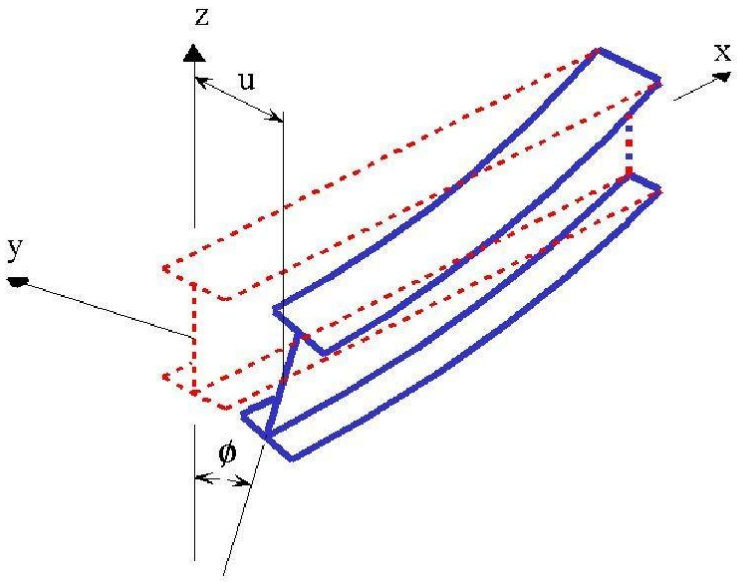
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Έλεγχος σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό δοκών υπό κάμψη και αξονικό φορτίο



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Φώτιος Τ. Αυδής

Επιβλέπων: Τάσος Αβραάμ

Αθήνα, Νοέμβριος 2014

ΕΜΚ ΔΕ 2014/18

Αυδής Φ. Τ. (2014)
Έλεγχος σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό δοκών υπό κάμψη και αξονικό φορτίο
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2014/18
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα

Avdis F. T. (2014)
Torsional flexural – Lateral torsional buckling of beams
Diploma Thesis EMK ΔΕ 2014/18
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

Πίνακας περιεχομένων

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΜΚ ΔΕ 2014/18

Έλεγχος σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό δοκών υπό κάμψη και αξονικό φορτίο

Αυδής Φ. Τ. (Επιβλέπων: Αβραάμ Τ.)

Περίληψη

Σήμερα ο δομικός χάλυβας χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο στην κατασκευή δομικών έργων. Επειδή μια από τις κύριες επιδιώξεις είναι η οικονομικότητα των κατασκευών, γίνεται χρήση λεπτών μεταλλικών στοιχείων. Ο κίνδυνος όμως της αστοχίας αυξάνεται με τη χρήση τέτοιων στοιχείων (απώλεια ευστάθειας), οπότε κύριο μέλημα του πολιτικού μηχανικού είναι να βρει τη χρυσή τομή μεταξύ του οικονομικού σχεδιασμού και της ασφάλειας στις μεταλλικές κατασκευές.

Ένα από τα είδη αστάθειας που είναι πιθανόν να εμφανιστούν, είναι ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός, είτε από ταυτόχρονη κάμψη και θλίψη, είτε από κάμψη περί τον ισχυρό άξονα (πλευρικός λυγισμός).

Η προσπάθεια εύρεσης μιας ακριβής μαθηματικής λύσης των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη. Αυτό οφείλεται στο ότι οι εξισώσεις αυτές είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες και με πολλούς μεταβλητούς συντελεστές. Έτσι καλούμαστε να αναζητήσουμε διάφορες προσεγγιστικές λύσεις.

Ειδικότερα, στην παρούσα διπλωματική θα διατυπωθούν οι διαφορικές εξισώσεις ανάλογα με τη φόρτιση στην οποία υπόκεινται η υπό μελέτη δοκός και μέσω μια συγκεκριμένης προσέγγισης θα καταλήξουμε σε κάποια αποτελέσματα. Στη συνέχεια θα προσομοιώσουμε τις δοκούς στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα και να διαπιστώσουμε την αξιοπιστία των προσεγγίσεων που χρησιμοποιήσαμε. Τέλος, θα γίνουν συγκρίσεις και με τον Ευρωκώδικα 3 που περιέχει τους κανονισμούς που χρησιμοποιούνται επίσημα για την αντιμετώπιση του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS
ΕΜΚ ΔΕ 2014/18

Torsional flexural – Lateral torsional buckling of beams

Avdis F. T. (supervised by Avraam T.)

Abstract

Today steel is used more and more in the construction industry. Because one of the main objectives is “economical constructions” thin steel elements are very often used. However because the danger of losing stability is increased with the use of such elements, the main concern of a civil engineer is to find the golden section between the economic planning and the safety of the steel structures.

One of the types of instability that is very likely to occur is lateral torsional buckling or torsional flexural buckling.

The effort of finding the precise mathematic solution of the differential equations that describes the problem of lateral torsional – torsional flexural buckling is difficult and many times over impossible. That is happening because the differential equations are complicated with many variable coefficients. Thus, we have to obtain approximate solutions.

More specifically, differential equations will be formulated, depending on the loading conditions for each case in order to reach certain results. Afterwards, in order to check the validity, these results will be compared with the results of the Finite Element Simulations package Adina and the results of Eurocode 3.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής εργασίας κ. Αβραάμ Τάσο, Λέκτορα του τομέα Δομοστατικής της σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την πολύτιμη βοήθειά του και την καθοδήγηση που προσέφερε κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Αυδής Φώτιος, Αθήνα 2014

1 Εισαγωγή

1.1 Γενική τοποθέτηση του προβλήματος

Στην παρούσα διπλωματική θα μελετηθεί το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, η μορφή δηλαδή της αστάθειας ενός θλιβόμενου και/ή καμπτόμενου μέλους, κατά την οποία οι διατομές υπόκεινται μετά το λυγισμό σε στροφή περί το κέντρο διάτμησης και σε ταυτόχρονη μετατόπιση σε σχέση με το αρχικώς ευθύγραμμο διαμήκη άξονα του μέλους, ο οποίος παύει πλέον να είναι ευθύγραμμος μετά την παραμόρφωση.

Η προσπάθεια για μια ακριβή μαθηματική λύση απ' όπου θα προκύψουν τα κρίσιμα φορτία στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι πολύ δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη. Αυτό οφείλεται στα πολύπλοκα συστήματα διαφορικών εξισώσεων που καλούμαστε να επιλύσουμε ώστε να φτάσουμε σε κλειστές μαθηματικές σχέσεις. Η ανάπτυξη λοιπόν προσεγγιστικών λύσεων κρίνεται απαραίτητη.

1.2 Διάρθρωση της διπλωματικής εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο επεξηγείται το φαινόμενο του λυγισμού και γίνεται διάκριση των ειδών του. Γίνεται επίσης περιγραφή του φαινομένου του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού και αναφορά στις μορφές στις μορφές ελαστικής ισορροπίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές παραδοχές που αφορούν το πρόβλημα του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού και μορφώνεται η διαφορική εξίσωση βάση της οποίας θα γίνουν οι υπολογισμοί. Τέλος αναφέρεται η προσδιοριστική μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυσή της.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου σε αμφιέρειστη δοκό διατομής διπλού ταυ, η οποία καταπονείται από διάφορες φορτίσεις.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η αντιμετώπιση του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού σύμφωνα με τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3.

Στο έκτο κεφάλαιο γίνονται αριθμητικές εφαρμογές χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 4. Επίσης γίνεται προσομοίωση των δοκών και των φορτίσεων στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* έτσι ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα με αυτά που προέκυψαν μέσω της προσδιοριστικής μεθόδου αλλά και του Ευρωκώδικα 3 και να βγουν τα απαραίτητα συμπεράσματα.

2 Ευστάθεια μεμονωμένων μελών

2.1 Γενικά

Εξετάζοντας ένα σύστημα στην παραμορφωμένη κατάσταση, παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δυνάμεις οι οποίες είτε δρουν κατά τη φορά των παραμορφώσεων, συμβάλλοντας στην περαιτέρω αύξησή τους, είτε δρουν αντίθετα στη φορά των παραμορφώσεων, συμβάλλοντας στη μείωσή τους. Οι πρώτες δυνάμεις ονομάζονται δυνάμεις εκτροπής και οι δεύτερες δυνάμεις επαναφοράς. Ευστάθεια ή απώλεια αυτής, είναι ένας γενικός όρος που αφορά την απώλεια ισορροπίας λόγω εμφάνισης κατά την παραμόρφωση δυνάμεων εκτροπής. Αυτό σημαίνει ότι ο φορέας μετά από μια τυχαία παραμόρφωση δεν επανέρχεται από μόνος του στην προηγούμενη θέση ισορροπίας. Σημειώνεται ότι προβλήματα ευστάθειας παρουσιάζονται σε περίπτωση θλιβομένων μελών.

Η συμπεριφορά των θλιβομένων ράβδων επηρεάζεται σημαντικά από φαινόμενα αστάθειας, τα οποία χαρακτηρίζονται από τον γενικό όρο 'λυγισμός'. Οι διατομές των ράβδων υπόκεινται κατά τη διάρκεια της φόρτισης σε παραμορφώσεις, ανάλογα με το είδος των οποίων διακρίνονται και τα διάφορα είδη λυγισμού (η κατηγοριοποίηση τους προκύπτει με κριτήριο την έκταση του φαινομένου του λυγισμού).

- Καθολικός λυγισμός

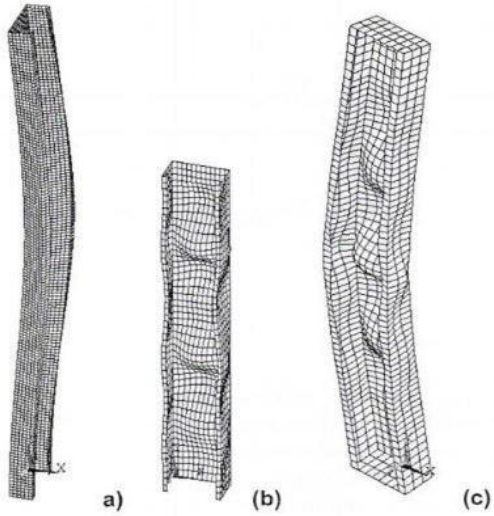
Η συμπεριφορά των μελών επηρεάζεται από φαινόμενα καθολικής αστάθειας, τα οποία υποβιβάζουν την αντοχής τους. Οι αστάθειες αυτές χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια της φόρτισης οι διατομές υπόκεινται σε παραμορφώσεις στερεού σώματος (ως διαφράγματα), οι οποίες αποτελούνται από μετατοπίσεις γύρω από τους κύριους άξονες και από στροφές. Οι καθολικές αστάθειες χαρακτηρίζονται από το γενικό όρο καθολικός λυγισμός. Ο λυγισμός αυτού του είδους εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους, χωρίς ενδιάμεσες στηρίξεις (Σχ. 2.1a).

- Τοπικός λυγισμός

Στον τοπικό λυγισμό οι ίδιες οι διατομές παραμορφώνονται μη διατηρώντας το σχήμα τους, ενώ ο άξονας του μέλους παραμένει απαραμόρφωτος. Τοπικός λυγισμός εμφανίζεται στις λεπτότοιχες διατομές κατηγορίας 4 με μεγάλες τιμές του λόγου b/t των τοιχωμάτων τους. Το πολύ μειωμένο πάχος σε σχέση με το πλάτος καθιστά τους συγκεκριμένους φορείς ιδιαίτερα ασταθείς. Σε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής διπλού ταυ ο τοπικός λυγισμός εμφανίζεται στο θλιβόμενο άνω πέλμα και στο άνω θλιβόμενο τμήμα του κορμού, όταν ο λόγος πλάτος πέλματος προς πάχος πέλματος είναι μεγάλος (Σχ. 2.1b).

- Καθολικός και τοπικός λυγισμός

Αποτελεί συνδυασμό των ανωτέρω ειδών λυγισμού και εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους από λεπτότοιχες διατομές (Σχ. 2.1c).



Σχήμα 2.1 Είδη λυγισμού και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις

Στον καθολικό λυγισμό οι παραμορφώσεις των διατομών συντίθενται από μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες και στροφές. Συναρτήσει της θέσης της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση διακρίνονται τα ακόλουθα είδη καθολικού λυγισμού.

- Καμπτικός λυγισμός (Flexural buckling)

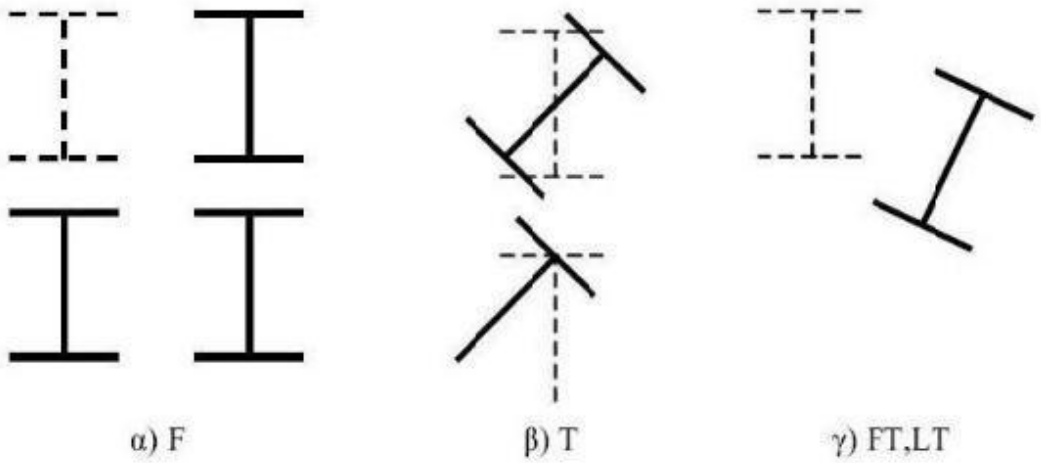
Οι διατομές υπόκεινται σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες, χωρίς να εμφανίζονται στροφές (Σχ. 2.2α).

- Στρεπτικός λυγισμός (Torsional buckling)

Οι διατομές υπόκεινται μόνο σε στροφές, χωρίς να εμφανίζονται μετατοπίσεις (Σχ. 2.2β).

- Στρεπτοκαμπτικός / Πλευρικός λυγισμός (FT / LT buckling)

Οι διατομές υπόκεινται τόσο σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες, όσο και σε στροφές. Αποτελεί συνδυασμό των ανωτέρων ειδών λυγισμού (Σχ. 2.2γ).

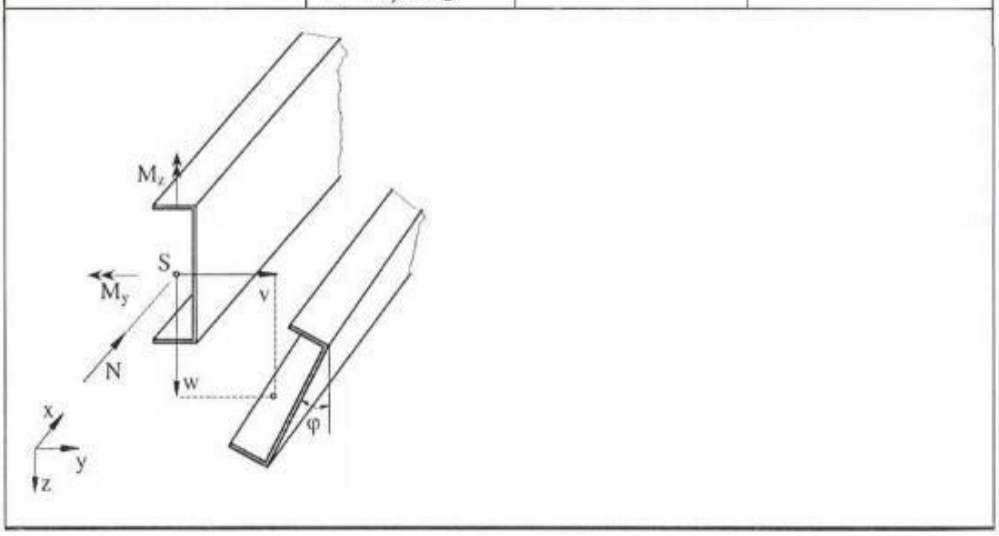


Σχήμα 2.2 Μορφές καθολικού λυγισμού και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις

Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται συνοπτικά τα διάφορα είδη και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις καθολικού λυγισμού, ως συνάρτηση της φόρτισης και του τύπου της.

Πίνακας 2.1 Είδη και παραμορφώσεις καθολικού λυγισμού

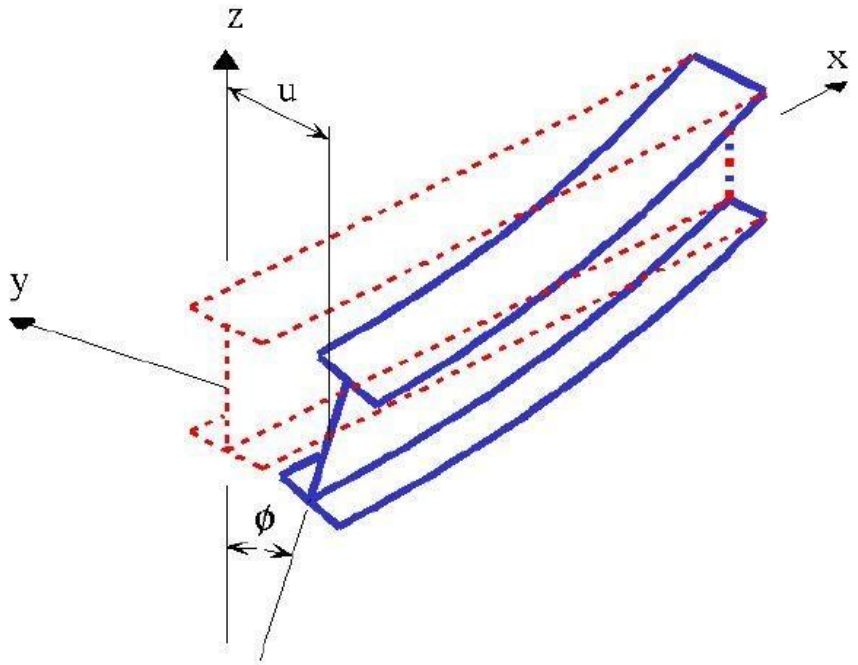
Είδος καθολικού λυγισμού	Φόρτιση	Είδη διατομών	Παραμορφώσεις
Καμπτικός λυγισμός	N $N + M_y$ $N + M_z$ $N + M_y + M_z$	όλες	v w v v, w
Στρεπτικός λυγισμός	N	ανοικτές	ϕ
Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός	N M_y $N + M_y$ $N + M_y + M_z$	ανοικτές	v, w, ϕ



2.2 Περιγραφή του φαινομένου του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού

Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός είναι η μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου και/ή καμπτόμενου μέλους, κατά την οποία οι διατομές υπόκεινται, μετά το λυγισμό, σε στροφή περί το κέντρο διάτμησης και σε ταυτόχρονη μετατόπιση σε σχέση με τον αρχικώς ευθύγραμμο διαμήκη άξονα του μέλους, ο οποίος παύει πλέον να είναι ευθύγραμμος μετά την παραμόρφωση. Ο κίνδυνος αστοχίας λόγω στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι μεγάλος για ανοικτές διατομές και περιορισμένος για κλειστές διατομές, λόγω της μεγάλης δυστρεψίας που διαθέτουν. Ανάλογα με τα επιβαλλόμενα επί του μέλους φορτία, διακρίνονται οι παρακάτω βασικές περιπτώσεις:

- Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών υπό θλίψη (Torsional flexural buckling).
- Στρεπτοκαμπτικός (πλευρικός) λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών υπό κάμψη περί τον ισχυρό τους άξονα (Lateral torsional buckling).
- Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών υπό θλίψη και κάμψη (Torsional flexural buckling).



Σχήμα 2.3 Εικόνα στρεπτοκαμπτικού λυγισμού

2.2.1 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη

Η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται όπως ο στρεπτικός λυγισμός. Ειδικότερα, παρουσιάζεται μια μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου μέλους σταθερής διατομής με ευθύγραμμο διαμήκη άξονα, κατά την οποία, οι διατομές στρέφονται περί τον άξονα του μέλους, ο οποίος παραμένει ευθύγραμμος και μετά την παραμόρφωση. Ο κίνδυνος αστοχίας εξαιτίας αυτού του είδους λυγισμού απαντάται σε ανοικτές διατομές, ενώ δεν υφίσταται σε κλειστές διατομές, λόγω της μεγάλης δυστρεψίας που διαθέτουν. Επιπρόσθετα, στους αριθμητικούς συντελεστές που χρησιμοποιούνται, θα πρέπει να εμπεριέχονται οι συνθήκες δέσμευσης των άκρων σε στρέψη και στρέβλωση.

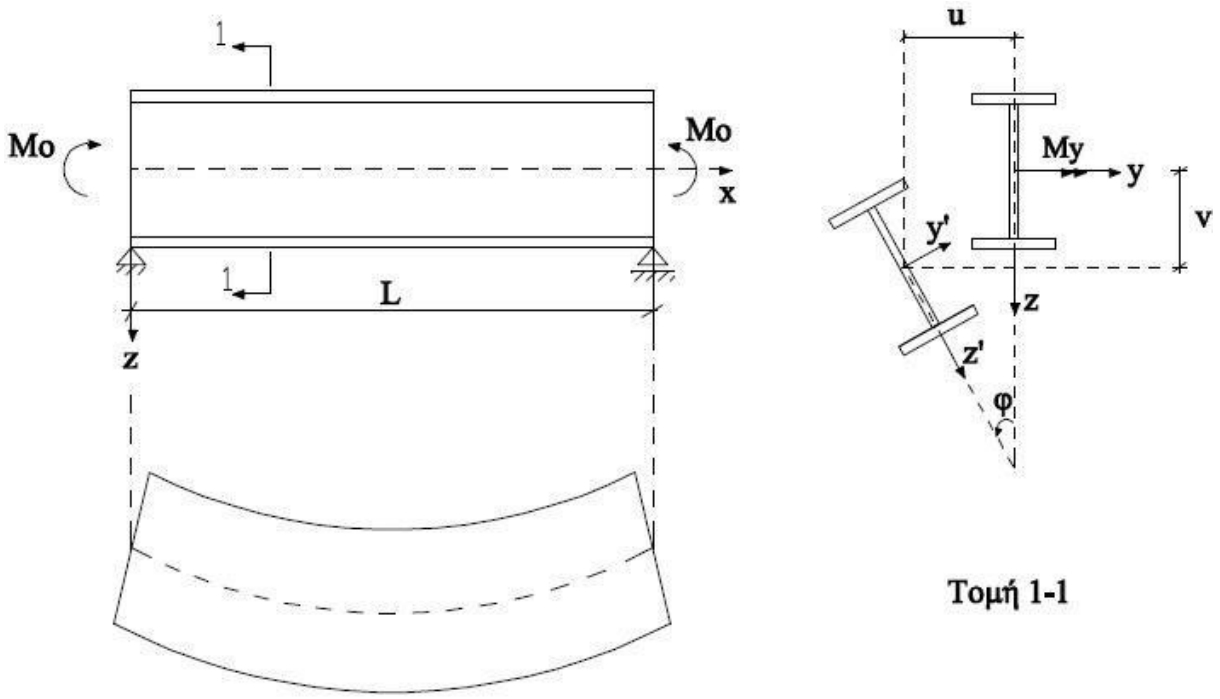
2.2.2 Στρεπτοκαμπτικός (ή πλευρικός) λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών σταθερής διατομής υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα

Όταν μια δοκός μη προστατευμένη έναντι πλευρικής εκτροπής υποβάλλεται σε καμψη περί τον ισχυρό άξονα της διατομής της, είτε λόγω ακραίων ροπών ή, συνηθέστερα, λόγω εγκάρσιων φορτίων, ένα από τα πέλματά της θλίβεται και καθίσταται επομένως επιρρεπές σε λυγισμό. Ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος στο επίπεδο του κορμού παρεμποδίζεται λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας του κορμού στο επίπεδό του, ενώ το άλλο ήμισυ της διατομής είναι, ως εφελκυόμενο στοιχείο, ευσταθές. Ως συνέπεια, ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος εκδηλώνεται εκτός του επιπέδου του κορμού, με ταυτόχρονη στροφή των κυρίων αξόνων της διατομής σε σχέση με την αρχική τους θέση. Η παραμόρφωση που προκύπτει, είναι επομένως συνδυασμός στρέψης και πλευρικής κάμψης (πλευρικός-στρεπτικός λυγισμός ή απλώς πλευρικός λυγισμός). Εάν στη δοκό εφαρμοστεί ταυτόχρονα και αξονική θλιπτική δύναμη, αυτή θα επιτείνει το φαινόμενο, αφού επαυξάνει την κάμψη (στη μετά το λυγισμό κατάσταση ισορροπίας) περί τον ασθενή άξονα της διατομής.

Σε μια τέλεια δοκό, που φορτίζεται κατά την ισχυρή διεύθυνση κάμψης, ο πλευρικός λυγισμός λαμβάνει χώρα για μια κρίσιμη τιμή της μέγιστης ροπής κάμψης. Οι σημαντικότεροι παράγοντες που επηρεάζουν αυτή την τιμή είναι:

- Το είδος και η θέση των φορτίων, τα οποία επηρεάζουν την κατανομή της ροπής κατά μήκος ης δοκού (δηλαδή τη μορφή του διαγράμματος καμπτικών ροπών).
- Το σημείο εφαρμογής των φορτίων καθ' ύψος της διατομής (κέντρο βάρους, άνω πέλμα, κάτω πέλμα κλπ).
- Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού και σε ενδιάμεσες θέσεις της (περιορισμός κάμψης, στρέψης, στρέβλωσης).
- Η ύπαρξη ή όχι συνέχειας στις στηρίξεις.
- Η μορφή της διατομής.
- Τυχόν ασυνέχειες στη διατομή (αλλαγή διατομής, ανοίγματα κλπ).
- Οι ιδιότητες του υλικού.
- Οι γεωμετρικές ατέλειες και οι παραμένουσες τάσεις.

Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζεται ο τρόπος εκδήλωσης του φαινομένου αυτού σε μια αμφιέρειστη δοκό , λόγω ροπών στα άκρα.

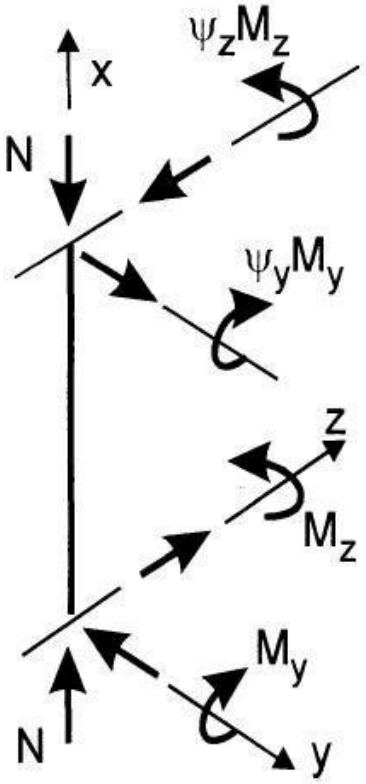


Σχήμα 2.4 Πλευρικός λυγισμός αμφιέρειστης δοκού λόγω ακραίων ροπών

2.2.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη

Μέλη σταθερής διατομής καταπονούμενα ταυτόχρονα από αξονική θλιπτική δύναμη και ροπές κάμψης περί τον ισχυρό και τον ασθενή άξονα της διατομής αποτελούν τη γενική περίπτωση καταπόνησης, ιδιαίτερα σε ότι αφορά κατακόρυφα μέλη χωρικών πλαισιωτών φορέων. Η ανάλυση της φέρουσας συμπεριφοράς τους, κατά την οποία εκτός από τις μετατοπίσεις των διατομών ως προς τους κεντροβαρικούς άξονες είναι πιθανόν να

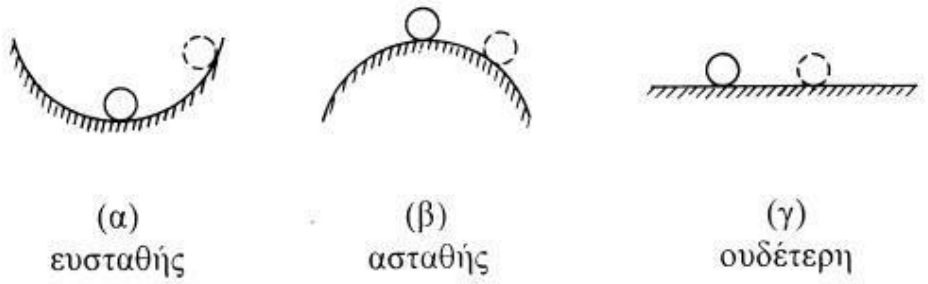
αναπτυχθούν ταυτόχρονα και στροφές περί τον διαμήκη άξονα του μέλους (στρεπτοκαμπτικός λυγισμός), είναι εξαιρετικά δύσκολη ακόμη και για την απλή ελαστική συμπεριφορά ,καθιστώντας μη εφικτές κλειστές αναλυτικές λύσεις. Έτσι κατεβλήθη στους κανονισμούς προσπάθεια χρησιμοποίησης ενοποιημένων σχέσεων σχεδιασμού, οι οποίες διατυπώνονται σε μορφή εξισώσεων αλληλεπίδρασης.



Σχήμα 2.5 Το υποστύλωμα παραμορφώνεται στα επίπεδα zx και yx και στρέφεται περί τον άξονα x

2.3 Μορφές ελαστικής ισορροπίας

Καθώς ο λυγισμός είναι μια μορφή αστάθειας, είναι απαραίτητο να κάνουμε μια διάκριση μεταξύ των εννοιών «ευσταθής», «ουδέτερη» και «ασταθής» ισορροπία. Οι τρείς αυτές μορφές ελαστικής ισορροπίας μπορούν να παρασταθούν με απλοϊκό τρόπο, θεωρώντας την ισορροπία μιας τελείως άκαμπτης σφαίρας σε διάφορες θέσεις μιας ομαλής επιφάνειας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6 Οι τρείς δυνατές μορφές ισορροπίας

Αν και η σφαίρα ισορροπεί και στις τρείς θέσεις του Σχ. 2.6, μετά από προσεκτική εξέταση διαπιστώνει κανείς την ύπαρξη ουσιαστικών διαφορών μεταξύ των τριών αυτών καταστάσεων ισορροπίας. Στο Σχ. 2.6α, αν η σφαίρα μετακινηθεί ελαφρώς από την αρχική της θέση ισορροπίας, θα επιστρέψει στη θέση αυτή, όταν αφαιρεθεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση. Μια τέτοια συμπεριφορά χαρακτηρίζεται ως μορφή ευσταθούς ισορροπίας. Στο Σχ.2.6β, αν η σφαίρα μετακινηθεί ελαφρώς από την αρχική της θέση ισορροπίας, τότε είναι φανερό ότι δεν επιστρέφει στην αρχική θέση αλλά απομακρύνεται συνεχώς από την αρχική θέση ισορροπίας (μετά την αφαίρεση του αιτίου που προκάλεσε τη μετακίνησή της). Αυτή η μορφή ισορροπίας είναι ασταθής. Στο Σχ.2.6γ βλέπουμε μια Τρίτη μορφή ισορροπίας. Η σφαίρα μετά από μικρή μετακίνηση, ούτε επιστρέφει στην αρχική της θέση, ούτε συνεχίζει να κινείται απομακρυνόμενη από αυτή. Αντίθετα, παραμένει στη θέση στην οποία τη μετακίνησε η δύναμη που της εφαρμόστηκε. Αυτή η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία.

Καθώς η δοκός περνάει από την ασταθή (ευθύγραμμη) μορφή ισορροπίας στην ευσταθή (ελαφρώς καμπυλωμένη λόγω λυγισμού), υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μεταβατική ισορροπία, η οποία καλείται ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία. Ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου γίνεται με βάση την ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή ισορροπίας.

3 Καθορισμός προβλήματος του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού

3.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στις παραδοχές που θα γίνουν, ώστε να μορφώσουμε τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας μιας δοκού καταπονούμενης σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα, με ταυτόχρονη ή μη δράση αξονικού θλιπτικού φορτίου. Μορφώνοντας τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας, θα φανεί η δυσκολία επίλυσής της, εξαιτίας των πολύπλοκων συστημάτων που προκύπτουν. Έτσι θα καταλήξουμε στη χρήση μιας συγκεκριμένης προσέγγισης, η οποία διευκολύνει τη διαδικασία εύρεσης του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού.

3.2 Βασικές παραδοχές

Όταν μια δοκός λυγίζει περί τον ισχυρό της άξονα (τον άξονα δηλαδή που εμφανίζει τη μέγιστη καμπτική αντίσταση) και δεν έχει επαρκή πλευρική υποστήριξη, τότε αυτή θα εκτραπεί πλευρικά και θα στρεβλωθεί, όταν το φορτίο που εφαρμόζεται φτάσει στην κρίσιμη τιμή του. Σύμφωνα με τις βασικές αρχές, στη στάθμη της εξωτερικής φόρτισης, αντιστοιχούν δύο διακεκριμένες απείρως γειτονικές θέσεις ισορροπίας. Το μικρότερο φορτίο που ικανοποιεί το κριτήριο γειτονικής ισορροπίας είναι το κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Για να υπολογίσουμε το κρίσιμο φορτίο της δοκού πρέπει πρώτα να καθορίσουμε τις συνθήκες ισορροπίας σε μια ελαφρώς παραμορφωμένη κατάσταση.

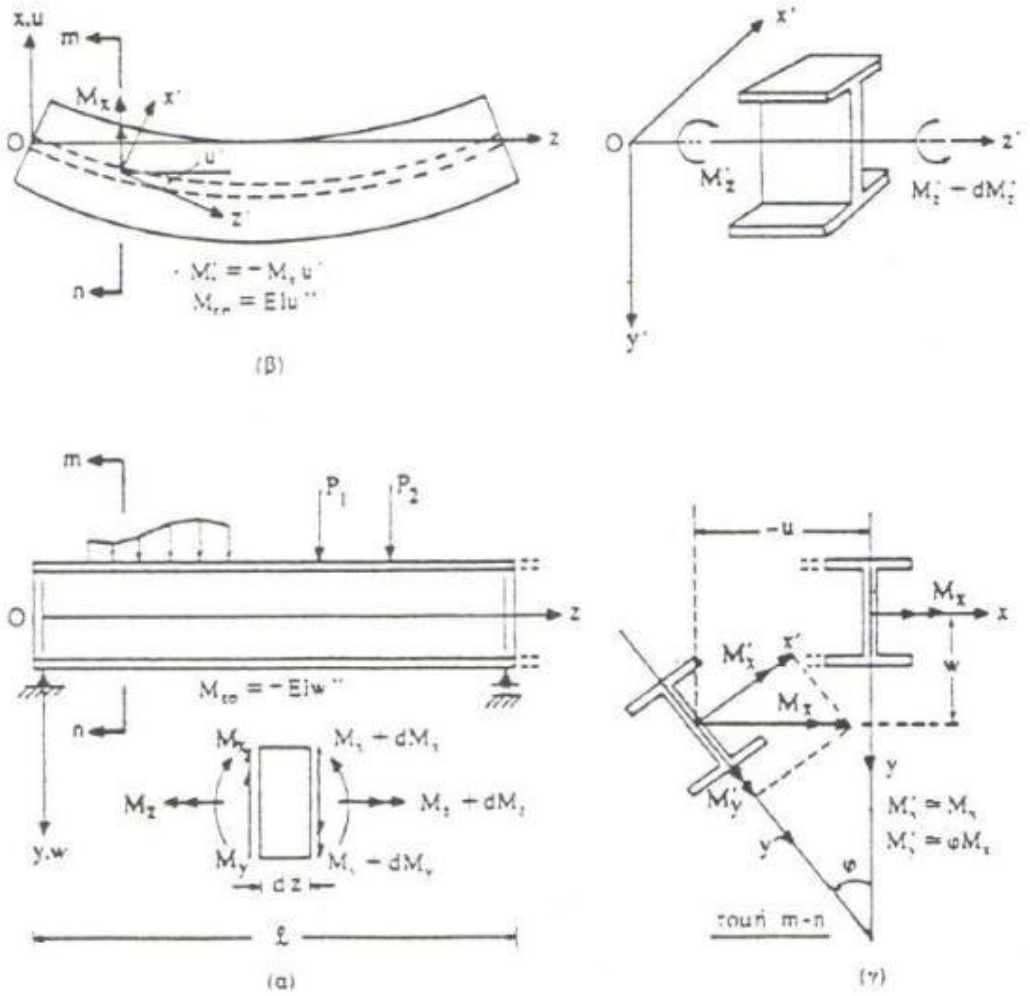
Στο Σχ.3.1γ βλέπουμε τη διατομή *m-n* στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας. Η εξαγωγή των σχετικών διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας διευκολύνεται με την υιοθέτηση εκτός του σταθερού συστήματος ορθογωνίων αξόνων *x, y, z* και ενός κινητού *x΄, y΄, z΄* που διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής αυτής.

