



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Θεμελιώδεις Ιδιότητες των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων
Hallén και Rocklington σε Γραμμικές Κεραίες
Τροφοδοτούμενες Μέσω Διακένων**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννης – Ι. Π. Ταστσόγλου

Αθήνα, Ιούνιος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Θεμελιώδεις Ιδιότητες των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων
Hallén και Rocklington σε Γραμμικές Κεραίες
Τροφοδοτούμενες Μέσω Διακένων**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Συμβουλευτική Επιτροπή : Γεώργιος Ι. Φικιώρης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Ιωάννης Βομβορίδης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Δήμητρα – Θ. Ι. Κακλαμάνη, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την.....

.....
Γ. Φικιώρης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Ι. Βομβορίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Δ.-Θ. Κακλαμάνη
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

.....
Η. Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Π.-Π. Σωτηριάδης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Αθ. Παναγόπουλος
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Ν. Τσίτσας
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Αθήνα, Ιούνιος 2014

.....
Ιωάννης – Ι. Π. Ταστσόγλου

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωάννης – Ι. Π. Ταστσόγλου, 2014

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

*Στην αδελφή μου Ευδοκία,
και στους γονείς μου,
Πάυλο και Κωνσταντίνα*

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή μελετούμε θεμελιώδεις ιδιότητες των ολοκληρωτικών εξισώσεων Hallén (Hallén's Equation - HE) και Pocklington (Pocklington's Equation - PE) για το μοντέλο της Γεννήτριας Πεπερασμένου Διακένου – ΓΠΔ (Finite Gap Generator - FGG) το οποίο χρησιμοποιείται εκτενώς ως μοντέλο τροφοδοσίας κυλινδρικών κεραιών. Τα συμπεράσματα που εξάγονται συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του μοντέλου της Γεννήτριας Δέλτα Συνάρτησης – ΓΔΣ (Delta Gap Generator-DFG) που έχουν εξαχθεί σε προηγούμενες εργασίες.

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1, γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση μεθόδων για τον προσδιορισμό του ρεύματος γραμμικής κεραίας μέσω των εξισώσεων HE και PE. Παρουσιάζεται το μοντέλο του «σωληνοειδούς διπόλου» το οποίο χρησιμοποιείται σε όλη την έκταση της διατριβής και εξάγονται ακριβείς και προσεγγιστικές εκφράσεις των ολοκληρωτικών εξισώσεων, αναλόγως του πυρήνα (ακριβής - προσεγγιστικός) που χρησιμοποιείται. Οι προαναφερθείσες εκφράσεις είναι αληθείς για οιοδήποτε μοντέλο τροφοδοσίας. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση μεθόδων αριθμητικής επίλυσης των ανωτέρω εξισώσεων.

Στο Κεφάλαιο 2 εξετάζεται διεξοδικά η αριθμητική επίλυση της HE για το μοντέλο της ΓΔΣ καθώς και θεμελιώδεις ιδιότητες των λύσεων της εξίσωσης αυτής. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις. Τα αριθμητικά αποτελέσματα με τον προσεγγιστικό πυρήνα, για την πεπερασμένη κεραία, παρουσιάζουν ταλαντώσεις στα άκρα και στο κέντρο αυτής. Οι παρατηρούμενες ταλαντώσεις πλησίον του σημείου τροφοδοσίας συσχετίζονται με την «μη επιλυσιμότητα» της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Το τελευταίο επαληθεύεται με την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου στην άπειρη κεραία και την εξαγωγή μιας ασυμπτωτικής έκφρασης που πιστοποιεί ποσοτικά και ποιοτικά τις προαναφερθείσες ταλαντώσεις.

Ακολούθως, στο Κεφάλαιο 3, εξετάζονται εκτενώς οι εξισώσεις Hallén και Pocklington για το μοντέλο της ΓΠΔ. Για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα επικεντρώνουμε την μελέτη μας στο αν σημαντικά μεγέθη της κεραίας έχουν πεπερασμένη τιμή και τα συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα μεγέθη της ΓΔΣ. Για τον προσεγγιστικό πυρήνα εστιάζουμε την ανάλυση μας στην μη επιλυσιμότητα των ολοκληρωτικών εξισώσεων και στον συσχετισμό αυτής με το φαινόμενο της παρουσίας

μη φυσιολογικών ταλαντώσεων. Επιπρόσθετα, επεκτείνουμε την μέθοδο του «ενεργού ρεύματος», που έχει προταθεί και μελετηθεί σε προηγούμενες εργασίες, στο μοντέλο της ΓΠΔ. Πρόκειται για μία, απλή στην εφαρμογή, μέθοδο επεξεργασίας των ταλαντούμενων τιμών για την εξαγωγή λογικών αποτελεσμάτων που αφορούν σημαντικά στοιχεία της κεραίας όπως είναι η ρευματική κατανομή και η σύνθετη αντίσταση εισόδου. Επαληθεύεται ότι τα ανωτέρω μεγέθη είναι πολύ κοντά στα αντίστοιχα που προκύπτουν με τον ακριβή πυρήνα. Τέλος επιβεβαιώνεται ότι η μέθοδος του ενεργού ρεύματος είναι πιο αποδοτική στο μοντέλο της ΓΠΔ σε σχέση με την εφαρμογή της στην ΓΔΣ.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, η διδακτορική εργασία ολοκληρώνεται με την ενδελεχή μελέτη της προέλευσης και της φύσης των παρατηρούμενων ταλαντώσεων στα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Εφαρμόζοντας την αριθμητική μέθοδο του Κεφαλαίου 3 στην ΡΕ για την άπειρη κεραία αποδεικνύεται, όπως και στην περίπτωση της ΓΔΣ, ότι οι αναφερόμενες ταλαντώσεις πλησίον του σημείου τροφοδοσίας της κεραίας είναι αποτέλεσμα της μη επιλυσιμότητας της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Εν συνεχεία, οι ταλαντώσεις συσχετίζονται με το φαινόμενο της υπερκατευθυντικότητας και με αντίστοιχα φαινόμενα που παρατηρούνται στην Μέθοδο Βοηθητικών Πηγών (Method of Auxiliary Sources -MAS). Το Κεφάλαιο 4 ολοκληρώνεται με την φυσική ερμηνεία του ενεργού ρεύματος μέσω της οποίας εξηγούνται πολλά από τα συμπεράσματα του Κεφαλαίου 3. Η ερμηνεία αυτή ισχύει επίσης και για το μοντέλο της ΓΔΣ.

Λέξεις Κλειδιά— Σωληνοειδές δίπολο, εξίσωση Hallén, εξίσωση Pocklington, μέθοδοι ολοκληρωτικών εξισώσεων, μέθοδος Ροπών, μέθοδος Galerkin, τροφοδοσία κεραίων, θεωρία κεραίων, γραμμικές κεραίες, υπερκατευθυντικότητα.

Abstract

In the present thesis we discuss certain fundamental properties of Hallén's (HE) and Pocklington's (PE) equations with the Finite-Gap Generator (FGG), which has long been used as a feed model for cylindrical antennas. These results are compared to corresponding ones for the Delta Function Generator model (DFG) that have been discussed in previous works.

At first, in Chapter 1, a brief overview is provided of methods of current computation in linear antennas through integral equations. The model of "circular tubular antenna" is presented and exact/approximate integral equations are extracted depending on the choice of kernel (exact/approximate). These expressions are applicable for all choices of generator. Finally, numerical methods that are often applied to both forms of HE and PE are discussed.

In Chapter 2, an extensive study of the Hallén integral equation for the current on a linear antenna center-driven by DFG is presented. Fundamental properties of the numerical solution are also discussed. The numerical method is Galerkin's method with pulse functions. For the approximate kernel, unphysical oscillations, at the edges and at the centre of the finite antenna, are observed. These oscillations, near the driving point, are due to the "unsolvability" of the integral equation. This is verified by applying the numerical method to HE for the current on the infinite antenna and developing asymptotic expressions that can be used as a guide for the behavior of the solutions of the finite antenna.

Subsequently, in Chapter 3, certain fundamental properties of Hallén's and Pocklington's equations with the FGG are examined. For the case of the exact kernel, we focus on whether important quantities are finite or infinite and compare to corresponding quantities obtained using the DFG. For the approximate kernel, we focus on the "unsolvability" of the two equations and the relation of "unsolvability" to the important phenomenon of unphysical oscillations. We also extend to the FGG the so-called effective-current method; this is an easy-to-apply remedy for the oscillatory solutions that allows one to obtain reasonable answers for important quantities such as current distributions and the input impedance. It is shown here that these answers are close to those obtained with the exact kernel. We show that, in a certain sense, the method is more advantageous to apply in the present (FGG) case than in the DFG case.

Finally, in Chapter 4, our thesis ends with a more careful examination of the origin and nature of oscillations occurring with the approximate kernel. These oscillations, near the driving point, are also due to the “unsolvability” of the approximate integral equation, such as in DFG case. This is shown by applying the numerical method of Chapter 3 to PE for the current on the infinite length antenna. Next, we point out certain analogies to the Method of Auxiliary Sources (MAS) and to superdirectivity. We also provide a new physical interpretation of the effective-current method that explains a number of the findings in Chapter 3. This interpretation is also applicable to the case of the delta-function generator.

Keywords— Circular tubular antenna, Hallén’s equation (HE), Pocklington’s equations (PE), integral equation methods, Method of Moments (MoM), Galerkin’s method, antenna feeds, antenna theory, wire antennas, superdirectivity.

Πρόλογος

«Τά χαλεπά τὰς επιμελείαις αλίσκεται»

Πλούταρχος, 45-120 μ.Χ.

Η παρούσα διδακτορική εργασία είναι το αποτέλεσμα πολυετούς μελέτης και προσπάθειας. Στις σελίδες της συμπυκνώνεται το ερευνητικό έργο έξι ετών κατά την διάρκεια των οποίων υπήρξαν πολλές στιγμές απογοήτευσης, ικανοποίησης αλλά και έκπληξης για τα νέα ερωτήματα που παρουσιάζονταν και εγκαινίαζαν νέους κύκλους μελέτης. Μέσα από ένα πλήθος αριθμητικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων επιχειρήθηκε η τεκμηρίωση των θέσεων της παρούσας διατριβής εφαρμόζοντας πιστά τις επιταγές της επιστημονικής αλήθειας και δεοντολογίας. Παρά τις όποιες δυσκολίες, καταβλήθηκε κάθε δυνατή προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή.

Στο σημείο αυτό θεωρώ χρέος μου να ευχαριστήσω, ιδιαίτερα, τον επιβλέποντα Αναπληρωτή Καθηγητή κύριο Γεώργιο Φικιώρη που υπήρξε πολύτιμος αρωγός στην περάτωση αυτού του πολυδιάστατου έργου. Το μαθηματικό του υπόβαθρο και η φυσική του αντίληψη επί των μαθηματικών εκφράσεων που εξήχθησαν και μελετήθηκαν αποτέλεσαν το επιστέγασμα της επιτυχούς ολοκλήρωσης και τεκμηρίωσης των θέσεων της παρούσης.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους προϊσταμένους των επιστασιών των Μοιρών της Πολεμικής Αεροπορίας στις οποίες υπηρέτησα τα τελευταία έξι χρόνια για τις πολύτιμες διευκολύνσεις που μου παρείχαν ώστε να φέρω εις πέρας το δύσκολο αυτό έργο.

Τέλος, ευχαριστώ, βαθύτατα, την οικογένειά μου για την εμπιστοσύνη και την υποστήριξη που μου παρείχε όλα αυτά τα χρόνια. Η αμέριστη συμπαράσταση της σε στιγμές απογοήτευσης αλλά και η βοήθεια που μου προσέφερε με οιοδήποτε δυνατό τρόπο υπήρξαν εφιαλτήριο για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής.

I-I. Π. Τασσόγλου
Αθήνα, Ιούνιος 2014

Περιεχόμενα

<i>Περίληψη</i>	7
<i>Abstract</i>	9
<i>Πρόλογος</i>	11
<i>Ευρετήριο Σχημάτων</i>	17
<i>Ευρετήριο Πινάκων</i>	21
<i>Λίστα Ακρωνομίων</i>	23
<i>Εισαγωγή</i>	25
Βιβλιογραφία – Παραπομπές.....	30
<i>Κεφάλαιο 1</i>	33
<i>Προσδιορισμός Ρεύματος σε Γραμμική Κεραία Μέσω Ολοκληρωτικών Εξισώσεων</i>	33
1.1 Εισαγωγή.....	33
1.2 Πραγματικές Κεραίες και το Μοντέλο του Σωληνοειδούς Διπόλου.....	34
1.3 Ακριβής Ολοκληρωτική Εξίσωση Τύπου Rocklington.....	39
1.4 Ακριβής Ολοκληρωτική Εξίσωση Τύπου Hallén.....	44
1.5 Προσεγγιστικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις.....	46
1.6 Μοντέλα Τροφοδοσίας.....	47
1.6.1 Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης - ΓΔΣ (Delta Gap Generator).....	48
1.6.2 Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου - ΓΠΔ (Finite Gap Generator).....	49
1.6.3 Γεννήτρια Magnetic Frill - ΓΜΦ (Magnetic Frill Generator).....	50
1.7 Αριθμητικές Μέθοδοι/ Μέθοδοι Ροπών/ Μέθοδοι Galerkin.....	51
1.7.1 Περιγραφή Μεθόδου Ροπών (MoM).....	52
1.7.2 Επιλογή Συναρτήσεων Βάσης και Δοκιμής (Basis και Testing Functions).....	55
1.7.2.1 Συναρτήσεις Βάσης (Basis Functions).....	55
1.7.2.1.A. Συναρτήσεις Υποπεδίου (Subdomain Functions).....	55
1.7.2.1.B. Συναρτήσεις Ολικού Πεδίου (Entire Domain Functions).....	59
1.7.2.2 Συναρτήσεις Δοκιμής (Testing Functions).....	60
1.8 Επεκτάσεις.....	61
Παράρτημα Α.....	63
Χρήσιμες Ιδιότητες της Συνάρτησης Δέλτα του Dirac.....	63
Παράρτημα Β.....	65
Απειρισμός του Ακριβούς Πυρήνα - Εναλλαγή Διαφορικού Τελεστή και Ολοκλήρωσης	65
Β.1 Απειρισμός του Ακριβούς Πυρήνα.....	65
Β.2 Εναλλαγή Διαφορικού Τελεστή και Ολοκλήρωσης.....	65
Βιβλιογραφία – Παραπομπές.....	67
<i>Κεφάλαιο 2</i>	69
<i>Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης του Hallén για το Μοντέλο της Γεννήτριας Δέλτα Συνάρτησης (Delta Function Generator)</i>	69

2.1 Εισαγωγή	69
2.2 Η Πεπερασμένη Κεραία: Αριθμητική Μέθοδος.....	73
2.3 Η Άπειρη Κεραία: Βασικές Αρχές	76
2.4 Η Ολοκληρωτική Εξίσωση με τον Ακριβή Πυρήνα: Βελτιώσεις.....	78
2.5 Η Άπειρη Κεραία: Αριθμητική Μέθοδος με τον Ακριβή Πυρήνα.....	80
2.6 Η Άπειρη Κεραία: Αριθμητική Μέθοδος με τον Προσεγγιστικό Πυρήνα.....	83
2.7 Πεπερασμένη Κεραία και Αριθμητικά Αποτελέσματα: Συσχετισμός με την Άπειρη Κεραία	87
2.8 Επεκτάσεις σε Άλλες Αριθμητικές Μεθόδους και Εξισώσεις	94
2.9 Συμπεράσματα.....	99
Παράρτημα Α	101
Η Εξίσωση του Hallén για την Άπειρη Κεραία (2.9)	101
Παράρτημα Β.....	102
Εφαρμογή της Μεθόδου Β στην Άπειρη Κεραία.....	102
B.1 Επαλήθευση των Εξισώσεων (2.29) και (2.42)	102
B.2 Υπολογισμός της Τροποποιημένης (2.38).....	103
Παράρτημα Γ.....	105
Ειδικές Συναρτήσεις (Special Functions).....	105
Γ.1 Η Συνάρτηση Γάμμα (Gamma Function)	105
Γ.2 Συναρτήσεις Bessel και Hankel (Bessel and Hankel Functions)	107
Γ.3 Τροποποιημένες Συναρτήσεις Bessel (Modified Bessel Functions).....	111
Βιβλιογραφία – Παραπομπές.....	113
Κεφάλαιο 3.....	117
Η Χρήση της Γεννήτριας Πεπερασμένου Διακένου (Finite Gap Generator) στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Hallén και Rocklington	117
3.1 Εισαγωγή	117
3.2 Πεπερασμένη Κεραία: Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και Αριθμητικά Αποτελέσματα	124
3.3 Πεπερασμένη Κεραία: Ενεργό Ρεύμα.....	128
3.4 Κεραία Απείρου Μήκους: Συσχετισμοί με την Πεπερασμένη Κεραία.....	132
3.4.1 Επιλυσιμότητα των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων	133
3.4.2 Επιλύσιμες Περιπτώσεις: Ιδιότητες των Λύσεων.....	139
3.5 Επεκτάσεις για την Κατανομή Τετραγωνικής Ρίζας (Square Root Distribution)...	144
3.6 Συμπεράσματα.....	146
Παράρτημα Α	148
Εξαγωγή της Εξίσωσης (3.20).....	148
Παράρτημα Β.....	149
Εξαγωγή των Εξισώσεων (3.33) και (3.34)	149
Παράρτημα Γ.....	151
Υπολογισμός του Ολοκληρώματος της (3.29) -Επιλύσιμες Περιπτώσεις	151
Γ.1 Εξαγωγή των Εξισώσεων (3.35) και (3.36)	151
Γ.2 Απόδειξη της Ταυτότητας (3.38)	152

Βιβλιογραφία – Παραπομπές	154
Κεφάλαιο 4	159
<i>Θεμελιώδεις Ιδιότητες της Γεννήτριας Πεπερασμένου Διακένου (Finite Gap Generator) - Φυσική Ερμηνεία</i>	159
4.1 Εισαγωγή.....	159
4.2 Προσεγγιστικό και Ενεργό Ρεύμα για μη Μηδενικό Μήκος Διακριτοποίησης - Ταλαντώσεις.....	161
4.2.1 Ασυμπτωτική Έκφραση για την Άπειρη Κεραία	163
4.2.2 Συνάφεια των Ασυμπτωτικών Εκφράσεων και της Πεπερασμένης Κεραίας - Αριθμητικά Αποτελέσματα	170
4.2.3 Αναλογίες με Άλλα Φαινόμενα	175
4.3 Άπειρη Κεραία: Φυσική Ερμηνεία του Ενεργού Ρεύματος.....	177
4.3.1 Η Κυλινδρική Σωληνοειδής Κεραία Τροφοδοτούμενη από την Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου - ΓΠΔ.....	177
4.3.2 Συσχετισμοί με το Ενεργό Ρεύμα	180
4.3.3 Συσχετισμοί με τα Αποτελέσματα του Μοντέλου της ΓΔΣ.....	181
4.4 Συμπεράσματα	182
Παράρτημα Α	183
Υπολογισμός της Εξίσωσης (4.12).....	183
Βιβλιογραφία – Παραπομπές	184
<i>Επίλογος</i>	187
<i>Συμπεράσματα και Κατευθύνσεις Μελλοντικής Έρευνας</i>	187
Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα.....	187
Κατευθύνσεις Μελλοντικής Έρευνας	189
<i>Δημοσιεύσεις Διδακτορικής Διατριβής</i>	191

Ευρετήριο Σχημάτων

Σχήμα 1.1:	Ένας απλός τύπος πραγματικής κεραίας.....	35
Σχήμα 1.2:	Δύο ακόμα πραγματικές κεραίες, (α) η διπολική κεραία τροφοδοτούμενη από δυσύρματη γραμμή μεταφοράς και (β) η ισοδύναμη διάταξη πάνω από αγώγιμο επίπεδο.....	35
Σχήμα 1.3:	Το σωληνοειδές δίπολο. Στο διάκενο που βρίσκεται στο $z = 0$ εμφανίζεται σταθερή διαφορά δυναμικού V	36
Σχήμα 1.4:	Πηγή όγκου V' . Ανάλυση διανυσμάτων ενός συστήματος ακτινοβολίας.....	41
Σχήμα 1.5:	Σημείο παρατήρησης (ρ, ϕ, z) , σημείο πηγής (a, ϕ', z') , και απόσταση R μεταξύ τους.....	42
Σχήμα 1.6:	Για σημεία παρατήρησης πάνω στην επιφάνεια της κεραίας, η απόσταση R δίνεται από τη σχέση (1.16). Εδώ δείχνουμε προβολή στο επίπεδο $z = 0$. Η προβολή του R είναι $2a \sin(\phi'/2) $, με μέγιστη τιμή $2a$ και ελάχιστη τιμή 0.....	43
Σχήμα 1.7:	Μαθηματικά μοντέλα τροφοδοσίας: (α) Delta/Finite Gap, (β) Magnetic Frill.....	48
Σχήμα 1.8:	Στο σχήμα (α), απεικονίζονται οι παλμικές συναρτήσεις $u_{-N}(z'), u_{-(N-1)}(z'), \dots, u_0(z'), \dots, u_N(z')$. Η καθεμιά έχει πλάτος z_0 . Η $u_0(z')$ έχει κέντρο το $z' = 0$, ενώ η $u_N(z')$ έχει πέρας στο $z' = h$, με κέντρο στο $z' = h - z_0/2$. Στο σχήμα (β), απεικονίζεται μια υπέρθεση $J_N(z')$ παλμικών συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι η τελευταία έχει κλιμακωτή μορφή.....	52
Σχήμα 1.9:	Οι λεγόμενες τμηματικά γραμμικές ή τριγωνικές συναρτήσεις. Οι δύο τελευταίες $[t_{-N}(z)$ και $t_N(z)]$ είναι στην πραγματικότητα μισά τρίγωνα.....	57
Σχήμα 1.10:	Οι τμηματικά ημιτονοειδείς συναρτήσεις (piecewise sinusoid functions).....	58
Σχήμα 1.11:	Οι κολοβωμένες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις (truncated cosine functions).....	58

Σχήμα 1.12:	Οι τρεις πρώτες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις $h_{-N}(z), h_{-(N-1)}(z), h_{-(N-2)}(z)$ της σχέσης (1.42). Όλες είναι άρτιες και μηδενίζονται στα άκρα $z = \pm h$	59
Σχήμα 2.1:	$\text{Re}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή) και $\text{Re}\{I_{\text{ap}}(z)/V\}$ (σημεία) όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2. $N=200, \alpha/\lambda=0.007022, h/\lambda=0.25$. Κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές πλησίον του $z/\lambda=0.25$ είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται.....	88
Σχήμα 2.2:	$\text{Im}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή) και $\text{Im}\{I_{\text{ap}}(z)/V\}$ (σημεία) όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2. $N=200, \alpha/\lambda=0.007022, h/\lambda=0.25$. Κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές πλησίον των $z/\lambda=0$ και $z/\lambda=0.25$ είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται.....	89
Σχήμα 2.3:	Λογάριθμος του δείκτη κατάστασης c ($1^{\text{ης}}$ νόρμας) ως συνάρτηση του N . $h/\lambda=0.25, \alpha/\lambda=0.007022$ και $h/\lambda=0.5, \alpha/\lambda=0.014044$ (συνεχής γραμμή); $h/\lambda=0.5, \alpha/\lambda=0.007022$ (διακεκομμένη γραμμή). Παρατηρούμε ότι όταν ο λόγος h/a είναι σταθερός, τα διαγράμματα συμπίπτουν στην κλίμακα του σχήματος.....	93
Σχήμα 3.1:	$\text{Re}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή), $\text{Re}\{I_{\text{ap}}(z)/V\}$ (σημεία) και $\text{Re}\{I_{\text{eff}}(z)/V\}$ (διακεκομμένη γραμμή) όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 3.2 και την εξίσωση (3.18). Πλησίον του $z/\lambda=0.25$ κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται. $N=200, q=3, \Delta/\lambda=0.0075, \alpha/\lambda=0.007022, h/\lambda=0.25$. Στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, τα σημεία είναι $\text{Re}\{I_n/V\}$, όπου I_n είναι οι συντελεστές της συνάρτησης βάσης στην (3.6).....	130
Σχήμα 3.2:	Όπως το Σχήμα 3.1 για τα αντίστοιχα φανταστικά μέρη των ρευμάτων. Πλησίον των $z/\lambda=0$ και $z/\lambda=0.25$ κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται.	131
Σχήμα 3.3:	Μεγέθυνση του Σχήματος 3.2 κοντά στο κέντρο (εμφανίζονται επίσης τιμές για αρνητικά z): $\text{Im}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή) και $\text{Im}\{I_{\text{eff}}(z)/V\}$ (διακεκομμένη γραμμή). Το διάγραμμα παρουσιάζει ομαλή συμπεριφορά στα σημεία $z/\lambda = \pm\Delta/(2\lambda) = 0.00375$ και $z/\lambda=0$	132

- Σχήμα 3.4: Οι συναρτήσεις $w(\zeta)$ για πραγματικές τιμές του ζ με $\zeta > k$, όπως προσδιορίστηκαν από τις εκφράσεις του Πίνακα 3.1: $w_{\text{ex}}(\zeta)$ (λεπτή συνεχής γραμμή), $w_{\text{ap}}(\zeta)$ (έντονη συνεχής γραμμή), $w_{\text{eff}}(\zeta)$ για $\rho = a$ (διακεκομμένη γραμμή), και $w_{\text{eff}}(\zeta)$ για $\rho = a/4$ (διακεκομμένη με σημεία γραμμή), $k = 20\pi \text{ m}^{-1} \cong 62.8 \text{ m}^{-1}$ και $a = 0.07022 \text{ m}$. Όλες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν ιδιομορφία αριστερά του σημείου $\zeta = k$. Για μεγάλα ζ , οι συναρτήσεις $w_{\text{ap}}(\zeta)$ και $w_{\text{eff}}(\zeta)$ ($\rho = a/4$) παίρνουν εκθετικά μεγάλες, αρνητικές τιμές (οι τιμές στα δεξιά του διαγράμματος είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται), ενώ οι τιμές των $w_{\text{ex}}(\zeta)$ και $w_{\text{eff}}(\zeta)$ ($\rho = a$) δεν είναι μεγάλες. Ο λόγος των δύο τελευταίων μεγεθών προσεγγίζει το 2 καθώς το ζ αυξάνει..... 138
- Σχήμα 3.5: $\text{Im}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή) και $\text{Im}\{I_{\text{eff}}(z)/V\}$ (διακεκομμένη γραμμή) όπως υπολογίστηκαν για την άπειρη κεραία από την εξίσωση (3.36), εφαρμόζοντας την ταυτότητα (3.38). $\Delta/\lambda=0.01$, $a/\lambda=0.007022$ 143
- Σχήμα 4.1: $\text{Re}\{I_{\text{eff}}(z)/V\}$ όπως υπολογίστηκε από την εξίσωση (3.18) του Κεφαλαίου 3 για $\rho = a/4$. $N=200$, $q=3$, $\Delta/\lambda=0.0075$, $a/\lambda=0.007022$, $h/\lambda=0.25$ 161
- Σχήμα 4.2: Όπως το Σχήμα 4.1, συνδέοντας τα ταλαντούμενα σημεία με συνεχή γραμμή (εμφανίζονται επίσης οι τιμές για αρνητικά z).... 162
- Σχήμα 4.3: Όπως το Σχήμα 4.1 για το αντίστοιχο φανταστικό μέρος του ρεύματος. Πλησίον του $z/\lambda=0$ κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται..... 162
- Σχήμα 4.4: Όπως το Σχήμα 4.3 απεικονίζοντας όλες τις ταλαντούμενες τιμές με συνεχή γραμμή (εμφανίζονται επίσης οι τιμές για αρνητικά z). Παρατηρούμε ότι το πλάτος των ταλαντώσεων πλησίον του $z/\lambda=0$ είναι πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο των ταλαντώσεων στα άκρα της κεραίας. Οι τελευταίες δεν είναι ευδιάκριτες στην κλίμακα του διαγράμματος..... 163
- Σχήμα 4.5: Λογάριθμος του δείκτη κατάστασης c ($1^{\text{η}}$ ς νόρμας) ως συνάρτηση του N . $h/\lambda=0.25$, $a/\lambda=0.007022$ (έντονη συνεχής γραμμή); $h/\lambda=0.5$, $a/\lambda=0.014044$ (λεπτή συνεχής γραμμή); $h/\lambda=0.5$, $a/\lambda=0.007022$ (διακεκομμένη γραμμή). Παρατηρούμε ότι όταν ο λόγος h/a είναι σταθερός, τα διαγράμματα συμπίπτουν οπτικά στην κλίμακα του σχήματος για μεγάλες τιμές του N 173

Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας 2.1:	Σύνθετες αγωγιμότητες $I_{ex,0}/V$ και $I_{ap,0}/V$ (Siemens) στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2 για την ακριβή και προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση με $h/\lambda=0.25$, $N=80$ και $h/\lambda=0.75$, $N=241$. Σε κάθε περίπτωση $z_0/\lambda \cong 0.003$ και $a/\lambda = 0.01$	75
Πίνακας 2.2:	Σύγκριση των πρώτων 32 τιμών του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ για την πεπερασμένη κεραία όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2 με τις αντίστοιχες τιμές του $I_{ap,n}^{(\infty)}/iV$ (για την άπειρη κεραία) όπως υπολογίστηκαν από την ασυμπτωτική έκφραση (2.38). $N=200$, $a/\lambda=0.007022$ και $h/\lambda=0.25$	90
Πίνακας 3.1:	Εκφράσεις της συνάρτησης $w(\zeta)$ για πραγματικές τιμές του ζ . Γράφουμε τις μορφές της συνάρτησης ξεχωριστά για $ \zeta < k$ και $ \zeta > k$, με την μία μορφή να αποτελεί αναλυτική συνέχεια της άλλης.....	135
Πίνακας 3.2:	Ασυμπτωτικές εκφράσεις της $w(\zeta)$ και των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων της (3.29). Επιλυσιμότητα των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων.....	137
Πίνακας 3.3:	Ασυμπτωτικές εκφράσεις της $w(\zeta)$ και των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων της (3.29) για την περίπτωση όπου το πεδίο στο διάκενο ακολουθεί την κατανομή τετραγωνικής ρίζας. Επιλυσιμότητα των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων..	145
Πίνακας 4.1:	Σύγκριση των πρώτων 20 ταλαντούμενων τιμών του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ του Σχήματος 3.2 (για την πεπερασμένη κεραία) με τις αντίστοιχες τιμές του $I_{ap,n}^{(\infty)}/iV$ (για την άπειρη κεραία) όπως υπολογίστηκαν από την ασυμπτωτική έκφραση (4.24).....	172
Πίνακας 4.2:	Σύγκριση των πρώτων 15 ταλαντούμενων τιμών του $\text{Im}\{I_{eff,n}/V\}$ του Σχήματος 4.3 (για την πεπερασμένη κεραία) με τις αντίστοιχες τιμές του $I_{eff,n}^{(\infty)}/iV$ (για την άπειρη κεραία) όπως υπολογίστηκαν από την ασυμπτωτική έκφραση (4.22).....	174

Λίστα Ακρωνυμίων

Ελληνικοί Όροι

- ΓΔΣ** Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης
- ΓΜF** Γεννήτρια Magnetic Frill (Ισοδύναμου Μαγνητικού Δακτυλοειδούς Ρεύματος)
- ΓΠΔ** Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου
- ΗΕΔ** Ηλεκτρεγερτική Δύναμη
- ΜF** Μετασχηματισμός Fourier
- ΤΣI** Τεχνική Σημειακής Ισότητας (Point – Matching Technique)

Αγγλικοί Όροι

- DFG** Delta Function Generator – Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης
- FGG** Finite Gap Generator – Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου
- FT** Fourier Transform – Μετασχηματισμός Fourier
- HE** Hallén’s Equation – Εξίσωση Hallén
- MAS** Method of Auxiliary Sources – Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών
- MFG** Magnetic Frill Generator – Γεννήτρια Magnetic Frill
- MoM** Method of Moments – Μέθοδος Ροπών
- NEC** Numerical Electromagnetic Code – Αριθμητικός Ηλεκτρομαγνητικός Κώδικας
- PE** Pocklington’s Equation – Εξίσωση Pocklington
- PEC** Perfect Electrical Conductor – Τέλειος Ηλεκτρικά Αγωγός
- PSF** Poisson Summation Formula – Τύπος Αθροίσματος Poisson
- TEM** Transverse Electromagnetic – Εγκάρσιο Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο

Εισαγωγή

Η απλούστερη, κατασκευαστικά, κεραία εκπομπής αποτελείται από ένα κεντρικά τροφοδοτούμενο, ευθύγραμμο και λεπτό αγώγιμο σύρμα. Στην πράξη, το σύρμα τροφοδοτείται μέσω γραμμής μεταφοράς η οποία μεταφέρει στο σύρμα ηλεκτρομαγνητική ενέργεια. Το σύνθετο σύστημα κεραία-γραμμή μεταφοράς πολλές φορές καθιστά δύσκολη την μελέτη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της κεραίας. Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί μαθηματικά μοντέλα γεννητριών που υποκαθιστούν ή αγνοούν την αλληλεπίδρασή της με την τροφοδοτούσα γραμμή απλοποιώντας το ανωτέρω σύστημα.

Σε θεωρητικό επίπεδο, η βασική άγνωστη παράμετρος της προαναφερθείσας συρμάτινης κεραίας είναι η κατανομή του ρεύματος σ' αυτή. Το 1897 ο Pocklington [1] παρουσίασε μία μονοδιάστατη ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση για το ρεύμα. Ο Hallén [2], αρκετά χρόνια αργότερα, απέδειξε ότι το ρεύμα κατά μήκος μιας λεπτής γραμμικής κεραίας ικανοποιεί μία ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm πρώτου είδους. Στη σύγχρονη βιβλιογραφία, οι ανωτέρω εξισώσεις (ή μικρές παραλλαγές τους) αναφέρονται ως ολοκληρωτικές εξισώσεις των Pocklington (Pocklington's Equation - PE) και Hallén (Hallén's Equation - HE) αντίστοιχα. Απαντώνται στη βιβλιογραφία σε δύο μορφές, την προσεγγιστική και την ακριβή αναλόγως του πυρήνα (προσεγγιστικός/ακριβής) που χρησιμοποιείται.

Εκτός από τις δύο επιλογές πυρήνα, στη βιβλιογραφία συναντάμε μεγάλο πλήθος επιλογών για τα μοντέλα τροφοδοσίας, με την κάθε επιλογή να σχετίζεται με διαφορετικό δεξί μέλος των ως άνω εξισώσεων. Η κυλινδρική κεραία που τροφοδοτείται από ομοιόμορφα κατανομημένα πεδία κατά μήκος πεπερασμένων - και όχι αποκλειστικά απειροστά μικρών - περιφερειακών ζωνών ή διακένων είναι το μοντέλο τροφοδοσίας της κεραίας που εξετάζουμε στην παρούσα διατριβή και έχει παρουσιαστεί ήδη από το 1941. Την χρονιά αυτή ο Schelkunoff [3] παρουσιάζει ένα μοντέλο κατανομής ρεύματος για την περίπτωση της άπειρης κεραίας. Με δημοσιεύσεις του [3]-[5] κατά την περίοδο 1941-1945, ο ίδιος συγγραφέας, αναφέρει ότι οι διαφορές που εντοπίζονται μεταξύ των πεπερασμένων και απειροστά μικρών διακένων μπορούν να εξηγήσουν μερικές «ανακρίβειες» στο μοντέλο του Hallén [2] για την σύνθετη αντίσταση εισόδου της κυλινδρικής κεραίας.

Εντούτοις, μόλις το 1947 παρουσιάζεται, από τον Infeld [6], η πρώτη δημοσίευση που θέτει ως κύριο στόχο να αναλύσει την επίδραση του πεπερασμένου διακένου στη θεωρία των κεραιών. Στην εργασία του, ο Infeld προσπαθεί να ξεκαθαρίσει το πρόβλημα της σύγκλισης και αυτό της δομής του διακένου αντικαθιστώντας το απειροστά μικρό Δ -διάκενο, που χρησιμοποιήσαν το 1941 στο μοντέλο τους οι Stratton και Chu [7]-[9], από ένα διάκενο πεπερασμένου εύρους.

Στα επόμενα χρόνια θα ακολουθήσουν περισσότερες εργασίες για το μοντέλο πεπερασμένου διακένου. Συγκεκριμένα, το 1948, οι Albert και Synge [10] γράφουν ότι το διάκενο αποτελεί το ουσιώδες τμήμα του ακτινοβολούμενου συστήματος και την μόνη πηγή ακτινοβολούμενης ενέργειας. Οι δύο αυτοί ισχυρισμοί δέχονται αυστηρή κριτική από τον King στη μνημειώδη πραγματεία του «Theory of Linear Antennas» που δημοσιεύεται το 1956 [11]. Ο King, συγκεκριμένα, επισημαίνει ότι δεν υπάρχουν διάκενα (ούτε πεπερασμένου ούτε απειροστά μικρού μήκους) στα «πραγματικά» συστήματα ακτινοβολίας και, αν αυτό συνέβαινε, οι δύο ανωτέρω ισχυρισμοί θα είχαν ως συνέπεια, πρακτικά, την αδυναμία ακτινοβολίας [11, σελ. 844], [12]. Η ακτινοβολούμενη ενέργεια θα πρέπει να προέρχεται από κάποιου είδους γεννήτρια. Στην πράξη όμως, οι κεραιές τροφοδοτούνται από γραμμές μεταφοράς και για τον λόγο αυτό τα διάκενα αποτελούν εξιδανικεύσεις, πολύ χρήσιμες εντούτοις, στη μελέτη των κεραιών. Ο Duncan υιοθετεί πλήρως την άποψη αυτή και το 1962 τροποποιεί την λύση του για την απείρου μήκους κεραία λαμβάνοντας υπόψη την παρουσία διακένου πεπερασμένου μήκους στο σημείο τροφοδοσίας της [13].

Την ίδια χρονιά η εργασία των Chen και Keller [14] ασχολείται εκτενώς με την Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου – ΓΠΔ (Finite Gap Generator-FGG) εξετάζοντας μια κυλινδρική κεραία που τροφοδοτείται από ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται κατά μήκος ενός πεπερασμένου περιφερειακού διακένου. Εξάγονται ακριβείς μαθηματικές σχέσεις, με την μορφή ολοκληρωμάτων, για το εσωτερικό, εξωτερικό και συνολικό (=εσωτερικό + εξωτερικό) ρεύμα στην απείρου μήκους κεραία. Ακολούθως, οι Chen και Keller απλοποιούν το μοντέλο τους για το συνολικό ρεύμα υποθέτοντας μικρή διάμετρο στην κεραία, προκειμένου να υπολογίσουν αντίστοιχα μεγέθη για την πεπερασμένη.

