achieved. For increasing computational load, speed-up and efficiency were also increasing for the same number of processors.

Finally, after the validation of our solver and the confirmation of the high performance of the parallel solver we continued to the simulation of two fire cases in a ventilated tunnel. Fire cases were simulated either taking into account radiation and wall conduction or not. When radiation was not taken into account turbulence had

been modeled using the standard k- ϵ model with wall functions and the low-Re k- ω SST model. Our results were compared to the results of the commercial package Ansys Fluent. The standard k- ϵ model was applied when radiation and wall conduction were taken into account. Radiation and wall conduction modeling showed to be necessary for the prediction of realistic temperature fields.

Below the innovative elements of the thesis from the most important to the less important are listed:

- An upwind method based on Roe's approximate Riemann scheme was developed from scratch for the calculation of the inviscid fluxes of the mean flow equations both in two-dimensions and three-dimensions. Roe's approximate Riemann solver as an upwind scheme relieves us from artificial dissipation which is necessary for the centered schemes. Upwind schemes introduce artificial dissipation implicitly. Roe's approximate Riemann solver combined with the strongly coupled solution of the equations showed to constitute a robust scheme.
- A comparison between the strongly coupled solution and loosely coupled solution of the mean flow equations was conducted, which to the best of our knowledge has not been presented in the literature before. Strongly coupled solution showed superiority compared to the loosely coupled one. It showed faster convergence for large inviscid effects. It let us use greater CFL numbers decreasing the time needed for the convergence in pseudo-time. Finally, it led to convergence for coarser numerical meshes compared to the loosely coupled solution.
- For the viscous fluxes a CPU-time efficient central scheme was used, which had been developed for the continuity and momentum equations and applied for the energy equation successfully.
- Tunnel fire cases were simulated using the new finite volume radiation model and the 1-D wall conduction model. They produced more realistic temperature profiles downstream from the heat source compared to the simulation of the

tunnel fire cases without them.

7.2. Future work

In this subsection some thoughts for the improvement and the further extension of the methodology are given:

- As it was mentioned energy equation, which is a transport equation, is introduced into the code in two modes. It is either strongly coupled or loosely coupled to the other equations. One more transport equation for the calculation of smoke concentration could be introduced in a way similar to the loosely coupled technique. Having calculated smoke concentration in space and time, we could use pseudo-gray formulas for the absorption coefficient in tunnel fire cases.
- Moreover, a more exact model for the heat conduction through walls could be developed. The current solver could be used for the calculation of wall temperatures with the appropriate boundary condition in the interface between fluid and solid, but it does not constitute the most computationally efficient approach. One more alternative is the solution of only the energy equation inside the wall. A two-dimensional finite element solver have been developed and could be extended in three-dimensions. Then, they could be incorporated in the flow solver for the calculation of heat conduction both in two-dimensions and three-dimensions.
- The finite volume radiation solver could be modified for non-gray media. Many works have been presented in the literature for non-gray media modeling.
- Schemes like the FT_n for a better distribution of the angular discretization and a technique for the solution of the radiative transfer equation for a subset of direction could be adopted.

Publications

Finally, the publications that were written on the subject of the dissertation during this period are given:

- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I. and Tsangaris S., “Development and validation of a 3-D Navier-Stokes solver including heat transfer and natural convection”, 5th International Conference from Scientific Computing to Computational Engineering, Athens, Greece, 4-7 July, 2012.
- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I. and Tsangaris S., “Development and validation of a Navier-Stokes solver including heat transfer and mixed convection”, 10th HSTAM International Congress on Mechanics, Chania, Greece, 25-27 May, 2013.
- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I., Filus M. and Tsangaris S., “Numerical study of a ventilated tunnel fire. A turbulence models comparison”, 10th HSTAM International Congress on Mechanics, Chania, Greece, 25-27 May, 2013.
- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I. and Tsangaris S., “Development and validation of an incompressible Navier-Stokes solver including convective heat transfer”, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, Accepted.
- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I. and Tsangaris S., “Numerical study of a ventilated tunnel fire. A turbulence models comparison”, Cogent Engineering, Accepted.

The following diploma theses that were conducted in the Biofluid Mechanics and Biomedical Engineering laboratory of Fluids Section were quite auxiliary:

- Αλεβίζος Θεόδωρος, "Υπολογιστική μελέτη της κίνησης καπνού κατά την εκδήλωση πυρκαγιάς σε αεριζόμενη σήραγγα", Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2011.
- Διαμαντίδης Περικλής, "Υπολογιστική προσομοίωση πυρκαγιάς εντός

αεριζόμενης σήραγγας κάνοντας χρήση μοντέλου ακτινοβολίας",
Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2014.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**“ Ανάπτυξη αριθμητικής-υπολογιστικής μεθοδολογίας για
την προσομοίωση μη μόνιμων ροών με μεταφορά
θερμότητας ”**

Διδακτορική Διατριβή

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Γ. ΣΤΟΚΟΣ

Μηχανολόγος Μηχανικός

Διπλωματούχος Μεταπτυχιακού Υπολογιστικής Μηχανικής

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

κ. ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2015



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**“Ανάπτυξη αριθμητικής-υπολογιστικής μεθοδολογίας για
την προσομοίωση μη μόνιμων ροών με μεταφορά
θερμότητας”**

Διδακτορική Διατριβή

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Γ. ΣΤΟΚΟΣ

Μηχανολόγος Μηχανικός

Διπλωματούχος Μεταπτυχιακού Υπολογιστικής Μηχανικής

Συμβουλευτική Επιτροπή:

1. Καθηγητής Σ. Τσαγγάρης (επιβλέπων)
2. Αν. Καθηγητής Σ. Βουτσινάς
3. Αν. Καθηγητής Ι. Αναγνωστόπουλος

Εξεταστική Επιτροπή:

1. Καθηγητής Σ. Τσαγγάρης (επιβλέπων)
2. Αν. Καθηγητής Σ. Βουτσινάς
3. Αν. Καθηγητής Ι. Αναγνωστόπουλος
4. Καθηγητής Δ. Μαθιουλάκης
5. Καθηγητής Δ. Παπαντώνης
6. Επ. Καθηγητής Δ. Μπούρης
7. Λέκτορας Β. Ριζιώτης

Αθήνα 2015

ΕΚΤΕΝΗΣ ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η συγγραφή της παρούσας διδακτορικής διατριβής έχει γίνει στην αγγλική γλώσσα και συνοδεύεται από εκτενή περίληψη στην ελληνική γλώσσα, η οποία ακολουθεί παρακάτω. Η εκτενής περίληψη περιλαμβάνει τα κυριότερα σημεία κάθε κεφαλαίου και δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι αντικαθιστά το αγγλικό κείμενο.

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι σε ορισμένες περιπτώσεις, έννοιες που είχαν οριστεί στην αγγλική γλώσσα μεταφράστηκαν κατά την κρίση του συγγραφέα και στην συνέχεια εντός παρενθέσεως δόθηκε και ο αγγλικός ορισμός τους. Σε ορισμένες περιπτώσεις μάλιστα που η ελληνική απόδοση δεν προσέφερε κάτι ουσιαστικό, για παράδειγμα σε περιπτώσεις ονομάτων μεθόδων, δεν έγινε μετάφραση.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή - Βιβλιογραφική επισκόπηση

1.1 Εισαγωγή

Σκοπός της συγκεκριμένης διδακτορικής διατριβής ήταν η ανάπτυξη μια αριθμητικής-υπολογιστικής μεθοδολογίας για την προσομοίωση γενικώς μη μόνιμων ροών με ταυτόχρονη μεταφορά θερμότητας. Η μεταφορά θερμότητας δεν αποτελεί αποκλειστικά την αιτία δημιουργίας της ροής. Η ροή μπορεί να προκληθεί από διάφορες άλλες αιτίες, όπως η διαφορά πίεσης.

Η επιστήμη της μεταφοράς θερμότητας ασχολείται με τον καθορισμό των θερμοκρασιακών πεδίων στο χώρο και το χρόνο και του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας. Θερμότητα είναι η μορφή της ενέργειας που μπορεί να μεταφερθεί από ένα σύστημα σε άλλο σαν αποτέλεσμα της χωρικής θερμοκρασιακής διαφοράς [Cen02]. Η θερμοκρασιακή διαφορά αποτελεί την κινητήριο δύναμη για την μεταφορά θερμότητας και ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής επιβάλλει την μεταφορά θερμότητας από συστήματα υψηλότερων θερμοκρασιών σε συστήματα χαμηλότερων θερμοκρασιών. Σε ομοιόμορφα θερμοκρασιακά πεδία υπάρχει θερμική ισορροπία. Στόχος των μηχανικών που ασχολούνται με προβλήματα μεταφοράς θερμότητας είναι είτε να διευκολύνουν είτε να μειώσουν τη μεταφορά θερμότητας. Υπάρχουν τρεις τρόποι μεταφοράς θερμότητας που μπορούν να συμβαίνουν ταυτόχρονα ή όχι. Αυτοί είναι η αγωγή, η συναγωγή και η ακτινοβολία. Παρακάτω δίνεται μια σύντομη περιγραφή καθενός από τους τρεις μηχανισμούς μεταφοράς θερμότητας.

Η μεταφορά θερμότητας λόγω αγωγής αποδίδεται στη μικροσκοπική κίνηση των ατόμων ή των μορίων. Η αγωγή λαμβάνει χώρα σε όλες τις καταστάσεις της ύλης (στερεά, υγρή και αέρια).

Η μεταφορά θερμότητας λόγω συναγωγής είναι αποτέλεσμα της μακροσκοπικής κίνησης ρευστού και όχι της μικροσκοπικής κίνησης ατόμων ή μορίων, η οποία υπάρχει ταυτόχρονα. Η συναγωγή χωρίζεται σε φυσική (ελεύθερη) συναγωγή, εξαναγκασμένη συναγωγή και μικτή συναγωγή. Η φυσική συναγωγή προκαλείται

από τις ανωστικές δυνάμεις λόγω διαφορών στις πυκνότητες που προκαλούνται από διαφορές θερμοκρασιών. Η εξαναγκασμένη συναγωγή λαμβάνει χώρα όταν η κίνηση του ρευστού προέρχεται από εξωτερικά μέσα, όπως μια φτερωτή ή μια αντλία. Η συναγωγή χαρακτηρίζεται ως μικτή όταν συνυπάρχουν η φυσική και η εξαναγκασμένη συναγωγή.

Θερμική ακτινοβολία είναι η ενέργεια που εκπέμπεται από σώματα με θερμοκρασία μεγαλύτερη του απόλυτου μηδενός, με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Η θερμική ακτινοβολία διαφέρει από τις άλλες μορφές ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που βρίσκονται στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Το μήκος κύματός της κυμαίνεται από 0,1μm μέχρι 100μm.

Η θερμική ακτινοβολία διαφέρει από την αγωγή και την συναγωγή στο ότι δεν απαιτείται η ύπαρξη κάποιου υλικού μέσου. Αντιθέτως η θερμική ακτινοβολία εμφανίζεται στο κενό με εντονότερο ρυθμό. Παρόλο που η ακτινοβολία έχει μελετηθεί σε βάθος από αρκετούς ερευνητές, ο μηχανισμός της δεν έχει γίνει ακόμα πλήρως κατανοητός [Φου03]. Ένα παράδειγμα του πως η θερμική ακτινοβολία ενεργεί είναι το παρακάτω: Ο ήλιος, με την εξαιρετικά υψηλή επιφανειακή του θερμοκρασία (περίπου ίση με 6000 °C) θερμαίνει τη γη μέσω θερμικής ακτινοβολίας. Σε μια κρύα μέρα, κάποιος ο οποίος στέκεται κάτω από τη σκιά ενός στεγάστρου νιώθει το κρύο. Αν όμως μετακινηθεί μακριά από τη σκιά του στεγάστρου θα νιώσει πιο ζεστά. Ωστόσο, είτε βρίσκεται κάτω από την σκιά είτε όχι η ατμοσφαιρική θερμοκρασία είναι η ίδια.

Η μεταφορά θερμότητας, όπως και όλα τα υπόλοιπα προβλήματα της μηχανικής, μπορεί να μελετηθεί πειραματικά, θεωρητικά ή υπολογιστικά. Η πειραματική μελέτη παρέχει αξιόπιστα δεδομένα, που περιορίζονται μονάχα από το πειραματικό σφάλμα. Ωστόσο, η πειραματική μελέτη είναι συχνά απαγορευτική λόγω του απαιτούμενου υψηλού οικονομικού κόστους και του γεγονότος ότι μπορεί να είναι πολύ χρονοβόρος. Η θεωρητική και η υπολογιστική προσέγγιση είναι λιγότερο ακριβές και επιτρέπουν τη μελέτη πλήθους εναλλακτικών περιπτώσεων με κατάλληλη τροποποίηση του μοντέλου. Η δυνατότητα εφαρμογής τους περιορίζεται μονάχα από τις παραδοχές που έχουμε κάνει. Σε αυτή τη διατριβή η μεταφορά θερμότητας μελετάται μέσω της ανάπτυξης και εφαρμογής μιας υπολογιστικής μεθοδολογίας.

1.2 Μοντελοποίηση της συναγωγής

Η μεταφορά θερμότητας με συναγωγή είναι κυρίαρχη και μελετάται σε ποικίλα πρακτικά προβλήματα μηχανικής, όπως η ψύξη ηλεκτρονικών κυκλωμάτων (chip) [Xie14], η σχεδίαση εναλλακτών θερμότητας [Ali14] και η προσομοίωση πυρκαγιών σε σήραγγες [Sto13a]. Σήμερα, με τη μεγάλη πρόοδο που έχει συντελεστεί στο χώρο της επιστήμης των υπολογιστών, η Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (ΥΡ) έχει γίνει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την προσομοίωση τέτοιων περιπτώσεων.

Πολλές αριθμητικές μελέτες έχουν δημοσιευτεί στη βιβλιογραφία πάνω στην ανάπτυξη επιλυτών για την προσομοίωση προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή. Οι Hortmann et al. [Hor90] εφάρμοσαν μια μέθοδο ασθενούς σύζευξης, βασισμένη στον αλγόριθμο SIMPLE για την πρόβλεψη της ανωστικής ροής εντός τετραγωνικής κοιλότητας. Η σύγκλιση στην ανεξάρτητη από το πλέγμα λύση επιτεύχθηκε μέσω τεχνικής πολυπλέγματος με μεγάλη ακρίβεια. Οι Malan et al. ([Mal02a], [Mal02b]) ανέπτυξαν και έλεγξαν μια πεπερασμένων όγκων μέθοδο, βασισμένη στην προσέγγιση της τεχνητής συμπιεστότητας για την επίλυση της στρωτής ισοθερμοκρασιακής ή μη-ισοθερμοκρασιακής ροής συνεκτικού ρευστού χρησιμοποιώντας υβριδικά πλέγματα. Η προτεινόμενη μεθοδός τους έδειξε ακρίβεια και ευρωστία (robustness) σε ροές μεγάλου εύρους παραμέτρων. Οι Liu et al. [Liu03] παρουσίασαν μια τέταρτης τάξης μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για την πρόβλεψη 2-Δ ανωστικών ροών. Η άνωση ελήφθη υπόψη μέσω της προσέγγισης Boussinesq.

Παρακάτω δίνεται μια σύντομη περιγραφή διαφόρων θεμάτων που αφορούν στην ανάπτυξη ενός ασυμπίεστου επιλύτη περιπτώσεων μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή, για να καταλήξουμε στη συνέχεια στα βασικά χαρακτηριστικά της δικής μας υπολογιστικής μεθόδου.

Η δυσκολία με τις ασυμπίεστες ροές είναι στη σύζευξη των πεδίων πίεσεων και ταχυτήτων κατά την διάρκεια της αριθμητικής επίλυσης. Για αυτή τη σύζευξη έχουν αναπτυχθεί αρκετές τεχνικές [Lak91]. Οι περισσότερες διαδεδομένες προσεγγίσεις είναι η μέθοδος διόρθωσης της πίεσης (pressure correction method) που παρουσιάστηκε από τους Harlow & Welch [Har65] και η μέθοδος τεχνητής συμπιεστότητας (artificial compressibility method) που παρουσιάστηκε από τον Chorin [Cho67]. Μια ενδελεχής σύγκριση μεταξύ αυτών των δύο μεθόδων έχει παρουσιαστεί από τους Tamamidis et al. [Tam96]. Σύμφωνα με αυτή την έρευνα, το

πιο ελκυστικό χαρακτηριστικό της μεθόδου τεχνητής συμπίεστότητας είναι η γρηγορότερη σύγκλιση, καθώς οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής είναι πλήρως πεπλεγμένες κατά την επίλυσή τους.

Σήμερα, τα υβριδικά πλέγματα χρησιμοποιούνται ευρέως ([And95], [Has00], [Kal05], [Vra12], [Sto12], [Sto13b]). Τα υβριδικά αριθμητικά πλέγματα μπορούν να συνδυάσουν την καλή διακριτοποίηση των περιοχών κοντά στα τοιχώματα χρησιμοποιώντας στοιχεία δομημένου πλέγματος μαζί με τη γεωμετρική ευελιξία των στοιχείων των μη-δομημένων πλεγμάτων. Ως εκ τούτου, μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντική οικονομία από πλευράς μνήμης και υπολογιστικού χρόνου με ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Ο δικός μας επίλυτης βασίζεται σε μια πεπερασμένων όγκων τεχνική με αποθήκευση των μεταβλητών επίλυσης στους κόμβους του πλέγματος (κεντροκομβικό σχήμα) και εφαρμόζει την προσέγγιση τεχνητής συμπίεστότητας για την απαιτούμενη σύζευξη πιέσεων και ταχυτήτων. Χρησιμοποιεί μια ακμοβασική (edge based) προσέγγιση σε υβριδικά αριθμητικά πλέγματα που περιέχουν τρίγωνα και τετράπλευρα στη 2-Δ έκδοση του κώδικα και εξάεδρα, πρίσματα, τετράεδρα και πυραμίδες στην 3-Δ έκδοση. Οι μεταβολές της πυκνότητας λόγω των μεταβολών της θερμοκρασίας λαμβάνονται υπόψη στην εξίσωση της ορμής μέσω της προσέγγισης του Boussinesq (Boussinesq approximation).

Δόθηκε προσοχή στην ισχυρή σύζευξη των εξισώσεων μέσης ροής και στην ανάπτυξη ενός αποδοτικού ανάντη σχήματος για τον υπολογισμό των μη-συνεκτικών όρων. Οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής επιλύονται ταυτόχρονα με την ενεργειακή εξίσωση οδηγώντας στην ταυτόχρονη σύγκλιση της ροής και του πεδίου θερμοκρασιών. Ένας προσεγγιστικός Riemann επίλυτης του Roe (Roe's approximate Riemann solver) αναπτύχθηκε για την εκτίμηση των μη-συνεκτικών όρων. Για τη διακριτοποίηση των συνεκτικών όρων χρησιμοποιήθηκε ένα αποδοτικό από άποψη χρόνου CPU κεντρικό σχήμα. Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για την χωρική και χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων ήταν διαφανείς στο πλέγμα (mesh transparent).

1.3 Μοντελοποίηση της θερμικής ακτινοβολίας

Η μεταφορά θερμότητας λόγω ακτινοβολίας είναι παρούσα σε πλήθος πρακτικών προβλημάτων του μηχανικού και είναι απαραίτητο να λαμβάνεται υπόψη όταν η ποσότητα $Q_{\text{rad}} = \sigma(T_{\text{max}}^4 - T_{\text{min}}^4)$ (σ είναι η σταθερά του Stefan Boltzmann) είναι συγκρίσιμη με τη ροή θερμότητας με αγωγή και συναγωγή στο ίδιο πρόβλημα.

Για την υπολογιστική προσομοίωση της μεταφοράς θερμότητας λόγω ακτινοβολίας έχει προταθεί πλήθος μεθόδων. Αυτές κυρίως κατηγοριοποιούνται σε μεθόδους που βασίζονται στους γωνιακούς παράγοντες και σε μεθόδους ροής (flux methods). Οι τελευταίες απαιτούν την ικανοποίηση του νόμου διατήρησης της ακτινοβολούμενης ενέργειας σε κάθε όγκο ελέγχου, με παρόμοιο τρόπο με τις ολοκληρωτικές μεθόδους της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής.

1.3.1 Μέθοδοι γωνιακών παραγόντων

Η πρώτη μέθοδος που βασιζόταν στον υπολογισμό των γωνιακών παραγόντων είναι η μέθοδος Hottel (Hottel's zone method) [Hot67]. Μετά τη χωρική διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου, απαιτείται ο υπολογισμός των γωνιακών παραγόντων. Γενικά, ο υπολογισμός των γωνιακών παραγόντων είναι υπολογιστικά απαιτητικός. Συγκεκριμένα, ο χρόνος που χρειάζεται για τον υπολογισμό τους αυξάνει εκθετικά με τον αριθμό των οριακών εδρών. Αυτό το γεγονός κάνει τη μέθοδο Hottel ακατάλληλη για πολυδιάστατα προβλήματα, παρόλο που οι γωνιακοί παράγοντες είναι γεωμετρικές ποσότητες και υπολογίζονται μια φορά πριν τη βασική υπολογιστική μεθοδολογία. Στη βιβλιογραφία έχουν βρεθεί ορισμένες αναλυτικές εκφράσεις για τους γωνιακούς παράγοντες μεταξύ επιφανειών ([Gro81], [Mod03]). Η μέθοδος Monte Carlo εισήχθη σαν μέθοδος για τον υπολογισμό γωνιακών παραγόντων σε προβλήματα ακτινοβολούμενης μεταφοράς θερμότητας από τον Howell [How68]. Αυτή παρουσιάζει γεωμετρική ευελιξία αλλά μειονεκτεί στο ότι δίνει χαμηλούς ρυθμούς σύγκλισης [Ker94].

Στη βιβλιογραφία έχουν βρεθεί αρκετές βελτιώσεις και εφαρμογές με μεθόδους γωνιακών παραγόντων. Οι Balaji et al. ([Bal93], [Bal94], [Bal95], [Sin04]) μελέτησαν τη στρωτή φυσική συναγωγή σε ανοιχτές και κλειστές κοιλότητες

λαμβάνοντας υπόψη την ακτινοβολία μεταξύ επιφανειών. Το ίδιο Καρτεσιανό και ανομοιόμορφο πλέγμα χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της ροής, της συναγωγής θερμότητας και της ακτινοβολίας. Οι γωνιακοί παράγοντες υπολογίστηκαν κάνοντας χρήση της μεθόδου crossed-string [Mod03].

Οι Ridouane et al. [Rid04] μελέτησαν την αλληλεπίδραση της επιφανειακής ακτινοβολίας και της φυσικής συναγωγής σε ένα πρόβλημα τύπου Rayleigh-Benard σε τετραγωνική κοιλότητα. Οι γωνιακοί παράγοντες είχαν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο crossed-string.

Οι Sharma et al. [Sha07] μελέτησαν την αλληλεπίδραση της επιφανειακής ακτινοβολίας και της τυρβώδους φυσικής συναγωγής σε τετραγωνική κοιλότητα που θερμαίνεται στο κάτω τοίχωμα. Οι γωνιακοί παράγοντες υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο crossed-string.

Οι Albanakis & Bouris [Alb08] χρησιμοποίησαν μια αναλυτική προσέγγιση για την μοντελοποίηση της θερμικής ακτινοβολίας. Αυτό το μοντέλο έχει ισχύ σε κτήρια με υψηλούς συντελεστές εκπομπής τοιχωμάτων. Οι γωνιακοί παράγοντες υπολογίστηκαν με αναλυτικές εκφράσεις κατάλληλες για οριακές έδρες Καρτεσιανού αριθμητικού πλέγματος.

Οι Alvarado et al. [Alv08] μελέτησαν την αλληλεπίδραση της επιφανειακής ακτινοβολίας με τη στρωτή φυσική συναγωγή σε 2-Δ υπό κλίση κοιλότητες. Οι γωνιακοί παράγοντες είχαν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο crossed-string.

Οι Rabhi et al. [Rab08] μελέτησαν την επιφανειακή ακτινοβολία και τη στρωτή συναγωγή σε κεκλιμένες ορθογωνικές κοιλότητες. Οι γωνιακοί παράγοντες υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo. Οι Reddy & Kumar [Red08] μελέτησαν την επιφανειακή ακτινοβολία και τη φυσική συναγωγή σε ηλιακό συλλέκτη.

Οι Ridouane et al. [Rid06] μελέτησαν ένα πρόβλημα τύπου Rayleigh-Benard σε τετραγωνική κοιλότητα. Οι γωνιακοί παράγοντες υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο crossed-string.

Κάτι το οποίο είναι σημαντικό να αναφερθεί είναι ότι όλες οι παραπάνω μελέτες βασίστηκαν στην υπόθεση του διαφανούς (μη-συμμετέχοντος) ρευστού. Μόνο η

θερμική ακτινοβολία μεταξύ στερεών επιφανειών μοντελοποιήθηκε. Τέλος, το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου των γωνιακών παραγόντων είναι ο εύκολος προγραμματισμός της.

1.3.2 Μέθοδοι ροής

Οι μέθοδοι ροής για την ακτινοβολία λειτουργούν με έναν παρόμοιο τρόπο με τις ολοκληρωτικές μεθόδους της ΥΡ. Η μόνη διαφορά είναι ότι οι μέθοδοι ροής για την ακτινοβολία απαιτούν και γωνιακή διακριτοποίηση εκτός από τη χωρική διακριτοποίηση. Οι κυρίαρχες μέθοδοι ροής για τη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία είναι η Μέθοδος Διακριτών Τεταγμένων - ΜΔΤ (Discrete Ordinates Method - DOM) και η Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων - ΜΠΟ (Finite Volume Method - FVM).

Η ΜΔΤ πρωτίστως χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση της 3-Δ μεταφοράς θερμότητας με ακτινοβολία με μέσο που σκεδάζει είτε ισοτροπικά είτε ανισοτροπικά την ακτινοβολία από τον Fiveland [Fiv87], [Fiv88]. Στη βιβλιογραφία έκτοτε έχουν παρουσιαστεί πολλές βελτιώσεις της πρώτης ΜΔΤ και εφαρμογές αυτής.

Ο Yucel et al. [Yuc89] μελέτησε τη στρωτή και μόνιμη φυσική συναγωγή σε τετραγωνική κοιλότητα, θεωρώντας φαιό ρευστό, που απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει ισοτροπικά την ακτινοβολία. Τα τοιχώματα θεωρήθηκαν ότι είναι μελανά. Ένα κεντροκυψελικό (cell-centered) σχήμα χρησιμοποιήθηκε για την ολοκλήρωση των εξισώσεων μέσης ροής και της εξίσωσης μεταφοράς ακτινοβολίας (Radiative Transfer Equation - RTE). Οι εντάσεις της ακτινοβολίας στα κέντρα των κελιών συσχετίστηκαν με αυτές στις έδρες των κελιών χρησιμοποιώντας τα σχήματα diamond και step/upwind.

Το 1994, οι Chai et al. [Cha94] παρουσίασαν μια σύγκριση μεταξύ των πιο διαδεδομένων σχημάτων για το συσχετισμό της εντάσεως της ακτινοβολίας στις έδρες του όγκου ελέγχου με αυτή στα κέντρα των κελιών, δηλαδή μεταξύ των σχημάτων positive, step και diamond κάνοντας χρήση της ΜΔΤ στις δύο διαστάσεις. Υπερίσχυσε η step προσέγγιση η οποία έδωσε ρεαλιστικές τιμές για την ένταση της ακτινοβολίας. Το σχήμα diamond έδωσε σε ορισμένες περιπτώσεις αρνητικές τιμές εντάσεως ακτινοβολίας και έτσι απαιτήθηκε η χρήση μιας διαδικασίας κατά την

οποία οι αρνητικές τιμές της έντασης θέτονταν ίσες με το μηδέν ή έπαιρναν μικρές τιμές. Σε ορισμένες περιπτώσεις επίσης τα σχήματα diamond και positive εμφάνισαν μη ρεαλιστικές υπερεκτιμήσεις της έντασης της ακτινοβολίας.

Οι Colomer et al. [Col04] και Scarella et al. [Sca08] μελέτησαν την αλληλεπίδραση μεταξύ ακτινοβολίας και στρωτής φυσικής συναγωγής σε κυβική κοιλότητα. Το ρευστό θεωρήθηκε ότι απορροφά και εκπέμπει αλλά δε σκεδάζει την ακτινοβολία. Τα τοιχώματα θεωρήθηκαν ως μελανά σώματα.

Οι Lari et al. [Lar12] μελέτησαν την αλληλεπίδραση της θερμικής ακτινοβολίας και της στρωτής φυσικής συναγωγής σε 2-Δ κοιλότητα, κάτω από την υπόθεση του πραγματικού μέσου (μη-φαιό μέσο). Η εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας επιλύθηκε χρησιμοποιώντας τη ΜΔΤ και η πραγματική (μη-φαιή) συμπεριφορά του ρευστού προσομοιώθηκε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο full spectrum k-distribution. Το ρευστό θεωρήθηκε ότι απορροφά, εκπέμπει αλλά δε σκεδάζει την ακτινοβολία και τα τοιχώματα ανακλούν και εκπέμπουν ισοτροπικά με σταθερό συντελεστή εκπομπής.

Η Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων - ΜΠΟ για την ακτινοβολία παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τους Raithby & Chui το 1990 [Rai90]. Έκτοτε πολλές βελτιώσεις και εφαρμογές της μεθόδου αυτής έχουν βρεθεί στη βιβλιογραφία.

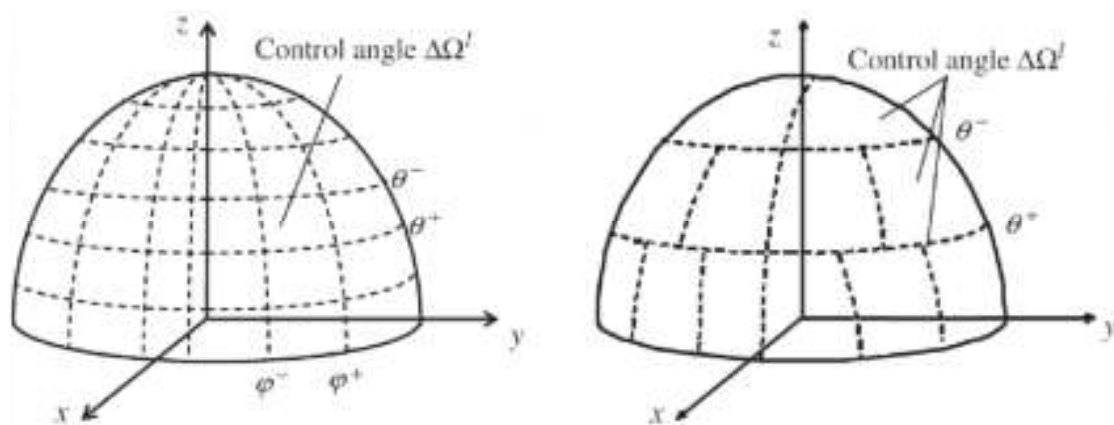
Οι Chui & Raithby [Chu93] και Chai et al. [Cha95] εφάρμοσαν τη ΜΠΟ σε μη-ορθογώνια, τετραπλευρικά πλέγματα στις δύο διαστάσεις.

Οι Baek et al. [Bae98] εφάρμοσαν τη ΜΠΟ σε 3-Δ μη-ορθογωνικές κοιλότητες. Το ρευστό θεωρήθηκε ότι απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει ισοτροπικά την ακτινοβολία. Τα τοιχώματα θεωρήθηκε ότι ανακλούν και εκπέμπουν ισοτροπικά την ακτινοβολία. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα της επικάλυψης των γωνιών ελέγχου υπήρξε μέριμνα για το διαχωρισμό του εισερχόμενου και εξερχόμενου τμήματός της. Χρησιμοποιήθηκε επίσης το ανάντη σχήμα step.

Το 1999 ο Raithby [Rai99] παρουσίασε μια σύγκριση μεταξύ της ΜΔΤ και ΜΠΟ. Αναφέρεται η αδυναμία της ΜΔΤ στη διατήρηση της ενέργειας ακτινοβολίας στα όρια για ανισοτροπικά σκεδάζον μέσο. Επίσης, παρουσιάστηκε το πως η απρόσεχτη γωνιακή διακριτοποίηση με τη χρήση της ΜΔΤ θα μπορούσε να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα.

Οι Han & Baek [Han00] μελέτησαν την επίδραση της ακτινοβολίας στη μόνιμη στρωτή φυσική συναγωγή σε μια κοιλότητα με δύο εσωτερικά εμπόδια. Το ρευστό θεωρήθηκε ότι απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει ισοτροπικά την ακτινοβολία. Τα τοιχώματα θεωρήθηκαν ισοτροπικά. Χρησιμοποιήθηκε το step σχήμα.

Το 2000 οι Kim & Huh [Kim00] εισήγαγαν ένα νέο σχήμα ανομοιομορφης γωνιακής διακριτοποίησης το οποίο εφαρμόστηκε με την ΜΠΟ. Η FT_n ΜΠΟ είναι συμβατή με ρευστό που απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει γενικά ανισοτροπικά. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο αν η πολική γωνία έχει διαιρεθεί ομοιόμορφα σε άρτιο αριθμό n τμημάτων, τότε η αζιμουθιακή γωνία χωρίζεται ομοιόμορφα σε αριθμό τμημάτων της σειράς 4, 8, 12, ..., $2n-4$, $2n$, $2n-4$, ..., 8, 4 (Σχήμα 1-1). Τελικά ο αριθμός όλων των γωνιών ελέγχου είναι $n(n+2)$. Το σχήμα FT_n καταλήγει σε καλύτερη κατανομή για τις διακριτοποιημένες γωνίες ελέγχου σε σύγκριση με την ομοιόμορφη γωνιακή διακριτοποίηση με N_θ πολικές και N_φ αζιμουθιακές γωνίες. Η FT_n ΜΠΟ έδωσε περισσότερο ακριβή αποτελέσματα από την ΜΔΤ και την ΜΠΟ με ομοιόμορφη γωνιακή διακριτοποίηση για τον ίδιο συνολικά αριθμό γωνιών, εκτός από την περίπτωση μέσου μεγάλου οπτικού πάχους (μεγάλου συντελεστή απορρόφησης).



Σχήμα 1-1. Σφαίρα γωνιακής διακριτοποίησης. Ομοιόμορφη γωνιακή διακριτοποίηση (αριστερά), FT_n γωνιακή διακριτοποίηση (δεξιά).

Οι Kim et al. [Kim01] εφάρμοσαν την ΜΠΟ σε 2-Δ γεωμετρίες με την ύπαρξη εμποδίων, διακριτοποιημένες με μη-δομημένα τριγωνικά πλέγματα. Εφάρμοσαν το ανάντη σχήμα step. Όσον αφορά το χειρισμό της αναπόφευκτης λόγω του μη-

δομημένου πλέγματος επικάλυψης της γωνίας ελέγχου, συγκρίθηκαν τρία διαφορετικά σχήματα ως προς την ακρίβειά τους και το υπολογιστικό κόστος: τα σχήματα bold, pixelation και exact. Η pixelation μέθοδος και το exact σχήμα παρουσίασαν καλύτερη ακρίβεια από το bold σχήμα για μικρό αριθμό γωνιών διακριτοποίησης, αλλά και μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.

Το 2004 ο Trivic [Tri04] συνδύασε τη ΜΠΟ για την εξίσωση ακτινοβολίας με το μοντέλο WSGGM (Weighted Sum of Gray Gases Model) για πραγματικό μέσο (μη-φαιό μέσο).

