ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αυτοαναφορικές, διαγώνιες μέθοδοι και πλήρης μελέτη του σχετικοποιημένου $P^A = NP^A$ *και* $P^B \neq NP^B$ *των* $Baker - Gill - Solovay$

ΜΕΡΟΣ Α'

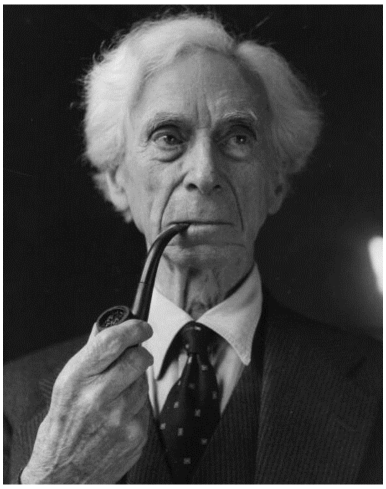
ΤΣΙΑΝΤΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ

Επιβλέπων : Αρβανιτάκης Αλέξανδρος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2014

Πίνακας περιεχομένων

Georg Cantor



Bertrand Russell

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μία προσέγγιση αυτοαναφορικών και διαγωνίων μεθόδων, ενώ παρουσιάζεται μία πλήρης μελέτη του σχετικοποιημένου προβλήματος $P^A = NP^A$ και $P^B \neq NP^B$ των Baker, Gill και Solovay.

Στο πρώτο μέρος, συζητούνται γνωστά αυτοαναφορικά παράδοξα σύμφωνα με το άρθρο [2] του Noson S. Yanofsky. Παρουσιάζεται μία προσπάθεια για έναν ενιαίο φορμαλισμό γνωστών παραδόξων, από τα θεωρήματα του Cantor, το παράδοξο του Russell και του ψεύτη, μέχρι και το πρόβλημα του τερματισμού του Turing.

Στο δεύτερο μέρος προχωράμε σε μία αρκετά εκτενή μελέτη του «P έναντι NP», το οποίο αποτελεί το σημαντικότερο ανοιχτό πρόβλημα της υπολογιστικής πολυπλοκότητας και ένα από τα έξι σύγχρονα άλυτα μαθηματικά προβλήματα. Παρουσιάζεται η ιστορική αναδρομή και η φύση του προβλήματος, ορίζονται οι μηχανές Turing, οι εν λόγω κλάσεις πολυπλοκότητας, καθώς και η χωρική και χρονική πολυπλοκότητα. Ακολούθως, μελετάμε το θεώρημα του Savitch. Η εργασία ολοκληρώνεται, ενώ παρατίθενται αναλυτικά οι αποδείξεις $P^A = NP^A$ και $P^B \neq NP^B$ των Baker, Gill και Solovay.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΚΑΙ ΤΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ

Μία αίσθηση της δικής μας περατότητας κρύβεται πίσω από την έννοια του απείρου, η οποία βασανίζει τον ανθρώπινο νου εδώ και χιλιάδες χρόνια. Η ροπή της σκέψης προς την κατάκτηση αυτής της έννοιας ήταν πολύ ισχυρή και αυτό γιατί τη συναντάμε στον πυρήνα των πιο θεμελιωδών ανθρώπινων ερωτημάτων.

Η έννοια του απείρου χωρίζεται σε δύο ομάδες. Η πρώτη έχει αρνητική χροιά, δίνει την αίσθηση της δυνατότητας και της μαθηματικής έννοιας (για παράδειγμα μη μετρίσιμο, δίχως τέλος, δίχως όριο) ενώ η δεύτερη έχει θετική χροιά, δίνει μια ρεαλιστική αίσθηση και προβάλλει τη μεταφυσική έννοια (για παράδειγμα πληρότητα, ενότητα, αυτάρκεια). Ένα από τα βασικά ερωτήματα είναι το κατά πόσον μπορεί να οριστεί. Προσπαθώντας να το καθορίσουμε αυτομάτως το περιορίζουμε. Είναι σα να μη μπορεί να οριστεί εξ ορισμού -φλερτάρουμε ήδη με την αυτοαναφορά- πράγμα που μας εισάγει στα περίφημα παράδοξα, πολλά από τα οποία αποτελούν μέχρι σήμερα αντικείμενο μελέτης. Διακρίνονται σε τέσσερις κατηγορίες: τα παράδοξα του απείρως μικρού, τα παράδοξα του απείρως μεγάλου, τα παράδοξα του ενός και των πολλών και τα παράδοξα της σκέψης για το άπειρο. Οι πρώτες δύο κατηγορίες αντανακλούν τον αριστοτελικό διαχωρισμό του κατά πρόσθεση απείρου, το οποίο παριστάνεται με την απαρίθμηση των άπειρων αριθμών και του κατ' αφαίρεση απείρου, το οποίο παριστάνεται με την απειροστή σμίκρυνση κάθε μεγάλου μέρους που δεν εξαντλείται ποτέ. Τέτοια παραδείγματα συναντάμε στο παράδοξο της διχοτομίας, του Αχιλλέα και της χελώνας, του δρομέα, των άρτιων αριθμών, του ξενοδοχείου του Hilbert καθώς και σε πολλά άλλα. Η τρίτη κατηγορία περιστρέφεται γύρω από το αν μια συλλογή άπειρα πολλών πραγμάτων μπορεί να θεωρηθεί ως μια ολότητα, ένα πράγμα. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι το παράδοξο του Russell και το παράδοξο του συνόλου όλων των συνόλων. Η τελευταία κατηγορία πραγματεύεται το αν υπάρχει ουσία στον προβληματισμό του ανθρώπου για το άπειρο, εφ' όσον η προσέγγιση γίνεται με γνώμονα τη δική του πεπερασμένη ύπαρξη.

Ο Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος (611 - 547 π. Χ) ήταν ο πρώτος που εισήγαγε στη φιλοσοφία την έννοια του απείρου. Θεωρούσε πως είναι η θεμελιώδης ουσία της πραγματικότητας, η αρχή των πάντων και το υποκείμενο υπόστρωμα για την αλλαγή, όπου συμφιλιώνονται τα αντίθετα. Οι Πυθαγόρειοι το αντιμετώπισαν ως κάτι ακατανόητο και αόριστο, ενώ το ενδιαφέρον τους εστιάστηκε στην αρμονία και στην τάξη των πραγμάτων. Πίστευαν ότι όταν επιβάλλεται το πέρας στο άπειρο γεννιούνται οι φυσικοί αριθμοί, οι οποίοι είναι το κλειδί για τα πάντα. Άλλη μία απόδειξη αυτής της αρχής ήταν ότι αν την εφαρμόζαμε στο πεδίο των ήχων, από τη δυσαρμονία γεννιόταν η ομορφιά. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα των μουσικών αναλογιών του Πυθαγόρα (570 π. Χ) 1/2 για την όγδοη, 3/2 για την πέμπτη και 4/3 για την τέταρτη. Συνταράχτηκαν όμως από την ανακάλυψή του, των λεγόμενων ασύμμετρων ή άρρητων μεγεθών και αριθμών όπως η τετραγωνική ρίζα του δύο.

Ακολούθησαν ο Παρμενίδης ο Ελεάτης (515 π. Χ) και ο Μέλισσος ο Σάμιος. Ο Παρμενίδης συσχετίζει για πρώτη φορά, την έννοια του μεταφυσικού με την έννοια του απείρου, καθώς πίστευε ότι η πραγματικότητα πρέπει να είναι μεταφυσικά άπειρη. Ισχυρίστηκε ότι το φαινόμενο της αλλαγής αποτελεί ψευδαίσθηση και ότι ο άνθρωπος έχει πρόσβαση σε μια απεικόνιση της πραγματικότητας. Ίδρυσε την Ελεατική σχολή όπου ένας μαθητής του, ο Ζήνωνας ο Ελεάτης (490 π. Χ), γνωστός για τα παράδοξα του, βάλθηκε να αποδείξει ότι η κίνηση είναι αδύνατη. Αργότερα, ο Πλάτωνας (428-347 π. Χ), προσέγγισε το άπειρο με μια αίσθηση απροσδιοριστίας και χάους. Η κύρια αναφορά του ήταν ότι ο πραγματικός κόσμος, ο κόσμος των ιδεών είναι άπειρος. Οι αρχαίοι Έλληνες έφτασαν πολύ κοντά στο να δεχτούν το άπειρο στο μαθηματικό τους σύστημα, ποτέ όμως δεν το υιοθέτησαν απόλυτα. Το μεγαλύτερο παράδειγμα του πώς η ελληνική μαθηματική ιδιοφυΐα ήταν σε θέση να παρακάμψει έξυπνα το άπειρο ήταν το έργο του Ευδόξου, γνωστός για τη μέθοδο της εξάντλησης που αξιοποίησε στη συνέχεια ο Αρχιμήδης.

Στον Αριστοτέλη (384-322 π. Χ) οφείλουμε μία από τις πρώτες και σημαντικότερες φιλοσοφικές παρατηρήσεις σχετικά με το άπειρο, τη διάκριση του σε «ενεργεία» και «δυνάμει». Το άπειρο υπάρχει δυνητικά, αλλά όχι στην πραγματικότητα. Αναμφισβήτητα, ήταν ο πρώτος που απομακρύνθηκε ριζικά από τις παραδοσιακές αντιλήψεις της εποχής του και τόλμησε να ασχοληθεί σοβαρά με αυτά τα προβλήματα.

Ακολούθησε η περίοδος του Μεσαίωνα και της αναγέννησης όπου δύο πράγματα κυριάρχησαν όσον αφορά τη φιλοσοφική σκέψη για το άπειρο, η ελληνική κληρονομιά και η θρησκεία. Σημαντικό ήταν το έργο του Πλωτίνου (205-270), ο οποίος ίδρυσε το νεοπλατωνισμό ενώ ο Άγιος Αυγουστίνος (354-430) υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους χριστιανούς στοχαστές και θεολόγους. Ο Άγιος Θωμάς ο Ακινάτης (1224-1274) υπήρξε βαθιά επηρεασμένος από την αριστοτελική φιλοσοφία και την έθεσε ως βάση στον μετέπειτα καθολικισμό. Αργότερα, ο σκωτσέζος φιλόσοφος και θεολόγος John Duns Scotus (1266–1308) διατύπωσε την κατηγορηματική και τη συνκατηγορηματική χρήση του απείρου, διάκριση που θα μπορούσε να ενταχθεί στα πλαίσια πραγματικού, δυνητικού. Στην πρώτη, υπάρχει κάτι που έχει την ιδιότητα να προσπερνά κάποια πεπερασμένη μέτρηση ενώ στη δεύτερη, δοθείσης μιας πεπερασμένης μέτρησης, υπάρχει κάτι που έχει την ιδιότητα να την προσπερνά. Αργότερα, η πίστη στην παντοδυναμία του Θεού και στην αθανασία της ψυχής προκάλεσε μια αμφισβήτηση σχετικά με το ενεργεία άπειρο κατά πρόσθεση. Σε αυτά τα πλαίσια, ο Ιταλός αστρονόμος και φυσικός, Γαλιλαίος (1564-1642), ανέπτυξε το περίφημο παράδοξο του, θέλοντας να δείξει ότι όταν αναφερόμαστε σε άπειρες ποσότητες, δεν μπορούμε να αποφανθούμε ότι κάποια είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση σε σχέση με κάποια άλλη. Στο τέλος της Αναγέννησης, ο Nicholas of Cusa (1401-1464) με αναφορές στο άπειρο όπως ο Θεός, η αλήθεια, το απόλυτο ανώτατο όριο, επέμεινε ότι όλες οι περιγραφές περιέχουν ένα στοιχείο παραποίησης.

