Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διπλωματική Εργασία

Οι χώροι James και James Tree

Φοιτητής :
Ιωακείμ Αμπατζόγλου

Επιβλέπων :
Καθηγητής Σπυρίδων Αργυρός

Οκτώβριος 2014

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί το αποτέλεσμα πολυετούς μελέτης των Μαθηματικών και αφοσίωσης σε αυτά. Σε αυτή την πορεία συντέλεσαν πολλοί άνθρωποι τους οποίους επιθυμώ να ευχαριστήσω εκ βαθέων.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου Καθηγητή Σπύρο Αργυρό για την καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθειά του. Αποτελεί πρότυπο επιστήμονα και ανθρώπου, πρότυπο το οποίο θα με καθοδηγεί στην συνέχεια της πορείας μου τόσο στα Μαθηματικά, όσο και και στη ζωή. Ευχαριστώ επίσης θερμά τους Ι. Γάσπαρη και Α. Παγουρτζή για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή εξέτασης της παρούσης εργασίας. Ευχαριστώ τους Π. Μοτάκη και Δ. Ζησιμοπούλου για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους κάθως και για το γεγονός ότι ήταν διαθέσιμοι να με βοηθήσουν ανά πάσα στιγμή. Ευχαριστώ τον Ν.Μήλα ο οποίος ήταν ο πρώτος άνθρωπος που με έφερε σε επαφή με τον κόσμο των Μαθηματικών και με έκανε να τον αγαπήσω. Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή Ι. Σαραντόπουλο για το ενδιαφέρον που μου έδειξε και εξακολουθεί να δείχνει καθώς και για τις άκρως εποικοδομητικές συμβουλές που μου έχει δώσει ανά καιρούς. Ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου Σταύρο και Δήμητρα για την υλική και ηθική στήριξη που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια, χωρίς την οποία δεν θα μιλούσα από αυτή τη θέση τούτη τη στιγμή.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ βαθέων τον Δημήτρη Απατσίδη, ο οποίος ήταν δίπλα μου καθ'όλη τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας. Χωρίς την καθοδήγηση του και τις πολύτιμες υποδείξεις του η συγγραφή αυτής της εργασίας δεν θα είχε γίνει ποτέ.

Αθήνα Σεπτέμβριος 2014
Ιωακείμ Αμπατζόγλου

Αφιερώνω αυτή την εργασία στους γονείς μου,
Σταύρο και Δήμητρα

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Βασικό αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι οι χώροι James και James Tree. Πρόκειται για δύο χώρους Banach με πολύ ενδιαφέρουσες αλλά και παθολογικές ιδιότητες. Ο χώρος James κατασκευάστηκε από τον R.C.James το 1954 και ήταν το πρώτο παράδειγμα χώρου που ταυτίζεται ισομετρικά με τον δεύτερο συζυγή του, χωρίς όμως να είναι αυτοπαθής. Ο χώρος James Tree κατασκευάστηκε από τον R.C.James 20 χρόνια αργότερα, ως αντιπαράδειγμα στην εικασία του Banach ότι κάθε χώρος με μη διαχωρίσιμο συζυγή οφείλει να περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1. Ας δώσουμε λοιπόν μια συνοπτική περιγραφή του βασικού κορμού αυτής της εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετούμε την ύπαρξη βάσης Schauder σε έναν χώρο Banach και την ουσιαστική πληροφορία που μπορούμε να αντλήσουμε από αυτήν. Η Schauder βάση είναι μια τοπολογική βάση δηλαδή έχει άμεση σχέση με την αναλυτική δομή την οποία προσδίδει στον χώρο η νόρμα. Σε αντίθεση με την Hamel βάση, η ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζεται από το αξίωμα της επιλογής, η Schauder βάση δεν υπάρχει πάντα.Στο παρόν κεφάλαιο ορίζουμε τι είναι βάση Schauder, αποδεικνύουμε κάποιες θεμελιώδεις ιδιότητές της και στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε σε αποτελέσματα τα οποία θα μας χρησιμεύσουν παρακάτω.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετούμε έναν χώρο, ο οποίος δεν είναι ο κλασικός χώρος που είχε κατασκευάσει ο R.C.James, και τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathcal{J}$. Ο $\mathcal{J}$ έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες όπως ότι δεν είναι αυτοπαθής αλλά ”σχεδόν αυτοπαθής” και ότι δεν περίεχει ισομορφικά τον ℓ_1 και τον c_0. Ορίζουμε επίσης τον κλασικό χώρο του James, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathcal{J}'$ και τον εφοδιάζουμε με δύο ισοδύναμες νόρμες. Δείχνουμε ότι είναι ισομορφικός με τον $\mathcal{J}$ και ότι ως προς τη μία νόρμα είναι ισομετρικός με τον δεύτερο συζυγή του. Κατά συνέπεια ο $\mathcal{J}$ μπορεί να μην είναι αυτοπαθής αλλά είναι ισομορφικός με τον δεύτερο δυϊκό του. Τέλος δείχνουμε ότι ο $\mathcal{J}$, επομένως και ο $\mathcal{J}'$, είναι ℓ_2-saturated δηλαδή κάθε απειροδιάστατος υπόχωρός του περιέχει ισομορφικά τον ℓ_2. Συνεπώς κάθε απειροδιάστατος υπόχωρος τόσο του $\mathcal{J}$ όσο και του $\mathcal{J}$ περιέχει ισομορφικά ένα αυτοπαθή χώρο χωρίς οι ίδιοι να είναι αυτοπαθείς.

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε τον χώρο James Tree, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathcal{JT}$. Όπως γράψαμε και πριν, ο $\mathcal{JT}$ κατασκευάστηκε το 1974 από τον R.C.James σαν αντιπαράδειγμα στην εικασία του Banach ότι κάθε χώρος με μη διαχωρίσιμο συζυγή περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1. Η δυνατότητα αυτής της κατασκευής δόθηκε χάρις τη σύλληψη της δενδροειδούς βάσης(tree basis) δηλαδή βάσης της οποίας οι δείκτες ανήκουν σε ένα δυαδικό δέντρο. Αυτή είναι και η ειδοποιός διαφορά μεταξύ του $\mathcal{J}$ και του $\mathcal{JT}$. Εποπτικά κάθε κλαδί του $\mathcal{JT}$ είναι ένας χώρος James. Αυτό έχει ως συνέπεια ο $\mathcal{JT}$ να κληρονομεί πολλές από τις ιδιότητες του $\mathcal{J}$ αλλά να έχει και μια πολύ πλουσιότερη δομή καθώς ουσιαστικά συντελείται από υπεραριθμήσιμα το πλήθος χώρους James. Η σύλληψη της δενδροειδούς βάσης ήταν μια ιστορική στιγμή για τη θεωρία χώρων Banach και γενικότερα για τα Μαθηματικά καθώς αποτέλεσε και αποτελεί το πέρασμα από τους κλασικούς χώρους Banach σε χώρους με πολύ πιο εντυπωσιακές και σύνθετες ιδιότητες.

Κεφάλαιο 1

Χώροι Banach με βάση Schauder

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο, όλοι οι χώροι Banach στους οποίους θα αναφερόμαστε, θα θεωρούμε ότι είναι απειροδιάστατοι. Σε διαφορετική περίπτωση, θα τονίζεται το αντίθετο.

Ορισμός (1.1.1)

Έστω X χώρος Banach και $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του X . H* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *καλείται βάση Schauder ή απλά βάση του X αν για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει μοναδική ακολουθία* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *ώστε*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$$

Παρατήρηση (1.1.2)

Έστω X χώρος με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *. Τότε το σύνολο* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και ειδικότερα* $e_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε πως το παραπάνω σύνολο είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Τότε θα υπάρχουν $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, ..., \lambda_{k_n} \in \mathbb{R}$, όλα μηδέν, έτσι ώστε να είναι $\lambda_{k_1}e_{k_1} + \lambda_{k_2}e_{k_2} + ... + \lambda_{k_n}e_{k_n}n = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο λόγω μοναδικότητας της γραφής του 0. $\square$

Παραθέτουμε ένα στοιχειώδες αποτέλεσμα το οποίο όμως καταδεικνύει ότι μόνο οι διαχωρίσιμοι χώροι Banach μπορούν να έχουν βάση Schauder. Το αντίστροφο βέβαια δεν ισχύει όπως έδειξε ο P.Enflo στο [2].

Πρόταση (1.1.3)

Έστω X χώρος με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη

$$\text{Θέτουμε} \quad D = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i e_i : \{r_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Το D είναι προφανώς αριθμήσιμο. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του X. Ας είναι $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in X$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ και $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε να ισχύουν τα παρακάτω

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_n e_n - x|| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > N \quad \text{και} \qquad |\lambda_i - r_i|||e_i|| < \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Τότε για $n > N$ έχουμε

$$\begin{aligned} ||\sum_{i=1}^{n} r_i e_i - x|| &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - r_i|||e_i|| + ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - x|| \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

Άρα ο X είναι διαχωρίσιμος. □

Σκοπός μας σε πρώτη φάση είναι να εξάγουμε μια εύχρηστη συνθήκη προκειμένου να ελέγχουμε πότε μια ακολουθία σε ένα χώρο Banach είναι βάση Schauder.

Έστω λοιπόν X χώρος με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Για $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in X$ έχουμε προφανώς ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| \right\} < \infty$. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε

$$|||x||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| \right\}$$

Προκύπτει άμεσα ότι η $|||\cdot|||$ είναι νόρμα στον X. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις φυσιολογικές προβολές $P_n : X \to X$ με τύπο

$$P_n(x) = P_n(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Είναι προφανές ότι οι φυσιολογικές προβολές είναι γραμμικοί τελεστές και ότι ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P_n(x) &= x \quad \forall x \in X \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \{||P_n(x)||\} &= |||x||| \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Τότε ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση

Πρόταση (1.1.4)

Υπάρχει σταθερά $K > 0$ *ώστε* $||x|| \leq |||x||| \leq K||x|| \quad \forall x \in X$

Απόδειξη

Άμεσα παίρνουμε το κάτω φράγμα καθώς $||x|| = \lim_{n\to\infty} ||P_n(x)|| \leq |||x|||$. Για την άλλη φορά, αρκεί να δείξουμε ότι ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach. Τότε από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης εξασφαλίζεται η ισοδυναμία των $||\cdot||$ και $|||\cdot|||$. Έστω λοιπόν $\left\{y^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον $(X, |||\cdot|||)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} |||y^{(i)} - y^{(j)}||| < \epsilon \quad \forall i, j > k_0 \qquad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad ||P_n(y^{(i)}) - P_n(y^{(j)})|| < \epsilon \quad \forall i, j > k_0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Η ακολουθία $\left\{P_n(y^{(k)})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Caychy στον πεπερασμένης διάστασης χώρο $< e_1, ..., e_n >$. Συνεπώς η $\left\{P_n(y^{(k)})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $z_n = \lim_{k\to\infty} P_n(y^{(k)})$. Τότε προκύπτει ότι η $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $||\cdot||-$ συγκλίνουσα. Πράγματι, θεωρούμε $\epsilon > 0$ και $k, N \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} ||P_n(y^{(k)}) - P_n(y^{(j)})|| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall j > k, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \qquad ||P_n(y^{(k)}) - z_n|| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{και} \quad ||P_n(y^{(k)}) - P_m(y^{(k)})|| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n, m > N \end{aligned}$$

Τότε για κάθε $n, m > N$ έχουμε

$$||z_n - z_m|| \leq ||z_n - P_n(y^{(k)})|| + ||P_n(y^{(k)}) - P_m(y^{(k)})|| + ||P_m(y^{(k)}) - z_m|| < \epsilon$$

άρα η $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $||\cdot||$-Cauchy. Επομένως αφού ο $(X, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach, η $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. Ας είναι $z \overset{||\cdot||}{=} \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Τότε για κάθε $m > n \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι $P_n(z_m) = P_n(\lim\limits_{k\to\infty} P_m(y^{(k)})) = \lim\limits_{k\to\infty} P_n(P_m(y^{(k)})) = \lim\limits_{k\to\infty} P_n(y^{(k)})) = z_n$. Χρησιμοποιήσαμε βεβαίως το γεγονός ότι η P_n είναι συνεχής στον πεπερασμένης διάστασης χώρο $< e_1, ..., e_n >$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, $z_1 \in < e_1 >$ άρα υπάρχει μοναδικό $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $z_1 = \alpha_1 e_1$. Επειδή $P_1(z_2) = z_1$ και η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητη, υπάρχει μοναδικό $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $z_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, έχοντας προσδιορίσει τα $\alpha_1, ...\alpha_n$, προσδιορίζουμε το α_{n+1} με τον ίδιο τρόπο. Επομένως έχουμε ότι $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, άρα $P_n(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε λοιπόν $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k > k_0$ να ισχύει

$$\sup\left\{||z_n - P_n(y^{(k)})|| : n \in \mathbb{N}\right\} < \epsilon \Rightarrow \sup\left\{||P_n(z) - P_n(y^{(k)})|| : n \in \mathbb{N}\right\} < \epsilon \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |||z - y^{(k)}||| < \epsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y^{(k)} = z$$

Επομένως ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach και άρα δείχτηκε το ζητούμενο. □

Πρόταση (1.1.5)

Οι φυσιολογικές προβολές είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

Απόδειξη

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$. Τότε έχουμε $||P_n(x)|| \leq |||x||| \leq K||x||$ και άρα δείχτηκε το ζητούμενο. □

Επίσης εφόσον οι φυσιολογικές προβολές είναι συνεχείς και κατά σημείο φραγμένες χρησιμοποιώντας την Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος προκύπτει ότι,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||P_n|| < \infty$$

Θέτουμε $bc(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||P_n||$. Η $bc(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ καλείται σταθερά της βάσης. Τότε έχουμε ότι $bc(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \geq 1$. Πράγματι, για κάθε $x \in X, x \neq 0$ έχουμε

$$||P_n(x)|| \leq ||P_n||||x|| \leq bc(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})||x||$$

άρα για $n \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο. Αν η σταθερά μιας βάσης ισούται με 1 τότε η βάση καλείται μονότονη.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $e_n^* : X \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$e_n^*(x) = e_n^*(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k) = \lambda_n$$

Προφανώς $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$. Τότε προκύπτει άμεσα το παρακάτω

Πρόταση (1.1.6)

Τα $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή.

Απόδειξη

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in X$. Τότε έχουμε ότι

$$|e_n^*(x)| \;\; = \frac{||e_n^*(x)e_n||}{||e_n||} = \frac{||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i||}{||e_n||} \leq \frac{2|||x|||}{||e_n||} \leq \;\; \frac{2K}{||e_n||}||x||$$

Επομένως δείξαμε το ζητούμενο. □

Τα $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ καλούνται διορθογώνια συναρτησοειδή της βάσης $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ειναι φανερό ότι τόσο τα διορθογώνια συναρτησοειδή, όσο και οι φυσιολογικές ορίζονται σε σχέση με δεδομένη βάση.
Με χρήση των παραπάνω προτάσεων φτάνουμε στο αποτέλεσμα που επιθυμούμε.

Θεώρημα (1.1.7)

Έστω X χώρος Banach και $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
i) Η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X
ii) Ισχύουν τα ακόλουθα:
- $e_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $[e_n : n \in \mathbb{N}] = X$ *όπου* $[e_n : n \in \mathbb{N}] = \overline{< e_n : n \in \mathbb{N} >}$
- $\exists K > 0$ *ώστε για κάθε* $m > n \in \mathbb{N}$ *και* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ *να ισχύει*

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| \leq K||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i||$$

Απόδειξη

i)⇒ii) Έστω $m > n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| \quad = ||P_n(x)|| = ||P_n(P_m(x))|| \leq ||P_n||||P_m(x)|| \leq \quad bc(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i||$$

ii)⇒i) Αρχικά βλέπουμε ότι το σύνολο $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$. Τότε

$$|\lambda_i|||e_i|| = ||\sum_{j=1}^{i} \lambda_j e_j - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j \leq 2K||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$$

Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$p_n :< e_n : n \in \mathbb{N} > \to < e_n : n \in \mathbb{N} > \qquad \text{με} \qquad p_n(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \lambda_i e_i$$

Οι p_n είναι καλώς ορισμένοι και γραμμικοί τελεστές αφού το $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Επίσης, έχουμε ότι $||p_n(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i)|| = ||\sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \lambda_i e_i|| \leq K||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i||$ άρα οι p_n είναι και φραγμένοι με $||p_n|| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή το $< e_n : n \in \mathbb{N} >$ είναι πυκνό στον X, επεκτείνουμε τους p_n σε γραμμικούς και φραγμένους τελεστές $p_n : X \to < e_n : n \in \mathbb{N} >$ ώστε $||p_n|| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Είναι άμεσο πως για κάθε $m > n$ και $x \in X$ έχουμε ότι $p_n(x) = p_n(p_m(x))$. Οπότε χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα παρόμοιο με την Πρόταση (1.1.4) προκύπτει ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δειχτεί ότι $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = x$. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $z = \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i \in < e_n : n \in \mathbb{N} >$ με $||x - z|| < \dfrac{\epsilon}{K+1}$. Τότε για $m > k$ είναι $p_m(z) = z$. Άρα

$$\begin{aligned} ||x - p_m(x)|| &\leq ||x - z|| + ||z - p_m(z)|| + ||p_m(z) - p_m(x)|| \\ &\leq (1 + ||p_m||)||x - z|| < \epsilon \end{aligned}$$

Επομένως δείχτηκε το ζητούμενο. □

Παράδειγμα (1.1.8)

Έστω $1 < p < \infty$. Τότε η ακολουθία $e_n = (0, 0, ..., 1, 0, ...)$ *(n-θέση) είναι μονότονη βάση Schauder του* ℓ_p. *Η βάση αυτή καλείται συνήθης βάση του* ℓ_p. *Την ίδια βάση Schauder έχει και ο* c_0.

Απόδειξη

Έστω $x = (\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_n, ...) \in \ell_p$. Θέτουμε $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Τότε είναι

$$||s_n - x|| = (\sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^p)^{1/p} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επίσης για $m > n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| = (\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|^p)^{1/p} = ||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i||$$

Συνεπώς δείξαμε το ζητούμενο. Με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε ότι και ο c_0 έχει την ίδια βάση. □

Παρατήρηση (1.1.9)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *και το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών* $K \geq 0$ *με την ιδιότητα ότι για κάθε* $m > n \in \mathbb{N}$ *και* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ *να ισχύει*

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| \leq K||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i||$$

Τότε η σταθερά της βάσης είναι το ελάχιστο αυτού του συνόλου.

Απόδειξη

Κατ'αρχάς έχουμε δείξει ήδη στο Θεώρημα (1.1.7) ότι η σταθερά της βάσης, έστω $bc(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, έχει την παραπάνω ιδιότητα. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι ο ελάχιστος αριθμός με αυτήν την ιδιότητα. Πραγματι, έστω ένας τέτοιος αριθμός K. Τότε για κάθε $x \in X$ με $||x|| \leq 1$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $||P_n(x)|| \leq K||P_m(x)|| \quad \forall m > n$. Άρα για $n \longrightarrow \infty$ έχουμε $||P_n(x)|| \leq K||x|| \leq K$ και από τον ορισμό της σταθεράς παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πριν ολοκληρώσουμε αυτή την εισαγωγική παράγραφο, παραθέτουμε ένα χρήσιμο κριτήριο για την κατά σημείο σύγκλιση γραμμικών και φραγμένων συναρτησιακών και το πότε μας αρκεί να την ελέγχουμε μόνο πάνω σε ένα πυκνό υποσύνολο.

Πρόταση (1.1.10)

Έστω X χώρος με νόρμα. Θεωρούμε $x^* \in X^*, x^* \neq 0$ *και* $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ *έτσι ώστε να είναι* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||x_n^*|| = M < \infty$.

Αν υπάρχει norm-πυκνό $S \subseteq X$ ώστε $x_n^*(s) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*(s) \quad \forall s \in S$, τότε έχουμε ότι $x^* = w^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n^*$

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $x^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x) \quad \forall x \in X$. Έστω λοιπόν $x \in X$. Τότε λόγω πυκνότητας υπάρχει $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ με $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $N, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$||s_N - x|| < \frac{\epsilon}{3\max\{M, ||x^*||\}} \quad \text{και} \quad |x_n^*(s_N) - x^*(s_N)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0$$

Τότε για $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |x_n^*(x) - x^*(x)| &\leq |x_n^*(x) - x_n^*(s_N)| + |x_n^*(s_N) - x^*(s_N)| + ||x^*(s_N) - x^*(x)| \\ &< M||s_N - x|| + \frac{\epsilon}{3} + ||x^*||||s_N - x|| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα (1.1.11)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Θεωρούμε* $x^* \in X^*, x^* \neq 0$ *και* $\{x_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία του X^* *με* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} ||x_k^*|| < \infty$.

Τότε αν $x_k^*(e_n) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*(e_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $x^* = w^* - \lim\limits_{k\to\infty} x_k^*$

Απόδειξη

Θέτοντας $S =< e_n : n \in \mathbb{N} >$, προκύπτει το ζητούμενο λόγω γραμμικότητας των $\{x_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ και x^* και της προηγούμενης Πρότασης. □

1.2 Βασικές ακολουθίες

Ορισμός (1.2.1)

Έστω X χώρος Banach και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία διαφορετικών αν δύο και μη μηδενικών στοιχείων του X. Η* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *καλείται βασική ακολουθία αν είναι βάση Schauder του* $[x_n : n \in \mathbb{N}]$. *Σταθερά της βασικής ακολουθίας* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *καλείται η σταθερά της ως βάση Schauder του* $[x_n : n \in \mathbb{N}]$. *Τέλος ορίζουμε τα διορθογώνια συναρτησοειδή της βασικής ακολουθίας* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ως* $x_n^* : [x_n : n \in \mathbb{N}] \to \mathbb{R}$ *με* $x_n^*(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k) = \alpha_n$.

Προφανώς κάθε βάση Schauder ενός χώρου Banach είναι βασική ακολουθία.

Προκύπτει άμεσα ο ακόλουθος χαρακτηρισμός για τις βασικές ακολουθίες.

Πρόταση (1.2.2)

Έστω X χώρος Banach και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. *Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
i) Η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι βασική ακολουθία του X*
ii) Ισχύουν τα ακόλουθα:
- $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\exists K > 0$ *ώστε για κάθε* $m > n \in \mathbb{N}$ *και* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ *να ισχύει*

$$||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i|| \leq K ||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i||$$

Παρατήρηση (1.2.3)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *και σταθερά K. Τότε τα διορθογώνια συναρτησοειδή της βάσης είναι βασική ακολουθία του X*. Επίσης για κάθε* $x^* \in [e_n^* : n \in \mathbb{N}]$ *έχουμε ότι* $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(e_n) e_n^*$.

