ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική εργασία του Γιόγιακα Σωτήριου

Επιβλέπων:Καρανάσιος Σωτήριος(Καθηγητής ΕΜΠ)

Αθήνα,Οκτώμβριος 2014

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ.Σωτήρη Καρανάσιο, για την καθοδήγηση του και την πολύτιμη συμβολή του σε κάθε φάση της δημιουργίας της. Θα πρέπει παράλληλα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής Καρανάσιο Σωτήρη, Καθηγητή, τον κ. Πολυράκη Ιωννη, Καθηγητή και τον κ. Ψαρράκο Παναγιώτη, Αναπληρωτή Καθηγητή για τις υποδείξεις και παρατηρήσεις τους στη διάρκεια εκπόνησης της παρούσης εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για την συμπαράσταση τους σε όλη τη διάρκεια των προπτυχιακών σπουδών μου. Τέλος θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου, που όλα αυτα τα χρόνια μου συμπαραστέκονται ηθικά και οικονομικά και διαμορφώνουν γύρω μου ένα άνετο περιβάλλον, μέσα στο οποίο μπορώ να εργαστώ και να επεκτείνω τις γνώσεις μου.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η έννοια ενός γραμμικού φραγμένου τελεστή σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα είναι γενίκευση της γραμμικής συνάρτησης σε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.Παραδείγματα γνωστών τελεστών είναι οι τελεστές πεπερασμένης τάξης,οι ολοκληρωτικοί και οι διαφορικοί τελεστές .

Στόχος αυτής της εργασίας είναι η μελέτη αντιμεταθετικών οικογενειών τελεστών πρώτης τάξης σε διαχωρίσιμους χώρους *Hilbert*.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο και αναφέρουμε τις ιδιότητες του. Στη συνέχεια μελετάμε τους διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο και τους διαχωρίζουμε από τους χώρους με νόρμα.Επίσης σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε τους χώρους *Hilbert* και δίνουμε τους ορισμούς για την ορθή προβολή και το ορθογώνιο συμπλήρωμα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζουμε τους φραγμένους τελεστές καθώς και τους χώρους στους οποίους βρίσκονται οι τελεστές αυτοί. Στη συνέχεια αναλύουμε τις ημιαντιδιγραμμικες μορφές και ορίζουμε τους συζυγείς, φυσιολογικούς,αυτοσυζυγείς και αντιστρέψιμους τελεστές. Επίσης δίνουμε τη μορφή για τους πίνακες των τελεστών. Προς το τέλος του κεφαλαίου ορίζουμε τις προβολές και το φάσμα του τελεστή.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύουμε τους συμπαγείς τελεστές. Ορίζουμε τους τελεστές πεπερασμένης τάξης που θα χρησιμοποιήσουμε στο τέταρτο κεφάλαιο. Στη συνέχεια αναλύουμε και αποδεικνύουμε τις ιδιότητες των αυτοσυζυγών και συμπαγών τελεστών.
Τέλος αναπτύσουμε τη φασματική θεωρία των συμπαγών τελεστών και στη συνέχεια, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τα φασματικά θεωρήματα στη 1η και στη 2η μορφή.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο ορίζουμε τις τοπολογίες του $B(X)$, όπου X χώρος *Banach*. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε μη αυτοσυζυγείς άλγεβρες τελεστών πάνω σε ένα χώρο *Hillbert* θεωρώντας ειδικούς τύπους τέτοιων αλγεβρών και συγκεκριμένα άλγεβρες που ορίζονται από αντιμεταθετικές οικογένειες τελεστών πρώτης τάξης. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την άλγεβρα των γραμμικών και φραγμένων τελεστών πάνω στον l_2 η οποία έχει ένα ειδικό σύνολο διανυσμάτων του l_2, ως ιδιοδιανύσματα. Αποδεικνύουμε ότι αυτή η άλγεβρα είναι μια μεγιστική υπάλγεβρα του $B(l_2)$, η οποία ορίζεται από μια αντιμεταθετική οικογένεια τελεστών πρώτης τάξης και είναι τοπολογικά ισόμορφη με τον χώρο *Hilbert* l_2. Χαρακτηρίζουμε τέλος εκείνους τους τελεστες στην άλγεβρα αυτή που έχουν απλά ιδιοδιανύσματα και περιγράφουμε τους συμπαγείς τελεστές στην άλγεβρα αυτή ορίζοντας μια νέα κλάση συμπαγών τελεστών, που αν και έχουν πλήρες συστημα ιδιοδιανυσμάτων, δεν επιδέχονται φασματική σύνθεση.

1 Χώροι Hilbert

1.1 Διανυσματικοι χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός. 1.1.1 Έστω V ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος.
Εσωτερικό γινομένο στον V ορίζουμε μια απεικόνιση $<,>: V \times V \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y, z \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν :

$i) < x + y, z >=< x, z > + < y, z >$
$ii) < \lambda x, y >= \lambda < x, y >$
$iii) < x, y >= \overline{< y, x >}$
$iv) < x, x >\geq 0$ και αν $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0$

Ένας διανυσματικός χώρος V μαζί με ένα εσωτερικό γινόμενο $<,>$ λέγεται **διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.**

Για κάθε $x, y, z \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ εύκολα μπορούν να αποδειχθούν οι ιδιότητες :

$v) < x, y + z >=< x, y > + < x, z >$
$vi) < x, \lambda y >= \overline{\lambda} < x, y >$
$vii) < x, x >= 0 \iff x = 0$
$viii) < x, z >=< y, z >\Rightarrow x = y \quad \forall z \in V$

Λήμμα. 1.1.2 *(**Ανισότητα Cauchy – Schwarz**)*
Σ'ενα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο για κάθε $x, y \in V$ ισχύει :

$$| < x, y > |^2 \leq < x, x >< y, y >$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη.
Αν $y = 0$ τότε ισχύει η ισότητα αφού και τα δύο μέλη είναι ίσα με μηδέν.
Για $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι :

$$0 \leq < x - \lambda y, x - \lambda y >=< x, x > -\lambda < y, x > -\overline{\lambda} < x, y > +|\lambda|^2 < y, y > \quad (1.1)$$

Έστω λ=$\dfrac{<x,y>}{<y,y>}$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1.1) έχουμε :

$$0 \leq <x,x> - \frac{|<x,y>|^2}{<y,y>} \Rightarrow |<x,y>|^2 \leq <x,x><y,y> .$$

Έστω ότι ισχύει η ισότητα τότε :

$$|<x,y>|^2 = <x,x><y,y> \text{ και } x,y \neq 0. \Rightarrow$$

$$<x,x> - \frac{|<x,y>|^2}{<y,y>} = 0$$

Θέτοντας $\lambda = \dfrac{<x,y>}{<y,y>}$ παίρνουμε $<x-\lambda y, x-\lambda y> = 0 \Rightarrow x = \lambda y$

$\Rightarrow x,y$ γραμμικώς ανεξάρτητα.

Αντιστρόφως, έστω x,y γραμμικώς εξαρτημένα.
Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $x = \lambda y$.

Έχουμε

$|<x,y>|^2 = |<\lambda y, y>|^2 = |\lambda|^2 <y,y>^2 \Rightarrow$

$|<x,y>|^2 = <\lambda y, \lambda y><y,y> = <x,x><y,y>.$

$\square$

Παράδειγμα. 1.1.3
1)Ο χώρος $\mathbb{C}^n$ με εσωτερικό γινόμενο

$$<x,y> = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + ... + x_n\overline{y_n} = \textstyle\sum_{\varkappa=1}^{n} x_k\overline{y_k}.$$

Το γινόμενο του $\mathbb{C}^n$ λέγεται **κανονικό**.

2)Ο χώρος $c_{00} = \{a = (a_n)_n : a_n \in \mathbb{C}$ και υπάρχει $n_a \in \mathbb{N} : a_n = 0$, για κάθε $n \geq n_a\}$ με εσωτερικό γινόμενο:

$$< a, b >= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n} \text{ με } a = (a_n)_n \text{ και } b = (b_n)_n.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει γιατί υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων.

3)Ο μιγαδικός διανυσματικός χώρος $l_2(\mathbb{N})$ είναι ο χώρος των τετραγωνικά αθροίσιμων μιγαδικών ακολουθιών δηλαδή ο

$$l_2 = \{x = (x_n)_n : x_n \in \mathbb{C} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

με εσωτερικό γινόμενο $< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

Το εσωτερικό γινόμενο είναι καλά ορισμένο αφού η σειρά συγκλίνει απολύτως :
Είναι :

$$|x_n \overline{y_n}| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2, \text{ οπότε}$$

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{k} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{k} |y_n|^2$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, από όπου προκύπτει :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \overline{y_n}|^2 < \infty.$$

Παρατηρώ ότι ο l_2 είναι διανυσματικός χώρος αφού κάθε $x, y \in l_2$ και $\forall$ λ $\in \mathbb{C}$ είναι:

$$|x_n + \lambda y_n|^2 \leq 2|x_n|^2 + 2|\lambda|^2 |y_n|^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n + \lambda y_n|^2 \leq 2 \sum |x_n|^2 + 2|\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty \Rightarrow$$

$$x + \lambda y \in l_2.$$

4)Ο μιγαδικός χώρος $C[a, b]$ όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.
Το $< f, g >$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Οι ιδιότητες του προκύπτουν από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος.
Για παράδειγμα αν $< f\ ,\ f >= 0$ τότε $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$ οπότε $|f(x)|^2 \geq 0$ και αφού $|\ f(x)\ |$ συνεχής, είναι $|f(x)|^2 = 0$ και συνεπώς $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.

Πρόταση. 1.1.4
Ένα εσωτερικό γινόμενο σ 'ένα διανυσματικό χώρο V ορίζει μια νόρμα στον V.
Συγκεκριμένα η συνάρτηση : $|| \circ || : V \to R_+$, $||x|| =< x, x >^{1/2}$ είναι μια νόρμα στον V δηλαδή για κάθε $x, y \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει :

$i)||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$ii)||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x||$

$iii)||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$

Απόδειξη.
$i)$ $||x + y||^2 =< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >$

$$= ||x||^2 + < x, y > + \overline{< x, y >} + ||y||^2 \Rightarrow$$

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2Re(< x, y >) + ||y||^2$$

$$\leq ||x||^2 + 2| < x, y > | + ||y||^2$$

$$\leq ||x||^2 + 2||x|| \; ||y|| + ||y||^2$$

$$= (||x|| + ||y||)^2$$

$\Rightarrow ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$

$ii)||\lambda x||^2 =< \lambda x, \lambda x >= \lambda\bar{\lambda} < x, x >= |\lambda|^2||x||^2 \Rightarrow ||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x||.$

$iii)$ $||x|| = 0 \Rightarrow ||x||^2 = 0 \Rightarrow < x, x >= 0 \Rightarrow x = 0.$

□

Πρόταση. 1.1.5
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $<, >$ και
$||x|| =< x, x >^{1/2}$ $\forall x \in V$ η νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.
Τότε η απεικόνιση $<, >$: $(V, || \circ ||) \times (V, || \circ ||) \to (\mathbb{C}, | \circ |)$ είναι συνεχής.

Απόδειξη.
Έστω $x, y \in V$ και $(x_n)_n, (y_n)_n$ ακολουθίες του V με $x_n \to x$ και $y_n \to y$ δηλαδή

$$||x_n - x|| \to 0 \text{ και } ||y_n - y|| \to 0.$$

Θα δείξουμε ότι $< x_n, y_n > \to < x, y >$.

Ισχύει ότι :

$$|<x_n, y_n> - <x, y>| = |<x_n, y_n> - <x, y_n> + <x, y_n> - <x, y>|$$

$$\leq |<x_n - x, y_n>| + |<x, y_n - y>|$$

$$\leq ||x_n - x|| \; ||y_n|| + ||x|| \; ||y_n - y|| \to 0$$

διότι $||y_n|| \to ||y||$ και $\{||y_n||\}$ είναι φραγμένη.

□

Πρόταση. 1.1.6 (**Κανόνας παραλληλογράμου**)
Σ'ενα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει :

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Απόδειξη.
Με εφαρμογή του ορισμού της νόρμας $||x|| =< x, x >^{1/2}$ και των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ο παραπάνω τύπος.

□

Παρατήρηση
Ο κανόνας του παραλληλογράμου ξεχωρίζει τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο ανάμεσα στους χώρους με νόρμα.

Αν $(V, || \circ ||)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα η οποία ικανοποιεί τον κανόνα του παραληλλογράμου τότε ορίζεται εσωτερικό γινόμενο στον V.

Επομένως γενικά ένας χώρος με νόρμα δεν είναι απαραίτητα χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
Για παράδειγμα έστω ο χώρος $(C[0, 1], || \circ ||_\infty)$.
Ο χώρος αυτός δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, διότι αν πάρουμε τις συναρτήσεις:

$f(t) = 1$, $g(t) = t$ $\forall t \in [0, 1]$ τότε έχουμε

$||f||_\infty = 1$, $||g||_\infty = 1$, $||f + g||_\infty = 2$, $||f - g||_\infty = 1$

οπότε προκύπτει ότι :

$||f + g||_\infty^2 + ||f - g||_\infty^2 = 5 \neq 4 = 2||f||_\infty^2 + 2||g||_\infty^2,$

δηλαδή δεν ικανοποιείται ο κανόνας παραλληλογράμου.

Πρόταση. 1.1.7 (Ταυτότητα πολικότητας:Polarization indetity)
Σ'ενα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο , για κάθε $x, y \in V$ ισχύει :

$$4 < x, y >= ||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2.$$

Πρόταση. 1.1.8 (Πυθαγόρειο Θεώρημα)
Για κάθε $x, y \in V$ με $< x, y >= 0$ ισχύει : $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

1.2 Χώρος *Hilbert*

Ορισμός. 1.2.1

- Ένας χώρος$(X, || \circ ||)$ λέγεται **πλήρης** αν κάθε βασική ακολουθία του χώρου είναι συγκίνουσα.
- Ένας διανυσματικός χώρος $(V, <,>)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα(μετρική) που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα. 1.2.2
Ο χώρος l_2 με το γνωστό εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος *Hilbert*.Θα δείξουμε πρώτα ότι είναι πλήρης.
Έστω $(x_n)_n : x_n = (\xi_i^n)_i$ μια βασική ακολουθία στον l_2.
Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|\ ||x_n||_2 - ||x_m||_2\ | \leq ||x_n - x_m||_2 < \varepsilon \text{ για κάθε } n, m > n_0.$$

Άρα η $(||x_n||_2)_n$ είναι βασική στον$\mathbb{R}$,άρα συγκλίνει και επομένως είναι φραγμένη.
Επομένως υπάρχει $M > 0 :\ ||x_n||_2 < M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Είναι :

$$|\xi_i^n - \xi_i^m|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i^m|^2 = ||x_n - x_m||_2^2 < \varepsilon^2, \text{ για κάθε } n, m > n_0.$$

Άρα η ακολουθία $(\xi_i^n)_n$(για i σταθερό) είναι βασική στον $\mathbb{C}$ και επομένως συγκλίνει έστω στο ξ_i.
Έστω $x = (\xi_i)_i$.Τότε $x \in l_2$ και $x_n \to x$.

Αυτό ισχύει διότι για τυχαίο $k \in \mathbb{N}$ είναι :

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n|^2 \leq ||x_n||^2 \leq M^2 \Rightarrow lim_n \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n|^2 \leq M^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2 \leq M^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \leq M^2 \Rightarrow x \in l_2.$$

Επιπλέον

$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i^m|^2 \leq ||x_n - x_m||_2^2 < \varepsilon^2$, για κάθε $n, m > n_0$

και άρα αν $m \to \infty$για κάθε $n > n_0$ συνεπάγεται :

$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i|^2 < \varepsilon^2 \overset{k\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow ||x_n - x||_2 < \varepsilon$

$$\Rightarrow ||x_n - x||_2 \to 0.$$

1.3 Ορθή προβολή

Ορισμός. 1.3.1
$i)$Τα διανύσματα $x, y \in X$ λέγονται **κάθετα ή ορθογώνια** αν

$< x, y >= 0$ και συμβολίζουμε με $x \perp y$.

$ii)$ μια οικογένεια $\{e_i, i \in I\}$ στοιχείων του X λέγεται **ορθοκανονική** αν

$< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ με $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$ και $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$.

$iii)$Δύο υποσύνολα $S_1, S_2 \subseteq X$ λέγονται **κάθετα ή ορθογώνια** αν

$< x, y >= 0$ $\forall x \in S_1$ και $\forall y \in S_2$ και συμβολίζουμε με $S_1 \perp S_2$.

Ορισμός. 1.3.2 Ο αριθμός $d = d(x, S) = inf_{s \in S} ||x - s||$ ονομάζεται **απόσταση** του στοιχείου $x \in X$ από το υποσύνολο $S \subseteq X$.

Ισοδύναμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s_n \in S$: $|d - ||x - s_n|| \ | < 1/n$
δηλαδή $lim_n ||x - s_n|| = d$.

Παρατηρώ ότι αν η ακολουθία (s_n) ή μια υπακολουθία της (s_{k_n}) συγκλίνει σ'ενα σημείο $s \in S$ τότε $d(x, S) = ||x - s||$.
Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η απόσταση **επιτυγχάνεται.**

Πρόταση. 1.3.3 Έστω $(X, <, >)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $M \subset X$ ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του.
Για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $m \in M$ τέτοιο ώστε : $d(x, M) = ||x - m||$.

Απόδειξη.
Πρώτα θα δείξω ότι υπάρχει μοναδικό $m \in M$ τέτοιο ώστε $(x-m) \perp M$ και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το m αυτό είναι το ζητούμενο.

Προσδιορισμός του m : Έστω $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του M.

Τότε $m = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i$ οπότε αν $(x-m) \perp M$ τότε $(x-m) \perp e_j$ για κάθε $j = 1, ..., n$.

Άρα

$0 =< x-m, e_j >=< x, e_j > - < \sum_{i=1}^{n} m_i e_i, e_j >=< x, e_i > -m_j$

$\Rightarrow m_j =< x, e_j >$.

Οπότε $m = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j$.

Αντιστρόφως, αν $m \in M$, $m = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j$ τότε για $z \in M$ ισχύει:

$z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$ και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
< x-m, z > &= \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} < x-m, e_i > \\
&= \sum_{i=1}^{k} \overline{z_i} (< x, e_i > - \sum_{j=1}^{n} < x, e_j >< e_j, e_i >) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Επομένως $(x-m) \perp M$.

Έστω τώρα $m \in M$,$(x-m) \perp M$.

Τότε για κάθε $y \in M$ $y \neq m$ ισχύει ότι $(y-m) \in M$ συνεπώς $x-m \perp y-m$.

Με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι :

$||x-y||^2 = ||x-m+m-y||^2 = ||x-m||^2 + ||y-m||^2 > ||x-m||^2$

$\Rightarrow ||x-y|| > ||x-m||$, για κάθε $y \in M \Rightarrow d(x, M) = ||x-m||$.

$\square$

Θεώρημα. 1.3.4 Έστω $(X, <,>)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $M \subset X$ ένας κλειστός υπόχωρος.Έστω ακόμη $x \in X$ και $m \in M$.
Τότε : $(x-m)\perp M \iff d(x,M) = ||x-m||$.

Απόδειξη.
Αν $(x-m)\perp M$ τότε, με βάση την προηγούμενη απόδειξη, ισχύει $d(x,M) = ||x-m||$.

Έστω ότι ισχύει $d(x,M) = ||x-m||$, οπότε για κάθε $y \in M$ ισχύει: $||x-y|| \geq ||x-m||$.

Επίσης για κάθε λ$\in\mathbb{C}$ είναι $\lambda y + m \in M$, για κάθε $y \in M$.

Άρα $||x-m||^2 \leq ||x-(m+\lambda y)||^2 =< x-m-\lambda y, x-m-\lambda y >$

$$= ||x-m||^2 - 2Re(\lambda < y, x-m >) + |\lambda|^2||y||^2 \Rightarrow$$

$$2Re(\lambda < y, x-m >) \leq |\lambda|^2||y||^2 \ (*).$$

Θέτω $\lambda = r\overline{< y, x-m >}, r \in \mathbb{R}_+^*$ και αντικαθιστώ στη σχέση $(*)$,

οπότε προκύπτει:

$$2r| < y, x-m > |^2 \leq r^2| < y, x-m|^2||y||^2 \Rightarrow < y, x-m >= 0$$

διότι αν ίσχυε ότι $| < y, x-m > | \neq 0$ θα έπρεπε να ισχύει $2 \leq r||y||^2$, για κάθε $r \in \mathbb{R}_+^*$.
Αυτό όμως είναι άτοπο.
Επομένως $< y, x-m >= 0$, για κάθε $y \in M$, δηλαδή $(x-m)\perp M$.

□

Θεώρημα. 1.3.5
Έστω H ένας χώρος *Hilbert* , $h \in H$ και $K \subseteq H$ ένα κυρτό και κλειστό υποσύνολο του H.Τότε υπάρχει μοναδικό $k \in K$ τέτοιο ώστε $d = d(h,K) = ||h-k||$.

1.4 Ορθογώνιο συμπλήρωμα -Ορθοκανονική βάση

Ορισμός. 1.4.1 Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο ενός χώρου X με εσωτερικό γινόμενο.
Ονομάζουμε **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του S, το σύνολο :

$$S^\perp = \{x \in X \ : \ < x, s >= 0 \text{ για κάθε } s \in S\}.$$

Ορισμός. 1.4.2 Έστω H ένας χώρος *Hilbert* και S ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του.
Το S λέγεται **ορθοκανονική βάση** ή απλώς **βάση** του H αν είναι ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο δηλαδή δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα άλλο ορθοκανονικό υποσύνολο του H.

