ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διδακτορική διατριβή

ΒΕΛΤΙΣΤΟΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ ΜΕ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Κατερίνα Περικλέους

Αθήνα 2014

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΕΛΤΙΣΤΟΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ ΜΕ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Διδακτορική διατριβή
Κατερίνα Περικλέους
Αθήνα 2014

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Ι. Βόντα, Επ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π. (Μέλος της τριμελούς επιτροπής)

Χ. Ευαγγελάρας, Επ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Α. Καραγρηγορίου, Αν. Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου

Χ. Καρώνη - Ρίτσαρντσον, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π. (Μέλος της τριμελούς επιτροπής)

Χ. Κουκουβίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων καθηγητής)

Μ. Κούτρας, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Ι. Σπηλιώτης, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν σε ένα στοχαστικό μοντέλο. Ιδιαίτερα οι βέλτιστοι πειραματικοί σχεδιασμοί δίνουν «καλύτερες» εκτιμήσεις των παραμέτρων. Υπάρχουν διάφορες επιλογές κριτηρίων βελτιστοποίησης στην αντιμετώπιση του προβλήματος, επίσης υπάρχουν μοντέλα γραμμικά και μη γραμμικά καθώς και μοντέλα με ή χωρίς εξάρτηση.

Η διατριβή ασχολείται με γραμμικά μοντέλα, για την εκτίμηση ενός υποσυνόλου των παραμέτρων. Η εκτίμηση γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στην περίπτωση αυτή η πληροφορία που μας ενδιαφέρει περιέχεται στον πίνακα διασποράς, $\sigma^2\mathbf{V}$, των εκτιμημένων παραμέτρων ή ισοδύναμα στον πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}=\mathbf{V}^{-1}$. Σκοπός της διδακτορικής έρευνας είναι να επεκταθούν τα μέχρι τώρα αποτελέσματα σε περιπτώσεις που δεν έχουν ερευνηθεί. Ως εργαλείο μελέτης χρησιμοποιείται η έννοια της κυριαρχίας (majorization). Εξετάζονται οι καθολικά βέλτιστοι σχεδιασμοί, αν υπάρχουν, αλλιώς χρησιμοποιούνται φ-βέλτιστοι σχεδιασμοί. Αν ούτε και αυτό είναι εφικτό, τότε γίνεται βελτιστοποίηση ως προς ορισμένα κριτήρια. Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα κριτήρια βελτιστοποίησης είναι A, D, E, MV. Η διατριβή αυτή αποτελείται από πέντε κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής δίνονται κάποιες βασικές έννοιες. Παραθέτονται τα κριτήρια βελτιστοποίησης, δίνονται οι ορισμοί των καθολικά βέλτιστων, των φ-βέλτιστων και των A-, D- E-, MV- και G-βέλτιστων σχεδιασμών. Δίνεται επίσης μια σύντομη περιγραφή της έννοιας της κυριαρχίας και ορίζονται οι πίνακες σχεδιασμού και πληροφορίας. Η έννοια της κυριαρχίας χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί αν ένας σχεδιασμός είναι φ-βέλτιστος. Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με σχεδιασμούς γραμμής, όπου οι πειραματικές μονάδες τοποθετούνται στη σειρά στο χώρο ή στο χρόνο. Μελετούνται οι περιπτώσεις που οι παρατηρήσεις είτε είναι ανεξάρτητες, ή είναι εξαρτημένες και η εξάρτηση ακολουθεί μια πρώτης τάξης αυτοπαλινδρόμηση, AR(1), με παράμετρο α. Στο σημείο αυτό εξετάζονται σχεδιασμοί με δύο αγωγές και καθορίζονται οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για τις διάφορες τιμές του α, όταν το πλήθος των πειραματικών μονάδων είναι άρτιο ή περιττό. Για να μειωθούν οι υπό εξέταση σχεδιασμοί ακολουθούμε μια διαδικασία φιλτραρίσματος. Στο τρίτο και στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζονται σχεδιασμοί γραμμής με τρεις αγωγές και εξάρτηση AR(1). Οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για τις περιπτώσεις που οι αγωγές είναι τρεις εξαρτώνται από τις τιμές που παίρνει η παράμετρος α του αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου. Ανάλογα με την τιμή που παίρνει το α γίνεται διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος. Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται η περίπτωση που η παράμετρος α είναι θετική, δηλαδή το α παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1), το οποίο είναι και πιο απαιτητικό πρόβλημα, ενώ στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζεται πλήρως η περίπτωση που η παράμετρος παίρνει αρνητικές τιμές στο (-1,0). Τέλος, το πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο πραγματεύεται τους 3^k κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς με στόχο την εύρεση βέλτιστων σχεδιασμών για την εκτίμηση των τυποποιημένων γραμμικών και τετραγωνικών αντιθέσεων για την περίπτωση που οι αγωγές έχουν τρία επίπεδα και πλήθος πειραματικών μονάδων $N \equiv 0 \bmod 3$.

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

OPTIMAL EXPERIMENTAL DESIGNS WITH AND WITHOUT DEPENDENCE

The experimental designs are used to estimate the parameters of interest in a stochastic model. Particularly the optimal designs give “best” estimates of these parameters. There are several optimization criteria to solve the problem, there are also linear and nonlinear models, with or without dependence of the observations

The thesis deals with linear models, to estimate some parameters of interest. For the estimation the method of least squares is applied. In this case the information of interest is contained in the covariance matrix, $\sigma^2\mathbf{V}$, of the estimated parameters or equivalently the information matrix $\mathbf{Q}=\mathbf{V}^{-1}$. The purpose of this thesis is to find optimal designs for some cases that have not been investigated. As a study tool the concept of majorization is utilized. This thesis is composed of five chapters.

The first chapter presents some basic concepts. The definitions of universal and φ optimality are given. The most commonly used optimization criteria are A, D, E, G,MV which are also defined. A brief description of the concept of majorization is presented and of information functions and information matrices.. The concept of majorization is used to determine whether a design is φ-optimal, which implies E,A,D optimality but not necessarily MV or G optimality.

The second chapter deals with designs in which the experimental units are placed in a line. The observations are either independent or dependent and the dependence follows a first-order Autoregression, AR (1), with parameter α. In this chapter designs are studied with two treatments and the optimal designs are determined for various values of a, when the number of experimental units is even or odd. To reduce the number of the competing designs for optimality a filtering process is followed.

In the third and fourth chapter row designs with three treatments and AR (1) dependence are studied The third chapter examines the case where the parameter α is positive, that is, α takes values in the interval (0,1), which is a more demanding problem. In the fourth chapter a detailed examination is given where the parameter α of the autoregressive model takes on negative values in the interval (-1.0).

Finally, the fifth and last chapter deals with 3^k fractional factorial designs with a view to finding optimal designs for the estimation of standardized linear and quadratic contrasts when treatments have three levels and the number of experimental units is $N \equiv 0 \bmod 3$. It is proved that the optimal designs are Balanced and Partially balance arrays which are defined and algorithms are developed for the construction of these arrays.

Περιεχόμενα

Πρόλογος - Ευχαριστίες

Αναμφίβολα η Στατιστική στις μέρες μας έχει καταφέρει να πετύχει πολλά και αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για πολλές περιοχές επιστημονικής έρευνας. Η σωστή προσέγγιση των αποτελεσμάτων μιας έρευνας - ενός πειράματος έχει πλέον σπουδαία σημασία για τους επιστήμονες πάρα πολλών ειδικοτήτων και έτσι αντιλαμβάνεται κανείς γιατί το ενδιαφέρον για την Στατιστική αυξήθηκε σε πολλές επιστημονικές περιοχές τα τελευταία χρόνια. Οι διάφορες μεθοδολογίες για να φτάσει κανείς στο αποτέλεσμα αλλά φυσικά και τα ίδια τα συμπεράσματα έχουν απασχολήσει πολλές επιστημονικές εργασίες και συγγράμματα αφού στόχος είναι η συνεχής βελτίωση και πρόοδος καθώς και η απλοποίηση των διαδικασιών.

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί είναι ένα από τα βασικά θέματα σε κάθε πρόγραμμα στατιστικής. Αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο στον τομέα της βιομηχανίας, της εφαρμοσμένης μηχανικής, της ιατρικής, της γεωργικής παραγωγής καθώς και σε διάφορους άλλους τομείς των επιστημών. Η εφαρμογή πειραματικών σχεδιασμών στην βιομηχανία μπορεί να φέρει αποτελέσματα για σαφώς βελτιωμένη παραγωγή, επιτάχυνση των διαδικασιών και φυσικά μείωση του κόστους. Όσον αφορά την ιατρική γίνεται αντιληπτό ότι τα πειράματα και οι έρευνες είναι αναπόσπαστο και απαραίτητο κομμάτι αφού στόχος είναι η συνεχής βελτίωση των μεθόδων θεραπείας με την σκέψη πάντα στον ασθενή.

Έτσι λοιπόν και η παρούσα διατριβή με θέμα «Βέλτιστοι πειραματικοί σχεδιασμοί με ή χωρίς εξαρτημένες παρατηρήσεις» ευελπιστεί να βάλει το δικό της λιθαράκι στην πρόοδο και την εξέλιξη του συγκεκριμένου τομέα.

Θα ήθελα στο σημείο αυτό να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χρήστο Κουκουβίνο, Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για την επιστημονική και όχι μόνο καθοδήγησή του, τις υποδείξεις και παρατηρήσεις του και την ουσιαστική συνεισφορά του για την ολοκλήρωση της διατριβής μου. Οι συμβουλές του και οι κατευθυντήριες γραμμές που μου έδινε με οδήγησαν με ασφάλεια στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ευχαριστώ επίσης την κα. Ίλια Βόντα Επίκουρη Καθηγήτρια του Ε.Μ.Π. και μέλος της τριμελούς μου επιτροπής για τις χρήσιμες υποδείξεις και συμβουλές της καθώς και για την άψογη συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών. Ευχαριστίες και στην την κ. Χρυσιής Καρώνη, Καθηγήτρια του Ε.Μ.Π. για το όλο ενδιαφέρον της.

Θερμές ευχαριστίες και προς τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής για τις χρήσιμες υποδείξεις τους.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον κ. Στρατή Κουνιά Ομότιμο Καθηγητή του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών για το χρόνο που αφιέρωσε, την υπομονή και τις υποδείξεις του, τόσο στο μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης όσο και στη διδακτορική μου διατριβή.

Η διατριβή αυτή εκπονήθηκε με χρηματοδότηση από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας Ε.Μ.Π. (ΕΛΚΕ) τον οποίο ευχαριστώ θερμά. Η οικονομική στήριξη που μου παρείχαν με βοήθησε τα μέγιστα στο να ολοκληρώσω τις διδακτορικές μου σπουδές.

Οφείλω κλείνοντας ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου για την στήριξη και την έμπρακτη συμπαράσταση και βοήθεια τους όλο αυτό το διάστημα των διδακτορικών μου σπουδών.

Αθήνα 2014 Κατερίνα Περικλέους

Εισαγωγή

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν σε ένα στοχαστικό μοντέλο. Ένα κλασικό βιβλίο στο θέμα των πειραματικών σχεδιασμών είναι των W.G. Cochran and G.M. Cox, (1957).

Ιδιαίτερα οι βέλτιστοι πειραματικοί σχεδιασμοί δίνουν «καλύτερες» εκτιμήσεις των παραμέτρων. Υπάρχουν διάφορες επιλογές κριτηρίων βελτιστοποίησης στην αντιμετώπιση του προβλήματος, επίσης υπάρχουν μοντέλα γραμμικά και μη γραμμικά καθώς και μοντέλα με ή χωρίς εξάρτηση.

Στη διατριβή θα ασχοληθούμε με γραμμικά μοντέλα, στα οποία μας ενδιαφέρει μέρος των παραμέτρων και η εκτίμηση γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Στην περίπτωση αυτή η πληροφορία που μας ενδιαφέρει περιέχεται στον πίνακα διασποράς, $\sigma^2\mathbf{V}$, των εκτιμημένων παραμέτρων ή ισοδύναμα στον πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1}$.

Στους σχεδιασμούς γραμμής (row designs) υπάρχουν v αγωγές και n πειραματικές μονάδες (μονάδες) τοποθετημένες στη σειρά. Στους σχεδιασμούς γραμμής-στήλης (row-column designs) οι μονάδες είναι τοποθετημένες σε p γραμμές και q στήλες και σε κάθε μονάδα εφαρμόζεται μια από τις v αγωγές.

Η έννοια του καθολικά βέλτιστου σχεδιασμού δόθηκε από τον Kiefer (1975a), ο οποίος γενίκευσε την ιδέα του ισορροπημένου κατά ομάδες σχεδιασμού (Balanced Block Design, BBD) και έδειξε πότε οι γενικευμένοι σχεδιασμοί Youden (GYD) είναι καθολικά βέλτιστοι. Επίσης ασχολήθηκε με την κατασκευή τους (Kiefer, 1975b) και γενίκευσε τις εργασίες των Agrawal (1966), Hartley and Smith (1948).

Ακολούθησε πλήθος εργασιών στο θέμα αυτό, που δίνουν βέλτιστους σχεδιασμούς των παραμέτρων ή βέλτιστους σχεδιασμούς στη σύγκριση των αγωγών με ένα ή περισσότερους μάρτυρες.

Μια επισκόπηση των αποτελεσμάτων σε ομοιογενείς και ανομοιογενείς πληθυσμούς έχει δοθεί από τους Hedayat, Jacroux και Majundar (1988), ενώ η σύγκριση μερικών αγωγών με ένα μάρτυρα εξετάστηκε πρώτα από τους Bechhofer και Tamhane (1981). Ακολούθησε πλήθος εργασιών, όπως αυτή των Hedayat and Majumbar (1985) κ.ά.

Βέλτιστοι σχεδιασμοί σε μοντέλα εξαρτημένων παρατηρήσεων μελετήθηκαν από τους Martin (1986), Martin και Eccleston (1993), Morgan και Uddin (2003) κ.ά.

Η βιβλιογραφία για την εύρεση και την κατασκευή καθολικά βέλτιστων σχεδιασμών ή βέλτιστων σχεδιασμών ως προς ορισμένα κριτήρια είναι αρκετά εκτενής. Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση των δύο αγωγών, με ανεξάρτητες παρατηρήσεις και με άρτιο πλήθος μονάδων. Αντίθετα, η βιβλιογραφία για τις περιπτώσεις τριών και περισσοτέρων αγωγών, είναι περιορισμένη. Αυτό συμβαίνει διότι όταν το πλήθος των αγωγών είναι $v \geq 3$ αυξάνει το πλήθος των προς σύγκριση σχεδιασμών.

Ο Kiefer (1975a) εισήγαγε μια νέα προσέγγιση προκειμένου να γενικεύσει τα αποτελέσματα που ήταν γνωστά μέχρι τότε. Μια βελτιωμένη θεμελίωση, στο ίδιο θέμα, σύμφωνα με τα νεώτερα αποτελέσματα, δίνεται στο βιβλίο του Pukelsheim (1993).

Ένας από τους κύριους στόχους του Kiefer (1975) ήταν να αποδείξει τα παραπάνω αποτελέσματα χρησιμοποιώντας εργαλεία όπως η κυρτότητα, η συνάρτηση πληροφορίας και άλλα.

Πολλοί μελετητές που ασχολούνται με προβλήματα βέλτιστων σχεδιασμών χρησιμοποιούν το πιο πάνω μοντέλο με εξαρτημένες παρατηρήσεις, όπως οι Chauhan (2000), Chauhan and Martin (2001), Kunert (1988), Martin (1986), Martin and Eccleston (1993), Morgan and Uddin (1991), Uddin (1997), Uddin and Morgan (1991).

Παρόλο που το θέμα έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές, δεν έχει εξαντληθεί. Η περιοχή αυτή της έρευνας δεν είναι καθόλου πλήρης λόγω της δυσκολίας των υπολογισμών για σχεδιασμούς που δεν είναι συμμετρικοί. Βέλτιστοι σχεδιασμοί έχουν βρεθεί μόνο για ορισμένες περιπτώσεις. Σε κάθε περίπτωση είναι σημαντικό να αναζητηθούν και να αναπτυχθούν γενικότερα αποτελέσματα.

Σκοπός λοιπόν της εν λόγω διδακτορικής έρευνας είναι να επεκταθούν τα μέχρι τώρα αποτελέσματα σε περιπτώσεις που δεν έχουν ερευνηθεί. Θα μας απασχολήσουν οι καθολικά βέλτιστοι σχεδιασμοί, αν υπάρχουν, αλλιώς θα χρησιμοποιήσουμε φ-βέλτιστους σχεδιασμούς. Ως εργαλείο μελέτης χρησιμοποιούμε την έννοια της κυριαρχίας (majorization). Αν ούτε και αυτό είναι εφικτό, τότε γίνεται προσπάθεια για να αποδειχθεί βελτιστοποίηση ως προς ορισμένα κριτήρια. Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα κριτήρια βελτιστοποίησης είναι A, D, E, MV.

Η διατριβή αυτή αποτελείται από πέντε κεφάλαια.

Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο της διατριβής παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες. Παραθέτονται τα κριτήρια βελτιστοποίησης, δίνονται οι ορισμοί των καθολικά βέλτιστων, των φ-βέλτιστων και των A-, D- E-, MV- και G-βέλτιστων σχεδιασμών. Δίνεται επίσης μια σύντομη περιγραφή της έννοιας της κυριαρχίας και ορίζονται οι πίνακες σχεδιασμού και πληροφορίας. Η έννοια της κυριαρχίας χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί αν ένας σχεδιασμός είναι φ-βέλτιστος.

Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με σχεδιασμούς γραμμής. Μελετούνται οι περιπτώσεις που οι παρατηρήσεις είτε είναι ανεξάρτητες, ή είναι εξαρτημένες και η εξάρτηση ακολουθεί μια πρώτης τάξης αυτοπαλινδρόμηση, AR(1), με παράμετρο α. Στο σημείο αυτό εξετάζονται σχεδιασμοί με δύο αγωγές και καθορίζονται οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για τις διάφορες τιμές του α, όταν το πλήθος των πειραματικών μονάδων είναι άρτιο ή περιττό. Για να μειώσουμε τους υπό εξέταση σχεδιασμούς ακολουθούμε μια διαδικασία φιλτραρίσματος.

Στο τρίτο και στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζονται σχεδιασμοί γραμμής με τρεις αγωγές και εξάρτηση AR(1). Οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για τις περιπτώσεις που έχουμε τρεις αγωγές εξαρτώνται από τις τιμές που παίρνει η παράμετρος α του αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου. Ανάλογα με την τιμή που παίρνει το α γίνεται διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος. Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται η περίπτωση που η παράμετρος α είναι θετική, δηλαδή το α παίρνει τιμές στο διάστημα (0,1), το οποίο είναι και πιο απαιτητικό πρόβλημα, ενώ στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζεται πλήρως η περίπτωση που η παράμετρος παίρνει αρνητικές τιμές στο (-1,0).

Τέλος, το πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο πραγματεύεται τους 3^k Βέλτιστους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς με απώτερο στόχο την εύρεση βέλτιστων σχεδιασμών για την εκτίμηση των τυποποιημένων γραμμικών και τετραγωνικών αντιθέσεων για την περίπτωση που οι αγωγές έχουν τρία επίπεδα και $N \equiv 0 \bmod 3$ πειραματικές μονάδες.

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί είναι μια σημαντική περιοχή της Στατιστικής, ένα απαραίτητο εργαλείο για τους ασχολούμενους με τη θεωρία και την εφαρμογή της στατιστικής.

Πριν την εκτέλεση του πειράματος είναι προαπαιτούμενος ο σχεδιασμός του, ώστε να πάρουμε αξιόπιστες και ικανοποιητικές απαντήσεις στα ερωτήματα που μας ενδιαφέρουν. Οι πειραματικοί σχεδιασμοί βοηθούν στην καλύτερη εκτίμηση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν σε ένα στοχαστικό μοντέλο. Οι βέλτιστοι πειραματικοί σχεδιασμοί παρουσίασαν σημαντική ανάπτυξη μετά το 1960 με πλήθος δημοσιεύσεων.

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορα κριτήρια βελτιστοποίησης γα την αντιμετώπιση ενός προβλήματος. Επιπλέον υπάρχουν μοντέλα γραμμικά και μη γραμμικά καθώς και μοντέλα με ή χωρίς σταθερούς συντελεστές.

Η διατριβή ασχολείται με γραμμικά μοντέλα, στα οποία μας ενδιαφέρει μέρος των παραμέτρων και η εκτίμηση γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες στη συνέχεια της διατριβής. Στην πρώτη ενότητα δίνεται το γραμμικό μοντέλο, ενώ στη δεύτερη δίνονται βασικοί ορισμοί βελτιστοποίησης. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζεται η έννοια της κυριαρχίας κυρίως στα διανύσματα και στην τέταρτη και τελευταία ενότητα δίνεται η έννοια της κυριαρχίας σε ότι αφορά τους πίνακες.

1.1 Το γραμμικό μοντέλο

Στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε μόνο μερικές από τις παραμέτρους ενός γραμμικού μοντέλου χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, που μας δίνει την εκτίμηση και τον πίνακα διασποράς των παραμέτρων αυτών.

Θεωρούμε το γραμμικό μοντέλο,

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{y}: n\times 1,\ \mathbf{X}: n\times p,\ \boldsymbol{\theta}: p\times 1,\ \mathrm{var}(\mathbf{y}) = \sigma^2\mathbf{I}_n,\ \ n \geq p\,.$$

Αν ο πίνακας $\mathbf{X}$ είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή $\mathrm{rank}\mathbf{X}=\mathrm{p}$, τότε $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ με πίνακα διασποράς $\mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ και εκτιμήσιμες είναι όλες οι γραμμικές συναρτήσεις των παραμέτρων. Αν $\mathrm{rank}\mathbf{X} < \mathrm{p}$, τότε $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$, $V(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sigma^2 H(\mathbf{X})$ και εκτιμήσιμες είναι οι γραμμικές συναρτήσεις των παραμέτρων της μορφής $\mathbf{c}'\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)'$, για κάθε $n\times 1$ διάνυσμα **c**, όπου $H(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'$. Όταν δίνεται ο πίνακας $\mathbf{X}$ οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων είναι αμερόληπτες και έχουν την ελάχιστη διασπορά μεταξύ των γραμμικών συναρτήσεων των παρατηρήσεων (BLUE).

Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει μέρος των παραμέτρων, οι υπόλοιπες παράμετροι θεωρούνται οχληρές (nuisance parameters), τότε:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2),\ \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_1\\ \boldsymbol{\theta}_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\theta}_1: s\times 1,\ \mathbf{X}_1: n\times s,\ \boldsymbol{\theta}_2: (p-s)\times 1,\ \mathbf{X}_2: n\times(p-s) \qquad (1.1.1)$$

όπου $\boldsymbol{\theta}_1$ είναι το διάνυσμα των επιδράσεων των s παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν και $\mathbf{X}_1$ είναι ο $n\times s$ πίνακας που αντιστοιχεί σ' αυτές τις παραμέτρους, ενώ $\boldsymbol{\theta}_2$ είναι το διάνυσμα των οχληρών παραμέτρων με αντίστοιχο πίνακα $\mathbf{X}_2$.

Ορισμός 1.1.1 Ο $n\times p$ πίνακας $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)$ λέγεται πίνακας σχεδιασμού και ο $p\times p$ πίνακας $\mathbf{C}=\mathbf{X}'\mathbf{X}$ λέγεται πίνακας πληροφορίας των παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}$.

Πρόταση 1.1.1 Ο πίνακας διασποράς των s εκτιμημένων παραμέτρων $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ στο (1.1.1) είναι:

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)=\sigma^2\mathbf{Q}^{-1},\ \mathbf{Q}=\mathbf{X}_1'(\mathbf{I}_n-H(\mathbf{X}_2))\mathbf{X}_1, \tag{1.1.2}$$

όταν $\mathrm{rank}\mathbf{Q}=s$, όπου $H(\mathbf{X}_2)=\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^-\mathbf{X}_2'$ είναι ο πίνακας ορθής προβολής στο γραμμικό χώρο των στηλών του $\mathbf{X}_2$.

Απόδειξη. (α) Αν $\mathbf{a}'\mathbf{y},\ \mathbf{a}=(a_1,...,a_n)$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\mathbf{c}'\boldsymbol{\theta}_1,\ \mathbf{c}=(c_1,...,c_s)$, τότε $E(\mathbf{a}'\mathbf{y})=\mathbf{a}'\mathbf{X}_1\boldsymbol{\theta}_1+\mathbf{a}'\mathbf{X}_2\boldsymbol{\theta}_2=\mathbf{c}'\boldsymbol{\theta}_1$ για κάθε $\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2$, τότε $\mathbf{a}'\mathbf{X}_1=\mathbf{c}',\ \mathbf{a}'\mathbf{X}_2=\mathbf{0}$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\mathbf{c}'$ είναι στο γραμμικό χώρο των γραμμών του $\mathbf{X}_1$, οπότε $\mathbf{c}'=\mathbf{a}'\mathbf{X}_1$ και το διάνυσμα $\mathbf{a}$ είναι ορθογώνιο στις στήλες του $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{a}'\mathbf{X}_2=\mathbf{0}$, οπότε $\mathbf{c}'=\mathbf{d}'\mathbf{Q},\ \mathbf{d}=(d_1,...,d_s)'$.

(β) Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων δίνει $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{X}'\mathbf{y}$ ή

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 &= \mathbf{X}_1'\mathbf{y},\\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 &= \mathbf{X}_2'\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τη δεύτερη με $\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^-$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 &= \mathbf{X}_1'\mathbf{y}\\ \mathbf{X}_1'\mathbf{H}(\mathbf{X}_2)\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 &= \mathbf{X}_1'\mathbf{H}(\mathbf{X}_2)\mathbf{y}\end{aligned}$$

Όπου $\mathbf{H}(\mathbf{X}_2)=\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^-\mathbf{X}_2'$ είναι ο πίνακας ορθής προβολής στο χώρο των στηλών του $\mathbf{X}_2$, τότε $\mathbf{H}(\mathbf{X}_2)\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2$ και παίρνουμε:

$$\mathbf{Q}\hat{\boldsymbol{\theta}}_1=\mathbf{X}_1'(\mathbf{I}_n-\mathbf{H}(\mathbf{X}_2)\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\theta}}_1=\mathbf{X}_1'(\mathbf{I}_n-\mathbf{H}(\mathbf{X}_2))\mathbf{y}$$

Από την οποία παίρνουμε τον πίνακα διασποράς,

$$\mathrm{var}(\mathbf{Q}\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)=\sigma^2\mathbf{Q}$$

(γ) Αν ο $s \times s$ πίνακας Q έχει βαθμό s, είναι αντιστρέψιμος και

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}}) = \sigma^2 \mathbf{Q}^{\mathbf{-1}}$$

και όλες οι γραμμικές συναρτήσεις $\mathbf{c}'\boldsymbol{\theta}_1$ είναι εκτιμήσιμες.

Αν $\mathrm{rank}(\mathbf{Q}) < s$ εκτιμήσιμες είναι, από το μέρος (α), οι παράμετροι $\mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}_1$ με $\mathrm{var}(\mathbf{Q}\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = \sigma^2 \mathbf{Q}$.

Ο $\mathbf{Q}$ είναι πίνακας πληροφορίας για τις παραμέτρους $\boldsymbol{\theta}_1$ που μας ενδιαφέρουν.

1.2 Βέλτιστοι σχεδιασμοί

Ορισμός 1.2.1 Αν $\mathbf{C}$ συμμετρικός πίνακας, η συνάρτηση g(**C**), που έχει πεδίο ορισμού τους συμμετρικούς πίνακες και πεδίο τιμών τους πραγματικούς αριθμούς, είναι,

κυρτή αν: $g(a\mathbf{C}_1 + (1-a)\mathbf{C}_2) \le ag(\mathbf{C}_1) + (1-a)g(\mathbf{C}_2),\ 0 \le a \le 1,$

κοίλη αν: $g(a\mathbf{C}_1 + (1-a)\mathbf{C}_2) \ge ag(\mathbf{C}_1) + (1-a)g(\mathbf{C}_2),\ 0 \le a \le 1.$

Ορισμός 1.2.2 Αν μας δίνονται v αγωγές και n πειραματικές μονάδες, κάθε επιμερισμός πειραματικών μονάδων στις v αγωγές λέγεται πειραματικός σχεδιασμός.

Επομένως με τον πειραματικό σχεδιασμό ορίζεται ο πίνακας σχεδιασμού **X**, ώστε να πάρουμε τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν. Αν θέλουμε να εκτιμήσουμε μια παράμετρο, μας ενδιαφέρει ο σχεδιασμός d που δίνει την αμερόληπτη εκτιμήτρια με την ελάχιστη διασπορά.

Αν έχουμε δύο αγωγές, με επιδράσεις A, B και μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε τη διαφορά $A-B$, ο σχεδιασμός d* που μας δίνει την αμερόληπτη εκτιμήτρια με την ελάχιστη διασπορά, $\mathrm{var}(\hat{A}-\hat{B})$, είναι ο βέλτιστος σχεδιασμός.

Παράδειγμα 1.2.1 Στο απλό γραμμικό μοντέλο $y_i = a + bx_i + e_i,\ \ i = 1,\ldots,n,$ με $c_1 \le x_i \le c_2$ και παρατηρήσεις ασυσχέτιστες με σταθερή διασπορά, μας ενδιαφέρει να επιλέξουμε τα σημεία $x_1,\ldots,x_n$ ώστε η εκτιμήτρια της παραμέτρου b να έχει την ελάχιστη διασπορά. Η απάντηση είναι ότι τα μισά ή σχεδόν τα μισά σημεία θα είναι σε κάθε άκρο. Το πρόβλημα γίνεται πιο δύσκολο αν το μοντέλο είναι με δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες ή ερμηνευτικές μεταβλητές, που υπόκεινται σε περιορισμούς και μας ενδιαφέρει η εκτίμηση δύο ή περισσότερων παραμέτρων.

Ορισμός 1.2.3 Όταν έχουμε να εκτιμήσουμε δύο ή περισσότερες παραμέτρους, D είναι το σύνολο των σχεδιασμών και ο σχεδιασμός d* μας δίνει έναν πίνακα διασποράς $\mathbf{V_{d*}} : \mathbf{V_{d*}} \le \mathbf{V_d}$ για κάθε άλλο σχεδιασμό $d \in D$, τότε ο σχεδιασμός d* λέγεται Lowener βέλτιστος.

Εδώ $\mathbf{V_{d*}} \le \mathbf{V_d}$ σημαίνει ότι ο πίνακας $\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_{d*} \ge \mathbf{0}$ είναι μη αρνητικά ορισμένος. Αυτό όμως συμβαίνει σε ελάχιστες περιπτώσεις, γι΄ αυτό καταφεύγουμε σε σχεδιασμούς και θέτουμε ως κριτήριο την ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης $g(\mathbf{V})$ του πίνακα διασποράς ή τη μεγιστοποίηση μιας συνάρτησης $g(\mathbf{C})$ του πίνακα πληροφορίας.

Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα κριτήρια βέλτιστων σχεδιασμών είναι:

(i) **A-βέλτιστος:** Όταν ελαχιστοποιείται το άθροισμα των διασπορών των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν, και μπορεί να εκφραστεί ως $\min_d(trace\,\mathbf{V})$ or $\max_d(trace\,\mathbf{C}^{-1})^{-1}$.

(ii) **D-βέλτιστος:** Όταν ελαχιστοποιείται η ορίζουσα του πίνακα διασποράς ή ισοδύναμα όταν μεγιστοποιείται η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας, δηλαδή $\min_d(\det \mathbf{V})$ ή $\max_d(\det \mathbf{C})$.

(iii) **MV-βέλτιστος:** Όταν ελαχιστοποιείται η μέγιστη διασπορά των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν που εκφράζεται μαθηματικά ως $\min_d \max_i(v_{ii}),\ \ \mathbf{V} = (v_{ij})$.

(iv) **Ε-βέλτιστος:** Όταν ελαχιστοποιείται η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα διασποράς των παραμέτρων ή μεγιστοποιείται η ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα πληροφορίας αυτών των παραμέτρων, δηλαδή $\min_d \max_i \lambda_i(\mathbf{V})$ ή $\max_d \min_i \lambda_i(\mathbf{Q})$.

(v) **G-βέλτιστος:** Σε ένα γραμμικό μοντέλο η απόκριση $y(x)$, για όλα τα x, λέγεται αποκριτική επιφάνεια. Ο σχεδιασμός d που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη διασπορά ως προς x, της $y(x)$, λέγεται G-βέλτιστος. Αν $E(y_i) = f'(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\theta},\ \ f(\mathbf{x}_i) = (f_1(\mathbf{x}_i),\dots, f_p(\mathbf{x}_i))',\ i = 1,\dots,n$ είναι το γραμμικό μοντέλο, τότε η διασπορά του $\operatorname{var}(f'(x_i)\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sigma^2 f'(x_i)\mathbf{V}f(x_i)$ στα σημεία $\mathbf{x}_i$, $i = 1,\dots,n$, που παίρνουμε τις παρατηρήσεις, τότε για τον G-βέλτιστο σχεδιασμό ισχύει $\min_d \max_i f'(\mathbf{x}_i)\mathbf{V}f(\mathbf{x}_i)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι είναι κυρτή συνάρτηση του πίνακα πληροφορίας **C**:

(i) $g(\mathbf{C}) = trace(\mathbf{C}^{-1})$. Προκύπτει από τη σχέση:

$$a\mathbf{A}^{-1} + (1-a)\mathbf{B}^{-1} \geq (a\mathbf{A} + (1-a)\mathbf{B})^{-1}, 0 \leq a \leq 1, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in PD(p) \qquad (*)$$

(ii) -log(det(**C**)). Προκύπτει από τη σχέση:

$$\det(a\mathbf{A} + (1-a)\mathbf{B}) \geq (\det \mathbf{A})^a (\det \mathbf{B})^{1-a},\ 0 \leq a \leq 1, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in PD(p) \qquad (**)$$

(iii) $\max(v_{ii}) = \max(c^{ii}),\ \mathbf{C}^{-1} = (c^{ij})$ προκύπτει από την (*).

(iv) $\lambda_{\max}(\mathbf{C}^{-1}) = \max_{c'c=1}(\mathbf{c}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{c}),\ \ \operatorname{var}_{c'c=1}(\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{c}'\mathbf{V}\mathbf{c} = \sigma^2 \mathbf{c}'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{c}$ προκύπτει από την (*).

Η συνάρτηση $\max_i f'(\mathbf{x}_i)\mathbf{V}f(\mathbf{x}_i)$ δεν είναι κυρτή ή κοίλη.

Η στατιστική σημασία των κριτηρίων (i), (iii), (v) είναι προφανής, το κριτήριο (ii) δίνει 100(1-α)% περιοχή εμπιστοσύνης με τον ελάχιστο όγκο ή εμβαδόν στις δύο διαστάσεις, διότι ο όγκος της περιοχής εμπιστοσύνης είναι συνάρτηση του $\sqrt{\det(\mathbf{V})}$. Το κριτήριο (iv) ελαχιστοποιεί τη μέγιστη διασπορά των γραμμικών συναρτήσεων $\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\theta}}$ για όλα τα σημεία $\mathbf{c}$ που είναι στην επιφάνεια μιας σφαίρας.

Ένα κριτήριο που εισήγαγε ο Kiefer (1975) είναι ο σχεδιασμός που είναι καθολικά βέλτιστος (universally optimal) και αναφέρεται σε κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις.

Αυτό σημαίνει ότι αν ένας σχεδιασμός d* είναι καθολικά βέλτιστος θα είναι A-, D-, MV-, E-βέλτιστος. Καθολικά βέλτιστοι σχεδιασμοί υπάρχουν μόνο σε μερικά προβλήματα. Όταν δεν υπάρχουν καταφεύγουμε στους φ βέλτιστους σχεδιασμούς στους οποίους μεγιστοποιείται η g(C), όπου g(.) κυρτή και C ο πίνακας πληροφορίας. Αν δεν υπάρχει φ-βέλτιστος βρίσκουμε τους A-, D-, MV-, E-βέλτιστους σχεδιασμούς. Βέβαια όταν δεν υπάρχει καθολικά βέλτιστος σχεδιασμός μπορεί να μην δίνουν τον ίδιο βέλτιστο σχεδιασμό τα κριτήρια που αναφέρθηκαν.

1.3 Η έννοια της κυριαρχίας

Μια πολύ σημαντική έννοια για την απόδειξη κάποιων βασικών αποτελεσμάτων για τον καθορισμό βέλτιστων σχεδιασμών είναι η έννοια της κυριαρχίας (majorization) την οποία θα εξετάσουμε πιο κάτω.

Όταν θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα κυρτών ή κοίλων συναρτήσεων αντίστοιχα είναι χρήσιμη η έννοια της «κυριαρχίας».

Ορισμός 1.3.1 Το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)'$ κυριαρχείται από το διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)'$ και γράφουμε,

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \tag{1.3.1}$$

όταν $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$, όπου $\mathbf{S}$ είναι πίνακας διπλά στοχαστικός, δηλαδή έχει στοιχεία μη αρνητικά που το άθροισμα κάθε γραμμής και στήλης είναι ίσο με 1.

Ορισμός 1.3.2 Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbf{S}$ είναι διπλά στοχαστικός αν $\mathbf{S} = (s_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ με $0 \le s_{ij} \le 1$ και το άθροισμα κάθε γραμμής και στήλης είναι ίσο με 1 ή $\mathbf{S} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}' \cdot \mathbf{S} = \mathbf{1}'$.

Επίσης, $\mathbf{1}' \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{1}'$ και $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$, διότι $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{I}_n$, τότε:

$$(\alpha)\ \mathbf{1}' \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{1}' \cdot \mathbf{I} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}' \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{1}',$$
$$(\beta)\ \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Όμως, ο πίνακας $\mathbf{S}^{-1} = (s_{ij}^*)_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots n}}$ δεν έχει στοιχεία τέτοια ώστε $0 \le s_{i,j}^* \le 1$.

Για παράδειγμα, αν

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}, \quad 0 \le a \le 1 \ \Rightarrow \ \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{1-2a} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$$ που δεν έχει όλα τα στοιχεία του θετικά.

Η κυριαρχία συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ βρίσκεται μέσα στον κυρτό χώρο που παράγεται από τις $k!$ μεταθέσεις του διανύσματος $\mathbf{y}$.

Πρόταση 1.3.1 Αν $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ είναι $k \times 1$ διανύσματα και $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, τότε το $\mathbf{x}$ βρίσκεται στον κυρτό χώρο που παράγεται από όλες τις μεταθέσεις του $\mathbf{y}$.

Απόδειξη. (ι) $k = 2$: Έστω $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, οι μεταθέσεις του $\mathbf{y}$ είναι δύο: $\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$. Ο κυρτός χώρος που παράγεται από τα σημεία $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ είναι αυτά που ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{z} = a\mathbf{z}_1 + (1-a)\mathbf{z}_2$, για κάθε $0 \le \alpha \le 1$.

Τότε $\mathbf{z} = a\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + (1-a)\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ay_1 + (1-a)y_2 \\ ay_2 + (1-a)y_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Ο κυρτός χώρος είναι το τμήμα $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2$, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $z_1 = (y_1, y_2)$ και $z_2 = (y_2, y_1)$.

(ιι) $k=3$: Έστω $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)'$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)'$, τότε οι μεταθέσεις του $\mathbf{y}$ είναι έξι: $\mathbf{z}_1=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_2=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_3=\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_4=\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_5=\begin{bmatrix} y_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_6=\begin{bmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

Ο κυρτός συνδυασμός δίνει

$\mathbf{z}=a_1\mathbf{z}_1+a_2\mathbf{z}_2+a_3\mathbf{z}_3+a_4\mathbf{z}_4+a_5\mathbf{z}_5+a_6\mathbf{z}_6,\ a_i\geq 0,\ a_1+\ldots+a_6=1$

$$\Rightarrow \mathbf{z}=\begin{bmatrix} a_1\mathbf{y}_1+a_2\mathbf{y}_1+a_3\mathbf{y}_2+a_4\mathbf{y}_2+a_5\mathbf{y}_3+a_6\mathbf{y}_3 \\ a_1\mathbf{y}_2+a_2\mathbf{y}_3+a_3\mathbf{y}_1+a_4\mathbf{y}_3+a_5\mathbf{y}_1+a_6\mathbf{y}_2 \\ a_1\mathbf{y}_3+a_2\mathbf{y}_2+a_3\mathbf{y}_3+a_4\mathbf{y}_1+a_5\mathbf{y}_2+a_6\mathbf{y}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & a_3+a_4 & a_5+a_6 \\ a_3+a_5 & a_1+a_6 & a_2+a_4 \\ a_4+a_6 & a_2+a_5 & a_1+a_3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\mathbf{S}\mathbf{y}.$$

Αν $y_1=y_2=y_3=y$, ο κυρτός χώρος είναι ένα σημείο $\mathbf{y}=(y,y,y)$.

Αν $y_2=y_3=y\neq y_1 \Rightarrow \mathbf{z}_1=\mathbf{z}_2=\begin{bmatrix} y_1 \\ y \\ y \end{bmatrix}$, ο κυρτός χώρος είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $\mathbf{z}_1=\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3=\mathbf{z}_5$, $\mathbf{z}_4=\mathbf{z}_6$.

Αν $y_1<y_2<y_3$, τότε θα πάρουμε ένα πολύεδρο με 6 κορυφές, $\binom{6}{2}=15$ ακμές και $\binom{6}{3}=20$ πλευρές, δηλαδή ο κυρτός χώρος θα είναι ένα εικοσάεδρο, με 6 κορυφές, 15 ακμές και 20 πλευρές. Η απόδειξη γενικεύεται για $k>3$.

Πρόταση 1.3.2 Αν γράψουμε τα διανύσματα **x, y** κατά φθίνουσα σειρά μεγέθους:

$$x_{1:k}\geq x_{2:k}\geq\cdots\geq x_{k:k},\quad y_{1:k}\geq y_{2:k}\geq\cdots\geq y_{k:k}$$

και $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ $\Leftrightarrow$
$$\begin{aligned} &x_{1:k} \le y_{1:k}, \\ &x_{1:k} + x_{2:k} \le y_{1:k} + y_{2:k}, \\ &\sum_{i\le h} x_{i:k} \le \sum_{i\le h} y_{i:k}, \quad h = 1,2,\ldots,k-1, \\ &\sum_{i=1}^{k} x_{i:k} = \sum_{i=1}^{k} y_{i:k}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη δες Marshall and Olkin σελ.20, 21, 22. Η απόδειξη δόθηκε από τους Hardy, Littlewood and Polya (1929).

Ορισμός 1.3.3 Η g(x) είναι αυστηρά κοίλη αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$, όπου $\mathbf{X}$ είναι κυρτό σύνολο, τότε:

$$g((1-a)\mathbf{x}_1 + a\mathbf{x}_2) > (1-a)g(\mathbf{x}_1) + ag(\mathbf{x}_2), \quad 0<a<1.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Πρόταση 1.3.3 Αν $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, από τον ορισμό της κυριαρχίας έπεται ότι για κάθε (αυστηρά) κοίλη συνάρτηση g(x) ισχύει,

$$\sum_{i=1}^{k} g(x_i) \ge \sum_{i=1}^{k} g(y_i) \tag{1.3.2}$$

Απόδειξη. Αφού ισχύει $x_i = s_{i1}y_1 + \ldots + s_{ik}y_k, i = 1,\ldots,k$ και g(x) είναι κοίλη συνάρτηση με $\sum_{j=1}^{k} s_{ij} = 1$, τότε $g(x_i) \ge s_{i1}g(y_1) + \ldots + s_{ik}g(y_k), \ \forall i = 1,2,\ldots,k$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_k) \end{bmatrix} \ge \mathbf{S} \begin{bmatrix} g(y_1) \\ \vdots \\ g(y_k) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{1}' \cdot \mathbf{g(x)} \ge \mathbf{1}' \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{g(y)}, \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k1} & \cdots & s_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} g(x_i) \ge \sum_{i=1}^{k} g(y_i).$$

Σημείωση: Για κυρτές συναρτήσεις η ανισότητα αντιστρέφεται, (αφού $\Rightarrow g(x_i) \le s_{i1}g(y_1) + \ldots + s_{in}g(y_n), \ \forall i = 1,2,\ldots,n$).

Ουσιαστικά η $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ μας λέει ότι το διάνυσμα **x** είναι πιο συγκεντρωμένο από το **y**.

Μερικές ιδιότητες των κυρτών - κοίλων – συναρτήσεων:

(ii) Αν η g(x) είναι κυρτή και σε ένα σημείο x υπάρχει η παράγωγος της g(x), τότε $g''(x) \geq 0$.

(ii) Αν η g(x) είναι κοίλη, τότε, $g''(x) \leq 0$.

(iii) Αν η g(x) είναι κοίλη και $g(x) > 0$, τότε η $1/g(x)$ είναι κυρτή.

(iv) Αν $g(x) > 0$ και $\log g(x)$ είναι κυρτή, τότε και η g(x) είναι κυρτή.

(v) Αν g(x) είναι κυρτή (κοίλη), τότε και η $-g(x)$ είναι κοίλη (κυρτή).

Από Pukelsheim (1993, p.139-141) παίρνουμε την οικογένεια συναρτήσεων $\phi_p(\mathbf{x})$ για διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)$, $x_i > 0 \;\; i = 1, ..., k$:

$$\phi_p(x) = \begin{cases} \max x_j \;\; j \leq k, & \text{αν } \; p = \infty \\ (\frac{1}{k} \sum_{j \leq k} x_j^p)^{1/p}, & \text{αν } \; p \neq 0, \pm\infty \\ \left(\prod_{j \leq k} x_j \right)^{1/k}, & \text{αν } \; p = 0 \\ \min x_j, \;\; j \leq k, & \text{αν } \; p = -\infty \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις $\phi_p(\mathbf{x})$ είναι κυρτές για $\mathbf{x} \in R^k$ και $p \geq 1$ και κοίλες για $\mathbf{x} \in R_+^k$ και $p \leq 1$.

Ορισμός 1.3.4 Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$, όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)'$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_k)'$, τότε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ υπερκυριαρχείται ασθενώς από το διάνυσμα $\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \prec^w \mathbf{y}$ αν $x_{(1)} + x_{(2)} + ... + x_{(j)} \geq y_{(1)} + y_{(2)} + ... + y_{(j)}$, $j = 1, 2, ..., k$, όπου $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(j)}$ και $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq ... \leq y_{(j)}$.

1.4 Η έννοια της κυριαρχίας για τους πίνακες

Ορισμός 1.4.1 Αν $\mathbf{Q}$ είναι ένας $k \times k$ πίνακας, με $\lambda(\mathbf{Q})$ συμβολίζουμε το διάνυσμα των ιδιοτιμών του $\mathbf{Q}$, pd(k) γράφουμε για τους θετικά ορισμένους πίνακες k τάξης και nnd(k) γράφουμε για τους μη αρνητικά ορισμένους πίνακες k τάξης. $Sym(k)$ είναι το σύνολο των συμμετρικών πινάκων τάξεως k και $perm(k)$ είναι το σύνολο των μεταθετικών πινάκων τάξεως k.

Ορισμός 1.4.2 Αν $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in Sym(k)$ και ο $\mathbf{C}$ βρίσκεται στον κυρτό χώρο που παράγεται από τους πίνακες $\mathbf{PDP}'$, όπου $\mathbf{P}$ είναι μεταθετικός πίνακας τάξης k, τότε ο πίνακας $\mathbf{C}$ κυριαρχείται από τον $\mathbf{D}$ και συμβολίζεται $\mathbf{C} \prec \mathbf{D}$. Επομένως, συμβολικά έχουμε:

$$\mathbf{C} \prec \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{C} \in conv\{\mathbf{PDP}' : \mathbf{P} \in perm(k)\}. \tag{1.4.1}$$

Ορισμός 1.4.3 Η $\phi(\mathbf{C})$ λέγεται συνάρτηση πληροφορίας αν $\phi(\mathbf{C}) \to \mathbb{R}, \ \ \forall\ \mathbf{C} \in nnd(k)$ και ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
&(i)\, \mathbf{C} \ge \mathbf{D} \ge \mathbf{0} \Rightarrow \phi(\mathbf{C}) \ge \phi(\mathbf{D}) \\
&(ii)\, \phi((1-a)\mathbf{C} + a\mathbf{D}) \ge (1-a)\phi(\mathbf{C}) + a\phi(\mathbf{D}), \ \ \forall\ 0 < a < 1, \ \ \mathbf{C}, \mathbf{D} \ge \mathbf{0} \\
&(iii)\, \phi(d\mathbf{C}) = d\phi(\mathbf{C}) \ \ \forall d > 0, \ \ \mathbf{C} \ge \mathbf{0} \Rightarrow \phi(\mathbf{0}) = 0 \Rightarrow \phi(\mathbf{C}) \ge 0, \ \ \forall\, \mathbf{C} \ge \mathbf{0} \\
&(iv)\, \phi(\mathbf{C}) = \phi(\mathbf{PCP}') \ \ \forall\, \mathbf{C} \in nnd(k)
\end{aligned}$$

Οι επόμενες συναρτήσεις για $-\infty < p \le 1, \ C \in nnd(k)$, Pukelsheim (1993) p 141, 153 είναι συναρτήσεις πληροφορίας, και αυστηρά κοίλες για $-\infty < p < 1, \ \mathbf{C} \in pd(k)$

$$\phi_p(x) = \begin{cases} \max \lambda_j(C), & \text{αν} \ \ p = \infty \\ (\text{trace}\, C^p / k)^{1/p}, & \text{αν} \ \ p \ne 0, \infty \\ \left(\det C\right)^{1/k}, & \text{αν} \ \ \mathrm{p} = 0 \\ \min \lambda_j(C), & \text{αν} \ \ \mathrm{p} = -\infty \end{cases}$$

Η οικογένεια αυτή περιλαμβάνει τα κριτήρια A-, D-, E-βελτιστοποίησης όταν p=0, p=-1 και $\mathrm{p} \to -\infty$ αντίστοιχα.

Ορισμός 1.4.4 (Μετασχηματισμός Κ ή Κανόνας (Average rule)) Αν έχουμε v αγωγές και για κάθε ζεύγος αγωγών, έστω S και T έχουμε $n_S - n_T = \tilde{n}_S - \tilde{n}_T \ge 2$ και $\mathbf{Q}$ είναι ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού, τότε εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Κ: $\bar{\mathbf{Q}} = (1-(n_S - n_T)^{-1})\mathbf{Q} + (n_S - n_T)^{-1}\mathbf{PQP}'$, τότε $\bar{\mathbf{Q}}$ είναι «καλύτερος» από τον $\mathbf{Q}$ και έχουμε $n_S - 1$ αντί για n_S και $n_T + 1$ αντί για n_T, $\mathbf{P}$ είναι ένας μεταθετικός πίνακας.

Ορισμός 1.4.5 Αν $\sigma^2\mathbf{V}$ είναι ο πίνακας διασποράς των παραμέτρων, ο πίνακας $\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1}$ λέγεται πίνακας πληροφορίας.

Ορισμός 1.4.6 Ένας σχεδιασμός d* είναι καθολικά βέλτιστος (universally optimal) στην κλάση D των σχεδιασμών που μας ενδιαφέρουν αν μεγιστοποιεί την $\phi(\mathbf{Q}_d)$ ως προς το σχεδιασμό $d \in D$ για κάθε συνάρτηση ϕ που ικανοποιεί τα κριτήρια (i)-(iv).

Στη διατριβή αυτή θεωρούμε πιο γόνιμο να εργαστούμε με τις κοίλες συναρτήσεις πληροφορίας $\phi(\mathbf{Q})$ αντί για κυρτές συναρτήσεις $\phi(\sigma^2\mathbf{V})$. έτσι αντιμετωπίζεται ευκολότερα η λύση αρκετών προβλημάτων.

Ορισμός 1.4.7 Ο σχεδιασμός d* με συνάρτηση πληροφορίας $\mathbf{Q}_{d^*}$ και ιδιοτιμές $\lambda_1,\ldots,\lambda_v$ είναι φ-βέλτιστος, στην κλάση των σχεδιασμών F, αν οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{d^*}$ κυριαρχούνται από τις ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_d$ για κάθε σχεδιασμό d που είναι στο F.

Από τον πιο πάνω ορισμό ο d* είναι φ-βέλτιστος, στην κλάση των σχεδιασμών F, αν ελαχιστοποιεί την $\varphi(\lambda_1)+\ldots+\varphi(\lambda_v)$ για κάθε συνεχή φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση $\varphi(\lambda)$ (Marshall and Olkin p.11).

Ένας καθολικά βέλτιστος σχεδιασμός είναι και φ-βέλτιστος. Το αντίθετο όμως δεν ισχύει. Για παράδειγμα, φ-βέλτιστος σχεδιασμός δεν είναι κατ' ανάγκη MV-βέλτιστος. Όταν ένας σχεδιασμός είναι φ-βέλτιστος είναι και A-, D-, E- βέλτιστος.

