

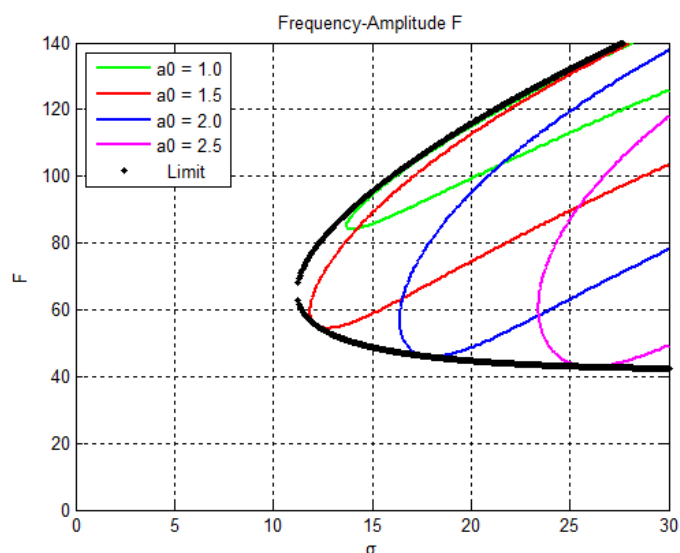


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΕΙΣΜΙΚΟΥ ΜΟΝΩΤΗΡΑ

Εξισώσεις Duffing και Van der Pol



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΒΩΛΟΣ ΛΑΜΠΡΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ ΒΛΑΣΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Στον παππού μου

Βασίλειο Μπίζιο

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τη διπλωματική εργασία στη σχολή των πολιτικών μηχανικών του Ε.Μ.Π. , θα ήθελα να εκφράσω τις εγκάρδιες ευχαριστίες μου στους ανθρώπους που συνέβαλαν με την προσφορά τους στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Βλάση Κουμούση, για το πραγματικό ενδιαφέρον που έδειξε καθώς και για την επικοινωνιακή παρουσία του σε όλα τα στάδια της διπλωματικής εργασίας μέσω των παρατηρήσεων και των διορθώσεων του. Μέσα από τις πολυάριθμες συναντήσεις μας, μου έδωσε πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές που θεωρώ ότι είναι χρήσιμες για τα επόμενα βήματα μου. Ακόμα, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω που με καθοδήγησε σε ένα επιστημονικό χώρο ανάλογο με τα ενδιαφέροντά μου και επιπέδου ανώτερου της προπτυχιακής γνώσης.

Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στη μητέρα μου και στον πατέρα μου τόσο για την ηθική υποστήριξη όσο και για τις συνθήκες που διαμόρφωσαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Περίληψη

Η σεισμική μόνωση αποτελεί μέρος της ευρύτερης επιστημονικής περιοχής του παθητικού ελέγχου της σεισμικής απόκρισης κατασκευών. Μετά την αξιοποίηση της σεισμικής μόνωσης για τις κτιριακές κατασκευές και τις γέφυρες επιχειρήθηκε η εφαρμογή της σε αντικείμενα εσωτερικού χώρου με ανεκτίμητη αξία, όπως τα εκθέματα σε μουσεία. Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται ένας σεισμικός μονωτήρας που σχεδιάστηκε για τον προαναφερθέντα σκοπό και εμφανίζει μη γραμμική συμπεριφορά λόγω των μηχανικών και γεωμετρικών χαρακτηριστικών του. Μορφώνοντας την εξίσωση κίνησης του μονοβάθμιου ταλαντωτή – μονωτήρα για τη μία διεύθυνση κίνησης, παρατηρούμε ότι η μη γραμμικότητα οφείλεται κυρίως στη δυσκαμψία τύπου Duffing και στην απόσβεση τύπου Van der Pol. Προκειμένου να λυθούν αυτά τα μη γραμμικά προβλήματα παρουσιάστηκαν η μέθοδος πολλαπλών χρονικών κλιμάκων και η μέθοδος ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων, που αποτελούν αναλυτικές προσεγγιστικές τεχνικές. Οι τελευταίες χρησιμοποιήθηκαν έτσι, ώστε να αναδειχθούν φαινόμενα των μη γραμμικών συστημάτων που τόσο η γραμμική θεώρηση τα αγνοεί όσο και οι αριθμητικές μέθοδοι τα αποκρύπτουν. Οι δευτερεύοντες συντονισμοί, ως παράδειγμα αυτών των φαινομένων, είναι κρίσιμοι κατά το σχεδιασμό ειδικά στην περίπτωση που συνοδεύονται από «άλματα» στο εύρος απόκρισης του μονωτήρα. Στην διπλωματική εργασία εξετάζονται οι περιοχές συχνοτήτων, όπου πιθανόν να δημιουργηθούν συντονισμοί μέσα από τα διαγράμματα συχνότητας – απόκρισης. Ιδιαίτερη μελέτη έγινε για την επιρροή των μηχανικών χαρακτηριστικών του μονωτήρα στην απόκριση του κατά τους συντονισμούς (κύριο και δευτερεύοντες). Ύστερα από όλα τα παραπάνω καταλήγουμε σε συμπεράσματα χρήσιμα για το σχεδιασμό του μονωτήρα, ώστε να λειτουργεί οικονομικά και με ασφάλεια.

Abstract

The seismic isolation is part of the broader scientific area of passive control of seismic response of structures. After the use of seismic isolation for buildings and bridges, it is applied to protect invaluable objects as museum artifacts. In this diploma thesis a seismic isolator, which was designed for the previously mentioned purpose and has nonlinear behavior due to mechanical and geometrical characteristics, is examined. Formulating the equation of motion for the Single Degree Of Freedom (SDOF) oscillator – isolator, we observe that the non-linearity is mainly due to Duffing's type of stiffness and Van der Pol's type of damping. In order to solve the aforementioned nonlinear problems, the multiple time scales method and the averaging method, which are analytical techniques for approximating solutions, were presented. The latter methods were used in order to highlight the effects of nonlinear systems which were ignored in the linear theory of vibrations and were concealed by the use of numerical methods. An example of these phenomena is the secondary resonances which are critical in design procedure. Their criticality based on existing of "jump phenomena" in amplitude of response of isolator. In this thesis, the region of frequencies where resonances may be developed is examined using the frequency - response curves. The study reveals the influence of the mechanical characteristics of isolator on the response to the resonances (primary and secondary). As a result of all observations, we came to useful conclusions concerning the design of the isolator in order for it to operate both economically and safely.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.	Εισαγωγή	1
1.1.	Γενικά στοιχεία	1
1.2.	Δυναμικό μοντέλο & μοντελοποίηση	2
1.3.	Το μονοβάθμιο σύστημα	3
1.3.1.	Το μοντέλο (εξίσωση κίνησης)	3
1.3.2.	Γραμμική συμπεριφορά	5
1.4.	Μέθοδοι επίλυσης εξίσωσης κίνησης	6
1.4.1.	Εισαγωγικά στοιχεία.....	6
1.4.2.	Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	6
1.4.3.	Αναλυτικές (ακριβείς) λύσεις	9
1.4.4.	Προσεγγιστικές Μέθοδοι	10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.	Μη γραμμική συμπεριφορά μονοβάθμιων συστημάτων	11
2.1.	Μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης	11
2.2.	Εξίσωση Duffing.....	12
2.2.1.	Ιστορικά στοιχεία & Μορφή εξίσωσης	12
2.2.2.	Παράδειγμα μηχανικού συστήματος	13
2.2.3.	Αδιάστατη μορφή	15
2.2.4.	Κατηγορίες προβλημάτων.....	17
2.2.5.	Αριθμητική επίλυση	18

2.3.	Εξίσωση Van der Pol.....	21
2.3.1.	Ιστορικά στοιχεία & Μορφή εξίσωσης	21
2.3.2.	Παράδειγμα μηχανικού συστήματος	22
2.3.3.	Αδιάστατη μορφή	24
2.3.4.	Κατηγορίες προβλημάτων.....	26
2.3.5.	Αριθμητική επίλυση	27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.	Μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης	29
3.1.	Εισαγωγικά	29
3.2.	Στοιχεία Ασυμπτωτικής Ανάλυσης.....	30
3.3.	Θεωρία Διαταραχών	32
3.4.	Άμεσο Ανάπτυγμα (The Straightforward Expansion)	34
3.5.	Μέθοδος Πολλαπλών Κλιμάκων (Multiple Time Scales Method)	39
3.6.	Μέθοδος Ολοκλήρωσης Ευρών & Φάσεων (Averaging Method)	50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.	Σεισμική μόνωση.....	61
4.1.	Εισαγωγή	61
4.1.1.	Συστήματα ελέγχου απόκρισης – Σεισμική μόνωση	61
4.1.2.	Αρχές και απαιτήσεις της σεισμικής μόνωσης	62
4.2.	Εφαρμογές της σεισμικής μόνωσης.....	65
4.2.1.	Χρήσεις της μόνωσης	65
4.2.2.	Είδη συστημάτων σεισμικής μόνωσης.....	69
4.3.	Περιγραφή εξεταζόμενης διάταξης	72
4.3.1.	Κατασκευαστικά Χαρακτηριστικά.....	72
4.3.2.	Δυνάμεις Επαναφοράς	73
4.3.3.	Δυνάμεις Αποσβέσεως	76
4.3.4.	Χαρακτηριστικά Μεγέθη – Λεπτομέρειες.....	77
4.4.	Εξίσωση κίνησης του μονωτήρα	78

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.	Μη γραμμικές εξαναγκασμένες ταλαντώσεις	87
5.1.	Εισαγωγή	87
5.2.	Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης του μονωτήρα	88
5.2.1.	Διατύπωση προβλήματος – Αλγόριθμος	88
5.2.2.	Συμπεριφορά του μονωτήρα	90
5.3.	Επίλυση με μεθόδους διαταραχών.....	93
5.3.1.	Διατύπωση προβλημάτων.....	93
5.3.2.	Εξίσωση Duffing.....	95
5.3.3.	Duffing & Van der Pol	119
5.3.4.	Γενική περίπτωση εξίσωσης.....	141
5.3.5.	Συσχέτιση μεταξύ των προβλημάτων	146

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

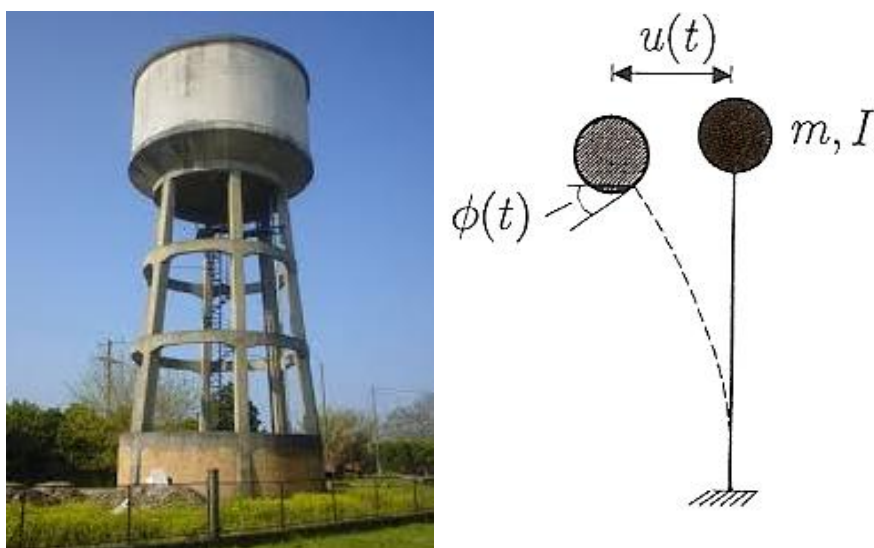
6.	Συμπεράσματα.....	149
6.1.	Ανακεφαλαίωση της εργασίας.....	149
6.2.	Σύγκριση μεθόδων επίλυσης	149
6.3.	Συμπεριφορά του μονωτήρα – Συντονισμοί	150
6.3.1.	Κύριος συντονισμός.....	151
6.3.2.	Δευτερεύοντες Συντονισμοί.....	153
6.4.	Σύγκριση με τα αριθμητικά αποτελέσματα.....	158
6.5.	Προτάσεις για μετέπειτα έρευνα.....	161
	Βιβλιογραφία	163
	Παράρτημα	165

1.1. Γενικά στοιχεία

Οι κατασκευές του πολιτικού μηχανικού εκτός από τα στατικά φορτία καταπονούνται και από δυναμικά φορτία, δηλαδή φορτία των οποίων το μέγεθος, η διεύθυνση ή και η θέση μεταβάλλονται σε συνάρτηση με το χρόνο. Τέτοιου είδους φορτία είναι για παράδειγμα αυτά που οφείλονται στην κίνηση οχημάτων και στις ανεμοπιέσεις. Επίσης, η κίνηση της στήριξης ενός φορέα, ακόμα και στην περίπτωση που δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, παράγει δυναμική καταπόνηση. Η τελευταία περίπτωση παρατηρείται λόγω της σεισμικής κίνησης του εδάφους και αποτελεί βασικό κίνδυνο για τις κατασκευές.

Ο προσδιορισμός της παραμόρφωσης και της έντασης σε μια κατασκευή, όταν αυτή υποβάλλεται σε δυναμική φόρτιση, αποτελεί το αντικείμενο της δυναμικής ανάλυσης των κατασκευών. Βασικό ρόλο στη δυναμική ανάλυση έχει η διατύπωση του δυναμικού προσομοιώματος ή δυναμικού μοντέλου της πραγματικής κατασκευής. Είναι από τις δυσκολότερες φάσεις της δυναμικής ανάλυσης, αφού σε αυτή υπεισέρχεται κριτικά η εμπειρία του μηχανικού, ο οποίος αποφασίζει και για το βαθμό προσέγγισης της συμπεριφοράς της κατασκευής.

Ως παράδειγμα δίνεται ένας υδατόπυργος και το απλοποιημένο δυναμικό προσομοίωμα του (Σχ. 1.1).



Σχ. 1.1 : Υδατόπυργος και το απλοποιημένο του δυναμικό προσομοίωμα

Κατά την κίνηση η μάζα του μετατοπίζεται οριζόντια κατά $u(t)$ και στρέφεται κατά γωνία $\phi(t)$. Τα δύο αυτά γεωμετρικά μεγέθη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Το σύστημα αυτό έχει δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης και μπορούν να διατυπωθούν δύο εξισώσεις κίνησης για τον προσδιορισμό των γεωμετρικών μεγεθών $u(t)$ και $\phi(t)$. Εάν στο διβάθμιο αυτό σύστημα η μάζα m θεωρηθεί συγκεντρωμένη σε ένα σημείο χωρίς στροφική αδράνεια, τότε απλοποιείται σε ένα σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας $u(t)$ (μονοβάθμιο).

1.2. Δυναμικό μοντέλο & μοντελοποίηση

Προκειμένου να μελετηθεί και να σχεδιαστεί μια κατασκευή, όπως ο υδατόπυργος του προηγούμενου παραδείγματος, κομβικό σημείο είναι η δημιουργία κατάλληλου μοντέλου. Η διαδικασία με την οποία επιτυγχάνεται αυτό διέπεται από κάποιες βασικές αρχές που δεν είναι ευδιάκριτες μέσα από το παράδειγμα γι αυτό αποτυπώνονται σε ένα γενικότερο πλαίσιο παρακάτω.

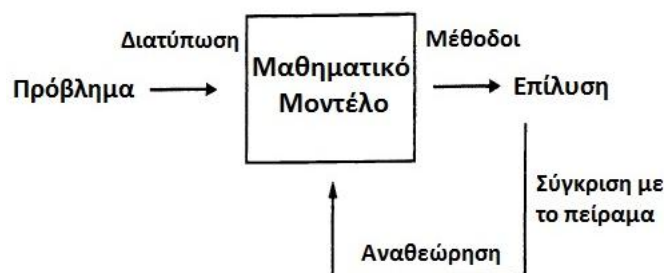
Αρχικά παρουσιάζεται η έννοια του μαθηματικού μοντέλου με απότερο σκοπό την περιγραφή των αρχών της μοντελοποίησης. Οι τελευταίες ακολουθούν πιστά προκειμένου να παράγουμε κατάλληλα αποτελέσματα για τη σχεδίαση των έργων.

Με τον όρο «μαθηματικό μοντέλο» εννοούμε μια εξίσωση, ή ένα σύνολο από εξισώσεις, που περιγράφει κάποιο φυσικό φαινόμενο. Πιο συγκεκριμένα για τη δυναμική ανάλυση, ο όρος «δυναμικό μοντέλο» αναφέρεται στο σύνολο των εξισώσεων κίνησης της κατασκευής, που περιγράφει τη δυναμική απόκριση της. Βασισμένοι στις προηγούμενες έννοιες τώρα μπορεί να δοθεί η έννοια της μοντελοποίησης και τα στάδια (αρχές) που περιλαμβάνει.

Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία με την οποία διατυπώνουμε και αναλύουμε το μοντέλο. Η τελευταία διαδικασία περιλαμβάνει :

- ✓ την εισαγωγή των απαραίτητων και σχετικών ποσοτήτων ή μεταβλητών που εμπλέκονται στο μοντέλο,
- ✓ τη θεώρηση συγκεκριμένων υποθέσεων (παραδοχών) που σχετίζονται με τις παραπάνω μεταβλητές,
- ✓ την επίλυση των εξισώσεων (μοντέλο) με κάποια μέθοδο (υπολογιστική, αναλυτική, προσεγγιστική),
- ✓ τη σύγκριση των λύσεων που προκύπτουν από την προηγούμενη διαδικασία με την πραγματικότητα μέσω πειραμάτων,
- ✓ την ερμηνεία και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων,
- ✓ την αναθεώρηση του μοντέλου μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

Το σχήμα (Σχ. 1.2) απεικονίζει τη διαδικασία μοντελοποίησης.

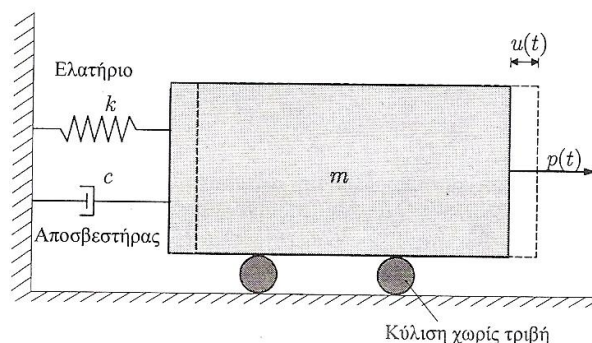


Σχ. 1.2 : Μοντελοποίηση

1.3. Το μονοβάθμιο σύστημα

1.3.1. Το μοντέλο (εξίσωση κίνησης)

Ακολουθώντας τα βήματα μοντελοποίησης παρουσιάζουμε το δυναμικό μοντέλο για ένα μονοβάθμιο σύστημα. Το τελευταίο απεικονίζεται στο (Σχ. 1.3) και αποτελείται από μια μάζα, ένα ελατήριο, και ένα αποσβεστήρα. Αυτά αντιπροσωπεύουν αντιστοίχως το υλικό σώμα, τις ελαστικές δυνάμεις και τις δυνάμεις τριβής (απώλειες ενέργειας) της κατασκευής.



Σχ. 1.3 : Προσομοίωμα μονοβάθμιου συστήματος

➤ Εισαγωγή των απαραίτητων μεταβλητών που εμπλέκονται στο μοντέλο

Εάν παραστήσουμε με $u(t)$ τη μετατόπιση του σώματος τη χρονική στιγμή t από τη θέση ισορροπίας, τότε κατά τη θεωρούμενη χρονική στιγμή ασκούνται πάνω στο σώμα οι ακόλουθες δυνάμεις:

1. Η εξωτερική δύναμη $p(t)$
2. Η ελαστική δύναμη f_s
3. Η δύναμη απόσβεσης f_D
4. Η αδρανειακή δύναμη f_I

➤ Θεώρηση συγκεκριμένων παραδοχών που σχετίζονται με τις μεταβλητές

Η δύναμη f_s του ελατηρίου εξαρτάται από τη μετατόπιση u και εκφράζεται γενικώς με μη γραμμική συνάρτηση $f_s = f_s(u)$. Για περίπτωση γραμμικής συμπεριφοράς της κατασκευής (παραδοχή) η δύναμη f_s είναι ανάλογη της μετατόπισης, δηλαδή υπακούει το Νόμο του Hooke :

$$f_s = ku \quad (1.1)$$

οπου k είναι σταθερά που εκφράζει την ακαμψία ή δυσκαμψία του ελατηρίου. Η δύναμη f_s εκφράζει την ελαστική δύναμη της κατασκευής, αντιτίθεται στην κίνηση και τείνει να επαναφέρει το σώμα στην αρχική του θέση.

Η δύναμη απόσβεσης f_D είναι δύναμη, η οποία αντιτίθεται επίσης στην κίνηση. Η δύναμη αυτή εκφράζει τις απώλειες ενέργειας εξ αιτίας των εσωτερικών ή εξωτερικών τριβών της κατασκευής. Στην περίπτωση που υπάρχει ένας ιξώδης αποσβεστήρας θεωρούμε συνήθως ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη της ταχύτητας κίνησης, δηλαδή :

$$f_D = c\dot{u} \quad (1.2)$$

οπου c κατάλληλη σταθερά της συσκευής απόσβεσης. Η τελευταία παραδοχή ορίζει μια δύναμη απόσβεσης γραμμικής μορφής. Το έργο αυτής μετατρέπεται σε θερμότητα, συνεπώς η δύναμη απόσβεσης δεν είναι συντηρητική δύναμη. Είναι η αιτία η οποία κάνει το εύρος των ταλαντώσεων να φθίνει και επαναφέρει στην κατάσταση ηρεμίας ένα σύστημα που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση.

Η δύναμη f_I είναι δύναμη αδράνειας. Η δύναμη αυτή εξαρτάται από τη μάζα m του συστήματος και από την επιτάχυνση του \ddot{u} . Εκφράζεται από τη σχέση :

$$f_I = m\ddot{u} \quad (1.3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, το επόμενο βήμα της μοντελοποίησης είναι η διατύπωση της εξίσωσης κίνησης (μοντέλο) του σώματος που εξετάζουμε. Για να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιούμε συνήθως την Αρχή του D' Alembert.

Βασική Παραδοχή : Αρχή του D' Alembert

Οι νόμοι της στατικής ισορροπίας μπορούν να εφαρμοστούν σε δυναμικά συστήματα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, εάν στις πραγματικές εξωτερικές δυνάμεις συμπεριληφθούν και οι αδρανειακές.

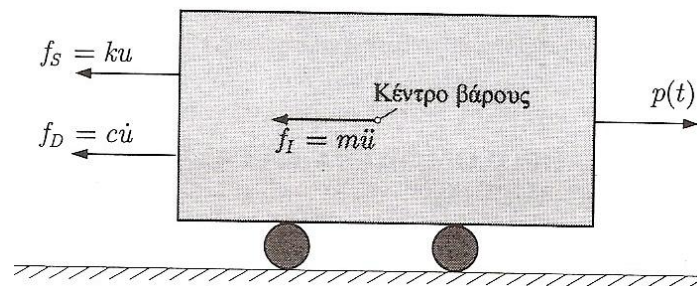
Με αυτόν τον τρόπο (ισορροπία δυνάμεων) προσδιορίζεται η γενική εξίσωση κίνησης ενός ταλαντούμενου μονοβάθμιου συστήματος που ισχύει τόσο για γραμμικές ταλαντώσεις όσο και για μη γραμμικές :

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (1.4)$$

1.3.2. Γραμμική συμπεριφορά

Όταν η εξάρτηση των δυνάμεων αυτών από το αίτιο που τις προκαλεί είναι γραμμική, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις (1.1) , (1.2) και (1.3), το σύστημα ονομάζεται γραμμικό και έχει ως εξίσωση κίνησης (μοντέλο) την παρακάτω σχέση :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1.5)$$



Σχ. 1.4 : Ελεύθερο σώμα με γραμμική συμπεριφορά

Η σχέση (1.5) είναι η εξίσωση κίνησης ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή στη γενική περίπτωση. Προκειμένου να μελετηθεί, διακρίνονται κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις προβλημάτων που προέρχονται από αυτήν. Αυτές οι περιπτώσεις παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πιν. 1	ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ $p(t) = 0$	$m\ddot{u} + ku = 0$ (1.6) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$ (1.7) -κρίσιμη απόσβεση: $c_{cr} = 2m\omega_0$ -υποκρίσιμη απόσβεση: $c < c_{cr}$ -υπερκρίσιμη απόσβεση: $c > c_{cr}$ $\xi = \frac{c}{c_{cr}}$
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΥΠΟ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ $p(t) = p_0 \sin(\Omega t)$	$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin(\Omega t)$ (1.8) $\beta = \frac{\Omega}{\omega_0} \rightarrow 1$ Συντονισμός Δυναμικός Συντελεστής Μεγένθυσης D Αν $\beta = 1 : D \rightarrow \infty$ όταν $t \rightarrow \infty$	$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin(\Omega t)$ (1.9) Δυναμικός Συντελεστής Μεγένθυσης D $D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ για $\beta = \sqrt{1-2\xi^2}$

1.4. Μέθοδοι επίλυσης εξίσωσης κίνησης

1.4.1. Εισαγωγικά στοιχεία

Όπως παρουσιάζεται παραπάνω, ακολουθώντας τα πρώτα βήματα της μοντελοποίησης οδηγούμαστε στη δημιουργία εξισώσεων κίνησης που περιγράφουν τη συμπεριφορά του συστήματος που εξετάζουμε. Επι παραδείγματι, οι σχέσεις (1.6) , (1.7) , (1.8) και (1.9) αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης ενός γραμμικού μονοβάθμιου ταλαντωτή. Οι τελευταίες μαζί με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες (που προέρχονται από τη φυσική του συστήματος) ορίζουν, εν γένει, προβλήματα εύρεσης της λύσης σύνθετων διαφορικών εξισώσεων.

Σε αυτό το σημείο, το επόμενο βήμα της διαδικασίας της μοντελοποίησης είναι :

- Η επίλυση των προβλημάτων (εξισώσεων-μοντέλο) με μαθηματικές μεθόδους.

Οι ακριβείς λύσεις είναι σπάνιες στα προβλήματα που ανακύπτουν στο μηχανικό εξαιτίας της πολυπλοκότητας των θεμάτων με τα οποία ασχολείται. Ακόμα και σε προβλήματα φαινομενικά απλά, όπως η συμπεριφορά ενός μονοβάθμιου συστήματος, ακριβείς λύσεις υπάρχουν μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Οι μη γραμμικότητες του υλικού και της γεωμετρίας εισάγονται στα αναλυτικά μοντέλα των μελετητών και καθιστούν τα προβλήματα πολύπλοκα για την εύρεση ακριβούς λύσης. Αντίθετα, οι προσεγγιστικές λύσεις είναι συνηθισμένες στο χώρο του μηχανικού αφού έχουν εφαρμογή ακόμα και σε σύνθετα μη γραμμικά προβλήματα. Η δυνατότητα εφαρμογής τους σε πολύπλοκα προβλήματα σε συνδυασμό με την ύπαρξη ενός μικρού σφάλματος προσέγγισης, τις καθιστούν ισχυρά εργαλεία της ανάλυσης των κατασκευών. Υπάρχουν κυρίως δύο κατηγορίες προσεγγιστικών μεθόδων, οι αριθμητικές και οι ασυμπτωτικές.

Προτού εφαρμοστούν οι μέθοδοι επίλυσης, δίνουμε στο πρόβλημα μας αδιάστατη μορφή. Παρακάτω αναφέρονται κάποια στοιχεία διαστατικής ανάλυσης, λόγοι που εφαρμόζεται στα προβλήματα μας, καθώς και παραδείγματα εφαρμογής.

1.4.2. Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Όπως διαφαίνεται από την εισαγωγή της εργασίας, το κλειδί για την περιγραφή μιας κατασκευής είναι η μοντελοποίηση. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει την επιλογή ορισμένων παραγόντων που επηρεάζουν το σύστημα, την αγνόηση μερικών άλλων και την προσέγγιση κάποιων τρίτων. Για να επιτευχθεί αυτό το σημαντικό βήμα πρέπει να εκτιμηθεί η τάξη μεγέθους των διαφόρων παραγόντων (ποσοτήτων) του συστήματος. Το τελευταίο επιτυγχάνεται μέσω της σύγκρισης των ποσοτήτων μεταξύ τους καθώς και με κάποια χαρακτηριστικά μεγέθη της κίνησης.

Αυτή η διαδικασία ονομάζεται αδιαστατοποίηση διότι οι μεταβλητές αποκτούν αδιάστατη μορφή. Συνεπώς, πρέπει να εισάγονται αδιάστατες μεταβλητές πριν από την προσπάθεια επίλυσης των εξισώσεων. Για παράδειγμα, εάν μια μετατόπιση είναι ένα εκατοστό (1 cm) είναι μικρή ή μεγάλη; Η ερώτηση αυτή δεν μπορεί να απαντηθεί χωρίς να γνωρίζουμε το πρόβλημα που προσπαθούμε να επιλύσουμε. Η σχετικότητα των μεγεθών που εισάγονται στα προβλήματα μηχανικού είναι ορατή από το παρακάτω παράδειγμα. Οι καθιζήσεις κάτω από ένα θεμέλιο σε σύγκριση με την απόκριση του πλαστικού συστήματος. Αρα, η έκφραση των εξισώσεων κίνησης σε αδιάστατη μορφή έχει σαν αποτέλεσμα την εξαγωγή των σημαντικών αδιάστατων παραμέτρων που περιγράφουν τη συμπεριφορά του συστήματος που εξετάζουμε. Ακολουθούν δύο παραδείγματα που παρουσιάζουν τη διαδικασία της αδιαστατοποίησης.

Παράδειγμα 1 : Ελεύθερη ταλάντωση γραμμικού ταλαντωτή (Σχέση (1.7))

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = 0 \quad (1.10)$$

Ας υποθέσουμε ότι το σώμα αφήνεται ελεύθερο από τη θέση u_0 έτσι ώστε οι αρχικές συνθήκες να είναι :

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (1.11)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η μετατόπιση u είναι η εξαρτημένη μεταβλητή ενώ ο χρόνος t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Τα τελευταία πρέπει να γίνουν αδιάστατα με τη χρήση χαρακτηριστικών μεγεθών (U, T).

Στη γενική περίπτωση που έχουμε ένα χαρακτηριστικό μήκος U της κίνησης και ένα χαρακτηριστικό χρόνο T , θέτουμε $\tilde{u} = \frac{u}{U}$ και $\tilde{t} = \frac{t}{T}$, όπου \tilde{u} και \tilde{t} αδιάστατα μεγέθη. Οι παράγωγοι ως προς t μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d}{d\tilde{t}} \quad (1.12)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{T} \frac{d}{d\tilde{t}} \right) = \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{1}{T} \frac{d}{d\tilde{t}} \right) \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{1}{T^2} \frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \quad (1.13)$$

Υστερα από αντικατάσταση στην (1.10) έχουμε:

$$m \frac{1}{T^2} \frac{d^2 (U\tilde{u})}{d\tilde{t}^2} + c \frac{1}{T} \frac{d(U\tilde{u})}{d\tilde{t}} + k(U\tilde{u}) = 0 \Rightarrow \frac{mU}{T^2} \frac{d^2 \tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \frac{cU}{T} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (kU)\tilde{u} = 0$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(T \frac{c}{m}\right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \left(T^2 \frac{k}{m}\right) \tilde{u} = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(T \frac{c}{m}\right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (T^2 \omega_0^2) \tilde{u} = 0 \quad (1.15)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγω έτσι τα T και U ώστε $T^2 \omega_0^2 = 1$ και $U = u_0$

Συνεπώς η (1.15) παίρνει την μορφή:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + 2\xi \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \tilde{u} = 0 \quad \text{όπου} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (1.16)$$

Τροποποιούμε κατάλληλα και τις αρχικές συνθήκες :

$$\tilde{u}(0) = \frac{u_0}{U} = 1, \quad \dot{\tilde{u}}(0) = \left. \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=0} = 0 \quad (1.17)$$

Παράδειγμα 2 : Εξαναγκασμένη ταλάντωση γραμμικού ταλαντωτή (Σχέση (1.9))

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = p_0 \sin(\Omega t) \quad (1.18)$$

Στη γενική περίπτωση, όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, θεωρούμε τα αδιάστατα μεγέθη :

$$\tilde{u} = \frac{u}{U} \quad \text{και} \quad \tilde{t} = \frac{t}{T} \quad (1.19)$$

Οπου U και T χαρακτηριστικά μεγέθη μήκους και χρόνου αντίστοιχα.

Ισχύουν οι σχέσεις (1.12) και (1.13), συνεπώς η (1.18) παίρνει τη μορφή :

$$\left(m \frac{U}{T^2}\right) \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(c \frac{U}{T}\right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (kU) \tilde{u} = p_0 \sin(\Omega T \tilde{t}) \quad (1.20)$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(T \frac{c}{m}\right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (T^2 \omega_0^2) \tilde{u} = T^2 \frac{p_0}{mU} \sin(\Omega T \tilde{t}) \quad (1.21)$$

Επειδή στη μελέτη των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων μας απασχολεί η συμπεριφορά του σώματος για διάφορες συχνότητες διέγερσης Ω , διατηρούμε τους όρους Ω και ω_0 . Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι ο χαρακτηριστικός χρόνος του προβλημάτος μας είναι $T=1 \text{ sec}$, το οποίο είναι πραγματικό για τα δυναμικά προβλήματα που σχετίζονται με τους σεισμούς.

Η σχέση (1.21) γίνεται :

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + 2\mu \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \omega_0^2\tilde{u} = F \sin(\Omega\tilde{t}) \quad \text{όπου} \quad \mu = \frac{c}{2m} \quad \text{και} \quad F = \frac{P_0}{mU} \quad (1.22)$$

Ορίζουμε τις νέες αρχικές συνθήκες του προβλήματος λόγω των \tilde{u} , \tilde{t} (όπως (1.17)).

Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία της αδιαστατοποίησης οδηγούμαστε σε διαφορικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν τα \tilde{u} και \tilde{t} όπως στα παραπάνω παραδείγματα (Σχέσεις (1.16) και (1.22)). Σε αυτό το σημείο επαναφέρουμε τα σύμβολα u και t στη θέση των \tilde{u} και \tilde{t} αντίστοιχα, προκειμένου οι εξισώσεις να γράφονται απλά.

Συνοψίζουμε τα προηγούμενα μέσω των παρακάτω πινάκων :

ΑΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΕΓΕΘΗ	$\tilde{u} = \frac{u}{U}$ και $\tilde{t} = \frac{t}{T}$ (1.23)
ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	$\frac{d}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d}{d\tilde{t}}$ και $\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{T^2} \frac{d^2}{d\tilde{t}^2}$ (1.24)

Πιν. 2

Τα δύο παραδείγματα που διατυπώθηκαν παραπάνω αντιστοιχούν σε δύο μεθόδους αδιαστατοποίησης. Ανάλογα με τον τύπο ταλάντωσης (ελεύθερη ή εξαναγκασμένη) ακολουθούμε και διαφορετική μέθοδο (παραδείγματα 1 και 2). Παρακάτω παρουσιάζονται συγκεντρωτικά ανάλογα με το πρόβλημα :

ΠΙΝΑΚΑΣ	ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ	ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ T	$T = \frac{1}{\omega_0}$ (1.25)	$T = 1 \text{ sec}$ (1.26)
ΑΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \tilde{u} = 0$ (1.27)	$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \omega_0^2\tilde{u} = F \sin(\Omega\tilde{t})$ (1.28)
ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΗΣ	$\ddot{u} + u = 0$ (1.29)	$\ddot{u} + \omega_0^2 u = F \sin(\Omega t)$ (1.30)

Πιν. 3

1.4.3. Αναλυτικές (ακριβείς) λύσεις

Κλειστούς τύπους λύσεων που προέρχονται από αναλυτικούς τρόπους δεν μπορούμε να έχουμε στα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε. Υπάρχουν κάποιες ειδικές περιπτώσεις όπως οι εξισώσεις (1.29) και (1.30) που επιλύονται αναλυτικά. Οι εξισώσεις κίνησης του μονοβάθμιου γραμμικού ταλαντωτή ακόμα και στην περίπτωση που έχει απόσβεση έχουν αναλυτικό τρόπο προσδιορισμού της συμπεριφοράς τους.

Όσον αφορά στις ελεύθερες ταλαντώσεις, η γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση (που παράγεται από τις παραδοχές που κάνουμε) επιλύεται σύμφωνα με τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που υπάρχει γραμμικός όρος απόσβεσης στο σύστημα, κατά τη φάση της επίλυσης διακρίνουμε τρεις μορφές λύσης (κρίσιμη, υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη) ανάλογα με τη σχέση που έχει η απόσβεση c με την κρίσιμη απόσβεση του συστήματος c_{cr} (Πιν. 1).

Όσον αφορά στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με τυχούσα φόρτιση $p(t)$, η λύση επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του ολοκληρώματος Duhamel και με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Τελικώς ως μετατόπιση για το σύστημα έχουμε :

$$u(t) = \left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + u(0) \cos(\omega_D t) \right] e^{-\xi\omega t} + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (1.31)$$

Ο τρίτος όρος της σχέσης (1.31) είναι το ολοκλήρωμα Duhamel όταν το σύστημα έχει απόσβεση και εκφράζει την επιρροή της εξωτερικής φόρτισης στην κίνηση.

Με τη χρήση όλων μεθόδων που περιγράφονται παραπάνω, οδηγούμαστε σε αποτελέσματα μερικά από τα οποία αποτυπώνονται και στον πίνακα 1.

1.4.4. Προσεγγιστικές Μέθοδοι

Η δύναμη των αναλυτικών τρόπων επίλυσης εξασθενεί λόγω της πολυπλοκότητας των προβλημάτων. Ακόμα και στο γραμμικό ταλαντωτή με απόσβεση και εξωτερικό φορτίο $p(t)$ καλούμαστε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος Duhamel σύμφωνα με τη σχέση (1.31). Η προσέγγιση της λύσης είναι το επόμενο βήμα. Διακρίνουμε πολλές μεθόδους, τεχνικές και θεωρίες που χρησιμοποιούνται προκειμένου να προσεγγιστεί η λύση του προβλημάτος μας. Καθεμιά από τις τελευταίες αντιμετωπίζει από διαφορετική οπτική το πρόβλημα και εκμεταλλεύεται τις υπολογιστικές δυνατότητες του υπολογιστή. Αναφέρουμε ονομαστικά κάποιες :

- Αριθμητική ολοκλήρωση εξισώσεων κίνησης (Newmark)
- Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων (Runge-Kutta)
- Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων
- Μέθοδος συνοριακών στοιχείων
- Θεωρία διαταραχών-Ασυμπτωτική ανάλυση

Μη γραμμική συμπεριφορά μονοβάθμιων συστημάτων

2.1. Μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης

Η ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα, λαμβάνοντας υπόψη και την αρχή του D' Alembert, μας δίνει την εξίσωση κίνησης του σώματος όπως φαίνεται και από τη σχέση (1.4).

Στη γενική περίπτωση οι δυνάμεις f_I, f_D, f_S δεν είναι γραμμικές όπως έγινε η παραδοχή στις σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3). Μπορεί να έχουν τη μορφή :

$$f_I = m(t)\ddot{u} \quad (2.1)$$

$$f_D = f_D(u, \dot{u}, t) \quad (2.2)$$

$$f_S = f_S(u, \dot{u}, t) \quad (2.3)$$

Δηλαδή η μάζα να μεταβάλλεται με το χρόνο και οι $f_D(u, \dot{u}, t)$, $f_S(u, \dot{u}, t)$ να είναι μη γραμμικές συναρτήσεις των u και \dot{u} . Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή :

$$m(t)\ddot{u} + f_D(u, \dot{u}, t) + f_S(u, \dot{u}, t) = p(t) \quad (2.4)$$

Η οποία είναι μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Το σύστημα του οποίου η συμπεριφορά διέπεται από την εξίσωση (2.4), ονομάζεται μη γραμμικό. Η περίπτωση μεταβολής της μάζας δεν είναι συνήθης στα προβλήματα που εξετάζουμε (πχ. σεισμική μόνωση ενός εκθέματος) και συνεπώς στο τμήμα της εργασίας που ακολουθεί θεωρούμε τη μάζα σταθερή. Οσον αφορά στη μορφή των f_D και f_S σε σχέση με τα u , \dot{u} και t , διακρίνουμε παρακάτω κάποιες συγκεκριμένες μορφές και τις εξετάζουμε ξεχωριστά.

Η μη γραμμικότητα διακρίνεται σε δύο είδη, στη γεωμετρική μη γραμμικότητα, η οποία οφείλεται σε μεγάλες παραμορφώσεις, και στη μη γραμμικότητα υλικού, η οποία οφείλεται σε μη γραμμικές καταστατικές σχέσεις.

Προτού διατυπωθούν κάποιες συγκεκριμένες εξισώσεις κίνησης θα πρέπει να διατυπωθούν κάποιοι συμβολισμοί που ακολουθούνται σε όλη την εργασία :

$$x_{ολ} \text{ ή } u_{ολ} : \text{ απόλυτη μετατόπιση } , \quad x \text{ ή } u : \text{ σχετική μετατόπιση} \\ \text{και } \ddot{x}_{ολ} = \ddot{x} + \ddot{x}_g , \quad \ddot{x}_g : \text{ επιτάχυνση βάσης}$$

2.2. Εξίσωση Duffing

2.2.1. Ιστορικά στοιχεία & Μορφή εξίσωσης

Ο Γερμανός μηχανικός Georg Duffing (1861-1944) εργαζόταν ως μηχανολόγος, σχεδιάζοντας μηχανολογικά συστήματα και ευρεσιτεχνίες. Το κίνητρο του για την έρευνα, που αποτυπώνεται στις λίγες επιστημονικές δημοσιεύσεις, προερχόταν από την επαγγελματική εμπειρία και από τις παρατηρήσεις των μηχανικών συστημάτων. Μελετώντας τη συμπεριφορά ταλαντωτών που στο σύστημα τους η δύναμη επαναφοράς είναι μη γραμμική (δεν ισχύει ο Νόμος του Hooke), ο Duffing δημοσίευσε ένα βιβλίο[5] στο οποίο τα συστήματα αυτά περιγραφράφονται κυρίως από μια συγκεκριμένη μορφή μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Η τελευταία μελετήθηκε αναλυτικά και προσεγγιστικά έτσι ώστε τα αποτελέσματα να ελεγχθούν αν συμφωνούν με τα πειραματικά δεδομένα και με τις παρατηρήσεις. Λόγω αυτού του βιβλίου αυτά τα συστήματα αποκαλούνται ταλαντωτές Duffing.

Ο ταλαντωτής Duffing υπακούει στην εξίσωση της παρακάτω μορφής:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t \quad (2.5)$$

Όπου $x = x(t)$ η άγνωστη συνάρτηση που εκφράζει την σχετική μετατόπιση στο χρόνο t και οι ποσότητες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και ω είναι δεδομένες σταθερές του μονοβάθμιου ταλαντωτή. Πιο συγκεκριμένα, για τις σταθερές ισχύουν τα παρακάτω:

α	Εκφράζει την επιρροή του μη γραμμικού όρου στο σύστημα
β	Είναι η γραμμική δυσκαμψία του συστήματος
γ	Είναι το πλάτος της αρμονικής δύναμης που διεγείρει το σύστημα
δ	Ελέγχει τη συμμετοχή της ιξώδους απόσβεσης στο σύστημα
ω	Είναι η συχνότητα της διέγερσης

Η εξίσωση (2.5) είναι μια μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Η μη γραμμικότητα που παρατηρούμε οφείλεται στη δυσκαμψία του συστήματος. Για να παραχθεί η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να ισχύει :

$$f_s = f_s(x, \dot{x}, t) = \beta x + \alpha x^3 \quad (2.6)$$

Το τελευταίο μπορεί να επιτευχθεί είτε προσεγγιστικά είτε ακριβώς μέσα από ένα σύστημα με κατάλληλη γεωμετρία ή/και με μη γραμμικούς καταστατικούς νόμους. Ακολουθεί ένα παράδειγμα ενός μηχανικού συστήματος, στο οποίο (ύστερα από κατάλληλες παραδοχές) η δύναμη επαναφοράς έχει τη μορφή της (2.6) κατά προσέγγιση. Αφού μορφωθεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος αυτού, εξάγεται η απόκριση του με αριθμητικές μεθόδους μέσω της επίλυσης της.

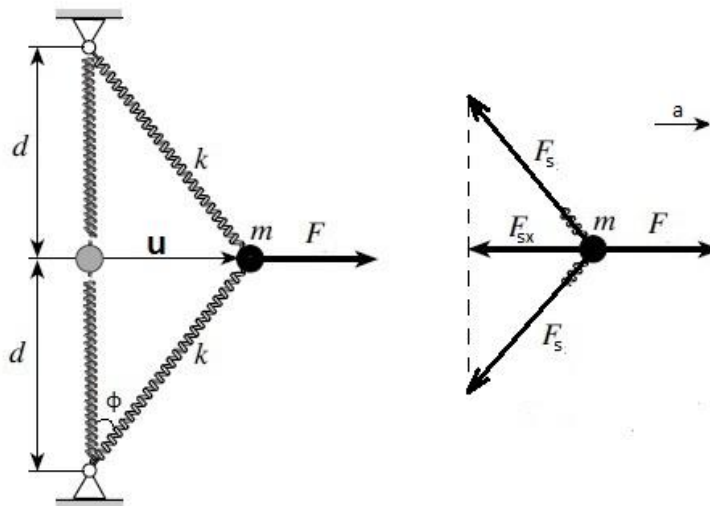
2.2.2. Παράδειγμα μηχανικού συστήματος

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος που μπορεί να προκύψει η εξίσωση Duffing (2.5), δίνεται παρακάτω ένα παράδειγμα ενός απλού μηχανικού (φυσικού) συστήματος. Στο σύστημα αυτό, όπως φαίνεται και από το Σχ. 2.1, η μάζα m συνδέεται με δύο ελατήρια σταθεράς k . Τα ελατήρια συνδέονται στην άλλη πλευρά τους με ακλόνητα σημεία έτσι ώστε οι διευθύνσεις των ελατηρίων να συμπίπτουν. Ακολουθεί πίνακας που δίνει συγκεντρωμένα τα χαρακτηριστικά του ταλαντωτή.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	
d	Μήκος ελατηρίων σε θέση ισορροπίας
d_0	Φυσικό μήκος ελατηρίου με $d_0 < d$
k	Σταθερά των ελατηρίων (Hooke)

Πιν. 4

Ασκούμε εξωτερική δύναμη $F = F(t)$ και το σώμα μετατοπίζεται κατά $u = u(t)$ από την αρχική θέση ισορροπίας του. Σε αυτή την νέα θέση επενεργούν πάνω του οι δυνάμεις επαναφοράς των ελατηρίων (F_s) και η εξωτερική δύναμη (F).



Σχ. 2.1 : Προσομοίωμα παραδείγματος & Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

Μοντέλο

Σύμφωνα με τον δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ (2.7)

Εφαρμόζουμε τον Νόμο για τη διεύθυνση x (Σχ. 2.1):

$$\Sigma F_x = F - 2F_{sx} \quad \text{και} \quad ma_x = m \frac{d^2 u}{dt^2} = m\ddot{u} \quad (2.8)$$

Όπου F_{sx} η προβολή της F_s πάνω στην διεύθυνση x .

Το μήκος ℓ του ελατηρίου στη νέα θέση είναι : $\ell = \sqrt{u^2 + d^2}$ (2.9)

Συνεπώς, η δύναμη επαναφοράς F_s του ενός ελατηρίου (από το Νόμο του Hooke) είναι : $F_s = k \cdot \Delta\ell$ με $\Delta\ell = \ell - d_0$ δηλαδή

$$F_s = k(\ell - d_0) \quad (2.10)$$

Επίσης, από τη γεωμετρία του προβλήματος (Σχ. 2.1) έχουμε :

$$\sin \phi = \frac{u}{\ell} = \frac{F_{sx}}{F_s} \Rightarrow F_{sx} = F_s \frac{u}{\ell} = k(\ell - d_0) \frac{u}{\ell} = ku \left(1 - \frac{d_0}{\ell}\right)$$

$$F_{sx} = ku \left(1 - \frac{d_0}{\sqrt{u^2 + d^2}}\right) \quad (2.11)$$

Η δύναμη επαναφοράς του συστήματος εκφράζεται με τη βοήθεια της σχέσης (2.11)

$$f_s = 2F_{sx} = 2ku \left(1 - \frac{d_0}{\sqrt{u^2 + d^2}}\right) \quad (2.12)$$

Η μορφή της τελευταίας μπορεί να μην είναι γραμμική, αλλά δεν έχει και την επιδιωκόμενη μορφή όπως στη σχέση (2.6). Στο σημείο αυτό, χρησιμοποιούμε τεχνικές κατάλληλες ώστε να βρούμε ένα προσεγγιστικό τύπο για την (2.12) που να οδηγήσει σε εξίσωση Duffing.

Σύμφωνα με τις σειρές Maclaurin [Παράρτημα] έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (2.13)$$

$$\text{Για } x = \frac{u}{d} \ll 1 \text{ έχουμε } \frac{d}{\sqrt{u^2 + d^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{d_0}{\sqrt{u^2 + d^2}} \approx \frac{d_0}{d} - \frac{d_0}{2d^3}u^2 \quad (2.14)$$

Από τις σχέσεις (2.11) και (2.14) βρίσκουμε την δύναμη F_{sx} προσεγγιστικά :

$$F_{sx} = k \left(1 - \frac{d_0}{d}\right)u + k \frac{d_0}{2d^3}u^3 \quad (2.15)$$

Η εξίσωση (2.15) είναι μια καλή προσέγγιση της εξίσωσης (2.11) για $u < 0,4d$.

Από τον δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα όπως εκφράστηκε και στη σχέση (2.8):

$$\Sigma F_x = F - 2F_{sx} = F - 2k \left(1 - \frac{d_0}{d}\right)u - k \frac{d_0}{d^3}u^3 = ma_x = m\ddot{u}$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης γράφεται προσεγγιστικά:

$$m\ddot{u} + k_1 u + k_2 u^3 = F(t) \quad (2.16)$$

με $k_1 = 2k \left(1 - \frac{d_0}{d}\right)$ και $k_2 = k \frac{d_0}{d^3}$ και αρχικές συνθήκες $u(0) = \dot{u}(0) = 0$

Συνεπώς, η εξίσωση Duffing (2.16) περιγράφει μια εξαναγκασμένη ταλάντωση που στην αρχή βρισκόταν ακίνητο στη θέση ισορροπίας.

Στην περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης ισχύει ότι $F(t) = 0$ οπότε η εξίσωση κίνησης (2.16) παίρνει την μορφή:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k_1 u + k_2 u^3 = 0 \quad (2.17)$$

Σε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να θεωρήσουμε (στη γενικότερη περίπτωση) ως αρχικές συνθήκες $u(t=0) = u_0$ και $\dot{u}(t=0) = v_0$.

Τόσο στην περίπτωση ελεύθερης ταλάντωσης όσο και στην περίπτωση εξαναγκασμένης κίνησης καλούμαστε να επιλύσουμε μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής της (2.16) με γνωστές αρχικές συνθήκες. Προτού κατηγοριοποιηθούν τα προβλήματα που σχετίζονται με την εξίσωση Duffing οφείλουμε να δώσουμε αδιάστατη μορφή σε αυτά.

2.2.3. Αδιάστατη μορφή

Ακολουθώντας την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην εισαγωγή (Κεφ. 1.4.2) προσδιορίζουμε την αδιάστατη μορφή των εξισώσεων Duffing.

Πρόβλημα 1: Ελεύθερη ταλάντωση

Εξίσωση	$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + k_1 u + k_2 u^3 = 0 \quad (2.18)$
Αρχικές Συνθήκες	$u(t=0) = u_0 \quad (2.19)$ και $\dot{u}(t=0) = v_0 \quad (2.20)$

Πιν. 5

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.18) τις σχέσεις (1.23) και εκτελούμε τις πράξεις, λαμβάνοντας υπόψη την αλλαγή μεταβλητών σύμφωνα με τις σχέσεις (1.24) :

$$m \frac{1}{T^2} \frac{d^2 (U\tilde{u})}{d\tilde{t}^2} + c \frac{1}{T} \frac{d(U\tilde{u})}{d\tilde{t}} + k_1 (U\tilde{u}) + k_2 (U\tilde{u})^3 = 0$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(\frac{Tc}{m}\right)\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \left(\frac{T^2k_1}{m}\right)\tilde{u} + \left(\frac{T^2k_2U^2}{m}\right)\tilde{u}^3 = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(T\omega_0^2\frac{c}{k_1}\right)\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (T^2\omega_0^2)\tilde{u} + \left(T^2\omega_0^2\frac{k_2}{k_1}U^2\right)\tilde{u}^3 = 0 \quad (2.22)$$

Για την περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης ισχύει η σχέση (1.25) συνεπώς :

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + 2\varepsilon\mu\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \tilde{u} + \varepsilon\tilde{u}^3 = 0 \quad (2.23)$$

$$\text{Με } \varepsilon = \frac{k_2}{k_1}U^2 \text{ και } 2\varepsilon\mu = \omega_0\frac{c}{k_1} \Rightarrow \mu = \frac{c}{2m\omega_0}\frac{k_1}{k_2}\frac{1}{U^2} = \frac{c}{2\varepsilon m\omega_0}$$

Τροποποιούμε τις αρχικές συνθήκες (2.19) και (2.20) λόγω των νέων μεταβλητών \tilde{u}, \tilde{t} σύμφωνα με τις σχέσεις (1.23) :

$$\tilde{u}(\tilde{t} = 0) = \frac{u(t=0)}{U} = \frac{u_0}{U} \quad (2.24)$$

$$\dot{\tilde{u}} = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}}\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{d(U\tilde{u})}{dt}\frac{T}{U} = \frac{du}{dt}\frac{T}{U} \Rightarrow \dot{\tilde{u}}(\tilde{t} = 0) = \frac{T}{U}\dot{u}(t=0) = \frac{Tv_0}{U} \quad (2.25)$$

Συνήθως στα προβλήματα επιλέγουμε $U = u_0$. Άρα οι αρχικές συνθήκες είναι :

$$\tilde{u}(\tilde{t} = 0) = 1 \text{ και } \dot{\tilde{u}}(\tilde{t} = 0) = \frac{v_0}{\omega_0 u_0} \quad (2.26)$$

Πρόβλημα 2: Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Εξίσωση	$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + k_1u + k_2u^3 = P\cos(\Omega t) \quad (2.27)$
Αρχικές Συνθήκες	$u(t=0) = u_0 \quad (2.28) \text{ και } \dot{u}(t=0) = v_0 \quad (2.29)$

Πιν. 6

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.27) τις σχέσεις (1.23) και εκτελούμε τις πράξεις, λαμβάνοντας υπόψη την αλλαγή μεταβλητών σύμφωνα με τις σχέσεις (1.24) :

$$m\frac{1}{T^2}\frac{d^2(U\tilde{u})}{d\tilde{t}^2} + c\frac{1}{T}\frac{d(U\tilde{u})}{d\tilde{t}} + k_1(U\tilde{u}) + k_2(U\tilde{u})^3 = P\cos(\Omega T\tilde{t})$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(\frac{Tc}{m}\right)\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \left(\frac{T^2k_1}{m}\right)\tilde{u} + \left(\frac{T^2k_2U^2}{m}\right)\tilde{u}^3 = \frac{T^2P}{mU}\cos(\Omega T\tilde{t}) \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(T\omega_0^2 \frac{c}{k_1}\right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (T^2\omega_0^2)\tilde{u} + \left(T^2\omega_0^2 \frac{k_2}{k_1} U^2\right)\tilde{u}^3 = \frac{T^2 P}{mU} \cos(\Omega T\tilde{t}) \quad (2.31)$$

Για την περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ισχύει η σχέση (1.26) συνεπώς :

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + 2\varepsilon\mu \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \omega_0^2\tilde{u} + \varepsilon\tilde{u}^3 = F \cos(\Omega\tilde{t}) \quad (2.32)$$

όπου $\varepsilon = \omega_0^2 \frac{k_2}{k_1} U^2$ και $2\varepsilon\mu = \omega_0^2 \frac{c}{k_1} \Rightarrow \mu = \frac{c}{2\varepsilon m} = \frac{c}{2k_2 U^2}$ και $F = \frac{P}{mU}$

Τροποποιούμε τις αρχικές συνθήκες (2.28) και (2.29) λόγω των νέων μεταβλητών \tilde{u}, \tilde{t} σύμφωνα με τις σχέσεις (1.23). Όμοια με τις σχέσεις (2.24) και (2.25) έχουμε :

$$\tilde{u}(\tilde{t}=0) = \frac{u_0}{U} \quad (2.33) \quad \dot{\tilde{u}}(\tilde{t}=0) = \frac{Tv_0}{U} = \frac{v_0}{U} \quad (2.34)$$

2.2.4. Κατηγορίες προβλημάτων

Με αυτήν τη λογική διατυπώνονται τα εξής προβλήματα που σχετίζονται με την εξίσωση Duffing, παραλείποντας τους συμβολισμούς των αδιάστατων μεγεθών.

	Χωρίς ιξώδη απόσβεση	Με ιξώδη απόσβεση
Ελεύθερη ταλάντωση	$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.35)$	$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\mu \frac{du}{dt} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.36)$
Εξαναγκασμένη ταλάντωση (από αρμονικό φορτίο)	$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = F \cos(\Omega t) \quad (2.37)$	$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\mu \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = F \cos(\Omega t) \quad (2.38)$

Γενική εξίσωση εξαναγκασμένης ταλάντωσης για τυχούσα φόρτιση $P(t)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\mu \frac{du}{dt} + u + \varepsilon u^3 = P(t) \quad (2.39)$$

Πιν. 7

Προσοχή: Στις προηγούμενες σχέσεις τα ε, μ εξαρτώνται από τον τρόπο που επιλέγουμε να δώσουμε αδιάστατη μορφή στις εξισώσεις.

Οι αρχικές συνθήκες σχετίζονται με το εκάστοτε πρόβλημα. Γενικά όμως :

$$u(t=0) = \frac{u_0}{U} \quad (2.40)$$

$$\dot{u}(t=0) = \frac{Tv_0}{U} \quad (2.41)$$

2.2.5. Αριθμητική επίλυση

Αφου διατυπώσαμε τα διάφορα προβλήματα που μπορούμε να συναντήσουμε μελετώντας τον ταλαντωτή Duffing, θα λύσουμε τις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αριθμητικά έτσι ώστε να έχουμε μια εικόνα της συμπεριφοράς του ταλαντωτή. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των Runge-Kutta 4^{ης} τάξης προκειμένου να λύσουμε προσεγγιστικά τις διαφορικές εξισώσεις (2.36).

- Ελεύθερη ταλάντωση :

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\mu\dot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.42)$$

Για να λύσουμε την (2.42) πρέπει να μετασχηματιστεί, θέτουμε $\dot{u} = v$ (2.43)

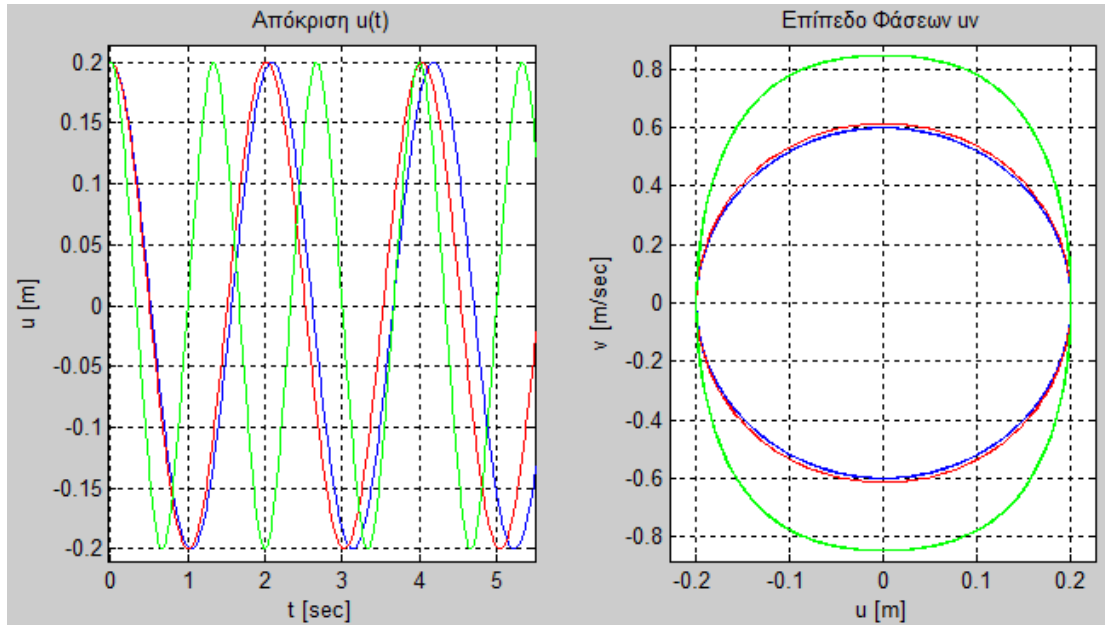
$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -2\varepsilon\mu v - u - \varepsilon u^3 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Τώρα μπορούμε να επιλύσουμε το τελευταίο σύστημα διαφορικών εξισώσεων και να προσδιορίσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις $u(t), v(t)$. Η $u(t)$ μας δίνει τη μετατόπιση ενώ η $v(t)$ τη ταχύτητα του σώματος που εξετάζουμε. Παρουσιάζουμε παρακάτω τα αποτελέσματα κάποιων χαρακτηριστικών προβλημάτων μέσω των γραφικών παραστάσεων «απόκριση» $u(t)$ και «επίπεδο φάσεων» $(u(t), v(t))$.

Επίπεδο Φάσεων uv

Η βασική ιδέα είναι ότι σε κάθε χρονική στιγμή η λύση της (2.44) συμπίπτει γεωμετρικά με κάποιο σημείο ενός επιπέδου. Επομένως, η απόκριση του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως κίνηση σημείου πάνω στο λεγόμενο επίπεδο φάσεων uv. Η καμπύλη που διαγράφεται κατά την κίνηση αυτή, για δεδομένες αρχικές συνθήκες, ονομάζεται τροχιά ή χαρακτηριστική καμπύλη. Με την παραπάνω συσχέτιση πετυχαίνεται μια πλήρης αντιστοιχία μεταξύ γεωμετρίας των τροχιών και της απόκρισης του εξεταζόμενου συστήματος.

Αρχικά θα εξετάσουμε την επίδραση του ε στην απόκριση. Με την αδιάστατη μορφή που δώσαμε στο πρόβλημα μας ο συντελεστής ε περιγράφει το μέγεθος της επιρροής των μη γραμμικών όρων στη κίνηση του σώματος μας. Για $\varepsilon = 0$ έχουμε το γραμμικό ταλαντωτή που είδαμε στην εισαγωγή. Καθώς αυξάνεται το ε , η απόκριση απομακρύνεται από τη λύση του γραμμικού ταλαντωτή. Η περίοδος της κίνησης εξαρτάται από το ε . Όλα τα παραπάνω είναι ορατά στο Σχ. 2.2 που ακολουθεί μέσα από την απόκριση $u(t)$ και την τροχιά πάνω στο επίπεδο φάσεων. Επιλέγονται τρία χαρακτηριστικά προβλήματα $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 2$ και $\mu = 0$.



Χρώμα	Περίπτωση	Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Μπλέ	$\varepsilon = 0, \mu = 0$	Αρχικές Συνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Κόκκινο	$\varepsilon = 0.1, \mu = 0$	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$
Πράσινο	$\varepsilon = 2, \mu = 0$	Αδιαστατοποίηση	$U = 0.2, T = 1/3$

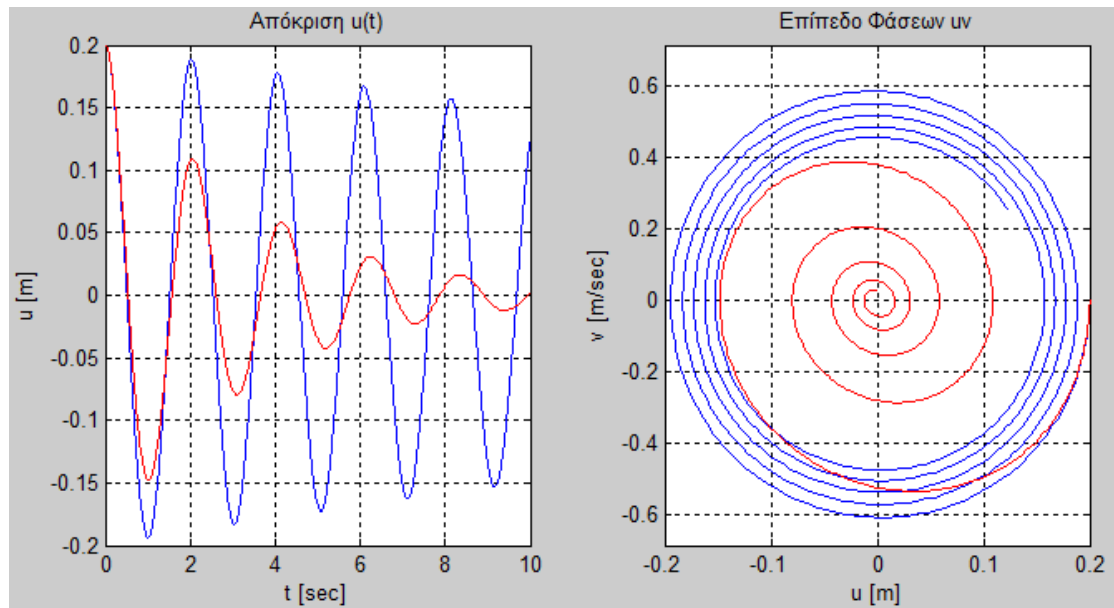
Σχ. 2.2 : Παράδειγμα 1 Duffing – Επιρροή του « ε »

Για την περίπτωση $\varepsilon = 0$ που αντιστοιχεί στην απόκριση ενός αρμονικού ταλαντωτή περιμένουμε να σχηματίζεται έλλειψη στο επίπεδο φάσεων uv αφού :

$$u = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.45) \quad \text{και} \quad v = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.46)$$

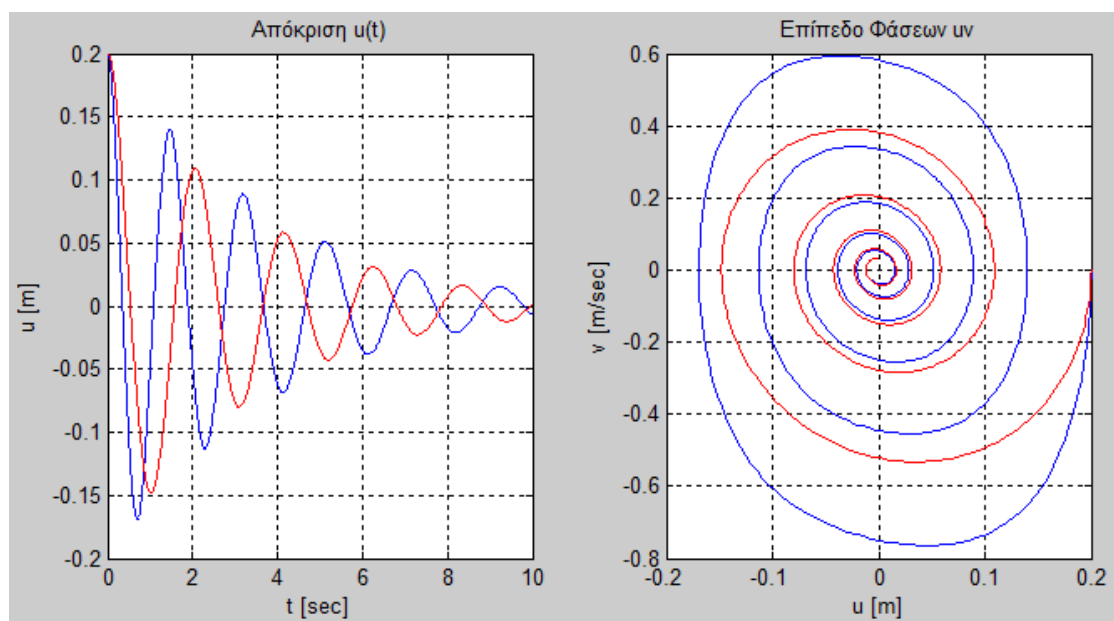
$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega_0^2} = 1 \quad (2.47)$$

Αφου είδαμε την επίδραση του ε στην κίνηση του σώματος, θα παρουσιάσουμε παρακάτω και την επίδραση του μ . Αρχικά μεταβάλλουμε μόνο το « μ » και παρατηρούμε τη συμπεριφορά στο Σχ. 2.3. Ύστερα βλέπουμε ότι ο όρος της απόσβεσης εξαρτάται από το « $2\varepsilon\mu$ » σύμφωνα με τη σχέση (2.36), οπότε απεικονίζουμε στο (Σχ. 2.4) και τις λύσεις της ελεύθερης ταλάντωσης με σταθερό τον όρο « $2\varepsilon\mu$ ». Στην τελευταία περίπτωση μεταβάλλουμε τα ε, μ κατάλληλα (σταθερό γινόμενο) ώστε να δούμε και την επίδραση της μη γραμμικότητας ε στο πρόβλημα.



Χρώμα	Περίπτωση	Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Μπλέ	$\varepsilon = 0.1, \mu = 0.1$	Αρχικές Συνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Κόκκινο	$\varepsilon = 0.1, \mu = 1.0$	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$
		Αδιαστατοποίηση	$U = 0.2, T = 1/3$

Σχ. 2.3 : Παράδειγμα 2 Duffing – Επιρροή του « μ »



Χρώμα	Περίπτωση	Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Μπλέ	$\varepsilon = 2, \mu = 0.05$	Αρχικές Συνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Κόκκινο	$\varepsilon = 0.1, \mu = 1.0$	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$
	$2\varepsilon\mu = 0.2$	Αδιαστατοποίηση	$U = 0.2, T = 1/3$

Σχ. 2.4 : Παράδειγμα 3 Duffing – Σταθερό το « $\varepsilon\mu$ »

2.3. Εξίσωση Van der Pol

2.3.1. Ιστορικά στοιχεία & Μορφή εξίσωσης

Ο Ολλανδός ηλεκτρολόγος μηχανικός Balthasar van der Pol (1889-1959), μέσα από τη μελέτη μη γραμμικών ηλεκτρικών κυκλωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν στα πρώτα ραδιόφωνα, περιέγραψε συστήματα που επενεργούν σε αυτά δυνάμεις με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Οι ταλαντωτές αυτής της μορφής, που υπάρχουν και σε μηχανικά συστήματα, δέχονται μια δύναμη απόσβεσης μη γραμμική ως προς τη ταχύτητα (δεν έχουν την απλή μορφή της ιξώδους απόσβεσης) ενώ η δύναμη επαναφοράς είναι γραμμική ως προς τη μετατόπιση (ισχύει ο Νόμος του Hooke). Αυτό το σύστημα που, όπως θα δούμε, ανήκει στην κατηγορία των αυτό-διεγειρούμενων ταλαντωτών έπαιξε βασικό ρόλο στην ανάπτυξη της μη γραμμικής δυναμικής θεωρίας. Λόγω της συμβολής του Van der Pol, οι ταλαντωτές που έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά φέρουν το όνομα του.

Ο ταλαντωτής Van der Pol υπακούει στην εξίσωση της παρακάτω μορφής:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (2.48)$$

Όπου $x = x(t)$ η άγνωστη συνάρτηση που εκφράζει την σχετική μετατόπιση στο χρόνο t και η θετική ποσότητα μ εκφράζει την επιρροή του μη γραμμικού όρου της απόσβεσης στην εξίσωση κίνησης του μονοβάθμιου ταλαντωτή.

Η εξίσωση (2.48) είναι μια μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Η μη γραμμικότητα που παρατηρούμε οφείλεται στην απόσβεση του συστήματος. Για να παραχθεί η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να ισχύει :

$$f_D = f_D(x, \dot{x}, t) = \mu(x^2 - 1)\dot{x} \quad (2.49)$$

Το τελευταίο μπορεί να επιτευχθεί είτε προσεγγιστικά είτε ακριβώς μέσα από ένα σύστημα με κατάλληλη γεωμετρία ή/και με μη γραμμικούς καταστατικούς νόμους. Ο όρος (2.49) ενεργεί σαν συνηθισμένη θετική απόσβεση για $|x| > 1$ αλλά σαν αρνητική απόσβεση για $|x| < 1$. Με άλλα λόγια, προκαλεί στις ταλαντώσεις μεγάλου εύρους απομείωση του πλάτους (δαπάνη ενέργειας) ενώ στις ταλαντώσεις με μικρό εύρος τις ενισχύει (εισφορά ενέργειας).

Το σύστημα σταδιακά οδηγείται σε μια αυτό-συντηρούμενη ταλάντωση, όπου η ενέργεια που καταναλώνεται στη διάρκεια ενός κύκλου εξισορροπεί την ενέργεια που διοχετεύεται σε αυτό. Αυτό το σημείο αποκαλείται «οριακός κύκλος». Κατά την απεικόνιση στο επίπεδο φάσης, παρατηρούμε μια κλειστή τροχιά που αντιστοιχεί σε μια περιοδική λύση.

