



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΛΟΓΩ ΣΤΡΕΒΛΩΣΗΣ

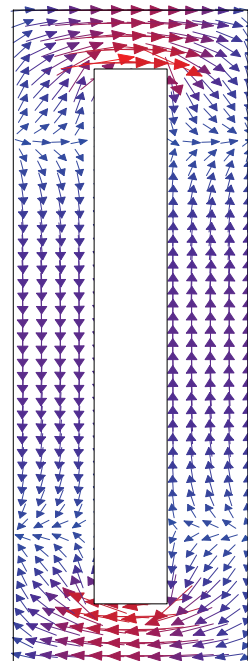
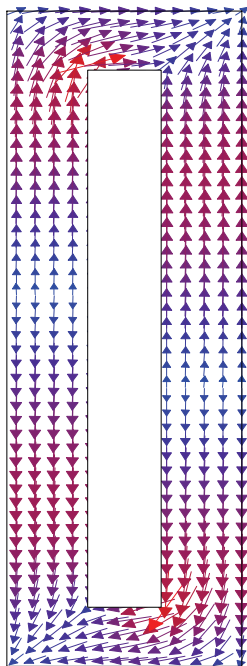
ΣΤΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΤΡΕΠΤΙΚΕΣ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΟΥ ΜΕ ΤΗ

ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΣΙΠΗΡΑ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :

Ε. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2009

**«Η συζήτηση για 5 λεπτά με ένα σοφό άνθρωπο
μπορεί να αποδειχτεί χρησιμότερη από 10 χρόνια μελέτης»
Κινέζικη παροιμία**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος – Ιστορική αναδρομή.....	1
Κεφάλαιο 1: Ορισμοί βασικών μεγεθών.....	5
1.1 Θεωρία παραμορφώσεων.....	6
1.1.1 Ορισμός μετατοπίσεων.....	6
1.1.2 Ορισμός παραμορφώσεων.....	8
1.1.2.1 Μεταβολή μήκους απειροστού στοιχείου.....	8
1.1.2.2 Μεταβολή κατεύθυνσης απειροστού στοιχείου.....	11
1.1.2.3 Μεταβολή όγκου απειροστού στοιχείου.....	14
1.1.2.4 Μεταβολή επιφάνειας απειροστού στοιχείου.....	15
1.1.2.5 Ορισμός του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων.....	16
1.2 Θεωρία τάσεων.....	17
1.2.1 Ορισμός διανύσματος τάσεων.....	17
1.2.2 Ορισμός τανυστή τάσεως Cauchy.....	18
1.2.3 Εξισώσεις ισορροπίας.....	19
1.2.4 Ορισμός του πρώτου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff.....	21
1.2.5 Η αρχή δυνατών έργων.....	23
1.2.6 Ορισμός του δεύτερου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff.....	26
1.2.7 Φυσική σημασία των τανυστών τάσεων.....	28
1.2.8 Τανυστής τάσεων Cauchy μικρών μετατοπίσεων.....	29
Κεφάλαιο 2: Καταστατικοί νόμοι υλικών.....	30
2.1 Ανάγκη θεώρησης καταστατικών νόμων για τα υλικά.....	31
2.2 Θεωρία ελαστικότητας.....	32
Κεφάλαιο 3: Θεωρία στρέψης.....	37
3.1 Γενικά.....	38
3.2 Θεωρία δοκού ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων.....	43

3.2.1 Παραδοχές θεωρίας.....	43
3.2.2 Πεδίο μετατοπίσεων.....	43
3.2.3 Πεδίο παραμορφώσεων.....	47
3.2.4 Πεδίο τάσεων.....	49
3.2.5 Προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης - διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου.....	51
3.2.6 Προσδιορισμός των κινηματικών μεγεθών $u_m(x,t)$, $\theta_x(x,t)$ - εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου.....	61
3.2.7 Απλοποιημένες εξισώσεις ισορροπίας για ειδικές περιπτώσεις αξονικών συνοριακών συνθηκών.....	67
3.2.8 Βήματα επίλυσης του προβλήματος της ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων.....	70
Κεφάλαιο 4: Αριθμητική επίλυση του προβλήματος της στρέψης....	72
4.1 Αριθμητικός υπολογισμός των κινηματικών μεγεθών $u_m(x,t)$, $\theta_x(x,t)$..	73
4.2.1 Αριθμητικός υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P	80
4.2.2 Αριθμητικός υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S	80
4.2.3 Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών $A, I_P, I_{PP}, I_n, I_t, C_S, S_y, S_z, I_{yy}, I_{zz}, I_{yz}, A_w, A_{wy}, A_{wz}$	85
Κεφάλαιο 5: Αριθμητικές εφαρμογές – Συμπεράσματα.....	87
5.1 Εισαγωγή	88
5.2 Αριθμητικές εφαρμογές.....	88
5.2.1 1 ^η αριθμητική εφαρμογή.....	88
5.2.2 2 ^η αριθμητική εφαρμογή.....	95
5.2.3 3 ^η αριθμητική εφαρμογή.....	99
5.3 Συμπεράσματα.....	104
Βιβλιογραφία.....	106



ΕΙΣΑΓΩΓΗ -
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Εισαγωγή – Ιστορική αναδρομή

Η ανάλυση του προβλήματος της στρέψης έχει απασχολήσει από πολύ παλιά ερευνητές και μηχανικούς λόγω των πολλών πρακτικών εφαρμογών που παρουσιάζονται σε πολλούς κλάδους όπως η αεροναυπηγική, η διαστημική τεχνολογία, η μηχανολογία και οι κατασκευές πολιτικού μηχανικού. Πρώτος ο Coulomb (1784) έδωσε από πολύ νωρίς μια πρώτη λύση γνωστή και ως τεχνική θεωρία στρέψης η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι οι διατομές της ράβδου στρέφονται σαν επίπεδοι στερεοί δίσκοι. Κάτι τέτοιο δεν επαληθεύεται από τα πειραματικά αποτελέσματα για ράβδους τυχούσας διατομής και μπορεί να εφαρμοστεί με αξιοπιστία μονάχα σε κυκλικές ή δακτυλιοειδείς διατομές. Η επίλυση του προβλήματος για τυχούσα διατομή έγινε για πρώτη φορά από τον St. Venant (1855) ο οποίος κατέστρωσε με μαθηματική ακρίβεια το πρόβλημα των συνοριακών τιμών με το οποίο προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις αλλά και η κατανομή των διατμητικών τάσεων στη ράβδο.

Ο St. Venant ασχολήθηκε αποκλειστικά με ευθύγραμμες πρισματικές ράβδους, με την απλούστερη δυνατή στρεπτική φόρτιση δηλαδή δύο ίσες και αντίθετες συγκεντρωμένες στρεπτικές ροπές στα άκρα της ράβδου, και την απλούστερη καταστατική σχέση υλικού δηλαδή τη γραμμική ελαστικότητα με θεώρηση μικρών μετατοπίσεων (και παραμορφώσεων). Η θεωρία του προβλέπει ότι η διατομή υπόκειται σε μετατοπίσεις εκτός του επιπέδου της (στρέβλωση). Συνεπώς, η θεωρία ισχύει μονάχα στην περίπτωση που δεν επιβάλλεται κανένας περιορισμός στη στρέβλωση της διατομής. Η συγκεκριμένη στρεπτική φόρτιση σε συνδυασμό με την μη παρεμπόδιση της στρέβλωσης οδηγούν σε σταθερή μεταβολή της γωνίας στροφής κατά μήκος της ράβδου και η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη. Σε περίπτωση παρεμπόδισης της στρέβλωσης ή/ και μεταβολής της στρεπτικής έντασης κατά μήκος της δοκού η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ανομοιόμορφη. Στην περίπτωση της ομοιόμορφης στρέψης -που εξέτασε ο St. Venant- η ράβδος καταπονείται αποκλειστικά από διατμητικές τάσεις ανεξαρτήτως από τον άξονα ως προς τον οποίο περιστρέφεται η δοκός. Η γνώση του άξονα περιστροφής αποκτά μεγάλη σημασία στην περίπτωση της ανομοιόμορφης στρέψης όπου αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός προνομιακός άξονας, η στροφή περί τον οποίο προκαλεί καθαρή στρεπτική ένταση χωρίς να εισάγει στη δοκό αξονική ή καμπτική ένταση.

Αργότερα μελετήθηκε και το δυσκολότερο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης: Η έρευνα αναπτύχθηκε κυρίως γύρω από τη θεωρία λεπτότοιχων διατομών με την οποία παρακάμπτεται η ακριβής εύρεση της στρέβλωσης της διατομής και ο ακριβής προσδιορισμός της κατανομής των διατμητικών τάσεων, που διαφέρει πλέον από την κατανομή που προβλέπει η θεωρία του St. Venant. Στη δοκό επιπρόσθετα αναπτύσσονται και αξονικές τάσεις δυσχεραίνοντας έτσι σημαντικά την κατανόηση του φαινομένου. Οι Wagner (1929), Kappus (1937) και Marguerre (1940) ήταν οι πρωτοπόροι στη διερεύνηση των επιπτώσεων της ανομοιόμορφης στρέψης ενώ τα πονήματα των Benschoter (1954) και Vlasov (1963) καταγράφονται ως από τις πιο παλαιές συμβολές σχετικά με την προσομοίωση της έντασης λόγω των πρόσθετων διατμητικών τάσεων πέραν αυτών που προβλέπει η θεωρία του St. Venant. Οι συγκεκριμένες συνεισφορές βασίστηκαν στη θεώρηση ανεξάρτητων ή μη

στρεβλωτικών παραμέτρων προκειμένου να προσεγγιστεί το φαινόμενο, χρησιμοποιώντας απλοποιητικές διανομές διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος των διατομών. Πολύ αργότερα οι Schulz & Filippou (1998), Ladevèze & Simmonds (1998) και Sapountzakis & Mokos (2003) προσέγγισαν το πρόβλημα με θεώρηση επιπλέον διανομής διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος των διατομών, στην προσπάθειά τους να ικανοποιήσουν την ισορροπία σε επίπεδο υλικού σημείου.

Αρκετά γρήγορα, οι ερευνητές θέλησαν να μελετήσουν το πρόβλημα της στρέψης χωρίς την περιοριστική υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων. Εξάλλου, ο αντικειμενικός στόχος ελαχιστοποίησης του βάρους της κατασκευής οδηγεί αναπόφευκτα στη χρήση λεπτότοιχων διατομών που έχουν την ιδιότητα να παραμένουν ελαστικές και να μην αστοχούν ακόμα και μετά την ανάπτυξη σημαντικών μετακινήσεων. Η πρώτη προσπάθεια προσέγγισης της μη γραμμικής στρεπτικής συμπεριφοράς ράβδων πραγματοποιήθηκε από τον Young (1807), ο οποίος μελέτησε την ομοιόμορφη στρέψη σε δοκούς κυκλικής διατομής. Ο Weber (1921) μελέτησε το ίδιο πρόβλημα σε ορθογωνικές διατομές ενώ οι λεπτότοιχες ανοιχτές διατομές διερευνήθηκαν για πρώτη φορά από τον Cullimore (1949). Αργότερα, όπως περιγράφεται από τον Attard (1986α), πραγματοποιήθηκαν διάφορες προσπάθειες διατύπωσης μη γραμμικών θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης εκ των οποίων ορισμένες αποδείχθηκαν αμφίβολης ακρίβειας.

Ενώ η στατική επιβολή στρεπτικών φορτίσεων είχε μελετηθεί κατά ένα σημαντικό βαθμό, το αντίστοιχο δυναμικό πρόβλημα διερευνήθηκε μεταγενέστερα. Ο Gere (1954) έλυσε το πρόβλημα των γραμμικών στρεπτικών ταλαντώσεων και παρουσίασε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης της ράβδου. Ο Petersen (1991) προσέγγισε το πρόβλημα λαμβάνοντας υπόψιν και τη συνεισφορά των επιπρόσθετων διατμητικών παραμορφώσεων λόγω ανομοιόμορφης στρέψης μέσω θεώρησης επιπλέον στρεβλωτικών παραμέτρων. Ο Sapountzakis (2005) εφάρμοσε για το ίδιο πρόβλημα μια επιπρόσθετη διανομή διατμητικών παραμορφώσεων.

Τα τελευταία 30 χρόνια αναπτύχθηκε ιδιαίτερος η έρευνα γύρω από τη μη γραμμική δυναμική συμπεριφορά κατασκευών. Έτσι προτάθηκαν πληθώρα προσομοιώσεων ράβδων που υπόκεινται σε γενικές φορτίσεις και εμφανίζουν γεωμετρική μη γραμμικότητα σε εξαιρετικά σύνθετες κινήσεις όπως καμπτική, συζευγμένη καμπτική - αξονική, καμπτική - αξονική - στρεπτική κλπ. Αναφέρουμε στο σημείο αυτό ξεχωριστά τους Rozmarynowski & Szymczak (1984) επειδή μελέτησαν ράβδους που υπόκεινται αποκλειστικά σε ελεύθερες μη γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις (σύζευξη αξονικής - στρεπτικής καταπόνησης). Οι ερευνητές δεν έλαβαν υπόψιν τους έργα από τις επιπρόσθετες διατμητικές παραμορφώσεις λόγω ανομοιόμορφης στρέψης κι επιπλέον αγνόησαν ορισμένους μη γραμμικούς όρους στις εξισώσεις ισορροπίας.


Από μια εκτενή βιβλιογραφική αναζήτηση διαπιστώθηκε ότι το πρόβλημα της εκτίμησης των διατμητικών τάσεων και παραμορφώσεων που προκύπτουν λόγω ανομοιόμορφης στρέψης, δεν έχει μελετηθεί επαρκώς στην περίπτωση των μη γραμμικών στρεπτικών ταλαντώσεων. Επιπρόσθετα, οι περισσότερες εργασίες αναφέρονται σε γραμμική δυναμική ή μη γραμμική στατική ανάλυση ράβδου και γίνεται χρήση της έννοιας των ανεξάρτητων στρεβλωτικών παραμέτρων για την προσομοίωση της εν λόγω εντατικής κατάστασης. Αποτελεί πεποίθηση του γράφοντος ότι η θεώρηση επιπρόσθετων - «ανώτερων» διανομών διατμητικών

παραμορφώσεων προσεγγίζει καλύτερα το φαινόμενο, αφού ικανοποιούνται ακριβέστερα οι εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου. Ωστόσο η συγκεκριμένη θεώρηση, εξ' όσων γνωρίζει ο γραφών, έχει εφαρμοστεί αποκλειστικά σε προβλήματα γραμμικής, στατικής ή δυναμικής ανάλυσης ράβδων υπό ανομοιόμορφη στρέψη καθώς επίσης και σε προβλήματα μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης (πχ Pai & Nayfeh, 1994) που δεν σχετίζονται άμεσα ούτε με στρεπτικές καταπονήσεις ούτε με κατασκευές που είναι παραπλήσιες των ραβδωτών φορέων της σφαίρας του Πολιτικού Μηχανικού.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η ποσοτική εύρεση των δευτερογενών διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται σε πρισματικές ράβδους διπλά συμμετρικών διατομών υπό μη γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις. Οι τάσεις αυτές, κατά τον Ευρωκώδικα 3, θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν κατά την ανάλυση ράβδων που υποβάλλονται σε ανομοιόμορφη στρέψη. Το γεγονός αυτό αποτελεί το κύριο κίνητρο της παρούσας διερεύνησης. Επιπλέον, η μη γραμμικότητα αναπόφευχτα μάς οδηγεί στην ανάγκη διατύπωσης συζευγμένων αξονικών και στρεπτικών εξισώσεων ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου. Η ποσοτικοποίηση των δευτερογενών διατμητικών τάσεων πραγματοποιείται μέσω δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης, η οποία προσδιορίζεται μέσω προβλήματος συνοριακών τιμών που ορίζεται στις διατομές της ράβδου. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών προκύπτει από την προσπάθεια ικανοποίησης της διαμήκου εξίσωσης ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου. Πραγματοποιείται επίσης συγκριτική εξέταση με απλοποιημένα προβλήματα που προκύπτουν και έχουν την ιδιότητα να μειώνουν αισθητά τον υπολογιστικό χρόνο επίλυσης του προβλήματος. Δυστυχώς, στα περιορισμένα πλαίσια ετούτης της εργασίας δεν εμπεριέχεται συγκριτική ανάλυση των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης θεωρίας με τη θεώρηση ανεξάρτητης στρεβλωτικής παραμέτρου που, όπως προαναφέρθηκε, έχει το μειονέκτημα να μην ικανοποιεί την ισορροπία σε τοπικό επίπεδο. Έτσι, ακόμα και από το εισαγωγικό κεφάλαιο της παρούσας συμβολής, τίθεται σαν πρώτη προτεραιότητα μελλοντικής έρευνας ο προσδιορισμός των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων των δύο διαφορετικών προσεγγίσεων του εξεταζόμενου προβλήματος.

Το θέμα αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας υποδείχθηκε από τον κ. Ε. Σαπουντζάκη, Αναπληρωτή Καθηγητή του εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, υπό την επίβλεψη και καθοδήγηση του οποίου, εκπονήθηκε το παρόν πόννημα κατά το τρίτο και τέταρτο εξάμηνο των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Για τα πιο πάνω καθώς και για το συνεχές ενδιαφέρον του, την προθυμία για την επίλυση οποιασδήποτε απορίας και τις χρήσιμες βιβλιογραφικές υποδείξεις, τον ευχαριστώ θερμά κι από αυτήν εδώ τη θέση.

Αθήνα, Ιούνιος 2009



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΟΡΙΣΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

1.1 ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Το παρόν κεφάλαιο στηρίζεται κυρίως στις βιβλιογραφικές αναφορές των Novozhilov (1953), Bathe (1996) και Παπαδρακάκη (1998).

1.1.1 Ορισμός μετατοπίσεων

Θεωρούμε ένα παραμορφώσιμο σώμα, το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$, καταλαμβάνει την περιοχή Q του τρισδιάστατου χώρου. Θεωρούμε επίσης ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Ox_1x_2x_3$. Η αρχική θέση ενός τυχόντος σημείου P του σώματος περιγράφεται από τις μεταβλητές του χώρου x_1, x_2, x_3 . Σε μια τυχούσα χρονική στιγμή t , η θέση του σώματος μεταβάλλεται με αποτέλεσμα να καταλαμβάνει την περιοχή Q' . Η τελική θέση του σημείου P , συμβολίζεται με $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Οι συντεταγμένες της τελικής θέσης του P θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.1\alpha)$$

$$\xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.1\beta)$$

$$\xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.1\gamma)$$

Υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμες ως προς τις χωρικές συντεταγμένες και τον χρόνο. Η φυσική σημασία αυτής της υπόθεσης είναι ότι στο παραμορφώσιμο σώμα δεν αναπτύσσονται ρωγμές σε καμία χρονική στιγμή. Επιπλέον, απαιτούμε να υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του P και του P' , δηλαδή η μετακίνηση του σώματος να είναι μονοσήμαντη. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως ανεξάρτητες συντεταγμένες του χώρου, αυτές της τελικής θέσης και να εκφράσουμε τις συντεταγμένες της αρχικής θέσης ως εξής:

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (1.1.2\alpha)$$

$$x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (1.1.2\beta)$$

$$x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (1.1.2\gamma)$$

Η περιγραφή της κίνησης του σώματος με βάση τις σχ. (1.1.1) καλείται **περιγραφή Lagrange**, ενώ η περιγραφή με βάση τις σχ. (1.1.2) καλείται περιγραφή Euler. Με την περιγραφή Lagrange εστιάζουμε στη μετακίνηση ενός συγκεκριμένου σωματιδίου $P(x_1, x_2, x_3)$ του σώματος και μελετούμε τη μεταβολή της θέσης του ως προς το χρόνο. Με την περιγραφή Euler εστιάζουμε σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του χώρου $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και μελετούμε τα σωματίδια που διέρχονται από το σημείο αυτό σε κάθε χρονική στιγμή t .

Στην περίπτωση που μελετούμε τη θέση του σώματος σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = σταθ.$, τότε οι παραπάνω σχέσεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Η μετατόπιση του σημείου P ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2 \cdot \mathbf{e}_2 + u_3 \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.1.3)$$

όπου $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν τους άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 του συστήματος αναφοράς αντίστοιχα και u_1, u_2, u_3 οι συνιστώσες της μετατόπισης οι οποίες ορίζονται παρακάτω ως

$$u_1 = \xi_1 - x_1 \quad (1.1.4\alpha)$$

$$u_2 = \xi_2 - x_2 \quad (1.1.4\beta)$$

$$u_3 = \xi_3 - x_3 \quad (1.1.4\gamma)$$

Είναι προφανές ότι $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$ και ότι οι u_1, u_2, u_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμες ως προς τις συντεταγμένες του χώρου.

Το πεδίο των μετατοπίσεων δεν μπορεί να είναι αυθαίρετο. Προκειμένου να ισχύει η αντιστοιχία 1-1 μεταξύ των P, P', αποδεικνύεται ότι πρέπει η ορίζουσα

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ή} \quad J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.1.5)$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σώμα βρίσκεται στην αρχική του θέση, ισχύει $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$J(t=0) = 1 \quad (1.1.6)$$

Επειδή η J πρέπει να είναι συνεχής και ως προς το χρόνο, συμπεραίνουμε από τις σχ. (1.1.5), (1.1.6) ότι θα πρέπει να ισχύει

$$J > 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.1.7)$$

Η σχ. (1.1.7) αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των P, P' για κάθε χρονική στιγμή της παραμόρφωσης/μετακίνησης του σώματος.

Το μητρώο $[\mathbf{X}]$ της σχ. (1.1.5), που ορίζει την ορίζουσα J , καλείται διανυσματική κλίση ή βαθμίδα της παραμόρφωσης (deformation gradient).

1.1.2 Ορισμός παραμορφώσεων

Στην περίπτωση των απολύτως στερεών σωμάτων, η εύρεση των μετατοπίσεων κάθε σωματιδίου αρκεί πλήρως για την κατανόηση της κίνησής του. Σ' ένα παραμορφώσιμο σώμα ωστόσο, οι μετατοπίσεις δεν μπορούν να μας δώσουν αρκετές πληροφορίες για την τελική του κατάσταση. Μπορεί να γνωρίζουμε τις θέσεις όλων των σωματιδίων του σώματος στην παραμορφωμένη κατάσταση αλλά είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε και τις σχετικές θέσεις των σωματιδίων προκειμένου να αποκτήσουμε σαφή εικόνα της παραμόρφωσης που είναι σημαντική για πολλούς κλάδους τεχνικών επιστημών. Επομένως είναι αναγκαίο να μελετήσουμε τις μεταβολές των μηκών και των γωνιών που έχουν υποστεί τα διάφορα στοιχειώδη τμήματα του σώματος. Στη γενική περίπτωση, τα στοιχειώδη τμήματα του σώματος θα υποστούν τόσο μεταβολές μηκών όσο και μεταβολές γωνιών. Η ανάλυση διευκολύνεται αν θεωρήσουμε πολύ μικρά στοιχεία (πρακτικά απειροστά) αντί για στοιχεία πεπερασμένου μήκους (χρήση των εννοιών του διαφορικού λογισμού).

1.1.2.1 Μεταβολή μήκους απειροστού στοιχείου

Θεωρούμε το απειροστό στοιχείο PA του αρχικά απαραμόρφωτου σώματος, μήκους ds . Το P έχει συντεταγμένες $P(x_1, x_2, x_3)$ ενώ το A προφανώς θα έχει συντεταγμένες $A(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Θα είναι

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x_1 + dx_1 - x_1)^2 + (x_2 + dx_2 - x_2)^2 + (x_3 + dx_3 - x_3)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Μετά την παραμόρφωση, το PA βρίσκεται σε νέα θέση, έστω την $P'A'$, όπου $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $A'(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. Στη γενική περίπτωση θα έχουμε τόσο μεταβολή μήκους όσο και μεταβολή της κατεύθυνσης του PA . Το παραμορφωμένο στοιχείο $P'A'$ θα έχει μήκος

$$\begin{aligned} ds' &= \sqrt{(\xi_1 + d\xi_1 - \xi_1)^2 + (\xi_2 + d\xi_2 - \xi_2)^2 + (\xi_3 + d\xi_3 - \xi_3)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow ds'^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1.1.2), (1.1.4), θα έχουμε:

$$d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \cdot dx_3 \Rightarrow d\xi_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \cdot dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot dx_3 \quad (1.1.10\alpha)$$

$$d\xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \cdot dx_3 \Rightarrow d\xi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \cdot dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot dx_3 \quad (1.1.10\beta)$$

$$d\xi_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \cdot dx_3 \Rightarrow d\xi_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \cdot dx_3 \quad (1.1.10\gamma)$$

Με λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\frac{1}{2} \cdot (ds'^2 - ds^2) = \varepsilon_{11} \cdot dx_1^2 + \varepsilon_{22} \cdot dx_2^2 + \varepsilon_{33} \cdot dx_3^2 + 2 \cdot \varepsilon_{12} \cdot dx_1 dx_2 + 2 \cdot \varepsilon_{13} \cdot dx_1 dx_3 + 2 \cdot \varepsilon_{23} \cdot dx_2 dx_3 \quad (1.1.11)$$

όπου από τη σχ. (1.1.11) ορίζουμε ως τροπές (strains) τις ποσότητες

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\beta)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\gamma)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (1.1.12\delta)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.12\epsilon)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.12\zeta)$$

Ο τανυστής παραμορφώσεων Green ορίζεται ως ο πίνακας

$$\left[\boldsymbol{\varepsilon}^G \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.13)$$

όπου ε_{ij} είναι οι συνιστώσες του τανυστή Green έτσι όπως έχουν οριστεί στις εξ. (1.1.12). Οι συνιστώσες ε_{21} , ε_{31} , ε_{32} ορίζονται από τις εξ. (1.1.12δ-ε-ζ) με αντιστροφή των δεικτών. Είναι προφανές ότι θα ισχύει

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} \quad (1.1.14\alpha)$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \quad (1.1.14\beta)$$

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} \quad (1.1.14\gamma)$$

συνεπώς

$$\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \right]^T = \left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \right] \quad (1.1.15)$$

δηλαδή ο τανυστής παραμορφώσεων Green είναι συμμετρικός.

Ορίζουμε ως **μέτρο μεταβολής μήκους του PA** (magnification factor of the extension of line element PA), την ποσότητα

$$MF_A = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{ds'^2}{ds^2} \right) - 1 \right] \quad (1.1.16)$$

Με χρήση των συνημίτονων κατεύθυνσης του στοιχείου PA, $n_1 = \frac{dx_1}{ds}$, $n_2 = \frac{dx_2}{ds}$,

$n_3 = \frac{dx_3}{ds}$, προσδιορίζουμε, με διαίρεση με ds^2 και των δύο μελών της εξ. (1.1.11),

το MF_A συναρτήσει των τροπών ως

$$MF_A = \varepsilon_{11} \cdot n_1^2 + \varepsilon_{22} \cdot n_2^2 + \varepsilon_{33} \cdot n_3^2 + 2 \cdot \varepsilon_{12} \cdot n_1 \cdot n_2 + 2 \cdot \varepsilon_{13} \cdot n_1 \cdot n_3 + 2 \cdot \varepsilon_{23} \cdot n_2 \cdot n_3 \quad (1.1.17)$$

Μπορούμε εύκολα να συσχετίσουμε το MF_A με τη σχετική μεταβολή μήκους του PA (συμβολίζεται με e_A) που θέλουμε να υπολογίσουμε ως

$$e_A = \frac{ds' - ds}{ds} \Rightarrow ds' = (1 + e_A) \cdot ds \quad (1.1.18)$$

$$MF_A = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{ds'^2}{ds^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ds'^2 - ds^2}{ds^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(1 + e_A)^2 \cdot ds^2 - ds^2}{ds^2} \right] \Rightarrow$$

$$MF_A = \frac{1}{2} \cdot \left[(1 + e_A)^2 - 1 \right] \Rightarrow e_A = \sqrt{1 + 2 \cdot MF_A} - 1 \quad (1.1.19)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν με κάποιους περιορισμούς. Επειδή δεν μπορεί να μηδενιστεί το μήκος του στοιχείου, λόγω της απαίτησης της αντιστοιχίας 1-1 μεταξύ παραμορφωμένης και απαραμόρφωτης θέσης, θα έχουμε σαν φυσικό περιορισμό ότι $ds' > 0$. Συνεπώς η σχ. (1.1.18) ισχύει με την προϋπόθεση ότι $e_A > -1$ και η σχ.

(1.1.19) ισχύει με τον περιορισμό $MF_A > -\frac{1}{2}$.

Η σχ. (1.1.19) μπορεί να αναπτυχθεί σε ανάπτυγμα Taylor ως

$$e_A = MF_A - \frac{1}{2} \cdot MF_A^2 + \dots \quad (1.1.20)$$

Με τη βοήθεια της σχ. (1.1.20) μπορούμε να αποδώσουμε φυσική σημασία στο μέτρο μεταβολής μήκους MF_A : Για $MF_A \ll 1$, βρίσκουμε ότι $e_A \approx MF_A$, δηλαδή το

MF_A ισούται περίπου με τη σχετική μεταβολή μήκους της (τυχαίας) ίνας PA . Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική, βρίσκουμε και τη φυσική σημασία των τροπών που έχουμε ορίσει με τις εξ. (1.1.12α), (1.1.12β), (1.1.12γ). Παρατηρούμε, ότι αν στην απαραμόρφωτη κατάσταση θεωρήσουμε μία ίνα με κατεύθυνση κατά τον άξονα Ox_1 , θα είναι $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η σχ. (1.1.17) δίνει $MF_{Ax1} = \varepsilon_{11} \cdot n_1^2 \Rightarrow MF_{Ax1} = \varepsilon_{11}$, ενώ από την εξ. (1.1.20) λαμβάνουμε

$$e_{Ax1} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{11}^2 + \dots \quad (1.1.21)$$

Υποθέτοντας ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, θα έχουμε $\varepsilon_{11} \ll 1 \Rightarrow (\varepsilon_{11})^2 \approx 0$, επομένως η σχ. (1.1.21) θα δώσει

$$e_{Ax1} \approx \varepsilon_{11} \quad (1.1.22)$$

Συμπεραίνουμε ότι η παραμόρφωση ε_{ii} ισούται περίπου με τη μεταβολή μήκους μιας απειροστής ίνας που αρχικά έχει κατεύθυνση κατά τον άξονα Ox_i . Οι τροπές ε_{ii} , όπου $i = 1, 2, 3$ καλούνται ορθές παραμορφώσεις και είναι «υπεύθυνες» για τις μεταβολές μήκους των ινών του σώματος που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

1.1.2.2 Μεταβολή κατεύθυνσης απειροστού στοιχείου

Η κατεύθυνση στο χώρο του PA πριν την παραμόρφωση προσδιορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n}_A = n_{A1} \cdot \mathbf{i} + n_{A2} \cdot \mathbf{j} + n_{A3} \cdot \mathbf{k} \quad (1.1.23)$$

όπου $n_{A1} = \frac{dx_1}{ds}$, $n_{A2} = \frac{dx_2}{ds}$, $n_{A3} = \frac{dx_3}{ds}$. Στην παραμορφωμένη κατάσταση το στοιχείο βρίσκεται στη νέα θέση $P'A'$, με $P' \equiv P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $A' \equiv A'(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. Επομένως η νέα κατεύθυνση του στοιχείου θα είναι η κάτωθι

$$\mathbf{n}_A' = n_{A1}' \cdot \mathbf{i} + n_{A2}' \cdot \mathbf{j} + n_{A3}' \cdot \mathbf{k} \quad (1.1.24)$$

όπου $n_{A1}' = \frac{d\xi_1}{ds'}$, $n_{A2}' = \frac{d\xi_2}{ds'}$, $n_{A3}' = \frac{d\xi_3}{ds'}$. Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, λαμβάνουμε

$$n_i' = \frac{d\xi_i}{ds} \cdot \frac{ds}{ds'}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1.25)$$

Από τις εξ. (1.1.10) έχουμε

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \cdot \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_1}{ds} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) n_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} n_3 \quad (1.1.26\alpha)$$

$$\frac{d\xi_2}{ds} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{ds} + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_2}{ds} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) n_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} n_3 \quad (1.1.26\beta)$$

$$\frac{d\xi_3}{ds} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{ds} + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \cdot \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_3}{ds} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} n_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) n_3 \quad (1.1.26\gamma)$$

Η εξ. (1.1.18) δίνει

$$ds' = (1 + e_A) \cdot ds \Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + e_A} \xrightarrow{(1.1.19)} \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 2 \cdot MF_A} - 1} \Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \quad (1.1.27)$$

Με τη βοήθεια των εξ. (1.1.26), (1.1.27) μπορούμε να προσδιορίσουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης της τελικής θέσης συναρτήσει των μετατοπίσεων και των αρχικών (γνωστών) συνημίτονων κατεύθυνσης ως

$$n_{A1}' = \frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_1 + \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_2 + \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_3 \quad (1.1.28\alpha)$$

$$n_{A2}' = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_1 + \frac{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_2 + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_3 \quad (1.1.28\beta)$$

$$n_{A3}' = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_1 + \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_2 + \frac{1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + 2 \cdot MF_A}} \cdot n_3 \quad (1.1.28\gamma)$$

Η φυσική σημασία των τροπών ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} μπορεί να ευρεθεί εάν μελετήσουμε τη μεταβολή της γωνίας που υφίστανται 2 στοιχεία PA , PB . Έστω θ , η γωνία που σχηματίζουν αρχικά τα στοιχεία, και θ' η τελική γωνία (η γωνία μεταξύ των $P'A'$, $P'B'$). Θεωρούμε τον παρακάτω γνωστό τύπο του εσωτερικού γινομένου μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων κατεύθυνσης

$$\mathbf{n}_A' \cdot \mathbf{n}_B' = \|\mathbf{n}_A'\| \cdot \|\mathbf{n}_B'\| \cdot \cos \theta' = 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta' \Rightarrow \cos \theta' = \mathbf{n}_A' \cdot \mathbf{n}_B' \Rightarrow \cos \theta' = n_{A1}' \cdot n_{B1}' + n_{A2}' \cdot n_{B2}' + n_{A3}' \cdot n_{B3}' \quad (1.1.29)$$

Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα θεωρούμε την εξής υποπερίπτωση: Παίρνουμε τα PA , PB να κατευθύνονται προς τους άξονες Ox_1 , Ox_2 αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι θα είναι $(n_{A1}, n_{A2}, n_{A3}) = (1, 0, 0)$, $(n_{B1}, n_{B2}, n_{B3}) = (0, 1, 0)$, $MF_A = \varepsilon_{11}$, $MF_B = \varepsilon_{22}$ και $\theta = 90^\circ$. Οι εξ. (1.1.28) δίνουν

$$n_{A1}' = \frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{11}}}, \quad n_{B1}' = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\alpha)$$

$$n_{A2}' = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{11}}}, \quad n_{B2}' = \frac{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\beta)$$

$$n_{A3}' = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{11}}}, \quad n_{B3}' = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\gamma)$$

Αντικαθιστώντας στη σχ. (1.1.29) και εκτελώντας τις πράξεις, λαμβάνουμε:

$$\cos \theta' = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{11}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.31)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ε_{12} (εξ. (1.1.12δ)), τελικά λαμβάνουμε

$$\cos \theta' = \frac{2 \cdot \varepsilon_{12}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{11}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.32)$$

Επομένως αν υποθέσουμε ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές θα έχουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις:

- οι ορθές παραμορφώσεις είναι μικρές, επομένως από τις σχ. (1.1.19), (1.1.21) προκύπτει $\varepsilon_{11} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{11}}} \approx 1$ και $\varepsilon_{22} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_{22}}} \approx 1$
- οι γωνίες στροφής μεταξύ των δύο στοιχείων είναι μικρές, επομένως $\sin \theta' \approx \theta'$. Όμως ισχύει $\cos \theta' = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right)$, άρα $\cos \theta' \approx \frac{\pi}{2} - \theta' \Rightarrow \cos \theta' \approx \theta - \theta'$, αφού έχουμε θεωρήσει ότι η αρχική γωνία ισούται με $\frac{\pi}{2}$ (90°)

Συνεπώς η εξ. (1.1.32) θα γραφτεί ως

$$\theta - \theta' \approx 2 \cdot \varepsilon_{12} \quad (1.1.33)$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η τροπή ε_{12} ισούται περίπου με το μισό της μεταβολής της κάθετης γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ 2 ινών που αρχικά είναι παράλληλες προς τους άξονες Ox_1, Ox_2 . Με παρόμοια συλλογιστική μπορούμε γενικά να αποδείξουμε ότι το διπλάσιο της τροπής ε_{ij} (με $i \neq j$) ισούται περίπου με τη μεταβολή της (κάθετης) γωνίας μεταξύ 2 ινών που αρχικά είναι παράλληλες προς τους άξονες Ox_i και Ox_j .

Ορίζουμε ως

$$\gamma_{ij} = 2 \cdot \varepsilon_{ij}, \text{ όπου } i \neq j \quad (1.1.34)$$

Οι ποσότητες γ_{ij} καλούνται διατμητικές παραμορφώσεις και είναι «υπεύθυνες» για τις μεταβολές των (κάθετων) γωνιών μεταξύ των ινών που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

1.1.2.3 Μεταβολή όγκου απειροστού στοιχείου

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε την αλλαγή όγκου και επιφάνειας που υφίστανται κατά την παραμόρφωση τα (απειροστά) στοιχεία του σώματος. Πριν την παραμόρφωση θεωρούμε ένα κυβικό στοιχείο του σώματος με πλευρές παράλληλες στους άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Το στοιχείο προφανώς θα έχει όγκο $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Για να βρούμε τον όγκο dV' του στοιχείου μετά την παραμόρφωση, εξετάζουμε τις μεταβολές που έχουν υποστεί οι ακμές του: Η πλευρά $\mathbf{OA}^T = (dx_1, 0, 0)$ μετατρέπεται στην πλευρά $\mathbf{O'A}'$

$$\mathbf{O'A}'^T = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot dx_1, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \cdot dx_1, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \cdot dx_1 \right) \quad (1.1.35\alpha)$$

Ο παραπάνω τύπος προέκυψε με την εφαρμογή των σχέσεων (1.1.10) που συνδέουν τις προβολές του στοιχείου στους 3 άξονες του συστήματος αναφοράς πριν και μετά την παραμόρφωση. Εξετάζοντας και τις άλλες 2 ακμές που ορίζουν τον κύβο, λαμβάνουμε για $\mathbf{OB}^T = (0, dx_2, 0)$ και $\mathbf{OG}^T = (0, 0, dx_3)$ τις σχέσεις

$$\mathbf{O'B}'^T = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \cdot dx_2, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \cdot dx_2, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \cdot dx_2 \right) \quad (1.1.35\beta)$$

$$\mathbf{O'G}'^T = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \cdot dx_3, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \cdot dx_3, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \cdot dx_3 \right) \quad (1.1.35\gamma)$$

Ο όγκος dV' του παραλληλεπίπεδου στην παραμορφωμένη κατάσταση θα δίνεται από το γνωστό τύπο από την αναλυτική γεωμετρία

$$dV' = \mathbf{O'A}' \cdot (\mathbf{O'B}' \times \mathbf{O'G}') \quad (1.1.36)$$

όπου το σύμβολο \times δηλώνει εξωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Εκτελώντας τις πράξεις στην παραπάνω σχέση, λαμβάνουμε

$$dV' = J \cdot dV \quad (1.1.37)$$

όπου J είναι η ορίζουσα της βαθμίδας της παραμόρφωσης (σχ. (1.1.5)).

1.1.2.4 Μεταβολή επιφάνειας απειροστού στοιχείου

Θεωρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA πριν την παραμόρφωση και το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} επί αυτής. Μετά την παραμόρφωση έστω ότι η επιφάνεια θα έχει νέο εμβαδόν dA' με κάθετο διάνυσμα \mathbf{n}' . Για να συσχετίσουμε την παραμορφωμένη επιφάνεια με την αρχική, θα προσδιορίσουμε την αλλαγή του όγκου που υφίσταται ένα στοιχείο που ορίζεται από την επιφάνεια και ένα τυχαίο απειροστό διάνυσμα $\mathbf{n}_1^T = (dx_1, dx_2, dx_3)$. Ο όγκος του στοιχείου πριν την παραμόρφωση θα ισούται προφανώς με

$$dV = \mathbf{n}_1 \cdot (dA\mathbf{n}) \quad (1.1.38)$$

Μετά την παραμόρφωση θα έχουν μεταβληθεί (στη γενικότερη περίπτωση) τόσο το \mathbf{n}_1 , όσο και τα χαρακτηριστικά (εμβαδόν, προσανατολισμός) της επιφάνειας. Ο όγκος του νέου στοιχείου θα είναι προφανώς

$$dV' = \mathbf{n}_1' \cdot (dA'\mathbf{n}') \quad (1.1.39)$$

όπου

$$(\mathbf{n}_1')^T = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3).$$

Με τη βοήθεια των σχ. (1.1.5) και (1.1.10) συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα της παραμόρφωσης $[\mathbf{X}]$ έχει την ιδιότητα να συνδέει το (τυχαίο) διάνυσμα πριν την παραμόρφωση με το διάνυσμα μετά την παραμόρφωση. Πιο συγκεκριμένα ισχύει

$$\mathbf{n}_1' = [\mathbf{X}] \cdot \mathbf{n}_1 \quad (1.1.40)$$

Από την εξ. (1.1.37) έχουμε

$$\begin{aligned} dV' = J \cdot dV &\Rightarrow \mathbf{n}_1' \cdot (dA'\mathbf{n}') = J\mathbf{n}_1 \cdot (dA\mathbf{n}) \xrightarrow{(1.1.40)} \\ &\Rightarrow [\mathbf{X}] \cdot \mathbf{n}_1 \cdot (dA'\mathbf{n}') = J\mathbf{n}_1 \cdot (dA\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (1.1.41)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{n}_1 , τελικά λαμβάνουμε

$$dA'\mathbf{n}' = J[\mathbf{X}]^{-T} \cdot (dA\mathbf{n}) \quad (1.1.42)$$

Παρατηρούμε ότι η ο υπολογισμός της βαθμίδας παραμόρφωσης αρκεί για τον προσδιορισμό της μεταβολής της στοιχειώδους επιφάνειας από την απαραμόρφωτη στην παραμορφωμένη κατάσταση.

1.1.2.5 Ορισμός του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων

Στις προηγούμενες ενότητες δόθηκε η φυσική σημασία του τανυστή παραμορφώσεων Green η οποία προκύπτει με την υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές. Με βάση αυτήν την υπόθεση, μπορούμε σε όλες τις σχέσεις που υπεισέρχονται συνιστώσες του τανυστή να εφαρμόσουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις

$$\varepsilon_{ij} \ll 1 \quad (1.1.43)$$

$$\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \approx 0, \quad \forall i, j \quad (1.1.44)$$

Μια παραδοχή η οποία περιορίζει πολύ περισσότερο την κλάση των προβλημάτων που μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά, είναι η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων. Με βάση αυτή την υπόθεση, όλοι οι μη γραμμικοί όροι των μετατοπίσεων που υπεισέρχονται στις σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων (εξ. (1.1.12)) θεωρούνται πολύ μικροί και κατά συνέπεια μπορούν να αγνοηθούν. Έτσι μπορούμε να γραμμικοποιήσουμε τις σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων που πλέον διαμορφώνονται ως:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (1.1.45\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (1.1.45\beta)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.1.45\gamma)$$

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (1.1.45\delta)$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.45\epsilon)$$

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.45\zeta)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε τον **απειροστικό τανυστή παραμορφώσεων** (infinitesimal strain tensor) σε περιγραφή κατά Lagrange ως

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.46)$$

όπου τα ε_{ij} λαμβάνονται από τις σχ. (1.1.45)

Αν υποβάλλουμε ένα στοιχείο σε στροφή στερεού σώματος και χρησιμοποιήσουμε τον απειροστικό τανυστή παραμορφώσεων, θα υπολογίσουμε μη μηδενική παραμόρφωση, αποτέλεσμα που φυσικά είναι λανθασμένο αφού είναι προφανές ότι οποιαδήποτε κίνηση (μετατόπιση ή στροφή) στερεού σώματος δεν προκαλεί παραμόρφωση. Συμπερασματικά, ο απειροστικός τανυστής δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μονάχα στην περίπτωση που η αρχική και η τελική θέση του σώματος διαφέρουν ελάχιστα. Προφανώς, αν σ' ένα σώμα ισχύει η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων εξασφαλίζεται ότι και οι παραμορφώσεις θα είναι μικρές. Ωστόσο το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκη, γεγονός που καθίσταται σαφές από το παραπάνω παράδειγμα της στροφής στερεού σώματος όπου η αρχική και η τελική θέση του στοιχείου μπορεί να διαφέρουν σημαντικά αλλά η παραμόρφωση του (μεταβολές μηκών και γωνιών) είναι μηδενική.