Οι βασικές παραδοχές που θα χρησιμοποιηθούν για την αντιμετώπιση του προβλήματος του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού είναι οι ακόλουθες:

- Το υλικό είναι ομογενές, ισότροπο και ακολουθεί το νόμο της ελαστικότητας (νόμος του Hooke).
- Η δοκός είναι γεωμετρικά τέλεια (δεν υπάρχουν αρχικές παραμορφώσεις, όπως βέλος και στροφή).
- Ισχύει η θεωρία των μικρών μετατοπίσεων. Τα βέλη και οι στροφές είναι αρκετά μικρά σε σχέση με τις διαστάσεις της διατομής ώστε να ισχύουν οι απλοποιημένοι τύποι καμπυλότητας της θεωρίας κάμψεως $\pm\frac{d^2w}{dz^2}$ και $\pm\frac{d^2u}{dz^2}$ όπου *w* και *u* τα βέλη κάμψεως κατά τους άξονες *y(w)* και *x(u)* αντίστοιχα. Για μικρές γωνίες *φ* δεχόμαστε ότι οι προηγούμενες καμπυλότητες και για τα αντίστοιχα επίπεδα μετά την παραμόρφωση.
- Η γεωμετρία της διατομής δε μεταβάλλεται κατά το λυγισμό.
- Τα εξωτερικά φορτία παραμένουν παράλληλα προς την αρχική τους διεύθυνση όταν τα σημεία εφαρμογής τους μετακινούνται.

Η διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας διευκολύνεται με την εισαγωγή ενός κινητού συστήματος αξόνων x', y', z', όπου οι άξονες x', y' είναι οι κύριοι άξονες αδράνειας της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση, ενώ ο άξονας z' είναι εφαπτόμενος της ελαστικής γραμμής της δοκού μετά τον πλευρικό λυγισμό. Η μετατόπιση του κέντρου βάρους της διατομής ορίζεται από τις συνιστώσες w και u κατά τις διευθύνσεις των αξόνων y και x αντιστοίχως (είναι θετικές όταν έχουν τη διεύθυνση των αντίστοιχων αξόνων) και από τη γωνία στροφής φ της διατομής περί τον άξονα z.

Αρχικά, επειδή η δοκός φορτίζεται μόνο στο επίπεδο yz, υπάρχουν μόνο ροπές κάμψεως M_x. Όταν η δοκός λυγίσει αναπτύσσονται επιπλέον καμπτικές ροπές M_y και στρεπτικές M_z λόγω μετατοπίσεως εκτός του επιπέδου φόρτισης των σημείων εφαρμογής των κατακόρυφων φορτίων.



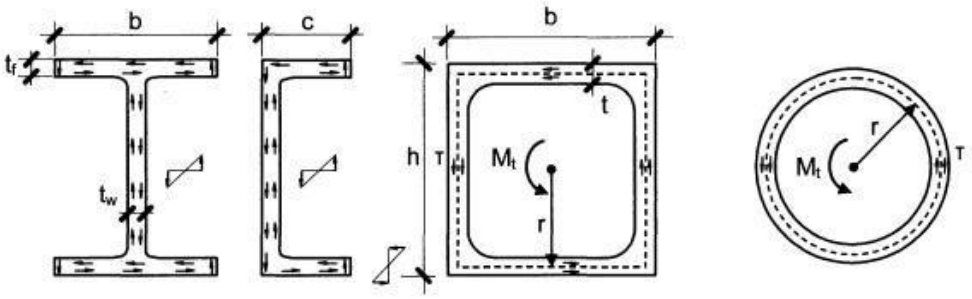
Σχήμα 3.1 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός δοκού διατομής *I*

3.2.1 Σταθερά στρέψης και σταθερά στρέβλωσης

Η σταθερά στρέψης J που θα χρησιμοποιήσουμε στις παρακάτω εξισώσεις, για ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές συντιθέμενες από επίπεδα ελάσματα με $b_i/t_i>10$, δίνεται από την σχέση:

$$J = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i t_i^3$$

Όπου:
i, ο αριθμός των ελασμάτων
b_i, t_i, το μήκος και το πάχος του ελάσματος *i*



Σχήμα 3.2 Ροή διατμητικών τάσεων κατά St. Venant σε ανοικτές και κλειστές διατομές

Η σταθερά στρέβλωσης C_w για διατομές διπλής συμμετρίας δίνεται από τη σχέση:

$$C_w = \frac{I_y h^2}{4}$$

Όπου:
h, το ύψος της διατομής
I_y, η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα *y*

Σημειώνεται ότι η σταθερά στρεβλώσεως C_w για λεπτές ορθογωνικές διατομές μπορεί να ληφθεί ίση με μηδέν.

3.2.2 Κέντρο διάτμησης

Το κέντρο διάτμησης μιας διατομής ορίζεται ως το σημείο της διατομής, από το οποίο διέρχεται η συνισταμένη των εγκάρσιων φορτίων, χωρίς να προκαλείται στρέψη. Για διατομές με δύο άξονες συμμετρίας, το κέντρο διάτμησης βρίσκεται στην τομή των αξόνων αυτών, που συμπίπτει και με το κέντρο βάρους της διατομής. Για διατομές αντισυμμετρικές το κέντρο διάτμησης πάλι συμπίπτει με το κέντρο βάρους. Για διατομές με έναν άξονα συμμετρίας, το κέντρο διάτμησης βρίσκεται επί του άξονα αυτού, χωρίς όμως να ταυτίζεται με το κέντρο βάρους.

Για τον προσδιορισμό του κέντρου διάτμησης μια ανοικτής διατομής χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων που ενεργούν επί της διατομής (ΣΥ=0, ΣΖ=0, ΣΜ=0).

3.3 Διαφορική εξίσωση ισορροπίας στρεπτοκαμπτικού λυγισμού

Οι εσωτερικές ροπές στης παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$(M'_x)_{int} = -EI_x \frac{d^2w}{dz^2} \tag{3.1}$$

$$(M'_y)_{\text{int}} = EI_y \frac{d^2u}{dz^2} \tag{3.2}$$

$$(M'_z)_{int} = GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} \tag{3.3}$$

Με τη βοήθεια του Σχ.3.1 υπολογίζουμε τις εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z:

$$(M'_x)_{ext} = M_x \cos(x', x) = M_x \cos\varphi \approx M_x \tag{3.4}$$

$$(M'_y)_{ext} = -M_x \sin(\mathrm{y}', x) = -M_x \sin\varphi \approx -\mathrm{M}_x\, \varphi \tag{3.5}$$

$$(M'_z)_{ext} = M_x \sin(\mathrm{z}', \mathrm{z}) = M_x \sin\frac{du}{dz} \approx \mathrm{M}_x \frac{du}{dz} \tag{3.6}$$

Θεωρώντας ότι οι εσωτερικές ροπές ισούνται με τις εξωτερικές καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} = -M_x \tag{3.7}$$

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = -M_x\varphi \tag{3.8}$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \mathrm{M}_x \frac{du}{dz} \tag{3.9}$$

Από την εξίσωση (3.7) συμπεραίνουμε ότι το βέλος κάμψης w στο κύριο επίπεδο κάμψεως *zy* δεν επηρεάζει τη γωνία στροφής φ. Αντίθετα, από τις εξισώσεις (3.8) και (3.9) καταλαβαίνουμε πως υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των u και φ. Αφού παραγωγίσουμε την εξίσωση (3.9) και λύσουμε ως προς τον όρο $\frac{d^2u}{dz^2}$ που θα προκύψει, αντικαθιστούμε στην (3.8) και καταλήγουμε σε μια νέα εξίσωση:

$$EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4} - GJ \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{M_x{}^2\varphi}{EI_y} = M'_x(z) \frac{du}{dz} \tag{3.10}$$

Όταν η ροπή M_χ είναι ανεξάρτητη του z, τότε η επίλυση της (3.10) είναι αρκετά απλή. Όταν όμως η ροπή αυτή μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού [$M_\chi(z)$], τότε είναι απαραίτητη κάποια προσεγγιστική μέθοδος για να φτάσουμε στη λύση της.

3.4 Αντιμετώπιση προβλήματος

Το πρόβλημα που παρουσιάζεται όταν η ροπή M_x μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού είχαν προσπαθήσει να το αντιμετωπίσουν οι *Timoshenko* και *Gere* επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο των σειρών (αυστηρά μαθηματική επίλυση). Μία προσεγγιστική λύση ανέπτυξαν και οι *Nethercot* και *Rockey*. Τα αποτελέσματα της επίλυσης των τελευταίων ήταν πολύ κοντά στα αποτελέσματα της αυστηρά μαθηματικής λύσης.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα κάνουμε χρήση τριγωνομετρικής συνάρτησης για την προσέγγιση της γωνίας στροφής φ. Ειδικότερα θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(z)=\varphi_0 sin(\frac{\pi z}{l})$. Η μέθοδος αυτή είχε παρουσιαστεί από τους καθηγητές *Α. Κουνάδη* και *Γ. Ιωαννίδη* σε δημοσίευσή τους τον Απρίλιο του 1994.

Η εξίσωση (3.10) μετατρέπεται σε:

$$EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4} - GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{M_x^{\ 2}}{EI_y}\varphi_0 sin(\frac{\pi z}{l}) = M'_x(z)\frac{du}{dz}$$

όπου ο όρος φ_0 είναι η γωνία στροφής της δοκού στο μέσον της.

4 Ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων

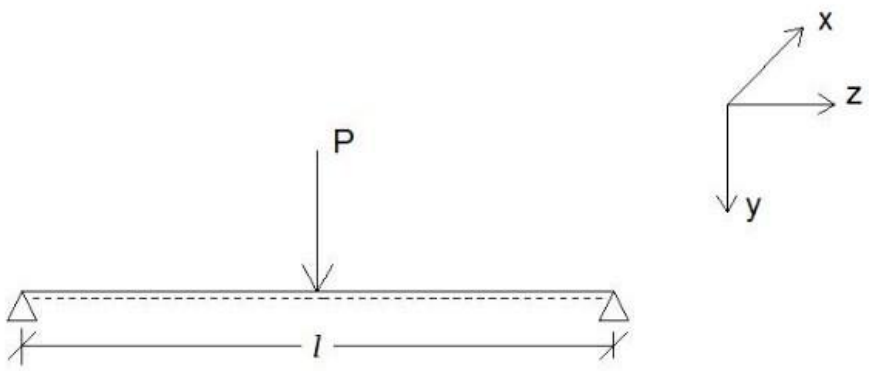
4.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή διάφορων τύπων φορτίσεων σε αμφιέρειστες υψίκορμες δοκούς διατομής *IPE* και θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε στα κρίσιμα φορτία στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, με τη βοήθεια της μεθόδου που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο (3.3.1).

4.2 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένο φορτίο *P* στο μέσον της με ταυτόχρονη δράση (ή μη) αξονικής θλιπτικής δύναμης *N*

Θα γίνει χρήση της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\varphi(z)=\varphi_0 sin(\frac{\pi z}{l})$ για την προσέγγιση της γωνίας στροφής φ. Το φορτίο *P* θα εφαρμοστεί εκτός από το κέντρο βάρους, στο άνω και κάτω πέλμα της διατομής στο μέσον της δοκού.

4.2.1 Χωρίς αξονική δύναμη



Σχήμα 4.1 Αμφιέρειστη δοκός με συγκεντρωμένο φορτίο *P* στο μέσον της

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής *I* (Σχ.4.1) η οποία καταπονείται από τη δράση συγκεντρωμένου φορτίου *P* στο μέσον της. Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου για την οποία το επίπεδο κάμψης *zy* παύει να είναι ευσταθές και η δοκός υπόκειται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Υποθέτουμε ότι κατά την κάμψη τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες *x* και *y* ενώ η στροφή τους περί τον κεντροβαρικό άξονα *z* είναι αδύνατη. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3, θεωρούμε ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο *zy* και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία φ περί τον άξονα *z*.

Είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και τις ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας για τη δοκό του σχήματος (4.1). Οι εξωτερικές

ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας θα υπολογιστούν όπως στο κεφάλαιο (3.3).

Οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων είναι:

$$M_x = \frac{P}{2} z$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = \frac{P}{2}(u_m + \varphi_0 \kappa - u)$$

Όπου:
u_m, το βέλος (κατά τον άξονα x) στο μέσον της δοκού
φ_0, η γωνία στροφής στο μέσον της δοκού
κ, η κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο βάρους της διατομής (θετικό από το κέντρο βάρους και πάνω), με $-\frac{h}{2} \le \kappa \le \frac{h}{2}$.

Παρατήρηση

Ο όρος $\varphi_o \kappa$ είναι μηδενικός όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής. Όταν εφαρμόζεται πάνω από το κέντρο βάρους, είναι θετικός, η M_z αυξάνεται και κατά συνέπεια η τιμή του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού μειώνεται. Το αντίστροφο συμβαίνει όταν εφαρμόζεται κάτω από το κέντρο βάρους της διατομής.

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$M'_x = M_x \cos\varphi \approx M_x$$
$$M'_y = -M_x \sin\varphi \approx -M_x \varphi$$
$$M'_z = M_x \sin\frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(u_m + \varphi_0 \kappa - u) \approx M_x \frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(u_m + \varphi_0 \kappa - u)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M'_x$$
$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M'_y$$
$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = \mathrm{M}'_z$$

Αντικαθιστώντας τις M'_x, M'_y, M'_z στις παραπάνω εξισώσεις:

$$EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{P}{2} z \qquad (4.1)$$

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{P}{2} z\varphi \tag{4.2}$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{P}{2}(u_m + \varphi_0\kappa - u) + \frac{P}{2} z \frac{du}{dz} \tag{4.3}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση (4.3) ως προς *z*:

$$GJ \frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4} = -\frac{P}{2}\frac{du}{dz} + \frac{P}{2}\frac{du}{dz} + \frac{P}{2} z \frac{d^2u}{dz^2}$$

Σημειώνεται ότι $\frac{du_m}{dz} = 0$ και $\frac{d(\varphi_0\kappa)}{dz} = 0$, γιατί u_m και φ_0 είναι σταθεροί αριθμοί και ανεξάρτητοι του *z*.

Λύνουμε ως προς $\frac{d^2u}{dz^2}$:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{GJ \frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4}}{\frac{P}{2} z} \tag{4.4}$$

Η εξίσωση (4.2) λόγω της (4.4) γίνεται:

$$EI_y \frac{GJ \frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4}}{\frac{P}{2} z} = -\frac{P}{2} z\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^4\varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w}\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{P^2 z^2}{4EI_y EC_w}\varphi(\mathrm{z}) \tag{4.5}$$

Θέτουμε $\xi = \frac{z}{l}$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{dz} = \frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{dz} = \frac{1}{l}\frac{d^2\varphi}{dzd\xi} = \frac{1}{l}\frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{d\xi} = \frac{1}{l}\frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{d\xi} = \frac{1}{l^2}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3}\frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4}\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (4.5) θα έχουμε:

$$\frac{1}{l^4}\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}-\frac{GJ}{EC_w}\frac{1}{l^2}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=\frac{P^2\xi^2l^2}{4EI_yEC_w}\varphi(\xi)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}-\frac{GJ}{EC_w}l^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\xi^2\varphi(\xi)$$

Θέτουμε:

$$\beta^2=\frac{GJ}{EC_w}l^2\ ,\ \alpha=\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}$$

επομένως καταλήγουμε στη σχέση:

$$\varphi''''(\xi)-\beta^2\varphi''(\xi)=\alpha\xi^2\varphi(\xi) \tag{4.6}$$

Θα ασχοληθούμε με τη μισή δοκό ($0\le z\le\frac{l}{2}$) λόγω συμμετρίας. Οι συνοριακές συνθήκες που θα αξιοποιήσουμε είναι:

$$GJ\varphi'(\frac{l}{2})-EC_w\varphi'''(\frac{l}{2})=\frac{P}{2}\kappa\varphi_0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow GJ\varphi'(\frac{1}{2})\frac{1}{l}-EC_w\varphi'''(\frac{1}{2})\frac{1}{l^3}=\frac{P}{2}\kappa\varphi_0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\varphi'''(\frac{1}{2})=-\frac{Pl^3\kappa}{2EC_w}\varphi_0$$

Όπου $\mu=-\frac{Pl^3\kappa}{2EC_w}$

$$\varphi(0)=0$$
$$\varphi''(0)=0$$
$$\varphi'(\frac{1}{2})=0$$

Είναι προφανές ότι $\varphi'''(\frac{1}{2})=0$,άρα και μ=0 όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής.

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της προσεγγιστικής συνάρτησης για τη γωνία στροφής φ της διατομής, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Θέτουμε:

$$\varphi(\mathrm{z}) = \varphi_0 \sin(\frac{\pi z}{l}), 0 \le \mathrm{z} \le l$$

ή

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\pi\xi), 0 \le \xi \le 1$$

Όπου φ_0, είναι η γωνία στροφής στο μέσον της αμφιέρειστης δοκού, όταν αυτή εκτρέπεται πλευρικά.

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω προσεγγιστική συνάρτηση στην εξίσωση (4.6), έχουμε:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = \alpha\xi^2 \varphi_0 \sin(\pi\xi) \tag{4.7}$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην εξίσωση (4.7):

$$\varphi'''(\xi) - \beta^2 \varphi'(\xi) = \alpha\varphi_0 \left(\frac{2\xi \sin(\pi\xi)}{\pi^2} - \frac{(\pi^2\xi^2 - 2)\cos(\pi\xi)}{\pi^3} \right) + C_1 \tag{4.8}$$

$$\varphi''(\xi) - \beta^2 \varphi(\xi) = -\frac{\alpha\varphi_0 \left(\frac{(\pi^2\xi^2 - 4)\sin(\pi\xi)}{\pi} - \frac{2\sin(\pi\xi)}{\pi} + 4\xi\cos(\pi x)\xi \right)}{\pi^3} + C_1\xi + C_2 \tag{4.9}$$

Η εξίσωση (4.9) για *ξ=0* μας δίνει:

$$C_2 = 0$$

Η εξίσωση (4.8) για $\xi = \frac{1}{2}$ μας δίνει:

$$C_1 = \mu\varphi_0 - \frac{\alpha\varphi_0}{\pi^2}$$

Αντικαθιστώντας τις C_1, C_2 και $\varphi(\xi)$ στην εξίσωση (4.9), έχουμε:

$$\varphi''(\xi) = \beta^2 \varphi_0 \sin(\pi\xi) - \frac{\alpha\varphi_0 \left(\frac{(\pi^2\xi^2 - 4)\sin(\pi\xi)}{\pi} - \frac{2\sin(\pi\xi)}{\pi} + 4\xi\cos(\pi x)\xi \right)}{\pi^3} + (\mu\varphi_0 - \frac{\alpha\varphi_0}{\pi^2})\xi$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση:

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi_0\left(-\frac{\cos(\pi\xi)(-\pi^2\alpha\xi^2+8\alpha+\pi^4\beta^2}{\pi}-\frac{1}{2}\pi^2\alpha\xi^2-6\alpha\xi\sin(\pi\xi)\right)}{\pi^4}+$$

$$+\frac{\varphi_0\left(-\frac{4\alpha\cos(\pi\xi)}{\pi}+\frac{1}{2}\pi^4\mu\xi^2\right)}{\pi^4}+C_3 \tag{4.10}$$

$$\varphi(\xi)=\frac{\varphi_0\left(-\frac{2\sin(\pi\xi)(-\pi^2\alpha\xi^2+14\alpha+\pi^4\beta^2)}{\pi}+\frac{1}{3}\pi^3\xi^3(\pi^2\mu-\alpha)\right)}{2\pi^5}+$$

$$+\frac{\varphi_0\left(-\frac{12\alpha\sin(\pi\xi)}{\pi}+16\alpha\xi\cos(\pi\xi)\right)}{2\pi^5}+C_3\xi+C_4 \tag{4.11}$$

Η εξίσωση (4.11) για ξ=0 μας δίνει:

$$C_4=0$$

Η εξίσωση (4.10) για $\xi=\frac{1}{2}$ μας δίνει:

$$C_3=\frac{\varphi_0\left(-\frac{\pi^2\alpha}{8}-3\alpha+\frac{\pi^4\mu}{8}\right)}{\pi^4}$$

Αντικαθιστώντας τις C_3 και C_4 στην εξίσωση (4.11), έχουμε:

$$\varphi(\xi)=\frac{\varphi_0\left(-\frac{2\sin(\pi\xi)(-\pi^2\alpha\xi^2+14\alpha+\pi^4\beta^2)}{\pi}+\frac{1}{3}\pi^3\xi^3(\pi^2\mu-\alpha)\right)}{2\pi^5}+$$

$$+\frac{\varphi_0\left(-\frac{12\alpha\sin(\pi\xi)}{\pi}+16\alpha\xi\cos(\pi\xi)\right)}{2\pi^5}+\frac{\varphi_0\left(-\frac{\pi^2\alpha}{8}-3\alpha+\frac{\pi^4\mu}{8}\right)}{\pi^4}\xi \tag{4.12}$$

Έχουμε ορίσει ότι η φ_0 είναι η γωνία στροφής στο μέσον της δικού. Δηλαδή $\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0$.

Θέτοντας $\xi = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση (4.12), έχουμε:

$$\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi_0\left(\left(-480+42\pi^2+\pi^4\right)\alpha-\pi^4\left(24\beta^2+\pi^2\mu\right)\right)}{24\pi^6} = \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1\left(\left(-480+42\pi^2+\pi^4\right)\alpha-\pi^4\left(24\beta^2+\pi^2\mu\right)\right)}{24\pi^6} = 1$$

Μετά από αντικατάσταση των όρων β^2, α, μ, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{1\left(\left(-480+42\pi^2+\pi^4\right)\left(\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\right)-\pi^4\left(24\left(\frac{GJ}{EC_w}l^2\right)+\pi^2\left(-\frac{Pl^3\kappa}{2EC_w}\right)\right)\right)}{24\pi^6} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{298,015GJEI_y}{l^4} - \frac{61,215EI_y\kappa}{l^3}P + \frac{2938,304EI_yEC_w}{l^6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^2 + \frac{61,215EI_y\kappa}{l^3}P + \left(\frac{30,6075EI_y\kappa}{l^3}\right)^2 =$$

$$= \frac{298,015GJEI_y}{l^4} + \frac{2938,304EI_yEC_w}{l^6} + \left(\frac{30,6075EI_y\kappa}{l^3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(P + \frac{30,6075EI_y\kappa}{l^3}\right)^2 =$$

$$= \frac{298,015GJEI_y}{l^4} + \frac{2938,304EI_yEC_w}{l^6} + \left(\frac{30,6075EI_y\kappa}{l^3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \sqrt{\frac{298,015GJEI_y}{l^4} + \frac{2938,304EI_yEC_w}{l^6} + \left(\frac{30,6075EI_y\kappa}{l^3}\right)^2} - \frac{30,6075EI_y\kappa}{l^3} \tag{4.13}$$

Η μέγιστη ροπή εμφανίζεται στο μέσο της δοκού, άρα η M_{cr} ισούται με:

$$M_{cr} = \frac{P_{cr} l}{4}$$

Λαβαίνοντας υπόψη την P_{cr} που υπολογίσαμε, καταλήγουμε στην:

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{18,625GJEI_y}{l^2} + \frac{183,64EI_yEC_w}{l^4} + \left(\frac{7.65EI_y\kappa}{l^2}\right)^2} - \frac{7.65EI_y\kappa}{l^2}$$

Παρατηρήσεις

Όταν η κατακόρυφη δύναμη P εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής (το οποίο συμπίπτει με το κέντρο διάτμησης λόγω διπλής συμμετρίας), ο όρος κ μηδενίζεται και η M_{cr} μετατρέπεται σε:

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{18,625GJEI_y}{l^2} + \frac{183,64EI_yEC_w}{l^4}}$$

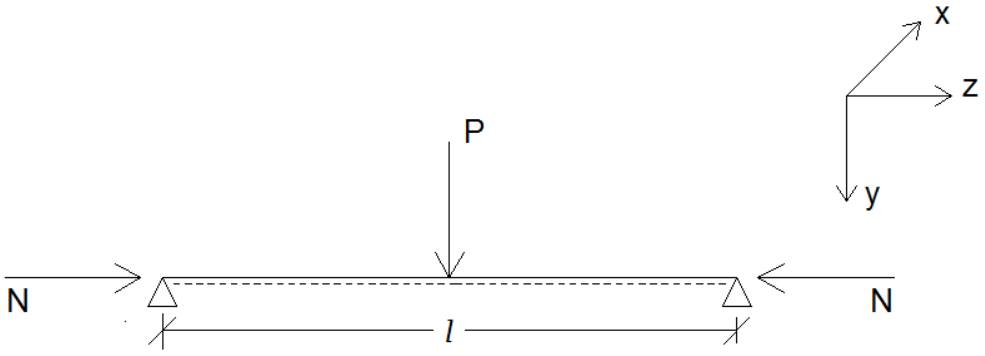
Όταν η κατακόρυφη δύναμη P εφαρμόζεται στο άνω πέλμα της διατομής, ο όρος κ ισούται με $\frac{h}{2}$ (όπου h το ύψος της διατομής) και η M_{cr} μετατρέπεται σε:

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{18,625GJEI_y}{l^2} + \frac{183,64EI_yEC_w}{l^4} + \left(\frac{7.65EI_yh}{2l^2}\right)^2} - \frac{7.65EI_yh}{2l^2}$$

Όταν η κατακόρυφη δύναμη P εφαρμόζεται στο κάτω πέλμα της διατομής, ο όρος κ ισούται με $-\frac{h}{2}$ (όπου h το ύψος της διατομής) και η M_{cr} μετατρέπεται σε:

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{18,625GJEI_y}{l^2} + \frac{183,64EI_yEC_w}{l^4} + \left(\frac{7.65EI_yh}{2l^2}\right)^2} + \frac{7.65EI_yh}{2l^2}$$

4.2.2 Με αξονική δύναμη



Σχήμα 4.2 Αμφιέρειστη δοκός με συγκεντρωμένο φορτίο *P* στο μέσον της και αξονική δύναμη *N*

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής *I* (Σχ.4.2) η οποία καταπονείται από τη δράση συγκεντρωμένου φορτίου *P* στο μέσον της και από σταθερή αξονική δύναμη *N*. Η αξονική δύναμη *N* ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου για την οποία το επίπεδο κάμψης *zy* παύει να είναι ευσταθές και η δοκός υπόκειται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Υποθέτουμε ότι κατά την κάμψη τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες *x* και *y* ενώ η στροφή τους περί τον κεντροβαρικό άξονα *z* είναι αδύνατη. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3, θεωρούμε ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο *zy* και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία φ περί τον άξονα *z*.

Είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και τις ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας για τη δοκό του σχήματος (4.2). Οι εξωτερικές ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας θα υπολογιστούν όπως στο κεφάλαιο (3.3).

Οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων είναι:

$$M_x = \frac{P}{2} z$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = \frac{P}{2}(u_m + \varphi_0 \kappa - u)$$

Όπου:

u_m, το βέλος (κατά τον άξονα *x*) στο μέσον της δοκού

φ_0, η γωνία στροφής στο μέσον της δοκού

κ, η κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο βάρους της διατομής (θετικό από το κέντρο βάρους και πάνω), με $-\frac{h}{2} \le \kappa \le \frac{h}{2}$.

Παρατήρηση

Ο όρος $\varphi_o\kappa$ είναι μηδενικός όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής. Όταν εφαρμόζεται πάνω από το κέντρο βάρους, είναι θετικός, η M_z αυξάνεται και κατά συνέπεια η τιμή του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού μειώνεται. Το αντίστροφο συμβαίνει όταν εφαρμόζεται κάτω από το κέντρο βάρους της διατομής.

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$M'_x = M_x \cos\varphi \approx M_x$$
$$M'_y = -M_x \sin\varphi \approx -M_x\varphi$$
$$M'_z = M_x \sin\frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(u_m + \varphi_0\kappa - u) \approx M_x \frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(u_m + \varphi_0\kappa - u)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} + Nw = -M'_x$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + Nu = M'_y$$
$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \mathrm{M}'_z$$

Αντικαθιστώντας τις M'_x, M'_y, M'_z στις παραπάνω εξισώσεις:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} + Nw = -\frac{P}{2}z \tag{4.14}$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + Nu = -\frac{P}{2}z\varphi \tag{4.15}$$
$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{P}{2}(u_m + \varphi_0\kappa - u) + \frac{P}{2}z\frac{du}{dz} \tag{4.16}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση (4.16) ως προς z:

$$GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4} = -\frac{P}{2}\frac{du}{dz} + \frac{P}{2}\frac{du}{dz} + \frac{P}{2}z\frac{d^2u}{dz^2}$$

Σημειώνεται ότι $\frac{du_m}{dz} = 0$ και $\frac{d(\varphi_0\kappa)}{dz} = 0$, γιατί u_m και φ_0 είναι σταθεροί αριθμοί και ανεξάρτητοι του z.

Λύνουμε ως προς $\frac{d^2u}{dz^2}$:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{GJ\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w\dfrac{d^4\varphi}{dz^4}}{\dfrac{P}{2}z} \tag{4.17}$$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση (4.16) ως προς *z*:

$$GJ\varphi(z) - EC_w\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{P}{2}u_m z + \frac{P}{2}\varphi_0\kappa z + \frac{P}{2}zu(z) - 2\frac{P}{2}\int u(z)dz + C_1 \tag{4.18}$$

Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να κάνουμε την παραδοχή

$$2\frac{P}{2}\int u(z)dz = \frac{P}{2}zu_m$$

Άρα η εξίσωση (4.18) μετατρέπεται σε:

$$GJ\varphi(z) - EC_w\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{P}{2}u_m z + \frac{P}{2}\varphi_0\kappa z + \frac{P}{2}zu(z) - \frac{P}{2}zu_m + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow GJ\varphi(z) - EC_w\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{P}{2}\varphi_0\kappa z + \frac{P}{2}zu(z) + C_1$$

Αξιοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες $\varphi(0) = \varphi''(0) = u(0) = 0$ και θέτοντας $z = 0$ στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε:

$$C_1 = 0$$

Άρα

$$GJ\varphi(z) - EC_w\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{P}{2}\varphi_0\kappa z + \frac{P}{2}zu(z)$$

Λύνουμε ως προς u(z):

$$u(z) = \frac{2GJ}{Pz}\varphi(z) - \frac{2EC_w}{Pz}\varphi''(z) - \varphi_0\kappa \tag{4.19}$$

Η εξίσωση (4.15) λόγω των (4.17) και (4.19) γίνεται:

$$-EI_y\frac{2EC_w}{Pz}\varphi''''(z) + EI_y\frac{2GJ}{Pz}\varphi''(\mathrm{z}) - N\frac{2EC_w}{Pz}\varphi''(\mathrm{z}) +$$

$$+N\frac{2GJ}{Pz}\varphi(z) - N\varphi_0\kappa = -\frac{P}{2}z\varphi(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi''''(z) - \frac{2EI_yGJ - 2EC_wN}{2EI_yEC_w}\varphi''(z) - \left(\frac{2GJN}{2EI_yEC_w} + \frac{P^2}{4EI_yEC_w}z^2\right)\varphi(z) =$$

$$= -\frac{N\varphi_0\kappa P}{2EI_yEC_w}z \tag{4.20}$$

Θέτουμε $\xi = \frac{z}{l}$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{dz} = \frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{dz} = \frac{1}{l}\frac{d^2\varphi}{dzd\xi} = \frac{1}{l}\frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{d\xi} = \frac{1}{l}\frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{d\xi} = \frac{1}{l^2}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3}\frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4}\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (4.20) θα έχουμε:

$$\frac{1}{l^4}\varphi''''(\xi) - \frac{2EI_yGJ - 2EC_wN}{2EI_yEC_w}\frac{1}{l^2}\varphi''(\xi) - \left(\frac{2GJN}{2EI_yEC_w} + \frac{P^2}{4EI_yEC_w}\xi^2 l^2\right)\varphi(\xi) =$$

$$= -\frac{N\varphi_0\kappa P}{2EI_yEC_w}\xi l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi''''(\xi) - \frac{2EI_yGJ - 2EC_wN}{2EI_yEC_w}l^2\varphi''(\xi) - \left(\frac{2GJNl^4}{2EI_yEC_w} + \frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\xi^2\right)\varphi(\xi) =$$

$$= -\frac{N\varphi_0\kappa Pl^5}{2EI_yEC_w}\xi$$

Θέτουμε:

$$\beta^2 = \frac{2EI_yGJ - 2EC_wN}{2EI_yEC_w}l^2 \ , \ \nu = \frac{2GJNl^4}{2EI_yEC_w} \ , \ \alpha = \frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w} \ , \ \gamma = -\frac{N\varphi_0\kappa Pl^5}{2EI_yEC_w}$$

επομένως καταλήγουμε στη σχέση:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2\varphi''(\xi) - \gamma\xi = (\nu + \alpha\xi^2)\varphi(\xi) \tag{4.21}$$

Θα ασχοληθούμε με τη μισή δοκό ($0 \le z \le \frac{l}{2}$) λόγω συμμετρίας. Οι συνοριακές συνθήκες που θα αξιοποιήσουμε είναι:

$$GJ\varphi'(\frac{l}{2}) - EC_w\varphi'''(\frac{l}{2}) = \frac{P}{2}\kappa\varphi_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow GJ\varphi'(\frac{1}{2})\frac{1}{l} - EC_w\varphi'''(\frac{1}{2})\frac{1}{l^3} = \frac{P}{2}\kappa\varphi_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi'''(\frac{1}{2}) = -\frac{Pl^3\kappa}{2EC_w}\varphi_0$$

Όπου μ=$-\frac{Pl^3\kappa}{2EC_w}$

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi''(0) = 0$$
$$\varphi'(\frac{1}{2}) = 0$$

Είναι προφανές ότι $\varphi'''(\frac{1}{2}) = 0$, άρα και μ=0, όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής.

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της προσεγγιστικής συνάρτησης για τη γωνία στροφής φ της διατομής, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Θέτουμε:

$$\varphi(\mathrm{z}) = \varphi_0 \sin(\frac{\pi z}{l}), 0 \le \mathrm{z} \le l$$

ή

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \sin(\pi\xi), 0 \le \xi \le 1$$

Όπου φ_0, είναι η γωνία στροφής στο μέσον της αμφιέρειστης δοκού, όταν αυτή εκτρέπεται πλευρικά.

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω προσεγγιστική συνάρτηση στην εξίσωση (4.21), έχουμε:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2\varphi''(\xi) - \gamma\xi = (\nu + \alpha\xi^2)\varphi_0 \sin(\pi\xi) \qquad (4.22)$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση της (4.22):

$$\varphi'''(\xi)-\beta^2\varphi'(\xi)=-\frac{\alpha\varphi_0\left(\pi^2\xi^2-2\right)\cos\left(\pi\xi\right)}{\pi^3}+\frac{2\alpha\varphi_0\xi\sin\left(\pi\xi\right)}{\pi^2}+\frac{\gamma\xi^2}{2}-\frac{\varphi_0\nu\cos\left(\pi\xi\right)}{\pi}+C_2 \tag{4.23}$$

$$\varphi''(\xi)-\beta^2\varphi(\xi)=\frac{-\frac{2\varphi_0\sin\left(\pi\xi\right)\left(\pi^2\alpha\xi^2-4\alpha+\pi^2\nu\right)}{\pi}+\frac{4\alpha\varphi_0\sin\left(\pi\xi\right)}{\pi}-8\alpha\varphi_0\xi\cos\left(\pi\xi\right)}{2\pi^3}+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\pi^3\gamma\xi^3}{2\pi^3}+C_2\xi+C_3 \tag{4.24}$$

Η εξίσωση (4.24) για $\xi=0$ μας δίνει:

$$C_3=0$$

Η εξίσωση (4.23) για $\xi=\frac{1}{2}$ μας δίνει:

$$C_2=\mu\varphi_0-\left(\frac{\alpha\varphi_0}{\pi^2}+\frac{\gamma}{8}\right)$$

Αντικαθιστώντας τις C_2, C_3 και $\varphi(\xi)$ στην εξίσωση (4.24), έχουμε:

$$\varphi''(\xi)=\beta^2\varphi_0\sin(\pi\xi)+\frac{-\frac{2\varphi_0\sin\left(\pi\xi\right)\left(\pi^2\alpha\xi^2-4\alpha+\pi^2\nu\right)}{\pi}+\frac{4\alpha\varphi_0\sin\left(\pi\xi\right)}{\pi}-8\alpha\varphi_0\xi\cos\left(\pi\xi\right)}{2\pi^3}+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\pi^3\gamma\xi^3}{2\pi^3}+\left(\mu\varphi_0-\left(\frac{\alpha\varphi_0}{\pi^2}+\frac{\gamma}{8}\right)\right)\xi$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση:

$$\varphi'(\xi)=\frac{-\frac{24\varphi_0\cos\left(\pi\xi\right)\left(-\pi^2\alpha\xi^2+8\alpha+\pi^4\beta^2-\pi^2\nu\right)}{\pi}-\frac{3}{2}\pi^2\xi^2\left(8\alpha\varphi_0+\pi^2\gamma-8\pi^2\varphi_0\mu\right)}{24\pi^4}+$$

$$+\frac{-144\alpha\varphi_0\xi\sin\left(\pi\xi\right)-\frac{96\alpha\varphi_0\cos\left(\pi\xi\right)}{\pi}+\pi^4\gamma\xi^4}{24\pi^4}+C_4 \tag{4.25}$$

$$\varphi(\xi)=\frac{-\frac{48\varphi_0\sin(\pi\xi)\left(-\pi^2\alpha\xi^2+14\alpha+\pi^4\beta^2-\pi^2\nu\right)}{\pi}-\frac{288\alpha\varphi_0\sin(\pi\xi)}{\pi}}{48\pi^5}+$$

$$+\frac{\frac{1}{5}\pi^3\xi^3\left(-40\alpha\varphi_0+2\pi^2\gamma\xi^2-5\pi^2\gamma+40\pi^2\varphi_0\mu\right)+384\alpha\varphi_0\xi\cos(\pi\xi)}{48\pi^5}+C_4\xi+C_5 \qquad (4.26)$$

Η εξίσωση (4.26) για $\xi=0$ μας δίνει:

$$C_5=0$$

Η εξίσωση (4.25) για $\xi=\frac{1}{2}$ μας δίνει:

$$C_4=-\frac{-\frac{3}{8}\pi^2\left(8\alpha\varphi_0+\pi^2\gamma-8\pi^2\varphi_0\mu\right)-72\alpha\varphi_0+\frac{\pi^4\gamma}{16}}{24\pi^4}$$

Αντικαθιστώντας τις C_4 και C_5 στην εξίσωση (4.26), έχουμε:

$$\varphi(\xi)=\frac{-\frac{48\varphi_0\sin(\pi\xi)\left(-\pi^2\alpha\xi^2+14\alpha+\pi^4\beta^2-\pi^2\nu\right)}{\pi}-\frac{288\alpha\varphi_0\sin(\pi\xi)}{\pi}}{48\pi^5}+$$

$$+\frac{\frac{1}{5}\pi^3\xi^3\left(-40\alpha\varphi_0+2\pi^2\gamma\xi^2-5\pi^2\gamma+40\pi^2\varphi_0\mu\right)+384\alpha\varphi_0\xi\cos(\pi\xi)}{48\pi^5}+$$

$$+\left(-\frac{-\frac{3}{8}\pi^2\left(8\alpha\varphi_0+\pi^2\gamma-8\pi^2\varphi_0\mu\right)-72\alpha\varphi_0+\frac{\pi^4\gamma}{16}}{24\pi^4}\right)\xi \qquad (4.27)$$

Έχουμε ορίσει ότι η φ_0 είναι η γωνία στροφής στο μέσον της δικού. Δηλαδή $\varphi(\frac{1}{2})=\varphi_0$. Θέτοντας $\xi=\frac{1}{2}$ στην εξίσωση (4.27), έχουμε:

$$\varphi(\frac{1}{2})=\varphi_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{48\left(14\alpha-\frac{\pi^2\alpha}{4}+\pi^4\beta^2-\pi^2\nu\right)}{\pi}+\frac{1}{40}\pi^3\left(-40\alpha-\frac{9\pi^2\gamma}{2}+40\pi^2\mu\right)-\frac{288\alpha}{\pi}}{48\pi^5}-$$

$$-\frac{-\frac{3}{8}\pi^2\left(8\alpha+\pi^2\gamma-8\pi^2\mu\right)-72\alpha+\frac{\pi^4\gamma}{16}}{48\pi^4}=1$$

Σημειώνεται ότι ο όρος γ περιέχει τον όρο φ_0.