Απόδειξη

Έστω $m > n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε $x \in X$ με $||x|| \leq 1$. Τότε έχουμε

$$|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^*(x)| \quad = |\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e_i^*(P_n(x))| = |P_n^*(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e_i^*)(x)| \leq ||P_n^*|| ||\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e_i^*|| \leq \quad K||\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e_i^*|| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^*|| \leq K||\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e_i^*||$$

Αφού η $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, τότε για κάθε $x^* \in [e_n^* : n \in \mathbb{N}]$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x^* = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n^*$ και άρα $x^*(e_n) = \lambda_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως δείξαμε το ζητούμενο. □

Αυτό το αποτέλεσμα βέβαια δεν συνεπάγεται ότι τα διορθογώνια συναρτησοειδή μιας βάσης Schauder είναι βάση του δυϊκού χώρου. Οι βάσεις που έχουν αυτή την ιδιότητα έχουν συγκεκριμένη ονομασία και θα τις μελετήσουμε στη συνέχεια. Κλείνοντας αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει βασική ακολουθία. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Λήμμα που που οφείλεται στον Mazur.

Λήμμα (1.2.4) (S.Mazur)

Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και F ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρός του. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $||x|| = 1$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$||y|| \leq (1+\epsilon)||y+mx|| \quad \forall y \in F \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

Αφού ο F έχει πεπερασμένη διάσταση, η S_F είναι $||\cdot||-$συμπαγής και άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και $y_1, ..., y_k \in S_F$ ώστε $S_F \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} S(y_i, \frac{\epsilon}{2})$. Με $S(y,\epsilon)$ συμβολίζουμε την ανοικτή μπάλα κέντρου y και ακτίνας ϵ. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$ βρίσκουμε $y_i^* \in S_{X^*}$ ώστε $y_i^*(y_i) = ||y_i|| = 1$. Ο υπόχωρος $\bigcap_{i=1}^{k} Ker(y_i^*)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση επειδή όλοι οι πυρήνες έχουν συνδιάσταση 1. Εφόσον ο X είναι απειροδιάστατος υπάρχει $x \in X$ με $||x|| = 1$ και $y_i^*(x) = 0 \quad \forall i = 1, ..., k$. Έστω λοιπόν $y \in S_F$ και $0 < \epsilon < 1$. Τότε υπάρχει $j \in \{1, ..., k\}$ τέτοιο ώστε $||y - y_j|| < \frac{\epsilon}{2}$. Επομένως για κάθε $m \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} ||y+mx|| &\geq ||y_j+mx|| - ||y-y_j|| \geq y_j^*(y_j+mx) - \frac{\epsilon}{2} = \quad y_j^*(y_j) - \frac{\epsilon}{2} = ||y_j|| - \frac{\epsilon}{2} \\ &= 1 - \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\epsilon} \quad \text{επειδή } 0 < \epsilon < 1 \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $\epsilon > 0, y \in S_F$ και $m \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in S_X$ με $(1+\epsilon)||y+mx|| \geq 1$. Θεωρούμε λοιπόν $y \in F$ με $y \neq 0$. Τότε για $\epsilon > 0$ και $m \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in S_X$ ώστε

$$1 \leq (1+\epsilon)\left|\left|\frac{y}{||y||} + \frac{mx}{||y||}\right|\right| \Rightarrow ||y|| \leq (1+\epsilon)||y+mx||$$

□

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα (1.2.5) (S.Banach)

Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει βασική ακολουθία. Ισοδύναμα κάθε χώρος Banach περιέχει κλειστό απειροδιάστατο υπόχωρο με βάση.

Απόδειξη

Έστω $\epsilon > 0$. Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών προσδιορίζουμε ακολουθία θετικών αριθμών $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\ln(1+\epsilon_n) \leq \dfrac{\ln(1+\epsilon)}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(1+\epsilon_n) \leq \ln(1+\epsilon) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+\epsilon_n) \leq 1+\epsilon$$

Η κατασκευή της ζητούμενης ακολουθίας θα γίνει επαγωγικά.
Έστω $x_1 \in X$ με $||x_1|| = 1$. Θέτουμε $F_1 =< x_1 >$. Από το Λήμμα του Mazur υπάρχει $x_2 \in X$ με $||x_2|| = 1$ και $||y|| \leq (1+\epsilon_2)||y+mx_2|| \quad \forall y \in F_1, \forall m \in \mathbb{R}$
Θέτουμε $F_2 =< x_1, x_2 >$. Από το Λήμμα του Mazur υπάρχει $x_3 \in X$ με $||x_3|| = 1$ και $||y|| \leq (1+\epsilon_3)||y+mx_3|| \quad \forall y \in F_2, \forall m \in \mathbb{R}$.
Συνεχίζοντας επαγωγικά θέτουμε $F_n =< x_1, x_2, ..., x_n >$ και επιλέγουμε $x_{n+1} \in X$ με $||x_{n+1}|| = 1$ ώστε $||y|| \leq (1+\epsilon_{n+1})||y+mx_{n+1}|| \quad \forall y \in F_n, \forall m \in \mathbb{R}$. Έχουμε ορίσει λοιπόν μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον X. Θα δείξουμε ότι είναι βασική με σταθερά μικρότερη από $1+\epsilon$. Πράγματι, έστω $m > n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$y_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \in F_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i|| &= ||y_n|| \leq (1+\epsilon_{n+1})||y_n+\alpha_{n+1}x_{n+1}|| = (1+\epsilon_{n+1})||y_{n+1}|| \\ &\leq (1+\epsilon_{n+1})(1+\epsilon_{n+2})||y_{n+1}+\alpha_{n+2}x_{n+2}|| = (1+\epsilon_{n+1})(1+\epsilon_{n+2})||y_{n+3}|| \\ &\leq \prod_{i=n+1}^{m}(1+\epsilon_i)||y_m|| \leq (1+\epsilon)||\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i||\end{aligned}$$

Άρα η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία με σταθερά μικρότερη ή ίση από $1+\epsilon$. □

1.3 Ισοδυναμία ακολουθιών

Ορισμός (1.3.1)

Έστω X,Y χώροι Banach και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ *βασικές ακολουθίες. Οι* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *και* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *καλούνται ισοδύναμες ακολουθίες αν υπάρχουν c, C>0 ώστε για κάθε* $n\in\mathbb{N}$ και $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ *να ισχύει*

$$c||\sum_{i=1}^{n}\alpha_n x_n|| \leq ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_n y_n|| \leq C||\sum_{i=1}^{n}\alpha_n x_n||$$

Πρόταση (1.3.2)

Έστω X,Y χώροι Banach και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$. *βασικές ακολουθίες. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*
i)Οι $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *και* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ισοδύναμες.*
ii) Αν $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *ώστε η* $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ *να συγκλίνει, τότε και η* $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n y_n$ *συγκλίνει και αντιστρόφως.*
iii) Υπάρχει ισομορφισμός $T:[x_n:n\in\mathbb{N}]\to[y_n:n\in\mathbb{N}]$ *με* $T(x_n)=y_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Απόδειξη

$i)\Rightarrow ii)$ Έστω $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ να συγκλίνει. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Πράγματι, για οποιοδήποτε $\epsilon>0$ υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n > N$ να είναι

$$||\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i x_i|| < \frac{\epsilon}{C}$$

Τότε θα είναι και

$$||\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i y_i|| < \epsilon$$

Ομοίως και το αντίστροφο.

ii)$\Rightarrow$ iii) Θεωρούμε $T : [x_n : n \in \mathbb{N}] \to Y$ με $T(x) = T(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$. Ο T είναι καλώς ορισμένος και γραμμικός επειδή η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και έχουμε υποθέσει την ισχύ του ii). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$T_k : X \to < y_1, ..., y_n > \qquad \text{με} \qquad T_n(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

και

$$F_n :< x_1, ..., x_n > \to < y_1, ..., y_n > \qquad \text{με} \qquad F_n(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $T_n = F_n \circ P_n$ όπου P_n οι φυσιολογικές προβολές της βασικής ακολουθίας $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Είναι φανερό ότι η T_n είναι γραμμική και συνεχής αφού η F_n είναι γραμμικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και η P_n φυσιολογική προβολή. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα Banach-Steinhauss, ο T είναι φραγμένος αφού $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \quad \forall x \in X$

Επίσης ο T είναι προφανώς 1-1 και επί αφού για $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ θέτουμε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ και έχουμε $T(x) = y$. Κατά συνέπεια από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης ο T είναι ισομορφισμός.

iii)$\Rightarrow$ i)Προφανές για $c = \frac{1}{||T^{-1}||}$ και $C = ||T||$. $\square$

Παρατήρηση (1.3.3)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *και σταθερά K και Y χώρος Banach. Αν υπάρχει ακολουθία* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *στον Y και c, C>0 ώστε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$

να ισχύει

$$c||\sum_{i=1}^{n}\alpha_n x_n|| \leq ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_n y_n|| \leq C||\sum_{i=1}^{n}\alpha_n x_n||$$

τότε ο X εμφυτεύεται ισομορφικά στον Y.

Απόδειξη

Αρκεί να δειχτεί ότι η $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασικη ακολουθία, καθώς από την προηγούμενη Πρόταση έπεται το ζητούμενο. Πράγματι, έστω $m > n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ...\alpha_m \in \mathbb{R}$. Τότε είναι

$$||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i|| \leq CK||\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i|| \leq \frac{CK}{c}||\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i||$$

□

Κλείνουμε το κομμάτι της ισοδυναμίας ακολουθιών παραθέτοντας ένα εξαιρετικά χρήσιμο κριτήριο για να κατασκευάζουμε ισοδύναμες ακολουθίες. Προηγουμένως θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα (1.3.4)

Έστω X χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής. Αν υπάρχει $\delta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ να ισχύει $||x - T(x)|| \leq \delta||x||$, τότε ο T είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη

Άμεσα βλέπουμε ότι ο T είναι ισομορφική εμφύτευση. Πράγματι,

$$||T(x)|| - ||x|| \leq \delta||x|| \quad \Rightarrow \quad ||T(x)|| \leq (1+\delta)||x||$$

και

$$||x|| - ||T(x)|| \leq \delta||x|| \quad \Rightarrow \quad (1-\delta)||x|| \leq ||T(x)||$$

Για να δείξουμε ότι ο T είναι επί, υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο $T(X)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του X. Επειδή ο T είναι ισομορφική εμφύτευση, ο $T(X)$ είναι πλήρης και άρα κλειστός υπόχωρος. Επομένως, από το Θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε να βρούμε $x_0^* \in S_{X^*}$ με $x_0^*(x) = 0 \quad \forall x \in T(X)$. Επειδή $0 < \delta < 1$, προσδιορίζουμε $x_0 \in X^*$ με $||x_0|| = 1$ και $x_0^*(x_0) > \delta$. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x_0 - T(x_0)|| &= \sup\{x^*(x_0 - T(x_0)) : ||x^*|| = 1\} \Rightarrow \\ \Rightarrow ||x_0 - T(x_0)|| &\geq x_0^*(x_0 - T(x_0)) = x_0^*(x_0) > \delta = \delta||x_0|| \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. $\square$

Χρησιμοποιούμε το παραπάνω Λήμμα για να αποδείξουμε το ακόλουθο κριτήριο.

Πρόταση (1.3.5)(Small Perturbation Lemma)

Έστω X χώρος Banach και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθίες στο X ώστε η* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *να ειναι βασική με σταθερά* K *και* $\delta = \inf\{||x_n|| : n \in \mathbb{N}\} > 0$. *Αν ισχύει ότι*

$$\sum_{n=i}^{\infty} ||x_n - y_n|| < \frac{\delta}{3K}$$

τότε η $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και ισοδύναμη της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Απόδειξη

Αρκεί να ορίσουμε ισομορφισμό $T : X \to X$ με $T(x_n) = y_n$. Τότε η $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι βασική και ισοδύναμη της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Πράγματι για κάθε $m > n$ και $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ θα έχουμε

$$||| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i|| \leq ||T|||| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leq ||T||K|| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i|| \leq ||T||K||T^{-1}|| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i||$$

Συνεπώς η $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι βασική. Η ισοδυναμία προκύπτει άμεσα καθώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ...\alpha_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{1}{||T^{-1}||} || \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leq || \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i|| \leq ||T|||| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i||$$

Έστω λοιπόν $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $x \in [x_n : n \in \mathbb{N}]$ έχουμε ότι

$$|x_n^*(x)|||x_n|| = || \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)e_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^*(x)e_i||||x_n|| \leq 2K||x|| \Rightarrow ||x_n^*|| \leq \frac{2K}{\delta}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επεκτείνουμε, από το Θεώρημα Hahn-Banach, το x_n^* στον X^* με διατήρηση της νόρμας. Τότε προκύπτει άμεσα ότι για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)(y_n - x_n)$ συγκλίνει απόλυτα και επειδή ο X είναι χώρος Banach συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)|||y_n - x_n|| \leq \frac{2K}{\delta}||x|| \sum_{n=1}^{\infty} ||y_n - x_n|| < \frac{2}{3}||x||$$

Ορίζουμε

$$T : X \to X \quad \text{με} \quad T(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)(y_n - x_n)$$

Τότε ο T είναι γραμμικός, έχουμε ότι $T(x_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και

$$||x - T(x)|| = ||\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)(y_n - x_n)|| \leq ||x|| \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^*|| ||y_n - x_n|| < \frac{2}{3}||x||.$$

Επομένως, από το προηγούμενο Λήμμα, ο T είναι ισομορφισμός και άρα δείχτηκε το ζητούμενο. $\square$

Τέλος αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ένα εξαιρετικά σημαντικό θεώρημα που θα μας χρησιμεύσει πολύ στη συνέχεια. Όπως είναι γνωστό, ο ℓ_1 δεν μπορεί να εμφυτεύεται ισομορφικά σε χώρο με διαχωρίσιμο συζυγή αφού ο συζυγής του ταυτίζεται ισομετρικά με τον ℓ_∞ που δεν είναι διαχωρίσιμος. Ο H.Rosenthal απέδειξε ένα μερικό αντίστροφο αυτής της πρότασης,το περίφημο ℓ_1-θεώρημα.

Θεώρημα (1.3.6)(ℓ_1-θεώρημα του Rosenthal)

Έστω X χώρος Banach και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία του X. Τότε ισχύει αποκλειστικά ένα από τα παρακάτω:
i) Η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *έχει ασθενώς-Cauchy υπακολουθία.*
ii) Η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1.

Η μία φορά είναι απλή και οφείλεται στο ότι η συνήθης βάση του ℓ_1 δεν μπορεί να έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία. Η αλλή φορά όμως απαιτεί πολύ πιο σύνθετα επιχειρήματα και δεν θα την εξετάσουμε εδώ. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες πληροφορίες στο [7]. Σαν εφαρμογή του θεωρήματος του Rosenthal αποδεικνύουμε μια πρόταση που θα μας χρησιμεύσει πολύ στη συνέχεια.

Πρόταση (1.3.7)

Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach που να μην περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1. *Τότε κάθε απειροδιάστατος υπόχωρός του έχει ασθενώς μηδενική μοναδιαία ακολουθία.*

Απόδειξη

Έστω Y απειροδιάστατος υπόχωρος του X. Τότε η B_Y δεν είναι norm-συμπαγής. Κατά συνέπεια υπάρχει ακολουθία $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_Y$ η οποία δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Από το ℓ_1-θεώρημα του Rosenthal και από το γεγονός ότι ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται στον X η $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ που να είναι ασθενώς Cauchy. Άρα η $\{s_{n_{k+1}} - s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική. Επίσης αφού η $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ δεν είναι norm-συγκλίνουσα, υπάρχει $\theta > 0$ ώστε να ισχύει το ακόλουθο

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k, m \in \mathbb{N} : n < k < m \quad \text{και} \quad ||s_k - s_m|| \geq \theta \quad (*)$$

Από την $(*)$ προσδιορίζουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε να είναι

$$||s_{p_{2n}} - s_{p_{2n-1}}|| \geq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Θέτοντας $u_n = s_{p_{2n}} - s_{p_{2n-1}}$ έχουμε ότι $u_n \xrightarrow{w} 0$ και ότι $||u_n|| \geq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως η $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $z_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$ είναι μοναδιαία και ασθενως μηδενική ακολουθία του Y. $\square$

1.4 Block ακολουθίες

Εισάγουμε την έννοια της block ακολουθίας η οποία είναι θεμελιώδης για τη συνέχεια. Οι block ακολουθίες είναι πολύ ευκολότερες στην κατανόησή τους και σε πολλές περιπτώσεις διευκολύνουν σημαντικά τις αποδείξεις μας.

Ορισμός (1.4.1)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Μια ακολουθία μη μηδενικών όρων $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα καλείται block ακολουθία αν υπάρχει ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να ισχύει

$$u_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i e_i$$

Πρόταση (1.4.2)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. και σταθερά K. Τότε κάθε block ακολουθία είναι βασική.

Απόδειξη

Έστω $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ block ακολουθία. Τότε $u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m > k \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} ||\sum_{j=1}^{k}\lambda_j u_j|| &= ||\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \alpha_i e_i|| = ||\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \lambda_j \alpha_i e_i|| \\ &\leq K||\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \lambda_j \alpha_i e_i|| \leq K||\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j|| \end{aligned}$$

άρα η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και μάλιστα έχει σταθερά μικρότερη ή ίση από K. □

Λήμμα (1.4.3) (Sliding hump argument I)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον X έτσι ώστε $\delta = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| > 0$ και $\lim_{n\to\infty} e_k^*(x_n) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει υπακολουθία της $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} ||x'_n - u_n||^2 < \epsilon^2$. Αν επιπλέον είναι $||x_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει περαιτέρω υπακολουθία $\left\{x''_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ και μοναδιαίο block $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} ||x''_n - b_n||^2 < \epsilon^2$

Απόδειξη

Θα δείξουμε αρχικά ότι $\lim_{n\to\infty} P_k(y_n) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Πράγματι, έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $i = 1, ..., k$ να είναι

$$|e_i^*(x_n)|||e_i|| < \frac{\epsilon}{2^i} \quad \forall n > N$$

Τότε έχουμε ότι για κάθε $n > N$

$$||P_k(x_n)|| = ||\sum_{i=1}^{k} e_i^*(x_n)e_i|| \leq \sum_{i=1}^{k} |e_i^*(x_n)|||e_i|| < \epsilon \quad (*)$$

Θεωρούμε $0 < \epsilon < \delta$. Με χρήση της $(*)$ θα κατασκευάσουμε τις ζητούμενες ακολουθίες. Έστω $k_1 = 1$ και $n_1 = 0$. Τότε $x_{k_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(1)} e_i$ άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_2 > n_1$ και

$$\begin{aligned} ||\sum_{n=n_2+1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} e_n|| &< \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad ||\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} e_n - \sum_{n=1}^{n_2} \alpha_n^{(1)} e_n|| &< \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Θέτουμε $u_1 = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \alpha_n^{(1)} e_n$ και έχουμε $||x_{k_1} - u_1||^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$. Από την $(*)$ υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε αν

$$x_{k_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(2)} e_i$$

να είναι

$$||\sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i^{(2)} e_i|| < \frac{\epsilon}{4}$$

Θεωρούμε λοιπόν $n_3 > n_2$ ώστε

$$||\sum_{i=n_3+1}^{\infty} \alpha_i^{(2)} e_i|| < \frac{\epsilon}{4}$$

Ισοδύναμα

$$||\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(2)} e_i - \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i^{(2)} e_i - \sum_{i=n_2+1}^{n_3} \alpha_i^{k_2} e_i|| < \frac{\epsilon}{4}$$

Θέτοντας $u_2 = \sum_{i=n_2+1}^{n_3} \alpha_i^{(2)} e_i$ έχουμε $||x_{k_2} - u_2|| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow ||x_{k_2} - u_2||^2 < \frac{\epsilon^2}{4}$
Συνεχίζοντας επαγωγικά προσδιορίζουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$||x_{k_n} - u_n||^2 < \frac{\epsilon^2}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow ||u_n|| > \delta - \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα, θέτοντας $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} ||x'_n - u_n||^2 < \epsilon^2$ Θεωρούμε τώρα ότι $||x_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.Έστω $0 < \epsilon < \delta$. Θέτουμε $m = \frac{(1-\epsilon)\epsilon}{2}$. Τότε έχουμε προφανώς ότι $0 < m < \epsilon < \delta$ και άρα υπάρχει υπακολουθία $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$1 - \epsilon < 1 - m < ||u_n|| \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^{'} - u_n||^2 < m^2 = \frac{(1-\epsilon)^2\epsilon^2}{4}$$

Θέτουμε $z_n = \frac{u_n}{||u_n||} \Rightarrow ||z_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
||x_n^{'} - z_n|| &\leq \frac{\Big|\Big|x_n^{'}||u_n|| - u_n\Big|\Big|}{||u_n||} \leq \frac{\Big|\Big|x_n^{'}||u_n|| - u_n\Big|\Big|}{1-\epsilon} \leq |||x_n^{'}||\frac{\Big|||u_n|| - 1\Big|}{1-\epsilon} + \frac{||x_n^{'} - u_n||}{1-\epsilon} \\
&= \frac{\Big|||u_n|| - 1\Big|}{1-\epsilon} + \frac{||x_n^{'} - u_n||}{1-\epsilon} \Rightarrow ||x_n^{'} - z_n||^2 \leq 2\frac{\Big|||u_n|| - 1\Big|^2}{(1-\epsilon)^2} + 2\frac{||x_n^{'} - u_n||^2}{(1-\epsilon)^2}
\end{aligned}
$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} ||x_n^{'} - u_n|| = 0$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} ||u_n|| = 1$ άρα βρίσκουμε υπακολουθία $\{u_n^{'}\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $\sum_{n=1}^{\infty}\Big|||u_n^{'}|| - 1\Big|^2 < \frac{(1-\epsilon)^2\epsilon^2}{4}$. Συμβολίζοντας με $\{x_n^{''}\}_{n\in\mathbb{N}}$ τη αντίστοιχη υπακολουθία της $\{x_n^{'}\}_{n\in\mathbb{N}}$ και με $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ την αντίστοιχη υπακολουθία της $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, έχουμε

$$
\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^{''} - b_n|| \leq \frac{2}{(1-\epsilon)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big|||u_n^{'}|| - 1\Big|^2 + \frac{2}{(1-\epsilon)^2}\sum_{n=1}^{\infty}||x_n^{''} - u_n^{'}||^2 < \epsilon^2
$$

και το ζητούμενο δείχτηκε. □

Λήμμα (1.4.4) (Sliding Hump Argument II)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και βασική ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον X έτσι ώστε $\delta = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| > 0$ και $\lim_{n\to\infty} e_k^*(x_n) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει υπακολουθία της $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ και block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n' - u_n|| < \epsilon$. Ειδικότερα για $\epsilon = \frac{\delta}{3K}$, όπου K η σταθερά της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, βρίσκουμε υπακολουθία $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ και block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

Με παρόμοιο τρόπο με το προηγούμενο Λήμμα κατασκευάζουμε τις ζητούμενες ακολουθίες. Για $\epsilon = \frac{\delta}{3K}$, η ισοδυναμία των δύο ακολουθιών προκύπτει άμεσα από το Small Perturbation Lemma, αφού έχουμε υποθέσει ότι η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. □

Πρόταση (1.4.5)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1. Τότε υπάρχει block της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ_1. Προφανώς το block αυτό θα είναι φραγμένο.