1.2 ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΣΕΩΝ

1.2.1 Ορισμός διανύσματος τάσεως

Στις παρακάτω ενότητες, η χρονική στιγμή που αναφέρονται τα διάφορα μεγέθη θα δηλώνεται με χρήση του άνω αριστερού ενδείκτη. Έτσι, π.χ. ο συμβολισμός ${}^I \boldsymbol{\varepsilon}$ θα δηλώνει τον τανυστή παραμορφώσεων τη χρονική στιγμή $t = t_I$.

Θεωρούμε ένα σώμα την (τυχαία) χρονική στιγμή $t = t_I$ πάνω στο οποίο ασκούνται κάποιες δυνάμεις. Θεωρούμε επίσης μία τυχαία τομή η οποία χωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα Q_1, Q_2 καθώς επίσης και μια στοιχειώδη επιφάνεια $d^I A$ στο σημείο $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ επί της τομής, με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ${}^I \mathbf{n}$ για το τμήμα Q_1 και $-{}^I \mathbf{n}$ για το τμήμα Q_2 . Ορίζουμε ως διάνυσμα τάσεως ή ελκυστή (traction vector) ${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n})$ που αντιστοιχεί στο διάνυσμα ${}^I \mathbf{n}$, στο σημείο P , την ποσότητα

$${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) = \lim_{d^I A \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}}{d^I A} \quad (1.2.1)$$

όπου $d^I \mathbf{p}$ είναι η συνιστάμενη (επιφανειακή) δύναμη που ασκείται επί της στοιχειώδους επιφάνειας $d^I A$.

Από την αρχή δράσης – αντίδρασης του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκείται στο Q_1 (επί της $d^I A$, στο σημείο P) θα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκείται στο Q_2 . Επομένως από τον ορισμό της (1.2.1) έπεται κατευθείαν ότι

$${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) = -{}^I \mathbf{t}(-{}^I \mathbf{n}) \quad (1.2.2)$$

Η παραπάνω βασική σχέση είναι γνωστή ως **αρχή του Cauchy**.

Από τον παραπάνω ορισμό καθίσταται σαφές ότι ο ελκυστής δεν αποτελεί διανυσματικό πεδίο με την κλασική έννοια, μιας και σε κάθε σημείο του χώρου που καταλαμβάνει το σώμα δεν αντιστοιχίζεται ένας και μόνο ένας ελκυστής. Για να προσδιοριστεί ο ελκυστής πρέπει να δοθούν τόσο το σημείο στο οποίο αναφέρεται όσο και το κάθετο διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας που διέρχεται από αυτό. Κατά συνέπεια, σε κάποιο σημείο του σώματος μπορούν να οριστούν άπειροι ελκυστές, ο καθένας από τους οποίους θα αντιστοιχίζεται σε συγκεκριμένη προσανατολισμένη στοιχειώδη επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο.

Εκτός από τις επιφανειακές δυνάμεις (traction forces) που υπεισέρχονται στον ορισμό του διανύσματος τάσεως, πολλές φορές στα σώματα ασκούνται και μαζικές δυνάμεις (body forces), δηλαδή δυνάμεις που ασκούνται απευθείας πάνω στους «κόκκους» του σώματος. Τέτοιες δυνάμεις δεν μπορούν να «εμφανιστούν» στη διεπιφάνεια κάποιας τομής στο σώμα, χαρακτηρίζονται δε ως δυνάμεις πεδίου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μαζικής δύναμης είναι το ίδιο βάρος του σώματος. Θεωρώντας ένα στοιχειώδη όγκο d^1V σε ένα σημείο $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ του σώματος, ορίζουμε ως μαζική δύναμη ανά μονάδα όγκου την ποσότητα

$${}^1\mathbf{f} = \lim_{d^1V \rightarrow 0} \frac{d^1\mathbf{p}_f}{d^1V} \quad (1.2.3)$$

όπου $d^1\mathbf{p}_f$ είναι η συνισταμένη των μαζικών δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχειώδη όγκο d^1V . Όπως είναι προφανές, το ${}^1\mathbf{f}$ αποτελεί διανυσματικό πεδίο (σε αντίθεση με τον ελκυστή ${}^1\mathbf{t}$).

1.2.2 Ορισμός τανυστή τάσεως Cauchy

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα αναφοράς με το οποίο περιγράφουμε την κίνηση είναι σταθερό και δε μεταβάλλεται με το χρόνο. Θεωρούμε μία στοιχειώδη επιφάνεια d^1A κάθετη στον άξονα Ox_1 . Προφανώς ισχύει ${}^1\mathbf{n}^T = \mathbf{e}_1^T = (1, 0, 0)$, όπου \mathbf{e}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει τον άξονα Ox_1 . Ορίζουμε ως ${}^1\sigma_{1j}$, $j=1,2,3$ τις συνιστώσες του ελκυστή ${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1)$, δηλαδή ισχύει η παρακάτω σχέση

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1)^T = ({}^1\sigma_{11}, {}^1\sigma_{12}, {}^1\sigma_{13}) \quad (1.2.4)$$

Γενικεύοντας, μπορούμε να θεωρήσουμε και τις συνιστώσες των ελκυστών που αντιστοιχούν και στους άλλους 2 άξονες του συστήματος αναφοράς. Συνολικά θα έχουμε

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) = \sigma_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.2.5a)$$

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_2) = \sigma_{21} \cdot \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{23} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.2.5b)$$

$${}^I \mathbf{t}(\mathbf{e}_3) = \sigma_{31} \cdot \mathbf{e}_1 + \sigma_{32} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.2.5\gamma)$$

Ο τανυστής πραγματικών τάσεων ή **τανυστής τάσεων Cauchy** (true or Cauchy stress tensor) $[{}^I \boldsymbol{\sigma}]$ ορίζεται ως

$$[{}^I \boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

όπου για εποπτικούς λόγους παραλείψαμε το χρονικό ενδείκτη από τα σ_{ij} . Συμπερασματικά η συνιστώσα σ_{ij} , $i=1,2,3$, $j=1,2,3$ του τανυστή ορίζεται ως το πηλίκο της στοιχειώδους δύναμης που δρα κατά τη κατά την κατεύθυνση του Ox_j διά τη στοιχειώδη επιφάνεια $d^I A$ με (μοναδιαίο) κάθετο διάνυσμα \mathbf{e}_i . Σε κάθε σημείο του σώματος αντιστοιχεί ένας και μόνο ένας τανυστής Cauchy (σε δεδομένη χρονική στιγμή).

1.2.3 Εξισώσεις ισορροπίας

Πριν συνεχίσουμε με την περιγραφή των υπόλοιπων τανυστών τάσεων που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία, είναι απαραίτητο να διατυπώσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσεων των ελκυστών και του τανυστή Cauchy που έχουμε ήδη ορίσει. Για να συσχετίσουμε τον (τυχαίο) ελκυστή ${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n})$ με τις συνιστώσες του τανυστή Cauchy $[{}^I \boldsymbol{\sigma}]$, εξετάζουμε την ισορροπία ενός στοιχειώδους τετραέδρου που διαθέτει για πλευρές τις στοιχειώδεις επιφάνειες που είναι κάθετες στα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 και ${}^I \mathbf{n}$. Υποθέτοντας ότι οι συνθήκες είναι ψευδοστατικές, δηλαδή ότι οι αδρανειακές δυνάμεις μπορούν να αγνοηθούν, και αμελώντας τους όρους των μαζικών δυνάμεων που είναι μικρότερης τάξης από τους αντίστοιχους όρους των επιφανειακών δυνάμεων, λαμβάνουμε τις παρακάτω σχέσεις ισορροπίας

$${}^I t_1 = \sigma_{11} \cdot {}^I n_1 + \sigma_{21} \cdot {}^I n_2 + \sigma_{31} \cdot {}^I n_3 \quad (1.2.7\alpha)$$

$${}^I t_2 = \sigma_{12} \cdot {}^I n_1 + \sigma_{22} \cdot {}^I n_2 + \sigma_{32} \cdot {}^I n_3 \quad (1.2.7\beta)$$

$${}^I t_3 = \sigma_{13} \cdot {}^I n_1 + \sigma_{23} \cdot {}^I n_2 + \sigma_{33} \cdot {}^I n_3 \quad (1.2.7\gamma)$$

όπου ${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n})^T = ({}^I t_1, {}^I t_2, {}^I t_3)$ και ${}^I \mathbf{n}^T = ({}^I n_1, {}^I n_2, {}^I n_3)$. Οι εξ. (1.2.7) μπορούν να διατυπωθούν συνοπτικότερα με διανυσματική γραφή ως

$${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) = [{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \cdot {}^I \mathbf{n} \quad (1.2.8)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όπως θα δούμε είναι χρήσιμες στην διατύπωση συνοριακών συνθηκών προβλημάτων μηχανικής παραμορφώσιμων σωμάτων.

Αποκόπτουμε έναν τυχαίο όγκο 1V από το σώμα (στην παραμορφωμένη κατάσταση – τη χρονική στιγμή $t = t_I$), που περικλείεται από την επιφάνεια ${}^1A = \partial {}^1V$. Ισορροπία έχουμε όταν η συνισταμένη των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται επί του 1V μηδενίζονται, πάντα υπό τη θεώρηση ψευδοστατικών συνθηκών.

Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων γράφεται συναρτήσει των ελκυστών ${}^1\mathbf{t}$ (ασκούνται στην 1A) και των ανηγμένων μαζικών δυνάμεων ${}^1\mathbf{f}$ (ασκούνται στον 1V) ως εξής:

$$\int_{{}^1A} {}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) d{}^1A + \int_{{}^1V} {}^1\mathbf{f} d{}^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.9)$$

Με τη βοήθεια της σχ. (1.2.8) η εξίσωση ισορροπίας δίνει

$$\int_{{}^1A} \left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot {}^1\mathbf{n} d{}^1A + \int_{{}^1V} {}^1\mathbf{f} d{}^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.10)$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss (Gauss divergence theorem) της μαθηματικής ανάλυσης για κλειστά χωρία, το επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξ. (1.2.10) μετατρέπεται σε τριπλό ως

$$\int_{{}^1V} \mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \right) d{}^1V + \int_{{}^1V} {}^1\mathbf{f} d{}^1V = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{{}^1V} \left[\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \right) + {}^1\mathbf{f} \right] d{}^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.11)$$

Επειδή η εξίσωση ισορροπίας ισχύει για οποιοδήποτε όγκο 1V του σώματος, συμπεραίνουμε ότι η σχ. (1.2.11) οδηγεί στην εξίσωση

$$\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \right) + {}^1\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.2.12)$$

Το σύστημα των εξ. (1.2.12) αποτελούν τις επικρατούσες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην κλασική τους μορφή. Αναλυτικά αυτές οι εξισώσεις είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \xi_3} + {}^1f_1 = 0 \quad (1.2.13\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \xi_3} + {}^1f_2 = 0 \quad (1.2.13\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_3} + {}^1f_3 = 0 \quad (1.2.13\gamma)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι οι παράγωγοι στις παραπάνω εξισώσεις είναι ως προς την τρέχουσα διαμόρφωση της χρονικής στιγμής που εξετάζουμε (μεταβλητές θέσης ξ_I ,

ξ_2, ξ_3) και όχι ως προς την αρχική διαμόρφωση (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3). Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εξαχθούν εναλλακτικά, αν εξετάσουμε την ισορροπία ενός στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τους άξονες του συστήματος αναφοράς και με μήκη πλευρών $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$.

Η εξίσωση ισορροπίας των ροπών ως προς τυχαίο σημείο K διατυπώνεται ως εξής:

$$\int_{^I A} {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) \times \mathbf{K} E d^I A + \int_{^I V} {}^I \mathbf{f} \times \mathbf{K} B d^I V = \mathbf{0} \quad (1.2.14)$$

όπου το σύμβολο \times δηλώνει εξωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων, $E \in {}^I A$ είναι σημείο που διατρέχει το επιφανειακό σύνορο του όγκου και $B \in {}^I V$ σημείο που διατρέχει τον όγκο ${}^I V$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τις εξ. (1.2.9), (1.2.13), η εξίσωση (1.2.14) έπειτα από κάποια άλγεβρα, καταλήγει στη σχέση

$$[{}^I \boldsymbol{\sigma}] = [{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \quad (1.2.15)$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι ο τανυστής τάσεων Cauchy είναι συμμετρικός. Αναλυτικά θα έχουμε

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \quad (1.2.16\alpha)$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} \quad (1.2.16\beta)$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (1.2.16\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες τάσεων περιορίζονται από εννιά σε έξι.

1.2.4 Ορισμός του πρώτου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff

Ο ορισμός του 1ου τανυστή Piola – Kirchhoff βοηθά στη διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας του σώματος συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της αρχικής διαμόρφωσής του ($t = 0$). Η εξ. ισορροπίας (1.2.9) της τρέχουσας διαμόρφωσης $t = t_1$ δίνει

$$\int_{^I A} {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) d^I A + \int_{^I V} {}^I \mathbf{f} d^I V = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{{}^0 A} {}^I \mathbf{t} \frac{d^I A}{d^0 A} d^0 A + \int_{{}^0 V} {}^I \mathbf{f} \frac{d^I V}{d^0 V} d^0 V = \mathbf{0} \quad (1.2.17)$$

Για να διευκολυνθούμε στην ανάλυση, ορίζουμε δύο επιπλέον μεγέθη, τον ελκυστή ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n})$ και το διάνυσμα των μαζικών δυνάμεων ανά μονάδα απαραμόρφωτου όγκου ${}^I \mathbf{f}$ ως

$${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = \lim_{d^0 A \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}}{d^0 A} \quad (1.2.18\alpha)$$

$${}^I \mathbf{f} = \lim_{d^0 V \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}_f}{d^0 V} \quad (1.2.18\beta)$$

Από τους ορισμούς (1.2.1) και (1.2.18α) προκύπτει κατευθείαν η βασική ιδιότητα

$${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) d^0 A = {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) d^I A \Rightarrow {}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) \frac{d^I A}{d^0 A} \quad (1.2.19\alpha)$$

καθώς επίσης από τους ορισμούς (1.2.3) και (1.2.18β) λαμβάνουμε

$${}^I \mathbf{f} = {}^I \mathbf{f} \frac{d^I V}{d^0 V} \quad \text{ή} \quad {}^I \mathbf{f} = J {}^I \mathbf{f} \quad (1.2.19\beta)$$

αφού από την εξ. (1.1.27) έχουμε ότι $d^I V = J d^0 V$. Η εξίσωση ισορροπίας (1.2.17) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$\int_{{}^0 A} {}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) d^0 A + \int_{{}^0 V} {}^I \mathbf{f} d^0 V = \mathbf{0} \quad (1.2.20)$$

Η σχέση (1.2.19α) δίνει

$${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) \frac{d^I A}{d^0 A} \Rightarrow {}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = [{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \cdot {}^I \mathbf{n} \frac{d^I A}{d^0 A} \quad (1.2.21)$$

και με τη βοήθεια της εξ. (1.1.42) που συνδέει την απαραμόρφωτη με την παραμορφωμένη επιφάνεια, τελικά λαμβάνουμε

$${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = J [{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \cdot [{}^I \mathbf{X}]^{-T} \cdot {}^0 \mathbf{n} \quad \text{ή} \quad {}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = J [{}^I \boldsymbol{\sigma}] \cdot [{}^I \mathbf{X}]^{-T} \cdot {}^0 \mathbf{n} \quad (1.2.22)$$

αφού ο τανυστής τάσεων Cauchy είναι συμμετρικός.

Ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff $\left[\begin{smallmatrix} I \\ \theta \end{smallmatrix} \mathbf{P} \right]$ ορίζεται ως

$$\left[\begin{smallmatrix} I \\ \theta \end{smallmatrix} \mathbf{P} \right] = J [{}^I \boldsymbol{\sigma}] \cdot [{}^I \mathbf{X}]^{-T} \quad (1.2.23)$$

Από την εξ. (1.2.22) είναι φανερό ότι ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff συνδέει το κάθετο διάνυσμα ${}^0 \mathbf{n}$ της (τυχούσας) απαραμόρφωτης επιφάνειας $d^0 A$ με τον ελκυστή ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n})$, δηλαδή ισχύει

$${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = \left[\begin{smallmatrix} I \\ \theta \end{smallmatrix} \mathbf{P} \right] \cdot {}^0 \mathbf{n} \quad (1.2.24)$$

Η εξ. ισορροπίας (1.2.20) γράφεται συναρτήσει του τανυστή $\left[\begin{smallmatrix} I \\ \theta \end{smallmatrix} \mathbf{P} \right]$ ως

$$\int_{\partial A} \left[\begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} \mathbf{P} \right] \cdot \mathbf{n} d^0 A + \int_{\partial V} \begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} \mathbf{f} d^0 V = \mathbf{0} \quad (1.2.25)$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης Gauss λαμβάνουμε

$$\int_{\partial V} \mathbf{div} \left(\left[\begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} \mathbf{P} \right] \right) d^0 V + \int_{\partial V} \begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} \mathbf{f} d^0 V = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{\partial V} \left[\mathbf{div} \left(\left[\begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} \mathbf{P} \right] \right) + \begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} \mathbf{f} \right] d^0 V = \mathbf{0} \quad (1.2.26)$$

Επειδή η ισορροπία πρέπει να ισχύει ανεξαρτήτως του όγκου ∂V που εξετάζουμε, η τελική μορφή της εξίσωσης ισορροπίας σε διαφορική (ισχυρή) μορφή θα είναι

$$\mathbf{div} \left(\left[\begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} \mathbf{P} \right] \right) + \begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.2.27)$$

ή με αναλυτική γραφή, προκύπτει το παρακάτω σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων (παραλείπονται για εποπτικούς λόγους οι αριστεροί ενδείκτες στα $\begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} P_{ij}$)

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{13}}{\partial x_3} + \begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} f_1 = 0 \quad (1.2.28\alpha)$$

$$\frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_3} + \begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} f_2 = 0 \quad (1.2.28\beta)$$

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{33}}{\partial x_3} + \begin{matrix} I \\ \theta \end{matrix} f_3 = 0 \quad (1.2.28\gamma)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι με τον 1ο τανυστή Piola – Kirchhoff μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της αρχικής διαμόρφωσης ή με άλλα λόγια να χρησιμοποιήσουμε περιγραφή Lagrange. Επίσης από την εξ. (1.2.23) καθίσταται σαφές ότι ο συγκεκριμένος τανυστής (σε αντίθεση με τον τανυστή Cauchy) δεν είναι κατ' ανάγκην συμμετρικός αφού αποτελεί γινόμενο ενός συμμετρικού τανυστή και της βαθμίδας παραμόρφωσης η οποία δεν είναι εν γένει συμμετρική.

1.2.5 Η αρχή δυνατών έργων

Προτού ορίσουμε τον 2ο τανυστή Piola – Kirchhoff που είναι πολύ χρήσιμος στη μελέτη της μη γραμμικής συμπεριφοράς των παραμορφώσιμων σωμάτων, πρέπει να διατυπώσουμε την αρχή δυνατών έργων που αποτελεί τη βάση της αριθμητικής αντιμετώπισης πολλών προβλημάτων της μηχανικής.

Η αρχή των δυνατών έργων αποτελεί μία εναλλακτική διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας που διέπουν τη συμπεριφορά των σωμάτων. Το βασικό πλεονέκτημά της έναντι των εξισώσεων ισορροπίας που έχουν ήδη διατυπωθεί είναι ότι πρόκειται για βαθμωτή εξίσωση, σε αντίθεση με τις εξισώσεις που έχουμε ήδη εξετάσει που είναι σε διανυσματική μορφή.

Θεωρούμε ένα σώμα στην παραμορφωμένη του κατάσταση τη χρονική στιγμή $t = t_1$. Για τον τυχαίο όγκο 1V που αποκόπτουμε από το σώμα, έχουμε ήδη διατυπώσει την εξίσωση ισορροπίας σε ολοκληρωτική μορφή (εξ. (1.2.21)):

$$\int_{i_V} \left[\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \right) + {}^1\mathbf{f} \right] d{}^1V = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{i_V} \left[\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \right) + {}^1\mathbf{f} \right] d{}^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.29)$$

Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο πεδίο μετατοπίσεων (στο χώρο που καταλαμβάνει το σώμα στην τρέχουσα διαμόρφωση)

$$\left(\delta {}^1\mathbf{r} \right)^T = \left(\delta {}^1u_1, \delta {}^1u_2, \delta {}^1u_3 \right) \quad (1.2.30)$$

το οποίο ωστόσο σέβεται τις κινηματικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, τότε λαμβάνουμε την ασθενή μορφή της διανυσματικής εξίσωσης ισορροπίας (1.2.29)

$$\int_{i_V} \left[\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \right) + {}^1\mathbf{f} \right]^T \cdot \delta {}^1\mathbf{r} d{}^1V = 0 \quad (1.2.31)$$

όπου στα παραπάνω το $\delta(\cdot)$ αποτελεί το γνωστό τελεστή δ του λογισμού των μεταβολών (calculus of variations). Πρέπει να τονιστεί ότι η εξίσωση (1.2.31) είναι βαθμωτή μιας και στο ολοκλήρωμα έχουμε εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta {}^1\mathbf{r} \right) = \left[\mathbf{div} \left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \right]^T \cdot \delta {}^1\mathbf{r} + \mathbf{tr} \left[\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \left[{}^1\nabla \delta {}^1\mathbf{r} \right] \right] \quad (1.2.32)$$

η εξ. (1.2.31) μετασχηματίζεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} & \int_{i_V} \left\{ \mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta {}^1\mathbf{r} \right) - \mathbf{tr} \left[\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \left[{}^1\nabla \delta {}^1\mathbf{r} \right] \right] + {}^1\mathbf{f}^T \cdot \delta {}^1\mathbf{r} \right\} d{}^1V = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_{i_V} \left\{ \mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta {}^1\mathbf{r} \right) + {}^1\mathbf{f}^T \cdot \delta {}^1\mathbf{r} \right\} d{}^1V = \int_{i_V} \mathbf{tr} \left[\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \left[{}^1\nabla \delta {}^1\mathbf{r} \right] \right] d{}^1V \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης Gauss για το αριστερά μέλος της παραπάνω εξίσωσης, λαμβάνουμε

$$\int_{i_A} \left\{ \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \cdot {}^1\mathbf{n} \right)^T \cdot \delta {}^1\mathbf{r} \right\} d{}^1A + \int_{i_V} \left[{}^1\mathbf{f}^T \cdot \delta {}^1\mathbf{r} \right] d{}^1V = \int_{i_V} \mathbf{tr} \left[\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \left[{}^1\nabla \delta {}^1\mathbf{r} \right] \right] d{}^1V \quad (1.2.34\alpha)$$

ή μπορούμε εναλλακτικά να γράψουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.2.8)

$$\int_{A'} \left[{}^1 \mathbf{t} ({}^1 \mathbf{n})^T \cdot \delta {}^1 \mathbf{r} \right] d^1 A + \int_{V'} \left[{}^1 \mathbf{f}^T \cdot \delta {}^1 \mathbf{r} \right] d^1 V = \int_{V'} \mathbf{tr} \left[\left[{}^1 \boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \left[{}^1 \nabla \delta {}^1 \mathbf{r} \right] \right] d^1 V \quad (1.2.34\beta)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, που καλείται **εξίσωση χωρικού δυνατού έργου** (spatial virtual work equation), το αριστερά μέλος καλείται χωρικό δυνατό εξωτερικό έργο (spatial external virtual work) και συμβολίζεται με $\delta {}^1 W_{ext}$ ενώ το δεξιά μέλος καλείται χωρικό δυνατό εσωτερικό έργο (spatial internal virtual work) και συμβολίζεται με $\delta {}^1 W_{int}$.

Εξετάζοντας τη διατύπωση της αρχής δυνατών έργων, συμπεραίνουμε ότι οι παραπάνω χαρακτηρισμοί είναι εύστοχοι αφού στην ουσία οι ποσότητες που υπεισέρχονται στα ολοκληρώματα είναι έργα επιφανειακών και μαζικών δράσεων ανηγμένες ως προς τις επιφάνειες και τους όγκους επί των οποίων ασκούνται αντίστοιχα. Ο όρος «χωρικό» δε, χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι τα έργα εκφράζονται συναρτήσει της τρέχουσας διαμόρφωσης η οποία κάνει χρήση των χωρικών μεταβλητών θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3 (περιγραφή Euler).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αναλυτική μορφή του $\left[{}^1 \nabla \delta {}^1 \mathbf{r} \right]$ είναι ο πίνακας

$${}^1 \nabla \delta {}^1 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^1 \delta u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^1 \delta u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^1 \delta u_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial {}^1 \delta u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^1 \delta u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^1 \delta u_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial {}^1 \delta u_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^1 \delta u_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^1 \delta u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (1.2.35)$$

ο οποίος, όπως παρατηρούμε, εκφράζεται επίσης συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της τρέχουσας και όχι της αρχικής διαμόρφωσης. Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο δεξιά μέλος της εξ. (1.2.34β) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα συμμετρίας $\left[{}^1 \boldsymbol{\sigma} \right]^T = \left[{}^1 \boldsymbol{\sigma} \right]$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{tr} \left[\left[{}^1 \boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \left[{}^1 \nabla \delta {}^1 \mathbf{r} \right] \right] &= \sigma_{11} \cdot \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_1} + \sigma_{22} \cdot \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_2} + \sigma_{33} \cdot \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_3} \\ &+ \sigma_{12} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_1} \right) + \sigma_{13} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_1} \right) + \sigma_{23} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

όπου στο δεξιά μέλος της παραπάνω σχέσης παραλήφθηκαν οι αριστεροί ενδείκτες. Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\delta {}^1 W_{int} = \int_{V'} \mathbf{tr} \left[\left[{}^1 \boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \delta \left(\left[{}^1 \boldsymbol{\varepsilon} \right] \right) \right] d^1 V \quad (1.2.37)$$

όπου ${}^I\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ο απειροστικός τανυστής παραμορφώσεων εκπεφρασμένος ως προς την τρέχουσα διαμόρφωση $t = t_I$ ο οποίος δίνεται ως

$${}^I\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (1.2.38)$$

Το ζεύγος ${}^I\boldsymbol{\sigma}$, ${}^I\boldsymbol{\varepsilon}$ καλείται συζυγές ως προς το έργο (work conjugate) αναφορικά με τον (παραμορφωμένο) όγκο του σώματος της τρέχουσας διαμόρφωσης.

1.2.6 Ορισμός του δεύτερου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff

Για να εκφράσουμε το δυνατό εσωτερικό έργο συναρτήσει των υλικών μεταβλητών θέσης x_1 , x_2 , x_3 της αρχικής διαμόρφωσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο τανυστή Piola – Kirchhoff που έχει ήδη οριστεί. Πράγματι, ξεκινώντας από την αρχή δυνατών έργων της σχέσης (1.2.34β) και εκτελώντας παρόμοιους μετασχηματισμούς με αυτούς της υποενότητας 1.2.4 καταλήγουμε στην παρακάτω αναδιατύπωση της αρχής δυνατών έργων:

$$\int_{\theta_A} {}^I\boldsymbol{t}({}^0\boldsymbol{n})^T \cdot \delta {}^I\boldsymbol{r} d\theta A + \int_{\theta_V} [{}^I\boldsymbol{f}^T \cdot \delta {}^I\boldsymbol{r}] d\theta V = \int_{\theta_V} \boldsymbol{tr} \left[\left[\begin{matrix} {}^I\boldsymbol{P} \\ \theta \end{matrix} \right]^T \cdot \delta \left[{}^I\boldsymbol{X} \right] \right] d\theta V \quad (1.2.39)$$

Είναι προφανές ότι καταφέραμε να εκφράσουμε το $\delta {}^I W_{\text{int}}$ ως προς την αρχική διαμόρφωση, δηλαδή ισχύει

$$\delta {}^I W_{\text{int}} = \int_{\theta_V} \boldsymbol{tr} \left[\left[\begin{matrix} {}^I\boldsymbol{P} \\ \theta \end{matrix} \right]^T \cdot \delta \left[{}^I\boldsymbol{X} \right] \right] d\theta V \quad (1.2.40)$$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής $\left[\begin{matrix} {}^I\boldsymbol{P} \\ \theta \end{matrix} \right]$ μαζί με τη βαθμίδα παραμόρφωσης ${}^I\boldsymbol{X}$ αποτελούν συζυγές ζεύγος.

Ο δεύτερος τανυστής Piola – Kirchhoff, όπως αποδεικνύουμε παρακάτω, είναι ο συζυγής τανυστής τάσεων του τανυστή παραμορφώσεων Green $\left[\begin{matrix} {}^I\boldsymbol{G} \\ \theta \end{matrix} \right]$. Ο τανυστής Green έχει σημαντική φυσική σημασία (εκφράζει τις σχετικές μεταβολές μηκών και γωνιών των ινών του σώματος) και για αυτόν το λόγο το εσωτερικό δυνατό έργο είναι πλεονεκτικότερο να εκφραστεί συναρτήσει του τανυστή Green αντί της βαθμίδας παραμόρφωσης. Εξάλλου, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η συσχέτιση τάσεων – παραμορφώσεων (τουλάχιστον στην περίπτωση της θεώρησης

μεγάλων μετατοπίσεων αλλά μικρών παραμορφώσεων) πραγματοποιείται με το συγκεκριμένο τανυστή παραμορφώσεων (για τις περιπτώσεις υλικών που θα εξετάσουμε), γεγονός που καθιστά απαραίτητη την εύρεση του συζυγούς ζεύγους του.

Για να ορίσουμε το δεύτερο τανυστή Piola – Kirchhoff, αρχικά ορίζουμε ένα διάνυσμα «ψευδοδύναμης» $d^0 \mathbf{p}$ με το οποίο αντιστοιχίζεται η τρέχουσα ασκούμενη δύναμη $d^1 \mathbf{p}$ στην αρχική διαμόρφωση ως

$$d^0 \mathbf{p} = [{}^1 \mathbf{X}]^{-1} \cdot d^1 \mathbf{p} \quad (1.2.41)$$

Από τις σχέσεις (1.2.24) και (1.2.18α) εξάγουμε κατευθείαν ότι

$$d^0 \mathbf{p} = [{}^1 \mathbf{X}]^{-1} \cdot [{}^1 \mathbf{P}] \cdot {}^0 \mathbf{n} d^0 A \quad (1.2.42\alpha)$$

ενώ από τον ορισμό του $[{}^1 \mathbf{P}]$ (σχ. (1.2.23)) έχουμε

$$d^0 \mathbf{p} = \left\{ J [{}^1 \mathbf{X}]^{-1} \cdot [{}^1 \boldsymbol{\sigma}] \cdot [{}^1 \mathbf{X}]^{-T} \right\} \cdot {}^0 \mathbf{n} d^0 A \quad (1.2.42\beta)$$

Πλέον, μπορούμε να ορίσουμε τον **2ο τανυστή Piola – Kirchhoff** $[{}^1 \mathbf{S}]$ ως το μητρώο που συνδέει την απαραμόρφωτη επιφάνεια ${}^0 \mathbf{n} d^0 A$ με την «ψευδοδύναμη» $d^0 \mathbf{p}$. Από την παραπάνω σχέσεις έπεται κατευθείαν ότι

$$[{}^1 \mathbf{S}] = J [{}^1 \mathbf{X}]^{-1} \cdot [{}^1 \boldsymbol{\sigma}] \cdot [{}^1 \mathbf{X}]^{-T} \quad \text{ή} \quad [{}^1 \mathbf{S}] = [{}^1 \mathbf{X}]^{-1} \cdot [{}^1 \mathbf{P}] \quad (1.2.43\alpha-\beta)$$

Από τον ορισμό του, συμπεραίνουμε ότι ο τανυστής $[{}^1 \mathbf{S}]$ είναι συμμετρικός (σε αντίθεση με τον $[{}^1 \mathbf{P}]$), δηλαδή θα έχουμε

$$[{}^1 \mathbf{S}]^T = [{}^1 \mathbf{S}] \quad (1.2.44)$$

Ξεκινώντας από τη διατύπωση της εξ. (1.2.40) για το εσωτερικό δυνατό έργο και κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$[{}^1 \boldsymbol{\varepsilon}^G] = \frac{1}{2} \left\{ [{}^1 \mathbf{X}]^T \cdot [{}^1 \mathbf{X}] - [\mathbf{I}] \right\} \quad (1.2.45)$$

όπου $[\mathbf{I}]$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας διαστάσεων 3×3 , καταλήγουμε έπειτα από κάποια άλγεβρα στην παρακάτω έκφραση για το εσωτερικό δυνατό έργο:

$$\delta^1 W_{\text{int}} = \int_{\theta_V} \text{tr} \left[\left[\begin{matrix} {}^1\mathbf{S} \\ \delta \end{matrix} \right]^T \cdot \delta \left[\begin{matrix} {}^1\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \\ \delta \end{matrix} \right] \right] d^0 V \quad (1.2.46)$$

Συνεπώς οι τανυστές $\left[\begin{matrix} {}^1\mathbf{S} \\ \delta \end{matrix} \right]$, $\left[\begin{matrix} {}^1\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \\ \delta \end{matrix} \right]$ αποτελούν συζυγές ζεύγος, ενώ η αρχή δυνατών έργων διατυπώνεται συναρτήσει των συγκεκριμένων τανυστών ως

$$\int_{\theta_A} \left[\begin{matrix} {}^1\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})^T \\ \delta \end{matrix} \right] \cdot \delta^1 \mathbf{r} \, d^0 A + \int_{\theta_V} \left[\begin{matrix} {}^1\mathbf{f}^T \\ \delta \end{matrix} \right] \cdot \delta^1 \mathbf{r} \, d^0 V = \int_{\theta_V} \text{tr} \left[\left[\begin{matrix} {}^1\mathbf{S} \\ \delta \end{matrix} \right]^T \cdot \delta \left[\begin{matrix} {}^1\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{G}} \\ \delta \end{matrix} \right] \right] d^0 V \quad (1.2.47)$$

Στην παραπάνω σχέση απαιτείται προσοχή να μην εκφράσουμε λανθασμένα το εξωτερικό δυνατό έργο συναρτήσει του $\left[\begin{matrix} {}^1\mathbf{S} \\ \delta \end{matrix} \right]$. Ο ελκυστής ${}^1\mathbf{t}({}^0\mathbf{n})$ που υπεισέρχεται στο $\delta^1 W_{\text{ext}}$ συσχετίζεται με τον 1ο τανυστή Piola – Kirchhoff $\left[\begin{matrix} {}^1\mathbf{P} \\ \delta \end{matrix} \right]$ και όχι με τον $\left[\begin{matrix} {}^1\mathbf{S} \\ \delta \end{matrix} \right]$ όπως εξάλλου υποδεικνύει και η σχέση (1.2.24).

1.2.7 Φυσική σημασία των τανυστών τάσεων

Ο τανυστής τάσεων Cauchy αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε παραμορφωμένες επιφάνειες της τρέχουσας διαμόρφωσης. Για παράδειγμα η συνιστώσα ${}^1\sigma_{11}$ του τανυστή είναι **η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται επί της (τρέχουσας) στοιχειώδους επιφάνειας $d^1 A$ που είναι κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της τρέχουσας διαμόρφωσης διαιρεμένη με το εμβαδόν της $d^1 A$.**

Ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε απαραμόρφωτες επιφάνειες της αρχικής διαμόρφωσης. Για παράδειγμα η συνιστώσα ${}^1P_{11}$ του τανυστή είναι **η συνιστώσα της δύναμης που είναι παράλληλη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης η οποία ασκείται επί της στοιχειώδους επιφάνειας $d^1 A$ διαιρεμένη με το εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας $d^0 A$. Η αρχική επιφάνεια $d^0 A$ είναι απαραίτητως κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης, ωστόσο η τρέχουσα επιφάνεια $d^1 A$ δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετη στον άξονα.**

Ο 2ος τανυστής Piola – Kirchhoff αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε απαραμόρφωτες επιφάνειες της αρχικής διαμόρφωσης. Η διαφορά με τον 1ο τανυστή Piola – Kirchhoff έγκειται στο ότι η ανάλυση της τρέχουσας δύναμης σε συνιστώσες γίνεται ως προς διαφορετικό σύστημα αναφοράς. Έτσι, για παράδειγμα η συνιστώσα ${}^1S_{11}$ του τανυστή είναι **η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται επί της (τρέχουσας) στοιχειώδους επιφάνειας $d^1 A$ διαιρεμένη με το εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας $d^0 A$. Η αρχική επιφάνεια είναι απαραίτητως κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής**

διαμόρφωσης, ωστόσο η τρέχουσα επιφάνεια d^1A δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετη στον άξονα.

Συμπερασματικά, ο 2ος τανυστής Piola – Kirchhoff «παρακολουθεί» τις στροφές (στροφή στερεού σώματος και διατμητικές παραμορφώσεις) που υφίσταται κατά την παραμόρφωση, το υπό εξέταση στοιχείο όγκου ενώ ο τανυστής Cauchy και ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff ορίζονται πάντα με βάση τους άξονες του συστήματος αναφοράς της εκάστοτε διαμόρφωσης. Η συγκεκριμένη ιδιότητα του 2ου τανυστή Piola – Kirchhoff τον καθιστά πολύ χρήσιμο εργαλείο στην αντιμετώπιση των μη γραμμικών προβλημάτων της μηχανικής παραμορφώσιμων σωμάτων.

1.2.8 Τανυστής τάσεων Cauchy μικρών μετατοπίσεων

Μέχρι στιγμής σ' όλες τις εκφράσεις των εξισώσεων ισορροπίας που έχουμε εξάγει, δεν έχουμε κάνει καμία υπόθεση ως προς το μέγεθος των μετατοπίσεων ή των παραμορφώσεων. Στην περίπτωση που οι μετατοπίσεις είναι μικρές, η διαφορά μεταξύ της αρχικής διαμόρφωσης (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3) και της τελικής διαμόρφωσης (μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3) θεωρείται πολύ μικρή, συνεπώς ο τανυστής τάσεως Cauchy μπορεί να εισαχθεί στις εξισώσεις ισορροπίας εκπεφρασμένος ως προς την αρχική διαμόρφωση. Έτσι, οι εξισώσεις (1.2.13) γράφονται για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων ως

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} +_0 f_1 = 0 \quad (1.2.48\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} +_0 f_2 = 0 \quad (1.2.48\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} +_0 f_3 = 0 \quad (1.2.48\gamma)$$

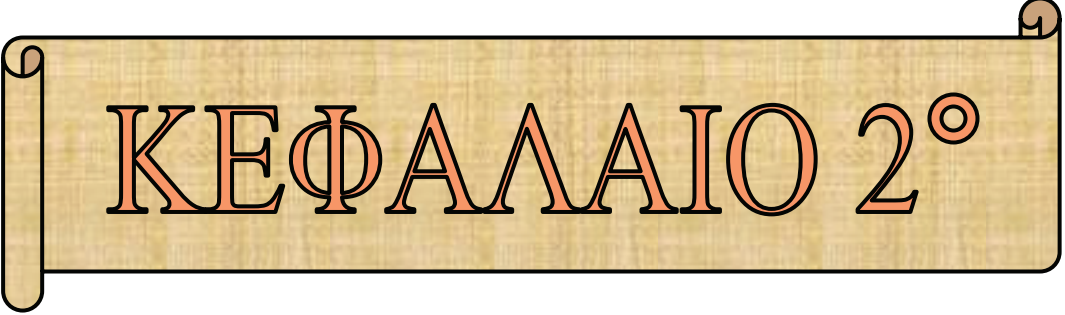
ενώ οι συνοριακές συνθήκες (εξ. (1.2.7)) διαμορφώνονται στην περίπτωση αυτή ως

$$_0 t_1 = \sigma_{11} \cdot_0 n_1 + \sigma_{21} \cdot_0 n_2 + \sigma_{31} \cdot_0 n_3 \quad (1.2.49\alpha)$$

$$_0 t_2 = \sigma_{12} \cdot_0 n_1 + \sigma_{22} \cdot_0 n_2 + \sigma_{32} \cdot_0 n_3 \quad (1.2.49\beta)$$

$$_0 t_3 = \sigma_{13} \cdot_0 n_1 + \sigma_{23} \cdot_0 n_2 + \sigma_{33} \cdot_0 n_3 \quad (1.2.49\gamma)$$

Η παραγωγή των συνιστωσών του τανυστή τάσεων Cauchy πραγματοποιείται πλέον ως προς γνωστές μεταβλητές θέσης και όχι ως προς άγνωστες μεταβλητές της τρέχουσας διαμόρφωσης, γεγονός που συνιστά σημαντική απλοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟΙ
ΝΟΜΟΙ ΥΛΙΚΩΝ

2.1 Ανάγκη θεώρησης καταστατικών νόμων για τα υλικά

Το παρόν κεφάλαιο στηρίζεται κυρίως στη βιβλιογραφική αναφορά του Novozhilov (1953). Με βάση το προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε διατυπώσει συνολικά:

- 6 εξισώσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων (σχ. (1.1.12) για τις παραμορφώσεις Green ή σχ. (1.1.45) για τον απειροστικό τανυστή παραμορφώσεων)
- 3 διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (σχ. (1.2.13) για τον τανυστή τάσεων Cauchy ή σχ. (1.2.28) για τον 1ο τανυστή Piola – Kirchhoff)

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζονται στο σύνολο του όγκου που καταλαμβάνει το σώμα (τόσο στην αρχική όσο και σε οποιαδήποτε διαμόρφωση που εξετάζουμε) ενώ στο σύνορο του σώματος ισχύουν ορισμένες συνοριακές συνθήκες οι οποίες μπορεί να είναι:

- κινηματικές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να δίνονται οι μετατοπίσεις ή οι παραμορφώσεις σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου
- φυσικές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να δίνονται οι δράσεις (επιφανειακές τάσεις) που ασκούνται σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου
- μικτές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να υπάρχει δεδομένη συσχέτιση μεταξύ δράσεων και παραμορφώσεων (ή μετατοπίσεων) σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου

Προκειμένου να επιλύσουμε ένα τυπικό πρόβλημα πρέπει να μπορούμε να προσδιορίσουμε για κάθε χρονική στιγμή t και σε κάθε σημείο του σώματος:

- 3 συνιστώσες μετατοπίσεων u_1, u_2, u_3
- 6 ανεξάρτητες συνιστώσες παραμορφώσεων $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$
- 6 ανεξάρτητες συνιστώσες τάσεων, $\pi\chi$ του 2ου τανυστή Piola – Kirchhoff $S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12} = S_{21}, S_{13} = S_{31}, S_{23} = S_{32}$. Επισημαίνεται εδώ ότι με τον προσδιορισμό του πεδίου μετατοπίσεων μπορούμε να υπολογίσουμε τη βαθμίδα παραμόρφωσης $[\mathbf{X}]$. Συνεπώς μπορούμε με τον υπολογισμό κάποιου τανυστή τάσεως, εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετασχηματισμού που έχουν δοθεί στο κεφ. 1.2, να προσδιορίσουμε οποιονδήποτε τανυστή τάσεως επιθυμούμε.

Συνολικά έχουμε 15 αγνώστους ενώ διατίθενται 9 εξισώσεις, επομένως το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί και παραμένει αόριστο. Η αοριστία αίρεται αν θεωρήσουμε 6 επιπλέον εξισώσεις (που συνδέουν τα άγνωστα μεγέθη μεταξύ τους). Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει ξεχωριστά τις παραμορφώσεις ενός σώματος και τις δράσεις που ασκούνται σε αυτό. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία διευκολύνει σημαντικά την κατανόηση του προβλήματος αφού η ανάλυση των παραμορφώσεων βασίζεται αποκλειστικά σε γεωμετρικές θεωρήσεις ενώ αυτή των τάσεων στους θεμελιώδεις νόμους της Νευτώνειας Μηχανικής. Ωστόσο από τη φυσική μας διαίσθηση γίνεται αντιληπτό ότι οι δράσεις και οι παραμορφώσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται μεταξύ τους. Είναι αδύνατο να

παραμορφωθεί κάποιο σώμα χωρίς να ασκηθεί επάνω του κάποια δράση. Είναι δε προφανές ότι υπάρχει πολύ μεγάλη ποικιλία στον τρόπο με τον οποίο ανταποκρίνονται τα διάφορα υλικά στις επιβαλλόμενες δράσεις.

Η ακριβής θεωρητική αντιμετώπιση του προσδιορισμού των σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων θα απαιτούσε τη μελέτη των ιδιοτήτων του υλικού σε μοριακό επίπεδο. Κάτι τέτοιο ωστόσο είναι εξαιρετικά δυσχερές. Έτσι αναπτύχθηκαν φαινομενολογικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων όπου το υλικό εξετάζεται σε μακροσκοπική κλίμακα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση βασίζεται αφενός σε αξιωματικές θεωρήσεις και μαθηματικές απλοποιήσεις, αφετέρου στην πειραματική διερεύνηση των ιδιοτήτων του υλικού.

2.2 Θεωρία ελαστικότητας

Στη γενικότερη περίπτωση, η επιβολή δράσεων σε κάποιο σώμα θα προκαλέσει εκτός από παραμορφώσεις και μεταβολή θερμοκρασίας, και αντιστρόφως. Εδώ θα εξεταστεί μόνο η υποπερίπτωση των ισόθερων μεταβολών, δηλαδή οι δράσεις και οι παραμορφώσεις θεωρούνται ανεξάρτητες της θερμοκρασίας.