Το $17^{ο}$ αιώνα, ο Sir Isaac Newton (1642 - 1727) και ο G.W Leibniz (1646-1716), δημιούργησαν αυτό που αποκαλούμε σήμερα Απειροστικό Λογισμό. Ο τομέας αυτός, με τα παράδοξα του απείρου στον πυρήνα του, υπήρξε επανάσταση στα μαθηματικά και οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η μελέτη του πεπερασμένου είναι μερικές φορές δυνατή μόνο σ' ένα άπειρο πλαίσιο. Κίνητρο για την αλματώδη εξέλιξη του, σ' ένα μεγάλο βαθμό ήταν προβλήματα όπως αυτό του ορισμού της περιοχής ενός καμπύλου σχήματος ή του ορισμού της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο αυτής. Κοινό στοιχείο στην προσέγγιση τους, είναι η έννοια του απειροστού. Για τον Leibniz ήταν ένας «τρόπος του λέγειν» ή αλλιώς χρήσιμες μυθοπλασίες, ενώ για τον Newton, τα απειροστά είχαν μια χρήση δυνητική και όχι πραγματική. Θέσεις για το διαφορικό λογισμό, πήραν και οι Berkeley, de L'Hopital, Cauchy, Bolzano και Weirstrauss. Σε αυτό το πλαίσιο αναπτύχθηκε και η έννοια της συνέχειας από τον Dedekind (1831–1916). Η επιβολή της τάξης σ' ένα σύνολο πραγμάτων είναι συνεχής αν και μόνο αν μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων υπάρχει και τρίτο και επίσης δεν υπάρχουν «κενά».

Ο φιλοσοφικός στυλοβάτης του δέκατου έβδομου αιώνα ήταν ο ορθολογισμός με κύριους εκπρόσωπους τους Descartes, Leibniz και Spinoza. Πίστευαν ότι οι βαθιά σημαντικές αλήθειες σχετικά με τη δομή του κόσμου, όχι μόνο οι μαθηματικές, μπορούν να ανακαλυφθούν μέσα από τη μεθοδική χρήση του λογικού. Ο άνθρωπος, αν και ευπαθής, μπορεί μέσω της λογικής και της σκέψης να υπερβεί την περατότητα του και να αγγίξει το άπειρο. Σε αντιδιαστολή με τους ορθολογιστές, δημιουργήθηκε ο εμπειρισμός που ως φιλοσοφική θεώρηση τονίζει ότι η γνώση μας για τον κόσμο προέρχεται κυρίως ή και αποκλειστικά από τις αισθήσεις. Οι τρεις φιλόσοφοι που χαρακτηρίστηκαν ως εμπειριστές ήταν ο Locke, ο Berkeley και ο Hume. Εδώ, η έννοια του απείρου κινδύνεψε να χαρακτηριστεί ασυνάρτητη και δημιουργήθηκε μια αντίφαση. Ενώ είναι αδύνατο να συλλάβουμε το άπειρο εφ' όσον δεν έχει γίνει προηγουμένως αντιληπτό από τις αισθήσεις μας, ο Αριστοτέλης το έβαλε μπροστά μας δύο χιλιάδες χρόνια νωρίτερα. Ένας από τους μεγαλύτερους φιλόσοφους όλων των εποχών, ο Immanuel Kant (1724–1804) επεδίωξε να γεφυρώσει τα δύο φιλοσοφικά ρεύματα. Υποστήριξε ότι η γνώση είναι αποτέλεσμα δύο παραγόντων, της εμπειρίας και της λογικής. Έμφυτες μορφές διαίσθησης συνεργάζονται με επίκτητες μορφές νόησης μέσω των οποίων επεξεργαζόμαστε τα πρωτογενή δεδομένα της αισθητηριακής εμπειρίας. Επίσης, υποστήριξε ότι ο άνθρωπος καθώς και οι καθαρές μορφές διαίσθησης είναι μεταφυσικά πεπερασμένα (εν δυνάμει άπειρο) ενώ η αληθινή φύση της πραγματικότητας, ο κόσμος καθώς και η λογική, η ελευθερία και η ηθική, μεταφυσικά άπειρα (ενεργεία άπειρο). Ο Kant καθόρισε για πρώτη φορά μία ουσιαστική σύνδεση μεταξύ του μεταφυσικού και του μαθηματικού απείρου και προσπάθησε να επιλύσει παραδοσιακά ζητήματα μέσω μίας σειράς επιχειρημάτων, δείχνοντας ότι ο φυσικός κόσμος δε μας δίνεται ως σύνολο. Ακολούθησε ο Γερμανός φιλόσοφος G.W.F.Hegel (1770–1831), βαθιά επηρεασμένος από το φιλοσοφικό σύστημα του Kant, ο οποίος προσπάθησε να επιτύχει μία νέα και βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του απείρου. Ειδικότερα, αμφισβήτησε τη διάκριση του Kant μεταξύ εμφάνισης και πραγματικότητας. Η επιρροή των φιλοσοφικών απόψεων των δύο τελευταίων, υπήρξε διάχυτη στη μετέπειτα σκέψη. Αξίζει ν' αναφερθεί η επιρροή της ανθρώπινης περατότητας του Kant στο ρεύμα των υπαρξιστών (Søren Kierkegaard, German Karl Jaspers, Martin Heidegger, Jean-Paul Sartre), καθώς και η σφοδρή επίθεση του Friedrich Nietzsche (1844–1900) απέναντι στην παραδοσιακή ηθική του Kant και του χριστιανισμού μέσα από την οπτική της αιώνιας επανάληψης της εξέλιξης.

O Bernard Bolzano (1781–1848) υποστήριξε ότι η έννοια του απείρου είναι θεμελιωδώς συνολοθεωρητική, ο Dedekind ακολούθησε, ενώ ο Bertrand Russell (1872–1970) γνωστοποίησε το παράδοξο του στον σπουδαίο λογικιστή Gottlob Frege (1848–1925) σχετικά με την ορθότητα της αντιμετώπισης των συνόλων ως ολότητες. Το έργο του μεγαλοφυούς Georg Cantor (1845–1918) αποτελεί τη μεγαλύτερη συνεισφορά, από την άποψη των μαθηματικών, στο θέμα του απείρου. Ισάξιος του Αριστοτέλη και του Kant, εισήγαγε την έννοια του άπειρου συνόλου, τα μικρότερα και μεγαλύτερα άπειρα και άνοιξε νέους δρόμους για τη μαθηματική έρευνα. O Cantor σηματοδότησε μία μαθηματική θεώρηση του απείρου. Χρειάστηκε όμως η θεωρία συνόλων του Zermelo – Frænkel (ZF), ένα τυπικό σύστημα βασισμένο σε 9 αξιώματα και 2 πρωταρχικές έννοιες, για να δοθεί απάντηση στο παράδοξο του Russell και να χρησιμοποιηθεί από τον Gödel(1940) και τον Cohen(1963) για την απόδειξη της υπόθεσης του συνεχούς. Το εντυπωσιακό έργο του Cantor επηρέασε σημαντικά τους μετέπειτα στοχαστές. Η θέση του L.E.J.Brouwer (1881–1966), χαρακτηρίστηκε ως ιντουισιονισμός ή ενορατισμός και πραγματεύεται το κατασκευαστικά υπαρκτό και το πεπερασμένα ελέγξιμο. Αρνείται οτιδήποτε δε γίνεται αντιληπτό από τις αισθήσεις και την εμπειρία μας. Η θέση του David Hilbert (1862–1943) χαρακτηρίστηκε ως φορμαλισμός και υποστηρίζει ότι η εξέλιξη των μαθηματικών αφήνει ολοένα και λιγότερο χώρο στην εμπειρική υποστήριξη για την έννοια του απείρου. O Ludwig Wittgenstein (1889–1951) ένας από τους μεγαλύτερους φιλόσοφους του 20ου αιώνα, συνέγραψε το αριστούργημα «Τράκτατους» όπου σκιαγραφεί τα όρια της σκέψης και της έκφρασης. Αναφέρθηκε στο άπειρο ως ιδέα ενός υπερφυσικού μαθηματικού τοπίου και υποστήριξε ότι η σημασία μίας λέξης συνδέεται άμεσα με τον τρόπο που χρησιμοποιείται. Συνεπώς, η ορθή χρήση του όρου «άπειρο» προέρχεται απ’ την ορθή περιγραφή της μορφής των πεπερασμένων πραγμάτων και η χρήση του ενεργεία απείρου αποτελεί έναν αδέξιο χειρισμό της γλώσσας.

Ο Thoralf Skolem (1887–1963) και ο Kurt Gödel (1906–1978) έπαιξαν το σπουδαιότερο ρόλο στην εξέλιξη της μαθηματικής λογικής του 20^ου^ αιώνα. Με άμεση επίπτωση στη μελέτη του απείρου ανέδειξαν την ανεπάρκεια της θεωρίας Zermelo – Frænkel αλλά και οποιουδήποτε άλλου αξιωματικού συστήματος. Σύμφωνα με το θεώρημα Löwenheim-Skolem, αν ένα σύστημα είναι συνεπές, τότε πάντα ερμηνεύουμε ότι περιγράφει μόνο αριθμησίμως πολλά πράγματα. Συνεπώς γεννήθηκε το ερώτημα πώς μπορεί κάτι άπειρο να ερμηνευθεί ως αριθμήσιμο, πράγμα που οδήγησε στο παράδοξο του Skolem. Το 1931, ο Gödel έδωσε απάντηση στο πρόβλημα του Hilbert, αποδεικνύοντας ότι ένα σύνολο αξιωμάτων, δε μπορεί να είναι συγχρόνως και πλήρες και συνεπές. Δηλαδή, σε μία θεωρία που δεν έχει καμία αντίφαση (συνεπής θεωρία) πάντα θα υπάρχει τουλάχιστον μία πρόταση που να είναι αληθής η οποία δε θα μπορεί να αποδειχτεί (μη πλήρης). Για να αποδεικνύονται όλες οι προτάσεις μιας θεωρίας πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία αντίφαση.