Κάποιες από τις ανωτέρω απλοποιημένες σχέσεις για την άπειρη κεραία αμφισβητήθηκαν από τον Fante το 1966 [15], [16]. Παράλληλα, την ίδια χρονιά, ο Miller [17] επανεξέτασε τα συμπεράσματα των Chen, Keller και Fante. Έτσι μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1960, η τροφοδοτούμενη από την ΓΠΔ άπειρη κεραία έχει

εξεταστεί τόσο ως αντικείμενο θεωρητικού ενδιαφέροντος όσο και ως μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων για την πεπερασμένη κεραία.

Το ενδιαφέρον για τα μοντέλα τροφοδότησης των κεραιών, και πιο συγκεκριμένα της ΓΠΔ, γίνεται εντονότερο με την εμφάνιση ηλεκτρονικών υπολογιστών και την αυξημένη δημοτικότητα των αριθμητικών μεθόδων. Το 1969, οι Inagaki και Sekiguchi [18] είναι, μάλλον, οι πρώτοι που επεκτείνουν την εξίσωση του Pocklington από το μοντέλο του απειροστά μικρού διακένου (Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης - ΓΔΣ) σ' αυτό της ΓΠΔ.

Ένα χρόνο νωρίτερα, ο Harrington εξετάζοντας τις γραμμικές κεραιές στο βιβλίο του «Field Computation by Moment Methods» [19], χρησιμοποιεί τον προσεγγιστικό πυρήνα και ένα διάκενο εύρους ίσου με το μήκος της διακριτοποίησης. Ερμηνεύει την απόκλιση που παρουσιάζουν οι τιμές της επιδεκτικότητας (susceptance - φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου) της μεθόδου του από τις αντίστοιχες τιμές άλλων μεθόδων στηριζόμενος στην άποψη πως «κάθε λύση έχει διαφορετική θεώρηση του διακένου». Την δυσκολία αυτή προσπάθησε να αντιμετωπίσει το 1972 ο Tesche [20], ο οποίος υπέδειξε τι είναι αυτό που έχει σημασία στη ΓΠΔ όταν αυτή χρησιμοποιείται στην PE με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Ένα παρόμοιο ερώτημα απασχόλησε επίσης το 1984-85 τον Collin [21], [22]. Ο Collin τόνισε ιδιαίτερα ότι, με τον προσεγγιστικό πυρήνα και την ΓΠΔ, η HE δεν έχει «λύση». Κατ' αντιστοιχία, για την περίπτωση της ΓΔΣ, η «μη επιλυσιμότητα» είχε αναφερθεί το 1952 από τον Schelkunoff [23]. Αν και τόσο σημαντικό, τα περισσότερα σύγχρονα εγχειρίδια δεν κάνουν αναφορά σ' αυτό το θεμελιώδες γεγονός. Όσον αφορά το μοντέλο του διακένου, η άποψη του Collin είναι ότι «το διάκενο δεν θα έπρεπε να εισαχθεί καθόλου καθώς τείνει να συγχύσει την μαθηματική φύση του προβλήματος των οριακών συνθηκών που τίθεται» [22, σελ. 471]. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι αρκετοί συγγραφείς, που χρησιμοποιούν τις ίδιες εξισώσεις Pocklington και Hallén με τον Collin, διαφωνούν με την ανωτέρω άποψη.

Το 1985, οι Sakitani και Egashira παρουσιάζουν αριθμητικά αποτελέσματα που δείχνουν ότι οι αριθμητικές μέθοδοι στην ολοκληρωτική εξίσωση με την ΓΠΔ μπορούν να επιφέρουν «λύσεις» που παρουσιάζουν μη φυσιολογικές ταλαντώσεις [24]. Οι Miller, Deadrick και Landt [25], [26] είχαν επίσης αναφέρει παρόμοιες ταλαντώσεις από το 1975. Οι ανωτέρω ταλαντώσεις εμφανίζονται όταν χρησιμοποιείται μικρό μήκος διακριτοποίησης. Αντίθετα, μία μεγάλου μήκους διακριτοποίηση μπορεί να δώσει λογικά αποτελέσματα γι' αυτό και χρησιμοποιείται συνηθέστερα. Η ανάγκη της

σύγκλισης και της ευστάθειας των αριθμητικών αποτελεσμάτων οδήγησαν τους Yatskevitch και Karshakevitch, το 1981, στην παρουσίαση μιας μεθόδου επεξεργασίας των ταλαντούμενων τιμών που έδινε ομαλά αποτελέσματα [27], [28]. Το 1997, ο Miller [29] συγκρίνει τα αποτελέσματα του NEC (Numerical Electromagnetics Code-Αριθμητικός Ηλεκτρομαγνητικός Κώδικας) [30] μεταξύ πηγής αποτελούμενης από ένα απειροστά μικρό τμήμα και πηγής πεπερασμένου εύρους - κατ' αντιστοιχία με τα μοντέλα των ΓΔΣ και ΓΠΔ - και σημειώνει ότι αυτά διαφέρουν μεταξύ τους, όπως άλλωστε αναμενόταν. Το 1998, ο Werner [31] στην Μέθοδο των Ροπών που αναπτύσσει για την ανάλυση των λεπτών κεραιών, ενσωματώνει τον ακριβή πυρήνα και μοντέλο ΓΠΔ παρόμοιο με αυτό του Tesche [20]. Ένα χρόνο αργότερα οι Wu, Inagaki και Kikuma [32] ξεκινώντας από την PE των Inagaki και Sekiguchi [18] εξάγουν μία αντίστοιχη HE για το ολικό ρεύμα. Η αριθμητική τους λύση για την HE χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του ρεύματος στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια της πεπερασμένης, σε μήκος, κεραίας. Αντίστοιχα αποτελέσματα για την άπειρη κεραία δίνονται το 2008 από τους Makarov, Puzella και Iyer [33]. Τέλος, ο συνδυασμός της ΓΠΔ και του προσεγγιστικού πυρήνα αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης και για τον Neganov [34], [35] την χρονική περίοδο 2000-01.

Γίνεται φανερό λοιπόν, ότι το μοντέλο της ΓΠΔ - τόσο με τον ακριβή όσο και με τον προσεγγιστικό πυρήνα - έχει αποτελέσει θέμα πολλών και μερικές φορές αντικρουόμενων συζητήσεων. Τα τελευταία χρόνια οι Neganov, Nishimoto και Lo (2011-2013), μέσω μιας σειράς εργασιών [36]-[38], μελετούν το μοντέλο της ΓΠΔ προτείνοντας μεθόδους επίλυσης των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων και μοντέλα προσδιορισμού της σύνθετης αντίστασης εισόδου της κεραίας. Η δημοσίευση των ανωτέρω εργασιών καθώς και η δυνατότητα που παρέχουν οι σύγχρονες εκδόσεις του NEC για την επιλογή διαφόρων τύπων πυρήνα και τροφοδοσίας, υποδεικνύουν ότι το ενδιαφέρον για τα εν λόγω θέματα εξακολουθεί να αναπτύσσεται.

Στη διατριβή αυτή, ως συνέχεια παλαιότερων εργασιών, μελετάμε θεμελιώδεις ιδιότητες των ολοκληρωτικών εξισώσεων HE και PE για την ΓΠΔ. Επιχειρούμε μια αναλυτική προσέγγιση των εξισώσεων αυτών που δεν έχει υλοποιηθεί στο παρελθόν. Επιπρόσθετα, προσπαθούμε να συνδυάσουμε και να ερμηνεύσουμε τα συμπεράσματα προηγούμενων συγγραφέων όπως είναι οι παρατηρούμενες ταλαντώσεις των Sakitani και Egashira [24], η «μη επιλυσιμότητα» των ολοκληρωτικών εξισώσεων που αναφέρθηκε, για πρώτη φορά, από τον Collin [21], [22] και η μέθοδος εξομάλυνσης

των ταλαντούμενων τιμών που παρουσιάστηκε από τους Yatskevitch και Karshkevitch [27], [28].

Βιβλιογραφία – Παραπομπές

- [1] H. C. Pocklington, “Electrical Oscillations in Wires”, Cambridge Phil. Soc. Proc. 9, London, England, pp. 324-332, Oct. 1897.
- [2] E. Hallén, “Theoretical investigations into the transmitting and receiving qualities of antennas,” *Nova Acta (Upsala) [21]*, vol. 11, pp. 1-44, Nov. 1938.
- [3] S. A. Schelkunoff, “Theory of antennas of arbitrary size and shape,” *Proc. IRE*, vol. 29, pp. 493-521, Sept. 1941.
- [4] S. A. Schelkunoff, “Antenna theory and experiment,” *J. Appl. Phys.*, vol. 15, pp. 54-60, Jan. 1944.
- [5] S. A. Schelkunoff, “Concerning Hallén’s integral equation for cylindrical antennas,” *Proc. I.R.E.*, vol. 33, pp. 872-878, Dec. 1945.
- [6] L. Infeld, “The influence of the width of the gap upon the theory of antennas,” *Quart. Appl. Math.*, vol. V, no. 2, pp. 113-132, July 1947.
- [7] J. A. Stratton and L. J. Chu, “Steady-state solutions of electromagnetic field problems. I. Forced oscillations of a cylindrical conductor,” *J. Appl. Phys.*, vol. 12, pp. 230-235, March 1941.
- [8] J. A. Stratton and L. J. Chu, “Steady-state solutions of electromagnetic field problems. II. Forced oscillations of a conducting sphere,” *J. Appl. Phys.*, vol. 12, pp. 236-240, March 1941.
- [9] L. J. Chu and J. A. Stratton, “Steady-state solutions of electromagnetic field problems. III. Forced oscillations of a prolate spheroid,” *J. Appl. Phys.*, vol. 12, pp. 241-248, March 1941.
- [10] G. E. Albert and J. L. Synge, “The general problem of antenna radiation and the fundamental integral equation, with application to an antenna of revolution—Part I,” *Quart. Appl. Math.*, vol. VI, pp. 117-131, 1948.
- [11] R. W. P. King, *The Theory of Linear Antennas*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1956.
- [12] R. W. P. King, “Gap problem in antenna theory,” *J. Appl. Phys.*, vol. 26, no. 3, pp. 317-321, March 1955.
- [13] R. H. Duncan, “Theory of infinite cylindrical antenna including the feedpoint singularity in antenna current,” *J. Res. NBS*, vol. 66D, no. 2, pp. 181-188, March-April 1962.

- [14] Y. M. Chen and J. B. Keller, "Current on and input impedance of a cylindrical antenna," *J. Res. NBS*, vol. 66D, no. 1, pp. 15-21, Jan.-Feb. 1962.
- [15] R. L. Fante, "On the admittance of the infinite cylindrical antenna," *Radio Sci.*, vol. 1 (new series), no. 9, pp. 1041-1044, Sept. 1966.
- [16] R. L. Fante, "Erratum", *Radio Sci.*, vol. 1 (new series), no. 10, p. 1234, Dec. 1967.
- [17] E. K. Miller, "Admittance dependence of the infinite cylindrical antenna upon exciting gap thickness," *Radio Sci.*, vol. 2 (new series), no. 12, pp. 1431-1435, Oct. 1966.
- [18] N. Inagaki and T. Sekiguchi, "A note on the antenna integral equation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 17, no. 2, pp. 223-224, March 1969.
- [19] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York, Macmillan, 1968.
- [20] F. M. Tesche, "The effect of the thin-wire approximation and the source gap model on the high-frequency integral equation solution of radiating antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 20, pp. 210-211, March 1972.
- [21] R. E. Collin, "Equivalent line current for cylindrical dipole antennas and its asymptotic behavior," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, no. 2, pp. 200-204, Feb. 1984.
- [22] R. E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation*, New York: McGraw-Hill, 1985.
- [23] S. A. Schelkunoff, *Advanced Antenna Theory*, New York: Wiley, 1952.
- [24] A. Sakitani and S. Egashira, "Considerations on feed expressions for the numerical analysis of antennas," *Electronics and Communications in Japan, Part I*, vol. 68, no. 7, pp. 65-74, 1985.
- [25] E. K. Miller and F. J. Deadrack, "Some computational aspects of thin-wire modeling," ch. 4 in R. Mittra, Ed., *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*. New York: Springer, 1975.
- [26] E. K. Miller and J. A. Landt, "Direct time-domain techniques for transient radiation and scattering from wires," *Proc. IEEE*, vol. 68, no. 11, pp. 1396-1423, Nov. 1980.
- [27] V. A. Yatskevitch and S. F. Karshakevitch, "Convergence process stability of numerical solution in electrodynamics," *Izvestiya VUZov. Radioelektronika*, vol. XXIV, no. 2, pp. 66-72, 1981 (in Russian).

- [28] V. A. Yatskevich and S. F. Karshakevich, "Stability of the convergence of the numerical solution in electrodynamics," *Radioelectronics and Communications Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 57-62, The Allerton Press, 1981.
- [29] E. K. Miller, "PC for AP and other EM reflections," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 39, no. 1, pp. 94-97, 1997.
- [30] [Online]. Supernec MoM Technical Reference Manual. Available: <http://www.supernec.com/manuals/snmomtrm.htm>
- [31] D. H. Werner, "A Method of Moments approach for the efficient and accurate modeling of moderately thick cylindrical wire antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 46, no. 3, pp. 373-382, March 1998.
- [32] D. Wu, N. Inagaki, and N. Kikuma, "Hallén type integral equation for cylindrical antennas with finite gap excitation," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E82 B, no. 12, pp. 2145-2152, Dec. 1999.
- [33] S. N. Makarov, A. Puzella, and V. Iyer, "Scan impedance for an infinite dipole array: accurate theoretical model compared to numerical software," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 50, no. 6, pp. 132-149, Dec. 2008.
- [34] V. A. Neganov, I. V. Matveev, and S. V. Medvedev, "A method for reducing Pocklington's equation of electric vibrators to a singular integral equation," *Technical Physics Letters*, vol 26, no. 6, pp. 535-538, 2000.
- [35] V. A. Neganov, M. G. Kornev, and I. V. Matveev, "A new integral equation for calculating thin electric vibrators," *Technical Physics Letters*, vol 27, no. 2, pp. 160-163, 2001.
- [36] V. A. Neganov and D. Tabakov, "The physical regularization of incorrect electrodynamic problems," *PIERS Symposium Proceedings, Marrakesh, Morocco*, pp. 915-919, Mar. 20-23, 2011.
- [37] K. Nishimoto, H. Miyashita, H. Ohmine, and T. Katagi, "Solution of Hallén's integral equations by means of Nyström method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 5, pp. 2589-2596, May 2013.
- [38] Y. H. Lo, S. He, L. Jiang, and W. C. Chew, "Finite-width gap excitation and impedance models," *2011 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation*, pp. 1297-1300, July 2011, Spokane, WA.

Κεφάλαιο 1

Προσδιορισμός Ρεύματος σε Γραμμική Κεραία Μέσω Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

1.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα ανάλυσης κεραιών ανάγονται στην επιλογή του επιθυμητού μοντέλου κεραίας, και στην μελέτη αυτού για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών ακτινοβολίας του (διάγραμμα ακτινοβολίας, κατευθυντικότητα, σύνθετη αντίσταση, εύρος δέσμης, απόδοση, πόλωση και εύρος ζώνης). Αυτό συνήθως επιτυγχάνεται ορίζοντας με ακρίβεια την αρχική κατανομή του ρεύματος επί της κεραίας και την ακολούθως ανάλυσή της χρησιμοποιώντας καθιερωμένες διαδικασίες. Αν το ρεύμα στην κεραία δεν είναι γνωστό, δύναται συνήθως να υπολογιστεί μέσω ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Στην πιο απλή θεωρία των κεντρικά τροφοδοτούμενων γραμμικών κεραιών, είναι συνηθισμένο να δεχόμαστε την ημιτονοειδή κατανομή ρεύματος $I(z) = \frac{I(0)}{\sin(kh)} \sin[k(h-|z|)]$, όπου z η απόσταση από το κέντρο της κεραίας, $I(z)$ (σε Amperes) το ρεύμα κατά μήκος της (οπότε $I(0)$ είναι το ρεύμα στο κέντρο της), $2h$ το μήκος της κεραίας και $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 2\pi/\lambda$ ο κυματαριθμός του μέσου που την περιβάλλει. Στα περισσότερα προβλήματα ανάλυσης ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά που αναζητούμε είναι η σύνθετη αγωγιμότητα (ή η αντίσταση) εισόδου της κεραίας δηλαδή ο προσδιορισμός του μεγέθους $I(0)/V$ (ή $V/I(0)$), όπου V η τροφοδοτούσα τάση. Μπορούμε για παράδειγμα, στην ανωτέρω κατανομή, να υποθέσουμε άγνωστο το $I(0)$ και να το προσδιορίσουμε με τη «Μέθοδο Επαγόμενης Ηλεκτρεγερτικής Δύναμης» [1, παρ. 8.5.2]. Με την προσεγγιστική αυτή μέθοδο, βρίσκουμε άριστα αποτελέσματα για κεραιές μήκους $2h = \lambda/2$, αλλά όχι και για κεραιές μήκους $2h = \lambda$.

Στο τρέχον κεφάλαιο, όπου αρκετά στοιχεία προέρχονται από την [2], παρουσιάζουμε έναν πιο ακριβή και πιο επιστημονικό τρόπο για την εύρεση του $I(z)$.

Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Maxwell και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες, καταλήγουμε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις για το $I(z)$. Για την ακρίβεια, θα καταλήξουμε σε δύο ισοδύναμες εξισώσεις, την ολοκληρωτική του Hallén και την ολοκληρωτικο-διαφορική του Rocklington. Είναι σύνηθες να χρησιμοποιούμε τον όρο «ολοκληρωτική εξίσωση» ακόμα και για ολοκληρωτικο-διαφορικές εξισώσεις.

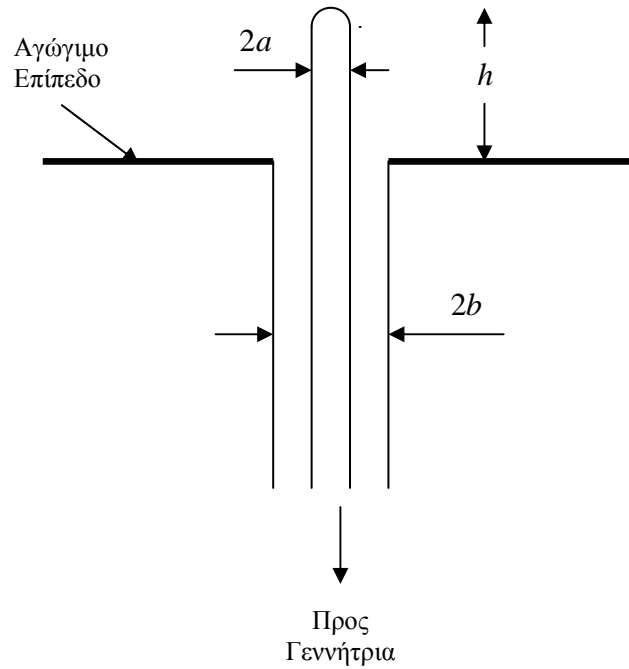
Οι ολοκληρωτικές αυτές εξισώσεις συνήθως λύνονται αριθμητικά με Μεθόδους Ροπών (Moment Methods - MoM), τις οποίες παρουσιάζουμε αμέσως μετά. Υπάρχουν, ωστόσο και αναλυτικές προσεγγιστικές λύσεις των εξισώσεων αυτών [3]. Οι Μέθοδοι Ροπών, που αποτελούν ένα σημαντικό κεφάλαιο του λεγόμενου «Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού» («Computational Electromagnetics»), θα αποτελέσουν βασικό εργαλείο στην ανάλυση που θα ακολουθήσει στην παρούσα διδακτορική διατριβή και για τον λόγο αυτό τις συζητάμε εδώ με κάποια γενικότητα. Από την άλλη πλευρά, οι εν λόγω ολοκληρωτικές εξισώσεις παρουσιάζουν ορισμένες ιδιαίτερες - και συχνά παραγνωρισμένες - δυσκολίες τις οποίες αναλύουμε, εκτενώς, σε επόμενα κεφάλαια.

1.2 Πραγματικές Κεραίες και το Μοντέλο του Σωληνοειδούς Διπόλου

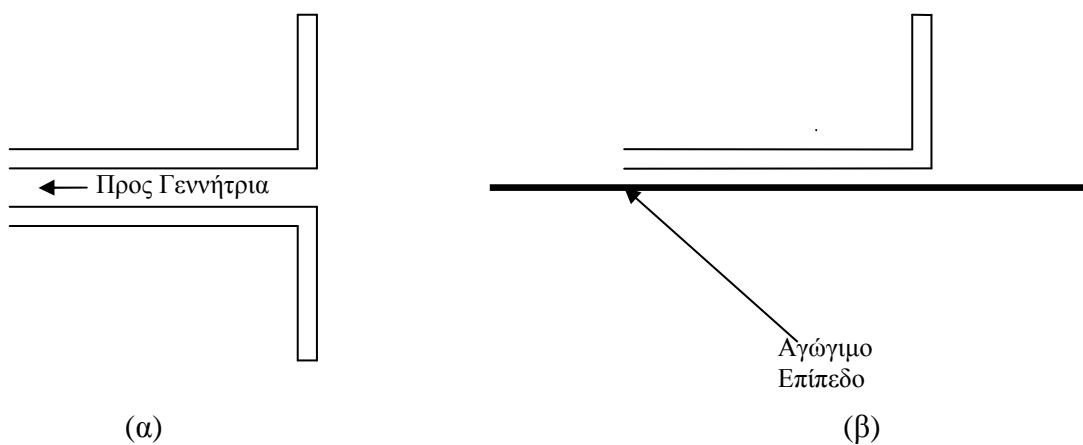
Μία πραγματική κεραία εικονίζεται στο Σχήμα 1.1. Ο εξωτερικός αγωγός, διαμέτρου $2b$, ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς καταλήγει σε αγωγίμο επίπεδο (ground plane), ενώ ο εσωτερικός αγωγός, διαμέτρου $2a$, εξέχει και σχηματίζει την μονοπολική κεραία μήκους h . Η κεραία μας είναι λεπτή με την έννοια ότι $a \ll h$, και $ka \ll 1$. Με τη θεωρία ειδώλων (τουλάχιστον για μικρά $b-a$), η όλη διάταξη είναι ισοδύναμη με μια διπολική, κεντρικά τροφοδοτούμενη, γραμμική κεραία μήκους $2h$ και διαμέτρου $2a$. Η συγκεκριμένη κεραία του σχήματος έχει σφαιρικό καπάκι, αλλά συναντά κανείς και κεραίες με επίπεδο καπάκι, ή και χωρίς καπάκι.

Η διάταξη του Σχήματος 1.1 είναι από τις πιο απλές που βρίσκουμε στην πράξη. Ακόμα και για τη διάταξη αυτή, όμως, ο προσδιορισμός και η επίλυση των εξισώσεων Maxwell δεν είναι εύκολη υπόθεση [4]. Επιπλέον, στο Σχήμα 1.1 η κεραία και η τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς αποτελούν ένα σύνθετο σύστημα, ενώ συνήθως σκεφτόμαστε δύο ανεξάρτητα συστήματα. Με άλλα λόγια, συνήθως αγνοούμε την αλληλεπίδραση της κεραίας με την τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς. Αυτή η

απλοποίηση καθίσταται απαραίτητη στην περίπτωση στοιχειοκεραιών πολλών στοιχείων όπου είναι πρακτικά αδύνατον να ληφθούν υπόψη όλες οι αλληλεπιδράσεις.

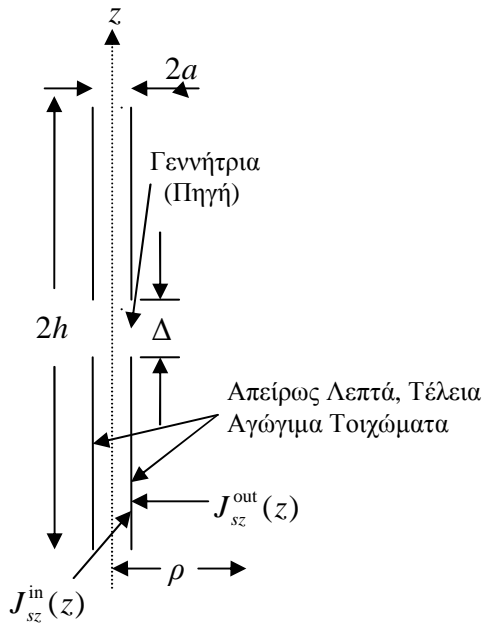


Σχήμα 1.1: Ένας απλός τύπος πραγματικής κεραίας.



Σχήμα 1.2: Δύο ακόμα πραγματικές κεραίες, (α) η διπολική κεραία τροφοδοτούμενη από δισύρματη γραμμή μεταφοράς και (β) η ισοδύναμη διάταξη πάνω από αγώγιμο επίπεδο.

Για τους πιο πάνω λόγους, θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε ένα απλούστερο θεωρητικό μοντέλο, το λεγόμενο «σωληνοειδές δίπολο». Το σωληνοειδές δίπολο χρησιμεύει για την μοντελοποίηση όχι μόνον της κεραίας του Σχήματος 1.1, αλλά και άλλων πραγματικών κεραιών, όπως για παράδειγμα της διπολικής κεραίας του Σχήματος 1.2(α) που τροφοδοτείται από δυσύρματη γραμμή μεταφοράς, καθώς και της ισοδύναμης διάταξης του Σχήματος 1.2(β) πάνω από αγώγιμο επίπεδο.



Σχήμα 1.3: Το σωληνοειδές δίπολο. Στο διάκενο που βρίσκεται στο $z=0$ εμφανίζεται σταθερή διαφορά δυναμικού V .

Το σωληνοειδές δίπολο φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Πρόκειται για έναν τέλεια αγώγιμο μεταλλικό σωλήνα με απείρως λεπτά τοιχώματα. Στο κέντρο $z=0$ του σωλήνα, υπάρχει ένα απειροστά μικρό ή πεπερασμένου μήκους Δ διάκενο (gap) στο οποίο βρίσκεται η γεννήτρια (πηγή) που τροφοδοτεί την κεραία. Αυτή διατηρεί ένα δυναμικό $\text{Re}\{Ve^{-i\omega t}\}$ στο διάκενο, έτσι ώστε ο φάσοντας του βαθμωτού δυναμικού $\Phi(\rho, z)$ να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Phi(a, \frac{\Delta}{2}) - \Phi(a, -\frac{\Delta}{2}) = V \tag{1.1}$$

Στο εσωτερικό του διακένου (εσωτερικό της πηγής) εκτός από τις συνήθεις ηλεκτρικές δυνάμεις $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}^s$, πάνω στους φορείς του ηλεκτρικού φορτίου (οι οποίες οφείλονται στο πεδίο που αναπτύσσεται λόγω της ρευματικής κατανομής στην κεραία), ασκούνται και άλλες, γενικά μη ηλεκτρικές, δυνάμεις \mathbf{F}_i . Οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες προς τις δυνάμεις \mathbf{F}_e και σε αναλογία με τον λόγο $\mathbf{E}^s = \mathbf{F}_e / q$ προσδιορίζουν μία πεδιακή ένταση $\mathbf{E}^i = \mathbf{F}_i / q$ που ονομάζεται «ηλεκτροχωριστική» ή συνηθέστερα «ηλεκτρεγερτική» πεδιακή ένταση [5]. Η \mathbf{E}^i είναι φυσικά διαφορετική από την συνήθη ηλεκτρική ένταση \mathbf{E}^s , αφού η δύναμη \mathbf{F}_i δεν είναι, όπως είπαμε, ηλεκτρική. Ως εκ τούτου, στον εκτός πηγής χώρο η ηλεκτρεγερτική πεδιακή ένταση \mathbf{E}^i είναι μηδενική [5]. Κατόπιν των ανωτέρω, επιστρέφοντας στο μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου, η z -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου $E_z^i(\rho = a, z)$ σε απόσταση $\rho = a$ από τον άξονα του τέλεια αγώγιμου σωλήνα, που οφείλεται στην πηγή τροφοδοσίας της κεραίας (ηλεκτρεγερτική πεδιακή ένταση) θα είναι παντού μηδέν εκτός από το διάστημα $|z| < \frac{\Delta}{2}$ όπου θα δίνεται από μία σχέση της μορφής:

$$E_z^i(a, z) = Vg(z), \quad |z| < \Delta / 2 \quad (1.2)$$

όπου η συνάρτηση $g(z)$ εξαρτάται από το μοντέλο της γεννήτριας που χρησιμοποιούμε. Κατά την «εν κενώ» λειτουργία της πηγής, όταν δηλαδή μεταξύ των πόλων της δεν παρεμβάλλεται κανένα αγώγιμο υλικό (βλέπε παρουσία διακένου), οπότε η πυκνότητα \mathbf{J}_s του ρεύματος είναι μηδέν, ή κατά την λειτουργία της πηγής υπό φορτίο, δηλαδή όταν παρεμβάλλεται υλικό, το οποίο όμως παρουσιάζει πολύ μεγάλη αγωγιμότητα $\sigma_i \rightarrow \infty$ (βλέπε τα τελείως αγώγιμα τοιχώματα του σωληνοειδούς διπόλου) από την τροποποιημένη - για το εσωτερικό της πηγής - μορφή της σημειακής διατύπωσης του νόμου του Ohm [5, (5.43)]:

$$\mathbf{J}_s = \sigma_i (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s) \quad (1.3)$$

προκύπτει ότι [5, (5.47), (5.52)]:

$$\mathbf{E}^s = -\mathbf{E}^i, \text{ για } \rho = a, |z| < \Delta/2 \quad (1.4)$$

και

$$V = \mathcal{E} \quad (1.5)$$

όπου V η πολική τάση στα άκρα του διακένου/πηγής (βλέπε (1.1)) και \mathcal{E} η ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής (HEΔ) που ορίζεται ως [5, (5.44)]:

$$\mathcal{E} = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} E_z^i(a, z) dz. \quad (1.6)$$

Παρατηρούμε ότι για την ειδική περίπτωση όπου το μήκος του διακένου είναι απειροστά μικρό (infinitesimal gap) $\Delta \rightarrow 0$, από την (1.1), την (1.4), την τροποποιημένη - για χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$ - [6, (1-40)]:

$$\mathbf{E}^s = i\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi \quad (1.7)$$

και τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης $\delta(z)$ του Dirac προκύπτει στην (1.2) ότι $g(z) = \delta(z)$. Υπενθυμίζουμε μερικές ιδιότητες της $\delta(z)$ στο Παράρτημα Α. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε εύκολα αν αντικαταστήσουμε τις (1.2), (1.5) στην (1.6) και εφαρμόσουμε την ιδιότητα (A.1). Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (1.4) είναι γενική και ισχύει σε κάθε σημείο εντός της πηγής - διακένου ($0 \leq \rho \leq a, |z| < \Delta/2$). Για λόγους διευκόλυνσης και λόγω του συσχετισμού της (1.4) με τις οριακές συνθήκες που θα εξετάσουμε στην επόμενη παράγραφο, επιλέγουμε την χρήση της (1.4) μόνο στα σημεία ($\rho = a, |z| < \Delta/2$).

Αναπτύσσεται ένα ολικό επιφανειακό ρεύμα \mathbf{J}_s , του οποίου η ϕ -συνιστώσα είναι μηδέν λόγω συμμετρίας. Η z -συνιστώσα J_{sz} είναι το άθροισμα ενός επιφανειακού ρεύματος $J_{sz}^{\text{out}}(z)$ στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, αλλά και ενός ρεύματος $J_{sz}^{\text{in}}(z)$ στο εσωτερικό του. Το ολικό ρεύμα ορίζεται ως:

$$I(z) = 2\pi a \left[J_{sz}^{\text{out}}(z) + J_{sz}^{\text{in}}(z) \right], \quad |z| < h \quad (1.8)$$

Λόγω συμμετρίας, το $I(z)$ είναι άρτια συνάρτηση. Επειδή τα επιφανειακά ρεύματα είναι γενικά συνεχή, στο άκρο $z = h$ του σωληνοειδούς διπόλου θα έχουμε $J_{sz}^{\text{out}}(h) = -J_{sz}^{\text{in}}(h)$, οπότε:

$$I(\pm h) = 0, \quad (1.9)$$

δηλαδή το ρεύμα $I(z)$ μηδενίζεται στα άκρα του σωλήνα. Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε το $I(z)$ μέσω των εξισώσεων Maxwell και των συνθηκών (1.2), (1.4) και (1.9). Θα δούμε στην επόμενη παράγραφο ότι το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση ολοκληρωτικής εξίσωσης - καθώς και της επιπλέον συνθήκης (1.9).

Έχοντας διατυπώσει με ακρίβεια το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε, γεννιέται άμεσα το ερώτημα: Γιατί να χρησιμοποιήσουμε το σωληνοειδές δίπολο ως μοντέλο; Δεν υπάρχουν άλλα μοντέλα πιο κοντά στις πραγματικές κεραίες; Η απάντηση είναι ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που θα βρούμε είναι *ακριβείς* για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Αυτό είναι το πλεονέκτημα του σωληνοειδούς διπόλου και είναι, καθαρά, θεωρητικής φύσεως. Για άλλα μοντέλα, ή για πραγματικές κεραίες, οι ολοκληρωτικές μας εξισώσεις θα είναι *προσεγγιστικές*. Δηλαδή, για λεπτές κεραίες, η ύπαρξη ή μη καπακιών, η ακριβής φύση της τροφοδοσίας κτλ. είναι, τελικά, λεπτομέρειες που δεν παίζουν ιδιαίτερο ρόλο και είναι γενικά σωστό να θεωρούμε την κεραία ξεχωριστά από την τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς. Εδώ ακριβώς οφείλεται η επιτυχία του απλοποιημένου αυτού μοντέλου.

1.3 Ακριβής Ολοκληρωτική Εξίσωση Τύπου Pocklington

Για τον προσδιορισμό της ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου Pocklington εκφράζουμε το $E_z^s(a, z)$ (δηλαδή τη z -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}^s πάνω στην κεραία) σαν συνάρτηση του $I(z)$, και εξισώνουμε την έκφρασή μας με τις (1.2) και (1.4). Ως συνήθως, βρίσκουμε τέτοιες εκφράσεις χρησιμοποιώντας το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} . Το μέγεθος $E_z^s(a, z)$ που προσδιορίζουμε μέσω της διαδικασίας αυτής αποτελεί την συνιστώσα - z του λεγόμενου σκεδαζόμενου πεδίου \mathbf{E}^s πάνω στην κεραία. Το πεδίο αυτό, όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, δημιουργείται από

την ρευματική κατανομή κατά μήκος της κεραίας $I(z)$. Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου θα είναι το άθροισμα του σκεδαζόμενου πεδίου \mathbf{E}^s και του πεδίου που οφείλεται στην γεννήτρια που τροφοδοτεί την κεραία \mathbf{E}^i , δηλαδή:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s, \quad (1.10)$$

όπου, σύμφωνα με την παράγραφο 1.2, το πεδίο \mathbf{E}^i είναι μη μηδενικό μόνο εντός της πηγής. Όταν το σημείο παρατήρησης κινείται πάνω στην τέλεια αγωγίμη επιφάνεια της κεραίας, όπως είναι γνωστό από την οριακή συνθήκη, το ολικό εφαπτομενικό πεδίο μηδενίζεται. Για την περίπτωση του διπόλου του Σχήματος 1.3 (γραμμική κεραία κατά μήκος του άξονα z) το εφαπτομενικό πεδίο είναι ακριβώς η z -συνιστώσα του πεδίου. Συνεπώς, η (1.10) πάνω στην επιφάνεια της υπό εξέτασης κεραίας μετασχηματίζεται στην:

$$E_z(a, z) = E_z^i(a, z) + E_z^s(a, z) = 0, \quad |z| < h \quad (1.11)$$

απ' όπου παίρνουμε:

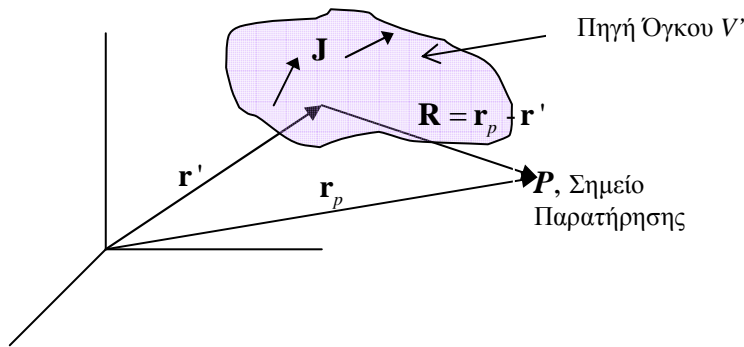
$$E_z^s(a, z) = -E_z^i(a, z), \quad |z| < h. \quad (1.12)$$

Σημειώνουμε ότι στην ανωτέρω ανάλυση, αυθαίρετα, παραλείψαμε την παρουσία του διακένου και εφαρμόσαμε την οριακή συνθήκη [6, (1-27)] στα τέλεια αγωγίμα τοιχώματα της κεραίας. Επίσης δεν λάβαμε υπόψη κανέναν περιορισμό για το τμήμα της κεραίας όπου κατανέμεται η πηγή τροφοδοσίας και όπου το μέγεθος $E_z^i(a, z)$ είναι μη μηδενικό. Ωστόσο, σύμφωνα με τα αναφερθέντα στην παράγραφο 1.2, από τον νόμο του Ohm (1.3) κατά την «εν κενώ» λειτουργία της πηγής ή την λειτουργία αυτής υπό τελείως αγωγίμο φορτίο, εύκολα καταλήγουμε επίσης στην εξίσωση (1.12) (βλέπε την (1.4)). Με άλλα λόγια, η σχέση (1.12) ισχύει ανεξάρτητα από την παρουσία ή μη διακένου (είτε πεπερασμένου είτε απειροστά μικρού) καθώς και από τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η πηγή κατά μήκος της κεραίας. Ο μόνος περιορισμός που πρέπει να επισημανθεί είναι η κεραία να έχει τέλεια αγωγίμα τοιχώματα. Για τον λόγο αυτό και η εξίσωση Rocklington στην οποία θα καταλήξουμε είναι γενική και ισχύει για όλα τα

γνωστά μοντέλα τροφοδοσίας (βλέπε παρ. 1.6) είτε η πηγή τοποθετείται σ' ένα τμήμα της κεραίας (διάκενο) είτε κατανέμεται σε όλο το μήκος της (Γεννήτρια Frill).

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες ρ, ϕ, z . Επειδή το ρεύμα έχει μόνο z -συνιστώσα, το \mathbf{A} θα έχει και αυτό μόνο z -συνιστώσα. Αυτό φαίνεται από την [6, (1-58)] (βλέπε και Σχήμα 1.4) που για χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$ μετασχηματίζεται στην:

$$\mathbf{A} = \iiint_{V'} \mu_0 \mathbf{J} \frac{e^{ikR}}{4\pi R} dV' \quad (1.13)$$



Σχήμα 1.4: Πηγή όγκου V' . Ανάλυση διανυσμάτων ενός συστήματος ακτινοβολίας.