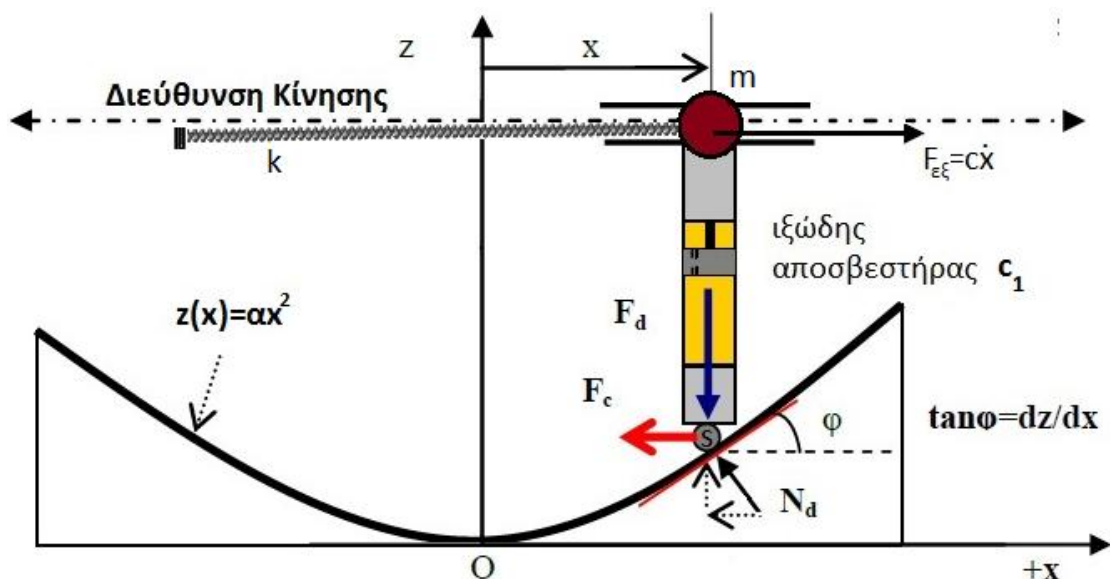
Ακολουθεί ένα παράδειγμα μηχανικού συστήματος στο οποίο η εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή της (2.48) ύστερα από κατάλληλες παραδοχές και θεωρήσεις. Αφού μορφωθεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος αυτού, εξάγεται η απόκριση του με αριθμητικές μεθόδους έτσι ώστε να αναδειχθούν τα φαινόμενα αυτά των μη γραμμικών ταλαντώσεων που συμφωνούν με τα πειραματικά δεδομένα και με τις παρατηρήσεις.

2.3.2. Παράδειγμα μηχανικού συστήματος

Μπορεί η εξίσωση Van der Pol (2.48) να προέκυψε αρχικά από την παρατήρηση ηλεκτρικών κυκλωμάτων, χρειάζεται όμως να διατυπωθεί και ένα παράδειγμα ενός απλού μηχανικού συστήματος ώστε να γίνει κατανοητός ο τρόπος που μορφώνεται. Στο σύστημα αυτό, όπως φαίνεται και από το Σχ. 2.5, η μάζα m συνδέεται με ένα ελατήριο σταθεράς k κατά τη διεύθυνση της κίνησης. Η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι τέτοια ώστε για $x=0$ να μην ασκείται δύναμη επαναφοράς στη μάζα. Κάθετα στη διεύθυνση της κίνησης τοποθετούμε ιξώδη αποσβεστήρα c_1 έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια μη γραμμική δύναμη απόσβεσης στο σύστημα. Η τελευταία προκύπτει λόγω της κύλισης του σφαιροτριβέα s επι της καμπύλης $z(x) = \alpha x^2$. Στο σχήμα Σχ. 2.5 εμφανίζονται όλα τα ανωτέρω. Ακολουθεί πίνακας που δίνει συγκεντρωμένα τα χαρακτηριστικά του ταλαντωτή.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	
k	Σταθερά του ελατηρίου (Hooke)
c_1	Ιξώδης απόσβεση κάθετα σε κίνηση
$z(x)$	Καμπύλη κύλισης του σφαιροτριβέα

Πιν. 8



Σχ. 2.5 : Προσομοίωμα παραδείγματος

Ασκούμε συνεχώς εξωτερική δύναμη $F_{εξ} = F(t) = c\dot{x}$ και το σώμα μετατοπίζεται κατά $x = x(t)$ από την αρχική θέση ισορροπίας του. Σε αυτή τη νέα θέση επενεργούν πάνω του οι δυνάμεις επαναφοράς του ελατηρίου (F_s), η εξωτερική δύναμη ($F_{εξ}$) και η δύναμη απόσβεσης (F_c)

Μοντέλο

Σύμφωνα με τον δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ (2.50)

Εφαρμόζουμε τον Νόμο για τη διεύθυνση x (Σχ. 2.1):

$$\Sigma F_x = F_{εξ} - F_s - F_c \quad \text{και} \quad ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \quad (2.51)$$

Η δύναμη απόσβεσης F_c προκαλείται λόγω της δύναμης F_d και της επιφάνειας z .

Ο αποσβεστήρας c_1 εισάγει στο σύστημα τη δύναμη F_d για την οποία ισχύει :

$$F_d = c_1 \frac{d}{dt}(z(x)) = c_1 \cdot \frac{d}{dx}(z(x)) \cdot \frac{dx}{dt} = c_1 \cdot z' \cdot \dot{x} \Rightarrow F_d = c_1 \cdot 2\alpha x \cdot \dot{x} \quad (2.52)$$

Η σχέση που συνδέει το F_d με το F_c προκύπτει από δυναμοτρίγωνο (Σχ. 2.5) :

$$\frac{F_c}{F_d} = \tan \phi = z' \Rightarrow F_c = z' \cdot F_d = 2\alpha x \cdot (c_1 \cdot 2\alpha x \cdot \dot{x}) \Rightarrow F_c = 4c_1\alpha^2 \cdot x^2 \cdot \dot{x} \quad (2.53)$$

Οι υπόλοιπες δυνάμεις προσδιορίζονται εύκολα. Η δύναμη επαναφοράς F_s του ελατηρίου (από το Νόμο του Hooke) είναι :

$$F_s = kx \quad (2.54)$$

Η εξωτερική δύναμη $F_{εξ} = c \cdot \dot{x}$ θεωρούμε ότι προσφέρει ενέργεια στο σύστημα έτσι ώστε να σχηματιστεί η κατάλληλη εξίσωση van der Pol (2.48) που παρουσιάζει «οριακό κύκλο» όπως αναφέραμε παραπάνω. Από τον δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα όπως εκφράστηκε και στη σχέση (2.51):

$$\Sigma F_x = F_{εξ} - F_s - F_c = c \cdot \dot{x} - kx - 4c_1\alpha^2 \cdot x^2 \cdot \dot{x} = ma_x = m\ddot{x}$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης γράφεται :

$$m\ddot{x} + (c_2x^2 - c) \cdot \dot{x} + kx = 0 \quad (2.55)$$

με $c_2 = 4c_1\alpha^2$ και αρχικές συνθήκες $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Συνεπώς, η εξίσωση Van der Pol (2.55) περιγράφει μια εξαναγκασμένη ταλάντωση που στην αρχή βρισκόταν ακίνητο στη θέση ισορροπίας. Χρησιμοποιήσαμε το εξωτερικό φορτίο $F_{εξ}$ προκειμένου να προσφέρουμε στο σύστημα ενέργεια. Αν θεωρήσουμε ότι η τελευταία είναι εσωτερικό χαρακτηριστικό του συστήματος τότε διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις εξισώσεων κίνησης με γενικό τύπο :

$$m\ddot{x} + (c_2x^2 - c) \cdot \dot{x} + kx = F(t) \quad (2.56)$$

με $F(t)$ κάποιο εξωτερικό φορτίο του συστήματος που είναι διαφορετικό του $F_{εξ}$.

1. Στην περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης ισχύει ότι $F(t) = 0$ οπότε η εξίσωση κίνησης (2.56) παίρνει την μορφή:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (c_2x^2 - c) \cdot \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.57)$$

2. Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ισχύει ότι $F(t) \neq 0$ οπότε η εξίσωση κίνησης (2.56) παίρνει την μορφή:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (c_2x^2 - c) \cdot \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (2.58)$$

Σε αυτά τα προβλήματα μπορούμε να θεωρήσουμε (στη γενικότερη περίπτωση) ως αρχικές συνθήκες $x(t=0) = x_0$ και $\dot{x}(t=0) = v_0$.

Τόσο στην περίπτωση ελεύθερης ταλάντωσης όσο και στην περίπτωση εξαναγκασμένης κίνησης καλούμαστε να επιλύσουμε μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής της (2.56) με γνωστές αρχικές συνθήκες. Προτού κατηγοριοποιηθούν τα προβλήματα που σχετίζονται με την εξίσωση Van der Pol οφείλουμε να δώσουμε αδιάστατη μορφή σε αυτά.

2.3.3. Αδιάστατη μορφή

Ακολουθώντας την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην εισαγωγή (Κεφ. 1.4.2.) προσδιορίζουμε την αδιάστατη μορφή των εξισώσεων Van der Pol.

Πρόβλημα 1: Ελεύθερη ταλάντωση

Εξίσωση	$m \frac{d^2u}{dt^2} + (c_2u^2 - c) \frac{du}{dt} + ku = 0 \quad (2.59)$
Αρχικές Συνθήκες	$u(t=0) = u_0 \quad (2.60)$ και $\dot{u}(t=0) = v_0 \quad (2.61)$

Πιν. 9

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.59) τις σχέσεις (1.23) και εκτελούμε τις πράξεις, λαμβάνοντας υπόψη την αλλαγή μεταβλητών σύμφωνα με τις σχέσεις (1.24) :

$$m \frac{1}{T^2} \frac{d^2(U\tilde{u})}{d\tilde{t}^2} + (c_2(U\tilde{u})^2 - c) \frac{1}{T} \frac{d(U\tilde{u})}{d\tilde{t}} + k(U\tilde{u}) = 0$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(\frac{Tc_2U^2}{m} \tilde{u}^2 - \frac{Tc}{m} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \left(\frac{T^2k}{m} \right) \tilde{u} = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(T\omega_0^2 \frac{c_2}{k} U^2 \tilde{u}^2 - T\omega_0^2 \frac{c}{k} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (T^2\omega_0^2) \tilde{u} = 0 \quad (2.63)$$

Για την περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης ισχύει η σχέση (1.25) συνεπώς :

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \varepsilon(\tilde{u}^2 - 1) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \tilde{u} = 0 \quad (2.64)$$

με $\varepsilon = \omega_0 \frac{c}{k} \ll 1$ (2.65) και $c = c_2 U^2$ (2.66).

Τροποποιούμε τις αρχικές συνθήκες (2.60) και (2.61) λόγω των νέων μεταβλητών \tilde{u}, \tilde{t} σύμφωνα με τις σχέσεις (1.23) :

$$\tilde{u}(\tilde{t} = 0) = \frac{u(t=0)}{U} = \frac{u_0}{U} \quad (2.67)$$

$$\dot{\tilde{u}} = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{d(U\tilde{u})}{dt} \frac{T}{U} = \frac{du}{dt} \frac{T}{U} \Rightarrow \dot{\tilde{u}}(\tilde{t} = 0) = \frac{T}{U} \dot{u}(t=0) = \frac{Tv_0}{U} \quad (2.68)$$

Συνήθως στα προβλήματα επιλέγουμε $U = u_0$. Άρα οι αρχικές συνθήκες είναι :

$$\tilde{u}(\tilde{t} = 0) = 1 \quad \text{και} \quad \dot{\tilde{u}}(\tilde{t} = 0) = \frac{v_0}{\omega_0 u_0} \quad (2.69)$$

Πρόβλημα 2: Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Εξίσωση	$m \frac{d^2 u}{dt^2} + (c_2 u^2 - c) \frac{du}{dt} + ku = P \cos(\Omega t)$ (2.70)
Αρχικές Συνθήκες	$u(t=0) = u_0$ (2.71) και $\dot{u}(t=0) = v_0$ (2.72)

Πιν. 10

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.70) τις σχέσεις (1.23) και εκτελούμε τις πράξεις, λαμβάνοντας υπόψη την αλλαγή μεταβλητών σύμφωνα με τις σχέσεις (1.24) :

$$m \frac{1}{T^2} \frac{d^2(U\tilde{u})}{d\tilde{t}^2} + (c_2(U\tilde{u})^2 - c) \frac{1}{T} \frac{d(U\tilde{u})}{d\tilde{t}} + k(U\tilde{u}) = P \cos(\Omega T\tilde{t})$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(\frac{Tc_2U^2}{m}\tilde{u}^2 - \frac{Tc}{m} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \left(\frac{T^2k}{m} \right) \tilde{u} = \frac{T^2P}{mU} \cos(\Omega T\tilde{t}) \quad (2.73)$$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \left(T\omega_0^2 \frac{c_2}{k} U^2 \tilde{u}^2 - T\omega_0^2 \frac{c}{k} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + (T^2\omega_0^2) \tilde{u} = \frac{T^2P}{mU} \cos(\Omega T\tilde{t}) \quad (2.74)$$

Για την περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ισχύει η σχέση (1.26) συνεπώς :

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \varepsilon(\tilde{u}^2 - 1) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \omega_0^2 \tilde{u} = F \cos(\Omega \tilde{t}) \quad (2.75)$$

όπου $\varepsilon = \omega_0^2 \frac{c}{k} \ll 1$ (2.76) με $c = c_2 U^2$ (2.77) και $F = \frac{P}{mU}$ (2.78)

Τροποποιούμε τις αρχικές συνθήκες (2.71) και (2.72) λόγω των νέων μεταβλητών \tilde{u}, \tilde{t} σύμφωνα με τις σχέσεις (1.23). Όμοια με τις σχέσεις (2.67) και (2.68) έχουμε :

$$\tilde{u}(\tilde{t} = 0) = \frac{u_0}{U} \quad (2.79) \quad \dot{\tilde{u}}(\tilde{t} = 0) = \frac{Tv_0}{U} = \frac{v_0}{U} \quad (2.80)$$

2.3.4. Κατηγορίες προβλημάτων

Με αυτήν τη λογική διατυπώνονται τα εξής προβλήματα που σχετίζονται με την εξίσωση Van der Pol, παραλείποντας τους συμβολισμούς των αδιάστατων μεγεθών.

Ελεύθερη ταλάντωση	Εξαναγκασμένη ταλάντωση (από αρμονικό φορτίο)
$\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon(u^2 - 1) \frac{du}{dt} + u = 0$ (2.81)	$\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon(u^2 - 1) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = F \cos(\Omega t)$ (2.82)

Γενική εξίσωση εξαναγκασμένης ταλάντωσης για τυχούσα φόρτιση P(t) :	
$\frac{d^2u}{dt^2} + \varepsilon(u^2 - 1) \frac{du}{dt} + u = 0 = P(t)$ (2.83)	

Πιν. 11

Προσοχή: Στις προηγούμενες σχέσεις το ε εξαρτάται από τον τρόπο που επιλέγουμε να δώσουμε αδιάστατη μορφή στις εξισώσεις.

Οι αρχικές συνθήκες σχετίζονται με το εκάστοτε πρόβλημα. Γενικά όμως :

$u(t = 0) = \frac{u_0}{U}$ (2.84)	$\dot{u}(t = 0) = \frac{Tv_0}{U}$ (2.85)
-----------------------------------	--

2.3.5. Αριθμητική επίλυση

Αφού διατυπώσαμε τα διάφορα προβλήματα που μπορούμε να συναντήσουμε μελετώντας τον ταλαντωτή Van der Pol, θα λύσουμε τις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αριθμητικά έτσι ώστε να έχουμε μια εικόνα της συμπεριφοράς του ταλαντωτή. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των Runge-Kutta 4^{ης} τάξης προκειμένου να λύσουμε προσεγγιστικά τις διαφορικές εξισώσεις.

- Ελεύθερη ταλάντωση :

$$\ddot{u} + \varepsilon(u^2 - 1)\dot{u} + u = 0 \quad (2.86)$$

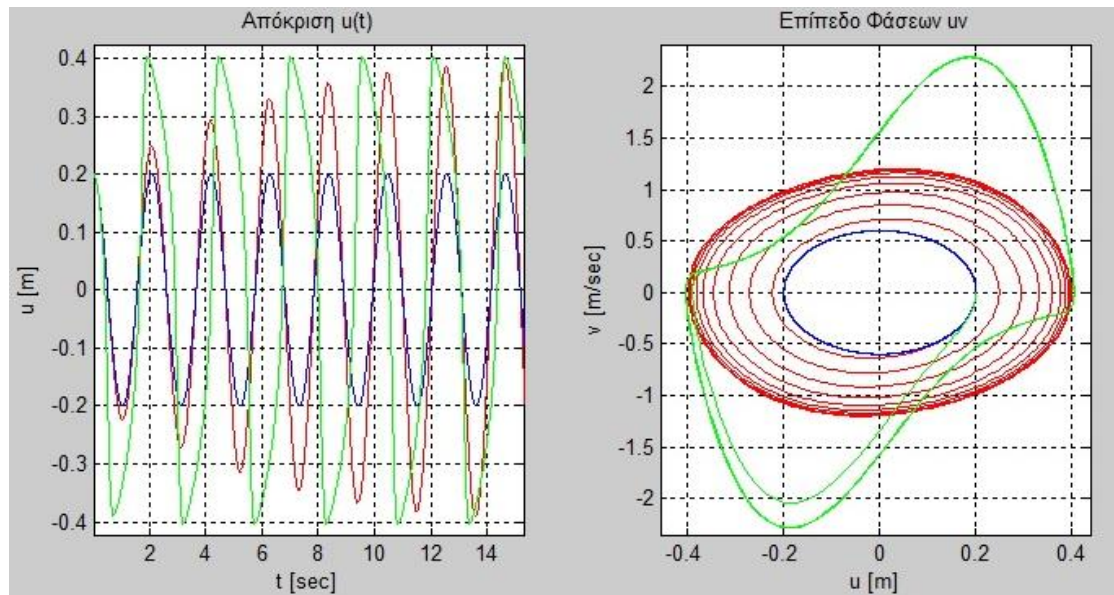
Για να λύσουμε την (2.42) πρέπει να μετασχηματιστεί, θέτουμε $\dot{u} = v$ (2.87)

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \varepsilon(1 - u^2)v - u \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Τώρα μπορούμε να επιλύσουμε το τελευταίο σύστημα διαφορικών εξισώσεων και να προσδιορίσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις $u(t), v(t)$. Η $u(t)$ μας δίνει τη μετατόπιση ενώ η $v(t)$ τη ταχύτητα του σώματος που εξετάζουμε. Παρουσιάζουμε παρακάτω τα αποτελέσματα κάποιων χαρακτηριστικών προβλημάτων μέσω των γραφικών παραστάσεων «απόκριση» $u(t)$ και «επίπεδο φάσεων» $(u(t), v(t))$. Η αριθμητική επίλυση γίνεται με τις αδιάστατες ποσότητες αλλά στις γραφικές παραστάσεις απεικονίζονται τα μεγέθη με μονάδες ώστε να υπάρχει μια αίσθηση της κλίμακας των προβλημάτων.

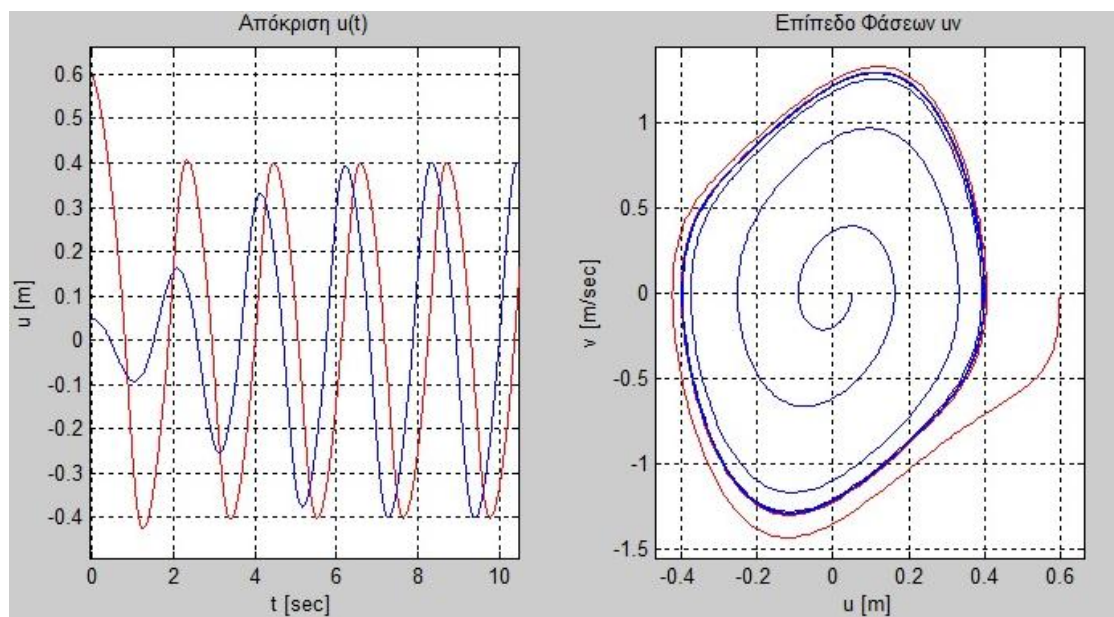
Αρχικά θα εξετάσουμε την επίδραση του ε στην απόκριση. Με την αδιάστατη μορφή που δώσαμε στο πρόβλημα μας ο συντελεστής ε περιγράφει το μέγεθος της επιρροής των μη γραμμικών όρων στη κίνηση του σώματος μας. Για $\varepsilon = 0$ έχουμε το γραμμικό ταλαντωτή που είδαμε στην εισαγωγή. Καθώς αυξάνεται το ε , η απόκριση απομακρύνεται από τη λύση του γραμμικού ταλαντωτή. Το πλάτος της κίνησης εξαρτάται από το ε . Όλα τα παραπάνω είναι ορατά στο Σχ. 2.2 που ακολουθεί μέσα από την απόκριση $u(t)$ και την τροχιά πάνω στο επίπεδο φάσεων. Επιλέγονται τρία χαρακτηριστικά προβλήματα $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0.1$ και $\varepsilon = 2$.

Κατόπιν, μέσα από ένα παράδειγμα διαφαίνεται η ύπαρξη του οριακού κύκλου. Πιο συγκεκριμένα, για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες ($u_0 = 0.05$ m και $u_0 = 0.6$ m) αποτυπώνονται οι λύσεις με αριθμητικό τρόπο Σχ. 2.7. Παρατηρούμε από το επίπεδο των φάσεων ότι και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα τείνει στον ίδιο «οριακό κύκλο».



Χρώμα	Περίπτωση	Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Μπλέ	$\varepsilon = 0$	Αρχικές Συνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Κόκκινο	$\varepsilon = 0.1$	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$
Πράσινο	$\varepsilon = 2$	Αδιαστατοποίηση	$U = 0.2, T = 1/3$

Σχ. 2.6 : Παράδειγμα 1 Van der Pol – Επιρροή του «ε»



Αρχικές Συνθήκες		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 0.4$
Μπλέ	$u_0 = 0.05, v_0 = 0$	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$
Κόκκινο	$u_0 = 0.6, v_0 = 0$	Αδιαστατοποίηση	$U = 0.2, T = 1/3$

Σχ. 2.7 : Παράδειγμα 2 Van der Pol – Οριακός κύκλος

Μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης

3.1. Εισαγωγικά

Οι ακριβείς λύσεις είναι σπάνιες στους τομείς του μηχανικού εξαιτίας της πολυπλοκότητας των προβλημάτων με τα οποία ασχολείται. Ακόμα και σε προβλήματα φαινομενικά απλά, όπως η συμπεριφορά ενός μονοβάθμιου συστήματος, ακριβείς λύσεις υπάρχουν μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Οι μη γραμμικότητες του υλικού και της γεωμετρίας εισάγονται στα αναλυτικά μοντέλα των μηχανικών και καθιστούν τα προβλήματα πολύπλοκα για την εύρεση ακριβούς λύσης. Προκειμένου να ξεπεράσουν αυτό το εμπόδιο, οι μηχανικοί χρησιμοποιούν κλάδους των μαθηματικών και δυνατότητες των υπολογιστών ώστε να προσδιορίσουν προσεγγιστικές λύσεις στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν. Αυτές οι προσεγγιστικές λύσεις μπορεί να είναι καθαρά αριθμητικές, καθαρά αναλυτικές ή συνδυασμός αριθμητικών και αναλυτικών τεχνικών.

Πίσω από αυτές τις δύο βασικές κατηγορίες προσεγγιστικών μεθόδων (αριθμητικές και αναλυτικές) βρίσκονται τομείς των μαθηματικών αυστηρά θεμελιωμένοι. Συγκεκριμένα, οι αριθμητικές λύσεις εδράζονται στο γνωστικό αντικείμενο της αριθμητικής ανάλυσης σε αντίθεση με τις αναλυτικές λύσεις που στα πλαίσια αυτής της εργασίας στηρίζονται στην ασυμπτωτική ανάλυση (ασυμπτωτικές λύσεις).

Ο συνδυασμός τόσο των αριθμητικών μεθόδων (πχ. πεπερασμένων στοιχείων) όσο και των αναλυτικών τεχνικών (πχ. θεωρία διαταραχών) αποτελεί ισχυρό εργαλείο στα χέρια του σύγχρονου μηχανικού διότι μπορεί αφενός να αναλύει σύνθετα προβλήματα και αφετέρου να κατανοεί τη συμπεριφορά σύνθετων φυσικών συστημάτων.

3.2. Στοιχεία Ασυμπτωτικής Ανάλυσης

Για να γίνει κατανοητή η ανάλυση των προσεγγιστικών λύσεων, εισάγουμε κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορολογία που μας επιτρέπουν τη σύγκριση δύο συναρτήσεων καθώς μια κοινή ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε μια συγκεκριμένη τιμή. Αυτές οι συγκρίσεις αποκαλούνται «σχέσεις τάξης μεγέθους».

Ορισμοί – Landau's Notations

Εστω οι συναρτήσεις $f(\varepsilon)$ και $g(\varepsilon)$ που ορίζονται σε μια περιοχή του $\varepsilon = 0$.

1. Γράφουμε: $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$

άν και μόνο αν
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| = 0$$

Αποκαλούμε ότι η f είναι «μικρό όμικρον» της g καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$

2. Γράφουμε: $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$

άν και μόνο αν υπάρχει μια θετική σταθερά M τέτοια ώστε

$$|f(\varepsilon)| \leq M |g(\varepsilon)|$$

για όλα τα ε σε μια περιοχή του $\varepsilon = 0$.

Αποκαλούμε ότι η f είναι «μεγάλο όμικρον» της g καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$

Παρατηρήσεις

1. Ο συμβολισμός $O(\)$ δηλώνει άνω φράγμα στην τάξη μεγέθους. Πιο συγκεκριμένα, το $O(g(\varepsilon))$ θεωρείται σύνολο συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που δεν υπερβαίνει την τάξη μεγέθους της g .
2. Ο συμβολισμός $o(\)$ δηλώνει άνω φράγμα στην τάξη μεγέθους που δεν είναι ακριβές. Πιο συγκεκριμένα, το $o(g(\varepsilon))$ θεωρείται ένα σύνολο συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που υπολείπεται της τάξης μεγέθους της g .
3. Η συνάρτηση g αποκαλείται συνάρτηση-μετρητής (gauge function). Συνηθισμένες συναρτήσεις της τελευταίας μορφής είναι οι $g(\varepsilon) = \varepsilon^n$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Εάν $f = o(g)$ τότε η συνάρτηση f τείνει στο μηδέν γρηγορότερα από τη συνάρτηση g καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$.
5. Στους παραπάνω ορισμούς, το « $\varepsilon \rightarrow 0$ » μπορεί να αντικατασταθεί από όρια άλλης μορφής όπως $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ή $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, με ε_0 τυχαίο αριθμό ακόμα και άπειρο. Οι περιοχές που ορίζονται οι f, g πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα.
6. Μια n τάξης προσεγγιστική λύση $f(x)$ είναι αυτή που η τάξη μεγέθους του σφάλματος είναι το πολύ x^{n+1} ή αλλιώς το σφάλμα είναι $O(x^{n+1})$ με $x < 1$.

Προτού γενικευτούν οι παραπάνω ορισμοί, που σχετίζονται με την τάξη μιας προσέγγισης, ώστε να αναφέρονται και σε συναρτήσεις της μορφής $f(t, \varepsilon)$ θα ορίσουμε την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Ορισμός Ομοιόμορφης Σύγκλισης

Εστω η συνάρτηση $h(t, \varepsilon)$ ορισμένη για ε σε μια περιοχή του $\varepsilon = 0$ και για t σε ένα διάστημα I . Ισχύει ότι το όριο :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (h(t, \varepsilon)) = 0 \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα } I$$

αν για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ανεξάρτητο του t τέτοιο ώστε :

$$|h(t, \varepsilon)| < \eta \text{ για κάθε } t \in I \text{ και } |\varepsilon| < \varepsilon_0$$

Ποιοτικά τα παραπάνω σημαίνουν ότι η σύγκλιση της $h(t, \varepsilon)$ στο μηδέν, καθώς το ε τείνει στο μηδέν, γίνεται με τον ίδιο «βαθμό» για κάθε $t \in I$.

Ορισμοί – Επέκταση Συμβολισμών Landau

Εστω οι συναρτήσεις $f(t, \varepsilon)$ και $g(t, \varepsilon)$ που ορίζονται για κάθε $t \in I$ και για τα ε που βρίσκονται σε μια περιοχή του $\varepsilon = 0$. Γράφουμε ότι $f(t, \varepsilon) = o(g(t, \varepsilon))$ καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$, ομοιόμορφα στο διάστημα I εάν το όριο $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|f(t, \varepsilon)|}{|g(t, \varepsilon)|} = 0$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα I . Επίσης, συμβολίζουμε ότι $f(t, \varepsilon) = O(g(t, \varepsilon))$ καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$, ομοιόμορφα στο διάστημα I εάν υπάρχει μια φραγμένη συνάρτηση $M(t) > 0$ για $t \in I$ τέτοια ώστε $|f(t, \varepsilon)| \leq M(t)|g(t, \varepsilon)|$ για όλα τα $t \in I$ και ε που ανήκουν σε μία περιοχή του $\varepsilon = 0$.

Οι τελευταίοι ορισμοί μας επιτρέπουν κάνουμε ποσοτική εκτίμηση του σφάλματος μιας δεδομένης προσεγγιστικής λύσης.

Ορισμός – Ασυμπτωτική προσέγγιση

Μια συνάρτηση $u_a(t, \varepsilon)$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτική προσέγγιση μιας συνάρτησης $u(t, \varepsilon)$ σε ένα διάστημα I καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$ εάν το σφάλμα $E(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) - u_a(t, \varepsilon)$ συγκλίνει στο μηδέν καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$, ομοιόμορφα για το χρόνο $t \in I$.

Συνήθως εκφράζουμε ότι η $E(t, \varepsilon)$ ανήκει σε κάποιο σύνολο της μορφής $O(\varepsilon^n)$ ή $O(\varepsilon^n)$ με $n \in \mathbb{N}$ καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$ ώστε να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο το σφάλμα τείνει στο μηδέν (ομοιόμορφα ή όχι).

Ορισμός - Ασυμπτωτική ακολουθία

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{g_n(t, \varepsilon)\}$ (gauge functions) είναι μια ασυμπτωτική ακολουθία καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$ με $t \in I$ αν $g_{n+1}(t, \varepsilon) = o(g_n(t, \varepsilon))$ με $\varepsilon \rightarrow 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός – Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα μιας συνάρτησης $u(t, \varepsilon)$ καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$, με δεδομένη ασυμπτωτική ακολουθία $\{g_n(t, \varepsilon)\}$, είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n g_n(t, \varepsilon)$ για την οποία ισχύει:

$$u(t, \varepsilon) - \sum_{n=0}^N \alpha_n g_n(t, \varepsilon) = o(g_N(t, \varepsilon)) \text{ καθώς το } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρήσεις

1. Αν τα όρια στους παραπάνω ορισμούς συγκλίνουν ομοιόμορφα για $t \in I$ τότε η σειρά είναι ένα ομοιόμορφα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα.
2. Στις περισσότερες φορές θεωρούμε ότι : $g_n(t, \varepsilon) = y_n(t) \cdot \phi_n(\varepsilon) = y_n(t) \cdot \varepsilon^n$
Συνεπώς το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα μιας συνάρτησης $u(t, \varepsilon)$ παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n g_n(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_n(t) \cdot \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cdot \varepsilon^n \quad (3.1)$$

3. Συμβολικά γράφουμε : $u \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cdot \varepsilon^n \quad (3.2)$

4. Οι σειρές που εμφανίζονται στη σχέση (3.1) δεν χρειάζεται να συγκλίνουν για να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό μιας προσεγγιστικής λύσης. Η χρήση αυτών των αναπτυγμάτων, παρόλο που ίσως αποκλίνουν, έγκειται στο γεγονός ότι μόνο μερικοί όροι απαιτούνται για μια ακριβή προσέγγιση (σε αντίθεση με τις σειρές Taylor που το μεγαλύτερο πλήθος των όρων δίνει μικρότερο σφάλμα).
5. Στα προβλήματα συχνά αναζητούμε ως λύση το άμεσο ανάπτυγμα (Straightforward Expansion, Κεφ. 3.4.) που έχει τη μορφή :

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^m u_n(t) \cdot \varepsilon^n + O(\varepsilon^{m+1}), \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

3.3. Θεωρία Διαταραχών

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω μαθηματικά εργαλεία (ασυμπτωτική ανάλυση) προσπαθούμε να προσδιορίσουμε προσεγγιστικές λύσεις στα προβλήματα του μηχανικού με αναλυτικό τρόπο.

Εξέχουσα θέση ανάμεσα στις ασυμπτωτικές μεθόδους κατέχουν οι λεγόμενες μέθοδοι διαταραχών. Αυτές οι μέθοδοι αντιμετωπίζουν προβλήματα όπου η εξίσωση του μοντέλου περιλαμβάνει όρους που είναι αρκετά μικροί. Αυτοί οι όροι προέρχονται από την επιρροή κάποιων παραγόντων σε χαμηλό βαθμό. Με κατάλληλη αδιαστατοποίηση (επιλέγοντας ορθά χαρακτηριστικά μεγέθη) εμφανίζεται η μικρή τάξη μεγέθους των παραπάνω όρων που επηρεάζουν το σύστημα (συνήθως ο συντελεστής αυτών των όρων είναι ο ε).

Η απόκριση αυτών των συστημάτων προέρχεται με βάση τη λύση για $\varepsilon=0$, λαμβάνοντας όμως υπόψη ότι υπάρχει μια διαταραχή της τελευταίας λόγω των όρων που συνδέονται με τη μικρή ποσότητα ε .

Στο παρακάτω τμήμα της διπλωματικής εργασίας αναπτύσσονται αναλυτικές τεχνικές προσέγγισης της λύσης μη γραμμικών (συνήθων) διαφορικών εξισώσεων βασισμένες στη θεωρία των διαταραχών (perturbation theory). Οι τεχνικές παρουσιάζονται μέσα από τα χαρακτηριστικά προβλήματα που διατυπώθηκαν παραπάνω για τις εξισώσεις Duffing και Van der Pol.

Η γενική μορφή των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που προσπαθούμε να επιλύσουμε είναι :

$$F(t, u, \dot{u}, \ddot{u}; \varepsilon) = 0 \quad (3.4)$$

Όπου «ε» μια μικρή παράμετρος, συμβολικά $\varepsilon \ll 1$

Ορισμός

Η προσεγγιστική λύση $u_a(t, \varepsilon)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (3.4) ομοιόμορφα για $t \in I$ καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$ εάν :

$$r(t, \varepsilon) = F(t, u_a(t, \varepsilon), \dot{u}_a(t, \varepsilon), \ddot{u}_a(t, \varepsilon), \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

ομοιόμορφα στο διάστημα I καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$.

Συγκεκριμένα παρακάτω θα παρουσιαστούν οι μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων :

1. Μέθοδος του άμεσου αναπτύγματος (The Straightforward Expansion)
2. Μέθοδος των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων (Multiple Time Scales Method)
3. Μέθοδος ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων (Averaging Method)

Άλλες μέθοδοι που μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία :

1. Μέθοδος Lindstedt-Poincaré
2. Οριακά στρώματα (Boundary Layers)
3. Μέθοδος Συναρμογής (Matching)

3.4. Άμεσο Ανάπτυγμα (The Straightforward Expansion)

Η μέθοδος χρήσης του «άμεσου αναπτύγματος» είναι πολύ βασική διότι προέρχεται από μια διαισθητική θεώρηση του προβλήματος. Αποτελεί πρωταρχικό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος στα πλαίσια των μεθόδων διαταραχής, παρόλο που εμφανίζει πολλά αρνητικά στοιχεία στην εφαρμογή της. Για όλους τους ανωτέρω λόγους η μέθοδος αυτή αποκαλείται και ως «κλασική μέθοδος» στο τμήμα της εργασίας που ακολουθεί.

Η κλασική μέθοδος διαταραχών βασίζεται στην ιδέα ότι μπορεί η λύση της εξίσωσης (3.4) να έχει την μορφή :

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots + \varepsilon^n u_n(t) + \dots \quad (3.6)$$

οπου ουσιαστικά αποτελεί ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα και κάθε όρος της μορφής $\varepsilon^n u_n(t)$ με $n \geq 1$ αποτελεί στοιχείο διόρθωσης για το αποτέλεσμα που προσεγγίζει. Δεν αποκλείεται η λύση της εξίσωσης να έχει την μορφή και άλλου ασυμπτωτικού αναπτύγματος αλλά δεν θα εξεταστεί στην παρούσα φάση.

Αφού αντικατασταθεί η έκφραση του $u(t; \varepsilon)$ της σχέσης (3.6) στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε, δηλαδή στην εξίσωση (3.4), κάνουμε τις στοιχειώδεις πράξεις. Συνήθως στις πράξεις εμφανίζουμε τους όρους του « ε » μέχρι κάποια συγκεκριμένη τάξη (n) ανάλογα με το πρόβλημα. Αφου εκτελεστούν όλες οι δυνατές πράξεις και παραχθεί ένα άθροισμα με όρους που έχουν παράγοντα κάποια δύναμη του « ε », ομαδοποιούνται ανάλογα με αυτήν οι όροι, βγάζοντας την κοινό παράγοντα.

$$\text{Έτσι έχουμε: } f_0(\bar{u}_i) + \varepsilon f_1(\bar{u}_i) + \varepsilon^2 f_2(\bar{u}_i) + \dots + \varepsilon^n f_n(\bar{u}_i) = 0 \Rightarrow f_n(\bar{u}_i) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

όπου n : η τάξη μεγέθους της προσεγγιστικής λύσης που αναζητούμε και

\bar{u}_i : το διάνυσμα που έχει σαν στοιχεία τόσο τις συναρτήσεις u_i όσο και τις παραγώγους τους ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε.

Λύνοντας το σύστημα των n διαφορικών εξισώσεων $f_n(u_i) = 0$, βρίσκουμε τα $u_i(t)$.

Η παραπάνω μεθοδολογία γίνεται κατανοητή καλύτερα μέσα από ένα παράδειγμα.

Εφαρμογή της μεθόδου

Ενας μονοβάθμιος ταλαντωτής τύπου Duffing εκτελεί μη γραμμική ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση σύμφωνα με την αδιάστατη εξίσωση (2.35). Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνεται από ένα σημείο που απέχει A_0 από την αρχική θέση ισορροπίας του ταλαντωτή ($u(0) = x_0 = A_0/U$). Να βρεθεί η μετατόπιση $u(t)$ σύμφωνα με την κλασική μέθοδο διαταραχών.

Όπως περιγράφουμε και παραπάνω, υποθέτουμε πως η λύση του προβλημάτος μας είναι μια συνάρτηση του t και του ε και έχει τη μορφή της (3.6). Περιορίζουμε όμως την αναζήτηση της λύσης μέχρι το δεύτερο όρο της σειράς.

Συνεπώς αναζητούμε λύση της μορφής (πρώτης τάξης ανάπτυγμα) :

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.8)$$

Κάνουμε αντικατάσταση την (3.8) στην εξίσωση (2.35) και έχουμε:

$$\left[\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + O(\varepsilon^2) \right] + \left[u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \right] + \varepsilon \left[u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \right]^3 = 0 \quad (3.9)$$

Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό θεώρημα για να αναπτύξουμε τον τελευταίο όρο :

$$\begin{aligned} \left[u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \right]^3 &= u_0^3 + 3u_0^2 \left[\varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \right] + 3u_0 \left[\varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \right]^2 + \left[\varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \right]^3 = \\ &= u_0^3 + 3u_0^2 u_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Αντικαθιστούμε την (3.10) στην εξίσωση (3.9) και ομαδοποιούμε τους συντελεστές ανάλογα με τη δύναμη του « ε » που τους συνοδεύει, η εξίσωση μετασχηματίζεται:

$$\left(\ddot{u}_0 + u_0 \right) + \varepsilon \left(\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 \right) + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.11)$$

Οι όροι της τάξης του ε^2 παραλείπονται κατά την διαδικασία των πράξεων.

Σύμφωνα με την σχέση (3.7) έχουμε:

$$\left(\ddot{u}_0 + u_0 \right) + \varepsilon \left(\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 \right) + O(\varepsilon^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \\ \ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0 \quad (3.13) \quad \text{και} \quad \ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3 \quad (3.14)$$

Η γενική λύση της (3.13) μπορεί να γραφτεί ως $u_0 = \alpha_0 \cos(t + \beta_0)$ (3.15)

οπου α_0, β_0 αυθαίρετες σταθερές που θα προσδιοριστούν από αρχικές συνθήκες.

Αντικαθιστούμε το u_0 από την (3.15) στην (3.14) και έχουμε:

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\alpha_0^3 \cos^3(t + \beta_0) \quad (3.16)$$

Εκφράζουμε τον μη-ομογενή όρο σύμφωνα με την ταυτότητα [παράρτημα]:

$$\cos^3(\theta) = \frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos(3\theta) \quad (3.17)$$

$$\cos^3(t + \beta_0) = \frac{3}{4} \cos(t + \beta_0) + \frac{1}{4} \cos(3t + 3\beta_0) \quad (3.18)$$

Η εξίσωση (3.16) παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{3}{4}\alpha_0^3 \cos(t + \beta_0) - \frac{1}{4}\alpha_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \quad (3.19)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μη-ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση. Η γενική λύση της βρίσκεται από το άθροισμα των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς $u_{1,0}$ και μιας μερικής λύσης της μη-ομογενούς $u_{1,p}$, δηλαδή $u_1 = u_{1,0} + u_{1,p}$ (3.20).

- Εύρεση λύσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (όμοια με εξίσωση (3.13)):

$$u_{1,0} = \alpha_1 \cos(t + \beta_1) \quad (3.21) \text{ , με } \alpha_1, \beta_1 \text{ αυθαίρετες σταθερές}$$

- Εύρεση μερικής λύσης:

Επειδή η εξίσωση (3.19) είναι γραμμική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της υπέρθεσης των λύσεων προκειμένου να προσδιορίσουμε τη μερική λύση. Σύμφωνα με την τελευταία η μερική λύση είναι άθροισμα των μερικών λύσεων των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων.

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{3}{4}\alpha_0^3 \cos(t + \beta_0) \quad (3.22)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{1}{4}\alpha_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \quad (3.23)$$

Από την (3.22) έχουμε ότι :

$$u_{1,p1} = -\frac{3}{8}\alpha_0^3 t \sin(t + \beta_0) \quad (3.24)$$

Από την (3.23) έχουμε ότι :

$$u_{1,p2} = \frac{1}{32}\alpha_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \quad (3.25)$$

Η μερική λύση, λοιπόν, είναι :

$$u_{1,p} = u_{1,p1} + u_{1,p2} = -\frac{3}{8}\alpha_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}\alpha_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \quad (3.26)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.19) έχει τη μορφή:

$$u_1 = u_{1,0} + u_{1,p} = \alpha_1 \cos(t + \beta_1) - \frac{3}{8}\alpha_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}\alpha_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \quad (3.27)$$

Αντικαθιστούμε τα u_0, u_1 που βρήκαμε από τις σχέσεις (3.15) και (3.27) αντίστοιχα στο ανάπτυγμα που υποθέσαμε ως λύση (3.8) και έχουμε :

$$u(t; \varepsilon) = \alpha_0 \cos(t + \beta_0) + \varepsilon \left(\alpha_1 \cos(t + \beta_1) - \frac{3}{8}\alpha_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}\alpha_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \right) + O(\varepsilon^2) \quad (3.28)$$

Προσδιορίζουμε τα $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος :

$$u(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = \alpha_0 \cos(\beta_0) + \varepsilon \left(\alpha_1 \cos(\beta_1) + \frac{1}{32}\alpha_0^3 \cos(3\beta_0) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 \cos(\beta_0) = x_0 \\ \alpha_1 \cos(\beta_1) + \frac{1}{32} \alpha_0^3 \cos(3\beta_0) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

$$\dot{u}(0) = \dot{x}_0 = 0 \Rightarrow \dot{x}_0 = -\alpha_0 \sin(\beta_0) + \varepsilon \left(-\alpha_1 \sin(\beta_1) - \frac{3}{8} \alpha_0^3 \sin(\beta_0) - \frac{3}{32} \alpha_0^3 \sin(3\beta_0) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_0 \sin(\beta_0) = \dot{x}_0 = 0 \\ -\alpha_1 \sin(\beta_1) - \frac{3}{8} \alpha_0^3 \sin(\beta_0) - \frac{3}{32} \alpha_0^3 \sin(3\beta_0) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

Από τις σχέσεις (3.29) και (3.30) βρίσκουμε ότι :

$$\alpha_0 = x_0, \quad \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{x_0^3}{32} \quad \text{και} \quad \beta_1 = \pi \quad (3.31)$$

Η λύση του προβλήματος σύμφωνα και με τις αρχικές συνθήκες είναι :

$$u(t; \varepsilon) = x_0 \cos(t) - \varepsilon \frac{x_0^3}{32} (\cos(t) + 12t \sin(t) - \cos(3t)) + O(\varepsilon^2) \quad (3.32)$$

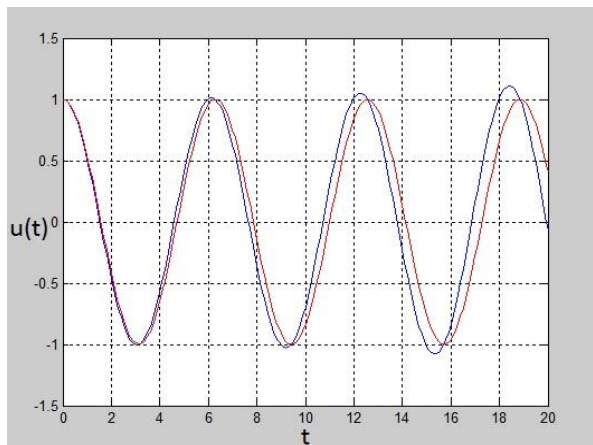
Αριθμητική Εφαρμογή

Ας δούμε ως παράδειγμα το πρόβλημα στο οποίο σχηματίσαμε την εξίσωση Duffing (2.17) λόγω γεωμετρίας. Αν για την κατασκευή μας ισχύει ότι $k = 2000 \text{ kN/m}$ και $d = 0,4 \text{ m}$, $d_0 = 0,36 \text{ m}$ μπορούμε να υπολογίσουμε σύμφωνα με τη σχέση (2.16) τα $k_1 = 2k \left(1 - \frac{d_0}{d}\right) = 400 \text{ kN/m}$ και $k_2 = k \frac{d_0}{d^3} = 11250 \text{ kN/m}^3$. Απομακρύνουμε τη μάζα κατά $A_0 = 0,05 \text{ m}$ από τη θέση ισορροπίας και την αφήνουμε ελεύθερη.

Αν επιλέξουμε $U = 0,05 \text{ m}$ που είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος της κίνησης έχουμε

$x_0 = \frac{A_0}{U} = 1$ και $\varepsilon = \frac{k_2}{k_1} U^2 = 0,07 \ll 1$ οπότε από τη σχέση (3.32) έχουμε:

$$u(t) = \cos(t) - \frac{7}{3200} (\cos(t) + 12t \sin(t) - \cos(3t)) \quad (3.33)$$



Παρατηρήσεις

Ο όρος $u_0(t)$ αποτελεί την πρώτη προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης ενώ ο όρος $\varepsilon u_1(t)$ αποτελεί την πρώτη διόρθωση του. Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις του $u_0(t)$ με κόκκινο και του $u_0(t) + \varepsilon u_1(t)$ με μπλέ στο παραπάνω σχήμα. Παρατηρούμε ότι καθώς ο χρόνος t μεγαλώνει, ο διορθωτικός όρος μεγαλώνει αρκετά. Στο σημείο που είναι της ίδιας τάξης με τον όρο $u_0(t)$, η κλασική μέθοδος διαταραχής παύει να έχει ισχύ αφού το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα δεν μας βοηθάει στην προσέγγιση της λύσης. Το ανάπτυγμα είναι ανομοιόμορφο, αφού εμφανίζεται στη λύση ο όρος $t \sin(t)$ που γίνεται πολύ μεγάλος για μεγάλα t . Αν δεν υπήρχαν όροι της μορφής $t \sin(t)$ (“mixed-secular terms”) το ανάπτυγμα θα ήταν ομοιόμορφο και δεν θα είχε αποκλίνουσα συμπεριφορά.

Παρατηρούμε ότι η αντικατάσταση της σειράς στη διαφορική εξίσωση δεν οδηγεί πάντα σε μια ορθή προσεγγιστική λύση. Ιδανικά θα θέλαμε ένα τμήμα της σειράς, για ένα δεδομένο ε , να μας παρέχει μια αποτελεσματική προσεγγιστική λύση για κάθε χρόνο t . Το τελευταίο δε μπορούμε να το πετύχουμε με το άμεσο ανάπτυγμα.

Η ανάγκη να αναπτυχθούν άλλες μέθοδοι διαταραχών είναι πλέον φανερή. Προκειμένου να διατυπωθούν αυτές οι νέες βελτιωμένες μεθοδολογίες θα πρέπει πρώτα να γίνουν ορατά τα σημεία που αστοχεί η κλασική μέθοδος ώστε με κατάλληλη επέμβαση σε αυτά να προκύψουν οι αποδοτικότερες τεχνικές.

Μέχρι στιγμής η ιδιοπερίοδος του μονοβάθμιου μη γραμμικού ταλαντωτή έχει εκφραστεί όπως η αντίστοιχη του γραμμικού ταλαντωτή. Πειραματικά μπορεί να δειχθεί ότι η ιδιοπερίοδος εξαρτάται και από την επιρροή των μη γραμμικών όρων της εξίσωσης κίνησης όπως αυτή εκφράζεται μέσα από το « ε ».

Για την εξίσωση του Duffing με $u(0) = x_0$ έχουμε :

$$T = 2\pi \left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon x_0^2 + \dots \right) \quad (3.34)$$

Επειδή η κλασική μέθοδος διαταραχών δεν λαμβάνει υπόψη της την παραπάνω παρατήρηση (θεωρεί ανεξάρτητη του « ε » την ιδιοπερίοδο του συστήματος), αναπτύχθηκαν άλλες μέθοδοι που συνυπολογίζουν την εξάρτηση της ιδιοπεριόδου από τη μη γραμμικότητα του προβλήματος. Αυτές οι τεχνικές δίνουν λύσεις ομοιόμορφων αναπτυγμάτων χωρίς «αιώνιους όρους» (secular terms) που ισχύουν για μεγάλα διαστήματα χρόνου I .

Μια πρώτη μέθοδος που έχει τα παραπάνω χαρακτηριστικά, αλλά δεν αναπτύσσεται στην παρούσα εργασία, είναι η Lindstedt-Poincare. Η τελευταία τεχνική εμφανίζει την ιδιοσυχνότητα $\omega(\varepsilon)$ στη διαφορική εξίσωση με κατάλληλο μετασχηματισμό.

3.5. Μέθοδος Πολλαπλών Κλιμάκων (Multiple Time Scales Method)

Η παραδοχή που κάνουμε κατά την κλασσική μέθοδο διαταραχών με τη σχέση (3.6) δεν αντιπροσωπεύει σε μεγάλο βαθμό την ακριβή λύση του προβλήματος μας. Αυτό είναι φανερό από την φυσική πλευρά του προβλήματος μας. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος και κατ' επέκταση ο όρος μη γραμμικότητας « ε » υπεισέρχονται σε κάθε όρο u_i . Η σχέση, λοιπόν, του u με τα t και ε δεν είναι αποκομμένη όπως εμφανίζεται στη σχέση (3.6) αλλά το u εξαρτάται από τους όρους ε , t , εt , $\varepsilon^2 t$, $\varepsilon^3 t$, Συνεπώς, υποθέτουμε μια λύση της μορφής :

$$u(t; \varepsilon) = \hat{u}(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t, \dots; \varepsilon) \quad (3.35)$$

$$u(t; \varepsilon) = \hat{u}(T_0, T_1, T_2, T_3, \dots; \varepsilon) \quad (3.36)$$

όπου
$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.37)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι της μορφής T_n αποτελούν διαφορετικές χρονικές κλίμακες για κάποιο σταθερό μικρό « ε ». Καθώς ο χρόνος περνάει και ο όρος $T_0 = t$ μεγαλώνει, ο όρος T_1 παραμένει αισθητά μικρότερος τις πρώτες στιγμές σε σχέση με το T_0 οπότε δεν επηρεάζει τη λύση μας. Οι μεταβολές που προκαλούνται σε αυτήν την κλίμακα εμφανίζονται όταν το T_1 αυξηθεί αρκετά, δηλαδή αφού περάσει αρκετός χρόνος από την έναρξη της κίνησης. Γι αυτό το λόγο, η κλίμακα T_1 αντιπροσωπεύει πιο αργή κλίμακα από την T_0 . Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν και για τις υπόλοιπες κλίμακες T_n . Λόγω της ύπαρξης διαφορετικών χρονικών κλιμάκων, η τεχνική ονομάστηκε «μέθοδος πολλαπλών χρονικών κλιμάκων».

Η εξάρτηση του u από τα t και ε εμφανίζεται μέσω των διαφορετικών χρονικών κλιμάκων. Προσπαθώντας να δούμε τη συμπεριφορά της u σε σχέση με τις διάφορες κλίμακες, θεωρούμε ότι το u είναι συνάρτηση των $T_0, T_1, T_2, T_3, \dots$ όπως φαίνεται σε σχέση (3.36).

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_2} \frac{dT_2}{dt} + \dots = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \quad (3.39)$$

Εισάγοντας τον τελεστή : $D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}$ οι σχέσεις (3.38) και (3.39) γίνονται:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (3.40)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \quad (3.41)$$

Με τη χρήση των σχέσεων (3.40) και (3.41) μετασχηματίζουμε την εξίσωση κίνησης, δημιουργώντας μια μερική διαφορική εξίσωση κίνησης που περιέχει το \hat{u} και τις χρονικές κλίμακες $T_0, T_1, T_2, T_3, \dots$.

Λόγω της ύπαρξης των μερικών παραγώγων, φαίνεται ότι το πρόβλημα έγινε πιο σύνθετο. Όμως τα θετικά που προσφέρει αυτή η μέθοδος αντισταθμίζουν τα αρνητικά που υπάρχουν λόγω των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Από το σημείο αυτό και μετά, η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων έχει παρόμοια φιλοσοφία με την κλασική μέθοδο των διαταραχών.

Αναζητούμε μια λύση της μορφής:

$$\hat{u} = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (3.42)$$

Αντικαθιστούμε το \hat{u} από τη σχέση (3.42) στη διαφορική εξίσωση και εκτελούμε τις πράξεις προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.7) και να καταλήξουμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων όπως στην κλασική μέθοδο διαταραχών. Βασική διαφορά είναι ότι το τελευταίο σύστημα στη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων είναι μερικών διαφορικών εξισώσεων με άγνωστους τα u_0 και u_1 . Οι άγνωστοι συντελεστές (συναρτήσεις) που προέρχονται από την επίλυση των εξισώσεων ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες ώστε να κάνουν το ανάπτυγμα ομοιόμορφο (χωρίς “secular terms”). Παρακάτω βλέπουμε μια εφαρμογή για να παρουσιαστεί αναλυτικότερα η μέθοδος.

Εφαρμογή της Μεθόδου

Ενας μονοβάθμιος ταλαντωτής τύπου Duffing εκτελεί μη γραμμική ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση σύμφωνα με την αδιάστατη εξίσωση (2.35). Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνεται από ένα σημείο που απέχει A_0 από την αρχική θέση ισορροπίας του ταλαντωτή ($u(0) = x_0 = A_0/U$). Να βρεθεί η μετατόπιση $u(t)$ σύμφωνα με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων (Multiple Scales).

Εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (3.43)$$

Όπως περιγράφουμε και παραπάνω, υποθέτουμε πως η λύση του προβλημάτος μας είναι μια συνάρτηση του T_0 και του T_1 και έχει τη μορφή της (3.42). Περιορίζουμε όμως την αναζήτηση της λύσης στον πρώτο όρο της διορθωτικής σειράς.

Συνεπώς αναζητούμε λύση της μορφής (πρώτης τάξης ανάπτυγμα) :

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (3.44)$$

Για τις παραγώγους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις σύμφωνα με (3.40) και (3.41) :

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 \quad (3.45) \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \quad (3.46)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.44), (3.45) και (3.46) η εξίσωση (3.43) γίνεται :

$$\begin{aligned} & [D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1] [u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)] + \\ & + [u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)] + \varepsilon [u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)]^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό θεώρημα όπως στη (3.10) και εκτελούμε τις πράξεις :

$$[D_0^2 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + O(\varepsilon^2)] + u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon u_0^3 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.48)$$

$$(D_0^2 u_0 + u_0) + \varepsilon (D_0^2 u_1 + u_1 + u_0^3 + 2D_0 D_1 u_0) + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.49)$$

Σύμφωνα με την σχέση (3.7) έχουμε:

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (3.50) \quad \text{και} \quad D_0^2 u_1 + u_1 = -u_0^3 - 2D_0 D_1 u_0 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0 \quad (3.52) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -u_0^3 - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (3.53)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (3.50) ή (3.52) είναι :

$$u_0 = \alpha(T_1) \cdot \cos(T_0 + \beta(T_1)) \quad (3.54)$$

1^{ος} Τρόπος Αντιμετώπισης : Με τριγωνομετρικές ταυτότητες

Αντικατάσταση του u_0 από τη σχέση (3.54) στη διαφορική εξίσωση (3.51) ή (3.53) :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -(\alpha \cdot \cos(T_0 + \beta))^3 - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} (\alpha \cdot \cos(T_0 + \beta)) \quad (3.55)$$

Τα α και β είναι συναρτήσεις του T_1 . Στη γενική περίπτωση θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τα α και β συναρτήσεις και άλλων χρονικών κλιμάκων T_2, T_3, \dots

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = 2 \frac{d\alpha}{dT_1} \sin(T_0 + \beta) + \left(2\alpha \frac{d\beta}{dT_1} - \frac{3}{4} \alpha^3 \right) \cos(T_0 + \beta) - \frac{1}{4} \alpha^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (3.56)$$

Στη γενική περίπτωση δεν θα είχαμε ολική παράγωγο $\frac{d}{dT_1}$ αλλά μερική παράγωγο $\frac{\partial}{\partial T_1}$ μιας και θα είχαμε εξάρτηση και από άλλες χρονικές κλίμακες T_2, T_3, \dots

Οι όροι $\sin(T_0 + \beta)$ και $\cos(T_0 + \beta)$ στη σχέση (3.56), όπως είδαμε και από την κλασσική μέθοδο, δημιουργούν «αιώνιους όρους» (secular terms). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να βρίσκουμε λύση που είναι ανομοιόμορφο ανάπτυγμα ως προς το χρόνο t . Εξαλείφουμε τους «αιώνιους» όρους απαιτώντας να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\frac{d\alpha}{dT_1} = 0 \quad (3.57) \quad \text{και} \quad 2\alpha \frac{d\beta}{dT_1} - \frac{3}{4} \alpha^3 = 0 \quad (3.58)$$

$$\alpha = \alpha_0 \quad (3.59) \quad \text{και} \quad \beta = \frac{3}{8} \alpha_0^2 T_1 + \beta_0 \quad (3.60)$$

Η σχέση (3.56) λόγω των σχέσεων (3.57) και (3.58) γίνεται :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -\frac{1}{4} \alpha^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (3.61)$$

Με μερική λύση :

$$u_1 = \frac{1}{32} \alpha^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (3.62)$$

Συνθέτοντας όλα τα παραπάνω βρίσκουμε την προσεγγιστική λύση της (3.43) :

$$u = \alpha_0 \cdot \cos\left(T_0 + \frac{3}{8} \alpha_0^2 T_1 + \beta_0\right) + \varepsilon \frac{1}{32} \alpha_0^3 \cos\left(3T_0 + \frac{9}{8} \alpha_0^2 T_1 + \beta_0\right) \quad (3.63)$$

$$u(t) = \alpha_0 \cdot \cos\left(t + \varepsilon \frac{3}{8} \alpha_0^2 t + \beta_0\right) + \varepsilon \frac{1}{32} \alpha_0^3 \cos\left(3t + \varepsilon \frac{9}{8} \alpha_0^2 t + \beta_0\right) \quad (3.64)$$

Τα α_0 και β_0 βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες όπως σε κλασσική μέθοδο. Για προσεγγιστική λύση μπορούμε να κρατήσουμε και μόνο τον πρώτο όρο της (3.64) :

$$u(t) = \alpha_0 \cdot \cos\left(t + \varepsilon \frac{3}{8} \alpha_0^2 t + \beta_0\right) \quad (3.65)$$

2^{ος} Τρόπος Αντιμετώπισης : Με μιγαδικούς αριθμούς – Βασικός τρόπος

Χρησιμοποιούμε τους μιγαδικούς αριθμούς προκειμένου να γίνουν οι σύνθετες πράξεις. Αρχικά θα διατυπωθεί η λύση (3.54) σε μιγαδική μορφή :

Γνωρίζουμε από τη μιγαδική ανάλυση ότι :

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (3.66)$$

$$\text{Συνεπώς :} \quad u_0 = \frac{1}{2} \alpha (e^{i(T_0+\beta)} + e^{-i(T_0+\beta)}) = \frac{1}{2} \alpha e^{i\beta} e^{iT_0} + \frac{1}{2} \alpha e^{-i\beta} e^{-iT_0} \quad (3.67)$$

$$\text{Θεωρούμε ότι :} \quad A = A(T_1) = \frac{1}{2} \alpha(T_1) \exp(i\beta(T_1)) \quad \text{και} \quad e_0 = \exp(iT_0) \quad (3.68)$$

Η σχέση (3.54) μετασχηματίζεται τελικώς στη μορφή :

$$u_0 = Ae_0 + \overline{Ae_0} \quad (3.69)$$

Ορισμός συμβολισμού «cc» - complex conjugate

$$\text{Αν έχουμε το μιγαδικό αριθμό } z \text{ τότε :} \quad z + \bar{z} = z + cc \quad (3.70)$$

Στη περίπτωση που ο z είναι μιγαδική παράσταση, ο συμβολισμός είναι χρήσιμος.

Αντικατάσταση του u_0 από τη σχέση (3.69) στη διαφορική εξίσωση (3.51) ή (3.53) :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = - (Ae_0 + \overline{Ae_0})^3 - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} (Ae_0 + \overline{Ae_0}) \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = - \left(2i \frac{\partial A}{\partial T_1} + 3A^2 \bar{A} \right) e_0 - A^3 e_0^3 + cc \quad (3.72)$$

Για τον προσδιορισμό ενός αναπτύγματος πρώτης τάξης όπως φαίνεται σε (3.44) το A εξαρτάται μόνο από το T_1 , συνεπώς στη σχέση (3.72) θα έπρεπε να εμφανίζεται ολική παράγωγος $\frac{dA}{dT_1}$. Κρατάμε το συμβολισμό της μερικής παραγώγου ώστε η μέθοδος να παρουσιαστεί στη γενικότερη μορφή.

Οι όροι e_0 και \bar{e}_0 δημιουργούν, κατά την επίλυση της εξίσωσης (3.72), αιώνιους «όρους». Συνεπώς για να πάρουμε μια λύση που να συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς το χρόνο t θα πρέπει οι συντελεστές των όρων αυτών, που είναι συζυγείς μεταξύ τους, να μηδενίζονται. Αρκεί, λοιπόν, να απαιτήσουμε ότι ισχύει η σχέση :

$$2i \frac{\partial A}{\partial T_1} + 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (3.73)$$

Υστερα από αντικατάσταση του A από τη (3.68) στην τελευταία σχέση έχουμε:

$$2i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial T_1} e^{i\beta} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial T_1} i e^{i\beta} \right) + 3 \frac{\alpha^2}{4} e^{2i\beta} \cdot \frac{\alpha}{2} e^{-i\beta} = 0 \quad (3.74)$$

$$i \frac{\partial \alpha}{\partial T_1} + \left(\frac{3}{8} \alpha^3 - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial T_1} \right) = 0 \quad (3.75)$$

Τα α και β είναι πραγματικές συναρτήσεις, συνεπώς από (3.75) έπεται ότι :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T_1} = 0 \quad (3.76) \quad \text{και} \quad \frac{3}{8} \alpha^3 - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial T_1} = 0 \quad (3.77)$$

Απορρίπτοντας την τετριμμένη λύση $\alpha = 0$ και θεωρώντας ότι τα α και β δεν εξαρτώνται από τα T_2, T_3, \dots έχουμε :

$$\alpha = \alpha(T_2, T_3, \dots) = \alpha_0 \quad (3.78) \quad \text{και} \quad \beta = \frac{3}{8} \alpha^2 T_1 + \beta(T_2, T_3, \dots) = \frac{3}{8} \alpha_0^2 T_1 + \beta_0 \quad (3.79)$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι οι τελευταίες σχέσεις είναι ίδιες με τις σχέσεις (3.59) και (3.60). Οι δύο τρόποι που προαναφέρθηκαν είναι ισοδύναμοι αφού εξάγουν το ίδιο αποτέλεσμα, αυτό που φαίνεται στη σχέση (3.65). Χρησιμοποιούμε συνήθως το δεύτερο τρόπο (με μιγαδικούς αριθμούς) διότι με το συμβολισμό «cc» επιτυγχάνουμε ευκολότερη εξαγωγή του αποτελέσματος χωρίς χρήση ταυτοτήτων τριγωνομετρίας.

Όπως είναι φανερό μέσα από την εφαρμογή, η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων:

- ✓ παράγει ως λύση ένα ομοιόμορφο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ως προς το χρόνο
- ✓ αποτυπώνει ποσοτικά και ποιοτικά όλα εκείνα τα φαινόμενα που παρατηρούνται λόγω μη γραμμικότητας (αλλαγή της ιδιοπεριόδου)

Όλα τα ανωτέρω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων είναι καλύτερη από την κλασσική μέθοδο του άμεσου αναπτύγματος.

Αριθμητική εφαρμογή - Duffing

Η εξίσωση (3.65) αποτελεί προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Duffing (3.43) σύμφωνα με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων (Multiple Scales). Επαναφέρουμε τα μη αδιάστατα μεγέθη προκειμένου να έχουμε μια εικόνα πραγματικών διαστάσεων. Ισχύει :

$$\tilde{u}(t) = \alpha_0 \cdot \cos \left(\tilde{t} + \varepsilon \frac{3}{8} \alpha_0^2 \tilde{t} + \beta_0 \right) \quad (3.80)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.23) και (1.25) :

$$u(t) = \alpha_0 U \cdot \cos\left(\omega_0 t + \varepsilon \frac{3}{8} \alpha_0^2 \omega_0 t + \beta_0\right) \quad (3.81)$$

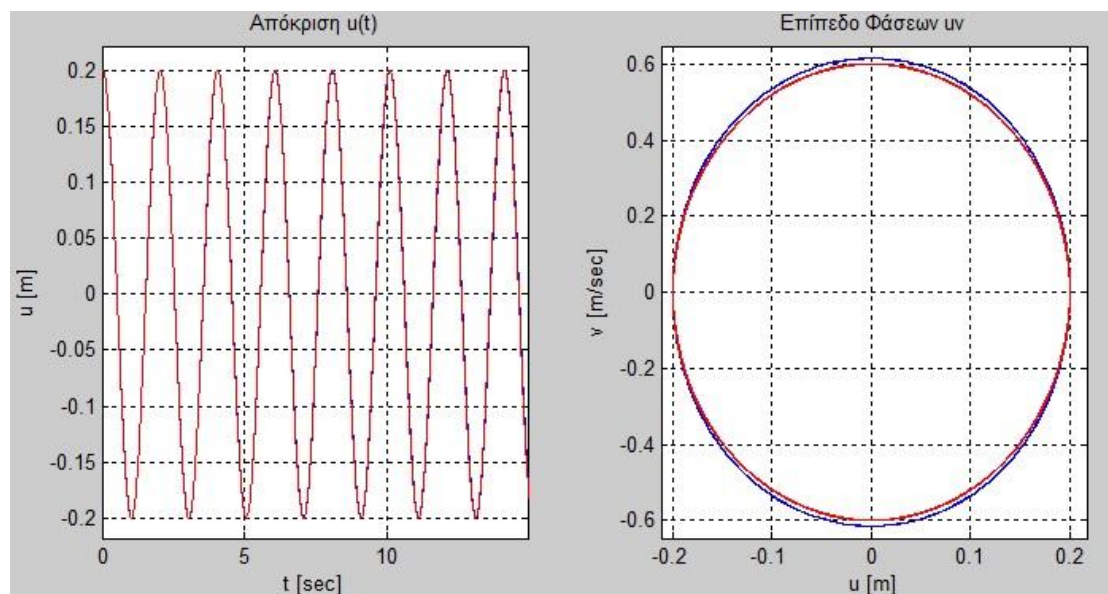
Από τις αρχικές συνθήκες $u_0 > 0$ και $v_0 = 0$ προσδιορίζουμε τα α_0 και β_0 :

$$\alpha_0 = \frac{u_0}{U} \quad (3.82) \quad \text{και} \quad \beta_0 = 0 \quad (3.83)$$

Η εξίσωση (3.81) παίρνει, τελικώς, τη μορφή :

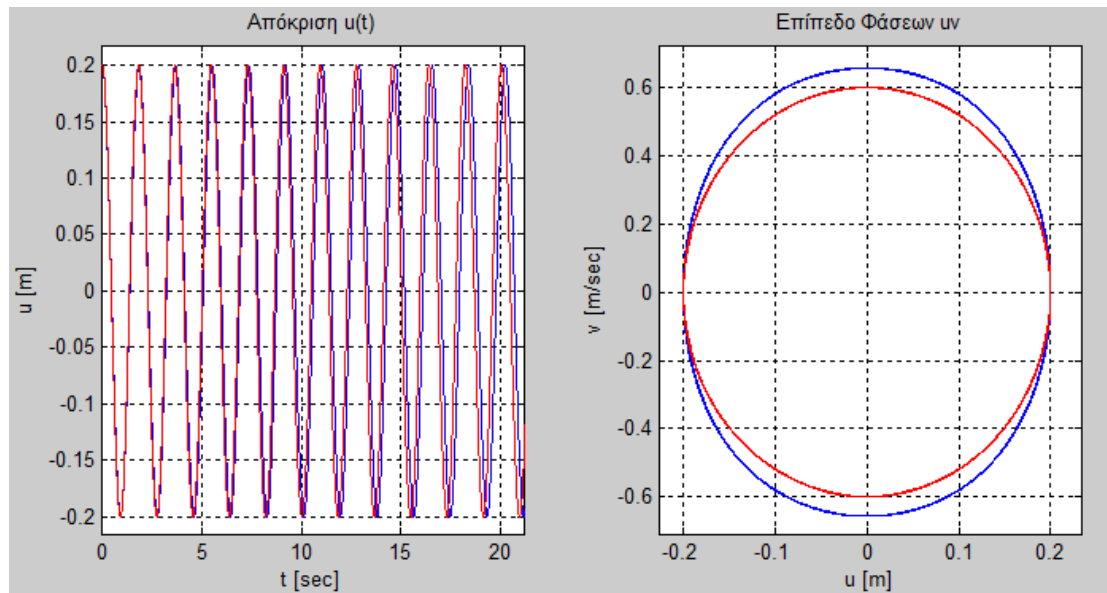
$$u(t) = u_0 \cdot \cos\left(\omega_0 t + \varepsilon \frac{3\omega_0 u_0^2}{8U^2} t\right) \quad (3.84)$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα που εξάγουμε από τη (3.84) για διάφορα χαρακτηριστικά προβλήματα της εξίσωσης Duffing. Παράλληλα, γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα από τη αριθμητική μέθοδο Runge-Kutta ώστε να γίνει κατανοητός ο βαθμός προσέγγισης της (3.84) στη λύση της (3.43). Σε όλα τα προβλήματα που ακολουθούν επιλέγουμε ως χαρακτηριστικά μεγέθη $U = 0.2$, $T = 1/3$ προκειμένου να κάνουμε αδιαστατοποίηση.



