



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΔΟΚΩΝ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΗΣ
ΔΙΑΤΟΜΗΣ Ι ΑΠΟ FRP ΥΠΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΦΟΡΤΙΑ**

ΚΟΥΚΟΥΛΙΑΝΤΑ Ι. ΣΤΥΛΙΑΝΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΡΑΥΤΟΓΙΑΝΝΗΣ Γ. ΙΩΑΝΝΗΣ

ΑΘΗΝΑ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2014

ΕΜΚ ΔΕ 2014/21

Κουκουλιάντα Ι. Στυλιανή (2014)
Συμπεριφορά δοκών λεπτότοιχης διατομής I από FRP υπό εγκάρσια φορτία
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2014/21
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Koukoulianta I. Styliani (2014)
Behavior of thin-walled FRP I-beams subjected to transverse loads
Diploma Thesis ΕΜΚ ΔΕ 2014/21
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	6
ABSTRACT	8
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ - ΕΙΣΑΓΩΓΗ	10
1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	10
1.2 ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	11
1.3 ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΑ Η΄ ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	13
1.4 ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	14
1.5 ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΥΛΙΚΑ	15
1.5.1. ΙΝΕΣ.....	15
1.5.2. ΤΥΠΟΙ ΙΝΩΝ	15
1.5.3. ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑ ΙΝΩΝ-ΣΥΝΔΕΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ	19
1.5.4. ΜΟΡΦΕΣ ΙΝΩΝ	19
1.5.5. ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ.....	20
1.5.6. ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (THERMOSET)	21
1.5.7. ΘΕΡΜΟΠΛΑΣΤΙΚΑ ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ (THERMOPLASTIC).....	22
1.6 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΧΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	23
1.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΧΡΗΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	24
1.8 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	27
1.9 ΛΟΙΠΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	29
1.10 ΑΝΤΟΧΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	31
1.11 ΑΣΤΟΧΙΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	32
1.12 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΕΝΑΝΤΙ ΚΟΠΩΣΗΣ	33
1.13 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ.....	33
1.13.1. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ.....	33
1.13.2. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕ ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ	33
1.13.3. ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	34
1.14 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ.....	36
1.15 ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	40
2.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΡΩΣΕΩΝ.....	40
2.1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΡΩΣΕΩΝ.....	40

2.1.2.	ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ	42
2.1.3.	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ	44
2.1.4.	ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ	47
2.1.5.	ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΕ ΟΡΘΟΤΡΟΠΟ ΥΛΙΚΟ	49
2.1.6.	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ – ΓΕΝΙΚΑ	51
2.1.6.1.	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ.....	52
2.1.6.2.	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ	52
2.1.7.	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ Q_{ij}	53
2.1.8.	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ S_{ij}	54
2.2	ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΩΝ	55
2.2.1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΩΝ	55
2.2.2.	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΩΝ	58
2.2.3.	ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΕΝΤΑΣΗ.....	59
2.2.4.	ΑΠΛΗ ΚΑΜΨΗ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΩΝ	61
2.2.5.	ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΕΝΤΑΣΗ ΚΑΙ ΚΑΜΨΗ	64
2.2.6.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ A_{ij} , B_{ij} , D_{ij}	66
2.3	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΔΟΚΩΝ ΑΠΟ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ.....	66
2.4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΟΥΣ ΚΑΜΨΗΣ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ	68
2.5	ΜΕΛΕΤΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	69
2.5.1.	ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ	69
2.5.2.	ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΤΡΟΠΩΝ ΔΟΚΩΝ	70
2.5.3.	ΜΕΛΕΤΗ ΠΛΕΥΡΙΚΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΟΡΘΟΤΡΟΠΗΣ ΔΟΚΟΥ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	71
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο: ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΔΙΑΤΟΜΗ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ		74
3.1	ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ FEMAP	74
3.2	ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ	75
3.3	ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ & ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗΣ	75
3.4	ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ.....	77
3.5	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ	78
3.6	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ.....	79
3.7	ΑΝΑΛΥΣΗ	82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ – ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ		83
4.1	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	83
4.1.1.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	83

4.1.2.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	85
4.1.3.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ.....	85
4.1.4.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	86
4.2	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ FEMAP	87
4.2.1.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	87
4.2.2.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	88
4.2.3.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ.....	88
4.2.4.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	90
4.3	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ FEMAP	90
4.3.1.	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	90
4.3.2.	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ	93
4.4	ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	94
4.5	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ	95
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	96
	ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	96
	ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	97
	ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ	97
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	98

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΜΚ ΔΕ 2014/21

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΔΟΚΩΝ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ I ΑΠΟ FRP ΥΠΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΦΟΡΤΙΑ
ΚΟΥΚΟΥΛΙΑΝΤΑ Ι. ΣΤΥΛΙΑΝΗ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΡΑΥΤΟΓΙΑΝΝΗΣ Γ. ΙΩΑΝΝΗΣ)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται το ζήτημα της συμπεριφοράς δοκών λεπτότοιχης διατομής I από FRP (Fiber Reinforced Polymers – Ινοπλισμένα Πολυμερή) υπό εγκάρσια φορτία. Συγκεκριμένα, διερευνάται η δυνατότητα των υπολογιστικών μοντέλων να προσεγγίσουν τη συμπεριφορά των δοκών αυτών.

Στα πλαίσια της εργασίας, μελετήθηκαν αμφιέριστες δοκοί λεπτότοιχης διατομής I, με δέκα διαφορετικές περιπτώσεις διαστρωμάτωσης (συμμετρικές και μη συμμετρικές). Εφαρμόστηκαν τρεις διαφορετικές εγκάρσιες φορτίσεις (ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και συγκεντρωμένα φορτία) και πραγματοποιήθηκαν δύο ειδών αναλύσεις: στατική ανάλυση, για τις μετατοπίσεις των δοκών και ανάλυση του λυγισμού, για τα κρίσιμα φορτία πλευρικού λυγισμού. Για το σκοπό αυτό, αναπτύχθηκαν αριθμητικά μοντέλα με χρήση του προγράμματος Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP.

Σχετικά με τη δόμηση της διπλωματικής εργασίας, αυτή διαμερίζεται σε τέσσερα κεφάλαια.

Στο 1^ο Κεφάλαιο “Σύνθετα υλικά - Εισαγωγή”, παρουσιάζονται γενικά στοιχεία και έννοιες που σχετίζονται με τα σύνθετα υλικά, όπως τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους, οι χρήσεις τους, οι μηχανικές τους ιδιότητες.

Στο 2^ο Κεφάλαιο “Μέθοδοι ανάλυσης”, δίνονται αναλυτικά όλες οι σχέσεις που διέπουν την ανάλυση των στρώσεων και των διαστρωματώσεων. Επιπλέον, αναφέρονται οι ιδιότητες των σύνθετων δοκών από λεπτότοιχες διατομές και ο τρόπος υπολογισμού του βέλους κάμψης και του κρίσιμου φορτίου πλευρικού λυγισμού με αναλυτικές μεθόδους.

Στο 3^ο Κεφάλαιο “Προσομοίωση δοκού με διατομή από σύνθετα υλικά”, περιγράφονται όλα τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την προσομοίωση και επίλυση των δοκών με το πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP.

Στο 4^ο Κεφάλαιο “Αποτελέσματα αναλύσεων- Συγκρίσεις & Συμπεράσματα”, παρουσιάζονται και αναλύονται τα αποτελέσματα της στατικής ανάλυσης και της ανάλυσης του πλευρικού λυγισμού, όπως προέκυψαν βάσει των αναλυτικών μεθόδων (2^ο Κεφάλαιο) και του προγράμματος FEMAP (3^ο Κεφάλαιο). Τέλος, συγκρίνονται τα αποτελέσματα και εξάγονται τα τελικά συμπεράσματα σχετικά με την αποτελεσματικότητα των υπολογιστικών μοντέλων.

Από τα διεξαχθέντα αποτελέσματα, κατέστη σαφές ότι οι δοκοί με συμμετρικές διαστρωματώσεις είχαν πολύ καλύτερη συμπεριφορά από τις δοκούς με μη συμμετρικές διαστρωματώσεις. Επιπλέον, οι μεγαλύτερες ποσοστιαίες διαφορές, όπου εμφανίστηκαν,

Συμπεριφορά δοκών λεπτότοιχης διατομής I από FRP υπό εγκάρσια φορτία.

αποδίδονται στην επιρροή του μέτρου διάτμησης και των φαινομένων συστροφής -για τη στατική ανάλυση- και στις μικτές ιδιομορφές τοπικού και καθολικού λυγισμού –για την ανάλυση του λυγισμού.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS
EMK ΔΕ 2014/21

BEHAVIOR OF THIN-WALLED FRP I-BEAMS SUBJECTED TO TRANSVERSE LOADS

KOUKOULIANTA I. STYLIANI (SUPERVISED BY RAFTOYIANNIS G. IOANNIS)

ABSTRACT

The present thesis discusses the behavior of thin-walled FRP (Fiber Reinforced Polymers) I-beams, which are subjected to transverse loads. In order to be more specific, we examine the ability of models to approximate sufficiently the behavior of these beams.

Simply supported I-beams were studied, which had ten different layups (symmetrical and unsymmetrical). The beams were subjected to three cases of transverse loads (a uniformly distributed load and concentrated forces) and two types of analysis were performed: a static analysis for the displacements of the beams and a buckling analysis for the critical value of the buckling load (lateral-torsional buckling). For this purpose, the finite element program FEMAP was employed in order to create numerical models.

This thesis consist of four chapters.

The 1st Chapter “Composite Materials – Introduction” presents the principal parts regarding the Composite Materials, like their advantages and disadvantages, their uses, their mechanical properties.

The 2nd Chapter “Analysis Methods” refers to the necessary relations concerning the analysis of layers and layups. Moreover, the cross-sectional properties of thin-walled composite beams are mentioned. In this chapter, we find the analytical methods for calculating the maximum deflection and the critical value of the buckling load of these beams, too.

The 3rd Chapter “Simulation of composite beams” illustrates the steps that were followed to simulate and solve the beams, using the finite element program FEMAP.

The 4th Chapter “Analysis Results- Conclusions” demonstrates the results of the static and the buckling analyses, according to the 2nd and the 3rd Chapter. Finally, a comparison of the results follows and there are some conclusions concerning the effectiveness of numerical models.

According to the results, it is obvious that the beams with symmetrical layups behave better than the beams with unsymmetrical layups. What is more, the large percentage differences are due to the influence of the shear modulus and the torsion effects –for the static analysis- and the mixed eigenvalues of buckling – for the buckling analysis.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στα πλαίσια ολοκλήρωσης της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ραυτογιάννη Γ. Ιωάννη, για τη συνεχή του επιστημονική καθοδήγηση, το ενδιαφέρον του και τη συμβολή του στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

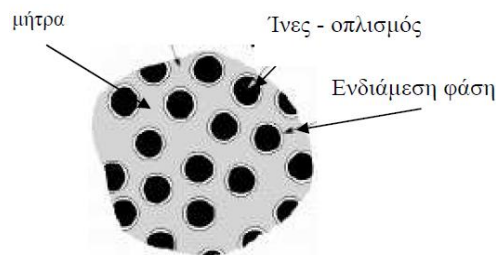
Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την υποστήριξη και τη συμπαράστασή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κουκουλιάντα Ι. Στυλιανή
Αθήνα, Νοέμβριος 2014.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ-ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Τα σύνθετα υλικά είναι συνδυασμός δύο ή περισσότερων υλικών –υπό διακριτή μορφή- τα οποία συνεργάζονται και δημιουργούν ένα νέο υλικό με βελτιωμένες ιδιότητες. Στην πράξη, το ένα από τα δύο υλικά είναι ισχυρό και παραλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος του φορτίου, ενώ το άλλο είναι ασθενές και χρησιμεύει περισσότερο ως συνδετικό μέσο. Το ισχυρό υλικό καλείται “οπλισμός” (reinforcement) και έχει συνήθως τη μορφή ινών, ενώ το ασθενές συνδετικό υλικό καλείται “μητρώο” (matrix) . Μπορεί να γίνει ένα πλήθος συνδυασμών επιμέρους υλικών ώστε το τελικό προϊόν να έχει ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες.



Σχήμα 1 Σχηματική παράσταση φάσεων σύνθετου υλικού

Τα πλέον συνήθη σύνθετα υλικά είναι αυτά που γίνονται με ισχυρές ίνες οι οποίες συγκρατούνται με ένα συνδετικό υλικό. Μόρια ή νιφάδες (particles ή flakes) χρησιμοποιούνται επίσης ως ενισχύσεις, χωρίς όμως να είναι τόσο αποτελεσματικά όσο οι ίνες.

Τέτοια υλικά έχουν σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα συμβατικά ισότροπα δομικά υλικά, όπως ο χάλυβας, το αλουμίνιο και οι άλλοι τύποι μετάλλου.

Οι ανθρώπινες κατασκευές σύνθετων υλικών ξεκίνησαν με τη χρήση της αργίλου, η οποία ενισχυόταν με άχυρο, για την κατασκευή πλίνθων και λοιπών κεραμικών ειδών, καθώς και του ξύλου, το οποίο περιέχει ίνες κυτταρίνης (cellulose) σε συνδετικά υλικά από ξύλο (lignin).

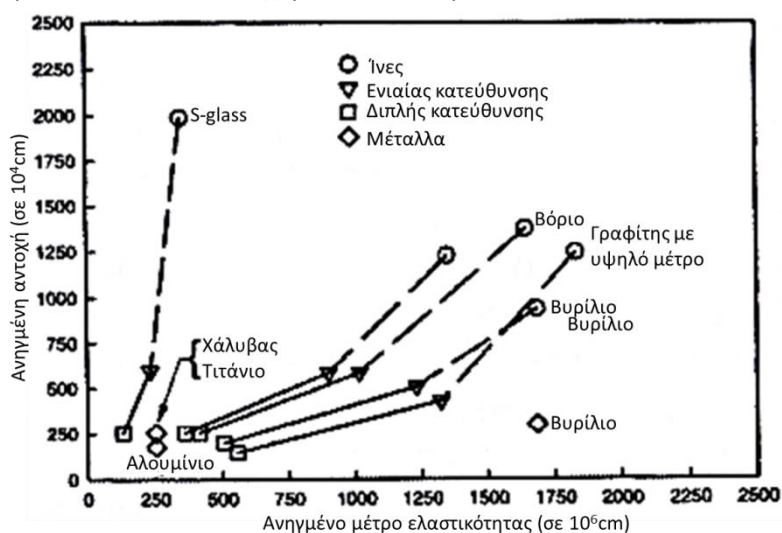
Στα σύγχρονα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται μέταλλα, κεραμικά ή πολυμερή συνδετικά υλικά, τα οποία είναι οπλισμένα με διάφορες ίνες ή σωματίδια. Για παράδειγμα, τα σκάφη από fiberglass κατασκευάζονται από πολυεστερική ρητίνη, οπλισμένη με ίνες υάλου.

Στην περίπτωση που τα σύνθετα υλικά αποτελούνται από περισσότερα από δύο επιμέρους υλικά, ονομάζονται *υβριδικά* (hybrids). Για παράδειγμα, το οπλισμένο σκυρόδεμα είναι ένα υβριδικό υλικό καθώς αποτελείται από ένα τμήμα σύνθετου υλικού (σκύρα και τσιμέντο), το οποίο οπλίζεται περαιτέρω με χαλύβδινες ράβδους οπλισμού σε

ρόλο ινών. Το τσιμέντο παίζει το ρόλο του ασθενούς συνδετικού μέσου, ενώ τα σκύρα είναι το ισχυρό υλικό που φέρει τα φορτία.

Τα μεταλλικά κράματα αποτελούνται από δύο ή περισσότερα μέταλλα, αλλά είναι ομοιογενή υλικά. Συνεπώς, δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως σύνθετα υλικά.

Σε άλλες περιπτώσεις, διαφορετικά υλικά διατάσσονται σε στρώσεις έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα τελικό προϊόν με ενισχυμένες ιδιότητες, όπως παραδείγματος χάριν στην περίπτωση της κατασκευής sandwich, όπου ένας πυρήνας από ασθενές υλικό περικλείεται μεταξύ δύο στρώσεων από άλλο ισχυρό και δύσκαμπτο υλικό.



Σχήμα 2 Σύγκριση αντοχών και δυσκαμψιών σύνθετων υλικών και μετάλλων

1.2 ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα σύνθετα υλικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με ποικίλους τρόπους, έχοντας ως κύριες παραμέτρους τις ακόλουθες:

1. Είδος ενισχύσεων:

A. Συνεχείς επιμήκειες ίνες:

- Ίνες ενιαίου προσανατολισμού
- Ίνες διπλού προσανατολισμού (π.χ. πλεκτές - woven, stitched mat κ.ά.)
- Ίνες τυχαίου προσανατολισμού (π.χ. συνεχείς δέσμες ινών – continuous strand mat-CSM)

B. Ασυνεχείς ίνες:

- Ίνες τυχαίου προσανατολισμού (π.χ. κοντές δέσμες ινών – chopped strand mat)
- Ίνες συγκεκριμένου προσανατολισμού (π.χ. oriented strand mat)

C. Κοντές ίνες & σωματίδια:

- Ίνες τυχαίου προσανατολισμού
- Ίνες συγκεκριμένου προσανατολισμού

2. Είδος συνδετικού υλικού (μητρώο) :

- PMC (Polymer Matrix Composites): Μητρώο από πολυμερή υλικά

- MMC (Metal Matrix Composites): Μεταλλικό μητρώο
- CMC (Ceramic Matrix Composites): Μητρώο από κεραμικά υλικά

3. Τρόπος διαμόρφωσης διαστρωμάτωσης:

- Ενιαίου προσανατολισμού, συμπεριλαμβανομένων πολλών στρώσεων, με το ίδιο υλικό και τον ίδιο προσανατολισμό ινών σε όλες τις στρώσεις
- Συνήθης (τυπική) διαστρωμάτωση, όπου τουλάχιστον κάποιες στρώσεις έχουν διαφορετικό προσανατολισμό ινών ή υλικό

4. Υβριδική διαμόρφωση:

- Διαφορετικά υλικά σε διάφορες στρώσεις (π.χ. διμεταλλικά)
- Διαφορετική ενίσχυση στη στρώση (π.χ. αναμεμιγμένες ίνες βορίου και άνθρακα – intermingled boron and carbon)

5. Συμπεριφορά:

- Γενικώς ανισότροπο σύνθετο υλικό (Generally anisotropic):

Το υλικό στο οποίο δεν υπάρχουν επίπεδα συμμετρίας σε σχέση με τις ίνες. Για παράδειγμα, ένα σύνθετο υλικό με ίνες είναι γενικώς ανισότροπο όταν οι ίνες είναι τοποθετημένες σε τρεις μη ορθογώνιες διευθύνσεις.

- Μονοκλινικό σύνθετο υλικό (Monoclinic):

Το υλικό στο οποίο υπάρχει ένα επίπεδο συμμετρίας σε σχέση με τις ίνες.

- Ορθότροπο σύνθετο υλικό (Orthotropic):

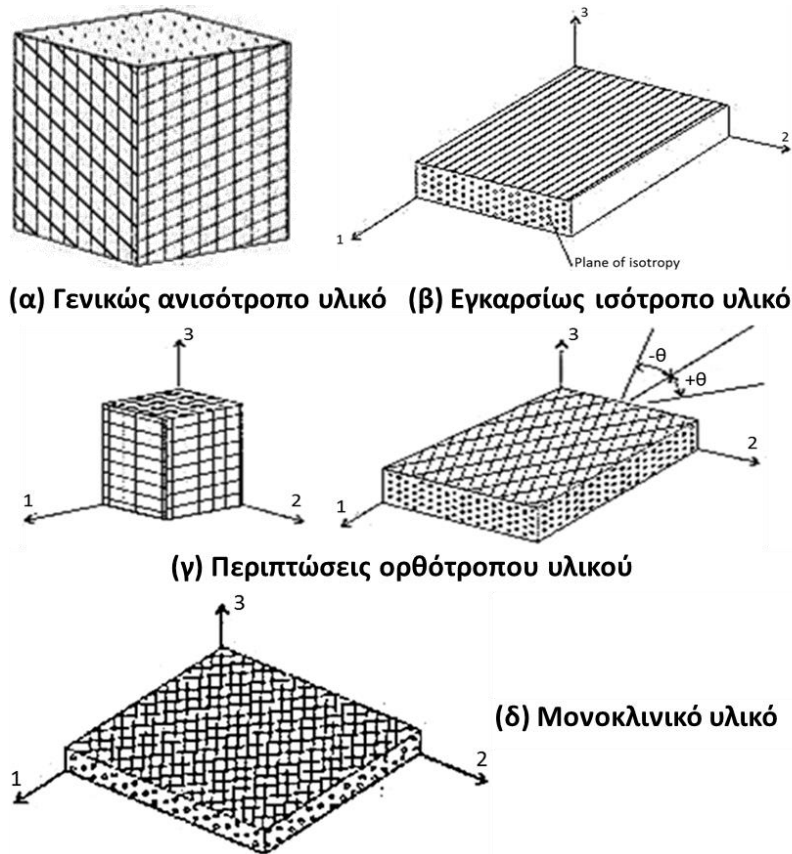
Το υλικό στο οποίο υπάρχουν τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα συμμετρίας, σε σχέση με τις ίνες. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των ορθότροπων υλικών είναι ότι οι ορθές τάσεις δεν “παράγουν” διατμητικές παραμορφώσεις, όταν αυτές οι τάσεις ασκούνται στις 1,2,3 ορθότροπες διευθύνσεις. Βέβαια, οι ορθές τάσεις που εφαρμόζονται στις x, y, z διευθύνσεις, οι οποίες δεν συμπίπτουν με τις 1,2,3 ορθότροπες διευθύνσεις, “παράγουν” διατμητικές παραμορφώσεις.

- Ισότροπο σύνθετο υλικό (Isotropic):

Σε ένα ισότροπο υλικό, δεν υπάρχουν προτιμώμενες διευθύνσεις και κάθε επίπεδο είναι επίπεδο συμμετρίας. Για παράδειγμα, ένα υλικό που περιέχει ένα μεγάλο αριθμό τυχαία προσανατολισμένων ινών, συμπεριφέρεται ως ισότροπο. Για ένα ισότροπο υλικό, το σύστημα συντεταγμένων επιλέγεται τυχαία.

- Εγκαρσίως ισότροπο σύνθετο υλικό (Transversely isotropic):

Το υλικό αυτό έχει τρία επίπεδα συμμετρίας, άρα είναι ορθότροπο. Επιπλέον, σε ένα από τα επίπεδα συμμετρίας συμπεριφέρεται ως ισότροπο. Για παράδειγμα ένα σύνθετο υλικό με συνεχείς ίνες ενιαίου προσανατολισμού, στο οποίο όλες οι ίνες είναι προσανατολισμένες στην διεύθυνση 1, συμπεριφέρεται ως ισότροπο στο επίπεδο που είναι κάθετο στις ίνες, δηλαδή στο 2-3 επίπεδο.

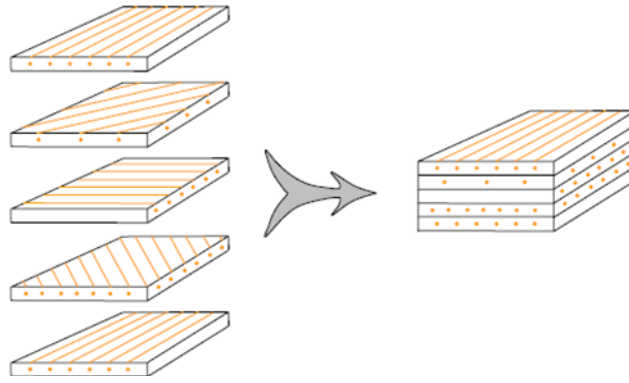


Σχήμα 3 Κατηγορίες σύνθετων υλικών βάσει της συμπεριφοράς τους

1.3 ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΑ Η΄ ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Στα πολύστρωτα ή στρωματικά σύνθετα υλικά (laminated composites), τα υλικά της μήτρας και της ενίσχυσης είναι υπό τη μορφή στρώσεων και φύλλων. Διάφορα υλικά μπορούν να σχεδιαστούν και να αποτελέσουν τα φύλλα που συνθέτουν τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Τα σύνθετα αυτού του τύπου μπορεί να έχουν πολύ καλές ιδιότητες, όπως δυσκαμψία, αντοχή, αντίσταση στη διάβρωση, στη φθορά, ακουστική και θερμική μόνωση κ.α.

Οι επιμέρους στρώσεις αποτελούνται από υψηλές τιμές μέτρου ελαστικότητας και ίνες υψηλής αντοχής σε ένα πολυμερές, μεταλλικό ή κεραμικό συνδετικό υλικό. Τυπικές ίνες που χρησιμοποιούνται περιλαμβάνουν γραφίτη, γυαλί, βόριο, και καρβίδιο του πυριτίου, και μερικά συνδετικά υλικά είναι εποξειδικά, πολυιμίδες, αλουμίνιο, τιτάνιο και αλουμίνα.



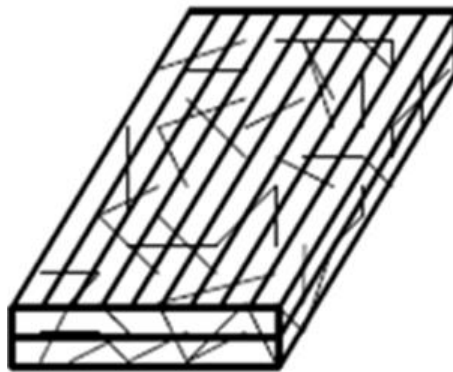
Σχήμα 4 Παράδειγμα σχηματισμού πολύστρωτου υλικού

1.4 ΥΒΡΙΔΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα υβριδικά σύνθετα υλικά (hybrids) χρησιμοποιούνται μόνο όταν υπάρχουν ειδικές απαιτήσεις. Για παράδειγμα, στην εξωτερική επιφάνεια μιας διαστρωμάτωσης οπλισμένης με ίνες άνθρακα τοποθετούνται - για λόγους προστασίας - στρώσεις οπλισμένες με γυαλί ή αραμίδιο (aramid). Οι ίνες άνθρακα παρέχουν δυσκαμψία και αντοχή, ενώ, οι ίνες υάλου παρέχουν προστασία έναντι πρόσκρουσης αντικειμένων ή βλημάτων.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι στρώσεις ενισχυμένες με ίνες βορίου ανάμεσα σε άλλες στρώσεις ενισχυμένες με ίνες άνθρακα (*sandwich*). Οι ίνες βορίου παρέχουν υψηλή αντοχή σε θλίψη, αλλά είναι πολύ ακριβές και δύσκολες στο χειρισμό. Παρόλα αυτά, οι επιφάνειες με ενισχύσεις άνθρακα παρέχουν υψηλή αντοχή σε εφελκυσμό και απλοποίηση της παραγωγής, ενώ, μειώνουν το συνολικό κόστος.

Το πιο κοινό υβριδικό σύνθετο υλικό είναι η κατασκευή *sandwich*. Ένας ασθενής πυρήνας από στερεοποιημένο αφρό ή με κυψελωτή διάταξη περικλείεται μεταξύ δύο ισχυρών και δυσκαμπτων διαστρωματώσεων. Ο πυρήνας παίζει το ρόλο μοχλοβραχίονα μεταξύ των δύο διαστρωματώσεων, αυξάνοντας τη ροπή αδρανείας των δύο επιμέρους διαστρωματώσεων συνολικά, υπό την προϋπόθεση ότι εξασφαλίζεται η μεταξύ τους συνεργασία. Τελικώς καταλήγουμε σε αυξημένη καμπτική δυσκαμψία (bending stiffness) του όλου συστήματος, με πολύ μικρή επιβάρυνση στο βάρος και στο κόστος του τελικού προϊόντος.



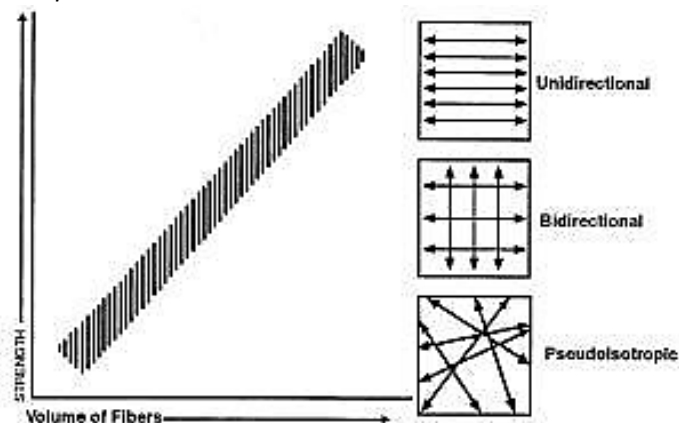
Σχήμα 5 Υβριδικό σύνθετο υλικό

1.5 ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΥΛΙΚΑ

1.5.1. ΙΝΕΣ

Οι ίνες χρησιμοποιούνται στα σύνθετα υλικά γιατί έχουν μικρό βάρος, είναι πιο δύσκαμπτες και έχουν μεγάλη αντοχή. Είναι πιο ισχυρές από το συμπαγές ακατέργαστο υλικό από το οποίο αποτελούνται, λόγω της προνομιακής κατεύθυνσης των μορίων κατά μήκος της διεύθυνσης των ινών και του μειωμένου πλήθους ατελειών που παρουσιάζονται σε μία ίνα, πράγμα αντίθετο με ότι συμβαίνει στο ακατέργαστο υλικό. Έτσι, ενώ –για παράδειγμα– η εφελκυστική αντοχή του ακατέργαστου E-glass είναι σχετικά μικρή (1,5-5,8 GPa), το ίδιο υλικό φτάνει έως και τα 72,3 GPa υπό μορφή ινών, κυρίως γιατί υπάρχει μείωση στον αριθμό, το μέγεθος και την επιφάνεια των ατελειών.

Οι ίνες χρησιμοποιούνται ως *οπλισμός* στα σύνθετα υλικά με ενιαίο προσανατολισμό, όπου ένας μεγάλος αριθμός ινών διατάσσεται παράλληλα μέσα στο σχετικά μικρό πάχος ενός κελύφους ή επίπεδου ελάσματος, που ονομάζεται στρώση. Μια *στρώση με ίνες ενιαίου προσανατολισμού* έχει μέγιστη αντοχή και δυσκαμψία κατά τη διεύθυνση των ινών και ελάχιστη στη διεύθυνση που είναι κάθετη στις ίνες. Όταν είναι επιθυμητές ίδιες ιδιότητες σε κάθε διεύθυνση μέσα στο επίπεδο της στρώσης, τότε χρησιμοποιούνται *ίνες με τυχαίο προσανατολισμό*.



Σχήμα 6 Σχέση αντοχής και προσανατολισμού ινών

Οι ιξοελαστικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών (π.χ. ερπυσμός) οφείλονται *κυρίως* στο συνδετικό υλικό. Τα σύνθετα υλικά που ενισχύονται με κοντές ίνες (chopped fibers, whiskers) ή κόκκους μπορούν να υποστούν μεγάλες παραμορφώσεις, ακόμα και υπό κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος της χρήσης συνεχών ινών σε κατασκευαστικές εφαρμογές.

1.5.2. ΤΥΠΟΙ ΙΝΩΝ

Οι πλέον συνηθισμένοι τύποι ινών που χρησιμοποιούνται στα σύνθετα υλικά είναι από γυαλί, άνθρακα, οργανικά υλικά (αραμίδιο), βόριο, Silicon Carbide (SiC), αλουμίνιο και άλλα υλικά σε περαιτέρω εξειδικευμένες εφαρμογές. Η *επιλογή* του τύπου ινών που θα χρησιμοποιηθούν εξαρτάται από τις επιθυμητές μηχανικές και περιβαλλοντικές ιδιότητες και το κόστος τους.

A. ΙΝΕΣ ΥΑΛΟΥ

Οι ίνες υάλου παρουσιάζουν τις τυπικές ιδιότητες του γυαλιού, όπως σκληρότητα και αντοχή σε διάβρωση. Επίσης, είναι εύκαμπτες, ελαφρές και σχετικά φτηνές. Αυτές οι ιδιότητες καθιστούν τις ίνες υάλου τον πλέον συνήθη τύπο ινών που χρησιμοποιούνται σε βιομηχανικές εφαρμογές μικρού κόστους. Η υψηλή αντοχή τους αποδίδεται στο μικρό αριθμό και το μικρό μέγεθος των ατελειών στην επιφάνειά τους. Όλες οι ίνες υάλου έχουν παρόμοιες δυσκαμψίες αλλά διαφορετικές τιμές αντοχής και διαφορετική αντοχή σε περιβαλλοντικές επιδράσεις.

Η αντοχή της ίνας μειώνεται εξαιτίας των φθορών που επέρχονται κατά την πορεία των διαφόρων φάσεων παραγωγής του σύνθετου υλικού, των παραμενουσών τάσεων και των δευτερογενών φορτίων (διατμητικά και εγκάρσια στη διεύθυνση των ινών).

Η αντοχή των ινών σε διάβρωση εξαρτάται από τη σύνθεση της ίνας, το διαβρωτικό διάλυμα και το χρόνο έκθεσης. Η εφελκυστική αντοχή τους μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, αλλά, μπορεί να θεωρηθεί σταθερή για ένα εύρος τιμών θερμοκρασιών, όπου μπορούν να εκτεθούν τα πολυμερή συνδετικά υλικά (έως 275°C ανάλογα με το είδος του συνδετικού υλικού). Η εφελκυστική αντοχή μειώνεται, επίσης, με τη δράση δυναμικών φορτίων. Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται *στατική κόπωση ή τάση αποδυνάμωσης* (static fatigue ή stress corrosion).



(α)

(β)

(γ)

Σχήμα 7 Ίνες υάλου σε μορφή (α) σωλήνα (κάλτσα) (β) ταινίας και (γ) υφάσματος

B. ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ

Οι ίνες άνθρακα, γνωστές και ως ανθρακονήματα ή ίνες γραφίτη, έχουν μικρό βάρος και είναι ισχυρές, με εξαιρετική χημική αντοχή. Επικρατούν στο χώρο της αεροδιαστημικής. Σε αντίθεση με τις ίνες υάλου, οι ίνες άνθρακα είναι διαθέσιμες σε ένα μεγάλο εύρος τιμών δυσκαμψίας. Οι ιδιότητές τους εξαρτώνται από το ακατέργαστο υλικό και την πορεία που ακολουθείται για την κατασκευή τους.

Η ταξινόμηση των ινών άνθρακα γίνεται συνήθως βάσει της δυσκαμψίας και της αντοχής τους, αλλά κατασκευαστικά είναι δυνατόν να δημιουργηθεί οποιοσδήποτε συνδυασμός δυσκαμψίας και αντοχής.

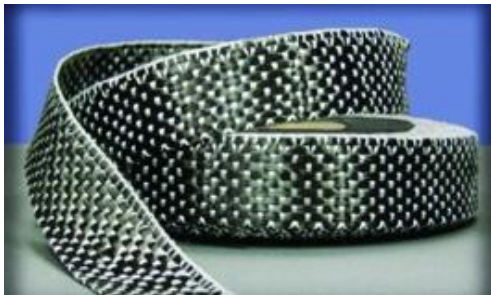
Όντας πιο δύσκαμπτες από τις ίνες υάλου, παρέχουν καλύτερα χαρακτηριστικά κόπωσης στο σύνθετο υλικό, μειώνοντας την παραμόρφωση στο πολυμερές συνδετικό υλικό υπό δεδομένο φορτίο. Επίσης, το φαινόμενο της στατικής κόπωσης παρατηρείται σπανιότερα στις ίνες άνθρακα.

Είναι καλοί αγωγοί του ρεύματος και γι' αυτό προκαλείται διάβρωση τύπου γαλβανισμού, εάν τα σύνθετα υλικά με ίνες άνθρακα έρθουν σε επαφή με μέταλλα. Για το

λόγο αυτό, πρέπει να τεθεί ένα μονωτικό υλικό (insulating barrier) μεταξύ των σύνθετων υλικών με ίνες άνθρακα και των μεταλλικών τμημάτων, όταν αυτά βρίσκονται σε επαφή.

Ο σημαντικότερος περιορισμός στη χρήση ινών άνθρακα είναι το υψηλό κόστος, το οποίο, όμως, δικαιολογείται από το ότι χρησιμοποιούνται σαν υλικό ενίσχυσης παρά σαν υποκατάστατο υλικό. Το υλικό ενίσχυσης επιτρέπει στην κατασκευή να επιτύχει αντοχή που δεν είναι δυνατή με άλλα υλικά.

Οι ίνες άνθρακα είναι ελαφρύτερες και πιο δύσκαμπτες από τις ίνες υάλου, αλλά δεν έχουν το οικονομικό πλεονέκτημα όταν σύνθετα υλικά με ίνες άνθρακα χρησιμοποιούνται για να υποκαταστήσουν ένα συμβατικό υλικό, όπως ο χάλυβας, σε κατασκευές όπου το βάρος δεν είναι κρίσιμο.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 8 Ίνες άνθρακα σε μορφή (α) ταινίας (β) σωλήνα (κάλτσα) και (γ) υφάσματος

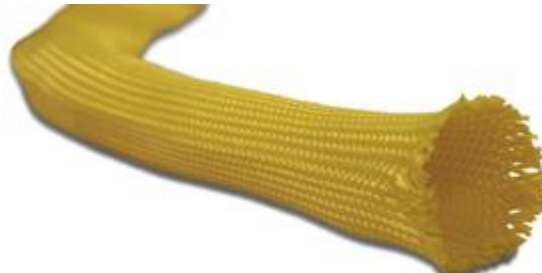
C. ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Οι πιο γνωστές από τις οργανικές ίνες είναι οι *ίνες αραμιδίου* (aramid), οι οποίες έχουν υψηλή απορροφητικότητα ενέργειας κατά την αστοχία, γεγονός που τις κάνει ιδανικές για την προστασία έναντι πρόσκρουσης και βαλλιστικών ενεργειών. Λόγω της μικρής πυκνότητάς τους, έχουν υψηλό λόγο εφελκυστικής αντοχής ως προς το βάρος και υψηλό λόγο μέτρου ελαστικότητας ως προς το βάρος, άρα, πολύ ελκυστικές για χρήση σε αεροσκάφη και θωρακίσεις των σκελετών τους.

Όντας φτιαγμένες από πολυμερές υλικό, έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά με τα πολυμερή συνδετικά υλικά: μικρή θλιπτική αντοχή, υφίστανται ερπυσμό, απορροφούν υγρασία και είναι ευαίσθητες στην υπεριώδη ακτινοβολία (UV).



