



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΠΡΙΣΜΑΤΙΚΗΣ
ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ
ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΣΙΠΗΡΑ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :

ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ Ε. Επίκουρος καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2007

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος – Ιστορική αναδρομή	1
Κεφάλαιο 1: Ορισμοί βασικών μεγεθών.....	5
1.1 Θεωρία παραμορφώσεων.....	6
1.1.1 Ορισμός μετατοπίσεων	6
1.1.2 Ορισμός παραμορφώσεων	7
1.1.2.1 Μεταβολή μήκους απειροστού στοιχείου.....	8
1.1.2.2 Μεταβολή κατεύθυνσης απειροστού στοιχείου.....	11
1.1.2.3 Μεταβολή όγκου απειροστού στοιχείου.....	14
1.1.2.4 Μεταβολή επιφάνειας απειροστού στοιχείου.....	14
1.1.2.5 Ορισμός του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων.....	15
1.2 Θεωρία τάσεων.....	17
1.2.1 Ορισμός διανύσματος τάσεων.....	17
1.2.2 Ορισμός τανυστή τάσεως Cauchy.....	18
1.2.3 Εξισώσεις ισορροπίας.....	19
1.2.4 Ορισμός του πρώτου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff.....	21
1.2.5 Η αρχή δυνατών έργων.....	23
1.2.6 Ορισμός του δεύτερου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff.....	25
1.2.7 Φυσική σημασία των τανυστών τάσεων.....	27
1.2.8 Τανυστής τάσεων Cauchy μικρών μετατοπίσεων	28
Κεφάλαιο 2: Καταστατικοί νόμοι υλικών	29
2.1 Ανάγκη θεώρησης καταστατικών νόμων για τα υλικά.....	30
2.2 Θεωρία ελαστικότητας.....	31
2.3 Θεωρία πλαστικότητας.....	35
2.3.1 Γενικά.....	35
2.3.2 Ολοκλήρωση προσauξητικών σχέσεων τάσεων – τροπών.....	41
2.3.2.1 Η μέθοδος της εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler (forward Euler).....	44
2.3.2.2 Η μέθοδος της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler (backward Euler).....	46

2.3.2.3 Η μέθοδος του τραπεζίου και η μέθοδος του ενδιάμεσου σημείου (Generalized trapezoidal and generalized midpoint rule)	50
2.3.2.4 Η μέθοδος generalized cutting – plane.....	51
2.3.3 Ελαστοπλαστική θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων – μικρών παραμορφώσεων.....	53
Κεφάλαιο 3: Θεωρία στρέψης.....	54
3.1 Γενικά.....	59
3.2 Θεωρία ομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων	59
3.2.1 Παραδοχές θεωρίας.....	59
3.2.2 Πεδίο μετατοπίσεων.....	60
3.2.3 Πεδίο παραμορφώσεων.....	62
3.2.4 Πεδίο τάσεων.....	64
3.2.5 Προσδιορισμός της συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_M^P - διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας.....	66
3.2.6 Προσδιορισμός των παραγώγων της γωνίας στροφής και της αξονικής βράχυνσης θ' , u'_s - Εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου	70
3.2.7 Προσαυξητικός – επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης του ελαστοπλαστικού προβλήματος μεγάλων μετατοπίσεων.....	84
Κεφάλαιο 4: Αριθμητική επίλυση του προβλήματος της στρέψης....	91
4.1.1 Υπολογισμός της συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_M^P	92
4.1.2 Υπολογισμός των μεγεθών A , I_P , I_{PP} , I_t , W , S_N , S_{M_t}	105
Κεφάλαιο 5: Αριθμητικές εφαρμογές – Συμπεράσματα	107
5.1 Εισαγωγή	108
5.2 Αριθμητικές εφαρμογές – Συμπεράσματα.....	108
5.2.1 Λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή από ελαστικό υλικό.....	108
5.2.2 Τετραγωνική διατομή από ελαστοπλαστικό υλικό.....	111
5.2.3 Ορθογωνική διατομή από ελαστοπλαστικό υλικό.....	113
5.2.4 Διατομή διπλού T από ελαστοπλαστικό υλικό.....	114

Βιβλιογραφία.....	119
--------------------------	------------

A horizontal scroll with a light brown, textured background. The scroll is unrolled in the center, with the ends rolled up. The Greek word ΠΡΟΛΟΓΟΣ is written across the center of the scroll in a stylized, orange-red font with black outlines. The scroll is set against a white background within a black rectangular border.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πρόλογος – Ιστορική αναδρομή

Η ανάλυση του προβλήματος της στρέψης έχει απασχολήσει από πολύ παλιά ερευνητές και μηχανικούς λόγω των πολλών πρακτικών εφαρμογών που παρουσιάζονται σε πολλούς κλάδους όπως η αεροναυπηγική, η μηχανολογία και οι κατασκευές πολιτικού μηχανικού. Πρώτος ο Coulomb (1784) έδωσε από πολύ νωρίς μια πρώτη λύση γνωστή και ως τεχνική θεωρία στρέψης η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι οι διατομές της ράβδου στρέφονται σαν επίπεδοι στερεοί δίσκοι. Κάτι τέτοιο δεν επαληθεύεται από τα πειραματικά αποτελέσματα για ράβδους τυχούσας διατομής και μπορεί να εφαρμοστεί με αξιοπιστία μονάχα σε κυκλικές ή δακτυλιοειδείς διατομές. Η επίλυση του προβλήματος για τυχούσα διατομή έγινε για πρώτη φορά από τον St. Venant (1855) ο οποίος κατέστρωσε με μαθηματική ακρίβεια το πρόβλημα των συνοριακών τιμών με το οποίο προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις αλλά και η κατανομή των διατμητικών τάσεων στη ράβδο.

Ο St. Venant ασχολήθηκε αποκλειστικά με ευθύγραμμες πρισματικές ράβδους, με την απλούστερη δυνατή στρεπτική φόρτιση δηλαδή δύο ίσες και αντίθετες συγκεντρωμένες στρεπτικές ροπές στα άκρα της ράβδου, και την απλούστερη καταστατική σχέση υλικού δηλαδή τη γραμμική ελαστικότητα με θεώρηση μικρών μετατοπίσεων (και παραμορφώσεων). Η θεωρία του προβλέπει ότι η διατομή στρεβλώνει χωρίς ωστόσο να παραμορφώνεται εντός του επιπέδου της. Συνεπώς, η θεωρία ισχύει μονάχα στην περίπτωση που δεν επιβάλλεται κανένας περιορισμός στη στρέβλωση της διατομής. Η συγκεκριμένη στρεπτική φόρτιση σε συνδυασμό με την μη παρεμπόδιση της στρέβλωσης οδηγούν σε σταθερή μεταβολή της γωνίας στροφής κατά μήκος της ράβδου και η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη. Σε περίπτωση παρεμπόδισης της στρέβλωσης ή/ και μεταβολής της στρεπτικής έντασης κατά μήκος της δοκού η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ανομοιόμορφη.

Στην περίπτωση της ομοιόμορφης στρέψης -που εξέτασε ο St. Venant- η ράβδος καταπονείται αποκλειστικά από διατμητικές τάσεις ανεξαρτήτως από τον άξονα ως προς τον οποίο περιστρέφεται η δοκός. Η γνώση του άξονα περιστροφής αποκτά μεγάλη σημασία στην περίπτωση της ανομοιόμορφης στρέψης όπου αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένας μοναδικός προνομιακός άξονας, η στροφή περί τον οποίο προκαλεί καθαρή στρεπτική ένταση χωρίς να εισάγει στη δοκό αξονική ή καμπτική ένταση. Είναι προφανές ότι ο St. Venant δεν έδωσε απάντηση στο πρόβλημα της εύρεσης του κέντρου στρέψης δηλαδή του σημείου της διατομής από το οποίο διέρχεται ο άξονας αυτός.

Η ανάπτυξη της ελαστοπλαστικής θεωρίας και η παράλληλη κατανόηση ότι η δυνατότητα πολλών υλικών για ανακατανομή της έντασης οδηγεί σε οικονομικότερο και ασφαλέστερο σχεδιασμό, οδήγησε τους ερευνητές στη μελέτη της στρέψης ράβδων με ελαστοπλαστική συμπεριφορά. Πρώτος ο Nadai (1931) εφάρμοσε την οριακή ανάλυση της πλαστικότητας για να προσδιορίσει τη μέγιστη στρεπτική ροπή που μπορεί να αναλάβει μια δοκός με την υπόθεση γραμμικώς ελαστικού – ιδεατώς πλαστικού υλικού. Η μέθοδός του, γνωστή και ως “sand heap analogy”, διευρύνθηκε από τον Sadowsky (1941) για την περίπτωση διατομών με μία ή περισσότερες οπές.

Η αναλυτική επίλυση του προβλήματος της ελαστοπλαστικής στρέψης ιδεωδώς πλαστικών υλικών προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Sokolowsky (1946) ο οποίος παρουσίασε και την επίλυση ράβδου ελλειπτικής διατομής ενώ ο Nadai (1954) πρότεινε μια προσεγγιστική επίλυση βασιζόμενη στα “sand heap” και “membrane analogy”. Οι Smith & Sidebottom (1965) πρότειναν την αναλυτική επίλυση για

ορθογωνική διατομή ενώ διάφοροι ερευνητές όπως οι Itani, Johnson, Yamada et al., Mendelson(NASA) επέλυσαν αριθμητικά διάφορες διατομές και με διάφορους νόμους ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς.

Παράλληλα μελετήθηκε και το δυσκολότερο πρόβλημα της ανομοιομορφης στρέψης: Η έρευνα αναπτύχθηκε κυρίως γύρω από τη θεωρία λεπτότοιχων διατομών με την οποία παρακάμπτεται η ακριβής εύρεση της στρέβλωσης της διατομής και ο ακριβής προσδιορισμός της κατανομής των διατμητικών τάσεων, που διαφέρει πλέον από την κατανομή που προβλέπει η θεωρία του St. Venant. Οι Wagner (1936), Vlasov (1961), Timoshenko & Gere (1961) ασχολήθηκαν με το ελαστικό πρόβλημα, ενώ οι Rasajekaran (1977), Bathe & Wiener (1983), Gellin et al. (1983) μελέτησαν την ελαστοπλαστική καταστατική συμπεριφορά. Οι Boulton (1962) και Dinno & Merchant (1964) πρότειναν ένα κάτω και άνω όριο αντίστοιχα για την πλήρως πλαστική ροπή λεπτότοιχων διατομών υποβαλλόμενων σε στρέψη με παρεμπόδιση της στρέβλωσης. Οι May & Al-Shaarbaf (1989) προσέγγισαν με ένα τρισδιάστατο πεπερασμένο στοιχείο το πρόβλημα της ελαστοπλαστικής ανομοιομορφης στρέψης διατομών που δεν υπόκεινται στην παραδοχή των λεπτών τοιχωμάτων, ενώ οι Sarountzakis & Mokos προσδιόρισαν την ακριβή κατανομή των διατμητικών τάσεων (St. Venant και δευτερογενών) στο πρόβλημα της ελαστικής ανομοιομορφης στρέψης για τυχούσα διατομή με ή χωρίς οπές, με θεώρηση δύο ξεχωριστών προβλημάτων συνοριακών τιμών για τον προσδιορισμό της στρέβλωσης της διατομής.

Οι προαναφερθέντες ερευνητές βασίστηκαν στην παραδοχή ότι οι μετατοπίσεις είναι αρκούτως μικρές ούτως ώστε να ισχύει η γραμμική θεωρία της ελαστικότητας/ελαστοπλαστικότητας. Ωστόσο, από τη μελέτη ανοιχτών λεπτότοιχων διατομών, γρήγορα έγινε αντιληπτό ότι λόγω της πολύ μικρής τους δυστρεψίας, οι διατομές αυτές αναπτύσσουν μεγάλες μετατοπίσεις (γωνίες στροφής) με αποτέλεσμα η γραμμική θεωρία να μη συμφωνεί επαρκώς με τα πειραματικά δεδομένα. Εξάλλου τέτοιες διατομές είναι ευπαθείς σε φαινόμενα λυγισμού, επομένως κρίνεται επιτακτική η ακριβέστερη εύρεση του στρεπτικού φορτίου που μπορούν να αναλάβουν. Οι Cullimore (1949), Ashwell (1951), Gregory (1960) ασχολήθηκαν με τη μη γραμμική θεωρία (μεγάλες γωνίες στροφής αλλά μικρές παραμορφώσεις) ομοιομορφης στρέψης λεπτότοιχων διατομών ελαστικού υλικού ενώ οι Tso & Ghobarah (1971), Trahair (2003) ερεύνησαν τη μη γραμμική ελαστική ανομοιομορφη στρέψη, επεκτείνοντας μάλιστα την ανάλυσή τους και σε προβλήματα στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.

Η μη γραμμική ελαστοπλαστική ανομοιομορφη στρέψη είναι σαφώς ένας κλάδος που δεν έχει ερευνηθεί σε βάθος. Οι Pi & Trahair (1995) προτείνουν μια αριθμητική επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία στα πλαίσια της θεωρίας των λεπτότοιχων διατομών ενώ οι Baba & Kajita (1982) αναλύουν το πρόβλημα για τυχούσες διπλά συμμετρικές διατομές χωρίς να υπόκεινται στον περιορισμό της παραδοχής των λεπτότοιχων διατομών. Ωστόσο, η προτεινόμενη ανάλυση εισάγει παρασιτική αξονική δύναμη στη δοκό ενώ αγνοούνται και οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που προκαλούνται από την ανομοιομορφη στρέψη.

Σκοπός του παρόντος πονήματος είναι να μελετηθεί η μη γραμμική συμπεριφορά (θεώρηση μεγάλων γωνιών στροφής αλλά μικρών παραμορφώσεων) ευθύγραμμων πρισματικών δοκών ελαστοπλαστικού υλικού υποβαλλόμενων σε ομοιομορφη στρεπτική ένταση. Η διατομή μπορεί να περιέχει μία ή περισσότερες οπές και αποτελείται από ομογενές υλικό. Η στρέβλωση προσδιορίζεται μέσω ενός προβλήματος συνοριακών τιμών, χωρίς να υιοθετούνται οι προσεγγίσεις και οι παραδοχές της θεωρίας των λεπτότοιχων διατομών. Στο μέλλον προβλέπεται να

μελετηθεί και η ανομοιόμορφη στρέψη η οποία παρουσιάζει και τη μεγαλύτερη πρακτική σημασία λόγω του μεγαλύτερου πλήθους εφαρμογών της.

Από την ανάλυση αναμένεται να προσδιοριστούν:

- το εύρος της φόρτισης για το οποίο η κατασκευή παραμένει ελαστική
- η μέγιστη πλαστική ροπή την οποία μπορεί να αναλάβει η κατασκευή καθώς και τα διαδοχικά στάδια μετάβασης από την ελαστική συμπεριφορά μέχρι την πλαστική κατάρρευση
- η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικής ανάλυσης στην πλήρως πλαστική ροπή και τη δυσκαμψία της κατασκευής
- η κατανομή των ορθών τάσεων στη διατομή καθώς και η συνεισφορά των ορθών τάσεων στην στρεπτική καταπόνηση
- η σημασία της πλαστικής ανακατανομής της έντασης στο σχεδιασμό των κατασκευών που καταπονούνται σε στρέψη

Η παρούσα εργασία αποκτά μεγάλη πρακτική αξία αν εξεταστούν οι τάσεις του σύγχρονου σχεδιασμού των κατασκευών πολιτικού μηχανικού. Βάση των σύγχρονων κανονισμών αποτελεί η ενεργοποίηση της πλαστικής αντοχής σε συγκεκριμένες θέσεις του δομήματος, επομένως η πλαστική ανάλυση των κατασκευών καθίσταται απαραίτητη. Εξάλλου ο ελαστικός σχεδιασμός των κατασκευών οδηγεί πολλές φορές σε αντιοικονομικές ή ανασφαλείς λύσεις με αποτέλεσμα να είναι ανεπαρκής μια αποκλειστικά ελαστική ανάλυση. Η τάση για οικονομικότερο σχεδιασμό πολλές φορές οδηγεί σε ελαφρές, εύκαμπτες κατασκευές, που εμφανίζουν μεγάλες μετατοπίσεις πριν να επέλθει η κατάρρευσή τους. Επομένως η πλαστική ανάλυση πρέπει να συνδυαστεί και με γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση προκειμένου να προσδιοριστεί ρεαλιστικά η απόκριση της κατασκευής.

Μεθοδολογικά, στην παρούσα εργασία, η (στρεπτική) φόρτιση θεωρείται ανεξάρτητη, επομένως η ιστορία της φόρτισης πρέπει να δοθεί εξ αρχής προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα. Η φόρτιση χωρίζεται σε διακριτά επαυξητικά βήματα σε καθένα από τα οποία αποκαθίσταται με επαναληπτικό τρόπο η ισορροπία εσωτερικών και εξωτερικών δράσεων που ασκούνται στη ράβδο.

Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι η συνάρτηση στρέβλωσης με την οποία προσδιορίζεται η μορφή της στρεβλωμένης επιφάνειας της διατομής, η συστροφή που είναι η παράγωγος ως προς τη διαμήκη συντεταγμένη της γωνίας στροφής της διατομής και η αξονική βράχυνση της δοκού. Με τις εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο δοκού, προσδιορίζονται σε κάθε επαυξητικό βήμα φόρτισης η συστροφή και η αξονική βράχυνση. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν με εφαρμογή της αρχής δυνατών έργων σ' ολόκληρη τη ράβδο. Επειδή η στρέψη είναι ομοιόμορφη, δεν απαιτείται κατά μήκος διακριτοποίηση της ράβδου προκειμένου να προσδιοριστούν τα άγνωστα μεγέθη.

Προκειμένου να ξεκινήσει η επαναληπτική διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων αυτών, απαιτείται ο προσδιορισμός της συνάρτησης στρέβλωσης ο οποίος επιτυγχάνεται με την επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών, που προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου σε επίπεδο υλικού σημείου. Η αναλυτική επίλυση αυτού του προβλήματος είναι πολύ δυσχερής έως και αδύνατη ακόμα και για απλές διατομές, έτσι η επίλυση επιτυγχάνεται αριθμητικά με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Η μέθοδος απαιτεί μονάχα την εύρεση άγνωστων ποσοτήτων στο σύνορο της διατομής προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα. Η πεδιακή διακριτοποίηση που υιοθετείται, απαιτείται μόνο για τον υπολογισμό επιφανειακών ολοκληρωμάτων και δεν οδηγεί σε αύξηση των αγνώστων του γραμμικού συστήματος εξισώσεων που προκύπτει από την εφαρμογή της

μεθόδου, με αποτέλεσμα να διατηρούνται τα πλεονεκτήματα της έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (μικρότερης τάξης γραμμικά συστήματα εξισώσεων, διακριτοποίηση χωρίς την ανάγκη ακριβούς συρραφής των στοιχείων).

Η συνάρτηση στρέβλωσης προκύπτει απευθείας από τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας χωρίς να υιοθετούνται οι παραδοχές της θεωρίας λεπτότοιχων διατομών. Η τιμή της -σε συγκεκριμένη στάθμη φόρτισης- εξαρτάται αποκλειστικά από τη γεωμετρία της διατομής και την εξέλιξη της πλαστικοποίησης στο εσωτερικό της.

Ο προσδιορισμός της φόρτισης μέχρι την οποία η κατασκευή παραμένει ελαστική δεν πραγματοποιείται σε ένα μόνο επαυξητικό βήμα φόρτισης λόγω του ότι η ανάλυση είναι γεωμετρικά μη γραμμική. Κατά συνέπεια, τα βήματα φόρτισης ξεκινάνε από την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση έτσι ώστε να προσομοιωθεί με ακρίβεια τόσο ο ελαστικός κλάδος όσο και το ελαστικό όριο της δοκού. Μετά την πλαστικοποίηση της δοκού, πριν από κάθε βήμα φόρτισης προσδιορίζεται η ισχύουσα συνάρτηση στρέβλωσης. Λόγω του ότι η συνάρτηση στρέβλωσης εξαρτάται από την εξέλιξη της πλαστικοποίησης, η σωστή προσομοίωση της κατανομής των τάσεων στη διατομή απαιτεί την εύρεση της συνάρτησης στρέβλωσης σε κάθε προσ αυξητικό βήμα φόρτισης.

Σε περίπτωση που αν για συγκεκριμένο υπολογιστικό επίπεδο ανοχής, δεν επέλθει σύγκλιση στην επαναληπτική διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων σε επίπεδο ράβδου, συμπεραίνεται ότι η δοκός αδυνατεί να αναλάβει επιπλέον φορτίο (φάση πλαστικής κατάρρευσης) και προσδιορίζεται η ροπή πλήρους πλαστικοποίησης.

Από την προαναφερθείσα διαδικασία καταγράφονται και ερμηνεύονται όλα τα απαραίτητα στοιχεία όπως ορθές και διατμητικές τάσεις, πλαστικές παραμορφώσεις, πλαστικές ζώνες της διατομής, ελαστική και πλήρως πλαστική στρεπτική ροπή, συστροφές και αξονικές βραχύνσεις συναρτήσεως της φόρτισης. Όπου κρίνεται απαραίτητο, εκτελείται ανάλυση μικρών μετατοπίσεων προκειμένου να αναδειχθεί η σημασία της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην απόκριση της ράβδου.

Το θέμα αυτής της προπτυχιακής εργασίας υποδείχθηκε από τον κ. Σαουντζάκη Ε., Επίκουρο Καθηγητή του εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, υπό την επίβλεψη και καθοδήγηση του οποίου, εκπονήθηκε η παρούσα διπλωματική εργασία κατά το δέκατο εξάμηνο των προπτυχιακών σπουδών μου. Για τα πιο πάνω καθώς και για το συνεχές ενδιαφέρον του, την προθυμία για την επίλυση οποιασδήποτε απορίας και τις χρήσιμες βιβλιογραφικές υποδείξεις, τον ευχαριστώ θερμά κι από αυτήν εδώ τη θέση.

Αθήνα, Ιούλιος 2007



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

1.1.1 Ορισμός μετατοπίσεων

Θεωρούμε ένα παραμορφώσιμο σώμα, το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$, καταλαμβάνει την περιοχή Q του χώρου. Στη γενική περίπτωση ο χώρος είναι τρισδιάστατος. Θεωρούμε επίσης ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Ox_1x_2x_3$. Η αρχική θέση ενός τυχόντος σημείου P του σώματος περιγράφεται από τις μεταβλητές του χώρου x_1, x_2, x_3 . Σε μια τυχούσα χρονική στιγμή t , η θέση του σώματος μεταβάλλεται με αποτέλεσμα να καταλαμβάνει την περιοχή Q' . Η τελική θέση του σημείου P , συμβολίζεται με $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Οι συντεταγμένες της τελικής θέσης του P θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.1\alpha)$$

$$\xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.1\beta)$$

$$\xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.1.1\gamma)$$

Υποθέτουμε ότι οι συντεταγμένες ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμες ως προς τις χωρικές συντεταγμένες και τον χρόνο. Η φυσική σημασία αυτής της υπόθεσης είναι ότι στο παραμορφώσιμο σώμα δεν αναπτύσσονται ρωγμές σε καμία χρονική στιγμή. Επιπλέον, απαιτούμε να υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του P και του P' , δηλαδή η μετακίνηση του σώματος να είναι μονοσήμαντη. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως ανεξάρτητες συντεταγμένες του χώρου, αυτές της τελικής θέσης και να εκφράσουμε τις συντεταγμένες της αρχικής θέσης ως εξής:

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (1.1.2\alpha)$$

$$x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (1.1.2\beta)$$

$$x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (1.1.2\gamma)$$

Η περιγραφή των σχέσεων (1.1.1) καλείται **περιγραφή Lagrange**, ενώ η περιγραφή των σχέσεων (1.1.2) καλείται περιγραφή Euler. Με την περιγραφή Lagrange εστιάζουμε στη μετακίνηση ενός συγκεκριμένου σωματιδίου $P(x_1, x_2, x_3)$ του σώματος και μελετούμε τη μετακίνηση του ως προς το χρόνο. Με την περιγραφή Euler εστιάζουμε σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του χώρου $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και μελετούμε τα σωματίδια που διέρχονται από το σημείο αυτό σε κάθε χρονική στιγμή t .

Στην περίπτωση που μελετούμε τη θέση του σώματος σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = \text{σταθ.}$, τότε οι παραπάνω σχέσεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Η μετατόπιση του σημείου P ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2 \cdot \mathbf{e}_2 + u_3 \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.1.3)$$

όπου

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$: τα μοναδιαία διανύσματα που ορίζουν τους άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 του συστήματος αναφοράς αντίστοιχα.

u_1, u_2, u_3 : οι συνιστώσες της μετατόπισης οι οποίες ορίζονται παρακάτω ως

$$u_1 = \xi_1 - x_1 \quad (1.1.4\alpha)$$

$$u_2 = \xi_2 - x_2 \quad (1.1.4\beta)$$

$$u_3 = \xi_3 - x_3 \quad (1.1.4\gamma)$$

Είναι προφανές ότι $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$ και ότι οι u_1, u_2, u_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμες ως προς τις συντεταγμένες του χώρου.

Το πεδίο των μετατοπίσεων δεν μπορεί να είναι αυθαίρετο. Προκειμένου να ισχύει η αντιστοιχία 1-1 μεταξύ των P, P' , αποδεικνύεται ότι πρέπει η ορίζουσα

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ή} \quad J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.1.5)$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα βρίσκεται στην αρχική του θέση, ισχύει $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$J(t=0) = 1 \quad (1.1.6)$$

Επειδή η J πρέπει να είναι συνεχής και ως προς το χρόνο, συμπεραίνουμε από τις (1.1.5), (1.1.6) ότι θα πρέπει να ισχύει

$$J > 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.1.7)$$

Η σχ. (1.1.7) αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των P, P' για κάθε χρονική στιγμή της παραμόρφωσης/μετακίνησης του σώματος.

Το μητρώο $[\mathbf{X}]$ της σχ. (1.1.5), που ορίζει την ορίζουσα J , καλείται διανυσματική κλίση ή βαθμίδα της παραμόρφωσης (deformation gradient).

1.1.2 Ορισμός παραμορφώσεων

Στην περίπτωση των απολύτως στερεών σωμάτων, η εύρεση των μετατοπίσεων κάθε σωματιδίου αρκεί πλήρως για την περιγραφή της κίνησής του. Σ' ένα

παραμορφώσιμο σώμα ωστόσο, οι μετατοπίσεις δεν μπορούν να μας δώσουν αρκετές πληροφορίες για την τελική του κατάσταση. Μπορεί να γνωρίζουμε τις θέσεις όλων των σωματιδίων του σώματος στην παραμορφωμένη κατάσταση αλλά είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε και τις σχετικές θέσεις των σωματιδίων προκειμένου να αποκτήσουμε σαφή εικόνα της παραμόρφωσης. Επομένως είναι αναγκαίο να μελετήσουμε τις μεταβολές των μηκών και των γωνιών που έχουν υποστεί τα διάφορα στοιχεία του σώματος. Στη γενική περίπτωση, το σώμα θα υποστεί τόσο μεταβολές μηκών όσο και μεταβολές γωνιών. Η ανάλυση διευκολύνεται αν θεωρήσουμε πολύ μικρά στοιχεία (πρακτικά απειροστά) αντί για στοιχεία πεπερασμένου μήκους.

1.1.2.1 Μεταβολή μήκους απειροστού στοιχείου

Θεωρούμε το απειροστό στοιχείο PA του αρχικά απαραμόρφωτου σώματος, μήκους ds . Το P έχει συντεταγμένες $P(x_1, x_2, x_3)$ ενώ το A προφανώς θα έχει συντεταγμένες $A(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Θα είναι

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x_1 + dx_1 - x_1)^2 + (x_2 + dx_2 - x_2)^2 + (x_3 + dx_3 - x_3)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Μετά την παραμόρφωση, το PA βρίσκεται σε νέα θέση, έστω την $P'A'$, όπου $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $A'(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. Στη γενική περίπτωση θα έχουμε τόσο μεταβολή μήκους όσο και μεταβολή της κατεύθυνσης του PA . Το παραμορφωμένο στοιχείο $P'A'$ θα έχει μήκος

$$\begin{aligned} ds' &= \sqrt{(\xi_1 + d\xi_1 - \xi_1)^2 + (\xi_2 + d\xi_2 - \xi_2)^2 + (\xi_3 + d\xi_3 - \xi_3)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow ds'^2 &= d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1.1.2), (1.1.4), θα έχουμε:

$$d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \cdot dx_3 \Rightarrow d\xi_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \cdot dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot dx_3 \quad (1.1.10\alpha)$$

$$d\xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \cdot dx_3 \Rightarrow d\xi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \cdot dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot dx_3 \quad (1.1.10\beta)$$

$$d\xi_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \cdot dx_3 \Rightarrow d\xi_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \cdot dx_3 \quad (1.1.10\gamma)$$

Με λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (ds'^2 - ds^2) &= \varepsilon_{11} \cdot dx_1^2 + \varepsilon_{22} \cdot dx_2^2 + \varepsilon_{33} \cdot dx_3^2 + \\ &+ 2 \cdot \varepsilon_{12} \cdot dx_1 dx_2 + 2 \cdot \varepsilon_{13} \cdot dx_1 dx_3 + 2 \cdot \varepsilon_{23} \cdot dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

όπου στην παραπάνω σχέση ορίζουμε ως τροπές (strains), τις παρακάτω ποσότητες:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\beta)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \quad (1.1.12\gamma)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (1.1.12\delta)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.12\epsilon)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.12\zeta)$$

Ο **τανυστής παραμορφώσεων Green** ορίζεται ως ο πίνακας

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^G] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.13)$$

όπου

ε_{ij} : οι συνιστώσες του τανυστή Green έτσι όπως έχουν οριστεί στις εξ. (1.1.12).

Οι συνιστώσες ε_{21} , ε_{31} , ε_{32} ορίζονται από τις (1.1.12δ-ε-ζ) με αντιστροφή των δεικτών. Είναι προφανές ότι θα ισχύει

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} \quad (1.1.14\alpha)$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \quad (1.1.14\beta)$$

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} \quad (1.1.14\gamma)$$

επομένως θα ισχύει

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^G]^T = [\boldsymbol{\varepsilon}^G] \quad (1.1.15)$$

δηλαδή ο τανυστής παραμορφώσεων Green είναι συμμετρικός.

Ορίζουμε ως **μέτρο μεταβολής μήκους του PA** (magnification factor of the extension of line element PA), την ποσότητα

$$MF_A = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{ds'^2}{ds^2} \right) - 1 \right] \quad (1.1.16)$$

Με χρήση των συνημίτονων κατεύθυνσης του στοιχείου PA , $n_1 = \frac{dx_1}{ds}$, $n_2 = \frac{dx_2}{ds}$,

$n_3 = \frac{dx_3}{ds}$, προσδιορίζουμε, με διαίρεση με ds^2 και των δύο μελών της εξ. (1.1.11), το

MF_A συναρτήσει των τροπών:

$$MF_A = \varepsilon_{11} \cdot n_1^2 + \varepsilon_{22} \cdot n_2^2 + \varepsilon_{33} \cdot n_3^2 + 2 \cdot \varepsilon_{12} \cdot n_1 \cdot n_2 + 2 \cdot \varepsilon_{13} \cdot n_1 \cdot n_3 + 2 \cdot \varepsilon_{23} \cdot n_2 \cdot n_3 \quad (1.1.17)$$

Μπορούμε εύκολα να συσχετίσουμε το MF_A με τη σχετική μεταβολή μήκους του PA (συμβολίζεται με e_A) που θέλουμε να υπολογίσουμε:

$$e_A = \frac{ds' - ds}{ds} \Rightarrow ds' = (1 + e_A) \cdot ds \quad (1.1.18)$$

$$MF_A = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{ds'^2}{ds^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ds'^2 - ds^2}{ds^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(1 + e_A)^2 \cdot ds^2 - ds^2}{ds^2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[(1 + e_A)^2 - 1 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_A = \sqrt{1 + 2 \cdot MF_A} - 1 \quad (1.1.19)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν με κάποιους περιορισμούς. Επειδή δεν μπορεί να μηδενιστεί το μήκος του στοιχείου, θα έχουμε σαν φυσικό περιορισμό ότι $ds' > 0$, επομένως η (1.1.18) ισχύει με την προϋπόθεση ότι $e_A > -1$ και η (1.1.19) με τον περιορισμό $MF_A > -\frac{1}{2}$.

Η (1.1.19) μπορεί να αναπτυχθεί σε ανάπτυγμα Taylor:

$$e_A = MF_A - \frac{1}{2} \cdot MF_A^2 + \dots \quad (1.1.20)$$

Με τη βοήθεια της (1.1.20) μπορούμε να αποδώσουμε φυσική σημασία στο μέτρο μεταβολής μήκους: Για $MF_A \ll 1$, το $e_A \approx MF_A$, δηλαδή το MF_A ισούται περίπου με τη σχετική μεταβολή μήκους της (τυχαίας) ίνας PA . Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική, βρίσκουμε και τη φυσική σημασία των τροπών που έχουμε ορίσει με τις εξ. (1.1.12α), (1.1.12β), (1.1.12γ). Παρατηρούμε, ότι αν στην απαραμόρφωτη κατάσταση θεωρήσουμε μία ίνα με κατεύθυνση κατά τον άξονα Ox_1 , τα $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η (1.1.17) δίνει $MF_{Ax1} = \varepsilon_{11} \cdot n_1^2 \Rightarrow MF_{Ax1} = \varepsilon_{11}$, ενώ από την (1.1.20) παίρνουμε

$$e_{Ax1} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{11}^2 + \dots \quad (1.1.21)$$

Υποθέτοντας ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, θα έχουμε $\varepsilon_{11} \ll 1 \Rightarrow (\varepsilon_{11})^2 \approx 0$, επομένως η σχ. (1.1.21) θα δώσει

$$e_{Ax1} \approx \varepsilon_{11} \quad (1.1.22)$$

Συμπεραίνουμε ότι η παραμόρφωση ε_{ii} ισούται περίπου με τη μεταβολή μήκους μιας απειροστής ίνας που αρχικά έχει κατεύθυνση κατά τον άξονα Ox_i . Οι τροπές ε_{ii} , όπου $i=1,2,3$ καλούνται ορθές παραμορφώσεις και είναι «υπεύθυνες» για τις μεταβολές μήκους των ινών του σώματος που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

1.1.2.2 Μεταβολή κατεύθυνσης απειροστού στοιχείου

Η κατεύθυνση στο χώρο του PA πριν την παραμόρφωση προσδιορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n}_A = n_{A1} \cdot \mathbf{i} + n_{A2} \cdot \mathbf{j} + n_{A3} \cdot \mathbf{k} \quad (1.1.23)$$

$$\text{όπου } n_{A1} = \frac{dx_1}{ds}, \quad n_{A2} = \frac{dx_2}{ds}, \quad n_{A3} = \frac{dx_3}{ds}.$$

Στην παραμορφωμένη κατάσταση το στοιχείο βρίσκεται στη νέα θέση $P'A'$, με $P'(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $A'(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$. Επομένως η νέα κατεύθυνση του στοιχείου θα είναι η

$$\mathbf{n}'_A = n'_{A1} \cdot \mathbf{i} + n'_{A2} \cdot \mathbf{j} + n'_{A3} \cdot \mathbf{k} \quad (1.1.24)$$

$$\text{όπου } n'_{A1} = \frac{d\xi_1}{ds'}, \quad n'_{A2} = \frac{d\xi_2}{ds'}, \quad n'_{A3} = \frac{d\xi_3}{ds'}.$$

Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, λαμβάνουμε

$$n'_i = \frac{d\xi_i}{ds} \cdot \frac{ds}{ds'}, \quad i=1,2,3 \quad (1.1.25)$$

Από τις εξ. (1.1.10) έχουμε

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \cdot \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_1}{ds} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \cdot n_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot n_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot n_3 \quad (1.1.26\alpha)$$

$$\frac{d\xi_2}{ds} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{ds} + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_2}{ds} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot n_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \cdot n_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot n_3 \quad (1.1.26\beta)$$

$$\frac{d\xi_3}{ds} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{ds} + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \cdot \frac{dx_3}{ds} \Rightarrow \frac{d\xi_3}{ds} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot n_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot n_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \cdot n_3 \quad (1.1.26\gamma)$$

Η (1.1.18) δίνει:

$$ds' = (1 + e_A) \cdot ds \Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + e_A} \xrightarrow{(1.1.19)} \frac{ds}{ds'} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 2 \cdot MF_A} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{ds'} = \frac{I}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \quad (1.1.27)$$

Με τη βοήθεια των (1.1.26) –(1.1.27) μπορούμε να προσδιορίσουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης της τελικής θέσης συναρτήσει των μετατοπίσεων και των αρχικών (γνωστών) συνημίτονων κατεύθυνσης:

$$n_{A1}' = \frac{I + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_1 + \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_2 + \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_3}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_3 \quad (1.1.28\alpha)$$

$$n_{A2}' = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_1 + \frac{I + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_2 + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_3}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_3 \quad (1.1.28\beta)$$

$$n_{A3}' = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_1 + \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_2 + \frac{I + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}{\sqrt{I+2 \cdot MF_A}} \cdot n_3 \quad (1.1.28\gamma)$$

Η φυσική σημασία των τροπών ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} προσδιορίζεται αν μελετήσουμε τη μεταβολή της γωνίας που υφίστανται 2 στοιχεία PA , PB . Έστω θ , η γωνία που σχηματίζουν αρχικά τα στοιχεία, και θ' η τελική γωνία (που σχηματίζουν τα $P'A'$, $P'B'$). Θεωρούμε τον γνωστό τύπο του εσωτερικού γινομένου μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων κατεύθυνσης

$$\mathbf{n}_A' \cdot \mathbf{n}_B' = \|\mathbf{n}_A'\| \cdot \|\mathbf{n}_B'\| \cdot \cos \theta' = 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta' \Rightarrow \cos \theta' = \mathbf{n}_A' \cdot \mathbf{n}_B' \Rightarrow$$

$$\cos \theta' = n_{A1}' \cdot n_{B1}' + n_{A2}' \cdot n_{B2}' + n_{A3}' \cdot n_{B3}' \quad (1.1.29)$$

Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα θεωρούμε την εξής υποπερίπτωση: Παίρνουμε τα PA , PB να κατευθύνονται προς τους άξονες Ox_1 , Ox_2 αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι $(n_{A1}, n_{A2}, n_{A3}) = (1, 0, 0)$, $(n_{B1}, n_{B2}, n_{B3}) = (0, 1, 0)$, $MF_A = \varepsilon_{11}$, $MF_B = \varepsilon_{22}$ ενώ προφανώς η αρχική γωνία $\theta = 90^\circ$. Οι (1.1.28) δίνουν

$$n_{A1}' = \frac{I + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\sqrt{I+2 \cdot \varepsilon_{11}}}, \quad n_{B1}' = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{\sqrt{I+2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\alpha)$$

$$n_{A2}' = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\sqrt{I+2 \cdot \varepsilon_{11}}}, \quad n_{B2}' = \frac{I + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{\sqrt{I+2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\beta)$$

$$n_{A3}' = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{\sqrt{I+2 \cdot \varepsilon_{11}}}, \quad n_{B3}' = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\sqrt{I+2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.30\gamma)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.1.29) και εκτελώντας τις πράξεις, λαμβάνουμε:

$$\cos \theta' = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\sqrt{1+2 \cdot \varepsilon_{11}} \cdot \sqrt{1+2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.31)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ε_{12} εξ. (1.1.12δ), τελικά λαμβάνουμε

$$\cos \theta' = \frac{2 \cdot \varepsilon_{12}}{\sqrt{1+2 \cdot \varepsilon_{11}} \cdot \sqrt{1+2 \cdot \varepsilon_{22}}} \quad (1.1.32)$$

Επομένως αν υποθέσουμε ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές θα έχουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις:

- οι ορθές παραμορφώσεις είναι μικρές, επομένως $\varepsilon_{11} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2 \cdot \varepsilon_{11}}} \approx 1$
και $\varepsilon_{22} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2 \cdot \varepsilon_{22}}} \approx 1$ από τις σχ. (1.1.19) – (1.1.21)
- οι γωνίες στροφής μεταξύ των δύο στοιχείων είναι μικρές, επομένως $\sin \theta' \approx \theta'$. Όμως ισχύει $\cos \theta' = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right)$, άρα $\cos \theta' \approx \frac{\pi}{2} - \theta' \Rightarrow \cos \theta' \approx \theta - \theta'$, αφού έχουμε θεωρήσει ότι η αρχική γωνία ισούται με $\frac{\pi}{2}$ (90°)

Η (1.1.32) γράφεται

$$\theta - \theta' \approx 2 \cdot \varepsilon_{12} \quad (1.1.33)$$

Η φυσική σημασία της τροπής ε_{12} είναι ότι ισούται περίπου με το μισό της μεταβολής της κάθετης γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ 2 ινών που αρχικά είναι παράλληλες προς τους άξονες Ox_1, Ox_2 . Με παρόμοια συλλογιστική μπορούμε γενικά να αποδείξουμε ότι το διπλάσιο της τροπής ε_{ij} (με $i \neq j$) ισούται περίπου με τη μεταβολή της (κάθετης) γωνίας μεταξύ 2 ινών που αρχικά είναι παράλληλες προς τους άξονες Ox_i και Ox_j .

Ορίζουμε ως

$$\gamma_{ij} = 2 \cdot \varepsilon_{ij}, \text{ όπου } i \neq j \quad (1.1.34)$$

Οι ποσότητες γ_{ij} καλούνται διατμητικές παραμορφώσεις και είναι «υπεύθυνες» για τις μεταβολές των (κάθετων) γωνιών μεταξύ των ινών που αρχικά είναι παράλληλες ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

1.1.2.3 Μεταβολή όγκου απειροστού στοιχείου

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε την αλλαγή όγκου και επιφάνειας που υφίστανται κατά την παραμόρφωση τα (απειροστά) στοιχεία του σώματος. Πριν την παραμόρφωση θεωρούμε ένα κυβικό στοιχείο του σώματος με πλευρές παράλληλες στους άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Το στοιχείο προφανώς θα έχει όγκο $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Για να βρούμε τον όγκο dV' του στοιχείου μετά την παραμόρφωση, εξετάζουμε τις μεταβολές που έχουν υποστεί οι ακμές του: Η πλευρά $\mathbf{OA}^T = (dx_1, 0, 0)$ μετατρέπεται στην

$$\mathbf{O'A'}^T = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot dx_1, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \cdot dx_1, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \cdot dx_1 \right) \quad (1.1.35\alpha)$$

Ο παραπάνω τύπος προέκυψε με την εφαρμογή των σχέσεων (1.1.9) που συνδέουν τις προβολές του στοιχείου στους 3 άξονες του συστήματος αναφοράς πριν και μετά την παραμόρφωση. Εξετάζοντας και τις άλλες 2 ακμές που ορίζουν τον κύβο, λαμβάνουμε για $\mathbf{OB}^T = (0, dx_2, 0)$ και $\mathbf{OG}^T = (0, 0, dx_3)$ τις σχέσεις

$$\mathbf{O'B'}^T = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \cdot dx_2, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \cdot dx_2, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \cdot dx_2 \right) \quad (1.1.35\beta)$$

$$\mathbf{O'G'}^T = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \cdot dx_3, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \cdot dx_3, \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \cdot dx_3 \right) \quad (1.1.35\gamma)$$

Με βάση το γνωστό τύπο από την αναλυτική γεωμετρία, ο όγκος dV' του παραλληλεπίπεδου στην παραμορφωμένη κατάσταση θα δίνεται από τον τύπο

$$dV' = \mathbf{O'A'} \cdot (\mathbf{O'B'} \times \mathbf{O'G'}) \quad (1.1.36)$$

όπου

\times : εξωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων.

Εκτελώντας τις πράξεις στην παραπάνω σχέση, λαμβάνουμε

$$dV' = J \cdot dV \quad (1.1.37)$$

όπου

J : η ορίζουσα της βαθμίδας της παραμόρφωσης που έχει οριστεί στην (1.1.5).

1.1.2.4 Μεταβολή επιφάνειας απειροστού στοιχείου

Θεωρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA πριν την παραμόρφωση και το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} επί αυτής. Μετά την παραμόρφωση έστω ότι η επιφάνεια θα έχει νέο εμβαδόν dA' με κάθετο διάνυσμα \mathbf{n}' . Για να συσχετίσουμε την παραμορφωμένη επιφάνεια με την αρχική, θα προσδιορίσουμε την αλλαγή του όγκου που υφίσταται ένα στοιχείο που ορίζεται από την επιφάνεια και ένα τυχαίο απειροστό διάνυσμα

$\mathbf{n}_1^T = (dx_1, dx_2, dx_3)$. Ο όγκος του στοιχείου πριν την παραμόρφωση θα ισούται προφανώς με

$$dV = \mathbf{n}_1 \cdot (d\mathbf{A}\mathbf{n}) \quad (1.1.38)$$

Μετά την παραμόρφωση θα έχουν μεταβληθεί (στη γενικότερη περίπτωση) τόσο το \mathbf{n}_1 , όσο και τα χαρακτηριστικά (εμβαδόν, προσανατολισμός) της επιφάνειας. Ο όγκος του νέου στοιχείου θα είναι προφανώς

$$dV' = \mathbf{n}_1' \cdot (dA'\mathbf{n}') \quad (1.1.39)$$

όπου

$$\left(\mathbf{n}_1'\right)^T = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3).$$

Με τη βοήθεια των σχ. (1.1.5) και (1.1.10) συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα της παραμόρφωσης $[\mathbf{X}]$ έχει την ιδιότητα να συνδέει το (τυχαίο) διάνυσμα πριν την παραμόρφωση με το διάνυσμα μετά την παραμόρφωση. Πιο συγκεκριμένα ισχύει

$$\mathbf{n}_1' = [\mathbf{X}] \cdot \mathbf{n}_1 \quad (1.1.40)$$

Από την (1.1.37) έχουμε

$$\begin{aligned} dV' &= J \cdot dV \Rightarrow \mathbf{n}_1' \cdot (dA'\mathbf{n}') = J\mathbf{n}_1 \cdot (d\mathbf{A}\mathbf{n}) \xrightarrow{(1.1.40)} \\ &\Rightarrow [\mathbf{X}] \cdot \mathbf{n}_1 \cdot (dA'\mathbf{n}') = J\mathbf{n}_1 \cdot (d\mathbf{A}\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (1.1.41)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{n}_1 , τελικά λαμβάνουμε

$$dA'\mathbf{n}' = J[\mathbf{X}]^{-T} \cdot (d\mathbf{A}\mathbf{n}) \quad (1.1.42)$$

Παρατηρούμε ότι η ο υπολογισμός της βαθμίδας παραμόρφωσης αρκεί για τον προσδιορισμό της επιφάνειας στην παραμορφωμένη κατάσταση.

1.1.2.5 Ορισμός του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων

Στις ενότητες Α) και Β) δόθηκε η φυσική σημασία του τανυστή παραμορφώσεων Green η οποία προκύπτει με την υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές. Με βάση αυτήν την υπόθεση, μπορούμε σε όλες τις σχέσεις που υπεισέρχονται συνιστώσες του τανυστή να αγνοήσουμε τους μη γραμμικούς όρους, δηλαδή

$$\varepsilon_{ij} \ll 1 \quad (1.1.43)$$

$$\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \approx 0, \quad \forall i, j \quad (1.1.44)$$

Μια παραδοχή η οποία περιορίζει πολύ περισσότερο την κλάση των προβλημάτων που μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά, είναι η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων. Με βάση αυτή την υπόθεση, οι μη γραμμικοί όροι των μετατοπίσεων που υπεισέρχονται στις σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων (1.1.12) θεωρούνται πολύ μικροί και κατά συνέπεια μπορούν να αγνοηθούν. Έτσι μπορούμε να αποκτήσουμε γραμμικές σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων οι οποίες είναι οι κάτωθι:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (1.1.45\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (1.1.45\beta)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.1.45\gamma)$$

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (1.1.45\delta)$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.45\epsilon)$$

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (1.1.45\zeta)$$

Μπορούμε πλέον να ορίσουμε τον **απειροστικό τανυστή παραμορφώσεων** (infinitesimal strain tensor) σε περιγραφή κατά Lagrange

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.46)$$

όπου τα ε_{ij} λαμβάνονται από τις σχ. (1.1.45)

Αν υποβάλλουμε ένα στοιχείο σε στροφή στερεού σώματος και χρησιμοποιήσουμε τον απειροστικό τανυστή παραμορφώσεων, θα υπολογίσουμε μη μηδενική παραμόρφωση, αποτέλεσμα που φυσικά είναι λανθασμένο αφού είναι προφανές ότι οποιαδήποτε κίνηση (μετατόπιση ή στροφή) στερεού σώματος δεν προκαλεί παραμόρφωση. Συμπερασματικά, ο απειροστικός τανυστής δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μονάχα στην περίπτωση που η αρχική και η τελική διαμόρφωση του σώματος διαφέρουν ελάχιστα. Επομένως, αν σ' ένα σώμα ισχύει η υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων εξασφαλίζεται ότι και οι παραμορφώσεις θα είναι μικρές. Ωστόσο το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκη, γεγονός που καθίσταται σαφές από το παραπάνω παράδειγμα της στροφής στερεού σώματος όπου η αρχική και η τελική διαμόρφωση διαφέρουν αισθητά αλλά η παραμόρφωση του στοιχείου (μεταβολές μηκών και γωνιών) είναι μηδενική.