Απόδειξη

Αφού ο ℓ_1 εμφυτεύεται ισομορφικά στον X, υπάρχει ακολουθία $\{y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον X βασική και ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1. Συνεπώς υπάρχουν $m, M > 0$ τέτοια ώστε $m \leq ||y_n|| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι $|x_k^*(y_n)| \leq ||x_k^*||M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ άρα η $\{x_k^*(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως με ένα διαγώνιο επιχείρημα προσδιορίζουμε υπακολουθία $\{y_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε η $\{x_k^*(y_n')\}_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $z_n = y_{n+1}' - y_n'$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^*(z_n) = 0$. Είναι άμεσο ότι υπάρχουν $c, C > 0$ ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ να είναι

$$c\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i| \leq \ ||\sum_{i=1}^{m}\alpha_i z_i|| \leq C\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i| \Rightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}}\{||z_n||\} > 0$$

Είναι σαφές ότι η $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Συνεπώς με ένα sliding hump argument προσδιορίζουμε υπακολουθία $\{z_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ και block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε να είναι ισοδύναμες. Είναι άμεσο ότι η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1. □

1.5 Ιδιότητες shrinking και boundedly complete βάσεων

Ορισμός (1.5.1)

• *Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Η βάση αυτή καλείται shrinking αν ισχύει ότι $X^* = [e_n^* : n \in \mathbb{N}]$.*
• *Έστω X χώρος Banach και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία του X. Η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται boundedly complete αν για κάθε ακολουθία πραγματικών $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε να είναι $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}||\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i|| < \infty$ έχουμε ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$ συγκλίνει.*

Πρόταση (1.5.2)

Έστω X χώρος Banach με βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
i) Η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι shrinking.
ii) Κάθε μοναδιαίο block της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενικό.

Απόδειξη

$i) \Rightarrow ii)$ Έστω block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $||u_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $u_n \xrightarrow{w} 0$. Θεωρούμε λοιπόν $x^* \in X^*$ με $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^*$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει k_0 ώστε για κάθε $k > k_0$ να είναι:

$$|| \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n e_n^* || < \epsilon \Rightarrow | \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n e_n^*(x)| < \epsilon \quad \forall ||x|| \leq 1 \quad (*)$$

Αν θεωρήσουμε λοιπον $u_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i e_i$ και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $n_m > k_0$, τότε για $k > m$ έχουμε $n_k > k_0$ και άρα από την $(*)$

$$|x^*(u_k)| = | \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i^*(u_k)| = | \sum_{i=n_k+1}^{\infty} \lambda_i e_i^*(u_k)| < \epsilon \Rightarrow u_k \xrightarrow{w} 0$$

$ii) \Rightarrow i)$ Προς απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε πως η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι shrinking. Τότε υπάρχει $x^* \notin [e_n^* : n \in \mathbb{N}]$ με $||x^*|| = 1$. Παρατηρούμε ότι $P_n^*(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x^*(e_i) e_i^*$ άρα η $\{P_n^*(x^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορεί να συγκλίνει στο x^*. Επομένως υπάρχει $\epsilon > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$||x^* - P_{m_k}^*(x^*)|| \geq 2\epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Θέτουμε $n_1 = m_1$. Από την $(*)$ υπάρχει $x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(1)} e_n \in X$, με $||x_1|| = 1$ ώστε να είναι $|x^*(\sum_{i=n_1+1}^{\infty} \lambda_i^{(1)} e_i)| \geq 2\epsilon$. Θεωρούμε $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $m_{k_2} > n_1$ και αν θέσουμε $n_2 = m_{k_2}$ να είναι

$$||x^*|| || \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \lambda_i^{(1)} e_i - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i^{(1)} e_i || < \epsilon \Rightarrow |x^*(\sum_{i=n_1+1}^{\infty} \lambda_i^{(1)} e_i)| < |x^*(\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i^{(1)} e_i)| + \epsilon$$

.Θέτουμε $u_1 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i^{(1)} e_i$. Τότε έχουμε

$$|x^*(\sum_{i=n_1+1}^{\infty} \lambda_i^{(1)} e_i)| \geq 2\epsilon \Rightarrow |x^*(u_1)| > \epsilon$$

Από την $(*)$ υπάρχει $x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(2)} e_n \in X$ με $||x_2|| = 1$, ώστε $|x^*(\sum_{i=n_2+1}^{\infty} \lambda_i^{(1)} e_i)| \geq 2\epsilon$.
Θεωρούμε $k_3 \in \mathbb{N}$ ώστε $m_{k_3} > n_2$ και αν θέσουμε $n_3 = m_{k_3}$ να έχουμε

$$||x^*|| || \sum_{i=n_2+1}^{\infty} \lambda_i^{(2)} e_i - \sum_{i=n_2+1}^{n_3} \lambda_i^{(2)} e_i|| < \epsilon \Rightarrow |x^*(\sum_{i=n_1+1}^{\infty} \lambda_i^{(1)} e_i)| < |x^*(\sum_{i=n_2+1}^{n_3} \lambda_i^{(2)} e_i)| + \epsilon$$

.Θέτουμε $u_2 = \sum_{i=n_2+1}^{n_3} \lambda_i^{(2)} e_i$. Τότε έχουμε ότι

$$|x^*(\sum_{i=n_2+1}^{\infty} \lambda_i^{(2)} e_i)| \geq 2\epsilon \Rightarrow |x^*(u_2)| > \epsilon$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε block $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $|x^*(u_k)| > \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Η $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ προφανώς δεν είναι ασθενώς μηδενική. Επίσης η $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι και φραγμένη καθώς $||u_k|| = ||P_{n_{k+1}}(x_k) - P_{n_k}(x_k)|| \leq 2K||x_k|| = 2K$, όπου K η σταθερά της βάσης. Τότε και η $z_n = \frac{u_n}{||u_n||}$ δεν θα είναι ασθενώς μηδενική, πράγμα άτοπο. □

Πρόταση (1.5.3)

Έστω X χώρος Banach με shrinking βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και σταθερά K. Τότε για οποιοδήποτε $x^{**} \in X^{**}$ ισχύει η παρακάτω εκτίμηση

$$\frac{1}{K} \sup_{n\in\mathbb{N}} || \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*) e_i|| \leq ||x^{**}|| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} || \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*) e_i||$$

Προφανώς αν η βάση είναι μονότονη έχουμε $||x^{**}|| = \lim_{n\to\infty} || \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*) e_i||$.

Απόδειξη

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|| \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*) e_i|| = \sup \left\{ | \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*) y^*(e_i)| : y^* \in B_{X^*} \right\}$

Έστω λοιπόν $y^* \in B_{X^*}$. Αφού η βάση είναι shrinking θεωρούμε $y^* = \sum_{n=1}^{\infty} y^*(e_n) e_n^*$.
Τότε είναι

$$| \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*) y^*(e_i)| \;=\; |x^{**}(\sum_{i=1}^{n} y^*(e_i) e_i^*)| \leq ||x^{**}|| || \sum_{i=1}^{n} y^*(e_i) e_i^*)|| \leq K||x^{**}|| ||y^*|| \leq K||x^{**}||$$

Άρα

$$||\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i|| \leq K||x^{**}|| \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{K}\sup_{n\in\mathbb{N}}||\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i|| \leq ||x^{**}||$$

Για την αντίστροφη φορά θεωρούμε $x^* \in B_{X^*}$ με $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(e_n)e_n^*$. Τότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} |x^{**}(x^*)| &= |\sum_{n=1}^{\infty} x^*(e_n)x^{**}(e_n^*)| = \lim_{n\to\infty}|\sum_{i=1}^{n} x^*(e_i)x^{**}(e_i^*)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|x^*(\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i)| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}||\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i|| \Rightarrow ||x^{**}|| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}||\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i|| \end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο δείχτηκε. □

Παρατήρηση (1.5.4)

Καμία υπακολουθία της συνήθους βάσης του c_0 δεν είναι boundedly complete.

Απόδειξη

Έστω $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της συνήθους βάσης του c_0. Η $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι προφανώς βασική. Παρατηρούμε ότι $\sup_{k\in\mathbb{N}}||\sum_{i=1}^{k} e_{n_i}|| = 1 < \infty$ ενώ η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} e_{n_i}$ προφανώς δεν συγκλίνει. □

Πρόταση (1.5.5)

Έστω X χώρος Banach με boundedly complete βάση $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε ο c_0 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον X.

Απόδειξη

Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω ότι υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $T : c_0 \to X$ και ας είναι $z_n = T(e_n)$ όπου $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η συνήθης βάση του c_0. Προφανώς λόγω της ισομορφικής εμφύτευσης υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $||z_n|| \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης είναι γνωστό ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$, επομένως έχουμε ότι $z_n \xrightarrow{w} 0$ άρα με ένα sliding hump argument προσδιορίζουμε block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της βάσης του X και υπακολουθία $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ της $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που να είναι ισοδύναμες. Εύκολα προκύπτει ότι η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι boundedly complete βασική ακολουθία επομένως και η $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ έχει την ίδια ιδιότητα. Αφού η T είναι ισομορφική εμφύτευση τότε και η $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ θα είναι boundedly complete που είναι άτοπο. $\square$

Πρόταση (1.5.6)

Έστω X χώρος Banach με boundedly complete βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και σταθερά K. Τότε ο X είναι ισομορφικός με τον $Y = [e_n^*, n \in \mathbb{N}]^*$. Ειδικότερα αν η βάση είναι και μονότονη οι παραπάνω χώροι είναι ισομετρικοί.

Απόδειξη

Ορίζουμε $J : X \to Y^*$ με $J(x)(y) = y(x) \quad \forall y \in Y$ Προκύπτει άμεσα ότι η J είναι καλώς ορισμένη και γραμμική. Δείχνουμε ότι η J είναι και ισομορφική εμφύτευση. Πράγματι, έστω $x \in X$. Τότε έχουμε

$$|J(x)(y)| = |y(x)| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad \forall y \in Y \Rightarrow ||J(x)|| \leq ||x||$$

Έχουμε δείξει προφανώς ότι η J είναι συνεχής. Για να πάρουμε και την άλλη φορά της ανισότητας θεωρούμε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Θέτοντας $x_n = \sum_{n=1}^{n} \alpha_n e_n$ έχουμε ότι $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Θα δείξουμε ότι $||x_n|| \leq K||J(x_n)|| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και λόγω συνέχειας της J έπεται το ζητούμενο. Πραγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε από Θ.Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ με $||x^*|| = 1$ και $|x^*(x_n)| = ||x_n||$. Παρατηρούμε επίσης ότι $x^* \circ P_n \in < e_1^*, ..., e_n^* > \subseteq Y$ και ότι $x_n = P_n(x_n)$ Επομένως έχουμε ότι

$$||x_n|| = |(x^* \circ P_n)(x_n)| = |J(x_n)(x^* \circ P_n)| \leq ||x^*|| \cdot ||P_n|| \cdot ||J(x_n)|| \leq K||J(x_n)||$$

Είναι προφανές πως σε περίπτωση που η βάση είναι μονότονη έχουμε ισομετρικη εμφύτευση και άρα $||J(x)|| = ||x|| \quad \forall x \in X$. Μένει να δείξουμε ότι η J είναι και επί. Ας θεωρήσουμε λοιπόν $y^* \in Y^*$. Θεωρούμε την ακολουθία $\left\{\sum_{i=1}^{n} y^*(e_i^*)e_i\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Θα δείξουμε ότι φράσσεται ομοιόμορφα από την ποσότητα $K^2||y^*||$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$||\sum_{i=1}^{n} y^*(e_i^*)e_i|| \leq K||J(\sum_{i=1}^{n} y^*(e_i^*)e_i)|| = K||\sum_{i=1}^{n} y^*(e_i^*)J(e_i)||$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $||\sum_{i=1}^{n} y^*(e_i^*)J(e_i)|| \leq K||y^*||$. Τότε, για $y = \sum_{n=1}^{\infty} y(e_n)e_n^* \in Y$ με $||y|| \leq 1$, έχουμε ότι

$$|\sum_{i=1}^{n} y^*(e_i^*)J(e_i)(y)| = |y^*(\sum_{i=1}^{n} y(e_i)e_i^*)| \leq ||y^*|| ||\sum_{i=1}^{n} y(e_i)e_i^*|| \leq ||y^*||K||y|| \leq K||y^*||$$

Επειδή η βάση είναι boundedly complete η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} y^*(e_i^*)e_i$ συγκλίνει. Αν θέσουμε $x = \sum_{n=1}^{\infty} y^*(e_n^*)e_n$ έχουμε ότι $y^* = J(x)$ και άρα δείξαμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα (1.5.7)(R.C.James)

Έστω X χώρος Banach και μια βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *του X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
i)Η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι shrinking και boundedly complete.*
ii) Ο X είναι αυτοπαθής.

Απόδειξη

$i) \Rightarrow ii)$ Εφόσον η βάση είναι shrinking έχουμε ότι $X^{**} = [e_n^*, n \in \mathbb{N}]^*$. Από την προηγούμενη Πρόταση , η κανονική εμφύτευση, που στην συγκεκριμένη περίπτωση ταυτίζεται με την J που ορίσαμε πριν, είναι επί του X^{**} και άρα ο X είναι αυτοπαθής.
$ii) \Rightarrow i)$ Δείχνουμε αρχικά ότι η βάση είναι shrinking. Έστω $x^* \in X^*$. Τότε έχουμε ότι $P_n^*(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x^*(e_i)e_i^* \xrightarrow{w*} x^*$ καθώς $n \longrightarrow \infty$. Αφού ο X είναι αυτοπαθής η w-τοπολογία και η w^*-τοπολογία στον X^* ταυτίζονται οπότε παίρνουμε ότι

$$P_n^*(x^*) \xrightarrow{w} x^* \Rightarrow X^* = \overline{< e_n^*, n \in \mathbb{N} >}^{w} = \overline{< e_n^*, n \in \mathbb{N} >}^{||\cdot||}$$

όπως προκύπτει από το Θεώρημα του Mazur. Άρα η βάση είναι shrinking.
Δείχνουμε ότι η βάση είναι και boundedly complete. Έστω ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i|| \right\} = M$. Θα δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ συγκλίνει. Ας θέσουμε $x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ Επειδή ο X είναι αυτοπαθής, η $M{\cdot}B_X$ είναι $w-$συμπαγής. Επομένως,

επειδή ο X^* είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει $x \in M{\cdot}B_X$ και υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x = w - \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Επίσης για κάθε $i \in \mathbb{N}$ το e_i^* είναι $w-$συνεχές άρα

$$e_i^*(x) = e_i^*(w - \lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} e_i^*(x_{n_k}) = \alpha_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Επομένως $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ και το ζητούμενο δείχτηκε. □

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, σκοπός μας είναι να δώσουμε μια ισομετρική πριγραφή του δεύτερου δυϊκού ενός χώρου Banach με boundedly complete βάση. Παρουσιάζουμε αρχικά δύο γενικά αποτελέσματα.

Πρόταση (1.5.8)

Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X^{**} ώστε ο $\hat{X}$ να είναι υπόχωρος του. Τότε υπάρχει ισομετρία $T : X^* \to Y^*$ ώστε $Y^* = T[X^*] \oplus \hat{X}^{\perp}$. Ειδικότερα για $Y = X^{**}$ έχουμε ότι $X^{***} = T[X^*] \oplus \hat{X}^{\perp}$.

Απόδειξη

Ορίζουμε $T : X^* \to Y^*$ με $T(x^*)(y) = y(x^*) \quad \forall y \in Y$. Η είναι προφανως καλώς ορισμένη και γραμμική. Δείχνουμε ότι είναι και ισομετρία. Πράγματι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||T(x^*)|| &= \sup\{|T(x^*)(y)| : y \in B_Y\} = \sup\{|y(x^*)| : y \in B_Y\} \geq \sup\{|\hat{x}(x^*)| : x \in B_X\} \\ &= \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\} = ||x^*|| \end{aligned}$$

Επίσης

$$||T(x^{**})|| = \sup\{|y(x^*)| : y \in B_Y\} \leq \sup\{|x^{**}(x^*)| : x^{**} \in B_{X^{**}}\} = ||x^*||$$

Αρα η T είναι ισομετρία.Θα δείξουμε τώρα ότι ο $T[X^*]$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του Y^*. Αρχικά, αφού ο X^* είναι χώρος Banach τότε και ο $T[X^*]$ θα είναι χώρος Banach και άρα κλειστός υπόχωρος του Y^*. Ορίζουμε $Q : Y^* \to X^*$ με $Q(y^*) = y^* \circ \wedge$, όπου $\wedge : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}. Η Q είναι προφανώς γραμμική και φραγμένη. Ορίζουμε ακόμη την $P : Y^* \to Y^*$ με $P = T \circ Q$. Η P είναι προφανώς γραμμική και φραγμένη.Δείχνουμε ότι είναι και προβολή. Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι $Q \circ T = I_{Y^*}$ όπου I_{Y^*} ο ταυτοτικός τελεστής του Y^*. Πράγματι, $(Q \circ T)(x^*)(x) = T(x^*)(\hat{x}) = \hat{x}(x^*) = x^*(x) \quad \forall x \in X$. Τότε $P^2 = T \circ Q \circ T \circ Q = T \circ Q = P$. Μένει να δείξουμε ότι $P[Y^*] = T[X^*]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η Q επί. Όντως, θεωρούμε $x^* \in X^*$. Τότε θέτουμε $y^* = \hat{x^*}\Big|_Y \in Y^*$. Τότε $Q(y^*) = x^*$. Επομένως ο $T[X^*]$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του Y^* και άρα $Y^* = T[X^*] \oplus KerP$.

Τέλος θα δείξουμε ότι $KerP = \hat{X}^{\perp}$. Πράγματι αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $y^* \in \hat{X}^{\perp}$ έχουμε ότι $P(y^*)(y) = T(Q(y^*) = T(y^* \circ \wedge)(y) = y(y^* \circ \wedge) = 0 \quad \forall y \in Y$ άρα $\hat{X}^{\perp} \subseteq KerP$. Αντίστροφα, αν $y \in KerP$ έχουμε $T(y^* \circ \wedge) = 0$ και επειδή η T είναι $1-1$ παίρνουμε $y^* \circ \wedge = 0$ άρα $y^* \in \hat{X}^{\perp} \Rightarrow KerP \subseteq \hat{X}^{\perp}$. Τελικά παίρνουμε την ζητούμενη περιγραφή $Y^* = T[X^*] \oplus \hat{X}^{\perp}$. Το ειδικότερο συμπέρασμα προκύπτει για $Y = X^{**}$ □

Πρόταση (1.5.9)

Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υπόχωρος του X. Τότε ο $(X/Y)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $Y^{\perp}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε $T : (X/Y)^* \to Y^{\perp}$ έτσι ώστε $T(\hat{x}^*)(x) = \hat{x}^*(x+Y)$. Για οποιοδήποτε $x \in Y$ έχουμε ότι $T(\hat{x}^*)(x) = \hat{x}^*(Y) = 0$. Επιπλέον για οποιοδήποτε $x \in X$ έχουμε ότι $|T(\hat{x}^*)(x)| = |\hat{x}^*(x+Y)| \leq ||\hat{x}^*||||x+Y|| \leq ||\hat{x}^*||||x||$ άρα η T είναι καλώς ορισμένη. Προφανώς είναι και γραμμική. Δείχνουμε ότι η T είναι επί ισομετρία. Έστω $x^* \in Y^{\perp}$. Ορίζουμε $\hat{x}^* : X/Y \to \mathbb{R} \quad$ με $\hat{x}^*(x+Y) = x^*(x)$. Τότε για $x \in X$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\hat{x}^*(x+Y)| &= |x^*(x)| = |x^*(x-y)| \quad \forall y \in Y \leq ||x^*|| \cdot ||x-y|| \quad \forall y \in Y \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\hat{x}^*(x+Y)| \leq ||x^*|| \cdot ||x+Y|| \end{aligned}$$

άρα $\hat{x}^* \in (X/Y)^*$. Τότε προφανώς $T(\hat{x}^*) = x^*$ Δείχνουμε ότι είναι και ισομετρία. Έστω $\hat{x}^* \in (X/Y)^*$. Τότε είναι

$$\begin{aligned} ||T(\hat{x}^*)|| &= \sup\{|T(\hat{x}^*)(x)| : x \in B_X\} \leq \sup\left\{|T(\hat{x}^*)(x)| : x+Y \in B_{X/Y}\right\} \\ &= \sup\left\{|\hat{x}^*(x+Y)| : x+Y \in B_{X/Y}\right\} = ||\hat{x}^*|| \end{aligned}$$

Για την αντίστροφη φορά θεωρούμε $x \in X$ με $||x+Y|| \leq 1$. Τότε είναι

$$\begin{aligned} |\hat{x}^*(x+Y)| &= |T(\hat{x}^*)(x)| = |T(\hat{x}^*)(x-y)| \quad \forall y \in Y \leq ||T(\hat{x}^*)|| \cdot ||x-y|| \quad \forall y \in Y \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\hat{x}^*(x+Y)| \leq ||T(\hat{x}^*)|| \cdot ||x+Y|| \leq ||T(\hat{x}^*)|| \end{aligned}$$

Επομένως $||T(\hat{x}^*)|| = ||\hat{x}^*||$ και άρα η T είναι επί ισομετρία. □

Μετά από αυτά τα αποτελέσματα δίνουμε την περιγραφή του δεύτερου δυϊκου ενός χώρου Banach με boundedly complete βάση.