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 9 Ίνες αραμιδίου σε μορφή (α) ταινίας Kevlar (β) σωλήνα Kevlar (κάλτσα) και (γ) υφάσματος Kevlar

D. ΛΟΙΠΟΙ ΤΥΠΟΙ ΙΝΩΝ

Η υψηλή δυσκαμψία, η υψηλή αντοχή και η μικρή πυκνότητα χαρακτηρίζουν τις ίνες βορίου (boron). Η χρήση τους ως ενισχύσεις στην αεροδιαστημική και σε αθλητικά είδη είναι αξιοσημείωτη. Λόγω του μικρού ρυθμού παραγωγής, είναι ανάμεσα στις πλέον ασύμφορες οικονομικά ίνες που κατασκευάζονται σήμερα.

Οι ίνες ανθρακούχου πυριτίου (Silicon Carbide-SiC) παράγονται όπως και οι ίνες βορίου με αντικατάσταση του άνθρακα. Βρίσκουν καλύτερη εφαρμογή ως ενισχύσεις μεταλλικών συνδετικών υλικών, όπως το τιτάνιο, αλλά χρησιμοποιούνται και σε συνδυασμό με ρητίνες πολυμερών. Χαρακτηρίζονται από υψηλή ακαμψία και αντοχή και υψηλότερη θερμική μόνωση από τις ίνες βορίου. Λόγω της περιορισμένης χρήσης τους και των μικρών ποσοτήτων παραγωγής, το κόστος τους είναι αρκετά υψηλό.

Πίνακας 1 Αξιολόγηση των ινών σύνθετων υλικών με βάση την ανθεκτικότητα

Κριτήριο	Ίνες άνθρακα	Ίνες υάλου	Ίνες αραμιδίου
Υψηλές θερμοκρασίες	+	-	-
Υπεριώδης ακτινοβολία	++	+	-
Υγρασία	+	-	-
Αλκαλικό & όξινο περιβάλλον	++	--	+
Γαλβανική διάβρωση	--	+	+
Ερπυσμός	++	--	-
Θραύση υπό τάση, διάβρωση υπό τάση	++	--	+
Κόπωση	++	-	+
Κρούση	-	+	++

Πίνακας 2 Τυπικές ιδιότητες διάφορων τύπων ινών

ΙΝΕΣ	ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ [GPa]	ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ [GPa]	ΘΛΙΠΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ [GPa]	ΕΠΙΜΗΚΥΝΣΗ [%]	ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ [gr/cc]	ΛΟΓΟΣ Poisson
Glass						
E-Glass	72,35	3,45	-	4,4	2,50 - 2,59	0,22
S-Glass	85	4,80	-	5,3	2,46 - 2,49	0,22
C-Glass	69	3,31	-	4,8	2,56	-
Graphite						
T300	230	3,53	-	1,5	1,75	0,2
M50	490	2,45	-	0,5	1,91	-
AS2	227	2,756	-	1,3	1,80	-
AS4-D	241	4,134	-	1,6	1,77	-
IM6	275,60	5,133	-	1,73	1,74	-
HMS4	317	2,343	-	0,8	1,80	-
Kevlar						
29	62	3,792	-	-	1,44	-
49	131	3,62	0,72	2,8	1,45	0,35
149	179	3,62	0,69	1,9	1,47	-
Boron	400	2,70 - 3,70	6,9	0,79	2,57	0,20
SCS-6	427	2,40 - 4,00	-	0,6	3,00	0,20
Nextel	260	2,10	-	-	3,40	-

1.5.3. ΣΥΜΒΑΤΟΤΗΤΑ ΙΝΩΝ-ΣΥΝΔΕΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Οι περισσότερες ίνες καλύπτονται με ένα υλικό που ονομάζεται *sizing*. Κατά τη διαδικασία παραγωγής, υφίστανται αξιοσημείωτη βλάβη, λόγω της τριβής που αναπτύσσεται τόσο μεταξύ τους όσο και με τον εξοπλισμό. Το *sizing* προστατεύει την ίνα, λειτουργώντας ως λιπαντικό-αντιστατικό μέσο και επιτρέπει σε ένα σύνολο από ίνες να ενωθούν ως μία μονάδα. Επιπλέον, το *sizing* συνεργάζεται με ένα μέσο σύνδεσης (*coupling agent*) που το αποτρέπει να ενωθεί με το συνδετικό υλικό. Παρόλα αυτά, η ίδια η ίνα μπορεί να απαιτεί διαφορετικό *sizing* ανάλογα με τον τύπο του πολυμερούς που χρησιμοποιείται ως συνδετικό υλικό. Η ενδοστρωματική αντοχή του σύνθετου υλικού παρέχει μια ένδειξη της ποιότητας της συνάφειας της ίνας με το συνδετικό υλικό. Τέλος, το *sizing* προστατεύει την ίνα από την υγρασία κατά τη διάρκεια ζωής του σύνθετου υλικού.

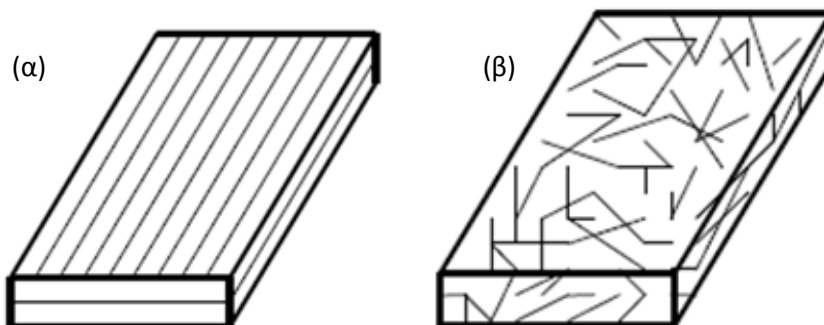
1.5.4. ΜΟΡΦΕΣ ΙΝΩΝ

A. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΧΕΙΣ ΙΝΕΣ

Τα σύνθετα υλικά είναι οπλισμένα με συνεχείς ή ασυνεχείς ίνες ή με κόκκους.

Οι *συνεχείς* είναι επιμήκεις ίνες, οι οποίες συνήθως επιτυγχάνουν υψηλές τιμές αντοχής και δυσκαμψίας, λόγω της ελεγχόμενης ανισοτροπίας και του μικρού αριθμού και μεγέθους της επιφάνειας των ατελειών. Στα σύνθετα υλικά με ενισχύσεις από συνεχείς ίνες, το φορτίο θεωρείται ότι παραλαμβάνεται κυρίως από τις ίνες, των οποίων η διεύθυνση έχει την ίδια φορά με αυτή του φορτίου.

Οι *ασυνεχείς* ίνες είναι κοντές και είτε προκύπτουν από κοπή των συνεχών ινών, είτε κατασκευάζονται απευθείας κοντές με σκοπό τη μείωση του κόστους. Ο λόγος των διαστάσεων τους (*aspect ratio*) -μήκος προς διάμετρο L/D - επηρεάζει σημαντικά τις ιδιότητες των σύνθετων υλικών. Ο προσανατολισμός των κοντών ινών δεν μπορεί να διαχειριστεί εύκολα και βασικά υποτίθεται ότι είναι τυχαίος, εκτός και αν έχουν γίνει ειδικές προβλέψεις για το χειρισμό του προσανατολισμού. Τα σύνθετα υλικά με κοντές ίνες τυχαίου προσανατολισμού έχουν περίπου ισότροπες ιδιότητες στο επίπεδο της διαστρωμάτωσης. Τα κύρια μειονεκτήματα των σύνθετων υλικών με κοντές ίνες, σε σύγκριση με τα σύνθετα υλικά με συνεχείς ίνες, είναι ότι έχουν μικρότερη αντοχή και δεν μειώνουν αποτελεσματικά την παραμόρφωση των πολυμερών συνδετικών υλικών.



Σχήμα 10 Σύνθετο υλικό (α) συνεχών και (β) ασυνεχών ινών

B. ΔΕΣΜΕΣ ΙΝΩΝ (*strand, tow, end, yarn, roving*)

Μία δέσμη ινών όπως *strand, tow, end*, είναι ένα σύνολο μη πεπλεγμένων/περιελιγμένων συνεχών ινών (*untwisted bundle of continuous filaments*) που θεωρείται ως ενιαίο. Το *yarn* είναι μία δέσμη πεπλεγμένων ινών. Το *roving* είναι μία δέσμη

από παράλληλες συνεχείς δέσμες και τα παράγεται με την περιέλιξη ενός αριθμού μεμονωμένων δεσμών ινών που απαιτούνται για να επιτευχθεί το επιθυμητό yield. Το *yield* είναι το μήκος της δέσμης ινών αναφορικά με μία μονάδα βάρους συσκευασίας.

C. ΔΕΣΜΕΣ ΙΝΩΝ (mat, fabric, veil)

Το *mat* σχηματίζεται από κοντές ίνες τυχαίου προσανατολισμού (chopped strand mat), ή swirled filaments (continuous strand mat, CSM) χαλαρά συγκρατημένες με ένα μικρό ποσοστό συγκολλητικού μέσου (binder). Το *veil* είναι ένα λεπτό mat που χρησιμοποιείται ως επιφανειακή στρώση για τη βελτίωση της αντοχής σε διάβρωση του σύνθετου υλικού. Τα veils και mats έχουν τυχαία προσανατολισμένες ίνες σε κάθε διεύθυνση, πράγμα που οδηγεί το σύνθετο υλικό σε ισότροπη συμπεριφορά.

Τα *rovings* και τα *tows* παρέχουν ενίσχυση σε μία διεύθυνση, ενώ το *ύφασμα* (fabric) παρέχει ενίσχυση σε δύο διευθύνσεις. Τα *πλεκτά υφάσματα* (woven fabric) φτιάχνονται με πλέξη (interloring/knitting) αλλά κυρίως με συνύφανση (interlacing weaving) των yarns. Οι ίνες στα *μη πλεκτά υφάσματα* (non-woven fabrics) φτιάχνονται απευθείας από δέσμες ινών strands χωρίς την ενδιάμεση μετατροπή τους σε yarns. Για το λόγο αυτό τίθεται ένα θέμα εάν τα πλεκτά υφάσματα (woven fabrics) υφίστανται μεγαλύτερη ζημιά στις ίνες λόγω της περαιτέρω επεξεργασίας τους. Τα μη πλεκτά υφάσματα (non-woven fabrics) πρέπει να ενώνονται με ένα συγκολλητικό μέσο (binder) ή να κολλιούνται σε ένα mat ως υποστήριξη (backing) ή μεταξύ τους χωρίς υποστήριξη. Κοντές ίνες (chopped strand mats) από λιγότερο ακριβές ίνες χρησιμοποιούνται συνήθως ως υλικά υποστήριξης (π.χ. ίνες άνθρακα κολλιούνται σε κοντές ίνες fiberglass), αλλά κάθε συνδυασμός backing και μη πλεκτών υφασμάτων που παρέχει τον επιθυμητό συμβιβασμό μεταξύ κόστους και απόδοσης είναι πιθανός.

1.5.5. ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Στα σύνθετα υλικά ο ρόλος της μήτρας είναι *καθοριστικός* γιατί επιτελεί μια σειρά από πολύ σημαντικές λειτουργίες.

Συγκεκριμένα, διατηρεί τη συνοχή του συνθέτου μιας και συγκρατεί τις ίνες μαζί και μεταφέρει το φορτίο μεταξύ των ινών, του συνδετικού υλικού και των στηρίξεων. Επίσης, προστατεύει τις ίνες από τις μηχανικές τριβές και το περιβάλλον και παραλαμβάνει μέρος του φορτίου, κυρίως τις εγκάρσιες τάσεις και την ενδοστρωματική (εντός του επιπέδου) διάτμηση.

Η μήτρα προστατεύει την επιφάνεια της ενίσχυσης από το περιβάλλον και από άλλους παράγοντες, όπως η υγρασία και η θερμότητα, αποτρέποντας ενδεχόμενη χημική προσβολή. Στην περίπτωση όπου η μήτρα είναι πιο όλκιμη από την ενίσχυση, μπορεί να προστατεύσει το υλικό από ενδεχόμενη θραύση.

Μερικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών, όπως η εγκάρσια δυσκαμψία και η αντοχή, εξαρτώνται *κυρίως* από το συνδετικό υλικό. Αυτές επηρεάζουν την επιλογή του συνδετικού υλικού περισσότερο από ότι οι ίνες. Επιπλέον, βασική παράμετρος επιλογής του συνδετικού υλικού είναι και η θερμοκρασία χειρισμού.

Τα συνδετικά υλικά μπορεί να είναι πολυμερή, μεταλλικά ή κεραμικά. Τα πολυμερή συνδετικά υλικά είναι τα πλέον συνήθη, επειδή προσδίδουν ένα βασικό πλεονέκτημα που είναι η ευκολία κατασκευής πολύπλοκων τμημάτων με μικρό κόστος σε εξοπλισμό και μικρή επένδυση κεφαλαίου. Η ενίσχυση των πλαστικών με ίνες εξαλείφει το πρόβλημα του

ερπυσμού.

Τα πρώτα βήματα στην πορεία σχεδιασμού των σύνθετων υλικών είναι η επιλογή ορισμένων συνδετικών υλικών και αντίστοιχων μεθόδων παραγωγής. Η φύση της μήτρας είναι εκείνη που καθορίζει τη μέθοδο κατασκευής του σύνθετου.

Η επιλογή του συνδετικού υλικού γίνεται με βάση τις μηχανικές ιδιότητες, την αντοχή σε διάβρωση και την πυραντοχή του πολυμερούς συνδετικού υλικού μέσα στο τελικό προϊόν. Η αντοχή σε διάβρωση του σύνθετου υλικού εξαρτάται κυρίως από το συνδετικό υλικό. Παρόλο που οι ίνες άνθρακα είναι χημικά αδρανείς, η ακεραιότητα του σύνθετου υλικού τίθεται σε αμφισβήτηση αν αλλοιωθεί το συνδετικό υλικό. Πάντως, η επιλογή της κατάλληλης ρητίνης πρέπει να γίνεται στην αρχή της πορείας σχεδιασμού.

Ορισμένες ιδιότητες, όπως η εγκάρσια δυσκαμψία και αντοχή, επηρεάζονται βασικά από το συνδετικό υλικό, με τις ίνες να έχουν πολύ μικρή επιρροή. Για το λόγο αυτό, οποιαδήποτε ρητίνη δεν μπορεί να συνδυαστεί με οποιαδήποτε ίνα. Η μήτρα και ενίσχυση πρέπει να έχουν καλή φυσικοχημική πρόσφυση μεταξύ τους και να μη λαμβάνουν χώρα μεταξύ τους χημικές και άλλες αλληλεπιδράσεις. Όταν η πρόσφυση της ενίσχυσης και της μήτρας είναι καλή τότε και η λειτουργία του σύνθετου είναι καλή. Επίσης, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και οι ιδιότητες του υλικού της μήτρας και της ενίσχυσης που έχουν να κάνουν με το ιξώδες, τη θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (T_g) κ.α.

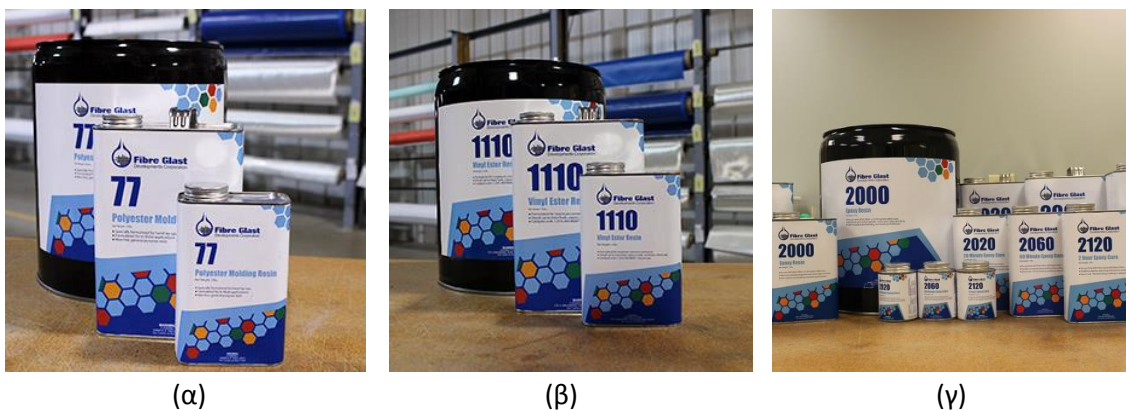
Η επιλογή της μεθόδου παραγωγής πρέπει επίσης να γίνεται στην αρχή της πορείας σχεδιασμού για διάφορους λόγους. Πρώτον, οι μέθοδοι παραγωγής επιβάλλουν εμπόδια στην πορεία σχεδιασμού με περιοριστικές παραμέτρους, όπως ο λόγος όγκου ινών και η διεύθυνσή τους. Δεύτερον, η μέθοδος παραγωγής και το κόστος ελέγχονται με δοκιμές κατά την πορεία παραγωγής του τελικού προϊόντος. Τρίτον, κάθε μέθοδος παραγωγής επιβάλλει ένα όριο στο μέγεθος του τμήματος και την πολυπλοκότητα του σχήματος, που ακολούθως έχει σχέση με το σύστημα ρητινών που χρησιμοποιούνται: όσο χαμηλότερο είναι το ιξώδες (viscosity) της ρητίνης, τόσο μεγαλύτερο και πιο πυκνό μπορεί να είναι ένα τμήμα.

Συμπερασματικά, ο σχεδιαστής θα πρέπει να επιλέξει μερικά συστήματα ρητινών που θα παρακολουθούν τις απαιτήσεις της διαδικασίας και τις μηχανικές απαιτήσεις διάβρωσης και πυραντοχής, με το μικρότερο πιθανό κόστος.

1.5.6. ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (THERMOSET)

Τα συνδετικά υλικά θερμικής διαμόρφωσης ή θερμοσκληρυνόμενα δημιουργούνται μέσω ενός μη αναστρέψιμου χημικού μετασχηματισμού του συστήματος ρητίνης σε ένα άμορφο πολυμερές συνδετικό υλικό. Γενικά, το πολυμερές ονομάζεται *σύστημα ρητίνης* (resin system) κατά τη διαδικασία και *συνδετικό υλικό ή μητρώο* (matrix) αφού το πολυμερές έχει στερεοποιηθεί. Τα thermoset είναι τα πιο κοινά συστήματα ρητινών που χρησιμοποιούνται λόγω της εύκολης χρήσης και του χαμηλού κόστους.

Οι πιο συνήθεις ρητίνες θερμικής διαμόρφωσης είναι οι εξής: *πολυεστερικές* (polyester resins), *βινυλεστερικές* (vinylester), *εποξικές* (epoxy) και *φαινόλης* (phenolic).



Σχήμα 11 Ρητίνες θερμικής διαμόρφωσης (α) πολυεστερικές (β) βινυλεστερικές και (γ) εποξικές

Πίνακας 3 Μηχανικές Ιδιότητες Συνδετικών Υλικών Θερμικής Διαμόρφωσης (Thermoset)

THERMOSET	ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ [GPa]	ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ [MPa]	ΘΛΙΠΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ [MPa]	ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ [MPa]	ΛΟΓΟΣ Poisson ν	T _g [°C]	ρ [gr/cc]
POLYESTER							
Orthophthalic	3,400	55,2	-	-	0,38	-	-
Isophthalic	3,400	75,9	117,2	75,9	0,38	-	-
BPA Fumarate	2,800	41,4	103,5	-	0,38	-	-
Chlorendic	3,400	20,7	103,5	-	0,38	-	-
VINYLESTER							
Derakane 411-45	3,400	82,7	117,1	82,7	0,38	-	-
EPOXY							
9310/9360 σε 23°C	3,120	75,8	-	-	0,38	185	1,200
9310/9360 σε 149°C	1,400	26,2	-	-	-	185	1,200
9420/9470 (A) σε 23°C	2,660	57,2	-	-	-	195	1,162
9420/9470 (B) σε 23°C	2,830	77,2	-	-	-	155	1,158
HPT 1072/1062-M σε 23°C	3,383	-	-	-	-	239	-
BISMALEIMIDE							
796/TM-123 σε 24°C	3,582	-	-	-	-	260	-
796/TM-123 σε 249°C	-	-	-	-	-	260	-

1.5.7. ΘΕΡΜΟΠΛΑΣΤΙΚΑ ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ (THERMOPLASTIC)

Ένα θερμοπλαστικό πολυμερές (thermoplastic) δεν υφίσταται καμία χημική μεταμόρφωση κατά τη διάρκεια επεξεργασίας. Αντιθέτως, το πολυμερές μαλακώνει από τη στερεή φάση που είναι και επιστρέφει ξανά στη στερεή φάση με την ολοκλήρωση της επεξεργασίας.

Τα θερμοπλαστικά έχουν υψηλή πυκνότητα για τις θερμοκρασίες επεξεργασίας, η οποία τα καθιστά δύσκολα σε ότι αφορά την επεξεργασία. Ο εμποτισμός τους δυσκολεύει με την υψηλή πυκνότητα κι έτσι πρέπει να ληφθεί ειδική μέριμνα για να εξασφαλιστεί η επαφή μεταξύ ινών και πολυμερούς. Μπορούν να επισκευαστούν, διότι η μετάπτωση στο μαλακό στάδιο μπορεί να πραγματοποιηθεί πολλές φορές με την εφαρμογή θερμότητας.

Τα πιο συνήθη θερμοπλαστικά συνδεδετικά υλικά είναι τα εξής: *Poly-Ether Ether-Ketone* (PEEK), *Polyphenylene sulfide* (PPS), *Polysulfone* (PSUL), *Polyetherimide* (PEI), *Polyamide-imide* (PAI).

Πίνακας 4 Τυπικές Ιδιότητες Θερμοπλαστικών Συνδεδετικών Υλικών (Thermoplastic)

THERMOPLASTIC	ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ [GPa]	ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ [MPa]	ΛΟΓΟΣ Poisson ν	T_g [°C]	T_m [°C]	ρ [gr/cc]
PEEK	3,240	100	0,400	143	343	1,32
PPS	3,300	82,70	0,370	90	290	1,36
PSUL	2,480	70,30	0,370	190	-	1,24
PEI	3,000	105	0,370	217	-	1,27
PAI	2,756	89,57	0,370	243	-	1,40
K-III	3,760	102	0,365	250	-	1,31
LARC-TPI	3,720	119,20	0,360	264	325	1,37

1.6 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΧΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται από εξαιρετικές ιδιότητες που κάνουν την εφαρμογή τους στα τεχνικά έργα, και ιδιαίτερα στο πεδίο των ενισχύσεων – επισκευών, ιδιαίτερα ελκυστική.

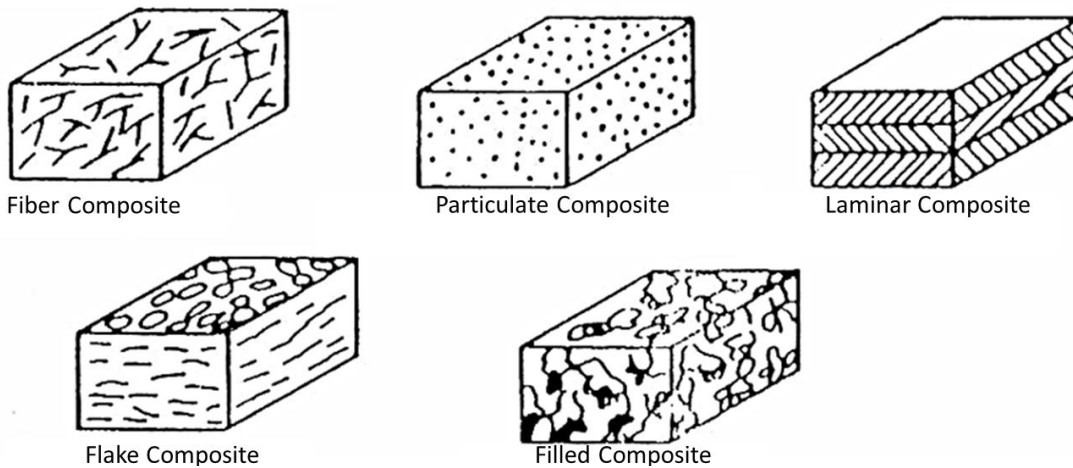
Τα κυριότερα **πλεονεκτήματα** τους είναι:

- Χαμηλό ειδικό βάρος: είναι σχετικά ελαφρά (έχουν βάρος στο 20-25% του χάλυβα) και παρουσιάζουν μικρό όγκο.
- Εξαιρετικά μικρό πάχος της τάξεως του 1 mm.
- Υψηλή εφελκυστική αντοχή (πολλαπλάσια του κοινού χάλυβα: 3 ή 4 φορές μεγαλύτερη από αυτή του κοινού χάλυβα).
- Αυξημένη δυσκαμψία.
- Αυξημένη ανθεκτικότητα σε διάβρωση: παρουσιάζουν σημαντική αντοχή στο χρόνο και είναι ανθεκτικά απέναντι σε πολλούς από τους συνηθισμένους διαβρωτικούς παράγοντες, όπως είναι το νερό, η υγρασία, η υπεριώδης ακτινοβολία, καθώς και το αλκαλικό ή όξινο περιβάλλον.
- Σημαντική ανθεκτικότητα έναντι κόπωσης, ερπυσμού και κρουστικών καταπονήσεων.
- Δυνατότητα ρύθμισης των μηχανικών ιδιοτήτων ως προς τη θέση και τη διεύθυνση .
- Θερμική – ακουστική μόνωση, χαμηλή θερμική διαστολή, ηλεκτρομαγνητική διάχυση.

Τα βασικότερα **μειονεκτήματα** είναι:

- Χαμηλή αντίσταση σε υψηλές θερμοκρασίες.
- Έλλειψη πλαστιμότητας: στη φάση της οριακής κατάστασης αστοχίας εμφανίζεται ψαθυρή θραύση. Ωστόσο, τα σύνθετα υλικά έχουν τη δυνατότητα να αναλάβουν υψηλές ελαστικές παραμορφώσεις κι έτσι αυξάνουν σημαντικά την πλαστιμότητα των δομικών στοιχείων που έχουν ενισχυθεί με αυτά.
- Σχετικά υψηλό κόστος παραγωγής.
- Περιορισμένα ειδικευμένα συνεργεία, πράγμα το οποίο δικαιολογείται από την πρόσφατη εμφάνιση των σύνθετων υλικών.

Ένα σύνθετο υλικό δε διαθέτει όλες τις παραπάνω ιδιότητες - πλεονεκτήματα ταυτοχρόνως, καθώς δεν υπάρχει ποτέ τέτοια απαίτηση στην πράξη και ορισμένες από τις ιδιότητες είναι ασυμβίβαστες μεταξύ τους (π.χ. θερμική μόνωση, θερμική αγωγιμότητα). Κάθε σύνθετο υλικό κατασκευάζεται έτσι ώστε να διαθέτει μερικές από αυτές τις ιδιότητες.



Σχήμα 12 Απεικόνιση τύπων σύνθετων υλικών

1.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΧΡΗΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

A. Ναυπηγική

Στον τομέα της ναυπηγικής, τα σύνθετα πλαστικά ενισχυμένα με ίνες γυαλιού (GFRP), έχουν αντικαταστήσει σχεδόν τα παραδοσιακά υλικά και ιδιαίτερα το ξύλο.

Τα κύρια πλεονεκτήματά τους είναι η χαμηλή πυκνότητα, η αντίσταση σε διάβρωση και η ευκολία παραγωγής τμημάτων με χύτευση σε καλούπια.

Σύνθετα υλικά τύπου sandwich χρησιμοποιούνται και στην κατασκευή σκαφών αναψυχής, με αποτέλεσμα να μειώνεται το βάρος τους, να αυξάνεται η ταχύτητά τους και να βελτιώνεται η συμπεριφορά τους.

B. Κατασκευαστικός τομέας

Το μικρό βάρος των σύνθετων υλικών και η αντοχή τους σε διάβρωση, σε συνδυασμό με τη δυνατότητα κατασκευής με χύτευση διαφόρων επιφανειών και σχημάτων, οδήγησε στη χρήση των υλικών αυτών σε οικοδομικές κατασκευές.

Σύνθετα υλικά GFRP στη μορφή επίπεδων ή καμπύλων ημιδιαφανών επιφανειών,

χρησιμοποιούνται για την κατασκευή οροφών ή θόλων σε μεγάλα οικοδομικά συγκροτήματα, όπως σε στάδια. Λόγω του μικρού τους βάρους, η κατασκευή οροφών έχει σαν αποτέλεσμα οικονομία στο σχεδιασμό και τη κατασκευή των στοιχείων υποστήριξης των οροφών.



(α)

(β)

Σχήμα 13 Παραδείγματα εφαρμογής ενίσχυσης με σύνθετα υλικά: (α) κολώνα πλήρως ενισχυμένη (β) αστοχία κολώνας ενισχυμένης μόνο στη βάση της

C. Χερσαίες μεταφορές

Σύνθετα υλικά CFRP σε συνδυασμό με κατασκευές τύπου sandwich, στη μορφή ενισχυμένων πλαστικών πλαισίων, χρησιμοποιούνται στην αυτοκινητοβιομηχανία για την κατασκευή αμαξωμάτων, κυρίως αγωνιστικών, την κατασκευή καμπινών στα φορτηγά, προφυλακτήρων και λοιπών εξαρτημάτων.

Επίσης, χρησιμοποιούνται και στην κατασκευή αμαξωμάτων αμαξοστοιχιών στους σιδηροδρόμους.

Τα σύνθετα υλικά βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή και σε στρατιωτικά οχήματα, έτσι ώστε τα αμαξώματα να αντέχουν σε κρούσεις υψηλής ενέργειας.



Σχήμα 14 Το πρώτο σασί από carbon (McLaren MP4/1, 1980)

D. Ηλεκτρικά είδη

Τα σύνθετα υλικά βρίσκουν εφαρμογές εκεί όπου απαιτείται ηλεκτρική μόνωση, όπως ηλεκτρικοί διακόπτες, ηλεκτρικοί διανομείς, υποδοχείς ηλεκτρικών λαμπτήρων κλπ.

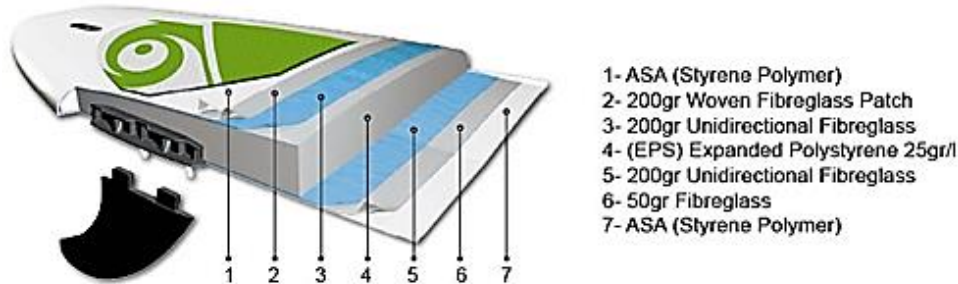
E. Δεξαμενές

Τα σύνθετα υλικά, κυρίως τα GFRP λόγω του χαμηλού βάρους και της αντίστασης σε

διάβρωση, χρησιμοποιούνται στην κατασκευή δεξαμενών, αναρροφητήρων για την αποθήκευση τοξικών ουσιών, σωλήνων για μεταφορά νερού και αποχέτευση λυμάτων, καθώς και στην κατασκευή εγκαταστάσεων παραγωγής χημικών ουσιών.

F. Βιομηχανία αθλητικών ειδών

Τα σύνθετα υλικά έχουν επεκταθεί στην κατασκευή αθλητικών ειδών όπως πέδιλα σκι, μπαστούνια golf, ρακέτες τένις, καλάμια ψαρέματος, πλαίσια ποδηλάτων κλπ.



Σχήμα 15 Εφαρμογή των σύνθετων υλικών σε σανίδα του surf

G. Ιατρική

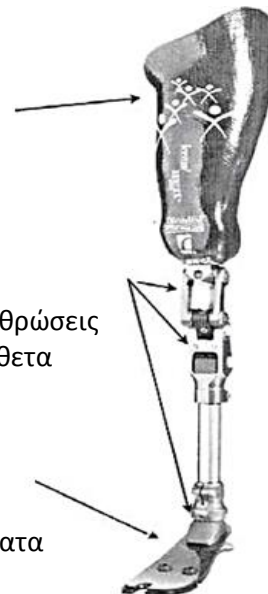
Στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος εξεύρεσης φυσικών μοσχευμάτων, πολλοί επιστήμονες στράφηκαν προς την κατασκευή νέων, μη τοξικών υλικών, που είναι κατάλληλα να αντικαταστήσουν τα φυσικά όργανα και ιστούς του ανθρώπινου σώματος. Έτσι, πλέον, χρησιμοποιούνται τα σύνθετα υλικά στην κατασκευή τεχνητής καρδιάς, τεχνητών βαλβίδων, τεχνητών μελών του σώματος και τεχνητού δέρματος.

Επίσης, χρησιμοποιούνται στον κλάδο της οδοντιατρικής και συγκεκριμένα στον τομέα των εμφράξεων και των εμφυτευμάτων.

Μηρός με εσωτερική επένδυση σιλικόνης για αίσθηση δέρματος και ενίσχυση από ύφασμα ινών υάλου εξωτερικά.

Αντιτριβικές αρθρώσεις από ειδικά σύνθετα πολυμερή.

Πέλμα εξαιρετικής δυσκαμψίας από πολυμερές με ανθρακονήματα σε πολύστρωτη δομή.



Σχήμα 16 Τεχνητό μέλος προσθετικής από σύνθετα υλικά

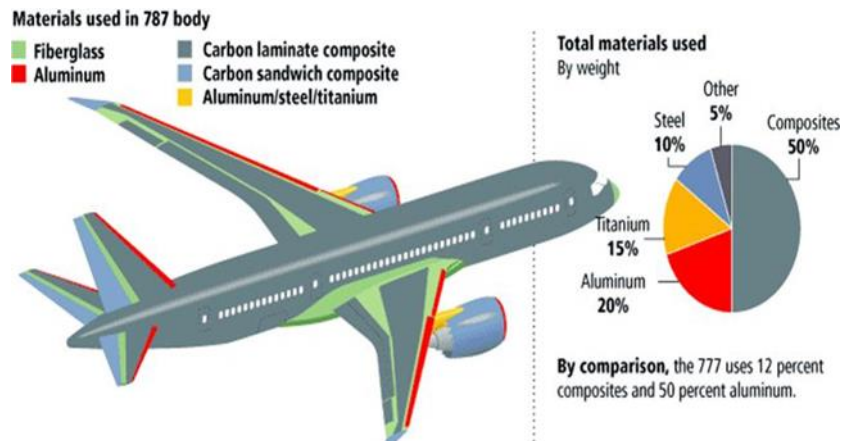
H. Αεροναυπηγική – Αεροδιαστημική

Οι πρώτες χρήσεις των σύνθετων υλικών ήταν σε τμήματα μαχητικών αεροσκαφών, όπως το κέλυφος της ουράς, τα φτερά, η άτρακτος και το πηδάλιο διευθύνσεως.

Η χρήση των σύνθετων υλικών επεκτάθηκε και στην πολιτική αεροπορία λόγω της

μείωσης του βάρους της ατράκτου, της βελτιωμένης κατανάλωσης καυσίμου και της μείωσης του κόστους λειτουργίας.

Στην αεροδιαστημική, σύνθετα πολυμερή ενισχυμένα με ίνες άνθρακα, χρησιμοποιούνται στην κατασκευή των βασικών δομικών τμημάτων των διαστημοπλοίων, των κεραιών και άλλων διαμορφώσεων. Έτσι, παρατηρείται σημαντική εξοικονόμηση βάρους και μεγάλη σταθερότητα στο σχήμα κατά τη διάρκεια της διαστημικής πτήσης.



Σχήμα 17 Χρήση σύνθετων υλικών στο αεροσκάφος Boeing 787

1.8 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Τα κατασκευαστικά υλικά χαρακτηρίζονται από τις μηχανικές τους ιδιότητες, οι οποίες ποσοτικοποιούν τη συμπεριφορά τους, σε συγκεκριμένες φορτίσεις. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

- το *μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young* $\{E\}$, το οποίο σχετίζει τις παραμορφώσεις που παραλαμβάνει ένα υλικό σε σχέση με την κατακόρυφη τάση που δέχεται,
- ο *λόγος Poisson* $\{ν\}$, ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος των παραμορφώσεων που λαμβάνει ένα υλικό σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις,
- και το *μέτρο διάτμησης* $\{G\}$, το οποίο δείχνει τις παραμορφώσεις σε σχέση με τη διατμητική τάση που δέχεται ένα υλικό.

Συνήθη κατασκευαστικά υλικά, όπως τα μέταλλα, είναι **ισοτροπικά**, δηλαδή οι μηχανικές τους ιδιότητες δεν εξαρτώνται από την κατεύθυνση επιβολής του φορτίου. Πρακτικά, από όποια κατεύθυνση κι αν επιβληθεί φορτίο, η απόκριση του υλικού θα είναι ίδια σε όλες τις περιοχές. Η μηχανική συμπεριφορά των ισοτροπικών υλικών χαρακτηρίζεται από δύο μεγέθη, τα E και $ν$. Το μέτρο διάτμησης τους εξαρτάται από τα άλλα δύο μεγέθη.

Οι ιδιότητες του σύνθετου υλικού προκύπτουν από συνδυασμό των ιδιοτήτων των διακριτών υλικών, όπως αυτά συνδυάζονται για τη δημιουργία του σύνθετου υλικού.

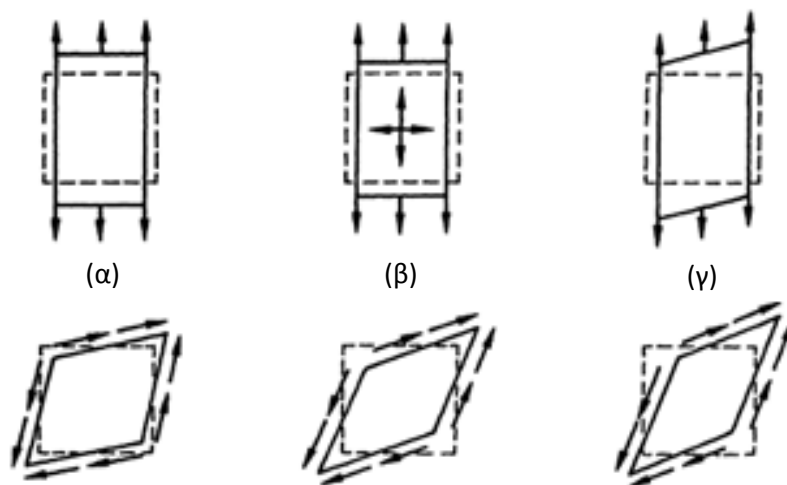
Οι μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών είναι πολύ μικρότερες των αντίστοιχων των διακριτών υλικών. Είναι σαφές ότι για το σχεδιασμό με σύνθετα υλικά πρέπει να γίνεται χρήση των μηχανικών χαρακτηριστικών των σύνθετων υλικών και όχι των διακριτών υλικών.