Ας εξετάσουμε την παραμόρφωση που υφίσταται ένα στοιχείο σώματος από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική. Το υλικό του στοιχείου καλείται (ιδεατά) ελαστικό (ideally elastic) όταν η ενέργεια που απαιτείται για την παραμόρφωση του είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η μετάβαση από την αρχική (παραμορφωσιακή) κατάσταση στην τελική. Άμεσες συνέπειες αυτού του ορισμού είναι οι εξής:

- Αφού οι δράσεις εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις, έπεται ότι και οι δράσεις είναι ανεξάρτητες από τη μετάβαση από την αρχική στην τελική κατάσταση. Επομένως οι δράσεις εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμορφώσεις της κατάστασης που εξετάζουμε και είναι ανεξάρτητες από την ιστορία της φόρτισης.
- Σε μια κλειστή παραμορφωσιακή ή τασική όδευση, το συνολικό έργο των δράσεων είναι μηδενικό. Σαν αποτέλεσμα, αν φορτίσουμε ένα σώμα και στη συνέχεια το αποφορτίσουμε, το σώμα θα επιστρέψει στην ίδια ακριβώς κατάσταση που βρισκόταν πριν τη φόρτιση ανεξαρτήτως του τρόπου με τον οποίο θα συμβεί η αποφόρτιση.

Υπάρχουν διάφορες κλάσεις ελαστικών υλικών όπως υπερελαστικά, υποελαστικά, βισκοελαστικά κλπ. Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε μόνο την κλάση των υπερελαστικών υλικών. Ένα ελαστικό υλικό χαρακτηρίζεται ως **υπερελαστικό** (hyperelastic) ή Green – ελαστικό (Green – elastic) όταν υπάρχει συνάρτηση $F = F\left({}_0^t \varepsilon_{11}, {}_0^t \varepsilon_{22}, {}_0^t \varepsilon_{33}, {}_0^t \varepsilon_{21} = {}_0^t \varepsilon_{12}, {}_0^t \varepsilon_{31} = {}_0^t \varepsilon_{13}, {}_0^t \varepsilon_{32} = {}_0^t \varepsilon_{23}, x_1, x_2, x_3\right)$, που εξαρτάται από τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green και την αρχική θέση (x_1, x_2, x_3) , τέτοια ώστε να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$d''W = F\left({}_0^t \varepsilon_{11}, {}_0^t \varepsilon_{22}, {}_0^t \varepsilon_{33}, {}_0^t \varepsilon_{12}, {}_0^t \varepsilon_{13}, {}_0^t \varepsilon_{23}, x_1, x_2, x_3\right) \cdot d'{}^0V \quad (2.2.1)$$

όπου $d'{}^0V = d'x_1 d'x_2 d'x_3$ είναι το απειροστό στοιχείο όγκου στην αρχική απαραμόρφωτη διαμόρφωση, ${}_0^t \varepsilon_{ij}$ είναι οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης

Green και $d''W$ είναι η συνολική ενέργεια (έργο) που απαιτείται για την (ισόθερμη) παραμόρφωση του στοιχειώδους όγκου d^0V του στοιχείου. Η συνάρτηση F καλείται συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης ή τροπικής ενέργειας ανά μονάδα αρχικού όγκου (strain energy function per unit initial volume). Στην περίπτωση που η F λαμβάνει τη μορφή

$$d''W = F\left({}_0^t\varepsilon_{11}, {}_0^t\varepsilon_{22}, {}_0^t\varepsilon_{33}, {}_0^t\varepsilon_{12}, {}_0^t\varepsilon_{13}, {}_0^t\varepsilon_{23}\right) \cdot d^0V \quad (2.2.2)$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών θέσης, τότε το υλικό καλείται ομογενές (homogeneous). Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με ομογενή υλικά. Τονίζουμε ότι η μορφή της συνάρτησης F παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής που εξετάζουμε την παραμόρφωση του σώματος αφού ο χρόνος εισάγεται μόνο έμμεσα στη σχέση (2.2.1) ή στη σχ. (2.2.2) μέσω των συνιστωσών της παραμόρφωσης.

Από τη σχ. (1.2.46) του προηγούμενου κεφαλαίου έχουμε εξάγει ότι ο 2ος τανυστής Piola – Kirchhoff και ο τανυστής παραμορφώσεων Green είναι συζυγείς ως προς το έργο επομένως για μια απειροστή μεταβολή $d(\cdot)$ ως προς το χρόνο των παραμορφωσιακών μεγεθών, θα ισχύει

$$d(d''W) = \left({}_0^tS_{11} \cdot d {}_0^t\varepsilon_{11} + {}_0^tS_{22} \cdot d {}_0^t\varepsilon_{22} + \dots + {}_0^tS_{23} \cdot d {}_0^t\varepsilon_{23} + {}_0^tS_{32} \cdot d {}_0^t\varepsilon_{32}\right) d^0V \quad (2.2.3)$$

Από τη σχ. (2.2.2) με διαφορίση ως προς $d(\cdot)$, λαμβάνουμε

$$d(d''W) = \left(\frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{11}} d {}_0^t\varepsilon_{11} + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{22}} d {}_0^t\varepsilon_{22} + \dots + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{23}} d {}_0^t\varepsilon_{23} + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{32}} d {}_0^t\varepsilon_{32}\right) d^0V \quad (2.2.4)$$

επομένως από τις σχ. (2.2.3), (2.2.4) έπεται κατευθείαν ότι

$${}_0^tS_{ij} = \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{ij}}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.5\alpha-\zeta)$$

Οι 6 σχέσεις (2.2.5α-ζ) είναι οι ζητούμενες καταστατικές σχέσεις για ένα υπερελαστικό υλικό. Παρατηρούμε ότι η επιλογή συγκεκριμένης συνάρτησης F αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό των καταστατικών σχέσεων που δίνουν τη δυνατότητα να επιλυθεί το πρόβλημα της ελαστικότητας (15 άγνωστοι με 15 διατιθέμενες σχέσεις).

Για να επιλέξουμε μια κατάλληλη μορφή της F , αρχικά θεωρούμε την πλέον γενική περίπτωση ανάπτυξης της σε δυναμοσειρά ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές της ως κάτωθι

$$F = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(A_{ij} \cdot {}^t \varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(B_{ijkl} \cdot {}^t \varepsilon_{ij} \cdot {}^t \varepsilon_{kl} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \left(C_{ijklmn} \cdot {}^t \varepsilon_{ij} \cdot {}^t \varepsilon_{kl} \cdot {}^t \varepsilon_{mn} \right) + \dots \quad (2.2.6)$$

όπου A_{ij} , B_{ijkl} , C_{ijklmn} , ... είναι σταθεροί συντελεστές. Από τη σχ. (2.2.6) παραλήφθηκαν αρνητικές δυνάμεις παραμορφώσεων μιας και για ${}^t \varepsilon_{ij} \rightarrow 0$ θα λαμβάναμε $d^t W \rightarrow \infty$ αποτέλεσμα που δεν έχει φυσικό νόημα. Ο σταθερός όρος παραλήφθηκε επίσης, αφού κατά τη μερική παραγωγή των σχ. (2.2.5) θα απαλειφθεί, επομένως δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό των τάσεων που μας ενδιαφέρει. Αντικαθιστώντας τη σχ. (2.2.6) στις σχ. (2.2.5) θα έχουμε

$${}^t S_{rs} = A + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(B_{rsij} \cdot {}^t \varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(C_{rsijkl} \cdot {}^t \varepsilon_{ij} \cdot {}^t \varepsilon_{kl} \right) + \dots \quad (2.2.7)$$

Εξετάζοντας την ειδική περίπτωση όπου στην απαραμόρφωτη κατάσταση δεν υπάρχει αρχική ένταση, θα πρέπει στην εξ. (2.2.7) να είναι

$$A = 0 \quad (2.2.8)$$

επομένως η ίδια εξίσωση θα γραφτεί ως

$${}^t S_{rs} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(B_{rsij} \cdot {}^t \varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(C_{rsijkl} \cdot {}^t \varepsilon_{ij} \cdot {}^t \varepsilon_{kl} \right) + \dots \quad (2.2.9)$$

Με την υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, θα είναι ${}^t \varepsilon_{ij} \ll 1$, $\forall i, j = 1, 2, 3$, επομένως οι μη γραμμικοί όροι της σχ. (2.2.9) που περιέχουν γινόμενα δύο ή περισσότερων συνιστωσών παραμορφώσεων μπορούν να αγνοηθούν. Συνεπώς καταλήγουμε στην παρακάτω γραμμική καταστατική σχέση τάσεων – παραμορφώσεων

$${}^t \mathbf{S} = \left[\mathbf{D}^e \right] \cdot {}^t \boldsymbol{\varepsilon}^G \quad (2.2.10)$$

όπου στην παραπάνω σχέση υιοθετήθηκε μητρικός – διανυσματικός συμβολισμός με:

- $\left({}^t \mathbf{S} \right)^T = \left({}^t S_{11}, {}^t S_{22}, {}^t S_{33}, {}^t S_{12}, {}^t S_{13}, {}^t S_{23} \right)$: Διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff.
- $\left({}^t \boldsymbol{\varepsilon}^G \right)^T = \left({}^t \varepsilon_{11}, {}^t \varepsilon_{22}, {}^t \varepsilon_{33}, {}^t \gamma_{12} = 2 {}^t \varepsilon_{12}, {}^t \gamma_{13} = 2 {}^t \varepsilon_{13}, {}^t \gamma_{23} = 2 {}^t \varepsilon_{23} \right)$: Διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή παραμορφώσεων Green.

- $[\mathbf{D}^e]$: καταστατικό μητρώο σταθερών συντελεστών d_{ij} , διαστάσεων 6×6 . Τα d_{ij} καλούνται ελαστικές σταθερές.

Ο παραπάνω θεμελιώδης καταστατικός νόμος είναι γνωστός ως **γενικευμένος νόμος του Hooke** (generalized Hooke's law). Στην περίπτωση που υιοθετηθεί ο επιπλέον περιορισμός των μικρών μετατοπίσεων τότε ο νόμος του Hooke μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\mathbf{t}_0 \boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^e] \cdot \mathbf{t}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2.11)$$

όπου:

- $\left(\mathbf{t}_0 \boldsymbol{\sigma}\right)^T = \left({}^t_0 \sigma_{11}, {}^t_0 \sigma_{22}, {}^t_0 \sigma_{33}, {}^t_0 \sigma_{12}, {}^t_0 \sigma_{13}, {}^t_0 \sigma_{23}\right)$: Διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή τάσεων Cauchy. Ο τανυστής εκφράζεται ως προς την αρχική διαμόρφωση μιας και η διαφορά αρχικής και τελικής διαμόρφωσης στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων αγνοείται.
- $\left(\mathbf{t}_0 \boldsymbol{\varepsilon}\right)^T = \left({}^t_0 \varepsilon_{11}, {}^t_0 \varepsilon_{22}, {}^t_0 \varepsilon_{33}, {}^t_0 \gamma_{12} = 2 {}^t_0 \varepsilon_{12}, {}^t_0 \gamma_{13} = 2 {}^t_0 \varepsilon_{13}, {}^t_0 \gamma_{23} = 2 {}^t_0 \varepsilon_{23}\right)$: Διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων.

Στη γενικότερη περίπτωση το καταστατικό μητρώο $[\mathbf{D}^e]$ περιέχει $6 \times 6 = 36$ ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές k_{ij} που πρέπει να προσδιοριστούν. Τα διάφορα υλικά ωστόσο, συνήθως διαθέτουν διευθύνσεις συμμετρίας ως προς τις οποίες οι ελαστικές σταθερές να παραμένουν αμετάβλητες. Έτσι στην πλέον γενική περίπτωση όπου δεν υπάρχει καμία συμμετρία, τα υλικά χαρακτηρίζονται ως ανισότροπα (anisotropic). Υλικά με 3 επίπεδα συμμετρίας χαρακτηρίζονται ως ορθότροπα (orthotropic) ενώ στην περίπτωση όπου η μηχανική συμπεριφορά είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, το υλικό χαρακτηρίζεται ως ισότροπο (isotropic). Η ύπαρξη διευθύνσεων συμμετρίας οδηγεί σε συσχετίσεις των ελαστικών σταθερών μεταξύ τους με αποτέλεσμα να μειώνεται ο αριθμός των ανεξάρτητων k_{ij} που απαιτείται να υπολογιστούν.

Στο παρόν πόνημα θα μελετηθούν μόνο κατασκευές από **ισότροπο υλικό**. Με στοιχειώδεις γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, μπορεί να αποδειχτεί διαδοχικά για τη συγκεκριμένη περίπτωση, ότι για το μητρώο $[\mathbf{D}^e]$ ισχύουν τα εξής:

- Παραμένει αμετάβλητο σε οποιαδήποτε στροφή του συστήματος αναφοράς
- Είναι συμμετρικό δηλαδή ισχύει

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.12)$$

- Υπάρχουν μόνο 2 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές και το μητρώο δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$[\mathbf{D}^e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (k_{11} - k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (k_{11} - k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (k_{11} - k_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

Θέτοντας

$$k_{12} = \lambda \quad (2.2.14\alpha)$$

$$k_{11} - k_{12} = 2 \cdot \mu \quad (2.2.14\beta)$$

λαμβάνουμε τις (ανεξάρτητες) σταθερές του Lamé λ , μ (Lamé constants). Οι σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων μπορούν να αντιστραφούν και να ληφθούν οι παρακάτω εξισώσεις των παραμορφώσεων συναρτήσει των τάσεων:

$$\overset{t}{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{E} \cdot \left[\overset{t}{S}_{11} - \nu \cdot \left(\overset{t}{S}_{22} + \overset{t}{S}_{33} \right) \right] \quad (2.2.15\alpha)$$

$$\overset{t}{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{E} \cdot \left[\overset{t}{S}_{22} - \nu \cdot \left(\overset{t}{S}_{11} + \overset{t}{S}_{33} \right) \right] \quad (2.2.15\beta)$$

$$\overset{t}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{E} \cdot \left[\overset{t}{S}_{33} - \nu \cdot \left(\overset{t}{S}_{11} + \overset{t}{S}_{22} \right) \right] \quad (2.2.15\gamma)$$

$$2 \overset{t}{\varepsilon}_{12} = \overset{t}{\gamma}_{12} = \frac{1}{G} \overset{t}{S}_{12}, \quad 2 \overset{t}{\varepsilon}_{13} = \overset{t}{\gamma}_{13} = \frac{1}{G} \overset{t}{S}_{13}, \quad 2 \overset{t}{\varepsilon}_{23} = \overset{t}{\gamma}_{23} = \frac{1}{G} \overset{t}{S}_{23} \quad (2.2.15\delta-\varepsilon-\zeta)$$

όπου:

- $E = \frac{\mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)}{\lambda + \mu}$: Το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο Young (elastic modulus, Young 's modulus)
- $G = \mu$: Το μέτρο διάτμησης (shear modulus)
- $\nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + \mu)}$: Ο λόγος του Poisson (Poisson 's ratio)

Οι σταθερές E , G , ν φυσικά δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται μέσω της σχέσης

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.2.16)$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ

3.1 Γενικά

Όπως είδαμε, η γενικότερη περίπτωση επίλυσης ενός προβλήματος ελαστικού παραμορφώσιμου σώματος απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος 15 εξισώσεων με 15 αγνώστους (3 συνιστώσες μετατοπίσεων, 6 συνιστώσες παραμορφώσεων, 6 συνιστώσες τάσεων). Η αναλυτική επίλυση του προβλήματος, ακόμα και για τους απλούς καταστατικούς νόμους υλικού που έχουν παρουσιαστεί, είναι εξαιρετικά δυσχερής ακόμα και για απλές περιπτώσεις γεωμετρίας και φόρτισης. Σε περιπτώσεις πολύπλοκης γεωμετρίας του σώματος ή και τυχούσας φόρτισης, ακόμα και η προσεγγιστική επίλυση οδηγεί πολλές φορές σε λανθασμένα αποτελέσματα που δε συμφωνούν με την πειραματική διερεύνηση.

Ωστόσο αν εξετάσουμε τους φορείς που χρησιμοποιούνται σε κατασκευές πολιτικού μηχανικού καταλήγουμε στις εξής διαπιστώσεις:

- Στη συντριπτική τους πλειονότητα, οι φορείς έχουν τη μία ή τις δύο από τις τρεις διαστάσεις τους πολύ μικρότερες σε σχέση με τις υπόλοιπες. Σε περίπτωση, που οι μία διάσταση είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες, αναφερόμαστε σε δίσκους, πλάκες ή κελύφη ανάλογα με τη γεωμετρία και τον προσανατολισμό της φόρτισης σε σχέση με το φορέα. Σε περίπτωση που οι δύο διαστάσεις είναι πολύ μικρότερες από την τρίτη, τότε αναφερόμαστε στην περίπτωση των ραβδωτών φορέων.
- Οι φορτίσεις που δέχονται οι συνήθεις κατασκευές μπορούν να αναχθούν σε εντατικά μεγέθη, δηλαδή σε μια «μέση τιμή» γύρω από τη θέση επιβολής τους, χωρίς την εισαγωγή σημαντικού σφάλματος στην επίλυσή τους.

Η δεύτερη διαπίστωση στην ουσία βασίζεται στην ειδική γεωμετρία που παρουσιάζουν οι κατασκευές πολιτικού μηχανικού και είναι απόρροια της γνωστής αρχής St. Venant της μηχανικής παραμορφώσιμων σωμάτων. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη αρχή: **«Αν μια κατανομή εξωτερικών δυνάμεων που ενεργεί σε μια μικρή περιοχή της επιφάνειας ενός σώματος αντικατασταθεί από μια ισοπολική κατανομή εξωτερικών δυνάμεων, που επενεργεί στην ίδια περιοχή του σώματος, τότε η επίδραση αυτών των δύο διαφορετικών φορτίσεων σε περιοχές που βρίσκονται αρκούντως μακριά από το σημείο εφαρμογής των φορτίων είναι περίπου ίδιες».**

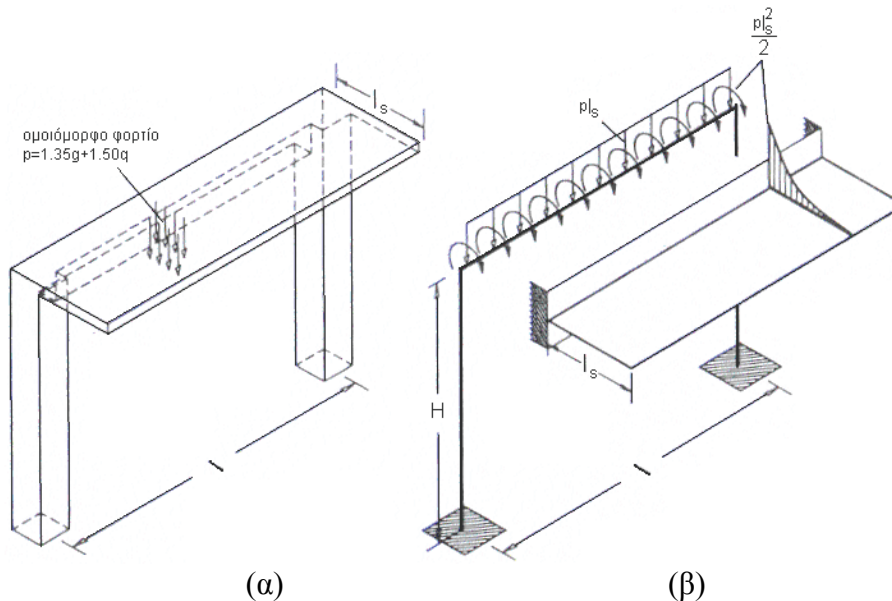
Ας εξετάσουμε την περίπτωση ενός ραβδωτού φορέα στον οποίο το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής (πλάτος, ύψος). Στην περίπτωση που επιβληθούν φορτίσεις μόνο στις ακραίες διατομές του φορέα, η αρχή St. Venant εξασφαλίζει ότι μακριά από τα άκρα, η ένταση θα είναι περίπου ίδια με το να θεωρήσουμε μια φόρτιση ισοπολική, δηλαδή μια μέση τιμή της φόρτισης στις ακραίες διατομές. Συνεπώς, η επίλυση προβλημάτων ραβδωτών φορέων με θεώρηση εντατικών μεγεθών αντί της ακριβούς φόρτισης που ασκείται στα άκρα, αποκτά πρακτική αξία ακριβώς λόγω του ότι το μήκος της ράβδου είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε η λύση που λαμβάνεται να ισχύει με μεγάλη ακρίβεια στο μεγαλύτερο μέρος του φορέα.

Η περίπτωση της στρεπτικής φόρτισης (torsional loading) δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια ειδική κατηγορία φόρτισης που απαντάται στους ραβδωτούς φορείς. Έτσι: **«Στρέψη ράβδου καλείται η εντατική κατάσταση που αναπτύσσεται σε μια διατομή λόγω της επιβολής ενός ελεύθερου διανύσματος ροπής M_t (torque), το οποίο είναι παράλληλο του διαμήκους άξονα της ράβδου. Το διάνυσμα της στρεπτικής ροπής M_t προκαλείται από ένα ζεύγος δυνάμεων που επιδρά στη**

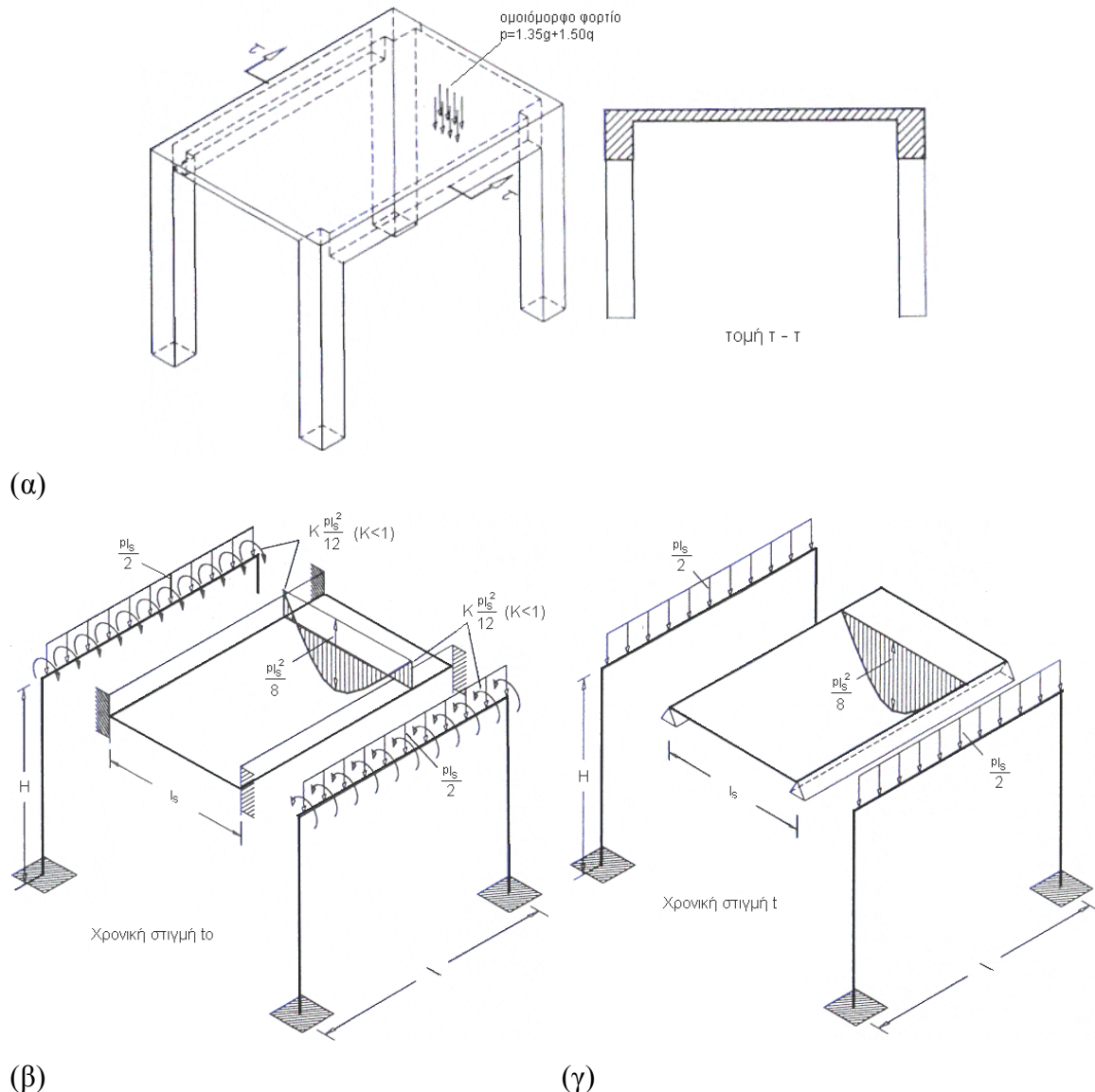
στρεπτικά καταπονούμενη ράβδος και το οποίο βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονά της, δηλαδή είναι συνεπίπεδο της διατομής». Άμεσα αντιληπτό αποτέλεσμα της στρεπτικής καταπόνησης είναι η στροφή των διατομών της δοκού περί διαμήκη άξονα στροφής.

Η στρέψη χαρακτηρίζεται ως άμεση όταν η ανάπτυξή της είναι απαραίτητη προκειμένου να επέλθει ισορροπία στον εξεταζόμενο φορέα. Στο σχήμα 3.1.1, η δοκός που υποστηρίζει την πλάκα - πρόβολο που δέχεται κατακόρυφη φόρτιση υποβάλλεται σε άμεση κατανεμημένη στρεπτική καταπόνηση: Η πλάκα για να ισορροπήσει υποβάλλεται σε καμπτική ροπή στη θέση σύνδεσής της με τη δοκό η οποία αποτελεί στρεπτική ροπή στην κάθετη διεύθυνση για τη δοκό.

Η στρέψη χαρακτηρίζεται ως έμμεση όταν η ανάπτυξή της οφείλεται στο συμβιβαστό των παραμορφώσεων δηλαδή την απαίτηση τα πεδία μετατοπίσεων και παραμορφώσεων να είναι συνεχή ως προς το χώρο και τον χρόνο. Στο σχήμα 3.1.2, οι δοκοί που υποστηρίζουν την πλάκα υποβάλλονται σε έμμεση στρέψη: Αν οι δοκοί είναι κατασκευασμένες έτσι ώστε να διαθέτουν πολύ μικρή δυστρεψία, τότε η πλάκα θα καμφθεί ως αμφιέριστη δοκός χωρίς την ανάπτυξη καμπτικής έντασης στα άκρα της. Αν ωστόσο οι δοκοί διαθέτουν μεγάλη δυστρεψία, τότε η αντίσταση που προβάλλουν στην στροφή περί το διαμήκη άξονά τους που προκαλείται από την κατακόρυφη φόρτιση, θα οδηγήσει στην ανάπτυξη μερικής πάκτωσης (καμπτικής έντασης) στα άκρα της πλάκας. Η καμπτική ένταση προφανώς αντιστοιχεί όπως και στην περίπτωση της άμεσης στρέψης σε κατανεμημένη στρεπτική καταπόνηση για τις δοκούς.



Σχήμα 3.1.1 (α) Δοκός υποβαλλόμενη σε άμεση στρέψη.
 (β) Η αντίστοιχη αναπτυσσόμενη εντατική κατάσταση.

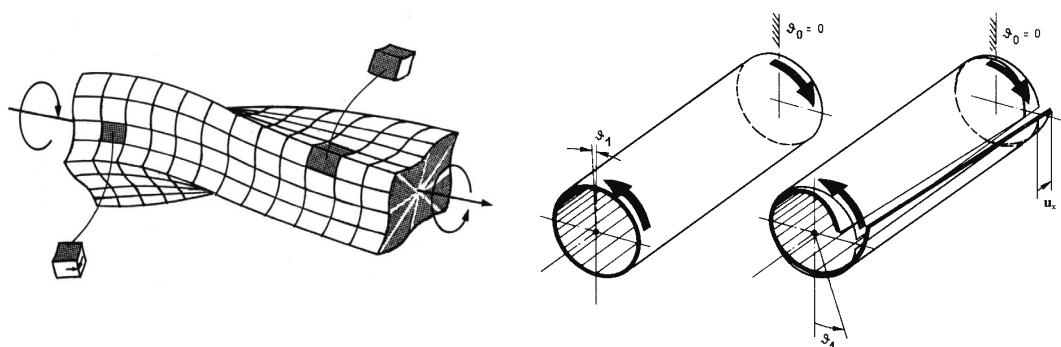


Σχήμα 3.1.2 (α) Δοκοί υποβαλλόμενες σε έμμεση στρέψη.
 (β) Αναπτυσσόμενες εντατικές καταστάσεις για όπλιση των δοκών έναντι έμμεσης στρέψης.
 (γ) Αναπτυσσόμενες εντατικές καταστάσεις μη όπλισμένων δοκών έναντι έμμεσης στρέψης.

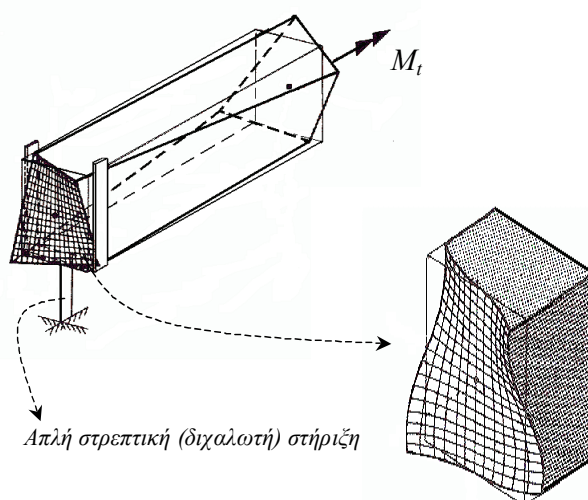
Η μελέτη του προβλήματος της στρέψης ξεκίνησε από πολύ παλιά από τον Coulomb (1784), ο οποίος μελέτησε την απλούστερη περίπτωση ευθύγραμμης ράβδου κυκλικής διατομής από γραμμικά ελαστικό υλικό υποβαλλόμενης σε δύο συγκεντρωμένες στρεπτικές ροπές στα άκρα της. Η κυκλική διατομή έχει το πλεονέκτημα να είναι συμμετρική ως προς οποιοδήποτε άξονα γεγονός που απλοποιεί σημαντικά το πρόβλημα. Ο Coulomb βασίστηκε στην παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων και στο ότι η ράβδος δε στρεβλώνει δηλαδή δεν αναπτύσσεται καμία διαμήκης μετατόπιση. Επέλυσε δε το πρόβλημα με τη θεώρηση ότι κάθε σημείο της ράβδου στρέφεται περί σταθερό διαμήκη άξονα.

Κατά τη μελέτη της στρέψης ράβδων τυχούσας διατομής, έγινε αντιληπτό ότι η παραδοχή μηδενικής στρέβλωσης της διατομής αδυνατεί να δώσει λύση στο πρόβλημα. Πρώτος ο St. Venant (1855) έδωσε λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα με την εγκατάλειψη της παραδοχής μηδενικής στρέβλωσης και την υιοθέτηση της θεώρησης ότι η ράβδος υπόκειται σε διαμήκεις μετατοπίσεις που δεν

παρεμποδίζονται (βλ. σχήματα 3.1.3, 3.1.4). Βασίστηκε δε, στην ουσιώδη υπόθεση ότι η αναπτυσσόμενη στρέβλωση είναι ίδια σε κάθε διατομή της ράβδου.



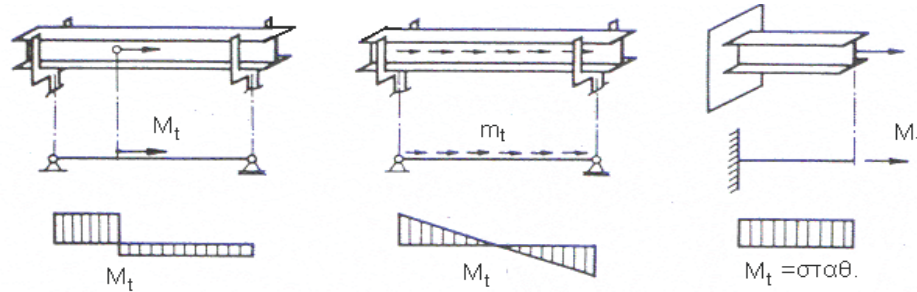
Σχήμα 3.1.3 Στρέβλωση διατομών λόγω στρέψης.



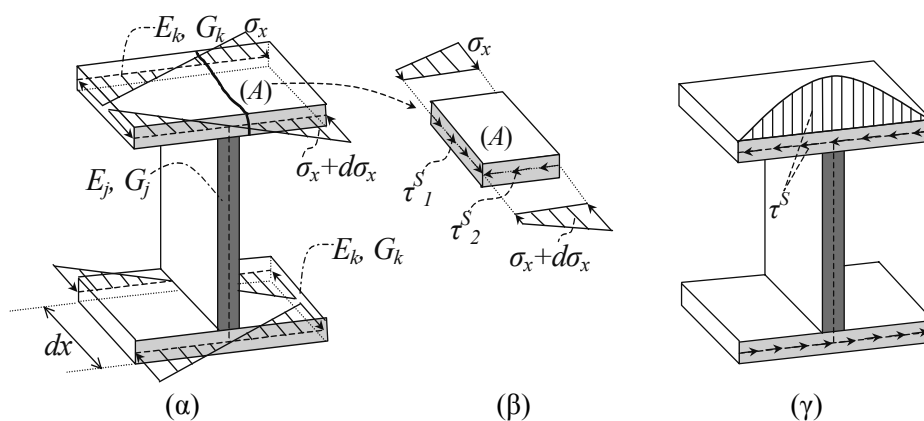
Σχήμα 3.1.4 Ομοιόμορφη στρέψη κατά Saint-Venant, όπου η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται από τις συνθήκες στήριξης και η στρεπτική ροπή είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου.

Η φόρτιση που μελέτησε ο St. Venant κατά την οποία η στρέβλωση είναι ανεξάρτητη της διαμήκουσ συντεταγμένης της ράβδου καλείται **ομοιόμορφη στρέψη ή στρέψη St. Venant** (uniform torsion, St. Venant torsion) (βλ. σχήμα 3.1.4). Σ' αυτήν την περίπτωση **αποδεικνύεται** ότι στη ράβδο ασκούνται μόνο ίσες συγκεντρωμένες στρεπτικές ροπές στα άκρα της. Οι διατμητικές τάσεις που καταπονούν τη ράβδο και δίνουν τη στρεπτική έντασή της καλούνται **διατμητικές τάσεις St. Venant ή πρωτογενείς διατμητικές τάσεις** (St. Venant shear stresses, primary shear stresses). Στην περίπτωση που στη ράβδο ασκούνται και σε άλλες θέσεις στρεπτικές ροπές (συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες) ή η στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω συνοριακών συνθηκών, τότε η αναπτυσσόμενη φόρτιση καλείται **ανομοιόμορφη στρέψη** (non uniform torsion). Κατά την ανομοιόμορφη στρέψη παύει να ισχύει η παραδοχή του St. Venant ότι η στρέβλωση της διατομής είναι ανεξάρτητη της διαμήκουσ θέσης της (βλ. σχήματα 3.1.4, 3.1.5). Στη ράβδο πλέον δεν ασκούνται αποκλειστικά οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις που προβλέπει η θεωρία του St. Venant αλλά επιπρόσθετες διατμητικές τάσεις που καλούνται

δευτερογενείς διατμητικές τάσεις ή διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης (secondary shear stresses, warping shear stresses). Επιπλέον, η ράβδος καταπονείται και από ορθές τάσεις που δρουν παράλληλα στο διαμήκη άξονά της (βλ. σχήμα 3.1.6).



Σχήμα 3.1.5 Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων λόγω μεταβλητής στρεπτικής έντασης (α, β) και λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης (γ).



Σχήμα 3.1.6 Ορθές (α, β) και διατμητικές τάσεις (γ) λόγω στρέβλωσης.

Ο St. Venant μελέτησε την ομοιόμορφη στρέψη υπό στατικά φορτία υιοθετώντας την υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων. Στην παρούσα εργασία διατυπώνεται και επιλύεται αριθμητικά το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδου τυχούσας σταθερής διατομής διπλής συμμετρίας από (υπερ)ελαστικό, ομογενές και ισότροπο υλικό για την οποία ισχύει η παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων. Έτσι, εγκαταλείπεται η πιο περιοριστική υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων αλλά διατηρείται η υπόθεση ότι οι αναπτυσσόμενες μετατοπίσεις οδηγούν σε παραμορφώσεις που είναι αρκούντως μικρές έτσι ώστε να ισχύουν τα όσα έχουν ήδη αναπτυχθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, στα πλαίσια της θεωρίας μικρών παραμορφώσεων. Η ράβδος μπορεί να υπόκειται σε τυχόντα, συντηρητικά, στατικά ή δυναμικά (χρονικά μεταβαλλόμενα) στρεπτικά και αξονικά φορτία κατά το μήκος της και μπορεί να υποστηρίζεται στις πλέον γενικές αξονικές και στρεπτικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα της. Ο κύριος στόχος της εργασίας είναι ο προσδιορισμός των δευτερογενών διατμητικών τάσεων και τελικά η πλήρης εύρεση του τασικού αλλά και του μετακινησιακού πεδίου που αναπτύσσεται στη ράβδο. Παρακάτω θα καταστεί σαφής η ανάγκη θεώρησης αξονικών φορτίσεων και αξονικών συνοριακών συνθηκών προκειμένου η ανάλυση της ράβδου υπό στρεπτική καταπόνηση να είναι πλήρης.

3.2 Θεωρία δοκού ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων

3.2.1 Παραδοχές θεωρίας

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε συγκεντρωτικά τις βασικές παραδοχές στις οποίες βασίζεται η θεωρία. Παρακάτω, όπου κρίνεται σκόπιμο, γίνεται περαιτέρω ανάπτυξη της σκοπιμότητας ύπαρξης των παραδοχών αυτών.

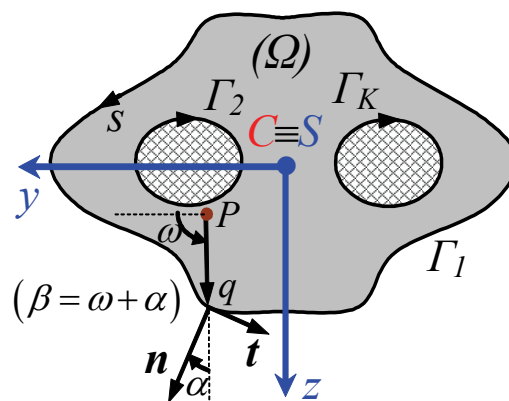
- **Η ράβδος είναι ευθύγραμμη:** Στην περίπτωση που έχουμε καμπύλη ράβδο, η στρεπτική και η καμπτική καταπόνηση είναι εν γένει συνδεδεμένες μεταξύ τους και είναι αδύνατο να αναπτυχθεί αποκλειστικά στρεπτική καταπόνηση στη ράβδο (πέρα από πολύ ειδικές περιπτώσεις φόρτισης και γεωμετρίας). Η μελέτη των καμπτικών και στρεπτικών εντατικών μεγεθών δεν μπορεί να είναι αποσυζευγμένα.
- **Η ράβδος είναι πρισματική:** Η διατομή και ο προσανατολισμός της ράβδου είναι ίδια σε όλες τις διαμήκεις θέσεις της. Τόσο το σχήμα όσο και οι διαστάσεις της διατομής είναι ανεξάρτητες της διαμήκους συντεταγμένης.
- **Οι διατομές της ράβδου υπόκεινται σε περιστροφή και μετακίνηση περί επιμήκη άξονα που είναι παράλληλος στον άξονα της ράβδου:** Έχει ήδη γίνει αναφορά ότι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της στρέψης είναι η περιστροφή των διατομών της ράβδου περί επιμήκη άξονα. Εάν στη ράβδο επιβληθεί κατασκευαστικά κάποιος άξονας περιστροφής που δεν είναι παράλληλος με τον άξονά της, τότε η εισαγωγή καμπτικής έντασης στη ράβδο είναι αναπόφευκτη. Επιπλέον πέρα από τις στρεπτικές μετακινήσεις, υποθέτουμε ότι οι διατομές της ράβδου μετακινούνται μόνο αξονικά και δε μελετούμε -στα πλαίσια της παρούσας εργασίας- τις ενδεχόμενες εγκάρσιες (καμπτικές) μετακινήσεις τους.
- **Οι μετατοπίσεις μπορούν να είναι μεγάλες αλλά οι παραμορφώσεις είναι μικρές:** Σύμφωνα με αυτήν την παραδοχή, για όλες τις συνιστώσες του ταυνοστή παραμόρφωσης Green ισχύει $\varepsilon_{ij} \ll 1$. Η παραδοχή αυτή, όπως ήδη έχουμε δείξει οδηγεί σε γραμμικό καταστατικό νόμο για την περίπτωση υπερελαστικού υλικού.
- **Η ράβδος δεν καταπονείται από μαζικές δυνάμεις εκτός από αυτές που οφείλονται στην αδράνεια:** Η παραδοχή αυτή είναι πολύ συνηθισμένη στις διάφορες θεωρίες δοκού και υιοθετείται κι εδώ προκειμένου να απλοποιηθούν οι εξισώσεις του προβλήματος. Οι επιφανειακές δράσεις που ασκούνται στη ράβδο ωστόσο, μπορούν να ασκούνται τόσο στις δύο ακραίες διατομές της όσο και στην παράπλευρη επιφάνειά της κατά το μήκος της.
- **Το υλικό της ράβδου είναι υπερελαστικό.**
- **Το υλικό της ράβδου είναι ομογενές, ισότροπο και συνεχές:** Η συνέχεια του υλικού εξασφαλίζει ότι τα πεδία μετατοπίσεων, παραμορφώσεων και τάσεων είναι συνεχή. Η συγκεκριμένη παραδοχή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στο υλικό δεν αναπτύσσονται ρωγμές και ασυνέχειες κατά την παραμόρφωσή του.

3.2.2 Πεδίο μετατοπίσεων

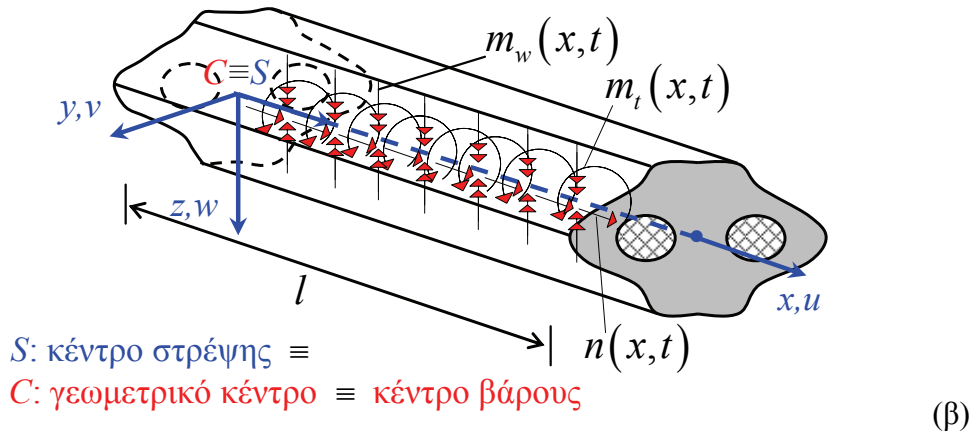
Για να επιλύσουμε το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης θα κάνουμε χρήση της λεγόμενης **ημιαντίστροφης μεθόδου** (semi-inverse method) (Armenakas,

2006, Timoshenko & Goodier, 1951) σύμφωνα με την οποία υποθέτουμε ότι η ράβδος παραμορφώνεται με βάση κάποιο συγκεκριμένο (απλοποιημένο) πεδίο μετατοπίσεων και στη συνέχεια διαπιστώνεται η παραβίαση ή μη όλων των εξισώσεων του ελαστικού παραμορφώσιμου σώματος. Αν το πεδίο μετατοπίσεων που έχει εκλεγεί α) ικανοποιεί όλες τις διατιθέμενες εξισώσεις και β) δίνει λύση στο ακριβές πρόβλημα που μελετούμε (πχ ανομοιόμορφη στρέψη χωρίς καμία άλλη καταπόνηση στη ράβδο), τότε το συγκεκριμένο πεδίο θα είναι το σωστό.