Κεφάλαιο 2

Πειραματικοί σχεδιασμοί γραμμής με δύο αγωγές και εξαρτημένες παρατηρήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε σχεδιασμούς γραμμής εφαρμόζοντας την έννοια της κυριαρχίας, που είδαμε αναλυτικά στο εισαγωγικό κεφάλαιο για να βρεθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός, όταν οι παρατηρήσεις είτε είναι ανεξάρτητες, είτε είναι εξαρτημένες. Η εξάρτηση ακολουθεί μια πρώτης τάξης αυτοπαλινδρόμηση με παράμετρο α.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τι συμβαίνει όταν οι αγωγές είναι δύο και θα καθορίσουμε τους βέλτιστους σχεδιασμούς για τις διάφορες τιμές του α, όταν το πλήθος των πειραματικών μονάδων είναι άρτιο ή περιττό. Για να μειώσουμε τους υπό εξέταση σχεδιασμούς ακολουθούμε μια διαδικασία φιλτραρίσματος.

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου δίνεται το μοντέλο που χρησιμοποιούμε και οι βέλτιστοι σχεδιασμοί όταν οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες, ενώ οι υπόλοιπες υποενότητες είναι αφιερωμένες στην βελτιστοποίηση κάτω υπό εξάρτηση. Καθολικά βέλτιστοι σχεδιασμοί και φ-βέλτιστοι σχεδιασμοί παρουσιάζονται όταν το πλήθος των αγωγών είναι άρτιο και περιττό. Τέλος, δίνονται MV-βέλτιστοι σχεδιασμοί για άρτιο και περιττό πλήθος μονάδων. Λεπτομερείς αποδείξεις κάποιων θεωρημάτων περιλαμβάνονται στο Παράρτημα 2.1 ενώ πίνακες για την περίπτωση που έχουμε πέντε παρατηρήσεις και δύο αγωγές βρίσκονται στο τέλος και παρουσιάζουν τους βέλτιστους σχεδιασμούς για κάθε κριτήριο.

2.1 Ομοιογενής πληθυσμός, ανεξάρτητες παρατηρήσεις

Για την περίπτωση που έχουμε v αγωγές και n πειραματικές μονάδες, σε κάθε μονάδα εφαρμόζεται μια από τις v αγωγές, μας ενδιαφέρει η εκτίμηση της επίδρασης κάθε αγωγής.

Οι παρατηρήσεις θεωρούνται ανεξάρτητες με σταθερή διασπορά σ^2, και οι μονάδες ομοιογενείς. Αν οι αγωγές είναι $T_1,...,T_v$, μ_i, $i=1,...,v$ είναι η επίδραση της αγωγής T_i και το πλήθος των μονάδων, στις οποίες εφαρμόζονται αυτές οι αγωγές, είναι αντίστοιχα $n_1,\dots,n_v$, $n_1+\cdots+n_v=n$ και τα σφάλματα e_{ij} ακολουθούν ένα αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο πρώτης τάξης, AR(1), $e_{ij}-ae_{i-1,j}=w_{ij}$, $|a|<1$, τα w_i είναι ανεξάρτητες (ασυσχέτιστες) τυχαίες μεταβλητές με σταθερή διασπορά σ^2, τότε το μοντέλο είναι:

$$Y_{ij}=\mu_i+e_{ij},\quad i=1,\dots,v,\quad j=1,...,n_i.$$

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων δίνει:

$$[\hat{\boldsymbol{\mu}}]=\begin{bmatrix}\hat{\mu}_1\\ \hat{\mu}_2\\ \vdots\\ \hat{\mu}_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Y}_1\\ \bar{Y}_2\\ \vdots\\ \bar{Y}_v\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{V}(\hat{\boldsymbol{\mu}})=\sigma^2\begin{bmatrix}1/n_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1/n_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1/n_v\end{bmatrix},\ \ \bar{Y}_i=\sum_{j=1}^{n_i}Y_{ij}/n_i. \tag{2.1.1}$$

Ο πίνακας πληροφορίας **Q** έχει διαγώνια στοιχεία $n_1,\ \dots,n_v$, και παρατηρούμε ότι το n μπορεί να γραφτεί ως:

$$n=v\,m+s,\quad m=[\frac{n}{v}],\qquad s\in \mathrm{N},\ 0\le s<v. \tag{2.1.2}$$

Ορίζουμε, το σχεδιασμό d* που δίνει σε s αγωγές από (m+1) μονάδες και στις υπόλοιπες (v-s) αγωγές από m μονάδες, χρησιμοποιούνται έτσι και οι n μονάδες.

Πρόταση 2.1.1 Δύο διανύσματα $v \times 1$ δεν είναι πάντα συγκρίσιμα με την έννοια της κυριαρχίας, όμως το διάνυσμα $\boldsymbol{\delta}$ τέτοιο ώστε $\delta_i = m+1 \;\; i = 1,\ldots,s, \delta_i = m \quad i = s+1,\ldots,v$, δηλ. $\boldsymbol{\delta} = (m+1,...,m+1, m,\ldots,m)$ κυριαρχείται από κάθε άλλο διάνυσμα $\mathbf{b} = (n_1, \;\ldots, n_v)$, (με $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_v$) και συμβολίζεται $\boldsymbol{\delta} \prec \mathbf{b}$, επομένως για κάθε αυστηρά κοίλη συνάρτηση $g:(0;\infty) \to R$ ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{v} g(\delta_i) \geq \sum_{i=1}^{v} g(b_i).$$

Απόδειξη. Δύο διανύσματα μπορεί να μην είναι συγκρίσιμα με την έννοια της κυριαρχίας. Ένα παράδειγμα τέτοιου ζεύγους διανυσμάτων είναι $c_1 = (1,3,8,9)$ και $c_2 = (2,4,5,11)$.

Αν n_i, n_j διαφέρουν τουλάχιστον κατά δύο μονάδες $n_i \geq n_j + 2$, κάνουμε το μετασχηματισμό:

$$\begin{bmatrix} 1-c & c \\ c & 1-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_i \\ n_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_i - 1 \\ n_j + 1 \end{bmatrix}, \quad c = \frac{1}{n_i - n_j}.$$

Αν $\mathbf{b}_1$ είναι το διάνυσμα που έχει $n_i - 1, n_j + 1$ στις θέσεις i, j, θα είναι $\mathbf{b}_1 = \mathbf{S}_1 \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1-c & c \\ c & 1-c \end{bmatrix}$ και είναι διπλά στοχαστικός πίνακας διότι $\mathbf{S}_1 \mathbf{1} = \mathbf{1}'\mathbf{S}_1 = 1 - c + c = 1$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία και σε ορισμένο αριθμό m βημάτων παίρνουμε ένα διάνυσμα που τα στοιχεία του διαφέρουν το πολύ κατά μια μονάδα, δηλαδή $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m-1} \cdots \mathbf{S}_1 \mathbf{b}$. Όμως το γινόμενο διπλά στοχαστικών πινάκων είναι ένας πίνακας διπλά στοχαστικός, διότι $\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m-1} \cdots \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1 \mathbf{1} = \mathbf{S}_m \mathbf{S}_{m-1} \cdots \mathbf{S}_2 \mathbf{1} = \ldots = \mathbf{S}_m \mathbf{1} = \mathbf{1}$, και το $\boldsymbol{\delta}$ είναι μοναδικό. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη.

Πρόταση 2.1.2 Ο σχεδιασμός d^* με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}^*$ που έχει διαγώνια στοιχεία $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_v$, $\delta_i = m+1 \;\; i = 1,\ldots,s, \delta_i = m \quad i = s+1,\ldots,v$ είναι καθολικά βέλτιστος.

Απόδειξη. Αν υπάρχουν δύο στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα Q που να διαφέρουν τουλάχιστον κατά 2, ας είναι τα $n_1 \geq n_2 + 2$ και $\mathbf{Q}$ είναι ο πίνακας πληροφορίας με διαγώνια στοιχεία $n_1, n_2, \ldots, n_v, \quad n_1 + \cdots + n_v = n$, τότε:

$$\mathbf{Q}_1 = (1-c)\mathbf{P}_1\mathbf{Q}\mathbf{P}_1' + c\mathbf{P}_2\mathbf{Q}\mathbf{P}_2' = \begin{bmatrix} n_1 - 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n_2 + 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & n_3 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n_v \end{bmatrix}, \; c = \frac{1}{n_1 - n_2}, \qquad (2.1.3)$$

όπου $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_k$ και $\mathbf{P}_2$ είναι ο μοναδιαίος $\mathbf{I}_v$ με μεταθετημένες τις δύο πρώτες γραμμές και στήλες.

Αν $\phi(\mathbf{Q})$ είναι συνάρτηση πληροφορίας, θα έχουμε: $\phi(\mathbf{Q}_1) \geq (1-a)\phi(\mathbf{Q}) + a\phi(\mathbf{Q}) = \phi(\mathbf{Q})$.

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε στον πίνακα $\mathbf{Q}^*$, θα είναι $\phi(\mathbf{Q}^*) \geq \cdots \geq \phi(\mathbf{Q}_1) \geq \phi(\mathbf{Q})$.

Ο καθολικά βέλτιστος σχεδιασμός d^* είναι και A-,MV-,D-, E-βέλτιστος.

2.2 Ομοιογενής πληθυσμός, εξαρτημένες παρατηρήσεις

Το μοντέλο σε αυτή την περίπτωση, όπου έχουμε εξαρτημένες παρατηρήσεις και ομοιογενή πληθυσμό δίνεται από τη σχέση,

$$y_i = \mu_{d(i)} + e_i, \; i = 1,\ldots,n, \quad d(i) = 1,\ldots,v, \quad E(\mathbf{ee}') = \sigma^2\mathbf{V}, \qquad (2.2.1)$$

όπου $\mathbf{V}$ είναι ο πίνακας διασποράς των σφαλμάτων, $\mu_{d(i)}$ είναι η επίδραση της αγωγής, που εφαρμόζεται σύμφωνα με το d, στην i μονάδα.

Η σχέση (2.2.1) μπορεί επίσης να γραφτεί σε ως:

$$\mathbf{y} = \mu_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \mu_v\mathbf{x}_v + \mathbf{e}, \quad E(\mathbf{ee}') = \sigma^2\mathbf{V}. \qquad (2.2.2)$$

Το $n\times1$ διάνυσμα $\mathbf{x}_j$ έχει μονάδες, όταν εφαρμόζεται η αγωγή T_j, $j=1,...,v$ και μηδέν αλλού.

Εξετάζουμε την περίπτωση που τα σφάλματα e_i ακολουθούν ένα αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο πρώτης τάξης, AR(1),

$$e_i - ae_{i-1} = w_i,\ |a|<1,\ i=1,...,n, \tag{2.2.3}$$

όπου w_i είναι ανεξάρτητες (ασυσχέτιστες) τυχαίες μεταβλητές με σταθερή διασπορά σ^2 από την κανονική κατανομή. Επίσης, $E(e_i)=0$, $\mathrm{var}(e_i)=\sigma^2/(1-a^2)$.

Από την (2.2.3) προκύπτει ότι $\mathrm{cov}(e_i,e_j)=\sigma^2 a^{|i-j|}/(1-a^2)$ και ο $n\times n$ πίνακας διασποράς $\mathrm{var}(\mathbf{e})=\sigma^2\mathbf{V}$ έχει τη μορφή,

$$\mathbf{V}=\frac{1}{1-a^2}\begin{bmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ a & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a \\ a^{n-1} & \cdots & a & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V}^{\mathbf{-1}}=\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -a & 1+a^2 & -a \\ 0 & \cdots & 0 & -a & 1 \end{bmatrix}.$$

Θα εκτιμήσουμε τώρα τις παραμέτρους $\mu_1,...,\mu_v$.

Από την (2.2.2) παίρνουμε τον $v\times v$ πίνακα διασποράς $\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\mu}})$ των $\hat{\mu}_1,...,\hat{\mu}_v$,

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\mu}})=\sigma^2\mathbf{Q}^{\mathbf{-1}}, \tag{2.2.4}$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X},\quad \mathbf{X}=(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_v),\ \mathbf{x}_1+\cdots+\mathbf{x}_v=\mathbf{1}_n, \tag{2.2.5}$$

$$\mathbf{V}^{\mathbf{-1}}=\mathbf{I_n}+a^2\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathbf{I_{n\text{-}2}} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.6}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q}=\mathbf{A}+a^2\mathbf{B}-a\mathbf{C},$$

όπου, $\mathbf{A}=\mathbf{X'X}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1'\\ \vdots \\ \mathbf{x}_v'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & n_v\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i=n_i,\ i=1,...,v,\ \mathbf{x}_i'\mathbf{x}_j=0,\ i\neq j,$

$n_i=$πλήθος εμφανίσεων της αγωγής T_i στις n μονάδες, $n_1+\cdots+n_v=n$.

O $v\times v$ πίνακας $\mathbf{B}$ είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία,

$\tilde{n}_i=$πλήθος εμφανίσεων της αγωγής T_i στις μονάδες $2,...,n-1$, $\tilde{n}_1+\cdots+\tilde{n}_v=n-2$.

O $v\times v$ πίνακας $\mathbf{C}=(c_{ij})$ έχει $c_{ii}=2n_{ii}\ i=1,...,v,\ c_{ij}=n_{ij}+n_{ji}\ i\neq j$, όπου

$n_{ii}=$πλήθος εμφανίσεων του ζεύγους $T_iT_i\ i=1,...,v$ στις θέσεις $12,23,...,(n-1)n$,

$n_{ij}=$ πλήθος εμφανίσεων του ζεύγους $T_iT_j\ i\neq j$ στις θέσεις $12,...,(n-1)n$.

Επομένως ο πίνακας πληροφορίας $\mathbf{Q}=(q_{ij})$ δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}n_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & n_v\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}\tilde{n}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tilde{n}_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{n}_v\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}2n_{11} & n_{12}+n_{21} & \cdots & n_{1v}+n_{v1}\\ & 2n_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & n_{v-1,v}+n_{v,v-1}\\ sym & \cdots & \cdots & 2n_{vv}\end{bmatrix}.$$

Πρόταση 2.2.1 (ι) Αν $0<a<1$ στο βέλτιστο σχεδιασμό υπάρχει το πολύ μια αγωγή $T_i\ \ i=1,...,v$ με $n_{ii}>0$.

(ιι) Αν $-1<a<0$ στο βέλτιστο σχεδιασμό κάθε ζεύγος αγωγών $T_i\,T_j,\ i\neq j$ εμφανίζεται το πολύ μια φορά.

Απόδειξη. (ι) Αν ο σχεδιασμός d είναι $\cdots T_1T_1\cdots T_2T_2\cdots$ και μετακινήσουμε το ένα T_2 μεταξύ των διαδοχικών αγωγών T_1T_1, προκύπτει ο σχεδιασμός $\hat{d}:\cdots T_1T_2T_1\cdots T_2\cdots$, τότε $\hat{n}_{11}=n_{11}-1, \hat{n}_{22}=n_{22}-1, \hat{n}_{12}+\hat{n}_{21}=n_{12}+n_{21}+2$ και τα υπόλοιπα στοιχεία μένουν αμετάβλητα.

Είναι $\mathbf{Q}=\mathbf{A}+a^2\mathbf{B}-a\mathbf{C}$, $\hat{\mathbf{Q}}=\mathbf{A}+a^2\mathbf{B}-a\hat{\mathbf{C}}$ με

$$\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}+\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & -2 & 0 & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \hat{\mathbf{Q}}-\mathbf{Q}=-a\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & -2 & 0 & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\geq \mathbf{0}.$$

Συνεχίζουμε τη διαδικασία ίσαμε να υπάρχει το πολύ μια αγωγή T_i με $n_{ii}>0$.

(ιι) Στην περίπτωση που ο σχεδιασμός d είναι $\cdots T_iT_jT_iT_j\cdots$ $i\neq j$ και ο σχεδιασμός $\hat{d}$ είναι $\cdots T_iT_iT_jT_j\cdots$, με όλα τα άλλα στοιχεία αμετάβλητα, τότε:

$$\hat{n}_{ii}=n_{ii}+1,\hat{n}_{jj}=n_{jj}+1,\hat{n}_{ij}+\hat{n}_{ji}=n_{12}+n_{21}-2 \tag{2.2.7}$$

και $\hat{\mathbf{Q}}-\mathbf{Q}=-a\begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 2 & 0 & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\geq \mathbf{0}$.

Στη περίπτωση που ο σχεδιασμός d είναι $\cdots T_iT_j\delta T_iT_j\cdots$, όπου δ είναι μια ακολουθία αγωγών, τότε για το σχεδιασμό $\hat{d}\cdots T_iT_i\hat{\delta}T_jT_j\cdots$, όπου η ακολουθία δ είναι αναστραμμένη, θα ισχύουν οι σχέσεις (2.2.7), οπότε $\hat{\mathbf{Q}}\geq\mathbf{Q}$. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι ο σχεδιασμός να έχει το πολύ μια φορά κάθε ζεύγος T_iT_j $i\neq j$.

Να σημειώσουμε ότι αν $a=0$ (ανεξάρτητες παρατηρήσεις), υπάρχει καθολικά βέλτιστος σχεδιασμός που δόθηκε στην Παράγραφο 2.1.

Παράδειγμα 2.2.1 Αν $v=3,n=10$ και έχουμε τους σχεδιασμούς:

$d_1:T_1T_2T_3T_1T_2T_3T_1T_2T_3T_1, d_2:T_1T_1T_1T_2T_2T_2T_3T_3T_3T_1$

$$d_1:\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&3&3\\3&0&3\\3&3&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q_1}=\begin{bmatrix}4+2a^2&-3a&-3a\\-3a&3(1+a^2)&-3a\\-3a&-3a&3(1+a^2)\end{bmatrix}.$$

$$d_2:\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q_2}=\begin{bmatrix}4+2a^2-4a&-a&-a\\-a&3(1+a^2)-4a&-a\\-a&-a&3(1+a^2)-4a\end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $0<a<1$ τότε είναι $\mathbf{Q_1}\geq\mathbf{Q_2}$ ενώ αν $-1<a<0$ τότε $\mathbf{Q_1}\leq\mathbf{Q_2}$, που συμφωνεί με την Πρόταση 2.2.1.

Πόρισμα 2.2.1 (i) Αν αναστρέψουμε την ακολουθία των αγωγών οι πίνακες **A**, **B**, **C**, δεν αλλάζουν, επομένως κάθε σχεδιασμός είναι ισοδύναμος με τον ανάστροφό του. Έτσι για $v=3, n=10$ οι σχεδιασμοί $d_1, \tilde{d}_1$ είναι ισοδύναμοι, όπου

$$d_1: T_3T_1T_2T_1T_3T_3T_2T_1T_1T_2,\quad \tilde{d}_1: T_2T_1T_1T_2T_3T_3T_1T_2T_1T_3.$$

(ii) Αν έχουμε διαδοχικές εφαρμογές της ίδιας αγωγής π.χ. $T_1T_2T_3T_1T_1$ και μετακινήσουμε την επαναλαμβανόμενη αγωγή T_1 δίπλα στο άλλο T_1, ο σχεδιασμός $T_1T_1T_2T_3T_1$ που προκύπτει είναι ισοδύναμος του προηγούμενου, δηλαδή έχουν τον ίδιο πίνακα πληροφορίας. Έτσι ο σχεδιασμός $d_1: T_3T_1T_2T_1T_3T_3T_2T_1T_1T_2$, είναι ισοδύναμος με τον $\tilde{d}_1: T_3T_3T_1T_1T_2T_1T_3T_2T_1T_2$, όπου μετακινήσαμε τις επαναλαμβανόμενες αγωγές T_1, T_3 σε άλλο σημείο, δίπλα σε T_1, T_3.

Επομένως αν εξετάζουμε μόνο τους σχεδιασμούς που για κάθε αγωγή T_i, υπάρχει το πολύ μια ροή με $n_{ii} > 1$.

(iii) Οι δύο σχεδιασμοί της μορφής $\cdots T_i \delta \mathrm{T}_i \cdots$, $\cdots T_i \tilde{\delta} \mathrm{T}_i \cdots$, όπου το $\tilde{\delta}$ είναι ανάστροφο του δ, είναι ισοδύναμοι δηλαδή $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}$.

Τεχνικές Φιλτραρίσματος

Συνοπτικά, από τα πάρα πάνω εισάγουμε τα πιο κάτω φίλτρα 1 ως 5, τα οποία θα χρησιμοποιούμε και στα επόμενα δύο κεφάλαια (Κεφάλαιο 3 και 4).

Φίλτρο 1. (i) Αν $0 < a < 1$ στο βέλτιστο σχεδιασμό υπάρχει ροή (δηλαδή συνεχόμενη επανάληψη αγωγής) το πολύ μιας αγωγής T_i, $i = 1,\ldots,v$ με $n_{ii} > 1$.

(ii) Αν $-1 < a < 0$ στο βέλτιστο σχεδιασμό κάθε ζεύγος αγωγών $T_i T_j$, $i \neq j$ εμφανίζεται το πολύ μια φορά.

(iii) Αν $a = 0$, στο βέλτιστο σχεδιασμό τα n_i, n_j $i \neq j$ διαφέρουν το πολύ κατά 1, $| n_i - n_j | \leq 1$.

(iv) Η ακολουθία των αγωγών ενός σχεδιασμού έχει τον ίδιο πίνακα πληροφορίας με την ανάστροφή της και δύο τέτοιες ακολουθίες θεωρούνται ισοδύναμες.

(v) Οι δύο σχεδιασμοί $\ldots T_i f T_i \ldots, \ldots T_i \overleftarrow{f} T_i \ldots$ έχουν τον ίδιο πίνακα πληροφορίας, όπου f είναι μια ακολουθία αγωγών και $\overleftarrow{f}$ είναι η ανάστροφή της.

(vi) Αν κάνουμε μετάθεση δύο ή περισσότερων γραμμάτων, ο σχεδιασμός που προκύπτει έχει τον ίδιο πίνακα πληροφορίας. (Η μετάθεση δύο γραμμάτων ουσιαστικά είναι ή μετάθεση των αντίστοιχων γραμμών και στηλών του πίνακα πληροφορίας **Q**).

Φίλτρο 2. Αν d είναι ένας σχεδιασμός με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}$ και $\bar{\mathbf{Q}} = c\mathbf{Q} + (1-c)\mathbf{PQP}'$, $0 < c < 1$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης πληροφορίας θα είναι, $g(\bar{\mathbf{Q}}) \geq g(\mathbf{Q})$ για κάθε συνάρτηση πληροφορίας g(.), όπου $\mathbf{P}$ είναι ένας μεταθετικός πίνακας.

Φίλτρο 3. Αν 0<α<1, f_1, f_2, f_3 είναι ακολουθίες αγωγών και δίνεται ο σχεδιασμός $d_1 : f_1SSf_2TTf_3$, τότε ο σχεδιασμός $d_2 : f_1STSf_2Tf_3$ έχει $g(\mathbf{Q}_2) \geq g(\mathbf{Q}_1)$ όπου g(.) είναι συνάρτηση πληροφορίας. Αυτό συμβαίνει διότι $\mathbf{Q}_2 \geq \mathbf{Q}_1$.

Φίλτρο 4. Αν $-1 < a < 0$, f είναι ακολουθία αγωγών και δίνεται ο σχεδιασμός $d_1 :. f_1STS\ f_2T\ f_3$, τότε ο σχεδιασμός $d_2 : f_1SSf_2TTf_3$ έχει $g(\mathbf{Q}_2) \geq g(\mathbf{Q}_1)$ όπου g είναι συνάρτηση πληροφορίας. Αυτό συμβαίνει διότι $\mathbf{Q}_2 \geq \mathbf{Q}_1$.

Φίλτρο 5. Αν $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ είναι πίνακες nnd(k) και $\mathbf{Q}_2 \geq, \mathbf{Q}_1$, τότε $g(\mathbf{Q}_2) \geq g(\mathbf{Q}_1)$ για κάθε συνάρτηση πληροφορίας g(),, όπως προκύπτει από τον ορισμό της συνάρτησης πληροφορίας.

2.3 Βέλτιστοι σχεδιασμοί, με δύο αγωγές και άρτιο πλήθος παρατηρήσεων n=2m

Θεώρημα 2.3.1 Στους σχεδιασμούς γραμμής με AR(1) εξάρτηση και δύο αγωγές *S,T*, ο καθολικά βέλτιστος σχεδιασμός d^* είναι:

(i) Για n=2m και 0<α<1, τότε $d^* : \underbrace{STST...ST}_{n}$ και

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 0 & 2m-1 \\ 2m-1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Για n=2m και -1<α<0, τότε $d^* : \underset{m}{SS...S}\underbrace{TT...T}_{m}$ και

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(m-1) & 1 \\ 1 & 2(m-1) \end{bmatrix}$$

(iii) Για κάθε n>0 και α=0, τότε στον d^*, το πλήθος n_S των S και το πλήθος n_T των T διαφέρουν το πολύ κατά 1, δηλαδή, $|n_S - n_T| \le 1$.

Απόδειξη. (i) Το συνολικό πλήθος των ζευγαριών SS, ST, TS, TT είναι n-1, δηλαδή $n_{SS} + n_{TT} + n_{ST} + n_{TS} = n-1$ και ο πίνακας πληροφορίας είναι,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} n_S & 0 \\ 0 & n_T \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} \tilde{n}_S & 0 \\ 0 & \tilde{n}_T \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2n_{SS} & n_{ST}+n_{TS} \\ n_{ST}+n_{TS} & 2n_{TT} \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό K (βλπ ορισμό 1.4.4), και έτσι

$$\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2}\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\mathbf{PQP'} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} n_{SS}+n_{TT} & n_{ST}+n_{TS} \\ n_{ST}+n_{TS} & n_{SS}+n_{TT} \end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης πληροφορίας (βλπ ορισμό 1.4.3) και σύμφωνα με το αποτέλεσμα,

$$\varphi(\bar{\mathbf{Q}}) \ge \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{Q}) + \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{PQP'}) = \varphi(\mathbf{Q}), \text{ όπου } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.3.3}$$

Παίρνουμε τον πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 0 & 2m-1 \\ 2m-1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.4}$$

τότε $\mathbf{Q}^* - \bar{\mathbf{Q}} = a(n_{SS} + n_{TT}) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ge \mathbf{0}$ όπου $\mathbf{0}$ είναι ένας 2×2 πίνακας με μηδενικά και $\mathbf{Q}^*$ είναι ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d^* : \underbrace{STST...ST}_{2m}$. Επομένως από τον Ορισμό 1.3.2 έχουμε

$$\varphi(\mathbf{Q}^*) \ge \varphi(\bar{\mathbf{Q}}) \ge \varphi(\mathbf{Q}) \tag{2.3.5}$$

Από όλες τις αύξουσες κοίλες συναρτήσεις $\varphi(\mathbf{Q}) \to \mathbb{R}$.

(ii) Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση καταλήξαμε στις σχέσεις (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3) και τώρα θεωρούμε τον πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}^{**} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(m-1) & 1 \\ 1 & 2(m-1) \end{bmatrix} \qquad (2.3.6)$$

Από τις σχέσεις (2.3.2) και (2.3.4) αφαιρώντας παίρνουμε,

$$\mathbf{Q}^{**} - \bar{\mathbf{Q}} = -a(n_{ST} + n_{TS} - 1)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \qquad (2.3.7)$$

Και έτσι $\varphi(\mathbf{Q}^{**}) \geq \varphi(\bar{\mathbf{Q}}) \geq \varphi(\mathbf{Q})$ για κάθε κοίλη αύξουσα συνάρτηση, φ.

(iii) Η περίπτωση αυτή έχει εξεταστεί στην ενότητα (2.1.1) .

2.4 Περιττό πλήθος μονάδων, με δύο αγωγές

2.4.1 Περιττό πλήθος μονάδων όταν n=2r+2m+1, r+m≥1, 0<α<1

Αυτή η περίπτωση είναι πιο περίπλοκη και απαιτείται μια διαφορετική προσέγγιση. Σε αυτό σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της υπερκυριαρχίας (Marshall and Olkin,1979 p.10).

Ορισμός 2.4.1 Το διάνυσμα **x** υπερκυριαρχείται από το διάνυσμα **y** και γράφουμε $\mathbf{x} \prec^{w} \mathbf{y}$ εάν,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}, \quad x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}, \quad y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \ldots \leq y_{(n)} \qquad (2.4.1)$$

Συνεπάγεται, $\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} g(y_i)$ για κάθε συνεχή φθίνουσα κυρτή συνάρτηση g(x).

Από το φίλτρο 1(i) και 3 για τις περιπτώσεις που έχουμε δύο αγωγές, σχεδιασμούς γραμμής με εξάρτηση AR(1), και $0 < a < 1$:

(i) Εάν ένας σχεδιασμός $d : f_1 \underbrace{SS\ldots SS}_{p} f_2 \underbrace{TT\ldots T}_{q} f_3, \quad p > 1, q > 1$ έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_d$, ο σχεδιασμός $d^* : f_1 \underbrace{SS\ldots S}_{p-1} TS\ f_2 \underbrace{\mathrm{TT}\ldots\mathrm{T}}_{q-1} f_3$ έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_d = a\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$.

(ii) Ο βέλτιστός σχεδιασμός έχει το πολύ μια αγωγή, έστω S, που να επαναλαμβάνεται.

Από τα πιο πάνω καταλήγουμε ότι για $n = 2r + 2m + 1, \; n \geq 3$, εξάρτηση AR(1) και $0 < a < 1$ υπάρχουν οι παρακάτω τρεις κλάσεις σχεδιασμών για να ληφθούν υπόψη,

$$F_1 : \underbrace{SS\ldots S}_{2r+1} \underbrace{TSTS\ldots TS}_{2m} \;,\; F_2 : \underbrace{SS\ldots S}_{2r} \underbrace{TSTS\ldots TST}_{2m+1} ,\quad F_3 : T\,\underbrace{SS\ldots S}_{2r+1} \underbrace{TSTS\ldots TST}_{2m-1} \qquad (2.4.2)$$

Θεώρημα 2.4.1 Στους σχεδιασμούς γραμμής με δύο αγωγές, εξάρτηση AR(1), $0 < a < 1$ και περιττό πλήθος μονάδων $n = 2r + 2m + 1, \; n \geq 3$:

(i) Στη κλάση F_1 ο σχεδιασμός $d_1^* : \underbrace{STST\ldots STS}_{2r+2m+1}$ είναι φ-βέλτιστος.

(ii) Στην κλάση F_2 ο σχεδιασμός $d_2^* : SS\underbrace{TST\ldots ST}_{2r++2m-1}$ είναι καθολικά βέλτιστος.

(iii) Στην κλάση F_3 ο σχεδιασμός d_1^* είναι D-βέλτιστος και για $0 < a \leq (r-1)/(r+1)$, είναι φ-βέλτιστος.

(iv) Για $0 < a < 1$, ο d_1^* είναι D-βέλτιστος στις κλάσεις σχεδιασμών $F_1 \cup F_2 \cup F_3$

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 2.1.

Οι πίνακες των A-,D-,E-,MV-βελτιστοποίησης για n=5 μονάδες, v=2 αγωγές και για $a = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ δίνονται στο τέλος.

2.4.2 Περιττό πλήθος μονάδων όταν n=2m+1, -1<α<0

Από τα φίλτρα 1(ii), 1(iv), 1(v), 2, 4 και 5 και στους σχεδιασμούς γραμμής με AR(1) εξάρτηση, όταν έχουμε δύο αγωγές και $-1<a<0$,

(i) Αν ένας σχεδιασμός $d: f_1STf_2STf_3$ έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_d$, ο σχεδιασμός $\tilde{d}: f_1SS\,\overline{f}_2TTf_3$ έχει πίνακα πληροφορίας $\tilde{\mathbf{Q}}_d \geq \mathbf{Q}_d$, όπου $\overline{f}_2$ είναι η ανάστροφη ακολουθία της f_2.

(ii) Αν ένας σχεδιασμός $d: f_1STSTf_3$ έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_d$, ο σχεδιασμός $\tilde{d}: f_1SSTTf_3$ έχει πίνακα πληροφορίας $\tilde{\mathbf{Q}}_d \geq \mathbf{Q}_d$, όπου f_1, f_2, f_3 είναι ακολουθίες αγωγών.

(iii) Στους βέλτιστους σχεδιασμούς, κάθε ζεύγος *ST*, *TS* εμφανίζεται το πολύ μια φορά.

(iv) Αν $n=2m+1$, οι βέλτιστοι σχεδιασμοί που συγκρίνονται για βελτιστοποίηση ανήκουν σε μια από τις πάρα κάτω κλάσεις,

$F_4: \underbrace{SS\ldots S}_{2m+1-r}\underbrace{TT\ldots T}_{r},\quad 0<r<n,\qquad F_5: T\,\underbrace{SS\ldots S}_{2m-r}\underbrace{TT\ldots T}_{r},\quad 0<r<n=2m+1$

Θεώρημα 2.4.2 Στους σχεδιασμούς γραμμής με AR(1) εξάρτηση, δύο αγωγές και $-1<a<0$,

(i) Στην κλάση F_4 ο σχεδιασμός $d_4^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}$ και οι ισοδύναμοι του είναι καθολικά βέλτιστοι.

(ii) Στην κλάση F_5 ο σχεδιασμός $d_5^*: T\,\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}$ είναι φ-βέλτιστος.

Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 2.1.

2.5 MV-Βελτιστοποίηση

Έχουμε αποδείξει στο Θεώρημα 2.4.2 ότι ο σχεδιασμός d_5^* είναι φ-βέλτιστος στην κλάση F_5 αλλά αυτό δεν μας εξασφαλίζει ότι είναι και MV-βέλτιστος. Ο σχεδιασμός d_4^* όμως είναι καθολικά βέλτιστος στην κλάση F_4, που αυτό σημαίνει ότι είναι και MV-βέλτιστος στην κλάση αυτή.

Θεώρημα 2.5.1 Στους σχεδιασμούς γραμμής με δύο αγωγές, με εξάρτηση AR(1) και $-1 < a < 0$, ο σχεδιασμός $d_5^* : T\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}$, $d_5^* \in F_5$ είναι MV-βέλτιστος στην κλάση F_5.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 2.1.

Θεώρημα 2.5.2 Στους σχεδιασμούς γραμμής με δύο αγωγές, με εξάρτηση AR(1) και $-1 < a < 0$, ο σχεδιασμός

$$d_4^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}, \quad d_4^* \in F_4 \tag{2.5.1}$$

και ο αντίστροφος του είναι φ-βέλτιστος ως προς τους σχεδιασμούς ολόκληρης της κλάσης $F_4 \cup F_5$.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 2.1.

Θεώρημα 2.5.3 Στους σχεδιασμούς γραμμής με δύο αγωγές, με εξάρτηση AR(1) και $-1 < a < 0$, τότε σε ολόκληρη την κλάση των σχεδιασμών $F_4 \cup F_5$ ισχύει ότι,

(i) Αν m=1, ο σχεδιασμός $d_4^* : SST$, $d_4^* \in F_4$ είναι MV-βέλτιστος.

(ii) Αν m>1, ο σχεδιασμός $d_5^* : T\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}$, $d_5^* \in F_5$ είναι MV-βέλτιστος.

Απόδειξη. Αρκεί να συγκρίνουμε τους πίνακες πληροφορίας $\mathbf{Q}_4^*$ και $\mathbf{Q}_5^*$. Γι΄ αυτό πρέπει να βρούμε το ελάχιστο μεταξύ των μέγιστων διαγωνίων στοιχείων των πινάκων $(\mathbf{Q}_4^*)^{-1}$ και $(\mathbf{Q}_5^*)^{-1}$, δηλαδή,

$$\mathbf{Q}_4^* = \begin{bmatrix} m+1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2m & 1 \\ 1 & 2(m-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_5^* = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(m-1) & 2 \\ 2 & 2(m-1) \end{bmatrix}.$$

Επομένως, $(\mathbf{Q}_4^*)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2} \left\{ \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(m-1) & -1 \\ -1 & 2m \end{bmatrix} \right\},$

$$(\mathbf{Q}_5^*)^{-1} = \frac{1}{\mu_1\mu_2} \left\{ \begin{bmatrix} m+1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(m-1) & -2 \\ -2 & 2(m-1) \end{bmatrix} \right\}.$$

Και άρα το ελάχιστο διαγώνιο στοιχείο για την πρώτη περίπτωση είναι το $\dfrac{m(1-a)^2+1}{\lambda_1\lambda_2}$, ενώ το αντίστοιχο ελάχιστο στοιχείο για την δεύτερη περίπτωση είναι το $\dfrac{m(1-a)^2-a^2+2a}{\mu_1\mu_2}$. Βρίσκουμε λοιπόν την διαφορά τους για να δούμε ποιο από τα δύο είναι το μεγαλύτερο,

$$\frac{m(1-a)^2-a^2+2a}{\mu_1\mu_2} - \frac{m(1-a)^2+1}{\lambda_1\lambda_2}$$

όπου $\lambda_1\lambda_2 = \det(\mathbf{Q}_4^*)$ και $\mu_1\mu_2 = \det(\mathbf{Q}_5^*)$. Έτσι λοιπόν η πιο πάνω διαφορά γίνεται:

$$\frac{\left(m(1-a)^2+1\right)\left(-2am(1-a)^2-2a^2(1-a)\right)+a(2-a)\left(m^2(1-a)^4+m(1-a^2+2a)+2a(1-a)\right)}{\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2}$$

Έστω G ο αριθμητής του πιο πάνω κλάσματος:

$$G=\left(m(1-a)^2+1\right)\left(-2am(1-a)^2-2a^2(1-a)\right)+a(2-a)\left(m^2(1-a)^4+m(1-a^2+2a)+2a(1-a)\right)$$

Που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι: $G=-a^2(1-a)^2\left((1-a)^2m(m-1)-2\right)$.

Αν G>0, τότε d_4^* είναι MV-βέλτιστος και αν G<0, τότε d_5^* είναι MV-βέλτιστος και έτσι λοιπόν αν m=1, ο d_4^* είναι MV-βέλτιστος και αν m>1, ο d_5^* είναι MV-βέλτιστος.

Παράρτημα 2.1

Αποδείξεις κάποιων Θεωρημάτων

Απόδειξη Θεωρήματος 2.4.1

(i) Ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d_{2r+1}:\underbrace{SS\ldots S}_{2r+1}\underbrace{TSTS\ldots TS}_{2m}$ είναι:

$$\mathbf{Q}_{2r+1}=\begin{bmatrix}2r+m+1 & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}2r+m-1 & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}4r & 2m\\ 2m & 0\end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1<\lambda_2$ ικανοποιούν τις σχέσεις,

$$\lambda_1+\lambda_2=trace(\mathbf{Q}_{2r+1})=2r(1-a)^2+2m(1+a^2)+(1-a^2)$$

$$\lambda_1\lambda_2=\det(\mathbf{Q}_{2r+1})=2rm(1-a)^2(1+a^2)+m^2(1-a^2)^2+m(1-a^4)$$

Έστω ο πίνακας πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_{r+1}=\begin{bmatrix}r+m+1 & 0\\ 0 & r+m\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}r+m-1 & 0\\ 0 & r+m\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}2r & 2m\\ 2m & 2r\end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί στο σχεδιασμό $d_{r+1}:\underbrace{SS\ldots S}_{r+1}\underbrace{TT\ldots T}_{r+1}\underbrace{STST\ldots STS}_{2m-1}$.

Οι ιδιοτιμές $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_1<\mu_2$ του $\mathbf{Q}_{r+1}$ ικανοποιούν τις σχέσεις,

$$\mu_1,+\mu_2=\lambda_1+\lambda_2$$

$$\mu_1\mu_2=\lambda_1\lambda_2+r^2(1-a)^4+r(1-a)^2(1-a^2)\geq\lambda_1\lambda_2$$

$$\mu_1\geq\lambda_1$$

Διότι,

$$\mu_1=\left((\mu_1+\mu_2)-\sqrt{(\mu_1+\mu_2)^2-4\mu_1\mu_2}\right)/2\geq\left((\lambda_1+\lambda_2)-\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2}\right)/2=\lambda_1.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που το r παίρνει την τιμή r=0. Έτσι το διάνυσμα των ιδιοτιμών (μ_1,μ_2) κυριαρχείται από το διάνυσμα $(\lambda_1,\ \lambda_2)$, δηλαδή, $(\mu_1,\mu_2)\prec(\lambda_1,\lambda_2)$ και $f(\mu_1)+f(\mu_2)<f(\lambda_1)+f(\lambda_2)$ για κάθε συνεχή φθίνουσα κυρτή συνάρτηση *f*.

Εφαρμόζοντας τα φίλτρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο σχεδιασμός $d_1^*:STST...STS$ της κλάσης F των σχεδιασμών της μορφής $d_{r+1}:\underbrace{SS...S}_{r+1}\underbrace{TT...T}_{r+1}\underbrace{STST...STS}_{2m-1}$, $r+m\geq 1$, είναι φ-βέλτιστος.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο σχεδιασμός $d_1^*:STST...STS$ είναι φ-βέλτιστος στην κλάση F_3.

(ii) Αν $d_{2r}:\underbrace{SS...S}_{2r}\underbrace{TSTS...TST}_{2m+1}$, τότε $d_{2r}\in F_2$ με πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_{2r}=\begin{bmatrix}2r+m & 0\\ 0 & m+1\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}2r+m-1 & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}4r-2 & 2m+1\\ 2m+1 & 0\end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τον ματασχηματισμό Κ, δηλαδή, $\mathbf{Q}_{2r1}=\dfrac{2r-2}{2r-1}\mathbf{Q}_{2r}+\dfrac{1}{2r-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{2r}\mathbf{P}'$, και έτσι,

$$\mathbf{Q}_{2r1}=\begin{bmatrix}2r+m-1 & 0\\ 0 & m+2\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}2r+m-2 & 0\\ 0 & m+1\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}4r-4 & 2m+1\\ 2m+1 & 2\end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή και μετά από r-1 βήματα καταλήγουμε στον πιο κάτω πίνακα πληροφορίας,

$$\bar{\mathbf{Q}}_{2r}=\begin{bmatrix}r+m+1 & 0\\ 0 & r+m\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}r+m & 0\\ 0 & r+m-1\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}2r & 2m+1\\ 2m+1 & 2r-2\end{bmatrix},$$

ο οποίος αντιστοιχεί στον πίνακα $\bar{d}_{2r}:\underset{r+1}{SS...S}\underbrace{TT...T}_{r}\underbrace{STST...ST}_{2m}$, μπορούμε να γράψουμε ότι $\varphi(\bar{\mathbf{Q}}_{2r})\geq\varphi(\mathbf{Q}_{2r})$ για κάθε συνάρτηση πληροφορίας φ. Τώρα, από το φίλτρο 2, ο σχεδιασμός $d_2^*:SS\underbrace{TSTS...TST}_{2r+2m-1}$ έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_2^*\geq\bar{\mathbf{Q}}_{2r}$.

Συνεπώς, ο σχεδιασμός d_2^* είναι καθολικά βέλτιστος στην κλάση F_2.

(iii) Ο σχεδιασμός $d_{2r+1}: T\,\underbrace{SS...S}_{2r+1}\underbrace{TSTS...TST}_{2m-1}$, $d_{2r+1} \in F_3$, έχει πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_{2r+1} = \begin{bmatrix} 2r+m & 0 \\ 0 & m+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} 2r+m & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 4r & 2m \\ 2m & 0 \end{bmatrix}.$$

Τώρα θεωρούμε τον πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_{r+1} = \begin{bmatrix} r+m & 0 \\ 0 & r+m+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} r+m & 0 \\ 0 & r+m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2r & 2m \\ 2m & 2r \end{bmatrix}$$

ο οποίος αντιστοιχεί στον σχεδιασμό $d_{r+1}: T\,\underbrace{SS...S}_{r+1}\underbrace{TT...T}_{r+1}\underbrace{STST...ST}_{2m-2}$.

Αν $\lambda_1, \lambda_2,\ \lambda_1 \le \lambda_2$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{2r+1}$ και $\mu_1, \mu_2,\ \mu_1 \le \mu_2$ οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{r+1}$, τότε,

$$\mu_1 + \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2r(1-a)^2 + 2m(1+a^2) + (1-a^2)$$

$$\lambda_1\lambda_2 = [2r+m+a^2(2r+m) - 4ar][m+1+a^2(m-1)] - 4a^2m^2$$

$$\mu_1\mu_2 = [r+m+a^2(r+m) - 2ar][r+m+1+a^2(r+m-1) - 2ar] - 4a^2m^2 \Rightarrow$$

$$\mu_1\mu_2 = \lambda_1\lambda_2 + r(1-a)^3[r(1-a) - (1+a)]$$

(α) Αν $r(1-a) \ge 1+a \Leftrightarrow a \le (r-1)/(r+1)$, άρα $\mu_1\mu_2 \ge \lambda_1\lambda_2$ και $\mu_1 \ge \lambda_1$, δηλαδή, d_{r+1} είναι E-βέλτιστος και $(\mu_1, \mu_2) \prec (\lambda_1, \lambda_2) \Leftrightarrow f(\mu_1) + f(\mu_2) \le f(\lambda_1) + f(\lambda_2)$ για κάθε συνεχή φθίνουσα κυρτή συνάρτηση *f*.

(β) Αν $r(1-a) < 1+a \Leftrightarrow a > (r-1)/(r+1)$, τότε $\mu_1\mu_2 < \lambda_1\lambda_2$ και $\mu_1 < \lambda_1$, δηλαδή, d_{2r+1} είναι καλύτερος, όσον αφορά το D κριτήριο, από τον d_{r+1}. Στην περίπτωση αυτή συγκρίνουμε τους σχεδιασμούς d_{2r+1} και $d_1^*: \underbrace{TSTS...TST}_{2r+2m+1}$. Η σύγκριση αυτή δίνει ότι ο $d_1^*: \underbrace{TSTS...TST}_{2r+2m+1}$ είναι D-βέλτιστος.

(iv) Αφού ο σχεδιασμός $d_1^*:\underbrace{TSTS...TST}_{2r+2m+1}$ είναι D-βέλτιστος στις κλάσεις F_3 και F_1 και επιπλέον $d_2^*:SS\underbrace{TSTS...TST}_{2r+2m-1}$ είναι καθολικά βέλτιστος στην κλάση F_2, απομένει να συγκρίνουμε τους σχεδιασμούς d_1^* και d_2^*.

Έστω οι $\mathbf{Q}_1^*, \mathbf{Q}_2^*$ οι αντίστοιχοι πίνακες πληροφορίας, $v_1, v_2, v_1 < v_2$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_1^*$ και $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2$ του $\mathbf{Q}_2^*$, τότε

$$v_1 + v_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2a > \lambda_1 + \lambda_2$$

$$v_1 v_2 = \lambda_1 \lambda_2 + 2a(1-\alpha)\big((r+m)(1-a)+a\big) > \lambda_1 \lambda_2, \quad r+m \geq 1$$

Άρα d_1^* είναι D-βέλτιστος σε όλη την κλάση $F_1 \cup F_2 \cup F_3$.

Απόδειξη Θεωρήματος 2.4.2. (i) Ο σχεδιασμός $d_4:\underbrace{SS...S}_{2m+1-r}\underbrace{TT...T}_{r}$, $0<r<n$, $d_4 \in F_4$, έχει πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} 2m+1-r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} 2m-r & 0 \\ 0 & r-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(2m-r) & 1 \\ 1 & 2(r-1) \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

Αν $m-r \geq 1 \Leftrightarrow 2m+1-2r \geq 3$, εφαρμόζοντας τον K-μετασχηματισμό, παίρνουμε,

$$\bar{\mathbf{Q}}_4 = \frac{2m-2r}{2m+1-2r}\mathbf{Q}_4 + \frac{1}{2m+1-2r}\mathbf{P}\mathbf{Q}_4\mathbf{P}' \Rightarrow$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_4 = \begin{bmatrix} 2m-r & 0 \\ 0 & r+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} 2m-r-1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(2m-r-1) & 1 \\ 1 & 2r \end{bmatrix}$$

Επαναλαμβάνοντας την πιο πάνω διαδικασία m-r φορές καταλήγουμε στον πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_4^* = \begin{bmatrix} m+1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2m & 1 \\ 1 & 2(m-1) \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Αυτός ο πίνακας πληροφορίας αντιστοιχεί στον σχεδιασμό $d_4^*:\underbrace{SS...S}_{m+1}\underbrace{TT...T}_{m}$.

Επομένως ο d_4^* είναι καθολικά βέλτιστος στην κλάση F_4.

Αν $m-r\le -2 \Leftrightarrow 2r-2m-1\ge 3$, εφαρμόζοντας τον Κ-μετασχηματισμό, παίρνουμε,

$$\bar{\mathbf{Q}}_4=\frac{1}{2r-2m-1}\mathbf{Q}_4+\frac{2r-2m-2}{2r-2m-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}_4\mathbf{P}'\Rightarrow$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_4=\begin{bmatrix}2m-r+2 & 0\\ 0 & r-1\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}2m-r+1 & 0\\ 0 & r-2\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}2(2m-r+1) & 1\\ 1 & 2(r-2)\end{bmatrix}$$

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή μέχρις ότου φτάσουμε στον σχεδιασμό $\tilde{d}_4^*: \underbrace{SS...S}_{m}\underbrace{TT...T}_{m+1}$, ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον d_4^* και είναι και στους καθολικά βέλτιστος στην κλάση F_4.

Αν $m=r$ ή $m+1=r$ παίρνουμε καθολικά βέλτιστους σχεδιασμούς ισοδύναμους με τους σχεδιασμούς $d_4^*, \tilde{d}_4^*$.

(ii) Ο σχεδιασμός $d_5: T\underbrace{SS...S}_{2m-r}\underbrace{TT...T}_{r},\ d_5\in F_5$ έχει πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_5=\begin{bmatrix}2m-r & 0\\ 0 & r+1\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}2m-r & 0\\ 0 & r-1\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}2(2m-r-1) & 2\\ 2 & 2(r-1)\end{bmatrix} \quad (A.3)$$

Θεωρούμε τώρα τον σχεδιασμό $d_5^*: T\underbrace{SS...S}_{m}\underbrace{TT...T}_{m},\ d_5^*\in F_5$, με πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_5^*=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m+1\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m-1\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}2(m-1) & 2\\ 2 & 2(m-1)\end{bmatrix} \quad (A.4)$$

Αν $\lambda_1,\lambda_2,\ \lambda_1\le,\lambda_2$ είναι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_5$ και $\mu_1,\mu_2,\ \mu_1\le\mu_2$ οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_5^*$, ισχύει ότι,

$$\lambda_1+\lambda_2=\mu_1+\mu_2=2m+1+a^2(2m-1)-4a(m-1) \quad (A.5)$$

$$\mu_1\mu_2=\lambda_1\lambda_2+(m-r)(1-a)^3\left((m-r-1)(1-a)-2a\right) \quad (A.6)$$

$$\mu_1\mu_2=\lambda_1\lambda_2+(m-r)(1-a)^3\left((m-r+1)(1-a)-2\right) \quad (A.7)$$

(α) Αν $m-r\ge 1\Leftrightarrow 2m-r\ge r+2$, η μορφή του (Α.6) εξασφαλίζει ότι $\mu_1\mu_2>\lambda_1\lambda_2\Rightarrow\mu_1>\lambda_1$.

(β) Αν $m-r \le -1 \Leftrightarrow 2m-r \le r-2$, η μορφή του (Α.7) εξασφαλίζει επίσης ότι $\mu_1\mu_2 > \lambda_1\lambda_2 \Rightarrow \mu_1 > \lambda_1$.

(γ) Αν $m-r=0 \Leftrightarrow 2m-r=r$, τότε $\mu_1\mu_2 = \lambda_1\lambda_2 \Rightarrow \mu_1 = \lambda_1$.

Άρα $(\mu_1,\mu_2) \prec (\lambda_1,\lambda_2)$ και ο σχεδιασμός $d_5^* : T\,\underset{m}{SS...S}\,\underbrace{TT...T}_{m}$, $d_5^* \in F_5$ είναι Φ-βέλτιστος στην κλάση F_5.

Απόδειξη Θεωρήματος 2.5.1

(i) Αν $m-r \ge 1$ τότε,

$$\frac{(m-1)(1-a)^2+2}{\mu_1\mu_2} < \frac{(2m-r)(1-a)^2+2a}{\lambda_1\lambda_2}$$

Αυτό ισχύει εφόσον, από την (Α.6), $\mu_1\mu_2 > \lambda_1\lambda_2$ και

$2m(1-a)^2 - r(1-a)^2 + 2a > m(1-a)^2 - (1-a)^2 + 2$, που ισχύει διότι

$$(m-r+1)(1-a)^2 + 2a - 2 \ge 2(1-a)^2 + 2a - 2 = 2a^2 - 2a > 0$$

(ii) Αν $m-r \le -1$,

$$\frac{(m-1)(1-a)^2+2}{\mu_1\mu_2} < \frac{r(1-a)^2+1-a^2}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Η πιο πάνω ανισότητα ισχύει αφού από την μορφή (Α.7), $\mu_1\mu_2 > \lambda_1\lambda_2$ και

$(m-1)(1-a)^2 + 2 < r(1-a)^2 + 1 - a^2 \Leftrightarrow$

$(m-r-1)(1-a)^2 + 1 + a^2 \le (-2)(1-a)^2 + 1 + a^2 < 0$, που ισχύει.