Τα σύνθετα πολύστρωτα υλικά είναι συχνά **ορθότροπα**, δηλαδή έχουν τουλάχιστον 2

επίπεδα συμμετρίας στα οποία οι ιδιότητες δεν εξαρτώνται από την κατεύθυνση. Μια εφαρμοζόμενη τάση προκαλεί διαφορετική παραμόρφωση στη διεύθυνση εφαρμογής της και στην κάθετη σε αυτήν διεύθυνση, ενώ το μέτρο διάτμησης είναι ανεξάρτητο των μεγεθών E και ν . Για το χαρακτηρισμό των ορθοτροπικών υλικών απαιτούνται 9 μεγέθη, 3 για κάθε διεύθυνση: $E_{xy}, E_{yz}, E_{xz}, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}, G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$ και δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ διατμητικών τάσεων – ορθών παραμορφώσεων ($\tau - \epsilon$), ορθών τάσεων και διατμητικών παραμορφώσεων ($\sigma - \gamma$), καθώς και διατμητικών τάσεων – διατμητικών παραμορφώσεων σε διαφορετικά επίπεδα.

Οι σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων στα σύνθετα υλικά είναι γραμμικές, και ακολουθούν το νόμο του Hooke, ο οποίος στα ομογενή ισότροπα υλικά ορίζει ότι η σχέση μιας επιβαλλόμενης τάσης σ και της παραμόρφωσης ϵ που προκαλείται είναι :

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (1.1)$$

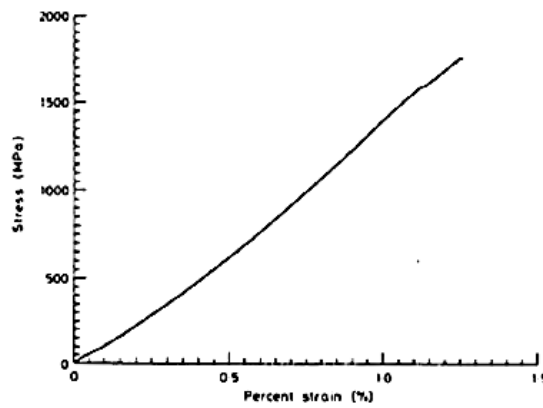


Σχήμα 18 Συμπεριφορά σε ορθή τάση και σε διάτμηση (α) ισότροπων, (β) ορθότροπων και (γ) ανισότροπων υλικών

Σημειώνεται επίσης ότι τα σύνθετα υλικά παρουσιάζουν **μόνο** γραμμική ελαστική συμπεριφορά μέχρι την αστοχία τους, καθώς οι ίνες συμπεριφέρονται γενικά μόνο ελαστικά. Αυτό σημαίνει ότι σε κατάσταση φόρτισης, οι παραμορφώσεις αυξάνονται ανάλογα με την επιβαλλόμενη τάση, με σταθερό ρυθμό, μέχρι να επέλθει τελικά η θραύση. Η *έλλειψη πλαστικής συμπεριφοράς* και επομένως η αδυναμία απορρόφησης ενέργειας κατατάσσει τα σύνθετα υλικά ως *ψαθυρά*. Στο Σχήμα 19 απεικονίζεται μια τυπική καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων σύνθετου υλικού, όπου φαίνεται η γραμμική ελαστική συμπεριφορά τους.

Μία τεχνική που μπορεί να προσδώσει κάποιο βαθμό πλαστιμότητας στα σύνθετα υλικά είναι η σύνθεση του υλικού με ίνες διαφορετικού τύπου, καθώς έτσι οι ίνες αστοχούν σε διαφορετική τιμή παραμόρφωσης και δημιουργείται, τελικά, μια ψευδοπλαστική συμπεριφορά.

Τέλος, τα σύνθετα υλικά έχουν υψηλό μέτρο ελαστικότητας και μεγάλη αντοχή κατά τη διεύθυνση των ινών, ενώ είναι “αδύναμα” κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Δεδομένου ότι τα υλικά αυτά είναι έντονα ανισότροπα, οι συνέπειες της τοποθέτησής τους κατά τη λανθασμένη διεύθυνση δύναται να είναι σημαντικές.

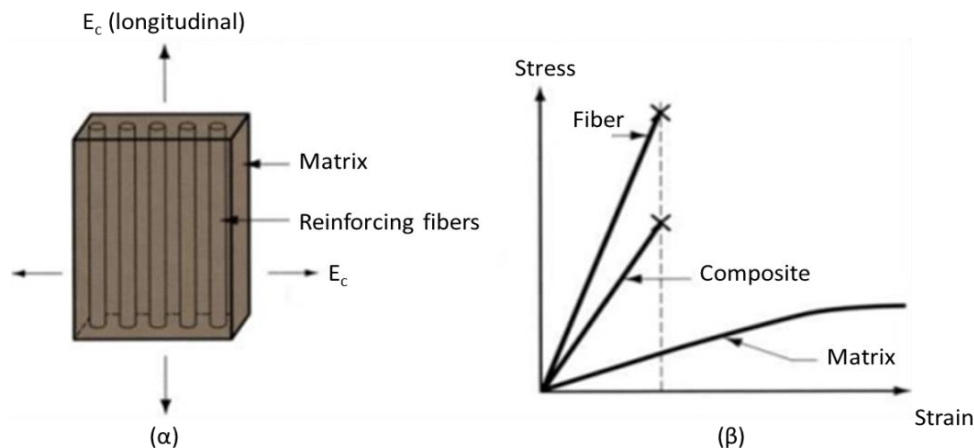


Σχήμα 19 Τυπική καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων μονοαξονικού σύνθετου υλικού

1.9 ΛΟΙΠΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

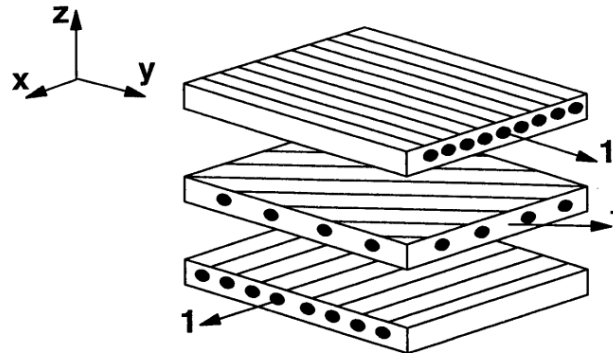
Το μειωμένο βάρος αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα κίνητρα χρήσης των σύνθετων υλικών. Τα σύνθετα υλικά είναι ελαφρότερα από τα συμβατικά επειδή τόσο οι ίνες όσο και τα πολυμερή που χρησιμοποιούνται ως συνδετικά υλικά έχουν χαμηλό ειδικό βάρος. Πάντως, δεν χρησιμοποιούνται μεμονωμένα ισχυρές ίνες (εκτός της περίπτωσης των καλωδίων) επειδή δεν αντέχουν σε θλιπτικά ή εγκάρσια φορτία. Απαιτείται, λοιπόν, ένα συνδετικό υλικό που να συγκρατεί τις ίνες στην προβλεπόμενη θέση τους.

Εφόσον οι ίνες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από μόνες τους και η αντοχή και η δυσκαμψία του πολυμερούς είναι ασήμαντες σε σύγκριση με αυτές των ινών, οι μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών είναι κάπως χαμηλότερες από αυτές των ινών. Επιπλέον, τα σύνθετα υλικά είναι περισσότερο δύσκαμπτα και ισχυρότερα από τα περισσότερα συμβατικά υλικά, όταν συγκρίνονται ανά μονάδα βάρους. Η μείωση των μηχανικών ιδιοτήτων με βάση αναφοράς τις ίνες, σε σχέση με το τελικό προϊόν (το σύνθετο υλικό), είναι ανάλογη της ποσότητας του συνδετικού υλικού που χρησιμοποιείται.



Σχήμα 20 (α) Μοντέλο σύνθετου υλικού οπλισμένου με ίνες, το οποίο δείχνει τη διεύθυνση στην οποία το μέτρο ελαστικότητας εκτιμάται από τον κανόνα της σύνθεσης (β) Σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων για τα σύνθετα υλικά και τα επιμέρους υλικά

Αφού οι ίνες δεν συνεισφέρουν στην αντοχή κατά την εγκάρσια στη διεύθυνση των ινών έννοια, και με δεδομένο ότι η αντοχή του συνδετικού υλικού είναι πολύ μικρή, καθίσταται αναγκαίο να διατάσσονται πολλές στρώσεις με διάφορους προσανατολισμούς ινών ώστε να παραλαμβάνονται τα επιβαλλόμενα φορτία. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι η δημιουργία μιας διαστρωμάτωσης, μέσω μιας αλληλουχίας στρώσεων με διάφορους προσανατολισμούς ινών. Παρόλο που μια τέτοια διαστρωμάτωση μπορεί να παραλάβει φορτία υπό επίπεδη ένταση, η αντοχή και η δυσκαμψία της ανά μονάδα βάρους, για δεδομένη διεύθυνση, είναι μικρότερη από τις αντίστοιχες τιμές μιας μεμονωμένης στρώσης.



Σχήμα 21 Επαλληλία τριών στρώσεων για τη δημιουργία διαστρωμάτωσης

Μία άλλη εναλλακτική λύση για την ανάληψη φορτίων υπό επίπεδη ένταση είναι να συνεργάζονται οι ίνες σε δύο διευθύνσεις μέσα σε κάθε στρώση, όπως για παράδειγμα στο ύφασμα με πλέξη. Το συνδετικό υλικό μπορεί ακόμη να ενισχυθεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι ιδιότητές του να είναι ίδιες σε κάθε διεύθυνση. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε χρησιμοποιώντας ίνες με τυχαίο προσανατολισμό, όπως συνεχείς ή κοντές δέσμες ινών, είτε χρησιμοποιώντας κοντές ίνες διασκορπισμένες στο συνδετικό υλικό. Αυτοί οι τύποι σπλισμού χρησιμοποιούνται και για τη μείωση του κόστους, αν και οι ιδιότητες τέτοιων σύνθετων υλικών είναι αρκετά μικρότερες από αυτές των σύνθετων υλικών με συνεχείς ίνες.

Πίνακας 5 Ιδιότητες τυποποιημένων σύνθετων υλικών

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΟ	E_1 [Gpa]	E_2 [Gpa]	ν_{12}	G_{12} [Gpa]	V_f [%]	ρ [g/cm ³]
T300/5208	Graphite Epoxy	181	10,30	0,28	7,17	0,70	1,60
B(4)/5505	Boron Epoxy	204	18,50	0,23	5,59	0,50	2,00
AS/3501	Graphite Epoxy	138	8,96	0,30	7,10	0,66	1,60
Scotchply 1002	Glass Epoxy	38,6	8,27	0,26	4,14	0,45	1,80
Kevlar 49	Aramid Epoxy	76	5,50	0,34	2,30	0,60	1,46
AS4/3501-6	Graphite Epoxy	142	10,30	0,37	7,20	0,60	1,58
T800/3900-2	Graphite Epoxy	155,8	8,89	0,30	5,14	-	-
IM7/8551-7	Graphite Epoxy	151	9,00	0,30	5,60	0,57	-
AS4/APC2	Graphite PEEK	138	10,20	0,30	5,70	0,61	1,60
AS4/AvimidK-III	Graphite Polyimide	110	8,30	-	-	-	-

Πίνακας 6 Τυπικές ιδιότητες σύνθετων υλικών με ίνες ενιαίου προσανατολισμού

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	E-glass / Epoxy	S-glass / Epoxy	E-glass / Isophthalic Polyester	Kevlar 49 / Epoxy	Carbon / Epoxy AS4/3501-6	Carbon / Epoxy T800/3900-2	Carbon / Epoxy IM7/8551-7	Carbon / PEEK AS4/APC2
Πυκνότητα [g/cm ³]	2,076	1,993	1,85	1,38	1,58	-	-	1,60
Διάμηκες Μέτρο Ελαστικότητας E ₁ [GPa]	45	55	37,9	75,8	142	155,8	151	138
Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας E ₂ [GPa]	12,00	16,00	11,30	5,50	10,30	8,89	9,00	10,20
Μέτρο Διάτμησης G ₁₂ [GPa]	5,50	7,60	3,30	2,07	7,20	5,14	5,60	5,70
Λόγος Poisson ν ₁₂	0,19	0,28	0,30	0,34	0,27	0,30	0,30	0,30
Διαμήκης Εφελκυστική Αντοχή F _{1t} [MPa]	1020	1620	903	1380	1830	2698	-	2070
Εγκάρσια Εφελκυστική Αντοχή F _{2t} [MPa]	40	40	40	34,5	57	-	-	86
Διατμητική Αντοχή F ₆ [MPa]	60	60	40	44,1	71	-	-	186
Διαμήκης Θλιπτική Αντοχή F _{1c} [MPa]	620	690	357	586	1096	1691	-	1360
Εγκάρσια Θλιπτική Αντοχή F _{2c} [MPa]	140	140	68	138	228	-	-	-
Εγκάρσια Διατμητική Αντοχή (F ₄ ή F ₅) [MPa]	60	80	76	48,69	-	-	-	150
Λόγος Όγκου Ινών V _f [%]	60,0	60,0	50,0	60,0	60,0	-	57,3	61,0

1.10 ΑΝΤΟΧΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Η ανάλυση της αντοχής των σύνθετων υλικών είναι πολύ διαφορετική από την ανάλυση της ελαστικής συμπεριφοράς.

Η αντοχή των σύνθετων υλικών οφείλεται κυρίως στην αντοχή των ινών σπλισμού, η οποία εξαρτάται από τη διεύθυνσή τους. Για παράδειγμα, η κατά τη διεύθυνση των ινών (διαμήκης) αντοχή X μίας ινοπλισμένης στρώσεως με συνεχείς ίνες είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αντοχή Y στην εγκάρσια (κάθετη στις ίνες) διεύθυνση. Επίσης, οι

Θλιπτικές αντοχές X' και Y' είναι διαφορετικές (μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή) από τις αντίστοιχες εφελκυστικές αντοχές X και Y . Η διαμητρική αντοχή S_{xy} , η οποία συναρτάται από τους κύριους άξονες του υλικού, είναι μία ακόμα ανεξάρτητη μηχανική ιδιότητα. Οι πέντε αυτές μηχανικές ιδιότητες χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της αντοχής μίας ινοπλισμένης στρώσεως με συνεχείς ίνες.

Πίνακας 7 Τιμές Αντοχών Στρώσεων Συνήθων Σύνθετων Υλικών (σε MPa)

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΟ	ν_f	X	X'	Y	Y'	S
T300/5208	Graphite Epoxy	0,70	1500	1500	40	246	68
B(4)/5505	Boron Epoxy	0,50	1260	2500	61	202	67
AS/3501	Graphite Epoxy	0,66	1447	1447	51,7	206	93
Scotchply 1002	Glass Epoxy	0,45	1062	610	31	118	72
Kevlar 49	Aramid Epoxy	0,60	1400	235	12	53	34
	Αλουμίνιο	-	400	400	400	400	230

1.11 ΑΣΤΟΧΙΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Από μία απλή σύγκριση μεταξύ των συνήθων υλικών (ισότροπα) και των σύνθετων υλικών (ορθότροπα ή ανισότροπα) ως προς τις μηχανικές ιδιότητες και τη συμπεριφορά τους, προκύπτει η ανάγκη καθορισμού νέων κριτηρίων αστοχίας για τα σύνθετα υλικά.

Στα **συνήθη υλικά (ισότροπα)** ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ίδιες ιδιότητες προς κάθε κατεύθυνση.
- Δεδομένου ότι ο λόγος Poisson είναι συνήθως $\nu=0,30$, χρειαζόμαστε μόνο την τιμή του μέτρου ελαστικότητας E .
- Αρκεί να γνωρίζουμε τη σ_y , διότι $\tau_y=0,50\sigma_y$ $-0,60\sigma_y$, όπου η τάση διαρροής σ_y αντιστοιχεί σε μονοαξονικό εφελκυσμό.
- Εκτιμάται η τάση σε κάποια θέση αστοχίας του υλικού και γίνεται ο έλεγχος.

Στα **σύνθετα υλικά (ορθότροπα ή ανισότροπα)** ισχύουν τα ακόλουθα:

- Οι ιδιότητες είναι συνάρτηση του προσανατολισμού στο γενικό σύστημα $x-y$.
- Απαιτούνται τέσσερις ελαστικές σταθερές για τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς.
- Απαιτούνται έξι σταθερές για τον έλεγχο της αστοχίας.
- Τα κριτήρια αστοχίας ισότροπων υλικών δεν μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας στα σύνθετα υλικά.

1.12 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΕΝΑΝΤΙ ΚΟΠΩΣΗΣ

Τα σύνθετα υλικά παρουσιάζουν αρκετά πολύπλοκους μηχανισμούς αστοχίας υπό στατικά φορτία και φορτία κόπωσης, λόγω της ανισότροπης συμπεριφοράς τους τόσο σε ό,τι αφορά στην αντοχή τους όσο και σε ότι αφορά στη δυσκαμψία τους. Η αστοχία λόγω κόπωσης συνοδεύεται κυρίως από εκτεταμένες βλάβες, που πολλαπλασιάζονται μέσα στον όγκο του δοκιμίου από μία απλή ρωγμή, όπως παρατηρείται στα περισσότερα ομογενή και ισότροπα υλικά.

Οι τέσσερις βασικοί μηχανισμοί αστοχίας διαστρωματώσεων είναι: ρηγμάτωση του μητρώου, αποκόλληση στρώσεων, θραύση ινών και θραύση μητρώου. Οποιοσδήποτε από τους παραπάνω μηχανισμούς αστοχίας οδηγεί σε αύξηση βλαβών λόγω κόπωσης και αντίστοιχη μείωση δυσκαμψίας και αντοχής σε κόπωση. Το είδος και η έκταση αυτών των βλαβών ποικίλουν ευρύτατα ανάλογα με τις ιδιότητες του υλικού, τη διαστρωμάτωση και την αλληλουχία στρώσεων, το είδος του φορτίου κόπωσης κλπ.

Έχει παρατηρηθεί ότι η έναρξη βλαβών λόγω φορτίων κόπωσης και στατικών φορτίων είναι παρόμοια εκτός από το ότι η κόπωση για δεδομένη τάση προκαλεί πρόσθετες βλάβες που εμφανίζονται ως συνάρτηση του αριθμού κύκλων.

1.13 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

1.13.1. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Ο σχεδιασμός είναι μία διαδικασία που περιλαμβάνει όλες τις απαραίτητες αποφάσεις για την κατασκευή, το χειρισμό, τη συντήρηση και τη διάθεση ενός προϊόντος. Ο σχεδιασμός ξεκινά με την αναγνώριση των αναγκών. Ορίζονται, επίσης, κριτήρια απόδοσης υπό την έννοια ότι κάθε λύση που θα προταθεί αργότερα θα πρέπει να ικανοποιεί αυτά τα κριτήρια έτσι ώστε να θεωρείται αποδεκτή.

Ο σχεδιασμός στηρίζεται στην ανάλυση της συμπεριφοράς ενός προϊόντος, πριν αυτό κατασκευαστεί πραγματικά. Η ανάλυση χρησιμοποιεί μαθηματικούς τύπους, για να καταλήξει μία παρουσίαση της πραγματικότητας, από την οποία ο σχεδιαστής μπορεί να λάβει πληροφορίες για τη πιθανή συμπεριφορά του τελικού προϊόντος. Η βέλτιστη λύση, στη συνέχεια, αποτιμάται σε σχέση με τα κριτήρια απόδοσης που διατυπώθηκαν κατά τον ορισμό του προβλήματος.

Τα κριτήρια απόδοσης είναι το μέτρο βαθμονόμησης, με το οποίο μετρώνται η απόδοση ή η επιλογή υπέρ μίας οποιασδήποτε προτεινόμενης λύσης. Τα κριτήρια απόδοσης είναι είτε αντικειμενικές συναρτήσεις είτε περιορισμοί στη λύση.

1.13.2. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕ ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

Ο σχεδιασμός με κύριες τάσεις βασίζεται στο μετασχηματισμό μίας εντατικής κατάστασης εκφρασμένης σε ένα σύστημα x - y (σ_x , σ_y , τ_{xy}) ή στο κύριο σύστημα τάσεων I-II (σ_1 , σ_{II}), οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν από τον κύκλο του Mohr, ως εξής:

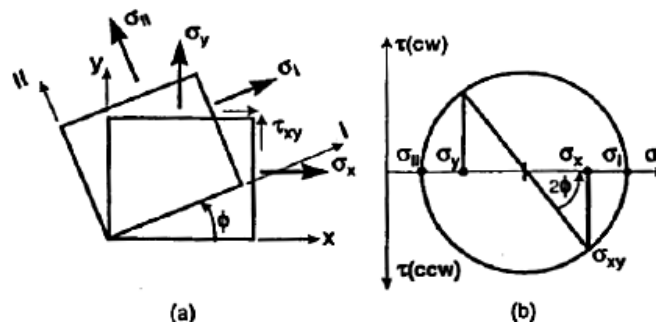
$$\sigma_I = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.2)$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.3)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1.4)$$

**Οι κύριοι άξονες (I,II) έχουν προσανατολισμό παράλληλο με τις κύριες τάσεις.

Το πλεονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι η διατμητική τάση είναι μηδέν στους κύριους άξονες. Στη συνέχεια, η μεγαλύτερη εκ των κύριων τάσεων σ_I , σ_{II} συγκρίνεται με την αντοχή του υλικού. Ο σχεδιασμός με κύριες τάσεις είναι πολύ διαδεδομένος στις μεταλλικές κατασκευές, επειδή η αντοχή των ισότροπων υλικών δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση. Αντίθετα, ο σχεδιασμός με κύριες τάσεις έχει μικρή εφαρμογή στο σχεδιασμό των σύνθετων υλικών.



Σχήμα 22 Κύκλος Mohr

1.13.3. ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα σύνθετα υλικά μορφώνονται με το συνδυασμό δύο ή περισσότερων επιμέρους υλικών με σκοπό το τελικό προϊόν να διαθέτει βελτιωμένες ιδιότητες (φυσικές, χημικές κλπ.) σε σχέση με αυτές των επιμέρους υλικών. Τα κύρια συστατικά των σύνθετων υλικών είναι οι ίνες και το συνδετικό υλικό. Οι ίνες παρέχουν τη δυσκαμψία και την αντοχή, ενώ, το *συνδετικό υλικό* δεσμεύει τις ίνες και τις αναγκάζει να συνεργάζονται εξασφαλίζοντας τη μεταφορά φορτίων εντός του σύνθετου υλικού.

Ο σχεδιασμός ενός φέροντος στοιχείου από σύνθετο υλικό περιλαμβάνει ταυτόχρονα το σχεδιασμό του υλικού και της κατασκευής. Σε αντίθεση με τα συμβατικά υλικά (π.χ. χάλυβας), οι ιδιότητες του σύνθετου υλικού μπορούν να σχεδιαστούν ταυτόχρονα με τις φάσεις κατασκευής. Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών (π.χ. δυσκαμψία, θερμική διαστολή κλπ.) μπορούν να ποικίλουν μέσα σε ένα ευρύ φάσμα τιμών κατά την κρίση του σχεδιαστή.



Έλασμα για αύξηση
καμπτικής αντοχής
δοκού

Ύφασμα για αύξηση
διατμητικής
αντοχής δοκού

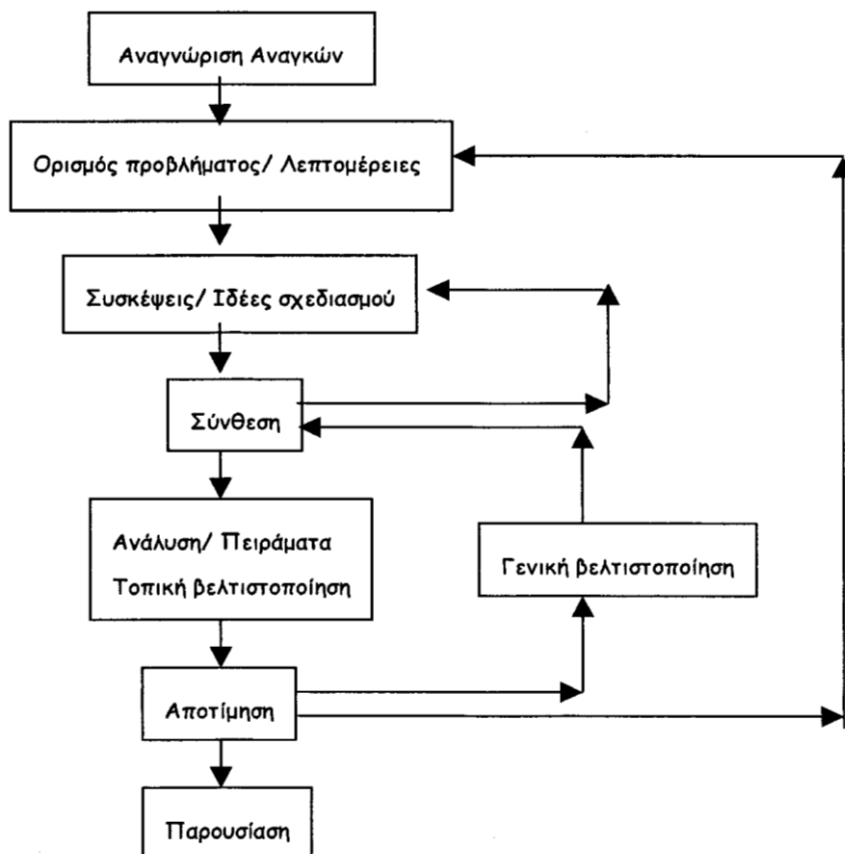
Σχήμα 23 Παράδειγμα εφαρμογής ενίσχυσης με σύνθετα υλικά

Οι ιδιότητες των ινών και του συνδετικού υλικού μπορούν να συνδυαστούν χρησιμοποιώντας τη «μικρομηχανική θεώρηση», ώστε να προκύψουν *βελτιωμένες ιδιότητες* για κάθε συνδυασμό αυτών. Παρόλο που η μικρομηχανική θεώρηση μπορεί να προβλέψει πολύ καλά τη δυσκαμψία ενός υλικού, δεν είναι τόσο ακριβής στην πρόβλεψη της αντοχής. Κατά συνέπεια, τα πειραματικά δεδομένα για την αντοχή είναι πολύ σημαντικά για το σχεδιασμό. Για το λόγο αυτό, κατασκευαστές και εγχειρίδια χρήσεως στο χώρο των σύνθετων υλικών φροντίζουν να παραθέτουν τις ιδιότητες των σύνθετων υλικών, τόσο από πλευράς ινών, όσο και από πλευράς συνδετικών υλικών. Το κύριο πρόβλημα είναι ότι οι δεδομένες (γνωστές) ιδιότητες ανταποκρίνονται σε αναρίθμητες διαφορετικές ενισχύσεις και ολόένα νεότερες τεχνικές, οι οποίες δυσχεραίνουν τη σύγκριση μεταξύ των προϊόντων.

Ο σχεδιασμός των σύνθετων υλικών μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ιδιότητες, υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα που είναι διαθέσιμα για τους περισσότερους τύπους των ινών-συνδετικών υλικών και συνδυασμούς που χρησιμοποιούνται σε μία διαστρωμάτωση. Εάν χρησιμοποιούνται ιδιότητες από πειραματικά αποτελέσματα για τα σύνθετα υλικά, δεν απαιτείται η καταφυγή σε μοντέλα μικρομηχανικής. Επίσης, η αλλαγή ενός συνδετικού υλικού, κατά την πορεία σχεδιασμού, ακυρώνει όλα τα βασικά δεδομένα των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν και απαιτεί ένα νέο πειραματικό πρόγραμμα με βάση το νέο συνδετικό υλικό. Συνήθως, δεν είναι διαθέσιμες επαρκείς πειραματικές ιδιότητες των επιμέρους υλικών και του συνδυασμού των ινών και του συνδετικού υλικού που εξετάζονται. Στη συνέχεια, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, με βάση τη μικρομηχανική θεώρηση, μπορεί να αξιολογηθεί κάνοντας μερικά επιλεγμένα πειράματα. Ο αριθμός των πειραμάτων καθορίζεται από το μέγεθος του έργου και τη διαθεσιμότητα των πηγών, οι οποίες σε κάποιες περιπτώσεις μπορούν να παραταθούν μέχρι την τελική φάση.

Εφόσον οι ιδιότητες μιας μεμονωμένης στρώσης είναι γνωστές, οι ιδιότητες μιας διαστρωμάτωσης μπορούν να υπολογιστούν από το συνδυασμό των ιδιοτήτων των στρώσεων που σχηματίζουν τη διαστρωμάτωση. Ο σχεδιασμός μπορεί να ξεκινήσει απευθείας με τις πειραματικές τιμές των ιδιοτήτων της διαστρωμάτωσης. Οι ιδιότητες της διαστρωμάτωσης μπορούν πάντοτε να χρησιμοποιούνται για έναν αρχικό σχεδιασμό της

κατασκευής. Σημειώνεται, πάντως, ότι η επιρροή της αλλαγής του συνδετικού υλικού ή της κατασκευαστικής πορείας είναι άγνωστη και κάθε τέτοια αλλαγή απαιτεί επανάληψη του πειραματικού προγράμματος από την αρχή. Το κόστος των πειραμάτων πιθανόν να περιορίζει τον αριθμό των διαστρωματώσεων για τις οποίες είναι διαθέσιμα διάφορα πληροφοριακά δεδομένα. Όταν οι ιδιότητες των διαστρωματώσεων δεν είναι διαθέσιμες από πειράματα, μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας τη μικρομηχανική ή και τη μακρομηχανική θεώρηση.



Σχήμα 24 Διάγραμμα της διαδικασίας σχεδιασμού

1.14 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Η επιλογή της διαδικασίας παραγωγής *εξαρτάται* από τον τύπο των ινών και του συνδετικού υλικού, τη θερμοκρασία που απαιτείται για το σχηματισμό του τμήματος, τη στερεοποίηση του συνδετικού υλικού και την επίδραση του κόστους στην επιλογή αυτής. Συχνά, η διαδικασία παραγωγής είναι η τελική θεώρηση στο σχεδιασμό δομικών σύνθετων υλικών. Αυτό οφείλεται στο κόστος, τον όγκο παραγωγής, το ρυθμό παραγωγής και την επάρκεια της διαδικασίας στο να παράγει τον τύπο του δομικού στοιχείου που είναι επιθυμητό.

Κάθε διαδικασία παραγωγής επιβάλλει συγκεκριμένους *περιορισμούς* στο δομικό σχεδιασμό. Για το λόγο αυτό, ο σχεδιαστής απαιτείται να γνωρίζει τα πλεονεκτήματα, τους περιορισμούς, το κόστος, την πορεία σχεδιασμού, τον όγκο και τις τυπικές χρήσεις διαφόρων διαδικασιών παραγωγής.

Κατά το σχεδιασμό ενός δομικού στοιχείου από σύνθετα υλικά, το υλικό σχεδιάζεται παράλληλα με τη σύνθεση. Λόγω αυτής της παραμέτρου, μπορούν να σχεδιαστούν κατασκευές υψηλών απαιτήσεων, οι οποίες και επιβάλουν στο σχεδιαστή τον τρόπο παραγωγής του υλικού.

Ορισμένες διαδικασίες παραγωγής είναι οι ακόλουθες: η *χειρωνακτική εργασία μόρφωσης μιας διαστρωμάτωσης (hand lay-up)*, η *διαστρωμάτωση με χρήση προκατασκευασμένων στρώσεων (pregreg lay-up)*, η *μόρφωση μέσω περιβλήματος (bag molding)*, η *διαδικασία μόρφωσης μέσω κλιβάνου (autoclave processing)*, η *διαδικασία μόρφωσης μέσω εκμαγείου συμπίεσης (compression molding)*, η *διαδικασία παραγωγής με καλούπι ρητινένεσως (resin transfer molding)*, η *διαδικασία διαμόρφωσης με έλξη (pultrusion)* και η *διαδικασία της περιέλιξης (filament winding)*. Κάθε μέθοδος επεξεργασίας έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και περιορισμούς που επηρεάζουν την κατασκευή και το σχεδιασμό του τελικού προϊόντος.

Η επεξεργασία των πολυμερών συνδετικών υλικών περιλαμβάνει τις ακόλουθες **φάσεις**:

- i. Τοποθέτηση των ινών στο εκμαγείο κατά τον επιθυμητό προσανατολισμό
- ii. Εμποτισμός (impregnation) των ινών με ρητίνες
- iii. Στερεοποίηση (consolidation) των εμποτισμένων ινών και απομάκρυνση του περιττού όγκου των ρητινών, του αέρα και των λοιπών πτητικών ουσιών (volatiles)
- iv. Στερεοποίηση του πολυμερούς
- v. Εξαγωγή από το εκμαγείο
- vi. Τελικές επεξεργασίες, όπως φινίρισμα κλπ.

1.15 ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η χρήση των σύνθετων υλικών, γνωστών και ως ινοπλισμένα πολυμερή (Fiber Reinforced Polymers, FRP) αποτελεί σήμερα την πλέον *σύγχρονη τεχνική* στις κατασκευές έργων υποδομής, σε επισκευές και ενισχύσεις κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα, στην αεροδιαστημική, στην ναυσιπλοΐα, κ.ά..

Το πολύ μικρό βάρος τους, η εξαιρετικά υψηλή αντοχή τους, η ποικιλία στο μέγεθος και στο σχήμα των τμημάτων που διατίθενται και το γεγονός ότι δεν είναι ευαίσθητα στη διάβρωση, είναι μερικά από τα χαρακτηριστικά των σύνθετων υλικών που τα κάνουν ελκυστικά στις παραπάνω εφαρμογές.

Για την κατασκευή τους χρησιμοποιούνται ίνες με υψηλή εφελκυστική αντοχή, εμποτισμένες με θερμοσκληραινόμενες ρητίνες, τα χαρακτηριστικά των οποίων είναι ευαίσθητα σε θερμοκρασίες άνω των 80°C.

Τα σύνθετα υλικά είναι *σχεδόν πλήρως ελαστικά* μέχρι την αστοχία τους. Η παντελής έλλειψη πλάστιμης συμπεριφοράς, που συνεπάγεται και αδυναμία απορρόφησης ενέργειας από το υλικό, αποτελεί ένα από τα κυριότερα μειονεκτήματα των σύνθετων υλικών. Έτσι, χρησιμοποιώντας διαφορετικού τύπου ίνες, που αστοχούν σε διαφορετικά μεγέθη παραμόρφωσης, επιτυγχάνεται μία ψευδό-πλάστιμη συμπεριφορά.

Ενδεικτικά, αναφέρονται ορισμένα χαρακτηριστικά τους σε σύγκριση με τον κοινό χάλυβα.

Πίνακας 8 Τυπικά χαρακτηριστικά ινών σε σύγκριση με αυτά του χάλυβα

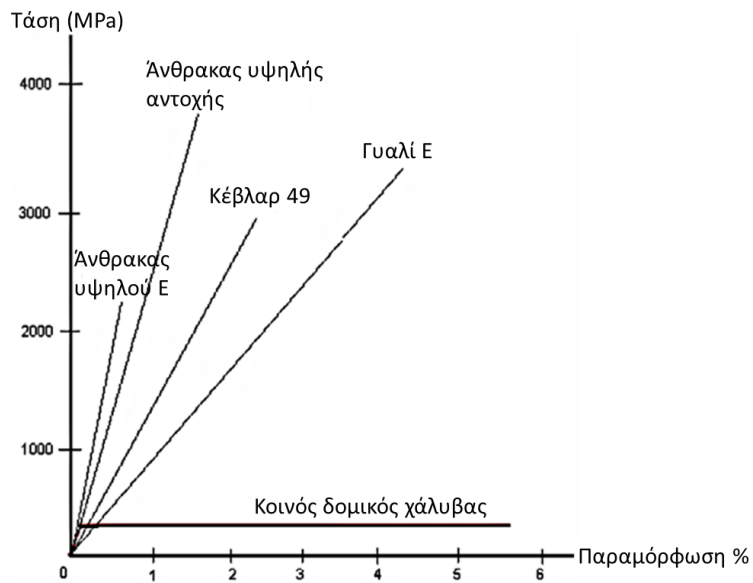
ΙΝΕΣ	ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ [kg/m ³ ×10 ³]	ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ [GPa]	ΛΟΓΟΣ POISSON	ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ [MPa]	ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΑΣΤΟΧΙΑΣ [%]
Άνθρακα					
Υψηλού Ε	1,90	380	0,35	2100	0,6
Υψηλής Χ	1,80	230	0,35	2700	1,3
Γυαλιού					
Τύπου Ε	2,54	72 - 75	0,25	3500	4,8
Τύπου Ζ (ή AR)	2,27	70 - 76	0,25	2500 - 3500	3 - 4,60
Τύπου S2	2,44	85 - 88	0,25	4600	5,0
Αραμιδίου					
Kevlar 29	1,45	65	0,32	3500	4,0
Kevlar 49	1,44	125	0,32	3500	2,1
Χάλυβας	7,86	200	0,28	400 - 1700	10,0

Πίνακας 9 Τυπικές τιμές μέτρου ελαστικότητας και παραμόρφωσης αστοχίας σύνθετων υλικών και χάλυβα

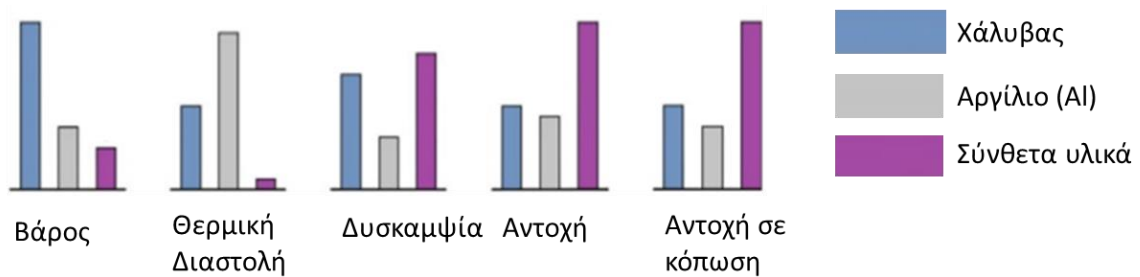
ΥΛΙΚΟ	ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ [GPa]	ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΑΣΤΟΧΙΑΣ [%]
Σύνθετο υλικό με ίνες γυαλιού (GFRP)	50	3
Σύνθετο υλικό με ίνες αραμιδίου (AFRP)	65-120	2 - 3
Σύνθετο υλικό με ίνες άνθρακα (CFRP)	35-190	1 - 1,50
Χάλυβας	200	10

Πίνακας 10 Ποιοτική αξιολόγηση ινοπλισμένων πολυμερών με άριστα το 10

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	CFRP	AFRP	GFRP
Εφελκυστική Αντοχή	10	10	10
Μέτρο Ελαστικότητας	9	6	3
Παραμόρφωση Αστοχίας	6	9	9
Συμπεριφορά σε μακροχρόνιες επιδράσεις	9	6	3
Συμπεριφορά σε κόπωση	6	4	2
Ανθεκτικότητα σε διάρκεια	6	4	2
Πυκνότητα	4	6	2
Κόστος	6	6	9



Σχήμα 25 Τυπικές καμπύλες εφελκυστικής τάσης – παραμόρφωσης για διάφορους τύπους ινών και για τον κοινό χάλυβα



Σχήμα 26 Σύγκριση ιδιοτήτων χάλυβα, αργιλίου και σύνθετων υλικών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

2.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΡΩΣΕΩΝ

2.1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΡΩΣΕΩΝ

Το βασικό στοιχείο μίας κατασκευής από σύνθετα υλικά είναι η *στρώση*, που συνήθως συνίσταται από ίνες διατεταγμένες κατά διάφορους τρόπους, μέσα σε ένα συνδετικό υλικό. Όμως, για τις ανάγκες ανάλυσης της μηχανικής συμπεριφοράς των στρώσεων, η πλέον ενδεδειγμένη διάταξη είναι αυτή των ινών με ενιαίο προσανατολισμό, όπου όλες οι ίνες είναι συνεχείς, με μεγάλο μήκος και παράλληλες μεταξύ τους. Οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων που διέπουν ένα τέτοιο υλικό αποτελούν τη βάση για την ανάλυση όχι μόνο των στρώσεων με ενιαίο προσανατολισμό ινών, αλλά και με διάφορες άλλες διατάξεις ινών, όπως ασυνεχείς κοντές ίνες ή ίνες με τυχαίο προσανατολισμό.