Φτάνοντας στο σήμερα, παρατηρούμε ότι κανείς δεν υπήρξε διατεθειμένος να αποδεχτεί το άπειρο άνευ όρων. Υπήρχε πάντα μια προειδοποίηση ως συνέπεια κάποιας εννοιολογικής παρέκκλισης. Κανείς επίσης δεν το παρέβλεψε. Το άπειρο είναι μία από τις σημαντικότερες και πιο μυστηριώδεις έννοιες, που από την αρχή προκάλεσε αντινομίες, πολλές από τις οποίες αποτελούν μέχρι σήμερα αντικείμενο μελέτης.

Το παράδοξο είναι οποιοδήποτε συμπέρασμα που στην αρχή ακούγεται παράλογο, αντίθετο στην κοινή λογική και τη διαίσθηση μας, αλλά διαθέτει ένα επιχείρημα που το στηρίζει. Υπάρχουν τέσσερις τύποι τέτοιων παραδόξων:

1. Μία παραδοχή που ενώ φαίνεται ψευδής, στην πραγματικότητα είναι αληθής.
2. Μία παραδοχή που ενώ φαίνεται αληθής, στην πραγματικότητα είναι ψευδής.
3. Μία αλληλουχία συλλογισμών που φαίνονται λογικοί, αλλά καταλήγουν σε λογική αντίφαση.
4. Μία παραδοχή που η αλήθεια ή το ψεύδος της φαίνονται εξίσου λογικά.

Τα παράδοξα οδηγούν σε βαθύτερη γνώση, καθώς η ανακάλυψη ενός αποτελεί αφορμή για την ανοικοδόμηση των θεμελίων της σκέψης. Βοήθησαν στην εξέλιξη της Λογικής, είναι αναγκαία σε κάθε συμπερασματικό συλλογισμό και είναι εξαιρετικής σημασίας για τη θεωρία της Φυσικής και τα μαθηματικά. Οι αρχαίοι Έλληνες, θεωρούσαν παράδοξο το ότι η διαγώνιος ενός τετραγώνου με πλευρά μία μονάδα, δεν μπορεί να μετρηθεί με απόλυτη ακρίβεια. Η διαπίστωση αυτή, τους οδήγησε στη θεωρία των άρρητων αριθμών. Οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα θεωρούσαν παράδοξο το ότι όλα τα στοιχεία ενός απειροσυνόλου ήταν δυνατό να αντιστοιχίζονται αμφιμονοσήμαντα με τα στοιχεία ενός γνήσιου υποσυνόλου του, ενώ ήταν δυνατό να μην αντιστοιχίζονται αμφιμονοσήμαντα τα στοιχεία δύο απειροσυνόλων. Τα παράδοξα αυτά, οδήγησαν στην ανάπτυξη της Θεωρίας Συνόλων, η οποία επηρέασε ακόμα και τη φιλοσοφία της επιστήμης. Ένα παράδοξο συνήθως συμβαίνει κάθε φορά που οι θέσεις είναι αυτο-αναφορικές. Δηλαδή, όταν κάθε ισχυρισμός αναφέρεται στον εαυτό του. Στη Λογική, η πιθανότητα αυτοαναφοράς μπορεί είτε να καταστρέψει μία θεωρία, είτε να την καταστήσει πλουσιότερη. Το πρόβλημα είναι να διαμορφώσουμε τις θεωρίες μας έτσι ώστε να μη μας οδηγούν σε αντιφάσεις και τα παράδοξα βοηθούν ώστε να εξετάσουμε κατά πόσον έχουμε θέσει τα σωστά όρια για τις λογικές ιδέες μας.

ΑΥΤΟΑΝΑΦΟΡΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Το 1969, ο F. William Lawvere έδειξε πως περιγράφονται πολλά απ' τα κλασσικά παράδοξα χρησιμοποιώντας τη γλώσσα της θεωρίας κατηγοριών. Αργότερα, ο Noson S. Yanofsky επανέλαβε τα θεωρήματα του Lawvere χρησιμοποιώντας σύνολα και συναρτήσεις αποδεικνύοντας τις ομοιότητες μεταξύ αυτοαναφορικών παραδόξων. Γενικεύοντας το θεώρημα του Cantor, απέδειξε την καθολικότητα των θεωρημάτων εξετάζοντας παραδείγματα από διαφορετικές περιοχές της λογικής και της θεωρητικής επιστήμης των υπολογιστών. Είναι γνωστό από τον Cantor ότι δεν υπάρχει συνάρτηση «επί» από το $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}} = \wp(\mathbb{N})$, όπου $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο **2** = { 0 , 1 }, δηλαδή το σύνολο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων του $\mathbb{N}$, που είναι ισοδύναμο με το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. Το **δυναμοσύνολο** ενός συνόλου X είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του. Συνήθως συμβολίζεται με $\wp(X)$. Επίσης συχνά συμβολίζεται 2^X.

$$\wp(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου με n στοιχεία έχει 2^n (το πλήθος) στοιχεία.

Γενικεύοντας το θεώρημα του Cantor, για οποιοδήποτε σύνολο T δεν υπάρχει επίσης «επί» συνάρτηση από το $T \longrightarrow \mathbf{2}^T = \wp(T)$. Το θεώρημα αυτό ισχύει και για άλλα σύνολα όπως για παράδειγμα το **3** = { 0, 1, 2 } ή το **23** = { 0, 1, …….., 22 } εκτός του **1** = { 0 }.

Γενικά, το **2**, μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε «μη εκφυλισμένο» σύνολο Y. Αναφέρουμε ότι αν ένα σύνολο Y είναι «μη εκφυλισμένο», δεν υπάρχει συνάρτηση $T \longrightarrow Y^T$ όπου Y^T είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το T στο Y. Το Y είναι το σύνολο των πιθανών αληθοτιμών ή ιδιοτήτων των στοιχείων του T. Ο όρος «μη εκφυλισμένο» υποδηλώνει ότι τα στοιχεία του Y μπορούν να εναλλάσσονται, ή ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\alpha: Y \longrightarrow Y$ χωρίς κανένα σταθερό σημείο .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. **Σταθερό σημείο** ονομάζεται ένα σημείο x για το οποίο ισχύει ότι $f(x) = x$.

Για παράδειγμα αν $f(x) = x^2 - 3x + 4$, τότε το 2 αποτελεί σταθερό σημείο αφού $f(2) = 2$. Έστω A και B δύο οποιαδήποτε σύνολα και μια συνάρτηση από το A στο B.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3. Λέμε ότι η f είναι **μονομορφική** (ή **ένα προς ένα**) εάν δεν απεικονίζει ποτέ δύο διαφορετικά στοιχεία στην ίδια τιμή, δηλαδή εάν $f(a) \neq f(b)$ οποτεδήποτε $a \neq b$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4. Λέμε ότι η f είναι **επιμορφική** (ή **επί** του B) εάν χρησιμοποιεί όλα τα στοιχεία του B, δηλαδή εάν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = b$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5. Τα A και B λέγονται **ισομεγέθη** εάν υπάρχει μονομορφική και επιμορφική συνάρτηση $f: A \to B$. Κάθε τέτοια συνάρτηση λέγεται **αντιστοιχία**.

Εν ολίγοις, σε μία αντιστοιχία κάθε στοιχείο του A απεικονίζεται σε ένα μοναδικό στοιχείο του B και κάθε στοιχείο του B έχει ένα μοναδικό στοιχείο του A που απεικονίζεται σε αυτό. Με άλλα λόγια, μία αντιστοιχία είναι απλώς ένας τρόπος να συνταιριάξουμε τα μέλη των A και B κατά ζεύγη.

Αντί να εξετάσουμε συναρτήσεις $\hat{f} : T \longrightarrow Y^T$, θα ασχοληθούμε με ισοδύναμες συναρτήσεις της μορφής $f : T \times T \longrightarrow Y$. Κάθε $\hat{f}$ μπορεί να μετατραπεί σε μία συνάρτηση f

όπου $f\ (\ t,\ t')=\widehat{f}\ (\ t')\ (\ t\ )\ \in Y$. Αν η $\hat{f}$ δεν είναι «επί», τότε υπάρχει μία συνάρτηση $g\ (-)\ \in\ Y^T$, τέτοια ώστε για κάθε $t' \in T$ η συνάρτηση $\hat{f}\ (\ t')=f\ (\ -\ ,t'):T\ \longrightarrow Y$ δεν είναι ίδια με τη συνάρτηση $g\ (-)=T\ \longrightarrow Y$. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένα $t \in T$ τέτοιο ώστε $g(t) \neq f(t,t')$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6. Μια συνάρτηση $g:T\ \longrightarrow Y$ «**αντιπροσωπεύεται από το $\boldsymbol{t_0}$**» αν $g\ (-)=f\ (\ -\ ,t_0\ )$. Συνεπώς αν η $\hat{f}$ δεν είναι «επί», τότε υπάρχει μία $g\ (-)\ \in\ Y^T$ που δεν αντιπροσωπεύεται από κανένα $t\ \in T$.

Γενικεύοντας το θεώρημα του Cantor, συμπεραίνουμε ότι ένα σύνολο πραγμάτων T δε μπορεί να περιγράψει τις ίδιες του τις ιδιότητες και να μιλήσει για τη δική του «αλήθεια». Άρα θα πρέπει να υπάρχει ένας περιορισμός στον τρόπο με τον οποίο το T αναφέρεται στις ιδιότητες του. Το παράδοξο του Ψεύτη είναι ένα παράδειγμα τριών χιλιάδων χρόνων, το οποίο δείχνει ότι οι φυσικές γλώσσες δεν προσδιορίζουν πάντα το νόημά τους. Ακόμα, από το παράδοξο του Russell διαπιστώνεται ότι η απλή θεωρία συνόλων είναι ατελής γιατί τα σύνολα αναφέρονται στις ίδιες τους τις ιδιότητες. Τα αποτελέσματα της μη-πληρότητας στο παράδοξο του Gödel δείχνουν ότι η αριθμητική δε μπορεί να μιλήσει εξ ολοκλήρου για την αποδειξιμότητα της. Το παράδοξο του Turing, δηλαδή το πρόβλημα του τερματισμού, αναφέρει ότι δεν είναι απολύτως γνωστό πότε ένας υπολογιστής θα σταματήσει ή θα συνεχίσει σε έναν άπειρο βρόχο. Όλα αυτά τα παραδείγματα έχουν ένα κοινό στοιχείο, ότι δεν είναι πάντα εύκολο να σχετίζουμε τα σύνολα με τα στοιχεία τους. Σύμφωνα με αυτό, γίνεται μία προσπάθεια για έναν ενιαίο φορμαλισμό που θα περιγράφει όλες αυτές τις ποικίλες, αλλά παρόμοιες ιδέες. Μελετώντας τα παράδοξα, συμπεραίνεται ότι στην ουσία δεν υπάρχουν. Είναι απλώς περιορισμοί που αν παραβιαστούν, δημιουργείται ένα μη συνεπές σύστημα.