(iii) Αν $m-r=0$, από (Α7) $\mu_1\mu_2 = \lambda_1\lambda_2$ και

$$\frac{(m-1)(1-a)^2+2}{\mu_1\mu_2} < \frac{r(1-a)^2+2}{\lambda_1\lambda_2} \Leftrightarrow -(1-a)^2 < 0$$

που ισχύει.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.2

Αρκεί να συγκρίνουμε τους σχεδιασμούς d_4^*, d_5^*, με πίνακες πληροφορίας $\mathbf{Q}_4^*, \mathbf{Q}_5^*$ που δίνονται από την (A.2) και (A.4). Αν $\lambda_1, \lambda_2,\ \lambda_1 \le \lambda_2$ είναι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_4^*$ και $\mu_1, \mu_2,\ \mu_1 \le \mu_2$ οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_5^*$, και έτσι

$$\mu_1 + \mu_2 = (2m-1)(1-a)^2 + 2 + 2a = \lambda_1 + \lambda_2 + 2a < \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \text{(A.8)}$$

$$\mu_1\mu_2 = m(m-1)(1-a)^4 + (2m - 2am - 2a)(1-a)^2 + 4a - 4a^2$$

$$\mu_1\mu_2 = \lambda_1\lambda_2 - 3a^2 \le \lambda_1\lambda_2 \qquad \text{(A.9)}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι $\lambda_1 > \mu_1$.

Για κάθε θετικά ορισμένο $k \times k$ πίνακα το διάνυσμα των διαγώνιων στοιχείων του $(h_1, ..., h_k)$ κυριαρχείται από το διάνυσμα των ιδιοτιμών του $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ (Pukelsheim 1993). Έτσι στην περίπτωση που το $k = 2$ θα έχουμε $\lambda_1 \le h_1, \lambda_1 + \lambda_2 = h_1 + h_2$, $\lambda_1 \le \lambda_2$, $h_1 \le h_2$, δηλαδή,

$$\lambda_1 \le h_1 = m(1-a)^2 - a^2 + 2a \qquad \text{(A.10)}$$

Η δευτέρου βαθμού κυρτή συνάρτηση $f(\mu) = \mu^2 - \mu(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2$ έχει δύο ρίζες $0 < \mu_1 < \mu_2$ και αν $f(\lambda_1) < 0$, τότε $\lambda_1 > \mu_1$. Από τις (A.8), (A.9) έχουμε,

$$f(\lambda_1) = \lambda_1^2 - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha) + \lambda_1\lambda_2 + 2am(1-a)^2 + 2a^2(1-a) =$$
$$= -2a\lambda_1 + 2am(1-a)^2 + 2a^2(1-a)$$

$$f(\lambda_1) = \lambda_1^2 - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + 2a) + \lambda_1\lambda_2 - 3a^2 = -2a\lambda_1 - 3a^2 \le$$
$$-2ah_1 - 3a^2 = -2a\left((m-1)(1-a)^2 + 1\right) - 3a^2$$

και από την (A.10) εξασφαλίζεται η σχέση,

$$f(\lambda_1) \le -2a[m(1-a)^2 - a^2 + 2a] + 2am(1-a)^2 + 2a^2(1-a) = -2\alpha^2 < 0,$$

άρα το (λ_1, λ_2) κυριαρχείται από το (μ_1, μ_2) και σχεδιασμός $d_4^* : \underset{m+1}{SS\ldots S}\,\underbrace{TT\ldots T}_{m}$ και ο συζυγής του είναι φ-βέλτιστος.

Πιο κάτω παρουσιάζονται οι πίνακες βελτιστοποίησης για την περίπτωση που οι πειραματικές μονάδες είναι 5 (n=5) και δύο αγωγές (v=2). Με έντονα γράμματα φαίνονται οι βέλτιστοι σχεδιασμοί.

Πίνακας 2.1 για Α-βελτιστοποίηση

$d_1 : TSSST,\ d_2 : STSTS,\ d_3 : SSTST$

a	d_1	d_2	d_3
0.1	0.887	**0.850**	0.866
0.2	0.964	**0.901**	0.924
0.3	1.077	**0.995**	1.019
0.4	1.244	**1.149**	1.169
0.5	0.500	**1.394**	1.407
0.6	1.916	**1.799**	1.803
0.7	2.659	2.527	**2.517**
0.8	4.227	4.073	**4.045**
0.9	9.119	8.928	**8.877**

Πίνακας 2.2 για Ε-βελτιστοποίηση

$d_1 : TSSST,\ d_2 : STSTS,\ d_3 : SSTST$

a	d_1	d_2	d_3
0.1	**1.942**	1.879	1.911
0.2	**1.729**	1.627	1.680
0.3	**1.434**	1.352	1.402
0.4	**1.138**	1.086	1.127
0.5	0.867	0.840	**0.870**
0.6	0.867	0.840	**0.870**
0.7	0.629	0.614	**0.638**
0.8	0.425	0.423	**0.435**
0.9	0.113	0.114	**0.115**

Πίνακας 2.3 για D-βελτιστοποίηση

$d_1 : TSSST,\ d_2 : STSTS,\ d_3 : SSTST$

a	d_1	d_2	d_3
0.1	5.220	**5.920**	5.578
0.2	4.480	**5.683**	5.107
0.3	3.780	**5.296**	4.582
0.4	3.120	**4.771**	4.003
0.5	2.500	**4.125**	3.375
0.6	1.920	**3.379**	2.707
0.7	1.380	**2.560**	2.014
0.8	0.880	**1.699**	1.315
0.9	0.420	**0.832**	0.634

Πίνακας 2.4 για MV-βελτιστοποίηση

$d_1 : TSSST,\ d_2 : STSTS,\ d_3 : SSTST$

a	d_1	d_2	d_3
0.1	**0.503**	0.508	0.506
0.2	**0.518**	0.535	0.525
0.3	**0.548**	0.583	0.563
0.4	0.641	0.662	**0.629**
0.5	0.800	0.788	**0.741**
0.6	1.041	0.994	**0.931**
0.7	1.449	1.363	**1.281**
0.8	2.273	2.142	**2.038**
0.9	4.762	4.578	**4.447**

Κεφάλαιο 3

Πειραματικοί σχεδιασμοί γραμμής με τρεις αγωγές και εξαρτημένες παρατηρήσεις, με θετική συσχέτιση

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με σχεδιασμούς γραμμής και παρατηρήσεις που ακολουθούν αυτοπαλινδρόμηση πρώτης τάξης AR(1) με θετική παράμετρο α δηλαδή με θετική συσχέτιση. Η επίλυση του προβλήματος της εύρεσης βέλτιστων σχεδιασμών για για την εκτίμηση παραμέτρων σύμφωνα με το μοντέλο 3.1.1 εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η παράμετρος α του αυτοπαλληδρομούμενου μοντέλου. Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η περίπτωση που η παράμετρος α είναι θετική, δηλαδή βρίσκεται στο διάστημα (0,1) το οποίο είναι πιο απαιτητικό πρόβλημα και χρειάζεται μια τελείως διαφορετική προσέγγιση από την περίπτωση όπου η παράμετρος είναι αρνητική, βρίσκεται δηλαδή στο διάστημα (-1,0). Η περίπτωση της αρνητικής παραμέτρου α εξετάζεται πλήρως στο κεφάλαιο 4.

Ο Williams (1952) εξέτασε πειραματικούς σχεδιασμούς, όπου οι πειραματικές μονάδες είναι διαδοχικά τοποθετημένες σε γραμμή και τα σφάλματα είναι θετικά συσχετισμένα σύμφωνα με ένα αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο πρώτης τάξης AR(1).

Όταν υπάρχουν v αγωγές ο Williams (1952) χρησιμοποίησε δύο μοντέλα ώστε να εκτιμά τη διασπορά της διαφοράς δύο αγωγών με την ίδια ακρίβεια. Επίσης χρησιμοποίησε δύο τρόπους ανάλυσης, με και χωρίς τυχαιοποίηση. Διαπίστωσε ότι το καλύτερο μοντέλο είναι αυτό στο οποίο κάθε αγωγή είναι δίπλα σε κάθε άλλη αγωγή με την ίδια συχνότητα.

Στο κεφάλαιο αυτό σχολιάζεται η σχετική βιβλιογραφία και δίνονται απαντήσεις στην εικασία του Williams. Επίσης εξετάζεται η βέλτιστη εκτίμηση της διασποράς των αγωγών.

3.1 Το μοντέλο

Υπάρχουν v αγωγές $T_1, T_2, ..., T_v$ και σε κάθε πειραματική μονάδα εφαρμόζεται μια αγωγή. Αν $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_v$ είναι οι επιδράσεις των αγωγών, μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τη διασπορά $\mathrm{var}(\mu_r - \mu_s)$ της διαφοράς δύο οποιονδήποτε αγωγών.
Το μοντέλο είναι,

$$y_i = \mu_{d(i)} + e_i, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (3.1.1)$$

Όπου $d(i)$ είναι η αγωγή $T_j, j = 1, ..., v$ που εφαρμόζεται στην παρατήρηση i, σύμφωνα με τον σχεδιασμό d, τα τυχαία σφάλματα e_i είναι εξαρτημένα και ακολουθούν ένα πρώτης τάξης αυτοπαλλινδρομούμενο μοντέλο AR(1), $e_i = ae_{i-1} + w_i$ με $-1 < a < 1$, όπου τα w_i ασυσχέτιστα $N(0, \sigma^2)$. Επίσης, $E(e_i) = 0, \quad \mathrm{var}(e_i) = \sigma^2 / (1 - a^2)$, και έτσι $\mathrm{cov}(e_i, e_j) = \sigma^2 a^{|i-j|} / (1 - a^2)$.

Στην περίπτωση αυτή ο Williams εξέτασε δύο τρόπους ανάλυσης: (ι) Τους συστηματικούς σχεδιασμούς στους οποίους δεν γίνεται τυχαιοποίηση, εκτός από την ονομασία των αγωγών. (ιι) Την τυχαιοποίηση στην οποία επιλέγουμε τυχαία από το σύνολο των σχεδιασμών.

Αν το σύνολο των παρατηρήσεων είναι ίσο με το πλήθος των αγωγών δηλαδή $n = v$, τότε υπάρχουν $v!$ σχεδιασμοί στους οποίους τα διαδοχικά στοιχεία είναι διαφορετικά. Αν τα σφάλματα ακολουθούν την κανονική κατανομή στο μοντέλο 3.1.1 τότε η κοινή κατανομή των σφαλμάτων είναι η πολυδιάστατη κανονική. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας ο Williams εκτίμησε τη διασπορά κάθε παραμέτρου και τη διασπορά της διαφοράς δύο παραμέτρων.

Όταν υπάρχουν v αγωγές ο Williams (1952) με τον τρόπο της ανάλυσης (ι) χρησιμοποίησε τα δύο μοντέλα $II(a)$ και $II(b)$.

Αν $v = 3$: $II(a)$: $T_1T_2T_3T_1$, $II(b)$ $T_1T_1T_2T_3T_3T_1T_2T_2$.

Αν $v = 4$ $II(a)$: $T_2T_1T_2T_3T_4T_2T_3T_1T_4T_3T_1T_4T_2$, $II(b)$: $T_1T_1T_2T_3T_4T_4T_1T_3T_2T_2T_4T_1T_3T_3T_4T_2T_1$.

Στους σχεδιασμούς $II(a)$ κάθε αγωγή εμφανίζεται ίσο πλήθος φορών δίπλα σε κάθε άλλη αγωγή, στους σχεδιασμούς $II(b)$ κάθε αγωγή εμφανίζεται επίσης δίπλα στον εαυτό της μια φορά.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως όταν η εξάρτηση των σφαλμάτων είναι AR(1), $e_i = ae_{i-1} + w_i$ όπου $-1 < a < 1$ και οι τ.μ. $w_1, \dots, w_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0, \sigma^2)$, τότε $\mathrm{E}(e_i) = 0, \mathrm{var}(e_i) = \sigma^2 / (1 - a^2)$, $\mathrm{cov}(e_i, e_j) = \sigma^2 a^{|i-j|} / (1 - a^2)$ και η κατανομή των $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι η πολυδιάστατη. Θέτοντας $e_i = y_i - a\mu_{d(i)}$ ο Williams (1952), χρησιμοποιώντας το λογάριθμο της πιθανοφάνειας εκτίμησε τις παραμέτρους $\sigma^2, \rho = \sigma^2 / (1 - a^2)$ και τις $\mathrm{var}(\hat{\mu}_i), \mathrm{var}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)$ $i \neq j$ για τους σχεδιασμούς $II(a)$, $II(b)$ με τους δύο τρόπους ανάλυσης (ι) και (ιι).

Διαπίστωσε ότι ο σχεδιασμός $II(a)$ για $a \in (0,1)$ έχει μικρότερες τιμές για τη $\mathrm{var}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)$ από το σχεδιασμό $II(b)$ και από το τυχαιοποιημένο πείραμα. Επίσης για τιμές $\alpha \in (-1, 0)$ ο σχεδιασμός $II(b)$ δίνει μικρότερες διασπορές από τους $II(a)$.

Ο Kiefer (1961) απέδειξε ότι ο σχεδιασμός Williams II(a) με $0<a<1$ είναι ασυμπτωτικά καθολικά βέλτιστος καθώς το πλήθος των μονάδων πηγαίνει στο άπειρο. Οι Kiefer and Wynn (1981,1984) έδωσαν ασυμπτωτικά βέλτιστους σχεδιασμούς για την εκτίμηση διασποράς της διαφοράς των αγωγών όταν η εξάρτηση ακολουθεί ένα μοντέλο AR(p). Οι Kunert και Martin (1987) έδειξαν ότι ο σχεδιασμός Williams II(a) είναι A και D βέλτιστος για μικρές τιμές του n και έδωσαν αντιπαραδείγματα σχεδιασμών που είναι καλύτεροι σε σύγκριση με τον σχεδιασμό Williams II(a) ως προς την E-βελτιστοποίηση.

Ο Atkinson (1969) εφάρμοσε τη διαδικασία του Papadakis (1937) στο σχεδιασμό Williams II(a) για n =9 μονάδες και διαπίστωσε ότι οι εκτιμήσεις των διαφορών των αγωγών είναι σχεδόν ταυτόσημα με αυτά που επιτυγχάνονται με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφλανειας. Σημειώνεται ότι στην μέθοδο Papadakis δεν γίνεται υπόθεση για συγκεκριμένο μοντέλο πιθανότητας.

Στο κεφάλαιο αυτό το ενδιαφέρον είναι στην εύρεση βέλτιστων σχεδιασμών για την εκτίμηση της διασποράς της επίδρασης των αγωγών, $\operatorname{var}(\hat{\mu}_i),\ \ i=1,\ldots,v$.

Αποδεινύεται ότι ο σχεδιασμός $II(a)$ δεν είναι E-βέλτιστος και δίνονται σχεδιασμοί που είναι καλύτεροι ως προς το κριτήριο E, όπου ελαχιστοποιείται η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα πληροφορίαςδιασπορά συμβολικά γράφεται $\min_d \max_i (\lambda(Q_d))$.

Όταν το πλήθος των αγωγών είναι v=3, δίνονται πίνακες που δίνουν τις τιμές των κριτηρίων E, A, D για τις $\operatorname{var}(\hat{\mu}_i)\ \ i=1,2,3$ και για διάφορες τιμές του $a\in(0,1)$ και του πλήθους n των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται σε ανταγωνιστικούς σχεδιασμούς.

3.2 Σχεδιασμοί με τρεις αγωγές και 0<α<1

Για ευκολία συμβολίζουμε τις τρεις αγωγές με *S*, *T*, *R*. Στην ενότητα αυτή δίνουμε όλους τους σχεδιασμούς για $n = 3, 4, 5, 6$ και τις τιμές των κριτηρίων E, A, D, MV, όταν $a = 0.1, 0.2, ..., 0.9$.

Σε κάθε σχεδιασμό δίνεται ο 3×3 πίνακας πληροφορίας $\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1}$ και υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$$\mathbf{V} = \frac{1}{1-a^2}\begin{bmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ a & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a \\ a^{n-1} & \cdots & a & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V}^{\mathbf{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -a & 1+a^2 & -a \\ 0 & \cdots & 0 & -a & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν F_n είναι το σύνολο των σχεδιασμών για δοσμένο n, υπολογίζονται τα κριτήρια: $E = \min_i(\lambda_i)$, $A = (1/\lambda_1) + (1/\lambda_2) + (1/\lambda_3)$, $D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$,

$MV = \max_i(v_{ii})$ όπου $\mathbf{V} = (v_{ij})$ και $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{Q})$.

Ο σχεδιασμός που δίνει το ελάχιστο A, MV και μέγιστο E, D είναι αντίστοιχα E-, A-, MV-, D-βέλτιστος.

Με τα φίλτρα που έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο, δείξαμε ότι όταν $a \in (0,1)$, μόνο μια αγωγή μπορεί να επαναλαμβάνεται δίπλα στον εαυτό της στους βέλτιστους σχεδιασμούς.

Ο σχεδιασμός $II(b)$ του Williams δεν ικανοποιεί αυτό τον κανόνα, οπότε δεν μπορεί να είναι βέλτιστος. Όλοι οι μη ισοδύναμοι ανταγωνιστικοί σχεδιασμοί για n=3, 4, 5, 6 είναι:

(i) $n = 3,\ 0 < a < 1$, ο μόνος σχεδιασμός είναι $d : STR$.

(ii) $n = 4,\ 0 < a < 1$, $\{d_1 : SSTR,\ d_2 : STSR,\ d_3 : STRS,\ d_4 : TSSR\} \in F_4$.

(iii) $n = 5,\ 0 < a < 1$, $\{d_2 : TSSSR,\ d_7 : TSSTR, d_{10} : STRST\} \in F_5$.

(iv) $n=6,\ \ 0<a<1, \left\{\begin{array}{l} d_1: TSSSSR,\ d_2: SSSTRS,\ d_3: TSSSRS,\ d_4: SSSTRT,\ d_5: TSSSTR, \\ d_6: STSSRS,\ d_7: TSSRTR,\ d_8: SSTRST,\ d_9: SRTSRT \end{array}\right\} \in F_6$

Για n=5 έχουμε στην αρχή τους 12 σχεδιασμούς, $d_1: SSSTR,\ d_2: TSSSR,\ d_3: SSTRS,\ \ d_4: SSTSR,\ \ d_5: STSRS,\ \ d_6: TSSRS,$ $d_7: TSSTR,\ d_8: SSTRT,\ d_9: TSSRT,\ d_{10}: STRST,\ d_{11}: STRTS,\ d_{12}: STSRT$.

Μερικοί από αυτούς διαγράφονται διότι άλλοι σχεδιασμοί είναι ισοδύναμοι με αυτούς ή άλλοι είναι καλύτεροι, όπως δείχνει η επόμενη διαδικασία με την εφαρμογή των φίλτρων.

Σημείωση. Εάν d_1, d_2 είναι δύο σχεδιασμοί με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ και: (i) $g(\mathbf{Q}_2) \geq g(\mathbf{Q}_1)$, για όλες τις συναρτήσεις πληροφορίας g, τότε γράφουμε $d_1 \rightarrow d_2$ ή ότι d_2 υπερκυριαρχεί τον d_1 ($d_2 \prec d_1$ το d_1 κυριαρχεί του d_2) και έτσι ο δεύτερος σχεδιασμός είναι καλύτερος από τον πρώτο.

(ii) Εάν $g(\mathbf{Q}_2) = g(\mathbf{Q}_1)$ γράφουμε $d_1 \Leftrightarrow d_2$, δηλαδή οι σχεδιασμοί είναι ισοδύναμοι.

$d_{10} \Leftrightarrow d_{12}$ (φίλτρο 1v), $d_1 \rightarrow d_{12}$ (φίλτρα 2 και 3), $d_3 \Rightarrow d_{12}$ (φίλτρα 2, 5), $d_4 \rightarrow d_{10}$ (φίλτρα 2,5, 1(vi)), $d_5 \rightarrow d_{10}$ (φίλτρο 2), $d_6 \rightarrow d_{10}$ (φίλτρα 2, 5), $d_8 \rightarrow d_{10}$ (φίλτρα 2, 4), $d_9 \rightarrow d_{10}$ (φίλτρα 2, 4) $d_9 \rightarrow d_{10}$ (φίλτρο 2), $d_{12} \rightarrow d_{10}$ (φίλτρο 1(v)).

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για n=6.

3.3 Πίνακες

Για σχεδιασμούς με πλήθος μονάδων n = 4, 5, 6, 7, 10, 13 και για τιμές $a = 0.1, \ldots, 0.9$ δίνονται οι E, D, A, MV-βέλτιστοι σχεδιασμοί.

(i) Πίνακας 3.1 βέλτιστων σχεδιασμών, $n=4,\ 0<a<1$

$d_1: SSTR,\ d_2: STSR,\ d_3: STRS,\ d_4: TSSR.$

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
E	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4

D	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3
A	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3
MV	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4

(ii) Πίνακας 3.2 βέλτιστων σχεδιασμών, $n = 5,\ 0 < a < 1$

$d_1 : TSSSR,\ d_2 : TSSTR,\ d_3 : STRST$

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
E	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2
D	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3
A	d_3	d_3	d_3	d_3	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2
MV	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_2	d_2	d_2	d_2

(iii) Πίνακας 3.3 βέλτιστων σχεδιασμών, $n = 6,\ 0 < a < 1$

$d_1 : TSSSSR, d_2 : SSSTRS, d_3 : TSSSRS, d_4 : SSSTRT, d_5 : TSSSTR,$

$d_6 : STSSRS, d_7 : SSTRST, d_8 : TSSRTR, d_9 : STRSTR.$

A	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
E	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9
D	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9
A	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9
MV	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9	d_9

(iv) Πίνακας 3.4 βέλτιστων σχεδιασμών, $n = 7,\ 0 < a < 1$.

$d_1 : STRSTRS$, $d_2 : RSTRSTS$, $d_3 : RSRTRST$, $d_4 : STRRRST$.

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
E	d_2	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_2

D	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1
A	d_1	d_1	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2
MV	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2

(v) Πίνακας 3.5 βέλτιστων σχεδιασμών, $n=10,\ 0<a<1$.

$d_1: STRSTRSTRS$, $d_2: RSTRSTSTST$, $d_3: RSTRSRSRTR$, $d_4: SRTSRRTSRT$

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
E	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_2	d_2
D	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1
A	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_4	d_4	d_4
MV	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_2	d_4	d_4

(vi) Πίνακας 3.6 βέλτιστων σχεδιασμών, $n=13,\ 0<a<1$.

$d_1: STRSTRSTRSTRS$, $d_2: RSTRSTRSRSTSR$, $d_3: TSTRSTRSRSRTS$,

$d_4: STRSTRRRSTRST$, $d_5: RSTRSTSTSTSTS$

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
E	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_4	d_5
D	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1	d_1
A	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3	d_3
MV	d_5	d_5	d_5	d_5	d_5	d_5	d_5	d_5	d_3

Παρατηρούμε ότι για n=4, 5, 6 ο σχεδιασμός $STRSTR\cdots$ είναι A-, D-βέλτιστος ενώ για n=6 είναι και E-βέλτιστος και τέλος για n=7, 10, 13 είναι D-βέλτιστος.

3.4 Ε- και Α-Βελτιστοιποίηση

Μας χρειάζονται μερικές ιδιότητες από πίνακες που θα χρησιμοποιήσουμε.

Σχόλιο 1. Αν $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A & g & e \\ g & A & e \\ e & e & B \end{bmatrix}$, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{Q}$ έχουν τις ιδιότητες,

(i) $\lambda_2 = A - g,\ 2\lambda_{1,3} = A + B + g \mp \left((A - B + g)^2 + 8e^2\right)^{1/2}$

(ii) $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = A(A + 2B) - g^2 - 2e^2$

(iii) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = (A - g)\left((A + g)B - 2e^2\right)$

Λήμμα 3.4.1 Αν $X > 0$ και $X^2 - Y^2 > 0$, τότε $X > Y$

Απόδειξη. $X^2 - Y^2 = (\mathrm{X} - \mathrm{Y})(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) > 0$, τότε θα είναι $X > Y$ και $X > -Y \Rightarrow \mathrm{X} > |\mathrm{Y}| \geq \mathrm{Y}$ ή $X < Y$ και $X + Y < 0 \Rightarrow \mathrm{X} < -\mathrm{Y}$, τότε $X < 0$, αυτό όμως αντιβαίνει στην υπόθεση $X > 0$.

Εξετάζουμε πρώτα το σχεδιασμό τύπου Williams $n = 3m + 1$.

Λήμμα 3.4.2 Αν $d^* : \underbrace{RST \ldots RST}_{3m} R$, ο πίνακας πληροφορίας είναι,

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 0 & m & m \\ m & 0 & m \\ m & m & 0 \end{bmatrix},$$

με ιδιοτιμές $\lambda_2 = m(1 + a^2) + am$,

$2\lambda_{1,3} = 2m(1 + a^2) + 1 - a^2 - am \pm \sqrt{(1 + am - a^2)^2 + 8a^2m^2}$,

$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3m^2(1 + a^2 + a^4) + 2m(1 - a^4)$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = m^3(1 - 2\alpha^3 + a^6) + m^2(1 - a^6)$

$\lambda_{\min} = \lambda_1$.

Απόδειξη. $A = m(1+a^2), B = m(1+a^2)+1-a^2, g = -am, e = -am$, τότε από το σχόλιο 1 παίρνουμε τα αποτελέσματα, επίσης $\lambda_{\min} = \lambda_1$ διότι $2\lambda_1 = 2m(1+a^2)+1-a^2-am-\sqrt{(1+am-a^2)^2+8a^2m^2} < 2\lambda_2 = 2m(1+a^2)+2am \Rightarrow$

$\sqrt{(1+am-a^2)^2+8a^2m^2} > 1+am-a^2 > 1-a^2-3am$ που ισχύει.

Ο σχεδιασμός Williams με $n = 3m+1,\ d_1 : \underbrace{RST...RST}_{3m}R.$ δεν είναι Ε βέλτιστος.

Προς τούτο αποδεικνύουμε ότι,

α) Αν $n = 6m+1,\ d_2 : \underbrace{STR...STR}_{3m}R\underbrace{RST...RST}_{3m}$, τότε ο d_2 είναι Ε-βέλτιστος συγκρινόμενος με το σχεδιασμό Williams $n = 6m+1,\ d_2^* : \underbrace{RST...RST}_{3(2m)}R.$

β) Αν $n = 6m+4,\ d_3 : SR\underbrace{TSR...TSR}_{3m}\underbrace{RTS...RTS}_{3m}RT$, τότε ο d_3 είναι Ε-βέλτιστος συγκρινόμενος με το σχεδιασμό Williams $n = 6m+4,\ d_3^* : \underbrace{RST...RST}_{3(2m+1)}R.$

Λήμμα 3.4.3 Ο σχεδιασμός d_2:

(i) έχει ιδιοτιμές $\mu_2 = 2m(1+a^2)-a^2+2am$,

$2\mu_{1,3} = 4m(1+a^2)+1-4a-a^2-2am \pm \sqrt{(1+2a^2-4a+2am)^2+8a^2(2m-1)^2}$,

(ii) $\mu_1 < \mu_2$.

Απόδειξη. Ο πίνακας πληροφορίας του d_2 είναι,

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2m & & \\ & 2m & \\ & & 2m+1 \end{bmatrix} + a^2\begin{bmatrix} 2m-1 & & \\ & 2m-1 & \\ & & 2m+1 \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 0 & 2m & 2m-1 \\ 2m & 0 & 2m-1 \\ 2m-1 & 2m-1 & 4 \end{bmatrix}$$

(i) Από Λήμμα 3.1 είναι $A_2 = 2m(1+a^2)-a^2,\quad B_2 = 2m(1+a^2)+1+a^2-4a,$ $g = -2am, e = -a(2m-1)$, που μας δίνουν τις ιδιοτιμές. (ii $2\mu_1 < 2\mu_2 \Rightarrow$ $2\mu_2 - 2\mu_1 > 0 \Leftrightarrow$

$-1+4a+4am+\sqrt{(1+2a^2-4a+2am)^2+8a^2(2m-1)^2} > 0$, τότε

$-1+4a+4am+(1+2a^2-4a+2am)>0 \Rightarrow 2a^2+6am>0$, που ισχύει.

Λήμμα 3.4.4 Αν $0<a<1$ και n=6m+1, τότε ο $d_2: \underbrace{STR...STR}_{3m} R \underbrace{RST...RST}_{3m}$ είναι

Ε-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον $d_2^*: \underbrace{RST...RST}_{3(2m)} R$.

Απόδειξη. Οι μικρότερες ιδιοτιμές των d_2^*, d_2 είναι,

$$2\lambda_1 = 4m(1+a^2)+1-a^2-2am-\sqrt{(1+2am-a^2)^2+32a^2m^2},$$

$$2\mu_1 = 4m(1+a^2)+1-4a-a^2-2am-\sqrt{(1+2a^2-4a+2am)^2+8a^2(2m-1)^2}.$$

Τότε $2\mu_1-2\lambda_1>0 \Rightarrow$

$$4a+\sqrt{(1+2am-a^2)^2+32a^2m^2} > \sqrt{(1+2a^2-4a+2am)^2+8a^2(2m-1)^2} \Rightarrow$$

$$8a^2+8a\sqrt{(1+2am-a^2)^2+32a^2m^2} > (3a^2-4a)^2+2(3a^2-4a)(1-a^2+2am)-32a^2m$$

$$8\sqrt{(1+2am-a^2)^2+32a^2m^2} > 4am(3a-12)-8+14a-16a^2+3a^3.$$

Όμως για $m \geq 1$ ισχύει $4am(12-3a)+8 > 8+48a-12a^2 > 14a-16a^2+3a^3$ που ισχύει. Οπότε $\mu_1>\lambda_1$.

Λήμμα 3.4.5 Ο σχεδιασμός d_3 (i) έχει ιδιοτιμές $\nu_2 = 2m(1+a^2)+1+2am$,

$$2\nu_{1,3} = (4m+2)(1+a^2)+1-2a-2am \pm \sqrt{(1-2a+2am+2a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}$$

(ii) $\nu_1<\nu_2$

Απόδειξη. (i) Ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού d_3 είναι,

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 2m+1 & & \\ & 2m+1 & \\ & & 2m+2 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} 2m & & \\ & 2m & \\ & & 2m+2 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 0 & 2m & 2m+1 \\ 2m & 0 & 2m+1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 2 \end{bmatrix}$$

Τότε $A_3 = 2m(1+a^2)+1$ $B_3 = (2m+2)(1+a^2)-2a$, $g=-2am$, $e=-a(2m+1)$ και από το σχόλιο 1 παίρνουμε τις ιδιοτιμές.

(ii) $\nu_1<\nu_2 \Rightarrow 2(\nu_2-\nu_1)>0 \Rightarrow$

$$6am-1-2a^2+2a+\sqrt{(1-2a+2am+2a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}>0 \Rightarrow$$

$6am-(1-a)^2-1+(1-2a+2am+2a^2)=8am>0$, οπότε $\nu_1<\nu_2$.

Λήμμα 3.4.6 Αν $0<a<1$ και $n=6m+4$, τότε ο σχεδιασμός $d_3: SR\underbrace{TSR...TSR}_{3m}\underbrace{RTS...RTS}_{3m}RT$ είναι Ε-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον $d_3^*: \underbrace{RST...RST}_{3(2m+1)}R$.

Απόδειξη. Οι μικρότερες ιδιοτιμές ν_1, λ_1 των d_3, d_3^* ικανοποιούν τη σχέση $2\nu_1>2\lambda_1$ που γράφεται,

$$(4m+2)(1+a^2)+1-2a-2am-\sqrt{(1-2a+2am+2a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}>$$

$$(4m+2)(1+a^2)+1-a^2-a(2m+1)-\sqrt{(1+a(2m+1)-a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}\Rightarrow$$

$$a^2-a+\sqrt{(1+a(2m+1)-a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}>\sqrt{(1-2a+2am+2a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{(1+a(2m+1)-a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}>(a-a^2)+\sqrt{(1-2a+2am+2a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}\Rightarrow$$

$$(1+a-a^2+2am)^2-(a-a^2)^2-(1-2a+2am+2a^2)^2>$$
$$2(a-a^2)\sqrt{(1-2a+2am+2a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}\Rightarrow$$

$$2(a-a^2)\left(3(1+2am)-2(a-a^2)\right)>2(a-a^2)\sqrt{(1-2a+2am+2a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}\Rightarrow$$

$$3(1+2am)-2(a-a^2)>\sqrt{(1-2a+2am+2a^2)^2+8a^2(2m+1)^2}\Rightarrow$$

$$9(1+2am)^2+4(a-a^2)^2-12(a-a^2)(1+2am)>(1+2am-2(a-a^2)^2+8a^2(2m+1)^2\Rightarrow$$

$(1+2am)^2-(a-a^2)(1+2am)>a^2(2m+1)^2$ και αν $m\geq 1$, τότε $(1-a)(1+4am-2a^2)>0$.

Λήμμα 3.4.7 Αν $0<a<1$ και υπό την συνθήκη εξάρτησης AR(1), τότε ο σχεδιασμός $d: T\underbrace{STR...STR}_{3(m-1)}SRS$ είναι Α-βέλτιστος για την εκτίμηση των επιδράσεων των αγωγών συγκρινόμενος με τον $d^*: \underbrace{STR...STR}_{3m}S$ για κάποιες τιμές $0 < a < 1$.

Απόδειξη.

$$f(\mu) = \det(\mathbf{Q}_d - \mu\mathbf{I}_3) = -\mu^3 + \mu^2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - \mu(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3) + \mu_1\mu_2\mu_3.$$

Ο συντελεστής του $-\mu$ είναι

$$\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 = 3m^2(1 + a^2 + a^4) + 2m(1 - a^4) - 3a^2 \text{ και}$$

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = m^3(1 - 2a^3 + a^6) + m^2(1 - a^6) - ma^2(1 - a)^2 - a^2(1 - a^2).$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3m^2(1 + a^2 + a^4) + 2m(1 - a^4),$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = m^3(1 - 2a^3 + a^6) + m^2(1 - a^6).$$

$$A_d^* = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{3m(1 + a^2 + a^4) + 2(1 - a^4)}{m^2(1 - 2a^3 + a^6) + m(1 - a^6)}.$$

$$A_\delta = \frac{\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3}{\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{3m^2(1 + a^2 + a^4) + 2m(1 - a^4) - 3a^2}{m^3(1 - 2a^2 + a^6) + m^2(1 - a^6) - ma^2(1 - a)^2 - a^2(1 - a^2)}$$

Έτσι, $A_d^* - A_d > 0$ και προκύπτει ότι

$$a^2\left[6m^2a(1-a)(1-a^3) - m(2 - 4a + 2a^2 - a^4 + 2a^5 - 2a^6) - 2(1 - a^2)(1 - a^6)\right] > 0$$

Επομένως ο σχεδιασμός d είναι A-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον d* για $m \geq 1$ όπως φαίνεται και στον επόμενο πίνακα.

Πίνακα 3.7
A-βελτιστοποίηση μεταξύ των σχεδιασμών
$d: T\underbrace{STR...STR}_{3(m-1)}SRS$ και $d^*: \underbrace{STR...STR}_{6m+3}S$
για την εκτίμηση των επιδράσεων των αγωγών

$0 < \rho < 1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$m = 1, n = 4$	d^*	d^*	d^*	d^*	d^*	d^*	d^*	d^*	d

$m=2, n=7$	d^*	d^*	d	d	d	d	d	d	d
$m=3, n=10$	d^*	d	d	d	d	d	d	d	d
$m=4, n=13$	d	d	d	d	d	d	d	d	d
$m=5, n=16$	d	d	d	d	d	d	d	d	d

<u>Κεφάλαιο 4</u>

Πειραματικοί σχεδιασμοί γραμμής με τρεις αγωγές και εξαρτημένες παρατηρήσεις, με αρνητική συσχέτιση

Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα μονοδιάστατων εξαρτημένων σχεδιασμών. Εν τούτοις δεν υπάρχουν πολλές αναφορές σε περιπτώσεις που η παράμετρος α του αυτοπαλιδρομούμενου μοντέλου πρώτης τάξης είναι αρνητική. Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε σχεδιασμούς γραμμής με ομοιογενή πληθυσμό, όπου οι πειραματικές μονάδες είναι τοποθετημένες σε σειρά και οι παρατηρήσεις ακολουθούν πρώτης τάξης αυτοπαλλινδρομούμενο μοντέλο (AR(1)) με παράμετρο α αρνητική. Στη βιβλιογραφία που εντοπίζεται, οι ερευνητές εξετάζουν κυρίως βέλτιστους σχεδιασμούς για την εκτίμηση των διασπορών των διαφορών των αγωγών ανά δύο, $\mathrm{var}(\tau_i - \tau_j)$, όπου $\tau_1, \ldots, \tau_v$ οι αγωγές, δηλαδή εκτιμούν οι αντιθέσεις αγωγών. Εξετάζουμε το μοντέλο κύριων επιδράσεων και σε κάθε μονάδα εφαρμόζεται μια από τις v αγωγές. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τους βέλτιστους σχεδιασμούς εκτιμώντας τις επιδράσεις των αγωγών. Αυτό το κεφάλαιο είναι συνέχεια του κεφαλαίου 3.

Στο παρόν κεφάλαιο όπως αναφέραμε εξετάζουμε την περίπτωση των βέλτιστων σχεδιασμών γραμμής με τρεις αγωγές, όπου η παράμετρος α παίρνει τιμές στο διάστημα (-1,0).

Καταρχήν περιγράφουμε το μοντέλο όπως προκύπτει στην περίπτωση αυτή και δίνουμε τον D-βέλτιστο σχεδιασμό για τέσσερις αγωγές και για όλες τις τιμές του n. Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετή για να βρεθεί ο D-βέλτιστος σχεδιασμός για πέντε ή περισσότερες αγωγές.

Ακολούθως δίνονται οι κλάσεις των σχεδιασμών που συγκρίνονται για τρεις αγωγές και στο τέλος δίνονται οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για όλες τις τιμές του n. Σε αυτή την περίπτωση δίνουμε τους φ-βέλτιστους σχεδιασμούς όταν το πλήθος των μονάδων είναι πολλαπλάσιο του τρία, διαφορετικά αποδεικνύουμε ποιοι είναι οι A-, D-, E-βέλτιστοι σχεδιασμοί για όλες τις τιμές του n. Στα Παραρτήματα 4.1 και 4.2 βρίσκονται οι αποδείξεις των Θεωρημάτων και Λημμάτων.

4.1 Το μοντέλο

Όταν έχουμε v αγωγές, το μοντέλο που προκύπτει σε διανυσματική μορφή,

$$\mathbf{y} = \mu_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \mu_v\mathbf{x}_v + \mathbf{e}, \quad E(\mathbf{ee}') = \sigma^2\mathbf{V} \tag{4.1.1}$$

Το $n\times 1$ διάνυσμα $\mathbf{x}_j = (x_{1j},\ldots,x_{nj})'$ έχει $x_{ij} = 1$ αν στην μονάδα i εφαρμόζεται η αγωγή T_j, $j = 1,\ldots,v$ και 0 αλλού, οπότε $x_s^{'}x_t = \begin{cases} n_s & \text{αν } s = t \\ 0 & \text{αν } s \neq t \end{cases}$., όπου n_s είναι το πλήθος των μονάδων στις οποίες εφαρμόζεται η αγωγή $T_s, s = 1,\ldots,v$

Τα σφάλματα ακολουθούν ένα αυτό-παλινδρομούμενο μοντέλο AR(1),

$$e_i - a\,e_{i-1} = w_i,\ |a|<1,\ i=1,\ldots,n, \qquad (4.1.2)$$

Τα w_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μεση τιμή 0 και διασπορά σ^2, τότε $\operatorname{cov}(e_s, e_{s+t}) = \sigma^2\alpha^{|t|}/(1-\alpha^2)$ και $\operatorname{var}(\mathbf{e}) = \sigma^2\mathbf{V}$.

Ο πίνακας διασποράς **V** και ο αντίστροφός του δίνονται στην κεφάλαιο 2 (βλπ σχέσεις 2.2.4 και 2.2.6).

Οι παράμετροι που μας ενδιαφέρουν είναι $\mu_1,\ldots,\mu_v$ και ο πίνακας πληροφορίας είναι, $\mathbf{Q} = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X},\ \mathbf{X} = (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_v)$, οπότε $\mathbf{Q} = \mathbf{A} + a^2\mathbf{B} - a\mathbf{C}$ με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n_v \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{n}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{n}_v \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2n_{11} & n_{12}+n_{21} & \cdots & n_{1v}+n_{v1} \\ n_{12}+n_{21} & 2n_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n_{v-1,v}+n_{v,v-1} \\ n_{1v}+n_{v1} & \cdots & n_{v-1,v}+n_{v,v-1} & 2n_{vv} \end{bmatrix}. \qquad (4.1.3)$$

Όπου $n_i,\ i=1,\ldots,v$ είναι το πλήθος των μονάδων στις οποίες εφαρμόζεται η αγωγή T_i, στις θέσεις $1,2,\ldots,n$, $\tilde{n}_i$ είναι το πλήθος των μονάδων στις οποίες εφαρμόζεται η αγωγή T_i στις εσωτερικές θέσεις 2,…,n-1, $n_{ii},\ i=1,\ldots,v$ είναι το πλήθος των εμφανίσεων του ζεύγους T_iT_i στις διαδοχικές θέσεις (1,2), (2,3), …, (n-1,n), $n_{ij}\ i\neq j$ είναι το πλήθος των εμφανίσεων του ζεύγους των αγωγών $T_jT_i\ \ i\neq j$ στις θέσεις (1,2), (2,3),…, (n-1,n).

4.2 D-βέλτιστοι σχεδιασμοί για v αγωγές

Όπως έχει αποδειχθεί και στο κεφάλαιο 2 για ανεξάρτητες παρατηρήσεις και v αγωγές ο καθολικά βέλτιστος σχεδιασμός έχει $|n_i - n_j|\le 1$, για $i\neq j,\ i,j=1,\ldots,v$. Ο πίνακας πληροφορίας **Q** δίνεται από τη σχέση (3.3), και έτσι

$$\text{trace}(\mathbf{Q}) = n + a^2(n-2) - 2a(n_{11} + \cdots + n_{w}) . \quad (4.2.1)$$

Το ίχνος Τ του πίνακα πληροφορίας είναι συνάρτηση πληροφορίας, γραμμική (κυρτή και κοίλη) και αύξουσα (Pukelsheim, 1993).

Τ-βέλτιστος λέγεται ο σχεδιασμός που μεγιστοποιεί το ίχνος του πίνακα πληροφορίας. Στην κλάση των Τ-βέλτιστων σχεδιασμών μας ενδιαφέρει ο D-βέλτιστος σχεδιασμός.

Εδώ δίνουμε τη λύση εάν $-1 < a < 0$ και $v = 4$, με όμοιο τρόπο λύνουμε το πρόβλημα και για $v > 4$.

Θεώρημα 4.2.1 Για v= 4 αγωγές και συνολικό πλήθος παρατηρήσεων n, όταν $-1 < a < 0$ η κλάση των Τ-βέλτιστων σχεδιασμών είναι:

$$d^* : \underbrace{T_1 T_1 ... T_1}_{n_1} \underbrace{T_2 T_2 ... T_2}_{n_2} \underbrace{T_3 T_3 ... T_3}_{n_3} \underbrace{T_4 T_4 ... T_4}_{n_4}, \quad n_i + n_2 + n_3 + n_4 = n,\ n_i \geq 1\ i = 1,2,3,4 .$$

Στην κλάση αυτή ο D-βέλτιστος σχεδιασμός έχει $n_1 \geq n_4 \geq n_3 \geq n_2$ και (1) Εάν n=0mod4, τότε $n_1 = n_4 = n_3 = n_2 = n/4$, (2) Εάν n≡1mod4, τότε $n_1 = (n+3)/4$, $n_2 = n_3 = n_4 = (n-1)/4$, (iii) Εάν n≡2mod4, τότε $n_1 = n_4 = (n+2)/4$, $n_2 = n_3 = (n-2)/4$, (iv) Εάν n≡3mod4, τότε $n_1 = n_3 = n_4 = (n+1)/4$, $n_2 = (n-3)/4$.

Απόδειξη. Για δοσμένες τιμές των n_1, n_2, n_3, n_4,από την (3.3) ο πίνακας πληροφορίας **Q** έχει μέγιστο ίχνος όταν τα $n_{11},...,n_{w}$ επιτυγχάνουν τη μέγιστη τιμή $n_{ii} = n_i - 1, i = 1,...,v$ και ο Τ βέλτιστος σχεδιασμός είναι $d : \underbrace{T_1 T_1 ... T_1}_{n_1} \underbrace{T_2 T_2 ... T_2}_{n_2} \cdots \underbrace{T_v T_v\ ... T_v}_{n_v}$, και οι $v!$διατάξεις, τότε,

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x_2 & -a & \ddots & \vdots \\ & -a & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & x_{v-1} & -a \\ sym & & & -a & \tilde{x}_v \end{bmatrix},\ x_i=n_i(1-a)^2+2a\ ,\ \tilde{x}_i=x_i-a^2. \qquad (4.2.2)$$

Εάν $\det(\mathbf{Q})=|\mathbf{Q}|$, $v=4$,τότε

$$|\mathbf{Q}|=\tilde{x}_1x_2x_3\tilde{x}_4-a^2(x_2\tilde{x}_1+\tilde{x}_1\tilde{x}_4+\tilde{x}_4x_3)+a^4. \qquad (4.2.3)$$

Η αντίστροφη ακολουθία έχει την ίδια ορίζουσα. Έτσι παίρνουμε $\tilde{x}_1\geq\tilde{x}_4$, αυτό σημαίνει ότι $n_1\geq n_4$.

(1) Η μέγιστη τιμή $|\mathbf{Q}^*|$ της $|\mathbf{Q}|$ λαμβάνεται όταν $n_1\geq n_4\geq n_3\geq n_2$. Αυτό διότι

(i) Εναλλάσσοντας τα x_2,x_3 παίρνουμε $|\mathbf{Q}_1|=\tilde{x}_1x_2x_3\tilde{x}_4-a^2(x_3\tilde{x}_1+\tilde{x}_1\tilde{x}_4+\tilde{x}_4x_2)+a^4$ και $|\mathbf{Q}^*|-|\mathbf{Q}_1|=-a^2(\tilde{x}_1-\tilde{x}_4)(x_2-x_3)\geq 0$, όμως $\tilde{x}_1\geq\tilde{x}_4$, τότε $x_2\leq x_3\Leftrightarrow n_2\leq n_3$.

ii) Εναλλάσσοντας τα x_1,x_3 παίρνουμε, $|\mathbf{Q}_2|=\tilde{x}_3x_2x_1\tilde{x}_4-a^2(x_2\tilde{x}_3+\tilde{x}_3\tilde{x}_4+\tilde{x}_4x_1)+a^4$ και

$$|\mathbf{Q}^*|-|\mathbf{Q}_2|=x_2\tilde{x}_4(\tilde{x}_1x_3-x_1\tilde{x}_3)-a^2x_2(\tilde{x}_1-\tilde{x}_3)-a^2\tilde{x}_4(\tilde{x}_1-\tilde{x}_3)-a^2\tilde{x}_4(x_3-x_1)\Leftrightarrow$$

$$|\mathbf{Q}^*|-|\mathbf{Q}_2|=x_2\tilde{x}_4(\tilde{x}_1x_3-x_1\tilde{x}_3)-a^2x_2(\tilde{x}_1-\tilde{x}_3)-a^2\tilde{x}_4(x_3-\tilde{x}_3+\tilde{x}_1-x_1)\Leftrightarrow$$

$|\mathbf{Q}^*|-|\mathbf{Q}_2|=a^2(1-a)^2(n_1-n_3)x_2(\tilde{x}_4-1)$ και $\tilde{x}_4-1=n_4(1-a)^2+2a-a^2-1\geq 0$, τότε $n_1\geq n_3$.

iii) Εναλλάσσοντας τα x_3,x_4 παίρνουμε, $|\mathbf{Q}_3|=\tilde{x}_1x_2x_4\tilde{x}_3-a^2(x_2\tilde{x}_1+\tilde{x}_1\tilde{x}_3+x_4\tilde{x}_3)+a^4$ και

$$|\mathbf{Q}^*|-|\mathbf{Q}_3|=(x_3\tilde{x}_4-\tilde{x}_3x_4)(\tilde{x}_1x_2-a^2)+a^2\tilde{x}_1(\tilde{x}_3-\tilde{x}_4)\Leftrightarrow$$

$$|\mathbf{Q}^*|-|\mathbf{Q}_3|=-a^2(x_3-x_4)(\tilde{x}_1x_2-a^2-\tilde{x}_1)=-a^2(1-a)^2(n_3-n_4)(\tilde{x}_1(x_2-1)-a^2).$$

Όμως $\tilde{x}_1(x_2-1)-a^2=\left(n_1(1-a)^2+2a-a^2\right)\left(n_2(1-a)^2+2a-1\right)-a^2\geq 0$, τότε $n_3\leq n_4$.

Δείξαμε ότι ο D βέλτιστος πίνακας έχει $n_1\geq n_4\geq n_3\geq n_2$.

Παρατηρούμε ότι $x_i=(n_i-1)(1-a)^2+(1-a)^2+2a\geq 1+a^2,\ i=1,2,3,4$ και

$$\tilde{x}_i=(n_i-1)(1-a)^2+(1-a)^2+2a-a^2\geq 1,\ i=1,2,3,4,$$

$$\tilde{x}_ix_j-a^2=\left((n_i-1)(1-a)^2+1\right)\left((n_j-1)(1-a)^2+1+a^2\right)-a^2\geq 1$$

Αν $n_1\geq n_4+2$ και $G=|\mathbf{Q}(n_1-1,n_2,n_3,n_4+1)|-|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3,n_4)|$, τότε

$$G=x_2x_3(n_1-n_4-1)(1-a)^4-a^2\left((1-a)^2\left(n_1-n_4\right)+(1-a)^4(n_1-n_4-1)+(1-a)^4(n_2-n_3)\right)\Rightarrow$$

$$G=(1-a)^4\left((n_1-n_4-1)(x_2x_3-a^2)+a^2(n_2-n_3)\right)$$

Όμως $x_2x_3-a^2=(n_2-1)(n_3-1)(1-a)^4+(1-a)^2(1+a^2)(n_2+n_3-2)+1+a^2+a^4\Rightarrow$

$$x_2x_3-a^2\geq(1-a)^2a^2(n_2+n_3-2)+1+a^2+a^4\Rightarrow$$

$$G\geq(1-a)^4\left((1-a)^2a^2(n_2+n_3-2)+a^2(n_2-n_3)\right)\Rightarrow$$

$$G\geq(1-a)^4a^2\left(n_2((1-a)^2+1)+n_3((1-a)^2-1)\right)>0.$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία ο D-βέλτιστος σχεδιασμός θα έχει $n_1=n_4$ ή $n_1=n_4+1$.

Αν $n_4\geq n_3+2$ και $G=|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3+1,n_4-1)|-|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3,n_4)|$, τότε

$$G=(1-a)^2\tilde{x}_1x_2(\tilde{x}_4-x_3-(1-a)^2)-a^2(1-a)^2\left((\tilde{x}_4-x_3-(1-a)^2\right)+a^2(1-a)^2\tilde{x}_1\Rightarrow$$

$G=(1-a)^2(\tilde{x}_4-x_3-(1-a)^2)(\tilde{x}_1x_2-a^2)+a^2(1-a)^2\tilde{x}_1 \Rightarrow a^2(1-a)^2\tilde{x}_1 \geq a^2(1-a)^2$,

$\tilde{x}_1x_2-a^2=\left((n_1-1)(n_2-1)(1-a)^4+(1-a)^2(n_1+n_2-2)+a^2(1-a)^2(n_1-1)+1\right)\geq 1$,

$\tilde{x}_4-x_3-(1-a)^2=((1-a)^2(n_4-n_3-1)-a^2 \geq (1-a)^2-a^2=1-2a>1$, τότε

$G\geq (1-a)^2(1+a^2)>1$

Επανάληψη αυτής της διαδικασίας θα δώσει $n_4=n_3$ ή $n_4=n_3+1$

Εάν $n_3\geq n_2+2$,

$|\mathbf{Q}(n_1,n_2+1,n_3-1,n_4)|=|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3,n_4)|+(1-a)^2\tilde{x}_1\tilde{x}_4\left(x_3-x_2-(1-a)^2\right)-a^2(1-a)^2\left(\tilde{x}_1-\tilde{x}_4\right)\Rightarrow$

$|\mathbf{Q}(n_1,n_2+1,n_3-1,n_4)|-|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3,n_4)|=(1-a)^4\tilde{x}_1\tilde{x}_4\left(n_3-n_2-1\right)-a^2(1-a)^4\left(n_1-n_4\right)\Rightarrow$

$\tilde{x}_1\tilde{x}_4\left(n_3-n_2-1\right)-a^2\left(n_1-n_4\right)\geq \tilde{x}_1\tilde{x}_4-a^2\left(n_1-n_4\right)$, όμως

$\tilde{x}_1=n_1(1-a)^2+2a-a^2=(n_1-1)(1-a)^2+1, \tilde{x}_4=(n_4-1)(1-a)^2+1$, τότε

$\tilde{x}_1\tilde{x}_4-a^2\left(n_1-n_4\right)=\left((n_1-1)(1-a)^2+1\right)\left((n_4-1)(1-a)^2+1\right)-a^2\left(n_1-n_4\right)\Rightarrow$

$\tilde{x}_1\tilde{x}_4-a^2\left(n_1-n_4\right)=(n_1-1)(n_4-1)(1-a)^4+(n_1-1)(1-a^2)+(n_4-1)(1+a^2)\geq 0$ με ισότητα μόνο αν $n_1=n_4=1$που δεν συμβαίνει διότι $n_1\geq n_4\geq n_3\geq n_2+2$, οπότε αν $n_3\geq n_2+2$, τότε $|\mathbf{Q}(n_1,n_2+1,n_3-1,n_4)|-|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3,n_4)|>0$.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, ο D βέλτιστος σχεδιασμός θα έχει $n_3=n_2$ ή $n_3=n_2+1$.