Μετά από αντικατάσταση των όρων β^2, ν, α, $\frac{\gamma}{\varphi_0}$, μ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{-\frac{48\left(14\left(\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\right)-\frac{\pi^2\left(\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\right)}{4}+\pi^4\left(\frac{2EI_yGJ-2EC_wN}{2EI_yEC_w}l^2\right)-\pi^2\left(\frac{2GJNl^4}{2EI_yEC_w}\right)\right)}{\pi}}{48\pi^5}+$$

$$+\frac{\frac{1}{40}\pi^3\left(-40\left(\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\right)-\frac{9\pi^2\left(-\frac{N\kappa Pl^5}{2EI_yEC_w}\right)}{2}+40\pi^2\left(-\frac{Pl^3\kappa}{2EC_w}\right)\right)}{48\pi^5}-$$

$$-\frac{\frac{288\left(\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\right)}{\pi}}{48\pi^5}-$$

$$-\frac{-\frac{3}{8}\pi^2\left(8\left(\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\right)+\pi^2\left(-\frac{N\kappa Pl^5}{2EI_yEC_w}\right)-8\pi^2\left(-\frac{Pl^3\kappa}{2EC_w}\right)\right)}{48\pi^4}-$$

$$-\frac{-72\left(\frac{P^2l^6}{4EI_yEC_w}\right)+\frac{\pi^4\left(-\frac{N\kappa Pl^5}{2EI_yEC_w}\right)}{16}}{48\pi^4}=1 \qquad (4.28)$$

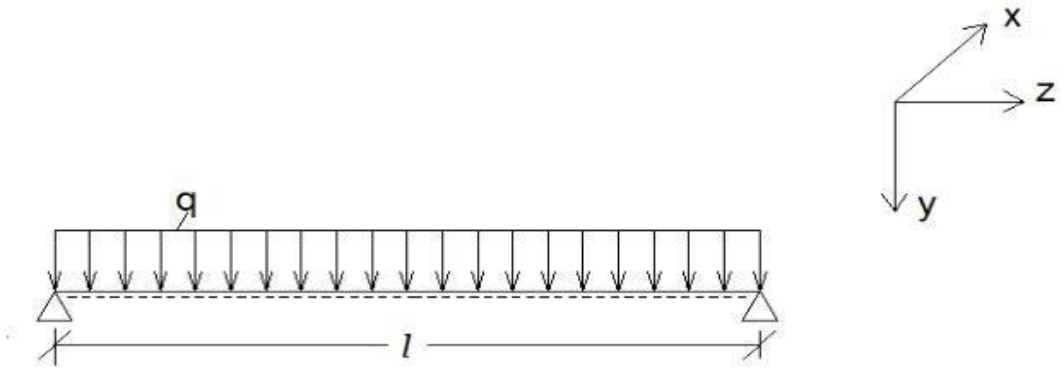
Η εξίσωση (4.28) περιγράφει τη σχέση που συνδέει την τιμή του συγκεντρωμένου φορτίου *P* με την αντίστοιχη τιμή την αξονικής δύναμης *N* που δρουν ταυτόχρονα στο φορέα και προκαλούν στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Στην εν λόγω εξίσωση περιλαμβάνονται οι όροι $\gamma=-\frac{N\varphi_0\kappa Pl^5}{2EI_yEC_w}$ και $\mu=-\frac{Pl^3\kappa}{2EC_w}$. Όπως αναλύσαμε και στο κεφάλαιο (4.2.1), όταν το φορτίο *P* ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής και κατ επέκταση στο κέντρο διάτμησης (λόγω διπλής συμμετρίας) ο όρος κ μηδενίζεται, άρα και $\gamma=0$, $\mu=0$. Εάν ασκήσουμε φορτίο στο άνω πέλμα της διατομής τότε $\kappa=\frac{h}{2}$, ενώ αν ασκήσουμε φορτίο στο κάτω πέλμα, τότε $\kappa=-\frac{h}{2}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν το φορτίο *P* ασκείται πάνω από το κέντρο βάρους, "επιβαρύνει" το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Το αντίθετο συμβαίνει όταν ασκείται κάτω από το κέντρο βάρους.

4.3 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως *q* με ταυτόχρονη δράση (ή μη) αξονικής θλιπτικής δύναμης *N*

Θα γίνει χρήση της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\varphi(z)=\varphi_0 \sin(\frac{\pi z}{l})$ για την προσέγγιση της γωνίας στροφής φ. Το φορτίο q θα εφαρμοστεί εκτός από το κέντρο βάρους, στο άνω και κάτω πέλμα των διατομών της δοκού.

4.3.1 Χωρίς αξονική δύναμη



Σχήμα 4.3 Αμφιέρειστη δοκός-ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο *q*

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής *I* (Σχ.4.3) η οποία φορτίζεται από ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο *q*. Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου για την οποία το επίπεδο κάμψης *zy* παύει να είναι ευσταθές και η δοκός υπόκειται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Υποθέτουμε ότι κατά την κάμψη τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες *x* και *y* ενώ η στροφή τους περί τον κεντροβαρικό άξονα *z* είναι αδύνατη. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3, θεωρούμε ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο *zy* και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία φ περί τον άξονα *z*.

Είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και τις ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας για τη δοκό του σχήματος (4.3). Οι εξωτερικές ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας θα υπολογιστούν όπως στο κεφάλαιο (3.3).

Οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων είναι:

$$M_x = \frac{qz}{2}(l-z)$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right) dz - \frac{ql}{2} u(z) + qzu(z) - q\int_0^z \left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right) dz$$

Όπου:
κ, η κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο βάρους της διατομής (θετικό από το κέντρο βάρους και πάνω), με $-\frac{h}{2} \le \kappa \le \frac{h}{2}$.

Παρατήρηση
Ο όρος $\varphi(z)\kappa$ είναι μηδενικός όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής. Όταν εφαρμόζεται πάνω από το κέντρο βάρους, είναι θετικός, η M_z αυξάνεται και κατά συνέπεια η τιμή του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού μειώνεται. Το αντίστροφο συμβαίνει όταν εφαρμόζεται κάτω από το κέντρο βάρους της διατομής.

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$M'_x = M_x \cos\varphi \approx M_x$$
$$M'_y = -M_x \sin\varphi \approx -M_x\varphi$$
$$M'_z = M_x \sin\frac{du}{dz} + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right) dz - \frac{ql}{2} u(z) + qzu(z) - q\int_0^z \left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right) dz$$
$$\approx M_x \frac{du}{dz} + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right) dz - \frac{ql}{2} u(z) + qzu(z) - q\int_0^z \left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right) dz$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} = -M'_x$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = M'_y$$
$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \mathrm{M}'_z$$

Αντικαθιστώντας τις M'_x, M'_y, M'_z στις παραπάνω εξισώσεις:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{qz}{2}(l - z) \tag{4.29}$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{qz}{2}(l - z)\varphi \tag{4.30}$$

$$GJ\frac{d\varphi}{dz}-EC_w\frac{d^3\varphi}{dz^3}=\int_0^{\frac{l}{2}}\left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz-\frac{ql}{2}u(z)+qzu(z)-q\int_0^{z}\left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz+$$

$$+\frac{qz}{2}(l-z)\frac{du}{dz} \tag{4.31}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση (4.31) ως προς z:

$$GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2}-EC_w\frac{d^4\varphi}{dz^4}=-\frac{ql}{2}\frac{du}{dz}+qu(z)+qz\frac{du}{dz}-qu(z)-q\varphi(z)\kappa+$$

$$+\frac{ql}{2}\frac{du}{dz}+\frac{ql}{2}z\frac{d^2u}{dz^2}-qz\frac{du}{dz}-q\frac{z^2}{2}\frac{d^2u}{dz^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC_w\frac{d^4\varphi}{dz^4}-GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2}=-\frac{q}{2}z\left(l-z\right)\frac{d^2u}{dz^2}+q\kappa\varphi(z) \tag{4.32}$$

Σημειώνεται ότι η παράγωγος του $\int_0^{\frac{l}{2}}\left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz$ ισούται με μηδέν (ορισμένο ολοκλήρωμα).

Από την εξίσωση (4.30) παίρνουμε:

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{-\frac{qz}{2}(l-z)}{EI_y}\varphi$$

το οποίο αν το αντικαταστήσουμε στην (4.32):

$$EC_w\frac{d^4\varphi}{dz^4}-GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{q^2}{4}z^2\left(l-z\right)^2\varphi(z)+q\kappa\varphi(z) \tag{4.33}$$

Θέτουμε $\xi=\frac{z}{l}$

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dz}=\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{dz}=\frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{dz}=\frac{1}{l}\frac{d^2\varphi}{dzd\xi}=\frac{1}{l}\frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{d\xi}=\frac{1}{l}\frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{d\xi}=\frac{1}{l^2}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3}=\frac{1}{l^3}\frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4}\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (4.33) θα έχουμε:

$$\frac{1}{l^4}EC_w\frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{1}{l^2}GJ\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{q^2}{2}\xi^2 l^2\left(l-\xi l\right)^2\varphi(\xi) + q\kappa\varphi(\xi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \frac{GJ}{EC_w}l^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}\xi^2\left(1-\xi\right)^2\varphi(\xi) + \frac{ql^4\kappa}{EC_w}\varphi(\xi)$$

Θέτουμε:

$$\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w}l^2,\ \alpha = \frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w},\ \gamma = \frac{ql^4\kappa}{EC_w}$$

επομένως καταλήγουμε στη σχέση:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2\varphi''(\xi) = \alpha\xi^2(1-\xi)^2\varphi(\xi) + \gamma\varphi(\xi) \tag{4.34}$$

Θα ασχοληθούμε με τη μισή δοκό ($0 \le z \le \frac{l}{2}$) λόγω συμμετρίας. Οι συνοριακές συνθήκες που θα αξιοποιήσουμε είναι:

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi''(0) = 0$$
$$\varphi'(\frac{1}{2}) = 0$$
$$\varphi'''(\frac{1}{2}) = 0$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της προσεγγιστικής συνάρτησης για τη γωνία στροφής φ της διατομής, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Θέτουμε:

$$\varphi(\mathrm{z}) = \varphi_0\sin(\frac{\pi z}{l}), 0 \le \mathrm{z} \le l$$

ή

$$\varphi(\xi) = \varphi_0\sin(\pi\xi), 0 \le \xi \le 1$$

Όπου φ_0, είναι η γωνία στροφής στο μέσον της αμφιέρειστης δοκού, όταν αυτή εκτρέπεται πλευρικά.

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω προσεγγιστική συνάρτηση στην εξίσωση (4.34), έχουμε:

$$\varphi''''(\xi)-\beta^2\varphi''(\xi)=\alpha\xi^2(1-\xi)^2\varphi_0\sin(\pi\xi)+\gamma\varphi_0\sin(\pi\xi) \tag{4.35}$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην εξίσωση (4.35):

$$\varphi'''(\xi)-\beta^2\varphi'(\xi)=\frac{\varphi_0 2\pi\alpha\left(2\xi-1\right)\left(\pi^2\left(\xi-1\right)\xi-6\right)\sin\left(\pi\xi\right)}{\pi^5}-$$

$$-\frac{\varphi_0\cos\left(\pi x\right)\left(\alpha\left(\pi^4\left(\xi-1\right)^2\xi^2-2\pi^2\left(6\xi^2-6\xi+1\right)+24\right)+\pi^4\gamma\right)}{\pi^5}+C_1 \tag{4.36}$$

$$\varphi''(\xi)-\beta^2\varphi(\xi)=-\frac{\varphi_0(\sin\left(\pi\xi\right)\left(\alpha\left(\pi^4\left(\xi-1\right)^2\xi^2-6\pi^2\left(6\xi^2-6\xi+1\right)+120\right)+\pi^4\gamma\right)}{\pi^6}-$$

$$-\frac{\varphi_0 4\pi\alpha\left(2\xi-1\right)\left(\pi^2\left(\xi-1\right)\xi-12\right)\cos\left(\pi\xi\right)}{\pi^6}+C_1\xi+C_2 \tag{4.37}$$

Η εξίσωση (4.37) για $\xi=0$ μας δίνει:

$$C_2=\frac{48\alpha\varphi_0}{\pi^5}$$

Η εξίσωση (4.36) για $\xi=\frac{1}{2}$ μας δίνει:

$$C_1=0$$

Αντικαθιστώντας τις C_1, C_2 και $\varphi(\xi)$ στην εξίσωση (4.37), έχουμε:

$$\varphi''(\xi)=\beta^2\varphi_0\sin(\pi\xi)-\frac{\varphi_0(\sin\left(\pi\xi\right)\left(\alpha\left(\pi^4\left(\xi-1\right)^2\xi^2-6\pi^2\left(6\xi^2-6\xi+1\right)+120\right)+\pi^4\gamma\right)}{\pi^6}-$$

$$-\frac{\varphi_0 4\pi\alpha\left(2\xi-1\right)\left(\pi^2\left(\xi-1\right)\xi-12\right)\cos\left(\pi\xi\right)}{\pi^6}+\frac{48\alpha\varphi_0}{\pi^5}$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην παραπάνω εξίσωση:

$$\varphi'(\xi) = -\frac{\varphi_0 6\pi\alpha\left((2\xi-1)\left(\pi^2(\xi-1)\xi-20\right)\sin(\pi\xi)-8\pi\xi\right)}{\pi^7} -$$

$$-\frac{-\varphi_0\cos(\pi\xi)\left(\alpha\left(\pi^4(\xi-1)^2\xi^2-12\pi^2\left(6\xi^2-6\xi+1\right)+360\right)+\pi^4\left(\gamma-\pi^2\beta^2\right)\right)}{\pi^7}+C_3 \tag{4.38}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi_0\sin(\pi\xi)\left(\alpha\left(\pi^4(\xi-1)^2\xi^2-20\pi^2\left(6\xi^2-6\xi+1\right)+840\right)+\pi^4\left(\gamma-\pi^2\beta^2\right)\right)}{\pi^8}+$$

$$+\frac{\varphi_0(24\pi^3\alpha\xi^2+8\pi\alpha(2\xi-1)\left(\pi^2(\xi-1)\xi-30\right)\cos(\pi\xi))}{\pi^8}+C_3\xi+C_4 \tag{4.39}$$

Η εξίσωση (4.39) για ξ=0 μας δίνει:

$$C_4 = -\frac{240\alpha\varphi_0}{\pi^7}$$

Η εξίσωση (4.38) για $\xi = \frac{1}{2}$ μας δίνει:

$$C_3 = -\frac{24\alpha\varphi_0}{\pi^5}$$

Αντικαθιστώντας τις C_3 και C_4 στην εξίσωση (4.39), έχουμε:

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi_0\sin(\pi\xi)\left(\alpha\left(\pi^4(\xi-1)^2\xi^2-20\pi^2\left(6\xi^2-6\xi+1\right)+840\right)+\pi^4\left(\gamma-\pi^2\beta^2\right)\right)}{\pi^8}+$$

$$+\frac{\varphi_0(24\pi^3\alpha\xi^2+8\pi\alpha(2\xi-1)\left(\pi^2(\xi-1)\xi-30\right)\cos(\pi\xi))}{\pi^8}+$$

$$+\left(-\frac{24\alpha\varphi_0}{\pi^5}\right)\xi+\left(-\frac{240\alpha\varphi_0}{\pi^7}\right) \tag{4.40}$$

Έχουμε ορίσει ότι η φ_0 είναι η γωνία στροφής στο μέσον της δικού. Δηλαδή $\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0$.

Θέτοντας $\xi = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση (4.40), έχουμε:

$$\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(840 + 10\pi^2 + \frac{\pi^4}{16}\right)\alpha + 6\pi^3\alpha + \pi^4\left(\gamma - \pi^2\beta^2\right)}{\pi^8} - \frac{12\alpha}{\pi^5} - \frac{240\alpha}{\pi^7} = 1$$

Μετά από αντικατάσταση των όρων β^2, α, γ, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Rightarrow \frac{\left(840 + 10\pi^2 + \frac{\pi^4}{16}\right)\left(\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}\right) + 6\pi^3\left(\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}\right) + \pi^4\left(\left(\frac{ql^4\kappa}{EC_w}\right) - \pi^2\left(\frac{GJ}{EC_w}l^2\right)\right)}{\pi^8} -$$

$$-\frac{12\left(\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}\right)}{\pi^5} - \frac{240\left(\frac{q^2 l^8}{4EI_y EC_w}\right)}{\pi^7} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 + \frac{66.44EI_y\kappa}{l^4}q + \left(\frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}\right)^2 + \frac{654.2GJEI_y}{l^6} + \frac{6451.6EI_y EC_w}{l^8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(q + \frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}\right)^2 = \left(\frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}\right)^2 + \frac{654.2GJEI_y}{l^6} + \frac{6451.6EI_y EC_w}{l^8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{cr} = \sqrt{\left(\frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}\right)^2 + \frac{654.2GJEI_y}{l^6} + \frac{6451.6EI_y EC_w}{l^8}} - \frac{33.22EI_y\kappa}{l^4} \qquad (4.41)$$

Η μέγιστη ροπή εμφανίζεται στο μέσο της δοκού, άρα η M_{cr} ισούται με:

$$M_{cr} = \frac{q_{cr} l^2}{8}$$

Λαβαίνοντας υπόψη την q_{cr} που υπολογίσαμε, καταλήγουμε στην:

$$M_{cr} = \frac{l^2}{8}\sqrt{\left(\frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}\right)^2 + \frac{654.2GJEI_y}{l^6} + \frac{6451.6EI_y EC_w}{l^8}} - \frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}$$

Παρατηρήσεις

Όταν το κατανεμημένο φορτίο q εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής (το οποίο συμπίπτει με το κέντρο διάτμησης λόγω διπλής συμμετρίας), ο όρος κ μηδενίζεται και η M_{cr} μετατρέπεται σε:

$$M_{cr} = \frac{l^2}{8}\sqrt{\frac{654.2GJEI_y}{l^6} + \frac{6451.6EI_yEC_w}{l^8}}$$

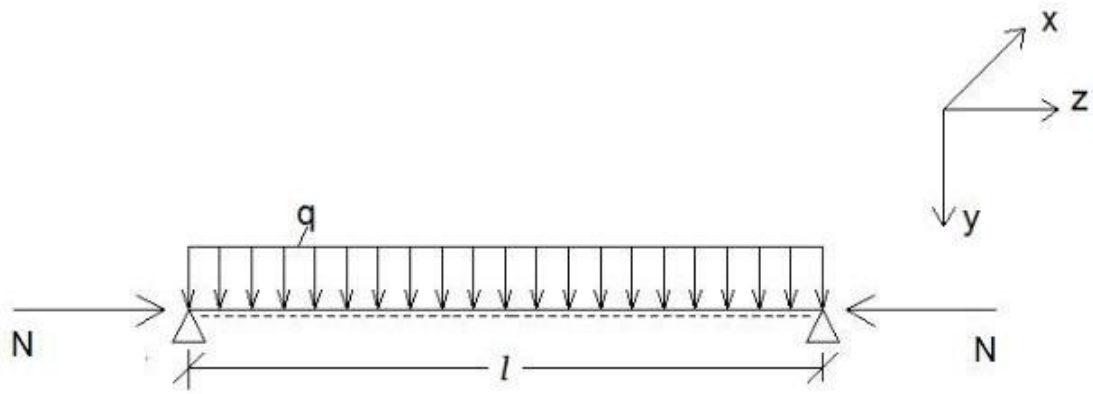
Όταν το κατανεμημένο φορτίο q εφαρμόζεται στο άνω πέλμα της διατομής, ο όρος κ ισούται με $\frac{h}{2}$ (όπου h το ύψος της διατομής) και η M_{cr} μετατρέπεται σε:

$$M_{cr} = \frac{l^2}{8}\sqrt{\left(\frac{33.22EI_yh}{2l^4}\right)^2 + \frac{654.2GJEI_y}{l^6} + \frac{6451.6EI_yEC_w}{l^8}} - \frac{33.22EI_yh}{2l^4}$$

Όταν το κατανεμημένο φορτίο q εφαρμόζεται στο κάτω πέλμα της διατομής, ο όρος κ ισούται με $-\frac{h}{2}$ (όπου h το ύψος της διατομής) και η M_{cr} μετατρέπεται σε:

$$M_{cr} = \frac{l^2}{8}\sqrt{\left(\frac{33.22EI_yh}{2l^4}\right)^2 + \frac{654.2GJEI_y}{l^6} + \frac{6451.6EI_yEC_w}{l^8}} + \frac{33.22EI_yh}{2l^4}$$

4.3.2 Με αξονική δύναμη



Σχήμα 4.4 Αμφιέρειστη δοκός-ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q και αξονική δύναμη N

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής I (Σχ.4.4) η οποία καταπονείται από ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q και αξονική δύναμη N. Η αξονική δύναμη N ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου για

την οποία το επίπεδο κάμψης *zy* παύει να είναι ευσταθές και η δοκός υπόκειται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Υποθέτουμε ότι κατά την κάμψη τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες *x* και *y* ενώ η στροφή τους περί τον κεντροβαρικό άξονα *z* είναι αδύνατη. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3, θεωρούμε ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο *zy* και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία φ περί τον άξονα *z*.

Είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και τις ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας για τη δοκό του σχήματος (4.4). Οι εξωτερικές ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας θα υπολογιστούν όπως στο κεφάλαιο (3.3).

Οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων είναι:

$$M_x = \frac{qz}{2}(l-z)$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz - \frac{ql}{2}u(z) + qzu(z) - q\int_0^z \left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz$$

Όπου:

κ, η κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο βάρους της διατομής (θετικό από το κέντρο βάρους και πάνω), με $-\frac{h}{2} \le \kappa \le \frac{h}{2}$.

Παρατήρηση

Ο όρος $\varphi(z)\kappa$ είναι μηδενικός όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο βάρους της διατομής. Όταν εφαρμόζεται πάνω από το κέντρο βάρους, είναι θετικός, η M_z αυξάνεται και κατά συνέπεια η τιμή του κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού μειώνεται. Το αντίστροφο συμβαίνει όταν εφαρμόζεται κάτω από το κέντρο βάρους της διατομής.

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$M'_x = M_x \cos\varphi \approx M_x$$
$$M'_y = -M_x \sin\varphi \approx -M_x\varphi$$
$$M'_z = M_x \sin\frac{du}{dz} + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz - \frac{ql}{2}u(z) + qzu(z) - q\int_0^z \left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz$$
$$\approx M_x \frac{du}{dz} + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz - \frac{ql}{2}u(z) + qzu(z) - q\int_0^z \left(u(z)+\varphi(z)\kappa\right)dz$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} + Nw = -M'_x$$

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + Nu = M'_y$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \mathrm{M}'_z$$

Αντικαθιστώντας τις M'_x, M'_y, M'_z στις παραπάνω εξισώσεις:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} + Nw = -\frac{qz}{2}(l-z) \tag{4.42}$$

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + Nu = -\frac{qz}{2}(l-z)\varphi \tag{4.43}$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right)dz - \frac{ql}{2}u(z) + qzu(z) - q\int_0^z \left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right)dz + \frac{qz}{2}(l-z)\frac{du}{dz} \tag{4.44}$$

Θέτουμε $\xi = \frac{z}{l}$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{dz} = \frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{dz} = \frac{1}{l}\frac{d^2\varphi}{dzd\xi} = \frac{1}{l}\frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{d\xi} = \frac{1}{l}\frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{d\xi} = \frac{1}{l^2}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3}\frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4}\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

Η σχέση (4.41) με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων γίνεται:

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + Nu = -\frac{qz}{2}(l-z)\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l^2}EI_y \frac{d^2u}{d\xi^2} + Nu = -\frac{q\xi l}{2}(l-\xi l)\varphi \xrightarrow{v=\frac{u}{l}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l^2}EI_y \frac{ld^2v}{d\xi^2} + Nvl = -\frac{ql^2}{2}(\xi - \xi^2)\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI_y \frac{d^2 v}{d\xi^2}\frac{1}{l} + Nvl = -\frac{ql^2}{2}(\xi - \xi^2)\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}''(\xi) + \frac{Nl^2}{EI_y}\mathrm{v}(\xi) = -\frac{ql^3}{2EI_y}(\xi - \xi^2)\varphi$$

Θέτουμε:

$$\beta^2 = \frac{Nl^2}{EI_y},\ \mu = -\frac{ql^3}{2EI_y}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}''(\xi) + \beta^2\,\mathrm{v}(\xi) = \mu(\xi - \xi^2)\varphi \qquad (4.45)$$

Η σχέση (4.44) με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων γίνεται:

$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \int_0^{\frac{l}{2}}\left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right)dz - \frac{ql}{2}u(z) + qzu(z) - q\int_0^{z}\left(u(z) + \varphi(z)\kappa\right)dz + \frac{qz}{2}(l - z)\frac{du}{dz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow GJ\frac{d\varphi}{ld\xi} - EC_w\frac{d^3\varphi}{l^3 d\xi^3} = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(u(z) + \varphi(\xi)\kappa\right)ld\xi - \frac{ql}{2}u(\mathrm{z}) + q\xi lu(z) -$$

$$-q\int_0^{\xi}\left(u(z) + \varphi(\xi)\kappa\right)ld\xi + \frac{ql^2}{2}(\xi - \xi^2)\frac{du}{ld\xi} \xrightarrow{v=\frac{u}{l}}$$

$$\Rightarrow GJ\frac{d\varphi}{ld\xi} - EC_w\frac{d^3\varphi}{l^3 d\xi^3} = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(lv(\xi) + \varphi(\xi)\kappa\right)ld\xi - \frac{ql}{2}lv(\xi) + q\xi llv(\xi) -$$

$$-q\int_0^{\xi}\left(lv(\xi) + \varphi(\xi)\kappa\right)ld\xi + \frac{ql^2}{2}(\xi - \xi^2)\frac{ldv}{ld\xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'''(\xi) - \frac{GJl^2}{EC_w}\varphi'(\xi) = -\frac{ql^5}{EC_w}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v(\xi)d\xi - \frac{1}{2}v(\xi) + \xi v(\xi) - \int_0^{\xi} v(\xi)d\xi + \frac{\xi - \xi^2}{2}v'(\xi)\right) -$$

$$-\frac{q\kappa l^4}{EC_w}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(\xi)d\xi - \int_0^{\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)$$

Θέτουμε:

$$\alpha^2=\frac{GJl^2}{EC_w},\ \delta=-\frac{ql^5}{EC_w},\ \gamma=-\frac{q\kappa l^4}{EC_w}$$

$$\Rightarrow \varphi'''(\xi)-\alpha^2\varphi'(\xi)=\delta\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v(\xi)d\xi-\frac{1}{2}v(\xi)+\xi v(\xi)-\int_0^{\xi} v(\xi)d\xi+\frac{\xi-\xi^2}{2}v'(\xi)\right)+$$

$$+\gamma\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(\xi)d\xi-\int_0^{\xi}\varphi(\xi)d\xi\right) \tag{4.46}$$

Ένας τρόπος υπολογισμού της $\varphi(\xi)$,είναι να υπολογίσουμε τη $v(\xi)$ από τη σχέση (4.45) και στη συνέχεια αντικαθιστώντας τη στη σχέση (4.46) και χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες που θα αναφέρουμε παρακάτω να προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα. Επειδή η επίλυση των δυο παραπάνω σχέσεων είναι αρκετά δύσκολη διαδικασία, θα χρησιμοποιήσουμε προς διευκόλυνση το μαθηματικό εργαλείο *Wolfram Mathematica*.

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της προσεγγιστικής συνάρτησης για τη γωνία στροφής φ της διατομής, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Θέτουμε:

$$\varphi(\mathrm{z})=\varphi_0\sin(\frac{\pi z}{l}),0\le \mathrm{z}\le l$$

ή

$$\varphi(\xi)=\varphi_0\sin(\pi\xi),0\le\xi\le 1$$

Όπου φ_0, είναι η γωνία στροφής στο μέσον της αμφιέρειστης δοκού, όταν αυτή εκτρέπεται πλευρικά.

Θα ασχοληθούμε με τη μισή δοκό ($0\le z\le\frac{l}{2}$) λόγω συμμετρίας. Οι συνοριακές συνθήκες που θα αξιοποιήσουμε είναι:

$$\varphi(0)=0$$
$$\varphi''(0)=0$$
$$\varphi'(\frac{1}{2})=0$$

Μετά από αντικατάσταση της $\varphi(\xi)$ στη σχέση (4.45), έχουμε:

$$\mathrm{v}''(\xi)+\beta^2\,\mathrm{v}(\xi)=\mu(\xi-\xi^2)\varphi_0\sin(\pi\xi)$$

Λόγω της πολυπλοκότητας που θα έχει η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, θα αντικαταστήσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με σειρές *Taylor*:

$$\sin x=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \text{ για όλα τα } x.$$

$$\cos x=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \text{ για όλα τα } x.$$

Μετά από δοκιμές που έγιναν και θα παρουσιαστούν σε επόμενο κεφάλαιο, καταλήξαμε πως για να είναι αποτελεσματική η προσέγγισή μας, πρέπει να συμπεριλάβουμε τους 4 πρώτους όρους κάθε έκφρασης. Έτσι το σφάλμα προσέγγισης δεν είναι πάνω από $\frac{x^9}{9!}$ για την *sin*(*x*) και $\frac{x^8}{8!}$ για την *cos*(*x*).

Η πρώτη διαφορική εξίσωση που καλούμαστε να λύσουμε, είναι η:

$$\mathrm{v}''(\xi)+\beta^2\,\mathrm{v}(\xi)=\mu(\xi-\xi^2)\varphi_0\left(\pi\xi-\frac{\pi^3\xi^3}{3!}+\frac{\pi^5\xi^5}{5!}-\frac{\pi^7\xi^7}{7!}\right) \tag{4.47}$$

Παρατήρηση

Επειδή θα γίνει χρήση του προγράμματος *Wolfram Mathematica*, για διευκόλυνση αντί των μεταβλητών ξ, β, μ, φ_0, θα χρησιμοποιηθούν οι μεταβλητές x, b, m, g αντίστοιχα.