Οι Kim et al. [Kim05] εφάρμοσαν τη ΜΠΟ για τη μεταφορά της ακτινοβολίας σε υβριδικά πλέγματα στις δύο και τρεις διαστάσεις. Το ρευστό θεωρήθηκε φαιό που απορροφά και εκπέμπει την ακτινοβολία. Τα τοιχώματα θεωρήθηκαν ότι ανακλούν και εκπέμπουν την ακτινοβολία ιστροπικά. Υιοθετήθηκε η pixelation μέθοδος για την αναπόφευκτη επικάλυψη των γωνιών ελέγχου. Επίσης, υιοθετήθηκε το ανάντη σχήμα step. Οι υπολογισμοί έγιναν παράλληλα μετά τη διαίρεση του αρχικού υπολογιστικού χωρίου σε υποχωρία. Εκτός από περιπτώσεις μεταφοράς θερμότητας αμιγώς με ακτινοβολία μελετήθηκαν περιπτώσεις στρωτής φυσικής συναγωγής και στρωτής φυσικής συναγωγής με ακτινοβολία εντός κοιλότητας. Η παραλληλοποίηση του κώδικα έδωσε σημαντική μείωση στο υπολογιστικό φορτίο. Η υπολογισμένη επιτάχυνση για την περίπτωση της συναγωγής με την επίδραση της ακτινοβολίας ήταν μικρότερη από την επιτάχυνση της περίπτωσης της φυσικής συναγωγής για τον ίδιο αριθμό διεργασιών. Αυτό αποδόθηκε στο μεγαλύτερο φορτίο ανταλλαγής μηνυμάτων, λόγω της γωνιακής διακριτοποίησης της εξίσωσης ακτινοβολίας.

Οι Kumar & Eswaran [Kum08] χρησιμοποίησαν τη ΜΠΟ για να μελετήσουν την αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με τη ροή ρευστού σε κωνικό διαχύτη. Η ροή θεωρήθηκε ότι ήταν στρωτή και ασυμπίεστη. Η φυσική συναγωγή δεν ελήφθη υπόψη. Το μέσο θεωρήθηκε ότι ήταν φαιό και απορροφούσε, εξέπεμπε και σκέδαζε την ακτινοβολία. Το σχήμα για το συσχετισμό των εντάσεων εδρών και κόμβων ήταν συνδυασμός των σχημάτων step και diamond.

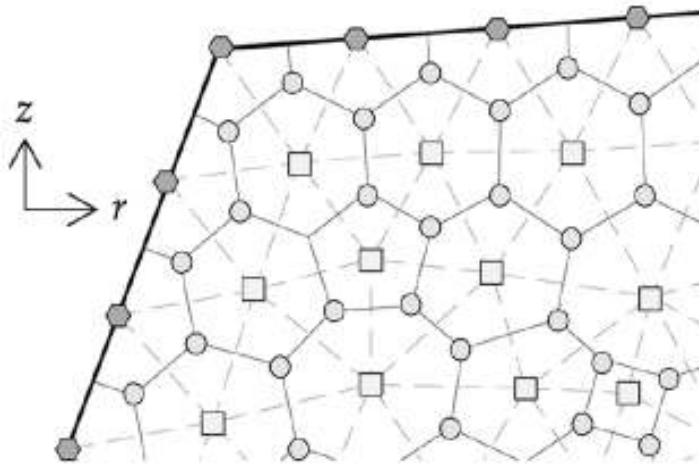
Οι Borjini et al. [Bor08] μελέτησαν την αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με την φυσική συναγωγή σε μία κυβική κοιλότητα. Για τη διακριτοποίηση της εξίσωσης ακτινοβολίας χρησιμοποιήθηκε η FT_n ΜΠΟ. Το μέσο ήταν φαιό που απορροφούσε, εξέπεμπε και σκέδαζε ιστροπικά την ακτινοβολία. Τα τοιχώματα θεωρήθηκαν φαιά

και ισοτροπικά. Για την επικύρωση της αναπτυχθείσας μεθοδολογίας, επιλύθηκαν οι περιπτώσεις αναφοράς των Colomer et al. [Col04] και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα. Βρέθηκαν σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματά τους.

Οι Ko & Anand [Ko08] μελέτησαν τη συζευγμένη περίπτωση εξαναγκασμένης συναγωγής και ακτινοβολίας σε ανάποδο σκαλοπάτι χρησιμοποιώντας τη ΜΠΟ και για την εξίσωση της ακτινοβολίας και για τις εξισώσεις μέσης ροής. Η ροή θεωρήθηκε ότι ήταν μόνιμη, ασυμπίεστη και στρωτή. Το ρευστό ήταν φαιό, απορροφούσε, εξέπεμπε και σκέδαζε την ακτινοβολία. Επίσης, ελήφθησαν υπόψη οι μεταβολές των θερμοφυσικών ιδιοτήτων του ρευστού με τη θερμοκρασία. Τα τοιχώματα θεωρήθηκαν ως αδιαφανή και ισοτροπικά. Η επίδραση του οπτικού πάχους και του συντελεστή σκέδασης στη ροή επίσης μελετήθηκε. Χρησιμοποίησαν το diamond σχήμα.

Οι Mondal & Mishra [Mon09] μελέτησαν τη συζευγμένη φυσική συναγωγή με ακτινοβολία σε τετραγωνική κοιλότητα. Το ρευστό θεωρήθηκε ότι ήταν φαιό που απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει ισοτροπικά και τα τοιχώματα φαιά και ότι ανακλούν και εκπέμπουν ισοτροπικά την ακτινοβολία.

Οι Kim et al. [Kim10] εφάρμοσαν τη ΜΠΟ σε μια αξονοσυμμετρική κοιλότητα, χωρικά διακριτοποιημένη χρησιμοποιώντας πολυγωνικό πλέγμα. Για τη δημιουργία των πολυγωνικών πλεγμάτων αρχικά κατασκευάστηκε ένα τριγωνικό πλέγμα. Στη συνέχεια τα κέντρα των τριγώνων ενώθηκαν δημιουργώντας το πολυγωνικό πλέγμα (Σχήμα 1-2). Το ρευστό ήταν φαιό που απορροφούσε, εξέπεμπε και σκέδαζε ισοτροπικά την ακτινοβολία. Επίσης, χρησιμοποίησαν το ανάντη σχήμα step.



Σχήμα 1-2 [Kim10]. Δημιουργία του πολυγωνικού πλέγματος.

Οι Kolsi et al. [Kol11] μελέτησαν τη συζευγμένη φυσική συναγωγή και ακτινοβολία σε 3-Δ κοιλότητες. Η ροή θεωρήθηκε ότι ήταν ασυμπίεστη και στρωτή. Για τη διακριτοποίηση της εξίσωσης ακτινοβολίας χρησιμοποιήθηκε η FT_n ΜΠΟ. Το ρευστό ήταν φαιό και απορροφούσε, εξέπεμπε και σκεδάζε ισοτροπικά την ακτινοβολία. Τα τοιχώματα ανακλούσαν και εξέπεμπαν την ακτινοβολία ισοτροπικά. Για την επικύρωση της αναπτυχθείσας μεθοδολογίας χρησιμοποιήθηκαν οι περιπτώσεις των Colomer et al. [Col04] με σημαντικές διαφορές.

Το 2012 οι Lygidakis & Nikolos [Lyg12] παρουσίασαν έναν 3-Δ επιλύτη ΜΠΟ για τη μόνιμη εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας. Αυτός ο επιλύτης βασίζεται στη θεώρηση φαιού μέσου που απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει την ακτινοβολία, είτε ισοτροπικά είτε ανισοτροπικά, με αδιαφανή και ισοτροπικά όρια. Πρόκειται για έναν κεντροκομβικό επιλύτη για υβριδικά πλέγματα. Υιοθετεί το ανάντη σχήμα *step* και την *bold* προσέγγιση για την επικάλυψη των γωνιών ελέγχου. Η παραλληλοποίηση του κώδικα παρουσίασε σημαντική μείωση του υπολογιστικού φορτίου. Ο επιλύτης επικυρώθηκε μέσω της επίλυσης πέντε περιπτώσεων αναφοράς από τη βιβλιογραφία. Στη συνέχεια οι Lygidakis & Nikolos [Lyg13b] βελτίωσαν τον ΜΠΟ επιλύτη τους για τη μη-μόνιμη εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας χρησιμοποιώντας δεύτερης τάξης ακρίβειας χωρική και χρονική προσέγγιση μαζί με μια τεχνική προσαρμογής του πλέγματος (*grid adaptation technique*). Ειδικότερα χρησιμοποιήθηκε το δεύτερης τάξης ακρίβειας σχήμα MUSCL (Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws) με τη δυνατότητα επιλογής ενός εκ των van Albada-van Leer και Min-Mod

περιοριστών για τη διευκόλυνση της μονοτονίας. Μιας και η ένταση της ακτινοβολίας είναι εξ ορισμού θετική ποσότητα, οι αρνητικές τιμές που προέρχονται από τη χρήση του δεύτερης τάξης ακρίβειας σχήματος εντοπίζονται και τίθενται ίσες με το μηδέν. Δήλωσαν ότι παρόλο που αυτή η διαδικασία μας εξασφαλίζει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες με το μηδέν για την ένταση της ακτινοβολίας, ορισμένες φορές προκαλούνταν αστάθειες της λύσης. Για την αντιμετώπισή τους στράφηκαν στη μη-μόνιμη εξίσωση ακτινοβολίας, για την επίλυση της οποίας χρησιμοποίησαν ένα δεύτερης τάξης ακρίβειας χρονικό σχήμα Runge-Kutta. Όσον αφορά την προσαρμογή του πλέγματος (grid adaptation) εφάρμοσαν την h-refinement προσέγγιση, η οποία εντάσσεται στην κατηγορία των μεθόδων πύκνωσης (grid refinement). Για το χειρισμό της επικάλυψης της γωνίας ελέγχου προστέθηκε η εναλλακτική της pixelation μεθόδου στην bold προσέγγιση. Τέλος, προτάθηκε ένας πεπλεγμένος τρόπος χειρισμού των οριακών συνθηκών σε αδιαφανείς και ιστροπικές επιφάνειες και συμμετρικά επίπεδα.

Δύο από τις παραπάνω αναφερθείσες μεθόδους ενσωματώθηκαν στον υπολογιστικό μας κώδικα. Πρώτα αναπτύξαμε τη μέθοδο των Albanakis & Bouris [Alb08] η οποία είναι μια αναλυτική μέθοδος, με εφαρμογή σε κοιλότητες με υψηλούς συντελεστές εκπομπής και περιορισμένο αριθμό ανακλάσεων μεταξύ των οριακών επιφανειών. Το μέσο θεωρείται ότι συμπεριφέρεται ως διαφανές. Αυτή η μέθοδος προγραμματίστηκε εύκολα αλλά βρέθηκε να είναι αρκετά ακριβή με όρους υπολογιστικού χρόνου και μνήμης κατά τη χρήση της με τη σειριακή έκδοση του κώδικα. Η δεύτερη μέθοδος έχει αναπτυχθεί σε κώδικα από τους Lygidakis & Nikolos ([Lyg12], [Lyg13]) και μας δόθηκε για να ενσωματωθεί στον επιλύτη μας στα πλαίσια της συνεργασίας μας σε ερευνητικό πρόγραμμα. Πρόκειται για μια κεντροκομβική ΜΠΟ, με εφαρμογή σε φαιό ρευστό, που απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει την ακτινοβολία. Το γεγονός ότι ο συγκεκριμένος κώδικας βασίζεται σε κεντροκομβικό και ακμοβασικό σχήμα διευκόλυνε σημαντικά την εισαγωγή του στον κώδικα ροής. Περισσότερες λεπτομέρειες για αυτές τις δύο μεθόδους δίνονται στο κεφάλαιο 3.

1.4. Δομή της εργασίας

Η δομή της παρούσας εργασίας έχει ως εξής:

- Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε ο σκοπός της διατριβής και η

βιβλιογραφική ανασκόπηση του αντικειμένου της διατριβής. Παρουσιάστηκε μια γενική περιγραφή των μηχανισμών μεταφοράς θερμότητας. Έπειτα, περιγράφηκαν εργασίες που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία και αφορούν στη μοντελοποίηση περιπτώσεων συναγωγής και ακτινοβολίας.

- Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο της εργασίας πάνω στο οποίο στηριχθήκαμε για την προσομοίωση της ροής ασυμπίεστου, συνεκτικού και Νευτώνειου ρευστού σε συνδυασμό με την μεταφορά θερμότητας με όλους τους δυνατούς μηχανισμούς (αγωγή, συναγωγή και ακτινοβολία).
- Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η αριθμητική μεθοδολογία. Ειδικότερα, παρουσιάζονται οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για τη χωρική και χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων. Αναλύονται επίσης τα μοντέλα για την ακτινοβολούμενη μεταφορά θερμότητας, οι οριακές συνθήκες και οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την διατήρηση της θερμοκρασίας σε ρεαλιστικές τιμές.
- Στο τέταρτο παρουσιάζεται η διαδικασία επικύρωσης του αναπτυχθέντος κώδικα. Συγκεκριμένα, επιλέχθηκαν περιπτώσεις στρωτής και τυρβώδους ανωστικής ροής, περιπτώσεις μεταφοράς θερμότητας αμιγώς με ακτινοβολία και περιπτώσεις συνδυασμένης μεταφοράς θερμότητας. Παρατίθεται επίσης η επίδραση της χρήσης δύο περιοριστών και συγκρίνονται οι μέθοδοι σύζευξης. Επιλύθηκαν περιπτώσεις με μεγάλο εύρος παραμέτρων εισόδου ούτως ώστε να εκτιμηθούν οι δυνατότητες του κώδικα.
- Στο πέμπτο κεφάλαιο ελέγχονται οι επιδόσεις του 2-Δ και 3-Δ παράλληλου επιλύτη. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η μεταβολή της επιτάχυνσης και του βαθμού απόδοσης της παραλληλοποίησης με το πλήθος των διεργασιών.
- Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η εφαρμογή του πλέον διαπιστωμένου ως αξιόπιστου επιλύτη για την πρόβλεψη της ροής του καπνού και του θερμοκρασιακού πεδίου σε περιπτώσεις πυρκαγιάς εντός αεριζόμενης σήραγγας. Γίνεται εμφανής η σημαντικότητα της μοντελοποίησης όλων των τρόπων μεταφοράς θερμότητας (συναγωγή, ακτινοβολία, αγωγή στο τοίχωμα) σε μια σειρά προσομοιώσεων.

- Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο δίνονται συνοπτικά τα σημαντικότερα ευρήματα, τα στοιχεία καινοτομίας της διατριβής και ορισμένες βελτιώσεις-επεκτάσεις που θα μπορούσαν να γίνουν στον αναπτυχθέντα κώδικα.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Μοντέλο

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται το μαθηματικό μοντέλο της διατριβής. Η ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου σε υπολογιστικό κώδικα, θα μας δώσει τη δυνατότητα προσομοίωσης συζευγμένων περιπτώσεων ροής και μεταφοράς θερμότητας με όλους του μηχανισμούς (αγωγή, συναγωγή και/ή ακτινοβολία). Οι εξισώσεις είναι διατυπωμένες σε Καρτεσιανές συντεταγμένες και με τανυστική μορφή για να είναι εύκολος ο διαχωρισμός της δισδιάστατης και τρισδιάστατης εκδοχής τους.

Οι εξισώσεις περιγράφουν τη μη-μόνιμη ασυμπίεστη στρωτή ή τυρβώδη ροή, συνεκτικού και Νευτώνειου ρευστού. Για την πρόβλεψη ανωστικών ροών εφαρμόζεται η προσέγγιση της άνωσης κατά Boussinesq [Bou07], ενώ για τη μοντελοποίηση της τύρβης υιοθετείται η προσέγγιση τυρβώδους συνεκτικότητας κατά Boussinesq [Bou07]. Η διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων Boussinesq συνίσταται στο σκοπό τους. Η πρώτη χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της άνωσης σε ασυμπίεστες ανωστικές ροές ενώ η δεύτερη για την πρόβλεψη τυρβωδών ροών βάσει της ιδέας της τυρβώδους συνεκτικότητας.

Οι εξισώσεις μέσης ροής, οι εξισώσεις της τύρβης και η εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας (EMA) παρατίθενται στην αδιάστατή τους μορφή. Δίνεται η φυσική σημασία των αδιάστατων παραμέτρων και τέλος οι εξισώσεις μέσης ροής και τύρβης παρουσιάζονται σε διανυσματική μορφή συμπεριλαμβανομένης και της τεχνητής συμπίεστότητας για την σύζευξη των πεδίων των πιέσεων και των ταχυτήτων.

Για την αδιαστατοποίηση των μεγεθών χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω κλίμακες αδιαστατοποίησης ([Col04], [Bra12]):

- για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες L_{ref}
- για τις ταχύτητες u_{ref}

- για το φυσικό χρόνο $t_{\text{ref}} = L_{\text{ref}} / u_{\text{ref}}$
- για την πυκνότητα ρ_{ref}
- για τη δυναμική συνεκτικότητα $\mu_{\text{ref}} = \mu$ (μοριακή δυναμική συνεκτικότητα)
- για την πίεση $P_{\text{ref}} = \rho_{\text{ref}} u_{\text{ref}}^2$
- για τη θερμοκρασία $\Delta T = T_h - T_c$ (διαφορά μεταξύ υψηλής και χαμηλής θερμοκρασίας)
- για τη μοριακή και τυρβώδη κινηματική συνεκτικότητα $\nu_{\text{ref}} = \nu$ (μοριακή κινηματική συνεκτικότητα)
- για τον ψευδοχρόνο της EMA $t_{r,\text{ref}} = L_{\text{ref}} / c$
- για την ένταση της ακτινοβολίας $I_{\text{ref}} = \sigma_B T_c^4$
- για την ακτινοβολούμενη ροή θερμότητας $Q_{\text{ref}} = \frac{k\Delta T}{L_{\text{ref}}}$
- για το συντελεστή απορρόφησης $\frac{1}{L_{\text{ref}}}$
- για το συντελεστή σκέδασης $\frac{1}{L_{\text{ref}}}$
- για την τυρβώδη κινητική ενέργεια u_{ref}^2
- για την καταστροφή της τύρβης $\frac{u_{\text{ref}}^3}{L_{\text{ref}}}$
- για το ρυθμό καταστροφή τύρβης $\frac{u_{\text{ref}}}{L_{\text{ref}}}$

Στη συνέχεια της εκτενούς περίληψης όλα τα μεγέθη θα δίνονται αδιαστατοποιημένα εκτός από τις περιπτώσεις όπου θα αναφέρεται ρητά ότι τα μεγέθη που δίνονται είναι διαστατά.

2.1 Εξισώσεις μέσης ροής

2.1.1 Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2-1)$$

όπου ο δείκτης $j=1, 2, 3$. Τα στοιχεία των Καρτεσιανών ταχυτήτων είναι $(u_1, u_2, u_3)=(u, v, w)$ και οι Καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $(x_1, x_2, x_3)=(x, y, z)$.

2.1.2 Εξισώσεις ορμής

1^η εκδοχή

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1 + \alpha_t}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \delta_{ik} \quad (2-2)$$

όταν η θερμοκρασία αναφοράς κατά την προσέγγιση Boussinesq είναι $T_o=T_c$.

2^η εκδοχή

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1 + \alpha_t}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \left(T - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} \quad (2-3)$$

όταν η θερμοκρασία αναφοράς κατά την προσέγγιση Boussinesq είναι $T_o = \frac{T_h + T_c}{2}$.

t είναι ο φυσικός χρόνος, p η στατική πίεση, α_t είναι η αδιάστατη τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα, T είναι η θερμοκρασία και δ_{ik} είναι το δέλτα του Kronecker. Ο δείκτης k λαμβάνει την τιμή 2 στις δύο διαστάσεις και την τιμή 3 στις τρεις διαστάσεις. Μέσω της σταθεράς k γίνεται εμφανές ότι η βαρύτητα υπάρχει στην y διεύθυνση στις δύο διαστάσεις και στην z διεύθυνση στις τρεις διαστάσεις.

2.1.3 Ενεργειακή εξίσωση

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(Tu_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\alpha_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + S_{\dot{q}} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla Q_r \quad (2-4)$$

όπου η αδιάστατη πηγή θερμότητας είναι

$$S_{\dot{q}} = \frac{\dot{q}_c}{\rho C_p} \frac{L_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}} \Delta T} \quad (2-5)$$

και η αδιάστατη απόκλιση της ακτινοβολίας ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της εκπεμπόμενης και απορροφούμενης ενέργειας ακτινοβολίας

$$\nabla Q_r = \frac{\tau}{\text{Pl}} \left[4 \left(\frac{T}{T_0^*} + 1 \right)^4 - \int_{4\pi} I d\omega \right] \quad (2-6)$$

\dot{q}_c είναι η ισχύς της πηγής θερμότητας ανά μονάδα όγκου, ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού στη θερμοκρασία αναφοράς, C_p είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση, τ είναι το οπτικό πάχος (αδιάστατος συντελεστής απορρόφησης ακτινοβολίας) και I είναι η ένταση της ακτινοβολίας.

2.2 Εξισώσεις μοντέλων τύρβης

2.2.1 Εξισώσεις μοντέλου τύρβης k-ε

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k \text{Re}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \varepsilon \quad (2-7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon \text{Re}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + [C_{\varepsilon 1} (P_k + C_{\varepsilon 3} G_k) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} \quad (2-8)$$

Οι δύο εξαρτημένες μεταβλητές αυτού του μοντέλου είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια k και η καταστροφή της τύρβης ε . Οι τιμές των σταθερών του μοντέλου είναι $\sigma_k=1$, $\sigma_\varepsilon=1,3$, $C_{\varepsilon 1}=1,44$, $C_{\varepsilon 2}=1,92$, $C_{\varepsilon 3}=1$, $C_\mu=0,09$. Για την τιμή της σταθεράς $C_{\varepsilon 3}$ έχουν προταθεί αρκετές προσεγγίσεις ([Bar94], [Wu00], [Xue01], [Kuy93], [Hua07], [Fle94], [Alb08]). Στις περιπτώσεις πυρκαγιάς στη σήραγγα, μόνο για $C_{\varepsilon 3}=1$ υπολογίστηκαν ρεαλιστικές τιμές για την τυρβώδη κινηματική συνεκτικότητα.

Οι όροι παραγωγής τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω διάτμησης και άνωσης είναι αντίστοιχα:

$$P_k = \frac{\alpha_t}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2-9)$$

$$G_k = - \frac{\alpha_t}{\text{Pr}_t} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^3} \frac{\partial T}{\partial x_j} \delta_{jk} \quad (2-10)$$

Η αδιάστατη τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα είναι $\alpha_t = \text{Re} \frac{c_\mu k^2}{\varepsilon}$.

2.2.2 Εξισώσεις μοντέλου τύρβης k- ω SST

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k \text{Re}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + G_k - \beta^* \omega k \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega \text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\gamma}{\alpha_t} \text{Re} P_k + \text{CD}_\omega + C_{\varepsilon 3} \frac{\gamma}{\alpha_t} \text{Re} G_k - \beta \omega^2 \quad (2-12)$$

Οι δύο εξαρτημένες μεταβλητές αυτού του μοντέλου είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια k και ο ρυθμός καταστροφής της τύρβης ω .

Οι τιμές των σταθερών αυτού του μοντέλου τύρβης υπολογίζονται με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των τιμών των σταθερών του Wilcox k- ω μοντέλου τύρβης και του μετασηματισμένου k- ε μοντέλου τύρβης. Αν ϕ_1 είναι οποιαδήποτε σταθερά του Wilcox k- ω , ϕ_2 οποιαδήποτε σταθερά του k- ε και ϕ η αντιστοιχούσα σταθερά του k- ω SST η σχέση μεταξύ τους είναι $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$, όπου η συνάρτηση ανάμειξης

είναι $F_1 = \tanh(\arg_1^4)$, $\arg_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega d}, \frac{500}{\text{Re} d^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_{\omega 2} k}{\text{CD}_{k\omega} d^2} \right)$. d είναι η

απόσταση κάθε κόμβου από το κοντινότερο τοίχωμα και ο όρος $\text{CD}_{k\omega}$ (cross diffusion) ορίζεται ως $\text{CD}_{k\omega} = \max \left(2 \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right)$. Ξεκινώντας από το

τοίχωμα η συνάρτηση ανάμειξης είναι ίση με τη μονάδα και σταδιακά τείνει προς το μηδέν.

Οι σταθερές του Wilcox k- ω μοντέλου είναι $\sigma_{k1}=1/0,85$, $\sigma_{\omega1}=2$, $\beta_1=0,0750$, $\alpha_1=0,31$, $\beta^*=0,09$, $\kappa=0,41$, $\gamma_1 = \beta_1/\beta^* - \sigma_{\omega1} \kappa^2/\sqrt{\beta^*} \approx 0.5532$.

Οι σταθερές του μετασχηματισμένου k- ϵ μοντέλου είναι $\sigma_{k2}=1$, $\sigma_{\omega2}=1/0,856$, $\beta_2=0,0828$, $\beta^*=0,09$, $\kappa=0,41$, $\gamma_2 = \beta_2/\beta^* - \sigma_{\omega2} \kappa^2/\sqrt{\beta^*} \approx 0.4404$.

Η τυρβώδης κινηματική συνεκτικότητα είναι $\alpha_t = \text{Re} \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, \Omega F_2)}$, όπου Ω είναι η απόλυτη στροβιλότητα (absolute vorticity).

Η συνάρτηση F2 είναι $F_2 = \tanh(\arg_2^2)$, $\arg_2 = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega d}, \frac{500}{\text{Re} d^2 \omega}\right)$.

2.2.3 Συναρτήσεις τοιχώματος

Για να επιτύχουμε γρηγορότερες προσομοιώσεις και χρήση λιγότερου αποθηκευτικού χώρου, υιοθετήσαμε σε ορισμένες περιπτώσεις συναρτήσεις τοιχώματος. Οι εκφράσεις των συναρτήσεων τοιχώματος ως προς τις διαστατές εξαρτημένες μεταβλητές είναι:

$$u^+ = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.5, & y^+ \geq 11.6 \\ y^+ & , y^+ \leq 11.6 \end{cases} \quad (2-13)$$

$$T^+ = \text{Pr} y^+ e^{-\Gamma} + [2.12 \ln(1 + y^+) + \beta(\text{Pr})] e^{-1/\Gamma} \quad (2-14)$$

$$\beta(\text{Pr}) = (3.85 \text{Pr}^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln(\text{Pr}), \quad \Gamma = \frac{0.01(\text{Pr} y^+)^4}{1 + 5 \text{Pr}^3 y^+} \quad (2-15)$$

Η αδιάστατη ταχύτητα ορίζεται ως $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$, όπου $u_\tau = \sqrt{\rho \tau_w}$ είναι η ταχύτητα τριβής. Η αδιάστατη απόσταση από το τοίχωμα είναι $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$. Για $y^+ \leq 11.6$ ο πρώτος κόμβος βρίσκεται εντός του στρωτού οριακού-υποστρώματος και για

$y^+ > 11.6$ στη λογαριθμική περιοχή. Η αδιάστατη θερμοκρασία $T^+ = \frac{T_w - T}{T_\tau}$

υπολογίζεται από την προτεινόμενη σχέση του Kader [Kad81] που ισχύει και στις δύο περιοχές του οριακού στρώματος για μεγάλο εύρος τιμών του αριθμού Prandtl. T_w είναι η διαστατή θερμοκρασία του τοιχώματος και $T_\tau = \frac{q_w}{\rho C_p u_\tau}$, όπου q_w είναι η διαστατή ροή θερμότητας στο τοίχωμα.

Οι διαστατές παράμετροι της τύρβης υπολογίστηκαν βάσει των παρακάτω εκφράσεων:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (2-16)$$

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (2-17)$$

$$\omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{C_\mu} \kappa y} \quad (2-18)$$

όπου $C_\mu=0.09$ και $\kappa=0.41$ (σταθερά von Karman).

2.3 Εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας (EMA)

$$\frac{\partial I}{\partial t_\tau} + \frac{\partial I}{\partial s} = -(\tau + \sigma_s)I + \frac{\tau}{\pi} \left(\frac{T}{T_o^*} + 1 \right)^4 + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I \Phi d\omega \quad (2-19)$$

Στην EMA η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ένταση της ακτινοβολίας I η οποία είναι συνάρτηση του χώρου \vec{r} και της γωνιακής διεύθυνσης \hat{s} . t_τ είναι ο φυσικός χρόνος, ο οποίος όμως στη διατριβή χρησιμοποιείται σαν ψευδοχρόνος της EMA.

\hat{s} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην s διεύθυνση της στερεάς γωνίας, τ είναι ο αδιάστατος συντελεστής απορρόφησης, σ_s ο αδιάστατος συντελεστής σκέδασης και Φ είναι η συνάρτηση σκέδασης.

2.4 Ερμηνεία αδιάστατων παραμέτρων

Μετά την εφαρμογή της αδιαστατοποίησης προέκυψαν οι παρακάτω αδιάστατες παράμετροι:

- Αριθμός Reynolds $Re = \frac{\rho_{ref} u_{ref} L_{ref}}{\mu_{ref}} = \frac{u_{ref} L_{ref}}{\nu_{ref}}$

- Αριθμός Prandtl $Pr = \frac{\mu_{ref} C_p}{k_t} = \frac{\nu_{ref}}{\alpha}$

όπου k_t είναι η θερμική αγωγιμότητα και α είναι η θερμική διάχυση του ρευστού.

- Αριθμός Grashof $Gr = \frac{L_{ref}^3 \rho_{ref}^2 g \beta \Delta T}{\mu_{ref}^2}$

- Αριθμός Planck $Pl = \frac{k \Delta T}{(L \sigma_B T_c^4)}$

- Λόγος αναφοράς θερμοκρασιών $T_o^* = \frac{T_c}{\Delta T}$

Ο αριθμός Re εκφράζει τη σχέση των δυνάμεων αδράνειας με τις δυνάμεις συνεκτικότητας. Για μικρούς Re οι συνεκτικές δυνάμεις κυριαρχούν των δυνάμεων αδράνειας και η ροή χαρακτηρίζεται ως στρωτή. Αντιθέτως, για υψηλούς Re οι δυνάμεις αδράνειας κυριαρχούν και η ροή χαρακτηρίζεται ως τυρβώδης.

Ο αριθμός Prandtl ορίζεται ως ο λόγος της διάχυσης ορμής προς τη θερμική διάχυση και εκφράζει τη σχέση μεταξύ των παχών του υδροδυναμικού και θερμικού οριακού στρώματος. Για Pr μεγαλύτερο της μονάδας το πάχος του θερμικού οριακού στρώματος είναι μικρότερο από το πάχος του υδροδυναμικού οριακού στρώματος. Για Pr ίσο με τη μονάδα τα πάχη των δύο στρωμάτων είναι ίσα και για Pr μικρότερο της μονάδας το θερμικό οριακό στρώμα είναι μεγαλύτερο [Κακ06].

Ο αριθμός Grashof εκφράζει το λόγο των δυνάμεων άνωσης προς τις συνεκτικές δυνάμεις. Για μικρούς Gr οι συνεκτικές δυνάμεις κυριαρχούν των ανωστικών και η ροή είναι στρωτή. Αντιθέτως, για υψηλούς Gr οι ανωστικές δυνάμεις υπερισχύουν

των συνεκτικών και η ροή γίνεται τυρβώδης.

Ο αριθμός Planck στη μεταφορά θερμότητας εκφράζει τη σχέση της μεταφοράς θερμότητας με αγωγή με τη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία. Για μικρούς PI η ακτινοβολία κυριαρχεί, ενώ για μεγάλες τιμές του PI υπερισχύει η αγωγή θερμότητας.

2.5 Διανυσματική μορφή εξισώσεων

Σε αυτή την ενότητα δίνονται οι εξισώσεις μέσης ροής και τύρβης σε διανυσματική μορφή μετά την εισαγωγή της τεχνητής συμπιεστότητας.

Σε διανυσματική μορφή οι εξισώσεις μέσης ροής είναι

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau} + E \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \nabla \vec{F}_{inv} - \nabla \vec{F}_{vis} = \vec{S} \quad (2-20)$$

όπου

$$E = \text{diag}(0, 1, 1, 1, 1) \quad (2-21)$$

το διάνυσμα εξαρτημένων μεταβλητών είναι

$$\vec{Q} = \begin{Bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \\ T \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

το διάνυσμα μη-συνεκτικών όρων είναι

$$\vec{F}_{inv} = \begin{Bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \\ uw \\ uT \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} \beta v \\ vu \\ v^2 + p \\ vw \\ vT \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} \beta w \\ wu \\ wv \\ w^2 + p \\ wT \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-23)$$

το διάνυσμα συνεκτικών όρων είναι

$$\vec{F}_{\text{vis}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ q_x \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ q_y \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ q_z \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-24)$$

και το διάνυσμα των όρων πηγής για την 1^η εκδοχή των εξισώσεων ορμής είναι

$$\vec{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr}{Re^2} T \delta_{2\kappa} \\ \frac{Gr}{Re^2} T \delta_{3\kappa} \\ S_q - \frac{1}{Re Pr} \nabla Q_r \end{Bmatrix} \quad (2-25)$$

Οι διατμητικές τάσεις είναι $\tau_{x_i x_j} = \frac{1 + \alpha_t}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ και οι ροές θερμότητας είναι

$$q_{x_j} = \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\alpha_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Ομοίως οι εξισώσεις για το standard k-ε μοντέλο τύρβης είναι

$$\frac{\partial \vec{Q}_t}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{Q}_t}{\partial t} + \nabla \vec{F}_{\text{inv},t} - \nabla \vec{F}_{\text{vis},t} = \vec{S}_t \quad (2-26)$$

όπου το διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών είναι

$$\vec{Q}_t = \begin{Bmatrix} k \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (2-27)$$

το διάνυσμα μη-συνεκτικών όρων είναι

$$\vec{F}_{\text{inv},t} = \begin{Bmatrix} uk \\ u\varepsilon \end{Bmatrix} \vec{i} + \begin{Bmatrix} vk \\ v\varepsilon \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} wk \\ w\varepsilon \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (2-28)$$

το διάνυσμα συνεκτικών όρων είναι

$$\vec{F}_{vis,t} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon Re} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{array} \right\} \vec{i} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon Re} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{array} \right\} \vec{j} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial z} \\ \frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon Re} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{array} \right\} \vec{k} \quad (2-29)$$

και το διάνυσμα των όρων πηγής είναι

$$\vec{S} = \left\{ \begin{array}{c} P_k + G_k - \varepsilon \\ [C_{\varepsilon 1}(P_k + C_{\varepsilon 3}G_k) - C_{\varepsilon 2}\varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} \end{array} \right\} \quad (2-30)$$

Οι εξισώσεις του k-ω SST μοντέλου τύρβης είναι

$$\frac{\partial \vec{Q}_t}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{Q}_t}{\partial t} + \nabla \vec{F}_{inv,t} - \nabla \vec{F}_{vis,t} = \vec{S}_t \quad (2-31)$$

όπου το διάνυσμα εξαρτημένων μεταβλητών είναι

$$\vec{Q}_t = \left\{ \begin{array}{c} k \\ \omega \end{array} \right\} \quad (2-32)$$

το διάνυσμα μη-συνεκτικών όρων είναι

$$\vec{F}_{inv,t} = \left\{ \begin{array}{c} uk \\ u\omega \end{array} \right\} \vec{i} + \left\{ \begin{array}{c} vk \\ v\omega \end{array} \right\} \vec{j} + \left\{ \begin{array}{c} wk \\ w\omega \end{array} \right\} \vec{k} \quad (2-33)$$

το διάνυσμα συνεκτικών όρων είναι

$$\vec{F}_{vis,t} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega Re} \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{array} \right\} \vec{i} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega Re} \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{array} \right\} \vec{j} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \frac{\partial k}{\partial z} \\ \frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega Re} \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{array} \right\} \vec{k} \quad (2-34)$$

και το διάνυσμα των όρων πηγής είναι

$$\vec{S} = \left\{ \begin{array}{c} P_k + G_k - \beta^* \omega k \\ \frac{\gamma}{\alpha_t} Re P_k + CD_\omega + C_{\varepsilon 3} \frac{\gamma}{\alpha_t} Re G_k - \beta \omega^2 \end{array} \right\} \quad (2-35)$$

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική Μεθοδολογία

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η αριθμητική μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του μαθηματικού μοντέλου που δόθηκε στο κεφάλαιο 2. Εφαρμόστηκε μια κεντροκομβική, πεπερασμένων όγκων τεχνική σε γενικά υβριδικά πλέγματα για όλες τις εξισώσεις (εξισώσεις μέσης ροής, τύρβης και μεταφοράς ακτινοβολίας). Ως εκ τούτου, όλες οι εξισώσεις ολοκληρώθηκαν στο ίδιο αριθμητικό πλέγμα. Η μεθοδολογία βασίζεται στην προσέγγιση της τεχνητής συμπίεστος για τις εξισώσεις μέσης ροής και τύρβης.