Πρόταση (1.5.10)

Έστω X χώρος Banach με boundedly complete βάση και $Y = [e_n^*, n \in \mathbb{N}]$. *Τότε έχουμε την περιγραφή* $X^{**} = \hat{X} \oplus Y^{\perp}$. *Άρα* $dim(X^{**}/\hat{X}) = dimY^{\perp} = dim(X^*/Y)^*$.

Απόδειξη

Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς έχουμε ότι $Y^{***} = T[Y^*] \oplus \hat{Y}^{\perp}$. Επίσης έχουμε ότι $Y^* = J[X] \Rightarrow Y^{***} = J^{**}[X^{**}]$. Με απλούς υπολογισμούς προκύπτει άμεσα ότι $J^{**}[\hat{X}] = T[Y^*]$ και ότι $J^{**}[Y^{\perp}] = \hat{Y}^{\perp}$. Οπότε $X^{**} = \hat{X} \oplus Y^{\perp}$. Προφανώς $(X^{**}/\hat{X}) \cong Y^{\perp} \equiv (X^*/Y)^* \Rightarrow dim(X^{**}/\hat{X}) = dimY^{\perp} = dim(X^*/Y)^*$. □

Κεφάλαιο 2

Ο χώρος James

2.1 Ορισμός του $\mathcal{J}$ και βασικές ιδιότητες

Για $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$ θα συμβολίζουμε $[n, m] = \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$. Τα σύνολα αυτά θα τα λέμε πεπερασμένα, ή και φραγμένα, διαστήματα. Για $n \in \mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε $[n, \infty) = \{k \in \mathbb{N} : n \leq k\}$. Τα σύνολα αυτά θα τα ονομάζουμε άπειρα διαστήματα.

Ορίζουμε

$$\mathcal{J} = \left\{ x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |\sum_{n \in I_i} x_n|^2 \right\} < \infty \right\}$$

όπου το sup το παίρνουμε πάνω σε όλες τις πεπερασμένες οικογένειες ξένων ανά δύο και φραγμένων διαστημάτων $\{I_i\}_{i=1}^m$. Είναι άμεσο ότι ο $\mathcal{J}$ είναι απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος.

Για $x \in \mathcal{J}$ θέτουμε $||x|| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |\sum_{n \in I_i} x_n|^2 \right\}^{1/2}$, όπου το sup το παίρνουμε πάνω σε όλες τις πεπερασμένες οικογένειες ξένων ανά δύο και φραγμένων διαστημάτων $\{I_i\}_{i=1}^m$.

Πρόταση (2.1.1)

Ο $(\mathcal{J}, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη

Καταρχάς δείχνουμε ότι η $||\cdot||$ είναι νόρμα. Το μόνο μη τετριμμένο είναι η τριγωνική ανισότητα. Έστω λοιπόν $x, y \in \mathcal{J}$ και $\{I_i\}_{i=1}^m$ ξένα ανά δύο και φραγμένα διαστήματα.

Τότε είναι

$$(\sum_{i=1}^{m} |\sum_{n\in I_i}(x_n+y_n)|^2)^{1/2} = [(\sum_{n\in I_1} x_n + \sum_{n\in I_1} y_n)^2 + ... + (\sum_{n\in I_m} x_n + \sum_{n\in I_m} y_n)^2]^{1/2}$$
$$\leq (\sum_{i=1}^{m} |\sum_{n\in I_i} x_n|^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{m} |\sum_{n\in I_i} y_n|^2)^{1/2} \leq ||x|| + ||y|| \Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

όπως προκύπτει από την ανισότητα Minkowski. Δείχνουμε ότι είναι και χώρος Banach. Έστω $\left\{x^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{J}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε για κάθε $m > n > N$ να είναι $||x^{(m)} - x^{(n)}|| < \epsilon$. Θεωρώντας $i \in \mathbb{N}$ και το διάστημα $I_i = \{i\}$ έχουμε από τον ορισμό της νόρμας ότι $|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \epsilon \quad \forall m > n > N$. Άρα η $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$. Ας είναι $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι $x \in \mathcal{J}$ και ότι $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$. Πράγματι θεωρούμε $\epsilon > 0$ και $M \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n \geq M$ να είναι $||x_n - x_m|| < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο και φραγμένα διαστήματα $\{I_i\}_{i=1}^{k}$ έχουμε

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{k} |\sum_{j\in I_i}(x_j^{(m)} - x_j^{(n)})|^2)^{1/2} &< \frac{\epsilon}{2} \quad \forall m > n \geq M \overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \\ (\sum_{i=1}^{k} |\sum_{j\in I_i}(x_j^{(n)} - x_j)|^2)^{1/2} &\leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n \geq M \quad (*)\end{aligned}$$

Θέτοντας $n = M$ στην $(*)$ παίρνουμε ότι $x^{(M)} - x \in \mathcal{J} \Rightarrow x \in \mathcal{J}$ και προφανώς $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$ □

Από εδώ και στο εξής, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα συμβολίζουμε $e_n = \mathcal{X}_{\{n\}}$

Παρατήρηση (2.1.2)

Έστω $x \in \mathcal{J}$. Θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$ και θέτουμε $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$. Τότε ισχύει η ανισότητα

$$||s_k||^2 + ||x - s_k||^2 \leq ||x||^2$$

Απόδειξη

Έστω $\{I_i\}_{i=1}^m$ πεπερασμένα διαστήματα και $l \in \{1, ..., m-1\}$ έτσι ώστε να είναι $I_i \subseteq [1, n] \quad \forall i = 1, ..., l$ και $I_i \subseteq [n+1, +\infty) \quad \forall i = l+1, ..., m$. Τότε είναι

$$\sum_{i=1}^{l} |\sum_{n \in I_i} s_n|^2 + \sum_{i=l+1}^{m} |\sum_{n \in I_i} (x - s_n)|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{m} |\sum_{n \in I_i} x_n|^2 \leq ||x||^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||s_k||^2 + ||x - s_k||^2 \;\leq\; ||x||^2$$

□

Πρόταση (2.1.3)

Η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (\mathcal{X}_{\{n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη και μοναδιαία βάση Schauder του $\mathcal{J}$.

Απόδειξη

Προφανώς $\quad e_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $||e_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε αρχικά ότι $\mathcal{J} = [e_n : n \in \mathbb{N}]$. Έστω λοιπόν $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{J}$. Θέτουμε $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Θα δείξουμε ότι $x = \lim_{n\to\infty} s_n$. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Τότε από τον ορισμό της νόρμας υπάρχουν ξένα ανά δύο και φραγμένα διαστήματα $\{I_i\}_{i=1}^m$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{m} |\sum_{n \in I_i} x_n|^2 > ||x||^2 - \epsilon^2 \quad (*)$$

Θέτοντας $n_0 = \max\left\{n : n \in \bigcup_{i=1}^{m} I_i\right\}$ έχουμε από την $(*)$ ότι

$$||x||^2 - ||s_n||^2 < \epsilon^2 \quad \forall n \geq n_0$$

Άρα για $n \geq n_0$ είναι $||x - s_n||^2 = ||x - s_n||^2 + ||s_n||^2 - ||s_n||^2 \leq ||x||^2 - ||s_n||^2 < \epsilon^2$ όπως προκύπτει από την προηγούμενη Παρατήρηση. Άρα $x = \lim_{n\to\infty} s_n$. Τέλος για $k, n \in \mathbb{N}$ με $k > n$ και $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ θεωρούμε ξένα ανά δύο και φραγμένα διαστήματα $\{I_i\}_{i=1}^m$ ώστε $I_i \subseteq [1, n] \quad \forall i = 1, ..., m$. Τότε προφανώς

$$(\sum_{i=1}^{m} |\sum_{j \in I_i} \alpha_j|^2))^{1/2} \leq ||\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i|| \Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i||$$

□

Πρόταση (2.1.4)

Η βάση του $\mathcal{J}$ που ορίσαμε είναι boundedly complete. Κατά συνέπεια ο c_0 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{J}$.

Απόδειξη

Έστω ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i|| < \infty$ Επειδή η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη βάση είναι άμεσο ότι

$$\lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i||$$

άρα η ακολουθία $\left\{||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i||^2\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Επομένως για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n > n_0$ να είναι $||\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i||^2 - ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i||^2 < \epsilon^2$ Επομένως από την Παρατήρηση (2.1.2) είναι

$$||\sum_{i=n+1}^{m}\alpha_i e_i|| \leq \sqrt{||\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i||^2 - ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i||^2} < \epsilon$$

και επειδή ο $\mathcal{J}$ είναι χώρος Banach, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ συγκλίνει. □

Παρατήρηση (2.1.5)

Αν περιορίσουμε την νόρμα του $\mathcal{J}$ στον $< c_{00}(\mathbb{N}) >$ τότε ο $c_{00}(\mathbb{N})$ δεν είναι χώρος Banach αφού έχει άπειρη αριθμήσιμη Hamel βάση. Είναι σαφές ότι ο $\mathcal{J}$ είναι πλήρωση του $< c_{00}(\mathbb{N}) >$ με την παραπάνω νόρμα. Αυτός είναι και ένας εναλλακτικός ορισμός του $\mathcal{J}$.

Παρατήρηση (2.1.6)

Έστω I πεπερασμένο διάστημα. Ορίζουμε $I^* = \sum_{n\in I} e_n^*$. Προφανώς $I^* \in \mathcal{J}^*$. Ας είναι τώρα ένα άπειρο διάστημα I. Από τον ορισμό της νόρμας προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathcal{J}$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n > n_0$ να είναι $|\sum_{i=n+1}^{m} e_i^*(x)| < \epsilon$.

Κατά συνέπεια η $\sum_{n\in I} e_n^*(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathcal{J}$. Ορίζοντας $I^* : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ με τύπο $I^*(x) = \sum_{n\in I} e_n^*(x) \quad \forall x \in \mathcal{J}$, έχουμε ότι το I^* είναι γραμμικό και από το Θεώρημα Banach-Steinhauss προκύπτει ότι $I^* \in \mathcal{J}^*$. Προφανώς $I^* \overset{w^*}{=} \sum_{n\in I} e_n^*$ και $||I^*|| = 1$ για κάθε διάστημα I. Ειδικότερα θα συμβολίζουμε $s^* \overset{w^*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*$.

Είναι άμεσο ότι $s^* \notin [e_n^* : n \in \mathbb{N}]$. Πράγματι, σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε ότι $s^* \overset{||\cdot||}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*$ άρα για $0 < \epsilon < 1$ θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|s^*(x) - \sum_{i=1}^{n_0} e_n^*(x)| < \epsilon \quad \forall x \in B_{\mathcal{J}} \overset{x=e_{n_0+1}}{\Rightarrow} 1 < \epsilon, \text{ άτοπο.}$$

Προφανώς $I^* \notin [e_n^* : n \in \mathbb{N}]$ για κάθε άπειρο διάστημα I. Κατά συνέπεια η βάση που έχουμε ορίσει δεν είναι shrinking και άρα από το Θεώρημα (1.5.7) ο $\mathcal{J}$ δεν είναι αυτοπαθής.

Αν θεωρήσουμε τώρα $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in \mathcal{J}$ και $x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ έχουμε ότι

$$||x_n|| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |I_i^*(x_n)|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

όπου τα $\{I_i\}_{i=1}^m$ είναι ξένα ανά δύο διαστήματα τα οποία μπορούμε να τα θεωρήσουμε και άπειρα διότι το $supp x_n$ είναι πεπερασμένο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφήνοντας $n \longrightarrow \infty$ στην $(*)$ παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$||x|| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |I_i^*(x)|^2 \right\}^{1/2}$$

όπου τα $\{I_i\}_{i=1}^m$ είναι ξένα ανά δύο διαστήματα, ενδεχομένως και άπειρα. $\square$

2.2 Περιγραφή του πρώτου συζυγούς χώρου

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δώσουμε μια περιγραφή του $\mathcal{J}^*$. Θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{J}^*$ είναι διαχωρίσιμος και πιο συγκεκριμένα ότι $\mathcal{J}^* = [e_n^*, n \in \mathbb{N}] \oplus [s^*]$. Για να κινηθούμε προς αυτή την κατεύθυνση θα ορίσουμε μια άλλη βάση του $\mathcal{J}$.

Πρόταση (2.2.1)

Θεωρούμε ακολουθία $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *στον* $\mathcal{J}$ *με* $d_1 = e_1$ *και* $d_n = e_n - e_{n-1}, n > 1$. *Τότε η* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι μονότονη βάση Schauder του* $\mathcal{J}$.

Απόδειξη

Είναι άμεσο ότι $< d_n, n \in \mathbb{N} >=< e_n, n \in \mathbb{N} >\Rightarrow [d_n, n \in \mathbb{N}] = \mathcal{J}$. Θεωρούμε τώρα $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε ξένα ανά δύο διαστήματα $\{I_i\}_{i=1}^m$ του $[1, n]$. Αν $n \notin \bigcup_{i=1}^m I_i$ τότε έχουμε

$$(\sum_{i=1}^m |I_i^*(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i)|^2)^{1/2} = (\sum_{i=1}^m |I_i^*(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i d_i)|^2)^{1/2} \leq ||\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i d_i|| \Rightarrow ||\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i d_i||$$

Σε αντίθετη περίπτωση θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $I_m = [i, n]$ για κάποιο $i \leq n$. Τότε είναι

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^m |I_i^*(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i)|^2)^{1/2} &= (\sum_{i=1}^{m-1} |I_i^*(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i)|^2 + |I_m^*(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i)|^2)^{1/2} \\ = (\sum_{i=1}^{m-1} |I_i^*(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i d_i)|^2 + \alpha_i^2)^{1/2} &\leq ||\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i d_i|| \Rightarrow ||\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i d_i||\end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε ότι $||\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i d_i||$ και άρα η $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη βάση. □

Πρόταση (2.2.2)

Η $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι shrinking.* Αποδεικνύουμε αρχικά έναν ισχυρισμό.

•**Ισχυρισμός** *Αν* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *φραγμένο block της* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *με* $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^\infty \frac{u_n}{n}$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη ισχυρισμού

Θα δείξουμε ότι για κάθε $m > k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $||\sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{i}||^2 \leq 5M^2 \sum_{i=k}^{m} \frac{1}{i^2}$ και η ζητούμενη σειρά προφανώς θα συγκλίνει αφού ο $\mathcal{J}$ είναι χώρος Banach. Αν θεωρήσουμε ότι $u_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \lambda_i d_i$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{i} &= -\frac{\lambda_{n_k+1}}{k} e_{n_k} + \frac{\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k+2}}{k} e_{n_k+1} + \ldots + \frac{\lambda_{n_{k+1}-1} - \lambda_{n_{k+1}}}{k} e_{n_{k+1}-1} + \\
&+ \left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{k} - \frac{\lambda_{n_{k+1}+1}}{k+1}\right) e_{n_{k+1}} + \frac{\lambda_{n_{k+1}+1} - \lambda_{n_{k+1}+2}}{k+1} e_{n_{k+1}+1} + \\
&+ \ldots + \\
&+ \left(\frac{\lambda_{n_{m-1}}}{m-1} - \frac{\lambda_{n_m+1}}{m}\right) e_{n_m} + \ldots + \frac{\lambda_{n_{m+1}-1} - \lambda_{n_{m+1}}}{m} e_{n_{m+1}-1} + \frac{\lambda_{n_{m+1}}}{m} e_{n_{m+1}}
\end{aligned}$$

Έστω πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο διαστημάτων $\{I_j\}_{j=1}^{\ell}$. Το $\{1, \ldots, \ell\}$ διαμερίζεται στα παρακάτω σύνολα.

$$\begin{aligned}
F_k &= \{j \in \{1, \ldots, \ell\} : I_j \subseteq [n_k, n_{k+1} - 1]\} \\
F_s &= \{j \in \{1, \ldots, \ell\} : I_j \subseteq [n_s + 1, n_{s+1} - 1]\}, s = k+1, \ldots, m-1 \\
F_m &= \{j \in \{1, \ldots, \ell\} : I_j \subseteq [n_m + 1, n_{m+1}]\} \\
F &= \bigcup_{i=k}^{m} F_i \\
U &= \{j \in \{1, \ldots, \ell\} : \exists s_1 < s_2 \in \{k+1, \ldots, m\} : I_j \cap supp(u_{s_1}) \neq \emptyset, I_j \cap supp(u_{s_2}) \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι τα F, U διαμερίζουν το $\{1, \ldots \ell\}$. Τότε για κάθε $s = k, k+1, \ldots, m$ ώστε $F_s \neq \emptyset$, έχουμε ότι

$$\sum_{j \in F_s} |I_j^*(\sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{i})|^2 = \frac{1}{s^2} \sum_{j \in F_s} |I_j^*(u_s)|^2 \leq \frac{M^2}{s^2} \Rightarrow \sum_{j \in F} |I_j^*(\sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{i})|^2 \leq M^2 \sum_{i=k}^{m} \frac{1}{i^2}$$

Αν θεωρήσουμε $j \in U$, θέτουμε

$$\begin{aligned}
s_{j,1} &= \min\{i \in \{1, \ldots, m\} : I_j \cap supp(u_i) \neq \emptyset\} \\
s_{j,2} &= \max\{i \in \{1, \ldots, m\} : I_j \cap supp(u_i) \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

Τότε έχουμε

$$|I_j^*(\sum_{i=k}^{m} \frac{u_i}{i})|^2 = |I_j^*(\frac{u_{s_{j,1}}}{s_{j,1}} + \frac{u_{s_{j,2}}}{s_{j,2}})|^2 \leq \frac{2M^2}{s_{j,1}^2} + \frac{2M^2}{s_{j,2}^2} \leq \frac{4M^2}{s_{j,1}^2}$$

Επομένως επειδή $|U| \leq m-k+1$ έχουμε

$$\sum_{j\in U}|I_j^*(\sum_{i=k}^{m}\frac{u_i}{i})|^2 \leq 4M^2\sum_{i=k}^{m}\frac{1}{i^2}$$

Συνολικά $||\sum_{i=k}^{m}\frac{u_i}{i}||^2 \leq 5M^2\sum_{i=k}^{m}\frac{1}{i^2}$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ συγκλίνει. Ας είναι $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$.

Απόδειξη

Αν η $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι shrinking, σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης (1.5.2) θα υπάρχει $x^* \in X^*, \epsilon > 0$ και $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένο block της $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x^*(u_n) > \epsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε $x^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^*(u_n)}{n} > \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, που είναι άτοπο. □

Θεώρημα (2.2.3)

Για τον πρώτο συζυγή χώρο έχουμε την περιγραφή $\mathcal{J}^* = [e_n^*, n\in\mathbb{N}]\oplus < s^* >$. Προφανώς ο $\mathcal{J}^*$ είναι διαχωρίσιμος και άρα ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{J}$.

Απόδειξη

Είναι άμεσο ότι ισχύει $< d_n^*, n\in\mathbb{N} >=< e_n^*, n\in\mathbb{N} > \oplus < s^* >$. Άρα

$$\mathcal{J}^* = [d_n^*, n\in\mathbb{N}] = \overline{< e_n^*, n\in\mathbb{N} > \oplus < s^* >} \subseteq \overline{[e_n^*, n\in\mathbb{N}]\oplus < s^* >} = [e_n^*, n\in\mathbb{N}]\oplus < s^* >$$

επειδή $dim < s^* >= 1 < +\infty$. Άρα $\mathcal{J}^* = [e_n^*, n\in\mathbb{N}]\oplus < s^* >$ □

Παρατήρηση (2.2.4)

Τόσο ο ℓ_1 όσο και ο c_0 δεν εμφυτεύονται ισομορφικά στον $\mathcal{J}$. Κατά συνέπεια, εφόσον ο $\mathcal{J}$ δεν είναι αυτοπαθής, καμία βάση του δεν μπορεί να είναι unconditional (βλ.[7] για unconditional βάσεις).

2.3 Περιγραφή του δεύτερου συζυγούς χώρου

Έχουμε δει ότι ο $\mathcal{J}$ δεν είναι αυτοπαθής. Σε αυτήν την παράγραφο θα εντοπίσουμε ένα μη τετριμμένο στοιχείο του δεύτερου συζυγούς και βάσει αυτού θα δώσουμε μια ισομετρική περιγραφή του $\mathcal{J}^{**}$. Έπειτα θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{J}$ είναι ισόμορφος με τον κλασικό χώρο $\mathcal{J}'$ τον οποίο κατασκεύασε ο R.C.James που είναι ισομετρικός με τον δεύτερο συζυγή του ως προς μια κατάλληλη νόρμα. Κατά συνέπεια ο $\mathcal{J}$ θα είναι ισόμορφος με τον δεύτερο συζυγή του.