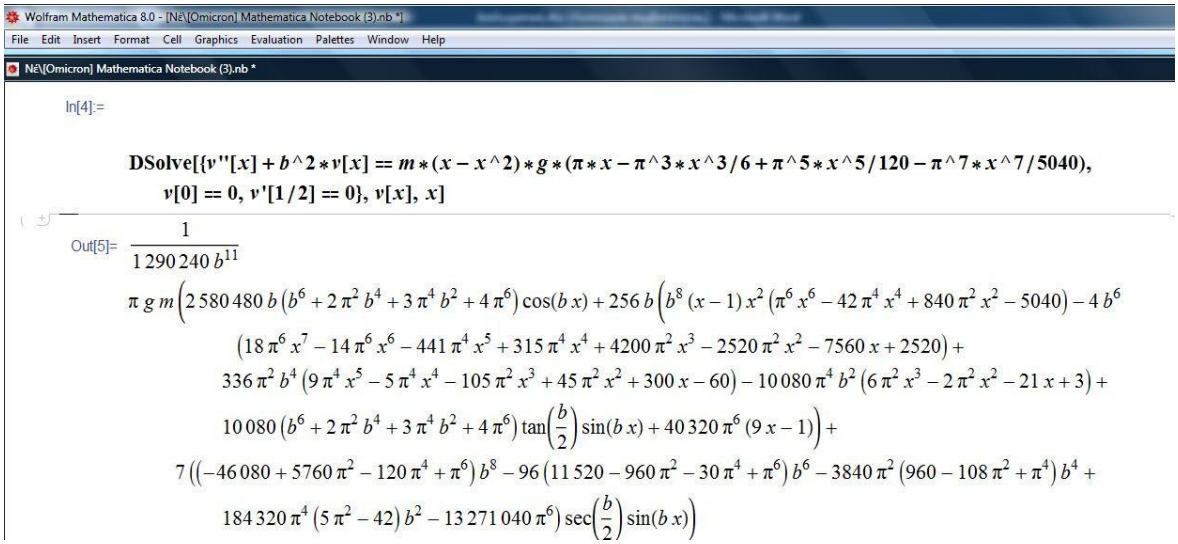
Με χρήση του *Mathematica* καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα:


```
DSolve[v''[x] + b^2*v[x] == m*(x - x^2)*g*(π*x - π^3*x^3/6 + π^5*x^5/120 - π^7*x^7/5040),
  v[x], x]
```

Out[2]= $\left\{\left\{v(x)\to\frac{1}{5040\,b^{10}}\right.\right.$
$(\pi^7 b^8 g m x^9-\pi^7 b^8 g m x^8-42\pi^5 b^8 g m x^7+42\pi^5 b^8 g m x^6+840\pi^3 b^8 g m x^5-840\pi^3 b^8 g m x^4-5040\pi b^8 g m x^3+$
$5040\pi b^8 g m x^2-72\pi^7 b^6 g m x^7+56\pi^7 b^6 g m x^6+1764\pi^5 b^6 g m x^5-1260\pi^5 b^6 g m x^4-16800\pi^3 b^6 g m x^3+$
$10080\pi^3 b^6 g m x^2+30240\pi b^6 g m x-10080\pi b^6 g m+3024\pi^7 b^4 g m x^5-1680\pi^7 b^4 g m x^4-35280\pi^5 b^4 g m x^3+$
$15120\pi^5 b^4 g m x^2+100800\pi^3 b^4 g m x-20160\pi^3 b^4 g m-60480\pi^7 b^2 g m x^3+20160\pi^7 b^2 g m x^2+$
$\left.\left.211680\pi^5 b^2 g m x-30240\pi^5 b^2 g m+362880\pi^7 g m x-40320\pi^7 g m)+c_2\sin(b x)+c_1\cos(b x)\right\}\right\}$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι στις στηρίξεις δεν επιτρέπεται καμία μετακίνηση κατά τους άξονες *x* και *y* παρά μόνο στροφή περί τον άξονα *z* μπορούμε να κάνουμε χρήση των

συνοριακών συνθηκών $v(0)=0$ και $v'(\frac{1}{2})=0$ και να υπολογίσουμε τους αγνώστους C_1 και C_2 που προέκυψαν. Η λύση της $v(\xi)$ είναι:



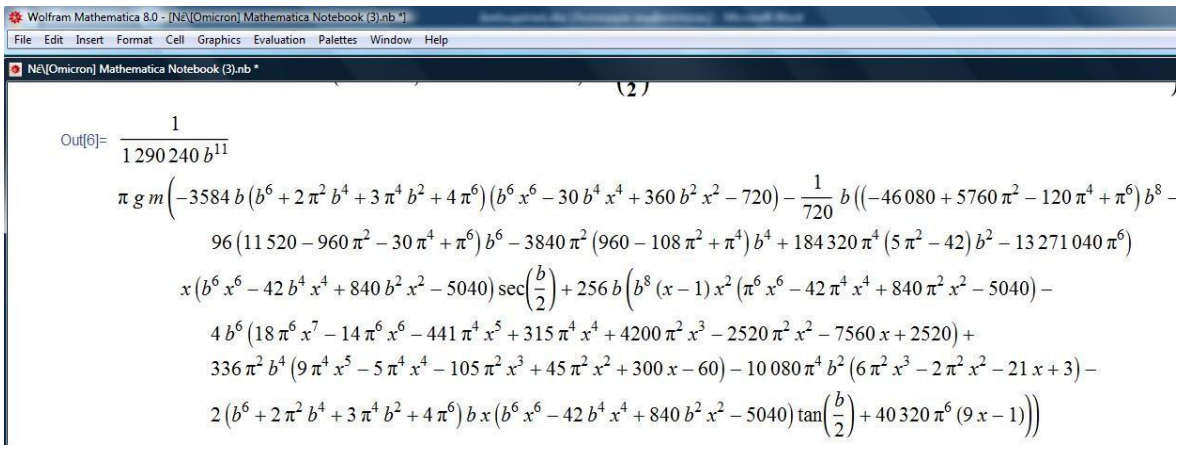
$$\frac{1}{1\,290\,240\,b^{11}}\pi\, g\, m\Big(2\,580\,480\, b\,(b^6+2\pi^2 b^4+3\pi^4 b^2+4\pi^6)\cos(b\,x)+256\, b\Big(b^8(x-1)\,x^2(\pi^6 x^6-42\pi^4 x^4+840\pi^2 x^2-5040)-4\, b^6 (18\pi^6 x^7-14\pi^6 x^6-441\pi^4 x^5+315\pi^4 x^4+4200\pi^2 x^3-2520\pi^2 x^2-7560\, x+2520)+336\pi^2 b^4(9\pi^4 x^5-5\pi^4 x^4-105\pi^2 x^3+45\pi^2 x^2+300\, x-60)-10\,080\pi^4 b^2(6\pi^2 x^3-2\pi^2 x^2-21\, x+3)+10\,080\,(b^6+2\pi^2 b^4+3\pi^4 b^2+4\pi^6)\tan\left(\frac{b}{2}\right)\sin(b\,x)+40\,320\pi^6(9\, x-1)\Big)+7\Big((-46\,080+5760\pi^2-120\pi^4+\pi^6)\, b^8-96\,(11\,520-960\pi^2-30\pi^4+\pi^6)\, b^6-3840\pi^2(960-108\pi^2+\pi^4)\, b^4+184\,320\pi^4(5\pi^2-42)\, b^2-13\,271\,040\pi^6\Big)\sec\left(\frac{b}{2}\right)\sin(b\,x)\Big)$$

Σε αυτό το σημείο θα αντικαταστήσουμε στη λύση της $v(\xi)$ τις σειρές Taylor:

$$\sin(\beta\xi)=\beta\xi-\frac{\beta^3\xi^3}{3!}+\frac{\beta^5\xi^5}{5!}-\frac{\beta^7\xi^7}{7!}$$

$$\cos(\beta\xi)=1-\frac{\beta^2\xi^2}{2!}+\frac{\beta^4\xi^4}{4!}-\frac{\beta^6\xi^6}{6!}$$

Οπότε η $v(\xi)$ παίρνει τη μορφή:



$$\frac{1}{1\,290\,240\,b^{11}}\pi\, g\, m\Big(-3584\, b\,(b^6+2\pi^2 b^4+3\pi^4 b^2+4\pi^6)(b^6 x^6-30\, b^4 x^4+360\, b^2 x^2-720)-\frac{1}{720}\, b\Big((-46\,080+5760\pi^2-120\pi^4+\pi^6)\, b^8-96\,(11\,520-960\pi^2-30\pi^4+\pi^6)\, b^6-3840\pi^2(960-108\pi^2+\pi^4)\, b^4+184\,320\pi^4(5\pi^2-42)\, b^2-13\,271\,040\pi^6\Big)\, x\,(b^6 x^6-42\, b^4 x^4+840\, b^2 x^2-5040)\sec\left(\frac{b}{2}\right)+256\, b\Big(b^8(x-1)\,x^2(\pi^6 x^6-42\pi^4 x^4+840\pi^2 x^2-5040)-4\, b^6(18\pi^6 x^7-14\pi^6 x^6-441\pi^4 x^5+315\pi^4 x^4+4200\pi^2 x^3-2520\pi^2 x^2-7560\, x+2520)+336\pi^2 b^4(9\pi^4 x^5-5\pi^4 x^4-105\pi^2 x^3+45\pi^2 x^2+300\, x-60)-10\,080\pi^4 b^2(6\pi^2 x^3-2\pi^2 x^2-21\, x+3)-2\,(b^6+2\pi^2 b^4+3\pi^4 b^2+4\pi^6)\, b\, x\,(b^6 x^6-42\, b^4 x^4+840\, b^2 x^2-5040)\tan\left(\frac{b}{2}\right)+40\,320\pi^6(9\, x-1)\Big)\Big)$$

Εφόσον υπολογίσαμε τη λύση της $v(\xi)$, θα ασχοληθούμε με την επίλυση της $\varphi(\xi)$:

$$\varphi'''(\xi)-\alpha^2\varphi'(\xi)=\delta\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v(\xi)d\xi-\frac{1}{2}v(\xi)+\xi v(\xi)-\int_0^{\xi} v(\xi)d\xi+\frac{\xi-\xi^2}{2}v'(\xi)\right)+$$

$$+\gamma\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(\xi)d\xi-\int_0^{\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)$$

Στην παραπάνω διαφορική εξίσωση θα αντικαταστήσουμε το $\varphi(\xi)$ με $\varphi_0\left(\pi\xi-\frac{\pi^3\xi^3}{3!}+\frac{\pi^5\xi^5}{5!}-\frac{\pi^7\xi^7}{7}\right)$

Είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τους επιμέρους όρους $\int_0^{\frac{1}{2}} v(\xi)d\xi$, $\int_0^{\xi} v(\xi)d\xi$ και $v'(\xi)$ για δική μας διευκόλυνση:

$\underline{v'(\xi)}$

N&\[Omicron] Mathematica Notebook (3).nb *

$$v'(x)=$$

$$\frac{1}{1\,290\,240\,b^{11}}$$

$$\pi\, g\, m\Big(-\frac{1}{720}\big((-46\,080+5760\,\pi^2-120\,\pi^4+\pi^6)\,b^8-96\,(11\,520-960\,\pi^2-30\,\pi^4+\pi^6)\,b^6-3840\,\pi^2\,(960-108\,\pi^2+\pi^4)\,b^4+$$

$$184\,320\,\pi^4\,(5\,\pi^2-42)\,b^2-13\,271\,040\,\pi^6\big)\,b\,(b^6\,x^6-42\,b^4\,x^4+840\,b^2\,x^2-5040)\sec\left(\frac{b}{2}\right)+$$

$$256\,b\Big(b^8\,x\,(9\,\pi^6\,x^7-8\,\pi^6\,x^6-294\,\pi^4\,x^5+252\,\pi^4\,x^4+4200\,\pi^2\,x^3-3360\,\pi^2\,x^2-15\,120\,x+10\,080)-$$

$$84\,b^6\,(2\,\pi^6\,(3\,x-2)\,x^5-15\,\pi^4\,(7\,x-4)\,x^3+120\,\pi^2\,(5\,x-2)\,x-360)+$$

$$1680\,\pi^2\,b^4\,(\pi^4\,(9\,x-4)\,x^3-9\,\pi^2\,(7\,x-2)\,x+60)-10\,080\,\pi^4\,b^2\,(2\,\pi^2\,x\,(9\,x-2)-21)-$$

$$14\,(b^6+2\,\pi^2\,b^4+3\,\pi^4\,b^2+4\,\pi^6)\,b\,(b^6\,x^6-30\,b^4\,x^4+360\,b^2\,x^2-720)\tan\left(\frac{b}{2}\right)+362\,880\,\pi^6\Big)-$$

$$21\,504\,(b^6+2\,\pi^2\,b^4+3\,\pi^4\,b^2+4\,\pi^6)\,b^3\,x\,(b^4\,x^4-20\,b^2\,x^2+120)-$$

$$\frac{1}{120}\big((-46\,080+5760\,\pi^2-120\,\pi^4+\pi^6)\,b^8-96\,(11\,520-960\,\pi^2-30\,\pi^4+\pi^6)\,b^6-$$

$$3840\,\pi^2\,(960-108\,\pi^2+\pi^4)\,b^4+184\,320\,\pi^4\,(5\,\pi^2-42)\,b^2-13\,271\,040\,\pi^6\big)\,b^3\,x^2\,(b^4\,x^4-28\,b^2\,x^2+280)\sec\left(\frac{b}{2}\right)\Big)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v(\xi)d\xi$$

Nέ\[Omicron] Mathematica Notebook (3).nb *

$$\text{Out[10]=}\ \frac{1}{1\,290\,240\,b^{11}}\pi\, g\, m\Big(-4\,b\,(b^6-168\,b^4+13\,440\,b^2-322\,560)\,(b^6+2\,\pi^2\,b^4+3\,\pi^4\,b^2+4\,\pi^6)+$$
$$256\,b\Big(\Big(\frac{525}{4}-\frac{49\,\pi^2}{16}+\frac{27\,\pi^4}{1024}-\frac{11\,\pi^6}{92\,160}\Big)b^8+\frac{7}{256}\,(-46\,080+5760\,\pi^2-120\,\pi^4+\pi^6)\,b^6-\frac{21}{8}\,\pi^2\,(-960-30\,\pi^2+\pi^4)\,b^4-$$
$$105\,\pi^4\,(\pi^2-108)\,b^2-\frac{(b^6-224\,b^4+26\,880\,b^2-1\,290\,240)\,(b^6+2\,\pi^2\,b^4+3\,\pi^4\,b^2+4\,\pi^6)\,b\tan(\frac{b}{2})}{1024}+25\,200\,\pi^6\Big)-$$
$$1/1\,474\,560\,b\,(b^6-224\,b^4+26\,880\,b^2-1\,290\,240)\,(-120\,\pi^4\,((b^2-72)\,(b^2+48)\,b^2+64\,512)\,b^2-46\,080\,(b^2+24)\,b^6+$$
$$5760\,\pi^2\,(b^4+16\,b^2-640)\,b^4+\pi^6\,(b^8-96\,b^6-3840\,b^4+921\,600\,b^2-13\,271\,040))\sec\Big(\frac{b}{2}\Big)\Big)$$

$$\int_0^{\xi} v(\xi)d\xi$$

Nέ\[Omicron] Mathematica Notebook (3).nb *

$$\text{Out[11]=}\ \frac{1}{1\,290\,240\,b^{11}}\pi\, g\, m\Big(-512\,b\,(b^6+2\,\pi^2\,b^4+3\,\pi^4\,b^2+4\,\pi^6)\,x\,(b^6\,x^6-42\,b^4\,x^4+840\,b^2\,x^2-5040)-$$
$$1/5760\,b\,(-120\,\pi^4\,((b^2-72)\,(b^2+48)\,b^2+64\,512)\,b^2-46\,080\,(b^2+24)\,b^6+5760\,\pi^2\,(b^4+16\,b^2-640)\,b^4+$$
$$\pi^6\,(b^8-96\,b^6-3840\,b^4+921\,600\,b^2-13\,271\,040))\,x^2\,(b^6\,x^6-56\,b^4\,x^4+1680\,b^2\,x^2-20\,160)\sec\Big(\frac{b}{2}\Big)-$$
$$\frac{64}{45}\,b\,x\Big(b^8\,x^2\,(-18\,\pi^6\,x^7+20\,\pi^6\,x^6+945\,\pi^4\,x^5-1080\,\pi^4\,x^4-25\,200\,\pi^2\,x^3+30\,240\,\pi^2\,x^2+226\,800\,x-302\,400)+$$
$$180\,b^6\,(9\,\pi^6\,x^7-8\,\pi^6\,x^6-294\,\pi^4\,x^5+252\,\pi^4\,x^4+4200\,\pi^2\,x^3-3360\,\pi^2\,x^2-15\,120\,x+10\,080)-$$
$$15\,120\,\pi^2\,b^4\,(6\,\pi^4\,x^5-4\,\pi^4\,x^4-105\,\pi^2\,x^3+60\,\pi^2\,x^2+600\,x-240)+302\,400\,\pi^4\,b^2\,(9\,\pi^2\,x^3-4\,\pi^2\,x^2-63\,x+18)+$$
$$45\,(b^6+2\,\pi^2\,b^4+3\,\pi^4\,b^2+4\,\pi^6)\,b\,x\,(b^6\,x^6-56\,b^4\,x^4+1680\,b^2\,x^2-20\,160)\tan\Big(\frac{b}{2}\Big)-3\,628\,800\,\pi^6\,(9\,x-2)\Big)\Big)$$

Η εξίσωση (4.46) γίνεται:

$$f'''(x)-a\wedge 2*f'(x)=$$

$$-\frac{1}{1\,902\,536\,294\,400\,b^{10}}$$
$$\pi\sec\Big(\frac{b}{2}\Big)\Big(-d\,g\,m\,(b^6\,(5376\,x^8-6144\,x^7-1)-224\,b^4\,(640\,x^6-768\,x^5-1)+26\,880\,b^2\,(48\,x^4-64\,x^3-1)+1\,290\,240)$$
$$\Big((-46\,080+5760\,\pi^2-120\,\pi^4+\pi^6)\,b^8-96\,(11\,520-960\,\pi^2-30\,\pi^4+\pi^6)\,b^6-3840\,\pi^2\,(960-108\,\pi^2+\pi^4)\,b^4+$$
$$184\,320\,\pi^4\,(5\,\pi^2-42)\,b^2+368\,640\,(b^6+2\,\pi^2\,b^4+3\,\pi^4\,b^2+4\,\pi^6)\,b\sin\Big(\frac{b}{2}\Big)-13\,271\,040\,\pi^6\Big)-$$
$$4096\cos\Big(\frac{b}{2}\Big)\,(1440\,b^{12}\,d\,g\,m\,(1920\,x^7-2240\,x^6-1)-$$
$$45\,b^{10}\,(c\,((-1\,290\,240+26\,880\,\pi^2-224\,\pi^4+\pi^6)\,g-256\,x^2\,(\pi^6\,x^6-56\,\pi^4\,x^4+1680\,\pi^2\,x^2-20\,160))-$$
$$64\,d\,g\,m\,(\pi^2\,(1920\,x^7-2240\,x^6-1)+84\,(-192\,x^5+240\,x^4+1)))-$$
$$b^8\,d\,g\,m\,(-1890\,\pi^4\,(5376\,x^8-6144\,x^7-1)+201\,600\,\pi^2\,(640\,x^6-768\,x^5-1)-$$
$$7\,257\,600\,(48\,x^4-64\,x^3-1)+\pi^6\,(331\,776\,x^{10}-655\,360\,x^9+322\,560\,x^8+11))+$$
$$1080\,b^6\,d\,g\,m\,(3\,\pi^6\,(5376\,x^8-6144\,x^7-1)-392\,\pi^4\,(640\,x^6-768\,x^5-1)+22\,400\,\pi^2\,(48\,x^4-64\,x^3-1)+322\,560)-$$
$$725\,760\,\pi^2\,b^4\,d\,g\,m\,(\pi^4\,(640\,x^6-768\,x^5-1)-70\,\pi^2\,(48\,x^4-64\,x^3-1)-1600)+$$
$$87\,091\,200\,\pi^4\,b^2\,d\,g\,m\,(\pi^2\,(48\,x^4-64\,x^3-1)+28)+4\,180\,377\,600\,\pi^6\,d\,g\,m)\Big)$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω εξίσωση:

Nέ\[Omicron] Mathematica Notebook (3).nb *

$$
\begin{aligned}
& f''(x) - a\wedge 2 * f(x) = C1 + \\
& -\frac{1}{1\,902\,536\,294\,400\, b^{10}} \\
& \pi \sec\left(\frac{b}{2}\right)\Big(\frac{1\,358\,954\,496}{11} b^8 d\, g\, m\, \pi^6 \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^{11} - 268\,435\,456\, b^8 d\, g\, m\, \pi^6 \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^{10} - 5\,242\,880\, b^6 \pi^4 \left(c\, \pi^2 b^4 + 14\, d\, g\, m \left(63 - 2\pi^2\right) b^2 + 1512\, d\, g\, m\, \pi^2\right) \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^9 - \\
& \quad \frac{1792}{3} b^6 d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\pi^2 - 120\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\pi^2 - 30\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - \\
& \qquad 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\pi^4 \left(-42 + 5\pi^2\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\pi^6\Big) x^9 + \\
& 283\,115\,520\, b^6 d\, g\, m \left(-5 b^6 - 10\pi^2 b^4 + 21\pi^4 b^2 + 36\pi^6\right) \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^8 + 768\, b^6 d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\pi^2 - 120\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\pi^2 - 30\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - \\
& \qquad 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\pi^4 \left(-42 + 5\pi^2\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\pi^6\Big) x^8 + \\
& 377\,487\,360\, b^4 \left(5\, d\, g\, m\, b^8 + \left(\pi^4 c + 10\, d\, g\, m\, \pi^2\right) b^6 + 200\, d\, g\, m\, \pi^2 b^4 + 420\, d\, g\, m\, \pi^4 b^2 + 720\, d\, g\, m\, \pi^6\right) \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^7 + 20\,480\, b^4 d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\pi^2 - 120\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - \\
& \qquad 96\left(11\,520 - 960\pi^2 - 30\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\pi^4 \left(-42 + 5\pi^2\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\pi^6\Big) x^7 - \\
& 10\,569\,646\,080\, b^4 d\, g\, m \left(-3 b^6 + 10\pi^2 b^4 + 21\pi^4 b^2 + 36\pi^6\right) \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^6 - 28\,672\, b^4 d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\pi^2 - 120\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\pi^2 - 30\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - \\
& \qquad 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\pi^4 \left(-42 + 5\pi^2\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\pi^6\Big) x^6 - \\
& \qquad 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\pi^4 \left(-42 + 5\pi^2\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\pi^6\Big) x^6 - \\
& 15\,854\,469\,120\, b^2 \left(\left(\pi^2 c + 3\, d\, g\, m\right) b^8 + 18\, d\, g\, m\, b^6 + 60\, d\, g\, m\, \pi^2 b^4 + 126\, d\, g\, m\, \pi^4 b^2 + 216\, d\, g\, m\, \pi^6\right) \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^5 - \\
& 258\,048\, b^2 d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\pi^2 - 120\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\pi^2 - 30\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\pi^4 \left(-42 + 5\pi^2\right) b^2 + \\
& \qquad 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\pi^6\Big) x^5 + 158\,544\,691\,200\, b^2 d\, g\, m \left(3 b^6 + 10\pi^2 b^4 + 21\pi^4 b^2 + 36\pi^6\right) \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^4 + \\
& 430\,080\, b^2 d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\pi^2 - 120\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\pi^2 - 30\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\pi^4 \left(-42 + 5\pi^2\right) b^2 + \\
& \qquad 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\pi^6\Big) x^4 + 317\,089\,382\,400\, b^{10} c \cos\left(\frac{b}{2}\right) x^3 + \\
& 4096\, g \Big(1440\, d\, m\, b^{12} + 45\left(\left(-1\,290\,240 + 26\,880\pi^2 - 224\pi^4 + \pi^6\right) c + 64\, d\, m \left(-84 + \pi^2\right)\right) b^{10} + d\, m \left(7\,257\,600 - 201\,600\pi^2 + 1890\pi^4 + 11\pi^6\right) b^8 + \\
& \qquad 1080\, d\, m \left(-322\,560 + 22\,400\pi^2 - 392\pi^4 + 3\pi^6\right) b^6 - 725\,760\, d\, m\, \pi^2 \left(1600 - 70\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 87\,091\,200\, d\, m\, \pi^4 \left(-28 + \pi^2\right) b^2 - 4\,180\,377\,600\, d\, m\, \pi^6\Big) \cos\left(\frac{b}{2}\right) x - \\
& \left(-b^6 + 224 b^4 - 26\,880 b^2 + 1\,290\,240\right) d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\pi^2 - 120\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\pi^2 - 30\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + \\
& \qquad 184\,320\pi^4 \left(-42 + 5\pi^2\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\pi^6\Big) x\Big)
\end{aligned}
$$

Θέτοντας $x = 0$, βρίσκουμε το C_1:

$$C_1 = 0$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση της παραπάνω εξίσωσης:

Nέ\[Omicron] Mathematica Notebook (3).nb *

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = C2 + \\
& -\frac{1}{627\,836\,977\,152\,000\, b^{10}} \pi x^2 \sec\left(\frac{b}{2}\right) \\
& \Big(61\,440 \cos\left(\frac{b}{2}\right)\Big(253\,440\, a^2 b^{10} g \left(\pi^6 x^6 - 56\pi^4 x^4 + 1680\pi^2 x^2 - 20\,160\right) - 5280\, b^{12} d\, g\, m \left(160 x^7 - 240 x^6 - 3\right) + 11\, b^{10} \Big(c \Big(45\left(-1\,290\,240 + 26\,880\pi^2 - 224\pi^4 + \pi^6\right) \\
& \qquad g - 256 x^2 \left(\pi^6 x^6 - 90\pi^4 x^4 + 5040\pi^2 x^2 - 151\,200\right)\Big) - 960\, d\, g\, m \left(\pi^2 \left(160 x^7 - 240 x^6 - 3\right) + 36\left(-64 x^5 + 112 x^4 + 7\right)\right)\Big) + b^8 d\, g\, m \\
& \qquad \left(-1386\pi^4 \left(1792 x^8 - 2560 x^7 - 15\right) + 316\,800\pi^2 \left(160 x^6 - 256 x^5 - 7\right) - 15\,966\,720 \left(16 x^4 - 32 x^3 - 5\right) + \pi^6 \left(55\,296 x^{10} - 131\,072 x^9 + 78\,848 x^8 + 121\right)\right) - \\
& \qquad 2376\, b^6 d\, g\, m \Big(\pi^6 \left(1792 x^8 - 2560 x^7 - 15\right) - 280\pi^4 \left(160 x^6 - 256 x^5 - 7\right) + 22\,400\pi^2 \left(16 x^4 - 32 x^3 - 5\right) + 1\,612\,800\Big) + 1\,140\,480\pi^2 b^4 d\, g\, m \\
& \qquad \left(\pi^4 \left(160 x^6 - 256 x^5 - 7\right) - 98\pi^2 \left(16 x^4 - 32 x^3 - 5\right) - 11\,200\right) - 191\,600\,640\pi^4 b^2 d\, g\, m \left(\pi^2 \left(16 x^4 - 32 x^3 - 5\right) + 140\right) - 45\,984\,153\,600\pi^6 d\, g\, m\Big) - \\
& \qquad 11\, d\, g\, m \Big(b^6 \left(1792 x^8 - 2560 x^7 - 15\right) - 480 b^4 \left(160 x^6 - 256 x^5 - 7\right) + 80\,640 b^2 \left(16 x^4 - 32 x^3 - 5\right) + 19\,353\,600\Big) \\
& \qquad \Big(\left(-46\,080 + 5760\pi^2 - 120\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\pi^2 - 30\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - 3840\pi^2 \left(960 - 108\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + \\
& \qquad 184\,320\pi^4 \left(5\pi^2 - 42\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\pi^2 b^4 + 3\pi^4 b^2 + 4\pi^6\right) b \sin\left(\frac{b}{2}\right) - 13\,271\,040\pi^6\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Nέ\[Omicron] Mathematica Notebook (3).nb *

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & \mathbf{C2}\, x + \mathbf{C3} + \\
& -\frac{1}{24\,485\,642\,108\,928\,000\, b^{10}} \pi x^3 \sec\left(\frac{b}{2}\right)\Big(61\,440 \cos\left(\frac{b}{2}\right)\big(1\,098\,240\, a^2 b^{10} g \left(\pi^6 x^6 - 72\,\pi^4 x^4 + 3024\,\pi^2 x^2 - 60\,480\right) - \\
& 68\,640\, b^{12} d\, g\, m \left(48\, x^7 - 80\, x^6 - 3\right) + 39\, b^{10} \big(c \left(165 \left(-1\,290\,240 + 26\,880\,\pi^2 - 224\,\pi^4 + \pi^6\right) g - 256\, x^2 \left(\pi^6 x^6 - 110\,\pi^4 x^4 + 7920\,\pi^2 x^2 - 332\,640\right)\right) - \\
& 3520\, d\, g\, m \left(\pi^2 \left(48\, x^7 - 80\, x^6 - 3\right) + 36 \left(-24\, x^5 + 48\, x^4 + 7\right)\right)\big) + b^8 d\, g\, m \left(-4914\,\pi^4 \left(1792\, x^8 - 2816\, x^7 - 55\right) + \\
& 1\,372\,800\,\pi^2 \left(160\, x^6 - 288\, x^5 - 21\right) - 29\,652\,480 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) + \pi^6 \left(165\,888\, x^{10} - 425\,984\, x^9 + 279\,552\, x^8 + 1573\right)\big) - \\
& 936\, b^6 d\, g\, m \left(9\,\pi^6 \left(1792\, x^8 - 2816\, x^7 - 55\right) - 3080\,\pi^4 \left(160\, x^6 - 288\, x^5 - 21\right) + 105\,600\,\pi^2 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) + 53\,222\,400\right) + \\
& 4\,942\,080\,\pi^2 b^4 d\, g\, m \left(\pi^4 \left(160\, x^6 - 288\, x^5 - 21\right) - 42\,\pi^2 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) - 33\,600\right) - \\
& 355\,829\,760\,\pi^4 b^2 d\, g\, m \left(\pi^2 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) + 980\right) - 597\,793\,996\,800\,\pi^6 d\, g\, m\big) - \\
& 13\, d\, g\, m \big(3\, b^6 \left(1792\, x^8 - 2816\, x^7 - 55\right) - 1760\, b^4 \left(160\, x^6 - 288\, x^5 - 21\right) + 126\,720\, b^2 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) + 212\,889\,600\big) \\
& \Big(\left(-46\,080 + 5760\,\pi^2 - 120\,\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96 \left(11\,520 - 960\,\pi^2 - 30\,\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - 3840\,\pi^2 \left(960 - 108\,\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + \\
& 184\,320\,\pi^4 \left(5\,\pi^2 - 42\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\,\pi^2 b^4 + 3\,\pi^4 b^2 + 4\,\pi^6\right) b \sin\left(\frac{b}{2}\right) - 13\,271\,040\,\pi^6\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Η πρώτη για $x = \frac{1}{2}$, μας δίνει:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C2} = {} & \\
& -\frac{1}{2\,511\,347\,908\,608\,000\, b^{10}} \pi \sec\left(\frac{b}{2}\right)\Big(61\,440 \cos\left(\frac{b}{2}\right)\Big(253\,440 \left(-20\,160 + 420\,\pi^2 - \frac{7\,\pi^4}{2} + \frac{\pi^6}{64}\right) a^2 b^{10} g + 29\,040\, b^{12} d\, g\, m + \\
& 11\, b^{10} \left(c \left(45 \left(-1\,290\,240 + 26\,880\,\pi^2 - 224\,\pi^4 + \pi^6\right) g - 64 \left(-151\,200 + 1260\,\pi^2 - \frac{45\,\pi^4}{8} + \frac{\pi^6}{64}\right)\right) - 960 \left(432 - \frac{11\,\pi^2}{2}\right) d\, g\, m\right) + \\
& \left(127\,733\,760 - 3\,960\,000\,\pi^2 + 38\,808\,\pi^4 + 227\,\pi^6\right) b^8 d\, g\, m - 2376 \left(1\,612\,800 - 179\,200\,\pi^2 + 3500\,\pi^4 - 28\,\pi^6\right) b^6 d\, g\, m + \\
& 1\,140\,480\,\pi^2 \left(-11\,200 + 784\,\pi^2 - \frac{25\,\pi^4}{2}\right) b^4 d\, g\, m - 191\,600\,640\,\pi^4 \left(140 - 8\,\pi^2\right) b^2 d\, g\, m - 45\,984\,153\,600\,\pi^6 d\, g\, m\Big) - \\
& 11 \left(-28\, b^6 + 6000\, b^4 - 645\,120\, b^2 + 19\,353\,600\right) d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\,\pi^2 - 120\,\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96 \left(11\,520 - 960\,\pi^2 - 30\,\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - \\
& 3840\,\pi^2 \left(960 - 108\,\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\,\pi^4 \left(5\,\pi^2 - 42\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\,\pi^2 b^4 + 3\,\pi^4 b^2 + 4\,\pi^6\right) b \sin\left(\frac{b}{2}\right) - 13\,271\,040\,\pi^6\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Η δεύτερη για $x = 0$, μας δίνει:

$$C_3 = 0$$

Έχοντας υπολογίσει όλους τους αγνώστους, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση $\varphi(\xi)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & \\
& \frac{1}{97\,942\,568\,435\,712\,000\, b^{10}} \\
& \pi x \sec\left(\frac{b}{2}\right)\Big(39 \Big(61\,440 \big(29\,040\, d\, g\, m\, b^{12} + 11 \big(120\, g \left(3 \left(-1\,290\,240 + 26\,880\,\pi^2 - 224\,\pi^4 + \pi^6\right) a^2 + 4\, d\, m \left(-864 + 11\,\pi^2\right)\right) + c \big(45 \left(-1\,290\,240 + 26\,880\,\pi^2 - 224\,\pi^4 + \pi^6\right) \\
& g - \pi^6 + 360\,\pi^4 - 80\,640\,\pi^2 + 9\,676\,800\big)\big) b^{10} + d\, g\, m \left(127\,733\,760 - 3\,960\,000\,\pi^2 + 38\,808\,\pi^4 + 227\,\pi^6\right) b^8 + 66\,528\, d\, g\, m \\
& \left(-57\,600 + 6400\,\pi^2 - 125\,\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - 570\,240\, d\, g\, m\, \pi^2 \left(22\,400 - 1568\,\pi^2 + 25\,\pi^4\right) b^4 + 766\,402\,560\, d\, g\, m\, \pi^4 \left(-35 + 2\,\pi^2\right) b^2 - 45\,984\,153\,600\, d\, g\, m\, \pi^6\big) \\
& \cos\left(\frac{b}{2}\right) - 11 \left(-28\, b^6 + 6000\, b^4 - 645\,120\, b^2 + 19\,353\,600\right) d\, g\, m \Big(\left(-46\,080 + 5760\,\pi^2 - 120\,\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96 \left(11\,520 - 960\,\pi^2 - 30\,\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - \\
& 3840\,\pi^2 \left(960 - 108\,\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\,\pi^4 \left(-42 + 5\,\pi^2\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\,\pi^2 b^4 + 3\,\pi^4 b^2 + 4\,\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\,\pi^6\Big)\Big) - \\
& 4\, x^2 \Big(61\,440 \left(-68\,640\, d\, g\, m \left(48\, x^7 - 80\, x^6 - 3\right) b^{12} + 1\,098\,240\, a^2 g \left(\pi^6 x^6 - 72\,\pi^4 x^4 + 3024\,\pi^2 x^2 - 60\,480\right) b^{10} + \right. \\
& 39 \big(c \left(165\, g \left(-1\,290\,240 + 26\,880\,\pi^2 - 224\,\pi^4 + \pi^6\right) - 256\, x^2 \left(\pi^6 x^6 - 110\,\pi^4 x^4 + 7920\,\pi^2 x^2 - 332\,640\right)\right) - \\
& 3520\, d\, g\, m \left(36 \left(-24\, x^5 + 48\, x^4 + 7\right) + \pi^2 \left(48\, x^7 - 80\, x^6 - 3\right)\right)\big) b^{10} + d\, g\, m \left(-29\,652\,480 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) + \right. \\
& 1\,372\,800\,\pi^2 \left(160\, x^6 - 288\, x^5 - 21\right) - 4914\,\pi^4 \left(1792\, x^8 - 2816\, x^7 - 55\right) + \pi^6 \left(165\,888\, x^{10} - 425\,984\, x^9 + 279\,552\, x^8 + 1573\right)\big) b^8 - \\
& 936\, d\, g\, m \left(105\,600\,\pi^2 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) - 3080\,\pi^4 \left(160\, x^6 - 288\, x^5 - 21\right) + 9\,\pi^6 \left(1792\, x^8 - 2816\, x^7 - 55\right) + 53\,222\,400\right) b^6 + \\
& 4\,942\,080\, d\, g\, m\, \pi^2 \left(-42\,\pi^2 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) + \pi^4 \left(160\, x^6 - 288\, x^5 - 21\right) - 33\,600\right) b^4 - \\
& 355\,829\,760\, d\, g\, m\, \pi^4 \left(\pi^2 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) + 980\right) b^2 - 597\,793\,996\,800\, d\, g\, m\, \pi^6\big) \cos\left(\frac{b}{2}\right) - \\
& 13\, d\, g\, m \big(3 \left(1792\, x^8 - 2816\, x^7 - 55\right) b^6 - 1760 \left(160\, x^6 - 288\, x^5 - 21\right) b^4 + 126\,720 \left(48\, x^4 - 112\, x^3 - 35\right) b^2 + 212\,889\,600\big) \\
& \Big(\left(-46\,080 + 5760\,\pi^2 - 120\,\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96 \left(11\,520 - 960\,\pi^2 - 30\,\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - 3840\,\pi^2 \left(960 - 108\,\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + \\
& 184\,320\,\pi^4 \left(-42 + 5\,\pi^2\right) b^2 + 368\,640 \left(b^6 + 2\,\pi^2 b^4 + 3\,\pi^4 b^2 + 4\,\pi^6\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) b - 13\,271\,040\,\pi^6\Big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Έχουμε ορίσει ότι η φ_0 είναι η γωνία στροφής στο μέσον της δικού. Δηλαδή $\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0$.

Θέτοντας $\xi = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση $\varphi(\xi)$, έχουμε:

$$\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0 \Rightarrow$$

Nê\[Omicron] Mathematica Notebook (3).nb *

$$
\begin{aligned}
1 = {} & \frac{1}{195\,885\,136\,871\,424\,000\, b^{10}} \pi \sec\left(\frac{b}{2}\right)\Bigg(-61\,440 \cos\left(\frac{b}{2}\right)\Bigg(1\,098\,240\left(-60\,480 + 756\,\pi^2 - \frac{9\,\pi^4}{2} + \frac{\pi^6}{64}\right) a^2 b^{10} + 265\,980\, b^{12}\, d\,m + \\
& 39\, b^{10}\left(\left(165\left(-1\,290\,240 + 26\,880\,\pi^2 - 224\,\pi^4 + \pi^6\right) - 64\left(-332\,640 + 1980\,\pi^2 - \frac{55\,\pi^4}{8} + \frac{\pi^6}{64}\right)\right) c - 3520\left(333 - \frac{31\,\pi^2}{8}\right) d\,m\right) + \\
& \left(1\,364\,014\,080 - 37\,752\,000\,\pi^2 + 343\,980\,\pi^4 + 1995\,\pi^6\right) b^8\, d\,m - 936\left(53\,222\,400 - 4\,857\,600\,\pi^2 + 84\,700\,\pi^4 - 630\,\pi^6\right) b^6\, d\,m + \\
& 4\,942\,080\,\pi^2\left(-33\,600 + 1932\,\pi^2 - \frac{55\,\pi^4}{2}\right) b^4\, d\,m - 355\,829\,760\,\pi^4\left(980 - 46\,\pi^2\right) b^2\, d\,m - 597\,793\,996\,800\,\pi^6\, d\,m\Bigg) + \\
& 39\left(61\,440 \cos\left(\frac{b}{2}\right)\Big(11\, b^{10}\Big(120\left(3\left(-1\,290\,240 + 26\,880\,\pi^2 - 224\,\pi^4 + \pi^6\right) a^2 + 4\left(11\,\pi^2 - 864\right) d\,m\right) + \\
& \left(9\,676\,800 - 80\,640\,\pi^2 + 360\,\pi^4 - \pi^6 + 45\left(-1\,290\,240 + 26\,880\,\pi^2 - 224\,\pi^4 + \pi^6\right)\right) c\Big) + \\
& 29\,040\, b^{12}\, d\,m + \left(127\,733\,760 - 3\,960\,000\,\pi^2 + 38\,808\,\pi^4 + 227\,\pi^6\right) b^8\, d\,m + 66\,528\left(-57\,600 + 6400\,\pi^2 - 125\,\pi^4 + \pi^6\right) b^6\, d\,m - \\
& 570\,240\,\pi^2\left(22\,400 - 1568\,\pi^2 + 25\,\pi^4\right) b^4\, d\,m + 766\,402\,560\,\pi^4\left(2\,\pi^2 - 35\right) b^2\, d\,m - 45\,984\,153\,600\,\pi^6\, d\,m\Big) - \\
& 11\left(-28\, b^6 + 6000\, b^4 - 645\,120\, b^2 + 19\,353\,600\right) d\,m\Big(\left(-46\,080 + 5760\,\pi^2 - 120\,\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\,\pi^2 - 30\,\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - \\
& 3840\,\pi^2\left(960 - 108\,\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\,\pi^4\left(5\,\pi^2 - 42\right) b^2 + 368\,640\left(b^6 + 2\,\pi^2 b^4 + 3\,\pi^4 b^2 + 4\,\pi^6\right) b \sin\left(\frac{b}{2}\right) - 13\,271\,040\,\pi^6\Big)\Big) + \\
& 13\left(-210\, b^6 + 48\,400\, b^4 - 5\,829\,120\, b^2 + 212\,889\,600\right) d\,m\Big(\left(-46\,080 + 5760\,\pi^2 - 120\,\pi^4 + \pi^6\right) b^8 - 96\left(11\,520 - 960\,\pi^2 - 30\,\pi^4 + \pi^6\right) b^6 - \\
& 3840\,\pi^2\left(960 - 108\,\pi^2 + \pi^4\right) b^4 + 184\,320\,\pi^4\left(5\,\pi^2 - 42\right) b^2 + 368\,640\left(b^6 + 2\,\pi^2 b^4 + 3\,\pi^4 b^2 + 4\,\pi^6\right) b \sin\left(\frac{b}{2}\right) - 13\,271\,040\,\pi^6\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

(4.48)

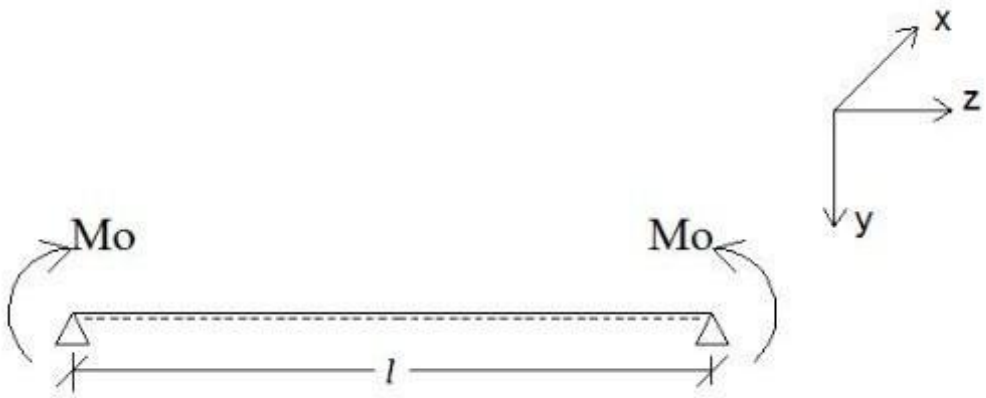
Η παραπάνω εξίσωση (4.48) περιγράφει τη σχέση που συνδέει την τιμή του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου q με την αντίστοιχη τιμή την αξονικής δύναμης N που δρουν ταυτόχρονα στο φορέα και προκαλούν στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Στην εν λόγω εξίσωση περιλαμβάνεται ο όρος $\gamma = -\frac{q\kappa l^4}{EC_w}$. Όπως αναλύσαμε και στο κεφάλαιο (4.3.1), όταν το φορτίο q ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής και κατ επέκταση στο κέντρο διάτμησης (λόγω διπλής συμμετρίας) ο όρος κ μηδενίζεται, άρα και γ=0. Εάν ασκήσουμε φορτίο στο άνω πέλμα της διατομής τότε $\kappa = \frac{h}{2}$, ενώ αν ασκήσουμε φορτίο στο κάτω πέλμα, τότε $\kappa = -\frac{h}{2}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν το φορτίο q ασκείται πάνω από το κέντρο βάρους, "επιβαρύνει" το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Το αντίθετο συμβαίνει όταν ασκείται κάτω από το κέντρο βάρους.