Ειδικότερα, παρουσιάζονται οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για τη χωρική και χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων μέσης ροής και τύρβης. Αναφέρονται οι δύο εναλλακτικές για τη μοντελοποίηση της ακτινοβολίας, οι οριακές συνθήκες και οι περιοριστές που χρησιμοποιήθηκαν. Πρέπει να αναφερθεί ότι στο υπόλοιπο της εκτενής περίληψης, γράφοντας εξισώσεις μέσης ροής εννοούμε την εξίσωση συνέχειας, τις εξισώσεις ορμής και την ενεργειακή εξίσωση.

3.1 Διακριτοποίηση υπολογιστικού χωρίου

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων διατήρησης υπό το πρίσμα της μεθόδου πεπερασμένων όγκων απαιτεί τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου σε αριθμητικό πλέγμα. Για την ολοκλήρωση των εξισώσεων είναι απαραίτητο να ορίσουμε όγκους ελέγχου.

Σε αυτή τη διατριβή μια κεντροκομβική τεχνική εφαρμόστηκε, που σημαίνει ότι οι εξαρτημένες μεταβλητές υπολογίζονται και αποθηκεύονται στους κόμβους του αριθμητικού πλέγματος. Κάθε κόμβος i συνδέεται με το δυαδικό του όγκο Ω_i , που είναι ο όγκος ελέγχου του. Για την κατασκευή του δυαδικού όγκου στις δύο διαστάσεις ενώνουμε τα μέσα των ακμών και τα κέντρα των κελιών που ανήκει ο κόμβος i και στις τρεις διαστάσεις ενώνουμε τις έδρες που ορίζονται από τα μέσα των ακμών, τα κέντρα των κελιών και των εδρών που ανήκει ο κόμβος i .

3.2 Χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων μέσης ροής

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις μέσης ροής, που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2, στους όγκους ελέγχου Ω_i και εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης στα χωρικά ολοκληρώματα των μη-συνεκτικών και συνεκτικών όρων έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega} \bar{Q} d\Omega + E \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{Q} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{inv} \cdot \hat{n} dS - \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{vis} \cdot \hat{n} dS = \int_{\Omega} \bar{S} d\Omega \quad (3-1)$$

Θεωρώντας πως οι τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών εντός του όγκου ελέγχου Ω_i είναι ομοιογενείς και ίσες με τις αντίστοιχες τιμές του κόμβου i έχουμε:

$$\frac{\partial(\bar{Q}_i \Omega_i)}{\partial \tau} + E \frac{\partial(\bar{Q}_i \Omega_i)}{\partial t} = \int_{\Omega} \bar{S} d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{inv} \cdot \hat{n} dS + \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{vis} \cdot \hat{n} dS = RHS_i \quad (3-2)$$

όπου RHS_i είναι ο όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3-2) που αντιστοιχεί στον κόμβο i και

$$\bar{F}_{inv} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \beta V_n \\ uV_n + n_x p \\ vV_n + n_y p \\ wV_n + n_z p \\ TV_n \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_{vis} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \tau_{zz} n_z \\ q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

όπου $V_n = un_x + vn_y + wn_z$ είναι η κάθετη ταχύτητα.

3.2.1 Υπολογισμός μη-συνεκτικών όρων

Για τον υπολογισμό των μη-συνεκτικών όρων αναπτύχθηκαν δύο ανάντη σχήματα.

Ο μη-συνεκτικός όρος της εξίσωσης (3-2) προσεγγίζεται αριθμητικά ως:

$$\oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{inv} \cdot \hat{n} dS \approx \sum_{j=1}^{nedge(i)} (\bar{F}_{inv})_{ij} \cdot \hat{n}_j \Delta S_j = FINV_i \quad (3-4)$$

όπου $(\bar{F}_{inv})_{ij}$ είναι το διάνυσμα των μη-συνεκτικών όρων υπολογισμένο στο μέσο της ακμής ij , \hat{n}_j είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην έδρα του όγκου ελέγχου Ω_i που συνδέεται με την ακμή ij .

Η πρώτη εναλλακτική για τον υπολογισμό των μη-συνεκτικών όρων βασίζεται στον προσεγγιστικό επιλύτη Riemann του Roe. Σύμφωνα με αυτό το σχήμα οι μη-συνεκτικές ροές σχηματίζονται από δεδομένα εκατέρωθεν της έδρας του όγκου ελέγχου, όπως δίνεται παρακάτω.

$$(\bar{F}_{inv})_{ij} \cdot \hat{n}_j = \frac{1}{2} \left(\bar{F}_{inv}(\bar{Q}_L) \cdot \hat{n} + \bar{F}_{inv}(\bar{Q}_R) \cdot \hat{n} \right) + \frac{1}{2} |\tilde{A}(\bar{Q}_L, \bar{Q}_R, \hat{n})| (\bar{Q}_L - \bar{Q}_R) \quad (3-5)$$

όπου $\bar{F}_{inv}(\bar{Q}_L)$ και $\bar{F}_{inv}(\bar{Q}_R)$ είναι το διάνυσμα των μη-συνεκτικών ροών αριστερά και δεξιά της έδρας του όγκου ελέγχου που συνδέεται με την ακμή ij. Η Ιακωβιανή των μη-συνεκτικών ροών, γνωστή ως μητρώο του Roe ορίζεται ως $\tilde{A} = \tilde{T} |\tilde{\Lambda}| \tilde{T}^{-1}$, όπου Λ είναι το διαγώνιο μητρώο με τις ιδιοτιμές του μητρώου του Roe, T είναι το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων της Ιακωβιανής και T^{-1} είναι ο αντίστροφος πίνακας του T.

Για την ικανοποίηση των ιδιοτήτων του Roe τα μητρώα με “~” (περισπωμένη) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό μέσο όρο των \bar{Q}_L και \bar{Q}_R [Tay91].

Η δεύτερη εναλλακτική είναι το ανάντη σχήμα IFUS:

$$\sum_{j=1}^{nedge(i)} (\bar{F}_{inv})_{ij} \cdot \hat{n}_j \Delta S_j = \sum_{j=1}^{nedge(i)} (V_{ne}^+ \bar{Q}_L + V_{ne}^- \bar{Q}_R)_{ij} \Delta S_j \quad (3-6)$$

όπου

$$V_{ne}^+ = \max(V_{ne}, 0), \quad V_{ne}^- = \min(V_{ne}, 0) \quad (3-7)$$

$$V_{ne} = u_e (n_x)_e + v_e (n_y)_e + w_e (n_z)_e \quad (3-8)$$

$$u_e = \frac{(u_L + u_R)}{2}, \quad v_e = \frac{(v_L + v_R)}{2}, \quad w_e = \frac{(w_L + w_R)}{2} \quad (3-9)$$

Ο δείκτης e χρησιμοποιείται για τις ποσότητες που αντιστοιχούν στην ακμή ij.

Για την ανακατασκευή των μεγεθών αριστερά και δεξιά της έδρας που απαιτείται και από τα δύο ανάντη σχήματα χρησιμοποιήθηκε είτε το δεύτερης τάξης σχήμα [Kal05]:

$$\bar{Q}_L = \bar{Q}_i + \frac{1}{2} \nabla \bar{Q}_i \cdot \vec{i}j \quad \text{και} \quad \bar{Q}_R = \bar{Q}_j - \frac{1}{2} \nabla \bar{Q}_j \cdot \vec{i}j \quad (3-10)$$

είτε το τρίτης τάξης σχήμα [Tai05]:

$$\bar{Q}_L = \bar{Q}_i + \frac{1}{2}[(1-k)\bar{j}\bar{j} \cdot \nabla \bar{Q}_i + k\bar{\Delta}_i^+] \text{ και } \bar{Q}_R = \bar{Q}_j - \frac{1}{2}[(1-k)\bar{j}\bar{j} \cdot \nabla \bar{Q}_j + k\bar{\Delta}_j^-] \quad (3-11)$$

όπου $\bar{\Delta}_i^+ = \bar{\Delta}_i^- = \bar{Q}_j - \bar{Q}_i$ και $k = \frac{1}{3}$. Οι κλίσεις $\nabla \bar{Q}_i$ και $\nabla \bar{Q}_j$ υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας είτε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων είτε τη μέθοδο Green-Gauss όπως παρουσιάζονται στο [Bra12].

Το πρώτο ανάντη σχήμα (επιλύτης Riemann του Roe) χρησιμοποιήθηκε όταν οι εξισώσεις μέσης ροής ήταν ισχυρά συζευγμένες. Το δεύτερο ανάντη σχήμα IFUS χρησιμοποιήθηκε όταν οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής ήταν ασθενώς συζευγμένες με την ενεργειακή εξίσωση. Έγινε σύγκριση των δύο μεθόδων σύζευξης και παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4. Το πρώτο ανάντη σχήμα με την ισχυρή σύζευξη έδειξε υπεροχή έναντι του δεύτερου με την ασθενή σύζευξη. Έτσι καταλήξαμε στην επιλογή του προσεγγιστικού επιλύτη Riemann του Roe για τη διακριτοποίηση των μη-συνεκτικών όρων.

3.2.2 Υπολογισμός συνεκτικών όρων

Για τον υπολογισμό των συνεκτικών όρων της ενεργειακής εξίσωσης χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία η μεθοδολογία που εφαρμόστηκε και για τις εξισώσεις ορμής, η οποία αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε στις εργασίες ([Bra12], [Vra12]).

3.2.3 Υπολογισμός όρων πηγής

Για τον υπολογισμό των όρων πηγής χρησιμοποιήθηκαν και συγκρίθηκαν δύο σχήματα. Επιλέχθηκε ως απλούστερο και ευσταθέστερο το σχήμα όπου θεωρούμε ότι η τιμή του όρου πηγής εντός του όγκου ελέγχου Ω_i είναι ομοιογενής και ίση με την τιμή του στον κόμβο i .

Τότε είναι:

$$\int_{\Omega} \bar{S} d\Omega = \bar{S}_i \Omega_i \quad (3-12)$$

3.3 Χωρική διακριτοποίηση εξισώσεων τύρβης

Η χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων τύρβης έγινε με παρόμοιο τρόπο με τις εξισώσεις μέσης ροής. Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις τύρβης στον όγκο ελέγχου Ω_i του κόμβου i , εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης στα ολοκληρώματα των μη-συνεκτικών και συνεκτικών όρων και θεωρώντας ότι οι τιμές των τυρβωδών μεταβλητών εντός του όγκου ελέγχου Ω_i είναι ίσες με τις αντίστοιχες τιμές του κόμβου i έχουμε:

$$\frac{\partial(\bar{Q}_{t,i}, \Omega_i)}{\partial \tau} + E \frac{\partial(\bar{Q}_{t,i}, \Omega_i)}{\partial t} = \int_{\Omega} \bar{S}_i d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{inv,t} \cdot \hat{n} dS + \oint_{\partial\Omega} \bar{F}_{vis,t} \cdot \hat{n} dS \quad (3-13)$$

όπου για το k-ε μοντέλο τύρβης οι μη-συνεκτικοί και συνεκτικοί όροι αντίστοιχα είναι:

$$\bar{F}_{inv,t} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} kV_n \\ \varepsilon V_n \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_{vis,t} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \left(\frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y + \frac{\partial k}{\partial z} n_z \right) \\ \frac{\sigma_\varepsilon + \alpha_t}{\sigma_\varepsilon Re} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} n_y + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} n_z \right) \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

και για το k- ω είναι:

$$\bar{F}_{inv,t} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} kV_n \\ \omega V_n \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_{vis,t} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_k + \alpha_t}{\sigma_k Re} \left(\frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y + \frac{\partial k}{\partial z} n_z \right) \\ \frac{\sigma_\omega + \alpha_t}{\sigma_\omega Re} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y + \frac{\partial \omega}{\partial z} n_z \right) \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

Για τον υπολογισμό των μη-συνεκτικών όρων των εξισώσεων τύρβης χρησιμοποιήθηκε το σχήμα IFUS. Σε αντίθεση με τις εξισώσεις μέσης ροής, για την ανακατασκευή των εξαρτημένων μεταβλητών αριστερά και δεξιά των εδρών του όγκου ελέγχου χρησιμοποιήθηκε πρώτης τάξης σχήμα γιατί οι μη-συνεκτικοί όροι δεν είναι οι κυρίαρχοι όροι στις εξισώσεις τύρβης [Men93].

$$\bar{Q}_{t,L} = \bar{Q}_{t,i} \quad \text{και} \quad \bar{Q}_{t,R} = \bar{Q}_{t,j} \quad (3-16)$$

Για τον υπολογισμό των συνεκτικών όρων των εξισώσεων τύρβης χρησιμοποιήθηκε η τεχνική που εφαρμόστηκε και στις εξισώσεις μέσης ροής.

Τέλος, για τον υπολογισμό των όρων πηγής χρησιμοποιήθηκε ξανά η προσέγγιση ότι η τιμή των όρων πηγής εντός του όγκου ελέγχου είναι ομοιογενής και ίση με την τιμή

στον κόμβο i .

$$\int_{\Omega} \bar{S}_i d\Omega = \bar{S}_{i,\Omega_i} \quad (3-17)$$

3.4 Χρονική διακριτοποίηση, διαδικασία επίλυσης

Για τη χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων μέσης ροής και τύρβης χρησιμοποιήθηκε μια πλήρως πεπλεγμένη διαδικασία ολοκλήρωσης των εξισώσεων. Ειδικότερα, για τη χρονοπροέλαση στο φυσικό χρόνο εφαρμόζουμε ένα πεπλεγμένο σχήμα δεύτερης τάξης πίσω διαφορών και στον ψευδοχρόνο ένα πεπλεγμένο σχήμα πρώτης τάξης Euler. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγουμε τους αυστηρούς περιορισμούς στην επιλογή του αριθμού CFL των ρητών σχημάτων ολοκλήρωσης.

Παρουσιάζεται η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων μέσης ροής η οποία είναι η ίδια για τις εξισώσεις τύρβης. Μετά τη χωρική και χρονική διακριτοποίηση και την εφαρμογή της μεθόδου γραμμικοποίησης Newton έχουμε προς επίλυση το σύστημα:

$$[A]^{n+1,k} \bar{\delta q} = \bar{b}^{n+1,k} \quad (3-18)$$

όπου

$$[A]^{n+1,k} = \frac{\Omega_i}{\Delta\tau_i} + E \frac{3\Omega_i}{2\Delta t} - \frac{\partial \text{RHS}_i^{n+1,k}}{\partial q} \quad (3-19)$$

$$\bar{b}^{n+1,k} = \text{RHS}_i^{n+1,k} - \Omega_i \left(\frac{q_i^k - Q_i^{n+1,m}}{\Delta\tau_i} \right) + E\Omega_i \frac{-3q_i^k + 4Q_i^n - Q_i^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3-20)$$

$$\bar{\delta q} = q^{k+1} - q^k \quad (3-21)$$

$\bar{\delta q}$ είναι το διάνυσμα μεταβολής των εξαρτημένων μεταβλητών μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων Newton k και $k+1$.

Για να περάσουμε από το ψευδοχρονικό βήμα m στο επόμενο βήμα $m+1$, εκτελούνται μία ή δύο επαναλήψεις Newton. Για να περάσουμε στο επόμενο φυσικό βήμα είτε εκτελείται ένας προκαθορισμένος αριθμός βημάτων στον ψευδοχρόνο είτε επιτυγχάνεται σύγκλιση στον ψευδοχρόνο. Ο υπολογισμός του τοπικού ψευδοχρονικού βήματος κάθε κόμβου i γίνεται με τις σχέσεις που έχουν προταθεί από

τους Kallinderis & Ahn [Kal96], [Kal05].

Οι εξισώσεις μέσης ροής και τύρβης είναι ασθενώς συζευγμένες μεταξύ τους. Σε κάθε βήμα Newton επιλύονται ξεχωριστά. Αρχικά επιλύονται οι εξισώσεις μέσης ροής και δίνουν στις εξισώσεις τύρβης το πεδίο ταχυτήτων και στη συνέχεια επιλύονται οι εξισώσεις τύρβης και δίνουν την τυρβώδη κινηματική συνεκτικότητα στις εξισώσεις μέσης ροής. Η ξεχωριστή επίλυση των εξισώσεων προτιμάται γιατί είναι ευκολότερη η ενσωμάτωση επιπλέον μοντέλων τύρβης και η χρήση διαφορετικών μεθόδων για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων [Bra12]. Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι η ασθενώς συζευγμένη επίλυση των εξισώσεων μέσης ροής και τύρβης είναι ευκολότερη προγραμματιστικά σε σχέση με την ισχυρώς συζευγμένη επίλυση η οποία δεν είναι κοινώς αποδεκτό ότι λειτουργεί καλύτερα ([Lee06a], [Bar98], [Liu96], [Lin97]).

Για να ενισχύσουμε τη διαγώνιο κυριαρχία που θα μας εξασφαλίσει την επίλυση του γραμμικού συστήματος έγινε γραμμικοποίηση του όρου πηγής της ενεργειακής εξίσωσης. Σε γραμμική μορφή ο όρος πηγής είναι:

$$\bar{S}_i^{k+1} = \bar{S}_i^k + \left(\frac{\partial S^-}{\partial T} \right)_i^k (T_i^{k+1} - T_i^k) \quad (3-22)$$

Από τους τρεις όρους του όρου πηγής κρατάμε τον δεύτερο που αντιστοιχεί στην ακτινοβολία, καθώς αυτός παίρνει αρνητικές τιμές και αποτελεί ρητή έκφραση της θερμοκρασίας. Τότε είναι:

$$\left(\frac{\partial S^-}{\partial T} \right)_i^k = - \left(\frac{16\tau}{\text{Re Pr Pr} T_0^*} \left(\frac{T}{T_0^*} + 1 \right)^3 \right)_i^k \quad (3-23)$$

3.5 Μοντελοποίηση της ακτινοβολίας

Για τη μοντελοποίηση της μεταφοράς θερμότητας με ακτινοβολία έχουν προταθεί πλήθος προσεγγίσεων στη βιβλιογραφία, ορισμένες από τις οποίες παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 1. Στον κώδικά μας ενσωματώθηκαν δύο από αυτές. Ακολουθεί στη συνέχεια μια σύντομη περιγραφή τους.

3.5.1 Μοντέλο γωνιακών παραγόντων

Το πρώτο μοντέλο ακτινοβολίας είναι ένα αναλυτικό μοντέλο γωνιακών παραγόντων που χρησιμοποιεί αλγεβρικές σχέσεις. Παρουσιάστηκε από τους Albanakis & Bouris [Alb08]. Είναι μια τρισδιάστατη μέθοδος η οποία μπορεί να εφαρμοστεί και στις δύο διαστάσεις με την κατάλληλη επιβολή οριακών συνθηκών συμμετρίας. Αυτό το μοντέλο έχει εφαρμογή σε κτίρια και σήραγγες με υψηλούς αριθμούς εκπομπής τοιχωμάτων ($\epsilon > 0,8$), περιορισμένο αριθμό ανακλάσεων μεταξύ των τοιχωμάτων και για μη-συμμετέχων (διαφανές) ρευστό. Για τον υπολογισμό των γωνιακών παραγόντων χρησιμοποιούνται αλγεβρικές σχέσεις κατάλληλες για τις οριακές έδρες Καρτεσιανού πλέγματος. Αυτή η μέθοδος είναι εύκολη στον προγραμματισμό της. Ωστόσο, βρέθηκε να είναι αρκετά ακριβή σε υπολογιστικό χρόνο και μνήμη, όταν εφαρμόστηκε με τη σειριακή έκδοση του κώδικα. Ειδικότερα, για N οριακές έδρες,

απαιτείται ο υπολογισμός και η αποθήκευση $\frac{N^2 - N}{2}$ γωνιακών παραγόντων και

$\frac{N^2 - N}{2}$ γεωμετρικών παραγόντων. Οι γωνιακοί παράγοντες και οι γεωμετρικοί

παράγοντες αποθηκεύτηκαν με οικονομικό τρόπο σε δύο διανύσματα.

Η ακτινοβολία μεταξύ δύο οριακών επιφανειών m και n χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο είναι:

$$q_{m,n} = h_{m,n} A_n (T_m - T_n) \quad (3-24)$$

όπου ο συντελεστής ακτινοβολίας $h_{m,n}$ είναι:

$$h_{m,n} = (T_m^2 + T_n^2)(T_m + T_n) \left\{ \frac{\frac{\epsilon_n \epsilon_m \sigma F_{n \rightarrow m}}{[1 - (1 - \epsilon_n)(1 - \epsilon_m)F_{n \rightarrow m}^2 A_n / A_m]} + \epsilon_n \epsilon_m \sigma A_m \sum_{i=1}^N \frac{(1 - \epsilon_i) F_{n \rightarrow i} F_{m \rightarrow i}}{A_i [1 - (1 - \epsilon_n)(1 - \epsilon_m)(1 - \epsilon_i) F_{n \rightarrow i} F_{i \rightarrow m} F_{m \rightarrow n}]} \right\} \quad (3-25)$$

Στην άθροιση για τον υπολογισμό του συντελεστή ακτινοβολίας εξαιρούνται οι επιφάνειες m και n .

Μεταξύ δύο οριακών εδρών m και n ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις που κάνουν γρηγορότερους τους υπολογισμούς:

$$q_{m,n} = -q_{n,m} \quad \text{και} \quad h_{m,n} = h_{n,m} A_m / A_n \quad (3-26)$$

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι οι όροι εντός της αγκύλης που περιέχουν ακριβές αθροίσεις εξαρτώνται μόνο από τη γεωμετρία του υπολογιστικού χωρίου (γεωμετρικοί παράγοντες). Ως εκ τούτου, υπολογίζονται μια φορά πριν την κυρίως υπολογιστική διαδικασία. Κατά τη διάρκεια της υπολογιστικής διαδικασίας υπολογίζονται οι συντελεστές $h_{m,n}$ χρησιμοποιώντας το τρέχον θερμοκρασιακό πεδίο και τους γεωμετρικούς παράγοντες.

Για κάθε οριακή έδρα n , η ακτινοβολούμενη ροή θερμότητας υπολογίζεται από την άθροιση:

$$q_n = \sum_{m=1}^N q_{m,n} \quad (3-27)$$

Γενικά, ο υπολογισμός των γεωμετρικών παραγόντων είναι υπολογιστικά απαιτητικός. Ωστόσο, όταν το υπολογιστικό χωρίο διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας Καρτεσιανό πλέγμα (ορθογώνια παραλληλόγραμμα για οριακές έδρες) και περιέχει τοιχώματα που είναι παράλληλα ή κάθετα μεταξύ τους, οι γωνιακοί παράγοντες υπολογίζονται γρηγορότερα χρησιμοποιώντας αναλυτικές σχέσεις που παρουσιάστηκαν από τον Howell [How01]. Επιπροσθέτως, λαμβάνοντας υπόψη την σχέση αμοιβαιότητας για τους γωνιακούς παράγοντες $A_n F_{n \rightarrow m} = A_m F_{m \rightarrow n}$ το υπολογιστικό φορτίο μειώνεται περαιτέρω.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η συγκεκριμένη μεθοδολογία ισχύει για διαφανές ρευστό. Άρα, η θερμική ακτινοβολία λαμβάνεται υπόψη μόνο μεταξύ των οριακών εδρών. Η οριακή συνθήκη σε κάθε οριακό κόμβο i αδιαβατικού τοιχώματος σε διαστατή μορφή είναι:

$$k(\hat{n} \cdot \vec{\nabla} T_i) + (q_{\text{rad}})_i = 0 \quad (3-28)$$

και εφαρμόζεται είτε έμμεσα στον υπολογισμό της οριακής συνεκτικής ροής είτε ρητά. k είναι η θερμική αγωγιμότητα του ρευστού και \hat{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα.

3.5.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων (ΜΠΟ)

Η δεύτερη μέθοδος για την ακτινοβολία έχει παρουσιαστεί και αναπτυχθεί σε κώδικα

από τους Lygidakis & Nikolos. Είναι μια τρισδιάστατη ΜΠΟ κατάλληλη για φαϊό ρευστό, που απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει είτε ισοτροπικά είτε ανισοτροπικά την ακτινοβολία. Υιοθετεί μια κεντροκομβική και ακμοβασική προσέγγιση η οποία είναι συμβατή με το δικό μας επιλύτη ροής. Έτσι, η εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας ολοκληρώνεται στο ίδιο πλέγμα με τις υπόλοιπες εξισώσεις. Εφαρμόζει το σχήμα step που είναι αντίστοιχο των ανάντη σχημάτων για τη ροή για να συνδέσει την ένταση της ακτινοβολίας στο μέσο της έδρας του όγκου ελέγχου με αυτή στους κόμβους. Για την περίπτωση επικάλυψης της γωνίας ελέγχου υπάρχει η δυνατότητα επιλογής μεταξύ της bold προσέγγισης και της pixelation μεθόδου. Είναι ένα δεύτερης τάξης χωρικό και χρονικό σχήμα και για την αποφυγή υποεκτιμήσεων και υπερεκτιμήσεων της έντασης της ακτινοβολίας υπάρχει η δυνατότητα επιλογής ενός εκ των περιοριστών van Albada-van Leer και Min-Mod. Σε περίπτωση εντοπισμού αρνητικών εντάσεων ακτινοβολίας εφαρμόζεται μια fix-up διαδικασία και αυτές όπου εντοπιστούν τίθενται ίσες με μηδέν.

Για την ψευδοχρονική χρονοπροέλαση χρησιμοποιείται μια δεύτερης τάξης ακρίβειας τεσσάρων βημάτων Runge-Kutta μέθοδος.

3.6 Οριακές συνθήκες

3.6.1 Εξισώσεις μέσης ροής

Σε αυτή την υποενότητα περιγράφονται οι οριακές συνθήκες των εξισώσεων μέσης ροής.

Στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου ορίζουμε το διάνυσμα των ταχυτήτων και τη θερμοκρασία. Η πίεση προκύπτει από τον ισολογισμό της ροής.

Στην έξοδο του υπολογιστικού χωρίου επιβάλλεται συγκεκριμένη πίεση και προκύπτουν η ταχύτητες και η θερμοκρασία.

Στα στερεά τοιχώματα επιβάλλονται συνθήκες μη-ολίσθησης που σημαίνει ότι έχουμε μηδενικές ταχύτητες. Η πίεση υπολογίζεται από την επίλυση της ροής. Για τη θερμοκρασία είτε έχει συγκεκριμένη τιμή (Dirichlet συνθήκη) είτε επιβάλλεται συγκεκριμένη ροή θερμότητας σε αδιαβατικό τοίχωμα (Neumann συνθήκη). Όταν η ακτινοβολία ή/και η αγωγή στο τοίχωμα λαμβάνονται υπόψη η ροή θερμότητας είναι

διάφορη του μηδενός, ενώ είναι ίση με μηδέν όταν δεν λαμβάνονται υπόψη. Η συνθήκη Dirichlet επιβάλλεται ρητά, ενώ η συνθήκη Neumann επιβάλλεται έμμεσα στον υπολογισμό της συνεισφοράς των οριακών κόμβων.

Στα όρια συμμετρίας η κάθετη σε αυτά ταχύτητα είναι μηδενική. Οι συμμετρικές οριακές συνθήκες επιβάλλονται έμμεσα ([Κου98], [Βρα12]). Όταν υπολογίζουμε τη συνεισφορά των οριακών κόμβων αμελούμε το συνεκτικό διάνυσμα ροής και υπολογίζουμε το μη-συνεκτικό διάνυσμα ροής για κάθετη ταχύτητα στο τοίχωμα V_n μηδενική.

3.6.2 Εξισώσεις τύρβης

Στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου τίθενται συνθήκες Dirichlet ρητά για τις μεταβλητές τύρβης.

Στην έξοδο του υπολογιστικού χωρίου τα μεγέθη της τύρβης υπολογίζονται.

Στα στερεά τοιχώματα όταν χρησιμοποιείται το χαμηλών-Re k- ω SST μοντέλο τύρβης οι μεταβλητές της τύρβης υπολογίζονται από τις Dirichlet οριακές συνθήκες

$$k = 0 \quad \text{και} \quad \omega = 10 \frac{6}{\beta_1 \text{Re}(\Delta y)^2}, \quad \text{όπου } \Delta y \text{ είναι η αδιάστατη απόσταση από τον}$$

πρώτο κόμβο από το τοίχωμα και $\beta_1=0,0750$. Όταν εφαρμόζονται συναρτήσεις τοιχώματος οι μεταβλητές τύρβης ορίζονται από τις παρακάτω εκφράσεις σε διαστατή μορφή:

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{και} \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}, \quad \text{για το k-}\varepsilon \text{ μοντέλο τύρβης ή}$$

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{and} \quad \omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{C_\mu} \kappa y}, \quad \text{για το k-}\omega \text{ μοντέλο τύρβης}$$

Στα όρια συμμετρίας αμελείται το διάνυσμα των συνεκτικών ροών όπως γίνεται και για τις εξισώσεις μέσης ροής και το διάνυσμα των μη-συνεκτικών ροών υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη ότι η κάθετη ταχύτητα είναι μηδενική.

3.6.3 Εξίσωση Μεταφοράς Ακτινοβολίας (EMA)

Στην είσοδο και στην έξοδο (ανοικτά όρια) θεωρούμαι ότι έχουμε συντελεστή εκπομπής ίσο με τη μονάδα (μελανά σώματα) και σταθερή θερμοκρασία ίση με του περιβάλλοντος.

Τα στερεά τοιχώματα θεωρούνται ότι είναι αδιαφανή και ότι εκπέμπουν και ανακλούν ισοτροπικά την ακτινοβολία, δηλαδή με την ίδια ένταση προς όλες τις διευθύνσεις. Όταν ο συντελεστής εκπομπής είναι ίσος με τη μονάδα το τοίχωμα μόνο εκπέμπει την ακτινοβολία, ενώ για τιμές του συντελεστή εκπομπής μικρότερες της μονάδας εκπέμπει και ανακλά ταυτόχρονα την ακτινοβολία.

Στα όρια συμμετρίας η κάθετη σε αυτά ροή θερμότητας λόγω ακτινοβολίας είναι ίση με μηδέν.

3.7 Περιοριστές

Η εφαρμογή πρώτης τάξης σχημάτων ανακατασκευής εισάγει υψηλές ποσότητες αριθμητικής διάχυσης που μπορεί να οδηγήσει σε μη-ρεαλιστικές λύσεις. Υπάρχουν δύο εναλλακτικές για να αντιμετωπίσουμε αυτή την αδυναμία. Η πρώτη είναι να χρησιμοποιήσουμε πυκνότερα πλέγματα. Όσο πιο πυκνό είναι το αριθμητικό πλέγμα τόσο μικρότερη και η διάχυση, αλλά απαιτείται και μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος και μνήμη. Η δεύτερη εναλλακτική είναι η εισαγωγή σχημάτων υψηλότερης τάξης ακρίβειας. Όμως παρόλο που τα υψηλότερης τάξης σχήματα μειώνουν την αριθμητική διάχυση, μπορεί να οδηγήσουν σε ταλαντώσεις, ειδικά σε περιοχές ασυνεχειών, όπως κοντά σε κύματα κρούσης, και σε περιοχές κακού υπολογιστικού πλέγματος ([Kou98], [Swe84]). Σε τέτοιες περιπτώσεις τα καθαρά σχήματα υψηλής τάξης μπορεί να οδηγήσουν σε αστάθειες ή μη-ρεαλιστικές λύσεις.

Η βασική ιδέα πίσω από τη χρήση των περιοριστών είναι να βοηθήσουν στη διατήρηση της μονοτονίας του σχήματος ανακατασκευής, ελέγχοντας τη χωρική παράγωγο σε ρεαλιστικά πλαίσια. Η επιλογή του κατάλληλου περιοριστή εξαρτάται από το είδος του προβλήματος και γίνεται μετά από δοκιμές.

Στη δική μας εργασία εφαρμόστηκαν δύο περιοριστές για την ανακατασκευή των εξαρτημένων μεταβλητών που είναι απαραίτητη για τις μη-συνεκτικές ροές και για

την ανακατασκευή της έντασης της ακτινοβολίας στη ΜΠΟ. Αυτοί οι περιοριστές είναι οι van Albada-van Leer και Min-Mod [Bla01].

Ένα σημαντικό μειονέκτημα των περιοριστών είναι ότι καθυστερούν ή μπορεί και να σταματήσουν τη σύγκλιση σε ένα συγκεκριμένο βαθμό κάτι το οποίο είναι πιθανότερο να συμβεί όταν οι περιοριστές είναι μη-διαφορίσιμες συναρτήσεις [Ven93]. Αυτό το φαινόμενο είναι εμφανές στο κεφάλαιο 4 όπου γίνεται σύγκριση της σύγκλισης με τη χρήση ή όχι περιοριστών στην περίπτωση της ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα. Οι περιοριστές χρησιμοποιήθηκαν και στις περιπτώσεις πυρκαγιάς στη σήραγγα, όπου και πάλι δημιούργησαν προβλήματα στη σύγκλιση. Ως εκ τούτου, οι περιοριστές απομακρύνθηκαν ως επιλογή για τον υπολογισμό των μη-συνεκτικών όρων, αλλά αποτελούν επιλογή για την ανακατασκευή της έντασης της ακτινοβολίας.

Κεφάλαιο 4

Επικύρωση της Αριθμητικής Μεθοδολογίας

Στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάζουμε ορισμένες αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις που επιλύθηκαν για την επικύρωση του αναπτυχθέντος επιλύτη. Αυτές οι περιπτώσεις είναι 2-Δ ή 3-Δ, μόνιμες ή μη-μόνιμες, στρωτές ή τυρβώδεις, με την επίδραση της ακτινοβολίας ή όχι. Όλες οι περιπτώσεις επιλύθηκαν χρησιμοποιώντας την ισχυρή σύζευξη των εξισώσεων μέσης ροής. Καταλήξαμε στην υπεροχή της ισχυρά συζευγμένης επίλυσης μετά την σύγκρισή της με την ασθενώς συζευγμένη επίλυση η οποία παρουσιάζεται παρακάτω. Επίσης, μελετήθηκε και παρουσιάζεται η επίδραση των περιοριστών.

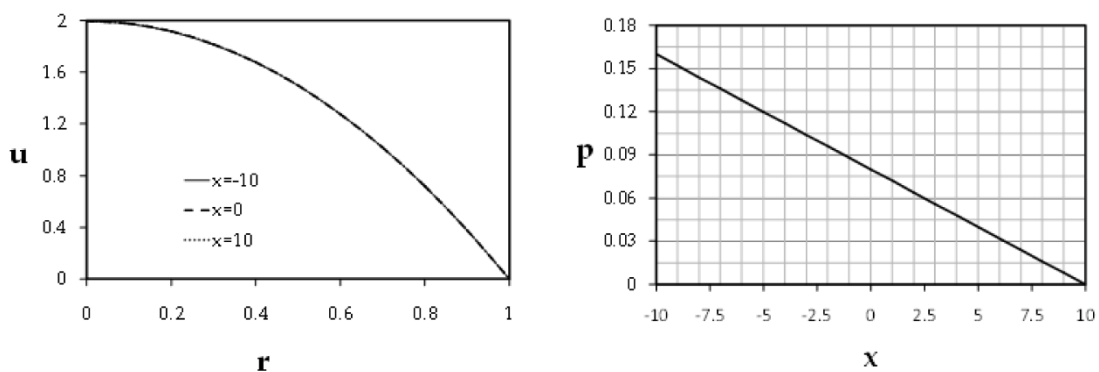
4.1 Στρωτές ροές

4.1.1 Πρόβλημα Graetz

Πρώτα από όλα παρουσιάζεται ένα πρόβλημα Graetz. Πρόκειται για πρόβλημα εξαναγκασμένης συναγωγής εντός αγωγού ακτίνας 1 και μήκους 20. Το ρευστό εισέρχεται στον αγωγό με ομοιόμορφο θερμοκρασιακό προφίλ ($T_c=0$) και παραβολικό προφίλ ταχυτήτων πλήρως διαμορφωμένης ροής ($u(r)=2(1-r^2)$, $v=w=0$). Στα τοιχώματα του αγωγού η θερμοκρασία είναι $T_c=0$ για $x \leq 0$, $T_h=1$ για $x > 0$ και επικρατούν συνθήκες μη-ολίσθησης ($u=v=w=0$). Στη διατομή εξόδου του αγωγού έχει επιβληθεί σταθερή μηδενική πίεση.