Μια ινοπλισμένη στρώση είναι κατά βάση *ετερογενές υλικό* σε επίπεδο μικρομηχανικής, με διαφορετικές ιδιότητες από σημείο σε σημείο. Για παράδειγμα, οι ιδιότητες σε ένα σημείο του υλικού της στρώσης που αντιστοιχεί σε ίνες είναι διαφορετικές από ότι σε ένα άλλο σημείο του ίδιου υλικού που αντιστοιχεί στο συνδετικό υλικό. Εάν, όμως, θεωρήσουμε ως βάση το υλικό της στρώσης από μακρομηχανική άποψη, οι ιδιότητες του υλικού αυτού μπορούν να προσδιοριστούν ως ένας μέσος όρος των επιμέρους ιδιοτήτων των ινών και του συνδετικού υλικού που αντιστοιχούν σε ένα *ισοδύναμο ομογενές υλικό*.

Στη γενικότερη περίπτωση, μία στρώση από ένα τέτοιο σύνθετο υλικό παρουσιάζει *ανισότροπη συμπεριφορά*. Αυτό σημαίνει ότι οι ιδιότητες του υλικού, αναφορικά με έναν άξονα που περνά από κάποιο σημείο του υλικού, είναι συνάρτηση του προσανατολισμού του άξονα αυτού. Αντιθέτως, τα συμβατικά μεταλλικά υλικά είναι ισότροπα και οι ιδιότητές τους δεν εξαρτώνται από τον προσανατολισμό. Στα περισσότερα σύνθετα υλικά υπάρχουν χαρακτηριστικοί άξονες συμμετρίας του υλικού που απλοποιούν την πλήρως ανισότροπη συμπεριφορά σε ορθότροπη. Για παράδειγμα, οι στρώσεις με ίνες ενιαίου προσανατολισμού παρουσιάζουν ορθότροπη συμπεριφορά.

Στη μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού εξετάζονται τα ακόλουθα τέσσερα πεδία:

- A. Το πεδίο μετατοπίσεων $\{u\}$,
- B. Το πεδίο παραμορφώσεων $\{\epsilon\}$,
- C. Το πεδίο τάσεων $\{\sigma\}$,
- D. Το πεδίο δυνάμεων $\{f\}$.

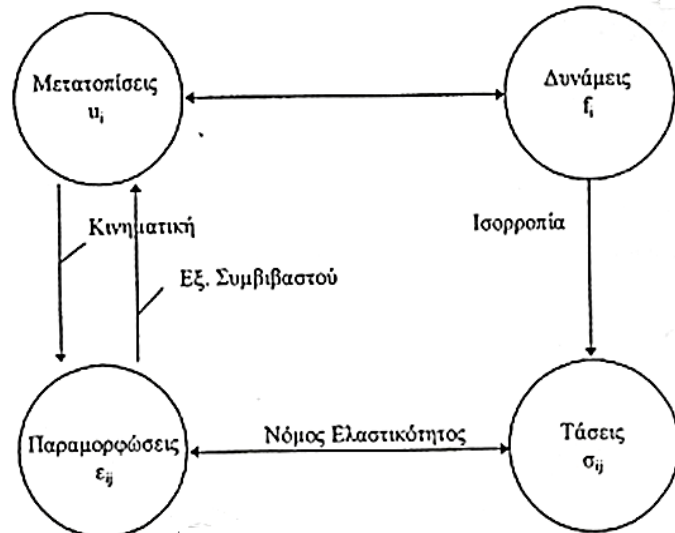
Ένα παραμορφώσιμο σώμα, που υποβάλλεται σε δεδομένο πεδίο εξωτερικών δυνάμεων f , θα αναπτύξει εσωτερικές τάσεις σ και παραμορφώσεις ϵ και θα μετατοπιστεί κατά u . Τα πεδία μετατοπίσεων, παραμορφώσεων, τάσεων και δυνάμεων εκφράζονται σε

ένα τρισδιάστατο κύριο σύστημα 1-2-3 υπό διανυσματική μορφή, ως ακολούθως:

- Μετατοπίσεις: u_i
- Παραμορφώσεις: ε_{ij}
- Τάσεις: σ_{ij}
- Δυνάμεις: f_i

όπου οι δείκτες παίρνουν τιμές: $i, j=1, 2, 3$.

Τα τέσσερα αυτά πεδία συνδέονται μεταξύ τους με διάφορες σχέσεις, οι οποίες είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας. Οι τάσεις συνδέονται με τις δυνάμεις μέσω των εξισώσεων ισορροπίας, οι παραμορφώσεις με τις τάσεις μέσω του νόμου ελαστικότητας και οι μετατοπίσεις με τις παραμορφώσεις μέσω των κινηματικών σχέσεων και των



Σχήμα 27 Τα τέσσερα πεδία της μηχανικής

εξισώσεων συμβιβαστού. Στα συνήθη προβλήματα, που απαντώνται στην πράξη, είναι γνωστό το πεδίο δυνάμεων και ζητείται το πεδίο μετατοπίσεων. Αυτό προϋποθέτει ενδιάμεσο υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων. Το διάγραμμα αντιμετώπισης ενός κλασσικού προβλήματος ελαστικότητας φαίνεται παρακάτω:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \cdot \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \cdot \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \cdot \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \cdot \partial x_k} \quad (2.4)$$

όπου $i, j, k, l=1, 2, 3$.

Με βάση τη θεωρία μικρών παραμορφώσεων, η κινηματική σχέση (2.3) απλοποιείται στην ακόλουθη:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.5)$$

Παρατήρηση: Για τις αναλύσεις που ακολουθούν ορίζουμε:

- Το κύριο σύστημα συντεταγμένων:

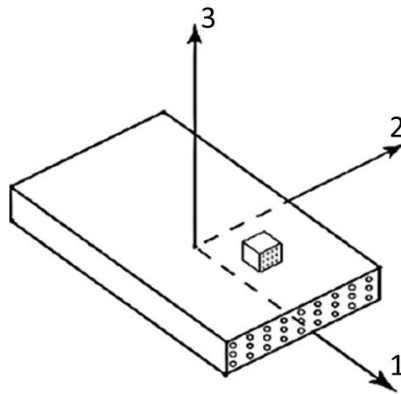
Στο Σχήμα 28, απεικονίζεται μία στρώση (lamina) ενός πολύστρωτου υλικού με παράλληλες ίνες. Για τη μελέτη του εφαρμόζεται το ακόλουθο ορθογωνικό σύστημα συντεταγμένων, του οποίου οι διευθύνσεις λαμβάνονται ως εξής:

Άξονας 1: παράλληλος με τη διεύθυνση της ίνας

Άξονας 2: είναι πάνω στο επίπεδο της στρώσης και κάθετος στις ίνες

Άξονας 3: είναι κάθετος στο επίπεδο της στρώσης και επίσης κάθετος στις ίνες

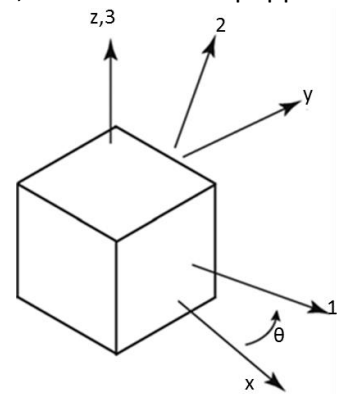
Η διεύθυνση 1 ονομάζεται “*διεύθυνση ίνας*” (fiber direction), ενώ οι διευθύνσεις 2 και 3 ονομάζονται “*κάθετες διευθύνσεις*” (transverse directions).



Σχήμα 28 Γεωμετρία στρώσης με παράλληλες συνεχείς ίνες και αναπαράσταση των διευθύνσεων του συστήματος συντεταγμένων

- Το τυχαίο σύστημα συντεταγμένων:

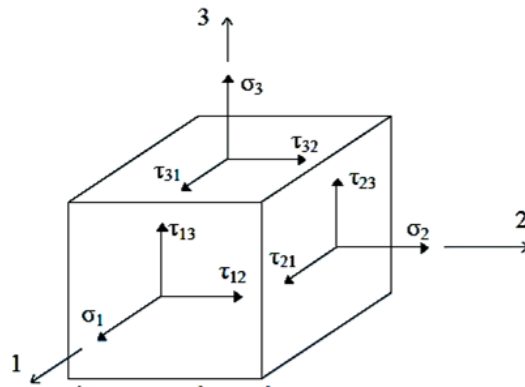
Στο Σχήμα 29, φαίνεται ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων $x-y-z$, το οποίο είναι στραμμένο κατά μία γωνία θ ως προς το κύριο σύστημα συντεταγμένων και για το οποίο ισχύει $z \equiv 3$. Η γωνία θ είναι θετικά ορισμένη όταν από το σύστημα $x-y$ στρίβουμε αντιωρολογιακά στο 1-2.



Σχήμα 29 Σύστημα που έχει περιστραφεί κατά γωνία θ

2.1.2. ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Η εντατική κατάσταση ενός υλικού σημείου μπορεί να εκφραστεί στο χώρο των τριών διαστάσεων με τις ακόλουθες εννέα συνιστώσες τάσεων σ_{ij} (όπου $i, j = 1, 2, 3$) (Σχήμα 30). Σύμφωνα με τη σύμβαση δεικτών, οι συνιστώσες σ_{ij} (για $i=j$) είναι οι *ορθές τάσεις* ενώ οι συνιστώσες σ_{ij} (για $i \neq j$) είναι οι *διατμητικές τάσεις*. Ο πρώτος δείκτης αφορά την κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος της επιφάνειας που δρα η τασική συνιστώσα, ενώ, ο δεύτερος δείκτης αφορά την κατεύθυνση του ίδιου του διανύσματος της τασικής συνιστώσας.



Σχήμα 30 Τρισδιάστατη εντατική κατάσταση

Σε κάθε συνιστώσα τάσης αντιστοιχεί και μια συνιστώσα παραμόρφωσης ϵ_{ij} που περιγράφει την παραμόρφωση στο υπ'όψιν υλικό σημείο. Οι *ορθές παραμορφώσεις* ϵ_{ij} (για $i=j$) αντιστοιχούν στην έκταση ή τη συρρίκνωση ανά μονάδα μήκους κατά τις διευθύνσεις x_i , ενώ οι *διατμητικές παραμορφώσεις* ϵ_{ij} (για $i \neq j$) αντιστοιχούν στις γωνίες στρέβλωσης γραμμών που ήταν προηγουμένως παράλληλες προς τους άξονες x_i και x_j . Επισημαίνεται ότι οι διανυσματικές παραμορφώσεις ϵ_{ij} διαφοροποιούνται από τις μηχανικές παραμορφώσεις γ_{ij} , καθώς οι μηχανικές διατμητικές παραμορφώσεις αφορούν τη συνολική μεταβολή της γωνίας γραμμών που ήταν προηγουμένως παράλληλες προς τους άξονες x_i και x_j , ενώ, οι διανυσματικές διατμητικές παραμορφώσεις αφορούν τη μεταβολή της γωνίας κάθε γραμμής χωριστά. Σύμφωνα με τον ορισμό ισχύει $\gamma_{ij} = 2 \cdot \epsilon_{ij}$ (για $i \neq j$).

Στην πλέον γενική περίπτωση ενός ελαστικού υλικού, οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων σε ένα υλικό σημείο εκφράζονται υπό τη μορφή

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \epsilon_{33}) \quad (2.6)$$

όπου οι συναρτήσεις f_{ij} είναι μη-γραμμικές.

Στην περίπτωση ενός **γραμμικά ελαστικού υλικού**, η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων σε ένα σημείο καθίσταται γραμμική και παίρνει τη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \dots & \dots & \dots & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \dots & \dots & \dots & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \dots & \dots & \dots & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & \dots & \dots & \dots & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & \dots & \dots & \dots & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & \dots & \dots & \dots & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

όπου το $[C]$ είναι ένα πλήρες μητρώο 9×9 με στοιχεία τις λεγόμενες ελαστικές σταθερές του υλικού.

Στα στοιχεία του μητρώου αυτού, οι δύο πρώτοι δείκτες αντιστοιχούν στις τάσεις και οι δύο τελευταίοι στις παραμορφώσεις. Στη γενικότερη περίπτωση που οι ελαστικές σταθερές δεν συσχετίζονται μεταξύ τους, η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (2.7) είναι ο γενικευμένος νόμος του Hooke που διέπει τα ανισότροπα υλικά. Πρακτικά, οι 81 ελαστικές σταθερές του πίνακα $[C]$ απλοποιούνται σημαντικά λόγω συνθηκών συμμετρίας.

Βάσει της κλασικής θεωρίας της μηχανικής, τόσο οι τάσεις όσο και οι

παραμορφώσεις είναι συμμετρικές, δηλαδή $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ και $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, οπότε, υπάρχουν μόνο έξι συνιστώσες τάσεων και έξι συνιστώσες παραμορφώσεων. Αυτό σημαίνει ότι οι ελαστικές σταθερές πρέπει να είναι συμμετρικές όσον αφορά τους δύο πρώτους δείκτες, αλλά και τους δύο τελευταίους δείκτες. Δηλαδή, ισχύει ότι $C_{ijkl} = C_{jikl}$ και $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ όπου $i, j, k, l = 1, 2, 3$, οπότε, οι ελαστικές σταθερές είναι ουσιαστικά 36. Οι απλοποιήσεις αυτές οδήγησαν στη λεγόμενη συνεπτυγμένη σύμβαση, που μειώνει τον αριθμό των δεικτών σε 6 και έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2, \sigma_{33} = \sigma_3, \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4, \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5, \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \varepsilon_{33} = \varepsilon_3, 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \varepsilon_4, 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \varepsilon_5, \\ 2\varepsilon_{12} &= 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_6. \end{aligned}$$

Με την ανεπτυγμένη αυτή σύμβαση, ο **γενικευμένος νόμος του Hooke** μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad (2.8)$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, 6$ και επανάληψη του δείκτη j σημαίνει άθροισμα.

Εναλλακτικά, ο γενικευμένος νόμος του Hooke μπορεί να γραφεί υπό μητρωϊκή μορφή ως εξής:

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \quad (2.9)$$

στην οποία το μητρώο $[C]$ των ελαστικών σταθερών του υλικού είναι διαστάσεων 6×6 με 36 στοιχεία συνολικά και τα διανύσματα των τάσεων $\{\sigma\}$ και των παραμορφώσεων $\{\varepsilon\}$ έχουν 6 στοιχεία. Επίσης, ο γενικευμένος νόμος του Hooke μπορεί να γραφεί υπό την ακόλουθη ανεστραμμένη μορφή:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \cdot \sigma_j \quad (2.10)$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, 6$

ή υπό μητρωϊκή μορφή:

$$\{\varepsilon\} = [S] \cdot \{\sigma\} \quad (2.11)$$

όπου $[S]$ είναι το *μητρώο ευκαμψίας* και το οποίο προσδιορίζεται ως το αντίστροφο του μητρώου των ελαστικών σταθερών $[S] = [C]^{-1}$. Μέσω της ενέργειας παραμόρφωσης, αποδεικνύεται ότι τα μητρώα $[C]$ και $[S]$ είναι συμμετρικά.

Προς το παρόν δεν έχει ληφθεί υπ' όψιν καμία συμμετρία, όσον αφορά τις ιδιότητες του υλικού. Βέβαια, όλα τα υλικά που απαντώνται στη φύση διαθέτουν κάποια μορφή συμμετρίας, ενώ, κανένα από τα γνωστά υλικά δεν είναι πλήρως ανισότροπο.

Στα σύνθετα υλικά, το βασικό πρόβλημα που συναντάται είναι η ετερογένεια.

Οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω ισχύουν *μόνο* σε ένα σημείο εντός του υλικού και διαφοροποιούνται σε γειτονικά σημεία μέσα στο υλικό (π.χ. το μέτρο ελαστικότητας των ινών είναι διαφορετικό από αυτό του συνδετικού υλικού).

2.1.3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Ο γενικευμένος νόμος του Hooke που παρουσιάστηκε παραπάνω, με 36 ελαστικές σταθερές, μπορεί να απλοποιηθεί και να εξειδικευτεί για διάφορες περιπτώσεις συμμετρίας στα υλικά.

Η πρώτη συνθήκη συμμετρίας, που είναι ανεξάρτητη από το υλικό, προκύπτει βάσει της ενέργειας παραμόρφωσης. Από αυτή τη συνθήκη, καταλήγουμε στο ότι ισχύει $C_{ij} = C_{ji}$, οπότε, το μητρώο των ελαστικών σταθερών είναι συμμετρικό. Αντίστοιχα, προκύπτει ότι $S_{ij} = S_{ji}$.

Βάσει των παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μόνο 21 από τις συνολικά 36 ελαστικές σταθερές στις (2.8) και (2.10) είναι ανεξάρτητες σε ένα πλήρως ανισότροπο υλικό, που λέγεται “τρικλινικό”.

Έτσι, για ένα **πλήρως ανισότροπο γραμμικώς ελαστικό υλικό**, η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (Hooke) (2.8) γράφεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Περαιτέρω απλοποίηση του μητρώου των ελαστικών σταθερών C_{ij} μπορεί να γίνει αν το υλικό διαθέτει κάποια μορφή συμμετρίας, αναφορικά με τις ιδιότητές του. Για παράδειγμα, στα “μονοκλινικά” υλικά, που διαθέτουν ένα επίπεδο συμμετρίας, οι ανεξάρτητες σταθερές μειώνονται σε 13. Η περίπτωση αυτή είναι άνευ πρακτικού ενδιαφέροντος για τα σύνθετα υλικά.

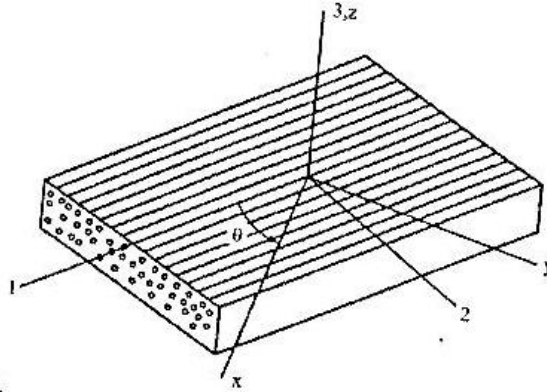
Μία στρώση από σύνθετο υλικό, με συνεχείς ίνες ενιαίας κατεύθυνσης (Σχήμα 31), διαθέτει τρία επίπεδα συμμετρίας ιδιοτήτων του υλικού, δηλαδή τα επίπεδα 1-2, 1-3 και 2-3. Το υλικό, σε αυτή την περίπτωση, ονομάζεται “ορθότροπο” και χαρακτηρίζεται από 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές, αναφορικά με το σύστημα αξόνων 1-2-3. Στα ορθότροπα υλικά και στο κύριο σύστημα αξόνων 1-2-3 δεν υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ κύριων και διατμητικών τάσεων-παραμορφώσεων.

Εντούτοις, ο όρος “ορθότροπο υλικό” δεν επαρκεί για τον καθορισμό του μητρώου των ελαστικών σταθερών. Το σύστημα αξόνων 1-2-3 ταυτίζεται με τις κύριες διευθύνσεις ιδιοτήτων του υλικού - γι’ αυτό και ονομάζεται “σύστημα υλικού” – και για παράδειγμα ο άξονας 1 έχει την κατεύθυνση των ινών. Αναφορικά, όμως, με ένα άλλο τυχόν σύστημα x-y-z, όπου $z \equiv 3$, το υλικό έχει ένα επίπεδο συμμετρίας και συμπεριφέρεται ανισότροπα στις άλλες δύο διευθύνσεις. Έτσι, λοιπόν, χρησιμοποιείται ο όρος “ειδικώς ορθότροπο” για να περιγράψουμε ένα ορθότροπο υλικό ως προς το σύστημα υλικού και ο όρος “γενικώς ορθότροπο” για ένα οποιοδήποτε σύστημα x-y-z, με $z \equiv 3$.

Στην πρώτη περίπτωση, η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

ενώ, στη δεύτερη περίπτωση, το παραπάνω μητρώο αλλάζει μορφή και εμφανίζει επιπλέον όρους στις θέσεις των μηδενικών, που είναι εξαρτημένοι από τη γωνία στροφής θ (Σχήμα 31).



Σχήμα 31 Ορθότροπη στρώση στο σύστημα υλικού 1-2-3 και σε τυχόν σύστημα x-y-z

Μία ειδική περίπτωση ορθότροπου υλικού είναι αν το υλικό συμπεριφέρεται ισότροπα κατά μία διεύθυνση. Το υλικό αυτό ονομάζεται “εγκαρσίως ισότροπο” και περιγράφεται από τον ακόλουθο νόμο ελαστικότητας:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{32} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Οι ανεξάρτητες σταθερές, στα εγκαρσίως ισότροπα υλικά, μειώνονται σε 5, όπου:

$$C_{33} = C_{22} \quad , \quad C_{13} = C_{12} \quad , \quad C_{55} = C_{66} \quad , \quad C_{44} = \frac{1}{2} \cdot (C_{22} - C_{23}) \quad (2.15)$$

Τέλος, τα “ισότροπα υλικά” διέπει ο ακόλουθος νόμος ελαστικότητας:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι μόνο 2, όπου:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} \quad , \quad C_{12} = C_{23} = C_{31} \quad , \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2} \cdot (C_{11} - C_{12}) \quad (2.17)$$

Αντιστρέφοντας τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (2.12) έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & \text{συμ.} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

όπου S_{ij} είναι οι όροι “ευκαμψίας” του υλικού.

Πίνακας 11 Ελαστικές Σταθερές Υλικών

ΥΛΙΚΟ	ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ	1 - 2 - 3	x - γ - z	ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ
Τρικλινικό	21	36	36	36
Μονοκλινικό	13	20	36	36
Ορθότροπο	9	12	20	20
Εγκαρσίως Ισότροπο	5	12	20	20
Ισότροπο	2	12	12	12

2.1.4. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Ο όρος “μηχανικές σταθερές” εκφράζει τα αντίστοιχα μέτρα ελαστικότητας που προσδιορίζονται με απλά πειράματα σε ένα δοκίμιο, είτε στο σύστημα υλικού 1-2-3, είτε σε ένα οποιοδήποτε άλλο σύστημα x-γ-z. Εάν πρόκειται για το σύστημα υλικού, η σχέση που διέπει ένα ορθότροπο υλικό είναι η (2.12) ή η (2.18).

Για τον προσδιορισμό των όρων S_{ij} εξετάζονται δοκίμια του υλικού, προσανατολισμένα στο σύστημα υλικού και ακολουθείται η εξής διαδικασία:

- Εφαρμόζεται μονοαξονικός εφελκυσμός κατά την έννοια 1, δηλαδή $\sigma_1 \neq 0$ με $\sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ και από την (2.18) έχουμε:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (2.19. \alpha)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12} \cdot \varepsilon_1 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \cdot \sigma_1 \quad (2.19. \beta)$$

$$\varepsilon_3 = -\nu_{13} \cdot \varepsilon_1 = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \cdot \sigma_1 \quad (2.19. \gamma)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \quad (2.19. \delta)$$

όπου:

E_1 : μέτρο ελαστικότητας κατά την έννοια του άξονα 1

ν_{12}, ν_{13} : οι λόγοι Poisson κατά την έννοια του άξονα 2 και 3 αντίστοιχα

- Εφαρμόζεται μονοαξονικός εφελκυσμός κατά την έννοια 2, δηλαδή $\sigma_2 \neq 0$ με $\sigma_1 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ και έχουμε:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (2.20. \alpha)$$

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21} \cdot \varepsilon_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \cdot \sigma_2 \quad (2.20. \beta)$$

$$\varepsilon_3 = -\nu_{23} \cdot \varepsilon_2 = -\frac{\nu_{23}}{E_2} \cdot \sigma_2 \quad (2.20. \gamma)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \quad (2.20. \delta)$$

όπου:

E_2 : μέτρο ελαστικότητας κατά την έννοια του άξονα 2

ν_{21}, ν_{23} : οι λόγοι Poisson κατά την έννοια του άξονα 1 και 3 αντίστοιχα

- Εφαρμόζεται μονοαξονικός εφελκυσμός κατά την έννοια 3, δηλαδή $\sigma_3 \neq 0$ με $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ και έχουμε:

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (2.21. \alpha)$$

$$\varepsilon_1 = -\nu_{31} \cdot \varepsilon_3 = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \cdot \sigma_3 \quad (2.21. \beta)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{32} \cdot \varepsilon_3 = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \cdot \sigma_3 \quad (2.21. \gamma)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \quad (2.21. \delta)$$

όπου:

E_3 : μέτρο ελαστικότητας κατά την έννοια του άξονα 3

ν_{31}, ν_{32} : οι λόγοι Poisson κατά την έννοια του άξονα 1 και 2 αντίστοιχα

- Εφαρμόζεται καθαρή διάτμηση στο επίπεδο 2-3, δηλαδή $\tau_{23} \neq 0$ με $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{12} = 0$ και έχουμε:

$$\gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \quad (2.22)$$

όπου:

G_{23} : μέτρο διάτμησης στο επίπεδο 2-3

- Εφαρμόζεται καθαρή διάτμηση στο επίπεδο 3-1, δηλαδή $\tau_{31} \neq 0$ με $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{12} = 0$ και έχουμε:

$$\gamma_{31} = \frac{\tau_{31}}{G_{13}} \quad (2.23)$$

όπου:

G_{13} : μέτρο διάτμησης στο επίπεδο 1-3

- Τέλος, εφαρμόζεται καθαρή διάτμηση στο επίπεδο 1-2, δηλαδή $\tau_{12} \neq 0$ με $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ και έχουμε:

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (2.24)$$

όπου:

G_{12} : μέτρο διάτμησης στο επίπεδο 1-2

Έτσι, το αντίστροφο του νόμου ελαστικότητας (2.18), συναρτήσει των μηχανικών σταθερών, για ένα **ορθότροπο υλικό**, δίνεται αναλυτικά από τη σχέση:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Οι λόγοι του Poisson ορίζονται ως εξής: $\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$, όπου $i, j=1,2,3$.

Επειδή το μητρώο ελαστικότητας είναι συμμετρικό, ισχύει: $\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$ (2.26)

όπου $i, j=1,2,3$.

Για τα **εγκαρσίως ισότροπα υλικά** ισχύει:

$$E_2 = E_3, \quad G_{13} = G_{12}, \quad \nu_{21} = \nu_{31}, \quad \nu_{23} = \nu_{32}, \quad G_{23} = \frac{E_2}{2 \cdot (1 + \nu_{32})} \quad (2.27)$$

Για τα **ισότροπα υλικά** ισχύει:

$$E = E_{ij}, \quad G = G_{ij}, \quad \nu = \nu_{ij}, \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.28)$$

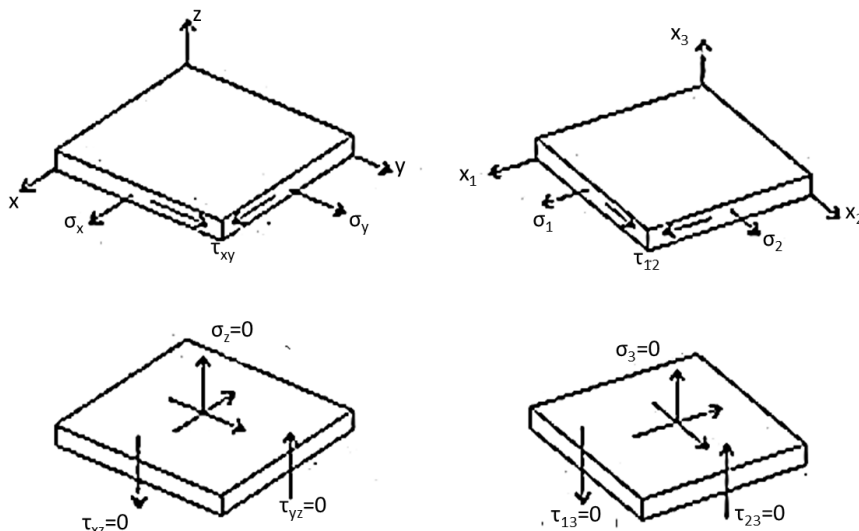
Πίνακας 12 Ιδιότητες Τυπικών Σύνθετων Υλικών

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΑ	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_{12}	G_{12} [GPa]	ν_f	ρ [g/cm ³]
T300/5208	Graphite Epoxy	181	10,30	0,28	7,17	0,70	1,60
B(4)/5505	Boron Epoxy	204	18,50	0,23	5,59	0,50	2,00
AS/3501	Graphite Epoxy	138	8,96	0,30	7,10	0,66	1,60
Scotchply 1002	Glass Epoxy	38,6	8,27	0,26	4,14	0,45	1,80
Kevlar 49	Aramid Epoxy	76	5,50	0,34	2,30	0,60	1,46

2.1.5. ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΕ ΟΡΘΟΤΡΟΠΟ ΥΛΙΚΟ

Έστω μία λεπτή στρώση από ένα ορθότροπο υλικό σε επίπεδη εντατική κατάσταση, που υποβάλλεται, δηλαδή, σε τάσεις σ_1 , σ_2 και τ_{12} και με $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$. Ως έννοια πάχους νοείται η κατεύθυνση 3. Τότε, λόγω του μικρού πάχους της στρώσεως στην έννοια 3, οι παραμορφώσεις ϵ_3 , γ_{23} και γ_{31} είναι αμελητέες και η (2.25) απλοποιείται στην ακόλουθη:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$



Σχήμα 32 Τάσεις στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης

Οι ανεξάρτητες σταθερές στην επίπεδη εντατική κατάσταση είναι πλέον τέσσερις, οι E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} και

$$\text{ισχύει: } \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.30)$$

Αντιστρέφοντας τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (2.29), για τη γενική περίπτωση

ορθότροπου υλικού, έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21} \cdot E_1 & 0 \\ \nu_{12} \cdot E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}) \cdot G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Ορίζονται οι όροι δυσκαμψίας Q_{ij} ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21} \cdot E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = Q_{21} & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Έτσι, διατυπώνεται η (2.31) υπό την ακόλουθη συμβολική μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Παρατήρηση: Στο κύριο σύστημα 1-2 είναι: $Q_{16} = Q_{26} = Q_{61} = Q_{62} = 0$.

Χρησιμοποιώντας τους όρους ευκαμψίας S_{ij} , η (2.31) γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

όπου:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{12} = S_{21} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.35)$$

Εξαιρέσει ορισμένων περιπτώσεων που απαιτείται η χρήση τρισδιάστατης θεώρησης (3D), τα σύνθετα υλικά αντιμετωπίζονται συνήθως ως **δισδιάστατα (2D) ελαστικά υλικά**. Ειδικότερα, σε διαστρωματώσεις από ινοπλισμένα σύνθετα υλικά, κάθε στρώση με προσανατολισμένες ίνες ενιαίας κατεύθυνσης χαρακτηρίζεται από την κύρια διεύθυνση 1, που είναι παράλληλη στις ίνες, από την εγκάρσια διεύθυνση 2, που είναι κάθετη στις ίνες και από την διεύθυνση 3, που είναι κάθετη στο επίπεδο 1-2.

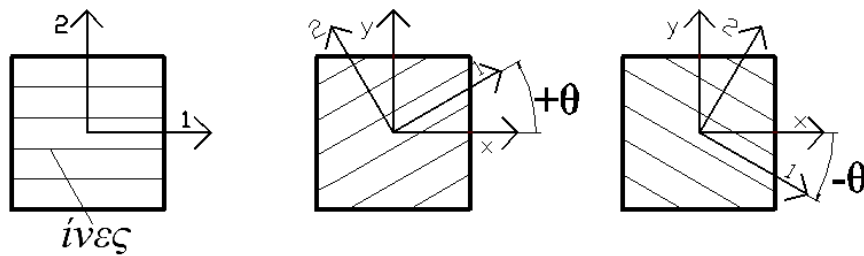
Πίνακας 13 Δυσκαμψίες Τυπικών Σύνθετων Υλικών (σε GPa)

ΤΥΠΟΣ	$1 - \nu_{12}\nu_{21}$	Q_{11}	Q_{22}	Q_{12}	Q_{66}
T300/5208	1,0045	181,800	10,340	2,897	7,170
B(4)/5505	1,0048	205,000	18,580	4,275	5,790
AS/3501	1,0059	138,800	9,013	2,704	7,100
Scotchply 1002	1,0147	39,160	8,392	2,182	4,140
Kevlar 49	1,0084	76,640	5,546	1,886	2,300

Πίνακας 14 Ευκαμψίες Τυπικών Σύνθετων Υλικών (σε TPa^{-1})

ΤΥΠΟΣ	S_{11}	S_{22}	S_{12}	S_{66}
T300/5208	5,525	97,090	-1,547	139,500
B(4)/5505	4,902	54,050	-1,128	172,700
AS/3501	7,246	111,600	-2,174	140,800
Scotchply 1002	25,910	120,900	-6,744	241,500
Kevlar 49	13,160	181,800	-4,474	434,800

2.1.6. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ - ΓΕΝΙΚΑ



Σχήμα 33 Σύστημα υλικού 1-2 και τυχόν σύστημα x-y-z. Γωνία μετασχηματισμού θ

Γνωρίζοντας τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων στο σύστημα υλικού 1-2, το οποίο αντιστοιχεί στη διεύθυνση των ινών και την κάθετο της, μπορεί να προσδιοριστεί η ανάλογη σχέση σε ένα άλλο σύστημα x-y υπό γωνία θ ως προς το σύστημα 1-2.

Το πρώτο βήμα είναι ο προσδιορισμός των σχέσεων μετασχηματισμού για τις τάσεις και τις παραμορφώσεις από το σύστημα 1-2 στο σύστημα x-y. Η γωνία στροφής θ είναι θετικά ορισμένη όταν από το σύστημα x-y στρίβουμε αντιωρολογιακά στο 1-2, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 33.

Ο μετασχηματισμός των σχέσεων τάσεων και παραμορφώσεων είναι *απαραίτητος* στα ινοπλισμένα σύνθετα υλικά για τους ακόλουθους λόγους:

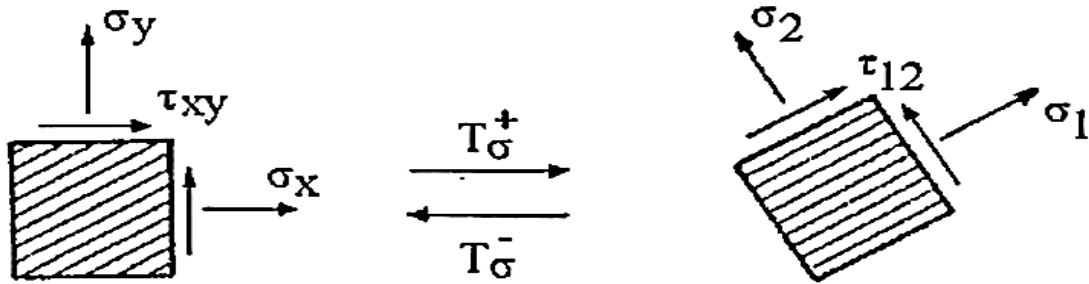
Στα συνήθη υλικά (ισότροπα):

- Οι ιδιότητες του υλικού δεν επηρεάζονται από τον προσανατολισμό.
- Στους κύριους άξονες 1-2 δεν έχουμε διατμητική τάση.
- Με βάση το κριτήριο αστοχίας von-Mises, η διατμητική τάση αστοχίας είναι $\tau_y \cong 0.58 \cdot \sigma_y$.

Στα σύνθετα υλικά (ορθότροπα ή ανισότροπα):

- Οι ιδιότητες του υλικού επηρεάζονται από τον προσανατολισμό των ινών.
- Ο μετασχηματισμός είναι αναγκαίος για τον προσδιορισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων στο σύστημα υλικού 1-2.
- Ο μετασχηματισμός είναι αναγκαίος για τον προσδιορισμό των όρων δυσκαμψίας και ευκαμψίας καθώς και των ισοδύναμων μέτρων ελαστικότητας.