Θεωρούμε ότι η ευθύγραμμη πρισματική ράβδος που εξετάζουμε έχει μήκος l και τυχούσα διατομή διπλής συμμετρίας, εμβαδού A . Η διατομή καταλαμβάνει το πολλαπλά συνεκτικό δισδιάστατο χωρίο Ω που μπορεί να περιέχει ή όχι οπές ενώ το σύνορο της διατομής $\Gamma = \partial\Omega$ είναι τμηματικά λείο (βλ. σχήμα 3.2.1). Το υλικό της διατομής έχει ελαστικές σταθερές E, G (με λόγο Poisson ν) και πυκνότητα ρ . Θεωρούμε ότι οι διατομές της ράβδου στρέφονται ως στερεά σώματα περί τον άξονα της ράβδου που συνδέει τα γεωμετρικά κέντρα C (centroids) των διατομών. Θα δείξουμε παρακάτω ότι ο συγκεκριμένος άξονας περιστροφής είναι ο μόνος που οδηγεί στη μη ανάπτυξη καμπτοδιατμητικής έντασης λόγω των στρεπτικών στροφών των διατομών τουλάχιστον για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων. Ονομάζουμε το συγκεκριμένο άξονα ως άξονα περιστροφής του κέντρου στρέψης S διότι σε διατομές που διαθέτουν διπλή συμμετρία, αποδεικνύεται ότι τα σημεία S και C ταυτίζονται. Για τον προσδιορισμό του σημείου S θα αναφερθούμε εκτενώς παρακάτω. Σημειώνουμε εδώ ότι λόγω της ομογένειας του υλικού το κέντρο βάρους (center of gravity) της διατομής ταυτίζεται με το γεωμετρικό της κέντρο ενώ γνωρίζουμε ότι το συγκεκριμένο σημείο βρίσκεται πάντα στο σημείο τομής των αξόνων συμμετρίας της ράβδου. Το δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς που εκλέγεται για την περιγραφή της κίνησης είναι το $Sxyz$, όπου x είναι η διαμήκης συντεταγμένη της ράβδου, ενώ y και z είναι οι εγκάρσιες συντεταγμένες της ράβδου (βλ. σχήμα 3.2.1). Η στροφή της διατομής στην τυχούσα θέση x και για την τυχούσα χρονική στιγμή t δίνεται από την άγνωστη μεταβλητή $\theta_x(x, t)$ η οποία προφανώς θα είναι ανεξάρτητη από τις εγκάρσιες συντεταγμένες, με βάση την κινηματική υπόθεση που αναφέραμε παραπάνω.



(α)

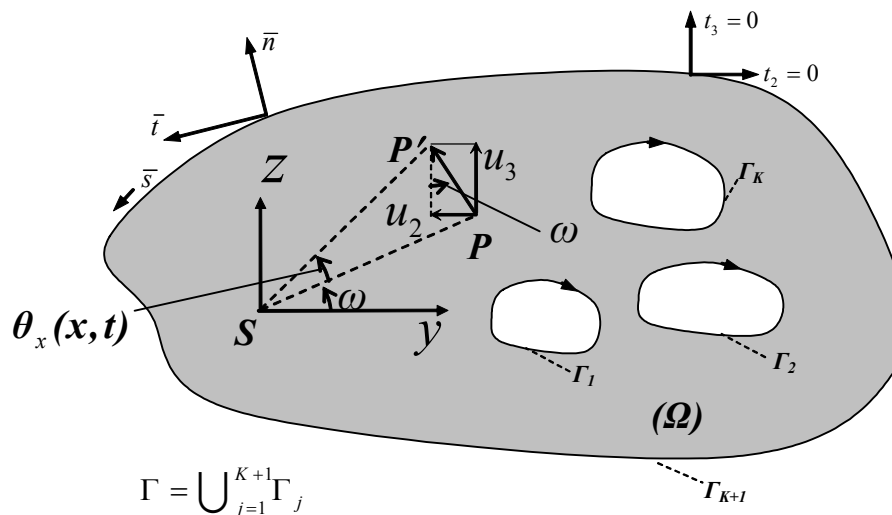


Σχήμα 3.2.1 Πρισματικό στοιχείο ράβδου τυχούσας διατομής διπλής συμμετρίας που καταλαμβάνει το δισδιάστατο χωρίο Ω (α) και υπόκειται σε αξονική και στρεπτική φόρτιση (β).

Είναι προφανές ότι αφού οι διατομές στρίβουν ως στερεά σώματα, κάθε σημείο της διατομής θα εκτελεί κυκλική κίνηση περί τον άξονα περιστροφής Sx . **Στη θεωρία μικρών μετατοπίσεων**, θεωρούμε ότι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις v, w (v παράλληλη στο Sy και w παράλληλη στο Sz) μπορούν να προσεγγιστούν από την εφαπτομένη του κυκλικού τόξου επί του οποίου κινείται το σημείο. Με στοιχειώδεις γεωμετρικές θεωρήσεις οι εγκάρσιες μετατοπίσεις θα δίνονται από τους παρακάτω τύπους (βλ. σχήμα 3.2.2):

$$v(x, y, z, t) = -(PP') \cdot \sin \omega = -(MP) \cdot \theta_x(x, t) \cdot \sin \omega = -z \cdot \theta_x(x, t) \quad (3.2.1\alpha)$$

$$w(x, y, z, t) = (PP') \cdot \cos \omega = (MP) \cdot \theta_x(x, t) \cdot \cos \omega = y \cdot \theta_x(x, t) \quad (3.2.1\beta)$$



Σχήμα 3.2.2 Πεδίο εγκάρσιων μετατοπίσεων τυχούσας διατομής που υπόκειται σε στρεπτική στροφή.

Στη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων δεν υιοθετείται η προσέγγιση της πραγματικής κυκλικής τροχιάς με το εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα, επομένως το πεδίο των εγκάρσιων μετατοπίσεων u_2, u_3 θα περιγράφεται από τη θεώρηση της ακριβούς γεωμετρίας της κίνησης ως εξής (Chen & Trahair, 1992):

$$v(x, y, z, t) = -z \cdot \sin \theta_x(x, t) - y \cdot (1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.2\alpha)$$

$$w(x, y, z, t) = y \cdot \sin \theta_x(x, t) - z \cdot (1 - \cos \theta_x(x, t)) \quad (3.2.2\beta)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι ράβδοι τυχούσας διατομής θα υποστούν στρέβλωση, επομένως είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε διαμήκη μετατόπιση u_1 μη μηδενική. Ο St. Venant, κατά τη μελέτη της ομοιόμορφης στρέψης (μικρών μετατοπίσεων), θεώρησε την παρακάτω έκφραση διαμήκους μετακίνησης

$$u(x, y, z) = \theta'_x(x) \cdot \phi_S^P(y, z) \quad (3.2.3)$$

όπου $\phi_S^P(y, z)$ είναι άγνωστη -προς προσδιορισμό- συνάρτηση δύο χωρικών μεταβλητών που καλείται πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης (primary warping function). Ο κάτω ενδείκτης S δηλώνει ότι η συνάρτηση ορίζεται ως προς το σύστημα αναφοράς $Sxyz$. Προκειμένου να περιγράψουμε ακριβέστερα το κινηματικό και τασικό πεδίο που ισχύει ανομοιόμορφη στρέψη αλλά και να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση συνδυασμένης αξονικής καταπόνησης, επεκτείνουμε το πεδίο της διαμήκους μετατόπισης της σχ. (3.2.3) ως

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, t) + \theta'_x(x, t) \cdot \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z, t) \quad (3.2.4)$$

όπου $u_m(x, t)$ είναι άγνωστη -προς προσδιορισμό- συνάρτηση μίας χωρικής μεταβλητής η οποία περιγράφει τη «μέση» επιμήκη μετακίνηση που υφίσταται η διατομή x της ράβδου ως στερεό σώμα και $\phi_S^S(x, y, z, t)$ είναι άγνωστη -προς προσδιορισμό- συνάρτηση τριών χωρικών μεταβλητών που καλείται δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης (secondary warping function).

Τονίζεται ότι η θεώρηση του u_m στη σχ. (3.2.4) έρχεται σε συμφωνία με την κινηματική παραδοχή που έχουμε αναφέρει στην ενότητα 3.2.1 (3η παραδοχή). Εν γένει η μετακίνηση u_m δεν είναι αναγκαίο να ταυτίζεται με τη μετακίνηση του γεωμετρικού κέντρου της διατομής. Π.χ. για την περίπτωση διατομής διπλής συμμετρίας με οπή, η αντικατάσταση των συντεταγμένων y, z του σημείου C στη σχ. (3.2.4) δεν έχει νόημα, μιας και οι συναρτήσεις στρέβλωσης ορίζονται στο χωρίο Ω που δεν περιέχει το συγκεκριμένο σημείο. Παρακάτω θα δούμε ποια φυσική σημασία μπορούμε να προσδώσουμε στη μετακίνηση u_m . Επιπλέον, επισημαίνουμε ότι η σχ. (3.2.4) χρησιμοποιείται στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας στις περιπτώσεις τόσο των μικρών όσο και των μεγάλων μετατοπίσεων. Η διαφοροποίηση των δύο θεωρήσεων έγκειται στο ότι οι σχέσεις υπολογισμού των άγνωστων μεγεθών που έχουν εισαχθεί στο πεδίο μετατοπίσεων δεν είναι ίδιες, γεγονός που θα αναδειχθεί παρακάτω.

3.2.3 Πεδίο παραμορφώσεων

Το επόμενο βήμα στην ανάλυση είναι ο καθορισμός του πεδίου παραμορφώσεων ο οποίος είναι στοιχειώδης από τη στιγμή που έχει καθοριστεί το πεδίο μετατοπίσεων. **Στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων** γίνεται χρήση του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης (βλ. σχ. (1.1.45), (1.1.46)). Με χρήση των σχ. (3.2.1), (3.2.3) οι ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_m + \theta'_x \cdot \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \quad (3.2.5\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2.5\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2.5\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta'_x \cdot \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (3.2.5\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta'_x \cdot \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (3.2.5\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta'_x + \theta'_x = 0 \quad (3.2.5\zeta)$$

Στα πλαίσια των μεγάλων μετατοπίσεων χρησιμοποιούμε τον τανυστή παραμορφώσεων Green (βλ. σχ. (1.1.12) και (1.1.34)). Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα που είναι μη γραμμικό υιοθετούμε την παραδοχή ότι η διαμήκης μετατόπιση που υφίσταται κάθε σημείο της ράβδου είναι αρκούντως μικρή έτσι ώστε να μπορούν να αμεληθούν οι μη γραμμικοί όροι της στον τανυστή παραμόρφωσης. Η παραδοχή είναι εύλογη εάν φανταστούμε τον τρόπο παραμόρφωσης της ράβδου: Επειδή η ράβδος έχει μεγάλο μήκος συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής, αναμένουμε η κυρίαρχη παραμορφωσιακή της εικόνα να προκύπτει από τις στροφές θ_x των διατομών και δευτερευόντως από τη στρέβλωση που υφίσταται. Με άλλα λόγια, οι εγκάρσιες μετακινήσεις να είναι πολύ μεγαλύτερης τάξης μεγέθους από τις διαμήκεις μετακινήσεις. Η υπόθεση αυτή θα παύει να ισχύει στις περιπτώσεις όπου οι αξονικές καταπονήσεις της ράβδου (αξονική ένταση και μετακινήσεις) θα είναι κυρίαρχες συγκριτικά με τις στρεπτικές. Ωστόσο, αφενός θα ασχοληθούμε με ράβδους οι οποίες καταπονούνται κυρίως στρεπτικά, αφετέρου η ύπαρξη υψηλών θλιπτικών φορτίων δεν μπορεί να οδηγήσει σε υπερβολικές αξονικές παραμορφώσεις λόγω του φαινομένου του (στρεπτικού) λυγισμού.

Συνεπώς, σαν μια πρώτη προσέγγιση στη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων, είναι εύλογο να αγνοήσουμε τους μη γραμμικούς όρους της $u(x, y, z, t)$ αλλά να λάβουμε υπόψη όλους τους υπόλοιπους μη γραμμικούς όρους οι οποίοι σχετίζονται με τις στροφές θ_x , όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα. Επισημαίνεται επίσης ότι χωρίς αυτήν την παραδοχή είναι αδύνατη η ανάπτυξη μονοδιάστατης θεωρίας δοκού, που είναι και η κύρια επιδίωξή μας, μιας και οι εξισώσεις που θα προκύψουν θα πρέπει απαραίτητως να επιλυθούν στον τρισδιάστατο χώρο. Με βάση αυτήν την

παραδοχή οι ορθές και διαμητικές παραμορφώσεις του τανυστή παραμόρφωσης Green διαμορφώνονται ως εξής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.2.6\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \Rightarrow \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.2.6\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.2.6\gamma)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.2.6\delta)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.2.6\epsilon)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.2.6\zeta)$$

Με βάση τις σχ. (3.2.2), (3.2.4) οι παραπάνω σχέσεις έπειτα από κάποια άλγεβρα δίνουν

$$\varepsilon_{xx} = u'_m + \theta'_x \cdot \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot (y^2 + z^2) \cdot (\theta'_x)^2 \quad (3.2.7\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (3.2.7\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (3.2.7\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \theta'_x \cdot \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (3.2.7\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \theta'_x \cdot \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (3.2.7\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (3.2.7\zeta)$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (3.2.5), (3.2.7) καθίστανται σαφή τα εξής:

- Παρότι τα πεδία μετατοπίσεων και παραμορφώσεων ορίζονται διαφορετικά στις θεωρήσεις των μικρών και των μεγάλων μετατοπίσεων, όλες οι συνιστώσες της

παραμόρφωσης έχουν πανομοιότυπη μορφή τύπων, εκτός από την ορθή παραμόρφωση κατά μήκος της ράβδου ε_{xx} .

- Η ουσιαστική διαφορά των δύο θεωρήσεων βρίσκεται στη συνιστώσα ε_{xx} η οποία παύει να είναι γραμμική στην περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων.

Ο όρος $\frac{I}{2} \cdot (y^2 + z^2) \cdot (\theta'_x)^2$, όπως παρατηρούμε είναι μη γραμμικός ως προς την παράγωγο της γωνίας στροφής θ'_x και καλείται **όρος Wagner** (Wagner term) (Chen & Trahair, 1992).

3.2.4 Πεδίο τάσεων

Το επόμενο βήμα στην ανάλυση είναι ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό είναι αναγκαία η θεώρηση καταστατικών νόμων με τους οποίους προσομοιώνεται η συμπεριφορά του υλικού της ράβδου. Στην περίπτωση ενός ισότροπου, υπερελαστικού υλικού, οι συνιστώσες της παραμόρφωσης Green συναρτήσκει του 2^{ου} τανυστή τάσεως Piola – Kirchhoff δίνονται από τις σχ. (2.2.15). Η αντιστροφή των σχέσεων αυτών δίνει (με τη βοήθεια των σχ. (3.2.7))

$$S_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] \Rightarrow$$

$$S_{xx} = E^* \left[u'_m + \theta'_x \cdot \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} + \frac{I}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \quad (3.2.8\alpha)$$

$$S_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] \Rightarrow$$

$$S_{yy} = E^{**} \left[u'_m + \theta'_x \cdot \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} + \frac{I}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \quad (3.2.8\beta)$$

$$S_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \Rightarrow$$

$$S_{zz} = E^{**} \left[u'_m + \theta'_x \cdot \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} + \frac{I}{2}(y^2 + z^2)(\theta'_x)^2 \right] \quad (3.2.8\gamma)$$

$$S_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \Rightarrow S_{xy} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (3.2.8\delta)$$

$$S_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \Rightarrow S_{xz} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (3.2.8\epsilon)$$

$$S_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \Rightarrow S_{yz} = 0 \quad (3.2.8\zeta)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις υπεισέρχονται οι ελαστικές σταθερές

$$E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E^{**} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{ενώ παραλήφθηκαν για εποπτικούς}$$

λόγους οι αριστεροί ενδείκτες του χρόνου και της διαμόρφωσης όπου εξετάζουμε τη ράβδο.

Στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων βλέπουμε εύκολα ότι το μόνο που αλλάζει είναι η χρήση του τανυστή τάσης Cauchy και του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων. Οι δύο τανυστές θα συνδέονται με τον ίδιο καταστατικό νόμο, έτσι οι σχ. (3.2.8), με τη βοήθεια των σχ. (3.2.5) θα διαμορφωθούν ως

$$\sigma_{xx} = E^* \left(u'_m + \theta''_x \cdot \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \right) \quad (3.2.9\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = E^{**} \left(u'_m + \theta''_x \cdot \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \right) \quad (3.2.9\beta)$$

$$\sigma_{zz} = E^{**} \left(u'_m + \theta''_x \cdot \phi_S^P + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \right) \quad (3.2.9\gamma)$$

$$\sigma_{xy} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (3.2.9\delta)$$

$$\sigma_{xz} = G\theta'_x \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (3.2.9\epsilon)$$

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (3.2.9\zeta)$$

Στην περίπτωση που αγνοήσουμε την επιρροή του λόγου Poisson στη λύση ($\nu = 0$), τότε στις εξαχθείσες σχέσεις απλά θέτουμε $E^* = E$, $E^{**} = 0$. Η συγκεκριμένη παραδοχή είναι αρκετά συνηθισμένη στις διάφορες θεωρίες δοκού και υιοθετείται και στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Ωστόσο τονίζουμε ότι δεν υπάρχει καμιά δυσκολία να γίνει χρήση του απομειωμένου μέτρου ελαστικότητας E^* (αντί του E), ενώ παρακάτω θα γίνει σαφές ότι οι μη μηδενικές τάσεις S_{yy} , S_{zz} δεν παίζουν κάποιο ρόλο στη συνολική ισορροπία της ράβδου μιας και οι αντίστοιχες συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης ε_{yy} , ε_{zz} είναι μηδενικές, με αποτέλεσμα το συνολικό έργο των τάσεων αυτών να είναι μηδενικό. Συνεπώς, ακόμα κι αν υποθεθεί ότι $\nu \neq 0$, οι συγκεκριμένες τάσεις μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα μετά την εύρεση των κινηματικών μεγεθών, χρησιμοποιώντας τις σχ. (3.2.8β, 3.2.8γ), σημειώνουμε ωστόσο ότι οι συγκεκριμένες τάσεις δεν προβλέπονται από τις εξωτερικές δράσεις που θεωρούμε ότι ασκούνται στη ράβδο (με αποτέλεσμα η θεωρία να χάνει το φορμαλισμό της, αφού για να παραμείνει ακριβής θα πρέπει οι εξωτερικές δράσεις να ικανοποιούν επακριβώς τις σχέσεις επιφανειακών δράσεων - τανυστή τάσης).

Επισημαίνουμε στο σημείο αυτό ότι ιστορικά αναπτύχθηκαν δύο «κατηγορίες» θεωριών δοκού (Green et al., 1967). Στην πρώτη κατηγορία γίνεται προσπάθεια να αντιμετωπιστούν όλες οι εξισώσεις του ελαστικού παραμορφώσιμου σώματος, λαμβάνοντας υπόψιν ορισμένες απλοποιήσεις που σχετίζονται με την ειδική γεωμετρία που έχει ένα ραβδωτό σώμα (κυρίαρχη η μία από τις τρεις χωρικές διαστάσεις). Στη δεύτερη κατηγορία, δε γίνεται καμιά αναφορά στο τρισδιάστατο πρόβλημα της ελαστικότητας και οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση της ράβδου προκύπτουν από τη θεώρησή της ως ένα μονοδιάστατο συνεχές σώμα, το οποίο φέρει

συγκεκριμένη δομή (Davi, 1990). Και στις δύο κατηγορίες θεωριών η αρχή του St. Venant παίζει πολύ σημαντικό ρόλο (Ladevèze & Simmonds, 1998), ωστόσο η δεύτερη κατηγορία έχει το μειονέκτημα ότι γίνεται χρήση μονοδιάστατων καταστατικών σχέσεων για τη ράβδο και όχι τρισδιάστατων καταστατικών σχέσεων για το υλικό. Βέβαια, μετά τη διατύπωση της θεωρίας μπορεί να γίνει προσπάθεια συσχέτισης του μονοδιάστατου καταστατικού νόμου με τους καταστατικούς νόμους του υλικού της ράβδου, ενώ έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις για το ζήτημα αυτό (Parker, 1984). Η θεωρία που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία, όπως είδαμε έχει το πλεονέκτημα της απευθείας χρήσης τρισδιάστατων καταστατικών σχέσεων που αφορούν το υλικό και όχι την ίδια τη ράβδο.

3.2.5 Προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης - διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου

Συνοψίζοντας τα όσα έχουμε εξάγει μέχρι τώρα, έχουμε εισάγει στο πεδίο μετατοπίσεων 4 άγνωστες συναρτήσεις, τις $u_m(x,t)$, $\theta_x(x,t)$, $\phi_S^P(y,z)$, $\phi_S^S(x,y,z,t)$ ενώ μέχρι στιγμής έχουμε εκμεταλλευτεί τις 12 από τις συνολικά 15 διατιθέμενες σχέσεις του προβλήματος (6 σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων και 6 καταστατικές σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων). Είναι προφανές ότι οι 4 άγνωστες συναρτήσεις θα προσδιοριστούν από τις διατιθέμενες εξισώσεις ισορροπίας (σε διαφορική ή ολοκληρωτική - ασθενή μορφή). Αρχικά θα προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_S^P , ϕ_S^S μέσω της αρχής δυνατών έργων (σχ. 1.2.47)). Στα παρακάτω θα παραλείψουμε χάριν ευκολίας τους ενδείκτες προσδιορισμού της χρονικής στιγμής και της διαμόρφωσης, διευκρινίζοντας ότι εργαζόμαστε σε μια ολική διατύπωση Lagrange της κίνησης (βλ. σχ. (1.2.47)). Αναπτύσσοντας το δεξιά μέλος της σχ. (1.2.46) που αποτελεί την έκφραση του δυνατού εσωτερικού έργου, λαμβάνουμε

$$\delta W_{int} = \int_V \left(S_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + S_{xy} \delta \gamma_{xy} + S_{xz} \delta \gamma_{xz} + S_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + S_{zz} \delta \gamma_{zz} + S_{yz} \delta \gamma_{yz} \right) dV \quad (3.2.10)$$

όπου V ο όγκος της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση. Είναι προφανές ότι οι 3 τελευταίοι όροι της παραπάνω σχέσης μηδενίζονται εξαιτίας των σχ. (3.2.7β, γ, ζ), συνεπώς η παραπάνω σχέση διαμορφώνεται ως

$$\delta W_{int} = \int_V \left(S_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + S_{xy} \delta \gamma_{xy} + S_{xz} \delta \gamma_{xz} \right) dV \quad (3.2.11)$$

ενώ συνολικά η αρχή δυνατών έργων (1.2.47) γράφεται ως

$$\delta W_{int} + \delta W_{mass} = \delta W_{ext} \quad (3.2.12)$$

όπου

$$\delta W_{mass} = \int_V \rho \cdot (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV \quad (3.2.13a)$$

$$\delta W_{ext} = \int_F (t_x \cdot \delta u + t_y \cdot \delta v + t_z \cdot \delta w) dF \quad (3.2.13\beta)$$

με F να είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση συμπεριλαμβανομένου και των δύο ακραίων διατομών της, t_x , t_y , t_z να είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας (αρχική διαμόρφωση), ενώ ο συμβολισμός (\cdot) δηλώνει παραγώγιση ως προς το χρόνο (μεταβλητή t). Η σχ. (3.2.12) προέκυψε από την παραδοχή που έχουμε προαναφέρει ότι στη ράβδο δεν ασκούνται άλλες μαζικές δυνάμεις εκτός από τις αδρανειακές (τελευταία παραδοχή της ενότητας 3.2.1). Ο όρος των μαζικών δυνάμεων της σχ. (1.2.47) εκφράζεται μέσω του όρου δW_{mass} της σχ. (3.2.13α) κάνοντας χρήση της αρχής D'Alembert (Bathe, 1996).

Αρχικά, στην εξ. (3.2.12) λαμβάνουμε υπόψιν μόνο τους δυνατούς όρους της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης. Έτσι οι σχετικοί όροι του δυνατού εσωτερικού έργου (εξ. (3.2.11)) δίνονται ως

$$I_I = \int_V S_{xx} \theta_x'' \delta \phi_S^P dV + \int_V \theta_x' \cdot \left(S_{xy} \frac{\partial \delta \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \delta \phi_S^P}{\partial z} \right) dV \quad (3.2.14)$$

Ακολουθώντας την τεχνική του Washizu (1975), ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες ως προς x τον πρώτο όρο της παραπάνω εξίσωσης και λαμβάνουμε

$$\int_{x=0}^l \int_{\Omega} (\theta_x')' (S_{xx} \delta \phi_S^P) d\Omega dx = - \int_{x=0}^l \int_{\Omega} \theta_x' \frac{\partial}{\partial x} (S_{xx} \delta \phi_S^P) d\Omega dx + \left[\int_{\Omega} (\theta_x') (S_{xx} \delta \phi_S^P) d\Omega \right]_{x=0}^l \quad (3.2.15)$$

Ολοκληρώνοντας κατάλληλα κατά παράγοντες ως προς y, z το δεύτερο όρο της εξ. (3.2.14), λαμβάνουμε

$$\int_{x=0}^l \int_{\Omega} \theta_x' \cdot \left(S_{xy} \frac{\partial \delta \phi_S^P}{\partial y} + S_{xz} \frac{\partial \delta \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega dx = \int_{x=0}^l \left[-\theta_x' \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \delta \phi_S^P d\Omega + \theta_x' \cdot \int_{\Gamma} (S_{xy} n_y + S_{xz} n_z) \delta \phi_S^P ds \right] dx \quad (3.2.16)$$

όπου $n_y = \cos \beta$, $n_z = \sin \beta$ (με $\beta = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$) είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος στο σύνορο Γ της διατομής (βλ. σχήμα 3.2.1α). Αντικαθιστώντας τις τελευταίες δύο εξισώσεις στην εξ. (3.2.14), παίρνουμε

$$I_1 = \int_{x=0}^l \left[-\theta'_x \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \delta\phi_S^P d\Omega + \theta'_x \int_{\Gamma} (S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) \delta\phi_S^P ds \right] dx \quad (3.2.17)$$

$$+ \left[\theta'_x \cdot \int_{\Omega} S_{xx} \delta\phi_S^P d\Omega \right]_{x=0}^l$$

Ομοίως οι σχετικοί όροι I_2, I_3 της δυνατής συνάρτησης στρέβλωσης των $\delta W_{mass}, \delta W_{ext}$ αντίστοιχα δίνονται ως

$$I_2 = \int_V \rho \ddot{u} \cdot \theta'_x \delta\phi_S^P dV = \int_{x=0}^l \left(\theta'_x \cdot \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \delta\phi_S^P d\Omega \right) dx \quad (3.2.18\alpha)$$

$$I_3 = \int_F t_x \cdot \theta'_x \delta\phi_S^P dF = \int_{\Omega_0} t_x \cdot \theta'_x \delta\phi_S^P d\Omega + \int_{\Omega_l} t_x \cdot \theta'_x \delta\phi_S^P d\Omega + \int_{F_{lat}} t_x \cdot \theta'_x \delta\phi_S^P dF \quad (3.2.18\beta)$$

όπου Ω_0, Ω_l είναι οι ακραίες διατομές της ράβδου (για $x=0, l$ αντίστοιχα) και F_{lat} είναι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου ($F = F_{lat} \cup \Omega_0 \cup \Omega_l$). Επειδή η ϕ_S^P είναι άγνωστη συνάρτηση, η δυνατή μεταβολή της δεν μπορεί να είναι μηδενική, συνεπώς, συσχετίζοντας τις εξ. (3.2.17), (3.2.18) λαμβάνουμε

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} - \rho \ddot{u} = 0 \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, l) \quad (3.2.19\alpha)$$

καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη στο σύνορο του Ω

$$S_{xy}n_y + S_{xz}n_z = t_x \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, l) \quad (3.2.19\beta)$$

Συμπεραίνουμε ότι ο προσδιορισμός της ϕ_S^P θα πραγματοποιηθεί μέσω των εξισώσεων (3.2.19). Η ϕ_S^P που θα προκύψει θα ισχύει στο διάστημα $x \in (0, l)$ αλλά όχι και στα δύο άκρα της ράβδου $x=0, l$. Από τους όρους των εξ. (3.2.17), (3.2.18) που σχετίζονται με τα δύο άκρα της ράβδου προκύπτει ένας όρος - «υπόλοιπο»

$$I_{res} = \left[\theta'_x \cdot \int_{\Omega} (t_x - S_{xx}) \delta\phi_S^P d\Omega \right]_{x=0}^l \quad (3.2.20)$$

ο οποίος, στα πλαίσια μια θεωρίας δοκού (που επιθυμούμε να διατυπώσουμε), δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της ϕ_S^P . Έτσι θα θεωρήσουμε ότι η ϕ_S^P που προκύπτει από τις εξ. (3.2.19) θα ισχύει και στα άκρα της ράβδου, ενώ η ασυνέπεια της παρούσας θεωρίας λόγω αυτής της παραδοχής είναι «τοπική» και δεν επηρεάζει τη συνολική συμπεριφορά της ράβδου. Εξάλλου, για συγκεκριμένες περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών, όπως πχ πλήρης παρεμπόδιση της στρέβλωσης, θα ισχύει $\theta'_x = 0$ με αποτέλεσμα ο όρος I_{res} να μηδενίζεται.

Εφαρμόζοντας παρόμοια διαδικασία και για τους δυνατούς όρους της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S , οι εξ. (3.2.17), (3.2.18α, β) αναδιατυπώνονται ως

$$I'_1 = \int_{x=0}^l \left[- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) \delta \phi_S^S d\Omega + \int_{\Gamma} (S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) \delta \phi_S^S ds \right] dx + \left[\int_{\Omega} S_{xx} \delta \phi_S^S d\Omega \right]_{x=0}^l \quad (3.2.21\alpha)$$

$$I'_2 = \int_V \rho \ddot{u} \delta \phi_S^S dV = \int_{x=0}^l \left(\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \delta \phi_S^S d\Omega \right) dx \quad (3.2.21\beta)$$

$$I'_3 = \int_F t_x \delta \phi_S^S dF = \int_{\Omega_0} t_x \delta \phi_S^S d\Omega + \int_{\Omega_l} t_x \delta \phi_S^S d\Omega + \int_{F_{lat}} t_x \delta \phi_S^S dF \quad (3.2.21\gamma)$$

Επειδή η ϕ_S^S είναι επίσης άγνωστη συνάρτηση, η δυνατή μεταβολή της δεν μπορεί να είναι μηδενική, συνεπώς από τις εξ. (3.2.21) βρίσκουμε ότι η ϕ_S^S θα προκύψει από τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις που θα προκύψει και η ϕ_S^P , δηλαδή τις εξ. (3.2.19). Όπως και στην προηγούμενη ανάλυση, έτσι κι εδώ θα προκύψει κάποιος όρος-«υπόλοιπο» που σχετίζεται με τη ϕ_S^S στα δύο άκρα της ράβδου ο οποίος και αγνοείται.

Συμπερασματικά, καταλήγουμε στο ότι οι δύο συναρτήσεις στρέβλωσης, που εισαγάγαμε «αυθαίρετα» στο πεδίο μετατοπίσεων, θα προκύψουν από την επίλυση μιας και μοναδικής διαφορικής εξίσωσης (εξ. (3.2.19α)) σε επίπεδο υλικού σημείου μαζί με την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (εξ. (3.2.19β)). Για την περίπτωση που επιλύουμε ένα στατικό πρόβλημα, απλά μηδενίζουμε τον όρο $\rho \ddot{u}$. Εάν ακολουθήσουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία που παρουσιάσαμε **στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων**, βρίσκουμε ότι ο προσδιορισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης θα πραγματοποιηθεί μέσω των εξισώσεων

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} - \rho \ddot{u} = 0 \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, l) \quad (3.2.22\alpha)$$

$$\sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = t_x \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, l) \quad (3.2.22\beta)$$

που όπως έχουμε ήδη δει, αποτελούν την έκφραση της 1ης διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου και της αντίστοιχης συνοριακής συνθήκης (βλ. σχ. (1.2.48α), (1.2.49α)), για το διάστημα $x \in (0, l)$. Βλέπουμε ότι στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας, τουλάχιστον για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων, μέρος των άγνωστων ποσοτήτων προσδιορίζεται από την επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας κατά x σε ισχυρή μορφή και δεν χρησιμοποιούνται αυθαίρετες συναρτήσεις στρέβλωσης προσδιορισμένες a priori. Το συμπέρασμα αυτό παύει να ισχύει μονάχα στα δύο άκρα της ράβδου, όπου η ισορροπία κατά x (αξονικές δυνάμεις και στρεπτικές στροφές) θα εξασφαλιστεί σε ασθενή και όχι ισχυρή μορφή, όπως θα δούμε παρακάτω. Έτσι, η θεωρία που διατυπώνεται εδώ θεωρούμε ότι κατατάσσεται στην κατηγορία θεωριών δοκού όπου γίνεται προσπάθεια αναγωγής του πλήρους

τρισδιάστατου προβλήματος σε μονοδιάστατο μέσω κάποιων απλοποιήσεων και όχι στην κατηγορία θεωριών όπου εξ αρχής αντιμετωπίζεται η ράβδος ως ένα μονοδιάστατο σώμα με κάποια εσωτερική δομή.

Η αντικατάσταση των συνιστωσών τάσης στη δεύτερη και τρίτη διαφορική εξίσωση ισορροπίας (ισορροπία κατά y, z) οδηγεί στην τοπική παραβίαση τους (είτε λάβουμε υπόψιν το λόγο Poisson είτε τον αγνοήσουμε). Το γεγονός αυτό αποτελεί ασυνέπεια της παρούσας θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης, ενώ γνωρίζουμε ότι στην ειδική περίπτωση της ομοιόμορφης στρέψης (St. Venant, 1855) το σύνολο των εξισώσεων του τρισδιάστατου προβλήματος ικανοποιείται. Επιπλέον, ούτε η ισχυρή έκφραση της ισορροπίας κατά y, z (καμπτοδιατμητική ένταση) εξετάζεται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, μιας και στο πεδίο μετατοπίσεων δεν έχουμε θεωρήσει καμπτοδιατμητικούς βαθμούς ελευθερίας (εγκάρσιες μετακινήσεις και καμπτικές στροφές διατομών).

Στα πλαίσια των μεγάλων μετατοπίσεων, παρατηρούμε ότι ουσιαστικά οι εξ. (3.2.19) αποτελούν τις αντίστοιχες εκφράσεις ισορροπίας (1.2.28α), (1.2.24) όπου ο 1ος ταυυστής τάσεων Piola-Kirchhoff έχει αντικατασταθεί από τις αντίστοιχες συνιστώσες του 2ου ταυυστή Piola-Kirchhoff. Βλέπουμε λοιπόν ότι εδώ, η αρχή δυνατών έργων με την οποία διατυπώσαμε τις εξισώσεις προσδιορισμού των συναρτήσεων στρέβλωσης δεν οδήγησε στην ακριβή έκφραση της 1ης διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας. Συνεπώς στις μεγάλες μετατοπίσεις στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας, οι συναρτήσεις στρέβλωσης που θα υπολογιστούν δε θα οδηγούν στην εξασφάλιση της ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου. Μπορούμε όμως τουλάχιστον να ισχυριστούμε ότι η επιλογή τους δεν είναι εντελώς αυθαίρετη **και ότι αποτελεί άμεση επέκταση του αντίστοιχου προβλήματος μικρών μετατοπίσεων.**

Οι εξ. (3.2.19) αναπτύσσονται ως

$$E \left[u_m'' + \theta_x''' \phi_S^P + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial x^2} + (y^2 + z^2) \theta_x' \theta_x'' \right] + G \theta_x'' \cdot \nabla^2 \phi_S^P + G \cdot \nabla^2 \phi_S^S - \quad (3.2.23\alpha)$$

$$- \rho (\ddot{u}_m + \ddot{\theta}_x' \phi_S^P + \ddot{\phi}_S^S) = 0$$

$$\left[G \theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right] n_y + \left[G \theta_x' \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right] n_z = t_x \quad (3.2.23\beta)$$

όπου $\nabla^2 = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ είναι ο δισδιάστατος τελεστής Laplace. Από τις παραπάνω εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις στρέβλωσης θα πρέπει να επιλύσουμε ένα τρισδιάστατο δυναμικό πρόβλημα. Κάτι τέτοιο φυσικά είναι εξαιρετικά δυσχερές, συνεπώς προβαίνουμε στις εξής παραδοχές: Αγνοούμε τόσο τον όρο της χρονικής παραγωγού της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης (όρος $\ddot{\phi}_S^S$) -που αναμένουμε να έχει ελάχιστη συνεισφορά στην απόκριση της ράβδου- όσο και τη δεύτερη παράγωγο ως προς x της ίδιας συνάρτησης (όρος $\frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial x^2}$). Η δεύτερη παραδοχή είναι απαραίτητη προκειμένου να

αποσυζεύξουμε τις εξισώσεις του προβλήματος και να διατυπώσουμε μια θεωρία δοκού κατά την οποία επιλύεται μια σειρά δισδιάστατων και μονοδιάστατων προβλημάτων. Εξάλλου ο συγκεκριμένος όρος αντιστοιχίζεται πλήρως με τον όρο I_{res} (βλ. σχ. (3.2.20)): Εάν επιθυμούσαμε την επίλυση του πλήρους τρισδιάστατου

προβλήματος που σχετίζεται με τη ϕ_S^S , τότε θα έπρεπε να προσδιορίσουμε τη συνοριακή συνθήκη στα άκρα της ράβδου του προβλήματος αυτού μέσω της σχ. (3.2.20). Σχετικά με την πρώτη παραδοχή, αναφέρουμε ότι η μη υιοθέτησή της οδηγεί αναπόφευχτα σε θεωρία δοκού όπου επιλύεται ένα τρισδιάστατο δυναμικό πρόβλημα χωρίς να υπάρχει η δυνατότητα αντιμετώπισής του με μια σειρά δισδιάστατων και μονοδιάστατων προβλημάτων.

Οποιοσδήποτε συναρτήσεις στρέβλωσης που ικανοποιούν τις εξισώσεις (3.2.23) θα είναι αποδεκτές. Επειδή επιθυμούμε την άμεση επέκταση της θεωρίας ομοιόμορφης στρέψης κατά St. Venant στο υπό εξέταση πρόβλημα, θα υπολογίσουμε την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών που πρότείνει ο συγκεκριμένος ερευνητής. Έτσι, η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P θα δοθεί από την επίλυση του προβλήματος

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (3.2.24\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.2.24\beta)$$

όπου $\frac{\partial(\cdot)}{\partial n}$ είναι ο τελεστής της παραγώγου κατά κατεύθυνση ως προς το κάθετο

διάνυσμα n στο σύνορο Γ της διατομής. Αφού η ϕ_S^P προσδιορίζεται με τις ίδιες ακριβώς σχέσεις με τις οποίες προσδιορίζεται και στο πρόβλημα της ομοιόμορφης στρέψης, συμπεραίνουμε ότι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις δίνονται από τους πρώτους όρους των εξ. (3.2.8δ, 3.2.8ε, 3.2.9δ, 3.2.9ε). Αντικαθιστώντας τις εξ. (3.2.24) στις αντίστοιχες εξ. (3.2.23) και εκμεταλλευόμενοι τις προαναφερθείσες παραδοχές βρίσκουμε ότι η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S θα δοθεί από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \left(-\frac{E}{G} u_m'' + \frac{\rho}{G} \ddot{u}_m \right) - \left(\frac{E}{G} \theta_x''' - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}_x \right) \cdot \phi_S^P - \frac{E}{G} \theta_x' \theta_x'' (y^2 + z^2) \quad \text{στο } \Omega \quad (3.2.25\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = \frac{t_x}{G} \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.2.25\beta)$$

Παρατηρούμε ότι η επίλυση των εξ. (3.2.25) προϋποθέτει τον προσδιορισμό της ϕ_S^P . Αφού οι συνολικές διατμητικές τάσεις που καταπονούν τη ράβδο είναι το άθροισμα των πρωτογενών και των δευτερογενών, άμεσα προκύπτει ότι οι δεύτεροι όροι των εξ. (3.2.8δ, 3.2.8ε, 3.2.9δ, 3.2.9ε) αποτελούν τις εκφράσεις των δευτερογενών διατμητικών τάσεων.

Επισημαίνουμε ότι οι συναρτήσεις στρέβλωσης που υπολογίζονται μέσω των παραπάνω προβλημάτων συνοριακών τιμών αυτόματα θα ικανοποιούν και τις εξισώσεις (3.2.19). Στην περίπτωση των **μικρών μετατοπίσεων** είναι προφανές ότι η ϕ_S^P θα προκύψει από το ίδιο πρόβλημα συνοριακών τιμών (εξ. (3.2.24)) ενώ για τη ϕ_S^S ισχύει

$$\nabla^2 \phi_S^S = \left(-\frac{E}{G} u_m'' + \frac{\rho}{G} \ddot{u}_m \right) - \left(\frac{E}{G} \theta_x''' - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}_x' \right) \cdot \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (3.2.26\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = \frac{t_x}{G} \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.2.26\beta)$$

Για την περίπτωση που επιλύουμε στατικό πρόβλημα, απλά μηδενίζουμε τους όρους των χρονικών παραγώγων στις εξ. (3.2.25) και (3.2.26). Στην ειδική περίπτωση του στατικού προβλήματος όπου μελετούμε αποκλειστικά στρεπτική φόρτιση χωρίς την επιρροή της αξονικής καταπόνησης (ή γενικότερα για οποιαδήποτε περίπτωση στην οποία προκύπτει $u_m'' = 0$) καταλήγουμε σε ταυτόσημη εξίσωση προσδιορισμού της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης (εξ. (3.2.26α)) με αυτήν που προτείνεται από τους Sarountzakis & Mokos (2003). Ωστόσο, η συνοριακή συνθήκη προσδιορισμού της ϕ_S^S (εξ. (3.2.26β)) που προτείνεται εδώ αποτελεί γενίκευση της αντίστοιχης σχέσης που έχει προταθεί από τους ίδιους ερευνητές στην οποία το δεξί μέλος της εξ. (3.2.26β) λαμβάνεται μηδενικό. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα μελετηθούν αριθμητικά μονάχα περιπτώσεις όπου καθ' όλο το μήκος της ράβδου ισχύει $t_x = 0$, με αποτέλεσμα το δεξιά μέλος της εξ. (3.2.26β) να μηδενίζεται. Κάτι τέτοιο ουσιαστικά αντιστοιχεί σε μηδενική κατανεμημένη αξονική δύναμη και δίρροπο στρέβλωσης κατά μήκος της ράβδου, ωστόσο επισημαίνουμε ότι και η περίπτωση όπου $t_x \neq 0$ μπορεί να αντιμετωπιστεί με τις μεθοδολογίες του παρόντος πονήματος.

Μετά τη διατύπωση των εξισώσεων προσδιορισμού των ϕ_S^P , ϕ_S^S είμαστε σε θέση να δείξουμε για ποιον λόγο η θεώρηση οποιουδήποτε άλλου άξονα στροφής πέραν αυτού που εκλέξαμε αρχικά για την περιγραφή της κίνησης, θα οδηγήσει στην ανάπτυξη καμπτοδιατμητικής έντασης λόγω των στρεπτικών στροφών των διατομών. Αρχικά εξετάζουμε **την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων** και κάνουμε την

επιπλέον παραδοχή ότι ο όρος $E \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x}$ της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης

στην έκφραση των ορθών τάσεων (βλ. εξ. (3.2.9α)) αμελείται. Θεωρούμε ότι το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου είναι το ίδιο με αυτό των εξ. (3.2.2), (3.2.4) αλλά είναι εκπεφρασμένο ως προς τυχόν τρισσορθογώνιο, δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς, έστω το $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ (ο άξονας $O\tilde{x}$ είναι παράλληλος ως προς το διαμήκη άξονα της ράβδου).