Πρόταση (2.3.1)

Υπάρχει $e^{**} \in \mathcal{J}^{**} \setminus \hat{\mathcal{J}}$ *με* $\hat{e_n} \xrightarrow{w^*} e^{**}$ *και* $[e_n^*, n \in \mathbb{N}]^{\perp} = [e^{**}]$

Απόδειξη

Δείχνουμε αρχικά ότι η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι w-Cauchy. Πράγματι, έστω $x^* \in \mathcal{J}^*$. Από το Θεώρημα (2.2.3) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^* + \lambda s^*$. Τότε είναι

$$x^*(e_n) = \lambda_n + \lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$$

αφού $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Από Θεώρημα Banach-Steinhauss υπάρχει $e^{**} \in \mathcal{J}^{**}$ με $\hat{e_n} \xrightarrow{w^*} e^{**}$ Είναι άμεσο ότι $e^{**} \notin \hat{\mathcal{J}}$. Πράγματι, σε διαφορετική περίπτωση το e^{**} θα ήταν w^*-συνεχές και άρα $e^{**}(s^*) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{**}(e_n^*) = 0$. Όμως είναι $e^{**}(s^*) = \lim\limits_{n\to\infty} s^*(e_n) = 1$. Τέλος δείχνουμε ότι $[e_n^*, n \in \mathbb{N}]^{\perp} = [e^{**}]$. Πράγματι έστω $x^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^* \in [e_n^*, n \in \mathbb{N}]$. Τότε είναι

$$e^{**}(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{**}(e_n^*) = 0 \Rightarrow < e^{**} > \subseteq [e_n^* : n \in \mathbb{N}]^{\perp}$$

Αντίστροφα, έστω $x^{**} \in [e_n^* : n \in \mathbb{N}]^{\perp}$ και $x^* \in \mathcal{J}^*$. Τότε υπάρχουν μοναδικά

$$\begin{aligned} y^* \in [e_n^* : n \in \mathbb{N}] \text{ και } \lambda \in \mathbb{R} : x^* = y^* + \lambda s^* \Rightarrow x^{**}(x^*) &= \lambda x^{**}(s^*) = x^{**}(s^*) e^{**}(x^*) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^{**} &= x^{**}(s^*) e^{**} \end{aligned}$$

Άρα $[e_n^* n :\in \mathbb{N}]^{\perp} \subseteq < e^{**} >$. Συνολικά λοιπόν έχουμε $[e_n^*, n \in \mathbb{N}]^{\perp} = < e^{**} >$ □

Θεώρημα (2.3.2)

Για τον δεύτερο συζυγή έχουμε την περιγραφή $\mathcal{J}^{**} = \hat{\mathcal{J}} \oplus [e^{**}]$. *Από αυτή την περιγραφή γίνεται αντιληπτό ότι ο* $\mathcal{J}^{**}$ *είναι διαχωρίσιμος και quasi-reflexive συνδιάστασης-1 δηλαδή* $dim(\mathcal{J}^{**}/\hat{\mathcal{J}}) = 1$

Απόδειξη

Αφού η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι boundedly complete βάση, από την Πρόταση (1.5.10) και την προηγούμενη Πρόταση έχουμε τα ζητούμενα. □

Ορίζουμε τώρα τον κλασικό χώρο του James, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathcal{J}'$ και θα τον εφοδιάσουμε με δύο νόρμες $||\cdot||_1$ και $||\cdot||_2$. Θα δείξουμε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες, ότι ο $\mathcal{J}$ είναι ισομετρικός με τον $(\mathcal{J}', ||\cdot||_1)$ και ότι ο $(\mathcal{J}', ||\cdot||_2)$ είναι ισομετρικός με τον δεύτερο δυϊκό του. Κατά συνέπεια ο $\mathcal{J}$ θα είναι ισομορφικός με τον δεύτερο δυϊκό του. Ορίζουμε

$$J' = \left\{\{x_n\} \in c_0 : \text{sup}\left\{(x_{p_1} - x_{p_2})^2 + (x_{p_2} - x_{p_3})^2 + ... + (x_{p_{m-1}} - x_{p_m})^2\right\} < \infty\right\}$$

όπου το sup το παίρνουμε για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και τους φυσικούς $p_1 < ... < p_m$.
Για $x \in \mathcal{J}'$, θέτουμε

$$||x||_1 = \text{sup}\left\{(x_{p_1} - x_{p_2})^2 + ... + (x_{p_{m-1}} - x_{p_m})^2 : m \in \mathbb{N}, p_1 < ... < p_m \in \mathbb{N}\right\}^{1/2}$$

Με παρόμοια επιχειρήματα με αυτά του $\mathcal{J}$ δείχνουμε ότι ο $(\mathcal{J}', ||\cdot||_1)$ είναι χώρος Banach και ότι η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $e_n = \mathcal{X}_{\{n\}}$ είναι μονότονη βάση Schauder του $(\mathcal{J}', ||\cdot||_1)$. Αν θέσουμε

$$||x||_2 = \text{sup}\left\{(x_{p_1} - x_{p_2})^2 + ... + (x_{p_{m-1}} - x_{p_m})^2 + (x_{p_m} - x_{p_1})^2\right\}^{1/2}$$

όπου το sup το παίρνουμε για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και τους φυσικούς $p_1 < ... < p_m$, βλέπουμε εύκολα ότι $\frac{1}{\sqrt{2}}||x||_2 \leq ||x||_1 \leq ||x||_2$. Επομένως οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες και άρα και ο $(\mathcal{J}', ||\cdot||_2)$ είναι χώρος Banach με την ίδια βάση Schauder. Με ανάλογα επιχειρήματα βλέπει κανείς ότι η βάση είναι και μονότονη.

Πρόταση (2.3.3)

Οι χώροι $(\mathcal{J}, ||\cdot||)$ *και* $(\mathcal{J}', ||\cdot||_1)$ *είναι ισομετρικοί.*

Απόδειξη

Από την Πρόταση (1.3.2) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i|| = ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||_1$. Πράγματι, θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και φυσικούς αριθμούς $1 \leq p_1 \leq p'_1 < p_2 \leq p'_2 < ... < p_m \leq p'_m \leq n$. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα $I_j = [p_j, p'_j] \quad \forall j = 1, ..., m$ και θέσουμε $\alpha_{n+1} = 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} |I_j^*(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i)|^2 &= (\alpha_{p_1} - \alpha_{p'_1+1})^2 + (\alpha_{p_2} - \alpha_{p'_2+1})^2 + ... + (\alpha_{p_m} - \alpha_{p'_m+1})^2 \\ \leq ||\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i)||_1^2 &= ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i)||_1^2 \Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i)|| \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i)||_1\end{aligned}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας $m \in \mathbb{N}$ και $p_1 < ... < p_m \leq n+1$, τότε θέτοντας $I_j = [p_j, p_{j+1} - 1], j = 1, ..., m$ έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha_{p_1} - \alpha_{p_2})^2 + ... + (\alpha_{p_{m-1}} - \alpha_{p_m})^2 &= \sum_{j=1}^{m} |I_j^*(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i)|^2 \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i||^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||_1 &\leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i||\end{aligned}$$

Άρα δείξαμε το ζητούμενο. □

Πρόταση (2.3.4)

Η βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι shrinking τόσο για τον $(\mathcal{J}', ||\cdot||_1)$ όσο και για τον $(\mathcal{J}', ||\cdot||_2)$.

Απόδειξη

Από το ότι $||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i|| = ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||_1 \quad \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ και από το ότι οι $||\cdot||_1$ και $||\cdot||_2$ είναι ισοδύναμες προκύπτει άμεσα από τον Ισχυρισμό της Πρότασης (2.2.2) ότι για κάθε $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένο block της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ συγκλίνει και στις δύο νόρμες. Άρα έπεται το ζητούμενο από την απόδειξη της Πρότασης (2.2.2). □

Πρόταση (2.3.5)

Για κάθε $x^{**} \in \mathcal{J}'^{**}$ η $\{x^{**}(e_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Έστω $x^{**} \in \mathcal{J}'^{**}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την $||\cdot||_1$. Επειδή η βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη και shrinking, από την Πρόταση (1.5.3) έχουμε $||x^{**}||_1 = \lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i||_1$

Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x_n = \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$||x^{**}||_1^2 - ||x_N||_1^2 < \epsilon^2 \quad (*)$$

Επίσης υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και φυσικοί αριθμοί $p_1 < ... < p_k \leq N+1$ τέτοιοι ώστε $||x_N||_1 = [x^{**}(e_{p_1}^*) - x^{**}(e_{p_2}^*)]^2 + ... + [x^{**}(e_{p_{k-1}}^*) - x^{**}(e_{p_k}^*)]^2$. Τότε για κάθε $m > n \geq N+2$ έχουμε ότι $|x^{**}(e_m) - x^{**}(e_n)| < \epsilon$, άρα η $(x^{**}(e_n^*))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνει. Πράγματι σε διαφορετική περίπτωση υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $||x_m||_1 > ||x^{**}||_1$ που είναι άτοπο διότι $||x^{**}||_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i||_1$. □

Θεώρημα (2.3.6)

Ο $(\mathcal{J}', ||\cdot||_2)$ ταυτίζεται ισομετρικά με τον δεύτερο δυϊκό του.

Απόδειξη

Ορίζουμε $\pi : \mathcal{J}'^{**} \to J'$ με $\pi(x^{**}) = (-\lambda, x^{**}(e_1^*) - \lambda, x^{**}(e_2^*) - \lambda, ...)$ όπου $\lambda = \lim_{n\to\infty} x^{**}(e_n^*)$, το οποίο γνωρίζουμε ότι υπάρχει από την Πρόταση (2.3.5). Είναι άμεσο ότι η π είναι καλώς ορισμένη και γραμμική. Θέτοντας $\alpha_1 = -\lambda$,..., $\alpha_n = x^{**}(e_{n-1}^*) - \lambda$ προκύπτει ότι $\pi(x^{**}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ και άρα

$$||\pi(x^{**})||_2 = ||\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n||_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i||_2 = ||x^{**}||_2$$

αφού η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη και shrinking βάση του $(\mathcal{J}', ||\cdot||_2)$.
Δείχνουμε ότι είναι και επί. Έστω $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{J}'$. Τότε μπορούμε να δούμε άμεσα ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_1)e_i||_2 < \infty$. Θέτουμε $y_n = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_1)e_i$. Επειδή η $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι

φραγμένη και ο $\mathcal{J}^*$ είναι διαχωρίσιμος, από το Θεώρημα Αλάογλου υπάρχει $x^{**} \in \mathcal{J}'^{**}$ και υπακολουθία $\{y_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $\hat{y_n'} \xrightarrow{w*} x^{**} \Rightarrow x^{**}(e_n^*) = x_{n+1} - x_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\pi(x^{**}) = x$. □

Παρατήρηση (2.3.7)

Λόγω του ότι ο $\mathcal{J}$ είναι ισόμορφος με τον $(\mathcal{J}', ||\cdot||_2)$ ο $\mathcal{J}$ είναι ισόμορφος με τον δεύτερο δυϊκό του ενώ ο $(\mathcal{J}', ||\cdot||_2)$ δεν είναι αυτοπαθής.

2.4 Ο $\mathcal{J}$ είναι ℓ_2-saturated

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι ο $\mathcal{J}$ είναι ℓ_2-saturated δηλαδή ότι σε κάθε απειροδιάστατο υπόχωρό του εμφυτεύεται ισομορφικά ο ℓ_2. Επειδή η παραπάνω είναι μια ισομορφική ιδιότητα την μοιράζεται και ο $\mathcal{J}'$ και ως προς τις δύο νόρμες που έχουμε ορίσει.

Παρατήρηση (2.4.1)

Έστω $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μοναδιαίο block της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2)^{1/2} \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i||$$

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 = 1$. Θα δείξουμε ότι $1 \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i||$.
Πράγματι, επειδή $||u_i|| = 1$ για κάθε $i = 1, ..., m$ και επειδή η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι block υπάρχουν διαστήματα $\{I_j\}_{j=1}^{\ell}$ ξένα ανά δύο και φραγμένα και $1 < \ell_1 < ... < \ell_{m-1} < \ell$ ώστε θέτοντας $\ell_0 = 1$ και $\ell_m = \ell$ να έχουμε $\{I_j\}_{j=\ell_{i-1}}^{\ell_i} \subseteq supp(u_i) \quad \forall i = 1, ..., m$ και

$$\sum_{j=\ell_{i-1}}^{\ell_i} |I_j^*(u_i)|^2 = 1 \quad \forall i = 1, ..., m \Rightarrow \sum_{j=1}^{\ell} |I_j^*(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i)|^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 = 1 \Rightarrow 1 \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i||$$

□

Λήμμα (2.4.2)

Έστω $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *μοναδιαίο block της* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *με* $\lim\limits_{n\to\infty} s^*(u_n)=0$. *Τότε για κάθε* $\epsilon>0$ *υπάρχει υπακολουθία της* $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ώστε για κάθε* $m\in\mathbb{N}$ *και* $\alpha_1,...\alpha_m\in\mathbb{R}$ *να ισχύει*

$$(1-\frac{\epsilon}{2})(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2)^{1/2}\leq ||\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u'_i||\leq (\sqrt{5}+\frac{\epsilon}{2})(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2)^{1/2}$$

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι $u_k=\sum\limits_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}\lambda_i e_i$, θέτουμε $y_k=u_k-s^*(u_k)e_{n_{k+1}}$. Συνεπώς έχουμε ότι $||y_k||\leq 1+|s^*(u_k)|\quad \forall k\in\mathbb{N}$ και $\lim\limits_{k\to\infty}||u_k-y_k||=0$, επομένως μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε συμβολίζοντας με $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ την αντίστοιχη υπακολουθία της $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty}||u'_k-y'_k||^2<\frac{\epsilon^2}{16}\quad \text{και}\quad ||y'_k||<1+\frac{\epsilon^2}{128}\quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Θεωρούμε λοιπόν $m\in\mathbb{N}$ και $\alpha_1,...,\alpha_m\in\mathbb{R}$ με $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^2=1$. Τότε από την προηγούμενη Παρατήρηση έχουμε ότι

$$1-\frac{\epsilon}{2}<1\leq ||\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u'_i||$$

Για την άλλη φορά της ανισότητας δείχνουμε ότι $||\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i y'_i||\leq\sqrt{5}+\frac{\epsilon}{4}$ Πράγματι θεωρούμε ξένα ανά δύο και φραγμένα διαστήματα $\{I_j\}_{j=1}^{\ell}$. Για κάθε $i=1,...,m$ θέτουμε $F_i=\{j\in\{1,...,\ell\}:I_j\subseteq supp(y'_i)\}$ και $F=\bigcup\limits_{i=1}^{m}F_i$.Τότε

$$\sum_{j\in F}|I_j^*(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y'_i)|^2=\sum_{i:F_i\neq\emptyset}\sum_{j\in F_i}|I_j^*(\alpha_i y'_i)|^2|\leq\sum_{i:F_i\neq\emptyset}\alpha_i^2(1+\frac{\epsilon^2}{128})<1+\frac{\epsilon^2}{32}$$

Θεωρούμε επίσης
$U=\left\{j\in\{1,...,\ell\}:\exists i_1<i_2\in\{1,...,m\}:I_j\cap supp(y'_{i_1})\neq\emptyset, I_j\cap supp(y'_{i_2})\neq\emptyset\right\}$
Για κάθε $j\in U$ θέτουμε
$s_{j,1}=\min\{i\in\{1,...,m\}:I_j\cap supp(y'_i)\neq\emptyset\}$

$s_{j,2} = \max\{i \in \{1,...,m\} : I_j \cap supp(y'_i) \neq \emptyset\}$.
Τότε είναι

$$\begin{aligned}\sum_{j\in U} |I_j^*(\sum_{i=1}^m \alpha_i y'_i)|^2 &= \sum_{j\in U} |I_j(\alpha_{s_{j,1}} y'_{s_{j,1}}) + I_j(\alpha_{s_{j,2}} y'_{s_{j,2}})|^2 \\ &\leq \sum_{j\in U} (2\alpha_{s_{j,1}}^2 |I_j(y'_{s_{j,1}})|^2 + 2\alpha_{s_{j,2}}^2 |I_j(y'_{s_{j,2}})|^2) \leq 4 + \frac{\epsilon^2}{32}\end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι τα F, U διαμερίζουν το $\{1,...,\ell\}$, οπότε αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$||\sum_{i=1}^m \alpha_i y'_i|| < \sqrt{5 + \frac{\epsilon^2}{16}} < \sqrt{5} + \frac{\epsilon}{4}$$

Τότε έχουμε

$$||\sum_{i=1}^m \alpha_i u'_i|| \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| ||u'_i - y'_i|| + ||\sum_{i=1}^m \alpha_i y'_i|| \leq (\sum_{i=1}^m ||u'_i - y'_i||^2)^{1/2} + \sqrt{5} + \frac{\epsilon}{4} \leq \sqrt{5} + \frac{\epsilon}{2}$$

□

Θεώρημα (2.4.3)

Ο $\mathcal{J}$ είναι ℓ_2-saturated. Ειδικότερα για κάθε Y απειροδιάστατο υπόχωρο του $\mathcal{J}$ υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον Y ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχει υπακολουθία $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$(1-\epsilon)(\sum_{i=1}^m \alpha_i^2)^{1/2} \leq ||\sum_{i=1}^m \alpha_i x'_i|| \leq (\sqrt{5}+\epsilon)(\sum_{i=1}^m \alpha_i^2)^{1/2}$$

Απόδειξη

Ο $\mathcal{J}$ δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1 άρα από την Πρόταση (1.3.7) υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{J}$ μοναδιαία και ασθενώς μηδενική. Τότε με ένα sliding hump argument κατασκευάζουμε μοναδιαίο block $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και υπακολουθία $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{n=1}^\infty ||x'_n - u_n||^2 < \frac{\epsilon^2}{4}$$

Θεωρώντας $m \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 = 1$ τότε από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε

$$||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i'|| \leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| ||x_i' - u_i|| + ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i|| \leq \sqrt{5} + \epsilon$$

και

$$||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i|| - \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| ||x_i' - u_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i'|| \Rightarrow 1 - \epsilon \leq ||\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i'||$$

Το ζητούμενο έπεται άμεσα από την Παρατήρηση (1.3.3). $\square$

Κεφάλαιο 3

Ο χώρος James Tree

3.1 Ορισμός του $\mathcal{JT}$ και βασικές ιδιότητες

Ξεκινάμε με κάποιους ορισμούς σχετικούς με το δέντρο του Cantor πάνω στο οποίο θα ορίσουμε τη βάση μας. Οι ορισμοί αυτοί είναι πολύ σημαντικοί καθώς θα τους χρησιμοποιούμε χωρίς αναφορά παρακάτω. Στη συνέχεια ορίζουμε τον $\mathcal{JT}$ και αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητές του. Πολλές από αυτές είναι οι ιδιότητες που έχει και ο ίδιος ο $\mathcal{J}$ και οι αποδείξεις είναι παρόμοιες, επομένως αρκετά συχνά θα αναφερόμαστε στο Κεφάλαιο 2.

Ορισμός (3.1.1)

•*Ορίζουμε* $2^{<\mathbb{N}} = \{\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) : \sigma_i \in \{0,1\}\, \forall i = 1, ..., n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$. *Το σύνολο αυτό καλείται δυαδικό δέντρο του Cantor. Το* $\emptyset$ *καλείται ρίζα του δέντρου. Τα στοιχεία του* $2^{<\mathbb{N}}$ *καλούνται κόμβοι του δέντρου.*
•*Ορίζουμε τη συνάρτηση επιπέδου* $|\cdot| : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *με*

$$|s| = \begin{cases} 0 & \text{αν } s = \emptyset \\ n & \text{αν } s = (s_1, ..., s_n) \end{cases}$$

•*Ορίζουμε στο* $2^{<\mathbb{N}}$ *τη μερική διάταξη '*$\sqsubseteq$*' ως εξής*

$$\emptyset \sqsubseteq s \quad \forall s \in 2^{<\mathbb{N}}$$

Αν $s, u \in 2^{<\mathbb{N}}$ με $s, u \neq \emptyset$, τότε $s \sqsubseteq t \Leftrightarrow |s| \leq |t| \quad \text{και} \quad s_i = t_i \quad \forall i = 1, ..., |s|$

•*Θεωρούμε το δυαδικό σύνολο Cantor* $2^{\mathbb{N}} = \{(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sigma_n \in \{0,1\}\, \forall n \in \mathbb{N}\}$. *Για* $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ *και* $n \in \mathbb{N}$ *θα συμβολίζουμε* $\sigma|_n = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in 2^{<\mathbb{N}}$. *Αν θεωρήσουμε διαφορετικά ανά δύο* $\sigma_1, ..., \sigma_n \in 2^{\mathbb{N}}$ *τότε υπάρχει* $N \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\sigma_i|_N \neq \sigma_j|_N \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$

με $i \neq j$. Ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με την παραπάνω ιδιότητα καλείται επίπεδο διαχωρισμού των $\sigma_1, ..., \sigma_n$.
•Έστω $I \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ έτσι ώστε για κάθε $s, t \in I$ να ισχύει είτε ότι $s \sqsubseteq t$ είτε ότι $t \sqsubseteq s$. Αν επιπλέον για κάθε $s, t \in I$ και $w \in 2^{<\mathbb{N}}$ έτσι ώστε να είναι $s \sqsubseteq w \sqsubseteq t$, έπεται ότι $w \in I$, τότε το I καλείται διάστημα.
•Κάθε πεπερασμένο διάστημα I με n το πλήθος στοιχεία γράφεται ως $I = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ όπου $s_1 \sqsubseteq s_2 \sqsubseteq, ..., \sqsubseteq s_n$. Το s_1 καλείται αρχή του I, ενώ το s_n καλείται τέλος του I. Την αρχή του I θα τη συμβολίζουμε με $in(I)$, ενώ το τέλος του με $end(I)$. Τα $in(S)$ και $end(S)$ θα τα λέμε άκρα του S.Είναι προφανές ότι για κάθε $s, t \in I$ με $s \sqsubseteq t$, υπάρχει διάστημα $S \subseteq I$ με $in(S) = s$ και $end(S) = t$. Επίσης αν S, I είναι δύο διαστήματα με $|in(S)| \leq |in(I)|$ και $end(S) = end(I)$, τότε $I \subseteq S$. Τα πεπερασμένα διαστήματα τα λέμε και φραγμένα διαστήματα.
•Για κάθε άπειρο διάστημα I υπάρχει μοναδικό $\sigma(I) \in 2^{\mathbb{N}}$ και μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε να είναι $I = \{\sigma(I)|_{n+k} : k = 0, 1, ...\}$. Το $\sigma(I)|_n$ καλείται αρχή του διαστήματος και συμβολίζεται με $in(I)$. Ο συμβολισμός αυτός θα χρησιμοποιείται αρκετά στη συνέχεια.
•Έστω $I_1, ..., I_n$ άπειρα διαστήματα διαφορετικά ανά δύο. Προφανώς τα $\sigma(I_1), ..., \sigma(I_n)$ είναι κι αυτά διαφορετικά ανά δύο. Ως επίπεδο διαχωρισμού των $I_1, ..., I_n$ ορίζουμε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό N ώστε να είναι $\sigma(I_i)|_N \neq \sigma(I_j)|_N \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$ με $i \neq j$ και $N \geq in(I_i) \quad \forall i = 1, ..., n$.
•Θέτουμε $t_1 = \emptyset$ και $t_2 = (0)$. Για $n > 2$ θεωρούμε $t_n = (\sigma_1, ..., \sigma_m)$. Αν για κάθε $i = 1, ...m$ έχουμε ότι $\sigma_i = 1$ τότε θέτουμε $t_{n+1} = (\sigma'_1, ..., \sigma'_m, \sigma'_{m+1})$ όπου $\sigma'_i = 0$ για κάθε $i = 1, ..., m+1$. Διαφορετικά θεωρούμε $i_0 = max\{i \in \{1, ..., m\} : \sigma_i = 0\}$. Θέτουμε $t_{n+1} = (\sigma'_1, ..., \sigma'_m)$ με $\sigma'_i = \sigma_i \quad \forall i = 1, ..., i_0 - 1$, $\sigma'_{i_0} = 1$ και $\sigma'_i = 0 \quad \forall i = i_0 + 1, ..., m$. Από αυτήν τη φιδοειδή αρίθμηση γίνεται φανερό ότι $2^{<\mathbb{N}} = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Προφανώς το $2^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο.
• Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $|t_n| = [\log_2 n]$ όπου με $[\cdot]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού
•Για $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε $e_s = \mathcal{X}_{\{s\}}$. Ειδικότερα συμβολίζουμε $e_n = \mathcal{X}_{\{t_n\}}$. Προφανώς όταν γράφουμε $\{e_s\}_{s \in 2^{<\mathbb{N}}}$ και $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ εννοούμε την ίδια ακολουθία χαρακτηριστικών συναρτήσεων των κόμβων του δέντρου.