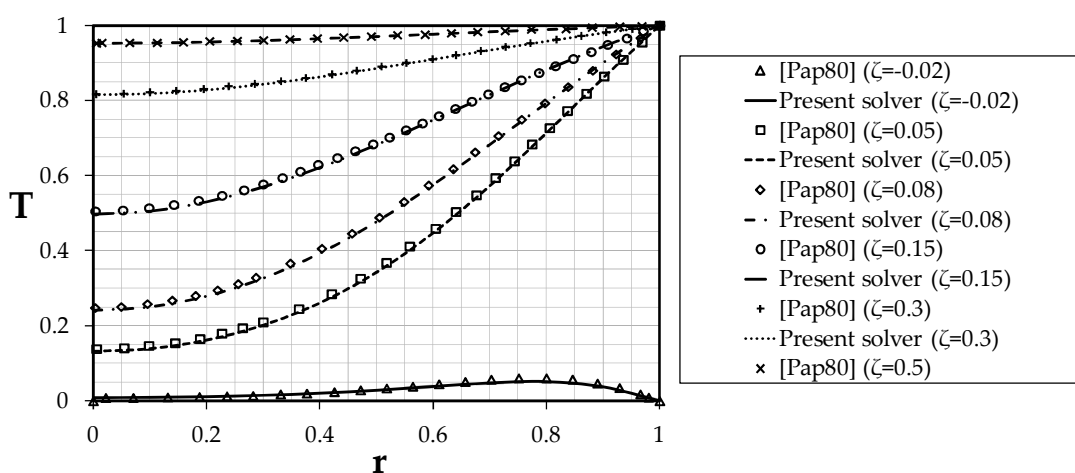
Όπως αναφέρθηκε η ροή είναι πλήρως διαμορφωμένη, το οποίο σημαίνει ότι το προφίλ των ταχυτήτων είναι παραβολικό και κατά το μήκος του αγωγού πρέπει να παραμένει παραβολικό. Επιπροσθέτως, πρέπει να υπάρχει γραμμική πτώση της αξονικής πίεσης σύμφωνα με το νόμο του Poiseuille, καθώς οι εξισώσεις ορμής και η ενεργειακή εξίσωση δεν είναι πεπλεγμένες στην περίπτωση της εξαναγκασμένης συναγωγής. Στο σχήμα 4-1 δίνεται το προφίλ των ταχυτήτων σε τρεις θέσεις κατά το μήκος του αγωγού και η αξονική πτώση πίεσης. Τα προφίλ των ταχυτήτων συμπίπτουν με αυτό της εισόδου και η πτώση πίεσης είναι γραμμική όπως

περιμέναμε.

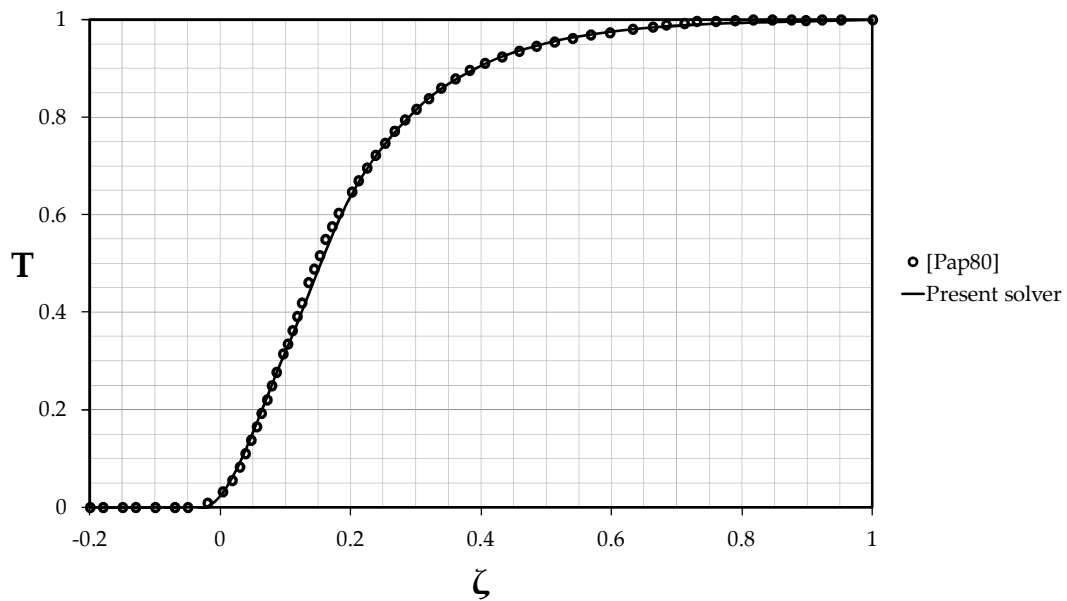


Σχήμα 4-1. Προφίλ ταχυτήτων σε τρεις διαφορετικές θέσεις κατά το μήκος του αγωγού (αριστερά) και αξονική πτώση πίεσης κατά το μήκος του αγωγού (δεξιά).

Στο σχήμα 4-2 συγκρίνονται τα ακτινικά προφίλ των θερμοκρασιών με τα αναλυτικά αποτελέσματα των Papoutsakis et al. [Pap80] σε διάφορες αξονικές θέσεις ζ , όπου η θέση ζ ορίζεται ως $\zeta = \frac{x}{Pe}$. Η θερμοκρασία κατά το μήκος του άξονα δίνεται και συγκρίνεται στο σχήμα 4-3.



Σχήμα 4-2. Ακτινικό θερμοκρασιακό προφίλ σε διάφορες αξονικές θέσεις ζ . Σύγκριση με την αναλυτική λύση της βιβλιογραφίας [Pap80].

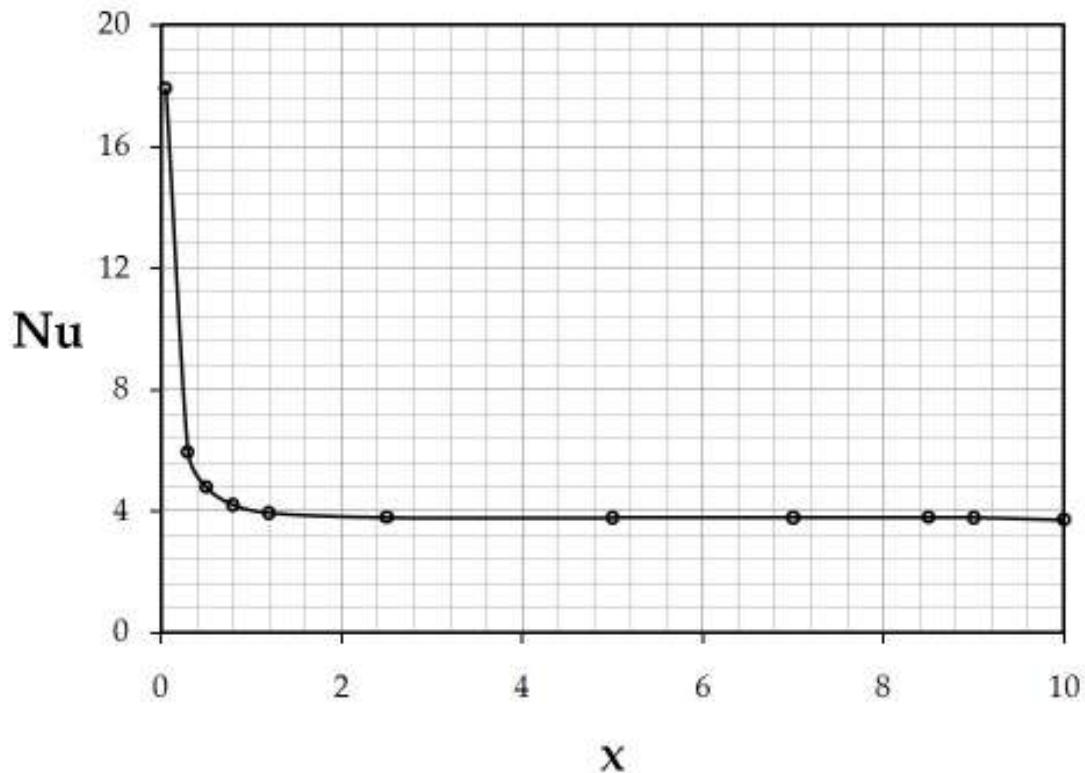


Σχήμα 4-3. Αξονικό θερμοκρασιακό προφίλ.

Ο αριθμός Nusselt ορίζεται για αυτό το πρόβλημα ως $Nu = -2 \frac{\partial T / \partial r |_{r=1}}{(T_b - T_h)}$, όπου η

μέση (average ή bulk) θερμοκρασία είναι $T_b = 2 \int_{r=0}^{r=1} ru(r)T(r)dr$. Η ασυμπτωτική τάση

του αριθμού Nu είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων Graetz. Στο σχήμα 4-4 δίνεται ο αριθμός Nu κατά το μήκος του αγωγού. Στην έξοδο του αγωγού παίρνει την τιμή 3,73. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο αριθμός Nu έδειξε ιδιαίτερη ευαισθησία στην τιμή της μέσης θερμοκρασίας πλησιάζοντας προς την έξοδο του αγωγού.

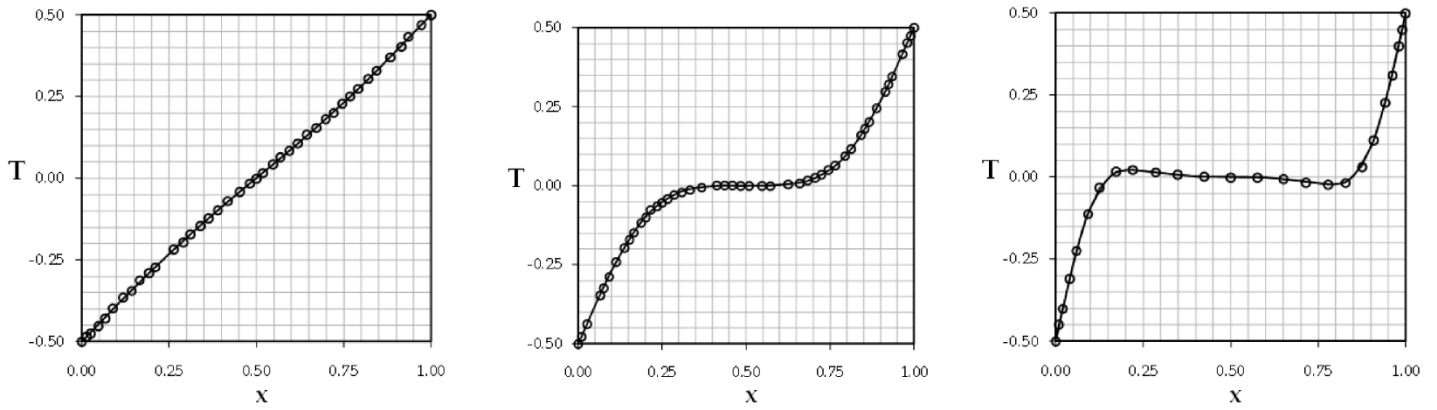


Σχήμα 4-4. Αριθμός Nusselt συναρτήσει της αξονική θέσης του αγωγού.

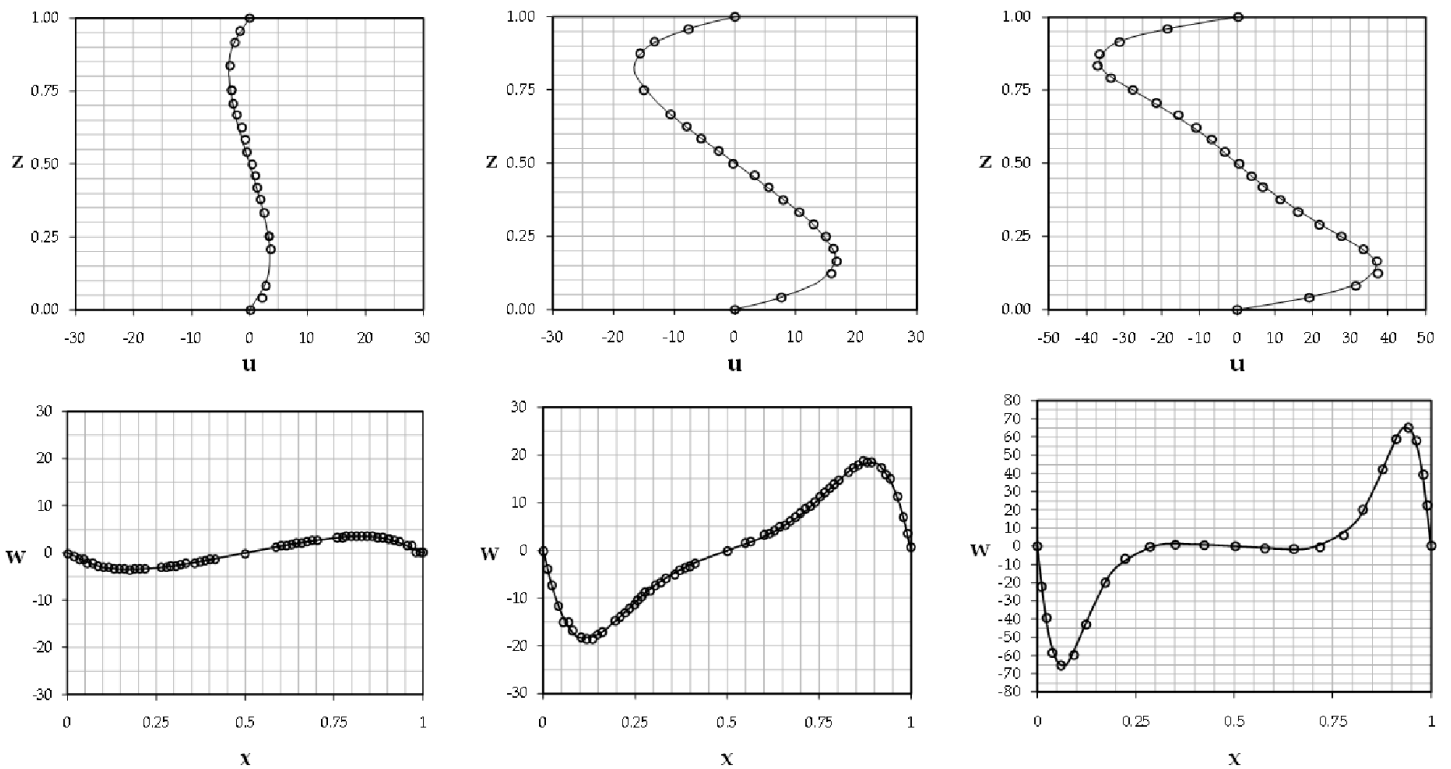
4.1.2 Ανωστική ροή σε κυβική κοιλότητα

Η περίπτωση της ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές στο παρελθόν ([Tri00], [Lo07], [Rav08]). Έχουμε μια κλειστή κυβική κοιλότητα ακμής W με ρευστό εκτεθειμένο σε θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ δύο κατακόρυφων τοιχωμάτων και τέσσερα αδιαβατικά τοιχώματα. Ειδικότερα η θερμοκρασία για $x=1$ (θερμό τοίχωμα) είναι $T_h=0.5$ και για $x=0$ (ψυχρό τοίχωμα) είναι $T_c=-0.5$. Επιλύθηκε η συγκεκριμένη περίπτωση για τους αριθμούς Rayleigh $10^3, 10^4, 10^5$.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται και συγκρίνονται με τα υπολογιστικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας [Rav08] στα σχήματα 4-5 και 4-6.



Σχήμα 4-5. Σύγκριση των θερμοκρασιακών προφίλ για $y=z=0,5$. $Ra=10^3$ (αριστερά), $Ra=10^4$ (μέση), $Ra=10^5$ (δεξιά) (ο: [Rav08], συνεχής γραμμή: παρών επιλύτης).



Σχήμα 4-6. Σύγκριση θερμοκρασιακών προφίλ. Προφίλ u ταχύτητας για $x=y=0,5$ (πάνω γραμμή). Προφίλ w ταχύτητας για $y=z=0,5$ (κάτω γραμμή). $Ra=10^3$ (αριστερή στήλη), $Ra=10^4$ (μεσαία στήλη), $Ra=10^5$ (δεξιά στήλη) (ο: [Rav08], συνεχής γραμμή: παρών επιλύτης).

Οι μέγιστες τιμές των ταχυτήτων και ο αριθμός Nu ($Nu = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dy dz$) στο θερμό τοίχωμα παρουσιάζονται στον πίνακα 4-1 και στον πίνακα 4-2 αντίστοιχα.

Ταχύτητες	Ra=10 ³			Ra=10 ⁴			Ra=10 ⁵		
	[Tri00]	[Lo07]	Παρών επιλύτης	[Tri00]	[Lo07]	Παρών επιλύτης	[Tri00]	[Lo07]	Παρών επιλύτης
u _{max}	3.5435	3.5227	3.5255	16.7198	16.5312	16.7108	43.9037	43.6877	43.7705
v _{max}	0.1733	0.1726	0.1694	2.15657	2.1092	2.1143	9.6973	9.3720	9.4812
w _{max}	3.5446	3.5163	3.5312	18.9835	18.6971	18.8822	71.0680	70.6267	71.2915

Πίνακας 4-1. Σύγκριση μεγίστων τιμών ταχυτήτων με άλλους ερευνητές.

Ra	[Tri00]	[Lo07]	[Rav08]	Παρών επιλύτης
10 ³	1.0700	1.0710	1.0713	1.0713
10 ⁴	2.0542	2.0537	2.0591	2.0659
10 ⁵	4.3370	4.3329	4.3570	4.3932

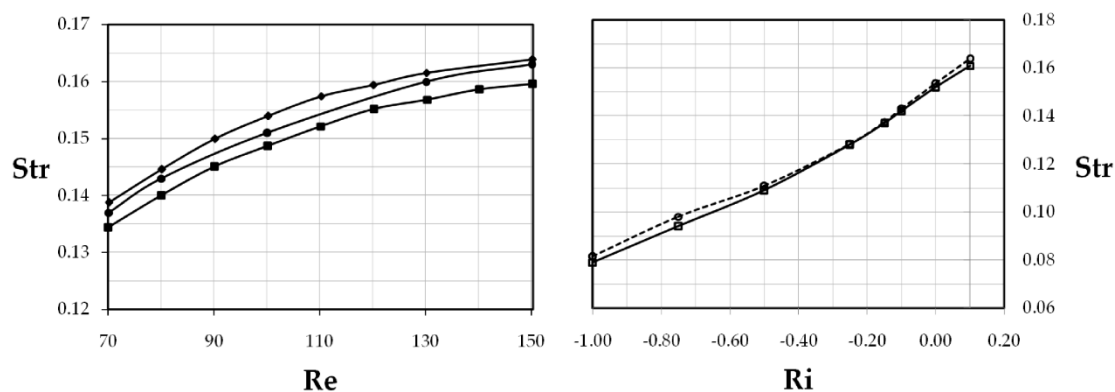
Πίνακας 4-2. Σύγκριση αριθμού Nu με άλλους ερευνητές.

4.1.3 Μη-μόνιμη μικτή συναγωγή γύρω από αγωγό τετραγωνικής διατομής

Για να αξιολογήσουμε τις δυνατότητες του σχήματος διακριτοποίησης φυσικού χρόνου του προταθέντος επιλύτη, προσομοιώθηκε η 2-Δ περίπτωση της μικτής συναγωγής γύρω από κύλινδρο τετραγωνικής διατομής.

Σε αυτή την περίπτωση ο κύλινδρος τετραγωνικής διατομής θερμαίνεται ή ψύχεται με σταθερή θερμοκρασία $T_h=1$ και είναι εκτεθειμένος σε σταθερή και ομοιόμορφη ανάντη ταχύτητα και θερμοκρασία ($u=0, v=1, T_c=0$). Στο αριστερό και δεξιό όριο του υπολογιστικού χωρίου έχουν επιβληθεί συνθήκες συμμετρίας. Η πίεση είναι μηδενική στην έξοδο. Αυτή η ροή είναι περιοδική με τη συχνότητα (αριθμός Str) να εξαρτάται από τον αριθμό Richardson.

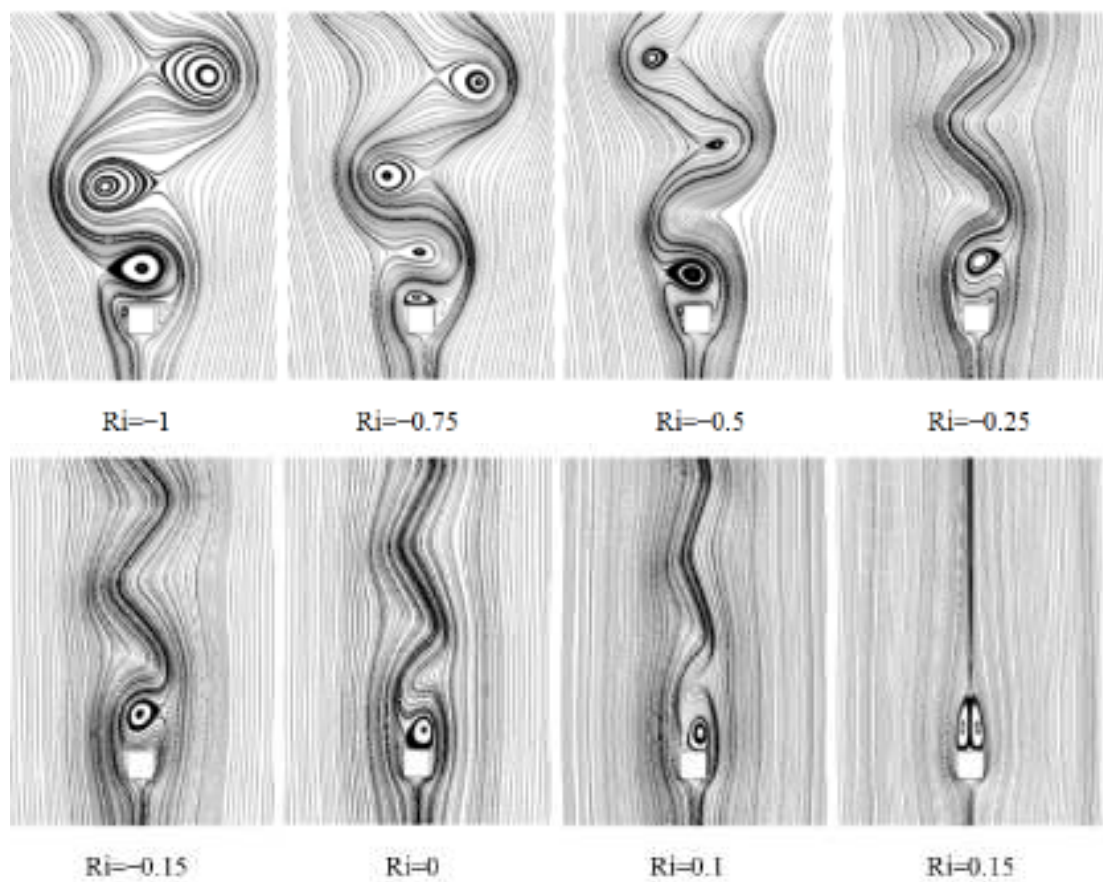
Στο σχήμα 4-7 παρουσιάζεται ο αριθμός Str για Re μεταξύ του 70 και του 150 χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τα φαινόμενα άνωσης ($Ri=0$) και συγκρίνεται με τα υπολογιστικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας ([Rob99], [Sha04b]). Το σχήμα 4-7 επίσης παρουσιάζει την εξάρτηση του αριθμού Str με τον Ri για $Re=100$ και γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας [Sha04b].



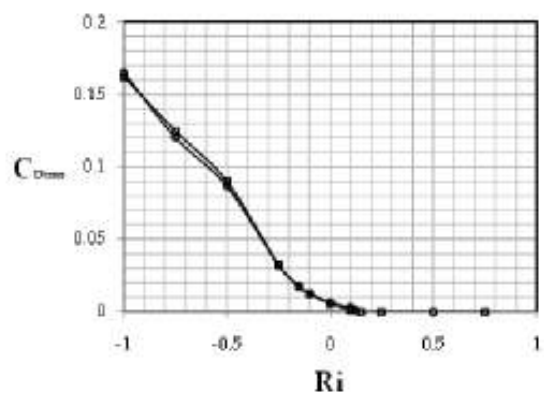
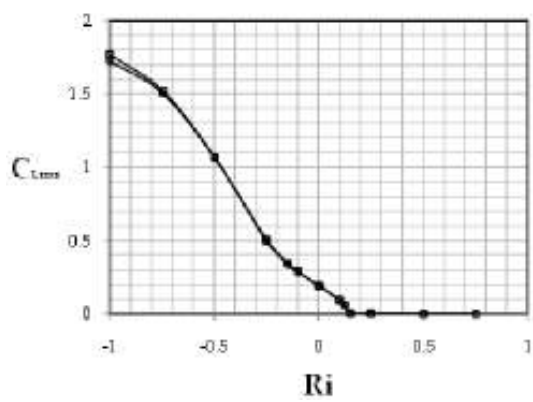
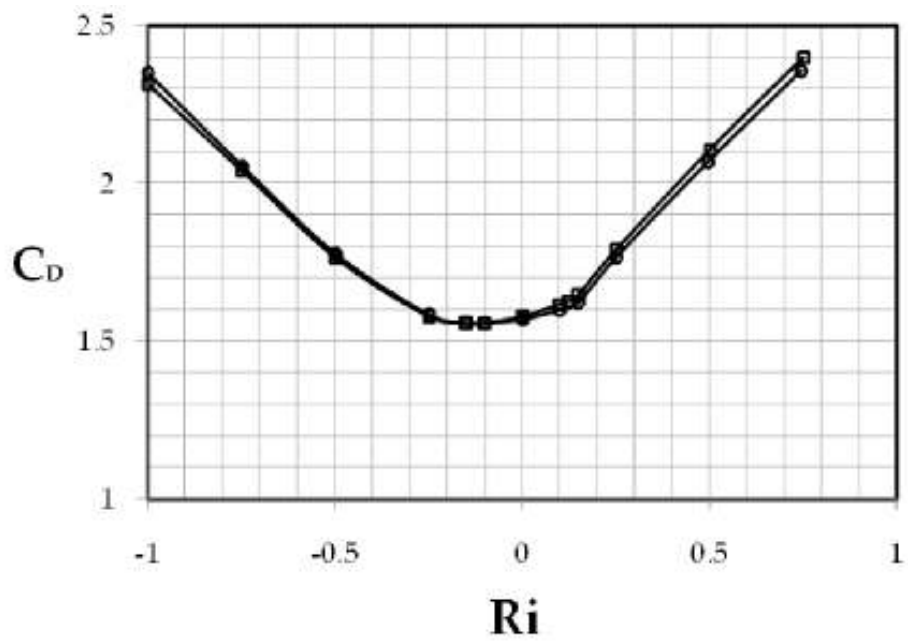
Σχήμα 4-7. Σύγκριση του Str συναρτήσει του Re, όταν $Ri=0$ (αριστερά) (♦:[Rob99], ■:[Sha04], ●: παρών επιλύτης). Σύγκριση του Str συναρτήσει του Ri, όταν $Re=100$ (δεξιά) (ο:[Sha04], □: παρών επιλύτης).

Στο σχήμα 4-8 παρουσιάζονται οι γραμμές ροής για διάφορους Ri. Είναι εμφανές ότι μειώνοντας τον αριθμό Ri η περιοχή του ομόρρου αυξάνει σε πλάτος. Αυξάνοντας τον αριθμό Ri η περιοχή του ομόρρου μειώνεται σε πλάτος και για $Ri=0,15$ η ροή

γίνεται μόνιμη. Στο σχήμα 4-9 δίνεται η τιμή του συντελεστή αντίστασης C_D και οι rms τιμές των διαταραχών του συντελεστή αντίστασης και της άνωσης με τον αριθμό Ri για $Re=100$. Είναι εμφανές ότι υπάρχει μια τιμή του Ri κοντά στο $-0,15$ όπου ο συντελεστής αντίστασης λαμβάνει την ελάχιστη του τιμή. Επιπροσθέτως, οι rms τιμές μηδενίζονται για Ri μεγαλύτερους ή ίσους με $0,15$, που σημαίνει ότι η ροή έχει γίνει μόνιμη.



Σχήμα 4-8. Γραμμές ροής για διάφορους αριθμούς Ri .

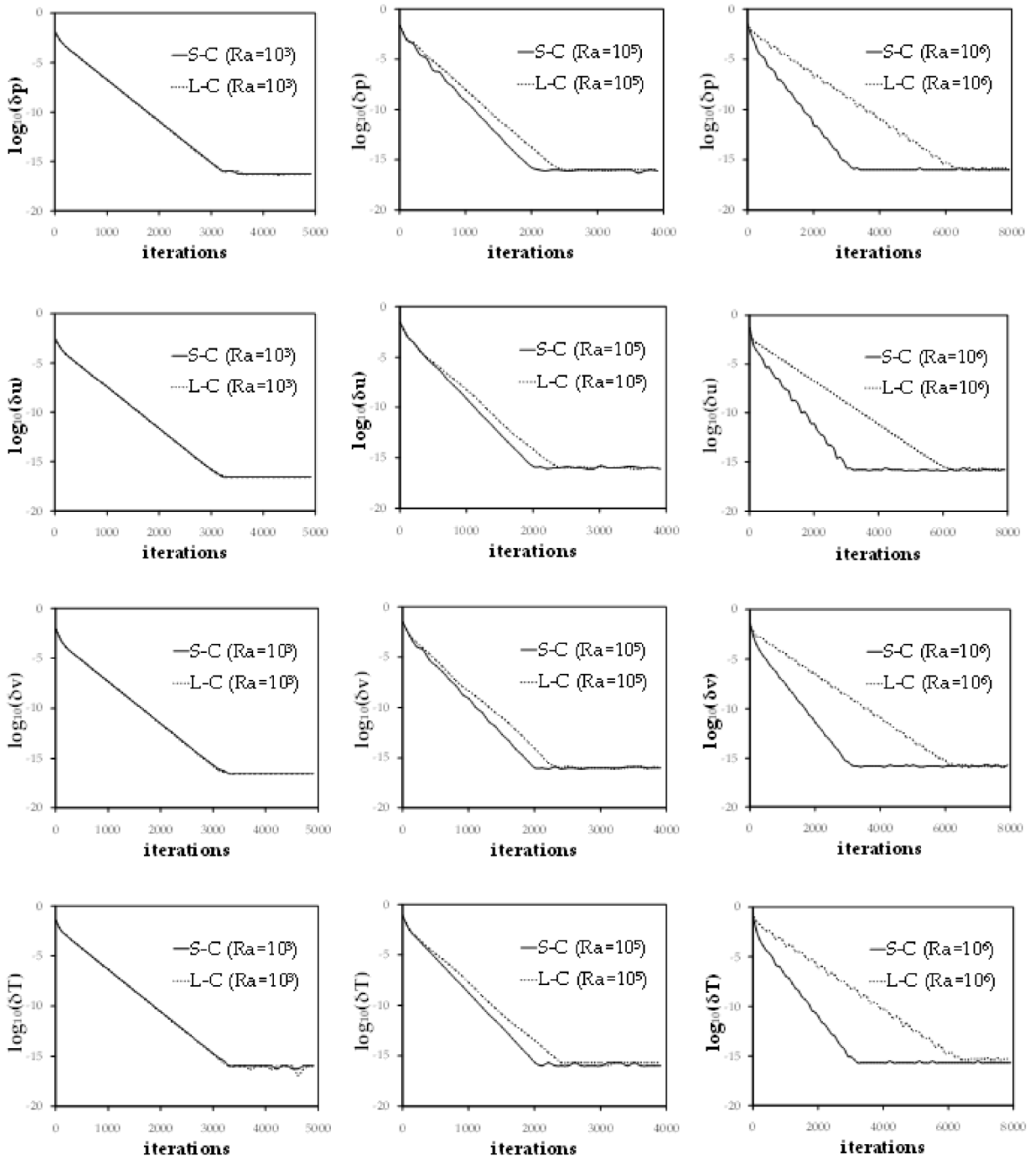


Σχήμα 4-9. Συντελεστής αντίστασης C_D και rms τιμές των διακυμάνσεων του συντελεστή αντίστασης και άνωσης με τον αριθμό Ri για $Re=100$ (ο: [Sha04], □ παρών επιλύτης).

4.1.4 Σύγκριση μεθόδων σύζευξης εξισώσεων

Σε αυτή την υποενότητα παρουσιάζουμε τη σύγκριση των δύο μεθόδων σύζευξης, όσον αφορά το ρυθμό σύγκλισης και την ευστάθειά τους. Όταν χρησιμοποιείται το σχήμα του Roe οι εξισώσεις επιλύονται ισχυρά συζευγμένες (strongly coupled - S-C) δηλαδή έχουμε ταυτόχρονη επίλυση όλων των εξισώσεων μέσης ροής, ενώ όταν χρησιμοποιείται το σχήμα IFUS οι εξισώσεις επιλύονται ασθενώς συζευγμένες (loosely coupled - L-C). Στην ασθενώς συζευγμένη επίλυση των εξισώσεων αρχικά επιλύονται οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής για συγκεκριμένο θερμοκρασιακό πεδίο. Έπειτα, επιλύεται η ενεργειακή εξίσωση για το πεδίο ταχυτήτων που έχει προκύψει. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι συγκλίσεως στον ψευδοχρόνο.

Οι δύο προαναφερθείσες μέθοδοι συγκρίθηκαν στην περίπτωση της ανωστικής ροής σε τετραγωνική κοιλότητα. Αυτή η περίπτωση ουσιαστικά αποτελεί την 2-Δ εκδοχή της περίπτωσης της ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα. Τα δύο κατακόρυφα τοιχώματα βρίσκονται σε θερμοκρασιακή διαφορά και τα οριζόντια τοιχώματα είναι αδιαβατικά. Ο αριθμός Ra πήρε τιμές από 10^3 μέχρι 10^6 . Τα τρεξίματα έγιναν σαν μόνιμα, δηλαδή θέτοντας ένα υπερβολικά μεγάλο φυσικό χρονικό βήμα, αριθμό CFL=100 και εκτελώντας επαναλήψεις μόνο στον ψευδοχρόνο. Στο σχήμα 4-10 παρουσιάζεται το ιστορικό σύγκλισης στον ψευδοχρόνο για τις δύο μεθόδους. Στην περίπτωση του $Ra=10^3$ οι δύο μέθοδοι σύζευξης παρήγαγαν περίπου τους ίδιους ρυθμούς σύγκλισης. Ωστόσο, με την αύξηση του αριθμού Ra η S-C επίλυση απαιτεί λιγότερα βήματα σε σχέση με την L-C. Για το συγκεκριμένο πεδίο ροής οι διαφορές μεταξύ των μεγεθών για τις δύο μεθόδους ήταν αμελητέες. Συγκεκριμένα, για τις μέγιστες και ελάχιστες u και v ταχύτητες, που προβλέφθηκαν από τις δύο μεθόδους οι διαφορές ήταν μικρότερες του 0,3%.



Σχήμα 4-10. Ιστορικό σύγκλισης στον ψευδοχρόνο για $Ra=10^3$ (αριστερή στήλη), $Ra=10^5$ (μεσαία στήλη) και $Ra=10^6$ (δεξιά στήλη).