1.2 Τα θεωρήματα του Cantor και οι γενικεύσεις τους

1.2.1 Το θεώρημα του Cantor

Ο Georg Cantor (1845-1918) γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας. Υπήρξε μία από τις πιο ευφάνταστες και αμφιλεγόμενες φιγούρες στην ιστορία των μαθηματικών και η έρευνα του, αποτελεί την απαρχή της θεωρίας συνόλων. Μας εισήγαγε στον συναρπαστικό κόσμο των άλεφ, ενώ προήγαγε τα μαθηματικά από επιστήμη του αριθμού σε επιστήμη του απείρου. Κοντά στα τέλη του 19ου αιώνα, η μελέτη του για τη συνέχεια και το άπειρο τον οδήγησε σε μία ερμηνεία που παρέκκλινε ριζικά από την επικράτουσα άποψη εκείνης της εποχής. Οι ιδέες του διέγειραν το ενδιαφέρον και τη δημόσια συζήτηση, ενώ κατά καιρούς προκάλεσαν έντονες διαμάχες. Ο Leopold Kronecker τον χαρακτήρισε «επιστήμονα τσαρλατάνο» ενώ ο Bertrand Russell τον περιέγραψε ως μία από τις μεγαλύτερες διάνοιες του 19ου αιώνα. Ο David Hilbert πίστευε ότι ο Cantor δημιούργησε έναν καινούριο παράδεισο για τους μαθηματικούς σε αντίθεση με τον Henri Poincaré, ο οποίος θεωρούσε ότι οι υπερπεπερασμένοι αριθμοί που θέσπισε ο Cantor, αποτελούν μία σοβαρή μαθηματική ασθένεια, μία διεστραμμένη παθολογική κατάσταση που κάποια μέρα θα θεραπευτεί. Το όνομα του δίχασε τους μαθηματικούς χωρίζοντας τους σε αντίπαλα στρατόπεδα με εκ διαμέτρου αντίθετες απόψεις όσον αφορά τη φύση των μαθηματικών και του απείρου.

Διατύπωσε και προσπάθησε να αποδείξει την υπόθεση του συνεχούς (δεν υπάρχει σύνολο με πληθικό αριθμό ανάμεσα στο $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{R}$), διατύπωσε το διαγώνιο επιχείρημα και δημιούργησε μία ολόκληρη υπερπεπερασμένη αριθμητική με μεγάλο, επίσης, φιλοσοφικό ενδιαφέρον. Απέδειξε βασικές προτάσεις της θεωρίας του απείρου. Ενδεικτικά, «το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών», «το ανοικτό διάστημα (0,1) δεν είναι αριθμήσιμο», «όλα τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν τον ίδιο αριθμό σημείων», «υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ 0 και 1 απ’ ότι φυσικοί», «υπάρχουν περισσότερα σύνολα φυσικών αριθμών απ’ ότι φυσικοί αριθμοί», «το σύνολο των πραγματικών είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των φυσικών αριθμών», «το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο». Όρισε το δυναμοσύνολο, τους πληθικούς και τους διατακτικούς αριθμούς.

Το 1891, στο πρώτο συνέδριο της Ένωσης Γερμανών Μαθηματικών, ο Cantor εισήγαγε μία ολότελα καινούρια απόδειξη για την ύπαρξη μη αριθμήσιμων συνόλων. Το 1874 είχε ήδη αποδείξει ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι αριθμήσιμοι , αλλά κατάφερε να εδραιώσει ένα πιο γενικό αποτέλεσμα. Οι τεχνικές που επινόησε ήταν εξαιρετικές και τον οδήγησαν σε μία αύξουσα ιεραρχία, μία άπειρη ακολουθία υπερπεπερασμένων δυνάμεων. Στο επίκεντρο των αποδείξεων του άρθρου του 1891 ήταν η διάσημη διαγώνια μέθοδος ή αλλιώς η αρχή της διαγωνιοποίησης, στηριζόμενη μόνο σε δύο στοιχεία m και w. Η αρχή της διαγωνιοποίησης αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις τεχνικές απόδειξης, μαζί με τη μαθηματική επαγωγή και την αρχή του περιστεριώνα. Προτάθηκε από τον Cantor, στην προσπάθεια του να συγκρίνει τα μεγέθη μη πεπερασμένων συνόλων. Στην περίπτωση που τα σύνολα είναι πεπερασμένα, το πρόβλημα είναι απλό. Αρκεί να μετρήσουμε το πλήθος των στοιχείων τους, δηλαδή να βρούμε τον πληθικό αριθμό των συνόλων ώστε να διαπιστώσουμε το μέγεθος τους. Αν όμως το σύνολο είναι μη πεπερασμένο, ο πληθικός αριθμός του δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί αφού έχει άπειρο πλήθος στοιχείων. Όμως, στην περίπτωση της σύγκρισης συνόλων η μέτρηση αυτή δεν είναι απαραίτητη. Ενδιαφερόμαστε για τα σχετικά μεγέθη των συνόλων. Δύο πεπερασμένα σύνολα έχουν το ίδιο μέγεθος αν μπορούμε να «ζευγαρώσουμε» κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου με ακριβώς ένα στοιχείο του δεύτερου συνόλου έτσι ώστε όλα τα στοιχεία του πρώτου και του δεύτερου συνόλου τελικά να έχουν το ταίρι τους. Η ιδέα αυτή μπορεί να επεκταθεί και για σύνολα μη πεπερασμένα.

Ο Cantor θεωρούσε τη συλλογή M των στοιχείων $E = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ όπου κάθε x_n ήταν είτε το m είτε το w. Για παράδειγμα πρότεινε:

$$E^{\mathrm{I}} = (m, m, m, m, \dots)$$
$$E^{\mathrm{II}} = (w, w, w, w, \dots)$$
$$E^{\mathrm{III}} = (m, w, m, w, \dots)$$

Ο Cantor υποστήριζε ότι η συλλογή όλων αυτών των στοιχείων M ήταν μη αριθμήσιμη και κατασκεύασε μία απόδειξη για το ακόλουθο θεώρημα:

Αν $E_1, E_2, \dots, E_\nu, \dots$ μία οποιαδήποτε άπειρη ακολουθία στοιχείων του συνόλου M, τότε υπάρχει πάντα ένα στοιχείο E_0 του M, τέτοιο ώστε να μην αντιστοιχεί σε κάποιο E_ν.
Αρχικά παρήγαγε μία αριθμήσιμη λίστα στοιχείων E_μ σε όρους της αντίστοιχης συστοιχίας όπου κάθε $\alpha_{\mu,\nu}$ ήταν είτε το m είτε το w.

$$\begin{aligned}
E_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1\nu}, \dots) \\
E_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2\nu}, \dots) \\
&\vdots \\
E_\mu &= (\alpha_{\mu 1}, \alpha_{\mu 2}, \dots, \alpha_{\mu\nu}, \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Αργότερα, όρισε μία νέα ακολουθία $b_1, b_2, \dots, b_\nu, \dots$ Κάθε b_ν ήταν είτε το m είτε το w τέτοιο ώστε $b_\nu \neq \alpha_{\nu\nu}$.
Διατυπώνοντας από αυτήν την ακολουθία του b_ν, το στοιχείο $E_0 = (b_1, b_2, \dots, b_\nu, \dots)$ ήταν προφανές ότι $E_0 \neq E_\nu$ για κάθε τιμή του δείκτη ν. Οποιαδήποτε στοιχείο E_ν και να διάλεγε κανείς, το E_0 θα ήταν πάντα διαφορετικό.

Αυτό που κατάφερε να δείξει ο Cantor, χρησιμοποιώντας δύο μόνο στοιχεία, ήταν το γεγονός ότι υπάρχουν απείρως πολλά πιθανά μεγέθη για άπειρα σύνολα. Η αρχή της διαγωνιοποίησης, παρήσχε έναν εύκολο τρόπο ώστε να θεσπίσει άμεσα πως μία αύξουσα ακολουθία δυνάμεων καλά ορισμένων συνόλων δεν έχει μέγιστο. Δηλαδή, δοθέντος οποιοδήποτε σύνολο L, είναι πάντα εφικτό να παραχθεί από τα στοιχεία του L ένα διαφορετικό σύνολο M μεγαλύτερης δύναμης.

Σαν παράδειγμα, ο Cantor θεώρησε το γραμμικό συνεχές L, το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών στο $(0,1)$ και απέδειξε ότι το σύνολο M ($M = 2^L$), των μονότιμων συναρτήσεων $f(x)$ που παίρνουν τιμές μόνο 0 και 1 για κάθε τιμή του $x \in (0,1)$, είναι μεγαλύτερης δύναμης από το L.

Στην αρχή, αμφισβήτησε ότι το M είναι ίδιας πληθικότητας με το L, δείχνοντας ότι περιέχει ένα υποσύνολο ισοδύναμο με το L. Αυτό ήταν το N, το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f(x)$, οι οποίες είναι ίσες με το 0, καθ΄ όλην την έκταση του $(0,1)$, με μόνη εξαίρεση ένα σημείο x_0 όπου $f(x_0) = 1$. Αυτό το σύνολο είναι σαφώς ισοδύναμο με το L, εφ΄ όσον υπάρχει μία $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ τους. Αυτό που έμενε, ήταν να αποδείξει ότι δεν υπάρχει καμία πιθανή αντιστοιχία μεταξύ του M και του L. Το έκανε μέσω μίας κατάλληλα κατασκευασμένης μορφής του διαγώνιου επιχειρήματος.