Αν $n_1=n_4+1=n_3+2$ και $G=|\mathbf{Q}(n_1-1,n_2,n_3+1,n_4)|-|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3,n_4)|$, τότε

$G=x_2\tilde{x}_4\left((1-a)^2(\tilde{x}_1-x_3-(1-a)^2\right)+a^2(1-a)^2x_2\Rightarrow$

$$G = x_2\tilde{x}_4\left((1-a)^2(n_1-n_3-1)-a^2\right)+a^2(1-a)^2x_2 \geq x_2\tilde{x}_4\left((1-a)^2-a^2\right)+a^2(1-a)^2x_2 \Rightarrow$$

$$G = x_2\tilde{x}_4(1-2a)+a^2(1-a)^2x_2 > 1.$$

Εάν $n_1 = n_4+1 = n_3+1 = n_2+2$ και $G = |\mathbf{Q}(n_1-1,n_2+1,n_3,n_4)|-|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3,n_4)| \Rightarrow$

$$G = (1-a)^2(\tilde{x}_1 - x_2-(1-a)^2)(x_3\tilde{x}_4-a^2)+a^2(1-a)^2\tilde{x}_4 \Rightarrow$$
$$G = (1-a)^2\left((n_1-n_2-1)(1-a)^2-a^2\right)(x_3\tilde{x}_4-a^2)+a^2\tilde{x}_4 \geq (1-a)^2(1-2a) > 1.$$

Εάν $n_1 = n_4 = n_3+1 = n_2+2$ και $G = |\mathbf{Q}(n_1,n_2+1,n_3,n_4-1)|-|\mathbf{Q}(n_1,n_2,n_3,n_4)| \Rightarrow$

$$G = (1-a)^2\tilde{x}_1x_3\left(\tilde{x}_4-x_2-(1-a)^2\right)+a^2(1-a)^2x_3 \Rightarrow$$

$$G = (1-a)^2\tilde{x}_1x_3\left((n_4-n_2-1)(1-a)^2-a^2\right)+a^2(1-a)^2x_3 > 1$$

οπότε ο D-βέλτιστος σχεδιασμός έχει $|n_i - n_j| \leq 1,\ i \neq j, i = 1,2,3,4$

(2) Αν $n = 0 \bmod 4 \Rightarrow n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n/4$ αλλιώς θα είχαμε $|n_i - n_j| \geq 2$, Αν $n = 1 \bmod 4 \Rightarrow n_1 = (n+3)/4, n_2 = n_3 = n_4 = (n-1)/4$, αν $n = 2 \bmod 4 \Rightarrow$ $n_1 = n_4 = (n+2)/4, n_2 = n_3 = (n-2)/4$, αν $n = 3 \bmod 4 \Rightarrow$ $n_1 = n_4 = n_3 = (n+1)/4$, $n_2 = (n-3)/4$.

4.3 Τρεις αγωγές *S, T, R*

Με τρεις αγωγές είναι μεγάλο το πλήθος των προς σύγκριση σχεδιασμών και αυξάνεται όσο αυξάνει το πλήθος n των μονάδων.

Μια διέξοδος είναι να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές φιλτραρίσματος που δόθηκαν στο κεφάλαιο 2, (φίλτρα 1-5) ώστε να μειωθούν οι σχεδιασμοί. Σε κάθε σχεδιασμό μετέχουν όλες οι αγωγές με μία τουλάχιστον παρατήρηση. Αν μια αγωγή δεν μετέχει στο σχεδιασμό, δεν μπορεί να εκτιμηθεί.

Ονομάζουμε F την κλάση των σχεδιασμών που δεν μπορεί να μειωθεί περισσότερο με τη χρήση των φίλτρων 1,2,3,4,5.

Λήμμα 4.3.1 Εάν $-1 < a < 0$, ο σχεδιασμός $d_1 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S+1}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R+1}$ υπερκυριαρχείται από το σχεδιασμό $d_2 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}SR$, τότε $g(\mathbf{Q}_1) \geq g(\mathbf{Q}_2)$, όπου g(.) είναι συνάρτηση πληροφορίας.

Απόδειξη. $\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} n_S+1 & & 0 \\ & n_T & \\ 0 & & n_R+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} n_S & & 0 \\ & n_T & \\ 0 & & n_R \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2n_S & 1 & 0 \\ 1 & 2(n_T-1) & 1 \\ 0 & 1 & 2n_R \end{bmatrix}$ και

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} n_S+1 & & 0 \\ & n_T & \\ 0 & & n_R+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} n_S & & 0 \\ & n_T & \\ 0 & & n_R \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(n_S-1) & 1 & 2 \\ 1 & 2(n_T-1) & 1 \\ 2 & 1 & 2(n_R-1) \end{bmatrix}, \quad \text{τότε,}$$

$$\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 = -a \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \text{ άρα } g(\mathbf{Q}_1) \geq g(\mathbf{Q}_2).$$

Θεώρημα 4.3.1 Εάν $-1 < a < 0$ και το συνολικό πλήθος των μονάδων είναι n, μόνο οι πιο κάτω 5 κλάσεις σχεδιασμών προς σύγκριση λαμβάνονται υπόψη:

$F_0 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}$, $F_1 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}S$, $F_2 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T$,

$F_3 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}TS$, $F_4 : T\underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τους κανόνες φιλτραρίσματος, οι πιθανές ακολουθίες (κλάσεις σχεδιασμών), με n μονάδες, είναι:

(1) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}$, (2) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}S$, (3) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T$,

(4) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}TS$, (5) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}TSR$, (6) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}S\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}$,

(7) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}S\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}S$, (8) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}S\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T$, (9) $T\underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T$.

Οι κλάσεις (5), (6), (7), (8) είναι εκτός σύγκρισης (Λήμμα 3.3.1) και

(5) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}TSR \Leftrightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{n_s}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}STR \rightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{n_s+1}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T+1}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R+1}$,

(6) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}S\underbrace{RR\ldots R}_{n_R} \Leftrightarrow S\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R} \Leftrightarrow T\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_S}$,

όμως, $T\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R} \Leftrightarrow \underbrace{RR\ldots R}_{n_R}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}T \Leftrightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{n_R}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_S}T$,

(7) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}S\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}S \Leftrightarrow S\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}S \Leftrightarrow T\underbrace{SS\ldots S}_{n_T}\underbrace{TT\ldots T}_{n_S}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T$,

(8) $\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}S\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T \rightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}S\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}T \Leftrightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{n_S+1}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T+1}$.

Στην (8) εφαρμόζεται το Φίλτρο 3.

4.4 Συγκρίσεις μέσα και μεταξύ των κλάσεων

Σε κάθε κλάση και για κάθε τιμή του n=3m, 3m+1, 3m+2 υπάρχει ένας σχεδιασμός που είναι φ-βέλτιστος είτε υπάρχουν περισσότεροι από ένας σχεδιασμοί οι οποίοι συγκρίνονται για φ-βελτιστοποίηση. Επομένως μόνο αυτοί οι σχεδιασμοί λαμβάνονται υπόψη ως προς A-, D-, E-βελτιστοποίηση. Οι 5 δυνατοί σχεδιασμοί δίνονται στο Θεώρημα 4.3.1.

4.4.1 Βέλτιστοι σχεδιασμοί μέσα στις κλάσεις

Λέμε ότι ο σχεδιασμός d_1 κυριαρχείται από το σχεδιασμό d_2 αν $d_1 \prec d_2$, οπότε ο d_1 είναι φ βέλτιστος συγκρινόμενος με τον d_2.

Θεώρημα 4.4.1 Εάν $-1 < a < 0$, από όλους τους σχεδιασμούς της κλάσης F_0 αρκεί να εξεταστούν οι σχεδιασμοί: (i) Όταν n=3m, $d_0^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, (ii) όταν n=3m+1, $d_{11}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, $d_{12}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m-1}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$, $d_{13}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, (iii) όταν n=3m+2, $d_{21}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$, $d_{22}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$.

Η απόδειξη βρίσκεται στο παράρτημα.

Θεώρημα 4.4.2 Εάν $-1 < a < 0$, από όλους τους σχεδιασμούς της κλάσης F_1, αρκεί να εξεταστεί ο σχεδιασμός $d_{14}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$, με n=3m+1.

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα.

Θεώρημα 4.4.3 Εάν $-1 < a < 0$,για κάθε σχεδιασμό d_1 της κλάσης F_2, υπάρχει σχεδιασμός d_2 της κλάσης F_0 που κυριαρχείται από τον d_1.

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα.

Θεώρημα 4.4.4 Εάν $-1 < a < 0$, για κάθε σχεδιασμό d_1 της κλάσης F_3 υπάρχει σχεδιασμός d_2 των κλάσεων F_0 ή F_1 που κυριαρχείται από τον d_1.

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα.

Θεώρημα 4.4.5 Εάν $-1 < a < 0$, για κάθε σχεδιασμό d_1 της κλάσης F_4, υπάρχει σχεδιασμός d_2 της κλάσης F_0 που κυριαρχείται από τον d_1.

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα.

Συμπερασματικά από τα Θεωρήματα 4.4.1 – 4.4.5 απομένουν για σύγκριση για φ-βελτιστοποίηση οι πιο κάτω σχεδιασμοί.

$(i)\ n = 3m:\ d_0^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$.

$(ii)\ n = 3m+1:\ d_{11}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m},\ d_{12}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m-1}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}\ \ d_{13}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m},$

$d_{14}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$.

$(iii)\ n = 3m+2:\ d_{21}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1},\ d_{22}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$.

Στο επόμενο υποκεφάλαιο συγκρίνουμε τους σχεδιασμούς μεταξύ των κλάσεων για να βρούμε βέλτιστους σχεδιασμούς για κάθε τιμή του n.

4.4.2 Βέλτιστοι σχεδιασμοί μεταξύ των κλάσεων

Θεώρημα 4.4.6 Εάν $-1 < a < 0$ και n=3m, ο σχεδιασμός $d_0^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ είναι φ-βέλτιστος συγκρινόμενος με κάθε άλλο σχεδιασμό.

Απόδειξη. Είναι ο μόνος φ-βέλτιστος σχεδιασμός για n=3m.

Θεώρημα 4.4.7 Εάν $-1 < a < 0$ και n=3m+1 αρκεί να εξεταστούν τέσσερις σχεδιασμοί για σύγκριση ως προς την E-A-D βελτιστοποίηση:

(i) A-βέλτιστος είναι ο σχεδιασμός $d_{13}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ για $m \geq 2$ και αν $-1 < a \leq -0.618034$ όταν m=1. Για m=1 και $-0.618034 \leq a < 0$ ο A-βέλτιστος σχεδιασμός είναι ο $d_{14}: STRS$.

(ii

) D-βέλτιστος είναι ο σχεδιασμός $d_{13}^*:\underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ για $m\geq 2$. Για m=1 οι σχεδιασμοί $d_{13}^*:SSTR$ και $d_{11}^*:STTR$ είναι D-βέλτιστοι.

(iii) E-βέλτιστος είναι ο σχεδιασμός $d_{11}^*:\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ για $-1<a<-0.618$ και ο σχεδιασμός $d_{14}^*:\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$ είναι E-βέλτιστος για $-0.618<a<0$, $m\geq 1$.

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα.

Θεώρημα 4.4.8 Εάν $-1<a<0$ και n=3m+2, ο σχεδιασμός $d_{21}^*:\underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$ είναι E- και D-βέλτιστος, η A-βελτιστοποίηση των d_{21}^* ή d_{22}^* εξαρτάται από την τιμή του α όπως δίνεται στον παρακάτω πίνακα 4.1.

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα.

Πίνακας 4.1

A-βελτιστοποίηση των d_{21}^*, d_{22}^*, n=3m+2

m	1	2	5	10	20	50
d_{21}	$-1<a<-0.402$	$-1<a<-0.535$	$-1<a<-0.642$	$-1<a<-0.683$	$-1<a<-0.705$	$-1<a<-0.718$
d_{22}	$-0.402<a<0$	$-0.535<a<0$	$-0.642<a<0$	$-0.683<a<0$	$-0.705<a<0$	$-0.718<a<0$

Παράρτημα 4.1

Στο Παράρτημα 4.1 δίνονται οι αποδείξεις Θεωρημάτων και κάποια Λήμματα που απαιτούνται.

Στις αποδείξεις χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες: (i) Εάν $X>0$, $Y>0$, τότε $X>Y\Leftrightarrow X^2>Y^2$.

(ii) $X<(X^2+8a^2)^{1/2}<X-3a$, για $a<0$ και $X>0$.

(iii) $3a^2 < (a^4 + 8a^2)^{1/2} < -3a$, for $a < 0$,

$1 - 2a + a^2 < ((1-2a)^2 + 8a^2)^{1/2} < 1 - 2a + 4a^2$, για $-1 < a < 0$.

(iv) Ο πίνακας $\mathbf{Q}$ και οι ιδιοτιμές του δίνονται πιο κάτω,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A & g & e \\ g & A & e \\ e & e & B \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = A - g, \ 2\lambda_{1,3} = A + B + g \mp ((A - B + g)^2 + 8e^2)^{1/2}.$$

Εάν g=0, τότε $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Αυτό χρησιμοποιείται σε πολλές αποδείξεις για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα πληροφορίας.

Σημείωση. (ι) Όταν γράφουμε $\lambda(\mathbf{Q}_1) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$ εννοούμε ότι το διάνυσμα των ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{Q}_1$ κυριαρχείται από το διάνυσμα των ιδιοτιμών του $\mathbf{Q}_d$.
(ιι) Για τον καθολικά βέλτιστο σχεδιασμό γράφουμε για συντομία κβσ.

Α1. Κλάση $F_0 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}$

Για διευκόλυνση γράφουμε $F_0 = F_{01} \cup F_{02}$ όπου, F_{01} είναι υποκλάση της F_0 για την οποία ισχύει $n_S + n_R = 0 \bmod 2$ και F_{02} είναι υποκλάση της F_0 για την οποία $n_S + n_R = 1 \bmod 2$.

Λήμμα Α1. (ι) Ο κβσ στην υποκλάση F_{01} έχει $n_S = n_R$. (ιι) Ο κβς στην υποκλάση F_{02} έχει $n_S = n_R + 1$ ή $n_S = n_R - 1$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $n_S \geq n_R$, αλλιώς μεταθέτουμε τα γράμματα S και R και αντιστρέφουμε τη σειρά.

Ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d \in F_0$ είναι,

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} n_S & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} n_S - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & n_R - 1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(n_S - 1) & 1 & 0 \\ 1 & 2(n_T - 1) & 1 \\ 0 & 1 & 2(n_R - 1) \end{bmatrix}$$

Εάν $n_S \geq n_R + 2$ εφαρμόζουμε τον Κ-μετασχηματισμό, και έτσι μετατρέπεται σε,

$$\bar{\mathbf{Q}}_d = (1 - (n_S - n_R)^{-1})\,\mathbf{Q}_d + (n_S - n_R)^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}_d\mathbf{P}', \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ τότε}$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_d = \begin{bmatrix} n_S - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & n_R + 1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} n_S - 2 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(n_S - 2) & 1 & 0 \\ 1 & 2(n_T - 1) & 1 \\ 0 & 1 & 2n_R \end{bmatrix},$$

Έτσι $g(\bar{\mathbf{Q}}_d) \geq g(\mathbf{Q}_d)$ για κάθε συνάρτηση πληροφορίας g και $\bar{\mathbf{Q}}_d$ είναι ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $\bar{d} : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S - 1}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R + 1}$. Επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του Κ-μετασχηματισμού μας δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αυτό σημαίνει ότι (ι) όταν $n_S + n_R = 2\bar{n}$ ο κβς έχει $n_S = n_R = \bar{n}$ και (ιι) εάν $n_S + n_R = 2\bar{n} + 1$, ο κβσ έχει $n_S = \bar{n} + 1,\ n_R = \bar{n}$, διότι πήραμε $n_S > n_R$ •

Α1.1 Υποκλάση F_{01}

Έχουμε δείξει στο Λήμμα Α1, ότι οι μόνοι σχεδιασμοί προς σύγκριση σε αυτή την υποκλάση έχουν $n_S = n_R = \bar{n}$.

Λήμμα Α2. Ο φ-βέλτιστος σχεδιασμός στην υποκλάση F_{01} έχει $\bar{n} - 2 \leq n_T \leq \bar{n} + 1$.

Απόδειξη. (ι) Εάν $d \in F_{01}$ με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_d$, $n_S = n_R = \bar{n}$ και $n_T = n - 2\bar{n} \geq \bar{n} + 2$, (ιι) Εάν d_1 είναι ο σχεδιασμός με $n_S = n_R = \bar{n} + 1$ και $n_T = n - 2\bar{n} - 2$ με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_1$, τότε οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_1$ κυριαρχούνται από τις ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_d$.

Ο πίνακας πληροφορίας $\mathbf{Q}_d$ του σχεδιασμού $d \in F_{01}$ είναι,

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} \overline{n} & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & \overline{n} \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} \overline{n}-1 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & \overline{n}-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(\overline{n}-1) & 1 & 0 \\ 1 & 2(n_T-1) & 1 \\ 0 & 1 & 2(\overline{n}-1) \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές: $\lambda_2 = \overline{n}(1-a)^2 + 2a - a^2$,

$2\lambda_{1,3} = (\overline{n}+n_T)(1-a)^2 + 4a - a^2 \mp \left(\left((n_T-\overline{n})(1-a)^2 + a^2 \right)^2 + 8a^2 \right)^{1/2}$, και έτσι $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Εάν $n_T = n - 2\overline{n} \geq \overline{n} + 2$ παίρνουμε τον σχεδιασμό $d_1 \in F_0$ με $n_S = n_R = \overline{n}+1$ και $n_T = n - 2\overline{n} - 2$ και πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_1$, θα αποδείξουμε ότι $\lambda(\mathbf{Q}_1) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$.

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_1$ είναι, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\mu_2 = (\overline{n}+1)(1-a)^2 + 2a - a^2$,

$2\mu_{1,3} = (\overline{n}+n_T-1)(1-a)^2 + 4a - a^2 \mp \left(\left((n_T-\overline{n}-3)(1-a)^2 + a^2 \right)^2 + 8a^2 \right)^{1/2}$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$.

Εάν $n_T \geq \overline{n}+3$, τότε $\lambda_1 < \mu_1$ και $\lambda_3 > \mu_3 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 > \mu_1 + \mu_2$. Αυτό επειδή,

$$2(\mu_1 - \lambda_1) = -(1-a)^2 + \left(\left((n_T-\overline{n})(1-a)^2 + a^2 \right)^2 + 8a^2 \right)^{1/2} - \left(\left((n_T-\overline{n}-3)(1-a)^2 + a^2 \right)^2 + 8a^2 \right)^{1/2} > 0.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα $X < \left(X^2 + 8a^2 \right)^{1/2} < X - 3a, \quad X > 0, \quad a < 0$, παίρνουμε

$$2(\mu_1 - \lambda_1) > -(1-a)^2 + \left((n_T-\overline{n})(1-a)^2 + a^2 \right) - \left(\left((n_T-\overline{n}-3)(1-a)^2 + a^2 \right) - 3a \right) =$$
$2(1-a)^2 + 3a = 2 - a + 2a^2 > 0$, το οποίο ισχύει.

Παρατηρούμε ότι $2(\lambda_3 - \mu_3) = 2(\mu_1 - \lambda_1) + 2(1-a)^2 > 0$, τότε $\lambda_3 > \mu_3$, και επομένως $\lambda(\mathbf{Q}_1) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$.

Τώρα εάν $n_T = \overline{n}+2$ ισχύει επίσης $\lambda_1 < \mu_1$ και $\lambda_3 > \mu_3$, και έτσι

$$2(\mu_1-\lambda_1)=-(1-a)^2+\left(\left(2(1-a)^2+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left(\left((-1)(1-a)^2+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}>0\Leftrightarrow$$

$$\left(\left(2(1-a)^2+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}>(1-a)^2+\left(1-4a+12a^2\right)^{1/2}\Leftrightarrow$$

$$\left(2(1-a)^2+a^2\right)^2+8a^2>(1-a)^4+1-4a+12a^2+2(1-a)^2\left(1-4a+12a^2\right)^{1/2}\Leftrightarrow$$

$2-8a+18a^2-20a^3+8a^4>2(1-a)^2\left(1-4a+12a^2\right)^{1/2}$, το οποίο ισχύει αφού $\left(1-4a+12a^2\right)^{1/2}<1-2a+4a^2$.

Επίσης, $2(\lambda_3-\mu_3)=2(\mu_1-\lambda_1)+2(1-a)^2>0$, που αληθεύει.

Έτσι εάν $n_T\geq\bar{n}+2$, τότε $\lambda(\mathbf{Q}_1)\prec\lambda(\mathbf{Q}_d)$.

(ιι) Εάν $d\in F_{01}$ και $n_S=n_R=\bar{n},\ n_T\leq\bar{n}-3$, με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_\delta$, παίρνουμε τον σχεδιασμό $d_2\in F_{01}$ με $n_S=n_R=\bar{n}-1,\ n_T=n-2\bar{n}+2\leq\bar{n}-1$ με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_2$, θα δείξουμε ότι $\lambda(\mathbf{Q}_2)\prec\lambda(\mathbf{Q}_d)$.

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_2$ δίνονται, $\mu_2=(\bar{n}-1)(1-a)^2+2a-a^2$,

$$2\mu_{1,3}=(\bar{n}+n_T+1)(1-a)^2+4a-a^2\mp\left(\left((\bar{n}-n_T-3)(1-a)^2-a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}.$$

Έτσι $\mu_1+\mu_2+\mu_3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

Καταρχήν δείχνουμε ότι $\lambda_1<\mu_1$. Εδώ $2(\mu_1-\lambda_1)$ είναι ίσο με,

$$-(1-a)^2+\left(\left((\bar{n}-n_T)(1-a)^2-a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left(\left((\bar{n}-n_T-3)(1-a)^2-a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}>0.$$

Εάν $n_T\leq\bar{n}-4\Leftrightarrow\bar{n}-n_T\geq4$, τότε $2(\mu_1-\lambda_1)>1-a^2>0$ διότι

$$-(1-a)^2+\left((\bar{n}-n_T)(1-a)^2-a^2\right)-\left((\bar{n}-n_T-3)(1-a)^2-a^2-3a\right)=2-a+a^2>0$$

Παράλληλα, $2(\lambda_3-\mu_3)=2(\mu_1-\lambda_1)+2(1-a)^2>0\Leftrightarrow\mu_1+\mu_2<\lambda_1+\lambda_2$.

Εάν $n_T = \bar{n} - 3$, τότε

$$2(\mu_1 - \lambda_1) = -(1-a)^2 + \left(\left(3(1-a)^2 - a^2\right)^2 + 8a^2\right)^{1/2} - \left(a^4 + 8a^2\right)^{1/2} > 0 \Leftrightarrow$$

$2(\mu_1 - \lambda_1) > -(1-a)^2 + (3(1-a)^2 - a^2) - (-3a) = 2 - a + a^2 > 0$, το οποίο ισχύει.

Επίσης $2(\lambda_3 - \mu_3) = 2(\mu_1 - \lambda_1) + 2(1-a)^2 > 0$, έτσι $\lambda(\mathbf{Q}_2) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$.

Τα αποτελέσματα των (ι) και (ιι) αποδεικνύουν ότι ο φ-βέλτιστος σχεδιασμός στην υποκλάση F_{01} έχει $\bar{n} - 2 \le n_T \le \bar{n} + 1$, με $n_T + 2\bar{n} = n$.

Πόρισμα Α1. Εάν $-1 < a < 0$ και n=3m, ο σχεδιασμός $d_0^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\,\underbrace{TT\ldots T}_{m}\,\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ είναι φ-βέλτιστος στην F_{01}.

Απόδειξη. Όταν n=3m, τότε $\bar{n} - 2 \le n_T = 3m - 2\bar{n} \le \bar{n} + 1 \Rightarrow \bar{n} = n_T = m$.

Πόρισμα Α2. Εάν $-1 < a < 0$ και n=3m+1, στην υποκλάση F_{01} υπάρχουν δύο σχεδιασμοί προς σύγκριση για Φ-βελτιστοποίηση: $d_{11}^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\,\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\,\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, $d_{12}^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\,\underbrace{TT\ldots T}_{m-1}\,\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$, $m \ge 2$.

Απόδειξη. Εάν n=3m+1, τότε $\bar{n} - 2 \le n_T = 3m + 1 - 2\bar{n} \le \bar{n} + 1 \Rightarrow \bar{n} = m$ ή $\bar{n} = m + 1$.

Πόρισμα Α3. Έαν $-1 < a < 0$ και n=3m+2, ο σχεδιασμός $d_{21}^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\,\underbrace{TT\ldots T}_{m}\,\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$ είναι φ-βέλτιστος στην F_{01}.

Απόδειξη. Όταν n=3m+2, τότε $\bar{n} - 2 \le n_T = 3m + 2 - 2\bar{n} \le \bar{n} + 1 \Rightarrow$ $3m + 1 \le 3\bar{n} \le 3m + 4 \Leftrightarrow \bar{n} = m + 1, n_T = m$.

Α1.2 Υποκλάση F_{02}

Σε αυτή την υποκλάση, από το Λήμμα Α1, οι μόνοι σχεδιασμοί για σύγκριση έχουν $n_S = \bar{n}+1, n_R = \bar{n}$.

Λήμμα Α3. Ο φ-βέλτιστος σχεδιασμός στην υποκλάση F_{02} έχει $\bar{n} \le n_T \le \bar{n}+1$.

Απόδειξη. Ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d \in F_{02}$ είναι,

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} \bar{n}+1 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n} \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} \bar{n} & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n}-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2\bar{n} & 1 & 0 \\ 1 & 2(n_T-1) & 1 \\ 0 & 1 & 2(\bar{n}-1) \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας το κανόνα του μέσου (average rule) ο πίνακας πληροφορίας $\bar{\mathbf{Q}}_d$ είναι ίσος με,

$$\begin{bmatrix} \bar{n}+0.5 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n}+0.5 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} \bar{n}-0.5 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n}-0.5 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2\bar{n}-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2(n_T-1) & 1 \\ 0 & 1 & 2\bar{n}-1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$g(\bar{\mathbf{Q}}_d) \ge g(\mathbf{Q}_d)$ για κάθε συνάρτηση πληροφορίας g, συνεπάγεται $\lambda(\bar{\mathbf{Q}}_d) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$
.

Οι ιδιοτιμές του $\bar{\mathbf{Q}}_d$ είναι, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ όπου $\lambda_2 = (\bar{n}+0.5)(1-a)^2 + 2a - a^2$,

$$2\lambda_{1,3} = (\bar{n}+n_T+0.5)(1-a)^2 + 4a - a^2 \mp \left(\left((n_T-\bar{n}-0.5)(1-a)^2 + a^2\right)^2 + 8\right)^{1/2}.$$

(ι) Όταν $n_T \ge \bar{n}+2$ θεωρούμε το πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_{1+} = \begin{bmatrix} \bar{n}+1 & 0 & 0 \\ 0 & n_T-1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n}+1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} \bar{n} & 0 & 0 \\ 0 & n_T-1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n} \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2\bar{n} & 1 & 0 \\ 1 & 2(n_T-2) & 1 \\ 0 & 1 & 2\bar{n} \end{bmatrix},$$ με

ιδιοτιμές, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, $\mu_2 = (\bar{n}+1)(1-a)^2 + 2a - a^2$,

$$2\mu_{1,3} = (\bar{n}+n_T)(1-a)^2 + 4a - a^2 \mp \left(\left((n_T-\bar{n}-2)(1-a)^2 + a^2\right)^2 + 8a^2\right)^{1/2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lambda(\mathbf{Q}_{1+}) \prec \lambda(\bar{\mathbf{Q}}_d) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$, που σημαίνει, $\lambda_1 \le \mu_1$ και $\lambda_3 \ge \mu_3$.

Αρχικά σημειώνουμε ότι $\mathrm{trace}(\mathbf{Q}_{1+}) = \mathrm{trace}(\bar{\mathbf{Q}}_d) = \mathrm{trace}(\mathbf{Q}_d)$,

$$2(\mu_1-\lambda_1) = -0.5(1-a)^2 + \left(\left((n_T-\bar{n}-0.5)(1-a)^2+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2} - \left(\left((n_T-\bar{n}-2)(1-a)^2+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2} > 0 \Rightarrow$$
$$-0.5(1-a)^2 + \left((n_T-\bar{n}-0.5)(1-a)^2+a^2\right) - \left((n_T-\bar{n}-2)(1-a)^2+a^2-3a\right) > 0 \Leftrightarrow$$
$(1-a)^2+3a = 1+a^2+a > 0$, το οποίο ισχύει.

Επίσης $2(\lambda_3-\mu_3) = 2(\mu_1-\lambda_1)+(1-a)^2 > 0$.

(ιι) Όταν $n_T \le \bar{n}-1$ θεωρούμε τον πίνακα πληροφορίας,

$$\mathbf{Q}_{2+} = \begin{bmatrix} \bar{n} & 0 & 0 \\ 0 & n_T+1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n} \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} \bar{n}-1 & 0 & 0 \\ 0 & n_T+1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n}-1 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2\bar{n}-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2n_T & 1 \\ 0 & 1 & 2\bar{n}-2 \end{bmatrix}, \qquad \text{με}$$

ιδιοτιμές, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, $\mu_2 = \bar{n}(1-a)^2 + 2a - a^2$,

$$2\mu_{1,3} = (\bar{n}+n_T+1)(1-a)^2 + 4a - a^2 \mp \left(\left((\bar{n}-n_T-1)(1-a)^2-a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}.$$

Θα δείξουμε ότι $\lambda(\mathbf{Q}_{2+}) \prec \lambda(\bar{\mathbf{Q}}_d) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$, δηλαδή $\lambda_1 \le \mu_1$ και $\lambda_3 \ge \mu_3$.

Εάν $\bar{n}-n_T \ge 2 \Leftrightarrow \bar{n}-2 \ge n_T \Rightarrow$

$$2(\lambda_3-\mu_3) = -0.5(1-a)^2 + \left(\left((\bar{n}-n_T+0.5)(1-a)^2-a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2} - \left(\left((\bar{n}-n_T-1)(1-a)^2-a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2} > 0.$$

Εάν $\bar{n}-n_T = 1 \Rightarrow$ $2(\lambda_3-\mu_3) > 0$ είναι ίσο με,

$$-0.5(1-a)^2 + \left(\left(1.5-3a+0.5a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2} - \left(a^4+8a^2\right)^{1/2} > 0 \Rightarrow$$

$$\left(\left(1.5-3a+0.5a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2} > 0.5a^2-3a > 0.5a^2 + \left(a^4+8a^2\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$\left(1.5-3a+0.5a^2\right)>0.5(1-a)^2+(-3a)=0.5-4a+0.5a^2$ που ισχύει.

Επίσης, $2(\mu_1-\lambda_1)=2(\lambda_3-\mu_3)+(1-a)^2>0$.

Επομένως εάν $\bar{n}-n_T\geq 1\Rightarrow \lambda(\mathbf{Q}_{2+})\prec\lambda(\bar{\mathbf{Q}}_d)\prec\lambda(\mathbf{Q}_d)$.

Εάν $\bar{n}-n_T\leq -1\Leftrightarrow n_T\geq \bar{n}+1\Rightarrow$

$$2(\lambda_3-\mu_3)=-0.5(1-a)^2+\left(\left((n_T-\bar{n}-0.5)(1-a)^2+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-$$
$$\left(\left((n_T-\bar{n}+1)(1-a)^2+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$$

$$-0.5(1-a)^2+\left((n_T-\bar{n}-0.5)(1-a)^2+a^2\right)-\left((n_T-\bar{n}+1)(1-a)^2+a^2-3a\right)>0$$
$$-0.5(1-a)^2+\left((\bar{n}-n_T+0.5)(1-a)^2-a^2\right)-\left((\bar{n}-n_T-1)(1-a)^2-a^2-3a\right)>0\Rightarrow$$
$(1-a)^2+3a>0\Rightarrow 1+a+a^2>0$, που ισχύει.

$2(\mu_1-\lambda_1)=2(\lambda_3-\mu_3)+(1-a)^2>0$.

Έτσι εάν $\bar{n}-n_T\geq 2$ ή $\bar{n}-n_T\leq -1\Rightarrow$ $\lambda(\mathbf{Q}_{2+})\prec\lambda(\bar{\mathbf{Q}}_d)\prec\lambda(\mathbf{Q}_d)$.

Πόρισμα Α4. Εάν $-1<a<0$ και ένας σχεδιασμός στην υποκλάση F_{02} έχει $n_T\geq\bar{n}+2$ ή $n_T\leq\bar{n}-1$, υπάρχει φ-βέλτιστος σχεδιασμός στην υποκλάση F_{01}.

Πόρισμα Α5. Εάν $-1<a<0$, για κάθε σχεδιασμό στην υποκλάση F_{02} με $n=3m+2$ ή $n=3m$ υπάρχει ο φ-καλύτερος σχεδιασμός στην υποκλάση F_{02}.

Απόδειξη. Από το πόρισμα Α4, αν n=3m παίρνουμε $\bar{n}\leq n_T=3m-(2\bar{n}+1)\leq\bar{n}+1\Leftrightarrow$ $3m-1\leq 3\bar{n}\leq 3m\Leftrightarrow\bar{n}=m$ $m\leq\bar{n}\leq m-1$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει τέτοιος σχεδιασμός.

Πόρισμα Α6. Εάν $-1<a<0$ και $n=3m+1$, ο φ βέλτιστος σχεδιασμός στην υποκλάση F_{02} είναι $d_{21}^*:\underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}\Leftrightarrow\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα Α4, παίρνουμε $\bar{n} \le n_T = 3m+1-(2\bar{n}+1) \le \bar{n}+1 \Leftrightarrow \bar{n} = m$.

Πόρισμα Α7. Εάν $-1<a<0$ και $n=3m+2$, ο φ-βέλτιστος σχεδιασμός στην υποκλάση F_{02} είναι $d_{22}^{*} : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m} \Leftrightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$.

Α2. Κλάση $F_1 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}S$

Για ευκολία γράφουμε $F_1 = F_{11} \cup F_{12}$, όπου F_{11} είναι η υποκλάση του F_1 για την οποία ισχύει $n_S + n_T = 1 \bmod 2$ ή $n_S + n_R = 1 \bmod 2$ και F_{12} είναι η υποκλάση του F_1 για την οποία $n_S + n_T = 0 \bmod 2$ και $n_S + n_R = 0 \bmod 2$.

Α2.1 Υποκλάση F_{11}

Λήμμα Α4. Εάν $-1<a<0$ και ένας σχεδιασμός $d \in F_{11}$, τότε $d : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}S \to d^{*} : \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}}\underbrace{TT\ldots T}_{n_R}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}} \in F_0,\ 2\bar{n} = n_S + n_T + 1$.

Απόδειξη. Ο πίνακας πληροφορίας του $d \in F_{11}$ είναι,

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} n_S+1 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} n_S-1 & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(n_S-1) & 1 & 1 \\ 1 & 2(n_T-1) & 1 \\ 1 & 1 & 2(n_R-1) \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση που $n_S + n_T = 1 \bmod 2$, εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Κ,

$$\bar{\mathbf{Q}}_d = 2^{-1}\mathbf{Q}_d + 2^{-1}\mathrm{P}\mathrm{Q}_d\mathrm{P}' = \begin{bmatrix} \bar{n} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} \bar{n}-1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{n}-1 & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2\bar{n}-3 & 1 & 1 \\ 1 & 2\bar{n}-3 & 1 \\ 1 & 1 & 2(n_R-1) \end{bmatrix},$$ με

$n_S + n_T + 1 = 2\bar{n}$ and $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, τότε $g(\bar{\mathbf{Q}}_d) \geq g(\mathbf{Q_d})$, όπου g συνάρτηση πληροφορίας.

Εάν $\mathbf{Q}_d^* = \begin{bmatrix} \bar{n} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} \bar{n}-1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{n}-1 & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2\bar{n}-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2\bar{n}-2 & 1 \\ 1 & 1 & n_R \end{bmatrix}$, τότε

$\mathbf{Q}_d^* - \bar{\mathbf{Q}}_d = -a \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ και $g(\mathbf{Q}_d^*) \geq g(\bar{\mathbf{Q}}_d) \geq g(\mathbf{Q}_d)$, για όλες τις συναρτήσεις πληροφορίας g. Υπόψη ότι $\mathbf{Q}_d^*$ είναι ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d^*: \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}} \underbrace{RR\ldots R}_{n_R} \underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}} \Leftrightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}} \underbrace{TT\ldots T}_{n_R} \underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}}$ και $d^* \in F_0$. Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε όταν $n_S + n_R = 1 \bmod 2$ •

A2.2 Υποκλάση F_{12}

Λήμμα A5. Εάν $-1 < a < 0$, $d \in F_{12}$ και $d_{12}: \underbrace{SS\ldots S}_{n_S} \underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}} \underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}} S$, τότε d_{12} υπερκυριαρχείται από $d: \underbrace{SS\ldots S}_{n_S} \underbrace{TT\ldots T}_{n_T} \underbrace{RR\ldots R}_{n_R} S$, που σημαίνει ότι, $\lambda(\mathbf{Q}_{12}) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$.

Απόδειξη. Αφού $d \in F_{12}$, $n_S + n_T = 0 \bmod 2$ και $n_S + n_R = 0 \bmod 2$, τότε $n_T + n_R = 0 \bmod 2$. Εάν $n_T + n_R = 2\bar{n}$, εφαρμόζοντας τον κανόνα του μέσου έχουμε,

$$\bar{\mathbf{Q}}_d = \frac{1}{2}\mathbf{Q}_d + \frac{1}{2}\mathbf{P}\mathbf{Q}_d\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} n_S+1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n} \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} n_S-1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n} \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(\bar{n}_S-1) & 1 & 1 \\ 1 & 2(\bar{n}-1) & 1 \\ 1 & 1 & 2(\bar{n}-1) \end{bmatrix}.$$

Αυτή είναι η συνάρτηση πληροφορίας το σχεδιασμού $d_1 : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}}S$

και $g(\bar{\mathbf{Q}}_d) \geq g(\mathbf{Q}_d)$, που συνεπάγεται $\lambda(\bar{\mathbf{Q}}_d) \prec \lambda(\mathbf{Q}_d)$ •

Θα συγκρίνουμε τώρα τον σχεδιασμό $d_{12} : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}}S \in F_{12}$ με τους σχεδιασμούς

$d_0^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, $\quad d_{14}^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$, $\quad d_2^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$.

Όταν $n_S + \bar{n} = 1 \bmod 2$, τότε $d_{12} \in F_{11}$ και υπάρχει ένας «καλύτερος» σχεδιασμός στην F_0 (Λήμμα Α4). Έτσι ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση $n_S + \bar{n} = 0 \bmod 2$.

Λήμμα Α6. Εάν $-1 < a < 0$ και $n = 3m$, ο σχεδιασμός $d_0^* \in F_0$ είναι φ-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον $d_{12} : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}}S$.

Απόδειξη. Η ιδιοτιμές του πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_0^*$ είναι $\lambda_2 = m(1-a)^2 - a^2 + 2a$

$$2\lambda_{1,3} = 2m(1-a)^2 + 4a - a^2 \mp \left(a^4 + 8a^2\right)^{1/2} \text{ και } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 .$$

Ο σχεδιασμός d_{12} έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_{12} = \bar{\mathbf{Q}}_d$ και ιδιοτιμές

$$\mu_2 = \bar{n}(1-a)^2 + 3a,$$
$$2\mu_{1,3} = (\bar{n} + n_S)(1-a)^2 + 1 + 3a - a^2 \mp \left(\left((\bar{n} - n_S)(1-a)^2 - 1 - a + a^2\right)^2 + 8a^2\right)^{1/2} .$$

Όταν $\bar{n} - n_S \geq 1 \Rightarrow \mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, ενώ όταν $\bar{n} - n_S \leq 0 \Rightarrow \mu_2 < \mu_1 < \mu_3$.

Εάν $n = 3m$, τότε $n_S = 3m - 2\bar{n} - 1$

$$2\mu_{1,3} = (3m - \bar{n}))(1-a)^2 + 5a - 2a^2 \mp \left(\left(3(\bar{n} - m)(1-a)^2 - 3a + 2a^2\right)^2 + 8a^2\right)^{1/2} .$$

Όταν $\bar{n}-m\geq 0\Rightarrow \mu_1<\mu_2<\mu_3$, ενώ όταν $\bar{n}-m\leq -1\Rightarrow \mu_2<\mu_1<\mu_3$.

Έτσι όταν $\bar{n}-m\geq 0\Rightarrow\ 2(\lambda_1-\mu_1)\geq 0\Leftrightarrow$

$(\bar{n}-m)(1-a)^2-a+a^2+\left(\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-3a+2a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left(a^4+8a^2\right)^{1/2}>0$ το οποίο αληθεύει αφού $-3a+2a^2>a^2$.

Επίσης εάν $\bar{n}-m\geq 1\Rightarrow 2(\mu_3-\lambda_3)>0\Leftrightarrow$

$$-(\bar{n}-m)(1-a)^2+a-a^2+\left(\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-3a+2a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left(a^4+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$$

$2(\bar{n}-m)(1-a)^2+a-a^2+\left(-3a+2a^2\right)-(-3a)>0\Rightarrow 2(\bar{n}-m)(1-a)^2+a+a^2>0$, το οποίο ισχύει.

Εάν $\bar{n}=m\Rightarrow\ a-a^2+\left(\left(-3a+2a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left(a^4+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$

$\left(\left(-3a+2a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}>-4a+a^2\Leftrightarrow a^2-4a^3+3a^4>0$, που αληθεύει.

Επομένως όταν $\bar{n}-m\geq 0\Rightarrow \mu_3>\lambda_3$.

Εάν $\bar{n}-m\leq -1\Rightarrow \mu_2<\mu_1<\mu_3$, για την περίπτωση αυτή $\mu_2<\lambda_1\Leftrightarrow 2(\lambda_1-\mu_2)>0\Leftrightarrow$

$2(m-\bar{n})(1-a)^2-2a-a^2-\left(a^4+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow 2(m-\bar{n})(1-a)^2+a-a^2>0$, που ισχύει, επειδή $\sqrt{a^4+8a^2}<-3a$.

Επίσης, $m-\bar{n}\geq 1\Rightarrow 2(\mu_3-\lambda_3)>0\Leftrightarrow$

$$(m-\bar{n})(1-a)^2+a-a^2+\left(\left(3(m-\bar{n})(1-a)^2+3a-2a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left(a^4+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$$

$(m-\bar{n})(1-a)^2+a-a^2+3(m-\bar{n})(1-a)^2+3a-2a^2-(-3a)>0$, το οποίο αληθεύει.

Επομένως έχουμε δείξει ότι $\lambda\left(\mathbf{Q}_0^*\right)\prec\lambda\left(\mathbf{Q}_{12}\right)$.

Λήμμα Α7. Εάν $-1<a<0$ και $n=3m+2$, ο σχεδιασμός $d_2^* \in F_0$ είναι φ-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον $d_{12}:\underbrace{SS...S}_{n_S}\underbrace{TT...T}_{\bar{n}}\underbrace{RR...R}_{\bar{n}}S$.

Απόδειξη. Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_2^*$ είναι, $\lambda_2 = m(1-a)^2+1$

$2\lambda_{1,3} = 2m(1-a)^2+1+2a \mp \left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}$ και $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{12}$ δίνονται πιο πάνω (Λήμμα Α6).

Όταν $\bar{n}-m\geq 1 \Rightarrow\ 2(\lambda_1-\mu_1)\geq 0 \Leftrightarrow$

$$(\bar{n}-m)(1-a)^2-1+a+\left(\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-2+a\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$$

$4(\bar{n}-m)(1-a)^2-1+a+\left(-2+a\right)-(1-5a)>0 \Leftrightarrow 4(\bar{n}-m)(1-a)^2-4+7a>0$, το οποίο ισχύει, αφού $\bar{n}-m\geq 1$.

Παράλληλα όταν $\bar{n}-m\geq 2 \Rightarrow 2(\mu_3-\lambda_3)>0 \Leftrightarrow$

$$-(\bar{n}-m)(1-a)^2+1-a+\left(\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-2+a\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$$

$2(\bar{n}-m)(1-a)^2-2+5a>0 \Rightarrow 4-3a+4a^2>0$, το οποίο αληθεύει.

Όταν $\bar{n}-m=1 \Rightarrow a-a^2+\left(\left(1-5a+3a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$

$$\left(\left(1-5a+3a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}>-a+a^2+\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}\Rightarrow$$

$$-6a+26a^2-28a^3+8a^4>2(-a+a^2)(1-5a)>2(-a+a^2)\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}\Rightarrow$$

$-4a+14a^2-18a^3+8a^4>0$, που ισχύει, και έτσι εάν $\bar{n}-m\geq 1 \Rightarrow \mu_3>\lambda_3$.

Όταν $\bar{n}-m\leq 0 \Rightarrow \mu_2<\mu_1<\mu_3$, στην περίπτωση αυτή $\mu_2<\lambda_1 \Leftrightarrow 2(\lambda_1-\mu_2)>0 \Leftrightarrow$

$2(m-\bar{n})(1-a)^2+1-4a-\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}>1-4a-\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}>0$, το οποίο αληθεύει, αφού $(1-4a)^2>(1-2a)^2+8a^2$.

Επίσης, αν $\bar{n}-m\leq 0 \Leftrightarrow m-\bar{n}\geq 0 \Rightarrow 2(\mu_3-\lambda_3)>0$. Καταρχήν εξετάζουμε την περίπτωση $m-\bar{n}\geq 1 \Rightarrow 2(\mu_3-\lambda_3)>0 \Leftrightarrow$

$$(m-\bar{n})(1-a)^2+1-a+\left(\left(3(m-\bar{n})(1-a)^2+2-a\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}>0 \Rightarrow$$

$4(m-\bar{n})(1-a)^2+1-a+\left(2-a\right)-(1-5a)>4(1-a)^2+2+3a>0$, το οποίο ισχύει.

Όταν $m-\bar{n}=0 \Rightarrow$

$$1-a+\left((2-a)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left((1-2a)^2+8a^2\right)^{1/2}>1-a+\left((2-a)^2+8a^2\right)^{1/2}-(1-5a)>0 \Leftrightarrow$$

$\sqrt{(2-a)^2+8a^2}>-4a$, το οποίο αληθεύει.

Επομένως έχουμε δείξει ότι $\lambda(\mathbf{Q}_2^*)\prec\lambda(\mathbf{Q}_{12})$.

Λήμμα A8. Εάν $-1<a<0$ και $n=3m+1$, ο σχεδιασμός $d_{14}:\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$ είναι φ-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον $d_{12}:\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}}S$.

Απόδειξη. Ο σχεδιασμός d_{14} έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_{14}$ και ιδιοτιμές,

$$\lambda_2=m(1-a)^2+3a,\ 2\lambda_{1,3}=2m(1-a)^2+1+3a-a^2\mp\left(\left(1+a-a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}$$

Επομένως, $0<\lambda_2<\lambda_1<\lambda_3$, αφού $2(\lambda_2-\lambda_1)<0$, και παράλληλα $n_S=3m-2\bar{n}$.

Ο σχεδιασμός d_{12} έχει πίνακα πληροφορίας $\bar{\mathbf{Q}}_d$ και ιδιοτιμές που δίνονται στο Λήμμα A6.

Όταν $\bar{n}-m\geq 1 \Rightarrow \mu_1<\mu_2<\mu_3$, εάν $\bar{n}-m\leq 0 \Rightarrow \mu_2<\mu_1<\mu_3$.

Πρώτα παίρνουμε την περίπτωση $\bar{n}-m\geq 1$ και εξετάζουμε εάν $\mu_1<\lambda_2$ και $\lambda_3<\mu_3$.

$$2(\lambda_2-\mu_1)=(\bar{n}-m)(1-a)^2-1+3a+a^2+\left(\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-1-a+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$$

$2(\lambda_2-\mu_1)>4(\bar{n}-m)(1-a)^2-1+3a+a^2+(-1-a+a^{2)})>2-6a+6a^2>0$, το οποίο ισχύει. Επίσης $2(\mu_3-\lambda_3)$ είναι ίσο με,

$$(m-\bar{n})(1-a)^2+\left(\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-1-a+a^2\right)^2+8a^2\right)^{1/2}-\left((1+\alpha-\alpha^2)^2+8\alpha^2\right)^{1/2}>0\Rightarrow$$
$$(m-\bar{n})(1-a)^2+\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-1-a+a^2\right)-(1+a-a^2-3a)>0\Leftrightarrow$$

$2(\bar{n}-m)(1-a)^2-2+a+2a^2>-3a+4a^2>0$, το οποίο ισχύει.

Δείξαμε λοιπόν ότι αν $\bar{n}-m\geq 1$, τότε $\mu_1<\lambda_2$ και $\lambda_3<\mu_3$.

Τώρα παίρνουμε $\bar{n}-m\leq 0\Leftrightarrow m-\bar{n}\geq 0$ και εξετάζουμε εάν $\mu_2<\lambda_2$ και $\lambda_3<\mu_3$.

$(\lambda_2-\mu_2)=(m-\bar{n})(1-a)^2\geq 0$, το οποίο αληθεύει. Παράλληλα $2(\mu_3-\lambda_3)$ είναι ισούται με,

$$(m-\bar{n})(1-a)^2+\sqrt{\left(3(m-\bar{n})(1-a)^2+1+a-a^2\right)^2+8a^2}-\sqrt{(1+a-a^2)^2+8\alpha^2}\geq 0\Rightarrow$$
$$2(\mu_3-\lambda_3)\geq\sqrt{(1+a-a^2)^2+8\alpha^2}-\sqrt{(1+a-a^2)^2+8\alpha^2}=0.$$

Έτσι έχουμε δείξει ότι $\lambda(\mathbf{Q}_{14})\prec\lambda(\mathbf{Q}_{12})$.

A3. Κλάση F_2: $\underbrace{SS...S}_{n_S}\underbrace{TT...T}_{n_T}\underbrace{RR...R}_{n_R}T$

Για ευκολία γράφουμε $F_2=F_{21}\cup F_{22}$, όπου F_{21} είναι η υποκλάση της F_2 για την οποία $n_S+n_T=1\bmod 2$ και F_{22} είναι η υποκλάση της F_2 για την οποία $n_S+n_T=0\bmod 2$.

A3.1 Υποκλάση F_{21}

Λήμμα Α9. Εάν $-1<a<0$ και $n_S+n_T+1=2\bar{n}$, τότε

$d_2:\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T \to \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R} \in F_0,$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όμοια όπως στα προηγούμενα Λήμματα (Α2-Α8).

Ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d_{21}\in F_{22}$ είναι,

$$\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix} n_S & 0 & 0\\ 0 & n_T+1 & 0\\ 0 & 0 & n_R\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix} n_S-1 & 0 & 0\\ 0 & n_T & 0\\ 0 & 0 & n_R\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix} 2(n_S-1) & 1 & 0\\ 1 & 2(n_T-1) & 2\\ 0 & 2 & 2(n_R-1)\end{bmatrix}.$$

Εφόσον ισχύει ότι $n_S+n_T+1=2\bar{n}$, εφαρμόζουμε τον κανόνα (average rule) βρίσκουμε,

$$\bar{\mathbf{Q}}_2=\begin{bmatrix} \bar{n} & 0 & 0\\ 0 & \bar{n} & 0\\ 0 & 0 & n_R\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0\\ 0 & n-1 & 0\\ 0 & 0 & n_R\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix} 2\bar{n}-3 & 1 & 1\\ 1 & 2\bar{n}-3 & 1\\ 0 & 2 & 2(n_R-1)\end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τον πίνακα πληροφορίας,

$$\bar{\mathbf{Q}}_2^*=\begin{bmatrix} \bar{n} & 0 & 0\\ 0 & \bar{n} & 0\\ 0 & 0 & n_R\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0\\ 0 & n-1 & 0\\ 0 & 0 & n_R\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix} 2(\bar{n}-1) & 0 & 1\\ 0 & 2(\bar{n}-1) & 1\\ 0 & 2 & 2(n_R-1)\end{bmatrix},$$

τότε $\bar{\mathbf{Q}}_2^*-\bar{\mathbf{Q}}_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\geq \mathbf{0}$ και ο $\bar{\mathbf{Q}}_2^*$ είναι πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d:\underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}} \Leftrightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}}\underbrace{TT\ldots T}_{n_R}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}} \in F_0.$ Επομένως $g(\bar{\mathbf{Q}}_2^*)\geq g\bar{\mathbf{Q}}_2)$ για κάθε συνάρτηση πληροφορίας g(.), που αυτό σημαίνει ότι,

$d_2:\underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{n_T}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T \to \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R} \in F_0$

Α3.2 Υποκλάση F_{22}

Εξετάζουμε την περίπτωση $n_S+n_T=0 \bmod 2$, δηλαδή, $d_{21}\in F_{22}$.