Εύκολα βρίσκουμε ότι όλες οι εξισώσεις που έχουν διατυπωθεί μέχρι τώρα ισχύουν ως έχουν, εάν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές θέσης της ράβδου ($x \rightarrow \tilde{x}$, $y \rightarrow \tilde{y}$, $z \rightarrow \tilde{z}$). Οι καμπτικές ροπές, ως γνωστόν (Armenakas, 2003), ορίζονται (ως προς την απαραμόρφωτη διαμόρφωση της ράβδου) ως

$$M_Y = \int_{\Omega} \sigma_{xx} (\tilde{z} - \tilde{z}_C) d\Omega \quad (3.2.27\alpha)$$

$$M_Z = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} (\tilde{y} - \tilde{y}_C) d\Omega \quad (3.2.27\beta)$$

όπου \tilde{y}_C , \tilde{z}_C είναι οι συντεταγμένες του γεωμετρικού κέντρου της ράβδου ως προς το σύστημα αναφοράς $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$. Αντικαθιστώντας την έκφραση της ορθής τάσης

(3.2.9α) στις άνω εξισώσεις και βασιζόμενοι στην προαναφερθείσα παραδοχή αγνόησης του όρου $E \frac{\partial \phi_S^P}{\partial x}$ βρίσκουμε

$$M_Y = E\theta_x'' \cdot \left[\int_{\Omega} \phi_O^P \tilde{z} d\Omega - \tilde{z}_C \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega \right] \quad (3.2.28\alpha)$$

$$M_Z = -E\theta_x'' \cdot \left[\int_{\Omega} \phi_O^P \tilde{y} d\Omega - \tilde{y}_C \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega \right] \quad (3.2.28\beta)$$

συμπεραίνοντας ότι οι καμπτικές ροπές γενικά είναι μη μηδενικές. Απαιτώντας το μηδενισμό τόσο των καμπτικών ροπών όσο και της αξονικής δύναμης που οφείλεται στις στρεπτικές στροφές των διατομών (δηλαδή στον όρο $\theta_x' \cdot \phi_O^P$ της διαμήκου μετακίνησης που σχετίζεται άμεσα με τις αξονικές τάσεις), προκύπτουν οι ακόλουθες συνθήκες ορθογωνικότητας για την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης

$$\int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega = 0 \quad (3.2.29\alpha)$$

$$\int_{\Omega} \phi_S^P \tilde{y} d\Omega = 0 \quad (3.2.29\beta)$$

$$\int_{\Omega} \phi_S^P \tilde{z} d\Omega = 0 \quad (3.2.29\gamma)$$

όπου στις ανωτέρω σχέσεις εισάγαμε την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το κέντρο στρέψης S μιας και το σύστημα αναφοράς $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ είναι τυχόν, συνεπώς οι σχ. (3.2.29) εν γένει δε θα ικανοποιούνται με χρήση της ϕ_O^P . Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η αξονική δύναμη ορίζεται κατά τα γνωστά ως

$$N = \int_{\Omega} \sigma_{xx} d\Omega \quad (3.2.30)$$

και με αντικατάσταση της έκφρασης της ορθής τάσης (3.2.9α), η παραπάνω σχέση δίνει

$$N = EA \cdot u_m' + E\theta_x'' \cdot \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega \quad (3.2.31)$$

από όπου τελικά προκύπτει η απαίτηση της εξ. (3.2.29α). Οι συνθήκες (3.2.29β, 3.2.29γ) ορίζουν μονοσήμαντα ένα προνομιακό σύστημα αναφοράς, η στροφή περί το διαμήκη άξονά του οποίου θα οδηγήσει στην αποκλειστική ανάπτυξη στρεπτικής έντασης στη ράβδο. Η εξίσωση (3.2.29α) δεν είναι περιττή μιας και η συνοριακή συνθήκη (3.2.24β) με την οποία προσδιορίζεται η ϕ_S^P είναι τύπου Neumann και από τη θεωρία των εξισώσεων δυναμικού (Κατσιαδέλης, 1999) γνωρίζουμε ότι εξισώσεις με τέτοιου τύπου συνοριακή συνθήκη δέχονται λύση συναρτήσει μιας αυθαίρετης σταθεράς. Η σταθερά αυτή συγκεκριμενοποιείται στο υπό εξέταση πρόβλημα μέσω της εξ. (3.2.29α). Χωρίς αλλοίωση της γενικότητας υποθέτουμε ότι

οι άξονες $O\tilde{y}, O\tilde{z}$ όπως και οι άξονες Oz και Oz είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_S^P, ϕ_O^P δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Εύκολα μπορούμε να βρούμε αντικαθιστώντας στις εξ. (3.2.24) ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση σύνδεσης των δύο συναρτήσεων

$$\phi_S^P(y, z) = \phi_O^P(\tilde{y}, \tilde{z}) + \tilde{y}_S \tilde{z} - \tilde{z}_S \tilde{y} + \tilde{c} \quad (3.2.32)$$

όπου \tilde{y}_S, \tilde{z}_S είναι οι προς το παρόν άγνωστες συντεταγμένες του κέντρου στρέψης S ως προς το σύστημα $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ ($y = \tilde{y} - \tilde{y}_S, z = \tilde{z} - \tilde{z}_S$) και \tilde{c} είναι άγνωστη σταθερά. Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στις σχ. (3.2.29) μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε τους τρεις αγνώστους της εξ. (3.2.32) μέσω του γραμμικού συστήματος

$$S_{\tilde{y}} \tilde{y}_S - S_{\tilde{z}} \tilde{z}_S + A \tilde{c} = -A_{\tilde{w}} \quad (3.2.33\alpha)$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} \tilde{y}_S - I_{\tilde{y}\tilde{z}} \tilde{z}_S + S_{\tilde{y}} \tilde{c} = -A_{\tilde{w}\tilde{z}} \quad (3.2.33\beta)$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} \tilde{y}_S - I_{\tilde{z}\tilde{z}} \tilde{z}_S + S_{\tilde{z}} \tilde{c} = -A_{\tilde{w}\tilde{y}} \quad (3.2.33\gamma)$$

όπου

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad S_{\tilde{y}} = \int_{\Omega} \tilde{z} d\Omega \quad S_{\tilde{z}} = \int_{\Omega} \tilde{y} d\Omega \quad (3.2.34\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = \int_{\Omega} \tilde{y}\tilde{z} d\Omega \quad I_{\tilde{y}\tilde{y}} = \int_{\Omega} \tilde{z}^2 d\Omega \quad I_{\tilde{z}\tilde{z}} = \int_{\Omega} \tilde{y}^2 d\Omega \quad (3.2.34\delta, \epsilon, \zeta)$$

$$A_{\tilde{w}} = \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega \quad A_{\tilde{w}\tilde{y}} = \int_{\Omega} \phi_O^P \tilde{y} d\Omega \quad A_{\tilde{w}\tilde{z}} = \int_{\Omega} \phi_O^P \tilde{z} d\Omega \quad (3.2.34\eta, \theta, \iota)$$

Στην περίπτωση των **μεγάλων μετατοπίσεων**, επεκτείνουμε την προηγούμενη ανάλυση ορίζοντας τις καμπτικές ροπές και την αξονική δύναμη (βλ. σχ. (3.2.28)) ως

$$M_Y = \int_{\Omega} S_{xx} (\tilde{z} - \tilde{z}_C) d\Omega \quad (3.2.35\alpha)$$

$$M_Z = - \int_{\Omega} S_{xx} (\tilde{y} - \tilde{y}_C) d\Omega \quad (3.2.35\beta)$$

$$N = \int_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad (3.2.35\gamma)$$

Επειδή στις παραπάνω εκφράσεις υπεισέρχεται ο 2ος Piola-Kirchhoff τανυστής τάσεων, συμπεραίνουμε ότι τα εντατικά μεγέθη αναφέρονται στις διευθύνσεις των ινών στην παραμορφωμένη διαμόρφωση. Αντικαθιστώντας την έκφραση της ορθής τάσης (3.2.8α) και υιοθετώντας την προαναφερθείσα παραδοχή σχετικά με τη ϕ_S^P , οι παραπάνω εκφράσεις γράφονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = EA \cdot u'_m + E\theta'_x \cdot \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega + \frac{1}{2} E (\theta'_x)^2 \int_{\Omega} (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) d\Omega \quad (3.2.36\alpha)$$

$$M_Y = E\theta_x'' \cdot \left[\int_{\Omega} \phi_O^P \tilde{z} d\Omega - \tilde{z}_C \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega \right] + \frac{1}{2} E (\theta_x')^2 \int_{\Omega} (\tilde{z} - \tilde{z}_C) (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) d\Omega \quad (3.2.36\beta)$$

$$M_Z = -E\theta_x'' \cdot \left[\int_{\Omega} \phi_O^P \tilde{y} d\Omega - \tilde{y}_C \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega \right] - \frac{1}{2} E (\theta_x')^2 \int_{\Omega} (\tilde{y} - \tilde{y}_C) (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) d\Omega \quad (3.2.36\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τις μικρές μετατοπίσεις, εδώ προκύπτουν επιπλέον όροι στις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών που καθιστούν εξαιρετικά δυσχερή την αποσύζευξη των στρεπτικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών από τα αντίστοιχα καμπτικά και αξονικά μεγέθη. Συνεπώς εδώ, προκειμένου να απλοποιήσουμε το πρόβλημά μας, **υιοθετούμε τις ίδιες συνθήκες ορθογωνικότητας** (βλ. σχ. (3.2.29)) που έχουμε και στις μικρές μετατοπίσεις. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη σημαντική απλοποίηση των ανωτέρω εξισώσεων, ωστόσο τονίζουμε ότι στις μεγάλες μετατοπίσεις η αξονική και η στρεπτική ένταση είναι συζευγμένες με αποτέλεσμα την ανάγκη θεώρησης αξονικών φορτίσεων και συνοριακών συνθηκών προκειμένου να μελετηθεί αξιόπιστα η στρεπτική συμπεριφορά της ράβδου. Αυτό φαίνεται από στη σχ. (3.2.36α) όπου το διπλό ολοκλήρωμα του τελευταίου όρου πάντα θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός, συνεπώς η αξονική εσωτερική δράση εν γένει πάντοτε θα εξαρτάται από τη στρεπτική καταπόνηση (ο ίδιος περιέχει το $(\theta_x')^2$) και το αντίστροφο. Μάλιστα, για την περίπτωση διατομών που δε διαθέτουν διπλή συμμετρία τα στρεπτικά μεγέθη συζευγνύονται και με τα καμπτικά μεγέθη (Attard, 1986β).

Σημειώνουμε εδώ ότι και για τη δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης θα πρέπει να θεωρήσουμε κάποια συνθήκη προκειμένου να προσδιορίσουμε μοναδική λύση μέσω των αντίστοιχων προβλημάτων συνοριακών τιμών που έχουμε διατυπώσει παραπάνω. Έτσι, αφού προσδιορίσουμε το κέντρο στρέψης S μέσω της διαδικασίας που προαναφέραμε και μορφώσουμε όλες τις εξισώσεις του προβλήματος με βάση το σύστημα αναφοράς $Sxyz$, απαιτούμε όπως

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (3.2.37)$$

Βλέπουμε ότι η παραπάνω συνθήκη είναι αντίστοιχη με αυτήν της εξ. (3.2.29α). Και πάλι εδώ μηδενίσαμε το δεξιό μέλος προκειμένου να επιτύχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή απλοποίηση των εξισώσεων. Το γεγονός αυτό καθίσταται σαφές εάν ολοκληρώσουμε στη διατομή την έκφραση της διαμήκου μετακίνησης (3.2.4) ως

$$\int_{\Omega} u d\Omega = u_m \cdot A + \theta_x' \cdot \int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega + \int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega \quad (3.2.38)$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$u_m = \frac{\int_{\Omega} u d\Omega}{A} \quad (3.2.39)$$

εάν και μόνο εάν ισχύουν οι απαιτήσεις των εξ. (3.2.29α), (3.2.37). Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω απλοποιημένη έκφραση της «μέσης» μετακίνησης

u_m ισχύει εάν και μόνο εάν μηδενίσουμε το δεξιά μέλος της εξ. (3.2.37). Επιπλέον, μπορούμε μέσω της σχ. (3.2.39) να προσδώσουμε φυσική σημασία στη μετακίνηση u_m που αρχικά είχε εισαχθεί «αυθαίρετα» στο πεδίο μετατοπίσεων. Βρίσκουμε ότι αναφέρεται σε μια «μέση» διαμήκη μετακίνηση της τυχούσας διατομής της ράβδου η οποία εν γένει δε θα ισούται με τη μετακίνηση κάποιου συγκεκριμένου σημείου της διατομής (όπως p_x του γεωμετρικού της κέντρου).

3.2.6 Προσδιορισμός των κινηματικών μεγεθών $u_m(x,t)$, $\theta_x(x,t)$ - Εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου

Για τον προσδιορισμό των εναπομεινάντων κινηματικών αγνώστων $u_m(x,t)$, $\theta_x(x,t)$ του προβλήματος θα κάνουμε και πάλι χρήση της αρχής δυνατών έργων (εκφράσεις (3.2.11)-(3.2.13)) λαμβάνοντας αυτή τη φορά υπόψιν τους δυνατούς όρους των συγκεκριμένων μεγεθών (οι δυνατοί όροι των συναρτήσεων στρέβλωσης έχουν ληφθεί υπόψιν στην ενότητα 3.2.5). Για να διευκολύνουμε την ανάλυση αλλά και να προσδώσουμε κάποια φυσική σημασία στις εξισώσεις ισορροπίας, ορίζουμε τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[S_{xy}^P \cdot \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + S_{xz}^P \cdot \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (3.2.40\alpha)$$

$$M_w = - \int_{\Omega} S_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (3.2.40\beta)$$

όπου M_t^P είναι η πρωτογενής στρεπτική ροπή ή στρεπτική ροπή κατά St. Venant (primary twisting moment, St. Venant twisting moment) (Sapountzakis & Mokos, 2003), S_{xy}^P, S_{xz}^P είναι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (primary shear stresses) που δίνονται μέσω των πρώτων όρων των εξ. (3.2.8δ), (3.2.8ε) αντίστοιχα και M_w είναι το δίρροπο στρέβλωσης ή δίρροπή (warping moment). Για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων, τα εντατικά μεγέθη ορίζονται με τις ίδιες εκφράσεις εάν αντικαταστήσουμε τον 2ο τανυστή Piola-Kirchhoff με τον τανυστή τάσεων Cauchy. Τα παραπάνω εντατικά μεγέθη όπως και η αξονική δύναμη που έχει οριστεί μέσω της σχ. (3.2.35γ) δίνονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = EA \cdot \left[u_m' + \frac{I}{2} \cdot \frac{I_P}{A} \cdot (\theta_x')^2 \right] \quad (3.2.41\alpha)$$

$$M_t^P = GI_t \cdot \theta_x' \quad (3.2.41\beta)$$

$$M_w = -EC_S \cdot \theta_x'' \quad (3.2.41\gamma)$$

όπου

$$I_P = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (3.2.42\alpha)$$

$$I_t = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.2.42\beta)$$

$$C_S = \int_{\Omega} \left(\phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (3.2.42\gamma)$$

είναι αντίστοιχα η πολική ροπή αδράνειας (polar moment of inertia), η στρεπτική σταθερά ή στρεπτική σταθερά St. Venant (torsion constant, St. Venant torsion constant) και η σταθερά στρέβλωσης (warping constant). Τα παραπάνω μεγέθη χαρακτηρίζονται ως γεωμετρικές σταθερές ή ιδιότητες μιας και προσδιορίζονται αποκλειστικά μέσω της γεωμετρίας της διατομής της ράβδου και δεν εξαρτώνται από τη φόρτιση ή τις συνοριακές συνθήκες της. Η μόνη διαφοροποίηση στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων είναι η παράλειψη του μη γραμμικού όρου στην έκφραση (3.2.41α) της αξονικής δύναμης που όπως βλέπουμε οδηγεί στην αποσύζευξη της αξονικής από τη στρεπτική καταπόνηση.

Αντικαθιστώντας στην αρχή δυνατών έργων τις εκφράσεις των τάσεων (3.2.8) και προσδιορίζοντας τους δυνατούς όρους των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων μέσω των εκφράσεων (3.2.7) και (3.2.2), (3.2.4) αντίστοιχα, καταλήγουμε έπειτα από κάποια άλγεβρα σε μια ολοκληρωτική έκφραση συναρτησιακού ως προς τις δυνατές μεταβολές των u_m , θ_x και των παραγώγων τους. Οι εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου θα είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη έκφραση οι οποίες δίνονται ως

$$\rho A \cdot \ddot{u}_m - \frac{\partial N}{\partial x} = n(x, t) \quad (3.2.43\alpha)$$

$$\begin{aligned} \rho I_P \ddot{\theta}_x - \rho C_S \ddot{\theta}_x'' - \frac{\partial M_t^P}{\partial x} - \frac{\partial^2 M_w}{\partial x^2} - \frac{3}{2} EI_{PP} (\theta_x')^2 \theta_x'' - EI_P u_m' \theta_x'' - EI_P u_m'' \theta_x' = \\ = m_t(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [m_w(x, t)] \end{aligned} \quad (3.2.43\beta)$$

όπου I_{PP} είναι γεωμετρική σταθερά που ορίζεται ως

$$I_{PP} = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 \right)^2 d\Omega \quad (3.2.44)$$

και $n(x, t)$, $m_t(x, t)$, $m_w(x, t)$ είναι συντηρητικές χρονικά μεταβαλλόμενες εξωτερικές δράσεις οι οποίες προσδιορίζονται μέσω του όρου δW_{ext} και δίνονται συναρτήσεϊ των επιφανειακών δράσεων ως

$$n(x, t) = \int_{\Gamma} t_x(x, t) ds \quad (3.2.45\alpha)$$

$$m_t(x, t) = \int_{\Gamma} t_y(x, t) \cdot (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z(x, t) \cdot (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) ds \quad (3.2.45\beta)$$

$$m_w(x, t) = - \int_{\Gamma} t_x(x, t) \cdot \phi_S^P ds \quad (3.2.45\gamma)$$

Τονίζουμε ότι στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας οι εξωτερικές δράσεις δεν προσδιορίζονται αυθαίρετα αλλά μέσω ολοκληρωτικών εκφράσεων των καταναμημένων επιφανειακών δράσεων που ασκούνται στη ράβδο. Εάν επιθυμούμε, μπορούμε μέσω της σχ. (1.2.24) να εκφράσουμε περαιτέρω τις εξωτερικές δράσεις συναρτήσει του 1ου τανυστή Piola-Kirchhoff. Επίσης, επισημαίνουμε ότι για την εξαγωγή των εξ. (3.2.43) αγνοήθηκαν οι όροι της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης που υπεισέρχονται στις εκφράσεις των S_{xx}, S_{xy}, S_{xz} . Παρακάτω θα εξετάσουμε αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνονται υπόψιν οι συγκεκριμένοι όροι στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας.

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange που διατυπώθηκαν ισχύουν στο διάστημα $x \in (0, l)$. Μέσω της προαναφερθείσας διαδικασίας προσδιορίζονται και οι σχετικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα άκρα της ράβδου $x = 0, l$ οι οποίες δίνονται ως

$$(N - \bar{N}) \delta u_m = 0 \quad (3.2.46\alpha)$$

$$\left[(M_w)' + M_t^P + \frac{1}{2} EI_{PP} \cdot (\theta_x')^3 + EI_P \cdot u_m' \theta_x' - \bar{M}_t \right] \delta \theta_x = 0 \quad (3.2.46\beta)$$

$$(-M_w + \bar{M}_w) \delta \theta_x' = 0 \quad (3.2.46\gamma)$$

όπου

$$\bar{N} = \int_{\Omega} t_x d\Omega \quad (3.2.47\alpha)$$

$$\bar{M}_t = \int_{\Omega} t_y \cdot (-z \cos \theta_x - y \sin \theta_x) + t_z \cdot (y \cos \theta_x - z \sin \theta_x) d\Omega \quad (3.2.47\beta)$$

$$\bar{M}_w = - \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (3.2.47\gamma)$$

είναι συντηρητικές χρονικά μεταβαλλόμενες εξωτερικές δράσεις οι οποίες προσδιορίζονται μέσω του όρου δW_{ext} και ασκούνται στα δύο άκρα της ράβδου. Σημειώνουμε ότι στις εκφράσεις (3.2.46) έχουν αγνοηθεί και ως εκ τούτου παραλείπονται οι αδρανειακοί όροι (που ορίζονται για $x = 0, l$) που προέρχονται από τον όρο δW_{mass} .

Εκμεταλλευόμενοι τις σχ. (3.2.41), οι εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου τελικά διατυπώνονται ως ($\forall x \in (0, l)$)

$$\rho A \cdot \ddot{u}_m - EA \cdot u_m'' - EI_P \cdot \theta_x' \theta_x'' = n(x, t) \quad (3.2.48\alpha)$$

$$\begin{aligned} \rho I_P \ddot{\theta}_x - \rho C_S \ddot{\theta}_x'' - GI_t \theta_x'' + EC_S \theta_x'''' - \frac{3}{2} EI_{PP} \cdot (\theta_x')^2 \theta_x'' - EI_P u_m' \theta_x'' - EI_P u_m'' \theta_x' = \\ = m_t(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [m_w(x, t)] \end{aligned} \quad (3.2.48\beta)$$

ενώ οι σχετικές συνοριακές συνθήκες (που προκύπτουν μέσω του γραμμικού συνδυασμού που υποδηλώνουν τα αριστερά μέλη των σχ. (3.2.46)) μπορούν να γραφούν με τη μορφή ($x = 0, l$)

$$a_1 N + \alpha_2 u_m = \alpha_3 \quad (3.2.49\alpha)$$

$$\beta_1 M_t + \beta_2 \theta_x = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 M_w + \bar{\beta}_2 \theta'_x = \bar{\beta}_3 \quad (3.2.49\beta, \gamma)$$

όπου M_t είναι η στρεπτική ροπή (twisting moment) της οποίας η έκφραση είναι η παρακάτω

$$M_t = GI_t \theta'_x - EC_S \theta_x''' + EI_P \cdot u'_m \theta'_x + \frac{1}{2} EI_{PP} \cdot (\theta'_x)^3 \quad (3.2.50)$$

ενώ οι εκφράσεις των N , M_w δίνονται παραπάνω (σχ. (3.2.41α, γ)) και παραμένουν οι ίδιες. Με τη συγκεκριμένη διατύπωση των συνοριακών συνθηκών διαπιστώνουμε ότι η ισορροπία στα δύο άκρα της ράβδου εξασφαλίζεται μέσω ασθενούς και όχι ισχυρής μορφής αφού όλα τα υπεισερχόμενα μεγέθη ουσιαστικά είναι ολοκληρωτικές ποσότητες των ακραίων διατομών της ράβδου. Τα μεγέθη a_i , β_i , $\bar{\beta}_i$ ($i=1,2,3$) των σχ. (3.2.49) είναι χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις που προσδιορίζονται στα άκρα της ράβδου με βάση τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες. Οι σχ. (3.2.49) είναι οι πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες οι οποίες συμπεριλαμβάνουν και την περίπτωση της ελαστικής (γραμμικής) στήριξης - ελατήριου. Τονίζουμε ωστόσο ότι εξαιτίας των εκφράσεων (3.2.41α), (3.2.50) η τελική διατύπωση των συνοριακών συνθηκών είναι εν γένει μη γραμμική γεγονός που αυξάνει σημαντικά την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις ισορροπίας περιέχουν συνολικά τέσσερις μη γραμμικούς όρους και είναι σημαντικά πεπλεγμένες. Η εξ. (3.2.48α) αντιστοιχεί στην ισορροπία των αξονικών δράσεων ενώ η εξ. (3.2.48β) στην ισορροπία των στρεπτικών δράσεων. Προκειμένου να ολοκληρώσουμε τη διατύπωση του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών (initial boundary value problem) που διέπει την κίνηση της ράβδου, είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε αρχικές συνθήκες που σχετίζονται με τις εξ. (3.2.48). Οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να αφορούν τόσο αρχικές «μετακινήσεις» όσο και αρχικές ταχύτητες των κινηματικών αγνώστων u_m , θ_x (αφού στις εξ. (3.2.48) υπεισέρχονται μέχρι δεύτερης τάξης χρονικές παράγωγοι των εν λόγω μεγεθών) και οι εκφράσεις τους δίνονται ως (για $t = 0$, $x \in (0, l)$)

$$u_m(x, 0) = \bar{u}_{m0}(x) \quad \dot{u}_m(x, 0) = \dot{\bar{u}}_{m0}(x) \quad (3.2.51\alpha, \beta)$$

$$\theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad \dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (3.2.51\gamma, \delta)$$

όπου οι χωρικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής των δεξιά μελών των παραπάνω εκφράσεων πρέπει να είναι γνωστές.

Όπως έχουμε προαναφέρει, η παραπάνω μόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου προέκυψε με την πλήρη αγνόηση της ϕ_S^S στις εκφράσεις των τάσεων που εισάγονται στην αρχή δυνατών έργων. Κάτι τέτοιο ουσιαστικά αντιστοιχεί **στην αγνόηση της συνεισφοράς των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στην ελαστική ενέργεια (και κατ' επέκταση ισορροπία σε ασθενή μορφή) της ράβδου**. Πλέον είμαστε σε θέση να εξετάσουμε αναλυτικά τη συνεισφορά της ϕ_S^S στην αρχή δυνατών έργων (οι δυνατοί όροι των ϕ_S^P , ϕ_S^S έχουν ήδη εξεταστεί

στην ενότητα 3.2.5). Αγνοώντας τον όρο $\ddot{\phi}_S^S$ που θα προκύψει στο δW_{mass} (παρόμοια παραδοχή κάναμε και στην ενότητα 3.2.5), διαπιστώνουμε ότι όλοι οι όροι που δεν έχουν ήδη εξεταστεί υπεισέρχονται αποκλειστικά στο δW_{int} . Ξεκινώντας από τη συνεισφορά των όρων της ϕ_S^S στο δW_{int} (συμβολίζουμε με I_{S1}) που σχετίζονται με τις διατμητικές τάσεις S_{xy}, S_{xz} (συμβολικά $S_{xy}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}$, $S_{xz}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}$) έχουμε

$$I_{S1} = \int_V \left(S_{xy}^S \delta \gamma_{xy}^P + S_{xz}^S \delta \gamma_{xz}^P \right) dV \quad (3.2.52)$$

όπου $\delta \gamma_{xy}^P = \delta \theta'_x \cdot \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)$, $\delta \gamma_{xz}^P = \delta \theta'_x \cdot \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)$. Με παραγοντική ολοκλήρωση ως προς τις μεταβλητές της διατομής, η εξ. (3.2.52) γράφεται ως

$$I_{S1} = G \int_{x=0}^l \left\{ - \int_{\Omega} \phi_S^S \cdot \nabla^2 \phi_S^P \delta \theta'_x d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^S \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - (zn_y - yn_z) \right) \delta \theta'_x ds \right\} dx \quad (3.2.53)$$

και λόγω των σχ. (3.2.24) προκύπτει ότι

$$I_{S1} = 0 \quad (3.2.54)$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι ο τρόπος με τον οποίο έχουν θεωρηθεί οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στην παρούσα θεωρία οδηγεί στον ακριβή μηδενισμό της ενεργειακής συνεισφοράς τους (!).

Σχετικά με τη συνεισφορά της ϕ_S^S στο δW_{int} (συμβολίζουμε με I_{S2}) που σχετίζονται με την ορθή τάση S_{xx} (συμβολικά $S_{xx}^S = E \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x}$) έχουμε

$$I_{S2} = \int_V S_{xx}^S \delta \varepsilon_{xx}^P dV \quad (3.2.55)$$

όπου $\delta \varepsilon_{xx}^P = \delta u'_m + \delta \theta''_x \cdot \phi_S^P + (y^2 + z^2) \theta'_x \delta \theta'_x$ ενώ μπορούμε να πούμε ότι ο όρος S_{xx}^S εκφράζει τις ορθές τάσεις που οφείλονται στην κατά μήκος μεταβολή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Η παραπάνω σχέση αναλύεται περαιτέρω ως

$$I_{S2} = E \int_V \frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \left(\delta u'_m + \delta \theta''_x \phi_S^P + (y^2 + z^2) \theta'_x \delta \theta'_x \right) dV \quad (3.2.56)$$

και εξετάζοντας το πρόβλημα συνοριακών τιμών υπολογισμού της ϕ_S^S (σχ. (3.2.25)) μπορούμε να πούμε ότι ο παραπάνω όρος εν γένει είναι μη μηδενικός. Διαπιστώνουμε επίσης ότι ενδεχομένως η διατήρηση του I_{S2} στις εκφράσεις ισορροπίας να οδηγεί στη μη δυνατότητα αποσύζευξης των κινηματικών αγνώστων που εξαρτώνται άμεσα

από τις μεταβλητές της διατομής από αυτούς που εξαρτώνται άμεσα μόνο από τη διαμήκη συντεταγμένη x . Όπως έχει ήδη αναφερθεί, βασική επιδίωξη οποιασδήποτε θεωρίας δοκού είναι η αποσύζευξη των δύο προβλημάτων, **συνεπώς ο όρος I_S^S αγνοείται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας**. Παρατηρούμε ότι εδώ ουσιαστικά εισάγουμε μια πιο περιοριστική παραδοχή (αγνόηση όρων που σχετίζονται με την πρώτη παράγωγο $\frac{\partial \phi_S^S}{\partial x}$) από την αντίστοιχη της ενότητας 3.2.5 όπου είχαμε απαιτήσει όπως $\frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial x^2} = 0$. Τέτοια παραδοχή εξάλλου κάναμε και στο πρόβλημα προσδιορισμού του κέντρου στρέψης ράβδου τυχούσας διατομής. Συμπεραίνουμε ότι τελικά η ϕ_S^S δεν επηρεάζει καθόλου τις εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου ωστόσο τονίζουμε ότι αυτό δε σημαίνει ότι αγνοούμε πλήρως την εντατική κατάσταση που προκύπτει λόγω της ανομοιόμορφης στρεπτικής έντασης: Αφού προσδιορίσουμε τους κινηματικούς αγνώστους u_m, θ_x μέσω του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών (3.2.48) - (3.2.51), στη συνέχεια υπολογίζουμε τη ϕ_S^S μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.2.25). Τελικά το εντατικό, παραμορφωσιακό και μετατοπισιακό πεδίο της ράβδου επηρεάζεται από τη ϕ_S^S , έτσι όπως υποδεικνύουν οι σχ. (3.2.7), (3.2.8), (3.2.4). Για να είμαστε σε συμφωνία με την προαναφερθείσα παραδοχή, μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο $\frac{\partial \phi_S^S}{\partial x}$ στις εκφράσεις της ορθής τάσης και ορθής παραμόρφωσης (μπορεί επίσης να ληφθεί υπόψιν εάν υπάρχει δυνατότητα αναλυτικού ή αριθμητικού υπολογισμού του), ωστόσο βλέπουμε ότι οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις υπολογίζονται «κανονικά» και τελικά επηρεάζουν την τελική απόκριση της ράβδου.

Ένας εναλλακτικός τρόπος που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία (βλ. πχ. Fatmi, 2007, Machado & Cortinez, 2007) να προσομοιωθεί η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στην απόκριση της ράβδου είναι μέσω ανεξάρτητης στρεβλωτικής παραμέτρου (independent warping parameter). Με βάση τη συγκεκριμένη τεχνική, η σχ. (3.2.4) γράφεται ως

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, t) + \eta'_x(x, t) \cdot \phi_S^P(y, z) \quad (3.2.57)$$

όπου $\eta_x = \theta_x + \gamma_x$ είναι μια στρεβλωτική παράμετρος που εν γένει δεν ισούται με τη γωνία στροφής θ_x αλλά με το άθροισμα της θ_x και μιας άγνωστης συνάρτησης γ_x , το μέγεθος της οποίας προσδιορίζει και το μέγεθος της επιρροής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Η συγκεκριμένη θεωρία έχει το πλεονέκτημα του πλήρους προσδιορισμού της ενεργειακής συνεισφοράς των δευτερογενών διατμητικών τάσεων

στην απόκριση της ράβδου αφού αποφεύγεται η παραδοχή $\frac{\partial \phi_S^S}{\partial x} \approx 0$ στην οποία

προβήκαμε λόγω της ύπαρξης δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης στην έκφραση της αρχής δυνατών έργων. Ωστόσο δεν παύει να αποτελεί μια προσέγγιση του πραγματικού προβλήματος αφού εύκολα διαπιστώνουμε ότι με βάση τη σχ. (3.2.57) **οδηγούμαστε σε παραβίαση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου ακόμα και για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων**. Η μη θεώρηση δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης οδηγεί σε διανύσματα

μετακινήσεων και τάσεων καθ' ύψος της διατομής των οποίων οι διευθύνσεις παραμένουν αμετάβλητες και ταυτίζονται με αυτές που προβλέπει η κλασική θεωρία ομοιόμορφης στρέψης κατά St. Venant. Η θεώρηση του πρόσθετου βαθμού ελευθερίας η_x οδηγεί αποκλειστικά στη μεταβολή του μέτρου των διανυσμάτων μετακινήσεων και τάσεων. Σημειώνουμε ότι η συγκεκριμένη θεώρηση αποτελεί ουσιαστικά μια επέκταση της καμπτοδιατμητικής θεωρίας δοκού Timoshenko στην ανομοιόμορφη στρέψη. Τόσο η συγκριτική μελέτη των δύο διαφορετικών θεωριών όσο και η διερεύνηση της μείωσης του σφάλματος της προταθείσας θεωρίας (που προέρχεται από την αγνόηση του όρου $\frac{\partial \phi_S^S}{\partial x}$ στην αρχή δυνατών έργων) μέσω της θεώρησης μεγαλύτερου αριθμού συναρτήσεων στρέβλωσης αποτελούν αντικείμενο μελλοντικής διερεύνησης και δε θα εξεταστούν περαιτέρω στην παρούσα εργασία.

3.2.7 Απλοποιημένες εξισώσεις ισορροπίας για ειδικές περιπτώσεις αξονικών συνοριακών συνθηκών

Το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών που έχει διατυπωθεί είναι σημαντικά μη γραμμικό και πεπλεγμένο. Μια σημαντική απλοποίησή του μπορεί να πραγματοποιηθεί με την αγνόηση της επιρροής της αξονικής αδράνειας (axial inertia) που εκφράζεται μέσω του όρου $\rho A \cdot \ddot{u}_m$ της σχ. (3.2.48α). Η συγκεκριμένη παραδοχή είναι εύλογη, τουλάχιστον για συγκεκριμένες περιπτώσεις γεωμετρίας της ράβδου και φόρτισής της. Πχ. για την περίπτωση όπου η ράβδος καταπονείται αποκλειστικά από στρεπτική φόρτιση με ή χωρίς κάποιο σταθερό στο χρόνο και το χώρο αξονικό φορτίο, η κατά μήκος μεταβολή της αξονικής καταπόνησης είναι φαινόμενο ανώτερης τάξης αφού προκύπτει από τη σύζευξη αξονικής και στρεπτικής ισορροπίας μέσω του όρου $EI_P \cdot \theta'_x \theta''_x$ της σχ. (3.2.48α). Εξάλλου πρόκειται για πολύ συχνά υιοθετούμενη παραδοχή σε θεωρίες δοκού που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία και αντιμετωπίζουν τις περιπτώσεις καμπτοδιατμητικής ή και στρεπτικής καταπόνησης.

Στα παρακάτω θα διατυπώσουμε τις απλοποιημένες εξισώσεις για συγκεκριμένες περιπτώσεις αξονικής φόρτισης και συνοριακών συνθηκών για λόγους καλύτερης εποπτείας χωρίς να αλλοιώνεται η γενικότητα των συλλογισμών. Έτσι για την περίπτωση όπου δεν υπάρχει κατανεμημένη αξονική καταπόνηση ($n(x,t) = 0$) η εξ. (3.2.48α) γράφεται ως

$$u''_m = -\frac{I_P}{A} \cdot \theta'_x \theta''_x \quad (3.2.58)$$

η οποία με περαιτέρω ολοκλήρωση κατά x δίνει

$$u'_m = -\frac{I}{2} \cdot \frac{I_P}{A} \cdot (\theta'_x)^2 + \frac{\tilde{N}}{EA}, \quad \forall x \in [0, l] \quad (3.2.59)$$

όπου η παράμετρος \tilde{N} -που έχει χαρακτηριστικά αξονικού φορτίου- εξαρτάται από τις αξονικές συνοριακές συνθήκες. Για την ειδική περίπτωση των αξονικά αμετακίνητων άκρων (axially immovable ends), ισχύει

$$u_m(0,t) = 0 \qquad u_m(l,t) = 0 \qquad (3.2.60\alpha, \beta)$$

και τελικά προκύπτει ότι το \tilde{N} είναι χρονικά εξαρτώμενο και μη αρνητικό, δίνεται δε μέσω του τύπου

$$\tilde{N} = \frac{I}{2} \cdot \frac{EI_P}{l} \cdot \int_0^l [\theta'_x(x,t)]^2 dx \qquad (3.2.61)$$

Για την ειδική περίπτωση αξονικά αμετακίνητου αριστερού άκρου και αξονικής καταπόνησης του δεξιού άκρου της ράβδου με φορτίο $\bar{N}(l,t)$, οι συνοριακές συνθήκες μορφώνονται ως

$$u_m(0,t) = 0 \qquad N(l,t) = \bar{N}(l,t) \qquad (3.2.62\alpha, \beta)$$

απ' όπου τελικά παίρνουμε ότι

$$\tilde{N} = \bar{N}(l,t) \qquad (3.2.63)$$

Με αντικατάσταση των σχ. (3.2.58), (3.2.59) στην εξ. (3.2.48β) λαμβάνουμε μία και μοναδική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου

$$\begin{aligned} \rho I_P \cdot \ddot{\theta}_x - \rho C_S \cdot \ddot{\theta}_x'' - \left(GI_t + \frac{I_P}{A} \cdot \tilde{N} \right) \theta_x'' + EC_S \theta_x'''' - \frac{3}{2} EI_n \cdot (\theta_x')^2 \theta_x'' = \\ = m_t(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} [m_w(x,t)] \end{aligned} \qquad (3.2.64)$$

όπου I_n είναι θετική γεωμετρική σταθερά που ορίζεται ως

$$I_n = I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} \qquad (3.2.65)$$

Η ολοκλήρωση του απλοποιημένου προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών πραγματοποιείται με τη θεώρηση των σχετικών αρχικών συνθηκών, που στην περίπτωση μας είναι οι εξ. (3.2.51γ, δ), καθώς και των σχετικών συνοριακών συνθηκών, που στην περίπτωση μας είναι οι εξ. (3.2.49β, γ). Επισημαίνουμε ότι η μορφή των εξισώσεων αυτών παραμένει αμετάβλητη αλλά η έκφραση της στρεπτικής ροπής (3.2.50) απλοποιείται ως

$$M_t = \left(GI_t + \frac{I_P}{A} \cdot \tilde{N} \right) \cdot \theta_x' - EC_S \cdot \theta_x''' + \frac{1}{2} EI_n \cdot (\theta_x')^3 \qquad (3.2.66)$$

Από την εξέταση των εξ. (3.2.64), (3.2.66) προκύπτουν τα εξής:

- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα εκφράζεται μέσω του μη γραμμικού όρου που σχετίζεται με τη σταθερά I_n . Ο όρος προήλθε μέσω της πλήρους θεώρησης της γεωμετρικής μη γραμμικότητας (προσθήκη των σχετικών ημιτονοειδών και

συνημιτονοειδών όρων στο πεδίο των εγκάρσιων μετατοπίσεων της ράβδου) και όχι μέσω προσεγγιστικής θεώρησης (πχ ανάπτυξη των σχετικών ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών όρων σε ανάπτυγμα Taylor πεπερασμένου αριθμού όρων κλπ)

- Στην περίπτωση που αγνοήσουμε την επιρροή των μεγάλων μετατοπίσεων, η εξ. (3.2.64) ταυτίζεται με την αντίστοιχη εξίσωση που έχει προταθεί από τους Rozmarynowski & Szymczak (1984) για την περίπτωση των αξονικά αμετακίνητων άκρων. Το γεγονός ότι το $\tilde{N} \geq 0$ δείχνει ότι τα αμετακίνητα άκρα οδηγούν στην ανάπτυξη εφελκυστικής αξονικής δύναμης στη ράβδο η οποία αυξάνει τη στρεπτική δυσκαμψία της.
- Στην περίπτωση που αγνοήσουμε την επιρροή των μεγάλων μετατοπίσεων και των αδρανειακών όρων, η εξ. (3.2.64) ταυτίζεται με την αντίστοιχη εξίσωση που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία για την περίπτωση της σταθερής αξονικής δύναμης. Η εξίσωση αυτή είναι η βάση για τη μελέτη του φαινομένου του (στατικού) στρεπτικού λυγισμού (εύρεση φορτίου στρεπτικού λυγισμού και των αντίστοιχων λυγισμικών ιδιομορφών). Τονίζουμε ωστόσο ότι η στρεπτική μεταλυγισμική συμπεριφορά ράβδων μπορεί να μελετηθεί μονάχα μέσω της θεώρησης γεωμετρικής μη γραμμικότητας, δηλαδή μέσω της διακράτησης των μη γραμμικών όρων που σχετίζονται με τη σταθερά I_n .

Σε ό,τι αφορά τη μελέτη του τασικού πεδίου της ράβδου, εύκολα διαπιστώνουμε ότι στο υπό εξέταση απλοποιημένο πρόβλημα, η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης συνεχίζει να δίνεται μέσω του προβλήματος των εξ. (3.2.24). Με βάση τις παραδοχές που έχουμε κάνει ($\rho A \cdot \ddot{u}_m \approx 0, n(x,t) = 0$) και με αντικατάσταση της εξ. (3.2.58) στην εξ. (3.2.25α), το πρόβλημα συνοριακών τιμών με το οποίο προσδιορίζεται η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης στο απλοποιημένο πρόβλημα (συμβολίζεται ως $(\phi_S^S)_{red.}$) διατυπώνεται ως

$$\nabla^2 (\phi_S^S)_{red.} = \frac{E}{G} \theta'_x \theta''_x \cdot \left[\frac{I_P}{A} - (y^2 + z^2) \right] - \left(\frac{E}{G} \theta''_x - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}'_x \right) \cdot \phi_S^P(y,z) \quad \text{στο } \Omega \quad (3.2.67\alpha)$$

$$\frac{\partial (\phi_S^S)_{red.}}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.2.67\beta)$$

όπου υιοθετήσαμε κι εδώ την επισήμανση της ενότητας 3.2.6 ότι θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις όπου $t_x = 0$ (στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου), χωρίς ωστόσο να υπάρχει ιδιαίτερο πρόβλημα αντιμετώπισης της πλέον γενικής περίπτωσης όπου $t_x \neq 0$. Στην περίπτωση **των μικρών μετατοπίσεων**, το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών τελικά απλοποιείται ως

$$\nabla^2 \phi_{S lin}^S = - \left(\frac{E}{G} \theta''_x - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}'_x \right) \cdot \phi_S^P(y,z) \quad \text{στο } \Omega \quad (3.2.68\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_{S lin}^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.2.68\beta)$$

3.2.8 Βήματα επίλυσης του προβλήματος της ελαστικής ανομοιομορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων

Παραθέτουμε συνοπτικά τα διαδοχικά βήματα επίλυσης του προβλήματος που εξετάζουμε:

1. Εκλογή τυχόντος συστήματος αναφοράς $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ και επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.2.24) για να προσδιοριστεί η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης $\phi_O^P(\tilde{y}, \tilde{z})$.
2. Επίλυση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων 3×3 των σχ. (3.2.33), αφού υπολογιστούν οι γεωμετρικές σταθερές των εξ. (3.2.34) ως προς το σύστημα αναφοράς $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$. Υπολογισμός των συντεταγμένων του κέντρου στρέψης \tilde{y}_S, \tilde{z}_S και αλλαγή συστήματος αναφοράς $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} \rightarrow Sxyz$. Εναλλακτικά τόσο αυτό όσο και το προηγούμενο βήμα μπορούν να παραλειφθούν εάν εκκινήσουμε την ανάλυση του προβλήματος με το σύστημα αναφοράς που προσδιορίζεται από την τομή των δύο αξόνων συμμετρίας της διπλά συμμετρικής ράβδου. Γνωρίζουμε ότι πάντα το σημείο που προκύπτει είναι το γεωμετρικό κέντρο της διατομής που επιπρόσθετα ταυτίζεται και με το κέντρο στρέψης της.
3. Επίλυση εκ νέου του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.2.24) για να προσδιοριστεί η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης $\phi_S^P(y, z)$ (ως προς το νέο σύστημα αναφοράς $Sxyz$) με την απαίτηση που περιγράφεται από τη σχ. (3.2.29).
4. Προσδιορισμός των εναπομεινάντων γεωμετρικών σταθερών του προβλήματος $I_P, I_t, C_S, I_{PP}, I_n$ μέσω των εξ. (3.2.42), (3.2.44), (3.2.65).
5. Επίλυση του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών των σχ. (3.2.48) - (3.2.51) ώστε να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις $u_m(x, t)$, $\theta_x(x, t)$. Στο κεφάλαιο 4 θα δειχτεί ότι -σύμφωνα με την αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιούμε- απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των αρχικών μετακινήσεων, ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των αρχικών ταχυτήτων και ενός συστήματος μη γραμμικών αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των u_m , θ_x στο πεδίο του χρόνου. Στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε το απλοποιημένο πρόβλημα που περιγράφηκε στην ενότητα 3.2.7, επιλύουμε το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών των σχ. (3.2.64), (3.2.51γ, δ), (3.2.49β, γ) και προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $\theta_x(x, t)$. Η συνάρτηση $u_m(x, t)$ προσδιορίζεται με ολοκλήρωση κατά x της σχ. (3.2.59). Στην περίπτωση όπου επιλύουμε το πρόβλημα των γραμμικών ταλαντώσεων επιλύουμε το ίδιο πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών αγνοώντας όλους τους μη γραμμικούς όρους. Σε κάθε περίπτωση προσδιορίζουμε οποιαδήποτε χρονική ή χωρική παράγωγο (ή εντατικό μέγεθος) επιθυμούμε μέσω των σχετικών εκφράσεων που έχουν αναπτυχθεί στο παρόν κεφάλαιο.
6. Υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_S^S(x, y, z, t)$ (και των παραγώγων της ως προς τις μεταβλητές y, z της διατομής) μέσω της επίλυσης του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.2.25) και με την επιπλέον απαίτηση που περιγράφεται από τη σχ. (3.2.29). Στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε το απλοποιημένο πρόβλημα που περιγράφηκε στην ενότητα 3.2.7, επιλύουμε το

πρόβλημα συνοριακών τιμών των σχ. (3.2.67). Στην περίπτωση όπου επιλύουμε το πρόβλημα των γραμμικών ταλαντώσεων επιλύουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.2.26) ή το πρόβλημα των εξ. (3.2.68) για το απλοποιημένο πρόβλημα της ενότητας 3.2.7.