Λήμμα. 1.4.3 ***(Ανισότητα*** **Bessel)**
Έστω $\{e_i : i = 1, 2, ..., n\}$ ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο και $h \in H$.
Αν $α_i =< h, e_i >, i = 1, 2, ..., n$ τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leq ||h||^2$$

Απόδειξη.
Είναι :

$$0 \leq ||h - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i||^2 =< h - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \ , \ h - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i >$$

$$= ||h||^2 - < h, \sum_{i=1}^{n} a_i, e_i > - < \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, h > + < \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} a_j e_j >$$

$$= ||h||^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} a_i - \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{a_j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{a_j} < e_i, e_j >$$

$$= ||h||^2 - \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2.$$

□

Ορισμός. 1.4.4
Αν (e_i) είναι μια ορθοκανονική βάση σ'ενα χώρο *Hilbert* H τότε για κάθε $x \in H$ οι αριθμοί $< x, e_i >$ ονομάζονται **συντελεστες Fourier** του x, ως προς τη βάση (e_i) και η αντίστοιχη σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} < x, e_i > e_i$ ονομάζεται **σειρά Fourier**.

Θεώρημα. 1.4.5 **(Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram – Schmidt)**
Έστω (y_k) μια γραμμικώς ανεξάρτητη ακολουθία διανυσμάτων.Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία (x_k) τέτοια ώστε:

$$[y_1, y_2, ..., y_n] = [x_1, x_2, ..., x_n], \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

2 Φραγμένοι Τελεστές

2.1 Γενικές Έννοιες

Ορισμός. 2.1.1
$i)$Έστω $(X, \| \circ \|)_X, (Y, \| \circ \|)_Y$ δύο χώροι με νόρμα και T:$X \to Y$ μια γραμμική απεικόνιση. Θέτουμε $||T|| = sup\{||Tx||_Y{:}x \in X,\ ||x||_X \leqslant 1\} \in [0, \infty]$.
Θα λέμε ότι η T είναι **φραγμένη ή φραγμένος τελεστής** αν $||T|| \prec \infty$,
δηλαδή η T όταν περιορίζεται στη μοναδιαία μπάλα του X είναι φραγμένη συνάρτηση.

$ii)$Αν $||T|| = \infty$ τότε η T ονομάζεται **μη φραγμένος τελεστής**.
Το σύνολο των φραγμένων τελεστών θα το συμβολίσουμε με $B(X, Y)$ και αν X $= Y$ τότε συμβολίζεται με $B(X)$.

Παράδειγμα. 2.1.2
Η ταυτοτική συνάρτηση $I : c_{00} \to c_{00}$ είναι φραγμένος τελεστής ως απεικόνιση :

$$(c_{00}, || \circ ||_2) \to (c_{00}, || \circ ||_\infty)$$

Όμως ο τελεστής αυτός δεν είναι φραγμένος τελεστής ως απεικόνιση

$(c_{00}, || \circ ||_\infty) \to (c_{00}, || \circ ||_2)$, διότι αν θεωρήσουμε ακολουθία (x_n) με

$$x_n = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, ..., 1/\sqrt{n}, 0, ...),\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

τότε έχουμε ότι $||x_n||_\infty = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,ενώ $||Ix||_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$.

Πρόταση. 2.1.3
Έστω X, Y χώροι με νόρμα και T : $X{\to}\ Y$ ένας φραγμένος τελεστής.

$$\text{Τότε } ||T|| = sup\{||Tx|| : x \in X, ||x|| = 1\} = sup\{\frac{||Tx||}{||x||} : x \in X\ , x \neq 0\}$$

$$= inf\{c > 0 : ||Tx|| \leq c||x||, \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

Επομένως ισχύει: $||Tx|| \leq ||T||||x||$, για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη.
Έστω α $= sup\{||Tx|| : x \in X \ ||x|| = 1\}$, β $= sup\{\dfrac{||Tx||}{||x||} : x \in X \ , \ x \neq 0\}$

και γ$= inf\{c > 0 : ||Tx|| \leq c||x||$, για κάθε $x \in X$ $\}$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει $||T|| \leq$ γ $\leq$β$\leq$α$\leq$ $||T||$ και άρα θα ισχύουν οι ισότητες.

Έχουμε ότι:

$$sup\{||Tx|| \ : \ x \in X \ , \ ||x|| = 1\} \leq sup\{||Tx|| \ : \ x \in X \ , \ ||x|| \leq 1\}$$

$\Rightarrow$ α$\leq$||T||.

Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $x \in X, x \neq 0$ είναι $\dfrac{||Tx||}{||x||} = ||T(\dfrac{x}{||x||})|| \leq$ α

$\Rightarrow$β$\leq$ α και συνεπάγεται ότι β$\leq$α$\leq$||T|| (1).

Για $x \in X$,$x\neq 0$ είναι $\dfrac{||Tx||}{||x||}$ $\leq$β $\Rightarrow$$||Tx||$ $\leq$β$||x||$ και η ισότητα ισχύει για $x = 0$.

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι γ$\leq$β$\leq$α$\leq$ $||T||$ (2).

Επίσης για κάθε $c\in\{c > 0 : ||Tx|| \leq c||x||$, για κάθε $x \in X\}$ και για κάθε $x \in X$,

με $||x|| \leq 1$, ισχύει $||Tx|| \leq c$. Άρα $||T|| \leq$ γ (3).

Συμπεραίνουμε ότι από τις σχέσεις (1),(2),(3) ισχύει:

$$||\mathrm{T}|| = ||α|| = ||β|| = ||γ||.$$

Τέλος για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ είναι: $\dfrac{||Tx||}{||x||} \leq ||T|| \Rightarrow ||Tx|| \leq ||T|| \ ||x||$, η οποία ισχύει και για κάθε $x = 0$.

□

Πρόταση. 2.1.4
Έστω X, Y χώροι με νόρμα και T : $X \to Y$ μια γραμμική απεικόνιση .
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

1)T φραγμένος τελεστής
2)T είναι ομοιόμορφα συνεχής

3)T συνεχής
4)T συνεχής στο 0
5)T είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$
6)Υπάρχει M : $0 < M < \infty$ τέτοιο ώστε $||Tx|| \leq M\ ||x||$, για κάθε $x \in X$

Απόδειξη.
1)⇒2) Αν T φραγμένη τότε για κάθε $x, y \in X$ είναι :

$$||Tx - Ty|| = ||T(x - y)|| \leq ||T||\ ||x - y||$$

και από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2)⇒3) Αφού η T είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε είναι και συνεχής.

3)⇒4) Επειδή η T είναι συνεχής σε όλο το X θα είναι συνεχής και στο μηδέν.

4)⇒5) Έστω ότι ε>0.Τότε υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $||x - x_0|| < δ$

$$\Rightarrow ||T(x\text{-}x_0)|| < ε \Rightarrow ||Tx - Tx_0|| < ε \Rightarrow T \text{ συνεχής στο } x_0.$$

5)⇒1)Έστω T συνεχής στο x_0.Τότε για ε=1 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε

$$x \in X \text{ με } ||x\text{-}x_0|| < δ \Rightarrow ||Tx\text{-}Tx_0|| < 1.$$

Τώρα για κάθε $y \in X$ με $||y|| \leq 1$ είναι $||\frac{δ}{2}y + x_0 - x_0|| < δ$.

Άρα $||T(\frac{δ}{2}y + x_0) - Tx_0|| < 1$.

Επομένως,

$\frac{δ}{2}||Ty|| < 1 \Rightarrow ||Ty|| < \frac{2}{δ} \Rightarrow ||T|| \leq \frac{2}{δ}$, δηλαδή T φραγμένη.

6) ⇔1)Αν $||Tx|| \leq M||x||$, για κάθε $x \in X$, τότε $||Tx|| \leq M$, για κάθε $||x|| \leq 1$.

Συνεπώς $||T|| \leq M$.

Αντιστρόφως, αν T φραγμένη, υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $||T|| \leq M$.

Τότε για κάθε $x \in X$, $x \neq 0$ είναι $\frac{||Tx||}{||x||} = ||T\frac{x}{||x||}|| \leq M$.

Άρα $||Tx|| \leq M \ ||x||$ η οποία ισχύει και για $x = 0$.

$\square$

Παραδείγματα:
Στον χώρο l_2 ορίζουμε τους τελεστές :
$a)S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$ ο οποίος ονομάζεται **τελεστής δεξιάς μετατόπισης**, είναι γραμμική απεικόνιση και ισχύει $||Sx|| = ||x||$ για κάθε $x \in l_2$.
Άρα είναι φραγμένος τελεστής με $||S|| = 1$.

$b)S^*(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...)$ ονομάζεται **τελεστής αριστερής μετατόπισης** ο οποίος είναι γραμμικος και ισχύει $||S^*|| = 1$.
Για τον τελεστή δεξιάς μετατόπισης ισχύει $Se_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$ και για τον τελεστή αριστερής μετατόπισης ισχύει $S^*e_n = e_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$ με $S^*e_1 = 0$.

$c)$Έστω α=$(\alpha_n)_n$ μια φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και
$x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$.
Ορίζουμε την απεικόνιση: $T_a : l_2 \to l_2$ και ισχύει $T_a x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...)$.
Ο T_a είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής στον l_2 με $||\mathrm{T}_a|| = sup_i|a_i|$.

Αν $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$ είναι συνηθισμένη βάση του l_2, τότε $T_a e_n = a_n e_n$ για κάθε $n \geq 1$.
Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι προκύπτει ένας άπειρος πίνακας που αντίστοιχεί στον τελεστή T_a ως πρός τη βάση $\{e_n\}$, ο οποίος είναι διαγώνιος με στοιχεία της διαγωνίου τους όρους της (a_n). Ο τελεστής T_a ονομάζεται **διαγώνιος**.
Όλα τα στοιχεία της βάσης είναι ιδιοδιανύσματα του T_a με αντίστοιχες ιδιοτιμές τους όρους της ακολουθίας $(a_n)_n$.

Άλλα παραδείγματα είναι αυτό του **πολλαπλασιαστικού τελεστή**, καθώς και του **ολοκληρωτικού τελεστή**:

Παράδειγμα. 2.1.6
$a)$**Πολλαπλασιαστικός τελεστής**
Έστω ο χώρος $L^2[a, b]$ και μια συνάρτηση $\varphi \in C[a, b]$.Ορίζουμε την απεικόνιση :

$M_f \, : \, L^2[a, b] \to L^2[a, b] \ ,(M_f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x).$

Προφανώς η M_f είναι γραμμική και ισχύει :

$||M_f\varphi||_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2|\varphi(x)|^2dx \leq sup_{x\in[a,b]}|f(x)|^2\int_a^b |\varphi(x)|^2dx = ||f||_\infty^2||\varphi||_2^2.$

Άρα $||M_f|| \leq ||f||_\infty$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα. Έστω $c =||f||_\infty$.

Τότε για ε>0 υπάρχει διάστημα $I \subseteq [a,b]$ τέτοιο ώστε :$|f(x)| \geq c - ε$ για κάθε $x \in I$.

Αν $g \in C[a,b], g \neq 0,$ με $g|_{[a,b]} \ = 0$, τότε

$||\mathrm{M}_f g||_2^2 = \int_I |f(x)|^2 |g(x)|^2 dx \geq (c-ε)^2 \int_{\mathrm{I}} |g(x)|^2 dx = (c-ε)^2 ||g||_2^2,$

οπότε $||M_f|| \geq c - ε$.

Άρα $||M_f|| \geq c = ||f||_\infty$ και επομένως προκύπτει ότι $||M_f|| = ||f||_\infty$.

$b)$**Ολοκληρωτικοί τελεστές**

Έστω $[a,b]$ $[c,d]$ κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$ και $k \ : \ [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση.

Ορίζουμε την απεικόνηση :

$$K \ : \ L^2[a,b] \to L^2[c,d] \ , \ (Kf)(t) = \int_a^b k(t,s) f(s) ds \ , \ c < t < d.$$

Άρα από τη μορφή της K παρατηρώ ότι είναι γραμμική.
Για $t \in (c,d)$ και με χρήση της ανισότητας $Cauchy - Schwartz$ έχουμε :

$$|(Kf)(t)|^2 \leq (\int_a^b |k(t,s)|^2 ds)(\int_a^b |f(s)|^2 ds) = ||f||^2 (\int_a^b |k(t,s)|^2)$$

συνεπώς

$$||Kf||^2 \leq ||f||^2 \int_c^d \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt \quad \Rightarrow ||K|| \leq (\int_c^d \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt)^{1/2}$$

Άρα ο K είναι φραγμένος τελεστής.

Ο τελεστής K λέγεται **ολοκληρωτικός τελεστής** και η συνάρτηση $k(t,s)$ λέγεται συνάρτηση **πυρήνας** του K.

2.2 Ο **χώρος των φραγμένων τελεστών**

Έστω $(\mathrm{X}, ||\circ||_X), (Y, ||\circ||_Y)$ δύο χώροι με νόρμα.
Το σύνολο $B(X,Y)$ των γραμμικών συνεχών συναρτήσεων Τ: $X \to Y$ με πράξεις:

$$\mathrm{T} + S : (T+S)x = Tx + Sx \text{ και } \lambda\mathrm{T} : (\lambda T)x = \lambda(\mathrm{T}x),$$

όπου $T, S \in B(X,Y)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, είναι διανυσματικος χώρος.

Πράγματι, έστω $T, S \in B(X,Y)$ τότε έχουμε :

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x)$$

και αφού $T, S \in B(X,Y)$ προκύπτει ότι : $T(x) + S(x) \in B(X,Y)$.

Επίσης $(\lambda T)x = \lambda T(x)$ και επειδή $T \in B(X,Y)$ τότε $\lambda T \in B(X,Y), \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Άρα συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $B(X,Y)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Πρόταση. 2.2.1
Αν T, S είναι φραγμένοι τελεστές και $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ τότε και ο $\lambda T + \mu S$ είναι φραγμένος τελεστής.
Επιπλέον η συνάρτηση

$$||\circ||: B(X,Y) \to \mathbb{R}_+ : T \to ||T|| = sup\{||Tx|| : x \in X \ , \ ||x|| \leq 1\}$$

ορίζει μια νόρμα στον $B(X,Y)$, η οποία λέγεται **νόρμα τελεστών.**

Απόδειξη.
Για κάθε $x \in X$,έχουμε:

$$||(\lambda\mathrm{T} + \mu S)x|| \leq ||(\lambda\mathrm{T})x + (\mu S)x|| \leq ||(\lambda(Tx)|| + ||\mu(Sx)||$$

$$\leq |\lambda| \ ||T|| \ ||x|| + |\mu| \ ||S|| \ ||x|| = (|\lambda| \ ||T|| + |\mu| \ ||S||)||x|| \ .$$

□

Ορισμός. 2.2.2
Έστω $\mathrm{X}, Y, \mathrm{Z}$ χώροι με νόρμα και $\mathrm{T} \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$.
Τότε ορίζουμε τη σύνθεση των τελεστών S, T :

$$S \circ T \equiv ST \colon X \to Z \text{ με } (S \circ T)(x) = S(Tx)$$

Πρόταση. 2.2.3
Αν $T \in B(X,Y), S \in B(Y,Z)$ τότε $ST \in B(X,Z)$ και $||ST|| \leq ||S||\ ||T||$.

Απόδειξη.
Ο ST είναι γραμμικός και συνεχής ως σύνθεση των γραμμικών και συνεχών απεικονίσεων S, T.
Επομένως $ST \in B(X,Z)$.

Για κάθε $x \in X$ ισχύει :

$$||STx||_Z = ||S(Tx)||_Z \leq ||S||\ ||Tx||_Y \leq ||S||\ ||T||\ ||x||_X \Rightarrow ||ST|| \leq ||S||\ ||T||$$

□

Ένα σύνολο Α$\neq 0$ είναι μια άλγεβρα αν είναι εφοδιασμένο με τρείς πράξεις:

$$<< + >> \ , \ << \cdot >> \ , \ << \circ >>$$

ως προς τις οποίες η δομή $(\mathrm{A}, +, \cdot)$ είναι μιγαδικός διανυσματικός χώρος, η δομή $(\mathrm{A}, +, \circ)$ είναι δακτύλιος.
Επιπλεόν ισχύει $\lambda(\alpha \circ b) = (\lambda\alpha) \circ b = \alpha \circ (\lambda b)$ για κάθε $\alpha, b \in A$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ένας χώρος Ε με νόρμα που είναι άλγεβρα, χώρος *Banach* και ισχύει
$||xy|| \leq ||x||\ ||y||$ για κάθε $x, y \in E$ λέγεται **Banach άλγεβρα**.
Αν ο Ε έχει μονάδα e τότε υποθέτουμε ότι $||e||$=1.

Πρόταση. 2.2.4
Αν Χ είναι ένας χώρος *Banach*, τότε ο χώρος Β(Χ) των φραγμένων τελεστών είναι μια **Banach άλγεβρα** .

2.3 Ημιαντι-διγραμμικές μορφές

Ορισμός. 2.3.1
Έστω H, K χώροι*Hilbert* και μια απεικόνιση $\varphi : H \times K \to \mathbb{C}$.
Η φ λέγεται **ημιαντι-διγραμμική** μορφή αν :

i)είναι γραμμική ως πρός την πρώτη μεταβλητή,
δηλαδή η απεικόνιση $x \to \varphi(x,y)$ είναι γραμμική : $\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \varphi(x_1, y) + \lambda_2 \varphi(x_2, y)$.

ii)είναι αντιγραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλήτη , δηλαδή η απεικόνιση $y \to \overline{\varphi(x,y)}$ είναι γραμμική ισοδύναμα $\varphi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda_1}\varphi(x,y_1) + \overline{\lambda_2}\varphi(x,y_2)$.

Η φ λέγεται **φραγμένη** αν υπάρχει σταθερά κ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in H$, $y \in K$ να ισχύει $|\varphi(x,y)| \leq k||x||\ ||y||$.

Θεώρημα. 2.3.2
Έστω H, K χώροι $Hilbert$.
$i)$Αν $A\in B(H,K)$ τότε η απεικόνιση $\varphi_{A}(x,y) =< Ax\ ,\ y >$ είναι μια φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή.
$ii)$Κάθε φραγμένη ημιαντιδιγραμμική μορφή προκύπτει μ΄ αυτόν τον τρόπο.
$iii)$Η απεικόνιση $T : B(H,K) \to B_b, T(A) = \varphi_{A}$ όπου B_b το σύνολο όλων των φραγμένων ημιαντιδιγραμμικών μορφών επί του $H \times K$ είναι '1-1' και επί.

Λήμμα. 2.3.3 Ταυτότητα πολικότητας(Polarization identity)
Έστω $A\in B(H)$.
Τότε :

$$< Ax, y >=\frac{1}{4}\{< A(x+y)\ ,\ x+y > - < A(x-y), x-y > +$$
$$+i < A(x+iy)\ ,\ x+iy > -i < A(x-iy)\ ,\ x-iy >\}$$

Απόδειξη.
Κάνοντας τις πράξεις στο δεύτερο μέλος προκύπτει το πρώτο .

□

Πόρισμα. 2.3.4
Αν $A \in B(H)$ και $< Ax, x >= 0$, για κάθε $x \in H$, τότε $A = 0$.

Απόδειξη.
Λαμβάνοντας υπόψιν την ταυτότητα πολικότητας, το δεύτερο μέλος της ταυτότητας αυτής είναι ίσο με μηδέν.
Επομένως προκύπτει $< Ax, y >= 0$ για κάθε $x, y \in H \Leftrightarrow Ax \perp H$, για κάθε $x\in H$.
Άρα $Ax = 0$, για κάθε $x \in H$.
Συνεπώς $A = 0$.

□

2.4 Ο συζυγής ενός τελεστή

Θεωρούμε H έναν πεπερασμένης διάστασης χώρο $Hilbert$, $\{e_i : i = 1, 2, ..., n\}$ μια ορθοκανονική βάση του και $T\in B(H)$ μια γραμμική απεικόνιση.
Λαμβάνοντας υπόψιν τα όσα γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, έχουμε ότι στην T ως πρός τη βάση αυτή, αντιστοιχεί ένας μοναδικός $n\times n$ πίνακας $A=(a_{i\ j})$,
όπου $a_{i,j} =< Te_j, e_i >$.
Θεωρούμε τον πίνακα $B=(b_{ij})$, $b_{ij} = \overline{a_{j\ i}}$, δηλαδή $B =\overline{A}^T$ και τη γραμμική απεικόνιση T^*, που ορίζει ο πίνακας B ως πρός την παραπάνω βάση του H.

Τότε από $a_{ji} = \overline{b_{ij}}$ έχουμε ότι $<Te_i,e_j >=<e_i,T^*e_j >$, για κάθε $i, j = 1, 2, ..., n$ και $x, y\in H$.

Επομένως $< Tx, y >=< x, T^*y >$.

Θεώρημα. 2.4.1
Έστω H, K δύο χώροι *Hilbert* και $A\in B(H,K)$. Τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $A^* : K \to H$, $A^* \in B(K,H)$ τέτοιος ώστε :

$< Ax, y >=< x, A^*y >$, για κάθε $x\in H$ και για κάθε $y \in K$ με $||A^*|| = ||A||$.

Απόδειξη.
Θεωρούμε την ημιαντιδιγραμμική μορφή $\varphi : H \times K \to \mathbb{C}$,
με τύπο $\varphi(x, y) =< y, Ax >$, η οποία είναι φραγμένη .
Από Θεώρημα 2.3.2, υπάρχει μοναδικός τελεστής $A^* : K \to H$ ο οποίος ορίζεται ως:

$$\varphi(x, y) =< A^*y, x >.$$

Άρα $<y\ ,\ Ax >=<A^*y\ ,\ x >$

$\Rightarrow< Ax, y >=< x, A^*y >$ για κάθε $x \in H$, $y\in K$.

Επιπλέον ισχύει: $||A^*|| = sup_{y\neq 0}\dfrac{||A^*y||}{||y||} = sup_{x,y\neq 0}\dfrac{| < A^*y, x > |}{||x||\ ||y||}$

$$= sup_{x,y\neq 0}\frac{| < Ax, y > |}{||x||\ ||y||} = ||A||.$$

□

Ορισμός. 2.4.2
Ο τελεστής $A^* \in B(H,K)$ ονομάζεται *Hilbert* **συζυγής** του τελεστή $A\in B(H,K)$.