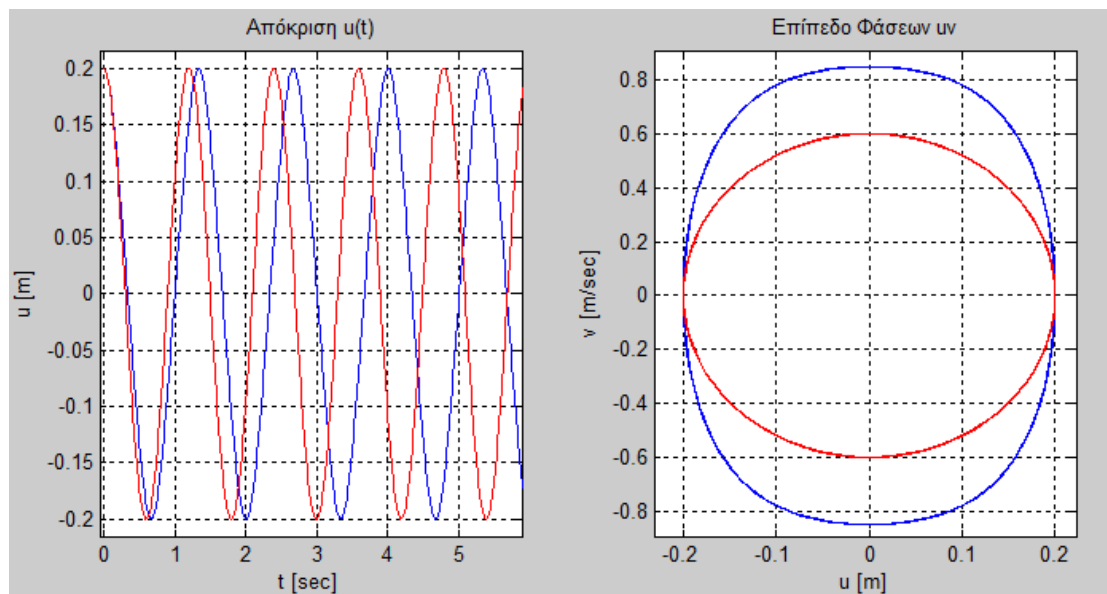
Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2$, $v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 0.1$
Κόκκινο	Multiple Scales	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$

Σχ. 3.1 : Σύγκριση Μεθόδων – Duffing 1



Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 0.4$
Κόκκινο	Multiple Scales	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$

Σχ. 3.2 : Σύγκριση Μεθόδων – Duffing 2



Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 2$
Κόκκινο	Multiple Scales	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$

Σχ. 3.3 : Σύγκριση Μεθόδων – Duffing 3

Στην περίπτωση που εφαρμόσουμε τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων για την αδιάστατη εξίσωση Duffing (2.36) [αναλυτικά στο Παράρτημα] :

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon\mu\dot{u} + \varepsilon u^3 = 0 \quad (3.85)$$

Ακολουθούμε τη διαδικασία που αναπτύχθηκε στην «εφαρμογή της μεθόδου». Η εξίσωση (3.51) παίρνει τη μορφή :

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -u_0^3 - 2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 \quad (3.86)$$

Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική μορφή του u_0 από τη σχέση (3.69), προσδιορίζουμε τη συνθήκη εκείνη ώστε να μην δημιουργούνται «αιώνιοι» όροι όπως η (3.73) :

$$2iA' + 3A^2\bar{A} + 2i\mu A = 0 \quad (3.87)$$

Με αντικατάσταση του A από τη σχέση (3.68) στην τελευταία παράγεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων :

$$\frac{d\alpha}{dT_1} = -\mu\alpha \quad (3.88) \quad \text{και} \quad \frac{d\beta}{dT_1} = \frac{3}{8}\alpha^2 \quad (3.89)$$

Η επίλυση του οδηγεί στον προσδιορισμό των α και β που είναι απαραίτητα για την προσεγγιστική λύση \tilde{u} που έχει τη μορφή της (3.54) :

$$\alpha = c_1 \cdot e^{-\mu T_1} \quad (3.90)$$

$$\beta = \frac{3}{16\mu} c_1^2 (2\mu c_2 - e^{-2\mu T_1}) \quad (3.91)$$

$$\tilde{u} = c_1 \cdot e^{-\mu T_1} \cdot \cos\left(T_0 + \frac{3}{16\mu} c_1^2 (2\mu c_2 - e^{-2\mu T_1})\right) \quad (3.92)$$

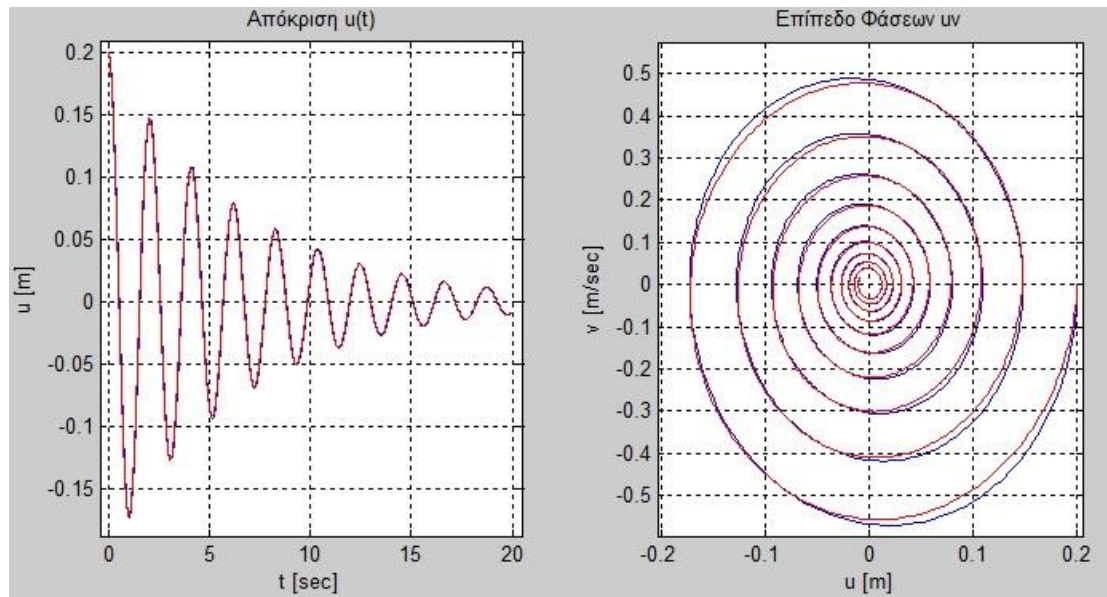
Επαναφέρουμε τα μη αδιάστατα μεγέθη u , t όπως φαίνονται στο κεφάλαιο 1.4.2 :

$$u(t) = U c_1 \cdot e^{-\varepsilon\mu\omega_0 t} \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{3}{16\mu} c_1^2 (2\mu c_2 - e^{-2\varepsilon\mu\omega_0 t})\right) \quad (3.93)$$

Σύμφωνα και με τις αρχικές συνθήκες $u_0 > 0$ και $v_0 = 0$ έχουμε τελικώς :

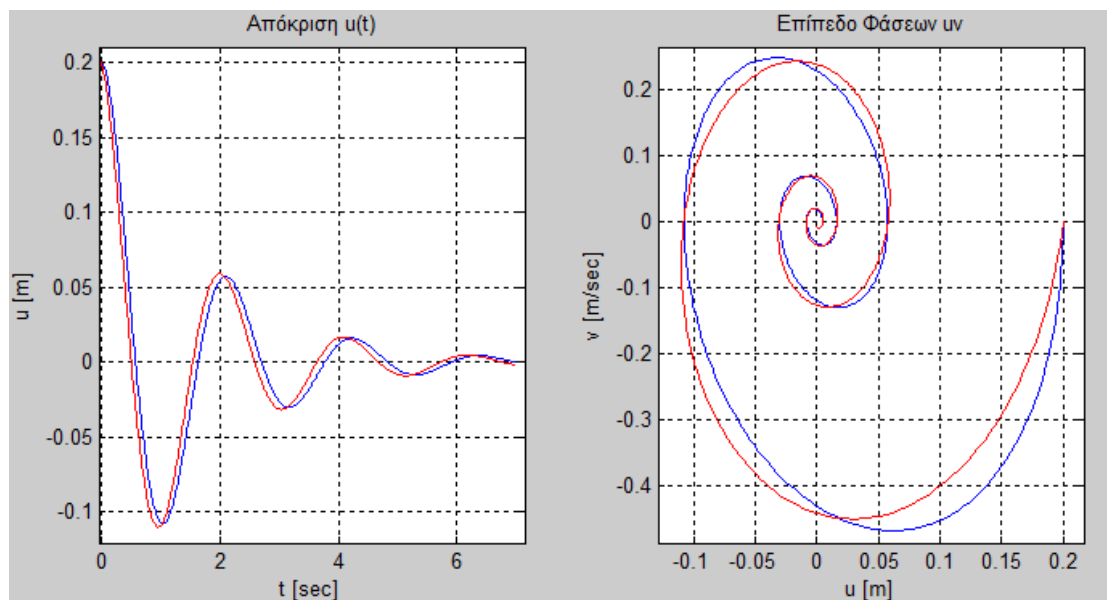
$$u(t) = u_0 e^{-\varepsilon\mu\omega_0 t} \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{3u_0^2}{16\mu U^2} (1 - e^{-2\varepsilon\mu\omega_0 t})\right) \quad (3.94)$$

Ακολουθεί σύγκριση των αποτελεσμάτων που έχουμε από την (3.94) και από την αριθμητική μέθοδο. Αριθμητικά δεδομένα : $\omega_0 = 3$, $U = 0.2$, $T = 1/3$.



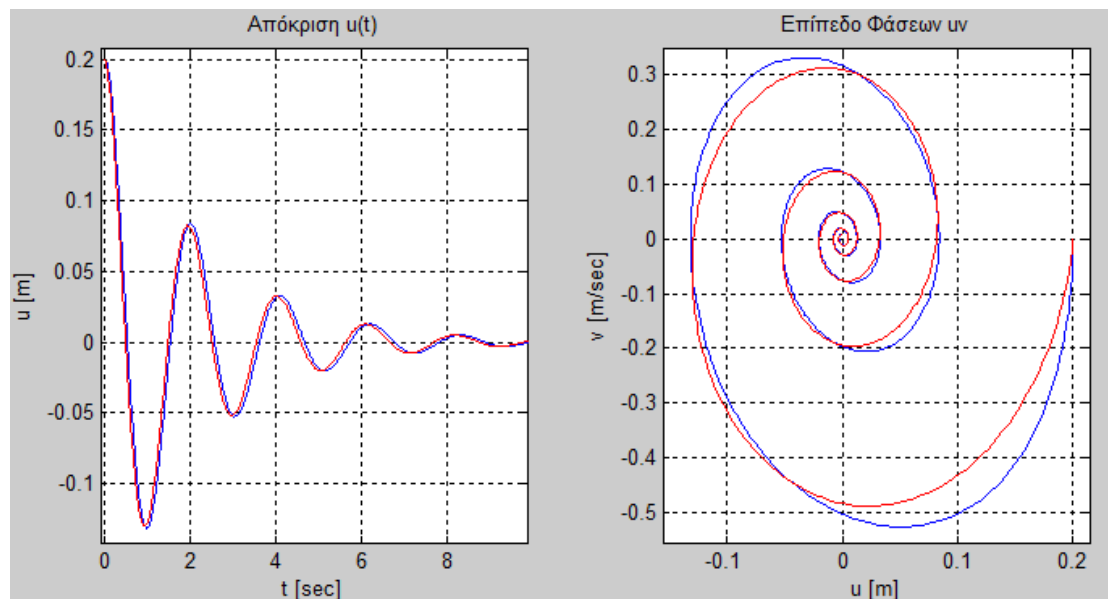
Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστές ϵ, μ	$\epsilon = 0.1, \mu = 0.5$
Κόκκινο	Multiple Scales	Όρος Απόσβεσης	$2\epsilon\mu = 0.1$

Σχ. 3.4 : Σύγκριση Μεθόδων – Duffing με απόσβεση 1



Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστές ϵ, μ	$\epsilon = 0.1, \mu = 2$
Κόκκινο	Multiple Scales	Όρος Απόσβεσης	$2\epsilon\mu = 0.4$

Σχ. 3.5 : Σύγκριση Μεθόδων – Duffing με απόσβεση 2



Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστές ε, μ	$\varepsilon = 0.3, \mu = 0.5$
Κόκκινο	Multiple Scales	Όρος Απόσβεσης	$2\varepsilon\mu = 0.3$

Σχ. 3.6 : Σύγκριση Μεθόδων – Duffing με απόσβεση 3

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Παρατηρώντας τα Σχ. 3.1 και Σχ. 3.2 βλέπουμε ότι η λύση (3.84) που προέκυψε με τη μέθοδο πολλαπλών χρονικών κλιμάκων αποτελεί καλή προσέγγιση για $\varepsilon = 0.1$ και $\varepsilon = 0.4$ ενώ για $\varepsilon = 2$ δεν μας δίνει καλά αποτελέσματα. Οσον αφορά στην προσεγγιστική λύση (3.94) της εξίσωσης Duffing με απόσβεση παρατηρούμε (Σχ. 3.5) ότι αποτελεί καλή προσέγγιση της αριθμητικής λύσης και για τιμές όπως $2\varepsilon\mu = 0.4$. Προφανώς στις περιπτώσεις ασθενούς μη γραμμικότητας ($\varepsilon = 0.1$) η ασυμπτωτική προσέγγιση είναι αποτελεσματική (Σχ. 3.4).

3.6. Μέθοδος Ολοκλήρωσης Ευρών & Φάσεων (Averaging Method)

Η μέθοδος αυτή προσεγγίζει από διαφορετική σκοπιά την επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης σε σχέση με τις μεθοδολογίες που αναπτύχθηκαν. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα της μεθόδου των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων (Multiple Time Scales) συμπίπτουν με αυτά της ολοκλήρωσης των ευρών και των φάσεων σε αρκετές περιπτώσεις (ισοδύναμες μέθοδοι).

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται η ειδική περίπτωση ολοκλήρωσης κατά κύκλους σταθερής μέσης περιόδου (περιοδική περίπτωση). Η μελέτη της γενικής περίπτωσης μπορεί να γίνει μέσα από το βιβλίο του Verhulst [9].

Προτού παρουσιαστεί η μέθοδος αναλυτικά και δοθεί παράδειγμα ώστε να γίνει κατανοητή, θα πρέπει να εκφραστούν όλα εκείνα τα στοιχεία που είχαν οδηγήσει στη διαισθητική εφαρμογή της από πολλά χρόνια, χωρίς να υπήρχε αυστηρή μαθηματική θεμελίωση.

Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων (Variation of Parameters) – Κανονική μορφή

Αν υποθέσουμε πως καλούμαστε να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση Duffing:

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (3.95)$$

τότε για $\varepsilon = 0$ γνωρίζουμε τη λύση του προβληματός μας. Συγκεκριμένα :

$$u = \alpha \cos(t + \beta) \quad (3.96) \quad \text{και} \quad \dot{u} = -\alpha \sin(t + \beta) \quad (3.97)$$

Οι παράμετροι α και β στις σχέσεις (3.96) και (3.97) είναι σταθερές.

Για $\varepsilon \neq 0$ θεωρούμε ότι για τη λύση της εξίσωσης (3.95) ισχύουν όμοιες σχέσεις :

$$u = \alpha(t) \cdot \cos(t + \beta(t)) \quad (3.98) \quad \text{και} \quad \dot{u} = -\alpha(t) \cdot \sin(t + \beta(t)) \quad (3.99)$$

Οι τελευταίες σχέσεις εισάγουν ένα μετασχηματισμό από $u(t)$ σε $\alpha(t)$ και $\beta(t)$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.98), όπου $\alpha(t)$ και $\beta(t)$ είναι συναρτήσεις, έχουμε:

$$\dot{u} = \frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \cos(t + \beta(t))) = \dot{\alpha} \cdot \cos(t + \beta) - \alpha(1 + \dot{\beta}) \cdot \sin(t + \beta) \quad (3.100)$$

Για να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (3.98) και (3.99) πρέπει :

$$\dot{\alpha} \cdot \cos(t + \beta) - \alpha(1 + \dot{\beta}) \cdot \sin(t + \beta) = -\alpha \cdot \sin(t + \beta) \quad (3.101)$$

$$\dot{\alpha} \cdot \cos(t + \beta) - \alpha \dot{\beta} \cdot \sin(t + \beta) = 0 \quad (3.102)$$

Το αρχικό πρόβλημα (3.95) εύρεσης της $u(t)$ μετασχηματίζεται στο σύστημα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \\ u = \alpha(t) \cdot \cos(t + \beta(t)) \\ \dot{\alpha} \cdot \cos(t + \beta) - \alpha \dot{\beta} \cdot \sin(t + \beta) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.103)$$

με αγνώστους τις συναρτήσεις $u(t)$, $\alpha(t)$ και $\beta(t)$. Αυτός ο τύπος μετασχηματισμού γίνεται με την προϋπόθεση ότι για $\varepsilon = 0$ η λύση της εκάστοτε αρχικής εξίσωσης (3.95) είναι γνωστή. Συνεπώς, η εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας δεν αποτελεί περίπτωση μόνο αυτής της εξίσωσης (3.95). Η τελευταία χρησιμοποιείται σαν παράδειγμα μόνο για να γίνει κατανοητός ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου.

Απαλείφουμε τη συνάρτηση $u(t)$ από το σύστημα (3.103), θέτοντας στη σχέση (3.95) τα u και \dot{u} από τις σχέσεις (3.98) και (3.99) αντίστοιχα :

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(-\alpha \cdot \sin(t + \beta)) + \alpha \cdot \cos(t + \beta) + \varepsilon (\alpha \cdot \cos(t + \beta))^3 = 0 \quad (3.104)$$

$$\dot{\alpha} \cdot \sin(t + \beta) + \alpha \dot{\beta} \cdot \cos(t + \beta) = \varepsilon \alpha^3 \cdot \cos^3(t + \beta) \quad (3.105)$$

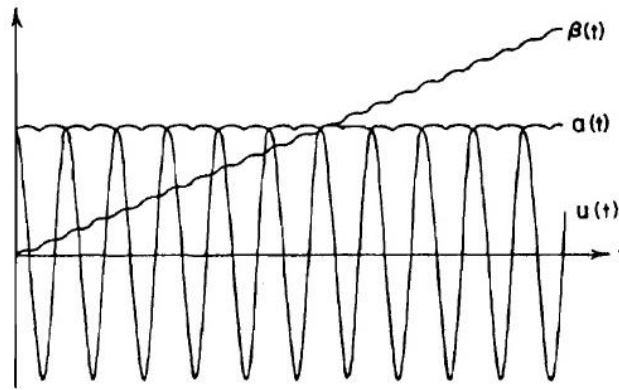
Από τις σχέσεις (3.102) και (3.105) δίνουμε, τελικώς, στο σύστημα (3.103) τη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \varepsilon \alpha^3 \cos^3(t + \beta) \cdot \sin(t + \beta) \\ \dot{\beta} = \varepsilon \alpha^2 \cos^4(t + \beta) \end{array} \right\} \quad (3.106)$$

Δώσαμε στο πρόβλημα μας την κανονική μορφή (3.106) (Standard Form) χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό πλάτους-εύρους (3.98) στα πλαίσια της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων. Συνεπώς, δεν έχει γίνει καμμία προσεγγιστική παραδοχή μέχρι στιγμής.

Μπορεί το σύστημα (3.106) να φαίνεται πιο σύνθετο από την αρχική εξίσωση (3.95) αλλά η ύπαρξη του μικρού « ε » βοηθάει στην επίλυση του. Πιο συγκεκριμένα, αν το « ε » είναι μικρός αριθμός τότε τα α και β μεταβάλλονται πιο αργά ως προς το χρόνο t από ότι η u (διότι οι παράγωγοι τους ως προς t είναι μικρής τάξης).

Αυτή η παρατήρηση βοηθάει τόσο τις αναλυτικές προσεγγίσεις (πχ Averaging Method) όσο και τις αριθμητικές επιλύσεις (πχ Runge-Kutta). Η αριθμητική επίλυση του συστήματος (3.106) που μπορεί να γίνει, λόγω της παρατήρησης, σε αραιότερα χρονικά διαστήματα επιβεβαιώνει τα ανωτέρω και μέσω σχήματος (Σχ. 3.7). Η αναλυτική προσέγγιση του προβλήματος μπορεί να γίνει ευκολότερα με τη βοήθεια της μεθόδου ολοκλήρωσης των ευρών και των φάσεων εξαλείφοντας την παράμετρο του χρόνου t μέσω της χρονικής ολοκλήρωσης της κανονικής μορφής του προβλήματος (παραγωγή εξισώσεων «μέσων όρων»).

Σχ. 3.7 : Μεταβολή των $\alpha(t)$, $\beta(t)$ και $u(t)$

Παραγωγή εξισώσεων «μέσων όρων» - Averaged Equations

Η απλούστερη μορφή της μεθόδου, που εφαρμόζεται στα προβλήματα μηχανικού, είναι η περίπτωση της περιοδικής ολοκλήρωσης. Η τελευταία εφαρμόζεται σε συστήματα όπως το (3.106) με γενική μορφή :

$$\dot{x} = \varepsilon \cdot f(x, t) \quad (3.107)$$

$$\text{με } x = [\alpha \quad \beta]^T \quad (3.108) \quad \& \quad f(x, t) = \left[\alpha^3 \cos^3(t + \beta) \cdot \sin(t + \beta) \quad \alpha^2 \cos^4(t + \beta) \right]^T \quad (3.109)$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση που έγινε (Σχ. 3.7) σε σχέση με τη μικρή μεταβολή των α και β , είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε τους μέσους όρους $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ των μεγεθών αυτών προκειμένου να προσδιορίσουμε μια προσεγγιστική λύση της (3.107). Αυτή η προσεγγιστική παραδοχή εφαρμόζεται μέσω της ολοκλήρωσης των όρων της σχέσης (3.107) ως προς το χρόνο t σε μια περίοδο T έτσι ώστε να μορφωθούν οι εξισώσεις «μέσων όρων». Αναλυτικά οι τελευταίες έχουν τη μορφή :

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{f}(z) \quad (3.110)$$

$$\text{με } \dot{z} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dx}{dt} ds = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{T} \int_0^T x ds \right) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{bmatrix} \quad (3.111) \quad \text{και} \quad \bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, s) ds \quad (3.112)$$

T : η περίοδος της συνάρτησης $f(x, t)$ για σταθερό x .

Αποδεικνύεται με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής ανάλυσης πως η λύση της (3.110) αποτελεί καλή προσέγγιση της αντίστοιχης λύσης της κανονική μορφής (3.107) για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το τελευταίο έχει ως αποτέλεσμα η μέθοδος της ολοκλήρωσης (Averaging Method) να εφαρμόζεται στα προβλήματα μηχανικού.

Συνεχίζουμε να εφαρμόζουμε τη μέθοδο που αναπτύχθηκε παραπάνω στη εξίσωση (3.95) προκειμένου να γίνει κατανοητή.

Αφου έχουμε δώσει στο πρόβλημα μας την κανονική μορφή (3.107) ισχύουν οι σχέσεις (3.108) και (3.109). Σε αυτό το σημείο πρέπει να συνθέσουμε το σύστημα (3.110) και να το επιλύσουμε.

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\bar{\alpha}^3 \cos^3(s + \bar{\beta}) \cdot \sin(s + \bar{\beta}) - \bar{\alpha}^2 \cos^4(s + \bar{\beta}) \right]^T ds \quad (3.113)$$

Σύμφωνα με το Παράρτημα ισχύει πως $T = \pi$ και η (3.113) παίρνει τη μορφή :

$$\bar{f}(z) = \left[0 \quad \frac{3}{8} \bar{\alpha}^2 \right]^T \quad (3.114)$$

Ύστερα από αντικατάσταση της $\bar{f}(z)$ στη σχέση (3.110) παράγεται το σύστημα:

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{f}(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\bar{\alpha}} \\ \dot{\bar{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \varepsilon \bar{\alpha}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\alpha}} = 0 \\ \dot{\bar{\beta}} = \frac{3}{8} \varepsilon \bar{\alpha}^2 \end{array} \right\} \quad (3.115)$$

Η επίλυση του τελευταίου συστήματος οδηγεί στις σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}(t) = \alpha_0 \\ \bar{\beta}(t) = \frac{3}{8} \varepsilon \alpha_0^2 t + \beta_0 \end{array} \right\} \quad (3.116)$$

Όπως είδαμε τα $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ είναι καλή προσέγγιση των $\alpha(t)$ και $\beta(t)$ αντίστοιχα:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \quad (3.117) \quad \text{και} \quad \beta(t) = \frac{3}{8} \varepsilon \alpha_0^2 t + \beta_0 \quad (3.118)$$

Η προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Duffing (3.95) σύμφωνα με τη (3.98) είναι :

$$u(t) = \alpha_0 \cos \left(t + \frac{3}{8} \varepsilon \alpha_0^2 t + \beta_0 \right) \quad (3.119)$$

Παρατηρούμε ότι βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα τόσο με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης των ευρών και των φάσεων (Averaging Method) όσο και με τη μέθοδο των χρονικών κλιμάκων (Multiple Scales) όπως φαίνεται από τη σχέση (3.65).

Εφαρμογή – Van der Pol

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης (Averaging Method) για τον προσδιορισμό μιας προσεγγιστικής λύσης της εξίσωσης Van der Pol.

$$\ddot{u} + u = \varepsilon(1 - u^2)\dot{u} \quad (3.120)$$

Θεωρώντας το μετασχηματισμό εύρους-φάσης (3.98) έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} + u - \varepsilon(1 - u^2)\dot{u} = 0 \\ u = \alpha(t) \cdot \cos(t + \beta(t)) \\ \dot{\alpha} \cdot \cos(t + \beta) - \alpha\dot{\beta} \cdot \sin(t + \beta) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.121)$$

Απαλείφοντας το $u(t)$ από το παραπάνω σύστημα έχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \cdot \sin(t + \beta) + \alpha\dot{\beta} \cdot \cos(t + \beta) = \varepsilon [1 - \alpha^2 \cos^2(t + \beta)] \alpha \sin(t + \beta) \\ \dot{\alpha} \cdot \cos(t + \beta) - \alpha\dot{\beta} \cdot \sin(t + \beta) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.122)$$

Δίνουμε την κανονική μορφή στο σύστημα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = \varepsilon \alpha \sin^2(t + \beta) - \varepsilon \alpha^3 \sin^2(t + \beta) \cos^2(t + \beta) \\ \dot{\beta} = \varepsilon \sin(t + \beta) \cos(t + \beta) - \varepsilon \alpha^2 \cos^3(t + \beta) \sin(t + \beta) \end{array} \right\} \quad (3.123)$$

Αυτό έχει τη μορφή (3.107) : $\dot{x} = \varepsilon \cdot f(x, t)$ με $x = [\alpha \ \beta]^T$ και

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} \alpha \sin^2(t + \beta) - \alpha^3 \sin^2(t + \beta) \cos^2(t + \beta) \\ \sin(t + \beta) \cos(t + \beta) - \alpha^2 \cos^3(t + \beta) \sin(t + \beta) \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Μορφώνουμε τις εξισώσεις «μέσων όρων» (Averaged Equations), οι οποίες έχουν τη

μορφή (3.110): $\dot{z} = \varepsilon \bar{f}(z)$ με $z = [\bar{\alpha} \ \bar{\beta}]^T$ (3.125) και $\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, s) ds$ (3.126)

όπου T : η περίοδος της συνάρτησης $f(x, t)$ για σταθερό x .

Αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος (3.126) γίνεται στο Παράρτημα.

$$\bar{f}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{\alpha} - \frac{1}{8} \bar{\alpha}^3 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.127)$$

Το σύστημα των εξισώσεων με αγνώστους τα $\bar{\alpha}$ και $\bar{\beta}$ είναι :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \varepsilon \bar{\alpha} \left(1 - \frac{1}{4} \bar{\alpha}^2 \right) \\ \dot{\bar{\beta}} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.128)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να διακρίνουμε τη συμπεριφορά του ταλαντωτή Van der Pol. Οι τιμές $\bar{\alpha} = 0$ και $\bar{\alpha} = 2$ μηδενίζουν το $\dot{\bar{\alpha}}$ σύμφωνα με τη σχέση (3.128). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να είναι κρίσιμα σημεία. Αν η αρχική τιμή του εύρους είναι $\bar{\alpha} = 2$ τότε το σώμα εκτελεί ταλάντωση της μορφής :

$$u(t) = 2 \cdot \cos(t + \beta_0) \quad (3.129)$$

ενώ αν είναι $\bar{\alpha} = 0$ έχουμε αστάθεια της λύσης.

Για οποιεσδήποτε άλλες τιμές λύνουμε το σύστημα (3.128) και βρίσκουμε :

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_0 \cdot e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}} \quad (3.130) \quad \text{και} \quad \bar{\beta} = \beta_0 \quad (3.131)$$

Η προσεγγιστική λύση της (3.120) είναι η συνάρτηση :

$$u(t) = \frac{\alpha_0 \cdot e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}} \cdot \cos(t + \beta_0) \quad (3.132)$$

Αυτή η λύση τείνει προς τη (3.129) καθώς ο χρόνος μεγαλώνει. Για λόγους εποπτικότητας η προηγούμενη παρατήρηση παρουσιάζεται μέσα από το επίπεδο φάσεων.

Αριθμητική εφαρμογή – Van der Pol

Η εξίσωση (3.132) αποτελεί προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Van der Pol (3.120) σύμφωνα με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης (Averaging Method). Επαναφέρουμε τα μη αδιάστατα μεγέθη προκειμένου να έχουμε μια εικόνα πραγματικών διαστάσεων. Ισχύει :

$$\tilde{u}(t) = \frac{\alpha_0 \cdot e^{\frac{1}{2}\varepsilon \tilde{t}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha_0^2(e^{\varepsilon \tilde{t}} - 1)}} \cdot \cos(\tilde{t} + \beta_0) \quad (3.133)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.23) και (1.25) :

$$u(t) = \frac{\alpha_0 U \cdot e^{\frac{1}{2}\varepsilon \omega_0 t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha_0^2(e^{\varepsilon \omega_0 t} - 1)}} \cdot \cos(\omega_0 t + \beta_0) \quad (3.134)$$

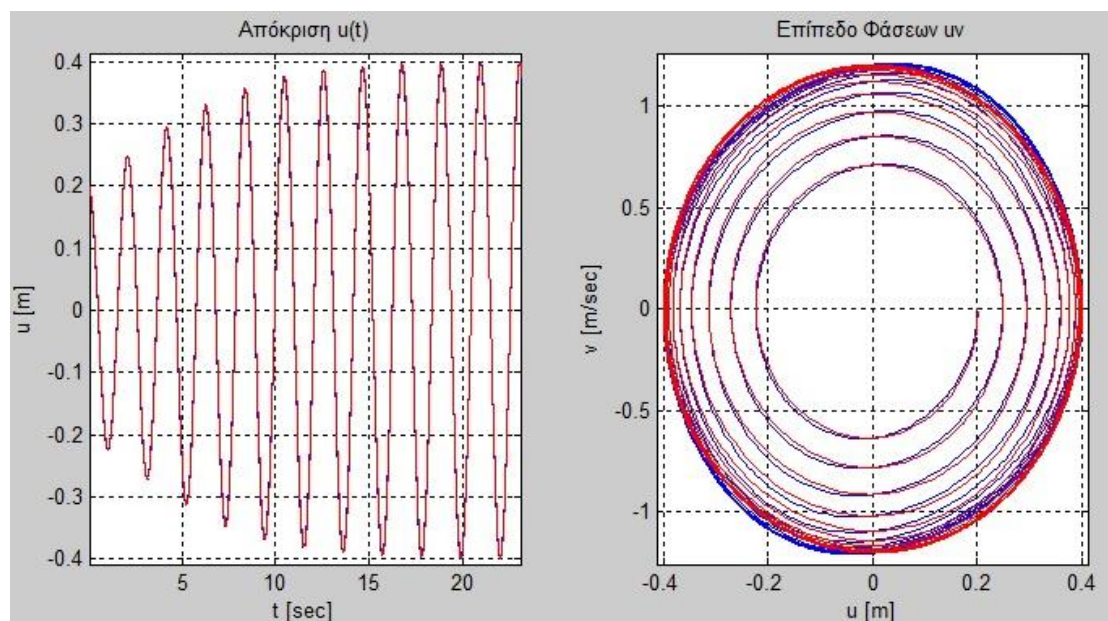
Από τις αρχικές συνθήκες $u_0 > 0$ και $v_0 = 0$ προσδιορίζουμε τα α_0 και β_0 :

$$\alpha_0 = \frac{u_0}{U} \quad (3.135) \quad \text{και} \quad \beta_0 = 0 \quad (3.136)$$

Η εξίσωση (3.81) παίρνει, τελικώς, τη μορφή :

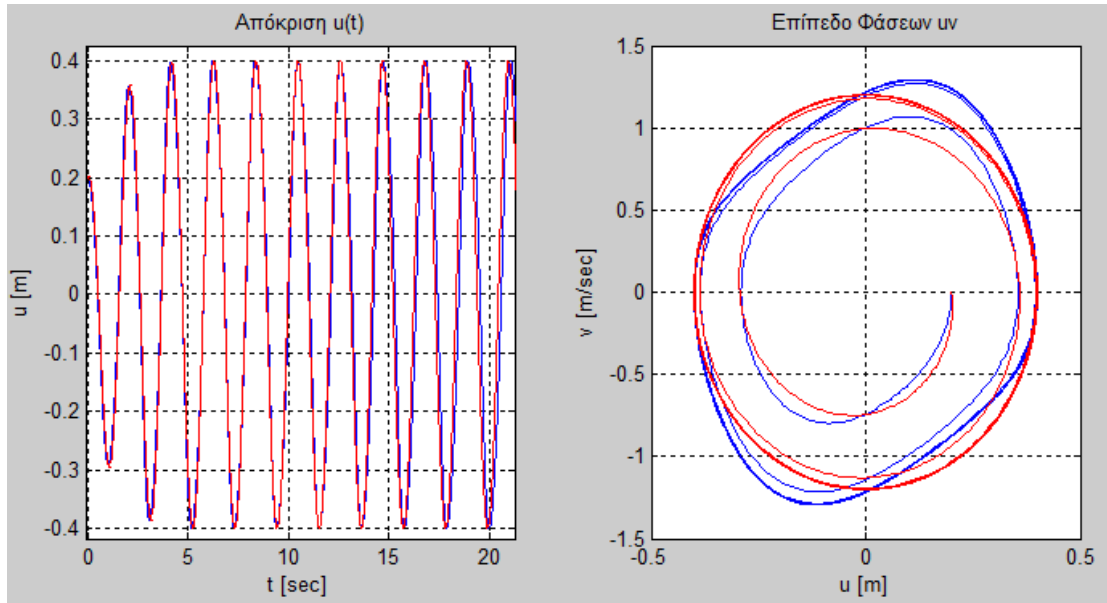
$$u(t) = \frac{u_0 \cdot e^{\frac{1}{2}\varepsilon\omega_0 t}}{\sqrt{1 + \frac{u_0^2}{4U^2}(e^{\varepsilon\omega_0 t} - 1)}} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (3.137)$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα που εξάγουμε από τη (3.137) για διάφορα χαρακτηριστικά προβλήματα της εξίσωσης Van der Pol. Παράλληλα, γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα από τη αριθμητική μέθοδο Runge-Kutta ώστε να γίνει κατανοητός ο βαθμός προσέγγισης της (3.137) στη λύση της (3.120). Σε όλα τα προβλήματα που ακολουθούν επιλέγουμε ως χαρακτηριστικά μεγέθη αδιαστατοποίησης $U = 0.2$, $T = 1/3$.



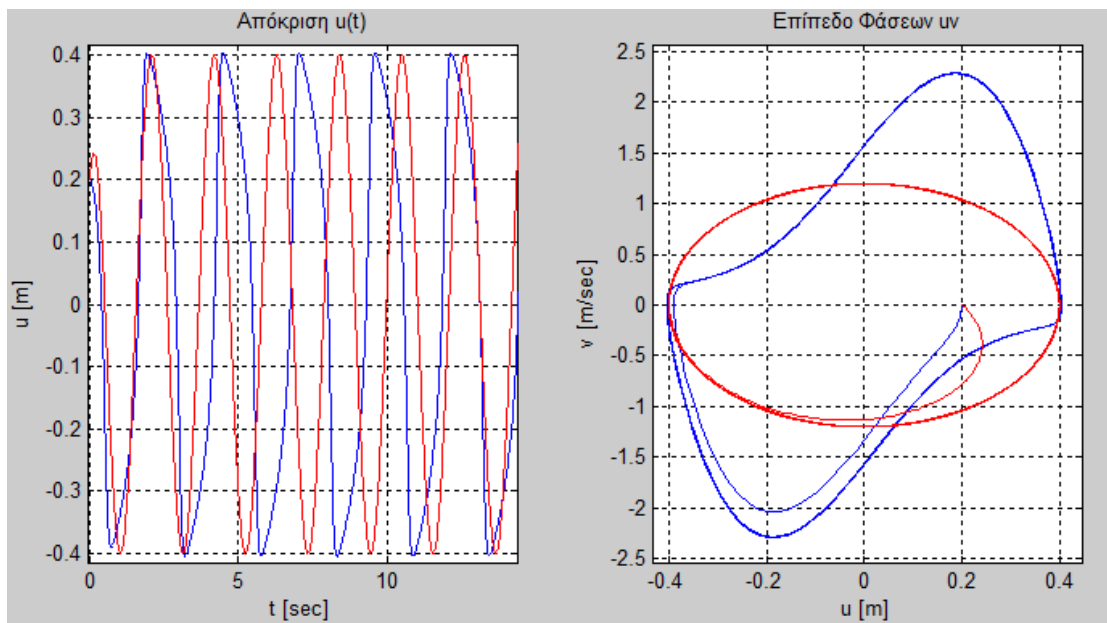
Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2$, $v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 0.1$
Κόκκινο	Averaging	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$

Σχ. 3.8 : Σύγκριση Μεθόδων – Van der Pol 1



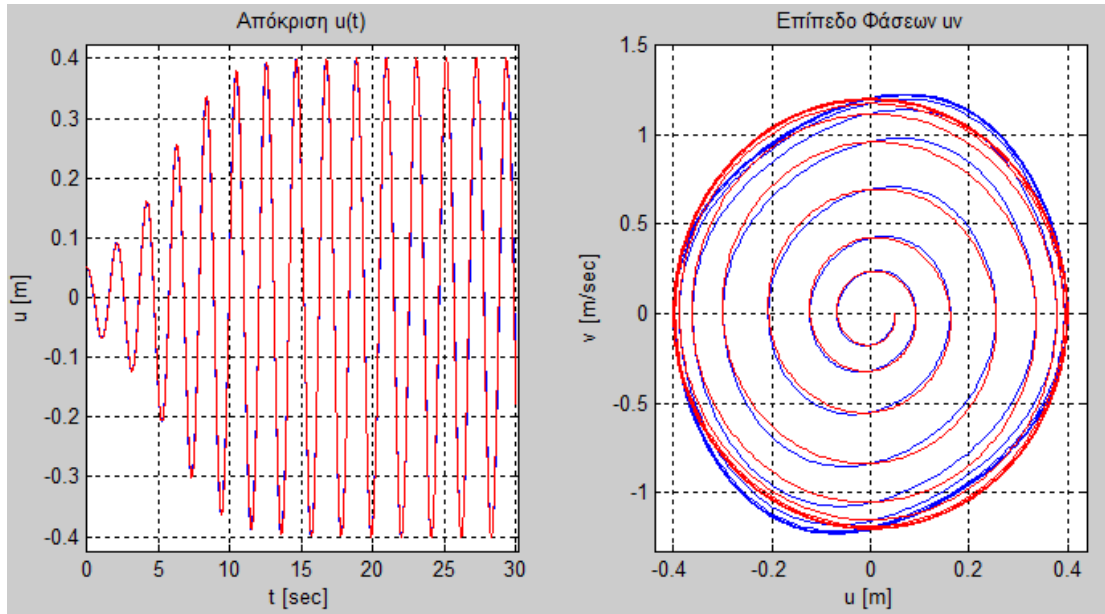
Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 0.4$
Κόκκινο	Averaging	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$

Σχ. 3.9 : Σύγκριση Μεθόδων – Van der Pol 2



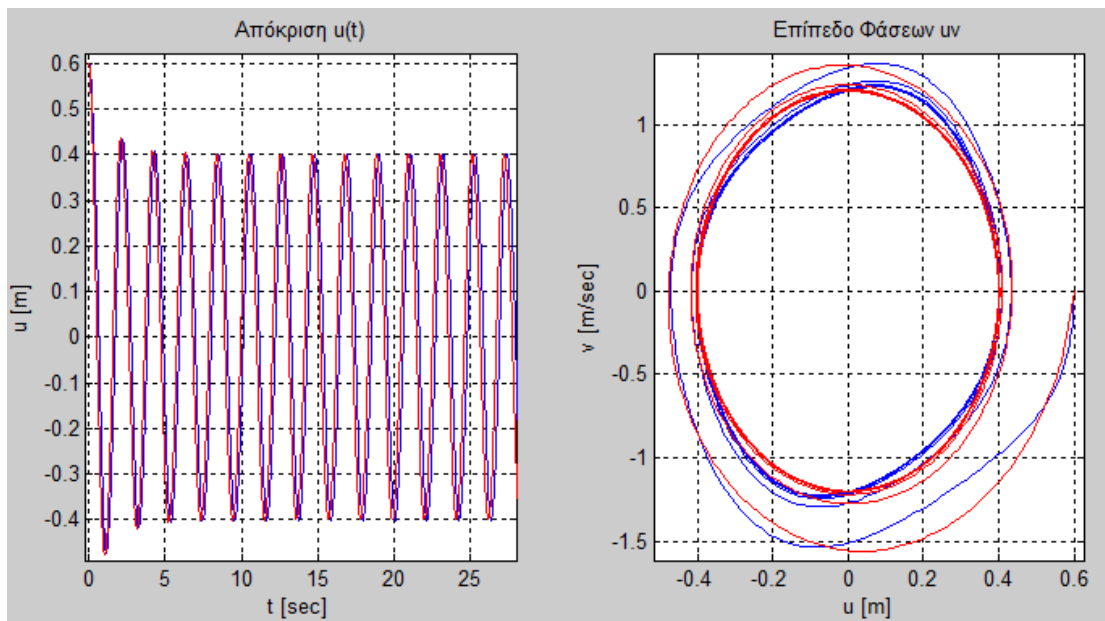
Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.2, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 2$
Κόκκινο	Averaging	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$

Σχ. 3.10 : Σύγκριση Μεθόδων – Van der Pol 3



Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.05, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 0.2$
Κόκκινο	Averaging	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$

Σχ. 3.11 : Σύγκριση Μεθόδων – Van der Pol 4



Σύγκριση Μεθόδων		Υπόλοιπα χαρακτηριστικά ταλαντωτή	
Χρώμα	Περίπτωση	Αρχικές Σύνθήκες	$u_0 = 0.6, v_0 = 0$
Μπλέ	Runge-Kutta	Συντελεστής ε	$\varepsilon = 0.2$
Κόκκινο	Averaging	Γωνιακή Συχνότητα	$\omega_0 = 3$

Σχ. 3.12 : Σύγκριση Μεθόδων – Van der Pol 5

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η απεικόνιση της συμπεριφοράς του ταλαντωτή Van der Pol για διάφορες τιμές του « ε » γίνεται μέσα από τα Σχ. 3.8, Σχ. 3.9 και Σχ. 3.10. Για μικρές τιμές του « ε » όπως στην περίπτωση του Σχ. 3.8 η αριθμητική λύση και η αναλυτική λύση (3.137) περιγράφουν συστήματα με παρόμοια συμπεριφορά. Οι διαφορές αρχίζουν να είναι αρκετά ορατές στην περίπτωση του Σχ. 3.9 και γίνονται έντονες για $\varepsilon=2$ (Σχ. 3.10). Η ασυμπτωτική μέθοδος, όπως περιμέναμε, αστοχεί για τιμές του « ε » αρκετά μακριά του $\varepsilon=0$. Η λύση (3.137) αδυνατεί να δώσει τη μορφή της αριθμητικής επίλυσης (Σχ. 3.10) που παρατηρείται στο επίπεδο φάσεων.

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η εξίσωση Van der Pol με την πάροδο του χρόνου οδηγείται σε μια μόνιμη κατάσταση. Με τα παραδείγματα που εμφανίζονται στα Σχ. 3.11 και Σχ. 3.12 παρατηρούμε ότι το παραπάνω φαινόμενο αποτυπώνεται τόσο από την αριθμητική λύση όσο και από την λύση (3.137) που προήλθε από τη μέθοδο ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων. Από τα τελευταία σχήματα είναι ορατός και ο οριακός κύκλος των συστημάτων.

4.1. Εισαγωγή

4.1.1. Συστήματα ελέγχου απόκρισης – Σεισμική μόνωση

Τα ισχυρά σεισμικά φαινόμενα ανέκαθεν αποτελούν έναν από τους μεγαλύτερους φόβους του ανθρώπου, τόσο για την αδυναμία πρόβλεψής τους, όσο και για τις καταστροφικές συνέπειες που επιφέρουν. Προκειμένου να μην τεθούν σε κίνδυνο ανθρώπινες ζωές, ο πολιτικός μηχανικός καλείται να προσδιορίσει αποτελεσματικές μεθόδους αντιμετώπισης των συνεπειών ενός σεισμού. Οι τελευταίες έχουν ως στόχο κυρίως τον έλεγχο της απόκρισης των κατασκευών κατά τη διάρκεια ενός σεισμικού γεγονότος έτσι ώστε οι ζημιές στο φέροντα οργανισμό να μην προκαλούν κατάρρευση του.

Ο έλεγχος της σεισμικής απόκρισης των κατασκευών επιτυγχάνεται με τη χρήση κατάλληλων συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα, στα συστήματα ενεργητικού ελέγχου ενεργοποιούνται μηχανισμοί επιβολής δυνάμεων στην κατασκευή προκειμένου να επιτευχθεί ο σκοπός τους. Αντίθετα, τα συστήματα παθητικού ελέγχου λειτουργούν χωρίς εξωτερική ενεργειακή τροφοδοσία και έχουν σχετικά μικρό κόστος. Τέλος, τα υβριδικά συστήματα αποτελούν συνδυασμό των δύο παραπάνω κατηγοριών.

Η σεισμική μόνωση αποτελεί μέρος της ευρύτερης επιστημονικής περιοχής του παθητικού ελέγχου της σεισμικής απόκρισης των κατασκευών. Η πρώτη εφαρμογή της μεθόδου χρονολογείται παραπάνω από έναν αιώνα πριν στην Ιαπωνία. Ακολουθεί ένας ορισμός της έννοιας «σεισμική μόνωση» έτσι ώστε να γίνει κατανοητό το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.

Ορισμός – Σεισμική Μόνωση

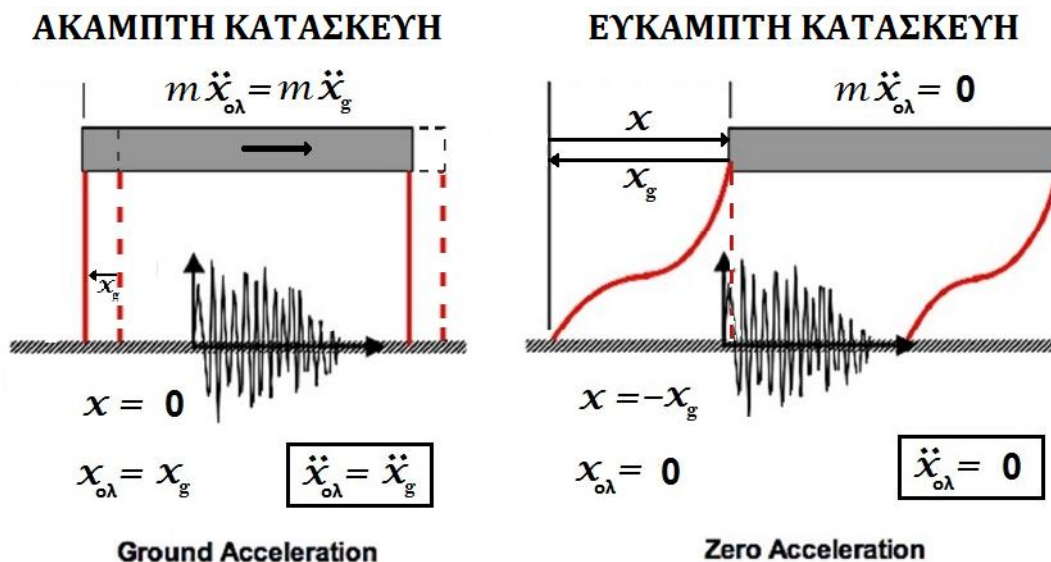
Με τον όρο «σεισμική μόνωση» νοείται η τοποθέτηση ειδικών συσκευών (μονωτήρων) στη βάση της κατασκευής ή σε άλλη ενδεδειγμένη θέση, με σκοπό την απορρόφηση μεγάλου μέρους της σεισμικής ενέργειας. Οι μονωτήρες απομονώνουν την κατασκευή από το έδαφος και είναι αρκετά εύκαμπτοι. Με τον τρόπο αυτό η ανωδομή αναλαμβάνει σημαντικά μικρότερο μέρος των σεισμικών φορτίων, αποκρινόμενη συνήθως ελαστικά, εκδηλώνοντας μικρές σχετικές μετακινήσεις και εντάσεις στα δομικά στοιχεία.

4.1.2. Αρχές και απαιτήσεις της σεισμικής μόνωσης

Η βασική ιδέα της σεισμικής μόνωσης στηρίζεται στη λογική διαχωρισμού της κατασκευής από το έδαφος θεμελίωσης, έτσι ώστε το τελευταίο να μπορεί να κινείται χωρίς να μεταδίδει αυτές τις κινήσεις στην ανωδομή.

Με τον όρο «κατασκευή» σε αυτό το κεφάλαιο αναφερόμαστε τόσο για κτίρια όσο και για μεμονωμένα αντικείμενα όπως τα εκθέματα μουσείων. Εφόσον τόσο το θεωρητικό υπόβαθρο όσο και η ιδέα της προστατευτικής μεθόδου έναντι σεισμού δεν διαφοροποιούνται στις δύο περιπτώσεις «κατασκευών» που διακρίναμε, θα διατυπωθούν παρακάτω οι αρχές της σεισμικής μόνωσης με παραδείγματα που σχετίζονται με κτίρια.

Εξετάζοντας δύο ακραία παραδείγματα παρουσιάζεται ο τρόπος λειτουργίας της σεισμικής μόνωσης :



Σχ. 4.1 : Δύο ακραίες περιπτώσεις κατασκευών

- Άκαμπτη κατασκευή

Ένα τελείως άκαμπτο σώμα έχει μηδενική ιδιοπερίοδο. Σε αυτήν την περίπτωση, όταν το έδαφος κινείται, η ολική επιτάχυνση $\ddot{x}_{ολ}$ που εισάγεται στην κατασκευή είναι ίση με αυτή του κινούμενου εδάφους \ddot{x}_g όπως φαίνεται από το Σχ. 4.1.

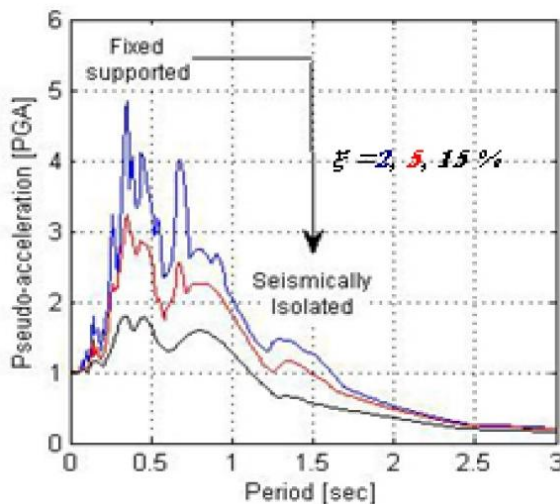
Η τελευταία ισότητα αποδεικνύεται αν παρατηρήσουμε ότι η σχετική μετακίνηση x μεταξύ της κορυφής της κατασκευής και της θεμελίωσης της είναι μηδενική. Με αυτό το δεδομένο, η σχέση της ολικής μετατόπισης απλοποιείται δηλαδή $x_{ολ} = x + x_g = x_g$ από το οποίο συνεπάγεται ότι $\ddot{x}_{ολ} = \ddot{x}_g$. Οι αδρανειακές δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι $m\ddot{x}_{ολ} = m\ddot{x}_g$.

- Εύκαμπτη κατασκευή

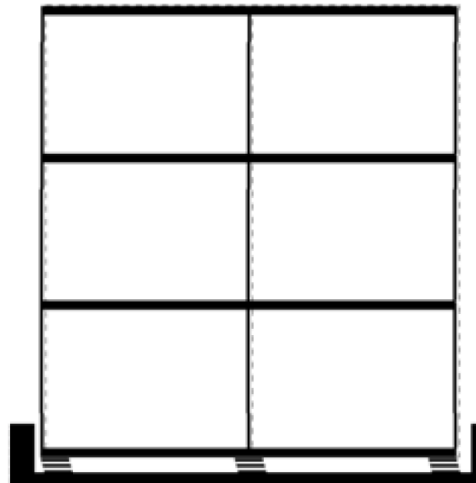
Στο αντίθετο άκρο, μια τελείως εύκαμπτη κατασκευή θα έχει άπειρη ιδιοπερίοδο και λόγω της μεγάλης ευκαμψίας η επιτάχυνση $\ddot{x}_{ολ}$ που θα εισάγεται στην κατασκευή θα είναι μηδέν.

Σύμφωνα με το Σχ. 4.1, η σχετική μετακίνηση x της μάζας m θα είναι ίση με τη μετακίνηση του εδάφους x_g κατά απόλυτη τιμή αλλά επειδή θα έχουν και αντίθετες κατευθύνσεις ισχύει ότι $x = -x_g$. Έτσι πρακτικά, η μάζα δεν θα κινείται αφού η ολική μετατόπιση ($x_{ολ} = x + x_g = -x_g + x_g = 0$) θα είναι μηδενική ενώ το έδαφος θα κινείται (κίνηση θεμελίωσης x_g). Οι αδρανειακές δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι $m\ddot{x}_{ολ} = 0$ δηλαδή μηδενικές.

Οι δύο αυτές ακραίες περιπτώσεις απεικονίζονται και στο φάσμα απόκρισης (Σχ. 4.2) το οποίο κατασκευάζεται για μια δεδομένη σεισμική διέγερση και διάφορες ιδιοπεριόδους του συστήματος.



Σχ. 4.2 : Φάσμα απόκρισης



Σχ. 4.3 : Κατασκευή με μονωτήρες

Παρατηρώντας το φάσμα και έχοντας μια εικόνα της συμπεριφοράς της κατασκευής κατά τις δύο ακραίες θεωρητικές περιπτώσεις, μπορούμε να αντιληφθούμε τον τρόπο που η σεισμική μόνωση αντιμετωπίζει τους σεισμούς. Συγκεκριμένα, κάνοντας πιο εύκαμπτη τη κατασκευή μας (η ιδιοπερίοδος αυξάνεται) η φασματική επιτάχυνση μειώνεται όπως φαίνεται από τη μετατόπιση της θεμελιώδους ιδιοπεριόδου μιας κατασκευής. Τα σεισμικά φορτία που καταπονούν την κατασκευή μας μειώνονται αισθητά αφού εξαρτώνται από τις ολικές επιταχύνσεις.

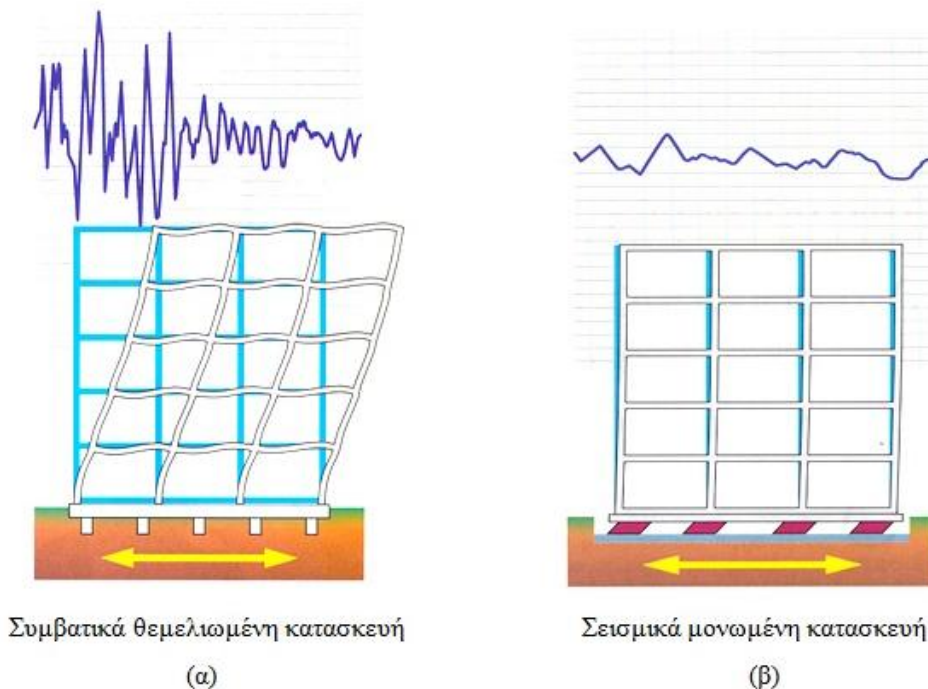
Ο σχεδιασμός γίνεται έτσι ώστε η κατασκευή να μη βρεθεί, με μια γενικά αποδεκτή πιθανότητα, σε μια κατάσταση που γενικά θεωρείται απαράδεκτη και έχει ονομασθεί οριακή κατάσταση. Σε γενικευμένη συμβολική μορφή η απαίτηση αυτή πληρούται όταν ισχύει η ανίσωση ασφαλείας με μεγάλη πιθανότητα :

$$\text{Δράσεις } S \leq \text{Αντοχές } R \quad (4.1)$$

Η σεισμική μόνωση στοχεύει στη μείωση των σεισμικών δράσεων που καταπονούν τις κατασκευές σε αντίθεση με τις συμβατικές μεθόδους σχεδιασμού όπου αυξάνουν τις αντοχές της κατασκευής. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να ισχύει η ανίσωση ασφαλείας (4.1).

Όλα τα παραπάνω υλοποιούνται κατασκευαστικά με την εισαγωγή στο επίπεδο της θεμελίωσης «ειδικών στοιχείων» τους μονωτήρες οι οποίοι στην οριζόντια διεύθυνση είναι σημαντικά πιο εύκαμπτοι από την ανωδομή. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε όλες οι μετακινήσεις της κατασκευής να συγκεντρώνονται στο επίπεδο της θεμελίωσης, αποφεύγοντας έτσι τις διαφορικές μετακινήσεις μεταξύ των ορόφων, οι οποίες δημιουργούν βλάβες στα φέροντα στοιχεία.

Όπως φαίνεται από το φάσμα, η ύπαρξη απόσβεσης έχει ευεργητικό ρόλο στη μείωση της επιτάχυνσης. Εκμεταλλευόμαστε την τελευταία παρατήρηση με τη χρήση ορισμένων ειδών σεισμικών μονώσεων που προσδίδουν στην κατασκευή επιπλέον απόσβεση έτσι ώστε να καταναλωθεί σεισμική ενέργεια σε κάθε κύκλο ταλάντωσης.



Σχ. 4.4 : Απόκριση συμβατικής (α) και μονωμένης (β) κατασκευής

Γενικές απαιτήσεις σεισμικής μόνωσης

Το σύστημα σεισμικής μόνωσης καλείται να παρέχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Ευκαμψία στο επίπεδο σεισμικής μόνωσης, ώστε να «απομακρυνθεί» η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της κατασκευής από τις δεσπόζουσες συχνότητες των σεισμικών καταγραφών
2. Απόσβεση, η οποία θα απορροφήσει μεγάλο μέρος της σεισμικής ενέργειας και θα περιορίσει τις μεγάλες οριζόντιες μετατοπίσεις
3. Αντίσταση στα φορτία λειτουργίας, αφού το σύστημα μόνωσης πρέπει να δεσμεύει την κατασκευή κατά τη φόρτιση της από οριζόντια φορτία όπως του ανέμου ή των μικρών σεισμών.

4.2. Εφαρμογές της σεισμικής μόνωσης

Ο σχεδιασμός με βάση τις αρχές και τις απαιτήσεις της σεισμικής μόνωσης πραγματοποιείται με διαφορετικούς τύπους μονωτήρων ανάλογα με το είδος της κατασκευής που θέλουμε να μονωθεί. Αρχικά παρουσιάζουμε σε ποιες κατασκευές χρησιμοποιούμε μονωτήρες ενώ στη συνέχεια δίνουμε κάποια είδη χαρακτηριστικών μονωτήρων.

4.2.1. Χρήσεις της μόνωσης

Ακολουθούν κάποια είδη κατασκευών στα οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αρχές της σεισμικής μόνωσης προκειμένου να τα προστατέψουμε.

1. Κτιριακές Κατασκευές

Αν και αποτελούν τις συνηθέστερες περιπτώσεις κατασκευών, η εφαρμογή της σεισμικής μόνωσης γίνεται κυρίως σε έργα υψηλής σπουδαιότητας (Σχ. 4.4). Με τη σεισμική μόνωση σε αυτή την περίπτωση επιτυγχάνουμε :

- ✓ Οι απόλυτες επιταχύνσεις των ορόφων όσο και οι σχετικές μετακινήσεις μεταξύ των ορόφων να μειωθούν σημαντικά.
- ✓ Οι παραμορφώσεις να περιορισθούν στους σεισμικούς μονωτήρες οι οποίοι σχεδιάζονται ειδικά για να μπορούν να παραλάβουν τέτοιες παραμορφώσεις προσφέροντας υψηλά επίπεδα απόσβεσης
- ✓ Να περιορισθούν σημαντικά οι βλάβες στην ανωδομή διότι οι σεισμικές δυνάμεις που ασκούνται στη μονωμένη κατασκευή είναι αρκετά μικρές με αποτέλεσμα τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη να είναι μικρά.
- ✓ Να προστατευθεί ο σημαντικός εξοπλισμός, που ενδεχομένως να στεγάζεται στο κτίριο, λόγω των πολύ χαμηλών απόλυτων (ολικών) επιταχύνσεων του ορόφου.

2. Γέφυρες

Η χρήση της σεισμικής μόνωσης παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο σχεδιασμό των γεφυρών λόγω του ότι οι κατασκευές αυτές αποτελούν έργα ειδικής σπουδαιότητας.

Διαφορές σεισμικής μόνωσης σε κτίρια και γέφυρες

➤ Φιλοσοφία σχεδιασμού

Υπάρχει ένα πλήθος χαρακτηριστικών που διαφέρουν στις γέφυρες σε σχέση με τα κτίρια και που επηρεάζουν τη φιλοσοφία σχεδιασμού της σεισμικής μόνωσης.

Τα σημαντικότερα από τα τελευταία χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω :

- Η μεγαλύτερη μάζα της γέφυρας είναι συγκεντρωμένη στην ανωδομή στο επίπεδο του καταστρώματος.
- Τα ακρόβαθρα και τα βάθρα καταπονούνται αρκετά από τα σεισμικά φορτία λόγω της θέσης των εφεδράνων.
- Η σεισμική αντοχή της κατασκευής είναι συνήθως διαφορετική στις δύο κύριες οριζόντιες διευθύνσεις της γέφυρας (διαμήκης και εγκάρσια)
- Οι γέφυρες σχεδιάζονται για να φέρουν με ασφάλεια ισχυρά οριζόντια φορτία και παραμορφώσεις όπως είναι τα φορτία ανέμου, φορτία πέδησης, ο ερπυσμός και η συστολή ξήρανσης.

➤ Στόχος της σεισμικής μόνωσης

Ο αντικειμενικός στόχος της σεισμικής μόνωσης μιας γέφυρας διαφέρει από το στόχο μιας κτιριακής κατασκευής. Όπως είδαμε παραπάνω, σε ένα κτίριο η σεισμική μόνωση σχεδιάζεται για τη μείωση των αδρανειακών δυνάμεων στην ανωδομή με στόχο να μειώσει τις απαιτήσεις αντοχών των φερόντων στοιχείων. Από την άλλη, μια γέφυρα είναι κατά κανόνα σεισμικά μονωμένη στην κορυφή των βάθρων και στη βάση της διατομής του καταστρώματος. Ο σκοπός της μόνωσης είναι να προστατέψει τα βάθρα κάτω από τη μόνωση μέσω της μείωσης των αδρανειακών δυνάμεων που μεταφέρονται από την ανωδομή.

Πιο συγκεκριμένα, σε μια κοιλαδογέφυρα, που η θεμελιώδης ιδιοπερίοδος είναι αρκετά μεγάλη, εκμεταλλευόμαστε την απόσβεση του συστήματος προκειμένου να απομειωθούν οι σεισμικές δυνάμεις και κατ' επέκταση να μειωθεί η τέμνουσα βάση στα βάθρα.

3. Μεμονωμένα αντικείμενα

Ένα σεισμικό γεγονός δεν έχει μόνο συνέπειες στο φέροντα οργανισμό μιας κτιριακής κατασκευής αλλά και στα αντικείμενα που βρίσκονται στο εσωτερικό της. Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου το περιεχόμενο ενός κτιρίου έχει μεγάλη αξία και η προστασία του έναντι σεισμού είναι επιτακτική. Γι' αυτό το λόγο, μετά την αξιοποίηση της σεισμικής μόνωσης (αρχές και απαιτήσεις) για τις κτιριακές κατασκευές και τις γέφυρες επιχειρήθηκε η εφαρμογή της σε αντικείμενα. Η χρήση της μεθόδου στο συγκεκριμένο τομέα είναι σαφώς μικρότερη από ότι στον τομέα των υπόλοιπων κατασκευών, όμως η αποδοχή της αυξάνεται σταδιακά και κρίνεται απαραίτητη για την εξασφάλιση της ακεραιότητας συστημάτων, εξοπλισμών, και αντικειμένων, είτε αυτά βρίσκονται σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις είτε αποτελούν ανεκτίμητης αξίας δείγματα πολιτισμού, ως εκθέματα σε μουσεία.

Ο σεισμικός μονωτήρας που θα εξετάσουμε στην παρούσα εργασία προτείνεται για την προστασία εκθεμάτων μουσείων λόγω των κατασκευαστικών χαρακτηριστικών που διαθέτει.

Σεισμική προστασία έργων τέχνης – εκθεμάτων μουσείων



Σχ. 4.5 : Σεισμική μόνωση σε αμφορέα

Τα εκθέματα μπορούν να διαχωριστούν ανάλογα με το είδος τους και το υλικό τους σε άκαμπτα όπως για παράδειγμα μια μαρμάρινη προτομή και σε εύκαμπτα όπως ένα πίνακας ζωγραφικής. Το τελευταίο χαρακτηριστικό καθορίζει τον τρόπο απόκρισης υπο τα δυναμικά φορτία που εισάγει ο σεισμός. Στην περίπτωση που δεν μονωθούν τα εκθέματα, κινδυνεύουν από ανατροπή, ολίσθηση ή ακόμα και θραύση εάν η εσωτερική ένταση που αναπτύσσεται ξεπεράσει την αντοχή.

Η εφαρμογή της σεισμικής μόνωσης μέσω ειδικού συστήματος για εκθέματα έγινε αρχικά στο μουσείο J.Paul Getty στο Malibu της California. Συγκεκριμένα, το σύστημα δοκιμάστηκε μέσω πειραμάτων σε σεισμικές τράπεζες και εφαρμόστηκε για την προστασία εύθραυστων συλλογών.

Όπως είδαμε υπάρχουν κάποιες γενικές απαιτήσεις της σεισμικής μόνωσης ώστε το σύστημα που την παρέχει να έχει κατάλληλες ιδιότητες και αποτελεσματική χρήση. Στην περίπτωση εφαρμογής της σε εκθέματα μουσείων διατυπώνονται κάποιες ειδικές απαιτήσεις λόγω της φύσης του προβλήματος που αντιμετωπίζει ο μηχανικός. Οι τελευταίες επιβάλλουν στο σχεδιασμό του συστήματος κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά (προδιαγραφές). Αρα οι μονωτήρες πρέπει να έχουν:

- ✓ Προσαρμοστικότητα σε χώρο του μουσείου – Μικρές διαστάσεις
- ✓ Ισόποση απορρόφηση ενέργειας σε κάθε διεύθυνση
- ✓ Αποφυγή απότομης ταλάντωσης του εκθέματος & κατακόρυφων μετατοπίσεων
- ✓ Επαναφορά στην αρχική θέση
- ✓ Μη πραγματοποίηση μεγάλων μετατοπίσεων υπο μικρή σεισμική δύναμη

4.2.2. Είδη συστημάτων σεισμικής μόνωσης

Με ένα σεισμικό μονωτήρα επιτυγχάνεται μείωση της δυσκαμψίας της κατασκευής και, αν είναι επιθυμητό ή αναγκαίο, σημαντική αύξηση της απόσβεσης. Συνεπώς διακρίνουμε τρεις κατηγορίες συστημάτων σεισμικής μόνωσης :

- ✓ Συστήματα μείωσης της δυσκαμψίας
- ✓ Συστήματα αύξησης της απόσβεσης
- ✓ Συστήματα ταυτόχρονης μείωσης της δυσκαμψίας και αύξησης της απόσβεσης

Οι χρήσεις της σεισμικής μόνωσης που διατυπώθηκαν επηρεάζουν τα είδη των σεισμικών μονωτήρων μέσα από τις απαιτήσεις που ορίζουν σε κάθε περίπτωση. Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούν τα βασικά είδη ανάλογα με τις παραπάνω κατηγορίες συστημάτων σεισμικής μόνωσης.

Συστήματα μείωσης της δυσκαμψίας

Τα περισσότερο διαδεδομένα συστήματα σεισμικής μόνωσης για τη μείωση της δυσκαμψίας της κατασκευής αποτελούνται από :

1. ελαστομεταλλικά εφέδρανα, με το ελαστομερές να είναι είτε φυσικής είτε τεχνητής προέλευσης (νεοπρένιο).
2. εφέδρανα ολίσθησης, με χρήση τεφλόν (PTFE) και ανοξειδώτου χάλυβα στην επιφάνεια ολίσθησης. Χρησιμοποιούν ολισθαίνοντα στοιχεία ανάμεσα στη θεμελίωση και τη βάση κατασκευής.

Ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα για την κάθε περίπτωση συστήματος.

1. Ελαστομεταλλικά εφέδρανα (Rubber Bearings)

Τα κοινά ελαστομεταλλικά εφέδρανα (ELB) αποτελούνται από αλληπάλληλες στρώσεις ελαστομερούς (πάχος 1-2 cm) και χαλύβδινων πλακών (Steel Shims). Οι διαφορετικές στρώσεις βρίσκονται σε συνάφεια μεταξύ τους. Οι πλάκες τοποθετήθηκαν μεταξύ των ελαστομερών διότι παρατηρήθηκαν μεγάλες παραμορφώσεις όταν τα εφέδρανα φορτίζονταν από μεγάλα κατακόρυφα φορτία (φαινόμενο Bulging). Τα ελαστομεταλλικά εφέδρανα διαθέτουν μεγάλη κατακόρυφη δυσκαμψία ενώ στην οριζόντια διεύθυνση είναι εύκαμπτα λόγω της παρουσίας των ελαστομερών. Ένα από τα βασικά τους μειονεκτήματα είναι η μικρή απόσβεση, η οποία οδήγησε στο σχεδιασμό νέων εφεδράνων (LRB).

2. Εφέδρανα ολίσθησης (Sliding Systems)

i. Επίπεδη επιφάνεια ολίσθησης

Τα εφέδρανα επίπεδης ολίσθησης αποτελούν την πιο παλιά τεχνολογία σεισμικής μόνωσης και βασίζονται στην ιδέα της ολίσθησης της κατασκευής πάνω σε μια επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ , ο οποίος έχει καθοριστική σημασία για τη μόνωση. Στην περίπτωση αυτή επιτυγχάνεται ο διαχωρισμός του εδάφους από την κατασκευή, όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής τριβής. Τόσο η μέγιστη επιτάχυνση όσο και η δύναμη που μπορεί να ασκηθεί στη βάση (μW) είναι καθορισμένες και αρκετά μικρότερες από την περίπτωση πακτωμένης βάσης. Η χρήση αυτού του συστήματος δεν προσφέρει τη δύναμη επαναφοράς ώστε να επιστρέψει η κατασκευή στην αρχική της θέση. Ο συνδυασμός αυτού του συστήματος με άλλα που προσφέρουν και την επαναφορά κρίνεται αποτελεσματικότερος αφού ικανοποιεί περισσότερες από τις απαιτήσεις της σεισμικής μόνωσης.

ii. Συστήματα τριβής – εκκρεμούς (Friction Pendulum System , FPS)

Το σύστημα σφαιρικής ολίσθησης (FPS) είναι ένα ολισθαίνον σύστημα μόνωσης στο οποίο το βάρος της κατασκευής στηρίζεται σε σφαιρικές ολισθαίνουσες επιφάνειες που ολισθαίνουν σχετικά μεταξύ τους όταν η εδαφική κίνηση υπερβεί ένα κατώτατο όριο κατωφλίου. Η δύναμη επαναφοράς προκαλείται με ελαφριά ανύψωση του κτιρίου όταν συμβεί ολίσθηση στη κοίλη επιφάνεια. Η κατασκευή, λοιπόν, έχει τη δυνατότητα της αυτοεπαναφοράς στην αρχική της θέση μετά το πέρας του σεισμού.