Αν το M και το L ήταν ισοδύναμα, τότε θα ήταν πιθανό να υπάρχει μία $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ τους, μέσω μίας ενδιάμεσης συνάρτησης $\varphi(x,z)$, όπου κάθε τιμή z θα παρήγαγε ένα στοιχείο $f(x) = \varphi(x,z)$ στο M και κάθε στοιχείο $f(x)$ στο M θα είχε παραχθεί από την $\varphi(x,z)$ από μία ακριβώς τιμή z. Αυτό όμως οδηγεί σε αντίφαση. Ο Cantor θεώρησε μία συνάρτηση $g(x)$, η οποία παίρνει τιμές μόνο 0 και 1, άλλά με τέτοιο τρόπο ώστε $g(x) \neq \varphi(x,x)$ για κάθε τιμή του x. Έτσι, η $g(x)$ αποτελούσε εμφανώς στοιχείο του M, όμως κανένα $z = z_0$ δε θα μπορούσε να δημιουργήσει το $g(x)$ από την $\varphi(x,z)$, αφού η $\varphi(z_0,z_0)$ είναι πάντα διαφορετική από την $g(z_0)$.

Τοιουτοτρόπως, ο Cantor είχε ανακαλύψει μία μέθοδο ώστε να μπορεί να αποδειχθεί ότι δοθέντος οποιοδήποτε συνόλου, το σύνολο όλων των συνόλων του ήταν πάντα μεγαλύτερης δύναμης από το ίδιο το μητρικό. Η απόδειξη αυτή ήταν αξιοσημείωτη, όχι μόνο λόγω της απλότητας της αλλά κυρίως λόγω της αρχής που τη διέπει, η οποία μπορούσε να επεκταθεί σε ένα γενικό θεώρημα. Μπορούσε πλέον να ισχυριστεί την ύπαρξη των υπερπεπερασμένων πληθικών αριθμών, δυνάμεων και υπερπεπερασμενων συνόλων. Το άρθρο του 1891, εισήγαγε για πρώτη φορά το διαγώνιο επιχείρημα και ήταν θεμελιώδους σημασίας για την απόδειξη της μη επιλυσιμότητας του προβλήματος του τερματισμού και την απόδειξη του πρώτου θεωρήματος της μη-πληρότητας του Gödel. Επίσης, αποκάλυψε τις ριζοσπαστικές ιδέες του Cantor σχετικά με τη φύση της συνολοθεωρίας.

Διαγώνιο επιχείρημα

Η αρχή της διαγωνιοποίησης αποτελεί απόδειξη ότι το ανοιχτό διάστημα $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο καθώς και της μη μετρησιμότητας του $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε μία άπειρη ακολουθία του τύπου $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ όπου κάθε στοιχείο x_i είναι είτε 0 είτε 1. Θεωρώντας μία λίστα από τις ακολουθίες έχουμε:

$$\begin{aligned}
s_1 &= (0,0,0,0,0,0,0, \dots) \\
s_2 &= (1,1,1,1,1,1,1, \dots) \\
s_3 &= (0,1,0,1,0,1,0, \dots) \\
s_4 &= (1,0,1,0,1,0,1, \dots) \\
s_5 &= (1,1,0,1,0,1,1, \dots) \\
s_6 &= (0,0,1,1,0,1,1, \dots) \\
s_7 &= (1,0,0,0,1,0,0, \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Γενικά θα γράφεται: $s_n = (s_{n,1}, s_{n,2}, s_{n,3}, s_{n,4}, \dots)$ όπου $s_{n,m}$ είναι το m στοιχείο της n ακολουθίας.

Κατασκευάζουμε μία ακολουθία s_0 ως εξής:
Το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας s_0 είναι διαφορετικό από το πρώτο στοιχείο της πρώτης ακολουθίας και γενικά το $n - οστό$ στοιχείο είναι διαφορετικό απο το $n - οστό$ στοιχείο της $n - οστής$ ακολουθίας. Άρα παίρνουμε την ακολουθία από τη διαγώνιο του παραδείγματος $(0,1,0,0,0,1,0)$ και δημιουργούμε την ακολουθία $s_0 = (1,0,1,1,1,0,1)$. Έστω σύνολο T που περιέχεται από όλες τις άπειρες ακολουθίες του 0 και 1. Το T περιέχει όλες τις ακολουθίες άρα θα πρέπει να περιέχει και την s_0. Αλλά η s_0 δεν περιέχεται πουθενά στη λίστα, οπότε το T δεν περιέχει την s_0. Άρα δεν μπορεί να τοποθετηθεί σε $1 - 1$ αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 1.1 (Πρώτο Θεώρημα Cantor)

Αν Y είναι ένα σύνολο και υπάρχει μία συνάρτηση $\alpha : Y \rightarrow Y$ χωρίς σταθερό σημείο (για όλα τα $y \in Y, \alpha(y) = y$), τότε για όλα τα σύνολα T και για όλες τις συναρτήσεις $f: T \times T \rightarrow Y$, υπάρχει μία συνάρτηση $g: T \rightarrow Y$ που δεν αντιπροσωπεύεται από την f. Δηλαδή για κάθε $t \in T$,

$$g(-) \neq f(-, t).$$

Απόδειξη

Έστω Y ένα σύνολο και υποθέτουμε μία συνάρτηση $\alpha : Y \rightarrow Y$ χωρίς σταθερά σημεία. Τότε, υπάρχει μία συνάρτηση $\Delta : T \rightarrow T \times T$ που στέλνει κάθε $t \in T$ στο $(t, t) \in T \times T$. Τότε, κατασκευάζουμε μία $g : T \rightarrow Y$ και έχουμε την επακόλουθη σύνθεση τριών συναρτήσεων.

$$\begin{tikzcd}
T \times T \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
T \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "g"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Με άλλα λόγια: $g(t) = \alpha(f(t, t))$.

Ισχυριζόμαστε ότι για όλα τα $t \in T$, $g(-) \neq f(-, t)$ ως συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Αν $g(-) = f(-, t_0)$ τότε εκτιμώντας το t_0 έχουμε $f(t_0, t_0) = g(t_0) = \alpha(f(t_0, t_0))$.

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η g αντιπροσωπεύεται και η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της συνάρτησης g. Όμως αυτό σημαίνει ότι η α έχει σταθερό σημείο, κάτι που καταλήγει σε αντίφαση. □

Παρατήρηση: Ο Δ χάρτης ονομάζεται διαγώνιος και πολλές από τις αποδείξεις χρησιμοποιούν τη διαγώνια μέθοδο. Η f είναι ένας τύπος εκτίμησης συνάρτησης και η $f(t,t)$ είναι μία εκτίμηση του ίδιου της του εαυτού, ως εκ τούτου αυτοαναφορική.

Γενικεύουμε το παραπάνω θεώρημα έτσι ώστε αντί για $\Delta = \langle Id, Id \rangle$, να χρησιμοποιήσουμε $\langle Id, \beta \rangle$ για μία αυθαίρετη επί (δεξιά αντιστρέψιμη) συνάρτηση $\beta : T \to S$. Εφ' όσον $\Delta = \langle Id, Id \rangle : T \to T \times T$ κάθε t πηγαίνει στο $(t, \beta(t))$.

Ο τρόπος που σκεφτόμαστε αυτό το θεώρημα είναι να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μία επί συνάρτηση $\beta : T \to S$. Τότε, φαίνεται λογικό ότι $|S| \leq |T|$. Το θεώρημα του Cantor λέει ότι $|T| \leq |Y^T|$, άρα $|S| \leq |Y^T|$.

1.2.2 Γενίκευση του θεωρήματος του Cantor

Θεώρημα 1.2 (Δεύτερο Θεώρημα Cantor)

Έστω Y ένα σύνολο και $\alpha : Y \to Y$ μία συνάρτηση χωρίς σταθερό σημείο, T και S σύνολα και $\beta : T \to S$ μία συνάρτηση επί (με δεξιό αντίστροφο $\bar{\beta} : S \to T$). Τότε, για όλες τις συναρτήσεις $f : T \times S \to Y$, η συνάρτηση $g_B : T \to Y$ κατασκευάζεται ως εξής:

$$\begin{tikzcd} T \times S \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ T \arrow[u, "\langle Id, \beta \rangle"] \arrow[r, "g_\beta"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Και δεν αντιπροσωπεύεται από την f.

Απόδειξη

Θεωρώ Y, α, T και β ότι δίνονται. Έστω $\bar{\beta} : S \to T$ το δεξιό αντίστροφο του β. Από ορισμό, έχουμε ότι $g_\beta(t) = \alpha(f(t), \beta(t))$. Ισχυριζόμαστε ότι για όλα τα $s \in S$, $g_\beta(-) \neq f(-, s)$. Αν $g_\beta(-) = f(-, s_0)$, τότε η εκτίμηση στο $\bar{\beta}(s_0)$ δίνει:

$$f(\bar{\beta}(s_0), s_0) = g_\beta\left(\bar{\beta}(s_0)\right) \text{ επειδή η } g_\beta \text{ αντιπροσωπεύεται}$$

$$= \alpha(f(\bar{\beta}(s_0), \beta\left(\bar{\beta}(t_0)\right)) \text{ εξ'ορισμού της } g_\beta$$

$$= a(f(\bar{\beta}(s_0), s_0) \text{ εξ'ορισμού του δεξιού αντιστρόφου}$$

Συμπεραίνουμε ότι η α έχει σταθερό σημείο. □

Μπορούμε να σκεφτούμε αυτό το θεώρημα με διαφορετικό τρόπο. Έστω ότι $S = T$ και θεωρούμε ένα β διαφορετικό από το Id_T. Ο συνήθης τρόπος να φανταστούμε το θεώρημα του Cantor είναι:

f	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\cdots$
t_1	$[y_3]$	y_7	y_{21}	y_2	y_4	$\cdots$
t_2	y_1	$[y_{17}]$	y_2	y_7	y_{41}	$\cdots$
t_3	y_0	y_3	$[y_7]$	y_2	y_{24}	$\cdots$
t_4	y_9	y_7	y_{64}	$[y_2]$	y_4	$\cdots$
t_5	y_4	y_{73}	y_{31}	y_2	$[y_4]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

Αλλάζουμε ότι είναι σε αγκύλη [ ]. Για παράδειγμα, το y_3 γίνεται $\alpha(y_3)$. Ωστόσο, δε χρειάζεται να προχωρήσουμε σε όλη τη διαγώνιο. Αυτό που χρειάζεται είναι κάθε σειρά του πίνακα, να έχει έστω ένα στοιχείο που αλλάζει. Άρα, έχουμε μία εικόνα σαν και αυτή:

f	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\cdots$
t_1	y_3	y_7	y_{21}	$[y_2]$	y_4	$\cdots$
t_2	$[y_1]$	y_{17}	$[y_2]$	y_7	y_{41}	$\cdots$
t_3	y_0	y_3	y_7	y_2	$[y_{24}]$	$\cdots$
t_4	y_9	$[y_7]$	y_{64}	$[y_2]$	y_4	$\cdots$
t_5	y_4	y_{73}	y_{31}	$[y_2]$	y_4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

Το γεγονός ότι κάθε σειρά του πίνακα έχει έστω ένα στοιχείο που είναι διαφορετικό, είναι στην ουσία το γεγονός ότι η β είναι επί. Όσο η β είναι επί, το θεώρημα του Cantor ισχύει.