Η L-C επίλυση απαιτεί λιγότερο χρόνο CPU. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι λιγότερο απαιτητικός ο υπολογισμός των μη-συνεκτικών όρων και των επαναλήψεων Jacobi. Στον πίνακα 4-3 δίνονται οι χρόνοι CPU που απαιτήθηκαν για κάθε προσομοίωση. Το κριτήριο σύγκλισης ήταν οι διορθώσεις μεταξύ δύο διαδοχικών ψευδορχρονικών βημάτων για όλα τα μεγέθη να πιάσουν την ακρίβεια μηχανής (machine zero). Για την περίπτωση του $Ra=10^6$ η S-C μέθοδος έδωσε μια επιτάχυνση ίση με 1,255 σε σχέση με τη L-C μέθοδο.

Ra	L-C	S-C
10^3	106.75 s	174.99 s
10^5	78.75 s	109.44 s
10^6	211.75 s	168.72 s

Πίνακας 4-3. Χρόνος CPU σε δευτερόλεπτα για κάθε προσομοίωση χρησιμοποιώντας τις L-C και S-C μεθόδους.

Η ίδια σύγκριση έγινε και για την περίπτωση της ανωστικής ροής στην κυβική κοιλότητα. Εκεί διαπιστώθηκε ότι με την S-C επίλυση των εξισώσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υψηλότερους αριθμούς CFL άρα να επιτύχουμε ακόμα γρηγορότερη σύγκλιση. Επίσης, διαπιστώθηκε ότι η L-C επίλυση απαιτεί πυκνότερα αριθμητικά πλέγματα για να συγκλίνει.

4.1.5 Επίδραση περιοριστών

Η χρήση των περιοριστών γίνεται ούτως ώστε να διατηρήσουμε τη μονοτονία των υψηλής τάξης σχημάτων, ελέγχοντας τις χωρικές παραγώγους εντός ρεαλιστικών ορίων. Ωστόσο, ένα σημαντικό μειονέκτημα των περιοριστών είναι ότι καθυστερούν ή ακόμα και σταματούν τη σύγκλιση σε κάποιο βαθμό [Ven93]. Έγινε έλεγχος της απόδοσης των περιοριστών van Albada-van Leer και Min-Mod. Εφαρμόσαμε αυτούς τους περιοριστές σε συνδυασμό με το δεύτερης τάξης σχήμα ανακατασκευής και τους συγκρίναμε ως προς το ρυθμό σύγκλισης με το δεύτερης τάξης σχήμα ανακατασκευής χωρίς τη χρήση περιοριστή.

Η σύγκριση έγινε για την περίπτωση της ανωστικής ροής εντός κυβικής κοιλότητας και για $Ra=10^6$. Οι προσομοιώσεις διενεργήθηκαν για υψηλό χρονικό βήμα, αριθμό CFL=100 και επαναλήψεις μόνο στον ψευδοχρόνο. Παρατηρήθηκε ότι η χρήση των περιοριστών σταμάτησε τη σύγκλιση και οι διορθώσεις παρουσίασαν ταλαντώσεις. Οι περιοριστές επίσης χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση πυρκαγιάς στη σήραγγα για την ανακατασκευή των εξαρτημένων μεταβλητών μέσης ροής δημιουργώντας το ίδιο πρόβλημα. Ως εκ τούτου, οι περιοριστές αφαιρέθηκαν ως επιλογή για την ανακατασκευή των εξαρτημένων μεταβλητών μέσης ροής.

4.2 Τυρβώδεις ροές

4.2.1 Ανωστική ροή σε κοιλότητες

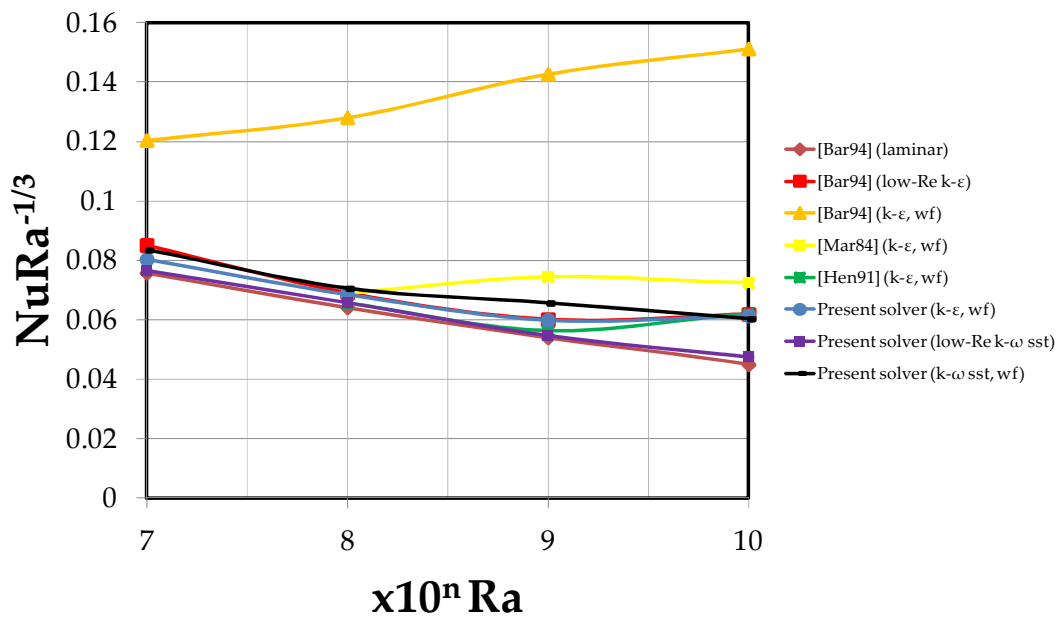
Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της ανωστικής ροής σε κοιλότητες για αριθμούς Ra από 10^7 - 10^{10} που σύμφωνα με τη βιβλιογραφία οδηγούν σε τυρβώδεις ροές [Eld65]. Θα γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με την εφαρμογή των μοντέλων τύρβης στους 2-Δ και 3-Δ επιλύτες. Αρχικά, υπολογίστηκε ο αριθμός Nusselt για τη 2-Δ περίπτωση της ανωστικής ροής σε τετραγωνική κοιλότητα. Μετά την επιβεβαίωση της καλής λειτουργίας στις 2-Δ επιλύθηκε η 3-Δ συμμετρική περίπτωση και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα για τις δύο περιπτώσεις.

Τα μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιήθηκαν ήταν το standard k-ε μοντέλο με συναρτήσεις τοιχώματος, το χαμηλών-Re k-ω SST και το k-ω SST μοντέλο με συναρτήσεις τοιχώματος. Σε όλα τα μοντέλα ο όρος παραγωγής τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω άνωσης συμπεριελήφθη μόνο στην εξίσωση για το k.

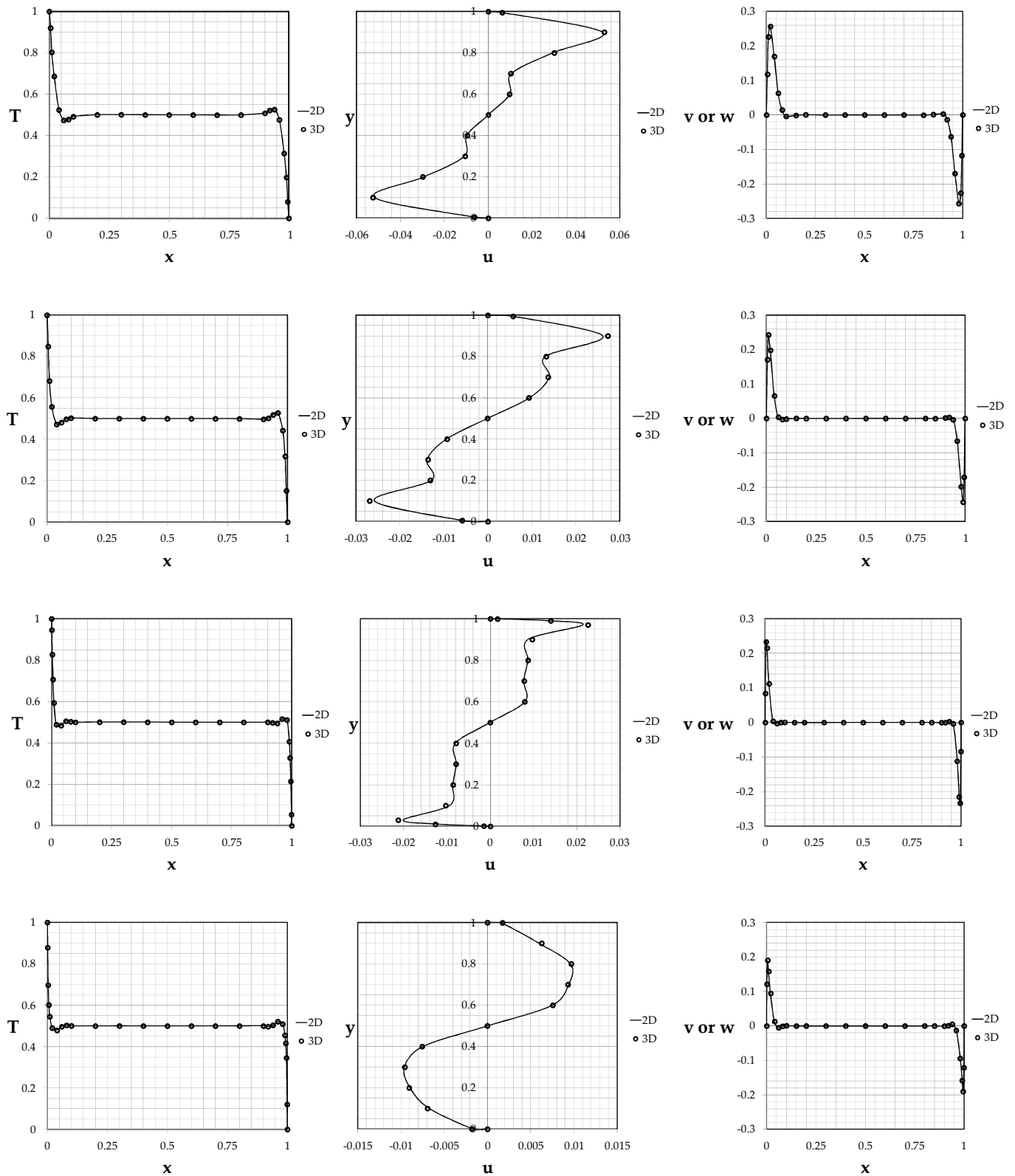
Το τρισδιάστατο πλέγμα χρησιμοποιήθηκε κάνοντας εξώθηση (extrusion) του 2-Δ πλέγματος στην τρίτη διεύθυνση. Το δισδιάστατο πλέγμα αποτελούνταν από τετράπλευρα κοντά στα τοιχώματα και τρίγωνα. Μετά την εξώθηση στην τρίτη διάσταση δημιουργήθηκαν εξάεδρα και πρίσματα. Στα πλευρικά επίπεδα $y=y_{\min}$ και $y=y_{\max}$ της τρίτης διάστασης επιβλήθηκαν συνθήκες συμμετρίας.

Στο σχήμα 4-11 παρουσιάζεται ο αριθμός Nu και συγκρίνεται με τα αποτελέσματα άλλων ερευνητών. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματά μας είναι ικανοποιητικά κοντά

στα αποτελέσματα των Markatos & Pericleous [Mar84] και Henkes et al. [Hen91] όταν εφαρμόζονται τα μοντέλα τύρβης standard k-ε και k-ω SST με συναρτήσεις τοιχώματος. Ο αριθμός Nu που υπολογίστηκε με το χαμηλών-Re k-ω SST βρίσκεται περισσότερο κοντά στα αποτελέσματα των Barakos et al. [Bar94] που προέκυψαν με την υπόθεση στρωτής ροής. Όντως χρησιμοποιώντας το χαμηλών-Re k-ω SST υπολογίστηκαν μικρές τιμές για την τυρβώδη κινηματική συνεκτικότητα. Ωστόσο, οι διαφορές για τον αριθμό Nu δεν ήταν μεγαλύτερες από τα αποτελέσματα των Barakos et al. που προέκυψαν με το k-ε μοντέλο τύρβης και διαφορετικές από τις δικές μας συναρτήσεις τοιχώματος. Στο σχήμα 4-12 παρουσιάζουμε και συγκρίνουμε τα προφίλ ταχυτήτων και θερμοκρασιών για τη 2-Δ και 3-Δ περίπτωση. Παρατηρείται ικανοποιητική συμφωνία.



Σχήμα 4-11. Μέσος αριθμός Nu στο θερμό τοίχωμα σαν συνάρτηση του αριθμού Ra.



Σχήμα 4-12. Σύγκριση των 2-Δ και 3-Δ αποτελεσμάτων. Θερμοκρασιακό προφίλ (αριστερή στήλη), προφίλ u ταχύτητας (μεσαία στήλη), προφίλ v ταχύτητας (δεξιά στήλη). $Ra=10^7$ (1^η γραμμή), $Ra=10^8$ (2^η γραμμή), $Ra=10^9$ (3^η γραμμή), $Ra=10^{10}$ (4^η γραμμή).

4.3 Μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία

Για την αξιολόγηση του τμήματος του κώδικα που αναφέρεται στη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία με τη ΜΠΟ επιλύθηκαν περιπτώσεις αναφοράς που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία. Η εφαρμογή της ΜΠΠ ελέγχτηκε στην περίπτωση της ανωστικής ροής με ακτινοβολία που θα παρουσιαστεί παρακάτω.

Τα αποτελέσματα του κώδικα συγκρίθηκαν ως προς:

$$\text{την αδιάστατη μέση προσπίπτουσα ακτινοβολία } G^*(\vec{r}) = \frac{\int I(\vec{r}, \hat{s}) d\omega}{4\sigma T_o^4}$$

$$\text{και την αδιάστατη ακτινοβολούμενη ροή θερμότητας } Q^*(\vec{r}) = \frac{\int I(\vec{r}, \hat{s}) \cdot (\hat{s} \cdot \hat{n}_i) d\omega}{\sigma T_o^4}$$

όπου T_o είναι η θερμοκρασία αναφοράς.

Η ποσότητες της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και της ακτινοβολούμενης ροής θερμότητας επιλέχθηκαν για τη σύγκριση γιατί είναι οι μόνες ποσότητες της ακτινοβολίας που επηρεάζουν το θερμοκρασιακό πεδίο. Ειδικότερα, αφαιρώντας από την προσπίπτουσα ακτινοβολία της ένταση μέλανος σώματος προκύπτει ο όρος πηγής της ενεργειακής εξίσωσης και η ακτινοβολούμενη ροή θερμότητας χρησιμοποιείται στην οριακή συνθήκη του τοιχώματος.

Παρακάτω παρουσιάζεται η αντιπροσωπευτικότερη των περιπτώσεων αναφοράς που επιλύθηκαν.

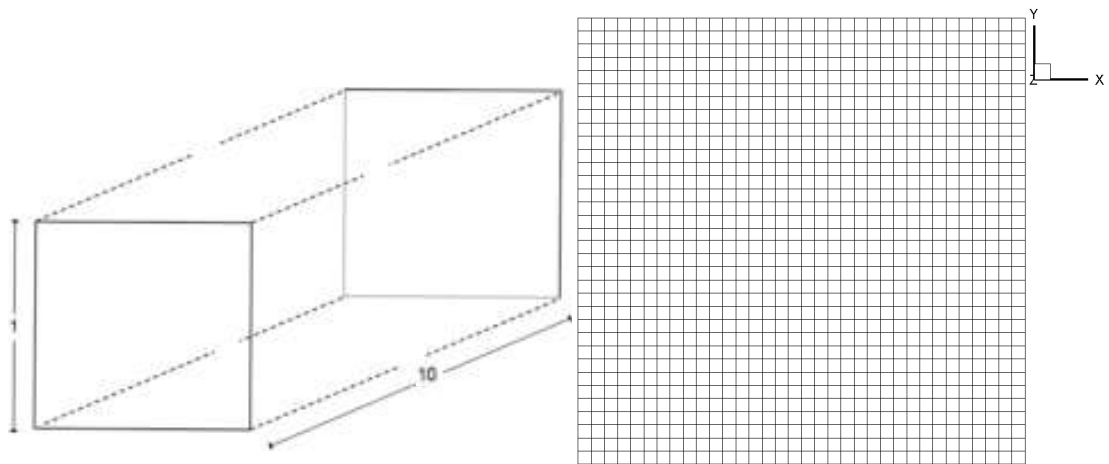
4.3.1 Εξαεδρική κοιλότητα με τετραγωνικές βάσεις

Θεωρείται εξαεδρική κοιλότητα με τετραγωνικές βάσεις (σχήμα 4-13) η οποία είναι γεμάτη με ρευστό σταθερής θερμοκρασίας 0K. Όλα τα τοιχώματα διατηρούνται κρύα σε σταθερή θερμοκρασία 0K εκτός του κάτω τοιχώματος στο οποίο επιβάλλεται θερμική ενέργεια $E=\sigma T^4=1$. Στα δύο απέναντι τοιχώματα της z διεύθυνσης έχουν επιβληθεί συνθήκες συμμετρίας. σ είναι η σταθερά Stefan-Boltzmann που έχει την

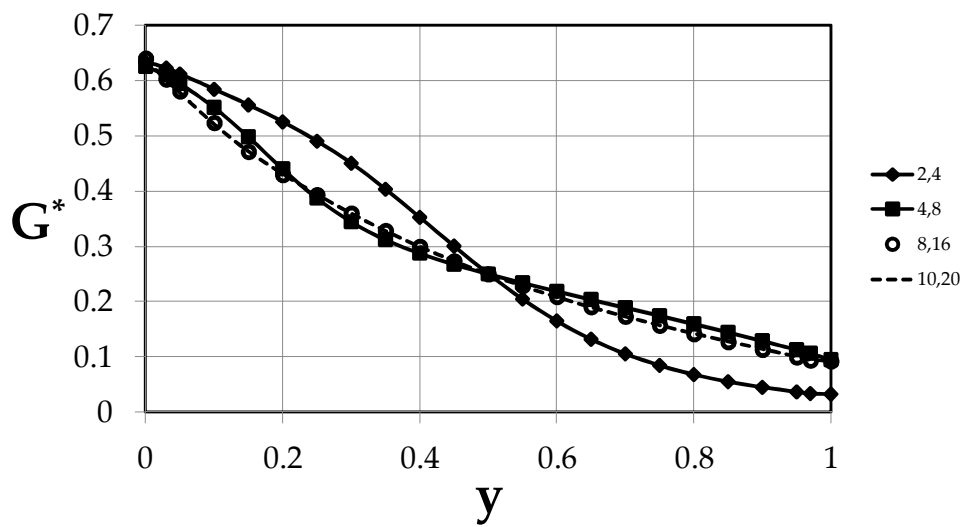
τιμή $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$. Όλα τα τοιχώματα θεωρούνται ότι είναι μελανά σώματα ($\varepsilon=1$), εκτός ορισμένων περιπτώσεων όπου αυτό αναφέρεται ρητά.

Σαν αρχική τιμή για την ένταση της ακτινοβολίας χρησιμοποιήθηκε η ένταση μέλανος σώματος I_b . Το αριθμητικό πλέγμα που έδωσε ανεξάρτητη λύση αποτελούνταν από 410375 κόμβους και 386104 κελιά. Η γωνιακή διακριτοποίηση έγινε για $(N_\theta \times N_\varphi) = (8 \times 16)$. Για την επιλογή του αριθμού των πολικών και αζιμουθιακών γωνιών διενεργήθηκε διαδικασία αντίστοιχη της μελέτης ανεξαρτησίας της λύσης από το αριθμητικό πλέγμα. Στο σχήμα 4-14 δίνεται η αδιάστατη μέση προσπίπτουσα ακτινοβολία για ισοτροπική σκέδαση κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ για $z=5$ για τρεις συνδυασμούς γωνιών. Είναι εμφανές ότι για (8×16) γωνίες έχουμε πετύχει ικανοποιητική ανεξαρτησία.

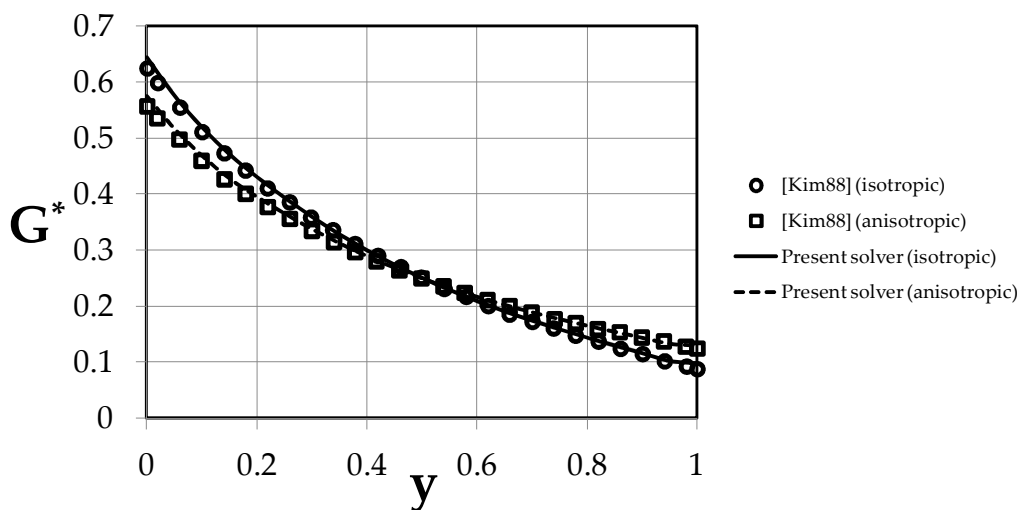
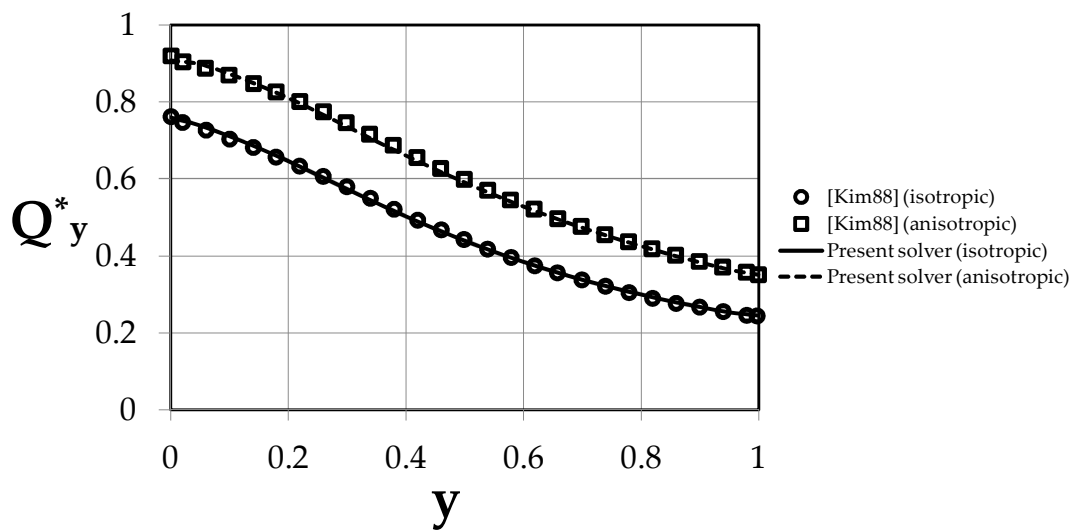
Στο σχήμα 4-15 δίνεται η αδιάστατη ακτινοβολούμενη ροή θερμότητας στην y διεύθυνση και η αδιάστατη προσπίπτουσα ακτινοβολία για ισοτροπικά και ανισοτροπικά σκεδάζον μέσο στη γραμμή $x=0,5$ για $z=5$. Για την αδιαστατοποίηση των μεγεθών χρησιμοποιήθηκε η επιβαλλόμενη θερμική ενέργεια στο κάτω τοίχωμα. Τα αποτελέσματά μας συγκρίνονται με αυτά του δισδιάστατου επιλύτη των Kim & Lee [Kim88]. Ο συντελεστής σκέδασης είναι ίσος με τη μονάδα ($\sigma_s=1$) και ο συντελεστής απορρόφησης μηδενικός ($\kappa_a=0$). Είναι εμφανές ότι η ανισοτροπική σκέδαση οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές για την αδιάστατη ακτινοβολούμενη ροή θερμότητας σε σχέση με την ισοτροπική σκέδαση, ενώ υπολογίστηκαν κοντινές τιμές για τη μέση προσπίπτουσα ακτινοβολία για τους δύο τύπους σκέδασης. Τα αποτελέσματά μας συμφωνούν ικανοποιητικά με αυτά των Kim & Lee [Kim88], οι οποίοι εφάρμοσαν τη Μέθοδο Διακριτών Τεταγμένων και για την ανισοτροπική σκέδαση χρησιμοποίησαν πολυώνυμα Legendre. Στο σχήμα 4-16 συγκρίνουμε την αδιάστατη ακτινοβολούμενη ροή θερμότητας στην y διεύθυνση για ανισοτροπική σκέδαση κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ και $z=5$. Ο συντελεστής σκέδασης είναι $\sigma_s=0.5$ και ο συντελεστής απορρόφησης είναι $\kappa_a=0.5$. Τα αποτελέσματα συμφωνούν ικανοποιητικά.



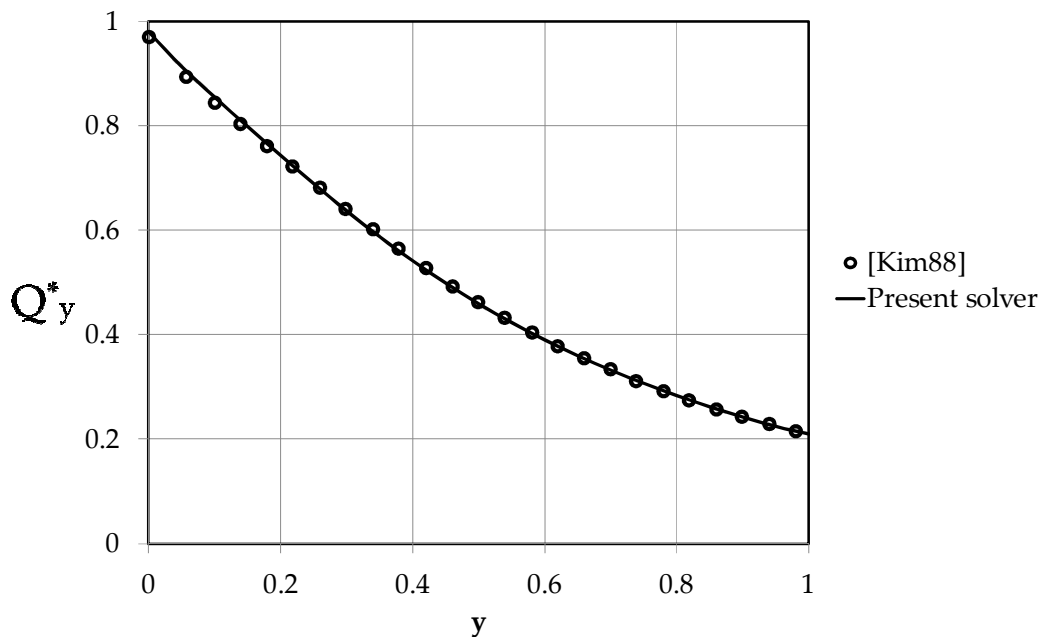
Σχήμα 4-13. Σχηματική αναπαράσταση της πρισματικής κοιλότητας [Lyg12] (αριστερά). Αριθμητικό πλέγμα στο επίπεδο $z=5$ (δεξιά).



Σχήμα 4-14. Μελέτη ανεξαρτησίας της μέσης προσπίπτουσας ακτινοβολίας για ισοτροπική σκέδαση από τη γωνιακή διακριτοποίηση.

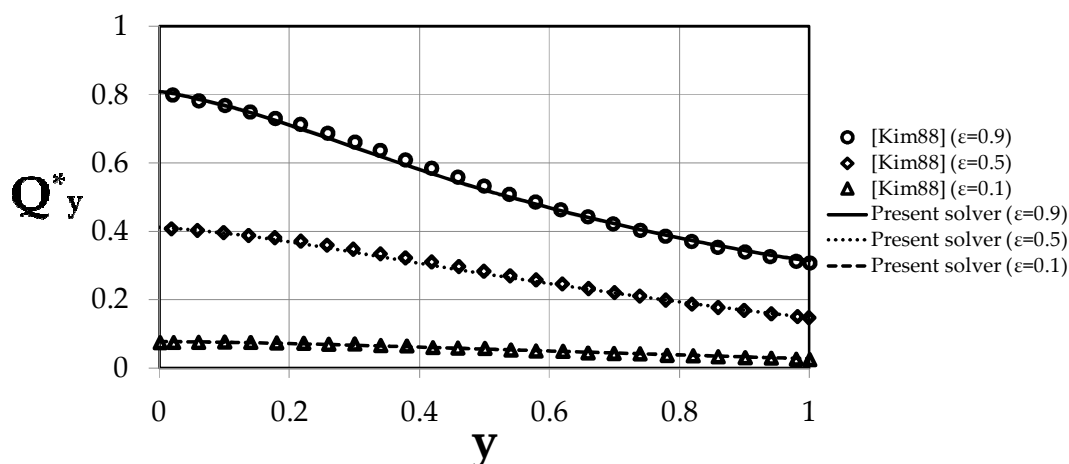


Σχήμα 4-15. Σύγκριση της αδιάστατης ακτινοβολούμενης ροής θερμότητας στην y διεύθυνση (πάνω) και της αδιάστατης μέσης προσπίπτουσας ακτινοβολίας (κάτω) για ισοτροπική και ανισοτροπική σκέδαση κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ για $z=5$.



Σχήμα 4-16. Σύγκριση της αδιάστατης ακτινοβολούμενης ροής θερμότητας κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ για $z=5$ για ανιστροπική σκέδαση.

Τέλος, στο σχήμα 4-17 συγκρίνουμε την αδιάστατη ακτινοβολούμενη ροή θερμότητας στην y διεύθυνση κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ για διάφορους συντελεστές εκπομπής ϵ . Ο συντελεστής σκέδασης είναι $\sigma_s=1$ και ο συντελεστής απορρόφησης είναι $\kappa_a=0$. Παρατηρούμε ότι μειώνοντας το συντελεστή εκπομπής τοιχωμάτων ϵ υπολογίζονται μικρότερες τιμές για την Q_y^* .



Σχήμα 4-17. Σύγκριση της αδιάστατης ακτινοβολούμενης ροής θερμότητας κατά μήκος της γραμμής $x=0,5$ για ανισοτροπική σκέδαση για διάφορους συντελεστές εκπομπής τοιχωμάτων ϵ .

4.4 Συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται περιπτώσεις στρωτής ροής και συνδυασμένης μεταφοράς θερμότητας (αγωγή, συναγωγή και ακτινοβολία) εντός κοιλοτήτων. Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού θα χρησιμοποιείται ο όρος συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας όταν αναφερόμαστε στη μεταφορά θερμότητας και με τους τρεις δυνατούς τρόπους. Ειδικότερα, στην πρώτη περίπτωση έχουμε συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας εντός τετραγωνικής κοιλότητας. Η ακτινοβολία υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας και τις δύο μεθόδους (ΜΓΠ και ΜΠΟ). Η δεύτερη περίπτωση ασχολείται με τη στρωτή ροή και συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας εντός κυβικής κοιλότητας. Σε αυτή την περίπτωση η ακτινοβολία μοντελοποιήθηκε με τη ΜΠΟ. Αυτές οι περιπτώσεις επιλέχθηκαν για να ελεγχθεί η σύζευξη του 3-Δ επιλύτη με τα μοντέλα ακτινοβολίας.

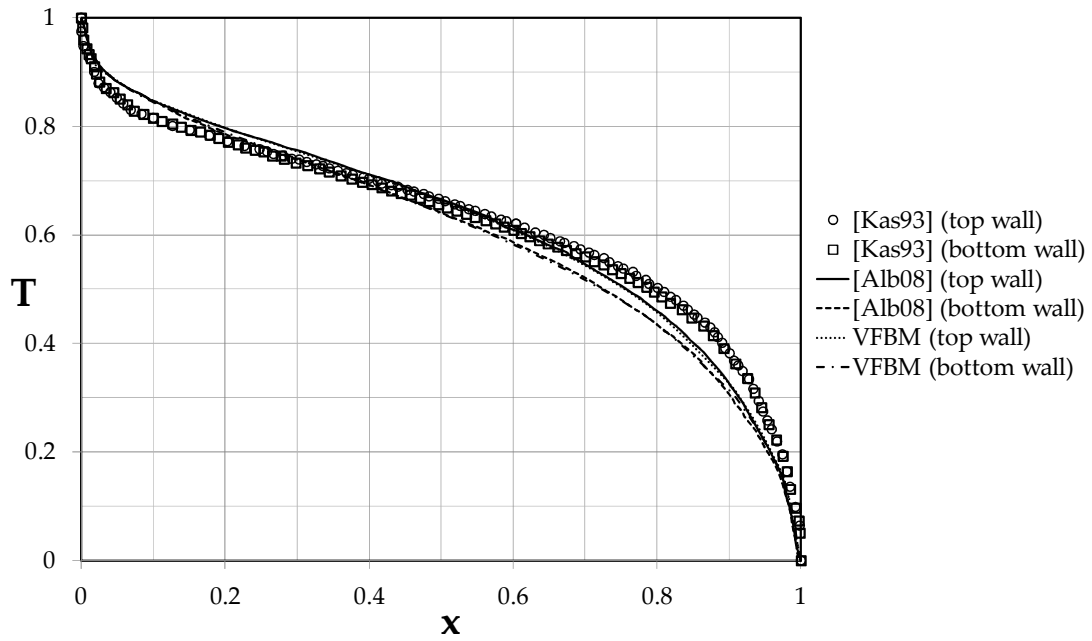
4.4.1 Συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας σε τετραγωνική κοιλότητα

Η πρώτη περίπτωση αφορά στη στρωτή ροή και συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας εντός τετραγωνικής κοιλότητας ακμής H , περίπτωση που έχει παρουσιαστεί παλαιότερα από τους Kasemi et al. [Kas93]. Αυτή η περίπτωση προσομοιώθηκε

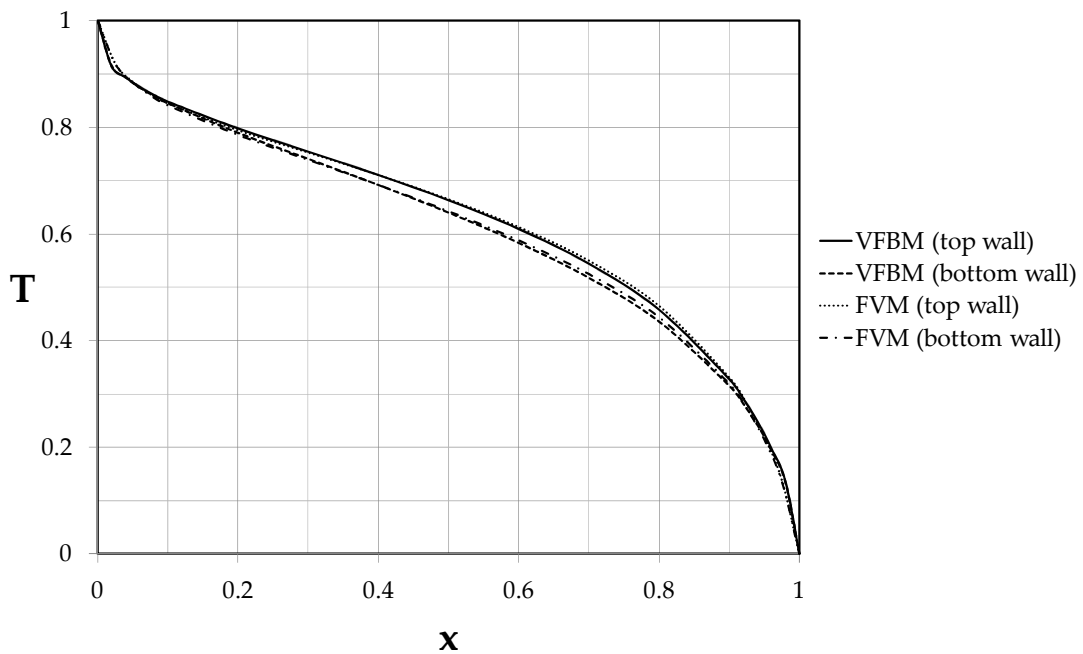
χρησιμοποιώντας και τα δύο μοντέλα ακτινοβολίας.