Λήμμα Α10. Για $-1<a<0$ και $d_{21}\in F_{22}$, ισχύει ότι $\lambda(\bar{\mathbf{Q}}_{21}^*)\prec\lambda(\mathbf{Q}_{21})$, όπου

$$\bar{\mathbf{Q}}_{21}^{*}=\begin{bmatrix}\bar{n}(1-a)^2+0.5-0.5a^2+2a & -a & -a\\ -a & \bar{n}(1-a)^2+0.5-0.5a^2+2a & -a\\ -a & -a & n_R(1-a)^2+2a\end{bmatrix}.$$

Απόδειξη. Ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d_{21}\in F_{22}$ είναι, $\mathbf{Q}_{21}=\mathbf{Q}_2$,

$$\mathbf{Q}_{21}=\begin{bmatrix}n_S & 0 & 0\\ 0 & n_T+1 & 0\\ 0 & 0 & n_R\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix}n_S-1 & 0 & 0\\ 0 & n_T & 0\\ 0 & 0 & n_R\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}2(n_S-1) & 1 & 0\\ 1 & 2(n_T-1) & 2\\ 0 & 2 & 2(n_R-1)\end{bmatrix}.$$

Αν $n_S+n_T=2\bar{n}$, τότε από τον κανόνα του μέσου παίρνουμε $\bar{\mathbf{Q}}_{21}^{*}$,

$$\bar{\mathbf{Q}}_{21}^{*}=\begin{bmatrix}\bar{n}(1-a)^2+0.5-0.5a^2+2a & -a & -a\\ -a & \bar{n}(1-a)^2+0.5-0.5a^2+2a & -a\\ -a & -a & n_R(1-a)^2+2a\end{bmatrix}.$$ Που σημαίνει $g(\bar{\mathbf{Q}}_{21}^{*})\geq g(\mathbf{Q}_{21})$, και αυτό συνεπάγεται $\lambda(\bar{\mathbf{Q}}_{21}^{*})\prec\lambda(\mathbf{Q}_{21})$. Από την κλάση F_{22} συγκρίνουμε τις ιδιοτιμές του $\bar{\mathbf{Q}}_{21}^{*}$ με τις ιδιοτιμές των $\mathbf{Q}_0^{*},\mathbf{Q}_1^{*},\mathbf{Q}_2^{*}$.

Λήμμα Α11. Για $-1<a<0$, $n_S+n_T=2\bar{n}$ και n=3m, d_0^{*} είναι φ-βέλτιστος στην υποκλάση F_{22}, και γι' αυτό, $\lambda(\mathbf{Q}_0^{*})\prec\lambda(\bar{\mathbf{Q}}_{21}^{*})\prec\lambda(\mathbf{Q}_{21})$.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όμοια όπως στα προηγούμενα Λήμματα (Α2-Α8).

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_0^{*}$ είναι, $2\lambda_{1,3}=\left(2m(1-a)^2+4a-a^2\mp\sqrt{a^4+8a^2}\right)$,

$\lambda_2=m(1-a)^2+2a-a^2$ και $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.

Οι ιδιοτιμές του $\bar{\mathbf{Q}}_{21}^{*}$, με $n_R=3m-2\bar{n}-1$ είναι, $\mu_2=\bar{n}(1-a)^2+0.5+3a-0.5a^2$,

$2\mu_{1,3}=(3m-\bar{n})(1-a)^2-0.5-1.5a^2+5a\mp\sqrt{\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2+1.5-3a+0.5a^2\right)^2+8a^2}$.

Αν $\bar{n}-m\geq 0\Rightarrow\mu_1<\mu_2<\mu_3$, ενώ αν $\bar{n}-m\leq -1\Rightarrow\mu_2<\mu_1<\mu_3$.

Αν $\bar{n}-m\geq 0$, τότε $2(\lambda_1-\mu_1)$ είναι ίσο με, $(\bar{n}-m)(1-a)^2+0.5-a+0.5a^2$

$+\sqrt{\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2+1.5-3a+0.5a^2\right)^2+8a^2}-\sqrt{a^4+8a^2}\Rightarrow$

$2(\lambda_1-\mu_1)\geq 0.5-a+0.5a^2+\sqrt{(1.5-3a+0.5a^2)^2+8a^2}-\sqrt{a^4+8a^2}>0$. Αυτό ισχύει εφόσον $1.5-3a+0.5a^2>a^2$.

Αν $\bar{n}-m\geq 0$, τότε $2(\lambda_3-\mu_3)<0$ ισούται με,

$$(\bar{n}-m)(1-a)^2+0.5-a+0.5a^2-\sqrt{\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2+1.5-3a+0.5a^2\right)^2+8a^2}+\sqrt{a^4+8a^2}<0\Rightarrow$$
$$(\bar{n}-m)(1-a)^2+0.5-a+0.5a^2-\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2+1.5-3a+0.5a^2\right)+(-3\alpha)<0,$$

εφόσον $\sqrt{a^4+8a^2}<-3a$, έτσι $-1-a=-(1+a)<0$ που όντως ισχύει.

Επομένως αν $\bar{n}-m\geq 0$, τότε $\mu_1<\lambda_1$ και $\lambda_3<\mu_3$.

Αν $\bar{n}-m\leq -1\Leftrightarrow$ $m-\bar{n}\geq 1$, $\sqrt{a^4+8a^2}<-3a$ και

$$\sqrt{\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2+1.5-3a+0.5a^2\right)^2+8a^2}>\left(3(m-\bar{n})(1-a)^2-1.5+3a-0.5a^2\right).$$

Έτσι $2(\lambda_3-\mu_3)<0$ που δίνεται παραπάνω γίνεται,

$$-(\bar{n}-m)(1-a)^2-0.5+a-0.5a^2+\left(3(m-\bar{n})(1-a)^2-1.5+3a-0.5a^2\right)-(-3a)>0\Leftrightarrow$$

$4(m-\bar{n})(1-a)^2-2+7a-a^2>0\Rightarrow 2-a+3a^2>0$, που όντως ισχύει.

Τέλος, αν $\bar{n}-m\leq -1\Leftrightarrow m-\bar{n}\geq 1$, και $2(\lambda_1-\mu_2)>0$ είναι ισοδύναμο με

$2(m-\bar{n})(1-a)^2-1-2a-\sqrt{a^4+8a^2}>1-6a+2a^2-(-3a)>0$, που αληθεύει.

Λήμμα Α12. Για $-1<a<0$ και n=3m+2, $n_S+n_T=2\bar{n}$ με $\bar{n}\neq m$, τότε ο σχεδιασμός $d_2^*:\underbrace{SS...S}_{m+1}\underbrace{TT...T}_{m}\underbrace{RR...R}_{m+1}$ είναι φ-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον σχεδιασμό $d_2:\underbrace{SS...S}_{n_S}\underbrace{TT...T}_{n_T}\underbrace{RR...R}_{n_R}T\in F_{22}$, και αυτό σημαίνει ότι,

$\lambda(\mathbf{Q}_2^*)\prec\lambda(\bar{\mathbf{Q}}_{21}^*)\prec\lambda(\mathbf{Q}_2)$.

Απόδειξη: (Η απόδειξη γίνεται όπως στα Λήμματα Α2-Α8).

Εδώ γίνεται απόδειξη για την περίπτωση όπου $\bar{n}\neq m$, στο επόμενο Λήμμα εξετάζουμε την περίπτωση $\bar{n}=m$.

$2\bar{n}+1+n_R=3m+2 \Rightarrow n_R=3m-2\bar{n}+1$.

Οι ιδιοτιμές του d_2^* είναι,

$2\lambda_{1,2}=2m(1-a)^2+1+2a\mp\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}$, $\lambda_2=m(1-a)^2+1$

με $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{21}^*$ είναι, $\mu_2=\bar{n}(1-a)^2+0.5+3a-0.5a^2$,

$2\mu_{1,3}=(3m-\bar{n})(1-a)^2+1.5+0.5a^2+a\mp\sqrt{\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-0.5+a-1.5a^2\right)^2+8a^2}$.

Αν $\bar{n}-m\geq 1 \Rightarrow \mu_1<\mu_2<\mu_3$, ενώ αν $\bar{n}-m\leq 0 \Rightarrow \mu_2<\mu_1<\mu_3$.

Σημειώνουμε ότι

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3m(1-a)^2+2+2a>\mu_1+\mu_2+\mu_3=3m(1-a)^2+2+4a$.

Για $\bar{n}-m\geq 1$, δείχνουμε ότι $\lambda_1\geq\mu_1$. Τώρα $2(\lambda_1-\mu_1)$ ισούται με,

$$(\bar{n}-m)(1-a)^2-0.5+a-0.5a^2+\sqrt{\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-0.5+a-1.5a^2\right)^2+8a^2}-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}$$

$2(\lambda_1-\mu_1)\geq 0.5+0.5a^2-a+\sqrt{\left(2.5-5a+1.5a^2\right)^2+8a^2}-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}>0$, που

αληθεύει μιας και $\left(2.5-5a+1.5a^2\right)>(1-2a)>0$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $\lambda_1+\lambda_2\geq\mu_1+\mu_2$. $2(\lambda_1+\lambda_2)-2(\mu_1+\mu_2)>0$ είναι ίσο,

$$(m-\bar{n})(1-a)^2+0.5-5\alpha+0.5a^2+\sqrt{\left(3(\bar{n}-m)(1-a)^2-0.5+a-1.5a^2\right)^2+8a^2}-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}>0$$

$2(\lambda_1+\lambda_2)-2(\mu_1+\mu_2)>2(\bar{n}-m)(1-a)^2-4a-a^2-(1-4a)\geq 1-4a+a^2>0$.

Επομένως αν $\bar{n}-m\geq 1$, τότε $\lambda_1\geq\mu_1$ και $2(\lambda_1+\lambda_2)>2(\mu_1+\mu_2)$.

Έτσι λοιπόν αποδεικνύεται για $\bar{n}-m\leq -1 \Leftrightarrow m-\bar{n}\geq 1$, ότι

$2(\lambda_1-\mu_2)=2(m-\bar{n})(1-a)^2-4a+a^2-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}>0 \Rightarrow$

$2(\lambda_1-\mu_2)>2-8a+3a^2-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}>2-8a+3a^2-(1-4a)>1-4a+3a^2>0$,

το οποίο ισχύει, αφού $\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}<1-4a$.

Επιπλέον $2(\lambda_1+\lambda_2)-2(\mu_1+\mu_2)>0$ και συνεπάγεται ότι,

$$(m-\bar{n})(1-a)^2+0.5-5\alpha+0.5a^2+\sqrt{\left(3(m-\bar{n})(1-a)^2+0.5-a+1.5a^2\right)^2+8a^2}-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}>0$$

$$2(\lambda_1+\lambda_2)-2(\mu_1+\mu_2)>4(m-\bar{n})(1-a)^2+1-6a+2a^2-(1-4a)>4-10a+6a^2>0.$$

Έτσι αν $\bar{n}-m\le -1 \Leftrightarrow m-\bar{n}\ge 1$, τότε $\lambda_1\ge\mu_2$ και $(\lambda_1+\lambda_2)>(\mu_1+\mu_2)$.

Δείξαμε ότι αν $\bar{n}\ne m$, τότε $\lambda(\mathbf{Q}_2^*)\prec\lambda(\mathbf{Q}_{21}^*)\prec\lambda(\mathbf{Q}_2)$.

Όταν $\bar{n}-m=0$, τότε $2(\lambda_1+\lambda_2)-2(\mu_1+\mu_2)>1-6a+2a^2-(1-4a)>-2a+2a^2>0$.

Δείξαμε επίσης ότι όταν n=3m+2 και $\bar{n}-m\le 0$, ότι $(\lambda_1+\lambda_2)>(\mu_1+\mu_2)$ •

Απομένει να δείξουμε για την περίπτωση n=3m+2 και $\bar{n}-m=0$, τότε $\lambda_1\ge\mu_2$.

Λήμμα Α13. Για $-1<a<0$, n=3m+2 και $n_S+n_T=2m$, $d_{21}:\underbrace{SS...S}_{n_S}\underbrace{TT...T}_{n_T}\underbrace{RR...R}_{n_R}T$,

τότε ο σχεδιασμός d_2^* είναι φ-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον σχεδιασμό d_{21}.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όμοια όπως στα πιο πάνω Λήμματα.

Για $n_R=3m-(n_S+n_T)+1=m+1$,

$$\mathbf{Q}_{21}=\begin{bmatrix} n_S & & 0\\ & n_T+1 & \\ & & n_R\end{bmatrix}+a^2\begin{bmatrix} n_S-1 & & 0\\ & n_T & \\ & & n_R\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix} 2(n_S-1) & 1 & 0\\ 1 & 2(n_T-1) & 2\\ 0 & 2 & 2(n_R-1)\end{bmatrix}.$$

$|\mathbf{Q}_{21}-\nu I_3|=f_{21}(\nu)=(A-\nu)\left[(B-\nu)(C-\nu)-4a^2\right]-a^2(C-\nu)$, όπου

$$A=n_S(1-a)^2-a^2+2a$$
$$B=n_T(1-a)^2+1+2a$$
$$C=n_R(1-a)^2+2a=m(1-a)^2+1+a^2$$

$$f_{21}(C)=-4a^2(A-C),\ \ f_{12}(A)=-a^2(C-A),\ \lim_{\nu\to-\infty}f_{12}(\nu)=\infty,\lim_{\nu\to\infty}f_{12}(\nu)=-\infty.$$

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{21}$ (οι ρίζες του $f_{21}(\nu)=0$) είναι $0<\nu_1\le\nu_2\le\nu_3$.

Αν $n_S - m \geq 2 \Rightarrow A - C > 0$, $f_{21}(C) < 0$, $f_{21}(\mathrm{A}) > 0$ και $\nu_1 < C < \nu_2 < A < \nu_3$ και αν $n_S - m \leq 1 \Rightarrow A - C < 0$, $f_{21}(\mathrm{A}) < 0$, $f_{21}(C) > 0$ και $\nu_1 < \mathrm{A} < \nu_2 < C < \nu_3$.

Οι ρίζες του $f_{21}(\nu) = 0$, είναι θετικές, αφού ο πίνακας $\mathbf{Q}_{21}$ είναι θετικά ορισμένος.

Αν $f_{21}(\lambda_1) < 0 \Rightarrow \lambda_1 > \nu_1$.

$8 f_{21}(\lambda_1) = 2(A - \lambda_1)\left[2(B - \lambda_1)2(C - \lambda_1) - 16a^2\right] - a^2 8(C - \lambda_1)$.

$A_1 = 2A - 2\lambda_1 = 2(n_S - m)(1 - a)^2 - 1 + 2a - 2a^2 + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2}$,

$B_1 = 2B - 2\lambda_1 = 2(n_\mathrm{T} - m)(1 - a)^2 + 1 + 2a + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2}$,

$C_1 = 2C - 2\lambda_1 = 1 - 2a + 2a^2 + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2}$, έτσι

$8 f_{21}(\lambda_1) = \mathrm{A}_1\left[\mathrm{B}_1 C_1 - 16a^2\right] - 4a^2 C_1$, αλλά $n_S + n_T = 2m \Leftrightarrow n_S - m = -(n_T - m)$.

Αν $n_S - m \geq 1 \Leftrightarrow (n_T - m) \leq -1$.

Επομένως αν $n_S - m \geq 1$, τότε $A_1 \geq 1 - 2a + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2} > 0$, $B_1 \leq -1 + 6a - 2a^2 + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2} < 0$, $C_1 = 1 - 2a + 2a^2 + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2} > 0$.

Συμπερασματικά αν $n_S - m \geq 1$, τότε $f_{21}(\lambda_1) < 0 \Rightarrow \lambda_1 > \nu_1$.

Αν $n_S - m \leq -1 \Leftrightarrow n_T - m \geq 1$, τότε:

$A_1 \leq -3 + 6a - 4a^2 + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2} < 0$,

$B_1 \geq 3 - 2a + 2a^2 + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2} > 0$, $C_1 = 1 - 2a + 2a^2 + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2} > 0$.

$B_1 C_1 - 16a^2 \geq 4 - 12a + 8a^2 - 8a^3 + 4a^4 + 4(1 - a + a^2)\sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2} > 0$.

Ως εκ τούτου αν $n_S - m \leq -1$, ισχύει ότι $f_{21}(\lambda_1) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > \nu_1$.

Αν $n_S = n_T = m$, τότε $A_1 = -1 + 2a - 2a^2 + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 8a^2}$,

$B_1 = 1 + 2a + \sqrt{(1-2a)^2 + 8a^2} > 1 + 2a + 1 - 2a = 2$,

$C_1 = 1 - 2a + 2a^2 + \sqrt{(1-2a)^2 + 8a^2} > 1 - 2a + 2a^2 + 1 - 2a = 2 - 4a + 2a^2$,

$B_1 C_1 - 16a^2 = 2 - 4a - 6a^2 + 4a^3 + (2 + 2a^2)\sqrt{(1-2a)^2 + 8a^2}$,

$\mathrm{A}_1(B_1 C_1 - 16a^2) = 20a^2 - 16a^3 + 24a^4 + (-12a^2 + 8a^3 - 4a^4)\sqrt{(1-2a)^2 + 8a^2}$,

$\mathrm{A}_1(B_1 C_1 - 16a^2) - 4a\ C_1 = 16a^2 - 8a^3 + 16a^4 + (-16a^2 + 16a^3 - 12a^4)\sqrt{(1-2a)^2 + 8a^2} < 0$.

Επομένως, $8 f_{21}(\lambda_1) = A_1\left[B_1 C_1 - 16a^2\right] - 4a^2 C_1 < 0 \Leftrightarrow \mu_1 < \lambda_1$, το οποίο ισχύει.

Δείξαμε ότι αν $n_S + n_T = 2m$ και n=3m+1, έτσι $\lambda_1 > \nu_1$.

Λήμμα Α14. Για $-1 < a < 0$, n=3m+1, ο σχεδιασμός $d_{22}^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}T$ είναι φ-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον σχεδιασμό $d_{22} : \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}T$.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Κ όπως ακριβώς και στο Λήμμα Α4.

Λήμμα Α15. Για $-1 < a < 0$, n=3m+1 και $\bar{n} = m$, ο σχεδιασμός d_1^* είναι φ-βέλτιστος στην κλάση F_{22}.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όπως στα Λήμματα Α2-Α8.

Έστω, $2m + n_R + 1 = 3m + 1 \Rightarrow n_R = m,\ n_S + n_T = 2m$. Ο πίνακας πληροφορίας είναι,

$$\mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} n_S & & \\ & n_T + 1 & \\ & & m \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} n_S - 1 & & \\ & n_T & \\ & & m \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(n_S - 1) & 1 & 0 \\ 1 & 2(n_T - 1) & 2 \\ 0 & 2 & 2(m-1) \end{bmatrix}.$$

$f_{22}(\nu) = \left|\mathbf{Q}_{22} - \nu\,\mathrm{I}_3\right| = (A - \nu)\left[(B-\nu)(C-\nu) - 4a^2\right] - a^2(C - \nu)$, όπου, $A = n_S(1-a)^2 - a^2 + 2a,\ n_S \geq 1,$ $B = n_T(1-a)^2 + 1 + 2a,\ n_T \geq 2$, $C = m(1-a)^2 + 2a$.

$f_{22}(A) = -a^2(C-A),\ f_{22}(C) = -4a^2(A-C)$.

Αν $n_S \geq m+1 \Rightarrow A - C > 0, \text{if } n_S \leq m \Rightarrow A - C < 0,$ $f_{22}(\nu)$ έχει τρεις θετικές ρίζες $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$, $f_{22}(\nu) > 0$ *if* $\nu < \nu_1, f_{22}(\nu) < 0$ if $\nu > \nu_3$.

Και ως εκ τούτου αν $f_{22}(\lambda_1) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > \nu_1$ και αν $f_{22}(\lambda_2) > 0 \Leftrightarrow \lambda_2 > \nu_2$.

$$2(A-\lambda_1) = A_1 = 2(n_S - m)(1-a)^2 - 1 + 2a - 2a^2 + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2}\ ,$$

$$2(B-\lambda_1) = B_1 = 2(n_T - m)(1-a)^2 + 1 + 2a + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2}\ ,$$

$$2(C-\lambda_1) = C_1 = -1 + 2a + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} > 0.$$

Αν $n_S \geq m+1 \Rightarrow A_1 > 0,\ B_1 < 0,\ C_1 > 0$, τότε

$$8 f_{22}(\lambda_1) = A_1(B_1C_1 - 16a^2) - 4a^2C_1 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > \nu_1.$$

Αν $n_S \leq m-1 \Leftrightarrow n_T \geq m+1 \Rightarrow A_1 < 0,\ B_1 > 0,\ ,C_1 > 0$,

$$8 f_{22}(\lambda\ ) = A_1\left[B_1C_1 - 16a^2\right] - 4a^2C_1$$

$$B_1C_1 - 16a^2 \geq$$
$$(3 - 2\alpha + 2\alpha^2 + \sqrt{(1-2\alpha+2\alpha^2)^2 + 8\alpha^2})(-1 + 2\alpha + \sqrt{(1-2\alpha+2\alpha^2)^2 + 8\alpha^2}) - 16a^2 \Rightarrow$$

$$-2 + 4a - 6a^2 - 4a^3 + 4a^4 + (2 + 2a^2)\sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} > 0$$

$$(1+a^2)\sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} > (1+a^2)(1-2a+2a^2) = 1 - 2a + 3a^2 - 2a^3 + 2a^4 \Rightarrow$$

$-2 + 4a - 6a^2 - 4a^3 + 4a^4 + 2(1 - 2a + 3a^2 - 2a^3 + 2a^4) = -8a^3 + 8a^4 > 0$, το οποίο αληθεύει, και έτσι $f_{22}(\lambda_1) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > \nu_1$.

Αν $n_S = n_T = m \Rightarrow$

$$A_1 = -1 + 2a - 2a^2 + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} > 0,$$

$$B_1 = 1 + 2a + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} > 1 + 2a + (1-2a+2a^2) = 2 + 2a^2$$

$$C_1 = -1 + 2a + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} > -1 + 2a + (1-2a+2a^2) = 2a^2$$

Που οφείλεται στο ότι $\sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} > 1 - 2a + 2a^2$.

$$B_1 C_1 - 16a^2 = (1 + 2a + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2})(-1 + 2a + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2}) - 16a^2 \Rightarrow$$
$$-4a + 4a^2 - 8a^3 + 4a^4 + 4a\sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} = -4a\left(1 - a + 2a^2 - a^3 - \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2}\right) < 0 \Leftrightarrow$$
$$1 - a + 2a^2 - a^3 - \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} > 1 - a + 2a^2 - a^3 \Rightarrow$$

$$-2a + 11a^2 - 2a^3 - 2a^4 - 4a^5 + a^6 > 0.$$

Επομένως, $f_{22}(\lambda_1) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > \nu_1$.

Εξετάζουμε τώρα αν $\lambda_1 + \lambda_2 > \nu_1 + \nu_2$.

$$\lambda_1 + \lambda_2 > \nu_1 + \nu_2 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \nu_3 > \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \mathrm{A} + \mathrm{B} + C \Leftrightarrow \nu_3 > \mathrm{A} + \mathrm{B} + C - (\lambda_1 + \lambda_2).$$

Έστω $2D = 2(A+B+C) - 2(\lambda_1 + \lambda_2) = 2m(1-a)^2 + 1 + 6a + \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2}$, έτσι αν $f_{22}(D) > 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 > \mu_1 + \mu_2$.

$$8 f_{22}(D) = A_2 \left[B_2 C_2 - 16a^2 \right] - 4a^2 C_2,$$

$$A_2 = 2(A - D) = 2(n_S - m)(1-a)^2 - 1 - 2a - 2a^2 - \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2}$$

$$B_2 = 2(\mathrm{B} - D) = 2(n_T - m)(1-a)^2 + 1 - 2a - \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2}$$

$$C_2 = 2(C - D) = -1 - 2a - \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2}$$

Σημειώνουμε ότι $1 - 2a + 2a^2 < \sqrt{(1-2a+2a^2)^2 + 8a^2} < 1 - 4a + 2a^2$.

Αν $n_S \geq m+1 \Leftrightarrow n_T \leq m-1$, τότε

$$A_2 > 1-6a-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2} > (1-6a-(1-4a+2a^2)) = -2a-2a^2 > 0$$

$$B_2 < -1+2a-2a^2-(1-2a+2a^2) = -2+4a-4a^2 < 0$$
$$C_2 = -1-2a-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2} < -1-2a-(1-2a+2a^2) = -2+2a-2a^2 < 0$$

$B_2C_2-16a^2 > 4-12a+8a^2-16a^3+8a^4 > 0$, συνεπάγεται

$8f_{22}(D) = A_2\left[B_2C_2-16a^2\right]-4a^2C_2 > 0$, αυτό σημαίνει ότι αν $n_S \geq m+1$, θα ισχύει ότι $\lambda_1+\lambda_2 > \mu_1+\mu_2$.

Αν $n_S \leq m-1 \Leftrightarrow n_T \geq m+1$, τότε

$$A_2 \leq -2(1-a)^2-1-2a-2a^2-(1-2a+2a^2) = -4+4a-6a^2 < 0$$

$$B_2 \geq 3-6a+2a^2-(1-4a+2a^2) = 2-2a > 0$$

$$C_2 = -1-2a-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2} < -1-2a-(1-2a+2a^2) = -2+2a-2a^2 < 0.$$

Συμπερασματικά $8f_{22}(D) = A_2\left[B_2C_2-16a^2\right]-4a^2C_2 > 0$, που συνεπάγεται ότι αν $n_S \leq m-1$, τότε $\lambda_1+\lambda_2 > \mu_1+\mu_2$.

Τέλος, αν $n_S = n_T = m$, τότε

$$A_2 = -1-2a-2a^2-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2} < -1-2a-2a^2-(1-2a+2a^2) = -2-4a^2 < 0$$

$$B_2 = 1-2a-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2} < 1-2a-(1-2a+2a^2) = -2a^2 < 0,\ C_2 < 0$$

$$B_2C_2-16a^2 = (1-2a-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2})(-1-2a-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2})-16a^2 \Rightarrow$$

$$B_2C_2-16a^2 = -4a+4a^2-8a^3+4a^4+4a\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}) \Rightarrow$$

$$B_2C_2 - 16a^2 < -4a + 4a^2 - 8a^3 + 4a^4 + 4a(1-2a+2a^2) = -4a^2 + 4a^4 = -4a^2(1-a^2) < 0$$

$8f_{22}(D) = A_2\left[B_2C_2 - 16a^2\right] - 4a^2C_2 > 0$, που σημαίνει ότι αν $n_S = n_T = m$, τότε $\lambda_1 + \lambda_2 > \mu_1 + \mu_2$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Α4. Κλάση $F_3 \; \underbrace{SS...S}_{n_S}\underbrace{TT...T}_{n_T}\underbrace{RR...R}_{n_R}TS$

Γράφουμε $F_3 = F_{31} \cup F_{32}$, όπου F_{31} είναι η υποκλάση για την οποία $n_S + n_T = 0 \bmod 2$ ή $n_S + n_R = 1 \bmod 2$ και F_{32} είναι η υποκλάση για την οποία $n_S + n_T = 1 \bmod 2$ και $n_S + n_R = 0 \bmod 2$.

Λήμμα Α16. Αν $-1 < a < 0$ και $d \in F_{31}$, υπάρχουν «καλύτεροι» σχεδιασμοί στην κλάση F_0.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όπως στα Λήμματα Α2-Α8.

Ο πίνακας πληροφορίας του d_6 είναι,

$$\mathbf{Q}_6 = \begin{bmatrix} n_S+1 & & \\ & n_T+1 & \\ & & n_R \end{bmatrix} + a^2\begin{bmatrix} n_S-1 & & \\ & n_T+1 & \\ & & n_R \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 2(n_S-1) & 2 & 0 \\ 2 & 2(n_T-1) & 2 \\ 0 & 2 & 2(n_R-1) \end{bmatrix}.$$

Αν $n_S + n_T = 0 \bmod 2$, $2\bar{n} = n_S + n_T + 2$, τότε από τον κανόνα (averaging rule) παίρνουμε,

$$\bar{\mathbf{Q}}_6 = \begin{bmatrix} \bar{n} & & \\ & \bar{n} & \\ & & n_R \end{bmatrix} + a^2\begin{bmatrix} \bar{n}-1 & & \\ & \bar{n}-1 & \\ & & n_R \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 2\bar{n}-4 & 2 & 1 \\ 2 & 2\bar{n}-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2(n_R-1) \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τον πίνακα πληροφορίας

$$\bar{\mathbf{Q}}_6^* = \begin{bmatrix} \bar{n} & & \\ & \bar{n} & \\ & & n_R \end{bmatrix} + a^2\begin{bmatrix} \bar{n}-1 & & \\ & \bar{n}-1 & \\ & & n_R \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 2\bar{n}-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2\bar{n}-2 & 1 \\ 1 & 1 & 2(n_R-1) \end{bmatrix}.$$

Έτσι θα έχουμε $\bar{\mathbf{Q}}_6^* - \bar{\mathbf{Q}}_6 = -a\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ και $\bar{\mathbf{Q}}_6^*$ είναι ο πίνακας

πληροφορίας του σχεδιασμού,

$d_6^* : \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{n_R}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}} \in F_0 \Leftrightarrow \underbrace{SS\ldots S}_{\bar{n}}\underbrace{TT\ldots T}_{n_R}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}} \in F_0$.

Λήμμα Α17. Αν $-1 < a < 0$ και $d \in F_{32}$, τότε $d \to \underset{n_S}{SS\ldots S}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}}S \in F_1$, όπου $2\bar{n} = n_T + n_R + 1$.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όπως στα Λήμματα Α2-Α8.

Αν $n_T + n_R = 1 \bmod 2$ και $2\bar{n} = n_T + n_R + 1$, τότε υπολογίζοντας τον μέσο παίρνουμε, $\bar{\mathbf{Q}}_6 = \begin{bmatrix} n_S+1 & & \\ & \bar{n} & \\ & & \bar{n} \end{bmatrix} + a^2\begin{bmatrix} n_S-1 & & \\ & \bar{n} & \\ & & \bar{n} \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 2(n_S-1) & 1 & 1 \\ 1 & 2\bar{n}-3 & 2 \\ 1 & 2 & 2\bar{n}-3 \end{bmatrix}$.

Θεωρούμε τον πίνακα πληροφορίας,

$$\bar{\mathbf{Q}}_6^* = \begin{bmatrix} n_S+1 & & \\ & \bar{n} & \\ & & \bar{n} \end{bmatrix} + a^2\begin{bmatrix} n_S-1 & & \\ & \bar{n} & \\ & & \bar{n} \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 2(n_S-1) & 1 & 1 \\ 1 & 2(\bar{n}-1) & 1 \\ 1 & 1 & 2(\bar{n}-1) \end{bmatrix}.$$

Τότε $\bar{\mathbf{Q}}_6^* - \bar{\mathbf{Q}}_6 = -\alpha\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ και ο $\bar{\mathbf{Q}}_6^*$ είναι ο πίνακας πληροφορίας του σχεδιασμού $d_6^* : \underbrace{SS\ldots S}_{n_S}\underbrace{TT\ldots T}_{\bar{n}}\underbrace{RR\ldots R}_{\bar{n}}S \in F_1$.

Σημειώνουμε έτσι λοιπόν για κάθε σχεδιασμό στην κλάση F_3 υπάρχει «καλύτερος» σχεδιασμός στις κλάσεις F_0 και F_1.

Α5. Κλάση $F_4 : \mathrm{T}\, \underbrace{SS...S}_{n_S}\, \underbrace{TT...T}_{n_T}\, \underbrace{RR...R}_{n_R}\, T$

Γράφουμε $F_4 = F_{41} \cup F_{42}$,όπου F_{41} είναι η υποκλάση για την οποία $n_S + n_T = 0 \bmod 2$ ή $n_T + n_R = 0 \bmod 2$ και F_{42} είναι η κλάση για την οποία $n_S + n_T = 1 \bmod 2$ και $n_T + n_R = 1 \bmod 2$.

Λήμμα Α18. Αν $-1 < a < 0$ και $d \in F_{41}$, τότε $d \to d_1^* : \underbrace{SS...S}_{\bar{n}}\, \underbrace{RR...R}_{n_R}\, \underbrace{TT...T}_{\bar{n}} \in F_0$, $2\bar{n} = n_S + n_T + 2$ ή $d \to d_2^* : \underbrace{RR...R}_{r}\, \underbrace{SS...S}_{n_S}\, \underbrace{TT...T}_{r} \in F_0$, $2r = n_R + n_T + 2$.

Απόδειξη. Ο πίνακας πληροφορίας $\mathbf{Q}_d$ δίνεται από,

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} n_S & 0 & 0 \\ 0 & n_T + 2 & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} n_S & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & n_R \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(n_S - 1) & 2 & 0 \\ 2 & 2(n_T - 1) & 2 \\ 0 & 2 & 2(n_R - 1) \end{bmatrix}.$$

(ι) Αν $n_S + n_{\mathrm{T}} + 2 = 2\bar{n} = 0 \bmod 2$ ή $n_T + n_R + 2 = 2r = 0 \bmod 2$, τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα του μέσου για τον πίνακα πληροφορίας Q_d βρίσκουμε, όπως στο Λήμμα Α3, $d \to d_1^* \in F_0$ ή $d \to d_2^* \in F_0$.

Λήμμα Α19. Αν $-1 < a < 0$ $d \in F_{42}$, τότε $n_S + n_R = 0 \bmod 2 = 2q$ και $d \to d_4 : T\, \underbrace{SS...S}_{q}\, \underbrace{TT...T}_{n_T}\, \underbrace{RR...R}_{q}\, T \in F_4$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του μέσου, όπως σε προηγούμενες αποδείξεις.

Αν $n_T + q + 2 = 2r$, τότε $d_4 \to \underbrace{SS...S}_{r}\, \underbrace{RR...R}_{q}\, \underbrace{TT...T}_{r} \in F_0$. Η απόδειηξη γίνεται με την εφαρμογή του κανόνα του μέσου.

Συγκρίνουμε τους σχεδιασμούς d_0^*, d_1^*, d_2^* της κλάσης F_0 με τον σχεδιασμό $d_4 : T\, \underbrace{SS...S}_{q}\, \underbrace{TT...T}_{n_T}\, \underbrace{RR...R}_{q}\, T$, όταν $n_T + q = 1 \bmod 2$.

Λήμμα Α20. Για $-1<a<0$ και n=3m, $n_T+q=1\bmod 2$, τότε $d_4 \to d_0^* \in F_0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όμοια όπως στα Λήμματα Α2-Α8.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_0^*$ είναι $\lambda_2 = m(1-a)^2 - a^2 + 2a$, $2\lambda_{1,3} = 2m(1-a)^2 + 4a - a^2 \mp \sqrt{a^4+8a^2}$ and $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Ο σχεδιασμός d_{40} έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_{40}$.

$$\mathbf{Q}_{40} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & n_T+2 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & n_T & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2(q-1) & 2 & 0 \\ 2 & 2(n_T-1) & 2 \\ 0 & 2 & 2(q-1) \end{bmatrix}$$

και ιδιοτιμές $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, $\mu_2 = q(1-a)^2 + 2a$,

$$2\mu_{1,3} = (q+n_T)(1-a)^2 + 2 + 4a \mp \sqrt{\left((q-n_T)(1-a)^2 - 2\right)^2 + 32a^2}.$$

Αν $n=3m$, τότε $n_T = 3m-2q-2$ και

$$2\mu_{1,3} = (3m-q)(1-a)^2 + 8a - 2a^2 \mp \sqrt{\left(3(q-m)(1-a)^2 - 4a + 2a^2\right) + 32a^2}$$

Σημειώνουμε ότι

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3 = 3m(1-a)^2 + 10a - 2a^2 < \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 3m(1-a)^2 + 6a - 2a^2.$$

Θα δείξουμε ότι $2(\lambda_1-\mu_1) \ge 0$, δηλαδή,

$$(q-m)(1-a)^2 - 4a + a^2 + \sqrt{\left(3(q-m)(1-a)^2 - 4a + 2a^2\right) + 32a^2} - \sqrt{a^4+8a^2} \ge 0.$$

Αν $q-m \ge 0$, τότε $2(\lambda_1-\mu_1) \ge 0$ αφού $-4a+2a^2 > a^2$.

Αν $q-m \le -1 \Leftrightarrow m-q \ge 1 \Rightarrow 2(\lambda_1-\mu_1) \ge 0$ είναι ίσο με,

$$(q-m)(1-a)^2 - 4a + a^2 + \sqrt{\left(3(m-q)(1-a)^2 + 4a - 2a^2\right) + 32a^2} - \sqrt{a^4+8a^2} \ge 0$$

$$2(\lambda_1-\mu_1) > (q-m)(1-a)^2 - 4a + a^2 + \left(3(m-q)(1-a)^2 + 4a - a^2\right) - (-3a) > 0 \Leftrightarrow$$

$2(\lambda_1 - \mu_1) > 2 - a + 2a^2 > 0$ το οποίο ισχύει. Χρησιμοποιούμε την ανισότητα:

$\sqrt{a^4 + 8a^2} < -3a$,

$\sqrt{\left(3(m-q)(1-a)^2 + 4a - 2a^2\right) + 32a^2} > \left(3(m-q)(1-a)^2 + 4a - 2a^2\right)$,

Τώρα θα δείξουμε ότι $2(\lambda_1 + \lambda_2) - 2(\mu_1 + \mu_2) \geq 0$, δηλαδή,

$(m-q)(1-a)^2 - 4a - a^2 + \sqrt{\left(3(m-q)(1-a)^2 + 4a - 2a^2\right) + 32a^2} - \sqrt{a^4 + 8a^2} \geq 0$.

Αν $m - q \geq 1$, τότε

$(m-q)(1-a)^2 - 4a - a^2 + \left(3(m-q)(1-a)^2 + 4a - 2a^2\right) - (-3a) \geq 0 \Rightarrow 4 - 5a + a^2 > 0$, που ισχύει.

Αν $m - q \leq 0$, τότε

$(m-q)(1-a)^2 - 4a - a^2 + \sqrt{\left(3(q-m)(1-a)^2 - 4a + 2a^2\right) + 32a^2} - \sqrt{a^4 + 8a^2} \geq 0 \Rightarrow$

$(m-q)(1-a)^2 - 4a - a^2 + \left(3(q-m)(1-a)^2 - 4a + 2a^2\right) - (-3a) \geq 0 \Rightarrow -5a + a^2 > 0$, το οποίο αληθεύει, και επομένως $\lambda(\mathbf{Q}_0^*) \prec \lambda(\mathbf{Q}_{40})$.

Λήμμα Α21. Για $-1 < a < 0$ και n=3m+1, $n_T + q = 1 \bmod 2$, τότε $d_4 \to d_1^* \in F_0$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όπως στα Λήμματα Α2-Α8.

Οι ιδιοτιμές του d_{41} είναι: $\mu_2 = q(1-a)^2 + 2a$,

$2\mu_{1,3} = (3m-q)(1-a)^2 + 1 + 6a - a^2 \pm \sqrt{\left(3(m-q)(1-a)^2 + 1 + 2a - a^2\right)^2 + 32a^2}$.

Ενώ οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_1^*$ είναι $\lambda_2 = m(1-a)^2 + 2a - a^2$,

$2\lambda_{1,3} = 2m(1-a)^2 + 1 + 2a \mp \sqrt{(1 - 2a + 2a^2)^2 + 8a^2}$.

Παρατηρούμε ότι $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ και $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3$.

$2(\lambda_1 - \mu_1) > 0$ ισούται με,

$$(q-m)(1-a)^2-4a+a^2-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}+\sqrt{\left(3(m-q)(1-a)^2+1+2a-a^2\right)^2+32a^2}\geq 0.$$

Αν $m-q\geq 1$, τότε $1-3a+2a^2>\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}>1-2a+2a^2$ και

$2(m-q)(1-a)^2-4a+a^2-(1-3a+2a^2)+(1+2a-a^2)\geq 0\Rightarrow$

$2(\lambda_1-\mu_1)>2(1-a)^2+a-2a^2>2-3a>0$, το οποίο αληθεύει.

Αν $q-m\geq 0$, $2(\lambda_1-\mu_1)>0$ είναι ίσο με,

$$(q-m)(1-a)^2-4a+a^2-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}+\sqrt{\left(3(q-m)(1-a)^2-1-2a+a^2\right)^2+32a^2}\geq 0.$$

Αν $q-m\geq 1$, τότε

$4(q-m)(1-a)^2-4a+a^2-(1-3a+2a^2)+(-1-2a+a^2)>2-11a+4a^2>0$ που ισχύει.

Αν $\overline{n}-m=0$, τότε

$$2(\lambda_1-\mu_1)=-4a+a^2-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}+\sqrt{\left(1+2a-a^2\right)^2+32a^2}>0\Rightarrow$$

$$-4a+a^2+\sqrt{\left(1+2a-a^2\right)^2+32a^2}>\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}.$$

Όμως, $1-3a+6a^2>\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}$, τότε

$$-4a+a^2+\sqrt{\left(1+2a-a^2\right)^2+32a^2}>1-2a+6a^2>\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}\Rightarrow$$

$\sqrt{\left(1+2a-a^2\right)^2+32a^2}>1+2a+5a^2$, που είναι αληθές, και επομένως $\lambda_1>\mu_1$.

Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι $2(\lambda_1+\lambda_2)-2(\mu_1+\mu_2)\geq 0$ που ισοδυναμεί με,

$$(m-q)(1-a)^2-4a-a^2-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}+\sqrt{\left(3(q-m)(1-a)^2-1-2a+a^2\right)^2+32a^2}\geq 0$$

Αν $q-m\geq 1$, τότε $-4a-a^2-(1-3a+2a^2)+\left(2(q-m)(1-a)^2-1-2a+a^2\right)>-7a>0$

που είναι πράγματι σωστό.

Αν $q-m \le -1 \Leftrightarrow m-q \ge 1$, τότε

$$(m-q)(1-a)^2 - 4a - a^2 - \sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2} + \sqrt{\left(3(m-q)(1-a)^2+1+2a-a^2\right)^2+32a^2} \ge 0$$

$-4a-a^2-(1-3a+2a^2)+\left(4(m-q)(1-a)^2+1+2a-a^2\right) > 4-7a > 0$, το οποίο ισχύει.

Αν $q-m=0$, τότε $-4a-a^2-\sqrt{(1-2a+2a^2)^2+8a^2}+\sqrt{\left(-1-2a+a^2\right)^2+32a^2} \ge 0$, τότε $-4a-a^2-(1-3\alpha+2\alpha^2+\sqrt{\left(-1-2a+a^2\right)^2+32a^2} > 0$, και έτσι

$\sqrt{\left(-1-2a+a^2\right)^2+32a^2} > 1+a+3a^2 \Rightarrow -6a+29a^2-10a^3-8a^4 > 0$, που πράγματι ισχύει.

Επομένως έχουμε δείξει ότι για n=3m+1, $\lambda(\mathbf{Q}_1^*) \prec \lambda(\mathbf{Q}_{41})$.

Λήμμα Α22. Για $-1 < a < 0$ και n=3m+2, $n_T + q = 1 \bmod 2$, τότε $d_4 \to d_2^* \in F_0$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται όμοια όπως στα Λήμματα Α2-Α8.

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_2^*$ είναι $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, $\lambda_2 = m(1-a)^2+1$,

$$2\lambda_{1,3} = 2m(1-a)^2+1+2a \mp \sqrt{(1-2a)^2+8a^2}\ .$$

Και οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{42}$ είναι $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, $\mu_2 = q(1-a)^2+2a$,

$$2\mu_{1,3} = 2(q+n_T)(1-a)^2+2+4a \mp \sqrt{\left((q-n_T)1-a)^2-2\right)^2+32a^2}\ .$$

Για την περίπτωση που έχουμε $n=3m+2$, τότε $n_T = 3m-2q$ και

$$2\mu_{1,3} = (3m-q)(1-a)^2+2+4a \mp \sqrt{\left(3(m-q)1-a)^2+2\right)^2+32a^2}\ .$$

Πρόκειται να δείξουμε ότι $2(\lambda_1-\mu_1) \ge 0$, δηλαδή,

$(q-m)(1-a)^2 -1-2a+\sqrt{\left(3(m-q)1-a)^2+2\right)^2+32a^2}-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}\geq 0$.

Αν $m-q=0$, τότε $2(\lambda_1-\mu_1)=\sqrt{4+32a^2}-1-2a-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}\geq 0$,

Όμως $\sqrt{4+32a^2}>2+4a^2\Rightarrow$

$2(\lambda_1-\mu_1)>2+4a^2-1-2a-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}=1-2a+4a^2-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}\geq 0$,

που ισχύει.

Αν $m-q\geq 1$, θα έχουμε

$2(\lambda_1-\mu_1)>(q-m)(1-a)^2-1-2a+\left(3(m-q)1-a)^2+2\right)-(1-3a+2a^2\geq 0\Rightarrow$

$2(\lambda_1-\mu_1)>2(m-q)(1-a)^2+a-2a^2>2-3a+2a^2>0$, που είναι αληθές.

Αν $m-q\leq -1\Leftrightarrow q-m\geq 1$, τότε

$2(\lambda_1-\mu_1)>4(q-m)(1-a)^2-2-1-2a-(1-3a+2a^2)=4(q-m)(1-a)^2+a-2a^2>0$
, το οποίο πράγματι ισχύει.

Τώρα θα εξετάσουμε αν $2(\lambda_1+\lambda_2)-2(\mu_1+\mu_2)\geq 0$, δηλαδή,

$(m-q)(1-a)^2+1-6a+\sqrt{\left(3(m-q)1-a)^2+2\right)^2+32a^2}-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}\geq 0$.

Αν $m-q\geq 0$, τότε

$(m-q)(1-a)^2+1-6a+\left(3(m-q)1-a)^2+2\right)-(1-3a+2a\ \ )>0\Rightarrow$

$1-6a+2-(1-3a+2a\ \ )=2-3a-2a^2>0$, το οποίο ισχύει.

Αν $m-q\leq -1$, τότε

$(m-q)(1-a)^2+1-6a+\sqrt{\left(3(q-m)1-a)^2-2\right)^2+32a^2}-\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}\geq 0\Rightarrow$

$2(q-m)(1-a)^2+1-6a-2-(1-3a+2a^2)>0\Rightarrow$

$2(q-m)(1-a)^2+1-6a-2-(1-3a+2a^2)>0 \Rightarrow -7a>0$, που είναι αληθές.

Επομένως έχουμε δείξει ότι $\lambda(\mathbf{Q}_2^*) \prec \lambda(\mathbf{Q}_{42})$.

Παράρτημα 4.2

Σε αυτό το Παράρτημα αποδεικνύουμε A-, D-, E-βελτιστοποίηση όταν n=3m+1 και n=3m+2

Για n=3m+1 οι τέσσερεις σχεδιασμοί προς σύγκριση για φ-βελτιστοποίηση είναι:

$d_{11}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, $d_{12}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m-1}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$, $d_{13}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$,

$d_{14}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$.

A 4.2.1 E-βελτιστοποίηση, n=3m+1

Λήμμα Β1. Για $-1<a<0$ και n=3m+1, ο σχεδιασμός d_{11}^* είναι E-βέλτιστος για $-1<a<-0.618$, $m\geq 1$ και ο σχεδιασμός d_{14}^* είναι E-βέλτιστος για $-0.618<a<0$, $m\geq 1$.

Απόδειξη. Η μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_{11}^*$ του d_{11}^* είναι, $\lambda_1=m(1-a)^2+0.5+a-0.5\left((1-2a+2a^2)^2+8a^2\right)^{1/2}$ και η μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_{12}^*$ του d_2 είναι $\mu_1=m(1-a)^2+2a-0.5\alpha^2-0.5\left((2-4a+a^2)^2+8a^2\right)^{1/2}$.

$\lambda_1-\mu_1=0.5-a+0.5a^2-0.5\left((1-2a+2a^2)^2+8a^2\right)^{1/2}+0.5\left((2-4a+a^2)^2+8a^2\right)^{1/2}>0 \Rightarrow$
$\lambda_1-\mu_1=0.5-a+0.5a^2-0.5((1-5a+2a^2)+0.5(2-4a+a^2)=1-0.5a>0$, το οποίο αληθεύει. Άρα d_{11}^* είναι E-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον d_{12}^*.

Συγκρίνουμε τώρα τον d_{11}^* με τον $d_{13}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$. Εφόσον δεν έχουμε τις ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{13}^*$ σε απλή μορφή, χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο τρίτου βαθμού πολυώνυμο, ως ακολούθως.

Ο πίνακας πληροφορίας του d_{13}^* είναι: $\mathbf{Q}_{13}^* = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_3 & -a & 0 \\ -a & \mathrm{B}_3 & -a \\ 0 & -a & C_3 \end{pmatrix}$, με

$$\begin{cases} \mathrm{A}_3 = m(1-a)^2 + 1, \\ \mathrm{B}_3 = m(1-a)^2 + 2a, \\ C_3 = m(1-a)^2 + 2a - a^2. \end{cases}$$

Έστω, $f_3(\nu) = \det\left(\mathbf{Q}_{13}^* - \nu\mathbf{I}_3\right) = (\mathrm{A}_3 - \nu)\left((B_3 - \nu)(C_3 - \nu) - a^2\right) - a^2(C_3 - \nu)$.

Τότε $f_3(A_3) = -a^2(C_3 - A_3) > 0$, $f_3(C_3) = -a^2(A_3 - C_3) < 0$ αφού
$A_3 - C_3 = (1-a)^2 > 0$ και αν $0 < \nu_1 \le \nu_2 \le \nu_3$ είναι οι ρίζες του $f_3(\nu) = 0$ (δηλαδή, οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{13}^*$), τότε

$f_3(\nu) > 0$ για $\nu < \nu_1$, $f_3(\nu) < 0$ για $\nu_1 < \nu < \nu_2$, $f_3(\nu) > 0$ για $\nu_2 < \nu < \nu_3$.

Επομένως αν $f_3(\lambda_1) < 0$,τότε $\lambda_1 > \nu_1$, όπου λ_1 δίνεται πιο πάνω.

$$f_3(\lambda_1) = (\mathrm{A}_3 - \lambda_1)\left((B_3 - \lambda_1)(C_3 - \lambda_1) - a^2\right) - a^2(C_3 - \lambda_1),$$

$$\mathrm{A}_3 - \lambda_1 = 0.5 - a + 0.5\left((1-2a+2a^2)^2 + 8a^2\right)^{1/2}, \ \mathrm{B}_3 - \lambda_1 = -0.5 + a + 0.5\left((1-2a+2a^2)^2 + 8a^2\right)^{1/2},$$

$$C_3 - \lambda_1 = -0.5 + a - a^2 + 0.5\left((1-2a+2a^2)^2 + 8a^2\right)^{1/2}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1 - 2a + 2a^2 < \left((1-2a+2a^2)^2 + 8a^2\right)^{1/2} < 1 - 4a + a^2$, έχουμε $0 < C_3 - \lambda_1 < -a - 0.5a^2$, $a^2 < B_3 - \lambda_1 < -a + 0.5a^2$, και έτσι $\mathrm{A}_3 - \lambda_1 > 0$ και

$$(B_3 - \lambda_1)(C_3 - \lambda_1) - a^2 < (a^2 - 0.25a^4) - a^2 = -0.25a^4 < 0.$$

Επομένως, $f_3(\lambda_1) = (\mathrm{A}_3 - \lambda_1)\left((B_3 - \lambda_1)(C_3 - \lambda_1) - a^2\right) - a^2(C_3 - \lambda_1) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > \nu_1$.

Συγκρίνουμε τώρα $d_{11}^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, $d_{14}^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$.

Εάν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ είναι οι ιδοτιμές του $\mathbf{Q}_{14}^*$, τότε $\kappa_2 = m(1-a)^2 + 3a$, $2\kappa_{1,3} = 2m(1-a)^2 + 1 + 3a - a^2 \mp \left((1+a-a^2)^2 + 8a^2\right)^{1/2}$, και η μικρότερη είναι η κ_2.

$$2\lambda_1 = 2m(1-a)^2 + 1 + 2a - \left((1-2a+2a^2)^2 + 8a^2\right)^{1/2}.$$

$$2(\lambda_1 - \kappa_2) = 2m(1-a)^2 + 1 + 2a - \left((1-2a+2a^2)^2 + 8a^2\right)^{1/2} - (2m(1-a)^2 + 6a) \Rightarrow$$

$$2(\lambda_1 - \kappa_2) = 1 - 4a - \left((1-2a+2a^2)^2 + 8a^2\right)^{1/2}.$$

Για τις τιμές $-1 < a < -0.618, m \geq 1 \Rightarrow \lambda_1 > \kappa_2$ και για $-0.618 < a < 0, m \geq 1 \Rightarrow \lambda_1 < \kappa_2$.

AII.2 A-βελτιστοποίηση, n=3m+1

Λήμμα Β2. Για $-1 < a < 0$ και n=3m+1, ο σχεδιασμός d_{13}^* είναι A-βέλτιστος για $m \geq 2$, ο σχεδιασμός d_{11}^* είναι A-βέλτιστος για m=1 και $-1 < a < -0.618034$ και ο σχεδιασμός d_{14}^* είναι A-βέλτιστος για m=1 και $-0.618034 < a < 0$.