Παράδειγμα. 2.4.3
a)Ο πολλαπλασιαστικός τελεστής M_f έχει ως συζυγή τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_{\overline{f}}$, όπου $\overline{f}$ ο μιγαδικός συζυγής.
Πράγματι για κάθε $\varphi, g\in L^2[a,b]$ έχουμε :

$<\varphi,M_f^*\ g >=< M_f\varphi, g >\Longleftrightarrow \int_a^b \varphi(t)\overline{(M_f^* g(t)}dt = \int_a^b f(t)\varphi(t)\overline{g}(t)dt$

$\Longleftrightarrow\overline{M_f^* g(t)} = f(t)\overline{g}(t)$ σχεδόν παντού

$\Longleftrightarrow (M_f^* g)(t) = \overline{f}(t)g(t)$ σχεδόν παντού $\Longleftrightarrow M_f^* = M_{\overline{f}}$.

b) Ο ολοκληρωτικός τελεστής ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$K \ : \ L^2[a,b] \to L^2[c,d]$ με $(Kf)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds \ \ , \ c < t < d,$

έχει συζυγή τον ολοκληρωτικό τελεστή K^* ο οποίος ορίζεται από τον πυρήνα $\overline{k(s,t)}$, όπου $k(t,s)$ ο πυρήνας του K.

Αυτό ισχύει διότι για κάθε $f \in L^2[a,b]$ και για κάθε $g \in L^2[c,d]$ έχουμε:

$$< f, K^*g >=< Kf, g > \Longleftrightarrow \int_a^b f(s)(\overline{K^*g})(s)ds = \int_c^d (Kf)(t)\overline{g}(t)dt$$

$$= \int_c^d \int_a^b k(t,s)f(s)\overline{g}(t)dsdt = \int_a^b \int_c^d f(s)k(t,s)\overline{g}(t)dtds$$

οπότε :

$$(\overline{K^*g})(s) = \int_c^d k(t,s)\overline{g}(t)dt \ \Rightarrow (K^*g)(t) = \int_c^d \overline{k(s,t)}g(s)ds$$

για όλα σχεδόν τα $t \in [a,b]$.

Πρόταση. 2.4.4
Η απεικόνιση Α $\to A^* : B(H) \to B(H)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

i)$(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$

ii)$(A+B)^* = A^* + B^*$

iii) $(AB)^* = B^*A^*$

iv)$A^{**} = (A^*)^* = A$

v)$||A^*A|| = ||A||^2$

Απόδειξη.
$i)$Για κάθε $x, y \in H$ είναι:

$< (\lambda A)^* x, y > = < x, (\lambda A) y > = < \bar{\lambda} A^* x, y > \Rightarrow (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.

Με παρόμοια διαδικασία αποδεινύονται και οι $ii), iii)$ και $iv)$.

$v)||Ax||^2 = < Ax\ ,\ Ax > = < A^*Ax, x > \leq ||A^*A||\ ||x||^2 \Rightarrow ||A||^2 \leq ||A^*A||$ (1)

και $||A^*A|| \leq ||A^*||\ ||A|| = ||A||^2$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $||A^*A|| = ||A||^2$.

□

Ορισμός. 2.4.5
Έστω ένας τελεστής $A \in B(H, K)$.
Ονομάζουμε:

$i)$**Πυρήνα** του A και τον συμβολίζουμε με $kerA$ ή $N(A)$, τον κλειστό υπόχωρο $\{x \in H\ :\ Ax = 0\}$.
$ii)$**Εικόνα ή σύνολο τιμών** του A και το συμβολίζουμε με ImA ή $R(A)$ τον υπόχωρο $A(H) = \{Ax\ :\ x \in H\} \subseteq K$.

Παρατήρηση
Από τον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε ότι ο τελεστής A είναι '1-1'
αν και μόνο αν $kerA = \{0\}$.
Επομένως αν $kerA = \{0\}$ τότε το σύστημα $Ax = y$ έχει το πολύ μια λύση.
Επίσης παρατηρούμε ότι ο πυρήνας $kerA = A^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστός υπόχωρος του H κάτι που δεν ισχύει γενικά για την εικόνα του A.

Θεώρημα. 2.4.6
Έστω ένας τελεστής $A \in B(H, K)$.
Τότε ισχύουν :

$i) kerA = (ImA^*)^{\perp}$

$ii) kerA^* = (ImA)^{\perp}$

$iii) \overline{ImA} = (kerA^*)^{\perp}$

$iv) \overline{ImA^*} = (kerA)^{\perp}$

Απόδειξη.
$i) x \in kerA \iff Ax = 0 \iff < Ax, y > = 0$, για κάθε $y \in K$

$\Longleftrightarrow < x, A^*y >= 0$, για κάθε $y \in K$

$\Longleftrightarrow x \perp A^*y$, για κάθε $y \in K$

$\Longleftrightarrow x \in (ImA^*)^{\perp}$.

Επομένως συμπεραίνουμε ότι $kerA = (ImA^*)^{\perp}$.

$iii)\overline{ImA} = \overline{(ImA)}^{\perp\perp} = (ImA)^{\perp\perp} = (kerA^*)^{\perp}$
Οι αποδείξεις των $ii)$ και $iv)$ προκύπτουν με απο τις $i)$ και $ii)$ με αντικατάσταση του A με A^*.

$\square$

2.5 Αυτοσυζυγείς,φυσιολογικοί τελεστές

Ορισμός. 2.5.1
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ λέγεται **αυτοσυζυγής ή ερμιτιανός** αν $A = A^*$.

Πρόταση. 2.5.2
Αν A $\in B(H)$ είναι αυτοσυζυγής τότε $H = kerA \oplus \overline{ImA}$.

Απόδειξη.
Έχουμε $H = kerA \oplus (kerA)^{\perp}$ τότε από θεώρημα 2.4.6 $v)$ έχουμε
$(kerA)^{\perp} = \overline{ImA^*} = \overline{ImA}$, αφού ο A είναι αυτοσυζυγής.

$\square$

Πρόταση. 2.5.3
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ είναι αυτοσυζυγής, αν και μόνο αν $< Ax, x > \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in H$.

Απόδειξη.
Έστω $A = A^*$.Τότε για κάθε $x \in H$ είναι :

$< Ax, x >=< x, A^*x >=< x, Ax >= \overline{< Ax, x >}$.

Άρα $< Ax, x >\in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in H$.

Αντιστρόφως, αν για κάθε $x \in H$ είναι $< Ax, x >\in \mathbb{R}$, τότε :

$< Ax, x >= \overline{< Ax, x >} = \overline{< x, A^*x >} =< A^*x, x >$.

Άρα $< (A - A^*)x, x >= 0$, για κάθε $x \in H$.

Από το πόρισμα προκύπτει ότι $A - A^* = 0 \Rightarrow A = A^*$.

$\square$

Παρατήρηση
Η προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει σε πραγματικό χώρο *Hilbert*,
αφού είναι $< Ax, y > \in \mathbb{R}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Για παράδειγμα αν $H = \mathbb{R}^2$ και $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

τότε προκύπτει $< Ax, x >= 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$.

Όμως $A^* = A^{\perp} \neq A$.

Θεώρημα. 2.5.4
Αν $A \in B(H)$ είναι αυτοσυζυγής ,τότε :

$$||A|| = sup_{||x|| \leq 1}| < Ax, x > | = sup_{||x||=1}| < Ax, x > |.$$

Ορισμός. 2.5.5
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ λέγεται **θετικός** και συμβολίζεται $A \geq 0$,
αν ισχύει η σχέση$< Ax, x > \geq 0$, για κάθε $x \in H$.

Παρατηρήσεις
Με $B_a(H)$ θα συμβολίσουμε το σύνολο των αυτοσυζυγών τελεστών και με $B_\vartheta(H)$ το σύνολο των θετικών τελεστών επί του H.
Από την πρόταση 2.5.3 και τον ορισμό 2.5.5 παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}_\vartheta(\mathrm{H}) \subseteq B_\alpha(H)$.

Ορισμός. 2.5.6
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ λέγεται :
1) **φυσιολογικός** αν ισχύει $A^*A = AA^*$
2)**ορθομοναδιαίος** αν ισχύει $A^*A = AA^* = I$ δηλαδή $A^{-1} = A^*$.
3)**ισομετρία** αν ισχύει $||Ax|| = ||x||$, για κάθε $x \in H$.

Παρατήρηση
Από τον παραπάνω ορισμό ισχύει ότι μια ισομετρία A είναι πάντα '1-1' .

Αν θεωρήσουμε ότι $Ax = Ay$ τότε ισχύει:

$0 = ||Ax - Ay|| = ||A(x - y)|| = ||x - y|| \Rightarrow x = y$.

Πρόταση. 2.5.7
Έστω H ένας χώρος *Hilbert* και $T \in B(H)$.
Ο τελεστής T είναι :

$i)$φυσιολογικός, αν και μόνο αν $||Tx|| = ||T^*x||$, για κάθε $x \in H$.
$ii)$ισομετρία αν και μόνο αν $< Tx, Ty >=< x, y >$ αν και μόνο αν $T^*T = I$
$iii)$ορθομαναδιαίος αν και μόνο αν είναι ισομετρία και 'επί'.

Απόδειξη.
$i)$ Έστω $T^*T = TT^*$.

Τότε
$||T^*x||^2 =< T^*x, T^*x >=< TT^*x, x >=< T^*Tx, x >=< Tx, Tx >= ||Tx||^2$

$\Rightarrow ||T^*x|| = ||Tx||$.

Αντιστρόφως,

$||T^*x|| = ||Tx|| \Rightarrow ||T^*x||^2 = ||Tx||^2 \Rightarrow< TT^*x, x >=< T^*Tx, x >,$

για κάθε $x \in H$.

$\Rightarrow< (T^*T - TT^*)x, x >= 0$, για κάθε $x \in H \Rightarrow T^*T = TT^* \Rightarrow T$ φυσιολογικός.

$ii)$Για κάθε $x, y \in H$ είναι :

$< Tx, Ty >=< x, y >$

$\Longleftrightarrow< T^*Tx, y >=< x, y >\Longleftrightarrow< (T^*T - I)x, y >= 0 \Longleftrightarrow T^*T = I.$

Επίσης για $x \in H$: $||Tx|| = ||x|| \Longleftrightarrow< T^*Tx, x >=< x, x >\Longleftrightarrow T^*T = I.$

Άρα $||Tx|| = ||x|| \Longleftrightarrow T^*T = I \Longleftrightarrow< Tx, Ty >=< x, y >$.

$iii)$ T ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν $T^*T = I$ και $TT^* = I$.
Η σχέση $T^*T = I$ από $ii)$ είναι ισοδύναμη με το ότι ο Τ είναι ισομετρία .
Άρα πρέπει να δείξω ότι η σχέση $TT^* = I$ είναι ισοδύναμη με τον T να είναι επί, υπό την προυπόθεση ότι $T^*T = I$.
Έστω $y \in H$.Τότε από $TT^* = I$, έχουμε $T(T^*y) = y$ επομένως ο T είναι επί.

Αντιστρόφως, αν T είναι επί τότε για $y \in H$ υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $y = Tx$.

Τότε $T^*y = T^*Tx = Ix = x$.

Από τη σχέση $y = Tx$ έχουμε ότι $y = Tx = TT^*y \Rightarrow TT^* = I$.

□

Παρατήρηση
1)Συμβολίζουμε με $B_\varphi(H)$ το σύνολο των φυσιολογικών τελεστών επι του H και με $U(H)$ το σύνολο των ορθομοναδιαίων τελεστών. Τότε ισχύει ότι $U(H) \subseteq B_\varphi(H)$.

2)Επίσης αν $T \in B_\varphi(H)$ τότε και $T^* \in B_\varphi(\mathrm{H})$.
Αν θεωρήσουμε δύο τελεστές $T, S \in B_\varphi(H)$ το άθροισμα $T+S$ και το γινόμενο TS δεν είναι φυσιολογικοί τελεστές.

Παραδείγματος χάριν, αν θεωρήσουμε $H = \mathbb{C}^2$, $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ και $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$,

τότε είναι $T = T^*$ και $S = -S^*$, και οι $A = T+S$, $B = TS$ δεν είναι φυσιολογικοί.

Πράγματι,

$$AA^* - A^*A = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ και } BB^* - B^*B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Πρόταση. 2.5.8(Γενικευμένη ανισότητα Cauchy – Schwartz)
Αν $A \in B(H)$ και $\mathrm{A} \geq 0$ τότε για κάθε $x, y \in H$ ισχύει :

$$| < Ax, y > |^2 \leq < Ax, x >< Ay, y > .$$

Απόδειξη.
Χρησιμοποιώντας τη πολικη μορφή ενός μιγαδικού αριθμού
$(z = |z|(cos\vartheta + isin\vartheta) = |z|e^{i\vartheta} \Rightarrow |z| = ze^{-i\vartheta})$, έχουμε :

$| < Ax, y > | = e^{-i\vartheta} < Ax, y > = < A(e^{-i\vartheta}x), y > = < Ax_1, y > \in \mathbb{R}$,
όπου $x_1 = e^{-i\vartheta}x$.

Άρα υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $< Ax, y > \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής A είναι αυτοσυζυγής, ως θετικός.

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ έχουμε:

$$< A(\lambda x + y), \lambda x + y > \geq 0 \Rightarrow \lambda^2 < Ax, x > +2\lambda < Ax, y > + < Ay, y > \geq 0$$

από όπου προκύπτει ότι η διακρίνουσα πρέπει να είναι αρνητικη.

Άρα $| < Ax, y > |^2 \leq < Ax, x >< Ay, y >$.

□

Πόρισμα. 2.5.9
Αν $A \in B(H)$, $A \geq 0$ τότε για κάθε $x \in H$ ισχύει : $||Ax||^2 \leq ||A|| < Ax, x >$.

Απόδειξη.
Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση και αφού θέσουμε $y = Ax$ έχουμε ότι :

$$||Ax||^4 =< Ax, Ax >^2 \leq \ < Ax, x >< A(Ax), Ax >$$

□

$$\leq \ < Ax, x > ||A^2 x|| \, ||Ax||$$

$$\leq \ < Ax, x > ||A|| \, ||Ax|| \, ||Ax||$$

$$\Rightarrow ||Ax||^2 \leq ||A|| < Ax, x >.$$

2.6 Αντιστρέψιμοι Τελεστές

Ορισμός. 2.6.1
Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $A \in B(X, Y)$.
Ο τελεστής A λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει τελεστής $B \in B(X, Y)$ τέτοιος ώστε :
$AB = I_Y$ και $BA = I_X$ όπου I_X , I_Y οι ταυτοτικοί τελεστές επί των X, Y αντίστοιχα.

Ισόδυναμα $ABy = y$ για κάθε $y \in Y$ και $BAx = x$, για κάθε $x \in X$.
Ο B, όταν υπάρχει, είναι μοναδικός συμβολίζεται με $B = A^{-1}$ και λέγεται **αντίστροφος** του A.

Θεώρημα. 2.6.2(Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης)
Αν X, Y χώροι *Banach* και ο τελεστής $T \in B(X, Y)$ είναι επί τότε η T είναι ανοιχτή απεικόνιση(αυτό σημαίνει ότι $T(M)$ είναι ανοιχτό στον Y για κάθε ανοιχτό υποσύνολο M του X).

Πόρισμα. 2.6.3
Αν X, Y είναι χώροι *Banach* και ο τελεστής $T \in B(X, Y)$ είναι '1-1' και 'επί' τότε ο T είναι αντιστρέψιμος(δηλαδή υπάρχει η T^{-1}και είναι συνεχής).

Απόδειξη.
Επειδή ο T είναι '1-1' και επί η T^{-1} είναι καλά ορισμένη και από το θεώρημα 2.6.2 είναι συνεχής, άρα είναι φραγμένος τελεστής.

□

Ορισμός. 2.6.4
Ένας τελεστής $T \in B(X)$ λέμε ότι είναι **κάτω φραγμένος**, αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε $||Tx|| \geq c||x||$, για κάθε $x \in X$.

Θεώρημα. 2.6.5
Έστω X ένας χώρος $Banach$ και $T \in B(X)$.
Ο T είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένος και έχει πυκνό σύνολο τιμών($\overline{ImT} = X$)

Απόδειξη.
Αν ο T είναι αντιστρέψιμος τότε $ImT = X$ και επομένως ImT είναι πυκνό .
Επίσης ισχύει $||x|| = ||T^{-1}Tx|| \leq ||T^{-1}|| \, ||Tx|| \Rightarrow ||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1}||x||$,$x \in X$ άρα T κάτω φραγμένος.

Αντιστρόφως, αν ο T είναι κάτω φραγμένος τότε υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε $||Tx|| \geq c||x||$, για κάθε $x \in X$.
Άρα αν (Tx_n) είναι μια βασική ακολουθία στο ImT τότε από τη σχέση :

$$||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{c}||Tx_n - Tx_m||$$

προκύπτει ότι η ακολουθία (x_n) είναι βασική.

Συνεπώς συγκλίνει έστω στο x.

Τότε $lim_{n\to\infty}Tx_n = Tx$ ανήκει στο ImT και επομένως το ImT είναι κλειστός υπόχωρος του X.
Άρα αν είναι πυκνός θα ισχύει $ImT = X$.
Επειδή ο T είναι κάτω φραγμένος προκύπτει ότι είναι '1-1'.

□

Επομένως υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση T^{-1} η οποία είναι και φραγμένη διότι αν $y = Tx$ τότε $||T^{-1}y|| = ||x|| \leq \frac{1}{c}||Tx|| = \frac{1}{c}||y||$.

Πρόταση. 2.6.6
Αν ο τελεστής $T \in B(X)$ είναι κάτω φραγμένος , τότε έχει σύνολο τιμών ImT κλειστό.

Απόδειξη.
Η απόδειξη έχει γίνει στο θεώρημα 2.6.5

□

Πόρισμα. 2.6.7
Αν ο τελεστής $T \in B(X)$ είναι κάτω φραγμένος τότε ImT^n είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.
Αφού ο T είναι κάτω φραγμένος υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $||Tx|| \geq c||x||$, για κάθε $x \in X$ και με επαγωγή ισχύει $||T^n x|| \geq c^n ||x||$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Επομένως από την πρόταση 2.6.5 προκύπτει ότι το ImT^n είναι κλειστό $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Πρόταση. 2.6.8
Έστω H ένας χώρος $Hilbert$ και $T \in B(H)$.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

$i)$ T είναι αντιστρέψιμος
$ii)$$T^*$είναι αντιστρέψιμος
$iii)$$T$ και T^* είναι κάτω φραγμένοι
$iv)$$T$ και T^* είναι ένα προς ένα και το ImT είναι κλειστό.

Απόδειξη.
$i) \iff ii)$ Ο T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $TT^{-1} = T^{-1}T = I \iff (T^{-1})^* T^* = T^*(T^{-1})^* = I \iff T^*$ αντιστρέψιμος.

$i) \Rightarrow iii)$ Για κάθε $x \in H$ έχουμε:
$||x|| = ||T^{-1}Tx|| \leq ||T^{-1}||\ ||Tx|| \Rightarrow ||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1}\ ||x||$
Άρα ο T είναι κάτω φραγμένος και από την ισοδυναμία $i) \iff ii)$

ο T^* είναι επίσης κάτω φραγμένος.

$iii) \to i)$ Αν ο T^* είναι κάτω φραγμένος τότε $kerT^* = \{0\}$
οπότε $R(T)^{\perp} = kerT^* = \{0\} \Rightarrow R(T)^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H$.

Όμως από προηγούμενο πόρισμα $R(T)^{\perp\perp} = \overline{R(T)}$
Επομένως $\overline{R(T)} = H$ δηλαδή, ο T έχει σύνολο τιμών πυκνό και επειδή ο T είναι κάτω φραγμένος, από προηγούμενο θεώρημα, είναι αντιστρέψιμος.

$iii) \Rightarrow iv)$ Έστω $c > 0$ τέτοιος ώστε $||Tx|| \geq c||x||$ και $||T^*x|| \geq c||x||$,

για κάθε $x \in H$.

Παρατηρούμε ότι οι τελεστές είναι '1-1'.Επιπλέον το ImT είναι κλειστό.

$iv) \Rightarrow i)$ Επειδή ImT είναι κλειστό και $kerT^* = \{0\}$, αφού T^* είναι '1-1' έχουμε από προηγουμενο θεώρημα και πόρισμα

$$ImT = ((ImT)^{\perp})^{\perp} = (kerT^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H.$$

Άρα ο T είναι επί και επειδή από υπόθεση είναι "$1-1$" θα είναι αντιστρέψιμος

$\square$

Πόρισμα. 2.6.9
Ένας φυσιολογικός τελεστής T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένος.

Απόδειξη.
Αν ο T είναι φυσιολογικός, τότε για κάθε $x \in H$ είναι $||Tx|| = ||T^*x||$.
Άρα ο T είναι κάτω φραγμένος, αν και μόνο αν ο T^* είναι κάτω φραγμένος.
Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από την ισοδυναμία $(i) \iff (iii)$ της προηγούμενης πρότασης.

$\square$

Πόρισμα. 2.6.10
Έστω X ένας χώρος $Banach$ και $T \in B(X)$.
Ο T είναι μη αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είτε το ImT δεν είναι πυκνό στον X είτε υπάρχει ακολουθία (x_n) του X με $||x_n|| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $limTx_n = 0$.

Θεώρημα. 2.6.11
Έστω X ένας χώρος $Banach$ και $A \in B(X)$.
Αν $||A|| < 1$ τότε ο τελεστής $I - A$ είναι αντίστρέψιμος και ισχύει :

$$1)(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ ,(A^0 = I)$$

$$2)||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||}.$$

2.7 Πίνακας Τελεστών

Έστω H ένας χώρος $Hilbert$,$A \in B(H)$ ένας τελεστής και $\{e_1, e_2, ...\}$ μια ορθοκανονική βάση.
Κάθε $x \in H$ έχει την έκφραση $x = \sum_{j=1}^{\infty} < x, e_j > e_j$.