4.4 Αμφιέρειστη δοκός υποβαλλόμενη σε ζεύγος ροπών κάμψεως M_0 στα άκρα με ταυτόχρονη δράση (ή μη) αξονικής θλιπτικής δύναμης N

Η περίπτωση μιας αμφιέρειστης δοκού που καταπονείται μόνο από ροπή M_0 στα άκρα της είναι αρκετά απλή καθώς η ροπή αυτή είναι σταθερή και ανεξάρτητη του μήκους z της δοκού. Έτσι η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας είναι μια εύκολη διαδικασία, χωρίς να απαιτείται αντικατάσταση της γωνίας φ με την προσεγγιστική λύση που χρησιμοποιήθηκε για τις προηγούμενες περιπτώσεις φορτίσεων. Παρ' όλα αυτά θα γίνει χρήση της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\varphi(z)=\varphi_0 \sin(\frac{\pi z}{l})$ για την προσέγγιση της γωνίας στροφής φ, έτσι ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν τόσο με την αυστηρά μαθηματική λύση, όσο και με τα αποτελέσματα που θα μας δώσει το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina*. Σκοπός μας είναι να ελέγξουμε κατά πόσο είναι ακριβής η προσέγγιση που χρησιμοποιούμε.

4.4.1 Μαθηματική επίλυση[1]



Σχήμα 4.5 Αμφιέρειστη δοκός- σταθερή ροπή M_0 στα άκρα της

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής I (Σχ.4.5) η οποία καταπονείται από τη δράση σταθερών ροπών M_0 στα άκρα της. Θα προσδιορίσουμε την τιμή της ροπής για την οποία το επίπεδο κάμψης zy παύει να είναι ευσταθές και η δοκός υπόκειται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων είναι:

$$M_x = M_0$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = 0$$

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας είναι:

[1]Stephen P. Timoshenko, James M. Gere: Theory of elastic stability σ. 253-255.

$$M'_x = M_x \cos\varphi \approx M_x$$
$$M'_y = -M_x \sin\varphi \approx -M_x\varphi$$
$$M'_z = M_x \sin\frac{du}{dz} \approx M_x \frac{du}{dz}$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} = -M'_x$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = M'_y$$
$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \mathrm{M}'_z$$

Αντικαθιστώντας τις M'_x, M'_y, M'_z στις παραπάνω εξισώσεις:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} = -M_0 \tag{4.49}$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = -M_0\varphi \tag{4.50}$$
$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = M_0 \frac{du}{dz} \tag{4.51}$$

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (4.51) και συνδυάζοντάς τη με την εξίσωση (4.50), έχουμε:

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w}\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{M_0^{\ 2}}{EC_wEI_y}\varphi \tag{4.52}$$

Θέτουμε:

$$\alpha = \frac{GJ}{2EC_w}\ ,\ \beta = \frac{M_0^{\ 2}}{EI_yEC_w}$$

Η εξίσωση (4.52) γράφεται ως:

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} - 2\alpha\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \beta\varphi \tag{4.53}$$

Η εξίσωση (4.53) είναι μια τετάρτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και η λύση της είναι:

$$\varphi = \mathrm{A}\sin mz + \mathrm{B}\cos mz + Ce^{nz} + De^{-nz} \tag{4.54}$$

όπου:

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \ , \ n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \tag{4.55}$$

Οι συνοριακές συνθήκες που θα αξιοποιήσουμε και αφορούν όλο το μήκος της δοκού, είναι:

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi(\mathrm{L}) = 0$$
$$\varphi''(0) = 0$$
$$\varphi''(\mathrm{L}) = 0$$

Από την πρώτη και την τρίτη συνοριακή συνθήκη:

$$B = 0 \, , \ C = -D$$

Από την δεύτερη και την τέταρτη συνοριακή συνθήκη:

$$A \sin mL - 2D \sinh nL = 0$$
$$Am^2 \sin mL + 2Dn^2 \sinh nL = 0$$

Για να έχουμε μη τετριμμένη λύση, η ορίζουσα των παραπάνω εξισώσεων πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι προκύπτει:

$$\sin mL = 0$$

Η μικρότερη τιμή του m για την οποία επαληθεύεται η εξίσωση, είναι:

$$m = \frac{\pi}{L}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.55), έχουμε:

$$-a + \sqrt{a^2 + b} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Με τη βοήθεια των α και β που θέσαμε καταλήγουμε στην:

$$M_{0cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_y GJ}\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{EC_w}{GJ}}\right)^2\right)} \tag{4.56}$$

4.4.2 Χωρίς αξονική δύναμη

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής I (Σχ.4.5) η οποία καταπονείται από τη δράση σταθερών ροπών M_0 στα άκρα της. Θα προσδιορίσουμε την τιμή της ροπής για την οποία το επίπεδο κάμψης zy παύει να είναι ευσταθές και η δοκός υπόκειται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Υποθέτουμε ότι κατά την κάμψη τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες x και y ενώ η στροφή τους περί τον κεντροβαρικό άξονα z είναι αδύνατη. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3, θεωρούμε ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο zy και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία φ περί τον άξονα z.

Είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και τις ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας για τη δοκό του σχήματος (4.5). Οι εξωτερικές ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας θα υπολογιστούν όπως στο κεφάλαιο (3.3).

Οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων είναι:

$$M_x = M_0$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = 0$$

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$M'_x = M_x \cos\varphi \approx M_x$$
$$M'_y = -M_x \sin\varphi \approx -M_x\varphi$$
$$M'_z = M_x \sin\frac{du}{dz} \approx M_x \frac{du}{dz}$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} = -M'_x$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = M'_y$$
$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \mathrm{M}'_z$$

Αντικαθιστώντας τις M'_x, M'_y, M'_z στις παραπάνω εξισώσεις:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} = -M_0 \tag{4.57}$$

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = -M_0\varphi \tag{4.58}$$

$$GJ\frac{d\varphi}{dz}-EC_w\frac{d^3\varphi}{dz^3}=M_0\frac{du}{dz} \tag{4.59}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση (4.59) ως προς z:

$$GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2}-EC_w\frac{d^4\varphi}{dz^4}=M_0\frac{d^2u}{dz^2}$$

Λύνουμε ως προς $\frac{d^2u}{dz^2}$:

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2}-EC_w\frac{d^4\varphi}{dz^4}}{M_0} \tag{4.60}$$

Η εξίσωση (4.58) λόγω της (4.60) γίνεται:

$$EI_y\frac{GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2}-EC_w\frac{d^4\varphi}{dz^4}}{M_0}=-M_0\varphi\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{d^4\varphi}{dz^4}-\frac{GJ}{EC_w}\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{{M_0}^2}{EC_wEI_y}\varphi \tag{4.61}$$

Θέτουμε $\xi=\frac{z}{l}$

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dz}=\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi}$$
$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{dz}=\frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{dz}=\frac{1}{l}\frac{d^2\varphi}{dzd\xi}=\frac{1}{l}\frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{d\xi}=\frac{1}{l}\frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{d\xi}=\frac{1}{l^2}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$
$$\frac{d^3\varphi}{dz^3}=\frac{1}{l^3}\frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$
$$\frac{d^4\varphi}{dz^4}=\frac{1}{l^4}\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (4.61) θα έχουμε:

$$\Rightarrow\frac{1}{l^4}\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}-\frac{1}{l^2}\frac{GJ}{EC_w}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=\frac{{M_0}^2}{EC_wEI_y}\varphi(\xi)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}-\frac{GJl^2}{EC_w}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=\frac{{M_0}^2l^4}{EC_wEI_y}\varphi(\xi)$$

Θέτουμε:

$$\beta^2=\frac{GJ}{EC_w}l^2\ ,\ \alpha=\frac{M_0{}^2 l^4}{EI_y EC_w}$$

επομένως καταλήγουμε στη σχέση:

$$\varphi''''(\xi)-\beta^2\varphi''(\xi)=\alpha\varphi(\xi) \tag{4.62}$$

Θα ασχοληθούμε με τη μισή δοκό ($0\le z\le\frac{l}{2}$) λόγω συμμετρίας. Οι συνοριακές συνθήκες που θα αξιοποιήσουμε είναι:

$$\varphi(0)=0$$
$$\varphi''(0)=0$$
$$\varphi'(\frac{1}{2})=0$$
$$\varphi'''(\frac{1}{2})=0$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της προσεγγιστικής συνάρτησης για τη γωνία στροφής φ της διατομής, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το σύστημα στήριξης του φορέα.

Θέτουμε:

$$\varphi(\mathrm{z})=\varphi_0\sin(\frac{\pi z}{l}),0\le \mathrm{z}\le l$$

ή

$$\varphi(\xi)=\varphi_0\sin(\pi\xi),0\le\xi\le 1$$

Όπου φ_0, είναι η γωνία στροφής στο μέσον της αμφιέρειστης δοκού, όταν αυτή εκτρέπεται πλευρικά.

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω προσεγγιστική συνάρτηση στην εξίσωση (4.62), έχουμε:

$$\varphi''''(\xi)-\beta^2\varphi''(\xi)=\alpha\varphi_0\sin(\pi\xi) \tag{4.63}$$

Κάνουμε διπλή ολοκλήρωση στην εξίσωση (4.63):

$$\varphi'''(\xi)-\beta^2\varphi'(\xi)=-\frac{\alpha\varphi_0\cos\left(\pi\xi\right)}{\pi}+C_1 \tag{4.64}$$

$$\varphi''(\xi)-\beta^2\varphi(\xi)=-\frac{\alpha\varphi_0\sin(\pi\xi)}{\pi^2}+C_1\xi+C_2 \tag{4.65}$$

Η εξίσωση (4.65) για $\xi=0$ μας δίνει:

$$C_2=0$$

Η εξίσωση (4.64) για $\xi=\frac{1}{2}$ μας δίνει:

$$C_1=0$$

Αντικαθιστώντας τα C_1, C_2 και $\varphi(\xi)$ στην (4.65) και ολοκληρώνοντας άλλες δύο φορές:

$$\varphi'(\xi)=-\frac{\varphi_0\left(\pi^2\beta^2-\alpha\right)\cos(\pi\xi)}{\pi^3}+C_3 \tag{4.66}$$

$$\varphi(\xi)=\frac{\varphi_0\left(\alpha-\pi^2\beta^2\right)\sin(\pi\xi)}{\pi^4}+C_3\xi+C_4 \tag{4.67}$$

Η εξίσωση (4.67) για $\xi=0$ μας δίνει:

$$C_4=0$$

Η εξίσωση (4.66) για $\xi=\frac{1}{2}$ μας δίνει:

$$C_3=0$$

Αντικαθιστώντας τα C_3 και C_4 στην (4.67), παίρνουμε την εξίσωση $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi)=\frac{\varphi_0\left(\alpha-\pi^2\beta^2\right)\sin(\pi\xi)}{\pi^4} \tag{4.68}$$

Έχουμε ορίσει ότι η φ_0 είναι η γωνία στροφής στο μέσον της δικού. Δηλαδή $\varphi(\frac{1}{2})=\varphi_0$.

Θέτοντας $\xi=\frac{1}{2}$ στην εξίσωση (4.68), έχουμε:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\varphi_0\left(\alpha-\pi^2\beta^2\right)}{\pi^4}=\varphi_0\Rightarrow$$

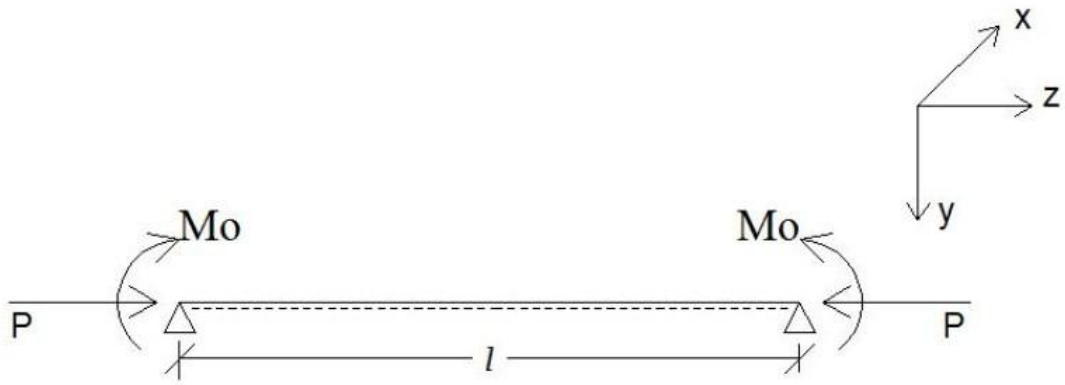
$$\Rightarrow \frac{\left(\alpha - \pi^2 \beta^2\right)}{\pi^4} = 1$$

Μετά από αντικατάσταση των όρων β^2, α καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{\left(\left(\frac{M_0{}^2 l^4}{EI_y EC_w}\right) - \pi^2 \left(\frac{GJ}{EC_w} l^2\right)\right)}{\pi^4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{0cr} = \sqrt{\frac{\left(\pi^4 + \pi^2 \frac{GJ}{EC_w} l^2\right) EI_y EC_w}{l^4}} \tag{4.69}$$

4.4.3 Με αξονική δύναμη



Σχήμα 4.6 Αμφιέρειστη δοκός με σταθερή ροπή M_0 στα άκρα της και αξονική δύναμη N

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής I (Σχ.4.6) η οποία καταπονείται από τη δράση σταθερών ροπών M_0 στα άκρα της και από σταθερή αξονική δύναμη N. Η αξονική δύναμη N ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Θα προσδιορίσουμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου για την οποία το επίπεδο κάμψης zy παύει να είναι ευσταθές και η δοκός υπόκειται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Υποθέτουμε ότι κατά την κάμψη τα άκρα της δοκού μπορούν να στραφούν ελεύθερα περί τους άξονες x και y ενώ η στροφή τους περί τον κεντροβαρικό άξονα z είναι αδύνατη. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3, θεωρούμε ότι η δοκός έχει ελαφρώς καμφθεί στο επίπεδο zy και συγχρόνως στραφεί κατά μια μικρή γωνία φ περί τον άξονα z.

Είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων και τις ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας για τη δοκό του σχήματος (4.6). Οι εξωτερικές ροπές στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας θα υπολογιστούν όπως στο κεφάλαιο (3.3).

Οι εξωτερικές ροπές M_x, M_y, M_z που αναπτύσσονται κατά το σταθερό σύστημα αξόνων είναι:

$$M_x = M_0$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = 0$$

Οι εξωτερικές ροπές M'_x, M'_y, M'_z που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$M'_x = M_x \cos\varphi \approx M_x$$
$$M'_y = -M_x \sin\varphi \approx -M_x\varphi$$
$$M'_z = M_x \sin\frac{du}{dz} \approx M_x \frac{du}{dz}$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, έχουμε:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} + Nw = -M'_x$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + Nu = M'_y$$
$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = \mathrm{M}'_z$$

Αντικαθιστώντας τις M'_x, M'_y, M'_z στις παραπάνω εξισώσεις:

$$EI_x \frac{d^2w}{dz^2} + Nw = -M_0 \tag{4.70}$$
$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} + Nu = -M_0\varphi \tag{4.71}$$
$$GJ\frac{d\varphi}{dz} - EC_w \frac{d^3\varphi}{dz^3} = M_0 \frac{du}{dz} \tag{4.72}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση (4.72) ως προς z:

$$GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4} = M_0 \frac{d^2u}{dz^2}$$

Λύνουμε ως προς $\frac{d^2u}{dz^2}$:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{GJ\frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4}}{M_0} \tag{4.73}$$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση (4.72) ως προς z:

$$GJ\varphi(z) - EC_w \frac{d^2\varphi}{dz^2} = M_0 u(z) + C_1$$

Αξιοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες $\varphi(0) = \varphi''(0) = u(0) = 0$ και θέτοντας $z = 0$ στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε:

$$C_1 = 0$$

Λύνουμε ως προς $u(z)$:

$$u(z) = \frac{GJ\varphi(z) - EC_w \frac{d^2\varphi}{dz^2}}{M_0} \tag{4.74}$$

Η εξίσωση (4.71) λόγω των (4.73) και (4.74), γίνεται:

$$EI_y \left(\frac{GJ \frac{d^2\varphi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\varphi}{dz^4}}{M_0} \right) + N \left(\frac{GJ\varphi(z) - EC_w \frac{d^2\varphi}{dz^2}}{M_0} \right) = -M_0\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi''''(z) - \left(\frac{EI_y GJ - EC_w N}{EI_y EC_w} \right) \varphi''(z) = \frac{NGJ + M_0{}^2}{EI_y EC_w} \varphi(z) \tag{4.75}$$

Θέτουμε $\xi = \frac{z}{l}$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{dz} = \frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{dz} = \frac{1}{l}\frac{d^2\varphi}{dzd\xi} = \frac{1}{l}\frac{d(\frac{d\varphi}{dz})}{d\xi} = \frac{1}{l}\frac{d(\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{d\xi})}{d\xi} = \frac{1}{l^2}\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{1}{l^3}\frac{d^3\varphi}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{1}{l^4}\frac{d^4\varphi}{d\xi^4}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (4.75) θα έχουμε:

$$\frac{1}{l^4}\varphi''''(\xi) - \left(\frac{EI_y GJ - EC_w N}{EI_y EC_w} \right) \frac{1}{l^2} \varphi''(\xi) = \frac{NGJ + M_0{}^2}{EI_y EC_w} \varphi(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi''''(\xi) - \left(\frac{EI_y GJ - EC_w N}{EI_y EC_w} l^2 \right) \varphi''(\xi) = \left(\frac{NGJ + M_0{}^2}{EI_y EC_w} l^4 \right) \varphi(\xi)$$

Θέτουμε:

$$\beta^2 = \frac{EI_y GJ - EC_w N}{EI_y EC_w} l^2 \ , \ \alpha = \frac{NGJ + M_0{}^2}{EI_y EC_w} l^4$$

Επομένως καταλήγουμε στη σχέση:

$$\varphi''''(\xi) - \beta^2 \varphi''(\xi) = \alpha \varphi(\xi) \tag{4.76}$$

Θα ασχοληθούμε με τη μισή δοκό ($0 \le z \le \frac{l}{2}$) λόγω συμμετρίας. Οι συνοριακές συνθήκες που θα αξιοποιήσουμε είναι:

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi''(0) = 0$$
$$\varphi'(\frac{1}{2}) = 0$$
$$\varphi'''(\frac{1}{2}) = 0$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (4.76) είναι ακριβώς η ίδια με τη σχέση (4.62) του υποκεφαλαίου (4.4.2). Οι μεταβλητές β^2 και α βέβαια είναι ορισμένες διαφορετικά αλλά αυτό δεν επηρεάζει την πορεία επίλυσης. Οι συνοριακές συνθήκες επίσης ταυτίζονται, οπότε θα παραλείψουμε την πορεία υπολογισμού της εξίσωσης $\varphi(\xi)$ και θα παρουσιάσουμε κατευθείαν τη λύση της η οποία είναι ίδια με την εξίσωση (4.68) του υποκεφαλαίου (4.4.2):

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi_0 \left(\alpha - \pi^2 \beta^2\right) \sin\left(\pi \xi\right)}{\pi^4} \tag{4.77}$$

Έχουμε ορίσει ότι η φ_0 είναι η γωνία στροφής στο μέσον της δικού. Δηλαδή $\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi_0$.

Θέτοντας $\xi = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση (4.77), έχουμε:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\varphi_0 \left(\alpha - \pi^2 \beta^2\right)}{\pi^4} = \varphi_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\left(\alpha - \pi^2 \beta^2\right)}{\pi^4} = 1$$

Μετά από αντικατάσταση των όρων β^2, α καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{\left(\left(\frac{NGJ + M_0^{\ 2}}{EI_y EC_w} l^4\right) - \pi^2 \left(\frac{EI_y GJ - EC_w N}{EI_y EC_w} l^2\right)\right)}{\pi^4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{0cr} = \sqrt{\pi^2 \frac{EI_y GJ - EC_w N}{l^2} + \pi^4 \frac{EI_y EC_w}{l^4} - NGJ} \tag{4.78}$$

5 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3

5.1 Γενικα

Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπώσουμε την εξίσωση της κρίσιμης ελαστικής ροπής πλευρικού λυγισμού σύμφωνα με τον *Ευρωκώδικα* 3, έτσι ώστε να είμαστε σε θέση στο επόμενο κεφάλαιο να κάνουμε τις απαραίτητες συγκρίσεις των αποτελεσμάτων αυτών με τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου που αναπτύχθηκε. Επίσης θα προσδιορίσουμε τη ροπή αντοχής σε πλευρικό λυγισμό $M_{b,Rd}$ για να ελέγξουμε την απόκλισή της από την κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού.

5.2 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μη προστατευμένων πλευρικά δοκών υπό κάμψη περί τον ισχυρό τους άξονα[2]

Καθώς ο πλευρικός λυγισμός περιλαμβάνει στρέψη και κάμψη περί τον ασθενή άξονα, η κρίσιμη ροπή κάμψης, η οποία είναι και το καθοριστικό μέγεθος σε αυτή τη μορφή αστάθειας, εκφράζεται συναρτήσει του μήκους της δοκού, της δυστρεψίας, της δυσκαμψίας στρέβλωσης καθώς και της καμπτικής αντίστασης περί τον ασθενή άξονα.

Στην περίπτωση δοκού σταθερής διατομής, με συνήθεις στρεπτικές συνθήκες στήριξης στα άκρα της, συμμετρικής ως προς τον ασθενή άξονα αδρανείας *x* και υποκείμενης σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα αδρανείας *z* η κρίσιμη ελαστική ροπή πλευρικού λυγισμού δίνεται από τον τύπο:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_y}{(kL)^2} \left\{ \left[\left[\frac{k}{k_w} \right]^2 \frac{C_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GJ}{\pi^2 EI_z} + \left(C_2 z_g - C_3 z_j \right)^2 \right]^{0.5} - \left(C_2 z_g - C_3 z_j \right) \right\} \tag{5.1}$$

όπου:

C_1, C_2, C_3 συντελεστές εξαρτώμενοι από τις συνθήκες φόρτισης και στρεπτικής στήριξης (Πιν.5.1)

J σταθερά στρέψης

C_w σταθερά στρέβλωσης

I_y ροπή αδρανείας ως προς τον ασθενή άξονα

L μήκος δοκού

k, k_w συντελεστές εξαρτώμενοι από το είδος των στηρίξεων ως προς την ελευθερία στροφής και στρέβλωσης των άκρων του εξεταζόμενου τμήματος

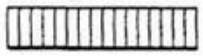
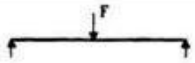
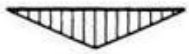
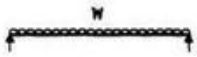
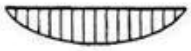
z_a η τεταγμένη του σημείου εφαρμογής του φορτίου ως προς τον κεντροβαρικό άξονα z-z (Σχ. 5.1)

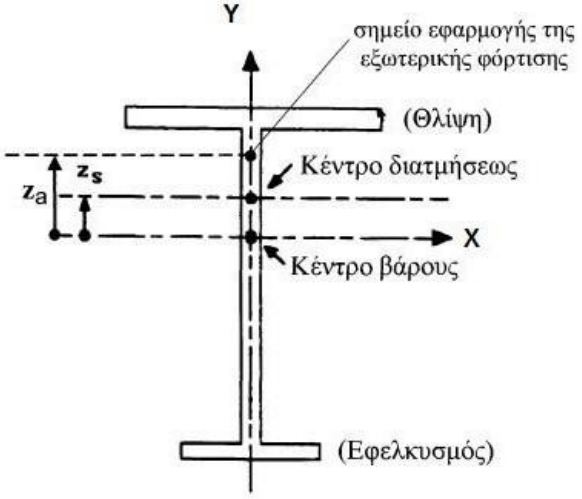
[2] Βάγιας Ι., Ερμόπουλος Ι., Ιωαννίδης Γ.: Σχεδιασμός δομικών έργων από χάλυβα, σ. 130-135

z_s η τεταγμένη του κέντρου διάτμησης ως προς τον κεντροβαρικό άξονα z-z (Σχ.5.1)
$z_g = z_a - z_s$ η απόσταση του κέντρου διάτμησης από το σημείο εφαρμογής του φορτίου.

Ο συντελεστής k_w αφορά τη στρέβλωση του άκρου και λαμβάνεται ίσος με μονάδα (1,0) για άκρα με ελεύθερη στρέβλωση.
Οι τεταγμένες z_a και z_s μετρώνται με αφετηρία το κέντρο βάρους της διατομής και είναι προσημασμένες με θετική φορά προς το θλιβόμενο πέλμα της διατομής.

Πίνακας 5.1 Συντελεστές C_1, C_2 και C_3 για $k = 1$

Φόρτιση και συνθήκες στήρισης	Διάγραμμα καμπτικών ροπών	Συντελεστές		
		C_1	C_2	C_3
		1,000	0	1,000
		1,365	0,553	1,730
		1,132	0,459	0,525



Σχήμα 5.1 Προσδιορισμός z_a, z_s

Σύμφωνα με τον κανονισμό, μια δοκός σταθερής διατομής μη προστατευμένη πλευρικά, που υπόκειται σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα, πρέπει να ελέγχεται έναντι πλευρικού λυγισμού με βάση τη σχέση:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1,0$$

όπου:
M_{Ed} η ροπή κάμψης σχεδιασμού
$M_{b,Rd}$ η ροπή αντοχής έναντι πλευρικού λυγισμού.

Η ροπή αντοχής έναντι πλευρικού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \tag{5.2}$$

όπου:

$W_y = W_{pl,y}$ για διατομές κατηγορίας 1 ή 2

$W_y = W_{el,y}$ για διατομές κατηγορίας 3

$W_y = W_{eff,y}$ για διατομές κατηγορίας 4

χ_{LT} ο μειωτικός συντελεστής για πλευρικό λυγισμό.

Η τιμή του χ_{LT} για καμπτόμενα μέλη σταθερής διατομής καθορίζεται από τη σχέση:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi^2_{LT} - \bar{\lambda}^2_{LT}}} \text{ , με } \chi_{LT} \leq 1 \tag{5.3}$$

όπου:

$$\Phi_{LT} = 0,5\left[1 + \alpha_{LT}\left(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2\right) + \bar{\lambda}^2_{LT}\right] \tag{5.4}$$

α_{LT} συντελεστής ατελειών, Πιν. (5.2)

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}} \text{ η ανηγμένη λυγηρότητα πλευρικού λυγισμού} \tag{5.5}$$

M_{cr} ελαστική κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού, από εξ. (5.1) .

Πίνακας 5.2: Συντελεστής ατελειών για καμπύλες πλευρικού λυγισμού

Καμπύλη λυγισμού	a	b	c	d
Συντελεστής ατελειών α_{LT}	0,21	0,34	0,49	0,76

Οι καμπύλες λυγισμού που χρησιμοποιούνται, δίνονται από τον Πίνακα (5.3)

Πίνακας 5.3: Καμπύλες πλευρικού λυγισμού

Διατομή	**Όρια**	**Καμπύλη λυγισμού**
Ελατές διατομές I	$h/b \leq 2$ $h/b > 2$	a b
Συγκολλητές διατομές I	$h/b \leq 2$ $h/b > 2$	c d
Άλλες διατομές	–	d

5.3 Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη[3]

Η ανάλυση της φέρουσας συμπεριφοράς δοκών που καταπονούνται ταυτόχρονα από αξονική θλιπτική δύναμη και ροπές κάμψης είναι εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία καθιστώντας μη εφικτές κλειστές αναλυτικές λύσεις. Γι αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται οι παρακάτω εξισώσεις αλληλεπίδρασης:

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy}\frac{M_{y,Ed}+\Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT}\frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz}\frac{M_{z,Ed}+\Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \le 1 \qquad (5.6)$$

$$\frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_z N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy}\frac{M_{y,Ed}+\Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT}\frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz}\frac{M_{z,Ed}+\Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \le 1 \qquad (5.7)$$

όπου:

$N_{Ed}, M_{y,Ed}$ και $M_{z,Ed}$ οι τιμές σχεδιασμού της θλιπτικής αξονικής δύναμης και των μεγίστων ροπών ως προς τους άξονες y-y και z-z κατά μήκος του μέλους αντίστοιχα

$\Delta M_{y,\mathrm{Ed}}, \Delta M_{z,Ed}$ οι ροπές λόγω της μετατόπισης του κεντροβαρικού άξονα

χ_y, χ_z οι μειωτικοί συντελεστές λόγω καμπτικού λυγισμού

χ_{LT} ο μειωτικός συντελεστής λόγω πλευρικού λυγισμού

$k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$ οι συντελεστές αλληλεπίδρασης, εξαρτώμενοι από τη μέθοδο που έχει επιλεγεί.

Πίνακας 5.4: Τιμές για $N_{Rk}=f_yA_i$, $M_{i,Rk}=f_yW_i$ και $\Delta M_{i,Ed}$

Κατηγορία διατομής	1	2	3	4
A_i	A	A	A	A_{eff}
W_y	$W_{pl,y}$	$W_{pl,y}$	$W_{el,y}$	$W_{eff,y}$
W_z	$W_{pl,z}$	$W_{pl,z}$	$W_{el,z}$	$W_{eff,z}$
$\Delta M_{y,Ed}$	0	0	0	$e_{N,y} N_{Ed}$
$\Delta M_{z,Ed}$	0	0	0	$e_{N,z} N_{Ed}$

Οι συντελεστές αλληλεπίδρασης $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$ δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

[3] Βάγιας Ι., Ερμόπουλος Ι., Ιωαννίδης Γ.: Σχεδιασμός δομικών έργων από χάλυβα, σ. 142-144

Πίνακας 5.5: Συντελεστές αλληλεπίδρασης k_{ij}

Συντελεστές αλληλεπίδρασης	Παραδοχές σχεδιασμού	
	ελαστικές ιδιότητες διατομής κατηγορία 3, κατηγορία 4	πλαστικές ιδιότητες διατομής κατηγορία 1, κατηγορία 2
k_{yy}	$C_{my} C_{mLT} \dfrac{\mu_y}{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$	$C_{my} C_{mLT} \dfrac{\mu_y}{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \dfrac{1}{C_{yy}}$
k_{yz}	$C_{mz} \dfrac{\mu_y}{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}$	$C_{mz} \dfrac{\mu_y}{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}} \dfrac{1}{C_{yz}} 0{,}6\sqrt{\dfrac{w_z}{w_y}}$
k_{zy}	$C_{my} C_{mLT} \dfrac{\mu_z}{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$	$C_{my} C_{mLT} \dfrac{\mu_z}{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \dfrac{1}{C_{zy}} 0{,}6\sqrt{\dfrac{w_y}{w_z}}$
k_{zz}	$C_{mz} \dfrac{\mu_z}{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}$	$C_{mz} \dfrac{\mu_z}{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}} \dfrac{1}{C_{zz}}$
Βοηθητικοί συντελεστές		
$\mu_y = \dfrac{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}{1-\chi_y \dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$	$C_{yy} = 1 + (w_y - 1)\left[\left(2 - \dfrac{1{,}6}{w_y} C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max} - \dfrac{1{,}6}{w_y} C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max}^2\right) n_{pl} - b_{LT}\right] \geq \dfrac{W_{el,y}}{W_{pl,y}}$	
	με $b_{LT} = 0{,}5\, a_{LT}\, \bar{\lambda}_0^2 \dfrac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{pl,y,Rd}} \dfrac{M_{z,Ed}}{M_{pl,z,Rd}}$	
$\mu_z = \dfrac{1-\dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}{1-\chi_z \dfrac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}}$	$C_{yz} = 1 + (w_z - 1)\left[\left(2 - 14 \dfrac{C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max}^2}{w_z^5}\right) n_{pl} - c_{LT}\right] \geq 0{,}6\sqrt{\dfrac{w_z}{w_y}} \dfrac{W_{el,z}}{W_{pl,z}}$	
$w_y = \dfrac{W_{pl,y}}{W_{el,y}} \leq 1{,}5$	με $c_{LT} = 10\, a_{LT} \dfrac{\bar{\lambda}_0^2}{5 + \bar{\lambda}_z^4} \dfrac{M_{y,Ed}}{C_{my}\, \chi_{LT}\, M_{pl,y,Rd}}$	
$w_z = \dfrac{W_{pl,z}}{W_{el,z}} \leq 1{,}5$	$C_{zy} = 1 + (w_y - 1)\left[\left(2 - 14 \dfrac{C_{my}^2 \bar{\lambda}_{max}^2}{w_y^5}\right) n_{pl} - d_{LT}\right] \geq 0{,}6\sqrt{\dfrac{w_y}{w_z}} \dfrac{W_{el,y}}{W_{pl,y}}$	
$n_{pl} = \dfrac{N_{Ed}}{N_{Rk}/\gamma_{M1}}$	με $d_{LT} = 2\, a_{LT} \dfrac{\bar{\lambda}_0}{0{,}1 + \bar{\lambda}_z^4} \dfrac{M_{y,Ed}}{C_{my}\, \chi_{LT}\, M_{pl,y,Rd}} \dfrac{M_{z,Ed}}{C_{mz}\, M_{pl,z,Rd}}$	
C_{my} βλέπε Πίνακα A.2	$C_{zz} = 1 + (w_z - 1)\left[\left(2 - \dfrac{1{,}6}{w_z} C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max} - \dfrac{1{,}6}{w_z} C_{mz}^2 \bar{\lambda}_{max}^2\right) - e_{LT}\right] n_{pl} \geq \dfrac{W_{el,z}}{W_{pl,z}}$	
$a_{LT} = 1 - \dfrac{I_T}{I_y} \geq 0$	με $e_{LT} = 1{,}7\, a_{LT} \dfrac{\bar{\lambda}_0}{0{,}1 + \bar{\lambda}_z^4} \dfrac{M_{y,Ed}}{C_{my}\, \chi_{LT}\, M_{pl,y,Rd}}$	

Πίνακας 5.5: (Συνέχεια)

$$\bar{\lambda}_{max} = \max\begin{cases}\bar{\lambda}_y \\ \bar{\lambda}_z\end{cases}$$

$\bar{\lambda}_0$ = ανηγμένη λυγηρότητα για στρεπτοκαμπτικό (πλευρικό) λυγισμό λόγω σταθερής καμπτικής ροπής, δηλ.
ψ_y =1,0 στον Πίνακα Α.2

$\bar{\lambda}_{LT}$ = ανηγμένη λυγηρότητα για στρεπτοκαμπτικό (πλευρικό) λυγισμό

Εάν $\bar{\lambda}_0 \le 0{,}2\sqrt{C_1}\sqrt[4]{\left(1-\frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)\left(1-\frac{N_{Ed}}{N_{cr,TF}}\right)}$:

$$C_{my} = C_{my,0}$$

$C_{mz} = C_{mz,0}$
$C_{mLT} = 1{,}0$

Εάν $\bar{\lambda}_0 > 0{,}2\sqrt{C_1}\sqrt[4]{\left(1-\frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)\left(1-\frac{N_{Ed}}{N_{cr,TF}}\right)}$:

$$C_{my} = C_{my,0} + \left(1 - C_{my,0}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon_y}\,a_{LT}}{1+\sqrt{\varepsilon_y}\,a_{LT}}$$

$$C_{mz} = C_{mz,0}$$

$$C_{mLT} = C_{my}^2 \frac{a_{LT}}{\sqrt{\left(1-\frac{N_{Ed}}{N_{crit,z}}\right)\left(1-\frac{N_{Ed}}{N_{crit,T}}\right)}} \ge 1$$

$$\varepsilon_y = \frac{M_{y,Ed}}{N_{Ed}}\frac{A}{W_{el,y}}$$ για διατομές κατηγορίας 1, 2 και 3

$$\varepsilon_y = \frac{M_{y,Ed}}{N_{Ed}}\frac{A_{eff}}{W_{eff,y}}$$ για διατομές κατηγορίας 4

C_1 = συντελεστής εξαρτώμενος από τις συνθήκες φόρτισης και στρεπτικής στήριξης (βλέπε και παράγραφο 3.3.5.2)

$N_{crit,y}$ = ελαστική δύναμη καμπτικού λυγισμού περί τον άξονα y-y

$N_{crit,z}$ = ελαστική δύναμη καμπτικού λυγισμού περί τον άξονα z-z

$N_{crit,T}$ = ελαστική δύναμη στρεπτικού λυγισμού

I_T = σταθερά στρέψης St. Venant

I_y = ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα y-y

6 Παρουσίαση Adina και αριθμητικές εφαρμογές

6.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* και ο ακριβής τρόπος προσομοίωσης σε αυτό, των δοκών και των φορτίσεων που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 4. Κρίνεται σκόπιμη η παρουσίαση του *Adina* έτσι ώστε να φαίνονται όλα τα βήματα που ακολουθήθηκαν για να φτάσουμε στον υπολογισμό των κρίσιμων φορτίων στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Με τη βοήθεια λοιπόν του προγράμματος θα καταλήξουμε σε κάποια κρίσιμα φορτία, τα οποία στη συνέχεια θα συγκριθούν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου (Κεφ. 4) αλλά και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν ακολουθώντας τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3 (Κεφ. 5). Σκοπός μας είναι να ελέγξουμε τις αποκλίσεις που προκύπτουν από τις τρείς αυτές διαφορετικές μεθόδους και να εξάγουμε τα απαραίτητα συμπεράσματα.