Λόγω συμμετρίας, το \mathbf{A} θα είναι ανεξάρτητο του ϕ . Έτσι, οι γενικές σχέσεις (1.13) και [6, (1-47)]:

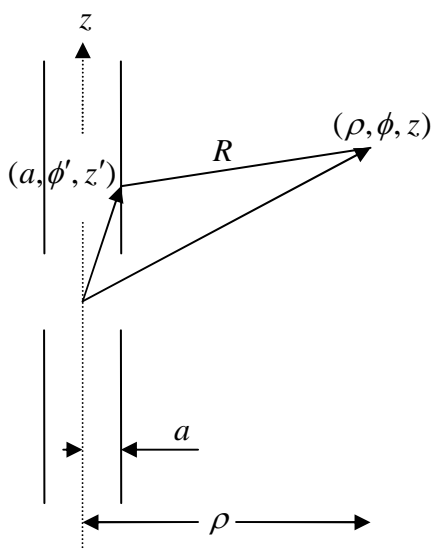
$$\mathbf{E}^s = i\omega \mathbf{A} + i \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\omega \mu_0 \epsilon_0} \quad (\text{εξάρτηση } e^{-i\omega t}) \quad (1.14)$$

γράφονται:

$$E_z^s(\rho, z) = \frac{i\omega}{k^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z(\rho, z) = \frac{i\omega}{k^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-h}^h \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(z')}{2\pi a} \frac{e^{ikR}}{R} a d\phi' dz' \quad (1.15)$$

όπου η (1.13) χρησιμοποιήθηκε για το ολικό επιφανειακό ρεύμα $J_{sz}^{\text{out}}(z') + J_{sz}^{\text{in}}(z') = I(z')/(2\pi a)$. Παρατηρούμε ότι στην (1.15) ο υπολογισμός του $A_z(\rho, z)$ έγινε ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος της κεραίας αγνοώντας την ενδεχόμενη παρουσία διακένου στο κέντρο αυτής (όπου το ζητούμενο ρεύμα αγωγιμότητας, εντός αυτού, θα ήταν μηδενικό). Η επιλογή αυτή αφενός καθιστά την (1.15), και κατ' επέκταση την προκύπτουσα ολοκληρωτική εξίσωση Pocklington, γενική, αφετέρου είναι σύμφωνη με την (1.8) και τις εξισώσεις του Maxwell. Άλλωστε η επιλογή των άκρων ολοκλήρωσης στην (1.15) δεν περιορίζει την εξίσωση μόνο για την περίπτωση μιας συνεχούς κεραίας χωρίς κενά εάν, εκ των υστέρων, θεωρήσουμε ότι το ρεύμα αγωγιμότητας είναι μηδενικό εντός αυτών. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στα επόμενα κεφάλαια.

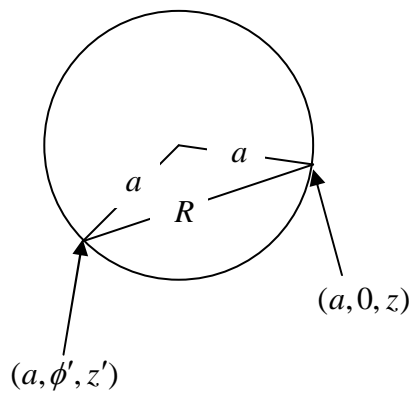
Η (1.15) δίνει την z -συνιστώσα του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο παρατήρησης (ρ, ϕ, z) . Το R είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης από το σημείο πηγής (πάνω στην κεραία, με κυλινδρικές συντεταγμένες (a, ϕ', z')), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Σημείο παρατήρησης (ρ, ϕ, z) , σημείο πηγής (a, ϕ', z') , και απόσταση R μεταξύ τους.

Ενώ το ϕ εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (1.15), το πεδίο, λόγω συμμετρίας, είναι ανεξάρτητο του ϕ και μπορούμε να θέσουμε $\phi = 0$. Ειδικεύουμε τώρα την (1.15) για σημεία παρατήρησης $(\rho, 0, z) = (a, 0, z)$, πάνω στην επιφάνεια της κεραίας. Με την βοήθεια της τριγωνομετρίας (βλέπε Σχήμα 1.6) βρίσκουμε ότι η απόσταση R των $(a, 0, z)$ και (a, ϕ', z') δίνεται από τη σχέση:

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi'}{2}} \quad (1.16)$$



Σχήμα 1.6: Για σημεία παρατήρησης πάνω στην επιφάνεια της κεραίας, η απόσταση R δίνεται από τη σχέση (1.16). Εδώ δείχνουμε προβολή στο επίπεδο $z = 0$. Η προβολή του R είναι $2a |\sin(\phi'/2)|$, με μέγιστη τιμή $2a$ και ελάχιστη τιμή 0 .

Εισάγοντας την (1.16) στην (1.15) και χρησιμοποιώντας την (1.12), βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z - z') I(z') dz' = \frac{ik}{\zeta_0} E_z^i(a, z), \quad |z| < h \quad (1.17)$$

όπου

$$K_{\text{ex}}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ik \sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi'/2)}}}{\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi'/2)}} d\phi', \quad |z| < h \quad (1.18)$$

και

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 376.73 \text{ Ohm} \quad (1.19)$$

η χαρακτηριστική (κυματική) αντίσταση του κενού - του μέσου που περιβάλλει την κεραία.

Η (1.17) είναι γνωστή ως η ολοκληρωτική (για την ακρίβεια, ολοκληρωτικο-διαφορική) εξίσωση του Pocklington με *άγνωστο* το ρεύμα $I(z')$. Τέτοιου είδους εξισώσεις για λεπτές κεραίες είχαν αναφερθεί για πρώτη φορά από τον H. C. Pocklington [7] το 1897 και χρησιμοποιήθηκαν σε μελέτες του H. M. MacDonald [8] το 1902. Το $K_{\text{ex}}(z-z')$ είναι ο «*πυρήνας*» της ολοκληρωτικής εξίσωσης, ο οποίος εδώ εξαρτάται από τα z και z' μόνο μέσω της διαφοράς $z-z'$ (όχι από τα z και z' ξεχωριστά). Τέτοιου είδους πυρήνες ονομάζονται «*πυρήνες διαφοράς*» («*difference kernels*»). Η μαθηματική θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι εκτενέστατη και ξεφεύγει από τα όρια της παρούσας διδακτορικής εργασίας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [9]-[11].

Τα δύο μέλη της (1.17) εκφράζουν (εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθερά) την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην κεραία. Κατά την εξαγωγή της (1.17) δεν έγινε καμία προσέγγιση και επομένως η (1.17) είναι *ακριβής* για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Στην περίπτωση της κεραίας απείρου μήκους, όπου $h = \infty$, η (1.17) δεν μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή. Ωστόσο, μπορεί να λυθεί αναλυτικά με την χρήση Μετασχηματισμού Fourier (MF) όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Στην πράξη, η άπειρη κεραία δεν μπορεί να υλοποιηθεί. Η μελέτη αυτής, ωστόσο, μας δίνει αρκετές πληροφορίες για την πεπερασμένη σε μήκος κεραία όπως είναι εμφανές στο [12] και όπως θα δούμε στη συνέχεια της διατριβής.

1.4 Ακριβής Ολοκληρωτική Εξίσωση Τύπου Hallén

Στην ενότητα αυτή, θα βρούμε μια ισοδύναμη εξίσωση χωρίς το διαφορικό τελεστή $\mathfrak{D} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2$. Αποδεικνύεται, στο Παράρτημα Β, ότι *δεν είναι επιτρεπτό* να

περάσουμε τον τελεστή μέσα στο ολοκλήρωμα της (1.17) (η δυσκολία αυτή οφείλεται στον λογαριθμικό απειρισμό του πυρήνα στο $z = 0$), οπότε θα εργασθούμε αλλιώς.

Η (1.17) μπορεί να θεωρηθεί ως διαφορική εξίσωση για την ποσότητα

$\int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z')I(z')dz'$. Η ποσότητα αυτή είναι - εκτός από μια πολλαπλασιαστική

σταθερά - το διανυσματικό δυναμικό $A_z(a, z)$ και είναι άρτια συνάρτηση του z .

Θέτοντας $Y(z) = \int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z')I(z')dz'$ και αντικαθιστώντας στην (1.17) προκύπτει η μη

ομογενής γραμμική-συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right)Y(z) = \frac{ik}{\zeta_0} E_z^i(a, z). \quad (1.20)$$

Η λύση της εξίσωσης είναι η λύση της ομογενούς συν μια μερική λύση. Η άρτια λύση της ομογενούς είναι $C \cos kz$, όπου C σταθερά. Μία μερική λύση της είναι η

$Y_p(z) = \frac{i\omega\epsilon_0}{k} \int_0^z E_z^i(a, z) \sin k(z-t)dt$. Πράγματι, θέτοντας $Y(z) = Y_p(z)$ στην (1.20)

και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Leibniz για την παραγωγή ολοκληρωμάτων [13, (1.5.22)]:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy, \quad (1.21)$$

παρατηρούμε ότι η εξίσωση (1.20) επαληθεύεται. Κατά συνέπεια:

$$\int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z')I(z')dz' = C \cos(kz) + Y_p(z)$$

ή

$$\int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z')I(z')dz' = C \cos(kz) + i \frac{1}{\zeta_0} \int_0^z E_z^i(a, z) \sin k(z-t)dt, \quad |z| < h \quad (1.22)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση (1.22) είναι ισοδύναμη με την (1.17) και φέρει το όνομα του E. Hallén που εργάστηκε με τέτοιες εξισώσεις από το 1938 [14]. Αποτελεί μία ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm πρώτου είδους [9]-[11]. Τα δύο μέλη της εκφράζουν (εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθερά) το διανυσματικό δυναμικό πάνω στην κεραία. Η σταθερά C βρίσκεται από τη συνθήκη (1.9).

Ας εξηγήσουμε το τελευταίο αυτό σημείο, δίνοντας μια σχέση για τη σταθερά C . Εάν $I^{(1)}(z)$, $I^{(2)}(z)$ ικανοποιούν τις δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z')I^{(1)}(z')dz' = i \frac{1}{\zeta_0} \int_0^z E_z^i(a, z) \sin k(z-t)dt, \quad |z| < h \quad (1.23)$$

και

$$\int_{-h}^h K_{\text{ex}}(z-z')I^{(2)}(z')dz' = \cos(kz), \quad |z| < h \quad (1.24)$$

αντίστοιχα, τότε η λύση της (1.22) που ικανοποιεί την (1.9) δίνεται από την:

$$I(z) = I^{(1)}(z) + CI^{(2)}(z) \quad \text{όπου} \quad C = -\frac{I^{(1)}(h)}{I^{(2)}(h)} \quad (1.25)$$

Συνεπώς, η σταθερά C μπορεί να βρεθεί από τη συνθήκη (1.9).

1.5 Προσεγγιστικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Ένα πρόβλημα που συναντούμε στις (1.17) και (1.22) είναι η πολυπλοκότητα του λεγόμενου «ακριβή πυρήνα» («exact kernel») $K_{\text{ex}}(z)$, ο οποίος δίνεται από το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.18). Στο εδάφιο αυτό βρίσκουμε, με μια κατάλληλη προσέγγιση, μία απλούστερη μορφή του ανωτέρω πυρήνα, που χρησιμοποιείται συχνά στην βιβλιογραφία. Στη σχέση (1.18), η απόσταση $2a|\sin(\phi'/2)|$ μεταβάλλεται καθώς ολοκληρώνουμε, με μέγιστη τιμή $\max_{\phi'} \{2a|\sin(\phi'/2)|\} = 2a$ και ελάχιστη τιμή

$\min_{\phi'} \{2a |\sin(\phi'/2)|\} = 0$ (βλέπε Σχήμα 1.6). Η εν λόγω προσέγγιση είναι $2a |\sin(\phi'/2)| \cong a$, δηλαδή προσεγγίζουμε όλες τις δυνατές αποστάσεις με την ακτίνα a . Υλοποιώντας, αναλυτικά την ολοκλήρωση στην (1.18), εύκολα, παίρνουμε τον λεγόμενο «προσεγγιστικό πυρήνα» («*approximate*» ή «*reduced kernel*»):

$$K_{\text{ap}}(z) = \frac{e^{ik\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}}, \quad |z| < h \quad (1.26)$$

Η προσέγγιση μας είναι λογική καθότι η κεραία είναι λεπτή. Η (1.17)/(1.22) με το $K_{\text{ap}}(z)$ στη θέση του $K_{\text{ex}}(z)$ ονομάζεται «προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση» («*approximate integral equation*») τύπου Pocklington/Hallén. Η απλοποίηση είναι προφανώς σημαντική καθώς ο $K_{\text{ap}}(z)$ χρησιμοποιείται ευρύτατα στην πράξη.

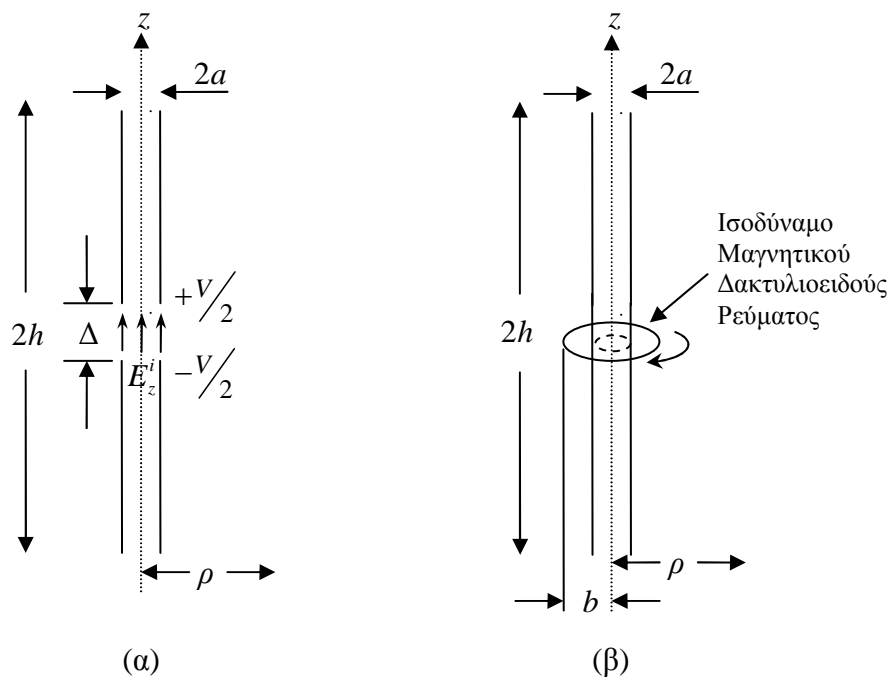
Έχει σημασία να καταλάβουμε την φυσική έννοια της προσέγγισής μας. Το αριστερό μέλος της (1.17)/(1.22) εκφράζει το E_z^s/A_z στην κυλινδρική επιφάνεια $\rho = a$. Με τον ακριβή πυρήνα, αυτό το E_z^s/A_z οφείλεται σε επιφανειακή κατανομή ρεύματος (πηγή) στην ίδια αυτή επιφάνεια $\rho = a$. Αντίθετα, με τον προσεγγιστικό πυρήνα, η πηγή είναι μια γραμμική κατανομή ρεύματος, στον άξονα $\rho = 0$. Με την προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση λοιπόν, ζητάμε μια γραμμική κατανομή ρεύματος, το E_z^s/A_z της οποίας, σε απόσταση a , συμπεριφέρεται όπως υπαγορεύει το δεξιό μέλος της (1.17)/(1.22).

Σημειώνουμε τέλος ότι - σε αντίθεση με τον ακριβή πυρήνα - ο προσεγγιστικός πυρήνας δεν απειρίζεται για $z = 0$. Εδώ δεν συντρέχουν οι λόγοι του Παραρτήματος Β και στη βιβλιογραφία βρίσκουμε πολλές φορές το διαφορικό τελεστή ∇ μέσα στο ολοκλήρωμα της (1.17) [1, παρ. 8.3]. Βέβαια, πρέπει να αναφέρουμε ότι το $K_{\text{ap}}(z)$ (ακριβέστερα το πραγματικό του μέρος) έχει μέγιστο για $z = 0$ και το μέγιστο αυτό γίνεται οξύτερο για λεπτότερες κεραίες.

1.6 Μοντέλα Τροφοδοσίας

Στην παράγραφο 1.2 παρουσιάσαμε την μορφή μιας πραγματικής κεραίας (Σχήμα 1.1) και εξετάσαμε το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Για να χρησιμοποιήσουμε

τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (1.17) και (1.22) και να υπολογίσουμε την κατανομή του ρεύματος σε μία πραγματική κεραία, όπως για παράδειγμα αυτή του Σχήματος 1.1, θα πρέπει να προσδιορίσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο τροφοδοσίας αυτής ώστε να είναι γνωστή η συνάρτηση του πεδίου $E_z^i(a, z)$. Παραδοσιακά, έχουν αναπτυχθεί τρία κύρια μοντέλα διέγερσης για την περιγραφή της ηλεκτρεγερτικής πεδιακής έντασης $E_z^i(a, z)$ σε όλα σημεία της επιφάνειας ενός διπόλου. Το μοντέλο της «Γεννήτριας Δέλτα Συνάρτησης» - «ΓΔΣ» («Delta Gap Generator» - «DFG»), το μοντέλο της «Γεννήτριας Πεπερασμένου Διακένου» - «ΓΠΔ» («Finite Gap Generator» - «FGG») και το μοντέλο του «Ισοδύναμου Μαγνητικού Δακτυλιοειδούς Ρεύματος» ή πιο απλά της «Γεννήτριας Magnetic Frill» - «ΓΜΦ» («Magnetic Frill Generator» - «MFG»). Τα δύο πρώτα, και ιδιαίτερα το δεύτερο, είναι αυτά που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα διατριβή.



Σχήμα 1.7: Μαθηματικά μοντέλα τροφοδοσίας: (α) Delta/Finite Gap, (β) Magnetic Frill.

1.6.1 Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης - ΓΔΣ (Delta Gap Generator)

Η ΓΔΣ αποτελεί το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο μοντέλο τροφοδοσίας στην θεωρία γραμμικών κεραιών. Αν και τέτοιου είδους πηγές δεν υλοποιούνται στην πράξη, εν τούτοις, επιτρέπουν την εξαγωγή αρκετά καλών θεωρητικών αποτελεσμάτων. Στο Σχήμα 1.7(α) απεικονίζεται το μαθηματικό μοντέλο της ΓΔΣ. Στο σημείο τροφοδοσίας

της κεραίας υποθέτουμε την παρουσία ενός απειροστά μικρού διακένου $\Delta \rightarrow 0$. Το μοντέλο της ΓΔΣ, το οποίο αναφέρθηκε και στην παράγραφο 1.2 στα πλαίσια περιγραφής του σωληνοειδούς διπόλου, στηρίζεται στην υπόθεση παρουσίας μιας σταθερής διαφοράς δυναμικού V που δημιουργεί μία ηλεκτρεγερτική πεδιακή ένταση κατά μήκος του διακένου η τιμή της οποίας δίνεται από την εξίσωση (1.2) με $g(z) = \delta(z)$, $|z| < h$. Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης $\delta(z)$ δίνονται στο Παράρτημα Α.

1.6.2 Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου - ΓΠΔ (Finite Gap Generator)

Στην παράγραφο 1.2 περιγράψαμε το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Θεωρήσαμε μία κυλινδρική λεπτή σωλήνα με τέλεια αγωγή τοιχώματα στο κέντρο της οποίας υπήρχε διάκενο Δ . Στην ΓΔΣ είδαμε ότι το προαναφερθέν διάκενο είναι απειροστά μικρό ($\Delta \rightarrow 0$). Στην περίπτωση όπου το Δ είναι πεπερασμένο το μοντέλο τροφοδοσίας που προκύπτει είναι γνωστό ως ΓΠΔ. Το μαθηματικό μοντέλο της ΓΠΔ δίνεται στο Σχήμα 1.7(α). Στην πραγματικότητα, πρόκειται για μία γενικότερη περίπτωση της ΓΔΣ καθώς αν $\Delta \rightarrow 0$ τα δύο μοντέλα ταυτίζονται. Από τις (1.5) και (1.6) προκύπτει ότι η ηλεκτρεγερτική πεδιακή ένταση εντός του διακένου (εσωτερικά της πηγής), που για το μοντέλο της ΓΠΔ θεωρείται σταθερή, δίνεται από την (1.2) όπου:

$$g(z) = \begin{cases} 1/\Delta, & |z| < \Delta/2 \\ 0, & \Delta/2 < |z| < h \end{cases} \quad (1.27)$$

Είναι προφανές από την (1.27) ότι όταν $\Delta \rightarrow 0$ η συνάρτηση $g(z)$ ταυτίζεται με την δέλτα συνάρτηση. Ολοκληρώνοντας, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στο μοντέλο της ΓΠΔ που περιγράψαμε θεωρήσαμε το πεδίο κατά μήκος του διακένου σταθερό. Εν τούτοις, το εν λόγω μοντέλο μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες κατανομές πεδίου όπως για παράδειγμα είναι η κατανομή τετραγωνικής ρίζας (square-root distribution) που θα εξετάσουμε στο Κεφάλαιο 3.

1.6.3 Γεννήτρια Magnetic Frill - ΓΜF (Magnetic Frill Generator)

Η ΓΜF ή αλλιώς το μοντέλο του Ισοδύναμου Μαγνητικού Δακτυλιοειδούς Ρεύματος, όπως συναντάται αλλιώς στην βιβλιογραφία [1], αναπτύχθηκε με σκοπό τον υπολογισμό του εγγύς και μακράν πεδίου μεταξύ των δύο αγωγών μιας ομοαξονικής γραμμής [15]. Στην ΓΜF, το διάκενο τροφοδοσίας αντικαθίσταται από μία μαγνητική πυκνότητα ρεύματος που αναπτύσσεται σε ένα δακτυλιοειδές διάφραγμα, εγκάρσιο στην διεύθυνση της κεραίας, με εσωτερική ακτίνα a , η οποία συνήθως επιλέγεται ίση με την ακτίνα της κεραίας, και εξωτερική ακτίνα b , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7(β). Καθώς το δίπολο τροφοδοτείται μέσω γραμμών μεταφοράς, η εξωτερική ακτίνα b του ισοδύναμου δακτυλιοειδούς διαφράγματος της γεννήτριας προσδιορίζεται από την μαθηματική έκφραση για την χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση της γραμμής.

Το ηλεκτρικό πεδίο που εφάπτεται του δακτυλιοειδούς διαφράγματος της ΓΜF, ταυτίζεται με την κατανομή του πεδίου του ρυθμού TEM που διαδίδεται σε μία ομοαξονική γραμμή. Αποδεικνύεται ότι το πεδίο κατά μήκος του άξονα του διπόλου δίνεται από την (1.2) όπου [15], [16]:

$$g(z) = \frac{1}{2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{\exp\left(ik\sqrt{z^2 + a^2}\right)}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{\exp\left(ik\sqrt{z^2 + b^2}\right)}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \quad (1.28)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ΓΜF θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μία πηγή λειτουργούσα υπό τέλεια αγωγή φορτίο, σύμφωνα με τα αναφερθέντα στην παράγραφο 1.2, και κατανεμημένη σε όλο το μήκος της κεραίας διατηρώντας μία σταθερή διαφορά δυναμικού V μεταξύ των άκρων αυτής. Με την υπόθεση αυτή οι (1.2) και (1.28) θα πρέπει να ικανοποιούν τις (1.5) και (1.6) με άκρα ολοκλήρωσης τα άκρα της κεραίας. Αν και ο αναλυτικός προσδιορισμός του ολοκληρώματος (1.6) στην περίπτωση αυτή είναι αρκετά πολύπλοκος, αριθμητικά μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι τουλάχιστον για λεπτές κεραίες ($a, b \ll h$) η (1.28) ικανοποιεί τις ανωτέρω εξισώσεις. Ολοκληρώνοντας, αναφέρουμε ότι αν και το ανωτέρω μοντέλο δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα διδακτορική εργασία, κρίθηκε χρήσιμη η αναφορά σ' αυτό λόγω της πρακτικής του σημασίας.

1.7 Αριθμητικές Μέθοδοι/ Μέθοδοι Ροπών/ Μέθοδοι Galerkin

Με την εξίσωση (1.22) του Hallén και ιδίως τις (1.23)-(1.25) έχουμε αναγάγει το πρόβλημά μας στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Fredholm πρώτου είδους:

$$\int_{-h}^h K(z, z')J(z')dz' = f(z), \quad |z| < h \quad (1.29)$$

με πυρήνα $K(z, z')$, άγνωστο $J(z')$ ($|z'| < h$), και γνωστό $f(z)$. Τέτοιου είδους εξίσωση παίρνουμε και με την εναλλαγή \mathfrak{I} και ολοκληρώματος στην *προσεγγιστική* εξίσωση του Rocklington. Στο εδάφιο αυτό θα περιγράψουμε, εν συντομία, αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων. Κάποιες εξ αυτών θα χρησιμοποιήσουμε και στα επόμενα κεφάλαια. Με ορισμένες τροποποιήσεις [17] τέτοιου είδους μέθοδοι μπορούν να εφαρμοσθούν ακόμα και στην ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση (1.17). Την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων στην (1.17) θα εξετάσουμε, επισταμένα, στα Κεφάλαια 3 και 4.

Στην παρούσα παράγραφο θα περιγράψουμε μια οικογένεια μεθόδων που οι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί αποκαλούν «Μέθοδοι Ροπών» («*Moment Methods*» - «*MoM*»). Οι τελευταίες μέθοδοι αποτελούν σημαντικό εργαλείο του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού και, ειδικότερα, της σύγχρονης Θεωρίας Κεραιών [18]. Η ονομασία MoM οφείλεται στον R. F. Harrington, που με το γνωστό, απλά-γραμμμένο βιβλίο του [19] έκανε δημοφιλείς τέτοιες μεθόδους στην ηλεκτρομαγνητική κοινότητα, την εποχή (1968) που αναπτύσσονταν ταχύτατα οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές. Στην παρούσα διατριβή, χρησιμοποιούμε κατά κύριο λόγο την ορολογία του Harrington, αλλά τονίζουμε ότι η ορολογία της *μαθηματικής* βιβλιογραφίας είναι, συχνά, διαφορετική.

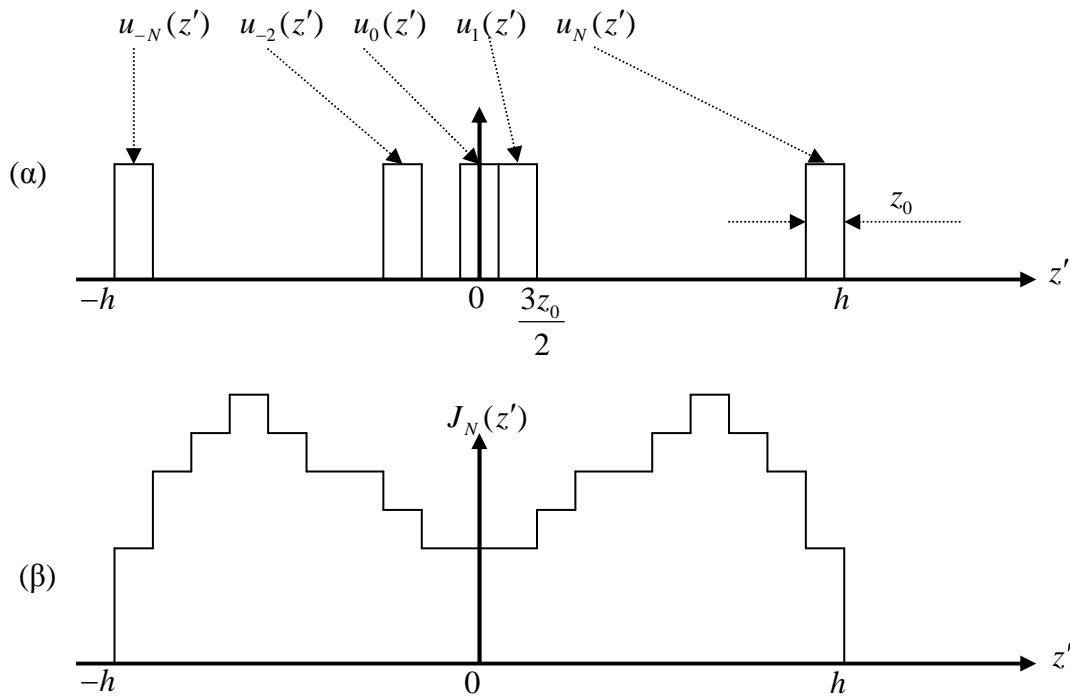
Σημειώνουμε ότι η οικογένεια μεθόδων που θα περιγράψουμε αφορά στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων της μορφής (1.29) (βλέπε και εξίσωση Hallén (1.22)). Ωστόσο, τα βασικά βήματα της μεθόδου επεκτείνονται και στην αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικο-διαφορικών εξισώσεων όπως είναι η (1.17).

1.7.1 Περιγραφή Μεθόδου Ροπών (MoM)

Η μέθοδος περιλαμβάνει τρία βήματα:

MoM, Βήμα 1: Ανάπτυξη του αγνώστου $J(z')$ σε πεπερασμένο άθροισμα $2N + 1$ συναρτήσεων βάσης (basis functions) $b_{-N}(z'), b_{-(N-1)}(z'), \dots, b_N(z')$ με άγνωστους συντελεστές J_n :

$$J(z') \cong \sum_{n=-N}^N J_n b_n(z') \quad (1.30)$$



Σχήμα 1.8: Στο σχήμα (α), απεικονίζονται οι παλμικές συναρτήσεις $u_{-N}(z'), u_{-(N-1)}(z'), \dots, u_0(z'), \dots, u_N(z')$. Η καθεμία έχει πλάτος z_0 . Η $u_0(z')$ έχει κέντρο το $z' = 0$, ενώ η $u_N(z')$ έχει πέρασ στο $z' = h$, με κέντρο στο $z' = h - z_0/2$. Στο σχήμα (β), απεικονίζεται μια υπέρθεση $J_N(z')$ παλμικών συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι η τελευταία έχει κλιμακωτή μορφή.

Οι συναρτήσεις βάσης είναι γνωστές. Το πιο απλό παράδειγμα συναρτήσεων βάσης είναι οι παλμικές συναρτήσεις (pulse functions) πλάτους z_0 , όπου:

$$(2N+1)z_0 = 2h. \quad (1.31)$$

Αυτές εικονίζονται στο Σχήμα 1.8(α). Στο σχήμα 1.8(β), είναι εμφανές ότι η προσέγγιση $J_N(z') = \sum_{n=-N}^N J_n u_n(z')$, που είναι επαλληλία των $b_n(z') = u_n(z')$, έχει γενικά κλιμακωτή μορφή (ακριβέστερα, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $J_N(z')$ έχουν κλιμακωτή μορφή - οι συντελεστές J_n είναι μιγαδικοί). Στην επόμενη παράγραφο θα αναφερθούν και άλλα παραδείγματα συναρτήσεων βάσης. Στην (1.30) γράφουμε \cong και \approx διότι η λύση $J(z')$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.29) γενικά δεν μπορεί να γραφεί ακριβώς σαν υπέρθεση πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης. Σημειώνουμε ότι η επιλογή περιττού $(2N+1)$ αριθμού συναρτήσεων γίνεται για λόγους ευκολίας – μπορεί να επιλεγθεί και άρτιο πλήθος.

ΜοΜ, Βήμα 2: Αντικατάσταση της προσέγγισης (1.30) στην ολοκληρωτική εξίσωση (1.29). Προκύπτει η σχέση:

$$\sum_{n=-N}^N J_n \int_{-h}^h K(z, z') b_n(z') dz' \cong f(z), \quad |z| < h \quad (1.32)$$

στην οποία χρησιμοποιείται ο συμβολισμός \cong διότι γενικά, δεν υπάρχουν αριθμοί J_n που να ικανοποιούν την (1.32) για όλα τα z με $|z| < h$.

ΜοΜ, Βήμα 3: Προσδιορισμός του εσωτερικού γινομένου της (1.32) με $2N+1$ συναρτήσεις δοκιμής (testing functions) $w_{-N}(z), w_{-(N-1)}(z), \dots, w_N(z)$. Με άλλα λόγια, πολλαπλασιάζουμε την (1.32) με $w_l^*(z)$, όπου το $*$ δηλώνει συζυγή, και ολοκληρώνουμε από $z = -h$ έως $z = h$. Παίρνουμε:

$$\sum_{n=-N}^N J_n \int_{-h}^h w_l^*(z) \left[\int_{-h}^h K(z, z') b_n(z') dz' \right] dz = \int_{-h}^h w_l^*(z) f(z) dz, \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (1.33)$$

που γράφονται και ως:

$$\sum_{n=-N}^N A_n J_n = B_l, \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (1.34)$$

με

$$A_{ln} = \int_{-h}^h w_l^*(z) \left[\int_{-h}^h K(z, z') b_n(z') dz' \right] dz, \quad l, n = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (1.35)$$

και

$$B_l = \int_{-h}^h w_l^*(z) f(z) dz, \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (1.36)$$

Οι συναρτήσεις δοκιμής είναι και αυτές γνωστές. Οι εξισώσεις (1.33) ή (1.34) είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα J_n . Στην περίπτωση που ο πυρήνας $g(z, z')$ είναι πυρήνας διαφοράς το διπλό ολοκλήρωμα στην (1.35) δύναται να απλοποιηθεί με χρήση της ταυτότητας:

$$\int_{-z_0/2 - z_0/2}^{z_0/2} \int_{z_0/2}^{z_0/2} f(x - x') dx' dx = \int_0^{z_p} (z_0 - z) [f(z) + f(-z)] dz \quad (1.37)$$

Το πρόβλημα λοιπόν έχει αναχθεί στη επίλυση του $(2N+1) \times (2N+1)$ συστήματος (1.34), όπου οι μιγαδικοί αριθμοί A_n και B_l βρίσκονται από τα ολοκληρώματα στις (1.35) και (1.36) αντίστοιχα. Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα, οι ολοκληρώσεις δεν μπορούν να γίνουν σε κλειστή μορφή και γίνονται αριθμητικά. Προγράμματα όπως το MATLAB και το MATHEMATICA διαθέτουν έτοιμες ρουτίνες επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, καθώς και αριθμητικής ολοκλήρωσης.

1.7.2 Επιλογή Συναρτήσεων Βάσης και Δοκιμής (Basis και Testing Functions)

Οι MoM είναι οικογένεια μεθόδων διότι υπάρχουν πολλές επιλογές των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής. Δίνουμε μερικές συνήθεις επιλογές, χωρίς να συζητήσουμε το σημαντικό θέμα του πώς κάνουμε επιτυχημένες επιλογές. Κάποιες από τις συναρτήσεις που θα αναφέρουμε, θα χρησιμοποιηθούν στις αριθμητικές μεθόδους που θα αναλύσουμε σε επόμενα κεφάλαια όπου και θα εξεταστεί η αποτελεσματικότητά τους. Επισημαίνουμε ότι μία επιτυχημένη επιλογή συναρτήσεων βάσης και δοκιμής απαιτεί γνώση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών κάθε προβλήματος ενώ πολλές φορές βοηθά και η γνώση γενικότερων μαθηματικών αρχών [11], [20].

1.7.2.1 Συναρτήσεις Βάσης (Basis Functions)

Ένα πολύ σημαντικό βήμα στη διαδικασία επίλυσης των ολοκληρωτικών εξισώσεων, είναι η επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης. Γενικά, η επιλογή των ανωτέρω συναρτήσεων γίνεται με κριτήριο την ικανότητά τους να εκφράζουν με ακρίβεια την άγνωστη συνάρτηση, μειώνοντας όσο γίνεται τον υπολογιστικό φόρτο [21]-[23]. Θεωρητικά, ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης είναι πολύ μεγάλος, στην πράξη όμως χρησιμοποιείται ένας περιορισμένος αριθμός. Αυτές χωρίζονται σε δύο βασικές ομάδες:

α) Στις «Συναρτήσεις Υποπεδίου» («*Subdomain Functions*»), οι οποίες μηδενίζονται παντού εκτός από ένα τμήμα του πεδίου ορισμού τους (ως πεδίο ορισμού ορίζονται τα σημεία κατά μήκος της κεραίας - διάστημα $(-h, h)$).

β) Στις «Συναρτήσεις Ολικού Πεδίου» («*Entire Domain Functions*»), οι οποίες καλύπτουν όλο το πεδίο ορισμού της άγνωστης συνάρτησης.

1.7.2.1.A. Συναρτήσεις Υποπεδίου (Subdomain Functions)

Από τις δύο ανωτέρω κατηγορίες, οι συναρτήσεις υποπεδίου αποτελούν τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις βάσης. Αντίθετα με τις συναρτήσεις ολικού

πεδίου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς να απαιτείται a priori γνώση της μορφής των άγνωστων συναρτήσεων που πρόκειται να εκφράσουν. Η διαδικασία προσέγγισης της πιθανόν άγνωστης συνάρτησης περιλαμβάνει διακριτοποίηση αυτής σε N τμήματα. Για ευκολία, μπορούμε να θεωρήσουμε αυτά τα τμήματα συγγραμμικά και ισομήκη, αν και δεν είναι απαραίτητο να ισχύει καμιά από τις δύο παραπάνω συνθήκες.

Οι απλούστερες ίσως συναρτήσεις αυτής της κατηγορίας είναι οι *παλμικές* (*piecewise constant ή pulse functions*) του Σχήματος 1.8(α). Η συνάρτηση παλμών ορίζεται ως:

Παλμική Συνάρτηση (Piecewise Constant ή Pulse Function)

$$u_n(z) = \begin{cases} 1, & \left(n - \frac{1}{2}\right)z_0 < z < \left(n + \frac{1}{2}\right)z_0 \\ 0, & z < \left(n - \frac{1}{2}\right)z_0 \text{ ή } z > \left(n + \frac{1}{2}\right)z_0 \end{cases} \quad (1.38)$$

Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών J_n , όπως είδαμε και προηγουμένως στο Σχήμα 1.8(β), η εν λόγω συνάρτηση δίνει μία κλιμακωτή μορφή της άγνωστης ποσότητας $J_N(z)$. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση παλμών θα χρησιμοποιηθεί στην αριθμητική μέθοδο του Κεφαλαίου 2.