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n) : x_n = \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j$. Τότε $x_n \to x$ και επειδή ο A είναι γραμμικός και συνεχής έχουμε :

$$Ax = lim_{n\to\infty} Ax_n = lim_{n\to\infty} A(\textstyle\sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j)$$

$$= lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{j=1}^{n} < x, e_j > Ae_j$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} < x, e_j > Ae_j.$$

Παρατηρούμε ότι $Ae_j = \sum_{i=1}^{\infty} < Ae_j, e_i > e_i$, οπότε

$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} < x, e_j > Ae_j = \sum_{j=1}^{\infty} < x, e_j > \sum_{i=1}^{\infty} < Ae_j, e_i > e_i$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} < x, e_j >< Ae_j, e_i > e_i$$

Έστω ότι $y = Ax$, $y = \sum_{i=1}^{\infty} < y, e_i > e_i$.

Τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή :

$$\begin{bmatrix} < Ae_1, e_1 > & < Ae_2, e_1 > & ... \\ < Ae_1, e_2 > & < Ae_2, e_2 > & ... \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < x, e_1 > \\ < x, e_2 > \\ . \\ . \\ . \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < y, e_1 > \\ < y, e_2 > \\ . \\ . \\ . \\ \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $[A] = (a_{ij})$, όπου $(a_{ij}) =< Ae_j, e_i >$ λέγεται **πίνακας του τελεστή** A ως πρός την ορθοκανονική βάση $\{e_i\}$.
Είναι $y = Ax \Longleftrightarrow y^{\top} = [A]x^{\top}$.

Παραδείγματα

1)Ο διαγώνιος τελεστής T_a, $a = (a_n)$, $T_a(x_1, x_2, x_3, ...) = (a_1x_1, a_2x_2, ...)$ ως προς τη συνηθισμένη βάση του l_2 έχει πίνακα τον άπειρο διαγώνιο πίνακα:

$$[D] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & a_2 & 0 & ... \\ 0 & 0 & a_3 & ... \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Επομένως $< T_ae_j, e_i >=< a_je_j, e_i >= a_j\delta_{ji}$ και άρα προκύπτει ότι όλα τα στοιχεία είναι μηδέν εκτός από τα διαγώνια στοιχεία, που είναι οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2)Ο τελεστής της δεξιάς μετατόπισης $S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ ως προς τη

συνηθισμένη βάση του l_2 έχει πίνακα $[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$.

Έτσι ισχύει $< Se_j, e_i >=< e_{j+1}, e_i >= \delta_{j+1,i}$. Επομένως όλα τα στοιχεία του πίνακα είναι μηδέν εκτός από τις θέσεις $(i, j) = (i, i-1)$ που είναι ίσα με ένα.

2.8 Προβολές

Έστω X ένας διανυσματικός χωρος και M, N δύο υποχωροί του ,τέτοιοι ώστε ο X να είναι το ευθύ αθροισμά τους, δηλαδή $X = M \dot{+} N$ ($\Rightarrow X = M + N$, $M \cap N = \{0\}$). Σε αυτήν την περίπτωση οι χώροι M, N λέγονται **συμπληρωματικοί.**

Τα παραπάνω είναι ισοδύναμα με:

Κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = m + n$, $m \in M$ και $n \in N$.
Επομένως ορίζεται η απεικόνιση $P : X \to X$ με $Px = m$.
Η P είναι καλά ορισμένη και ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$i)$ είναι γραμμική
$ii) P^2 = P$
$iii) R(P) = M$
$iv)$ $ker(P) = N$.

Η απεικόνιση P είναι η **προβολή** του X επί του M παράλληλα πρός το N.
Αντιστρόφως, έστω $P : X \to X$ μια γραμμική απεικόνιση με $P^2 = P$.
Τότε οι χώροι $kerP$ και $R(P)$ είναι συμπληρωματικοί και το άθροισμα τους είναι ευθύ.
Ισχύει ότι κάθε $x \in X$ γράφεται $x = Px + (x - Px)$ και αν $x \in R(P) \cap ker(P)$ $\Rightarrow x = Px = 0$.
Επομένως $R(P) \cap ker(P) = \{0\}$.
Άρα η P είναι η προβολή του X επί του $R(P)$ παράλληλα προς τον $ker(P)$.

Ορισμός. 2.8.1
Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $P \in B(X)$ ένας φραγμένος τελεστής.
Ο τελεστής P λέγεται **ταυτοδύναμος** αν $P^2 = P$.

Πρόταση. 2.8.2
Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $P \in B(X)$ ένας ταυτοδύναμος τελεστής.
Τότε οι υπόχωροι $R(P), ker(P)$ είναι κλειστοί και συμπληρωματικοί.
Επιπλέον ισχύει: $ker(P) = R(I - P)$ και $ker(I - P) = R(P)$.

Απόδειξη.
Επειδή το $\{0\}$ είναι κλειστός υπόχωρος και ο P είναι συνεχής συνεπάγεται ότι $P^{-1}(\{0\}) = kerP$ θα είναι κλεστός υπόχωρος .
Για τον $R(P)$ επειδή ο $I - P$ είναι συνεχής και ταυτοδύναμός αρκεί να δείξουμε ότι $ker(I - P) = R(P)$.
Έστω $x \in R(P)$.Τότε υπάρχει $y \in X$ με $x = Py$, οπότε είναι $Px = P^2y = Py = x$.
Άρα $(I - P)x = x - Px = 0$ και άρα $x \in ker(I - P)$.
Αντιστρόφως αν $x \in ker(I-P) \Rightarrow 0 = (I-P)x = x-Px \Rightarrow x = Px$, άρα $x \in R(P)$.
□

Θεώρημα. 2.8.3(Θεώρημα κλειστού γραφήματος)
Αν X, Y είναι χώροι *Banach* και $T : X \to Y$ μια γραμμική κλειστή απεικόνιση (δηλαδή το γράφημα της $\{(x, Tx), x \in X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $X \times Y$) τότε η T είναι συνεχής.

Πρόταση. 2.8.3
Έστω X ένας χώρος *Banach* και M, N δύο κλειστοί και συμπληρωματικοί υπόχωροι $(X = M \dotplus N)$.
Τότε η προβολή του X επί του M παράλληλα προς τον N είναι ταυτοδύναμος τελεστής.

Απόδειξη.
Θεωρώ $ImP = M$ και $kerP = N$. Έχω $P^2 = P$ ως προβολή.
Με βάση το θεώρημα κλειστού γραφήματος αρκεί να δείξουμε ότι ο P είναι κλειστός τελεστής.
Έστω $x_n \to x$ και $Px_n \to y$.Τότε $x_n - Px_n \to x - y$.
Όμως $Px_n \in M$ και $x_n - Px_n \in N$ οπότε $y \in M$ και $x - y \in N = ker(P)$.
Άρα $P(x - y) = 0 \Rightarrow Px = Py = y$.
Επομένως $(x_n, Px_n) \to (x, y) = (x, Px)$ και άρα P κλειστός.
□

Ορισμός. 2.8.4
Αν M είναι ένας κλεστός υπόχωρος ενός χώρου *Hilbert* H και $x \in H \backslash M$ τότε υπάρχει μοναδικό $m \in M$ τέτοιο ώστε $d(x, M) = ||x - m|| \iff (x - m) \perp M$.
Έτσι ορίζεται η απεικόνιση $P_M : H \to H$ με $P_M(x) = m$ που είναι η προβολή του H επί του M παράλληλα προς τον $M^{\perp}$.
Γι' αυτό η P_M λέγεται **ορθή προβολή** του H επί του M.

Πρόταση. 2.8.5
Έστω H ένας χώρος *Hilbert* και M ένας κλειστός υπόχωρος του.
Η ορθή προβολή P_M είναι συνεχής με $||P_M|| = 1$.

Απόδειξη.
Για κάθε $x \in H$ είναι $P_M x \in M$ και $x - P_M x \in M^{\perp}$, οπότε με χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε :

$$||x||^2 = ||P_M x||^2 + ||x - P_M x||^2 \Rightarrow ||P_M x|| \leq ||x|| \Rightarrow ||P_M|| \leq ||1||$$

$$||P_M|| = ||P_M^2|| \leq ||P_M||^2 \Rightarrow ||P_M|| \geq 1.$$

Άρα $||P_M|| = 1$.

□

Θεώρημα. 2.8.6
Έστω H ένας χώρος $Hilbert$ και $P \in B(H)$ ένας ταυτοδυναμος τελεστής.
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :
1) Ο P είναι ορθογώνια προβολή
2)Ο P είναι αυτοσυζυγής
3)$||P|| = 1$
4)$ker(P) \perp R(P)$

Απόδειξη.
(1)$\Longleftrightarrow$ (2)
Έστω P ορθογώνια προβολή και $M = R(P)$.
Είναι $H = M \oplus M^{\perp}$και αν $x, y \in H$ με $x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in M$, $x_2, y_2 \in M^{\perp}$, τότε :

$$< Px, y >=< P(x_1 + x_2), y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 > + < x_1, y_2 >=$$

$$=< x_1, y_1 >=< x_1, y_1 > + < x_2, y_1 >$$

$$=< x_1 + x_2, y_1 >=< x, y_1 >$$

$$=< x, Py >=< P^* x, y >.$$

Άρα $P = P^*$.

Αντιστρόφως έστω $P = P^*$.
Τότε $H = PH + (I - P)H = R(P) + R(I - P)$.

Αρκεί να δείξω ότι $R(P) \perp R(I - P)$.
Έστω $x \in R(P)$ και $y \in R(I - P)$.
Τότε $< x, y >=< Px, (I - P)y >=< x, P(I - P)y >=< x, 0 >= 0$.

$\Rightarrow x \perp y$.

(1)$\Rightarrow$ (3) Αποδείχτηκε από τη προηγούμενη πρόταση.

(3) $\Rightarrow$ (4) Θα δείξουμε ότι ισχύει $ker(P)^{\perp} = R(P)$.

Έστω $x \in ker(P)^{\perp}$.
Όμως παρατηρώ ότι $(I - P)x \in ker(P)$,
διότι $P(I - P)x = 0 \Rightarrow Px - P^2x = Px - Px = 0$.

Επομένως $x \perp (I - P)x$ και χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε :
$||x||^2 + ||(I - P)x||^2 = ||x - (I - P)x||^2 = ||Px||^2 \leq ||P||^2||x||^2 = ||x||^2$.
Άρα $(I - P)x = 0 \Rightarrow x \in R(P) \Rightarrow ker(P)^{\perp} \subseteq R(P)$.
Ο $R(P)$ ως κλειστός υπόχωρος είναι χώρος $Hilbert$.

Έστω N το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $ker(P)^{\perp}$ στον $R(P)$.
Τότε $R(P) = ker(P)^{\perp} \oplus N$.
Όμως υποθέσαμε ότι $N \subseteq ker(P)^{\perp\perp} = ker(P)$, $N \subseteq R(P)$ και
$ker(P) \cap R(P) = \{0\}$.
Επομένως $N = \{0\}$ και συνεπώς $R(P) = ker(P)^{\perp}$.

(4)$\Rightarrow$ (1): Έστω $ker(P) \perp R(P)$. Επειδή οι χώροι $kerP, R(P)$ είναι συμπληρωματικοί έπεται ότι $R(P) = ker(P)^{\perp}$.
Επομένως ο P, ως ταυτοδύναμος, είναι η προβολή του H επί του $R(P)$ παράλληλα προς τον $ker(P)$, θα είναι η ορθή προβολή επί του $R(P)$.

$\square$

Πρόταση. 2.8.7
Έστω H ένας χώρος $Hilbert$, M και N κλειστοί υπόχωροι του H και P, Q οι αντίστοιχες ορθές προβολές($PH = M$,$QH = N$).
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

$i)$ $P \leq Q$
$ii)$$||Px|| \leq ||Qx||$ $\forall x \in H$
$iii)$ $M \subseteq N$
$iv)$ $QP = P$
$v)$ $PQ = P$

Απόδειξη.
Ξέρουμε ότι οι P, Q ως ορθογώνιες προβολές είναι αυτοσυζυγείς ταυτοδύναμοι τελεστές.
Άρα $P = P^* = P^2$ και $Q = Q^* = Q^2$ και ακόμη $||P|| = ||Q|| = 1$.

$i) \Rightarrow ii)$Για κάθε $x \in H$ είναι:

$||Px||^2 =< Px, Px >=< P^*Px, x >=< P^2x, x >$

$$=< Px, x >\leq< Qx, x >\leq< Q^2x, x >=< Qx, Qx >$$

$$= ||Qx||^2 \Rightarrow \ ||Px|| \leq ||Qx||.$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Έστω $x \in M \Rightarrow x = Px$.

Άρα συμπεραίνουμε ότι:

$||x||^2 = ||Px||^2 \leq ||Qx||^2 \leq ||Q||^2||x||^2 \leq ||x||^2 \Rightarrow ||Qx|| = ||x||$ (1).

Αφού όμως $Qx \perp (I - Q)x$ με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$||x||^2 = ||Qx||^2 + ||(I - Q)x||^2$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (1) έχουμε ότι $(I - Q)x = 0 \Rightarrow Qx = x$.
Άρα $x \in N$. Επομένως $M \subseteq N$.

$iii) \Rightarrow iv)$ Για κάθε $x \in H$ είναι : $Px \in M \subseteq N \Rightarrow Q(Px) = Px \Rightarrow QP = P$.

$iv) \Rightarrow v)$ $QP = P \Rightarrow (QP)^* = P^* \Rightarrow P^*Q^* = P^* \Rightarrow PQ = P$.

$v) \Rightarrow i)$ Για κάθε $x \in H$ είναι :

$||Px|| = ||PQx|| \leq ||P||\ ||Qx|| = ||Qx|| \Rightarrow ||Px|| \leq ||Qx||$.

Επίσης,

$< Px, x >=< P^2x, x >=< Px, Px >= ||Px||^2 \Rightarrow$

$< Px, x >\leq ||Qx||^2 =< Qx, Qx >=< Q^2x, x >=< Qx, x >$.

Άρα $P \leq Q$.

□

Πρόταση. 2.8.8
Έστω H ένας χώρος *Hilbert* M και N κλειστοί υπόχωροι του H και P, Q οι αντίστοιχες ορθές προβολές($PH = R(P) = M$, $QH = R(Q) = N$).
Τοτε :
1)Το **γινόμενο** PQ είναι ορθη προβολή αν και μόνο αν $PQ = QP$, δηλαδή P, Q αντιμετατίθενται. Στην περίπτωση αυτή είναι $R(PQ) = M \cap N$.
Συνέπεια:$M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0$.

2)Το **άθροισμα** $P + Q$ είναι ορθή προβολή, αν και μόνο αν $M \perp N$ και τότε

$$R(P+Q)=M+N$$

3)Η **διαφορά** $P-Q$ είναι ορθή προβολή αν και μόνο αν $M\supseteq N$ και τότε

$$R(P-Q)=M\cap N^{\perp}$$

Απόδειξη.
1)Έστω ότι PQ είναι προβολή.Τότε $(PQ)^*=PQ$ οπότε $Q^*P^*=PQ$ και άρα $QP=PQ$.
Αντιστρόφως, αν $PQ=QP$ τότε ο PQ είναι αυτοσυζυγής και ταυτοδύναμος, αφού $(PQ)^2=PQPQ=PPQQ=P^2Q^2=PQ$.
Άρα απο θεώρημα 2.8.6, ο PQ είναι προβολή.
Θα δείξουμε ότι $R(PQ)=M\cap N$.
Έστω $x\in M\cap N$.
Τότε:

$$(PQ)x=P(Qx)=Px=x\Rightarrow x\in R(PQ), \text{ οπότε } M\cap N\subseteq R(PQ).$$

Αντιστρόφως, έστω $y\in R(PQ)$.
Τότε

$$y=P(Qy)=Q(Py) \text{ άρα } y\in M\cap N, \text{ επομένως } R(PQ)\subseteq M\cap N.$$

Συνεπώς $R(PQ)=M\cap N$.

Απόδειξη συνέπειας:
Αν $M\perp N$ τότε $M=R(P)\subseteq N^{\perp}$, οπότε $Q(Px)=0$, για κάθε $x\in H$ και άρα $QP=0$.
Αν $QP=0$ τότε για κάθε $x\in M$ έπειται ότι 0=$QPx=Qx$
οπότε:

$x\in N^{\perp}$ άρα $M\subseteq N^{\perp}$, δηλαδή $M\perp N$.

2)Έστω $P+Q$ προβολή. Τότε για κάθε $x\in H$ είναι:
$<Px,x>\ \leq\ <Px,x>+<Qx,x>=<(P+Q)x,x>$

$\Rightarrow P\leq P+Q$.

Άρα από την προηγούμενη πρόταση $(P+Q)P=P\Rightarrow PQ=0$.
Άρα από την προηγούμενη συνέπεια $M\perp N$.

Αντιστρόφως, αν $M\perp N$ ισχύει ότι $PQ=QP=0$, οπότε $(P+Q)^2=P+Q$.

Επίσης $(P+Q)^* = P^*+Q^* = P+Q$ και συνεπώς προκύπτει ότι $P+Q$ είναι προβολή.
Στη συνέχεια μένει να δείξω ότι $R(P+Q) = M+N$.

Επειδή $M \perp N$ ισχύει ότι $M+N$ κλειστός υπόχωρος.
Επίσης ισχύει ότι $(P+Q)x = Px+Qx$ $\forall x \in H$ οπότε $R(P+Q) \subseteq M+N$.

Έστω $x \in M$ τότε $Qx = 0$ και $(P+Q)x = Px = x$.
Άρα $x \in R(P+Q)$ και συνεπώς $M \subseteq R(P+Q)$.
Ομοίως $N \subseteq R(P+Q)$ και προκύπτει ότι $M+N = R(P+Q)$.

3)Έστω $P-Q$ προβολή.Τότε $P-Q \geq 0$ άρα $P \geq Q$ και $N \subseteq M$.
Αντιστρόφως $N \subseteq M \iff P \geq Q \iff P-Q \geq 0 \iff PQ = QP = Q$,
οπότε :
$(P-Q)^2 = P^2 - PQ - QP + Q^2 = P - Q$.
Άρα ο $P-Q$ είναι ταυτοδύναμος.

Επίσης είναι και αυτοσυζυγής, αφού $P-Q \geq 0$ συνεπώς ο $P-Q$ είναι προβολή.
Εφόσον έχουμε $PQ = QP = Q$ είναι $P(I-Q) = (I-Q)P = P-Q$, οπότε
$R(P(I-Q)) = M \cap N^{\perp} = R(P-Q)$.

□

2.9 Φάσμα Τελεστή

Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι κάθε μιγαδικός $n \times n$ πίνακας A έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή λ και άρα υπάρχει $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $Ax = \lambda x$.

Ορισμός. 2.9.1
Έστω $A \in B(H)$. Ονομάζουμε **φάσμα(spectrum)** του τελεστή A το σύνολο:

$$\sigma(\mathrm{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ μη αντιστρέψιμος } \}$$

Πρόταση. 2.9.2
Έστω $A \in B(H)$.
Το φάσμα σ(A) είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και ισχύει :

$$\sigma(\mathrm{A}) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq ||A||\}$$

Απόδειξη.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to B(H) : f(\lambda) = \lambda I - A$.
Ισχύει ότι $||f(\lambda) - f(\mu)|| = |\lambda\text{-}\mu|$ και συνεπώς η f είναι συνεχής.
Έστω $M = B(H) \backslash B_{ant}(H)$ το σύνολο των μη αντιστρέψιμων τελεστών.

Επειδή το σύνολο των αντιστρέψιμων τελεστων είναι ανοιχτό συνεπάγεται ότι το σύνολο M είναι κλειστό.
Άρα και το $f^{-1}(M)$ το οποίο ισούται, λόγω ορισμού, με το σ(A) θα είναι κλειστό ως υποσύνολο του $\mathbb{C}$.
Αν $|\lambda| > ||A||$ τότε $||\frac{1}{\lambda}A|| < 1$ οπότε ο τελεστής $I - (1/\lambda)A$ είναι αντιστρέψιμος.
Συνεπώς και ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος και άρα $\lambda \notin \sigma(A)$.
Επομένως είναι $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq ||A||\}$, δηλαδή το σ(A) είναι και φραγμένο.
Άρα το $\sigma(A)$ είναι συμπαγές, ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

□

Ορισμός. 2.9.3
Το ανοικτό σύνολο $p(A) = \mathbb{C} \backslash \sigma(A)$ λέγεται **επιλύον** και ονομάζεται έτσι διότι για κάθε $\lambda \in p(A)$ η εξίσωση $(\lambda I - A)y = x$ επιλύεται αφού υπάρχει ο τελεστής $(\lambda I - A)^{-1}$.
Τον αριθμό $r(A) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ τον ονομάζουμε **φασματική ακτίνα** του A.
Αποδεικνύεται ότι $lim_{n\to\infty}||A^n||^{1/n} = r(A) = sup\{|\lambda|:\lambda \in \sigma(A)\}$.

2.9.1 Διαμέριση φάσματος

Θεώρημα. 2.9.1.1
Έστω $A \in B(H)$. Ο A είναι αντιστρέψιμος τελεστής αν και μόνο αν ισχύουν:

$i)\overline{R(A)} = H$ δηλαδή το σύνολο τιμών του A είναι πυκνό υποσύνολο του H.
$ii)$ υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε $||Ax|| \geq k||x||$ για κάθε $x \in H$, δηλαδή ο A είναι κάτω φραγμένος.

Απόδειξη.
Έστω A αντιστρέψιμος και $y \in H$.
Αν $x = A^{-1}y$ τότε $y = Ax \in R(A)$, οπότε $R(A) = \overline{R(A)} = H$.
Επιπλέον για κάθε $x \in H$ ισχύει :

$$||x|| = ||A^{-1}Ax|| \leq ||A^{-1}||\ ||Ax|| \Rightarrow ||Ax|| \geq \frac{1}{||A^{-1}||}||x|| = k||x||.$$

Αντιστρόφως έστω ότι ισχύουν οι $i)$ $ii)$ και θα δείξω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος τελεστής.
Από την υπόθεση $ii)$ συνεπάγεται ότι ο τελεστής A είναι "$1-1$" και ότι το $R(A)$ είναι κλειστό.
Από την υπόθεση $i)$ προκύπτει ότι ο τελεστής A είναι επί.Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος και άρα για κάθε y υπάρχει μοναδικό x τέτοιο ώστε $y = Ax$.
Ορίζουμε την απεικόνιση $B : H \to H$ με $By = x$.Η B είναι γραμμική και ισχύει :

$$||By|| = ||x|| \leq \frac{1}{k}||Ax|| = \frac{1}{k}||y||.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο B είναι φραγμένος τελεστής και επιπλέον ισχύουν :
1)$ABy = Ax = y$, για κάθε $y \in H$
2)$BAx = By = x$, για κάθε $x \in H$
Από 1) και 2) προκύπτει ότι $AB = BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$.