6.2 Προσομοίωση συνοριακών συνθηκών στήριξης

Η αναλυτική παρουσίαση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων *Adina* θα γίνει στο Παράρτημα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στο πρόβλημα που προέκυψε όσον αφορά την προσομοίωση των συνοριακών συνθηκών στήριξης την δοκού.

Έγινε χρήση των *rigid links* (άκαμπτων συνδέσμων), ορίσαμε δηλαδή ως *master* τον κόμβο που περνάει από το κέντρο βάρους (κέντρο διάτμησης) της διατομής και στη συνέχεια έπρεπε να ορίσουμε ως *slave* τα *σημεία* ή τις *γραμμές* που θα υπακούουν στον *master*, διότι θα έχουν συνδεθεί μέσω *rigid links* με αυτόν. Για να εντοπίσουμε ποιος συνδυασμός *master-slave* είναι αυτός που προσεγγίζει με τον καλύτερο τρόπο μια αμφιέρειστη δοκό με δέσμευση στροφής περί τον κεντροβαρικό άξονά της στα άκρα της εξετάσαμε τις εξής περιπτώσεις:

α) χρήση των *rigid links* για όλους τους κόμβους της διατομής
β) χρήση των *rigid links* μόνο για τον κορμό της διατομής
γ) χρήση των *rigid links* για τον κορμό και το κάτω πέλμα της διατομής.

Σε αυτό το σημείο θα ελέγξουμε ποιά από τις τρείς παραπάνω περιπτώσεις δίνει αποτελέσματα τα οποία είναι πιο κοντά στα αποτελέσματα τόσο της προσδιοριστικής μεθόδου που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4 όσο και στα αποτελέσματα που παίρνουμε εφαρμόζοντας τον Ευρωκώδικα 3. Γι' αυτό το λόγο θα εργαστούμε με μία αμφιέρειστη δοκό IPE500 ανοίγματος 10 μέτρων, η οποία καταπονείται από κατακόρυφο φορτίο P στο μέσον της. Τα P_{cr} που προκύπτουν παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 6.1: Σύγκριση μεθόδων

Μέθοδος	α	β	γ	Πρ. Μέθοδος	EC3
$\boldsymbol{P_{cr}}$ **(kN)**	123.6	107.8	112.4	113.2	113.8

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος γ μας δίνει τον καταλληλότερο συνδυασμό *master-slave*, καθώς η απόκλιση που προκύπτει από την προσδιοριστική μέθοδο και τον Ευρωκώδικα 3 είναι η μικρότερη. Για όλες τις αναλύσεις που θα γίνουν στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την προσομοίωση αυτή.

6.3 Αριθμητικές εφαρμογές και σύγκριση αποτελεσμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει παρουσίαση και σύγκριση των κρίσιμων φορτίων που προκύπτουν από τη προσδιοριστική μέθοδο που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4, το πρόγραμμα *Adina* και τον Ευρωκώδικα 3.

6.3.1 Αμφιέρειστη δοκός – Φορτίο P στο κέντρο

Στο κεφάλαιο 4.2.1 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου καταλήξαμε στο κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, που περιγράφεται από τη σχέση:

$$P_{cr} = \sqrt{\frac{298,015GJEI_y}{l^4} + \frac{2938,304EI_yEC_w}{l^6} + \left(\frac{30,6075EI_y\kappa}{l^3}\right)^2} - \frac{30,6075EI_y\kappa}{l^3}$$

Στους πινακες 6.2, 6.3 και 6.4 (φορτίο *P* στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της διατομής αντίστοιχα) παρουσιάζονται τα κρίσιμα φορτία που προέκυψαν χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* και τον Ευρωκώδικα 3. Οι εφαρμογές έγιναν σε πρότυπες ελατές διατομές *IPE* (300, 400, 500, 600) και για μήκη 6, 8 και 10 μέτρα. Όλα τα φορτία P_{cr} είναι σε kN.

Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα P_{cr} όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής

Διατομή	Μήκος	6 m	8 m	10 m
IPE 300	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 81.64	P_{cr} = 42.60	P_{cr} = 26.20
	Adina	P_{cr} = 82.70	P_{cr} = 43.03	P_{cr} = 25.88
	EC3	P_{cr} = 82.19	P_{cr} = 43	P_{cr} = 26.51
IPE 400	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 207.7	P_{cr} = 106.7	P_{cr} = 64.09
	Adina	P_{cr} = 201.1	P_{cr} = 103.1	P_{cr} = 63.15
	EC3	P_{cr} = 208.78	P_{cr} = 106.5	P_{cr} = 64.67
IPE 500	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 381	P_{cr} = 189.5	P_{cr} = 113.2
	Adina	P_{cr} = 373	P_{cr} = 185.6	P_{cr} = 112.4
	EC3	P_{cr} = 383.22	P_{cr} = 190.6	P_{cr} = 113.82
IPE 600	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 691.5	P_{cr} = 341	P_{cr} = 199.75
	Adina	P_{cr} =670	P_{cr} = 329	P_{cr} = 196.5
	EC3	P_{cr} = 692.5	P_{cr} = 339.4	P_{cr} = 200.62

Πίνακας 6.3: Αποτελέσματα P_{cr} όταν το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής

Διατομή	Μήκος	6 m	8 m	10 m
IPE 300	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 59.07	P_{cr} = 32.69	P_{cr} = 20.95
	Adina	P_{cr} = 61.10	P_{cr} = 32.60	P_{cr} = 20.39
	EC3	P_{cr} = 60.06	P_{cr} = 33.34	P_{cr} = 21.45
IPE 400	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 144	P_{cr} = 77.70	P_{cr} = 49.10
	Adina	P_{cr} = 143.1	P_{cr} = 75.25	P_{cr} = 47.88
	EC3	P_{cr} = 146	P_{cr} = 79.07	P_{cr} = 50.25
IPE 500	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 258.1	P_{cr} = 134.1	P_{cr} = 83.70
	Adina	P_{cr} = 267	P_{cr} = 137.9	P_{cr} = 84.80
	EC3	P_{cr} = 258.4	P_{cr} = 136.1	P_{cr} = 85.16
IPE 600	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 455.9	P_{cr} = 233.6	P_{cr} = 144.5
	Adina	P_{cr} = 469	P_{cr} = 241.4	P_{cr} = 146.5
	EC3	P_{cr} = 458.27	P_{cr} = 237.28	P_{cr} = 146.91

Πίνακας 6.4: Αποτελέσματα P_{cr} όταν το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα της διατομής

Διατομή	Μήκος	6 m	8 m	10 m
IPE 300	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 112.8	P_{cr} = 55.50	P_{cr} = 32.70
	Adina	P_{cr} = 113.7	P_{cr} = 54.94	P_{cr} = 31.89
	EC3	P_{cr} = 112.5	P_{cr} = 55.46	P_{cr} = 32.77
IPE 400	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 300	P_{cr} = 143.9	P_{cr} = 83.30
	Adina	P_{cr} = 291.2	P_{cr} = 139.1	P_{cr} = 81.08
	EC3	P_{cr} = 298.58	P_{cr} = 143.45	P_{cr} = 83.21
IPE 500	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 570.4	P_{cr} = 268	P_{cr} = 152.5
	Adina	P_{cr} = 562.8	P_{cr} = 266.5	P_{cr} = 151.8
	EC3	P_{cr} = 568.37	P_{cr} = 266.88	P_{cr} = 152.12
IPE 600	Πρ. Μέθοδος	P_{cr} = 1051	P_{cr} = 488.2	P_{cr} = 274.9
	Adina	P_{cr} = 1024	P_{cr} = 481.8	P_{cr} = 271.8
	EC3	P_{cr} = 1046.45	P_{cr} = 485.42	P_{cr} = 273.96

Παρατηρούμε ότι η απόκλιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των τριών μεθόδων είναι πολύ μικρή και δεν ξεπερνάει το 3.5%. Ιδιαίτερα οι αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 στις περισσότερες περιπτώσεις είναι κάτω από 2%. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις μέγιστες αποκλίσεις για τις περιπτώσεις που το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της εκάστοτε διατομής.

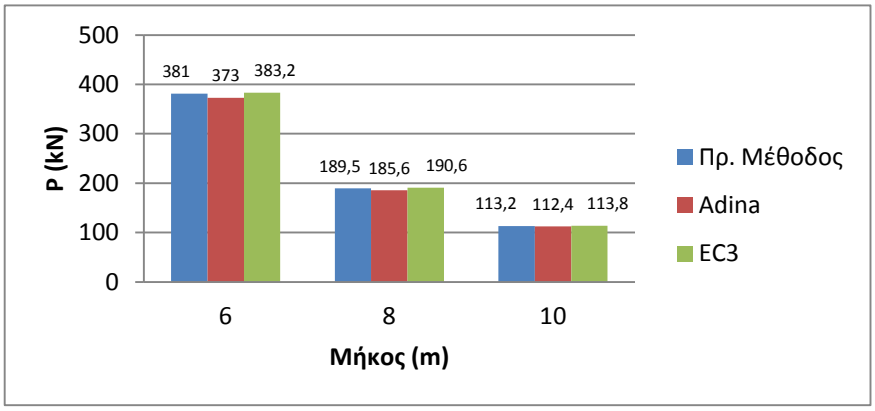
Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του *Adina* παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκλιση όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής είναι 3.6% και εμφανίζεται στη δοκό IPE600 ανοίγματος 10 μέτρων. Όταν το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής η μέγιστη απόκλιση είναι 3.3% και

εμφανίζεται στη δοκό IPE600 ανοίγματος 10 μέτρων, ενώ όταν το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα είναι 3.4% και εμφανίζεται στη δοκό IPE400 ανοίγματος 8 μέτρων.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκλιση όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής είναι 1.2% και εμφανίζεται στη δοκό IPE300 ανοίγματος 10 μέτρων. Όταν το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής η μέγιστη απόκλιση είναι 2.3% και εμφανίζεται στη δοκό IPE400 ανοίγματος 10 μέτρων, ενώ όταν το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα οι αποκλίσεις είναι γύρω από το 1%, όπως στη δοκό IPE300 ανοίγματος 10 μέτρων.

Οι αποκλίσεις μεταξύ της μεθόδου που αναπτύχθηκε και του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων *Adina* είναι εμφανώς μεγαλύτερες από τις αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η προσδιοριστική μέθοδος του κεφαλαίου 4 είναι ιδιαίτερα ακριβής και τυχόν αποκλίσεις της τάξης του 3% οφείλονται στις παραδοχές που έγιναν για να προσομοιώσουμε την αμφιέρειστη δοκό με δέσμευση στροφής περί τον κεντροβαρικό άξονα στα άκρα της, στο πρόγραμμα *Adina*.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται τα P_{cr} που προκύπτουν από τις 3 διαφορετικές μεθόδους για τη δοκό IPE500 μήκους 6, 8 και 10 μέτρων.



Σχήμα 6.1 Δοκός IPE500

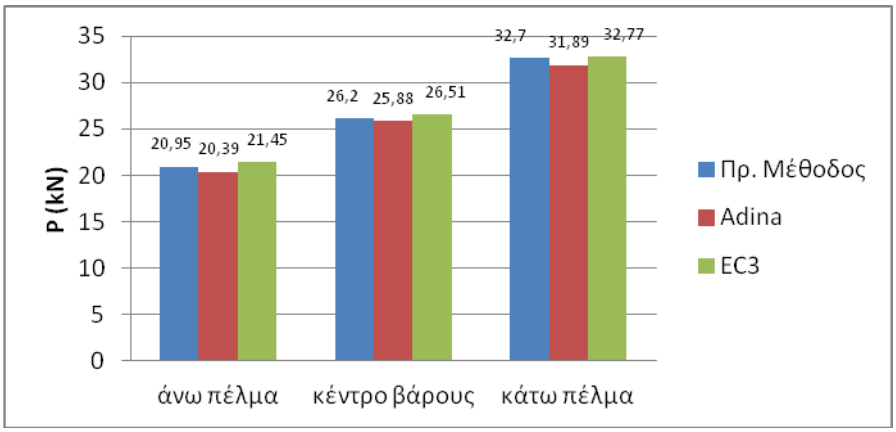
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα – το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα

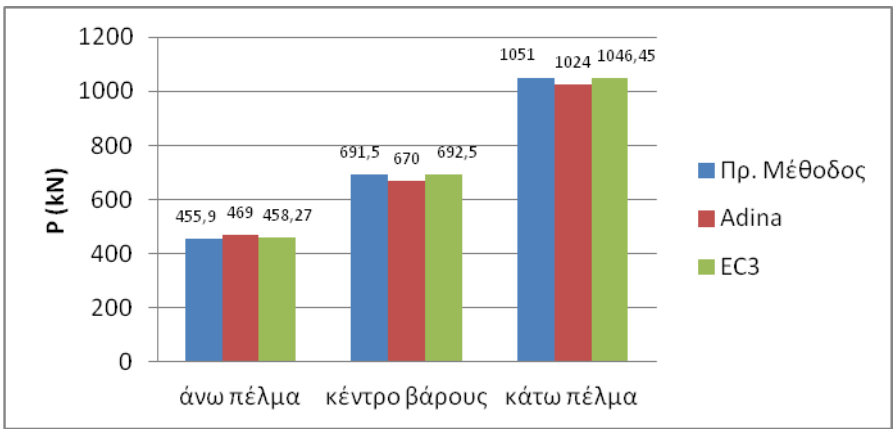
β) το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα – το φορτίο ασκείται κέντρο βάρους

γ)το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους – το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα.

Αν συγκρίνουμε τα P_{cr} μεταξύ των περιπτώσεων που το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα θα πάρουμε αποκλίσεις 36%-56%, ενώ οι αποκλίσεις για τις περιπτώσεις που το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους και στο άνω πέλμα είναι 20%-34%. Ίδιες αποκλίσεις με την περίπτωση β έχουμε και για την περίπτωση γ (20%-34%). Και για τις 3 περιπτώσεις η μέγιστη απόκλιση εμφανίζεται για τη δοκό IPE600 ανοίγματος 6 μέτρων (Σχ. 6.3) και η ελάχιστη απόκλιση για τη δοκό IPE300 ανοίγματος 10 μέτρων (Σχ. 6.2).



Σχήμα 6.2 Ελάχιστες αποκλίσεις – IPE300 μήκους 10 μέτρων



Σχήμα 6.3 Μέγιστες αποκλίσεις – IPE600 μήκους 6 μέτρων

Τέλος θα υπολογίσουμε τη ροπή αντοχής έναντι πλευρικού λυγισμού $M_{b,Rd}$, με τη βοήθεια της σχέσης (5.2) του κεφαλαίου 5 και στη συνέχεια το φορτίο P που ασκείται στο κέντρο της δοκού και δίνει αυτή τη ροπή ($M = \frac{Pl}{4}$). Επιλέγουμε χάλυβα με όριο διαρροής $f_y = 23.5kN/\mathrm{c}m^2$.

Πίνακας 6.5: Φορτία P (που ασκούνται στο κέντρο βάρους της διατομής) υπολογισμένα με βάση τη $M_{b,Rd}$

Διατομή	Μήκος	6 m	8 m	10 m
IPE 300		P = 59.05	P = 34.30	P = 22.18
IPE 400		P = 123.51	P = 73.36	P = 48.03
IPE 500		P = 216.85	P = 128.53	P = 83.59
IPE 600		P = 366.84	P = 220.21	P = 143.69

Τα φορτία αυτά είναι εμφανώς μειωμένα σε σχέση με τα P_{cr}. Οι αποκλίσεις κυμαίνονται μεταξύ 47% (IPE600 ανοίγματος 6 μέτρων) και 15% (IPE300 ανοίγματος 10 μέτρων).

6.3.2 Αμφιέρειστη δοκός – Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως *q*

Στο κεφάλαιο 4.3.1 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου καταλήξαμε στο κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, που περιγράφεται από τη σχέση:

$$q_{cr} = \sqrt{\left(\frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}\right)^2 + \frac{654.2GJEI_y}{l^6} + \frac{6451.6EI_yEC_w}{l^8}} - \frac{33.22EI_y\kappa}{l^4}$$

Στους πινακες 6.6, 6.7 και 6.8 (φορτίο *q* στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της διατομής αντίστοιχα) παρουσιάζονται τα κρίσιμα φορτία που προέκυψαν χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* και τον Ευρωκώδικα 3. Οι εφαρμογές έγιναν σε πρότυπες ελατές διατομές *IPE* (300, 400, 500, 600) και για μήκη 6, 8 και 10 μέτρα. Όλα τα φορτία q_{cr} είναι σε kN/m.

Πίνακας 6.6: Αποτελέσματα q_{cr} όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής

Διατομή	**Μήκος**	**6 m**	**8 m**	**10 m**
IPE 300	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 22.60	q_{cr} =8.80	q_{cr} =4.40
	Adina	q_{cr} =23.48	q_{cr} =8.88	q_{cr} =4.32
	EC3	q_{cr} = 22.72	q_{cr} = 8.90	q_{cr} = 4.40
IPE 400	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} =57.50	q_{cr} =22.01	q_{cr} =10.66
	Adina	q_{cr} =57.52	q_{cr} =21.66	q_{cr} =10.30
	EC3	q_{cr} = 57.71	q_{cr} = 22.08	q_{cr} = 10.72
IPE 500	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} =105.8	q_{cr} =39.40	q_{cr} =18.83
	Adina	q_{cr} =109	q_{cr} =40.20	q_{cr} =18.89
	EC3	q_{cr} = 105.94	q_{cr} = 39.51	q_{cr} = 18.88
IPE 600	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} =191.11	q_{cr} =70.20	q_{cr} =33.15
	Adina	q_{cr} =192.90	q_{cr} =71.12	q_{cr} =33.60
	EC3	q_{cr} = 191.43	q_{cr} = 70.36	q_{cr} = 33.27

Πίνακας 6.7: Αποτελέσματα q_{cr} όταν το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής

Διατομή	**Μήκος**	**6 m**	**8 m**	**10 m**
IPE 300	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 17.44	q_{cr} = 7.18	q_{cr} = 3.66
	Adina	q_{cr} = 18.03	q_{cr} = 7.20	q_{cr} = 3.60
	EC3	q_{cr} = 17.49	q_{cr} = 7.2	q_{cr} = 3.68
IPE 400	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 42.75	q_{cr} = 17.17	q_{cr} = 8.65
	Adina	q_{cr} = 42.38	q_{cr} = 16.70	q_{cr} = 8.25
	EC3	q_{cr} = 42.8	q_{cr} = 17.23	q_{cr} = 8.69
IPE 500	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 76.11	q_{cr} = 29.80	q_{cr} = 14.77
	Adina	q_{cr} = 78.45	q_{cr} = 30.50	q_{cr} = 14.97

	EC3	q_{cr} = 76.18	q_{cr} = 29.83	q_{cr} =14.82
IPE 600	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 135.40	q_{cr} = 52.07	q_{cr} = 25.60
	Adina	q_{cr} = 139.90	q_{cr} = 53.72	q_{cr} = 26.06
	EC3	q_{cr} = 135.5	q_{cr} = 52.18	q_{cr} = 25.66

Πίνακας 6.8: Αποτελέσματα q_{cr} όταν το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα της διατομής

Διατομή	**Μήκος**	**6 m**	**8 m**	**10 m**
IPE 300	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 29.37	q_{cr} = 10.95	q_{cr} = 5.20
	Adina	q_{cr} = 29.51	q_{cr} = 10.89	q_{cr} = 5.10
	EC3	q_{cr} = 29.51	q_{cr} = 11.02	q_{cr} = 5.24
IPE 400	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 77.55	q_{cr} = 28.16	q_{cr} = 13.14
	Adina	q_{cr} = 75.16	q_{cr} = 27.23	q_{cr} = 12.80
	EC3	q_{cr} = 77.82	q_{cr} = 28.3	q_{cr} = 13.23
IPE 500	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 146.80	q_{cr} = 52.10	q_{cr} = 23.90
	Adina	q_{cr} = 145.15	q_{cr} = 51.70	q_{cr} = 23.90
	EC3	q_{cr} = 147.3	q_{cr} = 52.33	q_{cr} = 24.04
IPE 600	Πρ. Μέθοδος	q_{cr} = 269.76	q_{cr} = 94.50	q_{cr} = 42.95
	Adina	q_{cr} = 261.90	q_{cr} = 93.64	q_{cr} = 42.90
	EC3	q_{cr} = 270.45	q_{cr} = 94.88	q_{cr} = 43.15

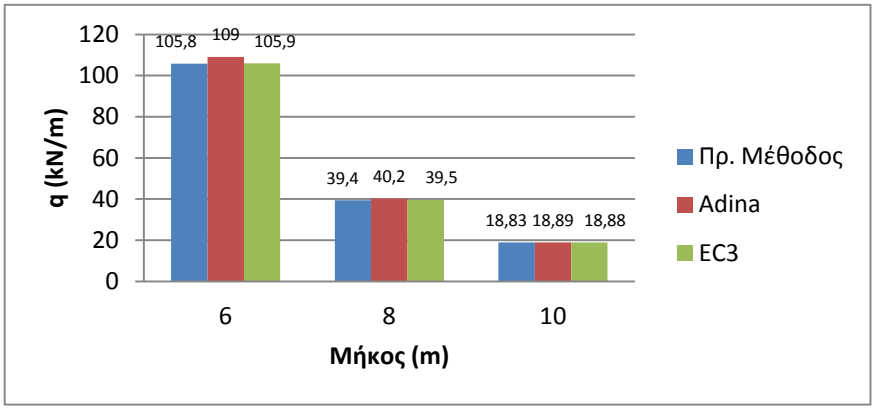
Παρατηρούμε ότι η απόκλιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των τριών μεθόδων είναι πολύ μικρή και δεν ξεπερνάει το 3.5%. Ιδιαίτερα οι αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 είναι ελάχιστες και πουθενά δεν ξεπερνούν το 0.5%. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις μέγιστες αποκλίσεις για τις περιπτώσεις που το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους, στο άνω πέλμα και στο κάτω πέλμα της εκάστοτε διατομής.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του *Adina* παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκλιση όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής είναι 3.6% και εμφανίζεται στη δοκό IPE300 ανοίγματος 6 μέτρων. Όταν το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής η μέγιστη απόκλιση είναι 3.2% και εμφανίζεται στη δοκό IPE300 ανοίγματος 6 μέτρων, ενώ όταν το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα, είναι 3.3% και εμφανίζεται στη δοκό IPE400 ανοίγματος 8 μέτρων.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις μεταξύ των δύο αυτών μεθόδων δεν ξεπερνούν το 0.5%.

Οι αποκλίσεις μεταξύ της μεθόδου που αναπτύχθηκε και του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων *Adina* είναι εμφανώς μεγαλύτερες από τις αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η προσδιοριστική μέθοδος του κεφαλαίου 4 είναι ιδιαίτερα ακριβής και τυχόν αποκλίσεις της τάξης του 3% οφείλονται στις παραδοχές που έγιναν για να προσομοιώσουμε την αμφιέρειστη δοκό με δέσμευση στροφής περί τον κεντροβαρικό άξονα στα άκρα της, στο πρόγραμμα *Adina*.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται τα q_{cr} που προκύπτουν από τις 3 διαφορετικές μεθόδους για τη δοκό IPE500 μήκους 6, 8 και 10 μέτρων.



Σχήμα 6.4 Δοκός IPE500

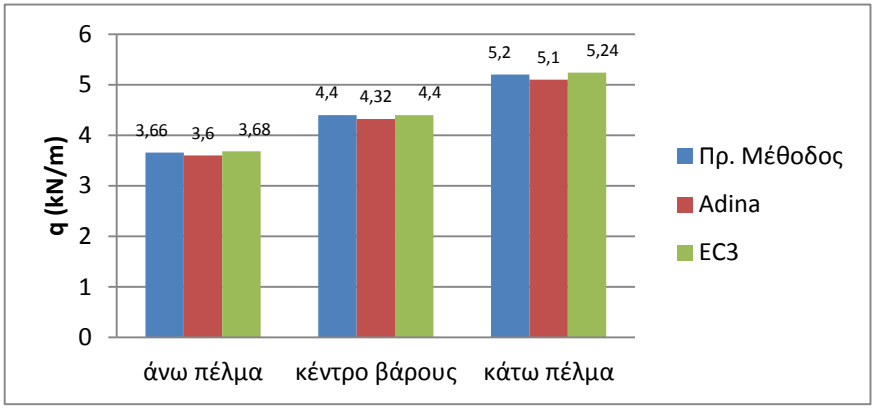
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα – το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα

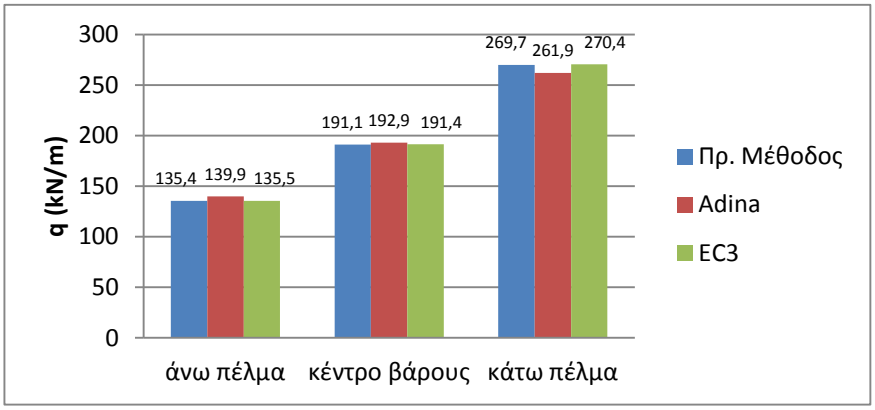
β) το φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα – το φορτίο ασκείται κέντρο βάρους

γ)το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους – το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα.

Αν συγκρίνουμε τα q_{cr} μεταξύ των περιπτώσεων που το φορτίο ασκείται στο <u>άνω πέλμα</u> και στο <u>κάτω πέλμα</u> θα πάρουμε αποκλίσεις 28%-50%, ενώ οι αποκλίσεις για τις περιπτώσεις που το φορτίο ασκείται στο <u>κέντρο βάρους</u> και στο <u>άνω πέλμα</u> είναι περίπου 16%-30%. Ίδιες αποκλίσεις με την περίπτωση β έχουμε και για την περίπτωση γ (16%-30%). Και για τις 3 περιπτώσεις η μέγιστη απόκλιση εμφανίζεται για τη δοκό IPE600 ανοίγματος 6 μέτρων (Σχ. 6.6) και η ελάχιστη απόκλιση για τη δοκό IPE300 ανοίγματος 10 μέτρων (Σχ. 6.5).



Σχήμα 6.5 Ελάχιστες αποκλίσεις – IPE300 μήκους 10 μέτρων



Σχήμα 6.6 Μέγιστες αποκλίσεις– IPE600 μήκους 6 μέτρων

Τέλος θα υπολογίσουμε τη ροπή αντοχής έναντι πλευρικού λυγισμού $M_{b,Rd}$, με τη βοήθεια της σχέσης (5.2) του κεφαλαίου 5 και στη συνέχεια το κατανεμημένο φορτίο q που δίνει αυτή τη ροπή. ($M = \frac{ql^2}{8}$). Επιλέγουμε χάλυβα με όριο διαρροής $f_y = 23.5kN/cm^2$.

Πίνακας 6.9: Φορτία q (που ασκούνται στο κέντρο βάρους της διατομής) υπολογισμένα με βάση τη $M_{b,Rd}$

Διατομή	Μήκος	6 m	8 m	10 m
IPE 300		q = 17.35	q = 7.37	q = 3.77
IPE 400		q = 37.04	q = 16.05	q = 8.29
IPE 500		q = 65.52	q = 28.23	q = 14.45
IPE 600		q = 111.97	q = 48.72	q = 24.96

Τα φορτία αυτά είναι εμφανώς μειωμένα σε σχέση με τα q_{cr}. Οι αποκλίσεις κυμαίνονται μεταξύ 42% (IPE600 ανοίγματος 6 μέτρων) και 15% (IPE300 ανοίγματος 10 μέτρων).

6.3.3 Αμφιέρειστη δοκός – Ζεύγος ροπών κάμψεως M_0 στα άκρα

Στο κεφάλαιο 4.4.1 με μια αυστηρά μαθηματική επίλυση καταλήξαμε στην κρίσιμη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, που περιγράφεται από τη σχέση:

$$M_{0cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_yGJ}\sqrt{\left(1+\left(\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{EC_w}{GJ}}\right)^2\right)}$$

ενώ στο κεφάλαιο 4.4.2 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου καταλήξαμε στην κρίσιμη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, που περιγράφεται από τη σχέση:

$$M_{0cr} = \sqrt{\frac{\left(\pi^4 + \pi^2 \frac{GJ}{EC_w} l^2\right) EI_y EC_w}{l^4}}$$

Στον Πίνακα 6.10 παρουσιάζονται οι κρίσιμες ροπές που προέκυψαν χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική μέθοδο, το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* και τον Ευρωκώδικα 3, ενώ στον Πίνακα 6.11 οι κρίσιμες ροπές σύμφωνα με την αυστηρά μαθηματική επίλυση. Οι εφαρμογές έγιναν σε πρότυπες ελατές διατομές *IPE* (300, 400, 500, 600) και για μήκη 6, 8 και 10 μέτρα. Όλες οι ροπές M_{0cr} είναι σε kNm.

Πίνακας 6.10: Αποτελέσματα M_{0cr}

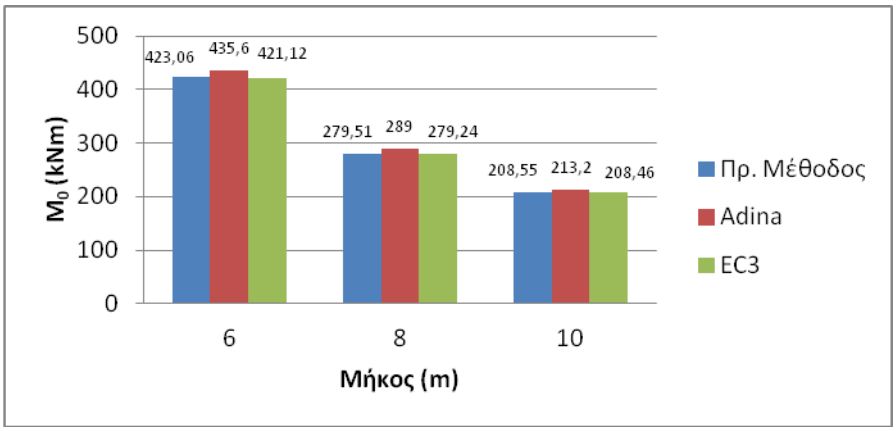
Διατομή	**Μήκος**	**6 m**	**8 m**	**10 m**
IPE 300	Πρ. Μέθοδος	M_{0cr} = 90.45	M_{0cr} = 63.08	M_{0cr} = 48.61
	Adina	M_{0cr} = 93.35	M_{0cr} = 64	M_{0cr} = 48.44
	EC3	M_{0cr} = 90.32	M_{0cr} = 63	M_{0cr} = 48.55
IPE 400	Πρ. Μέθοδος	M_{0cr} = 229.63	M_{0cr} = 156.04	M_{0cr} = 118.5
	Adina	M_{0cr} = 233.2	M_{0cr} = 153.7	M_{0cr} = 115.1
	EC3	M_{0cr} = 229.43	M_{0cr} = 156.05	M_{0cr} = 118.44
IPE 500	Πρ. Μέθοδος	M_{0cr} = 423.06	M_{0cr} = 279.51	M_{0cr} = 208.55
	Adina	M_{0cr} = 435.6	M_{0cr} = 289	M_{0cr} = 213.2
	EC3	M_{0cr} = 421.12	M_{0cr} = 279.24	M_{0cr} = 208.46
IPE 600	Πρ. Μέθοδος	M_{0cr} = 761.82	M_{0cr} = 497.58	M_{0cr} = 367.88
	Adina	M_{0cr} = 791	M_{0cr} = 513.8	M_{0cr} = 374.2
	EC3	M_{0cr} = 760.98	M_{0cr} = 497.26	M_{0cr} = 367.43

Πίνακας 6.11: Αποτελέσματα M_{0cr} με αυστηρά μαθηματική επίλυση

Διατομή	**Μήκος**	**6 m**	**8 m**	**10 m**
IPE 300		M_{0cr} = 90.32	M_{0cr} = 63	M_{0cr} = 48.55
IPE 400		M_{0cr} = 229.42	M_{0cr} = 156.04	M_{0cr} = 118.43
IPE 500		M_{0cr} = 421.12	M_{0cr} = 279.24	M_{0cr} = 208.46
IPE 600		M_{0cr} = 760.98	M_{0cr} = 497.26	M_{0cr} = 367.43

Παρατηρούμε ότι η αυστηρά μαθηματική επίλυση και ο Ευρωκώδικας 3 μας δίνουν τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα. Οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του προγράμματος *Adina* δεν ξεπερνούν το 3.5%, ενώ οι αποκλίσεις μεταξύ της προσδιοριστικής μεθόδου και του Ευρωκώδικα 3 είναι σχεδόν μηδενικές (κάτω από 0.5%).

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι M_{0cr} που προκύπτουν από τις 3 διαφορετικές μεθόδους για τη δοκό IPE500 μήκους 6, 8 και 10 μέτρων.



Σχήμα 6.7 Δοκός IPE500

Τέλος θα υπολογίσουμε τη ροπή αντοχής έναντι πλευρικού λυγισμού $M_{b,Rd}$, με τη βοήθεια της σχέσης (5.2) του κεφαλαίου 5 για να δούμε σε τι ποσοστό είναι μειωμένη σε σχέση με τη M_{0cr}. Επιλέγουμε χάλυβα με όριο διαρροής, $f_y = 23.5kN/cm^2$.

Πίνακας 6.12: Ροπή αντοχής $M_{b,Rd}$

Διατομή	Μήκος	6 m	8 m	10 m
IPE 300		$M_{b,Rd}$ =71.24	$M_{b,Rd}$ =53.11	$M_{b,Rd}$ =42.25
IPE 400		$M_{b,Rd}$ =154.18	$M_{b,Rd}$ =116.85	$M_{b,Rd}$ =93.56
IPE 500		$M_{b,Rd}$ =273.96	$M_{b,Rd}$ =206.02	$M_{b,Rd}$ =163.34
IPE 600		$M_{b,Rd}$ =471.24	$M_{b,Rd}$ =357	$M_{b,Rd}$ =282.84

Οι ροπές αυτές είναι εμφανώς μειωμένες σε σχέση με τις M_{0cr}. Οι αποκλίσεις κυμαίνονται μεταξύ 38% (IPE600 ανοίγματος 6 μέτρων) και 13% (IPE300 ανοίγματος 10 μέτρων).

6.3.4 Αμφιέρειστη δοκός – Φορτίο *P* στο κέντρο και αξονική θλιπτική δύναμη *N*

Στο κεφάλαιο 4.2.2 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου καταλήξαμε στο κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού συναρτήσει της αξονικής δύναμης *N*, η οποία υποθέσαμε πως ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής (εξίσωση 4.28).

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής *IPE*500 και μήκους 8 μέτρων. Γι' αυτή τη δοκό θα αναζητήσουμε έναν συνδυασμό N-P_{cr} για τον οποίο υπόκεινται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Αρχικά με τη βοήθεια του *Adina* θα βρούμε τον συντελεστή φόρτισης "load fac" για ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης *N* και φορτίου *P* στο μέσον της δοκού. Αυτό θα γίνει για τρείς περιπτώσεις:

α) Το φορτίο *P* ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής

β) Το φορτίο *P* ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής

γ) Το φορτίο *P* ασκείται στο κάτω πέλμα της διατομής.

Έστω ότι στη δοκό ασκείται αξονικό φορτίο *N*=100kN και κατακόρυφο φορτίο *P*=100kN. Γι αυτό το συνδυασμό, το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* μας δίνει συντελεστή φόρτισης:

α) *load fac* = 1.610, όταν το *P* ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής
β) *load fac* = 1.255, όταν το *P* ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής
γ) *load fac* = 2.807, όταν το *P* ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής.