2.1.6.1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ



Σχήμα 34 Μετασχηματισμός τάσεων

Το θετικό μητρώο μετασχηματισμού $[T_\sigma^+]$ των τάσεων $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ από το στραμμένο σύστημα x-y στο σύστημα υλικού 1-2 είναι :

$$[T_\sigma^+] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Έτσι, προσδιορίζονται οι τάσεις σ_1, σ_2 και τ_{12} , με τη γωνία στροφής θ να είναι θετικά ορισμένη, βάσει της ακόλουθης σχέσης:

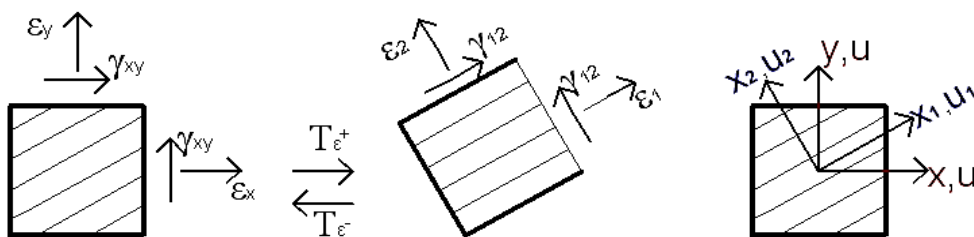
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\sigma^+] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Το μητρώο αντίστροφου μετασχηματισμού $[T_\sigma^-]$ προσδιορίζεται είτε με αντιστροφή του μητρώου $[T_\sigma^+]$, είτε θέτοντας αρνητική τη γωνία στροφής θ στη (2.37).

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό, οι τάσεις σ_x, σ_y και τ_{xy} υπολογίζονται από τις τάσεις σ_1, σ_2 και τ_{12} , οπότε, έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T_\sigma^-] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

2.1.6.2. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ



Σχήμα 35 Μετασχηματισμός παραμορφώσεων

Το θετικό μητρώο μετασχηματισμού $[T_\epsilon^+]$ των παραμορφώσεων $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ από το στραμμένο σύστημα x-y στο σύστημα υλικού 1-2 είναι :

$$[T_{\varepsilon}^+] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Άρα, συνολικά έχουμε:

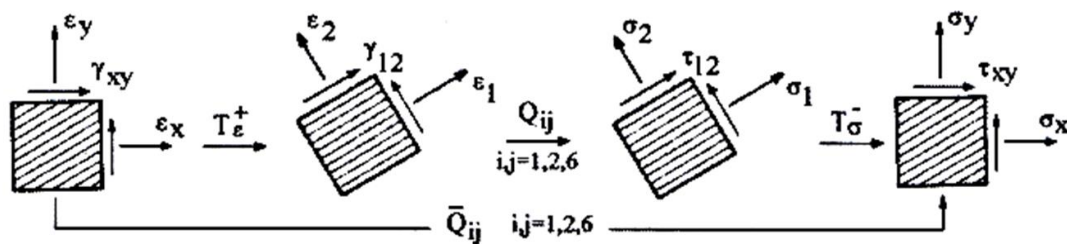
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T_{\varepsilon}^+] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Το **μητρώο αντίστροφου μετασχηματισμού** $[T_{\varepsilon}^-]$ προσδιορίζεται είτε με αντιστροφή του μητρώου $[T_{\varepsilon}^+]$, είτε θέτοντας αρνητική τη γωνία στροφής θ στη (2.40).

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό, οι παραμορφώσεις $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ και γ_{xy} υπολογίζονται από τις παραμορφώσεις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και γ_{12} , οπότε, έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -cs \\ s^2 & c^2 & cs \\ 2cs & -2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T_{\varepsilon}^-] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

2.1.7. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ Q_{ij}



Σχήμα 36 Διάγραμμα μετασχηματισμού των όρων δυσκαμψίας $[Q]$

Στο σύστημα υλικού 1-2, η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων είναι:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Έστω ένα σύστημα x-y στραμμένο κατά γωνία θ σε σχέση με το σύστημα υλικού. Στη συνέχεια θα προσδιοριστεί η σχέση που συνδέει τις τάσεις σ_x, σ_y και τ_{xy} με τις παραμορφώσεις $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ και γ_{xy} , στο στραμμένο σύστημα x-y.

Οι **μετασχηματισμένοι όροι δυσκαμψίας** \overline{Q}_{ij} υπολογίζονται συναρτήσει των όρων Q_{ij} ως ακολούθως:

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{66} \\ \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3 - c^3s & 2(cs^3 - c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s - cs^3 & 2(c^3s - cs^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Η σχέση μετασχηματισμού των όρων δυσκαμψίας γράφεται υπό συμβολική μορφή ως εξής: $\overline{Q}_{ij} = [T_Q] \cdot Q_{ij}$, όπου το $[T_Q]$ είναι ένα μητρώο 6×4 .

Παρατηρήσεις:

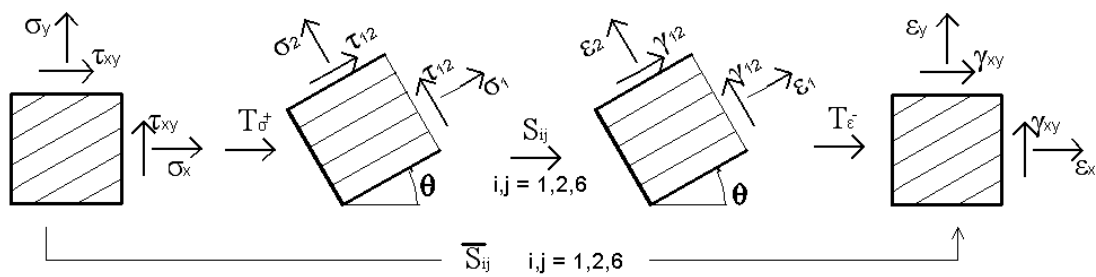
- Στο σύστημα 1-2, οι όροι Q_{16} και Q_{26} είναι μηδενικοί για ορθότροπα υλικά.
- Ο ανωτέρω μετασχηματισμός ισχύει μόνο για στροφή από τους άξονες υλικού 1-2 προς ένα τυχαίο σύστημα αξόνων x-y.
- Ο μετασχηματισμός ισχύει για την προσήμανση του Σχήματος 36 (γωνία θ θετική). Αν η θ είναι αρνητική, απαιτείται αλλαγή προσήμων στη (2.43).
- Θετικό ή αρνητικό πρόσημο στη γωνία θ επηρεάζει μόνο το πρόσημο των όρων \overline{Q}_{16} και \overline{Q}_{26} , όπως φαίνεται από τη (2.43).

Τελικά, η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (2.42) στο σύστημα υλικού 1-2 για ένα **ορθότροπο υλικό** μετασχηματίζεται στην ακόλουθη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων στο σύστημα x-y:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Το μητρώο δυσκαμψίας $[\overline{Q}]$ είναι συμμετρικό: $\overline{Q}_{12} = \overline{Q}_{21}$, $\overline{Q}_{16} = \overline{Q}_{61}$, $\overline{Q}_{26} = \overline{Q}_{62}$.

2.1.8. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ S_{ij}



Σχήμα 37 Διάγραμμα μετασχηματισμού των όρων ευκαμψίας $[S]$

Για τους άξονες υλικού 1-2, η αντίστροφη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων είναι:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Η σχέση μετασχηματισμού για τους όρους ευκαμψίας είναι:

$$\begin{Bmatrix} \overline{S}_{11} \\ \overline{S}_{22} \\ \overline{S}_{12} \\ \overline{S}_{66} \\ \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -c^2s^2 \\ 4c^2s^2 & 4c^2s^2 & -8c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \\ 2c^3s & -2cs^3 & 2(cs^3 - c^3s) & cs^3 - c^3s \\ 2cs^3 & -2c^3s & 2(c^3s - cs^3) & c^3s - cs^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{66} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

ή υπό συμβολική μορφή: $\overline{S}_{ij} = [T_S] \cdot S_{ij}$, όπου το $[T_S]$ είναι ένα μητρώο 6x4.

Η αντίστροφη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων στο σύστημα x-y γίνεται:

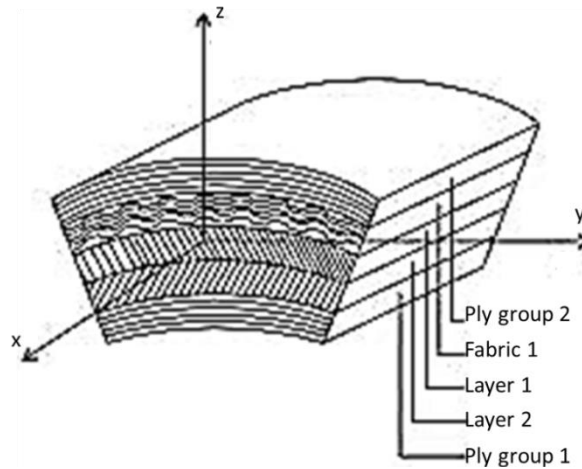
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

2.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΩΝ

2.2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΩΝ

Η κατανόηση της μηχανικής συμπεριφοράς μιας στρώσης είναι πολύ σημαντική για την ανάλυση των σύνθετων υλικών, αν και η μεμονωμένη στρώση δεν είναι, γενικά, από μόνη της χρήσιμη ως κατασκευαστικό στοιχείο, λόγω των ασθενών ιδιοτήτων της κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Τα σύνθετα υλικά μορφώνονται, συνήθως, υπό μορφή “διαστρωμάτωσης”, η οποία υλοποιείται θέτοντας πολλές στρώσεις σε συνεργασία μεταξύ τους, κάθε μία εκ των οποίων έχει τις δικές της ιδιότητες και γεωμετρικά χαρακτηριστικά, όπως είναι το πάχος, το υλικό ινών, το συνδετικό υλικό, η κατεύθυνση ινών και ο λόγος συμμετοχής του όγκου των ινών.

Το πάχος κάθε στρώσης είναι πολύ μικρότερο των άλλων δύο διαστάσεων, γι’ αυτό και έχουμε μία **επίπεδη εντατική κατάσταση**. Στην πράξη, ενώνουμε πολλές στρώσεις μαζί για να σχηματίσουμε μία λεπτή πλάκα, ένα κέλυφος ή ένα δομικό μέλος, όπως δοκούς ή στύλους διατομής **I**, **□**, **O**, πολυκυψελωτές διατομές κλπ.



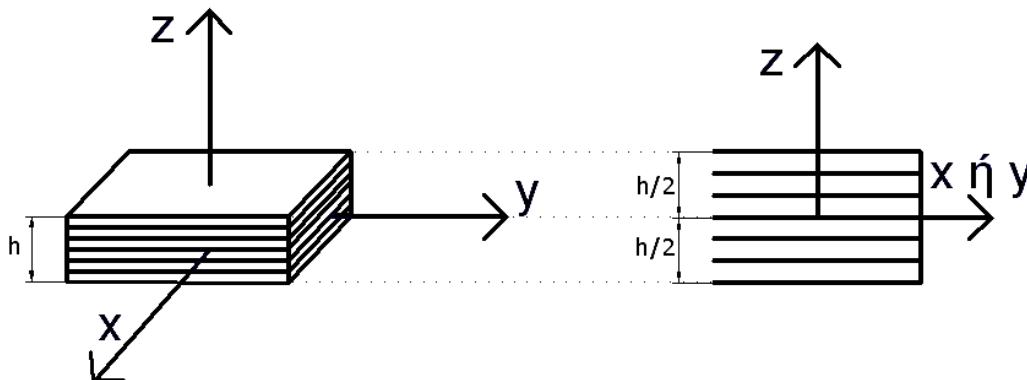
Σχήμα 38 Πολύστρωτο υλικό (Laminated Composite)

Οι άπειροι συνδυασμοί των επιμέρους υλικών που μπορεί να συνθέτουν μία διαστρωμάτωση, των πιθανών διευθύνσεων που μπορεί να έχουν οι ίνες μέσα σε κάθε στρώση, καθώς και των διαφορετικών μηχανικών σταθερών κάθε στρώσης, παρέχουν τεράστια ευελιξία και δυνατότητες σε ότι αφορά στο σχεδιασμό και την κατασκευή ενός τελικού προϊόντος από σύνθετο υλικό.

Η ανάλυση διαστρωματώσεων, που ακολουθεί, βασίζεται στην απλοποιημένη θεωρία δίσκων υπό μεμβρανική ένταση και πλακών υπό καθαρή κάμψη ή υπό σύγχρονη μεμβρανική και καμπτική καταπόνηση, καθώς και στη γενικευμένη Κλασική Θεωρία Διαστρωμάτωσης (CLT).

Η απαίτηση επαρκούς περιγραφής των συνδυασμών πολλών διευθύνσεων και των

τρόπων τοποθέτησης των στρώσεων σε μια διαστρωμάτωση οδήγησε στην ανάπτυξη του λεγόμενου “κώδικα αλληλουχίας”, ο οποίος χαρακτηρίζει κάθε διαστρωμάτωση και περιγράφει τη θέση της κάθε στρώσης μέσα στο συνολικό πάχος h της διαστρωμάτωσης, καθώς και την κατεύθυνση των ινών αναφορικά με το καθολικό σύστημα αξόνων x - y (γωνία θ) (Σχήμα 40).



Σχήμα 39 Γενικό σύστημα αξόνων υλικού διαστρωμάτωσης

Αρχικά, θεωρείται ότι κάθε στρώση αποτελείται από το ίδιο υλικό και έχει το αυτό πάχος t . Ως επίπεδο αναφοράς ($z=0$) λαμβάνεται πάντα το “μέσο επίπεδο” της διαστρωμάτωσης που βρίσκεται στη μέση του συνολικού πάχους h .

Στη γενική περίπτωση *μη-συμμετρικών* - ως προς το μέσο επίπεδο- διαστρωματώσεων, η αρίθμηση ξεκινά από τα αρνητικά z ως προς τα θετικά z , δηλαδή από την κάτω όψη προς την άνω όψη και ο κώδικας τίθεται εντός αγκυλών με δείκτη T (που συνήθως παραλείπεται). Για παράδειγμα, έχουμε: $[90/45/30/0/90/45]_T$ ή $[90/45/30/0/90/45]$.

Στην περίπτωση *συμμετρικής διαστρωμάτωσης* - ως επίπεδο αναφοράς ($z=0$) λαμβάνεται το μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης, στη θέση $h/2$ - νοείται άρτιος αριθμός στρώσεων διατεταγμένων συμμετρικά ως προς το μέσο επίπεδο [$\theta(z)=\theta(-z)$], η αρίθμηση ξεκινά και πάλι από τα αρνητικά z και σταματά στο μέσο επίπεδο, ενώ, η συμμετρία εκφράζεται με το δείκτη S . Για παράδειγμα, έχουμε: $[0/90/45]_S$.

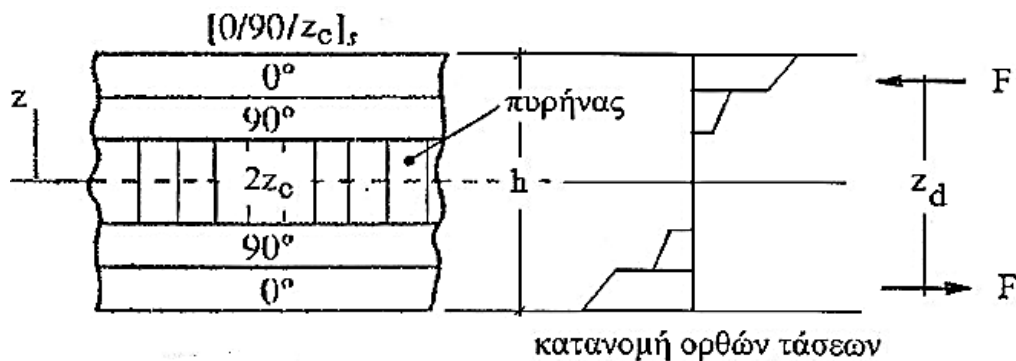
Αν ο αριθμός των στρώσεων σε μια συμμετρική διαστρωμάτωση είναι μονός, τότε, η στρώση που τέμνεται από το μέσο επίπεδο συμβολίζεται με επι-γραμμή: $[0/90/45]_S$.

Στην περίπτωση που υπάρχει κάποια *ομάδα στρώσεων*, δηλαδή δύο ή περισσότερες επάλληλες στρώσεις με την ίδια γωνία κατεύθυνσης θ , ο αριθμός των στρώσεων κάθε ομάδας μπαίνει σαν δείκτης. Για παράδειγμα: $[0_3/90_2/45_2/-45_2]_S$ ή $[(0_2/\pm 30)_2]$.

60	-45	45	-45
90	-45	-45	-45
90	0	-45	-30
0	0	45	30
0	0	45	90
0	0	-45	90
45	-45	-45	45
45	-45	45	45
45			
[45 ₃ /0 ₄ /90 ₂ /60]	[-45 ₂ /0 ₂] _s	[45/-45 ₂ /45] _s	[45 ₂ /90 ₂ /30/-30/-45 ₂]
45	-45	30	
-45	-45	30	
30	45	30	
-30	45	-30	
-30	-45	-30	
30	-45	-30	
-45	-45	-30	
45			
[45/-45/30/-30] _s	[-45 ₂ /45 ₂ /-45 ₂]	[-30 ₃ /30 ₃]	

Σχήμα 40 Διαστρωματώσεις και κώδικες αλληλουχίας στρώσεων

Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον από πρακτικής άποψης αποκτά η περίπτωση διαστρωματώσεων με πυρήνα. Ο πυρήνας αποτελείται από ασθενές υλικό που αγνοείται κατά την ανάλυση της διαστρωμάτωσης και ο μόνος ρόλος που έχει είναι να απομακρύνει τα δύο επιμέρους τμήματα της διαστρωμάτωσης προς την άνω και την κάτω όψη, διατηρώντας τη μεταξύ τους συνεργασία. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ο απαραίτητος μοχλοβραχίονας, ώστε η διαστρωμάτωση να μπορεί να παραλαμβάνει και καμπτικές ροπές λειτουργώντας –κατά βάση- μεμβρανικά (Σχήμα 41). Η παρεμβολή πυρήνα συνολικού πάχους $2z_c$ συμβολίζεται στον κώδικα αλληλουχίας μιας συμμετρικής διαστρωμάτωσης ως εξής: $[0_3/90/z_c]_s$.

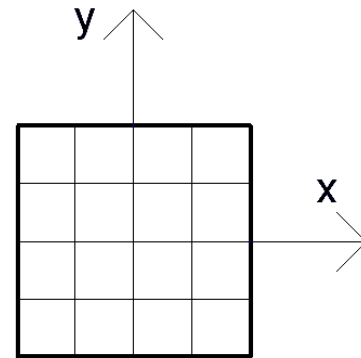


Σχήμα 41 Συμμετρική διαστρωμάτωση με πυρήνα

2.2.2. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΩΝ

A. Σταυροειδής Διαστρωμάτωση (Cross-Ply)

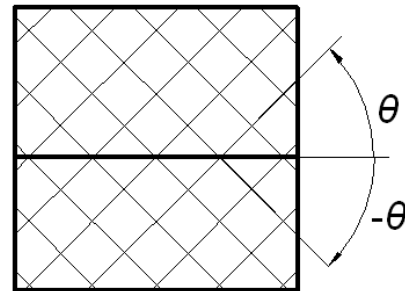
Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόνο στρώσεις με γωνίες 0° και 90° . Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της σταυροειδούς και “ισορροπημένης” διαστρωμάτωσης, διότι συμπεριφέρεται ως τετραγωνικό συμμετρικό υλικό. Ο όρος “ισορροπημένη” σημαίνει ότι η διαστρωμάτωση διαθέτει ίδιο αριθμό και πάχος στρώσεων 0° και 90° . Μια σταυροειδής-συμμετρική διαστρωμάτωση συμπεριφέρεται γενικά ως ορθότροπη και μπορεί να είναι συμμετρική ή μη-συμμετρική.



Σχήμα 42 Σταυροειδής διαστρωμάτωση (Cross-ply)

B. Διαστρωμάτωση Διπλής Κατεύθυνσης Υπό Γωνία (Angle-Ply)

Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόνο στρώσεις με γωνίες $+\theta$ και $-\theta$ και η διαστρωμάτωση μπορεί να είναι συμμετρική ή μη συμμετρική, ισορροπημένη ή μη ισορροπημένη. Μία τέτοια διαστρωμάτωση συμπεριφέρεται γενικά ως ορθότροπη.

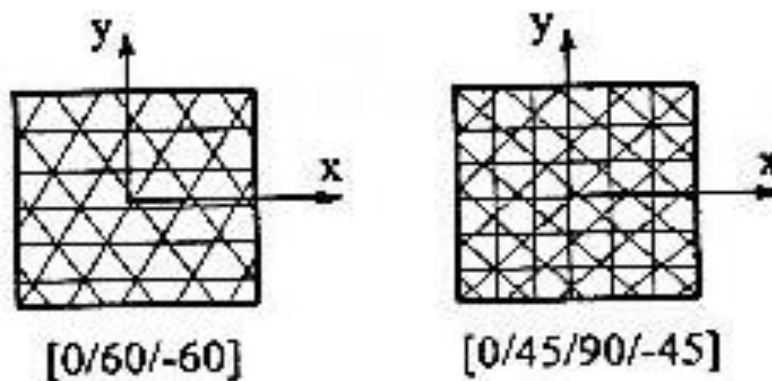


Σχήμα 43 Διαστρωμάτωση διπλής κατεύθυνσης υπό γωνία (Angle-ply)

C. Ψευδο-ισότροπη Διαστρωμάτωση

Η διαστρωμάτωση του τύπου αυτού αποτελείται από στρώσεις με μεμονωμένη ορθότροπη συμπεριφορά, αλλά τελικά παρουσιάζει ισότροπη συμπεριφορά. Ψευδο-ισότροπες διαστρωματώσεις μπορούν να κατασκευαστούν με τους ακόλουθους τρόπους:

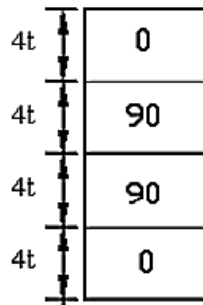
- Μεγάλο πλήθος στρώσεων με τυχαίες γωνίες προσανατολισμού
- Ισορροπημένη διαστρωμάτωση “ $\pi/3$ ” με κώδικα $[0/60/-60]_s$
- Ισορροπημένη διαστρωμάτωση “ $\pi/4$ ” με κώδικα $[0/45/90/-45]_s$



Σχήμα 44 Ψευδο-ισότροπη διαστρωμάτωση

D. Συμμετρική Διαστρωμάτωση (Symmetrical Laminate)

Μία συμμετρική διαστρωμάτωση εμφανίζει συμμετρία ως προς το μέσο επίπεδο ($z=0$).



Σχήμα 45 Συμμετρική διαστρωμάτωση (Symmetrical laminate)

E. Ισορροπημένη Διαστρωμάτωση (Balanced Laminate)

Μία διαστρωμάτωση σύνθετου υλικού στην οποία όλες οι στρώσεις, που έχουν προσανατολισμούς διάφορους των 0° και 90° , εμφανίζονται αποκλειστικά σε ζεύγη $\pm\theta$ (όχι απαραίτητως παρακείμενα) και είναι συμμετρικές ως προς το μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης.

F. Ορθότροπη Διαστρωμάτωση (Orthotropic Laminate)

Στην ορθότροπη διαστρωμάτωση ενδιαφερόμαστε για δύο αμοιβαία κάθετες διευθύνσεις, στο επίπεδο της διαστρωμάτωσης. Οι μεμβρανικές δράσεις και οι ροπές κάμψης που ασκούνται σε αυτές τις διευθύνσεις, δεν προκαλούν ούτε διάτμηση ούτε στροφή της διαστρωμάτωσης.

Μια διαστρωμάτωση είναι ορθότροπη όταν κάθε στρώση της είναι ορθότροπη και οι ορθότροπες διευθύνσεις συμπίπτουν με τις διευθύνσεις x και y . Οι στρώσεις που είναι ενισχυμένες με ίνες είναι ορθότροπες υπό τις ακόλουθες συνθήκες:

- Όταν η στρώση αποτελείται από ίνες ενιαίου προσανατολισμού και όλες οι ίνες είναι ευθυγραμμισμένες με μία από τις ορθότροπες διευθύνσεις,
- Όταν η στρώση είναι ένα πλεγμένο ύφασμα και οι άξονες συμμετρίας της στρώσης είναι ευθυγραμμισμένοι με τις ορθότροπες διευθύνσεις της διαστρωμάτωσης,
- Όταν δύο γειτονικές στρώσεις με ενιαίο προσανατολισμό ινών (προσανατολισμένες σε διαφορετικές διευθύνσεις) συμπεριφέρονται σαν μία στρώση και οι άξονες συμμετρίας αυτής της στρώσης είναι ευθυγραμμισμένοι με τις ορθότροπες διευθύνσεις της διαστρωμάτωσης.

2.2.3. ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΕΝΤΑΣΗ

Δεχόμαστε ότι η διαστρωμάτωση λειτουργεί ως δίσκος, δηλαδή φορτίζεται εντός του επιπέδου της με τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} , ενώ οι τάσεις σ_z , τ_{zx} και τ_{zy} είναι μηδέν. Αντιστοίχως, δεχόμαστε ότι θα αναπτυχθούν παραμορφώσεις ϵ_x , ϵ_y και γ_{xy} , ενώ οι παραμορφώσεις ϵ_z , γ_{zx} και γ_{zy} είναι πολύ μικρές (αμελητέες). Επίσης, δεχόμαστε ότι διατηρείται η επιπεδότητα της διατομής, οπότε οι παραμορφώσεις κατά την έννοια του πάχους της διαστρωμάτωσης θα είναι ίδιες, ανεξάρτητες του z , δηλαδή θα είναι:

$$\epsilon_x(z) = \epsilon_x(0) = \epsilon_x^0, \quad \epsilon_y(z) = \epsilon_y(0) = \epsilon_y^0, \quad \gamma_{xy}(z) = \gamma_{xy}(0) = \gamma_{xy}^0 \quad (2.48)$$

όπου ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 είναι οι τιμές των παραμορφώσεων στο μέσο επίπεδο x - y ($z=0$).

Ορίζουμε, βοηθητικά, τις μέσες τάσεις $\bar{\sigma}$, οπότε έχουμε:

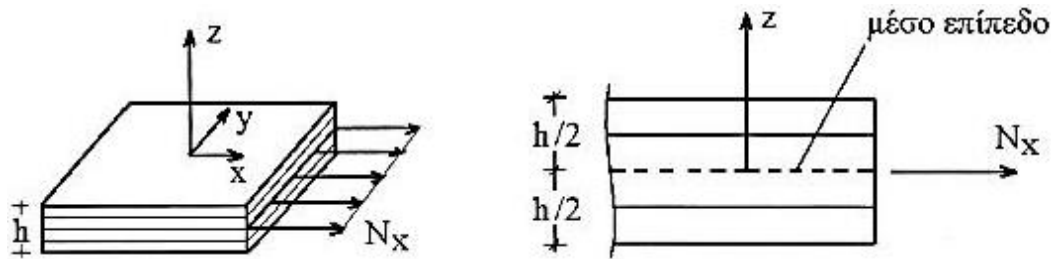
$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (2.49)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων $\{\sigma\} = [\bar{Q}] \cdot \{\varepsilon\}$, για παράδειγμα στην πρώτη εκ των (2.49), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\bar{Q}_{11} \cdot \varepsilon_x + \bar{Q}_{12} \cdot \varepsilon_y + \bar{Q}_{16} \cdot \gamma_{xy}) dz = \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left[\int \bar{Q}_{11} \cdot dz \cdot \varepsilon_x + \int \bar{Q}_{12} \cdot dz \cdot \varepsilon_y + \int \bar{Q}_{16} \cdot dz \cdot \gamma_{xy} \right] = \\ &= \frac{1}{h} \cdot (A_{11} \cdot \varepsilon_x + A_{12} \cdot \varepsilon_y + A_{16} \cdot \gamma_{xy}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Μεταθέτοντας στο αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης το πάχος h και ορίζοντας τη μεμβρανική δράση N_x ως το γινόμενο $\bar{\sigma}_x \cdot h$, έχουμε την έκφραση:

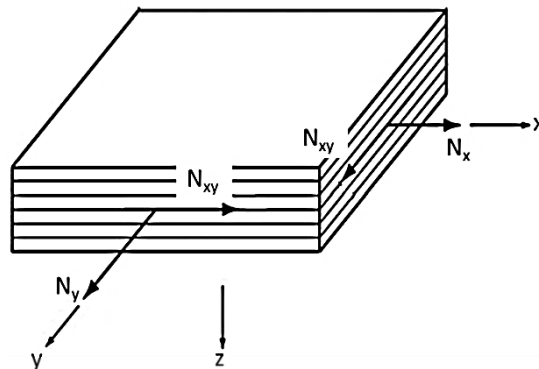
$$N_x = \bar{\sigma}_x \cdot h = A_{11} \cdot \varepsilon_x + A_{12} \cdot \varepsilon_y + A_{16} \cdot \gamma_{xy} \quad (2.51)$$



Σχήμα 46 Μεμβρανική δράση N_x σε μία διαστρωμάτωση

Η μεμβρανική δράση N_x είναι αξονική δύναμη ανά μονάδα μήκους που εφαρμόζεται στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης ($z=0$) και ουσιαστικά αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση (Σχήμα 46). Αναλόγως, ορίζονται και οι μεμβρανικές δράσεις N_y και N_{xy} :

$$\begin{aligned} N_y &= \bar{\sigma}_y \cdot h = A_{12} \cdot \varepsilon_x + A_{22} \cdot \varepsilon_y + A_{26} \cdot \gamma_{xy} \\ N_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} \cdot h = A_{16} \cdot \varepsilon_x + A_{26} \cdot \varepsilon_y + A_{66} \cdot \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.52)$$



Σχήμα 47 Σχηματική αναπαράσταση των συνιστωσών δυνάμεων σε ένα πολύστρωτο σύνθετο υλικό.

Ορίζοντας τους όρους “μεμβρανικής δυσκαμψίας” ως:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2.53)$$

μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων, που προκύπτει μετά την ολοκλήρωση των τάσεων ως προς το πάχος h της διαστρωμάτωσης, ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

όπου οι όροι A_{ij} είναι οι “μεμβρανικές δυσκαμψίες” της διαστρωμάτωσης και έχουν μονάδες κατανεμημένης δύναμης.

Αντιστρέφοντας την (2.54), προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

όπου οι όροι a_{ij} είναι οι “όροι μεμβρανικής ευκαμψίας” της διαστρωμάτωσης.

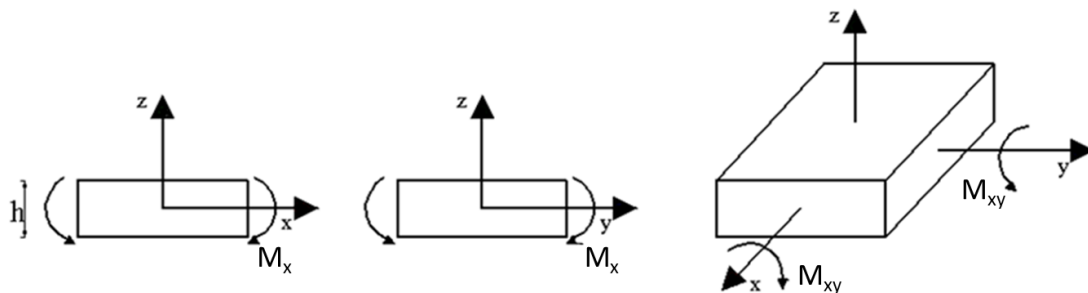
Σε μία διαστρωμάτωση με N στρώσεις, όπου η κάθε στρώση έχει πάχος t_k , η (2.53) γίνεται:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} dz = \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{ij})_k \cdot t_k \quad (2.56)$$

2.2.4. ΑΠΛΗ ΚΑΜΨΗ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΕΩΝ

Η ανάλυση μιας διαστρωμάτωσης με στρώσεις από διαφορετικά υλικά, πάχη και προσανατολισμούς ινών γίνεται βάσει της Κλασσικής Θεωρίας Διαστρωμάτωσης (CLT) και της Κλασσικής Θεωρίας Κάμψης.

Παρά το γεγονός ότι μία διαστρωμάτωση αποτελείται από πολλές στρώσεις, θεωρείται ότι συμπεριφέρεται ως μία ενιαία, μη-ομογενής, ανισότροπη ή ορθότροπη πλάκα. Οι στρώσεις συνεργάζονται μεταξύ τους και δεν επιτρέπεται διεπιφανειακή ολίσθηση. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η υπόθεση των παραμορφώσεων που ισχύει για την Κλασσική Θεωρία Κάμψης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κάμψη διαστρωματώσεων από σύνθετα υλικά.



Σχήμα 48 Προσήμανση θετικών ροπών σε μία διαστρωμάτωση

Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για την ανάλυση κάμψης των διαστρωματώσεων παρουσιάζεται στο Σχήμα 48. Το σύστημα x, y, z προσαρτάται στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης. Οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις x, y, z είναι u, v, w αντίστοιχα.

Οι βασικές **προϋποθέσεις** για την ανάλυση που ακολουθεί είναι οι εξής:

- Η διαστρωμάτωση απαρτίζεται από ορθότροπες στρώσεις σε πλήρη συνεργασία μεταξύ τους.
- Το πάχος h της διαστρωμάτωσης κατά την έννοια z είναι κατά πολύ μικρότερο από τις διαστάσεις στις έννοιες x και y .
- Οι μετατοπίσεις u, v και w είναι κατά πολύ μικρότερες από το πάχος h .
- Οι παραμορφώσεις ϵ_z, γ_{yz} και γ_{zx} είναι αμελητέες.
- Οι μετατοπίσεις u, v και w είναι γραμμικές συναρτήσεις της συντεταγμένης z .
- Το υλικό κάθε στρώσης διέπεται από το νόμο του Hooke.

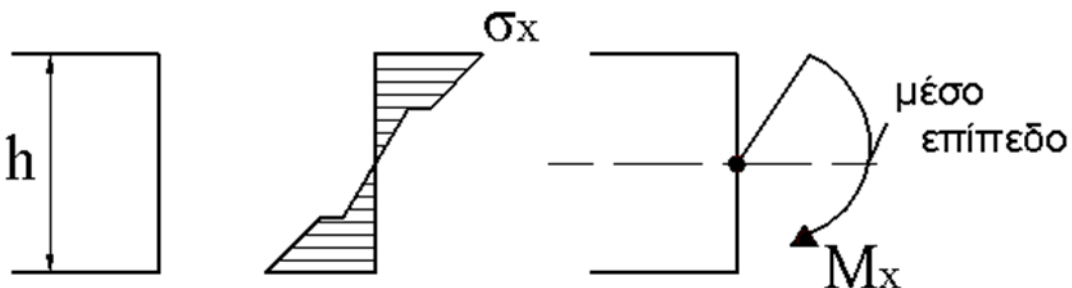
Με βάση τα παραπάνω, ισχύει η υπόθεση ότι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες κατά την παραμόρφωση.

Θεωρούμε μια διαστρωμάτωση πάχους h στην οποία δρουν εγκάρσια φορτία. Ο φορέας αυτός λειτουργεί ως μία *σύνθετη πλάκα*, η οποία παραλαμβάνει τα εγκάρσια φορτία μέσω καμπτικής καταπόνησης. Οι ροπές M_x, M_y και M_{xy} είναι κατανομημένες και έχουν μονάδες kNm/m , δηλαδή kN . Ορίζουμε για τις ροπές ως θετικές φορές αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 48.

Οι ροπές συστροφής M_{xy} και M_{yx} είναι ίσες κατά απόλυτο τιμή και αποτελούν ζεύγος, αλλά, στο δεξιόστροφο σύστημα η M_{xy} έχει αρνητική φορά και η M_{yx} θετική. Οι ροπές υπολογίζονται με ολοκλήρωση των τάσεων, κατά την έννοια του πάχους h της διαστρωμάτωσης ως εξής:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \, dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \, dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \, dz \quad (2.57)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις συνδέουν τις ορθές και διατμητικές τάσεις με τις ροπές κάμψεως. Οι ροπές αυτές θεωρούνται ότι εφαρμόζονται ως συγκεντρωμένες στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 49.



Σχήμα 49 Ισοδυναμία ορθών τάσεων και ροπών σε μία διαστρωμάτωση

Οι γραμμικές κινηματικές σχέσεις (παραμορφώσεων-μετατοπίσεων) στην επίπεδη εντατική κατάσταση είναι:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.58)$$

Βάσει της θεωρίας λεπτών πλακών, οι εκτός του επιπέδου παραμορφώσεις είναι αμελητέες:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \approx 0 \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \approx 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \approx 0 \quad (2.59)$$

Ορίζοντας τις καμπυλότητες k_x , k_y και k_{xy} ως:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad k_{xy} = -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.60)$$

$$\text{προκύπτει: } \varepsilon_x = z \cdot k_x \quad \varepsilon_y = z \cdot k_y \quad \gamma_{xy} = z \cdot k_{xy} \quad (2.61)$$

Αναπτύσσοντας την (2.57) για τη ροπή M_x συναρτήσει των τάσεων και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (2.61), έχουμε:

$$\begin{aligned} M_x &= \int \sigma_x \cdot z \, dz = \int (\overline{Q}_{11} \cdot \varepsilon_x + \overline{Q}_{12} \cdot \varepsilon_y + \overline{Q}_{16} \cdot \gamma_{xy}) \cdot z \, dz = \\ &= \int (\overline{Q}_{11} \cdot k_x + \overline{Q}_{12} \cdot k_y + \overline{Q}_{16} \cdot k_{xy}) \cdot z^2 \, dz = \\ &= \left(\int \overline{Q}_{11} \cdot z^2 \, dz \right) \cdot k_x + \left(\int \overline{Q}_{12} \cdot z^2 \, dz \right) \cdot k_y + \left(\int \overline{Q}_{16} \cdot z^2 \, dz \right) \cdot k_{xy} = \\ &= D_{11} \cdot k_x + D_{12} \cdot k_y + D_{16} \cdot k_{xy} \end{aligned} \quad (2.62)$$

όπου εμφανίζονται οι όροι “καμπτικής δυσκαμψίας” D_{ij} ($i,j=1,2,6$).