Θεωρούμε ότι έχουμε την περίπτωση της ανωστικής ροής εντός τετραγωνικής κοιλότητας όπως έχει παρουσιαστεί παραπάνω. Το θερμό τοίχωμα έχει σταθερή θερμοκρασία $T_h=1$ και το ψυχρό τοίχωμα $T_c=0$. Όλα τα τοιχώματα είναι μελανά ($\varepsilon=1$). Η κοιλότητα περιέχει ρευστό αριθμού $Pr=0,7$. Ο αριθμός Reynolds είναι $Re=1$ και ο αριθμός Grashof είναι $Gr=700$. Τέλος ο θερμοκρασιακός λόγος αναφοράς είναι $T_o^*=1$ και ο αριθμός Planck είναι $Pl=1,6$. Η κοιλότητα διακριτοποιήθηκε με $35 \times 35 \times 35$ κόμβους. Για τη γωνιακή διακριτοποίηση χρησιμοποιήθηκαν 8 πολικές και 16 αζιμουθιακές γωνίες.

Στα σχήματα 4-18 και 4-19 παρουσιάζονται τα προφίλ θερμοκρασιών στο πάνω και κάτω τοίχωμα. Συγκεκριμένα στο σχήμα 4-18 παρουσιάζονται τα προφίλ που υπολογίστηκαν από τη ΜΓΠ, ενώ στο σχήμα 4-19 και από τις δύο μεθόδους. Το μέσο θεωρείται διαφανές (μη-συμμετέχον). Τα προφίλ μας συγκρίνονται με αυτά των Kasemi et al. [Kas93] και Albanakis & Bouris. Οι Albanakis & Bouris παρουσίασαν αποτελέσματα για την ίδια περίπτωση χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο στην εργασία τους [Alb08]. Παρατηρούμε ότι υπάρχει πολύ καλή ταύτιση των αποτελεσμάτων με αυτά των Albanakis & Bouris και μια μικρή απόκλιση από τα αποτελέσματα των Kasemi et al. Στο σχήμα 4-19 παρατηρούμε τη συμφωνία των θερμοκρασιακών προφίλ από τη ΜΓΠ με αυτά της ΜΠΟ. Ως εκ τούτου, υπάρχει συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της ΜΠΟ και των Albanakis & Bouris.



Σχήμα 4-18. Σύγκριση των θερμοκρασιακών προφίλ κατά μήκος του πάνω τοιχώματος ($z=1$) και κάτω τοιχώματος ($z=0$) στο μέσο της y διεύθυνσης ($y=5$) όταν η ακτινοβολία υπολογίζεται με τη ΜΓΠ (VFBM).



Σχήμα 4-19. Σύγκριση των θερμοκρασιακών προφίλ όταν η ακτινοβολία υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη ΜΓΠ (VFBM) και τη ΜΠΟ (FVM).

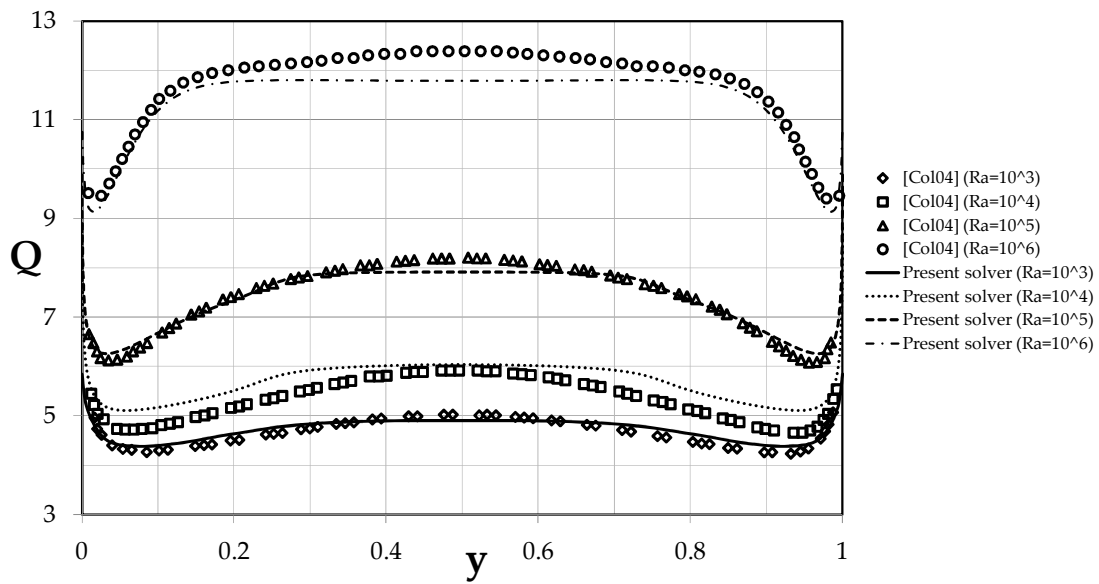
4.4.2 Συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας σε κυβική κοιλότητα

Η δεύτερη περίπτωση αφορά στη στρωτή ροή με συνδυασμένη μεταφορά θερμότητας εντός κυβικής κοιλότητας. Αυτή η περίπτωση παρουσιάστηκε στη βιβλιογραφία από τους Colomer et al. [Col04]. Ουσιαστικά πρόκειται για την περίπτωση της ανωστικής ροής εντός κυβικής κοιλότητας που παρουσιάστηκε παραπάνω. Η θερμοκρασία του θερμού τοιχώματος είναι $T_h=1$ και του ψυχρού τοιχώματος είναι $T_c=0$. Οι Colomer et al. χρησιμοποίησαν τη ΜΔΤ για τη μοντελοποίηση της ακτινοβολίας.

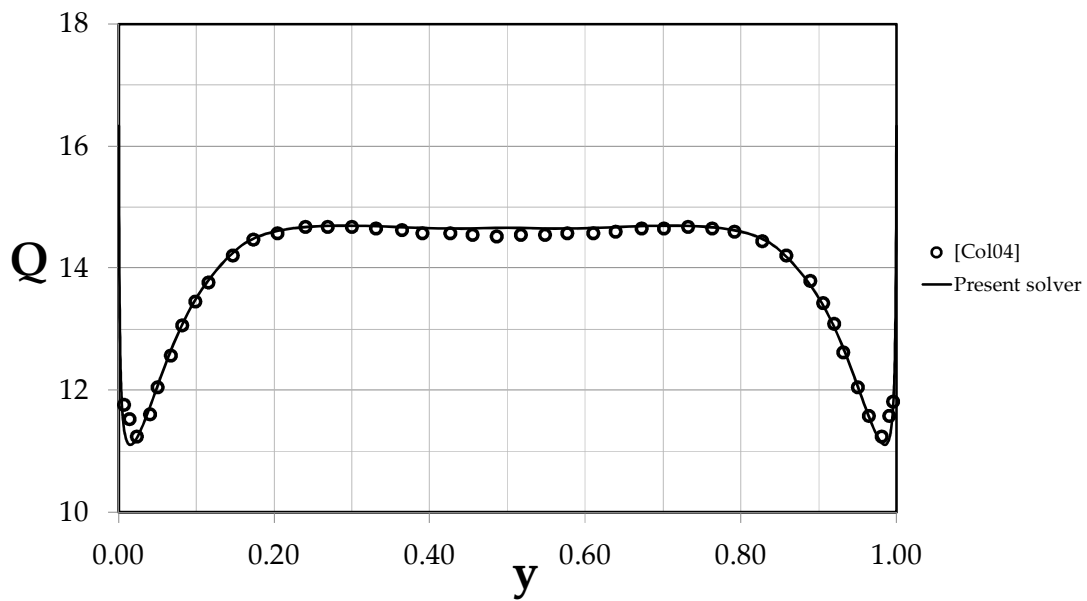
Εμείς μοντελοποιήσαμε την ακτινοβολία με τη ΜΠΟ. Πρέπει να αναφερθεί ότι η ίδια περίπτωση έγινε προσπάθεια να επιλυθεί με την ΜΓΠ στη σειριακή έκδοση του κώδικα. Ωστόσο, δεν καταφέραμε να επιτύχουμε ανεξάρτητη λύση καθώς πυκνώνοντας το αριθμητικό πλέγμα, οι απαιτήσεις σε CPU χρόνο έγιναν πολύ μεγάλες.

Ο αριθμός Prandtl του ρευστού ήταν $Pr=0,71$. Ο αριθμός Reynolds ήταν $Re = \sqrt{Gr}$ και ο αριθμός Rayleigh ήταν $Ra=10^3, 10^4, 10^5, 10^6$. Για τις παραμέτρους της ακτινοβολίας επιλύθηκαν δύο συνδυασμοί. Στον πρώτο ο θερμοκρασιακός λόγος αναφοράς ήταν $T_o^*=15$ και ο αριθμός Planck ήταν $Pl=0,043$ για διαφανές ρευστό. Στη δεύτερη ο θερμοκρασιακός λόγος αναφοράς ήταν $T_o^*=17$, ο αριθμός Planck ήταν $Pl=0,016$ και το οπτικό πάχος ήταν $\tau=1$. Στη δεύτερη περίπτωση ($Pl=0,016$) τα φαινόμενα ακτινοβολίας ήταν εντονότερα. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρήσαμε ότι έχουμε μελανά τοιχώματα ($\epsilon=1$).

Η κοιλότητα διακριτοποιήθηκε με $65 \times 65 \times 65$ κόμβους και για τη γωνιακή διακριτοποίηση χρησιμοποιήθηκαν 8 πολικές και 16 αζιμουθιακές γωνίες. Σε αυτή την περίπτωση συγκρίνουμε το άθροισμα των ροών θερμότητας λόγω αγωγής και ακτινοβολίας στο θερμό τοίχωμα. Στα σχήματα 4-20 και 4-21 παρουσιάζουμε τη μέση ροή θερμότητας στο θερμό τοίχωμα σαν συνάρτηση της θέσης y και τη συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα των Colomer et al. [Col04]. Παρατηρούνται διαφορές στα αποτελέσματα, αλλά για αυτή την περίπτωση έχουν βρεθεί σημαντικές διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων διαφόρων ερευνητικών ομάδων ([Kol11], [Bor08], [Abi11], [Sca08]). Δεν υπάρχει κοινώς αποδεκτή λύση καθώς δεν έχει υπολογιστεί η συγκεκριμένη περίπτωση πειραματικά.



Σχήμα 4-20. Κατανομή της μέσης ροής θερμότητας στη z διεύθυνση κατά μήκος του y άξονα για διαφανές ρευστό ($T_o^* = 15$, $Pr=0,043$, $\tau=0$).



Σχήμα 4-21. Κατανομή της μέσης ροής θερμότητας στη z διεύθυνση κατά μήκος του y άξονα για συμμετέχον ρευστό ($T_o^* = 17$, $Pr=0,016$, $\tau=1$, $Ra=10^6$).

Κεφάλαιο 5

Παράλληλη Επεξεργασία

Κάτι στο οποίο δεν δόθηκε αρκετή έμφαση στα προηγούμενα κεφάλαια είναι ότι οι περισσότεροι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν παράλληλα. Γενικά, στη διατριβή παρουσιάστηκαν ιδιαίτερος απαιτητικά από άποψη CPU χρόνου προβλήματα για την προσομοίωση των οποίων ήταν απαραίτητη η χρήση παράλληλης επεξεργασίας. Τα περισσότερα απαιτητικά ήταν τα προβλήματα περιπτώσεων πυρκαγιάς στη σήραγγα. Οι ροές ήταν τυρβώδεις και η ακτινοβολία προσομοιώθηκε χρησιμοποιώντας τη ΜΠΟ.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η απόδοση του παράλληλου επιλύτη σε διάφορες περιπτώσεις. Προσομοιώθηκε η 2-Δ τυρβώδης ανωστική ροή σε τετραγωνική κοιλότητα για τρία αριθμητικά πλέγματα. Για τη μοντελοποίηση της τύρβης χρησιμοποιήθηκαν τα μοντέλα τύρβης standard k-ε και k-ω SST με συναρτήσεις τοιχώματος. Στη συνέχεια ελέγχθηκε η απόδοση του παράλληλου επιλύτη στην περίπτωση της ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα. Προσομοιώσαμε την περίπτωση της ροής χωρίς την ακτινοβολία, την περίπτωση μεταφοράς θερμότητας μόνο με ακτινοβολία και την περίπτωση της στρωτής ροής με ακτινοβολία.

Οι ποσότητες που παρακολουθήσαμε κατά τον έλεγχο της απόδοσης της παραλληλίας ήταν η επιτάχυνση (speed-up) και ο βαθμός απόδοσης (efficiency). Η επιτάχυνση στην παράλληλη επεξεργασία εκφράζει το κέρδος σε χρόνο που προέρχεται από την κατάτμηση του προβλήματος σε N διαμερίσεις. Ορίζεται ως:

$$S_N = \frac{T_1}{T_N} \quad (5-1)$$

όπου T_1 είναι ο χρόνος που χρειάζεται για την επίλυση του σειριακού προβλήματος, ενώ T_N είναι ο χρόνος που χρειάζεται για την επίλυση του παράλληλου προβλήματος με N διαμερίσεις. Η ιδεατή επιτάχυνση είναι η γραμμική, όπου $T_N = \frac{T_1}{N}$. Ωστόσο, στην πραγματικότητα η ιδεατή επιτάχυνση δεν είναι εφικτή λόγω της εξάρτησης των διαμερίσεων (απαιτείται ανταλλαγή μηνυμάτων μεταξύ τους) και του γεγονότος ότι υπάρχει ένα τμήμα του προβλήματος που δεν μπορεί να παραλληλοποιηθεί.

Ο βαθμός απόδοσης είναι μια ποσότητα που μας πληροφορεί για την απόδοση της παραλληλίας και ορίζεται ως:

$$E_N = \frac{T_1}{NT_N} = \frac{S_N}{N} \quad (5-2)$$

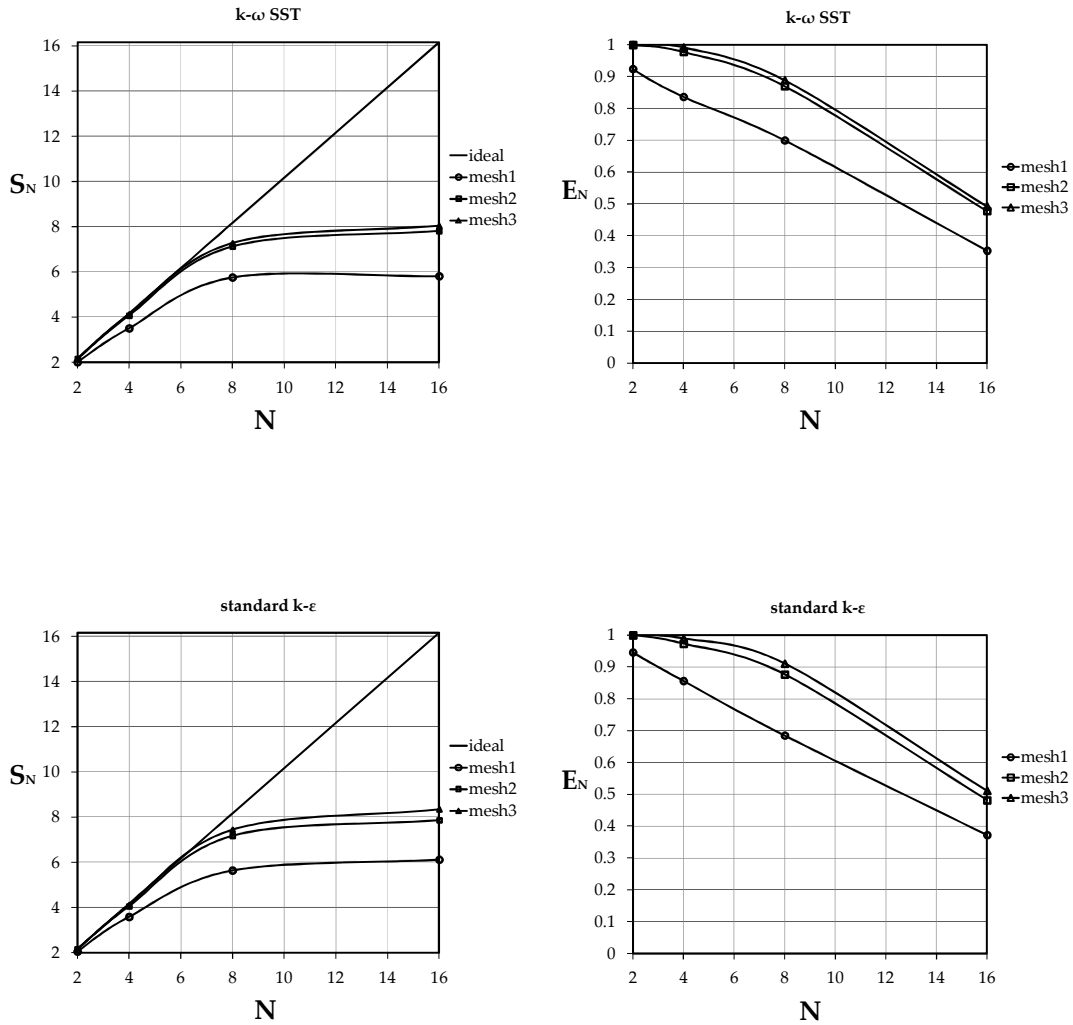
E_N παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1. Όσο πιο κοντά στο 1 βρίσκεται ο βαθμός απόδοσης, τόσο καλύτερη είναι η απόδοση του παράλληλου επιλύτη.

5.1. Δισδιάστατες περιπτώσεις

5.1.1 Ανωστική ροή σε τετραγωνική κοιλότητα

Η δισδιάστατη τυρβώδης ανωστική ροή σε τετραγωνική κοιλότητα μελετήθηκε για τρία διαφορετικής πυκνότητας πλέγματα. Το πρώτο πλέγμα αποτελούνταν από 1686 κόμβους και 2578 κελιά (mesh1), ενώ το δεύτερο από 10083 κόμβους και 15044 κελιά (mesh2) και το τρίτο από 18812 κόμβους και 34622 κελιά (mesh3). Για τη μοντελοποίηση της τύρβης χρησιμοποιήθηκαν τα μοντέλα standard k-ε και k-ω SST με συναρτήσεις τοιχώματος. Οι προσομοιώσεις διενεργήθηκαν με επαναλήψεις στον ψευδοχρόνο χωρίς να γίνεται αποθήκευση των αποτελεσμάτων. Ο αριθμός CFL ήταν ίσος με τη μονάδα για 3000 ψευδοχρονικές επαναλήψεις. Ο αριθμός των επεξεργαστών που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 1, 2, 4, 8 και 16. Τα τρεξίματα έγιναν στη συστοιχία υπολογιστών (cluster) "VELOS", του εργαστηρίου θερμικών στροβιλομηχανών, μονάδα παράλληλης υπολογιστικής ρευστοδυναμικής & βελτιστοποίησης, χρησιμοποιώντας το πολύ δύο υπολογιστές 8 επεξεργαστών ο καθένας στα 2 GHz.

Στο σχήμα 5-1 παρουσιάζεται η σύγκριση της επιτάχυνσης και του βαθμού απόδοσης για τα τρία πλέγματα. Βλέπουμε ότι πυκνώνοντας το αριθμητικό πλέγμα η επιτάχυνση και ο βαθμός απόδοσης της παραλληλίας αυξάνει για τον ίδιο αριθμό επεξεργαστών. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τη βιβλιογραφία [Bra12]. Γενικά, αυξάνοντας το μέγεθος του αριθμητικού πλέγματος αυξάνουμε το υπολογιστικό φορτίο σε σχέση με το φορτίο ανταλλαγής μηνυμάτων με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε σε μεγαλύτερες επιταχύνσεις και βαθμούς απόδοσης για τον ίδιο αριθμό επεξεργαστών.



Σχήμα 5-1. Σύγκριση επιτάχυνσης (αριστερά) και βαθμού απόδοσης (δεξιά) της παραλληλίας μεταξύ των αριθμητικών πλεγμάτων.

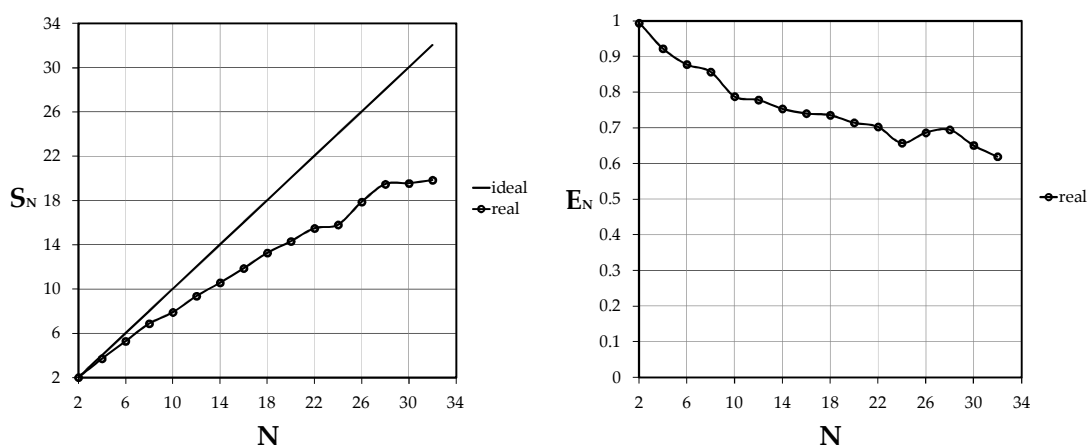
5.2. Τρισδιάστατες περιπτώσεις

Η απόδοση του τρισδιάστατου επιλύτη ελέγχθηκε στην περίπτωση της ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα με ένα αριθμητικό πλέγμα. Το αριθμητικό πλέγμα αποτελούνταν από 274625 κόμβους και 262144 κελιά. Προσομοιώθηκαν η περίπτωση της στρωτής ανωστικής ροής χωρίς την ακτινοβολία, η περίπτωση της μεταφοράς θερμότητας αμιγώς με ακτινοβολία και η περίπτωση της στρωτής ροής με την επίδραση της ακτινοβολίας.

Σε όλες τις περιπτώσεις διενεργήθηκαν επαναλήψεις μόνο στον ψευδοχρόνο χωρίς την αποθήκευση αποτελεσμάτων. Ο αριθμός CFL ήταν ίσος με την μονάδα. Ο αριθμός των επεξεργαστών που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 1, 2, 4, 6, ..., 28, 30, 32.

5.2.1 Στρωτή ανωστική ροή σε κυβική κοιλότητα χωρίς την ακτινοβολία

Στο σχήμα 5-2 παρουσιάζεται η επιτάχυνση και ο βαθμός απόδοσης για την περίπτωση της στρωτής ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα χωρίς ακτινοβολία. Παρατηρούμε ότι ακόμα και για 22 διεργασίες ο βαθμός απόδοσης παραμένει μεγαλύτερος του 0,7.

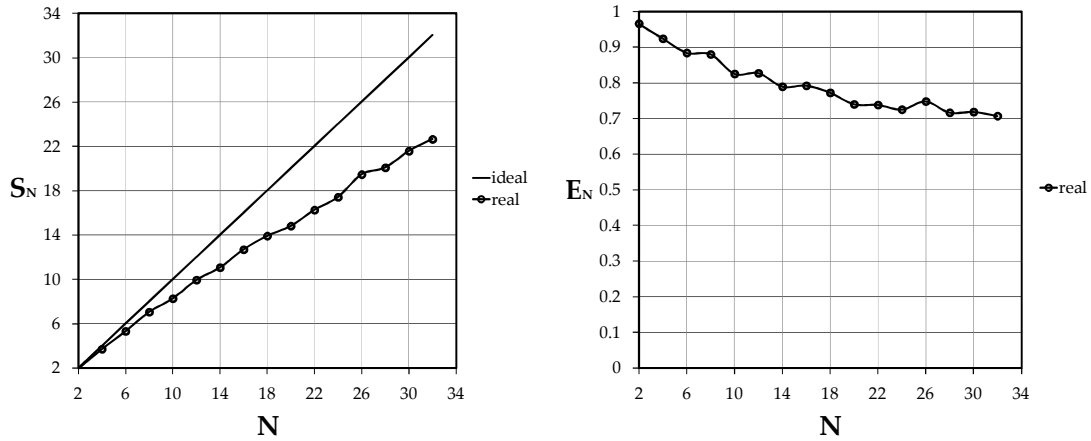


Σχήμα 5-2. Επιτάχυνση (αριστερά) και βαθμός απόδοσης (δεξιά) της παραλληλίας για την περίπτωση της στρωτής ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα χωρίς την ακτινοβολία.

5.2.2 Μεταφορά θερμότητας αμιγώς με ακτινοβολία σε κυβική κοιλότητα

Για την περίπτωση της μεταφοράς θερμότητας αμιγώς με ακτινοβολία στην ίδια περίπτωση κυβικής κοιλότητας διενεργήθηκε επαρκής αριθμός επαναλήψεων του επιλύτη ακτινοβολίας. Ο συντελεστής απορρόφησης και ο συντελεστής σκέδασης ήταν ίσοι με το μηδέν. Για τη γωνιακή διακριτοποίηση που απαιτεί η ΜΠΟ χρησιμοποιήθηκαν 8 αζιμουθιακές και 4 πολικές γωνίες.

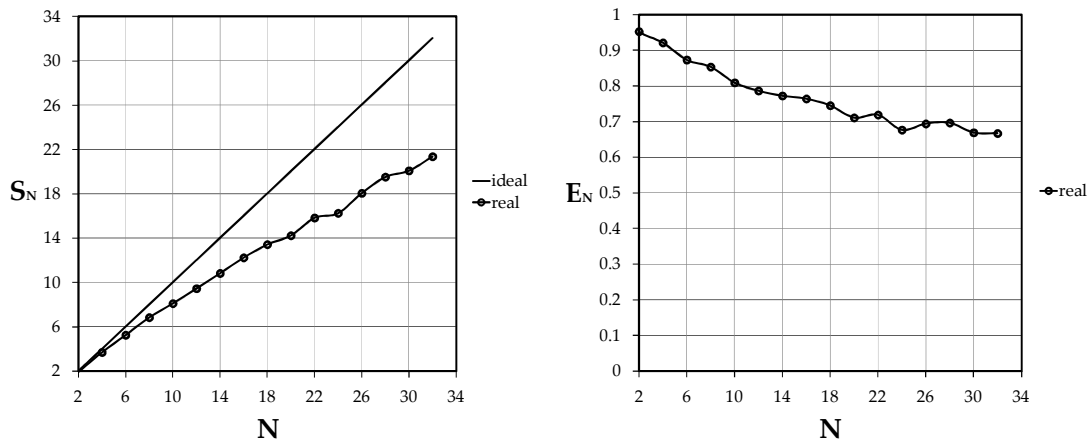
Στο σχήμα 5-3 παρουσιάζεται η επιτάχυνση και ο βαθμός απόδοσης. Υπολογίστηκε ελαφρώς μεγαλύτερη επιτάχυνση και βαθμός απόδοσης σε σχέση με την περίπτωση της στρωτής ανωστικής ροής.



Σχήμα 5-3. Επιτάχυνση (αριστερά) και βαθμός απόδοσης (δεξιά) για την περίπτωση μεταφοράς θερμότητας αμιγώς με ακτινοβολία.

5.2.3 Στρωτή ανωστική ροή σε κυβική κοιλότητα με ακτινοβολία

Τέλος, στο σχήμα 5-4 παρουσιάζεται η επιτάχυνση και ο βαθμός απόδοσης για την περίπτωση της στρωτής ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα λαμβάνοντας υπόψη την ακτινοβολία. Ακόμα και για αυτή την περίπτωση που το φορτίο ανταλλαγής μηνυμάτων είναι μεγαλύτερο η απόδοση του επιλύτη δείχνει ότι είναι ικανοποιητική.



Σχήμα 5-4. Επιτάχυνση (αριστερά) και βαθμός απόδοσης (δεξιά) της παραλληλίας για την περίπτωση της στρωτής ανωστικής ροής σε κυβική κοιλότητα με την επίδραση της ακτινοβολίας.

Συμπερασματικά, σε όλες τις τρισδιάστατες περιπτώσεις υπολογίστηκαν ικανοποιητικές επιταχύνσεις και βαθμοί απόδοσης, σημαντικά μεγαλύτεροι από ότι στις δισδιάστατες περιπτώσεις.

Κεφάλαιο 6

Αριθμητική Μελέτη: Πυρκαγιά Αεριζόμενης Σήραγγας

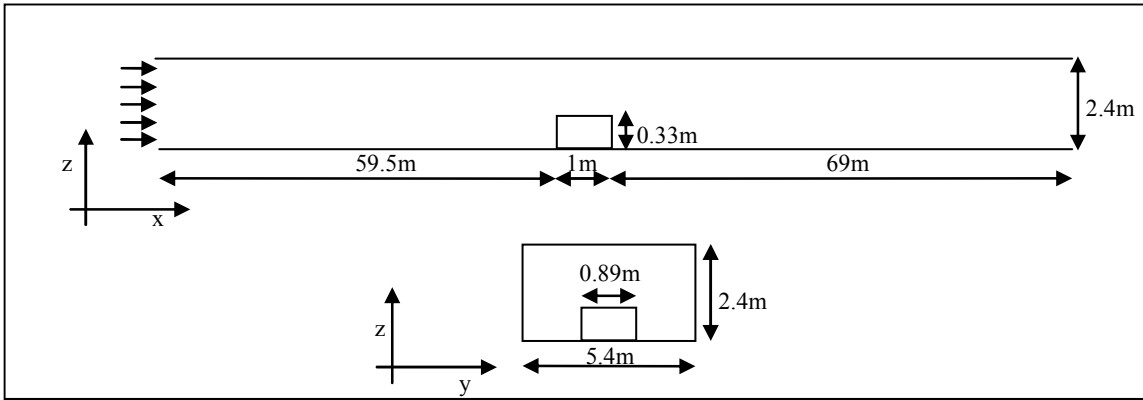
Μετά την επικύρωση του αναπτυχθέντος επιλύτη, σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η αριθμητική μελέτη δύο περιπτώσεων πυρκαγιάς σε αεριζόμενη σήραγγα.

Αρχικά προσομοιώθηκαν οι περιπτώσεις χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την ακτινοβολία και την αγωγή στα τοιχώματα. Στη συνέχεια ένα από τα δύο σενάρια πυρκαγιάς προσομοιώθηκε με την ακτινοβολία και τέλος το ίδιο σενάριο προσομοιώθηκε λαμβάνοντας υπόψη την ακτινοβολία και την αγωγή στο τοίχωμα ταυτόχρονα.

6.1. Περιγραφή περιπτώσεων

Οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται παρακάτω έχουν μελετηθεί από πλήθος ερευνητών ([Apt91], [Fle94], [Gao04], [Mil11]) και είναι κατάλληλες για την σύγκριση των αποτελεσμάτων μας.

Η γεωμετρία της σήραγγας περιγράφεται στο σχήμα 6-1. Έχουμε μια πηγή θερμότητας στα 69,5m από την είσοδο της σήραγγας. Θεωρήσαμε ότι έχουμε κυβική πηγή θερμότητας με την ισχύ της να είναι σταθερή και να έχει τη μέγιστη τιμή της από την αρχή μέχρι το τέλος της προσομοίωσης.



Σχήμα 6-1. Σχηματική παράσταση της σήραγγας και της πηγής θερμότητας.

6.1.1 Οριακές και αρχικές συνθήκες

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως προσομοιώθηκαν δύο περιπτώσεις, οι οποίες διαφέρουν στην ισχύ της πηγής θερμότητας και στην ταχύτητα του αερισμού. Τα στοιχεία αυτά δίνονται στον πίνακα 6-1.

Περίπτωση	Ταχύτητα αερισμού	Ισχύς πηγής θερμότητας
1	$u_1 = 0.85 \text{ m/s}$	$\dot{Q}_1 = 2.57 \text{ MW}$
2	$u_2 = 2 \text{ m/s}$	$\dot{Q}_2 = 2.29 \text{ MW}$

Πίνακας 6-1. Ταχύτητα αερισμού και ισχύς για τις περιπτώσεις 1 και 2.

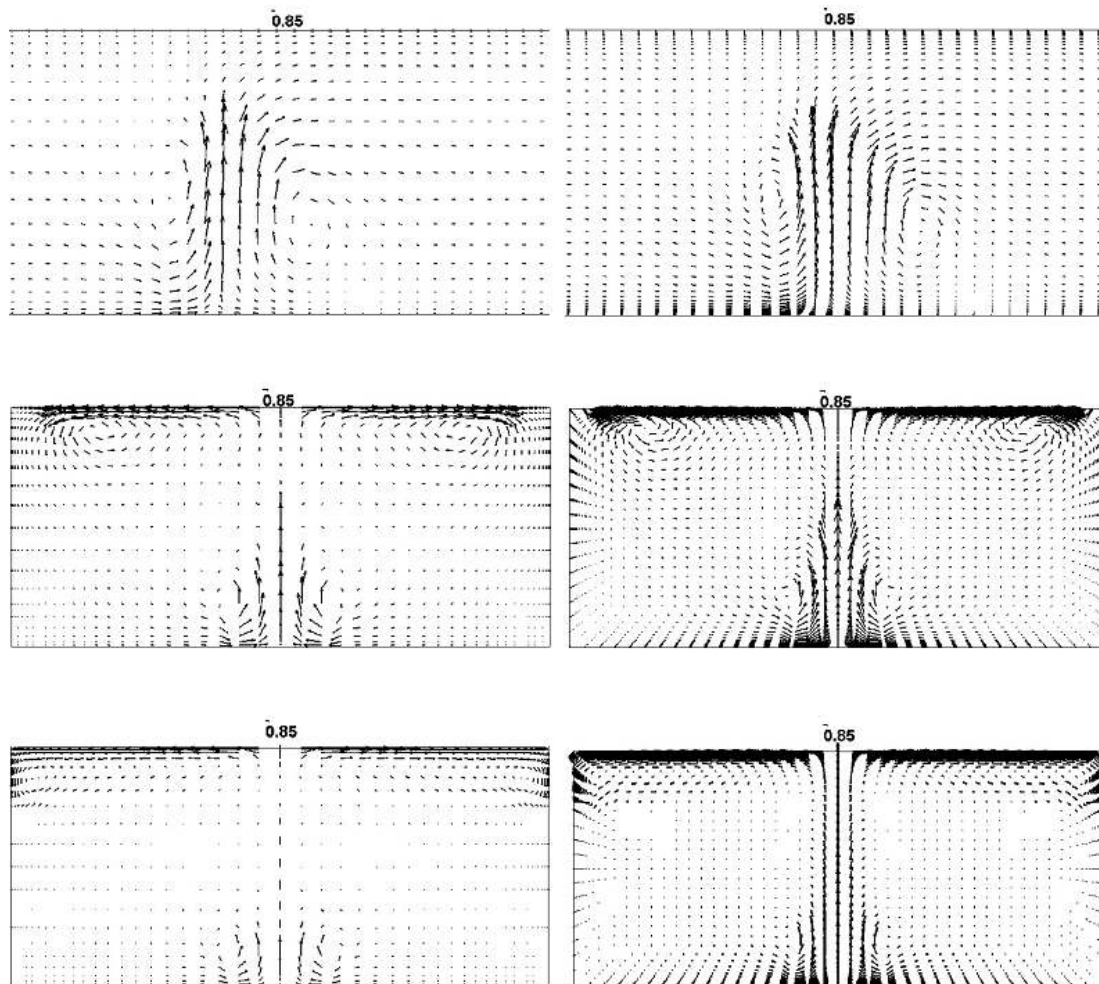
Στην είσοδο της σήραγγας θέτουμε ομοιόμορφο προφίλ ταχύτητας, με την u ταχύτητα να είναι ίση με την ταχύτητα αερισμού και τις v και w ταχύτητες να είναι μηδενικές. Στην έξοδο της σήραγγας, η πίεση τέθηκε ίση με αυτή του περιβάλλοντος.