Πίνακας 6.13: Κρίσιμοι συνδυασμοί φορτίων με χρήση του *Adina*

Σημείο εφαρμογής φορτίου	N	P
Κ.Β.	161 kN	161 kN
Άνω πέλμα	125.5 kN	125.5 kN
Κάτω πέλμα	208.7 kN	208.7 kN

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.28) που αναπτύχθηκε βάση της προσδιοριστικής μεθόδου του κεφαλαίου 4.2.2 και υποθέτοντας αξονικό φορτίο ίδιο με αυτό που προέκυψε από το *Adina* καταλήγουμε στους εξής συνδυασμούς:

Πίνακας 6.14: Κρίσιμοι συνδυασμοί φορτίων με χρήση της προσδιοριστικής μεθόδου

Σημείο εφαρμογής φορτίου	N	P
Κ.Β.	161 kN	166.13 kN
Άνω πέλμα	125.5 kN	125.14 kN
Κάτω πέλμα	208.7 kN	212.80 kN

Η απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της προσδιοριστικής μεθόδου και του *Adina* δεν ξεπερνάει το 3%. Η περίπτωση που το φορτίο *P* ασκείται στο άνω πέλμα της διατομής είναι η δυσμενέστερη, καθώς το φορτίο δίνει μια επιπλέον ροπή η οποία αθροίζεται στην ήδη υπάρχουσα και κατά συνέπεια το P_{cr} μειώνεται. Το αντίθετο συμβαίνει όταν το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα της διατομής. Όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής, η επιπλέον ροπή μηδενίζεται, καθώς το κέντρο βάρους στις διατομές διπλής συμμετρίας ταυτίζεται με το κέντρο διάτμησης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει να ελέγξουμε την απόκλιση των P_{cr} (βάση της προσδιοριστικής μεθόδου), για το κέντρο βάρους, το πάνω και κάτω πέλμα, για την περίπτωση που η αξονική δύναμη *N* είναι η ίδια. Έστω ότι η αξονική δύναμη που ασκείται είναι η $N = 161kN$.

Πίνακας 6.15: P_{cr} για σταθερή αξονική δύναμη

Σημείο εφαρμογής φορτίου	N	P
Κ.Β.	161 kN	166.13 kN
Άνω πέλμα	161 kN	122.23 kN
Κάτω πέλμα	161 kN	225.81 kN

Όταν το αξονικό θλιπτικό φορτίο είναι σταθερό, η απόκλιση των Pcr είναι:

α) 46%, μεταξύ των περιπτώσεων που το κατακόρυφο φορτίο ασκείται στο άνω και κάτω πέλμα

β) 26%, μεταξύ των περιπτώσεων που το κατακόρυφο φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα και στο κέντρο βάρους

γ) 26%, μεταξύ των περιπτώσεων που το κατακόρυφο φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα και στο κέντρο βάρους.

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε τις ροπές σχεδιασμού $M_{\mathrm{x,Ed}}$ και τα φορτία *P* που τις προκαλούν (ανάλογα με το σημείο εφαρμογής τους καθ' ύψος της διατομής) σύμφωνα με τις σχέσεις αλληλεπίδρασης (5.6) και (5.7) του κεφαλαίου 5.3. Ως θλιπτική αξονική δύναμη σχεδιασμού N_{Ed} , θα θεωρήσουμε τη δύναμη *N* που υπολογίσαμε παραπάνω βάση της προσδιοριστικής μεθόδου (για κέντρο βάρους, άνω και κάτω πέλμα). Αντικαθιστώντας αυτή στις σχέσεις (5.6) και (5.7), υπολογίζοντας όλες τις υπόλοιπες γνωστές μεταβλητές $\chi_z, \chi_y, \gamma_{M1}, N_{Rk}, \mathrm{k}_{xx}, k_{yx}, \chi_{LT}, M_{x,Rk}$ και θεωρώντας $M_{\mathrm{y},Ed} = 0$ καθώς το κατακόρυφο φορτίο δίνει ροπή μόνο ως προς τον άξονα *x* (σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική εργασία) καταλήγουμε στις παρακάτω ροπές σχεδιασμού, για ποιότητα χάλυβα S235:

Πίνακας 6.16: Ροπές σχεδιασμού

Σημείο εφαρμογής φορτίου	**N**	**M_{Ed}**
Κ.Β.	161 kN	179.38 kNm
Άνω πέλμα	125.5 kN	189.55 kNm
Κάτω πέλμα	208.7 kN	164.89 kNm

Στον Πίνακα 6.17 φαίνονται τα φορτία *P* που αντιστοιχούν στις παραπάνω ροπές σχεδιασμού:

Πίνακας 6.17: Κρίσιμοι συνδυασμοί φορτίων σχεδιασμού

Σημείο εφαρμογής φορτίου	**N**	**P**
Κ.Β.	161 kN	89.69 kN
Άνω πέλμα	125.5 kN	94.77 kN
Κάτω πέλμα	208.7 kN	82.94 kN

Παρατηρούμε ότι τα φορτία σχεδιασμού *P* είναι μειωμένα κατά ένα μεγάλο ποσοστό σε σχέση με τα P_{cr}. Η απόκλισή τους κυμαίνεται μεταξύ 25% και 60%. Όσο πιο μεγάλο είναι το φορτίο, τόσο πιο μικρή είναι η απόκλιση.

6.3.5 Αμφιέρειστη δοκός – Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εντάσεως *q* και αξονική θλιπτική δύναμη *N*

Στο κεφάλαιο 4.3.2 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου καταλήξαμε στο κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού συναρτήσει της αξονικής δύναμης *N*, η οποία υποθέσαμε πως ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής (εξίσωση 4.48).

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής *IPE*500 και μήκους 8 μέτρων. Γι' αυτή τη δοκό θα αναζητήσουμε έναν συνδυασμό N-q_{cr} για τον οποίο υπόκεινται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Αρχικά με τη βοήθεια του *Adina* θα βρούμε τον συντελεστή φόρτισης "load fac" για ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης *N* και ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου *q*. Αυτό θα γίνει για τρείς περιπτώσεις:

α) Το φορτίο *q* ασκείται στο κέντρο βάρους των διατομών

β) Το φορτίο *q* ασκείται στο άνω πέλμα των διατομών

γ) Το φορτίο *q* ασκείται στο κάτω πέλμα των διατομών.

Έστω ότι στη δοκό ασκείται αξονικό φορτίο *N*=100kN και ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο *q*=12.5kN. Γι αυτό το συνδυασμό, το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* μας δίνει συντελεστή φόρτισης:

α) *load fac* = 2.457, όταν το *q* ασκείται στο κέντρο βάρους των διατομών

β) *load fac* = 2.047, όταν το *q* ασκείται στο κέντρο βάρους των διατομών

γ) *load fac* = 2.876, όταν το *q* ασκείται στο κέντρο βάρους των διατομών.

Πίνακας 6.18: Κρίσιμοι συνδυασμοί φορτίων με χρήση του *Adina*

Σημείο εφαρμογής φορτίου	N	q
Κ.Β.	245.7 kN	30.71 kN/m
Άνω πέλμα	204.7 kN	25.60 kN/m
Κάτω πέλμα	287.6 kN	35.95 kN/m

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.48) που αναπτύχθηκε βάση της προσδιοριστικής μεθόδου του κεφαλαίου 4.3.2 και υποθέτοντας αξονικό φορτίο ίδιο με αυτό που προέκυψε από το *Adina* καταλήγουμε στους εξής συνδυασμούς:

Πίνακας 6.19 : Κρίσιμοι συνδυασμοί φορτίων με χρήση της προσδιοριστικής μεθόδου

Σημείο εφαρμογής φορτίου	N	q
Κ.Β.	245.7 kN	31.90 kN/m
Άνω πέλμα	204.7 kN	26.20 kN/m
Κάτω πέλμα	287.6 kN	37.60 kN/m

Η απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της προσδιοριστικής μεθόδου και του *Adina* δεν ξεπερνάει το 4%. Το σχετικά μεγάλο ποσοστό απόκλισης οφείλεται στη χρήση του αναπτύγματος *Taylor* για τα ημίτονα και τα συνημίτονα. Όσους πιο πολλούς όρους από το ανάπτυγμα *Taylor* λαμβάναμε υπόψη, τόσο πιο μικρή θα ήταν η απόκλιση.

Η περίπτωση που το φορτίο q ασκείται στο άνω πέλμα των διατομών είναι η δυσμενέστερη, καθώς το φορτίο δίνει μια επιπλέον ροπή η οποία αθροίζεται στην ήδη υπάρχουσα και κατά συνέπεια το q_{cr} μειώνεται. Το αντίθετο συμβαίνει όταν το φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα των διατομών. Όταν το φορτίο ασκείται στο κέντρο βάρους των διατομών, η επιπλέον ροπή μηδενίζεται, καθώς το κέντρο βάρους στις διατομές διπλής συμμετρίας ταυτίζεται με το κέντρο διάτμησης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει να ελέγξουμε την απόκλιση των q_{cr} (βάση της προσδιοριστικής μεθόδου), για το κέντρο βάρους, το πάνω και κάτω πέλμα, για την περίπτωση που η αξονική δύναμη N είναι η ίδια. Έστω ότι η αξονική δύναμη που ασκείται είναι η $N = 245.7kN$.

Πίνακας 6.20: q_{cr} για σταθερή αξονική δύναμη

Σημείο εφαρμογής φορτίου	N	q
Κ.Β.	245.7 kN	31.90 kN/m
Άνω πέλμα	245.7 kN	25.34 kN/m
Κάτω πέλμα	245.7 kN	39.90 kN /m

Όταν το αξονικό θλιπτικό φορτίο είναι σταθερο, η απόκλιση των Pcr είναι:

α) 36%, μεταξύ των περιπτώσεων που το κατακόρυφο φορτίο ασκείται στο άνω και κάτω πέλμα

β) 20%, μεταξύ των περιπτώσεων που το κατακόρυφο φορτίο ασκείται στο άνω πέλμα και στο κέντρο βάρους

γ) 20%, μεταξύ των περιπτώσεων που το κατακόρυφο φορτίο ασκείται στο κάτω πέλμα και στο κέντρο βάρους.

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε τις ροπές σχεδιασμού $M_{\mathrm{x,Ed}}$ και τα φορτία q που τις προκαλούν (ανάλογα με το σημείο εφαρμογής τους καθ' ύψος της διατομής) σύμφωνα με τις σχέσεις αλληλεπίδρασης (5.6) και (5.7) του κεφαλαίου 5.3. Ως θλιπτική αξονική δύναμη σχεδιασμού N_{Ed} , θα θεωρήσουμε τη δύναμη N που υπολογίσαμε παραπάνω βάση της προσδιοριστικής μεθόδου (για κέντρο βάρους, άνω και κάτω πέλμα). Αντικαθιστώντας αυτή στις σχέσεις (5.6) και (5.7), υπολογίζοντας όλες τις υπόλοιπες γνωστές μεταβλητές $\chi_z, \chi_y, \gamma_{M1}, N_{Rk}, \mathrm{k}_{xx}, k_{yx}, \chi_{LT}, M_{x,Rk}$ και θεωρώντας $M_{\mathrm{y},Ed} = 0$ καθώς το κατακόρυφο φορτίο δίνει ροπή μόνο ως προς τον άξονα x (σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική εργασία) καταλήγουμε στις παρακάτω ροπές σχεδιασμού, για ποιότητα χάλυβα S235:

Πίνακας 6.21: Ροπές σχεδιασμού

Σημείο εφαρμογής φορτίου	N	M_{Ed}
Κ.Β.	245.7 kN	135.18 kNm
Άνω πέλμα	204.7 kN	145.39 kNm
Κάτω πέλμα	287.6 kN	124.89 kNm

Στον Πίνακα 6.22 φαίνονται τα φορτία q που αντιστοιχούν στις παραπάνω ροπές σχεδιασμού:

Πίνακας 6.22: Κρίσιμοι συνδυασμοί φορτίων σχεδιασμού

Σημείο εφαρμογής φορτίου	N	q
Κ.Β.	245.7 kN	16.90 kN/m
Άνω πέλμα	204.7 kN	18.17 kN/m
Κάτω πέλμα	287.6 kN	15.61 kN/m

Παρατηρούμε ότι τα φορτία σχεδιασμού q είναι μειωμένα κατά ένα μεγάλο ποσοστό σε σχέση με τα q_{cr}. Η απόκλισή τους κυμαίνεται μεταξύ 30% και 60%. Όσο πιο μεγάλο είναι το φορτίο, τόσο πιο μικρή είναι η απόκλιση.

6.3.6 Αμφιέρειστη δοκός – Ζεύγος ροπών κάμψεως M_0 στα άκρα και αξονική θλιπτική δύναμη N

Στο κεφάλαιο 4.4.3 με την εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου καταλήξαμε στην κρίσιμη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού συναρτήσει της αξονικής δύναμης N, η οποία υποθέσαμε πως ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής:

$$M_{0cr} = \sqrt{\pi^2 \frac{EI_y GJ - EC_w N}{l^2} + \pi^4 \frac{EI_y EC_w}{l^4} - NGJ}$$

Θεωρούμε μια αμφιέρειστη δοκό διατομής *IPE*500 και μήκους 8 μέτρων. Γι' αυτή τη δοκό θα αναζητήσουμε έναν συνδυασμό N-M_{0cr} για τον οποίο υπόκεινται σε στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.

Αρχικά με τη βοήθεια του *Adina* θα βρούμε τον συντελεστή φόρτισης "load fac" για ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης N και ζεύγος ροπών κάμψεως M_0 στα άκρα. Έστω ότι στη δοκό ασκείται αξονικό φορτίο N=100kN και ζεύγος ροπών M_0=100kNm. Γι αυτό το συνδυασμό, το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων *Adina* μας δίνει συντελεστή φόρτισης *load fac* = 2.251. Έτσι ένας κρίσιμος συνδυασμός N-M_0 που προκύπτει με χρήση του προγράμματος *Adina* είναι:

$$N = 225.1kN$$
$$M_0 = 225.1kNm$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση που προέκυψε με εφαρμογή της προσδιοριστικής μεθόδου και θεωρώντας αξονικό φορτίο ίδιο με αυτό του *Adina* καταλήγουμε στον παρακάτω κρίσιμο συνδυασμό N-M_0:

$$N = 225.1kN$$
$$M_0 = 229.72kNm$$

Η απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της προσδιοριστικής μεθόδου και του *Adina* δεν ξεπερνάει το 2%. Σε σύγκριση με τα κεφάλαια 6.3.4 και 6.3.5 η απόκλιση των δύο μεθόδων είναι τόσο μικρή επειδή δεν κάναμε απλοποιήσεις κατά τη μόρφωση της σχέσης N-M_0.

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε τη ροπή σχεδιασμού $M_{\mathrm{x,Ed}}$ σύμφωνα με τις σχέσεις αλληλεπίδρασης (5.6) και (5.7) του κεφαλαίου 5.3. Ως θλιπτική αξονική δύναμη σχεδιασμού N_{Ed}, θα θεωρήσουμε τη δύναμη N που υπολογίσαμε παραπάνω βάση της προσδιοριστικής μεθόδου. Αντικαθιστώντας αυτή στις σχέσεις (5.6) και (5.7), υπολογίζοντας όλες τις υπόλοιπες γνωστές μεταβλητές $\chi_z, \chi_y, \gamma_{M1}, N_{Rk}, \mathrm{k}_{xx}, k_{yx}, \chi_{LT}, M_{x,Rk}$ και θεωρώντας $M_{\mathrm{y},Ed} = 0$ καθώς έχουμε εξωτερικές ροπές μόνο ως προς τον άξονα x (σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική εργασία) καταλήγουμε στη παρακάτω ροπή σχεδιασμού, για ποιότητα χάλυβα S235:

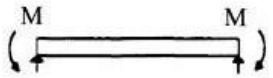
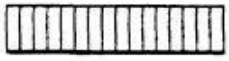
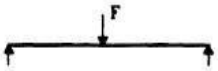
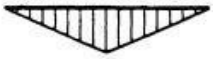
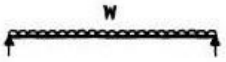
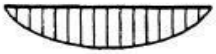
$$N = 225.1kN$$
$$M_{Ed} = 129.30kNm$$

Παρατηρούμε ότι η ροπή σχεδιασμού είναι μειωμένη κατά περίπου 40%.

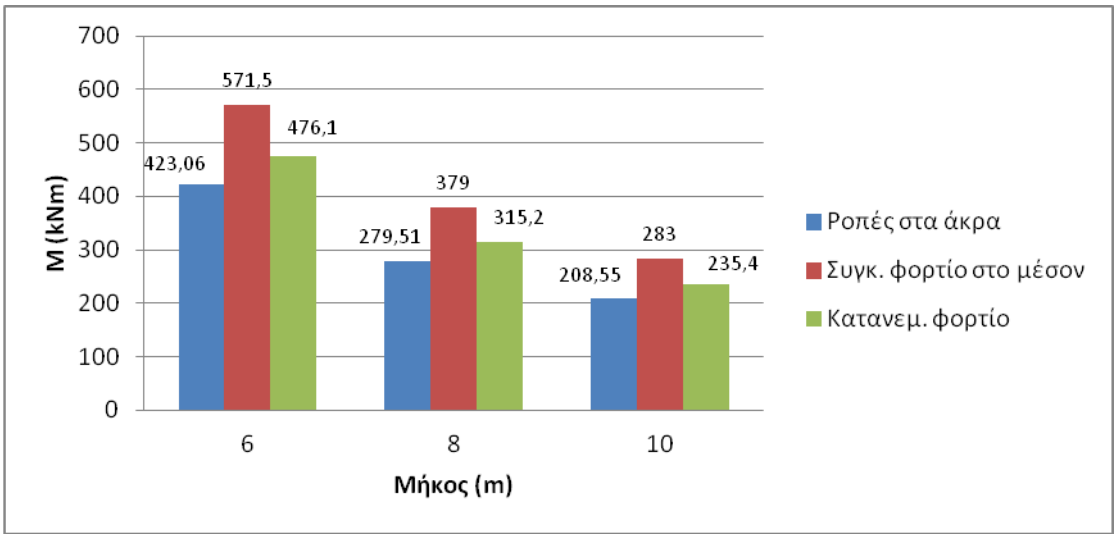
6.3.7 Αμφιέρειστη δοκός – Διάφορες φορτίσεις

Η επίδραση της κατανομής φορτίου κατά μήκος μιας αμφιέρειστης δοκού στον στρεπτοκαμπτικό λυγισμό έχει υπολογιστεί αριθμητικά από αρκετούς ερευνητές. Χάριν απλότητας έχει δημιουργηθεί ένας πίνακας (Πιν. 6.23) με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζονται εύκολα οι κρίσιμες ροπές, όταν τα φορτία ασκούνται στο κέντρο διάτμησης της διατομής.

Πίνακας 6.23: Τιμές C_b για διάφορες φορτίσεις, $M_{cr} = C_b M_{0cr}$

Φόρτιση και συνθήκες στήριξης	**Διαγράμματα καμπτικών ροπών**	**M_{cr}**	**C_b**
		M_{0cr}	1.00
		$\frac{F_{cr} l}{4}$	1.35
		$\frac{w_{cr} l^2}{8}$	1.13

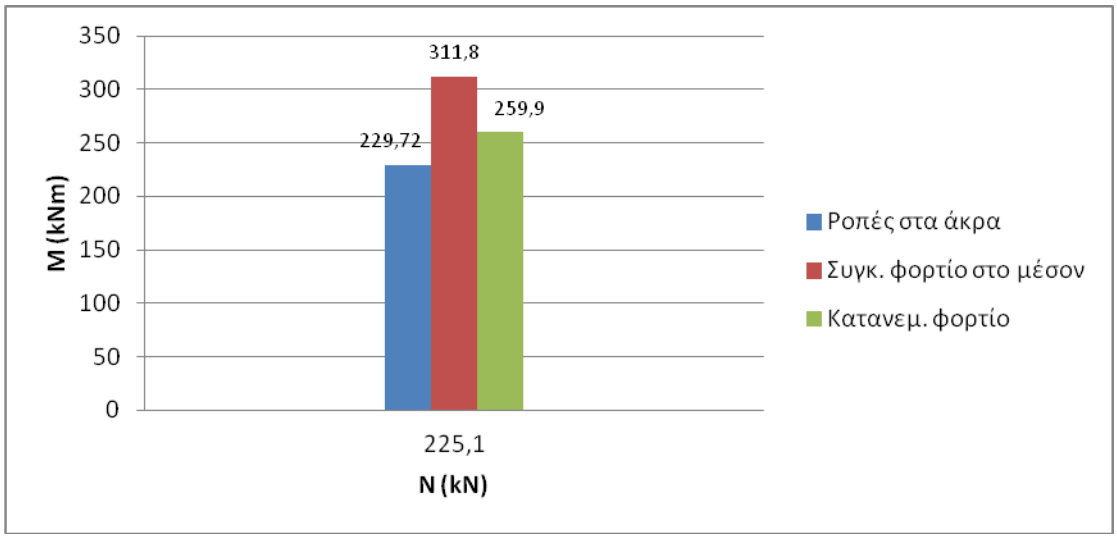
Σε αυτό το σημείο θα ελέγξουμε τους συντελεστές C_b για την προσδιοριστική μέθοδο του κεφαλαίου 4 (περιπτώσεις χωρίς αξονικά φορτία) για να δούμε εάν ισχύουν τα παραπάνω. Έστω ότι έχουμε μια δοκό *IPE500*. Οι κρίσιμες ροπές M_{cr} για τους τρείς τύπους φορτίσεων που δίνονται παραπάνω και για μήκη δοκών 6, 8 και 10 μέτρα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 6.8 M_{cr} για διάφορες φορτίσεις σε δοκό IPE500

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι συντελεστές του Πίνακα 6.23, δηλαδή η M_{cr} για δοκό που καταπονείται από συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσον της ισούται με $M_{cr} = 1.35 M_{0cr}$, όπου M_{0cr} η κρίσιμη ροπή για δοκό που καταπονείται από ίσες ροπές στα άκρα της. Η M_{cr} για δοκό που καταπονείται από ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q ισούται με $M_{cr} = 1.13 M_{0cr}$.

Θα ελέγξουμε εάν ισχύουν οι συντελεστές C_b και για την περίπτωση που εκτός από κατακόρυφα φορτία έχουμε και αξονικά θλιπτικά. Ο έλεγχος θα γίνει σε αμφιέρειστη δοκό *IPE500* μήκους 8 μέτρων. Έστω ότι η δοκός καταπονείται από αξονικό θλιπτικό φορτίο $N = 225.1 kN$ και για τις τρείς περιπτώσεις φορτίσεων. Οι κρίσιμες ροπές M_{cr} που προκύπτουν φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 6.9 M_{cr} για διάφορες φορτίσεις σε δοκό IPE500 μήκους 8 μέτρων

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι συντελεστές του Πίνακα 6.23, δηλαδή η M_{cr} για δοκό που καταπονείται από συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσον της ισούται με $M_{cr} = 1.35 M_{0cr}$, όπου M_{0cr} η κρίσιμη ροπή για δοκό που καταπονείται από ίσες ροπές στα άκρα της. Η M_{cr}

για δοκό που καταπονείται από ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q ισούται με $M_{cr} = 1.13 M_{0cr}$.

7 Συμπεράσματα

Στη διπλωματική αυτή εργασία αντικείμενο έρευνας ήταν ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού εμφανίζει αρκετές δυσκολίες στην επίλυσή της. Ένας τρόπος επίλυσής της είναι η μέθοδος των σειρών, μια θεωρητική λύση η οποία αναπτύχθηκε από τους Timoshenko και Gere. Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά πολύπλοκη και γι' αυτό προσπαθήσαμε να εφαρμόσουμε μια μεθοδολογία μέσω της οποίας θα καταλήγουμε με μεγαλύτερη ευκολία σε αποτελέσματα με μεγάλη ακρίβεια.

Αναπτύχθηκε μια προσδιοριστική μέθοδος για την εύρεση του ελαστικού κρίσιμου φορτίου στρεπτοκαμπτικού λυγισμού σε αμφιέρειστες δοκούς διαφόρων μηκών για μια σειρά φορτίσεων (ροπές στα άκρα, κατακόρυφο κατανεμημένο φορτίο και κατακόρυφο φορτίο συγκεντρωμένο στο μέσον τους, με ταυτόχρονη ή μη εφαρμογή αξονικού θλιπτικού φορτίου). Στη συνέχεια έγινε γραμμική ελαστική ανάλυση των ίδιων φορέων με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Σύγκριση έγινε επίσης με τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 3. Τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε με τις 3 αυτές διαφορετικές μεθόδους είχαν μικρές αποκλίσεις μεταξύ τους, της τάξης του 3%. Ειδικότερα η προσδιοριστική μέθοδος και ο Ευρωκώδικας 3 έδιναν αποτελέσματα με απόκλιση κάτω από 2% στις περισσότερες περιπτώσεις.

Τα κατακόρυφα φορτία εκτός από το κέντρο βάρους των διατομών τα εφαρμόσαμε και στο άνω και κάτω πέλμα, γιατί αυτός ο τρόπος φόρτισης είναι πιο αντιπροσωπευτικός των φορτίσεων που γίνονται στην πράξη. Παρατηρήσαμε αρκετά μεγάλη απόκλιση των αποτελεσμάτων ανάλογα με το σημείο εφαρμογής των φορτίων και ήταν ανάλογη του μήκους της δοκού και των διαστάσεων της διατομής. Όσο μεγάλωνε ο λόγος $\frac{h}{l}$ (ύψος διατομής προς μήκος δοκού), τόσο μεγάλωναν οι αποκλίσεις των κρίσιμων φορτίων που προέκυπταν από φόρτιση του άνω πέλματος, του κέντρου βάρους και του κάτω πέλματος. Πιο συγκεκριμένα το κρίσιμο φορτίο στρεπτοκαμπτικού λυγισμού για όλες τις δοκούς είχε τη μεγαλύτερη τιμή του όταν εφαρμόζονταν στο κάτω πέλμα της διατομής και όσο ανέβαινε προς το άνω πέλμα μίκραινε, μέχρι να λάβει την ελάχιστη τιμή του, η οποία παρουσιάζονταν όταν εφαρμόζονταν στο άνω πέλμα.

Γνωρίζαμε ότι αν η κρίσιμη ροπή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού μιας δοκού η οποία καταπονείται από ίσες ροπές στα άκρα της ισούται με M_{0cr}, τότε η κρίσιμη ροπή δοκού με συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της ισούται με $1.35M_{0cr}$ και η κρίσιμη ροπή δοκού με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο ισούται με $1.13M_{0cr}$. Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν καταλήξαμε στο συμπέρασμα πως το ίδιο ισχύει και για δοκούς στις οποίες εκτός από κατακόρυφα φορτία εφαρμόζονται και αξονικές θλιπτικές δυνάμεις.

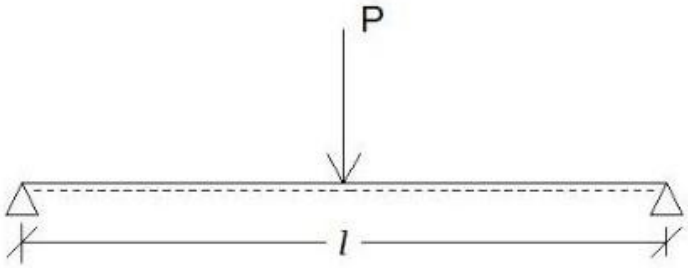
Για την προσομοίωση των δοκών και ειδικότερα των συνθηκών στήριξής τους στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina έγιναν αρκετές δοκιμές. Στην προσδιοριστική μέθοδο θεωρήθηκε ότι τα άκρα της εκάστοτε δοκού μπορούν να στρεβλωθούν ελεύθερα. Η προσομοίωση των στηρίξεων στο Adina απαιτούσε τη χρήση rigid links (άκαμπτων συνδέσμων), οι οποίοι όμως παρεμπόδιζαν την ελεύθερη στρέβλωση των άκρων. Έτσι έγιναν δοκιμές με εφαρμογή των rigid links σε ολόκληρες τις διατομές των άκρων, αλλά και σε μέρος αυτών και τα πιο ακριβή αποτελέσματα έδωσε η προσομοίωση που χρησιμοποιήθηκαν rigid links για το κάτω πέλμα και τον κορμό των ακραίων διατομών.

Βιβλιογραφία

1. Ι. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης: "Σιδηρές Κατασκευές – Ανάλυση και Διαστασιολόγηση", εκδ. Κλειδάριθμος, 2009.
2. Ι. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης: "Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα", εκδ. Κλειδάριθμος, 2011.
3. Αντωνίου Ν. Κουνάδη: "Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας" , εκδ. Συμεών (Β' Έκδοση – Αθήνα 1997).
4. Ευρωκώδικας 3, Κατασκευές από χάλυβα, (ENV 1993).
5. Α. Κουνάδης, Γ. Ιωαννίδης: Μια απλοποιημένη και αποτελεσματική μέθοδος, για τον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου πλευρικού και στρεπτοκαμπτικού λυγισμού", 1991.
6. Λεωνίδας Θ. Σταυρίδης: "Στατική των Δομικών Φορέων, Μέρος Α" εκδ. Κλειδάριθμος, 2006.
7. A. N. Kounadis and G.I. Ioannidis: "Lateral Postbuckling Analysis Of Beam Columns", paper of the "Journal of Engineering Mechanics", Vol.120, No.4, April 1994. Σελ 695-705.
8. Timoshenko and Gere: "Theory of Elastic Stability", 1961.
9. N. S. Trahair: “Flexural-Torsional Buckling of Structures”. 1993.
10. Adina Systems 8.5 Online Manuals, Adina R&D, Inc (February 2008).

Παράρτημα Α. Παρουσίαση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Adina

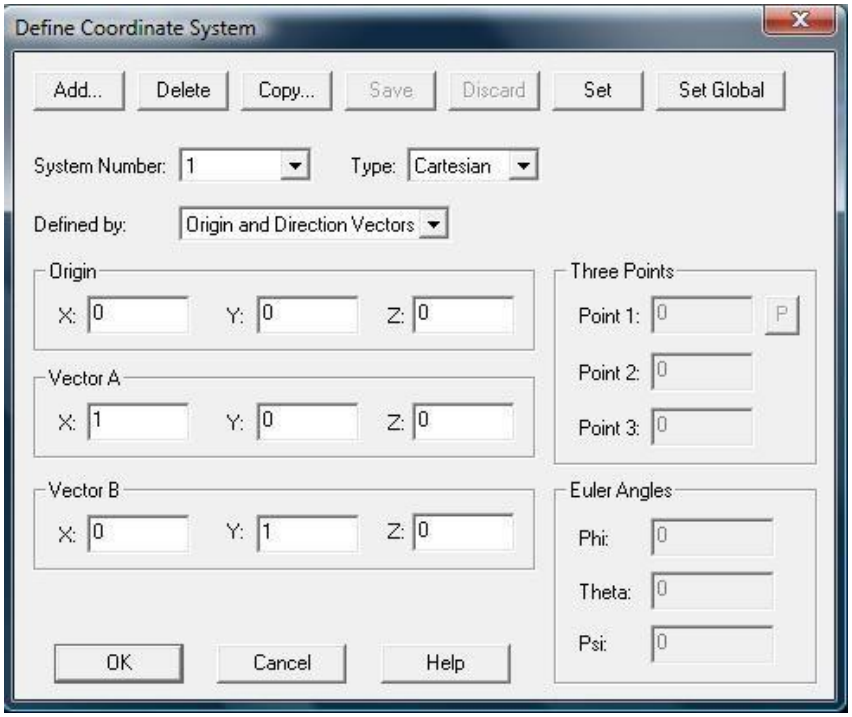
Η παρουσίαση της λειτουργίας του προγράμματος *Adina* κρίνεται απαραίτητη για την πληρότητα της διπλωματικής εργασίας. Θα μελετηθεί μια αμφιέρειστη δοκός IPE500 μήκους 10 μέτρων που καταπονείται από συγκεντρωμένο φορτίο *P* στο μέσον της (Σχ. Α.1).



Σχήμα Α.1 Αμφιέρειστη δοκός IPE500 μήκους 10 μέτρων

<u>Σύστημα συντεταγμένων</u>

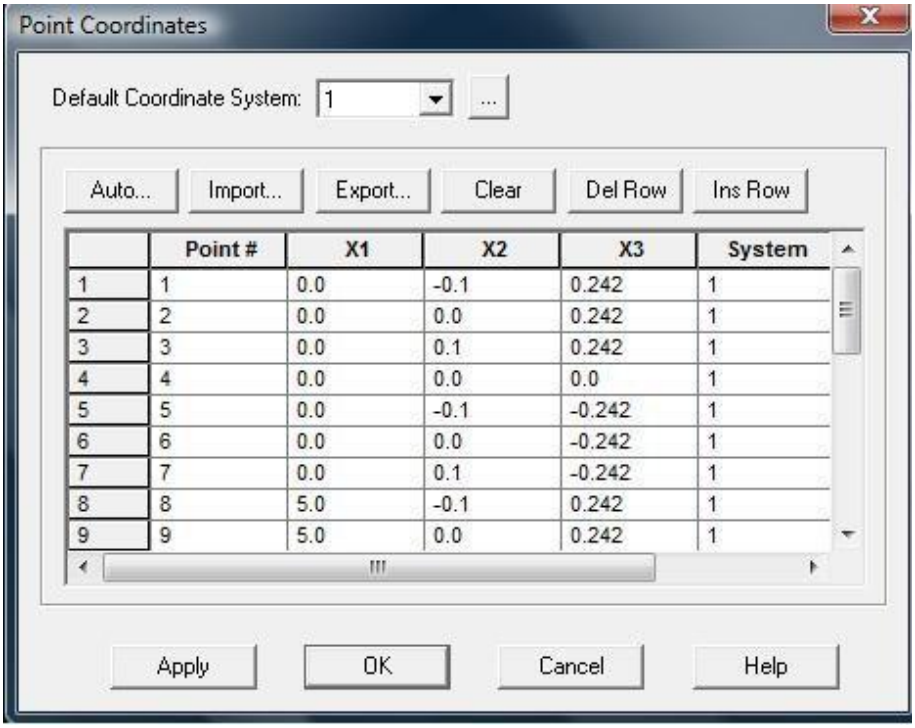
Για να ορίσουμε το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα γίνει η προσομοίωση της υπό μελέτη δοκού ακολουθούμε τα βήματα *Geometry* → *Coordinate Systems* και στην καρτέλα *Define Coordinate Systems* επιλέγουμε *System Number 1* και *Type Cartesian* (καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων) όπως φαίνεται και στο Σχήμα Α.2.



Σχήμα Α.2 Καρτέλα καθορισμού συστήματος συντεταγμένων

Γεωμετρία Φορέα

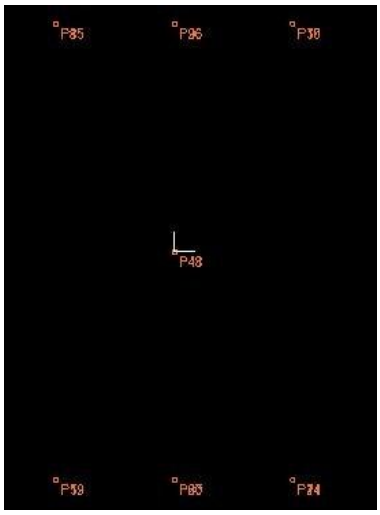
Πρέπει να ορίσουμε τα σημεία (*points*), τις γραμμές (*lines*) και τις επιφάνειες (*surfaces*) του φορέα. Για να ορίσουμε τα σημεία ακολουθούμε τη διαδρομή *Geometry* → *Points* και στην καρτέλα που εμφανίζεται για κάθε σημείο ορίζουμε τις συντεταγμένες του *x,y,z* σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων που θεωρήσαμε παραπάνω (Σχ. Α.3).



	Point #	X1	X2	X3	System
1	1	0.0	-0.1	0.242	1
2	2	0.0	0.0	0.242	1
3	3	0.0	0.1	0.242	1
4	4	0.0	0.0	0.0	1
5	5	0.0	-0.1	-0.242	1
6	6	0.0	0.0	-0.242	1
7	7	0.0	0.1	-0.242	1
8	8	5.0	-0.1	0.242	1
9	9	5.0	0.0	0.242	1

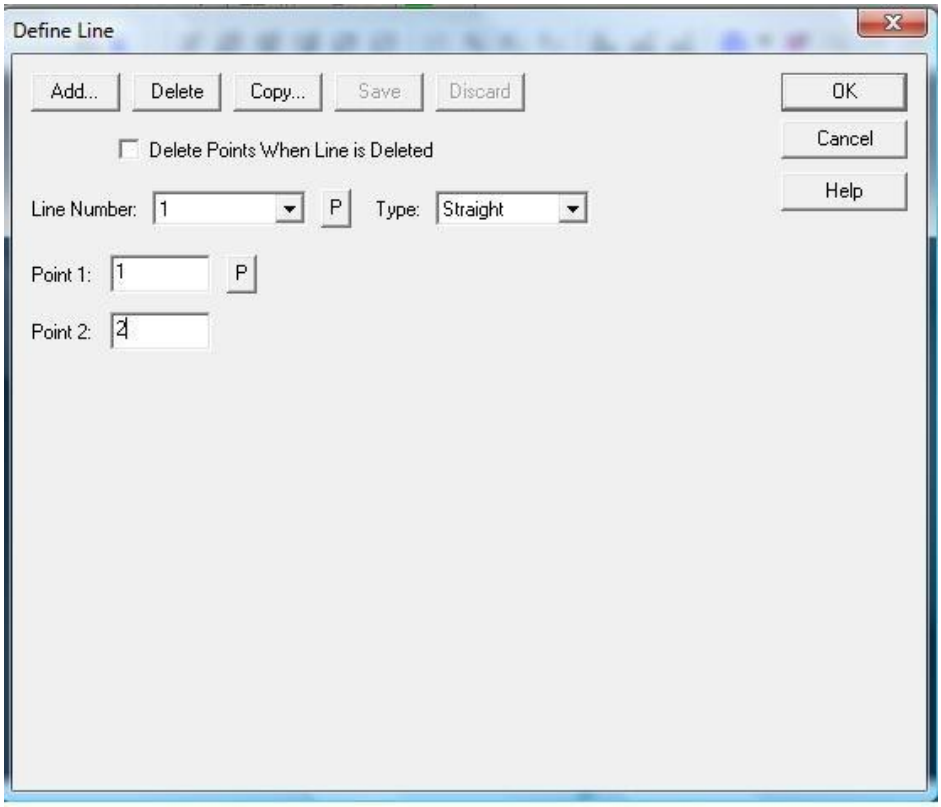
Σχήμα Α.3 Καρτέλα ορισμού σημείων

Συνολικά χρησιμοποιήσαμε 21 σημεία Ουσιαστικά σχεδιάσαμε 3 διατομές (μια στην αρχή μια στο μέσο και μια στο τέλος της δοκού) και κάθε διατομή απαρτίζεται από 7 σημεία, όπως φαίνεται στο Σχήμα Α.4.