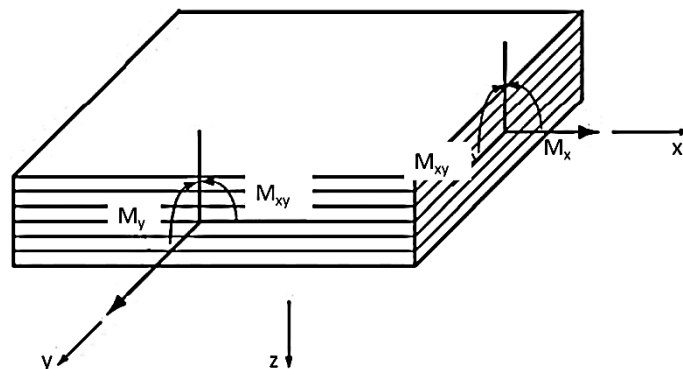
Ομοίως, αναπτύσσονται και οι ροπές M_y και M_{xy} στην έκφραση (2.57). Τελικώς, η σχέση ροπών-καμπυλοτήτων που προκύπτει, γράφεται υπό την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

όπου οι όροι καμπτικής δυσκαμψίας D_{ij} ($i,j=1,2,6$) προσδιορίζονται από τη σχέση

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} \cdot z^2 \, dz = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{ij})_k \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.64)$$

για μία διαστρωμάτωση με N στρώσεις.



Σχήμα 50 Σχηματική αναπαράσταση των συνιστωσών ροπών σε ένα πολύστρωτο σύνθετο υλικό

Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας $[D]$ είναι συμμετρικό και η ύπαρξη μη μηδενικών όρων D_{16} και D_{26} υποδηλώνει σύζευξη απλής κάμψης και συστροφής.

Αντιστρέφοντας τη (2.63) προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

όπου d_{ij} ($i,j=1,2,6$) είναι οι όροι “καμπτικής ευκαμψίας”.

2.2.5. ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΕΝΤΑΣΗ ΚΑΙ ΚΑΜΨΗ

Στη γενική περίπτωση μίας διαστρωμάτωσης με στρώσεις από διαφορετικά υλικά, πάχη και προσανατολισμούς ινών παύει να υπάρχει συμμετρία ως προς το μέσο επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή, οι μεμβρανικές δράσεις και οι ροπές είναι συζευγμένες και το πρόβλημα δεν είναι πλέον καθαρή μεμβρανική ένταση ή καθαρή κάμψη, αλλά, *σύγχρονη μεμβρανική ένταση και κάμψη* ή αλλιώς σύνθετη καταπόνηση. Τέτοιου τύπου διαστρωματώσεις δεν συνηθίζονται στην πράξη, παρά μόνον σε πολύ εξειδικευμένες περιπτώσεις σχεδιασμού, όπου η οικονομία υλικού που επιτυγχάνεται μπορεί να φτάσει έως και το 50%.

Εξετάζοντας μεμονωμένα τα προβλήματα της μεμβρανικής έντασης και της κάμψης, διατυπώθηκαν προηγουμένως οι ακόλουθες σχέσεις μεμβρανικών δυνάμεων- παραμορφώσεων και ροπών-καμπυλοτήτων:

$$\{N\} = \int \{\sigma\} dz = [A] \cdot \{\varepsilon^0\} \quad \{M\} = \int \{\sigma\} \cdot z dz = [D] \cdot \{k\} \quad (2.66)$$

όπου $[A] = \int [\overline{Q}] dz$ και $[D] = \int [\overline{Q}] \cdot z^2 dz$ τα μητρώα μεμβρανικών και καμπτικών δυσκαμψιών, αντίστοιχα.

Στη γενικότερη περίπτωση συνδυασμένων δράσεων, οι παραμορφώσεις λόγω μεμβρανικής έντασης και κάμψης επαλληλίζονται και είναι:

$$\varepsilon_x(z) = \varepsilon_x^0 + z \cdot k_x \quad \varepsilon_y(z) = \varepsilon_y^0 + z \cdot k_y \quad \gamma_{xy}(z) = \gamma_{xy}^0 + z \cdot k_{xy} \quad (2.67)$$

όπου ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0 είναι οι τιμές των παραμορφώσεων στο μέσο επίπεδο x - y ($z=0$).

Αντικαθιστώντας τις γενικές εκφράσεις των παραμορφώσεων $\varepsilon_x(z)$, $\varepsilon_y(z)$, $\gamma_{xy}(z)$ από τη (2.67) στις εκφράσεις των μεμβρανικών δράσεων N_x , N_y και N_{xy} έχουμε (π.χ. για τη N_x):

$$\begin{aligned} N_x &= \int [\overline{Q}_{11} \cdot (\varepsilon_x^0 + z \cdot k_x) + \overline{Q}_{12} \cdot (\varepsilon_y^0 + z \cdot k_y) + \overline{Q}_{16} \cdot (\gamma_{xy}^0 + z \cdot k_{xy})] dz = \\ &= \int \overline{Q}_{11} dz \cdot \varepsilon_x^0 + \int \overline{Q}_{12} dz \cdot \varepsilon_y^0 + \int \overline{Q}_{16} dz \cdot \gamma_{xy}^0 + \int \overline{Q}_{11} \cdot z dz \cdot k_x + \int \overline{Q}_{12} \cdot z dz \cdot k_y \\ &\quad + \int \overline{Q}_{16} \cdot z dz \cdot k_{xy} = \\ &= A_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + A_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + A_{16} \cdot \gamma_{xy}^0 + B_{11} \cdot k_x + B_{12} \cdot k_y + B_{16} \cdot k_{xy} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Αναπτύσσοντας με όμοιο τρόπο τις N_y και N_{xy} και συλλέγοντας τους όρους έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

Ή συνοπτικά: $\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon^0\} + [B] \cdot \{k\}$, όπου οι όροι B_{ij} προσδιορίζονται από την ακόλουθη σχέση:

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} \cdot z \, dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{ij})_k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.70)$$

Οι “**όροι σύζευξης**” B_{ij} εκφράζουν την αλληλεπίδραση μεμβρανικής έντασης και κάμψης. Αυτό σημαίνει ότι εάν, για παράδειγμα, μία μη συμμετρική διαστρωμάτωση υποβληθεί σε μονοαξονικό εφελκυσμό, θα αναπτύξει και καμπυλότητες πέραν των παραμορφώσεων στο επίπεδο.

Στην ειδική περίπτωση που η διαστρωμάτωση είναι *συμμετρική*, τότε θα είναι: $\overline{Q}_{ij}(z) = \overline{Q}_{ij}(-z)$ και συνεπώς οι όροι B_{ij} που εκφράζουν την αλληλεπίδραση αλληλοαναιρούνται:

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^0 \overline{Q}_{ij} \cdot z \, dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} \cdot z \, dz = - \int_0^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} \cdot z \, dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} \cdot z \, dz \equiv 0 \quad (2.71)$$

Αντικαθιστώντας τις γενικές εκφράσεις των παραμορφώσεων $\varepsilon_x(z)$, $\varepsilon_y(z)$, $\gamma_{xy}(z)$ της (2.67) στις εκφράσεις των ροπών M_x , M_y και M_{xy} στην (2.66), έχουμε:

$$\{M_i\} = \int \{\sigma\} \cdot z \, dz = \int \overline{Q}_{ij} \cdot (\varepsilon_j^0 + z \cdot k_j) \cdot z \, dz = \left[\int \overline{Q}_{ij} \cdot z \, dz \right] \cdot \varepsilon_j^0 + \left[\int \overline{Q}_{ij} \cdot z^2 \, dz \right] \cdot k_j = B_{ij} \cdot \varepsilon_j^0 + D_{ij} \cdot k_j \quad (2.72)$$

δηλαδή:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

ή συνοπτικά:

$$\{M\} = [B] \cdot \{\varepsilon^0\} + [D] \cdot \{k\}. \quad (2.73)$$

Συνδυάζοντας τις (2.69) και (2.73) έχουμε τη γενικότερη σχέση μεμβρανικών δράσεων και ροπών συναρτήσει των παραμορφώσεων και των καμπυλοτήτων:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

ή υπό συμβολική μορφή με υπομητρώα:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

Στην *ειδική περίπτωση* που $[B] = 0$, τα αντίστροφα των μητρώων $[A]$ και $[D]$ συμβολίζονται με $[a]$ και $[d]$ αντίστοιχα και η αντιστροφή τους μπορεί να γίνει μεμονωμένα, δηλαδή είναι: $[a] = [A]^{-1}$ και $[d] = [D]^{-1}$.

Εάν $[B] \neq 0$, τότε πρέπει να αντιστραφεί η (2.74), οπότε λαμβάνουμε:

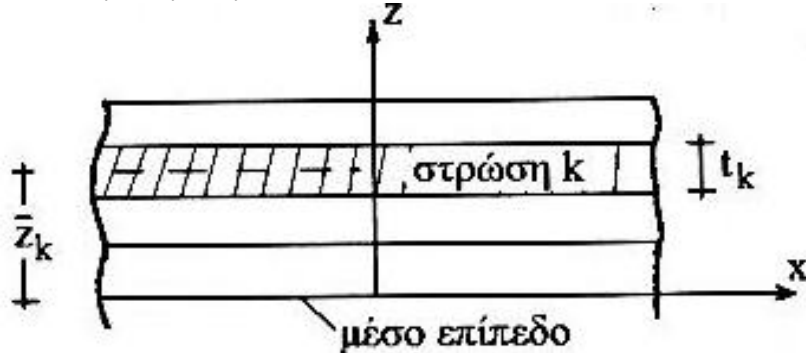
$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [\beta] \\ [\beta]^T & [d] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

Το υπομητρώο $[\beta]$ δεν είναι κατ' ανάγκη συμμετρικό και στο αντίστροφο της (2.76) υπάρχει το ανάστροφο $[\beta]^T$. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση συμμετρίας με $[B]=0$ ισχύει

$[\alpha]=[a]$, $[\delta]=[d]$ και $[\beta]=0$.

2.2.6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ A_{ij} , B_{ij} , D_{ij}

Για μία στρώση k ορίζουμε ως z_{k-1} την απόσταση της κάτω παρειάς της από το μέσο επίπεδο, ως z_k την απόσταση της άνω παρειάς της από το μέσο επίπεδο και ως \bar{z}_k την απόσταση από το μέσον της στρώσης k έως το μέσο επίπεδο, δηλαδή $\bar{z}_k = \frac{1}{2} \cdot (z_k + z_{k-1})$. Επίσης, η διαφορά $t_k = z_k - z_{k-1}$ είναι το πάχος της στρώσης k .



Σχήμα 51 Διαστρωμάτωση και θέση της στρώσης k εντός αυτής

Τότε, οι δυσκαμψίες A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} που δίδονται από τις (2.56), (2.64) και (2.70), μπορούν εναλλακτικά να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας την έκφραση του πάχους στρώσεων t_k και την απόσταση \bar{z}_k από τις ακόλουθες πιο απλοποιημένες σχέσεις:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \cdot t_k \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \cdot t_k \cdot \bar{z}_k \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \cdot \left(t_k \cdot \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΔΟΚΩΝ ΑΠΟ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ

Σύνθετες δοκοί παράγονται σε τυποποιημένα σχήματα λεπτότοιχων διατομών I, τετραγωνικών κοίλων διατομών, κυκλικών κοίλων διατομών, γωνιακών, διατομών Z, καθώς και κιβωτοειδών πολυκυψελωτών διατομών. Κάθε τοίχωμα είναι από συγκεκριμένη διαστρωμάτωση, οι ιδιότητες της οποίας μπορούν να υπολογιστούν.

Για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων των διατομών $(EA)_{ισοδ.}$ και $(EI)_{ισοδ.}$ θεωρούμε μόνο δράση ορθών τάσεων σ_x στη διαστρωμάτωση.

Έστω σύνθετη δοκός διατομής I, με πέλμα πλάτους b και κορμό ύψους h .

Έστω ότι επί της διατομής δρα αξονική δύναμη N , που προκαλεί αξονική παραμόρφωση ε_x^0 . Θεωρούμε ότι η αξονική παραμόρφωση ε_x^0 είναι κοινή στα πέλματα και στον κορμό, επομένως, η κατανομή της αξονικής δύναμης N στη διατομή θα είναι:

$$N_x^{fl} = \frac{1}{a_{11}^{fl}} \cdot \varepsilon_x^0 \text{ και } N_x^{web} = \frac{1}{a_{11}^{web}} \cdot \varepsilon_x^0 \quad (2.78)$$

Συνεπώς, η αξονική δύναμη είναι το άθροισμα των επιμέρους αξονικών δράσεων επί της διατομής:

$$N = 2 \cdot N_x^{fl} \cdot b + N_x^{web} \cdot h = \left(\frac{2b}{a_{11}^{fl}} + \frac{h}{a_{11}^{web}} \right) \cdot \varepsilon_x^0 \quad (2.79)$$

Οπότε:

$$(EA)_{ισοδ.} = \frac{2b}{a_{11}^{fl}} + \frac{h}{a_{11}^{web}} \quad (2.80)$$

Όταν η διατομή κάμπτεται περί τον ισχυρό άξονα της, τα πέλματα αναπτύσσουν σταθερή -κατά πλάτος- εφελκυστική και θλιπτική N_x^{fl} μεμβρανική δύναμη, αντίστοιχα, ενώ ο κορμός αναπτύσσει μεταβλητή N_x^{web} μεμβρανική δύναμη καθ' ύψος. Λαμβάνοντας τους μοχλοβραχίονες δυνάμεων, η σχέση ροπής-καμπυλότητας είναι:

$$M^{fl} = 2 \cdot b \cdot N_x^{fl} \cdot \frac{h}{2} = b \cdot h \cdot N_x^{fl} = \frac{b \cdot h^2}{2 \cdot a_{11}^{fl}} \cdot k_x \quad (2.81)$$

$$M^{web} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot h \cdot N_x^{web} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{6} \cdot N_x^{web} = \frac{h^3}{12 \cdot a_{11}^{web}} \cdot k_x \quad (2.82)$$

$$M = M^{fl} + M^{web} = \left[2 \cdot \frac{b}{a_{11}^{fl}} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{h^3}{12 \cdot a_{11}^{web}} \right] \cdot k_x \quad (2.83)$$

Επομένως:

$$(EI)_{ισοδ.} = \frac{b \cdot h^2}{2 \cdot a_{11}^{fl}} + \frac{h^3}{12 \cdot a_{11}^{web}} \quad (2.84)$$

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, μελετάται μία δοκός με απλές στηρίξεις και διατομής I. Για τις αναλυτικές μεθόδους απαιτούνται οι ακόλουθοι τύποι (2.85), με τα χρησιμοποιούμενα μεγέθη να ορίζονται στο Σχήμα 52:

$$\widehat{EA} = \frac{2 \cdot b_f}{(a_{11})_f} + \frac{b_w}{(a_{11})_w} \quad (2.85)$$

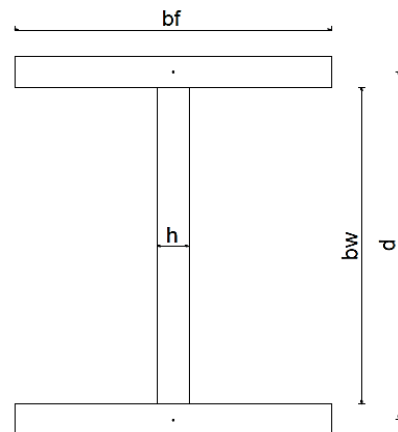
$$\widehat{EI}_{yy} = \frac{b_f}{(a_{11})_f} \cdot \frac{d^2}{2} + \frac{2 \cdot b_f}{(d_{11})_f} + \frac{b_w^3}{12 \cdot (a_{11})_w}$$

$$\widehat{EI}_{zz} = \frac{2 \cdot b_f^3}{12 \cdot (a_{11})_f} + \frac{b_w}{(d_{11})_w}$$

$$\widehat{GA} = \frac{2 \cdot b_f}{(a_{66})_f} + \frac{b_w}{(a_{66})_w}$$

$$\widehat{GI}_t = 4 \cdot \left(\frac{2 \cdot b_f}{(d_{66})_f} + \frac{b_w}{(d_{66})_w} \right)$$

$$\widehat{EI}_w = \frac{1}{(a_{11})_f} \cdot \frac{d^2 \cdot b_f^3}{24}$$



Σχήμα 52 Διατομή I

2.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΟΥΣ ΚΑΜΨΗΣ ΜΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα γίνει σύγκριση των βελών κάμψης δοκών λεπτότοιχης διατομής I, από σύνθετα υλικά, όπως αυτά προκύπτουν από αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους.

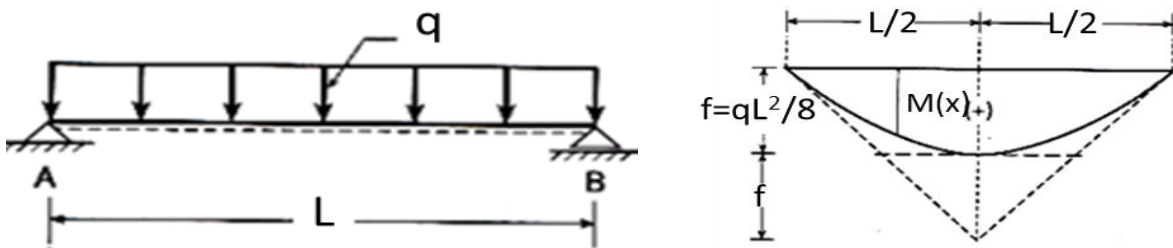
Μελετάται το βέλος κάμψης μίας δοκού με απλές στηρίξεις για τρεις περιπτώσεις φόρτισης.

A. Δοκός με απλές στηρίξεις που υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q:
Το διάγραμμα ροπών της δοκού σε αυτή την περίπτωση είναι παραβολικό με μέγιστη τιμή

$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8}. \quad (2.86)$$

Το μέγιστο βέλος κάμψης της δοκού, λόγω ροπών και τεμνουσών, εμφανίζεται στο μέσον του ανοίγματος και δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{EI_{yy}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{q \cdot L^2}{GA} \quad (2.87)$$



Σχήμα 53 Αμφιέρειστη δοκός που υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο και διάγραμμα ροπών της δοκού

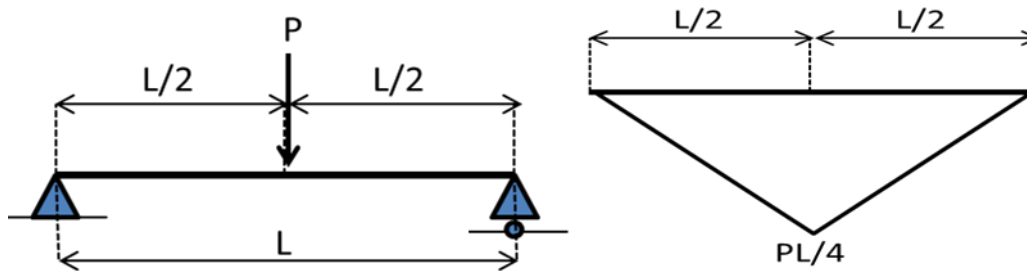
B. Δοκός με απλές στηρίξεις που υπόκειται σε συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσον του ανοίγματός της:

Το διάγραμμα ροπών της δοκού σε αυτή την περίπτωση είναι γραμμικό - τριγωνικό με

$$\text{μέγιστη τιμή } M_{max} = \frac{P \cdot L}{4}. \quad (2.88)$$

Το μέγιστο βέλος κάμψης της δοκού, λόγω ροπών και τεμνουσών, εμφανίζεται στο μέσον του ανοίγματός της και δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_{max} = \frac{1}{48} \cdot \frac{P \cdot L^3}{EI_{yy}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{P \cdot L}{GA} \quad (2.89)$$



Σχήμα 54 Αμφιέρειστη δοκός που υπόκειται σε συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του ανοίγματός της και διάγραμμα ροπών της δοκού

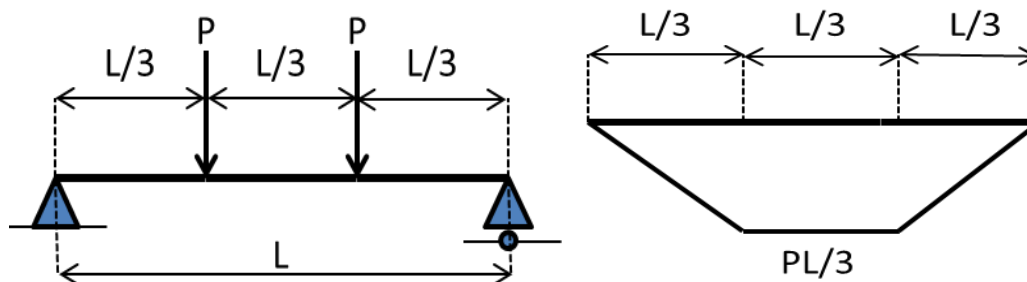
- C. Δοκός με απλές στηρίξεις που υπόκειται σε δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία P, το καθένα σε απόσταση L/3 από τις στηρίξεις της:

Το διάγραμμα ροπών της δοκού σε αυτή την περίπτωση είναι γραμμικό με μέγιστη τιμή

$$M_{max} = \frac{P \cdot L}{3}. \quad (2.90)$$

Το μέγιστο βέλος κάμψης της δοκού, λόγω ροπών και τεμνουσών, εμφανίζεται στο μέσον και δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_{max} = \frac{23}{648} \cdot \frac{P \cdot L^3}{EI_{yy}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot L}{GA} \quad (2.91)$$



Σχήμα 55 Αμφιέρειστη δοκός που υπόκειται σε δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία, το καθένα σε απόσταση L/3 από τις στηρίξεις της και διάγραμμα ροπών της δοκού

2.5 ΜΕΛΕΤΗ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

2.5.1. ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ

Ο λυγισμός είναι φαινόμενο που παρατηρείται σε κατασκευαστικά στοιχεία, συνήθως δοκούς, κολώνες ή κελύφη, όταν αυτά φορτίζονται θλιπτικά. Ορίζεται ως “αιφνίδια μείωση της ικανότητας του στοιχείου να φέρει θλιπτικά φορτία”. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι αν και οι επιβαλλόμενες θλιπτικές τάσεις δεν έχουν πάρει τις μέγιστες τιμές τους, το στοιχείο παραμορφώνεται, και δεν μπορεί να παραλάβει άλλα φορτία.

Το μέγιστο φορτίο που μπορεί να φέρει ένα έλασμα μέχρι να υποστεί λυγισμό ονομάζεται “κρίσιμο φορτίο λυγισμού”. Για πλάκες από ομογενή ισότροπα υλικά, απλά εδρασμένες, υπό ομοαξονική ομοιόμορφη θλιπτική φόρτιση, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπολογίζεται από τη σχέση του Euler:

$$\sigma_{cr} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.92)$$

όπου:

$$k = \left(\frac{m}{a/b} + \frac{a/b}{m} \right)^2$$

E: το μέτρο ελαστικότητας του υλικού

ν : ο λόγος Poisson

t: το πάχος του ελάσματος

a, b: οι διαστάσεις των πλευρών του ελάσματος, με a την πλευρά παράλληλα και b την πλευρά κάθετα στη διεύθυνση της φόρτισης

m: η τιμή της ιδιομορφής

2.5.2. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΤΡΟΠΩΝ ΔΟΚΩΝ

Η απόκριση των δοκών από σύνθετα υλικά είναι περισσότερο πολύπλοκη σε σύγκριση με την περίπτωση δοκών από ισότροπα υλικά και γι' αυτό η ανάλυση των σύνθετων δοκών θα πρέπει να λαμβάνει υπ' όψιν της αυτή την πολυπλοκότητα.

Η ακόλουθη ανάλυση εφαρμόζεται σε ορθογωνικές συμπαγείς διατομές και σε λεπτότοιχες δοκούς, που υφίστανται μικρές παραμορφώσεις και το υλικό συμπεριφέρεται με γραμμικώς ελαστικό τρόπο. Οι διατμητικές παραμορφώσεις αμελούνται και υιοθετείται η υπόθεση *Bernoulli – Navier*, σύμφωνα με την οποία οι αρχικώς επίπεδες διατομές μίας δοκού, που υπόκεινται σε κάμψη, παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα της δοκού.

Σε μία δοκό μπορούν να εφαρμοστούν αξονικά, εγκάρσια και στρεπτικά φορτία, τα οποία θα οδηγήσουν στην ανάπτυξη των ακόλουθων εσωτερικών δυνάμεων: μεμβρανικές δράσεις N, ροπές κάμψης M_y και M_z , στρεπτική ροπή T και εγκάρσιες δράσεις (τέμνουσες δυνάμεις) V_y και V_z .

Η απόκριση μίας δοκού στα ασκούμενα φορτία περιγράφεται από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων, δυνάμεων-τάσεων και τις εξισώσεις ισορροπίας.

Μια δοκός είναι *ορθότροπη* όταν τα τοιχώματά της είναι κατασκευασμένα από ορθότροπη διαστρωμάτωση και ένας από τους άξονες ορθοτροπίας είναι ευθυγραμμισμένος με τον άξονα της δοκού. Μία *διαστρωμάτωση* είναι *ορθότροπη* όταν κάθε στρώση είναι κατασκευασμένη είτε από ένα ισότροπο υλικό είτε από ένα ινοπλισμένο σύνθετο υλικό.

Τα φορτία λυγισμού ορθότροπης σύνθετης δοκού υπολογίζονται από τις εξισώσεις ισορροπίας, που περιλαμβάνουν τις αλλαγές στη γεωμετρία κατά τη διάρκεια του λυγισμού και από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και δυνάμεων-τάσεων. Οι εξισώσεις ισορροπίας και οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων είναι κοινές για τις ισότροπες και τις ορθότροπες δοκούς, ενώ, οι σχέσεις δυνάμεων-τάσεων διαφέρουν.

Οι εξισώσεις που διέπουν τα φορτία λυγισμού ισότροπων και ορθότροπων δοκών διαφέρουν μόνο ως προς τα μητρώα δυσκαμψίας. Συνεπώς, το *φορτίο λυγισμού ορθότροπης δοκού* υπολογίζεται αντικαθιστώντας τις ισότροπες δυσκαμψίες στην έκφραση του φορτίου λυγισμού της αντίστοιχης ισότροπης δοκού, ως εξής:

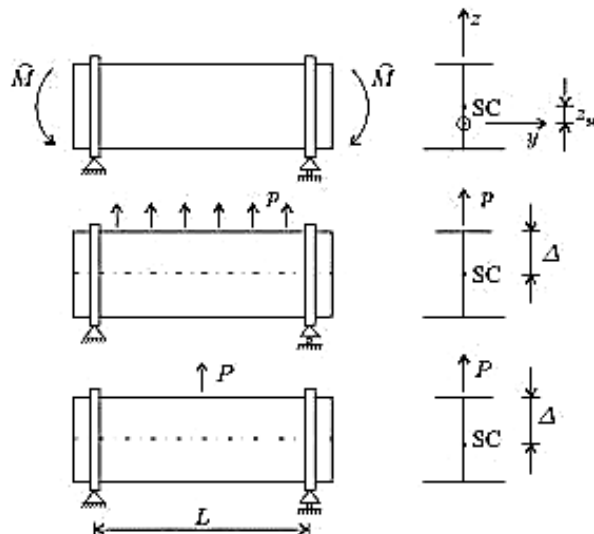
$$\begin{array}{l} \underline{\text{ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΔΟΚΟΣ}} \quad \underline{\text{ΟΡΘΟΤΡΟΠΗ ΔΟΚΟΣ}} \\ EA \rightarrow \widehat{EA} \\ EI_{yy}, EI_{zz}, EI_{yz} \rightarrow \widehat{EI}_{yy}, \widehat{EI}_{zz}, \widehat{EI}_{yz} \\ GI_t, EI_w \rightarrow \widehat{GI}_t, \widehat{EI}_w \end{array}$$

2.5.3. ΜΕΛΕΤΗ ΠΛΕΥΡΙΚΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΟΡΘΟΤΡΟΠΗΣ ΔΟΚΟΥ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Έστω μία ορθότροπη δοκός συμμετρικής διατομής ως προς τον z-άξονα ($\widehat{EI}_{yz} = 0$). Η δοκός είναι απλά εδραζόμενη σε κάθε άκρο της. Στην απλή στήριξη, η δοκός εμποδίζεται να στραφεί ως προς το x άξονα, αλλά η διατομή είναι ελεύθερη να στραφεί ως προς τον y και τον z άξονα και να στρεβλωθεί.

Η δοκός υπόκειται σε δύο ίσες και αντίθετες ροπές κάμψης, οι οποίες ασκούνται στα δύο άκρα της, σε ένα ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο p στο επίπεδο συμμετρίας ή σε μία συγκεντρωμένη δύναμη P στο επίπεδο συμμετρίας, που ασκείται στο μέσον του ανοίγματος της δοκού. Η απόσταση ανάμεσα στο κέντρο διάτμησης (SC) και το σημείο εφαρμογής του φορτίου συμβολίζεται ως Δ .

Σε ορισμένα εφαρμοζόμενα φορτία, η δοκός λυγίζει πλευρικά, ενώ οι διατομές της δοκού στρέφονται. Αυτό το φαινόμενο καλείται “πλευρικός λυγισμός” ή “στρεπτοκαμπτικός λυγισμός”.



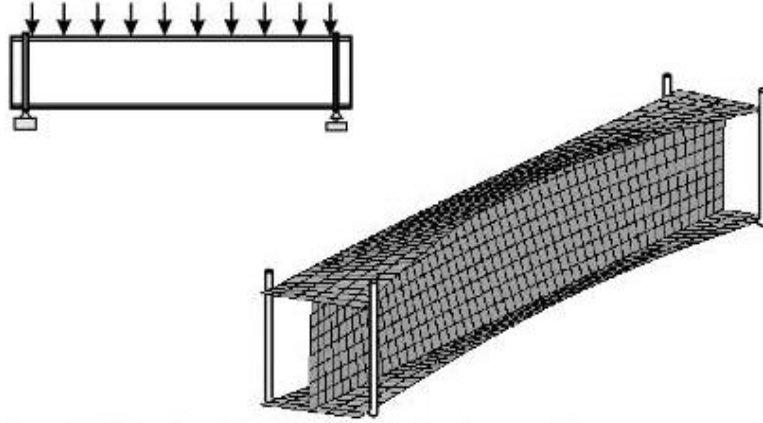
Σχήμα 56 Πλευρικός λυγισμός δοκού που υπόκειται (α) σε δύο ίσες και αντίθετες ροπές κάμψης στα δύο άκρα της, (β) σε ένα ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο p στο επίπεδο συμμετρίας και (γ) σε μία συγκεντρωμένη δύναμη P στο επίπεδο συμμετρίας, που ασκείται στο μέσον του ανοίγματος της

Οι Allen και Bulson παρουσίασαν την ακόλουθη σχέση υπολογισμού του **φορτίου λυγισμού μίας ισότροπης δοκού**:

$$\widehat{Q}_{cr} = G_1 \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \widehat{EI}_{zz} \cdot \left[G_2 \cdot \Delta + G_3 \cdot \frac{\beta_1}{2} \pm \sqrt{(G_2 \cdot \Delta + G_3 \cdot \frac{\beta_1}{2})^2 + \frac{\widehat{EI}_w}{\widehat{EI}_{zz}} \cdot (1 + \frac{\widehat{GI}_t}{\widehat{EI}_w} \cdot \frac{L^2}{\pi^2})} \right] \quad (2.93)$$

όπου \widehat{Q}_{cr} είναι η κρίσιμη τιμή της ροπής κάμψης και η οποία σχετίζεται με τα εφαρμοζόμενα φορτία βάσει του Πίνακα 15.

Το θετικό πρόσημο πριν την τετραγωνική ρίζα οδηγεί σε θετικό φορτίο (το οποίο ασκείται προς τα πάνω), ενώ το αρνητικό πρόσημο οδηγεί σε αρνητικό φορτίο (το οποίο ασκείται προς τα κάτω). Οι όροι G_1, G_2, G_3 είναι σταθερές.



Σχήμα 57 Πλευρικός λυγισμός δοκού που είναι απλά εδραζόμενη σε κάθε άκρο της

Για την περίπτωση δοκών που υπόκεινται σε αξονικό φορτίο, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\widehat{N}_{cr,y}^B = \frac{\pi^2 \cdot \widehat{EI}_{yy}}{(k \cdot L)^2} \text{ για λυγισμό στο επίπεδο } x - z \quad (2.94. \alpha)$$

$$\widehat{N}_{cr,z}^B = \frac{\pi^2 \cdot \widehat{EI}_{zz}}{(k \cdot L)^2} \text{ για λυγισμό στο επίπεδο } x - y \quad (2.94. \beta)$$

$$\widehat{N}_{cr,\psi}^B = \widehat{N}_{cr,w}^B + \frac{1}{i_w^2} \cdot \widehat{GI}_t \text{ για στρεπτοκαμπτικό λυγισμό} \quad (2.94. \gamma)$$

$$\widehat{N}_{cr,w}^B = \frac{1}{i_w^2} \cdot \frac{\pi^2 \cdot \widehat{EI}_{ww}}{(k \cdot L)^2} \text{ για στρεπτοκαμπτικό λυγισμό} \quad (2.94. \delta)$$

$$i_w^2 = z_{sc}^2 + y_{sc}^2 + \frac{\widehat{EI}_{zz} + \widehat{EI}_{yy}}{\widehat{EA}} \quad (2.95)$$

όπου y_{sc} , z_{sc} : οι συντεταγμένες του Κέντρου Διάτμησης (SC) ως προς το Κέντρο Βάρους και $k=1$, για απλά εδραζόμενη δοκό.

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις, προκύπτει:

$$\widehat{Q}_{cr} = F_1 \cdot \widehat{N}_{cr,z}^B \cdot \left(F_2 \cdot \Delta + F_3 \cdot \beta_1 \pm \sqrt{(F_2 \cdot \Delta + F_3 \cdot \beta_1)^2 + \frac{\widehat{N}_{cr,\psi}^B \cdot i_w^2}{\widehat{N}_{cr,z}^B}} \right) \quad (2.96)$$

όπου

$$\Delta = d - e - (h/2) \quad (2.97. \alpha)$$

οι όροι F_1 , F_2 , F_3 είναι σταθερές και οι τιμές τους δίνονται στον πίνακα

ο όρος β_1 είναι μία παράμετρος που εξαρτάται από το σχήμα της διατομής:

$$\beta_1 = J_1 + J_2 - 2 \cdot z_{sc} \quad (2.97. \beta)$$

οι όροι J_1 , J_2 για ορθότροπη δοκό μορφής I με συμμετρική διατομή ως προς το μέσο επίπεδο δίνονται από τις σχέσεις:

$$J_1 = \frac{1}{\widehat{EI}_{yy}} \cdot \left(\frac{1}{(\alpha_{11})_{f1}} \cdot b_{f1} \cdot (d - z_c)^3 - \frac{1}{(\alpha_{11})_{f2}} \cdot b_{f2} \cdot z_c^3 + \frac{1}{(\alpha_{11})_w} \cdot \frac{b_{w1}^4 - b_{w2}^4}{4} \right)$$

$$J_2 = \frac{1}{\widehat{EI}_{yy}} \cdot \left(\frac{1}{(\alpha_{11})_{f1}} \cdot \frac{b_{f1}^3}{12} \cdot (d - z_c) - \frac{1}{(\alpha_{11})_{f2}} \cdot \frac{b_{f2}^3}{12} \cdot z_c \right) \quad (2.97. \gamma)$$

z_c : οι συντεταγμένες του Κέντρου Βάρους

Για διατομή ασύμμετρου I ισχύει:

$$e = d \cdot \frac{\frac{b_{f1}^3}{(\alpha_{11})_{f1}}}{\frac{b_{f1}^3}{(\alpha_{11})_{f1}} + \frac{b_{f2}^3}{(\alpha_{11})_{f2}}} \quad (2.97. \delta)$$

Πίνακας 15 Φορτίου λυγισμού και τιμές σταθερών F_1, F_2, F_3 για διάφορους τύπους φόρτισης

		F_1	F_2	F_3
Ροπή Κάμψης	$\widehat{M}_{cr} = \widehat{Q}_{cr}$	1	0	0,500
Κατανεμημένο Φορτίο	$p_{cr} = \frac{8 \cdot \widehat{Q}_{cr}}{L^2}$	1,130	0,450	0,267
Συγκεντρωμένο Φορτίο	$P_{cr} = \frac{4 \cdot \widehat{Q}_{cr}}{L}$	1,350	0,550	0,212

Για διπλά συμμετρικές ισότροπες και ορθότροπες δοκούς, ισχύει $\beta_1=0$.

Η σχέση είναι ακριβής για δοκούς που υπόκεινται σε συγκεντρωμένες ροπές κάμψης. Για απλά εδραζόμενες δοκούς που υπόκεινται σε κατανεμημένο φορτίο ή συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του ανοίγματος, η σχέση δίνει το φορτίο λυγισμού με απόκλιση περίπου 5%.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο: ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΔΙΑΤΟΜΗ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

3.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ FEMAP

Για την προσομοίωση των δοκών με διατομή από σύνθετα υλικά χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων **FEMAP** (version 11.0.1) για το σχεδιασμό και την ανάλυσή τους.

Το **FEMAP** (**F**inite **E**lement **M**odeling **A**nd **P**ost processing) είναι ένα πρόγραμμα ανάλυσης της Siemens PLM Software, που χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό και την ανάλυση μοντέλων σύνθετων μηχανικών προβλημάτων με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Η μέθοδος των *Πεπερασμένων Στοιχείων* επιτρέπει στους μηχανικούς να μοντελοποιήσουν εξαρτήματα, συσκευές ή συστήματα και να καθορίσουν τη συμπεριφορά υπό δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Συνήθως, χρησιμοποιείται στη διαδικασία σχεδιασμού για να μειωθεί το κόστος κατασκευής πρωτοτύπων και δοκιμών, για να αξιολογηθούν διαφορετικοί σχεδιασμοί και υλικά, καθώς και για να επιλεγεί εκείνη η βελτιστοποίηση που μειώνει το βάρος.

Το FEMAP χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση σύνθετων προϊόντων, συστημάτων και διαδικασιών, όπως και των δορυφόρων, των αεροσκαφών, των αμυντικών ηλεκτρονικών συστημάτων, του εξοπλισμού κατασκευής, των γερανών και των θαλάσσιων σκαφών. Ακόμα, επιτρέπει τη μοντελοποίηση και ανάλυση κατασκευών από σύνθετα υλικά.