1.2 ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΣΕΩΝ

1.2.1 Ορισμός διανύσματος τάσεως

Στα επόμενα, η χρονική στιγμή που αναφέρονται τα διάφορα μεγέθη θα δηλώνεται με χρήση του άνω αριστερού ενδείκτη. Έτσι π.χ. ο συμβολισμός ${}^I \boldsymbol{\varepsilon}$ θα δηλώνει τον ταυστή παραμορφώσεων τη χρονική στιγμή $t = t_I$.

Θεωρούμε ένα σώμα την (τυχαία) χρονική στιγμή $t = t_I$ πάνω στο οποίο ασκούνται κάποιες δυνάμεις. Θεωρούμε επίσης μία τυχαία τομή η οποία χωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα Q_1 , Q_2 καθώς επίσης και μια στοιχειώδη επιφάνεια $d^I A$ στο σημείο $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ επί της τομής, με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ${}^I \mathbf{n}$ για το τμήμα Q_1 και $-{}^I \mathbf{n}$ για το τμήμα Q_2 . Ορίζουμε ως διάνυσμα τάσεως ή ελκυστή (traction vector) ${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n})$ που αντιστοιχεί στο διάνυσμα ${}^I \mathbf{n}$, στο σημείο P , την ποσότητα

$${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) = \lim_{d^I A \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}}{d^I A} \quad (1.2.1)$$

όπου

$d^I \mathbf{p}$: η συνιστάμενη (επιφανειακή) δύναμη που ασκείται επί της στοιχειώδους επιφάνειας $d^I A$.

Από την αρχή δράσης – αντίδρασης του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκείται στο Q_1 (επί της $d^I A$, στο σημείο P) θα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκείται στο Q_2 . Επομένως από τον ορισμό της (1.2.1) έπεται κατευθείαν ότι

$${}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) = -{}^I \mathbf{t}(-{}^I \mathbf{n}) \quad (1.2.2)$$

Η παραπάνω βασική σχέση είναι γνωστή ως **αρχή του Cauchy**.

Από τον παραπάνω ορισμό καθίσταται σαφές ότι ο ελκυστής δεν αποτελεί διανυσματικό πεδίο με την κλασική έννοια, μιας και σε κάθε σημείο του χώρου που καταλαμβάνει το σώμα δεν αντιστοιχίζεται ένας και μόνο ένας ελκυστής. Για να προσδιοριστεί ο ελκυστής πρέπει να δοθούν τόσο το σημείο στο οποίο αναφέρεται όσο και το κάθετο διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας που διέρχεται από αυτό. Κατά συνέπεια, σε κάποιο σημείο του σώματος μπορούν να οριστούν άπειροι ελκυστές, ο καθένας από τους οποίους θα αντιστοιχίζεται σε συγκεκριμένη προσανατολισμένη στοιχειώδη επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο.

Εκτός από τις επιφανειακές δυνάμεις (traction forces) που υπεισέρχονται στον ορισμό του διανύσματος τάσεως, πολλές φορές στα σώματα ασκούνται και μαζικές δυνάμεις (body forces), δηλαδή δυνάμεις που ασκούνται απευθείας πάνω στους «κόκκους» του σώματος. Τέτοιες δυνάμεις δεν μπορούν να «εμφανιστούν» στη διεπιφάνεια κάποιας τομής στο σώμα, χαρακτηρίζονται δε ως δυνάμεις πεδίου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μαζικής δύναμης είναι το ίδιο βάρος του σώματος. Θεωρώντας ένα στοιχειώδη όγκο $d^I V$ σε ένα σημείο $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ του σώματος, ορίζουμε ως μαζική δύναμη ανά μονάδα όγκου την ποσότητα

$${}^1\mathbf{f} = \lim_{d^1V \rightarrow 0} \frac{d^1\mathbf{p}_f}{d^1V} \quad (1.2.3)$$

όπου

$d^1\mathbf{p}_f$: η συνισταμένη των μαζικών δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχειώδη όγκο d^1V .

Όπως είναι προφανές, το ${}^1\mathbf{f}$ αποτελεί διανυσματικό πεδίο (σε αντίθεση με τον ελκυστή ${}^1\mathbf{t}$).

1.2.2 Ορισμός τανυστή τάσεως Cauchy

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα αναφοράς με το οποίο περιγράφουμε την κίνηση είναι σταθερό και δε μεταβάλλεται με το χρόνο. Θεωρούμε μία στοιχειώδη επιφάνεια d^1A κάθετη στον άξονα Ox_j .

Προφανώς ισχύει ${}^1\mathbf{n}^T = \mathbf{e}_1^T = (1, 0, 0)$, όπου \mathbf{e}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει τον άξονα Ox_j . Ορίζουμε ως ${}^1\sigma_{ij}$, $j = 1, 2, 3$ τις συνιστώσες του ελκυστή ${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1)$, δηλαδή ισχύει η παρακάτω σχέση

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1)^T = ({}^1\sigma_{11}, {}^1\sigma_{12}, {}^1\sigma_{13}) \quad (1.2.4)$$

Γενικεύοντας, μπορούμε να θεωρήσουμε και τις συνιστώσες των ελκυστών που αντιστοιχούν και στους άλλους 2 άξονες του συστήματος αναφοράς. Συνολικά θα έχουμε

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) = \sigma_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.2.5\alpha)$$

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_2) = \sigma_{21} \cdot \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{23} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.2.5\beta)$$

$${}^1\mathbf{t}(\mathbf{e}_3) = \sigma_{31} \cdot \mathbf{e}_1 + \sigma_{32} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.2.5\gamma)$$

Ο τανυστής πραγματικών τάσεων ή **τανυστής τάσεων Cauchy** (true or Cauchy stress tensor) $[{}^1\boldsymbol{\sigma}]$ ορίζεται ως

$$[{}^1\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

όπου για εποπτικούς λόγους παραλείψαμε το χρονικό ενδείκτη από τα σ_{ij} .

Συμπερασματικά η συνιστώσα σ_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ του τανυστή ορίζεται ως το πηλίκο της στοιχειώδους δύναμης που δρα κατά τη κατά την κατεύθυνση του Ox_j διά τη στοιχειώδη επιφάνεια d^1A με (μοναδιαίο) κάθετο διάνυσμα \mathbf{e}_i .

Σε κάθε σημείο του σώματος αντιστοιχεί ένας και μόνο ένας τανυστής Cauchy (σε δεδομένη χρονική στιγμή).

1.2.3 Εξισώσεις ισορροπίας

Πριν συνεχίσουμε με την περιγραφή των υπόλοιπων τανυστών τάσεων που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία, είναι απαραίτητο να διατυπώσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσει των ελκυστών και του τανυστή Cauchy που έχουμε ήδη ορίσει.

Για να συσχετίσουμε τον (τυχαίο) ελκυστή ${}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n})$ με τις συνιστώσες του τανυστή Cauchy $[{}^I\boldsymbol{\sigma}]$, εξετάζουμε την ισορροπία ενός στοιχειώδους τετραέδρου που διαθέτει για πλευρές τις στοιχειώδεις επιφάνειες που είναι κάθετες στα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 και ${}^I\mathbf{n}$. Υποθέτοντας ότι οι συνθήκες είναι ψευδοστατικές, δηλαδή οι αδρανειακές δυνάμεις μπορούν να αγνοηθούν, και αμελώντας τους όρους των μαζικών δυνάμεων που είναι μικρότερης τάξης από τους αντίστοιχους όρους των επιφανειακών δυνάμεων, λαμβάνουμε τις εξής σχέσεις ισορροπίας

$${}^I t_1 = \sigma_{11} \cdot {}^I n_1 + \sigma_{21} \cdot {}^I n_2 + \sigma_{31} \cdot {}^I n_3 \quad (1.2.7\alpha)$$

$${}^I t_2 = \sigma_{12} \cdot {}^I n_1 + \sigma_{22} \cdot {}^I n_2 + \sigma_{32} \cdot {}^I n_3 \quad (1.2.7\beta)$$

$${}^I t_3 = \sigma_{13} \cdot {}^I n_1 + \sigma_{23} \cdot {}^I n_2 + \sigma_{33} \cdot {}^I n_3 \quad (1.2.7\gamma)$$

όπου

$${}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n})^T = ({}^I t_1, {}^I t_2, {}^I t_3) \text{ και } {}^I\mathbf{n}^T = ({}^I n_1, {}^I n_2, {}^I n_3).$$

Οι εξ. (1.2.7) μπορούν να διατυπωθούν συνοπτικότερα με διανυσματική γραφή ως

$${}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n}) = [{}^I\boldsymbol{\sigma}]^T \cdot {}^I\mathbf{n} \quad (1.2.8)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όπως θα δούμε είναι χρήσιμες στην διατύπωση συνοριακών συνθηκών προβλημάτων μηχανικής παραμορφώσιμων σωμάτων.

Αποκόπτουμε έναν τυχαίο όγκο IV από το σώμα (στην παραμορφωμένη κατάσταση – τη χρονική στιγμή $t = t_1$), που περικλείεται από την επιφάνεια

${}^IA = \partial {}^IV$. Ισορροπία έχουμε όταν η συνισταμένη των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται επί του IV μηδενίζονται, με τη θεώρηση ψευδοστατικών συνθηκών.

Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων γράφεται συναρτήσει των ελκυστών ${}^I\mathbf{t}$ (ασκούνται στην IA) και των ανηγμένων μαζικών δυνάμεων ${}^I\mathbf{f}$ (ασκούνται στον IV) ως εξής:

$$\int_{{}^IA} {}^I\mathbf{t}({}^I\mathbf{n}) d{}^IA + \int_{{}^IV} {}^I\mathbf{f} d{}^IV = \mathbf{0} \quad (1.2.9)$$

Με τη βοήθεια της (1.2.8) η εξίσωση ισορροπίας δίνει

$$\int_{{}^IA} [{}^I\boldsymbol{\sigma}]^T \cdot {}^I\mathbf{n} d{}^IA + \int_{{}^IV} {}^I\mathbf{f} d{}^IV = \mathbf{0} \quad (1.2.10)$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης του Gauss (Gauss divergence theorem) της Ανάλυσης για κλειστά χωρία, το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (1.2.10) μετατρέπεται σε τριπλό

$$\int_{V'} \mathbf{div} \left([{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T \right) d^1V + \int_{V'} {}^1\mathbf{f} d^1V = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{V'} \left[\mathbf{div} \left([{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T \right) + {}^1\mathbf{f} \right] d^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.11)$$

Επειδή η εξίσωση ισορροπίας ισχύει για οποιοδήποτε όγκο V' του σώματος, συμπεραίνουμε ότι η (1.2.11) οδηγεί στην εξίσωση

$$\mathbf{div} \left([{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T \right) + {}^1\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.2.12)$$

Το σύστημα των εξ. (1.2.12) αποτελούν τις επικρατούσες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην κλασική τους μορφή. Αναλυτικά αυτές οι εξισώσεις είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \xi_3} + {}^1f_1 = 0 \quad (1.2.13\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \xi_3} + {}^1f_2 = 0 \quad (1.2.13\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_3} + {}^1f_3 = 0 \quad (1.2.13\gamma)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι οι παράγωγοι στις παραπάνω εξισώσεις είναι ως προς την τρέχουσα διαμόρφωση της χρονικής στιγμής που εξετάζουμε (μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3 και όχι ως προς την αρχική διαμόρφωση (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3). Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εξαχθούν εναλλακτικά, αν εξετάσουμε την ισορροπία ενός στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου που ορίζεται από τους άξονες του συστήματος αναφοράς και με μήκη πλευρών $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$.

Η εξίσωση ισορροπίας των ροπών ως προς τυχαίο σημείο K διατυπώνεται ως εξής:

$$\int_{A'} {}^1\mathbf{t}({}^1\mathbf{n}) \times \mathbf{K} E d^1A + \int_{V'} {}^1\mathbf{f} \times \mathbf{K} B d^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.14)$$

όπου

το σύμβολο \times δηλώνει εξωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων.

$E \in A'$ σημείο που διατρέχει το επιφανειακό σύνορο του όγκου.

$B \in V'$ σημείο που διατρέχει τον όγκο V' .

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τις εξ. (1.2.9) – (1.2.13), η εξίσωση (1.2.14) έπειτα από κάποια άλγεβρα, καταλήγει στην παρακάτω σχέση

$$[{}^1\boldsymbol{\sigma}] = [{}^1\boldsymbol{\sigma}]^T \quad (1.2.15)$$

Η σχέση δηλώνει ότι ο τανυστής τάσεων Cauchy είναι συμμετρικός. Αναλυτικά θα έχουμε

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \quad (1.2.16\alpha)$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} \quad (1.2.16\beta)$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (1.2.16\gamma)$$

Συμπεραίνουμε ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες τάσεων περιορίζονται από εννιά σε έξι.

1.2.4 Ορισμός του πρώτου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff

Ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff αναπτύχθηκε στην προσπάθεια να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας του σώματος συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της αρχικής διαμόρφωσης $t = \theta$. Η εξ. ισορροπίας (1.2.9) της τρέχουσας διαμόρφωσης $t = t_I$ δίνει

$$\int_{^I A} {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) d^I A + \int_{^I V} {}^I \mathbf{f} d^I V = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{{}^{\theta} A} {}^{\theta} \mathbf{t} \frac{d^I A}{d^{\theta} A} d^{\theta} A + \int_{{}^{\theta} V} {}^{\theta} \mathbf{f} \frac{d^I V}{d^{\theta} V} d^{\theta} V = \mathbf{0} \quad (1.2.17)$$

Για να διευκολυνθούμε στην ανάλυση, ορίζουμε δύο επιπλέον μεγέθη, τον ελκυστή ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ${}^{\theta} \mathbf{t}({}^{\theta} \mathbf{n})$ και το διάνυσμα των μαζικών δυνάμεων ανά μονάδα απαραμόρφωτου όγκου ${}^{\theta} \mathbf{f}$ ως εξής:

$${}^{\theta} \mathbf{t}({}^{\theta} \mathbf{n}) = \lim_{d^{\theta} A \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}}{d^{\theta} A} \quad (1.2.18\alpha)$$

$${}^{\theta} \mathbf{f} = \lim_{d^{\theta} V \rightarrow 0} \frac{d^I \mathbf{p}_f}{d^{\theta} V} \quad (1.2.18\beta)$$

Από τους ορισμούς (1.2.1) και (1.2.18α) προκύπτει κατευθείαν η βασική ιδιότητα

$${}^{\theta} \mathbf{t}({}^{\theta} \mathbf{n}) d^{\theta} A = {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) d^I A \Rightarrow {}^{\theta} \mathbf{t}({}^{\theta} \mathbf{n}) = {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) \frac{d^I A}{d^{\theta} A} \quad (1.2.19\alpha)$$

καθώς επίσης από τους ορισμούς (1.2.3) και (1.2.18β) λαμβάνουμε

$${}^{\theta} \mathbf{f} = {}^I \mathbf{f} \frac{d^I V}{d^{\theta} V} \quad \text{ή} \quad {}^{\theta} \mathbf{f} = J {}^I \mathbf{f} \quad (1.2.19\beta)$$

αφού από την (1.1.27) έχουμε ότι $d^I V = J d^{\theta} V$. Η εξίσωση ισορροπίας (1.2.17) μετασχηματίζεται στην

$$\int_{{}^{\theta} A} {}^{\theta} \mathbf{t}({}^{\theta} \mathbf{n}) d^{\theta} A + \int_{{}^{\theta} V} {}^{\theta} \mathbf{f} d^{\theta} V = \mathbf{0} \quad (1.2.20)$$

Η σχέση (1.2.19α) δίνει

$${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = {}^I \mathbf{t}({}^I \mathbf{n}) \frac{d^I A}{d^0 A} \Rightarrow {}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = [{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \cdot {}^I \mathbf{n} \frac{d^I A}{d^0 A} \quad (1.2.21)$$

και με τη βοήθεια της (1.1.42) που συνδέει την απαραμόρφωτη με την παραμορφωμένη επιφάνεια, τελικά λαμβάνουμε

$${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = J [{}^I \boldsymbol{\sigma}]^T \cdot [{}^I \mathbf{X}]^{-T} \cdot {}^0 \mathbf{n} \quad \text{ή} \quad {}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = J [{}^I \boldsymbol{\sigma}] \cdot [{}^I \mathbf{X}]^{-T} \cdot {}^0 \mathbf{n} \quad (1.2.22)$$

αφού ο τανυστής τάσεων Cauchy είναι συμμετρικός.

Ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff $\begin{bmatrix} {}^I \mathbf{P} \\ {}^0 \end{bmatrix}$ ορίζεται ως

$$\begin{bmatrix} {}^I \mathbf{P} \\ {}^0 \end{bmatrix} = J [{}^I \boldsymbol{\sigma}] \cdot [{}^I \mathbf{X}]^{-T} \quad (1.2.23)$$

Από την (1.2.22) είναι φανερό ότι ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff συνδέει το κάθετο διάνυσμα ${}^0 \mathbf{n}$ της (τυχούσας) απαραμόρφωτης επιφάνειας $d^0 A$ με τον ελκυστή ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας ${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n})$, δηλαδή ισχύει

$${}^I \mathbf{t}({}^0 \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} {}^I \mathbf{P} \\ {}^0 \end{bmatrix} \cdot {}^0 \mathbf{n} \quad (1.2.24)$$

Η εξ. ισορροπίας (1.2.20) γράφεται συναρτησί του τανυστή $\begin{bmatrix} {}^I \mathbf{P} \\ {}^0 \end{bmatrix}$ ως

$$\int_{{}^0 A} \begin{bmatrix} {}^I \mathbf{P} \\ {}^0 \end{bmatrix} \cdot {}^0 \mathbf{n} d^0 A + \int_{{}^0 V} {}^I \mathbf{f} d^0 V = \mathbf{0} \quad (1.2.25)$$

και με τη βοήθεια του θεωρήματος απόκλισης Gauss λαμβάνουμε

$$\int_{{}^0 V} \mathbf{div} \left(\begin{bmatrix} {}^I \mathbf{P} \\ {}^0 \end{bmatrix} \right) d^0 V + \int_{{}^0 V} {}^I \mathbf{f} d^0 V = \mathbf{0} \Rightarrow \int_{{}^0 V} \left[\mathbf{div} \left(\begin{bmatrix} {}^I \mathbf{P} \\ {}^0 \end{bmatrix} \right) + {}^I \mathbf{f} \right] d^0 V = \mathbf{0} \quad (1.2.26)$$

Επειδή η ισορροπία πρέπει να ισχύει ανεξαρτήτως του όγκου ${}^0 V$ που εξετάζουμε, η τελική μορφή της εξίσωσης ισορροπίας σε διαφορική μορφή θα είναι η

$$\mathbf{div} \left(\begin{bmatrix} {}^I \mathbf{P} \\ {}^0 \end{bmatrix} \right) + {}^I \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.2.27)$$

ή με αναλυτική γραφή έχουμε το παρακάτω σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων (παραλείπονται για εποπτικούς λόγους οι αριστεροί ενδείκτες στα ${}^I P_{ij}$)

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{13}}{\partial x_3} + {}^I f_1 = 0 \quad (1.2.28\alpha)$$

$$\frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_3} + {}^I f_2 = 0 \quad (1.2.28\beta)$$

$$\frac{\partial P_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{33}}{\partial x_3} + {}^1f_3 = 0 \quad (1.2.28\gamma)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι με τον 1ο τανυστή Piola – Kirchhoff μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της αρχικής διαμόρφωσης ή με άλλα λόγια να χρησιμοποιήσουμε περιγραφή Lagrange. Επίσης από την (1.2.23) καθίσταται σαφές ότι ο συγκεκριμένος τανυστής (σε αντίθεση με τον τανυστή Cauchy) δεν είναι κατ' ανάγκην συμμετρικός αφού αποτελεί γινόμενο ενός συμμετρικού τανυστή και της βαθμίδας παραμόρφωσης η οποία δεν είναι κατ' ανάγκη συμμετρική.

1.2.5 Η αρχή δυνατών έργων

Προτού ορίσουμε τον 2ο τανυστή Piola – Kirchhoff που είναι απαραίτητος στη μελέτη της μη γραμμικής συμπεριφοράς των παραμορφώσιμων σωμάτων, πρέπει να διατυπώσουμε την αρχή δυνατών έργων που αποτελεί τη βάση της αριθμητικής αντιμετώπισης πολλών προβλημάτων της μηχανικής.

Η αρχή των δυνατών έργων αποτελεί μία εναλλακτική διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας που διέπουν τη συμπεριφορά των σωμάτων. Το βασικό πλεονέκτημά της έναντι των εξισώσεων ισορροπίας που έχουν ήδη διατυπωθεί είναι ότι πρόκειται για βαθμωτή εξίσωση, σε αντίθεση με τις εξισώσεις που έχουμε ήδη εξετάσει που είναι σε διανυσματική μορφή.

Θεωρούμε ένα σώμα στην παραμορφωμένη του κατάσταση τη χρονική στιγμή $t = t_1$. Για τον τυχαίο όγκο 1V που αποκόπτουμε από το σώμα, έχουμε ήδη διατυπώσει την εξίσωση ισορροπίας σε ολοκληρωτική μορφή (εξ. (1.2.21)):

$$\int_V \left[\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \right) + {}^1\mathbf{f} \right] d^1V = \mathbf{0} \Rightarrow \int_V \left[\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \right) + {}^1\mathbf{f} \right] d^1V = \mathbf{0} \quad (1.2.29)$$

Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο πεδίο μετατοπίσεων (στο χώρο που καταλαμβάνει το σώμα στην τρέχουσα διαμόρφωση)

$$\left(\delta^1 \mathbf{r} \right)^T = \left(\delta^1 u_1, \delta^1 u_2, \delta^1 u_3 \right) \quad (1.2.30)$$

το οποίο ωστόσο σέβεται τις κινηματικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, τότε λαμβάνουμε την ασθενή μορφή της διανυσματικής εξίσωσης ισορροπίας (1.2.29)

$$\int_V \left[\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \right) + {}^1\mathbf{f} \right]^T \cdot \delta^1 \mathbf{r} d^1V = 0 \quad (1.2.31)$$

όπου στα παραπάνω το $\delta(\cdot)$ αποτελεί το γνωστό τελεστή δ του λογισμού των μεταβολών (calculus of variations). Πρέπει να τονιστεί ότι η εξίσωση (1.2.31) είναι βαθμωτή μιας και στο ολοκλήρωμα έχουμε εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\mathbf{div} \left(\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta^1 \mathbf{r} \right) = \left[\mathbf{div} \left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right] \right]^T \cdot \delta^1 \mathbf{r} + \mathbf{tr} \left[\left[{}^1\boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \left[{}^1\nabla \delta^1 \mathbf{r} \right] \right] \quad (1.2.32)$$

η εξ. (1.2.31) μετασχηματίζεται στην εξίσωση (1.2.33)

$$\int_{V'} \left\{ \operatorname{div}([\sigma'] \cdot \delta' \mathbf{r}) - \operatorname{tr}([\sigma']^T \cdot [{}^1\nabla \delta' \mathbf{r}]) + \mathbf{f}'^T \cdot \delta' \mathbf{r} \right\} d'V = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{V'} \left\{ \operatorname{div}([\sigma'] \cdot \delta' \mathbf{r}) + \mathbf{f}'^T \cdot \delta' \mathbf{r} \right\} d'V = \int_{V'} \operatorname{tr}([\sigma']^T \cdot [{}^1\nabla \delta' \mathbf{r}]) d'V \quad (1.2.33)$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος απόκλισης Gauss για το αριστερά μέλος της παραπάνω εξίσωσης, λαμβάνουμε

$$\int_{A'} \left\{ ([\sigma'] \cdot \mathbf{n}')^T \cdot \delta' \mathbf{r} \right\} d'A + \int_{V'} [\mathbf{f}'^T \cdot \delta' \mathbf{r}] d'V = \int_{V'} \operatorname{tr}([\sigma']^T \cdot [{}^1\nabla \delta' \mathbf{r}]) d'V \quad (1.2.34\alpha)$$

ή μπορούμε εναλλακτικά να γράψουμε, με χρήση της σχέσης (1.2.8)

$$\int_{A'} [\mathbf{t}(\mathbf{n}')^T \cdot \delta' \mathbf{r}] d'A + \int_{V'} [\mathbf{f}'^T \cdot \delta' \mathbf{r}] d'V = \int_{V'} \operatorname{tr}([\sigma']^T \cdot [{}^1\nabla \delta' \mathbf{r}]) d'V \quad (1.2.34\beta)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, που καλείται **εξίσωση χωρικού δυνατού έργου** (spatial virtual work equation), το αριστερά μέλος καλείται χωρικό δυνατό εξωτερικό έργο (spatial external virtual work) και συμβολίζεται με $\delta' W_{ext}$ ενώ το δεξιά μέλος καλείται χωρικό δυνατό εσωτερικό έργο (spatial internal virtual work) και συμβολίζεται με $\delta' W_{int}$.

Εξετάζοντας τη διατύπωση της αρχής δυνατών έργων, συμπεραίνουμε ότι οι παραπάνω χαρακτηρισμοί είναι εύστοχοι αφού στην ουσία οι ποσότητες που υπεισέρχονται στα ολοκληρώματα είναι έργα επιφανειακών και μαζικών δράσεων ανηγμένες ως προς τις επιφάνειες και τους όγκους επί των οποίων ασκούνται αντίστοιχα. Ο όρος «χωρικό» δε, χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι τα έργα εκφράζονται συναρτήσει της τρέχουσας διαμόρφωσης η οποία κάνει χρήση των χωρικών μεταβλητών θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3 (περιγραφή Euler).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αναλυτική μορφή του $[{}^1\nabla \delta' \mathbf{r}]$ είναι ο πίνακας

$${}^1\nabla \delta' \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial' \delta u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial' \delta u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial' \delta u_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial' \delta u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial' \delta u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial' \delta u_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial' \delta u_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial' \delta u_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial' \delta u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (1.2.35)$$

ο οποίος, όπως παρατηρούμε, εκφράζεται επίσης συναρτήσει των μεταβλητών θέσης της τρέχουσας, και όχι της αρχικής, διαμόρφωσης. Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο δεξιά μέλος της (1.2.34β) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα συμμετρίας

$$[\sigma']^T = [\sigma'], \text{ λαμβάνουμε}$$

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \left[{}^I \nabla \delta^I \mathbf{r} \right] \right] = & \sigma_{11} \cdot \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_1} + \sigma_{22} \cdot \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_2} + \sigma_{33} \cdot \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_3} + \sigma_{12} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_1} \right) + \\ & + \sigma_{13} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_1} \right) + \sigma_{23} \cdot \left(\frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

όπου στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης παραλήφθηκαν οι αριστεροί ενδείκτες. Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\delta^I W_{int} = \int_{V'} \text{tr} \left[\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right]^T \cdot \delta \left(\left[{}^I \boldsymbol{\varepsilon} \right] \right) \right] d^I V \quad (1.2.37)$$

όπου

$$\left[{}^I \boldsymbol{\varepsilon} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (1.2.38)$$

είναι ο απειροστικός τανυστής παραμορφώσεων εκτεφρασμένος ως προς την τρέχουσα διαμόρφωση $t = t_1$. Το ζεύγος $\left[{}^I \boldsymbol{\sigma} \right], \left[{}^I \boldsymbol{\varepsilon} \right]$ καλείται συζυγές ως προς το έργο (work conjugate) αναφορικά με τον (παραμορφωμένο) όγκο του σώματος της τρέχουσας διαμόρφωσης.

1.2.6 Ορισμός του δεύτερου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff

Για να εκφράσουμε το δυνατό εσωτερικό έργο συναρτήσει των υλικών μεταβλητών θέσης x_1, x_2, x_3 της αρχικής διαμόρφωσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο τανυστή Piola – Kirchhoff που έχει ήδη οριστεί. Πράγματι, ξεκινώντας από την αρχή δυνατών έργων της σχέσης (1.2.34β) και εκτελώντας παρόμοιους μετασχηματισμούς με αυτούς της ενότητας 1.2.4 καταλήγουμε στην παρακάτω αναδιατύπωση της αρχής δυνατών έργων:

$$\int_{A^0} \left[{}^I \mathbf{t} \left({}^0 \mathbf{n} \right)^T \cdot \delta^I \mathbf{r} \right] d^0 A + \int_{V^0} \left[{}^I \mathbf{f}^T \cdot \delta^I \mathbf{r} \right] d^0 V = \int_{V^0} \text{tr} \left[\left[{}^I \mathbf{P} \right]^T \cdot \delta \left[{}^I \mathbf{X} \right] \right] d^0 V \quad (1.2.39)$$

Είναι προφανές ότι καταφέραμε να εκφράσουμε το $\delta^I W_{int}$ ως προς την αρχική διαμόρφωση, δηλαδή ισχύει

$$\delta^1 W_{int} = \int_{\overset{0}{V}} \mathbf{tr} \left[\left[\overset{1}{\mathbf{P}} \right]^T \cdot \delta \left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right] \right] d^0 V \quad (1.2.40)$$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής $\left[\overset{1}{\mathbf{P}} \right]$ μαζί με τη βαθμίδα παραμόρφωσης $\left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right]$ αποτελούν συζυγές ζεύγος.

Ο δεύτερος τανυστής Piola – Kirchhoff επινοήθηκε στην προσπάθεια να ευρεθεί ο συζυγής τανυστής τάσεων του τανυστή παραμορφώσεων Green $\left[\overset{1}{\boldsymbol{\varepsilon}}^G \right]$. Ο τανυστής Green έχει σημαντική φυσική σημασία (εκφράζει τις σχετικές μεταβολές μηκών και γωνιών των ινών του σώματος) και για αυτόν το λόγο το εσωτερικό δυνατό έργο είναι πλεονεκτικότερο να εκφραστεί συναρτήσει του τανυστή Green αντί της βαθμίδας παραμόρφωσης. Εξάλλου, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η συσχέτιση τάσεων – παραμορφώσεων (τουλάχιστον στην περίπτωση της θεώρησης μεγάλων μετατοπίσεων αλλά μικρών παραμορφώσεων) πραγματοποιείται με αυτόν τον τανυστή παραμορφώσεων, γεγονός που καθιστά απαραίτητη την εύρεση του συζυγούς ζεύγους του.

Για να ορίσουμε το δεύτερο τανυστή Piola – Kirchhoff, αρχικά ορίζουμε ένα διάνυσμα «ψευδοδύναμης» $d^0 \mathbf{p}$ με το οποίο αντιστοιχίζεται η τρέχουσα ακούμενη δύναμη $d^1 \mathbf{p}$ στην αρχική διαμόρφωση ως εξής:

$$d^0 \mathbf{p} = \left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right]^{-1} \cdot d^1 \mathbf{p} \quad (1.2.41)$$

Από τις σχέσεις (1.2.24) και (1.2.18α) εξάγουμε κατευθείαν ότι

$$d^0 \mathbf{p} = \left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right]^{-1} \cdot \left[\overset{1}{\mathbf{P}} \right] \cdot {}^0 \mathbf{n} d^0 A \quad (1.2.42\alpha)$$

ενώ από τον ορισμό του $\left[\overset{1}{\mathbf{P}} \right]$ (σχέση (1.2.23)) έχουμε

$$d^0 \mathbf{p} = \left\{ J \left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right]^{-1} \cdot \left[\overset{1}{\boldsymbol{\sigma}} \right] \cdot \left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right]^{-T} \right\} \cdot {}^0 \mathbf{n} d^0 A \quad (1.2.42\beta)$$

Πλέον, μπορούμε να ορίσουμε τον **2ο τανυστή Piola – Kirchhoff** $\left[\overset{1}{\mathbf{S}} \right]$ ως το μητρώο που συνδέει την απαραμόρφωτη επιφάνεια ${}^0 \mathbf{n} d^0 A$ με την «ψευδοδύναμη» $d^0 \mathbf{p}$. Από την παραπάνω σχέσεις έπεται κατευθείαν ότι

$$\left[\overset{1}{\mathbf{S}} \right] = J \left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right]^{-1} \cdot \left[\overset{1}{\boldsymbol{\sigma}} \right] \cdot \left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right]^{-T} \quad \text{ή} \quad \left[\overset{1}{\mathbf{S}} \right] = \left[\overset{1}{\mathbf{X}} \right]^{-1} \cdot \left[\overset{1}{\mathbf{P}} \right] \quad (1.2.43\alpha-\beta)$$

Από τον ορισμό του, συμπεραίνουμε ότι ο τανυστής $\left[\overset{1}{\mathbf{S}} \right]$ είναι συμμετρικός (σε αντίθεση με τον $\left[\overset{1}{\mathbf{P}} \right]$), δηλαδή θα έχουμε

$$\left[\overset{1}{\mathbf{S}} \right]^T = \left[\overset{1}{\mathbf{S}} \right] \quad (1.2.44)$$

Ξεκινώντας από τη διατύπωση της εξ. (1.2.40) για το εσωτερικό δυνατό έργο και κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^G \right] = \frac{1}{2} \left\{ \left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{X} \right]^T \cdot \left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{X} \right] - [\mathbf{I}] \right\} \quad (1.2.45)$$

όπου

$[\mathbf{I}]$: ο ταυτοτικός πίνακας διαστάσεων 3×3

καταλήγουμε έπειτα από κάποια άλγεβρα στην παρακάτω έκφραση για το εσωτερικό δυνατό έργο:

$$\delta {}^I W_{int} = \int_{{}^0V} \text{tr} \left[\left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{S} \right]^T \cdot \delta \left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^G \right] \right] d {}^0V \quad (1.2.46)$$

Συνεπώς, οι τανυστές $\left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{S} \right]$, $\left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^G \right]$ αποτελούν συζυγές ζεύγος, ενώ η αρχή δυνατών έργων διατυπώνεται συναρτήσει των συγκεκριμένων τανυστών ως εξής:

$$\int_{{}^0A} \left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{t} \left({}^0 \mathbf{n} \right)^T \cdot \delta {}^I \mathbf{r} \right] d {}^0A + \int_{{}^0V} \left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{f}^T \cdot \delta {}^I \mathbf{r} \right] d {}^0V = \int_{{}^0V} \text{tr} \left[\left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{S} \right]^T \cdot \delta \left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^G \right] \right] d {}^0V \quad (1.2.47)$$

Στην παραπάνω σχέση απαιτείται προσοχή να μην εκφράσουμε λανθασμένα το εξωτερικό δυνατό έργο συναρτήσει του $\left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{S} \right]$. Ο ελκυστής ${}^I \mathbf{t} \left({}^0 \mathbf{n} \right)$ που υπεισέρχεται στο $\delta {}^I W_{ext}$ συσχετίζεται με τον 1ο τανυστή Piola – Kirchhoff $\left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{P} \right]$ και όχι με τον $\left[\begin{matrix} {}^I \\ {}_0 \end{matrix} \mathbf{S} \right]$ όπως εξάλλου υποδεικνύει και η σχέση (1.2.24).

1.2.7 Φυσική σημασία των τανυστών τάσεων

Ο τανυστής τάσεων Cauchy αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε παραμορφωμένες επιφάνειες της τρέχουσας διαμόρφωσης. Για παράδειγμα η συνιστώσα ${}^I \sigma_{11}$ του τανυστή είναι **η κάθετη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται επί της (τρέχουσας) στοιχειώδους επιφάνειας $d {}^I A$ που είναι κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της τρέχουσας διαμόρφωσης διαιρεμένη με το εμβαδόν της $d {}^I A$.**

Ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε απαραμόρφωτες επιφάνειες της αρχικής διαμόρφωσης. Για παράδειγμα η συνιστώσα ${}^I P_{11}$ του τανυστή είναι **η συνιστώσα της δύναμης που είναι παράλληλη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης η οποία ασκείται επί της στοιχειώδους επιφάνειας $d {}^I A$ διαιρεμένη με το εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας $d {}^0 A$. Η αρχική επιφάνεια $d {}^0 A$ είναι απαραίτητως κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης, ωστόσο η τρέχουσα επιφάνεια $d {}^I A$ δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετη στον άξονα.**

Ο 2ος τανυστής Piola – Kirchhoff αναφέρεται σε δυνάμεις της τρέχουσας διαμόρφωσης ανηγμένες σε απαραμόρφωτες επιφάνειες της αρχικής διαμόρφωσης. Η

διαφορά με τον 1ο τανυστή Piola – Kirchhoff έγκειται στο ότι η ανάλυση της τρέχουσας δύναμης σε συνιστώσες γίνεται ως προς διαφορετικό σύστημα αναφοράς. Έτσι, για παράδειγμα η συνιστώσα ${}^0S_{11}$ του τανυστή είναι η **κάθετη συνιστώσα της δύναμης** που ασκείται επί της (τρέχουσας) στοιχειώδους επιφάνειας d^1A διαιρεμένη με το εμβαδόν της αρχικής επιφάνειας d^0A . **Η αρχική επιφάνεια είναι απαραίτητος κάθετη στον άξονα Ox_1 του συστήματος αναφοράς της αρχικής διαμόρφωσης**, ωστόσο η τρέχουσα επιφάνεια d^1A δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετη στον άξονα.

Συμπερασματικά, ο 2ος τανυστής Piola – Kirchhoff «παρακολουθεί» τις στροφές (στροφή στερεού σώματος και διατμητικές παραμορφώσεις) που υφίσταται κατά την παραμόρφωση, το υπό εξέταση στοιχείο όγκου ενώ ο τανυστής Cauchy και ο 1ος τανυστής Piola – Kirchhoff ορίζονται πάντα με βάση τους άξονες του συστήματος αναφοράς της εκάστοτε διαμόρφωσης. Η συγκεκριμένη ιδιότητα του 2ου τανυστή Piola – Kirchhoff τον καθιστά πολύ χρήσιμο εργαλείο στην αντιμετώπιση των μη γραμμικών προβλημάτων της μηχανικής παραμορφώσιμων σωμάτων.

1.2.8 Τανυστής τάσεων Cauchy μικρών μετατοπίσεων

Μέχρι στιγμής σ' όλες τις εκφράσεις των εξισώσεων ισορροπίας που έχουμε εξάγει, δεν έχουμε κάνει καμία υπόθεση ως προς το μέγεθος των μετατοπίσεων ή των παραμορφώσεων. Στην περίπτωση που οι μετατοπίσεις είναι μικρές, η διαφορά μεταξύ της αρχικής διαμόρφωσης (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3) και της τελικής διαμόρφωσης (μεταβλητές θέσης ξ_1, ξ_2, ξ_3) θεωρείται πολύ μικρή, συνεπώς ο τανυστής τάσεων Cauchy μπορεί να εισαχθεί στις εξισώσεις ισορροπίας εκπεφρασμένος ως προς την αρχική διαμόρφωση. Έτσι, οι εξισώσεις (1.2.13) γράφονται για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων ως εξής:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + {}_0f_1 = 0 \quad (1.2.48\alpha)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + {}_0f_2 = 0 \quad (1.2.48\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + {}_0f_3 = 0 \quad (1.2.48\gamma)$$

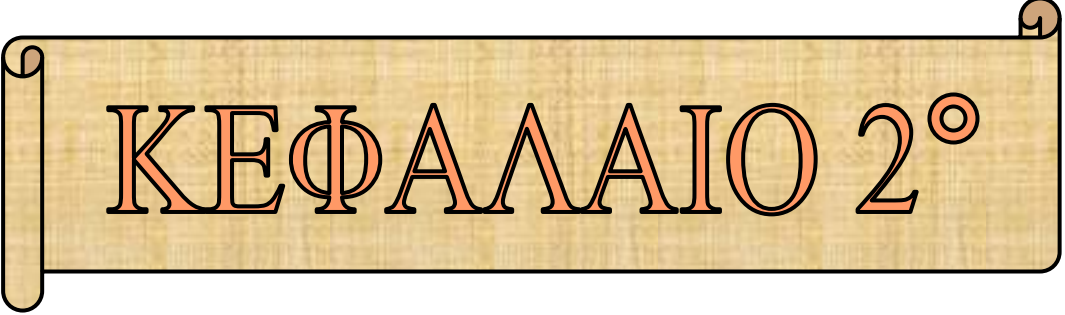
ενώ οι συνοριακές συνθήκες (εξ. (1.2.7)) διαμορφώνονται εδώ ως

$${}_0t_1 = \sigma_{11} \cdot {}_0n_1 + \sigma_{21} \cdot {}_0n_2 + \sigma_{31} \cdot {}_0n_3 \quad (1.2.49\alpha)$$

$${}_0t_2 = \sigma_{12} \cdot {}_0n_1 + \sigma_{22} \cdot {}_0n_2 + \sigma_{32} \cdot {}_0n_3 \quad (1.2.49\beta)$$

$${}_0t_3 = \sigma_{13} \cdot {}_0n_1 + \sigma_{23} \cdot {}_0n_2 + \sigma_{33} \cdot {}_0n_3 \quad (1.2.49\gamma)$$

Η παραγωγή των συνιστωσών του τανυστή τάσεων Cauchy πραγματοποιείται πλέον ως προς γνωστές μεταβλητές θέσης και όχι ως προς άγνωστες μεταβλητές της τρέχουσας διαμόρφωσης, γεγονός που συνιστά σημαντική απλοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟΙ
ΝΟΜΟΙ ΥΛΙΚΩΝ

2.1 Ανάγκη θεώρησης καταστατικών νόμων για τα υλικά

Με βάση τα προηγούμενα κεφάλαια έχουμε εξάγει συνολικά:

- 6 εξισώσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων (σχ. (1.1.12) για τις παραμορφώσεις Green ή σχ. (1.1.45) για τον απειροστικό τανυστή παραμορφώσεων)
- 3 διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (σχ. (1.2.13) για τον τανυστή τάσεων Cauchy ή σχ. (1.2.28) για τον 1ο τανυστή Piola – Kirchhoff)

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζονται στο σύνολο του όγκου που καταλαμβάνει το σώμα (τόσο στην αρχική όσο και σε οποιαδήποτε διαμόρφωση που εξετάζουμε) ενώ στο σύνορο του σώματος ισχύουν ορισμένες συνοριακές συνθήκες οι οποίες μπορεί να είναι:

- κινηματικές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να δίνονται οι μετατοπίσεις ή οι παραμορφώσεις σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου
- φυσικές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να δίνονται οι δράσεις (επιφανειακές τάσεις) που ασκούνται σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου
- μικτές συνοριακές συνθήκες δηλαδή να υπάρχει δεδομένη συσχέτιση μεταξύ δράσεων και παραμορφώσεων (ή μετατοπίσεων) σε τμήμα ή στο σύνολο του συνόρου

Προκειμένου να επιλύσουμε ένα τυπικό πρόβλημα πρέπει να προσδιορίσουμε για κάθε χρονική στιγμή t , σε κάθε σημείο του σώματος:

- 3 συνιστώσες μετατοπίσεων u_1, u_2, u_3
- 6 ανεξάρτητες συνιστώσες παραμορφώσεων $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$
- 6 ανεξάρτητες συνιστώσες τάσεων π.χ του 2ου τανυστή Piola – Kirchhoff $S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12} = S_{21}, S_{13} = S_{31}, S_{23} = S_{32}$. Με τον προσδιορισμό του πεδίου μετατοπίσεων μπορούμε να υπολογίσουμε τη βαθμίδα παραμόρφωσης $[\mathbf{X}]$. Συνεπώς μπορούμε με τον υπολογισμό κάποιου τανυστή τάσεως, εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετασχηματισμού που έχουν δοθεί στο κεφ. 1.2, να προσδιορίσουμε οποιονδήποτε τανυστή τάσεως επιθυμούμε.

Συνολικά έχουμε 15 αγνώστους ενώ διατίθενται 9 εξισώσεις, επομένως το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί και παραμένει αόριστο. Η αοριστία αίρεται αν θεωρήσουμε 6 επιπλέον εξισώσεις (που συνδέουν τα άγνωστα μεγέθη μεταξύ τους). Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει ξεχωριστά τις παραμορφώσεις ενός σώματος και τις δράσεις που ασκούνται σε αυτό. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία διευκολύνει σημαντικά την κατανόηση του προβλήματος αφού η ανάλυση των παραμορφώσεων βασίζεται αποκλειστικά σε γεωμετρικές θεωρήσεις ενώ αυτή των τάσεων στους θεμελιώδεις νόμους της Νευτώνειας Μηχανικής. Ωστόσο από τη φυσική μας διαίσθηση γίνεται αντιληπτό ότι οι δράσεις και οι παραμορφώσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται. Είναι αδύνατο να παραμορφωθεί κάποιο σώμα χωρίς να ασκηθεί επάνω του κάποια δράση. Είναι δε προφανές ότι υπάρχει

πολύ μεγάλη ποικιλία στον τρόπο με τον οποίο ανταποκρίνονται τα διάφορα υλικά στις επιβαλλόμενες δράσεις.

Η ακριβής θεωρητική αντιμετώπιση του προσδιορισμού των σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων θα απαιτούσε τη μελέτη των ιδιοτήτων του υλικού σε μοριακό επίπεδο. Κάτι τέτοιο ωστόσο είναι εξαιρετικά δυσχερές. Έτσι αναπτύχθηκαν φαινομενολογικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων όπου το υλικό εξετάζεται σε μακροσκοπική κλίμακα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση βασίζεται αφενός σε αξιωματικές θεωρήσεις και μαθηματικές απλοποιήσεις, αφετέρου στην πειραματική διερεύνηση των ιδιοτήτων του υλικού.

2.2 Θεωρία ελαστικότητας

Στη γενικότερη περίπτωση, η επιβολή δράσεων σε κάποιο σώμα θα προκαλέσει εκτός από παραμορφώσεις και μεταβολή θερμοκρασίας, και αντιστρόφως. Εδώ θα εξεταστεί μόνο η υποπερίπτωση των ισόθερων μεταβολών, δηλαδή οι δράσεις και οι παραμορφώσεις θεωρούνται ανεξάρτητες της θερμοκρασίας.

Ας εξετάσουμε την παραμόρφωση που υφίσταται ένα στοιχείο σώματος από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική. Το υλικό του στοιχείου καλείται (ιδεατά) ελαστικό (ideally elastic) όταν η ενέργεια που απαιτείται για την παραμόρφωση του είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η μετάβαση από την αρχική (παραμορφωσιακή) κατάσταση στην τελική. Άμεσες συνέπειες αυτού του ορισμού είναι οι εξής:

- Αφού οι δράσεις εξαρτώνται από τις παραμορφώσεις, έπεται ότι και οι δράσεις είναι ανεξάρτητες από τη μετάβαση από την αρχική στην τελική κατάσταση. Επομένως οι δράσεις εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμορφώσεις της κατάστασης που εξετάζουμε και είναι ανεξάρτητες από την ιστορία της φόρτισης.
- Σε μια κλειστή παραμορφωσιακή ή τασική όδευση, το συνολικό έργο των δράσεων είναι μηδενικό. Σαν αποτέλεσμα, αν φορτίσουμε ένα σώμα και στη συνέχεια το αποφορτίσουμε, το σώμα θα επιστρέψει στην ίδια ακριβώς κατάσταση που βρισκόταν πριν τη φόρτιση ανεξαρτήτως του τρόπου με τον οποίο θα συμβεί η αποφόρτιση.

Υπάρχουν διάφορες κλάσεις ελαστικών υλικών όπως υπερελαστικά, υποελαστικά, βισκοελαστικά κλπ. Στο παρόν πόνημα θα εξετάσουμε μόνο την κλάση των υπερελαστικών υλικών. Ένα ελαστικό υλικό χαρακτηρίζεται ως **υπερελαστικό** (hyperelastic) ή Green – ελαστικό (Green – elastic) όταν υπάρχει συνάρτηση $F = F\left({}^t_0\varepsilon_{11}, {}^t_0\varepsilon_{22}, {}^t_0\varepsilon_{33}, {}^t_0\varepsilon_{21} = {}^t_0\varepsilon_{12}, {}^t_0\varepsilon_{31} = {}^t_0\varepsilon_{13}, {}^t_0\varepsilon_{32} = {}^t_0\varepsilon_{23}, x_1, x_2, x_3\right)$, που εξαρτάται από τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green και την αρχική θέση (x_1, x_2, x_3) , τέτοια ώστε να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$d''W = F\left({}^t_0\varepsilon_{11}, {}^t_0\varepsilon_{22}, {}^t_0\varepsilon_{33}, {}^t_0\varepsilon_{12}, {}^t_0\varepsilon_{13}, {}^t_0\varepsilon_{23}, x_1, x_2, x_3\right) \cdot d'{}^0V \quad (2.2.1)$$

όπου

$d'{}^0V = d'x_1 d'x_2 d'x_3$: το απειροστό στοιχείο όγκου στην αρχική απαραμόρφωτη διαμόρφωση

${}^t_0\varepsilon_{ij}$: οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green

$d''W$: Η συνολική ενέργεια (έργο) που απαιτείται για την (ισόθερμη) παραμόρφωση του στοιχειώδους όγκου d^0V του στοιχείου.