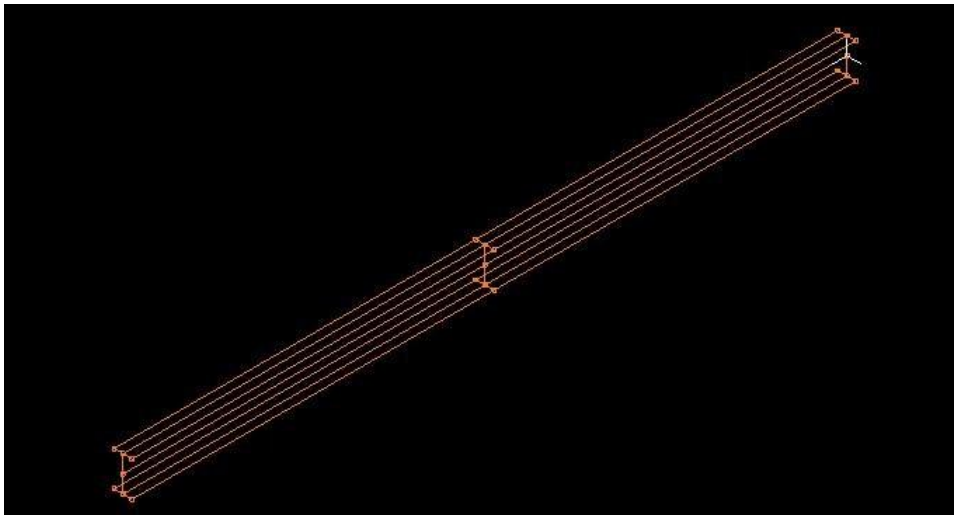
Σχήμα Α.4 Κόμβοι μιας διατομής του προσομοιώματος

Για να ορίσουμε τις γραμμές ακολουθούμε την πορεία *Geometry* → *Lines* → *Define* → *Add* και ενώνουμε τα σημεία που δημιουργήσαμε (Σχ. Α.5).



Σχήμα Α.5 Καρτέλα ορισμού γραμμών

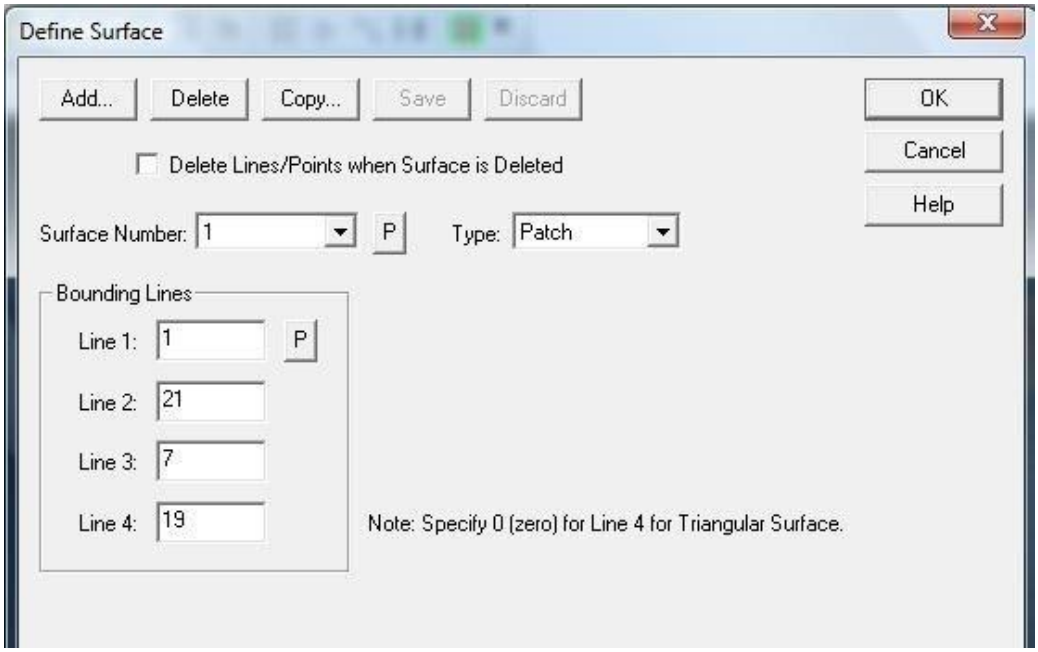
Αφού ορίσουμε τις γραμμές καταλήγουμε στην παρακάτω απεικόνιση:



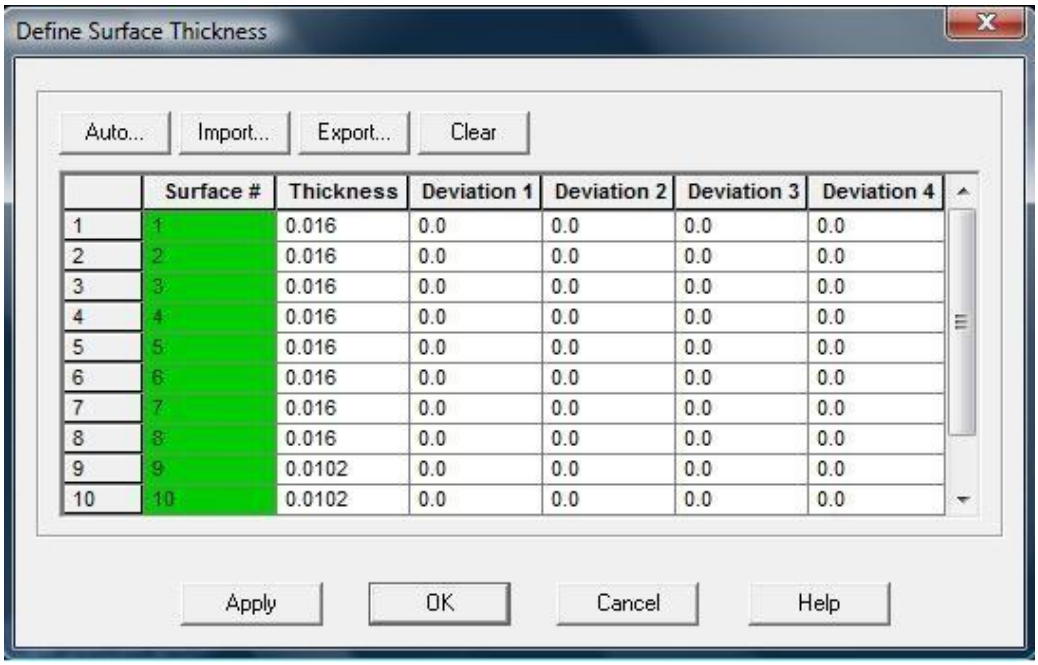
Σχήμα Α.6 Σημεία και γραμμές του φορέα

Για να ορίσουμε τις επιφάνειες ακολουθούμε την πορεία *Geometry* → *Surfaces* → *Define* → *Add* (Σχ. Α.7). Ο φορέας αποτελείται από 12 επιφάνειες (4 για κάθε πέλμα και 4 για τον κορμό).

Τέλος πρέπει να ορίσουμε το πάχος των επιφανειών που δημιουργήθηκαν. Αυτό γίνεται μέσω των εντολών *Geometry* → *Surfaces* → *Thickness* (Σχ. Α.8).



Σχήμα Α.7 Καρτέλα ορισμού επιφανειών

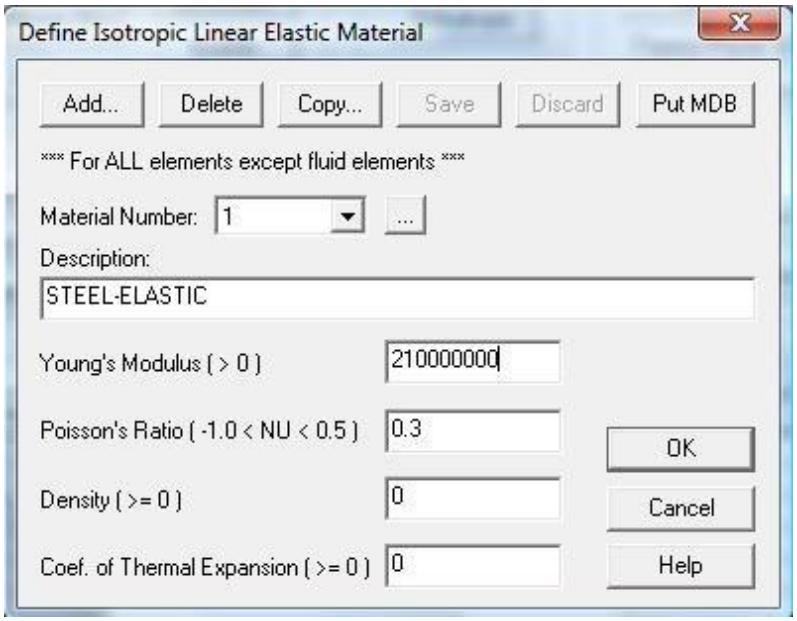


	Surface #	Thickness	Deviation 1	Deviation 2	Deviation 3	Deviation 4
1	1	0.016	0.0	0.0	0.0	0.0
2	2	0.016	0.0	0.0	0.0	0.0
3	3	0.016	0.0	0.0	0.0	0.0
4	4	0.016	0.0	0.0	0.0	0.0
5	5	0.016	0.0	0.0	0.0	0.0
6	6	0.016	0.0	0.0	0.0	0.0
7	7	0.016	0.0	0.0	0.0	0.0
8	8	0.016	0.0	0.0	0.0	0.0
9	9	0.0102	0.0	0.0	0.0	0.0
10	10	0.0102	0.0	0.0	0.0	0.0

Σχήμα Α.8 Καρτέλα καθορισμού πάχους επιφανειών

Ορισμός του υλικού του φορέα

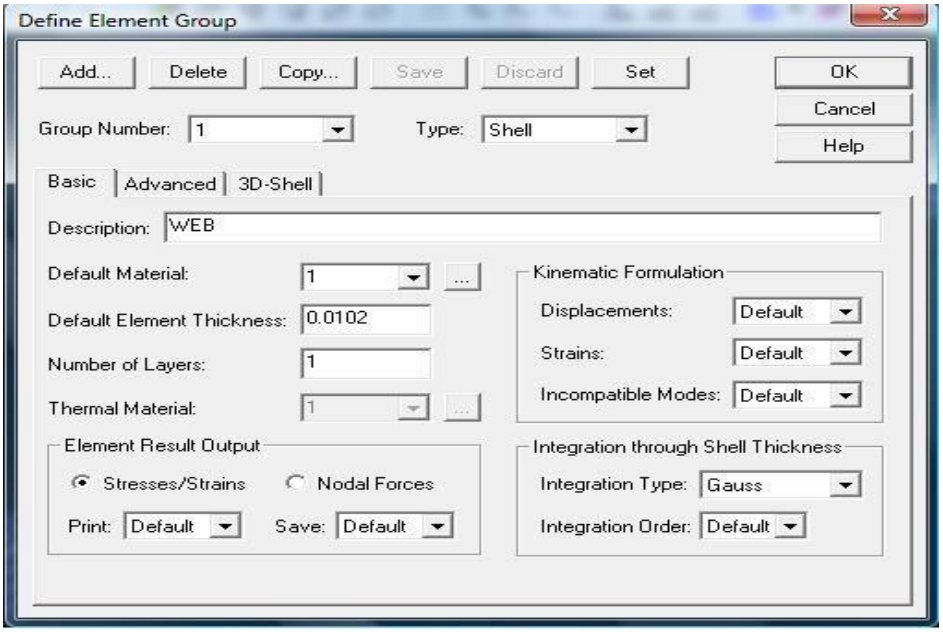
Για να ορίσουμε το υλικό ακολουθούμε την πορεία Model → Materials → Manage Materials → *Elastic* → *Isotropic* → *Add* και πληκτρολογούμε το μέτρο ελαστικότητας *E* και τον λόγο Poisson *ν* (Σχ. Α.9).



Σχήμα Α.9 Καρτέλα ορισμού υλικού

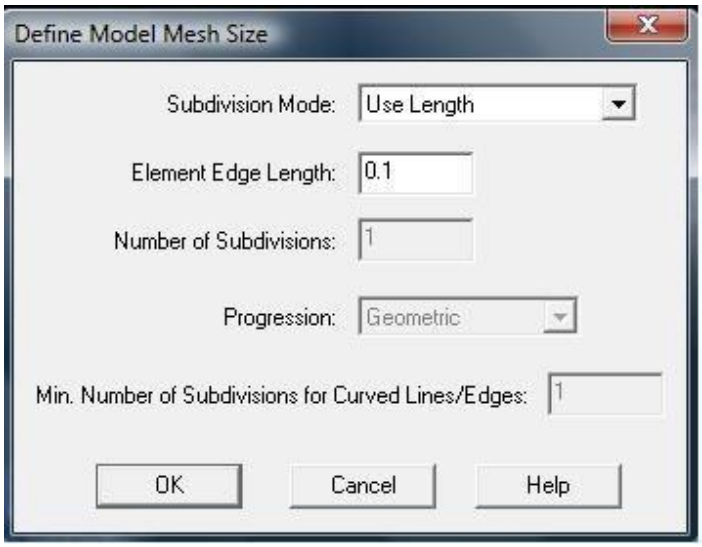
Διακριτοποίηση φορέα

Για τη διακριτοποίηση του φορέα θα χρησιμοποιήσουμε πεπερασμένα στοιχεία *Shell elements* και θα ορίσουμε διαφορετικό *element group* για τα πέλματα και τον κορμό της δοκού. Ακολουθούμε τα βήματα *Meshing* → *Element* groups → *Add*. Ορίζουμε *Type* → *Shell* και στο κελί *Default Element Thickness* πληκτρολογούμε το πάχος των επιφανειών του συγκεκριμένου *element group,Web* ή *Flanges* (Σχ. Α.10).



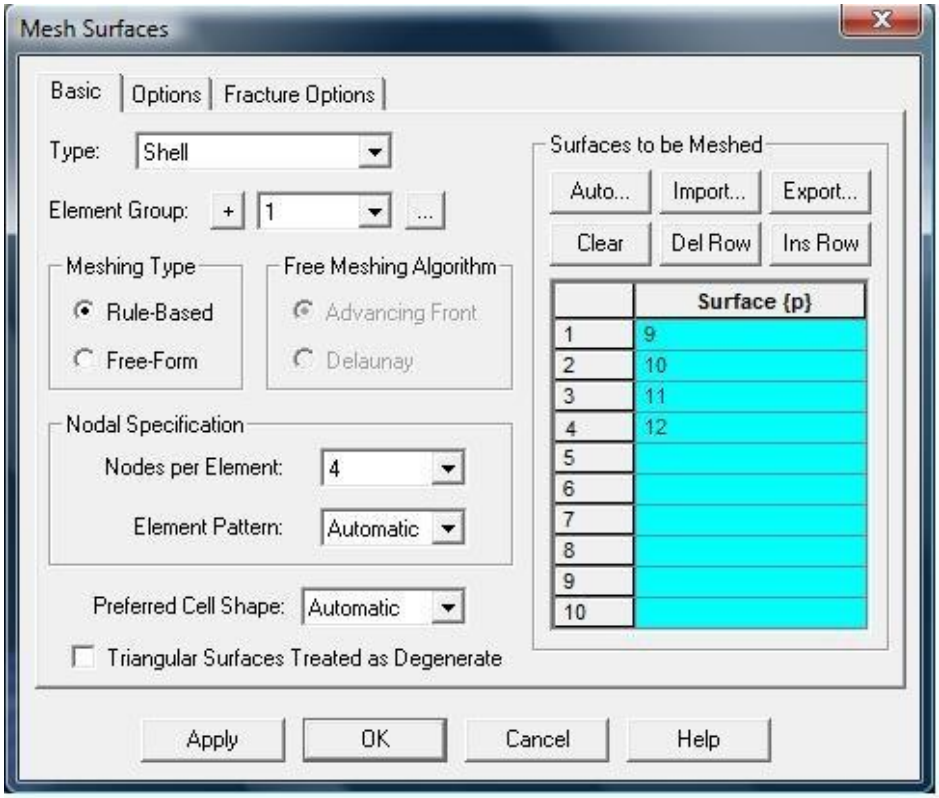
Σχήμα Α.10 Καρτέλα καθορισμού τύπου πεπερασμένων στοιχείων

Για να ολοκληρώσουμε το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων του φορέα ακολουθούμε τη διαδρομή *Meshing* → *Mesh Density* → *Complete Model*, επιλέγουμε *Subdivision Mode*: *Use Length* και πληκτρολογούμε το μέγεθος του κάθε στοιχείου (Σχ. Α.11).



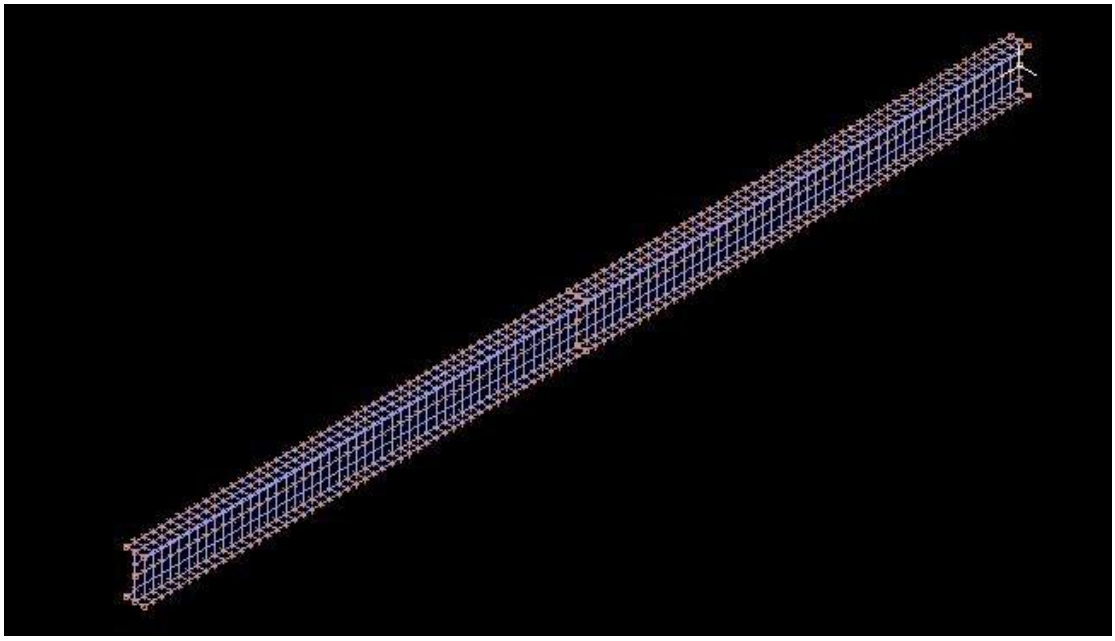
Σχήμα Α.11 Καρτέλα καθορισμού μεγέθους των πεπερασμένων στοιχείων

Για τη διακριτοποίηση των επιφανειών επιλέγουμε *Meshing* → *Create Mesh* → *Surface* και επιλέγουμε σε ποιο element group αντιστοιχεί η κάθε επιφάνεια (Σχ. Α.12).



Σχήμα Α.12 Καρτέλα διακριτοποίησης επιφανειών

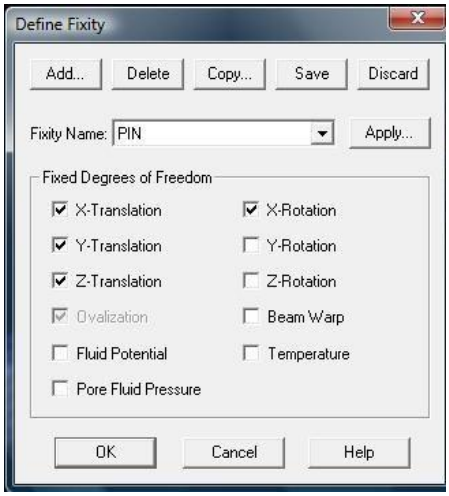
Με την ολοκλήρωση των παραπάνω βημάτων προκύπτει ο διακριτοποιημένος φορέας.



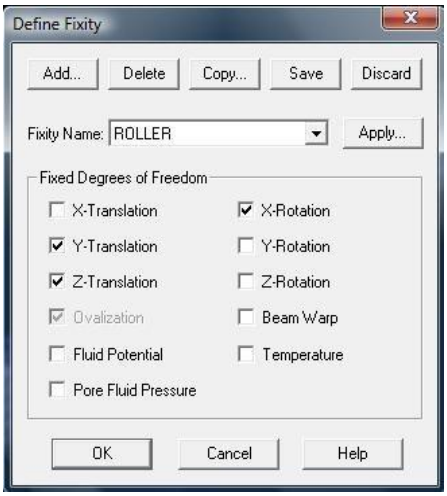
Σχήμα Α.13 Φορέας με πεπερασμένα στοιχεία

<u>Συνοριακές συνθήκες</u>

Ακολουθώντας τη διαδρομή *Model* → *Boundary Conditions* → *Define Fixity* εμφανίζεται η καρτέλα του Σχήματος Α.14 όπου δημιουργούμε τις στηρίξεις του φορέα που μελετάμε (άρθρωση (Σχ. Α.14α) στο ένα άκρο και κύλιση (Σχ. Α.14β) στο άλλο).



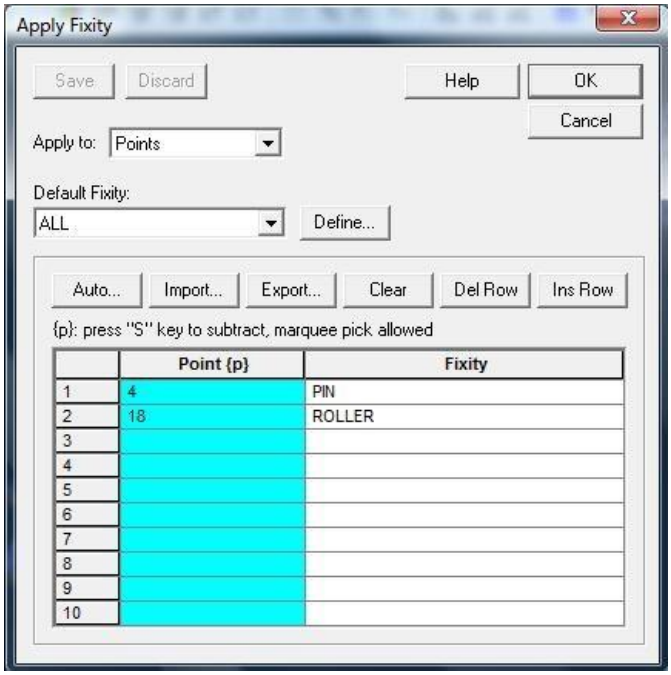
(α)



(β)

Σχήμα Α.14 Ορισμός συνοριακών συνθηκών προσομοιώματος

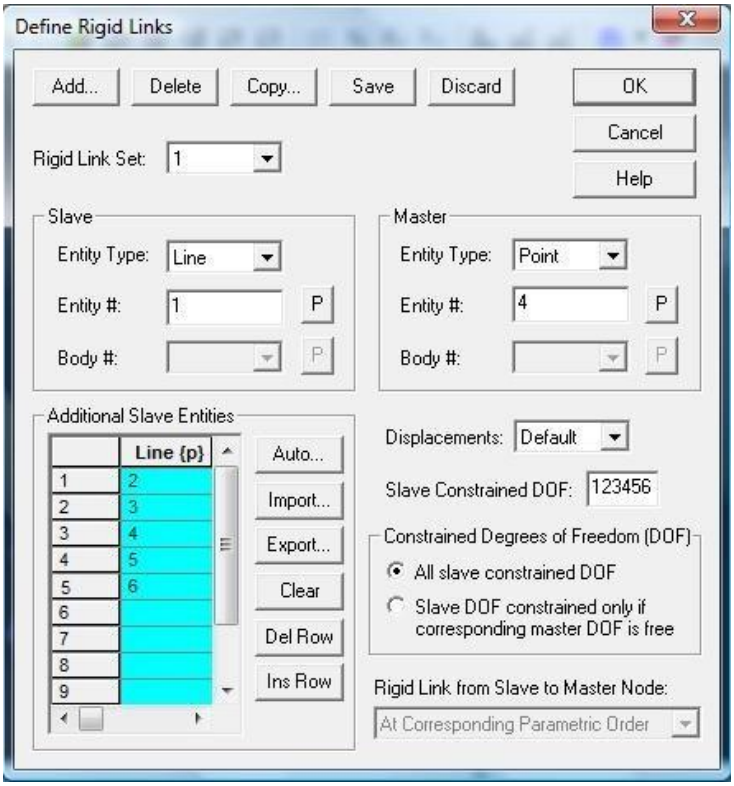
Στη συνέχεια μέσω της διαδρομής *Model* → *Boundary Conditions* → *Apply Fixity* καθορίζουμε σε ποιο σημείο θα τοποθετηθούν οι στηρίξεις που δημιουργήσαμε (Σχ. Α.15).



Σχήμα Α.15 Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών προσομοιώματος στη διατομή

<u>Rigid Links (για όλους τους κόμβους της διατομής)</u>

Ακολουθώντας τη διαδρομή *Model* → *Constraints* → *Rigid Links* (Σχ. Α.16) τοποθετούμε ως *master* το point 4 (σημείο που βρίσκεται στο κέντρο βάρους της διατομής για μήκος δοκού L=0 m) και ως *slave* τις γραμμές 1-2-3-4-5-6. Αντίστοιχα δουλεύουμε και για τη διατομή που βρίσκεται στο τέλος της δοκού (L=10 m).

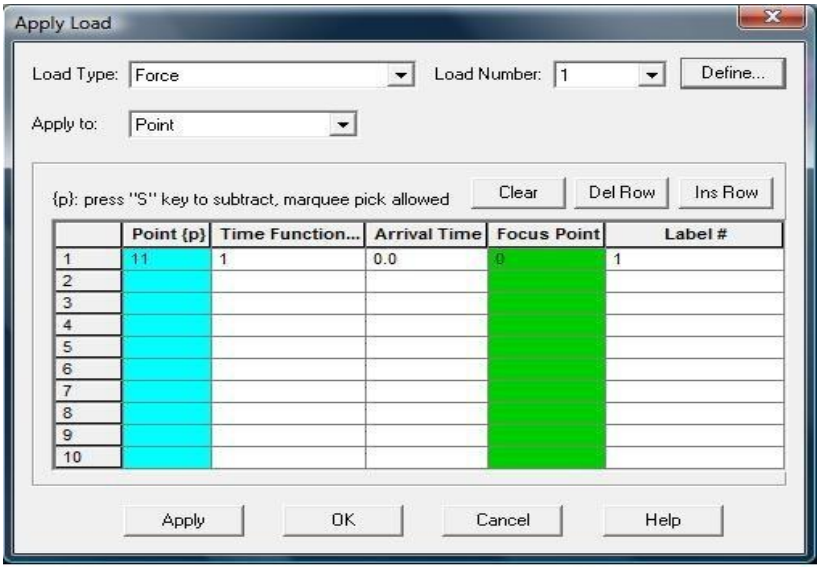


Σχήμα Α.16 Καρτέλα ορισμού rigid links

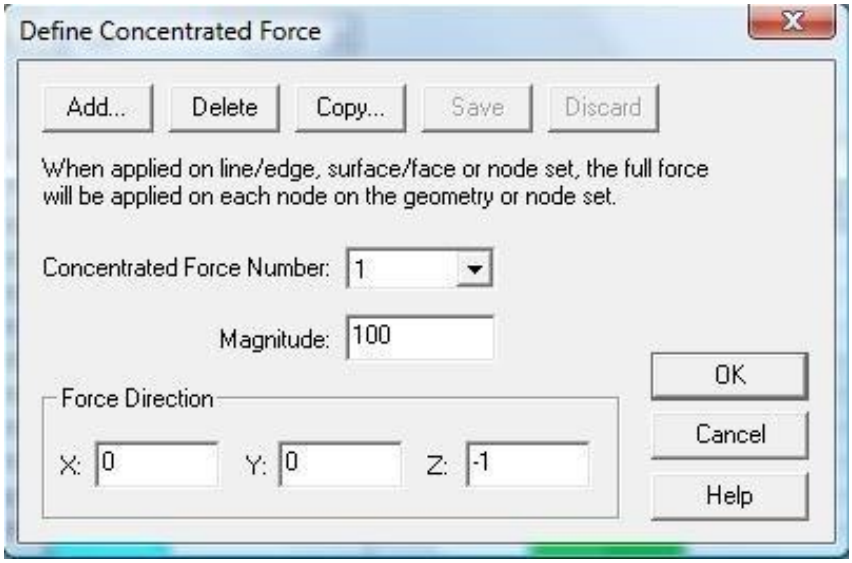
Αντίστοιχα δουλεύουμε για rigid links μόνο για τον κορμό της διατομής και για το κάτω πέλμα και τον κορμό της διατομής. Στο Κεφάλαιο 6 αποδείξαμε ότι η καλύτερη προσομοίωση περιλαμβάνει rigid links για τον κορμό και το κάτω πέλμα της διατομής. Αυτό συμβαίνει επειδή με τη χρήση των rigid links για όλη τη διατομή δημιουργούνται άκαμπτες συνδέσεις οι οποίες παρεμποδίζουν την ελεύθερη στρέβλωση των άκρων, πράγμα το οποίο είναι αντίθετο με τις αρχικές μας υποθέσεις.

Φόρτιση φορέα

Για την επιβολή της επιθυμητής φόρτισης ακολουθείται η διαδρομή *Model* → *Loading* → *Apply*. Μιας και στο παράδειγμα έχουμε μια συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσον της δοκού, επιλέγουμε *Load Type* → Force (Σχ. Α.17). Επιλέγοντας *Define* → *Add* πληκτρολογούμε το μέγεθος του φορτίου και τη διεύθυνσή του. (Σχ. Α.18). Επιστρέφοντας στο παράθυρο του Σχήματος Α.17 επιλέγουμε το σημείο στο οποίο ασκείται το φορτίο.



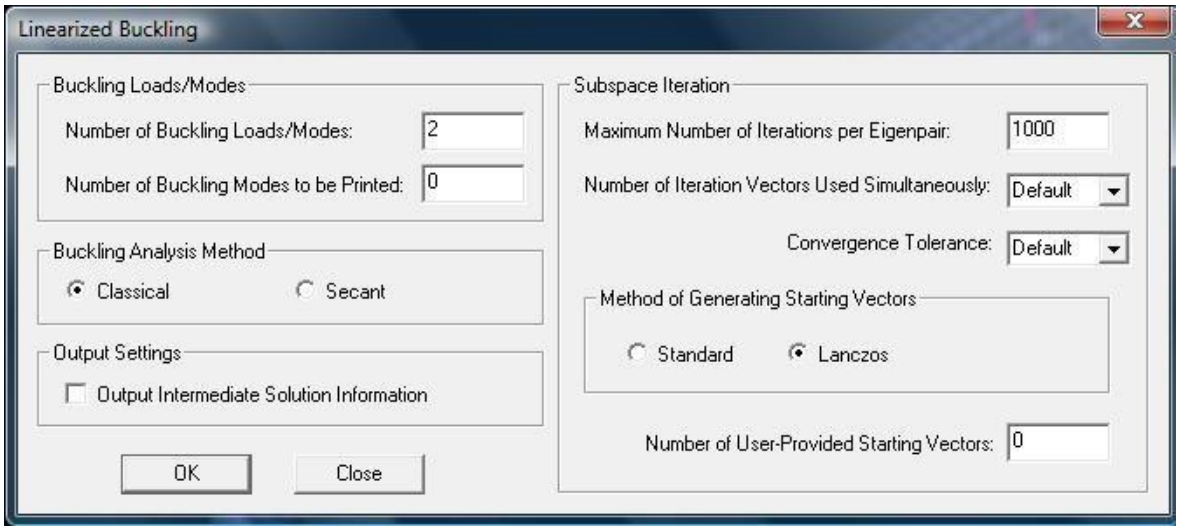
Σχήμα Α.17 Καρτέλα ορισμού φορτίου



Σχήμα Α.18 Καρτέλα Μεγέθους και διεύθυνσης φορτίου

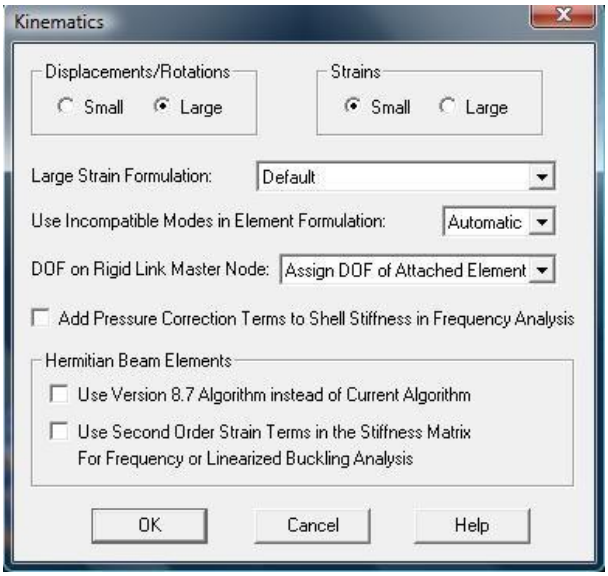
Ανάλυση φορέα

Η γραμμική ανάλυση λυγισμού πραγματοποιείται αν στη θέση Analysis *Type* επιλέξουμε *Linearized Buckling* και στο εικονίδιο Analysis Options ορίσουμε τον αριθμό των απαιτούμενων ιδιομορφών καθώς και τον αριθμό των επαναλήψεων που θα πραγματοποιήσει το πρόγραμμα για την εύρεσή τους (Σχ. Α.19).



Σχήμα Α.19 Καρτέλα επιλογής ιδιομορφών

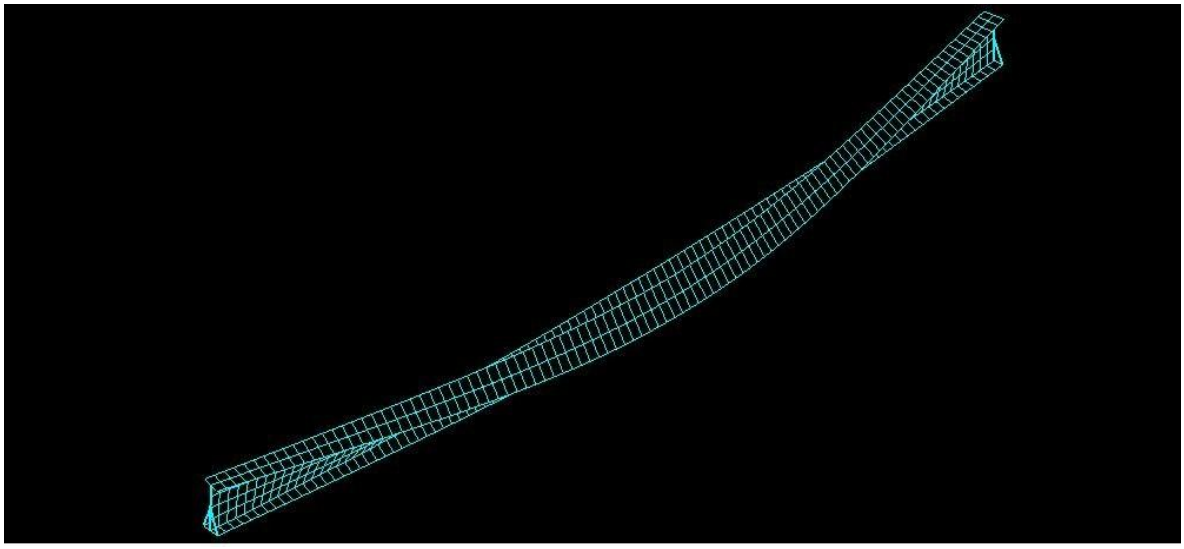
Τέλος για την πραγματοποίηση της γραμμικής ανάλυσης λυγισμού ενεργοποιούμε την επιλογή των μεγάλων παραμορφώσεων μέσω της διαδρομής *Control* → *Analysis Assumption* → *Kinematics* και στη θέση *Displacements*/*Rotations* σημειώνουμε *Large* (Σχ. Α.20).



Σχήμα Α.20 Ενεργοποίηση μεγάλων μετατοπίσεων

Το μοντέλο ξεκινάει την ανάλυση μέσω της διαδρομής *Solution* → *Data File*/*Run*.

Ένα παράδειγμα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση μιας δοκού IPE500 μήκους 10 μέτρων που καταπονείται από συγκεντρωμένο φορτίο *P* στο μέσον της δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα Α.21 Λυγισμός δοκού υπό κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της