Είμαστε σε θέση πλέον να ορίσουμε τον χώρο James Tree.

Ορισμός (3.1.2)

Ορίζουμε

$$\mathcal{JT} = \left\{ x : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} | \sum_{t \in I_i} x(t)|^2 \right\} < \infty \right\}$$

όπου το sup το παίρνουμε πάνω σε όλες τις πεπερασμένες οικογένειες ξένων ανά δύο και φραγμένων διαστημάτων $\{I_i\}_{i=1}^m$. Είναι άμεσο ότι ο $\mathcal{JT}$ είναι απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος.

Για $x \in \mathcal{JT}$ θέτουμε $||x|| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |\sum_{t \in I_i} x(t)|^2 \right\}^{1/2}$, όπου το sup το παίρνουμε πάνω σε όλες τις πεπερασμένες οικογένειες ξένων ανά δύο και φραγμένων διαστημάτων $\{I_i\}_{i=1}^m$

Πρόταση (3.1.3)

Ο $(\mathcal{JT}, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης (2.1.1). Την παραθέτουμε για να καταδείξουμε την ομοιότητα. Καταρχάς δείχνουμε ότι η $||\cdot||$ είναι νόρμα. Το μόνο μη τετριμμένο είναι η τριγωνική ανισότητα. Έστω λοιπόν $x, y \in \mathcal{JT}$ και $\{I_i\}_{i=1}^m$ πεπερασμένα και ξένα ανά δύο διαστήματα. Τότε είναι

$$(\sum_{i=1}^{m} |\sum_{t \in I_i}(x(t) + y(t))|^2)^{1/2} = [(\sum_{t \in I_1} x(t) + \sum_{t \in I_1} y(t))^2 + \ldots + (\sum_{t \in I_m} x(t) + \sum_{n \in I_m} y(t))^2]^{1/2}$$
$$\leq (\sum_{i=1}^{m} |\sum_{t \in I_i} x(t)|^2)^{1/2} + (\sum_{i=1}^{m} |\sum_{t \in I_i} y(t)|^2)^{1/2} \leq ||x|| + ||y|| \Rightarrow ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

όπως προκύπτει από την ανισότητα Minkowski. Δείχνουμε ότι είναι και χώρος Banach. Έστω $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{J}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε για κάθε $m > n \geq N$ να είναι $||x_m - x_n|| < \epsilon$. Θεωρώντας $t \in 2^{<\mathbb{N}}$ και το διάστημα $I_t = \{t\}$ έχουμε από τον ορισμό της νόρμας ότι $|x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon \quad \forall m > n > N$. Άρα η $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει για κάθε $t \in 2^{<\mathbb{N}}$. Θεωρούμε συνάρτηση $x : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ με $x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t)$. Θα δείξουμε ότι $x \in \mathcal{JT}$ και ότι $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Πράγματι θεωρούμε $\epsilon > 0$ και $M \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n \geq M$ να είναι $||x_n - x_m|| < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε για οποιαδήποτε ξένα ανά δύο και φραγμένα διαστήματα $\{I_i\}_{i=1}^k$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{k} |\sum_{t \in I_i} |x_m(t) - x_n(t))|^2)^{1/2} &< \frac{\epsilon}{2} \quad \forall m > n \geq M \overset{m \to \infty}{\Rightarrow} \\ (\sum_{i=1}^{k} |\sum_{t \in I_i} |x_n(t) - x||^2)^{1/2} &\leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n \geq M \quad (*)\end{aligned}$$

Θέτοντας $n = M$ στην $(*)$ παίρνουμε ότι $x_M - x \in \mathcal{JT} \Rightarrow x \in \mathcal{JT}$ και προφανώς $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $\square$

Παρατήρηση (3.1.4)

Έστω $x \in \mathcal{JT}$. Θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$ και θέτουμε $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i$. Τότε ισχύει η ανισότητα

$$||s_k||^2 + ||x - s_k||^2 \leq ||x||^2$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Παρατήρησης (2.1.2) $\square$

Πρόταση (3.1.5)

Η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη και μοναδιαία βάση Schauder του $\mathcal{JT}$.

Απόδειξη

Προφανώς $e_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $||e_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε αρχικά ότι $\mathcal{JT} = [e_n : n \in \mathbb{N}]$. Έστω λοιπόν $x \in \mathcal{JT}$. Θέτουμε $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x(t_i) e_i$. Θα δείξουμε ότι $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Τότε από τον ορισμό της νόρμας υπάρχουν ξένα ανά δύο και φραγμένα διαστήματα $\{I_i\}_{i=1}^{m}$ ώστε να ισχύει,

$$\sum_{i=1}^{m} |\sum_{t\in I_i} x(t)|^2 > ||x||^2 - \epsilon^2 \quad (*)$$

Θέτοντας $n_0 = \max\left\{ |t| : t \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i \right\}$ έχουμε από την $(*)$ ότι

$$||x||^2 - ||s_n||^2 < \epsilon^2 \quad \forall n \geq 2^{n_0+1}$$

Άρα για $n \geq 2^{n_0+1}$ είναι $||x-s_n||^2 = ||x-s_n||^2 + ||s_n||^2 - ||s_n||^2 = ||x||^2 - ||s_n||^2 < \epsilon^2$ όπως προκύπτει από την προηγούμενη Παρατήρηση. Άρα $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Τέλος για $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ θεωρούμε ξένα ανά δύο και πεπερασμένα διαστήματα $\{I_i\}_{i=1}^{m}$ με $t_{n+1} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i$. Τότε προφανώς

$$(\sum_{i=1}^{m} |\sum_{t_j\in I_i} \alpha_j|^2))^{1/2} \leq ||\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i|| \Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i||$$

Άρα δείχτηκε το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση (3.1.6)

Η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι boundedly complete βάση. Κατά συνέπεια ο c_0 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{JT}$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Πρότασης (2.1.4). $\square$

Παρατήρηση (3.1.7)

Ο $\mathcal{JT}$ μπορεί να οριστεί εναλλακτικά και ως πλήρωση του $< c_{00}(2^{<\mathbb{N}}) >$ με τη νόρμα που έχουμε ορίσει.

Παρατήρηση (3.1.8)

Κατ' αναλογία με την Παρατήρηση (2.1.6), για I πεπερασμένο διάστημα, ορίζουμε $I^* = \sum_{s\in I} e_s^* \in \mathcal{JT}^*$. Αντίστοιχα, για I άπειρο διάστημα, ορίζουμε $I^* \overset{w^*}{=} \sum_{s\in I} e_s^* \in \mathcal{JT}^*$. Προφανώς $||I^*|| = 1$ για κάθε διάστημα I.Ειδικότερα, για $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ θα συμβολίζουμε $\sigma^* \overset{w^*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e_{\sigma|n}^*$.Έχουμε ότι $I \notin [e_n^* : n \in \mathbb{N}]$ για, κάθε άπειρο διάστημα I, κατά συνέπεια η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι shrinking βάση και επομένως ο $\mathcal{JT}$ δεν είναι αυτοπαθής. Τέλος, για κάθε $x \in \mathcal{JT}$, παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση

$$||x|| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |I_i^*(x)|^2 \right\}^{1/2}$$

όπου τα $\{I_i\}_{i=1}^m$ είναι ξένα ανά δύο, ενδεχομένως και άπειρα, διαστήματα. $\square$

Πρόταση (3.1.9)

Για κάθε $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ ο $[e_{\sigma|_n}, n \in \mathbb{N}]$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{J}$.

Απόδειξη

Έστω $T :< e_{\sigma|_n}^*, n \in \mathbb{N} >\to \mathcal{J}$ με $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{\sigma|_i}) = (\lambda_1, ..., \lambda_n, 0, ...)$. Η T είναι προφανώς γραμμική. Θεωρώντας τα ξένα ανά δύο διαστήματα του $\mathbb{N}$, $I_1 = [n_1, n_1'], ...I_m =$

$[n_m, n'_m]$ και τα επίσης ξένα ανά δύο διαστήματα του $2^{<\mathbb{N}}$, $S_1 = [\sigma|_{n_1}, \sigma|_{n'_1}], ..., S_m = [\sigma|_{n_m}, \sigma|_{n'_m}]$ έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} |I_j^*(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)|^2 = \sum_{j=1}^{m} |S_j^*(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{\sigma|_i})|^2 \Rightarrow ||T(x)|| = ||x||$$

Η T λοιπόν είναι ισομετρία η οποία ως γνωστόν επεκτείνεται και στον $[e^*_{\sigma|_n}, n \in \mathbb{N}]$. Μένει να δείξουμε ότι είναι και επί. Πράγματι έστω $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in \mathcal{J}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n > N$ να είναι $|| \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i e_{\sigma|_i}|| = || \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i e_i|| < \epsilon$ Επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_{\sigma|_n}$ συγκλίνει και προφανώς $T(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_{\sigma|_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Επομένως δείξαμε το ζητούμενο. □

Πρόταση (3.1.10)

Ο $\mathcal{JT}^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη

Το σύνολο $\left\{\sigma^* : \sigma \in 2^{\mathbb{N}}\right\}$ είναι προφανώς υπεραριθμήσιμο και 1-διαχωρισμένο. Πράγματι αν θεωρήσουμε $\sigma_1^* \neq \sigma_2^*$ υπάρχει $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ με $\sigma_1^*(e_s) = 1$ και $\sigma_2^*(e_s) = 0$. Κατά συνέπεια $||\sigma_1^* - \sigma_2^*|| \geq 1$ και επομένως ο $\mathcal{JT}^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος. □

Πρόταση (3.1.11)

Για κάθε $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ υπάρχει $\sigma^{**} \in \mathcal{JT}^{**} \setminus \hat{\mathcal{JT}}$ με $\hat{e}_{\sigma|_n} \xrightarrow{w^*} \sigma^{**}$

Απόδειξη

Έχουμε δείξει ότι υπάρχει $T : [e_{\sigma|_n} : n \in \mathbb{N}] \to \mathcal{J}$ ισομετρία επί. Επομένως και η $T^* : \mathcal{J}^* \to [e_{\sigma|_n} : n \in \mathbb{N}]^*$ είναι ισομετρία επί. Επειδή $\mathcal{J}^* = [e_n^*, n \in \mathbb{N}] \oplus [s^*]$ έχουμε ότι για κάθε $x^* \in [e_{\sigma|_n} : n \in \mathbb{N}]^*$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μοναδικό $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$x^* = T^*(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^* + \lambda s^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n^* \circ T) + \lambda (s^* \circ T)$$

Δείχνουμε ότι η $(e_{\sigma|_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι $w-$Cauchy. Πράγματι αν $x^* \in \mathcal{JT}^*$ τότε είναι φανερό ότι $x^*\Big|_{[e_{\sigma|_n}:n\in\mathbb{N}]} \in [e_{\sigma|_n} : n \in \mathbb{N}]^*$ και άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$x^*(e_{\sigma|_k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^*(T(e_{\sigma|_k})) + \lambda s^*(T(e_{\sigma|_k})) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^*(e_k) + \lambda s^*(e_k) = \lambda_k + \lambda \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$$

αφού $\lambda_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Οπότε ισοδύναμα υπάρχει $\sigma^{**} \in \mathcal{JT}^{**}$ με $\sigma^{**} = w^* - \lim\limits_{k\to\infty} \hat{e}_{\sigma|_k}$. Μένει να δειχτεί ότι $\sigma^{**} \notin \hat{\mathcal{JT}}$. Ισχύει ότι $\sigma^{**}(\sigma^*) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma^*(e_{\sigma|_n}) = 1$. Αν υποθέσουμε ότι $\sigma^{**} \in \hat{\mathcal{JT}}$ τότε το σ^{**} είναι w^*-συνεχές και άρα $\sigma^{**}(\sigma^*) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma^{**}(e^*_{\sigma|_n}) = 0$ που είναι άτοπο. Συνεπώς δείξαμε το ζητούμενο. $\square$

3.2 Ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{JT}$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{JT}$. Σε αντίθεση με τον $\mathcal{J}$ όπου το παραπάνω συμπέρασμα είναι άμεσο διότι ο $\mathcal{J}^*$ είναι διαχωρίσιμος, στον $\mathcal{JT}$ χρειάζονται αρκετά περισσότερα επιχειρήματα τα οποία θα μελετήσουμε εκτενώς στην παρούσα παράγραφο.

Έστω $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένα ανά δύο διαστήματα του $2^{<\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{JT}$ έχουμε προφανώς ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n^*(x)^2| \leq ||x||^2$. Επίσης για οποιαδήποτε ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B_{\ell_2}$, σύμφωνα με την ανισότητα Caychy-Schwartz, έχουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n||I_n^*(x)| \leq ||x||$ άρα η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n I_n^*(x)$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in \mathcal{JT}$ και $w^* - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n I_n^* \in B_{\mathcal{JT}^*}$. Θέτουμε

$$K = \left\{ w^* - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n I_n^* : \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B_{\ell_2} \text{ και } \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ξένα ανά δύο διαστήματα} \right\}$$

Προφανώς $K \subseteq B_{\mathcal{JT}^*}$

Πρόταση (3.2.1)

Το K είναι norming set του $\mathcal{JT}$ δηλαδή $||x|| = \sup\{k^*(x) : k^* \in K\} \quad \forall x \in \mathcal{JT}$. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι $||x|| = \sup\{|k^*(x)| : k^* \in K\}$.

Απόδειξη

Έστω $x \in \mathcal{JT}$. Τότε αφού $K \subseteq B_{\mathcal{JT}^*}$ έχουμε ότι $\sup\{k^*(x) : k^* \in K\} \leq ||x||$. Για την αντίθετη φορά θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και θέτουμε $x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)e_i$. Τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο διαστήματα $\{I_i\}_{i=1}^m$ ώστε να είναι $||x_n|| - \frac{1}{n} < (\sum_{i=1}^{m} |I_i^*(x_n)|^2)^{1/2}$. Θέτοντας $\lambda_i = \frac{I_i^*(x_n)}{(\sum_{i=1}^{m} |I_i^*(x_n)|^2)^{1/2}}$ έχουμε ότι $k^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_i^* \in K$ και $k^*(x_n) = (\sum_{i=1}^{m} |I_i^*(x_n)|^2)^{1/2}$ οπότε $||x_n|| - \frac{1}{n} < k^*(x_n) \leq \sup\{k^*(x_n) : k^* \in K\} \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} ||x|| \leq \sup\{k^*(x) : k^* \in K\}$ και άρα προκύπτει το ζητούμενο. Η δεύτερη θεώρηση είναι άμεση. □

Πρόταση (3.2.2)

Το K είναι w^*-συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{JT}^*$

Απόδειξη

Εφόσον ο $\mathcal{JT}$ είναι διαχωρίσιμος, ο (B_{X^*}, w^*) είναι μετρικός χώρος, άρα αρκεί να δείξουμε ότι το K είναι ακολουθιακά συμπαγές. Έστω λοιπόν $k_n^* = w^* - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{i,n} I_{i,n}^*$ ακολουθία στο K. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $|\alpha_{i+1,n}| \leq |\alpha_{i,n}| \quad \forall i \in \mathbb{N}$ διότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει απόλυτα. Αποδεικνύουμε αρχικά έναν ισχυρισμό.

•Ισχυρισμός
Έστω $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία διαστημάτων. Τότε υπάρχει υπακολουθία της $\{I_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ και διάστημα I ώστε $I_{k_n}^* \xrightarrow{w^*} I^*$.
Απόδειξη ισχυρισμού
Με ένα διαγώνιο επιχείρημα βρίσκουμε υπακολουθία $\{I_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε η $\left\{I_{k_n}^*(e_s)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει για κάθε $s \in 2^{<\mathbb{N}}$. Ορίζουμε $I = \left\{s \in 2^{<\mathbb{N}} : \exists n_s \in \mathbb{N} \text{ με } s \in I_{k_n} \quad \forall n \geq n_s\right\}$. Τότε το I είναι διάστημα. Πράγματι έστω $s, t \in I$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s, t \in I_{k_{n_0}}$ επομένως είτε $s \sqsubseteq t$ είτε $t \sqsubseteq s$. Τώρα ας θεωρήσουμε $s, t \in I$ και $w \in 2^{<\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $s \sqsubseteq w \sqsubseteq t$. Από τον ορισμό του I ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s, t \in I_n \quad \forall n \geq n_0$. Επομένως έχουμε ότι $w \in I_n \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow w \in I$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $\lim_{n\to\infty} I_{k_n}^*(s) = I^*(s) \quad \forall s \in 2^{<\mathbb{N}}$ και επειδή $||I_n^*|| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, από το Πόρισμα (1.1.11), έπεται ο ζητούμενος ισχυρισμός.
Συνέχεια απόδειξης

Με ένα διαγώνιο επιχείρημα προσδιορίζουμε $M \in [\mathbb{N}]$, ακολουθία $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in B_{\ell_2}$ ώστε $\alpha_{i,n} \overset{n\in M}{\longrightarrow} \alpha_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ και διαστήματα $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ώστε $I_i = w^* - \lim\limits_{n\in M} I^*_{i,n}$. Τα $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι προφανώς ξένα ανά δύο. Θέτουμε $k^* = w^* - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_i I^*_i \in K$. Θα δείξουμε ότι $k^* = w^* - \lim\limits_{n\in M} k^*_n$. Πράγματι θεωρούμε $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ και $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $(\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^2)^{1/2} < \frac{\epsilon}{4}$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να είναι $\sum\limits_{i=1}^{N} |\alpha_{i,n} I^*_{i,n}(e_s) - \alpha_i I^*_i(e_s)| < \frac{\epsilon}{4}$ και $|\alpha_{N+1,n} - \alpha_{N+1}| < \frac{\epsilon}{4}$. Τότε για κάθε $n \in M$ με $n \geq n_0$ έχουμε

$$|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,n} I^*_{i,n}(e_s) - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i I^*_i(e_s)| \leq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_{i,n} I^*_{i,n}(e_s) - \alpha_i I^*_i(e_s)| + |\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_{i,n} I^*_{i,n}(e_s)| +$$

$$+ |\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i I^*_i(e_s)| < \frac{\epsilon}{4} + (\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^2)^{1/2} (\sum_{i=N+1}^{\infty} |I^*_i(e_s)|^2)^{1/2} + |\alpha_{j,n}| \quad \text{, για κάποιο} \quad j \geq N+1$$

$$< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + |\alpha_{N+1,n}| \leq \frac{\epsilon}{2} + |\alpha_{N+1,n} - \alpha_{N+1}| + |\alpha_{N+1}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

άρα $k^*_n(e_s) \overset{n\in M}{\longrightarrow} k^*(e_s) \quad \forall s \in 2^{<\mathbb{N}}$ επομένως από το Πόρισμα (1.1.11) έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα Θεωρίας Μέτρου. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος προσημασμένου μέτρου και $f \in L^1(|\mu|)$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f ως προς το μ ως $\int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\mu^+ - \int_X f\,d\mu^-$. Είναι άμεσο από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης και τον παραπάνω ορισμό ότι αν θεωρήσουμε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ με $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ έτσι ώστε να υπάρχει $g \in L^1(|\mu|)$ με $|f_n| \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$ σχεδόν παντού στο X τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη μια ειδική μορφή του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει την πλήρη απόδειξη στο [8]. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα προσημασμένο μέτρο Borel μ στον X λέγεται κανονικό αν το $|\mu|$ είναι κανονικό θετικό μέτρο. Με $\mathcal{M}_r(X)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των κανονικών προσημασμένων μέτρων Borel του X.

Θεώρημα (3.2.3) (Αναπαράστασης του Riesz)

Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε για κάθε $f^* \in C^*(X)$ υπάρχει $\mu \in \mathcal{M}_r(X)$ έτσι ώστε $f^*(f) = \int_X f\, d\mu \quad \forall f \in C(X)$.

Παρακάτω με $C(K)$ θα συμβολίζουμε όλες τις πραγματικές w^*-συνεχείς συναρτήσεις του K με την $||\cdot||_\infty$.

Πρόταση (3.2.4)

Έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία του $\mathcal{JT}$. Αν η $\{I^*(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει για κάθε διάστημα I τότε η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι w-Cauchy.

Απόδειξη

Ας είναι $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{||x_n||\}$. Ορίζουμε $T : \mathcal{JT} \to C(K)$ με $T(x) = \hat{x}|_K$. Είναι άμεσο ότι η T είναι καλώς ορισμένη και ισομετρία. Πράγματι, $||T(x)||_\infty = ||\hat{x}|_K||_\infty = \sup\{|\hat{x}(x^*)| : x^* \in K\} = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in K\} = ||x||$ αφού το K είναι norming set του $\mathcal{JT}$. Κατά συνέπεια η $T^* : C^*(K) \to \mathcal{JT}^*$ είναι επί. Επομένως για κάθε $x^* \in \mathcal{JT}^*$ υπάρχει $f^* \in C^*(K)$ ώστε $x^* = f^* \circ T$. Επομένως από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι για κάθε $x^* \in \mathcal{JT}^*$ υπάρχει $\mu_{x^*} \in \mathcal{M}_r(K)$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να είναι $x^*(x_n) = \int_K \hat{x_n}|_K, d\mu_{x^*}$. Επειδή $||\hat{x_n}|_K|| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $|\mu_{x^*}|(K) < \infty$ για κάθε $x^* \in \mathcal{JT}^*$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, αρκεί να δείξουμε ότι η $\{x^*(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει για κάθε $x^* \in K$. Πράγματι έστω $x^* = w^* - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i I_i^* \in K$. Από την υπόθεση θεωρούμε $\alpha_i = \lim_{n\to\infty} I_i^*(x_n)$. Τότε έχουμε ότι $(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2)^{1/2} \leq M$ και $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i \alpha_i| \leq M$, όπως προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwartz. Άρα η $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i$ συγκλίνει απόλυτα. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $(\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i^2)^{1/2} < \frac{\epsilon}{3M}$ και $|\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i| < \frac{\epsilon}{3}$. Θεωρώντας $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε

$n \geq n_0$ να είναι $\sum_{i=1}^{N} |\lambda_i I_i^*(x_n) - \lambda_i \alpha_i| < \frac{\epsilon}{3}$ τότε για $n \geq n_0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |x^*(x_n) - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i| &\leq \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i I_i^*(x_n) - \lambda_i \alpha_i| + |\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i I_i^*(x_n)| + |\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + (\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i^2)^{1/2} (\sum_{i=N+1}^{\infty} |I_i^*(x_n)|^2)^{1/2} + \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

άρα δείχτηκε το ζητούμενο. □

Θα μας χρησιμεύσει επίσης το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα (3.2.5)

Έστω X μη κενό σύνολο και $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε να είναι $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n(x)|\} < \infty \quad \forall x \in X$. Αν για κάθε $\epsilon > 0$ και $M \in [\mathbb{N}]$ υπάρχει $L \in [M]$ με $\limsup_{n \in L} f_n(x) - \liminf_{n \in L} f_n(x) < \epsilon \quad \forall x \in X$ τότε η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ έχει κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη

Με επαγωγή κατασκευάζουμε φθίνουσα ακολουθία $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να είναι $\limsup_{n \in L_k} f_n(x) - \liminf_{n \in L_k} f_n(x) < \frac{1}{k} \quad \forall x \in X$. Θεωρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε $n_k \in L_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το σύνολο $L_\infty = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Προφανώς το L_∞ είναι άπειρο και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι $L_\infty \subseteq L_k$. Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \limsup_{n \in L_\infty} f_n(x) - \liminf_{n \in L_\infty} f_n(x) &\leq \limsup_{n \in L_k} f_n(x) - \liminf_{n \in L_k} f_n(x) < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \overset{k \to \infty}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \limsup_{n \in L_\infty} f_n(x) &= \liminf_{n \in L_\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

άρα η $(f_n)_{n \in L_\infty}$ συγκλίνει κατά σημείο. □

Με όσα έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Θεώρημα (3.2.6)

Ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{JT}$.