Σχ. 4.6 : FPS σε μέγιστη απομάκρυνση από αρχική θέση (έλεγχος μετατοπίσεων)

Συστήματα αύξησης της απόσβεσης

Για τις περιπτώσεις όπου οι σεισμικοί μονωτήρες δεν διαθέτουν επαρκή απόσβεση έχουν αναπτυχθεί συστήματα απόσβεσης όπως :

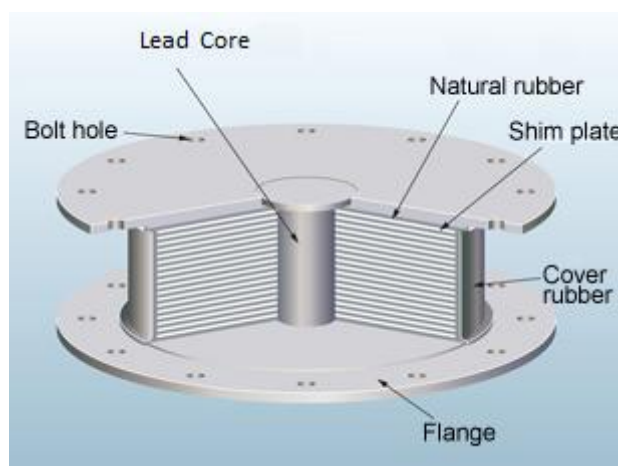
1. Υστερητικοί αποσβεστήρες
Βασίζονται στην διαρροή μεταλλικών στοιχείων χάλυβα ή μολύβδου μέσω εφελκυσμού, διάτμησης, στρέψης ή και εξόλκευσης.
2. Ιξώδεις αποσβεστήρες
Βασίζονται στην αρχή του αμορτισέρ με χρήση υγρού.
3. Αποσβεστήρες ολίσθησης
Βασίζονται στην απορρόφηση ενέργειας μέσω τριβής.

Συστήματα ταυτόχρονης μείωσης της δυσκαμψίας και αύξησης της απόσβεσης

Γίνεται αναφορά μόνο στον πιο συνηθισμένο τύπο μονωτήρα που ανήκει σε αυτήν την κατηγορία. Μπορούν να βρεθούν πληροφορίες για τους υπόλοιπους τύπους στη βιβλιογραφία.

➤ Ελαστομεταλλικά εφέδρανα με πυρήνα μολύβδου (Lead Rubber Bearing , LRB)

Αυτός ο τύπος εφεδράνου αποτελεί τροποποίηση των ELB γι αυτό έχουν πολλές ομοιότητες με αυτά. Συγκεκριμένα, ένα εφέδρανο LRB αποτελείται από στρώσεις φυσικού ελαστικού, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται λεπτά χαλύβδινα φύλλα και από έναν κυλινδρικό πυρήνα μολύβδου. Τα μεταλλικά αυτά φύλλα περιορίζουν την πλευρική διόγκωση του ελαστικού όταν ασκούνται κατακόρυφα φορτία ενώ η οριζόντια διατμητική ακαμψία δεν επηρεάζεται από αυτά. Η συνεργασία του ελαστικού με τον μολύβδο παρέχει στο σύστημα τα κατάλληλα χαρακτηριστικά ενός μονωτήρα. Για τα οριζόντια σεισμικά φορτία, το ελαστικό εμφανίζει μια σχεδόν τέλεια ελαστική συμπεριφορά με μικρή ακαμψία που ενεργοποιείται κυρίως μετά τη διαρροή του δύσκαμπτου μολύβδου που συμπεριφέρεται ελαστικά στην αρχή και τελείως πλαστικά αφού διαρρεύσει (χωρίς κράτυνση).



Σχ. 4.7 : Εφέδρανο LRB σε τομή

Για μικρά σχετικά φορτία (όπως τα φορτία λειτουργίας) ο πυρήνας μολύβδου τα αναλαμβάνει χωρίς να διαρρεύσει με μικρές μη αισθητές παραμορφώσεις προσφέροντας μια δύναμη επαναφοράς στο σύστημα. Καθώς τα φορτία αυξάνονται ο μολύβδος διαρρέει και η δυσκαμψία του συστήματος εξαρτάται μόνο από τις στρώσεις του ελαστικού. Η μείωση της οριζόντιας ακαμψίας που πραγματοποιείται έχει σαν αποτέλεσμα την μετατόπιση της ιδιοπεριόδου της κατασκευής και την πτώση των αδρανειακών δυνάμεων που της ασκούνται.

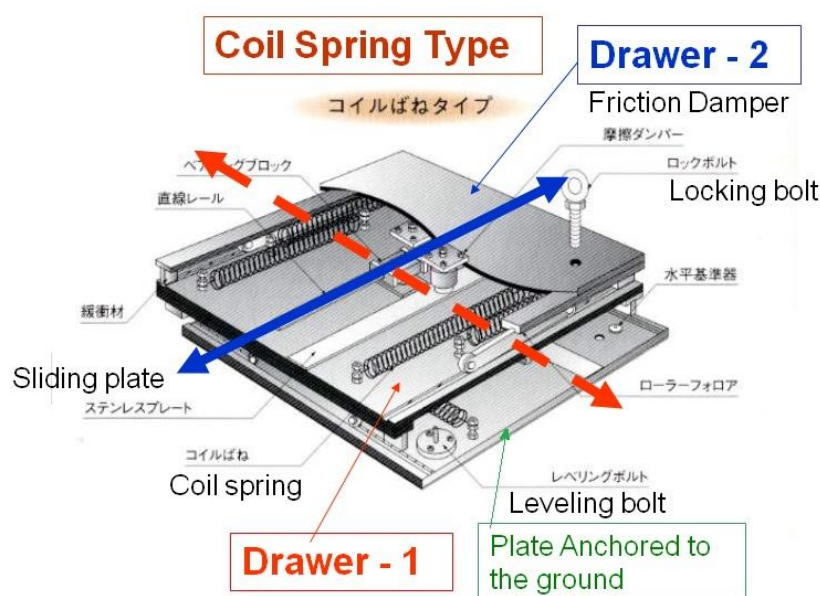
Για τα εκθέματα μπορούν είτε να χρησιμοποιηθούν κάποια από τα παραπάνω είδη εφεδράνων (πχ LRB) είτε να κατασκευαστούν πρωτότυπα όπως η επόμενη διάταξη.

4.3. Περιγραφή εξεταζόμενης διάταξης

4.3.1. Κατασκευαστικά Χαρακτηριστικά

Η μορφή του μονωτήρα που θα μελετηθεί παρακάτω, πάνω στον οποίο μπορούν να τοποθετηθούν εκθέματα μουσείων, είναι τετραγωνικού σχήματος. Η εξωτερική γεωμετρία του (μορφή του) είναι κατάλληλη ώστε αφενός να τοποθετηθεί αυτός επί εκθεσιακού βάθρου και αφετέρου να δεχθεί πάνω του (πακτωμένα) το έκθεμα του μουσείου χωρίς να αλλοιώνεται η αισθητική του (προσαρμοστικότητα σε χώρο).

Εστιάζοντας στα επιμέρους τμήματα που απαρτίζουν τον μονωτήρα, επισημαίνεται αρχικά ότι αποτελείται από τρία μη συμπαγή μεταλλικά πλαίσια, που έχουν τοποθετηθεί το ένα πάνω στο άλλο. Τα τελευταία συνθέτουν μία «συσταρωτή» διάταξη (Σχ. 4.8) μιας και επιτρέπεται η ολίσθηση των δύο ανώτερων πλαισίων επί των υποκειμένων τους (αλλά σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις).

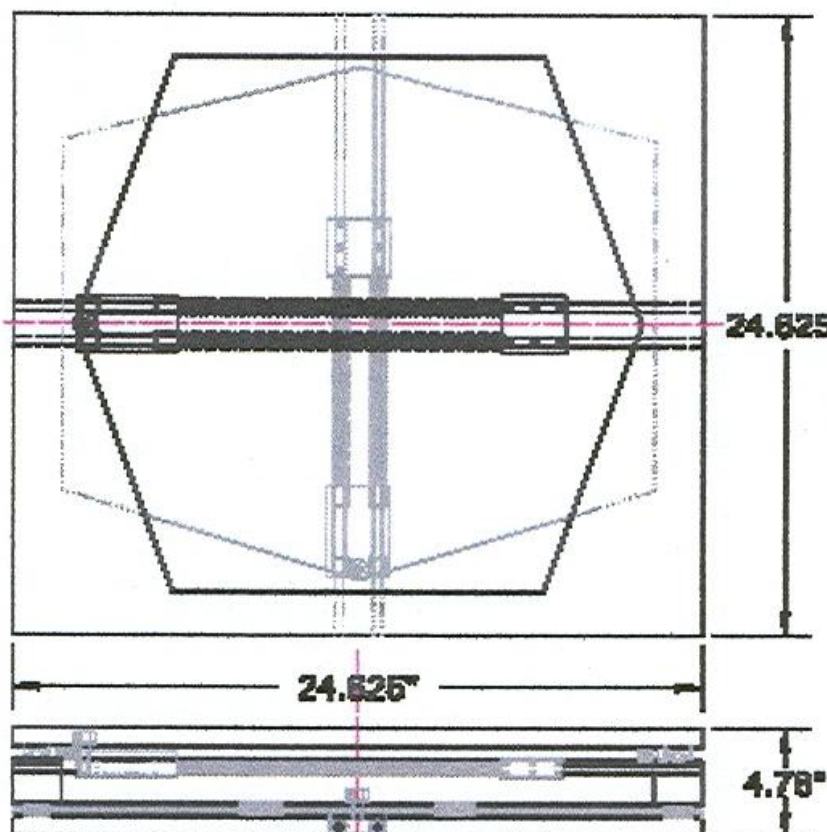


Σχ. 4.8 : Παράδειγμα συσταρωτής διάταξης μονωτήρα (Shimizu Isolator)

Πιο συγκεκριμένα,

- το πλαίσιο βάσεως συνδέεται με το εκθεσιακό βάθρο.
- το μεσαίο πλαίσιο έχει τη δυνατότητα να ολισθαίνει επί του πλαισίου βάσεως και σε οριζόντια πάντα διεύθυνση, μέσω ειδικών τριβένων κυλίσεως (sliding bearings)
- το ανώτερο μεταλλικό πλαίσιο ολισθαίνει ελεύθερα μέσω παρόμοιου τρόπου (τριβένων κυλίσεως) επί του μεσαίου πλαισίου, σε διεύθυνση κάθετη από αυτή που ολισθαίνει το μεσαίο πλαίσιο.

Η απλοποιημένη ανάλυση και η επιτυχής λειτουργία της διάταξης στηρίζονται ακριβώς στην παραπάνω σύνδεση των πλαισίων. Η οριζόντια κίνηση που εκτελεί το ανώτερο πλαίσιο είναι κάθετη με αυτή του μεσαίου με αποτέλεσμα τα δύο αυτά πλαίσια να επιτρέπουν μετακινήσεις σε δύο μη συζευγμένες μεταξύ τους διευθύνσεις. Επιπρόσθετα, οι ράγες κυλίσεως αποτρέπουν την ανύψωση κατά την εγκάρσια διεύθυνση, προστατεύοντας έτσι το έκθεμα από πιθανά φαινόμενα ανατροπής κατά την κίνηση των πλαισίων.



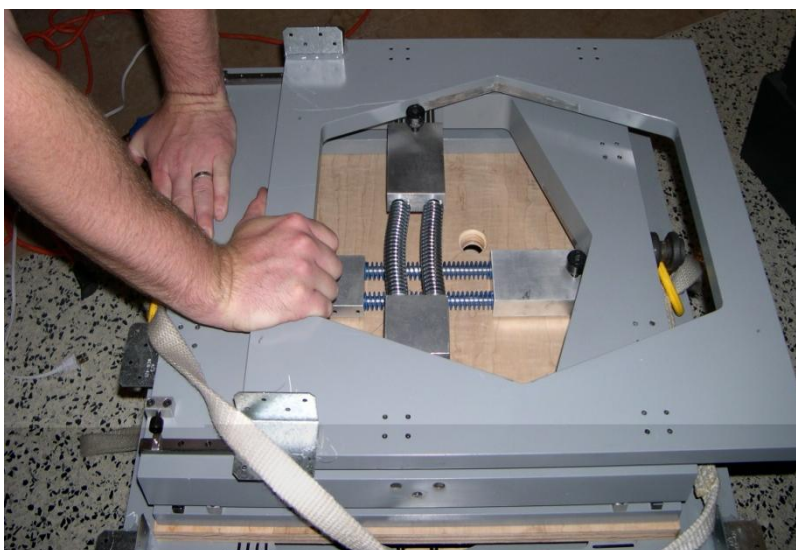
Σχ. 4.9 : Κάτοψη και όψη του μονωτήρα

Προκειμένου η διάταξη μας να λειτουργεί ως σεισμική μόνωση χρειαζόμαστε αφενός δυνάμεις επαναφοράς και αφετέρου δυνάμεις αποσβέσεως.

4.3.2. Δυνάμεις Επαναφοράς

Τοποθετώντας ειδικούς μηχανισμούς με ελατήρια στο εσωτερικό των μεταλλικών πλαισίων επιτυγχάνεται η ελαστική λειτουργία του μονωτήρα και στις δύο διευθύνσεις. Οι δύο ομάδες των ελατηρίων, ανάλογα με την ολίσθηση του άνω ή μεσαίου πλαισίου, συσπειρώνονται ή αποσυσπειρώνονται ξεχωριστά (αποσυζευγμένες κινήσεις).

Με αυτόν τον τρόπο παρέχεται στο σύστημα η απαιτούμενη δύναμη επαναφοράς ώστε τα εκτρεπόμενα από τη σεισμική δύναμη πλαίσια να επανέρχονται στην αρχική τους θέση.



Σχ. 4.10 : Το εσωτερικό του μονωτήρα-Μηχανισμός επαναφοράς σε λειτουργία

Πιο συγκεκριμένα και επικουρικά με τα σχέδια (Σχ. 4.9) και τις εικόνες, περιγράφονται οι ειδικοί μηχανισμοί με τα ελατήρια, που βρίσκονται κάθετα στη διεύθυνση κίνησης των πλαισίων στα οποία ασκούν δυνάμεις επαναφοράς. (Συνεπώς και κάθετοι μεταξύ τους οι μηχανισμοί).

Οι ειδικοί μηχανισμοί για κάθε πλαίσιο αποτελούνται από:

- i. Ελατήρια
- ii. Οδηγούς-ράβδους
- iii. Σφαιρικά κύλιστρα

Τα ελατήρια βρίσκονται επί των οδηγών-ράβδων. Τοποθετούμε ίδιο αριθμό οδηγών-ράβδων και ελατηρίων (συνήθως δύο) αφού κάθε ελατήριο περικλείει έναν οδηγό (ράβδος).

Οι οδηγοί-ράβδοι των οποίων τα ελατήρια θα συσπειρωθούν με την κίνηση του άνω πλαισίου είναι αυτές που είναι συγκολλημένες στο εσωτερικό του μεσαίου πλαισίου. Αυτές των οποίων τα ελατήρια θα συσπειρωθούν με την κίνηση του μεσαίου πλαισίου βρίσκονται στο εσωτερικό του πλαισίου της βάσεως.

Οι οδηγοί-ράβδοι είναι συνεχείς και χωρίς δυνατότητα κυλίσεως επι των πλαισίων αλλά έχουν οπωσδήποτε κατάλληλη θέση ώστε τα ελατήρια που τις περιβάλλουν να μπορούν να συσπειρωθούν ελεύθερα.

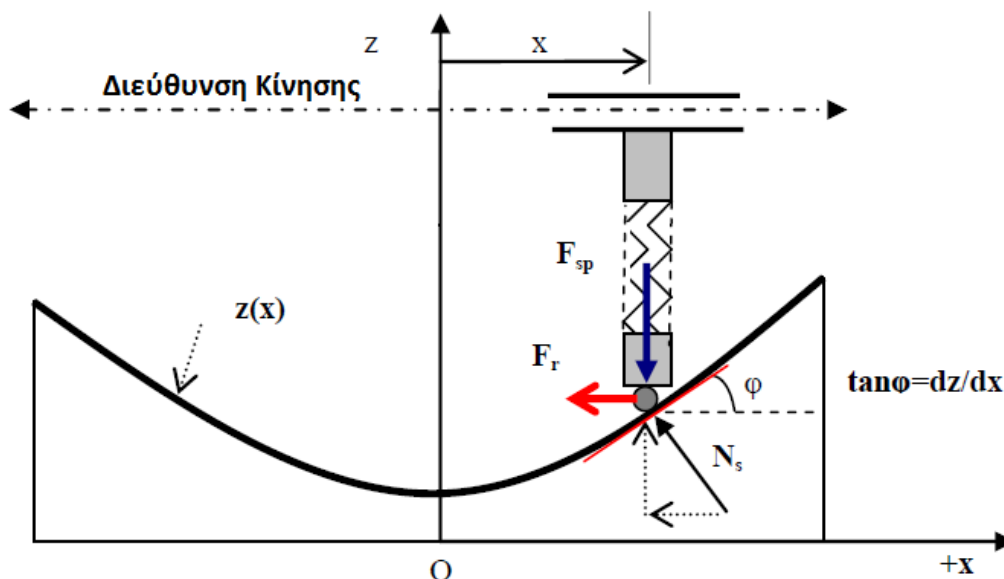
Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια σφαιρικών κύλιστρων που συνδέονται μέσω μεταλλικών στοιχείων ορθογωνίου σχήματος με τις οδηγούς-ράβδους του εκάστοτε υποκείμενου πλαισίου. Συγκεκριμένα, τα ορθογώνια μεταλλικά στοιχεία μπορούν να ολισθαίνουν επι των οδηγών-ράβδων πάνω στις οποίες βρίσκονται τα ελατήρια, προκαλώντας με αυτόν τον τρόπο την παραμόρφωση τους.

Τα σφαιρικά κύλιστρα κυλίνουν επι καμπύλης στην εσωτερική παρειά των πλαισίων. Στη γενική περίπτωση αυτή η καμπύλη είναι παραβολή μορφής :

$$z(x) = \alpha x^2 + \beta |x| + \gamma \quad (4.2)$$

Συνεπώς, όλο το σύστημα που δημιουργεί δυνάμεις επαναφοράς απεικονίζεται στο Σχ. 4.11 και λειτουργεί ως εξής :

Καθώς εκτρέπεται, επι παραδείγματι, το άνω πλαίσιο του συστήματος λόγω μιας σεισμικής δύναμης, ένας σφαιροτριβέας (σφαιρικό κύλιστρο) κυλίνεται επι της εν γένει παραβολικής καμπύλης που πρακτικά έχει κατασκευαστεί στην εσωτερική παρειά του πλαισίου. Μόλις το άνω πλαίσιο κινηθεί έστω κατά x , ο σφαιροτριβέας θα βρεθεί σε μια θέση της παραβολής που απέχει οριζόντια απόσταση x και κατακόρυφη απόσταση $z(x)$ από την αρχική θέση του. Αυτή η σχετική κίνηση (φαινομενική) του σφαιροτριβέα θα εξαναγκάσει αφενός το ορθογωνικό εξάρτημα να ολισθήσει κατά μήκος των οδηγών-ράβδων και αφετέρου τα εν παραλλήλω τοποθετημένα ελατήρια να συσπειρωθούν κατά τμήμα $z(x)$. Το τελευταίο τμήμα είναι ίσο με την κατακόρυφη απόσταση που θα απέχει ο τριβέας από την αρχική του θέση (δηλαδή) για μηδενική μετατόπιση του πλαισίου.



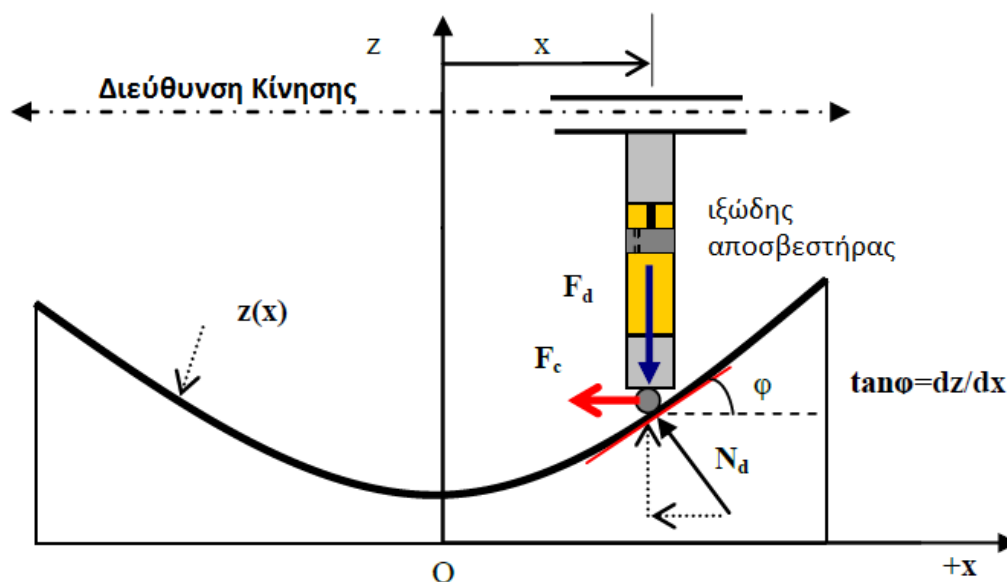
Σχ. 4.11 : Γεωμετρία της καμπύλης-Δύναμη επαναφοράς F_r

4.3.3. Δυνάμεις Αποσβέσεως

Τοποθετώντας ιξώδεις αποσβεστήρες στο εσωτερικό των πλαισίων επιτυγχάνεται σημαντική μείωση των εντός του μονωτήρα μετακινήσεων λόγω της πρόσθετης απόσβεσης που αποκτά πλέον το σύστημα πέρα από τις ήδη υπάρχουσες τριβές του συστήματος.

Στη γενική περίπτωση του μονωτήρα, οι ιξώδεις αποσβεστήρες τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε οι δύο αποσυζευγμένες διευθύνσεις των πλαισίων να δέχονται όλες τις δυνατές δυνάμεις αποσβέσεως ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Συνεπώς σε κάθε πλαίσιο τοποθετούνται ιξώδεις αποσβεστήρες τόσο στη διεύθυνση κίνησης του όσο και παράλληλα με το ελατήριο που είναι συνδεδεμένο με το σφαιροτριβέα.

Η αλλαγή θέσης του σφαιροτριβέα πάνω στην παραβολή δεν επηρεάζει πλέον μόνο τις δυνάμεις επαναφοράς όπως είδαμε παραπάνω αλλά και τις δυνάμεις αποσβέσεως.



Σχ. 4.12 : Δύναμη Απόσβεσης F_c

4.3.4. Χαρακτηριστικά Μεγέθη – Λεπτομέρειες

Όλα τα παραπάνω αποτελούν μια περιγραφή ενός μονωτήρα που εξαρτάται από τις διάφορες γεωμετρίες της καμπύλης κύλισης (α, β, γ) του σφαιροτριβέα. Στα σχέδια που παρουσιάστηκαν (Σχ. 4.9 και Σχ. 4.10) εμφανίζεται η ειδική περίπτωση πραγματικής κατασκευής για $\beta = 0.364$ και $\alpha = \gamma = 0$. Σε αυτό το σημείο δίνονται κάποια επιπλέον χαρακτηριστικά μεγέθη και λεπτομέρειες που αφορούν την προαναφερθείσα ειδική περίπτωση διάταξης προκειμένου να σχηματιστεί και μια καλύτερη εικόνα για το πώς λειτουργεί ο μονωτήρας στη γενική μορφή.

Σχετικά με τις πρόσθετες κατασκευαστικές λεπτομέρειες της διάταξης, αναφέρεται ότι οι εξωτερικές διαστάσεις των πλαϊσίων του μονωτή είναι 0,625m (24,625 inches) κατά τις δύο διευθύνσεις του οριζόντιου επιπέδου και το συνολικό πάχος 0,122m (4,8 inches) όπως φαίνεται και στα σχέδια που παρατίθενται (Σχ. 4.9). Ο μονωτήρας (ουσιαστικά τα πλαίσια που έχουν δυνατότητα κινήσεως) μπορεί να μετακινηθεί κατά μέγιστο 0,235m (9,25 inches) σε κάθε διεύθυνση κίνησης.

Η μάζα που «μονώνεται σεισμικά» (μονωμένη μάζα) αποτελείται από τα πλαίσια, την αρχαιότητα, τη βιτρίνα της καθώς και κάθε άλλου είδους ερμάρια πάνω από τα πλαίσια της διάταξης. Για την ειδική περίπτωση του μονωτήρα έχουμε ότι το βάρος του κάθε πλαισίου είναι 33,57kg (74lbs), το βάρος της βιτρίνας και των ερμαρίων είναι 74,84kg (165lbs), ενώ ο αμφορέας ζυγίζει μόλις 7,71kg (17lbs). Για το άνω πλαίσιο το «σεισμικά μονωμένο» βάρος ανέρχεται σε 116,12kg (256lbs) και για το κάτω πλαίσιο 180,08kg (397lbs) αντιστοίχως. Το σημαντικά αυξημένο βάρος της συνολικής μάζας που επιδέχεται σεισμικής μόνωσης συγκριτικά με το βάρος του ίδιου του εκθέματος είναι κάτι που δεν μπορεί να αποφευχθεί, αφού αποτελεί έναν περιορισμό που σχετίζεται με το σχεδιασμό και την κατασκευή της βιτρίνας.

Διευκρινίζεται σε αυτό το σημείο ότι τα ελατήρια έχουν δυνατότητα να συσπειρώνονται από το ένα άκρο τους και μόνο. Στο άλλο άκρο των ελατηρίων είναι τοποθετημένο σταθερό μεταλλικό τμήμα που εμποδίζει να παραμορφωθούν.

Ένα χαρακτηριστικό των οδηγών ράβδων είναι η δυνατότητα να προσαρμόζονται σε αυτές παραπάνω του ενός ελατήρια ανά ράβδο, με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται μία επιθυμητή τιμή ακαμψίας του συστήματος εξ' αιτίας της εν σειρά αυτής λειτουργίας των ελατηρίων. Αναφέρεται ακόμη ότι τόσο η δύναμη του ελατηρίου, όσο και η όλη οριζόντια απόκριση του συστήματος γενικότερα, δεν επηρεάζονται από την κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά τον σεισμό. Συνεπώς, η κατακόρυφη συνιστώσα του σεισμού δεν επιδέχεται σεισμικής μόνωσης μέσω του όλου συστήματος.

Στο υπόλοιπο τμήμα της εργασίας εξετάζουμε τη γενική περίπτωση του μονωτήρα για τυχαία μορφή καμπύλης κύλισης (α, β, γ) του σφαιροτριβέα (Σχ. 4.11).

4.4. Εξίσωση κίνησης του μονωτήρα

Η σεισμική μόνωση που μελετάμε αποτελεί έναν ταλαντωτή με δύο βαθμούς ελευθερίας, που δεν είναι συζευγμένοι μεταξύ τους. Συνεπώς, η κίνηση της συσκευής αυτής μπορεί να προσομοιωθεί με δύο ανεξάρτητους μονοβάθμιους ταλαντωτές, έναν για κάθε μια από τις δύο οριζόντιες διευθύνσεις έστω x' και y' . Ορίζεται ως διεύθυνση κίνησης κάθε φορά εκείνη η διεύθυνση της σεισμικής διέγερσης για την οποία προκαλείται συσπείρωση των ελατηρίων της διατάξεως (και επομένως εκκίνηση λειτουργίας του συστήματος της σεισμικής μόνωσης) σε κάθετη προς αυτήν διεύθυνση. Επειδή αυτά τα δύο μονοβάθμια συστήματα είναι παρόμοια μεταξύ τους, θα σχηματίσουμε την εξίσωση κίνησης για το ένα από αυτά (για διεύθυνση κίνησης κατά x) και ανάλογα διατυπώνεται και για το άλλο. Κατά αυτό τον τρόπο, η όλη συμπεριφορά του μονοβάθμιου ταλαντωτή θα αναχθεί στη διεύθυνση κινήσεως του άνω πλαισίου x , που αποτελεί άλλωστε και το επιδιωκόμενο ώστε να δοθεί με ακρίβεια η δυναμική απόκριση που προκαλείται στο σύστημα από τη σεισμική διέγερση κατά τη διεύθυνση αυτή.

Η εξίσωση κίνησης ενός ταλαντούμενου συστήματος εκφράζει τη συνθήκη ισορροπίας όλων των δυνάμεων, δηλαδή της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης $p(t)$, της αδρανειακής δύναμης $f_I(t)$, της δύναμης αποσβέσεως $f_D(t)$ και της ελαστικής δύναμης $f_S(t)$.

Η συνθήκη ισορροπίας γράφεται:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (4.3)$$

Οι f_I, f_D, f_S εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του συστήματος.

Συνεπώς για να σχηματιστεί η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή μας, αρκεί να προσδιορίσουμε τις παραπάνω δυνάμεις αναλυτικά κατά τη διεύθυνση x :

Αδρανειακές Δυνάμεις f_I

Αν $x_{ολ}(t)$ είναι η ολική μετατόπιση της μάζας του συστήματος που εξετάζουμε τότε σύμφωνα με τον D' Alembert ασκείται στο σώμα δύναμη $f_I = m\ddot{x}_{ολ}$.

Εξωτερικές Διεγείρουσες Δυνάμεις p

Στα συστήματα σεισμικής μόνωσης δεν ασκούνται (επενεργούν συνήθως) εξωτερικά δυναμικά φορτία αλλά επιβάλλονται μετακινήσεις x_g στη βάση τους λόγω της κίνησης του εδάφους από ένα σεισμικό γεγονός.

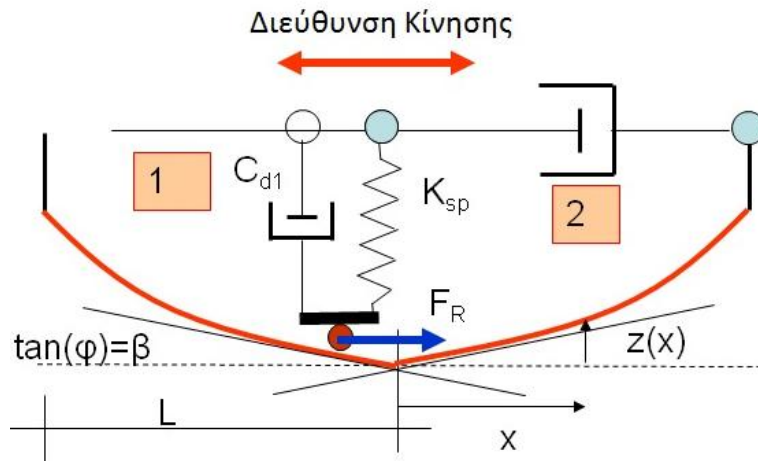
Στη περίπτωση αυτή, όπως είδαμε και στο Κεφ. 2.2, αφού οι αδρανειακές δυνάμεις δεν έχουν κάποιο μη γραμμικό όρο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο σύστημα μας ασκείται το ισοδύναμο φορτίο $\bar{p}(t) = -m\ddot{x}_g$, όπου \ddot{x}_g η επιτάχυνση του εδάφους.

Σε αυτό το ισοδύναμο σύστημα όλες οι δυνάμεις εκφράζονται ως προς τη σχετική μετατόπιση x , η οποία εκφράζει την παραμόρφωση της ανωδομής και συνδέεται με τις υπόλοιπες μετατοπίσεις με τη σχέση: $x_{ολ} = x + x_g$.

Συνεπώς, η εξίσωση κίνησης του μονοβάθμιου ταλαντωτή μας διατυπώνεται ως προς x , προσέχοντας όμως ότι σε αυτό το ισοδύναμο σύστημα οι αδρανειακές δυνάμεις εκφράζονται ως $f_I = m\ddot{x}$.

$$f_I(t) = m\ddot{x} \quad \text{και} \quad p(t) = \bar{p}(t) = -m\ddot{x}_g \quad (4.4)$$

Ελαστικές Δυνάμεις ή Δυνάμεις Επαναφοράς f_s



Σχ. 4.13 : Σύστημα Επαναφοράς Μονωτήρα – Μηχανισμός Εκκρεμούς

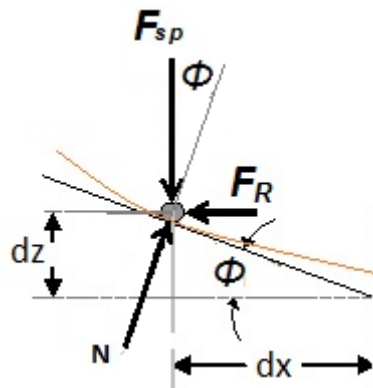
Όταν η συσκευή σεισμικής μόνωσης δεχθεί μια σεισμική δύναμη στη διεύθυνση x θα υπάρξει αντίστοιχη σχετική μετατόπιση x του ενός πλαισίου ως προς το υποκείμενο του. Το σφαιρικό κύλιστρο θα βρεθεί σε μια νέα θέση πάνω στην παραβολή που θα απέχει οριζόντια απόσταση x από την αρχική του θέση και κατακόρυφη απόσταση $z(x)$ από το σημείο που θα ήταν αν το ελατήριο είχε το φυσικό του μήκος. Εξάλλου η παραβολική τροχιά κυλίσεως (4.2) ορίστηκε έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι τελευταίες γεωμετρικές απαιτήσεις.

Στην ειδική περίπτωση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος όταν η συσκευή μας βρίσκεται στην αρχική της θέση (μηδενικές μετατοπίσεις των πλαισίων) το $z(x)$ μας δίνει την κατακόρυφη απόσταση του κυλίστρου από το κατώτερο σημείο της παραβολής (Σχ. 4.13).

Η γωνία ϕ ορίζεται σε κάθε νέα θέση του κυλίστρου ως η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της καμπύλης κυλίσεως σε αυτό το σημείο με την οριζόντια διεύθυνση xx' (οριζόντιο επίπεδο). Η εφαπτομένη της γωνίας ϕ εκφράζεται με βάση την καμπύλη $z(x)$ από τη σχέση :

$$\tan \phi = \frac{dz}{dx} = z'(x) \quad (4.5)$$

Η οφειλόμενη στη συσπείρωση των ελατηρίων δύναμη επαναφοράς F_R , λόγω της οποίας επανέρχεται το μετατοπισμένο πλαίσιο στην αρχική του θέση βρίσκεται θεωρώντας την ισορροπία του σφαιροτριβέα σε τυχαία θέση (Σχ. 4.14).



Σχ. 4.14 : Τυχαία θέση του σφαιροτριβέα

$$F_R = F_{sp} \cdot \tan \phi \quad (4.6)$$

Όμως η δύναμη του ελατηρίου είναι:

$$F_{sp} = K_{sp} \cdot z(x) \quad (4.7)$$

όπου K_{sp} : η ακαμψία του ελατηρίου και $z(x)$: η συσπείρωση του ελατηρίου.

Αντικαθιστώντας το F_{sp} από τη (4.7) στη (4.6) υπολογίζουμε τη δύναμη F_R :

$$F_R = K_{sp} \cdot z(x) \cdot \tan \phi \quad (4.8)$$

Επομένως, σύμφωνα και με τη (4.5), η ελαστική δύναμη επαναφοράς F_R θα είναι:

$$F_R = K_{sp} \cdot z(x) \cdot z'(x) \quad (4.9)$$

Στη γενική περίπτωση όπου η καμπύλη κυλίσεως του σφαιροτριβέα είναι παραβολή της μορφής της σχέσης (4.2) υπολογίζουμε τη δύναμη επαναφοράς F_R :

$$F_R = K_{sp} \cdot z(x) \cdot z'(x) = K_{sp} \cdot (\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma) \cdot (2\alpha x + \beta \cdot \text{sign}(x)) \quad (4.10)$$

$$F_R = f_s(t) = K_{sp} [2\alpha^2 x^3 + 3\alpha\beta x^2 \cdot \text{sign}(x) + (\beta^2 + 2\alpha\gamma)x + \beta\gamma \cdot \text{sign}(x)] \quad (4.11)$$

Οπου η συνάρτηση $\text{sign}(x)$ ορίζεται ως : $\text{sign}(x) = \frac{|x|}{x}$ και $\text{sign}(0) = 0$.

Η σχέση που δίνει την δύναμη επαναφοράς έχει τη γενική μορφή:

$$F_R = k_3 x^3 + k_2 x^2 \cdot \text{sign}(x) + k_1 x + k_0 \cdot \text{sign}(x) \quad (4.12)$$

Οπου οι συντελεστές είναι :

$$k_3 = 2K_{sp}\alpha^2 \quad (4.13) \quad k_2 = 3K_{sp}\alpha\beta \quad (4.14)$$

$$k_1 = K_{sp}(\beta^2 + 2\alpha\gamma) \quad (4.15) \quad k_0 = K_{sp}\beta\gamma \quad (4.16)$$

Στον ταλαντωτή που μελετάμε η δύναμη F_R δεν έχει γραμμική εξάρτηση από το αίτιο που την προκαλεί (δλδ τη σχετική μετατόπιση x). Οδηγούμαστε λοιπόν στη μελέτη ενός μη γραμμικού ταλαντωτή σύμφωνα με τη σχέση (4.12).

Σε αυτό όμως το σύστημα διακρίνουμε και έναν γραμμικό όρο σαν μέρος της δύναμης επαναφοράς από τον οποίο θα υπολογιστεί παρακάτω η γραμμική ιδιοσυχνότητα ω_0 .

Η ακαμψία του άνω πλαισίου συνεπώς, που μελετάται ως ανεξάρτητος μονοβάθμιος ταλαντωτής, είναι συνάρτηση της σχετικής μετατόπισης x με πολυωνυμική μορφή .

Η διαφορική εξίσωση κίνησης, αν αγνοήσουμε για την ώρα κάθε είδους απόσβεση, λαμβάνει την μορφή (σύμφωνα με τη ισορροπία (4.3)) :

$$m\ddot{x} + k_3 x^3 + k_2 x^2 \cdot \text{sign}(x) + k_1 x + k_0 \cdot \text{sign}(x) = -m\ddot{x}_g \quad (4.17)$$

Η γραμμική περίοδος κίνησης προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{W}{g \cdot k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{gK_{sp}(\beta^2 + 2\alpha\gamma)}} \quad (4.18)$$

Όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, W το βάρος της σεισμικά μονωμένης μάζας, α, β μεγέθοι που καθορίζονται από τη γεωμετρία της παραβολική καμπύλη κυλίσεως και K_{sp} η ισοδύναμη ακαμψία του συστήματος ελατηρίων.

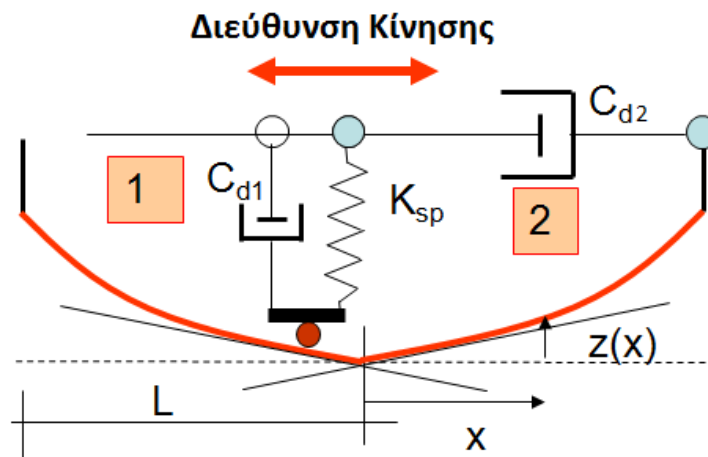
Στην ειδική περίπτωση που $\beta = 0$ η εξίσωση κίνησης (4.17) εκφυλίζεται σε μια διαφορική εξίσωση τύπου Duffing.

$$m\ddot{x} + k_3x^3 + k_1x = -m\ddot{x}_g \quad (4.19)$$

Σημειώνεται εδώ ότι ανάλογα με τον αριθμό και τον τρόπο σύνδεσης των ελατηρίων η ακαμψία του συστήματος αλλάζει, επηρεάζοντας την απόκριση του συστήματος. Μπορούν να τοποθετηθούν τόσο εν σειρά, όσο και εν παραλλήλω συνδέσεις ελατηρίων με ίδια ή και διαφορετική ακαμψία. Έτσι, για λειτουργία της διατάξεως με ένα μεμονωμένο ελατήριο η συμπεριφορά είναι γραμμικώς ελαστική ενώ για δύο διαφορετικών ακαμψιών ελατήρια εν σειρά, παρατηρείται διαφορετική δυσκαμψία K σύμφωνα με τη σχέση (4.20). Το λιγότερο άκαμπτο ελατήριο είναι εκείνο που κυρίως επηρεάζει την απόκριση της διάταξης.

$$\delta = \frac{F_{sp}}{K} = \frac{F_{sp}}{K_1} + \frac{F_{sp}}{K_2} \Rightarrow \frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \Rightarrow K = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2} \quad (4.20)$$

Δυνάμεις Αποσβέσεως f_D



Σχ. 4.15 : Σύστημα απόσβεσης

Όταν η συσκευή σεισμικής μόνωσης δεχθεί μια σεισμική δύναμη στη διεύθυνση x θα υπάρξει αντίστοιχη σχετική μετατόπιση x του ενός πλαισίου ως προς το υποκείμενο του. Στο σύστημα μας έχουν τοποθετηθεί δύο ιξώδεις αποσβεστήρες C_{d1} και C_{d2} όπως φαίνονται και στο Σχ. 4.15. Λόγω, λοιπόν, της μετατόπισης x αναπτύσσεται στο μονωτήρα μας δύναμη απόσβεσης F_{c2} ανάλογη της ταχύτητας της μονωμένης μάζας μας. Η σχέση που εκφράζει την τελευταία δύναμη είναι :

$$F_{c2} = C_{d2}\dot{x} \quad (4.21)$$

Εκτός από αυτήν την δύναμη απόσβεσης, η μάζα μας δέχεται και άλλη δύναμη η οποία οφείλεται στον αποσβεστήρα C_{d1} . Ο τελευταίος ενεργοποιείται με παρόμοιο τρόπο με το ελατήριο K_{sp} , που είδαμε πριν στις δυνάμεις επαναφοράς, δηλαδή καθώς κινείται ο σφαιροτριβέας επί της παραβολικής καμπύλης. Η ύπαρξη της γωνίας ϕ σε κάθε θέση της καμπύλης (Σχ. 4.14) έχει ως αποτέλεσμα να ασκείται στην εξεταζόμενη μάζα μας δύναμη λόγω της αντίδρασης N και όχι απευθείας λόγω του αποσβεστήρα.

Η οφειλόμενη στον αποσβεστήρα C_{d1} δύναμη F_{c1} , λόγω της οποίας δαπανάται εν γένει ενέργεια στο σύστημα μας και το μετατοπισμένο πλαίσιο αναπτύσσει μικρότερες παραμορφώσεις, βρίσκεται θεωρώντας την ισορροπία του σφαιροτριβέα σε τυχαία θέση (όμοια με Σχ. 4.14).

$$F_{c1} = F_{cp} \tan \phi \quad (4.22)$$

Όπου F_{cp} η δύναμη απόσβεσης που αναπτύσσεται αξονικά στον ιξώδη αποσβεστήρα C_{d1} . Η τελευταία είναι ανάλογη της κάθετης (στη διεύθυνση κίνησης του πλαισίου) ταχύτητας, που αναπτύσσεται κατά την κίνηση του σφαιροτριβέα.

$$F_{cp} = C_{d1} \cdot \dot{z}(x) = C_{d1} \cdot z'(x) \cdot \dot{x} \quad (4.23)$$

Όπου $\dot{z}(x)$: η παράγωγος της καμπύλης $z(x)$ ως προς το χρόνο (ταχύτητα)

Υστερα από αντικατάσταση της (4.23) στην (4.22) και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση της γωνίας ϕ με την καμπύλη $z(x)$ σύμφωνα με τη σχέση (4.5) έχουμε:

$$F_{c1} = C_{d1} \cdot z'(x) \cdot z'(x) \cdot \dot{x} = C_{d1} \cdot (2\alpha x + \beta \cdot \text{sign}(x))^2 \cdot \dot{x} \quad (4.24)$$

$$F_{c1} = C_{d1} \cdot (4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x \cdot \text{sign}(x) + \beta^2) \cdot \dot{x} \quad (4.25)$$

Τέλος υπάρχουν δυνάμεις F_{c0} που αναπτύσσονται στη συσκευή μας λόγω τριβών. Οι βασικότερες, που επηρεάζουν την κίνηση της μονωμένης μάζας, προέρχονται από τις τριβές μεταξύ των πλαισίων. Ο τρόπος σύνδεσης τους (μέσω τριβών κυλίσεως) δεν είναι αρκετά λείος με αποτέλεσμα η δύναμη τριβής F_{c0} να είναι :

$$F_{c0} = \mu mg \cdot \text{sign}(\dot{x}) \quad (4.26)$$

Όπου μ : ο συντελεστής τριβής και $m \cdot g$: το βάρος της μονωμένης μάζας στο πλαίσιο. Το $\text{sign}(\dot{x})$ τοποθετείται για να δείξει ότι η κατεύθυνση της δύναμης εξαρτάται από την φορά της σχετικής ταχύτητας \dot{x} .

Συγκεντρωτικά, στο σύστημα σεισμικής μόνωσης ασκείται δύναμη απόσβεσης $F_C = F_{c0} + F_{c1} + F_{c2}$, η οποία όπως φαίνεται από την τελευταία σχέση είναι το άθροισμα των τριών δυνάμεων που υπολογίστηκαν παραπάνω. Αντικαθιστώντας τους αναλυτικούς τύπους που προσδιορίστηκαν, υπολογίζουμε τον αποσβεστικό όρο $f_D(t)$ που θα τοποθετηθεί στην εξίσωση ισορροπίας (4.3) προκειμένου να μορφωθεί η ζητούμενη εξίσωση κίνησης.

Στη γενική περίπτωση όπου η καμπύλη κυλίσεως του σφαιροτριβέα είναι παραβολή της μορφής της σχέσης (4.2) υπολογίζουμε τη δύναμη επαναφοράς F_c :

$$F_C = f_D(t) = C_{d1} \cdot (4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x \cdot \text{sign}(x) + \beta^2) \cdot \dot{x} + C_{d2} \dot{x} + \mu mg \cdot \text{sign}(\dot{x}) \quad (4.27)$$

$$F_C = f_D(t) = (4C_{d1}\alpha^2 x^2 + 4C_{d1}\alpha\beta x \cdot \text{sign}(x) + C_{d1}\beta^2 + C_{d2}) \cdot \dot{x} + \mu mg \cdot \text{sign}(\dot{x}) \quad (4.28)$$

Η διατύπωση της δύναμης απόσβεσης σε συνάρτηση με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του μονωτήρα (κυρίως της παραβολής) έχει ως αποτέλεσμα να παρατηρήσουμε τη γενική μορφή της σχέσης (4.28) :

$$F_C = (c_2 x^2 + c_1 x \cdot \text{sign}(x) + c_0) \cdot \dot{x} + c_\mu \cdot \text{sign}(\dot{x}) \quad (4.29)$$

Στην οποία οι συντελεστές c_2, c_1, c_0 και c_μ δίνονται από τις σχέσεις :

$$c_2 = 4C_{d1}\alpha^2 \quad (4.30) \quad c_1 = 4C_{d1}\alpha\beta \quad (4.31)$$

$$c_0 = C_{d1}\beta^2 + C_{d2} \quad (4.32) \quad c_\mu = \mu mg \quad (4.33)$$

Η μη γραμμικότητα του όρου της δύναμης εμφανίζεται και στην περίπτωση της απόσβεσης. Το μοντέλο που περιγράφει τη συμπεριφορά της διάταξης μας είναι ένας μη γραμμικός ταλαντωτής. Η δύναμη απόσβεσης που ασκείται στο υπο εξέταση άνω πλαίσιο της συσκευής μας, είναι συνάρτηση τόσο της σχετικής μετατόπισης x όσο και της σχετικής ταχύτητας \dot{x} . Μπορούμε να διατυπώσουμε την εξίσωση κίνησης σύμφωνα με τη σχέση (4.3).

Η διαφορική εξίσωση κίνησης, εάν υποθέσουμε μια γραμμική (ως προς τη σχετική μετατόπιση x) δύναμη επαναφοράς, λαμβάνει την μορφή :

$$m\ddot{x} + (c_2 x^2 + c_1 x \cdot \text{sign}(x) + c_0) \cdot \dot{x} + c_\mu \cdot \text{sign}(\dot{x}) + kx = -m\ddot{x}_g \quad (4.34)$$

Η γραμμική ιδιοπερίοδος κίνησης προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{W}{g \cdot k}} \quad (4.35)$$

Όπου g : η επιτάχυνση της βαρύτητας, W : το βάρος της σεισμικά μονωμένης μάζας και k : η δυσκαμψία του συστήματος που θεωρήσαμε απλοποιητικά.

Στην ειδική περίπτωση που $\beta = 0$ και $\mu = 0$ η εξίσωση κίνησης (4.17) εκφυλίζεται σε μια διαφορική εξίσωση τύπου Van der Pol.

$$m\ddot{x} + (c_2x^2 + c_0) \cdot \dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g \quad (4.36)$$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Ισορροπία : $F_I + F_C + F_R = P(t) = -m \cdot \ddot{x}_g(t)$

Δυνάμεις:

$$F_I = m\ddot{x}$$

$$F_C = C_{d1} (4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x \cdot \text{sign}(x) + \beta^2) \dot{x} + C_{d2} \dot{x} + \mu mg \cdot \text{sign}(\dot{x})$$

$$F_R = K_{sp} (\beta^2 + 2\alpha\gamma) x + K_{sp} \beta\gamma \cdot \text{sign}(x) + 3K_{sp} \alpha\beta x^2 \cdot \text{sign}(x) + 2K_{sp} \alpha^2 x^3$$

Εξίσωση Κίνησης:

$$m\ddot{x} + (c_2x^2 + c_1x \cdot \text{sign}(x) + c_0) \dot{x} + k_1x + (k_0 \cdot \text{sign}(x) + c_\mu \cdot \text{sign}(\dot{x})) + k_2x^2 \cdot \text{sign}(x) + k_3x^3 = -m \cdot \ddot{x}_g(t)$$

Όπου οι συντελεστές είναι:

$$c_2 = 4C_{d1}\alpha^2 \quad c_1 = 4C_{d1}\alpha\beta \quad c_0 = C_{d1}\beta^2 + C_{d2}$$

$$k_1 = K_{sp} (\beta^2 + 2\alpha\gamma) \quad k_0 = K_{sp}\beta\gamma \quad c_\mu = \mu mg$$

$$k_2 = 3K_{sp}\alpha\beta \quad k_3 = 2K_{sp}\alpha^2$$

Μη γραμμικές εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

5.1. Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μορφώθηκε η εξίσωση κίνησης του σεισμικού μονωτήρα που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία. Όπως διαπιστώσαμε η τελευταία μη γραμμική διαφορική εξίσωση έχει χαρακτηριστικά των ταλαντωτών Duffing και Van der Pol σε σχέση με τη δύναμη επαναφοράς και την απόσβεση αντίστοιχα.

Από την πλευρά του μηχανικού ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά αυτού του μη γραμμικού μονοβάθμιου ταλαντωτή όταν καταπονείται από εξωτερικό φορτίο με μορφή σεισμού. Το σύστημα δεν είναι γραμμικό με αποτέλεσμα η απόκριση του ταλαντωτή υπο το σεισμικό φορτίο να μην ανάγεται σε άθροισμα αποκρίσεων αρμονικών φορτίων. Παρ' όλα αυτά επιλύουμε την εξίσωση κίνησης θεωρώντας εξωτερικό αρμονικό φορτίο προκειμένου να προσδιορίσουμε τις συχνότητες διέγερσης εκείνες που είναι δυσμενείς για το μονωτήρα μας.

Το τελευταίο αποτυπώνεται στα διαγράμματα πλάτους ταλάντωσης-συχνότητας ή εύρους-συχνότητας και αποτελούν μια μορφή φάσματος για μη γραμμικά συστήματα. Στο επόμενο τμήμα της εργασίας γίνεται ο προσδιορισμός αυτών των διαγραμμάτων αρχικά με αριθμητικό τρόπο και κατόπιν με τη χρήση μεθόδων διαταραχών που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 3.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι οι μέθοδοι διαταραχών προσεγγίζουν τη λύση του προβλήματος με αναλυτικό τρόπο. Το τελευταίο έχει σαν αποτέλεσμα να διαθέτουν τα πλεονεκτήματα των αναλυτικών μεθόδων (πχ εύρεση κλειστών τύπων) αλλά και τα μειονεκτήματά τους (πχ πλήθος σύνθετων πράξεων). Τα προηγούμενα γίνονται ακόμα πιο ορατά μέσα από τη σύγκριση με τις αριθμητικές μεθόδους που εφαρμόζονται για το ίδιο πρόβλημα.

5.2. Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης του μονωτήρα

5.2.1. Διατύπωση προβλήματος - Αλγόριθμος

Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή, σύμφωνα με το κεφάλαιο 4 όπου μορφώθηκε και θεωρώντας ένα εξωτερικό αρμονικό φορτίο, έχει τη μορφή :

$$m\ddot{x} + (c_2x^2 + c_1x \cdot \text{sign}(x) + c_0)\dot{x} + k_1x + (k_0 \cdot \text{sign}(x) + c_\mu \cdot \text{sign}(\dot{x})) + k_2x^2 \cdot \text{sign}(x) + k_3x^3 = F \cdot \cos(\Omega t) \quad (5.1)$$

Ανάλογα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της παραβολής κύλισης α, β, γ και με τα μηχανικά χαρακτηριστικά του συστήματος $K_{sp}, C_{d1}, C_{d2}, \mu$ προσδιορίζουμε τους συντελεστές της εξίσωσης (5.1) από τις σχέσεις του προηγούμενου κεφαλαίου. Η μονωμένη μάζα m εξαρτάται από το είδος του εκθέματος και την κατασκευή που το προστατεύει. Το βάρος της μονωμένης μάζας συμβολίζεται με το w .

Προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση (5.1) αριθμητικά χρειαζόμαστε αφενός να επιλέξουμε τα F και Ω και αφετέρου να δώσουμε στη σχέση τη μορφή :

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (5.2)$$

Το τελευταίο επιτυγχάνεται εύκολα με το μετασχηματισμό :

$$v = \dot{x} \quad (5.3) \quad \text{και} \quad \vec{x} = [x \ v]^T \quad (5.4)$$

Το σύστημα (5.2) μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο Runge-Kutta για διάφορες τιμές της συχνότητας Ω με $F = w \cdot \ddot{u}_g$, όπου \ddot{u}_g μια συνηθισμένη μέγιστη επιτάχυνση του εδάφους (πχ $\ddot{u}_g = 0.2 \text{ g}$). Σε αυτό το σημείο αναπτύχθηκε κατάλληλος αλγόριθμος ώστε μέσα από την επίλυση της (5.2) να παράγεται το διάγραμμα συντελεστή μεγέθυνσης D - αδιάστατης συχνότητας αρμονικής διέγερσης Ω/ω .

Στοιχεία του Αλγορίθμου

- Για κάποια συχνότητα Ω προσδιορίζουμε τη λύση $x(t)$ του συστήματος (5.2) μέχρι τη χρονική στιγμή max_time με τη μέθοδο Runge-Kutta. Θεωρώντας ότι μετά από κάποιο χρονικό διάστημα το σύστημα που εξετάζουμε φτάνει σε μόνιμη κατάσταση (Steady State), επιλέγουμε ένα χρονικό διάστημα I έτσι ώστε να προσδιορίσουμε το εύρος α_0 αυτής της κατάστασης. Για αυτό το πλάτος της ταλάντωσης ισχύει ότι :

$$\alpha_0 = \max \{x(t), t \in I\} \quad (5.5)$$

- Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για διάφορες τιμές της συχνότητας Ω μέσα σε ένα διάστημα που μας ενδιαφέρει. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται η συνάρτηση $\alpha_0 = \alpha_0(\Omega)$. Το διάγραμμα της τελευταίας, που ονομάζεται «διάγραμμα εύρους-συχνότητας» είναι αυτό που ενδιαφέρει το μηχανικό για να δει σε ποιες συχνότητες ο ταλαντωτής εμφανίζει μεγάλα εύρη ταλάντωσης (συντονισμοί).
- Αφού κατασκευαστεί το διάγραμμα $\alpha_0 = \alpha_0(\Omega)$ εύκολα παράγεται το διάγραμμα συντελεστή μεγέθυνσης D - αδιάστατης συχνότητας αρμονικής διέγερσης Ω/ω . Τα στοιχεία που είναι απαραίτητα για να συμβεί αυτό είναι το $x_{\sigma\tau}$ και η γραμμική ιδιοσυχνότητα ω του συστήματος. Για το $x_{\sigma\tau} > 0$ ισχύει :

$$k_3 x_{\sigma\tau}^3 + k_2 x_{\sigma\tau}^2 + k_1 x_{\sigma\tau} + k_0 = F \quad (5.6)$$

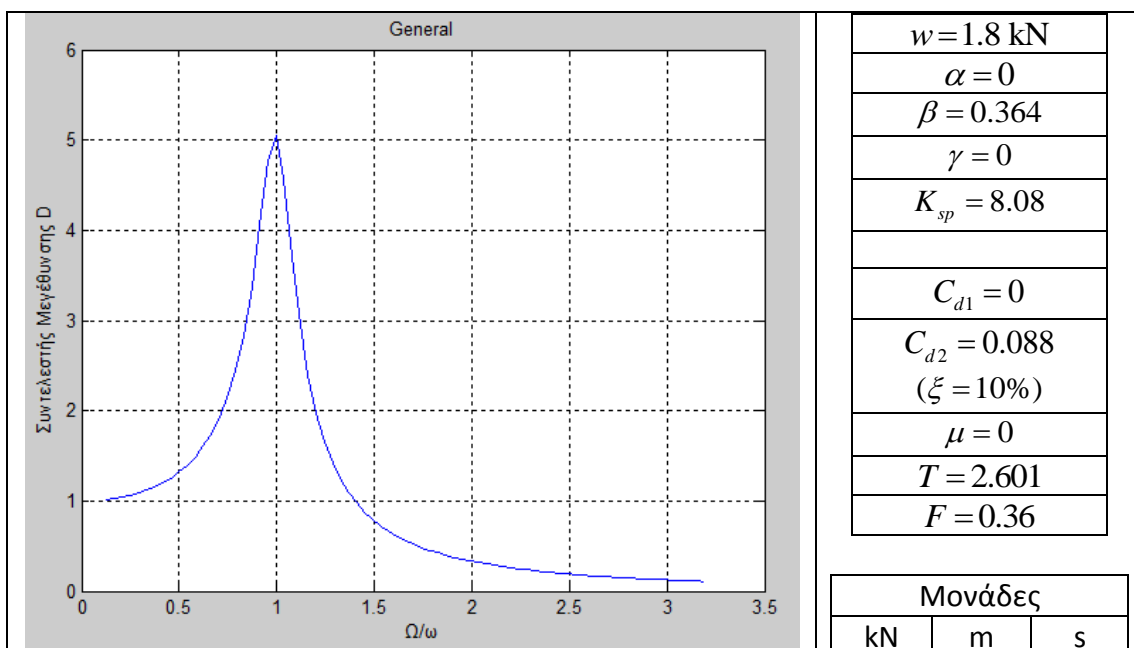
Συνεπώς λύνοντας την (5.6) βρίσκουμε την τιμή $x_{\sigma\tau}$ που χρειαζόμαστε. Για κάθε τιμή Ω βρίσκουμε το D από τη σχέση :

$$D = \frac{\alpha_0(\Omega)}{x_{\sigma\tau}} \quad (5.7)$$

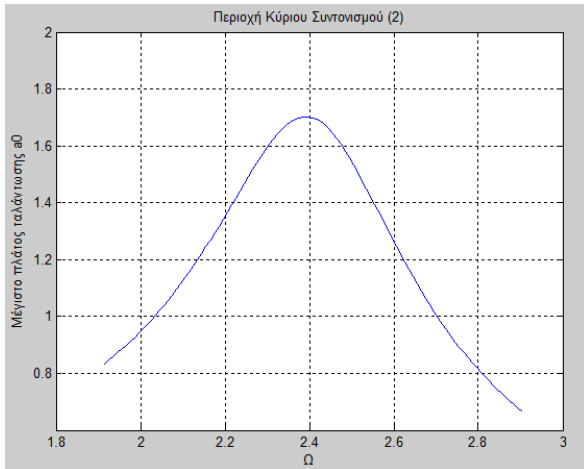
Οπότε τώρα μπορεί να απεικονιστεί η σχέση : $D = D(\Omega/\omega)$.

Παράδειγμα

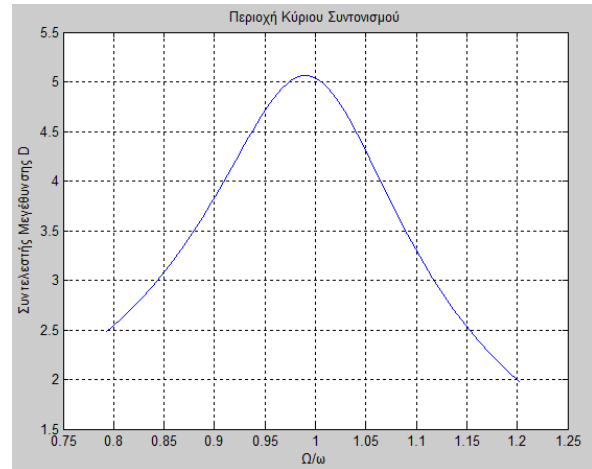
Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο για να εξάγουμε τα αποτελέσματα για ένα απλό παράδειγμα. Επιλέγουμε κατάλληλα τα μηχανικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ταλαντωτή ώστε να προκύψει ένα γραμμικό σύστημα, στο οποίο γνωρίζουμε τη συμπεριφορά του από τη βιβλιογραφία [3, σελ 111].



- Με κατάλληλη διακριτοποίηση το πρόγραμμα μπορεί να «εστιάσει» γύρω από την περιοχή του κύριου συντονισμού (δλδ $\Omega/\omega=1$). Σχεδιάζουμε τα δύο διαγράμματα $\alpha_0 = \alpha_0(\Omega)$ και $D = D(\Omega/\omega)$ με δεδομένα από το παράδειγμα.



Σχ. 5.1 : Καμπύλη εύρους-συχνότητας

Σχ. 5.2 : Συντελεστής μεγέθυνσης $D(\Omega/\omega)$

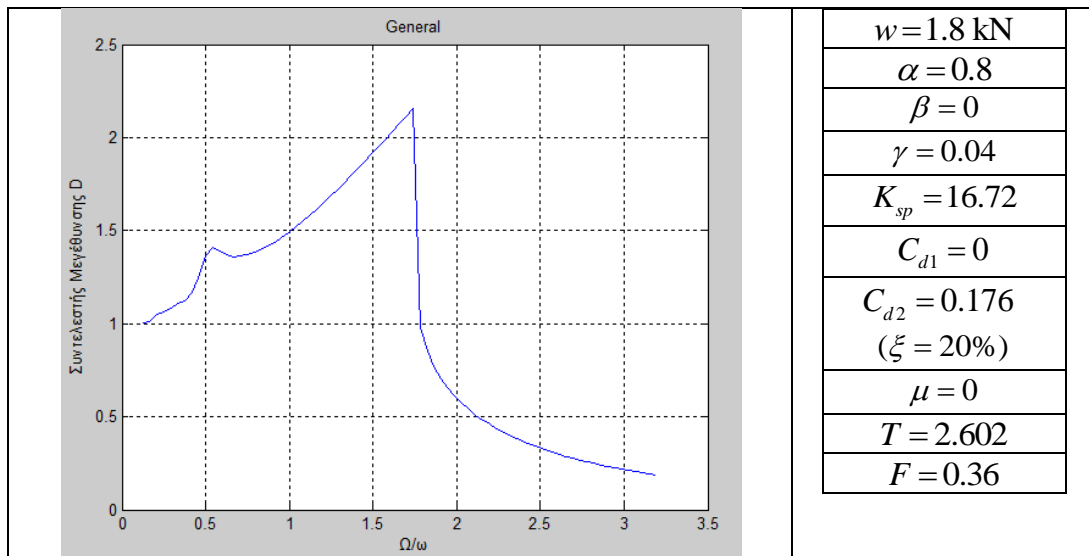
- Τέλος, πέρα από τον κύριο συντονισμό για $\Omega/\omega=1$ μπορούμε να επιλέξουμε σε ποια άλλη συχνότητα θέλουμε να εστιάσουμε. Το τελευταίο είναι πολύ χρήσιμο για τα μη γραμμικά συστήματα όπου παρατηρούνται δευτερεύοντες συντονισμοί.

5.2.2. Συμπεριφορά του μονωτήρα

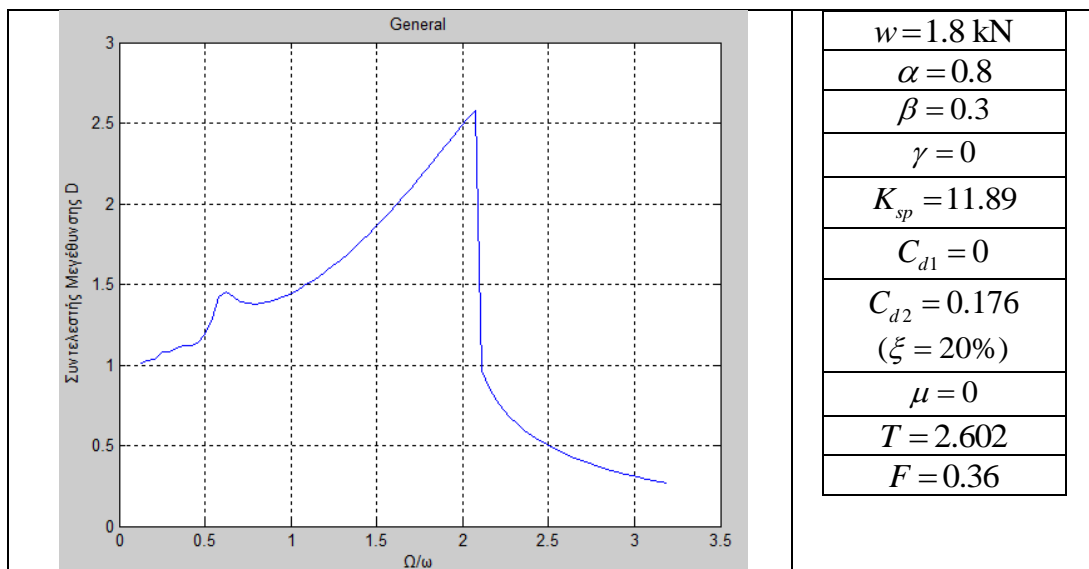
Στο προηγούμενο μέρος της εργασίας περιγράφηκε κατάλληλος αλγόριθμος με τη βοήθεια του οποίου παράγεται το διάγραμμα του συντελεστή μεγέθυνσης D σε συνάρτηση με το πηλίκο των συχνοτήτων Ω/ω . Μέσα από αυτά τα διαγράμματα μπορεί ο μηχανικός να αντιληφθεί τη συμπεριφορά του μονωτήρα και κυρίως τις συχνότητες διέγερσης Ω που παρατηρούνται μεγάλα πλάτη ταλάντωσης. Τα τελευταία παίζουν σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό διότι πρέπει να μην παρατηρούνται κατά τη συνηθισμένη λειτουργία του ταλαντωτή.

Ακολουθούν διάφορα παραδείγματα που σχετίζονται άμεσα με τον μονωτήρα που εξετάζουμε για να έχουμε μια εικόνα των φαινομένων που παρατηρούνται. Ιδιαίτερη έμφαση κατά την παρουσίαση των διαγραμμάτων πρέπει να δοθεί στις ακόλουθες παρατηρήσεις που σχετίζονται με τα μη γραμμικά συστήματα :

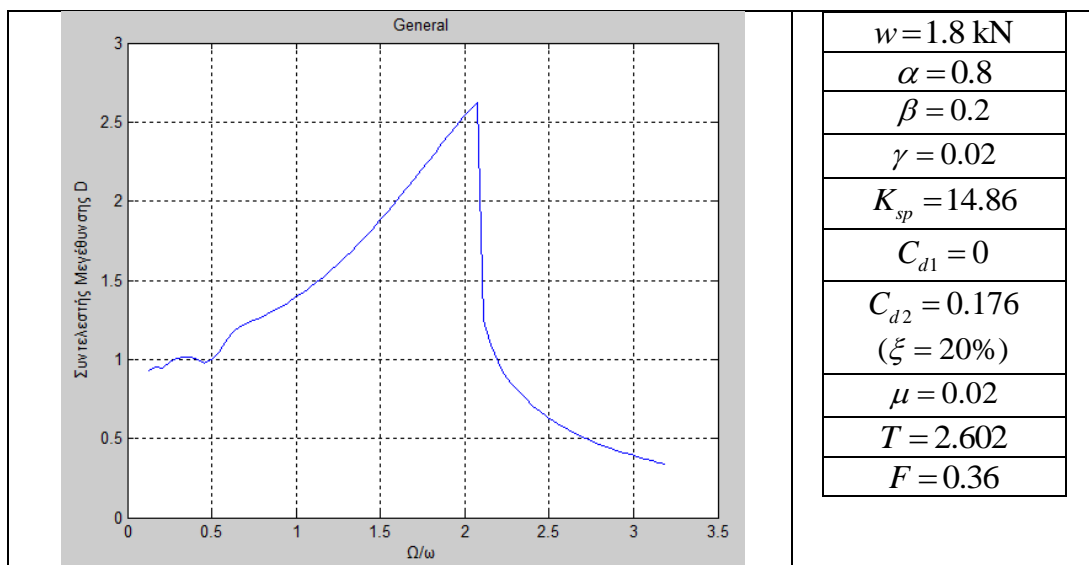
1. Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης μπορεί να παρατηρηθεί σε περιοχές μακριά της γραμμικής ιδιοσυχνότητας του συστήματος.
2. Υπάρχουν δευτερεύοντες συντονισμοί στο σύστημα μας εκτός από το συνηθισμένο κύριο συντονισμό των γραμμικών συστημάτων.
3. Υπάρχουν άλματα στο πλάτος της ταλάντωσης σε περιοχές των συχνοτήτων Ω , φαινόμενο ιδιαίτερα επικίνδυνο κατά το σχεδιασμό της κατασκευής μας.