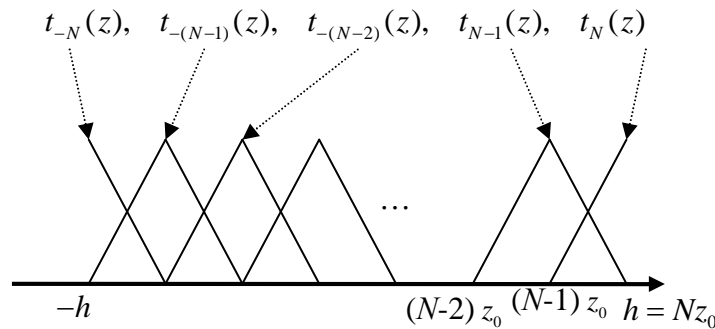
Μία άλλη, επίσης συνηθισμένη, συνάρτηση βάσης υποπεδίου είναι η *τριγωνική* (*piecewise linear ή triangle function*) που ορίζεται ως:

Τριγωνική Συνάρτηση (Piecewise Linear ή Triangle Function)

$$t_n(z) = \begin{cases} \left(1 - n\right) + \frac{z}{z_0}, & (n-1)z_0 \leq z \leq nz_0 \\ \left(1 + n\right) - \frac{z}{z_0}, & nz_0 \leq z \leq (n+1)z_0 \\ 0, & z < (n-1)z_0 \text{ ή } z > (n+1)z_0 \end{cases} \quad (1.39)$$

Στο Σχήμα 1.9 απεικονίζεται μια επαλληλία τριγωνικών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις αυτές περιλαμβάνουν και δύο μισά τρίγωνα στα άκρα του διαστήματος (αλλιώς ο γραμμικός συνδυασμός $J_N(z)$ θα μηδενιζόταν στα άκρα $z = \pm h$). Το $J_N(z)$ εδώ έχει τη

μορφή *τμηματικά γραμμικής* συνάρτησης. Αν και η αναπαράσταση του είναι πιο ομαλή απ' ό τι με τις συναρτήσεις παλμών, η επιλογή των τριγωνικών συναρτήσεων περιπλέκει κατά πολύ τους υπολογισμούς. Στα Κεφάλαια 3 και 4 θα χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική συνάρτηση όχι όμως ως συνάρτηση βάσης αλλά ως συνάρτηση δοκιμής.



Σχήμα 1.9: Οι λεγόμενες τμηματικά γραμμικές ή τριγωνικές συναρτήσεις. Οι δύο τελευταίες [$t_{-N}(z)$ και $t_N(z)$] είναι στην πραγματικότητα μισά τρίγωνα.

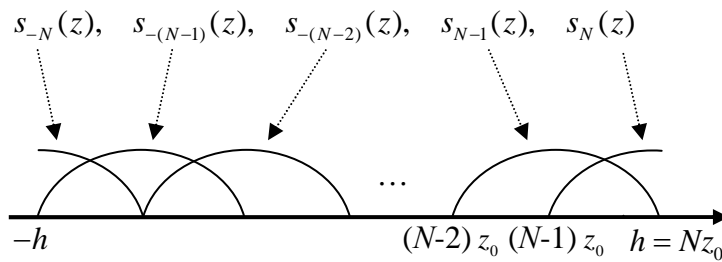
Η επέκταση του συνόλου των συναρτήσεων βάσης υποπεδίου με πιο πολύπλοκες συναρτήσεις από τις τριγωνικές, που αναφέραμε ανωτέρω, δεν εγγυάται απαραίτητα την βελτιστοποίηση της ακρίβειας των υπολογισμών. Υπάρχουν, ωστόσο, περιπτώσεις όπου η επιλογή πολυπλοκότερων συναρτήσεων είναι χρήσιμη για άλλους λόγους. Για παράδειγμα, κάποιες ολοκληρωτικές εκφράσεις δύναται να υπολογιστούν αναλυτικά όταν τα υπό ολοκλήρωση μεγέθη πολλαπλασιαστούν με τριγωνομετρικές συναρτήσεις (π.χ. $\sin(kz')$, $\cos(kz')$ όπου z' η μεταβλητή ολοκλήρωσης). Σε τέτοιου είδους περιπτώσεις, η χρήση της *τμηματικά ημιτονοειδούς συνάρτησης* (*piecewise sinusoid function*) του Σχήματος 1.10, που θα χρησιμοποιήσουμε στα Κεφάλαια 3 και 4, ή της *κολοβωμένης συνημιτονοειδούς συνάρτησης* (*truncated cosine function*) του Σχήματος 1.11, μπορεί να επιφέρει αρκετά πλεονεκτήματα όσον αφορά την ακρίβεια και τον χρόνο υλοποίησης των υπολογισμών. Οι προαναφερθείσες συναρτήσεις ορίζονται ως ακολούθως:

Τμηματικά Ημιτονοειδής Συνάρτηση (Piecewise Sinusoid Function)

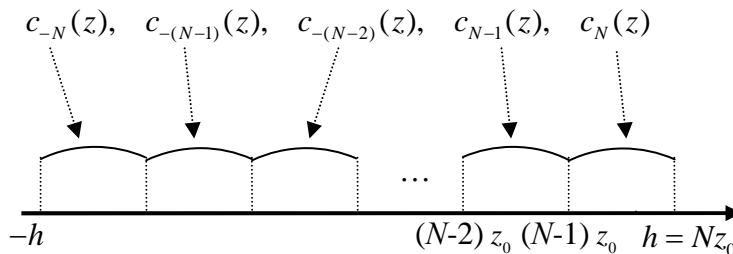
$$s_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin k [z - (n-1)z_0]}{\sin(kz_0)}, & (n-1)z_0 \leq z \leq nz_0 \\ \frac{\sin k [(n+1)z_0 - z]}{\sin(kz_0)}, & nz_0 \leq z \leq (n+1)z_0 \\ 0, & z < (n-1)z_0 \text{ ή } z > (n+1)z_0 \end{cases} \quad (1.40)$$

Κολοβωμένη Συνημιτονοειδής Συνάρτηση (Truncated Cosine Function)

$$c_n(z) = \begin{cases} \cos \left[k \left(z - \frac{z_0}{2} \right) \right], & (n-1)z_0 \leq z \leq nz_0 \\ 0, & z < (n-1)z_0 \text{ ή } z > nz_0 \end{cases} \quad (1.41)$$



Σχήμα 1.10: Οι τμηματικά ημιτονοειδείς συναρτήσεις (piecewise sinusoid functions).

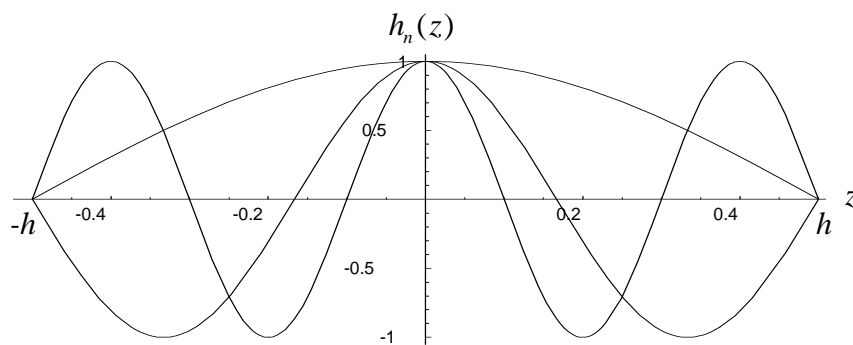


Σχήμα 1.11: Οι κολοβωμένες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις (truncated cosine functions).

Πέρα από την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης βάσης που θα χρησιμοποιήσουμε στην αριθμητική μας μέθοδο, μία ακόμα παράμετρος που πρέπει να επιλεγεί είναι ο αριθμός N , δηλαδή το πλήθος των συναρτήσεων που θα χρησιμοποιηθούν (πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης). Γενικά, μεγαλώνοντας το N αυξάνουμε (ή τουλάχιστον ελπίζουμε ότι αυξάνουμε) την ακρίβεια, σε βάρος όμως του υπολογιστικού κόστους. Πολλές φορές - ιδίως σε μεγάλα προβλήματα - το N επιλέγεται εκ των προτέρων με εμπειρικά κριτήρια. Έτσι, για διακριτοποίηση, βρίσκουμε συχνά στη βιβλιογραφία κριτήρια όπως «ο αριθμός σημείων ανά μήκος κύματος». Σε μικρότερα προβλήματα, πολλές φορές αυξάνουμε το N μέχρι η αριθμητική λύση να «ισορροπήσει» σε κάποια τελική τιμή. Αυτή η τελική τιμή είναι, ή ελπίζουμε να είναι, κοντά στην πραγματική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

1.7.2.1.B. Συναρτήσεις Ολικού Πεδίου (Entire Domain Functions)

Οι συναρτήσεις ολικού πεδίου (entire domain functions), όπως δηλώνει άλλωστε και το όνομά τους, ορίζονται (και δεν μηδενίζονται πλην, ενδεχομένως, μεμονωμένων σημείων) σε ολόκληρο το διάστημα που μελετούμε $(-h, h)$, γεγονός που σημαίνει ότι δεν υφίσταται διακριτοποίηση κατά την χρήση τους.



Σχήμα 1.12: Οι τρεις πρώτες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις $h_{-N}(z)$, $h_{-(N-1)}(z)$, $h_{-(N-2)}(z)$ της σχέσης (1.42). Όλες είναι άρτιες και μηδενίζονται στα άκρα $z = \pm h$.

Ένα τυπικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας αποτελούν οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις:

$$h_n(z) = \cos \frac{[2(n+N)+1]\pi z}{2h}, \quad n = -N, -(N-1), \dots, N, \quad |z| < h \quad (1.42)$$

που απεικονίζονται στο Σχήμα 1.12. Οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις είναι κατάλληλες όταν η λύση $J(z)$ είναι άρτια και μηδενίζεται στα άκρα $z = \pm h$, όπως συμβαίνει για το ρεύμα $I(z)$ σε μια κεραία.

Σαν δεύτερο παράδειγμα αναφέρουμε τις συναρτήσεις:

$$q_n(z) = \frac{T_{2(n+N)}(z/h)}{\sqrt{1-(z/h)^2}}, \quad n = -N, -(N-1), \dots, N, \quad |z| < h \quad (1.43)$$

όπου $T_0(x), T_2(x), T_4(x), \dots$ είναι τα πολυώνυμα Chebyshev [13, παρ. 18]. Αυτά είναι κατάλληλα όταν η λύση $J(z)$ είναι άρτια και *απειρίζεται* στα άκρα $z = \pm h$ [24].

Τα πλεονεκτήματα των συναρτήσεων ολικού πεδίου είναι εμφανή κατά την χρήση τους στον προσδιορισμό άγνωστων συναρτήσεων, για τις οποίες όμως έχουμε θεωρήσει, a priori, ότι έχουν συγκεκριμένη μορφή. Γενικά, η κατάλληλη επιλογή τέτοιου είδους συναρτήσεων δίνει αφενός την δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων αφετέρου την δυνατότητα αναπαράστασης του αγνώστου μεγέθους σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό με την χρήση πολύ λιγότερων όρων στο άθροισμα (1.30) από αυτούς που θα απαιτούνταν με την χρήση συναρτήσεων υποπεδίου.

1.7.2.2 Συναρτήσεις Δοκιμής (Testing Functions)

Δύο ειδικές περιπτώσεις της Μεθόδου των Ροπών που περιγράψαμε στην παράγραφο 1.7.1 και σχετίζονται με την επιλογή συγκεκριμένων συναρτήσεων δοκιμής είναι η «*Μέθοδος Galerkin*» και η «*Τεχνική Σημειακής Ισότητας*» – «*TΣΙ*» («*Point - Matching Technique*» ή «*Collocation Technique*»).

Η Μέθοδος Galerkin είναι η ειδική περίπτωση της MoM κατά την οποία οι συναρτήσεις βάσης και δοκιμής είναι ίδιες, $w_l(z) = u_l(z)$ ενώ στην ειδική περίπτωση

όπου οι συναρτήσεις δοκιμής είναι συναρτήσεις Δέλτα, $w_l(z) = \delta(z - z_l)$, $l = 0, \pm 1, \dots, \pm N$ τότε αναφερόμαστε στην Τεχνική Σημειακής Ισότητας. Συγκεκριμένα, στην ΤΣΙ, ικανοποιούμε την (1.32) σε $2N+1$ σημεία $z_{-N}, z_{-(N-1)}, \dots, z_N$, όπου $|z_l| \leq h$. Συνήθως, τα σημεία αυτά είναι ισαπέχοντα. Καταλήγουμε στο σύστημα (1.34) όπου:

$$A_m = \int_{-h}^h g(z_l, z') u_n(z') dz', \quad B_l = f(z_l), \quad l, n = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (1.44)$$

Ολοκληρώνοντας, πρέπει να σημειωθεί ότι αρκετές από τις συναρτήσεις βάσης που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 1.7.2.1 χρησιμοποιούνται και ως συναρτήσεις δοκιμής όπως για παράδειγμα η τριγωνική συνάρτηση την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην αριθμητική μέθοδο που θα εφαρμόσουμε στα Κεφάλαια 3 και 4.

1.8 Επεκτάσεις

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε ορισμένες επεκτάσεις αυτών που αναπτύχθηκαν ανωτέρω:

Επέκταση (1): Ολοκληρωτικές εξισώσεις παρόμοιες με τις (1.17) και (1.22) ισχύουν και για την περίπτωση του λεπτού κυλινδρικού σκεδαστή [3], που είναι μια απλή κεραία-δέκτης.

Επέκταση (2): Οι ανωτέρω ολοκληρωτικές εξισώσεις εύκολα επεκτείνονται σε *στοιχειοκεραίες* λεπτών, ευθύγραμμων διπόλων [3].

Επέκταση (3): Ολοκληρωτικές εξισώσεις παρόμοιες με την (1.17) ισχύουν για τις λεγόμενες *κεραίες σύρματος* (*wire antennas*) [25] που είναι λεπτές κεραίες κυλινδρικής διατομής, όχι αναγκαστικά ευθύγραμμες.

Επέκταση (4): Τα δύο μέλη της εξίσωσης Rocklington (1.17) εκφράζουν την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου. Για το λόγο αυτό η (1.17) είναι μια

μονοδιάστατη εκδοχή των λεγόμενων «Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Ηλεκτρικού Πεδίου» («Electric Field Integral Equations») [25]. Δισδιάστατες εκδοχές προκύπτουν για τέλεια αγώγιμους σκεδαστές, με άγνωστο το \mathbf{J}_s στην τέλεια αγώγιμη επιφάνεια. Συνήθως επιλύονται πάλι αριθμητικά, με δισδιάστατες εκδοχές των MoM που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 1.7.

Παράρτημα Α

Χρήσιμες Ιδιότητες της Συνάρτησης Δέλτα του Dirac

Το Παράρτημα Α περιέχει κάποιες χρήσιμες ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα που συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 1:

$$\int_{-b}^b f(z)\delta(z)dz = f(0) \quad (b > 0) \quad (\text{A.1})$$

$$\delta(kz) = \frac{1}{|k|} \delta(z) \quad (k > 0 \text{ ή } k < 0) \quad (\text{A.2})$$

$$f(z)\delta(z) = f(0)\delta(z) \quad (\text{A.3})$$

όπου $f(z)$ είναι ομαλή συνάρτηση του z . Όπως φαίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$\frac{d}{dz} H(z) = \delta(z) \quad \text{όπου} \quad H(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

η συνάρτηση δέλτα μας επιτρέπει να παραγωγίζουμε και ασυνεχείς συναρτήσεις. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \begin{cases} \cos(kz), & z > 0 \\ -\cos(kz), & z < 0 \end{cases} &= \frac{d}{dz} \{ \cos(kz)[2H(z)-1] \} \\ &= -k \sin(kz)[2H(z)-1] + \cos(kz)[2\delta(z)] \\ &= -k \sin(k|z|) + 2\delta(z) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γνωστό κανόνα παραγωγίσης του γινομένου δύο συναρτήσεων, την (A.5) και την (A.3). Στη τελευταία έκφραση (A.6), ο πρώτος όρος είναι η «κλασσική» παράγωγος (που παίρνουμε με το συνήθη τρόπο, για όλα τα σημεία

εκτός από το σημείο ασυνέχειας). Στον πρώτο αυτόν όρο, προσθέτουμε μια συνάρτηση δέλτα πολλαπλασιασμένη με το ύψος (εδώ 2) της ασυνέχειας.

Παράρτημα Β

Απειρισμός του Ακριβούς Πυρήνα - Εναλλαγή Διαφορικού Τελεστή και Ολοκλήρωσης

Β.1 Απειρισμός του Ακριβούς Πυρήνα

Για μικρά z ισχύει:

$$K_{\text{ex}}(z) \sim \beta_1 \ln |z| \quad (\text{B.1})$$

όπου β_1 μια σταθερά. Για να δείξουμε την (B.1), προσθέτουμε και αφαιρούμε την ποσότητα:

$$\xi(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi'/2)}} d\phi' \quad (\text{B.2})$$

στο δεξί μέλος της (1.18). Το $\xi(z)$ μπορεί να υπολογισθεί ακριβώς με τη βοήθεια του συμπληρωμένου ελλειπτικού ολοκληρώματος (complete elliptic integral) K [13]. Από τις ιδιότητες του K [13] βρίσκουμε ότι, για μικρά z , $\xi(z) \sim \beta_1 \ln |z|$ (β_1 σταθερά). Η ζητούμενη σχέση (B.1) έπεται από το ότι, για μικρά z , το υπόλοιπο $K_{\text{ex}}(z) - \xi(z)$ παραμένει φραγμένο.

Β.2 Εναλλαγή Διαφορικού Τελεστή και Ολοκλήρωσης

Λόγω της (B.1), η δεύτερη παράγωγος $\partial^2 K_{\text{ex}}(z)/\partial z^2$ συμπεριφέρεται ως $1/z^2$ για μικρά z . Άρα, η δεύτερη αυτή παράγωγος δεν είναι ολοκληρώσιμη και επομένως δεν επιτρέπεται η εναλλαγή του διαφορικού τελεστή \mathfrak{D} και του ολοκληρώματος στην (1.17). Σημειώνουμε ότι το επιχείρημα που αναπτύξαμε δεν εφαρμόζεται στην

περίπτωση του *προσεγγιστικού* πυρήνα που, όπως φαίνεται από την (1.26), παραμένει φραγμένος για μικρά z .

Βιβλιογραφία – Παραπομπές

- [1] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 3rd Ed., New York: Wiley, 2005.
- [2] Γ. Φικιώρης, «Προσδιορισμός Ρεύματος σε Γραμμική Κεραία Μέσω Ολοκληρωτικών Εξισώσεων», Σημειώσεις Μαθήματος «Ασύρματες Ζεύξεις», 8^ο εξάμηνο ΣΗΜΜΥ/ΕΜΠ, Νοέμβριος 2006.
- [3] R. W. P. King, G. Fikioris, and R. B. Mack, *Cylindrical Antennas and Arrays*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- [4] J. G. Maloney, G. S. Smith, and W. R. Scott, Jr., “Accurate Computation of the Radiation from Simple Antennas Using the Finite-Difference Time-Domain Method,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, no. 7, pp. 1059—1068, July 1990.
- [5] Θ. Δ. Τσιμπούκης, «Ηλεκτρεγερτική Δύναμη,» παρ. 5.7 από την *Εισαγωγή στην Βασική Θεωρία του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου*, Θεσσαλονίκη: University Studio Press, 2000.
- [6] W. L. Stutzman and G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, 2nd Ed. New York: Wiley, 1998.
- [7] H. C. Pocklington, “Electrical Oscillations in Wires”, *Cambridge Phil. Soc. Proc.* 9, London, England, pp. 324-332, Oct. 1897.
- [8] H. M. MacDonald, *Electric Waves*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1902.
- [9] F. G. Tricomi, *Integral Equations*, New York: Dover, 1985.
- [10] A. C. Pipkin, *A Course on Integral Equations*, New York: Springer, 1991.
- [11] R. Kress, *Linear Integral Equations*, 2nd Ed., New York, Springer, 1999.
- [12] T. T. Wu, “Introduction to linear antennas,” ch. 8 in *Antenna Theory*, pt. I, R. E. Collin and F. J. Zucker, Eds. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [13] Digital Library of Mathematical Functions. 2013-01-03. National Institute of Standards and Technology from <http://dlmf.nist.gov/>
- [14] R. W. P. King, “The linear antenna—eighty years of progress,” *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 1, pp. 2-16, Jan. 1967.

- [15] L. L. Tsai, "A Numerical Solution for the Near and Far Fields of an Annular Ring of Magnetic Current," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-20, no. 5, pp. 569-576, Sep. 1972.
- [16] G. A. Thiele, "Wire Antennas," ch. 2 in *Computer Techniques for Electromagnetics*, New York: Pergamon Press, 1973.
- [17] D. R. Wilton and C. M. Butler, "Effective methods for solving integral and integrodifferential equations," *Electromagnetics*, vol. 1, pp. 289—308, 1981.
- [18] A. Hoorfar and V. Jamnejad, "Electromagnetic Modeling and Analysis of Wireless Communication Antennas," *IEEE Microwave Magazine*, vol. 4, pp. 51—67, March 2003.
- [19] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, Piscataway, NJ: IEEE Press, 1993.
- [20] B. P. Rynne, "On the Well-Posedness of Pocklington's Equation for a Straight Wire Antenna and Convergence of Numerical Solutions," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 14, pp. 1489—1503, 2000.
- [21] R. Mittra and C. A. Klein, "Stability and Convergence of Moment Method Solutions," ch. 5 (pp. 129-163) in *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, New York: Springer-Verlag, 1975.
- [22] T. K. Sarkar, "A Note on the Choice Weighting Functions in the Method of Moments," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-33, no. 4, pp. 436-441, April 1985.
- [23] T. K. Sarkar, A. R. Djordjevic and E. Arvas, "On the Choice of Expansion and Weighting Functions in the Numerical Solution of Operator Equations," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-33, no. 9, pp. 988-996, Sep. 1985.
- [24] C. M. Butler, "General Solutions of the Narrow Strip (and Slot) Integral Equations," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-33, no. 10, pp. 1085—1090, Oct. 1985.
- [25] D. S. Jones, "Antennas and Integral Equations," ch. 6 in *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, 2nd Ed. New York: IEEE Press, 1995.

Κεφάλαιο 2

Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης του Hallén για το Μοντέλο της Γεννήτριας Δέλτα Συνάρτησης (Delta Function Generator)

2.1 Εισαγωγή

Στόχος του Κεφαλαίου 2 είναι η μελέτη της ολοκληρωτικής εξίσωσης του ρεύματος σε γραμμική κεραία που τροφοδοτείται από την Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης - ΓΔΣ (Delta Function Generator - DFG) καθώς και των δυσκολιών που εμπεριέχει η επίλυση αυτής. Η μελέτη αυτή, που αποτελεί ουσιαστικά το περιεχόμενο της [1], θα αποτελέσει αφετηρία και σημείο σύγκρισης των αποτελεσμάτων που θα εξάγουμε στα επόμενα κεφάλαια. Η παρουσία του τρέχοντος κεφαλαίου στην παρούσα διδακτορική εργασία εξυπηρετεί δύο σκοπούς. Αρχικά, διευκολύνει τον αναγνώστη στην κατανόηση του περιεχομένου της παρούσης, η οποία αποκτά ολοκληρωμένη μορφή και του δίνεται η ευκαιρία να προβεί στην αποτελεσματικότερη σύγκριση του κεφαλαίου αυτού και των μεθόδων που εφαρμόζονται με τα αντίστοιχα που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια. Τέλος, επιβεβαιώνει ότι πολλά συμπεράσματά της διατριβής, που αφορούν την Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου – ΓΠΔ (Finite Gap Generator - FGG), που αποτελεί το κύριο αντικείμενο μελέτης αυτής, δεν περιορίζονται μόνο σ' αυτό το μοντέλο γεννήτριας αλλά επεκτείνονται και σε άλλα μοντέλα (για παράδειγμα στο μοντέλο της ΓΔΣ) και αριθμητικές μεθόδους. Το τελευταίο επαληθεύεται από την ανάλυση που θα ακολουθήσουμε στα επόμενα κεφάλαια η οποία είναι διαφορετική από την αντίστοιχη που θα δούμε εδώ.

Η μονοπολική κεραία, του Σχήματος 1.1, στην οποία ο εσωτερικός αγωγός της ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς που την τροφοδοτεί βρίσκεται πάνω από αγωγίμο επίπεδο, αποτελεί ίσως το απλούστερο παράδειγμα ενός πραγματικού συστήματος ακτινοβολίας. Η ακτίνα a του εσωτερικού αγωγού είναι μικρή συγκρινόμενη με το μήκος κύματος και το μήκος της μονοπολικής κεραίας. Σε θεωρητικές μελέτες, το ανωτέρω μοντέλο αντικαθίσταται συνήθως από κάποιο απλούστερο. Ένα παράδειγμα,

τέτοιου απλού μοντέλου, το οποίο συναντούμε στο [2] και το οποίο περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποτελεί το αποκαλούμενο «σωληνοειδές δίπολο», στο οποίο η προαναφερθείσα γραμμή μεταφοράς δίνει την θέση της σε μία «Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης». Υπενθυμίζουμε ότι στο εν λόγω μοντέλο η κεραία λογίζεται ως ένας ανοικτός στα άκρα του σωλήνα με τέλεια αγωγήματα αμελητέου πάχους στο κέντρο του οποίου βρίσκεται ένα απειροστά μικρού μήκους διάκενο. Κατά μήκος του διακένου εφαρμόζεται μία σταθερή διαφορά δυναμικού $\text{Re}\{Ve^{-i\omega t}\}$. Το σωληνοειδές δίπολο εξυπηρετεί, επίσης, την μελέτη και άλλων συστημάτων ακτινοβολίας [3]. Το εξιδανικευμένο αυτό μοντέλο επιτρέπει την χρήση των ιδιοτήτων που διέπουν την ανεξάρτητη πηγή τάσης, την αγωγιμότητα και την αντίσταση στην συνηθισμένη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Στο σωληνοειδές δίπολο αναπτύσσεται πυκνότητα ρεύματος τόσο στην εσωτερική όσο και στην εξωτερική επιφάνεια. Το συνολικό ρεύμα $I(z)$ ορίζεται ως το άθροισμα των πυκνοτήτων αυτών, πολλαπλασιασμένων με την περίμετρο του σωλήνα (βλέπε σχέση (1.8)), και ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση [2]:

$$\int_{-h}^h K(z-z')I(z')dz' = \frac{i}{2\zeta_0}V \sin(k|z|) + C \cos(kz), \quad |z| < h \quad (2.1)$$

όπου $2h$ είναι το μήκος του διπόλου, $k=2\pi/\lambda$ ο κυματικός αριθμός του κενού χώρου και $\zeta_0 \cong 376.73 \text{ Ohm}$ (βλέπε σχέση (1.19)). V είναι η τάση τροφοδοσίας και C σταθερά που υπολογίζεται από την συνθήκη $I(\pm h) = 0$. Η (2.1) αποτελεί ειδική περίπτωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Hallén, που περιγράψαμε στην παράγραφο 1.4, για το μοντέλο της ΓΔΣ. Από τις (1.18) και (1.26), υπάρχουν δύο επιλογές για την συνάρτηση $K(z)$, που αποτελεί τον αποκαλούμενο «πυρήνα», της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.1):

$$K(z) = \begin{cases} K_{\text{ex}}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(ik\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi/2)}\right)}{\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi/2)}} d\phi & (2.2\alpha) \\ K_{\text{ap}}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\left(ik\sqrt{z^2 + a^2}\right)}{\sqrt{z^2 + a^2}} & (2.2\beta) \end{cases}$$

όπου a η ακτίνα, για την οποία υποθέτουμε ότι ικανοποιεί τις σχέσεις $ka \ll 1$ και $a \ll h$. Η (2.1) με πυρήνα την συνάρτηση $K_{\text{ex}}(z, a)$ μπορεί να αποδειχθεί από τις εξισώσεις Maxwell μέσω της διαδικασίας που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1. Στην περίπτωση αυτή η ολοκληρωτική εξίσωση είναι ακριβής για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου και θα αποκαλείται «ακριβής ολοκληρωτική εξίσωση» ή αλλιώς ολοκληρωτική εξίσωση με τον «ακριβή πυρήνα» («exact kernel»). Πολλές εργασίες (όπως για παράδειγμα η [4] και η [5]) χρησιμοποιούν για λόγους ευκολίας την απλούστερη μορφή της (2.1), με την συνάρτηση $K_{\text{ap}}(z, a)$, την οποία θα αποκαλούμε ολοκληρωτική εξίσωση με τον «προσεγγιστικό πυρήνα» («approximate kernel») ή πιο απλά «προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση». Όπως είναι εμφανές οι δύο εξισώσεις διαφέρουν μόνο ως προς την συνάρτηση του πυρήνα που χρησιμοποιούν. Μία παρόμοια ολοκληρωτική εξίσωση ισχύει για την περίπτωση των κεραιών λήψης [6].

Η πιο σημαντική παρατήρηση, που περιπλέκει την μελέτη της προσεγγιστικής ολοκληρωτικής εξίσωσης, είναι ότι η τελευταία δεν έχει λύση. Πράγματι, σύμφωνα με το [2], το δεξιό μέλος αυτής δεν διαφορίζεται στο $z=0$, ενώ, για κάθε συνάρτηση $I(z)$ (που είναι επαρκώς ομαλή), το αριστερό μέλος της είναι διαφορίσιμο στο σημείο αυτό. Αντίθετα, η ακριβής ολοκληρωτική εξίσωση παρουσιάζει ιδιομορφία στο $z=0$ και για τον λόγο αυτό ο ανωτέρω συλλογισμός δεν ισχύει. Από φυσικής άποψης, η (2.1) με τον προσεγγιστικό πυρήνα απαιτεί την παρουσία ενός γραμμικού ρεύματος κατά μήκος του άξονα z το οποίο διατηρεί ένα πεδίο που συμπεριφέρεται όπως η συνάρτηση δέλτα στο σημείο $\rho=a, z=0$, που είναι πρακτικά αδύνατο. Αν και η ανωτέρω εξίσωση αναφέρεται σε πολλά γνωστά βιβλία θεωρίας κεραιών και υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού (βλέπε, για παράδειγμα, τα [7]-[9]), η «μη επιλυσιμότητά» της συχνά δεν αναφέρεται.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί στην παράγραφο 1.7, αρκετές αριθμητικές μέθοδοι, και ιδιαίτερα η Μέθοδος των Ροπών (Moment Method) [10], εφαρμόζονται για την αριθμητική επίλυση της (2.1). Όντως, η αριθμητική επίλυση της (2.1) προτείνεται συχνά από την βιβλιογραφία για τον υπολογισμό της κατανομής του ρεύματος σε μία γραμμική κεραία. Μολονότι, σε πολλές περιπτώσεις, μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα αποτελέσματα χωρίς την λεπτομερή επίγνωση των ιδιαίτερων δυσκολιών που σχετίζονται με την εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων στην (2.1), η κατανόηση αυτών χρήζει ιδιαίτερης σημασίας. Για το λόγο αυτό, οι δυσκολίες αυτές αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης πολλών εργασιών [5], [9], [11]-[13]. Άλλοι συγγραφείς [14]-[18] έχουν εξετάσει τις δυσκολίες που σχετίζονται με άλλες ολοκληρωτικές ή

ολοκληρωτικο-διαφορικές εξισώσεις που δίνουν τις κατανομές ρευμάτων σε γραμμικές κεραίες.

Ο κύριος στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η ενδελεχής μελέτη των δυσκολιών που σχετίζονται με την αριθμητική επίλυση αυτής. Όπως θα δούμε η (2.1), παρά την απλή της μορφή, παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες. Θα εξετάσουμε τόσο την ακριβή όσο και την προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση. Στην τελευταία περίπτωση, μάλιστα, θα δούμε ότι οι πιο σημαντικές δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουμε οφείλονται στην μη επιλυσιμότητα αυτής. Η φιλοσοφία της μελέτης στο τρέχον κεφάλαιο διαφέρει από την αντίστοιχη στα [5], [9], [11]-[13]. Τα κύρια ερωτήματα που τίθενται εδώ είναι:

α) Τι είδους αποτελέσματα θα πάρουμε αν εφαρμόσουμε την αριθμητική μέθοδο στην (2.1).

β) Υπό ποιες συνθήκες τα ανωτέρω αποτελέσματα για την προσεγγιστική και ακριβή εξίσωση μοιάζουν μεταξύ τους και με ποιο τρόπο.

Επειδή η ολοκληρωτική εξίσωση με τον προσεγγιστικό πυρήνα δεν έχει λύση, αν γενικά εφαρμόσουμε διαφορετικές αριθμητικές μεθόδους θα εξάγουμε διαφορετικά αποτελέσματα. Ως εκ τούτου, για την προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση το ερώτημα α) έχει νόημα μόνο στα πλαίσια συγκεκριμένης αριθμητικής μεθόδου. Η μέθοδος που εφαρμόζεται σ' αυτό το κεφάλαιο είναι η μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις. Όσον αφορά το δεύτερο ερώτημα, θα δούμε στη συνέχεια ότι για να απαντήσουμε ικανοποιητικά θα πρέπει να προσδιορίσουμε και να εξετάσουμε τα μεγέθη $\text{Re}\{I(z)/V\}$ και $\text{Im}\{I(z)/V\}$ ξεχωριστά.

Τα κύρια αποτελέσματα στο τρέχον κεφάλαιο εξάγονται από την αναλυτική μελέτη του, απλούστερου, προβλήματος της άπειρης, σε μήκος, κεραίας και την σύγκριση των συμπερασμάτων που προκύπτουν με τα αντίστοιχα της πεπερασμένης κεραίας όπως αυτά εξάγονται από την αριθμητική μελέτη αυτής. Την «φιλοσοφία» αυτή θα χρησιμοποιήσουμε σε όλη την έκταση της διατριβής. Το πλεονέκτημά της έγκειται στο γεγονός ότι καθιστά κατανοητή την εξάρτηση των αριθμητικών λύσεων από τις παραμέτρους της κεραίας. Στην περίπτωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον προσεγγιστικό πυρήνα αυτή η εξάρτηση δεν είναι εμφανής. Επιπρόσθετα, τα αναλυτικά

αποτελέσματα είναι απαλλαγμένα από σφάλματα στρογγυλοποίησης (roundoff errors) στα οποία τα αντίστοιχα αριθμητικά δείχνουν μεγάλη ευαισθησία.

2.2 Η Πεπερασμένη Κεραία: Αριθμητική Μέθοδος

Υποθέτουμε $I_{ex}(z)$ και $I_{ap}(z)$ το άγνωστο ρεύμα στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.1) με τον ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα αντίστοιχα, και $I(z)$ οποιοδήποτε από τα ανωτέρω. Έστω επίσης $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ συναρτήσεις που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\int_{-h}^h K(z-z')I^{(1)}(z')dz' = \frac{i}{2\zeta_0}V \sin(k|z|) \quad (2.3\alpha)$$

και

$$\int_{-h}^h K(z-z')I^{(2)}(z')dz' = \cos(kz) \quad (2.3\beta)$$

αντίστοιχα, με $|z| < h$. Επιλύουμε αριθμητικά την (2.1) εφαρμόζοντας την Μέθοδο των Ροπών στις εξισώσεις (2.3α) και (2.3β). Για την μέθοδο Galerkin με παλμικές συναρτήσεις, υποθέτουμε λύση της μορφής:

$$I^{(1)}(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n^{(1)}u_n(z) \quad (2.4\alpha)$$

και

$$I^{(2)}(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n^{(2)}u_n(z) \quad (2.4\beta)$$

όπου η παλμική συνάρτηση $u_n(z)$ δίνεται από την (1.38) και το πλάτος του παλμού z_0 συνδέεται με τον αριθμό $2N+1$ μέσω της σχέσης (1.31).

Αντικαθιστώντας τις (2.4α)-(2.4β) στις (2.3α)-(2.3β) αντίστοιχα, πολλαπλασιάζοντας με $u_l(z)$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα από $z = -h$ έως $z = h$ παίρνουμε τα κάτωθι συστήματα εξισώσεων:

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} I_n^{(1)} = B_l^{(1)} \quad \text{και} \quad \sum_{n=-N}^N A_{ln} I_n^{(2)} = B_l^{(2)}, \quad \text{με} \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (2.5)$$

Στην (2.5), οι συντελεστές A_{ln} , που είναι διπλά ολοκληρώματα (βλέπε εξίσωση (1.35)), εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο $|l-n|$ και όχι από τα l και n ξεχωριστά. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό A_{l-n} αντί του $A_{ln} = A_{nl}$. Επιπλέον, το διπλό ολοκλήρωμα, με χρήση της ταυτότητας (1.37), δύναται να απλοποιηθεί έτσι ώστε:

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_0} (z_0 - z) [K(z + lz_0) + K(z - lz_0)] dz \quad \text{με} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2N \quad (2.6)$$

Οι συντελεστές $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ δίνονται από ολοκληρώματα που μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Μετά τον υπολογισμό των $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$, προσδιορίζουμε την σταθερά C από την σχέση:

$$C \cong -\frac{I_N^{(1)}}{I_N^{(2)}}, \quad (2.7)$$

και καταλήγουμε στην τελική αριθμητική λύση:

$$I(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n u_n(z) = \sum_{n=-N}^N [I_n^{(1)} + CI_n^{(2)}] u_n(z). \quad (2.8)$$

Συμβολίζουμε με $I_{ex,n}$ και $I_{ap,n}$ τις τιμές του I_n στην περίπτωση του ακριβούς και του προσεγγιστικού πυρήνα αντίστοιχα.

Αρκεί λοιπόν να λύσουμε τα δύο συμμετρικά συστήματα Toeplitz (2.5), διαστάσεων $(2N+1) \times (2N+1)$, για τα $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$, και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε την σταθερά C από την (2.7). Σημειώνουμε ότι $I_n^{(1)} = I_{-n}^{(1)}$ και

$I_n^{(2)} = I_{-n}^{(2)}$. Αποδεικνύεται ότι οι (2.5) και (2.7) (ελλείψει σφαλμάτων στρογγυλοποίησης) είναι ισοδύναμες με ένα απλό γραμμικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τις μεταβλητές I_0, I_1, \dots, I_{N-1} και C . Οι παράμετροι h, a και z_0 , στην πράξη, μπορούν να εκφραστούν ως πολλαπλάσια του μήκους κύματος $\lambda = 2\pi/k$. Σημειώνουμε ότι ο παλμός $u_0(z)$ είναι τοποθετημένος στο σημείο $z=0$ και ότι το μέγεθος I_0/V εκφράζει την, κατά προσέγγιση, σύνθετη αγωγιμότητα στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας. Στα αριθμητικά αποτελέσματα που ακολουθούν, οι αριθμητικές ολοκληρώσεις εκτελούνται με επαρκώς μικρό σφάλμα ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο.

	$h/\lambda = 0.25$ $N = 80$	$h/\lambda = 0.75$ $N = 241$
$I_{ex,0}/V$	$8.69 \times 10^{-3} + i1.68 \times 10^{-3}$	$6.95 \times 10^{-3} - i6.02 \times 10^{-6}$
$I_{ap,0}/V$	$7.55 \times 10^{-3} - i0.440$	$6.28 \times 10^{-3} - i0.442$

Πίνακας 2.1: Σύνθετες αγωγιμότητες $I_{ex,0}/V$ και $I_{ap,0}/V$ (Siemens) στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2 για την ακριβή και προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση με $h/\lambda=0.25, N=80$ και $h/\lambda=0.75, N=241$. Σε κάθε περίπτωση $z_0/\lambda \cong 0.003$ και $a/\lambda = 0.01$.