□

Ορισμός. 2.9.1.2
Έστω $A \in B(H)$.
Ονομάζουμε :

i) **σημειακό φάσμα(point spectrum)** του A το σύνολο:

$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : ker(\lambda I - A) \neq \{0\}\}$.

*ii)***Προσεγγιστικά σημειακό φάσμα(***approximation point spectrum***)** του A το σύνολο:

$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}$:υπάρχει ακολουθία (x_n) του H, τέτοια ώστε $||x_n|| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $||(\lambda I - A)x_n|| \rightarrow 0\}$

iii) **φάσμα συμπίεσης** (*compression spectrum*) του A το σύνολο:

$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(\lambda I - A)} \neq H\}$

Ορισμός. 2.9.1.3
Με βάση τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_{ap}(A)$ και αποδεικνύεται ότι το σύνορο $\partial\sigma$(A) του σ(A) είναι υποσύνολο του $\sigma_{ap}(A)$.
Παρατηρούμε ακόμη ότι για κάθε $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$ ο τελεστής $\lambda I - A$ δεν είναι κάτω φραγμένος.
Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι σ(A) $= \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_c(A)$.

Τα $\lambda \in \sigma_p(A)$ λέγονται **ιδιοτιμές** του A , τα $x \in ker(\lambda I - A)$, $x \neq 0$ **ιδιοδιανύσματα** του A και οι ker(λI-A) **ιδιόχωροι** του A.
Τα $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$ λέγονται **γενικευμένες ιδιοτιμές** του A και τα αντίστοιχα x_n γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A.
Οι ιδιόχωροι του A είναι αναλοίωτοι απο τον A.
Ένας κλειστός υπόχωρος M ονομάζεται **αναλοίωτος** από έναν τελεστή A αν AM ⊆ M ή ισοδύναμα αν για κάθε $x \in M$ το $Ax \in M$.

Θεώρημα. 2.9.1.4
Έστω $A \in B(H)$ ένας φυσιολογικός τελεστής .Τότε
$i)$Για $x \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι $Ax = \lambda x \Longleftrightarrow A^*x = \overline{\lambda}x$
$ii)$ σ(A)=$\sigma_{ap}(A)$
$iii)$ Οι ιδιόχωροι του A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετοι μεταξύ τους.
$iv)$Κάθε ιδιόχωρος του A είναι αναλλοίωτος και από τον A και από τον A^*.
$v)r(A) = ||A||$

Απόδειξη.
$i)$ Επειδή ο A είναι φυσιολογικός για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε και ο $A-\lambda I$ είναι φυσιολογικός Άρα ισχύει:

$$||(A - \lambda I)x|| = ||(A - \lambda I)^*x|| = ||(A^* - \overline{\lambda}I)x||$$

$ii)$ Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\lambda \notin \sigma_{ap}(A)$ τότε $\lambda \notin \sigma_c(A)$, δηλαδή ότι το $Im(A - \lambda I)$ είναι πυκνό στον H.
Έστω $x \in Im(A - \lambda I)^{\perp} = ker(A^* - \overline{\lambda}I)$.

Τότε $(A^* - \overline{\lambda}I)x = 0$. (1)

Όμως αφού $\lambda \notin \sigma_{ap}(A)$, ο $(A - \lambda I)$ είναι κάτω φραγμένος και επειδή είναι φυσιολογικός θα είναι$||(A^* - \overline{\lambda}I)x|| = ||(A - \lambda I)x|| \geq c||x||$, οπότε λόγω της (1) θα είναι $x = 0$.

Επομένως $Im(A - \lambda I)^{\perp} = \{0\}$ και άρα $\overline{Im(A - \lambda \mathrm{I})} = H$.

$iii)$ Έστω $x \in ker(A - \lambda I)$ και $y \in ker(A - \mu I)$ και λαμβάνοντας υπόψιν το $i)$ ισχύει $y \in ker(A^* - \overline{\mu}I)$
οπότε:

$\lambda < x, y >=< \lambda x, y >=< Ax, y >=< x, A^*y >=< x, \overline{\mu}y >= \mu < x, y >\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (λ-μ) $< x, y >= 0$

Άρα αφού $\lambda \neq \mu$ τότε $< x, y >= 0$ και συνεπώς $ker(A - \lambda I) \perp ker(A - \mu I)$.

$iv)$Για κάθε $x \in ker(A - \lambda I)$ είναι $Ax = \lambda x$ και $A^*x = \overline{\lambda}x$ ισοδύναμα ο $ker(A - \lambda I)$ έιναι αναλοίωτος από τον A και από τον A^*.

$v)$ Ξέρουμε ότι $r(A) = lim_{n\to\infty}||A^n||^{1/n}$.

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι $||A||^2 = ||A^2||$, διότι τότε ϑα είναι $||A^{2^k}|| = ||A||^{2^k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Είναι $||A^2||^2 = ||A^2(A^2)^*|| = ||AAA^*A^*|| = ||(AA^*)(AA^*)^*|| = ||AA^*||^2 = ||A||^4$.

$\square$

3 Συμπαγείς Τελεστές

3.1 Τελεστές πεπερασμένης τάξης

Έστω $T \in B(H,K)$ ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης n.
Ο T έχει τη μορφή $Tx = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > f_i$, για κάθε $x \in H$, όπου τα διανύσματα $\{e_i\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα f_i ορθοκανονικά.
Για παράδειγμα ένας τελεστής τάξης 1 έχει τη μορφή:

$$S = e \otimes f : \; H \to K \text{ με } (e \otimes f)(x) = < x, e > f.$$

Αν T είναι ένας τελεστής τάξης n, οπότε γράφεται $T = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ (3.1),
ο συζυγής του T^* γράφεται $T^* = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes e_i$. Άρα $rank(T) = rank(T^*) = n$.
Το σύνολο των τελεστών $T : H \to K$ πεπερασμένης τάξης θα συμβολίζεται με $F(H,K)$ και με $F(H)$ όταν $H = K$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (3.1) έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες :
i)Κάθε γραμμικός συνδυασμός τελεστών πεπερασμένης τάξης είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης.
ii) αν $T, S \in F(H)$ τότε και $TS \in F(H)$
iii)αν $T \in F(H)$ και $S \in B(H)$ τότε $TS, ST \in F(H)$.
iv) το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης δεν είναι πάντα τελεστής πεπερασμένης τάξης
Το iv) φαίνεται με το παρακάτω παράδειγμα :

Παράδειγμα. 3.1.1
Θεωρώ την ακολουθία (T_n) των τελεστών $T_n \in B(l_2)$,
όπου

$$T_n(x_1, x_2, ...) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{n}x_n, 0, ...).$$

Παρατηρώ ότι κάθε T_n είναι τελεστής τάξης n και η ακολουθία (T_n) συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $B(l_2)$ στον διαγώνιο τελεστή T_a με $a = (a_n) = (\frac{1}{n})$,
δηλαδή συγκλίνει στον $T_a x = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, ...)$.
Επίσης παρατηρώ ότι $T_a - T_n = T_{a'}$, $a' = (0, ..., 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...)$
και ισχύει $||T_a - T_n|| = ||T_{a'}|| = \frac{1}{n+1} \to 0$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο T_a δεν είναι πεπερασμένης τάξης αφού $a_n \neq 0$, για άπειρα το πλήθος n.
Υπάρχουν άλλες δύο ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τους τελεστές πεπερασμένης τάξης:
$v)$ Οι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι στην πραγματικότητα, απεικονίσεις μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης.
Έστω ότι ο T είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης. Τότε επειδή $H = (kerT)^{\perp} \otimes kerT$ και ισχύει $(kerT)^{\perp} = R(T^*)$, όπου $dim(R(T^*)) < +\infty$,
ο T περιγράφεται πλήρως από τον περιορισμό του : $T|_{(kerT)^{\perp}} : (kerT)^{\perp} \to R(T)$.

$vi)$ Οι τελεστές πεπερασμένης τάξης απεικονίζουν τη μοναδιαία μπάλα:

$S_1 = \{x \in H \ : \ ||x|| \leq 1\}$ του H σ' ένα σχετικά συμπαγές υποσύνολο του H.

Έστω $T \in F(H)$. Τότε το $T(S_1)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του (πεπερασμένης διάστασης) χώρου $T(H) = R(T)$.
Συνεπώς το $\overline{T(S_1)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του H.

3.2 Συμπαγείς Τελεστές

Ορισμός. 3.2.1
Ένας τελεστής $A \in B(H)$ λέγεται **συμπαγής(compact)** αν για κάθε φραγμένο υποσύνολο S του H, το σύνολο $\overline{A(S)}$ είναι συμπαγές.

Πρόταση. 3.2.2
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :
$i)$Ο $A \in B(H)$ είναι συμπαγής.
$ii)$Το $\overline{A(S_1)}$ είναι συμπαγές, όπου $S_1 = \{x \in H \ : \ ||x|| \leq 1\}$
$iii)$Για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) του H , η ακολουθία (Ax_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία .

Απόδειξη.
$i) \Rightarrow ii)$ Άμεσο από τον ορισμό 3.2.1.

$ii) \Rightarrow i)$Έστω S φραγμένο υποσύνολο του H.
Τότε υπάρχει $M > 0 \ : \ ||x|| \leq M$ για κάθε $x \in S$.
Άρα

$$S \subseteq MS_1 = S_M(0, M) = \{x \in H \ : ||x|| \leq M\} \Rightarrow$$

$$A(S) \subseteq A(S_M(0, M)) \subseteq MA(S_1) \Rightarrow \overline{A(S)} \subseteq M\overline{A(S_1)} \ .$$

Επομένως το $\overline{A(S)}$ συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς συνόλου $M\overline{A(S_1)}$.

$i) \Rightarrow iii)$Έστω (x_n) μια φραγμένη ακολουθία του H και S το σύνολο τιμών της, τότε S είναι φραγμένο και το $\overline{A(S)}$ συμπαγές.

Επομένως η ακολουθία (Ax_n), που είναι ακολουθία στοιχείων του συμπαγούς συνόλου $\overline{A(S)}$, θα έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

$iii) \Rightarrow i)$(Από τη θεωρία των μετρικών χώρων γνωρίζουμε ότι αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, $K \subseteq X$ και κάθε ακολουθία στοιχείων του K έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία τότε το $\overline{K}$ είναι συμπαγές)

Έστω S φραγμένο υποσύνολο του H και (Ax_n) μια ακολουθία του $A(S)$.
Τότε $x_n \in S$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.Άρα η x_n είναι φραγμένη.
Επομένως η (Ax_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία και συνεπώς $\overline{A(S)}$ συμπαγές.
□

Πρόταση. 3.2.3
Η μοναδιαία κλειστή μπάλα $S_1 = \{x \in H \ : \ ||x|| \leq 1\}$ ενός χώρου *Hilbert* H είναι συμπαγές σύνολο, αν και μόνο αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα. 3.2.4
Το σύνολο των συμπαγών τελεστών $K(H)$ είναι ένα δίπλευρο ιδεώδες του $B(H)$.

Απόδειξη.
Θα δειχθεί πρώτα ότι αν $A, B \in K(H)$ τότε και $A + B$,$\lambda B \in K(H)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
Έστω (x_n) μια φραγμένη ακολουθία στοιχείων του H.
Έχουμε ότι:
□

- Α συμπαγής. Τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{i_n}) της (x_n) ώστε η (Ax_{i_n}) να συγκλίνει.
- B συμπαγής, οπότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{i_{n_k}})$ της (x_{i_n}) ώστε η (Bx_{i_n}) να συγκλίνει.

Τότε η ακολουθία $((A+B)x_{i_{n_k}})$ συγκλίνει και είναι μια υπακολουθία της ακολουθίας $((A + B)x_n)$.
Επομένως $(A + B) \in K(H)$. Ομοίως $\lambda A \in K(H)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Θα δείξουμε ότι αν $A \in K(H)$ και $B \in B(H)$ τότε AB , $BA \in K(H)$ δηλαδή το $K(H)$ είναι διπλευρο ιδεώδες του $B(H)$.

Αν (x_n) μια φραγμένη ακολουθία τότε:

- Η (Ax_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (Ax_{n_i}) και επειδή η B είναι συνεχής η (BAx_{n_i}) συγκλίνει.Άρα $(BA) \in K(H)$
- Αφού ο B είναι φραγμένος ,η (Bx_n) είναι φραγμένη ακολουθία και αφού A συμπαγής, η$(A(Bx_n)) = ((AB)x_n)$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Άρα $AB \in K(H)$.

Θεώρημα. 3.2.5
Το $K(H)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $B(H)$.

Απόδειξη.
Θα χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα της διαγωνίου.Έστω (A_k) μια ακολουθία συμπαγών τελεστών τέτοια ώστε $A_k \xrightarrow{||\circ||} A$.
Θα δείξω ότι $A \in K(H)$.
Έστω (x_i) μια φραγμένη ακολουθία, οπότε υπάρχει $c > 0 \ : \ ||x_i|| \leq c$, για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$.
Τότε για τον συμπαγή τελεστή:
A_1 υπάρχει υπακολουθία (x_{1i}) της (x_i) ώστε η $(A_1 x_{1i})$ συγκλίνει
A_2 υπάρχει υπακολουθία (x_{2i}) της (x_{1i}) ώστε η $(A_2 x_{2i})$ συγκλίνει
. . . .
. . . .
A_k υπάρχει υπακολουθία (x_{k_i}) της $(x_{(k-1)i})$ ώστε η $(A_k x_{ki})$ συγκλίνει.
Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $(y_i) = (x_{ii})$ δηλαδή παίρνουμε τα διαγώνια στοιχεία της παραπάνω διάταξης.

Τότε :

(a)Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ η $(A_k y_i)$ συγκλίνει.Πράγματι παρατηρώ ότι η (y_i) είναι μια υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας (x_i).
Για $i > k$ η (y_i) είναι υπακολουθία της (x_{ki}) συνεπώς η $(A_k y_i)_i$συγκλίνει, αφού η $(A_k x_{ki})_i$ συγκλίνει.

(b)Η (Ay_i) είναι βασική.Πράγματι επειδή $A_k \xrightarrow{||\ ||} A$ για κάθε ε > 0

υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε :$||A - A_{k_0}|| < \dfrac{\varepsilon}{4c}$.

Επειδή η $(A_{k_0} y_i)$ ως συγκλίνουσα είναι βασική,υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$
τέτοιο ώστε : $||A_{k_0} y_i - A_{k_0} y_j|| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ για κάθε $i, j > n_0(\varepsilon)$.

Συνεπώς για κάθε $i, j > n_0(\varepsilon)$ είναι :

$$\begin{aligned}||Ay_i - Ay_j|| &= ||(A - A_{k_0})y_i + A_{k_0}y_i - A_{k_0}y_j + (A_{k_0} - A)y_j|| \\ &\leq ||A - A_{k_0}||\ ||y_i|| + ||A_{k_0}y_i - A_{k_0}y_j|| + ||A_{k_0} - A||\ ||y_j|| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4c}c + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4c}c = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon\end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία (Ay_i) είναι βασική και επομένως συγκλίνει.
Άρα ο A είναι συμπαγής , δηλαδή $A \in K(H)$.

$\square$

Παρατήρηση
Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι κάθε όριο, ως προς τη νόρμα, συμπαγών τελεστών είναι συμπαγής τελεστής.Επίσης κάθε όριο, ως προς τη νόρμα, ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγής τελεστής.
Στους χώρους $Hilbert$ ισχύει και το αντίστροφο.
Άρα σ'ενα χώρο $Hilbert$ ένας τελεστής είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι $norm-$όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης.

Θεώρημα. 3.2.6
Έστω $A \in K(H)$ και (T_n) , $T_n \in B(H)$ μια φραγμένη ακολουθία τελεστών τέτοια ώστε $||T_nx - Tx|| \to 0$ για κάθε $x \in H$.
Τότε $T \in B(H)$ και $||T_nA - TA|| \to 0$, δηλαδή $T_nA \underset{\longrightarrow}{||\ ||} TA$.

Απόδειξη.
Αφού $||T_n|| \leq c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε:
$||Tx|| = lim_{n\to\infty}||T_nx|| \leq c||x||$ και συνεπώς $||T|| \leq c$.

Έστω ότι $||T_nA - TA|| \nrightarrow 0$.
Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (T_{n_i}) ώστε $||T_{n_i}A - TA|| > \varepsilon$.
Άρα υπάρχει ακολουθία (x_{n_i}) , $||x_{n_i}|| = 1$ τέτοια ώστε $||T_{n_i}Ax_{n_i} - TAx_{n_i}|| > \varepsilon$.
Επειδή ο A είναι συμπαγής υπάρχει υπακολουθία (x_{n_j}) της (x_{n_i}), τέτοια ώστε η (Ax_{n_j}) να συγκλίνει έστω στο y.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\varepsilon < ||T_{n_j}Ax_{n_j} - TAx_{n_j}|| &\leq ||(T_{n_j} - T)(Ax_{n_j} - y)|| + ||(T_{n_j} - T)y|| \\ &\leq 2c||Ax_{n_j} - y|| + ||T_{n_j}y - Ty|| \to 0, \text{ άτοπο.}\end{aligned}$$

Άρα $||T_nA - TA|| \to 0$.

$\square$

Πόρισμα. 3.2.7
Έστω H διαχωρίσιμος χώρος $Hilbert$.
Τότε $A \in K(H)$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης, η οποία συγκλίνει ως προς τη τοπολογία της νόρμας στον A.

Απόδειξη.
Έστω $A \in K(H)$,(x_n) μια ορθοκανονική βάση του H
και οι τελεστές $E_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i$.
Οι E_n,$n \in \mathbb{N}^*$είναι ορθογώνιες προβολές, οπότε $||E_n|| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
Άρα η (E_n) είναι φραγμένη ακολουθία και για κάθε $x \in H$ είναι:

$$lim_n E_n x = \sum_{i=1}^{\infty} < x, x_i > x_i = x = Ix.$$

Επομένως από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι $||E_n A - A|| \to 0$.
Όμως οι E_n είναι πεπερασμένης τάξης, συνεπώς και οι $E_n A$ είναι πεπερασμένης τάξης.
□

Συνέπεια(προηγούμενος θεωρήματος):

Ο τελεστής $A \in B(H)$ όπου H διαχωρίσιμος χώρος $Hilbert$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν τελεστές $B \in F(H)$(πεπερασμένης τάξης) και $C \in B(H)$ τέτοιοι ώστε $A = B + C$ και $||C|| < \varepsilon$.

Πόρισμα. 3.2.8
$A \in K(H) \Longleftrightarrow A^* \in K(H)$ ή ισοδύναμα ισχύει $(K(H))^* = K(H)$.

Απόδειξη.
Έστω $A \in K(H)$.Τότε υπάρχει ακολουθία πεπερασμένης τάξης τελεστών (A_n) με $||A_n - A|| \to 0$ (προηγούμενο πόρισμα).
Όμως $||A_n^* - A^*|| = ||(A_n - A)^*|| = ||A_n - A|| \to 0$.
Επομένως $A^* \in K(H)$.
□

3.3 Φασματική θεωρία συμπαγών τελεστών

Πρόταση. 3.3.1
Αν $A \in B(H)$ είναι συμπαγής και $\lambda \neq 0$, λ δεν είναι ιδιοτιμή του Α, τότε το σύνολο τιμών $R(\lambda I - A)$ του $\lambda I - A$ είναι κλειστό και ισχύει $R(\lambda I - A) = H$.

Θεώρημα. 3.3.2
Αν ο H είναι απειροδιάστατος και ο $A \in B(H)$ είναι συμπαγής τότε το φάσμα $\sigma(A)$ του A αποτελείται από το 0 και τις ιδιοτιμές του.

Απόδειξη.
Από υπόθεση ο H είναι άπειρης διάστασης και $0 \in \sigma(A)$ διότι ο A ως συμπαγής δεν αντιστρέφεται.
Αν $\lambda \neq 0$ δεν είναι ιδιοτιμή τότε ο $\lambda I - A$ είναι '1-1' διότι $ker\{\lambda I - A\} = 0$
και από προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $R(\lambda I - A) = H$ (επί).
Συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση και από γνωστό θεώρημα προκύπτει ότι είναι και φραγμένος τελεστής.
Άρα $\lambda I - A$ αντιστρέψιμος και άρα $\lambda \notin \sigma(A)$.

□

Θεώρημα. 3.3.3
Έστω H ένας άπειρης διάστασης χώρος $Hilbert$ και $A \in B(H)$ συμπαγής.
Το φάσμα $\sigma(A)$ αποτελείται από το μηδέν και το πολύ από ένα αριθμήσιμο σύνολο ιδιοτιμών με πιθανό σημείο συσσώρευσης το μηδέν.
Επιπλέον κάθε ιδιόχωρος του A, που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιότιμη είναι πεπερασμένης διάστασης.

3.4 Αυτοσυζυγείς συμπαγείς τελεστές

Λήμμα. 3.4.1
Αν $A \in B(H)$ είναι συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής,τότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Απόδειξη.
Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα αρκεί να δείξω ότι κάθε ιδιοτιμή του A είναι πραγματικός αριθμός.Έστω $x \in H$, $x \neq 0$ και $Ax = \lambda x$.
Τότε:

$< Ax, x >=< \lambda x, x >= \lambda ||x||^2$ και $< x, Ax >=< x, \lambda x >= \bar{\lambda} ||x||^2$.