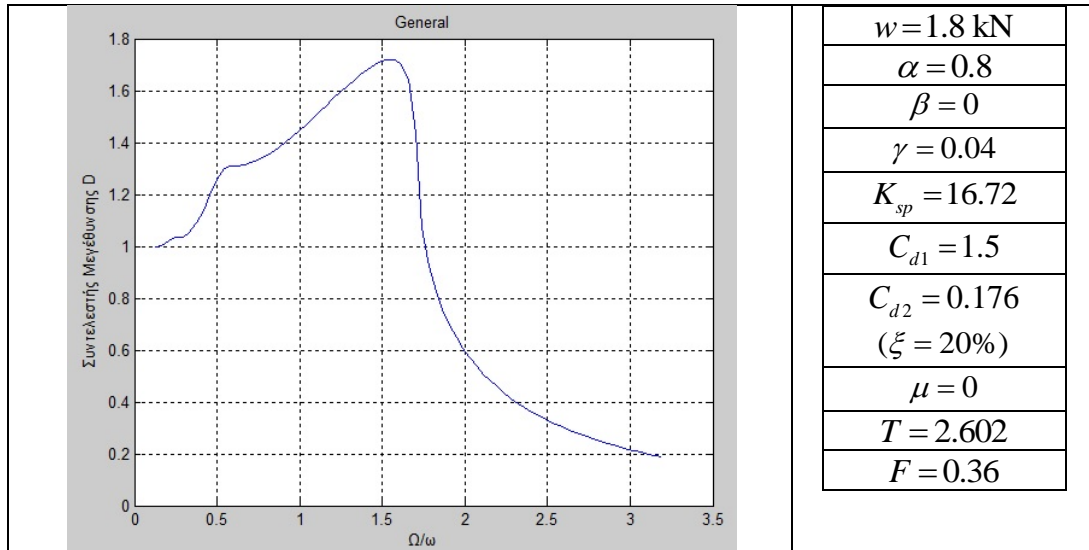
Σχ. 5.3



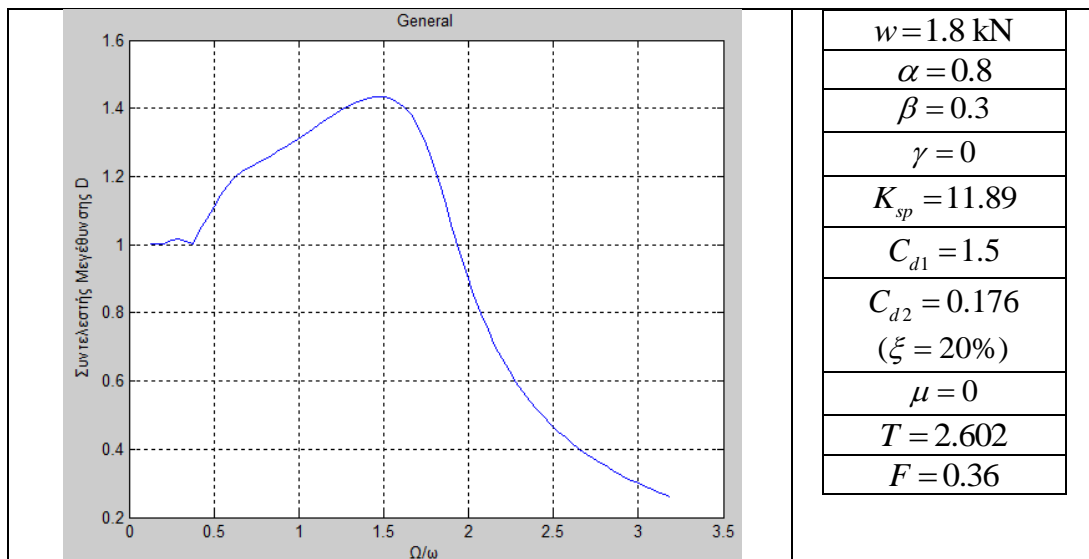
Σχ. 5.4



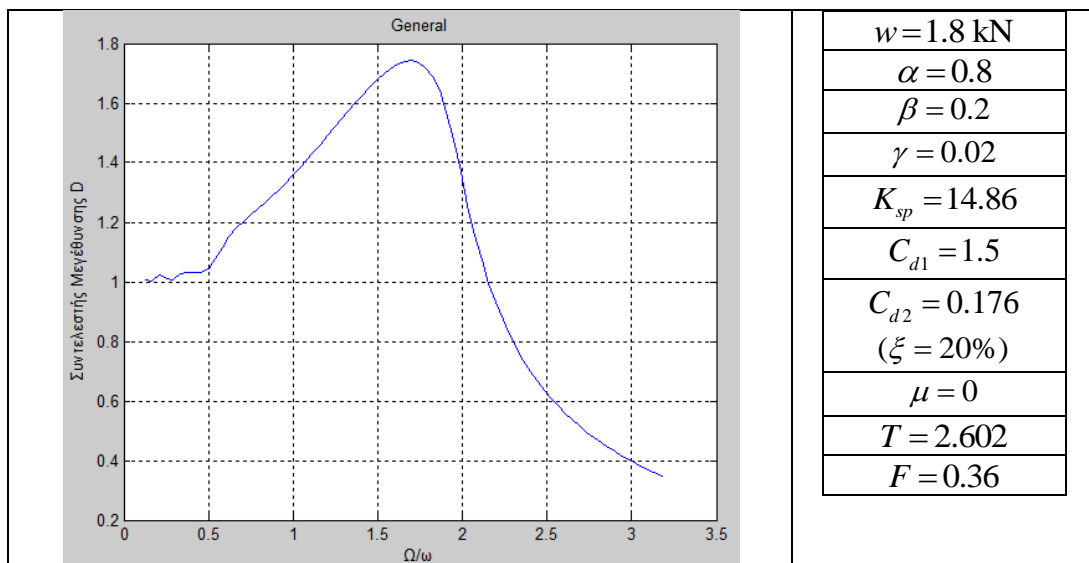
Σχ. 5.5



Σχ. 5.6



Σχ. 5.7



Σχ. 5.8

5.3. Επίλυση με μεθόδους διαταραχών

5.3.1. Διατύπωση προβλημάτων

Ο μονοβάθμιος μη γραμμικός ταλαντωτής που περιγράφει την κατασκευή μας έχει τη γενική μορφή εξίσωση κίνησης:

$$m\ddot{x} + (c_2x^2 + c_1x \cdot \text{sign}(x) + c_0)\dot{x} + k_1x + (k_0 \cdot \text{sign}(x) + c_\mu \cdot \text{sign}(\dot{x})) + k_2x^2 \cdot \text{sign}(x) + k_3x^3 = -m \cdot \ddot{x}_g(t) \quad (5.8)$$

Προκειμένου να αναδειχθούν κάποια ιδιαίτερα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε μη γραμμικά μοντέλα, θεωρούμε αρχικά μια αρμονική ισοδύναμη εξωτερική φόρτιση. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι ο μονωτήρας μας καταπονείται από φορτίο $P(t)$ συνημιτονικής μορφής με διεγείρουσα συχνότητα Ω .

$$P(t) = -m\ddot{x}_g = P \cdot \cos(\Omega t) \quad (5.9)$$

Συνεπώς, στη **γενική περίπτωση** η εξίσωση κίνησης του μονωτήρα έχει τη μορφή :

$$m\ddot{x} + (c_2x^2 + c_1x \cdot \text{sign}(x) + c_0)\dot{x} + k_1x + (k_0 \cdot \text{sign}(x) + c_\mu \cdot \text{sign}(\dot{x})) + k_2x^2 \cdot \text{sign}(x) + k_3x^3 = P \cdot \cos(\Omega t) \quad (5.10)$$

Διακρίνονται δύο **ειδικές περιπτώσεις** προβλημάτων ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του μονωτήρα προκειμένου μέσω της επίλυσης τους να :

- ❖ Γίνει περιγραφή της μεθοδολογίας με απλές αλγεβρικές πράξεις
- ❖ Παρουσιαστούν φαινόμενα των μη γραμμικών ταλαντώσεων όπως οι δευτερεύοντες συντονισμοί και τα άλματα με τη βοήθεια απλών διαγραμμάτων.
- ❖ Συγκριθούν οι αναλυτικές με τις αριθμητικές λύσεις αυτού του κεφαλαίου.

Σε αυτές τις ειδικές περιπτώσεις, λοιπόν, κάνουμε αρχικά της απλοποιητική παραδοχή ότι $\beta = 0$ και $\mu = 0$ έτσι ώστε να εξαλειφθούν οι όροι με το $\text{sign}(\)$.

Η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$m\ddot{x} + (c_2x^2 + c_0)\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = -m \cdot \ddot{x}_g(t) \quad (5.11)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αδιαστατοποιήσουμε την εξίσωση κίνησης προκειμένου να εφαρμόσουμε τις μεθόδους διαταραχών του κεφαλαίου 3. Επιλέγουμε το δεύτερο τρόπο αδιαστατοποίησης (ισχύει η σχέση (1.26)) διότι θέλουμε να έχουμε εποπτικότητα στη σχέση του Ω με το ω_0 .

Η εξίσωση (5.11), λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.9), τροποποιείται σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 1 στην παρακάτω εξίσωση :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + (\tilde{c}_2 x^2 + \tilde{c}_0) \dot{x} + \tilde{k} x^3 = F \cos(\Omega t) \quad (5.12)$$

Όπου οι νέοι συντελεστές προσδιορίζονται :

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m} = \frac{2K_{sp} \alpha \gamma}{m} \quad (5.13) \quad \tilde{c}_2 = \frac{c_2}{m} x_0^2 = \frac{4C_{d1} \alpha^2 x_0^2}{m} \quad (5.14)$$

$$\tilde{c}_0 = \frac{c_0}{m} = \frac{C_{d2}}{m} \quad (5.15) \quad \tilde{k} = \frac{k_3}{m} x_0^2 = \frac{2K_{sp} \alpha^2 x_0^2}{m} \quad (5.16)$$

$$F = \frac{P}{m x_0} \quad (5.17)$$

x_0 : ένα χαρακτηριστικό μήκος της κίνησης (απαραίτητο για αδιαστατοποίηση)

Η μορφή εξίσωσης (5.12) είναι αρκετά σύνθετη για να αναπτυχθεί η μεθοδολογία με απλές αλγεβρικές πράξεις, γι αυτό διακρίνονται οι παρακάτω δύο ειδικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις ώστε να προσεγγιστεί η συμπεριφορά τους μέσω των μεθόδων διαταραχών.

Περίπτωση 1 : Εξίσωση Duffing με $\tilde{c}_2 = 0$ και $\tilde{k} \neq 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \tilde{c}_0 \dot{x} + \tilde{k} x^3 = F \cos(\Omega t) \quad (5.18)$$

Περίπτωση 2 : Εξίσωση Duffing & Van der Pol με $\tilde{c}_2 \neq 0$ και $\tilde{k} \neq 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + (\tilde{c}_2 x^2 + \tilde{c}_0) \dot{x} + \tilde{k} x^3 = F \cos(\Omega t) \quad (5.19)$$

Για να μελετηθεί η επιρροή της μη γραμμικότητας που εισάγεται με τους όρους \tilde{c}_2 και \tilde{k} θεωρούμε ότι στο σύστημα μας αυτοί οι όροι είναι αρκετά μικροί και προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τη συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος μας με μεθόδους διαταραχών. Συγκεκριμένα υποθέτουμε :

$$\tilde{c}_2 = \varepsilon \mu_2 \quad (5.20)$$

$$\tilde{k} = \varepsilon k \quad (5.21)$$

Στην περίπτωση της ασθενούς ιξώδους αποσβέσεως το \tilde{c}_0 είναι αρκετά μικρό οπότε μπορεί να εκφραστεί ως $\tilde{c}_0 = 2\varepsilon \mu_0$ (5.22) με «ε» αρκετά μικρότερο της μονάδας.

5.3.2. Εξίσωση Duffing

Με όλες τις παραπάνω απλοποιήσεις, η εξίσωση (5.18) παίρνει τη μορφή :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\varepsilon\mu_0 \dot{x} + \varepsilon kx^3 = F \cos(\Omega t) \quad (5.23)$$

Στην αρχή εξετάζεται η περίπτωση όπου η τιμή της διεγείρουσας συχνότητας Ω είναι κοντά στην τιμή της γραμμικής ιδιοσυχνότητας ω_0 . Στη συνέχεια εξετάζεται ξεχωριστά η συμπεριφορά του ταλαντωτή όταν η συχνότητα Ω έχει τιμή που είναι μακριά από την περιοχή της ω_0 . Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε φαινόμενα συντονισμού που παρατηρούνται σε συχνότητες διαφορετικές του ω_0 , στοιχείο των μη γραμμικών ταλαντωτών.

Όλα τα ανωτέρω, επιτυγχάνονται με την βοήθεια της μεθόδου των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων, μιας και αυτή επιβεβαιώνει αναλυτικά τα φαινόμενα που παρατηρούνται από πειράματα.

ΚΥΡΙΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Όταν η συχνότητα διέγερσης Ω βρίσκεται κοντά στην ιδιοσυχνότητα του αντίστοιχου γραμμικού ταλαντωτή, το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση κύριου συντονισμού ($\Omega \approx \omega_0$). Προκειμένου να μελετήσουμε αυτήν την περιοχή θεωρούμε:

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (5.24)$$

Όπου σ είναι μια παράμετρος αποσυντονισμού, που αντιπροσωπεύει την απόκλιση ανάμεσα στις συχνότητες Ω και ω_0 .

Από τη γραμμική θεωρία είναι γνωστό ότι σε συνθήκες συντονισμού, ταλαντωτές με μικρή απόσβεση εμφανίζουν μεγάλα εύρη ταλάντωσης, ακόμα και για μικρά εύρη διέγερσης. Μάλιστα, στην ειδική περίπτωση με $\sigma = \mu_0 = 0$ (και $k=0$ αφού πρόκειται για γραμμικό ταλαντωτή) προβλέπεται από τη θεωρία άπειρο εύρος, γεγονός που καθιστά τελείως ανακριβή την πρόβλεψη της γραμμικής θεωρίας στα προβλήματα μηχανικού.

Μέσα από πειραματικές παρατηρήσεις αντιλαμβανόμαστε ότι το εύρος των ταλαντώσεων στην περιοχή του κύριου συντονισμού περιορίζεται από την απόσβεση, αλλά και από την ενεργοποίηση μη γραμμικών όρων της εξίσωσης κίνησης. Για το λόγο αυτό το εύρος της διέγερσης επιλέγεται έτσι, ώστε να αλληλεπιδράσει στην ίδια τάξη μεγέθους με τους όρους της απόσβεσης και της μη γραμμικότητας. Συνεπώς υποθέτουμε ότι :

$$F = \varepsilon f \quad (5.25)$$

Η εξίσωση (5.23) μετασχηματίζεται σε :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\varepsilon\mu_0 \dot{x} + \varepsilon kx^3 = \varepsilon f \cos(\Omega t) \quad (5.26)$$

Λόγω της παρουσίας του κυβικού όρου στην εξίσωση κίνησης (5.26) δεν είναι δυνατή η εξεύρεση ακριβών λύσεων. Καταφεύγουμε λοιπόν στην αναζήτηση προσεγγιστικών αναλυτικών λύσεων με εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων.

Η λύση της εξίσωσης εκφράζεται στη μορφή :

$$x(t; \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (5.27)$$

Όπου $T_0 = t$ είναι ο «ταχύς» χρόνος και $T_1 = \varepsilon t$ είναι ο «βραδύς» χρόνος του προβλήματος. Οι όροι μεγαλύτερης τάξης ως προς “ ε ” παραλείπονται, θεωρώντας ότι οι υπάρχοντες όροι δίνουν ικανοποιητική ακρίβεια.

Σύμφωνα με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε :

$$\dot{x} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = D_0 u_0 + \varepsilon D_0 u_1 + \varepsilon D_1 u_0 + \dots \quad (5.28)$$

$$\ddot{x} = (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = D_0^2 u_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + \dots \quad (5.29)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.28) και (5.29) στη (5.26) και χωρίζοντας διαδοχικά τους όρους μηδενικής και πρώτης τάξης του ε που εμφανίζονται και στα δύο μέλη της προκύπτουσας σχέσης παράγεται το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που αποτελείται από τις σχέσεις :

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (5.30)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu_0 D_0 u_0 - k u_0^3 + f \cos(\Omega T_0) \quad (5.31)$$

Είναι φανερό ότι οι όροι που αντιπροσωπεύουν την απόσβεση, τη διέγερση και τη μη γραμμικότητα βρίσκονται συγκεντρωμένοι στο δεξί μέλος της εξίσωσης (5.31) σύμφωνα με την αρχική επιδίωξη.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.24) έχουμε ότι ισχύει :

$$\cos(\Omega T_0) = \cos(\omega_0 T_0 + \varepsilon \sigma T_0) = \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (5.32)$$

Αρα το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων (5.30) και (5.31) γίνεται :

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (5.33)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu_0 D_0 u_0 - k u_0^3 + f \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (5.34)$$

Η λύση της γραμμικής εξίσωσης (5.33) είναι η :

$$u_0(T_0, T_1) = a(T_1) \cos(\omega_0 T_0 + \phi(T_1)) \quad (5.35)$$

Προκειμένου να γίνουν εύκολα οι πράξεις στη σχέση (5.34), εκφράζουμε το u_0 σε μιγαδική μορφή. Συνεπώς, σύμφωνα με την (7.9) , έχουμε :

$$u_0 = A(T_1)e_0 + cc \quad (5.36)$$

$$e_0 := e^{i\omega_0 T_0} \quad (5.37)$$

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \cdot \exp(i\phi(T_1)) \quad (5.38)$$

Παρόμοια η εξίσωση (5.34) , σύμφωνα και με την ταυτότητα (7.9), γράφεται :

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu_0 D_0 u_0 - k u_0^3 + 0.5f (\exp(i\omega_0 T_0 + i\sigma T_1) + \exp(-i\omega_0 T_0 - i\sigma T_1)) \quad (5.39)$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα MAPLE για να αντικαταστήσουμε το u_0 από τη σχέση (5.36) στην εξίσωση (5.39). Εστιάζουμε την προσοχή μας στο δεξί μέλος (RH) της (5.39) όπου δεν έχουμε την άγνωστη συνάρτηση u_1 .

$$RH = -(2iA'\omega_0 + 2i\mu_0 A\omega_0 + 3kA^2\bar{A} - 0.5f \cdot \exp(i\sigma T_1))e_0 - kA^3 e_0^3 + cc \quad (5.40)$$

Μηδενίζουμε τον όρο του δεξιού μέλους της εξίσωσης (5.39) που πολλαπλασιάζεται με τον όρο e_0 , ο οποίος προκαλεί συντονισμό :

$$2iA'\omega_0 + 2i\mu_0 A\omega_0 + 3kA^2\bar{A} - 0.5f \cdot \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (5.41)$$

Κάνουμε αντικατάσταση το A από την (5.38) και παράγεται το σύστημα :

$$\omega_0 a \phi' + 0.5f \cos(\sigma T_1 - \phi) - 0.375ka^3 = 0 \quad (5.42)$$

$$\omega_0 a' = 0.5f \sin(\sigma T_1 - \phi) - \mu_0 a \omega_0 \quad (5.43)$$

Μετατρέπουμε το σύστημα σε αυτόνομο, εισάγοντας τη μεταβλητή $\gamma = \sigma T_1 - \phi$:

$$\omega_0 a \sigma - \omega_0 a \gamma' + 0.5f \cos \gamma - 0.375ka^3 = 0 \quad (5.44)$$

$$\omega_0 a' = 0.5f \sin \gamma - \mu_0 a \omega_0 \quad (5.45)$$

Προσδιορίζουμε τη μόνιμη απόκριση (Steady State) του συστήματος, δηλαδή βρίσκουμε τις σταθερές λύσεις (a_0, γ_0), απαιτώντας $a_0' = \gamma_0' = 0$

$$\omega_0 a_0 \sigma + 0.5 f \cos \gamma_0 - 0.375 k a_0^3 = 0 \quad (5.46)$$

$$0.5 f \sin \gamma_0 - \mu_0 a_0 \omega_0 = 0 \quad (5.47)$$

Η εξίσωση συχνότητας-απόκρισης προκύπτει απαλείφοντας το γ_0 :

$$a_0^2 (0.5625 a_0^4 k^2 - 3 a_0^2 k \sigma \omega_0 + 4 \sigma^2 \omega_0^2 + 4 \mu_0^2 \omega_0^2) = f^2 \quad (5.48)$$

Ενώ η εξίσωση για το γ_0 έχει τη μορφή :

$$\tan \gamma_0 = \frac{8 \mu_0 \omega_0}{3 a_0^2 k - 8 \sigma \omega_0} \quad (5.49)$$

Η αναζητούμενη προσεγγιστική λύση της (5.26) έχει τη μορφή :

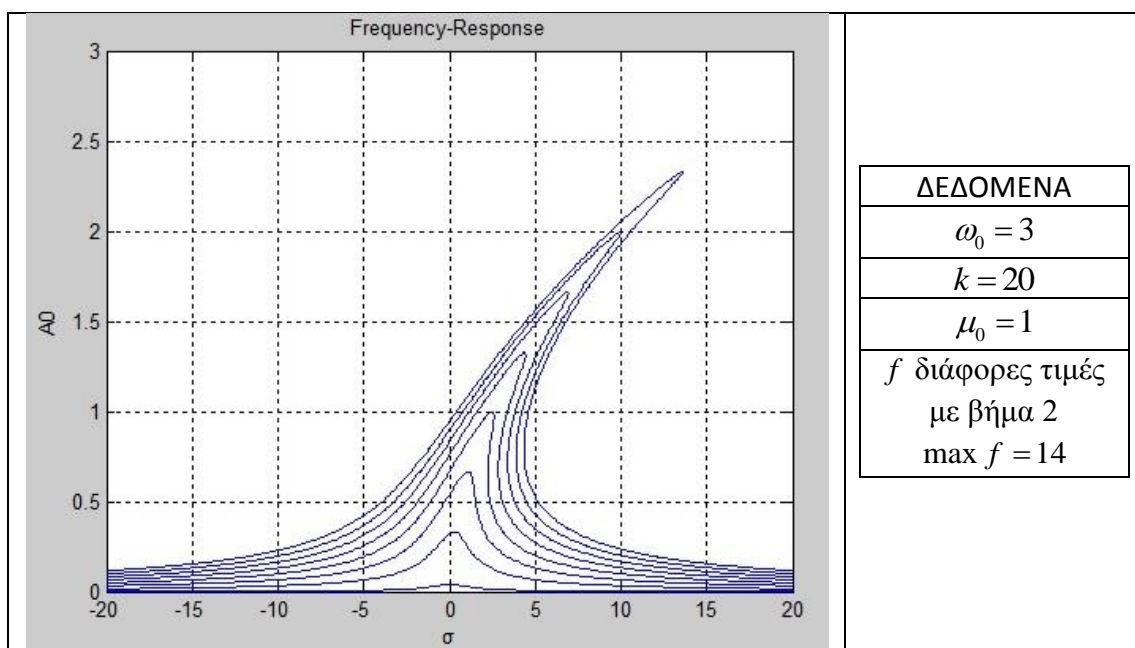
$$x(t) = a(T_1) \cos(\omega_0 T_0 + \phi(T_1)) + O(\varepsilon) = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\varepsilon) \quad (5.50)$$

Οι συναρτήσεις $a(T_1)$ και $\gamma(T_1)$ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (5.44) και (5.45). Η απόκριση του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση έχει τη μορφή της (5.50) αλλά με a_0, γ_0 από τις (5.48) και (5.49) :

$$x(t) = a_0 \cos(\Omega t - \gamma_0) + O(\varepsilon) \quad (5.51)$$

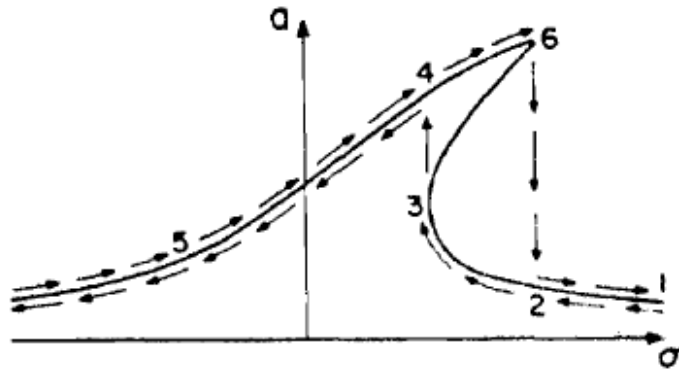
Παράδειγμα

Σχεδιάζουμε με τη βοήθεια του MATLAB το διάγραμμα $a_0(\sigma)$ που προκύπτει από τη σχέση (5.48).



Σχ. 5.9 : Διάγραμμα συχνότητας-απόκρισης στον κύριο συντονισμό - Duffing

Στο προηγούμενο παράδειγμα το διάγραμμα συχνότητας-απόκρισης έχει τη μορφή :



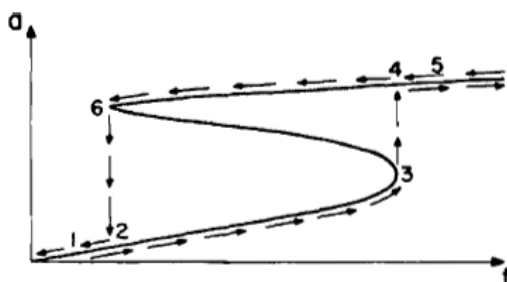
Σχ. 5.10 : Ποιοτικό διάγραμμα συχνότητας-απόκρισης – Φαινόμενο «άλματος»

Η κάμψη της καμπύλης «συχνότητας-απόκρισης» ευθύνεται για τα άλματα που παρατηρούνται. Τα τελευταία γίνονται ορατά στο πείραμα κατά το οποίο μεταβάλλουμε τη συχνότητα διέγερσης (δηλ. το σ) ενώ κρατάμε σταθερό το πλάτος διέγερσης f και παρατηρούμε το πλάτος της αρμονικής απόκρισης α .

Το πείραμα θεωρούμε ότι ξεκινάει από το σημείο 1 της καμπύλης (Σχ. 5.10). Καθώς μειώνουμε τη συχνότητα Ω , μειώνεται δηλαδή το σ παρατηρούμε αύξηση του πλάτους α μέσω του σημείου 2 φθάνουμε στο σημείο 3. Αν ελαττωθεί περισσότερο το σ τότε ένα άλμα από το σημείο 3 στο σημείο 4 λαμβάνει χώρα με ταυτόχρονη αύξηση του α . Μετά από αυτό το σημείο αν συνεχίσουμε την απομείωση του σ μικραίνει αργά και το πλάτος α .

Αν το πείραμα ξεκινήσει από το σημείο 5 και το σ αυξάνεται αυτή τη φορά, το πλάτος α αυξάνεται μέχρι να φτάσει στο σημείο 6. Στο τελευταίο σημείο επιτυγχάνεται το μέγιστο πλάτος. Αν το σ αυξηθεί περισσότερο ένα άλμα λαμβάνει χώρα από το σημείο 6 στο σημείο 2 με απότομη μείωση του πλάτους α (ασυνέχεια). Μετά από αυτό το σημείο ακολουθεί σταδιακή μείωση του α . Το τμήμα της απόκρισης μεταξύ των σημείων 3 και 6 είναι ασταθές και κατ' επέκταση δεν μπορεί να παρατηρηθεί πειραματικά.

Ανάλογο φαινόμενο παρατηρείται και στην περίπτωση που κρατήσουμε σταθερή τη συχνότητα διέγερσης Ω και απλά μεταβάλλουμε το πλάτος της διέγερσης f . Ακολουθεί ανάλογο διάγραμμα που απεικονίζει αυτό το φαινόμενο.

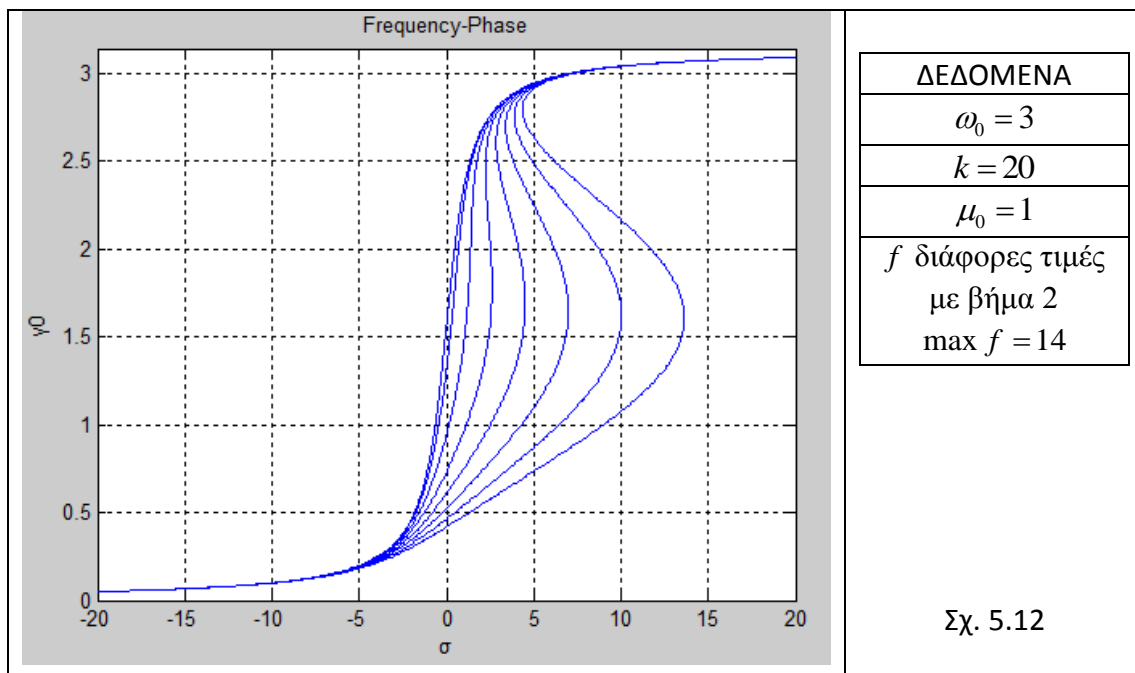


Σχ. 5.11 : Διάγραμμα πλάτους διέγερσης f - πλάτους απόκρισης α_0

Πέρα από τα παραπάνω διαγράμματα, που σχετίζονται με το εύρος α_0 της μόνιμης λύσης της εξίσωσης Duffing γύρω από την περιοχή της γραμμικής ιδιοσυχνότητας, παρόμοια φαινόμενα άλματος υπάρχουν και στα διαγράμματα που απεικονίζουν τη φάση γ_0 . Για να παραχθεί η σχέση $\gamma_0 = \gamma_0(\sigma)$ χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5.48) και (5.49). Λύνουμε την τελευταία ως προς α_0^2 και κάνουμε αντικατάσταση στην άλλη. Με αυτόν τον τρόπο και χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα MAPLE έχουμε :

$$10.667\omega_0^3\mu_0^2(\mu_0\cos\gamma_0 + \sigma\sin\gamma_0) = kf^2\sin^3\gamma_0 \quad (5.52)$$

Παράδειγμα



Όπως παρατηρούμε στα προηγούμενα σχήματα που αποτυπώνουν τις σχέσεις $\alpha_0(\sigma)$ και $\gamma_0(\sigma)$ υπάρχει μια περιοχή συχνοτήτων στην οποία υπάρχουν πολλαπλές λύσεις λόγω της κάμψης των διαγραμμάτων. Μέσω της πειραματικής διαδικασίας, εξηγήθηκε ότι οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν την απόκριση της ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση μέσα σε αυτήν την περιοχή. Η αστάθεια κάποιων λύσεων έχει σαν αποτέλεσμα να μην παρατηρούνται κατά τη διάρκεια του πειράματος.

Ο προσδιορισμός των ορίων της περιοχής συχνοτήτων όπου εμφανίζονται πολλαπλές σταθερές λύσεις μόνιμης κατάστασης είναι σημαντικός διότι σε αυτά τα σημεία υπάρχει το φαινόμενο «άλματος».

Εύρεση των ορίων όπου εμφανίζονται πολλαπλές λύσεις – Γενική μέθοδος

Τα όρια της περιοχής καθορίζονται από τα σημεία των διαγραμμάτων στα οποία η εφαπτόμενη είναι κατακόρυφη. Τα σημεία βρίσκονται με εφαρμογή της συνθήκης :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha_0} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_0} = 0 \quad (5.53)$$

Η παράγωγος αυτή υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (5.48), αφού πρώτα η τελευταία ξαναγραφεί στη μορφή :

$$\xi(\sigma, x_0) = 0.5625x_0^3k^2 - 3x_0^2k\sigma\omega_0 + (4\sigma^2\omega_0^2 + 4\mu_0^2\omega_0^2)x_0 - f^2 = 0 \quad (5.54)$$

με $x_0 := a_0^2 \quad (5.55)$

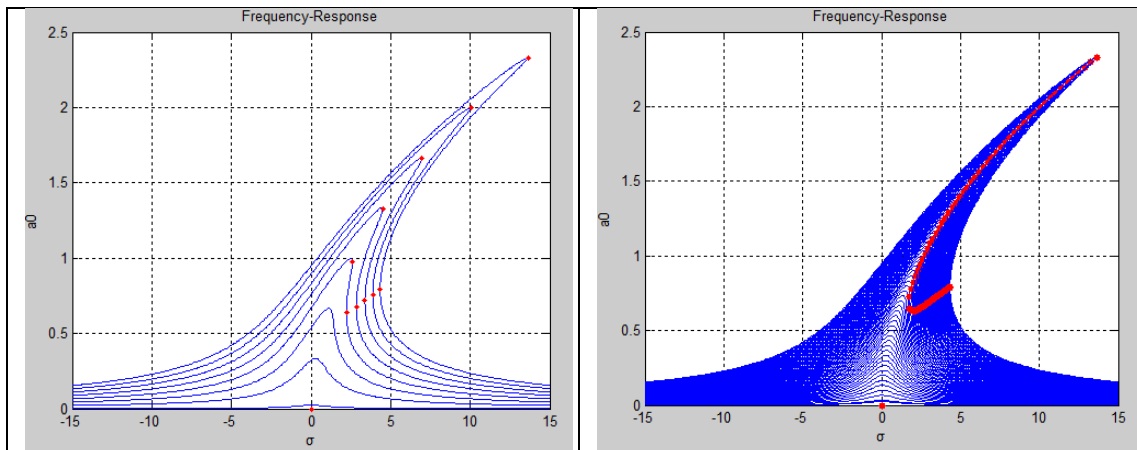
Έτσι για πεπερασμένο εύρος ταλάντωσης, η συνθήκη (5.53) είναι ισοδύναμη με :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x_0} / \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x_0} = 0 \quad (5.56)$$

Οπότε με χρησιμοποίηση της (5.54) προκύπτει ότι :

$$1.6875x_0^2k^2 - 6x_0k\sigma\omega_0 + 4\sigma^2\omega_0^2 + 4\mu_0^2\omega_0^2 = 0 \quad (5.57)$$

Η τελευταία εξίσωση σε συνδυασμό με την (5.54) αποτελεί σύστημα δύο αλγεβρικών εξισώσεων από την επίλυση του οποίου προκύπτουν τα χαρακτηριστικά σημεία στα οποία το διάγραμμα ευρών-συχνότητας έχει κατακόρυφη εφαπτομένη. Με τη βοήθεια του MATLAB απεικονίζουμε τα σημεία αυτά με κόκκινο χρώμα για το παράδειγμα στο οποίο σχεδιάσαμε τη σχέση $\alpha_0(\sigma)$ ($k = 20, \mu_0 = 1, \omega_0 = 3, \max f = 14$).



Σχ. 5.13 : Όρια πολλαπλών λύσεων – Αστάθεια

Με αυτή τη μέθοδο προσδιορίζουμε τα σημεία στα οποία ξεκινάει η αστάθεια. Εκτός από τα τελευταία, ενδιαφερόμαστε και για το γεωμετρικό τόπο των μεγίστων ευρών (Backbone Curve). Ακολουθεί η μέθοδος προσδιορισμού αυτών των σημείων.

Εύρεση της καμπύλης μέγιστων ευρών – Backbone Curve

Η εξίσωση (5.48) μπορεί να θεωρηθεί ως τριώνυμο ως προς το σ , δηλαδή :

$$(4\omega_0^2 a_0^2)\sigma^2 + (-3a_0^4 k\omega_0)\sigma + (0.5625a_0^6 k^2 + 4\mu_0^2 \omega_0^2 a_0^2 - f^2) = 0 \quad (5.58)$$

από την επίλυση του οποίου προκύπτει :

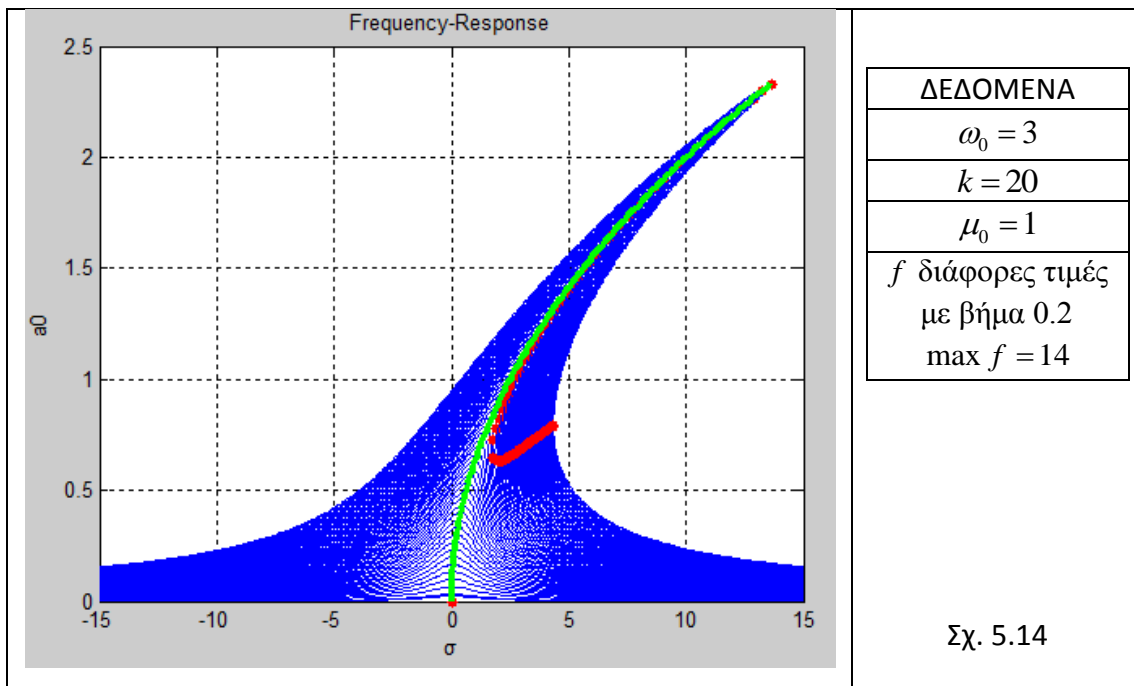
$$\sigma = \frac{3a_0^4 k\omega_0 \pm 4\omega_0 a_0 \sqrt{f^2 - 4\mu_0^2 \omega_0^2 a_0^2}}{8\omega_0^2 a_0^2} = \frac{3k}{8\omega_0} a_0^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4\omega_0^2 a_0^2} - \mu_0^2} \quad (5.59)$$

Όσο μεγαλώνει το εύρος a_0 τόσο μειώνεται η διακρίνουσα. Η οριακή τιμή γίνεται :

$$\frac{f^2}{4\omega_0^2 a_0^2} - \mu_0^2 = 0 \Rightarrow \max a_0 = \frac{f}{2\omega_0 \mu_0} \quad (5.60)$$

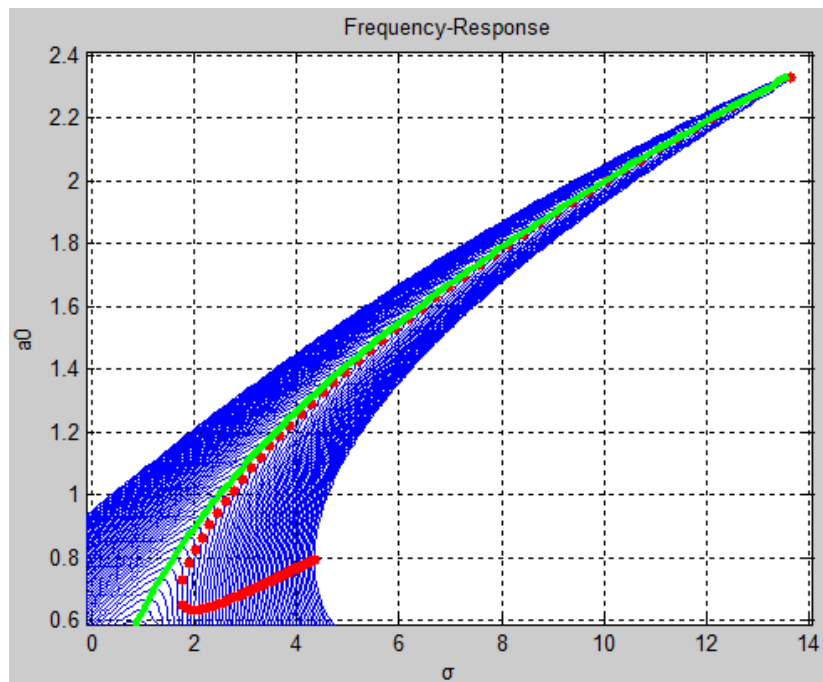
Τα σημεία της καμπύλης μέγιστων ευρών (Backbone Curve) έχουν τη μορφή :

$$(\sigma, a_0) = \left(\frac{3kf^2}{32\omega_0^3 \mu_0^2}, \frac{f}{2\omega_0 \mu_0} \right) \quad (5.61)$$



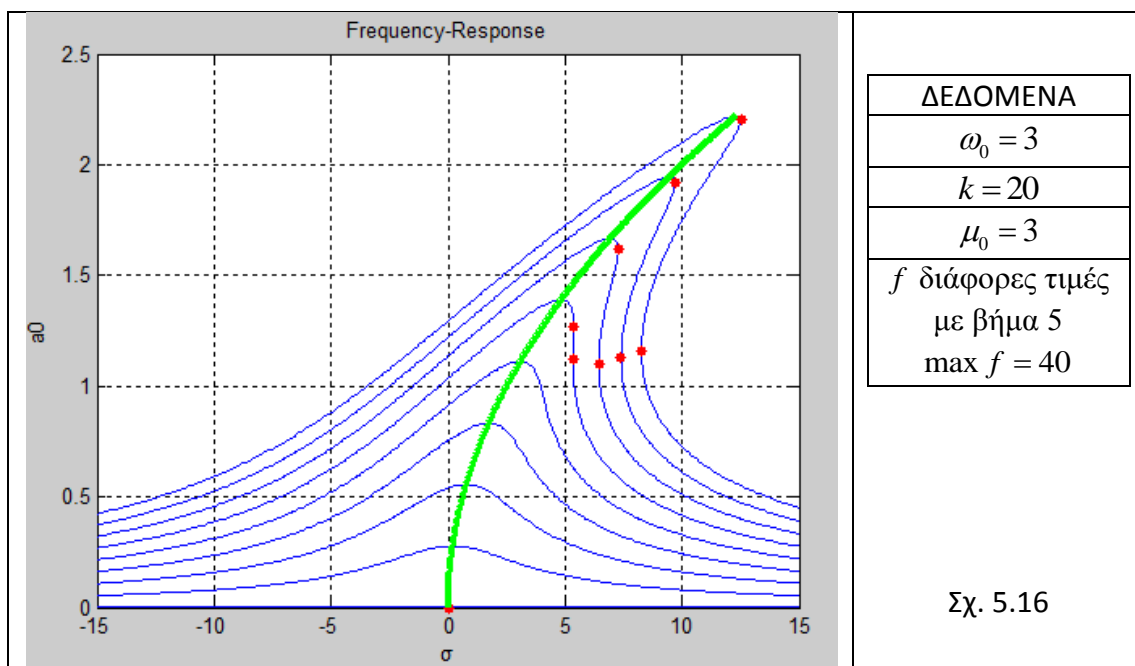
Από τη σχέση (5.60) φαίνεται ότι το εύρος είναι ανεξάρτητο του συντελεστή μη γραμμικότητας ε . Όμως, η αντίστοιχη τιμή του Ω εξαρτάται γραμμικά από αυτόν, μέσω της σχέσης (5.24). Η σχέση (5.61) εκφράζει το γεωμετρικό τόπο των μεγίστων ευρών, ο οποίος παριστάνεται από παραβολή όπως στο Σχ. 5.14 με πράσινο χρώμα.

Παρατήρηση



Σχ. 5.15 : Εστίαση στη περιοχή των φαινομένων μη γραμμικότητας

Η πράσινη καμπύλη μεγίστων ευρών (Backbone Curve) δεν διέρχεται από τα κόκκινα σημεία που είναι όρια των πολλαπλών λύσεων. Όσο μεγαλώνει το εύρος διέγερσης f πλησιάζουν στην καμπύλη (Σχ. 5.15). Ο λόγος που δεν ταυτίζονται είναι ορατός στο παρακάτω σχήμα (Σχ. 5.16) όπου παρουσιάζονται οι λύσεις για διάφορες τιμές f με μεγάλο βήμα ώστε να είναι αραιές οι καμπύλες κατά την απεικόνιση.



Σχ. 5.16

Διαδικασία σύνδεσης των αποτελεσμάτων με τα στοιχεία του μονωτήρα

Όλα τα παραπάνω, τόσο οι σχέσεις όσο και τα αποτελέσματα, εκφράστηκαν ως προς παραμέτρους (π.χ. σ, k, μ_0) που δεν σχετίζονται άμεσα με τα στοιχεία του μονωτήρα. Σε αυτό το σημείο πρέπει να μετασχηματίσουμε τις σχέσεις (5.48) και (5.49) ώστε να εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του μονωτήρα μας ($m, \alpha, \beta, \gamma, K_{sp}, C_{d1}, C_{d2}$) και τις συχνότητες Ω, ω_0 .

Το τελευταίο επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των σχέσεων (5.13) έως και (5.17). Επειδή η μεταβλητή α περιγράφει ένα γεωμετρικό μέγεθος του συστήματος μας, συμβολίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του μονωτήρα μας A_0 .

Παράδειγμα

Σύμφωνα με τη σχέση (5.48) έχουμε :

$$a_0^2 (0.5625a_0^4 k^2 - 3a_0^2 k \sigma \omega_0 + 4\sigma^2 \omega_0^2 + 4\mu_0^2 \omega_0^2) = f^2 \quad (5.62)$$

Γνωρίζουμε όμως από τις σχέσεις (5.21) και (5.25) ότι :

$$k = \frac{\tilde{k}}{\varepsilon} \quad (5.63) \quad f = \frac{F}{\varepsilon} \quad (5.64) \quad \text{και παρόμοια} \quad \mu_0 = \frac{\tilde{c}_0}{2\varepsilon} \quad (5.65)$$

Τα \tilde{c}_0, \tilde{k} και F τα βρίσκουμε από τις σχέσεις (5.15), (5.16) και (5.17) αντίστοιχα.

Ενώ ισχύει επίσης για τα σ και a_0 ότι :

$$\sigma = \frac{\Omega - \omega_0}{\varepsilon} \quad (5.66) \quad \text{και} \quad a_0 = \frac{A_0}{x_0} \quad (5.67)$$

Υστερα από την αντικατάσταση των όρων της (5.62) σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, παράγουμε την εξίσωση συχνότητας-απόκρισης για τον μονωτήρα μας :

$$A_0^2 (2.25A_0^4 K_{sp}^2 \alpha^4 - 6mA_0^2 K_{sp} \alpha^2 (\Omega - \omega_0) \omega_0 + 4m^2 (\Omega - \omega_0)^2 \omega_0^2 + C_{d2}^2 \omega_0^2) = P^2 \quad (5.68)$$

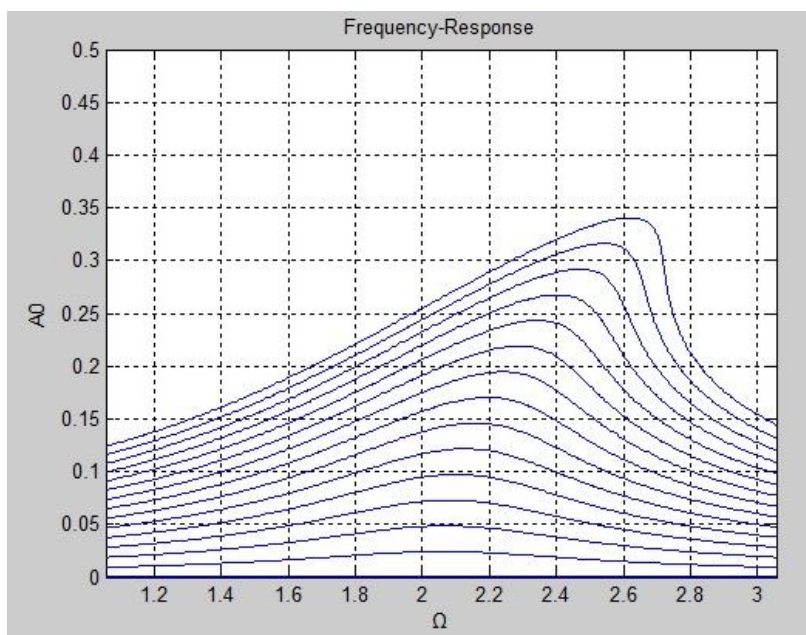
Με όμοιο τρόπο παράγουμε την εξίσωση για τη φάση γ_0 :

$$\tan \gamma_0 = \frac{4C_{d2} \omega_0}{6A_0^2 K_{sp} \alpha^2 - 8m(\Omega - \omega_0) \omega_0} \quad (5.69)$$

Παρατηρούμε ότι τόσο η σχέση (5.68) όσο και η (5.69) είναι ανεξάρτητες του x_0 , δηλαδή ενός χαρακτηριστικού μήκους που χρησιμοποιείται στη αδιαστατοποίηση.

Εφαρμογή στο μονωτήρα

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.68) και για ρεαλιστικές τιμές των χαρακτηριστικών του μονωτήρα μας, παράγουμε την καμπύλη συχνότητας-εύρους απόκρισης :



Σχ. 5.17 : Συμπεριφορά του μονωτήρα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η κάμψη του διαγράμματος λόγω μη γραμμικότητας είναι μικρή διότι οι όροι που την προκαλούν έχουν μικρό μέγεθος για το πρόβλημα μας.
2. Τα σημεία αστάθειας, όπου παρατηρούνται και άλματα, δεν ορίζουν μεγάλη περιοχή συνεπώς ο μονωτήρας έχει ελεγχόμενη συμπεριφορά.
3. Όλα τα παραπάνω συμβαίνουν για συνηθισμένες τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών ώστε να ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα (π.χ. $A_0 \leq 0.35 m$)
4. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι τα μεγέθη k , μ_0 και σ είναι $O(1)$ οπότε δεν μπορούν να παίρνουν τιμές πολύ μεγαλύτερες του 1 ή πολύ μικρότερες του 1. Με τις αντικαταστάσεις (5.63) και (5.66) δεν ελέγχεται πλέον η τάξη μεγέθους τους μέσω της εξίσωσης (5.68).

ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΕΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΙ

Όταν η συχνότητα διέγερσης Ω δεν είναι κοντά στη γραμμική ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, η διέγερση είναι σημαντική μόνο όταν έχει εύρος μηδενικής τάξης.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\varepsilon\mu_0 \dot{x} + \varepsilon kx^3 = F \cos(\Omega t) \quad (5.70)$$

Στις περιπτώσεις αυτές, εφαρμογή της μεθόδου πολλαπλών χρονικών κλιμάκων οδηγεί στις εξισώσεις :

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F \cos(\Omega T_0) \quad (5.71)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu_0 D_0 u_0 - k u_0^3 \quad (5.72)$$

Η γενική λύση της (5.71) εκφράζεται στη μορφή :

$$u_0 = A(T_1)e_0 + \Lambda e + cc \quad (5.73)$$

Όπου

$$\Lambda = \frac{F}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (5.74) \quad e := \exp(i\Omega T_0) \quad (5.75)$$

Αντικατάσταση της παράστασης (5.73) στην (5.72) οδηγεί σε παράσταση όπου στο δεξί μέλος της έχει όρους που προκαλούν συντονισμό (αιώνιους και μικρού διαιρέτη όρους). Το άθροισμα των συντελεστών αυτών των όρων πρέπει να είναι μηδέν ώστε να μην υπάρχουν όροι συντονισμού. Λεπτομερής εξέταση των όρων στο δεξί μέλος της σχέσης (5.72) φανερώνει ότι υπάρχει πιθανότητα εμφάνισης συντονισμού στις περιπτώσεις που η συχνότητα διέγερσης είναι κοντά στις τιμές :

$$0, \frac{\omega_0}{3}, 3\omega_0 \quad (5.76)$$

Για διαχωρισμό από τον κύριο συντονισμό, οι συντονισμοί αυτοί ονομάζονται δευτερεύοντες. Προφανώς, τέτοιοι συντονισμοί δεν παρατηρούνται σε γραμμικά συστήματα. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε σχεδόν στατική φόρτιση, ενώ οι άλλες δύο περιπτώσεις αναλύονται ξεχωριστά, στη συνέχεια λόγω της πρακτικής τους σπουδαιότητας στα προβλήματα μηχανικού.

Ακολουθούμε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην περίπτωση του κύριου συντονισμού. Διερευνάμε, δηλαδή, μια περιοχή των συχνοτήτων με τη βοήθεια της μεθόδου των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων. Με αυτόν τον τρόπο παράγουμε τόσο μια προσεγγιστική λύση όσο και τις εξισώσεις «συχνότητας-απόκρισης» για τις περιπτώσεις που έχουν ενδιαφέρον για το μηχανικό. Παρόμοια άλματα με το Σχ. 5.10 υπάρχουν και σε αυτές τις περιπτώσεις.

➤ Υπεραρμονικός Συντονισμός

Όταν η διεγείρουσα συχνότητα είναι σχεδόν ίση με το ένα τρίτο της γραμμικής ιδιοσυχνότητας ω_0 , δηλαδή όταν ισχύει η συνθήκη :

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (5.77)$$

παρατηρούνται όροι στο δεξί μέλος της (5.72) που προκαλούν συντονισμό. Για την εύρεση τους γίνεται αντικατάσταση της (5.73) στο δεξί μέλος και εκτελούμε τις πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα MAPLE:

$$\left(-k\Lambda^3 e^{i\sigma T_1} - 2I\mu_0 A(T_1)\omega_0 - 6\Lambda^2 A(T_1)k - 3A_-(T_1)A(T_1)^2 k - 2I\left(\frac{d}{dT_1}A(T_1)\right)\omega_0 \right) e^{i\omega_0 T_0}$$

Συνεπώς ο μη ομογενής όρος της (5.72) παίρνει τη μορφή, σύμφωνα με το MAPLE :

$$RH = \left(-k\Lambda^3 \cdot \exp(i\sigma T_1) - 2i\mu_0 A\omega_0 - 6k\Lambda^2 A - 3k\bar{A}A^2 - 2iA'\omega_0 \right) e_0 + cc + NST \quad (5.78)$$

όπου ο συμβολισμός « *NST* » περιγράφει όρους που δεν προκαλούν συντονισμό, δηλαδή δεν δημιουργούν αιώνιους όρους (Non Secular Terms).

Ο συντελεστής του e_0 που δημιουργεί όρους συντονισμού πρέπει να μηδενίζεται:

$$k\Lambda^3 \cdot \exp(i\sigma T_1) + 2i\mu_0 A\omega_0 + 6k\Lambda^2 A + 3k\bar{A}A^2 + 2iA'\omega_0 = 0 \quad (5.79)$$

Στην τελευταία εξίσωση αντικαθιστούμε το A από τη σχέση (5.38) και βρίσκουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (a, φ) μέσα από την απαίτηση ότι τόσο το πραγματικό μέρος όσο και το φανταστικό μέρος της (5.79) πρέπει να είναι μηδέν.

$$\begin{aligned} -\Lambda^3 k \cos(\sigma T_1 - \varphi(T_1)) - 3.0\Lambda^2 a(T_1)k - 0.375a(T_1)^3 k + \omega_0 a(T_1) \left(\frac{d}{dT_1} \varphi(T_1) \right) &= 0 \\ -1. \Lambda^3 k \sin(\sigma T_1 - \varphi(T_1)) - 1. \mu_0 a(T_1) \omega_0 - 1. \omega_0 \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Η επίλυση του τελευταίου συστήματος οδηγεί στον προσδιορισμό του $A(T_1)$ και κατ' επέκταση στην εύρεση μιας προσεγγιστικής λύσης της (5.70) με τύπο :

$$x = u_0 = A(T_1)e_0 + \Lambda e + cc \quad (5.80)$$

$$\text{ή} \quad x(t) = a(\varepsilon t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(\varepsilon t)) + 2\Lambda \cdot \cos(\Omega t) \quad (5.81)$$

Οι άγνωστες συναρτήσεις $a(T_1) = a(\varepsilon t)$ και $\varphi(T_1) = \varphi(\varepsilon t)$ καθορίζουν τη συμπεριφορά του ταλαντωτή μας. Στην περίπτωση που $a \neq 0$ διατηρείται ο όρος ελεύθερης απόκρισης $(a \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi))$ που στα γραμμικά συστήματα με την πάροδο του χρόνου εξαλείφεται λόγω της απόσβεσης συνήθως.

Για το μελετητή μηχανικό ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μόνιμη κατάσταση. Για τον προσδιορισμό των σταθερών λύσεων είναι απαραίτητη η μετατροπή του συστήματος των a, φ σε αυτόνομο σύστημα. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό:

$$\gamma = \sigma T_1 - \varphi \quad (5.82)$$

παράγουμε το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων από τις οποίες θα προκύψουν οι σταθερές λύσεις (a_0, γ_0) και κατ' επέκταση η προσεγγιστική απόκριση $x(t)$.

$$\begin{aligned} -\Lambda^3 k \cos(\gamma(T_1)) - 3.0 \Lambda^2 a(T_1) k - 0.375 a(T_1)^3 k + \omega_0 a(T_1) \sigma - \omega_0 a(T_1) \left(\frac{d}{dT_1} \gamma(T_1) \right) &= 0 \\ -1. \Lambda^3 k \sin(\gamma(T_1)) - 1. \mu_0 a(T_1) \omega_0 - 1. \omega_0 \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Μηδενίζοντας τις παραγώγους προσδιορίζουμε τις σταθερές λύσεις (a_0, γ_0) :

$$\begin{aligned} -\Lambda^3 k \cos(\gamma_0) - 3.0 \Lambda^2 a_0 k - 0.375 a_0^3 k + \omega_0 a_0 \sigma &= 0 \\ -1. \Lambda^3 k \sin(\gamma_0) - 1. \mu_0 a_0 \omega_0 &= 0 \end{aligned}$$

Απαλείφοντας το γ_0 από τις προηγούμενες σχέσεις, παράγεται η σχέση της συχνότητας διέγερσης με το πλάτος a_0 .

$$\begin{aligned} 9\Lambda^4 k^2 \alpha_0^2 + 2.25\Lambda^2 k^2 \alpha_0^4 - 6\Lambda^2 k \sigma \omega_0 \alpha_0^2 + 0.1406k^2 \alpha_0^6 - \\ -0.75\alpha_0^4 k \sigma \omega_0 + \sigma^2 \omega_0^2 \alpha_0^2 + \mu_0^2 \omega_0^2 \alpha_0^2 = \Lambda^6 k^2 \end{aligned} \quad (5.83)$$

Λύνοντας ως προς $\sin \gamma_0$ και $\cos \gamma_0$ προσδιορίζουμε και τη σχέση της φάσης :

$$\tan \gamma_0 = \frac{8\mu_0 \omega_0}{24\Lambda^2 k + 3ka_0^2 - 8\sigma \omega_0} \quad (5.84)$$

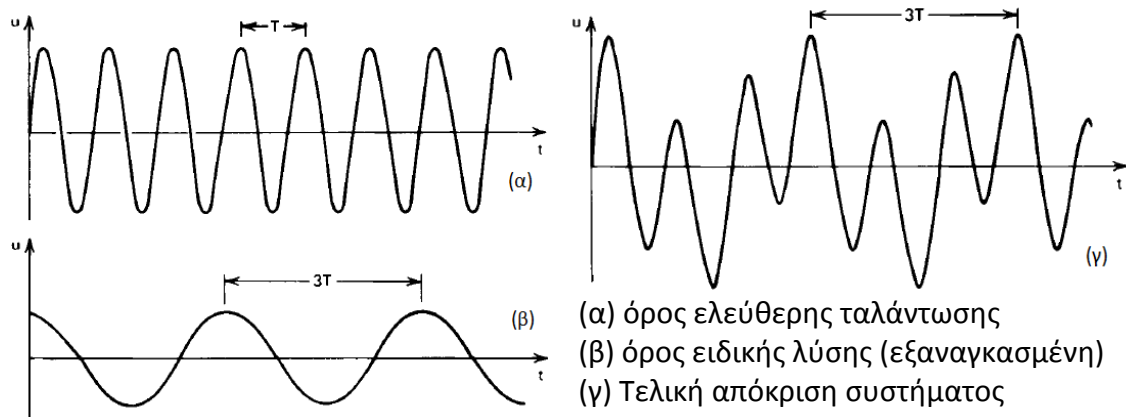
Οι σταθερές λύσεις (a_0, γ_0) των εξισώσεων αυτών αντιστοιχούν σε απόκριση του ταλαντωτή με μορφή :

$$x(t) = a_0 \cos(3\Omega t - \gamma_0) + \frac{F}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon) \quad (5.85)$$

Δηλαδή η μη γραμμικότητα οδηγεί στη διατήρηση του όρου με συχνότητα 3Ω . Επιπλέον η μη γραμμικότητα μεταβάλλει τις συχνότητες απόκρισης έτσι, ώστε η απόκριση του ταλαντωτή στη μόνιμη κατάσταση να είναι περιοδική (όχι αρμονική).

Επειδή η συχνότητα του παραγόμενου όρου ελεύθερης ταλάντωσης είναι τρεις φορές της συχνότητας διέγερσης Ω (5.85), αυτοί οι συντονισμοί αποκαλούνται υπεραρμονικοί.

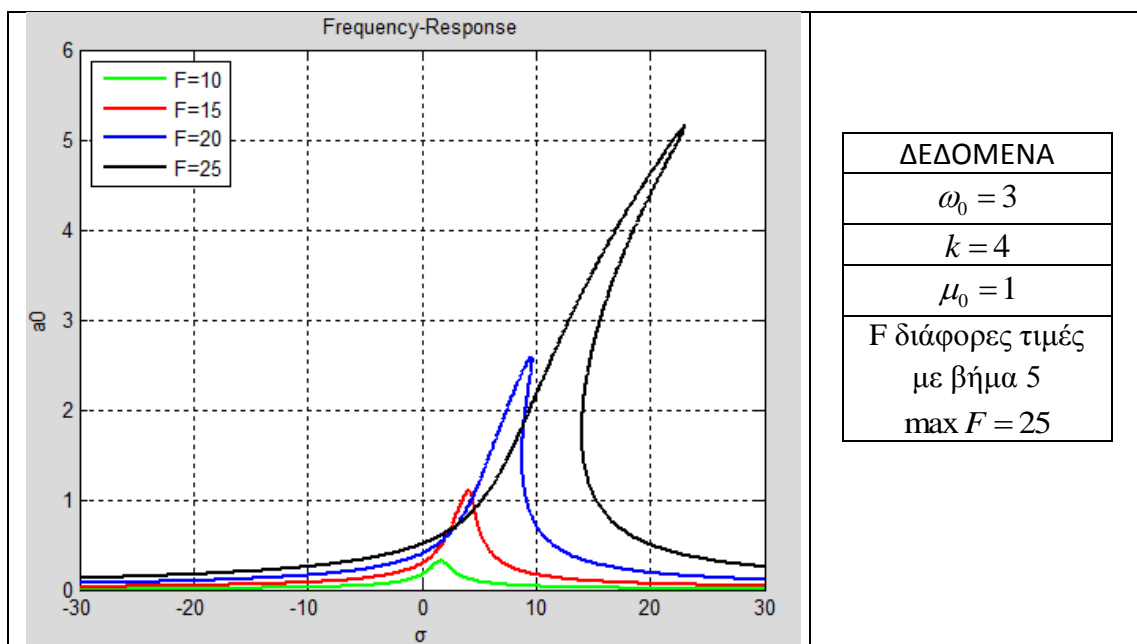
Ακολουθούν διαγράμματα που παρουσιάζουν αφενός την επιρροή του κάθε όρου της (5.85) στη συμπεριφορά του ταλαντωτή και αφετέρου την τελική απόκριση που παράγεται με υπέρθεση.



Σχ. 5.18

Καμπύλη συχνότητας – απόκρισης

Η εξίσωση (5.83) συνδέει δύο μεγέθη τα a_0 και σ που καθορίζουν τη συμπεριφορά του ταλαντωτή. Ο όρος $\sigma = O(1)$ καθορίζει την απόκλιση της συχνότητας διέγερσης Ω από την συχνότητα $\frac{\omega_0}{3}$ σύμφωνα με τη σχέση (5.77) ενώ ο a_0 εκφράζει το μέγιστο πλάτος του όρου ελεύθερης ταλάντωσης Σχ. 5.18 (α). Όπως είδαμε στο τελευταίο σχήμα, η μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας δεν είναι a_0 διότι επηρεάζει και ο όρος ειδικής λύσης ο οποίος υπεισέρχεται λόγω της εξαναγκασμένης φύσης του προβλήματος. Παρόλα αυτά κατασκευάζεται η καμπύλη συχνότητας – απόκρισης για να εμφανιστούν κάποια ιδιαίτερα φαινόμενα.



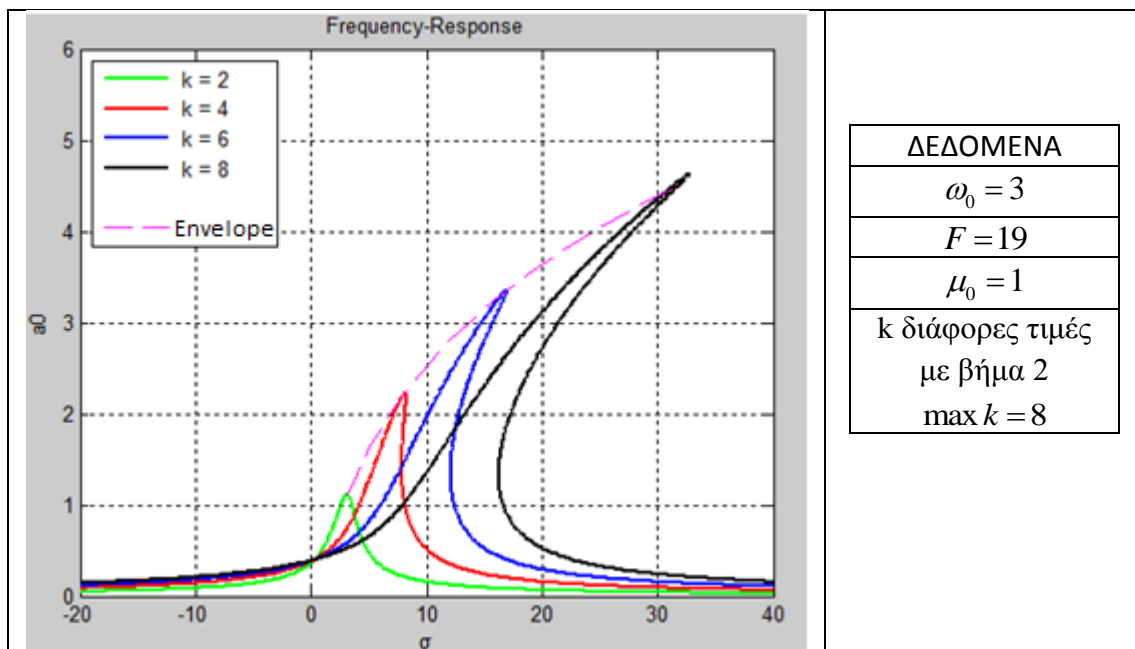
Σχ. 5.19 : Καμπύλη συχνότητας – απόκρισης για υπεραρμονικό συντονισμό

Στο Σχ. 5.19 παρατηρούμε κάμψη του διαγράμματος συχνότητας – απόκρισης όπως στην περίπτωση του κύριου συντονισμού (Σχ. 5.9). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να πραγματοποιείται το φαινόμενο του άλματος και κατ' επέκταση να υπάρχουν ασταθείς λύσεις. Για το γραμμικό ταλαντωτή, δεν υπάρχει αυτή η καμπύλη.

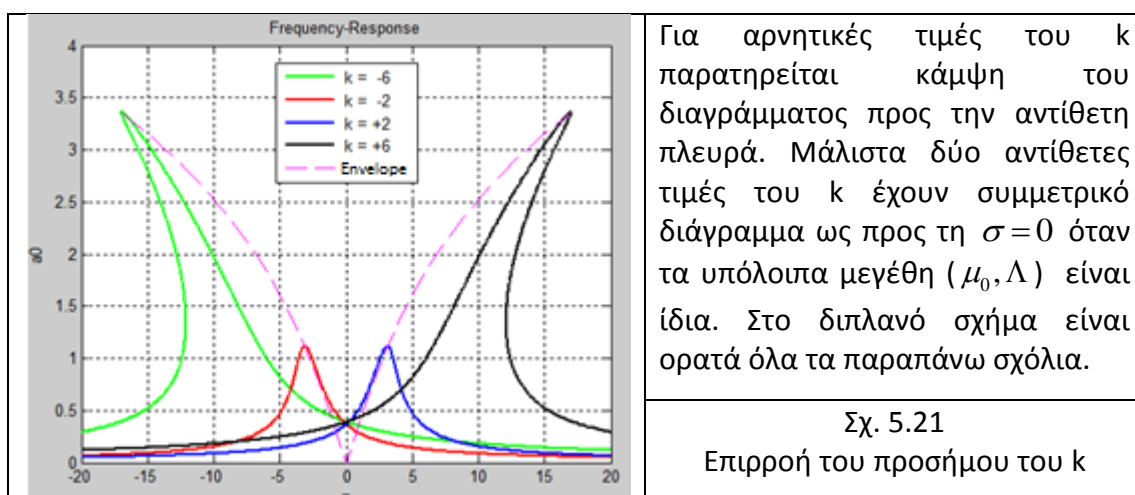
Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην περίπτωση του κύριου συντονισμού προσδιορίζουμε τη καμπύλη μεγίστων ευρών (Backbone Curve) :

$$(\sigma, a_0) = \left(\frac{3k\Lambda^2}{\omega_0} \left(1 + \frac{k^2\Lambda^4}{8\mu_0^2\omega_0^2} \right), \frac{|k|\Lambda^3}{\mu_0\omega_0} \right) \quad (5.86)$$

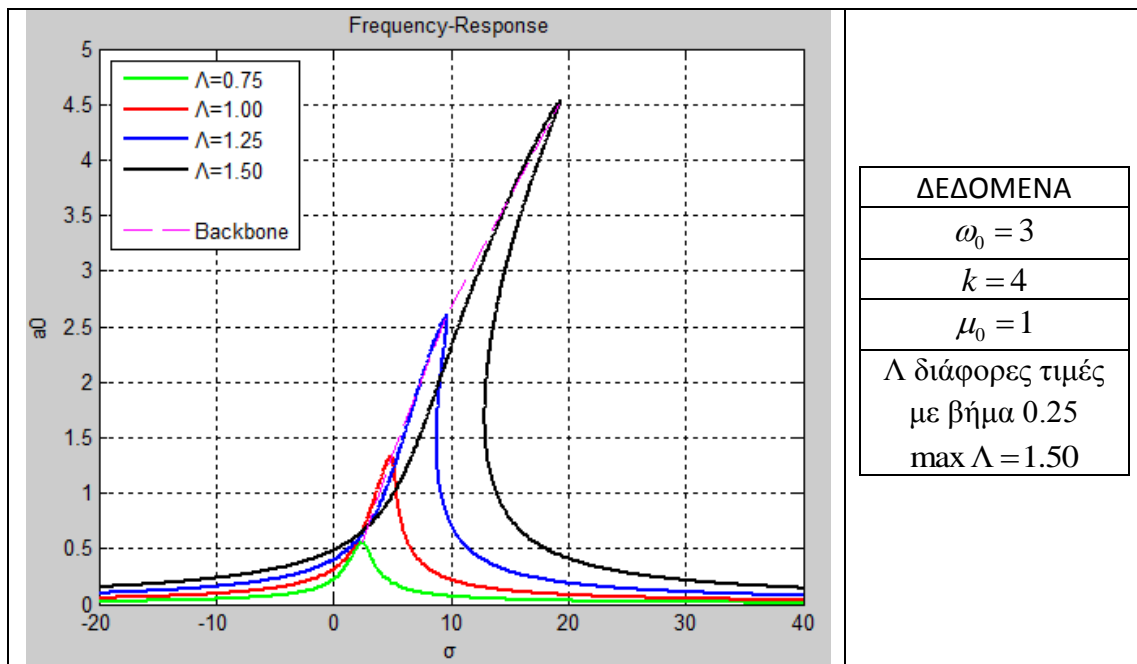
Ακολουθούν παραδείγματα εφαρμογής της (5.83) προκειμένου να γίνει κατανοητή η εξάρτηση τόσο του εύρους ελεύθερης ταλάντωσης a_0 όσο και της μορφής της καμπύλης μεγίστων ευρών από τα k, Λ και μ_0 (Envelope Curve).