Απόδειξη. Επειδή η απόδειξη είναι μακροσκελής δίνουμε καταρχήν τις βασικές ιδέες - βήματα. Στη συνέχεια ακολουθεί η λεπτομερής απόδειξη.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές του πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}_d$ του σχεδιασμού d, και έχουμε να υπολογίσουμε τις ισότητα, $\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} = \left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\right)\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right)^{-1}$ και τον πίνακα πληροφορίας

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & c_1 & c_2 \\ c_1 & \mathrm{B} & c_3 \\ c_2 & c_3 & C \end{bmatrix}.$$

Έπειτα έχουμε να υπολογίσουμε πολυώνυμο τρίτου βαθμού, $f(\lambda)=|\mathbf{Q}-\lambda\mathbf{I}_3|=-\lambda^3+D_1\lambda^2-D_2\lambda+D_3$, όπου $D_1=A+B+C$, $D_2=AB+AC+BC-c_1^2-c_2^2-c_3^2$, $D_3=ABC-c_3^2A-c_1^2C-c_2^2B+2c_1c_2c_3$.

Επίσης, $f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$, και έτσι $D_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $D_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3$, $D_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Για Α-βελτιστοποίηση χρειαζόμαστε τα D_2, D_3 και για κάθε δοσμένο σχεδιασμό d είναι γνωστές. Από τη σύγκριση των τεσσάρων σχεδιασμών $d_{11}^*, d_{12}^*, d_{13}^*, d_{14}^*$ παίρνουμε τα αποτελέσματα που δίνονται στο Λήμμα Lemma B2.

Λεπτομερής απόδειξη: Για n=3m+1 οι τέσσερις σχεδιασμοί προς σύγκριση είναι:

$d_1^*:\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, $d_2:\underbrace{\quad S}_{m+1}.\underbrace{\ S\ .\ }_{}\underbrace{\ .S\quad}_{m-1}T$ $d_3:\underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$,

$d_4:\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$.

Για την Α-βελτιστοποίηση χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}=\frac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}.$$

Αν $\lambda_1,\lambda_3,\lambda_3$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{Q}_1^*$, μ_1,μ_3,μ_3 οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_2$, v_1,v_2,v_3 οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_3$ και $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_4$. Ως εκ τούτου από το πολυώνυμο τρίτου βαθμού $f_i(\lambda)=|\mathbf{Q}-\lambda\mathbf{I}_3|, i=1,2,3,4$ βρίσκουμε,

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=3m^2(1-a)^4+2m(1-a)^2(1+4a-a^2)+4a-a^4$$

$$\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3=3m^2(1-a)^4+2m(1-a)^2(1+4a-a^2)-1+8a-4a^2$$

$$v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3=3m^2(1-a)^4+2m(1-a)^2(1+4a-a^2)+4a+a^2-2a^3$$

$$\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_3+\kappa_2\kappa_3=3m^2(1-a)^4+2m(1-a)^2(1+6a-a^2)+4a+9a^2-4a^3$$

και

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(4a-a^4) + 4a^2 - 8a^3 + 7a^4 - 4a^5 + a^6$$
$$\mu_1\mu_2\mu_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(-1+8a-4a^2) - 1 + 4a - 3\alpha^2$$
$$\nu_1\nu_2\nu_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(4a+a^2-2a^3) + 3a^2 - 4a^3 + a^4$$
$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+6a-a^2) + m(1-a)^2(4a+9a^2-4\alpha^3) + 3a^2 - 3\alpha^4$$

i) Καταρχήν, συγκρίνουμε τους σχεδιασμούς, $d_1^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ και

$d_3: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$:

Έτσι λοιπόν, αν $\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}\right)-\left(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}\right) > 0 \Leftrightarrow \alpha'\delta > \beta'\gamma$

$$\alpha' = 3m^2(1-a)^4 + 2m(1-a)^2(1+4a-a^2) + 4a - a^4$$

$$\beta' = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m((1-a)^2(4a-a^4) + 4a^2 - 8a^3 + 7a^4 - 4a^5 + a^6$$

$$\gamma = 3m^2(1-a)^4 + 2m(1-a)^2(1+4a-a^2) + 4a + \alpha^2 - 2a^3$$

$$\delta = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(4a+a^2-2a^3) + 3a^2 - 4a^3 + a^4$$

$$\alpha'\delta - \beta'\gamma = m^3(1-a)^6(2a^2-4a^3+2a^4) + m^2(1-a)^4(-2a^2+14a^3-26a^4+18a^5-4a^6)$$
$$+m(1-a)^2(-2a^2+22a^4-48a^5+42a^6-16a^7+2a^8) - 4a^3 + 12a^4 - 8a^5 - 10a^6 + 18a^7 - 10a^8 + 2a^9$$

$$\alpha'\delta - \beta'\gamma = m^3(1-a)^6 A' + m^2(1-a)^4 B' + m(1-a)^2 C' + D'$$

$A' = 2a^2 - 4a^3 + 2a^4$,
$B' = -2a^2 + 14a^3 - 26a^4 + 18a^5 - 4a^6$,
$C' = -2a^2 + 22a^4 - 48a^5 + 42a^6 - 16a^7 + 2a^8$,
$D' = -4a^3 + 12a^4 - 8a^5 - 10a^6 + 18a^7 - 10a^8 + 2a^9$

A'>0,

$$m^3(1-a)^6 A' + m^2(1-a)^4 B' = m^2(1-a)^4\left[m(1-a)^2 A' + B'\right] \text{ if } \; m \geq 2 \Rightarrow$$
$$m(1-a)^2 A' + B' \geq 2(1-a)^2 A' + B'$$
$$= 2(1-2a+a^2)(2a^2-4a^3+2a^4) - 2a^2 + 14a^3 - 26a^4 + 18a^5 - 4a^6$$
$$= 2a^2 - 2a^3 - 2a^4 + 2a^5 = 2a^2(1-a^2) - 2a^3(1-a^2) > 0$$

Άρα αν $m \geq 2$ συνεπάγεται $m^3(1-a)^6 A' + m^2(1-a)^4 B' > 0$, και έτσι,

$$m^3(1-a)^6 A' + m^2(1-a)^4 B' = m^2(1-a)^4\left(m(1-a)^2 A' + B'\right) >$$
$$m^2(1-a)^4\left[2a^2 - 2a^3 - 2a^4 + 2a^5\right] \Rightarrow$$

Τώρα,

$$m^3(1-a)^6 A' + m^2(1-a)^4 B' + m(1-a)^2 C' >$$
$$m^2(1-a)^4\left[2a^2 - 2a^3 - 2a^4 + 2a^5\right] + m(1-a)^2 C'$$
$$= m(1-a)^2\left[m(1-a)^2\left[2a^2 - 2a^3 - 2a^4 + 2a^5\right] + C'\right] \geq$$
$$m(1-a)^2\left[2(1-2a+\alpha^2)\left(2a^2 - 2a^3 - 2a^4 + 2a^5\right) + C'\right]$$
$$= m(1-a)^2\left[2(1-2a+a^2)\left(2a^2 - 2a^3 - 2a^4 + 2a^5\right) - 2a^2 + 22a^4 - 48a^5 + 42a^6 - 16a^7 + 2a^8\right]$$
$$= m(1-a)^2(2a^2 - 12a^3 + 30a^4 - 40a^5 + 30a^6 - 12a^7 + 2a^8) > 0$$
$$m^3(1-a)^6 A' + m^2(1-a)^4 B' + m(1-a)^2 C' + D' >$$
$$\left[m(1-a)^2\left[2a^2 - 12a^3 + 30a^4 - 40a^5 + 30a^6 - 12a^7 + 2a^8\right]\right] + D$$
$$\geq 2(1-2a+a^2)\left[2a^2 - 12a^3 + 30a^4 - 40a^5 + 30a^6 - 12a^7 + 2a^8\right] +$$
$$-4a^3 + 12a^4 - 8a^5 - 10a^6 + 18a^7 - 10a^8 + 2a^9$$
$$= 4a^2 - 36a^3 + 124a^4 - 232a^5 + 270a^6 - 206a^7 + 102a^8 - 30a^9 + 4a^{10} > 0$$

Συμπέρασμα: αν $m \geq 2$ τότε $\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right) - \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) > 0,$ και ο Α-βέλτιστος σχεσμός έχει ιδιοτιμές v_1, v_2, v_3.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση m=1.

$$\alpha'\delta - \beta'\gamma = m^3(1-a)^6 A' + m^2(1-a)^4 B' + m(1-a)^2 C' + D'$$

$$m^3(1-a)^6 A' + m^2(1-a)^4 B' =$$
$$(1-a)^6(2a^2-4a^3+2a^4)+(1-a)^4(-2a^2+14a^3-26a^4+18a^5-4a^6)$$
$$=(1-a)^4\left((1-a)^2(2a^2-4a^3+2a^4)+(-2a^2+14a^3-26a^4+18a^5-4a^6)\right)$$
$$=(1-a)^4\left((1-2a+a^2)(2a^2-4a^3+2a^4)+(-2a^2+14a^3-26a^4+18a^5-4a^6\right)$$
$$=(1-a)^4\left(6a^3-14a^4+10a^5-2a^6\right)$$
$$=(1-4a+6a^2-4a^3+a^4)\left(6a^3-14a^4+10a^5-2a^6\right)$$
$$=6a^3-38a^4+102a^5-150a^6+130a^7-66a^8+18a^9-2a^{10}$$

$$m(1-a)^2 C' + D'$$
$$=(1-a)^2(-2a^2+22a^4-48a^5+42a^6-16a^7+2a^8)-4a^3+12a^4-8a^5-10a^6+18a^7-10a^8+2a^9$$
$$=(1-2a+a^2)(-2a^2+22a^4-48a^5+42a^6-16a^7+2a^8)-4a^3+12a^4-8a^5-10a^6+18a^7-10a^8+2a^9$$
$$=-2a^2+32a^4-100a^5+150a^6-130a^7+66a^8-18a^9+2a^{10}$$

Επομένως,

$$\alpha'\delta-\beta'\gamma=(1-a)^6 A'+(1-a)^4 B'+(1-a)^2 C'+D'$$
$$=6a^3-38a^4+102a^5-150a^6+130a^7-66a^8+18a^9-2a^{10}$$
$$-2a^2+32a^4-100a^5+150a^6-130a^7+66a^8-18a^9+2a^{10}$$
$$=-2a^2+6a^3-6a^4+2a^5=-2a^2(1-a^3)+6a^3(1-a)<0$$

Ως εκ τούτου για m=1 ο σχεδιασμός $d_1^*:\underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ είναι Α-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον $d_3:\underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$.

ii) Στη συνέχεια συγκρίνουμε τον σχεδιασμό $d_2:\underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m-1}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$ με $d_3:\underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$, όταν $m\geq 2$.

$$\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}\right)-\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}\right)>0 \Leftrightarrow \alpha\delta>\beta\gamma$$

$$\alpha=3m^2(1-a)^4+2m(1-a)^2(1+4a-a^2)-1+8a-4a^2$$

$$\beta = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(-1+8a-4\alpha^2) - 1 + 4\alpha - 3\alpha^2$$

$$\gamma = 3m^2(1-a)^4 + 2m(1-a)^2(1+4a-a^2) + 4a + \alpha^2 - 2a^3$$

$$\delta = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(4a+a^2-2a^3) + 3a^2 - 4a^3 + a^4$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = m^3(1-a)^6(2-8a+10a^2-4a^3) + m^2(1-a)^4(4-12a+6a^2+10a^3-10a^4+2a^5)$$
$$+m(1-a)^2(2-22a^2+48a^3-42a^4+16a^5-2a^6) + 4a - 18a^2 + 34a^3 - 34a^4 + 18a^5 - 4a^6$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = m^3(1-a)^6 A + m^2(1-a)^4 B + m(1-a)^2 C + D$$

$$A = 2-8a+10a^2-4a^3,$$
$$B = 4-12a+6a^2+10a^3-10a^4+2a^5,$$
$$C = 2-22a^2+48a^3-42a^4+16a^5-2a^6,$$
$$D = 4a-18a^2+34a^3-34a^4+18a^5-4a^6.$$

Α>0,

$$m^3(1-a)^6\mathrm{A} + m^2(1-a)^4\mathrm{B} = m^2(1-a)^4\left[m(1-a)^2 A + B\right] \text{ if } \; m \geq 2 \Rightarrow$$
$$m(1-a)^2 A + B \geq 2(1-a)^2 A + B$$
$$= 2(1-2a+a^2)(2-8a+10a^2-4a^3) + (4-12a+6a^2+10a^3-10a^4+2a^5)$$
$$= 8-36a+62a^2-54a^3+26a^4-6a^5 > 0$$

Έτσι αν $m \geq 2$ συνεπάγεται ότι $m^3(1-a)^6\mathrm{A} + m^2(1-a)^4\mathrm{B} > 0$.

Και άρα,

$$m^3(1-a)^6\mathrm{A} + m^2(1-a)^4\mathrm{B} = m^2(1-a)^4\left(m(1-a)^2\mathrm{A} + \mathrm{B}\right) >$$
$$m^2(1-a)^4\left[8-36a+62a^2-54a^3+26a^4-6a^5\right] \Rightarrow$$

$$m^3(1-a)^6 A + m^2(1-a)^4 B + m(1-a)^2 C \geq$$
$$m^2(1-a)^4\left[8-36a+62a^2-54a^3+26a^4-6a^5\right]+m(1-a)^2 C$$
$$= m(1-a)^2\left[m(1-a)^2\left[8-36a+62a^2-54a^3+26a^4-6a^5\right]+C\right] \geq$$
$$m(1-a)^2\left[2(1-a)^2\left(8-36a+62a^2-54a^3+26a^4-6a^5\right)+C\right] =$$
$$2(1-2a+a^2)(8-36a+62a^2-54a^3+26a^4-6a^5)$$
$$+2-22a^2+48a^3-42a^4+16a^5-2a^6$$
$$= (16-104a+284a^2-428a^3+392a^4-224a^5+76a^6-12a^7)$$
$$+2-22a^2+48a^3-42a^4+16a^5-2a^6$$
$$= 18-104a+262a^2-380a^3+350a^4-208a^5+74a^6-12a^7 > 0$$

Έτσι αν $m \geq 2$ τότε

$$m^3(1-a)^6 A + m^2(1-a)^4 B + m(1-a)^2 C >$$
$$m(1-a)^2\left[18-104a+262a^2-380a^3+350a^4-208a^5+74a^6-12a^7\right] > 0$$

Τώρα,

$$m^3(1-a)^6 A + m^2(1-a)^4 B + m(1-a)^2 C + D >$$
$$\left[m(1-a)^2\left[18-104a+262a^2-380a^3+350a^4-208a^5+74a^6-12a^7\right]\right]+D \geq$$
$$\left[2(1-a)^2\left[18-104a+262a^2-380a^3+350a^4-208a^5+74a^6-12a^7\right]\right]+D$$
$$= \left[36-280a+976a^2-2016a^3+2744a^4-2576a^5+1680a^6-736a^7+196a^8-24a^9\right]$$
$$+4a-18a^2+34a^3-34a^4+18a^5-4a^6$$
$$= 36-276a+958a^2-1982a^3+2710a^4-2558a^5+1676a^6-736a^7+196a^8-24a^9 > 0$$

Και άρα $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$.

Ως εκ τούτου ο σχεδιασμός $d_3 : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ είναι Α-βέλτιστος συγκρινόμενος με τον σχεδιασμό $d_2 : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m-1}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$.

iii) Τέλος, συγκρίνουμε τον σχεδιασμό $d_4 : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}S$ με τον $d_3 : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$.

$$\left(\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}+\frac{1}{\kappa_3}\right)-\left(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}\right)>0 \Leftrightarrow \alpha''\delta > \beta''\gamma$$

$$\alpha'' = 3m^2(1-a)^4 + 2m(1-a)^2(1+6a-a^2)+4a+9a^2-4a^3$$

$$\beta'' = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+6a-a^2)+m(1-a)^2(4a+9a^2-4\alpha^3)+3a^2-3\alpha^4$$

$$\gamma = 3m^2(1-a)^4 + 2m(1-a)^2(1+4a-a^2)+4a+\alpha^2-2a^3$$

$$\delta = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2)+m(1-a)^2(4a+a^2-2a^3)+3a^2-4a^3+a^4$$

$$\alpha''\delta-\beta''\gamma = -2am^4(1-a)^8 + m^3(1-a)^6(-16a^2+4a^3)+m^2(1-a)^4(-40a^3+24a^4-2a^5)$$
$$+m(1-a)^2(4a^3-40a^4+44a^5-8a^6)+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$

$$\alpha''\delta-\beta''\gamma = m^4(1-a)^8A''+m^3(1-a)^6B''+m^2(1-a)^4C''+m(1-a)^2D''+E''$$

$A''=-2a,$
$B''=-16a^2+4a^3,$
$C''=-40a^3+24a^4-2a^5,$
$D''=4a^3-40a^4+44a^5-8a^6,$
$E''=8a^4-26a^5+28a^6-10a^7.$

A''>0,

$$m^4(1-a)^8A''+m^3(1-a)^6B'' = m^3(1-a)^6\left[m(1-a)^2A''+B''\right]$$

Για $m \geq 3 \Rightarrow$

$$m(1-a)^2 A"+B" \geq 3(1-a)^2 A"+B"$$
$$=-6a+12a^2-6a^3-16a^2+4a^3$$
$$=-6a-4a^2-2a^3=-2a(a^2+2a+3)>0$$
$$\Rightarrow m^4(1-a)^8 A"+m^3(1-a)^6 B">0$$

Επιπλέον,

$$m^2(1-a)^4 C"+m(1-a)^2 D"=m(1-a)^2\left(m(1-a)^2 C"+D"\right)$$

Και για $m \geq 3 \Rightarrow$

$$m(1-a)^2 C"+D" \geq 3(1-a)^2 C"+D"$$
$$=3(1-2a+a^2)(-4a^3+24a^4-2a^5)+4a^3-40a^4+44a^5-8a^6$$
$$=-116a^3+272a^4-226a^5+76a^6-6a^7 \geq 0$$
$$\Rightarrow m^2(1-a)^4 C"+m(1-a)^2 D" \geq 0$$

Και $E"=8a^4-26a^5+28a^6-10a^7>0$.

Έτσι αν

$$m \geq 3 \Rightarrow \alpha"\delta-\beta"\gamma=m^4(1-a)^8 A"+m^3(1-a)^6 B"+m^2(1-a)^4 C"+m(1-a)^2 D"+E" \geq 0.$$

Πάμε τώρα να δούμε τι γίνεται όταν $m=2$.

$$m^4(1-a)^8 A"+m^3(1-a)^6 B"=m^3(1-a)^6\left[m(1-a)^2 A"+B"\right]$$

$$\alpha''\delta-\beta''\gamma=-2a2^4(1-a)^8+2^3(1-a)^6(-16a^2+4a^3)+2^2(1-a)^4(-40a^3+24a^4-2a^5)$$
$$+2(1-a)^2(4a^3-40a^4+44a^5-8a^6)+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=2^3(1-a)^6\left(-4a(1-a)^2-16a^2+4a^3\right)+2^2(1-a)^4(-40a^3+24a^4-2a^5)$$
$$+2(1-a)^2(4a^3-40a^4+44a^5-8a^6)+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=2^3(1-a)^6\left(-4a-8a^2\right)+2^2(1-a)^4(-40a^3+24a^4-2a^5)$$
$$+2(1-a)^2(4a^3-40a^4+44a^5-8a^6)+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=2^2(1-a)^4\left(2(1-a)^2(-4a-8a^2)-40a^3+24a^4-2a^5\right)$$
$$+2(1-a)^2(4a^3-40a^4+44a^5-8a^6)+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=2^2(1-a)^4\left(-8a-16a^3+8a^4-2a^5\right)+2(1-a)^2(4a^3-40a^4+44a^5-8a^6)$$
$$+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=2^2(1-a)^4\left(-8a-16a^3+8a^4-2a^5\right)+2(1-a)^2(4a^3-40a^4+44a^5-8a^6)$$
$$+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=2(1-a)^2\left(2(1-a)^2\left(-8a-16a^3+8a^4-2a^5\right)+4a^3-40a^4+44a^5-8a^6\right)$$
$$+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=2(1-a)^2\left(-16a+32a^2-44a^3+40a^4-24a^5+16a^6-4a^7\right)$$
$$+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=\left(-32a+128a^2-248a^3+320a^4-296a^5+208a^6-120a^7+48a^8-8a^9\right)$$
$$+8a^4-26a^5+28a^6-10a^7$$
$$=-32a+128a^2-248a^3+328a^4-322a^5+236a^6-130a^7+48a^8-8a^9>0$$

Έτσι αν $m=2\Rightarrow\alpha''\delta-\beta''\gamma=m^4(1-a)^8A+m^3(1-a)^6B+m^2(1-a)^4C+m(1-a)^2D+E\geq 0$.

Συμπέρασμα: Αν $m\geq 2$, τότε $\left(\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}+\frac{1}{\kappa_3}\right)-\left(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}\right)>0$ και ο Α-βέλτιστος έχει ιδιοτιμές ν_1,ν_2,ν_3.

Όμως δεν ισχύει το ίδιο συμπέρασμα όταν $m=1$. Για την περίπτωση αυτή συγκρίνουμε τον σχεδιασμό $d_4:\underbrace{SS...S}_{m}\underbrace{TT...T}_{m}\underbrace{RR...R}_{m}S$ με τον $d_1^*:\underbrace{SS...S}_{m}\underbrace{TT...T}_{m+1}\underbrace{RR...R}_{m}$.

$$\left(\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}+\frac{1}{\kappa_3}\right)-\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}\right)>0\Leftrightarrow\alpha''\varepsilon>\beta''\zeta$$

$$\alpha'' = 3m^2(1-a)^4 + 2m(1-a)^2(1+6a-a^2) + 4a + 9a^2 - 4a^3$$

$$\beta'' = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+6a-a^2) + m(1-a)^2(4a+9a^2-4\alpha^3) + 3a^2 - 3\alpha^4$$

$$\varepsilon = 3m^2(1-a)^4 + 2m(1-a)^2(1+4a-a^2) + 4a - a^4$$

$$\zeta = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(4a-a^4) + 4a^2 - 8a^3 + 7a^4 - 4a^5 + a^6$$

$$\alpha''\varepsilon - \beta''\zeta = -2am^4(1-a)^8 + m^3(1-a)^6(-18a^2+8a^3-2a^4) + m^2(1-a)^4(2a^2-56a^3+54a^4-22a^5+4a^6)$$
$$+m(1-a)^2(2a^2+8a^3-78a^4+116a^5-66a^6+20a^7-2a^8) + 4a^3 + 4a^4 - 48a^5 + 82a^6 - 60a^7 + 22a^8 - 4a^9$$

Έτσι για $m=1 \Rightarrow$

$$\alpha''\varepsilon - \beta''\zeta = -2a(1-a)^8 + (1-a)^6(-18a^2+8a^3-2a^4) + (1-a)^4(2a^2-56a^3+54a^4-22a^5+4a^6)$$
$$+(1-a)^2(2a^2+8a^3-78a^4+116a^5-66a^6+20a^7-2a^8) + 4a^3 + 4a^4 - 48a^5 + 82a^6 - 60a^7 + 22a^8 - 4a^9$$

Επομένως για $m=1 \Rightarrow$

$$\alpha''\varepsilon - \beta''\zeta = -2a(1-a)^8 + (1-a)^6(-18a^2+8a^3-2a^4) + (1-a)^4(2a^2-56a^3+54a^4-22a^5+4a^6)$$
$$+(1-a)^2(2a^2+8a^3-78a^4+116a^5-66a^6+20a^7-2a^8) + 4a^3 + 4a^4 - 48a^5 + 82a^6 - 60a^7 + 22a^8 - 4a^9$$

Υπολογίζουμε τα τρία στάδια,

$$\begin{aligned}
&-2a(1-a)^8 + (1-a)^6(-18a^2+8a^3-2a^4) \\
&= (1-a)^6\left(-2a(1-2a+a^2) + (-18a^2+8a^3-2a^4)\right) \\
&= (1-a)^6(-2a-14a^2+6a^3-2a^4) \\
&= (1-6a+15a^2-20a^3+15a^4-6a^5+a^6)(-2a-14a^2+6a^3-2a^4) \\
&= -2a-2a^2+60a^3-208a^4+352a^5-348a^6+212a^7-80a^8+18a^9-2a^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1-a)^4(2a^2-56a^3+54a^4-22a^5+4a^6) + +(1-a)^2(2a^2+8a^3-78a^4+116a^5-66a^6+20a^7-2a^8) \\
&= (1-a)^2\left((1-a)^2(2a^2-56a^3+54a^4-22a^5+4a^6) + (2a^2+8a^3-78a^4+116a^5-66a^6+20a^7-2a^8)\right) \\
&= (1-a)^2\left((1-2a+a^2)(2a^2-56a^3+54a^4-22a^5+4a^6) + (2a^2+8a^3-78a^4+116a^5-66a^6+20a^7-2a^8)\right) \\
&= (1-2a+a^2)(4a^2-52a^3+90a^4-70a^5+36a^6-10a^7+2a^8) \\
&= 4a^2-60a^3+198a^4-302a^5+266a^6-152a^7+58a^8-14a^9+2a^{10}
\end{aligned}$$

Έτσι

$$-2a-2a^2+60a^3-208a^4+352a^5-348a^6+212a^7-80a^8+18a^9-2a^{10}$$
$$+4a^2-60a^3+198a^4-302a^5+266a^6-152a^7+58a^8-14a^9+2a^{10}$$
$$+4a^3+4a^4-48a^5+82a^6-60a^7+22a^8-4a^9$$
$$=-2a+2a^2+4a^3-6a^4+2a^5$$

Η συνάρτηση $\varphi(a)=-2a+2a^2+4a^3-6a^4+2a^5$ παίρνει θετικές τιμές όταν $a<-0.618034$, αλλά παίρνει αρνητικές τιμές για $a\geq -0.618034$.

Επομένως, για $m=1$ και $a<-0.618034$ ο σχεδιασμός $d_1^*:STTR$, είναι Α-βέλτιστος και για $a\geq -0.618034$ ο σχεδιασμός $d_4:\underbrace{SS...S}_{m}\underbrace{TT...T}_{m}\underbrace{RR...R}_{m}S$ είμαι Α-βέλτιστος.

Συμπέρασμα: Για $m\geq 2$ ο $d_3:\underbrace{SS...S}_{m+1}\underbrace{TT...T}_{m}\underbrace{RR...R}_{m}$ είναι Α-βέλτιστος.

Για $m=1$ και $a<-0.618034$ ο σχεδιασμός $d_1^*:STTR$, είναι Α-βέλτιστος και για $a\geq -0.618034$ ο σχεδιασμός $d_4:\underbrace{SS...S}_{m}\underbrace{TT...T}_{m}\underbrace{RR...R}_{m}S$ είναι Α-βέλτιστος.

A4.2.3 D-βελτιστοποίηση, n=3m+1

Λήμμα Β3. Για $-1<a<0$ και n=3m+1, ως προς την D-βελτιστοποίηση (ι) Για $m\geq 2$, d_{13}^* είναι καλύτερος από τους $d_{11}^*,d_{12}^*,d_{14}^*$, (ιι) Για m=1, d_{13}^* και d_{11}^* είναι ισοδύναμοι και καλύτεροι από τους d_{12}^*,d_{14}^*.

Απόδειξη. Για την D-βελτιστοποίηση συγκρίνουμε ανά ζεύγη τους σχεδιασμούς χρησιμοποιώντας το $D_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, που δίνεται παραπάνω.

Η λεπτομερής απόδειξη ακολουθεί.

1) Αν $n=3m+1$, $\lambda_1,\lambda_3,\lambda_3$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_1^*$ και μ_1,μ_3,μ_3 οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_2$, τότε $\lambda_1\lambda_3\lambda_3>\mu_1\mu_3\mu_3$.

Απόδειξη. Προηγουμένως είχαμε δείξει ότι:

$$4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \left(m(1-a)^2 - a^2 + 2a\right)\left[\left(2m(1-a)^2 + 1 + 2a\right)^2 - (1-4a+16a^2-8a^3+4a^4)\right] \Rightarrow$$
$$4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \left(m(1-a)^2 - a^2 + 2a\right)\left[4m^2(1-a)^4 + 4m(1-a)^2(1+2a) + 8a - 12a^2 + 8a^3 - 4a^4\right]$$
$$4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 4m^3(1-a)^6 + 4m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + 4m((1-a)^2(4a-a^4)$$
$$+16a^2 - 32a^3 + 28a^4 - 16a^5 + 4a^6$$

Έτσι αφού $\bar{n} = n_S = n_R = m+1,\ n_T = m-1$, παίρνουμε

$$4\mu_1\mu_2\mu_3 = \left((m+1)(1-a)^2 - a^2 + 2a\right)\left[\left(2m(1-a)^2 - a^2 + 4a\right)^2 - (2-4a+a^2)^2 - 8a^2\right] \Rightarrow$$

$$4\mu_1\mu_2\mu_3 = \left(m(1-a)^2 + 1\right)\left[4m^2(1-a)^4 + 4m(1-a)^2(4a-a^2) - 4 + 16a - 12a^2\right] \Rightarrow$$
$$4\mu_1\mu_2\mu_3 = 4m^3(1-a)^6 + 4m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + 4m(1-a)^2(-1+8a-4\alpha^2)$$
$$-4 + 16\alpha - 12\alpha^2$$

Τότε,

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \mu_1\mu_2\mu_3) = m(1-a)^2(1-4a+4a^2-a^4)$$
$$+1 - 4a + 7a^2 - 8a^3 + 7a^4 - 4a^5 + a^6 > 0$$

Επομένως, $d_1^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ είναι D-βέλτιστος.

2) Αν $n = 3m+1,\ -1 < a < 0$, $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_1^*$ και ν_1, ν_2, ν_3 οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_3$, τότε (i) όταν m=1, $\lambda_1\lambda_3\lambda_3 > \nu_1\nu_2\nu_3$ και $d_1^* : \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ είναι D-βέλτιστος και (ii) όταν $m \geq 2$, $\lambda_1\lambda_3\lambda_3 < \nu_1\nu_2\nu_3$ και $d_3 : \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ είναι D-βέλτιστος.

Απόδειξη. Αφού, $\bar{n} = m,\ n_T = m$, παίρνουμε $\nu_1\nu_2\nu_3 = ABC - a^2(A+B)$, όπου $A = m(1-a)^2 + 1,\ B = m(1-a)^2 - a^2 + 2a,\ C = m(1-a)^2 + 2a$

$$\nu_1\nu_2\nu_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(4a+3a^2-2a^3) + 4a^2 - 2a^3$$
$$-2m(1-a)^2 a^2 - a^2 - 2a^3 + a^4 \Rightarrow$$

$$\nu_1\nu_2\nu_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(4a+a^2-2a^3) + 3a^2 - 4a^3 + a^4$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m((1-a)^2(4a-a^4)$$
$$+4a^2 - 8a^3 + 7a^4 - 4a^5 + a^6$$
$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \nu_1\nu_2\nu_3) = m(1-a)^2(-a^2+2a^3-\alpha^4) + a^2 - 4a^3 + 6\alpha^4 - 4a^5 + a^6$$
$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \nu_1\nu_2\nu_3) = -a^2(m-1)(1-a)^4.$$

3) Αν $n = 3m+1$, ν_1, ν_3, ν_3 οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_3^*$ και $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_4$, τότε $\nu_1\nu_3\nu_3 > \kappa_1\kappa_2\kappa_3$.

Απόδειξη. Βρίσκουμε ότι για τους σχεδιασμούς $d_3 : \underbrace{SS...S}_{m+1}\underbrace{TT...T}_{m}\underbrace{RR...R}_{m}$ και

$d_4 : \underbrace{SS...S}_{m}\underbrace{TT...T}_{m}\underbrace{RR...R}_{m}S$,

$$\nu_1\nu_2\nu_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+4a-a^2) + m(1-a)^2(4a+a^2-2a^3) + 3a^2 - 4a^3 + a^4$$
$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3 = m^3(1-a)^6 + m^2(1-a)^4(1+6a-a^2) + m(1-a)^2(4a+9a^2-4\alpha^3) + 3a^2 - 3\alpha^4$$

Επομένως,

$$\nu_1\nu_2\nu_3 - \kappa_1\kappa_2\kappa_3 = -2am^2(1-a)^4 + m(1-a)^2(-8a^2+2a^3) - 4a^3 + 4a^4$$
$$= m(1-a)^2\left(-2am(1-a)^2 - 8a^2 + 2a^3\right) - 4a^3 + 4a^4$$

Για $m \geq 2 \Rightarrow \nu_1\nu_2\nu_3 - \kappa_1\kappa_2\kappa_3 \geq m(1-a)^2\left(-4a-2a^3\right) - 4a^3 + 4a^4 \geq 0$.

Και για $m = 1 \Rightarrow$

$$\nu_1\nu_2\nu_3 - \kappa_1\kappa_2\kappa_3 = -2a(1-a)^4 + (1-a)^2(-8a^2+2a^3) - 4a^3 + 4a^4$$
$$= -2a(1-4a+6a^2-4a^3+a^4) + (-8a^2+14a^3-8a^4+2a^5) - 4a^3 + 4a^4$$
$$= -2a + 2a^3 = -2a(1-a^2) \geq 0$$
$$\Rightarrow \nu_1\nu_2\nu_3 - \kappa_1\kappa_2\kappa_3 \geq 0.$$

Συμπέρασμα: Για n=3m+1, ως προς την D-βελτιστοποίηση: (i) d_1^* είναι καλύτερος από τον d_2.

(ii) Όταν m=1: ο d_1^* είναι ισοδύναμος με τον d_3,

(iii) Όταν $m \geq 2$: ο d_3 είναι καλύτερος από τον d_1^*,

όπου $d_1^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ $d_2: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m-1}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$ και $d_3: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$.

A4.2.4 E-, A-, D-βελτιστοποίηση, n=3m+2

Για n=3m+2 οι δύο σχεδιασμοί $d_{21}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m}\underbrace{RR\ldots R}_{m+1}$, $d_{22}^*: \underbrace{SS\ldots S}_{m+1}\underbrace{TT\ldots T}_{m+1}\underbrace{RR\ldots R}_{m}$ συγκρίνονται ως προς Φ-βελτιστοποίηση. Τα εργαλεία για τις αποδείξεις περιγράφονται στο Λήμμα Β1 και στο Λήμμα Β2 πιο πάνω.

Λήμμα Β4. Για $-1 < a < 0$ και n=3m+2, ο d_{21}^* είναι D-βέλτιστος και E-βέλτιστος, $m \geq 1$.

Απόδειξη. Εάν $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{21}^*$ και $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_{22}^*$, οι ποσότητες $\rho_1\rho_2\rho_3$, $\tau_1\tau_2\tau_3$ υπολογίζονται όπως περιγράφηκαν στο Λήμμα Β2.

$$P = \rho_1\rho_2\rho_3 = m^3(1-a)^6 + 2m^2(1-a)^4(1+a) + m(1-a)^2(1+4a-2a^2) + 2a - 2a^2$$
$$Q = \tau_1\tau_2\tau_3 = m^3(1-a)^6 + 2m^2(1-a)^4(1+a) + m(1-a)^2(-a^4+2a^3-3a^2+4a+1) - 2a^2 + 2a,$$
$P - Q = \rho_1\rho_2\rho_3 - \tau_1\tau_2\tau_3 = m(1-a)^2(a^2 - 2a^3 + a^4) > 0$, επομένως d_{21}^* είναι D-βέλτιστος.

Δουλεύοντας όπως και στο Λήμμα Β1 δείχνουμε ότι $\rho_1 > \tau_1$, και έτσι d_{21}^* είναι E-βέλτιστος.

Λεπτομερής απόδειξη δίνεται πιο κάτω.

Γνωρίζουμε ότι ο σχεδιασμός d_2 έχει τον ακόλουθο πίνακα πληροφορίας:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} m(1-a)^2+1 & -a & 0 \\ -a & m(1-a)^2+1+a^2 & -a \\ 0 & -a & m(1-a)^2+2a-a^2 \end{pmatrix}.$$

Έστω,

$$f(\tau) = \det\left(\mathbf{Q}_2 - \tau\mathbf{I}\right) = \begin{pmatrix} m(1-a)^2+1-\tau & -a & 0 \\ -a & m(1-a)^2+1+a^2-\tau & -a \\ 0 & -a & m(1-a)^2+2a-a^2-\tau \end{pmatrix}$$

και έστω

$$\mathrm{A}_1(\tau) = m(1-a)^2+1-\tau,\ \mathrm{A}_2(\tau) = m(1-a)^2+1+a^2-\tau,\ \mathrm{A}_3(\tau) = m(1-a)^2+2a-a^2-\tau.$$
$$\Rightarrow f(\tau) = \mathrm{A}_1(\tau)\left(\mathrm{A}_2(\tau)\mathrm{A}_3(\tau)-a^2\right)-a^2\mathrm{A}_3(\tau) \Rightarrow f(\tau_1)=0\,.$$

$f(\rho_1) = \mathrm{A}_1(\rho_1)\left(\mathrm{A}_2(\rho_1)\mathrm{A}_3(\rho_1)-a^2\right)-a^2\mathrm{A}_3(\rho_1)$, where

$$\mathrm{A}_1(\rho_1) = 0.5-a+0.5\sqrt{(1-2a)^2+8a^2},\ \mathrm{A}_2(\rho_1) = 0.5-a+a^2+0.5\sqrt{(1-2a)^2+8a^2},$$
$$\mathrm{A}_3(\rho_1) = -0.5+a-a^2+0.5\sqrt{(1-2a)^2+8a^2}.$$

$$\Rightarrow f(\rho_1) = 0.5a^2-1.5a^4+a^5+0.5(2a-a^2-a^4)\sqrt{(1-2a)^2+8a^2} \le 0$$

αφού, $\sqrt{(1+2a^2)^2+8a^2} \le 1-5a$, τότε

$$f(\rho_1) \le 0.5a^2-1.5a^4+a^5+0.5(2a-a^2-a^4)(1-5a) = a-5a^2+2.5a^3-2a^4+3.5a^5 \le 0$$

$\Rightarrow f(\rho_1) \le 0$. So $\rho_1 \ge \tau_1$.

Λήμμα Β5. Για $-1<a<0$ και n=3m+2, Α-βελτιστοποίηση του d_{21}^* ή d_{22}^* εξαρτάται από την τιμή του α όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.2 που ακολουθεί.

Απόδειξη. Οι ποσότητες $R=\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3$, $T=\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3$, $P=\rho_1\rho_2\rho_3$, $Q=\tau_1\tau_2\tau_3$, υπολογίστηκαν όπως περιγράφονται στο Λήμμα B2 και στη συνέχεια συγκρίνονται οι ποσότητες R/P, T/Q. Αποδεικνύεται ότι,

$$T\cdot P-R\cdot Q=m^3(1-a)^6(16a+18a^2-4a^3+2a^4)+m^2(1-a)^4(8a+34a^2-26a^3+14a^4-6a^5)$$
$$+m(1-a)^2(16a^2-16a^3)-2a^3+6a^4-6a^5+2a^6.$$

Εάν $T\cdot P-R\cdot Q<0$, τότε d_{21}^* είναι Α-βέλτιστος, εάν $T\cdot P-R\cdot Q>0$, τότε d_{22}^* είναι Α-βέλτιστος.

Πίνακας 4.2

Α-βελτιστοποίηση των d_{21}^*, d_{22}^*

m	1	2	5	10	20	50
d_{21}	$-1<a<-0.402$	$-1<a<-0.535$	$-1<a<-0.642$	$-1<a<-0.683$	$-1<a<-0.705$	$-1<a<-0.718$
d_{22}	$-0.402<a<0$	$-0.535<a<0$	$-0.642<a<0$	$-0.683<a<0$	$-0.705<a<0$	$-0.718<a<0$

Κεφάλαιο 5

3^k Βέλτιστοι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί για την εκτίμηση γραμμικών και τετραγωνικών αντιθέσεων, η περίπτωση $N \equiv 0 \bmod 3$

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να βρεθούν οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για την εκτίμηση των τυποποιημένων γραμμικών και τετραγωνικών αντιθέσεων στους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς με παράγοντες τριών επιπέδων και N πειραματικές μονάδες.

Οι περισσότερες εργασίες για την κατασκευή των βέλτιστων σχεδιασμών για την εκτίμηση παραμέτρων σε κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς επικεντρώνονται στις περιπτώσεις παραγόντων σε δύο επίπεδα. Στο κεφάλαιο αυτό ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε τις τυποποιημένες γραμμικές και τετραγωνικές αντιθέσεις, σε κλασματικά παραγοντικά πειράματα, με παράγοντες τριών επιπέδων. Τα βιβλία των Dey και Mukerjee (1999) και των Wu και Hamada (2000), καλύπτουν το θέμα, με πολλές παραπομπές. Όταν το πλήθος των μονάδων είναι N=0mod9, οι Ορθογώνιοι σχεδιασμοί (orthogonal arrays), OA(N,k,3,2), είναι βέλτιστοι κάτω από κάποια κριτήρια βελτιστοποίησης, Kiefer(1958), (1960). Όταν *N*=1mod9 ο σχεδιασμός που προκύπτει προσθέτοντας μια μονάδα σε ένα OA(N,k,3,2) είναι D-βέλτιστος, Kolyva-Machaira (1989a), G-optimal Kolyva-Machaira (1989b), και βέλτιστος κάτω από το κριτήριο τύπου 1 του Cheng, Mukerjee (1999). Αυτές οι προσπάθειες επικεντρώνονται στην προσθήκη μονάδων (γραμμών) σε ένα OA(*N*,*k*,3,2) έτσι ώστε ο σχεδιασμός που προκύπτει να είναι κατά κάποιο κριτήριο βέλτιστος.

Στο κεφάλαιο αυτό της διατριβής ακολουθούμε μια διαφορετική προσέγγιση, χρησιμοποιώντας την έννοια της κυριαρχίας όπως εφαρμόζεται στους βέλτιστους σχεδιασμούς (Pukelsheim, 1993 p.139-142, 352-358) και δίνουμε βέλτιστους σχεδιασμούς, για την εκτίμηση των τυποποιημένων γραμμικών και τετραγωνικών αντιθέσεων, για κάθε τιμή του *N*=0mod3. Οι Giovagnoli και Wynn (1985) είναι πρωτοπόροι στην εφαρμογή της έννοιας της κυριαρχίας στους πειραματικούς σχεδιασμούς.

Στην πρώτη ενότητα δίνεται το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε και ο πίνακας πληροφορίας των τυποποιημένων γραμμικών και τετραγωνικών αντιθέσεων. Στη δεύτερη ενότητα εισάγεται η έννοια των Ισορροπημένων Σχηματισμών (Balanced Arrays), BA(*N*,k), αποδεικνύεται ότι στους βέλτιστους σχεδιασμούς οι εκτιμήτριες των γραμμικών αντιθέσεων είναι ασυσχέτιστες με αυτές των τετραγωνικών αντιθέσεων. Στην τρίτη ενότητα ορίζεται ο πίνακας πληροφορίας για την περίπτωση *N*=0mod3 και αποδεικνύεται η φ-βελτιστοποίηση για τους OA(*N*,*k*,3,2) όταν *N*=0mod9. Στην τέταρτη ενότητα εξετάζονται οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για *N*=3mod9 και *N*=6mod9, καθορίζονται οι πίνακες πληροφορίας και οι παράμετροι για τους βέλτιστους σχηματισμούς BA(*N*,*k*) για *N*=12, 15, 21, 24, 30, 33. Η περίπτωση *N*=12 με *k*=2,3,4,5 παράγοντες εξετάζεται διεξοδικά και δίνεται στους πίνακες 5.1-5.5, ο πίνακας 5.6 δίνει τους βέλτιστους σχηματισμούς BA(*N*,*k*), για τις τιμές του *N* που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Στην ενότητα πέντε ορίζονται οι Μερικώς Ισορροπημένοι Σχηματισμοί, PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) οι οποίοι, σε μερικές περιπτώσεις, βελτιώνουν τους βέλτιστους σχηματισμούς BA(*N*,*k*). Στην ενότητα έξι βρίσκονται οι βέλτιστοι σχεδιασμοί συγκρίνοντας τους βέλτιστους BA(*N*,*k*) με τους βέλτιστους PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) για *N*=12, 15, 21, 24, 30, 33 και διάφορες τιμές του πλήθους *k* των παραγόντων. Στον πίνακα 5.9 δίνονται οι πίνακες πληροφορίας για τους PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) με *N*=12 και στον πίνακα 5.10 δίνονται οι βέλτιστοι PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) για *N*=12 και $2 \le k \le 5$. Οι πίνακες 5.11, 5.13 δίνουν το PBA(12,4,1) και PBA(15,3,2) που κατασκευάστηκαν αντίστοιχα με αλγόριθμους που δίνονται στο Παράρτημα 5.2. Οι πίνακες 5.12, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17 δίνουν τα βέλτιστα PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) για *N*=15,21,24,30,33 και διάφορες του πλήθους κ των παραγόντων. Οι βέλτιστοι σχεδιασμοί δίνονται για *N*=15 μέχρι και 33 στους πίνακες 5.18 μέχρι και 5.23.

Τέλος στο Παράρτημα 5.1 δίνονται αποδείξεις Λημμάτων και Θεωρημάτων και στο Παράρτημα 5.2 δίνονται οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή BA(*N*,*k*) και PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) για *N*=12 και *N*=15.

5.1 Το μοντέλο και οι εκτιμήτριες των αντιθέσεων

Το γραμμικό μοντέλο κύριων επιδράσεων (resolution III design) είναι,

$$y_s = \mu + \sum_{i=1}^{k} \mu_{d(i,s)} + e_s, \quad s = 1, \dots, N$$

και d(i,s) είναι το επίπεδο του παράγοντα F_i, $i = 1,\dots,k$, στην s παρατήρηση, όταν έχουμε το σχεδιασμό d.

Αν l_i, u_i, q_i $i = 1,\dots,k$ είναι η επιδράσεις του παράγοντα F_i, στα επίπεδα 0, 1, 2, μια ισοδύναμη μορφή του προηγούμενου μοντέλου είναι,

$$y_s = \sum_{i=1}^{k} (l_i x_{is} + u_i w_{is} + q_i z_{is}) + e_s, \quad s = 1, 2, \dots, N \qquad (5.1.1)$$

Όπου,

$$x_{is}=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ \ d(i,s)=0\\ 0 & \alpha\nu\ d(i,s)=1\\ 0 & \alpha\nu\ \ d(i,s)=2\end{cases},\ w_{is}=\begin{cases}0 & \alpha\nu\ d(i,s)=0\\ 1 & \alpha\nu\ \ d(i,s)=1\\ 0 & \alpha\nu\ d(i,s)=2\end{cases},\ z_{is}=\begin{cases}0 & \alpha\nu\ d(i,s)=0\\ 0 & \alpha\nu\ \ d(i,s)=1\\ 1 & \alpha\nu\ d(i,s)=2\end{cases}.$$

Το μοντέλο υποθέτει ότι κάθε παράγοντας εφαρμόζεται σε κάθε πειραματική μονάδα με ένα από τα τρία του επίπεδα.

Σε διανυσματική μορφή το μοντέλο (5.1.1) γράφεται,

$$\mathbf{y}=\sum_{\iota=1}^{\kappa}(l_i\mathbf{x}_i+u_i\mathbf{w}_i+q_i\mathbf{z}_i)+\mathbf{e}, \tag{5.1.2}$$

Εδώ τα $\mathbf{y}=(y_s)$, $\mathbf{x_i}=(\mathrm{x}_{is})$, $\mathbf{w_i}=(\mathrm{w}_{is})$, $\mathbf{z_i}=(\mathrm{z}_{is})$, $\mathbf{e}=(e_s)$, $s=1,...,N$ είναι $N\times 1$ διανύσματα και $\mathbf{1}_N$ είναι ένα $N\times 1$διάνυσμα μονάδων. Η s γραμμή αναφέρεται στην παρατήρηση s και η i στήλη στον παράγοντα F_i. Επειδή $\mathbf{x}_i+\mathbf{w}_i+\mathbf{z}_i=\mathbf{1}_N$, $i=1,2,...,k$, για $k\geq 2$, οι παράμετροι $l_i,u_i,q_i,i=1,2,...,k$ δεν είναι εκτιμήσιμες. Ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε τις τυποποιημένες αντιθέσεις $2^{-1/2}(q_i-l_i)$ $6^{-1/2}(\mathrm{q}_i-2u_i+l_i)$. Τα $2^{-1/2}(q_i-l_i)$ ονομάζονται γραμμικές αντιθέσεις και τα $6^{-1/2}(q_i-2u_i+l_i)$ τετραγωνικές αντιθέσεις.

Στο μοντέλο που δόθηκε στην 5.1.2 ισχύει ότι $\mathbf{x}_i+\mathbf{w}_i+\mathbf{z}_i=\mathbf{1}_N$. Έτσι $l_i\mathbf{x}_i+u_i\mathbf{w}_i+q_i\mathbf{z}_i=l_i\mathbf{x}_i+u_i\left(\mathbf{1}_N-\mathbf{x}_i-\mathbf{z}_i\right)+q_i\mathbf{z}_i=\left(l_i-u_i\right)\mathbf{x}_i+\left(q_i-u_i\right)\mathbf{z}_i+u_i\mathbf{1}_N.$ Έστω ότι $\mathbf{z}_i-\mathbf{x}_i=\sqrt{2}\mathbf{g}_i$ και $\mathbf{z}_i+\mathbf{x}_i=\sqrt{6}\mathbf{h}_i$. Επομένως $\mathbf{x}_i=\left(\sqrt{6}\mathbf{h}_i-\sqrt{2}\mathbf{g}_i\right)/2$, $\mathbf{z}_i=\left(\sqrt{6}\mathbf{h}_i+\sqrt{2}\mathbf{g}_i\right)/2$ και $\left(l_i-u_i\right)\mathbf{x}_i+\left(q_i-u_i\right)\mathbf{z}_i+u_i\mathbf{1}_N=$ $3\mathbf{h}_i\left(q_i-2u_i+l_i\right)/6+\mathbf{g}_i\left(q_i-l_i\right)/\sqrt{2}+u_i\mathbf{1}_N$. Το μοντέλο (5.1.2) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathbf{y}=\mu\mathbf{1}_{\mathrm{N}}+\sum_{\iota=1}^{\kappa}\left(\frac{(l_i-2u_i+q_i)}{\sqrt{6}}3\mathbf{h}_i+\frac{(q_i-l_i)}{\sqrt{2}}\mathbf{g}_i\right)+\mathbf{e}, \tag{5.1.3}$$

όπου $\mu = \sum_{i=1}^{k} u_i$, και για $i = 1,2,...,k,\ s = 1,2,...,N$ έχουμε, $\mathbf{g}_i = \left(g_{i1}, g_{i2},..., g_{iN}\right)'$,

$\mathbf{h}_i = \left(h_{i1}, h_{i2},..., h_{iN}\right)'$, με $g_{is} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{cases} -1 & \alpha\nu \ \ \text{d(i,s)=0} \\ 0 & \alpha\nu \ \ \text{d(i,s)}=1 \\ 1 & \alpha\nu \ \ \text{d(i,s)}=2 \end{cases}$, και

$$h_{is} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{cases} 1 & \alpha\nu \ \ \text{d(i,s)=0}, \\ 0 & \alpha\nu \ \ \text{d(i,s)}=1, \\ 1 & \alpha\nu \ \ \text{d(i,s)}=2. \end{cases}$$

Ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε τα $\frac{1}{\sqrt{2}}(q_i - l_i)$ και $\frac{1}{\sqrt{6}}(l_i - 2w_i + q_i)$, $i = 1,...,k$. Ο πίνακας πληροφορίας $\mathbf{Q}$ είναι:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1'\mathbf{P}(\mathbf{X}_2)\mathbf{X}_1,$$

όπου $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{g}_1,...,\mathbf{g}_k\, 3\mathbf{h}_1,...,3\mathbf{h}_k),\ \ \mathbf{X}_2 = \mathbf{1}_N$,

$\mathbf{P}(\mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-}\mathbf{X}_2' = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_2' / \mathrm{N} = \mathbf{J}_N / N$, ο $\mathbf{J}_N$ είναι ένας $N \times N$ πίνακας με μονάδες.

Για k=1, δηλαδή, για ένα παράγοντα F, ο πίνακας πληροφορίας είναι,

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (N-n^1) & 3^{1/2}(n^2-n^0) \\ 3^{1/2}(n^2-n^0) & 3(N-n^1) \end{bmatrix} - \frac{1}{2N}\begin{bmatrix} (n^2-n^0)^2 & 3^{1/2}(n^2-n^0)(N-n^1) \\ 3^{1/2}(n^2-n^0)(N-n^1) & 3(N-n^1)^2 \end{bmatrix},$$

όπου n^0, n^1, n^2 είναι το πλήθος εμφάνισης του παράγοντα F στα επίπεδα 0,1,2 στις N παρατηρήσεις.

Λήμμα 5.1.1 Για ένα παράγοντα και N=0mod3, ο βέλτιστος σχεδιασμός έχει, $n^0 = n^1 = n^2 = N/3$ και πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q} = (\mathrm{N}/3)\mathbf{I}_2$.

Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα 5.1.