1.3 Παραδείγματα του θεωρήματος Cantor

Θα ξεκινήσουμε με τη γνωστή εκδοχή του θεωρήματος Cantor για το δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών. Αργότερα θα αναφέρουμε το παράδοξο του Russell για τη θεωρία συνόλων καθώς και άλλα παράδοξα και περιορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7. Αν $A \subset \mathbb{R}$, ονομάζουμε **χαρακτηριστική συνάρτηση** του A (συμβολισμός $\mathcal{X}_A$) τη συνάρτηση:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \dots & \dots \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Χαρακτηριστικές συναρτήσεις συναντάμε στον Απειροστικό Λογισμό.

1.3.1 Το Θεώρημα του Cantor $\mathbb{N} \lneqq \wp(\mathbb{N})$

Θεώρημα 1.3.

Το θεώρημα αυτό αναφέρει ότι δεν μπορεί να υπάρξει επί συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\wp(\mathbb{N})$.

Απόδειξη

Θεωρούμε $S_0, S_1, S_2, \dots$ μία προτεινόμενη απαρίθμηση όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Έστω $2 = \{0,1\}$ ένα σύνολο και έστω η συνάρτηση της άρνησης $\alpha : 2 \to 2$ όπου $\alpha(0) = 1$ και $\alpha(1) = 0$. Έστω $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to 2$ που ορίζεται ως εξής :

$$f(n,m) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ n \in S_m \\ 0, \alpha\nu\ n \notin S_m \end{cases}$$

Για κάθε m, η $f(-,m)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του S_m : $f(-,m) = \mathcal{X}S_m$.

Κατασκευάζουμε τη g ως ακολούθως :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & \mathbf{2} \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"'] & \mathbf{2}. \end{tikzcd}$$

Η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $G = \{n \in \mathbb{N} |\ n \notin S_n\}$.
Για κάθε m, $\mathcal{X}_G = g(-) \neq f(-, m) = \mathcal{X}_{S_m}$. Γιατί αν υπήρχε ένα m_0 τέτοιο ώστε $g(-) = f(-, m_0)$, τότε η εκτίμηση στο m_0 θα μας έδινε:

$$f(m_0, m_0) = g(m_0) = \alpha(f(m_0, m_0))$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω του ότι η g αντιπροσωπεύεται από το m_0 και η δεύτερη ισχύει εξ' ορισμού της g. Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία της άρνησης έχει ένα σταθερό σημείο που είναι εμφανώς λανθασμένο. Με άλλα λόγια, το σύνολο $G \subseteq \mathbb{N}$ δεν είναι στην προτεινόμενη απαρίθμηση όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. □

1.3.2 Το παράδοξο του Russell

Σαν εισαγωγή στο παράδοξο του Russell, παραθέτουμε το παράδοξο του Κουρέα, το οποίο αποδίδεται σε μία ανώνυμη πηγή το 1918. Σε κάποιο χωριό υπάρχει ένας άντρας ο οποίος είναι κουρέας. Αυτός ξυρίζει όλους τους άντρες που δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Το ερώτημα που τίθεται είναι: Ποιός ξυρίζει τον κουρέα; Κάθε άντρας σ' αυτό το χωριό, ξυρίζεται από τον κουρέα αν και μόνο αν δεν ξυρίζεται μόνος του.

Η κατάσταση είναι αδιέξοδη αφού:

- Αν ο κουρέας δεν ξυρίζει τον εαυτό του, τότε δεν ανήκει στην κατηγορία αυτών που ξυρίζονται μόνοι τους. Άρα ανήκει σε αυτούς που ξυρίζονται στον κουρέα. Αυτό αποτελεί αντίφαση γιατί υποθέσαμε ότι ο κουρέας δε ξυρίζει τον εαυτό του.
- Αν ο κουρέας ξυρίζει τον εαυτό του, τότε ανήκει στην κατηγορία αυτών που ξυρίζονται μόνοι τους. Άρα δεν ανήκει σε αυτούς που ξυρίζονται στον κουρέα. Παρατηρούμε και πάλι μία αντίφαση αφού υποθέσαμε ότι ο κουρέας ξυρίζει τον εαυτό του.

Ο Bertrand Russell (1872-1970) υπήρξε φιλόσοφος, μαθηματικός, ιστορικός και θεωρητικός της Λογικής. Θεωρείται ένας από τους σύγχρονους θεμελιωτές της αναλυτικής φιλοσοφίας. Ένα από τα πρώτα του έργα υπήρξε το «Principia Mathematica» (το οποίο έγραψε σε συνεργασία με τον Whitehead). Άλλα γνωστά του έργα έχουν τίτλο «Πολιτικά Ιδεώδη», «Ιστορία Φιλοσοφίας», ενώ το 1950 τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ. Το 1901 ανακάλυψε ένα από τα πιο διαδεδομένα παράδοξα, το οποίο δείχνει τις αντιφάσεις της θεωρίας συνόλων και έγκειται στο ότι δε μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σύνολο που να έχει ως στοιχείο τον εαυτό του.

Έστω ένα σύνολο $R = \{ S : S \notin S \}$, το σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους.

- Στην περίπτωση που το R περιέχει τον εαυτό του, δηλαδή $R \in R$, τότε οδηγούμαστε σε αντίφαση, αφού είναι αντίθετο με αυτό που ορίστηκε αρχικά για το σύνολο R.
  Άρα $R = \{ S : S \notin S \}$ άρα $R \notin R$.
- Στην άλλη περίπτωση που το R δεν είναι στοιχείο του εαυτού του, δηλαδή $R \notin R$, θα ισχύει $R \notin \{ S : S \notin S \}$ και συμπεραίνεται ότι $R \in R$. Το αποτέλεσμα μας οδηγεί πάλι σε αντίφαση, αφού υποθέσαμε ότι το R δεν είναι στοιχείο του εαυτού του.
  Επομένως το σύνολο R είναι στοιχείο του εαυτού του αν και μόνο αν δεν είναι.

Με άλλα λόγια, έστω A το σύνολο όλων των συνόλων x που έχουν την ιδιότητα: «$το\ x\ δεν\ ανήκει\ στο\ x$». Αν το A ανήκει στο A, τότε το A δεν ανήκει στο A, γιατί σαν στοιχείο του A ικανοποιεί την ιδιότητα των στοιχείων του A. Αν το A δεν ανήκει στο A, τότε το A ανήκει στο A, γιατί ως μη στοιχείο του A δεν ικανοποιεί την ιδιότητα των στοιχείων του A. Άρα το A είναι στοιχείο του A και το A δεν είναι στοιχείο του A.

Για παράδειγμα, έστω το σύνολο όλων των τετραγώνων. Το σύνολο αυτό τελικά δεν είναι τετράγωνο, οπότε δεν ανήκει στον εαυτό του. Αντίθετα αν πάρουμε το σύνολο όλων των πραγμάτων που δεν είναι τετράγωνα, τότε το σύνολο δεν είναι τετράγωνο, άρα μπορεί να ανήκει στον εαυτό του. Παρατηρώντας αυτό το παράδοξο φαίνεται ότι πολλά σύνολα δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους, όπως το σύνολο των ακεραίων ℕ, το οποίο δεν είναι ακέραιος ή η ανθρωπότητα, η οποία δεν είναι άνθρωπος. Όμως, ένα σύνολο ιδεών μπορεί να θεωρηθεί ως ιδέα.

Έστω τώρα το σύνολο Sets να είναι κάποιο σύμπαν συνόλων. Εξετάζουμε την αρνητική συνάρτηση $\alpha : 2 \longrightarrow 2$, όπου $\alpha(0) = 1$ και $\alpha(1) = 0$. Έστω η συνάρτηση $f : Sets \times Sets \longrightarrow 2$ που ορίζεται ως ακολούθως για το σύνολα s και t.

$$f(s,t) = \{ \begin{matrix} 1 : αν\ s \in t \\ 0 : αν\ s \notin t \end{matrix}$$

Κατασκευάζουμε τη g ως ακολούθως:

$$\begin{tikzcd}
Sets \times Sets \arrow[r, "f"] & \mathbf{2} \arrow[d, "\alpha"] \\
Sets \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"'] & \mathbf{2}.
\end{tikzcd}$$

Η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση των συνόλων που δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους. Οπότε για όλα τα σύνολα t θα ισχύει $g(-) \neq f(-,t)$.

Αν υπήρχε ένα σύνολο t_0 τέτοιο ώστε $g\ (-)\ =\ f\ (-, t_0\ )$ τότε από εκτίμηση του t_0 θα είχαμε

$$f\ (t_0, t_0\ )\ =\ g\ (t_0\ )\ =\ \alpha\ (\ f\ (t_0, t_0)\ ).$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει επειδή η g αντιπροσωπεύεται και η δεύτερη ισότητα ισχύει από τον ορισμό της g.

Συνοψίζοντας, για να εξασφαλίσουμε το γεγονός να μην υπάρχουν παράδοξα, λέμε ότι η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας «συλλογής» των συνόλων Sets, η οποία όμως δεν μπορεί να δημιουργήσει ένα υπαρκτό σύνολο.

1.3.3 Το παράδοξο του Grelling

Το παράδοξο του Grelling είναι ένα από τα πιο σημαντικά. Το επινόησε το 1908, αναφερόμενος στα επίθετα που περιγράφουν τον εαυτό τους και σε αυτά που δε μπορούν να περιγράψουν τον εαυτό τους.

Για να εξηγήσουμε αυτό το παράδοξο απαιτείται ο ορισμός των αυτολογικών επιθέτων. Παραδείγματος χάριν, η λέξη «μικρός» είναι μικρή, η λέξη «English» είναι αγγλική και το επίθετο «πολυσυλλαβικός» είναι πολυσυλλαβικό. Οι λέξεις δηλαδή που χαρακτηρίζουν τον εαυτό τους ονομάζονται «αυτολογικές». Οι υπόλοιπες καλούνται «ετερολογικές». Το επίθετο «μακρύς» δεν είναι μακριά λέξη, το “German” δεν είναι γερμανική και η λέξη «μονοσυλλαβικός» δεν είναι μονοσυλλαβική.