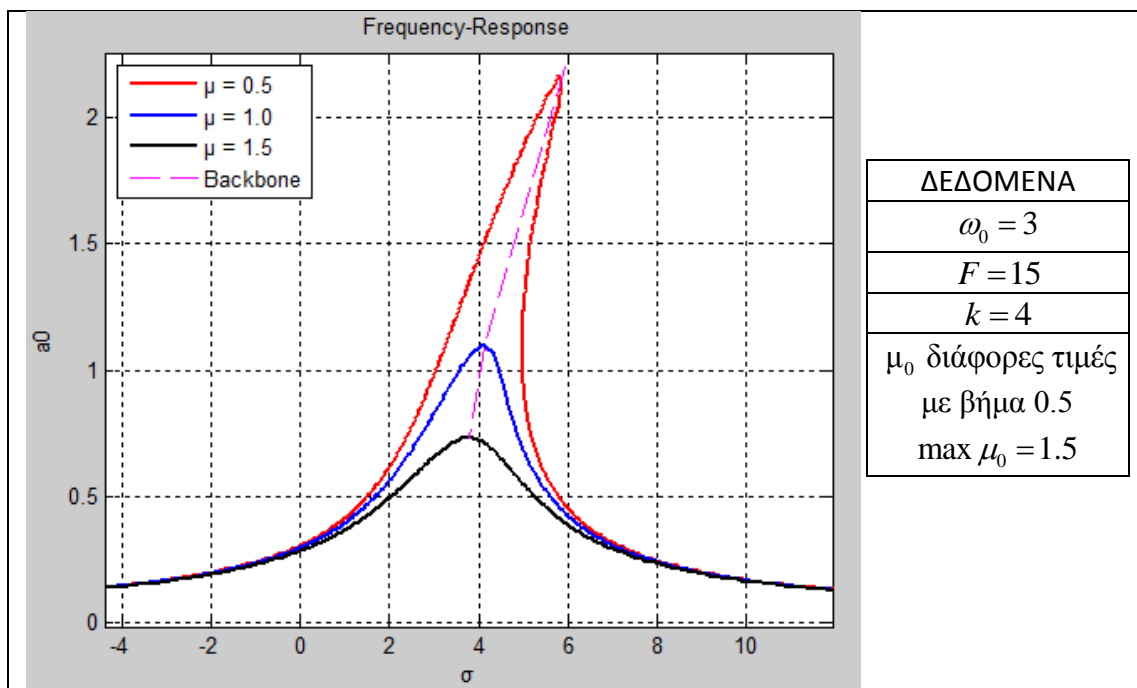
Σχ. 5.20 : Καμπύλη συχνότητας – απόκρισης για διάφορες τιμές του k



Σχ. 5.21
Επιρροή του προσήμου του k



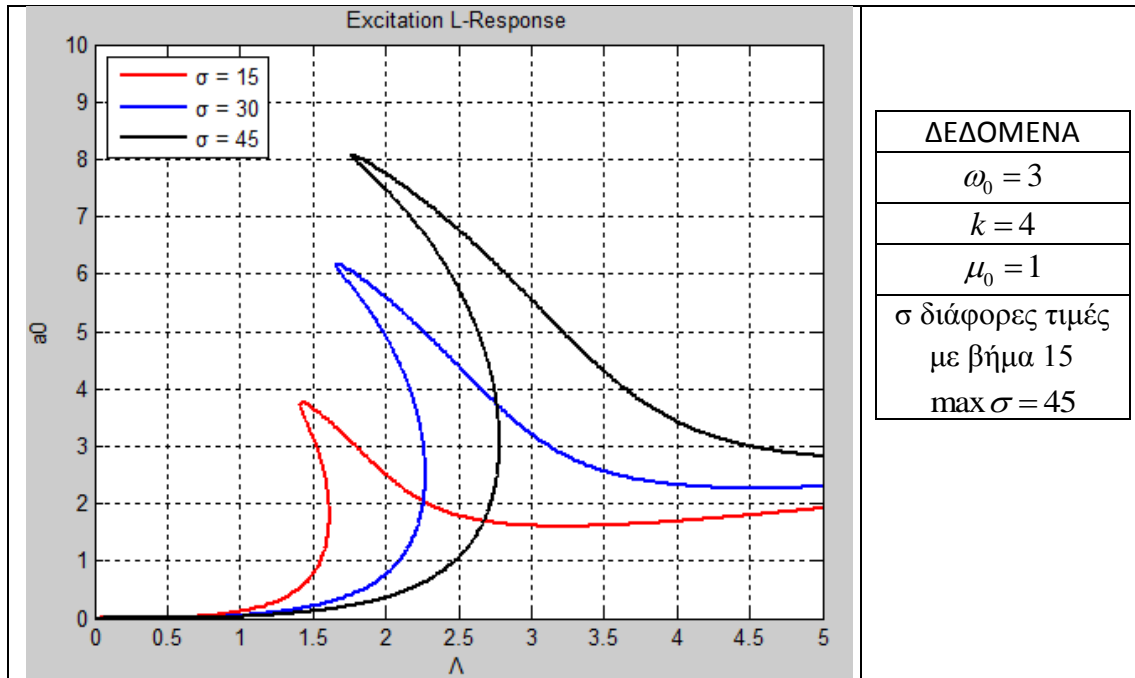
Σχ. 5.22 : Καμπύλη συχνότητας – απόκρισης για διάφορες τιμές του Λ



Σχ. 5.23 : Καμπύλη συχνότητας – απόκρισης για διάφορες τιμές του μ_0

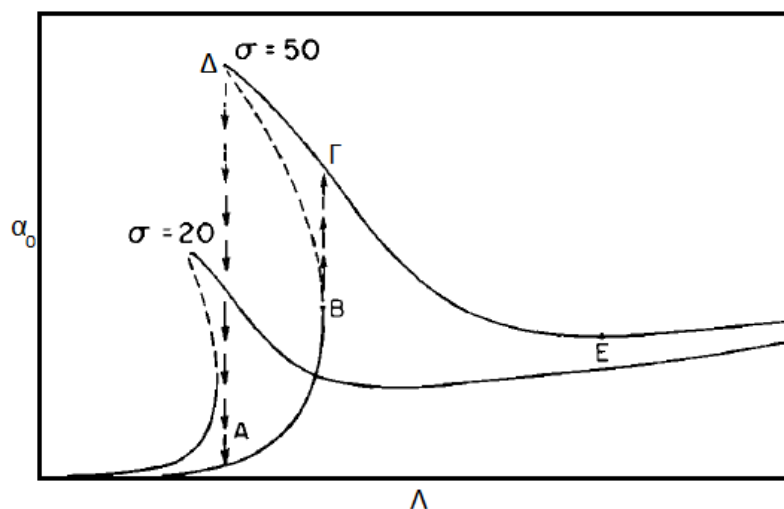
Καμπύλη διέγερσης Λ – απόκριση

Σε αυτό το σημείο, κρίνεται σκόπιμο να κατασκευαστεί το διάγραμμα απόκρισης ως συνάρτηση του εύρους διέγερσης μέσω της ποσότητας Λ .



Σχ. 5.24 : Καμπύλη πλάτους διέγερσης – εύρους απόκρισης

Ακολουθεί ένα σχήμα από τη βιβλιογραφία [8] που απεικονίζει ποιοτικά το παραπάνω διάγραμμα ώστε να παρουσιαστούν τα φαινόμενα «άλματος» με βέλη όμοια με αυτά του κύριου συντονισμού (Σχ. 5.11).



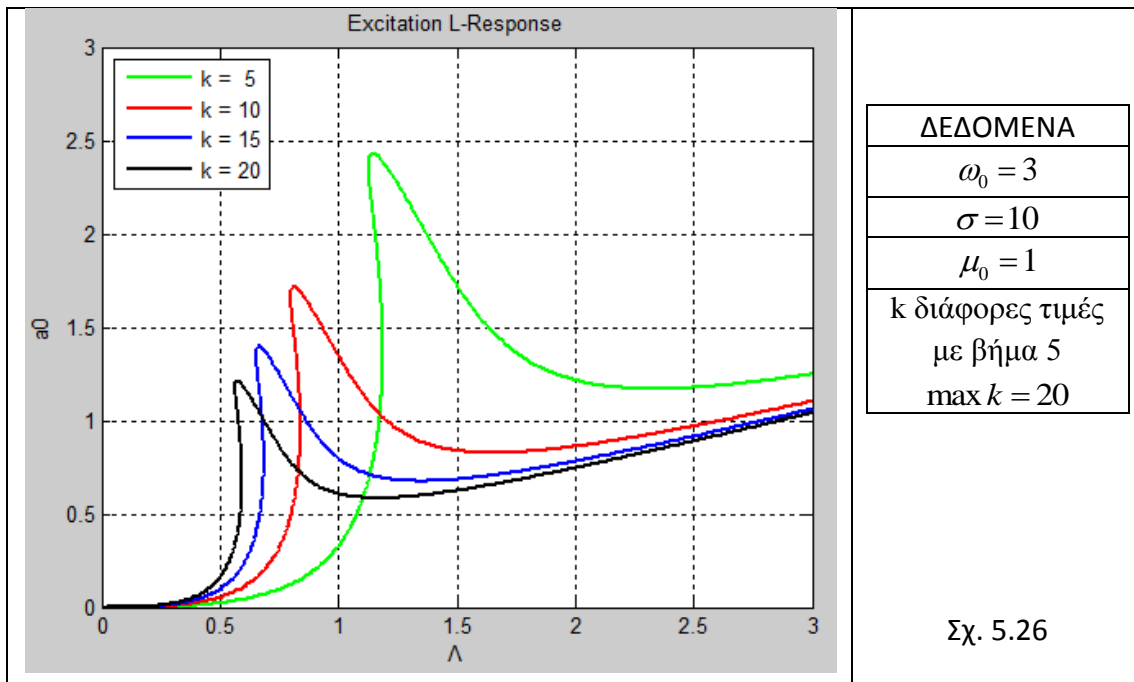
Σχ. 5.25 : Ποιοτικό σχήμα απόκρισης σε συνάρτηση με τον όρο διέγερσης Λ

Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν σε ασταθείς λύσεις που δεν παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια του πειράματος ενώ τα βέλη υποδεικνύουν τα άλματα του εύρους απόκρισης που λαμβάνουν χώρα.

Πιο συγκεκριμένα, καθώς το εύρος διέγερσης F μειώνεται (άρα και το Λ), το εύρος απόκρισης a_0 μειώνεται πολύ γρήγορα ($\Delta \rightarrow A$). Στην περίπτωση της αύξησης του Λ παρατηρείται άλμα από το Β στο Γ με απότομη αύξηση του εύρους απόκρισης σύμφωνα με το Σχ. 5.25. Μετά το τελευταίο «άλμα», το εύρος απόκρισης μειώνεται καθώς το Λ συνεχίζει να αυξάνεται μέχρι το σημείο Ε όπου παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Η συμπεριφορά αυτή δεν είναι ίδια στο Σχ. 5.11 αφού η απόκριση αυξάνεται μονοτονικά.

Παρατήρηση

Κοντά στην περιοχή του υπεραρμονικού συντονισμού και συγκεκριμένα για $\sigma = 10$ κατασκευάζουμε τα διαγράμματα διέγερσης Λ - απόκρισης (Σχ. 5.26). Καθώς η μη γραμμικότητα του προβλήματος αυξάνεται μέσω του συντελεστή k παρατηρούμε πτώση του «ύψους του άλματος» και μεταφορά του σημείου μέγιστης απόκρισης σε χαμηλότερες τιμές του Λ . Αυτή η φαινομενικά καλή συμπεριφορά της μη γραμμικότητας αναιρείται, όπως είδαμε από το Σχ. 5.20, αφού το μέγιστο εύρος $\max a_0$ αυξάνεται. Η τελευταία αύξηση δεν παρατηρείται στο παρακάτω σχήμα διότι συμβαίνει σε όλο και μεγαλύτερες αποστάσεις από τη συχνότητα $\omega_0/3$, δηλαδή για μεγαλύτερες τιμές του σ .



➤ Υποαρμονικός Συντονισμός

Όταν η διεγείρουσα συχνότητα είναι σχεδόν τριπλάσια της ω_0 , δηλαδή όταν :

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (5.87)$$

χρησιμοποιούμε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην περίπτωση του υπεραρμονικού συντονισμού ώστε αφενός να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά του ταλαντωτή μας σε αυτήν την περιοχή (5.87) και αφετέρου να παραχθεί η εξίσωση συχνότητας-απόκρισης. Μηδενίζουμε το συντελεστή του e_0 που δημιουργεί όρους συντονισμού (αιώνιοι και μικρού διαιρέτη όροι). Αναλυτικά:

$$3k\bar{A}^2 \cdot \exp(iT_1\sigma) + 2i\mu_0 A\omega_0 + 6\Lambda^2 Ak + 3\bar{A}A^2 k + 2iA'\omega_0 = 0 \quad (5.88)$$

Η εξασφάλιση περιοδικής απόκρισης απαιτεί την ικανοποίηση αυτής της συνθήκης. Από αυτήν προκύπτει σύστημα των a, γ με κατάλληλους μετασχηματισμούς και αντικαταστάσεις. Το τελευταίο σύστημα έχει τη σταθερή λύση :

$$a_0 = 0 \quad (5.89)$$

Η αναζήτηση πρόσθετων σταθερών λύσεων οδηγεί στον προσδιορισμό της εξίσωσης συχνότητας-απόκρισης. Επίσης διατυπώνεται σχέση για τον προσδιορισμό της φάσης γ_0 μέσα από την οποία εμφανίζεται η επιρροή των μη γραμμικών όρων.

$$16\Lambda^4 k^2 + 3\Lambda^2 a_0^2 k^2 - 3.5556\Lambda^2 k\omega_0\sigma + 0.25a_0^4 k^2 - \\ -0.4444a_0^2 k\omega_0\sigma + 0.1975\omega_0^2 \sigma^2 + 1.7778\mu_0^2 \omega_0^2 = 0 \quad (5.90)$$

$$\tan \gamma_0 = \frac{24\mu_0\omega_0}{72\Lambda^2 k + 9a_0^2 k - 8\omega_0\sigma} \quad (5.91)$$

Οι σταθερές λύσεις (a_0, γ_0) των εξισώσεων αυτών αντιστοιχούν σε προσεγγιστική απόκριση του ταλαντωτή με μορφή (σύμφωνα με τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων):

$$x(t) = a_0 \cos\left(\frac{\Omega t - \gamma_0}{3}\right) + \frac{F}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon) \quad (5.92)$$

Η μηδενική λύση (5.89) αντιστοιχεί στη λύση του αντίστοιχου γραμμικού προβλήματος. Όμως για ορισμένους συνδυασμούς αρχικών συνθηκών, η μη γραμμικότητα είναι δυνατο να οδηγήσει στη διατήρηση του όρου με συχνότητα $\Omega/3$. Αρα, αυτός ο συντονισμός δεν εμφανίζεται πάντα στη μελέτη μας.

Επειδή η συχνότητα του παραγόμενου όρου ελεύθερης ταλάντωσης είναι το ένα τρίτο της συχνότητας διέγερσης Ω (5.92), αυτοί οι συντονισμοί αποκαλούνται υποαρμονικοί.

Δίνουμε στη σχέση (5.90) τη μορφή τριωνύμου :

$$a_0^4 - 2pa_0^2 + q = 0 \quad (5.93)$$

$$p = 0.89 \frac{\omega_0}{k} \sigma - 6\Lambda^2 \quad (5.94)$$

$$q = 0.79 \frac{\omega_0^2}{k^2} \sigma^2 - 14.22 \frac{\Lambda^2 \omega_0}{k} \sigma + 64\Lambda^4 + 7.11 \frac{\mu_0^2}{k^2} \omega_0^2 \quad (5.95)$$

Η διτετράγωνη εξίσωση (5.93) έχει λύσεις της μορφής : $a_0^2 = p \pm \sqrt{p^2 - q}$ (5.96)

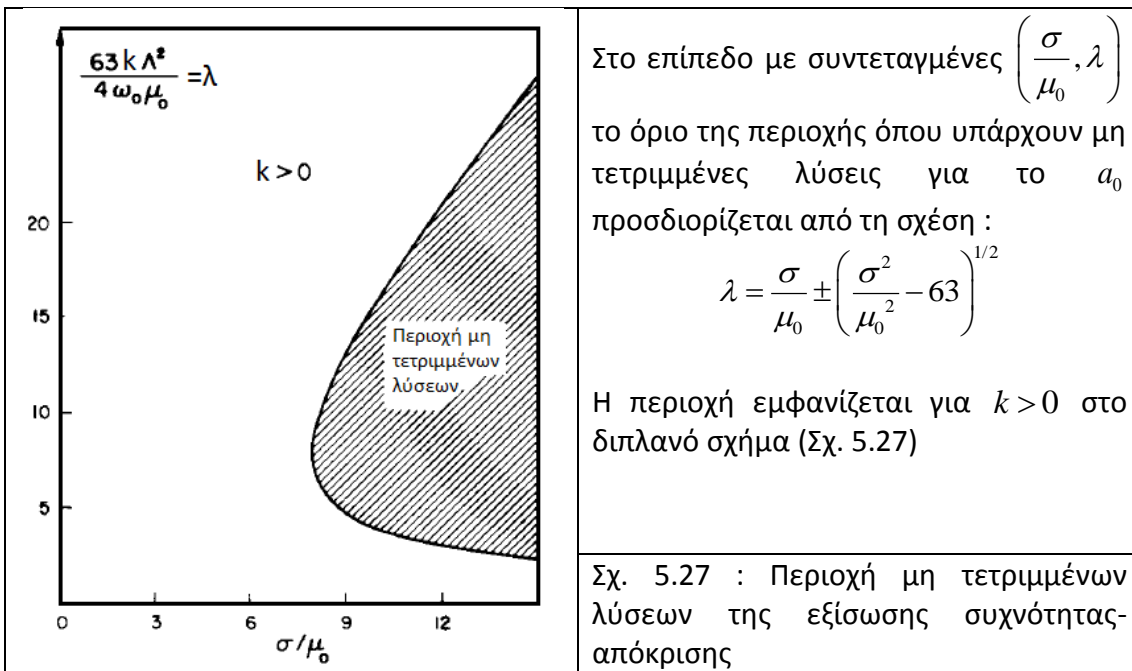
όταν $p > 0$ (5.97) και $p^2 \geq q$ (5.98)

Από την απαίτηση να ισχύουν οι δύο τελευταίες ανισότητες προσδιορίζουμε για ποιες τιμές των Λ και σ υπάρχουν μη τετριμμένες ρίζες της (5.93) ή αλλιώς υπάρχουν $a_0 \neq 0$ που να επαληθεύουν την εξίσωση συχνότητας-απόκρισης.

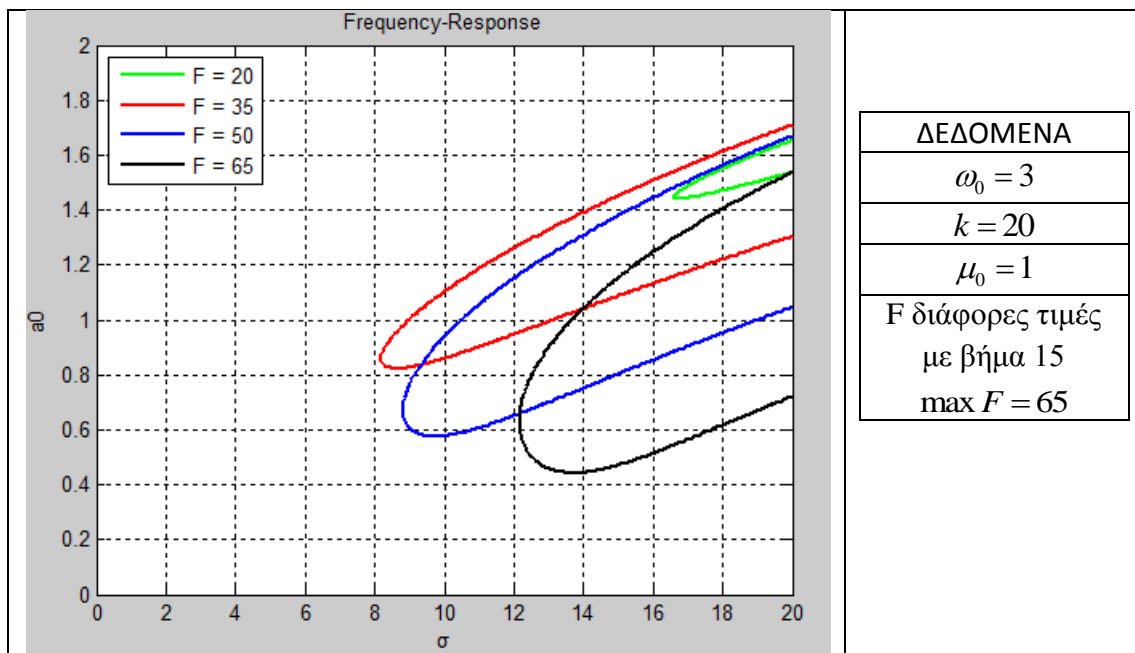
Εισάγουμε τη μεταβλητή $\lambda = \frac{63k\Lambda^2}{4\omega_0\mu_0} \Rightarrow \Lambda^2 = \frac{4\lambda\omega_0\mu_0}{63k}$ (5.99)

Κάνουμε αντικατάσταση στην ανίσωση (5.98) του Λ^2 από τη σχέση (5.99). Λύνοντας την ανίσωση, βρίσκουμε ότι ισχύει για τις παρακάτω τιμές του λ :

$$\frac{\sigma}{\mu_0} - \left(\frac{\sigma^2}{\mu_0^2} - 63 \right)^{1/2} \leq \lambda \leq \frac{\sigma}{\mu_0} + \left(\frac{\sigma^2}{\mu_0^2} - 63 \right)^{1/2} \quad (5.100)$$

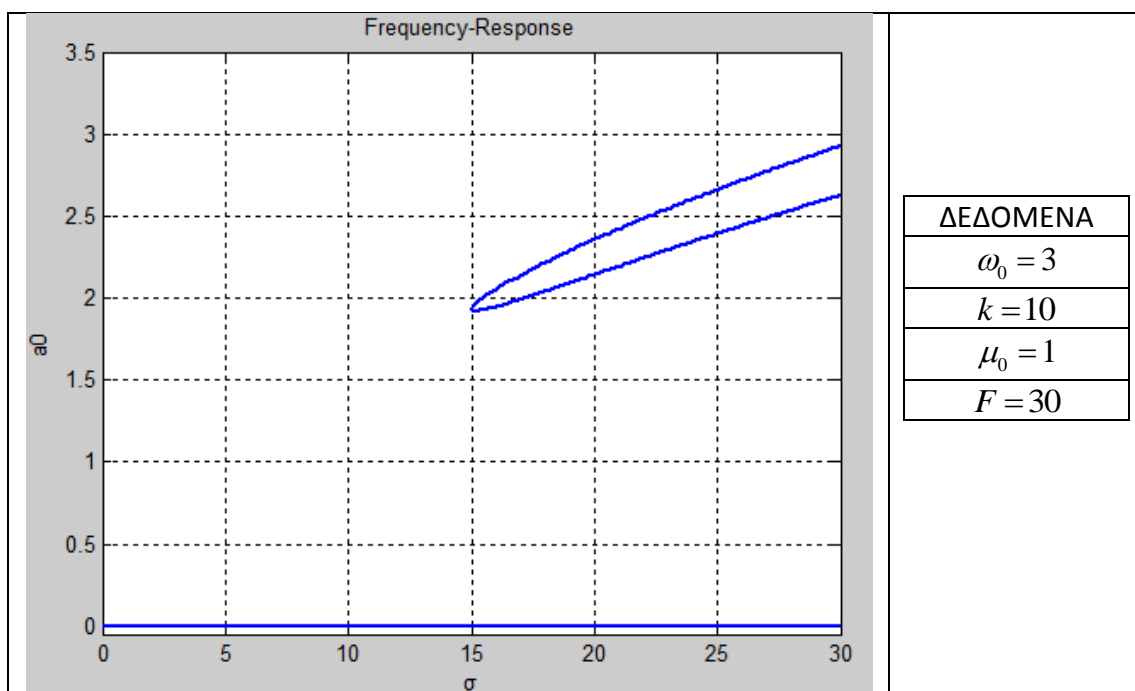


Καμπύλη συχνότητας – απόκριση



Σχ. 5.28 : Καμπύλη συχνότητας – απόκρισης για τον υποαρμονικό συντονισμό

Όπως βλέπουμε από τη σχέση (5.89) η λύση $a_0 = 0$ υπάρχει ανεξάρτητα από τις λύσεις που έχουμε από την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης (5.90). Η χάραξη της σωστής καμπύλης συχνότητας – απόκρισης προϋποθέτει την εμφάνιση και της μηδενικής τιμής του a_0 όπως στο επόμενο σχήμα.

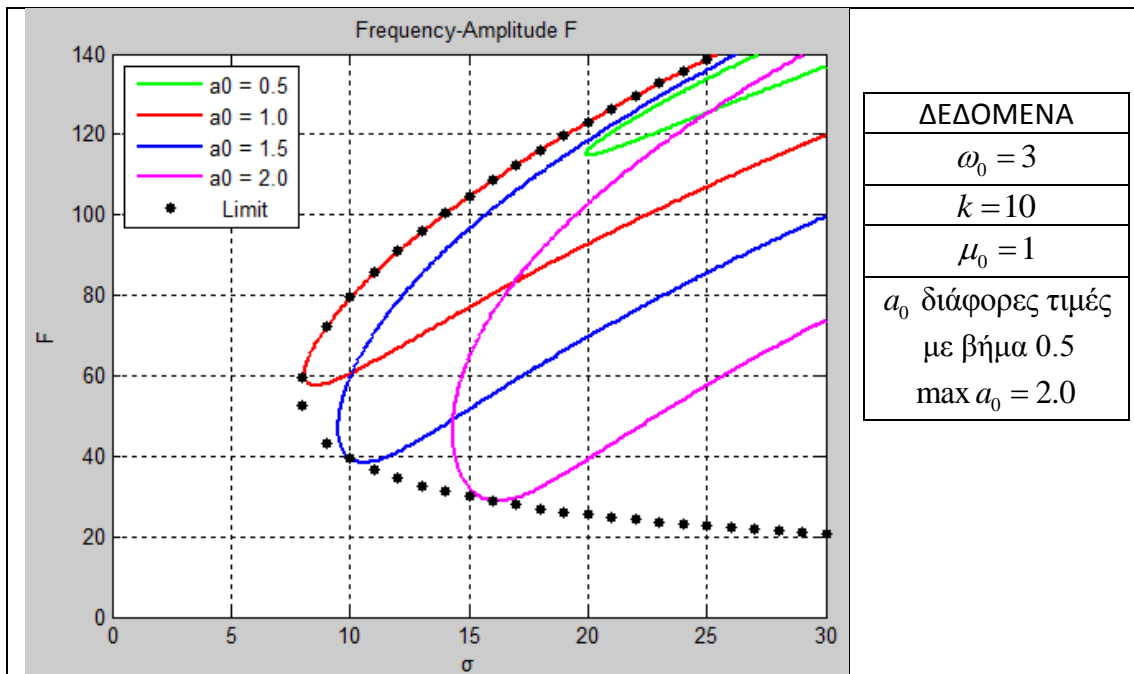


Σχ. 5.29 : Καμπύλη συχνότητας – απόκρισης με τη μηδενική λύση (υποαρμονικός)

Στην περίπτωση του υποαρμονικού συντονισμού είναι αξιοσημείωτο να αναφερθεί ότι δεν υπάρχει φαινόμενο «άλματος». Στις περιοχές όπου υπάρχουν δύο ευσταθείς λύσεις ($a_0 = 0$ και $a_0 \neq 0$, Σχ. 5.29), οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν ποια λύση περιγράφει την απόκριση.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται απαραίτητο να τονισθεί ότι η μεγάλη συχνότητα (Ω) εισάγεται με τον όρο της ειδικής λύσης λόγω εξαναγκασμού ενώ ο όρος ελεύθερης ταλάντωσης με πλάτος a_0 έχει μικρότερη συχνότητα ($\Omega/3$) όπως φαίνεται και από τη σχέση (5.92).

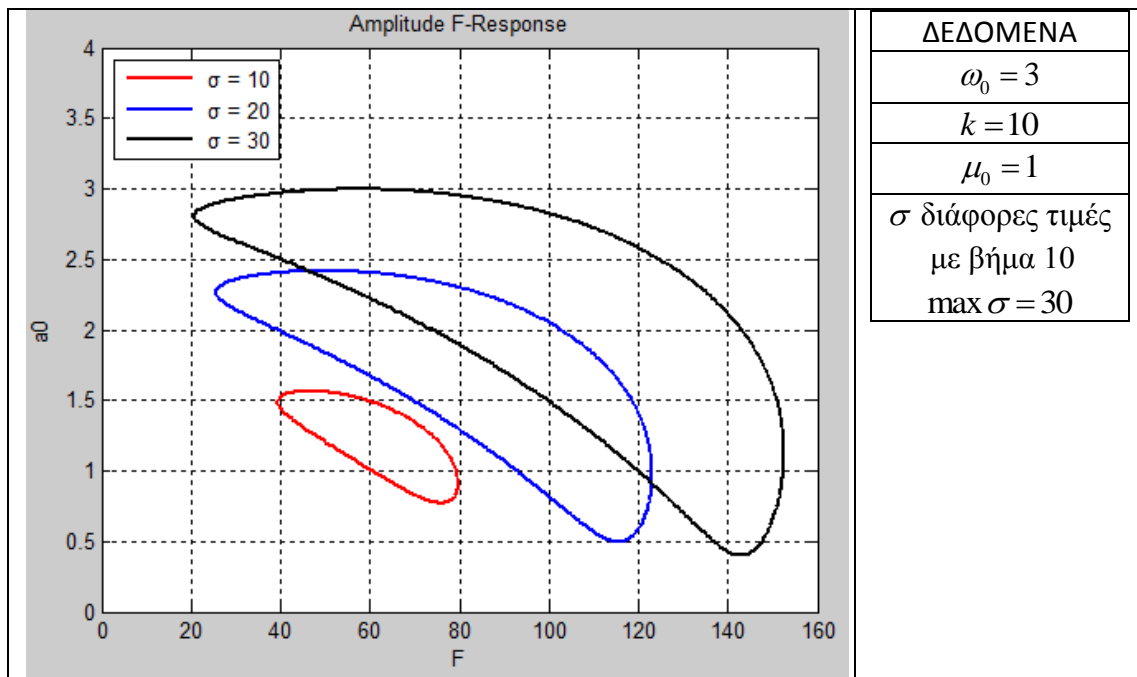
Καμπύλη συχνότητας – πλάτους διέγερσης



Σχ. 5.30 : Καμπύλες σ - F εντός της περιοχής μη τετριμμένων λύσεων – Όριο περιοχής

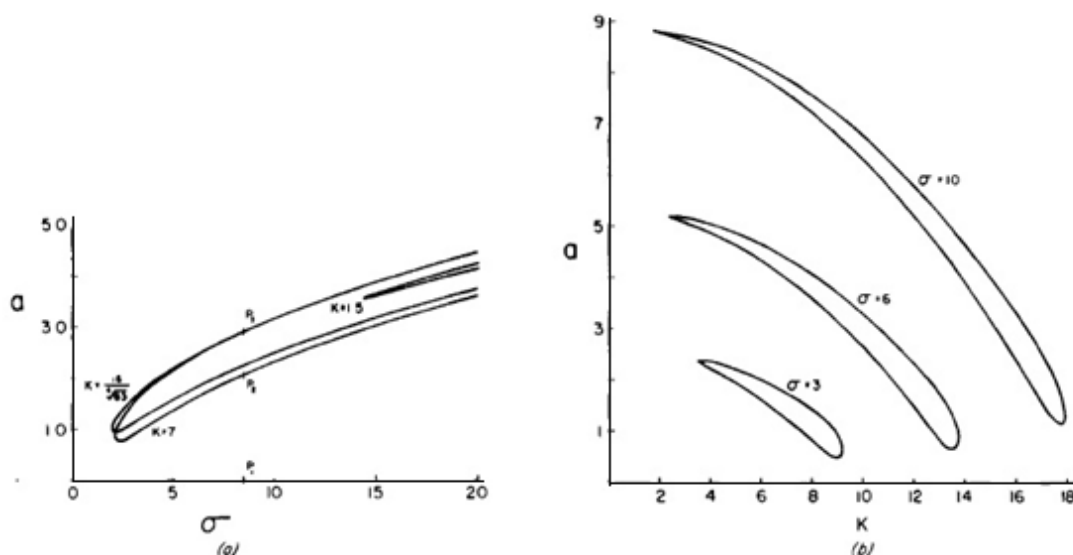
Όπως βλέπουμε από το Σχ. 5.27 υπάρχει μια περιοχή στο διάγραμμα $(\sigma/\mu_0, \lambda)$ όπου υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις του a_0 . Αντίστοιχη περιοχή θα υπάρχει και στο διάγραμμα (σ, F) αφού το F και το Λ συνδέονται γραμμικά από τη σχέση (5.74). Εύκολα προσδιορίζουμε τις σχέσεις που μας δίνουν το όριο της περιοχής. Όλα τα προηγούμενα παρουσιάζονται στο Σχ. 5.30 για διάφορες μη τετριμμένες τιμές του a_0 .

Διάγραμμα πλάτους διέγερσης - απόκρισης



Σχ. 5.31 : Καμπύλες F-a₀ για διάφορες τιμές της παραμέτρου σ

Αντίστοιχα διαγράμματα των Σχ. 5.28 και Σχ. 5.31 μπορούμε να βρούμε και στη βιβλιογραφία. Τα παραθέτουμε παρακάτω (Σχ. 5.32) προκειμένου να γίνει ποιοτική σύγκριση μεταξύ αυτών και των αποτελεσμάτων που βρήκαμε. Για αναλυτικότερη περιγραφή των μεθόδων μέσα απο το παράδειγμα της εξίσωσης Duffing παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία [2 και 8].



Subharmonic response for the Duffing equation; amplitude of the free-oscillation term versus (a) detuning and (b) amplitude of the excitation.

Σχ. 5.32 : Διαγράμματα από τη βιβλιογραφία για τον υποαρμονικό συντονισμό

5.3.3. Duffing & Van der Pol

Με όλες τις παραδοχές η εξίσωση (5.12) παίρνει τη μορφή :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon(\mu_2 x^2 + 2\mu_0)\dot{x} + \varepsilon k x^3 = F \cos(\Omega t) \quad (5.101)$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω μεθοδολογία που διατυπώθηκε για την περίπτωση της εξίσωσης Duffing ώστε να διακρίνουμε τη συμπεριφορά του μονωτήρα όταν συνυπάρχουν τόσο η δύναμη επαναφοράς του Duffing όσο και η μορφή της απόσβεσης του Van der Pol ταλαντωτή. Τα αποτελέσματα προέρχονται με τη βοήθεια των προγραμμάτων MAPLE και MATLAB σύμφωνα με τη θεωρία που διατυπώθηκε. Συνεπώς, η μεθοδολογία δεν αναγράφεται σε αυτή την περίπτωση.

ΚΥΡΙΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Όταν η συχνότητα διέγερσης Ω βρίσκεται κοντά στην ιδιοσυχνότητα του αντίστοιχου γραμμικού ταλαντωτή, το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση κύριου συντονισμού ($\Omega \approx \omega_0$). Προκειμένου να μελετήσουμε αυτήν την περιοχή θεωρούμε:

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (5.102)$$

όπου σ είναι μια παράμετρος αποσυντονισμού, που αντιπροσωπεύει την απόκλιση ανάμεσα στις συχνότητες Ω και ω_0 .

Το εύρος της διέγερσης επιλέγεται έτσι, ώστε να αλληλεπιδράσει στην ίδια τάξη μεγέθους με τους όρους της απόσβεσης και της μη γραμμικότητας. Συνεπώς υποθέτουμε ότι :

$$F = \varepsilon f \quad (5.103)$$

Η εξίσωση (5.101) μετασχηματίζεται σε :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon(\mu_2 x^2 + 2\mu_0)\dot{x} + \varepsilon k x^3 = \varepsilon f \cos(\Omega t) \quad (5.104)$$

Στην τελευταία εξίσωση δεν είναι δυνατή η εξεύρεση ακριβών λύσεων οπότε καταφεύγουμε στην αναζήτηση προσεγγιστικών αναλυτικών λύσεων με εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων.

Η λύση της εξίσωσης εκφράζεται στη μορφή :

$$x(t; \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (5.105)$$

όπου $T_0 = t$ και $T_1 = \varepsilon t$ είναι δυο διαφορετικές χρονικές κλίμακες.

Σύμφωνα με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε :

$$\dot{x} = D_0 u_0 + \varepsilon D_0 u_1 + \varepsilon D_1 u_0 + \dots \quad (5.106)$$

$$\ddot{x} = D_0^2 u_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + \dots \quad (5.107)$$

Τελικώς παράγεται το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων:

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (5.108)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - (\mu_2 u_0^2 + 2\mu_0) D_0 u_0 - k u_0^3 + f \cos(\Omega T_0) \quad (5.109)$$

Η λύση της γραμμικής εξίσωσης (5.108) είναι η :

$$u_0(T_0, T_1) = a(T_1) \cos(\omega_0 T_0 + \phi(T_1)) \quad (5.110)$$

Προκειμένου να γίνουν εύκολα οι πράξεις στη σχέση (5.109) ώστε να προσδιορισθεί και να μηδενισθεί ο συντελεστής των όρων που δημιουργούν συντονισμό, εισάγουμε τις μιγαδικές μορφές των u_0 και $A(T_1)$ όπως στις (5.36) και (5.38).

Μηδενίζοντας τον όρο του δεξιού μέλους της εξίσωσης (5.109) που πολλαπλασιάζεται με τον όρο e_0 , ο οποίος προκαλεί συντονισμό, έχουμε :

$$2i\omega_0 A' + 2i\mu_0 \omega_0 A + i\mu_2 A^2 \bar{A} \omega_0 + 3kA^2 \bar{A} - 0.5f \cdot \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (5.111)$$

$$\omega_0 a \phi' + 0.5f \cos(\sigma T_1 - \phi) - 0.375ka^3 = 0 \quad (5.112)$$

$$\omega_0 a' = 0.5f \sin(\sigma T_1 - \phi) - \mu_0 a \omega_0 - 0.125\mu_2 a^3 \omega_0 \quad (5.113)$$

Μετατροπή σε αυτόνομο σύστημα :

$$\omega_0 a \sigma - \omega_0 a \gamma' + 0.5f \cos \gamma - 0.375ka^3 = 0 \quad (5.114)$$

$$\omega_0 a' = 0.5f \sin \gamma - \mu_0 a \omega_0 - 0.125\mu_2 a^3 \omega_0 \quad (5.115)$$

Το προηγούμενο σύστημα έχει ως αγνώστους τις συναρτήσεις $a(T_1)$ και $\gamma(T_1)$. Η επίλυση του οδηγεί στον προσδιορισμό της προσεγγιστικής λύσης της (5.101). Συγκεκριμένα η λύση έχει τη μορφή :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi) + O(\varepsilon) = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\varepsilon) \quad (5.116)$$

Με την πάροδο του χρόνου τα μεγέθη a και γ αποκτούν μια σταθερή τιμή a_0 και γ_0 αντίστοιχα. Αυτές οι σταθερές λύσεις προσδιορίζονται για $a' = \gamma' = 0$ από τις σχέσεις (5.114) και (5.115).

Η μόνιμη απόκριση έχει τη μορφή της (5.116) αλλά με a_0, γ_0 :

$$x(t) = a_0 \cos(\Omega t - \gamma_0) + O(\varepsilon) \quad (5.117)$$

Για το μηχανικό, όπως είδαμε, ενδιαφέρον έχει αυτή η μόνιμη απόκριση και συγκεκριμένα οι σχέσεις των a_0 και γ_0 με τον όρο σ που εκφράζει την απόκλιση της συχνότητας από την γραμμική ιδιοσυχνότητα.

Εξίσωση συχνότητας-απόκρισης :

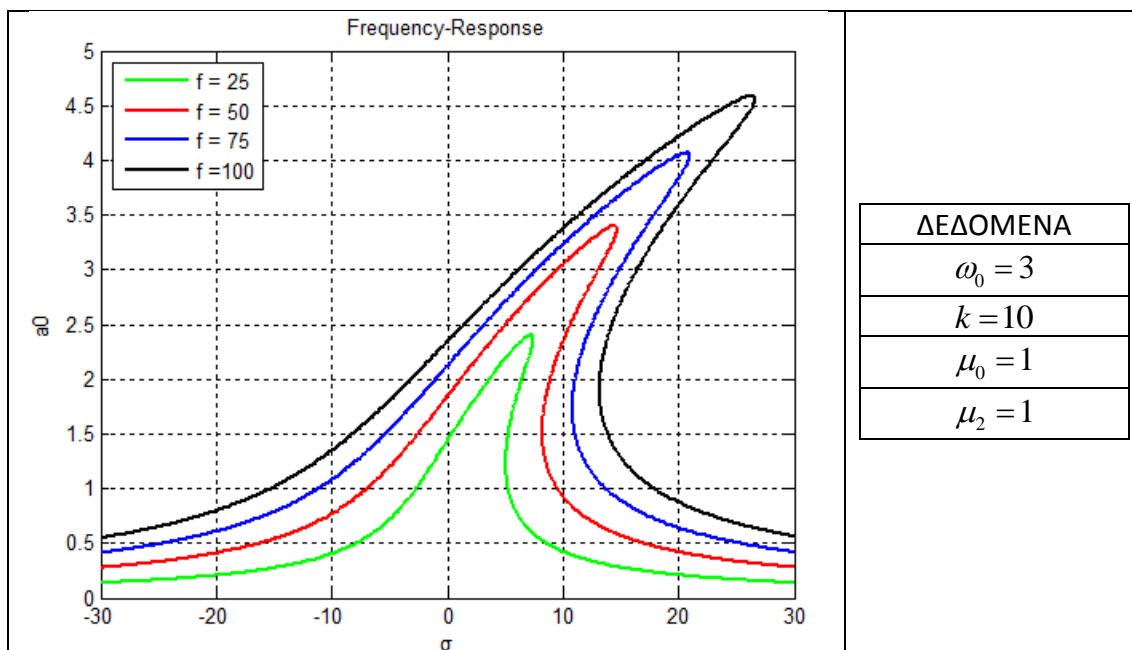
$$0.5625a_0^6 k^2 - 3a_0^4 k \sigma \omega_0 + 4\sigma^2 \omega_0^2 a_0^2 + 0.0625\omega_0^2 \mu_2^2 a_0^6 + \omega_0^2 \mu_2 \mu_0 a_0^4 + 4\mu_0^2 \omega_0^2 a_0^2 = f^2 \quad (5.118)$$

$$\text{ή} \quad a_0^2 (3ka_0^2 - 8\omega_0 \sigma)^2 + a_0^2 \omega_0^2 (\mu_2 a_0^2 + 8\mu_0)^2 = 16f^2 \quad (5.119)$$

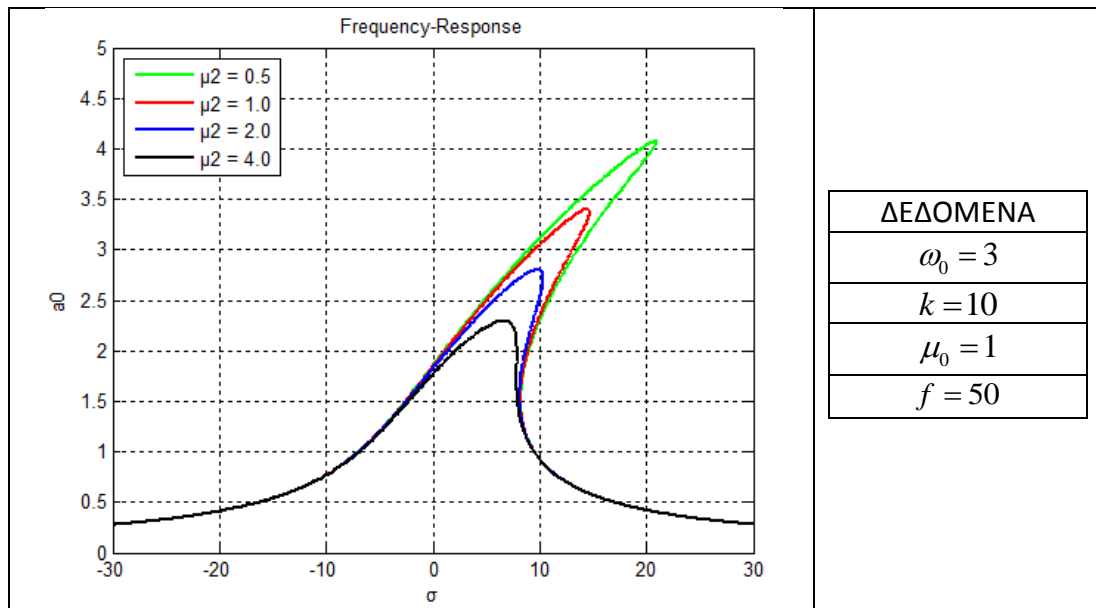
Εξίσωση για γ_0 :

$$\tan \gamma_0 = \frac{\omega_0 (\mu_2 a_0^2 + 8\mu_0)}{3a_0^2 k - 8\sigma \omega_0} \quad (5.120)$$

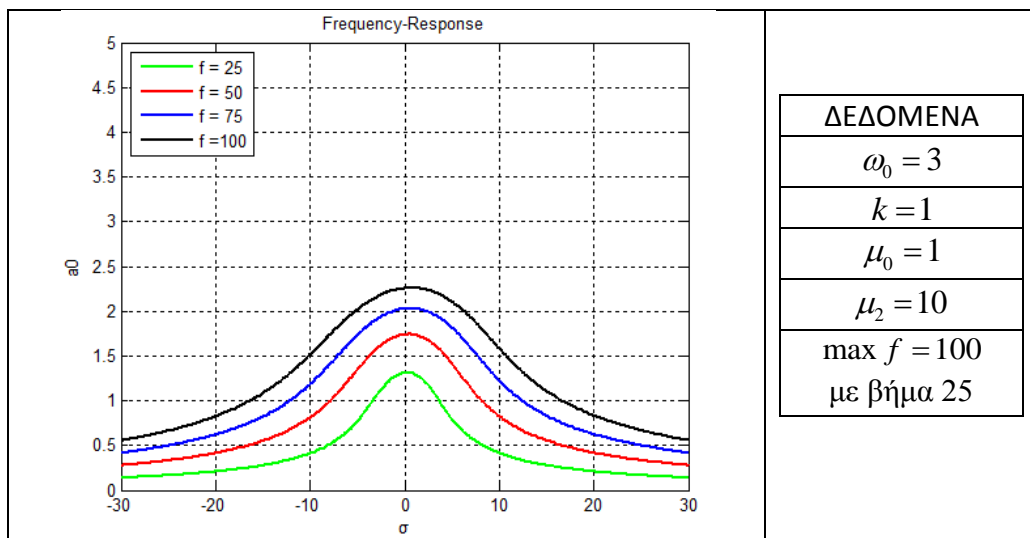
Καμπύλη συχνότητας – απόκρισης



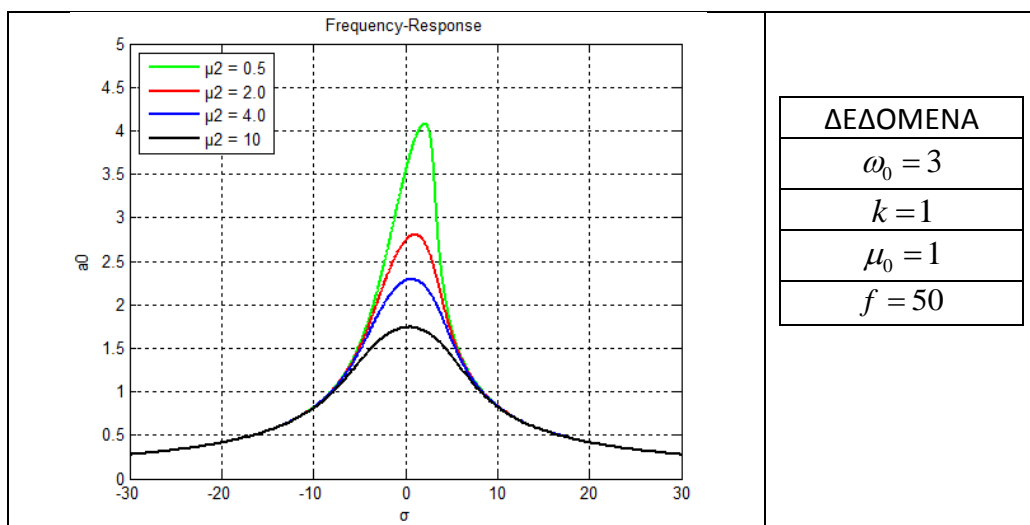
Σχ. 5.33 : Διάγραμμα συχνότητας – απόκρισης για Duffing & Van der Pol



Σχ. 5.34 : Επίρροη του μ_2 στον κύριο συντονισμό (Duffing & Van der Pol)



Σχ. 5.35



Σχ. 5.36

Εύρεση των ορίων όπου εμφανίζονται πολλαπλές λύσεις – Γενική μέθοδος

Γράφουμε, αρχικά, την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης στην παρακάτω μορφή :

$$\begin{aligned} \xi(\sigma, x_0) = & 0.5625x_0^3k^2 - 3x_0^2k\sigma\omega_0 + 4\sigma^2\omega_0^2x_0 + \\ & + 0.0625\omega_0^2\mu_2^2x_0^3 + \omega_0^2\mu_2\mu_0x_0^2 + 4\mu_0^2\omega_0^2x_0 - f^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.121)$$

με $x_0 := a_0^2$ (5.122)

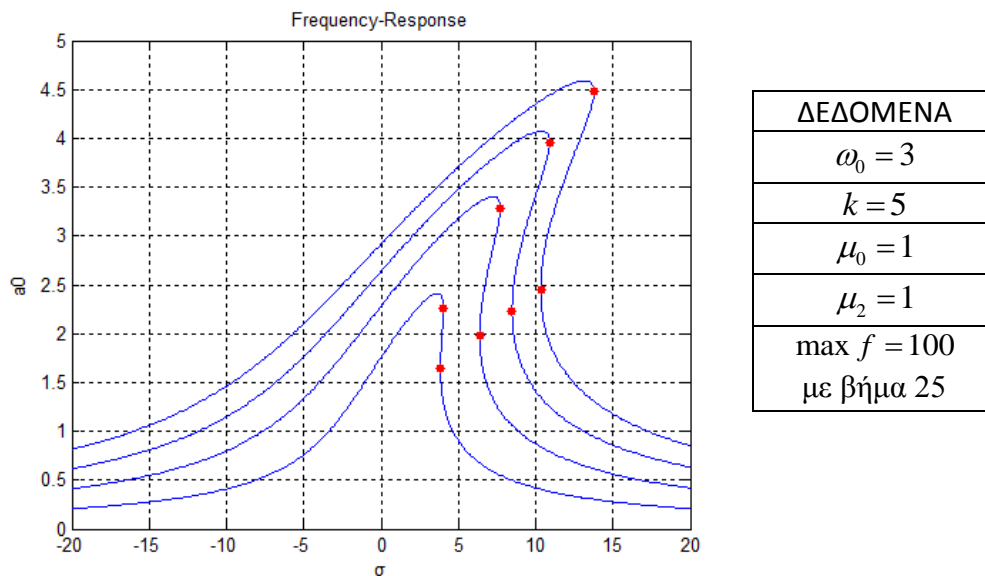
Η συνθήκη για τα όρια των πολλαπλών λύσεων είναι ισοδύναμη με :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0} = 0 \quad (5.123)$$

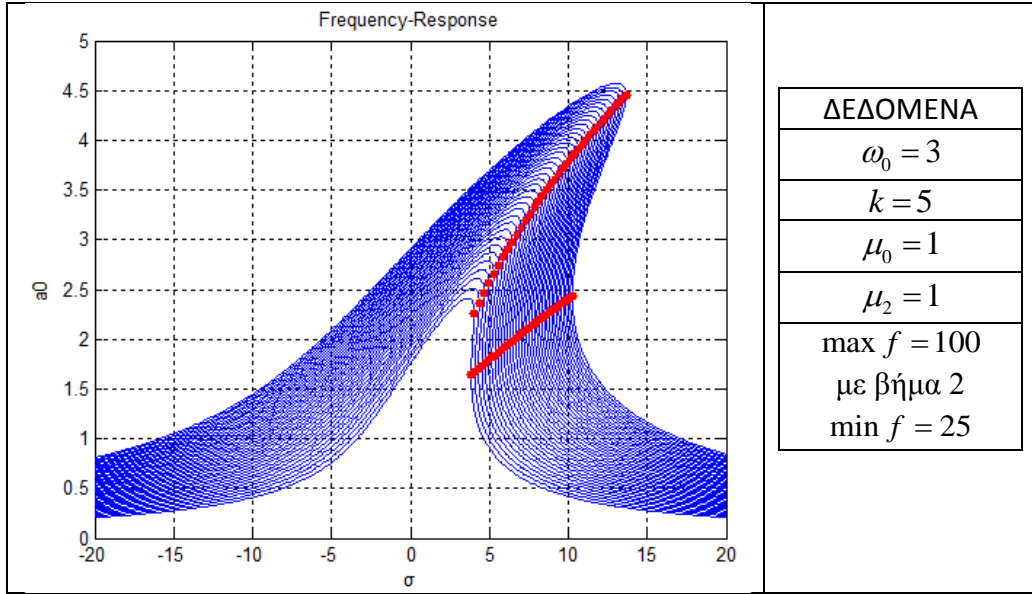
Οπότε με χρήση της (5.121) προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned} 1.6875x_0^2k^2 - 6x_0k\sigma\omega_0 + 4\sigma^2\omega_0^2 + \\ + 0.1875\omega_0^2\mu_2^2x_0^2 + 2\omega_0^2\mu_2\mu_0x_0 + 4\mu_0^2\omega_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.124)$$

Η τελευταία εξίσωση σε συνδυασμό με την (5.121) αποτελεί σύστημα δύο αλγεβρικών εξισώσεων από την επίλυση του οποίου προκύπτουν τα χαρακτηριστικά σημεία στα οποία το διάγραμμα ευρών-συχνότητας έχει κατακόρυφη εφαπτομένη. Με τη βοήθεια του MATLAB απεικονίζουμε τα σημεία αυτά με κόκκινο χρώμα. Ακολουθούν παραδείγματα στα οποία απεικονίζονται τα όρια μεταξύ των οποίων υπάρχουν ασταθείς λύσεις.



Σχ. 5.37 : Όρια πολλαπλών λύσεων – Αστάθειες σε Duffing & Van der Pol



Σχ. 5.38 : Όρια πολλαπλών λύσεων για διάφορες τιμές του πλάτους διέγερσης

Εύρεση της καμπύλης μεγίστων ευρών – Backbone Curve

Η εξίσωση (5.118) μπορεί να θεωρηθεί ως τριώνυμο ως προς το σ , από την επίλυση του οποίου προκύπτει :

$$\sigma = \frac{3k}{8\omega_0} a_0^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4\omega_0^2 a_0^2} - \frac{(\mu_2 a_0^2 + 8\mu_0)^2}{64}} \quad (5.125)$$

Όσο μεγαλώνει το εύρος a_0 τόσο μειώνεται η διακρίνουσα. Η οριακή τιμή γίνεται :

$$\frac{f^2}{4\omega_0^2 a_0^2} - \frac{(\mu_2 a_0^2 + 8\mu_0)^2}{64} = 0 \quad (5.126)$$

Στην περίπτωση του μονωτήρα μας έχουμε : $\mu_2, \mu_0 \geq 0$. Συνεπώς με το Maple :

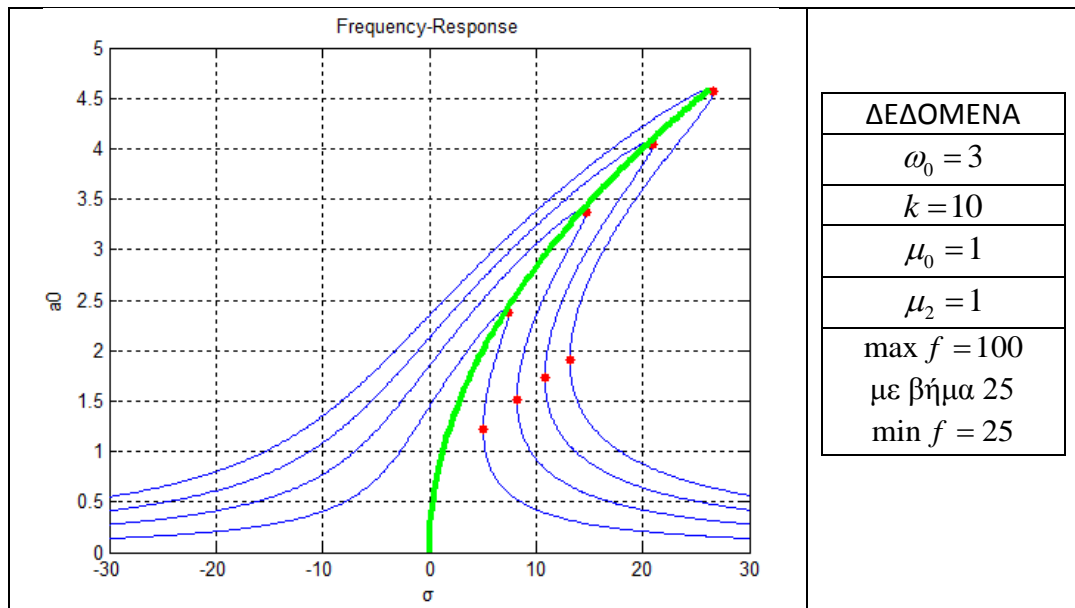
$$\max a_0 = \frac{C}{3\mu_2\omega_0} - \frac{8\mu_0\omega_0}{C} \quad (5.127)$$

με

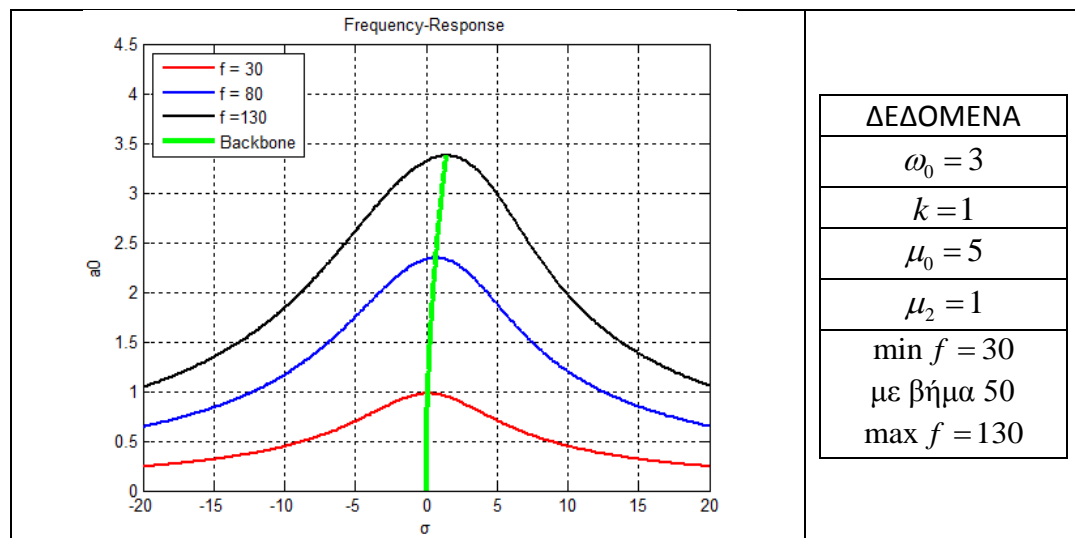
$$C = \left(6\mu_2^2\omega_0^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{128\mu_0^3\omega_0^2}{\mu_2} + 27f^2} + 54\mu_2^2\omega_0^2 f \right)^{1/3} \quad (5.128)$$

Τα σημεία της καμπύλης μεγίστων ευρών (Backbone Curve) έχουν τη μορφή :

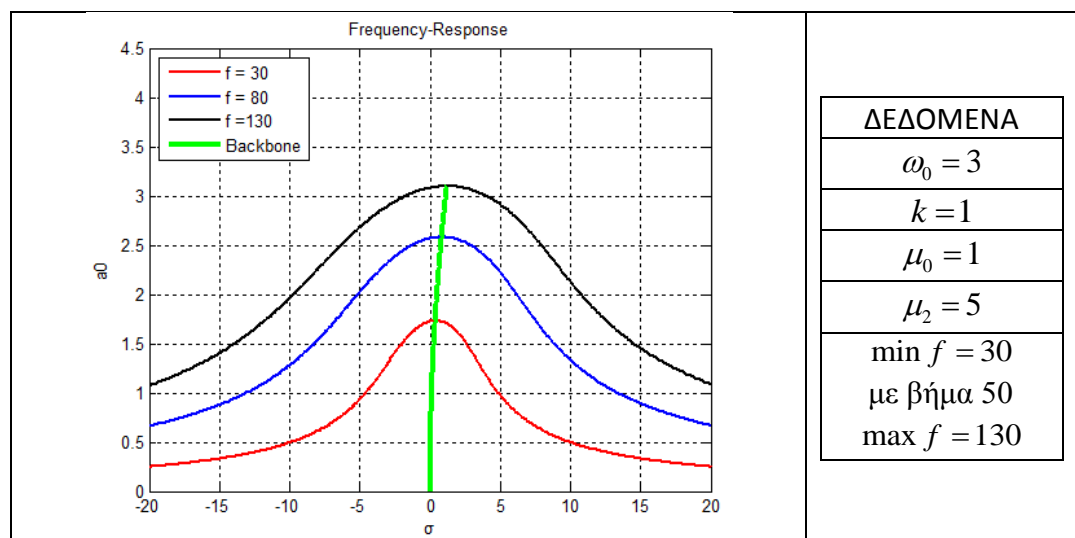
$$(\sigma, a_0) = \left(\frac{kC^2}{24\omega_0^3\mu_2^2} + \frac{24k\omega_0\mu_0^2}{C^2} - \frac{2k\mu_0}{\omega_0\mu_2}, \frac{C}{3\mu_2\omega_0} - \frac{8\mu_0\omega_0}{C} \right) \quad (5.129)$$



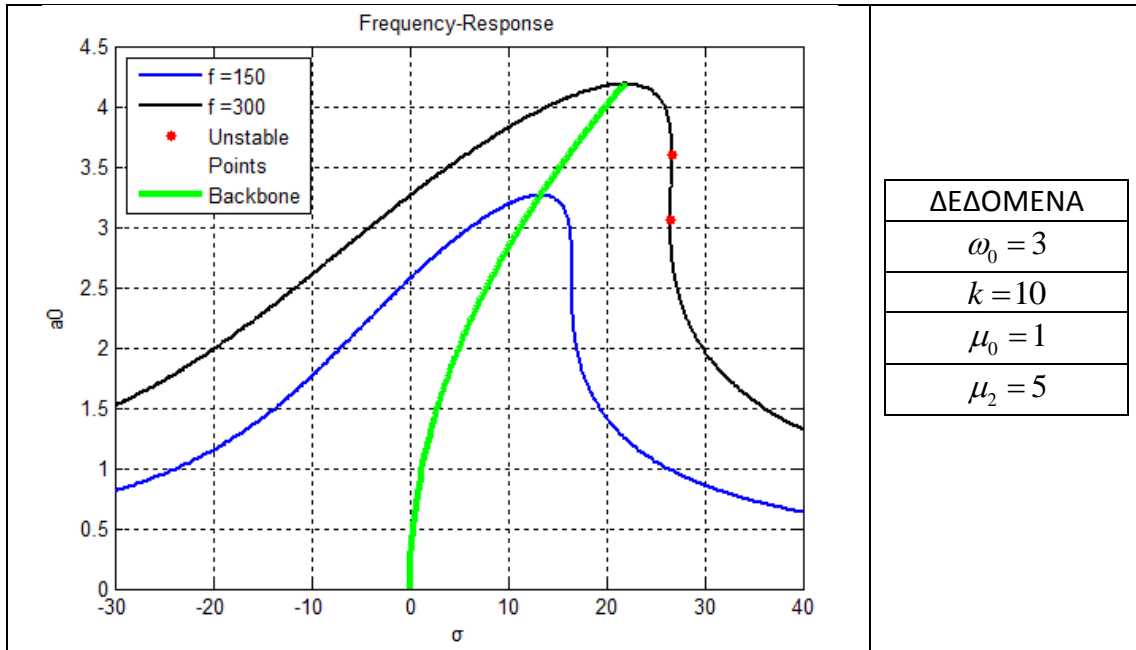
Σχ. 5.39



Σχ. 5.40



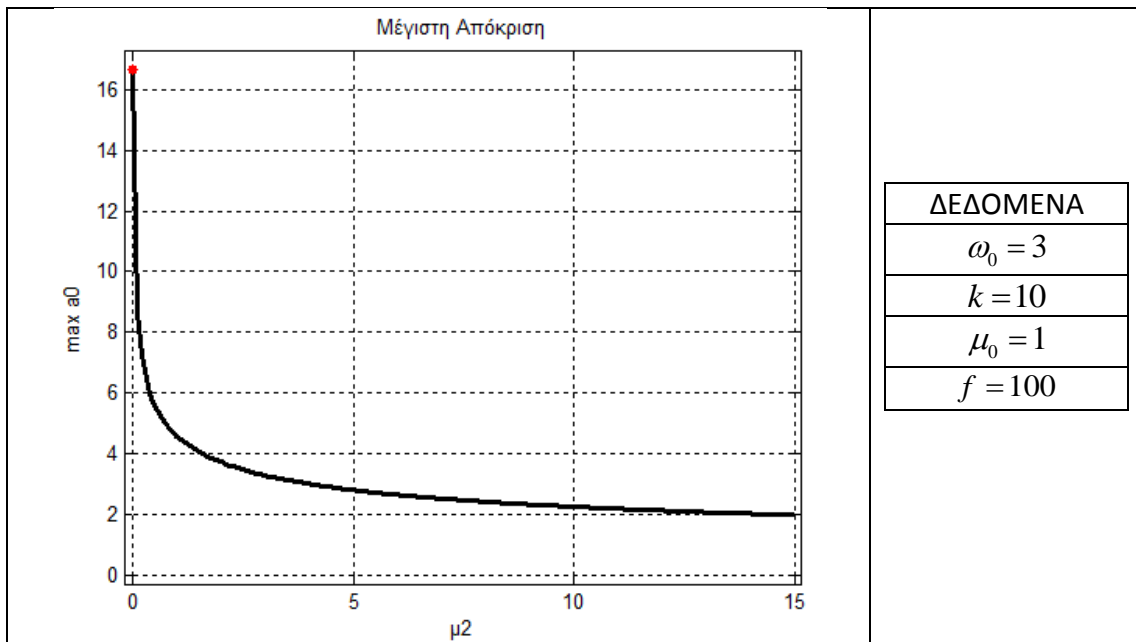
Σχ. 5.41



Σχ. 5.42

Η σχέση (5.129) εκφράζει το γεωμετρικό τόπο των μεγίστων ευρών, ο οποίος παριστάνεται με πράσινο χρώμα στα παραπάνω σχήματα (Σχ. 5.39 - Σχ. 5.42).

Στο Σχ. 5.43 σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του $\max a_0$ συναρτήσει του μ_2 σύμφωνα με τη σχέση (5.127). Το κόκκινο σημείο για $\mu_2 = 0$ δίνεται από τη (5.60).



Σχ. 5.43

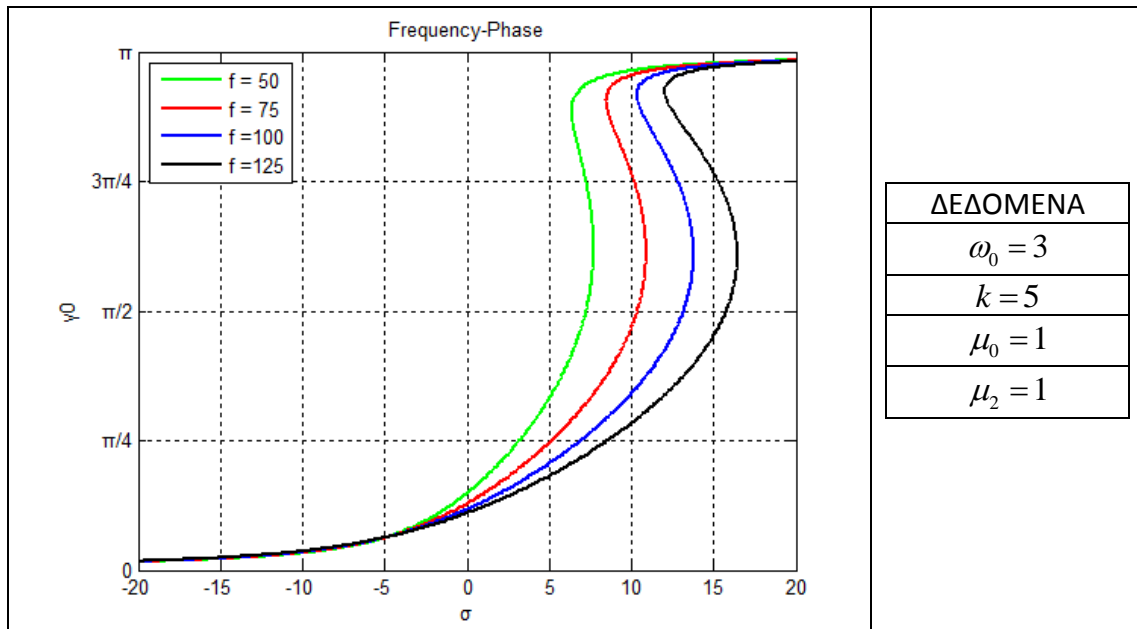
Παρατηρήσεις

- ✓ Το παραπάνω διάγραμμα είναι ανεξάρτητο του k σύμφωνα με σχέση (5.127).
- ✓ Αύξηση της μ_2 πέρα από ένα όριο \Rightarrow μικρή επιρροή σε μέγιστο πλάτος.

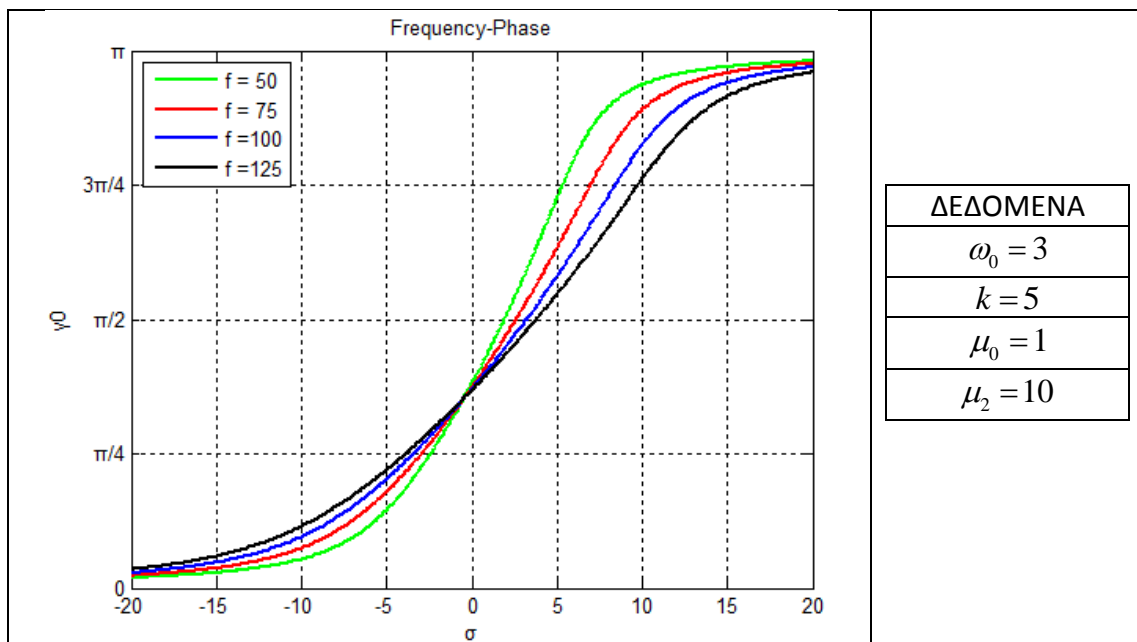
Διάγραμμα συχνότητας - φάσης

Προκειμένου να παράγουμε τη σχέση συχνότητας σ σε σχέση με την φάση γ_0 , επιλύουμε ως προς a_0^2 τη σχέση (5.120) και το αντικαθιστούμε στη (5.119).

$$32\omega_0^3(\sigma \sin \gamma_0 + \mu_0 \cos \gamma_0) \cdot (\mu_2 \sigma \omega_0 + 3\mu_0 k)^2 + (\mu_2 \omega_0 \cos \gamma_0 - 3k \sin \gamma_0)^3 f^2 = 0 \quad (5.130)$$



Σχ. 5.44 : Διάγραμμα συχνότητας – φάσης



Σχ. 5.45 : Διάγραμμα συχνότητας – φάσης για μεγάλη απόσβεση μ_2

ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΕΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΙ

Όταν η συχνότητα διέγερσης Ω δεν είναι κοντά στη γραμμική ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, η διέγερση δεν ενεργοποιεί τους μη γραμμικούς όρους της εξίσωσης όπως στον κύριο συντονισμό. Στις περιπτώσεις αυτές, η εφαρμογή της μεθόδου πολλαπλών χρονικών κλιμάκων οδηγεί στις εξισώσεις :

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F \cos(\Omega T_0) \quad (5.131)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - (\mu_2 u_0^2 + 2\mu_0) D_0 u_0 - k u_0^3 \quad (5.132)$$

Η γενική λύση της (5.131) εκφράζεται στη μορφή :

$$u_0 = A(T_1) e_0 + \Lambda e + cc \quad (5.133)$$

$$\text{οπου} \quad \Lambda = \frac{F}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (5.134) \quad e := \exp(i\Omega T_0) \quad (5.135)$$

Με αντικατάσταση του u_0 από τη (5.133) στη διαφορική εξίσωση (5.132) μπορούμε να προσδιορίσουμε σε ποιες συχνότητες Ω παρατηρούνται συντονισμοί (κύριος και δευτερεύοντες). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε εμφανίζονται όροι που έχουν ως παράγοντα κάποια παράσταση από τις επόμενες :

$$e^{-i(2\Omega - \omega_0)T_0}, \quad e^{i(\Omega - 2\omega_0)T_0}, \quad e^{3i\Omega T_0} \quad (5.136)$$

Υπάρχουν κάποιες τιμές του Ω για τις οποίες οι παραπάνω όροι γίνονται ίσοι με το $e_0 = \exp(i\omega_0 T_0)$ ή το $e_0^{-1} = \exp(-i\omega_0 T_0)$. Όταν συμβαίνει το τελευταίο έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού (δημιουργία όρων μικρού διαιρέτη). Συγκεκριμένα :

$$e^{-i(2\Omega - \omega_0)T_0} = e_0 \quad \text{ή} \quad e_0^{-1} \Rightarrow -i(2\Omega - \omega_0)T_0 = \pm i\omega_0 T_0 \Rightarrow \Omega = \frac{\omega_0 \mp \omega_0}{2} \Rightarrow \Omega = 0 \quad \text{ή} \quad \omega_0 \quad (5.137)$$

$$e^{i(\Omega - 2\omega_0)T_0} = e_0 \quad \text{ή} \quad e_0^{-1} \Rightarrow i(\Omega - 2\omega_0)T_0 = \pm i\omega_0 T_0 \Rightarrow \Omega = 2\omega_0 \pm \omega_0 \Rightarrow \Omega = 3\omega_0 \quad \text{ή} \quad \omega_0 \quad (5.138)$$

$$e^{3i\Omega T_0} = e_0 \quad \text{ή} \quad e_0^{-1} \Rightarrow 3i\Omega T_0 = \pm i\omega_0 T_0 \Rightarrow \Omega = \frac{\pm \omega_0}{3} \Rightarrow \Omega = \frac{\omega_0}{3} \geq 0 \quad (5.139)$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι συντονισμούς της εξίσωσης Duffing & Van der Pol έχουμε στις περιπτώσεις που η συχνότητα διέγερσης είναι κοντά στις τιμές :

$$0, \quad \frac{\omega_0}{3}, \quad \omega_0, \quad 3\omega_0 \quad (5.140)$$

Υπάρχουν και άλλοι όροι όπως αυτοί της (5.136) που δεν αναγράφονται αλλά προκαλούν όλοι συντονισμούς στις παραπάνω συχνότητες (5.140).