Για $k \geq 2$ ο πίνακας πληροφορίας $\mathbf{Q}$ μετατρέπεται ως:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 3\mathbf{B} \\ 3\mathbf{B}' & 9\mathbf{C} \end{bmatrix} - \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 3\mathbf{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{a}' & 3\mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A} - (1/\mathrm{N})\mathbf{aa}'\right) & 3\left((\mathbf{B} - (1/\mathrm{N})\mathbf{ab}'\right) \\ 3(\mathbf{B}' - (1/\mathrm{N})\mathbf{ab}') & 9\left(\mathbf{C} - (1/\mathrm{N})\mathbf{bb}'\right) \end{bmatrix}, (5.1.4)$$

όπου, $\mathbf{A}=(a_{ij})=\begin{bmatrix}\mathbf{g}_1^{'}\\ \cdots \\ \mathbf{g}_k^{'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_k\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=(c_{ij})=\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1^{'}\\ \cdots \\ \mathbf{h}_k^{'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \cdots & \mathbf{h}_k\end{bmatrix}$,

$\mathbf{B}=(b_{ij})=\begin{bmatrix}\mathbf{g}_1^{'}\\ \cdots \\ \mathbf{g}_k^{'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \cdots & \mathbf{h}_k\end{bmatrix}$ είναι $k\times k$ πίνακες με στοιχεία που δίνονται παρακάτω:

$$a_{ii}=(n_i^2+n_i^0)/2=(\mathrm{N}-n_i^1)/2,\ a_{ij}=(n_{ij}^{00}+n_{ij}^{22}-n_{ij}^{02}-n_{ij}^{20})/2,$$

$$c_{ii}=(n_i^0+n_i^2)/6=(N-n_i^1)/6,, \tag{5.1.5}$$

$$c_{ij}=(n_{ij}^{00}+n_{ij}^{02}+n_{ij}^{20}+n_{ij}^{22})/6=(n_i^0+n_i^2-n_j^1+n_{ij}^{11})/6=(N-n_i^1-n_j^1+n_{ij}^{11})/6$$

$$b_{ii}=(n_i^2-n_i^0)/\sqrt{12},$$

$$b_{ij}=g_i^{'}h_j=(n_{ij}^{22}-n_{ij}^{00}-n_{ij}^{02}+n_{ij}^{20})/\sqrt{12}=(n_i^2-n_i^0+n_{ij}^{01}-n_{ij}^{21})/\sqrt{12} \quad \text{και}$$

$$b_{ji}=g_j^{'}h_i=(n_{ji}^{22}-n_{ji}^{00}-n_{ji}^{02}+n_{ji}^{20})/\sqrt{12}=(n_j^2-n_j^0-n_{ji}^{21}+n_{ji}^{01})/\sqrt{12}$$

n_i^p είναι το πλήθος εμφάνισης του παράγοντα F_i στο p επίπεδο στις N πειραματικές μονάδες και n_{ij}^{pq} είναι το πλήθος εμφάνισης του ζεύγους των παραγόντων F_i και F_j αντίστοιχα στα p και q επίπεδα στις N μονάδες. Σημειώνουμε ότι $\mathbf{X}_1^{'}\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}\mathbf{g}_1^{'}\\ \vdots \\ \mathbf{g}_k^{'}\end{bmatrix}\mathbf{1}_N=2^{-1/2}\begin{bmatrix}n_1^2-n_1^0\\ \vdots \\ n_k^2-n_k^0\end{bmatrix}$,

$$\mathbf{b}=6^{-1/2}\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1^{'}\\ \vdots \\ \mathbf{h}_k^{'}\end{bmatrix}\mathbf{1}_N=6^{-1/2}\begin{bmatrix}N-n_1^1\\ \vdots \\ N-n_k^1\end{bmatrix}.$$

Λήμμα 5.1.2 Αν $k\geq 2$, οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχουμε στον πίνακα πληροφορίας, που δίνεται στην (5.1.4), $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ είναι $n_i^0=n_i^2$, $n_{ij}^{01}=n_{ij}^{21}$,

$n_{ij}^{10} = n_{ij}^{12}$, $i \neq j,\ i, j = 1,\ldots,k$, και έτσι ο πίνακας πληροφορίας γίνεται

$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$, όπου $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{Q}_2 = (q_{ij})$ με $a_{ii} = (N - n_i^1)/2$,

$q_{ii} = 3(N - n_i^1)n_i^1 / (2N)$ $a_{ij} = (n_{ij}^{00} + n_{ij}^{22} - n_{ij}^{02} - n_{ij}^{20})/2\ i \neq j$,

$q_{ij} = 3(Nn_{ij}^{11} - n_i^1 n_j^1)/(2N)$.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 5.1.

Λήμμα 5.1.3 Αν F_i, F_j είναι δύο παράγοντες και $n_i^0 = n_j^0 = n_i^2 = n_j^2$, $n_{ij}^{01} = n_{ij}^{21}$ τότε:

(i) $n_i^1 = n_j^1$, $n_{ij}^{01} - n_{ij}^{10} = n_{ij}^{20} - n_{ij}^{02} = n_{ij}^{12} - n_{ij}^{21} = (n_{ij}^{00} - n_{ij}^{22})$, $i \neq j$

(ii) $n_{ij}^{01} = n_{ij}^{10} = n_{ij}^{12} = n_{ij}^{21} = (n_i^1 - n_{ij}^{11})/2$, $n_{ij}^{00} = n_{ij}^{22}, n_{ij}^{20} = n_{ij}^{02}$, $n_{ij}^{00} + n_{ij}^{02} = n_i^0 - n_{ij}^{01}$

Επιπλέον, όλες οι παράμετροι μπορούν να υπολογιστούν αν γνωρίζουμε το n_{ij}^{11}, μια από τις παραμέτρους n_i^0, n_i^1, n_i^2, n_j^0, n_j^1, n_j^2 και ένα από τα n_{ij}^{00} και n_{ij}^{02} .

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 5.1.

Λήμμα 5.1.4 Αν F_i, F_j είναι δύο παράγοντες και $n_i^0 = n_i^2$, $n_j^0 = n_j^2$, $n_{ij}^{01} = n_{ij}^{21}$, $n_{ij}^{10} = n_{ij}^{12}$, $i \neq j = 1, 2, \ldots, k$, τότε:

(i) $n_{ij}^{20} - n_{ij}^{02} = n_{ij}^{00} - n_{ij}^{22} = 0$,

(ii) $n_j^1 - n_i^1 = 2(n_{ij}^{01} - n_{ij}^{10}) = 2(n_{ij}^{21} - n_{ij}^{12})$.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 5.1.

5.2 Βέλτιστοι σχεδιασμοί

Ορισμός 5.2.1 Στους 3^k κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, ένας σχεδιασμός είναι ένας $N \times k$ πίνακας με στοιχεία 0, 1, 2, όπου οι N γραμμές είναι οι πειραματικές μονάδες, οι στήλες είναι οι παράγοντες και τα στοιχεία 0, 1, 2, υποδηλώνουν τα επίπεδα του κάθε παράγοντα, στην αντίστοιχη μονάδα.

Ορισμός 5.2.2 Ο $N\times k$ πίνακας, όπου,

(i) Οι αριθμοί 0, 1, 2, σε κάθε στήλη του πίνακα, είναι αντίστοιχα, $n_i^0=n^0$, $n_i^1=n^1$ και $n_i^2=n^2$, $i=1,2,\ldots,k$,

(ii) Οι αριθμοί (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), σε κάθε ζεύγος στηλών (i,j) του πίνακα, είναι αντίστοιχα $n^{00},n^{01},n^{02},n^{10},n^{11}$, n^{12},n^{20}, n^{21},n^{22} και $n_{ij}^{pq}=n^{pq}$, $i\neq j=1,2,\ldots,k$, $p,q=0,1,2$,

(iii) $n^0=n^2, n^{01}=n^{10}=n^{21}=n^{12}=(n^1-n^{11})/2, n^{00}=n^{22}, n^{02}=n^{20}$, $n^{00}+n^{02}=n^0-n^{01}=\left(N-2n^1+n^{11}\right)/2$,

καλείται ισορροπημένος σχηματισμός και γράφουμε BA(*N*,*k*,3,2) ή BA(*N*,*k*) για συντομία, δηλαδή, *N* μονάδες ή παρατηρήσεις, *k* παράγοντες και 3 σύμβολα.

Ο ορισμός 5.2.2 (iii) του BA(*N*,*k*) εξασφαλίζει ότι **B=0** στην (5.1.5) που οδηγεί στα αποτελέσματα των Λημμάτων 5.1.2, 5.1.3 και 5.1.4.

Αν $n_i^0=n_i^1=n_i^2=N/3$ και $n_{ij}^{00}=n_{ij}^{01}=n_{ij}^{02}=n_{ij}^{10}=n_{ij}^{11}=n_{ij}^{12}=n_{ij}^{20}=n_{ij}^{21}=n_{ij}^{22}=N/9$, $i\neq j=1,2,\ldots,k$, τότε, ο BA(N,k) είναι ένα OA(N,k,3,2). Περισσότερα για τους ορθογώνιους σχηματισμούς υπάρχουν στο βιβλίο του Hedayat et al. (1999).

Σημειώνουμε ότι $N=n^0+n^1+n^2$ και για p=0,1,2 έχουμε $n_i^p=n_{ij}^{p0}+n_{ij}^{p1}+n_{ij}^{p2}$, $n_j^p=n_{ij}^{0p}+n_{ij}^{1p}+n_{ij}^{2p}$.

Θεώρημα 5.2.1 Αν ένας σχεδιασμός είναι καθολικά βέλτιστος είναι επίσης φ-βέλτιστος.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{Q}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας πληροφορίας ενός σχεδιασμού και $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του, τότε η συνάρτηση $g_k(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \quad k = 1,\ldots,n$ είναι αύξουσα και κοίλη (Marshall and Olkin, 1979, p.478). Επίσης $g_k(\mathbf{PQP}') = g_k(\mathbf{Q})$, όπου $\mathbf{P}$ είναι $n \times n$ μεταθετικός πίνακας. Επομένως $g_k(\mathbf{Q})$ είναι μια συνάρτηση πληροφορίας για κάθε k=1,…,n.

Προσοχή όμως, όπως έχει προαναφερθεί αν ένας σχεδιασμός είναι φ-βέλτιστος αυτό δε σημαίνει ότι είναι και καθολικά βέλτιστος.

5.3 Βέλτιστοι πίνακες πληροφορίας όταν *N*=0mod3

Ορισμός 5.3.1 Αν $\mathbf{Q}$ είναι ένας $k \times k$ πίνακας, $\lambda(\mathbf{Q})$ συμβολίζει το διάνυσμα των ιδιοτιμών του **Q,** pd(k) συμβολίζει θετικά ορισμένο πίνακα τάξης k και nnd(k) συμβολίζει πίνακα μη αρνητικά ορισμένο τάξης k.

Λήμμα 5.3.1 Αν $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}' & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας τάξης k (pd(k)) και $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$, τότε $\lambda(\mathbf{Q}_0) \prec \lambda(\mathbf{Q})$.

Απόδειξη. Βλπ Marshall and Olkin (1979, p.225).

Λήμμα 5.3.2 Αν $\mathbf{Q}$ είναι πίνακας πληροφορίας όπως δίνεται από την σχέση (5.1.5) $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$, όπου $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{A}$, και $\mathbf{Q}_2 = 9\left(C - (\mathbf{bb}'/N)\right)$, τότε $\lambda(\mathbf{Q}_0)$ κυριαρχείται από $\lambda(\mathbf{Q})$, δηλαδή $\lambda(\mathbf{Q}_0) \prec \lambda(\mathbf{Q})$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.3.1 και εφόσον $\mathbf{A} \ge \mathbf{A} - (\mathbf{aa}'/N)$ το αποτέλεσμα έπεται.

Λήμμα 5.3.3 Αν $\mathbf{Q}$ είναι ένας $k \times k$ θετικά ορισμένος πίνακας (pd), και $\mathbf{Q}^* = (a-b)\mathbf{I}_k + b\mathbf{J}_k$, όπου a είναι ο μέσος όρος των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα $\mathbf{Q}$ και b είναι ο μέσος των μη διαγωνίων στοιχείων του, τότε $g(\mathbf{Q}^*) \geq g(\mathbf{Q})$, για κάθε συνάρτηση πληροφορίας $g(\cdot)$ και $\lambda(\mathbf{Q}^*) \prec \lambda(\mathbf{Q})$.

Απόδειξη. Ισχύει $\mathbf{Q}^* = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k!}\mathbf{P_i}\mathbf{Q}\mathbf{P}_i^{'}$,όπου $\mathbf{P}_i$ είναι μεταθετικοί πίνακες , τότε $g(\mathbf{Q}^*) = g(\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k!}\mathbf{P_i}\mathbf{Q}\mathbf{P}_i^{'}) \geq \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k!} g(\mathbf{P_i}\mathbf{Q}\mathbf{P}_i^{'}) = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k!} g(\mathbf{Q}) = g(\mathbf{Q})$ για κάθε συνάρτηση πληροφορίας g(.). Από τον ορισμό της συνάρτησης πληροφορίας (ii) και (iv) παίρνουμε ότι $\lambda(\mathbf{Q}^*) \prec \lambda(\mathbf{Q})$.

Ορισμός 5.3.2 Ένας $k \times k$ πίνακας $\mathbf{Q}$ είναι πλήρως συμμετρικός αν είναι της μορφής $(a-b)\mathbf{I}_k + b\mathbf{J}_k$, δηλαδή, όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα και όλα τα μη διαγώνια στοιχεία είναι ίσα.

Πόρισμα 5.3.1 Από τα Λήμματα 5.3.1., 5.3.2 και 5.3.3 οι βέλτιστοι πίνακες είναι της μορφής, $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$, όπου $\mathbf{Q}_1$ και $\mathbf{Q}_2$ είναι πλήρως συμμετρικοί πίνακες.

Θεώρημα 5.3.1 Ο σχηματισμός BA(N,k) έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}$ με,

$$\mathbf{Q}_1 = \left((\mathrm{N} - n^1)/2 - (n^{00} - n^{02})\right)\mathbf{I}_k + (n^{00} - n^{02})\mathbf{J}_k \tag{5.3.1}$$

$$\mathbf{Q}_2 = 3\left((n^1 - n^{11})/2\right)\mathbf{I}_k + (3/(2N))(Nn^{11} - n^1 n^1)\mathbf{J}_k \tag{5.3.2}$$

όπου $0 \leq n^{11} < n^1,\ N - n^1 = 0 \bmod 2$ και $n^1 - n^{11} = 0 \bmod 2$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\mathbf{Q}_1 = A = (a_{ij})$ και $\mathbf{Q}_2 = q(ij)$. Από το Λήμμα 5.1.2 λαμβάνουμε $a_{ii} = (N - n^1)/2,\ a_{ij} = (n^{00} + n^{22} - n^{02} - n^{20})/2 = (n^{00} - n^{02})\ i \neq j,$ $q_{ii} = 3(N - n^1)n^1/(2N), q_{ij} = 3(Nn^{11} - n^1 n^1)/(2N),\ i \neq j = 1, 2, \ldots, k$.

Λήμμα 5.3.4 Αν $\mathbf{Q}=(q_{ij})$ είναι ένας $k\times k$ θετικά ορισμένος (pd) πίνακας με διάνυσμα των διαγώνιων στοιχείων $\delta(\mathbf{Q})=(q_{11},...,q_{kk})'$ και διάνυσμα ιδιοτιμών $\lambda(\mathbf{Q})=(\lambda_1,...,\lambda_k)'$, τότε το $\delta(\mathbf{Q})$ κυριαρχείται από το $\lambda(\mathbf{Q})$, η ισότητα διατηρείται μόνο όταν $\mathbf{Q}$ είναι διαγώνιος πίνακας.

Για την απόδειξη βλπ Pukelsheim (1993, p. 146).

Λήμμα 5.3.5 Αν $\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2$, είναι όπως δίνονται στις σχέσεις (5.3.1), (5.3.2) και $f(n^1)=(N-n^1)(N+3n^1)/(2\mathrm{N})$, τότε:

(i) Το ίχνος του πίνακα $\mathbf{Q}$ ενός ΒΑ(N,k) ισούται με $f(n^1)k$.

(ii) O ακέραιος που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $f(n^1)$ έχει $n^1=N/3$ και $f(N/3)=2N/3$,

(iii) Επίσης ισχύει ότι $\lambda(\mathbf{Q}^*)\prec\delta(\mathbf{Q})\prec\lambda(\mathbf{Q})$, όπου $\mathbf{Q}^*=(N/3)\mathbf{I}_{2k}$.

Απόδειξη. (i) Από τις (5.3.1), (5.3.2) έχουμε $a_{ii}=(N-n^1)/2$, $q_{ii}=3(N-n^1)n^1/(2N)$. Τότε, το ίχνος$\left(\mathbf{Q}\right)=$ $k\left[(N-n^1)/2+3(N-n^1)n^1/(2N)\right]=k(N-n^1)(N+3n^1)/(2N)=kf(n^1)$.

(ii) Ισχύει ότι $f(n^1+1)-f(n^1)=(N-6n^1-3)/(2N)$, και ο ακέραιος που μεγιστοποιεί την τιμή της είναι $n^1=N/3$.

(iii) Από το Λήμμα 5.3.4 $\delta(\mathbf{Q}_0)\prec\lambda(\mathbf{Q}_0)$ και αφού $\mathrm{trace}(\mathbf{Q}_0^*)\geq\mathrm{trace}(\mathbf{Q}_0)$ και όλες οι ιδιοτιμές του $\mathbf{Q}_0^*$ είναι ίσες, τότε $\lambda(\mathbf{Q}_0^*)\prec\delta(\mathbf{Q}_0)$.

Θεώρημα 5.3.2 Αν N=0mod9 και το πλήθος των παραγόντων είναι $k\geq 2$, ο φ-βέλτιστος σχεδιασμός είναι ένας $OA(N,k,3,2)$,δηλαδή, $n_{ij}^{pq}=N/9,\ i\neq j=1,...,k,\ p,q=0,1,2$ και ο πίνακας πληροφορίας είναι $\mathbf{Q}^{**}=(N/3)\mathbf{I}_{2k}$, $\left(\mathbf{Q}_1=\mathbf{Q}_2=(\mathrm{N}/3)\mathbf{I}_k,\ k=2,3,..\right)$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.3.4 $\delta(\mathbf{Q}) \prec \lambda(\mathbf{Q})$ η ισότητα ισχύει όταν το **Q** είναι διαγώνιος πίνακας. Επίσης από το Λήμμα 5.3.3 αν $\mathbf{Q}^*$ είναι διαγώνιος πίνακας πληροφορίας με ίσα διαγώνια στοιχεία, τότε $\lambda(\mathbf{Q}^*) \prec \delta(\mathbf{Q}) \prec \lambda(\mathbf{Q})$. Αν $\mathbf{Q}^{**}$ έχει επίσης μέγιστο ίχνος, τότε $\lambda(\mathbf{Q}^{**})$ υπερκυριαρχείται ασθενώς από το $\lambda(\mathbf{Q}^*)$ και $\lambda(\mathbf{Q}^{**}) \prec^w \lambda(\mathbf{Q}^*) \prec \delta(\mathbf{Q}) \prec \lambda(\mathbf{Q})$ (Marshall and Olkin, 1979 p.10). Επομένως ο σχεδιασμός με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}^{**}$ είναι φ-βέλτιστος και σύμφωνα με τις σχέσεις (5.3.1), (5.3.2) ο BA(N,k) με $n^0 = n^1 = n^2 = N/3, n^{pq} = N/9$ έχει πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}^{**}$, όμως αυτός ο BA(N,k) είναι ένας OA(N,k,3,2), εφόσον βέβαια υπάρχει το OA(N,k,3,2).

Πόρισμα 5.3.2 Αν N=0mod9 ο σχεδιασμός που ορίζεται από ένα OA(N,k,3,2) παρέχει 2k εκτιμήτριες που είναι ασυσχέτιστες.

5.4 Βελτιστοποίηση του BA(N,k), για $N \equiv 3$ ή 6 mod9.

Από το Λήμμα 5.3.5 έχουμε ότι $\text{trace}(\mathbf{Q}) = f(n^1)k = k(N-n^1)(N+3n^1)/(2N)$ και είναι το ίδιο για όλες τις τιμές του $n^{11}, 0 \le n^{11} < n^1, n^1 - n^{11} = 0 \bmod 2$. Το πρόβλημα είναι να βρούμε την τιμή του n^{11} ώστε ο BA(N,k) να είναι βέλτιστος. Τα επόμενα Λήμματα είναι σημαντικά για τις αποδείξεις που ακολουθούν.

Λήμμα 5.4.1 (i) Αν $s_1 : x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x$, $s_2 : y_1, y_2, \cdots, y_k$, τα y_1 δεν είναι όλα ίσα μεταξύ τους και $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = kx$, τότε $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ κυριαρχείται από $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ ή $s_1 \prec s_2$.

(ii) Αν $s_3 : x_1 = \cdots = x_{k-1} = x, x_k = x + kb,\ b > 0$, $s_4 : y_1 = \cdots = y_{k-1} = y$, $y_k = y + kc,\ c > 0$, $x + b = y + c$ και $x > y \Leftrightarrow b < c$, τότε $s_3 \prec s_4$.

(iii) Αν $s_5 : x_1 = \cdots = x_{k-1} = x, x_k = x - kb,\ b > 0$,

$y_1 = \cdots = y_{k-1} = y,\ y_k = y - kc,\ c > 0$, $x - b = y - c$ και $x < y \Leftrightarrow b < c$, τότε $s_5 \prec s_6$.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 5.1.

Πόρισμα 5.4.1 Αν κάθε μια από m ακολουθίες έχει k στοιχεία και το άθροισμα των k στοιχείων είναι ίσο για τις m ακολουθίες, τότε

(i) Αν υπάρχει μια ακολουθία με ίσα τα k στοιχεία, αυτή η ακολουθία κυριαρχείται από τις υπόλοιπες ακολουθίες.

(ii) Αν οι m ακολουθίες είναι τις μορφής $x_1 = \cdots = x_{k-1} = a_i, x_k = a_i + b_i k,\ b_i > 0$, $i = 1,\dots,m,$ τότε η ακολουθία με ελάχιστο b_i $i = 1,\dots,m$ κυριαρχείται από τις υπόλοιπες ακολουθίες.

(iii) Αν οι m ακολουθίες είναι της μορφής, $x_1 = \cdots = x_{k-1} = a_i, x_k = a_i - b_i k,$ $i = 1,\dots,m,\ b_i > 0$, τότε η ακολουθία με ελάχιστο b_i $i = 1,\dots,m$ κυριαρχείται από τις υπόλοιπες ακολουθίες.

Απόδειξη. Συνεπάγεται από την απόδειξη του προηγούμενου Λήμματος 5.4.1.

Πόρισμα 5.4.2 (i) Αν $s_1 : x_1 = \cdots x_k = x,\ s_2 : y_1 = \cdots = y_k = y$ και $x > y$, τότε $s_1 \prec^w s_2$

(ii) Αν $s_3 : x_1 = \cdots = x_{k-1} = x, x_k = x + kb,\ b > 0$, $s_4 : y_1 = \cdots = y_{k-1} = y,$ $y_k = y + kb$ και $x > y$, τότε $s_3 \prec^w s_4$.

(iii) Αν $s_5 : x_1 = \cdots = x_{k-1} = x, x_k = x - kb,\ b > 0$, $y_1 = \cdots = y_{k-1} = y,\ y_k = y - kb$ και $x > y$, τότε $s_5 \prec^w s_6$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από την ασθενή υπερκυριαρχία.

Λήμμα 5.4.2 Αν κάθε ένα από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$, έχει k στοιχεία και

(i) $\mathbf{x}_2 \prec \mathbf{x}_1$ ή $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$,

(ii) $\mathbf{y}_2 \prec \mathbf{y}_1$, τότε $\begin{pmatrix}\mathbf{x}_2\\ \mathbf{y}_2\end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{y}_1\end{pmatrix}$.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 5.1.

Λήμμα 5.4.3 Αν $s_1 : x_1 = \cdots = x_{k-1} = x, x_k = x + bk,\ x > b > 0$, $s_2 : y_1 = \cdots = y_{k-1} = x + 2b,\ \ y_k = x + 2b - bk,\ 3 \le k < 2 + (x/b)$, τότε:

(i) Για k=2, $s_1 = s_2$

(ii) Για $3 \le k < 2 + (x/b)$, έπεται ότι η ακολουθία s_1 είναι E-, A-, D-βέλτιστη συγκρινόμενη με την s_2.

(iii) Για $k \ge 2 + (x/b)$ η s_2 έχει ιδιοτιμές ίσες με μηδέν ή αρνητικές.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 5.1.

Θεώρημα 5.4.1 Ο βέλτιστος BA(N,k) έχει πίνακα πληροφορίας όπως δίνεται στις σχέσεις (5.3.1), (5.3.2) με $n^{00} - n^{02} = 0$ ή 1.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα 5.1.

Θεώρημα 5.4.2 Όλοι οι BA(N,k) σχεδιασμοί προς σύγκριση για βελτιστοποίηση, για δεδομένη τιμή του N, ορίζονται πλήρως αν:

(i) Πάρουμε όλες τις δυνατές τιμές του n^1 τέτοιες ώστε $0 \le n^1 < N,\ \ N - n^1 = 0 \bmod 2$.

(ii) Για κάθε τιμή του n^1 ορίζονται δύο τιμές για το n^{11} τέτοιες ώστε:

(α) το n^{11} είναι η ελάχιστη τιμή που ικανοποιεί $n^{11} \ge (n^1 n^1 / N)$, $0 \le n^{11} < n^1,\ n^1 - n^{11} \equiv 0 mod 2$, (β) το n^{11} είναι η μέγιστη τιμή που ικανοποιεί $n^{11} \le (n^1 n^1 / N)$, $0 \le n^{11} < n^1$, $n^1 - n^{11} \equiv 0 mod 2$.

(iii) Για κάθε ζεύγος n^1, n^{11} οι τιμές των n^{00}, n^{02} υπολογίζονται από τις σχέσεις $n^{00} = n^{02} = (N - 2n^1 + n^{11})/4$ όταν $N - 2n^1 + n^{11} \equiv 0 \bmod 4$ και $n^{00} = n^{02} + 1 = (N - 2n^1 + n^{11} + 2)/4$ όταν $N - 2n^1 + n^{11} \equiv 2 \bmod 4$.

(iv) Οι παράμετροι είναι $n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = (n^1 - n^{11})/2$, $n^{00} = n^{22}, n^{02} = n^{20}$.

(iv) Οι πίνακες πληροφορίας είναι:

(α) Αν $n^{00} = n^{02}$ τότε,

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{N - n^1}{2} \mathbf{I}_k, \tag{5.4.1}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{3}{2}(n^1 - n^{11})\mathbf{I}_k + \frac{3}{2N}(Nn^{11} - n^1 n^1)\mathbf{J}_k \tag{5.4.2}$$

(β) Αν $n^{00} = n^{02} + 1$,

$$\mathbf{Q}_1 = \left(\frac{N - n^1 - 2}{2}\right)\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k, \tag{5.4.3}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{3}{2}(n^1 - n^{11})\mathbf{I}_k + \frac{3}{2N}(Nn^{11} - (n^1)^2)\mathbf{J}_k \tag{5.4.4}$$

Απόδειξη.

(i) Αυτό προκύπτει από το Λήμμα 5.1.3.

(ii) Από το Λήμμα 5.4.1 (ii) και (iii).

(iii) Αυτό είναι απόρροια του Λήμματος 5.1.3 και του Θεωρήματος 5.4.1.

(iv) Από το Θεώρημα 5.3.1.

(v) Επίσης από το Θεώρημα 5.3.1.

Στον Πίνακα 5.1 πιο κάτω εφαρμόσαμε το προηγούμενο Θεώρημα, όταν N=12. Σημειώνεται ότι οι ιδιοτιμές των πινάκων πληροφορίας είναι θετικοί. Η μέγιστη τιμή του πλήθους των παραγόντων, σε μη κορεσμένους σχεδιασμούς είναι $k_{\max} = [(N-1)/2]$.

n^1	n^{11}	$\mathbf{Q}_1$	$\mathbf{Q}_2$	k
10	8	$\mathbf{I}_k$	$3\mathbf{I}_k - (1/2)\mathbf{J}_k$	$2 \le k \le 5$
8	6	$\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	$3\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	$2 \le k \le 5$
8	4	$2\mathbf{I}_k$	$6\mathbf{I}_k - 2\mathbf{J}_k$	$k = 2$
6	4	$3\mathbf{I}_k$	$3\mathbf{I}_k + (3/2)\mathbf{J}_k$	$2 \le k \le 5$
6	2	$2\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	$6\mathbf{I}_k - (3/2)\mathbf{J}_k$	$2 \le k \le 3$
4	2	$3\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	$3\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	$2 \le k \le 5$
4	0	$4\mathbf{I}_k$	$6\mathbf{I}_k - 2\mathbf{J}_k$	$k = 2$
2	0	$5\mathbf{I}_k$	$3\mathbf{I}_k - (1/2)\mathbf{J}_k$	$k = 2$

Πίνακας 5.1: Ανταγωνιστικοί βέλτιστοι BA(N,k), $N = 12$, $2 \le k \le 5$

Οι επόμενοι πίνακες δίνουν τις ιδιοτιμές των πινάκων πληροφορίας $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ και τους E-, A-, D- βέλτιστους BA(N,k), για κάθε τιμή του k από 2 μέχρι 5. Γράφουμε E για την E- βελτιστοποίηση και δίνει την τιμή $E = \lambda_{\min}$, A για την A βελτιστοποίηση και δίνει την τιμή $\mathrm{A} = \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{2k}}$, D για την D βελτιστοποίηση και δίνει την τιμή $\mathrm{D} = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_{2k}$. Για εξοικονόμηση χώρου στους πίνακες χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό 5_3 που σημαίνει ότι η ιδιοτιμή 5 επαναλαμβάνεται 3 φορές.

n^1	n^{11}	k	Ιδιοτιμές	E	A	D
10	8	2	$1_2, 2, 3$	1	2.833	6
8	6	2	$1, 3_2, 5$	1	1.866	45
8	4	2	$2_3, 6$	2	1.667	48
6	4	2	$3_3, 6$	3	1.167	162
6	2	2	$2, 3, 4, 6$	2	1.250	144
4	2	2	$3_2, 5_2$	3	1,067	225
4	0	2	$2, 4_2, 6$	2	1.167	192
2	0	2	$2, 3, 5_2$	2	1.233	150

Πίνακας 5.2: E-, A-, D- βέλτιστοι BA(12,2)

n^1	n^{11}	k	Ιδιοτιμές	E	A	D
10	8	3	$1_3, 3/2, 3_2$	1	4.333	13.5
8	6	3	$1_2, 3_2, 4, 6$	1	3.083	216
8	4	3	≤ 0	--	---	---
6	4	3	$3_5, 15/2$	3	1.800	1822.5

6	2	3	$3/2, 2_2, 5, 6_2$	3/2	2.200	1080
4	2	3	$3_4, 6_2$	3	1.667	2916
4	0	3	≤ 0	--	--	---
2	0	3	$3/2, 3_2, 5_3$	3/2	1.933	1687.5

Πίνακας 5.3: E-, A-, D- βέλτιστοι BA(12,3)

n^1	n^{11}	k	Ιδιοτιμές	E	A	D
10	8	4	$1_5, 3_3$	1	6.000	27
8	6	4	$1_3, 3_3, 5, 7$	1	4.343	945
8	4	4	≤ 0	--	--	--
6	4	4	$3_7, 9$	3	2.444	19683
6	2	4	≤ 0	--	--	--
4	2	4	$3_6, 7_2$	3	2.286	35721
4	0	4	≤ 0	--	--	--
2	0	4	$1, 3_3, 5_4$	1	2.800	16875

Πίνακας 5.4: E-, A-, D- βέλτιστοι BA(12,4)

n^1	n^{11}	k	Ιδιοτιμές	E	A	D

10	8	5	$1/2, 1_5, 3_4$	$1/2$	8.333	40.5
8	6	5	$1_5, 3_4, 6, 8$	1	5.625	3888
8	4	5	≤ 0	--	---	---
6	4	5	$3_9, 21/2$	3	3.095	206671.5
6	2	5	≤ 0	--	--	--
4	2	5	$3_8, 8_2$	3	2.917	419904
4	0	5	≤ 0	--	--	---
2	0	5	$1/2, 3_4, 5_5$	$1/2$	4.333	126562.5

Πίνακας 5.5: Ε-, Α-, D- βέλτιστοι BA(12,5)

Επομένως για N=12 οι Ε-, Α-, D- βέλτιστοι BA(12,k) για $2 \leq k \leq 5$ είναι ο BA(12,k) με $N = 12, n^1 = 4, n^{11} = 2$ και παραμέτρους $n^0 = n^2 = n^1 = 4$, $n^{00} = n^{11} = n^{22} = 2$, $n^{01} = n^{10} =$ $n^{21} = n^{12} = n^{02} = n^{20} = 1$. Όμοια μπορούν να γίνουν πίνακες για N=15, 21, 24, 30, 33 και έτσι ορίζονται οι Ε-, Α-, D- βέλτιστοι BA(N.k), από τις τιμές των N, n^1, n^{11}, που δίνονται πιο κάτω.

N	n^1	n^{11}	k	Βελτιστοποίηση	$\mathbf{Q}_1$	$\mathbf{Q}_2$	n^{01}	n^{00}	n^{02}
12	4	2	2,…,5	Ε-, Α-, D-	$3\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	$3\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	2	2	1
15	5	1	2	Ε-, Α-, D-	$4\mathbf{I}_2 + \mathbf{J}_2$	$6\mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2$	2	2	1
15	5	1	3	D-	$4\mathbf{I}_3 + \mathbf{J}_3$	$6\mathbf{I}_3 - \mathbf{J}_3$	2	2	1

15	7	3	3	E-, A-	$4\mathbf{I}_3$	$6\mathbf{I}_3-(2/5)\mathbf{J}_3$	2	1	1
15	7	3	4,…,7	E-, A-, D-	$4\mathbf{I}_k$	$6\mathbf{I}_k-(2/5)\mathbf{J}_k$	2	1	1
21	7	3	2,…,4	E-, A-, D-	$6\mathbf{I}_k+\mathbf{J}_k$	$6\mathbf{I}_k+\mathbf{J}_k$	2	3	2
21	7	3	5	E-	$6\mathbf{I}_5+\mathbf{J}_5$	$6\mathbf{I}_5+\mathbf{J}_5$	2	3	2
21	5	1	5	A-, D-	$8\mathbf{I}_5$	$6\mathbf{I}_5-(2/7)\mathbf{J}_5$	2	3	3
21	5	1	6,…,10	A-, D-	$8\mathbf{I}_k$	$6\mathbf{I}_k-(2/7)\mathbf{J}_k$	2	3	3
21	7	3	6,…,10	E-	$6\mathbf{I}_k+\mathbf{J}_k$	$6\mathbf{I}_k+\mathbf{J}_k$	2	3	2
24	8	2	2	A-, D-	$7\mathbf{I}_2+\mathbf{J}_2$	$9\mathbf{I}_2-\mathbf{J}_2$	3	3	2
24	10	4	2	E-	$7\mathbf{I}_2$	$9\mathbf{I}_2-(1/4)\mathbf{J}_2$	3	2	2
24	8	2	3	D-	$7\mathbf{I}_3+\mathbf{J}_3$	$9\mathbf{I}_3-\mathbf{J}_3$	3	3	2
24	10	4	3	E-, A-	$7\mathbf{I}_3$	$9\mathbf{I}_3-(1/4)\mathbf{J}_3$	3	2	2
24	10	4	4,…,11	E-, A-, D-	$7\mathbf{I}_k$	$9\mathbf{I}_k-(1/4)\mathbf{J}_k$	3	2	2
30	10	4	2,3	E-, A-, D-	$9\mathbf{I}_k+\mathbf{J}_k$	$9\mathbf{I}_k+\mathbf{J}_k$	3	4	3
30	10	4	4,…,14	E-, D-	$9\mathbf{I}_4+\mathbf{J}_4$	$9\mathbf{I}_4+\mathbf{J}_4$	3	4	3
30	8	2	4	A-	$11\mathbf{I}_4$	$9\mathbf{I}_4-(1/5)\mathbf{J}_4$	3	4	4
30	10	4	5,…,14	E-	$9\mathbf{I}_k+\mathbf{J}_k$	$9\mathbf{I}_k+\mathbf{J}_k$	3	4	3

30	8	2	5,…,14	A-, D-	$11\mathbf{I}_k$	$9\mathbf{I}_k-(1/5)\mathbf{J}_k$	3	4	4
33	11	3	2	D-	$10\mathbf{I}_2+\mathbf{J}_2$	$12\mathbf{I}_2-\mathbf{J}_2$	4	4	3
33	13	5	2	E-, A-	$10\mathbf{I}_2$	$12\mathbf{I}_2-(2/11)\mathbf{J}_2$	4	3	3
33	11	3	3	D-	$10\mathbf{I}_3+\mathbf{J}_3$	$12\mathbf{I}_3-\mathbf{J}_3$	4	4	3
33	13	5	3	E-, A-	$10\mathbf{I}_3$	$12\mathbf{I}_3-(2/11)\mathbf{J}_3$	4	3	3
33	13	5	4,…,16	E-A-D	$10\mathbf{I}_k$	$12\mathbf{I}_k-(2/11)\mathbf{J}_k$	4	3	3

Πίνακας 5.6. E-, A-, D- βέλτιστοι BA(N,k) με N=12, 15, 21, 24, 30, 33.

Παρατηρούμε ότι για κάθε BA(N,k) έχουμε $n^{01}=n^{10}=n^{12}=n^{21}$, $n^{00}=n^{22}, n^{02}=n^{20}$.

5.4.1 Κατασκευή του BA(N,k)

i. $N=12,\ n^1=4$ και $2\le k\le 4$. Θέτουμε τρεις συνεχόμενες γραμμές $\underbrace{00...0}_{k},\underbrace{11...1}_{k},\underbrace{22...2}_{k}$, σε ένα OA(9,k,3,2).

ii. $N=12$ και $k=5$ ο BA(12,5) δεν υπάρχει σύμφωνα με τα αποτελέσματα της εξαντλητικής εξέτασης με τη βοήθεια του αλγόριθμου 5.12.1.

iii. $N=15,\ n^1=5,\ n^{11}=1$ και $k=2$. Αυτός είναι ένας BA(15,2) με $n^0=n^1=n^2=5,\ \ n^{02}=n^{20}=n^{11}=1,\ n^{00}=n^{22}=n^{01}=n^{10}=n^{12}=n^{21}=2$.

iv. $N=15,\ n^1=5,\ n^{11}=1$ και $k=3$. Θέτουμε συνεχόμενες στο OA(9,3,3,2) τις έξι γραμμές, 001, 010, 122, 100, 212, 221.

v. $N=15,\ n^1=7,\ n^{11}=3$ και $3\le k\le 7$. Παίρνουμε k στήλες από τον BA(N,k) που δίνεται στον πίνακα 7.

vi. $N = 21,\ n^1 = 7,\ n^{11} = 3$ και $2 \le k \le 7$. Θέτουμε συνεχόμενες σε ένα OA(18,k,3,2) τις τρεις γραμμές, $\underbrace{00...0}_{k}, \underbrace{11...1}_{k}$ και $\underbrace{22...2}_{k}$.

vii. $N = 24,\ n^1 = 8,\ n^{11} = 2$ και $k = 2$. Αυτός είναι ένας BA(24,2) με $n^0 = n^2 = n^1 = 8,\ n^{11} = n^{02} = n^{20} = 2$, $n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = n^{00} = n^{22} = 3$.

viii. $N = 24,\ n^1 = 10,\ n^{11} = 4$ και $k = 2$. Αυτός είναι ένας BA(24,2) με $n^0 = n^2 = 7,$ $n^1 = 1$ $n^{11} = 4,$ $n^0 = n^1 = n = {}^1n = {}^0 3,$ $n^{00} = n^{22} = n^{02} = n^{20} = 2$.

ix. $N = 24,\ n^1 = 8,\ n^{11} = 2$ και $k = 3$. Θέτουμε συνεχόμενες σε ένα OA(18,3,3,2) τις έξι γραμμές, 001, 010, 100, 122, 212, 221.

x. $N = 24,\ n^1 = 10,\ n^{11} = 4$ και $k = 3$. Θέτουμε συνεχόμενες σε ένα OA(18,3,3,2) τις έξι γραμμές, 011, 101, 110, 112, 121, 211.

xi. $N = 24,\ n^1 = 10,\ n^{11} = 4$ και $2 \le k \le 4$. Θέτουμε συνεχόμενες k στήλες από το BA(15,k) που δίνεται στον Πίνακα 5.7 στο OA(9,k,3,2).

xii. $N = 30,\ n^1 = 10,\ n^{11} = 4$ και $k = 2$. Αυτός είναι ένας BA(30,k) με $n^0 = n^1 = n^2 = 10,\ \ n^{00} = n^{11} = n^{22} = 4,\ n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = n^{02} = n^{20} = 3$.

xiii. $N = 30,\ n^1 = 8,\ n^{11} = 4$ και $4 \le k \le 5$. Θέτουμε συνεχόμενο σε ένα OA(18,k,3,2) τον BA(12,k) με $n^1 = 2$ και $n^{11} = 0$ που δίνονται στον Πίνακα 5.8.

xiv. $N = 33,\ n^1 = 10,\ n^{11} = 4$ και $2 \le k \le 13$. Θέτουμε συνεχόμενες σε ένα OA(27,k,3,2) τις τρεις γραμμές $\underbrace{00...0}_{k}, \underbrace{11...1}_{k}$ και $\underbrace{22...2}_{k}$.

xv. $N = 33,\ n^1 = 11,\ n^{11} = 3$ και $k = 2$. Αυτό είναι ένα BA(33,2) με $n^0 = n^2 = n^1 = 11\ \ n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = n^{00} = n^{22} = 4,\ n^{11} = n^{02} = n^{20} = 3$.

xvi. $N = 33,\ n^1 = 13,\ n^{11} = 5$ και $k = 2$. Αυτό είναι ένα BA(33,2) με $n^0 = n^2 = 10,\quad n^1 = 13,\ n^{11} = 5,\quad n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = 4,\quad n^{00} = n^{22} = 3.$

xvii. $N = 33,\ n^1 = 13,\ n^{11} = 5$ και $k = 3$. Θέτουμε συνεχόμενα σε ένα OA(27,3,3,2) τις έξι γραμμές 001, 010, 100, 122, 212, 221.

xviii. $N = 33,\ n^1 = 13,\ n^{11} = 5$ και $4 \le k \le 7$. Προσθέτουμε σε ένα OA(18,k,3,2) τον BA(15,k) με $n^1 = 7$ και $n^{11} = 3$ που δίνεται από τον Πίνακα 5.7.

0	0	1	1	0	0	2
0	1	1	2	2	2	1
0	1	0	1	1	1	0
0	2	2	0	1	1	1
1	0	1	0	2	1	0
1	0	2	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	0	0	0
1	1	0	0	0	2	2
1	2	1	2	1	1	2
1	2	0	1	2	0	1
2	0	0	2	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
2	1	1	0	1	0	1
2	2	1	1	0	2	0

Πίνακας 5.7. BA(15,7)

$N = 15, n^1 = 7, n^{11} = 3$

0	0	0	0	0
0	0	2	2	1
0	1	0	2	2
0	2	1	0	2
0	2	2	1	0
1	0	2	0	2
1	2	0	2	0
2	0	0	1	2
2	0	1	2	0
2	1	2	0	0
2	2	0	0	1
2	2	2	2	2

Πίνακας 5.8. BA(12,5)

$N = 12, n^1 = 2, n^{11} = 0$

Οι δύο πιο πάνω πίνακες βρέθηκαν χρησιμοποιώντας εξαντλητική έρευνα με αλγόριθμο και έχει $k_{\max}$, δηλαδή μέγιστο πλήθος παραγόντων.

5.5 Μερικώς ισορροπημένοι σχεδιασμοί PBA(*N*,*k*-*r*,*r*)

Η βελτιστοποίηση του BA(N,k) μπορεί να βελτιωθεί όπως εξηγείται παρακάτω.

Ορισμός 5.5.1 Ο $\mathrm{N}\times k$ Μερικώς Ισορροπημένος Σχηματισμός, συμβολίζεται με PBA(N,k-r,r), αποτελείται από ένα BA(*N*,*k*-*r*) και ένα BA(*N*,*r*) με στοιχεία 0, 1, 2, όπου $0\le r<k$, έτσι ώστε ο πίνακας πληροφορίας $\mathbf{Q}$ του PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) να είναι της μορφής,

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2\end{bmatrix}, \tag{5.5.1}$$

$$\text{με } \mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{111} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{122}\end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{211} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{222}\end{bmatrix}.$$

Ο PBA(N,k-r,r), σύμφωνα με μορφή των $\mathbf{Q}_1$ και $\mathbf{Q}_2$, δηλαδή, $\mathbf{Q}_{112}=\mathbf{Q}_{121}=\mathbf{Q}_{212}=\mathbf{Q}_{221}=\mathbf{0}$ όπως ορίζεται από την (5.5.1), είναι ανταγωνιστικοί σχεδιασμοί προς σύγκριση για φ-βελτιστοποίηση, Marshall and Olkin (1979, p. 225). Η τιμή του $r=0$ συμβολίζεται με BA(N,k-0)=BA(N,k). Εφόσον έχουμε δύο BA, ο δείκτης 1 στο n_1^p αναφέρεται στον πρώτο BA(N,k-r) και ο δείκτης 2 στο n_2^p αναφέρεται στον δεύτερο BA(N,r), ο δείκτης 12 στο n_{12}^{pq} αναφέρεται σε μια στήλη του πρώτου BA(*N*,*k*-*r*) και σε μια στήλη από το δεύτερο BA(*N*,*r*).

Θεώρημα 5.5.1 Αν έχουμε δύο BA, ο πρώτος BA(*N*,*k*-*r*,*r*) με *N*, n_1^1, n_{11}^{11} που ικανοποιούν $0\le n_{11}^{11}<n_1^1<N$, $N-n_1^1\equiv 0 \bmod 2$, $n_1^1-n_{11}^{11}\equiv 0 \bmod 2$, ο δεύτερος

BA(N, r) έχει N, n_2^1, n_{22}^{11} που ικανοποιούν $0 \le n_{22}^{11} < n_2^1 < N$, $N - n_2^1 \equiv 0 \bmod 2$, $n_2^1 - n_{22}^{11} \equiv 0 \bmod 2$ και αν $n_{12}^{11} = n_1^1 n_2^1 / N$ είναι ένας ακέραιος που ικανοποιεί $0 < n_2^1 - n_{12}^{11} \equiv 0 \bmod 2$, τότε όλοι οι παράμετροι ορίζονται ως ακολούθως:

(i) $n_1^0 = n_1^2 = \left(N - n_1^1\right)/2,\ \ n_2^0 = n_2^2 = \left(N - n_2^1\right)/2.$

(ii) $n_{pp}^{00} = n_{pp}^{22},\ n_{pp}^{02} = n_{pp}^{20},\ n_{pp}^{01} = n_{pp}^{10} = n_{pp}^{12} = n_{pp}^{21} = \left(n_p^1 - n_{pp}^{11}\right)/2,$

$n_{pp}^{00} + n_{pp}^{02} = \left(N - 2n_p^1 + n_{pp}^{11}\right)/2, \quad 0 \le n_{pp}^{00} - n_{pp}^{02} \le 1,\ p = 1, 2.$

(iii) $n_{12}^{00} = n_{12}^{02} = n_{12}^{20} = n_{12}^{22} = \left(2n_2^0 - n_1^1 + n_{12}^{11}\right)/4 = \left(2n_1^0 - n_2^1 + n_{12}^{11}\right)/4,$

$n_{12}^{10} = n_{12}^{12} = \left(n_1^1 - n_{12}^{11}\right)/2,\ n_{12}^{01} = n_{12}^{21} = \left(n_2^1 - n_{12}^{11}\right)/2.$

Απόδειξη. Έχουμε τον BA(N,k-r) και τον BA(N,k).

(i) Από τον ορισμό 5.5.1 έχουμε $\mathbf{Q}_{212} = \mathbf{Q}_{221} = \mathbf{0}$ και από το Λήμμα 5.1.2. παίρνουμε ότι $q_{12} = 3(Nn_{12}^{11} - n_1^1 n_2^1)/(2N) = 0$, δηλαδή, $n_{12}^{11} = n_1^1 n_2^1 / N$. Επίσης $\mathbf{Q}_{112} = \mathbf{Q}_{121} = \mathbf{0}$. έτσι από το Λήμμα 5.1.2 έχουμε $a_{12} = 0$, δηλαδή $n_{12}^{00} + n_{12}^{22} - n_{12}^{02} - n_{12}^{20} = 0 \Rightarrow n_{12}^{00} = n_{12}^{22} = n_{12}^{02} = n_{12}^{20}$.

(ii) Το αποτέλεσμα προκύπτει από το Λήμμα 5.1.3.

(iii) Το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα 5.1.4 και Θεώρημα 5.4.1.

5.5.1 Για να βρούμε τα ζευγάρια BA(*N*,*k*-*r*), BA(*N*,*r*)

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.4.2. Για δοσμένο BA(*N*,*k*-*r*) με N, n_1^1, n_{11}^{11}, οι υπόλοιπες παράμετροι ορίζονται μοναδικά. Ο BA(*N*,*r*) έχει n_2^1 τέτοιο ώστε $n_1^1 n_2^1 / N$ να είναι ακέραιος n_{12}^{11} και να ικανοποιεί τις σχέσεις $n_1^1 - n_{12}^{11} \equiv 0 \bmod 2$ και $n_2^1 - n_{12}^{11} \equiv 0 \bmod 2$ (Λήμμα 5.6.1(iii)) και ο n_2^{11} να είναι ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί $n_2^{11} \ge n_1^1 n_2^1 / N$ ή ο μεγαλύτερος ακέραιος που ικανοποιεί $n_2^{11} \le n_1^1 n_2^1 / N$. Τότε $n_2^0 = n_2^2 = (\mathrm{N} - n_2^1)/2$, $n_{22}^{00} + n_{22}^{02} = (N - 2n_2^1 + n_{22}^{11})/2$, $n_{22}^{00} = n_{22}^{02}$ ή $n_{22}^{00} = n_{22}^{02} + 1$. Με τους δύο συγκεκριμένους BA(*N*,*k*-*r*), BA(*N*,*r*), και από τους πίνακες πληροφορίες που δίνονται στο Θεώρημα 5.5.2, βρίσκουμε τις ιδιοτιμές για κάθε τιμή $0 \le r \le k$ και έτσι ορίζονται οι E-, A-, D-βέλτιστοι PBA(*N*,*k*-*r*,*r*). Αυτοί οι PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) είναι οι βέλτιστοι σχεδιασμοί που θέλουμε. Κατασκευάζουμε τότε τους σχεδιασμούς αυτούς χρησιμοποιώντας αλγόριθμους. Πιο κάτω δίνεται η περίπτωση *N*=12, για τις τιμές *N*=15, 21, 24, 30, 33, για εξοικονόμηση χώρου, δίνονται μόνο οι βέλτιστοι σχεδιασμοί.

Περίπτωση N=12

Τα αποδεχτά ζευγάρια δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Κριτήριο είναι η ποσότητα $n_{12}^{11} = (n_1^1 n_2^1)/N$ να είναι ακέραιος με $0 < n_1^1 - n_{12}^{11} \equiv 0 \bmod 2$, $0 < n_2^1 - n_{12}^{11} \equiv 0 \bmod 2$ Για τις παραμέτρους εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.1.2.

n_1^1	n_{11}^{11}	$\mathbf{Q}_{111}$	$\mathbf{Q}_{122}$	n_2^1	n_{22}^{11}	$\mathbf{Q}_{211}$	$\mathbf{Q}_{122}$
6	4	$3\mathbf{I}_k$	$3\mathbf{I}_k + (3/2)\mathbf{J}_k$	8	4	$2\mathbf{I}_k$	$6\mathbf{I}_k - 2\mathbf{J}_k$
6	2	$2\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	$6\mathbf{I}_k - (3/2)\mathbf{J}_k$	8	4	$2\mathbf{I}_k$	$6\mathbf{I}_k - 2\mathbf{J}_k$
4	2	$3\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	$3\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k$	6	4	$2\mathbf{I}_k$	$3\mathbf{I}_k + (3/2)\mathbf{J}_k$
4	0	$4\mathbf{I}_k$	$6\mathbf{I}_k - 2\mathbf{J}_k$	6	4	$2\mathbf{I}_k$	$3\mathbf{I}_k + (3/2)\mathbf{J}_k$

Πίνακας 5.9: Ζευγάρια των BA(n,k-r), BA(N.r)

Από τους Πίνακες 5.2-5.5 ο BA(12,k) με $N = 12, n^1 = 4, n^{11} = 2$ είναι E-, A-, D-βέλτιστος για $2 \le k \le 5$. Επομένως από τον Πίνακα 5.9, το μόνο ζεύγος που θα ληφθεί υπόψη είναι αυτό με $N = 12,\ n_1 = 4,\ n_{11}^{11} = 2,\ N = 12,\ n_2^1 = 6,\ n_{22}^{11} = 4.$

n_1^1	n_{11}^{11}	n_2^1	n_{22}^{11}	k	k-r	r	Ιδιοτιμές	E	A	D
4	2	6	4	2	2	0	$3_2, 5_2$	3	1.067	225
4	2	6	4	2	1	1	$3, 4_2, 9/2$	3	1.056	216
4	2	6	4	3	3	0	$3_4, 6_2$	3	1.667	2916
4	2	6	4	3	2	1	$3_3, 9/2, 5_2$	3	1.622	3037.5
4	2	6	4	4	4	0	$3_6, 7_2$	3	2.286	35721
4	2	6	4	4	3	1	$3_5, 9/2, 6_2$	3	2.222	39366
4	2	6	4	4	2	2	$3_5, 5_2, 6$	3	2.233	36450
4	2	6	4	5	5	0	$3_8, 8_2$	3	2.917	419904
4	2	6	4	5	4	1	$3_7, 9/2, 7_2$	3	2.841	482233.5
4	2	6	4	5	3	2	$3_7, 6_3$	3	2.833	472392

Πίνακας 5.10: Βέλτιστοι PBA(12,k-r,r), για $2 \le k \le 5$.