Σαν αρχική συνθήκη χρησιμοποιήθηκε το συγκεκριμένο στη μόνιμη κατάσταση πεδίο ροής για την ισοθερμοκρασιακή περίπτωση (χωρίς την πηγή θερμότητας). Η θερμοκρασία ήταν ίση με τη θερμοκρασία περιβάλλοντος.

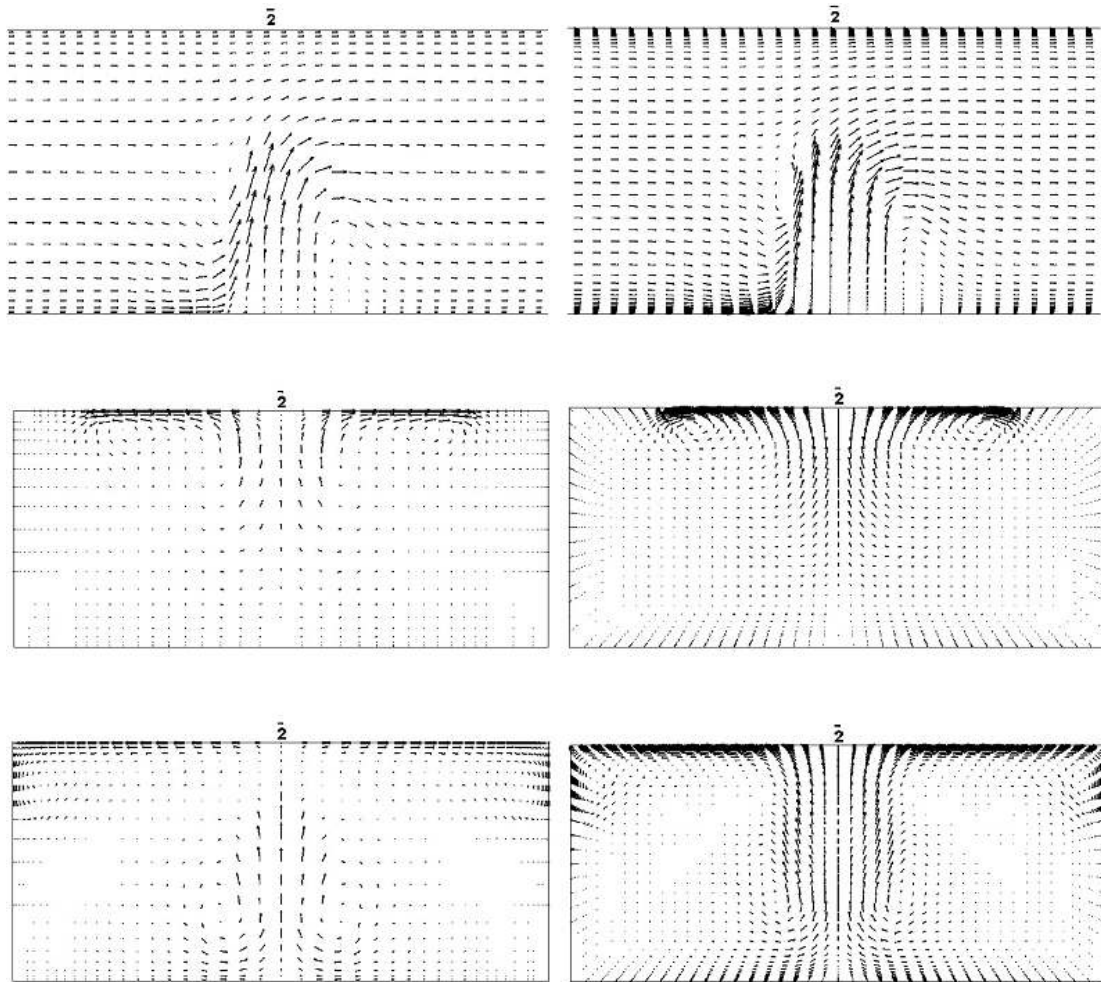
6.2 Αποτελέσματα χωρίς ακτινοβολία και αγωγή τοιχώματος

6.2.1 Αποτελέσματα μεταβατικού σταδίου

Σε περίπτωση πυρκαγιάς εντός σήραγγας το περιβάλλον μέσο (αέρας και καπνός) στην περιοχή κοντά στην πηγή θερμότητας θερμαίνεται και ανεβαίνει μέχρι την οροφή της σήραγγας. Έπειτα έχοντας φτάσει στην οροφή κινείται προς τα πλευρικά τοιχώματα και κατά μήκος της οροφής προς την έξοδο και την είσοδο της σήραγγας διαμορφώνοντας το μήκος οπισθοροής (back-layering). Φτάνοντας στα πλευρικά τοιχώματα, ο καπνός κινείται προς το έδαφος. Στο σχήμα 6-2 και στο σχήμα 6-3 δίνονται τα διανύσματα των ταχυτήτων κάνοντας χρήση του standard k-ε και του χαμηλών Reynolds k- ω SST μοντέλου για τη μοντελοποίηση της τύρβης. Τα διανύσματα αποκαλύπτουν την κίνηση του καπνού. Φαίνεται στα σχήματα ότι ο καπνός απαιτεί λιγότερο από 1s για να φτάσει στην οροφή και λιγότερο από 5s (~2s) για να φτάσει στα πλευρικά τοιχώματα και για τις δύο περιπτώσεις. Παρόμοια διανύσματα υπολογίστηκαν από τα δύο μοντέλα τύρβης.



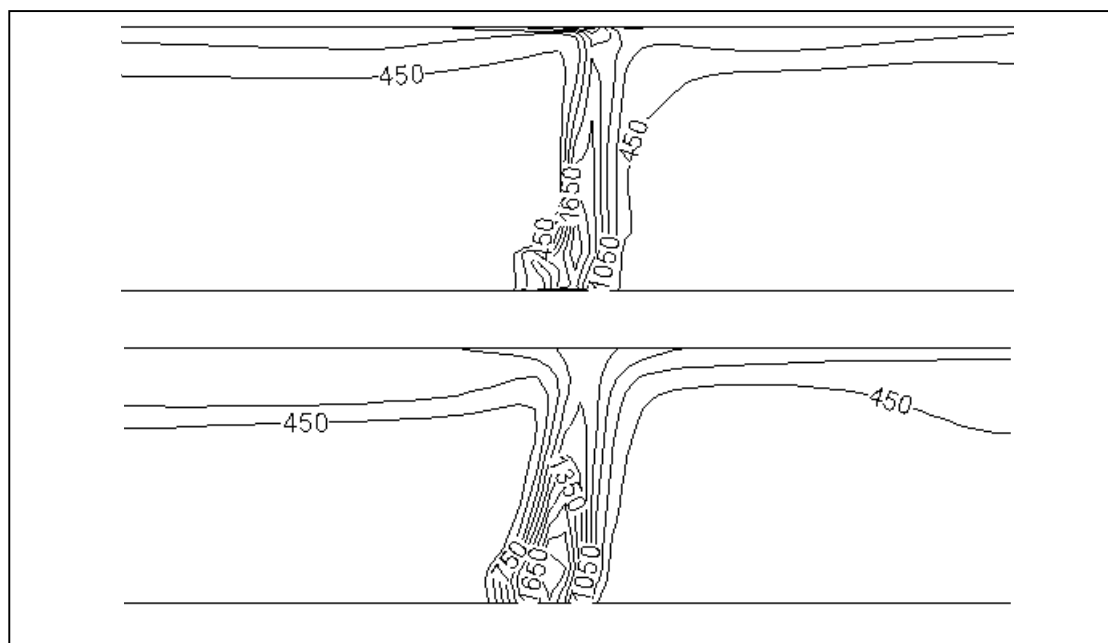
Σχήμα 6-2. Διανύσματα ταχύτητας σε χαρακτηριστικές τομές και χρονικές στιγμές για την περίπτωση 1 με το standard k-ε μοντέλο (αριστερή στήλη) και το χαμηλών Reynolds k-ω SST μοντέλο (δεξιά στήλη). Τομή $y=2,7\text{m}$ κοντά στην πηγή θερμότητας στα $0,5\text{s}$ (πάνω γραμμή), τομή $x=60\text{m}$ στο 1s (μεσαία γραμμή) και τομή $x=60\text{m}$ στα 5s (κάτω γραμμή).



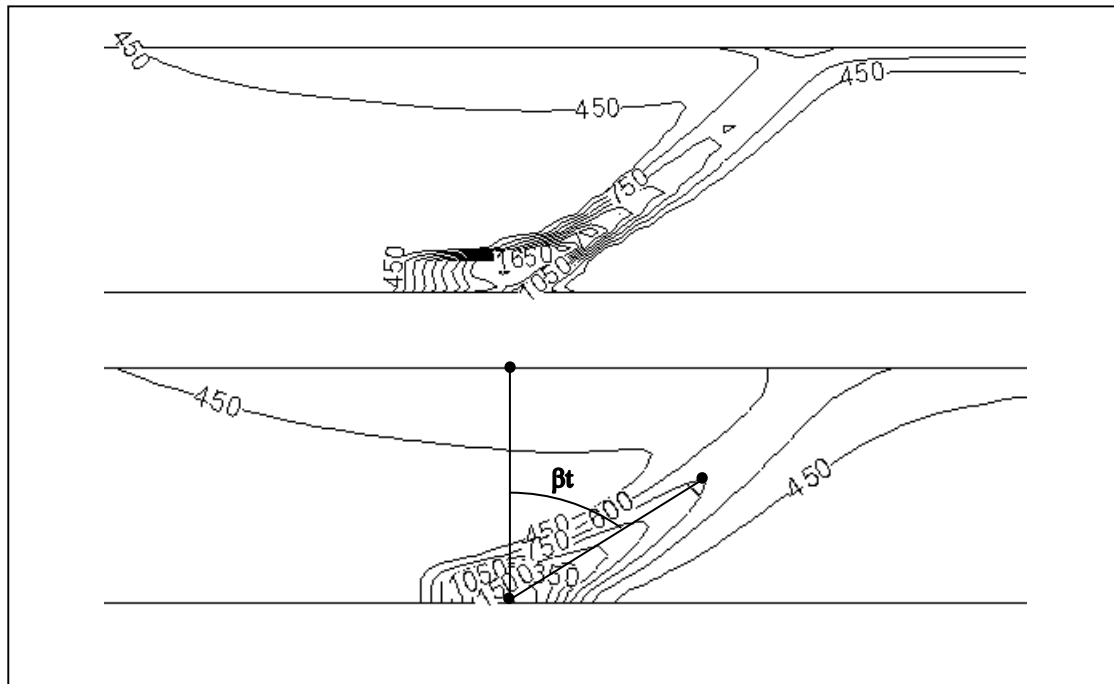
Σχήμα 6-3. Διανύσματα ταχύτητας σε χαρακτηριστικές τομές και χρονικές στιγμές για την περίπτωση 2 με το standard k-ε μοντέλο (αριστερή στήλη) και το χαμηλών Reynolds k-ω SST μοντέλο (δεξιά στήλη). Τομή $y=2,7\text{m}$ κοντά στην πηγή θερμότητας στα $0,5\text{s}$ (πάνω γραμμή), τομή $x=60\text{m}$ στο 1s (μεσαία γραμμή) και τομή $x=60\text{m}$ στα 5s (κάτω γραμμή).

6.2.2. Αποτελέσματα μόνιμης κατάστασης

Οι Gao et al. [Gao04] ισχυρίζονται ότι το σχήμα της φλόγας ορίζεται από τις μέγιστες κλίσεις της θερμοκρασίας. Στη βιβλιογραφία έχουν βρεθεί αρκετοί ορισμοί για την γωνία φλόγας [And06]. Στο σχήμα 6-4 και στο σχήμα 6-5 δίνονται τα σχήματα της φλόγας και ο ορισμός που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της γωνίας της. Η γωνία της φλόγας ορίζεται από την κατακόρυφη γραμμή που περνά μέσω του πυρήνα της πηγής θερμότητας και της γραμμής που συνδέει τον πυρήνα της πηγής θερμότητας με το ψηλότερο σημείο της φλόγας. Στα ίδια σχήματα τα θερμοκρασιακά προφίλ στη γειτονιά της πηγής θερμότητας συγκρίνονται με αυτά που προβλέφθηκαν από το εμπορικό πακέτο Ansys Fluent. Παρατηρούμε ότι οι μέγιστες τιμές θερμοκρασίας, τα σχήματα της φλόγας, οι γωνίες φλόγας και το μήκος οπισθοροής συμφωνούν αρκετά καλά. Στον πίνακα 6-2 παρουσιάζουμε τις κλίσεις φλόγας και το μήκος οπισθοροής που υπολογίστηκαν από το δικό μας επιλύτη και από το Ansys Fluent. Ο χρόνος που χρειάστηκε ούτως ώστε ο καπνός να πιάσει το μήκος απισθοροής της μόνιμης κατάστασης ήταν 50s και 15s αντίστοιχα για τις περιπτώσεις 1 και 2.



Σχήμα 6-4. Σύγκριση σχημάτων φλόγας για την περίπτωση 1. Παρόν επιλύτης με το k- ω SST μοντέλο (πάνω), Ansys Fluent με το k- ϵ μοντέλο (κάτω).



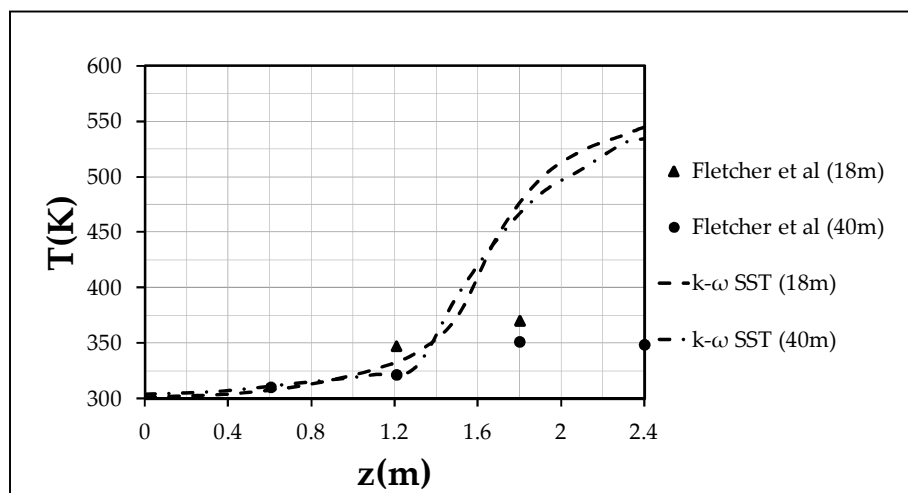
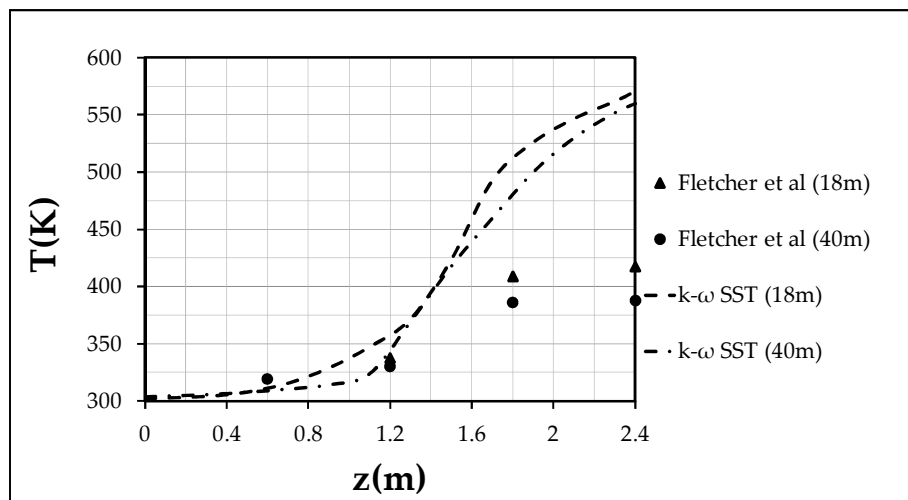
Σχήμα 6-5. Σύγκριση σχημάτων φλόγας για την περίπτωση 2. Παρόν επιλύτης με το k- ω SST μοντέλο (πάνω), Ansys Fluent με το k- ϵ μοντέλο (κάτω). Ορισμός γωνίας φλόγας.

Περίπτωση	Επιλύτης	Κλίση φλόγας ($^{\circ}$)	Μήκος οπισθοροής (m)
1	Παρόν	8	μέχρι την είσοδο
	Ansys Fluent	9	μέχρι την είσοδο
2	Παρόν	58	3.2
	Ansys Fluent	58	3.7

Πίνακας 6-2. Υπολογισμένη κλίση φλόγας και μήκος οπισθοροής.

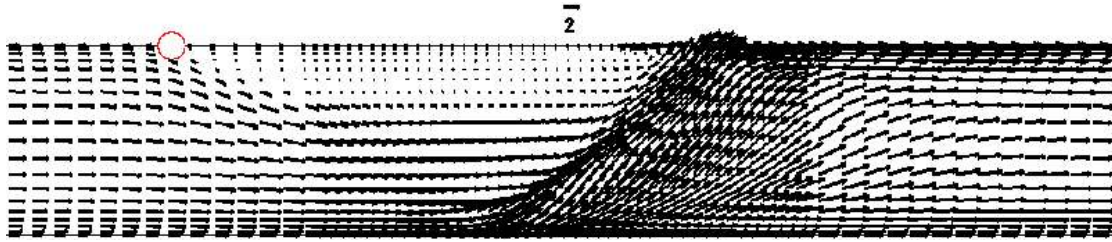
Στο σχήμα 6-6 παρουσιάζονται τα προφίλ θερμοκρασιών στα 18m και στα 40m κατάντη της πηγής θερμότητας. Μεγαλύτερες τιμές για τη θερμοκρασία υπολογίστηκαν σε σχέση με τα πειραματικά αποτελέσματα των Fletcher et al. [Fle94]. Αυτή η διαφορά αποδίδεται στη μη μοντελοποίηση της ακτινοβολίας και της αγωγής στο τοίχωμα. Ωστόσο, οι καμπύλες που υπολογίστηκαν έχουν την ίδια “s” μορφή με τα πειραματικά αποτελέσματα. Η θερμοκρασία αυξάνει με το ύψος και

πιάνει τη μέγιστη τιμή της εντός του πλουμίου του καπνού.



Σχήμα 6-6. Σύγκριση των προφίλ θερμοκρασίας κατά το ύψος. Περίπτωση 1 (πάνω) και περίπτωση 2 (κάτω).

Στο σχήμα 6-7 παρουσιάζονται τα διανύσματα της ταχύτητας για την περίπτωση 2 με το standard k- ϵ μοντέλο. Το σημείο ανακοπής που ορίζει το μήκος οπισθοροής σημειώνεται με τον κόκκινο κύκλο.



Σχήμα 6-7. Διανύσματα ταχυτήτων στην τομή $y=2,7\text{m}$ και σημείο ανακοπής (κόκκινος κύκλος).

6.3 Προσομοίωση με ακτινοβολία

Έχοντας προσομοιώσει τις περιπτώσεις χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την ακτινοβολία και την αγωγή στο τοίχωμα, προχωρήσαμε στην επίλυση της δεύτερης περίπτωσης λαμβάνοντας υπόψη τη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία. Σε αυτή την περίπτωση η τύρβη προσομοιώθηκε χρησιμοποιώντας μόνο το standard k-ε μοντέλο τύρβης.

Πριν προχωρήσουμε στην κυρίως προσομοίωση έγινε έλεγχος της ανεξαρτησίας της λύσης από την γωνιακή διακριτοποίηση. Τα μεγέθη τα οποία ελέγχθηκαν για την ανεξαρτησία ήταν ο όρος πηγής στην ενεργειακή εξίσωση λόγω ακτινοβολίας και η ροή θερμότητας στο τοίχωμα λόγω ακτινοβολίας. Μετά από αυτή τη διαδικασία και για λόγους οικονομίας υπολογισμών επιλέχθηκαν 8×4 αζιμουθιακές και πολικές γωνίες. Με αυτό το συνδυασμό γωνιών αποφεύγουμε την επικάλυψη της γωνίας ελέγχου. Σε περίπτωση επικάλυψης της γωνίας ελέγχου θα ήταν απαραίτητη η χρήση της pixelation μεθόδου, η οποία θα αύξανε το ήδη μεγάλο υπολογιστικό φορτίο.

6.3.1 Επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς ακτινοβολίας

Ο συντελεστής εκπομπής των τοιχωμάτων σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα ήταν ίσος με τη μονάδα [Fle94]. Το ρευστό θεωρήθηκε ότι είναι φαιό και απορροφά και εκπέμπει την ακτινοβολία αλλά δεν την σκεδάζει. Ο συντελεστής απορρόφησης ήταν ίσος με τη μονάδα [Se12].

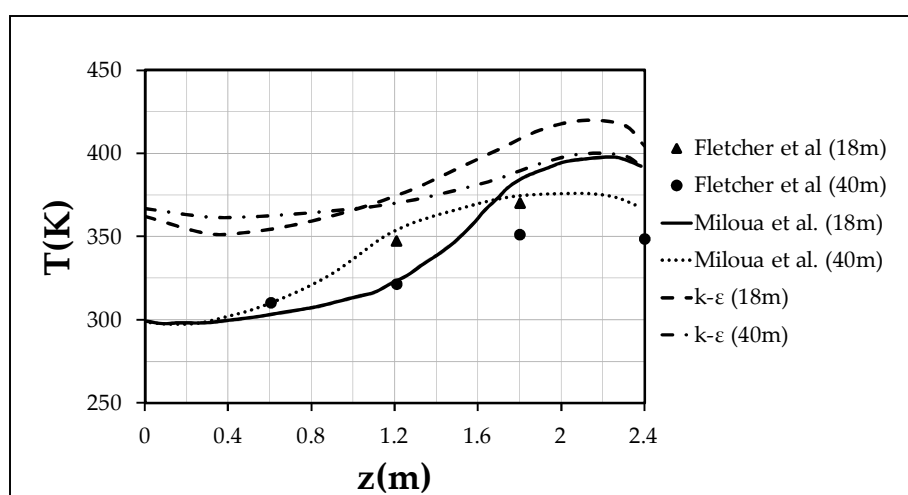
Η επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς ακτινοβολίας (EMA) είναι ιδιαίτερα απαιτητική υπολογιστικά. Ως εκ τούτου είναι κοινή πρακτική να επιλύεται κάθε N βήματα είτε

εσωτερικών επαναλήψεων είτε επαναλήψεων στο φυσικό χρόνο. Στις δικές μας προσομοιώσεις η EMA επιλύθηκε ανά N βήματα στον ψευδοχρόνο. Στα πρώτα $2s$, πριν οι υψηλές θερμοκρασίες φτάσουν στην οροφή και τα πλευρικά τοιχώματα της σήραγγας, η EMA επιλυόταν σε κάθε βήμα στον ψευδοχρόνο. Έπειτα, η EMA επιλυόταν ανά $N=3$ βήματα στον ψευδοχρόνο για να επιταχυνθεί η επίλυση. Για κάθε N ψευδοβήμα, μόνο μια επανάληψη της EMA διενεργούνταν.

Για την ανακατασκευή της έντασης της ακτινοβολίας στις έδρες των όγκων ελέγχου χρησιμοποιήθηκε το δεύτερης τάξης σχήμα σε συνδυασμό με τον περιοριστή Min-Mod.

6.3.2 Αποτελέσματα με την ακτινοβολία

Στο σχήμα 6-8 δίνονται τα προφίλ των θερμοκρασιών στα 18m και στα 40m κατάντη της πηγής θερμότητας, αυτή τη φορά λαμβάνοντας υπόψη την ακτινοβολία. Στο ίδιο διάγραμμα δίνονται επίσης τα αριθμητικά αποτελέσματα των Miloua et al. [Mil11] και τα πειραματικά αποτελέσματα των Fletcher et al. [Fle94]. Παρατηρούμε ότι παρόλο που υπολογίστηκαν μικρότερες τιμές για τη θερμοκρασία λαμβάνοντας υπόψη την ακτινοβολία, οι τιμές παραμένουν ακόμα υψηλότερες σε σχέση με τα αποτελέσματα των άλλων ερευνητών. Αυτή η διαφορά αποδίδεται στη μη μοντελοποίηση της αγωγής θερμότητας στο τοίχωμα της σήραγγας.



Σχήμα 6-8. Σύγκριση των θερμοκρασιακών προφίλ κατά το ύψος όταν η ακτινοβολία λαμβάνεται υπόψη με τα αποτελέσματα των Miloua et al. [Mil11] και Fletcher et al. [Fle94].

6.4 Αγωγή θερμότητας στο τοίχωμα

Για λόγους απλότητας και υπολογιστικού κόστους αναπτύχθηκε ένα μονοδιάστατο (1-Δ) μοντέλο για την αγωγή στο τοίχωμα. Η εξίσωση 1-Δ αγωγής σε αδιάστατη μορφή είναι:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = Fo \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \quad (6-1)$$

όπου $Fo = \frac{\alpha t_{ref}}{L_{ref}^2}$ είναι ο αριθμός Fourier, $\alpha = \frac{k_t}{\rho C_p}$ είναι η θερμική διάχυση στο τοίχωμα και n είναι η κάθετη στο τοίχωμα διεύθυνση. k_t είναι η θερμική αγωγιμότητα, ρ η πυκνότητα και C_p η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση του τοιχώματος.

Η δεύτερη παράγωγος της θερμοκρασίας προσεγγίστηκε αριθμητικά χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές για γενικά μη ομοιόμορφο 1-Δ πλέγμα. Η χρονική παράγωγος προσεγγίστηκε με πρόσω διαφορές πρώτης τάξης ακρίβειας. Στη συνέχεια με την εφαρμογή του σχήματος Crank-Nicolson [Hir88] καταλήξαμε σε ένα τριδιαγώνιο σύστημα η επίλυση του οποίου έγινε κατά τον αλγόριθμο Thomas [Αρι03]. Στον πρώτο κόμβο η θερμοκρασία ήταν ίση με την θερμοκρασία του τοιχώματος που προέρχεται από τον επιλύτη της ροής. Στο τέλος του τοιχώματος επιβάλαμε αδιαβατικές οριακές συνθήκες.

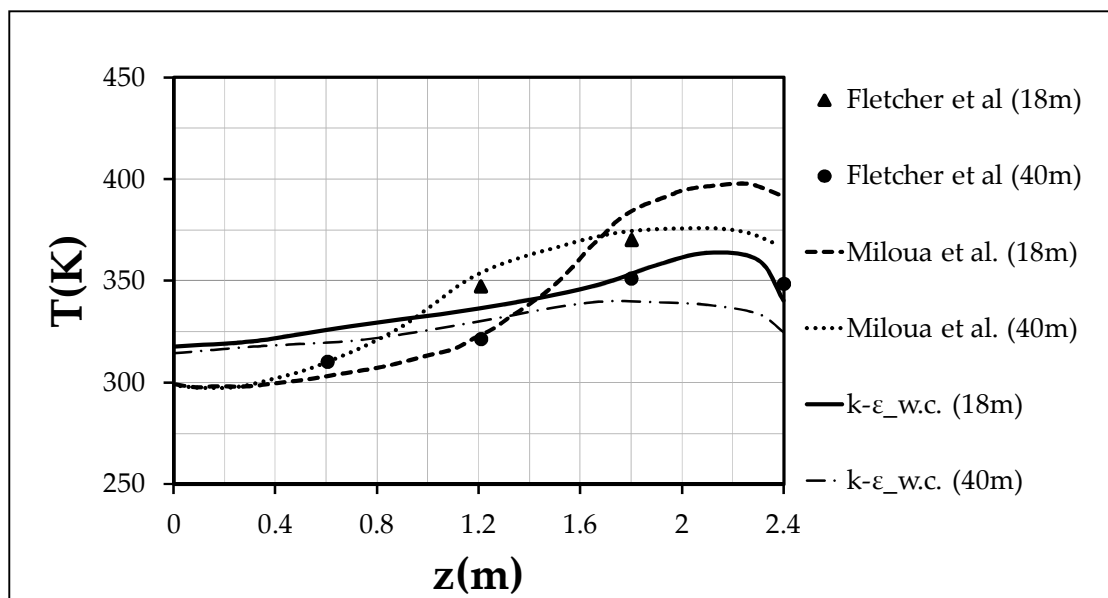
Η σύζευξη του μοντέλου αγωγής με τον επιλύτη έγινε μέσω της ροής θερμότητας λόγω αγωγής στη διεπιφάνεια του τοιχώματος. Η 1-Δ αγωγή σε κάθε οριακό κόμβο τοιχώματος επιλυόταν έμμεσα σε κάθε βήμα στον ψευδοχρόνο. Ο επιλύτης της ροής υπολόγιζε την θερμοκρασία τοιχώματος για το πρόβλημα της αγωγής και το μοντέλο αγωγής έδινε την ροή θερμότητας λόγω αγωγής στον επιλύτη.

6.4.1 Αποτελέσματα με την αγωγή και την ακτινοβολία

Δεν βρήκαμε αρκετά δεδομένα για το περιβάλλον τη σήραγγα τοίχωμα. Έτσι, θεωρήσαμε πάχος τοιχώματος 1,5m, θερμική αγωγιμότητα ίση με 0,1W/(mK), πυκνότητα ίση με 1750kg/m³ και ειδική θερμότητα ίση με 960J/(kgK). Το 1-Δ πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν πυκνότερο κοντά στη διεπιφάνεια ρευστού-

στερεού.

Στο σχήμα 6-9 παρουσιάζουμε τα θερμοκρασιακά προφίλ που υπολογίστηκαν στα 18m και στα 40m κατάντη της πηγής θερμότητας, όταν η ακτινοβολία και η αγωγή θερμότητας ελήφθησαν υπόψη ταυτόχρονα. Στο ίδιο σχήμα δίνονται επίσης τα αριθμητικά αποτελέσματα των Miloua et al. [Mil11] και τα πειραματικά αποτελέσματα των Fletcher et al. [Fle94]. Όπως περιμέναμε, τα θερμοκρασιακά προφίλ έχουν μετατοπιστεί σε χαμηλότερες τιμές θερμοκρασίας. Με την αγωγή στο τοίχωμα τα αποτελέσματά μας συμφωνούν σε καλύτερο βαθμό με τα πειραματικά.



Σχήμα 6-9. Σύγκριση θερμοκρασιακών προφίλ κατά το ύψος όταν η ακτινοβολία και η αγωγή στο τοίχωμα λαμβάνονται υπόψη με τα αριθμητικά αποτελέσματα των Miloua et al. [Mil11] και τα πειραματικά αποτελέσματα των Fletcher et al. [Fle94].

Κεφάλαιο 7

Ανακεφαλαίωση, Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

Στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής ανακεφαλαιώνουμε σε συντομία τα όσα παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την έρευνά μας και τη συνεισφορά της εργασίας με τα καινοτόμα στοιχεία της. Τέλος, αναφέρονται ορισμένες σκέψεις για τη βελτίωση και επέκταση της παρούσας μεθοδολογίας.

7.1. Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκαν συνδυασμένες περιπτώσεις ροής και μεταφοράς θερμότητας μέσω της ανάπτυξης σε υπολογιστικό κώδικα μιας αριθμητικής μεθοδολογίας.

Ο επιλύτης χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση 2-Δ ή 3-Δ, μόνιμων ή μη-μόνιμων, ασυμπίεστων, στρωτών ή τυρβωδών ροών συνεκτικού και Νευτώνειου ρευστού. Χρησιμοποιεί μια κεντροκομβική πεπερασμένων όγκων τεχνική διακριτοποίησης για την ολοκλήρωση όλων των εξισώσεων μέσης ροής στο ίδιο αριθμητικό πλέγμα εφαρμόζοντας μια ακμοβασική και διαφανή διαδικασία σε υβριδικά πλέγματα. Για τη σύζευξη των πεδίων πιέσεων και ταχυτήτων εφαρμόζεται η προσέγγιση τεχνητής συμπίεστότητας βάσει της οποίας το σύστημα των εξισώσεων διατήρησης μετατρέπεται από παραβολικό/ελλειπτικό σε υπερβολικό/παραβολικό, επιτρέποντάς μας τη χρήση τεχνικών αντίστοιχων του συμπιεστού ρευστού. Ως εκ τούτου, για την προσέγγιση των μη-συνεκτικών όρων αναπτύξαμε τον προσεγγιστικό επιλύτη Riemann του Roe. Για τους συνεκτικούς όρους χρησιμοποιήθηκε μια αποδοτική από άποψη χρόνου CPU τεχνική. Η χρονική διακριτοποίηση επιτεύχθηκε μέσω ενός διβηματικού πεπλεγμένου σχήματος για την χρονοπροέλαση στον ψευδοχρόνο και το φυσικό χρόνο. Όλες οι εξισώσεις μέσης ροής είναι ισχυρώς συζευγμένες, μετά τη διαπίστωση της υπεροχής αυτής έναντι της ασθενώς συζευγμένης επίλυσης.

Για την προσομοίωση ανώστικων ροών οι διαφορές πυκνότητας προσεγγίζονται από τις διαφορές θερμοκρασίας βάσεις της προσέγγισης Boussinesq.

Για τις τυρβώδεις ροές χρησιμοποιήθηκαν δύο RANS μοντέλα τύρβης, το k- ω SST με ή χωρίς συναρτήσεις τοιχώματος και το υψηλών αριθμών Reynolds standard k- ϵ . Οι εξισώσεις μέσης ροής και τύρβης είναι ασθενώς συζευγμένες.

Για την ανακατασκευή των εξαρτημένων μεταβλητών που απαιτείται για τον υπολογισμό των μη-συνεκτικών όρων εφαρμόσαμε σχήματα υψηλής τάξης ακρίβειας. Επίσης, μελετήθηκε η χρήση περιοριστών και διαπιστώθηκε ότι σταμάτησαν τη σύγκλιση σε ένα συγκεκριμένο βαθμό και οι διορθώσεις των μεγεθών παρουσίασαν ταλαντώσεις. Ως εκ τούτου, οι περιοριστές απορρίφθηκαν ως επιλογή για την ανακατασκευή των μεγεθών μέσης ροής.

Για τη μοντελοποίηση της ακτινοβολία εφαρμόστηκαν δύο μέθοδοι. Η πρώτη αποτελεί μια αναλυτική μέθοδο γωνιακών παραγόντων (ΜΓΠ). Η δεύτερη μέθοδος είναι μια μέθοδος πεπερασμένων όγκων (ΜΠΟ) που έχει εφαρμογή για φαιό μέσο που απορροφά, εκπέμπει και σκεδάζει την ακτινοβολία. Βασίζεται σε έναν ακμοβασικό αλγόριθμο για υβριδικά πλέγματα καθιστώντας την συμβατή με τον επιλύτη της ροής. Είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας στο χώρο και το χρόνο. Η γωνιακή διακριτοποίηση επιτυγχάνεται μέσω της ισόποσης διαίρεσης των 4π στερακτινίων σε $N_\theta \times N_\phi$ διευθύνσεις.

Μετά την παρουσίαση της αριθμητικής μεθοδολογίας και των παραμέτρων αυτής, επιλύθηκαν ορισμένες περιπτώσεις αναφοράς για την επικύρωση του επιλύτη. Αυτές οι περιπτώσεις ήταν δισδιάστατες ή τρισδιάστατες, μόνιμες ή μη-μόνιμες, στρωτές ή τυρβώδεις, με την επίδραση ή όχι της ακτινοβολίας. Τα αποτελέσματα βρέθηκαν να συμφωνούν με αυτά που παρουσιάστηκαν από άλλους ερευνητές και γενικά ήταν ομαλά (smooth) για όλες τις εξαρτημένες μεταβλητές.

Στη συνέχεια ελέγχθηκε η απόδοση του παράλληλου επιλύτη για διάφορες περιπτώσεις ως προς την επιτάχυνση και το βαθμό απόδοσης. Γενικά, υπολογίστηκαν ικανοποιητικές επιταχύνσεις και βαθμοί απόδοσης.