Αφού όμως $A = A^*$,ισχύει ότι:

$$< x, Ax >=< Ax, x > \Rightarrow \lambda ||x||^2 = \bar{\lambda} ||x||^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Λήμμα. 3.4.2
Έστω $A \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής
και $m = inf_{||x||=1} < Ax, x >$, $M = sup_{||x||=1} < Ax, x >$.Τότε $m, M \in \sigma(\mathrm{A})$.

Πόρισμα. 3.4.3
Έστω $A \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής.
Τότε οι αριθμοί m, M, αν είναι μη-μηδενικοί, είναι ιδιοτιμές του A και για κάθε ιδιοτιμή λ του A ισχύει :

$$|\lambda| \leq max\{M, -m\} = ||A||.$$

Απόδειξη.
Επειδή ο A είναι αυτοσυζυγής ισχύει

$$||A|| = sup_{||x||=1}| < Ax, x > | = sup_{||x||=1}\{max\{< Ax, x >, - < Ax, x >\}\}$$

$$= max\{sup_{||x||=1} < Ax, x >, -inf_{||x||=1} < Ax, x >\}$$

$$= max\{M, -m\}.$$

Θεωρώ λ ιδιοτιμή του Α με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x, $||x|| = 1$.

Τότε ισχύει:

$$Ax = \lambda x$$

και

$$|\lambda| = |\lambda|\ ||x|| = ||\lambda x|| = ||Ax|| \leq ||A||\ ||x|| = ||A|| \Rightarrow |\lambda| \leq ||A||.$$

□

Πόρισμα. 3.4.4
Αν $A \in B(H)$ είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής τότε $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ και $||A|| = max\{|\lambda| : \lambda$ ιδιοτιμή του $A\}$.

Απόδειξη.
Λαμβάνοντας υπόψιν το λήμμα 3.4.2 έχουμε : $m < x, x > \leq < Ax, x > \leq M < x, x >$, για κάθε $x \in H$.
Άρα αν x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ , θα έχουμε :

$m||x||^2 \leq \lambda||x||^2 \leq M||x||^2 \Rightarrow m \leq \lambda \leq M$.Άρα $\sigma(A) \subseteq [m, M]$.

Επίσης από το προηγούμενο πόρισμα ισχύει $-||A|| \leq \lambda \leq ||A||$ και είτε ο $||A||$ είτε ο $-||A||$ είναι ιδιότιμη του $||A||$, οπότε $||A|| = max\{|\lambda|\ :\ \lambda$ ιδιότιμη του $A\}$.

□

Πόρισμα. 3.4.5
Αν $A \in B(H)$ είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής ο οποίος δεν έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές, τότε $A = 0$.

Πρόταση. 3.4.6
Έστω $A \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής.Τότε οι ιδιόχωροι του A, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιοι.

Απόδειξη.
Έστω λ,μ, $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές του A και N_λ, N_μ οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι.
Είναι $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ και αν $x \in N_\lambda$, $y \in \mathbb{N}$ έχουμε :

$\lambda < x, y > = < Ax, y > = < x, Ay > = \overline{\mu} < x, y > = \mu < x, y > \Rightarrow$

$(\lambda - \mu) < x, y > = 0 \overset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} < x, y > = 0 \Rightarrow x \perp y.$

Επομένως $N_\lambda \perp N_\mu$.

□

3.5 Ευθύ εσωτερικό άθροισμα

$a)$**Πεπερασμένη περίπτωση**

Έστω H χώρος *Hilbert* με $M, N \subseteq H$ κλειστοί συμπληρωματικοί υπόχωροι με $M \perp N$.

Τότε $H = M \oplus N$ και $\forall x, y \in H$ ισχύει:

$$x = x_1 + x_2 \text{ και } y = y_1 + y_2 \text{ με } x_1, y_1 \in M \text{ και } x_2, y_2 \in N.$$

Επίσης, ισχύει $< x, y > = < x_{1,} y_1 > + < x_2, y_2 >$ με

$$||x||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2 \text{ και } ||y||^2 = ||y_1||^2 + ||y_2||^2.$$

Αν υπάρχουν k το πλήθος ανα δύο κάθετοι υπόχωροι οι οποίοι παράγουν τον H τότε έχουμε ότι :

$$H = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_k = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i.$$

$b)$**Μη πεπερασμένη περίπτωση**

Θεώρημα. 3.5.1
Έστω (N_i) , $i \in \mathbb{N}^*$ ανά δύο κάθετοι υπόχωροι του H και P_i η ορθή προβολή στον $N_i,\ i = 1, 2, 3, ...$

Τότε για κάθε $x \in H$, η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} P_i x$ συγκλίνει σένα $x' \in H$ τέτοιο ώστε $x - x' \perp N_i$, για κάθε $i = 1, 2, ...$

Απόδειξη.
Ισχύει $0 \leq ||x - \sum_{i=1}^{n} P_i x||^2 = ||x||^2 - 2\sum_{i=1}^{n} < x, P_i x > + \sum_{i=1}^{n} < P_i x, P_i x >$

$$= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} ||P_i x||^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ||P_i x||^2 \leq ||x||^2,$$

και άρα η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} ||P_i x||^2$ συγκλίνει.

Έστω $s_n = \sum_{i=1}^{n} P_i x$.

Τότε για $m > n$ είναι $||s_m - s_n||^2 = \sum_{i=n+1}^{m} ||P_i x||^2 \to 0$, όταν $n, m \to \infty$.

Άρα η ακολουθία (s_n) είναι βασική και επομένως συγκλίνει.

Έστω $s_n \to x'$. Για κάθε j σταθερό και για κάθε $n > j$ είναι :

$P_j(\sum_{i=1}^{n} P_i x) = P_j x$ και επειδή P_j συνεχής , έπεται:

$P_j(\sum_{i=1}^{\infty} P_i x) = P_j x \Rightarrow P_j x' = P_j x \Rightarrow P_j(x' - x) = 0 \Rightarrow x - x' \perp N_j$

$\forall j = 1, 2, ...$.

□

Ορισμός. 3.5.2
Έστω ότι τα N_i παράγουν τον H δηλαδή ισχύει $\overline{[N_i, i \in \mathbb{N}^*]} = H$.Τότε $x - x' \perp H$ συνεπώς $x - x' = 0$ και ισχύει $x = x' = \sum_{i=1}^{n} P_i x$.
Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο H είναι το **άπειρο ευθύ εσωτερικό άθροισμα** των υπόχωρων N_i και συμβολίζεται $H = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} N_i$.

Θεώρημα. 3.5.3(Φασματικό θεώρημα-1η μορφή)
Έστω $A \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής $\{\lambda_i\}, i \geq 1$ οι διαφορετικές μη-μηδενικές ιδιοτιμές του (χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$) και P_i η ορθή προβολή επί του ιδιόχωρου N_i με αντίστοιχη ιδιότιμη λ_i,$i \geq 1$.
Τότε ισχύει

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα $B(H)$.

Απόδειξη.
Έστω N_i ο ιδιόχωρος με ανίστοιχη ιδιοτιμή λ_i και $N_0 = kerA$. Λαμβάνοντας υπόψιν την πρόταση 3.4.6 έχουμε ότι οι ιδιόχωροι είναι κάθετοι ανά δύο.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.5.1 ορίζουμε τους υπόχωρους:

$$M\ ' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i \ \ \text{και} \ M = [\bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i]^{\perp}$$

Πρώτα θα δείξουμε ότι οι υπόχωροι αυτοί είναι A-αναλλοίωτοι.

-Αν $m' \in M\ ' \Rightarrow m' = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$ με $\sum_{i=0}^{\infty} ||x_i||^2 < \infty$ και $Am' = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$,

όπου με χρήση του πορίσματος 3.4.3, η σειρά συγκλίνει.

Πράγματι είναι: $\sum_{i=1}^{\infty} ||\lambda_i x_i||^2 \leq ||A||^2 \sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||^2 < \infty$.

Συνεπώς $Am' \in M\ '$ και επομένως $AM\ ' \subseteq M\ '$.

-Αν $m \in M$ τότε για κάθε $m' \in M\ '$ ισχύει $< Am, m' >=< m, Am' >= 0$, διότι $Am' \in M\ '$ και $M \perp M\ '$. Άρα $Am \perp M\ '$.

Επομένως $Am \in M$ και $AM \subseteq M$.

Έστω A_M ο περιορισμός του A στον M. Τότε ο A_M είναι συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και δεν έχει ιδιοτιμές επειδή δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα του A στον M.

Άρα $\sigma(A_M) \subseteq \{0\}$ οπότε από το πόρισμα 3.4.5. είναι $A_M = 0$.

□

Επομένως για κάθε $x \in M$ είναι $Ax = A_M x = 0$ και άρα $M \subseteq N_0$.

Αλλά ξέρουμε ότι $M \perp N_0$.

Συνεπώς $M = \{0\}$.

Επομένως ισχύει

$$[\bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i]^{\perp} = \{0\}, \text{ άρα } H = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N_i, \text{ οπότε}$$

για κάθε $x \in H$ θα έχουμε:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} P_i x \ \Rightarrow Ax = \sum_{i=1}^{\infty} AP_i x = \sum_{i=0}^{\infty} AP_i x$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_i Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i x,$$

όπου η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i x$ συγκλίνει.

Τώρα πρέπει να δείξω ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $B(H)$, στον A.

Έχουμε :

$$||Ax - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x||^2 = ||\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i P_i x||^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 ||P_i x||^2$$

Η προηγούμενη σχέση αν έχει πεπερασμένο πλήθος όρων τότε η απόδειξη τελειώνει, ή $\lambda_i \to 0$.Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$τέτοιο ώστε $|\lambda_i| < \varepsilon \ \forall i > n_0$.

Αν $n > n_0$ έχουμε:

$$||Ax - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x||^2 < \varepsilon^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} ||P_i x||^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} ||P_i x||^2 = \varepsilon^2 ||x||^2 \Rightarrow$$

$$||A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i|| = sup_{x \neq 0} \frac{||Ax - \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i P_i x||}{||x||} < \varepsilon \ \Rightarrow ||A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i|| \to 0.$$

Επομένως $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ ως πρός τη νόρμα.

Πόρισμα. 3.5.4(Φασματικό θεώρημα-2η μορφή)
Έστω $A \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής.

Τότε υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία (x_n) από ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές (μ_n) τέτοιο ώστε

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x_n \otimes x_n)$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $B(H)$.

Απόδειξη.
Έστω (λ_i) $i \geq 1$ οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του A και (N_i) οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του.

Τότε : $H = N_0 \oplus (\bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i \ )$ με $N_0 = kerA$.

Κάθε N_i είναι πεπερασμένης διαστασης.
Θεωρούμε $\{y_{n_i}\}$ μια ορθοκανονική βάση του.

Η ένωση $\bigcup_{i \geq 1} \{y_{n_i}\}$ των βάσεων αυτών αποτελεί μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του χώρου $N = (kerA)^{\perp} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i = 1$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.
Θέτουμε $\mu_i =< Ax_i, x_i >$.

Τότε κάθε μ_i είναι ιδιοτιμή του A,

διότι $\mu_i =< Ax_i, x_i >= \lambda_i < x_i, x_i >= \lambda_i ||x_i||^2 = \lambda_i$.

Έστω (μ_n) η ακολουθία των ιδιοτιμών (μ_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ όπου κάθε ιδιοτιμή συμπεριλαμβάνεται τόσες φορές όση η πολλαπλότητα της.

Κάθε $x \in H$, γράφεται στη μορφή $x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} < x, x_i > x_i$,

όπου $x_0 \in N_0 = kerA$.

Επομένως έχουμε :

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i < x, x_i > x_i = (\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (x_i \otimes x_i))(x) \ \forall x \in H.$$

Με τον ίδιο τρόπο όπως στο θεώρημα 3.5.3, αποδεικνύουμε ότι: $A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (x_i \otimes x_i)$, ως προς τη νόρμα του $B(H)$.

$\square$

Θεώρημα. 3.5.5
Έστω (x_n) μια ορθοκανονική ακολουθία διανυσμάτων του H και (μ_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, η οποία είναι είτε μηδενική είτε πεπερασμένη.

Η γραμμική απεικόνιση $A : H \to H$ που ορίζεται από τη σχέση
$Ax = \sum_{i=1}^{n} μ_i < x, x_i > x_i$ είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής.

Απόδειξη.

Έχουμε:

$$||Ax||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |μ_i|^2| < x, x_i > |^2||x_i||^2 \leq (sup|μ_i|^2) \sum_{i=1}^{\infty} | < x, x_i > |^2$$

$$\leq (sup|μ_i|^2)||x||^2$$

Συνεπώς $A \in B(H)$.

Αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη τότε ο A είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης και άρα είναι συμπαγής.
Έστω ότι $μ_n \to 0$.
Ορίζουμε τους τελεστές πεπερασμένης τάξης:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} μ_i < x, x_i > x_i, \text{ με } n \in \mathbb{N}^*.$$

Τότε:

$$||A - A_n||^2 = sup_{||x||=1}|| \sum_{i=n+1}^{\infty} μ_i < x, x_i > x_i||^2 \leq sup_{i>n}μ_i|^2 \to 0.$$

Αυτό επάγει ότι ο A είναι συμπαγής.

Επίσης $< Ax, y >= \sum_{i=1}^{\infty} μ_i < x, x_i >< x_i, y >=< x, Ay >$

Επομένως ο A είναι και αυτοσυζυγής.

□

Θεώρημα. 3.5.6
Έστω $A \in B(H)$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και έστω $A = \sum_{i=1}^{\infty} λ_i P_i$(Θεώρημα 3.5.3).
Αν $B \in B(H)$ τότε ισχύει:

$$AB = BA \iff BP_i = P_i B \; \forall i \geq 1$$

Απόδειξη.
Έστω $BP_i = P_i B$ για κάθε $i \geq 1$.Τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} λ_i BP_i = \sum_{i=1}^{n} λ_i P_i B \iff B(\sum_{i=1}^{n} λ_i P_i) = (\sum_{i=1}^{n} λ_i P_i)B.$$

Όμως $lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} λ_i P_i = A$ ως προς τη νόρμα και συνεπώς είναι $AB = BA$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $AB = BA$ και N_i ο ιδιόχωρος της αντίστοιχης ιδιοτιμής λ_i.
Θα δείξω πρώτα ότι ο N_i είναι $B-$αναλλοίωτος.

Έστω $x \in N_i$ τότε $(A - \lambda_i I)Bx = B(A - \lambda_i I)x = 0$, άρα $Bx \in N_i$,
δηλαδή $BN_i \subseteq N_i$, οπότε $P_iBP_i = BP_i(1)$.

Επίσης επειδή $B^*A = AB^*$έχουμε ότι ο N_i είναι και B^*-αναλλοίωτος.

Επομένως έχουμε και $P_iB^*P_i = B^*P_i \Rightarrow P_iBP_i = P_iB(2)$.

Άρα από (1) και (2) προκύπτει $BP_i = P_iB$, $\forall i \geq 1$.

□

Το επόμενο λήμμα χρησιμοποιείται για την απόδειξη του φασματικού θεωρήματος για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές.

Λήμμα. 3.5.7
Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου $Hilbert$ και $A \in B(H)$.
Αν ο M είναι $A-$αναλλοίωτος και $A|_M = B \in B(M)$ είναι ο περιορισμός του A στον M , τότε ο συζυγής B^* είναι ο περιορισμός του A^*στον M, αν και μόνο αν ο M είναι A^*-αναλλοίωτος.
Αν επιπλέον ο A είναι φυσιολογικός τότε και ο B είναι φυσιολογικός.

Απόδειξη.
Επειδή $B^* \in B(M)$ είναι $B^*M \subseteq M$, οπότε αν $B^* = A^*|_M$ τότε $A^*M \subseteq M$.
Αντιστρόφως έστω ότι $A^*M \subseteq M$.
Για να δείξουμε ότι $B^* = A^*|_M$ αρκεί να δείξουμε ότι $B^*x = A^*x$, για κάθε $x \in M$.
Έστω $x, y \in M$.Τότε:

$$< B^*x, y >=< x, By >=< x, Ay >=< A^*x, y >$$

Από τη παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $(B^*x - A^*x) \perp y$ για κάθε $y \in M$ οπότε :

$$(B^*x - A^*x) \in M^{\perp}.$$

Όμως ξέρουμε ότι $A^*M \subseteq M$ οπότε $(B^*x - A^*x) \in M$.

Συνεπώς

$$(B^*x - A^*x) \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$$

Άρα $B^*x = A^*x$, για κάθε $x \in M$.

Αν ο A είναι φυσιολογικός τότε για κάθε $x \in M$ έχουμε

$$||B^*x|| = ||A^*x|| = ||Ax|| = ||Bx||$$

Επομένως ο B είναι φυσιολογικός.

$\square$

Θεώρημα. 3.5.8(Φασματικό θεωρημα για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές)
Αν $A \in B(H)$ είναι ένας συμπαγής φυσιολογικός τελεστής τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση (e_n) του H από ιδιοδιανύσματα του A και μια ακολουθία (λ_n) μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n$$

για κάθε $x \in H$.

4 Αντιμεταθετικές οικογένειες τελεστών πρώτης τάξης

Σε αυτό το κεφάλαιο όταν αναφέρουμε χώρο *Hilbert* θα εννοούμε μιγαδικό, διαχωρίσιμο, άπειρης διάστασης χώρο *Hilbert*, υπόχωρο θα εννοούμε κλειστό γραμμικό υπόχωρο και τελεστή θα εννοούμε φραγμένο γραμμικό τελεστή.
Επίσης στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τρείς βασικές τοπολογίες οι οποίες είναι η **norm−τοπολογία, η ισχυρή και η ασθενής τοπολογία τελεστών.**

4.1 Τοπολογίες του B(X)

Κάθε χώρος *Banach* X έχει τουλάχιστον δύο σημαντικές τοπολογίες : την ισχυρή ή (μετρική) και την ασθενή (ή X^*) τοπολογία.
Ο διανυσματικός χώρος $B(X)$ μπορεί να περιέχει διάφορες τοπολογίες.
Στη συνέχεια θα δώσουμε τους ορισμούς σε τρείς πιό συμαντικές.

Ορισμός. 4.1.1
Η **norm−τοπολογία στον** $B(X)$, ορίζεται από τη νόρμα

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx||.$$

Έστω $\{A_n\}_1^\infty$ μια ακολουθία στοιχείων του $B(X)$, η οποία συγκλίνει ως προς τη $norm-$τοπολογία στην $A \in B(X)$.Γράφουμε τότε $||A_n - A|| \to 0$.
Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι $||A_n x - Ax|| \to 0$ ομοιόμορφα $\forall x \in X$ τέτοιο ώστε $||x|| \leq 1$.

Ορισμός. 4.1.2
Η **ισχυρή τοπολογία τελεστών** στην $B(X)$, (SOT), ορίζεται από την οικογένεια των ημινορμών της μορφής $||q_x(A)|| = ||Ax||$, $x \in X$.
Στην ισχυρή τοπολογία ένα δίκτυο $\{A_a\}$ τελεστών συγκλίνει στον A αν και μόνο αν το δίκτυο $\{A_a x\}$ συγκλίνει στο Ax $\forall x \in X$.
Θα λέμε ότι (A_a) συγκλίνει SOT στον A.

Ορισμός. 4.1.3
Η **ασθενής τοπολογία τελεστών** στην $B(X)$, (WOT) ορίζεται από την οικογένεια των ημινορμών της μορφής:

$$q_{x,f}(A) = |f(Ax)| \ , \ x \in X \ , \ f \in X^*.$$

Συνεπώς στην ασθενή τοπολογία τελεστών ένα δίκτυο $\{A_a\}$ συγκλίνει στο A αν και μόνο αν $f(A_a x)$ συγκλίνει στην $f(Ax)$ $\forall x \in X$ και $f \in X^*$.
Θα λέμε ότι (A_a) συγκλίνει (WOT) στον A.

Πρόταση. 4.1.4
Ένα κυρτό υποσύνολο του $B(X)$ έχει την ίδια θήκη τόσο στην ασθενή τοπολογία όσο και στην ισχυρή.

Η παραπάνω πρόταση έχει ως συνέπεια ότι κάθε SOT κλειστή υποάλγεβρα της $B(X)$ είναι και WOT κλειστή, και αντιστρόφως.

4.2 Ορισμοί

Σύνδεσμος(lattice) είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, στο οποίο για κάθε δύο στοιχεία του υπάρχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα και ένα ελάχιστο άνω φράγμα.
Αν x, y είναι δύο στοιχεία του του L, δηλώνουμε το μέγιστο κάτω φράγμα και το ελάχιστο άνω φράγμα με $x \wedge y$ και $x \vee y$ αντίστοιχα.

Αν ένας σύνδεσμος έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι κάθε μη κενό υποσυνολό του έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα και ένα ελάχιστο άνω φράγμα τότε ο σύνδεσμος αυτός λέγεται **πλήρης**.

Με $\mathcal{L} \in B(H)$ θα συμβολίζουμε ένα σύνδεσμο.
Με $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε μια υπάλγεβρα του $B(H)$, όπου H είναι χώρος $Hilbert$.

Με $Alg\mathcal{L}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τελεστών του επί H, οι οποίοι αφήνουν κάθε στοιχείο του $\mathcal{L}$ αναλλοίωτο.
Με $Lat\mathcal{A}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των υπόχωρων του H, που είναι αναλλοίωτοι από κάθε στοιχείο του $\mathcal{A}$.

Ειδικότερα ένας σύνδεσμος $\mathcal{L}$ λέγεται **ανακλαστικός** αν ισχύει $\mathcal{L} = AlgLat\mathcal{L}$.

Συμβολίζουμε τον μεταθέτη του $\mathcal{A}$ με $\mathcal{A}'$.
Είναι $\mathcal{A}' = \{B \in B(H) \ : \ AB = BA \ \forall A \in \mathcal{A}\}$

Αν $x, y \in H$ είναι δύο μη-μηδενικά διανύσματα, τότε ο τελεστής $t \rightarrow < x, t > y$ συμβολίζεται με $x \otimes y$ και είναι τελεστής τάξης 1.
Είναι $(x \otimes y)(t) =< x, t > y$.