Στον Πίνακα 2.1 δίνονται οι σύνθετες αγωγιμότητες για μήκη κεραιών $h/\lambda=0.25$ και $h/\lambda=0.75$. Η ακτίνα των διπόλων είναι $a/\lambda=0.01$. Όπως έχει αναφερθεί στην [19], αυτή είναι η μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου a/λ για την οποία χρησιμοποιείται συνήθως ο προσεγγιστικός πυρήνας $K_{ap}(z, a)$. Η επιλογή της παραμέτρου N έγινε έτσι ώστε το z_0/λ να έχει την ίδια τιμή (περίπου 0.003) για τα δύο μήκη κεραιών ($N=80$ για $h/\lambda=0.25$ και $N=241$ για $h/\lambda=0.75$). Το πλάτος του παλμού είναι μικρότερο από την ακτίνα της κεραίας. Αν και οι αγωγιμότητες (conductances) - πραγματικό μέρος των σύνθετων αγωγιμοτήτων - που εξάγονται από την ακριβή και προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση παρουσιάζουν κάποια συμφωνία για δεδομένο μήκος κεραίας (ή δεδομένη τιμή του N), οι τιμές της επιδεκτικότητας (susceptances) δεν συμφωνούν: το μέγεθος $\text{Im}\{I_{ap,0}/V\}$ είναι πολύ μεγάλο και έχει σχεδόν την ίδια τιμή για τα δύο

μήκη κεραιών. Στις επόμενες παραγράφους θα ερμηνεύσουμε τα ανωτέρω αποτελέσματα.

2.3 Η Άπειρη Κεραία: Βασικές Αρχές

Αρκετές πληροφορίες για την πεπερασμένη κεραία μήκους $2h$ μπορούμε να αντλήσουμε από την μελέτη της κεντρικά τροφοδοτούμενης άπειρης, σε μήκος, κεραίας όπου $h = \infty$. Στην παράγραφο αυτή, θα παρουσιάσουμε εν συντομία κάποια χρήσιμα αποτελέσματα του [2]. Η ολοκληρωτική εξίσωση του ρεύματος $I(z)$ στην άπειρη κεραία δίνεται από (βλέπε Παράρτημα Α):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(z-z')I(z')dz' = \frac{1}{2\zeta_0} V e^{ik|z|}, \quad \mu\epsilon \quad |z| < +\infty \quad (2.9)$$

όπου όπως και πριν θεωρούμε ότι ο πυρήνας $K(z)$ αντιστοιχεί είτε στον ακριβή $K_{ex}(z)$ είτε στον προσεγγιστικό $K_{ap}(z)$. Θεωρούμε επίσης ότι $\bar{K}(\zeta)$, $\bar{K}_{ex}(\zeta)$ και $\bar{K}_{ap}(\zeta)$ είναι οι αντίστοιχοι Μετασχηματισμοί Fourier – MF (Fourier Transforms – FT):

$$\bar{K}(\zeta) = \begin{cases} \bar{K}_{ex}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ex}(z) e^{i\zeta z} dz \\ \bar{K}_{ap}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ap}(z) e^{i\zeta z} dz \end{cases} \quad (2.10)$$

απ' όπου για πραγματικές τιμές του ζ από τα 2.12.4.1, 2.13.3.1, 2.16.3.1 του [20] παίρνουμε:

$$\bar{K}_{ex}(\zeta) = \begin{cases} \frac{i}{4} J_0(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}), & |\zeta| < k \\ \frac{1}{2\pi} I_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2}) K_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2}), & |\zeta| > k \end{cases} \quad (2.11)$$

και από τα 2.5.25.9, 2.5.25.15 του [21]:

$$\bar{K}_{ap}(\zeta) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}), & |\zeta| < k \\ \frac{1}{2\pi} K_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2}), & |\zeta| > k \end{cases} \quad (2.12)$$

όπου $J_0, H_0^{(1)}$ οι συναρτήσεις Bessel, μηδενικής τάξης, πρώτου και τρίτου (συνάρτηση Hankel) είδους αντίστοιχα και I_0, K_0 οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel μηδενικής τάξης [20], [21]. Στο Παράρτημα Γ δίνονται οι ορισμοί και κάποιες ασυμπτωτικές αναπτύξεις των ανωτέρω συναρτήσεων. Οι δύο ανωτέρω πυρήνες είναι πραγματικές συναρτήσεις όταν η μεταβλητή ζ είναι πραγματική και $|\zeta| > k$. Στην περίπτωση του ακριβούς πυρήνα, η (2.9) μπορεί να επιλυθεί ακριβώς μέσω του MF. Πράγματι, σύμφωνα με το [2], εφαρμόζοντας τον MF στην (2.9), όπως τον εφαρμόσαμε στην (2.10), και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης στο αριστερό μέλος της εξίσωσης:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{ex}(z-z') I(z') dz' \right] e^{i\zeta z} dz = \bar{K}_{ex}(\zeta) I(\zeta), \quad (2.13)$$

παίρνουμε:

$$\bar{K}_{ex}(\zeta) I(\zeta) = \frac{ikV}{\zeta_0} \frac{1}{k^2 - \zeta^2}, \quad (2.14)$$

όπου $I(\zeta)$ ο MF της ζητούμενης συνάρτησης. Λύνοντας ως προς $I(\zeta)$ και παίρνοντας τον αντίστροφο MF καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$I_{ex}(z) = \frac{ikV}{\pi\zeta_0} \int_{0, (k)}^{+\infty} \frac{\cos(\zeta z)}{(k^2 - \zeta^2) \bar{K}_{ex}(\zeta)} d\zeta, \quad |z| < +\infty \quad (2.15)$$

όπου η διαδρομή ολοκλήρωσης διέρχεται κάτωθεν του κλαδικού σημείου $\zeta = k$

($\int_{0, (k)}^{+\infty}$). Από την (2.15) αποδεικνύεται ότι το ρεύμα είναι πεπερασμένο σε όλο το

μήκος της κεραίας πλην του σημείου $z = 0$, και [2]:

$$\frac{I_{ex}(z)}{V} = -i \frac{4ka}{\zeta_0} \ln \frac{1}{|z|} + O(1), \quad \text{καθώς } z \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

Υπογραμμίζουμε ότι ο συντελεστής στην (2.16) είναι καθαρά φανταστικός. Επιπρόσθετα, στο [2] αποδεικνύεται ότι η σχέση (2.16) ισχύει και στην περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας μήκους $2h$. Αν και το μέγεθος $\text{Im}\{I_{ex}(z)/V\}$ απειρίζεται στο σημείο τροφοδοσίας, η συνιστώσα του ρεύματος που είναι σε φάση με την τάση V έχει πεπερασμένη τιμή για όλες τις τιμές του z , συμπεριλαμβανομένου και του $z = 0$ [2, (8.134)].

Όταν $K = K_{ap}$, η επίλυση της (2.9) μέσω του MF οδηγεί σε αδιέξοδο. Συγκεκριμένα, το προκύπτον ολοκλήρωμα αποκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η (2.9) με τον προσεγγιστικό πυρήνα δεν έχει λύση ή, ακριβέστερα, δεν έχει σαν λύση συνάρτηση που να ανήκει στην ευρύτερη κλάση συναρτήσεων που έχουν μετασχηματισμό Fourier.

2.4 Η Ολοκληρωτική Εξίσωση με τον Ακριβή Πυρήνα: Βελτιώσεις

Επιστρέφουμε, προσωρινά, στην πεπερασμένη κεραία για να εξετάσουμε κάποιες βελτιώσεις στην αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2. Αφορμή γι' αυτό αποτελεί η εξίσωση (2.16) και η συμπεριφορά του ρεύματος στα άκρα της κεραίας [22]-[24]. Οι βελτιώσεις που θα εξετάσουμε αφορούν αποκλειστικά τον ακριβή πυρήνα.

Πρώτον, τα μεγέθη $I^{(1)}(z)$, $I^{(2)}(z)$ στις (2.3α) και (2.3β) αντίστοιχα συμπεριφέρονται ως $(h^2 - z^2)^{-1/2}$ καθώς $z \rightarrow \pm h$, ενώ το συνολικό ρεύμα εξασθενεί ως $(h^2 - z^2)^{1/2}$ (βλέπε [22]-[24]). Αξίζει να σημειώσουμε ότι τα τετράγωνα των μέτρων των ενδιάμεσων λύσεων $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ των (2.3α) και (2.3β) δεν είναι

ολοκληρώσιμα. Δηλαδή τα ολοκληρώματα $\int_{-h}^{+h} |I^{(1)}(z)|^2 dz$ και $\int_{-h}^{+h} |I^{(2)}(z)|^2 dz$ αποκλίνουν.

Η ανωτέρω συμπεριφορά, κοντά στα άκρα της κεραίας, προκαλεί μία ήσσονος σημασίας δυσκολία στην εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου εάν η σταθερά C υπολογιστεί από την (2.7). Η εξίσωση (2.7) περιλαμβάνει μεγάλες τιμές και καθώς το N μεγαλώνει, η C (και κατ' επέκταση η τελική αριθμητική λύση) συγκλίνει πολύ αργά. Η σύγκλιση μπορεί να επιταχυνθεί λαμβάνοντας υπόψη ότι $I_{ex}(z) = O(\sqrt{h-z})$ καθώς $z \rightarrow h$ που συνεπάγεται ότι $\lim_{z_0 \rightarrow 0} [I(h-z_0/2)/I(h-3z_0/2)] = 1/\sqrt{3}$. Επομένως, αντί της (2.7), η C μπορεί να υπολογιστεί από την:

$$C \cong -\frac{\sqrt{3}I_N^{(1)} - I_{N-1}^{(1)}}{\sqrt{3}I_N^{(2)} - I_{N-1}^{(2)}} \quad (2.17)$$

Δεύτερον, όσον αφορά την ιδιομορφία στο $z=0$, μία πολύ καλύτερη τεχνική είναι να λύσουμε την (2.1), με τον ακριβή πυρήνα, για $F(z) = I_{ex}(z) - i4kaV\zeta_0^{-1} \ln(k|z|)$ που είναι φραγμένη στο $z=0$. Η συνάρτηση $F(z)$ ικανοποιεί την (2.1), αλλά με την ποσότητα $\sin(k|z|)$ αντικατεστημένη από μία πιο ομαλή συνάρτηση του z . Η αριθμητική μέθοδος της παραγράφου 1.2 και η (2.17) μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν στην νέα ολοκληρωτική εξίσωση - η μόνη αναγκαία αλλαγή έγκειται στον επαναπροσδιορισμό του μεγέθους $B_l^{(1)}$.

Τρίτον, μία ενδιαφέρουσα ιδέα που οδηγεί σε πεπερασμένη τιμή της επιδεκτικότητας στην είσοδο της άπειρης κεραίας έχει προταθεί από τον Duncan [25]. Μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε σε συνδυασμό με την δεύτερη βελτίωση που αναφέραμε ανωτέρω. Σύμφωνα με αυτή υπολογίζουμε την επιδεκτικότητα B^D από την σχέση $B^D = I_{ex}(z_1)/V$ όπου z_1 σημείο πλησίον του $z=0$ που παρακάμπτει την ιδιομορφία. Ο Duncan αποκαλεί το σημείο αυτό «ακτίνα της ιδιομορφίας» και σημειώνει ότι μέθοδοι τέτοιου τύπου είναι κάπως αυθαίρετες. Ως παράδειγμα στα προηγούμενα αναφέρουμε ότι για $a/\lambda = 0.007022$, σύμφωνα με τον Duncan, παίρνουμε $z_1/\lambda = 0.002425$.

Μία τελευταία βελτίωση συνίσταται στην εφαρμογή της μεθόδου για ένα σύνολο τιμών της παραμέτρου N με σκοπό την εξαγωγή μιας ακολουθίας αποτελεσμάτων που θα επέτρεπε τον προσδιορισμό του αποτελέσματος στην υποθετική περίπτωση όπου $N \rightarrow \infty$. Στην [26] αναφέρονται κάποιες σύγχρονες τεχνικές (μέθοδοι επιτάχυνσης σύγκλισης) για την εξαγωγή του ζητούμενου αποτελέσματος από τις ανωτέρω ακολουθίες. Οι προαναφερθείσες τεχνικές μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας σε ακολουθίες τιμών που προσεγγίζουν τόσο την αγωγιμότητα $G = \text{Re}\{I_{ex}(0)/V\}$ όσο και την επιδεκτικότητα B^D κατά Duncan. Αξίζει να σημειωθεί ότι είναι χρήσιμη [26] η σύγκριση των αποτελεσμάτων που εξάγονται από τις (2.7) και (2.17).

Αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τις ανωτέρω βελτιώσεις παρουσιάζονται στην [26]. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα επικεντρωθούμε στην απλούστερη μέθοδο της παραγράφου 2.2.

2.5 Η Άπειρη Κεραία: Αριθμητική Μέθοδος με τον Ακριβή Πυρήνα

Στην παρούσα παράγραφο, θα εφαρμόσουμε την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2 στην απείρου μήκους κεραία. Συγκεκριμένα, θα αναζητήσουμε μία προσεγγιστική λύση της (2.9) της μορφής:

$$I(z) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n u_n(z), \quad \text{με } |z| < +\infty \quad (2.18)$$

όπου η παλμική συνάρτηση $u_n(z)$ δίνεται στην (1.38). Χωρίζουμε τον πραγματικό άξονα σε τμήματα μήκους z_0 με την παράμετρο kz_0 να παίρνει μικρές τιμές. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της παραγράφου 2.2 για τα μεγέθη $I_{ex,n}$, $I_{ap,n}$ και I_n .

Υποθέτοντας ότι $\text{Im}\{k\} > 0$ και εφαρμόζοντας την διαδικασία που περιγράψαμε για την πεπερασμένη κεραία παίρνουμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{l-n} I_n = B_l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.19)$$

όπου τα στοιχεία του πίνακα A_l δίνονται στην (2.6) και:

$$B_l = \frac{V}{2\zeta_0} \int_{(l-1/2)z_0}^{(l+1/2)z_0} e^{ik|z|} dz = \begin{cases} \frac{i2V}{\zeta_0 k} \sin^2\left(\frac{kz_0}{4}\right) + \frac{V}{\zeta_0 k} \sin\left(\frac{kz_0}{2}\right), & l=0 \\ \frac{V}{\zeta_0 k} \sin\left(\frac{kz_0}{2}\right) e^{i|l|kz_0}, & l = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.20)$$

Για την επίλυση του, απείρων διαστάσεων, συστήματος Toeplitz (2.19) πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με $e^{i\theta}$, όπου $-\pi < \theta \leq \pi$, και αθροίζουμε ως προς την μεταβλητή l . Αλλάζουμε την σειρά του αθροίσματος και εισάγουμε τις κάτωθι σειρές Fourier:

$$\tilde{A}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{i\theta}, \quad \tilde{B}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l e^{i\theta} \quad \text{και} \quad \tilde{I}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l e^{i\theta}. \quad (2.21)$$

Από όπου προκύπτει $\tilde{A}(\theta)\tilde{I}(\theta) = \tilde{B}(\theta)$ έτσι ώστε:

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{B}(\theta)}{\tilde{A}(\theta)} e^{-in\theta} d\theta \quad (\text{Im}\{k\} > 0). \quad (2.22)$$

Επειδή $\text{Im}\{k\} > 0$, το άθροισμα $\tilde{B}(\theta)$ συγκλίνει, και από την (2.20) αποδεικνύεται ότι:

$$\tilde{B}(\theta) = -\frac{iV}{\zeta_0} \frac{2}{k} \sin^2\left(\frac{kz_0}{4}\right) \frac{\cos\left(\frac{kz_0}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta + kz_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - kz_0}{2}\right)}. \quad (2.23)$$

Αντικαθιστώντας την (2.6) στην (2.21) και εφαρμόζοντας τον τύπο του αθροίσματος

$$\text{Poisson} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i(\theta - 2m\pi)y} dy \quad (\text{Poisson Summation Formula - PSF})$$

[27, (6.3)] παίρνουμε:

$$\tilde{A}(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} (z_0 - z) [K(z - xz_0) + K(z + xz_0)] dz e^{ix(\theta - 2m\pi)} dx \quad (2.24)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\tilde{A}(\theta) = z_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{K} \left(\frac{2m\pi - \theta}{z_0} \right) \frac{\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\left(m\pi - \frac{\theta}{2} \right)^2} \quad (2.25)$$

όπου \bar{K} - ο MF του πυρήνα - δίνεται από τις (2.10)-(2.12).

Η εξίσωση (2.23) έχει νόημα για πραγματικές τιμές του k εκτός από $k = \pm\theta/z_0$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε την αναλυτική συνέχιση της (2.22) για πραγματικές τιμές του k αν η διαδρομή ολοκλήρωσης στην (2.22) διέρχεται κάτωθεν του σημείου $\theta = kz_0$ και άνωθεν του $\theta = -kz_0$. Συνεπώς, η τελική έκφραση για τους συντελεστές I_n μπορεί να γραφεί:

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\tilde{B}(\theta)}{\tilde{A}(\theta)} \cos(n\theta) d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (k \text{ πραγματικό}) \quad (2.26)$$

όπου η διαδρομή ολοκλήρωσης διέρχεται κάτω από το κλαδικό σημείο $\theta = kz_0$. Η ανωτέρω ανάλυση ισχύει τόσο για τον ακριβή όσο και για τον προσεγγιστικό πυρήνα.

Εξετάζουμε, αρχικά, την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα. Από τις (2.25) και (2.23) έχουμε:

$$\tilde{A}(\theta) \sim z_0 \bar{K}_{ex} \left(\frac{\theta}{z_0} \right) \left[\sin(\theta/2) / (\theta/2) \right]^2 \quad (2.27)$$

$$\tilde{B}(\theta) \sim -\frac{iV}{2k\zeta_0} \frac{(kz_0)^2}{\theta^2 - (kz_0)^2} \frac{1 + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\left[\sin(\theta/2) / (\theta/2) \right]^2} \quad (2.28)$$

καθώς $z_0 \rightarrow 0$, για κάθε θ . Αντικαθιστώντας στην (2.26), θέτοντας την μεταβλητή $\zeta = \theta/z_0$ και παίρνοντας το όριο καθώς $z_0 \rightarrow 0$, θεωρώντας την παράμετρο nz_0 σταθερή, παίρνουμε την σχέση:

$$I_{ex,n} \sim \frac{ikV}{\pi z_0} \int_0^\infty \frac{\cos(\zeta n z_0)}{(k^2 - \zeta^2) \bar{K}_{ex}(\zeta)} d\zeta \quad (2.29)$$

όπου η διαδρομή ολοκλήρωσης διέρχεται κάτωθεν του $\zeta = k$. Κατά συνέπεια, όπως αναμενόταν, το όριο της αριθμητικής λύσης για μηδενικό εύρος παλμού είναι ακριβώς η λύση (2.15) της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον ακριβή πυρήνα. Ως εκ τούτου, η αριθμητική μέθοδος αναπαράγει την λογαριθμική ιδιομορφία που παρατηρήσαμε στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας.

2.6 Η Άπειρη Κεραία: Αριθμητική Μέθοδος με τον Προσεγγιστικό Πυρήνα

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε την πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα. Αν $\bar{K} = \bar{K}_{ap}$ στην (2.25), τότε, όπως είναι αναμενόμενο, η (2.26) δεν έχει πεπερασμένη τιμή ορίου για $z_0 \rightarrow 0$. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της (2.29) αποκλίνει καθώς είναι εμφανές από την (2.12) ότι (βλέπε Παράρτημα Γ):

$$\bar{K}_{ap}(\zeta) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi a |\zeta|}} e^{-a|\zeta|} \quad (2.30)$$

για $a|\zeta| \gg 1$. Στη συνέχεια θα ερμηνεύσουμε την απόκλιση αυτή. Συγκεκριμένα, θα αναζητήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της (2.26) στηριζόμενοι στις συνθήκες:

$$\frac{z_0}{a} \ll 1 \text{ και } n \frac{z_0}{a} = O(1) \quad (2.31)$$

Σημειώνουμε ότι η πρώτη συνθήκη συνεπάγεται ότι $kz_0 \ll 1$. Από τις (2.25), (2.12) και (2.30) παρατηρούμε ότι:

$$\tilde{A}(\theta) \sim 4z_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\bar{K}_{ap}\left(\frac{\theta}{z_0}\right) \frac{1}{\theta^2} + \bar{K}_{ap}\left(\frac{2\pi-\theta}{z_0}\right) \frac{1}{(2\pi-\theta)^2} \right] \quad (2.32)$$

καθώς $z_0/a \rightarrow 0$ για $0 \leq \theta \leq \pi$. Έχοντας παραλείψει τους εκθετικά μικρότερους όρους του αθροίσματος στη (2.25), το δεξιό μέλος της (2.32) αποτελείται από τους όρους $m=0$ και $m=1$ της (2.25).

Αντικαθιστώντας την (2.32) στην (2.26) και θέτοντας $\phi = \pi - \theta$ παίρνουμε:

$$I_{ap,n} \sim \frac{(-1)^n}{4\pi z_0} \int_0^\pi \frac{\tilde{B}(\pi-\phi) / \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi-\phi}{z_0}\right) / (\pi-\phi)^2 + \bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi+\phi}{z_0}\right) / (\pi+\phi)^2} \cos(n\phi) d\phi \quad (2.33)$$

όπου η διαδρομή ολοκλήρωσης διέρχεται πάνω από το σημείο $\phi = \pi - kz_0$. Λόγω των (2.30) και (2.31), η κύρια συνεισφορά στην (2.33) προέρχεται από μία στενή περιοχή πλησίον του $\phi = 0$ (ή $\theta = \pi$ - αυτό δικαιολογεί την επιλογή των δύο όρων στην (2.32)).

Επομένως, μπορούμε να αμελήσουμε την συνεισφορά \int_1^π και να αντικαταστήσουμε το άνω άκρο ολοκλήρωσης στην (2.33) με την μονάδα ή με οποιαδήποτε άλλη ποσότητα της τάξης της μονάδας. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $\bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi-\phi}{z_0}\right)$ και $\bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi+\phi}{z_0}\right)$ από την (2.30). Σημειώνουμε ότι η ανωτέρω αντικατάσταση δεν ήταν εφικτή στο αρχικό διάστημα ολοκλήρωσης όπου το όρισμα του $\bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi-\phi}{z_0}\right)$ ήταν μικρό για $\phi = \pi$. Οι προαναφερθείσες προσεγγίσεις, και η αλλαγή μεταβλητής $x = \phi a / z_0$ στο προκύπτον ολοκλήρωμα οδηγούν στην:

$$I_{ap,n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} kz_0 \sqrt{\frac{z_0}{a}} (-1)^n e^{\frac{\pi a}{z_0}} f\left(\frac{z_0}{a}, ka, n \frac{z_0}{a}\right) \quad (2.34)$$

όπου η f δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$f\left(\frac{z_0}{a}, ka, n\frac{z_0}{a}\right) = \int_0^{a/z_0} g\left(x; \frac{z_0}{a}, ka\right) \cos\left(n\frac{z_0}{a}x\right) dx \quad (2.35)$$

στο οποίο:

$$g\left(x; \frac{z_0}{a}, ka\right) = \frac{\tilde{B}\left(\pi - \frac{z_0}{a}x\right) / \left[kz_0^2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\frac{z_0}{a}x\right) \right]}{e^x \left(\pi - \frac{z_0}{a}x\right)^{-5/2} + e^{-x} \left(\pi + \frac{z_0}{a}x\right)^{-5/2}}. \quad (2.36)$$

Η συνάρτηση f εξαρτάται από το όρισμά της z_0/a καθώς η παράμετρος a/z_0 αποτελεί το άνω άκρο ολοκλήρωσης στην (2.35) και επιπλέον επειδή η g εξαρτάται από το z_0/a . Μπορεί να επιβεβαιωθεί από την (2.23) ότι (εκτός από τον παράγοντα V/ζ_0) η g είναι πράγματι συνάρτηση των $x, z_0/a$ και ka .

Στη συνέχεια θα προσεγγίσουμε την f από τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor αυτής με κέντρο το σημείο $z_0/a=0$, διατηρώντας τα ka και nz_0/a σταθερά. Οι απαιτούμενες παραγωγίσεις μπορούν να υλοποιηθούν με την χρήση του τύπου του Leibniz (1.21), που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, απ' όπου προκύπτει ότι το ζητούμενο ανάπτυγμα μπορεί να βρεθεί αναπτύσσοντας την g σε δυνάμεις του z_0/a και ολοκληρώνοντας από 0 έως ∞ στην (2.35). Χρησιμοποιώντας την (2.23):

$$g\left(x; \frac{z_0}{a}, ka\right) = -i \frac{V}{\zeta_0} \frac{\pi^{5/2}}{16} \frac{1}{\cosh x} \left(1 - \frac{5}{2\pi} \frac{z_0}{a} x \tanh x\right) + O\left(\left(\frac{z_0}{a}\right)^2\right) \quad (2.37)$$

Αν η (2.37) αντικατασταθεί στην (2.35) και το άνω άκρο ολοκλήρωσης τεθεί ίσο με ∞ προκύπτουν δύο ολοκληρώματα τα οποία μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά σύμφωνα με τους γνωστούς πίνακες ολοκληρωμάτων ή με τη χρήση συμβολικών γλωσσών προγραμματισμού. Η αντικατάσταση της προκύπτουσας σχέσης στην (2.34) δίνει το τελικό αποτέλεσμα για τις συνθήκες (2.31):

$$I_{ap,n} \sim -i \frac{V}{\zeta_0} \frac{\pi^3}{32\sqrt{2}} k z_0 \sqrt{\frac{z_0}{a}} (-1)^n e^{\frac{\pi a}{z_0}} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi z_0}{2a} n\right)} \left[1 - \frac{5}{2\pi} \frac{z_0}{a} + \frac{5}{4} n \left(\frac{z_0}{a}\right)^2 \tanh\left(\frac{\pi z_0}{2a} n\right) \right] \quad (2.38)$$

όπου η ποσότητα εντός των αγκύλων αποτελεί απλά έναν παράγοντα διόρθωσης.

Συνεπώς, όταν το πλάτος του παλμού είναι μικρό, η αριθμητική μέθοδος δίνει μία εκθετικά μεγάλη και καθαρά φανταστική «είσοδο τροφοδοσίας» («driving-point admittance») και ένα εκθετικά μεγάλο, καθαρά φανταστικό και ταχέως ταλαντούμενο «ρεύμα» τουλάχιστον για τα σημεία πλησίον του σημείου τροφοδοσίας. Αν και η (2.38) αφορά την άπειρη σε μήκος κεραία, η συμπεριφορά της μπορεί να συνδεθεί με την αντίστοιχη συμπεριφορά των αριθμητικών αποτελεσμάτων (πλησίον του σημείου τροφοδοσίας) που εξάγονται για την αντίστοιχη πεπερασμένη. Η εξίσωση (2.38) ερμηνεύει, σαφώς, τις συνέπειες της μη επιλυσιμότητας της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Καθιστά εμφανές το γεγονός ότι οι παρατηρούμενες ταλαντώσεις, πλησίον του $z=0$, στο φανταστικό μέρος του ρεύματος στην πεπερασμένη κεραία είναι συνέπεια της μη επιλυσιμότητας της (2.1) με τον προσεγγιστικό πυρήνα και δεν οφείλονται σε πιθανά σφάλματα στρογγυλοποίησης. Το τελευταίο επαληθεύεται, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα της πεπερασμένης κεραίας κοντά στο κέντρο αυτής με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της σχέσης (2.38). Θα δούμε μάλιστα ότι καθώς η παράμετρος z_0/a μικραίνει τα προαναφερθέντα αποτελέσματα είναι ολοένα και πιο κοντινά.

Από την άλλη πλευρά, αν αντικαταστήσουμε στην (2.29) τον προσεγγιστικό πυρήνα (2.12), θέσουμε:

$$w(\zeta) = \frac{1}{\bar{K}_{ap}(\zeta)}, \quad (2.39)$$

και πάρουμε το πραγματικό μέρος της προκύπτουσας σχέσης έχουμε:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{I_{ap,n}}{V} \right\} \sim -\frac{k}{\pi \zeta_0} \int_0^\infty \operatorname{Im} \{ w(\zeta) \} \frac{\cos(\zeta n z_0)}{(k^2 - \zeta^2)} d\zeta, \quad \text{καθώς } z_0 \rightarrow 0 \quad (2.40)$$

όπου και πάλι το $\zeta = k$ αποτελεί κλαδικό σημείο. Από την (2.12) όμως προκύπτει ότι η $w(\zeta)$, για $|\zeta| > k$, είναι καθαρά πραγματική συνάρτηση. Επιπλέον από τις γνωστές ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel [28, παρ. 10] προκύπτει ότι για $|\zeta| < k$:

$$\operatorname{Im}\{w(\zeta)\} = -\frac{4J_0\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)}{\left[J_0^2\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right) + Y_0^2\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)\right]}. \quad (2.41)$$

Αντικαθιστώντας την (2.41) στην (2.40) και παίρνοντας το όριο $z_0 \rightarrow 0$, θεωρώντας το nz_0 σταθερό, καταλήγουμε στην σχέση:

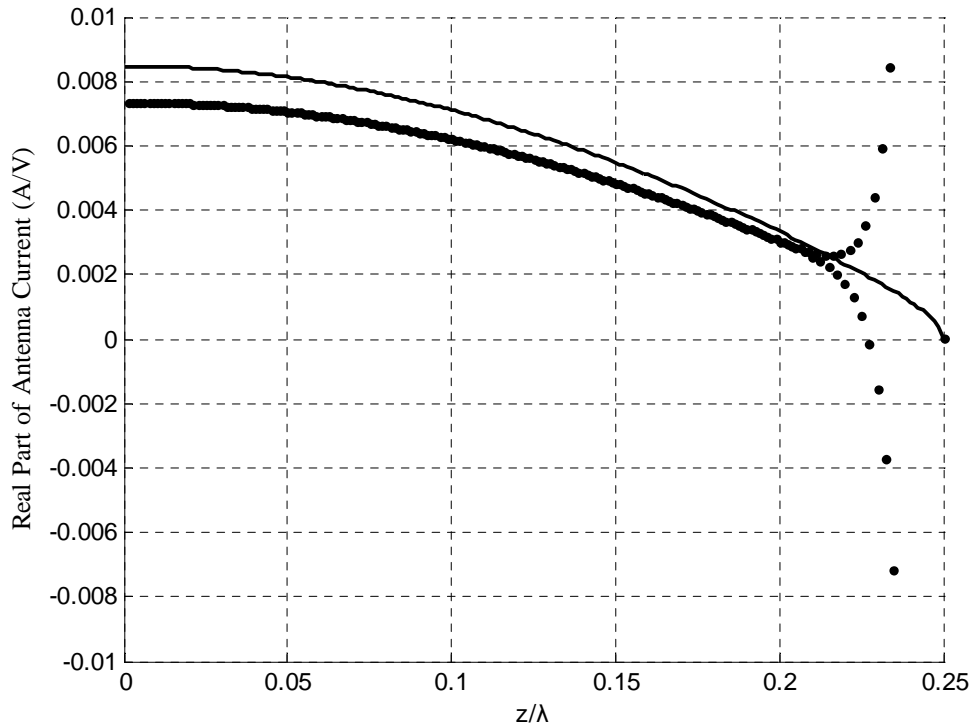
$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \operatorname{Re}\left\{\frac{I_{ap,n}}{V}\right\} = \frac{4k}{\pi\zeta_0} \int_0^k \frac{J_0\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right) \cos(\zeta nz_0)}{(k^2 - \zeta^2) \left[J_0^2\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right) + Y_0^2\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)\right]} d\zeta \quad (2.42)$$

που σημαίνει ότι η αριθμητική μέθοδος δίνει πεπερασμένο πραγματικό μέρος για το ρεύμα. Όπως φαίνεται στην [2, (8.134)] το πραγματικό αυτό μέρος του ρεύματος είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο πραγματικό μέρος της λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον ακριβή πυρήνα. Τα δύο ανωτέρω μεγέθη ταυτίζονται στο όριο $ka \rightarrow 0$.

2.7 Πεπερασμένη Κεραία και Αριθμητικά Αποτελέσματα: Συσχετισμός με την Άπειρη Κεραία

Επιστρέφουμε πάλι στην περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας. Υποθέτουμε ότι $z_0/\lambda \ll a/\lambda$ και εξετάζουμε τις αριθμητικές λύσεις βασισμένοι στα αναλυτικά αποτελέσματα για την άπειρη κεραία. Στην περίπτωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον ακριβή πυρήνα, η αριθμητική λύση αναπαράγει την λογαριθμική ιδιομορφία της συνάρτησης $\operatorname{Im}\{I_{ex}(z)/V\}$ που συναντήσαμε στην άπειρη κεραία. Για την ολοκληρωτική εξίσωση με τον προσεγγιστικό πυρήνα, το μέγεθος $\operatorname{Re}\{I_{ap,n}/V\}$ είναι κοντά στο $\operatorname{Re}\{I_{ex,n}/V\}$ ενώ, πλησίον του σημείου τροφοδοσίας, το $\operatorname{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ παρουσιάζει μεγάλες, ταλαντούμενες τιμές. Οι τελευταίες μάλιστα είναι, κατά

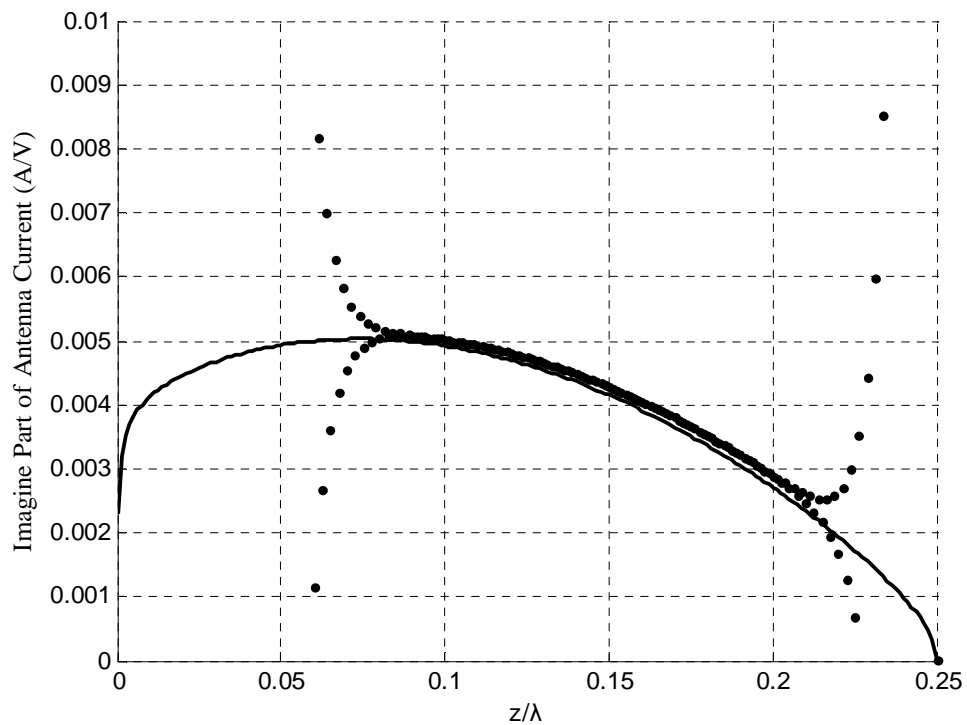
προσέγγιση, πολύ κοντά στις αντίστοιχες τιμές του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ όπως υπολογίστηκαν από την ασυμπτωτική έκφραση (2.38) για την άπειρη κεραία.



Σχήμα 2.1: $\text{Re}\{I_{ex}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή) και $\text{Re}\{I_{ap}(z)/V\}$ (σημεία) όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2. $N=200$, $a/\lambda=0.007022$, $h/\lambda=0.25$. Κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές πλησίον του $z/\lambda=0.25$ είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται.

Στα Σχήματα 2.1, 2.2 και στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για τιμές παραμέτρων $N=200$, $h/\lambda=0.25$ και $a/\lambda=0.007022$ έτσι ώστε $a/z_0=5.6$, που είναι σχετικά μεγάλο. Στο Σχήμα 2.1 απεικονίζεται το μέγεθος $\text{Re}\{I_n/V\}$. Οι τιμές του $\text{Re}\{I_{ex,n}/V\}$, $n=0,1,\dots,N$ παρίστανται με μία συνεχή γραμμή ενώ οι τιμές του $\text{Re}\{I_{ap,n}/V\}$ με σημεία. Πλην των τιμών πλησίον του $z=h$, οι δύο λύσεις φαίνεται να είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους. Στο Σχήμα 2.2 απεικονίζονται τα αντίστοιχα φανταστικά μέρη του ρεύματος. Παρατηρούμε ότι για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα, είναι εμφανής η παρουσία λογαριθμικής ιδιομορφίας. Για τον

προσεγγιστικό πυρήνα απεικονίζονται μόνο οι τιμές του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ μεταξύ του μηδενός και του 0.01. Οι υπόλοιπες τιμές είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται. Επιπλέον, οι πρώτες 32 τιμές (πλησίον του σημείου τροφοδοσίας) δίνονται στον Πίνακα 2.2, όπου συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της ασυμπτωτικής σχέσης (2.38). Είναι εμφανές ότι οι τιμές συγκλίνουν αρκετά μεταξύ τους. Επομένως, για μεγάλες τιμές του a/z_0 , οι πρώτες τιμές του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ είναι ανεξάρτητες από το μήκος h/λ της κεραίας και εξαρτώνται μόνο από τις παραμέτρους a/λ και z_0/λ . Αυτός είναι ο λόγος που οι τιμές του $\text{Im}\{I_{ap,0}/V\}$ στον Πίνακα 2.1 είναι σχεδόν ίσες για τα δύο μήκη κεραίων. Στον Πίνακα 2.2 οι δύο ποσότητες είναι κοντά μεταξύ τους ακόμη και για τιμές του n μεγαλύτερες του a/z_0 . Για επιλογές παραμέτρων που οδηγούν σε μεγαλύτερες τιμές του a/z_0 , η ανωτέρω συμφωνία γίνεται καλύτερη.



Σχήμα 2.2: $\text{Im}\{I_{ex}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή) και $\text{Im}\{I_{ap}(z)/V\}$ (σημεία) όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2. $N=200$, $a/\lambda=0.007022$, $h/\lambda=0.25$. Κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές πλησίον των $z/\lambda=0$ και $z/\lambda=0.25$ είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται.