Η συνάρτηση F καλείται συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης ή τροπικής ενέργειας ανά μονάδα αρχικού όγκου (strain energy function per unit initial volume). Στην περίπτωση που η F λαμβάνει τη μορφή

$$d''W = F\left({}_0^t\varepsilon_{11}, {}_0^t\varepsilon_{22}, {}_0^t\varepsilon_{33}, {}_0^t\varepsilon_{12}, {}_0^t\varepsilon_{13}, {}_0^t\varepsilon_{23}\right) \cdot d^0V \quad (2.2.2)$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών θέσης, τότε το υλικό καλείται ομογενές (homogeneous). Στο παρόν πόνημα θα ασχοληθούμε μόνο με ομογενή υλικά. Τονίζουμε ότι η μορφή της συνάρτησης F παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής που εξετάζουμε την παραμόρφωση του σώματος αφού ο χρόνος εισάγεται μόνο έμμεσα στη σχέση (2.2.1) ή (2.2.2) μέσω των συνιστωσών της παραμόρφωσης.

Από τη σχ. (1.2.46) του προηγούμενου κεφαλαίου έχουμε εξάγει ότι ο 2ος τανυστής Piola – Kirchhoff και ο τανυστής παραμορφώσεων Green είναι συζυγείς ως προς το έργο επομένως για μια απειροστή μεταβολή $d(\cdot)$ ως προς το χρόνο των παραμορφωσιακών μεγεθών, θα ισχύει

$$d(d''W) = \left({}_0^tS_{11} \cdot d{}_0^t\varepsilon_{11} + {}_0^tS_{22} \cdot d{}_0^t\varepsilon_{22} + \dots + {}_0^tS_{23} \cdot d{}_0^t\varepsilon_{23} + {}_0^tS_{32} \cdot d{}_0^t\varepsilon_{32}\right) d^0V \quad (2.2.3)$$

Από τη σχ. (2.2.2) με διαφορίση ως προς $d(\cdot)$, λαμβάνουμε

$$d(d''W) = \left(\frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{11}} d{}_0^t\varepsilon_{11} + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{22}} d{}_0^t\varepsilon_{22} + \dots + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{23}} d{}_0^t\varepsilon_{23} + \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{32}} d{}_0^t\varepsilon_{32}\right) d^0V \quad (2.2.4)$$

επομένως από τις σχ. (2.2.3) – (2.2.4) έπεται κατευθείαν ότι

$${}_0^tS_{ij} = \frac{\partial F}{\partial {}_0^t\varepsilon_{ij}}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.5\alpha-\zeta)$$

Οι 6 σχέσεις (2.2.5α-ζ) είναι οι ζητούμενες καταστατικές σχέσεις για ένα υπερελαστικό υλικό. Παρατηρούμε ότι η επιλογή συγκεκριμένης F αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό των καταστατικών σχέσεων που δίνουν τη δυνατότητα να επιλυθεί το πρόβλημα της ελαστικότητας (15 άγνωστοι με 15 διατιθέμενες σχέσεις).

Για να επιλέξουμε μια κατάλληλη μορφή της F , αρχικά θεωρούμε την πλέον γενική περίπτωση ανάπτυξης της σε δυναμοσειρά ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές της, ως εξής:

$$F = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(A_{ij} \cdot {}_0^t\varepsilon_{ij}\right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(B_{ijkl} \cdot {}_0^t\varepsilon_{ij} \cdot {}_0^t\varepsilon_{kl}\right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \left(C_{ijklmn} \cdot {}_0^t\varepsilon_{ij} \cdot {}_0^t\varepsilon_{kl} \cdot {}_0^t\varepsilon_{mn}\right) + \dots \quad (2.2.6)$$

όπου

$A_{ij}, B_{ijkl}, C_{ijklmn}, \dots$: Σταθεροί συντελεστές.

Από την παραπάνω σχέση παραλήφθηκαν αρνητικές δυνάμεις παραμορφώσεων μιας και για ${}^t_0\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$ θα λαμβάναμε $d'W \rightarrow \infty$ αποτέλεσμα που δεν έχει φυσικό νόημα. Ο σταθερός όρος παραλήφθηκε επίσης, αφού κατά τη μερική παραγωγή των σχ. (2.2.5) θα απαλειφθεί, επομένως δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό των τάσεων που μας ενδιαφέρει. Αντικαθιστώντας τη σχ. (2.2.6) στις σχ. (2.2.5) θα έχουμε

$${}^t_0S_{rs} = A + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(B_{rsij} \cdot {}^t_0\varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(C_{rsijkl} \cdot {}^t_0\varepsilon_{ij} \cdot {}^t_0\varepsilon_{kl} \right) + \dots \quad (2.2.7)$$

Εξετάζοντας την ειδική περίπτωση όπου στην απαραμόρφωτη κατάσταση δεν υπάρχει αρχική ένταση, θα πρέπει στην εξ. (2.2.6) να είναι

$$A = 0 \quad (2.2.8)$$

επομένως η εξ. (2.2.7) θα γραφτεί ως

$${}^t_0S_{rs} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(B_{rsij} \cdot {}^t_0\varepsilon_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(C_{rsijkl} \cdot {}^t_0\varepsilon_{ij} \cdot {}^t_0\varepsilon_{kl} \right) + \dots \quad (2.2.9)$$

Με την υπόθεση ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, θα είναι ${}^t_0\varepsilon_{ij} \ll 1$, $\forall i, j = 1, 2, 3$, επομένως οι μη γραμμικοί όροι της σχ. (2.2.9) που περιέχουν γινόμενα δύο ή περισσότερων συνιστωσών παραμορφώσεων μπορούν να αγνοηθούν. Συνεπώς καταλήγουμε στην παρακάτω γραμμική καταστατική σχέση τάσεων – παραμορφώσεων

$${}^t_0\mathbf{S} = [\mathbf{D}^e] \cdot {}^t_0\boldsymbol{\varepsilon}^G \quad (2.2.10)$$

όπου στην παραπάνω σχέση υιοθετήθηκε μητρικός – διανυσματικός συμβολισμός με:

$({}^t_0\mathbf{S})^T = ({}^t_0S_{11}, {}^t_0S_{22}, {}^t_0S_{33}, {}^t_0S_{12}, {}^t_0S_{13}, {}^t_0S_{23})$: Διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του 2ου τανυστή τάσεων Piola – Kirchhoff.

$({}^t_0\boldsymbol{\varepsilon}^G)^T = ({}^t_0\varepsilon_{11}, {}^t_0\varepsilon_{22}, {}^t_0\varepsilon_{33}, {}^t_0\gamma_{12} = 2{}^t_0\varepsilon_{12}, {}^t_0\gamma_{13} = 2{}^t_0\varepsilon_{13}, {}^t_0\gamma_{23} = 2{}^t_0\varepsilon_{23})$: Διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή παραμορφώσεων Green.

$[\mathbf{D}^e]$: καταστατικό μητρώο σταθερών συντελεστών d_{ij} , διαστάσεων 6×6 . Τα d_{ij} καλούνται ελαστικές σταθερές.

Ο παραπάνω θεμελιώδης καταστατικός νόμος είναι γνωστός ως **γενικευμένος νόμος του Hooke** (generalized Hooke's law). Στην περίπτωση που υιοθετηθεί ο επιπλέον περιορισμός των μικρών μετατοπίσεων τότε ο νόμος του Hooke μπορεί να διατυπωθεί ως

$${}^t_0\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^e] \cdot {}^t_0\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2.11)$$

όπου

$({}^t_0\boldsymbol{\sigma})^T = ({}^t_0\sigma_{11}, {}^t_0\sigma_{22}, {}^t_0\sigma_{33}, {}^t_0\sigma_{12}, {}^t_0\sigma_{13}, {}^t_0\sigma_{23})$: Διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή τάσεων Cauchy. Ο τανυστής εκφράζεται ως προς την αρχική διαμόρφωση μιας και η διαφορά αρχικής και τελικής διαμόρφωσης στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων αγνοείται.

$({}^t_0\boldsymbol{\varepsilon})^T = ({}^t_0\varepsilon_{11}, {}^t_0\varepsilon_{22}, {}^t_0\varepsilon_{33}, {}^t_0\gamma_{12} = 2{}^t_0\varepsilon_{12}, {}^t_0\gamma_{13} = 2{}^t_0\varepsilon_{13}, {}^t_0\gamma_{23} = 2{}^t_0\varepsilon_{23})$: Διάνυσμα που προκύπτει από τις ανεξάρτητες συνιστώσες του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων.

Στη γενικότερη περίπτωση το καταστατικό μητρώο $[\mathbf{D}^e]$ περιέχει $6 \times 6 = 36$ ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές k_{ij} που πρέπει να προσδιοριστούν. Τα διάφορα υλικά ωστόσο, συνήθως διαθέτουν διευθύνσεις συμμετρίας ως προς τις οποίες οι ελαστικές σταθερές να παραμένουν αμετάβλητες. Έτσι στην πλέον γενική περίπτωση όπου δεν υπάρχει καμία συμμετρία, τα υλικά χαρακτηρίζονται ως ανισότροπα (anisotropic). Υλικά με 3 επίπεδα συμμετρίας χαρακτηρίζονται ως ορθότροπα (orthotropic) ενώ στην περίπτωση όπου η μηχανική συμπεριφορά είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, το υλικό χαρακτηρίζεται ως ισότροπο (isotropic). Η ύπαρξη διευθύνσεων συμμετρίας οδηγεί σε συσχετίσεις των ελαστικών σταθερών μεταξύ τους με αποτέλεσμα να μειώνεται ο αριθμός των ανεξάρτητων k_{ij} που απαιτείται να υπολογιστούν.

Στο παρόν πόνημα θα μελετηθούν μόνο κατασκευές από **ισότροπο υλικό**. Με στοιχειώδεις γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, μπορεί να αποδειχτεί διαδοχικά για τη συγκεκριμένη περίπτωση, ότι για το μητρώο $[\mathbf{D}^e]$ ισχύουν τα εξής:

- Παραμένει αμετάβλητο σε οποιαδήποτε στροφή του συστήματος αναφοράς
- Είναι συμμετρικό δηλαδή ισχύει

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.12)$$

- Υπάρχουν μόνο 2 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές και το μητρώο δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$[\mathbf{D}^e] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (k_{11} - k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (k_{11} - k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot (k_{11} - k_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

Θέτοντας

$$k_{12} = \lambda \quad (2.2.14\alpha)$$

$$k_{11} - k_{12} = 2 \cdot \mu \quad (2.2.14\beta)$$

λαμβάνουμε τις (ανεξάρτητες) σταθερές του Lamé λ , μ (Lamé constants). Οι σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων μπορούν να αντιστραφούν και να ληφθούν οι παρακάτω εξισώσεις των παραμορφώσεων συναρτήσει των τάσεων:

$${}^t\varepsilon_{11} = \frac{I}{E} \cdot \left[{}^tS_{11} - \nu \cdot ({}^tS_{22} + {}^tS_{33}) \right] \quad (2.2.15\alpha)$$

$${}^t\varepsilon_{22} = \frac{I}{E} \cdot \left[{}^tS_{22} - \nu \cdot ({}^tS_{11} + {}^tS_{33}) \right] \quad (2.2.15\beta)$$

$${}^t\varepsilon_{33} = \frac{I}{E} \cdot \left[{}^tS_{33} - \nu \cdot ({}^tS_{11} + {}^tS_{22}) \right] \quad (2.2.15\gamma)$$

$$2 {}^t\varepsilon_{12} = {}^t\gamma_{12} = \frac{I}{G} \cdot {}^tS_{12}, \quad 2 {}^t\varepsilon_{13} = {}^t\gamma_{13} = \frac{I}{G} \cdot {}^tS_{13}, \quad 2 {}^t\varepsilon_{23} = {}^t\gamma_{23} = \frac{I}{G} \cdot {}^tS_{23} \quad (2.2.15\delta-\varepsilon-\zeta)$$

όπου

$$E = \frac{\mu \cdot (3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu)}{\lambda + \mu} : \text{ Το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο Young (elastic modulus,}$$

Young 's modulus)

$$G = \mu : \text{ Το μέτρο διάτμησης (shear modulus)}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + \mu)} : \text{ Ο λόγος του Poisson (Poisson 's ratio)}$$

Οι σταθερές E , G , ν φυσικά δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται μέσω της σχέσης

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.2.16)$$

2.3 Θεωρία πλαστικότητας

2.3.1 Γενικά

Ένα υλικό καλείται **ελαστοπλαστικό** (elastoplastic, inelastic) όταν το έργο παραμόρφωσης εξαρτάται από τον τρόπο μετάβασης από την αρχική (παραμορφωσιακή) κατάσταση στην τελική. Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι εξής:

- Οι σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων δεν είναι αμφιμονοσήμαντες όπως στην περίπτωση της ελαστικότητας αλλά εξαρτώνται από την ιστορία της φόρτισης.
- Σε μια κλειστή παραμορφωσιακή ή τασική όδευση, το συνολικό έργο των δράσεων είναι μη μηδενικό. Σαν αποτέλεσμα, αν φορτίσουμε ένα σώμα και στη συνέχεια το αποφορτίσουμε, το σώμα δε θα επιστρέψει στην αρχική παραμορφωσιακή κατάσταση και θα αναπτύξει παραμένουσες (μόνιμες) πλαστικές παραμορφώσεις.

Όταν το τασικό πεδίο καθορίζεται αποκλειστικά από το πεδίο των παραμορφώσεων και την ιστορία της φόρτισης, τότε αναφερόμαστε σε ελαστοπλαστική θεωρία ανεξάρτητη του ρυθμού (ταχύτητας) παραμόρφωσης (rate – independent elastoplasticity). Αν η συμπεριφορά του υλικού εξαρτάται και από το ρυθμό της παραμόρφωσης τότε αναφερόμαστε σε ελαστοπλαστική θεωρία εξαρτώμενη από το ρυθμό παραμόρφωσης (rate – dependent elastoplasticity, viscoplasticity). Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με την πρώτη περίπτωση ελαστοπλαστικού καταστατικού νόμου.

Ιστορικά, η **κλασική ελαστοπλαστική θεωρία** (ανεξάρτητη του ρυθμού των παραμορφώσεων) αναπτύχθηκε με την παραδοχή μικρών μετατοπίσεων – μικρών παραμορφώσεων, επομένως στα παρακάτω χρησιμοποιούνται ο τανυστής τάσεων Cauchy εκπεφρασμένος στην αρχική διαμόρφωση (μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3 σε περιγραφή κατά Lagrange) και ο απειροστικός τανυστής παραμορφώσεων εκτός αν δηλώνεται ρητά κάτι διαφορετικό. Η θεωρία βασίζεται στις εξής παραδοχές:

1. Η συνολική παραμόρφωση που υφίσταται το υλικό σημείο μεταξύ 2 χρονικών στιγμών $t_1, t_2 = t_1 + dt$ ισούται με το άθροισμα ελαστικών (αναστρέψιμων) και ανελαστικών (μη αναστρέψιμων) παραμορφώσεων $d\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ αντίστοιχα. Ισχύει δηλαδή

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (2.3.1)$$

όπου

$d(\cdot)$: συμβολισμός απειροστής μεταβολής κάποιου μεγέθους ως προς τον χρόνο.

Τονίζουμε ότι δεν αποτελεί συμβολισμό ολικού διαφορικού αλλά μόνο μεταβολή ως προς το χρόνο.

$(d\boldsymbol{\varepsilon})^T = (d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{33}, d\gamma_{12}, d\gamma_{13}, d\gamma_{23})$: Διάνυσμα ολικών παραμορφώσεων που πραγματοποιούνται μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1, t_2 = t_1 + dt$

$(d\boldsymbol{\varepsilon}^{el})^T = (d\varepsilon_{11}^{el}, d\varepsilon_{22}^{el}, d\varepsilon_{33}^{el}, d\gamma_{12}^{el}, d\gamma_{13}^{el}, d\gamma_{23}^{el})$: Διάνυσμα ελαστικών παραμορφώσεων που πραγματοποιούνται μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1, t_2 = t_1 + dt$

$(d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl})^T = (d\varepsilon_{11}^{pl}, d\varepsilon_{22}^{pl}, d\varepsilon_{33}^{pl}, d\gamma_{12}^{pl}, d\gamma_{13}^{pl}, d\gamma_{23}^{pl})$: Διάνυσμα πλαστικών παραμορφώσεων που πραγματοποιούνται μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1, t_2 = t_1 + dt$

2. Οι τάσεις προσδιορίζονται με βάση το νόμο του Hooke (σχ. (2.2.11)) με τη θεμελιώδη διαφορά ότι συσχετίζονται με τις αναστρέψιμες (ελαστικές) παραμορφώσεις και όχι με τις ολικές.
3. Το υλικό κατά την πλαστική διαρροή δεν υφίσταται ζημιές, δηλαδή οι καταστατικές σχέσεις τάσεων – ελαστικών παραμορφώσεων παραμένουν αμετάβλητες και δεν εξαρτώνται από την εξέλιξη ή τη στάθμη των πλαστικών παραμορφώσεων.

Για να αποφανθούμε αν ένα υλικό έχει υποστεί πλαστική διαρροή (πλαστικοποίηση), χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση f

$$f = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}), \sigma_y(\mathbf{q})) \quad (2.3.2)$$

που καλείται **συνάρτηση διαρροής** (yield function), όπου

\mathbf{q} : Διάνυσμα εσωτερικών μεταβλητών (internal variables) του υλικού που καθορίζουν όλες τις καταστατικές παραμέτρους που περιγράφουν την ελαστοπλαστική συμπεριφορά του υλικού.

\mathbf{a} : Διάνυσμα καταστατικών παραμέτρων που περιγράφουν τη «μεταφορά» της επιφάνειας διαρροής σε νέα θέση χωρίς όμως αλλαγή του σχήματος ή του μεγέθους της (για ορισμό της επιφάνειας διαρροής βλέπε παρακάτω σχ. (2.3.3β)).

σ_y : Καταστατική παράμετρος που ορίζει την τάση κατά την οποία το υλικό διαρρέει σε πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού (ή θλίψης).

Οι όροι του διανύσματος \mathbf{a} εμφανίζονται κυρίως κατά την ανακυκλική φόρτιση του υλικού, περιγράφονται δε από το λεγόμενο κινηματικό νόμο κράτνσης (kinematic hardening law). Η μεταβολή του σ_y περιγράφει την ομοιόμορφη επέκταση ή συρρίκνωση της επιφάνειας διαρροής και περιγράφεται από το λεγόμενο ισότροπο νόμο κράτνσης (isotropic hardening law). Στην παρούσα εργασία θεωρούμε ότι το υλικό δεν παρουσιάζει καθόλου κινηματική κράτνση, συνεπώς οι όροι του \mathbf{a} δεν υπεισέρχονται καθόλου στη συνάρτηση διαρροής. Υποθέτουμε ότι η συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται αποκλειστικά από ισότροπο νόμο κράτνσης.

Το υλικό παρουσιάζει ιδεατά ελαστική συμπεριφορά όταν

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) < 0 \quad (2.3.3\alpha)$$

και διαρρέει πλαστικά όταν

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = 0 \quad (2.3.3\beta)$$

Η παραπάνω εξίσωση μαθηματικά απεικονίζεται ως επιφάνεια στο χώρο των τάσεων και καλείται **επιφάνεια διαρροής ή κριτήριο διαρροής** (yield surface, yield criterion). Τονίζουμε ότι η περίπτωση $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) > 0$ δεν αντιστοιχεί σε πραγματική εντατική κατάσταση του υλικού και είναι αδύνατο να συμβεί.

Θεωρούμε ένα σημείο το οποίο έχει ήδη διαρρεύσει, δηλαδή ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = 0$ και αναζητούμε την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση του για μια απειροστή προσάυξηση (ως προς το χρόνο) των ολικών παραμορφώσεων $d\boldsymbol{\varepsilon}$, η οποία θεωρείται εκ των προτέρων γνωστή. Με βάση τις παραδοχές 2 και 3 που έχουν αναφερθεί παραπάνω, οι σχέσεις προσυαυξητικών τάσεων - παραμορφώσεων του υλικού γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} \xrightarrow{(2.3.1)} d\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^e] \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \Rightarrow \\ \Rightarrow d\boldsymbol{\sigma} &= [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Από την παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι είναι αδύνατο να εξάγουμε τις σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων αν δεν προσδιορίσουμε με κάποιον τρόπο τους πλαστικούς όρους $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$. Οι όροι αυτοί προσδιορίζονται από το νόμο της πλαστικής ροής (flow rule) ο οποίος είναι γνωστός και ως εξισώσεις των Prandtl – Reuss:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.3.5)$$

όπου

$d\lambda$: Πραγματικός αριθμός που ονομάζεται συντελεστής αναλογίας (proportionality factor)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} \right): \text{ Διάνυσμα που προκύπτει από την}$$

παραγωγή της συνάρτησης διαρροής f ως προς τις συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{\sigma}$.

Ο παραπάνω νόμος δηλώνει ότι το διάνυσμα των πλαστικών παραμορφώσεων είναι παράλληλο με το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια διαρροής. Το $d\lambda$ δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί από το κριτήριο διαρροής και μόνο αλλά είναι αναγκαία η μελέτη της μεταβολής του κριτηρίου διαρροής με το χρόνο. Με διαφόριση (ως προς το χρόνο) της συνάρτησης διαρροής f λαμβάνουμε

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \cdot d\sigma_y \quad (2.3.6)$$

Υπάρχουν 3 περιπτώσεις:

- Αν $df > 0$, τότε στη νέα χρονική στιγμή $t+dt$ θα ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y, (\mathbf{q})) > 0$, αφού τη χρονική στιγμή t είχαμε θεωρήσει ότι $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y, (\mathbf{q})) = 0$. Επομένως αυτή η περίπτωση αποκλείεται να ισχύει αφού έρχεται σε αντίθεση με τον περιορισμό $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y, (\mathbf{q})) \leq 0$
- Αν $df < 0$, τότε στη νέα χρονική στιγμή $t+dt$ θα ισχύει $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y, (\mathbf{q})) < 0$, επομένως οι πλαστικοί όροι θα μηδενίζονται και θα ισχύει

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}} = \mathbf{0} \xrightarrow{(2.3.5)} d\lambda = 0 \quad (2.3.7)$$

Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως ελαστική αποφόρτιση (elastic unloading)

- Αν $df = 0$, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
 1. Αν $d\lambda = 0$, τότε από την (2.3.5) έπεται ότι $d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}} = \mathbf{0}$, δηλαδή οι πλαστικές παραμορφώσεις δεν αυξάνονται. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως ουδέτερη φόρτιση (neutral loading).
 2. Αν $d\lambda > 0$, τότε $d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}} \neq \mathbf{0}$, δηλαδή έχουμε συνέχιση της πλαστικής διαρροής. Η κατάσταση αυτή χαρακτηρίζεται ως πλαστική φόρτιση (plastic loading). Αναγκαία συνθήκη για να έχουμε πλαστική φόρτιση είναι η σχέση $df = 0$ η οποία καλείται και νόμος της συνέπειας (consistency condition)

Παρατηρούμε ότι η τιμή του $d\lambda$ έχει προσδιοριστεί σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από την πλαστική φόρτιση. Για την περίπτωση αυτή, η σχ. (2.3.6) με τη βοήθεια της σχ. (2.3.4) δίνει:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \left([\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \cdot d\sigma_y \xrightarrow{(2.3.5)} \Rightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \left([\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \cdot d\sigma_y \quad (2.3.8)$$

Προκειμένου να συνεχίσουμε την ανάλυσή μας θα πρέπει να θεωρήσουμε κάποιο συγκεκριμένο νόμο μεταβολής της τάσης διαρροής σ_y (ισότροπος νόμος κράτυνσης) καθώς και κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο διαρροής. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο διαρροής Von Mises το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\mathbf{q})) = \sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\mathbf{q}) \quad (2.3.9)$$

όπου

$$\sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 \right] + 3 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (2.3.10)$$

σ_e : η δρώσα τάση (effective stress) στην περίπτωση της πλέον γενικής τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης.

Θεωρούμε επίσης ότι η τάση διαρροής σ_y εξαρτάται αποκλειστικά από την ολική ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση (equivalent plastic strain) ε_{eq}^{pl} η οποία προφανώς θα είναι η μοναδική εσωτερική μεταβλητή του υλικού. Συνεπώς, θα είναι

$$\mathbf{q} = \{ \varepsilon_{eq}^{pl} \} \quad (2.3.11)$$

$$\sigma_y = h(\varepsilon_{eq}^{pl}) \quad (2.3.12)$$

Η ολική ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση ε_{eq}^{pl} ορίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{eq}^{pl} = \int_0^t d\varepsilon_{eq}^{pl} \quad (2.3.13)$$

όπου

$d\varepsilon_{eq}^{pl}$: ο ρυθμός μεταβολής της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης που ορίζεται ως

$$d\varepsilon_{eq}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \left[d\varepsilon_{xx}^{pl^2} + d\varepsilon_{yy}^{pl^2} + d\varepsilon_{zz}^{pl^2} + \frac{1}{2} \cdot (d\gamma_{12}^{pl^2} + d\gamma_{13}^{pl^2} + d\gamma_{23}^{pl^2}) \right]} \quad (2.3.14)$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\sigma_y = h(\varepsilon_{eq}^{pl}) \Rightarrow d\sigma_y = h'(\varepsilon_{eq}^{pl}) \cdot d\varepsilon_{eq}^{pl} \quad (2.3.15)$$

όπου

$h'(\varepsilon_{eq}^{pl})$: παράγωγος της τάσης διαρροής ως προς ε_{eq}^{pl} που καλείται μέτρο κράτνσης (plastic modulus)

επομένως για να προσδιορίσουμε τον όρο $d\sigma_y$ της σχ. (2.3.8) θα πρέπει να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής $d\varepsilon_{eq}^{pl}$.

Σημειώνεται ότι το μέτρο κράτνσης $h'(\varepsilon_{eq}^{pl})$ αποτελεί χαρακτηριστική καταστατική ιδιότητα του υλικού. Στην περίπτωση που $h'(\varepsilon_{eq}^{pl}) = \text{σταθ.}$, η μεταβολή του σ_y είναι γραμμική και αναφερόμαστε σε γραμμικό ισότροπο νόμο κράτνσης που είναι και η απλούστερη περίπτωση. Για $h'(\varepsilon_{eq}^{pl}) > 0$ έχουμε επέκταση της επιφάνειας διαρροής και αναφερόμαστε σε κράτνση (hardening), για $h'(\varepsilon_{eq}^{pl}) < 0$ έχουμε συρρίκνωση της επιφάνειας διαρροής και αναφερόμαστε σε χαλάρωση (softening) ενώ για $h'(\varepsilon_{eq}^{pl}) = 0$ η επιφάνεια διαρροής δεν μεταβάλλεται και αναφερόμαστε σε ελαστικό - ιδεατά πλαστικό υλικό (elastic - perfectly plastic material).

Από τις εξ. (2.3.9) - (2.3.10) εκτελώντας τις πράξεις, λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\sigma_{11} - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{22} + \sigma_{33})}{\sigma_e} \quad (2.3.16\alpha)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} = \frac{\sigma_{22} - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{33})}{\sigma_e} \quad (2.3.16\beta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} = \frac{\sigma_{33} - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\sigma_e} \quad (2.3.16\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} = 3 \cdot \frac{\sigma_{12}}{\sigma_e} \quad (2.3.16\delta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}} = 3 \cdot \frac{\sigma_{13}}{\sigma_e} \quad (2.3.16\epsilon)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} = 3 \cdot \frac{\sigma_{23}}{\sigma_e} \quad (2.3.16\zeta)$$

Η (2.3.14), με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3.5) - (2.3.16) δίνει έπειτα από κάποιες αλγεβρικές πράξεις:

$$d\varepsilon_{eq}^{pl} = d\lambda \quad (2.3.17)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = -1$ (βλέπε σχ. (2.3.9)), η (2.3.8), με τη βοήθεια της (2.3.17), γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 df &= \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \left([\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - h'(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}) \cdot d\lambda \Rightarrow \\
 \Rightarrow df &= \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h' \right] \cdot d\lambda
 \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

όπου

$$h' = h'(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}).$$

Όμως στην περίπτωση της πλαστικής φόρτισης που εξετάζουμε, έχουμε ήδη εξάγει ότι $df = 0$, συνεπώς η σχ. (2.3.18) επιτρέπει τον προσδιορισμό του $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h'} \tag{2.3.19}$$

Με τον υπολογισμό του $d\lambda$ συναρτήσει των απειροστών ολικών προσαυξητικών παραμορφώσεων $d\boldsymbol{\varepsilon}$ μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε το καταστατικό μητρώο του ελαστοπλαστικού υλικού. Με την αντικατάσταση της σχ. (2.3.5) στη σχ. (2.3.4) προκύπτει

$$d\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{2.3.20}$$

Το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο $[\mathbf{D}^{ep}]$ προκύπτει απλά με την αντικατάσταση του $d\lambda$ από τη σχ. (2.3.19) στη σχ. (2.3.20). Τελικά λαμβάνουμε

$$d\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^{ep}] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.3.21α}$$

όπου

$$[\mathbf{D}^{ep}] = [\mathbf{D}^e] - \frac{[\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e]^T}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h'} \tag{2.3.21β}$$

2.3.2 Ολοκλήρωση των προσαυξητικών σχέσεων τάσεων - παραμορφώσεων

Ως τώρα ασχοληθήκαμε με την εξαγωγή των σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων στο ελαστοπλαστικό πρόβλημα, στην περίπτωση που οι προσαυξητικές παραμορφώσεις είναι απειροστές. Ωστόσο πλην ελάχιστων περιπτώσεων δεν μπορούμε να επιλύσουμε αναλυτικά το σύστημα των διαφορικών

εξισώσεων (εξισώσεις ισορροπίας, σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων, σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων) που προκύπτει στο ελαστοπλαστικό πρόβλημα. Οι εξισώσεις ισορροπίας του προβλήματος είναι μη γραμμικές με αποτέλεσμα απαιτείται κάποια αριθμητική μέθοδος επίλυσής τους. Η μέθοδος επίλυσης εξισώσεων Newton – Raphson, που χρησιμοποιείται ευρύτατα, οδηγεί στη θεώρηση πεπερασμένων προσαναυξητικών βημάτων φόρτισης που με τη σειρά τους δίνουν πεπερασμένες προσαναυξητικές παραμορφώσεις. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις τάσεις στο τέλος της προσαύξεσης, είμαστε υποχρεωμένοι να εφαρμόσουμε την ελαστοπλαστική θεωρία σε πεπερασμένα βήματα ή όπως λέμε να **ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις απειροστής μεταβολής** (integrating the rate equations).

Τονίζουμε ότι δεν πρέπει να συγχέουμε τις πεπερασμένες παραμορφώσεις (προσαναυξητικές ή ολικές) με τις παραδοχές των μικρών μετατοπίσεων ή μικρών παραμορφώσεων που χρησιμοποιούμε για να απλοποιήσουμε τα προβλήματα. Στην παρούσα εργασία, ο όρος «πεπερασμένες παραμορφώσεις» αναφέρεται σε παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε πεπερασμένο και όχι απειροστό χρονικό διάστημα. Ο συγκεκριμένος όρος επομένως, δεν σχετίζεται με παραμορφώσεις οι οποίες είναι τόσο μεγάλες ώστε να μην ισχύει η παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων.

Θεωρούμε μια πεπερασμένη προσαύξεση των ολικών παραμορφώσεων $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ μεταξύ 2 χρονικών στιγμών $t_1, t_2 = t_1 + \Delta t$. Την αρχική χρονική στιγμή t_1 , το υλικό σημείο μπορεί να έχει πλαστικοποιηθεί ή να είναι ελαστικό. Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί το τασικό πεδίο την τελική χρονική στιγμή t_2 . Οι τάσεις θα πρέπει να σέβονται όλες τις βασικές παραδοχές και τους νόμους της ελαστοπλαστικής θεωρίας στην περίπτωση που αποδειχτεί ότι έχουμε πλαστική διαρροή εντός του προσαναυξητικού βήματος.

Προς το παρόν υποθέτουμε ότι κατά τη διάρκεια της προσαύξεσης το σημείο διαρρέει. Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε κατευθείαν από τη σχέση (2.3.21α) $d\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^{ep}] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}$ και να εφαρμόσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης ωστόσο κάτι τέτοιο θα οδηγήσει σε σφάλμα για λόγους που θα εξηγηθούν παρακάτω. Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο τη σχέση (2.3.20), που προσφέρεται περισσότερο για αριθμητικές μεθόδους, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^e] \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}(t_2) - \boldsymbol{\sigma}(t_1) &= [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}(t_2) &= \boldsymbol{\sigma}(t_1) + [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{D}^e] \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}(t_2) &= \boldsymbol{\sigma}^{tr} - [\mathbf{D}^e] \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

όπου

$(\Delta \boldsymbol{\varepsilon})^T = (\Delta \varepsilon_{11}, \Delta \varepsilon_{22}, \Delta \varepsilon_{33}, \Delta \gamma_{12}, \Delta \gamma_{13}, \Delta \gamma_{23})$: Διάνυσμα ολικών προσαναυξητικών παραμορφώσεων που πραγματοποιούνται μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1, t_2 = t_1 + \Delta t$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} = \boldsymbol{\sigma}(t_1) + [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3.23)$$

Στα παραπάνω, το ελαστικό μητρώο $[\mathbf{D}^e]$ βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα διότι λόγω της παραδοχής 3 του κεφαλαίου 2.3.1, το υλικό δεν υφίσταται ζημιές, επομένως οι ελαστικές σταθερές του παραμένουν αμετάβλητες με την πάροδο του χρόνου. Στη σχέση (2.3.22) παρατηρούμε τα εξής:

1. Ο όρος $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}$ υπολογίζεται άμεσα καθώς είναι άθροισμα των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}(t_1)$ που έχουμε στην αρχή του προσανζητικού βήματος και του όρου $[\mathbf{D}^e] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, που είναι και αυτός γνωστός αφού το $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ είναι δεδομένο. Ο όρος αυτός ονομάζεται ελαστική πρόλεξη (elastic prediction) των ολικών τάσεων.
2. Ο όρος $\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ δεν μπορεί να υπολογιστεί με αναλυτική ολοκλήρωση. Το $d\lambda$ δίνεται από την εξ. (2.3.19) ενώ το $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ εξαρτάται από το λ , γεγονός που φαίνεται στην εξ. (2.3.20)

Ο όρος $\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ δεν είναι τίποτα άλλο από την ολοκληρωτική έκφραση του νόμου της πλαστικής ροής. Για να αποφανθούμε αν έχουμε πλαστική διαρροή ή όχι, αρχικά υποθέτουμε ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι μηδενικές ή

$$\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}(t_2) = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} \quad (2.3.23)$$

Αν οι τάσεις της χρονικής στιγμής t_2 δώσουν $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)(t_2) > 0$, τότε θα έχουμε παραβίαση του κριτηρίου διαρροής, οπότε η υπόθεση είναι λανθασμένη. Σ' αυτήν την περίπτωση θα είναι προφανώς $\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \neq \mathbf{0}$ έτσι ώστε το κριτήριο διαρροής να μην παραβιάζεται τη χρονική στιγμή t_2 . Στην περίπτωση που το κριτήριο διαρροής επαληθεύεται τη χρονική στιγμή t_2 , τότε θα ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

1. Αρχικά ίσχυε $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)(t_1) = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε ελαστική αποφόρτιση αν $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)(t_2) < 0$ ή ουδέτερη φόρτιση αν $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)(t_2) = 0$
2. Αρχικά ίσχυε $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)(t_1) < 0$, δηλαδή το σημείο ήταν ελαστικό. Αφού $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)(t_2) \leq 0$, το σημείο παραμένει ελαστικό.

Ο υπολογισμός του $\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ αποτελεί το κομβικό σημείο της υπολογιστικής ελαστοπλαστικότητας στην περίπτωση που το κριτήριο διαρροής παραβιάζεται, δηλαδή έχουμε πλαστική φόρτιση. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι υπολογισμού:

2.3.2.1 Η μέθοδος της εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler (forward Euler)

Αυτή η μέθοδος είναι η απλούστερη αφού εφαρμόζουμε άμεσα τις εξισώσεις που ισχύουν στην περίπτωση των απειροστών μεταβολών. Ο όρος $\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ προσεγγίζεται ως

$$\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \approx \Delta\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) \quad (2.3.24)$$

ενώ το $\Delta\lambda$ υπολογίζεται με άμεση ολοκλήρωση της εξ. (2.3.19):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} d\lambda &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h'} \Rightarrow \Delta\lambda \approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1)\right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1)\right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) + h'(t_1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\lambda &\approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1)\right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1)\right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) + h'(t_1)} \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Η συγκεκριμένη προσέγγιση του $\Delta\lambda$, καλείται εμπρός Euler πρόλεξη (forward Euler predictor). Η μέθοδος χαρακτηρίζεται ως εμπρός ολοκλήρωση αφού χρησιμοποιούμε το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια διαρροής στην αρχική χρονική στιγμή t_1 . Οι τελικές τάσεις $\boldsymbol{\sigma}(t_2)$ θα κείνται εκτός της επιφάνειας διαρροής αφού πουθενά δεν χρησιμοποιείται ο περιορισμός $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)(t_2) \leq 0$. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές μείωσης του σφάλματος που προκύπτει ή και ρητής επιστροφής στην επιφάνεια διαρροής.

Η μέθοδος της υπο-ολοκλήρωσης (subincrementation)

Μια απλή τεχνική μείωσης του σφάλματος της παραπάνω μεθόδου βασίζεται στη διαμέριση του ολοκληρώματος $\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ και στην εφαρμογή της εμπρός ολοκλήρωσης στο κάθε τμήμα $[t_{i1}, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. Θεωρούμε τη διαμέριση σε n τμήματα του πεδίου του χρόνου με $\delta t = \frac{t_2 - t_1}{n}$ και $t_{11} = t_1$, $t_{12} = t_1 + \delta t$, $t_{13} = t_1 + 2 \cdot \delta t$, ..., $t_{1n} = t_2$. Η χρονική διαμέριση είναι τέτοια ώστε να έχουμε

ισόποσες προσανζητικές ολικές παραμορφώσεις $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{n}$ στο κάθε διάστημα $[t_{i1}, t_{i+1}]$. Θα είναι

$$\int_{t_{i1}}^{t_{i2}} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \int_{t_{i2}}^{t_{i3}} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dots + \int_{t_{in-1}}^{t_{in}} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_{i1}}^{t_{i2}} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \approx \Delta \lambda_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{i1}) + \Delta \lambda_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{i2}) + \Delta \lambda_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{i3}) + \dots + \Delta \lambda_n \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{in-1}) \quad (2.3.26)$$

όπου

$$\Delta \lambda_i \approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{ii}) \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{ii}) \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{ii}) + h'(t_{ii})} \quad (2.3.27)$$

Τα $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_i)$ βρίσκονται εύκολα από τις εξ. (2.3.22), (2.3.23) και (2.3.16):

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr}(t_{i+1}) = \boldsymbol{\sigma}(t_{ii}) + [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2.3.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t_{i+1}) = \boldsymbol{\sigma}^{tr}(t_{ii}) - [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{ii}) \quad (2.3.29)$$

όπου

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Οι υπολογισθέντες τάσεις του διανύσματος $\boldsymbol{\sigma}(t_{i+1})$ εισάγονται στις σχ. (2.3.16) προκειμένου να προσδιοριστεί το διάνυσμα $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{i+1})$ το οποίο και θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο χρονικό διάστημα $[t_{i+1}, t_{i+2}]$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.3.21α)

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}^{ep}] \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \Delta \boldsymbol{\sigma}_i = [\mathbf{D}^{ep}]_i \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2.3.30)$$

ωστόσο κάτι τέτοιο είναι υπολογιστικά δαπανηρότερο αφού απαιτείται σε κάθε διαμέριση ο επαναυπολογισμός του μητρώου $[\mathbf{D}^{ep}]_i$. Οι πράξεις που απαιτεί η μέθοδος των εξ. (2.3.26)-(2.3.29) είναι σαφώς λιγότερες αφού στην περίπτωση του κριτηρίου διαρροής Von Mises ισχύει

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{ii}) \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_{ii}) = 3 \cdot G, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.3.31)$$

γεγονός που οδηγεί σε σημαντική μείωση του υπολογιστικού χρόνου.

Κριτική της μεθόδου

Η μέθοδος χαρακτηρίζεται από την απλότητά της. Το κύριο πλεονέκτημά της είναι η πολύ απλή διαδικασία εύρεσης των τάσεων με αποτέλεσμα να είναι πολύ γρήγορος ο αλγόριθμος υπολογισμού. Ταυτόχρονα αυτό αποτελεί και το βασικό μειονέκτημα αφού είναι βέβαιο ότι οι τάσεις της τελικής χρονικής στιγμής θα βρίσκονται εκτός της επιφάνειας διαρροής. Μάλιστα, το συγκεκριμένο σφάλμα είναι σωρευτικό δηλαδή το σφάλμα σε κάποιο προσαυξητικό βήμα φόρτισης θα διαδοθεί και στα επόμενα προσαυξητικά βήματα με αποτέλεσμα τη συνεχή μεγέθυνσή του. Σε κάθε προσαύξηση των εξωτερικών φορτίων θα έχουμε υπερεκτίμηση των τάσεων και κατά συνέπεια υπερεκτίμηση των εσωτερικών δράσεων μέχρι να επέλθει η ισορροπία. Κάτι τέτοιο θα οδηγήσει σε υπερεκτίμηση της πραγματικής δυσκαμψίας της κατασκευής. Μείωση του υπεισερχόμενου σφάλματος μπορούμε να έχουμε με τη μέθοδο της υπο-ολοκλήρωσης ωστόσο αυξάνεται ο υπολογιστικός χρόνος.

Ένα άλλο μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι στην περίπτωση που το σημείο είναι ελαστικό στην αρχή της προσαύξησης $t = t_1$, απαιτείται η εύρεση του σημείου τομής της επιφάνειας διαρροής με το διάνυσμα $\Delta \sigma^{tr} = [D^e] \cdot \Delta \epsilon$, προκειμένου να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ (στο σημείο τομής), γεγονός που οδηγεί σε αύξηση του υπολογιστικού χρόνου

2.3.2.2 Η μέθοδος της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler (backward Euler)

Σ' αυτήν τη μέθοδο υιοθετείται η προσέγγιση

$$\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \approx \Delta \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}(t_2) \quad (2.3.32)$$

Οι τάσεις της χρονικής στιγμής t_2 δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές (εξάλλου αυτές προσπαθούμε να υπολογίσουμε) επομένως δεν γνωρίζουμε ούτε το διάνυσμα $\frac{\partial f}{\partial \sigma}(t_2)$. Γι' αυτόν το λόγο η συγκεκριμένη μέθοδος χαρακτηρίζεται ως έμμεση (fully implicit). Προκειμένου να επιλύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιούμε τον περιορισμό ότι η εντατική κατάσταση της τελικής χρονικής στιγμής t_2 πρέπει να κείται επί της επιφάνειας διαρροής. Το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του παρακάτω μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \sigma(t_2) &= \sigma^{tr} - [D^e] \cdot \int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma(t_2) &= \sigma^{tr} - [D^e] \cdot \Delta \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}(t_2) \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

$$f(\sigma, \sigma_y)(t_2) = 0 \quad (2.3.34)$$

τύπου Newton – Raphson. Τα μεγέθη της νέας $k+1$ -επανάληψης θα δίνονται από τους τύπους

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \delta\boldsymbol{\sigma} \quad (2.3.36\alpha)$$

$$\Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda \quad (2.3.36\beta)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl(k+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl(k)} + \delta\lambda \quad (2.3.36\gamma)$$

Η διαδικασία διακόπτεται όταν επέλθει σύγκλιση. Η σύγκλιση εξετάζεται μέσω του κριτηρίου διαρροής, δηλαδή θεωρούμε ότι η σύγκλιση εξασφαλίζεται αν ισχύει

$$f^{(k+1)} \leq tol_l \quad (2.3.37)$$

όπου

tol_l : Το σφάλμα που ανεχόμαστε για τον έλεγχο της ισχύος του κριτηρίου διαρροής. Θεωρητικά ισχύει $f^{(k+1)} \leq 0$, επομένως η παράμετρος tol_l πρέπει να διαφέρει ελάχιστα από το μηδέν. Συνήθως δε, λαμβάνεται ίση με

$$tol_l = 10^{-2} \div 10^{-8} \quad (2.3.38)$$

ενώ το $f^{(k+1)}$, που πρέπει επίσης να υπολογιστεί στη σχ. (2.3.37), δίνεται από τον τύπο:

$$f^{(k+1)} = f\left(\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)}, \sigma_y\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl(k+1)}\right)\right) \quad (2.3.39)$$

Για να ξεκινήσει η διαδικασία επιλέγουμε

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}^{tr} \quad (2.3.40\alpha)$$

$$\Delta\lambda^{(0)} = 0 \quad (2.3.40\beta)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}(t_l) \quad (2.3.40\gamma)$$

Σημειώνουμε ότι στην αρχή της διαδικασίας ισχύει

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f\left(\boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \sigma_y\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl(0)}\right)\right) \Rightarrow \\ f^{(0)} &= f\left(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_y(t_l)\right) \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Το $f^{(0)}$ συμβολίζεται και ως f^{tr} αφού προσδιορίζεται από το διάνυσμα της ελαστικής πρόλεξης $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$. Προφανώς ισχύει

$$f^{tr} > 0 \quad (2.3.42)$$

αφού η τάση διαρροής ισούται με την τάση διαρροής τη χρονική στιγμή t_l και $\sigma_{ij}^{tr} > \sigma_{ij}(t_l)$, $\forall i, j = 1, 2, 3$. Για $k=0$ η εξ. (2.3.35α) δίνει

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} + \delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} - \mathbf{0} - \delta\lambda \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f^{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{0} \Rightarrow \delta\boldsymbol{\sigma} = -\delta\lambda \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f^{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.3.43\alpha)$$

ενώ από την (2.3.35β) παίρνουμε

$$f^{\text{tr}} + \left(\frac{\partial f^{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} - h'(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}(t_1)) \cdot \delta\lambda = 0 \quad (2.3.43\beta)$$

Με αντικατάσταση της (2.3.43α) στην (2.3.43β) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} f^{\text{tr}} + \left(\frac{\partial f^{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \left(-\delta\lambda \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f^{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - h'(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}(t_1)) \cdot \delta\lambda &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta\lambda &= \frac{f^{\text{tr}}}{\left(\frac{\partial f^{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f^{\text{tr}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h'(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}(t_1))} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta\lambda &= \frac{f^{\text{tr}}}{3 \cdot G + h'(t_1)} \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

όπου

$$h'(t_1) = h'(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl}(t_1)).$$

Για να εξαχθεί η παραπάνω εξίσωση, κάναμε χρήση της εξ. (2.3.31)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_i) \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_i) = 3 \cdot G \text{ που ισχύει γενικά τόσο για τις τάσεις } \boldsymbol{\sigma}(t)$$

οποιαδήποτε χρονικής στιγμής t όσο και για τις προλέξεις των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}$. Η προσέγγιση του $\delta\lambda$ της εξ. (2.3.44) καλείται πίσω Euler πρόλεξη (backward Euler predictor). Η πίσω Euler πρόλεξη του $\delta\lambda$ προκύπτει από το f^{tr} σε αντιδιαστολή με την εμπρός Euler πρόλεξη που γίνεται χρήση του $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1)$ (βλέπε σχέση (2.3.25)).

Επομένως εδώ δεν απαιτείται η εύρεση του σημείου τομής της επιφάνειας διαρροής με το διάνυσμα $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}$ (στην περίπτωση που αρχικά το σημείο ήταν ελαστικό) αφού το $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1)$ δεν υπεισέρχεται πουθενά στους υπολογισμούς.

Κριτική της μεθόδου

Η μέθοδος χαρακτηρίζεται από την ανάγκη επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων. Είναι σαφώς πλεονεκτικότερη από την εμπρός ολοκλήρωση κατά Euler αφού εδώ μπορούμε να επιστρέψουμε οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε στην επιφάνεια διαρροής της τελικής χρονικής στιγμής t_2 . Επίσης δεν απαιτείται η εύρεση του σημείου τομής της επιφάνειας διαρροής με το διάνυσμα $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}}$.

Στα μειονεκτήματα της μεθόδου συγκαταλέγεται η ανάγκη υπολογισμού σε κάθε επανάληψη k , του μητρώου $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right]$ που απαιτεί αρκετό υπολογιστικό χρόνο.

Εξάλλου, εξαιτίας αυτού του όρου, το γραμμικό σύστημα των εξ. (2.3.35) αποτελείται από παραπάνω από μία εξισώσεις με αποτέλεσμα την περαιτέρω αύξηση του υπολογιστικού χρόνου.

2.3.2.3 Η μέθοδος του τραπεζίου και η μέθοδος του ενδιάμεσου σημείου (Generalized trapezoidal and generalized midpoint rule)

Στις μεθόδους αυτές γενικεύουμε την προσέγγιση που έχουμε κάνει στην εξ. (2.3.32). Στη μέθοδο του τραπεζίου θεωρούμε ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \approx \Delta\lambda \cdot \left[(1-a) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) + a \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_2) \right] \quad (2.3.45)$$

όπου

a : παράμετρος της επιλογής μας.

Στη μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου θεωρούμε ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \approx \Delta\lambda \cdot \left[a \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left[(1-a) \cdot \boldsymbol{\sigma}(t_1) + a \cdot \boldsymbol{\sigma}(t_2) \right] \right] \quad (2.3.46)$$

Θέτοντας $\alpha = 1$ στη σχ. (2.3.45) παίρνουμε τη μέθοδο της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler. Η έρευνα έχει δείξει ότι ακριβέστερα αποτελέσματα δίνονται για $a = \frac{1}{2}$, αν και στην περίπτωση των μεγάλων προσαυξητικών βημάτων του $\Delta\epsilon$ πρέπει να προτιμηθεί η περίπτωση $\alpha = 1$. Σ' αυτή την κλάση των μεθόδων ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία γραμμικοποίησης με αυτήν που περιγράφεται στις εξ. (2.3.35) – (2.3.40).