Το παράδοξο του Grelling προκύπτει από το ερώτημα: είναι η λέξη «ετερολογική» ετερολογική; Η απάντηση προκύπτει ως εξής: Είναι αν και μόνο αν δεν είναι. Αν αποφασίσουμε ότι η λέξη «ετερολογική» είναι αυτολογική τότε χαρακτηρίζει τον εαυτό της. Αλλά η λέξη «ετερολογική» δε μπορεί είναι αυτολογική αφού μπορεί να χαρακτηρίσει τον εαυτό της μόνο ως ετερολογική. Αν επομένως αποφασίσουμε ότι είναι ετερολογική τότε χαρακτηρίζει τον εαυτό της και παρατηρούμε ότι η ιδιότητα αυτή την καθιστά αυτολογική. Συνεπώς καταλήγουμε σε αντίφαση.

Ονομάζουμε Adj το σύνολο όλων των αγγλικών επιθέτων. ‘Εχουμε την ακόλουθη συνάρτηση $f : Adj \times Adj \longrightarrow 2$, όπως ορίζεται για όλα τα επίθετα α_1 και α_2.

$$f(a_1, a_2) = \begin{cases} 1 : \text{αν το } a_2 \text{ περιγράφει το } a_1 \\ 0 : \text{αν το } a_2 \text{ δεν περιγράφει το } a_1 \end{cases}$$

Έτσι, έχουμε την ακόλουθη κατασκευή της g:

$$\begin{tikzcd} Adj \times Adj \arrow[r, "f"] & \mathbf{2} \arrow[d, "\alpha"] \\ Adj \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"'] & \mathbf{2}. \end{tikzcd}$$

Η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός υποσυνόλου των επιθέτων που δεν μπορούν να περιγραφούν από κανένα επίθετο. Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι $g\,(-) \neq f\,(-, \alpha)$ για όλα τα επίθετα α. Η λέξη «ετερολογικό» δεν είναι το μοναδικό επίθετο που υπάρχει μέσα σ’ αυτό το υποσύνολο. Περιέχονται όλα τα επίθετα που δημιουργούν παράδοξα.

1.3.4 Το παράδοξο του Επιμενίδη (Το παράδοξο του Ψεύτη)

Ο Επιμενίδης ήταν ένας Κρητικός θρησκευτικός διδάσκαλος, προφήτης και μάντης. Καταγόταν από την Φαιστό όμως έζησε κυρίως στην Κνωσό. Ήταν ένας από τους πιο «περίεργους» φιλοσόφους, γιατί στα γραπτά του υπήρχε πάντα το μυθικό στοιχείο. Ο ίδιος είναι περισσότερο γνωστός εξαιτίας του παραδόξου του, το οποίο είναι το παλαιότερο παράδειγμα αυτοαναφοράς.

Συγκεκριμένα ο Επιμενίδης (που ήταν από την Κρήτη) έλεγε ότι «οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα». Αν όλοι οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα τότε και αυτός ως Κρητικός λέει ψέματα. Άρα οι Κρητικοί λένε την αλήθεια. Σε περίπτωση όμως που οι Κρητικοί λένε την αλήθεια τότε και αυτός ως Κρητικός λέει την αλήθεια, δηλαδή ότι οι Κρητικοί είναι ψεύτες. Το ερώτημα είναι αν τα λεγόμενα του Επιμενίδη είναι αλήθεια ή ψέματα. Η αντίφαση στην πρόταση αυτή, είναι ότι αν λέει την αλήθεια, τότε είναι και αυτός ψεύτης. Ίσως κάποιοι Κρητικοί να είναι ψεύτες, ακόμα και ο Επιμενίδης, και κάποιοι να μην είναι. Ίσως ο Επιμενίδης να ήταν ψεύτης που περιστασιακά έλεγε την αλήθεια αλλά σίγουρα δε μπορούσε να το κάνει ταυτόχρονα.

Παρατηρούμε ότι η ουσία του παραδόξου είναι άλλη. Αν πούμε ότι αυτή η πρόταση είναι ψευδής πως θα ξέρουμε αν είναι ψευδής ή αληθής; Αν η πρόταση αυτή είναι αληθής τότε σύμφωνα με αυτήν είναι ψευδής, ενώ αν η πρόταση είναι ψευδής τότε θα πρέπει να είναι αληθής και έτσι δημιουργείται ένας φαύλος κύκλος που καταλήγει στο ότι αυτή η πρόταση είναι αληθής αν και μόνο αν είναι ψευδής.

Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε και άλλες προτάσεις που δηλώνουν το ίδιο με το περιεχόμενο τους. Μία συνηθισμένη «λύση» για το παράδοξο του Ψεύτη είναι να πούμε ότι σίγουρα υπάρχουν προτάσεις που δεν είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής, απλά χωρίς νόημα. Μία άλλη λύση σε αυτό το παράδοξο είναι η αποδοχή αυτής της πρότασης ταυτόχρονα ως αληθή και ως ψευδή. Στις περιπτώσεις λοιπόν που μία πρόταση δηλώνει το ίδιο της το περιεχόμενο, υπάρχουν τρείς περιπτώσεις. Αν είναι αληθής τότε είναι ψευδής ή χωρίς νόημα.

Αν είναι ψευδής τότε είναι αληθής και έχει νόημα, ενώ αν δεν υπάρχει νόημα στην πρόταση, τότε είναι αληθής και έχει νόημα. Αυτό το παράδοξο μπορεί επίσης να διατυπωθεί όπως τα προηγούμενα.

Εξετάζω το σύνολο των Αγγλικών προτάσεων Sent και το σύνολο

$$3 = \{\, T(rue), M(eaningless), F(alse) \,\}.$$

Έχουμε την ακόλουθη συνάρτηση $f : Sent \times Sent \longrightarrow 3$, η οποία ορίστηκε για όλες τις προτάσεις s_1 $και$ s_2.

$$f\ (s_1, s_2) = \begin{cases} T : αν\ το\ α_2\ περιγράφει\ το\ α_1 \\ M : αν\ είναι\ χωρίς\ νόημα\ για\ το\ α_2\ να\ περιγράψει\ το\ α_1 \\ F : αν\ το\ α_2\ δεν\ περιγράφει\ το\ α_1 \end{cases}$$

Τώρα εξετάζω τη συνάρτηση $α : 3 \longrightarrow 3$ που έχει οριστεί σαν $α(T) = F$ και $α(M) = α(F) = T$ και κατασκευάζουμε τη g ως ακολούθως:

$$\begin{tikzcd} Sent \times Sent \arrow[r, "f"] & \mathbf{3} \arrow[d, "\alpha"] \\ Sent \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"'] & \mathbf{3}. \end{tikzcd}$$

Η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση των προτάσεων που δεν είναι ούτε λάθος, ούτε χωρίς νόημα όταν αυτοπεριγράφονται. Με τη χαρακτηριστική συνάρτηση εννοούμε αυτές τις προτάσεις που η g πηγαίνει στην T σε αντίθεση με το M ή το F.

1.3.5 Το παράδοξο του Richard

Το «παράδοξο του Richard», είναι μία σημασιολογική αντινομία στη θεωρία συνόλων και τη φυσική γλώσσα που περιγράφηκε για πρώτη φορά από τον Γάλλο μαθηματικό Jules Richard το 1905. Παρατηρούμε ότι έχει άμεση σχέση με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor για τη μη αριθμησιμότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Υπάρχουν πολλές προτάσεις στην Ελληνική γλώσσα που περιγράφουν πραγματικούς αριθμούς μεταξύ του 0 και του 1. Για παράδειγμα, η πρόταση «Το x είναι ο λόγος του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του, διαιρούμενος με το 10» περιγράφει τον αριθμό 0,314159... .

Υπάρχουν αρκετές παρόμοιες προτάσεις. Ονομάζουμε μία τέτοια πρόταση, «πρόταση Richard». Έτσι, υπάρχει μία ατελείωτη λίστα αγγλικών φράσεων (όπου κάθε φράση αποτελείται από διάφορα πεπερασμένα μήκη) που ορίζουν με σαφήνεια τους πραγματικούς αριθμούς. Θεωρούμε μία λεξικογραφική διάταξη όλων αυτών των προτάσεων, η οποία μας δίνει τη γενική ιδέα της $m -$ οστής πρότασης Richard. Ένα απλό παράδειγμα είναι να θεωρήσουμε μία άπειρη λίστα των αντίστοιχων πραγματικών αριθμών : $r_1, r_2, \dots$. Τώρα θα ορίσουμε ένα νέο πραγματικό αριθμό r ως εξής: Το ακέραιο μέρος του r θα είναι 0, το *n-οστό* δεκαδικό ψηφίο του r θα είναι 1, εάν το *n-οστό* δεκαδικό ψηφίο του r_n δεν είναι 1, και το *n-οστό* δεκαδικό ψηφίο του r θα είναι 2, εάν το νιοστό δεκαδικό ψηφίο του r_n είναι 1. Αυτή είναι μία έκφραση που ορίζει ξεκάθαρα έναν πραγματικό αριθμό r. Έτσι, r πρέπει να είναι ένας από τους αριθμούς r_n. Ωστόσο, το r δομήθηκε έτσι ώστε να μην μπορεί να ισούται οποιοδήποτε από τα r_n.

Θεωρούμε το σύνολο $10 = \{0,1,2,\dots,9\}$ και τη συνάρτηση $\alpha : 10 \rightarrow 10$ όπου $\alpha(i) = 9 - i$, η οποία δεν έχει σταθερό σημείο. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow 10$, η οποία προσδιορίζεται ως εξής :

$$f(n,m) = \{ο\ n - οστός\ δεκαδικός\ αριθμός\ της\ m - οστής\ πρότασης\ Richard\}$$

Για παράδειγμα, αν η παραπάνω πρόταση είναι η δέκατη πέμπτη πρόταση Richard, τότε έχουμε ότι $f(4{,}15) = 1$, λόγω του 1 στο 0,314159... .

Κατασκευάζουμε τη g ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & \mathbf{10} \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"'] & \mathbf{10}.
\end{tikzcd}$$

Η g περιγράφει έναν πραγματικό αριθμό μεταξύ 0 και 1 και για όλα τα $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $g(-) \neq f(-, m)$. Συμπεραίνουμε ότι αυτός ο αριθμός είναι διαφορετικός από όλες τις προτάσεις Richard. Παρ' όλα αυτά, αυτή είναι μία πρόταση Richard που περιγράφει αυτόν τον αριθμό. « x είναι ο πραγματικός αριθμός μεταξύ του 0 και του 1, του οποίου το $n - οστό$ ψηφίο είναι εννιά μείον του $n - οστού$ ψηφίου του αριθμού που περιγράφεται από τη $n - οστή$ πρόταση Richard.