N=200	$\text{Im}(I_{ap,n}/V)$	$I_{ap,n}^{(\infty)}/iV$	N=200	$\text{Im}(I_{ap,n}/V)$	$I_{ap,n}^{(\infty)}/iV$
	(A/V)	(A/V)		(A/V)	(A/V)
n=0	-266	-249	n=16	-9.85	-9.95
n=1	257	243	n=17	7.72	7.73
n=2	-233	-225	n=18	-6.04	-6.00
n=3	201	199	n=19	4.74	4.65
n=4	-167	-169	n=20	-3.70	-3.61
n=5	136	140	n=21	2.91	2.79
n=6	-109	-113	n=22	-2.27	-2.16
n=7	87.0	90.6	n=23	1.78	1.67
n=8	-68.7	-71.8	n=24	-1.39	-1.30
n=9	54.1	56.6	n=25	1.10	1.00
n=10	-42.5	-44.4	n=26	-0.850	-0.774
n=11	33.4	34.7	n=27	0.674	0.598
n=12	-26.2	-27.1	n=28	-0.519	-0.462
n=13	20.5	21.1	n=29	0.415	0.356
n=14	-16.1	-16.5	n=30	-0.316	-0.275
n=15	12.6	12.8	n=31	0.257	0.212

Πίνακας 2.2: Σύγκριση των πρώτων 32 τιμών του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ για την πεπερασμένη κεραία όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 2.2 με τις αντίστοιχες τιμές του $I_{ap,n}^{(\infty)}/iV$ (για την άπειρη κεραία) όπως υπολογίστηκαν από την ασυμπτωτική έκφραση (2.38). $N=200$, $\alpha/\lambda=0.007022$ και $h/\lambda=0.25$.

Στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, παρατηρούμε ότι, κοντά στο άκρο $z=h$, τα διαγράμματα των Σχημάτων 2.1 και 2.2 παρουσιάζουν ταλαντούμενη συμπεριφορά. Οι ταλαντώσεις, στην περίπτωση αυτή, είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες που παρουσιάζει το φανταστικό μέρος του ρεύματος κοντά στο $z=0$. Όπως είναι φυσικό, το φαινόμενο αυτό δεν παρατηρείται στην, κεντρικά τροφοδοτούμενη, άπειρη κεραία η οποία δεν έχει άκρα. Παρόμοιες ταλαντώσεις συναντούμε κατά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου στην ολοκληρωτική εξίσωση [6, (2.66)] για την, χωρίς φορτίο, πεπερασμένη κεραία λήψης. Σχετικά αποτελέσματα

παρουσιάζονται στο [29]. Επομένως, το φαινόμενο αυτό, όπως θα δούμε με λεπτομέρεια στο επόμενο κεφάλαιο, δεν πρέπει να αποδοθεί στην ΓΔΣ.

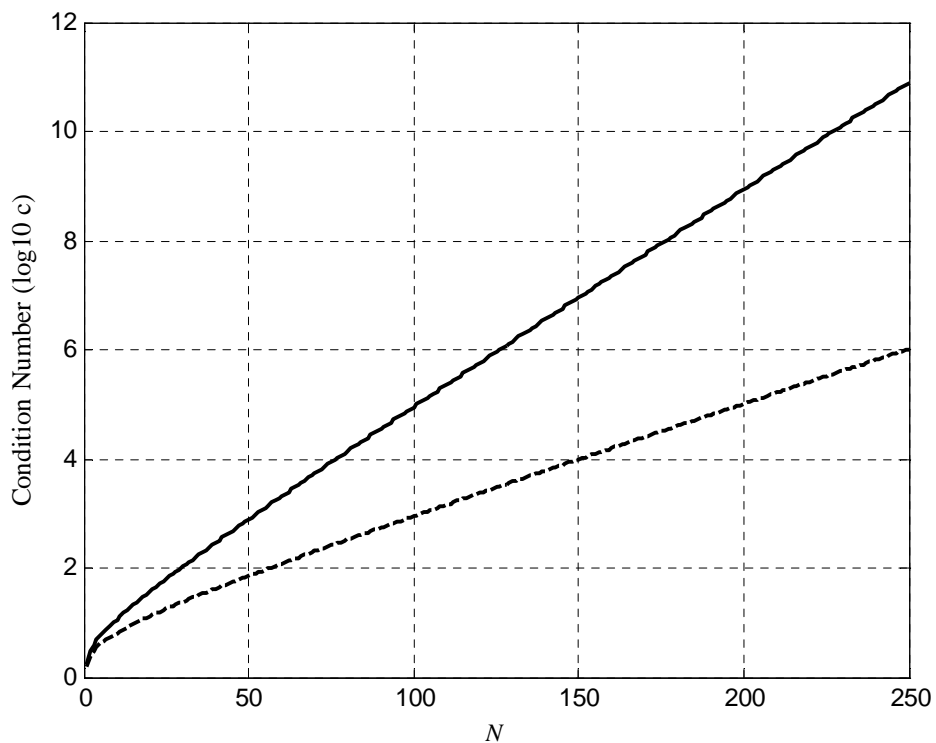
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε, λεπτομερώς, την ομοιότητα που παρουσιάζουν οι αγωγιμότητες $\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$ και $\text{Re}\{I_{ap,0}/V\}$ στο σημείο τροφοδοσίας, υποθέτοντας ότι το z_0/λ είναι μικρό και έχει την ίδια τιμή και στις δύο περιπτώσεις. Όταν το μήκος της κεραίας h/λ είναι σταθερό, η διαφορά μεταξύ των δύο μεγεθών μικραίνει καθώς το a/λ παίρνει μικρότερες τιμές, όπως άλλωστε συμβαίνει και στην άπειρη κεραία. Όταν η παράμετρος a/λ είναι σταθερή, τα δύο ανωτέρω μεγέθη εξαρτώνται σημαντικά από το h/λ , ομοίως και η διαφορά τους. Αριθμητικοί υπολογισμοί με $h/\lambda \leq 0.5$ δείχνουν ότι, με εξαίρεση την περιοχή κοντά στον συντονισμό, οι δύο λύσεις συγκλίνουν περισσότερο καθώς το μήκος h/λ μεγαλώνει. Αυτό συμβαίνει διότι, καθώς το h/λ παίρνει μεγαλύτερες τιμές, η διαφορά μεταξύ των δύο πυρήνων αμβλύνεται. Στην περιοχή πλησίον του συντονισμού, η επίδραση της παραμέτρου h/λ είναι πιο έντονη [3], [6]. Κοντά στον συντονισμό, ή όταν το h/λ είναι μικρό και το a/λ μεγάλο, η διαφορά μεταξύ των $\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$ και $\text{Re}\{I_{ap,0}/V\}$ μπορεί να είναι σημαντική. Για παράδειγμα, στην πρώτη περίπτωση του Πίνακα 2.1 η διαφορά προσεγγίζει το 13%. Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαφορά αυτή αυξάνεται, ελαφρώς, αν το N αυξηθεί στο 120.

Στην πράξη, τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος της κατανομής του ρεύματος είναι εξίσου σημαντικά. Έχοντας εξετάσει την συμπεριφορά της λύσης για μεγάλες τιμές του N , προκύπτει το ζήτημα της βελτιστοποίησης της αριθμητικής μεθόδου που εφαρμόζουμε. Συγκεκριμένα, αναζητούμε την βέλτιστη επιλογή για την παράμετρο N . Το σύνηθες κριτήριο επιλογής του N , όταν εφαρμόζουμε αριθμητικές μεθόδους, είναι η επιλογή της μέγιστης δυνατής τιμής του ώστε, παράλληλα, η τελική λύση να συγκλίνει σε μία ικανοποιητική τιμή. Για τον ακριβή πυρήνα, ένα τέτοιο κριτήριο είναι χρήσιμο μόνο στην περίπτωση που το τελευταίο αγνοεί τις τιμές του $\text{Im}\{I_{ex,n}/V\}$ για μικρές τιμές του n . Αυτό συμβαίνει διότι, λόγω της λογαριθμικής ιδιομορφίας που παρουσιάζει η επιδεκτικότητα ($\text{Im}\{I_{ex}(0)/V\} = -\infty$) στην είσοδο της κεραίας, δεν δύναται να βρεθεί κατάλληλη τιμή του N (κριτήριο σύγκλισης) ώστε η σύνθετη αγωγιμότητα (ή αντίσταση) εισόδου, στην περίπτωση του ακριβούς πυρήνα, να συγκλίνει σε μία ικανοποιητική τιμή.

Για τον προσεγγιστικό πυρήνα επίσης, το ανωτέρω κριτήριο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Επειδή, κατά τον υπολογισμό του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$, παρατηρούμε ταλαντώσεις πλησίον του σημείου τροφοδοσίας όταν $z_0/\lambda \ll a/\lambda$ ή $N \gg h/a$, είναι αναγκαίο να επιλέξουμε μήκος παλμού z_0/λ μεγαλύτερο ή κατά προσέγγιση ίσο με a/λ (ή N μικρότερο ή προσεγγιστικά ίσο με h/a). Με τιμές των h/λ και a/λ αυτές της πρώτης περίπτωσης του Πίνακα 2.1, ο λόγος h/a είναι ίσος με 25, και είναι αισθητή η παρουσία ταλαντώσεων ακόμα και για $N=30$. Όπως είναι εμφανές, η βέλτιστη τιμή για το N είναι αυτή που δίνει αποτελέσματα όσο το δυνατόν πλησιέστερα στα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν για τον ακριβή πυρήνα. Ωστόσο, ένας αριθμοί υπολογισμός της τιμής αυτής δεν είναι δυνατός. Στην πραγματικότητα, το κριτήριο σύγκλισης μεταξύ των ανωτέρω λύσεων μπορεί να διατυπωθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι λύσεις προσεγγίζουν η μία την άλλη όταν οι αγωγιμότητες στο σημείο τροφοδοσίας συγκλίνουν μεταξύ τους, ή όταν οι τιμές του $\text{Im}\{I_{ex,n}/V\}$ είναι κοντά σ' αυτές του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ για $1 \ll n \ll N$.

Κλείνουμε την παρούσα παράγραφο με μία αναφορά στα σφάλματα στρογγυλοποίησης, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στις ιδιότητες των πινάκων της (2.5). Οι πίνακες που προκύπτουν από την διακριτοποίηση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm πρώτης τάξης, όπως είναι η εξίσωση που εξετάζουμε, έχουν, τυπικά, μεγάλο δείκτη κατάστασης (condition number). Σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής $Ax = b$, ο ανωτέρω δείκτης ορίζεται ως η μέγιστη τιμή του λόγου του σχετικού σφάλματος της ζητούμενης λύσης x προς το αντίστοιχο σφάλμα του πίνακα b και υπολογίζεται μέσω του γινομένου $\|A\| \|A^{-1}\|$ όπου ο τελεστής $\|\cdot\|$, στην παρούσα διατριβή, αντιστοιχεί στη νόρμα $1^{\text{ης}}$ τάξης (βλέπε Σχήματα 2.3 και 4.5). Στην ανωτέρω σχέση δύναται να χρησιμοποιηθεί και άλλου τύπου νόρμα όπως για παράδειγμα η νόρμα $2^{\text{ης}}$ τάξης $\|\cdot\|_2$, απειροστής τάξης $\|\cdot\|_\infty$ ή η νόρμα του Frobenius $\|\cdot\|_F$ ορίζοντας αντίστοιχα τον δείκτη κατάστασης $2^{\text{ης}}$ τάξης, απειροστής τάξης ή Frobenius. Ο δείκτης κατάστασης έχει τιμές μεγαλύτερες της μονάδας και όπως προκύπτει από τον ορισμό του είναι ενδεικτικό της ευαισθησίας των πινάκων σε σφάλματα στρογγυλοποίησης. Συνεπώς, η παρουσία πινάκων με μεγάλο δείκτη κατάστασης σε ένα γραμμικό σύστημα, όπως το (2.5), το καθιστούν ευαίσθητο σε τέτοιου είδους σφάλματα. Πιο

συγκεκριμένα, στην περίπτωση του συστήματος (2.5) μέτρο της προαναφερθείσας ευαισθησίας αποτελεί ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A [30]. Συνήθως, η ευαισθησία του συστήματος εξαρτάται από την συνάρτηση του πυρήνα που εφαρμόζεται στην ολοκληρωτική εξίσωση. Συγκεκριμένα, όσο πιο ομαλή είναι η συνάρτηση του πυρήνα τόσο μεγαλύτερη είναι η ευαισθησία (και κατ' επέκταση ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A). Στην περίπτωση εφαρμογής της $K_{ex}(z)$, για παράδειγμα, που παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία στο $z=0$ για κάθε τιμή του ka , τα αριθμητικά αποτελέσματα δεν επηρεάζονται σημαντικά από σφάλματα στρογγυλοποίησης. Με άλλα λόγια, ένας συνηθισμένος σημερινός υπολογιστής μπορεί εύκολα να επιλύσει γραμμικά συστήματα με τον ανωτέρω πυρήνα (όπως αυτό στην (2.5)) χωρίς σφάλματα, ακόμα και για πολύ μεγάλες τιμές του N . Σχετικές αναφορές γίνονται στην [24].



Σχήμα 2.3: Λογάριθμος του δείκτη κατάστασης c (1^{th} νόρμας) ως συνάρτηση του N . $h/\lambda=0.25$, $a/\lambda=0.007022$ και $h/\lambda=0.5$, $a/\lambda=0.014044$ (συνεχής γραμμή); $h/\lambda=0.5$, $a/\lambda=0.007022$ (διακεκομμένη γραμμή). Παρατηρούμε ότι όταν ο λόγος h/a είναι σταθερός, τα διαγράμματα συμπίπτουν στην κλίμακα του σχήματος.

Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, η κατάσταση είναι διαφορετική. Η $K_{ap}(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση του z αλλά το πραγματικό της μέρος όταν $ka \ll 1$ παρουσιάζει μία μεγάλη κορυφή στο $z=0$. Αριθμητικά αποτελέσματα (συγκεκριμένα, εκτιμήσεις του δείκτη κατάστασης - βλέπε Σχήμα 2.3) δείχνουν ότι η παράμετρος a/z_0 (ή Na/h) είναι αυτή που επηρεάζει σημαντικά την ευαισθησία του συστήματος (2.5) (δείκτη κατάστασης). Όταν έχει μεγάλες τιμές ο δείκτης κατάστασης και, επομένως, η ευαισθησία του συστήματος αυξάνονται ραγδαία. Για δεδομένες τιμές των a/λ και h/λ , καθώς το N αυξάνει, το σφάλμα στρογγυλοποίησης γίνεται, ταχέως, ο επικρατέστερος παράγοντας, επισκιάζοντας την πραγματική συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης. Στο Σχήμα 2.3 απεικονίζεται η σχέση μεταξύ της παραμέτρου N και του δείκτη κατάστασης (1^{ns} νόρμας). Σημειώνουμε ότι τα διαγράμματα του Σχήματος 2.3 δεν αφορούν μόνο την ΓΔΣ. Εξαρτώνται, μόνο, από το αριστερό μέλος της εξίσωσης του Hallén με τον προσεγγιστικό πυρήνα και συνεπώς είναι ανεξάρτητα της πηγής που διεγείρει την κεραία (δεξί μέλος της HE). Όπως θα δούμε στη συνέχεια τα διαγράμματα αυτά συμπίπτουν και με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την εφαρμογή άλλων αριθμητικών μεθόδων στην HE στις οποίες τα στοιχεία του πίνακα A είναι κοινά για κοινές τιμές παραμέτρων.

2.8 Επεκτάσεις σε Άλλες Αριθμητικές Μεθόδους και Εξισώσεις

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε κάποιες επεκτάσεις, των συμπερασμάτων που εξήχθησαν ανωτέρω, σε άλλες αριθμητικές μεθόδους και εξισώσεις. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε ποια από τα αποτελέσματα που προσδιορίσαμε είναι ανεξάρτητα από την επιλογή των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής και ποια όχι.

Επέκταση (1): Αρχικά αποδεικνύουμε ότι, με μία απλή τροποποίηση, τα σπουδαιότερα συμπεράσματα που προσδιορίσαμε ισχύουν και για μία άλλη αριθμητική μέθοδο. Στην μέθοδο αυτή (που θα αποκαλούμε «Μέθοδο B») υποθέτουμε λύση της

μορφής $I(z) \cong \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n t_n(z)$, $|n| \leq N-1$. Οι παράμετροι N και z_0 συνδέονται με την

σχέση $Nz_0=h$. $t_n(z)$ είναι η τριγωνική συνάρτηση που δίνεται στην (1.39). Οι

άγνωστοι I_n και C υπολογίζονται ώστε η (2.1) να είναι αληθής στα σημεία $z = lz_0$, $|l| \leq N$. Το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} I_n = \frac{iVz_0}{2\zeta_0} \sin(k|l|z_0) + z_0 C \cos(klz_0), \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (2.43)$$

όπου οι συντελεστές A_l δίνονται από την (2.6). Η Μέθοδος B μπορεί να υλοποιηθεί όπως η αρχική μας μέθοδος, δεδομένου ότι η (2.43) είναι ισοδύναμη με την (2.7) και τα δύο συστήματα Toeplitz στην (2.5), με $I_n = I_n^{(1)} + CI_n^{(2)}$, $I_{\pm N} = 0$, $B_l^{(1)} = (iVz_0 / 2\zeta_0) \sin(k|l|z_0)$ και $B_l^{(2)} = z_0 \cos(klz_0)$.

Παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων έγκειται αποκλειστικά στην διαφορά μεταξύ των μεγεθών $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ στις δύο περιπτώσεις. Αν $B_{l,B}^{(1)}$ και $B_{l,B}^{(2)}$ τα μεγέθη αυτά στην Μέθοδο B και $B_l^{(1)}$, $B_l^{(2)}$ τα αντίστοιχα μεγέθη της αρχικής μεθόδου, εύκολα προκύπτει, από τα ανωτέρω και τις (2.3α)-(2.3β), ότι για την πεπερασμένη κεραία:

$$\frac{B_{l,B}^{(2)}}{B_l^{(2)}} = \frac{kz_0 / 2}{\sin(kz_0 / 2)} \quad (2.44)$$

και

$$\frac{B_{l,B}^{(1)}}{B_l^{(1)}} = \begin{cases} \frac{kz_0 / 2}{\sin(kz_0 / 2)}, & l \neq 0 \\ 0, & l = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Συνεπώς, η αριθμητική μέθοδος της παραγράφου 2.2 έχει έναν επιπλέον όρο για $l = 0$. Οι υπόλοιποι όροι διαφέρουν ως προς έναν ολικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα ο οποίος τείνει στην μονάδα καθώς $kz_0 \rightarrow 0$.

Εφαρμόζοντας την Μέθοδο B στην άπειρη κεραία (βλέπε εξίσωση (2.9)) υποθέτουμε λύση της μορφής:

$$I(z) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n t_n(z), \quad |z| < +\infty \quad (2.46)$$

όπου η $t_n(z)$ δίνεται στην (1.39). Υποθέτοντας ότι η (2.9) ικανοποιείται στα σημεία $z = lz_0$ με $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ και πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (2.9) με z_0 , προκύπτει το σύστημα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{l-n} I_n = \frac{z_0}{2\zeta_0} V e^{ik|l|z_0}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.47)$$

όπου οι συντελεστές A_l δίνονται από την (2.6). Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (2.19)-(2.20) και (2.47), των δύο μεθόδων αντίστοιχα, διαφέρουν μόνο ως προς τον όρο B_l και μάλιστα, αν B_l^B ο όρος αυτός στην περίπτωση της Μεθόδου Β, από τις (2.20) και (2.47) παίρνουμε:

$$\frac{B_l^B}{B_l} = \frac{kz_0/2}{\sin(kz_0/2)} \begin{cases} 1, & l \neq 0 \\ \frac{1}{1+i \tan\left(\frac{kz_0}{4}\right)}, & l = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Επομένως, οι όροι του δεξιού μέλους της (2.47) (Μέθοδος Β) διαφέρουν από τους αντίστοιχους της (2.19) (αρχική μέθοδος) κατά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα ο οποίος τείνει στην μονάδα καθώς $kz_0 \rightarrow 0$ για κάθε τιμή του l . Ακολουθώντας τις διαδικασίες των παραγράφων 2.5 και 2.6 παρατηρούμε ότι (βλέπε Παράρτημα Β):

α) με τον ακριβή πυρήνα, καταλήγουμε στην εξίσωση (2.29) και κατ' επέκταση στην (2.15) καθώς $z_0 \rightarrow 0$, όπως και στην προηγούμενη αριθμητική μέθοδο,

β) με τον προσεγγιστικό πυρήνα, ενώ η (2.42) εξακολουθεί να ισχύει, το δεξί μέλος της (2.38) πρέπει να τροποποιηθεί. Η τροποποίηση έγκειται στην προσθήκη του παράγοντα 2 στον ασυμπτωτικό τύπο (2.38).

Για την πεπερασμένη κεραία, έχει επαληθευτεί από τους αριθμητικούς υπολογισμούς ότι, για μικρά n , οι τιμές του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ που προκύπτουν από την Μέθοδο Β όταν $z_0/\lambda \ll a/\lambda$ είναι μεγάλες, ταλαντώνονται ραγδαία και προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις αντίστοιχες τιμές της τροποποιημένης (2.38).

Επέκταση (2): Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, αναφέρουμε εν συντομία άλλες μορφές της Μεθόδου των Ροπών [10], υποθέτοντας έναν μεγάλο αριθμό από συναρτήσεις βάσης: δεν μπορούμε να αναμένουμε (όπως επιβεβαιώνει ο παράγοντας 2 που αναφέραμε ανωτέρω) τα ίδια αποτελέσματα εάν εφαρμόσουμε άλλες αριθμητικές μεθόδους και συνεπώς τα ποσοτικά αποτελέσματα, όπως η ασυμπτωτική έκφραση (2.38), ισχύουν μόνο όταν εφαρμοστεί η αριθμητική μέθοδος που αναλύσαμε στην παράγραφο 2.2. Από ποιοτικής απόψεως, ωστόσο, πολλά από τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου ισχύουν για άλλες αριθμητικές μεθόδους. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Galerkin με άρτιο αριθμό $2N$ παλμικών συναρτήσεων. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με την τροποποίηση της (2.3α) στη μορφή:

$$\int_0^h [K(z-z') + K(z+z')] I^{(1)}(z') dz' = \frac{i}{2\zeta_0} V \sin(k|z|), \quad 0 < z < h \quad (2.49)$$

(ομοίως για την εξίσωση (2.3β)), χρησιμοποιώντας N παλμικές συναρτήσεις στο διάστημα $(0, h)$. Όταν $N \gg h/\lambda$, παίρνουμε λύσεις με μεγάλες, ταχέως ταλαντούμενες τιμές. Παρόμοιες λύσεις παίρνουμε χρησιμοποιώντας την Τεχνική Σημειακής Ισότητας - ΤΣΙ (Point – Matching Technique) για τον υπολογισμό των συντελεστών των N παλμικών συναρτήσεων, ή όταν εφαρμόζουμε την μέθοδο Galerkin με την υπέρθεση τριγώνων [10] (με μισά τρίγωνα στα άκρα $z=0$ και $z=h$) ως συναρτήσεων βάσης. Αν αντικαταστήσουμε τα προαναφερθέντα τρίγωνα με τις τμηματικά ημιτονοειδής συναρτήσεις της εξίσωσης (1.40), οι λύσεις παραμένουν οπτικά ταυτόσημες [16], [31].

Επέκταση (3): Ο προσεγγιστικός πυρήνας (η επεκτάσεις αυτού) χρησιμοποιείται και σε άλλες ολοκληρωτικές ή ολοκληρωτικο-διαφορικές εξισώσεις κατανομών ρεύματος σε γραμμικές κεραίες. Τέτοιου είδους εξισώσεις, επίσης, χρησιμοποιούνται

και σε μη ευθύγραμμες κεραίες. Για τις ανωτέρω εξισώσεις έχουν αναφερθεί στην βιβλιογραφία [14], [15], [17], [32] λύσεις με μεγάλες και ραγδαίως ταλαντούμενες τιμές (όταν ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης είναι μεγάλος). Η ανάλυση μας στο παρόν κεφάλαιο, αν και δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμη σε πιο πολύπλοκες περιπτώσεις, αποτελεί ένδειξη ότι οι παρατηρούμενες ταλαντώσεις δεν οφείλονται σε σφάλματα στρογγυλοποίησης, και θα παρατηρούνταν ακόμα και στην περίπτωση χρήσης υπολογιστών με άπειρο μήκος λέξης.

Επέκταση (4): Η εξίσωση που προκύπτει από την εφαρμογή του τελεστή $\mathfrak{S} = \partial^2 / \partial z^2 + k^2$ στην (2.1) είναι:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-h}^{+h} K(z-z') I(z') dz' = \frac{iVk}{\zeta_0} \delta(z), \quad |z| < h \quad (2.50)$$

Η εξίσωση (2.50), η οποία (για το σωληνοειδές δίπολο) πρέπει να λυθεί λαμβάνοντας υπόψη την συνθήκη $I(\pm h) = 0$, είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης Pocklington (1.17) για την ΓΔΣ και απαιτεί διαφορετική ανάλυση. Για συντομία, υλοποιούμε όλους τους υπολογισμούς θεωρώντας μόνο την περίπτωση όπου $K = K_{ap}$. Με $Nz_0 = h$, υποθέτουμε («Μέθοδος Γ») ως συναρτήσεις βάσης $2N-1$, σε πλήθος, τριγωνικές συναρτήσεις $t_n(z)$ και ως συναρτήσεις δοκιμής, της τμηματικά ημιτονοειδής συναρτήσεις της (1.40). Όπως έχει τονιστεί στο [31] η ανωτέρω μέθοδος οδηγεί στον υπολογισμό απλών ολοκληρωτικών εκφράσεων, χωρίς παραγώγους, για τα στοιχεία του πίνακα A . Στην [16] αποδεικνύεται αναλυτικά ότι τα αποτελέσματα $I_{ap,n}$ που προκύπτουν για κάθε πεπερασμένη τιμή του N , ελλείπει σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, ταυτίζονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της Μεθόδου Β στην (2.1). Η τελευταία παρατήρηση επαληθεύεται αριθμητικά στην [33, παρ. 6]. Επίσης στην [33, παρ. 5] αποδεικνύεται αναλυτικά ότι τα αποτελέσματα που εξάγονται, κατά την εφαρμογή των δύο μεθόδων, στην άπειρη κεραία ταυτίζονται. Κατά συνέπεια, τα σημαντικότερα συμπεράσματα των προηγούμενων παραγράφων, εξακολουθούν να ισχύουν όταν εφαρμόζεται η Μέθοδος Γ στην ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση (2.50). Συγκεκριμένα, όταν $N \gg h/\lambda$, παρατηρούμε την παρουσία ταλαντώσεων πλησίον του σημείου τροφοδοσίας. Οι

ταλαντούμενες τιμές προσεγγίζουν αρκετά αυτές της (2.38) όταν το δεξιό μέλος της τελευταίας πολλαπλασιαστεί με 2.

Ο πίνακας A , και οι αριθμητικές λύσεις $I_{ap,n}$, παραμένουν ίδιες, και τα συμπεράσματά μας εξακολουθούν να ισχύουν αν α) γίνει εναλλαγή μεταξύ των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής στην Μέθοδο Γ ή αν β) η Μέθοδος Γ εφαρμοστεί στην ολοκληρωτική εξίσωση που προκύπτει περνώντας τον τελεστή \mathfrak{I} μέσα στο ολοκλήρωμα της (2.50). Υπενθυμίζουμε ότι με τον ακριβή πυρήνα η ανωτέρω εναλλαγή δεν θα ήταν θεμιτή (βλέπε παρ. 1.4). Ταλαντώσεις, τέλος, παρατηρούνται με την εφαρμογή και άλλων αριθμητικών μεθόδων στην (2.50).

2.9 Συμπεράσματα

Το παρόν κεφάλαιο, που περιγράφεται στην [1], αποτελεί αφετηρία και σημείο αναφοράς για την μελέτη που θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια. Χρησιμοποιήσαμε την αριθμητική μέθοδο Galerkin με παλμικές συναρτήσεις και εξετάσαμε, εκτενώς, τις δυσκολίες που προκύπτουν από την εφαρμογή της τελευταίας στην εξίσωση του Hallén (2.1). Χρήσιμο εργαλείο στην ανωτέρω ανάλυση αποτέλεσε η αναλυτική μελέτη της άπειρης κεραίας. Για την πεπερασμένη κεραία, και για τον προσεγγιστικό πυρήνα, τα κυριότερα συμπεράσματα του κεφαλαίου συνοψίζονται στα εξής:

α) στην αναπότρεπτη παρουσία ταλαντώσεων του $\text{Im}\{I_n/V\}$ πλησίον του σημείου τροφοδοσίας όταν ο αριθμός N των παλμών ικανοποιεί την $N \gg h/a$,

β) στην επέκταση του ανωτέρω συμπεράσματος σε άλλες αριθμητικές μεθόδους (άλλη επιλογή συναρτήσεων βάσης/ δοκιμής),

γ) στην εξαγωγή του συμπεράσματος α) στην περίπτωση της εξίσωσης Pocklington (2.50).

Αν και θα έπρεπε να αναμένουμε κάποια μη φυσιολογική συμπεριφορά των αποτελεσμάτων, όχι λόγω σφαλμάτων στρογγυλοποίησης αλλά εξαιτίας της εφαρμογής

μιας αριθμητικής διαδικασίας σε μία μη επιλύσιμη ολοκληρωτική εξίσωση, εν τούτοις, τα πλάτη των προαναφερθέντων ταλαντώσεων αυξάνονται σχεδόν εκθετικά με το N . Οι μεγάλες ταλαντούμενες τιμές είναι συνέπεια των ιδιοτήτων του προσεγγιστικού πυρήνα και της μορφής του δεξιού μέλους της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Το σφάλμα στρογγυλοποίησης είναι απόρροια της μεγάλης τιμής του δείκτη κατάστασης των πινάκων (και ιδιαίτερα του πίνακα A) του συστήματος που επιλύουμε κατά την αριθμητική διαδικασία. Είναι ανεξάρτητο από αυτά που αναφέραμε ανωτέρω (παρουσία ταλαντώσεων) αλλά δύναται να έχει σημαντική επίδραση στα αριθμητικά αποτελέσματα.

Σε πρακτικές εφαρμογές, τα τελικά μεγέθη που μας ενδιαφέρουν υπολογίζονται τόσο από το πραγματικό όσο και από το φανταστικό μέρος των αποτελεσμάτων (όπως για παράδειγμα η σύνθετη αντίσταση εισόδου της κεραίας). Με τον ακριβή πυρήνα, η κύρια δυσκολία στον ανωτέρω υπολογισμό έγκειται στο γεγονός ότι $\text{Im}\{I(0)/V\} = -\infty$, γεγονός που είναι εμφανές στα αριθμητικά μας αποτελέσματα. Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα. Δεν δύναται να επιλεχθεί μικρό πλάτος παλμού z_0/λ , και σπάνια βρίσκουμε στην βιβλιογραφία πολύ μικρές τιμές για το z_0/λ . Αντιθέτως, πρέπει να επιλεχθεί, αυστηρά, είτε η παράμετρος z_0/λ μεγαλύτερη ή περίπου ίση με a/λ και παράλληλα $z_0/\lambda \ll h/\lambda$ είτε η παράμετρος N μικρότερη ή περίπου ίση με h/a και $N \gg 1$. Η επιλογή του N θα πρέπει να βασιστεί στην παράμετρο h/a παρά στο πλήθος των σημείων ανά μήκος κύματος. Όταν το N κυμαίνεται στο προαναφερθέν διάστημα, μπορούν να εξαχθούν, σε πολλές περιπτώσεις, χρήσιμες τιμές για την σύνθετη αγωγιμότητα. Τέτοια αποτελέσματα συναντώνται συχνά στην βιβλιογραφία. Ωστόσο, δεν αναφέρεται κάποια συστηματική εκ των προτέρων διαδικασία για την επιλογή της βέλτιστης τιμής του N , πέρα από το γεγονός ότι η καλύτερη επιλογή είναι αυτή που θα δώσει τις πλησιέστερες τιμές σ' αυτές που προκύπτουν με τον ακριβή πυρήνα.

Παράρτημα Α

Η Εξίσωση του Hallén για την Άπειρη Κεραία (2.9)

Η ΗΕ που δίνεται στην (2.1) εξακολουθεί να ισχύει όταν $h = \infty$. Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος αυτής μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $D_1 \exp(ik|z|) + D_2 \exp(-ik|z|)$, όπου D_1 και D_2 ανεξάρτητα του z . Εκτός από μία γενική σταθερά, το δεξιό αυτό μέλος της εξίσωσης εκφράζει το διανυσματικό δυναμικό και, όταν $z \rightarrow \pm\infty$, θα πρέπει να αναπαριστά ένα απομακρυνόμενο κύμα. Επειδή έχουμε υποθέσει χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$, $D_2 = 0$, και λύνοντας ως προς C παίρνουμε τελικά $C = V / 2\zeta_0$. Με την τελευταία σταθερά C και με $h = \infty$, η (2.1) μας δίνει την εξίσωση του Hallén για την άπειρη, σε μήκος, κεραία (2.9).

Παράρτημα Β

Εφαρμογή της Μεθόδου Β στην Άπειρη Κεραία

Β.1 Επαλήθευση των Εξισώσεων (2.29) και (2.42)

Το, απείρων διαστάσεων, σύστημα Toeplitz (2.47) μπορεί να επιλυθεί σε κλειστή μορφή κατ' αναλογία με το (2.19) όπως περιγράψαμε στην παράγραφο 2.5. Έστω $\tilde{I}^B(\theta)$, $\tilde{A}^B(\theta)$ και $\tilde{B}^B(\theta)$ οι σειρές Fourier της Μεθόδου Β (με συντελεστές I_l^B, A_l^B και B_l^B αντίστοιχα), που δίνονται (κατ' αντιστοιχία με την αρχική μέθοδο) από τις (2.21), και $\tilde{I}(\theta), \tilde{A}(\theta), \tilde{B}(\theta)$ οι αντίστοιχες σειρές της αρχικής μεθόδου (με συντελεστές I_l, A_l και B_l αντίστοιχα). Ισχύει $\tilde{A}^B(\theta)\tilde{I}^B(\theta) = \tilde{B}^B(\theta)$ και επειδή σύμφωνα με τα αναφερθέντα στην παράγραφο 2.8 $A_l^B = A_l$ οπότε και $\tilde{A}^B(\theta) = \tilde{A}(\theta)$ η (2.22) τροποποιείται στην:

$$I_n^B = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{B}^B(\theta)}{\tilde{A}(\theta)} e^{-in\theta} d\theta \quad (\text{Im}\{k\} > 0). \quad (\text{B.1})$$

Από τις (2.21) και (2.48) παίρνουμε:

$$\tilde{B}^B(\theta) = \frac{kz_0/2}{\sin(kz_0/2)} \tilde{B}(\theta) + \left[D(kz_0) - \frac{kz_0/2}{\sin(kz_0/2)} \right] B_{l=0}, \quad (\text{B.2})$$

όπου

$$D(kz_0) = \frac{kz_0/2}{\sin(kz_0/2)} \left[\frac{1}{1 + i \tan\left(\frac{kz_0}{4}\right)} \right]. \quad (\text{B.3})$$

Τα $\tilde{B}(\theta)$ και $B_{l=0}$ δίνονται από τις (2.23) και (2.20) αντίστοιχα.

Η εξίσωση (B.2), λόγω της (2.23), έχει νόημα για πραγματικές τιμές του k εκτός από $k = \pm\theta/z_0$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε και εδώ την αναλυτική συνέχιση της (B.2) για πραγματικές τιμές του k αν η διαδρομή ολοκλήρωσης στην (B.2) διέρχεται κάτωθεν του σημείου $\theta = kz_0$ και άνωθεν του $\theta = -kz_0$. Επιπλέον, η $\tilde{B}^B(\theta)$ είναι άρτια συνάρτηση και επομένως η (B.1) μπορεί να γραφεί (τροποποιημένη (2.26)):

$$I_n^B = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\tilde{B}^B(\theta)}{\tilde{A}(\theta)} \cos(n\theta) d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (k \text{ πραγματικό}) \quad (\text{B.4})$$

όπου η διαδρομή ολοκλήρωσης διέρχεται κάτω από το κλαδικό σημείο $\theta = kz_0$. Από τις (B.2) και (B.3) παρατηρούμε ότι καθώς $z_0 \rightarrow 0$, $\tilde{B}^B(\theta) \sim \tilde{B}(\theta)$ και επομένως από την (2.28) παίρνουμε:

$$\tilde{B}^B(\theta) \sim -\frac{iV}{2k\zeta_0} \frac{(kz_0)^2}{\theta^2 - (kz_0)^2} \frac{1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left[\sin(\theta/2)/(\theta/2)\right]^2}. \quad (\text{B.5})$$

Από τις (B.5), (2.27) και (B.4) παίρνουμε τελικά την (2.29). Η (2.42) προκύπτει απευθείας από την (2.29) μέσω της διαδικασίας που περιγράφεται στην παράγραφο 2.6.

B.2 Υπολογισμός της Τροποποιημένης (2.38)

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.8, η διαφορά μεταξύ της μεθόδου της παραγράφου 2.2 και της Μεθόδου B, κατά την εφαρμογή τους στην άπειρη κεραία, οφείλεται στην διαφορά που παρουσιάζει το δεξιό μέλος των εξισώσεων (2.19) και (2.47). Στο Παράρτημα B.1, ακολουθώντας την ανάλυση της παραγράφου 2.5, είδαμε ότι η διαφορά αυτή στην περίπτωση όπου το ολοκλήρωμα (B.4) συγκλίνει (περίπτωση του ακριβούς πυρήνα και του πραγματικού μέρους του ρεύματος με τον προσεγγιστικό πυρήνα) δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα καθώς $\tilde{B}^B(\theta) \sim \tilde{B}(\theta)$ όταν $z_0 \rightarrow 0$. Αντίθετα, στην περίπτωση του φανταστικού μέρους του ρεύματος με τον προσεγγιστικό πυρήνα τα πράγματα είναι διαφορετικά. Αυτό οφείλεται αφενός στο γεγονός ότι τα ολοκληρώματα (2.26), (B.4) αποκλίνουν αφετέρου στο γεγονός ότι καθ' όλη την

ανάλυση της παραγράφου 2.6 δεν χρησιμοποιήθηκε η ασυμπτωτική προσέγγιση της (2.23) για μικρά z_0 . Ωστόσο, οι εξισώσεις (2.32)-(2.36) εξακολουθούν να ισχύουν αν στη θέση του \tilde{B} τοποθετήσουμε το \tilde{B}^B . Από τις (B.2), (B.3) και (2.23), παίρνοντας, κατά τα γνωστά, το ανάπτυγμα Taylor της τροποποιημένης πλέον (2.36) με κέντρο το $z_0/a = 0$ καταλήγουμε στην:

$$g^B\left(x; \frac{z_0}{a}, ka\right) = -i \frac{V}{\zeta_0} \frac{\pi^{5/2}}{8} \frac{1}{\cosh x} \left(1 - \frac{5}{2\pi} \frac{z_0}{a} x \tanh x\right) + O\left(\left(\frac{z_0}{a}\right)^2\right) \quad (\text{B.6})$$

Από τις (B.6) και (2.37) όμως παρατηρούμε ότι $g^B\left(x; \frac{z_0}{a}, ka\right) = 2g\left(x; \frac{z_0}{a}, ka\right)$ και συνεπώς λόγω της (2.35) είναι:

$$f^B\left(\frac{z_0}{a}, ka, n \frac{z_0}{a}\right) = 2f\left(\frac{z_0}{a}, ka, n \frac{z_0}{a}\right) \quad (\text{B.7})$$

Από τις (B.7) και (2.34) παίρνουμε τελικά την τροποποιημένη (2.38).