Ο επόμενος πίνακας 5.11 δίνει το βέλτιστο PBA(12,4,1) που κατασκευάστηκε χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 5.12.1 που δίνεται στο Παράρτημα A.5.2.

$n^1 = 4, n^{11} = 2$				$n^1 = 6, n^{11} = 4$
0	0	0	1	0
1	1	1	2	0
2	2	2	0	0
0	0	1	0	1
0	2	2	2	1

1	0	0	0	1
1	1	2	1	1
2	1	1	1	1
2	2	0	2	1
0	1	0	0	2
1	2	1	1	2
2	0	2	2	2

Πίνακας 5.11: E-, A-, D-βέλτιστος PBA(12,4,1).

Κατασκευή των E-, A-, D- βέλτιστων PBA(N,k-r,r) που δίνονται στον Πίνακα 5.10 για $2 \leq k \leq 5$:

(i) Για k=2 ο PBA(12,1,1) είναι E-, A-βέλτιστος. Παίρνουμε μια από τις τέσσερις πρώτες στήλες και μια την τελευταία στήλη του πίνακα 5.11. Ο PBA(12,2,0) είναι E-, D-βέλτιστος. παίρνουμε δύο από τις πρώτες τέσσερις στήλες του Πίνακα 5.11.

(ii) Για k=3 ο PBA(12,2,1) είναι E-, A-, D-βέλτιστος. Παίρνουμε δύο από τις τέσσερις πρώτες στήλες και την τελευταία στήλη του πίνακα 5.11.

(iii) Για k=4 ο PBA(12,3,1) είναι E-, A-, D-βέλτιστος. Παίρνουμε τρεις από τις τέσσερις πρώτες στήλες και την τελευταία στήλη του πίνακα 5.11.

(iv) Για k=5 ο PBA(12,4,1) είναι E-, D-βέλτιστος. Παίρνουμε τέσσερις από τις τέσσερις πρώτες στήλες και την τελευταία στήλη του πίνακα 5.11. Ο PBA(12,3,2) δεν υπάρχει, όπως φαίνεται από την εξαντλητική αναζήτηση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 5.12.2 του Παραρτήματος 5.2.

Μια άλλη κατασκευή των βέλτιστων PBA(12,*k*-1,1) είναι: Από το Λήμμα 5.6.1 έχουμε $n_{12}^{00} = n_{12}^{22} = n_{12}^{02} = n_{12}^{20} = n_{12}^{10} = n_{12}^{12} = 1$, $n_{12}^{01} = n_{12}^{21} = n_{12}^{11} = 2$, $n_1^0 = n_1^2 = n_1^1 = 4, n_{11}^{00} = n_{11}^{22} = n_{11}^{11} = 2$, $n_{11}^{01} = n_{11}^{10} = n_{11}^{20} = n_{11}^{02} = 1$. Επομένως για $2 \le k \le 4$ ο βέλτιστος PBA(12,*k*-*r*,*r*), με r=1 κατασκευάζεται θέτοντας συνεχόμενα στον OA(9,k,3,2) τις τρεις γραμμές $\underbrace{00...01}_{k}, \underbrace{11...11}_{k}, \underbrace{22...21}_{k}$.

Οι βέλτιστοι σχεδιασμοί PBA(N,k-r,r) για *N*=15, 21, 24, 30, 33 παρουσιάζονται πιο κάτω. Για εξοικονόμηση χώρου δίνουμε τα τελικά αποτελέσματα, η διαδικασία είναι όπως έγινε και για *N*=12. Ο βέλτιστος PBA(15,*k*-*r*,*r*) για $2 \le k \le 7$,

	$n^1 = 5,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 3,\ n^{11} = 1$	Βελτιστοποίηση	Κατασκευή
k	$k-r$	r		
2	2	0	E-, A-, D-	Ναι
3	2	1	E-, A-, D-	Ναι
4	2	2	E-, A-	Ναι
4	3	1	E-, A-	Ναι
5	3	2	E-, A-, D-	Ναι
6	3	3	E-, A-, D-	Όχι
7	3	4	E-, A-, D-	Όχι

Πίνακας 5.12: Βέλτιστος PBA(15,*k*-*r*,*r*) για $2 \le k \le 7$.

Σημείωση: «Όχι» σημαίνει ότι ο PBA(15,*k*-*r*,*r*) δεν μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας εξαντλητικό αλγόριθμο αναζήτησης. Για $2 \le k \le 5$ ο βέλτιστος PBA(15,*k*-*r*,*r*) κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τον

Πίνακα 5.13. Παίρνουμε k-r στήλες από τον πρώτο ΒΑ(15,3) με $n^1 = 5,\ n^{11} = 1$ και r στήλες από τον δεύτερο ΒΑ(15,2) με $n^1 = 3,\ n^{11} = 1$.

$n^1 = 5,\ n_{11}^{11} = 1$			$n^1 = 3,\ n_{11}^{11} = 1$	
0	2	2	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	2	0	0	2
2	0	1	0	2
2	1	2	0	1
2	2	1	1	0
0	0	0	1	1
1	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	0	2	0
1	0	2	2	0
0	1	0	2	2
0	0	1	2	2
2	2	2	2	2

Πίνακας 5.13: PBA(15,3,2)

Οι PBA(21,*k*-*r*,*r*) δίνονται στον Πίνακα 5.14.

	$n^1=7,\ n^{11}=3$	$n^1=9, n^{11}=5$	Βελτιστοποίηση
k	$k-r$	r	
2	2	0	E-, D-
2	1	1	E-, A-
3	2	1	E-, A-, D-
4	3	1	E-, A-, D-
5	3	2	E-, A-, D-
6	4	2	E-, A-, D-
7	5	2	E-, A-, D-
8	6	2	E-, D-
8	5	3	E-, A-
9	6	3	E-, A-, D-
10	7	3	E-, A-, D-

Πίνακας 5.14: Βέλτιστοι PBA(21,k-r,r) για $2 \le k \le 10$.

Οι βέλτιστοι PB(21,*k*-*r*,*r*) για $2 \le k \le 7$ θέτοντας συνεχόμενα σε ένα OA(18,k,3,2) τις τρεις γραμμές $\underbrace{00...0}_{k-r}\underbrace{11...1}_{r}, \underbrace{11...1}_{k-r}\underbrace{11...1}_{r}$ και $\underbrace{22...2}_{k-r}\underbrace{11...1}_{r}$.

Για $8 \le k \le 10$ οι E-, A-, D-βέλτιστοι PBA(21,*k*-*r*,*r*) δεν έχουν κατασκευαστεί.

Οι βέλτιστοι PBA(24,*k*-*r*,*r*) για $2 \le k \le 11$ δίνονται στον Πίνακα 5.15.

	$n^1=6,\ n^{11}=2$	$n^1=8,\ n^{11}=2$	$n^1=8,\ n^{11}=4$	Βελτιστοποίηση
k	$k-r$	r	t	
2	0	2	0	E-, A-, D-

3	1	2	0	E-, A-, D-
4	2	2	0	E-, A-
4	1	3	0	E-, D-
5	2	3	0	E-, A-, D-
6	4	2	0	E-, A-, D-
7	4	3	0	E-, A-, D-
8	4	0	4	D-
8	5	3	0	E-, A-
9	6	3	0	E-
9	5	4	0	A-, D-
10	5	0	5	E-
10	6	4	0	A-, D-
11	7	0	4	E-
11	7	4	0	A-, D-

Πίνακας 5.15: Βέλτιστος PBA(24,k-r,r) για $2 \le k \le 11$.

Για την κατασκευή των βέλτιστων σχεδιασμών για $2 \le k \le 11$ έχουμε: (i) Για $k = 2$ παίρνουμε δύο στήλες από ένα OA(18,7,3,2) και προσθέτουμε τις έξι γραμμές 00, 22, 10, 01, 12 και 21. Ισοδύναμα παίρνουμε δύο στήλες με $n^{00} = n^{22} = 3,\ n^{02} = n^{20} = n^{11} = 2,\ n^{01} = n^{10} = n^{21} = n^{12} = 3$.

(ii) Για $k = 3$ παίρνουμε από τον πίνακα 5.13, δύο στήλες από τον BA με $N = 15,\ n^1 = 5,\ n_{11}^{11} = 1$ και μια στήλη από τον BA με $N = 15,\ n^1 = 3,\ n_{11}^{11} = 1$ και θέτουμε συνεχόμενα 3 στήλες από τον OA(9,4,3,2).

(iii) Για $k=4$, $r=2$ και $t=0$ παίρνουμε από τον Πίνακα 5.13, δύο στήλες από τον BA με $N=15$, $n^1=5$, $n_{11}^{11}=1$ και δύο στήλες από τον BA με $N=15$, $n^1=3$, $n_{11}^{11}=1$ και θέτουμε συνεχόμενα τέσσερις στήλες από τον OA(9,4,3,2).

(iv) Για $k=4$, $r=1$ και $t=0$ παίρνουμε από τον Πίνακα 5.13, τρεις στήλες από τον BA με $N=15$, $n^1=5$, $n_{11}^{11}=1$ και μια στήλη από τον BA με $N=15$, $n^1=3$, $n_{11}^{11}=1$ και θέτουμε συνεχόμενα τέσσερις στήλες από το OA(9,4,3,2).

Για $5 \le k \le 11$ οι βέλτιστοι PBA(24,*k*-*r*,*r*) δεν έχουν κατασκευαστεί.

Οι βέλτιστοι PBA(30,k-r,r) για $2 \le k \le 14$ δίνονται στον Πίνακα 5.16.

	$n^1=10,\ n^{11}=4$	$n^1=12,\ n^{11}=6$	Βελτιστοποίηση
k	$k-r$	r	
2	2	0	E-, A-, D-
3	2	1	E-, A-, D-
4	3	1	E-, A-, D-
5	4	1	E-, D-
5	3	2	E-, A-
6	4	2	E-, A-, D-
7	5	2	E-, A-, D-
8	5	3	E-, A-
8	6	2	E-, D-
9	6	3	E-, A-, D-

10	7	3	E-, A-, D-
11	7	4	E-, A-
11	8	3	E-, D-
12	8	4	E-, A-, D-
13	9	4	E-, A-, D-
14	10	4	E-, D-
14	9	5	E-, A-

Πίνακας 5.16: Βέλτιστοι PBA(30,k-r,r), για $2 \le k \le 14$.

Για την κατασκευή των E-, A-, D- βέλτιστων PBA(30,k-r,r) για $2 \le k \le 14$ παίρνουμε k στήλες από ένα OA(27,13,3,2) και θέτουμε συνεχόμενα τις τρεις γραμμές $\underbrace{0\ldots0}_{k-r}\underbrace{1\ldots1}_{r},\underbrace{1\ldots1}_{k-r}\underbrace{1\ldots1}_{r}$ και $\underbrace{2\ldots2}_{k-r}\underbrace{1\ldots1}_{r}$. Για $N = 30$ και $k = 14$ οι E-, A-, D- βέλτιστοι σχεδιασμοί δεν έχουν κατασκευαστεί.

Οι βέλτιστοι PBA(33,k-r,r) για $2 \le k \le 16$ δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	$n^{1} = 11,\ n^{11} = 3$	$n^{1} = 9,\ n^{11} = 3$	Βελτιστοποίηση
k	$k - r$	r	
2	2	0	E-, A-, D-
3	2	1	E-, A-, D-
4	3	1	E-, A-, D-
4	2	2	E-, D-
5	3	2	A-
6	4	2	A-, D-

6	3	3	E-
7	3	4	E-, A-, D-
8	5	3	D-
8	3	5	E-, A-
9	4	5	A-, D-
9	3	6	E-
10	5	5	D-
10	4	6	E-, A-
11	5	6	D-
11	4	7	E-, A-
12	5	7	D-
12	4	8	E-, A-
13	5	8	D-
13	4	9	E-, A-
14	6	8	D-
14	5	9	E-, A-
15	6	9	D-
15	5	10	E-, A-
16	6	10	D-
16	5	11	E-, A-

Πίνακας 5.17: Βέλτιστοι PBA(33,k-r,r) για $2 \le k \le 16$.

Για την κατασκευή αυτών των βέλτιστων PBA(33,k-r,r) για $2 \le k \le 16$ έχουμε:

(i) Για $k=2$ και $r=0$ παίρνουμε $n^{00}=n^{01}=n^{10}=n^{12}=n^{21}=n^{22}=4$, $n^{02}=n^{11}=n^{20}=3$.

(ii) Για $k=3$ και $r=1$ παίρνουμε τρεις στήλες από ένα OA(27,13,3,2) και προσθέτουμε τις έξι γραμμές 000, 012, 102, 120, 210 και 222.

(iii) Για $k=4$ και $r=1$ παίρνουμε τέσσερις στήλες από ένα OA(18,7,3,2) και θέτουμε συνεχόμενα τέσσερις στήλες, δηλαδή τρεις από BA με $N=15,\ n^1=5,\ n_{11}^{11}=1$ (Πίνακας 5.13) και μια από τον BA με $N=15,\ n^1=3,\ n_{11}^{11}=1$ (Πίνακας 5.13). Αυτός είναι E-, D-βέλτιστος.

(iv) Για $k=4$ και $r=2$ παίρνουμε τέσσερις στήλες από ένα OA(18,7,3,2) και θέτουμε συνεχόμενα τέσσερις στήλες, δηλαδή δύο από τον BA με $N=15,\ n^1=5,\ n_{11}^{11}=1$ (Πίνακας 5.13) και δύο από τον BA με $N=15,\ n^1=3,\ n_{11}^{11}=1$ (Πίνακας 5.13). Αυτός είναι A-βέλτιστος.

(v) Για $k=5$ και $r=2$ παίρνουμε πέντε στήλες από ένα OA(18,7,3,2) και θέτουμε συνεχόμενα πέντε στήλες, δηλαδή τρεις από τον BA με $N=15,\ n^1=5,\ n_{11}^{11}=1$ (Πίνακας 5.13) και δύο από τον BA με $N=15,\ n^1=3,\ n_{11}^{11}=1$ (Πίνακας 5.13). Αυτός είναι E-, A-, D-βέλτιστος.

Για $k\geq 6$ η κατασκευή του βέλτιστου PBA(33,k-r,r) που δίνεται στον πίνακα 5.17, δεν έχουν κατασκευαστεί.

5.6 Βέλτιστοι σχεδιασμοί για *N*=12,15,21,24,30,33

Προκειμένου να βρούμε τους βέλτιστους σχεδιασμούς για τις τιμές του N που δίνονται πιο πάνω, συγκρίνουμε το βέλτιστο BA(N,k) της υποενότητας 5.5 με τον βέλτιστο σχεδιασμό PBA(*N*,*k*-*r*,*r*) της υποενότητας 5.6, για τιμές του *k* από 2 μέχρι $k_{\max}$.

Έστω *N*=12. Από τους πίνακες 5.6 και 5.10, οι βέλτιστοι σχεδιασμοί για τις τιμές $2 \le k \le 5$ δίνονται στον πίνακα 5.18.

	$n^1 = 4,\ n^{11} = 2$	$n^1 = 6,\ n^{11} = 4$	Βελτιστοποίηση
k	$k-r$	r	
2	2	0	E-, D-
2	1	1	E-, A-
3	2	1	E-, A-, D-
4	3	1	E-, A-, D-
5	4	1	E-, A-, D-

Πίνακας 5.18: Βέλτιστοι σχεδιασμοί για N=12 και $2 \le k \le 5$.

Ο σχεδιασμός με *N*=12, $n^1 = 4,\ n^{11} = 2$ και N=12, $n^1 = 6,\ n^{11} = 4$ βρίσκονται στον πίνακα 5.11. Για την κατασκευή του βλπ τα σχόλια που ακολουθούν μετά τον πίνακα 5.11.

Έστω *N*=15. Από τους πίνακες 5.6 και 5.12, οι βέλτιστοι σχεδιασμοί δίνονται στον πίνακα 5.19.

	$n^1 = 5,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 3,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 7,\ n^{11} = 3$	Βελτιστοποίηση
k	$k-r$	r	t	
2	2	0	0	E-, A-, D-
3	2	1	0	A-, D-
3	0	0	3	E-
4	3	1	0	D-
4	0	0	4	E-, A-
5	0	0	5	E-, A-, D-

6	0	0	6	E-, A-, D-
7	0	0	7	E-, A-, D-

Πίνακας 5.19: Βέλτιστοι σχεδιασμοί για Ν=15 και $2 \le k \le 7$.

Ο σχεδιασμός με *N*=15, $n^{1}=5,\ n^{11}=1$ δίνεται στον πίνακα 5.7. Ο σχεδιασμός *N*=15, $n^{1}=3,\ n^{11}=1$ και $n^{1}=7,\ n^{11}=3$ βρίσκονται στον πίνακα 5.13.

Έστω *N*=21. Από τους πίνακες 5.6 και 5.14, οι βέλτιστοι σχεδιασμοί δίνονται στον πίνακα 5.20.

	$n^{1}=5,\ n^{11}=1$	$n^{1}=3,\ n^{11}=1$	$n^{1}=7,\ n^{11}=3$	Βελτιστοποίηση
k	$k-r$	r	t	
2	2	0	0	E-, D-
2	1	1	0	E-, A-
3	2	1	0	E-, A-, D-
4	3	1	0	E-, A-, D-
5	3	2	0	E-, A-, D-
6	4	2	0	E-, A-, D-
7	5	2	0	E-, A-, D-
8	2	6	0	E-, D-
8	0	0	8	A-
9	6	3	0	E-
9	0	0	9	A-, D-
10	7	3	0	E-

10	0	0	10	A-, D-

Πίνακας 5.20: Βέλτιστοι σχεδιασμοί για N=21 και $2 \le k \le 10$.

Για την κατασκευή της περίπτωσης των περιπτώσεων όπου το N=12, $2 \le k \le 10$ βλπ τα σχόλια μετά τον πίνακα 5.14. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις δεν έχουν κατασκευαστεί ακόμα.

Έστω N=24. Από τους πίνακες 5.6 και 5.15, οι βέλτιστοι σχεδιασμοί δίνονται στον πίνακα 5.21.

	$n^1 = 5,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 3,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 7,\ n^{11} = 3$	Βελτιστοποίηση
k	$k - r$	r	t	
2	0	2	0	E-, A-, D-
3	1	2	0	A-, D-
3	0	0	3	E-
4	1	3	0	D-
4	2	2	0	A-
4	0	0	4	E-
5	2	3	0	D-
5	0	0	5	E-, A-
6…11	0	0	6…11	E-, A-, D-

Πίνακας 5.21: Βέλτιστοι σχεδιασμοί για N=24 και $2 \le k \le 11$.

Για την κατασκευή:

(i) Για k=2 παίρνουμε δύο στήλες με $n^{00} = n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = n^{22} = 3$, $n^{02} = n^{11} = n^{20} = 2$.

(ii) Για k=3, r=2 και t=0, παίρνουμε τις τρεις στήλες από ένα OA(18,7,3,2) και προσθέτουμε τις έξι γραμμές 001, 010, 022, 200, 212 και 221. Αυτός είναι A-, D- βέλτιστος.

(iii) Για k=3, r=0 και t=3, παίρνουμε τις τρεις στήλες από ένα OA(18,7,3,2) και προσθέτουμε τις έξι γραμμές 011, 101, 112, 121, 221. Αυτός είναι E-βέλτιστος.

(iv) Για k=4 για την κατασκευή του PBA(21,1,3) βλπ (v) σελ.152.

(v) Για k=4 για την κατασκευή του PBA(21,2,2) βλπ (v) σελ.152.

(vi) Για k=4, r=0 και t=4 παίρνουμε από τον πίνακα 5.7 τέσσερεις στήλες από τον BA με N=15, $n^1 = 7,\ n^{11} = 3$ και προσθέτουμε τέσσερεις στήλες από ένα OA(9,4,3,2). Αυτός είναι E-βέλτιστος σχεδιασμός.

(vii) Για $5 \le k \le 11$ η κατασκευή του BA με N=24, $n^1 = 10,\ n^{11} = 4$ δεν είναι ακόμα γνωστή.

Έστω N=30. Από τους πίνακες 5.6 και 5.16, οι βέλτιστοι σχεδιασμοί δίνονται στον πίνακα 5.22.

	$n^1 = 5,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 3,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 7,\ n^{11} = 3$	Βελτιστοποίηση
k	$k-r$	r	t	
2	2	0	0	E-, A-, D-
3	2	1	0	E-, A-, D-
4	3	1	0	E-, A-, D-
5	4	1	0	E-, D-
5	3	2	0	E-, A-
6	4	2	0	E-, D-
6	0	0	6	A-

7…14	7…14	0	0	E-
7…14	0	0	7…14	A-, D-

Πίνακας 5.22: Βέλτιστοι σχεδιασμοί για N=30 και $2 \le k \le 14$.

Για την κατασκευή:

(i) Για k=2 παίρνουμε δύο στήλες με $n^{00} = n^{02} = n^{20} = n^{22} = 4$, $n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = 3$, $n^{11} = 1$.

(ii) Για k=3 και k=4 παίρνουμε k στήλες από ένα OA(27,13,3,2) και προσθέτουμε τις τρεις γραμμές $\underbrace{000...0}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$, $\underbrace{111...1}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$ και $\underbrace{222...2}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$.

Αυτός είναι E-, A-, D-βέλτιστος.

(iii) Για k=5 και k=6 παίρνουμε k στήλες από ένα OA(27,13,3,2) και προσθέτουμε τις τρεις γραμμές $\underbrace{000...0}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$, $\underbrace{111...1}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$ και $\underbrace{222...2}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$.

Αυτός είναι E-, D-βέλτιστος.

(iv) Για $7 \le k \le 13$ παίρνουμε k στήλες από ένα OA(27,13,3,2) και προσθέτουμε τις τρεις γραμμές $\underbrace{000...0}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$, $\underbrace{111...1}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$ και $\underbrace{222...2}_{k-r}\underbrace{111...1}_{r}$.

Αυτός είναι E-βέλτιστος.

Για $6 \le k \le 14$ ο BA με N=30, $n^1 = 8$, $n^{11} = 2$ δεν έχει ακόμα κατασκευαστεί.

Έστω N=33. Από τους πίνακες 5.6 και 5.17, οι βέλτιστοι σχεδιασμοί δίνονται στον πίνακα 5.23.

	$n^1 = 5,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 3,\ n^{11} = 1$	$n^1 = 7,\ n^{11} = 3$	Βελτιστοποίηση
k	$k-r$	r	t	
2	2	0	0	E-, A-, D-
3	2	1	0	A-, D-

3	0	0	3	E-
4	3	1	0	D-
4	0	0	4	E-, A-
5	3	2	0	D-
5	0	0	5	E-, A-
6…16	0	0	6…16	E-, A-, D-

Πίνακας 5.23: Βέλτιστοι σχεδιασμοί για N=33 και $2 \leq k \leq 16$.

Όσον αφορά την κατασκευή, έχουμε:

(i) Για k=2 βλπ (i) σελ.152.

(ii) Για k=3, r=1 και t=0 βλπ (ii) στη σελ.152. Αυτός είναι A-, D-βέλτιστος.

(iii) Για k=3, r=0 και t=3 παίρνουμε τρεις στήλες από ένα OA(27,13,3,2) και θέτουμε συνεχόμενα έξι γραμμές 000, 012, 102, 120, 210 και 222. Αυτός είναι E-βέλτιστος.

(iv) Για k=4, r=1 και t=0 βλπ (iii) στη σελ.152. Αυτός είναι D-βέλτιστος.

(v) Για k=4, r=0 και t=4 παίρνουμε τέσσερις στήλες από ένα OA(18,7,3,2) και θέτουμε συνεχόμενα τέσσερις γραμμές από BA(15,6) με N=15, $n^1 = 5$, $n^{11} = 3$ (πίνακας 5.24). Αυτός είναι E-, A-βέλτιστος.

(vi) Για k=5, r=2 και t=0 βλπ (iii) στη σελ.152. Αυτός είναι D-βέλτιστος.

(vii) Για k=5, r=0 και t=5 παίρνουμε τέσσερις στήλες από ένα OA(18,7,3,2) και θέτουμε συνεχόμενα πέντε γραμμές από BA(15,7) (πίνακας 5.7). Αυτός είναι D-βέλτιστος.

(viii) Για k=6,7 παίρνουμε από ένα OA(18,7,3,2) και θέτουμε συνεχόμενα k στήλες του BA(15,k) (πίνακας 5.7). Αυτός είναι D-βέλτιστος.

Για $8 \leq k \leq 16$ οι E-, A-, D-βέλτιστοι σχεδιασμοί δεν έχουν ακόμα κατασκευαστεί.

0	0	0	0	0	1
0	0	2	1	2	0
0	1	0	2	2	2
0	2	2	0	1	2
0	2	1	2	0	0
1	0	2	2	0	2
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	2	0	0	2	0
2	0	1	0	2	2
2	0	0	2	1	0
2	1	2	0	0	0
2	2	2	2	2	1
2	2	0	1	0	2

Πίνακας 5.24: BA(15,6)

$n^1 = 5,\ n^{11} = 3$

0	0	0	0	1
0	0	2	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	2	2
0	2	1	1	0
1	0	1	0	2
1	0	0	1	0
1	1	2	0	0
1	2	2	2	2
1	2	0	2	1
2	0	1	2	0
2	1	2	2	1
2	1	0	1	2
2	2	1	0	1
2	2	2	1	2

Πίνακας 5.25: BA(15,5)

$n^1 = 5,\ n^{11} = 1$

Σημειώνουμε ότι στο BA(15,6) (πίνακας 5.24) με $n^1 = 5, n^{11} = 3$ έχουμε $n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = 1$ και $n^{00} = n^{02} = n^{20} = n^{22} = 2$, και στο BA(15,5) (πίνακας 5.25) με $n^1 = 5$, $n^{11} = 1$ έχουμε $n^{00} = n^{01} = n^{10} = n^{12} = n^{21} = n^{22} = 2$ και $n^{02} = n^{20} = 1$.

Παρατήρηση 5.1: Για k=2 οι E-, A-, D- βέλτιστοι σχεδιασμοί πάντα μπορούν να κατασκευαστούν για δοσμένες τιμές των n^{pq}, $p, q = 0,1,2$. Για k=3 και N≡3mod9, οι E-, A-, D-βέλτιστοι σχεδιασμοί κατασκευάζονται προσθέτοντας σε ένα OA(N-3,k,3,2) τις τρεις γραμμές 000, 111, 222 ή 001, 111, 221. Για N≡6mod9 οι E-, A-, D-βέλτιστοι σχεδιασμοί κατασκευάζονται προσθέτοντας σε ένα OA(N-6,k,3,2) έξι γραμμές συνήθως της μορφής 000, 012, 102, 120, 210, 222 ή 001, 010, 022, 200, 212, 221. Για μεγάλες τιμές του k χρειαζόμαστε ειδικές κατασκευές, είτε χρησιμοποιώντας αλγόριθμους, είτε όταν N-m≡0mod9, θέτοντας συνεχόμενα σε ένα OA(N-m,k,3,2) ένα BA(m,k) ή ένα PBA(m,k-r,r).

Παράρτημα 5.1

Απόδειξη (Λήμματος 5.1.1) Από Marshall and Olkin (1979, p. 225) αν $\mathbf{Q}_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (N-n^1) & 0 \\ 0 & 3(N-n^1) \end{bmatrix} - \frac{1}{2N}\begin{bmatrix} (n^2-n^0)^2 & 0 \\ 0 & 3(N-n^1)^2 \end{bmatrix}$, τότε $\lambda(\mathbf{Q}^*) \prec \lambda(\mathbf{Q})$.

Επίσης, αν $\mathbf{Q}^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (N-n^1) & 0 \\ 0 & 3(N-n^1) \end{bmatrix} - \frac{1}{2N}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3(N-n^1)^2 \end{bmatrix}$, τότε $\lambda\left(\mathbf{Q}^*\right) \prec \lambda\left(\mathbf{Q}_0\right) \prec \lambda\left(\mathbf{Q}\right)$, αφού $\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_0 = \frac{1}{2N}\begin{pmatrix} \left(n^2-n^0\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$. Έτσι το ίχνος $\left(\mathbf{Q}^*\right)$ μεγιστοποιείται όταν $n^1 = N/3$. Έτσι $\lambda_1(\mathbf{Q}^*) = \lambda_2(\mathbf{Q}^*) = N/3$, επειδή $\mathbf{Q}^* = (N/3)\mathbf{I}_2$. Ο σχεδιασμός με πίνακα πληροφορίας $\mathbf{Q}^*$ είναι τέτοιος ώστε $n^0 = n^1 = n^2 = N/3$.

Απόδειξη (Λήμματος 5.1.2) Εφόσον $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, από την (5.1.3) επιτυγχάνεται ότι $n_i^0 = n_i^2, n_{ij}^{01} = n_{ij}^{21},\ i \neq j, i, j = 1,\ldots,k$,

$a_{ii} = (N - n_i^1)/2, a_{ij} = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{22} - n_{ij}^{20} - n_{ij}^{02},\ i \neq j$. Επιπλέον το $k \times 1$ διάνυσμα $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ και τα διαγώνια και μη-διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\mathbf{Q}_2 = 9\left(\mathbf{C} - \mathbf{bb}'/(2N)\right)$ γίνονται $q_{ii} = 3(N - n_i^1)n_j^1/(2N)$, $q_{ij} = 3(Nn_{ij}^{11} - n_i^1 n_j^1)/(2N),\quad i \neq j,\ i, j = 1,\ldots,k$.

Απόδειξη (Λήμματος 5.1.3)

(i) Ισχύει ότι $n_i^1 = N - n_i^0 - n_i^2 = N - n_j^0 - n_j^2 = n_j^1$. Από τις $n_{ij}^{01} = n_{ij}^{10}$, $n_{ij}^{10} = n_{ij}^{12}$ και τις σχέσεις $n_i^0 = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} + n_{ij}^{02}$ και $n_i^2 = n_{ij}^{20} + n_{ij}^{21} + n_{ij}^{22}$, αφαιρώντας κατά μέλη επιτυγχάνεται η σχέση $n_{ij}^{00} - n_{ij}^{22} = n_{ij}^{20} - n_{ij}^{02}$. Επίσης από τις $n_j^0 = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{10} + n_{ij}^{20}$ και $n_j^2 = n_{ij}^{02} + n_{ij}^{12} + n_{ij}^{22}$ αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $n_{ij}^{00} - n_{ij}^{22} = n_{ij}^{02} - n_{ij}^{20}$. Συγκρίνοντας τώρα τις δύο αυτές σχέσεις παίρνουμε $n_{ij}^{20} = n_{ij}^{02}$ και $n_{ij}^{00} = n_{ij}^{22}$. Επιπλέον από την $n_i^0 - n_j^0 = 0$, επιτυγχάνεται ότι $n_{ij}^{01} - n_{ij}^{10} + n_{ij}^{02} - n_{ij}^{20} = n_{ij}^{01} - n_{ij}^{10} = 0$ και από την $n_i^2 - n_j^2 = 0$, επιτυγχάνεται η $n_{ij}^{21} - n_{ij}^{12} + n_{ij}^{20} - n_{ij}^{02} = n_{ij}^{21} - n_{ij}^{12} = 0$.

(ii) Ισχύει ότι $n_{ij}^{01} = n_{ij}^{21} = \left(n_j^1 - n_{ij}^{11}\right)/2$. Όμως αφού $n_i^1 = n_j^1$ προκύπτει το αποτέλεσμα. Επίσης $n_{ij}^{00} + n_{ij}^{02} = n_i^0 - n_{ij}^{01}$. Επομένως, γνωρίζοντας τις τιμές των $n_i^1, n_j^1, n_i^2, n_j^2$, την τιμή του n_{ij}^{11} και ένα από τα n_{ij}^{00} και n_{ij}^{02} μπορούμε να βρούμε τις παραμέτρους n_{ij}^{pq}, $i \neq j = 1, 2$.

Απόδειξη (Λήμματος 5.1.4)

(i) Από τις $n_i^0 = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} + n_{ij}^{02}$, $n_i^2 = n_{ij}^{20} + n_{ij}^{21} + n_{ij}^{22}$, $n_j^0 = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{10} + n_{ij}^{20}$, $n_j^2 = n_{ij}^{02} + n_{ij}^{12} + n_{ij}^{22}$ παίρνουμε $n_i^1 - n_j^1 = n_{ij}^{01} + n_{ij}^{02} - n_{ij}^{01} - n_{ij}^{20}$, $n_i^2 - n_j^2 = n_{ij}^{20} + n_{ij}^{21} - n_{ij}^{02} - n_{ij}^{12}$. Όμως, $n_i^1 - n_j^1 =$ $n_i^2 - n_j^2$ και έτσι $2\left(n_{ij}^{02} - n_{ij}^{20}\right) = n_{ij}^{10} - n_{ij}^{12} = 0$.

Ισχύει ότι $n_j^1 = N - n_j^0 - n_j^2 = N - 2n_j^0$, $n_i^1 = N - n_i^0 - n_i^2 = N - 2n_i^0$. Τότε, $n_j^1 - n_i^1 =$ $2\left(n_i^0 - n_j^0\right) = 2\left(n_{ij}^{10} - n_{ij}^{01}\right)$.

Απόδειξη (Λήμματος 5.4.1)

(i) Αν $y_{(1)} \le y_{(2)} \le \cdots \le y_{(k)}$, τότε $y_{(1)} \le x$, διαφορετικά $y_{(i)} > x,\ i = 1, \dots, k$ και $y_1 + y_2 + \cdots + y_k > kx$ που αποτελεί αντίφαση. Επίσης, $y_{(1)} + \cdots + y_{(j)} \le jx,$ $j = 2, \dots, k-1$ διαφορετικά υπάρχουν τιμές $j = 2, \dots, k$ τέτοιες ώστε $y_{(1)} + \cdots + y_{(j-1)} \le (j-1)x$ και $y_{(1)} + \cdots + y_{(j)} > jx,$ δηλαδή $y_{(j)} > x$ και $y_1 + y_2 + \dots + y_k > kx$ που αποτελεί επίσης αντίφαση.

(ii) Αφού $c > b > 0$, έχουμε ότι $y > x$ και $jy > ix$ για $j = 2,...,k-1$ και $x_1 + \cdots x_k = k(x+b) = y_1 + \cdots + y_k = k(y+c)$.

(iii) Αφού $c > b > 0$, έχουμε $y > x$ και $jy > ix$ για $j = 2,...,k-1$ και $x_1 + \cdots x_k = k(x-b) = y_1 + \cdots + y_k = k(y-c)$.

Απόδειξη (Λήμματος 5.4.2) Εφόσον $\mathbf{x}_2 \prec \mathbf{x}_1$ ή $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_2 \prec \mathbf{y}_1$, τότε $\mathbf{x}_1 = \mathbf{S}_1\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 = \mathbf{S}_2\mathbf{y}_2$, όπου $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ είναι $k \times k$ διπλά στοχαστικοί πίνακες. Άρα, $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$. Αν $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$, τότε $\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}_k$.

Απόδειξη (Λήμματος 5.4.3)

(i) $s_1 : x_1 = x, x_2 = x + 2b,\ s_2 : y_1 = x + 2b, y_2 = x,$.

(ii) Για την Ε-βελτιστοποίηση έχουμε
$\lambda_{\min}(s_1) = x, \lambda_{\min}(s_2) = x + 2b - bk \le x - b < x$.

Για την Α-βελτιστοποίηση: $\dfrac{k-1}{x} + \dfrac{1}{x+bk} < \dfrac{k-1}{x+2b} + \dfrac{1}{x+2b-bk}$ που είναι ισοδύναμο με $\dfrac{2b(k-1)}{x(x+2b)} < \dfrac{2b(k-1)}{(x+bk)(x+2b-bk)}$, δηλαδή $(x+bk)(x+2b-bk) < x(x+2b)$, και έτσι για k>2 ισχύει. Για την D-βέλτιστοποίηση έχουμε $x^{k-1}(x+bk) >$ $(x+2b)^{k-1}(x+2b-bk)$ που είναι ισοδύναμο με $\left(\dfrac{x}{x+2b}\right)^{k-1} > \dfrac{x+2b-bk}{x+bk}$, που ισχύει για k=3, αφού $4b^3 > 0$. Αν $\left(\dfrac{x}{x+2b}\right)^{k-1} > \dfrac{x+2b-bk}{x+bk}$ ισχύει για k, τότε ισχύει και για k+1, αφού

$$\left(\frac{x}{x+2b}\right)^{k} = \left(\frac{x}{x+2b}\right)\left(\frac{x}{x+2b}\right)^{k-1} > \left(\frac{x}{x+2b}\right)\left(\frac{x+2b-bk}{x+bk}\right) > \left(\frac{x+2b-b(k=1)}{x+b(k+1)}\right),$$ που

αυτό μας οδηγεί στο $2b^2k(k-1) > 0$ που είναι ορθό.

(iii) Αν $k \geq \dfrac{x+2b}{b}$, τότε $y_k \leq 0$ και η ακολουθία s_2 δεν συμπεριλαμβάνεται στην εξέταση.

Απόδειξη (Θεωρήματος 5.4.1) Για δοσμένη τιμή του n^1, $0 < n^1 < N, N - n^1 = 0 \bmod 2$ και από την (5.4.1) εξασφαλίζει, $\mathbf{Q}_1 = \left((\mathrm{N} - n^1)/2 - (n^{00} - n^{02})\right)\mathbf{I}_k + (n^{00} - n^{02})\mathbf{J}_k$. Έστω R είναι η κλάση των σχεδιασμών με $n^{00} + n^{02} = n^0 - n^{01} = \left((N - 2n^1 + n^{11})/2\right)$. Αν αυτό είναι άρτιο, σύμφωνα με το Λήμμα 5.4.1(i), παίρνουμε $n^{00} = n^{02} = (N - 2n^1 + n^{11})/4$ και αυτό είναι φ-βέλτιστος στην R. Αν $\left((N - 2n^1 + n^{11})/2\right)$ είναι περιττός, είτε παίρνουμε $n^{00} = n^{02} + 1$ που είναι φ-βέλτιστος στην υποκλάση του R όπου $n^{00} > n^{02}$, σύμφωνα με το Λήμμα 5.4.1 (ii) είτε παίρνουμε $n^{00} = n^{02} - 1$ το οποίο είναι φ-βέλτιστος στην υποκλάση του R με $n^{00} < n^{02}$ σύμφωνα με το Λήμμα 5.4.1 (iii). Παρόλα αυτά αν $n^{00} = n^{02} + 1$, τότε το $\lambda(\mathbf{Q}_1)$ είναι E-, A-, D-βέλτιστος συγκρινόμενο με το $\lambda(\mathbf{Q}_1)$ όταν $n^{00} = n^{02} - 1$. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $x = (\mathrm{N} - n^1)/2 - 1$ και ακολουθούμε την απόδειξη του Λήμματος 5.4.3.

Παράρτημα 5.2.

Αλγόριθμοι για την κατασκευή βέλτιστων σχεδιασμών

Στο Παράρτημα αυτό δίνονται οι αλγόριθμοι για την κατασκευή βέλτιστων σχεδιασμών, για τις τιμές N=12, 15. Σημειώνουμε ότι για N=0mod9 οι φ-βέλτιστοι σχεδιασμοί είναι οι OA(N,k,3,2) (Από το Θεώρημα 5.3.2).

Αλγόριθμος 12.1 Κατασκευή του PBA(12,4,1)

Βήμα 1. Τα πρώτα δύο διανύσματα είναι: (0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2), (0 1 1 2 0 1 1 2 0 1 1 2).

Βήμα 2. Γράφουμε όλα τα διανύσματα που έχουν στις πρώτες 4 θέσεις 0 0 1 2, στις υπόλοιπες 4 θέσεις 0 1 1 2 και στις 4 τελευταίες θέσεις 0 1 2 2. Αυτό είναι το σύνολο R και περιέχει $12^3 = 1728$ διανύσματα.

Βήμα 3. Βρίσκουμε από το σύνολο R τα διανύσματα που ικανοποιούν με το δεύτερο διάνυσμα τις σχέσεις $n_{12}^{11} = n_{12}^{01} = n_{12}^{21} = 2$, $n_{12}^{00} = n_{12}^{22} = n_{12}^{02} = n_{12}^{20} = n_{12}^{10} = n_{12}^{12} = 1$, αυτό είναι το σύνολο S.

Βήμα 4. Από το σύνολο S σχηματίζουμε ομάδες διανυσμάτων που μεταξύ τους ικανοποιούνται οι συνθήκες $n_1^{11} = 2, n_1^{01} = n_1^{10} = n_1^{12} = n_1^{21} = 1, n_1^{00} = n_1^{22} = 2, n_1^{02} = n_1^{20} = 1$. Αν μια ομάδα έχει 3 διανύσματα τότε έχουμε τον PBA(12,4,1).

Αλγόριθμος 12.2. Κατασκευή του PBA(12,3,2)

Βήμα 1. Τα πρώτα δύο διανύσματα είναι, (0 0 0 1 1 1 1 1 1 2 2 2), (0 1 2 0 1 1 1 1 2 0 1 2).

Βήμα 2. Γράφουμε όλα τα διανύσματα που έχουν 0 1 2 στις πρώτες 3 θέσεις, 0 0 1 1 2 2 στις επόμενες 6 θέσεις και 0 1 2 στις τελευταίες 3 θέσεις, αυτό είναι το σύνολο R και έχει $6 \times 90 \times 6 = 3240$ διανύσματα.

Βήμα 3. Από το σύνολο R βρίσκουμε όλα τα διανύσματα που έχουν με το δεύτερο διάνυσμα με το δεύτερο διάνυσμα οι σχέσεις $n_{12}^{11} = n_{12}^{01} = n_{12}^{21} = 2$, $n_{12}^{00} = n_{12}^{22} = n_{12}^{02} = n_{12}^{20} = n_{12}^{10} = n_{12}^{12} = 1$, αυτό είναι το σύνολο S.

Βήμα 4. Από το σύνολο S δημιουργούμε ομάδες διανυσμάτων που σε κάθε ομάδα ικανοποιούνται οι σχέσεις,

$n_1^{11} = 2, n_1^{01} = n_1^{10} = n_1^{12} = n_1^{21} = 1, n_1^{00} = n_1^{22} = 2, n_1^{02} = n_1^{20} = 1$. Αν μια ομάδα έχει 3 διανύσματα, αυτός είναι ο PBA(5,3,2).

Ο αλγόριθμος 12.1 έχει λύσεις όμως ο αλγόριθμος 12.2 δεν έχει λύσεις.

Αλγόριθμος 15.1 Κατασκευή του PBA(15,3,2) και του PBA(15,2,2).

Βήμα 1. Τα πρώτα διανύσματα είναι (0 0 0 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2), (0 0 0 1 2 2 0 1 2 0 0 1 2 2 2).

Βήμα 2. Γράφουμε όλα τα διανύσματα με 0 0 1 1 2 2 στις πρώτες 6 θέσεις, 0 1 2 στις επόμενες 3 θέσεις και 0 0 1 1 2 2 στις τελευταίες θέσεις, αυτό είναι το σύνολο R. Το πλήθος των διανυσμάτων στο R είναι $90\times6\times90=48600$.

Βήμα 3. Από το σύνολο R βρίσκουμε όλα τα διανύσματα που έχουν με το δεύτερο διάνυσμα τις σχέσεις, $n_{12}^{11}=n_{12}^{01}=n_{12}^{21}=1$, $n_{12}^{00}=n_{12}^{22}=n_{12}^{02}=n_{12}^{20}=n_{12}^{10}=n_{12}^{12}=2$. Αυτό είναι το σύνολο S.

Βήμα 4. Από το σύνολο S σχηματίζουμε ομάδες με διανύσματα που μεταξύ τους ικανοποιούνται οι σχέσεις $n_{1}^{02}=n_{1}^{11}=n_{1}^{20}=1$, $n_{1}^{00}=n_{1}^{01}=n_{1}^{10}=n_{1}^{12}=n_{1}^{21}=n_{1}^{22}=2$. Αν υπάρχει ομάδα με 3 διανύσματα, τότε έχουμε τον PBA(15,3,2). Για την κατασκευή του PBA(15,3,1) διαγράφουμε ένα από τα δύο διανύσματα του PBA(15,3,2). Αυτοί οι PBA δίνονται στην υποενότητα 5.13.

Αλγόριθμος 15.2. Κατασκευή του PBA(15,3,3)

Βήμα 1. Τα πρώτα δύο διανύσματα είναι (0 0 0 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2), (0 0 0 1 2 2 0 1 2 0 0 1 2 2 2)

Βήμα 2. Γράφουμε όλα τα διανύσματα που έχουν 0 0 1 1 2 2 στις πρώτες 6 θέσεις, 0 1 2 στις επόμενες 3 θέσεις και 0 0 1 1 2 2 στις τελευταίες 6 θέσεις, αυτό είναι το σύνολο R και έχει $90\times6\times90=48600$ διανύσματα.

Βήμα 3. Από το σύνολο R βρίσκουμε όλα τα διανύσματα που ικανοποιούν με το δεύτερο διάνυσμα τις σχέσεις $n_{12}^{11}=n_{12}^{01}=n_{12}^{21}=1$, $n_{12}^{00}=n_{12}^{22}=n_{12}^{02}=n_{12}^{20}=n_{12}^{10}=n_{12}^{12}=2$, αυτό είναι το σύνολο S.

Βήμα 4. Από το σύνολο S κάνουμε ομάδες διανυσμάτων που σε κάθε ομάδα τα διανύσματα μεταξύ τους έχουν τις συνθήκες $n_1^{11}=1$, $n_1^{01}=n_1^{10}=n_1^{02}=n_1^{11}=n_1^{20}=1$, $n_1^{00}=n_1^{01}=n_1^{10}=n_1^{12}=n_1^{21}=n_1^{22}=2$. Αν υπάρχει ομάδα με 3 διανύσματα τότε αυτός είναι ο PBA(15,3,2).

Βήμα 5. Χρειάζεται να κατασκευάσουμε τον (15,3,3) και για αυτό γράφουμε όλα τα διανύσματα που έχουν 0 0 0 1 2 2 στις πρώτες 6 θέσεις, 0 1 2 στις επόμενες 5 θέσεις και 0 0 1 2 2 2 στις τελευταίες 6 θέσεις. Αυτό είναι το σύνολο T, το οποίο έχει 21600 διανύσματα.

Βήμα 6. Από το σύνολο T βρίσκουμε ένα διάνυσμα που έχει με το δεύτερο διάνυσμα τις σχέσεις $n_2^{11}=1$, $n_2^{01}=n_2^{10}=n_2^{21}=n_2^{12}=1$, $n_2^{00}=n_2^{22}=3$, $n_2^{02}=n_2^{20}=2$ και με τα τρίτο, τέταρτο και πέμπτο διανύσματα ικανοποιούνται οι συνθήκες $n_{12}^{11}=n_{12}^{01}=n_{12}^{21}=1$, $n_{12}^{00}=n_{12}^{22}=n_{12}^{02}=n_{12}^{20}=n_{12}^{10}=n_{12}^{12}=2$. Αν υπάρχει ένα τέτοιο διάνυσμα, τότε έχουμε τον PBA(15,3,3).

Βιβλιογραφία

Agrawal, H. (1966). Some generalizations of distinct representative with applications to statistical designs. *Ann. Math. Statist. 37, 525-528.*

Atkinson, A.C. (1969). The use of residuals as concomitant variable. Biometrika, 56, 33-41.

Bechhofer, R.E. and Tamhane, A.C. (1981). Incomplete block designs for comparing treatments with a control: General Theory. *Technometrics, 23, 45-57.*

Chatzopoulos, St. A., Kolyva-Machera, F., Chatterjee, K., (2011). Optimality results on orthogonal arrays plus p runs for s^m factorial experiments. Metrika, 73, 385-394.

Cheng, C. S. (1980). Optimality of some weighing and 2^n factorial designs. *Ann. Statist.,* 8(2), 436–446.

Cochran W.G. and Cox G.M. (1957). Experimental Design. John Wiley and Sons, Inc.

Cox, D.R. (1952).Some resent work on systematic experimental designs.*J.Roy. Statist. Soc. Ser.B 14 211-229.*

Dey, A. and Mukerjee, R. (1999). Fractional factorial plans. Wiley, New York

Giovagnoli, A., Wynn H.P. (1985). G-majorization with applications to matrix orderings. *Linear algebra and its applicatiuons.,67,111-135.*

Harley, H. O. and Smith, C. A. B. (1948). The construction of Youden squares. *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B 10, 262-263.*

Hedayat, A, S, Sloane N.J.A. and Stufken, J. (1999). Orthogonal arrays: theory and applications. Springer, Berlin Heidelberg New York.

Hedayat, A.S., Jacroux, M., Majundar, D. (1988). Optimal designs for comparing test treatment with controls. *Statistical Science 3, 4, 462-491.*

Kiefer, J. (1958). On the nonrandomized optimality and randomized nonoptimality of symmetrical designs. *Ann. Math. Statist., 29, 675-600.*

Kiefer, J. (1961). Optimum experimental designs V, with applications to systematic and rotating designs. Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. 1, 381-405. Univ.California Press.

Kiefer, J. (1975 a). Construction and optimality of generalized Youden designs. In: J.N. Srivastava, ed., A Survey of Statistical Designs and Linear Models. North-Holland, Amsterdam, North Holland, 333-353.

Kiefer, J.(1975 b). Balanced block designs and generalized Youden designs, I. Construction (Patchwork). *Ann. Statist., 3, No.1,109-118.*

Kunert, J and Martin, R.J. (1987). On the optimality of finite Williams IIa designs. *Ann. Statist., 15, No. 4, 1604-1628.*

Kiefer, J. and Wynn, H.P. (1981). Optimum balanced block and Latin square designs for correlated observations. *Ann. Statist., 9, 737-757.*

Kiefer, J. and Wynn, H. P. (1984). Optimum and minimax exact treatment designs for one-dimensional autoregressive error processes. *Ann. Statist., 12, 431-450.*

Kolyva-Machera, F. (1989a). D-Optimality in 3^k Designs for M=1mod9 observations. J. *Statist. Plann. Inf., 22, 95-103.*

Kolyva-Machera, F. (1989b) Fractional factorial designs and G-optimality, In:Proceedings, forth Prague symposium on asymptotic statistics. Charles University Press, Prague, 349-358.

Kunert, J. (1988). Considerations on optimal design for correlations in the plane. *In: Dodge, Y., Fedorov, V.V., Wynn, H.P. (Eds.), Optimal Design and Analysis of Experiments, North-Holland, Amsterdam, 115-122.*

Kunert, J. and Martin , R.J.(1987a). Some results on the optimality properties of finite Williams designs. *Commun. Statist. Theory Meth., 16(7), 1901-1922*.

Kunert, J. and Martin, R.J. (1987b). On the optimality of finite Williams II(a) designs. *Ann. Statist., 15, No.4, 1604-1628.*

Marshall, A.W. and Olkin, I. (1979). *Inequalities: Theory of majorization and its applications.* Academic Press, New York.

Martin, R. J. (1986). On the design of experiments under spatial correlation. *Biometrika,* 73, 247–277.

Martin, R. J. and Eccleston, J.A. (1991). Optimal incomplete block designs for general dependent structures. *J. Statist. Plann. Inf., 28, 67-81.*

Martin, R. J. and Eccleston, J.A. (1993). Incomplete block designs with special layouts, when observations are dependent. *J. Statist. Plann. Inf., 35, 77-92.*

Martin, R.J. (1986). On the design of experiments under spatial correlation. *Biometrika, 73, 247-277.*

Martin, R.J. (1998). Optimal designs for small-sized blocks under dependence. *Journal of Combinatorics, Information and System Science, 23, 95-104.*

Morgan, J.P. and Parvu V. (2007). Optimal row-column design for three treatments. *J. Statist. Plann. Inf., 137, 1474-1487.*

Morgan, J.P. and Uddin, N. (1991). Two-dimensional designs for correlated errors. *Ann. Statist., 19, 4, 2160-2182.*

Morgan, J.P. and Uddin, N. (2003). Optimal row-column designs for two treatments. *J. Statist. Plann. Inf., 115, 603-622.*

Morgan, J.P., Uddin, N. (2003). Optimal row-column designs for two treatments. *J. Statist. Plann. Inf.,* 115, 603–622.

Mukerjee, R. (1999). On the optimality of orthogonal arrays plus one run plans. *Ann. Statist. 27, 1256-1271.*

Papadakis, J.S. (1937) Méthod statistique pour des expéeriences sur champ. *Bull. Inst. Amél. Plantes à Salonique, no. 23.*

Pukelsheim, F. (1993). *Optimal Designs of Experiments*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Uddin, N. (1997). Row-column designs for comparing two treatments in the presence of correlated errors. *J. Statist. Res.* 31:75–81.

Williams, R.M. (1952). Experimental design for serially correlated observations. *Biometrika 39 151-167.*

Wu, C.F.J. and Hamada, M. (2000). Experiments: planning, analysis, and parameter design optimization, Wiley, New York.