7. Υπολογισμός του τασικού πεδίου της ράβδου μέσω των σχ. (3.2.8). Όπως έχουμε σχολιάσει εκτενώς στην ενότητα 3.2.6, ο όρος $\frac{\partial \phi_S^S}{\partial x}$ μπορεί να αγνοηθεί ή να διατηρηθεί. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, ο συγκεκριμένος όρος αγνοείται.
8. Υπολογισμός του παραμορφωσιακού πεδίου της ράβδου μέσω των σχ. (3.2.7). Όπως έχουμε αναφέρει εκτενώς στην ενότητα 3.2.6, ο όρος $\frac{\partial \phi_S^S}{\partial x}$ μπορεί να αγνοηθεί.
9. Υπολογισμός του πεδίου μετατοπίσεων της ράβδου μέσω των σχ. (3.2.2), (3.2.4).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ
ΤΗΣ ΣΤΡΕΨΗΣ

4.1 Αριθμητικός υπολογισμός των κινηματικών μεγεθών

$$u_m(x,t), \theta_x(x,t)$$

Σύμφωνα με την ανάλυση του κεφαλαίου 3, ο υπολογισμός των άγνωστων συναρτήσεων $u_m(x,t)$, $\theta_x(x,t)$ πραγματοποιείται μέσω του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών των σχ. (3.2.48) - (3.2.51). Λόγω του ότι το πρόβλημα αυτό περιγράφεται από σχέσεις μη γραμμικές και πεπλεγμένες, οι προσπάθειες αναλυτικής επίλυσης αποδεικνύονται αποτυχημένες ακόμα και για πολύ απλές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών και φόρτισης. Συνεπώς το πρόβλημα επιλύεται αριθμητικά τόσο στο πεδίο του χώρου (διακριτοποίηση του μήκους της ράβδου $0 \leq x \leq l$) όσο και στο πεδίο του χρόνου (διακριτοποίηση του χρονικού διαστήματος της απόκρισης $0 \leq t < \infty$). Στην παρούσα εργασία η χωρική διακριτοποίηση πραγματοποιείται με τη βοήθεια της **Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης** (MAE) (Analog Equation Method (AEM), Katsikadelis (2002)) που ανήκει στην οικογένεια των Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ) (Boundary Element Methods, BEM).

Συμβολίζουμε με $u_1(x,t) = u_m(x,t)$, $u_2(x,t) = \theta_x(x,t)$ τις συναρτήσεις που αναζητούμε. Παραγωγίζοντας δύο και τέσσερις φορές ως προς x αντίστοιχα τις u_1 , u_2 , λαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = q_1(x,t) \qquad \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = q_2(x,t) \qquad (4.1.1\alpha, \beta)$$

όπου οι συναρτήσεις $q_i(x,t)$, ($i=1,2$) χαρακτηρίζονται ως πλασματικά φορτία / πλασματικές κατανομές φορτίσεων (fictitious loads / fictitious load distributions). Οι εξ. (4.1.1) είναι οιονεί στατικές υπό την έννοια ότι ο χρόνος υπεισέρχεται σε αυτές ως παράμετρος. Οι λύσεις των εξ. (4.1.1) μπορούν να εκφραστούν σε ολοκληρωτική μορφή ως (Sapountzakis & Katsikadelis, 2000)

$$u_1(x,t) = \int_0^l q_1 u_1^* dx - \left[u_1^* \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{du_1^*}{dx} u_1 \right]_{x=0}^{x=l} \qquad (4.1.2\alpha)$$

$$u_2(x,t) = \int_0^l q_2 u_2^* dx - \left[u_2^* \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} - \frac{du_2^*}{dx} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{d^2 u_2^*}{dx^2} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{d^3 u_2^*}{dx^3} u_2 \right]_0^l \qquad (4.1.2\beta)$$

όπου u_1^* , u_2^* είναι θεμελιώδεις λύσεις (fundamental solutions) που δίνονται ως

$$u_1^* = \frac{l}{2} |r| \qquad u_2^* = \frac{l}{12} l^3 \left(2 + \left| \frac{r}{l} \right|^3 - 3 \left| \frac{r}{l} \right|^2 \right) \qquad (4.1.3\alpha, \beta)$$

με $r = x - \xi$, x, ξ σημεία της ράβδου. Οι συναρτήσεις u_1^* , u_2^* είναι μερικές ιδιόμορφες λύσεις (particular singular solutions) των εξισώσεων

$$\frac{d^2 u_1^*}{dx^2} = \delta(x - \xi) \qquad \frac{d^4 u_2^*}{dx^4} = \delta(x - \xi) \qquad (4.1.4\alpha, \beta)$$

όπου με $\delta(x - \xi)$ (στο παρόν κεφάλαιο) συμβολίζεται η μονοδιάστατη συνάρτηση Dirac με «πηγή» το σημείο ξ (Κατσιακαδέλης, 1999). Με αντικατάσταση των εξ. (4.1.3) στις ολοκληρωτικές εκφράσεις (4.1.2) λαμβάνουμε

$$u_1(x, t) = \int_0^l q_1 \left(A_2(r) + \frac{l}{2} \right) dx - \left[\left(A_2(r) + \frac{l}{2} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + A_1(r) u_1 \right]_0^l \qquad (4.1.5\alpha)$$

$$u_2(x, t) = \int_0^l q_2 A_4(r) dx - \left[A_4(r) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + A_3(r) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + A_2(r) \frac{\partial u_2}{\partial x} + A_1(r) u_2 \right]_0^l \qquad (4.1.5\beta)$$

όπου οι «πυρήνες» (kernels) $A_j(r)$, ($j = 1, 2, 3, 4$) ισούνται με (Sapountzakis, 2000)

$$A_1(r) = -\frac{l}{2} \operatorname{sgn} \frac{r}{l} \qquad (4.1.6\alpha)$$

$$A_2(r) = -\frac{l}{2} l \left(1 - \left| \frac{r}{l} \right| \right) \qquad (4.1.6\beta)$$

$$A_3(r) = -\frac{l}{4} l^2 \left| \frac{r}{l} \right| \left(\left| \frac{r}{l} \right| - 2 \right) \operatorname{sgn} \frac{r}{l} \qquad (4.1.6\gamma)$$

$$A_4(r) = \frac{l}{12} l^3 \left(2 + \left| \frac{r}{l} \right|^3 - 3 \left| \frac{r}{l} \right|^2 \right) \qquad (4.1.6\delta)$$

Επισημαίνουμε ότι για τους μεν όρους εντός των ολοκληρωμάτων στις εξ. (4.1.5) ισχύει $r = x - \xi$, με x, ξ να είναι σημεία στο διάστημα $(0, l)$, ενώ για όλους τους υπόλοιπους όρους ισχύει $r = x - \zeta$, $x \in (0, l)$, $\zeta = 0, l$. Βασική επιδίωξή μας είναι η έκφραση όλων των όρων των u_1, u_2 που υπεισέρχονται στις εξισώσεις του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών συναρτήσει των πλασματικών φορτίων $q_i(x, t)$. Συνεπώς, παραγωγίζουμε διαδοχικά ως προς x τις εξ. (4.1.5) και παίρνουμε τις ολοκληρωτικές εκφράσεις των παραγώγων των u_i ως

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = \int_0^l q_1 A_1(r) dx - \left[A_1(r) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=l} \qquad (4.1.7\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} = q_1(x, t) \qquad (4.1.7\beta)$$

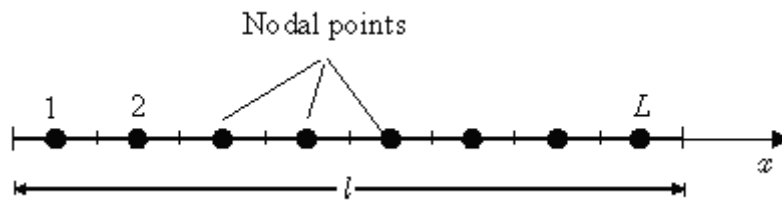
$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = \int_0^l q_2 A_3(r) dx - \left[A_3(r) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + A_2(r) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + A_1(r) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right]_0^l \qquad (4.1.7\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = \int_0^l q_2 A_2(r) dx - \left[A_2(r) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + A_1(r) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right]_0^l \quad (4.1.7\delta)$$

$$\frac{\partial^3 u_2(x,t)}{\partial x^3} = \int_0^l q_2 A_1(r) dx - \left[A_1(r) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right]_0^l \quad (4.1.7\epsilon)$$

$$\frac{\partial^4 u_2(x,t)}{\partial x^4} = q_2(x,t) \quad (4.1.7\zeta)$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τις ολοκληρωτικές εκφράσεις στις διατιθέμενες εξισώσεις του προβλήματος, είναι αναγκαίο να προβούμε σε κάποιου είδους διακριτοποίηση ώστε να αποκτήσουμε μια προσεγγιστική λύση. Το χωρικό διάστημα της ράβδου $(0, l)$ διακριτοποιείται σε L στοιχεία (όχι κατ' ανάγκην ισομήκη) σε καθένα από τα οποία οι συναρτήσεις q_i μπορούν να θεωρηθούν ότι μεταβάλλονται - κατά x - με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο (πχ σταθερή, γραμμική, παραβολική, ημιτονοειδή κλπ κατανομή) (βλ. σχ. (4.1.1)). Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η υπόθεση της σταθερής κατανομής, σύμφωνα με την οποία τα q_i σε ολόκληρο του μήκους του στοιχείου έχουν σταθερή τιμή που ισούται με την τιμή τους στο κομβικό σημείο (nodal point) του στοιχείου. Η υπόθεση του σταθερού στοιχείου υιοθετείται καθώς προκύπτουν σχετικά απλές ολοκληρωτικές εκφράσεις ενώ το κομβικό σημείο λαμβάνεται πάντα στο μέσο του κάθε στοιχείου.



Σχήμα 4.1.1 Διακριτοποίηση κατά το μήκος l της ράβδου.

Μετά τη διακριτοποίηση ακολουθεί η αναγραφή των αγνώστων του προβλήματος σε μητρική και διανυσματική μορφή μιας και τελικός στόχος είναι η σύνταξη προγράμματος H/Y για την εκτέλεση των αριθμητικών υπολογισμών του προβλήματος. Παρατηρούμε ότι στις ολοκληρωτικές εκφράσεις (4.1.5), (4.1.7) υπεισέρχονται και άγνωστοι όροι που ορίζονται στα δύο άκρα της ράβδου, έτσι εκτός από τα διανύσματα που περιέχουν τα άγνωστα πλασματικά φορτία στα κομβικά σημεία της ράβδου, ορίζουμε και διανύσματα αγνώστων συνοριακών ποσοτήτων ως

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \{u_i(0,t) \quad u_i(l,t)\}^T, \quad (i=1,2) \quad (4.1.8\alpha)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,x} = \left\{ \frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x} \quad \frac{\partial u_i(l,t)}{\partial x} \right\}^T, \quad (i=1,2) \quad (4.1.8\beta)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{2,xx} = \left\{ \frac{\partial^2 u_2(0,t)}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u_2(l,t)}{\partial x^2} \right\}^T \quad (4.1.8\gamma)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} = \left\{ \frac{\partial^3 u_2(0,t)}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 u_2(L,t)}{\partial x^3} \right\}^T \quad (4.1.8\delta)$$

$$\mathbf{q}_i = \{q_1^i \ q_2^i \ \dots \ q_L^i\}^T \quad (4.1.8\epsilon)$$

καθώς επίσης, για λόγους εποπτείας, ορίζουμε και τα παρακάτω δύο διανύσματα γενικευμένων άγνωστων ποσοτήτων

$$\mathbf{d}_1^T = \{\mathbf{q}_1 \quad \hat{\mathbf{u}}_1 \quad \hat{\mathbf{u}}_{1,x}\} \quad (4.1.9\alpha)$$

$$\mathbf{d}_2^T = \{\mathbf{q}_2 \quad \hat{\mathbf{u}}_2 \quad \hat{\mathbf{u}}_{2,x} \quad \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} \quad \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx}\} \quad (4.1.9\beta)$$

Το συνολικό πλήθος των άγνωστων ποσοτήτων είναι $2L+12$ που όπως βλέπουμε κατανέμεται στα δύο μητρώα - στήλες \mathbf{d}_1 ($L+4$ άγνωστοι) και \mathbf{d}_2 ($L+8$ άγνωστοι).

Προκειμένου να εκφραστούν οι άγνωστες συνοριακές ποσότητες $u_i(\zeta,t)$, $u_{i,x}(\zeta,t)$, $u_{2,xx}(\zeta,t)$ και $u_{2,xxx}(\zeta,t)$ ($\zeta=0,l$) συναρτήσεως των πλασματικών φορτίων q_i , χρησιμοποιούμε τις ολοκληρωτικές εκφράσεις (4.1.5α, β), (4.1.7γ) θέτοντας όπου $x=0,l$, καθώς και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (βλ. σχ. (3.2.49)) για τα δύο άκρα $0,l$. Έτσι λαμβάνουμε **δώδεκα μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις** των οποίων η μητρική μορφή διαμορφώνεται ως

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_3 & \mathbf{E}_{35} & \mathbf{E}_{36} & \mathbf{E}_{37} & \mathbf{E}_{38} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{46} & \mathbf{E}_{47} & \mathbf{E}_{48} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{55} & \mathbf{D}_{56} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{58} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{66} & \mathbf{D}_{67} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_{1,x} \\ \mathbf{q}_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_{2,x} \\ \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} \\ \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21}^{nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{52}^{nl} & \mathbf{D}_{53}^{nl} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_2^2 \\ \hat{\mathbf{u}}_2^3 \\ \hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{\beta}_3 \\ \bar{\mathbf{\beta}}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.1.10)$$

όπου \mathbf{D}_{22} , \mathbf{D}_{23} , \mathbf{D}_{55} , \mathbf{D}_{56} , \mathbf{D}_{58} , \mathbf{D}_{66} , \mathbf{D}_{67} , \mathbf{D}_{21}^{nl} , \mathbf{D}_{52}^{nl} , \mathbf{D}_{53}^{nl} είναι 2×2 γνωστά μητρώα που εμπεριέχουν τις τιμές των συναρτήσεων $a_j, \beta_j, \bar{\beta}_j$ ($j=1,2$) των συνοριακών συνθηκών, \mathbf{a}_3 , $\mathbf{\beta}_3$, $\bar{\mathbf{\beta}}_3$ είναι 2×1 γνωστά μητρώα στήλες που περιέχουν τις τιμές των συναρτήσεων $a_3, \beta_3, \bar{\beta}_3$ των συνοριακών συνθηκών, \mathbf{E}_{12} , \mathbf{E}_{13} , \mathbf{E}_{35} , \mathbf{E}_{36} , \mathbf{E}_{37} , \mathbf{E}_{38} , \mathbf{E}_{46} , \mathbf{E}_{47} , \mathbf{E}_{48} είναι 2×2 γνωστά μητρώα που προκύπτουν από τις τιμές που λαμβάνουν οι πυρήνες $A_j(r)$ ($j=1,2,3,4$) στα δύο άκρα της ράβδου και τέλος $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ είναι $2 \times L$ γνωστά μητρώα που προκύπτουν από την ολοκλήρωση των πυρήνων στα στοιχεία της διακριτοποίησης που βρίσκονται κατά το μήκος της ράβδου. Στην παρούσα εργασία, ο προσδιορισμός όλων των ολοκληρωμάτων στα

οποία υπεισέρχονται οι πυρήνες $A_j(r)$, ($j=1,2,3,4$) πραγματοποιείται με αναλυτική ολοκλήρωση (Μώκος, 2007) που οδηγεί σε εξαιρετική αριθμητική ακρίβεια. Επισημαίνουμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι εν γένει χρονικά εξαρτώμενες λόγω του ότι τα $a_j, \beta_j, \bar{\beta}_j$ ($j=1,2,3$) είναι χρονικές συναρτήσεις, ωστόσο για την ειδική περίπτωση που δεν παρουσιάζουν χρονική μεταβολή, οι εξ. (4.1.10) είναι αλγεβρικές με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές. Επιπλέον, στις εξ. (4.1.10) υπεισέρχονται και κάποια επιπλέον διανύσματα που περιέχουν άγνωστες ποσότητες τα οποία δίνονται ως

$$\hat{\mathbf{u}}_2^2 = \left\{ \left[\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} \right]^2 \quad \left[\frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x} \right]^2 \right\}^T \quad (4.1.11\alpha)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2^3 = \left\{ \left[\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} \right]^3 \quad \left[\frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x} \right]^3 \right\}^T \quad (4.1.11\beta)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_2 = \left\{ \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} \quad \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x} \right\}^T \quad (4.1.11\gamma)$$

Οι εξισώσεις που έχουν ήδη μορφωθεί προφανώς και δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό όλων των αγνώστων που έχουν προκύψει μετά τη διακριτοποίηση. Οι επιπλέον εξισώσεις που απαιτούνται θα προέλθουν από την εφαρμογή των ολοκληρωτικών εκφράσεων (4.1.5), (4.1.7) στις διαφορικές εξισώσεις (3.2.48) του προβλήματος. Συνεπώς, απαιτείται αρχικά η έκφραση των ολοκληρωτικών εκφράσεων σε διακριτοποιημένη μορφή η οποία προκύπτει πως είναι η παρακάτω

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{A}_I^0 \mathbf{q}_I + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_I + \mathbf{C}_I \hat{\mathbf{u}}_{I,x} \quad (4.1.12\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{I,x} = \mathbf{A}_I^1 \mathbf{q}_I + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_{I,x} \quad (4.1.12\beta)$$

$$\mathbf{u}_{I,xx} = \mathbf{q}_I \quad (4.1.12\gamma)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2^0 \mathbf{q}_2 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{C}'_I \hat{\mathbf{u}}_{2,x} + \mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} + \mathbf{C}_3 \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \quad (4.1.12\delta)$$

$$\mathbf{u}_{2,x} = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_{2,x} + \mathbf{C}'_I \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} + \mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \quad (4.1.12\epsilon)$$

$$\mathbf{u}_{2,xx} = \mathbf{A}_2^2 \mathbf{q}_2 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_{2,xx} + \mathbf{C}'_I \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \quad (4.1.12\zeta)$$

$$\mathbf{u}_{2,xxx} = \mathbf{A}_2^3 \mathbf{q}_2 + \mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{u}}_{2,xxx} \quad (4.1.12\eta)$$

$$\mathbf{u}_{2,xxxx} = \mathbf{q}_2 \quad (4.1.12\theta)$$

όπου $\mathbf{A}_I^i, \mathbf{A}_2^j$ ($i=0, 1$), ($j=0, 1, 2, 3$) είναι $L \times L$ γνωστά μητρώα; $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_I, \mathbf{C}'_I, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ είναι $L \times 2$ γνωστά μητρώα και $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i,x}, \mathbf{u}_{i,xx}, \mathbf{u}_{i,xxx}, \mathbf{u}_{i,xxxx}$ είναι χρονικά εξαρτώμενα διανύσματα που περιέχουν τις τιμές των $u_i(x,t)$ και των παραγώγων τους L κομβικά σημεία της ράβδου. Οι εξ. (4.1.12) μπορούν να γραφούν πιο συνοπτικά ως

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{H}_I^0 \mathbf{d}_I \quad (4.1.13\alpha)$$

$$\mathbf{u}_{1,x} = \mathbf{H}_1^I \mathbf{d}_1 \quad (4.1.13\beta)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{H}_2^0 \mathbf{d}_2 \quad (4.1.13\gamma)$$

$$\mathbf{u}_{2,x} = \mathbf{H}_2^I \mathbf{d}_2 \quad (4.1.13\delta)$$

$$\mathbf{u}_{2,xx} = \mathbf{H}_2^2 \mathbf{d}_2 \quad (4.1.13\epsilon)$$

$$\mathbf{u}_{2,xxx} = \mathbf{H}_2^3 \mathbf{d}_2 \quad (4.1.13\zeta)$$

όπου $\mathbf{H}_1^i, \mathbf{H}_2^j$ ($i=0, 1$), ($j=0, 1, 2, 3$) είναι $L \times (L+4)$ και $L \times (L+8)$ γνωστά μητρώα αντίστοιχα που προκύπτουν από τα μητρώα $\mathbf{A}_1^i, \mathbf{A}_2^j, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1', \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$. Αναγράφοντας τις διαφορικές εξισώσεις (3.2.48) του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών για τις θέσεις των L κομβικών σημείων της ράβδου (μέθοδος της ταξίθεσίας) και εκμεταλλευόμενοι τις εξ. (4.1.13) διατυπώνουμε $2L$ ημιδιακριτοποιημένες εξισώσεις κίνησης (semidiscretized equations of motion)

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_1 \\ \ddot{\mathbf{d}}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{k}^{nl} (\mathbf{H}_1^i, \mathbf{H}_2^j, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{f} \quad (4.1.14)$$

όπου \mathbf{k}^{nl} είναι ένα μη γραμμικό γενικευμένο διάνυσμα δυσκαμψίας και $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{f}$ είναι γενικευμένα μητρώα μάζας, δυσκαμψίας και διάνυσμα φόρτισης αντίστοιχα που δίνονται ως

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A \cdot \mathbf{H}_1^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho I_P \cdot \mathbf{H}_2^0 - \rho C_S \cdot \mathbf{H}_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.15\alpha)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -EA \cdot \mathbf{I0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -GI_t \cdot \mathbf{H}_2^2 + EC_S \cdot \mathbf{I0} \end{bmatrix} \quad (4.1.15\beta)$$

$$\{\mathbf{k}^{nl}\}_i = -EI_P \left(\{\mathbf{H}_2^I\}_i \mathbf{d}_2 \right) \left(\{\mathbf{H}_2^2\}_i \mathbf{d}_2 \right) \quad (4.1.15\gamma)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{k}^{nl}\}_{L+i} = & -\frac{3}{2} EI_{PP} \left[\{\mathbf{H}_2^I\}_i \mathbf{d}_2 \right]^2 \left(\{\mathbf{H}_2^2\}_i \mathbf{d}_2 \right) - EI_P \left(\{\mathbf{H}_1^I\}_i \mathbf{d}_1 \right) \left(\{\mathbf{H}_2^2\}_i \mathbf{d}_2 \right) \\ & - EI_P \{\mathbf{d}_1\}_i \left(\{\mathbf{H}_2^I\}_i \mathbf{d}_2 \right) \end{aligned} \quad (4.1.15\delta)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m}_t + \mathbf{m}'_w \end{Bmatrix} \quad (4.1.15\epsilon)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, ο συμβολισμός $\{\cdot\}_i$ δηλώνει την (τυχούσα) i γραμμή ($i=1, 2, \dots, L$) του μητρώου εντός των αγκύλων, $\mathbf{I0}$ είναι ένα μητρώο $L \times (L+8)$ που δίνεται ως $\mathbf{I0} = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]$ με \mathbf{I} και $\mathbf{0}$ να είναι τα $L \times L$ και $L \times 8$ μοναδιαίο μητρώο και μηδενικό μητρώο αντίστοιχα. Τέλος τα $\mathbf{n}, \mathbf{m}_t, \mathbf{m}'_w$ είναι διανύσματα που περιέχουν τις τιμές των εξωτερικών φορτίων στα L σημεία ταξίθεσίας (collocation points), δηλαδή στα κομβικά σημεία της ράβδου. Σημειώνουμε ότι τα στοιχεία του

διανύσματος \mathbf{m}'_w που περιέχουν τις κομβικές ποσότητες $\frac{\partial}{\partial x}[m_w(x,t)]$ μπορούν να γραφτούν ως προς τις γνωστές τιμές του $m_w(x,t)$ στα σημεία ταξιθεσίας χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε αποδοτικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών (Sapountzakis & Mokos, 2004). Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το σχήμα των κεντρικών διαφορών.

Σχετικά με τις αρχικές μετακινήσεις, η αντικατάσταση των εξισώσεων (4.1.13) στις εξισώσεις αρχικών συνθηκών (3.2.51α, γ) δίνουν τις κάτωθι $2L$ γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις ως προς τα διανύσματα \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 εκπεφρασμένα για $t=0$

$$\mathbf{H}_1^0 \mathbf{d}_1(0) = \bar{\mathbf{u}}_{m0} \quad \mathbf{H}_2^0 \mathbf{d}_2(0) = \bar{\boldsymbol{\theta}}_0 \quad (4.1.16\alpha, \beta)$$

Οι εξισώσεις αυτές, μαζί με τις εξισώσεις (4.1.10) γραμμένες για $t=0$, προσδιορίζουν ένα σύνολο $2L+12$ μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (με ίσο αριθμό αγνώστων) που μπορεί να επιλυθεί με οποιοδήποτε αποδοτικό αλγόριθμο προκειμένου να υπολογιστούν αριθμητικά οι αρχικές μετακινήσεις των γενικευμένων διανυσμάτων άγνωστων ποσοτήτων $\mathbf{d}_1(0)$, $\mathbf{d}_2(0)$. Παρομοίως, η αντικατάσταση των εξισώσεων (4.1.13) στις εξ. αρχικών συνθηκών (3.2.51β, δ) -που σχετίζονται με τις αρχικές ταχύτητες- δίνουν τις κάτωθι $2L$ γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις ως προς τα διανύσματα $\dot{\mathbf{d}}_1$, $\dot{\mathbf{d}}_2$ εκπεφρασμένα για $t=0$

$$\mathbf{H}_1^0 \dot{\mathbf{d}}_1(0) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{m0} \quad \mathbf{H}_2^0 \dot{\mathbf{d}}_2(0) = \dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_0 \quad (4.1.17\alpha, \beta)$$

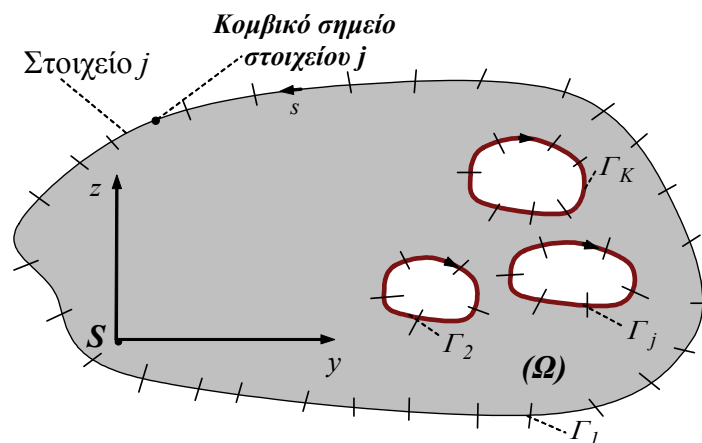
Οι εξισώσεις αυτές, μαζί με τις δώδεκα εξισώσεις (γραμμένες για $t=0$) που προκύπτουν από την παραγωγή ως προς το χρόνο t των σχ. (4.1.10), προσδιορίζουν ένα σύνολο $2L+12$ γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (με ίσο αριθμό αγνώστων) από το οποίο μπορούν να υπολογιστούν αριθμητικά οι αρχικές ταχύτητες των γενικευμένων διανυσμάτων άγνωστων ποσοτήτων $\dot{\mathbf{d}}_1(0)$, $\dot{\mathbf{d}}_2(0)$. Τονίζουμε ότι εν γένει τα στοιχεία των διανυσμάτων $\mathbf{d}_1(0)$, $\mathbf{d}_2(0)$ υπεισέρχονται στο σύστημα υπολογισμού των $\dot{\mathbf{d}}_1(0)$, $\dot{\mathbf{d}}_2(0)$ συνεπώς οι εξ. (4.1.16) επιλύονται πριν την επίλυση των εξ. (4.1.17).

Οι αρχικές συνθήκες $\mathbf{d}_1(0)$, $\mathbf{d}_2(0)$, $\dot{\mathbf{d}}_1(0)$, $\dot{\mathbf{d}}_2(0)$ μαζί με τις διαφορικές εξισώσεις (4.1.14) και τις μορφώνουν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε αποδοτικό αλγόριθμο. Στην παρούσα εργασία επιλέγεται η μέθοδος Petzold - Gear (Brenan et al., 1989) η οποία έχει αναπτυχθεί για επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Συνεπώς εισάγουμε $2L+12$ νέες μεταβλητές προκειμένου να μειώσουμε την τάξη του προβλήματος αρχικών τιμών που διατυπώσαμε (το πρόβλημα έχει χρονικές παραγωγούς μέχρι δεύτερης τάξης) (Bazant & Cedolin, 1991). Επιπλέον παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο τις εξ. (4.1.10) για να προκύψουν δώδεκα διαφορικές εξισώσεις που τελικά χρησιμοποιούμε, καθότι η αρχική αλγεβρική τους μορφή οδηγεί στην αδυναμία του αλγορίθμου να επιλύσει το πρόβλημα (Brenan et al., 1989). Τέλος σημειώνουμε ότι και το απλοποιημένο πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών των σχ. (3.2.49β, γ), (3.2.51γ, δ), (3.2.64) επιλύεται με παρόμοια μεθοδολογία με αυτήν που περιγράφηκε και δεν παρουσιάζει κάποια ξεχωριστή

δυσκολία. Χάριν συντομίας, οι αναλυτικές εκφράσεις του αριθμητικού υπολογισμού του παραλείπονται.

4.2.1 Αριθμητικός υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P

Σύμφωνα με την ανάλυση του κεφαλαίου 3, ο υπολογισμός της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^P πραγματοποιείται μέσω του Λαπλασιανού προβλήματος συνοριακών τιμών των σχ. (3.2.24). Το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία κι έτσι χάριν συντομίας παραλείπονται εδώ οι εκφράσεις της αριθμητικής επίλυσης. Σημειώνουμε απλώς ότι εφαρμόζουμε τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων προκειμένου να επιλυθεί το εν λόγω πρόβλημα ακολουθώντας τη μεθοδολογία και τις εκφράσεις που έχουν αναπτυχθεί σε άλλες εργασίες (Κατσιαδέλης (1999), Sapountzakis (2000), Μώκος (2007), Τσίππρας (2007)), ενώ για τη διακριτοποίηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων που προκύπτουν χρησιμοποιείται η υπόθεση του σταθερού στοιχείου (Κατσιαδέλης, 1999). Επισημαίνουμε ότι η διακριτοποίηση που απαιτείται είναι αποκλειστικά συνοριακή με αποτέλεσμα να αξιοποιείται πλήρως το πλεονέκτημα της ΜΣΣ να μειώνεται η διάσταση του εξεταζόμενου προβλήματος (χρήση επικαμπύλιων αντί για διπλά ολοκληρώματα) (βλ. σχήμα 4.2.1). Η διαδικασία καταλήγει -εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ταξιθεσίας- σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων από το οποίο λαμβάνουμε τις τιμές της ϕ_S^P στα κομβικά σημεία των συνοριακών στοιχείων.



Σχήμα 4.2.1. Διακριτοποίηση τυχόντος χωρίου Ω σε σταθερά συνοριακά στοιχεία.

4.2.2 Αριθμητικός υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S

Σύμφωνα με την ανάλυση του κεφαλαίου 3, ο υπολογισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S πραγματοποιείται μέσω του προβλήματος συνοριακών

τιμών των σχ. (3.2.25) οι οποίες για την περίπτωση που έχουμε αναφέρει ότι θα μελετήσουμε ($t_x = 0$) διατυπώνονται ως

$$\nabla^2 \phi_S^S = \left(-\frac{E}{G} u_m'' + \frac{\rho}{G} \ddot{u}_m \right) - \left(\frac{E}{G} \theta_x''' - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}_x' \right) \cdot \phi_S^P - \frac{E}{G} \theta_x' \theta_x'' (y^2 + z^2) \quad \text{στο } \Omega \quad (4.2.1\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.2.1\beta)$$

Η εξ. (4.2.1α) είναι εξίσωση Poisson και έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές στη βιβλιογραφία για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Στην παρούσα εργασία ακολουθείται μια τεχνική (Κατσικαδέλης, 1999) σύμφωνα με την οποία η λύση του προβλήματος είναι το άθροισμα δύο συναρτήσεων ως

$$\phi_S^S = \phi_{S_p}^S + \phi_{S_L}^S \quad (4.2.2)$$

όπου $\phi_{S_p}^S$ είναι μια μερική λύση της εξίσωσης Poisson (4.2.1α) η οποία λαμβάνεται στην παρούσα εργασία ως

$$\phi_{S_p}^S = \left(-\frac{E}{G} u_m'' + \frac{\rho}{G} \ddot{u}_m \right) \cdot F_I - \left(\frac{E}{G} \theta_x''' - \frac{\rho}{G} \ddot{\theta}_x' \right) \cdot B_p - \frac{E}{G} \theta_x' \theta_x'' \cdot H_I \quad \text{στο } \Omega \cup \Gamma \quad (4.2.3)$$

και $\phi_{S_L}^S$ είναι η λύση του (Λαπλασιανού) προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_{S_L}^S = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (4.2.4\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_{S_L}^S}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_{S_p}^S}{\partial n} \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.2.4\beta)$$

Οι βοηθητικές συναρτήσεις F_I, H_I που εισάγονται στην εξ. (4.2.3) είναι ορισμένες στο διάστημα $\Omega \cup \Gamma$ και δίνονται ως

$$F_I = \frac{y^2 + z^2}{4} \quad H_I = \frac{y^4 + z^4}{12} \quad (4.2.5\alpha, \beta)$$

ενώ η συνάρτηση B_p είναι η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 B_p = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (4.2.6\alpha)$$

$$\frac{\partial B_p}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.2.6\beta)$$

Η αιτιολογία χρήσης της συγκεκριμένης τεχνικής επίλυσης θα γίνει σαφής παρακάτω. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η ϕ_S^S που ορίζεται μέσω της εξ. (4.2.2)

ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών (4.2.1). Με τη βοήθεια της εξ. (4.2.3), η εξ. (4.2.4β) γράφεται ως

$$\frac{\partial \phi_{SL}^S}{\partial n} = - \left[\left(-\frac{E}{G} u_m'' + \frac{\rho}{G} \ddot{u}_m \right) \frac{\partial F_I}{\partial n} - \frac{E}{G} \theta_x' \theta_x'' \frac{\partial H_I}{\partial n} \right] \quad (4.2.7)$$

Σημειώνουμε ότι οποιαδήποτε μερική λύση B_p της εξίσωσης Poisson (4.2.6α) θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του προβλήματος, ωστόσο παρατηρούμε ότι η επιπλέον απαίτηση της εξ. (4.2.6β) απλοποιεί σημαντικά την εξ. (4.2.7). Εξάλλου, όπως θα δούμε στην παρακάτω υποενότητα, η λύση του προβλήματος των εξ. (4.2.6) έχει ήδη προσδιοριστεί προκειμένου να υπολογίσουμε τη γεωμετρική σταθερά C_S που απαιτείται να ευρεθεί πριν τον υπολογισμό της ϕ_S^S . Η αριθμητική επίλυση των εξ. (4.2.6) παρουσιάζεται εκτενώς σε άλλες εργασίες (Sapountzakis & Mokos, 2003, Μώκος, 2007) κι έτσι παραλείπεται εδώ χάριν συντομίας.

Συνεπώς ο αριθμητικός υπολογισμός της ϕ_S^S ανάγεται στην επίλυση του (Λαπλασιανού) προβλήματος (4.2.4) ο οποίος πραγματοποιείται επίσης με τη ΜΣΣ. Η διατύπωση των εξισώσεων -οι οποίες και πάλι παραλείπονται χάριν συντομίας- βασίζεται στην εργασία του Sapountzakis (2000). Με τη θεώρηση της ίδιας διακριτοποίησης με βάση σταθερά στοιχεία που ήδη έχουμε πραγματοποιήσει για τον προσδιορισμό της ϕ_S^P και εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ταξιθεσίας καταλήγουμε τελικά σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$[H] \{ \Phi_{SL}^S \} = [G] \left\{ \frac{\partial \Phi_{SL}^S}{\partial n} \right\} \quad (4.2.8)$$

όπου

$$\{ \Phi_{SL}^S \}^T = \left\{ \left(\phi_{SL}^S \right)_1 \quad \left(\phi_{SL}^S \right)_2 \quad \dots \quad \left(\phi_{SL}^S \right)_N \right\} \quad (4.2.9a)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_{SL}^S}{\partial n} \right\}^T = \left\{ \left(\frac{\partial \phi_{SL}^S}{\partial n} \right)_1 \quad \left(\frac{\partial \phi_{SL}^S}{\partial n} \right)_2 \quad \dots \quad \left(\frac{\partial \phi_{SL}^S}{\partial n} \right)_N \right\} \quad (4.2.9b)$$

είναι οι τιμές των άγνωστων συνοριακών ποσοτήτων της ϕ_{SL}^S και των γνωστών συνοριακών τιμών της $\frac{\partial \phi_{SL}^S}{\partial n}$ (βλ. εξ. (4.2.7)) στα κομβικά σημεία των συνοριακών στοιχείων (που έχουν συνολικό πλήθος N), αντίστοιχα. Επιπλέον, στην εξ. (4.2.8) τα $[H]$ και $[G]$ είναι $N \times N$ γνωστά μητρώα συντελεστών. Τονίζουμε ότι η συνοριακή συνθήκη (4.2.27β) είναι τύπου Neumann (Κατσικαδέλης, 1999), συνεπώς το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι ιδιόμορφο και δεν μπορεί να επιλυθεί άμεσα. Στην παρούσα εργασία, η άρση της ιδιομορφίας πραγματοποιείται μέσω της τεχνικής που προτείνεται στην εργασία των Lutz et. al. (1998) όπως αυτή εφαρμόζεται σε δυσδιάστατα προβλήματα δυναμικού (Aimi & Diligenti, 2008). Προκειμένου να

αρθεί η ιδιομορφία, χρησιμοποιήθηκαν κι άλλες τεχνικές που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία (Κατσιαδέλης, 1999, Strese, 1984) ωστόσο οδήγησαν σε εντελώς λανθασμένα αποτελέσματα που στερούνταν φυσικού νοήματος. Η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.2.24) με βάση άλλες τεχνικές δεν εμφανίζει τα ίδια προβλήματα, ωστόσο για λόγους ομοιομορφίας των αποτελεσμάτων και της μεθοδολογίας, η τεχνική των Lutz et. al. (1998) χρησιμοποιήθηκε κι εδώ. Η τεχνική αυτή έχει αναπτυχθεί για προβλήματα με **ομογενείς κυρίαρχες εξισώσεις** στο εσωτερικό των χωρίων που ορίζονται (Lutz et. al., 1998, Aimi & Diligenti, 2008), συνεπώς για αυτό το λόγο προτιμήθηκε η μετατροπή του αρχικού προβλήματος συνοριακών τιμών (με κυρίαρχη εξίσωση Poisson) σε πρόβλημα Laplace. Ωστόσο για την περίπτωση του προβλήματος (4.2.6), η μετατροπή σε πρόβλημα Laplace είναι αδύνατη αφού στο δεξιά μέλος βρίσκεται η ϕ_S^P που έχει προσδιοριστεί αριθμητικά. Σαν αποτέλεσμα, η εύρεση μερικής λύσης για το εν λόγω πρόβλημα Poisson είναι αδύνατη κι έτσι η επίλυση των εξ. (4.2.6) πραγματοποιήθηκε με άλλη τεχνική άρσης της ιδιομορφίας (Κατσιαδέλης, 1999) η οποία είναι γενική και μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη ομογενείς κυρίαρχες εξισώσεις. Φυσικά, για το πρόβλημα αυτό η επίλυση μέσω της συγκεκριμένης τεχνικής δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα και δεν εμφανίζονται οι δυσκολίες που συναντήθηκαν στο πρόβλημα προσδιορισμού της ϕ_S^S .

Η τελική λύση της ϕ_S^S (βλ. εξ. (4.2.2)) δε θα ικανοποιεί κατ' ανάγκη την απαίτηση της εξ. (3.2.37) σύμφωνα με την οποία θα πρέπει να ισχύει

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (4.2.10)$$

που ουσιαστικά υποδηλώνει (βλ. εξ. (4.2.2)) ότι θα πρέπει η συνάρτηση $\phi_{S,L}^S$ να ικανοποιεί την έκφραση

$$\int_{\Omega} \phi_{S,L}^S dA = - \int_{\Omega} \phi_{S,p}^S dA \quad (4.2.11)$$

Είναι προφανές ότι η σχέση μεταξύ της τελικής $\phi_{S,L}^S$ και της $\phi_{S,L}^S$ που προκύπτει από το γραμμικό σύστημα (4.2.8), και συμβολίζεται εδώ ως $\widehat{\phi}_{S,L}^S$, είναι η

$$\phi_{S,L}^S = \widehat{\phi}_{S,L}^S + c \quad (4.2.12)$$

όπου c είναι μια σταθερά προς υπολογισμό. Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στη σχ. (4.2.11), η σταθερά c προσδιορίζεται ως

$$c = -\frac{I}{A} \left(\int_{\Omega} \phi_{S,p}^S dA + \int_{\Omega} \widehat{\phi}_{S,L}^S dA \right) \quad (4.2.13)$$

Ένεκα της εξ. (4.2.3), ο πρώτος όρος του δεξιά μέλους της εξ. (4.2.13) εκφράζεται ως

$$\int_{\Omega} \phi_{S_p}^S dA = \left(-u_m'' \frac{E}{G} + \ddot{u}_m \frac{\rho}{G} \right) \int_{\Omega} F_I dA - \theta'_x \theta''_x \frac{E}{G} \int_{\Omega} H_I dA \quad (4.2.14)$$

αφού απαιτήσουμε όπως

$$\int_{\Omega} B_p dA = 0 \quad (4.2.15)$$

Ο παραπάνω περιορισμός διασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος των εξ. (4.2.6) που διαθέτει επίσης συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann ενώ όπως βλέπουμε η συγκεκριμένη μορφή του απλοποιεί την έκφραση (4.2.14). Εξάλλου, ο προσδιορισμός του B_p για την εύρεση της σταθεράς C_S πραγματοποιείται με τον ίδιο περιορισμό. Για να επιτύχουμε τη λύση του προβλήματος με συνοριακή διακριτοποίηση αποκλειστικά, τα διπλά ολοκληρώματα του δεξιού μέλους της εξ. (4.2.14) μετατρέπονται σε επικαμπύλια στο σύνορο Γ της διατομής ως

$$\int_{\Omega} F_I dA = \frac{I}{4} I_P = \frac{I}{12} \int_{\Gamma} (y^3 n_y + z^3 n_z) ds \quad (4.2.16\alpha)$$

$$\int_{\Omega} H_I dA = \frac{I}{12} I_{PP} - \frac{I}{36} \int_{\Gamma} (y^3 z^2 n_y + y^2 z^3 n_z) ds = \frac{I}{60} \int_{\Gamma} (y^5 n_y + z^5 n_z) ds \quad (4.2.16\beta)$$

ενώ με χρήση της ταυτότητας Green (Κατσικαδέλης, 1999), το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξ. (4.2.13) μετατρέπεται σε συνοριακό ως

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \widehat{\phi}_{S_L}^S dA &= \int_{\Omega} \widehat{\phi}_{S_L}^S \cdot 1 dA = \int_{\Omega} (\widehat{\phi}_{S_L}^S \cdot \nabla^2 F_I - F_I \cdot \nabla^2 \widehat{\phi}_{S_L}^S) dA + \int_{\Omega} (F_I \cdot \nabla^2 \widehat{\phi}_{S_L}^S) dA = \\ &= \int_{\Gamma} \widehat{\phi}_{S_L}^S \cdot \frac{\partial F_I}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} F_I \cdot \frac{\partial \widehat{\phi}_{S_L}^S}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την εξ. (4.2.7) η παραπάνω εξίσωση διαμορφώνεται ως

$$\int_{\Omega} \widehat{\phi}_{S_L}^S dA = \int_{\Gamma} \widehat{\phi}_{S_L}^S \cdot \frac{\partial F_I}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} F_I \cdot \left[\left(\frac{E}{G} u_m'' - \frac{\rho}{G} \ddot{u}_m \right) \frac{\partial F_I}{\partial n} + \frac{E}{G} \theta'_x \theta''_x \frac{\partial H_I}{\partial n} \right] ds \quad (4.2.18)$$

και συνεπώς ολοκληρώνεται ο προσδιορισμός της σταθεράς c με συνοριακά ολοκληρώματα κατ' αποκλειστικότητα. Ο αριθμητικός προσδιορισμός των εν λόγω ολοκληρωμάτων γίνεται με την υφιστάμενη διακριτοποίηση του συνόρου σε σταθερά στοιχεία. Ο τελικός προσδιορισμός της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης γίνεται με την εφαρμογή των εξ. (4.2.12) και (4.2.2). Επισημαίνουμε ότι η επίλυση του απλοποιημένου προβλήματος συνοριακών τιμών των εξ. (3.2.67) καθώς και η επίλυση των προβλημάτων των γραμμικών ταλαντώσεων (3.2.26) και (3.2.68) πραγματοποιείται με παρόμοια μεθοδολογία με αυτήν που αναπτύχθηκε παραπάνω χωρίς να προκύπτουν ιδιαίτερες δυσκολίες.