Ο αλγόριθμος ολοκλήρωσης και εδώ είναι υπολογιστικά δαπανηρός αφού σ' όλες τις περιπτώσεις με $\alpha \neq 0$ υπεισέρχεται στους υπολογισμούς το $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_2)$. Κατά συνέπεια απαιτείται και εδώ ο επαναληπτικός υπολογισμός του μητρώου $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right]$.

2.3.2.4 Η μέθοδος «generalized cutting – plane»

Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε τους Simo & Ortiz (1985) στην προσπάθεια να μην απαιτείται ο υπολογισμός του μητρώου $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right]$ που γενικά απαιτεί αυξημένο υπολογιστικό χρόνο. Στη μέθοδο του τραπεζίου (βλέπε σχ. (2.3.45)) θεωρούμε την περίπτωση $\alpha = 0$. Η εξ. (2.3.35) θα γραφτεί ως

$$\boldsymbol{\sigma}(t_2) = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} - \left[\mathbf{D}^e \right] \cdot \Delta\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) \quad (2.3.47)$$

ενώ η γραμμικοποιημένη της έκφραση θα είναι η

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} - [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta\lambda^{(k)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) - \delta\lambda \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) \quad (2.3.48)$$

Η παραπάνω σχέση για την $k+1$ επανάληψη θα δώσει

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} + \delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tr}} - [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta\lambda^{(k+1)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) - \delta\lambda_{k+1} \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) \quad (2.3.49)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξ. (2.3.49) – (2.3.48) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \delta\boldsymbol{\sigma}$ και $\Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda$, εξάγουμε

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{k+1} = -\delta\lambda_{k+1} \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) \quad (2.3.50)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί προφανώς για την τυχαία επανάληψη k , επομένως γενικά θα ισχύει

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = -\delta\lambda \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) \quad (2.3.51)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. (2.3.51) στη γραμμικοποιημένη έκφραση του κριτηρίου διαρροής (σχ. (2.3.35β)) τελικά θα λάβουμε

$$f^{(k)} - \left(\frac{\partial f^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot \delta\lambda \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) - h' \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl(k)} \right) \cdot \delta\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta\lambda = \frac{f^{(k)}}{\left(\frac{\partial f^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1) + h'^{(k)}} \quad (2.3.52)$$

όπου $h'^{(k)} = h' \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^{pl(k)} \right)$.

Με την εξ. (2.3.52) και με τη βοήθεια των εξ. (2.3.36α-γ) και του κριτηρίου σύγκλισης (εξ. (2.3.37)) μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα χωρίς να χρειαστεί ο υπολογισμός του μητρώου $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right]$. Αποδεικνύεται ωστόσο ότι για μεγάλα προσαυξητικά βήματα $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ υπάρχει περίπτωση η μέθοδος να μη συγκλίνει για οποιαδήποτε έκφραση της συνάρτησης διαρροής f .

Η μέθοδος «generalized cutting plane» βασίζεται στην αντικατάσταση του όρου $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t_1)$ από τον όρο $\frac{\partial f^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ στις εξ. (2.3.51), (2.3.52). Σ' αυτήν την περίπτωση θα έχουμε

$$\delta\lambda = \frac{f^{(k)}}{\left(\frac{\partial f^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h'^{(k)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta\lambda = \frac{f^{(k)}}{3 \cdot G + h'^{(k)}} \quad (2.3.53)$$

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση του κριτηρίου Von Mises η μέθοδος συγκλίνει για οσοδήποτε μεγάλο προσαυξητικό βήμα $\Delta\epsilon$. Επιπλέον δεν απαιτείται, ούτε ο υπολογισμός του μητρώου $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}\right]$, ούτε η εύρεση του σημείου τομής με την επιφάνεια διαρροής στην περίπτωση που το υπό εξέταση σημείο είναι ελαστικό αρχικά, με αποτέλεσμα να εξοικονομείται υπολογιστικός χρόνος.

Στην παρούσα εργασία η ολοκλήρωση των προσαυξητικών σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων πραγματοποιείται με την αριθμητική μέθοδο «generalized cutting plane». Η μέθοδος για την τυχαία k -επανάληψη συνοψίζεται στον παρακάτω αλγόριθμο:

- Υπολογισμός του $\delta\lambda$ από την εξ. (2.3.53), $\delta\lambda = \frac{f^{(k)}}{3 \cdot G + h'^{(k)}}$
- Υπολογισμός του $\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)}$ ως $\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} - \delta\lambda \cdot [\mathbf{D}^e] \cdot \frac{\partial f^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
- Υπολογισμός του $\epsilon_{eq}^{pl(k+1)}$ ως $\epsilon_{eq}^{pl(k+1)} = \epsilon_{eq}^{pl(k)} + \delta\lambda$ και του $h'^{(k+1)}$ ως $h'^{(k+1)} = h'(\epsilon_{eq}^{pl(k+1)})$
- Υπολογισμός του $f^{(k+1)}$ ως $f^{(k+1)} = f(\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)}, \sigma_y(\epsilon_{eq}^{pl(k+1)}))$
- Αν $f^{(k+1)} \leq tol_f$ τότε τερμάτισε τις επαναλήψεις αφού έχουμε επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής με ανεκτό σφάλμα tol_f της επιλογής μας. Υπολογισμός όλων των υπερισερχόμενων μεγεθών του προβλήματος: $\boldsymbol{\sigma}(t_2) = \boldsymbol{\sigma}^{(k+1)}$, $\epsilon_{eq}^{pl}(t_2) = \epsilon_{eq}^{pl(k+1)}$, $h'(t_2) = h'(\epsilon_{eq}^{pl(k+1)})$. Αν $f^{(k+1)} > tol_f$ τότε δεν υπάρχει σύγκλιση. Ο αλγόριθμος συνεχίζεται για καινούρια επανάληψη $k + 2$

Προκειμένου να ξεκινήσει ο αλγόριθμος θέτουμε $f^{(0)} = f^{tr} = f[\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_y(\epsilon_{eq}^{pl}(t_1))]$,

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}, \quad \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f^{tr}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \epsilon_{eq}^{pl(0)} = \epsilon_{eq}^{pl}(t_1), \quad h'^{(0)} = h'(\epsilon_{eq}^{pl}(t_1)).$$

2.3.3 Ελαστοπλαστική θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων – μικρών παραμορφώσεων

Στην περίπτωση ενός υπερελαστικού υλικού έχουμε εξάγει ότι η αντικατάσταση του τανυστή τάσεων Cauchy με τον 2ο τανυστή Piola – Kirchhoff και του τανυστή απειροστικών παραμορφώσεων με τον τανυστή παραμορφώσεων Green

αρκεί για να προσδιοριστούν πλήρως οι καταστατικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων όταν ισχύει η υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων. Στην κλασική ελαστοπλαστική θεωρία, στην περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων – μικρών παραμορφώσεων, ισχύει παρόμοια επέκταση με αυτήν της θεωρίας ελαστικότητας. Σε όλες τις σχέσεις που έχουν εξαχθεί, αρκεί η παραπάνω αντικατάσταση των τανυστών τάσεων και παραμορφώσεων για να προσδιοριστεί πλήρως η συμπεριφορά του ελαστοπλαστικού υλικού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΕΨΗΣ

3.1 Γενικά

Όπως είδαμε, η γενικότερη περίπτωση επίλυσης ενός προβλήματος παραμορφώσιμου σώματος απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος 15 εξισώσεων με 15 αγνώστους (3 συνιστώσες μετατοπίσεων, 6 συνιστώσες παραμορφώσεων, 6 συνιστώσες τάσεων). Η αναλυτική επίλυση του προβλήματος, ακόμα και για τους απλούς καταστατικούς νόμους υλικού που έχουν παρουσιαστεί, είναι εξαιρετικά δυσχερής ακόμα και για απλές περιπτώσεις γεωμετρίας και φόρτισης. Σε περιπτώσεις πολύπλοκης γεωμετρίας του σώματος ή και τυχούσας φόρτισης, ακόμα και η προσεγγιστική επίλυση οδηγεί πολλές φορές σε λανθασμένα αποτελέσματα που δε συμφωνούν με την πραγματικότητα.

Ωστόσο αν εξετάσουμε τους φορείς που χρησιμοποιούνται σε κατασκευές πολιτικού μηχανικού καταλήγουμε στις εξής διαπιστώσεις:

- Στη συντριπτική τους πλειονότητα, οι φορείς έχουν τη μία ή τις δύο από τις τρεις διαστάσεις τους πολύ μικρότερες σε σχέση με τις υπόλοιπες. Σε περίπτωση, που οι μία διάσταση είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες, αναφερόμαστε σε δίσκους, πλάκες ή κελύφη ανάλογα με τη γεωμετρία και τον προσανατολισμό της φόρτισης σε σχέση με το φορέα. Σε περίπτωση που οι δύο διαστάσεις είναι πολύ μικρότερες από την τρίτη, τότε αναφερόμαστε στην περίπτωση των ραβδωτών φορέων.
- Οι φορτίσεις που δέχονται οι συνήθεις κατασκευές μπορούν να αναχθούν σε εντατικά μεγέθη, δηλαδή σε μια «μέση τιμή» γύρω από τη θέση επιβολής τους, χωρίς την εισαγωγή σημαντικού σφάλματος στην επίλυσή τους.

Η δεύτερη διαπίστωση στην ουσία βασίζεται στην ειδική γεωμετρία που παρουσιάζουν οι κατασκευές πολιτικού μηχανικού και είναι απόρροια της γνωστής αρχής St. Venant της μηχανικής παραμορφώσιμων σωμάτων. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη αρχή: **«Αν μια κατανομή εξωτερικών δυνάμεων που ενεργεί σε μια μικρή περιοχή της επιφάνειας ενός σώματος αντικατασταθεί από μια ισοπολική κατανομή εξωτερικών δυνάμεων, που επενεργεί στην ίδια περιοχή του σώματος, τότε η επίδραση αυτών των δύο διαφορετικών φορτίσεων σε περιοχές που βρίσκονται αρκούντως μακριά από το σημείο εφαρμογής των φορτίων είναι περίπου ίδιες».**

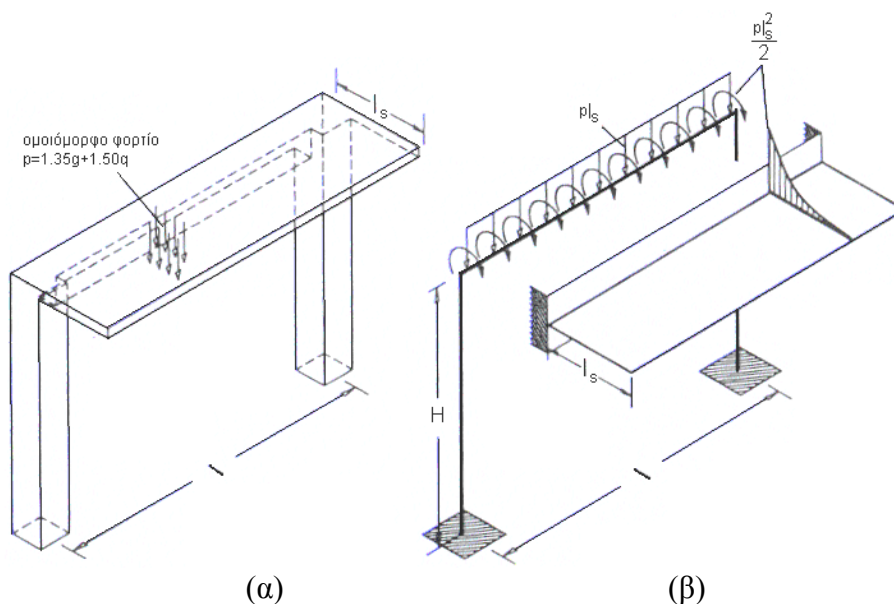
Ας εξετάσουμε την περίπτωση ενός ραβδωτού φορέα στον οποίο το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής (πλάτος, ύψος). Στην περίπτωση που επιβληθούν φορτίσεις μόνο στις ακραίες διατομές του φορέα, η αρχή St. Venant εξασφαλίζει ότι μακριά από τα άκρα, η ένταση θα είναι περίπου ίδια με το να θεωρήσουμε μια φόρτιση ισοπολική, δηλαδή μια μέση τιμή της φόρτισης στις ακραίες διατομές. Συνεπώς, η επίλυση προβλημάτων ραβδωτών φορέων με θεώρηση εντατικών μεγεθών αντί της ακριβούς φόρτισης που ασκείται στα άκρα, αποκτά πρακτική αξία ακριβώς λόγω του ότι το μήκος της ράβδου είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε η λύση που λαμβάνεται να ισχύει με μεγάλη ακρίβεια στο μεγαλύτερο μέρος του φορέα.

Η περίπτωση της στρεπτικής φόρτισης (torsional loading) δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια ειδική κατηγορία φόρτισης που απαντάται στους ραβδωτούς φορείς. Έτσι: **«Στρέψη ράβδου καλείται η εντατική κατάσταση που αναπτύσσεται σε μια διατομή λόγω της επιβολής ενός ελεύθερου διανύσματος ροπής M_t (torque), το οποίο είναι παράλληλο του διαμήκους άξονα της ράβδου. Το διάνυσμα της στρεπτικής ροπής M_t προκαλείται από ένα ζεύγος δυνάμεων που επιδρά στη**

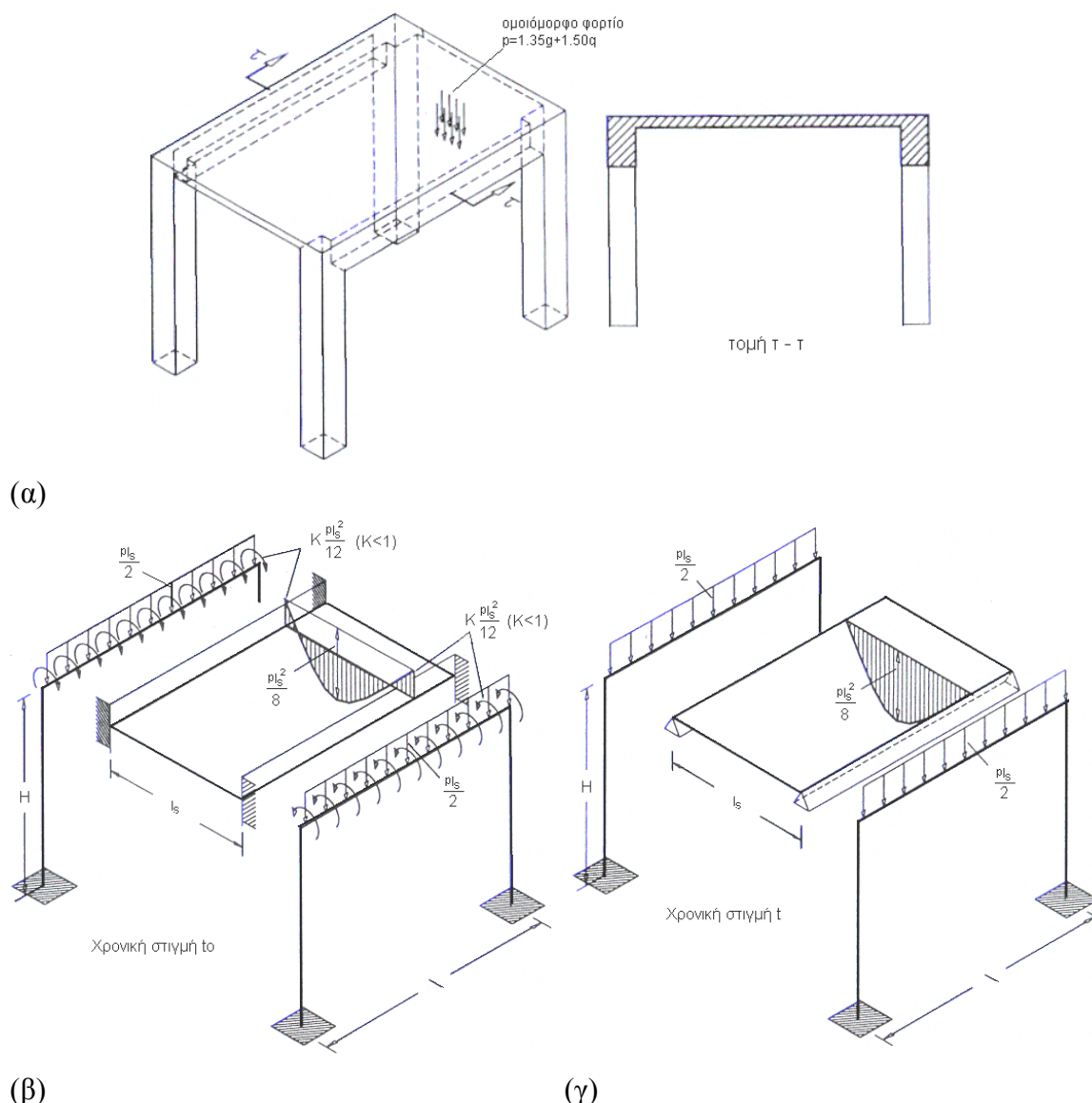
στρεπτικά καταπονούμενη ράβδος και το οποίο βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονά της, δηλαδή είναι συνεπίπεδο της διατομής». Άμεσα αντιληπτό αποτέλεσμα της στρεπτικής καταπόνησης είναι η στροφή των διατομών της δοκού περί διαμήκη άξονα στροφής.

Η στρέψη χαρακτηρίζεται ως άμεση όταν η ανάπτυξή της είναι απαραίτητη προκειμένου να επέλθει ισορροπία στον εξεταζόμενο φορέα. Στο σχήμα 3.1.1, η δοκός που υποστηρίζει την πλάκα - πρόβολο που δέχεται κατακόρυφη φόρτιση υποβάλλεται σε άμεση κατανεμημένη στρεπτική καταπόνηση: Η πλάκα για να ισορροπήσει υποβάλλεται σε καμπτική ροπή στη θέση σύνδεσής της με τη δοκό η οποία αποτελεί στρεπτική ροπή στην κάθετη διεύθυνση για τη δοκό.

Η στρέψη χαρακτηρίζεται ως έμμεση όταν η ανάπτυξή της οφείλεται στο συμβιβαστό των παραμορφώσεων δηλαδή την ανάγκη τα πεδία μετατοπίσεων και παραμορφώσεων να είναι συνεχή ως προς το χώρο και τον χρόνο. Στο σχήμα 3.1.2, οι δοκοί που υποστηρίζουν την πλάκα υποβάλλονται σε έμμεση στρέψη: Αν οι δοκοί είναι κατασκευασμένες έτσι ώστε να διαθέτουν πολύ μικρή δυστρεψία, τότε η πλάκα θα καμφθεί ως αμφιέριστη δοκός χωρίς την ανάπτυξη καμπτικής έντασης στα άκρα της. Αν ωστόσο οι δοκοί διαθέτουν μεγάλη δυστρεψία, τότε η αντίσταση που προβάλλουν στην στροφή περί το διαμήκη άξονά τους που προκαλείται από την κατακόρυφη φόρτιση, θα οδηγήσει στην ανάπτυξη μερικής πάκτωσης (καμπτικής έντασης) στα άκρα της πλάκας. Η καμπτική ένταση προφανώς αντιστοιχεί όπως και στην περίπτωση της άμεσης στρέψης σε κατανεμημένη στρεπτική καταπόνηση για τις δοκούς.



Σχήμα 3.1.1 (α) Δοκός υποβαλλόμενη σε άμεση στρέψη
(β) Η αντίστοιχη αναπτυσσόμενη εντατική κατάσταση

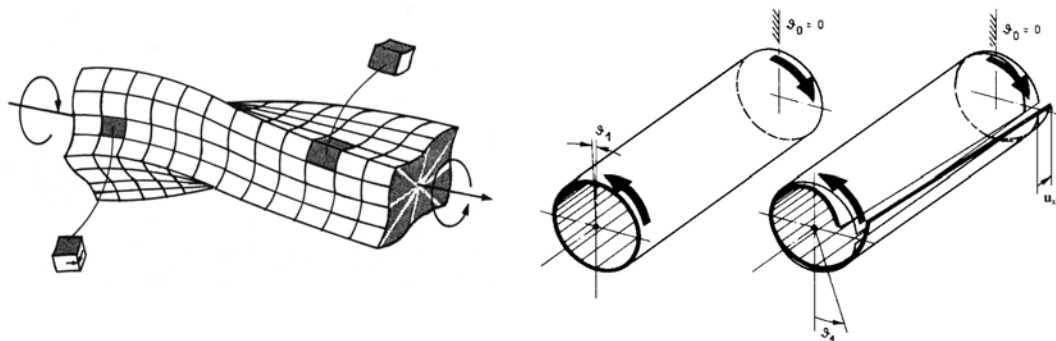


Σχήμα 3.1.2 (α) Δοκοί υποβαλλόμενες σε έμμεση στρέψη
 (β) Αναπτυσσόμενες εντατικές καταστάσεις για όπλιση των δοκών έναντι έμμεσης στρέψης
 (γ) Αναπτυσσόμενες εντατικές καταστάσεις μη όπλισμένων δοκών έναντι έμμεσης στρέψης

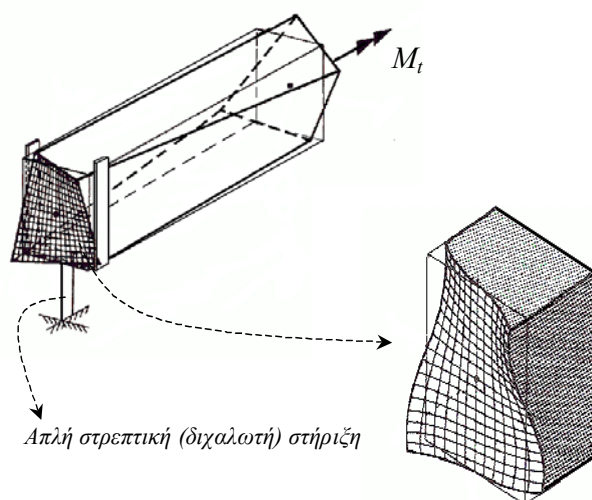
Η μελέτη του προβλήματος της στρέψης ξεκίνησε από πολύ παλιά από τον Coulomb (1784), ο οποίος μελέτησε την απλούστερη περίπτωση ευθύγραμμης ράβδου κυκλικής διατομής από γραμμικά ελαστικό υλικό υποβαλλόμενης σε δύο συγκεντρωμένες στρεπτικές ροπές στα άκρα της. Η κυκλική διατομή έχει το πλεονέκτημα να είναι συμμετρική ως προς οποιοδήποτε άξονα γεγονός που απλοποιεί σημαντικά το πρόβλημα. Ο Coulomb βασίστηκε στην παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων και στο ότι η ράβδος δε στρεβλώνει δηλαδή δεν αναπτύσσεται καμία διαμήκης μετατόπιση. Επέλυσε δε το πρόβλημα με τη θεώρηση ότι κάθε σημείο της ράβδου στρέφεται περί σταθερό διαμήκη άξονα.

Κατά τη μελέτη της στρέψης ράβδων τυχούσας διατομής, έγινε αντιληπτό ότι η παραδοχή μηδενικής στρέβλωσης της διατομής αδυνατεί να δώσει λύση στο πρόβλημα. Πρώτος ο St. Venant (1855) έδωσε λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα με την εγκατάλειψη της παραδοχής μηδενικής στρέβλωσης και την υιοθέτηση της

θεώρησης ότι η ράβδος υπόκειται σε διαμήκεις μετατοπίσεις που δεν παρεμποδίζονται (βλ. σχήμα 3.1.3). Βασίστηκε δε, στην ουσιώδη υπόθεση ότι η αναπτυσσόμενη στρέβλωση είναι ίδια σε κάθε διατομή της ράβδου.

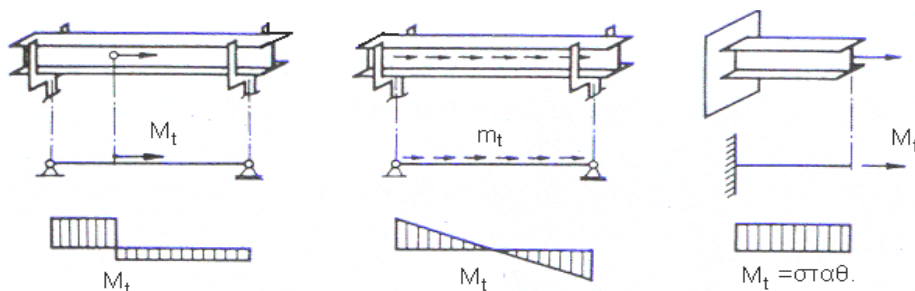


Σχήμα 3.1.3 Στρέβλωση διατομών λόγω στρέψης



Σχήμα 3.1.4 Ομοιόμορφη στρέψη κατά Saint-Venant, όπου η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται από τις συνθήκες στήριξης και η στρεπτική ροπή είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου

Η φόρτιση που μελέτησε ο St. Venant κατά την οποία η στρέβλωση είναι ανεξάρτητη της διαμήκους συντεταγμένης της ράβδου καλείται **ομοιόμορφη στρέψη ή στρέψη St. Venant** (uniform torsion). Σ' αυτήν την περίπτωση **αποδεικνύεται** ότι στη ράβδο ασκούνται μόνο ίσες συγκεντρωμένες στρεπτικές ροπές στα άκρα της. Στην περίπτωση που στη ράβδο ασκούνται και σε άλλες θέσεις στρεπτικές ροπές (συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες) ή η στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω συνοριακών συνθηκών, τότε η αναπτυσσόμενη φόρτιση καλείται **ανομοιόμορφη στρέψη** (non uniform torsion). Κατά την ανομοιόμορφη στρέψη παύει να ισχύει η παραδοχή του St. Venant ότι η στρέβλωση της διατομής είναι ανεξάρτητη της διαμήκους θέσης της (βλ. σχήμα 3.1.5).



Σχήμα 3.1.5 Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης

Ο St. Venant μελέτησε την απλούστερη περίπτωση ράβδου από γραμμικά ελαστικό υλικό υιοθετώντας την υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων. Στην παρούσα εργασία αναλύεται η θεωρία ομοιόμορφης στρέψης ράβδου από (υπερ)ελαστικό ή ελαστοπλαστικό υλικό για την οποία ισχύει η παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων. Έτσι, εγκαταλείπεται η πιο περιοριστική υπόθεση των μικρών μετατοπίσεων αλλά διατηρείται η υπόθεση ότι οι αναπτυσσόμενες μετατοπίσεις οδηγούν σε παραμορφώσεις που είναι αρκούντως μικρές έτσι ώστε να ισχύουν τα όσα έχουν ήδη αναπτυχθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, στα πλαίσια της θεωρίας μικρών παραμορφώσεων. Στα παρακάτω, όπου κρίνεται αναγκαίο θα δίνονται στοιχεία από την κλασική θεωρία στρέψης St. Venant, έτσι ώστε να καταδεικνύονται οι διαφορές και οι ομοιότητες των δύο θεωριών.

3.2 Θεωρία ομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων

3.2.1 Παραδοχές θεωρίας

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε συγκεντρωτικά όλες τις παραδοχές στις οποίες βασίζεται η θεωρία. Παρακάτω, όπου κρίνεται σκόπιμο, γίνεται περαιτέρω ανάπτυξη της σκοπιμότητας των παραδοχών αυτών σε παρακάτω κεφάλαια.

- **Η ράβδος είναι ευθύγραμμη:** Στην περίπτωση που έχουμε καμπύλη ράβδο, η στρεπτική και η καμπτική καταπόνηση είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους και είναι αδύνατο να αναπτυχθεί αποκλειστικά στρεπτική καταπόνηση στη ράβδο.
- **Η ράβδος είναι πρισματική:** Η διατομή της ράβδου είναι ίδια σε όλες τις θέσεις της και τόσο η μορφή όσο και οι διαστάσεις της είναι ανεξάρτητες της διαμήκου συντεταγμένης.
- **Η ράβδος υπόκειται σε περιστροφή περί επιμήκη άξονα που είναι παράλληλος στον άξονα της ράβδου:** Έχει ήδη γίνει αναφορά ότι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της στρέψης είναι η περιστροφή των διατομών της ράβδου περί επιμήκη άξονα. Εάν στη ράβδο επιβληθεί κατασκευαστικά κάποιος άξονας περιστροφής που δεν είναι παράλληλος με τον άξονά της, τότε η εισαγωγή καμπτικής έντασης στη ράβδο είναι αναπόφευκτη.
- **ο λόγος Poisson του υλικού μηδενίζεται, δηλαδή $\nu = 0$**
- **Οι μετατοπίσεις μπορούν να είναι μεγάλες αλλά οι παραμορφώσεις είναι μικρές:** Σύμφωνα με αυτήν την παραδοχή, για τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης Green ισχύει $\varepsilon_{ij} \ll 1, \forall i, j = 1, 2, 3$. Η παραδοχή αυτή, όπως ήδη

έχουμε δείξει οδηγεί σε γραμμικό καταστατικό νόμο για την περίπτωση υπερελαστικού υλικού.

- **Το υλικό της ράβδου είναι ομογενές, ισότροπο και συνεχές:** Η συνέχεια του υλικού εξασφαλίζει ότι τα πεδία μετατοπίσεων, παραμορφώσεων και τάσεων είναι συνεχή και δηλώνει ότι το στο υλικό δεν αναπτύσσονται ρωγμές και ασυνέχειες κατά την παραμόρφωσή του.
- **Το υλικό μπορεί να είναι υπερελαστικό ή ελαστοπλαστικό.**

3.2.2 Πεδίο μετατοπίσεων

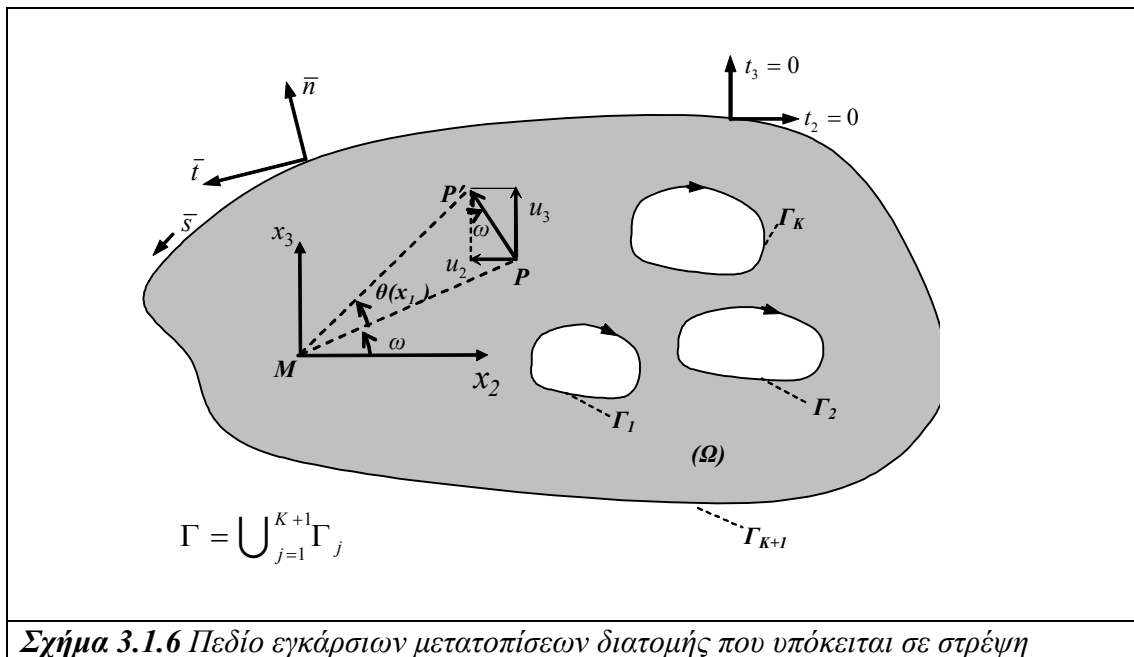
Για να επιλύσουμε το πρόβλημα της ομοιόμορφης στρέψης θα κάνουμε χρήση της λεγόμενης **ημιαντίστροφης μεθόδου** (semi-inverse method) σύμφωνα με την οποία θεωρείται κάποιο συγκεκριμένο πεδίο μετατοπίσεων και στη συνέχεια με χρήση των διαθέσιμων εξισώσεων ισορροπίας και των συνοριακών συνθηκών διαπιστώνεται αν όντως στη ράβδο ασκείται αποκλειστικά στρεπτική καταπόνηση. Αν το πεδίο μετατοπίσεων που έχει εκλεγεί α) ικανοποιεί όλες τις διατιθέμενες εξισώσεις και β) δίνει λύση στο ακριβές πρόβλημα που μελετούμε (ομοιόμορφη στρέψη χωρίς καμία άλλη καταπόνηση στη ράβδο), τότε το συγκεκριμένο πεδίο θα είναι το σωστό.

Θεωρούμε ότι η ευθύγραμμη πρισματική ράβδος που εξετάζουμε έχει μήκος l και τυχούσα διατομή εμβαδού A που καταλαμβάνει το πολλαπλά συνεκτικό δυσδιάστατο χωρίο Ω , μπορεί να περιέχει ή όχι οπές ενώ το σύνορο της διατομής $\Gamma = \partial\Omega$ είναι τμηματικά λείο. Θεωρούμε ότι οι διάφορες διατομές της ράβδου στρέφονται ως στερεά σώματα περί σταθερό τυχόντα επιμήκη άξονα που είναι παράλληλος στον άξονα της δοκού. Το σύστημα αναφοράς που εκλέγεται είναι το $Mx_1x_2x_3$ όπου M είναι το σημείο από το οποίο διέρχεται ο άξονας περιστροφής, x_1 είναι η διαμήκης συντεταγμένη της ράβδου, ενώ x_2 και x_3 είναι οι εγκάρσιες συντεταγμένες της ράβδου. Η στροφή της διατομής στην τυχούσα θέση x_1 δίνεται από την άγνωστη μεταβλητή $\theta(x_1)$ η οποία προφανώς θα είναι ανεξάρτητη από τις εγκάρσιες συντεταγμένες.

Είναι προφανές ότι αφού οι διατομές στρίβουν ως στερεά σώματα, κάθε σημείο της διατομής θα εκτελεί κυκλική κίνηση περί τον άξονα περιστροφής Mx_1 . **Στη θεωρία μικρών μετατοπίσεων**, θεωρούμε ότι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις u_2, u_3 (u_2 παράλληλη στο Mx_2 και u_3 παράλληλη στο Mx_3) μπορούν να προσεγγιστούν από την εφαπτομένη του κυκλικού τόξου επί του οποίου κινείται το σημείο. Με στοιχειώδεις γεωμετρικές θεωρήσεις οι εγκάρσιες μετατοπίσεις θα δίνονται από τους παρακάτω τύπους (βλ. σχήμα 3.1.6):

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -(PP') \cdot \sin \omega = -(MP) \cdot \theta(x_1) \cdot \sin \omega = -x_3 \cdot \theta(x_1) \quad (3.2.1\alpha)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = (PP') \cdot \cos \omega = (MP) \cdot \theta(x_1) \cdot \cos \omega = x_2 \cdot \theta(x_1) \quad (3.2.1\beta)$$



Σχήμα 3.1.6 Πεδίο εγκάρσιων μετατοπίσεων διατομής που υπόκειται σε στρέψη

Στη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων δεν είναι δυνατό να υιοθετηθεί η προσέγγιση της πραγματικής κυκλικής τροχιάς από την εφαπτομένη, επομένως το πεδίο των εγκάρσιων μετατοπίσεων u_2, u_3 θα περιγράφεται από τη θεώρηση της ακριβούς γεωμετρίας της κίνησης ως εξής: (Trahair, 1992)

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \cdot \sin \theta(x_1) - x_2 \cdot (1 - \cos \theta(x_1)) \quad (3.2.2\alpha)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot \sin \theta(x_1) - x_3 \cdot (1 - \cos \theta(x_1)) \quad (3.2.2\beta)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι ράβδοι τυχούσας διατομής θα υποστούν στρέβλωση, επομένως είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε διαμήκη μετατόπιση u_1 μη μηδενική. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η ομοιόμορφη στρέψη χαρακτηρίζεται από σταθερή στρέβλωση κατά μήκος της ράβδου, επομένως η διαμήκης μετατόπιση θα είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή θέσης x_1 . Έτσι **στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων** λαμβάνουμε τη διαμήκη μετατόπιση u_1 ως

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \theta'(x_1) \cdot \phi_M^P(x_2, x_3) \quad (3.2.3)$$

όπου

$\phi_M^P(x_2, x_3)$: Άγνωστη, προς προσδιορισμό συνάρτηση δύο μεταβλητών που καλείται **προτογενής συνάρτηση στρέβλωσης** (primary warping function).

Τονίζεται ότι από τη σχ. (3.2.3), προκειμένου η u_1 να προκύψει όντως ανεξάρτητη της διαμήκους συντεταγμένης x_1 έπεται κατευθείαν ότι

$$\theta'(x_1) = \theta' = \text{σταθ.} \quad (3.2.4)$$

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε στη θέση του θ' κάποια άλλη τυχαία σταθερά, ωστόσο θα αποδειχτεί στη συνέχεια ότι το συγκεκριμένο πεδίο μετατοπίσεων δίνει το εντατικό αποτέλεσμα που επιθυμούμε (ομοιόμορφη στρέψη), δηλαδή η τυχαία σταθερά θα προκύψει ίση με το θ' . Αναφέρεται απλώς ότι στα πλαίσια της ανομοιόμορφης στρέψης, η διαμήκης μετατόπιση που θεωρούμε δεν είναι μια τυχαία συνάρτηση 3 μεταβλητών, αλλά αντιθέτως θεωρούμε ότι δίνεται από τον τύπο (3.2.3). Η διαφορά της ομοιόμορφης από την ανομοιόμορφη στρέψη έγκειται στο ότι το $\theta'(x_1)$ παύει πλέον να είναι σταθερό ενώ παράλληλα εισάγεται και μια άγνωστη συνάρτηση τριών μεταβλητών $\phi_M^S(x_1, x_2, x_3)$ που καλείται δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης (secondary warping function). Η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης χρησιμεύει στον προσδιορισμό των δευτερογενών διατμητικών τάσεων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης.

Στη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων η $u_1(x_1, x_2, x_3)$ λαμβάνεται από τη σχέση

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_s(x_1) + \theta' \cdot \phi_M^P(x_2, x_3) \quad (3.2.5)$$

όπου

$u_s(x_1)$: Άγνωστη προς προσδιορισμό συνάρτηση μίας μεταβλητής η οποία περιγράφει την ομοιόμορφη βράχυνση που υφίσταται η ράβδος λόγω της επιρροής των μεγάλων μετατοπίσεων.

Στα πλαίσια των μεγάλων μετατοπίσεων το χαρακτηριστικό γνώρισμα της ομοιόμορφης στρέψης ότι η στρέβλωση κατά μήκος της δοκού είναι σταθερή ισχύει, αφού η συνάρτηση $u_s(x_1)$ εξαρτάται μόνο από τη διαμήκη συντεταγμένη, επομένως περιγράφει μόνο ομοιόμορφη βράχυνση (ή επιμήκυνση) και όχι στρέβλωση που χαρακτηρίζεται από διαφορετικές μετατοπίσεις $u_1(x_1, x_2, x_3)$ στα διάφορα σημεία της διατομής (βλ. σχήματα 3.1.3, 3.1.4). Η $u_s(x_1)$ είναι απαραίτητο να εισαχθεί στο πεδίο μετατοπίσεων προκειμένου να μην εισαχθεί στη δοκό παρασιτική αξονική δύναμη που θα οδηγούσε σε συνδυασμένη στρεπτική και αξονική καταπόνηση. Το σημείο αυτό θα αναλυθεί διεξοδικά στη συνέχεια. Επίσης, προκειμένου και εδώ να λάβουμε την επιθυμητή εντατική κατάσταση, το $u_s(x_1)$ δεν είναι τυχαίο αλλά θα παρθεί έτσι ώστε

$$u_s'(x_1) = u_s' = \text{σταθ.} \quad (3.2.6)$$

3.2.3 Πεδίο παραμορφώσεων

Το επόμενο βήμα στην ανάλυση είναι ο καθορισμός του πεδίου παραμορφώσεων ο οποίος είναι εύκολος μιας και έχει καθοριστεί το πεδίο μετατοπίσεων. **Στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων** γίνεται χρήση του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης (βλ. σχ. (1.1.45), (1.1.46)). Με χρήση των σχ. (3.2.1), (3.2.3) οι ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad (3.2.7\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.2.7\beta)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.2.7\gamma)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) \quad (3.2.7\delta)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) \quad (3.2.7\epsilon)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\theta' + \theta' = 0 \quad (3.2.7\zeta)$$

Παρατηρούμε ότι οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή είναι οι διατμητικές παραμορφώσεις γ_{12}, γ_{13} .

Στα πλαίσια των μεγάλων μετατοπίσεων χρησιμοποιούμε τον τανυστή παραμορφώσεων Green (βλ. σχ. (1.1.12) και (1.1.34)). Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα που είναι μη γραμμικό υιοθετούμε την παραδοχή ότι η διαμήκης μετατόπιση που υφίσταται η ράβδος είναι αρκούτσως μικρή έτσι ώστε να μπορούν να αμεληθούν οι μη γραμμικοί όροι της στον τανυστή παραμόρφωσης. Η παραδοχή είναι εύλογη αν φανταστούμε τον τρόπο παραμόρφωσης της ράβδου: Επειδή η ράβδος έχει μεγάλο μήκος, η κυρίαρχη παραμορφωσιακή της εικόνα προκύπτει από τις στροφές $\theta(x_1)$ των διατομών και δευτερευόντως από τη στρέβλωση που υφίσταται. Συνεπώς σε μια πρώτη προσέγγιση στη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων είναι εύλογο να αγνοήσουμε τους μη γραμμικούς όρους της $u_i(x_1, x_2, x_3)$ αλλά να λάβουμε υπόψη όλους τους όρους των στροφών $\theta(x_1)$. Με βάση αυτήν την παραδοχή οι ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις του τανυστή παραμόρφωσης Green διαμορφώνονται ως εξής:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (3.2.8\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \Rightarrow \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (3.2.8\beta)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \Rightarrow \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \quad (3.2.8\gamma)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_{12} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (3.2.8\delta)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma_{13} &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (3.2.8\epsilon)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma_{23} &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (3.2.8\zeta)$$

Με βάση τις σχ. (3.2.2), (3.2.5) οι παραπάνω σχέσεις έπειτα από κάποια άλγεβρα δίνουν

$$\varepsilon_{11} = u'_s + \frac{I}{2} \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot (\theta')^2 \quad (3.2.9\alpha)$$

$$\varepsilon_{22} = 0 \quad (3.2.9\beta)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (3.2.9\gamma)$$

$$\gamma_{12} = \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^p}{\partial x_2} - x_3 \right) \quad (3.2.9\delta)$$

$$\gamma_{13} = \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^p}{\partial x_3} + x_2 \right) \quad (3.2.9\epsilon)$$

$$\gamma_{23} = 0 \quad (3.2.9\zeta)$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (3.2.7), (3.2.9) καθίστανται σαφή τα εξής:

- Παρότι τα πεδία μετατοπίσεων και παραμορφώσεων ορίζονται διαφορετικά στις θεωρήσεις των μικρών και των μεγάλων μετατοπίσεων, όλες οι συνιστώσες της παραμόρφωσης εκτός από την ορθή παραμόρφωση κατά μήκος της ράβδου ε_{11} έχουν πανομοιότυπο τύπο
- Η ουσιώδης διαφορά των δύο θεωρήσεων βρίσκεται στη συνιστώσα ε_{11} η οποία παύει να είναι μηδενική στην περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων.

Ο όρος $\frac{I}{2} \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot (\theta')^2$ όπως παρατηρούμε είναι μη γραμμικός ως προς την παράγωγο της γωνίας στροφής θ' και καλείται **όρος Wagner** (Wagner term) (Trahair, 1992)

3.2.4 Πεδίο τάσεων

Το επόμενο βήμα στην ανάλυση είναι ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό είναι αναγκαία η θεώρηση καταστατικών νόμων στους οποίους να υπακούει το υλικό της ράβδου. Στην περίπτωση ενός υπερελαστικού υλικού, οι συνιστώσες της παραμόρφωσης Green συναρτήσκει του 2^{00}

τανυστή τάσεως Piola – Kirchhoff δίνονται από τις σχ. (2.2.15). Με την επιπλέον παραδοχή που έχει υιοθετηθεί ότι $\nu = 0$, η αντιστροφή των σχέσεων αυτών δίνει (με τη βοήθεια των σχ. (3.2.9)):

$$S_{11} = E \cdot \varepsilon_{11} \Rightarrow S_{11} = E \cdot u'_s + E \cdot \frac{I}{2} \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot (\theta')^2 \quad (3.2.10\alpha)$$

$$S_{22} = E \cdot \varepsilon_{22} \Rightarrow S_{22} = 0 \quad (3.2.10\beta)$$

$$S_{33} = E \cdot \varepsilon_{33} \Rightarrow S_{33} = 0 \quad (3.2.10\gamma)$$

$$S_{12} = G \cdot \gamma_{12} \Rightarrow S_{12} = G \cdot \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) \quad (3.2.10\delta)$$

$$S_{13} = G \cdot \gamma_{13} \Rightarrow S_{13} = G \cdot \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) \quad (3.2.10\epsilon)$$

$$S_{23} = G \cdot \gamma_{23} \Rightarrow S_{23} = 0 \quad (3.2.10\zeta)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις παραλήφθηκαν για εποπτικούς λόγους οι αριστεροί ενδείκτες του χρόνου και της διαμόρφωσης όπου εξετάζουμε τη ράβδο. Από τις σχ. (3.2.10β), (3.2.10γ) καθίσταται σαφής η αιτία υιοθέτησης της παραδοχής ότι $\nu = 0$: Με $\nu \neq 0$, οι ορθές τάσεις S_{22} , S_{33} δεν θα προκύψουν μηδενικές, γεγονός που στη συνέχεια θα οδηγήσει σε επιπλέον ένταση πέραν της στρεπτικής με αποτέλεσμα να μην επιλύεται το πρόβλημα που εξετάζουμε.

Στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων έχουμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι ο καταστατικός νόμος του υλικού είναι ο ίδιος αρκεί να χρησιμοποιηθούν ο τανυστής τάσης Cauchy (εκπεφρασμένος ως προς την αρχική διαμόρφωση $Mx_1x_2x_3$) και ο απειροστικός τανυστής παραμορφώσεων. Έτσι οι σχέσεις (3.2.10) παραμένουν अपαράλλαχτες, με τη μόνη διαφορά ότι μηδενίζεται η ορθή τάση σ_{11} , δηλαδή

$$\sigma_{11} = 0 \quad (3.2.11)$$

λόγω του ότι η ορθή παραμόρφωση $\varepsilon_{11} = 0$. Παρατηρούμε ότι η παραδοχή $\nu = 0$ είναι αναγκαία μόνο στα πλαίσια μεγάλων μετατοπίσεων καθώς στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων οι ορθή παραμόρφωση ε_{11} μηδενίζεται, επομένως θα μηδενίζονται και οι ορθές τάσεις S_{22} , S_{33} .