Τέλος, μετά την επικύρωση του επιλύτη και την επιβεβαίωση της υψηλής απόδοσης της παραλληλοποίησης αυτού προχωρήσαμε στην προσομοίωση περιπτώσεων πυρκαγιάς εντός σήραγγας. Σε αυτές τις περιπτώσεις διαπιστώθηκε ότι είναι

απαραίτητη η μοντελοποίηση της ακτινοβολίας και της αγωγής στο τοίχωμα για να υπολογίσουμε ρεαλιστικά θερμοκρασιακά πεδία.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα καινοτομικά στοιχεία της διατριβής ξεκινώντας από τα πιο σημαντικά και καταλήγοντας στα λιγότερο σημαντικά:

- Αναπτύχθηκε εκ του μηδενός μια ανάντη μέθοδος βασιζόμενη στον προσεγγιστικό επιλύτη Riemann του Roe για τον υπολογισμό των μη-συνεκτικών όρων των εξισώσεων μέσης ροής στις δύο και τρεις διαστάσεις.
- Διενεργήθηκε σύγκριση μεταξύ της ισχυρά συζευγμένης και ασθενώς συζευγμένης επίλυσης των εξισώσεων μέσης ροής, η οποία δεν έχει βρεθεί να έχει ξαναγίνει για αυτές τις εξισώσεις ξανά στη βιβλιογραφία.
- Για του συνεκτικούς όρους χρησιμοποιήθηκε ένας αποδοτικός από πλευράς CPU χρόνου αλγόριθμος, ο οποίος είχε αναπτυχθεί για τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής και εφαρμόστηκε και για την ενεργειακή εξίσωση με επιτυχία.
- Οι περιπτώσεις πυρκαγιάς στη σήραγγα προσομοιώθηκαν χρησιμοποιώντας την καινούργια ΜΠΟ για την ακτινοβολία και το καινούργιο 1-Δ μοντέλο για την αγωγή θερμότητας στο τοίχωμα.

7.2. Μελλοντική εργασία

Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιαστούν ορισμένες σκέψεις για τη βελτίωση και περαιτέρω επέκταση της μεθοδολογίας:

- Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η ενεργειακή εξίσωση επιλύεται ισχυρώς συζευγμένη με τις υπόλοιπες εξισώσεις μέσης ροής. Θα μπορούσε να γίνει εισαγωγή μιας επιπλέον εξίσωσης για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων καπνού με παρόμοιο τρόπο με την ασθενώς συζευγμένη τεχνική. Έχοντας υπολογίσει τις συγκεντρώσεις του καπνού στο χώρο και το χρόνο, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ψευδο-φαιές (pseudo-gray) προσεγγίσεις για το συντελεστής απορρόφησης και σκέδασης στις περιπτώσεις πυρκαγιάς.

- Ο επιλύτης της ακτινοβολίας με την ΜΠΟ θα μπορούσε να τροποποιηθεί για πραγματικά μέσα (μη-φαιά μέσα). Στη βιβλιογραφία έχουν αναφερθεί αρκετές μοντελοποιήσεις τέτοιου είδους.
- Τέλος, θα μπορούσαμε να υιοθετήσουμε κάποιο σχήμα αντίστοιχο του FT_n για την καλύτερη γωνιακή διακριτοποίηση και μια τεχνική για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς ακτινοβολίας για τμήμα των διευθύνσεων.

Δημοσιεύσεις

Κατά τη διάρκεια του διδακτορικού και πάνω στο αντικείμενο του διδακτορικού πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω ανακοινώσεις σε διεθνή συνέδρια και δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά:

- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I. and Tsangaris S., “Development and validation of a 3-D Navier-Stokes solver including heat transfer and natural convection”, 5th International Conference from Scientific Computing to Computational Engineering, Athens, Greece, 4-7 July, 2012.
- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I. and Tsangaris S., “Development and validation of a Navier-Stokes solver including heat transfer and mixed convection”, 10th HSTAM International Congress on Mechanics, Chania, Greece, 25-27 May, 2013.
- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I., Filus M. and Tsangaris S., “Numerical study of a ventilated tunnel fire. A turbulence models comparison”, 10th HSTAM International Congress on Mechanics, Chania, Greece, 25-27 May, 2013.
- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I. and Tsangaris S., “Development and validation of an incompressible Navier-Stokes solver including convective heat transfer”, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, Accepted.
- Stokos K.G., Vrahliotis S.I, Pappou Th.I. and Tsangaris S., “Numerical study of a ventilated tunnel fire. A turbulence models comparison”, Cogent

Οι παρακάτω διπλωματικές εργασίες που πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο Βιορρευτομηχανικής και Βιοϊατρικής Τεχνολογίας του τομέα Ρευστών αποδείχθηκαν ιδιαίτερα χρήσιμες:

- Αλεβίζος Θεόδωρος, "Υπολογιστική μελέτη της κίνησης καπνού κατά την εκδήλωση πυρκαγιάς σε αεριζόμενη σήραγγα", Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2011.
- Διαμαντίδης Περικλής, "Υπολογιστική προσομοίωση πυρκαγιάς εντός αεριζόμενης σήραγγας κάνοντας χρήση μοντέλου ακτινοβολίας", Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2014.

APPENDIX A

JACOBIANS OF VISCOUS FLUXES

In appendix A we give the Jacobians of the three-dimensional viscous fluxes which are necessary for their linearization procedure. The derivation of the two-dimensional Jacobians is obvious.

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{F}}_{\text{inv}} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{F}}_{\text{inv}} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{\partial q_x} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_t)2n_x & (1 + \alpha_t)n_y & (1 + \alpha_t)n_z & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \alpha_t)n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \alpha_t)n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\alpha_t}{\sigma_T} \right) n_x \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{F}}_{\text{inv}} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{\partial q_y} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_t)n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_t)n_x & (1 + \alpha_t)2n_y & (1 + \alpha_t)n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \alpha_t)n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\alpha_t}{\sigma_T} \right) n_y \end{pmatrix} \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{F}}_{\text{inv}} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{\partial q_z} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_t)n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \alpha_t)n_z & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_t)n_x & (1 + \alpha_t)n_y & (1 + \alpha_t)2n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\alpha_t}{\sigma_T}\right)n_z \end{pmatrix} \quad (\text{A-4})$$

REFERENCES

[Aba06] Abanto Juan, Reggio Marcelo, Barrero Daniel and Petro Eddy, "Prediction of fire and smoke propagation in an underwater tunnel", *Tunnelling and Underground Space Technology*, 22: 90-95, 2006.

[Abi11] Abidi A., Kolsi L., Borjini M.N. and Ben Aissia H., "Effect of radiative heat transfer on three-dimensional double diffusive natural convection", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 60: 785-809, 2011.

[Aki97] Akiyama M. and Chong Q.P., "Numerical analysis of natural convection with surface radiation in a square enclosure", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 31: 419-433, 1997.

[Alb08] Albanakis C. and Bouris D., "3D conjugate heat transfer with thermal radiation in a hollow cube exposed to external flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51: 6157-6168, 2008.

[Ali14] Aliabadi Morteza Khoshvaght, Hormozi Faramarz and Rad Elham Hosseini, "New correlations for wavy plate-fin heat exchangers: different working fluids", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 24, 5: 1086-1108, 2014.

[Alv08] Alvarado R., Xaman J., Hinojosa J. and Alvarez G., "Interaction between natural convection and surface thermal radiation in tilted slender cavities", *International Journal of Thermal Sciences*, 47: 355-368, 2008.

[And95] Anderson W. Kyle, Rausch Russ D. and Bonhaus Daryl L., "Implicit/multigrid algorithms for incompressible turbulent flows on unstructured grids", *AIAA paper 95-1740*, 1995.

[And06] Anderson Wendy, Pastor Elsa, Butler Bret, Catchpole Edward, Dupuy Jean-Luc, Fernandes Paulo, Guijarro Mercedes, Mendes-Lopes Jose-Miguel, Ventura Joao, "Evaluating models to estimate flame characteristics for free-burning fires using laboratory and field data", *V International Conference on Forest Fire Research*, 2006.

- [Apt91] Apte V.B., Green A.R. and Kent J.H., "Pool fire plume flow in a large-scale wind tunnel", Proceedings of the third International Symposium on Fire Safety Science, 3: 425-434, 1991.
- [Azh07] Azhdarzadeh M., Razavi S.E. and Azhdarzadeh Zh., "An enhanced characteristic based method for artificially compressible flows with heat transfer", 16th Australasian Fluid Mechanics Conference, Gold Coast, Australia, December 2-7, 2007.
- [Azh08] Azhdarzadeh M. and Razavi S.E., "A pseudo-characteristic based method for incompressible flows with heat transfer", Journal of Applied Sciences, 8, 18: 3183-3190, 2008.
- [Bae98] Baek Seung Wook, Kim Man Young and Kim Jeong Soo, "Nonorthogonal finite-volume solutions of radiative heat transfer in a three-dimensional enclosure", Numerical Heat Transfer, Part B, 34, 4: 419-437, 1998.
- [Bal93] Balaji C. and Venkateshan S.P., "Interaction of surface radiation with free convection in a square cavity", International Journal of Heat and Fluid Flow, 14, 3: 260-267, 1993.
- [Bal94] Balaji C. and Venkateshan S.P., "Interaction of radiation with free convection in an open cavity", International Journal of Heat and Fluid Flow, 15, 4: 317-324, 1994.
- [Bal95] Balaji C. and Venkateshan S.P., "Combined conduction, convection and radiation in a slot", International Journal of Heat and Fluid Flow, 16: 139-144, 1995.
- [Ban08] Banjac Milos and Nikolic Barbara, "Numerical study of smoke flow control in tunnel fires using ventilation systems", FME Transactions 36: 145-150, 2008.
- [Bar89] Bartnicki J., "A simple filtering procedure for removing negative values from numerical solutions of the advection equation", Environmental Software, 4, 4: 187-201, 1989.
- [Bar94] Barakos G. and Mitsoulis E., "Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 18: 695-719, 1994.

- [Bar98] Barakos G. and Drikakis D., "Implicit unfactored implementation of two-equation turbulence models in compressible Navier-Stokes methods", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 28: 73-94, 1998.
- [Bea05] Beard Alan and Carvel Richard, "The handbook of tunnel fire safety", Thomas Telford, 2005.
- [Ber94] Bermudez Alfredo and Vazquez M. Elena, "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms", *Computers Fluids*, 23, 8: 1049-1071, 1994.
- [Ber98] Bermudez Alfredo, Dervieux Alain, Desideri Jean-Antoine and Vazquez M. Elena, "Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155: 49-72, 1998.
- [Bet01] Bettelini Marco, "CFD for tunnel safety", *Fluent Users' Meeting*, Bingen, Germany, 17-18 September, 2001.
- [Bla01] Blazek J., "Computational fluid dynamics: Principles and applications", Elsevier, first edition, 2001.
- [Bor08] Borjini Mohamed Naceur, Ben Aissia Habib, Halouani Kamel and Zeghmati Belkacem, "Effect of radiative heat transfer on the three-dimensional Buoyancy flow in cubic enclosure heated from the side", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29: 107-118, 2008.
- [Bou07] Boussinesq Joseph Valentin, "Theorie de l'ecoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section", Gauthier-Villars, Paris, Tome I-II, 1807.
- [Cen02] Cengel Yunus A., "Heat transfer: A practical approach", McGraw-Hill, second edition, 2002.
- [Cha89] Chang Keun-Shik and Sa Jong-Youb, "Numerical study of the unsteady mixed convection heat transfer from a circular cylinder", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 16: 427-434, 1989.

[Cha94] Chai John C., Patankar Suhas V. and Lee HaeOk S., "Evaluation of spatial differencing practices for the discrete-ordinates method", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 8, 1: 140-144, 1994.

[Cha95] Chai John C., Parthasarathy Girija, Lee HaeOk S. and Patankar Suhas V., "Finite volume radiative heat transfer procedure for irregular geometries", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 9, 3: 410-415, 1995.

[Cho67] Chorin Alexandre Joel, "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems", *Journal of Computational Physics*, 2: 12-26, 1967.

[Cho98] Chow W.K., "On smoke control for tunnels by longitudinal ventilation", *Tunnelling and Underground Space Technology*, 13, 3: 271-275, 1998.

[Chu93] Chui E.H. and Raithby G.D., "Computation of radiant heat transfer on a nonorthogonal mesh using the finite-volume method", *Numerical Heat Transfer, Part B*, 23: 269-288, 1993.

[Col04] Colomer G., Costa M., Consul R. and Oliva A., "Three-dimensional numerical simulation of convection and radiation in a differentially heated cavity using the discrete ordinates method", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47: 257-269, 2004.

[Des11] Deshmukh Parameshwar, Mitra Sushanta K., Gaitonde U.N., "Investigation of natural circulation in cavities with uniform heat generation for different Prandtl number fluids", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54: 1465-1474, 2011.

[deV83a] De Vahl Davis G., "Natural convection in a square cavity: a comparison exercise", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3: 227-248, 1983.

[deV83b] De Vahl Davis G., "Natural convection of air in a square cavity. A benchmark numerical solution", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3: 249-264, 1983.

[Eld65] Elder J.W., "Turbulent free convection in a vertical slot", *Journal of Fluid Mechanics*, 23: 99-111, 1965.

[Fer13] Fereidoon A., Saedodin S., Esfe M. Hemmat and Noroozi M.J., "Evaluation of mixed convection in inclined square lid-driven cavity filled with Al_2O_3 /water nano-fluid", *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 7, 1: 55-65, 2013.

[Fiv87] Fiveland W.A., "Discrete ordinates methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media", *Journal of Heat Transfer*, 109: 809-812, 1987.

[Fiv88] Fiveland W.A., "Three-dimensional radiative heat-transfer solutions by the discrete-ordinates method", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2, 4: 309-316, 1988.

[Fle94] Fletcher D.F., Kent J.H., Apte V.B. and Green A.R., "Numerical simulations of smoke movement from a pool fire in a ventilated tunnel", *Fire Safety Journal*, 23: 305-325, 1994.

[FLUENT] Ansys Fluent 13 Theory Guide, Ansys Inc., 2010.

[Fus91] Fusegi T., Hyun J.M., Kuwahara K. and Farouk B., "A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34, 6: 1543-1557, 1991.

[Fus92] Fusegi Toru, Hyun Jae Min and Kuwahara Kunio, "Three-dimensional numerical simulation of periodic natural convection in a differentially heated cubical enclosure", *Applied Scientific Research*, 49: 271-282, 1992.

[Gao04] Gao P.Z., Liu S.L., Chow W.K. and Fong N.K., "Large eddy simulations for studying tunnel smoke ventilation", *Tunnelling and Underground Space Technology*, 19: 577-586, 2004.

[Gra98] Grant G.B., Jagger S.F. and Lea C.J., "Fires in tunnels", *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 356: 2873-2906, 1998.

[Gro81] Gross U., Spindler K. and Hahne E., "Shapefactor-equations for radiation heat transfer between plane rectangular surfaces of arbitrary position and size with parallel boundaries", *Letters in Heat and Mass Transfer*, 8: 219-227, 1981.

- [Han00] Han Cho Young and Baek Seung Wook, "The effects of radiation on natural convection in a rectangular enclosure divided by two partitions", Numerical Heat Transfer, Part A, 37: 249-270, 2000.
- [Har65] Harlow Francis H. and Welch J. Eddie, "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface", The Physics of Fluids, 8, 12: 2182-2189, 1965.
- [Has00] Haselbacher Andreas and Blazek Jiri, "Accurate and efficient discretization of Navier-Stokes equations on mixed grids", AIAA Journal, 38: 2094-2102, 2000.
- [Hen91] Henkes R.A.W.M., Van Der Vlugt F.F. and Hoogendoorn C.J., "Natural-convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models", International Journal of Heat and Mass Transfer, 34, 2: 377-388, 1991.
- [Hir88] Hirsch Charles, "Numerical computation of internal and external flows", John Wiley & Sons, Vol. 1, 1988.
- [Hir90] Hirsch Charles, "Numerical computation of internal and external flows", John Wiley & Sons, Vol. 2, 1990.
- [Hor90] Hortmann M., Peric M. and Sceuerer G., "Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 11: 189-207, 1990.
- [Hos08] Hostikka Simo, "Development of fire simulation models for radiative heat transfer and probabilistic risk assessment", Ph.D. Thesis, Helsinki University of Technology, 2008.
- [Hot67] Hottel Hoyt C. and Sarofim Adel F., "Radiative transfer ([McGraw-Hill series in mechanical engineering])", McGraw-Hill, 1967.
- [How68] Howell John R., "Application of Monte Carlo to heat transfer problems", Advances in Heat Transfer, 5: 1-54, 1968.
- [How01] Howell J.R., "A catalog of radiation heat transfer configuration factors", University of Texas, Austin second ed., 2001, Available online at: <<http://www.me.utexas.edu/>>.

- [Hu07] Hu L.H., Huo R., Wang H.B. and Yang R.X., "Experimental and numerical studies on longitudinal smoke temperature distribution upstream and downstream from the fire in a road tunnel", *Journal of Fire Sciences*, 25: 23-43, 2007.
- [Hu08] Hu L.H, Peng W. and Huo R., "Critical wind velocity for arresting upwind gas and smoke dispersion induced by near-wall fire in a road tunnel", *Journal of Hazardous Materials*, 150: 68-75, 2008.
- [Hua07] Huang Hong, Ooka Ryoza, Kato Shinsuke and Hayashi Yoshihiko, "A numerical study of firebrands scattering in urban fire based on cfd and firebrands aerodynamics measurements", *Journal of Fire Sciences*, 25: 355-378, 2007.
- [Hub00] Hubbard M.E. and Garcia-Navarro P., "Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients", *Journal of Computational Physics*, 165: 89-125, 2000.
- [Hui09] Hui Yang, Li Jia and Lixin Yang, "Numerical analysis of tunnel thermal plume control using longitudinal ventilation", *Fire Safety Journal*, 44: 1067-1077, 2009.
- [Hun02] Hung Kuo-Shu and Cheng Chin-Hsiang, "Pressure effects on natural convection for non-Boussinesq fluid in a rectangular enclosure", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 41: 515-528, 2002.
- [Kad81] Kader B.A., "Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24, 9: 1541-1544, 1981.
- [Kal96] Kallinderis Y., "A 3-D finite-volume method for the Navier-Stokes equations with adaptive hybrid grids", *Applied Numerical Mathematics*, 20: 387-406, 1996.
- [Kal05] Kallinderis Y. and Ahn H.T., "Incompressible Navier-Stokes method with general hybrid meshes", *Journal of Computational Physics*, 210: 75-108, 2005.
- [Kan06] Kang Kai, "Computational study of longitudinal control during an enclosure fire within a tunnel", *Journal of Fire Sciences*, 16: 159-181, 2006.

[Kas93] Kassemi M. and Naraghi M.H.N., "Analysis of radiation-natural convection interactions in 1-g and low-g environments using the discrete exchange factor method", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36, 17: 4141-4149, 1993.

[Ker94] Kersch A., Morokoff W. and Schuster A., "Radiative heat transfer with quasi-Monte Carlo methods", *Transport Theory and Statistical Physics*, 23, 7: 1001-1021, 1994.

[Kim88] Kim Tae-Kuk and Lee HaeOk, "Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional rectangular enclosures", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 31: 1711-1721, 1988.

[Kim00] Kim Seung Hyun and Huh Kang Y., "A new angular discretization scheme of the finite volume method for 3-D radiative heat transfer in absorbing emitting and anisotropically scattering media", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43: 1233-1242, 2000.

[Kim01] Kim Man Young, Baek Seung Wook and Park Jae Hyun, "Unstructured finite-volume method for radiative in a complex two-dimensional geometry with obstacles", *Numerical Heat Transfer, Part B*, 39: 617-635, 2001.

[Kim05] Kim Gunhong, Kim Seokgwon and Kim Yongmo, "Parallelized unstructured-grid finite volume method for modeling radiative heat transfer", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 19, 4: 1006-1017, 2005.

[Kim10] Kim Chongmin, Kim Man Young, Yu Myoung Jong and Mishra Subhash C., "Unstructured polygonal finite-volume solutions of radiative heat transfer in a complex axisymmetric enclosure", *Numerical Heat Transfer, Part B*, 57: 227-239, 2010.

[Ko08] Ko Minseok and Anand N.K., "Three-dimensional combined convective-radiative heat transfer over a horizontal backward-facing step. A finite-volume method", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 54: 109-129, 2008.

[Kol11] Kolsi Lioua, Abidi Awatef, Maatki Chemseddine, Borjini Mohamed Naceur and Ben Aissia Habib, "Combined radiation-natural convection in three-dimensional vertical cavities", *Thermal Science*, 15: 327-339, 2011.

- [Koz09] Kozic Mirko, "Influence of thermal boundary conditions in a numerical simulation of a small-scale tunnel fire", *Scientific Technical Review*, 59, 2: 18-23, 2009.
- [Kum04] Kumar Suresh, "Recent achievements in modelling the transport of smoke and toxic gases in tunnel fires", *First International Symposium, Safe & Reliable Tunnels. Innovative European Achievements*, Prague, 2004.
- [Kum08] Kumar P. and Eswaran V., "The effect of radiation on flow in a conical diffuser", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 54: 962-982, 2008.
- [Kuy93] Kuyper R.A., Van Der Meer Th.H., Hoogendoorn C.J. and Henkes R.A.W.M., "Numerical study of laminar and turbulent natural convection in an inclined square cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36, 11: 2899-2911, 1993.
- [Lak91] Lakshminarayana B., "An assessment of computational fluid dynamics techniques in the analysis and design of turbomachinery-the 1990 Freeman scholar lecture", *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 113: 315-352, 1991.
- [Lar12] Lari K., Baneshi M., Gandjalikham Nassab S.A., Komiya A. and Maruyama S., "Numerical study of non-gray radiation and natural convection using the full-spectrum k-distribution method", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 61: 61-84, 2012.
- [Lau74] Launder B.E. and Spalding D.B., "The numerical computation of turbulent flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3: 269-289, 1974.
- [Lee05] Lee Sung Ryong and Ryou Hong Sun, "An experimental study of the effect of the aspect ratio on the critical velocity in longitudinal ventilation tunnel fires", *Journal of Fire Sciences*, 23: 119-138, 2005.
- [Lee06a] Lee Seungsoo and Choi Dong Whan, "On coupling the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations with two-equation turbulence model equations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50: 165-197, 2006.

- [Lee06b] Lee Sung Ryong and Ryou Hong Sun, "A numerical study on smoke movement in longitudinal ventilation tunnel fires for different aspect ratio", *Building and Environment*, 41: 719-725, 2006.
- [Li03] Li Jojo S.M., Chow W.K., "Numerical studies on performance evaluation of tunnel ventilation safety systems", *Tunnelling and Underground Space Technology*, 18: 435-452, 2003.
- [Lin97] Lin F.B., Sotiropoulos F., "Strongly coupled multigrid methods for 3-D incompressible flows using near-wall turbulence closures", *Journal of Fluids Engineering*, 119, 2: 214-324, 1997.
- [Lin06] Lin Paul T., Baker Timothy J., Martinelli Luigi and Jameson Antony, "Two-dimensional implicit time-dependent calculations on adaptive unstructured meshes with time evolving boundaries", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50: 199-218, 2006.
- [Liu96] Liu Feng and Zheng Xiaoqing, "A strongly coupled time-marching method for solving the Navier-Stokes and $k-\omega$ turbulence model equations with multigrid", *Journal of Computational Physics*, 128: 289-300, 1996.
- [Liu98] Liu C., Zheng X. and Sung C.H., "Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows", *Journal of Computational Physics*, 139: 35-57, 1998.
- [Liu03] Liu Jian-Guo, Wang Cheng and Johnston Hans, "A fourth order scheme for incompressible Boussinesq equations", *Journal of Scientific Computing*, 18, 2: 253-285, 2003.
- [Lo07] Lo D.C., Young D.L., Murugesan K., Tsai C.C. and Gou M.H., "Velocity-vorticity formulation for 3D natural convection in an inclined cavity by DQ method", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50: 479-491, 2007.
- [Lyg12] Lygidakis Georgios N. and Nikolos Ioannis K., "Using the Finite-Volume Method and hybrid unstructured meshes to compute radiative heat transfer in 3-D geometries", *Numerical Heat Transfer, Part B*, 62: 289-314, 2012.

[Lyg13a] Lygidakis Georgios N. and Nikolos Ioannis K., "Using a high-order spatial/temporal scheme and grid adaptation with a finite-volume method for radiative heat transfer", *Numerical Heat Transfer, Part B*, 64: 89-117, 2013.

[Lyg13b] Lygidakis Georgios N. and Nikolos Ioannis K., "Improving the accuracy of a finite-volume method for computing radiative heat transfer in three-dimensional unstructured meshes", 3rd South-East European Conference on Computational Mechanics-an ECCOMAS and IACM Special Interest Conference, Kos, Greece, 12-14 June, 2013.

[Mal02a] Malan A.G., Lewis R.W. and Nithiarasu P., "An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: Part I. Theory and implementation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54: 695-714, 2002.

[Mal02b] Malan A.G., Lewis R.W. and Nithiarasu P., "An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: Part II. Application", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54: 715-729, 2002.

[Mar84] Markatos N.C. and Pericleous K.A., "Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 27, 5: 755-772, 1984.

[Mas95] Massachusetts Highway Department, "Memorial tunnel fire ventilation test program comprehensive test report", 1995.

[Men93] Menter Florian R., "Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows", AIAA 93-2906, 1993.

[METIS] Metis, <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis>.

[Mil11] Miloua Hadj, Azzi Abbes and Wang Hui Ying, "Evaluation of different numerical approaches for a ventilated tunnel fire", *Journal of Fire Sciences*, 29, 5: 403-429, 2011.

[Mod03] Modest Michael F., "Radiative heat transfer", Elsevier Science, second edition, 2003.

[Moh99] Mohanraj Rajendran, Neumeier Yedidia and Zinn Ben T., "Characteristic-based treatment of source terms in Euler equations for Roe scheme", AIAA Journal, 37, 4: 417-424, 1999.

[Mon09] Mondal Bittagopal and Mishra Subhash C., "Simulation of natural convection in the presence of volumetric radiation using the Lattice Boltzmann method", Numerical Heat Transfer, Part A, 55: 18-41, 2009.

[MPI] MPI, <http://www.mpi-forum.org>.

[Nou09] Nouanegue H.F., Muftuoglu A. and Bilgen E., "Heat transfer by natural convection, conduction and radiation in an inclined square enclosure bounded with a solid wall", International Journal of Thermal Sciences, 48: 871-880, 2009.

[Oka95] Oka Yasushi and Atkinson Graham T., "Control of smoke flow in tunnel fires", Fire Safety Journal, 25: 305-322, 1995.

[Pap80] Papoutsakis Eleftherios, Ramkrishna Doraiswami and Lim Henry C., "The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions", Applied Scientific Research, 36: 13-34, 1980.

[Rab08] Rabhi Mohammed, Bouali Hicham and Mezrhab Ahmed, "Radiation-natural convection heat transfer in inclined rectangular enclosures with multiple partitions", Energy Conversion and Management, 49: 1228-1236, 2008.

[Rai90] Raithby G.D. and Chui E.H., "A finite-volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosures with participating media", Journal of Heat Transfer, 112, 2: 415-423, 1990.

[Rai99] Raithby G.D., "Discussion of the finite-volume method for radiation, and its application using 3D unstructured meshes", Numerical Heat Transfer, Part B, 35: 389-405, 1999.

[Rav08] Ravnik J., Skerget L. and Zunic Z., "Velocity-vorticity formulation for 3D natural convection in an inclined enclosure by BEM", International Journal of Heat and Mass Transfer, 51: 4517-4527, 2008.

- [Red08] Reddy K.S. and Kumar N. Sendhil, "Combined laminar natural convection and surface radiation heat transfer in a modified cavity receiver of polar parabolic dish", *International Journal of Thermal Sciences*, 47: 1647-1657, 2008.
- [Rid04] Ridouane E.H., Hasnaoui M., Amahmid A. and Raji A., "Interaction between natural convection and radiation in a square cavity heated from below", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 45: 289-311, 2004.
- [Rid06] Ridouane El Hassan, Hasnaoui Mohammed and Campo Antonio, "Effects of surface radiation on natural convection in a Reyleigh-Benard square enclosure: steady and unsteady conditions", *Heat Mass Transfer*, 42: 214-225, 2006.
- [Rob99] Robichaux J., Balachandar S. and Vanka S.P., "Two-dimensional Floquet instability of the wake of square cylinder", *Physics of Fluids*, 11: 560-578, 1999.
- [Roe81] Roe P.L., "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes", *Journal of Computational Physics*, 43: 357-372, 1981.
- [Sca08] Scarella Gilles, Accary Gilbert, Meradji Sofiane, Morvan Dominique and Bessonov Oleg, "Three-dimensional numerical simulation of the interaction between natural convection and radiation in a differentially heated cavity in the low mach number approximation", *ICHMT International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer*, Marrakech, Morocco, May 11-16, 2008.
- [Sch70] Schmidt F.W. and Zeldin B., "Laminar heat transfer in the entrance region of ducts", *Journal of Applied Sciences Research*, 23: 73-94, 1970.
- [Se12] Se Camby M.K., Lee Eric W.M. and Lai Alvin C.K., "Impact of location of jet fan on airflow structure in tunnel fire", *Tunnelling and Underground Space Technology*, 27: 30-40, 2012.
- [Sha04a] Sharma Atul and Eswaran V., "Heat and fluid flow across a square cylinder in the two-dimensional laminar flow regime", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 45: 247-269, 2004.
- [Sha04b] Sharma Atul and Eswaran V., "Effect of aiding and opposing buoyancy on the heat and fluid flow across a square cylinder at $Re=100$ ", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 45: 601-624, 2004.

[Sha05a] Sharma Atul and Eswaran V., "Effect of channel-confinement and aiding/opposing buoyancy on the two-dimensional laminar flow and heat transfer across a square cylinder", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48: 5310-5322, 2005.

[Sha05b] Sharma Atul and Eswaran V., "Effect of channel confinement on the two-dimensional laminar flow and heat transfer across a square cylinder", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 47: 79-107, 2005.

[Sha07] Sharma Anil Kumar, Velusamy K., Balaji C. and Venkateshan S.P., "Conjugate turbulent natural convection with surface radiation in air filled rectangular enclosures", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50: 625-639, 2007.

[Shi01] Shin Sangmook, "Reynolds-averaged Navier-Stokes computation of tip clearance flow in a compressor cascade using an unstructured grid", Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2001.

[Sin04] Singh S.N. and Venkateshan S.P., "Numerical study of natural convection with surface radiation in side-vented open cavities", *International Journal of Thermal Sciences*, 43: 865-876, 2004.

[Spa03] Sparrow E.M. and Abraham J.P., "A new buoyancy model replacing the standard pseudo-density difference for internal natural convection in gases", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45: 3583-3591, 2003.

[Sto12] Stokos Konstantinos G., Vrahliotis Socrates I., Pappou Theodora I. and Tsangaris Sokrates, "Development and validation of a 3-D Navier-Stokes solver including heat transfer and natural convection", 5th International Conference from Scientific Computing to Computational Engineering, Athens, Greece, 4-7 July, 2012.

[Sto13a] Stokos Konstantinos G., Vrahliotis Socrates I., Pappou Theodora I. and Tsangaris Sokrates, "Development and validation of a Navier-Stokes solver including heat transfer and mixed convection", 10th International Congress on Mechanics, Crete, Greece, 25-27 May, 2013.

[Sto13b] Stokos Konstantinos G., Vrahliotis Socrates I., Pappou Theodora I., Filus Matthias and Tsangaris Sokrates, "Numerical study of a ventilated tunnel fire. A

turbulence models comparison", 10th International Congress on Mechanics, Crete, Greece, 25-27 May, 2013.

[Swa92] Swanson R.C. and Turkel Eli, "On central-difference and upwind schemes", *Journal of Computational Physics*, 101: 292-306, 1992.

[Swe84] Sweby P.K., "High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21, 5: 995-1011, 1984.

[Tai05] Tai C.H., Zhao Y. and Liew K.M., "Parallel-multigrid computation of unsteady incompressible viscous flows using a matrix-free implicit method and high-resolution characteristics-based scheme", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194: 3949-3983, 2005.

[Tam96] Tamamidis Panos, Zhang Guoqing and Assanis Dennis N., "Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows", *Journal of Computational Physics*, 124: 1-13, 1996.

[Tay91] Taylor Lefe K. and Whitfield David L., "Unsteady three-dimensional incompressible Euler and Navier-Stokes solver for stationary and dynamic grids", *AIAA 22nd Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, Honolulu, Hawaii, 24-26 June, 1991.

[Tri00] Tric E., Labrosse G. and Betrouni M., "A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cubic cavity, from accurate numerical solutions", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43: 4043-4056, 2000.

[Tri04] Trivic D.N., "Modeling of 3-D non-gray gases radiation by coupling the finite volume method with weighted sum of gray gases model", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47: 1367-1382, 2004.

[Tur03] Turki Said, Abbassi Hassen and Nasrallah Sassi Ben, "Two-dimensional laminar fluid flow and heat transfer in a channel with a built-in heated square cylinder", *International Journal of Thermal Sciences*, 42: 1105-1113, 2003.

- [van82] van Albada G.D., van Leer B. and Roberts W.W., "A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics", *Astronomy and Astrophysics*, 108: 76-84, 1982.
- [Vaz99] Vazquez-Cendon Maria Elena, "Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry", *Journal of Computational Physics*, 148: 497-526, 1999.
- [Ven93] Venkatakrishnan V., "On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions", AIAA 93-0880, 31st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, 11-14 January, 1993.
- [Vra12] Vrahliotis Socrates, Pappou Theodora and Tsangaris Sokrates, "Artificial compressibility 3-D Navier-Stokes solver for unsteady incompressible flows with hybrid grids", *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 6, 2:248-270, 2012.
- [Wei97] Weiss J.M., Maruszewski J.P. and Smith W.A., "Implicit solution of the Navier-Stokes equations on unstructured meshes", AIAA 97-2103, Proceedings of the 13th AIAA CFD conference, June, 1997.
- [Wil88] Wilcox D.C., "Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models", *AIAA Journal*, 26: 1299-1310, 1988.
- [Wu00] Wu Y. and Bakar M.Z.A., "Control of smoke flow in tunnel fires using longitudinal ventilation systems-a study of the critical velocity", *Fire Safety Journal*, 35: 363-390, 2000.
- [Xie14] Xie Gongnan, Li Shian, Sunden Bengt and Zhang Weihong, "Computational fluid dynamics for thermal performance of a water-cooled minichannel heat sink with different chip arrangements", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 24, 4: 797-810, 2014.
- [Xue01] Xue H., Ho J.C. and Cheng Y.M., "Comparison of different combustion models in enclosure fire simulation", *Fire Safety Journal*, 36: 37-54, 2001.
- [Yua02] Yuan Li, "Comparison of implicit multigrid schemes for three-dimensional incompressible flows", *Journal of Computational Physics*, 177: 134-155, 2002.

[Yuc89] Yucel A., Acharya S. and Williams M.L., "Natural convection and radiation in a square enclosure", Numerical Heat Transfer, Part A, 15: 261-278, 1989.

Greek References

[Αρι03] Γιαννάκογλου Κ.Χ, Αναγνωστόπουλος Ι. και Μπεργελές Γ., «Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς», Εκδόσεις Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, 2003.

[Βρα12] Βραχλιώτης Σωκράτης Ι., «Ανάπτυξη μεθοδολογίας ψευδοσυμπίεστότητας για την πρόλεξη μη μόνιμων τρισδιάστατων αεροδυναμικών ροών», Διδακτορική διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Αθήνα, 2012.

[Καβ99] Καβουλάκος Ν.Β., «Αερισμός και λοιπά Η/Μ συστήματα σηράγγων Εγνατίας οδού», Διημερίδα «Οι Σήραγγες της Εγνατίας Οδού», Ιωάννινα, 15-16 Οκτωβρίου, 1999.

[Κακ06] Κακάτσιος Ξενοφών, «Αρχές μεταφοράς θερμότητας και μάζης», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2006.

[Κου98] Κουμπογιάννης Δημήτριος Δ., «Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας», Διδακτορική διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Ρευστών, Αθήνα, 1998.

[Φου03] Φούντη Μαρία και Χουντάλας Δημήτριος, «Μεταφορά Θερμότητας II», Εκδόσεις Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, 2003.