Παράρτημα Γ

Ειδικές Συναρτήσεις (Special Functions)

Κύριος σκοπός του Παραρτήματος Γ είναι να δώσουμε τους ορισμούς και ορισμένες ασυμπτωτικές προσεγγίσεις (ή και αναπτύξεις) των ειδικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στην παρούσα διατριβή. Η βιβλιογραφία διαθέτει πολλούς ισοδύναμους ορισμούς για τις ειδικές συναρτήσεις. Εδώ επιλέγουμε τους ορισμούς και τους συμβολισμούς που αναφέρονται στο [27].

Γ.1 Η Συνάρτηση Γάμμα (Gamma Function)

Η συνάρτηση Γάμμα $\Gamma(z)$ αποτελεί ίσως την πιο γνωστή και ευρέως χρησιμοποιούμενη ειδική συνάρτηση. Στην παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό των συναρτήσεων Bessel στα Παραρτήματα Γ.2 και Γ.3.

Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 3 του [27] ορίζουμε την $\Gamma(z)$ ως ακολούθως:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}\{z\} > 0 \quad (\Gamma.1)$$

όπου ο περιορισμός $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ εξασφαλίζει την σύγκλιση του ολοκληρώματος στο $t = 0$. Επειδή $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ η πρώτη παράγωγος $\Gamma'(z)$ θα δίνεται από την σχέση:

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \ln t dt, \quad \operatorname{Re}\{z\} > 0 \quad (\Gamma.2)$$

Από την (Γ.1) αποδεικνύεται [27, (3.3)]:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (\Gamma.3)$$

Η εξίσωση (Γ.3) ισχύει αρχικά για $\operatorname{Re}\{z\} > 0$. Ωστόσο, το δεξιό μέλος της (Γ.3) έχει νόημα για κάθε $z \neq 0, -1, -2, \dots$ και για τον λόγο αυτό η $\Gamma(z)$ μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά για όλες τις τιμές του $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0, -1, -2, \dots$.

Από την (Γ.3) προκύπτει ότι η συνάρτηση $\Gamma(z)$ έχει απλούς πόλους στα σημεία $z = 0, -1, -2, \dots$ με υπόλοιπα:

$$\operatorname{res}_{z=-n}[\Gamma(z)] = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\Gamma.4)$$

Ολοκληρώνοντας την (Γ.1) κατά παράγοντες παίρνουμε:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}\{z\} > 0 \quad (\Gamma.5)$$

Σημειώνουμε ότι η (Γ.5) επεκτείνεται αναλυτικά για όλες τις τιμές του $z \in \mathbb{C}$. Από την εξίσωση (Γ.5) προκύπτει ότι:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\Gamma.6)$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι [27, (3.7), (3.9)]:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (\Gamma.7)$$

και

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} 2^{2z} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (\Gamma.8)$$

Για μεγάλες τιμές του z , η $\Gamma(z)$ δίνει ένα τύπου Poissoné ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της μορφής [27, (3.11)]:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right], \text{ καθώς } z \rightarrow \infty \text{ με } |\operatorname{ph} z| < \pi. \quad (\Gamma.9)$$

Σημειώνουμε ότι η (Γ.9) δεν ισχύει για $\operatorname{Re}\{z\} < 0$. Το ανάπτυγμα (Γ.9), ή σε μερικές περιπτώσεις ο κύριος όρος αυτού, είναι γνωστό ως τύπος του Stirling (Stirling's Formula). Είναι εμφανές στην (Γ.9) ότι η $\Gamma(z)$ αυξάνεται ραγδαία για μεγάλες θετικές τιμές του z . Η τελευταία παρατήρηση είναι σύμφωνη με την εξίσωση (Γ.6).

Γ.2 Συναρτήσεις Bessel και Hankel (Bessel and Hankel Functions)

Οι συναρτήσεις Bessel (Bessel Functions) τάξης ν ορίζονται από τις σχέσεις:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \quad (\text{Bessel } 1^{\text{ov}} \text{ είδους}) \quad (\Gamma.10)$$

όπου $\Gamma(\nu+n+1)$ η συνάρτηση Γάμμα (βλέπε Παράρτημα Γ.1),

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} \quad (\text{Bessel } 2^{\text{ov}} \text{ είδους}) \quad (\Gamma.11)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) \quad (\text{Bessel } 3^{\text{ov}} \text{ είδους- Hankel}) \quad (\Gamma.12)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) \quad (\text{Bessel } 3^{\text{ov}} \text{ είδους- Hankel}) \quad (\Gamma.13)$$

Σημειώνουμε ότι στην (Γ.11), έχουμε απροσδιόριστη μορφή εάν $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Για αυτές τις τιμές του ν , παίρνουμε το όριο στην (Γ.11).

Για μικρά z , οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις των συναρτήσεων Bessel δεν έχουν πάντα απλή μορφή. Δίνουμε μερικές επιλεκτικά: Η (Γ.10) είναι και (συγκλίνουσα)

ασυμπτωτική ανάπτυξη της $J_\nu(z)$ για μικρά z . Οι δύο πρώτοι όροι της (Γ.10) δίνουν την ασυμπτωτική σχέση:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left[z^\nu - \frac{1}{4(\nu+1)} z^{\nu+2} \right] + O(z^{\nu+4}) \quad \text{καθώς } z \rightarrow 0, \quad \nu \neq -1, -2, \dots \quad (\Gamma.14)$$

από την οποία έπονται οι ισότητες $J_0(0)=1$ και $J_n(0)=0$ ($n=1,2,\dots$). Επειδή $1/\Gamma(\lambda)=0$ για $\lambda=0,-1,-2,\dots$ (βλέπε Παράρτημα Γ.1), η (Γ.14) δεν έχει νόημα για $\nu=-1,-2,\dots$. Σημειώνουμε όμως ότι ισχύει:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\Gamma.15)$$

Οι (Γ.10) και (Γ.11) δίνουν συγκλίνουσα ασυμπτωτική ανάπτυξη για την $Y_\nu(z)$. Ο επικρατέστερος όρος του αναπτύγματος βρίσκεται εάν διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\text{Re}\{\nu\} > 0$, $\text{Re}\{\nu\} = 0$ και $\text{Re}\{\nu\} < 0$. Εξετάζουμε μόνον την πρώτη περίπτωση: Για $\text{Re}\{\nu\} > 0$ έχουμε $Y_\nu(z) \sim -\frac{2^\nu}{\Gamma(1-\nu) \sin \pi\nu} \frac{1}{z^\nu}$ καθώς $z \rightarrow 0$, που με χρήση της σχέσης

(Γ.7) γράφεται:

$$Y_\nu(z) \sim -\frac{1}{\pi} 2^\nu \Gamma(\nu) \frac{1}{z^\nu}, \quad \text{καθώς } z \rightarrow 0, \quad \text{Re}\{\nu\} > 0 \quad (\Gamma.16)$$

Παρατηρούμε ότι η (Γ.16) παρουσιάζει αλγεβρική ιδιομορφία στο $z=0$. Στην ειδική περίπτωση της $Y_0(z)$ (μηδενικής τάξης) ισχύει [27, (A.26)]:

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{z}{2}\right) J_0(z) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi(n+1)}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad (\Gamma.17)$$

όπου $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, με $z \neq 0, -1, -2, \dots$ η συνάρτηση Psi (Psi Function). Οι πρώτοι όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της (Γ.17) είναι:

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} + \frac{2\gamma}{\pi} - \frac{1}{2\pi} z^2 \ln \frac{z}{2} + z^2 \frac{1-\gamma}{2\pi} + O(z^4 \ln z), \quad \text{καθώς } z \rightarrow 0 \quad (\Gamma.18)$$

όπου παρατηρούμε ότι η $Y_0(z)$ παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία στο $z=0$. Ολοκληρώνοντας, τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των $H_0^{(1)}(z)$ και $H_0^{(2)}(z)$ για μικρές τιμές του z προκύπτουν άμεσα μέσω των σχέσεων (Γ.12), (Γ.13) και (Γ.17).

Για την περίπτωση μεγάλων ορισμάτων ορίζουμε πρώτα τις βοηθητικές συναρτήσεις $P(\nu, x)$ και $Q(\nu, x)$ - για καθαρά πραγματικές και θετικές τιμές της μεταβλητής x - μέσω των ισοτήτων [27, (A.28), (A.29)]:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [P(\nu, x) + iQ(\nu, x)] e^{i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (\Gamma.19)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [P(\nu, x) - iQ(\nu, x)] e^{-i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (\Gamma.20)$$

από τις οποίες, σύμφωνα με τις (Γ.12) και (Γ.13), συνάγουμε ότι:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P(\nu, x) \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - Q(\nu, x) \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\Gamma.21)$$

και

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P(\nu, x) \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + Q(\nu, x) \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (\Gamma.22)$$

Τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των βοηθητικών συναρτήσεων που ορίστηκαν ανωτέρω είναι [27, (A.32), (A.33)]:

$$P(\nu, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu + 2n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - 2n\right)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2n} = 1 - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{128} \frac{1}{x^2} + \dots, \quad (\Gamma.23)$$

καθώς $x \rightarrow +\infty$, και

$$Q(\nu, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \nu + 2n\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \nu - 2n\right)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2n+1} = \frac{4\nu^2 - 1}{8} \frac{1}{x} + \dots, \quad (\Gamma.24)$$

καθώς $x \rightarrow +\infty$.

Από τις σχέσεις (Γ.19) και (Γ.20) έπεται ότι οι συναρτήσεις Hankel έχουν ασυμπτωτικά αναπτύγματα τύπου Poincaré, των οποίων οι πρώτοι όροι δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[1 + i \frac{(4\nu^2 - 1)}{8} \frac{1}{x} - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{128} \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] e^{i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (\Gamma.25)$$

καθώς $x \rightarrow +\infty$, και

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[1 - i \frac{(4\nu^2 - 1)}{8} \frac{1}{x} - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{128} \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] e^{-i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (\Gamma.26)$$

καθώς $x \rightarrow +\infty$.

Αντίστοιχα, οι πρώτοι όροι της ασυμπτωτικής ανάπτυξης των $J_{\nu}(z)$ και $Y_{\nu}(z)$ προκύπτουν από τις (Γ.21) και (Γ.22) εάν κρατήσουμε τους επικρατέστερους όρους των (Γ.23) και (Γ.24):

$$J_{\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{(4\nu^2 - 1)}{8x} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad \text{καθώς } x \rightarrow +\infty \quad (\Gamma.25)$$

$$Y_{\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{(4\nu^2 - 1)}{8x} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad \text{καθώς } x \rightarrow +\infty \quad (\Gamma.26)$$

Στις (Γ.23)-(Γ.26), το όρισμα x είναι μεγάλο, αλλά όχι η τάξη ν . Όταν και η τάξη είναι μεγάλη, υπάρχουν στη βιβλιογραφία άλλες ασυμπτωτικές προσεγγίσεις/ αναπτύξεις, η μορφή των οποίων εξαρτάται από το σχετικό μέγεθος των x , ν . Τέτοιου είδους αναπτύγματα δεν χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή και για τον λόγο αυτό δεν αναφέρονται. Για μία συνοπτική αναφορά σ' αυτές, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα Α.4.3 του [27].

Γ.3 Τροποποιημένες Συναρτήσεις Bessel (Modified Bessel Functions)

Οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel (Modified Bessel Functions) ορίζονται από τις σχέσεις [27, (A.45), (A.46)]:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad (\Gamma.27)$$

και

$$K_\nu(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \sin(\pi\nu)}, \quad (\Gamma.28)$$

όπου $z \in \mathbb{C}$.

Αντίστοιχα με το Παράρτημα Γ.2, η (Γ.27) είναι και ασυμπτωτική ανάπτυξη της $I_\nu(z)$ για μικρά z . Για την $K_\nu(z)$, εύκολα βρίσκουμε σχέσεις παρόμοιες με την (Γ.16), ενώ οι πρώτοι όροι της ασυμπτωτικής ανάπτυξης της $K_0(z)$ (μηδενικής τάξης) είναι [27, (A.47)]:

$$K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} - \gamma + O(z^2 \ln z), \quad \text{καθώς} \quad z \rightarrow 0, \quad (\Gamma.29)$$

όπου $\gamma = 0.57721566\dots$ η σταθερά του Euler.

Για μεγάλα και καθαρά πραγματικά θετικά ορίσματα x , οι $I_\nu(x)$ και $K_\nu(x)$ αυξάνονται και μειώνονται αντίστοιχα εκθετικά σύμφωνα με τις κάτωθι ασυμπτωτικές αναπτύξεις:

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + \frac{1-4\nu^2}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], \quad \text{καθώς } x \rightarrow +\infty \quad (\Gamma.30)$$

και

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 - \frac{1-4\nu^2}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], \quad \text{καθώς } x \rightarrow +\infty \quad (\Gamma.31)$$

Βιβλιογραφία – Παραπομπές

- [1] G. Fikioris and T. T. Wu, "On the application of numerical methods to Hallen's equation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 49, no. 3, pp. 383—392, March 2001.
- [2] T. T. Wu, "Introduction to linear antennas," ch. 8 in *Antenna Theory*, pt. I, R. E. Collin and F. J. Zucker, Eds. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [3] R. W. P. King, *The Theory of Linear Antennas*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1956.
- [4] R. W. P. King, "The linear antenna—eighty years of progress," *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 1, pp. 2-16, Jan. 1967.
- [5] R. S. Elliott, *Antenna Theory and Design*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1981.
- [6] R. W. P. King, R. B. Mack, and S. S. Sandler, *Arrays of Cylindrical Dipoles*. New York: Cambridge Univ. Press, 1968.
- [7] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 2nd ed. New York, NY: Wiley, 1997.
- [8] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*. Boca Raton, FL: CRC Press 1992, pp. 350-362.
- [9] R. Mittra, C. A. Klein, "Stability and convergence of moment method solutions," in *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, R. Mittra, Ed. New York: Springer-Verlag, 1975, ch. 5.
- [10] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. New York: Macmillan, 1968.
- [11] T. K. Sarkar, "A study of various methods for computing electromagnetic field utilizing thin wire integral equations," *Radio Sci.*, vol. 18, no. 1, pp. 29-38, Jan.-Feb. 1983.
- [12] R. E. Collin, "Equivalent line current for cylindrical dipole antennas and its asymptotic behavior," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-32, pp. 200-204, Feb. 1984.
- [13] A.G. Tijhuis, P. Zhongqiu, and A.R. Bretones, "Transient excitation of a straight thin-wire segment: A new look at an old problem," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 40, pp. 1132-1146, Oct. 1992.

- [14] E. K. Miller and F. J. Deadrick, "Some computational aspects of thin-wire modeling," ch. 4 in R. Mittra, Ed., *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*. New York: Springer, 1975.
- [15] A. J. Poggio and E. K. Miller, "Techniques for low-frequency problems," in *Antenna Handbook, Vol. 1: Antenna Fundamentals and Mathematical Techniques*, Y. T. Lo and S. W. Lee, Eds. New York: Von Nostrand Reinhold, 1993, ch. 3.
- [16] D. R. Wilton and C. M. Butler, "Effective numerical techniques for solving Pocklington's equation and their relationships to other methods," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-24, pp. 83-86, Jan. 1976.
- [17] C. D. Taylor and D. R. Wilton, "The extended boundary condition solution of the dipole antenna of revolution," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 20, no. 6, pp. 772-776, Nov. 1972.
- [18] C. M. Butler and D. R. Wilton, "Analysis of various numerical techniques applied to thin-wire scatterers," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-23, pp. 534-540, July 1975.
- [19] D. H. Werner, "A method of moments approach for the efficient and accurate modeling of moderately thick cylindrical wire antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 46, pp. 373-382, Mar. 1998.
- [20] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integrals and Series: Elementary Functions, vol. 2*. London: Taylor and Francis, 2002.
- [21] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integrals and Series: Elementary Functions, vol. 1*. Amsterdam: Gordon & Breach, 1986.
- [22] D. S. Jones, "Note on the integral equation for a straight wire antenna," in *Proc. Inst. Elect. Eng. pt. H*, vol. 128, Apr. 1981, pp. 114-116.
- [23] H.-M. Shen and T. T. Wu, "The universal current distribution near the end of a tubular antenna," *J. Math. Phys.*, vol. 30, no. 11, pp. 2721-2729, Nov. 1989.
- [24] B. P. Rynne, "The well-posedness of the integral equations for thin wire antennas," *IMA J. Appl. Math.*, vol. 49, pp. 35-44, 1992.
- [25] R. H. Duncan, "Theory of infinite cylindrical antenna including the feedpoint singularity in antenna current," *J. Res. NBS*, vol. 66D, no. 2, pp. 181-188, March-April 1962.
- [26] G. Fikioris, "An application of convergence acceleration methods," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 47, pp. 1758—1760, Dec. 1999.

- [27] G. Fikioris, I. Tastsoglou, O. N. Bakas, *Selected Asymptotic Methods with Applications to Electromagnetics and Antennas*, Morgan and Claypool, 2013.
- [28] Digital Library of Mathematical Functions. 2013-01-03. National Institute of Standards and Technology from <http://dlmf.nist.gov/>
- [29] R. Bancroft, *Understanding Electromagnetic Scattering Using the Moment Method: A Practical Approach*. Norwood, MA: Artech House, 1996.
- [30] G. Fikioris, J. Lionas, and C. G. Lioutas, "The use of the frill generator in thin-wire integral equations," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 51, no. 8, pp. 1847—1854, August 2003.
- [31] D. S. Jones, *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, 2nd ed. New York: IEEE Press, 1995, p. 309.
- [32] G. J. Burke, "The numerical electromagnetics code (NEC)," in *Applications of the Method of Moments to Electromagnetic Fields*, B. J. Strait, Ed. St. Cloud, MN: SCEEE Press, 1980, ch. 16, p.460.
- [33] G. Fikioris, P. J. Papakanellos, Th. K. Mavrogordatos, N. Lafkas, and D. Koulikas, "Eliminating unphysical oscillations arising in Galerkin solutions to classical integral equations of antenna theory," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 71, no. 2, pp. 559-585, 2011.

Κεφάλαιο 3

Η Χρήση της Γεννήτριας Πεπερασμένου Διακένου (Finite Gap Generator) στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Hallén και Pocklington

3.1 Εισαγωγή

Οι κυλινδρικές κεραίες που τροφοδοτούνται από ομοιόμορφα κατανεμημένα πεδία κατά μήκος πεπερασμένων - και όχι αποκλειστικά απειροστά μικρών - περιφερειακών ζωνών ή διακένων έχουν εξεταστεί ήδη από το 1941 όταν, στο εκτεταμένο έργο του [1], ο Schelkunoff παρουσίασε ένα μοντέλο κατανομής ρεύματος για την περίπτωση της άπειρης κεραίας. Λίγα χρόνια αργότερα, ο ίδιος συγγραφέας [2], [3] γράφει ότι οι διαφορές που εντοπίζονται μεταξύ των πεπερασμένων και απειροστά μικρών διακένων μπορούν να εξηγήσουν μερικές «ανακρίβειες» [2] στο μοντέλο του Hallén [4] για την σύνθετη αντίσταση εισόδου της κυλινδρικής κεραίας.

Εντούτοις, μόλις το 1947 παρουσιάζεται η πρώτη δημοσίευση που θέτει ως κύριο στόχο να αναλύσει την επίδραση του πεπερασμένου διακένου στη θεωρία των κεραιών [5]. Ο συγγραφέας της, Infeld (που, εννιά χρόνια νωρίτερα, σε συνεργασία με τον Einstein είχε συγγράψει ένα βιβλίο με διαφορετική θεματολογία από αυτή των κεραιών), «προσπαθεί να ξεκαθαρίσει το πρόβλημα της σύγκλισης και αυτό της δομής του διακένου» αντικαθιστώντας το απειροστά μικρό Δ -διάκενο των Stratton και Chu [6]-[8] από ένα διάκενο πεπερασμένου εύρους. Η εργασία του Infeld [5] σχετίζεται κυρίως με σφαιρικές, σφαιροειδείς αλλά και κυλινδρικές κεραίες.

Στα επόμενα χρόνια θα ακολουθήσουν περισσότερες εργασίες γι' αυτό το μοντέλο τροφοδοσίας (πεπερασμένου διακένου). Στην εισαγωγή της δημοσίευσής τους, το 1948, οι Albert και Synge [9] ισχυρίζονται ότι θα αναπτύξουν μια επαρκέστερη θεωρία για το διάκενο από τις αντίστοιχες που έχουν διατυπωθεί στο παρελθόν. Αν και οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που παρουσίασαν αποδείχθηκαν αρκετά σημαντικές τα επόμενα χρόνια (βλέπε, για παράδειγμα, [10]) κάποιες απ' τις θέσεις τους που

αφορούσαν το διάκενο αργότερα αμφισβητήθηκαν: οι Albert και Synge αποκαλούν το διάκενο ως «το θεμελιώδες τμήμα του ακτινοβολούμενου συστήματος» και συμπληρώνουν λέγοντας ότι αποτελεί «την μόνη πηγή ακτινοβολούμενης ενέργειας» [9]. Οι δύο αυτοί ισχυρισμοί δέχονται αυστηρή κριτική από τον King στη μνημειώδη πραγματεία του, περί κυλινδρικών κεραιών, που δημοσιεύεται το 1958. Ο King, συγκεκριμένα, επισημαίνει ότι δεν υπάρχουν διάκενα (ούτε πεπερασμένου ούτε απειροστά μικρού μήκους) στα πραγματικά συστήματα ακτινοβολίας και, αν αυτό συνέβαινε, οι δύο ανωτέρω ισχυρισμοί θα είχαν ως συνέπεια την αδυναμία εκπομπής των πομπών στην πράξη [11, σελ. 844], [12]. Η ακτινοβολούμενη ενέργεια θα πρέπει να προέρχεται από κάποιου είδους γεννήτρια. Στην πράξη όμως, οι κεραίες τροφοδοτούνται από γραμμές μεταφοράς και για τον λόγο αυτό τα διάκενα αποτελούν εξιδανικεύσεις, πολύ χρήσιμες εντούτοις, στη μελέτη των κεραιών. Ο Duncan φαίνεται να έχει υιοθετήσει πλήρως την άποψη αυτή όταν, το 1962, τροποποιεί την λύση του για την απείρου μήκους κεραία λαμβάνοντας υπόψη την παρουσία διακένου πεπερασμένου μήκους στο σημείο τροφοδοσίας της [13].

Το 1962 η εργασία των Chen και Keller [14] ασχολείται εκτενώς με την Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου - ΓΠΔ (Finite Gap Generator - FGG). Το μοντέλο των συγγραφέων αυτών για την κυλινδρική κεραία είναι ένας σωλήνας με λεπτά τοιχώματα ο οποίος τροφοδοτείται από ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται κατά μήκος ενός περιφερειακού διακένου πεπερασμένου εύρους. Οι Chen και Keller εξάγουν ακριβείς μαθηματικές σχέσεις, με την μορφή ολοκληρωμάτων, για το εσωτερικό, εξωτερικό και συνολικό (=εσωτερικό + εξωτερικό) ρεύμα του ανωτέρω σωλήνα στην περίπτωση που αυτός είναι απείρως μεγάλος σε μήκος. Εν συνεχεία, απλοποιούν το μοντέλο τους για το συνολικό ρεύμα υποθέτοντας μικρή διάμετρο κεραίας, και χρησιμοποιούν τις σχέσεις που εξήγαν για την άπειρη κεραία (συγκεκριμένα, τις εξισώσεις τους για την αντίσταση εισόδου αυτής) για να υπολογίσουν αντίστοιχα μεγέθη για την πεπερασμένη κεραία. Όπως οι ίδιοι επισημαίνουν οι εξισώσεις τους για το μοντέλο που εξετάζουν (ΓΠΔ) μπορούν να βρεθούν σε παλαιότερες εργασίες (για παράδειγμα [1], [15]) ή να αναχθούν, παίρνοντας το όριο μηδενικού μήκους για το διάκενο, σε σχέσεις που έχουν εξαχθεί στο παρελθόν για το μοντέλο της Γεννήτριας Δέλτα Συνάρτησης - ΓΔΣ (Delta Gap Function - DFG).

Κάποιες από τις απλοποιημένες σχέσεις για την άπειρη κεραία των Chen και Keller αμφισβητήθηκαν από τον Fante [16], [17], και κάποια από τα αποτελέσματα των [14], [16] και [17] ακολούθως επανεξετάστηκαν από τον Miller [18]. Έτσι μέχρι τα

τέλη της δεκαετίας του 1960, η τροφοδοτούμενη από την ΓΠΔ άπειρη κεραία έχει εξεταστεί τόσο ως αντικείμενο θεωρητικού ενδιαφέροντος όσο και ως μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων για την πεπερασμένη κεραία.

Για την περίπτωση της ΓΔΣ, στο μεταξύ, προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης της αποκαλούμενης, σήμερα, εξίσωσης του Hallén (Hallén's Equation - HE) και των παραλλαγών αυτής γίνονται αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας - βλέπε για παράδειγμα την ανάλυση του Κεφαλαίου 2, την [11], το βιβλίο του Hallén [19], την αναθεωρημένη δημοσίευση του King το 1967 [20] καθώς και το σχετικό κεφάλαιο από το βιβλίο του Wu που εκδόθηκε το 1969 [21]. Το ενδιαφέρον για τα μοντέλα τροφοδότησης των κεραιών, και πιο συγκεκριμένα της ΓΠΔ, γίνεται εντονότερο με την εμφάνιση ηλεκτρονικών υπολογιστών και την αυξημένη δημοτικότητα των αριθμητικών μεθόδων. Πιθανώς, οι Inagaki και Sekiguchi είναι οι πρώτοι που επεκτείνουν την εξίσωση του Pocklington (Pocklington's Equation - PE) από την περίπτωση της ΓΔΣ σ' αυτήν της ΓΠΔ με την δημοσίευσή τους το 1969 [22]. Στην εργασία τους χρησιμοποιούν τον ακριβή πυρήνα (exact kernel), όχι όμως με την απλή μορφή που χρησιμοποιείται συνήθως σήμερα (βλέπε εξίσωση (1.18)). Οι δύο συγγραφείς προτιμούν να εκφράσουν τον πυρήνα μέσω του μετασχηματισμού Fourier αυτού.

Ένα χρόνο νωρίτερα, ο Harrington εξετάζοντας τις γραμμικές κεραιές στο, σπουδαίας επιρροής, βιβλίο του, που αφορά τις Μεθόδους των Ροπών [23], χρησιμοποιεί τον προσεγγιστικό πυρήνα και ένα διάκενο εύρους ίσο με το μήκος της διακριτοποίησης. Αν και οι προσδιορισθείσες τιμές της αγωγιμότητας (conductance - πραγματικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου), με την μέθοδο που εφαρμόζεται από τον Harrington, συμφωνούν, ως ένα βαθμό, με τις αντίστοιχες τιμές άλλων μεθόδων, οι τιμές της επιδεκτικότητας (susceptance - φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου) αποκλίνουν σημαντικά. Ο Harrington σημειώνει ότι αυτό είναι αναμενόμενο «καθώς κάθε λύση έχει διαφορετική θεώρηση του διακένου». Την δυσκολία αυτή προσπάθησε να αντιμετωπίσει το 1972 ο Tesche [24], ο οποίος (ανεξάρτητα από την προηγούμενη εργασία [22]) υπέδειξε τι είναι αυτό που έχει σημασία στη ΓΠΔ όταν αυτή χρησιμοποιείται στην PE με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Ένα παρόμοιο ερώτημα απασχόλησε επίσης το 1984 τον Collin [25] (βλέπε επίσης την [26]). Ο Collin τόνισε ιδιαίτερα ότι, με τον προσεγγιστικό πυρήνα και την ΓΠΔ, η HE δεν έχει λύση. Κατ' αντιστοιχία, για την περίπτωση της ΓΔΣ, η «μη επιλυσιμότητα» είχε αναφερθεί το 1952 από τον Schelkunoff [27]. Αν και τόσο σημαντικό, τα περισσότερα σύγχρονα εγχειρίδια δεν κάνουν αναφορά σ' αυτό το θεμελιώδες γεγονός.

Για την περίπτωση των λύσεων με την Μέθοδο των Ροπών, είναι φανερό ότι το ιδιαίζον αποτέλεσμα της μη επιλυσιμότητας οδηγεί αναγκαστικά σε χρήση περιορισμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης. Ο Collin υπογραμμίζει, «Δυστυχώς δεν υπάρχουν διαθέσιμα κριτήρια για το πού πρέπει να σταματήσουμε την αριθμητική λύση ώστε να πάρουμε αξιόπιστα αποτελέσματα.» [25]. Όσον αφορά το μοντέλο του διακένου, η άποψη του Collin διαφέρει από την αντίστοιχη πολλών άλλων συγγραφέων (συμπεριλαμβανομένης και της αντίστοιχης στην παρούσα διατριβή, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω): Ο Collin είναι της άποψης ότι «το διάκενο δεν θα έπρεπε να εισαχθεί καθόλου καθώς τείνει να συγχύσει την μαθηματική φύση του προβλήματος των οριακών συνθηκών που έχουν εφαρμοστεί».[26, σελ. 471]. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι ο Collin χρησιμοποιεί ακριβώς τις ίδιες εξισώσεις Rocklington και Hallén με άλλους συγγραφείς που διαφωνούν με την ανωτέρω άποψη, τις εξισώσεις (3.2) και (3.4) που θα δούμε παρακάτω.

Το 1985, οι Sakitani και Egashira παρουσιάζουν αριθμητικά αποτελέσματα που δείχνουν ότι οι αριθμητικές μέθοδοι στην ολοκληρωτική εξίσωση με την ΓΠΔ μπορούν να επιφέρουν «λύσεις» που παρουσιάζουν μη φυσιολογικές ταλαντώσεις [28]. Αντίστοιχες ταλαντώσεις είχαν αναφερθεί στο παρελθόν με ελαφρώς διαφορετικό τρόπο στις [29] και [30]. Οι ανωτέρω ταλαντώσεις εμφανίζονται όταν χρησιμοποιείται μικρό μήκος διακριτοποίησης. Αντίθετα, μία μεγάλου μήκους διακριτοποίηση μπορεί να δώσει λογικά αποτελέσματα γι' αυτό και χρησιμοποιείται συνηθέστερα. Το 1997, ο Miller [31] συγκρίνει τα αποτελέσματα του NEC (Numerical Electromagnetics Code - Αριθμητικός Ηλεκτρομαγνητικός Κώδικας)¹ [32] μεταξύ πηγής αποτελούμενης από ένα απειροστά μικρό τμήμα και πηγής πεπερασμένου εύρους - κατ' αντιστοιχία με τα μοντέλα των ΓΔΣ και ΓΠΔ - και σημειώνει ότι αυτά διαφέρουν μεταξύ τους, όπως άλλωστε αναμενόταν. Το 1998, ο Werner [33] στην Μέθοδο των Ροπών που αναπτύσσει για την ανάλυση των λεπτών κεραιών, ενσωματώνει τον ακριβή πυρήνα και μοντέλο ΓΠΔ παρόμοιο με αυτό του Tesche [24]. Ένα χρόνο αργότερα οι Wu, Inagaki και Kikuma [34] ξεκινώντας από την PE της [22] (με τον ακριβή πυρήνα όμως εκφρασμένο στη συνήθη του μορφή (1.18)) εξάγουν μία αντίστοιχη HE για το ολικό ρεύμα. Οι αριθμητική τους λύση για την HE χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του

¹ Λογισμικό ανάλυσης της ηλεκτρομαγνητικής απόκρισης δομών αποτελούμενων από γραμμικές και επιφανειακές κεραίες τοποθετημένες στον κενό χώρο ή υπεράνω αγωγίμου εδάφους. Το NEC, που αρχικά προγραμματίστηκε σε FORTRAN, παρουσιάστηκε από τους J. Burke και Andrew J. Poggio την δεκαετία του 1970.

ρεύματος στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια της πεπερασμένης, σε μήκος, κεραίας. Αντίστοιχα αποτελέσματα για την άπειρη κεραία δίνονται το 2008 από τους Makarov, Puzella και Iyer [35]. Ο συνδυασμός της ΓΠΔ και του προσεγγιστικού πυρήνα αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για τον Neganov (βλέπε [36], [37]).

Γίνεται φανερό λοιπόν, ότι το μοντέλο της ΓΠΔ - τόσο με τον ακριβή όσο και με τον προσεγγιστικό πυρήνα - έχει αποτελέσει θέμα πολλών και μερικές φορές αντικρουόμενων συζητήσεων. Η δημοσίευση σχετικών με το αντικείμενο πολύ πρόσφατων εργασιών [38]-[40], καθώς και η δυνατότητα που παρέχουν οι σύγχρονες εκδόσεις του NEC για την επιλογή διαφόρων τύπων πυρήνα και τροφοδοσίας, υποδεικνύουν ότι το ενδιαφέρον για τα εν λόγω θέματα εξακολουθεί να αναπτύσσεται.

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε κάποια θεμελιώδη ζητήματα, περιλαμβανομένων και θεμάτων σύγκλισης, των HE και PE με την ΓΠΔ τόσο για τον ακριβή όσο και για τον προσεγγιστικό πυρήνα. Όπως στις περισσότερες, προ του 1970, εργασίες για την ΓΠΔ, χρησιμοποιείται η άπειρη κεραία ως βασικό εργαλείο μελέτης. Η επιλογή αυτή δεν είναι τυχαία καθώς η κεραία απείρου μήκους δύναται να μελετηθεί αναλυτικά. Αντίθετα με παλαιότερες εργασίες, που δεν αφορούσαν τις MoM, θα επικεντρωθούμε στις ιδιότητες της κεραίας αυτής που σχετίζονται με ιδιότητες αριθμητικών αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή των MoM στην πεπερασμένου μήκους κεραία. Όσον αφορά τον ακριβή πυρήνα, θα εστιάσουμε στο αν σημαντικά μεγέθη έχουν πεπερασμένες ή άπειρες τιμές και θα συγκρίνουμε μεγέθη του μοντέλου της ΓΠΔ με τα αντίστοιχα του μοντέλου της ΓΔΣ. Όσο για τον προσεγγιστικό πυρήνα, θα επεκτείνουμε την ανάλυση του Κεφαλαίου 2 και των [41], [42] - που αφορούν την ΓΔΣ και την Γεννήτρια Magnetic Frill - ΓΜΦ (Magnetic Frill Generator - MFG) - για να εξετάσουμε την περίπτωση της ΓΠΔ. Ένα βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η παρουσία ταλαντώσεων στο σημείο τροφοδοσίας είναι άμεση συνέπεια της μη επιλυσιμότητας των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Θα μπορούσαμε δηλαδή, γενικά, να πούμε ότι ταλαντώσεις αυτού του είδους αποτελούν μία αριθμητική ένδειξη ότι η υπό εξέταση εξίσωση δεν έχει λύση. Ως συνέπεια των ανωτέρω, οι αναφερόμενες ταλαντώσεις δεν δύναται να εξαλειφθούν χρησιμοποιώντας καλύτερο λογισμικό ή υπολογιστές υψηλότερων επιδόσεων ή, πιο συγκεκριμένα, λογισμικό/ υπολογιστές που θα μπορούσαν να εξαλείψουν πιθανά σφάλματα στρογγυλοποίησης ή φαινόμενα που οφείλονται στην παρουσία πινάκων με υψηλό δείκτη κατάστασης (matrix ill-conditioning). Το συμπέρασμα αυτό, στο οποίο καταλήξαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο για την ΓΔΣ, γίνεται πιο ξεκάθαρο στο Κεφάλαιο 4 όπου θα εξεταστεί

ενδεδειγμένα η ακριβής φύση των ταλαντώσεων για την περίπτωση της ΓΠΔ και θα συγκριθεί με την αντίστοιχη της ΓΔΣ. Τα αποτελέσματα μας, για τον προσεγγιστικό πυρήνα, διαφέρουν από προηγούμενες εργασίες που κάνουν αναφορά στις δυσκολίες προσδιορισμού των αριθμητικών λύσεων. Για παράδειγμα στις [25] και [26] δεν αναφέρονται καθόλου οι ταλαντώσεις ενώ στην [28] δεν αναφέρεται η μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης.

Στο κεφάλαιο αυτό επεκτείνεται, επίσης, η μέθοδος του «ενεργού ρεύματος» («effective current») για την ΓΠΔ, που αναλύθηκε πρόσφατα στην [43] για την περίπτωση της ΓΔΣ. Η έννοια του ενεργού ρεύματος φαίνεται να χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στις [44], [45]. Πρόκειται για μία μέθοδο εκ των υστέρων επεξεργασίας του ταλαντούμενου ρεύματος προκειμένου να πάρουμε λύσεις πολύ κοντά σε αυτές του ακριβούς πυρήνα. Από πρακτικής απόψεως, η μέθοδος αυτή αποτελεί μία διαδικασία που μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί στα ταλαντούμενα αποτελέσματα και να τα εξομαλύνει. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος του ενεργού ρεύματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της σύνθετης αντίστασης στην είσοδο της κεραίας. Εκτός από τις [43]-[45] (και εκτός από κάποιες συνοπτικές αναφορές στην [29]), καμία από τις εργασίες που έχουν παρατεθεί δεν προτείνει αντίστοιχες μεθόδους για την αξιοποίηση των ταλαντούμενων λύσεων.

Για έναν κύλινδρο τοποθετημένο κατά μήκος του άξονα z , και για δεδομένο μήκος διακριτοποίησης z_0 , θεωρούμε $I_{ap}(z)$ (approximate current) το ταλαντούμενο ρεύμα που προκύπτει από τον προσεγγιστικό πυρήνα και $H_\phi(\rho, z)$ το μαγνητικό πεδίο που αναπτύσσεται λόγω του $I_{ap}(z)$. Το ενεργό ρεύμα $I_{eff}(\rho, z)$ ορίζεται από την απλή σχέση [43]:

$$I_{eff}(\rho, z) = 2\pi\rho H_\phi(\rho, z), \quad 0 \leq \rho \leq a \quad (3.1)$$

όπου a η ακτίνα της κεραίας. Όπως θα δούμε, πιο αναλυτικά, στο επόμενο κεφάλαιο το ενεργό ρεύμα έχει φυσική σημασία μόνο για $\rho = a$. Ωστόσο, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε την τιμή του ρεύματος αυτού για όλες τις τιμές του ρ στο διάστημα $0 \leq \rho \leq a$. Αυτό θα μας επιτρέψει να κατανοήσουμε καλύτερα τους λόγους της μη

επιλυσιμότητας των ολοκληρωτικών εξισώσεων, να τους συσχετίσουμε με την παρουσία ταλαντώσεων στις αριθμητικές λύσεις και να βρούμε ομοιότητες με το γνωστό φαινόμενο της υπερκατευθυντικότητας καθώς και με άλλα παρόμοια φαινόμενα.