Στην περίπτωση που έχουμε ελαστοπλαστικό υλικό, βολεύει η θεώρηση των υπεισερχόμενων μεγεθών σε απειροστές προσανζησεις ως προς το χρόνο. Από τη σχ. (2.3.4) της ελαστοπλαστικής θεωρίας, για τις μη μηδενικές συνιστώσες τάσης S_{11} , S_{12} , S_{13} θα έχουμε

$$d\mathbf{S} = [\mathbf{D}^e] \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} \Rightarrow d\mathbf{S} = [\mathbf{D}^e] \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (3.2.12)$$

όπου

$d(\cdot)$: Σύμβολο που δηλώνει απειροστά προσανζητικά μεγέθη ως προς το χρόνο

$$(d\mathbf{S})^T = (dS_{11}, dS_{12}, dS_{13})$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon})^T &= (d\varepsilon_{11}, d\gamma_{12}, d\gamma_{13}) \\
 (\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{pl})^T &= (d\varepsilon_{11}^{pl}, d\gamma_{12}^{pl}, d\gamma_{13}^{pl}) \\
 [\mathbf{D}^e] &= \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Με την υιοθέτηση της παραδοχής ότι η συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_M^P παραμένει σταθερή στο απειροστό χρονικό διάστημα dt που εξετάζουμε, δηλαδή

$$d\phi_M^P = 0 \quad (3.2.13)$$

οι σχέσεις (3.2.10) με τη βοήθεια των σχέσεων (3.2.9) εκπεφρασμένων σε προσausζητική μορφή θα δώσουν

$$dS_{11} = E \cdot du_s' + E \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot \theta' \cdot d\theta' - E \cdot d\varepsilon_{11}^{pl} \quad (3.2.14\alpha)$$

$$dS_{12} = G \cdot d\theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) - G \cdot d\gamma_{12}^{pl} \quad (3.2.14\beta)$$

$$dS_{13} = G \cdot d\theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) - G \cdot d\gamma_{13}^{pl} \quad (3.2.14\gamma)$$

Στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις με τη διαφορά ότι η ορθή τάση $d\sigma_{11}$ θα μηδενίζεται, δηλαδή

$$d\sigma_{11} = 0 \quad (3.2.15)$$

3.2.5 Προσδιορισμός της συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_M^P - διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας

Συνοψίζοντας τα όσα έχουμε εξάγει μέχρι τώρα, έχουμε εισάγει στο πεδίο μετατοπίσεων 3 άγνωστες προς προσδιορισμό συναρτήσεις, τις $\phi_M^P(x_2, x_3)$, $\theta(x_1)$, $u_s(x_1)$, έχοντας κάνει τις επιπλέον θεωρήσεις ότι $\theta'(x_1) = \text{σταθ.}$, $u_s'(x_1) = \text{σταθ.}$. Μέχρι στιγμής έχουμε χρησιμοποιήσει τις 12 από τις 15 συνολικά διατιθέμενες σχέσεις του προβλήματος (6 σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων και 6 καταστατικές σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων). Είναι προφανές ότι οι 3 άγνωστες συναρτήσεις θα προσδιοριστούν από τις διατιθέμενες εξισώσεις ισορροπίας (σε διαφορική ή ολοκληρωτική - ασθενή μορφή). Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης στρέβλωσης βολεύει η χρησιμοποίηση της 1^{ης} διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας (ισορροπία κατά x_1) (βλ. σχ. (1.2.48α και (1.2.28α))

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \quad (3.2.16)$$

στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων ή

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{13}}{\partial x_3} + {}_0f_1 = 0 \quad (3.2.17)$$

στην περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων. Από τη σχ. (3.2.11), για την περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων θα έχουμε

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad (3.2.18)$$

ενώ με τη βοήθεια των σχ. (3.2.10δ) και (3.2.10ε), η διαφορική εξ. ισορροπίας (3.2.16) θα δώσει

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0 &\Rightarrow 0 + G \cdot \theta' \cdot \frac{\partial^2 \phi_M^P}{\partial x_2^2} + G \cdot \theta' \cdot \frac{\partial^2 \phi_M^P}{\partial x_3^2} + 0 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \cdot \theta' \cdot \nabla^2 \phi_M^P = 0 \xrightarrow{G \cdot \theta' \neq 0} \nabla^2 \phi_M^P = 0, \text{ στο } \Omega \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

όπου

$f_1 = 0$: Συνιστώσα μαζικής δύναμης ανά μονάδα (απαραμόρφωτου) όγκου κατά το Mx_1 η οποία είναι μηδενική καθώς στο σώμα ασκούνται μόνο επιφανειακές δράσεις.

$\nabla^2 (\cdot) = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_3^2}$: Ο τελεστής Laplace της μαθηματικής ανάλυσης

Προκειμένου το πρόβλημα να είναι καλώς τοποθετημένο, πρέπει να εφοδιάσουμε την παραπάνω εξίσωση με την κατάλληλη συνοριακή συνθήκη. Εξετάζοντας μια τυχαία ενδιάμεση διατομή της δοκού Ω (οποιαδήποτε εκτός από τις δύο ακραίες διατομές), για το σύνορο $\partial\Omega$ της διατομής θα ισχύει

$$n_1 = 0, n_2, n_3 \in R \quad (3.2.20)$$

όπου

n_1, n_2, n_3 : Οι συνιστώσες του μοναδιαίου εξωτερικά κάθετου διανύσματος $\mathbf{n}^T = (n_1, n_2, n_3)$ (στην αρχική απαραμόρφωτη διαμόρφωση)

Η παραπάνω ιδιότητα οφείλεται στο ότι η δοκός είναι ευθύγραμμη και πρισματική. Χρησιμοποιώντας την 1^η συνοριακή συνθήκη των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας (βλ. εξ. (1.2.49α) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} t_1 = \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{21} \cdot n_2 + \sigma_{31} \cdot n_3 &\Rightarrow t_1 = 0 + \sigma_{21} \cdot n_2 + \sigma_{31} \cdot n_3 \xrightarrow{(3.2.10\delta), (3.2.10\epsilon)} \\ G \cdot \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) \cdot n_2 + G \cdot \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) \cdot n_3 &= 0 \xrightarrow{G \cdot \theta' \neq 0} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_M^P}{\partial n} = x_3 \cdot n_2 - x_2 \cdot n_3, \text{ στο } \partial\Omega \quad (3.2.21)$$

όπου

$t_1 = 0$: Η συνιστώσα κατά το Mx_1 του διανύσματος τάσης $\mathbf{t}(\mathbf{n})^T = (t_1, t_2, t_3)$ όπου \mathbf{n} το εξωτερικά κάθετο στο $\partial\Omega$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η συνιστώσα λαμβάνεται μηδενική προκειμένου η συνάρτηση στρέβλωσης που προσδιορίζουμε να επιλύει πρόβλημα στρέψης (προφανώς, η διαμήκης συνιστώσα t_1 της εξωτερικά επιβαλλόμενης επιφανειακής δράσης δεν μπορεί να δώσει στρεπτική φόρτιση στη ράβδο).

$\frac{\partial(\cdot)}{\partial n} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \cdot n_2 + \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_3} \cdot n_3$: παράγωγος κατά τη διεύθυνση του εξωτερικά κάθετου στο $\partial\Omega$ μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n}

Συνοψίζοντας, στο ελαστικό πρόβλημα μικρών μετατοπίσεων, η $\phi_M^P(x_2, x_3)$ προσδιορίζεται από την επίλυση της εξίσωσης Laplace (3.2.19) ορισμένη στο δυσδιάστατο χωρίο Ω που καταλαμβάνει η διατομή της ράβδου και διέπεται από τη συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann (3.2.21) που ορίζεται στο σύνορο της διατομής $\partial\Omega$.

Για το ελαστοπλαστικό πρόβλημα μικρών μετατοπίσεων, θα ακολουθήσουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία, με τη διαφορά ότι θα χρησιμοποιηθούν οι εκφράσεις (3.2.14) για τις προσαυξητικές τάσεις που έχουν προκύψει για ελαστοπλαστικό υλικό. Επιπλέον, είναι αναγκαίο να εκφραστεί η διαφορική εξίσωση ισορροπίας (3.2.16) (και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη 1.2.49α)) σε προσαυξητική μορφή. Οι εξισώσεις αυτές εξάγονται πολύ εύκολα με μια διαφόριση ως προς το χρόνο, αφού είναι εκπεφρασμένες ως προς τις μεταβλητές θέσης της αρχικής διαμόρφωσης που είναι ανεξάρτητες του χρόνου:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial d\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (3.2.22)$$

$$t_1 = \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{21} \cdot n_2 + \sigma_{31} \cdot n_3 \Rightarrow dt_1 = d\sigma_{11} \cdot n_1 + d\sigma_{21} \cdot n_2 + d\sigma_{31} \cdot n_3 \quad (3.2.23)$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \phi_M^P = \frac{1}{d\theta'} \cdot \left(\frac{\partial d\gamma_{12}^{pl}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\gamma_{13}^{pl}}{\partial x_3} \right), \text{ στο } \Omega \quad (3.2.24)$$

η οποία θα διέπεται από την παρακάτω συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann

$$\frac{\partial \phi_M^P}{\partial n} = \left(\frac{d\gamma_{12}^{pl}}{d\theta'} + x_3 \right) \cdot n_2 + \left(\frac{d\gamma_{13}^{pl}}{d\theta'} - x_2 \right) \cdot n_3, \text{ στο } \partial\Omega \quad (3.2.25)$$

Για το ελαστικό πρόβλημα μεγάλων μετατοπίσεων μπορεί να γίνει χρήση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας (3.2.17) που έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εκπεφρασμένη στην αρχική διαμόρφωση (όπου η γεωμετρία της ράβδου είναι γνωστή). Παρατηρούμε ωστόσο ότι στην εξίσωση υπεισέρχεται ο 1^{ος} τανυστής Piola

– Kirchhoff γεγονός που δε βολεύει τη θεώρησή μας, αφού οι σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων είναι εκπεφρασμένες ως προς τον 2^ο τανυστή Piola – Kirchhoff. Έτσι απαιτείται η χρήση της σχέσης μετασχηματισμού μεταξύ των δύο τανυστών (1.2.43β) προκειμένου να εκφραστεί ο 1^{ος} τανυστής Piola – Kirchhoff συναρτήσει μεγεθών που έχουμε ήδη ορίσει.

Είναι δυνατό να αποδειχτεί ότι στην εξίσωση ισορροπίας (3.2.17) μπορούμε να εισάγουμε τις συνιστώσες του 2^{ου} τανυστή Piola – Kirchhoff. Είναι δε προφανές ότι κάτι τέτοιο ισχύει μονάχα για το συγκεκριμένο πρόβλημα της ομοιόμορφης στρέψης που μελετούμε. Η απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο του Washizu (1975) και βασίζεται στην αρχή δυνατών έργων. Η απόδειξη για εποπτικούς λόγους δε θα παρουσιαστεί εδώ αλλά στο επόμενο υποκεφάλαιο 3.2.7 (βλ. σχ. (3.2.57)) όπου εισάγεται η αρχή δυνατών έργων στη μελέτη του προβλήματος. Συνεπώς, για το πρόβλημα ελαστικό πρόβλημα μεγάλων μετατοπίσεων θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} + {}_0 f_1 = 0 &\xrightarrow{(3.2.14)} 0 + G \cdot \theta' \cdot \frac{\partial^2 \phi_M^P}{\partial x_2^2} + G \cdot \theta' \cdot \frac{\partial^2 \phi_M^P}{\partial x_3^2} + 0 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla^2 \phi_M^P = 0, \text{ στο } \Omega & \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

ενώ η συνοριακή συνθήκη του προβλήματος είναι η

$$\begin{aligned} {}_0 t_1 = S_{11} \cdot n_1 + S_{21} \cdot n_2 + S_{31} \cdot n_3 \Rightarrow 0 = 0 + S_{21} \cdot n_2 + S_{31} \cdot n_3 \Rightarrow \\ \xrightarrow{(3.2.14)} G \cdot \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) \cdot n_2 + G \cdot \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) \cdot n_3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \phi_M^P}{\partial n} = x_3 \cdot n_2 - x_2 \cdot n_3, \text{ στο } \partial \Omega & \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση στρέβλωσης προσδιορίζεται από την ίδια ακριβώς εξίσωση στις μικρές και στις μεγάλες μετατοπίσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνεισφορά της ορθής τάσης S_{11} είναι μηδενική στον προσδιορισμό της ϕ_M^P (η ορθή τάση είναι η μόνη διαφοροποίηση του εντατικού πεδίου των μεγάλων μετατοπίσεων σε σχέση με αυτό των μικρών μετατοπίσεων).

Για το ελαστοπλαστικό πρόβλημα μεγάλων μετατοπίσεων, είναι προφανές ότι η διαφορική εξίσωση από την οποία προέκυψε η εξ. (3.2.26) θα ισχύει σε προσανζητική μορφή κατ' αντιστοιχία με την προσανζητική μορφή της εξ. (3.2.22) των μικρών μετατοπίσεων. Έτσι θα έχουμε

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} + {}_0 f_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial dS_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial dS_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial dS_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad (3.2.28)$$

$${}_0 t_1 = S_{11} \cdot n_1 + S_{21} \cdot n_2 + S_{31} \cdot n_3 \Rightarrow d_0 t_1 = dS_{11} \cdot n_1 + dS_{21} \cdot n_2 + dS_{31} \cdot n_3 \quad (3.2.29)$$

Εκτελώντας τις πράξεις θα καταλήξουμε στις ίδιες ακριβώς εξισώσεις που ισχύουν για το ελαστοπλαστικό πρόβλημα μικρών μετατοπίσεων (εξ. (3.2.24), (3.2.25)):

$$\nabla^2 \phi_M^P = \frac{I}{d\theta'} \cdot \left(\frac{\partial d\gamma_{12}^{pl}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\gamma_{13}^{pl}}{\partial x_3} \right), \text{ στο } \Omega \quad (3.2.30)$$

$$\frac{\partial \phi_M^P}{\partial n} = \left(\frac{d\gamma_{12}^{pl}}{d\theta'} + x_3 \right) \cdot n_2 + \left(\frac{d\gamma_{13}^{pl}}{d\theta'} - x_2 \right) \cdot n_3, \text{ στο } \partial\Omega \quad (3.2.31)$$

Συμπερασματικά, ο προσδιορισμός της συνάρτησης στρέβλωσης είναι πανομοιότυπος στη θεώρηση των μικρών και των μεγάλων μετατοπίσεων. Η μόνη διαφοροποίηση έγκειται ως προς τον καταστατικό νόμο υλικού: Σε περίπτωση που το υλικό είναι ελαστικό, αρκεί να μηδενίσουμε τους όρους των πλαστικών παραμορφώσεων στις σχέσεις (3.2.30), (3.2.31) για να λάβουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα.

3.2.6 Προσδιορισμός των παραγώγων της γωνίας στροφής και της αξονικής βράχυνσης θ', u'_s - Εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου (αρχή δυνατών έργων)

Για τον προσδιορισμό των άλλων δύο άγνωστων συναρτήσεων θ', u'_s βολεύει η θεώρηση των εξισώσεων ισορροπίας σε ολοκληρωτική μορφή, δηλαδή σε επίπεδο ράβδου και όχι σε επίπεδο υλικού σημείου (διαφορική μορφή). Ας εξετάσουμε αρχικά την απλούστερη περίπτωση **ράβδου από ελαστικό υλικό στο πλαίσιο των μικρών μετατοπίσεων**. Η εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου εκφράζεται μέσω της αρχής δυνατών έργων εκπεφρασμένη ως προς την αρχική διαμόρφωση μιας και οι μετατοπίσεις θεωρούνται μικρές. Έτσι, με βάση την αρχή δυνατών έργων που εκφράζεται μέσω του τανυστή τάσης Cauchy και του απειροστικού τανυστή παραμόρφωσης στο πλαίσιο της αρχικής διαμόρφωσης λαμβάνουμε: (βλ. σχ. (1.2.34β) και (1.2.37))

$$\int_V \text{tr} \left[[\boldsymbol{\sigma}]^T \cdot \delta([\boldsymbol{\varepsilon}]) \right] dV = \int_A [\mathbf{t}(\mathbf{n})^T \cdot \delta\mathbf{r}] dA + \int_V [\mathbf{f}^T \cdot \delta\mathbf{r}] dV \quad (3.2.32)$$

όπου στη σχέση παραλείψαμε όλους τους αριστερούς ενδείκτες (χρόνου και διαμόρφωσης) για εποπτικούς λόγους,

A : Η (απαραμόρφωτη) επιφάνεια που περικλείει τον όγκο της ράβδου στην οποία συμπεριλαμβάνονται και οι δύο ακραίες διατομές

V : Ο (απαραμόρφωτος) όγκος της ράβδου

$[\boldsymbol{\sigma}]$, $[\boldsymbol{\varepsilon}]$: Ο τανυστής τάσης Cauchy και ο απειροστικός τανυστής παραμορφώσεων αντίστοιχα, εκπεφρασμένοι ως προς τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3 της αρχικής διαμόρφωσης

Η αρχή δυνατών έργων απλοποιείται σημαντικά αν λάβουμε υπόψη μας ότι α) μαζικές δυνάμεις \mathbf{f} δεν ασκούνται στη ράβδο, β) οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες των τανυστών τάσης και παραμόρφωσης είναι οι διαμητικές συνιστώσες $(\cdot)_{12}$, $(\cdot)_{13}$ (βλ. σχ. (3.2.10β-γ), (3.2.11)). Επιπρόσθετα, οι συνιστώσες του διανύσματος των δυνατών ολικών μετατοπίσεων $(\delta\mathbf{r})^T = (\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3)$, με βάση το πεδίο μετατοπίσεων που έχουμε εκλέξει (βλ. σχ. (3.2.1), (3.2.3)), γράφονται ως

$$\delta u_1 = \delta\theta' \cdot \phi_M^P + \theta' \cdot \delta\phi_M^P \quad (3.2.33\alpha)$$

$$\delta u_2 = -x_3 \cdot \delta \theta \quad (3.2.33\beta)$$

$$\delta u_3 = x_2 \cdot \delta \theta \quad (3.2.33\gamma)$$

ενώ οι μη μηδενικές δυνατές ολικές διατμητικές παραμορφώσεις δίνονται ως

$$\delta \gamma_{12} = \delta \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) + \theta' \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_2} \quad (3.2.34\alpha)$$

$$\delta \gamma_{13} = \delta \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) + \theta' \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_3} \quad (3.2.34\beta)$$

Με βάση τα παραπάνω το αριστερά μέλος I_1 της σχ. (3.2.32) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V (\sigma_{12} \cdot \delta \gamma_{12} + \sigma_{13} \cdot \delta \gamma_{13}) dV = \\ &= \int_V \left\{ \sigma_{12} \cdot \left[\delta \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) + \theta' \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_2} \right] + \sigma_{13} \cdot \left[\delta \theta' \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) + \theta' \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_3} \right] \right\} dV \xrightarrow{(3.2.10\delta-\varepsilon)} \\ &= \int_V G \cdot \theta' \cdot \left[\left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right)^2 \right] \cdot \delta \theta' dV + \int_V \left(\sigma_{12} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_2} + \sigma_{13} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_3} \right) \cdot \theta' dV = \\ &= G \cdot \theta' \cdot \left(\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right)^2 \right] d\Omega \right) \cdot \int_{x_l=0}^l \delta \theta' dx_l + \int_V \left(\sigma_{12} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_2} + \sigma_{13} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_3} \right) \cdot \theta' dV \Rightarrow \\ \Rightarrow I_1 &= G \cdot I_t \cdot \theta' \cdot (\delta \theta_2 - \delta \theta_1) + \int_V \left(\sigma_{12} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_2} + \sigma_{13} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_3} \right) \cdot \theta' dV \quad (3.2.35) \end{aligned}$$

όπου

$$I_t = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right)^2 \right] d\Omega : \text{σταθερά που καλείται } \mathbf{\text{σταθερά στρέψης}}$$

(torsion constant). Η σταθερά στρέψης μπορεί να δοθεί εναλλακτικά από τον τύπο

$$I_t = \int_{\Omega} \left(x_2^2 + x_3^2 + x_2 \cdot \frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} - x_3 \cdot \frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} \right) d\Omega$$

$\delta \theta_2 = \delta \theta(l)$: δυνατή γωνία στροφής της τελικής ακραίας διατομής

$\delta \theta_1 = \delta \theta(x_l = 0)$: δυνατή γωνία στροφής της αρχικής ακραίας διατομής

Για τον τελευταίο όρο του I_1 βολεύει η περαιτέρω ανάλυσή του με παραγοντική ολοκλήρωση. Έτσι θα λάβουμε

$$I_{12} = \int_V \left(\sigma_{12} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_2} + \sigma_{13} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_3} \right) \cdot \theta' dV = \theta' \cdot \int_{x_1=0}^l dx_1 \cdot \int_{\Omega} \left(\sigma_{12} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_2} + \sigma_{13} \cdot \frac{\partial \delta \phi_M^P}{\partial x_3} \right) \cdot d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{12} = \theta' \cdot l \cdot \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) \cdot \delta \phi_M^P d\Omega - \int_{\partial \Omega} (\sigma_{12} \cdot n_2 + \sigma_{13} \cdot n_3) \cdot \delta \phi_M^P ds \right] \quad (3.2.36)$$

Το δεξιά μέλος I_2 της σχ. (3.2.32) διαμορφώνεται με βάση τα όσα έχουν ειπωθεί ως εξής:

$$I_2 = \int_A (\mathbf{t}(\mathbf{n})^T \cdot \delta \mathbf{r}) dA = \int_{\Omega_1} (\mathbf{t}(\mathbf{n})^T \cdot \delta \mathbf{r}) d\Omega + \int_{\Omega_2} (\mathbf{t}(\mathbf{n})^T \cdot \delta \mathbf{r}) d\Omega + \int_{A_{\text{παρ}}} (\mathbf{t}(\mathbf{n})^T \cdot \delta \mathbf{r}) dA \quad (3.2.37)$$

όπου

Ω_1 : Η αρχική ακραία διατομή της ράβδου ($x_1 = 0$)

Ω_2 : Η τελική ακραία διατομή της ράβδου ($x_1 = l$)

$A_{\text{παρ}}$: Η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})^T \cdot \delta \mathbf{r} = t_1(\mathbf{n}) \cdot \delta u_1 + t_2(\mathbf{n}) \cdot \delta u_2 + t_3(\mathbf{n}) \cdot \delta u_3$$

Με βάση τη γεωμετρία της ράβδου, είναι προφανές ότι

$$(\mathbf{n}_{\Omega_1})^T = (-1, 0, 0) \quad (3.2.38\alpha)$$

$$(\mathbf{n}_{\Omega_2})^T = (1, 0, 0) \quad (3.2.38\beta)$$

$$(\mathbf{n}_{A_{\text{παρ}}})^T = (0, n_2, n_3) \quad (3.2.38\gamma)$$

επομένως η (3.2.37) θα δώσει με τη βοήθεια των εκφράσεων (1.2.49) του ελκυστή τάσεως συναρτήσει του τανυστή Cauchy

$$I_2 = - \int_{\Omega_1} (\sigma_{12} \cdot \delta u_2 + \sigma_{13} \cdot \delta u_3) d\Omega + \int_{\Omega_2} (\sigma_{12} \cdot \delta u_2 + \sigma_{13} \cdot \delta u_3) d\Omega +$$

$$+ \int_{A_{\text{παρ}}} (t_1 \cdot \delta u_1 + t_2 \cdot \delta u_2 + t_3 \cdot \delta u_3) dA \quad (3.2.39)$$

Για την παράπλευρη επιφάνεια $A_{\text{παρ}}$ θα έχουμε:

$$t_1 = 0 \quad (3.2.40\alpha)$$

ακριβώς όπως πήραμε και στη σχέση (3.2.21). Η απαίτηση αυτή προκύπτει από το να μην υπάρχει διαμήκης επιφανειακή δύναμη στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου καθώς είναι αδύνατο να καταλήξει σε στρεπτική καταπόνηση. Επίσης θα είναι (βλ. σχ. (1.2.49β-γ))

$$t_2 = \sigma_{22} \cdot n_2 + \sigma_{32} \cdot n_3 \xrightarrow{\sigma_{32}=0} t_2 = 0 \quad (3.2.40\beta)$$

$$t_3 = \sigma_{23} \cdot n_2 + \sigma_{33} \cdot n_3 \xrightarrow{\sigma_{23}=0} t_3 = 0 \quad (3.2.40\gamma)$$

Επομένως το ολοκλήρωμα της παράπλευρης επιφάνειας στη (3.2.38) μηδενίζεται και θα είναι

$$I_2 = - \int_{\Omega_1} [\sigma_{12} \cdot (-x_3 \cdot \delta\theta) + \sigma_{13} \cdot (x_2 \cdot \delta\theta)] d\Omega + \int_{\Omega_2} [\sigma_{12} \cdot (-x_3 \cdot \delta\theta) + \sigma_{13} \cdot (x_2 \cdot \delta\theta)] d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = M_{t_2} \cdot \delta\theta_2 - M_{t_1} \cdot \delta\theta_1 \quad (3.2.40)$$

όπου

$$M_{ti} = \int_{\Omega_i} (-\sigma_{12} \cdot x_3 + \sigma_{13} \cdot x_2) d\Omega : \text{ Εντατικό μέγεθος που καλείται } \mathbf{\text{στρεπτική ροπή}}$$

(torque, torsional moment).

Από τις εκφράσεις των τάσεων σ_{12} , σ_{13} (σχ. (3.2.10δ-ε) προκύπτει άμεσα ότι

$$M_{t_2} = M_{t_1} \quad (3.2.41)$$

επομένως η τελική έκφραση του δεξιού μέλους της αρχής δυνατών έργων θα είναι

$$I_2 = M_t \cdot (\delta\theta_2 - \delta\theta_1) \quad (3.2.42)$$

όπου $M_t = M_{t_2} = M_{t_1}$.

Επειδή ισχύει η ισότητα των δύο μελών της αρχής δυνατών έργων, θα έχουμε

$$I_1 = I_2 \Rightarrow G \cdot I_t \cdot \theta' \cdot (\delta\theta_2 - \delta\theta_1) + I_{12} = M_t \cdot (\delta\theta_2 - \delta\theta_1) \quad (3.2.43)$$

και λόγω του γεγονότος ότι η αρχή δυνατών έργων ισχύει για οποιαδήποτε δυνατά μεγέθη $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\phi_M^p$ (που να σέβονται όμως τις κινηματικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος) τελικά λαμβάνουμε

$$G \cdot I_t \cdot \theta' = M_t \quad (3.2.44\alpha)$$

$$I_{12} = 0 \xrightarrow{\text{για } \delta\phi_M^p \neq 0} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \text{ στο } \Omega \quad (3.2.44\beta-\gamma)$$

$$\text{με } \sigma_{12} \cdot n_2 + \sigma_{13} \cdot n_3 = 0, \text{ στο } \partial\Omega$$

Η εξ. (3.2.44α) καλείται κυρίαρχη εξίσωση (governing equation) της ράβδου. Παρατηρούμε ότι με την αρχή δυνατών έργων καταλήγουμε και στη διαφορική εξίσωση που χρησιμοποιήσαμε για να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση στρέβλωσης. Αυτή η ιδιότητα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, αποτελεί τη βάση της απόδειξης ότι στις μεγάλες μετατοπίσεις οι συνιστώσες του 2ου Piola – Kirchhoff τανυστή μπορούν να εισαχθούν στη διαφορική εξ. ισορροπίας (βλ. εξ. (3.2.26) και (3.2.57)).

Με την κυρίαρχη εξίσωση της ράβδου – εξ. (3.2.44α) μπορούμε να επιλύσουμε πλήρως το πρόβλημα της ελαστικής ομοιόμορφης στρέψης μικρών μετατοπίσεων. Αρχικά, προσδιορίζουμε τη συνάρτηση στρέβλωσης από τις εξ. (3.2.19) – (3.2.21), στη συνέχεια προσδιορίζουμε τη σταθερά στρέψης I_t και τέλος αφού δοθεί η εξωτερική στρεπτική ροπή M_t προσδιορίζουμε και τον τελευταίο άγνωστο του προβλήματος θ' από την εξ. (3.2.44α). Μετά τον προσδιορισμό του θ'

προσδιορίζονται εύκολα με τις σχέσεις που έχουν αναφερθεί όλες οι συνιστώσες των τάσεων και παραμορφώσεων.

Αξίζει να τονιστεί ότι η εκλογή του πεδίου μετατοπίσεων είναι επιτυχής αφού καταλήγουμε σε στρεπτική φόρτιση της ράβδου η οποία δε μεταβάλλεται κατά μήκος της. Αν π.χ. θεωρήσουμε μεταβαλλόμενη στρεπτική ροπή $M_t = M_t(x_t)$ τότε θα καταλήξουμε σε άτοπο από την εξ. (3.2.44α) αφού θα πρέπει να μεταβάλλεται κατά μήκος και το θ' , γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση της σχ. (3.2.4) που έχουμε κάνει ($\theta' = σταθ.$). Εξάλλου, είναι εμφανές ότι η σταθερά στη σχ. (3.2.3) ορισμού της διαμήκους μετατόπισης δεν είναι αυθαίρετη αλλά ορθώς θεωρήθηκε ίση με θ' .

Τονίζεται επίσης, ότι στη μέχρι τώρα ανάπτυξη του προβλήματος, θεωρήσαμε ότι η ράβδος στρέφεται περί τυχαίο άξονα. Κατά συνέπεια, στο **ελαστικό πρόβλημα μικρών μετατοπίσεων η επιβολή (κατασκευαστικά) οποιουδήποτε άξονα περιστροφής της ράβδου οδηγεί σε καθαρή στρεπτική ένταση. Για αυτόν το λόγο εξάλλου ο St. Venant άφησε αναπάντητο το ερώτημα εύρεσης του λεγόμενου κέντρου στρέψης (center of twist) της ράβδου. Το κέντρο στρέψης ορίζεται ως το σημείο από το οποίο διέρχεται εκείνος ο άξονας περιστροφής της ράβδου ο οποίος οδηγεί σε καθαρή στρεπτική εντατική κατάσταση.** Η απουσία ορθών τάσεων στο ελαστικό πρόβλημα των μικρών μετατοπίσεων έχει σαν αποτέλεσμα η περιστροφή της ράβδου ως προς οποιονδήποτε άξονα να οδηγεί σε καθαρά στρεπτική ένταση. Το ίδιο δεν ισχύει στην περίπτωση της ανομοιόμορφης στρέψης όπου αποδεικνύεται ότι η ράβδος καταπονείται από ορθές τάσεις. Αποδεικνύεται ότι στην ελαστική ανομοιόμορφη στρέψη μικρών μετατοπίσεων υπάρχει μοναδικός άξονας περιστροφής που οδηγεί σε καθαρή στρεπτική ένταση (κέντρο στρέψης) ενώ η επιβολή οποιουδήποτε άλλου κατασκευαστικού άξονα θα οδηγήσει στην εισαγωγή αξονικής ή καμπτικής καταπόνησης στη ράβδο.

Στο **ελαστικό πρόβλημα μεγάλων μετατοπίσεων**, θα κάνουμε χρήση της αρχής δυνατών έργων εκπεφρασμένης ως προς τον 2ο τανυστή Piola- Kirchhoff – εξ. 1.2.47:

$$\int_V \text{tr} \left[[\mathbf{S}]^T \cdot \delta [\boldsymbol{\varepsilon}^G] \right] dV = \int_A \left[{}_0 \mathbf{t}({}_0 \mathbf{n})^T \cdot \delta \mathbf{r} \right] dA + \int_V \left[{}_0 \mathbf{f}^T \cdot \delta \mathbf{r} \right] dV \quad (3.2.45)$$

όπου

A : Η (απαραμόρφωτη) επιφάνεια που περικλείει τον όγκο της ράβδου στην οποία συμπεριλαμβάνονται και οι δύο ακραίες διατομές

V : Ο (απαραμόρφωτος) όγκος της ράβδου

$[\mathbf{S}]$, $[\boldsymbol{\varepsilon}^G]$: Ο 2ος τανυστής τάσης Piola- Kirchhoff και ο τανυστής παραμορφώσεων Green αντίστοιχα, εκπεφρασμένοι ως προς τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3 της αρχικής διαμόρφωσης

${}_0 \mathbf{t}({}_0 \mathbf{n})$: ο ελκυστής ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας

${}_0 \mathbf{f}$: Το διάνυσμα των μαζικών δυνάμεων ανά μονάδα απαραμόρφωτου όγκου

Στο αριστερά μέλος I_I της εξίσωσης, το μόνο που αλλάζει σε σχέση με τις μικρές μετατοπίσεις είναι ο όρος $S_{II} \cdot \delta \varepsilon_{II}$ ο οποίος εδώ δε μηδενίζεται. Έτσι το αριστερά μέλος θα γραφτεί ως

$$I_1 = \int_V (S_{11} \cdot \delta \varepsilon_{11} + S_{12} \cdot \delta \gamma_{12} + S_{13} \cdot \delta \gamma_{13}) dV = \int_V S_{11} \cdot \delta \varepsilon_{11} dV + G \cdot I_t \cdot \theta' \cdot (\delta \theta_2 - \delta \theta_1) + I_{12} \quad (3.2.46)$$

όπου

$$I_{12} = \theta' \cdot l \cdot \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} \right) \cdot \delta \phi_M^P d\Omega - \int_{\partial \Omega} (S_{12} \cdot n_2 + S_{13} \cdot n_3) \cdot \delta \phi_M^P ds \right] \quad (3.2.47)$$

Το $\delta \varepsilon_{11}$ δίνεται από τον τύπο (βλ. εξ. (3.2.9α))

$$\delta \varepsilon_{11} = \delta u'_s + (x_2^2 + x_3^2) \cdot \theta' \cdot \delta \theta' \quad (3.2.48)$$

ενώ οι δυνατές ολικές μετατοπίσεις γράφονται ως (βλ. εξ. (3.2.2) – (3.2.5))

$$\delta u_1 = \delta u_s + \delta \theta' \cdot \phi_M^P + \theta' \cdot \delta \phi_M^P \quad (3.2.49\alpha)$$

$$\delta u_2 = (-x_3 \cdot \cos \theta - x_2 \cdot \sin \theta) \cdot \delta \theta \quad (3.2.49\beta)$$

$$\delta u_3 = (x_2 \cdot \cos \theta - x_3 \cdot \sin \theta) \cdot \delta \theta \quad (3.2.49\gamma)$$

Ο όρος $\int_V S_{11} \cdot \delta \varepsilon_{11} dV$ του I_1 θα γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \int_V (S_{11} \cdot \delta \varepsilon_{11}) dV &= \int_V \left[E \cdot u'_s + E \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot (\theta')^2 \right] \cdot \left[\delta u'_s + (x_2^2 + x_3^2) \cdot \theta' \cdot \delta \theta' \right] dV = \\ &= E \cdot \int_V \left[u'_s \cdot \delta u'_s + \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot (\theta')^2 \cdot \delta u'_s + (x_2^2 + x_3^2) \cdot u'_s \cdot \theta' \cdot \delta \theta' + \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 + x_3^2)^2 \cdot (\theta')^3 \cdot \delta \theta' \right] dV \Rightarrow \\ \int_V (S_{11} \cdot \delta \varepsilon_{11}) dV &= E \cdot \left[A \cdot u'_s + \frac{1}{2} \cdot I_P \cdot (\theta')^2 \right] \cdot (\delta u_{s2} - \delta u_{s1}) + E \cdot \left[I_P \cdot u'_s \cdot \theta' + \frac{1}{2} \cdot I_{PP} \cdot (\theta')^3 \right] \cdot (\delta \theta_2 - \delta \theta_1) \quad (3.2.50) \end{aligned}$$

όπου

$$A = \int_{\Omega} d\Omega, \quad I_P = \int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2) d\Omega, \quad I_{PP} = \int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2)^2 d\Omega \quad (3.2.51\alpha-\beta-\gamma)$$

Το δεξιά μέλος I_2 της αρχής δυνατών έργων (3.2.45) διαφέρει ριζικά από το αντίστοιχο μέλος των μικρών μετατοπίσεων λόγω του ότι εδώ, ο ελκυστής ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας εκφράζεται συναρτήσει του 1ου τανυστή Piola – Kirchhoff (βλ. σχ. (1.2.24)). Με πορεία ανάλογη των εξ. (3.2.37) – (3.2.39) το I_2 γράφεται ως

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{\Omega_1} (P_{11} \cdot \delta u_1 + P_{21} \cdot \delta u_2 + P_{31} \cdot \delta u_3) d\Omega + \int_{\Omega_2} (P_{11} \cdot \delta u_1 + P_{21} \cdot \delta u_2 + P_{31} \cdot \delta u_3) d\Omega + \\ &+ \int_{\text{Αποφ}} ({}_0 t_1 \cdot \delta u_1 + {}_0 t_2 \cdot \delta u_2 + {}_0 t_3 \cdot \delta u_3) dA \quad (3.2.52) \end{aligned}$$

Για την παράπλευρη επιφάνεια, προφανώς θα ισχύει και εδώ ${}_0t_l = 0$. Ωστόσο σε αντίθεση με τις μικρές μετατοπίσεις, για να αποδειχτεί ότι το ολοκλήρωμα της $A_{\text{παρ}}$ είναι μηδενικό απαιτούνται αρκετές πράξεις οι οποίες και παραλείπονται.

Λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα (1.2.43β)

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{X}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}] \Rightarrow [\mathbf{P}] = [\mathbf{X}] \cdot [\mathbf{S}] \quad (3.2.53)$$

εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned} P_{11} &= X_{11} \cdot S_{11} + X_{12} \cdot S_{21} + X_{13} \cdot S_{31} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \cdot S_{11} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot S_{21} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot S_{31} \Rightarrow \\ \Rightarrow P_{11} &= (1 + u'_s) \cdot S_{11} + \theta' \cdot \frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} \cdot S_{21} + \theta' \cdot \frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} \cdot S_{31} \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

επομένως ο όρος P_{11} θα είναι ανεξάρτητος της διαμήκουσ συντεταγμένης x_1 αφού και οι συνιστώσες S_{11} , S_{21} , S_{31} είναι ανεξάρτητες του x_1 (βλ. εξ. (3.2.10)). Έτσι, με τη βοήθεια των εξ. (3.2.49) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} I_2 &= (\delta u_{s2} - \delta u_{s1}) \cdot \int_{\Omega} P_{11} d\Omega + (\delta \theta'_2 - \delta \theta'_1) \cdot \int_{\Omega} P_{11} \cdot \phi_M^P d\Omega + (\theta'_2 - \theta'_1) \cdot \int_{\Omega} P_{11} \cdot \delta \phi_M^P d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega^2} (P_{21} \cdot \delta u_2 + P_{31} \cdot \delta u_3) d\Omega - \int_{\Omega^1} (P_{21} \cdot \delta u_2 + P_{31} \cdot \delta u_3) d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

και αφού ισχύει $\theta'(x_1) = \theta' = \text{σταθ.} \Rightarrow \theta'_2 - \theta'_1 = 0$ και $\delta \theta'_2 - \delta \theta'_1 = 0$, θα λάβουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= (\delta u_{s2} - \delta u_{s1}) \cdot N + \int_{\Omega^2} (P_{21} \cdot \delta u_2 + P_{31} \cdot \delta u_3) d\Omega - \int_{\Omega^1} (P_{21} \cdot \delta u_2 + P_{31} \cdot \delta u_3) d\Omega \xrightarrow{(3.2.49\beta-\gamma)} \\ I_2 &= (\delta u_{s2} - \delta u_{s1}) \cdot N + \delta \theta_2 \cdot \int_{\Omega^2} [P_{21} \cdot (-x_3 \cdot \cos \theta_2 - x_2 \cdot \sin \theta_2) + P_{31} \cdot (x_2 \cdot \cos \theta_2 - x_3 \cdot \sin \theta_2)] d\Omega - \\ &- \delta \theta_1 \cdot \int_{\Omega^1} [P_{21} \cdot (-x_3 \cdot \cos \theta_1 - x_2 \cdot \sin \theta_1) + P_{31} \cdot (x_2 \cdot \cos \theta_1 - x_3 \cdot \sin \theta_1)] d\Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow I_2 &= N \cdot (\delta u_{s2} - \delta u_{s1}) + M_{t2} \cdot \delta \theta_2 - M_{t1} \cdot \delta \theta_1 \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

όπου

$N = \int_{\Omega} P_{11} d\Omega$: Η αξονική δύναμη της ράβδου.

$M_{ti} = \int_{\Omega^i} [P_{21} \cdot (-x_3 \cdot \cos \theta_i - x_2 \cdot \sin \theta_i) + P_{31} \cdot (x_2 \cdot \cos \theta_i - x_3 \cdot \sin \theta_i)] d\Omega$: Η στρεπτική

ροπή της ράβδου.

Τονίζεται στο σημείο αυτό ότι από την αρχή δυνατών έργων προκύπτει κατευθείαν ότι ο ενεργειακά συμβατός ορισμός της στρεπτικής ροπής στο πλαίσιο των μεγάλων μετατοπίσεων είναι αυτός της σχ. (3.2.56) και διαφέρει από τον κλασικό ορισμό της M_t που έχει ισχύ μόνο στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων. Με άλλα λόγια η στρεπτική ροπή ορίζεται με διαφορετικό τύπο στις μικρές και στις μεγάλες μετατοπίσεις.

Παρατηρούμε ότι στο I_2 δεν υπάρχει όρος του $\delta\phi_M^P$, επομένως, αφού η αρχή δυνατών έργων πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε δυνατή μετατόπιση (που να σέβεται όμως τις κινηματικές συννοριακές συνθήκες του προβλήματος), από τη σχ. (3.2.47) έπεται κατευθείαν ότι

$$I_1 = I_2 \Rightarrow I_{12} = 0 \xrightarrow{\text{για } \delta\phi_M^P \neq 0} \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} = 0 \text{ στο } \Omega \quad (3.2.57\alpha-\beta)$$

$$\text{με } S_{12} \cdot n_2 + S_{13} \cdot n_3 = 0 \text{ στο } \partial\Omega$$

δηλαδή αποδεικνύεται ότι ορθώς στο προηγούμενο υποκεφάλαιο θέσαμε τις συνιστώσες του 2ου τανυστή Piola – Kirchhoff στη διαφορική εξίσωση ισορροπίας. Από την εξίσωση των I_1, I_2 λαμβάνουμε επίσης

$$\text{για } (\delta u_{s2} - \delta u_{s1}) \neq 0 \Rightarrow E \cdot A \cdot u'_s + \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_P \cdot (\theta')^2 = N \quad (3.2.58\alpha)$$

$$\text{για } \delta\theta_2 \neq 0 \Rightarrow E \cdot I_P \cdot \theta' \cdot u'_s + \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_{PP} \cdot (\theta')^3 + G \cdot I_t \cdot \theta' = M_{t2} \quad (3.2.58\beta)$$

$$\text{για } \delta\theta_1 \neq 0 \Rightarrow E \cdot I_P \cdot \theta' \cdot u'_s + \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_{PP} \cdot (\theta')^3 + G \cdot I_t \cdot \theta' = M_{t1} \quad (3.2.58\gamma)$$

όπου τα A, I_P, I_{PP} έχουν οριστεί στις σχ. (3.2.51), ενώ από τις (3.2.58β) – (3.2.58γ) έπεται κατευθείαν ότι

$$M_{t2} = M_{t1} = M_t \quad (3.2.59)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι στη στρεπτική φόρτιση η αξονική δύναμη απουσιάζει ($N=0$), με αντικατάσταση του u'_s από την εξ. (3.2.58α) στην εξ. (3.2.58β) παίρνουμε

$$G \cdot I_t \cdot \theta' + \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_n \cdot (\theta')^3 = M_t \quad (3.2.60)$$

όπου

$$I_n = \left(I_{PP} - \frac{I_P^2}{A} \right) : \text{Σταθερά που καλείται } \mathbf{\text{σταθερά του Wagner}} \text{ (Wagner constant)}$$

Η εξ. (3.2.60) αποτελεί την κυρίαρχη εξίσωση της ράβδου για την ελαστική ομοιόμορφη στρέψη μεγάλων μετατοπίσεων. Μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

- Οι συναρτήσεις u'_s, θ' ορθά πάρθηκαν σταθερές κατά την εκλογή του πεδίου μετατοπίσεων, αφού όπως φαίνεται από τις εξ. (3.2.58α-β) για σταθερή αξονική δύναμη και στρεπτική ροπή, οι u'_s, θ' δεν μπορούν να μεταβάλλονται κατά μήκος της ράβδου
- Η κυρίαρχη εξίσωση των μεγάλων μετατοπίσεων διαφέρει από την αντίστοιχη των μικρών στον όρο $\frac{1}{2} \cdot E \cdot I_n \cdot (\theta')^3$ που είναι μη γραμμικός

- Η εξίσωση μπορεί να λυθεί αναλυτικά σχετικά εύκολα καθώς το $\theta' = \text{σταθ.}$ επομένως η εξίσωση στην ουσία είναι αλγεβρική τρίτου βαθμού και όχι μη γραμμική διαφορική.
- Παρατηρούμε ότι με το εκλεχθέν πεδίο μετατοπίσεων μπορεί να αντιμετωπιστεί πολύ εύκολα η συνδυασμένη αξονική και στρεπτική καταπόνηση μιας ράβδου. Σ' αυτήν την περίπτωση, θα ισχύει το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων ισορροπίας που δίνεται στις εξ. (3.2.58α) – (3.2.58β) όπου $N \neq 0$.
- Η στροφή περί οποιονδήποτε άξονα υπάρχει περίπτωση να οδηγήσει σε συνδυασμένη στρεπτική και καμπτική καταπόνηση. Σε αντίθεση με τις μικρές μετατοπίσεις, εδώ η ράβδος καταπονείται από πεδίο ορθών τάσεων S_{11} . Ενώ με την πρώτη εξίσωση ισορροπίας (3.2.58α) εξασφαλίζουμε ότι η αξονική δύναμη της ράβδου είναι μηδέν, εντούτοις για κάποιον άξονα περιστροφής η κατανομή των ορθών τάσεων που θα προκύψει μπορεί να δίνει καμπτικές ροπές $M_2, M_3 \neq 0$. **Επομένως στο ελαστικό πρόβλημα μεγάλων μετατοπίσεων, η περιστροφή περί τυχόν άξονα μπορεί να οδηγήσει σε συνδυασμένη στρεπτική και καμπτική ένταση.**

Περνώντας στην **ελαστοπλαστική ομοιόμορφη στρέψη μεγάλων μετατοπίσεων**, διαπιστώνουμε ότι είναι πιο βολική η θεώρηση της αρχής δυνατών έργων με δυνατές προσαυξητικές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις, καθώς ο καταστατικός νόμος υλικού παύει να είναι γραμμικός όπως στην περίπτωση της ελαστικότητας που εξετάσαμε. Θεωρώντας ότι έχουμε αποκαταστήσει την ισορροπία στη ράβδο τη χρονική στιγμή $t = t_1$ και αναζητώντας τα άγνωστα μεγέθη σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \Delta t$, η αρχή δυνατών έργων με χρήση της ολικής θεώρησης Lagrange διαμορφώνεται τη στιγμή t_2 ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \int_{\overset{0}{V}} \mathbf{tr} \left[\begin{bmatrix} \overset{2}{S} \\ \overset{0}{S} \end{bmatrix}^T \cdot \delta \begin{bmatrix} \overset{2}{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} \right] d^0 V &= \int_{\overset{0}{A}} \left[\overset{2}{\mathbf{t}} \left(\overset{0}{\mathbf{n}} \right)^T \cdot \delta \overset{2}{\mathbf{r}} \right] d^0 A + \int_{\overset{0}{V}} \left[\overset{2}{\mathbf{f}}^T \cdot \delta \overset{2}{\mathbf{r}} \right] d^0 V \Rightarrow \\
 \int_{\overset{0}{V}} \left(\overset{2}{S}_{11} \cdot \delta \overset{2}{\varepsilon}_{11} + \overset{2}{S}_{12} \cdot \delta \overset{2}{\gamma}_{12} + \overset{2}{S}_{13} \cdot \delta \overset{2}{\gamma}_{13} \right) d^0 V &= \\
 = \int_{\overset{0}{A}} \left(\overset{2}{t}_1 \left(\overset{0}{\mathbf{n}} \right) \cdot \delta \overset{2}{u}_1 + t_2 \left(\overset{0}{\mathbf{n}} \right) \cdot \delta \overset{2}{u}_2 + t_3 \left(\overset{0}{\mathbf{n}} \right) \cdot \delta \overset{2}{u}_3 \right) d^0 A &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \int_{\overset{0}{V}} \left(\overset{2}{S}_{11} \cdot \delta \Delta \varepsilon_{11} + \overset{2}{S}_{12} \cdot \delta \Delta \gamma_{12} + \overset{2}{S}_{13} \cdot \delta \Delta \gamma_{13} \right) d^0 V &= \\
 = \int_{\overset{0}{A}} \left(\overset{2}{t}_1 \left(\overset{0}{\mathbf{n}} \right) \cdot \delta \Delta u_1 + t_2 \left(\overset{0}{\mathbf{n}} \right) \cdot \delta \Delta u_2 + t_3 \left(\overset{0}{\mathbf{n}} \right) \cdot \delta \Delta u_3 \right) d^0 A & \quad (3.2.61)
 \end{aligned}$$

Για να εξαχθεί η παραπάνω σχέση λάβαμε υπόψη μας ότι οι μη μηδενικές συνιστώσες των τάσεων και παραμορφώσεων είναι μόνο τρεις και ότι μαζικές δυνάμεις δεν ασκούνται στο σώμα. Η αντικατάσταση των δυνατών ολικών παραμορφώσεων και μετατοπίσεων από τα δυνατά προσαυξητικά αντίστοιχα μεγέθη είναι ορθή καθώς τη χρονική στιγμή $t = t_1$ έχουμε αποκαταστήσει την ισορροπία, επομένως

$$\delta_0^l \varepsilon_{ij} = 0 \text{ και } \delta_0^l u_i = 0, \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (3.2.62\alpha)$$

(τα δυνατά μεγέθη της χρ. στιγμής t_1 είναι μηδενικά αφού λαμβάνουν τις τιμές που έχουν προκύψει από την επίλυση και δεν μπορούν να είναι αυθαίρετα) ενώ παράλληλα ισχύει

$$\delta_0^2 \varepsilon_{ij} = \delta_0^1 \varepsilon_{ij} + \delta \Delta \varepsilon_{ij} \text{ και } \delta_0^2 u_i = \delta_0^1 u_i + \delta \Delta u_i \quad (3.2.62\beta)$$

Η προσαυξητική μετατόπιση Δu_1 θα δίνεται ως (βλ. σχ. (3.2.2), (3.2.5))

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_s + {}^2\theta' \cdot {}^2\phi_M^P - {}^1\theta' \cdot {}^1\phi_M^P = \Delta u_s + {}^1\theta' \cdot \Delta \phi_M^P + \Delta \theta' \cdot {}^1\phi_M^P + \Delta \theta' \cdot \Delta \phi_M^P \Rightarrow \\ \Delta u_1 &= \Delta u_s + \Delta \theta' \cdot {}^1\phi_M^P \end{aligned} \quad (3.2.63)$$

όπου υποτέθηκε, προκειμένου να απλοποιηθεί το πρόβλημα, ότι το προσαυξητικό βήμα είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε να μπορεί να αμεληθεί η προσαύξηση της συνάρτησης στρέβλωσης ($\Delta \phi_M^P \approx 0$). Προφανώς θα ισχύει

$$\delta \Delta u_1 = \delta \Delta u_s + \delta \Delta \theta' \cdot {}^1\phi_M^P \quad (3.2.64\alpha)$$

ενώ για τις άλλες δύο συνιστώσες δυνατών προσαυξητικών μετατοπίσεων είναι βολικότερη η θεώρηση

$$\delta \Delta u_2 = \delta_0^2 u_2 = (-x_3 \cdot \cos^2 \theta - x_2 \cdot \sin^2 \theta) \cdot \delta \Delta \theta \quad (3.2.64\beta)$$

$$\delta \Delta u_3 = \delta_0^2 u_3 = (x_2 \cdot \cos^2 \theta - x_3 \cdot \sin^2 \theta) \cdot \delta \Delta \theta \quad (3.2.64\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι στο δεξιά μέλος I_2 της αρχής δυνατών έργων (3.2.61) μπορούν να εφαρμοστούν παρόμοιοι συλλογισμοί με αυτούς που έχουν διατυπωθεί στην περίπτωση του ελαστικού προβλήματος μεγάλων μετατοπίσεων: Το μόνο που μεταβάλλεται είναι ότι στη θέση των δυνατών ολικών μετατοπίσεων έχουμε δυνατές προσαυξητικές μετατοπίσεις. Συνεπώς, ακολουθώντας την πορεία των σχέσεων (3.2.55), (3.2.56) λαμβάνουμε

$$I_2 = {}^2N \cdot (\delta \Delta u_{s2} - \delta \Delta u_{s1}) + {}^2M_{t2} \cdot \delta \Delta \theta_2 - {}^2M_{t1} \cdot \delta \Delta \theta_1 \quad (3.2.65)$$

όπου

$${}^2N = \int_{\Omega} {}^2P_{11} d\Omega : \text{ Η εξωτερικά επιβαλλόμενη αξονική δύναμη της ράβδου (τη χρονική}$$

στιγμή $t = t_2$).

$${}^2M_{ii} = \int_{\Omega_i} \left[{}^2P_{21} \cdot (-x_3 \cdot \cos^2 \theta_i - x_2 \cdot \sin^2 \theta_i) + {}^2P_{31} \cdot (x_2 \cdot \cos^2 \theta_i - x_3 \cdot \sin^2 \theta_i) \right] d\Omega : \text{ Η}$$

εξωτερικά επιβαλλόμενη στρεπτική ροπή της ράβδου (τη χρονική στιγμή $t = t_2$).