Η ισχυρά κλειστή άλγεβρα η οποία παράγεται από μια αντιμεταθετική οικογένεια $\mathcal{R}$ τελεστών πρώτης τάξης, συμβολίζεται με $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.
Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ ονομάζεται **ανακλαστική** αν $\mathcal{A} = AlgLat\mathcal{A}$.

Ένας τελεστής A ονομάζεται **ανακλαστικός** αν η ασθενώς κλειστή άλγεβρα που παράγεται από τον A και τον ταυτοτικό I, είναι ανακλαστική.
Αν V υποσύνολο του H τότε η **κλειστή γραμμική θήκη** του V συμβολίζεται με $clsV$.
Το πεδίο τιμών του τελεστή A συμβολίζεται με **ranA**.

Μια ακολουθία $\{x_n\}_1^\infty$ διανυσμάτων ενός χώρου $Hilbert$ H ονομάζεται **πλήρης** αν ισχύει $cls\{x_n : n \geq 1\} = H$
και ονομάζεται **βάση** του H αν για κάθε $x \in H$ υπάρχει μια μοναδική ακολουθία $\{a_n\}_1^\infty$μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $x = \sum a_n x_n$.

Η ακολουθία $\{x_n\}_1^\infty$ ονομάζεται **ελαχιστική** αν $x_n \notin cls\{x_m : n \neq m\}$ για κάθε $n \geq 1$.
Επίσης μια ακολουθία $\{x_n\}_1^\infty$ είναι ελαχιστική αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία $\{y_n\}_1^\infty$ διορθογώνια στην $\{x_n\}$,δηλαδή υπάρχει ακολουθία $\{y_m\}$ έτσι ώστε να ισχύει $< x_n, y_m >= 1$ για $n = m$ και $< x_n, y_m >= 0$ για $n \neq m$.

Αν $\{x_n\}_1^\infty$είναι πλήρης και ελαχιστική η διορθογώνια ακολουθία $\{y_n\}_1^\infty$είναι μοναδική.

Η ακολουθία $\{x_n\}_1^\infty$ λέγεται ότι είναι **ισχυρά πλήρης** αν είναι πλήρης και ελαχιστική και για κάθε $x \in H$ είναι $x \in cls\{x_n :< x, y_n >\neq 0\}$, όπου η ακολουθία $\{y_n\}_1^\infty$είναι η διορθογώνια ακολουθία στην $\{x_n\}_1^\infty$.

Ένα διάνυσμα $x \in H$ ονομάζεται **root vector** του $A \in B(H)$ αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ αν $(A - \lambda I)^n x = 0$, για κάποιο n.

Θα λέμε ότι ο $A \in B(H)$ δέχεται **φασματική σύνθεση** αν για κάθε αναλλοίωτο υπόχωρο M του τελεστή A το σύνολο των **root vectors** του A που περιέχονται στον M, είναι πλήρες στον M.

Ένας συμπαγής τελεστής A ονομάζεται **πλήρης** αν το σύστημα των *root vectors* του A που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές είναι πλήρες στο H.
Λέμε ότι ο Α δέχεται **αυστηρή φασματική σύνθεση** αν ο περιορισμός του τελεστή σε κάθε αναλλοίωτο υποχωρό του είναι πλήρης τελεστής.

4.3 Υπάλγεβρες του $B(X)$

Ορισμός. 4.3.1
Ένας υπόχωρος $M \subseteq X$(με υπόχωρο εννοούμε κλειστό υπόχωρο) του X λέμε ότι είναι **αναλλοίωτος** από τον $T \in B(X)$ αν $T(M) \subseteq M$, δηλαδή $Tx \in M \ \forall \ x \in M$.

Ορισμός. 4.3.2
Ο τελεστής $T \in B(X)$ λέγεται **full** αν $\overline{T(M)} = M$ για κάθε αναλλοίωτο υπόχωρο M του T.

Θεώρημα. 4.3.3
Αν $\mathcal{A}$ είναι μια υποάλγεβρα του $B(X)$,που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή, τότε η κλειστότητα της $\mathcal{A}$ στην ισχυρή τοπολογία κλειστών
ισούται με:

$$\{B \in B(X) \ : \ Lat \ \mathcal{A}^{(n)} \subseteq Lat \ B^{(n)} \ \forall n\}$$

όπου $A^{(n)} = A \oplus A \oplus ... \oplus A$ (n φορές) και $\mathcal{A}^{(n)} = \{A^{(n)} \ : \ A \in \mathcal{A}\}$.

Ορισμός. 4.3.4
Ονομάζουμε **μεγιστική αβελιανή άλγεβρα** μια υπάλγεβρα του $B(X)$ που είναι μεγιστική ως αβελιανή.

Παρατήρηση
Είναι εύκολο να δούμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μεγιστική αβελιανή άλγεβρα αν και μόνο αν $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.
Επίσης αν $\mathcal{A}$ είναι αντιμεταθετικό σύνολο τελεστών και η άλγεβρα $\mathcal{A}'$ είναι αβελιανή τότε $\mathcal{A}'$ είναι μεγιστική αβελιανή.

4.4 Ακολουθίες διανυσμάτων

Έστω X ένας χώρος $Banach$.
Ένας μιγαδικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** ενός τελεστή $T \in B(X)$ αν υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in X$ τέτοιο ώστε $Tx = \lambda x$ ή $(\lambda I - T)x = 0$.
Το διάνυσμα x ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** του T που σχετίζεται με την ιδιοτιμή λ.
Ο χώρος $\{x \in X : (\lambda I - T)x = 0\}$ ονομάζεται **ιδιόχωρος** του T με αντίστοιχη ιδιοτιμή το λ.
Λέμε ότι το λ είναι απλή ιδιοτιμή και x απλό ιδιοδιάνυσμα του T αν ο ιδιόχωρος με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ έχει διάσταση ένα.

Ορισμός. 4.4.1
Μια ακολουθία $\{x_n\}_1^\infty$που ανήκει σε έναν άπειρης διάστασης χώρο *Banach* X ονομάζεται **βάση** του X αν για κάθε $x \in X$
υπάρχει μια μοναδική ακολουθία αριθμών $\{a_n\}_1^\infty \subseteq \mathbb{C}$ τέτοια ώστε: $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$.

4.5 Άλγεβρα $\mathcal{R}'$

Θεωρούμε το σύνολο των διανυσμάτων $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0...)$ $n \geq 1$ στον l_2.

Η μοναδική διορθογώνια ακολουθία του $\{x_n\}$ είναι η ακολουθία $\{y_n\}_1^\infty$ όπου η y_n έχει τη μορφή

$$y_n = (0, ..., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n-\text{οστη θέση}}}{n}, -(n+1), 0, ...) \; n \geq 1.$$

Προφανώς ισχύει $cls\{x_n : n \geq 1\} = l_2$ και επίσης η $\{x_n\}$ είναι πλήρης και ελαχιστική.
Θεωρούμε το διάνυσμα $z_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$.
Επειδή είναι $< z_0, y_n >= 0$ $\forall n \Rightarrow z_0 \notin cls\{y_n \; : \; n \geq 1\}$ και
συνεπώς η ακολουθία $\{y_n\}_1^\infty$ δεν είναι πλήρης .
Επίσης αφού $z_0 \notin cls\{x_n :< z_0, y_n > \neq 0\}$ η ακολουθία $\{x_n\}$ δεν είναι ισχυρά πλήρης.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τους φραγμένους γραμμικούς τελεστές στον l_2 οι οποίοι έχουν την ακολουθία $\{x_n\}_1^\infty$ ως ιδιοδιανύσματα.

Έστω $\mathcal{R}$ μια αντιμεταθετική οικογένεια τελεστών πρώτης τάξης σε έναν διαχωρίσιμο χώρο *Hilbert* H.

Θέτουμε $X_0 = cls\{ranR \; : \; R \in \mathcal{R}\}$ και $Y_0 = cls\{ranR^* : \; R \in \mathcal{R}\}$

Πρόταση. 4.5.1
Μια αντιμεταθετική οικογένεια τελεστών πρώτης τάξης $\mathcal{R}$ είναι μεγιστική αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

$i)\mathcal{R}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών
$ii)Y_0^\perp \subseteq X_0$
$iii)\mathcal{R}$ περιέχει κάθε τελεστή πρώτης τάξης της μορφής $e \otimes f$
με $0 \neq f \in Y_0^\perp$ και $0 \neq e \in X_0^\perp$

Πρόταση. 4.5.2
Έστω $\mathcal{R}$ μεγιστική οικογένεια τελεστών πεπερασμένης τάξης.

Για κάθε $A, B \in \mathcal{R}'$ έχουμε,

$$AB - BA = EAGBF - EBGAF$$

όπου E, F και G είναι οι προβολές επί των χώρων $X_0^{\perp}$, $Y_0^{\perp}$ και $X_0 \bigcap Y_0$ αντίστοιχα.

Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι τα Πορίσματα 2.2 και 4.2 από το [7] και θα μας χρειαστούν για τη μελέτη των αλγεβρών που διαπραγματευόμαστε.

Πρόταση. 4.5.3
Αν είναι $X_0 = H$ ή $Y_0 = H$ και $\mathcal{R}$ είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό με μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς τότε το $\mathcal{R}$ είναι μεγιστικό.

Απόδειξη.
Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 4.5.1. .

□

Πρόταση. 4.5.4
Αν $\mathcal{R}$ είναι μια μεγιστική αντιμεταθετική οικογένεια τελεστών πρώτης τάξης τότε οποιαδήποτε από τις συνθήκες $X_0 = H$, $Y_0 = H$, $X_0 \bigcap Y_0 = \{0\}$ συνεπάγεται ότι η $\mathcal{R}'$ είναι αβελιανή.

Απόδειξη.
Αν $X_0 = H$ ή $Y_0 = H$ ή $X_0 \bigcap Y_0 = \{0\}$ τότε από τη πρόταση 4.5.2 προκύπτει ότι $E = 0$ ή $F = 0$ ή $G = 0$.
Αν ισχύει μια από τις τρείς συνθηκές τότε ισχύει ότι $AB = BA$.
Η τελευταία σχέση υποδεικνύει ότι $\mathcal{R}'$ είναι αβελιανή.

□

Έστω ότι $\mathcal{R} = \{\lambda(y_n \otimes x_n)\ ,\ n \geq 1\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$ όπου $\{x_n\}_1^{\infty}$,$\{y_n\}_1^{\infty}$ είναι οι ακολουθίες που ορίσαμε στην αρχή.Λαμβάνοντας υπόψιν τη μορφή των ακολουθιών $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ παρατηρούμε ότι το $\mathcal{R}$ είναι αντιμεταθετική οικογένεια και από τη πρόταση 4.5.3 και όσα αναφέραμε πιό πάνω είναι μεγιστικό. Αν $\mathcal{R}'$ είναι ο μεταθέτης του $\mathcal{R}$ τότε αφού $X_0 = cls\{x_n\ :\ n \geq 1\} = l_2$ και $\mathcal{R}'$ είναι μεγιστική αβελιανή αν και μόνο αν είναι αβελιανή, από τη πρόταση 4.5.4, έχουμε ότι $\mathcal{R}'$ είναι μεγιστική αβελιανή υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(l_2)$.

Έστω $T \in \mathcal{R}'$.Τότε κάθε διάνυσμα x_n είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T.
Ισχύει και το αντίστροφο.

Πράγματι,

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $\{\lambda_n\}_1^\infty$ βαθμωτή τέτοια ώστε $Tx_n = \lambda_n x_n$, όπου T είναι φραγμένος τελέστης στο l_2.

Τότε ισχύει

$$< T^* y_m - \overline{\lambda_m} y_m, x_n >=< y_m, \lambda_n x_n > -\overline{\lambda_m} < y_m, x_n >$$

$$= (\overline{\lambda_n} - \overline{\lambda_m}) < y_m, x_n >= 0,$$

για κάθε n, m

και επειδή $cls\{x_n : n \geq 1\} = l_2$ έχουμε ότι $T^* y_m = \overline{\lambda_m} y_m$, για κάθε $m \geq 1$.

Συνεπώς $T(y_m \otimes x_m) = y_m \otimes Tx_m = \lambda_m (y_m \otimes x_m)$

και $(y_m \otimes x_m)T = T^* y_m \otimes x_m = \lambda_m (y_m \otimes x_m)$ για κάθε m.

Επομένως ο T αντιμετατίθεται με κάθε στοιχείο του $\mathcal{R}$ και άρα $T \in \mathcal{R}'$.
Έστω $\{\varphi_n\}_1^\infty$ η κανονική ορθοκανονική βάση του l_2 και για $T \in \mathcal{R}'$ θεωρούμε τον πίνακα του T ως προς τη βάση $\{\varphi_n\}_1^\infty$.

Έχουμε ότι λ_n είναι οι ιδιοτιμές του T με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα x_n, δηλαδή $Tx_n = \lambda_n x_n \; \forall \; n$.

Αν $[T] = (k_{ij})$ τότε $k_{ij} =< T\varphi_j, \varphi_i >$.
Επίσης είναι $\varphi_n = nx_n - nx_{n-1} \; \forall n > 1$, οπότε:

$$k_{ij} =< T\varphi_j, \varphi_i >=< T(jx_j - jx_{j-1}, ix_i - ix_{i-1} >=< \lambda_j jx_j - \lambda_{j-1} jx_{j-1}, ix_i - ix_{i-1} >$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{αν } i > j \\ s_i & \text{αν } i = j \\ \dfrac{1}{i} a_j & \text{αν } j > i \end{cases}$$

όπου

$$\begin{gathered} a_1 = \lambda_1 \\ a_2 = 2\lambda_2 - 2\lambda_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n = n\lambda_n - n\lambda_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ \text{κ.λ.π.} \end{gathered}$$

ο πίνακας T ως προς την $\{\varphi_n\}$ έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5.. \\ 0 & s_2 & \frac{1}{2}a_3 & \frac{1}{2}a_4 & \frac{1}{2}a_5.. \\ 0 & 0 & s_3 & \frac{1}{3}a_4 & \frac{1}{3}a_5.. \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & \frac{1}{4}a_5.. \\ . & . & . & . & ... \\ . & . & . & . & ... \\ . & . & . & . & ... \end{bmatrix}$$

όπου όπως προαναφέραμε $\{a_n\}_1^\infty$είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών

και $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_k$.

Πρόταση. 4.5.5

Έστω $\{a_n\}_1^\infty$είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών και έστω ότι $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_k$.

Αν $\eta_n = s_n \xi_n + \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^\infty a_m \xi_m$ τότε η απεικόνιση $T : l_2 \to l_2$ τέτοια ώστε

$$(\xi_{1,}\xi_2, ..., \xi_n, ...) \to (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...)$$

ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή στον l_2 αν και μόνο αν $a = \{a_n\}_1^\infty$ ανήκει στον l_2.

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής που ανήκει στο $\mathcal{B}(l_2)$.Τότε αφού

$< T^*\varphi_1, \varphi_n >=< \varphi_1, T\varphi_n >= \overline{a_n}$, αφού $T\varphi_n = (a_n, \frac{1}{2}a_n, ..., \frac{1}{n-1}a_n, s_n, 0, 0, ...)$,

(η $n-$οστή στήλη του πίνακα $[T]$)

και

$$\sum_{n=1}^\infty |\overline{a_n}|^2 = \sum_{n=1}^\infty | < T^*\varphi_1, \varphi_n > |^2 = ||T^*\varphi_1||^2 < \infty$$

έχουμε ότι $\{\overline{a_n}\}_{n=1}^\infty \in l_2$ και συνεπώς $a \in l_2$.

Αντιστρόφως, έστω $a = \{a_n\}_1^\infty \in l_2$ και θεωρούμε τον διαγώνιο τελεστή D που ορίζεται ως $D\varphi_n = s_n\varphi_n$,$n \geq 1$.

Τότε $|s_n| = | \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}a_k| \leq (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})^{1/2}(\sum_{k=1}^n |a_k|^2)^{1/2} \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{6}||a||$.

Συνεπώς η $\{s_n\}_1^\infty$ είναι φραγμένη ακολουθία και άρα D είναι φραγμένος τελεστής. Άρα αρκεί να δείξω ότι $A = T - D$ είναι φραγμένος.

Αλλά ο A απεικονίζει το $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$ στο $\{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...\}$,
όπου $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^\infty a_m\xi_m$.

Επίσης ισχύει

$$\begin{aligned} ||Ax||^2 &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}| \sum_{m=n+1}^\infty a_m\xi_m|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}(\sum_{m=n+1}^\infty |a_m|^2)(\sum_{m=n+1}^\infty |\xi_m|^2) \\ &\leq ||a||^2||x||^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}||a||^2||x||^2 \end{aligned}$$

και συνεπώς $||A|| \leq \dfrac{\pi\sqrt{6}}{6}||a||$.

Αφού ο A είναι φραγμένος συνεπάγεται ότι ο T είναι φραγμένος και έχουμε ότι

$$||T|| \leq ||D|| + ||S|| \leq sup_n|s_n| + \frac{\pi\sqrt{6}}{6}||a|| \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{6}||a|| + \frac{\pi\sqrt{6}}{6}||a|| \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{3}||a||.$$

□

Πόρισμα. 4.5.6
Η άλγεβρα $\mathcal{R}'$με την *norm*-τοπολογία και ο χώρος *Hilbert* l_2 είναι τοπολογικά ισόμορφοι.

Απόδειξη.
Η πρόταση 4.5.5 μας λέει ότι υπάρχει μια γραμμική '1-1' απεικόνιση y από τον l_2 επί της $\mathcal{R}'$.
Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι y και y^{-1} είναι φραγμένες απεικονίσεις.

Αν T αντιστοιχεί στο $a \in l_2$ με $a = \{a_n\}_1^\infty$τότε

$$||T\ \overline{a}||^2 = \textstyle\sum_{n=1}^\infty |s_n\overline{a_n} + \dfrac{1}{n}\sum_{m=n+1}^\infty a_m\overline{a_m}|^2 \geq |s_1\overline{a_1} + \sum_{m=2}^\infty |a_m|^2|^2 = ||a||^4$$

και συνεπώς

$$||T|| = sup\{||Tx||, x \in l^2, ||x|| = 1\} \geq \frac{||T\overline{a}||}{||a||} \geq ||a||$$

□

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω προκύπτει :

$$||a|| \leq ||T|| \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{3}||a||$$

το οποίο συνεπάγεται ότι y και y^{-1}είναι συνεχείς.

Πρόταση. 4.5.7
Έστω ότι ο τελεστής T επί του l_2 προσδιορίζεται από την ακολουθία $\{a_n\}_1^\infty$όπως στην πρόταση 4.5.5.
Τότε ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν $s_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι ο T είναι συμπαγής και αφού κάθε s_n είναι ιδιοτιμή του T συνεπάγεται ότι $s_n \to 0$ με $n \to \infty$

Αντιστρόφως, αν D είναι ο διαγώνιος τελεστής που ορίζεται ως $D\varphi_n = s_n\varphi_n$, όπου $\{\varphi_n\}$ είναι η συνήθης βάση του l_2, τότε η συνθήκη $s_n \to 0$ όταν $n \to \infty$ συνεπάγεται ότι ο D είναι συμπαγής.

Πράγματι, έστω D_n ο διαγώνιος τελεστής με διαγώνιο $(s_1, s_2, ..., s_n, 0, 0, ...)$ τότε $D - D_n$ είναι διαγώνιος με διαγώνιο $(0, ..., 0, s_{n+1}, s_{n+2}, ...)$,
οπότε $||D - D_n|| = sup_k|s_{n+k}|$.

Επομένως αν $s_n \to 0$ τότε $||D - D_n|| \to 0$ και επειδή D_n , $n \geq 1$ είναι πεπερασμένης τάξης τελεστές, έπεται ότι D συμπαγής.
Έστω $A = T - D$. Αρκεί να δείξουμε ότι A συμπαγής.

Ορίζουμε την ακολουθία A_N , $N \geq 2$ με $A_N x = y$ όπου, αν $x = \{\xi_n\}_1^\infty$ και $y = \{\eta_n\}_1^\infty$ τότε

$$\eta_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \quad \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \xi_m & n \leq N-1 \\ \\ 0 \quad n \geq N \end{cases}$$

Για κάθε N ο A_N είναι πεπερασμένης τάξης τελεστής και $(A - A_N)x = y$

όπου $\eta_n = \dfrac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{\infty} b_m \xi_m$ και

$$b_m = \begin{cases} 0 & m \leq N \\ a_m & m \geq N+1 \end{cases}$$

Αν $b = \{b_n\}_1^\infty$ τότε εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της πρότασης 4.5.5

έχουμε:

$$||A - A_N|| \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{3}||b|| = \frac{\pi\sqrt{6}}{3}(\textstyle\sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m|^2)^{1/2}.$$

Αφού $a \in l_2$ συνεπάγεται ότι $lim_{N\to\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m|^2 \to 0$ και επομένως $A_N \to A$, $N \to \infty$ ως προς τη νόρμα.
Συνεπώς ο A είναι το όριο ως προς τη νόρμα ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης και επομένως είναι συμπαγής.

$\square$

Παρατήρηση
Μπορούμε εύκολα να βρούμε έναν συμπαγή τελεστή στο $\mathcal{R}'$.
Έστω ότι $a_1 = 1$ και $a_n = -\dfrac{1}{n-1}$, $n \geq 2$.
Τότε $s_n = \dfrac{1}{n}$ και συνεπώς $lim_{n\to\infty} s_n = 0$.
Επομένως ο τελεστής Τ που αντιστοιχεί στην ακολουθία $\{a_n\}_1^{\infty}$ με βάση την πρόταση 4.5.7 είναι συμπαγής.

Πρόταση. 4.5.8
Έστω T είναι ένας τελεστής επί του l_2 οριζόμενος από την ακολουθία $\{a_n\}_1^{\infty}$, όπως στην πρόταση 4.5.5.
Τότε ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν το διάνυσμα $a = \{a_n\}_1^{\infty}$ είναι ορθογώνιο με το διάνυσμα $z_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$.

Απόδειξη.
Προφανώς ισχύει $lim_{n\to\infty} s_n = 0$ αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k) a_k = 0$ το οποίο σημαίνει ότι το a είναι ορθογώνιο με το z_0.