4.2.3 Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών

$A, I_P, I_{PP}, I_n, I_t, C_S, S_y, S_z, I_{yy}, I_{zz}, I_{yz}, A_w, A_{wy}, A_{wz}$

Σύμφωνα με την ανάλυση του κεφαλαίου 3, ο υπολογισμός όλων των αγνώστων του προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί με την προϋπόθεση ότι έχει προσδιοριστεί το σύνολο των γεωμετρικών σταθερών που υπεισέρχονται στις διάφορες εξισώσεις. Οι γεωμετρικές σταθερές $A, I_P, I_{PP}, I_t, S_y, S_z, I_{yy}, I_{zz}, I_{yz}$ προσδιορίζονται με τη βοήθεια του **θεωρήματος απόκλισης Gauss** (Gauss divergence theorem) (Κατσικαδέλης, 1999) ως εξής:

$$A = \int_{\Omega} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (y n_y + z n_z) ds \quad (4.2.19\alpha)$$

$$I_P = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (y^3)}{\partial y} + \frac{\partial (z^3)}{\partial z} \right) d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} (y^3 n_y + z^3 n_z) ds \quad (4.2.19\beta)$$

$$\begin{aligned} I_{PP} &= \int_{\Omega} (y^2 + z^2)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (y^4 + z^4 + 2y^2 z^2) d\Omega = \\ &= \frac{1}{5} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (y^5)}{\partial y} + \frac{\partial (z^5)}{\partial z} \right) d\Omega + \frac{1}{3} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (y^3 z^2)}{\partial y} + \frac{\partial (y^2 z^3)}{\partial z} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{3} y^3 z^2 \right) n_y + \left(\frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{3} y^2 z^3 \right) n_z \right] ds \Rightarrow \\ \Rightarrow I_{PP} &= \int_{\Gamma} \left[y^3 \left(\frac{1}{5} y^2 + \frac{1}{3} z^2 \right) n_y + z^3 \left(\frac{1}{5} z^2 + \frac{1}{3} y^2 \right) n_z \right] ds \end{aligned} \quad (4.2.19\gamma)$$

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (y z^2 - z \phi_S^P)}{\partial y} + \frac{\partial (y^2 z + y \phi_S^P)}{\partial z} \right] d\Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow I_t &= \int_{\Gamma} \left[(y z^2 - z \phi_S^P) n_y + (y^2 z + y \phi_S^P) n_z \right] ds \end{aligned} \quad (4.2.19\delta)$$

$$S_y = \int_{\Omega} z d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (z^2)}{\partial z} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} z^2 n_z ds \quad (4.2.19\epsilon)$$

$$S_z = \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (y^2)}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} y^2 n_y ds \quad (4.2.19\zeta)$$

$$I_{yy} = \int_{\Omega} z^2 d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \frac{\partial (z^3)}{\partial z} d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} z^3 n_z ds \quad (4.2.19\eta)$$

$$I_{zz} = \int_{\Omega} y^2 d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \frac{\partial (y^3)}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} y^3 n_y ds \quad (4.2.19\theta)$$

$$I_{yz} = \int_{\Omega} yz d\Omega = \frac{I}{4} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(y^2 z)}{\partial y} + \frac{\partial(yz^2)}{\partial z} \right] d\Omega = \frac{I}{4} \int_{\Gamma} (y^2 z n_y + yz^2 n_z) ds \quad (4.2.19\iota)$$

Η σταθερά I_n υπολογίζεται με εφαρμογή της σχ. (3.2.65) ενώ οι σταθερές C_S, A_w, A_{wy}, A_{wz} προσδιορίζονται με τη βοήθεια της **δεύτερης ταυτότητας Green** (Κατσιακαδέλης, 1999) ως εξής:

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\phi_S^P \cdot \nabla^2 B_p - B_p \cdot \nabla^2 \phi_S^P) d\Omega = - \int_{\Gamma} B_p \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds \quad (4.2.20\alpha)$$

$$A_w = \int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega = \int_{\Omega} \phi_S^P \cdot 1 d\Omega = \int_{\Omega} (\phi_S^P \cdot \nabla^2 F_1 - F_1 \cdot \nabla^2 \phi_S^P) d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_w = \int_{\Gamma} \left(\phi_S^P \frac{\partial F_1}{\partial n} - F_1 \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right) ds \quad (4.2.20\beta)$$

$$A_{wy} = \int_{\Omega} \phi_S^P y d\Omega = \int_{\Omega} (\phi_S^P \cdot \nabla^2 G_y - G_y \cdot \nabla^2 \phi_S^P) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\phi_S^P \frac{\partial G_y}{\partial n} - G_y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right) ds \quad (4.2.20\gamma)$$

$$A_{wz} = \int_{\Omega} \phi_S^P z d\Omega = \int_{\Omega} (\phi_S^P \cdot \nabla^2 G_z - G_z \cdot \nabla^2 \phi_S^P) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\phi_S^P \frac{\partial G_z}{\partial n} - G_z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} \right) ds \quad (4.2.20\delta)$$

όπου $G_y = \frac{I}{2} z F_1$, $G_z = \frac{I}{2} y F_1$. Ομοίως κι εδώ, ο αριθμητικός προσδιορισμός των συνοριακών ολοκληρωμάτων που ευρέθησαν γίνεται με την υφιστάμενη διακριτοποίηση του συνόρου σε σταθερά στοιχεία.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ -
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Εισαγωγή

Με βάση τη θεωρητική και αριθμητική αντιμετώπιση του προβλήματος της ελαστικής ανομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων που παρουσιάστηκαν, συντάχθηκε πρόγραμμα H/Y σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN 90/95, προκειμένου να επιλυθούν συγκεκριμένες αριθμητικές εφαρμογές και να καταδειχτεί η ποικιλία πρακτικών προβλημάτων που μπορούν να αντιμετωπιστούν.

Το κύριο αντικείμενο τις παρούσας εργασίας είναι ο προσδιορισμός των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης) στη δυναμική ανάλυση ράβδων διατομών διπλής συμμετρίας που υπόκεινται σε ελαστική ανομοιόμορφη στρέψη μεγάλων μετατοπίσεων. Συνεπώς η παρουσίαση των κινηματικών μεγεθών μίας χωρικής μεταβλητής ($u_m(x,t)$, $\theta_x(x,t)$) θα είναι συνοπτική και θα περιοριστεί στα απολύτως απαραίτητα στοιχεία που απαιτούνται ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να γίνει μελλοντική διερεύνηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται εδώ, με εφαρμογή κάποιας εναλλακτικής μεθόδου ανάλυσης. Επιπλέον, οι αριθμητικές εφαρμογές περιορίζονται στην ανάλυση ράβδων υπό δυναμικά και όχι στατικά φορτία και στην περίπτωση ανομοιόμορφης στρεπτικής φόρτισης με σχετικά απλές αξονικές συνοριακές συνθήκες και αξονική φόρτιση, χωρίς ωστόσο αυτό να σημαίνει ότι η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε μπορεί να εφαρμοστεί στην ανάλυση μονάχα αυτών των περιπτώσεων. Κύριος στόχος της παρούσας διερεύνησης είναι η διερεύνηση της επιρροής της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στο υπό εξέταση πρόβλημα και για αυτό δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη σύγκριση των γραμμικών με τις (γεωμετρικά) μη γραμμικές αναλύσεις.

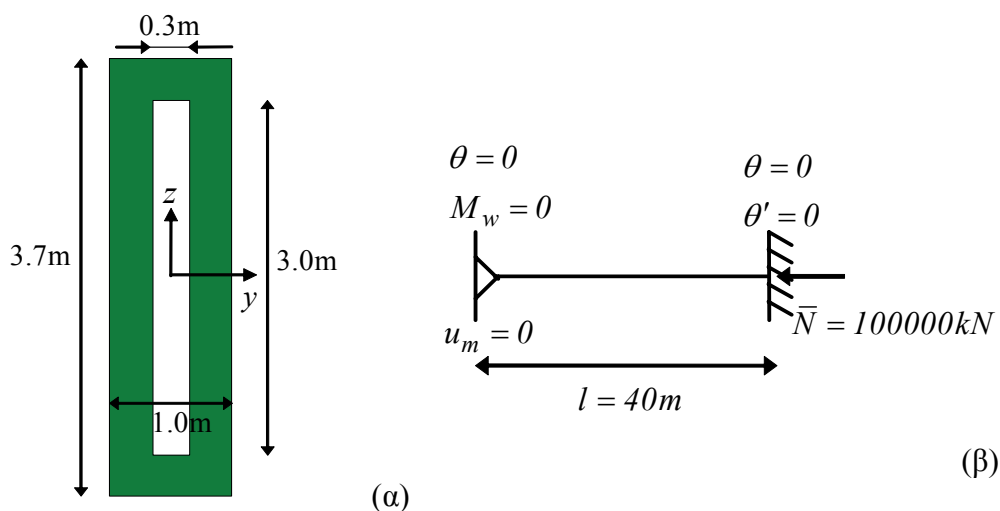
Στην αντίληψη του συγγραφέα δεν έχει υποπέσει κάποια εργασία στη βιβλιογραφία που να αντιμετωπίζει το υπό εξέταση πρόβλημα. Ενώ υπάρχουν διάφορες εργασίες που μελετούν σύνθετες δυναμικές καταπονήσεις ράβδων (και όχι αποκλειστικά στρεπτική καταπόνηση) με γεωμετρική μη γραμμικότητα, έμφαση δίνεται στον προσδιορισμό των κύριων κινηματικών μεγεθών χωρίς να υπάρχει αναφορά στον προσδιορισμό των δευτερογενών διατμητικών τάσεων ή του τασικού πεδίου της ράβδου γενικότερα. Εξάλλου στην πλειονότητα των εργασιών μελετάται καμπτοδιατμητική καταπόνηση και η σύνδεση αυτής με τη στρεπτική και όχι η σύζευξη αξονικής και στρεπτικής καταπόνησης που διερευνάται εδώ. Ωστόσο στον Ευρωκώδικα 3 (2003), υπάρχει σαφής αναφορά περί της ανάγκης να ληφθούν υπόψη οι διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης στην ανάλυση ράβδου που υπόκειται σε ανομοιόμορφη στρεπτική φόρτιση και αυτό το στοιχείο αποτελεί το κύριο κίνητρο του παρόντος πονήματος.

5.2 Αριθμητικές εφαρμογές

5.2.1 1^η αριθμητική εφαρμογή

Στο πρώτο αριθμητικό παράδειγμα μελετήθηκαν οι ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδου μήκους $l = 40,0m$ ορθογωνικής χονδρότοιχης διατομής με οπή (σταθερές υλικού ράβδου $E = 3,23184 \times 10^6 kN / m^2$, $G = 1,3466 \times 10^6 kN / m^2$, $\rho = 2,5484 kN sec^2 / m^4$) που υποβάλλεται σε μια αμετάβλητη ως προς το χρόνο θλιπτική αξονική δύναμη που ασκείται στο δεξί της άκρο, με μέγεθος

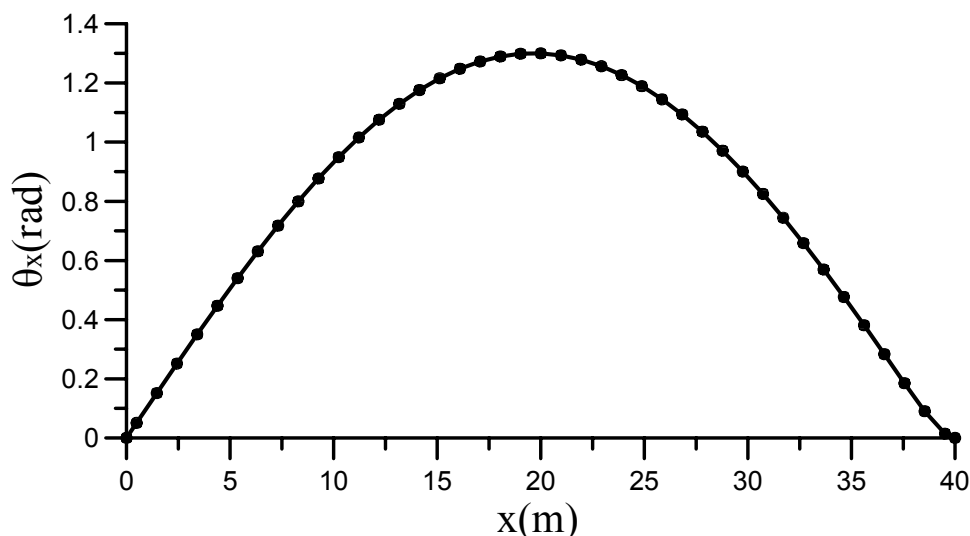
$\bar{N}(l,t) = -100000kN$ (η τιμή αντιστοιχεί σε μικρότερο φορτίο το καμπτικό και το στρεπτικό φορτίο λυγισμού). Η κατά μήκος διακριτοποίηση πραγματοποιείται με 41 ισομήκη στοιχεία ενώ η διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής με 700 συνοριακά στοιχεία. Η διατομή και οι συνοριακές συνθήκες της ράβδου παρουσιάζονται στο σχήμα 5.2.1 ενώ οι γεωμετρικές σταθερές της ράβδου δίνονται στον πίνακα 5.2.1, έτσι όπως προέκυψαν από την ανάλυση της διατομής. **Το απλοποιημένο πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών** (βλ. υποενότητα 3.2.7) επιλύθηκε αριθμητικά προκειμένου να ευρεθούν στο πεδίο του χρόνου ο κινηματικός άγνωστος θ_x καθώς και οι παράγωγοί του στα κομβικά σημεία της ράβδου (περίπτωση σταθερής κατά μήκος αξονικής φόρτισης, βλ. υποενότητα 3.2.7). Η γραμμική θεμελιώδης ιδιομορφή της γωνίας στροφής λαμβάνεται ως αρχική στρεπτική μετακίνηση (βλ. σχήμα 5.2.2) και προέκυψε πραγματοποιώντας ιδιομορφική ανάλυση του γραμμικού προβλήματος δυναμικής ανάλυσης της ράβδου με βάση την εργασία των Sapountzakis & Mokos (2006). Το «πλάτος» (μέγεθος) της αρχικής στρεπτικής μετακίνησης στο μέσο της ράβδου ελήφθη ίσο με $\bar{\theta}_{x0}(l/2) = 1,3rad$ ενώ οι αρχικές στρεπτικές ταχύτητες $\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x)$ είναι μηδενικές. Σημειώνουμε εδώ ότι το «πλάτος» (μέγεθος) των αρχικών μετακινήσεων αποτελεί το κρίσιμο μέγεθος για την ανάπτυξη ή μη μεγάλων στροφών.



Σχήμα 5.2.1 Διατομή (α) και συνοριακές συνθήκες (β) της ράβδου του παραδείγματος 5.2.1.

Πίνακας 5.2.1 Γεωμετρικές σταθερές διατομής της ράβδου του παραδείγματος 5.2.1.

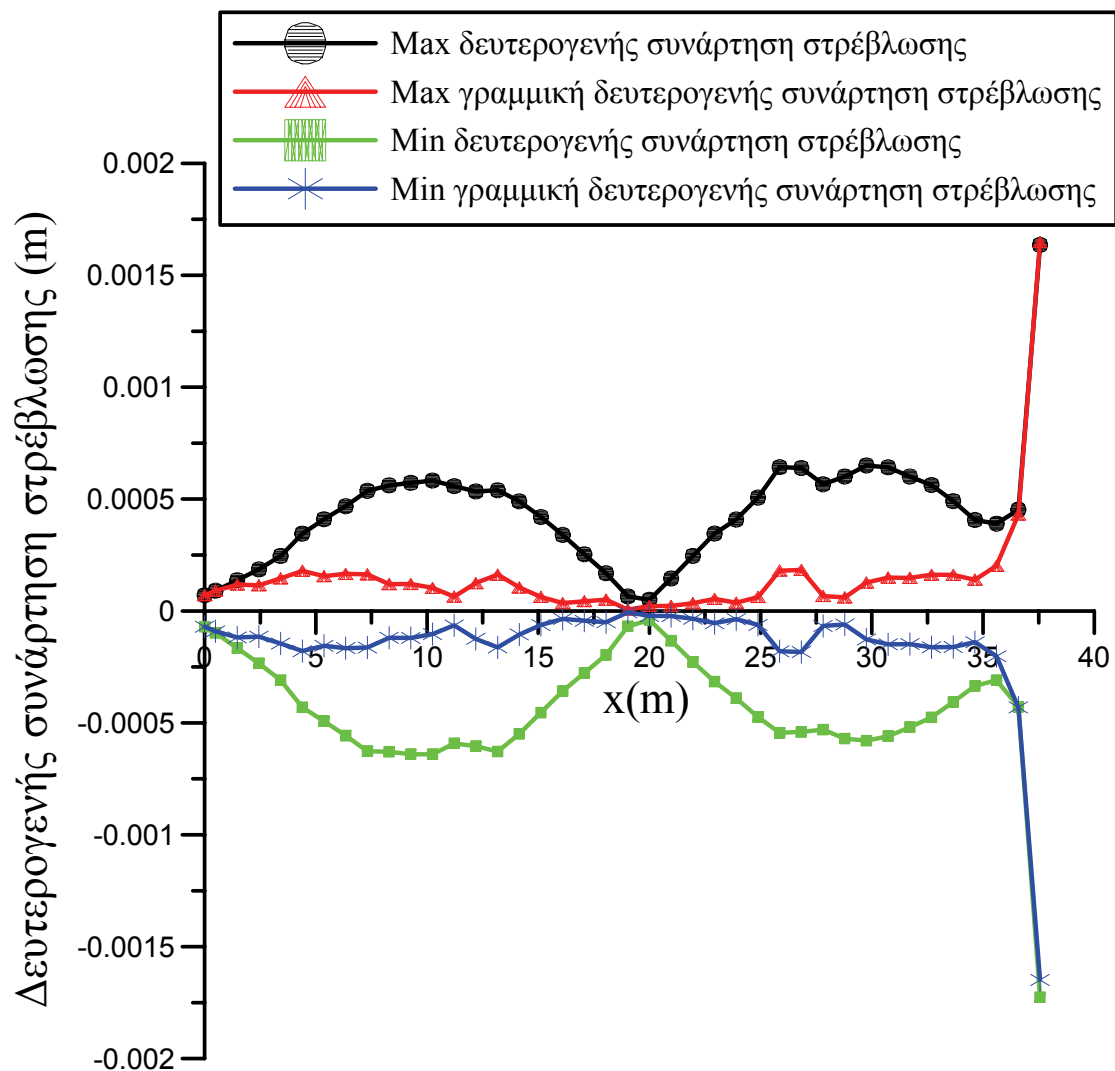
$A(m^2)$	2,800
$I_p(m^4)$	3,848
$I_{pp}(m^6)$	8,496
$I_n(m^6)$	3,209
$I_t(m^4)$	0,977
$C_s(m^6)$	0,200



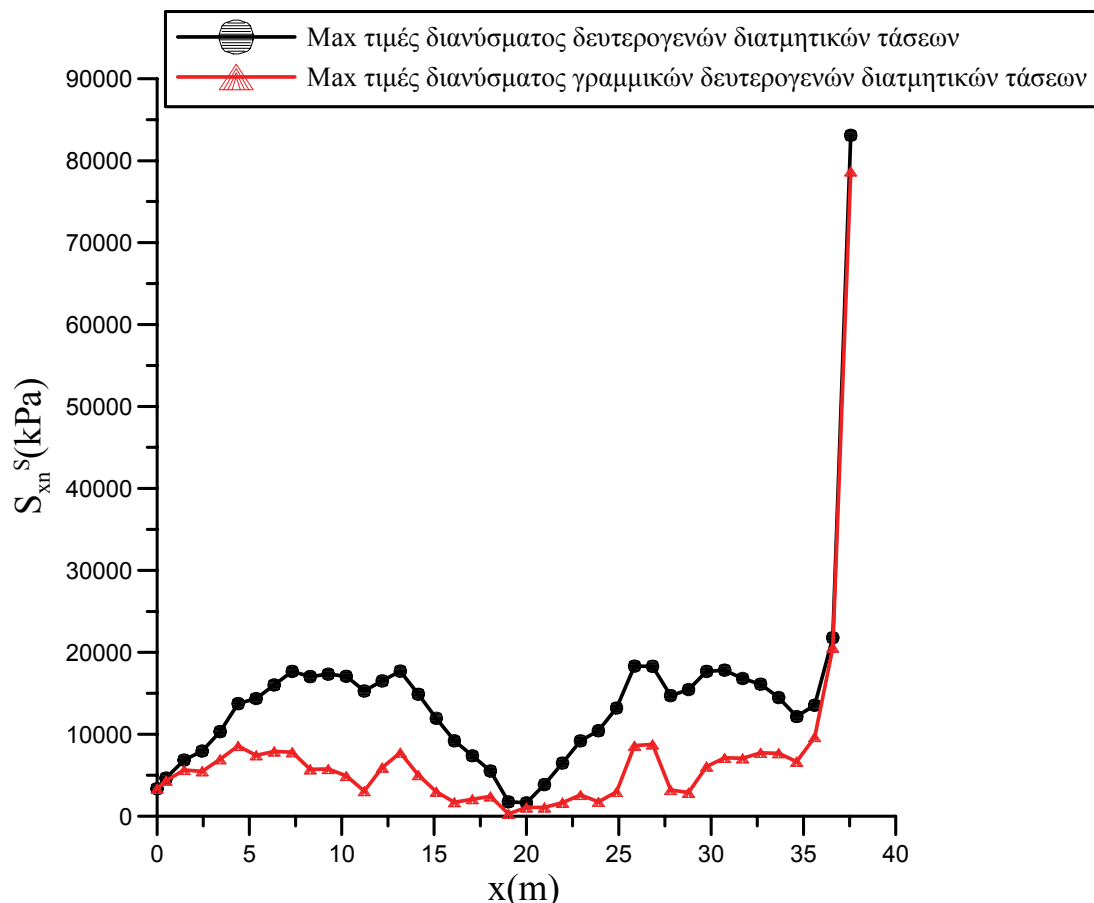
Σχήμα 5.2.2 Γραμμική θεμελιώδης ιδιομορφή της στρεπτικής στροφής θ_x κατά μήκος της ράβδου του παραδείγματος 5.2.1.

Στο σχήμα 5.2.3 παρουσιάζονται οι ακρότατες τιμές (μέγιστα & ελάχιστα) της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\left(\phi_S^S\right)_{red.}$ (που προσδιορίστηκαν από την επίλυση του απλοποιημένου προβλήματος συνοριακών τιμών (3.2.67)) καθώς επίσης και τα αντίστοιχα μεγέθη της γραμμικής δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_{S lin}^S$ (που προσδιορίστηκαν από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.2.68)), για το χωρικό διάστημα της ράβδου $0, 0 \leq x \leq 38,05 (m)$ και τη χρονική στιγμή $t = 0,1353 sec$. Σημειώνουμε ότι για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή η στρεπτική στροφή στο μέσο της ράβδου $\theta_x(l/2, t)$ είναι μέγιστη για τη χρονική περίοδο $0, 0 \leq t \leq 0,15 (sec)$ (ισχύει $max \theta_x(l/2, t) = 1,305 rad$, στο διάστημα $0, 0 \leq t \leq 0,15 (sec)$). Για την ίδια χρονική στιγμή ($t = 0,1353 sec$), στο σχήμα 5.2.4 παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές του διανύσματος δευτερογενών διατμητικών τάσεων $\left(S_{xn}^S\right)_{red.} = \left(S_{xy}^S\right)_{red.} \cdot n_y + \left(S_{xz}^S\right)_{red.} \cdot n_z$ (που προκύπτει από τη $\left(\phi_S^S\right)_{red.}$) καθώς και οι μέγιστες τιμές του γραμμικού μέρους του, $S_{xnlin}^S = S_{xylin}^S \cdot n_y + S_{xzlin}^S \cdot n_z$ (που προκύπτει από τη $\phi_{S lin}^S$), για το συνολικό πλήθος των κομβικών σημείων που βρίσκονται εντός του χωρικού διαστήματος $0, 0 \leq x \leq 38,05 (m)$. Οι αντίστοιχες τιμές για τα κομβικά σημεία καθώς και για το δεξιά ακραίο σημείο της ράβδου που βρίσκονται στο διάστημα $38,05 \leq x \leq 40,0 (m)$ παρουσιάζονται ξεχωριστά, για λόγους ευκρινέστερης εποπτείας, στον πίνακα 5.2.2. Από τα σχήματα 5.2.3, 5.2.4 συμπεραίνουμε ότι οι ακρότατες τιμές των $\left(\phi_S^S\right)_{red.}$, $\phi_{S lin}^S$ διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους κατά μήκος της ράβδου, ενώ το ίδιο συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί και για τις μέγιστες τιμές των $\left(S_{xn}^S\right)_{red.}$, S_{xnlin}^S . Ωστόσο, από τον πίνακα 5.2.2 βρίσκουμε ότι κοντά στο πακτωμένο δεξιά άκρο όπου η στρέβλωση παρεμποδίζεται πλήρως, η διαφοροποίηση μεταξύ των προαναφερθεισών ποσοτήτων σταδιακά μειώνεται και

τελικά μηδενίζεται ακριβώς πάνω στη θέση της πάκτωσης. Η συγκεκριμένη παρατήρηση ήταν αναμενόμενη μιας και ο πρώτος όρος του δεξιά μέλους της κυρίαρχης εξίσωσης (3.2.67α) του προβλήματος συνοριακών τιμών ο οποίος σχετίζεται με τη γεωμετρική μη γραμμικότητα τείνει να μηδενιστεί κοντά στο δεξί άκρο της ράβδου όπου η συνοριακή συνθήκη της πλήρους παρεμπόδισης της στρέβλωσης εκφράζεται ως $\theta'_x(l,t) = 0$. Επιπρόσθετα, από το σχήμα 5.2.3 και τον πίνακα 5.2.2 παρατηρούμε ότι σχέση $|\min \phi_S^S| = \max \phi_S^S$ ισχύει (με αριθμητική και όχι μαθηματική ακρίβεια) για τη γραμμική $\phi_{S\text{lin}}^S$ αλλά όχι και για τη μη γραμμική δευτερογενή συνάρτηση στρέβλωσης $(\phi_S^S)_{\text{red}}$.



Σχήμα 5.2.3 Ακρότατες τιμές της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\phi_S^S)_{\text{red}}$ και του γραμμικού μέρους της, $\phi_{S\text{lin}}^S$, κατά μήκος της ράβδου $(0, 0 \leq x \leq 38,05 \text{ (m)})$ του παραδείγματος 5.2.1.

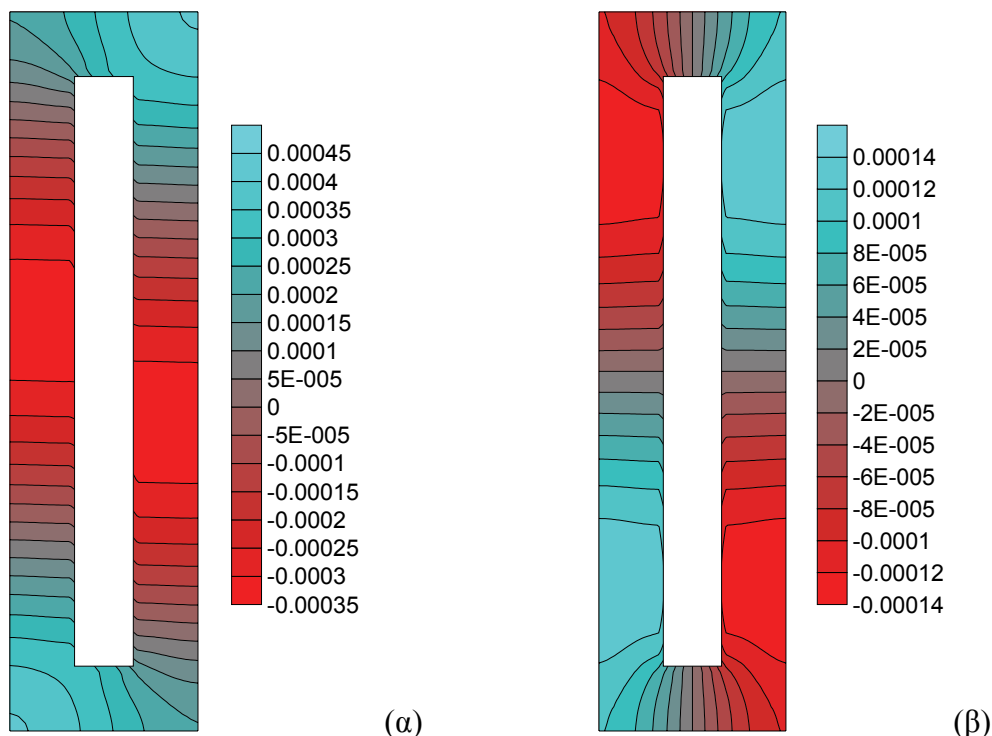


Σχήμα 5.2.4 Μέγιστες τιμές του διανύσματος δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(S_{xn}^S)_{red.}$ (που προκύπτει από τη $(\phi_S^S)_{red.}$) και του γραμμικού μέρους του, S_{xnlin}^S (που προκύπτει από τη ϕ_{Slin}^S), κατά μήκος της ράβδου $(0, 0 \leq x \leq 38,05 (m))$ του παραδείγματος 5.2.1.

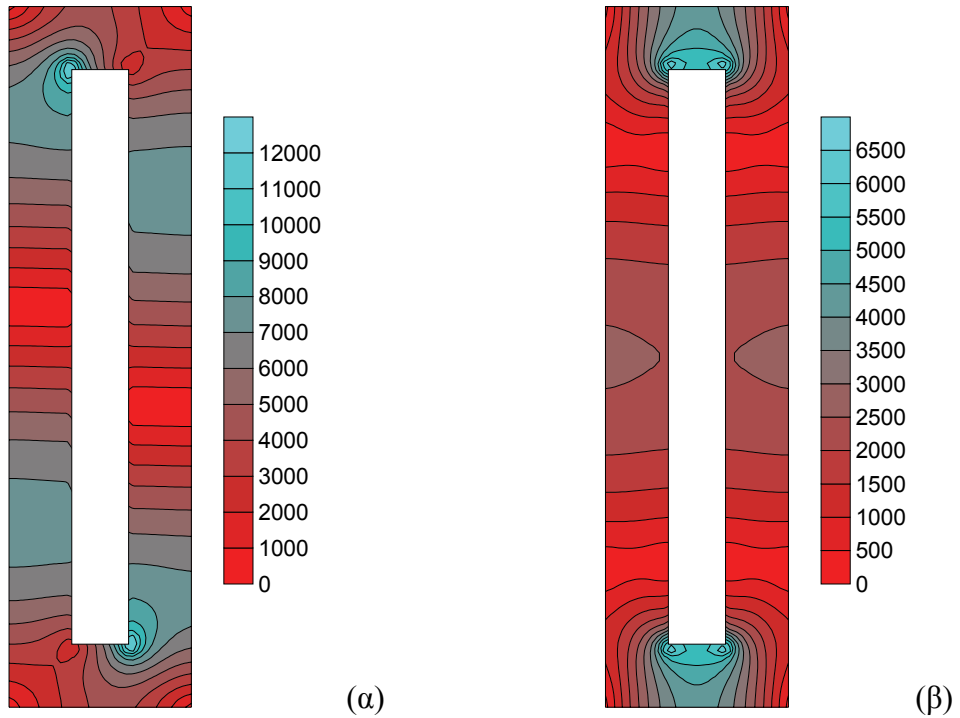
Πίνακας 5.2.2 Ακρότατες τιμές των $(\phi_S^S)_{red.}$, ϕ_{Slin}^S και μέγιστες τιμές των $(S_{xn}^S)_{red.}$, S_{xnlin}^S στα κομβικά σημεία κοντά στο δεξί άκρο της ράβδου του παραδείγματος 5.2.1.

	Συντεταγμένη $x(m)$ κομβικού σημείου		
	38,5	39,5	40,0
$\max(\phi_S^S)_{red.} (m)$	$7,555 \times 10^{-3}$	$3,273 \times 10^{-2}$	$5,398 \times 10^{-2}$
$\max \phi_{Slin}^S (m)$	$7,548 \times 10^{-3}$	$3,301 \times 10^{-2}$	$5,398 \times 10^{-2}$
$\min(\phi_S^S)_{red.} (m)$	$-8,146 \times 10^{-3}$	$-3,441 \times 10^{-2}$	$-5,398 \times 10^{-2}$
$\min \phi_{Slin}^S (m)$	$-7,548 \times 10^{-3}$	$-3,301 \times 10^{-2}$	$-5,398 \times 10^{-2}$
$\max(S_{xn}^S)_{red.} (kN/m^2)$	$3,893 \times 10^5$	$1,658 \times 10^6$	$2,576 \times 10^6$
$\max S_{xnlin}^S (kN/m^2)$	$3,603 \times 10^5$	$1,575 \times 10^6$	$2,576 \times 10^6$

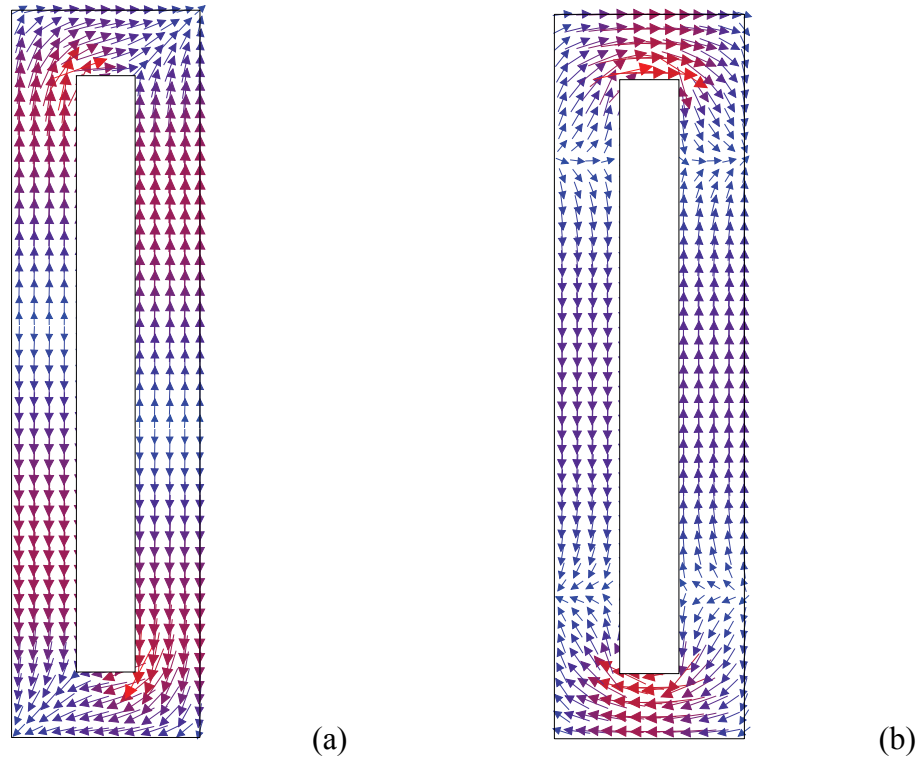
Προκειμένου να διερευνήσουμε τη μεταβολή των υπό εξέταση ποσοτήτων κατά μήκος της διατομής της ράβδου, στα σχήματα 5.2.5, 5.2.6 παρουσιάζονται η διακύμανση των μεγεθών $(\phi_S^S)_{red.}$, $\phi_{S lin}^S$ και $(S_{xn}^S)_{red.}$, S_{xnlin}^S αντίστοιχα, σε μια συγκεκριμένη διατομή της ράβδου (με $x = 34,6 m$) και για τη χρονική στιγμή που εξετάστηκε πρωτύτερα ($t = 0,1353 sec$). Παρατηρούμε, όπως αναμέναμε, ότι όλες οι συναρτήσεις διαθέτουν σημειακή συμμετρία ως προς το κέντρο στρέψης S (γεωμετρικό κέντρο) της διατομής ενώ επιπλέον οι «γραμμικές» συναρτήσεις $\phi_{S lin}^S$, S_{xnlin}^S και μόνο αυτές είναι αντισυμμετρικές ως προς τους άξονες S_y, S_z . Τέλος, στο σχήμα 5.2.7 παρουσιάζονται οι διανομές των διανυσμάτων δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(S_{xn}^S)_{red.}$, S_{xnlin}^S για την ίδια διατομή και χρονική στιγμή που εξετάστηκαν πιο πριν. Είναι εμφανής η σημαντική επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στη διανομή των διατμητικών τάσεων λόγω στρέβλωσης. Στον πίνακα 5.2.3 μπορούν να ευρεθούν όλα τα απαραίτητα κινηματικά μεγέθη μιας χωρικής μεταβλητής που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των ποσοτήτων που παρουσιάστηκαν στα σχήματα 5.2.5 - 5.2.7 (περίπτωση απλοποιημένου προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών). Η αποδοτικότητα της αναπτυχθείσας μεθόδου είναι εμφανής αφού μπορεί να υπολογιστεί σε οποιοδήποτε σημείο της ράβδου το τασικό πεδίο της (και όχι μόνο τα κινηματικά μεγέθη μίας χωρικής μεταβλητής) ακόμα κι αν η ράβδος διαθέτει χονδρότοιχη διατομή με οπή, η οποία δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί πχ από τη θεωρία Vlasov (Vlasov, 1963) που έχει προταθεί για λεπτότοιχες ανοιχτές διατομές.



Σχήμα 5.2.5 Διακύμανση της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης $(\phi_S^S)_{red.}$ (α) και του γραμμικού μέρους της, $\phi_{S lin}^S$ (β), στη διατομή με $x = 34,6 m$ ($t = 0,1353 sec$) της ράβδου του παραδείγματος 5.2.1.



Σχήμα 5.2.6 Διακύμανση των διανυσμάτων δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(S_{xn}^S)_{red}$ (α) και S_{xn}^S (β) στη διατομή με $x = 34,6 \text{ m}$ ($t = 0,1353 \text{ sec}$) της ράβδου του παραδείγματος 5.2.1.



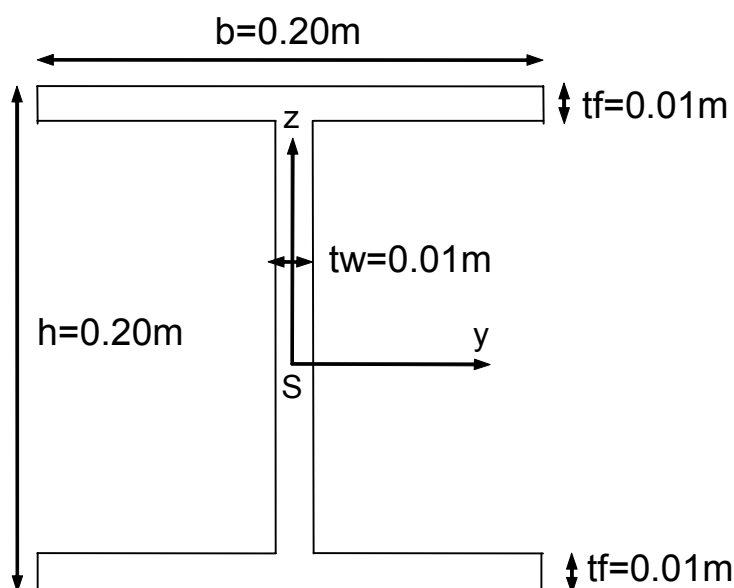
Σχήμα 5.2.7 Διανομές των διανυσμάτων δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(S_{xn}^S)_{red}$ (α) και S_{xn}^S (β) στη διατομή με $x = 34,6 \text{ m}$ ($t = 0,1353 \text{ sec}$) της ράβδου του παραδείγματος 5.2.1.

Πίνακας 5.2.3 Κινηματικά μεγέθη μιας χωρικής μεταβλητής για $x = 34,6 \text{ m}$, $t = 0,1353 \text{ sec}$ της ράβδου του παραδείγματος 5.2.1 (περίπτωση απλοποιημένου προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών).

$\theta'_x \text{ (rad}\times\text{m}^{-1}\text{)}$	$-9,532\times 10^{-2}$
$\theta''_x \text{ (rad}\times\text{m}^{-2}\text{)}$	$-2,411\times 10^{-3}$
$\theta'''_x \text{ (rad}\times\text{m}^{-3}\text{)}$	$5,254\times 10^{-4}$
$\ddot{\theta}'_x \text{ (rad}\times\text{m}^{-1}\times\text{sec}^{-2}\text{)}$	40,996

5.2.2 2^η αριθμητική εφαρμογή

Στο δεύτερο αριθμητικό παράδειγμα μελετήθηκαν οι ελεύθερες ταλαντώσεις μιας ράβδου μήκους $l = 4,0 \text{ m}$ με λεπτότοιχη διατομή μορφής διπλού Ταυ η οποία διακρίνεται στο σχήμα 5.2.8 (πάχη πελμάτων και κορμού $t_f = t_w = 0,01 \text{ m}$, συνολικό ύψος και συνολικό πλάτος $h = b = 0,20 \text{ m}$). Οι σταθερές του υλικού είναι οι $E = 2,1 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$, $G = 8,1 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$, $\rho = 8,002 \text{ kN sec}^2 / \text{m}^4$ ενώ τα αριθμητικά αποτελέσματα ελήφθησαν με χρήση 21 ισομηκών στοιχείων (κατά μήκος διακριτοποίηση) και 600 συνοριακών στοιχείων (διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής). Οι γεωμετρικές σταθερές που προέκυψαν από την ανάλυση της διατομής δίνονται στον πίνακα 5.2.4. Η ράβδος στηρίζεται στα δύο άκρα της με απλή στρεπτική στήριξη (διχαλωτή στήριξη που παρεμποδίζει πλήρως τη στρεπτική στροφή και απελευθερώνει πλήρως τη στρέβλωση) ενώ το αριστερό της άκρο είναι αξονικά αμετακίνητο και το δεξί της άκρο υπόκειται σε σταθερό ως προς το χρόνο αξονικό θλιπτικό φορτίο μεγέθους $\bar{N}(l,t) = -3000 \text{ kN}$ (η τιμή αντιστοιχεί σε μικρότερο φορτίο από το στρεπτικό φορτίο λυγισμού) (περίπτωση σταθερής κατά μήκος αξονικής φόρτισης, βλ. υποενότητα 3.2.7). Σχετικά με τις αρχικές συνθήκες της ελεύθερης ταλάντωσης, οι στρεπτικές μετακινήσεις και οι αξονικές ταχύτητες ελήφθησαν μηδενικές ($\bar{\theta}_{x0}(x) = 0$, $\dot{\bar{u}}_{m0}(x) = 0$) ενώ οι στρεπτικές ταχύτητες ελήφθησαν μη μηδενικές και σταθερές κατά μήκος της ράβδου ($\dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) = 50 \text{ rad} / \text{sec}$) ενώ οι αξονικές μετακινήσεις προσδιορίζονται μέσω του τύπου $\bar{u}_{m0}(x) = [\bar{N}(l,0) / (EA)] \cdot x$ προκειμένου να προσομοιωθεί η επιβολή του αξονικού φορτίου στο δεξί άκρο της ράβδου με στατικό και όχι δυναμικό - αιφνίδιο τρόπο. **Τόσο το απλοποιημένο όσο και το «πλήρες» πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών** (βλ. υποενότητες 3.2.6, 3.2.7) επιλύθηκαν αριθμητικά προκειμένου να ευρεθούν στο πεδίο του χρόνου όλοι οι εκάστοτε απαραίτητοι κινηματικοί άγνωστοι μιας χωρικής μεταβλητής (στα κομβικά σημεία της ράβδου) που απαιτούνται για να προσδιοριστεί το μετακινησιακό και τασικό πεδίο της ράβδου για την περίπτωση των μη γραμμικών ταλαντώσεων.