Για την προσαυξητική παραμόρφωση του τανυστή Green $\Delta \varepsilon_{11}$ θα έχουμε

$$\Delta \varepsilon_{11} = \Delta u_s' + \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot (2 \cdot {}^1\theta' + \Delta \theta') \cdot \Delta \theta' \Rightarrow \Delta \varepsilon_{11} = \Delta e_{11} + \Delta n_{11} \quad (3.2.66\alpha)$$

όπου

$\Delta \varepsilon_{11} = \Delta u'_s + (x_2^2 + x_3^2) \cdot {}^1\theta' \cdot \Delta \theta'$: Η γραμμική συνιστώσα της προσαυξητικής παραμόρφωσης $\Delta \varepsilon_{11}$.

$\Delta n_{11} = \frac{1}{2} \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot (\Delta \theta')^2$: Η μη γραμμική συνιστώσα της προσαυξητικής παραμόρφωσης.

Οι προσαυξητικές διατμητικές παραμορφώσεις δε διαθέτουν μη γραμμικό μέρος και δίνονται από τους τύπους

$$\Delta \gamma_{12} = \Delta \theta' \cdot \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) \quad (3.2.66\beta)$$

$$\Delta \gamma_{13} = \Delta \theta' \cdot \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) \quad (3.2.66\gamma)$$

όπου και εδώ αμελήθηκε η προσαύξηση της συνάρτησης στρέβλωσης εντός του προσαυξητικού βήματος $\Delta t = t_2 - t_1$. Οι αντίστοιχες δυνατές προσαυξητικές παραμορφώσεις λαμβάνονται ως

$$\delta \Delta \varepsilon_{11} = \delta \Delta \varepsilon_{11} + \delta \Delta n_{11} \quad (3.2.67\alpha)$$

όπου

$$\delta \Delta \varepsilon_{11} = \delta \Delta u'_s + (x_2^2 + x_3^2) \cdot {}^1\theta' \cdot \delta \Delta \theta' \quad (3.2.67\beta)$$

$$\delta \Delta n_{11} = (x_2^2 + x_3^2) \cdot \Delta \theta' \cdot \delta \Delta \theta' \quad (3.2.67\gamma)$$

$$\delta \Delta \gamma_{12} = \delta \Delta \theta' \cdot \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) \quad (3.2.67\delta)$$

$$\delta \Delta \gamma_{13} = \delta \Delta \theta' \cdot \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) \quad (3.2.67\epsilon)$$

Το αριστερά μέλος I_1 της αρχής δυνατών έργων (3.2.61) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\theta_V} \left({}^2_0 S_{11} \cdot \delta \Delta \varepsilon_{11} + {}^2_0 S_{12} \cdot \delta \Delta \gamma_{12} + {}^2_0 S_{13} \cdot \delta \Delta \gamma_{13} \right) d^0 V \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_1 = \int_{\theta_V} \left(\Delta S_{11} \cdot \delta \Delta \varepsilon_{11} + \Delta S_{12} \cdot \delta \Delta \gamma_{12} + \Delta S_{13} \cdot \delta \Delta \gamma_{13} \right) d^0 V + \\ &\quad + \int_{\theta_V} \left({}^1_0 S_{11} \cdot \delta \Delta \varepsilon_{11} + {}^1_0 S_{12} \cdot \delta \Delta \gamma_{12} + {}^1_0 S_{13} \cdot \delta \Delta \gamma_{13} \right) d^0 V \end{aligned} \quad (3.2.68)$$

Για να μπορέσει να συνεχιστεί η ανάλυση θα πρέπει να θεωρήσουμε τον καταστατικό νόμο του υλικού που συνδέει τις προσαυξητικές τάσεις της παραπάνω σχέσης με τις προσαυξητικές παραμορφώσεις των σχ. (3.2.66). Έτσι, για το ελαστοπλαστικό υλικό

ισχύει, όπως έχουμε δει, μια σχέση της μορφής (2.3.21α) εκπεφρασμένη σε προσαυξητική μορφή ως

$$\Delta \mathbf{S} = [\mathbf{D}^{\text{ep}}] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2.69)$$

Ωστόσο, αν παρατηρήσουμε τις σχέσεις (3.2.66β-γ) από τις οποίες δίνονται οι προσαυξητικές διατμητικές παραμορφώσεις, διαπιστώνουμε ότι στον υπολογισμό τους υπεισέρχεται η συνάρτηση στρέβλωσης ${}^l\phi_M^P$. Εξετάζοντας τις σχέσεις (3.2.30) – (3.2.31), συμπεραίνουμε ότι η ${}^l\phi_M^P$ περιέχει πλαστικούς όρους στη σχέση υπολογισμού της. Επομένως, θα ήταν πλεονασμός να χρησιμοποιούσαμε τη σχ. (3.2.69) για να υπολογίσουμε τις προσαυξητικές τάσεις αφού στην ουσία θα λαμβάναμε υπόψη μας δύο φορές την πλαστική διαρροή. Ακολουθώντας τους Baba – Kajita (1982), θα χρησιμοποιήσουμε καταστατικό νόμο για ελαστικό υλικό ως

$$\Delta \mathbf{S} = [\mathbf{D}^e] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta S_{11} \\ \Delta S_{12} \\ \Delta S_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \gamma_{12} \\ \Delta \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.2.70)$$

όπου και εδώ χρησιμοποιήθηκε η παραδοχή που έχουμε κάνει ότι ο λόγος του Poisson $\nu = 0$. Από τη σχέση (3.2.66α) διαπιστώνουμε ότι η προσαυξητική παραμόρφωση $\Delta \varepsilon_{11}$ είναι μη γραμμική. Προκειμένου να γραμμικοποιήσουμε τις σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων, κάνουμε την παρακάτω συνήθη προσέγγιση της μη γραμμικής ανάλυσης

$$\Delta \varepsilon_{11} = \Delta e_{11} + \Delta n_{11} \Rightarrow \Delta \varepsilon_{11} \approx \Delta e_{11} \text{ και } \delta \Delta \varepsilon_{11} \approx \delta \Delta e_{11} \quad (3.2.71\alpha-\beta)$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις είναι γραμμικές, επομένως μπορούμε πλέον να εξάγουμε τη γραμμικοποιημένη έκφραση του πρώτου όρου I_{11} του μέλους I_1 :

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{{}^0V} (\Delta S_{11} \cdot \delta \Delta e_{11} + \Delta S_{12} \cdot \delta \Delta \gamma_{12} + \Delta S_{13} \cdot \delta \Delta \gamma_{13}) d^0V = \\ &= \int_{{}^0V} (E \cdot \Delta e_{11} \cdot \delta \Delta e_{11} + G \cdot \Delta \gamma_{12} \cdot \delta \Delta \gamma_{12} + G \cdot \Delta \gamma_{13} \cdot \delta \Delta \gamma_{13}) d^0V \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

Εκτελώντας τις πράξεις στην παραπάνω σχέση λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.2.66) - (3.2.67), παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_{11} &= \left(E \cdot A \cdot \Delta u'_s + E \cdot I_p \cdot {}^l\theta' \cdot \Delta \theta' \right) \cdot \int_{x_1=0}^l \delta \Delta u'_s dx_1 + \\ &+ \left[E \cdot I_p \cdot {}^l\theta' \cdot \Delta u'_s + \left[E \cdot I_{pp} \cdot ({}^l\theta')^2 + G \cdot I_t \right] \cdot \Delta \theta' \right] \cdot \int_{x_1=0}^l \delta \Delta \theta' dx_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow I_{11} &= \left(E \cdot A \cdot \Delta u'_s + E \cdot I_p \cdot {}^l\theta' \cdot \Delta \theta' \right) \cdot (\delta \Delta u_{s2} - \delta \Delta u_{s1}) + \\ &+ \left[E \cdot I_p \cdot {}^l\theta' \cdot \Delta u'_s + \left[E \cdot I_{pp} \cdot ({}^l\theta')^2 + G \cdot I_t \right] \cdot \Delta \theta' \right] \cdot (\delta \Delta \theta_2 - \delta \Delta \theta_1) \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

όπου τα υπεισερχόμενα μεγέθη έχουν οριστεί πιο πάνω και επαναλαμβάνονται εδώ:

$$A = \int_{\Omega} d\Omega, \quad I_p = \int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2) d\Omega, \quad I_{pp} = \int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2)^2 d\Omega,$$

$${}^1I_t = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right)^2 \right] d\Omega \quad \text{ή}$$

$${}^1I_t = \int_{\Omega} \left(x_2^2 + x_3^2 + x_2 \cdot \frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_3} - x_3 \cdot \frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_2} \right) d\Omega$$

Σε ό,τι αφορά το δεύτερο όρο I_{12} του μέλους I_1 θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_{{}^0V} \left({}^1S_{11} \cdot \delta\Delta\varepsilon_{11} + {}^1S_{12} \cdot \delta\Delta\gamma_{12} + {}^1S_{13} \cdot \delta\Delta\gamma_{13} \right) d^0V = \\ &= \int_{{}^0V} \left({}^1S_{11} \cdot \delta\Delta e_{11} + {}^1S_{12} \cdot \delta\Delta\gamma_{12} + {}^1S_{13} \cdot \delta\Delta\gamma_{13} \right) d^0V + \int_{{}^0V} \left({}^1S_{11} \cdot \delta\Delta n_{11} \right) d^0V \end{aligned} \quad (3.2.74)$$

Έπειτα από κάποια άλγεβρα ο όρος $\int_{{}^0V} \left({}^1S_{11} \cdot \delta\Delta n_{11} \right) d^0V$ γράφεται ως

$$\int_{{}^0V} \left({}^1S_{11} \cdot \delta\Delta n_{11} \right) d^0V = \left(\int_{\Omega} {}^1S_{11} \cdot (x_2^2 + x_3^2) d\Omega \right) \cdot \Delta\theta' \cdot (\delta\Delta\theta_2 - \delta\Delta\theta_1) \quad (3.2.75)$$

ενώ ο άλλος όρος του I_{12} της σχ. (3.2.74) δίνει

$$\int_{{}^0V} \left({}^1S_{11} \cdot \delta\Delta e_{11} + {}^1S_{12} \cdot \delta\Delta\gamma_{12} + {}^1S_{13} \cdot \delta\Delta\gamma_{13} \right) d^0V = {}^1S_N \cdot (\delta\Delta u_{s2} - \delta\Delta u_{s1}) + {}^1S_{M_t} \cdot (\delta\Delta\theta_2 - \delta\Delta\theta_1) \quad (3.2.76)$$

όπου

${}^1S_N = \int_{\Omega} {}^1S_{11} d\Omega$: Όρος εσωτερικών δράσεων (internal stress resultant) που αντιστοιχεί στην αξονική δύναμη.

$${}^1S_{M_t} = \left[\int_{\Omega} {}^1S_{11} \cdot (x_2^2 + x_3^2) d\Omega \right] \cdot {}^1\theta' + \int_{\Omega} \left[{}^1S_{12} \cdot \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) + {}^1S_{13} \cdot \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) \right] d\Omega:$$

Όρος εσωτερικών δράσεων που αντιστοιχεί στη στρεπτική ροπή.

$\left[\int_{\Omega} {}^1S_{11} \cdot (x_2^2 + x_3^2) d\Omega \right] \cdot {}^1\theta'$: **Όρος Wagner των εσωτερικών δράσεων** (Wagner stress resultant) (Trahair, 1992)

Κρατώντας τον όρο της εξ. (3.2.75) στο αριστερά μέλος και μεταφέροντας τον όρο της εξ. (3.2.76) στο δεξιά μέλος, είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το σύστημα των γραμμικοποιημένων εξισώσεων ισορροπίας (σε επίπεδο ράβδου) που ισχύει στο ελαστοπλαστικό πρόβλημα μεγάλων μετατοπίσεων: (βλ. σχ. (3.2.65), (3.2.73) – (3.2.76))

$$\begin{bmatrix} E \cdot A & E \cdot I_p \cdot {}^1\theta' \\ E \cdot I_p \cdot {}^1\theta' & E \cdot I_{pp} \cdot ({}^1\theta')^2 + G \cdot {}^1I_t + {}^1W \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u'_s \\ \Delta \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2N \\ {}^2M_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^1S_N \\ {}^1S_{M_t} \end{bmatrix} \quad (3.2.77\alpha-\beta)$$

όπου

${}^2N = 0$: εξωτερική αξονική δύναμη που ασκείται στη ράβδο (μηδενική) (βλ. σχ. (3.2.56))

${}^2M_t = {}^2M_{t2} = {}^2M_{t1}$: Εξωτερική στρεπτική ροπή που ασκείται στη ράβδο (βλ. σχ. (3.2.56))

${}^1W = \int_{\Omega} {}^1S_{11} \cdot (x_2^2 + x_3^2) d\Omega$: Γεωμετρικά μη γραμμικός όρος του μητρώου ακαμψίας της ράβδου που καλείται **όρος του Wagner** (Wagner term) (Trahair, 1992) (βλ. σχ. (3.2.75))

Το **ελαστοπλαστικό πρόβλημα των μικρών μετατοπίσεων** αντιμετωπίζεται με παρόμοια μεθοδολογία και είναι αρκετά απλούστερο. Καταλήγει δε, σε μία μόνο εξίσωση ισορροπίας (δεν υπάρχει η εξίσωση της αξονικής δύναμης) η οποία είναι η κάτωθι

$$G \cdot {}^1I_t \cdot \Delta \theta' = {}^2M_t - {}^1S_{M_t} \quad (3.2.78)$$

όπου

$${}^1S_{M_t} = \int_{\Omega} \left[{}^1\sigma_{12} \cdot \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_2} - x_3 \right) + {}^1\sigma_{13} \cdot \left(\frac{\partial {}^1\phi_M^P}{\partial x_3} + x_2 \right) \right] d\Omega$$

Όρος εσωτερικών δράσεων που αντιστοιχεί στη στρεπτική ροπή. **Ο τύπος αυτός ισχύει μόνο στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων.**

Συγκρίνοντας το ελαστοπλαστικό πρόβλημα μικρών και μεγάλων μετατοπίσεων, διαπιστώνουμε τα εξής:

- Μια πολύ σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο αναλύσεων είναι ότι **ο όρος των εσωτερικών δράσεων** S_{M_t} που αντιστοιχεί στη στρεπτική ροπή ορίζεται με διαφορετικό τρόπο. Στις μεγάλες μετατοπίσεις, στη στρεπτική ροπή συμμετέχει και η ορθή τάση S_{11} (όρος Wagner), ενώ στις μικρές μετατοπίσεις οι ορθές τάσεις μηδενίζονται, επομένως στο S_{M_t} υπεισέρχονται μόνο οι διατμητικές τάσεις σ_{12} , σ_{13} . Το γεγονός αυτό διαφοροποιεί ποιοτικά τις δύο αναλύσεις, όπως θα φανεί και στα αριθμητικά παραδείγματα του κεφαλαίου 5.
- Όσον αφορά **το κέντρο στρέψης**, στις μικρές μετατοπίσεις ο όρος S_{M_t} δεν περιέχει συνιστώσα ορθής τάσης σ_{11} (βλ. εξ. (3.2.78)) επομένως συμπεραίνουμε ότι η στροφή περί οποιοδήποτε άξονα θα οδηγήσει σε στρεπτική ένταση αποκλειστικά. Αντιθέτως, στις μεγάλες μετατοπίσεις, στον όρο S_{M_t} συμμετέχει και ο όρος Wagner (σχ. 3.277) στον οποίο υπεισέρχονται ορθές τάσεις S_{11} . Συνεπώς, στο ελαστοπλαστικό πρόβλημα μεγάλων μετατοπίσεων, είναι δυνατό να εισαχθεί και καμπτική ένταση πέραν της στρεπτικής στη ράβδο, εάν η διατομή περιστραφεί ως προς τυχαίο άξονα. Θα έχουμε καθαρά στρεπτική ένταση μονάχα αν το πεδίο ορθών τάσεων που καταπονεί τη διατομή είναι τέτοιο ώστε να μηδενίζονται οι καμπτικές ροπές M_2, M_3 .

- Το πρόβλημα μεγάλων μετατοπίσεων έχει **μία επιπλέον εξίσωση ισορροπίας** σε σχέση με τις μικρές μετατοπίσεις, με την οποία προσδιορίζεται η προσαυξητική αξονική βράχυνση της ράβδου. Από αυτήν την εξίσωση καθίσταται σαφές ότι αν στο πεδίο μετατοπίσεων δεν εισαχθεί ο όρος της αξονικής βράχυνσης, ο όρος εσωτερικών δράσεων S_N δεν θα μπορεί να εξισωθεί με την εξωτερική αξονική δύναμη. Σαν αποτέλεσμα, θα έχουμε μόνο μία εξίσωση ισορροπίας και η ράβδος θα υφίσταται συνδυασμένη στρεπτική και αξονική καταπόνηση. Όπως και στις μικρές μετατοπίσεις, η προσθήκη του όρου οδηγεί με στοιχειώδεις τροποποιήσεις σε αντιμετώπιση και του προβλήματος της συνδυασμένης στρεπτικής και αξονικής καταπόνησης ράβδων.
- Ο όρος των εσωτερικών δράσεων S_N ενώ θα προκύψει μηδενικός μετά την αποκατάσταση της ισορροπίας στη ράβδο ($N = S_N \Rightarrow S_N = 0$), εντούτοις προκύπτει από τις ορθές τάσεις S_{II} οι οποίες δεν είναι μηδενικές. Το γεγονός, ότι είναι εξαιρετικά δυσχερές έως αδύνατο να επιτύχουμε μια εξωτερική φόρτιση στη ράβδο που να δίνει την ακριβή κατανομή των S_{II} που προβλέπει η θεωρία, δε μειώνει καθόλου την πρακτική αξία της παρούσας ανάλυσης αφού **με την αρχή St. Venant** εξασφαλίζεται ότι μακριά από τα άκρα της ράβδου η κατανομή τάσεων θα είναι περίπου η προβλεπόμενη από τη θεωρία.

3.2.7 Προσαυξητικός – επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης του ελαστοπλαστικού προβλήματος μεγάλων μετατοπίσεων

Κατά την ανάλυση του **ελαστικού προβλήματος** καταλήξαμε σε μια γραμμική αλγεβρική εξίσωση στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων (εξ. (3.2.44)) και σε μια μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση στην περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων (εξ. (3.2.60)). Είναι φανερό ότι αυτές οι εξισώσεις επιλύονται πολύ απλά από τη στιγμή που καθοριστεί η εξωτερικά επιβαλλόμενη στρεπτική ροπή M_t της ράβδου. Έτσι για οποιαδήποτε τιμή της M_t μπορούμε να υπολογίσουμε το θ' και στη συνέχεια όλα τα μεγέθη που επιθυμούμε (μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις, εντατικά μεγέθη), ενώ μπορούμε να λύσουμε και αντίστροφα το πρόβλημα, δηλαδή να υπολογίσουμε ποια ροπή πρέπει να ασκηθεί στη ράβδο, προκειμένου να στρίψει κατά συγκεκριμένη γωνία στροφής.

Στην περίπτωση του **ελαστοπλαστικού προβλήματος** ωστόσο, λόγω της μη γραμμικότητας των εξισώσεων ισορροπίας (που οφείλεται στη μη γραμμικότητα του υλικού) είμαστε υποχρεωμένοι να επιλύσουμε το πρόβλημα με μια μέθοδο τύπου Newton – Raphson. Η μέθοδος χαρακτηρίζεται ως προσαυξητική – επαναληπτική αφού η ισορροπία στη ράβδο αποκαθίσταται σε καθορισμένα προσαυξητικά στάδια φόρτισης με επαναληπτικό τρόπο μιας και δεν είναι δυνατόν να λυθούν απευθείας οι εξισώσεις.

Αρχικά θα προσδιορίσουμε τα προσαυξητικά στάδια της φόρτισης στα επιθυμούμε να αποκατασταθεί η ισορροπία. Η εκλογή των σταδίων βασίζεται αφενός στην ιστορία της φόρτισης η οποία έχει επιβληθεί στη ράβδο και αφετέρου στις απαιτήσεις σύγκλισης των μη γραμμικών εξισώσεων. Με άλλα λόγια, τα προσαυξητικά στάδια δεν πρέπει να είναι υπερβολικά λίγα διότι κάτι τέτοιο ενδεχομένως μα οδηγήσει σε αδυναμία σύγκλισης των εξισώσεων ή ανάγκη να εκτελεστεί πολύ μεγάλος αριθμός επαναλήψεων προκειμένου να επιτευχθεί η σύγκλιση.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η απλούστερη μέθοδος ελέγχου της σύγκλισης των μη γραμμικών εξισώσεων που είναι ο **έλεγχος με βάση τη φόρτιση** (load control). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο η σύγκλιση εξετάζεται μέσω της διαφοράς μεταξύ εξωτερικών φορτίσεων και εσωτερικών δράσεων που προκύπτουν από τις υπολογιζόμενες τάσεις. Αν αυτή η διαφορά γίνει αρκούτως μικρή τότε θεωρούμε ότι η ισορροπία έχει αποκατασταθεί.

Λόγω της γεωμετρικής μη γραμμικότητας, είναι αναγκαίο να θεωρηθούν προσ αυξητικά βήματα **από την αρχή της φόρτισης**. Με άλλα λόγια, αν προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε με μόνο ένα προσ αυξητικό βήμα το φορτίο για το οποίο η κατασκευή περνάει οριακά από την ελαστική στην ελαστοπλαστική συμπεριφορά δε θα λάβουμε υπόψη την επιρροή των μεγάλων μετατοπίσεων, γεγονός που ίσως να οδηγήσει σε υπερεκτίμηση του πραγματικού φορτίου.

Μια άλλη πολύ σημαντική παράμετρος της μεθόδου Newton – Raphson είναι ο **τρόπος υπολογισμού των τάσεων**. Οι προσ αυξητικές τάσεις μπορούν να υπολογιστούν από τις επαναληπτικές παραμορφώσεις που πραγματοποιούνται σε μία επανάληψη εντός κάποιου προσ αυξητικού βήματος ή από τις προσ αυξητικές παραμορφώσεις. Η έρευνα έχει δείξει ότι η χρήση επαναληπτικών παραμορφώσεων πολλές φορές μπορεί να οδηγήσει σε πλασματική αποφόρτιση της κατασκευής και τελικά σε λανθασμένη προσομοίωση της απόκρισής της. Αυτό οφείλεται στο ότι κατά τη διάρκεια εκτέλεσης των επαναλήψεων ο φορέας δε βρίσκεται σε ισορροπία επομένως τα μεγέθη που υπολογίζονται ίσως να μην βρίσκονται πάνω στο σωστό δρόμο ισορροπίας. Οι προσ αυξητικές παραμορφώσεις από την άλλη υπολογίζονται από θέση όπου ήδη έχει εξασφαλιστεί η ισορροπία, συνεπώς είναι εύλογο να δίνουν ακριβέστερα αποτελέσματα. Στην παρούσα εργασία θα γίνει χρήση προσ αυξητικών και όχι επαναληπτικών παραμορφώσεων για την εύρεση των τάσεων και των εσωτερικών δράσεων της ράβδου (βλ. σχ. (3.2.80), (3.2.82)).

Η πλήρως μη – γραμμική μέθοδος Newton – Raphson χαρακτηρίζεται από τον εκ νέου υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας της ράβδου σε κάθε επανάληψη εντός του προσ αυξητικού βήματος. Αν και η μέθοδος συνήθως απαιτεί μικρό αριθμό επαναλήψεων προκειμένου να επέλθει σύγκλιση, ο υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας σε κάθε επανάληψη οδηγεί σε αρκετά αυξημένο υπολογιστικό χρόνο. Αν εξετάσουμε το μητρώο ακαμψίας της εξίσωσης (3.2.77) διαπιστώνουμε ότι όλοι οι όροι του μπορούν να υπολογιστούν πολύ γρήγορα εκτός από τη σταθερά στρέψης I , στην οποία υπεισέρχεται η συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_M^P . Για να υπολογιστεί η συνάρτηση στρέβλωσης απαιτείται σημαντικός υπολογιστικός χρόνος αφού προκύπτει από την εξίσωση Poisson (3.2.24). Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί μια **παραλλαγή της μεθόδου Newton – Raphson** (modified Newton – Raphson method). Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο το μητρώο ακαμψίας διατηρείται σταθερό σ' όλες τις επαναλήψεις εντός του προσ αυξητικού βήματος και επαναυπολογίζεται αφού αποκατασταθεί η ισορροπία προκειμένου να χρησιμοποιηθεί στην επόμενη προσ αύξηση. Στη βιβλιογραφία έχει παρουσιαστεί και η μέθοδος του **αρχικού μητρώου ακαμψίας** (initial stiffness method) σύμφωνα με την οποία χρησιμοποιείται το αρχικό ελαστικό μητρώο ακαμψίας σε όλα τα προσ αυξητικά βήματα φόρτισης. Ωστόσο αν επιχειρήσουμε την εφαρμογή αυτής της μεθόδου εδώ θα οδηγηθούμε σε σοβαρό λάθος: Αν εξετάσουμε τους όρους των διατμητικών τάσεων (εξ. (3.2.14β-γ)) διαπιστώνουμε ότι στον υπολογισμό τους υπεισέρχεται η ϕ_M^P . Αν η ϕ_M^P υπολογίζεται αποκλειστικά με ελαστική ανάλυση, η κατανομή και οι κατευθύνσεις των διατμητικών τάσεων δε θα μεταβληθούν κατά την πλαστικοποίηση

της ράβδου. Ωστόσο όπως γνωρίζουμε κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό αφού η ελαστική κατανομή τάσεων είναι κατά πολύ διαφορετική από την πλαστική κατανομή τάσεων.

Για να προσδιορίσουμε το αν έχει πλαστικοποιηθεί η ράβδος καθώς και την έκταση των πλαστικών ζωνών θα χρησιμοποιήσουμε ένα **πλήθος σημείων ελέγχου** που είναι κατανομημένοι κατάλληλα τόσο στο σύνορο όσο και στο εσωτερικό της διατομής. Τα σημεία αυτά εκτός από το να προσδιορίζουν αν έχει επέλθει πλαστικοποίηση, χρησιμεύουν και στον αριθμητικό υπολογισμό όλων των γεωμετρικών ολοκληρωτικών μεγεθών και των εσωτερικών δράσεων S_N , S_{M_t} . Καθίσταται επομένως σαφές, ότι το πλήθος και η κατανομή των σημείων ελέγχου καθορίζουν αφενός την ακρίβεια και την αξιοπιστία της μεθόδου, αφετέρου την ταχύτητα του αλγορίθμου επίλυσης.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιηθεί ο m δείκτης για να συμβολιστεί το προσανζητικό βήμα φόρτισης, ο l εκθέτης για την επανάληψη που εκτελείται, το σύμβολο $\delta(\cdot)$ για επαναληπτικά μεγέθη και το σύμβολο $\Delta(\cdot)$ για προσανζητικά μεγέθη. **Ο αλγόριθμος επίλυσης του ελαστοπλαστικού προβλήματος μεγάλων μετατοπίσεων** για την τυχαία l επανάληψη του τυχαίου m προσανζητικού βήματος φόρτισης περιγράφεται από τα παρακάτω βήματα:

1) Υπολογισμός των επαναληπτικών μετατοπισιακών μεγεθών $(\delta\theta')_m^l$, $(\delta u'_s)_m^l$ από την επίλυση του γραμμικού συστήματος 2×2 εξισώσεων ισορροπίας (βλ. εξ. (3.2.77))

$$\begin{bmatrix} E \cdot A & E \cdot I_p \cdot (\theta)_{m-1} \\ E \cdot I_p \cdot (\theta)_{m-1} & E \cdot I_{pp} \cdot [(\theta)_{m-1}]^2 + G \cdot (I_t)_m + (W)_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\delta u'_s)_m^l \\ (\delta \theta)_m^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (M_t)_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (S_N)_m^{l-1} \\ (S_{M_t})_m^{l-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.79\alpha-\beta)$$

των προσανζητικών μετατοπισιακών μεγεθών $(\Delta\theta')_m^l$, $(\Delta u'_s)_m^l$ ως

$$(\Delta\theta')_m^l = (\Delta\theta')_m^{l-1} + (\delta\theta')_m^l, \quad (\Delta u'_s)_m^l = (\Delta u'_s)_m^{l-1} + (\delta u'_s)_m^l \quad (3.2.80\alpha-\beta)$$

και των ολικών μετατοπισιακών μεγεθών $(\theta')_m^l$, $(u'_s)_m^l$ ως

$$(\theta')_m^l = (\theta')_{m-1} + (\Delta\theta')_m^l, \quad (u'_s)_m^l = (u'_s)_{m-1} + (\Delta u'_s)_m^l \quad (3.2.81\alpha-\beta)$$

Είναι σαφές ότι η γραμμικοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας πραγματοποιείται σε κάθε επανάληψη l εντός του προσανζητικού βήματος, αλλά το μητρώο ακαμψίας διατηρείται σταθερό επειδή κάνουμε χρήση της παραλλαγής της πλήρως μη γραμμικής μεθόδου Newton – Raphson.

2) **Στάδιο ελαστικής πρόλεξης** (elastic prediction step): Υπολογισμός των ελαστικών προλέξεων των προσανζητικών τάσεων $(\Delta S_{11}^{Tr})_m^l$, $(\Delta S_{12}^{Tr})_m^l$, $(\Delta S_{13}^{Tr})_m^l$ σε κάθε σημείο ελέγχου της διατομής (συνοριακό και εσωτερικό), με χρήση των εξισώσεων (3.2.66), (3.2.70) ως

$$\begin{aligned} (\Delta S_{11}^{Tr})_m^l &= E \cdot (\Delta u_s')_m^l + E \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot (\theta')_{m-1} \cdot (\Delta \theta')_m^l + \frac{I}{2} \cdot E \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot [(\Delta \theta')_m^l]^2 \\ (\Delta S_{12}^{Tr})_m^l &= G \cdot (\Delta \theta')_m^l \cdot \left(\frac{\partial (\phi_M^P)_m}{\partial x_2} - x_3 \right) \\ (\Delta S_{13}^{Tr})_m^l &= G \cdot (\Delta \theta')_m^l \cdot \left(\frac{\partial (\phi_M^P)_m}{\partial x_3} + x_2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.82\alpha-\beta-\gamma)$$

και των ελαστικών προλέξεων των συνολικών τάσεων $(S_{11}^{Tr})_m^l$, $(S_{12}^{Tr})_m^l$, $(S_{13}^{Tr})_m^l$ ως

$$(S_{11}^{Tr})_m^l = (S_{11})_{m-1} + (\Delta S_{11}^{Tr})_m^l \quad (3.2.83\alpha)$$

$$(S_{12}^{Tr})_m^l = (S_{12})_{m-1} + (\Delta S_{12}^{Tr})_m^l \quad (3.2.83\beta)$$

$$(S_{13}^{Tr})_m^l = (S_{13})_{m-1} + (\Delta S_{13}^{Tr})_m^l \quad (3.2.83\gamma)$$

3) **Στάδιο πλαστικής διόρθωσης** (plastic correction step): Εύρεση της συνάρτησης διαρροής f^{Tr} από τις προλέξεις των ολικών τάσεων **σε κάθε σημείο ελέγχου της διατομής**, με χρήση της εξ. (2.3.41) ως

$$f^{Tr} = \sqrt{\left[(S_{11}^{Tr})_m^l \right]^2 + 3 \cdot \left[(S_{12}^{Tr})_m^l \right]^2 + 3 \cdot \left[(S_{13}^{Tr})_m^l \right]^2} - (\sigma_Y)_{m-1} \quad (3.2.84)$$

και εύρεση αν το κριτήριο διαρροής επαληθεύεται:

- Αν $f^{Tr} \leq 0$ τότε **το κριτήριο διαρροής επαληθεύεται** και το σημείο ελέγχου είναι ελαστικό, επομένως η ελαστική πρόλεξη είναι η τελική κατάσταση του σημείου. Εύρεση των ολικών τάσεων $(S_{11})_m^l$, $(S_{12})_m^l$, $(S_{13})_m^l$ της τελικής κατάστασης ως

$$(S_{11})_m^l = (S_{11}^{Tr})_m^l, (S_{12})_m^l = (S_{12}^{Tr})_m^l, (S_{13})_m^l = (S_{13}^{Tr})_m^l \quad (3.2.85\alpha-\beta-\gamma)$$

- Αν $f^{Tr} > 0$ τότε **το κριτήριο διαρροής παραβιάζεται** και οι τάσεις των ελαστικών προλέξεων δεν αντιστοιχούν σε πραγματική εντατική κατάσταση. Για να επιστρέψουμε στην επιφάνεια διαρροής, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο “generalized cutting plane” (Simo & Ortiz, 1985). Ο αλγόριθμος αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία σε τοπικό επίπεδο (εκτελείται σε κάθε σημείο ελέγχου που πλαστικοποιείται) και περιγράφεται στο τέλος του υποκεφαλαίου 2.3.2. Η τυχαία k -επανάληψή του συνοψίζεται ως:

- Υπολογισμός του $\delta\lambda$ από την εξ. (2.3.53) ως

$$\delta\lambda = \frac{f^{(k)}}{3 \cdot G + h^{(k)}} \quad (3.2.86)$$

- Υπολογισμός των τάσεων της $k+1$ -επανάληψης $S_{11}^{(k+1)}$, $S_{12}^{(k+1)}$, $S_{13}^{(k+1)}$ ως

$$S_{11}^{(k+1)} = S_{11}^{(k)} - E \cdot \delta \varepsilon_{11}^{pl} \quad (3.2.87\alpha)$$

$$S_{12}^{(k+1)} = S_{12}^{(k)} - G \cdot \delta \gamma_{12}^{pl} \quad (3.2.87\beta)$$

$$S_{13}^{(k+1)} = S_{13}^{(k)} - G \cdot \delta \gamma_{13}^{pl} \quad (3.2.87\gamma)$$

$$\text{όπου } \delta \varepsilon_{11}^{pl} = \delta \lambda \cdot \frac{\partial f^{(k)}}{\partial S_{11}}, \quad \delta \gamma_{12}^{pl} = \delta \lambda \cdot \frac{\partial f^{(k)}}{\partial S_{12}}, \quad \delta \gamma_{13}^{pl} = \delta \lambda \cdot \frac{\partial f^{(k)}}{\partial S_{13}}.$$

Ο υπολογισμός των $\frac{\partial f^{(k)}}{\partial S_{11}}$, $\frac{\partial f^{(k)}}{\partial S_{12}}$, $\frac{\partial f^{(k)}}{\partial S_{13}}$ προκύπτει από τις εξ. (2.3.16α-δ-ε).

- Υπολογισμός των προσαυξητικών πλαστικών παραμορφώσεων και των $\varepsilon_{eq}^{pl(k+1)}$, $h'^{(k+1)}$ ως

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{11}^{pl(k+1)} &= \Delta \varepsilon_{11}^{pl(k)} + \delta \varepsilon_{11}^{pl}, \quad \Delta \gamma_{12}^{pl(k+1)} = \Delta \gamma_{12}^{pl(k)} + \delta \gamma_{12}^{pl}, \\ \Delta \gamma_{13}^{pl(k+1)} &= \Delta \gamma_{13}^{pl(k)} + \delta \gamma_{13}^{pl} \end{aligned} \quad (3.2.88\alpha-\beta-\gamma)$$

$$\varepsilon_{eq}^{pl(k+1)} = \varepsilon_{eq}^{pl(k)} + \delta \lambda, \quad h'^{(k+1)} = h'(\varepsilon_{eq}^{pl(k+1)}) \quad (3.2.89\alpha-\beta)$$

- Υπολογισμός του $f^{(k+1)}$ ως

$$f^{(k+1)} = \sqrt{\left(S_{11}^{(k+1)}\right)^2 + 3 \cdot \left(S_{12}^{(k+1)}\right)^2 + 3 \cdot \left(S_{13}^{(k+1)}\right)^2} - \sigma_Y(\varepsilon_{eq}^{pl(k+1)}) \quad (3.2.90)$$

- Αν $f^{(k+1)} \leq tol_f$ τότε τερμάτισε τις επαναλήψεις αφού έχουμε επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής με ανεκτό σφάλμα tol_f της επιλογής μας ($tol_f = 10^{-5}$ στην παρούσα εργασία). Υπολογισμός όλων των υπεισερχόμενων μεγεθών στην τελική κατάσταση ως:

$$\left(S_{11}\right)_m^l = \left(S_{11}^{(k+1)}\right)_m^l, \quad \left(S_{12}\right)_m^l = \left(S_{12}^{(k+1)}\right)_m^l, \quad \left(S_{13}\right)_m^l = \left(S_{13}^{(k+1)}\right)_m^l \quad (3.2.91\alpha-\beta-\gamma)$$

$$\left(\Delta \varepsilon_{11}^{pl}\right)_m^l = \Delta \varepsilon_{11}^{pl(k+1)}, \quad \left(\Delta \gamma_{12}^{pl}\right)_m^l = \Delta \gamma_{12}^{pl(k+1)}, \quad \left(\Delta \gamma_{13}^{pl}\right)_m^l = \Delta \gamma_{13}^{pl(k+1)}$$

$$\left(\varepsilon_{eq}^{pl}\right)_m^l = \varepsilon_{eq}^{pl(k+1)} \quad (3.2.92)$$

$$\left(h'\right)_m^l = h'(\varepsilon_{eq}^{pl(k+1)}) \quad (3.2.93)$$

Προκειμένου να αρχικοποιηθούν οι μεταβλητές του αλγορίθμου, χρησιμοποιούμε τιμές από το στάδιο της ελαστικής πρόλεξης:

$$f^{(0)} = f^{tr}, \quad \mathbf{S}^{(0)} = \mathbf{S}^{tr}, \quad \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial f^{tr}}{\partial \mathbf{S}} \quad (3.2.94\alpha-\beta-\gamma)$$

$$\Delta \varepsilon_{11}^{pl(0)} = 0, \Delta \gamma_{12}^{pl(0)} = 0, \Delta \gamma_{13}^{pl(0)} = 0 \quad (3.2.94\delta-\varepsilon-\zeta)$$

$$\varepsilon_{eq}^{pl(0)} = \left(\varepsilon_{eq}^{pl} \right)_{m-1}, h'^{(0)} = h' \left(\left(\varepsilon_{eq}^{pl} \right)_{m-1} \right) \quad (3.2.94\eta-\theta)$$

4) Υπολογισμός των όρων $(S_N)_m^l, (S_{M_t})_m^l$ των εσωτερικών δράσεων με τη βοήθεια της εξ. (3.2.76):

$$(S_N)_m^l = \int_{\Omega} (S_{11})_m^l d\Omega \quad (3.2.95\alpha)$$

$$(S_{M_t})_m^l = \left[\int_{\Omega} (S_{11})_m^l \cdot (x_2^2 + x_3^2) d\Omega \right] \cdot (\theta')_m^l + \int_{\Omega} \left[(S_{12})_m^l \cdot \left(\frac{\partial(\phi_M^P)}{\partial x_2} - x_3 \right) + (S_{13})_m^l \cdot \left(\frac{\partial(\phi_M^P)}{\partial x_3} + x_2 \right) \right] d\Omega \quad (3.2.95\beta)$$

Τα ολοκληρώματα των δεξιά μελών απαιτούν αριθμητική ολοκλήρωση η οποία παρουσιάζεται στο υποκεφάλαιο 4.1.2

5) Εύρεση αν **το κριτήριο σύγκλισης** των εξισώσεων ισορροπίας σε επίπεδο ράβδου (εξ. 3.2.79) επαληθεύεται:

- Αν ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$\frac{(M_t)_m - (S_{M_t})_m^l}{(M_t)_m} \leq \varepsilon, (S_N)_m^l \leq \varepsilon \quad (3.2.96\alpha-\beta)$$

όπου

$\varepsilon = 10^{-4}$: Σφάλμα ανοχής για τις εξισώσεις ισορροπίας τότε το κριτήριο σύγκλισης επαληθεύεται.

- Αν κάποια από τις σχέσεις (3.2.96α), (3.2.96β) δεν επαληθεύεται, τότε το κριτήριο σύγκλισης παραβιάζεται. Επιστρέφουμε στο 1ο βήμα του αλγορίθμου και εκτελούμε νέα επανάληψη $l+1$.

Σε περίπτωση που **το κριτήριο σύγκλισης επαληθευτεί**, έστω μετά από $l = n$ επαναλήψεις εντός του προσαυξητικού βήματος m , τότε η ισορροπία της ράβδου έχει αποκατασταθεί. Τα μετατοπισιακά μεγέθη που χρησιμεύουν στην εξαγωγή της καμπύλης φορτίου – μετατόπισης της ράβδου λαμβάνονται ως

$$(\theta')_m = (\theta')_m^n, (u'_s)_m = (u'_s)_m^n \quad (3.2.97\alpha-\beta)$$

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην αποκατάσταση της ισορροπίας και στο επόμενο προσαυξητικό βήμα $m+1$, είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε τα άγνωστα μεγέθη του μητρώου ακαμψίας που θα χρησιμοποιηθεί. Έτσι η συνάρτηση στρέβλωσης

$(\phi_M^P)_{m+1}$ θα προσδιοριστεί από την αριθμητική επίλυση της παρακάτω εξίσωσης (βλ. εξ. (3.2.30), (3.2.31)):

$$\nabla^2 (\phi_M^P)_{m+1} = \frac{I}{(\Delta\theta')_m^n} \cdot \left(\frac{\partial (\Delta\gamma_{I2}^{pl})_m^n}{\partial x_2} + \frac{\partial (\Delta\gamma_{I3}^{pl})_m^n}{\partial x_3} \right), \text{ στο } \Omega \quad (3.2.98\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial n} \right)_{m+1} = \left(\frac{(\Delta\gamma_{I2}^{pl})_m^n}{(\Delta\theta')_m^n} + x_3 \right) \cdot n_2 + \left(\frac{(\Delta\gamma_{I3}^{pl})_m^n}{(\Delta\theta')_m^n} - x_2 \right) \cdot n_3, \text{ στο } \Gamma \quad (3.2.98\beta)$$

Η αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4. Μετά τον προσδιορισμό της $(\phi_M^P)_{m+1}$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τον όρο $(I_t)_{m+1}$ του μητρώου δυσκαμψίας ως (βλ. σχ. (3.2.35))

$$(I_t)_{m+1} = \int_{\Omega} \left[x_2^2 + x_3^2 + x_2 \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} \right)_{m+1} - x_3 \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} \right)_{m+1} \right] d\Omega \quad (3.2.99)$$

Ο όρος Wagner $(W)_m$ του μητρώου δυσκαμψίας θα δοθεί ως (βλ. σχ. (3.2.77))

$$(W)_m = \int_{\Omega} (S_{II})_m^n \cdot (x_2^2 + x_3^2) d\Omega \quad (3.2.100)$$

Οι όροι $(I_t)_{m+1}$, $(W)_m$ απαιτούν αριθμητική ολοκλήρωση η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο υποκεφάλαιο 4.1.2. Τέλος, προκειμένου να υπολογιστεί για το επόμενο προσανζητικό βήμα η συνάρτηση διαρροής f^{Tr} στα σημεία ελέγχου, θα χρειαστούμε την τάση διαρροής $(\sigma_Y)_m$ η οποία λαμβάνεται ως

$$(\sigma_Y)_m = (\sigma_Y)_m^n = \sigma_Y \left[(\varepsilon_{eq}^{pl})_m^n \right] \quad (3.2.101)$$

Στο πρώτο προσανζητικό βήμα $m=1$, προφανώς το $\theta' = 0$, επομένως το μητρώο δυσκαμψίας απλοποιείται σημαντικά. Λόγω έλλειψης αρχικής φόρτισης στη ράβδο, ο όρος Wagner $(W)_0$ που δίνεται από τις ορθές τάσεις $(S_{II})_0$ θα είναι και αυτός μηδενικός, δηλαδή

$$(W)_0 = 0 \quad (3.2.102)$$

ενώ η σταθερά $(I_t)_1$ θα υπολογιστεί από τη συνάρτηση στρέβλωσης $(\phi_M^P)_1$ που θα ληφθεί από την επίλυση του ελαστικού προβλήματος (αφού στην αρχή όλα τα σημεία της ράβδου θα είναι ελαστικά):

$$\nabla^2 (\phi_M^P)_1 = 0, \text{ στο } \Omega \quad (3.2.103\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_M^p}{\partial n} \right)_I = x_3 \cdot n_2 - x_2 \cdot n_3, \text{ στο } \Gamma \quad (3.2.103\beta)$$

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να υπάρξει **αδυναμία σύγκλισης** σε κάποιο προσυζητικό βήμα φόρτισης. Σ' αυτήν την περίπτωση η ράβδος δεν μπορεί να αναλάβει επιπλέον φορτίο και καταρρέει πλαστικά. Το φορτίο του τελευταίου προσυζητικού βήματος θα είναι και το μέγιστο φορτίο (πλήρως πλαστική ροπή) που μπορεί να αναληφθεί από τη ράβδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ
ΤΗΣ ΣΤΡΕΨΗΣ

4.1.1 Υπολογισμός της συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_M^P

Όπως είδαμε, στον αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος της ελαστοπλαστικής ομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων, απαιτείται ο αριθμητικός προσδιορισμός της συνάρτησης στρέβλωσης $\phi_M^P(x_2, x_3)$ η οποία δίνεται από την εξίσωση (3.2.98):

$$\nabla^2 (\phi_M^P)_{m+1} = \frac{I}{(\Delta\theta')_m^n} \cdot \left(\frac{\partial (\Delta\gamma_{12}^{pl})_m^n}{\partial x_2} + \frac{\partial (\Delta\gamma_{13}^{pl})_m^n}{\partial x_3} \right), \text{ στο } \Omega \quad (4.1.1\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial n} \right)_{m+1} = \left(\frac{(\Delta\gamma_{12}^{pl})_m^n}{(\Delta\theta')_m^n} + x_3 \right) \cdot n_2 + \left(\frac{(\Delta\gamma_{13}^{pl})_m^n}{(\Delta\theta')_m^n} - x_2 \right) \cdot n_3, \text{ στο } \Gamma \quad (4.1.1\beta)$$

Για να απλοποιηθεί ο συμβολισμός των εξισώσεων, θα παρουσιάσουμε την επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος

$$\nabla^2 \phi_M^P = \frac{I}{d\theta'} \cdot \left(\frac{\partial d\gamma_{12}^{pl}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\gamma_{13}^{pl}}{\partial x_3} \right), \text{ στο } \Omega \quad (4.1.2\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_M^P}{\partial n} = \left(\frac{d\gamma_{12}^{pl}}{d\theta'} + x_3 \right) \cdot n_2 + \left(\frac{d\gamma_{13}^{pl}}{d\theta'} - x_2 \right) \cdot n_3, \text{ στο } \Gamma = \partial\Omega \quad (4.1.2\beta)$$

Η εξίσωση (4.1.2α) χαρακτηρίζεται ως εξίσωση Poisson, είναι ελλειπτικού τύπου και ορίζεται στο δυσδιάστατο χωρίο Ω της διατομής της ράβδου. Η συνοριακή συνθήκη της εξίσωσης είναι τύπου Neumann, δηλαδή είναι γνωστή η παράγωγος $\frac{\partial \phi_M^P}{\partial n}$ της

άγνωστης συνάρτησης $\phi_M^P(x_2, x_3)$ στο σύνορο Γ της διατομής.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η **μέθοδος συνοριακών στοιχείων** (boundary element method – BEM) για να επιλυθεί το πρόβλημα (4.1.2). Έχουν αναπτυχθεί δύο μέθοδοι συνοριακών στοιχείων για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, η **άμεση μέθοδος συνοριακών στοιχείων** (direct BEM) και η **έμμεση μέθοδος συνοριακών στοιχείων** (indirect BEM). Εδώ χρησιμοποιείται η άμεση μέθοδος συνοριακών στοιχείων έτσι όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο του Κατσικαδέλη (1999).