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι ο ℓ_1 εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{JT}$ τότε από την Πρόταση (1.4.5) θα υπάρχει block της συνήθους βάσης του $\mathcal{JT}$ ισοδύναμο με τη βάση του ℓ_1. Θα δείξουμε ότι κάθε φραγμένο block έχει w-Cauchy υπακολουθία και άρα ο ℓ_1 αποκλείεται να εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{JT}$. Έστω λοιπόν $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ένα φραγμένο block και ας είναι $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{||u_n||\}$. Δείχνουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε η $\{I^*(u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει για κάθε διάστημα I και το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση (3.2.4) Για πεπερασμένα διαστήματα, με χρήση ενός διαγωνίου επιχειρήματος, προσδιορίζουμε $K \in [\mathbb{N}]$ ώστε η $\{S^*(u_n)\}_{n\in K}$ να συγκλίνει για κάθε πεπερασμένο διάστημα S. Επομένως, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και $M \in [K]$ υπάρχει $L \in [M]$ ώστε $\limsup\limits_{n\in L}\sigma^*(u_n) - \liminf\limits_{n\in L}\sigma^*(u_n) \leq \epsilon$ για κάθε $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ και $M \in [K]$, ώστε για κάθε $L \in [M]$ να υπάρχει $\sigma_L \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\limsup\limits_{n\in L}\sigma_L^*(u_n) - \liminf\limits_{n\in L}\sigma_L^*(u_n) > \epsilon \Rightarrow$ $\limsup\limits_{n\in L}{\sigma_L^*}^2(u_n) + \liminf\limits_{n\in L}{\sigma_L^*}^2(u_n) > \dfrac{\epsilon^2}{2}$ $\quad(*)$ Θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $k\dfrac{\epsilon^2}{4} > M^2$. Έστω $L_0 \in [M]$ και $\sigma_1 \in 2^{\mathbb{N}}$ ώστε να ισχύει η $(*)$. Τότε αναγκαστικά τουλάχιστον ένα από τα $\limsup\limits_{n\in L_0}\sigma_1^{*2}(u_n)$ και $\liminf\limits_{n\in L_0}\sigma_1^{*2}(u_n)$ είναι μεγαλύτερο από $\dfrac{\epsilon^2}{4}$. Επομένως υπάρχει $L_1 \in [L_0]$ ώστε $\lim\limits_{n\in L_1}\sigma_1^{*2}(u_n) > \dfrac{\epsilon^2}{4}$ και $\sigma_2 \in 2^{\mathbb{N}}$ που να ικανοποιεί την $(*)$. Είναι προφανές ότι $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά προσδιορίζουμε $L_k \subseteq L_{k-1} \subseteq, ..., \subseteq L_1 \in \mathbb{N}$ και $\sigma_1, ..., \sigma_k \in 2^{\mathbb{N}}$ διαφορετικά ανά δύο ώστε να ισχύει ότι $\lim\limits_{n\in L_i}\sigma_i^{*2}(u_n) > \dfrac{\epsilon^2}{4}$ για κάθε $i = 1, ..., k$ οπότε $\lim\limits_{n\in L_k}\sigma_i^{*2}(u_n) > \dfrac{\epsilon^2}{4} \quad \forall i = 1, ..., k$. Επομένως υπάρχει $N \in L_k$ ώστε για κάθε $i = 1, ..., k$ να είναι $\sigma_i^{*2}(u_n) > \dfrac{\epsilon^2}{4} \quad \forall n \in L_k : n \geq N$ Εφόσον τα $\sigma_1, ..., \sigma_k$ τελικά διαχωρίζονται αφού είναι διαφορετικά ανά δύο και η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι block τότε υπάρχει $n_0 \in L_k$ με $n_0 \geq N$ ώστε να είναι $||u_{n_0}||^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_i^{*2}(u_{n_0}) > k\dfrac{\epsilon^2}{4} > M^2$ που είναι άτοπο, άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πόρισμα (3.2.7)

Κάθε φραγμένη ακολουθία του $\mathcal{JT}$ έχει $w-$Cauchy υπακολουθία.

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{JT}$ και το ℓ_1-θεώρημα του Rosenthal. $\square$

Παρατήρηση (3.2.8)

Έχουμε δει ότι ο $\mathcal{JT}$ δεν είναι αυτοπαθής και δεν περιέχει ισομορφικά ούτε τον ℓ_1 ούτε τον c_0. Κατά συνέπεια καμία βάση του δεν είναι unconditional.

3.3 Περιγραφή του πρώτου και του δεύτερου συζυγούς

Έχουμε ήδη δει ότι ο $\mathcal{JT}^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μια ακριβέστερη περιγραφή του πρώτου και του δεύτερου συζυγούς χώρου. Θα μας χρησιμεύσει πολύ το ακόλουθο Θεώρημα του R.Haydon το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.(βλ.[3])

Θεώρημα (3.3.1)(R.Haydon)

Έστω X χώρος Banach που δεν περιέχει ισομορφικά τον ℓ_1. Τότε για οποιοδήποτε w^*-συμπαγές υποσύνολο K του X^* ισχύει ότι $\overline{conv}^{w^*}(K) = \overline{conv}^{||\cdot||}(K)$

Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος παίρνουμε άμεσα την περιγραφή του $\mathcal{JT}^*$.

Θεώρημα (3.3.2)

Ισχύει ότι $\mathcal{JT}^* = [I^* : I$ διάστημα του $2^{<\mathbb{N}}] = [I^* : I$ άπειρο διάστημα του $2^{<\mathbb{N}}]$

Απόδειξη

Συμβολίζοντας με K το norming-set του $\mathcal{JT}$ που χρησιμοποιήαμε στην προηγούμενη παράγραφο αρκεί να δειχτεί ότι $B_{\mathcal{JT}^*} = \overline{conv}^{||\cdot||}(K) = \overline{conv}^{w^*}(K)$ όπως προκύπτει από το Θεώρημα Haydon λόγω των αποτελεσμάτων της προηγούμενης παραγράφου. Έχουμε προφανώς ότι $K \subseteq B_{\mathcal{JT}^*} \Rightarrow \overline{conv}^{w^*}(K) \subseteq B_{\mathcal{JT}^*}$ αφού η $B_{\mathcal{JT}^*}$ είναι w^*-συμπαγής. Για την αντίστροφη φορά υποθέτουμε ότι υπάρχει $x^* \in B_{\mathcal{JT}^*} \setminus \overline{conv}^{w^*}(K)$. Τότε από το Τρίτο Διαχωριστικό Θεώρημα στην w^*-τοπολογία υπάρχει $x \in \mathcal{JT}$ με

$$\sup\left\{k^*(x) : k^* \in \overline{conv}^{w^*}(K)\right\} < x^*(x) \Rightarrow \sup\left\{k^*(x) : k^* \in K\right\} < x^*(x) \leq ||x||$$

που είναι άτοπο επειδή το K είναι norming-set του $\mathcal{JT}$. $\square$

Σκοπός μας τώρα είναι να δώσουμε περιγραφή και του δεύτερου συζυγούς. Για το λόγο αυτό ορίζουμε το χώρο
$\ell_2(2^{\mathbb{N}}) = \left\{ f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : \sup \left\{ \sum_{\sigma \in F} |f(\sigma)|^2 : F \subseteq 2^{\mathbb{N}} \text{πεπερασμένο} \right\} < \infty \right\}$. Τότε ότι η απεικόνιση $< f, g >= \sup \left\{ \sum_{\sigma \in F} f(\sigma) g(\sigma) : F \subseteq 2^{\mathbb{N}} \text{ πεπερασμένο} \right\}^{1/2}$ είναι εσωτερικό γινόμενο και ότι ο $\ell_2(2^{\mathbb{N}})$ με την νόρμα που επάγεται είναι χώρος Hilbert. Κατά συνέπεια από το Θεώρημα Riesz για χώρους Hilbert η απεικόνιση $S : \ell_2(2^{\mathbb{N}}) \to \ell_2^*(2^{\mathbb{N}})$ με $S(f)(g) =< f, g > \quad \forall g \in \ell_2(2^{\mathbb{N}})$ είναι γραμμική ισομετρία επί.

Παρατήρηση (3.3.3)

Έστω $f \in \ell_2(2^{\mathbb{N}})$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ και $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε $f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{X}_{\{\sigma_n\}}$

Απόδειξη

Είναι σαφές ότι $suppf = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sigma \in 2^{\mathbb{N}} : |f(\sigma)| > \frac{1}{n} \right\}$. Θα δείξουμε ότι το $suppf$ είναι αριθμήσιμο. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\left\{ \sigma \in 2^{\mathbb{N}} : |f(\sigma)| > \frac{1}{n} \right\}$ είναι πεπερασμένο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι αν υποθέσουμε το αντίθετο τότε για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $\sigma_1, ..., \sigma_k \in 2^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $|f(\sigma_i)| > \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, ..., k$. Επομένως έχουμε ότι $\frac{k}{n^2} < \sum_{i=1}^{k} |f(\sigma_i)|^2 \leq ||f||^2$, που είναι άτοπο γιατί το k επιλέχθηκε αυθέραιτα. Θεωρούμε τώρα $suppf = \{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε έχουμε

$$|| \sum_{i=1}^{k} f(\sigma_i) \mathcal{X}_{\{\sigma_i\}} - f || = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=k+1}^{n} |f(\sigma_i)|^2 \right\} = \sum_{i=k+1}^{\infty} |f(\sigma_i)|^2 \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως $\{f(\sigma_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ και $f = \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n) \mathcal{X}_{\{\sigma_n\}}$ $\square$

Θα χρειαστούμε και το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα (3.3.4)

Έστω (X,d) *μετρικός χώρος και* $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *αύξουσα. Αν* $Y = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m}$ *τότε είναι* $dist(x,Y) = \lim_{m\to\infty} dist(x,Y_m) \quad \forall x \in X.$

Απόδειξη

Έστω $x \in X$. Η ακολουθία $(dist(x,Y_m))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη άρα συγκλίνει. Προφανώς $Y_m \subseteq Y \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow dist(x,Y) \leq \lim_{m\to\infty} dist(x,Y_m)$. Για την αντίστροφη φορά θεωρούμε $y \in Y$. Τότε υπάρχει ακολουθία $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$ με $y_k \xrightarrow{k\to\infty} y$. Κατασκευάζουμε επαγωγικά γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ με $y_k \in Y_{m_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Πράγματι έστω $m_1 \in \mathbb{N}$ με $y_1 \in Y_{m_1}$. Αν θεωρήσουμε $m_2' \in \mathbb{N}$ ώστε $y_2 \in Y_{m_2'}$, θέτουμε $m_2 = \max\{m_1, m_2'\} + 1 > m_1$. Προφανώς $y_2 \in Y_{m_2}$. Επαγωγικά, αν $y_k \in Y_{m_k}$ και θεωρήσουμε $m_{k+1}' \in \mathbb{N}$ ώστε $y_{k+1} \in Y_{m_{k+1}'}$, θέτουμε $m_{k+1} = \max\left\{m_k, m_{k+1}'\right\} + 1$. Είναι προφανές ότι η $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Τότε έχουμε ότι $dist(x,Y_{m_k}) \leq d(x,y_k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} dist(x,Y_m) = \lim_{k\to\infty} dist(x,Y_{m_k}) \leq \lim_{k\to\infty} d(x,y_k) = d(x,y) \Rightarrow \lim_{m\to\infty} dist(x,Y_m) \leq dist(x,Y)$. Συνολικά λοιπόν έχουμε ότι $dist(x,Y) = \lim_{m\to\infty} dist(x,Y_m)$. $\square$

Στα επόμενα θα συμβολίζουμε $Y = [e_s^* : s \in \in^{\mathbb{N}}]$. Γνωρίζουμε ότι ο τελεστής-πηλίκο $Q : \mathcal{JT}^* \to \mathcal{JT}^*/Y$ με $Q(x^*) = x^* + Y$ είναι επί και φραγμένος. Επομένως

$$\begin{aligned} \mathcal{JT}^*/Y &= Q[\mathcal{JT}^*] = Q(\overline{< I^* : I \text{ άπειρο διάστημα} >} \subseteq \overline{Q[< I^* : I \text{ άπειρο διάστημα} >]} \\ &= [I^* + Y : I \text{ άπειρο διάστημα}] \end{aligned}$$

Άρα $\mathcal{JT}^*/Y = [I^* + Y : I \text{ άπειρο διάστημα}]$.

Πρόταση (3.3.5)

Ο $\mathcal{JT}^*/Y$ *είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον* $\ell_2(2^{\mathbb{N}})$.

Απόδειξη

Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο $< I^* + Y : I$ άπειρο διάστημα του $2^{<\mathbb{N}} >$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επίσης αν θεωρήσουμε άπειρα διαστήματα I, S τέτοια ώστε να είναι $I^*+Y=S^*+Y$ τότε θα έχουμε και ότι $\sigma(I)=\sigma(S)$ αφού $I^*-S^*\in Y$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε $U :< I^*+Y : I$ άπειρο διάστημα του $2^{<\mathbb{N}} >\to \ell_2(2^{\mathbb{N}})$ με $U(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*+Y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathcal{X}_{\{\sigma(I_i)\}}$. Η U είναι προφανώς καλώς ορισμένη και γραμμική. Δείχνουμε ότι είναι ισομετρία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε $I_1,...,I_n$ άπειρα διαστήματα και $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=1$. Αρκεί να δείξουμε ότι $||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*+Y||=1$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*(x)| &\leq (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^{n}I_i^{*2}(x))^{1/2}\leq ||x|| \quad \forall x\in\mathcal{JT}\Rightarrow \\ \Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*|| &\leq 1\Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*+Y||\leq 1 \end{aligned}$$

Για την αντίστροφη φορά, ας είναι N το επίπεδο διαχωρισμού των $I_1,...,I_n$. Θέτουμε $Y_m=< e_s^* : |s|\leq m >$. Τότε προκύπτει άμεσα ότι $Y=\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}Y_m}$. Για κάθε $m\geq N$, θέτουμε $x_m=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_{\sigma(I_i)|m+1}$. Προφανώς $||x_m||=1 \quad \forall m\geq N$. Τότε για κάθε $m\geq N$ και $y^*\in Y_m$ έχουμε ότι

$$|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*(x_m)-y^*(x_m)|=|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*(x_m)|=1\Rightarrow 1\leq ||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*-y^*|| \quad \forall y^*\in Y_m\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\leq dist(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*,Y_m) \quad \forall m\geq N\Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*+Y||=dist(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*,Y)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}dist(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I_i^*,Y_m)\geq 1 \quad \text{όπως προκύπτει από το Λήμμα (3.3.4)}$$

Κατά συνέπεια η U είναι ισομετρία και επεκτείνεται σε ισομετρία ορισμένη στον $\mathcal{JT}^*/Y$ την οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας θα συμβολίζουμε και πάλι με U. Μένει να δείξουμε ότι είναι και επί. Πράγματι έστω $f=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\mathcal{X}_{\{\sigma_n\}}=\lim_{k\to\infty}U(\sum_{n=1}^{k}\lambda_n\sigma_n^*+Y)$. Επομένως έχουμε ότι $f\in\overline{U[\mathcal{JT}^*/Y]}$. Επειδή όμως ο $\mathcal{JT}^*/Y$ είναι χώρος Banach, τότε και ο $U[\mathcal{JT}^*/Y]$ είναι χώρος Banach αφού είναι ισομετρικοί. Άρα ο $U[\mathcal{JT}^*/Y]$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\ell_2(2^{\mathbb{N}})$ οπότε $f\in U[\mathcal{JT}^*/Y]$. Συνεπώς η U είναι επί. $\square$

Βλέπουμε άμεσα μια θεμελιώδη διαφορά σε σχέση με τον $\mathcal{J}$.

Πόρισμα (3.3.6)

Ο $\mathcal{JT}$ δεν είναι quasi-reflexive δηλαδή ο $\mathcal{JT}^{**}/\hat{\mathcal{JT}}$ είναι απειροδιάστατος.

Απόδειξη

Αφού η βάση του $\mathcal{JT}$ είναι boundedly complete τότε από την Πρόταση (1.5.10) είναι $dim(\mathcal{JT}^{**}/\hat{\mathcal{JT}}) = dim((\mathcal{JT}^{*}/Y)^{*}) = dim(\ell_2^{*}(2^{\mathbb{N}})) = dim(\ell_2(2^{\mathbb{N}})) = +\infty$ □

Θεώρημα (3.3.7)

Έχουμε την περιγραφή $\mathcal{JT}^{**} = \hat{\mathcal{JT}} \oplus [\sigma^{**} : \sigma \in 2^{\mathbb{N}}]$. Ειδικότερα, έχουμε ότι κάθε $x^{**} \in \mathcal{JT}^{**}$ γράφεται στη μορφή $x^{**} = \hat{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sigma_n^{**}$ όπου $x \in \mathcal{JT}$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ και $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς, από την Πρόταση (3.1.11), έχουμε ότι $\hat{\mathcal{JT}} \cap [\sigma^{**} : \sigma \in 2^{\mathbb{N}}] = \{0\}$. Επειδή η βάση του $\mathcal{JT}$ είναι boundedly complete τότε σύμφωνα με την Πρόταση (1.5.10) αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $y^* \in Y^{\perp}$ γράφεται στη μορφή $y^* = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sigma_n^{**}$ όπου $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ και $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Πράγματι θεωρούμε τις επί ισομετρίες T και U που ορίστηκαν στις Προτάσεις (1.5.9) και (3.4.5) καθώς και την επί ισομετρία S που ταυτίζει τον $\ell_2(2^{\mathbb{N}})$ με τον συζυγή του. Αν θέσουμε $L = TU^*S : \ell_2(2^{\mathbb{N}}) \to Y^{\perp}$ τότε η L είναι κι αυτή επί ισομετρία. Αφού η L είναι επί και φραγμένη αρκεί να δείξουμε ότι $L(\mathcal{X}_{\{\sigma\}}) = \sigma^{**}$ για κάθε $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$. Έστω λοιπόν $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ και I άπειρο διάστημα του $2^{<\mathbb{N}}$. Τότε είναι

$$\begin{aligned} L(\mathcal{X}_{\{\sigma\}})(I^*) = TU^*S(\mathcal{X}_{\{\sigma\}})(I^*) &= S(\mathcal{X}_{\{\sigma\}})(U(I^* + Y)) = U(I^* + Y)(\sigma) = \\ &= \mathcal{X}_{\{\sigma(I)\}}(\sigma) = \sigma^{**}(I^*) \Rightarrow L(\mathcal{X}_{\{\sigma\}}) = \sigma^{**} \end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται άμεσα διότι $\mathcal{JT}^* = [I^* : I \text{ άπειρο διάστημα}]$. □

Έστω X χώρος Banach ώστε ο X^* να μην είναι διαχωρίσιμος. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα Goldstine ότι ο $\hat{X}$ είναι w^*-πυκνός στον X^{**}. Δεν μπορούμε όμως να συμπεράνουμε από αυτό ότι ο $\hat{X}$ είναι w^*-ακολουθιακά πυκνός στον X^{**} καθώς ο X^* δεν είναι διαχωρίσιμος και άρα η w^*-τοπολογία του X^{**} δεν είναι μετρικοποιήσιμη. Έχει δειχτεί όμως, από τους H.Rosenthal και E.Odell (βλ. [6]), ότι εάν ο X δεν περιέχει ισομορφικό αντίφραφο του ℓ_1, τότε η ιδιότητα αυτή ισχύει. Εδώ θα αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή στην περίπτωση του $\mathcal{JT}$, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα των Rosenthal-Odell.

Θεώρημα (3.3.8)

Ο $\hat{\mathcal{JT}}$ είναι w^*-ακολουθιακά πυκνός στον $\mathcal{JT}^{**}$ δηλαδή για κάθε $x^{**} \in \mathcal{JT}^{**}$ υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{JT}$ ώστε $x^{**} = w^* - \lim\limits_{n\to\infty} \hat{x_n}$.

Απόδειξη

Έστω $x^{**} = \hat{x} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sigma_j^{**}$. Θέτουμε $x_1 = x$. Για $n > 1$ θεωρούμε k_n το επίπεδο διαχωρισμού των $\sigma_1, ..., \sigma_n$. Θέτουμε $x_n = x + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_{\sigma_j|k_n}$. Η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι προφανώς φραγμένη αφού $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$. Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση (1.1.10) αρκεί να δείξουμε ότι $I^*(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sigma_j^{**}(I^*)$ για κάθε άπειρο διάστημα I. Πράγματι, έστω άπειρο διάστημα I. Αν υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma(I) = \sigma_i$ τότε για $n \geq n_0$ έχουμε ότι $I^*(x_n) = \lambda_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sigma_n^{**}(I^*)$. Αλλιώς ισχύει $I^*(x_n) = 0 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sigma_j^{**}(I^*) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς προκύπτει ότι για κάθε άπειρο διάστημα I ισχύει ότι $I^*(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sigma_j^{**}(I^*)$ και άρα δείξαμε το ζητούμενο. $\square$

3.4 Ο $\mathcal{JT}$ είναι ℓ_2-saturated

Σε αυτή την παράγραφο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ο $\mathcal{JT}$ είναι ℓ_2-saturated, δηλαδή ότι κάθε απειροδιάστατος υπόχωρος του περιέχει ισομορφικά τον ℓ_2. Η προσέγγισή μας βασίζεται στο [1].