1.3.6 Το πρόβλημα τερματισμού του Turing

Τα πρόβληματα, για τα οποία δεν υπάρχει αλγόριθμος που να τα επιλύει, ονομάζονται μη επιλύσιμα. Ένα από τα πιο γνωστά μη επιλύσιμα προβλήματα είναι το πρόβλημα του τερματισμού, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος που για κάθε μηχανή Turing M και συμβολοσειρά εισόδου w, να αποφασίζει αν η M τερματίζει με είσοδο w ή όχι. Αυτό που αποδεικνύεται στην ουσία, είναι ότι δεν υπάρχει μία γενική μέθοδος, η οποία να αποφασίζει σωστά σε όλες τις περιπτώσεις. Το πρόβλημα του τερματισμού, αποδείχθηκε από τον Alan Turing το 1936 και είναι ιστορικής σημασίας ως ένα από τα πρώτα μη αποφασίσιμα προβλήματα.

Θεώρημα 1.4. (Το πρόβλημα του τερματισμού του Turing)

Ορίζουμε τη γλώσσα $HALT \ = \{< \ \alpha, x \ > \ | \ M_\alpha \ να \ σταματάει \ σε \ input \ x \ \}$
Τότε αυτή η γλώσσα δε γίνεται δεκτή από καμία μηχανή Turing.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μηχανή Turing M_{HALT} η οποία δέχεται τη γλώσσα $HALT$.
Έστω ότι υπάρχει μία άλλη μηχανή Turing Μ΄ η οποία δέχεται το x σαν input και επικαλείται την M_{HALT} $(< \ x, x \ >)$.
(Η γλώσσα $HALT$ περιέχει όλα τα strings που κωδικοποιούν την μηχανή Turing και ένα input τέτοιο ώστε η μηχανή να σταματάει σ' αυτό.).

Ορίζουμε τη $M΄$ως ακολούθως :

Αν η M_{HALT} δέχεται το input, τότε το $M΄$ θα λειτουργεί επ' αόριστον.
Αν η M_{HALT} απορρίπτει το input, τότε το $M΄$ θα επιστρέφει 1.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι το β κωδικοποιείται από τη μηχανή M' και τρέχουμε $M'(\beta)$ τότε θα έχουμε δυο περιπτώσεις:
• Η $M'(\beta)$ θα σταματάει $\Leftrightarrow$ M_{HALT} $(< \ \beta, \beta \ >)$ απορρίπτει $\Leftrightarrow$ M_β(β) δε θα σταματήσει $\equiv$ $M'(\beta)$ δε θα σταματήσει. $ATOΠO$
• $M'(\beta)$ δε θα σταματήσει $\Leftrightarrow$ M_{HALT} $(< \ \beta, \beta \ >)$ δέχεται $\Leftrightarrow$ M_β(β) δε θα σταματήσει $\equiv$ $M'(\beta)$ θα σταματήσει. $ATOΠO$ □

Έστω U ένα αριθμήσιμο σύνολο το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- Το σύνολο $\mathbb{N}$ και το 2 να είναι στοιχεία του U
- Για κάθε στοιχείο C στο σύνολο U θα υπάρχουν τύποι συναρτήσεων των στοιχείων του C. Μια τέτοια συνάρτηση θα είναι ένας πλήρης ισομορφισμός π.χ. $e_C : \mathbb{N} \longrightarrow C$. Υποθέτουμε ότι το C είναι ένα σύνολο υπολογίσιμων πραγμάτων.
- Για κάθε (όχι απαραίτητα πλήρη) συνάρτηση $f : C \longrightarrow C'$ υπάρχει ένας αντίστοιχος αριθμός $\ulcorner f \urcorner \in \mathbb{N}$. Αυτός ο αριθμός είναι ένας αριθμός G$\ddot{o}$del του προγράμματος που βοηθάει στον υπολογισμό.
- Για κάθε (όχι απαραίτητα πλήρη) συνάρτηση $f : C \longrightarrow C'$ θα υπάρχει ένα αντίστοιχο αντιστρέψιμο αριθμήσιμο σύνολο $W_{(f)} \subseteq \mathbb{N}$. Για κάθε $c \in C$ η f έχει αξία στο c αν και μόνο αν $e_c^{-1}(c) \in W_{(f)}$. Μπορεί να είναι μία μερική συνάρτηση από έναν υπολογίσιμο χώρο σε έναν άλλο.

Ο υπολογισμός σταματάει. Θα πρέπει να υπάρχει μία πλήρης συνάρτηση $HALT : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow 2$ που θα ανήκει στο U τέτοια ώστε για όλες τις $f : C \longrightarrow C'$ ισχύει

$$Halt(-, \ulcorner f \urcorner) = \mathcal{X} w_{\langle f \rangle} .$$

Αυτή η σχέση δείχνει για πια στοιχεία στο C ο υπολογισμός σταματάει οπότε για τη συνάρτηση $HALT$ θα ορίζουμε:

$$Halt\ (n, m) = \begin{cases} 1 : \alpha\nu\ n \in W_m \\ 0 : \alpha\nu\ n \notin W_m \end{cases}$$

Εξετάζεται η συνάρτηση $\alpha : 2 \longrightarrow 2$ που ορίζεται ως ακολούθως : $\alpha(0) = 1$ και $\alpha(1) \uparrow$, για παράδειγμα, ο υπολογισμός δεν είναι καθορισμένος.

Κατασκευάζεται η g ως ακολούθως:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "Halt"] & \mathbf{2} \arrow[d, "\beta"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"'] & \mathbf{2}. \end{tikzcd}$$

Για να ολοκληρωθεί το παράδειγμα πρέπει να δειχθεί ότι η συνάρτηση $Halt$ δεν είναι πλήρης γιατί δεν είναι ορισμένη στο $\ulcorner g \urcorner$. Αν η $Halt$ ήταν ορισμένη στο $\ulcorner g \urcorner$ τότε θα μπορούσε να δημιουργηθεί η ακόλουθη κατασκευή:

$$Halt\ (\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = 1\ \ αν\ και\ μόνο\ αν\ η\ \ulcorner g \urcorner\ \in\ W_{\langle g \rangle}\ από\ τον\ ορισμό\ της\ συνάρτησης\ Halt$$

$$αν\ και\ μόνο\ αν\ η\ g(\ulcorner g \urcorner) = 1\ από\ τον\ τερματισμό\ της\ g$$

$$αν\ και\ μόνο\ αν\ Halt\ (\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = 0\ από\ τον\ ορισμό\ της\ g$$

Άρα δε μπορεί να υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

1.3.7 Μία μη αναγνωρίσιμη γλώσσα

Υπάρχει μία γλώσσα που δεν είναι αναγνωρίσιμη από καμία μηχανή Turing. Έστω $M_0, M_1, M_2, \ldots$ να είναι μία απαρίθμηση όλων των μηχανών Turing της γλώσσας $\Sigma = \{0,1\}$ που δίνεται σαν input. Ακόμα, έστω $w_{0,}\ w_1, w_2, \ldots$ να είναι μία απαρίθμηση όλων των λέξεων στο Σ^* όπου Σ^* είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούν να σχηματιστούν από τη γλώσσα Σ. Το w_i είναι μία λέξη στο Σ η οποία θεωρείται ότι δηλώνει την αριθμητική αξία της δυαδικής λέξης.

Εξετάζεται η ακόλουθη συνάρτηση $f : \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow 2$ που ορίζεται ως ακολούθως:

$$f\left(w_i, w_j\right) = \begin{cases} 1 : αν\ το\ w_i\ γίνεται\ δεκτό\ από\ το\ M_{(w_j)} \\ 0 : αν\ το\ w_i\ δε\ γίνεται\ δεκτό\ από\ το\ M_{(w_j)} \end{cases}$$

Τότε κατασκευάζουμε τη g ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^* \times \Sigma^* \arrow[r, "f"] & \mathbf{2} \arrow[d, "\alpha"] \\
\Sigma^* \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"'] & \mathbf{2}.
\end{tikzcd}$$

Η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μίας γλώσσας που δε γίνεται δεκτή από καμία μηχανή Turing. Το γεγονός ότι υπάρχουν μη αναγνωρίσιμες γλώσσες καταλήγει σε ένα συμπέρασμα. Δηλαδή ότι ο αριθμός των μηχανών Turing είναι αριθμήσιμος ενώ ο αριθμός των γλωσσών είναι μη αριθμήσιμος. Η απόδειξη δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

1.4 Το διαγώνιο θεώρημα του Cantor

Το αντίστροφο – αντίθετο θεώρημα του Cantor είναι εξίσου μεγάλης σημασίας.

Θεώρημα 1.5. (Διαγώνιο Θεώρημα)

‘Εστω Y ένα σύνολο και έστω ότι υπάρχει ένα σύνολο T και μία συνάρτηση $f : T \times T \to Y$ τέτοια ώστε όλες οι συναρτήσεις $g : T \to Y$ να αντιπροσωπεύονται από την f (δηλαδή να υπάρχει ένα $t \in T$ τέτοιο ώστε $g(-) = f(-, t)$), τότε όλες οι συναρτήσεις $\alpha : Y \to Y$ έχουν σταθερο σημείο.

Απόδειξη

Έστω ότι οι Y, T, f και α δίνονται. Κατασκευάζουμε την g ως εξής :

$$\begin{tikzcd}
T \times T \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
T \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Η g προσδιορίζεται ως εξής : $g(m) = a(f(m, m))$.

Εφ’ όσον έχουμε υποθέσει ότι η g αντιπροσωπεύεται από κάποιο $t \in T$, έχουμε ότι $g(m) = f(m, t)$. Προκύπτει ότι η συνάρτηση α έχει σταθερό σημείο στο $y_0 = g(t)$. Έχουμε :

$a\big(g(t)\big) = a(f(t, t))$ αφού η g αντιπροσωπεύεται

$= g(t)$ από τον ορισμό της g. □

Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] The Infinite, A. W. Moore, 2001

[2] A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points, Noson S. Yanofsky, 2003

[3] The Ways of Paradox and other essays, W. V. Quine, 1966

[4] Sets for Mathematics, F. William Lawvere, 2003

[5] Labyrinth of Thought, A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics, José Ferreirós, 2007

[6] Conceptual mathematics : a first introduction to categories, F. William Lawvere and Stephen H. Schanuel, 1991

[7] Georg Cantor : his mathematics and philosophy of the infinite, Joseph Warren Dauben, 1990

[8] Principia mathematica, Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, 1963

[9] Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία, Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης, 1993

[10] Η μαγεία των παραδόξων, Martin Gardner, 1989

[11] Θεωρία Υπολογισμού, Διαλέξεις, Σημειώσεις σε διαγωνιοποίηση, Αλέξιος Καπόρης

[12] Σημειώσεις στη Θεωρία Συνόλων, Σπύρος Κλ. Καπελλίδης, 2012