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις δύο μεταβλητών $k(x_2, x_3)$, $g(x_2, x_3)$ ορισμένες στο δυσδιάστατο χωρίο Ω . Η παραγοντική ολοκλήρωση στις δύο διαστάσεις εκφράζεται μέσω του ακόλουθου **θεωρήματος Gauss – Green** της μαθηματικής ανάλυσης:

$$\int_{\Omega} g \cdot \frac{\partial k}{\partial x_2} d\Omega = - \int_{\Omega} k \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} d\Omega + \int_{\Gamma} k \cdot g \cdot n_2 ds \quad (4.1.3\alpha)$$

$$\int_{\Omega} g \cdot \frac{\partial k}{\partial x_3} d\Omega = - \int_{\Omega} k \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3} d\Omega + \int_{\Gamma} k \cdot g \cdot n_3 ds \quad (4.1.3\beta)$$

όπου

n_2, n_3 : Οι συνιστώσες κατά τους άξονες Ox_2, Ox_3 αντίστοιχα του μοναδιαίου εξωτερικά κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στο σύνορο Γ , $(\mathbf{n})^T = (n_2, n_3)$.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.1.3α) για $g = v$ και $k = \frac{\partial u}{\partial x_2}$ λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} v \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot n_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot n_3 \right) ds \quad (4.1.4\alpha)$$

ενώ η σχέση (4.1.3.β) για $g = u$, $k = \frac{\partial v}{\partial x_2}$ δίνει

$$\int_{\Omega} u \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} v \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot n_2 + \frac{\partial v}{\partial x_3} \cdot n_3 \right) ds \quad (4.1.4\beta)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (4.1.4β), (4.1.4α) παίρνουμε

$$\int_{\Omega} (v \cdot \nabla^2 u - u \cdot \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (4.1.5)$$

όπου

$\nabla^2 (\cdot) = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_3^2}$: Ο τελεστής Laplace (ή αρμονικός τελεστής) της μαθηματικής

ανάλυσης.

$\frac{\partial (\cdot)}{\partial n} = \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_2} \cdot n_2 + \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_3} \cdot n_3$: παράγωγος κατά τη διεύθυνση του εξωτερικά κάθετου στο

Γ μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n} .

Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων βασίζεται στην παραπάνω πολύ βασική σχέση – ταυτότητα που είναι γνωστή ως **2η ταυτότητα του Green για τον αρμονικό τελεστή ή ταυτότητα αμοιβαιότητας του Green**.

Θεωρούμε επίσης την εξίσωση

$$\nabla^2 v = \delta(Q - P), \text{ στο } R^2 \quad (4.1.6)$$

όπου

$P \equiv P(x_{2P}, x_{3P}), Q \equiv Q(x_{2Q}, x_{3Q}) \in R^2$: Σημεία του επιπέδου x_2, x_3

$\delta(Q - P)$: Η συνάρτηση Dirac ορισμένη στο επίπεδο x_2, x_3

Η συνάρτηση Dirac ορίζεται μέσω της εξίσωσης

$$\int_{\Omega} \delta(Q - P) \cdot h(Q) d\Omega_Q = h(P) \quad (4.1.7)$$

όπου

$$P \equiv P(x_{2P}, x_{3P}) \in \Omega, Q \equiv Q(x_{2Q}, x_{3Q}) \in \Omega$$

$h(x_2, x_3)$: Τυχαία συνάρτηση που ορίζεται και είναι συνεχής στο χωρίο Ω

Αποδεικνύεται (Katsikadelis) ότι μια μερική ιδιόμορφη λύση της εξίσωσης (4.1.6) είναι η

$$v(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln r \quad (4.1.8)$$

όπου

$$r = |P - Q|: \text{ Η απόσταση μεταξύ των σημείων } P, Q$$

Η παραπάνω συνάρτηση καλείται **θεμελιώδης λύση** (fundamental solution) της εξ. (4.1.6) ή **συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου** (free space Green's function). Επειδή η απόσταση r μεταξύ των δύο σημείων δε μεταβάλλεται, θεωρώντας τη συνάρτηση Dirac $\delta(P - Q)$ καταλήγουμε στην παρακάτω ιδιότητα συμμετρίας της θεμελιώδους λύσεως

$$v(Q, P) = v(P, Q) \quad (4.1.9)$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα Green (εξ. (4.1.5)) για $u = \phi_M^P$, $v = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln r$ και λαμβάνοντας υπόψη τις εξ. (4.1.2α), (4.1.7), (4.1.9) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v(Q, P) \cdot f(Q) - \phi_M^P(Q) \cdot \delta(Q - P)) d\Omega_Q &= \int_{\Gamma} \left(v(q, P) \cdot \frac{\partial \phi_M^P}{\partial n_q} - \phi_M^P(q) \cdot \frac{\partial v(q, P)}{\partial n_q} \right) ds_q \Rightarrow \\ \Rightarrow -\phi_M^P(P) &= -\int_{\Omega} v(P, Q) \cdot f(Q) d\Omega_Q + \int_{\Gamma} \left(v(P, q) \cdot \frac{\partial \phi_M^P(q)}{\partial n_q} - \phi_M^P(q) \cdot \frac{\partial v(P, q)}{\partial n_q} \right) ds_q \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_M^P(P) &= \int_{\Omega} v(P, Q) \cdot f(Q) d\Omega_Q + \int_{\Gamma} \left(\phi_M^P(q) \cdot \frac{\partial v(P, q)}{\partial n_q} - v(P, q) \cdot \frac{\partial \phi_M^P(q)}{\partial n_q} \right) ds_q \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

όπου

$P \in \Omega, Q \in \Omega$: Σημεία στο εσωτερικό του χωρίου Ω . Το σημείο Q διατρέχει όλο το χωρίο Ω .

$q \in \Gamma$: Σημείο στο σύνορο Γ του χωρίου. Το q διατρέχει όλο το σύνορο Γ κατά την αντιωρολογιακή φορά στην περίπτωση εξωτερικού συνόρου και κατά την ωρολογιακή φορά στην περίπτωση συνόρου οπής, εσωτερικής στο χωρίο Ω .

$$f(Q) = \frac{1}{d\theta'} \cdot \left(\frac{\partial d\gamma_{12}^{pl}(Q)}{\partial x_{2Q}} + \frac{\partial d\gamma_{13}^{pl}(Q)}{\partial x_{3Q}} \right) \quad (\text{βλ. εξ. (4.1.2β)})$$

Σε περίπτωση που το σημείο $P \equiv p \in \Gamma$ ανήκει στο σύνορο, αποδεικνύεται ότι η (4.1.10), στην περίπτωση που το σύνορο είναι λείο στο p , διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{1}{2} \cdot \phi_M^p(p) = \int_{\Omega} v(p, Q) \cdot f(Q) d\Omega_Q + \int_{\Gamma} \left(\phi_M^p(q) \cdot \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} - v(p, q) \cdot \frac{\partial \phi_M^p(q)}{\partial n_q} \right) ds_q \quad (4.1.11)$$

Το σημείο p (ή P στην περίπτωση που το σημείο είναι στο εσωτερικό του χωρίου) καλείται **σημείο ταξίθεσίας** (collocation point) στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων και παραμένει σταθερό στις εκφράσεις των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (4.1.10), (4.1.11) δεν μπορούν ακόμα να δώσουν τις τιμές $\phi_M^p(P)$, $\phi_M^p(p)$ διότι στα δεξιά μέλη των εξισώσεων, οι τιμές της $\phi_M^p(q)$ στο σύνορο είναι άγνωστες, αφού η συνοριακή συνθήκη (4.1.2β) καθορίζει μόνο το $\frac{\partial \phi_M^p(q)}{\partial n_q}$.

Ας εξετάσουμε το πεδιακό ολοκλήρωμα I_I της εξ. (4.1.11). Στο ολοκλήρωμα υπεισέρχονται παράγωγοι των πλαστικών παραμορφώσεων, ωστόσο από τον αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος (βλ. κεφάλαιο 3.2.7) υπολογίζονται οι πλαστικές παραμορφώσεις και όχι οι παραγωγοί τους. Για να αρθεί αυτή η δυσκολία, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

$$\begin{aligned} I_I &= \int_{\Omega} v(p, Q) \cdot f(Q) d\Omega_Q = \int_{\Omega} v(p, Q) \cdot \frac{1}{d\theta'} \cdot \left(\frac{\partial d\gamma_{12}^{pl}(Q)}{\partial x_{2Q}} + \frac{\partial d\gamma_{13}^{pl}(Q)}{\partial x_{3Q}} \right) d\Omega_Q = \\ &= \frac{1}{d\theta'} \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial d\gamma_{12}^{pl}(Q)}{\partial x_{2Q}} \cdot v(p, Q) d\Omega_Q + \frac{1}{d\theta'} \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial d\gamma_{13}^{pl}(Q)}{\partial x_{3Q}} \cdot v(p, Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$\text{Θέτουμε} \quad I_{11} = \int_{\Omega} \frac{\partial d\gamma_{12}^{pl}(Q)}{\partial x_{2Q}} \cdot v(p, Q) d\Omega_Q, \quad I_{12} = \int_{\Omega} \frac{\partial d\gamma_{13}^{pl}(Q)}{\partial x_{3Q}} \cdot v(p, Q) d\Omega_Q. \quad \text{Με}$$

παραγοντική ολοκλήρωση, τα I_{11} , I_{12} διαμορφώνονται ως

$$I_{11} = - \int_{\Omega} d\gamma_{12}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{2Q}} d\Omega_Q + \int_{\Gamma} v(p, q) \cdot d\gamma_{12}^{pl}(q) \cdot n_{2q} ds_q \quad (4.1.13\alpha)$$

$$I_{12} = - \int_{\Omega} d\gamma_{13}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{3Q}} d\Omega_Q + \int_{\Gamma} v(p, q) \cdot d\gamma_{13}^{pl}(q) \cdot n_{3q} ds_q \quad (4.1.13\beta)$$

Αν γράψουμε αναλυτικά την έκφραση της απόστασης r μεταξύ των p, Q ως

$$r = |p - Q| \Rightarrow r = \sqrt{(x_{2p} - x_{2Q})^2 + (x_{3p} - x_{3Q})^2} \quad (4.1.14)$$

μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{2Q}} = - \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{2p}}, \quad \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{3Q}} = - \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{3p}} \quad (4.1.15\alpha-\beta)$$

επομένως οι σχέσεις (4.1.13) γράφονται ως

$$I_{11} = \int_{\Omega} d\gamma_{12}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{2p}} d\Omega_Q + \int_{\Gamma} v(p, q) \cdot d\gamma_{12}^{pl}(q) \cdot n_{2q} ds_q \quad (4.1.16\alpha)$$

$$I_{12} = \int_{\Omega} d\gamma_{13}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{3p}} d\Omega_Q + \int_{\Gamma} v(p, q) \cdot d\gamma_{13}^{pl}(q) \cdot n_{3q} ds_q \quad (4.1.16\beta)$$

Αν αντικαταστήσουμε τους όρους I_{11} , I_{12} στην εξ. (4.1.12) και λάβουμε υπόψη την έκφραση (4.1.2β) της συνοριακής συνθήκης για το $\frac{\partial \phi_M^P(q)}{\partial n_q}$, αντιλαμβανόμαστε ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των πλαστικών όρων $\int_{\Gamma} v(p, q) \cdot d\gamma_{12}^{pl}(q) \cdot n_{2q} ds_q$, $\int_{\Gamma} v(p, q) \cdot d\gamma_{13}^{pl}(q) \cdot n_{3q} ds_q$ εμφανίζονται δύο φορές με αντίθετο πρόσημο, επομένως απαλείφονται στην εξ. (4.1.11). Συνεπώς η εξίσωση (4.1.11) θα διαμορφωθεί ως

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \phi_M^P(p) = & \frac{1}{d\theta'} \cdot \int_{\Omega} \left(d\gamma_{12}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{2p}} + d\gamma_{13}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{3p}} \right) d\Omega_Q + \\ & + \int_{\Gamma} \left(\phi_M^P(q) \cdot \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} - (x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q}) \cdot v(p, q) \right) ds_q \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί και για την εξ. (4.1.10) όπου το $P \in \Omega$. Στο δεξιά μέλος δε θα μεταβληθεί κανένας όρος, επομένως η εξ. (4.1.10) μετατρέπεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \phi_M^P(P) = & \frac{1}{d\theta'} \cdot \int_{\Omega} \left(d\gamma_{12}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(P, Q)}{\partial x_{2P}} + d\gamma_{13}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(P, Q)}{\partial x_{3P}} \right) d\Omega_Q + \\ & + \int_{\Gamma} \left(\phi_M^P(q) \cdot \frac{\partial v(P, q)}{\partial n_q} - (x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q}) \cdot v(p, q) \right) ds_q \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

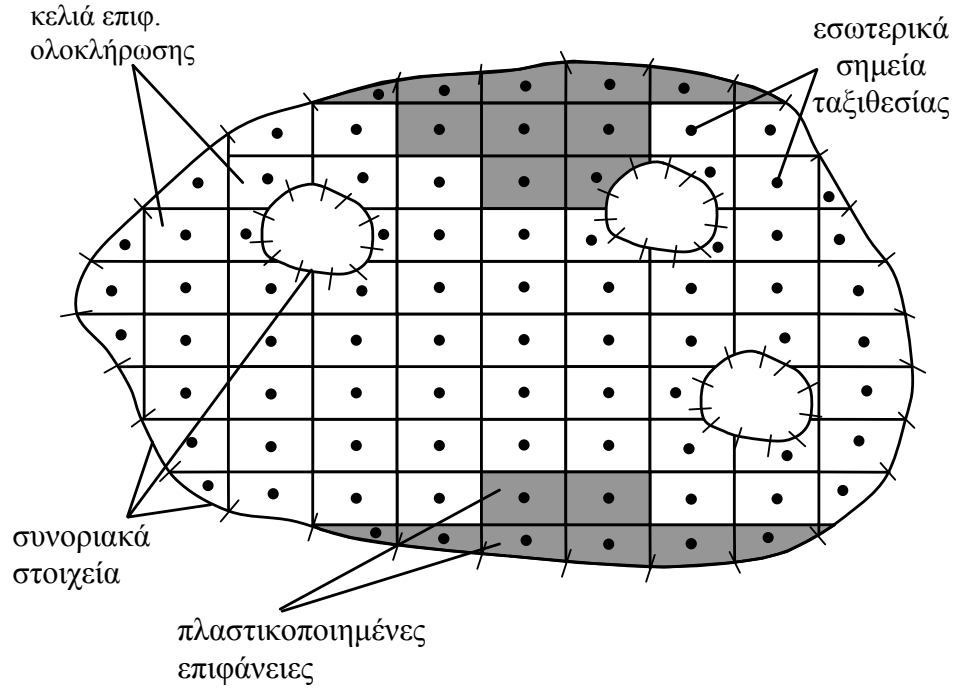
Εξετάζοντας τις εκφράσεις των διατμητικών τάσεων (εξ. (3.2.82β-γ)), διαπιστώνουμε ότι απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_M^P . Για να προσδιοριστούν αυτές οι παράγωγοι, χρησιμοποιούμε την εξ. (4.1.18) την οποία παραγωγίζουμε ως προς x_{2P} και x_{3P} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_M^P(P)}{\partial x_{2P}} = & \frac{1}{d\theta'} \cdot \int_{\Omega} \left(d\gamma_{12}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{2P}^2} + d\gamma_{13}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{2P} \partial x_{3P}} \right) d\Omega_Q + \\ & + \int_{\Gamma} \left(\phi_M^P(q) \frac{\partial}{\partial x_{2P}} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} \right) - (x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q}) \cdot \frac{\partial v(P, Q)}{\partial x_{2P}} \right) ds_q \end{aligned} \quad (4.1.19\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_M^P(P)}{\partial x_{3P}} = & \frac{I}{d\theta'} \cdot \int_{\Omega} \left(d\gamma_{12}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{2P} \partial x_{3P}} + d\gamma_{13}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{3P}^2} \right) d\Omega_Q + \\ & + \int_{\Gamma} \left(\phi_M^P(q) \frac{\partial}{\partial x_{3P}} \left(\frac{\partial v(P, Q)}{\partial n} \right) - (x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q}) \cdot \frac{\partial v(P, Q)}{\partial x_{3P}} \right) ds_q \end{aligned} \quad (4.1.19\beta)$$

Τονίζεται ότι οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς τις μεταβλητές θέσης του σημείου ταξιθεσίας P και όχι ως προς τα σημεία Q ή q , συνεπώς πρέπει να δοθεί προσοχή να μην υπάρξει σφάλμα κατά την εκτέλεση των πράξεων.

Για να επιλυθούν οι εξισώσεις (4.1.17) – (4.1.19), **θα πρέπει να προσδιοριστεί στα δεξιά μέλη η $\phi_M^P(q)$ στο σύνορο της διατομής**. Για να επιτευχθεί αυτό, θα χρησιμοποιηθεί η εξ. (4.1.17) όπου η ϕ_M^P βρίσκεται και στο αριστερά μέλος της εξίσωσης. Η αναλυτική επίλυση είναι αδύνατη, ωστόσο είναι δυνατό να επιλύσουμε το πρόβλημα με αριθμητικό τρόπο. Κατά την αριθμητική επίλυση, διαμερίζουμε το σύνορο Γ και το χωρίο Ω σε ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (βλέπε σχήμα 4.1.1). Ορίζουμε επίσης ένα ισόποσο πλήθος κόμβων που αντιστοιχούν στα κέντρα βάρους των επιφανειακών στοιχείων και στα μέσα των συνοριακών στοιχείων. Στο κάθε επιφανειακό στοιχείο θεωρούμε ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις $d\gamma_{12}^{pl}(Q)$, $d\gamma_{13}^{pl}(Q)$ λαμβάνουν σταθερές τιμές σε όλη την επιφάνεια του στοιχείου, που ισούνται με τις αντίστοιχες τιμές στον κόμβο του. Στο κάθε συνοριακό στοιχείο θεωρούμε ότι η συνάρτηση στρέβλωσης $\phi_M^P(q)$ και οι ποσότητες $(x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q})$ λαμβάνουν σταθερές τιμές σε όλο το μήκος του στοιχείου, που ισούνται με τις αντίστοιχες τιμές στον κόμβο του. Η διακριτοποίηση είναι τέτοια ώστε να διαμερίζεται το σύνολο του χωρίου και του συνόρου χωρίς παράλληλα να υπάρχει υπερκάλυψη μεταξύ των στοιχείων. Τα στοιχεία αυτά καλούνται **σταθερά** (constant), ενώ για τα **σταθερά συνοριακά στοιχεία** (constant boundary elements) ισχύει η επιπλέον απαίτηση ότι πρέπει να είναι ευθύγραμμο. Τα επιφανειακά στοιχεία μπορούν να έχουν οποιοδήποτε σχήμα, ωστόσο στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά στοιχεία ορθογωνικά και τριγωνικά στοιχεία.



Σχήμα 4.1.1 Διακριτοποίηση της διατομής σε συνοριακά και επιφανειακά στοιχεία

Τονίζεται ότι οι κόμβοι των στοιχείων αντιστοιχούν στα σημεία ελέγχου όπου υπολογίζονται όλα τα υπαισερχόμενα μεγέθη στον αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος (βλ. κεφάλαιο 3.2.7). **Με χρήση N συνοριακών στοιχείων και K επιφανειακών στοιχείων**, η (4.1.17) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \phi_M^p(p) &= \frac{1}{d\theta'} \cdot \sum_{i=1}^K \int_{\Omega_i} \left(d\gamma_{12}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{2p}} + d\gamma_{13}^{pl}(Q) \cdot \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{3p}} \right) d\Omega_{Q_i} + \\ &+ \sum_{m=1}^N \int_{\Gamma_m} \left(\phi_M^p(q) \cdot \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} - (x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q}) \cdot v(p, q) \right) ds_{q_m} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \cdot \phi_M^p(p) &= \frac{1}{d\theta'} \cdot \left[\sum_{i=1}^K d\gamma_{12}^{pl}(Q_i) \cdot \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{2p}} d\Omega_{Q_i} + \sum_{i=1}^K d\gamma_{13}^{pl}(Q_i) \cdot \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(p, Q)}{\partial x_{3p}} d\Omega_{Q_i} \right] + \\ &+ \sum_{m=1}^N \phi_M^p(q_m) \cdot \int_{\Gamma_m} \frac{\partial v(p, q)}{\partial n_q} ds_{q_m} - \sum_{m=1}^N (x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q})_m \cdot \int_{\Gamma_m} v(p, q) ds_{q_m} \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί N φορές για κάθε σημείο ταξιθεσίας p_j , όπου $j = 1, 2, \dots, N$. Φροντίζουμε ώστε τα σημεία ταξιθεσίας να ληφθούν στους κόμβους των N συνοριακών στοιχείων. Έτσι η (4.1.20) θα δώσει τις παρακάτω N εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \phi_M^P(p_j) &= \frac{1}{d\theta'} \cdot \left[\sum_{i=1}^K d\gamma_{i2}^{pl}(Q_i) \cdot \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(p_j, Q)}{\partial x_{2p}} d\Omega_{Q_i} + \sum_{i=1}^K d\gamma_{i3}^{pl}(Q_i) \cdot \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(p_j, Q)}{\partial x_{3p}} d\Omega_{Q_i} \right] + \\ &+ \sum_{m=1}^N \phi_M^P(q_m) \cdot \int_{\Gamma_m} \frac{\partial v(p_j, q)}{\partial n_q} ds_{qm} - \sum_{m=1}^N (x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q})_m \cdot \int_{\Gamma_m} v(p_j, q) ds_{qm} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \phi_M^P(p_j) &= (F)_j + \sum_{m=1}^N (H)_{mj} \cdot \phi_M^P(q_m) - \sum_{m=1}^N (G)_{mj} \cdot (x_{3q} \cdot n_{2q} - x_{2q} \cdot n_{3q})_m \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

όπου

$j = 1, 2, \dots, N$: Το πλήθος των παραπάνω σχέσεων.

Q_i : Ο κόμβος του επιφανειακού στοιχείου i .

q_m : Ο κόμβος του συνοριακού στοιχείου m .

p_j : Ο κόμβος του συνοριακού στοιχείου j .

$$(F)_j = \frac{1}{d\theta'} \cdot \left[\sum_{i=1}^K d\gamma_{i2}^{pl}(Q_i) \cdot \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(p_j, Q)}{\partial x_{2p}} d\Omega_{Q_i} + \sum_{i=1}^K d\gamma_{i3}^{pl}(Q_i) \cdot \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(p_j, Q)}{\partial x_{3p}} d\Omega_{Q_i} \right] \quad (4.1.22\alpha)$$

$$(H)_{mj} = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial v(p_j, q)}{\partial n_q} ds_{qm} \quad (4.1.22\beta)$$

$$(G)_{mj} = \int_{\Gamma_m} v(p_j, q) ds_{qm} \quad (4.1.22\gamma)$$

Είναι φανερό ότι οι N σχέσεις της (4.1.21) αποτελούν ένα $N \times N$ γραμμικό σύστημα με άγνωστες τις ποσότητες $(\phi_M^P)_j = \phi_M^P(p_j)$. Με αναδιάταξη των σχέσεων λαμβάνουμε

$$[H] \cdot \{\Phi\} = [G] \cdot \{\Phi_n\} - \{F\} \quad (4.1.22)$$

όπου

$[H]$: Τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $N \times N$ με γνωστά στοιχεία. Το τυχαίο

στοιχείο $(H)_{mj}$ του πίνακα δίνεται ως $(H)_{mj} = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial v(p_j, q)}{\partial n_q} ds_{qm}$ για $m \neq j$ και

$$(H)_{mj} = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial v(p_j, q)}{\partial n_q} ds_{qm} - \frac{1}{2} \text{ για } m=j.$$

$\{\Phi\}^T = ((\phi_M^P)_1, (\phi_M^P)_2, \dots, (\phi_M^P)_N)$: Διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$ που περιέχει τις άγνωστες τιμές της συνάρτησης στρέβλωσης στους συνοριακούς κόμβους.

$[G]$: Τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $N \times N$ με γνωστά στοιχεία. Το τυχαίο

στοιχείο $(G)_{mj}$ του πίνακα δίνεται ως $(G)_{mj} = \int_{\Gamma_m} v(p_j, q) ds_{qm}$.

$\{\Phi_n\}$: Διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$ με γνωστά στοιχεία. Το τυχαίο στοιχείο $(\Phi_n)_m$ του διανύσματος δίνεται ως $(\Phi_n)_m = x_{3m} \cdot n_{2m} - x_{2m} \cdot n_{3m}$ για $m = 1, 2, \dots, N$

$\{F\}$: Διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$ με γνωστά στοιχεία. Το τυχαίο στοιχείο $(F)_j$ του διανύσματος δίνεται από τη σχέση (4.1.22α)

Μετά τον υπολογισμό των κομβικών συνοριακών ποσοτήτων $(\phi_M^P)_j$ από την επίλυση του γραμμικού συστήματος (4.1.22), μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά μέσω των εξ. (4.1.19) τις παραγώγους τις συνάρτησης στρέβλωσης στους κόμβους των K επιφανειακών στοιχείων ως

$$\frac{\partial \phi_M^P(P_i)}{\partial x_{2P}} = (Fx_2)_i + \sum_{m=1}^N (Hx_2)_{im} \cdot (\phi_M^P)_m - \sum_{m=1}^N (Gx_2)_{im} \cdot (\Phi_n)_m \quad (4.1.23\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_M^P(P_i)}{\partial x_{3P}} = (Fx_3)_i + \sum_{m=1}^N (Hx_3)_{im} \cdot (\phi_M^P)_m - \sum_{m=1}^N (Gx_3)_{im} \cdot (\Phi_n)_m \quad (4.1.23\beta)$$

όπου

$i = 1, 2, \dots, K$: Το πλήθος των άνω σχέσεων.

$$\begin{aligned} (Fx_2)_i &= \frac{1}{d\theta'} \cdot \left[\sum_{r=1}^K d\gamma_{12}^{pl}(Q_r) \cdot \int_{\Omega_r} \frac{\partial^2 v(P_i, Q)}{\partial x_{2P}^2} d\Omega_{Qr} + \sum_{r=1}^K d\gamma_{13}^{pl}(Q_r) \cdot \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 v(P_i, Q)}{\partial x_{2P} \partial x_{3P}} d\Omega_{Qr} \right] \\ (Fx_3)_i &= \frac{1}{d\theta'} \cdot \left[\sum_{r=1}^K d\gamma_{12}^{pl}(Q_r) \cdot \int_{\Omega_r} \frac{\partial^2 v(P_i, Q)}{\partial x_{2P} \partial x_{3P}} d\Omega_{Qr} + \sum_{r=1}^K d\gamma_{13}^{pl}(Q_r) \cdot \int_{\Omega_r} \frac{\partial^2 v(P_i, Q)}{\partial x_{3P}^2} d\Omega_{Qr} \right] \\ (Hx_2)_{im} &= \int_{\Gamma_m} \frac{\partial}{\partial x_{2P}} \left(\frac{\partial v(P_i, Q)}{\partial n} \right) ds_{qm}, \quad (Hx_3)_{im} = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial}{\partial x_{3P}} \left(\frac{\partial v(P_i, Q)}{\partial n} \right) ds_{qm} \\ (Gx_2)_{im} &= \int_{\Gamma_m} \frac{\partial v(P_i, Q)}{\partial x_{2P}} ds_{qm}, \quad (Gx_3)_{im} = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial v(P_i, Q)}{\partial x_{3P}} ds_{qm} \end{aligned} \quad (4.1.24\alpha-\beta-\gamma-\delta)$$

Παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα της θεμελιώδους λύσεως v που υπεισέρχονται στις εξισώσεις (4.1.21) – (4.1.23) είναι επικαμπύλια και επιφανειακά. Προκειμένου να υπάρξει ενιαία αντιμετώπιση των ολοκληρωμάτων, που θα βοηθήσει στη σύνταξη του προγράμματος σε H/Y, θα μετατρέψουμε τα ολοκληρώματα των επιφανειακών στοιχείων Ω_i σε επικαμπύλια, πάνω στο σύνορο του κάθε κελιού i . Η μέθοδος αυτή είναι ενιαία για όλα τα επιφανειακά ολοκληρώματα τύπου

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial v(P, Q)}{\partial x_{2P}} d\Omega_{Q_i}, \quad \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(P, Q)}{\partial x_{3P}} d\Omega_{Q_i}, \quad \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{2P} \partial x_{3P}} d\Omega_{Q_i}, \quad \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{2P}^2} d\Omega_{Q_i},$$

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{3P}^2} d\Omega_{Q_i} \text{ που υπεισέρχονται στους όρους } (F)_i, (Fx_2)_i, (Fx_3)_i.$$

Αρχικά υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega_i} v d\Omega_i$ ως

$$\int_{\Omega_i} v d\Omega_i = \int_{\Omega_i} \left(v^* - \frac{I}{2\pi} \right) d\Omega_i = \int_{\Omega_i} v^* d\Omega_i - \frac{A_{\Omega_i}}{2\pi} \quad (4.1.25)$$

όπου

$v^* = \frac{1}{2\pi} \cdot (\ln r + I)$, $r = |P - Q|$. Προφανώς ισχύει $v^* = v + \frac{1}{2\pi}$.

A_{Ω_i} : το εμβαδόν του επιφανειακού στοιχείου i

Η ταυτότητα Green $\int_{\Omega_i} (u \cdot \nabla^2 U - U \cdot \nabla^2 u) d\Omega_i = \int_{\Gamma_i} \left(u \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds_i$ για $u = 1$ και

$\nabla^2 U = v^*$ δίνει

$$\int_{\Omega_i} v^* d\Omega_k = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial U}{\partial n} ds_i \xrightarrow{(4.1.25)} \int_{\Omega_i} v d\Omega_i = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial U}{\partial n} ds_i - \frac{A_{\Omega_i}}{2\pi} \quad (4.1.26)$$

αφού προφανώς θα ισχύει $u = 1 \Rightarrow \nabla^2 u = 0$ και $u = 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Γ_i είναι το σύνορο του επιφανειακού στοιχείου i . Η επίλυση της εξίσωσης

$$\nabla^2 U = v^* \quad (4.1.27)$$

δίνει

$$U = \frac{1}{8\pi} \cdot r^2 \cdot \ln r \quad (4.1.28)$$

Παραγωγίζοντας την εξ. (4.1.26) ως προς $m = x_2, x_3, x_2x_2, x_2x_3, x_3x_3$ λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega_i} v_m d\Omega_i = \int_{\Gamma_i} U_{mn} ds_i \quad (4.1.29)$$

όπου

$$\int_{\Omega_i} v_{x_2} d\Omega_i = \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(P, Q)}{\partial x_{2p}} d\Omega_{Q_i}, \quad \int_{\Omega_i} v_{x_3} d\Omega_i = \int_{\Omega_i} \frac{\partial v(P, Q)}{\partial x_{3p}} d\Omega_{Q_i}$$

$$\int_{\Omega_i} v_{x_2x_2} d\Omega_i = \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{2p}^2} d\Omega_{Q_i}, \quad \int_{\Omega_i} v_{x_3x_3} d\Omega_i = \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{3p}^2} d\Omega_{Q_i},$$

$$\int_{\Omega_i} v_{x_2x_3} d\Omega_i = \int_{\Omega_i} \frac{\partial^2 v(P, Q)}{\partial x_{2p} \partial x_{3p}} d\Omega_{Q_i}$$

$$U_n = \frac{1}{8\pi} \cdot (2 \ln r + I) \cdot r \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.1.30\alpha)$$

$$U_{x_2n} = -\frac{1}{8\pi} \cdot \left[(2 \ln r + I) \cdot \cos(\omega + \alpha) + 2 \cdot \cos \omega \cdot \cos \alpha \right] \quad (4.1.30\beta)$$

$$U_{x_3n} = -\frac{1}{8\pi} \cdot \left[(2 \ln r + I) \sin(\omega + \alpha) + 2 \cdot \sin \omega \cdot \cos \alpha \right] \quad (4.1.30\gamma)$$

$$U_{x_2x_2n} = \frac{1}{4\pi r} \cdot (\cos \alpha - \sin 2\omega \cdot \sin \alpha) \quad (4.1.30\delta)$$

$$U_{x_2x_3n} = \frac{1}{4\pi r} \cdot (\cos 2\omega \cdot s \sin a) \quad (4.1.30\epsilon)$$

$$U_{x_3x_3n} = \frac{1}{4\pi r} \cdot (\cos a + \sin 2\omega \cdot \sin a) \quad (4.1.30\zeta)$$

$$a = \gamma\omega\nu\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \text{ και } \omega = \gamma\omega\nu\alpha(\mathbf{x}_2, \mathbf{r})$$

Συνοψίζοντας, για τον υπολογισμό του $\{F\}$ στο γραμμικό σύστημα (4.1.22) απαιτούνται οι εκφράσεις U_{x_2n} , U_{x_3n} ενώ για τον υπολογισμό των $(Fx_2)_i$, $(Fx_3)_i$

στις εκφράσεις (4.1.23α-β) των παραγώγων $\frac{\partial \phi_M^P(P_i)}{\partial x_{2P}}$, $\frac{\partial \phi_M^P(P_i)}{\partial x_{3P}}$ απαιτούνται οι

εκφράσεις $U_{x_2x_2n}$, $U_{x_2x_3n}$, $U_{x_3x_3n}$. Οι παράγωγοι υπολογίζονται στους κόμβους των επιφανειακών στοιχείων, επομένως δεν βρίσκονται πάνω στα σύνορα των κελιών.

Συνεπώς στις σχέσεις (4.1.30δ-ε-ζ) το $r \neq 0$, επομένως τα επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι **ομαλά** (regular) και μπορούν να προσδιοριστούν με αριθμητική ολοκλήρωση. Στον υπολογισμό των συνοριακών ποσοτήτων $(\phi_M^P)_j$ παρατηρούμε ότι

ο συνοριακός κόμβος j ανήκει στο σύνορο κάποιου επιφανειακού στοιχείου, έστω του Ω_k . Συνεπώς ο υπολογισμός των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων $\int_{\Gamma_k} U_{x_2n} ds_k$,

$\int_{\Gamma_k} U_{x_3n} ds_k$ θα παρουσιάσει **ιδιομορφία** (singularity) στον όρο $\ln r$ αφού για $p_j \equiv q_k$

θα έχουμε $r=0$. Με την παρατήρηση ότι τα επιφανειακά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία έχουν σύνορα που αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα, συμπεραίνουμε ότι η ιδιομορφία θα συμβεί σε κάποιο από τα ευθύγραμμα τμήματα του συνόρου Γ_k . Έτσι είναι δυνατό να αρθεί η ιδιομορφία με αναλυτική ολοκλήρωση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος ως

$$\int_{\Gamma_{ks}} \ln r ds_{q_{ks}} = 2 \cdot \int_{r=0}^{l_{ks}/2} \ln r dr = 2 \cdot [r \cdot \ln r - r]_{r=0}^{l_{ks}/2} = l_{ks} \cdot \left[\ln \left(\frac{l_{ks}}{2} \right) - 1 \right] \quad (4.1.31)$$

όπου

l_{ks} : Το μήκος του γραμμικού τμήματος του συνόρου Γ_k που έχει ως μέσο το σημείο ταξίθεσίας $p_j \equiv q_k$ στο οποίο εμφανίζεται η ιδιομορφία.

Οι όροι των ημιτόνων και συνημιτόνων στις εκφράσεις των U_{x_2n} , U_{x_3n} δεν παρουσιάζουν ιδιομορφία και μπορούν να αντιμετωπιστούν με αριθμητική ολοκλήρωση.

Ο υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης στρέβλωσης στους κόμβους των συνοριακών στοιχείων είναι εξαιρετικά δυσχερής μέσω ολοκληρωτικών εκφράσεων. Για αυτόν το λόγο επιτυγχάνεται με αριθμητική παραγωγή, αφού προσδιοριστούν οι συνοριακές ποσότητες $(\phi_M^P)_j$.

Χρησιμοποιώντας το γνωστό τύπο των κεντρικών διαφορών

$$\left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial t} \right)_j = \frac{(\phi_M^P)_{j+1} - (\phi_M^P)_{j-1}}{2\Delta s} \quad (4.1.32)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι η παράγωγος $\left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial n} \right)_j$ είναι γνωστή από τη συνοριακή συνθήκη (4.1.2β), μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τις παραγωγούς $\frac{\partial \phi_M^P(p_j)}{\partial x_{2P}}$, $\frac{\partial \phi_M^P(p_j)}{\partial x_{3P}}$.

Σε ό,τι αφορά τον υπολογισμό των **συνοριακών ολοκληρωμάτων** $(G)_{mj} = \int_{\Gamma_m} v(p_j, q) ds_{qm}$, $(H)_{mj} = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial v(p_j, q)}{\partial n_q} ds_{qm}$ των σχ. (4.1.22β-γ), θα έχουμε

$$v(p_j, q) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln r \Rightarrow \frac{\partial v(p_j, q)}{\partial n_q} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos a}{r} \quad (4.1.33)$$

όπου

$$a = \text{γωνία}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$$

Στην περίπτωση που $j \equiv m$, στα συνοριακά ολοκληρώματα θα έχουμε ιδιομορφία, αφού για $p_j \equiv q_m$ το $r = 0$. Στο $(G)_{jj}$ η ιδιομορφία είναι τύπου $\ln r$, επομένως ακολουθώντας τη διαδικασία της εξ. (4.1.31) βρίσκουμε ότι

$$(G)_{jj} = \frac{l_j}{2\pi} \cdot \left[\ln \left(\frac{l_j}{2} \right) - 1 \right] \quad (4.1.33)$$

όπου

l_j : Το μήκος του συνοριακού στοιχείου j στο οποίο εμφανίζεται η ιδιομορφία.

Για το $(H)_{jj}$ μπορεί να αποδειχτεί με αναλυτική ολοκλήρωση (Katsikadelis) ότι

$$(H)_{jj} = 0 \quad (4.1.34)$$

Τα υπόλοιπα ολοκληρώματα $(G)_{mj}$, $(H)_{mj}$ με $m \neq j$ δεν παρουσιάζουν ιδιομορφία και μπορούν να υπολογιστούν με αριθμητική ολοκλήρωση.

Τα συνοριακά ολοκληρώματα $(Hx_2)_{im}$, $(Hx_3)_{im}$, $(Gx_2)_{im}$, $(Gx_3)_{im}$ των σχέσεων (4.1.24α-β-γ-δ) προκύπτουν από τις παρακάτω σχέσεις

$$\frac{\partial}{\partial x_{2P}} \left(\frac{\partial v(P_i, Q)}{\partial n} \right) = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{2\pi r^2} \quad (4.1.35\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{3P}} \left(\frac{\partial v(P_i, Q)}{\partial n} \right) = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{2\pi r^2} \quad (4.1.35\beta)$$

$$\frac{\partial v(P_i, Q)}{\partial x_{2P}} = -\frac{\cos \omega}{2\pi r} \quad (4.1.35\gamma)$$

$$\frac{\partial v(P_i, Q)}{\partial x_{3P}} = -\frac{\sin \omega}{2\pi r} \quad (4.1.35\delta)$$

όπου

$a = \gamma\omega\iota\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ και $\omega = \gamma\omega\iota\alpha(\mathbf{x}_2, \mathbf{r})$.

Τα σημεία ταξίθεσίας P_i βρίσκονται στους κόμβους των επιφανειακών στοιχείων, επομένως όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ομαλά και μπορούν να επιλυθούν με αριθμητική ολοκλήρωση.

Αξιολογώντας την αριθμητικό προσδιορισμό της συνάρτησης στρέβλωσης, καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Οι όποιες ιδιομορφίες εμφανίζονται στα επικαμπύλια ολοκληρώματα μπορούν να αντιμετωπιστούν σχετικά απλά με αναλυτική ολοκλήρωση. Τα υπόλοιπα ολοκληρώματα που είναι ομαλά υπολογίζονται με αριθμητική ολοκλήρωση. Η μέθοδος που υιοθετείται στην παρούσα εργασία είναι **η αριθμητική ολοκλήρωση Gauss** που επιτυγχάνει πολύ υψηλή ακρίβεια σε σχετικά σύντομο υπολογιστικό χρόνο. Με την εκτέλεση αριθμητικών παραδειγμάτων, διαπιστώθηκε ότι μόλις 4 σημεία ολοκλήρωσης Gauss σε κάθε ευθύγραμμο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι αρκετά για να επιτευχθεί η επιθυμητή στάθμη ακρίβειας.
- Η επιτυχής μετατροπή των επιφανειακών ολοκληρωμάτων σε επικαμπύλια (πάνω στο σύνορο του κάθε επιφανειακού στοιχείου) επιτρέπει την ενιαία αντιμετώπιση των αριθμητικών ολοκληρώσεων μιας και δεν απαιτείται καμία ολοκλήρωση σε δυσδιάστατα χωρία.
- Ο υπολογισμός όλων των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων εκτελείται μία μόνο φορά πριν από την έναρξη του προσαυξητικού – επαναληπτικού αλγορίθμου επίλυσης. Όταν η ράβδος διαρρέυσει πλαστικά τότε η μόνη αλλαγή που απαιτείται στις σχ. (4.1.22), (4.1.23) είναι η ανανέωση των πλαστικών παραμορφώσεων στους όρους $(F)_j$, $(Fx_2)_i$, $(Fx_3)_i$.
- Εξετάζοντας τις εκφράσεις (4.1.21) και (4.1.23) από τις οποίες προσδιορίζονται η ϕ_M^P και οι παράγωγοί της, διαπιστώνουμε ότι οι **πλαστικές παραμορφώσεις στο σύνορο έχουν μηδενική συνεισφορά**. Συνεπώς, ο υπολογισμός των πλαστικών παραμορφώσεων (και των τάσεων) στο σύνορο χρησιμεύει μόνο για να βρεθεί το φορτίο κατά το οποίο συμβαίνει η πρώτη πλαστικοποίηση στη ράβδο. Μόνο οι όροι των πλαστικών παραμορφώσεων στο εσωτερικό της διατομής επηρεάζουν τις αριθμητικές τιμές της ϕ_M^P και των παραγώγων της
- Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων στο συγκεκριμένο πρόβλημα απαιτεί εκτός από συνοριακή και **πεδιακή διακριτοποίηση** λόγω της ύπαρξης πλαστικών παραμορφώσεων στο εσωτερικό της διατομής (σε μεταγενέστερα στάδια φόρτισης). Ωστόσο τονίζεται ότι η πεδιακή διακριτοποίηση απαιτείται μόνο για τον υπολογισμό επιφανειακών ολοκληρωμάτων και δεν οδηγεί σε αύξηση των βαθμών ελευθερίας – αγνώστων του γραμμικού συστήματος (4.1.22). Συνεπώς,

στα επιφανειακά στοιχεία δεν υπάρχει η ανάγκη να υπάρχει ακριβής συρραφή μεταξύ τους, ούτε μεταξύ επιφανειακών – συνοριακών στοιχείων.

4.1.2 Υπολογισμός των μεγεθών $A, I_P, I_{PP}, I_t, W, S_N, S_{M_t}$

Στον προσαυξητικό – επαναληπτικό αλγόριθμο επίλυσης, στο μητρώο ακαμψίας υπεισέρχονται οι γεωμετρικοί όροι της διατομής A, I_P, I_{PP} καθώς και η σταθερά στρέψης $(I_t)_m$ και ο όρος Wagner $(W)_{m-1}$ που εξαρτώνται από τη συνάρτηση στρέβλωσης και τις ορθές τάσεις αντίστοιχα. Στο δεξιά μέλος των εξισώσεων ισοροπίας υπεισέρχονται οι όροι $(S_N)_m^{l-1}, (S_{M_t})_m^{l-1}$ των εσωτερικών δράσεων της ράβδου. Όλα τα μεγέθη υπολογίζονται μέσω επιφανειακών ολοκληρωμάτων στο χωρίο Ω της διατομής, επομένως για τυχαίο σχήμα διατομής η αναλυτική επίλυση είναι αδύνατη.

Η αριθμητική επίλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη διακριτοποίηση του συνόρου και της διατομής που έχει υιοθετηθεί για την εύρεση της συνάρτησης στρέβλωσης ϕ_M^P (βλ. υποκεφάλαιο (4.1.1)). Οι γεωμετρικοί όροι A, I_P, I_{PP} μπορούν να υπολογιστούν μέσω των σταθερών επιφανειακών στοιχείων που παρουσιάστηκαν, ωστόσο είναι δυνατός ο συνοριακός υπολογισμός τους με βάση το ακόλουθο **θεώρημα απόκλισης του Gauss** (Gauss divergence theorem):

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial k}{\partial x_3} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (g \cdot n_2 + k \cdot n_3) ds \quad (4.1.36)$$

Οι όροι A, I_P, I_{PP} , με τη βοήθεια της σχ. (4.1.36), διαμορφώνονται ως

$$A = \int_{\Omega} d\Omega = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \right) d\Omega = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma} (x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3) ds \quad (4.1.37\alpha)$$

$$I_P = \int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2) d\Omega = \frac{1}{3} \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (x_2^3)}{\partial x_2} + \frac{\partial (x_3^3)}{\partial x_3} \right) d\Omega = \frac{1}{3} \cdot \int_{\Gamma} [x_2^3 \cdot n_2 + x_3^3 \cdot n_3] ds \quad (4.1.37\beta)$$

$$\begin{aligned} I_{PP} &= \int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (x_2^4 + x_3^4 + 2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2) d\Omega = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (x_2^5)}{\partial x_2} + \frac{\partial (x_3^5)}{\partial x_3} \right) d\Omega + \frac{1}{3} \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (x_2^3 \cdot x_3^2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (x_2^2 \cdot x_3^3)}{\partial x_3} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{1}{5} \cdot x_2^5 + \frac{1}{3} \cdot x_2^3 \cdot x_3^2 \right) \cdot n_2 + \left(\frac{1}{5} \cdot x_3^5 + \frac{1}{3} \cdot x_2^2 \cdot x_3^3 \right) \cdot n_3 \right] ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_{PP} = \int_{\Gamma} \left[x_2^3 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot x_2^2 + \frac{1}{3} \cdot x_3^2 \right) \cdot n_2 + x_3^3 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot x_3^2 + \frac{1}{3} \cdot x_2^2 \right) \cdot n_3 \right] ds \quad (4.1.37\gamma) \end{aligned}$$

και με χρήση των N σταθερών συνοριακών στοιχείων, τελικά λαμβάνουμε

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^N (x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3)_m \cdot l_m \quad (4.1.38\alpha)$$

$$I_P = \frac{1}{3} \cdot \sum_{m=1}^N (x_2^3 \cdot n_2 + x_3^3 \cdot n_3)_m \cdot l_m \quad (4.1.38\beta)$$

$$I_{PP} = \sum_{m=1}^N \left[x_2^3 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot x_2^2 + \frac{1}{3} \cdot x_3^2 \right) \cdot n_2 + x_3^3 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot x_3^2 + \frac{1}{3} \cdot x_2^2 \right) \cdot n_3 \right]_m \cdot l_m \quad (4.1.38\gamma)$$

όπου

l_m : Το μήκος του συνοριακού στοιχείου m .