Αρχικά παραθέτουμε ένα συνδυαστικό αποτέλεσμα το οποίο είναι σημαντικό για την προσέγγιση αυτή. Συνδυαστικά επιχειρήματα χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά στη θεωρία χώρων Banach. Από εδώ και στο εξής, αν M είναι ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, θα συμβολίζουμε $M^{(2)} = \{(n,m) : n, m \in M, n < m\}$ και με $[M]$ τα άπειρα υποσύνολα του M.

Θεώρημα (3.4.1) (H.Ramsey)

Έστω $A_1, ..., A_k \subseteq \mathbb{N}$ με $\mathbb{N}^{(2)} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]$ και $i \in \{1, ..., k\}$ ώστε $M^{(2)} \subseteq A_i$.

Απόδειξη

Για $L \in [\mathbb{N}]$ και $n \in \mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε $\{n\}_L^{(2)} = \{n, m) : m \in L, n < m\}$. Έστω $M_1 = \mathbb{N}$ και $m_1 \in M_1$. Τότε υπάρχει $M_2 \in [M_1]$ και $i_1 \in \{1, ..., k\}$ ώστε $\{m_1\}_{M_2}^{(2)} \subseteq A_{i_1}$. Θεωρούμε $m_2 \in M_2$ με $m_2 > m_1$. Τότε υπάρχει $M_3 \in [M_2]$ και $i_2 \in \{1, ..., k\}$ με $\{m_2\}_{M_3}^{(2)} \subseteq A_{i_2}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, προσδιορίζουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, φθίνουσα ακολουθία $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]$ και ακολουθία $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{1, ..., k\}$ με $m_p \in M_n \quad \forall p \geq n$ και $\{m_n\}_{M_{n+1}}^{(2)} \subseteq A_{i_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι λοιπόν άμεσο ότι $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{k} \left\{n \in \mathbb{N} : \{m_n\}_{M_{n+1}}^{(2)} \subseteq A_i\right\}$. Επομένως υπάρχει $i \in \{1, ..., k\}$ ώστε το σύνολο $L = \left\{n \in \mathbb{N} : \{m_n\}_{M_{n+1}}^{(2)} \subseteq A_i\right\}$ να είναι άπειρο. Ας ορίσουμε το σύνολο $M = \{m_n : n \in L\} \in [\mathbb{N}]$. Τότε για $m_n, m_p \in M$ με $m_n < m_p$ έχουμε ότι $n < p$. Οπότε $m_p \in M_{n+1}$ και άρα $(m_n, m_p) \in A_i$. Επομένως $M^{(2)} \subseteq A_i$ και άρα δείχτηκε το ζητούμενο. $\square$

Χάρις το θεώρημα Ramsey μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο θα μας βοηθήσει στην απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος.

Λήμμα (3.4.2)

Έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια block και φραγμένη ακολουθία στον $\mathcal{JT}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} I^*(x_n) = 0$ για κάθε άπειρο διάστημα I. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει υπακολουθία της $\{x_n\}_{n\in M}$ ώστε για κάθε πεπερασμένο διάστημα S, με $in(S) = \emptyset$, να είναι $|S^*(x_n)| \leq \epsilon$ για κάθε $n \in M$, εκτός από το πολύ ένα $n(S) \in M$, το οποίο εξαρτάται από την επιλογή του διαστήματος S.

Απόδειξη

Έστω $\epsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι $K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{||x_n||\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε $\alpha_n = \min\{supp(x_n)\}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$Q_n = \left\{t \in 2^{<\mathbb{N}} : |t| = \alpha_n \text{ και } |S_t^*(x_n)| > \epsilon \text{ για κάποιο πεπερασμένο διάστημα } S_t \text{ με } in(S) = t\right\}$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\epsilon^2 |Q_n| < \sum_{t \in Q_n} |S_t^*(x_n)|^2 \leq ||x_n||^2 \leq K^2 \Rightarrow |Q_n| \leq \frac{K^2}{\epsilon^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως υπάρχει $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $L \in [\mathbb{N}]$ ώστε $|Q_n| = \alpha \quad \forall n \in L$. Αν $\alpha = 0$ το ζητούμενο προφανώς ισχύει για την $(x_n)_{n \in L}$, αφού $Q_n = \emptyset \quad \forall n \in L$. Θεωρούμε επομένως $\alpha \geq 1$. Για $n \in L$ ας είναι $Q_n = \{t_{i,n} : 1 \leq i \leq \alpha\}$. Επίσης για $i, j \in \{1, ..., \alpha\}$ ορίζουμε

$A_{i,j} = \{n, m \in L : n < m$ και υπάρχει διάστημα S με άκρα το $t_{i,n}$ και το $t_{j,m}$, ώστε $|S^*(x_n)| > \epsilon\}$

Ας είναι επίσης $A = \mathbb{N}^{(2)} \setminus \bigcup_{1 \leq i,j \leq \alpha} A_{i,j}$. Προφανώς $\mathbb{N}^{(2)} = A \cup \bigcup_{1 \leq i,j \leq \alpha} A_{i,j}$. Συνεπώς, από το θεώρημα Ramsey υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]$ ώστε $M^{(2)} \subseteq A$ ή $M^{(2)} \subseteq A_{i,j}$ για κάποια $i, j \in \{1, ..., \alpha\}$. Προς απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $i, j \in \{1, ..., \alpha\}$ ώστε $M^{(2)} \subseteq A_{i,j}$. Τότε για $n, k \in M$ με $n+1 < k$, έχουμε ότι $(n, k), (n+1, k) \in M^{(2)}$. Δείχνουμε ότι υπάρχει διάστημα με άκρα τα $t_{i,n}$ και $t_{i,n+1}$. Πράγματι, υπάρχει διάστημα S_1 με αρχή το $t_{i,n}$ και διάστημα S_2 με αρχή το $t_{i,n+1}$ που τελειώνουν και τα δύο στο $t_{j,k}$, τέτοια ώστε $|S_1^*(x_n)| > \epsilon$ και $|S_2^*(x_{n+1})| > \epsilon$. Συνεπώς, προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των διαστημάτων ότι $t_{i,n+1} \in S_1$. Ορίζουμε το διάστημα $S_{n,n+1}$ με αρχή το $t_{i,n}$ και τέλος το $t_{i,n+1}$. Τότε $|S_{n,n+1}^*(x_n)| = |S_1^*(x_n)| > \epsilon$. Θέτουμε $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,n+1}$. Είναι άμεσο ότι το I είναι άπειρο διάστημα και ότι $|I^*(x_n)| = |S_{n,n+1}^*(x_n)| > \epsilon \quad \forall n \in M$, που είναι άτοπο διότι $\lim_{n \to \infty} I^*(x_n) = 0$. Συνεπώς $M^{(2)} \subseteq A$.
Δείχνουμε τέλος ότι η $(x_n)_{n \in M}$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Πράγματι, έστω ένα διάστημα S με $in(S) = \emptyset$ και $n, m \in M$ με $n < m$ ώστε $|S^*(x_n)| > \epsilon$ και $|S^*(x_m)| > \epsilon$. Τότε αν θεωρήσουμε το $t_1 \in S$ με $|t_1| = \alpha_n$ και το $t_2 \in S$ με $|t_2| = \alpha_m$ προκύπτει, από τον ορισμό των Q_n και Q_m, ότι υπάρχουν $i, j \in \{1, ..., \alpha\}$ ώστε $t_1 = t_{i,n}$ και $t_2 = t_{j,m}$. Άρα $(n, m) \in A_{i,j}$, που είναι άτοπο αφού $A \cap \bigcup_{1 \leq i,j \leq \alpha} A_{i,j} = \emptyset$. □

Κάθε block ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{JT}$, ώστε για δεδομένο $\epsilon > 0$, να υπάρχει κάποιο $M \in [\mathbb{N}]$ τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο διάστημα S με $in(S) = \emptyset$ να έχουμε $|S^*(x_n)| \leq \epsilon \quad \forall n \in M$ εκτός από το πολύ ένα $n(S)$, θα καλείται $\epsilon-$διαχωρισμένη.

Λήμμα (3.4.3)

Έστω μοναδιαίο block $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{JT}$ με $\lim_{n \to \infty} I^*(x_n) = 0$ για κάθε άπειρο διάστημα I. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει υπακολουθία της $\{y_n'\}_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *να είναι*

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2)^{1/2} \leq || \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i' || \leq 2(1+\epsilon)(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2)^{1/2}$$

Απόδειξη

Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε μηδενική ακολουθία $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Από το προηγούμενο Λήμμα, θεωρούμε φθίνουσα ακολουθία $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]$ ώστε η ακολουθία $\{y_n\}_{n\in M_k}$ να είναι ϵ_k-διαχωρισμένη για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και πεπερασμένο διάστημα S με $in(S) = \emptyset$, έχουμε ότι $|S(y_n)| \leq \epsilon_k \quad \forall n \in M_k$ εκτός από το πολύ ένα $n(S) \in M_k$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $\alpha_n = \min\{supp(x_n)\}$ και $m_n = 2^{\alpha_n}$. Προσδιορίζουμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε να είναι

$$p_n \in M_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\sum_{l=n+1}^{\infty} \epsilon_{k_l}^2) < \epsilon^2$$

Θέτουμε $k_1 = 1$ και θεωρούμε $p_1 \in M_{k_1}$. Εφόσον $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ υπάρχει $L_1 \in [\mathbb{N}]$ ώστε

$$\sum_{r\in L_1} \epsilon_r^2 < \frac{\epsilon^2}{2m_1}$$

Θεωρούμε $k_2 \in L_1$ με $k_2 \in L_1$ και $p_2 \in M_{k_2}$ με $p_2 > p_1$. Εφόσον $\epsilon_n \overset{n\in L_1}{\longrightarrow} 0$ υπάρχει $L_2 \in [L_1]$ ώστε να είναι

$$\sum_{r\in L_2} \epsilon_r^2 < \frac{\epsilon^2}{2^2 m_2}$$

Θεωρούμε $k_3 \in L_2$ με $k_3 > k_2$ και $p_3 \in M_{k_3}$ με $p_3 > p_2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά ορίζουμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, έτσι ώστε $p_n \in M_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, και φθίνουσα ακολουθία $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\mathbb{N}]$ με $k_n \in L_n$ και $\sum_{r\in L_n} \epsilon_r^2 < \frac{\epsilon^2}{2^n m_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $k_l \in L_n \quad \forall l \geq n+1$ οπότε

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} \epsilon_{k_l}^2 \leq \sum_{r\in L_n} \epsilon_r^2 < \frac{\epsilon^2}{2^n m_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\sum_{l=n+1}^{\infty} \epsilon_{k_l}^2) < \epsilon^2$$

Επομένως οι $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $y_n' = y_{p_n}, b_n = \alpha_{p_n}, \delta_n = \epsilon_{k_n}$.
Τότε η $\{y_n'\}_{n\geq k}$ είναι δ_k-διαχωρισμένη για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Πράγματι, για $k \in \mathbb{N}$, έχουμε

$p_n \in M_k \quad \forall n \geq k$. Άρα η $\{y'_n\}_{n\geq k}$ είναι υπακολουθία της $\{y_n\}_{n\in M_k}$ και επομένως είναι δ_k-διαχωρισμένη. Επίσης ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n (\sum_{l=n+1}^{\infty} \delta_l^2) < \epsilon^2$$

Για ένα πεπερασμένο διάστημα S, θέτουμε $i(S) = \min\{n \in \mathbb{N} : |in(S)| \leq b_n\}$. To S καλείται κανονικό αν $|in(S)| = b_{i(S)}$. Έστω τώρα κανονικό διάστημα S. Ορίζουμε το σύνολο $A(S) = \{n \in \mathbb{N} : |S(y'_n)| > \delta_n\}$. Αν $A(S) \neq \emptyset$, θέτουμε $\lambda(S) = minA(S)$. Διαφορετικά, θέτουμε $\lambda(S) = +\infty$. Δείχνουμε ότι

$$\sum_{n\neq\lambda(S)} |S^*(y'_n)|^2 \leq \sum_{n\geq i(S)} \delta_n^2$$

Θεωρούμε $A(S) = \{n_1 < n_2 < ... < n_j < n_{j+1} < ...\}$. Είναι φανερό πως ισχύει ότι $\lambda(S) = n_1$ και $i(S) \leq n_1$. Επειδή για κάθε $j \in \mathbb{N}$ η $(y'_n)_{n\geq n_j}$ είναι $\delta_{n_j}-$διαχωρισμένη και $|S^*(y'_{n_j})| > \delta_{n_j}$ έχουμε ότι $|S^*(y'_{n_{j+1}}| \leq \delta_{n_j}$. Επομένως είναι

$$\begin{aligned}
\sum_{n\neq\lambda(S)} |S^*(y'_n)|^2 &= \sum_{n\geq i(S):n\neq n_1} |S^*(y'_n)|^2 = \sum_{j=2}^{\infty} |S^*(y'_{n_j})|^2 + \sum_{n\geq i(S):n\notin A(S)} |S^*(y'_n)|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{n_j}^2 + \sum_{n\geq i(S):n\notin A(S)} \delta_n^2 = \sum_{n\geq i(S)} \delta_n^2
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 1$. Με αντίστοιχο επιχείρημα με αυτό της Παρατήρησης (2.4.1) μπορούμε να δούμε ότι $1 \leq ||\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y'_i||$. Για την άλλη φορά, έστω $\mathcal{U}$ μια πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο διαστημάτων. Για $S \in \mathcal{U}$, είναι $S = S_0 \cup S'$, όπου

$$\begin{aligned}
S_0 &= \left\{t \in S : |t| < b_{i(S)}\right\} \\
S' &= \left\{t \in S : b_{i(S)} \leq |t|\right\}
\end{aligned}$$

Προφανώς ένα από τα δύο παραπάνω σύνολα μπορεί να είναι και κενό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι κανένα από αυτά, αλλά και από τα σύνολα που θα ορίσουμε παρακάτω, δεν είναι κενό. Συνεπώς τα S_0, S' είναι διαστήματα και μάλιστα το S' είναι κανονικό. Είναι $S' = S1 \cup S''$ όπου

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left\{t \in S : b_{i(S)} \leq |t| < b_{i(S)+1}\right\} \\
S'' &= \left\{t \in S : b_{i(S)+1} \leq |t|\right\}
\end{aligned}$$

Το $S^{''}$ είναι κανονικό διάστημα και $S^{''} = S_1^{''} \cup S_2^{''} \cup S_3^{''}$ όπου

$$\begin{aligned}
S_1^{''} &= \Big\{t \in S : b_{i(S)+1} \leq |t| < b_{\lambda(S^{''})}\Big\} \\
S_2^{''} &= \Big\{t \in S : b_{\lambda(S^{''})} \leq |t| < b_{\lambda(S^{''})+1}\Big\} \\
S_3^{''} &= \Big\{t \in S : b_{\lambda(S^{''})+1} \leq |t|\Big\}
\end{aligned}$$

Να σημειωθεί πως στην περίπτωση που $\lambda(S^{''}) = +\infty$ θα συμβολίζουμε $b_{\lambda(S^{''})} = +\infty$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι $S = S_0 \cup S_1 \cup S_1^{''} \cup S_2^{''} \cup S_3^{''}$. Επόμενως αν θέσουμε $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i'$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{U}} |S^*(x)|^2 &= \sum_{S \in \mathcal{U}} |S_0^*(x) + S_1^*(x) + S_1^{''*}(x) + S_2^{''*}(x) + S_3^{''*}(x)|^2 \\
&\leq 4 \sum_{S \in \mathcal{U}} (|S_0^*(x)|^2 + |S_1^*(x)|^2 + |S_2^{''*}(x)|^2)) + 4 \sum_{S \in \mathcal{U}} |S_1^{''*}(x) + S_3^{''*}(x)|^2
\end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε με R οποιοδήποτε από τα $S_0, S_1, S_2^{''}$, βλέπουμε ότι $R(x) = \lambda_i R(y_i')$ για το πολύ ένα $i \in \{1, ..., n\}$. Συνεπώς $|R(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |R(y_i')|^2$. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{U}} (|S_0^*(x)|^2 + |S_1^*(x)|^2 + |S_2^{''*}(x)|^2)) &= \sum_{S \in \mathcal{U}} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 (|S_0^*(y_i')|^2 + |S_1^*(y_i')|^2 + |S_2^{''*}(y_i')|^2)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 (\sum_{S \in \mathcal{U}} (|S_0^*(y_i')|^2 + |S_1^*(y_i')|^2 + |S_2^{''*}(y_i')|^2)) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 ||y_i'|| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 1
\end{aligned}$$

Επίσης για κάθε $S \in \mathcal{U}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|S_1^{''*}(x) + S_3^{''*}(x)|^2 &= |\sum_{i=1, i \neq \lambda(S^{''})}^{n} \lambda_i S^{''*}(y_i')|^2 \leq (\sum_{i=1, i \neq \lambda(S^{''})}^{n} \lambda_i^2)(\sum_{i=1, i \neq \lambda(S^{''})}^{n} |S^{''*}(y_i')|^2) \\
&\leq \sum_{n \neq \lambda(S')} |S^{''*}(y_n')|^2 \leq \sum_{n \geq i(S^{''})} \delta_n^2
\end{aligned}$$

Για $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathcal{U}_k = \{S \in \mathcal{U} : i(S) = k\}$. Τότε για $S \in \mathcal{U}_k$ είναι $i(S^{''}) = k + 1$

οπότε

$$\sum_{S\in\mathcal{U}} |S_1''^*(x)+S_3''^*(x)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{S\in\mathcal{U}_k} |S_1''^*(x)+S_3''^*(x)|$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{S\in\mathcal{U}_k}\sum_{n\geq i(S'')}\delta_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{S\in\mathcal{U}_k}\sum_{n\geq k+1)}\delta_n^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k(\sum_{n=k+1}^{\infty}\delta_n^2) < \epsilon^2$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις, για κάθε οικογένεια $\mathcal{U}$ πεπερασμένων και ξένων ανά δύο διαστημάτων έχουμε

$$\sum_{S\in\mathcal{U}} |S^*(x)|^2 < 4+4\epsilon^2 < 4(1+\epsilon)^2 \Rightarrow ||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i'|| \leq 2(1+\epsilon)$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$1 \leq ||\sum_{i=1}^{n}\lambda y_i'|| \leq 2(1+\epsilon)$$

Άρα δείξαμε το ζητούμενο. □

Αποδεικνύουμε τώρα το κεντρικό μας αποτέλεσμα.

Θεώρημα (3.4.4)

Ο $\mathcal{JT}$ είναι ℓ_2-saturated. Ειδικότερα για κάθε απειροδιάστατο υπόχωρο Y υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον Y έτσι ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχει υπακολουθία της $\{x_n''\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ να είναι

$$(1-\epsilon)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2)^{1/2} \leq ||\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i''|| \leq (2+3\epsilon)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2)^{1/2}$$

Απόδειξη

Έστω Y απειροδιάστατος υπόχωρος του $\mathcal{JT}$. Αφου ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $\mathcal{JT}$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση (1.3.7), μπορούμε να βρούμε ασθενώς μηδενική και μοναδιαία ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον Y. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε με ένα sliding hump argument βρίσκουμε υπακολουθία της $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ και μοναδιαία block ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n' - y_n||^2 < \epsilon^2 \quad (*)$$

Προφανώς $I^*(x'_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και από την $(*)$ προκύπτει άμεσα ότι $||x'_n - y_n|| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Άρα για κάθε άπειρο διάστημα I είναι

$$\begin{aligned} |I^*(y_n)| &\leq |I^*(x_n)| + ||I^*||||x'_n - y_n|| \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} I^*(y_n) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Λήμμα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει υπακολουθία της $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ να είναι

$$(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2} \leq ||\sum_{i=1}^n \lambda_i y'_i|| \leq 2(1+\epsilon)(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2}$$

Συμβολίζουμε με $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ την αντίστοιχη υπακολουθία της $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} ||\sum_{i=1}^n \lambda_i x''_i|| &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|||x''_i - y'_i|| + ||\sum_{i=1}^n \lambda_i y'_i|| \\ &\leq (\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^n ||x''_i - y'_i||^2)^{1/2} + 2(1+\epsilon)(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2} \\ &\leq (2+3\epsilon)(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} ||\sum_{i=1}^n \lambda_i y'_i|| - \sum_{i=1}^n |\lambda_i|||x''_i - y'_i|| &\leq ||\sum_{i=1}^n \lambda_i x''_i|| \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2} - (\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^n ||x''_i - y'_i||^2)^{1/2} &\leq ||\sum_{i=1}^n \lambda_i x''_i|| \Rightarrow \\ \Rightarrow (1-\epsilon)(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2} &\leq ||\sum_{i=1}^n \lambda_i x''_i|| \end{aligned}$$

Συνολικά έχουμε

$$(1-\epsilon)(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2} \leq ||\sum_{i=1}^n \lambda_i x''_i|| \leq (2+3\epsilon)(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2)^{1/2}$$

και επομένως έπεται το ζητούμενο από τη Παρατήρηση (1.3.3). $\square$

Βιβλιογραφία

[1] I.Amemiya, *T.Ito, Weakly null sequences in James spaces on trees*, Kodai Mathematical Journal 4, 3, 418–425, 1981.

[2] P.Enflo, *A counterexapmle to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math, 130, 309-317, 1973.

[3] R. Haydon, *Some more characterizations of Banach spaces containing* l_1, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 80, 269-276, 1976.

[4] R.C. James, *A non-reflexive space isometric with its second conjugate space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 174-177, 1951

[5] R.C. James, *A separable somewhat reflexive Banach space with non-separable dual*, Bull. Amer. Math. Soc., 80, 738-743, 1974.

[6] J. Lindenstrauss and C. Stegall, *Examples of separable spaces which do not contain* ℓ_1 *and whose duals are non separable*, Studia Math., 54, 81-105, 1975.

[7] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I and II*, Springer, 1996.

[8] W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.