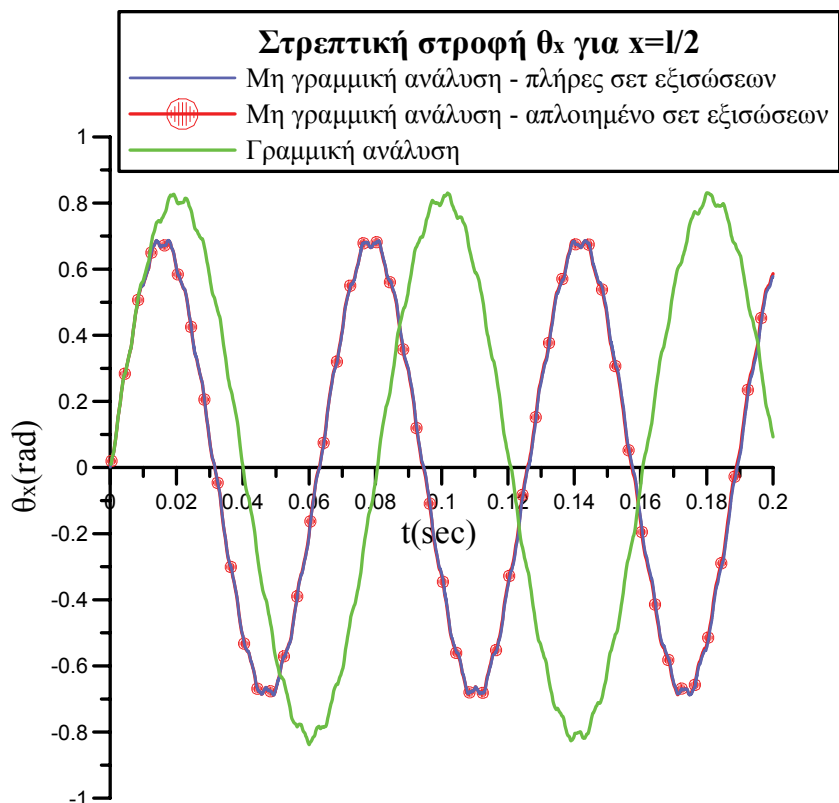


Σχήμα 5.2.8 Διατομή της ράβδου των παραδειγμάτων 5.2.2, 5.2.3.

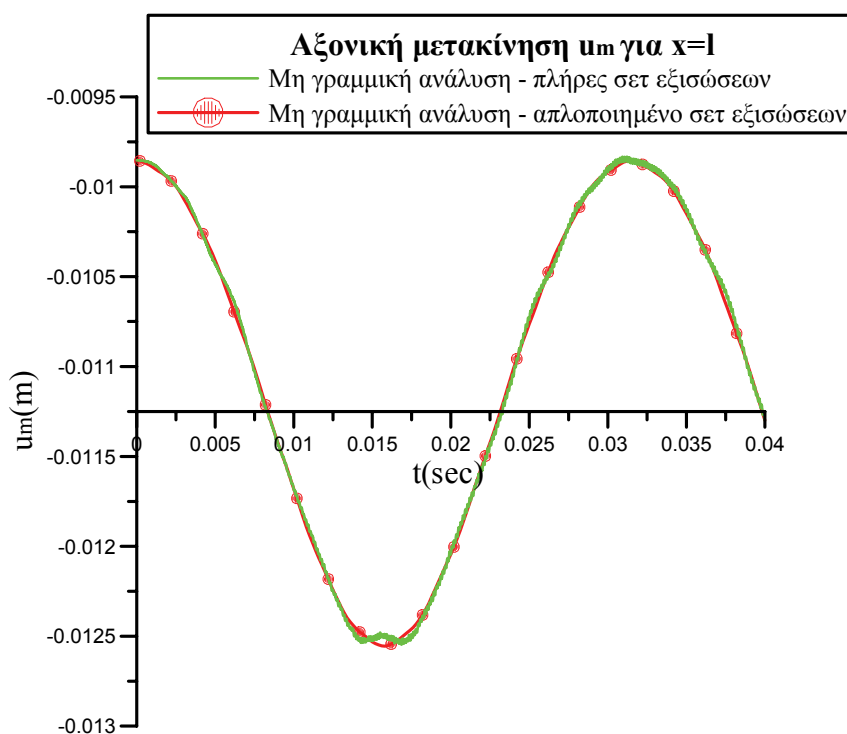
Πίνακας 5.2.4 Γεωμετρικές σταθερές διατομής της ράβδου των παραδειγμάτων 5.2.2, 5.2.3.

$A \text{ (m}^2\text{)}$	$5,800 \times 10^{-3}$
$I_P \text{ (m}^4\text{)}$	$5,434 \times 10^{-5}$
$I_{PP} \text{ (m}^6\text{)}$	$6,722 \times 10^{-7}$
$I_n \text{ (m}^6\text{)}$	$1,631 \times 10^{-7}$
$I_t \text{ (m}^4\text{)}$	$2,080 \times 10^{-7}$
$C_S \text{ (m}^6\text{)}$	$1,200 \times 10^{-7}$

Στα σχήματα 5.2.9, 5.2.10 παρουσιάζονται οι χρονοϊστορίες των στρεπτικών στροφών στο μέσο της ράβδου $\theta_x(l/2, t)$ καθώς και των αξονικών μετακινήσεων για το δεξί άκρο της ράβδου $u_m(l, t)$, για τα χρονικά διαστήματα $0, 0 \leq t \leq 0,20 \text{ (sec)}$, $0, 0 \leq t \leq 0,04 \text{ (sec)}$ αντίστοιχα, για τις δύο προαναφερθέντες περιπτώσεις μη γραμμικής ανάλυσης, καθώς επίσης και για την περίπτωση των γραμμικών ταλαντώσεων. Τόσο η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας (μείωση της θεμελιώδους ιδιοπεριόδου, αύξηση της στρεπτικής δυσκαμψίας της ράβδου, πρόκληση αξονικών μετακινήσεων από τις στρεπτικές παραμορφώσεις) όσο και η αμελητέα επιρροή της αξονικής αδράνειας (όρος $\rho A \cdot \ddot{u}_m$ στο πλήρες πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών) είναι εμφανείς τουλάχιστον για τα εξεταζόμενα μεγέθη.

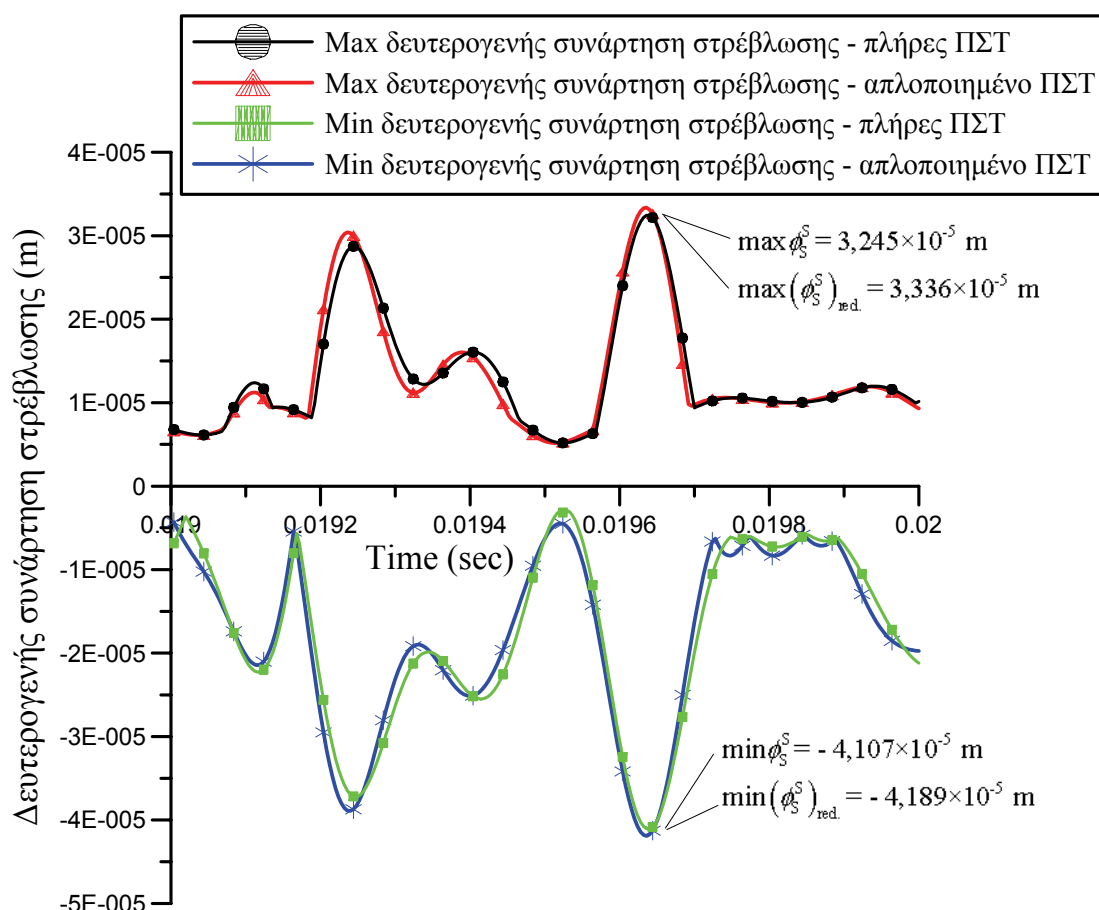


Σχήμα 5.2.9 Χρονοϊστορίες των στρεπτικών στροφών $\theta_x(l/2, t)$ στο μέσο της ράβδου του παραδείγματος 5.2.2 για $0, 0 \leq t \leq 0,20$ (sec) και τρεις περιπτώσεις ανάλυσης.

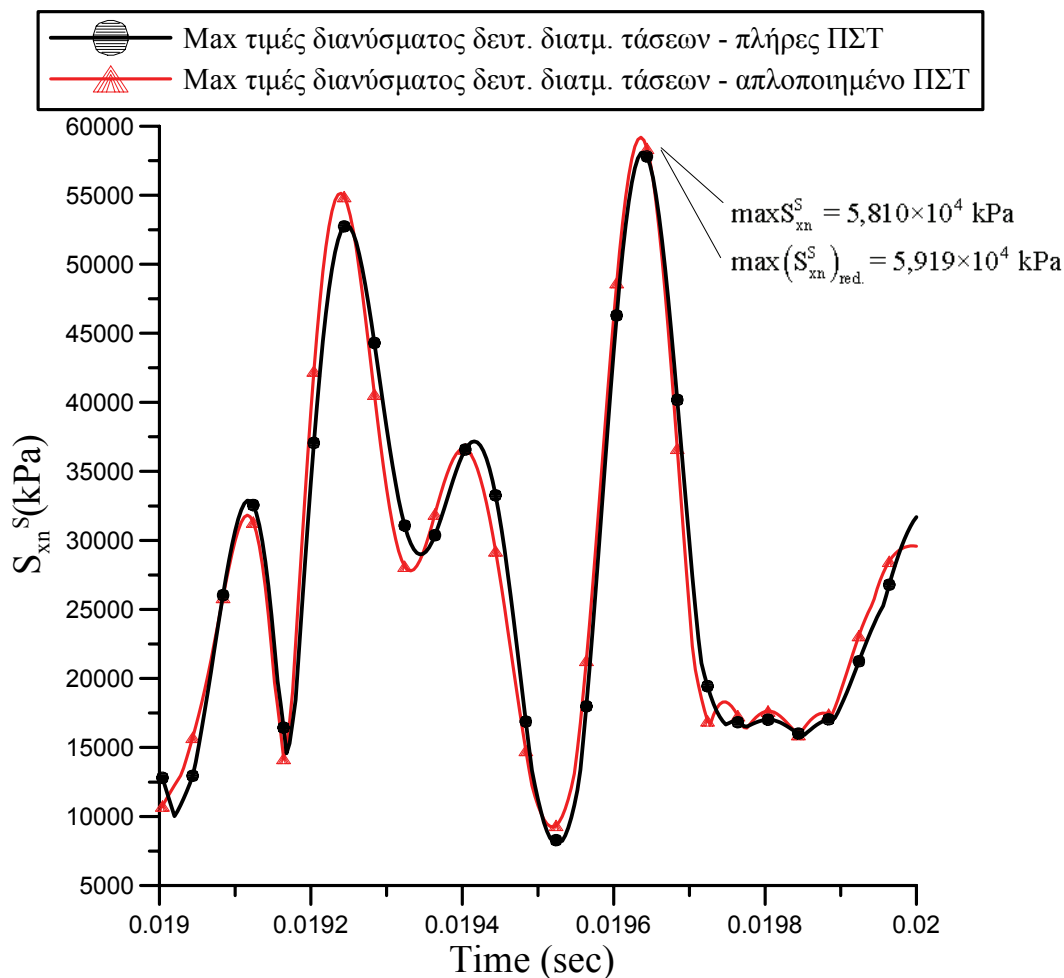


Σχήμα 5.2.10 Χρονοϊστορίες των αξονικών μετακινήσεων $u_m(l, t)$ στο δεξί άκρο της ράβδου του παραδείγματος 5.2.2 για $0, 0 \leq t \leq 0,04$ (sec) και δύο περιπτώσεις ανάλυσης.

Προκειμένου να διερευνηθεί περαιτέρω η επιρροή της αξονικής αδράνειας, στα σχήματα 5.2.11, 5.2.12 παρουσιάζονται οι χρονοϊστορίες των ακρότατων τιμών των δευτερογενών συναρτήσεων στρέβλωσης ϕ_S^S (επίλυση του πλήρους προβλήματος συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) (3.2.25)), $(\phi_S^S)_{red.}$ (επίλυση του απλοποιημένου προβλήματος συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) (3.2.67)) καθώς και οι χρονοϊστορίες των μέγιστων τιμών των διανυσμάτων δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_{xn}^S , $(S_{xn}^S)_{red.}$ αντίστοιχα, για μια συγκεκριμένη διατομή ($x = 1,05m$) και ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ($0,019 \leq t \leq 0,020(sec)$). Παρατηρούμε ότι η επιρροή της αξονικής αδράνειας στα εν λόγω μεγέθη είναι εν γένει μικρή ενώ είναι εμφανέστερη κοντά στις θέσεις τοπικών ακρότατων των χρονοϊστοριών. Μπορούμε συνολικά να σχολιάσουμε ότι η αναπτυχθείσα μέθοδος εμφανίζεται κι εδώ πολύ αποδοτική αφού μπορεί να ληφθούν υπόψιν όλοι οι όροι των εξισώσεων ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου συμπεριλαμβανομένου και αυτού της αξονικής αδράνειας ενώ δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα στην αντιμετώπιση ταλαντώσεων στις οποίες συμμετέχουν πολλές ιδιομορφές ταλάντωσης (στο παράδειγμα που εξετάστηκε, η σταθερή κατανομή κατά μήκος της ράβδου αρχικών στρεπτικών ταχυτήτων που χρησιμοποιήθηκε οδηγεί πρακτικά σε ταλάντωση με συμμετοχή πολλών ιδιομορφών).



Σχήμα 5.2.11 Χρονοϊστορίες των ακρότατων τιμών των δευτερογενών συναρτήσεων στρέβλωσης ϕ_S^S και $(\phi_S^S)_{red.}$ στη διατομή με $x = 1,05m$ της ράβδου του παραδείγματος 5.2.2



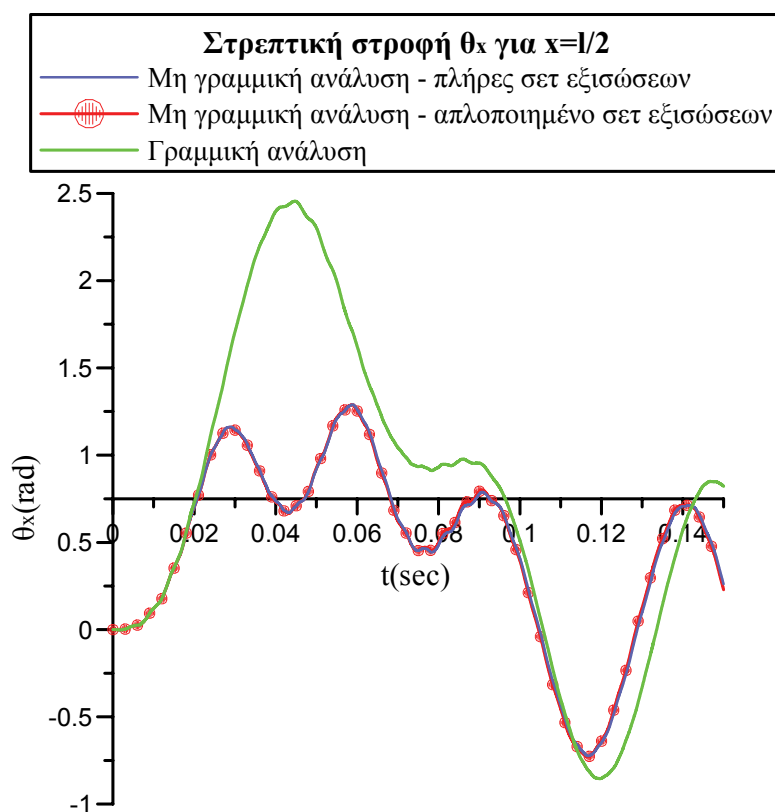
Σχήμα 5.2.12 Χρονοϊστορίες των μέγιστων τιμών των διανυσμάτων δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_{xn}^S , $(S_{xn}^S)_{red.}$ στη διατομή με $x=1,05m$ της ράβδου του παραδείγματος 5.2.2

5.2.3 3^η αριθμητική εφαρμογή

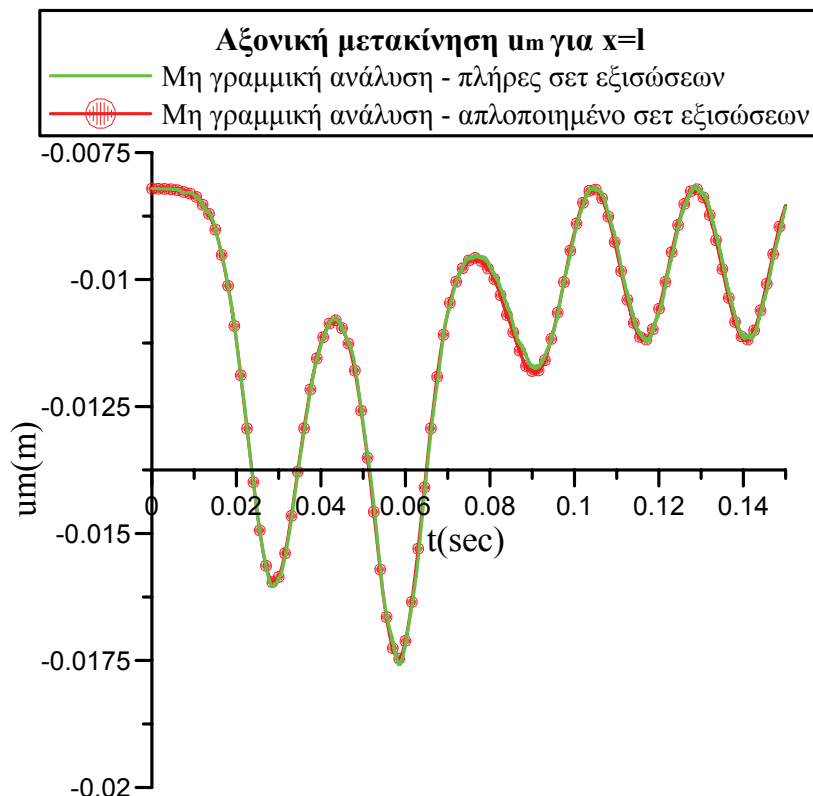
Στο τρίτο και τελευταίο αριθμητικό παράδειγμα μελετήθηκαν οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μιας ράβδου μήκους $l=4,0m$ με λεπτότοιχη διατομή μορφής διπλού Ταυ η οποία διακρίνεται στο σχήμα 5.2.8 (πάχη κορμού και πελμάτων $t_f = t_w = 0,01m$, συνολικό ύψος και συνολικό πλάτος $h = b = 0,20m$). Οι σταθερές του υλικού είναι οι $E = 2,1 \times 10^8 \text{ kN} / m^2$, $G = 8,1 \times 10^7 \text{ kN} / m^2$, $\rho = 8,002 \text{ kN} \text{ sec}^2 / m^4$ ενώ τα αριθμητικά αποτελέσματα ελήφθησαν με χρήση 21 ισομηκών στοιχείων (κατά μήκος διακριτοποίηση) και 600 συνοριακών στοιχείων (διακριτοποίηση του συνόρου της διατομής). Οι γεωμετρικές σταθερές που προέκυψαν από την ανάλυση της διατομής δίνονται στον πίνακα 5.2.4. Η ράβδος στηρίζεται στα δύο άκρα της με απλή στρεπτική στήριξη (διχαλωτή στήριξη που παρεμποδίζει πλήρως τη στρεπτική στροφή και απελευθερώνει πλήρως τη στρέβλωση) ενώ το αριστερό της άκρο είναι αξονικά αμετακίνητο και το δεξιά της άκρο υπόκειται σε σταθερό ως προς το χρόνο αξονικό θλιπτικό φορτίο μεγέθους

$\bar{N}(l,t) = -2500kN$ (η τιμή αντιστοιχεί σε μικρότερο φορτίο από το στρεπτικό φορτίο λυγισμού) (περίπτωση σταθερής κατά μήκος αξονικής φόρτισης, βλ. υποενότητα 3.2.7). Η εξαναγκασμένη ταλάντωση προκύπτει από την επιβολή ενός συγκεντρωμένου στρεπτικού φορτίου σταθερής αριθμητικής τιμής $M_t = 20,0kNm$ που κινείται κατά μήκος της ράβδου με σταθερή ταχύτητα $v = 40m/sec$. Για $t = 0$, το φορτίο βρίσκεται στο αριστερά άκρο της ράβδου και εύκολα βρίσκουμε ότι κινείται κατά μήκος της ράβδου στο χρονικό διάστημα $0,0 \leq t \leq 0,10(sec)$ ενώ για $t > 0,10(sec)$ η ράβδος εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις. Όλες οι αρχικές συνθήκες ελήφθησαν μηδενικές εκτός από τις αρχικές αξονικές μετακινήσεις για τις οποίες θεωρήσαμε ότι $\bar{u}_{m0}(x) = [\bar{N}(l,0)/(EA)] \cdot x$ προκειμένου να προσομοιωθεί η επιβολή του αξονικού φορτίου στο δεξί άκρο της ράβδου με στατικό και όχι δυναμικό - αιφνίδιο τρόπο. **Τόσο το απλοποιημένο όσο και το «πλήρες» πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών** (βλ. υποενότητες 3.2.6, 3.2.7) επιλύθηκαν αριθμητικά.

Στα σχήματα 5.2.13, 5.2.14 παρουσιάζονται οι ιστορίες των στρεπτικών στροφών στο μέσο της ράβδου $\theta_x(l/2,t)$ καθώς και των αξονικών μετακινήσεων για το δεξί άκρο της ράβδου $u_m(l,t)$, για το χρονικό διάστημα $0,0 \leq t \leq 0,15(sec)$, για τις δύο προαναφερθέντες περιπτώσεις μη γραμμικής ανάλυσης, καθώς επίσης και για την περίπτωση των γραμμικών ταλαντώσεων. Τα συμπεράσματα που ήδη έχουν εξαχθεί από τα αντίστοιχα σχήματα της δεύτερης αριθμητικής εφαρμογής επαληθεύονται κι εδώ.



Σχήμα 5.2.13 Χρονοϊστορίες των στρεπτικών στροφών $\theta_x(l/2,t)$ στο μέσο της ράβδου του παραδείγματος 5.2.3 για $0,0 \leq t \leq 0,15(sec)$ και τρεις περιπτώσεις ανάλυσης.



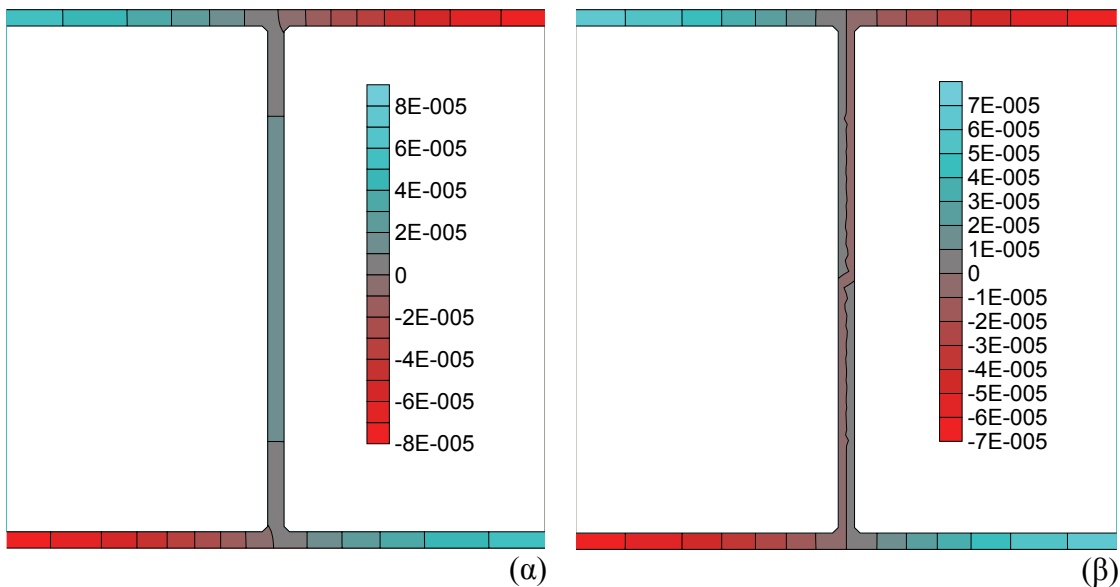
Σχήμα 5.2.14 Χρονοϊστορίες των αξονικών μετακινήσεων $u_m(l,t)$ στο δεξι άκρο της ράβδου του παραδείγματος 5.2.2 για $0,0 \leq t \leq 0,15$ (sec) και δύο περιπτώσεις ανάλυσης.

Για την περίπτωση του πλήρους προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών, οι τιμές όλων των κινηματικών μεγεθών που απαιτούνται για τον προσδιορισμό του τασικού και μετακινησιακού πεδίου της ράβδου παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2.5 για μια διατομή ελαφρώς αριστερά από το μέσο της ράβδου ($x = 1,9m$) και για τη χρονική στιγμή $t = 0,0588sec$ κατά την οποία η στρεπτική στρόφιξη στο μέσο της ράβδου $\theta_x(l/2,t)$ γίνεται μέγιστη ($max\theta_x(l/2,t) = 1,181rad$) στο χρονικό διάστημα $0,0 \leq t \leq 0,15$ (sec). Με βάση τα αποτελέσματα του πίνακα 5.2.5, τα προβλήματα συνοριακών τιμών (3.2.25) και (3.2.26) επιλύθηκαν ώστε να ληφθούν αντίστοιχα η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^S και το γραμμικό μέρος της (ϕ_{Slin}^S) οι οποίες παρουσιάζονται στο σχήμα 5.2.15. Για άλλη μια φορά παρατηρούμε ότι και οι δύο συναρτήσεις παρουσιάζουν σημειακή συμμετρία ως προς το κέντρο στρέψης S ενώ η ϕ_{Slin}^S και μόνο αυτή είναι επιπλέον και αντισυμμετρική στις περιοχές των πελμάτων (καθώς επίσης και ως προς τον άξονα S_y). Επισημαίνουμε επίσης ότι η ϕ_S^S είναι σε όλη την περιοχή του κορμού αυστηρά θετική σε αντίθεση με τη ϕ_{Slin}^S . Στο σχήμα 5.2.16 οι διανομές των διανυσμάτων των διαμηθικών τάσεων λόγω στρέβλωσης S_{xn}^S , S_{xnlin}^S παρουσιάζονται (για $x = 1,9m$, $t = 0,0588sec$) καταδεικνύοντας τη σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ τους τουλάχιστον στην περιοχή του κορμού. Κάποιες ελαφριές διαφοροποιήσεις είναι εμφανείς και κοντά

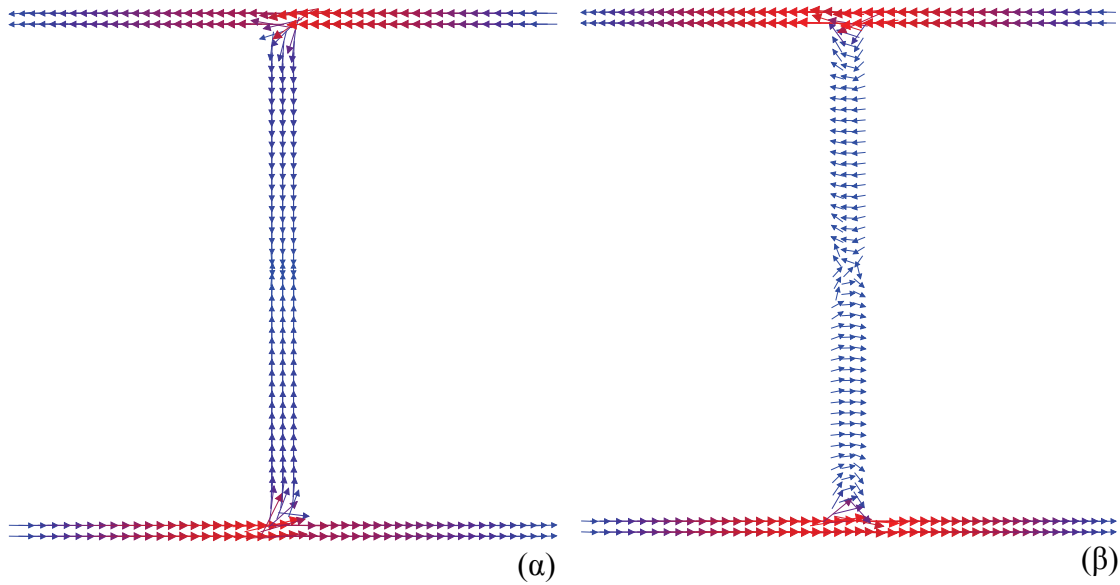
στις θέσεις συναρμογής πελμάτων - κορμού. Στο σχήμα 5.2.17 η διακύμανση των ίδιων ποσοτήτων S_{xn}^S , S_{xnlin}^S παρουσιάζονται (για $x = 1,9m$, $t = 0,0588 sec$) όπου παρατηρούνται οι μεγαλύτερες τιμές του S_{xn}^S συγκριτικά με το γραμμικό μέρος του (S_{xnlin}^S).

Πίνακας 5.2.5 Κινηματικά μεγέθη μίας χωρικής μεταβλητής για $x = 1,9m$, $t = 0,0588 sec$ της ράβδου του παραδείγματος 5.2.3 (περίπτωση πλήρους προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών).

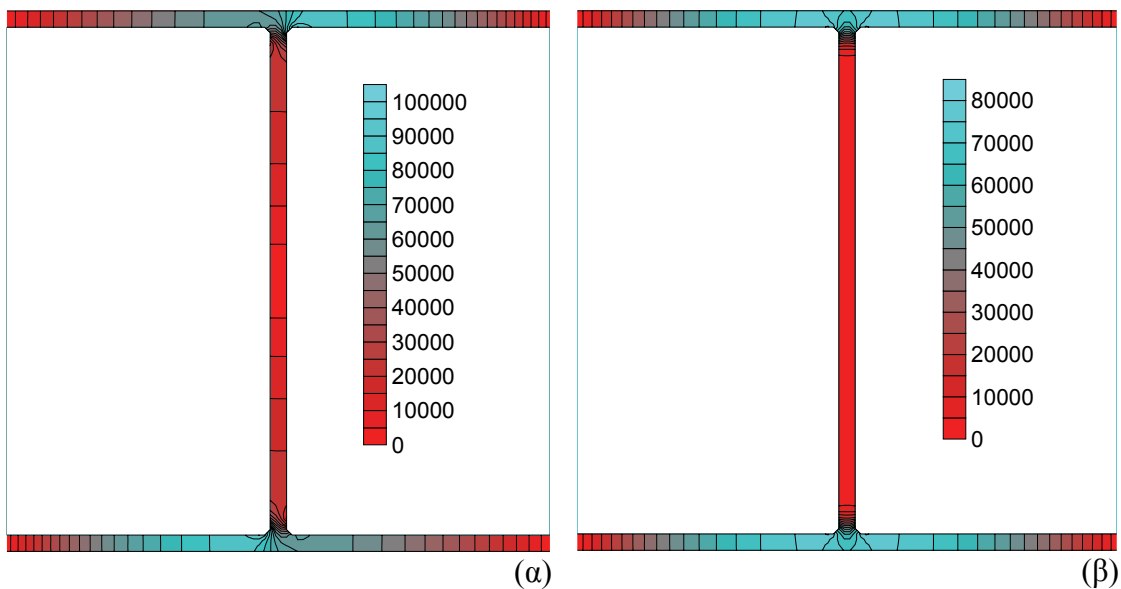
u_m'' (m ⁻¹)	$1,199 \times 10^{-3}$
\ddot{u}_m (m×sec ⁻²)	$-1,530 \times 10^4$
θ_x' (rad×m ⁻¹)	0,237
θ_x'' (rad×m ⁻²)	-0,803
θ_x''' (rad×m ⁻³)	-0,842
$\ddot{\theta}_x'$ (rad×m ⁻¹ ×sec ⁻²)	$-1,585 \times 10^6$



Σχήμα 5.2.15 Διακύμανση της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_S^S (α) και του γραμμικού μέρους της, ϕ_{Slin}^S (β), στη διατομή με $x = 1,9m$ ($t = 0,0588 sec$) της ράβδου του παραδείγματος 5.2.3.



Σχήμα 5.2.16 Διανομές των διανυσμάτων δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_{xn}^S (α) και S_{xn}^{lin} (β) στη διατομή με $x = 1,9m$ ($t = 0,0588 sec$) της ράβδου του παραδείγματος 5.2.3.



Σχήμα 5.2.17 Διακόμανση των διανυσμάτων δευτερογενών διατμητικών τάσεων S_{xn}^S (α) και S_{xn}^{lin} (β) στη διατομή με $x = 1,9m$ ($t = 0,0588 sec$) της ράβδου του παραδείγματος 5.2.3.

Τέλος, προκειμένου να διερευνηθεί η σημασία των δευτερογενών διατμητικών τάσεων και της στρέβλωσης που οφείλεται στην ανομοιόμορφη στρέψη (τα συγκεκριμένα μεγέθη «εκφράζονται» μέσω της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης) συγκριτικά με τα υπόλοιπα τασικά και μετακινησιακά μεγέθη που καταπονούν τη ράβδο, στον πίνακα 5.2.6 παρουσιάζονται οι ακρότατες τιμές διάφορων κινηματικών και τασικών μεγεθών (για $x = 1,9m$, $t = 0,0588 sec$). Επισημαίνουμε ότι οι διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης προσλαμβάνουν σημαντικές τιμές και εν γένει δεν μπορούν να αγνοηθούν στο εξεταζόμενο

παράδειγμα των μη γραμμικών στρεπτικών ταλαντώσεων. Σχετικά με την αποδοτικότητα της προτεινόμενης μεθόδου, σημειώνουμε ότι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις που προκαλούνται ακόμα και από σύνθετες (με συμμετοχή πολλών ιδιομορφών) εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες.

Πίνακας 5.2.6 Ακρότατες τιμές διάφορων κινηματικών και τασικών μεγεθών ($x = 1,9\text{ m}$, $t = 0,0588\text{ sec}$) της ράβδου του παραδείγματος 5.2.3.

$\max\theta'_x\phi_S^P$ (m)	$2,344\times 10^{-3}$
$\min\theta'_x\phi_S^P$ (m)	$-2,344\times 10^{-3}$
$\max\phi_S^S$ (m)	$5,330\times 10^{-5}$
$\min\phi_S^S$ (m)	$-7,338\times 10^{-5}$
$\max\phi_{S\text{lin}}^S$ (m)	$6,823\times 10^{-5}$
$\min\phi_{S\text{lin}}^S$ (m)	$-6,823\times 10^{-5}$
$\max S_{xn}^S$ (MPa)	96,971
$\max S_{xn\text{lin}}^S$ (MPa)	81,106
$\max S_{xn}^P$ (MPa)	191,346
$\max S_{xn}$ (MPa)	244,468

5.3 Συμπεράσματα

Τα κύρια συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τις αριθμητικές εφαρμογές που μελετήθηκαν είναι τα εξής:

1. Η αριθμητική τεχνική που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία είναι αποδοτική για την ανάλυση με H/Y ομογενών ράβδων με σταθερή διατομή διπλής συμμετρίας που υπόκεινται σε τυχούσες, συνδυασμένες, συντηρητικές και χρονικά εξαρτώμενες αξονικές ή και στρεπτικές δράσεις και που υποστηρίζονται από τις πλέον γενικές αξονικές και στρεπτικές συνοριακές συνθήκες.
2. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα (μεγάλες στρεπτικές στροφές) οδηγεί σε πεπλεγμένες αξονικές και στρεπτικές εξισώσεις ισορροπίας οι οποίες αναπόφευχτα θα πρέπει να εξεταστούν ταυτοχρόνως για να πραγματοποιηθεί αξιόπιστη δυναμική ανάλυση της ράβδου.
3. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα οδηγεί στην αύξηση της στρεπτικής δυσκαμψίας της ράβδου και τελικά σε μείωση της θεμελιώδους ιδιοπεριόδου ταλάντωσης.
4. Οι μεγάλες στρεπτικές στροφές, η δυναμική επιβολή της φόρτισης και οι αξονικές συνοριακές συνθήκες επηρεάζουν τόσο τη διανομή όσο και το μέγεθος των διατμητικών τάσεων λόγω στρέβλωσης που προκαλούνται από τις στρεπτικές παραμορφώσεις της ράβδου.
5. Τουλάχιστον για τα παραδείγματα που εξετάστηκαν, η επιρροή της αξονικής αδράνειας στις στρεβλωτικές μετακινήσεις και τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις είναι χρονικά εξαρτώμενη αλλά γενικά προκύπτει μικρή.

6. Οι διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης δεν πρέπει να αγνοούνται στις μη γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδων.
7. Η αναπτυχθείσα μεθοδολογία διατηρεί τα πλεονεκτήματα της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων συγκριτικά με άλλες μεθόδους πεδιακής διακριτοποίησης μιας και απαιτεί αποκλειστικά συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής της ράβδου.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

❖ Έλληνες συγγραφείς :

1. **Κατσοκαδέλης Ι.Θ.** (1999), “Συνοριακά Στοιχεία στην Επιστήμη του Μηχανικού - Θεωρία & Εφαρμογές”, *Εκδόσεις Συμμεών, Αθήνα*.
2. **Μώκος, Β. Γ.** (2007), “Συμβολή στη Γενικευμένη Θεωρία Σύνθετων Ραβδωτών Φορέων με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων”, *Διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π., Αθήνα*.
3. **Παπαδρακάκης, Μ.** (1998), “Μη Γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία”, *Ε.Μ.Π., Αθήνα*.
4. **Τσίππρας Β.** (2007), “Μη Γραμμική Ελαστοπλαστική Ομοιόμορφη Στρέψη Πρισματικής Δοκού με τη Βοήθεια της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων”, *Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα*.

❖ Ξένοι συγγραφείς :

5. **Aimi A., Diligenti M.** (2008), “Numerical integration schemes for Petrov-Galerkin infinite BEM”, *Applied Numerical Mathematics*, 58, 1084-1102.
6. **Armenakas A.E.** (2006), “Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity”, *CRC Press, Florence*.
7. **Attard M.M.** (1986α), “Nonlinear theory of non-uniform torsion of thin-walled open beams”, *Thin-walled structures*, 4, 101-134.
8. **Attard M.M.** (1986β), “Nonlinear shortening and bending effect under pure torque of thin-walled open beams”, *Thin-walled structures*, 4, 165-177.
9. **Baba S., Kajita T.** (1982), “Plastic analysis of torsion of a prismatic beam”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 18, 927-944.
10. **Bathe K.-J.** (1996), “Finite element procedures”, *Prentice Hall*.
11. **Bazant Z.P., Cedolin L.** (1991), “Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories”, *Oxford University Press, New York*.
12. **Benscoter S.** (1954), “A theory of torsion bending for multicell beams”, *Journal of Applied Mechanics*, 21(1), 25-34.
13. **Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R.** (1989), “Numerical Solution of Initial-value Problems in Differential-Algebraic Equations”, *North-Holland, Amsterdam*.
14. **Chen G., Trahair N. S.** (1992), “Inelastic nonuniform torsion of steel I-beams”, *Journal of Constructional Steel Research*, 23, 189-207.
15. **Coulomb C.A.** (1784), “Recherches theoriques et experimentales sur la force de torsion, et sur l’elasticite des files de metal”, *Mémoires de l’Academie Royal des Sciences*, 229-269.
16. **Cullimore M. S. G.** (1949), “The shortening effect: a nonlinear feature of pure torsion”, *Research, Engineering Structures Supplement*, 153.
17. **Davì F.** (1992), “The theory of Kirchhoff rods as an exact consequence of three-dimensional elasticity”, *Journal of Elasticity*, 29(3), 243-262.
18. **European Committee for Standardisation (CEN)** (2003) “Eurocode 3: Design of Steel Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings”.

19. **Fatmi R. El** (2007), “Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part I: A general beam theory”, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 5912–5929.
20. **Gere J.M.** (1954), “Torsional vibrations of beams of thin-walled open section”, *Journal of Applied Mechanics*, 21, 381-387.
21. **Green A.E., Laws N., Naghdi P.M.** (1967), “A linear theory of straight elastic rods”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 25 (4), 285-298.
22. **Pedersen P.T.** (1991), “Beam theories for torsional-bending response of ship hulls”, *Journal of Ship Research*, 35(3), 254-265.
23. **Kappus R.** (1937), “Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich”, *Luftfahrtforschung*, 14, 444–457.
24. **Katsikadelis J.T.** (2002), “The analog equation method. A boundary-only integral equation method for nonlinear static and dynamic problems in general bodies”, *Theoretical and Applied Mechanics*, 27, 13-38.
25. **Ladevèze P., Simmonds J.** (1998), “New concepts for linear beam theory with arbitrary geometry and loading”, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 17(3), 377-402.
26. **Lutz E., Wenjing Y., Mukherjee S.** (1998), “Elimination of rigid body modes from discretized boundary integral equations”, *International Journal of Solids and Structures*, 35, 4427-4436.
27. **Machado S.P., Cortinez V.H.** (2007), “Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations”, *Engineering Structures*, 29, 372-382.
28. **Marguerre K.** (1940), “Torsion von Voll- und Hohlquerschnitten”, *Der Bauingenieur*, 21(41/42), 317–322.
29. **Novozhilov V.V** (1953), “Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity”, *NY. Graylock Press, Rochester*.
30. **Pai P.F., Nayfeh A.H.** (1994), “A fully nonlinear theory of curved and twisted composite rotor blades accounting for warpings and three-dimensional stress effects”, *International Journal of Solids and Structures*, 31, 1309-1340.
31. **Parker D.F.** (1984), “On the derivation of nonlinear rod theories from three-dimensional elasticity”, *ZAMP Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 35(6), 833-847.
32. **Rozmarynowski B., Szymczak C.** (1984), “Non-linear free torsional vibrations of thin-walled beams with bisymmetric cross-section”, *Journal of Sound and Vibration*, 97, 45-152.
33. **Saint-Venant, B.** (1855), “Memoire sur la torsion des prismes”, *Memoires des Savants Etrangers*, 14, 233-560.
34. **Sapountzakis E.J.** (2000), “Solution of Nonuniform Torsion of Bars by an Integral Equation Method”, *International Journal Computers and Structures*, 77, 659-667.
35. **Sapountzakis E.J.** (2005), “Torsional vibrations of composite bars by BEM”, *Computers and Structures*, 70, 229-239.
36. **Sapountzakis E.J. and Katsikadelis J.T.** (2000), “Analysis of Plates Reinforced with Beams”, *Computational Mechanics*, 26, 66-74.
37. **Sapountzakis E.J., Mokos V.G.** (2003), “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion by BEM”, *Computational Mechanics*, 30(2), 131-142.

38. **Sapountzakis E.J., Mokos V.G.** (2004), “Nonuniform torsion of bars of variable cross section”, *Computers and Structures*, 82, 703-715.
39. **Sapountzakis E.J., Mokos V.G.** (2006), “Dynamic analysis of 3-D beam elements including warping and shear deformation effects”, *International Journal of Solids and Structures*, 43(22-23), 6707-6726.
40. **Schulz M., Filippou F.C.** (1998), “Generalized Warping Torsion Formulation”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 124(3), 339–347.
41. **Strese H.** (1984), “Remarks concerning the boundary element method in potential theory”, *Applied Mathematical Modelling*, 8, 40-44.
42. **Timoshenko S., Goodier J.** (1951), “Theory of Elasticity”, *McGraw-Hill Book Comp, New York/ Toronto/ London*.
43. **Trahair N.S., Pi Y.L.** (1995), “Inelastic torsion of steel I-beams”, *Journal of structural engineering*, 609-619.
44. **Vlasov V.** (1963), “Thin-walled elastic beams”, *Israel Program for Scientific Translations*.
45. **Wagner H.** (1929), “Verdrehung und Knickung von offenen Profilen”, *Festschrift 25 Jahre Technische Hochschule Danzig*.
46. **Washizu K.** (1975), “Variational methods in elasticity and plasticity”, *Pergamon Press, Oxford*.
47. **Weber C.** (1921), “Die Lehre der Drehungsfestigkeit”, *Forscharb IngWes.*, 249, 60-62.