Αν εξαιρέσουμε τον κύριο συντονισμό $\Omega = \omega_0$, οι υπόλοιποι συντονισμοί (5.140) ονομάζονται δευτερεύοντες. Προφανώς, τέτοιοι συντονισμοί δεν παρατηρούνται σε γραμμικά συστήματα. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε σχεδόν στατική φόρτιση, ενώ οι άλλες δύο περιπτώσεις αναλύονται ξεχωριστά, στη συνέχεια λόγω της πρακτικής τους σπουδαιότητας.

➤ Υπεραρμονικός Συντονισμός

Όταν η διεγείρουσα συχνότητα είναι σχεδόν ίση με το ένα τρίτο της γραμμικής ιδιοσυχνότητας ω_0 , δηλαδή όταν ισχύει η συνθήκη :

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (5.141)$$

Γίνεται αντικατάσταση της (5.133) στο δεξί μέλος (RH) της (5.132). Ο συντελεστής του e_0 που δημιουργεί όρους συντονισμού πρέπει να μηδενίζεται.

$$2i\omega_0 A' + 3k\bar{A}A^2 + 6k\Lambda^2 A + 2i\omega_0 \mu_0 A + k\Lambda^3 \cdot \exp(i\sigma T_1) + i\omega_0 \mu_2 \bar{A}A^2 + 2i\omega_0 \mu_2 \Lambda^2 A + i\mu_2 \Omega \Lambda^3 \cdot \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (5.142)$$

Στην τελευταία εξίσωση που προκύπτει αντικαθιστούμε το A από τη σχέση (5.38) και βρίσκουμε το σύστημα (a, ϕ) με τη χρήση του προγράμματος MAPLE:

$$\mu_2 \Lambda^3 \Omega \sin(\sigma T_1 - \phi(T_1)) - k\Lambda^3 \cos(\sigma T_1 - \phi(T_1)) - 3.0 \Lambda^2 a(T_1) k - 0.375 a(T_1)^3 k + \omega_0 a(T_1) \left(\frac{d}{dT_1} \phi(T_1) \right) = 0 \quad (5.143)$$

$$-\mu_2 \Lambda^3 \Omega \cos(\sigma T_1 - \phi(T_1)) - \mu_2 \Lambda^2 a(T_1) \omega_0 - 0.125 \mu_2 a(T_1)^3 \omega_0 - k\Lambda^3 \sin(\sigma T_1 - \phi(T_1)) - \mu_0 a(T_1) \omega_0 - \omega_0 \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) = 0 \quad (5.144)$$

Μετατρέπουμε το σύστημα σε αυτόνομο με το μετασχηματισμό (5.82):

$\mu_2 \Lambda^3 \Omega \sin(\gamma(T_1)) - k\Lambda^3 \cos(\gamma(T_1)) - 3.0 \Lambda^2 a(T_1) k - 0.375 a(T_1)^3 k + \omega_0 a(T_1) \sigma - \omega_0 a(T_1) \left(\frac{d}{dT_1} \gamma(T_1) \right) = 0$	(5.145)
$-\mu_2 \Lambda^3 \Omega \cos(\gamma(T_1)) - \mu_2 \Lambda^2 a(T_1) \omega_0 - 0.125 \mu_2 a(T_1)^3 \omega_0 - k\Lambda^3 \sin(\gamma(T_1)) - \mu_0 a(T_1) \omega_0 - \omega_0 \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) = 0$	(5.146)

Οι σταθερές λύσεις (a_0, γ_0) των εξισώσεων αυτών αντιστοιχούν σε μόνιμη απόκριση του ταλαντωτή με μορφή (5.85). Οι τιμές των τελευταίων προσδιορίζονται από τις σχέσεις (5.145) και (5.146) αν απαιτήσουμε ότι ισχύει :

$$\frac{d}{dT_1} a(T_1) = \frac{d}{dT_1} \gamma(T_1) = 0 \quad (5.147)$$

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει :

$$\mu_2 \Lambda^3 \Omega \sin(\gamma_0) - k \Lambda^3 \cos(\gamma_0) - 3 \Lambda^2 a_0 k - \frac{3}{8} a_0^3 k + \omega_0 a_0 \sigma = 0 \quad (5.148)$$

$$-\mu_2 \Lambda^3 \Omega \cos(\gamma_0) - \mu_2 \Lambda^2 a_0 \omega_0 - \frac{1}{8} \mu_2 a_0^3 \omega_0 - k \Lambda^3 \sin(\gamma_0) - \mu_0 a_0 \omega_0 = 0 \quad (5.149)$$

Απαλείφουμε το γ_0 από τις προηγούμενες σχέσεις και παράγουμε την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης που ποσοτικοποιεί τον όρο της ελεύθερης ταλάντωσης a_0 .

$64 \mu_2^2 \Lambda^4 a_0^2 \omega_0^2 + 16 \mu_2^2 \Lambda^2 a_0^4 \omega_0^2 + \mu_2^2 a_0^6 \omega_0^2 + 128 \mu_0 \mu_2 \Lambda^2 a_0^2 \omega_0^2 +$ $+ 16 \mu_0 \mu_2 a_0^4 \omega_0^2 + 576 \Lambda^4 a_0^2 k^2 + 144 \Lambda^2 a_0^4 k^2 + 9 a_0^6 k^2 -$ $- 384 \Lambda^2 a_0^2 k \sigma \omega_0 - 48 a_0^4 k \sigma \omega_0 + 64 \mu_0^2 a_0^2 \omega_0^2 + 64 a_0^2 \sigma^2 \omega_0^2 =$ $= 64 \mu_2^2 \Lambda^6 \Omega^2 + 64 \Lambda^6 k^2$	(5.150)
--	---------

Γράφουμε την τελευταία σχέση σε πιο γενική μορφή :

Εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για υπεραρμονικό συντονισμό του ταλαντωτή με εξίσωση κίνησης τύπου Duffing & Van der Pol	
$H_3 a_0^6 + H_2 a_0^4 + H_1 a_0^2 = H_0$	(5.151)
$H_3 = \mu_2^2 \omega_0^2 + 9k^2$	(5.152)
$H_2 = 16\mu_2^2 \Lambda^2 \omega_0^2 + 16\mu_0 \mu_2 \omega_0^2 + 144\Lambda^2 k^2 - 48k\sigma\omega_0$	(5.153)
$H_1 = 576\Lambda^4 k^2 - 384\Lambda^2 k\sigma\omega_0 + 64\mu_0^2 \omega_0^2 + 64\sigma^2 \omega_0^2 +$ $+ 64\mu_2^2 \Lambda^4 \omega_0^2 + 128\mu_0 \mu_2 \Lambda^2 \omega_0^2$	(5.154)
$H_0 = 64\mu_2^2 \Lambda^6 \Omega^2 + 64\Lambda^6 k^2$	(5.155)

Για τη φάση γ_0 προσδιορίζεται ο παρακάτω τύπος :

$$\tan(\gamma_0) = \frac{(-3 \mu_2 \Omega k + \mu_2 k \omega_0) a_0^2 - 24 \mu_2 \Lambda^2 \Omega k + 8 \mu_2 \Lambda^2 k \omega_0 + 8 \mu_2 \Omega \sigma \omega_0 + 8 \mu_0 k \omega_0}{(\mu_2^2 \Omega \omega_0 + 3 k^2) a_0^2 + 8 \mu_2^2 \Lambda^2 \Omega \omega_0 + 8 \mu_0 \mu_2 \Omega \omega_0 + 24 \Lambda^2 k^2 - 8 k \sigma \omega_0}$$

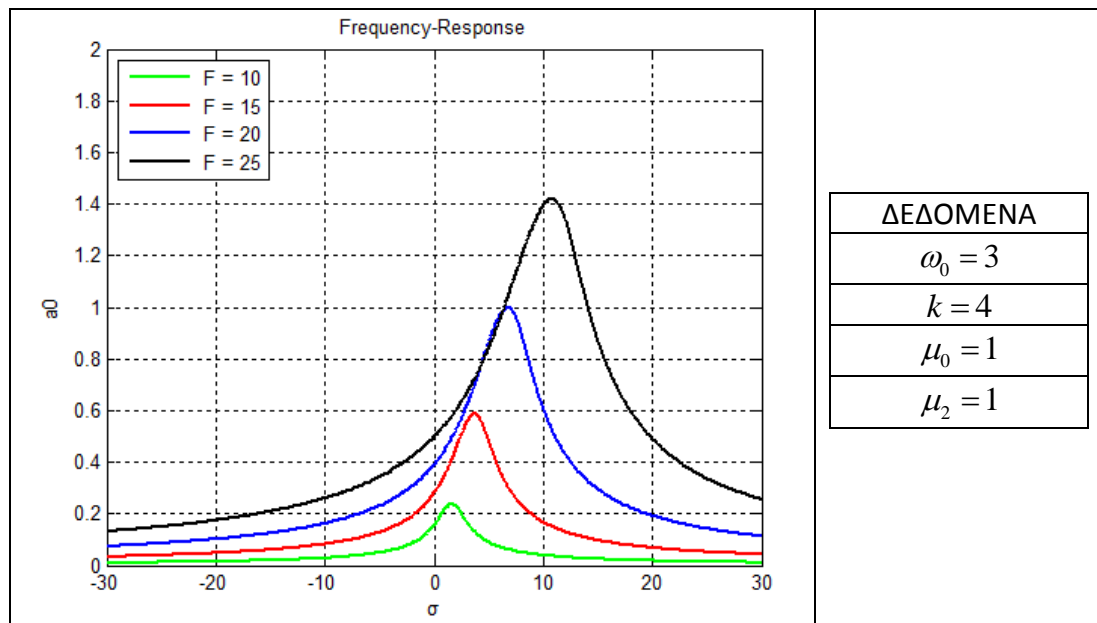
Επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση του υπεραρμονικού συντονισμού ισχύει ότι :

$$\Omega \approx \frac{\omega_0}{3} \quad (5.156)$$

ο τύπος της φάσης γ_0 γίνεται τελικά :

$$\tan(\gamma_0) = \frac{\frac{8}{3} \mu_2 \omega_0^2 \sigma + 8 \mu_0 k \omega_0}{\frac{8}{3} \mu_2^2 \Lambda^2 \omega_0^2 + \frac{1}{3} \mu_2^2 \omega_0^2 a_0^2 + \frac{8}{3} \mu_0 \mu_2 \omega_0^2 + 24 \Lambda^2 k^2 + 3 a_0^2 k^2 - 8 k \sigma \omega_0}$$

Καμπύλη συχνότητας – απόκριση

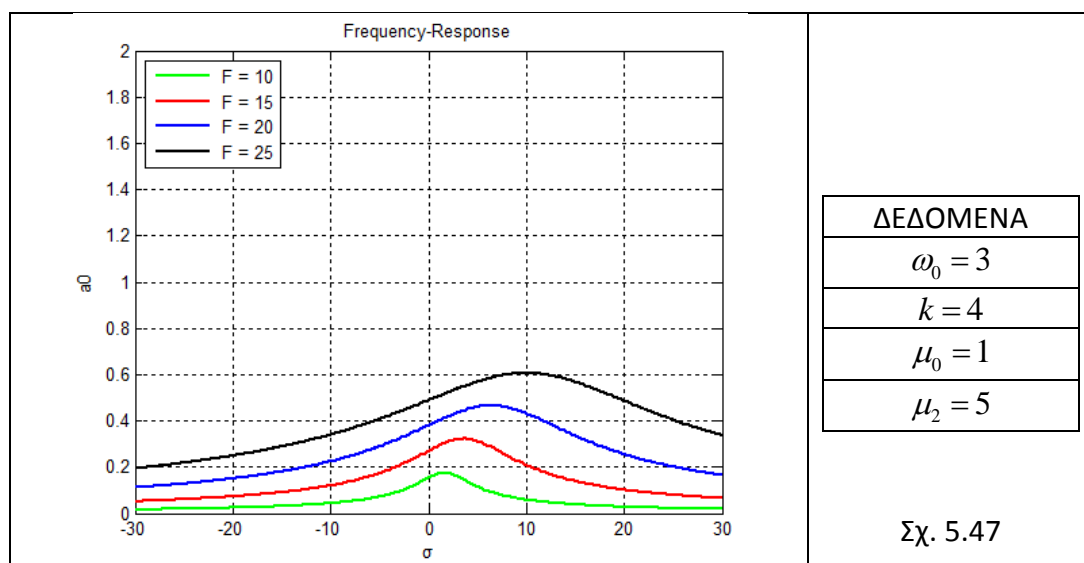


Σχ. 5.46

Εάν συγκρίνουμε το προηγούμενο διάγραμμα με το αντίστοιχο της εξίσωσης Duffing (δλδ για $\mu_2 = 0$, Σχ. 5.19) τότε μπορούμε να κάνουμε τις επόμενες παρατηρήσεις.

- ✓ Παρόλο που η μη γραμμικότητα της δυσκαμψίας είναι αρκετή ($k = 4$) και θα περιμέναμε μεγάλη μετατόπιση του σημείου μεγίστου εύρους προς τις μεγάλες τιμές των σ (όπως Σχ. 5.19) η τελευταία δεν παρατηρείται λόγω της ύπαρξης της απόσβεσης μ_2 (Σχ. 5.46).
- ✓ Η πτώση της μέγιστης τιμής του a_0 στην περίπτωση του $\mu_2 = 1$ είναι αρκετά μεγάλη. Χαρακτηριστικά αναφέρεται ότι για $F = 25$ οι τιμές των $\max a_0$ είναι :

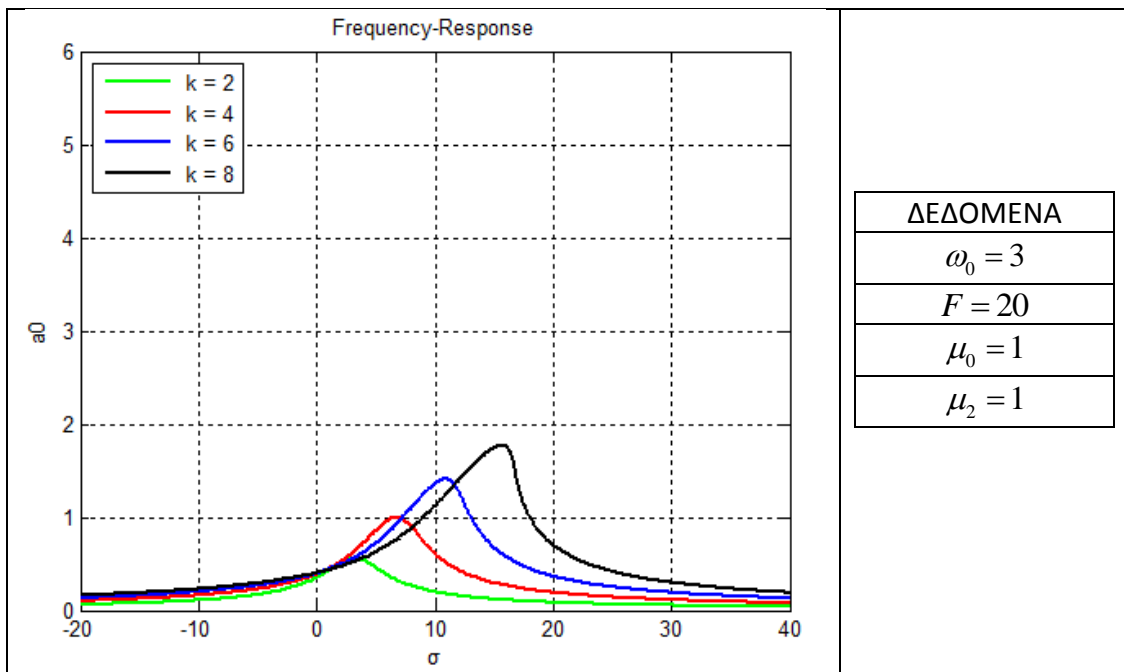
$$\max a_0 (\text{Duffing}) = 5.1 > \max a_0 (\text{Duffing \& Van der Pol}) = 1.4 \quad (5.157)$$



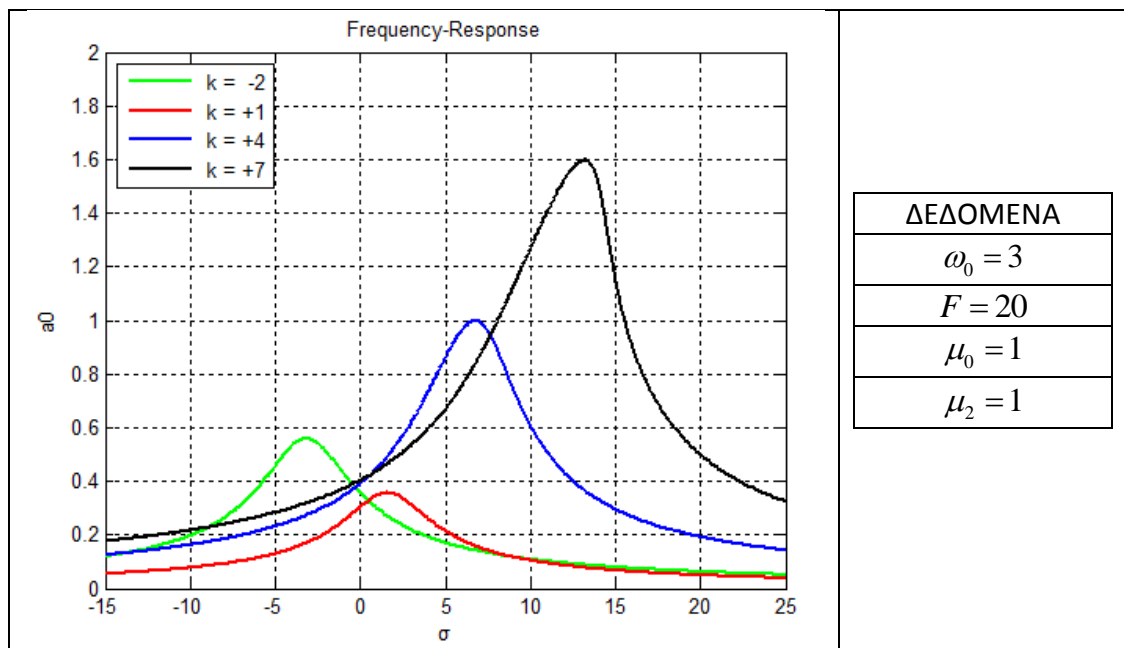
Σχ. 5.47

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις είναι αισθητές και από τα επόμενα διαγράμματα όπου δεν μεταβάλλουμε το πλάτος διέγερσης F αλλά τον όρο της μη γραμμικής δυσκαμψίας k . Τα σχήματα Σχ. 5.48 και Σχ. 5.49 πρέπει να συγκριθούν με τα Σχ. 5.20 και Σχ. 5.21 αντίστοιχα ώστε να δούμε πως επηρεάζει η μικρή σχετικά μη γραμμική απόσβεση $\mu_2 = 1$ το εύρος a_0 και την κάμψη του διαγράμματος.

Επίσης, παρατηρώντας τα δυο επόμενα σχήματα βλέπουμε την επιρροή του k στην εξίσωση Duffing & Van der Pol. Ειδικότερα, στο Σχ. 5.49 εμφανίζεται και η επιρροή του προσήμου του k .

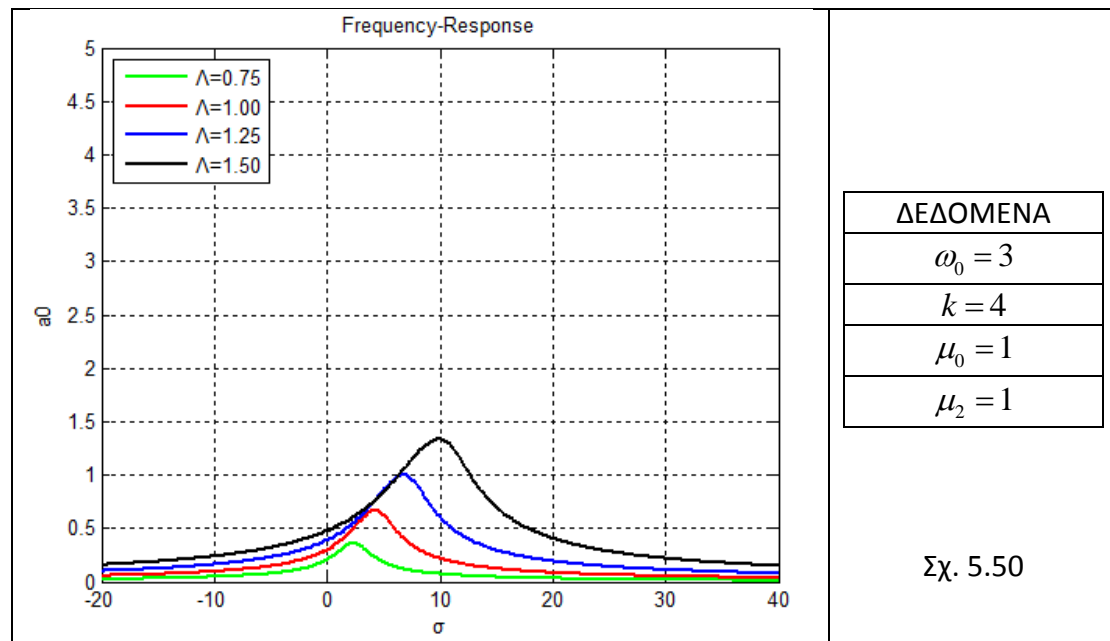


Σχ. 5.48



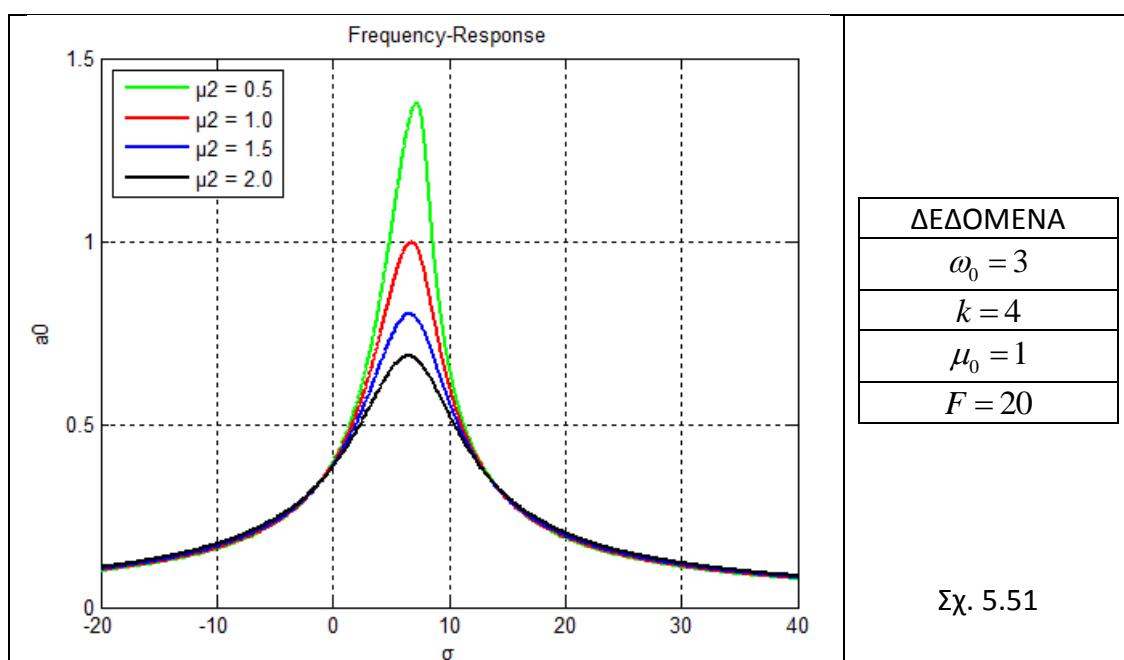
Σχ. 5.49

Αν επιστρέψουμε στην επιρροή του πλάτους διέγερσης F αλλά αυτήν την φορά μέσω του όρου Λ μπορούμε να συγκρίνουμε τα πλάτη a_0 και 2Λ των αρμονικών όρων της προσεγγιστικής λύσης (5.133) η οποία παίρνει τελικώς τη μορφή (5.81). Σε αυτό το σημείο πρέπει να διευκρινιστεί ότι η συμπεριφορά του ταλαντωτή γύρω από τη συχνότητα $\omega_0/3$ δεν είναι αυτή που αποτυπώνεται με τα διαγράμματα συχνότητας – απόκρισης. Τα τελευταία περιγράφουν ένα μέρος της απόκρισης (αυτό του όρου της ελεύθερης ταλάντωσης a_0). Ο άλλος όρος του εξαναγκασμού δεν απεικονίζεται αλλά θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά το σχεδιασμό.



Σχ. 5.50

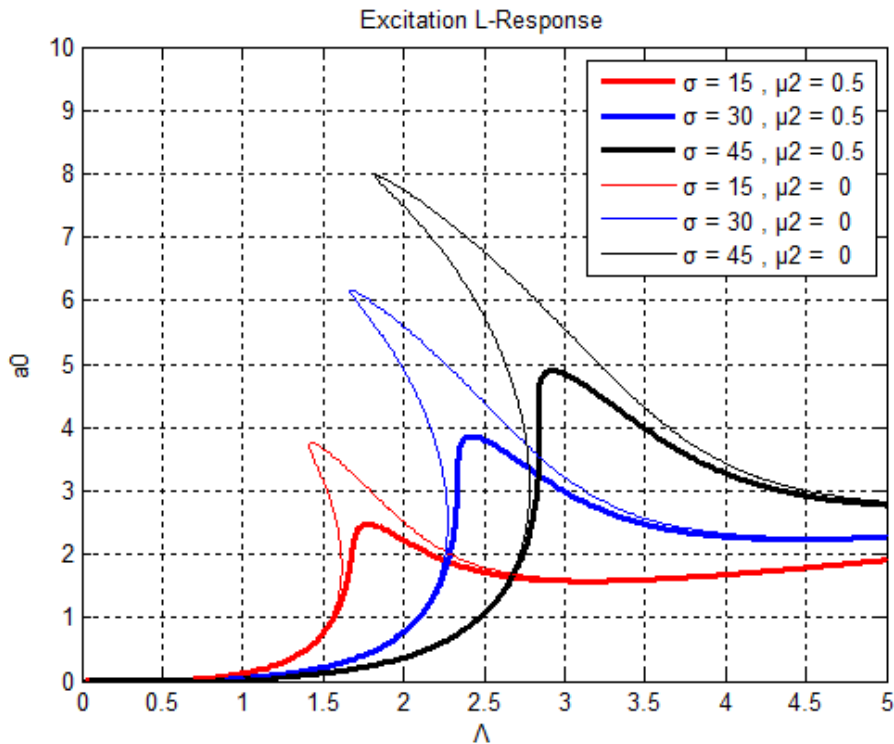
Στη συνέχεια απεικονίζεται η επίδραση του μ_2 στο πλάτος απόκρισης a_0 .



Σχ. 5.51

Καμπύλη διέγερσης Λ – απόκριση

Στο Σχ. 5.24 κατασκευάστηκε το διάγραμμα απόκρισης συναρτήσει του μεγέθους Λ για την εξίσωση Duffing ($\mu_2 = 0$). Στο σχήμα που ακολουθεί τυπώνονται τόσο οι καμπύλες που αφορούν την εξίσωση Duffing όσο και οι καμπύλες που προκύπτουν από την εξίσωση Duffing & Van der Pol για $\mu_2 = 0$. Τα υπόλοιπα μεγέθη που επηρεάζουν την απόκριση του ταλαντωτή έχουν τις τιμές $k = 4$, $\mu_0 = 1$ και $\omega_0 = 3$.



Σχ. 5.52 : Διάγραμμα πλάτους διέγερσης – απόκρισης για διαφορετικά μ_2

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζουμε με έντονες γραμμές τη συμπεριφορά του ταλαντωτή κοντά στον υπεραρμονικό συντονισμό για $\mu_2 = 0.5$ ενώ με πιο αχνές γραμμές για $\mu_2 = 0$, όπως φαίνεται και από τη λεζάντα. Με την εισαγωγή αυτής της μικρής μη γραμμικής απόσβεσης τύπου Van der Pol ($\mu_2 = 0.5$) το φαινόμενο του άλματος είναι ασθενέστερο. Η έντονη κάμψη του διαγράμματος ομαλοποιείται προσφέροντας στο σύστημα μια καλύτερη και ασφαλέστερη συμπεριφορά.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω που αναφέρθηκαν και σχετίζονται με την εξίσωση Duffing & Van der Pol αντιλαμβανόμαστε ότι ακόμα και η μικρή μη γραμμική απόσβεση όπως η $\mu_2 = 0.5$ βελτιώνει τα χαρακτηριστικά της απόκρισης του συστήματός μας. Επιδιώκουμε, λοιπόν, την ύπαρξη του μ_2 στην εξίσωση κίνησης του μονωτήρα μας ώστε οι μετακινήσεις να περιορίζονται στον επιθυμητό βαθμό.

➤ Υποαρμονικός Συντονισμός

Όταν η διεγείρουσα συχνότητα είναι σχεδόν τριπλάσια της ω_0 , δηλαδή όταν :

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (5.158)$$

υπάρχουν όροι, όπως δείξαμε στη (5.138), που προκαλούν συντονισμό. Η εξασφάλιση περιοδικής απόκρισης (5.133) επιτυγχάνεται με την ικανοποίηση κατάλληλης συνθήκης όπως στον υπεραρμονικό συντονισμό (5.142). Στην περίπτωση του υποαρμονικού συντονισμού βρίσκουμε με το πρόγραμμα MAPLE :

$$2i\omega_0 A' + 3k\bar{A}A^2 + 6k\Lambda^2 A + 2i\omega_0\mu_0 A + 3k\Lambda\bar{A}^2 \cdot \exp(i\sigma T_1) + \\ + i\omega_0\mu_2\bar{A}A^2 + 2i\omega_0\mu_2\Lambda^2 A + i\mu_2\Omega\Lambda\bar{A}^2 \cdot \exp(i\sigma T_1) - 2i\mu_2\omega_0\Lambda\bar{A}^2 \cdot \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (5.159)$$

Στην τελευταία εξίσωση που προκύπτει αντικαθιστούμε το A από τη σχέση (5.38) και βρίσκουμε το σύστημα (a, ϕ) με τη χρήση του προγράμματος MAPLE:

$-a(T_1) \left(-\frac{1}{4} \mu_2 a(T_1) \Lambda \Omega \sin(\sigma T_1 - 3\phi(T_1)) + \frac{1}{2} \mu_2 a(T_1) \Lambda \omega_0 \sin(\sigma T_1 - 3\phi(T_1)) + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} k\Lambda a(T_1) \cos(\sigma T_1 - 3\phi(T_1)) + 3\Lambda^2 k + \frac{3}{8} a(T_1)^2 k - \omega_0 \left(\frac{d}{dT_1} \phi(T_1) \right) \right) = 0$	(5.160)
--	---------

$-\frac{1}{4} \mu_2 a(T_1)^2 \Lambda \Omega \cos(\sigma T_1 - 3\phi(T_1)) + \frac{1}{2} \mu_2 a(T_1)^2 \Lambda \omega_0 \cos(\sigma T_1 - 3\phi(T_1)) - \\ - \mu_2 \Lambda^2 a(T_1) \omega_0 - \frac{1}{8} \mu_2 a(T_1)^3 \omega_0 - \frac{3}{4} k\Lambda a(T_1)^2 \sin(\sigma T_1 - 3\phi(T_1)) - \\ - \mu_0 a(T_1) \omega_0 - \omega_0 \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) = 0$	(5.161)
--	---------

Μετατρέπουμε το σύστημα σε αυτόνομο με το μετασχηματισμό :

$$\gamma(T_1) = \sigma T_1 - 3\phi(T_1) \quad (5.162)$$

$\frac{1}{4} \mu_2 a(T_1)^2 \Lambda \Omega \sin(\gamma(T_1)) - \frac{1}{2} \mu_2 a(T_1)^2 \Lambda \omega_0 \sin(\gamma(T_1)) - \\ - \frac{3}{4} k\Lambda a(T_1)^2 \cos(\gamma(T_1)) - 3\Lambda^2 a(T_1) k - \frac{3}{8} a(T_1)^3 k + \\ + \frac{1}{3} a(T_1) \omega_0 \sigma - \frac{1}{3} a(T_1) \omega_0 \left(\frac{d}{dT_1} \gamma(T_1) \right) = 0$	(5.163)
---	---------

$-\frac{1}{4} \mu_2 a(T_1)^2 \Lambda \Omega \cos(\gamma(T_1)) + \frac{1}{2} \mu_2 a(T_1)^2 \Lambda \omega_0 \cos(\gamma(T_1)) - \\ - \mu_2 \Lambda^2 a(T_1) \omega_0 - \frac{1}{8} \mu_2 a(T_1)^3 \omega_0 - \frac{3}{4} k\Lambda a(T_1)^2 \sin(\gamma(T_1)) - \\ - \mu_0 a(T_1) \omega_0 - \omega_0 \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) = 0$	(5.164)
--	---------

Οι σταθερές λύσεις (a_0, γ_0) των εξισώσεων αυτών αντιστοιχούν σε μόνιμη απόκριση του ταλαντωτή με μορφή (5.85).

Οι τιμές των τελευταίων προσδιορίζονται από τις σχέσεις (5.163) και (5.164) αν θεωρήσουμε ότι ισχύει :

$$\frac{d}{dT_1} a(T_1) = \frac{d}{dT_1} \gamma(T_1) = 0 \quad (5.165)$$

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει :

$\frac{1}{4} \mu_2 a_0^2 \Lambda \Omega \sin(\gamma_0) - \frac{1}{2} \mu_2 a_0^2 \Lambda \omega_0 \sin(\gamma_0) - \frac{3}{4} k \Lambda a_0^2 \cos(\gamma_0) - 3 \Lambda^2 a_0 k - \frac{3}{8} a_0^3 k + \frac{1}{3} a_0 \omega_0 \sigma = 0$	(5.166)
--	---------

$-\frac{1}{4} \mu_2 a_0^2 \Lambda \Omega \cos(\gamma_0) + \frac{1}{2} \mu_2 a_0^2 \Lambda \omega_0 \cos(\gamma_0) - \mu_2 \Lambda^2 a_0 \omega_0 - \frac{1}{8} \mu_2 a_0^3 \omega_0 - \frac{3}{4} k \Lambda a_0^2 \sin(\gamma_0) - \mu_0 a_0 \omega_0 = 0$	(5.167)
--	---------

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύστημα έχει τη σταθερή τετριμμένη λύση :

$$a_0 = 0 \quad (5.168)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις μη τετριμμένες λύσεις, απαλείφουμε το γ_0 από τις σχέσεις (5.166) και (5.167). Με αυτόν τον τρόπο παράγουμε την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης που ποσοτικοποιεί τον όρο της ελεύθερης ταλάντωσης a_0 .

$$\begin{aligned} &+ 576 \mu_2^2 \Lambda^4 \omega_0^2 + 144 \mu_2^2 \Lambda^2 a_0^2 \omega_0^2 + 9 \mu_2^2 a_0^4 \omega_0^2 + \\ &+ 1152 \mu_0 \mu_2 \Lambda^2 \omega_0^2 + 144 \mu_0 \mu_2 a_0^2 \omega_0^2 + 5184 \Lambda^4 k^2 + 1296 \Lambda^2 a_0^2 k^2 + 81 a_0^4 k^2 \\ &- 1152 \Lambda^2 k \sigma \omega_0 - 144 a_0^2 k \sigma \omega_0 + 576 \mu_0^2 \omega_0^2 + 64 \sigma^2 \omega_0^2 = \end{aligned} \quad (5.169)$$

$$= 36 \mu_2^2 \Lambda^2 \Omega^2 a_0^2 - 144 \mu_2^2 \Lambda^2 \Omega a_0^2 \omega_0 + 144 \mu_2^2 \Lambda^2 a_0^2 \omega_0^2 + 324 \Lambda^2 a_0^2 k^2$$

Γράφουμε την τελευταία σχέση σε πιο γενική μορφή :

Εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για υποαρμονικό συντονισμό του ταλαντωτή με εξίσωση κίνησης τύπου Duffing & Van der Pol	
$H_2 a_0^4 + H_1 a_0^2 + H_0 = 0$	(5.170)
$H_2 = 9 \mu_2^2 \omega_0^2 + 81 k^2$	(5.171)
$H_1 = -36 \mu_2^2 \Lambda^2 \Omega^2 + 144 \mu_2^2 \Lambda^2 \Omega \omega_0 + 144 \mu_0 \mu_2 \omega_0^2 + 972 \Lambda^2 k^2 - 144 k \sigma \omega_0$	(5.172)
$H_0 = 576 \mu_2^2 \Lambda^4 \omega_0^2 + 1152 \mu_0 \mu_2 \Lambda^2 \omega_0^2 + 5184 \Lambda^4 k^2 - 1152 \Lambda^2 k \sigma \omega_0 + 576 \mu_0^2 \omega_0^2 + 64 \sigma^2 \omega_0^2$	(5.173)

Για τη φάση γ_0 προσδιορίζεται ο παρακάτω τύπος :

$$\tan(\gamma_0) = \frac{1}{3} \frac{(-9 \mu_2 \Omega k + 27 \mu_2 k \omega_0) a_0^2 + G_1}{(\mu_2^2 \Omega \omega_0 - 2 \mu_2^2 \omega_0^2 + 9 k^2) a_0^2 + G_2}$$

$$G_1 = -72 \mu_2 \Omega \Lambda^2 k + 216 \mu_2 \Lambda^2 \omega_0 k + 8 \mu_2 \Omega \omega_0 \sigma - 16 \mu_2 \omega_0^2 \sigma + 72 \mu_0 \omega_0 k$$

$$G_2 = +8 \mu_2^2 \Omega \Lambda^2 \omega_0 - 16 \mu_2^2 \omega_0^2 \Lambda^2 + 8 \mu_2 \Omega \mu_0 \omega_0 - 16 \mu_2 \omega_0^2 \mu_0 + 72 \Lambda^2 k^2 - 8 \omega_0 \sigma k$$

Επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση του υποαρμονικού συντονισμού ισχύει ότι :

$$\Omega \approx 3\omega_0 \quad (5.174)$$

ο τύπος της φάσης γ_0 γίνεται τελικά :

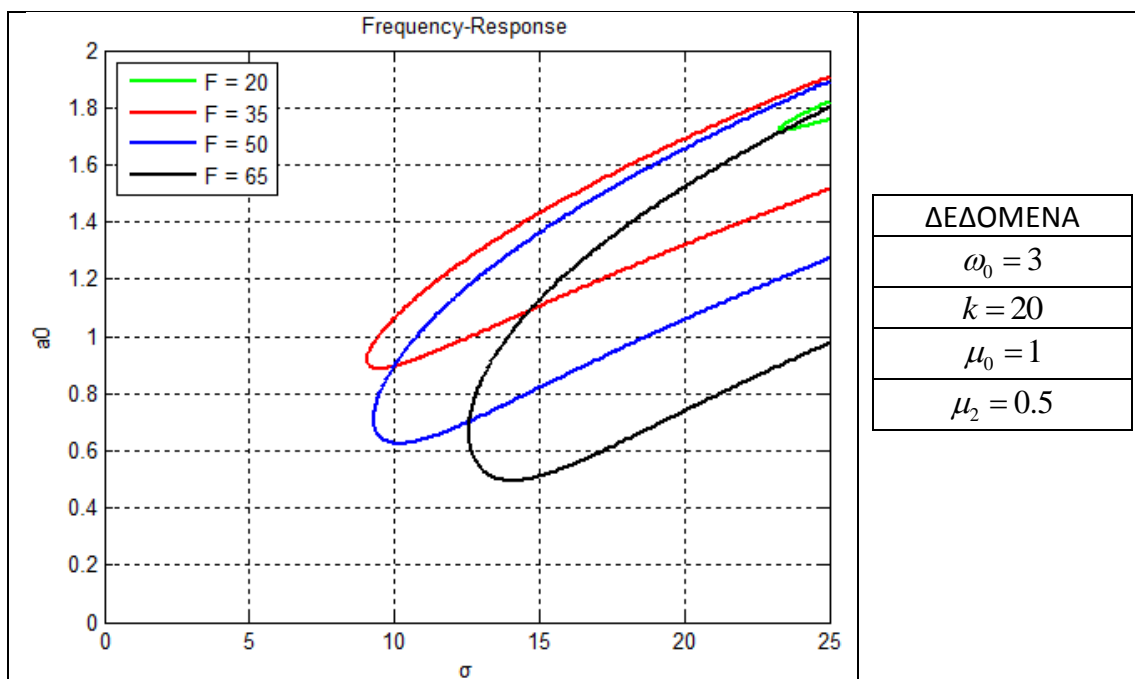
$$\tan(\gamma_0) = \frac{1}{3} \frac{8\mu_2\sigma\omega_0^2 + 72\mu_0k\omega_0}{(\mu_2^2\omega_0^2 + 9k^2)a_0^2 + 8\mu_2^2\omega_0^2\Lambda^2 + 8\mu_2\omega_0^2\mu_0 + 72\Lambda^2k^2 - 8\omega_0\sigma k}$$

Οι σταθερές λύσεις (a_0, γ_0) των εξισώσεων αυτών αντιστοιχούν σε απόκριση του ταλαντωτή με μορφή :

$$x(t) = a_0 \cos\left(\frac{\Omega t - \gamma_0}{3}\right) + \frac{F}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) + O(\varepsilon) \quad (5.175)$$

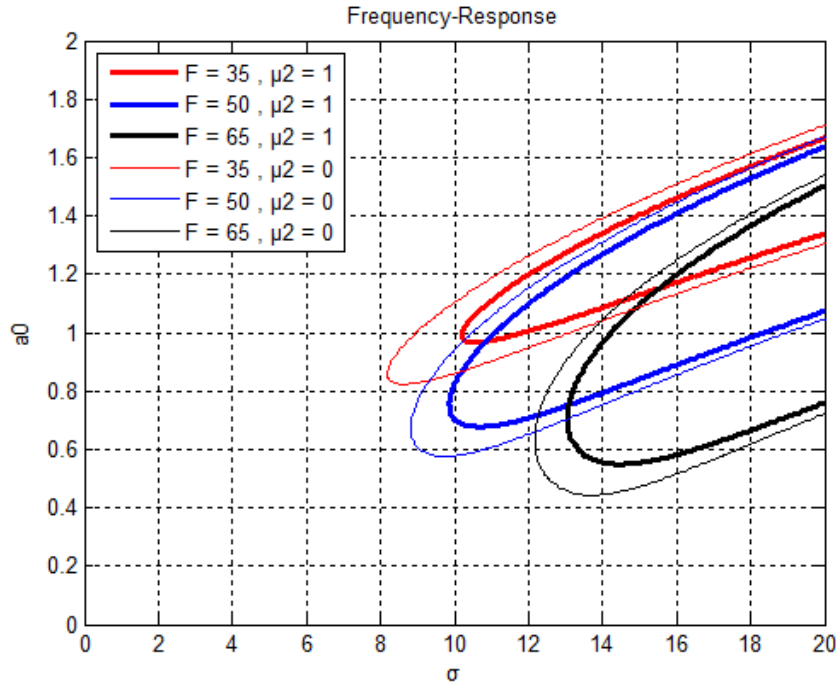
Η μηδενική λύση (5.168) αντιστοιχεί στη λύση του αντίστοιχου γραμμικού προβλήματος. Όμως, ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες, η μη γραμμικότητα είναι δυνατό να οδηγήσει στη διατήρηση του όρου με συχνότητα $\Omega/3$.

Διάγραμμα συχνότητας – απόκρισης



Σχ. 5.53 : Μορφή υποαρμονικού συντονισμού (Duffing & Van der Pol)

Η μορφή του τελευταίου σχήματος είναι παρόμοια με αυτή του Σχ. 5.28. Η επίδραση του μ_2 είναι αισθητή στο επόμενο διάγραμμα όπου παρουσιάζονται ταυτόχρονα δυο λύσεις με $\mu_2 = 0$ και $\mu_2 = 1$.



Σχ. 5.54 : Επίδραση του μ_2 στις καμπύλες συχνότητας – απόκρισης (υποαρμονικός)

Στις παραπάνω μη τετριμμένες λύσεις πρέπει να συνυπολογίσουμε και την $a_0 = 0$.

Καμπύλη συχνότητας – πλάτους διέγερσης

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για την εξίσωση Duffing στον υποαρμονικό συντονισμό προσδιορίζουμε μια παρόμοια περιοχή μη τετριμμένων λύσεων όπως φαίνεται στο σχήμα Σχ. 5.27. Στην περίπτωση της σύνθετης εξίσωσης κίνησης τύπου Duffing & Van der Pol δεν εισάγουμε τη μεταβλητή λ όπως στη (5.99) αλλά με διαφορετικό τρόπο ώστε να υπάρχει εξάρτηση και από το μ_2 .

$$\Lambda^2 = \lambda \cdot S_0 \quad (5.176)$$

με

$$S_0 = \frac{4\omega_0}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{|\mu_2\sigma\omega_0 + 9\mu_0k|}{\mu_2^2\omega_0^2 + 9k^2} \quad (5.177)$$

Τα όρια της περιοχής των μη τετριμμένων λύσεων δίνονται από τα λ_1 και λ_2 :

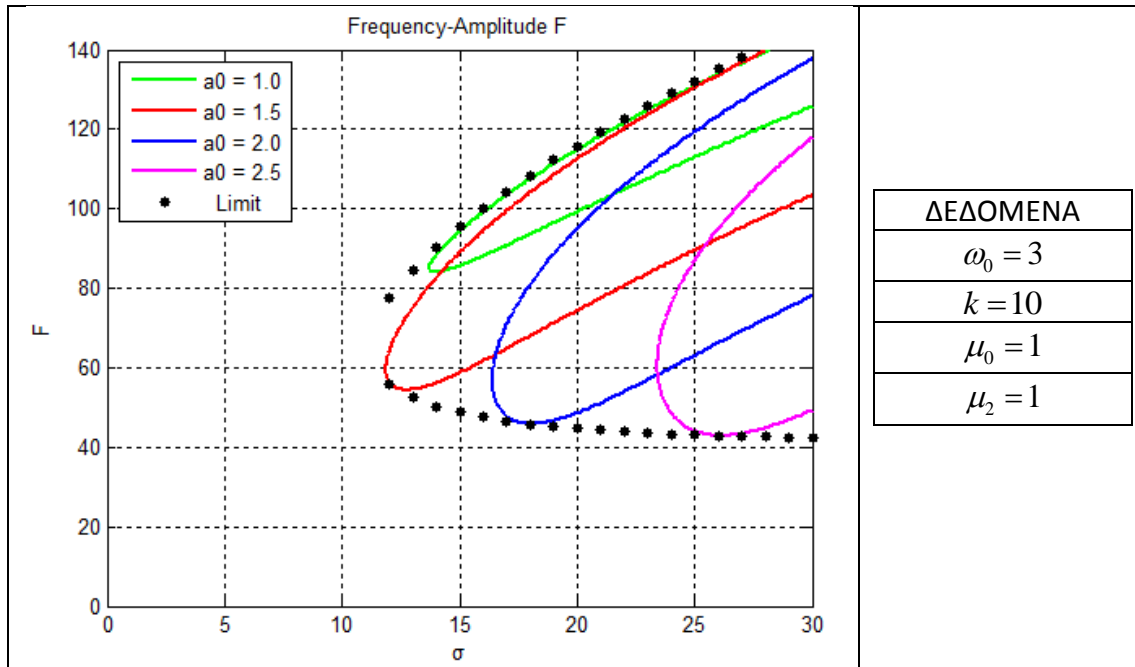
$$\lambda_{1,2} = S_1 \pm S_2 \quad (5.178)$$

Όπου τα S_1 και S_2 δίνονται από τις σχέσεις :

$$S_1 = \frac{3\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{k\sigma - \mu_0\mu_2\omega_0}{|\mu_2\sigma\omega_0 + 9\mu_0k|} \quad (5.179)$$

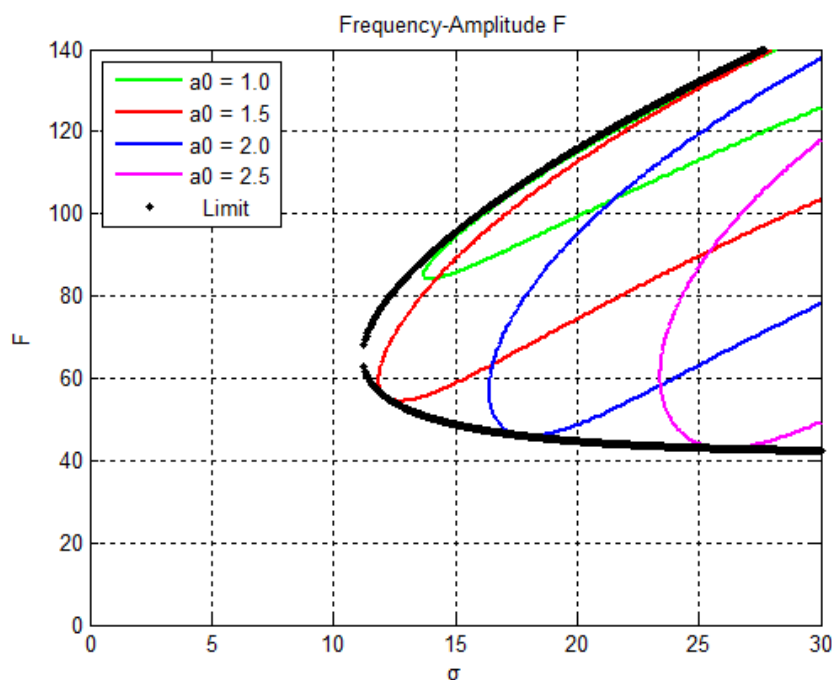
$$S_2 = \sqrt{S_1^2 - 1} \quad (5.180)$$

Τώρα, σύμφωνα και με τα παραπάνω, μπορούμε να αποτυπώσουμε τις καμπύλες συχνότητας – εύρους διέγερσης μαζί με το όριο των μη τετριμμένων λύσεων. Προφανώς για τα $a_0 \neq 0$ η εξίσωση (5.170) μας δίνει τις ζητούμενες καμπύλες. Οι τελευταίες βρίσκονται εντός της περιοχής που ορίζεται από τη σχέση (5.176).



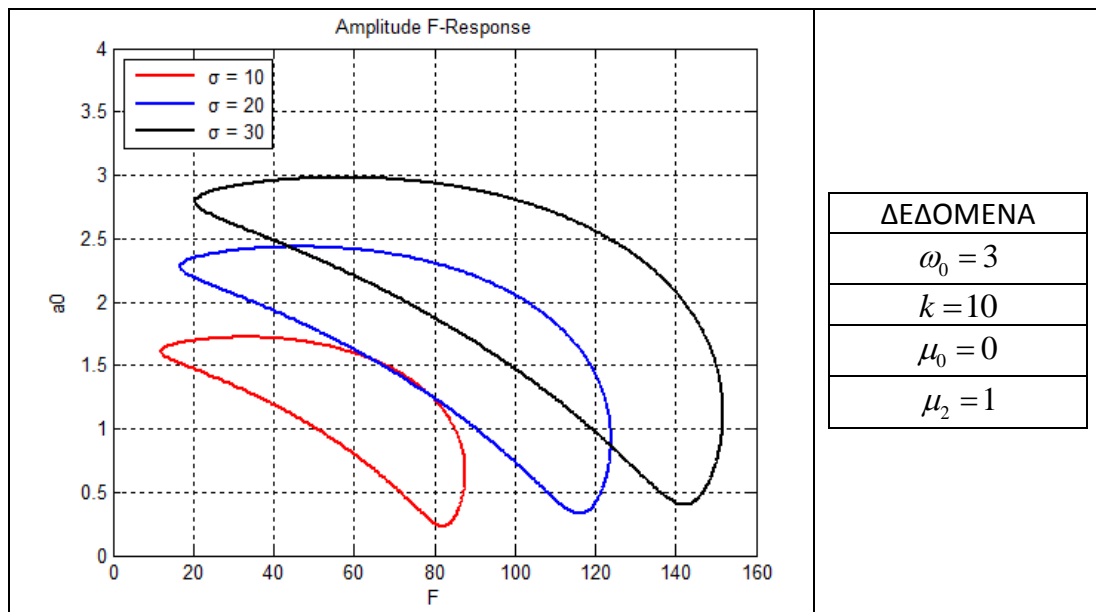
Σχ. 5.55 : Μη τετριμμένες λύσεις & Σημεία που ορίζουν την περιοχή των λύσεων

Αν πυκνώσουμε περισσότερο τα σημεία που οριοθετούν την περιοχή των μη τετριμμένων λύσεων παράγεται η καμπύλη (με μαύρο χρώμα στο Σχ. 5.56) έξω από την οποία δεν μπορεί να υπάρξει λύση της εξίσωσης (5.170) για κάθε $a_0 \neq 0$.

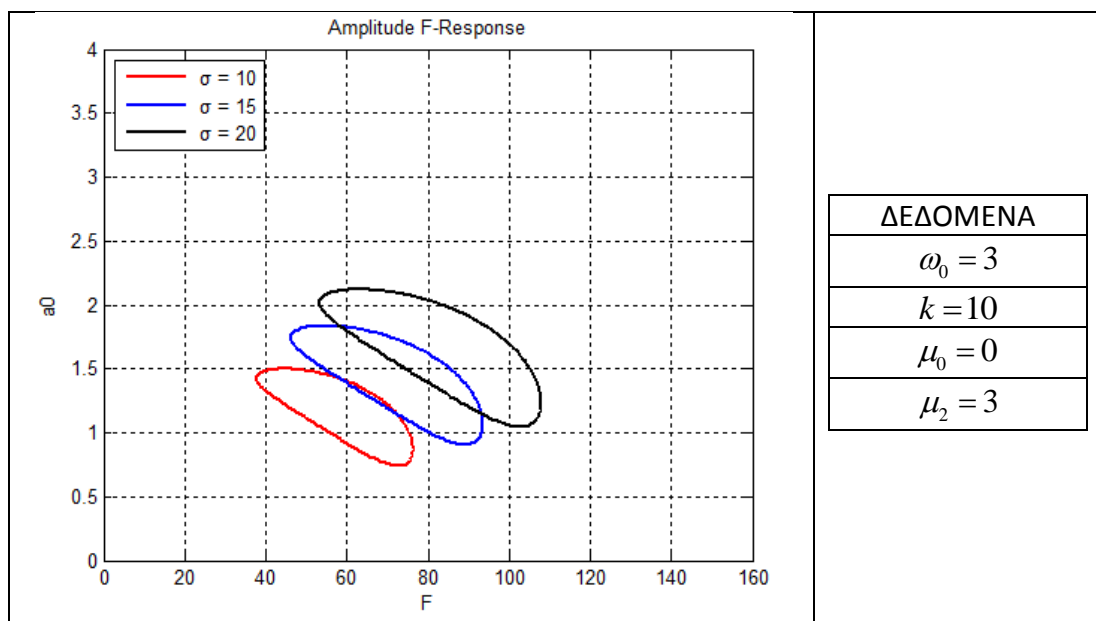


Σχ. 5.56 : Όριο μη τετριμμένων λύσεων – Ασφαλής περιοχή

Διάγραμμα πλάτους διέγερσης – απόκρισης



Σχ. 5.57



Σχ. 5.58

Με την αύξηση του μη γραμμικού όρου μ_2 τα φαινόμενα που δημιουργούνται λόγω της δυσκαμψίας του Duffing περιορίζονται όπως φαίνονται και από τα παραπάνω σχήματα.

5.3.4. Γενική περίπτωση εξίσωσης

Στο προηγούμενο τμήμα της εργασίας μελετήθηκαν ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων που σχετίζονται με το μονωτήρα που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα παρουσιάστηκε η συμπεριφορά της εξίσωσης Duffing γύρω από τις περιοχές συντονισμού καθώς και η επιρροή της μη γραμμικής απόσβεσης τύπου Van der Pol στην τελευταία εξίσωση. Όλα τα ανωτέρω πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθεια της μεθόδου των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων, όπως περιγράφηκε αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Για να αντιληφθούμε το πώς συμπεριφέρεται ο μονωτήρας που εξετάζουμε πρέπει να αντιμετωπίσουμε τη γενική περίπτωση της εξίσωσης κίνησης του (5.10). Εκτός από τη μη γραμμική δυσκαμψία τύπου Duffing και τη μη γραμμική απόσβεση τύπου Van der Pol περιέχει και άλλους μη γραμμικούς όρους σε συνδυασμό με συντελεστές της μορφής $sign(x)$ και $sign(\dot{x})$. Ύστερα από αδιαστατοποίηση, η γενική εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + (\tilde{c}_2 x^2 + \tilde{c}_1 x \cdot sign(x) + \tilde{c}_0) \dot{x} + (\tilde{k}_0 \cdot sign(x) + \tilde{c}_\mu \cdot sign(\dot{x})) + \\ + \tilde{k}_2 x^2 \cdot sign(x) + \tilde{k}_3 x^3 = F \cdot \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (5.181)$$

Για να μελετηθεί η επιρροή των μη γραμμικών όρων στην απόκριση του μονωτήρα θεωρούμε ότι στο σύστημα μας αυτοί οι όροι έχουν διαφορετική τάξη. Στην περίπτωση που είναι αρκετά μικροί μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συμπεριφορά με μεθόδους διαταραχών ή τη μέθοδο ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων. Συγκεκριμένα, εκτός από τις σχέσεις (5.20) και (5.22), υποθέτουμε :

$$\tilde{k}_3 = \varepsilon \kappa_3 \quad (5.182) \quad \tilde{k}_2 = \varepsilon \kappa_2 \quad (5.183) \quad \tilde{k}_0 = \varepsilon \kappa_0 \quad (5.184)$$

$$\tilde{c}_1 = \varepsilon \mu_1 \quad (5.185) \quad \text{και} \quad \tilde{c}_\mu = \varepsilon \mu_c \quad (5.186)$$

Με τις παραπάνω σχέσεις θεωρήσαμε ότι όλοι οι συντελεστές των μη γραμμικών όρων έχουν την ίδια τάξη του « ε ». Αν ο όρος \tilde{k}_3 ήταν ακόμα πιο μικρός θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι $\tilde{k}_3 = \varepsilon^2 \kappa_3$ και να αναζητήσουμε με τις μεθόδους που αναπτύξαμε μια προσεγγιστική λύση της μορφής $x = u_0 + u_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

Προσδιορίζουμε τις περιοχές συντονισμού της γενικής περίπτωσης με τη μέθοδο των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων όπως διατυπώθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα όροι συντονισμού παράγονται όταν η συχνότητα Ω παίρνει τις τιμές :

$$0, \frac{\omega_0}{3}, \frac{\omega_0}{2}, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0 \quad (5.187)$$

Παρακάτω εστιάζουμε στην περιοχή του κύριου συντονισμού για τη γενική εξίσωση του μονωτήρα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης των ευρών και φάσεων.

ΚΥΡΙΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις εξισώσεων που μελετούσαμε την περιοχή του κύριου συντονισμού, έτσι και εδώ στη γενική περίπτωση (5.181) ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (5.188) \quad \text{και} \quad F = \varepsilon f \quad (5.189)$$

Η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon (\mu_2 x^2 + \mu_1 x \cdot \text{sign}(x) + 2\mu_0) \dot{x} + \varepsilon (\kappa_0 \cdot \text{sign}(x) + \mu_c \cdot \text{sign}(\dot{x})) + \varepsilon \kappa_2 x^2 \cdot \text{sign}(x) + \varepsilon \kappa_3 x^3 = \varepsilon f \cdot \cos(\Omega t) \quad (5.190)$$

Επίλυση με τη μέθοδο ολοκλήρωσης ευρών & φάσεων

Για $\varepsilon = 0$ η εξίσωση κίνησης (5.190) γίνεται :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.191)$$

Η λύση αυτού του προβλήματος είναι γνωστή και συγκεκριμένα είναι η συνάρτηση :

$$x = a \cos(\omega_0 t + b) \quad (5.192)$$

Σε αυτό το σημείο υποθέτουμε ότι για τη λύση x της (5.190) ισχύουν οι σχέσεις :

$$x = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + b(t)) \quad (5.193)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 a(t) \cdot \sin(\omega_0 t + b(t)) \quad (5.194)$$

Από τις σχέσεις (5.190) , (5.193) και (5.194), με χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης, προσδιορίζουμε τις εξισώσεις μέσω όρων $\bar{a}(t)$ και $\bar{b}(t)$ (Averaged Equations). Προκειμένου αυτά τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τη μέθοδο των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων εισάγεται η μεταβλητή T_1 για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

$$T_1 = \varepsilon t \quad (5.195)$$

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dT_1} \frac{dT_1}{dt} = \varepsilon \frac{d\bar{a}}{dT_1} \quad (5.196)$$

Με τη βοήθεια του προγράμματος MAPLE εξάγουμε τις εξισώσεις μέσω όρων ως προς $\bar{a}(T_1)$ και $\bar{b}(T_1)$ λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.195) και (5.196). Η λύση

$$x = \bar{a}(T_1) \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{b}(T_1)) \quad (5.197)$$

είναι προσεγγιστική λύση της (5.181) στην περιοχή του κύριου συντονισμού.

Συμβολίζουμε τα \bar{a}, \bar{b} με a, b μιας και είδαμε πως οι τιμές τους βρίσκονται κοντά. Συγκεκριμένα για το πρόβλημα μας ισχύουν τα παρακάτω :

$$\omega_0 a' = -\frac{1}{8} \omega_0 \mu_2 a^3 - \omega_0 \mu_0 a - \frac{2}{3\pi} \omega_0 \mu_1 a^2 + \frac{1}{2} f \sin(\sigma T_1 - b) - \frac{2}{\pi} \mu_c \quad (5.198)$$

$$\omega_0 a b' = \frac{3}{8} \kappa_3 a^3 - \frac{1}{2} f \cos(\sigma T_1 - b) + \frac{4}{3\pi} \kappa_2 a^2 + \frac{2}{\pi} \kappa_0 \quad (5.199)$$

Μετατρέπουμε το σύστημα σε αυτόνομο, εισάγοντας τη μεταβλητή $\gamma = \sigma T_1 - b$:

$$\omega_0 a' = -\frac{1}{8} \omega_0 \mu_2 a^3 - \omega_0 \mu_0 a - \frac{2}{3\pi} \omega_0 \mu_1 a^2 + \frac{1}{2} f \sin \gamma - \frac{2}{\pi} \mu_c \quad (5.200)$$

$$\omega_0 a \sigma - \omega_0 a \gamma' = \frac{3}{8} \kappa_3 a^3 - \frac{1}{2} f \cos \gamma + \frac{4}{3\pi} \kappa_2 a^2 + \frac{2}{\pi} \kappa_0 \quad (5.201)$$

Τα μεγέθη a και γ είναι ίδια με τα αντίστοιχα της Multiple Scales όπως στη (5.114) . Προσδιορίζουμε την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για τη μόνιμη κατάσταση που ισχύουν οι σχέσεις :

$$\frac{1}{8} \omega_0 \mu_2 a_0^3 + \frac{2}{3\pi} \omega_0 \mu_1 a_0^2 + \omega_0 \mu_0 a_0 + \frac{2}{\pi} \mu_c = \frac{1}{2} f \sin \gamma_0 \quad (5.202)$$

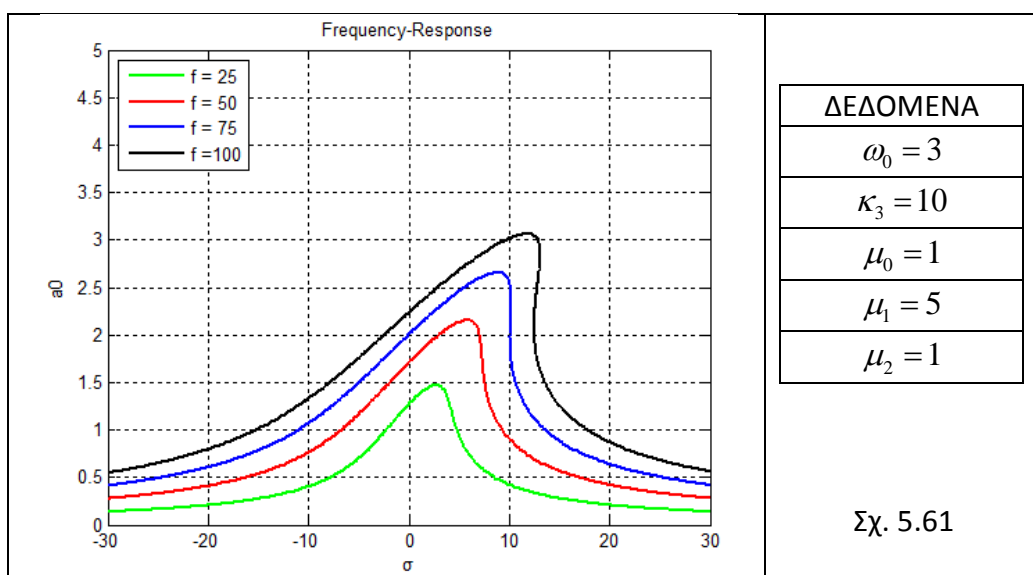
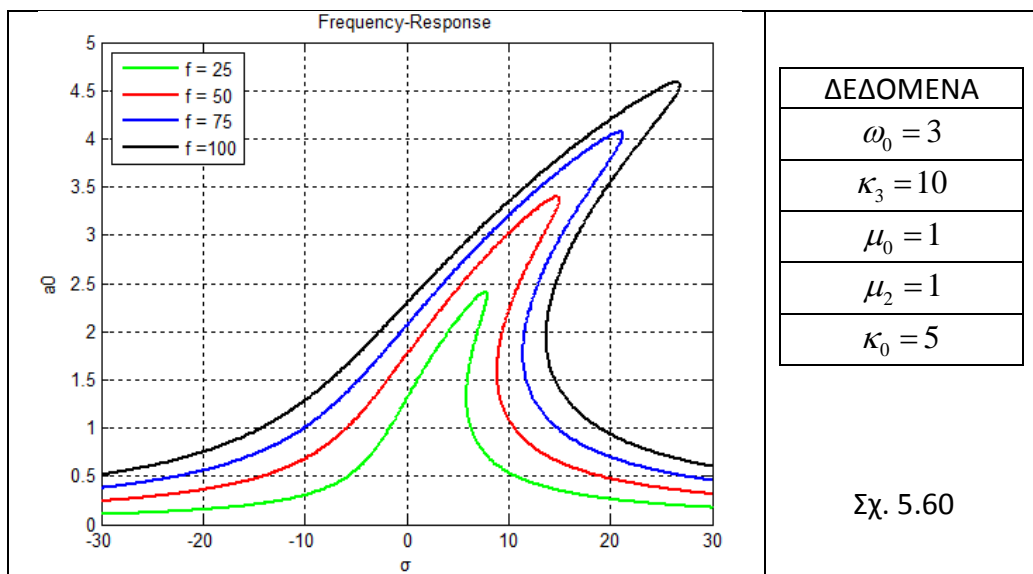
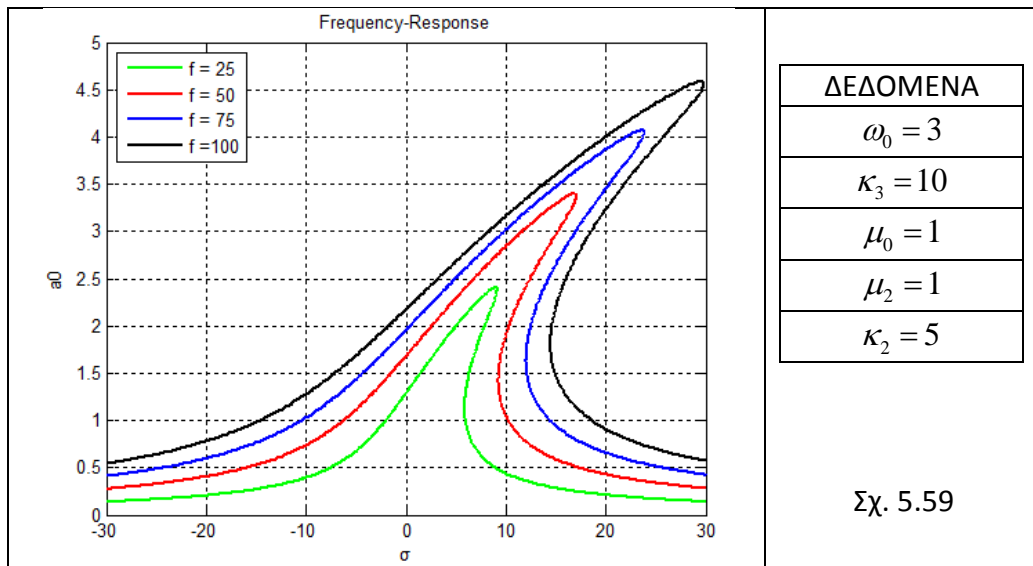
$$\frac{3}{8} \kappa_3 a_0^3 + \frac{4}{3\pi} \kappa_2 a_0^2 - \omega_0 a_0 \sigma + \frac{2}{\pi} \kappa_0 = \frac{1}{2} f \cos \gamma_0 \quad (5.203)$$

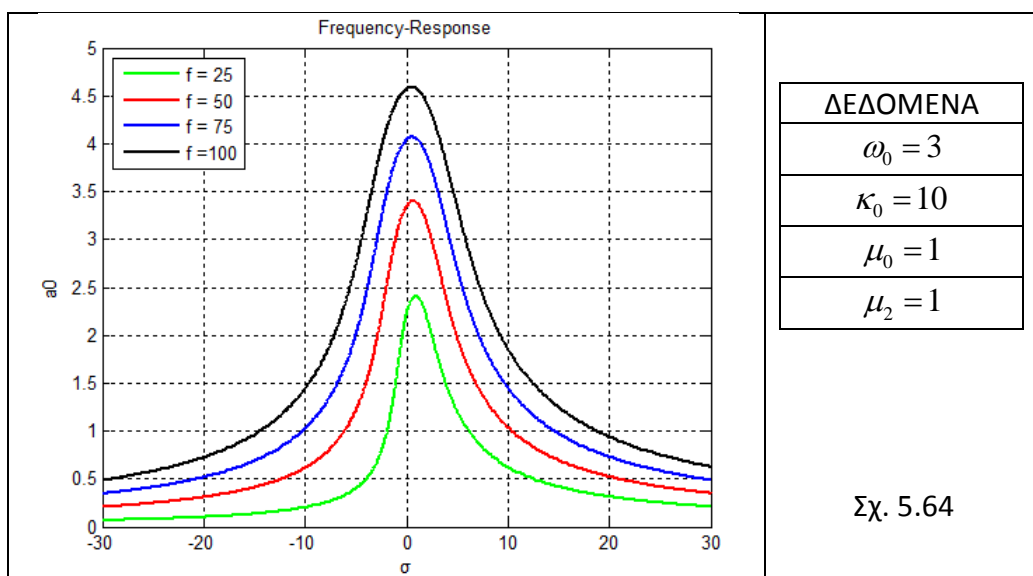
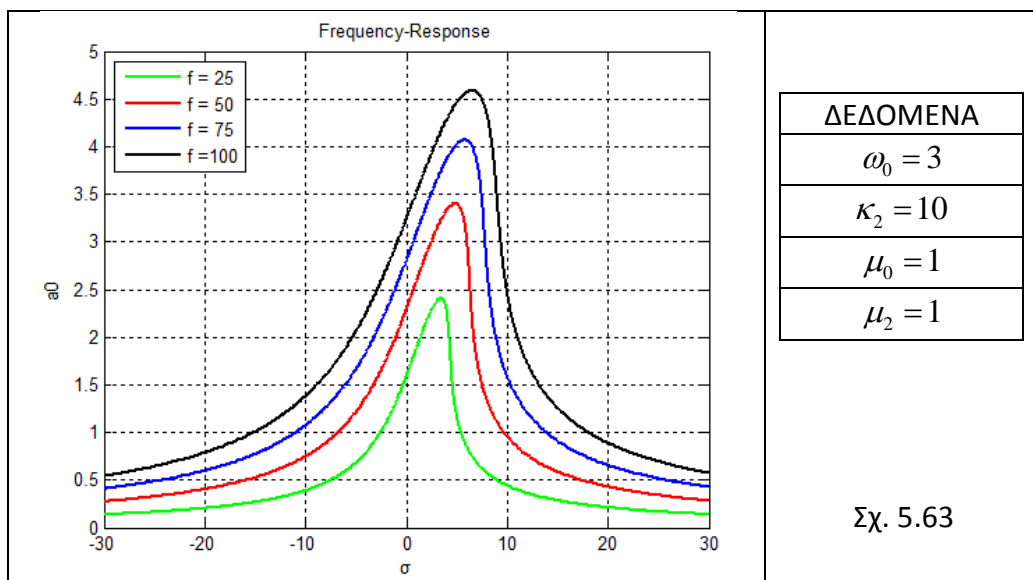
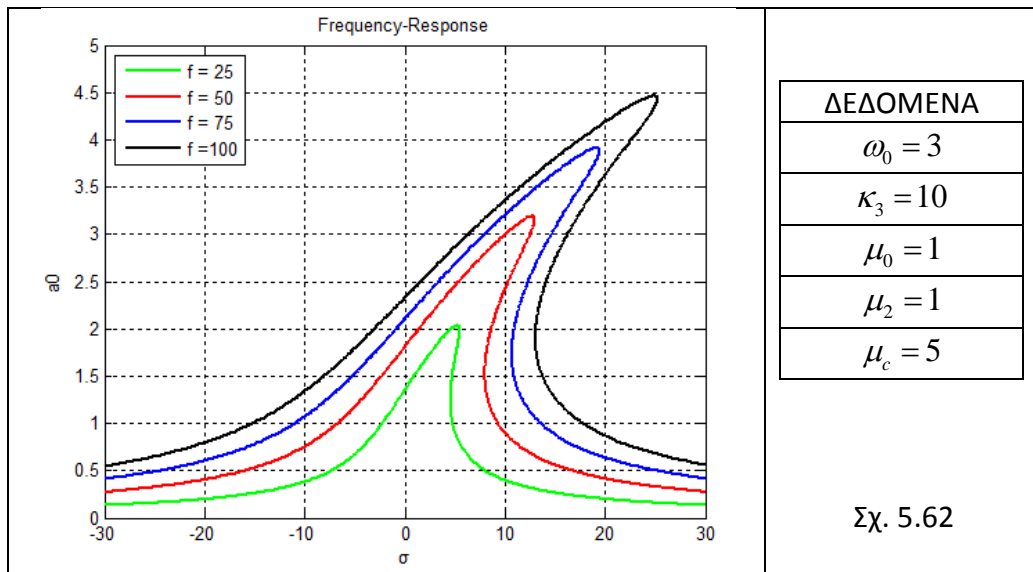
Απαλείφουμε το γ_0 από το παραπάνω σύστημα και προσδιορίζουμε την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης. Ύστερα σχεδιάζουμε τις καμπύλες με το MATLAB.

Εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για κύριο συντονισμό του μονωτήρα	
$H_6 a_0^6 + H_5 a_0^5 + H_4 a_0^4 + H_3 a_0^3 + H_2 a_0^2 + H_1 a_0 + H_0 = 0$	(5.204)
$H_6 = 9\mu_2^2 \pi^2 \omega_0^2 + 81\pi^2 \kappa_3^2$	(5.205)
$H_5 = 96\mu_1 \mu_2 \pi \omega_0^2 + 576\pi \kappa_2 \kappa_3$	(5.206)
$H_4 = 144\mu_0 \mu_2 \pi^2 \omega_0^2 - 432\pi^2 \sigma \kappa_3 \omega_0 + 256\mu_1^2 \omega_0^2 + 1024\kappa_2^2$	(5.207)
$H_3 = 768\mu_0 \mu_1 \pi \omega_0^2 + 288\mu_2 \mu_c \pi \omega_0 - 1536\pi \sigma \kappa_2 \omega_0 + 864\pi \kappa_0 \kappa_3$	(5.208)
$H_2 = 576\mu_0^2 \pi^2 \omega_0^2 + 576\pi^2 \sigma^2 \omega_0^2 + 1536\mu_1 \mu_c \omega_0 + 3072\kappa_0 \kappa_2$	(5.209)
$H_1 = 2304\mu_0 \mu_c \pi \omega_0 - 2304\pi \sigma \kappa_0 \omega_0$	(5.210)
$H_0 = -144\pi^2 f^2 + 2304\mu_c^2 + 2304\kappa_0^2$	(5.211)

Για το γ_0 ισχύει :

$$\tan \gamma_0 = \frac{3\mu_2 \pi \omega_0 a_0^3 + 16\omega_0 \mu_1 a_0^2 + 24\mu_0 \pi \omega_0 a_0 + 48\mu_c}{9\kappa_3 \pi a_0^3 + 32\kappa_2 a_0^2 - 24\pi \sigma \omega_0 a_0 + 48\kappa_0} \quad (5.212)$$





5.3.5. Συσχέτιση μεταξύ των προβλημάτων

Στα προηγούμενα κεφάλαια ξεκινήσαμε από την ειδική περίπτωση της εξίσωσης Duffing και καταλήξαμε στη γενική περίπτωση της εξίσωσης του μονωτήρα. Με αυτόν τον επαγωγικό τρόπο επίλυσης των προβλημάτων, προσδιορίσαμε τις εξισώσεις συχνότητας – απόκρισης για κάθε περίπτωση και για διάφορα είδη συντονισμών ανάλογα με το πρόβλημα. Προφανώς τώρα, κινούμενοι στην «αντίθετη» κατεύθυνση (από το γενικό στο ειδικό) μπορεί να αναδειχθεί η συσχέτιση μεταξύ των προβλημάτων μέσω της επαλήθευσης των ειδικών εξισώσεων από τις αντίστοιχες γενικότερες.

- Κύριος συντονισμός

Στη γενική περίπτωση της εξίσωσης κίνησης του μονωτήρα προσδιορίσαμε την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για τον κύριο συντονισμό όπως φαίνεται από τη σχέση (5.204). Προφανώς αυτή περιγράφει και τις ειδικές περιπτώσεις του μονωτήρα όταν έχει τη δυσκαμψία τύπου Duffing και την απόσβεση τύπου Van der Pol (εξίσωση (5.101)). Για επαλήθευση, θέτουμε στη γενική περίπτωση $\mu_1 = \mu_c = 0$, $\kappa_0 = \kappa_2 = 0$ και $\kappa_3 = k$:

Εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για κύριο συντονισμό του μονωτήρα	
$H_6 a_0^6 + H_4 a_0^4 + H_2 a_0^2 + H_0 = 0$	(5.213)
$H_6 = 9\mu_2^2 \pi^2 \omega_0^2 + 81\pi^2 k^2$	(5.214)
$H_4 = 144\mu_0 \mu_2 \pi^2 \omega_0^2 - 432\pi^2 \sigma k \omega_0$	(5.215)
$H_2 = 576\mu_0^2 \pi^2 \omega_0^2 + 576\pi^2 \sigma^2 \omega_0^2$	(5.216)
$H_0 = -144\pi^2 f^2$	(5.217)

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι ίδια με αυτήν που προέκυψε για την ειδική περίπτωση Duffing & Van der Pol (εξίσωση (5.118)) παρόλο που η τελευταία είναι αποτέλεσμα της μεθόδου πολλαπλών χρονικών κλιμάκων. Αναλυτικά έχουμε :

$$144\pi^2 \left(0.5625a_0^6 k^2 - 3a_0^4 k \sigma \omega_0 + 4\sigma^2 \omega_0^2 a_0^2 + 0.0625\omega_0^2 \mu_2^2 a_0^6 + \omega_0^2 \mu_2 \mu_0 a_0^4 + 4\mu_0^2 \omega_0^2 a_0^2 \right) = 144\pi^2 f^2 \quad (5.218)$$

$$81\pi^2 a_0^6 k^2 - 432\pi^2 a_0^4 k \sigma \omega_0 + 576\pi^2 \sigma^2 \omega_0^2 a_0^2 + 9\pi^2 \omega_0^2 \mu_2^2 a_0^6 + 144\pi^2 \omega_0^2 \mu_2 \mu_0 a_0^4 + 576\pi^2 \mu_0^2 \omega_0^2 a_0^2 = 144\pi^2 f^2 \quad (5.219)$$

Οι δυο μέθοδοι που εφαρμόσαμε για τον προσδιορισμό των παραπάνω εξισώσεων, όπως περιμέναμε, είναι ισοδύναμες αφού εξάγουν τα ίδια αποτελέσματα.

- Υπεραρμονικός συντονισμός

Προσδιορίσαμε την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για αυτό το συντονισμό στην περίπτωση που έχουμε το συνδυασμό Duffing και Van der Pol (εξίσωση (5.150)). Αν θεωρήσουμε ότι $\mu_2 = 0$ τότε απλοποιείται η σχέση στην αντίστοιχη γνωστή του Duffing. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει από τη σχέση (5.83) ότι :

$$\begin{aligned} 9\Lambda^4 k^2 \alpha_0^2 + 2.25\Lambda^2 k^2 \alpha_0^4 - 6\Lambda^2 k \sigma \omega_0 \alpha_0^2 + 0.1406k^2 \alpha_0^6 - \\ -0.75\alpha_0^4 k \sigma \omega_0 + \sigma^2 \omega_0^2 \alpha_0^2 + \mu_0^2 \omega_0^2 \alpha_0^2 = \Lambda^6 k^2 \end{aligned} \quad (5.220)$$

Η τελευταία έχει ίδιες λύσεις με την εξίσωση που ακολουθεί ως προς a_0 .

Εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για υπεραρμονικό συντονισμό του ταλαντωτή με εξίσωση κίνησης τύπου Duffing	
$H_3 a_0^6 + H_2 a_0^4 + H_1 a_0^2 = H_0$	(5.221)
$H_3 = 9k^2$	(5.222)
$H_2 = 144\Lambda^2 k^2 - 48k\sigma\omega_0$	(5.223)
$H_1 = 576\Lambda^4 k^2 - 384\Lambda^2 k\sigma\omega_0 + 64\mu_0^2 \omega_0^2 + 64\sigma^2 \omega_0^2$	(5.224)
$H_0 = 64\Lambda^6 k^2$	(5.225)

- Υποαρμονικός συντονισμός

Η εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για αυτό το συντονισμό στην περίπτωση που έχουμε την διαφορική εξίσωση Duffing & Van der Pol μορφώθηκε με τη βοήθεια της μεθόδου πολλαπλών χρονικών κλιμάκων. Αν ο όρος μ_2 της μη γραμμικής απόσβεσης του Van der Pol είναι μηδέν τότε εκφυλίζεται στη γνωστή εξίσωση του Duffing (5.90). Παρόμοια ισχύουν και για την εξίσωση φάσης.

Εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για υποαρμονικό συντονισμό του ταλαντωτή με εξίσωση κίνησης τύπου Duffing	
$H_2 a_0^4 + H_1 a_0^2 + H_0 = 0$	(5.226)
$H_2 = 81k^2$	(5.227)
$H_1 = 972\Lambda^2 k^2 - 144k\sigma\omega_0$	(5.228)
$H_0 = 5184\Lambda^4 k^2 - 1152\Lambda^2 k\sigma\omega_0 + 576\mu_0^2 \omega_0^2 + 64\sigma^2 \omega_0^2$	(5.229)

6.1. Ανακεφαλαίωση της εργασίας

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 4 ο ρόλος της σεισμικής μόνωσης είναι σημαντικός ακόμα και για την προστασία αντικειμένων όπως τα εκθέματα σε μουσεία. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε τη δυναμική συμπεριφορά ενός σεισμικού μονωτήρα που σχεδιάστηκε προκειμένου να εξυπηρετεί τον τελευταίο σκοπό. Τόσο τα γεωμετρικά όσο και τα μηχανικά χαρακτηριστικά αυτής της κατασκευής οδηγούν στη μόρφωση ενός μη γραμμικού μοντέλου συμπεριφοράς. Με άλλα λόγια, η εξίσωση κίνησης του μονωτήρα είναι μη γραμμική αφού έχει δυσκαμψία τύπου Duffing , απόσβεση τύπου Van der Pol και ασυμμετρία που εξαρτάται από το πρόσημο της απομάκρυνσης.

Η προσεγγιστική επίλυση των εξισώσεων που προκύπτουν γίνεται με τη βοήθεια αναλυτικών μεθόδων (κεφάλαιο 3) όπως :

- ✓ η μέθοδος πολλαπλών χρονικών κλιμάκων και
- ✓ η μέθοδος ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων

καθώς και της αριθμητικής μεθόδου «Runge-Kutta 4^{ης} τάξης».

Οι προηγούμενες αναλυτικές μέθοδοι μπορεί να εφαρμόζονται μόνο για προβλήματα που εμφανίζουν ασθενή μη γραμμικότητα αλλά αναδεικνύουν φαινόμενα των μη γραμμικών συστημάτων (όπως οι δευτερεύοντες συντονισμοί) που η γραμμική θεώρηση τα αγνοεί. Η συμπεριφορά του μονωτήρα παρουσιάστηκε ποιοτικά στο κεφάλαιο 5 με τη χρήση των παραπάνω μεθόδων.

6.2. Σύγκριση μεθόδων επίλυσης

Ο προσδιορισμός προσεγγιστικών λύσεων των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων γίνεται στο κεφάλαιο 3. Δίνονται παραδείγματα επίλυσης τόσο της εξίσωσης Duffing με τη μέθοδο των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων όσο και του ταλαντωτή Van der Pol με τη μέθοδο ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων. Από την ανάπτυξη των προηγούμενων παραδειγμάτων εξάγονται κάποια συμπεράσματα σχετικά με τις μεθόδους επίλυσης.

Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι :

1. για ασθενώς μη γραμμικά προβλήματα ($\varepsilon < 0.4$) ο κλειστός τύπος που προκύπτει από τις μεθόδους διαταραχών δίνει παρόμοια αποτελέσματα με αυτά που εξάγονται από την αριθμητική μέθοδο. Με τη χρήση αυτού του τύπου μπορούμε να αποφύγουμε το υπολογιστικό κόστος που μας επιβαρύνει στην περίπτωση που επιθυμούμε να λύσουμε τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση για διάφορες τιμές του ε με αριθμητικό τρόπο.
2. η μέθοδος πολλαπλών χρονικών κλιμάκων είναι ισοδύναμη με αυτή της ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων. Ανεξάρτητα από το ποια μέθοδο εφαρμόζουμε καταλήγουμε στον ίδιο κλειστό τύπο. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που δόθηκε είναι η εξίσωση Duffing, για την οποία καταλήξαμε στον ίδια προσεγγιστική λύση. Το τελευταίο ισχύει και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις που δεν παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία.
3. τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στους μη γραμμικούς ταλαντωτές απεικονίζονται ικανοποιητικά από τις προσεγγιστικές λύσεις. Ο ταλαντωτής με απόσβεση τύπου Van der Pol, για παράδειγμα, παρουσιάζει οριακό κύκλο στο επίπεδο των φάσεων με την πάροδο του χρόνου. Το τελευταίο προβλέπεται και από τα αναλυτικά αποτελέσματα της μεθόδου ολοκλήρωσης ευρών & φάσεων.

Βασισμένοι στην τελευταία παρατήρηση, αναπτύχθηκε κατάλληλη μεθοδολογία προκειμένου να παρουσιαστούν φαινόμενα των μη γραμμικών ταλαντωτών και συγκεκριμένα του μονωτήρα μας.

6.3. Συμπεριφορά του μονωτήρα - Συντονισμοί

Από την αρχική προσπάθεια μελέτης του μονωτήρα μας με τη χρήση της μεθόδου Runge-Kutta και το σχηματισμό των διαγραμμάτων συντελεστή μεγέθυνσης D - αδιάστατης συχνότητας διέγερσης Ω/ω_0 , παρατηρούμε ότι για συνήθεις τιμές των γεωμετρικών και μηχανικών χαρακτηριστικών ο μονωτήρας παρουσιάζει πλήθος συντονισμών (με την έννοια των τοπικών μεγίστων του τελευταίου διαγράμματος) μακριά από την τιμή $\Omega \approx \omega_0$. Επίσης, άλλη μια διαφορά από τα γραμμικά συστήματα είναι ότι εμφανίζονται άλματα του συντελεστή μεγέθυνσης D για μικρές μεταβολές του Ω στις περιοχές των συντονισμών.

Σε αυτό το σημείο αξιοποιούνται οι μέθοδοι διαταραχών για να προκύψουν οι τελευταίες παρατηρήσεις μέσα από αναλυτικούς τρόπους. Η μέθοδος πολλαπλών χρονικών κλιμάκων «εμφανίζει» τα σημεία εκείνα που υπάρχουν συντονισμοί. Προφανώς γίνεται διάκριση μεταξύ του κύριου συντονισμού για $\Omega \approx \omega_0$ και των υπόλοιπων δευτερευόντων συντονισμών.

Για κάθε είδος συντονισμού προσδιορίστηκε το πλάτος ελεύθερης ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα διέγερσης μέσα σε μια μικρή περιοχή της κρίσιμης συχνότητας συντονισμού. Έτσι εμφανίζονται αστάθειες και άλματα στη συμπεριφορά του μονωτήρα.

6.3.1. Κύριος συντονισμός

Στη γενική περίπτωση της εξίσωσης κίνησης του μονωτήρα προσδιορίσαμε την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για τον κύριο συντονισμό όπως φαίνεται από τη σχέση (5.204) με τη μέθοδο ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων. Όπως είδαμε, αν θέσουμε στη γενική περίπτωση $\mu_1 = \mu_c = 0$, $\kappa_0 = \kappa_2 = 0$ και $\kappa_3 = k$ παράγεται η αντίστοιχη εξίσωση για την ειδική περίπτωση Duffing & Van der Pol, η οποία είναι ίδια με εκείνη (εξίσωση (5.118)) που προσδιορίστηκε με τη μέθοδο πολλαπλών χρονικών κλιμάκων. Οι δυο μέθοδοι που εφαρμόσαμε για τον προσδιορισμό των παραπάνω εξισώσεων, όπως περιμέναμε, είναι ισοδύναμες αφού εξάγουν τα ίδια αποτελέσματα για την ειδική περίπτωση της εξίσωσης Duffing & Van der Pol.

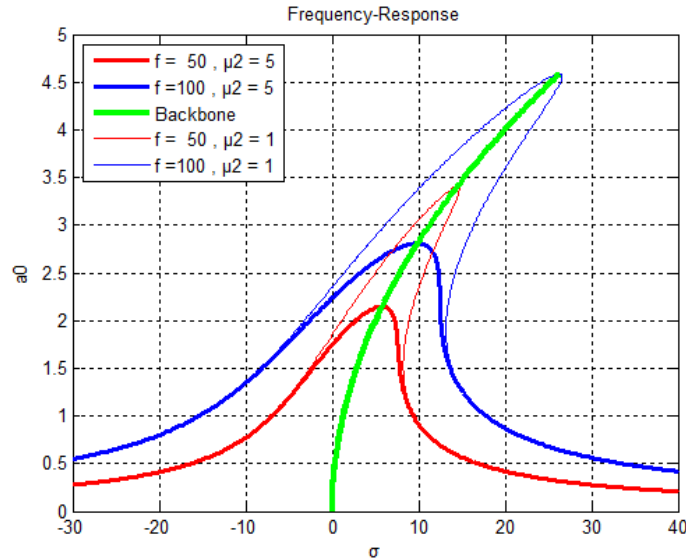
Από τη σχέση (5.204) παρατηρούμε ότι μπορούμε να βρούμε όρους της μορφής $\mu_i \mu_j$ και $\kappa_i \kappa_j$ αλλά όχι όρους της μορφής $\mu_i \kappa_j$. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν όροι στην εξίσωση συχνότητας – απόκρισης που να εξαρτώνται ταυτόχρονα από κάποιο μ_i και κάποιο κ_j . Η μεταβολή του μ_i επηρεάζει την απόκριση του συστήματος αλλά όχι μέσα από τους όρους που έχουν κάποια εξάρτηση από τα κ_j .

Από τα διαγράμματα που κατασκευάστηκαν στο κεφάλαιο 5 παρατηρούμε ότι η κάμψη του διαγράμματος συχνότητας – απόκρισης επηρεάζεται εκτός από το $\kappa_3 = k$ του Duffing και από το κ_2 αλλά σε μικρότερο βαθμό (Σχ. 5.63). Το κ_0 επηρεάζει ακόμα λιγότερο την κάμψη του διαγράμματος αλλά δημιουργεί μια ασυμμετρία σε αυτό (Σχ. 5.64).

Όσον αφορά στις αποσβέσεις μ_1 και μ_c βλέπουμε ότι η μ_1 περιορίζει περισσότερο το μέγιστο εύρος της απόκρισης από ότι η μ_c (Σχ. 5.61 και Σχ. 5.62). Με άλλα λόγια, η προσθήκη τριβής Coulomb στο σύστημα δεν βοηθάει στον περιορισμό του φαινομένου του συντονισμού όσο η απόσβεση μ_1 . Το τελευταίο πρέπει να ληφθεί υπόψη στο σχεδιασμό του μονωτήρα.

Αν εστιάσουμε στην ειδική περίπτωση της εξίσωσης κίνησης Duffing & Van der Pol (εξίσωση (5.104)) βλέπουμε ότι το μ_2 εξομαλύνει το διάγραμμα συχνότητας – απόκρισης ακόμα και για μικρές τιμές του. Το τελευταίο έχει ως αποτέλεσμα ότι ακόμα και αν υπάρχει δυσκαμψία τύπου Duffing αρκετά μεγάλη ($k=10$) δεν δημιουργούνται υψηλά άλματα όπως στον απλό ταλαντωτή Duffing (Σχ. 5.34).

Σε αυτό το σημείο, που σχολιάζουμε τη συμπεριφορά του ταλαντωτή με συνδυασμό στοιχείων Duffing και Van der Pol, πρέπει να τονισθεί ότι η απόσβεση μ_2 για παρόμοιες τιμές με το k δεν δημιουργεί κάμψη στο διάγραμμα συχνότητας – απόκρισης. Με άλλα λόγια η κάμψη οφείλεται κυρίως στο k (Σχ. 5.35 και Σχ. 5.36).



Σχ. 6.1

Για την εξίσωση Duffing & Van der Pol προσδιορίσαμε επίσης το γεωμετρικό τόπο της καμπύλης μεγίστων ευρών (Backbone Curve). Επιβεβαιώθηκε από τη σχέση που διέπει την τελευταία καμπύλη ότι η κάμψη του διαγράμματος συχνότητας – απόκρισης οφείλεται κυρίως από το k αφού για $k=0$ η τιμή του σ που εμφανίζεται το μέγιστο εύρος είναι μηδέν ανεξάρτητα από το $\mu_2 \neq 0$. Επίσης, όπως βλέπουμε και από το παραπάνω σχήμα για $k=1$ και $\mu_2=5$ η καμπύλη μεγίστων ευρών είναι τμήμα της αντίστοιχης με $k=1$ και $\mu_2=1$ (Σχ. 5.40 και Σχ. 5.41). Ο κίνδυνος έντονης κάμψης με αστάθειες είναι ορατός καθώς τα φορτία αυξάνονται.

Εάν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση του $\max a_0$ συναρτήσει του μ_2 για κάποιο ταλαντωτή παρατηρούμε ότι το διάγραμμα είναι ανεξάρτητο του k . Επίσης, εκτός από το προηγούμενο βλέπουμε (Σχ. 5.43) ότι η αύξηση της απόσβεσης μ_2 πέρα από ένα όριο επηρεάζει σε μικρό βαθμό το μέγιστο πλάτος. Συνεπώς αν τοποθετούμε όλο και μεγαλύτερη απόσβεση μ_2 προκειμένου να βελτιώσουμε τη συμπεριφορά του μονωτήρα, κάνουμε αντιοικονομικό σχεδιασμό.

Σε αντίθεση με το διάγραμμα συχνότητας – απόκρισης, το διάγραμμα συχνότητας – φάσης επηρεάζεται από την ταυτόχρονη ύπαρξη των μ_0 , μ_2 και k αφού εμφανίζονται όροι που περιέχουν το γινόμενο « $\mu_0 \mu_2 k$ » (σχέση (5.130)). Η αύξηση του μ_2 οδηγεί και στην περίπτωση του διαγράμματος συχνότητας – φάσης σε καμπύλες πιο ευσταθείς. Τα άλματα στη φάση περιορίζονται (Σχ. 5.45).

6.3.2. Δευτερεύοντες Συντονισμοί

Η γενική περίπτωση εξίσωσης κίνησης του μονωτήρα μας εμφανίζει συντονισμούς όταν η συχνότητα διέγερσης Ω παίρνει τιμές :

$$0, \frac{\omega_0}{3}, \frac{\omega_0}{2}, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$$

Οι δευτερεύοντες συντονισμοί που ενδιαφέρουν το μηχανικό είναι οι παρακάτω :

- Υπεραρμονικοί συντονισμοί ($\Omega \approx \omega_0/3$ και $\omega_0/2$)
- Υποαρμονικοί συντονισμοί ($\Omega \approx 2\omega_0$ και $3\omega_0$)

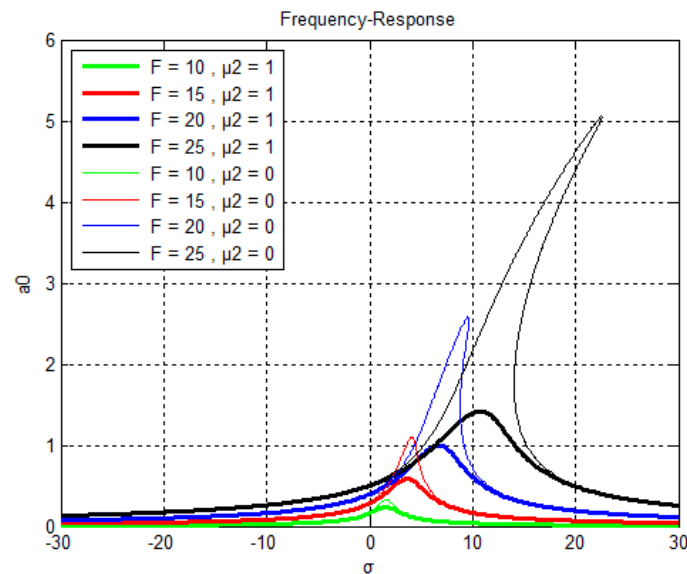
Για τη γενική εξίσωση του μονωτήρα δεν έγινε μελέτη σε αυτές τις περιοχές διότι οι αναλυτικές τεχνικές (μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων και μέθοδος ολοκλήρωσης ευρών και φάσεων) συναντούν εμπόδια διαφορετικής φύσης η καθεμία κατά την εφαρμογή τους κυρίως λόγω της ύπαρξης της συνάρτησης *signum*.

Το πιο κοντινό μοντέλο που περιγράφει τη συμπεριφορά του μονωτήρα μας στις περιοχές συντονισμού είναι η εξίσωση Duffing & Van der Pol. Για την τελευταία εξίσωση μελετάμε τον υπεραρμονικό $\omega_0/3$ και τον υποαρμονικό συντονισμό $3\omega_0$, αλλά δεν αγνοούμε ότι ο μονωτήρας κινδυνεύει από τα φαινόμενα συντονισμού και στις περιοχές $\omega_0/2$ και $2\omega_0$.

- Ο ΥΠΕΡΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ $\omega_0/3$

Προσδιορίσαμε την εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για αυτό το συντονισμό στην περίπτωση που έχουμε το συνδυασμό Duffing και Van der Pol (εξίσωση (5.150)). Αν θεωρήσουμε ότι $\mu_2 = 0$ τότε απλοποιείται η σχέση στην αντίστοιχη γνωστή του Duffing (5.83). Επαληθεύτηκε στο κεφάλαιο 5.3.5 ότι έχουν ίδιες λύσεις ως προς a_0 οι εξισώσεις συχνότητας – απόκρισης που προαναφέραμε.

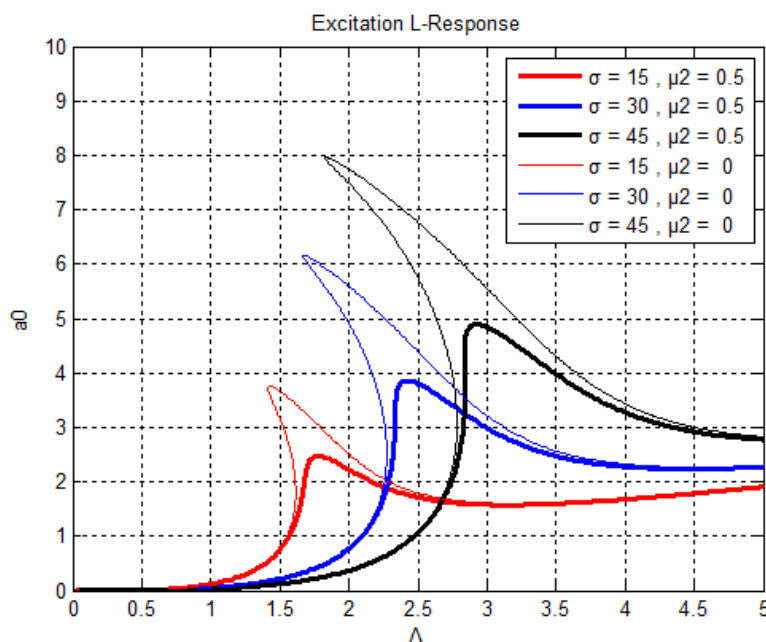
Χαράζοντας τις καμπύλες συχνότητας – απόκρισης για απλά προβλήματα (Σχ. 5.46 και Σχ. 5.47) καταλήγουμε στα επόμενα συμπεράσματα. Αρχικά διαπιστώνουμε ότι η τιμή της μ_2 επηρεάζει την απόκλιση των σημείων μεγίστου εύρους από τη $\sigma = 0$. Όσο μεγαλώνει το μ_2 , το μέγιστο εύρος παρατηρείται πιο κοντά στην κρίσιμη συχνότητα. Επίσης, ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με το αντίστοιχο του κυρίου συντονισμού είναι ότι η καμπύλη μεγίστων ευρών εξαρτάται έντονα και από το k από το μ_2 . Δεν έχει υπολογιστεί αναλυτικός τύπος όπως στην προηγούμενη περίπτωση αλλά η παρατήρηση στηρίζεται στα Σχ. 5.19 και Σχ. 5.46 που απεικονίζουν παρόμοιους ταλαντωτές.



Σχ. 6.2

Πέρα από τα προηγούμενα συμπεράσματα σχετικά με τη συνεισφορά της απόσβεσης μ_2 στην ευσταθέστερη συμπεριφορά του μονωτήρα μας, υπάρχει και άλλο ένα θετικό στοιχείο όταν εισάγεται στο μοντέλο μας. Η πτώση της μέγιστης τιμής του a_0 είναι αρκετά μεγάλη με την παρουσία της ακόμα και με μικρές τιμές. Το τελευταίο είναι ορατό και μέσα από τη σύγκριση των Σχ. 5.22 και Σχ. 5.50.

Αφήνοντας το διάγραμμα συχνότητας – απόκρισης και εστιάζοντας σε αυτό της διέγερσης Λ – απόκρισης, παρατηρούμε ότι με την εισαγωγή της μη γραμμικής απόσβεσης τύπου Van der Pol το φαινόμενο του άλματος (Σχ. 5.25) γίνεται ασθενέστερο. Η βελτίωση της απόκρισης απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.

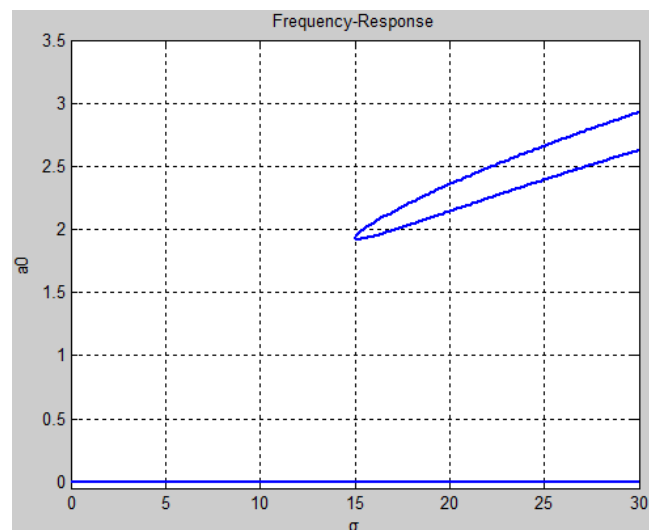


Σχ. 6.3 : Όμοιο με το Σχ. 5.52

- Ο ΥΠΟΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ $3\omega_0$

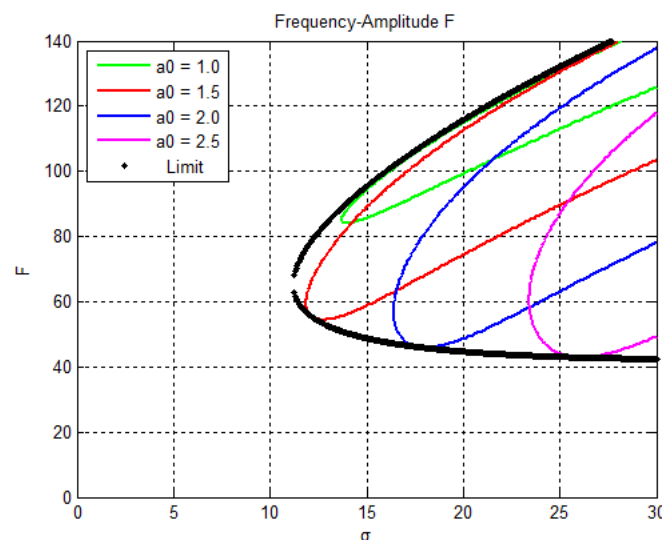
Η εξίσωση συχνότητας – απόκρισης για αυτό το συντονισμό στην περίπτωση που έχουμε την διαφορική εξίσωση Duffing & Van der Pol μορφώθηκε με τη βοήθεια της μεθόδου πολλαπλών χρονικών κλιμάκων. Αν ο όρος μ_2 της μη γραμμικής απόσβεσης του Van der Pol είναι μηδέν τότε η εξίσωση συχνότητας - απόκρισης εκφυλίζεται σε αυτή της ειδικής περίπτωσης Duffing (5.90). Παρόμοια ισχύουν και για την εξίσωση φάσης. Η παραπάνω επαλήθευση έγινε στο κεφάλαιο 5.3.5.

Η χάραξη του διαγράμματος συχνότητας – απόκρισης δεν έχει την ίδια μορφή με τις προηγούμενες περιπτώσεις.



Σχ. 6.4 : Όμοιο με το Σχ. 5.29

Η ύπαρξη της μηδενικής λύσης ($a_0 = 0$) δηλώνει ότι ο συγκεκριμένος συντονισμός πιθανώς να μην εμφανισθεί. Το τελευταίο εξαρτάται από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που επιλύουμε (εξισώσεις κίνησης του μονωτήρα).

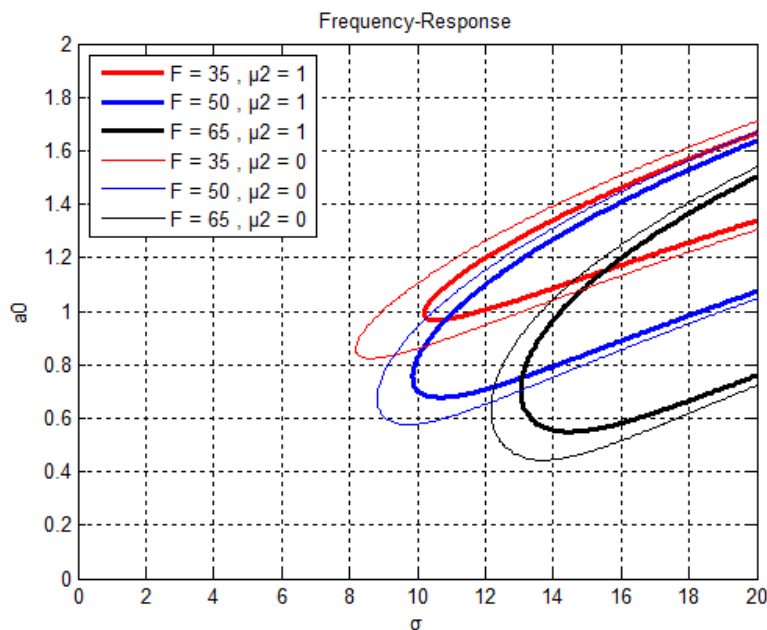


Σχ. 6.5 : Όμοιο με το Σχ. 5.56

Εξετάσαμε τις μη τετριμμένες λύσεις ($a_0 \neq 0$) διότι αυτές ενδιαφέρουν το μελετητή μηχανικό. Οι τελευταίες προσδιορίζονται σε ένα συγκεκριμένο χωρίο του επιπέδου (σ, F) . Η περιβάλλουσα αυτής της περιοχής υπολογίστηκε με αναλυτικό τρόπο ώστε να προσδιοριστεί η ασφαλής περιοχή (σχέση (5.176)). Στο ίδιο σχήμα απεικονίζουμε τις μη τετριμμένες λύσεις και το όριο μέσα στο οποίο βρίσκονται, αξιοποιώντας τη σχέση που προαναφέρθηκε (Σχ. 5.56). Το τελευταίο σχήμα φαίνεται παραπάνω. Η ασφαλής περιοχή βοηθάει το μηχανικό να γνωρίζει σε ποιες τιμές συχνοτήτων και ευρών διέγερσης δεν κινδυνεύει από τον υποαρμονικό συντονισμό.

Αν εστιάσουμε τώρα στην επίδραση του μ_2 στα διαγράμματα συχνότητας – απόκρισης και πλάτους διέγερσης – απόκρισης έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα.

- ✓ Με τη μικρή αύξηση του συντελεστή μ_2 υπάρχει μείωση του πλάτους απόκρισης a_0 αλλά δεν είναι έντονη.
- ✓ Τα φαινόμενα που δημιουργούνται λόγω της δυσκαμψίας του Duffing περιορίζονται όταν αυξήσουμε αρκετά το μη γραμμικό όρο μ_2 .



Σχ. 6.6 : Όμοιο με το Σχ. 5.54

Όπως βλέπουμε και από το παραπάνω σχήμα, για μεγάλα σ το πλάτος a_0 έχει την τάση να αυξάνεται συνεχώς. Το τελευταίο δεν παρατηρείται στο πείραμα. Αυτή η «ασυνέπεια» της μεθόδου με το πείραμα δικαιολογείται από το γεγονός ότι μακριά από το $3\omega_0$ δεν ισχύει η μέθοδος μικρής διαταραχής. Συνεπώς, δεν έχει νόημα η εξέταση του σημείου αυτού από την πλευρά του συντονισμού αλλά από την πλευρά της λύσης για τιμές του Ω μακριά από τις συχνότητες συντονισμού.

Σύγκριση των συντονισμών

Ο υποαρμονικός συντονισμός θεωρείται πιο επικίνδυνος για την αστοχία μιας κατασκευής μηχανικού από ότι ο υπεραρμονικός συντονισμός. Το τελευταίο οφείλεται στους λόγους που ακολουθούν.

Καταρχάς, ο βασικός παράγοντας που επηρεάζει το βαθμό κρισιμότητας ενός συντονισμού είναι το εύρος απόκρισης. Ο υποαρμονικός συντονισμός παράγει μεγάλο εύρος απόκρισης που όμως είναι συνήθως μικρότερο από αυτό του κύριου συντονισμού για το ίδιο μέγεθος εξωτερικής διέγερσης. Επίσης, το εύρος απόκρισης του υποαρμονικού συντονισμού είναι κυρίως μεγαλύτερο από ότι το αντίστοιχο του υπεραρμονικού συντονισμού.

Ένας ακόμα σημαντικός λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι ο υποαρμονικός συντονισμός εμφανίζεται σε μια συχνότητα πολύ μεγαλύτερη από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Θα περίμενε ο μελετητής ότι αυτή η περιοχή είναι ασφαλής (μικρό συντελεστή μεγέθυνσης D), κάτι το οποίο στα μη γραμμικά συστήματα δεν ισχύει λόγω της εμφάνισης του υποαρμονικού συντονισμού.

Κατά το σχεδιασμό των κατασκευών πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το προηγούμενο φαινόμενο. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στα συστήματα σεισμικής μόνωσης που με την μετατόπιση της θεμελιώδους ιδιοπεριόδου επιχειρούν την απομείωση των σεισμικών δυνάμεων. Εάν με αυτή τη διαδικασία «πέσουν» σε μια περιοχή συντονισμού κινδυνεύουν να μην τηρούν τη βασική αρχή λειτουργίας τους.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι ο υποαρμονικός συντονισμός δεν εμφανίζεται πάντα. Εξαρτάται η παρουσία του από την εξωτερική διέγερση και την απόσβεση του συστήματος. Για υψηλά εύρη διέγερσης και χαμηλές αποσβέσεις συνήθως δεν παρατηρείται ο συντονισμός. Αν εμφανιστεί όμως, διαφέρει από τους υπόλοιπους (κύριο και υπεραρμονικό) στο είδος και το ύψος του «άλματος» του εύρους στην περιοχή του υποαρμονικού συντονισμού.

Για παράδειγμα, κάποια τμήματα ενός αεροπλάνου μπορεί να διεγερθούν βίαια από τις μηχανές του με συχνότητες πολύ μεγαλύτερες από την ιδιοσυχνότητα τους. Ένα τέτοιο περιστατικό έχει λάβει χώρα σε ένα αεροπλάνο με αποτέλεσμα να εμφανιστούν δευτερεύοντες συντονισμοί υψηλού εύρους ταλάντωσης. Οι υψηλές παραμορφώσεις οδήγησαν στην αστοχία τμημάτων του αεροπλάνου και τελικά στην πτώση του. [8, σελ 181]

- ΟΙ ΥΠΟΛΟΙΠΟΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΙ

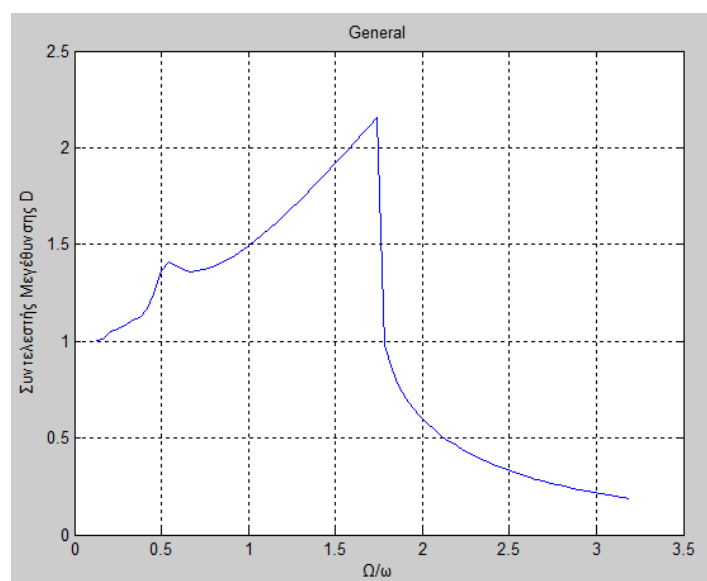
Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, η εξίσωση κίνησης του μονωτήρας μας περιλαμβάνει και ένα μη γραμμικό όρο της μορφής « $\kappa_2 x^2$ ». Ο τελευταίος ευθύνεται για την παρουσία και άλλων δευτερευόντων συντονισμών ($\omega_0/2, 2\omega_0$). Δεν μελετήθηκαν αναλυτικά στην παρούσα εργασία οι τελευταίοι, αλλά θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά το σχεδιασμό.

Για να υπάρχει μια ποιοτική εικόνα των προηγούμενων φαινομένων μπορεί να θεωρηθεί ότι οι υπεραρμονικοί συντονισμοί ($\omega_0/3, \omega_0/2$) εντάσσονται στην ίδια κατηγορία με παρόμοια συμπεριφορά αλλά διαφορετικά αίτια δημιουργίας τους. Αντίστοιχα μπορούν να θεωρηθούν τα ίδια για τους υποαρμονικούς συντονισμούς ($2\omega_0$ και $3\omega_0$). Συνεπώς, μεγάλη προσοχή πρέπει να δίνεται στον υποαρμονικό συντονισμό $2\omega_0$ σε σχέση με τον υπεραρμονικό $\omega_0/2$.

6.4. Σύγκριση με τα αριθμητικά αποτελέσματα

- Εξίσωση Duffing

Θεωρούμε εκείνα τα γεωμετρικά στοιχεία της καμπύλης της παραβολής ώστε η εξίσωση κίνησης του μονωτήρα μας να περιγράφεται από την εξίσωση Duffing. Τότε το διάγραμμα συντελεστή μεγέθυνσης – αδιάστατης συχνότητας Ω/ω_0 έχει την παρακάτω μορφή, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5.2 :



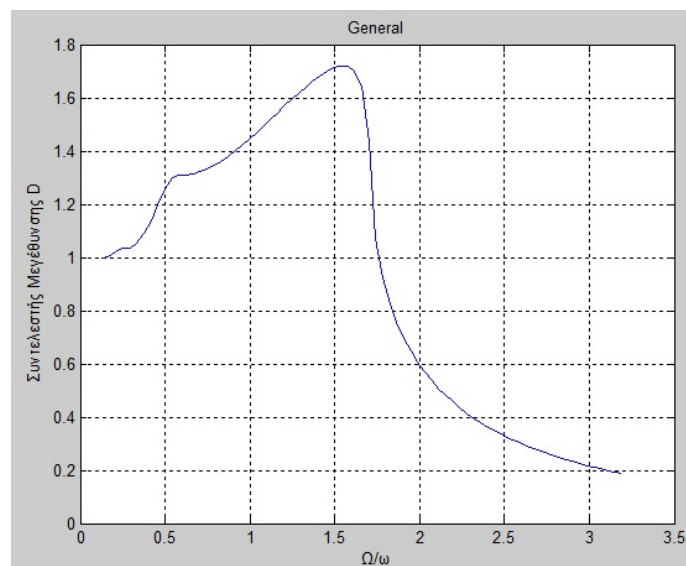
Σχ. 6.7 : Όμοιο με το Σχ. 5.3

Παρατηρούμε :

1. τη μεγάλη κάμψη που υπάρχει στον κύριο συντονισμό για $\Omega/\omega_0=1$. Αυτή οφείλεται στο μεγάλο όρο δυσκαμψίας τύπου Duffing. Αυτή η κάμψη έχει σαν αποτέλεσμα την απομάκρυνση του σημείου μεγίστου συντελεστή μεγέθυνσης αρκετά μακριά από την περιοχή του ω_0 .
2. το άλμα του συντελεστή μεγέθυνσης λόγω των σημείων αστάθειας του κύριου συντονισμού. Με την αριθμητική επίλυση δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τα σημεία που έχουμε πολλαπλές λύσεις όπως με τη μέθοδο διαταραχών.
3. Την εμφάνιση του υπεραρμονικού συντονισμού $\omega_0/3$. Η μέγιστη τιμή του συντελεστή μεγέθυνσης μετατοπίζεται και αυτή σε σχέση με την αναμενόμενη συχνότητα συντονισμού λόγω της μη γραμμικότητας του όρου Duffing
4. Την απουσία του υποαρμονικού συντονισμού. Η αριθμητική μέθοδος δεν εμφανίζει τον πιθανό κίνδυνο στις συχνότητες γύρω από το $3\omega_0$. Το τελευταίο μπορεί να οφείλεται στα μηχανικά χαρακτηριστικά που διαθέτει ο μονωτήρας μας, αφού για κάποιες τιμές των αποσβέσεων και του εύρους διέγερσης δεν εμφανίζεται ο συγκεκριμένος συντονισμός.

- Εξίσωση Duffing & Van der Pol

Σε αυτή την περίπτωση, η αριθμητική επίλυση μας οδηγεί στο παρακάτω διάγραμμα. Οι παρατηρήσεις που καταγράψαμε στην ειδική περίπτωση της εξίσωσης Duffing ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση, αφού σχετίζονται με την επιρροή της δυσκαμψίας k του Duffing στη συμπεριφορά του μονωτήρα μας.



Σχ. 6.8 : Όμοιο με το Σχ. 5.6

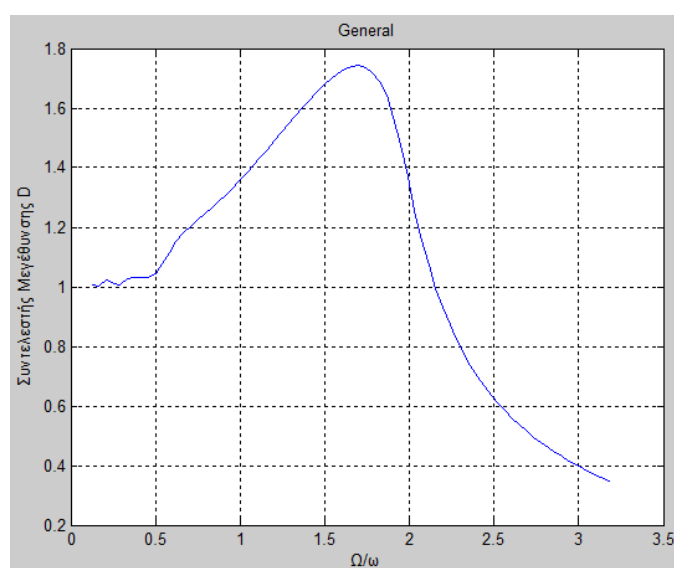
Οι διαφορές μεταξύ των δύο περιπτώσεων οφείλονται στην ύπαρξη της απόσβεσης τύπου Van der Pol μ_2 .

Με την αύξηση της απόσβεσης μ_2 παρατηρούμε στην απόκριση του μονωτήρα ότι :

1. Υπάρχει πτώση της μέγιστης τιμής του πλάτους για κάθε συντονισμό (υπεραρμονικό και κύριο) που εμφανίζεται κατά την αριθμητική επίλυση.
2. Δεν εμφανίζεται σημείο με έντονη αλλαγή της κλίσης. Με άλλα λόγια υπάρχει μια εξομάλυνση του διαγράμματος συντελεστή μεγέθυνσης – αδιάστατης συχνότητας.
3. Οι αστάθειες που περιμέναμε να εμφανίζονται λόγω της δυσκαμψίας Duffing περιορίζονται αισθητά. Αρα βελτιώνεται η συμπεριφορά του μονωτήρα.

- Γενική περίπτωση εξίσωσης

Με την παρουσία όλων των χαρακτηριστικών του μονωτήρα μας παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν έντονες διαφορές από το μοντέλο Duffing και Van der Pol. Οι δευτερεύοντες συντονισμοί έχουν εξασθενήσει αισθητά. Ο μονωτήρας μας κινδυνεύει κυρίως από τον κύριο συντονισμό που δεν πραγματοποιείται πολύ κοντά στην περιοχή του ω_0 λόγω των δυσκαμψιών κ_2 και κ_3 . Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην πιθανή παρουσία υποαρμονικών συντονισμών $2\omega_0$ και $3\omega_0$ που δεν αναδεικνύονται με την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης κίνησης ενώ αποτελούν επικίνδυνες περιοχές σχεδιασμού.



Σχ. 6.9 : Όμοιο με το Σχ. 5.8

6.5. Προτάσεις για μετέπειτα έρευνα

Μετά την κατανόηση των γραμμικών δυναμικών συστημάτων και την εισαγωγή των αρχών τους στο σχεδιασμό των κατασκευών, η έρευνα στράφηκε προς τα μη γραμμικά συστήματα. Ο επιστημονικός χώρος που εξετάζει τα μη γραμμικά φαινόμενα είναι ευρύτερος από το αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής, αφού ο μονωτήρας που εξετάζουμε αποτελεί μια εφαρμογή με συγκεκριμένους τύπους μη γραμμικών όρων (Duffing & Van der Pol).

Οι κατευθυντήριες προτάσεις για μελλοντικά αντικείμενα μελέτης εστιάζονται τόσο σε θέματα ανάλυσης συγκεκριμένων κατασκευών με μη γραμμικότητες που δεν εξετάστηκαν στην εργασία όσο και σε θέματα σχεδιασμού κατασκευών που πιθανώς να κινδυνεύουν από δευτερεύοντες συντονισμούς. Πιο συγκεκριμένα, προτείνονται τα παρακάτω:

- ✓ Μελέτη της συμπεριφοράς του μονωτήρα στους δευτερεύοντες συντονισμούς μέσα από τη γενική εξίσωση κίνησης που περιλαμβάνει τη συνάρτηση *signum*. Οι αναλυτικές μέθοδοι που εφαρμόστηκαν δεν δίνουν προσεγγιστική λύση για τις προηγούμενες περιπτώσεις. Οι περιοχές των συντονισμών όμως πρέπει να εξετασθούν προκειμένου να αποφευχθούν πιθανές αστοχίες.
- ✓ Εισαγωγή μη αρμονικών φορτίων στο μοντέλο μας. Η σεισμική διέγερση πρέπει να εισαχθεί στο μοντέλο διότι αυτή είναι η «πραγματική» φόρτιση της εκάστοτε κατασκευής που εξετάζουμε. Η αντιμετώπιση της σεισμικής διέγερσης ως «άθροισμα» αρμονικών φορτίσεων δεν ισχύει στα μη γραμμικά συστήματα με αποτέλεσμα να αγνοούνται τόσο η απόκριση του συστήματος όσο και η συμπεριφορά σε νέες κρίσιμες συχνότητες συντονισμού.
- ✓ Προσδιορισμός αριθμητικών μεθόδων που να αναδεικνύουν τα φαινόμενα που μελετήθηκαν με αναλυτικό τρόπο. Οι αριθμητικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται έτσι ώστε να επιλυθούν σύνθετα προβλήματα μηχανικού όπως η δυναμική συμπεριφορά ενός πολυβάθμιου μη γραμμικού συστήματος. Η ανάλυση των κατασκευών με αυτό τον τρόπο θα οδηγήσει σε ασφαλέστερο σχεδιασμό.
- ✓ Μετατροπή των διαγραμμάτων συχνότητας – απόκρισης σε φάσματα απόκρισης που να περιγράφουν συστήματα του πολιτικού μηχανικού. Η μόρφωση ενός φάσματος σχεδιασμού για μη γραμμικά συστήματα πιθανόν να αναδείκνυε κινδύνους των κατασκευών που αγνοούνται με τη γραμμική θεώρησή τους.

Βιβλιογραφία

- [1] J. David Logan (2006) , *“Applied Mathematics”* , Wiley , Third Edition
- [2] Ali H. Nayfeh (1993) , *“Introduction to perturbation techniques”* , Wiley
- [3] Κατσικαδέλης Ι. (2002) , *“Δυναμική των κατασκευών”* , Τόμος Ι , Συμμετρία
- [4] Ivana Kovacic and Michael J. Brennan (2011) , *“The Duffing Equation Nonlinear Oscillators and their behaviour”* , Wiley
- [5] G. Duffing (1918) , *“Erzwungene schwingungen bei veranderlicher eigenfrequenz und ihre technische bedeutung”*, Vieweg & Sohn , Braunschweig
Series: Sammlung Vieweg No 41/42
(Forced oscillations with variable natural frequency and their technical significance)
- [6] Σοφιανός Γ. και Τυχόπουλος Ε. (2005) , *“Αριθμητική ανάλυση”* , Αθ. Σταμούλης
- [7] Νατσιάβας Σ. (2000) , *“Ταλαντώσεις δυναμικών συστημάτων με μη γραμμικά χαρακτηριστικά”*, Εκδόσεις Ζήτη
- [8] Ali H. Nayfeh and Dean T. Mook (1995) , *“Nonlinear Oscillations”* , Wiley
- [9] Verhulst F. (1996) , *“Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems”* , Springer , Second Edition
- [10] G. Schmidt and A. Tondl (2009) , *“Non-Linear Vibrations”* , Cambridge University Press
- [11] Sanders J.A. and Verhulst F. and Murdock J. (2007) , *“Averaging methods in nonlinear dynamical systems”* , Springer , Second Edition
- [12] Yu. A. Mitropolskii and Nguyen Van Dao (1997) , *“Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations”* , Springer Science + Business Media
- [13] Strogatz S. (1994) , *“Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to physics , biology , chemistry and engineering”* , Studies in Nonlinearity , Perseus Books Publishing
- [14] Chopra A. K. (2007) , *“Dynamics of Structures”* , Prentice-Hall , Upper Saddle River , New Jersey
- [15] Humar J. L. (1990) , *“Dynamics of Structures”* , Prentice Hall
- [16] Verhulst F. (2010) , *“Methods and Applications of Singular Perturbations - Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics”* , Springer

- [17] Bolotin V. V. (1964) , *“The dynamic stability of elastic systems”* , Holden-Day
- [18] Lanczos C. (1970) , *“The Variational Principles of Mechanics”* , University of Toronto Press , Fourth Edition
- [19] Eckhaus W. (1979) , *“Asymptotic Analysis of Singular Perturbations”* , Studies in Mathematics and its applications Vol 9 , North-Holland Publishing
- [20] M. Younis (2011) , *“MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics”* , Springer
- [21] Dwivedy S.K. , *“Nonlinear Vibrations”* , Online Course NPTEL
- [22] Κωμοδρόμος Π. (2009) , *“Ανάλυση Κατασκευών”* , Παπασωτηρίου , 2^η έκδοση
- [23] Ταβουλάρη Δ. (2012) , *“Μέθοδοι διαταραχών και εφαρμογές αυτών”* , Μεταπτυχιακή εργασία , Τμήμα μαθηματικών Πάτρας
- [24] Χαρδαλούπας Γ. (2012) , *“Σύγκριση δυναμικής απόκρισης πολυώροφου κτιρίου με και χωρίς σεισμικό αρμό – Σεισμική μόνωση”* , Διπλωματική εργασία , Πολιτικών μηχανικών Ε.Μ.Π. , Τομέας Δομοστατικής
- [25] R. Ivan Skinner and William H. Robinson and Graeme H. McVerry (1993) , *“An Introduction to Seismic Isolation”* , Wiley
- [26] Κεφαλά Γ. (2007) , *“Σεισμική μόνωση εκθεμάτων μουσείων”* , Διπλωματική Εργασία , Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π. , Τομέας Δομοστατικής
- [27] Alfredo Medio and Marji Lines (2001) , *“Nonlinear Dynamics : A Primer”* , Cambridge University Press
- [28] A. H. Nayfeh and B. Balachandran (1995) , *“Applied nonlinear dynamics”* , Wiley
- [29] Kryloff N. and Bogoliuboff N. (1947) , *“Introduction to non-linear mechanics”* , Princeton University Press
- [30] Kachapi S. and Ganji (2014) , *“Dynamics and Vibrations”* , Springer
- [31] Lax P. and Terrell M. (2014) , *“Calculus with Applications”* , Springer , 2nd edition
- [32] Grebenikov E. and Mitropolsky Y. and Ryabov Y. (2004) , *“Asymptotic methods in resonance analytical dynamics”* , Chapman & hall/CRC , Stability and Control : Theory , Methods and Applications , Volume 21
- [33] Μαραγκός Χαρίλαος (2005) , Ημερίδα *“Τεχνικό λογισμικό ανάλυσης και διαστασιολόγησης κατασκευών”* , Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ.
- [34] Σπυράκος Κ, (2004) , *“Ενίσχυση κατασκευών για σεισμικά φορτία”* , ΤΕΕ

Παράρτημα

ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN – ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots, \quad |x| < 1 \quad (7.1)$$

$$\sqrt{x^2+1} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow 1 - \sqrt{x^2+1} \approx -\frac{1}{2}x^2 \quad (7.2)$$

Με τη χρήση της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ έχουμε :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1 - (1 - \sqrt{x^2+1})} \approx \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}x^2\right)} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (7.3)$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$\sin \phi \cdot \cos \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi \quad (7.4)$$

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\phi \quad (7.5)$$

$$\sin^2 \phi \cdot \cos^2 \phi = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\phi \quad (7.6)$$

$$\sin \phi \cdot \cos^3 \phi = \frac{1}{4} \sin 2\phi + \frac{1}{8} \sin 4\phi \quad (7.7)$$

$$\cos^4 \phi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\phi + \frac{1}{8} \cos 4\phi \quad (7.8)$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = 0.5 \exp(i\phi) + cc \quad (7.9)$$

$$z + cc = z + \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (7.10)$$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ DUFFING ΜΕ AVERAGING METHOD

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\bar{\alpha}^3 \cos^3(s + \bar{\beta}) \cdot \sin(s + \bar{\beta}) \quad \bar{\alpha}^2 \cos^4(s + \bar{\beta}) \right]^T ds \quad (7.11)$$

Αν $\phi = s + \bar{\beta}$ (7.12) τότε η σχέση (7.11) μετασχηματίζεται :

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_{\bar{\beta}}^{T+\bar{\beta}} \left[\bar{\alpha}^3 \cos^3 \phi \cdot \sin \phi \quad \bar{\alpha}^2 \cos^4 \phi \right]^T d\phi \quad (7.13)$$

Ισχύουν οι τριγωνομετρικές ταυτότητες (7.7) και (7.8) :

Συνεπώς,

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_{\bar{\beta}}^{T+\bar{\beta}} \left[\frac{1}{4} \bar{\alpha}^3 \sin 2\phi + \frac{1}{8} \bar{\alpha}^3 \sin 4\phi \quad \frac{3}{8} \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 \cos 2\phi + \frac{1}{8} \bar{\alpha}^2 \cos 4\phi \right]^T d\phi \quad (7.14)$$

Η περίοδος T της συνάρτησης μέσα στο ολοκλήρωμα είναι $T = \pi$.

$$\bar{f}(z) = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\pi} \int_{\bar{\beta}}^{\pi+\bar{\beta}} \left(\frac{1}{4} \bar{\alpha}^3 \sin 2\phi + \frac{1}{8} \bar{\alpha}^3 \sin 4\phi \right) d\phi \\ \frac{1}{\pi} \int_{\bar{\beta}}^{\pi+\bar{\beta}} \left(\frac{3}{8} \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 \cos 2\phi + \frac{1}{8} \bar{\alpha}^2 \cos 4\phi \right) d\phi \end{array} \right] \quad (7.15)$$

$$\bar{f}(z) = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{8\pi} \bar{\alpha}^3 \int_{\bar{\beta}}^{\pi+\bar{\beta}} (2 \sin 2\phi + \sin 4\phi) d\phi \\ \frac{3}{8} \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{8\pi} \bar{\alpha}^2 \int_{\bar{\beta}}^{\pi+\bar{\beta}} (4 \cos 2\phi + \cos 4\phi) d\phi \end{array} \right] \quad (7.16)$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα έχουμε:

$$\int_{\bar{\beta}}^{\pi+\bar{\beta}} (2 \sin 2\phi + \sin 4\phi) d\phi = 0 \quad (7.17) \quad \text{και} \quad \int_{\bar{\beta}}^{\pi+\bar{\beta}} (4 \cos 2\phi + \cos 4\phi) d\phi = 0 \quad (7.18)$$

Δηλαδή:

$$\bar{f}(z) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{3}{8} \bar{\alpha}^2 \end{array} \right] \quad (7.19)$$

$$f(x,t) = \begin{bmatrix} \alpha \sin^2(t+\beta) - \alpha^3 \sin^2(t+\beta) \cos^2(t+\beta) \\ \sin(t+\beta) \cos(t+\beta) - \alpha^2 \cos^3(t+\beta) \sin(t+\beta) \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z,s) ds \quad (7.21)$$

Αν $\phi = s + \bar{\beta}$ (7.22) τότε η σχέση (7.21) μετασχηματίζεται:

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_{\bar{\beta}}^{T+\bar{\beta}} f(z,\phi) d\phi \quad (7.23)$$

Με $f(z,\phi) = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \sin^2 \phi - \bar{\alpha}^3 \sin^2 \phi \cdot \cos^2 \phi \\ \sin \phi \cdot \cos \phi - \bar{\alpha}^2 \cos^3 \phi \cdot \sin \phi \end{bmatrix} \quad (7.24)$

Χρησιμοποιούμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$f(z,\phi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{\alpha} - \frac{1}{2} \bar{\alpha} \cos 2\phi - \frac{1}{8} \bar{\alpha}^3 + \frac{1}{8} \bar{\alpha}^3 \cos 4\phi \\ \frac{1}{2} \sin 2\phi - \frac{1}{4} \bar{\alpha}^2 \sin 2\phi - \frac{1}{8} \bar{\alpha}^2 \sin 4\phi \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

Για περίοδο $T = \pi$ όπως φαίνεται από τελευταία σχέση έχουμε:

$$\bar{f}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{\alpha} - \frac{1}{8} \bar{\alpha}^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Αυτό συμβαίνει διότι:

$$\int_{\bar{\beta}}^{\pi+\bar{\beta}} \left(-\frac{1}{2} \bar{\alpha} \cos 2\phi + \frac{1}{8} \bar{\alpha}^3 \cos 4\phi \right) d\phi = 0 \quad (7.27)$$

$$\int_{\bar{\beta}}^{\pi+\bar{\beta}} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \bar{\alpha}^2 \right) \sin 2\phi - \frac{1}{8} \bar{\alpha}^2 \sin 4\phi \right] d\phi = 0 \quad (7.28)$$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ DUFFING ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

(ΜΕ MULTIPLE TIME SCALES METHOD & ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ MAPLE)

Εξίσωση κίνησης του Duffing με απόσβεση:

$$\ddot{u} + 2\epsilon\mu\dot{u} + u + \epsilon u^3 = 0 \quad (7.29)$$

Αναζητούμε προσεγγιστική λύση της μορφής:

$$u = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) \quad (7.30)$$

Για τις παραγώγους ισχύουν τα παρακάτω:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 \quad (7.31)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 \quad (7.32)$$

Υστερα από αντικατάσταση των (7.30) , (7.31) και (7.32) στη (7.29):

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \\ D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - u_0^3 \end{array} \right\} \quad (7.33)$$

Το δεξί μέλος (*RH*) της δεύτερης μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$RH = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - u_0^3 \quad (7.34)$$

ενώ η λύση της πρώτης διαφορικής εξίσωσης έχει τη μορφή:

$$u_0 = \alpha(T_1) \cdot \cos(T_0 + \varphi(T_1)) \quad (7.35)$$

Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Maple:

> $e_0 := \exp(I \cdot T_0)$

$$e_0 := e^{IT_0}$$

> $u_0 := A(T_1) \cdot e_0 + \text{conjugate}(A(T_1) \cdot e_0)$ assuming $T_0 :: real, T_1 :: real$

$$u_0 := A(T_1) e^{IT_0} + \frac{\overline{A(T_1)}}{e^{-IT_0}}$$

> $u_0 := \text{subs}(\text{conjugate}(A(T_1)) = A_-(T_1), u_0)$

$$u_0 := A(T_1) e^{IT_0} + \frac{A_-(T_1)}{e^{IT_0}}$$

> $D_0 := f \rightarrow \text{diff}(f, T_0)$ assuming $T_0 :: \text{real}$

$$D_0 := f \rightarrow \frac{\partial}{\partial T_0} f$$

> $D_1 := f \rightarrow \text{diff}(f, T_1)$ assuming $T_1 :: \text{real}$

$$D_1 := f \rightarrow \frac{\partial}{\partial T_1} f$$

>

>

> $RH := -2 \cdot D_0(D_1(u_0)) - 2 \cdot \mu \cdot D_0(u_0) - u_0^3 :$

>

> $RH := \text{expand}(RH)$

$$RH := -2I \left(\frac{d}{dT_1} A(T_1) \right) e^{IT_0} + \frac{2I \left(\frac{d}{dT_1} A_-(T_1) \right)}{e^{IT_0}} - 2I\mu A(T_1) e^{IT_0} + \frac{2I\mu A_-(T_1)}{e^{IT_0}} \\ - A(T_1)^3 \left(e^{IT_0} \right)^3 - 3A(T_1)^2 e^{IT_0} A_-(T_1) - \frac{3A(T_1) A_-(T_1)^2}{e^{IT_0}} - \frac{A_-(T_1)^3}{\left(e^{IT_0} \right)^3}$$

> $RH := \text{collect}(RH, e_0)$

$$RH := -A(T_1)^3 \left(e^{IT_0} \right)^3 + \left(-2I\mu A(T_1) - 3A(T_1)^2 A_-(T_1) - 2I \left(\frac{d}{dT_1} A(T_1) \right) \right) e^{IT_0} \\ + \frac{2I\mu A_-(T_1) - 3A(T_1) A_-(T_1)^2 + 2I \left(\frac{d}{dT_1} A_-(T_1) \right)}{e^{IT_0}} - \frac{A_-(T_1)^3}{\left(e^{IT_0} \right)^3}$$

>

> $cd := \text{coeff}(RH, e_0, 1)$

$$cd := -2I\mu A(T_1) - 3A(T_1)^2 A_-(T_1) - 2I \left(\frac{d}{dT_1} A(T_1) \right)$$

> $A_{\text{exp}} := 0.5 \cdot a(T_1) \cdot \exp(I \cdot \text{phi}(T_1)) :$

> $A_{\text{exp}} := 0.5 \cdot a(T_1) \cdot \exp(-I \cdot \text{phi}(T_1)) :$

> $cd := \text{subs}(\{A(T_1) = A_{\text{exp}}, A_-(T_1) = A_{\text{exp}}\}, cd) :$

> $cd := \text{expand}(cd)$

$$cd := -1.0I\mu a(T_1) e^{I\phi(T_1)} - 0.375 a(T_1)^3 e^{I\phi(T_1)} - 1.0I \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) e^{I\phi(T_1)} \\ + 1.0 a(T_1) \left(\frac{d}{dT_1} \phi(T_1) \right) e^{I\phi(T_1)}$$

> $cd := cd \cdot \exp(-I \cdot \text{phi}(T_1)) :$

>

> $cd := \text{simplify}(cd)$

$$cd := -1.0I\mu a(T_1) - 0.375 a(T_1)^3 - 1.0I \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) + 1.0 a(T_1) \left(\frac{d}{dT_1} \varphi(T_1) \right)$$

>

> $c1 := \text{simplify}(\text{Re}(cd) = 0)$ assuming $T_1 :: \text{real}$, $a(T_1) :: \text{real}$, $\varphi(T_1) :: \text{real}$, $k :: \text{real}$, $\mu :: \text{real}$, $\text{diff}(a(T_1), T_1) :: \text{real}$, $\text{diff}(\varphi(T_1), T_1) :: \text{real}$, $\sigma :: \text{real}$, $f :: \text{real}$

$$c1 := -0.375 a(T_1)^3 + 1.0 a(T_1) \left(\frac{d}{dT_1} \varphi(T_1) \right) = 0$$

> $c2 := \text{simplify}(\text{Im}(cd) = 0)$ assuming $T_1 :: \text{real}$, $a(T_1) :: \text{real}$, $\varphi(T_1) :: \text{real}$, $k :: \text{real}$, $\mu :: \text{real}$, $\text{diff}(a(T_1), T_1) :: \text{real}$, $\text{diff}(\varphi(T_1), T_1) :: \text{real}$, $\sigma :: \text{real}$, $f :: \text{real}$

$$c2 := -1.0\mu a(T_1) - 1.0 \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) = 0$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο πολλαπλών χρονικών κλιμάκων, καταλήξαμε στις δύο παραπάνω συνθήκες διαφορικές εξισώσεις. Επιλύουμε το σύστημα τους:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dT_1} = -\mu\alpha \\ \frac{d\varphi}{dT_1} = \frac{3}{8}\alpha^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_0 e^{-\mu T_1} \\ \frac{d\varphi}{dT_1} = \frac{3}{8}\alpha_0^2 \cdot e^{-2\mu T_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_0 e^{-\mu T_1} \\ \varphi = -\frac{3}{16\mu}\alpha_0^2 (e^{-2\mu T_1} + \varphi_0) \end{array} \right\} \quad (7.36)$$

Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζουμε την προσεγγιστική λύση της εξίσωσης (7.29):

$$u_0 = \alpha_0 e^{-\mu T_1} \cdot \cos \left(T_0 - \frac{3}{16\mu}\alpha_0^2 (e^{-2\mu T_1} + \varphi_0) \right) \quad (7.37)$$

Αντικαθιστώντας και τη χρονική κλίμακα $T_1 = \varepsilon t$:

$$u(t) = \alpha_0 e^{-\varepsilon\mu t} \cdot \cos \left(t - \frac{3}{16\mu}\alpha_0^2 (e^{-2\varepsilon\mu t} + \varphi_0) \right) \quad (7.38)$$

Αν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος μας είναι $u_0 > 0$ και $v_0 = 0$ τότε:

$$u(t) = u_0 e^{-\varepsilon\mu\omega_0 t} \cdot \cos \left(\omega_0 t + \frac{3u_0^2}{16\mu U^2} (1 - e^{-2\varepsilon\mu\omega_0 t}) \right) \quad (7.39)$$