Για τους υπόλοιπους όρους που αναζητούμε δεν είναι δυνατόν να τους μετατρέψουμε σε επικαμπύλια ολοκληρώματα καθώς εξαρτώνται από τη συνάρτηση στρέβλωσης και συνιστώσες τάσεων. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τη διακριτοποίηση του χωρίου Ω . Έτσι, με χρήση K σταθερών επιφανειακών στοιχείων, οι όροι $(I_t)_m$, $(W)_{m-1}$, $(S_N)_m^{l-1}$, $(S_{M_t})_m^{l-1}$ διαμορφώνονται ως

$$(I_t)_{m+1} = \int_{\Omega} \left[x_2^2 + x_3^2 + x_2 \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} \right)_{m+1} - x_3 \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} \right)_{m+1} \right] d\Omega \Rightarrow$$

$$(I_t)_{m+1} = \sum_{i=1}^K \left\{ (x_2^2 + x_3^2)_i + \left[x_2 \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_3} \right)_{m+1} \right]_i - \left[x_3 \cdot \left(\frac{\partial \phi_M^P}{\partial x_2} \right)_{m+1} \right]_i \right\} \cdot A_i \quad (4.1.39\alpha)$$

$$(W)_{m-1} = \int_{\Omega} (S_{11})_{m-1} \cdot (x_2^2 + x_3^2) d\Omega \Rightarrow (W)_{m-1} = \sum_{i=1}^K \left[(S_{11})_{m-1} \right]_i \cdot (x_2^2 + x_3^2)_i \cdot A_i \quad (4.1.39\beta)$$

$$(S_N)_m^{l-1} = \int_{\Omega} (S_{11})_m^l d\Omega \Rightarrow (S_N)_m^{l-1} = \sum_{i=1}^K \left[(S_{11})_m^l \right]_i \cdot A_i \quad (4.1.39\gamma)$$

$$(S_{M_t})_m^{l-1} = \left[\int_{\Omega} (S_{11})_m^{l-1} \cdot (x_2^2 + x_3^2) d\Omega \right] \cdot (\theta')_m^{l-1} +$$

$$+ \int_{\Omega} \left[(S_{12})_m^{l-1} \cdot \left(\frac{\partial (\phi_M^P)_m}{\partial x_2} - x_3 \right) + (S_{13})_m^{l-1} \cdot \left(\frac{\partial (\phi_M^P)_m}{\partial x_3} + x_2 \right) \right] d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (S_{M_t})_m^{l-1} = \left\{ \sum_{i=1}^K \left[(S_{11})_m^{l-1} \right]_i (x_2^2 + x_3^2)_i \cdot A_i \right\} \cdot (\theta')_m^{l-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^K \left\{ \left[(S_{12})_m^{l-1} \right]_i \cdot \left(\frac{\partial (\phi_M^P)_m}{\partial x_2} - x_3 \right)_i + \left[(S_{13})_m^{l-1} \right]_i \cdot \left(\frac{\partial (\phi_M^P)_m}{\partial x_3} + x_2 \right)_i \right\} \cdot A_i \quad (4.1.39\delta)$$

όπου

A_i : Το εμβαδόν του επιφανειακού στοιχείου i της διατομής.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ -
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Εισαγωγή

Με βάση τον αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος της στρέψης και της αριθμητικής αντιμετώπισής του, που παρουσιάστηκαν, συντάχθηκε πρόγραμμα Η/Υ σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN 90/95 προκειμένου να ελεγχθεί η ακρίβεια της μεθόδου αλλά και να επιλυθούν συγκεκριμένες αριθμητικές εφαρμογές.

Υπάρχει πληθώρα δημοσιευμένων εργασιών και αριθμητικών παραδειγμάτων που ασχολούνται με τη γεωμετρικά γραμμική θεωρία ελαστικής ή ελαστοπλαστικής στρέψης, ενώ έχει ερευνηθεί και το πρόβλημα της ελαστικής ομοιόμορφης ή ανομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων. Στην περίπτωση του ελαστοπλαστικού προβλήματος μεγάλων μετατοπίσεων ωστόσο, στην αντίληψη του συγγραφέα έχουν υποπέσει μονάχα δημοσιευμένα αριθμητικά παραδείγματα ράβδων που υποβάλλονται σε ανομοιόμορφη και όχι ομοιόμορφη στρέψη. Κατά συνέπεια, μπορεί να διαπιστωθεί μόνο με έμμεσο τρόπο η ορθότητα της αντιμετώπισης του προτείνεται στην παρούσα εργασία.

Αρχικά θα εξετάσουμε το πρόβλημα της ελαστικής ομοιόμορφης στρέψης μεγάλων μετατοπίσεων και θα συγκρίνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα με διατιθέμενες αναλυτικές επιλύσεις. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το ελαστοπλαστικό πρόβλημα μικρών μετατοπίσεων όπου κι εδώ θα συγκρίνουμε τα εξαγόμενα αποτελέσματα με υπάρχουσες αναλυτικές επιλύσεις. Τέλος, θα συγκρίνουμε το ελαστοπλαστικό μοντέλο μικρών μετατοπίσεων με το αντίστοιχο μοντέλο μεγάλων μετατοπίσεων της παρούσας εργασίας προκειμένου να διαπιστώσουμε με λογικές υποθέσεις εάν τα εξαγόμενα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα.

5.2 Αριθμητικές εφαρμογές - Συμπεράσματα

5.2.1 Λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή από ελαστικό υλικό

Σ' αυτό το παράδειγμα μελετούμε ράβδο με εξαιρετικά λεπτότοιχη ορθογωνική διατομή, με λόγο πλευρών 20-1. Στη ράβδο επιβάλλονται 2 ισόποσες εξωτερικές στρεπτικές ροπές στα άκρα της, ενώ θεωρούμε ότι η αναπτυσσόμενη αξονική βράχυνση και στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται από τις συνθήκες στήριξης. Με αυτές τις προϋποθέσεις, στη ράβδο θα αναπτυχθεί ομοιόμορφη στρέψη. Ο άξονας περιστροφής της ράβδου διέρχεται από το κέντρο βάρους (κέντρο συμμετρίας) της διατομής. Η διατομή έχει πλευρές $a = 0.1m$, $b = 2.0m$. Είναι φανερό ότι μια τόσο λεπτότοιχη διατομή θα έχει εξαιρετικά μικρή στρεπτική αντίσταση και στην περίπτωση που υποβληθεί σε ανομοιόμορφη στρέψη, το μεγαλύτερο τμήμα της εξωτερικά επιβαλλόμενης ροπής θα αναληφθεί μέσω δίρροπου στρέβλωσης και όχι μέσω στρέψης κατά St. Venant. Το υλικό της διατομής είναι ελαστικό με ελαστικές σταθερές $E = 200000 \text{ MPa}$, $G = 80000 \text{ MPa}$. Αυτές τις ελαστικές ιδιότητες διαθέτει ο συνηθισμένος δομικός χάλυβας των κατασκευών πολιτικού μηχανικού. Θα εξεταστούν δύο περιπτώσεις υλικού:

- Υποθετικό υλικό που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα το οποίο παραμένει ελαστικό για οποιοδήποτε μέγεθος εξωτερικής φόρτισης ($\sigma_y \rightarrow \infty$).
- Πραγματικός δομικός χάλυβας κατηγορίας S500. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα ληφθεί $\sigma_y = 500 \text{ MPa}$ και η καμπύλη φορτίου μετατόπισης $M_t - \theta'$ θα

διακοπεί στο φορτίο όπου η ράβδος βρίσκεται στην οριακή μετάβαση από την ελαστική στην πλαστική συμπεριφορά.

Από την ανάλυση του κεφαλαίου 3, έχουμε εξάγει τη βασική σχέση που διέπει την ελαστική ομοιόμορφη στρέψη μεγάλων μετατοπίσεων για μηδενική αξονική δύναμη:

$$G \cdot I_t \cdot \theta' + \frac{1}{2} \cdot E \cdot I_n \cdot (\theta')^3 = M_t \quad (5.2.1)$$

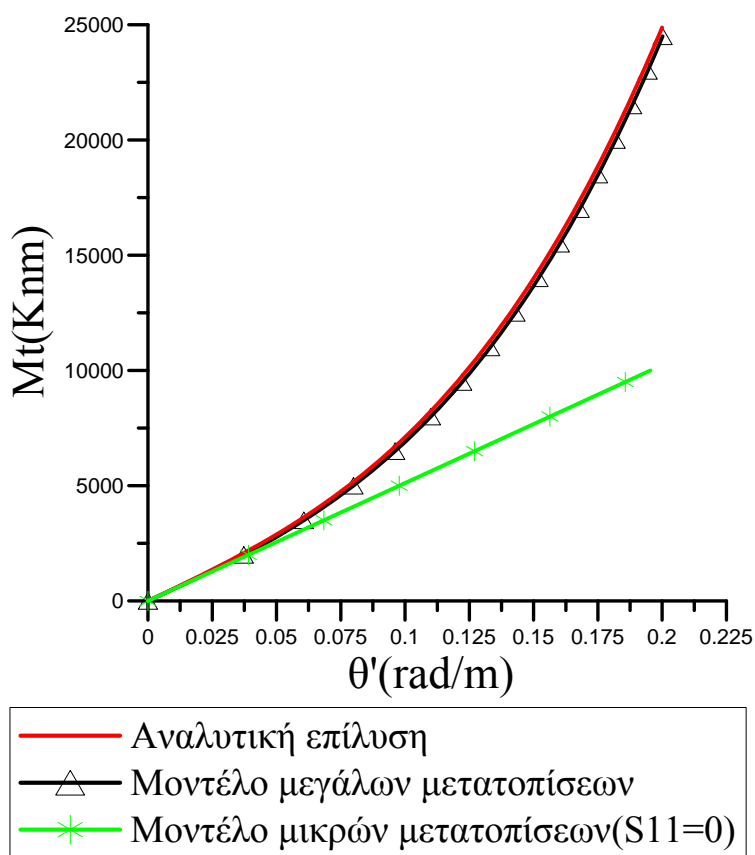
Η παραπάνω σχέση είναι αλγεβρική τρίτου βαθμού και όχι διαφορική, αφού $\theta' = \sigma/\tau$. Συνεπώς, η καμπύλη φορτίου – μετατόπισης (σχήμα 5.2.1) μπορεί να εξαχθεί πολύ εύκολα με θεώρηση ενός πλήθους τιμών για το θ' και εύρεση του αντίστοιχου πλήθους τιμών για τη στρεπτική ροπή M_t . Λόγω του απλού σχήματος

της διατομής, οι σταθερές $I_t, I_n = \left(I_{pp} - \frac{I_p^2}{A} \right)$ μπορούν να προσδιοριστούν με

αναλυτικό τρόπο. Η αναλυτική εύρεση των τιμών αυτών λαμβάνεται από τον Trahair (2003) και είναι

$$I_t = 66.667 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \quad (5.2.2\alpha)$$

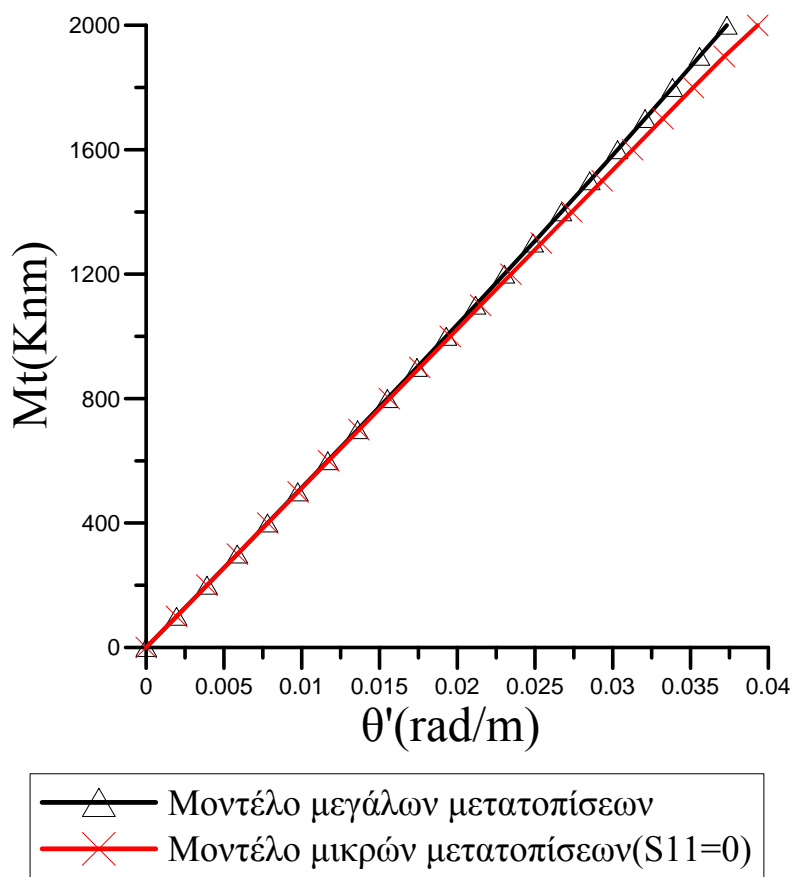
$$I_n = 17.778 \cdot 10^9 \text{ mm}^6 \quad (5.2.2\beta)$$



Σχήμα 5.2.1 Καμπύλη φορτίου - μετατόπισης λεπτότοιχου ορθογωνίου 20-1 με $\sigma_y \rightarrow \infty$

Από την εξέταση του σχήματος 5.2.1 που αφορά την περίπτωση $\sigma_Y \rightarrow \infty$ παρατηρούμε τα εξής:

- Η καμπύλη του μοντέλου των μεγάλων μετατοπίσεων σχεδόν ταυτίζεται με την καμπύλη της αναλυτικής λύσης (μεγάλων μετατοπίσεων). Συνεπώς, ο αλγόριθμος επίλυσης σε ό,τι αφορά τη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων λειτουργεί ικανοποιητικότερα και μπορεί να δώσει λύσεις **πολύ υψηλής ακρίβειας**.
- Για μικρές γωνίες στροφής, ο κλάδος των μεγάλων μετατοπίσεων σχεδόν ταυτίζεται με τον κλάδο των μικρών μετατοπίσεων που όπως αναμενόταν είναι γραμμικός. Ωστόσο μετά από κάποια τιμή του φορτίου, οι δύο κλάδοι αποκλίνουν – μάλιστα ο κλάδος μεγάλων μετατοπίσεων στρέφει τα κοίλα προς τα άνω. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η επιβολή μεγάλων μετατοπίσεων σε μία ράβδο οδηγεί σε **αύξηση της δυσκαμψίας** της σε σχέση με την αντίστοιχη επίλυση στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας στρέψης.



Σχήμα 5.2.2 Καμπύλη φορτίου- μετατόπισης λεπτότοιχου ορθογωνίου 20-1 με $\sigma_Y = 500 \text{ MPa}$

Από την εξέταση της περίπτωσης υλικού με $\sigma_Y = 500 \text{ MPa}$ (σχήμα 5.2.2) προκύπτει ότι:

- Παρότι η διατομή διαθέτει εξαιρετικά μικρή δυστρεψία λόγω των ειδικών γεωμετρικών χαρακτηριστικών της και ο χάλυβας διαθέτει ιδιαίτερα υψηλή τάση

διαρροής, εντούτοις οι γωνίες στροφής δεν είναι αρκετά υψηλές ώστε να καταστεί εμφανής η επιρροή των μεγάλων μετατοπίσεων που καταδεικνύεται στο σχήμα 5.2.1 (δηλαδή αύξηση της δυσκαμψίας). Συμπερασματικά, σε περίπτωση που ακολουθείται **ελαστικός σχεδιασμός** στη μελέτη ράβδων που υποβάλλονται σε ομοιόμορφη στρέψη, η κλασική ανάλυση με τη γραμμική θεωρία στρέψης είναι ακριβής και δεν απαιτείται να δαπανηθεί επιπλέον υπολογιστικός χρόνος προκειμένου να επιλυθεί η ράβδος με επιρροή μεγάλων μετατοπίσεων. Τονίζεται ότι αφού κάτι τέτοιο ισχύει σε μια τόσο λεπτότοιχη διατομή από χάλυβα υψηλής αντοχής, θα ισχύει και για τη συντριπτική πλειοψηφία διατομών και υλικών που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές πολιτικού μηχανικού .

5.2.2 Τετραγωνική διατομή από ελαστοπλαστικό υλικό

Στο παράδειγμα αυτό εξετάζουμε ράβδο από ελαστοπλαστικό υλικό τετραγωνικής διατομής. Η ράβδος περιστρέφεται ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας της διατομής. Το τετράγωνο είναι πλευράς $a = 0.5 \text{ m}$. Είναι γνωστό ότι τέτοιου είδους ολόσωμες διατομές διαθέτουν υψηλή στρεπτική αντίσταση και σε περίπτωση που υποβληθούν σε ανομοιόμορφη στρέψη αναπτύσσουν κυρίως ομοιόμορφη στρεπτική ροπή κατά St. Venant. Συνεπώς, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε αν τέτοιες ράβδοι μπορούν να επηρεαστούν από τις μεγάλες μετατοπίσεις. Το υλικό της ράβδου αντιστοιχεί σε δομικό χάλυβα και διαθέτει ελαστικές σταθερές $E = 213400 \text{ MPa}$, $G = 80000 \text{ MPa}$. Η τάση διαρροής είναι $\sigma_y = 285 \text{ MPa}$ ενώ το μέτρο κράτνυσης $h = 0$ δηλαδή το υλικό είναι ιδεατά πλαστικό.

Στην περίπτωση των μικρών μετατοπίσεων, η πλήρως πλαστική ροπή $M_{t,pl}$ (μέγιστη ροπή που μπορεί να αναληφθεί από τη ράβδο) μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά πολύ εύκολα με εφαρμογή της μεθόδου οριακής ανάλυσης «sand heap analogy» (Nadai, Sokolowsky). Λόγω της απλής γεωμετρίας, μπορεί να ευρεθεί αναλυτικά και η ελαστική ροπή $M_{t,el}$ (ροπή κατά την οποία η διατομή παραμένει οριακά ελαστική). Τα αποτελέσματα του μοντέλου των μικρών μετατοπίσεων και της αναλυτικής λύσης παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2.1.

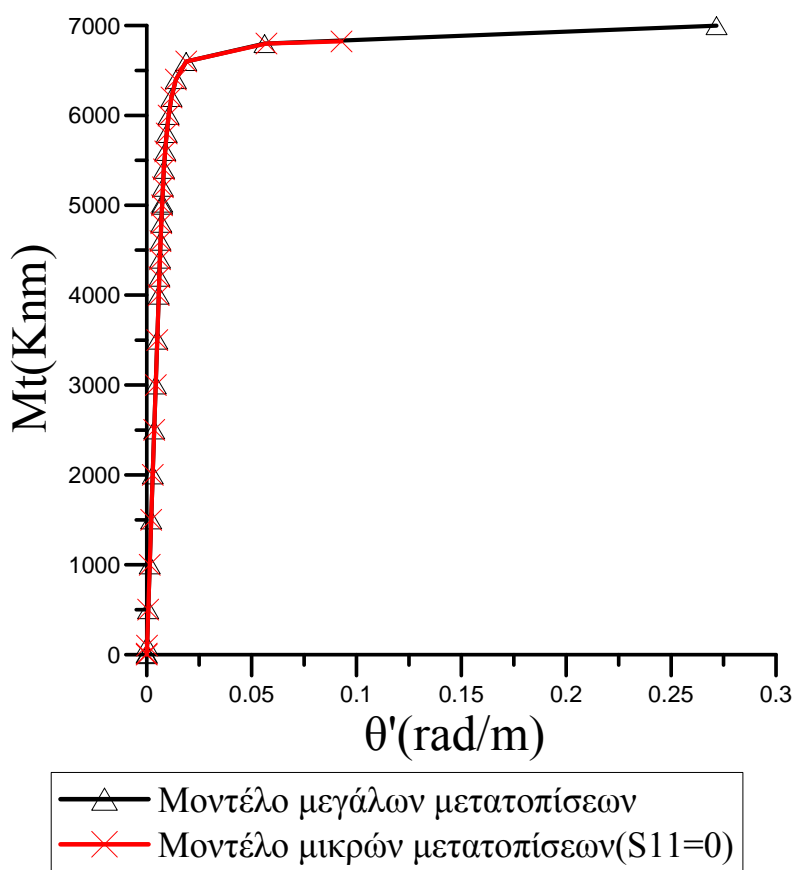
Πίνακας 5.2.1

	Ανάλυση μικρών μετατοπίσεων		
	Αναλυτική	Παρούσα εργασία	Ακρίβεια(%)
M_{t,pl}	6856.0	6825	0.45
M_{t,pl}/M_{t,el}	1.603	1.606	0.002

Αναλυτική ή αριθμητική λύση για την περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων δεν έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία από όσο γνωρίζει ο γραφών. Στον πίνακα 5.2.2 συγκρίνονται τα αποτελέσματα του μοντέλου της παρούσας εργασίας των μεγάλων μετατοπίσεων με τα αντίστοιχα των μικρών μετατοπίσεων. Επίσης στο σχήμα 5.2.3 δίνονται οι καμπύλες φορτίου - μετατόπισης των δύο μοντέλων.

Πίνακας 5.2.2

	Παρούσα εργασία		
	Μικρές μετατοπίσεις	Μεγάλες μετατοπίσεις	Διαφορά(%)
Mt_{pl}	6825	6900	1.10
Mt_{pl}/Mt_{el}	1.606	1.624	0.01



Σχήμα 5.2.3 Καμπύλη φορτίου - μετατόπισης τετραγωνικής διατομής από ελαστοπλαστικό υλικό

Στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Το ελαστοπλαστικό μοντέλο μικρών μετατοπίσεων επιτυγχάνει **υψηλής στάθμης ακρίβεια** στην πρόβλεψη της ελαστικής και της πλήρως πλαστικής ροπής. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την πολύ καλή ακρίβεια του μοντέλου των μεγάλων μετατοπίσεων στο προηγούμενο παράδειγμα, υποδηλώνει ότι η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να προσομοιώσει επιτυχώς και τα δύο είδη μη γραμμικότητας που παρουσιάζονται στις κατασκευές (υλικού και γεωμετρίας)

- Όπως αναμενόταν, η πλαστικοποίηση οδηγεί σε σταδιακή μείωση της δυσκαμψίας της κατασκευής μέχρι την οριακή κατάσταση όπου η καμπύλη φορτίου – μετατόπισης είναι σχεδόν ευθύγραμμη και η κατασκευή αδυνατεί να αναλάβει επιπλέον ροπή. Ωστόσο από την τιμή του λόγου $M_{t,pl}/M_{t,el} > 1$ καθίσταται προφανές ότι ο πλαστικός σχεδιασμός των κατασκευών οδηγεί σε οικονομικότερες λύσεις.
- Σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, εδώ η επιρροή των μεγάλων μετατοπίσεων στη **δυσκαμψία της κατασκευής** είναι αμελητέα: Η διατομή διαθέτει μεγάλη στρεπτική αντίσταση που ακόμα και σε προχωρημένο στάδιο πλαστικοποίησης όπου οι μετατοπίσεις έχουν αυξηθεί, δεν παρουσιάζει ανάλογη συμπεριφορά με τη λεπτότοιχη διατομή του προηγούμενου παραδείγματος.
- Η επιρροή των μεγάλων μετατοπίσεων μπορεί να αμεληθεί και στον υπολογισμό του $M_{t,pl}$. Παρουσιάζεται πολύ μικρή αύξηση του $M_{t,pl}$ στο μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων, συγκριτικά με τις μικρές μετατοπίσεις.

5.2.3 Ορθογωνική διατομή από ελαστοπλαστικό υλικό

Εδώ θα εξετάσουμε μια μικρή παραλλαγή του παραδείγματος της τετραγωνικής διατομής, προκειμένου να συνεχίσουμε τη διερεύνηση της επιρροής των μεγάλων μετατοπίσεων σε διατομές υψηλής στρεπτικής αντίστασης. Το ορθογώνιο διαθέτει πλευρές $a = 0.5 \text{ m}$, $b = 1.0 \text{ m}$. Εδώ, ο λόγος των πλευρών είναι 2-1, επομένως η διατομή δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως λεπτότοιχη, όπως ήταν η ορθογωνική διατομή του πρώτου παραδείγματος. Η ράβδος περιστρέφεται ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας της διατομής. Το υλικό της ράβδου αντιστοιχεί σε δομικό χάλυβα και διαθέτει ελαστικές σταθερές $E = 213400 \text{ MPa}$, $G = 80000 \text{ MPa}$. Η τάση διαρροής είναι $\sigma_y = 285 \text{ MPa}$ ενώ το μέτρο κράτυνσης $h = 0$ δηλαδή το υλικό είναι ιδεατά πλαστικό. Το υλικό έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με το υλικό του προηγούμενου παραδείγματος, γεγονός που επιτρέπει την άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Η σύγκριση της αναλυτικής λύσης (θεωρία μικρών μετατοπίσεων) με το μοντέλο των μικρών μετατοπίσεων βρίσκεται στον πίνακα 5.2.3 ενώ η σύγκριση των δύο μοντέλων της παρούσας εργασίας πραγματοποιείται στον πίνακα 5.2.4 και στο σχήμα 5.2.4.

Πίνακας 5.2.3

	Ανάλυση μικρών μετατοπίσεων		
	Αναλυτική	Παρούσα εργασία	Ακρίβεια(%)
Mt_{pl}	17140.1	17050	0.53
Mt_{pl}/Mt_{el}	1.694	1.705	0.01

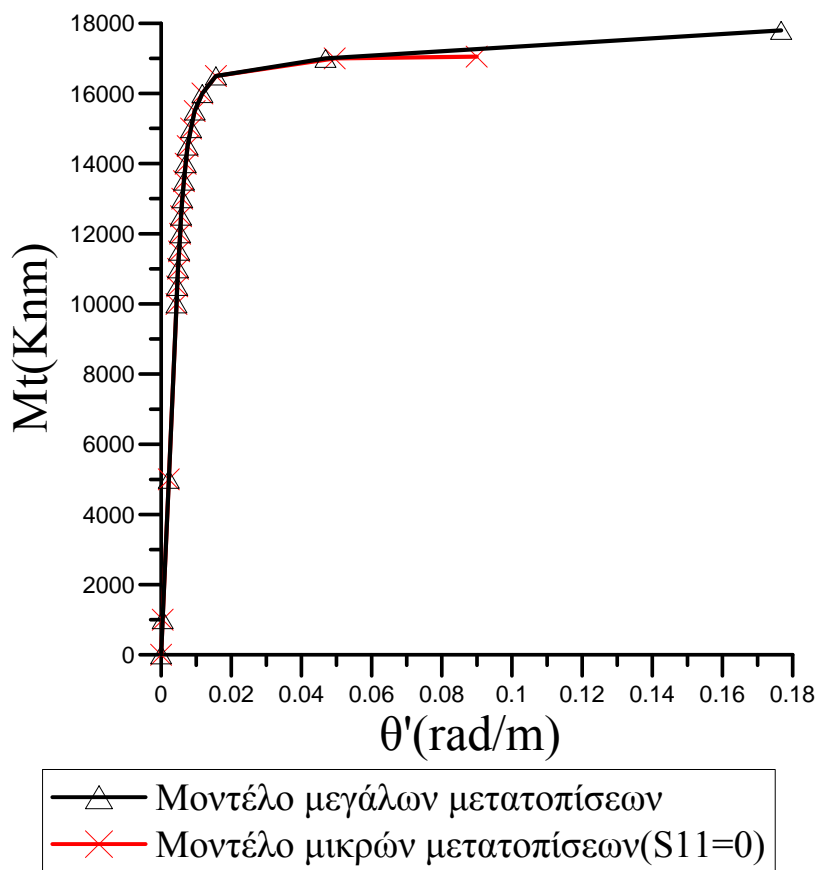
Μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:

- Το μοντέλο μικρών μετατοπίσεων παρουσιάζει και σε αυτό το παράδειγμα **πολύ υψηλή ακρίβεια**.

- Όλα τα συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί για την περίπτωση της τετραγωνικής διατομής ισχύουν κι εδώ. Όπως αναμενόταν, λόγω της γεωμετρίας της διατομής, υπάρχει λίγο μεγαλύτερη αύξηση της δυσκαμψίας και της πλήρως πλαστικής ροπής συγκριτικά με την τετραγωνική διατομή.

Πίνακας 5.2.4

	Παρούσα εργασία		
	Μικρές μετατοπίσεις	Μεγάλες μετατοπίσεις	Διαφορά(%)
M_{tpl}	17050	17800	4.40
M_{tpl}/M_{tel}	1.705	1.780	0.04



Σχήμα 5.2.4 Καμπύλη φορτίου - μετατόπισης ορθογωνικής διατομής 2-1 από ελαστοπλαστικό υλικό

5.2.4 Διατομή διπλού T από ελαστοπλαστικό υλικό

Στο παράδειγμα αυτό διερευνάται η συνδυασμένη επιρροή των μεγάλων μετατοπίσεων και της πλαστικής διαρροής σε διατομή χαμηλής στρεπτικής αντίστασης. Η διατομή διπλού T διαθέτει πλάτος $B = 1.0 \text{ m}$, ύψος $H = 1.0 \text{ m}$, πάχος πελμάτων $t_f = 0.20 \text{ m}$, πάχος κορμού $t_w = 0.15 \text{ m}$ και είναι διπλής συμμετρίας. Η

ράβδος περιστρέφεται ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας της διατομής. Λόγω του γεγονότος ότι η διατομή είναι ανοιχτή με σχετικά λεπτά τοιχώματα, η στρεπτική αντίσταση που παρουσιάζει είναι μικρή. Το υλικό είναι και εδώ το ίδιο με τα παραδείγματα 5.2.2, 5.2.3, δηλαδή διαθέτει ελαστικές σταθερές $E = 213400 \text{ MPa}$, $G = 80000 \text{ MPa}$ ενώ η τάση διαρροής $\sigma_Y = 285 \text{ MPa}$ και το μέτρο κράτυνσης $h = 0$.

Η σύγκριση αναλυτικής λύσης και μοντέλου μικρών μετατοπίσεων βρίσκεται στον πίνακα 5.2.5. Λόγω του ιδιαίτερου σχήματος της διατομής, δεν έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία (εξ' όσων γνωρίζει ο γραφών) αναλυτική εύρεση της M_{tel} .

Πίνακας 5.2.5

	Ανάλυση μικρών μετατοπίσεων		
	Αναλυτική	Παρούσα εργασία	Ακρίβεια(%)
Mtpl	7346.2	7400	0.73
Mtpl/Mtel	-	4.933	-

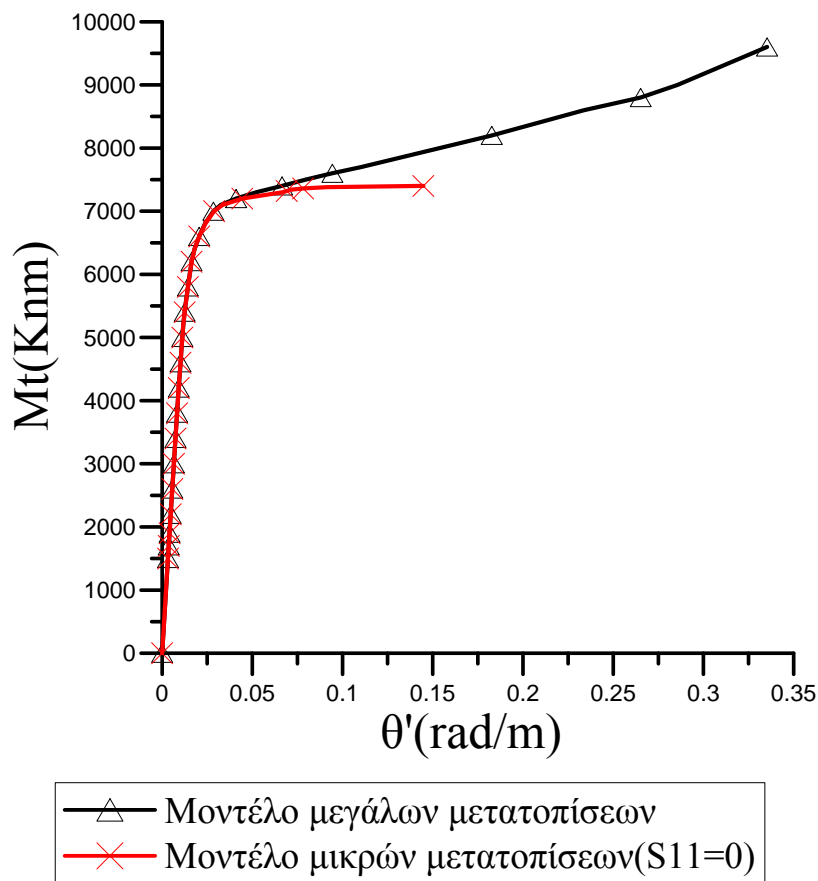
Ο πίνακας 5.2.6 δίνει τα συγκριτικά αποτελέσματα των δύο μοντέλων της παρούσας εργασίας ενώ η ακριβής απόκριση της κατασκευής στο επιβαλλόμενο φορτίο παρουσιάζεται στο σχήμα 5.2.5.

Πίνακας 5.2.6

	Παρούσα εργασία		
	Μικρές μετατοπίσεις	Μεγάλες μετατοπίσεις	Διαφορά(%)
Mtpl	7400	9600	29.73
Mtpl/Mtel	4.933	6.400	0.30

Εξετάζοντας τα διαθέσιμα στοιχεία παρατηρούμε τα εξής:

- Ακόμα και για τη διατομή διπλού T, το μοντέλο των μικρών μετατοπίσεων προσδιορίζει με **υψηλή ακρίβεια** την μέγιστη ροπή που μπορεί να αναλάβει η διατομή.
- Σε αντίθεση με τις διατομές υψηλής δυστρεψίας, εδώ παρατηρείται σημαντική **αύξηση της μέγιστης ροπής** που μπορεί να αναληφθεί από τη ράβδο, για την περίπτωση των μεγάλων μετατοπίσεων.
- Σε αντίθεση με τις διατομές υψηλής δυστρεψίας, οι μεγάλες μετατοπίσεις οδηγούν σε **αύξηση της δυσκαμψίας της κατασκευής** μετά την έναρξη της πλαστικοποίησής της. Μπορεί ο ελαστικοί κλάδοι των μικρών και των μεγάλων μετατοπίσεων να ταυτίζονται (κάτι που έχει εξαχθεί εξάλλου και στο παράδειγμα 5.2.1), ωστόσο στη φάση της πλαστικοποίησης η απόκριση της κατασκευής διαφέρει σημαντικά στα δύο μοντέλα.



Σχήμα 5.2.5 Καμπύλη φορτίου – μετατόπισης διατομής διπλού T από ελαστοπλαστικό υλικό

Από τις δύο τελευταίες παρατηρήσεις συνάγουμε ότι η γεωμετρικά γραμμική ανάλυση λεπτότοιχων διατομών που παρουσιάζουν χαμηλή δυστρεψία οδηγεί σε συντηρητικό σχεδιασμό. Επίσης, είναι προφανές ότι η μη γραμμική ανάλυση αποκτά μεγάλη πρακτική αξία στην περίπτωση αυτών των διατομών αφού εκτιμά πιο ρεαλιστικά την πραγματική απόκριση της κατασκευής.

Ας επιχειρήσουμε μια απόπειρα **ερμηνείας των αποτελεσμάτων**: Οι μεγάλες μετατοπίσεις οδηγούν στην ανάληψη της εξωτερικά επιβαλλόμενης ροπής από κατανομή τόσο ορθών τάσεων S_{11} όσο και διατμητικών τάσεων S_{12}, S_{13} . Στο κεφάλαιο 3 έχουμε δει ότι ο όρος $G \cdot I_t$ του μητρώου δυσκαμψίας υπολογίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο στις δύο αναλύσεις (μικρές – μεγάλες μετατοπίσεις) στην περίπτωση τουλάχιστον που το υλικό παραμένει ελαστικό. Όμως ο όρος $G \cdot I_t$ προκύπτει αποκλειστικά από διατμητικές τάσεις. Συνεπώς, η ύπαρξη των νέων τάσεων S_{11} στη μη γραμμική ανάλυση οδηγεί σε αύξηση της δυσκαμψίας της κατασκευής συγκριτικά με τις μικρές μετατοπίσεις (βλ. παράδειγμα 5.2.1). Στην περίπτωση που το υλικό είναι ελαστοπλαστικό, οι όροι S_{11}, S_{12}, S_{13} αλληλεπιδρούν μέσω του κριτηρίου Von Mises, επομένως δεν μπορεί να ερμηνευθεί το ίδιο εύκολα η αύξηση της δυσκαμψίας. Ωστόσο, είναι λογικό να υποθεθεί ότι η αύξηση της δυσκαμψίας που παρουσιάζεται στο ελαστικό υλικό, υπάρχει και στο ελαστοπλαστικό

παρά την όποια αλληλεπίδραση ορθών και διατμητικών τάσεων στο κριτήριο Von Mises.

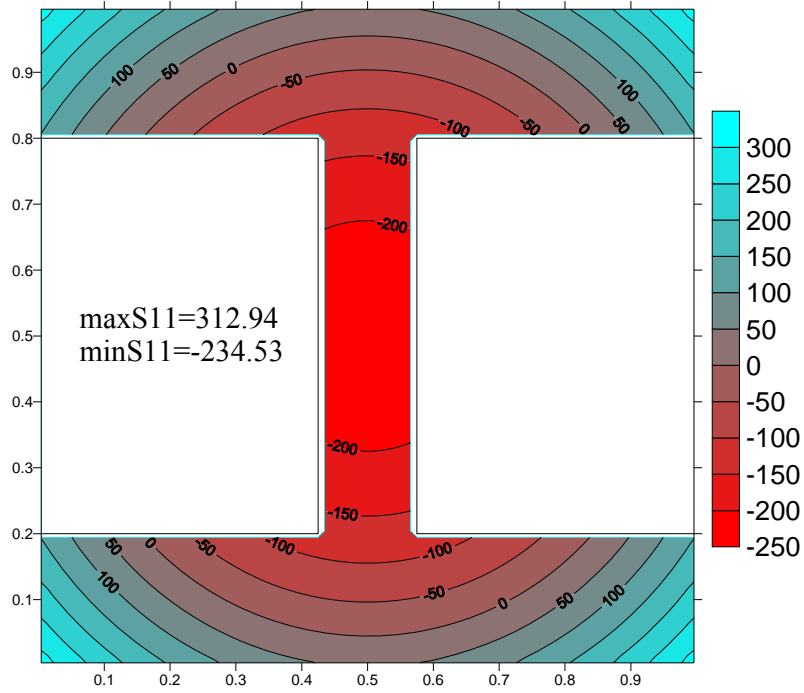
Κατά την πλαστικοποίηση έχουμε πτώση της δυσκαμψίας της κατασκευής, που προφανώς οδηγεί σε αύξηση των αναπτυσσόμενων μετατοπίσεων. Πριν, ωστόσο η κατασκευή καταρρεύσει πλαστικά, οι μεγάλες μετατοπίσεις οδηγούν σε αύξηση της δυσκαμψίας λόγω των νέων τάσεων S_{II} που εμφανίζονται στην κατασκευή. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να **ερμηνευθεί ποιοτικά** η καμπύλη φορτίου – μετατόπισης του διπλού T του μοντέλου των μεγάλων μετατοπίσεων.

Δυσχερέστερη είναι η **ερμηνεία του φαινομένου αύξησης του $M_{i,pl}$** που παρατηρείται σε όλα τα παραδείγματα ράβδων από ελαστοπλαστικό υλικό. Η προτεινόμενη ερμηνεία είναι η εξής: Η σταδιακή αύξηση των μετατοπίσεων κατά την πλαστικοποίηση του φορέα, όπως είδαμε, οδηγεί στην εισαγωγή σημαντικών ορθών τάσεων S_{II} στη ράβδο. Αν εξετάσουμε την επιρροή των τάσεων στο κριτήριο Von Mises,

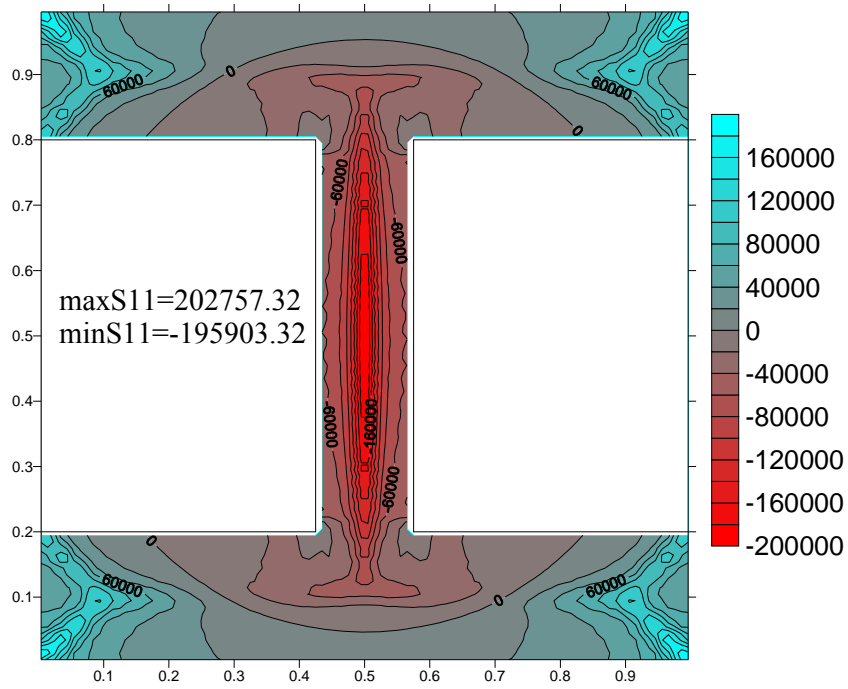
$$f = \sqrt{S_{II}^2 + 3 \cdot S_{I2}^2 + 3 \cdot S_{I3}^2} - \sigma_Y \quad (5.2.3)$$

διαπιστώνουμε πως οι ορθές τάσεις έχουν μειωμένη συνεισφορά συγκριτικά με τις διατμητικές τάσεις. Αυτό οφείλεται στο ότι οι διατμητικές τάσεις πολλαπλασιάζονται με 3 κατά την εισαγωγή τους στην έκφραση του κριτηρίου. Επομένως είναι εύλογο να υποθεθεί ότι στις μεγάλες μετατοπίσεις όπου $S_{II} \neq 0$, η συνδυασμένη εισαγωγή των S_{II} στο κριτήριο διαρροής και στις εσωτερικές δράσεις είναι τέτοια ώστε τελικά οι μεγάλες μετατοπίσεις να εμφανίζουν υψηλότερο $M_{i,pl}$ σε σχέση με τις μικρές.

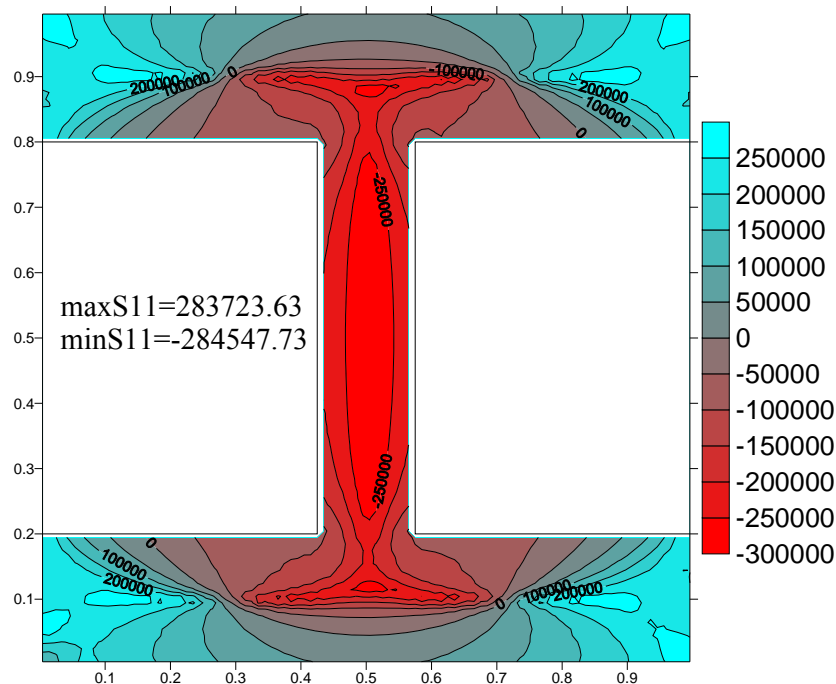
Η επιρροή των μεγάλων μετατοπίσεων είναι σημαντική, επομένως κρίνεται απαραίτητο να διερευνηθεί περαιτέρω το συγκεκριμένο παράδειγμα. Στα σχήματα 5.2.6, 5.2.7, 5.2.8 απεικονίζονται οι ορθές τάσεις S_{II} για 3 διαφορετικά στάδια φόρτισης.



Σχήμα 5.2.6 Απεικόνιση ορθών τάσεων στη διατομή διπλού T για $M_i = 16\% M_{i_{\max}}$



Σχήμα 5.2.7 Απεικόνιση ορθών τάσεων στη διατομή διπλού T για $M_i = 79\% M_{i_{\max}}$



Σχήμα 5.2.8 Απεικόνιση ορθών τάσεων στη διατομή διπλού T για $M_t = M_{t_{\max}}$

Από τη μελέτη των σχημάτων αυτών συνάγονται τα εξής:

- Η κατανομή των ορθών τάσεων στη διατομή, σε φάση όπου το υλικό είναι ελαστικό, εξαρτάται αποκλειστικά από την απόσταση των σημείων που εξετάζονται από τον άξονα περιστροφής της διατομής.
- Η ελαστική κατανομή των ορθών τάσεων μεταβάλλεται λόγω της πλαστικής διαρροής. Παρατηρούμε ότι οι ορθές τάσεις λαμβάνουν σημαντικές τιμές στις περιοχές όπου αλλάζει η κατεύθυνση των διατμητικών τάσεων.
- Κατά τη φάση της πλαστικής κατάρρευσης, η διατομή καταπονείται τοπικά από **πολύ υψηλές τιμές ορθών τάσεων**, παρά το γεγονός ότι η ράβδος δεν καταπονείται από αξονική δύναμη. Παρατηρούμε μάλιστα ότι το εσωτερικό του κορμού καταπονείται τοπικά από θλιπτικές τάσεις. Είναι πιθανό, οι τάσεις αυτές, που αγνοούνται στο σχεδιασμό λόγω του ότι η εξωτερικά επιβαλλόμενη αξονική δύναμη $N = 0$, να οδηγούν σε προβλήματα τοπικής αστάθειας του κορμού.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

❖ Έλληνες συγγραφείς :

1. **Βαρδουλάκης, Ι.** (1999), “Τεχνική Μηχανική ΙΙ”, Εκδ. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, Αθήνα.
2. **Γδούτος, Ε.Ε.** (1983), “Θεωρία Ελαστικότητας και Αντοχή των Υλικών”, Εκδ. Οίκος Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη.
3. **Κατσιαδέλης, Ι.Θ. και Σαπουντζάκης, Ε.Ι.** (1986), “Numerical Evaluation of the Green Function for the Laplace Equation with Applications to Linear and Non-linear Potential Problems by the Boundary Element Method”, *Proceedings of the 3rd International Conference, Porto Carras, Greece.*
4. **Κατσιαδέλης, Ι.Θ.** (1999), “Συνοριακά Στοιχεία στην επιστήμη του μηχανικού – Θεωρία & Εφαρμογές”, *Ε.Μ.Π., Αθήνα.*
5. **Μώκος, Β. Γ.** (1998), “Επίλυση του προβλήματος στρέψεως κατά Saint-Venant με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων και επιρροή της στρεπτικής σταθεράς στην εντατική κατάσταση φορέων τεχνικών έργων”, *Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα.*
6. **Μώκος, Β. Γ.** (2001), “Επίλυση του προβλήματος ανομοιόμορφης στρέψεως με τη Μέθοδο των Συνοριακών”, *Μεταπτυχιακή εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα.*
7. **Παπαδρακάκης, Μ.** (1996), “Ανάλυση φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων”, *Ε.Μ.Π., Αθήνα.*
8. **Παπαδρακάκης, Μ.** (1998), “Μη Γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία”, *Ε.Μ.Π., Αθήνα.*
9. **Σαπουντζάκης, Ε.Ι.** (2000), “Solution of Nonuniform Torsion of Bars by an Integral Equation Method”, *International Journal Computers and Structures*, Vol.77, σελ.659-667.
10. **Σαπουντζάκης, Ε.Ι. και Μώκος Β.Γ.** (2002), “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion by BEM”, *4th GRACM Congress on Computational Mechanics*, Patras, Greece, July 27-29, 93.
11. **Σαπουντζάκης, Ε.Ι. και Μώκος Β.Γ.** (2003), “Warping Shear Stresses in Nonuniform Torsion by BEM”, *Computational Mechanics*, 30(2), 131-142.
12. **Σπετσιέρης Δ.** (2005), “Επιρροή της στρέβλωσης και της διατμητικής παραμόρφωσης στο μητρώο δυσκαμψίας μέλους χωρικού ραβδόμορφου φορέα”, *Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα*

13. **Τσαμασφύρος, Γ.Ι.** (1991), “Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων”, *Τόμος I & II, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.*

❖ **Ξένοι συγγραφείς :**

14. **Baba S. and Kajita T.** (1982), “Plastic analysis of torsion of a prismatic beam”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 18, p. 927
15. **Jirasek M., Zdenek P. B.** (2002), “Inelastic analysis of structures”, *Chichester, John Wiley and Sons, Ltd*
16. **Lubarda V.A.** (2002), “Elastoplasticity Theory”, *Boca Raton, CRC Press*
17. **Novozhilov V.V** (1953), “Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity”, *Rochester, NY. Graylock Press*
18. **Saint–Venant, B.** (1855), “Memoire sur la torsion des prismes”, *Memoires des Savants Etrangers 14, pp.233-560.*
19. **Simo, J. C. and Ortiz, M.** (1986): “An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations”, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 23, 353–366
20. **Simo, J.C. and Hughes T.J.R.** (1998), “Computational Inelasticity”, *New York, Springer*
21. **Timoshenko, S. and Goodier, J.** (1951), “Theory of Elasticity”, *New York/Toronto/London: McGraw-Hill Book Comp.*
22. **Trahair N.S. and Pi Y.L,** (1995), “Inelastic torsion of steel I-beams”, *Journal of structural engineering*, 609-619
23. **Washizu, K.** (1975), “Variational methods in elasticity and plasticity”, *Oxford, Pergamon Press*