Υποστηρίζει και τη *μοντελοποίηση και διακριτοποίηση δοκών*. Παρέχει βιβλιοθήκη τυποποιημένων διατομών, ενώ ο χρήστης μπορεί να ορίσει τη διατομή που επιθυμεί για την οποία υπολογίζονται αυτόματα οι απαιτούμενες ιδιότητες. Επιπλέον, είναι διαθέσιμη η τρισδιάστατη απεικόνιση της δοκού και διάφορες επιλογές προβολής των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, όπως το διάγραμμα τεμνουσών ή ροπών κάμψης της δοκού.

Το FEMAP παρέχει δυνατότητα εισαγωγής αρχείων CAD, τρισδιάστατη απεικόνιση, εργαλεία διακριτοποίησης για τη δημιουργία μοντέλων Πεπερασμένων Στοιχείων, όπως και εργαλεία επίλυσης για τη διεξαγωγή συμπερασμάτων από τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

Δέχεται δεδομένα σχετικά με τη γεωμετρία του συστήματος από όλα τα βασικά συστήματα CAD, συμπεριλαμβανομένων των CATIA, Pro/Engineering, NX, Solid Edge, SolidWorks και AutoCAD. Επιπλέον διαθέτει και δικά του εργαλεία για την κατασκευή του συστήματος που επιθυμούμε να αναλύσουμε.

Το FEMAP επιτρέπει γραμμική στατική ανάλυση (linear static analysis), μη γραμμική ανάλυση (nonlinear analysis), ανάλυση λυγισμού (buckling analysis), ανάλυση δυναμικής απόκρισης (dynamic response analysis), ανάλυση μεταφοράς θερμότητας (heat transfer analysis) και ροής (fluid flow).

Η ανάλυση με το πρόγραμμα FEMAP περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

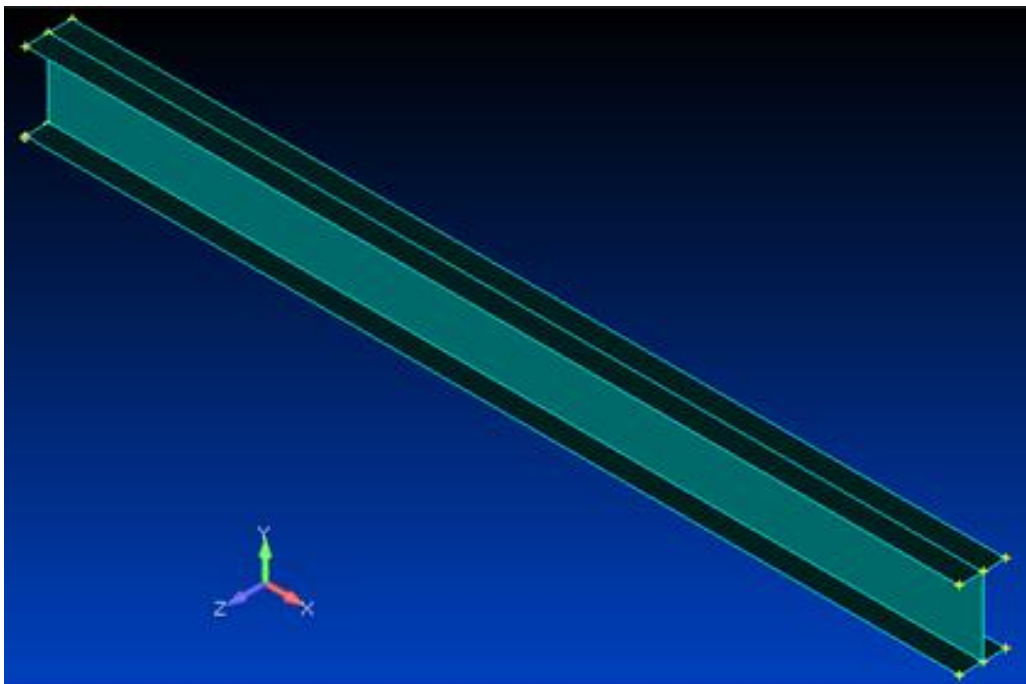
- Καθορισμός των δεδομένων, δηλαδή εισαγωγή του φορέα, των υλικών, των φορτίσεων και των συνοριακών συνθηκών.
- Πραγματοποίηση της ανάλυσης.
- Προβολή των αποτελεσμάτων.

3.2 ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Η δοκός που μελετάται έχει διατομή I, με μήκος $L=3,00$ m, πλάτος πελμάτων $b_f=0,15$ m και συνολικό ύψος $h_{tot}=0,25$ m.

Βάσει των διαστάσεων της δοκού, δόθηκαν οι συντεταγμένες των βασικών της σημείων (*point*). Έπειτα, ενώθηκαν τα σημεία αυτά με γραμμές (*curve-line*) και καθορίστηκαν οι τρεις επιφάνειες (*surface*) της δοκού, δηλαδή το άνω πέλμα, το κάτω πέλμα και ο κορμός.

Στο Σχήμα 58 που ακολουθεί δίνεται η τρισδιάστατη απεικόνιση της δοκού που προέκυψε από την παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 58 Τρισδιάστατη απεικόνιση της δοκού

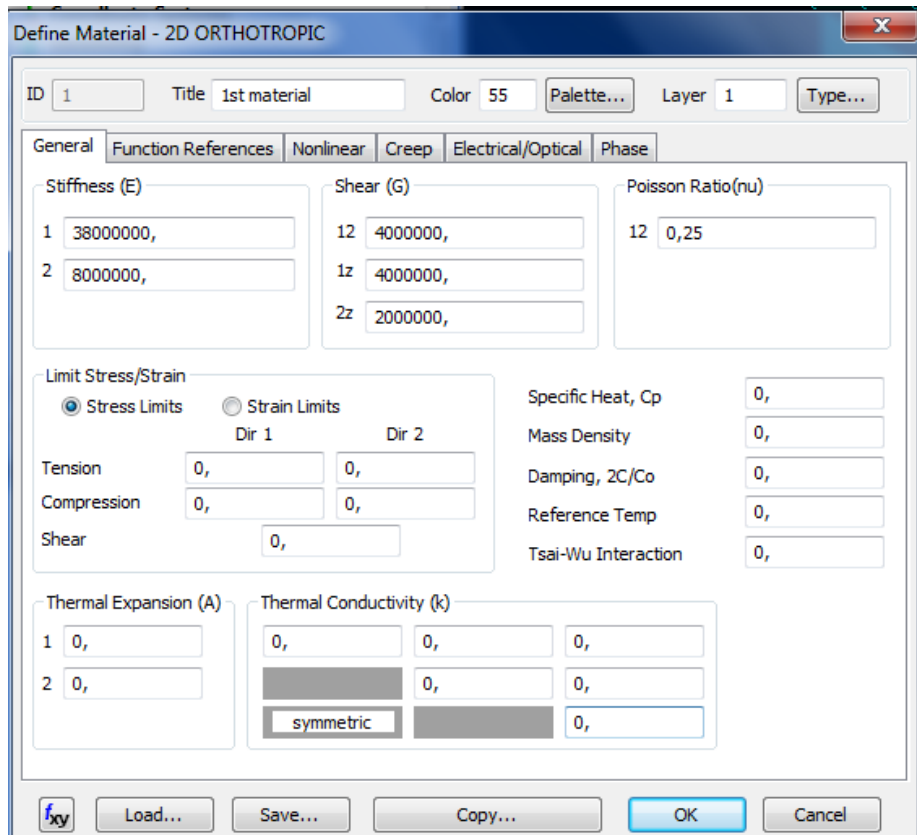
3.3 ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ & ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗΣ

Το σύνθετο υλικό που επιλέχθηκε για τον φορέα είναι μήτρα από εποξική ρητίνη με ίνες υάλου (E-glass/Epoxy).

Τα μηχανικά χαρακτηριστικά του έχουν ως εξής:

$E_1=38$ GPa, $E_2=8$ GPa, $G_{12}=4$ GPa, $G_{13}=4$ GPa, $G_{23}=2$ GPa και $\nu_{12}=0,25$.

Το υλικό αντιμετωπίστηκε ως *δισδιάστατο ορθότροπο (Orthotropic 2D)*.



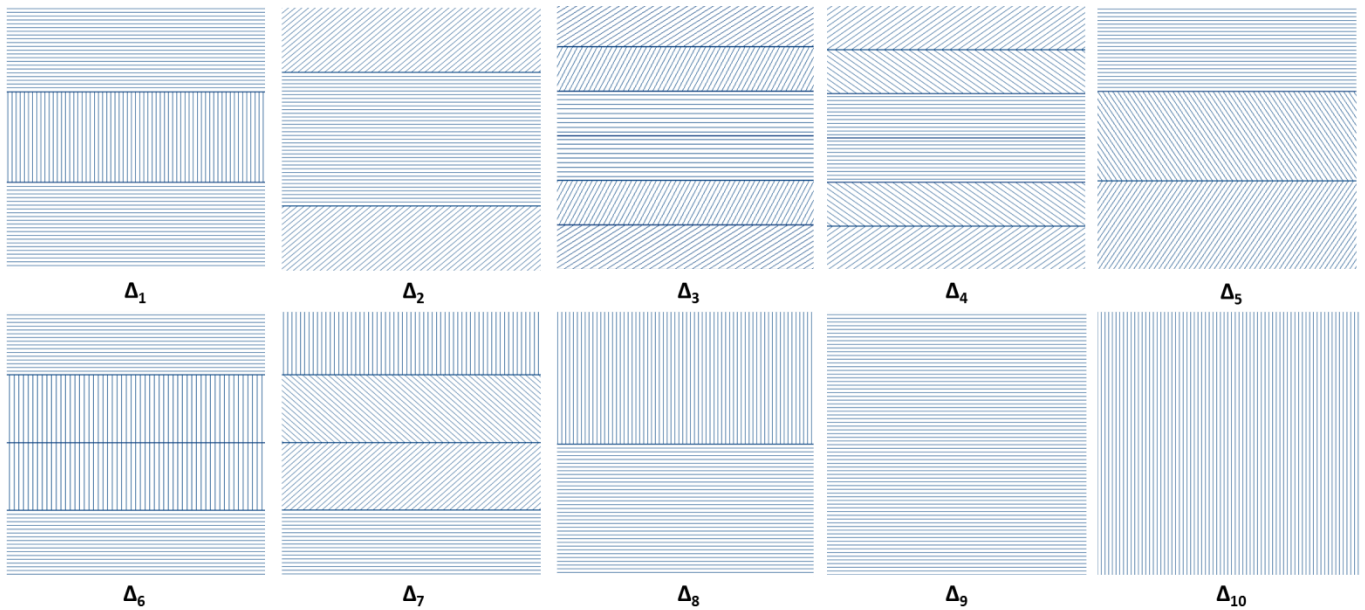
Σχήμα 59 Καθορισμός των μηχανικών χαρακτηριστικών του υλικού του φορέα

Το σύνθετο υλικό του φορέα μορφώνεται υπό μορφή “διαστρωμάτωσης”, η οποία υλοποιείται θέτοντας πολλές στρώσεις σε συνεργασία μεταξύ τους, κάθε μία εκ των οποίων έχει τις δικές της ιδιότητες και γεωμετρικά χαρακτηριστικά, όπως είναι το πάχος, το υλικό ινών, το συνδετικό υλικό, η κατεύθυνση ινών και ο λόγος συμμετοχής του όγκου των ινών.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται δέκα διαφορετικές διαστρωματώσεις συνολικού πάχους $h=4,8$ mm. Κάθε διαστρωμάτωση αποτελείται από δώδεκα στρώσεις, με πάχος $t=0,4$ mm η κάθε μία.

Οι διαστρωματώσεις που μελετώνται έχουν τους ακόλουθους κώδικες αλληλουχίας:

- i. $\Delta_1 : [0_4/90_4/0_4]$
- ii. $\Delta_2 : [45_3/0_6/45_3]$
- iii. $\Delta_3 : [30_2/60_2/0_2]_s$
- iv. $\Delta_4 : [45_2/-45_2/0_2]_s$
- v. $\Delta_5 : [60_4/-60_4/0_4]$
- vi. $\Delta_6 : [0_3/90_6/0_3]$
- vii. $\Delta_7 : [0_3/45_3/-45_3/90_3]$
- viii. $\Delta_8 : [0_6/90_6]$
- ix. $\Delta_9 : [0_{12}]$
- x. $\Delta_{10} : [90_{12}]$



Σχήμα 60 Απεικόνιση των περιπτώσεων διαστρωμάτωσης της δοκού

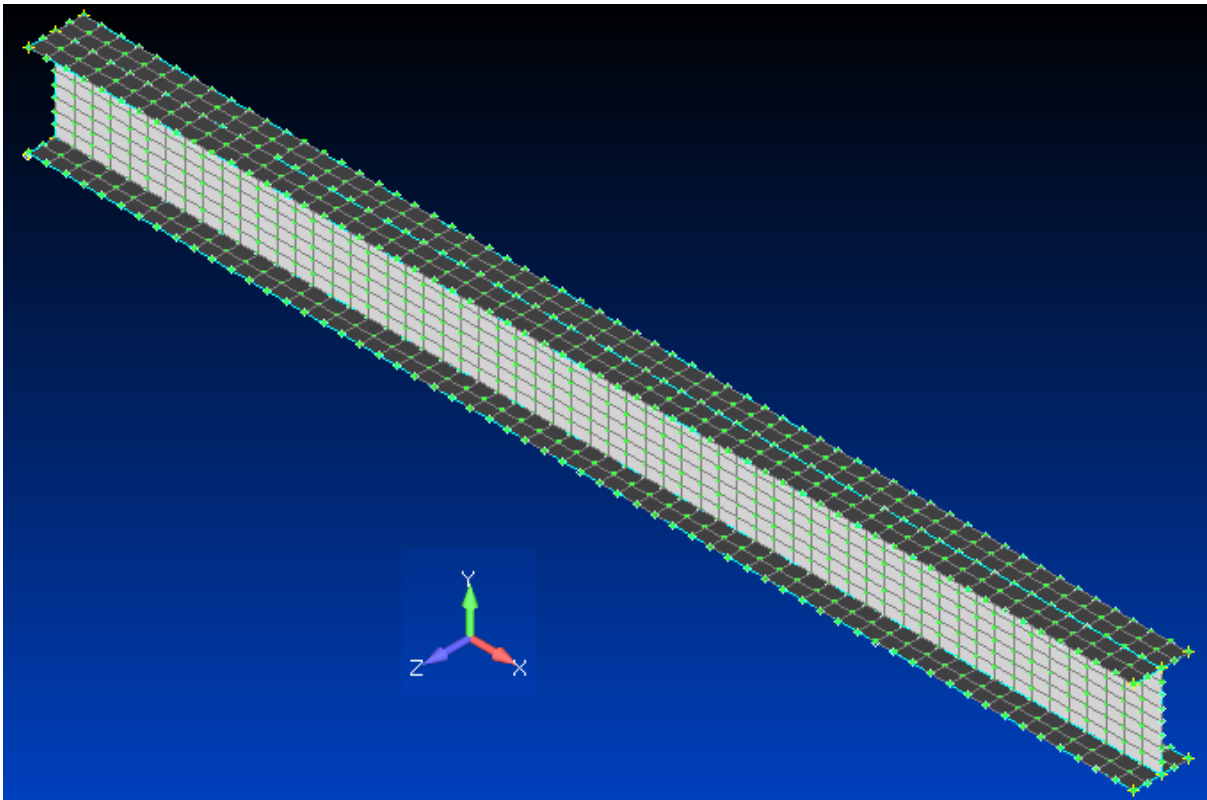
3.4 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΕΑ

Η διακριτοποίηση μίας κατασκευής με στοιχεία πεπερασμένων διαστάσεων επιτρέπει την επίλυσή της με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Στη θέση μίας συνεχούς λύσης επιτυγχάνεται μία ασυνεχής λύση, αποτελούμενη από N αγνώστους.

Για παράδειγμα, στη στατική ανάλυση, οι άγνωστοι είναι οι μετατοπίσεις συγκεκριμένων στοιχείων, τα οποία καλούνται “κόμβοι” (*nodes*) και οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με μηχανικά απλουστευμένα μέλη, τα “στοιχεία” (*elements*). Η τιμή της μετατόπισης μεταξύ των κόμβων μπορεί να ληφθεί με παρεμβολή, βάσει των υπολογισμένων τιμών των μετατοπίσεων των κόμβων. Έτσι, είναι δυνατός ο συνεχής υπολογισμός του πεδίου των μετατοπίσεων μέσα στο στοιχείο που συνδέει τους κόμβους. Με τον τρόπο αυτό, η συνεχής κατασκευή αναπαρίσταται από ένα μεγάλο αλλά πεπερασμένο αριθμό στοιχείων.

Το πλεονέκτημα των πεπερασμένων στοιχείων είναι η καθολική εφαρμογή τους σε οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα και σε οποιαδήποτε φόρτιση, βάσει της ακόλουθης αρχής: μεμονωμένα στοιχεία, που περιγράφουν μέρη μίας κατασκευής, με έναν προσανατολισμένο υπολογιστικό τρόπο συναθροίζονται σε μία ολοκληρωμένη κατασκευή. Συνήθεις πλαισιωτές κατασκευές αποτελούν χαρακτηριστική περίπτωση του κανόνα στις οποίες ένας πεπερασμένος αριθμός κόμβων οδηγεί σε μία ακριβή λύση.

Η δοκός διακριτοποιήθηκε με τετραγωνικά στοιχεία τεσσάρων κόμβων. Οι διαστάσεις των διακριτοποιημένων στοιχείων προέκυψαν από την απαίτηση να παραμένει συνεχώς ο λόγος των πλευρών των στοιχείων μικρότερος του 2. Έτσι, τα πέλματα της δοκού διακριτοποιήθηκαν με εξήντα (60) στοιχεία κατά μήκος και τέσσερα (4) στοιχεία κατά πλάτος, ενώ ο κορμός με οκτώ (8) στοιχεία καθ' ύψος.



Σχήμα 61 Τρισδιάστατη απεικόνιση της δοκού μετά τη διακριτοποίησή της

3.5 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ

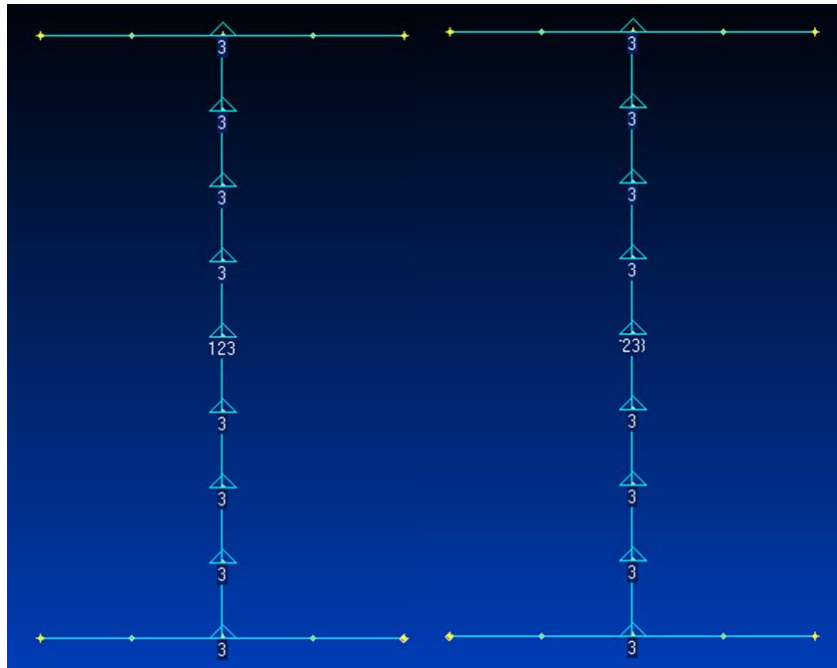
Οι στηρίξεις τοποθετήθηκαν στους κόμβους (*nodal constraints*) και επιλέχτηκαν με τρόπο που να ανταποκρίνονται όσο το δυνατόν καλύτερα στις θεωρητικές στηρίξεις του αμφίεριστου φορέα της δισδιάστατης ανάλυσης.

Τοποθετήθηκε *κύλιση* στον κεντροβαρικό κόμβο του ενός άκρου του φορέα, ώστε να είναι ελεύθερη η κίνηση κατά μήκος του διαμήκη άξονα και *άρθρωση* στον κεντροβαρικό κόμβο του άλλου άκρου, ώστε ο φορέας να παραμένει αμετακίνητος και να δημιουργούνται δυνάμεις αντίδρασης.

Οι βαθμοί ελευθερίας που δεσμεύτηκαν στην κύλιση είναι οι μετακινήσεις στους δύο κάθετους άξονες Y και Z ως προς το διαμήκη άξονα X της δοκού, δηλαδή, επιτρέπεται η μετακίνηση κατά το διαμήκη άξονα X και η περιστροφή ως προς τους άξονες X, Y, Z. Στην άρθρωση, δεσμεύτηκε επιπρόσθετα και η μετακίνηση κατά το διαμήκη άξονα X, εκτός των βαθμών ελευθερίας που δεσμεύτηκαν στην κύλιση.

Επιπλέον και στα δύο άκρα του φορέα δεσμεύτηκε η μετακίνηση ως προς τον άξονα Z σε όλους τους κόμβους καθ' ύψος του φορέα.

Στο σχήμα που ακολουθεί με τους αριθμούς 1, 2, 3 συμβολίζονται οι μετακινήσεις ως προς τους άξονες X, Y και Z, αντίστοιχα.



Σχήμα 62 Απεικόνιση των στηρίξεων της δοκού (άρθρωση και κύλιση)

3.6 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Τα φορτία που μπορούν να εισαχθούν στον φορέα μπορεί να είναι:

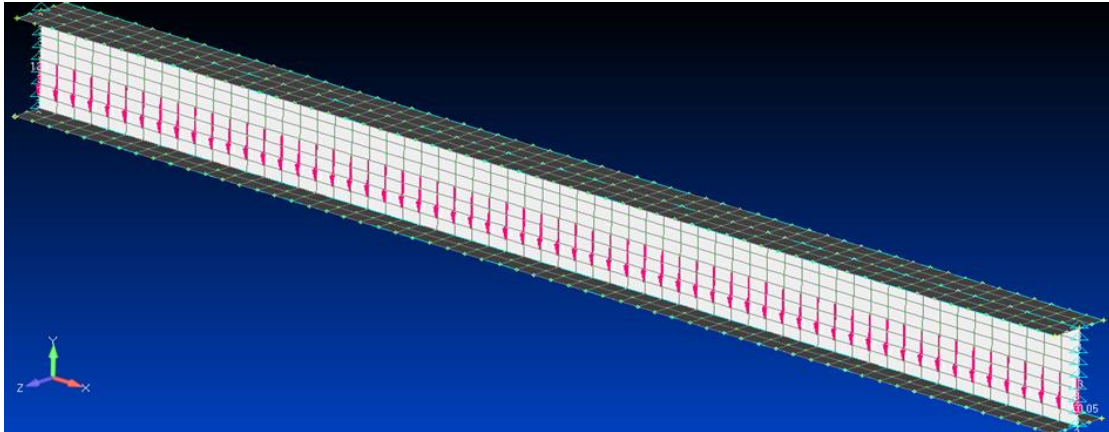
- Συγκεντρωμένες δυνάμεις ή ροπές στους κόμβους ή σε οποιοδήποτε σημείο.
- Υποχωρήσεις και στροφές στηρίξεων.
- Γραμμικά ή επιφανειακά ομοιόμορφα ή μεταβλητά καταναμημένα φορτία.
- Φορτία ανέμου, υδροστατικές πιέσεις, ωθήσεις γαιών.
- Επιβαλλόμενες παραμορφώσεις, κυρτώσεις, θερμοκρασιακές μεταβολές.
- Σεισμικά φορτία.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται τρεις περιπτώσεις φόρτισης:

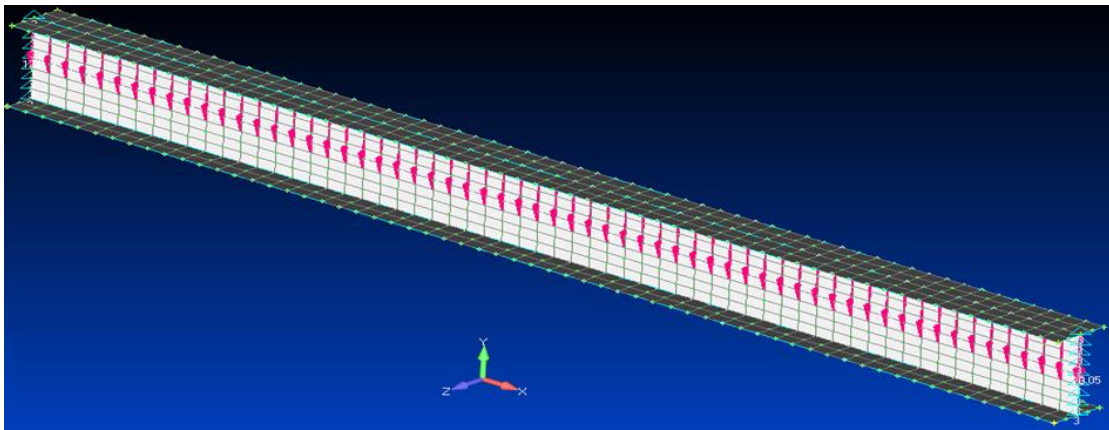
- A. Ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο $q=2$ kN/m.
- B. Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού.
- C. Δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία $P=2,5$ kN, το καθένα σε απόσταση $L/3$ από τις στηρίξεις της δοκού.

Οι φορτίσεις εφαρμόζονται με τη μορφή συγκεντρωμένων δυνάμεων στους κόμβους (*nodal loads*), με διεύθυνση κατά τον κατακόρυφο άξονα Z του φορέα.

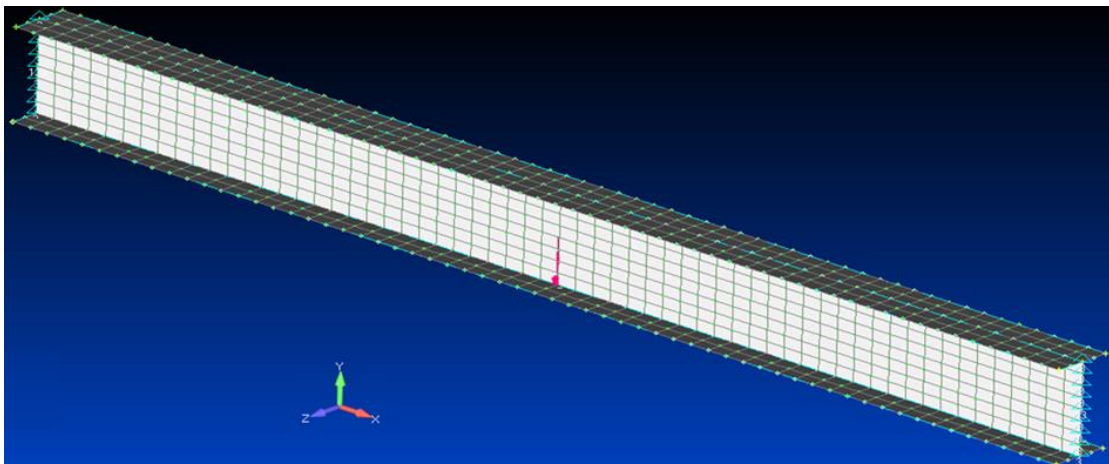
Για τη **στατική ανάλυση**, με την οποία έγινε μελέτη των μετατοπίσεων της δοκού, τα φορτία τοποθετήθηκαν στον κεντροβαρικό άξονα της δοκού. Για την **ανάλυση του λυγισμού**, με την οποία έγινε μελέτη των κρίσιμων φορτίων πλευρικού λυγισμού της δοκού, τα φορτία εφαρμόστηκαν στο άνω πέλμα της δοκού.



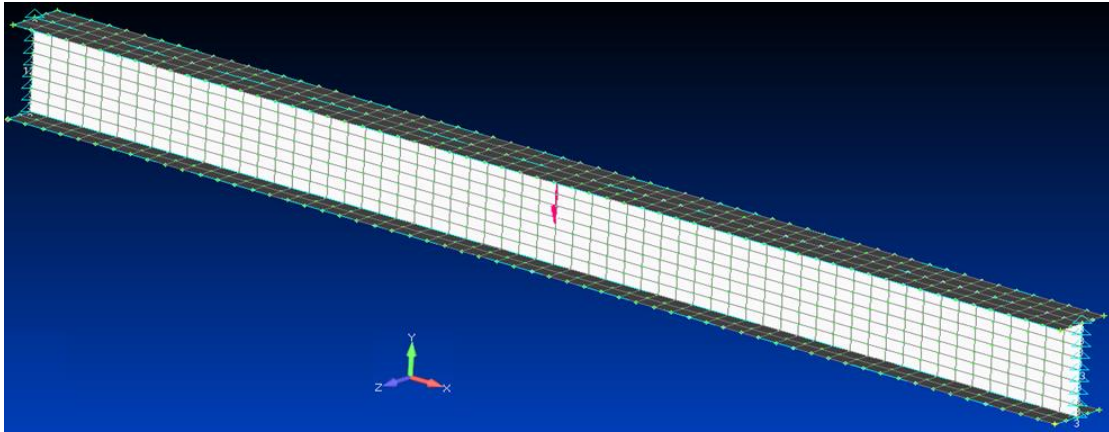
Σχήμα 63 Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q=2$ kN/m για τη στατική ανάλυση



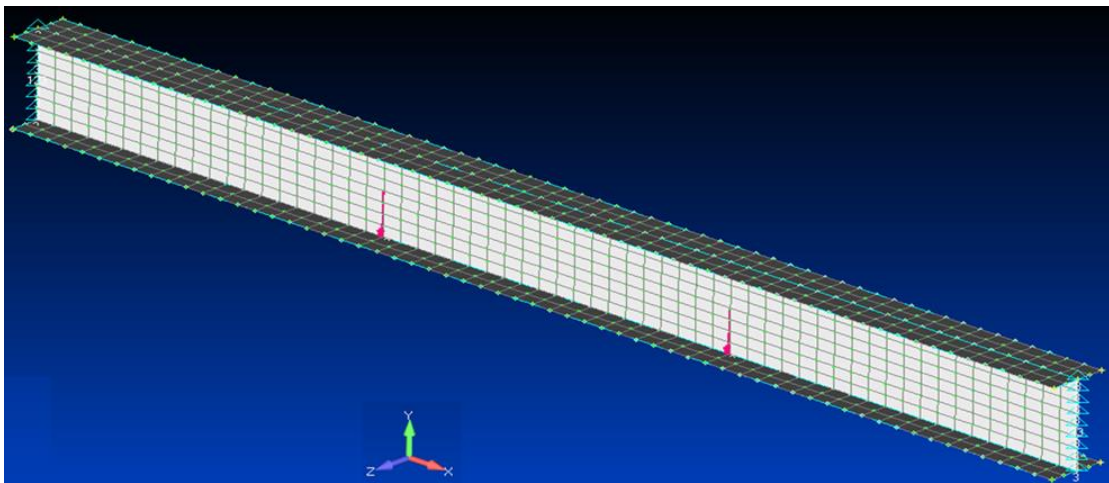
Σχήμα 64 Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q=2$ kN/m για την ανάλυση του λυγισμού



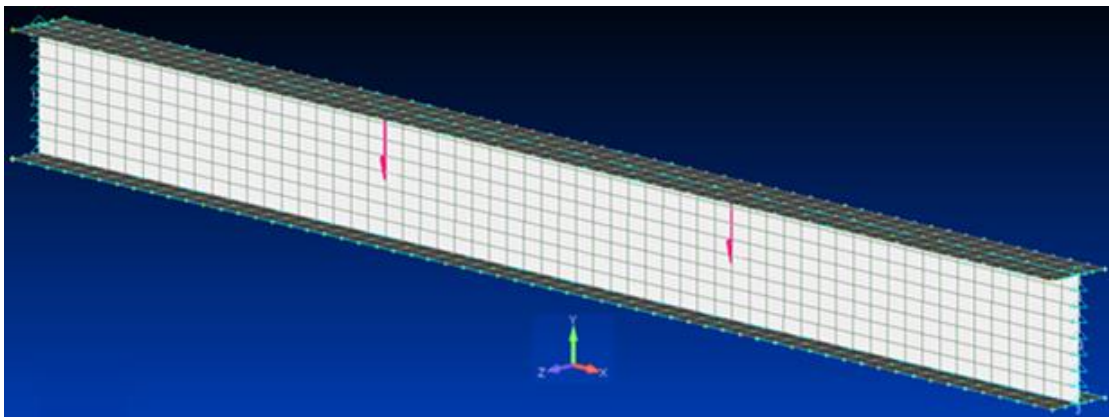
Σχήμα 65 Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού για τη στατική ανάλυση



Σχήμα 66 Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού για την ανάλυση του λυγισμού



Σχήμα 67 Δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία $P=2,5$ kN, το καθένα σε απόσταση $L/3$ από τις στηρίξεις της δοκού για τη στατική ανάλυση



Σχήμα 68 Δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία $P=2,5$ kN, το καθένα σε απόσταση $L/3$ από τις στηρίξεις της δοκού για την ανάλυση του λυγισμού

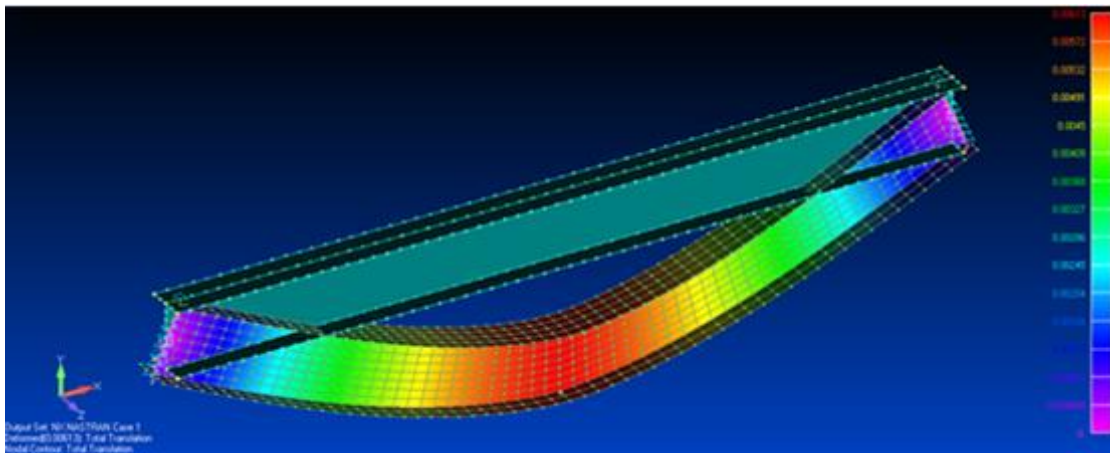
3.7 ΑΝΑΛΥΣΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται οι μετατοπίσεις και τα κρίσιμα φορτία πλευρικού λυγισμού του φορέα, που είναι κατασκευασμένος από σύνθετα υλικά.

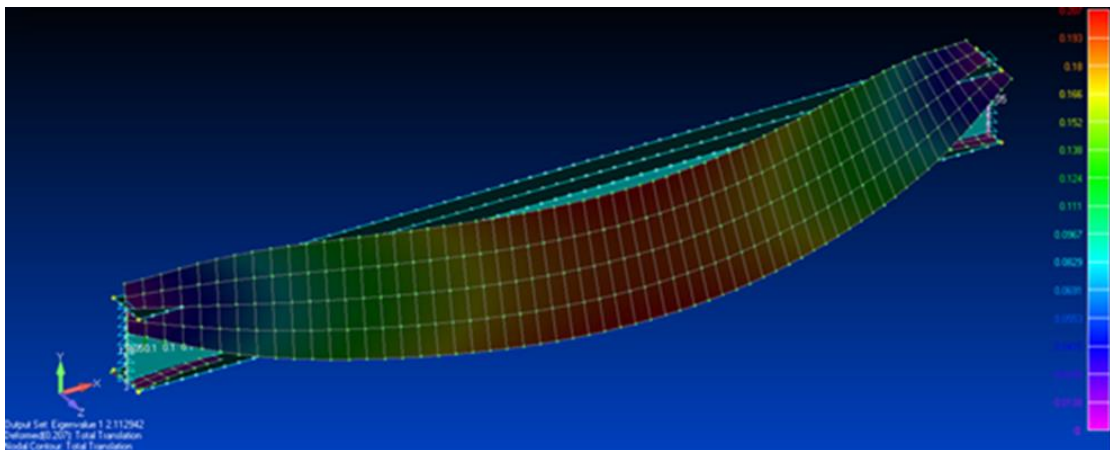
Για τη μελέτη των μετατοπίσεων γίνεται στατική ανάλυση (*Analysis Type: Static*), από την οποία προκύπτουν οι μετατοπίσεις καθενός στοιχείου του φορέα.

Για τη μελέτη του πλευρικού λυγισμού, γίνεται ανάλυση του λυγισμού (*Analysis Type: Buckling*), για την οποία ζητούνται τα αποτελέσματα των έξι πρώτων ιδιομορφών (*eigenvalue*). Οι ζητούμενοι κρίσιμοι συντελεστές λ_{cr} προκύπτουν για την πρώτη ιδιομορφή που εμφανίζει πλευρικό λυγισμό.

Οι αναλύσεις του φορέα έγιναν γραμμικά, καθώς τα σύνθετα υλικά δεν παρουσιάζουν πλαστική συμπεριφορά, δηλαδή δεν προσφέρουν υπεραντοχή.



Σχήμα 69 Γραφική απεικόνιση της παραμορφωμένης δοκού (συνολική μετατόπιση – στατική ανάλυση)



Σχήμα 70 Γραφική απεικόνιση της παραμορφωμένης δοκού (συνολική μετατόπιση – ανάλυση λυγισμού)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ, ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Βάσει των σχέσεων που αναπτύχθηκαν στο 2^ο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε η στατική ανάλυση και η ανάλυση πλευρικού λυγισμού της δοκού για τις δέκα διαφορετικές περιπτώσεις διαστρωμάτωσης. Παρακάτω, παρατίθενται τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης για κάθε περίπτωση.