$\square$

Παρατήρηση
Ένας απλός υπολογισμός μας δείχνει ότι για οποιοδήποτε $T \in \mathcal{R}'$ το διάνυσμα z_0 είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\sum_{\kappa=1}^{\infty} (1/k) a_k$, όπου a_n είναι η ακολουθία που προσδιορίζει τον τελεστή T.

Θέτουμε $z_n = z_0 - x_n = (0, 0, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ n-\text{οστή θέση}}}{\dfrac{1}{n+1}}, \dfrac{1}{n+2}, ...)$.

Αν θέσουμε $z_n = z_0 - x_n = (0, 0, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ n-\text{οστή θέση}}}{\dfrac{1}{n+1}}, \dfrac{1}{n+2}, ...)$ τότε είναι $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$

και $Tx_n = s_n x_n$, $\forall n \geq 1$(βλέπε απόδειξη πρότασης 4.5.4)

Έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση. 4.5.9
Έστω T τελεστής στον l_2 που προσδιορίζεται από μια ακολουθία $a = \{a_n\}_1^\infty$.
Τότε $z_n = z_0 - x_n$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T αν και μόνο αν η ακολουθία $\{a_n\}_1^\infty$είναι ορθογώνια με την ακολουθία z_n.
Όταν z_n είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T η αντίστοιχη ιδιοτιμή του είναι $s_n = \sum_{k=1}^\infty (1/k)a_k$.

Απόδειξη.
Έχουμε ότι $x_n = z_0 - z_n$,$Tz_0 = (\sum_{k=1}^\infty (1/k)a_k)z_0$ και $Tx_n = s_n x_n$

Τότε προκύπτει ότι

$$Tz_n = Tz_0 - Tx_n$$

$$= (\textstyle\sum_{k=1}^\infty \dfrac{1}{k}a_k)z_0 - (\textstyle\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}a_k)x_n$$

$$= (\textstyle\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}a_k)z_n + (\textstyle\sum_{k=n+1}^\infty \dfrac{1}{k}a_k)z_0$$

$$= s_n z_n + (\textstyle\sum_{k=n+1}^\infty \dfrac{1}{k}a_k)z_0$$

Η ισότητα αυτή μας δείχνει ότι $Tz_n = s_n z_n$ αν και μόνο αν $(\sum_{k=n+1}^\infty (1/k)a_k)z_0 = \{0\}$ το οποίο είναι ισοδύναμο με τη σχέση $\sum_{k=n+1}^\infty (1/k)a_k = 0$,
το οποίο επίσης είναι ισοδύναμο με a είναι κάθετο με το z_n και συνεπώς προκύπτει αυτό που θέλουμε .

□

Πρόταση. 4.5.10
Έστω T τελεστής επί του l_2 που προσδιορίζεται από μια ακολουθία $a = \{a_n\}_1^\infty$.Αν $s_m \neq s_n$ για $m \neq n$ και το διάνυσμα $a = \{a_n\}_1^\infty$ δεν είναι ορθογώνιο με κανένα από τα διανύσματα z_n $n \geq 1$ τότε ο τελεστής T έχει απλές ιδιοτιμές.

Απόδειξη.
Αρκεί να δείξουμε ότι τα μόνα ιδιοδιανύσματα τουT είναι τα μη-μηδενικά βαθμωτά πολλαπλάσια των διανυσμάτων x_n,$n \geq 1$ και z_0.
Υποθέτουμε ότι $Tx = \lambda x$ με $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$, $x \notin cls\{z_0\}$ και υποθέτουμε ότι r είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $r\xi_r \neq (r+1)\xi_{r+1}$.

Τότε έχουμε $\lambda\xi_r = s_r\xi_r + \dfrac{1}{r}\sum_{m=r+1}^\infty a_m\xi_m$

Αν πολλαπλάσιασω με r η παραπάνω σχέση γίνεται $\lambda r\xi_r = rs_r\xi_r + \sum_{m=r+1}^\infty a_m\xi_m(1)$

Επίσης ισχύει $\lambda\xi_{r+1} = s_{r+1}\xi_{r+1} + \dfrac{1}{1+r}\sum_{m=r+2}^{\infty} a_m\xi_m$

$$= s_r\xi_{r+1} + \frac{1}{1+r}\sum_{m=r+1}^{\infty} a_m\xi_m$$

Ισοδύναμα $\lambda(r+1)\xi_{r+1} = (r+1)s_r\xi_{r+1} + \sum_{m=r+1}^{\infty} a_m\xi_m$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $\lambda(r\xi_r - (r+1)\xi_{r+1}) = s_r(r\xi_r - (r+1)\xi_{r+1}) \Rightarrow \lambda = s_r$.

Επίσης $\lambda\xi_{r+2} = s_{r+2}\xi_{r+2} + \dfrac{1}{r+2}\sum_{m=r+3}^{\infty} a_m\xi_m$

$$= s_{r+1}\xi_{r+2} + \frac{1}{r+2}\sum_{m=r+2}^{\infty} a_m\xi_m.$$

Ισοδύναμα $\lambda(r+2)\xi_{r+2} = (r+2)s_{r+1}\xi_{r+2} + \sum_{m=r+2}^{\infty} a_m\xi_m (3)$

Αφαιρώ τη σχέση (3) από τη σχέση (2) και προκύπτει :

$$\lambda[(r+1)\xi_{r+1} - (r+2)\xi_{r+2}] = s_r(r+1)\xi_{r+1} + a_{r+1}\xi_{r+1} - (r+2)s_{r+1}\xi_{r+2}$$

$$\lambda[(r+1)\xi_{r+1} - (r+2)\xi_{r+2}] = s_{r+1}[(r+1)\xi_{r+1} - (r+2)\xi_{r+2}]$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\lambda = s_r$ και από υπόθεση $s_r \neq s_{r+1}$ συνεπώς

$(r+1)\xi_{r+1} = (r+2)\xi_{r+2}$.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $s_r \neq s_{r+k}$ $k \geq 1$ με επαγωγή έχουμε

$$\xi_{r+k} = \frac{r+1}{r+k}\xi_{r+1}\ , k \geq 1 \ (4)$$

Από την (2) και λ=s_r προκύπτει $\sum_{m=r+1}^{\infty} a_m \xi_m = 0 \Rightarrow \xi_{r+1}(\sum_{m=r+1}^{\infty}(1/m)a_m) = 0$.

Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\sum_{m=r+1}^{\infty}(1/m)a_m \neq 0$$

και συμπεραίνουμε ότι $\xi_{r+1} = 0 \Rightarrow \xi_{r+k} = 0 \ \forall k \geq 1$.

Επομένως το x είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο του $x_r = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{r}, ...)$

□

Παρατήρηση
Η συνθήκη $s_n \neq s_m$ για $n \neq m$ δηλώνει ότι το διάνυσμα $a = \{a_n\}_1^{\infty}$μπορεί να είναι ορθογώνιο το πολύ σε ένα από τα
διανύσματα z_n $n \geq 1$. Πράγματι αν a είναι ορθογώνιο με το z_n και z_m με $n > m$, τότε

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} a_k \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} a_k \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} a_k = s_n - s_m \Rightarrow s_n = s_m. \end{aligned}$$

Πόρισμα. 4.5.11
Έστω T ένας τελεστής επί του l_2 που προσδιορίζεται από την ακολουθία $\{a_n\}_1^{\infty}$.Αν $s_n \neq s_m$ για $m \neq n$ τότε τα μόνα ιδιοδιανύσματα του T είναι μη-μηδενικά βαθμωτά πολλαπλάσια των διανυσμάτων z_0, x_n για $n \geq 1$ και ενδεχομένως ένα απο τα διανύσματα z_n για $n \geq 1$.

Απόδειξη.
Η απόδειξη προκύπτει από τις προτάσεις 4.5.9 , 4.5.10 και την προηγούμενη παρατήρηση.

□

Παρατήρηση
Αν T είναι ένας συμπαγής τελεστής στην $\mathcal{R}'$ τότε $Tz_0 = 0$ και έτσι ο $ker(T)$ δεν είναι τετριμένος.

Αν ο T ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης 4.5.10 τότε ο $kerT$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα z_0.

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

Υποθέτουμε ότι $Tx = 0$ για κάποια $x \in l_2$ με $0 \neq x = (\xi_1, \xi_2, ...)$.

Τότε $\eta_n = s_n \xi_n + \dfrac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \xi_m = 0 \ \forall n \geq 1$.

Έστω $\eta_1 = \eta_2 \Rightarrow a_1(\xi_1 - \dfrac{1}{2}\xi_2) = 0$.

Επειδή η ακολουθία $\{a_n\}_1^\infty$ είναι ορθογώνια με το z_0 πρέπει $a_1 \neq 0$ αλλιώς η ακολουθία $\{a_n\}_1^\infty$θα είναι ορθογώνια με το z_1που είναι αντίθετο με την υπόθεση.
Άρα ισχύει $\xi_2 = \dfrac{1}{2}\xi_1$.
Επίσης αφού το $\{a_n\}_1^\infty$ δεν είναι ορθογώνιο με κανένα από τα z_n,$n \geq 1$, συνεπάγεται ότι $s_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$.
Συνεπώς με επαγωγή προκύπτει ότι $\xi_n = (1/n)\xi_1$ για όλα τα $n \geq 1$.
Άρα το x είναι πολλαπλάσιο του z_0.

Σχόλιο
Στη συνέχεια θα δούμε μια νέα κατηγορία συμπαγών τελεστών οι οποίοι έχουν απλές ιδιοτιμές και μια πλήρη ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων
και δεν επιδέχονται αυστηρή φασματική σύνθεση.

Θεώρημα. 4.5.12
Έστω A είναι ένας συμπαγής τελεστής του οποίου όλα τα μη-μηδενικά ιδιοδιανύσματα είναι απλά και έστω $\{x_n\}_1^\infty$ είναι η αντίστοιχη ακολουθία των ιδιοδιανυσμάτων.Ο τελεστής A επιδέχεται αυστηρή φασματική σύνθεση αν και μόνο αν η ακολουθία $\{x_n\}_1^\infty$ είναι ισχυρά πλήρης.
Αν $ker(A) = \{0\}$ τότε αρκεί ο A να δέχεται φασματική σύνθεση.

Πόρισμα. 4.5.13
Αν T είναι ένας συμπαγής τελεστής στον $\mathcal{R}'$ και ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης 4.5.10 τότε ο τελεστής A δεν επιδέχεται αυστηρή φασματική σύνθεση.

Απόδειξη.
Προκύπτει άμεσα απο το Θεώρημα 4.5.12 , την πρόταση 4.5.10 και την παρατήρηση που είναι αμέσως μετά την πρόταση 4.5.10. .

$\square$

4.6 Ανακλαστικό Αποτέλεσμα

Ανάλογα παραδείγματα αντιμεταθετικών μεγιστικών αλγεβρών έχουν μελετηθεί και από τους $Erdos$ και $Longstaff$ στις εργασίες [6], [7].
Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε ικανές συνθήκες ώστε ένας συμπαγής τελεστής της άλγεβρας που δίνεται στο παράδειγμα 8 του [7] να είναι ανακλαστικός και να δέχεται φασματική σύνθεση.

Έστω $\{\varphi_n\}_1^\infty$ είναι μια ορθοκανονική βάση του l_2
Θέτουμε

$$f_n = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m \text{ και } e_n = \varphi_n - \varphi_{n+1} \; \forall n \geq 1$$

Τότε οι ακολουθίες $\{f_n\}_1^\infty$ και $\{e_n\}_1^\infty$ είναι διορθογώνιες και κάθε μια από αυτές είναι πλήρης και ελαχιστική.
Επίσης έχει δειχθεί ότι η ακολουθία $\{f_n\}_1^\infty$είναι ισχυρά πλήρης, οπότε ομοίως είναι και η $\{e_n\}_1^\infty$.

Επιπλέον αν $\mathcal{R} = \{\lambda e_n \otimes f_n) : \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, n \geq 1\}$ και $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ είναι ισχυρά κλειστή άλγεβρα που παράγεται απο την $\mathcal{R}$ τότε $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$ είναι μεγιστική αβελιανή.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί αναδιατύπωση των προτάσεων 6.1 και 6.3 [7] και θα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του βασικού μας αποτελέσματος στη συνέχεια.

Πρόταση. 4.6.1
Έστω $\{a_n\}_1^\infty$μια ακολουθία των μιγαδικών αριθμών και έστω $s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$.
Αν

$$\eta_n = s_n\xi_n + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m\xi_m$$

τότε η απεικόνιση $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) \to (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ...)$
ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή A επί του l_2 αν και μόνο αν

$i)$η ακολουθία s_n είναι φραγμένη

$ii) sup_n n \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m|^2 < \infty$

Ο τελεστής A είναι συμπαγής αν και μόνο αν

$iii)$ $s_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$

και

$iv)\ n\sum_{m=n+1}^{\infty}|a_m|^2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$
$v) ||A|| \leq \sup_n |s_n| + (6\sup_n n \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m|^2)^{1/2}$

Ο πίνακας αυτού του τελεστή ως προς τη κανονική βάση του l_2 είναι :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . \\ 0 & s_2 & a_3 & a_4 & a_5 & . & . & . \\ 0 & 0 & s_3 & a_4 & a_5 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & a_5 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_5 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Πρόταση. 4.6.2
Έστω A ένας συμπαγής τελεστής επί του l_2 με αντίστοιχη ακολουθία $a = \{a_n\}_1^{\infty}$όπως ορίζεται στην πρόταση 4.6.1. .
Αν η ακολουθία $\{s_n\}_1^{\infty}$των μερικών αθροισμάτων είναι πραγματική,γνησίως μονότονη και ισχύει $s_n \leq M/\sqrt{n}$,$n \geq 1$,
όπου M είναι μια θετική σταθερά, τότε ο τελεστής A είναι ανακλαστικός και επιδέχεται φασματική σύνθεση.

Απόδειξη.
Θεωρούμε $s_n > 0$ για όλα τα n, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε $-A$ αντί για A.

Ορίζω $K_n = \sum_{m=1}^{n} s_m R_m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,όπου $R_m = e_m \otimes f_m,\ m \in \mathbb{N}$

Τότε $K_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ μέσω του ορισμού της πρότασης 4.6.1 η K_n αντιστοιχεί στην ακολουθία $\{a'_m\}_1^{\infty}$ με

□

$$a'_m = \begin{cases} a_m & m \leq n \\ -s_n & m = n+1 \\ 0 & m > n+1 \end{cases}$$

Αν $\{s'_m\}_1^{\infty}$είναι η αντίστοιχη ακολουθία μερικών αθροισμάτων τότε :

$$s'_m = \begin{cases} s'_m & m \leq n \\ 0 & m > n \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την πρόταση 4.6.1 για κάθε n έχουμε :

$$||K_n|| \leq sup_k|s'_k| + \sqrt{6}\{sup_k k \ \textstyle\sum_{m=k+1}^{\infty} |a'_m|^2\}^{1/2}$$

$$= sup_{k\leq n}|s_k| + \sqrt{6}\{sup_{k\leq n}[k \ \textstyle\sum_{m=k+1}^{n} |a_m|^2 + k|s_n|^2]\}^{1/2}.(5)$$

Επειδή A είναι ένας συμπαγής φραγμένος τελεστής στο $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ υπάρχει μια θετική σταθερά M_1 τέτοια ώστε

$$k \textstyle\sum_{m=k+1}^{\infty} |a_m|^2 < M_1 \ \forall k \geq 1.$$

Επίσης από την υπόθεση, αν $k \leq n$ έχουμε

$$k|s_n|^2 \leq ns_n^2$$

$$\leq n(M/\sqrt{n})^2 = M^2.$$

Με βάση τη σχέση (5) προκύπτει

$$||K_n|| \leq M + \sqrt{6}[M_1 + M^2]^{1/2}.$$

Άρα η ακολουθία $\{K_n\}_1^{\infty}$ τελεστών είναι φραγμένη ως προς τη νόρμα.

Επίσης για $n > m$ έχουμε

$$K_n f_m = s_m f_m = A f_m$$

και για κάθε σταθερά m η ακολουθία $\{K_n f_m\}_1^\infty$ συγκλίνει στο Af_m.

Η ακολουθία $\{f_m\}_1^\infty$ είναι πλήρης στον l_2 και $\{K_n\}_1^\infty$ είναι φραγμένη ως προς τη νόρμα.
Αυτό δείχνει ότι η $\{K_n\}_1^\infty$ συγκλίνει ισχυρά στον A.

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής :

Θεωρούμε ότι ένα $x \in l_2$.
Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας ακέραιος r τέτοιος ώστε :

$$||x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_\iota f_i|| < \varepsilon \text{ όπου } \lambda_i \in \mathbb{C} \; i = 1, 2, ..., r.$$

Έστω $n > r$.Τότε ισχύει

$$||K_n x - Ax|| = ||K_n x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i K_n f_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i K_n f_i - Ax||$$

$$\leq ||K_n|| \; ||x - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i|| + || \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A f_i - Ax||$$

$$\leq \varepsilon(||K_n|| + ||A||)$$

Ισχύει ότι $||K_n x - Ax|| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, αφού η ακολουθία K_n είναι φραγμένη ως προς τη νόρμα.

Συνεπώς,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n R_n \text{ στην ισχυρή τοπολογία τελεστών.}$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η ισχυρά κλεστή άλγεβρα $\mathcal{A}$ που παράγεται από το A και το ταυτοτικό τελεστή ισούται με την $\mathcal{A}(R)$.
Είναι αρκετό να δείξουμε ότι $R_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $x \in l_2$.

Τότε αφού $A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n R_n$(ισχυρά) και $R_m R_n = \delta_{nm} R_n$, έχουμε:

$$||(\frac{A}{s_1})^k x - R_1 x|| = ||\frac{1}{s_1} \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{s_n}{s_1})^{k-1} s_n R_n x||$$

$$\leq \frac{1}{s_1} (\frac{s_n}{s_1})^{k-1} || \sum_{n=2}^{\infty} s_n R_n x||. \ (6)$$

Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} s_n R_n x = Ax$ η ακολουθία $\{\sum_{n=k}^{\infty} s_n R_n x\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο μηδέν και άρα είναι φραγμένη.

Συνεπώς το δεξί μέρος της (6) τείνει στο μηδέν καθώς $k \to \infty$.

Αυτό δηλώνει ότι $R_1 \in \mathcal{A}$.

Τώρα αν θέσουμε $A_1 = A - s_1 R_1$ τότε

$$||(\frac{A_1}{s_2})^k x - R_2 x|| \leq \frac{1}{s_2} (\frac{s_3}{s_2})^{k-1} || \sum_{n=3}^{\infty} s_n R_n x||$$

που σημαίνει ότι $||(\frac{A_1}{s_2})^k x - R_2 x|| \to 0$ με $k \to \infty$ και συνεπώς $R_2 \in \mathcal{A}$.

Χρησιμοποιώντας την επαγωγή παίρνουμε $R_n \in \mathcal{A}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άρα $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Αφού $\mathcal{R}$ είναι μια αντιμεταθετική οικογένεια , έχουμε $Lat\mathcal{R} = Lat\mathcal{A}(\mathcal{R})$ και αφού $\mathcal{A}(R)$ είναι μεγιστική αβελιανή αποδεινύεται ότι

$$A(\mathcal{R}) = AlgLat\mathcal{R} = AlgLat\mathcal{A}(\mathcal{R}),$$

που σημαίνει ότι η $\mathcal{A}(R)$ είναι ανακλαστική και επομένως και η $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική.

Τέλος από το πόρισμα 6.5 του [7] προκύπτει ότι ο $\mathcal{A}$ δέχεται φασματική σύνθεση.

Πόρισμα. 4.6.3
Έστω A ένας συμπαγής τελεστής επί του l_2 προσδιορισμένος από την ακολουθία $\{a_n\}_1^\infty$ όπως στην πρόταση 4.6.1. .
Αν $\{s_n\}_1^\infty$ είναι πραγματική,γνησίως μονότονη και ισχύει $\sum_{n=1}^\infty s_n < \infty$ τότε ο A είναι ανακλαστικός τελεστής και επιδέχεται φασματική σύνθεση.

Απόδειξη.
Αφού μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s_n > 0$ $\forall n \geq 1$ και επειδή

$$ns_n \leq \sum_{k=1}^n s_k \text{ και } \sum_{k=1}^\infty s_k < \infty$$

υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $ns_n \leq M$ για όλα τα n.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την πρόταση 4.6.2. .

□

Παρατήρηση
Είναι γνωστό(βλ [7]) ότι η ακολουθία $\{G_k\}_1^\infty$,όπου

$$G_k = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^m e_n \otimes f_m$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^m R_n$$

τείνει ισχυρά στον ταυτοτικό τελεστή I.Επειδή $G_k \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$, $k \geq 1$ έπεται ότι για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ η ακολουθία $\{AG_k\}_1^\infty$συγκλίνει ισχυρά στο A.
Ειδικότερα αν A είναι ένας συμπαγής τελεστής στην $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ η ακολουθία $\{AG_k\}_1^\infty$ συγκλίνει στο A ως προς τη νόρμα.
Συνεπώς κάθε συμπαγής τελεστής στο $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ είναι $norm$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης στην άλγεβρα.

Βιβλιογραφία

[1] Αργυρός Σπύρος: Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης,Μάιος 2004

[2] Γιαννόπουλος Απόστολος: Σημειώσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση,Αθήνα 2003

[3] Καρανάσιος Σωτήριος:Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές,Αθήνα 2009

[4] Κατάβολος Αριστείδης:Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών ,Αθήνα 2008

[5] *Brezis Haim*: Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και εφαρμογές, Αθήνα 1997

[6] *Erdos J.A.On certain Abelian Algebras of operators and their subspace lattices. Proc.Lond.Math.Soc*, 29 (3) 1974 , $77-97$

[7] *Erdos, J.A.−Longstaff W.E. Commuting Families of operators of rank one. Proc.Lond.Math.Soc.* (3) 44 (1982) , $161-177$

[8] *S.*Karanasios : *On Certain Commuting Families Of Rank One Operators*, 1983