4.1.1. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Για τη στατική ανάλυση της δοκού με τις αριθμητικές μεθόδους, ακολουθήθηκαν τα εξής βήματα:

- i. Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας $[Q]$, βάσει των σχέσεων (2.32).
- ii. Υπολογισμός των μετασχηματισμένων όρων δυσκαμψίας $\overline{Q}_{ij}^{\theta}$ για κάθε γωνία θ κατεύθυνσης των ινών κάθε διαστρωμάτωσης, βάσει της σχέσης (2.43).
- iii. Υπολογισμός του μητρώου μεμβρανικής δυσκαμψίας $[A]$, του μητρώου σύζευξης $[B]$ και του μητρώου καμπτικής δυσκαμψίας $[D]$ κάθε διαστρωμάτωσης, βάσει των σχέσεων (2.77).
- iv. Υπολογισμός των αντίστροφων μητρώων $[\alpha]$ ή $[a]$, $[\beta]$ και $[\delta]$ ή $[d]$.
- v. Υπολογισμός του μέγιστου βέλους κάμψης της δοκού δ_{\max} για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και κάθε περίπτωση φόρτισης, βάσει των σχέσεων (2.87), (2.89) και (2.91).

Τα μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού για κάθε διαστρωμάτωση και κάθε φόρτιση δίνονται στους ακόλουθους πίνακες.

Πίνακας 16 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού, βάσει της αριθμητικής ανάλυσης, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 1^η Φόρτιση (Ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο $q=2 \text{ kN/m}$)

ΦΟΡΤΙΣΗ 1		
	ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	δ_{\max} (m)
1	: [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00891
2	: [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00992
3	: [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,01112
4	: [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,01142
5	: [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,01838
6	: [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,01071
7	: [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,01731
8	: [0 ₆ /90 ₆]	0,01547
9	: [0 ₁₂]	0,00677
10	: [90 ₁₂]	0,02973

Πίνακας 17 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού, βάσει της αριθμητικής ανάλυσης, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 2^η Φόρτιση (Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5 \text{ kN}$ στο μέσον του ανοίγματος της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 2		
	ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	δ_{\max} (m)
1	: [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00403
2	: [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00446
3	: [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,00499
4	: [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,00511
5	: [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,00821
6	: [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,00483
7	: [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,00773
8	: [0 ₆ /90 ₆]	0,00695
9	: [0 ₁₂]	0,00308
10	: [90 ₁₂]	0,01328

Πίνακας 18 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού, βάσει της αριθμητικής ανάλυσης, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 3^η Φόρτιση (Δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία $P=2,5 \text{ kN}$, το καθένα σε απόσταση $L/3$ από τις στηρίξεις της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 3		
	ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	δ_{\max} (m)
1	: [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00337
2	: [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00375
3	: [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,00421
4	: [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,00432
5	: [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,00695
6	: [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,00810
7	: [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,00655
8	: [0 ₆ /90 ₆]	0,00585
9	: [0 ₁₂]	0,00256
10	: [90 ₁₂]	0,01125

4.1.2. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Βάσει των αποτελεσμάτων της στατικής ανάλυσης συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, το μικρότερο βέλος κάμψης εμφανίζεται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 9, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [0₁₂].
- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, το μεγαλύτερο βέλος κάμψης εμφανίζεται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 10, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [90₁₂].
- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, οι δοκοί με τις μη συμμετρικές διαστρωματώσεις 5, 7, 8, οι οποίες έχουν κώδικες αλληλουχίας [60₄/-60₄/0₄], [0₃/45₃/-45₃/90₃] και [0₆/90₆] αντίστοιχα, εμφανίζουν μεγαλύτερο βέλος κάμψης από τις δοκούς με τις συμμετρικές διαστρωματώσεις.
- Με εξαίρεση τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 7 [0₃/45₃/-45₃/90₃], στις υπόλοιπες περιπτώσεις παρατηρούμε ότι το βέλος κάμψης της δοκού είναι μεγαλύτερο για την 1^η φόρτιση και μικρότερο για την 3^η φόρτιση. Δηλαδή, ισχύει: $\delta_{\max,3} < \delta_{\max,2} < \delta_{\max,1}$. Για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 7, ισχύει: $\delta_{\max,2} < \delta_{\max,3} < \delta_{\max,1}$.

4.1.3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Για την ανάλυση του πλευρικού λυγισμού της δοκού με τις αριθμητικές μεθόδους, ακολουθήθηκαν τα εξής βήματα:

- Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας [Q], βάσει των σχέσεων (2.32).
- Υπολογισμός των μετασχηματισμένων όρων δυσκαμψίας $\overline{Q}_{ij}^{\theta}$ για κάθε γωνία θ κατεύθυνσης των ινών κάθε διαστρωμάτωσης, βάσει της σχέσης (2.43).
- Υπολογισμός του μητρώου μεμβρανικής δυσκαμψίας [A] και του μητρώου καμπτικής δυσκαμψίας [D] κάθε διαστρωμάτωσης, βάσει των σχέσεων (2.77).
- Υπολογισμός των αντίστροφων μητρώων [α] ή [a] και [δ] ή [d].
- Υπολογισμός του φορτίου λυγισμού για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και κάθε περίπτωση φόρτισης, βάσει των σχέσεων του κεφαλαίου 2.5.3.
- Υπολογισμός του κρίσιμου συντελεστή πλευρικού λυγισμού λ_{cr} για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και κάθε περίπτωση φόρτισης, βάσει των σχέσεων:

$$\lambda_{cr} = \frac{p_{cr}}{q} \text{ και } \lambda_{cr} = \frac{P_{cr}}{P} \quad (4.1)$$

για την 1^η περίπτωση φόρτισης (ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q=2$ kN/m) και για τη 2^η περίπτωση φόρτισης (συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού), αντίστοιχα.

Οι κρίσιμοι συντελεστές πλευρικού λυγισμού της δοκού για κάθε διαστρωμάτωση και κάθε φόρτιση δίνονται στους ακόλουθους πίνακες.

Πίνακας 19 Κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού, βάσει της αριθμητικής ανάλυσης, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 1^η Φόρτιση (Ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο $q=2$ kN/m)

ΦΟΡΤΙΣΗ 1		
	ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	λ_{cr}
1	: [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	3,439091
2	: [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	3,094971
3	: [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	2,755635
4	: [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	2,786507
5	: [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	1,697324
6	: [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	2,851874
7	: [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	1,770896
8	: [0 ₆ /90 ₆]	1,980889
9	: [0 ₁₂]	4,591630
10	: [90 ₁₂]	1,077821

Πίνακας 20 Κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού, βάσει της αριθμητικής ανάλυσης, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 2η Φόρτιση (Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 2		
	ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	λ_{cr}
1	: [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	2,256053
2	: [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	2,033713
3	: [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	1,810764
4	: [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	1,835922
5	: [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	1,117375
6	: [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	1,871685
7	: [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	1,164881
8	: [0 ₆ /90 ₆]	1,301617
9	: [0 ₁₂]	3,010470
10	: [90 ₁₂]	0,710549

4.1.4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Βάσει των αποτελεσμάτων της στατικής ανάλυσης συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

- Και για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης, ο μικρότερος κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού εμφανίζεται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 10, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [90₁₂].
- Και για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης, ο μεγαλύτερος κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού εμφανίζεται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 9, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [0₁₂].
- Και για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης, οι δοκοί με τις μη συμμετρικές διαστρωματώσεις 5, 7, 8, οι οποίες έχουν κώδικες αλληλουχίας [60₄/-60₄/0₄], [0₃/45₃/-45₃/90₃] και [0₆/90₆] αντίστοιχα, εμφανίζουν μικρότερο κρίσιμο συντελεστή πλευρικού λυγισμού από τις δοκούς με τις συμμετρικές διαστρωματώσεις.
- Σε όλες τις περιπτώσεις διαστρωμάτωσης παρατηρούμε ότι ο κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού είναι μεγαλύτερος για την 1^η φόρτιση. Δηλαδή, ισχύει: $\lambda_{cr,2} < \lambda_{cr,1}$.

4.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ FEMAP

Βάσει όσων αναπτύχθηκαν στο 3^ο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε η στατική ανάλυση και η ανάλυση του πλευρικού λυγισμού της δοκού για τις δέκα διαφορετικές περιπτώσεις διαστρωμάτωσης. Παρακάτω, παρατίθενται τα αποτελέσματα της ανάλυσης με το πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP για κάθε περίπτωση.

4.2.1. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Από τη στατική ανάλυση με το πρόγραμμα FEMAP, προέκυψαν οι μετατοπίσεις καθενός στοιχείου του φορέα. Τα μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού για κάθε περίπτωση υπολογίστηκαν ως ο μέσος όρος των κατακόρυφων μετατοπίσεων όλων των κόμβων στην κατακόρυφο του κορμού, εκεί που η δοκός παρουσιάζει το μέγιστο βέλος.

Τα μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού για κάθε διαστρωμάτωση και κάθε φόρτιση δίνονται στους ακόλουθους πίνακες.

Πίνακας 21 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού, βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 1^η Φόρτιση (Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q=2$ kN/m)

ΦΟΡΤΙΣΗ 1		
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ		δ_{max} (m)
1	: [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00314
2	: [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00338
3	: [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,00375
4	: [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,00380
5	: [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,00446
6	: [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,00370
7	: [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,00466
8	: [0 ₆ /90 ₆]	0,00382
9	: [0 ₁₂]	0,00250
10	: [90 ₁₂]	0,00969

Πίνακας 22 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού, βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 2^η Φόρτιση (Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 2		
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ		δ_{max} (m)
1	: [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00437
2	: [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00463
3	: [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,00513
4	: [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,00516
5	: [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,00617
6	: [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,00511
7	: [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,00643
8	: [0 ₆ /90 ₆]	0,00533
9	: [0 ₁₂]	0,00353
10	: [90 ₁₂]	0,01310

Πίνακας 23 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού, βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 3^η Φόρτιση (Δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία P=2,5 kN, το καθένα σε απόσταση L/3 από τις στηρίξεις της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 3		
	ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	δ_{\max} (m)
1	: [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00355
2	: [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00382
3	: [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,00424
4	: [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,00429
5	: [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,00503
6	: [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,00418
7	: [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,00527
8	: [0 ₆ /90 ₆]	0,00431
9	: [0 ₁₂]	0,00281
10	: [90 ₁₂]	0,01100

4.2.2. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Βάσει των αποτελεσμάτων της στατικής ανάλυσης συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, το μικρότερο βέλος κάμψης εμφανίζεται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 9, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [0₁₂].
- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, το μεγαλύτερο βέλος κάμψης εμφανίζεται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 10, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [90₁₂].
- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, οι δοκοί με τις μη συμμετρικές διαστρωματώσεις 5, 7, 8, οι οποίες έχουν κώδικες αλληλουχίας [60₄/-60₄/0₄], [0₃/45₃/-45₃/90₃] και [0₆/90₆] αντίστοιχα, εμφανίζουν μεγαλύτερο βέλος κάμψης από τις δοκούς με τις συμμετρικές διαστρωματώσεις.
- Σε όλες τις περιπτώσεις διαστρωμάτωσης παρατηρούμε ότι το βέλος κάμψης της δοκού είναι μεγαλύτερο για την 2^η φόρτιση και μικρότερο για την 1^η φόρτιση.

Δηλαδή, ισχύει: $\delta_{\max,1} < \delta_{\max,3} < \delta_{\max,2}$.

4.2.3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Από την ανάλυση του πλευρικού λυγισμού με το πρόγραμμα FEMAP, προέκυψαν οι κρίσιμοι συντελεστές πλευρικού λυγισμού της δοκού για κάθε περίπτωση. Ο ζητούμενος κρίσιμος συντελεστής είναι αυτός που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιομορφή για την οποία εμφανίζεται πλευρικός λυγισμός της δοκού.

Οι κρίσιμοι συντελεστές πλευρικού λυγισμού της δοκού για κάθε διαστρωμάτωση και κάθε φόρτιση, όπως και η ιδιομορφή για την οποία προκύπτει πλευρικός λυγισμός, δίνονται στους ακόλουθους πίνακες.

Πίνακας 24 Κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού και αντίστοιχη ιδιομορφή, βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 1η Φόρτιση (Ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο $q=2$ kN/m)

ΦΟΡΤΙΣΗ 1		
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	λ_{cr}	ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ
1 : [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	3,079125	1 ⁿ
2 : [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	2,947713	1 ⁿ
3 : [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	2,658166	1 ⁿ
4 : [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	2,669135	1 ⁿ
5 : [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	2,267675	1 ⁿ
6 : [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	2,663126	1 ⁿ
7 : [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	2,213152	1 ⁿ
8 : [0 ₆ /90 ₆]	2,685139	1 ⁿ
9 : [0 ₁₂]	3,839646	5 ⁿ
10 : [90 ₁₂]	1,077051	1 ⁿ

Πίνακας 25 Κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού και αντίστοιχη ιδιομορφή, βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για τη 2η Φόρτιση (Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 2		
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	λ_{cr}	ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ
1 : [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	2,113926	2 ⁿ
2 : [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	1,986773	1 ⁿ
3 : [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	1,789608	1 ⁿ
4 : [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	1,791528	1 ⁿ
5 : [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	1,523507	1 ⁿ
6 : [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	1,798039	1 ⁿ
7 : [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	1,483365	1 ⁿ
8 : [0 ₆ /90 ₆]	1,803566	1 ⁿ
9 : [0 ₁₂]	2,659842	5 ⁿ
10 : [90 ₁₂]	0,716623	1 ⁿ

Πίνακας 26 Κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού και αντίστοιχη ιδιομορφή, βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP, για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 3η Φόρτιση (Δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία $P=2,5$ kN, το καθένα σε απόσταση $L/3$ από τις στηρίξεις της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 3		
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	λ_{cr}	ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ
1 : [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	2,598728	1 ⁿ
2 : [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	2,485591	1 ⁿ
3 : [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	2,240467	1 ⁿ
4 : [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	2,247087	1 ⁿ
5 : [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	1,909678	1 ⁿ
6 : [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	2,245286	1 ⁿ
7 : [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	1,862299	1 ⁿ
8 : [0 ₆ /90 ₆]	2,261505	1 ⁿ
9 : [0 ₁₂]	3,331664	6 ⁿ
10 : [90 ₁₂]	0,905819	1 ⁿ

4.2.4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Βάσει των αποτελεσμάτων της στατικής ανάλυσης συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, ο μικρότερος κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού εμφανίζεται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 10, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [90₁₂].
- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, ο μεγαλύτερος κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού εμφανίζεται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 9, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [0₁₂].
- Και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, οι δοκοί με τις μη συμμετρικές διαστρωματώσεις 5 και 7, οι οποίες έχουν κώδικες αλληλουχίας [60₄/-60₄/0₄] και [0₃/45₃/-45₃/90₃] αντίστοιχα, εμφανίζουν μικρότερο κρίσιμο συντελεστή πλευρικού λυγισμού από τις δοκούς με τις συμμετρικές διαστρωματώσεις.
- Σε όλες τις περιπτώσεις διαστρωμάτωσης παρατηρούμε ότι ο κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού είναι μεγαλύτερος για την 1^η φόρτιση και μικρότερος για τη 2^η φόρτιση. Δηλαδή, ισχύει: $\lambda_{cr,2} < \lambda_{cr,3} < \lambda_{cr,1}$.

4.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ FEMAP

Ακολουθεί μία σύγκριση των αποτελεσμάτων της αριθμητικής ανάλυσης με τα αποτελέσματα της ανάλυσης με το πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP.

4.3.1. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται συγκεντρωτικά τα μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και φόρτισης, όπως προέκυψαν από την αριθμητική ανάλυση και την ανάλυση με το πρόγραμμα FEMAP. Επίσης, δίνονται οι ποσοστιαίες διαφορές για τη διεξαγωγή των απαραίτητων συμπερασμάτων.

Πίνακας 27 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού - βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP και της αριθμητικής ανάλυσης – και ποσοστιαίες διαφορές για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 1^η Φόρτιση (Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q=2$ kN/m)

ΦΟΡΤΙΣΗ 1			
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	δ_{max} (m)		ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ (%)
	FEMAP	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	
1 : [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00314	0,00891	64,78%
2 : [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00338	0,00992	65,94%
3 : [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,00375	0,01112	66,27%
4 : [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,00380	0,01142	66,73%
5 : [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,00446	0,01838	75,73%
6 : [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,00370	0,01071	65,44%
7 : [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,00466	0,01731	73,07%
8 : [0 ₆ /90 ₆]	0,00382	0,01547	75,31%
9 : [0 ₁₂]	0,00250	0,00677	63,08%
10 : [90 ₁₂]	0,00969	0,02973	67,40%

Πίνακας 28 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού - βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP και της αριθμητικής ανάλυσης – και ποσοστιαίες διαφορές για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 2^η Φόρτιση (Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 2			
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	δ_{max} (m)		ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ (%)
	FEMAP	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	
1 : [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00437	0,00403	8,40%
2 : [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00463	0,00446	3,85%
3 : [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,00513	0,00499	2,77%
4 : [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,00516	0,00511	0,96%
5 : [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,00617	0,00821	24,89%
6 : [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,00511	0,00483	5,46%
7 : [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,00643	0,00773	16,85%
8 : [0 ₆ /90 ₆]	0,00533	0,00695	23,29%
9 : [0 ₁₂]	0,00353	0,00308	14,53%
10 : [90 ₁₂]	0,01310	0,01328	1,39%

Πίνακας 29 Μέγιστα βέλη κάμψης της δοκού - βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP και της αριθμητικής ανάλυσης – και ποσοστιαίες διαφορές για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 3^η Φόρτιση (Δύο ίσα συγκεντρωμένα φορτία P=2,5 kN, το καθένα σε απόσταση L/3 από τις στηρίξεις της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 3			
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	δ_{max} (m)		ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ (%)
	FEMAP	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	
1 : [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	0,00355	0,00337	5,35%
2 : [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	0,00382	0,00375	1,78%
3 : [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	0,00424	0,00421	0,83%
4 : [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	0,00429	0,00432	0,74%
5 : [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	0,00503	0,00695	27,66%
6 : [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	0,00418	0,00810	48,37%
7 : [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	0,00527	0,00655	19,53%
8 : [0 ₆ /90 ₆]	0,00431	0,00585	26,35%
9 : [0 ₁₂]	0,00281	0,00256	9,83%
10 : [90 ₁₂]	0,01100	0,01125	2,22%

Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από τα παραπάνω είναι τα εξής:

- Για την 1^η περίπτωση φόρτισης η μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 5, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [60₄/-60₄/0₄]. Αντιθέτως, η μικρότερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 9, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [0₁₂].
- Για τη 2^η περίπτωση φόρτισης η μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 5, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [60₄/-60₄/0₄]. Αντιθέτως, η μικρότερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 4, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [45₂/-45₂/0₂]_s.
- Για την 3^η περίπτωση φόρτισης η μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 6, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [0₃/90₆/0₃]. Αντιθέτως, η μικρότερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 4, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [45₂/-45₂/0₂]_s.
- Γενικά, και για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης, παρατηρούμε ότι οι μεγαλύτερες ποσοστιαίες διαφορές προκύπτουν για τις δοκούς με μη συμμετρικές διαστρωματώσεις. Συνεπώς, η προσομοίωση των δοκών με συμμετρικές διαστρωματώσεις κρίνεται πιο επιτυχής, λόγω των μικρότερων ποσοστιαίων διαφορών.
- Σε όλες τις περιπτώσεις διαστρωμάτωσης παρατηρούμε ότι οι ποσοστιαίες διαφορές για την 1^η περίπτωση φόρτισης είναι πολύ μεγαλύτερες των ποσοστιαίων διαφορών για τη 2^η και την 3^η περίπτωση φόρτισης. Συνεπώς, η προσομοίωση των δοκών κρίνεται πιο επιτυχής για τη 2^η και την 3^η περίπτωση φόρτισης, λόγω των μικρότερων ποσοστιαίων διαφορών.

4.3.2. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται συγκεντρωτικά οι κρίσιμοι συντελεστές πλευρικού λυγισμού της δοκού για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και φόρτισης, όπως προέκυψαν από την αριθμητική ανάλυση και την ανάλυση με το πρόγραμμα FEMAP. Επίσης, δίνονται οι ποσοστιαίες διαφορές για τη διεξαγωγή των απαραίτητων συμπερασμάτων.

Πίνακας 30 Κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού - βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP και της αριθμητικής ανάλυσης – και ποσοστιαίες διαφορές για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 1^η Φόρτιση (Ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο $q=2$ kN/m)

ΦΟΡΤΙΣΗ 1			
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	λ_{cr}		ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ (%)
	FEMAP	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	
1 : [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	3,079125	3,439091	10,47%
2 : [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	2,947713	3,094971	4,76%
3 : [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	2,658166	2,755635	3,54%
4 : [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	2,669135	2,786507	4,21%
5 : [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	2,267675	1,697324	33,60%
6 : [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	2,663126	2,851874	6,62%
7 : [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	2,213152	1,770896	24,97%
8 : [0 ₆ /90 ₆]	2,685139	1,980889	35,55%
9 : [0 ₁₂]	3,839646	4,59163	16,38%
10 : [90 ₁₂]	1,077051	1,077821	0,07%

Πίνακας 31 Κρίσιμος συντελεστής πλευρικού λυγισμού της δοκού - βάσει της ανάλυσης με το πρόγραμμα FEMAP και της αριθμητικής ανάλυσης – και ποσοστιαίες διαφορές για κάθε περίπτωση διαστρωμάτωσης και για την 2^η Φόρτιση (Συγκεντρωμένο φορτίο $P=5$ kN στο μέσον του ανοίγματος της δοκού)

ΦΟΡΤΙΣΗ 2			
ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ	λ_{cr}		ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΔΙΑΦΟΡΑ (%)
	FEMAP	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	
1 : [0 ₄ /90 ₄ /0 ₄]	2,113926	2,256053	6,30%
2 : [45 ₃ /0 ₆ /45 ₃]	1,986773	2,033713	2,31%
3 : [30 ₂ /60 ₂ /0 ₂] _s	1,789608	1,810764	1,17%
4 : [45 ₂ /-45 ₂ /0 ₂] _s	1,791528	1,835922	2,42%
5 : [60 ₄ /-60 ₄ /0 ₄]	1,523507	1,117375	36,35%
6 : [0 ₃ /90 ₆ /0 ₃]	1,798039	1,871685	3,93%
7 : [0 ₃ /45 ₃ /-45 ₃ /90 ₃]	1,483365	1,164881	27,34%
8 : [0 ₆ /90 ₆]	1,803566	1,301617	38,56%
9 : [0 ₁₂]	2,659842	3,01047	11,65%
10 : [90 ₁₂]	0,716623	0,710549	0,85%

Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από τα παραπάνω είναι τα εξής:

- Για την 1^η περίπτωση φόρτισης η μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 8, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [0₆/90₆]. Αντιθέτως, η μικρότερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 10, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [90₁₂].
- Για τη 2^η περίπτωση φόρτισης η μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 8, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [0₆/90₆]. Αντιθέτως, η μικρότερη ποσοστιαία διαφορά παρατηρείται για τη δοκό με τη διαστρωμάτωση 10, η οποία έχει κώδικα αλληλουχίας [90₁₂].
- Γενικά, και για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης, παρατηρούμε ότι οι μεγαλύτερες ποσοστιαίες διαφορές προκύπτουν για τις δοκούς με μη συμμετρικές διαστρωματώσεις. Συνεπώς, η προσομοίωση των δοκών με συμμετρικές διαστρωματώσεις κρίνεται πιο επιτυχής, λόγω των μικρότερων ποσοστιαίων διαφορών.

4.4 ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με βάση όλες τις αναλύσεις και τις παρατηρήσεις που έγιναν στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, συνάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι μεγάλες ποσοστιαίες διαφορές που παρουσιάζονται στη στατική ανάλυση αποδεικνύουν τη σημαντική επιρροή του μέτρου διάτμησης στη συμπεριφορά της δοκού. Το γεγονός πως τα μέτρα διάτμησης διαφέρουν στις δύο διευθύνσεις, σε συνδυασμό με τα έντονα διατμητικά φαινόμενα που παρουσιάζονται, έχουν σαν αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα πρόσθετο βέλος λόγω διάτμησης, το οποίο δεν λαμβάνεται επαρκώς υπόψη από τους τύπους της αριθμητικής ανάλυσης.
- Στη στατική ανάλυση των συμμετρικών διαστρωματώσεων (δεν έχουμε λυγισμό) τα φαινόμενα συστροφής είναι καθοριστικός παράγοντας της συμπεριφοράς των δοκών. Αυτό συμβαίνει γιατί μεταξύ των στρώσεων αναπτύσσονται τάσεις που προκαλούν στρέψη της πλάκας.
- Οι μεγάλες ποσοστιαίες διαφορές που παρουσιάζονται στην ανάλυση του λυγισμού οφείλονται στις μικτές ιδιομορφές τοπικού και καθολικού λυγισμού.
- Η δοκός με τη διαστρωμάτωση 9, που έχει κώδικα αλληλουχίας [0₁₂], εμφανίζει το μικρότερο βέλος κάμψης και το μεγαλύτερο φορτίο πλευρικού λυγισμού για όλες τις περιπτώσεις φόρτισης. Οι ποσοστιαίες διαφορές που παρουσιάζονται τόσο στη στατική ανάλυση όσο και στην ανάλυση του λυγισμού κρίνονται μεσαίου μεγέθους.
- Η δοκός με τη διαστρωμάτωση 10, που έχει κώδικα αλληλουχίας [90₁₂], εμφανίζει το μεγαλύτερο βέλος κάμψης και το μικρότερο φορτίο πλευρικού λυγισμού για όλες τις περιπτώσεις φόρτισης. Οι ποσοστιαίες διαφορές στη στατική ανάλυση είναι μικρές για τη 2^η και την 3^η περίπτωση φόρτισης και μεγαλύτερες για την 1^η περίπτωση φόρτισης. Οι ποσοστιαίες διαφορές στην ανάλυση του λυγισμού είναι οι μικρότερες που παρουσιάζονται και για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης.
- Τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα ήταν αναμενόμενα, καθώς η διαστρωμάτωση

9, που έχει κώδικα αλληλουχίας $[0_{12}]$, είναι πιο ισχυρή από τη διαστρωμάτωση 10, που έχει κώδικα αλληλουχίας $[90_{12}]$.

- Οι δοκοί με μη συμμετρικές διαστρωματώσεις εμφανίζουν μεγαλύτερο βέλος κάμψης και μικρότερο φορτίο πλευρικού λυγισμού από τις δοκούς με συμμετρικές διαστρωματώσεις. Οι ποσοστιαίες διαφορές που παρουσιάζονται τόσο στη στατική ανάλυση όσο και στην ανάλυση του λυγισμού είναι μεγαλύτερες για τις δοκούς με μη συμμετρικές διαστρωματώσεις.
- Η στατική ανάλυση παρουσιάζει μεγαλύτερες ποσοστιαίες διαφορές από την ανάλυση του λυγισμού.

4.5 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

Το μοντέλο της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν βάση και να εξελιχθεί παράλληλα με την πραγματοποίηση πειραμάτων.

Τα πειράματα θα πρέπει να πραγματοποιηθούν με ακριβείς μεθόδους μέτρησης των φορτίων, των βελών κάμψης και των φορτίων πλευρικού λυγισμού. Για παράδειγμα, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν μετρητές παραμορφώσεων και αισθητήρες πίεσης.

Επιπλέον, θα πρέπει να προσδιοριστούν οι πραγματικές ιδιότητες των σύνθετων δοκών, όπως η καμπτική στιβαρότητα, ώστε να συγκριθούν ορθότερα τα αποτελέσματα των αριθμητικών αναλύσεων με τα αποτελέσματα της ανάλυσης με το πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP και με τις πειραματικές μετρήσεις. Έτσι, θα μειωθούν και οι αποκλίσεις που παρατηρήθηκαν στις τιμές των βελών κάμψης και των κρίσιμων συντελεστών πλευρικού λυγισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Βάγιας Κ. Ιωάννης, “Σιδηρές Κατασκευές, Ανάλυση και διαστασιολόγηση”, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα 2003.
2. Βαρδουλάκης Ιωάννης, Γιαννακόπουλος Αντώνιος, “Τεχνική Μηχανική Ι”, Β΄ Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2008.
3. Γιαννακόπουλος Κυριάκος, “Ενίσχυση υποστυλωμάτων με σύνθετα υλικά – Βελτίωση της καμπτικής συμπεριφοράς”, 15^ο Φοιτητικό Συνέδριο: Επισκευές Κατασκευών, Πάτρα 2009.
4. Κανδύλας Π. Ιωάννης, “Βελτιστοποίηση του σχεδιασμού σύνθετων υλικών με τη χρήση εξελικτικών αλγορίθμων”, Διπλωματική Εργασία, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας, Πάτρα 2011.
5. Κοπάτσαρη Παναγιώτα, “Αξιολόγηση και σύγκριση κανονιστικών πλαισίων για ενισχύσεις κατασκευών με σύνθετα υλικά”, Διπλωματική Εργασία, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας, Πάτρα 2009.
6. Πασχάλης Σπυρίδων, “Μελέτη μεθόδων ενίσχυσης κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα με έμφαση στα σύνθετα υλικά”, Μεταπτυχιακή Εργασία, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας, Πάτρα 2013.
7. Παπαδόπουλος Α. Χρήστος, “Σύνθετα υλικά: Ιδιότητες κατασκευής – Κατεργασίες βελτίωσης”, Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Αθήνα 2009.
8. Σταυρόπουλος Π. Φώτιος, “Σεισμική Ενίσχυση μέσω περισφιγξης υποστυλωμάτων οπλισμένου σκυροδέματος με πλέγμα συνεχών ινών σε ανόργανη μήτρα”, Διατριβή Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πολυτεχνική Σχολή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πάτρα 2007.
9. Χιώτης Δ. Δημήτριος, “Ενίσχυση δομικών μελών από οπλισμένο σκυρόδεμα και φέρουσα τοιχοποιία με ινοπλισμένα πολυμερή”, Μεταπτυχιακή Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Αθήνα 2012.
10. Χουμανίδης Δημήτριος, “Ιδιότητες μελών με διατομή από σύνθετα υλικά – Σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων”, Μεταπτυχιακή Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Αθήνα 2011.
11. Ραυτογιάννης Γ. Ιωάννης, Σημειώσεις για το μάθημα “Κατασκευές από σύνθετα υλικά” του Μεταπτυχιακού Προγράμματος ΔΠΜΣ “Δομοστατικός Σχεδιασμός και ανάλυση κατασκευών”, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2007.
12. Ραυτογιάννης Γ. Ιωάννης, Σημειώσεις για το μάθημα επιλογής “Σύνθετα Υλικά” του 8^{ου} εξαμήνου του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό

Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2009.

13. Ραυτογιάννης Γ. Ιωάννης, Διαλέξεις για το μάθημα επιλογής “Σύνθετα Υλικά” του 8^{ου} εξαμήνου του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2013α.
14. Ραυτογιάννης Γ. Ιωάννης, “Σύνθετα Υλικά”, Τόμος Ι – Μηχανική Συμπεριφορά, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2013β.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Krishan K. Chawla, “Composite Materials: Science and Engineering”, 3rd Edition, Springer, 2013.
2. László P. Kollár, George S. Springer, “Mechanics of composite structures”, Cambridge University Press, United Kingdom 2003.
3. Robert M. Jones, “Mechanics of composite materials”, 2nd Edition, Taylor & Francis, Philadelphia 1999.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

1. A. Ανδρέου & ΣΙΑ Ο.Ε.: <http://www.aandreou.gr/>, 2014.
2. American Composites Manufacturers Association: <http://www.acmanet.org>, 2014.
3. Composites Australia: <http://www.compositesaustralia.com.au>, 2014.
4. Composites Manufacturing Magazine: <http://compositesmanufacturingmagazine.com>, 2014.
5. Fibre Glast Development Corp.: <http://www.fibreglast.com/>, 2014.
6. Savage G., “Composite Materials Technology in Formula 1 Motor Racing”, http://speautomotive.com/SPEA_CD/SPEA2008/pdf/k/K3.pdf, 2014.
7. Siemens PLM Software: http://www.plm.automation.siemens.com/en_us/products/femap/features/index.shtml, 2014.
8. Wikipedia: <http://en.wikipedia.org/wiki/Femap>, 2014.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού των όρων δυσκαμψίας A_{ij} , B_{ij} και D_{ij} για τη διαστρωμάτωση Δ_5 : $[60_4/-60_4/0_4]$. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και για τις υπόλοιπες διαστρωματώσεις.

A. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ $[S]$ (kPa^{-1})

$$\begin{aligned}
 E_1 \text{ [KPa]} &= 38000000 \\
 E_2 \text{ [KPa]} &= 8000000 \\
 \nu_{12} &= 0,25 \\
 \nu_{21} &= 0,052631579 \\
 G_{12} \text{ [KPa]} &= 4000000 \\
 G_{13} \text{ [KPa]} &= 4000000 \\
 G_{23} \text{ [KPa]} &= 2000000
 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|c} 2,6316\text{E-}08 & -6,5789\text{E-}09 & 0 & \sigma_1 \\ -6,5789\text{E-}09 & 1,2500\text{E-}07 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 2,5000\text{E-}07 & \tau_{12} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= 2,6316\text{E-}08 \\
 S_{12} &= -6,5789\text{E-}09 \\
 S_{21} &= -6,5789\text{E-}09 \\
 S_{22} &= 1,2500\text{E-}07 \\
 S_{66} &= 2,5000\text{E-}07
 \end{aligned}
 \rightarrow [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|c} 2,6316\text{E-}08 & -6,5789\text{E-}09 & 0 & \\ -6,5789\text{E-}09 & 1,2500\text{E-}07 & 0 & \\ 0 & 0 & 2,5000\text{E-}07 & \end{array} \right|$$

B. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ [Q] (kPa)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 3,8507\text{E}+07 & 2,0267\text{E}+06 & 0 \\ 2,0267\text{E}+06 & 8,1067\text{E}+06 & 0 \\ 0 & 0 & 4,0000\text{E}+06 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = 3,8507\text{E}+07$$

$$Q_{12} = 2,0267\text{E}+06$$

$$Q_{21} = 2,0267\text{E}+06$$

$$Q_{22} = 8,1067\text{E}+06$$

$$Q_{66} = 4,0000\text{E}+06$$

$$\rightarrow [Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3,8507\text{E}+07 & 2,0267\text{E}+06 & 0 \\ 2,0267\text{E}+06 & 8,1067\text{E}+06 & 0 \\ 0 & 0 & 4,0000\text{E}+06 \end{vmatrix}$$

C. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΕΝΩΝ ΟΡΩΝ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ $\overline{Q}_{ij}^{\theta}$ (kPa)

$$[\overline{Q}]^{60} = \begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11}^{60} \\ \overline{Q}_{22}^{60} \\ \overline{Q}_{12}^{60} \\ \overline{Q}_{66}^{60} \\ \overline{Q}_{16}^{60} \\ \overline{Q}_{26}^{60} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1,0727\text{E}+07 \\ 2,5927\text{E}+07 \\ 7,0067\text{E}+06 \\ 8,9800\text{E}+06 \\ 3,7066\text{E}+06 \\ 9,4570\text{E}+06 \end{vmatrix}$$

$$[\overline{Q}]^{-60} = \begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11}^{-60} \\ \overline{Q}_{22}^{-60} \\ \overline{Q}_{12}^{-60} \\ \overline{Q}_{66}^{-60} \\ \overline{Q}_{16}^{-60} \\ \overline{Q}_{26}^{-60} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1,0727\text{E}+07 \\ 2,5927\text{E}+07 \\ 7,0067\text{E}+06 \\ 8,9800\text{E}+06 \\ -3,7066\text{E}+06 \\ -9,4570\text{E}+06 \end{vmatrix}$$

$$[\overline{Q}]^0 = \begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11}^0 \\ \overline{Q}_{22}^0 \\ \overline{Q}_{12}^0 \\ \overline{Q}_{66}^0 \\ \overline{Q}_{16}^0 \\ \overline{Q}_{26}^0 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 3,8507\text{E}+07 \\ 8,1067\text{E}+06 \\ 2,0267\text{E}+06 \\ 4,0000\text{E}+06 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

D. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ [A] (kN/m), ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΥΖΕΥΞΗΣ [B] (kN), ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΚΑΜΠΤΙΚΗΣ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ [D] (kNm) ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΤΟΥΣ [α] (m/kN), [β] (1/kN) ΚΑΙ [δ] (1/kNm)

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= 9,5936E+04 \\
 A_{12} &= 2,5664E+04 \\
 A_{16} &= 0 \\
 A_{22} &= 9,5936E+04 \\
 A_{26} &= 0 \\
 A_{66} &= 3,5136E+04
 \end{aligned}
 \rightarrow [A] = \begin{vmatrix} 9,5936E+04 & 2,5664E+04 & 0 \\ 2,5664E+04 & 9,5936E+04 & 0 \\ 0 & 0 & 3,5136E+04 \end{vmatrix}, \quad [\alpha] = \begin{vmatrix} 1,6080E-05 & -4,0913E-06 & -1,4356E-07 \\ -4,0913E-06 & 1,4015E-05 & 3,7211E-06 \\ -1,4356E-07 & 3,7211E-06 & 3,3815E-05 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= 7,1117E+01 \\
 B_{12} &= -1,2749E+01 \\
 B_{16} &= -9,4889E+00 \\
 B_{22} &= -4,5619E+01 \\
 B_{26} &= -2,4210E+01 \\
 B_{66} &= -1,2749E+01
 \end{aligned}
 \rightarrow [B] = \begin{vmatrix} 7,1117E+01 & -1,2749E+01 & -9,4889E+00 \\ -1,2749E+01 & -4,5619E+01 & -2,4210E+01 \\ -9,4889E+00 & -2,4210E+01 & -1,2749E+01 \end{vmatrix}, \quad [\beta] = \begin{vmatrix} -5,7309E-03 & 1,2561E-03 & 1,4845E-03 \\ 1,4615E-03 & 3,0133E-03 & 3,4453E-03 \\ 4,2595E-04 & 4,7411E-03 & 5,4351E-03 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= 2,2213E-01 \\
 D_{12} &= 4,2476E-02 \\
 D_{16} &= 1,5182E-02 \\
 D_{22} &= 1,5987E-01 \\
 D_{26} &= 3,8736E-02 \\
 D_{66} &= 6,0662E-02
 \end{aligned}
 \rightarrow [D] = \begin{vmatrix} 2,2213E-01 & 4,2476E-02 & 1,5182E-02 \\ 4,2476E-02 & 1,5987E-01 & 3,8736E-02 \\ 1,5182E-02 & 3,8736E-02 & 6,0662E-02 \end{vmatrix}, \quad [\delta] = \begin{vmatrix} 6,8002E+00 & -1,5565E+00 & -9,3166E-01 \\ -1,5565E+00 & 9,0763E+00 & -3,0107E+00 \\ -9,3166E-01 & -3,0107E+00 & 2,1390E+01 \end{vmatrix}$$