Ο προσεγγιστικός πυρήνας χρησιμοποιείται επίσης και στις καμπυλόγραμμες κεραίες όπου η εξίσωση (3.1) και η «ιδέα» του ενεργού ρεύματος μπορούν να επεκταθούν (τουλάχιστον για την περίπτωση που η κεραία παρουσιάζει μικρή καμπυλότητα) ξεκινώντας από τις εξισώσεις που δίνονται στην [46]. Από την άλλη πλευρά, τα περισσότερα αποτελέσματα που αφορούν την άπειρη κεραία δεν μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας στις καμπυλόγραμμες κεραίες.

Επιπρόσθετα με την προαναφερθείσα μελέτη των ταλαντώσεων και την επέκταση του ενεργού ρεύματος στην περίπτωση της ΓΠΔ, τα οποία θα εξεταστούν στο τρέχον κεφάλαιο, στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την φυσική σημασία του ενεργού ρεύματος τόσο για το μοντέλο της ΓΠΔ όσο και για το αντίστοιχο μοντέλο της ΓΔΣ. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι στην [43], όπου και παρουσιάζεται η μέθοδος του ενεργού ρεύματος, δεν γίνεται καμία αναφορά στη φυσική σημασία αυτού. Πιο συγκεκριμένα, στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι το προαναφερθέν ρεύμα ταυτίζεται με το ρεύμα στην εξωτερική επιφάνεια της κεραίας. Μια τέτοια ερμηνεία επαναεπιβεβαιώνει την χρησιμότητα της μελέτης του διακένου ως θεωρητικού μοντέλου. Από πρακτικής άποψης, η ανωτέρω ερμηνεία, που ισχύει προσεγγιστικά για κεραίες μεγάλου μήκους, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό της μεθόδου του ενεργού ρεύματος καθότι στις «λεπτές» κεραίες, συνήθως, μας ενδιαφέρει το ρεύμα της εξωτερικής τους επιφάνειας παρά το ολικό ρεύμα.

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει τόσο εδώ όσο και στο επόμενο κεφάλαιο υποθέτουμε ότι το πεδίο που αναπτύσσεται κατά μήκος του διακένου είναι σταθερό. Αυτό αποτελεί και την συνηθέστερη περίπτωση. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.6.2, στην βιβλιογραφία αναφέρονται και άλλες κατανομές πεδίων [13], [35], [47]-[53]. Θα αναφέρουμε κάποιες επεκτάσεις της θεωρίας μας για την περίπτωση της, αρκετά γνωστής, κατανομής τετραγωνικής ρίζας (square-root distribution) [13], [47], [50]. Όπως και στο Κεφάλαιο 2 υποθέτουμε μία $e^{-i\omega t}$ χρονική εξάρτηση και κυματικό αριθμό $k = \omega / c = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

3.2 Πεπερασμένη Κεραία: Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και Αριθμητικά Αποτελέσματα

Διαφοροποιώντας τον συμβολισμό σε σχέση με τα προηγούμενα κεφάλαια, υποδηλώνουμε τον ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα με $K_{\text{ex}}(z, a)$ και $K_{\text{ap}}(z, a)$ αντίστοιχα. Για λόγους απλούστευσης θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $K(z, a)$ για να περιγράψουμε τόσο τον ακριβή όσο και τον προσεγγιστικό πυρήνα που δίνονται από τις (2.2α) και (2.2β) αντίστοιχα. Η ανωτέρω διαφοροποίηση θα μας διευκολύνει σε επόμενες παραγράφους όπου θα περιγράψουμε την μέθοδο του ενεργού ρεύματος και η ακτίνα a θα αντικατασταθεί, στην συνάρτηση του πυρήνα, από την εξαρτημένη μεταβλητή ρ .

Όπως και στο Κεφάλαιο 2, χρησιμοποιούμε αντίστοιχους συμβολισμούς για τα άγνωστα ρεύματα, π.χ. $I_{\text{ex}}(z)$ (το οποίο θα αποκαλούμε «ακριβές ρεύμα» - «exact current»), $I_{\text{ap}}(z)$ («προσεγγιστικό ρεύμα» - «approximate current») και $I(z)$. Υποθέτουμε κεραία μήκους $2h$ τοποθετημένη κατά μήκος του άξονα z , με το κέντρο της στο σημείο $z = 0$. Όταν η εν λόγω κεραία διεγείρεται από την ΓΠΔ, που μαθηματικά περιγράφεται στην (1.27), η ΡΕ δίνεται από τις εξισώσεις (1.17) και (1.2) και είναι:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-h}^h K(z - z', a) I(z') dz' = r(z), \quad |z| < h \quad (3.2)$$

με

$$r(z) = \begin{cases} iVk / (\zeta_0 \Delta), & |z| < \Delta / 2 \\ 0, & \Delta / 2 < |z| < h \end{cases} \quad (3.3)$$

Με την σχέση (3.3), η (3.2) δίνει ακριβώς την ΡΕ της [26]. Από τις εξισώσεις (1.22), (1.2) και (1.27), η αντίστοιχη ΗΕ είναι:

$$\int_{-h}^h K(z - z', a) I(z') dz' = C \cos(kz) + \eta_1(z), \quad |z| < h \quad (3.4)$$

όπου:

$$r_1(z) = \begin{cases} \frac{iV}{\zeta_0 k \Delta} [1 - \cos(kz)], & |z| < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{iV}{\zeta_0 k \Delta} \left[\cos\left(k|z| - \frac{k\Delta}{2}\right) - \cos(kz) \right], & \frac{\Delta}{2} < |z| < h \end{cases} \quad (3.5)$$

Με την (3.5), η ΗΕ (3.4) είναι σύμφωνη με την αντίστοιχη των [25] και [34]. Για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα, οι εξισώσεις (3.2) και (3.4) δίνουν μία λύση $I(z)$ για όλα τα z με $|z| < h$ αν και, εξαιτίας του διακένου, η $I(z)$ έχει φυσική σημασία, ως ρεύμα αγωγιμότητας (conductance current), μόνο όταν $\Delta/2 \leq |z| < h$. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τον συνηθισμένο ορισμό της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου στα άκρα του διακένου $Y = I(\pm\Delta/2)/V$. Επισημαίνουμε ότι οι τιμές του $I(z)$ στο διάστημα $|z| < \Delta/2$ δεν είναι αυθαίρετες. Αποτελούν το ρεύμα μετατόπισης (displacement current) όπως αυτό ορίστηκε από τον Maxwell, ως παράγοντας διόρθωσης στον νόμο του Ampere και οφείλεται στην χρονική μεταβολή της ηλεκτρικής ροής εντός του διακένου. Στο όριο $\Delta \rightarrow 0$, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (3.4) μετατρέπεται στην γνωστή ΗΕ για την ΓΔΣ (εξίσωση (2.1))². Το μοντέλο της κεραίας που εξετάζουμε είναι αυτό του «σωληνοειδούς διπόλου» (βλέπε παρ. 1.2) διεγερόμενο από την ΓΠΔ και θα αναλυθεί εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Παρατηρούμε από την (3.5) ότι η συνάρτηση $r_1(z)$ και η πρώτη παράγωγός της $r_1'(z)$ είναι συνεχείς στα σημεία $z = \pm\Delta/2$. Η δεύτερη παράγωγος, ωστόσο, παρουσιάζει ασυνέχεια στα εν λόγω σημεία. Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, αυτή η ασυνέχεια έχει μια ουσιαστική συνέπεια: Για κάθε επαρκώς ομαλή συνάρτηση $I(z)$, το αριστερό μέλος της (3.4) παρουσιάζει ομαλή συμπεριφορά όταν $K = K_{ap}$ και κατ' επέκταση δεν μπορεί να έχει ασυνεχή δεύτερη παράγωγο. Αυτό σημαίνει ότι, με την ΓΠΔ, η ολοκληρωτική εξίσωση με τον προσεγγιστικό πυρήνα δεν έχει λύση. Όπως είναι ήδη γνωστό (βλέπε Κεφάλαιο 2, [21], [27] και [43]), αυτό ισχύει και στην περίπτωση της ΓΔΣ. Το ίδιο επίσης συμβαίνει και στη περίπτωση του «επίπεδου κύματος» («plane-wave incident») [54] καθώς και στην Γεννήτρια Magnetic

² Όταν παίρνουμε το όριο $\Delta \rightarrow 0$ στον πρώτο κλάδο του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3.5), πρέπει επίσης να υποθέσουμε $z \rightarrow 0$ με $z/\Delta = \text{σταθερό}$.

Frill [41] αν και στις δύο τελευταίες περιπτώσεις η απόδειξη της μη επιλυσιμότητας δεν είναι τόσο εύκολη [41], [54]. Ένας από τους στόχους αυτού του κεφαλαίου αλλά και του αμέσως επόμενου είναι να εξετάσουμε τις συνέπειες της προαναφερθείσας μη επιλυσιμότητας της ολοκληρωτικής εξίσωσης, για την περίπτωση της ΓΠΔ, και να δείξουμε πως το ενεργό ρεύμα της (3.1) μπορεί να ξεπεράσει τα προβλήματα που δημιουργεί.

Η μελέτη μας, στην παρούσα παράγραφο, θα επικεντρωθεί κυρίως στην εφαρμογή της Μεθόδου των Ροπών με ημιτονοειδείς συναρτήσεις βάσης και τριγωνικές συναρτήσεις δοκιμής στην ΡΕ (βλέπε «Μέθοδο Γ» στο Κεφάλαιο 2), χρησιμοποιώντας την συνηθισμένη τεχνική των [43] και [46]. Η μέθοδος αυτή μας διευκολύνει καθώς περιορίζει την αριθμητική επίλυση της ΡΕ στον υπολογισμό απλών ολοκληρωτικών εκφράσεων, χωρίς την παρουσία παραγώγων, εκ των οποίων προσδιορίζουμε τα στοιχεία των πινάκων του γραμμικού συστήματος που προκύπτει κατά την εφαρμογή της μεθόδου. Παρόλα αυτά, θα αναφέρουμε επεκτάσεις και για άλλες συναρτήσεις βάσης τόσο στο παρόν όσο και στο επόμενο κεφάλαιο. Επιπλέον, επιλέγουμε την προαναφερθείσα μέθοδο διότι θα μας διευκολύνει στην ανάλυση της άπειρης κεραίας, που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, και καθιστά απλό τον υπολογισμό της σχέσης (3.1) όπως θα δούμε στην εξίσωση (3.18) παρακάτω. Στην μέθοδο μας υποθέτουμε λύση της μορφής:

$$I(z) \cong \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n s_n(z) \quad (3.6)$$

με $I(\pm h) = I_{\pm N} = 0$ που σημαίνει ότι η προσεγγιστική λύση μηδενίζεται στα άκρα της κεραίας. Οι παράμετροι N και z_0 σχετίζονται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$Nz_0 = h \quad (3.7)$$

και οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις βάσης $s_n(z)$ που χρησιμοποιούμε δίνονται στην (1.40). Αντικαθιστώντας την (3.6) στην (3.2), πολλαπλασιάζοντας με την τριγωνική συνάρτηση $t_l(z)$ της (1.39) και ολοκληρώνοντας από $z = -h$ έως $z = h$ παίρνουμε το κάτωθι γραμμικό σύστημα:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} E_{l-n} I_n = B_l, \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1) \quad (3.8)$$

όπου

$$E_{l-n} = \int_{(l-1)z_0}^{(l+1)z_0} t_l(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{(n-1)z_0}^{(n+1)z_0} s_n(z') K(z-z', a) dz' dz \quad (3.9)$$

και

$$B_l = \int_{-h}^h t_l(z) r(z) dz \quad (3.10)$$

Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί από την σχέση (3.9) ότι το E_{l-n} εξαρτάται μόνο από την απόλυτη διαφορά $|l-n|$ και όχι από τους όρους l και n μεμονωμένα. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η (3.9) μπορεί εύκολα να απλοποιηθεί, σύμφωνα με το Παράρτημα Α της [43], στην ακόλουθη σχέση:

$$E_l = \frac{k}{z_0 \sin(kz_0)} [A_{l+1} + A_{l-1} - 2 \cos(kz_0) A_l], \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(2N-1) \quad (3.11)$$

όπου

$$A_l = \int_0^{z_0} (z_0 - z) [K(z+lz_0, a) + K(z-lz_0, a)] dz, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(2N-1) \quad (3.12)$$

Όπως γίνεται αντιληπτό, επειδή το σφάλμα των στρογγυλοποιήσεων κατά την επίλυση γραμμικών συστημάτων είναι σημαντικό - ιδιαίτερα όταν το σύστημα διαθέτει πίνακες με υψηλό δείκτη κατάστασης - είναι προτιμότερος ο αριθμητικός υπολογισμός του A_l μέσω ενός απλού ολοκληρώματος (σχέση (3.12)) παρά μέσω διπλού ολοκληρώματος (σχέση (3.9)). Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε μεγαλύτερη ακρίβεια και αξιοπιστία στα αριθμητικά μας αποτελέσματα.

Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε ότι, στην περίπτωση της ΓΠΔ, ένας ακέραιος αριθμός συναρτήσεων βάσης μας δίνει ακριβώς το εύρος του διακένου, έτσι ώστε:

$$z_0 = \Delta/(2q), \quad q=1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Από τις εξισώσεις (3.3), (3.10) και (3.13) παίρνουμε:

$$B_l = \frac{iVk}{2\zeta_0 q} \begin{cases} 1, & l = 0, \pm 1, \dots, \pm(q-1) \\ 1/2, & l = \pm q \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases} \quad (3.14)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι, στην μέθοδό μας, οι σχέσεις (3.7) και (3.13) ισχύουν αν και μόνο αν ο λόγος $2h/\Delta$ είναι ρητός αριθμός ενώ ο $2qh/\Delta$ ακέραιος. Ο πρώτος περιορισμός δεν έχει σημασία από πρακτικής άποψης. Ο δεύτερος, ωστόσο, περιορίζει τις επιτρεπτές τιμές των παραμέτρων q και N .

3.3 Πεπερασμένη Κεραία: Ενεργό Ρεύμα

Στην αρχή του κεφαλαίου δώσαμε τον ορισμό του ενεργού ρεύματος παραθέτοντας την εξίσωση (3.1), όπου $H_\phi(\rho, z)$ είναι το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στο προσεγγιστικό ρεύμα $I_{ap}(z)$. Το πεδίο αυτό μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια του διανυσματικού δυναμικού A_z (βλέπε εξισώσεις (1.23a) και (1.24a) του [21]):

$$I_{\text{eff}}(\rho, z) = -(2\pi\rho/\mu_0)\partial A_z/\partial\rho = \frac{-\rho}{2} \int_{-h}^h I_{ap}(z') \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+\rho^2}}}{\sqrt{(z-z')^2+\rho^2}} \right) dz' \quad (3.15)$$

Σημειώνουμε ότι στις (3.15) και (3.1) ολοκληρώνουμε σε όλο το μήκος της κεραίας ($|z| < h$) και όχι στα διαστήματα $\Delta/2 < |z| < h$. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, η επιλογή αυτή δεν μας διευκολύνει απλά στον υπολογισμό της σχέσης (3.15) αλλά θα μας

οδηγήσει και στη φυσική ερμηνεία της όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Κάποιες αναφορές για την επιλογή του διαστήματος ολοκλήρωσης (που δεν αφορούν βέβαια τις ολοκληρωτικές εκφράσεις για το ενεργό ρεύμα) εμπεριέχονται στην [34]. Χρησιμοποιώντας την (2.2β), μπορούμε να εκφράσουμε την (3.15) ως συνάρτηση του προσεγγιστικού πυρήνα:

$$I_{\text{eff}}(\rho, z) = -2\pi\rho \int_{-h}^h I_{\text{ap}}(z') \frac{\partial K_{\text{ap}}(z-z', \rho)}{\partial \rho} dz' \quad (3.16)$$

Δεδομένου ότι η ολοκληρωτική εξίσωση με τον προσεγγιστικό πυρήνα δεν έχει λύση $I_{\text{ap}}(z')$, η (3.16), αυστηρά μιλώντας, δεν έχει νόημα. Αποκτά όμως σημασία αν αντικαταστήσουμε την συνάρτηση $I_{\text{ap}}(z')$ με την αριθμητική της προσέγγιση που δόθηκε στην σχέση (3.6). Έτσι λοιπόν η (3.16) μετασχηματίζεται στην:

$$I_{\text{eff}}(\rho, z) = -2\pi\rho \sum_{n=-(N-1)}^{(N-1)} I_n \int_{(n-1)z_0}^{(n+1)z_0} s_n(z') \frac{\partial K_{\text{ap}}(z-z', \rho)}{\partial \rho} dz' \quad (3.17)$$

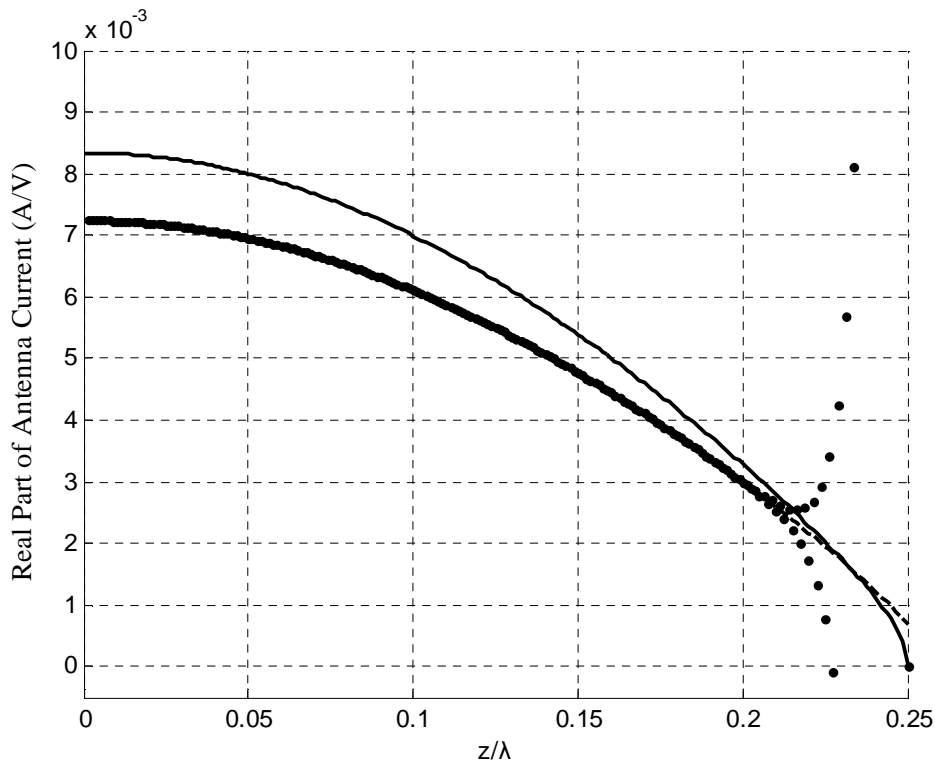
Η χρήση της ανωτέρω εξίσωσης, με τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος, αποτελεί την πρώτη μας μέθοδο για τον υπολογισμό του ενεργού ρεύματος. Η δεύτερη μέθοδος που χρησιμοποιούμε έγκειται στη χρήση του γνωστού τύπου που δίνει το μαγνητικό πεδίο του ημιτονοειδούς ρεύματος (βλέπε την εξίσωση (3.13) της [43] - ο τύπος αυτός, αποτελεί τον κυριότερο λόγο για την απλοποίηση της (3.9) που αναφέραμε παραπάνω). Καταλήγουμε λοιπόν στην σχέση:

$$I_{\text{eff}}(\rho, z) = \frac{1}{2i \sin(kz_0)} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n \cdot \left(e^{ik\sqrt{[(n+1)z_0-z]^2 + \rho^2}} + e^{ik\sqrt{[(n-1)z_0-z]^2 + \rho^2}} - 2 \cos(kz_0) e^{ik\sqrt{(nz_0-z)^2 + \rho^2}} \right) \quad (3.18)$$

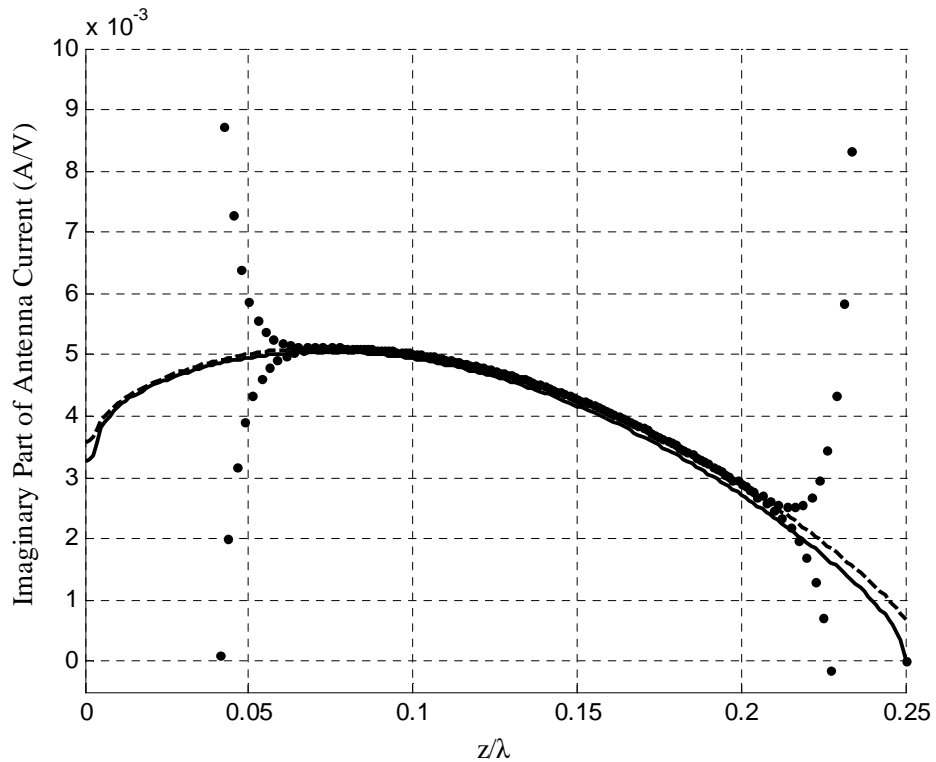
Το πλεονέκτημα της (3.18) είναι ότι δεν απαιτεί τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Από την άλλη πλευρά, η (3.17) μπορεί να επεκταθεί για οποιαδήποτε συνάρτηση βάσης.

Στα Σχήματα 3.1, 3.2 απεικονίζονται αντιπροσωπευτικά αριθμητικά αποτελέσματα για το ακριβές, προσεγγιστικό, και ενεργό ρεύμα. Τα αποτελέσματα για το τελευταίο υπολογίστηκαν από την εξίσωση (3.18) με $\rho = a$ και συμπίπτουν, σχεδόν, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της σχέσης (3.17). Παρατηρούμε ότι τόσο το

πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος του προσεγγιστικού ρεύματος παρουσιάζουν μη φυσιολογικές ταλαντώσεις κοντά στο άκρο της κεραίας $z = h$. Επιπρόσθετα, το φανταστικό μέρος παρουσιάζει ταλαντώσεις πλησίον του σημείου τροφοδοσίας $z = 0$. Κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται. Εκτός από την περιοχή πλησίον του $z = h$, τα αποτελέσματα για το πραγματικό μέρος του ρεύματος και την αγωγιμότητα εισόδου της κεραίας είναι κοντά στα αντίστοιχα αποτελέσματα για την περίπτωση του μοντέλου της ΓΔΣ (βλέπε Σχήμα 2.1). Παράλληλα με άλλες εργασίες, έχει επαληθευτεί ότι τα ανωτέρω συμπεράσματα δεν επηρεάζονται σημαντικά από αλλαγές της παραμέτρου N . Θα πρέπει να αναφερθεί ότι η τελευταία παρατήρηση δεν ισχύει για την τιμή της επιδεκτικότητας, μέγεθος που θα εξεταστεί εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο.



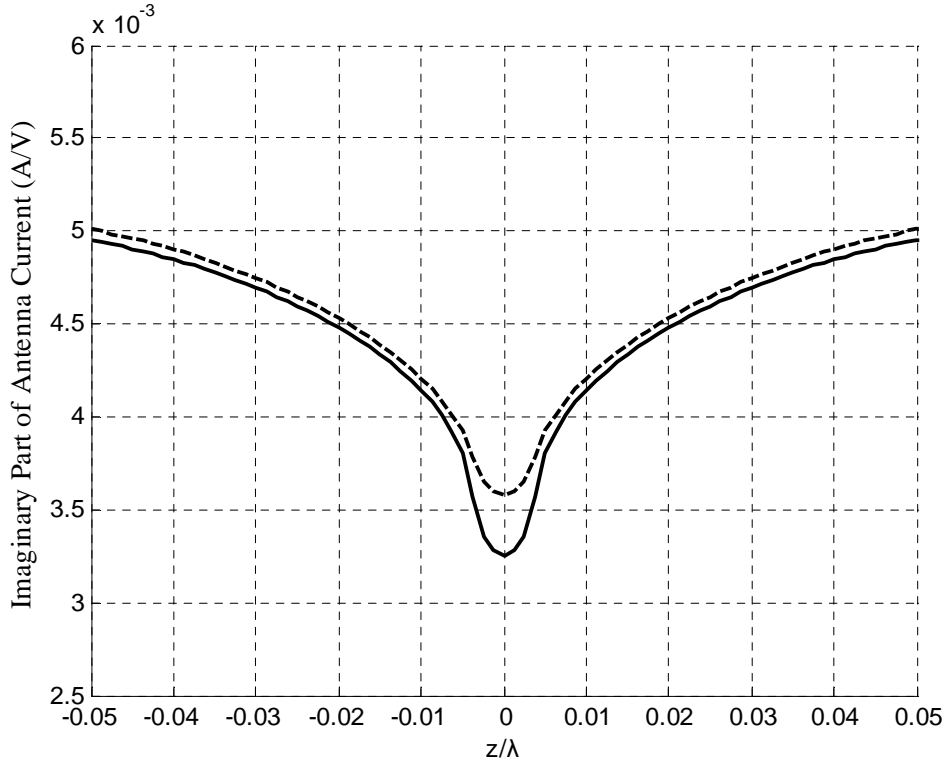
Σχήμα 3.1: $\text{Re}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή), $\text{Re}\{I_{\text{ap}}(z)/V\}$ (σημεία) και $\text{Re}\{I_{\text{eff}}(z)/V\}$ (διακεκομμένη γραμμή) όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 3.2 και την εξίσωση (3.18). Πλησίον του $z/\lambda = 0.25$ κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται. $N=200$, $q=3$, $\Delta/\lambda=0.0075$, $a/\lambda=0.007022$, $h/\lambda=0.25$. Στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, τα σημεία είναι $\text{Re}\{I_n/V\}$, όπου I_n είναι οι συντελεστές της συνάρτησης βάσης στην (3.6).



Σχήμα 3.2: Όπως το Σχήμα 3.1 για τα αντίστοιχα φανταστικά μέρη των ρευμάτων. Πλησίον των $z/\lambda=0$ και $z/\lambda = 0.25$ κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται.

Στα Σχήματα 3.1 και 3.2, το ενεργό ρεύμα (που όπως αναφέραμε υπολογίστηκε βάσει της (3.18) από το ταλαντούμενο, και για το λόγο αυτό, μη φυσιολογικό προσεγγιστικό ρεύμα που απεικονίζεται στα Σχήματα 3.1, 3.2 δεν παρουσιάζει εμφανείς ταλαντώσεις. Μακριά από τις περιοχές των ταλαντώσεων, τα τρία ρεύματα είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους. Η συμπεριφορά αυτή παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με την περίπτωση της ΓΔΣ, όπως προκύπτει συγκρίνοντας τα ανωτέρω σχήματα με τα αντίστοιχα του Κεφαλαίου 2 και της [43]. Όπως είναι εμφανές στο Σχήμα 3.3, αυτό που διαφέρει από το μοντέλο της ΓΔΣ είναι η συμπεριφορά των $\text{Im}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ και $\text{Im}\{I_{\text{eff}}(a, z)/V\}$ κοντά στο σημείο $z=0$. Συγκεκριμένα, εξετάζοντας το Σχήμα 2.2, παρατηρούμε ότι το ρεύμα, στην περίπτωση της ΓΔΣ, παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία πλησίον του σημείου τροφοδοσίας της κεραίας. Αντιθέτως, στο Σχήμα 3.3 η εικόνα είναι εντελώς διαφορετική καθώς τα διαγράμματα έχουν ομαλή συμπεριφορά κοντά στα άκρα του διακένου και στο $z=0$. Στις επόμενες παραγράφους, θα

εξηγήσουμε και θα ερμηνεύσουμε την συμπεριφορά του ρεύματος στα Σχήματα 3.1, 3.2 και 3.3 εξετάζοντας την άπειρη κεραία.



Σχήμα 3.3: Μεγέθυνση του Σχήματος 3.2 κοντά στο κέντρο (εμφανίζονται επίσης τιμές για αρνητικά z): $\text{Im}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή) και $\text{Im}\{I_{\text{eff}}(z)/V\}$ (διακεκομμένη γραμμή). Το διάγραμμα παρουσιάζει ομαλή συμπεριφορά στα σημεία $z/\lambda = \pm\Delta/(2\lambda) = 0.00375$ και $z/\lambda = 0$.

3.4 Κεραία Απείρου Μήκους: Συσχετισμοί με την Πεπερασμένη Κεραία

Για την άπειρη κεραία, η εξίσωση Pocklington γράφεται:

$$\left(\partial^2 / \partial z^2 + k^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} K(z-z', a) I(z') dz' = r(z), \quad (3.19)$$

όπου η συνάρτηση $r(z)$ δίνεται στην (3.3). Η αντίστοιχη εξίσωση του Hallén αποδεικνύεται στο Παράρτημα Α και είναι η:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(z-z', a) I(z') dz' = \begin{cases} iV [1 - e^{ik\Delta/2} \cos(kz)] / (\zeta_0 k \Delta), & |z| < \Delta/2 \\ V \sin(k\Delta/2) e^{ik|z|} / (\zeta_0 k \Delta), & |z| > \Delta/2 \end{cases} \quad (3.20)$$

όπου, και πάλι, το δεξιό μέλος της εξίσωσης καθώς και η πρώτη παράγωγος αυτού είναι συνεχείς συναρτήσεις στα σημεία $z = \pm\Delta/2$. Αντιθέτως, η δεύτερη παράγωγος είναι ασυνεχής. Στην περίπτωση της (3.20) η αναφερόμενη ασυνέχεια δεν αποδεικνύει την μη επιλυσιμότητα της ολοκληρωτικής εξίσωσης, με τον προσεγγιστικό πυρήνα, όπως στην περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας της παραγράφου 3.2. Αυτό συμβαίνει διότι τα άκρα ολοκλήρωσης στην (3.20) δεν είναι πεπερασμένα.³ Παρόμοια με την (3.16), ορίζουμε το ενεργό ρεύμα για $0 \leq \rho \leq a$ από την εξίσωση:

$$I_{\text{eff}}(\rho, z) = -2\pi\rho \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{ap}}(z') \frac{\partial K_{\text{ap}}(z-z', \rho)}{\partial \rho} dz', \quad (3.21)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την επιλυσιμότητα των εξισώσεων (3.19) και (3.20) και την δυνατότητα να εξάγουμε ένα ομαλό και αξιόπιστο ενεργό ρεύμα από την (3.21).

3.4.1 Επιλυσιμότητα των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

Ο Μετασχηματισμός Fourier (MF) αποτελεί ένα πολύτιμο εργαλείο για την μελέτη εξισώσεων της μορφής (3.19) και (3.20) και για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθεί στην κατωτέρω ανάλυση. Θεωρούμε $\bar{F}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{i\zeta z} dz$ τον MF

³ Ολοκληρώματα με άπειρα όρια ολοκλήρωσης που περιέχουν μια παράμετρο, δεν αποτελούν, απαραίτητα, ομαλές συναρτήσεις της παραμέτρου αυτής. Για παράδειγμα η συνάρτηση $\int_0^{\infty} \sin(zz') / z' dz'$ (όπου z πραγματική μεταβλητή), είναι, προφανώς, ασυνεχής στο $z = 0$. Μπορούμε εύκολα να βρούμε ένα παρόμοιο παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο αλλά η δεύτερη παράγωγός της παρουσιάζει ασυνέχεια.

της συνάρτησης $F(z)$. Με την βοήθεια του Θεωρήματος της Συνέλιξης (2.13), ο MF των (3.19) και (3.21) είναι αντίστοιχα:

$$(k^2 - \zeta^2) \bar{K}(\zeta, a) \bar{I}(\zeta) = \bar{r}(\zeta) \quad (3.22)$$

και

$$\bar{I}_{\text{eff}}(\rho, \zeta) = -2\pi\rho \bar{I}_{\text{ap}}(\zeta) \partial \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \rho) / \partial \rho \quad (3.23)$$

Γράφοντας την (3.22) για τον προσεγγιστικό πυρήνα/ ρεύμα, και απαλείφοντας τον όρο $\bar{I}_{\text{ap}}(\zeta)$ από τις (3.22) και (3.23) παίρνουμε την σχέση:

$$(k^2 - \zeta^2) \frac{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, a)}{(-2\pi\rho) \partial \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \rho) / \partial \rho} \bar{I}_{\text{eff}}(\rho, \zeta) = \bar{r}(\zeta) \quad (3.24)$$

ο αντίστροφος MF της οποίας δίνεται από:

$$(\partial^2 / \partial z^2 + k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\text{eff}}(z - z', \rho) I_{\text{eff}}(\rho, z') dz' = r(z), \quad (3.25)$$

όπου

$$\begin{aligned} K_{\text{eff}}(z, \rho) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{K}_{\text{eff}}(\zeta, \rho) e^{-iz\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, a)}{(-2\pi\rho) \partial \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \rho) / \partial \rho} e^{-iz\zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (3.26)$$

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (3.25) και (3.26) έχουν υπολογιστεί στην [43] μόνο για $\rho = a$. Σημειώνουμε, επίσης, κάποιες διαφορές στον συμβολισμό που χρησιμοποιούμε εδώ σε σχέση με την [43]. Εκ των ανωτέρω προκύπτει ότι, για όλα τα ρ με $\rho \leq a$, το ενεργό ρεύμα ικανοποιεί την εξίσωση *Pocklington* στην μορφή της (3.19) αν ο πυρήνας αυτής αντικατασταθεί από τον «ενεργό πυρήνα» όπως αυτός ορίζεται στην σχέση (3.26).

Όπως είναι εμφανές το ολοκλήρωμα στην (3.26) δεν δύναται να υπολογιστεί αναλυτικά.

	$w(\zeta)$ for $-k < \zeta < k$	$w(\zeta)$ for real ζ with $ \zeta > k$
Exact, $w_{\text{ex}}(\zeta)$	$\frac{-4i}{(k^2 - \zeta^2) J_0(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})}$	$\frac{-2\pi}{(\zeta^2 - k^2) I_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2}) K_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})}$
Approximate, $w_{\text{ap}}(\zeta)$	$\frac{-4i}{(k^2 - \zeta^2) H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})}$	$\frac{-2\pi}{(\zeta^2 - k^2) K_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})}$
Effective, $w_{\text{eff}}(\zeta)$	$\frac{2\pi\rho H_1^{(1)}(\rho\sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{k^2 - \zeta^2} H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})}$	$\frac{-2\pi\rho K_1(\rho\sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} K_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})}$

Πίνακας 3.1: Εκφράσεις της συνάρτησης $w(\zeta)$ για πραγματικές τιμές του ζ . Γράφουμε τις μορφές της συνάρτησης ξεχωριστά για $|\zeta| < k$ και $|\zeta| > k$, με την μία μορφή να αποτελεί αναλυτική συνέχεια της άλλης.

Κατόπιν των ανωτέρω, η εξίσωση (3.22) ισχύει όχι μόνο για τις περιπτώσεις του ακριβούς και του προσεγγιστικού ρεύματος αλλά και για την περίπτωση του ενεργού. Παραλείποντας το όρισμα της ακτίνας στην $\bar{I}_{\text{eff}}(\rho, \zeta)$ και στην συνάρτηση του πυρήνα, μπορούμε να εκφράσουμε και τις τρεις περιπτώσεις της (3.22) ως ακολούθως:

$$\bar{I}(\zeta) = w(\zeta)\bar{r}(\zeta) \quad (3.27)$$

όπου

$$w(\zeta) = \left[(k^2 - \zeta^2) \bar{K}(\zeta) \right]^{-1} \quad (3.28)$$

με την συνάρτηση $w(\zeta)$ να παίρνει μία από τις τρεις μορφές $w_{\text{ex}}(\zeta)$, $w_{\text{ap}}(\zeta)$, $w_{\text{eff}}(\zeta)$, αναλόγως της επιλογής του πυρήνα. Παραθέτουμε τις μορφές της ανωτέρω συνάρτησης στον Πίνακα 3.1. Οι εκφράσεις για τις δύο πρώτες μορφές προκύπτουν από την (3.28)

και τους γνωστούς τύπους των πυρήνων $\bar{K}_{ex}(\zeta)$ και $\bar{K}_{ap}(\zeta)$ (βλέπε, εξισώσεις (2.11) και (2.12) αντίστοιχα), ενώ η τρίτη μορφή προσδιορίζεται από τις (3.26), (3.28), την έκφραση για την $w_{ap}(\zeta)$ και τους συνήθεις τύπους που δίνουν τις παραγώγους των συναρτήσεων Bessel [55]. Παρατηρούμε ότι στο όριο $\rho \rightarrow 0$, η τελευταία γραμμή του πίνακα ταυτίζεται με την αμέσως προηγούμενη όπως είναι αναμενόμενο, αν σκεφτούμε τον ορισμό που δώσαμε για το ενεργό ρεύμα.

Η εξίσωση (3.27) δίνει τον μετασχηματισμό Fourier της λύσης που αναζητάμε. Από τον αντίστροφο MF αυτής παίρνουμε τελικά:

$$I(z) = \pi^{-1} \int_{0, (k)}^{+\infty} w(\zeta) \bar{r}(\zeta) \cos(\zeta z) d\zeta \quad (3.29)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $w(\zeta) \bar{r}(\zeta) = w(-\zeta) \bar{r}(-\zeta)$. Στην (3.29), χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\int_{0, (k)}^{+\infty}$, σκόπιμα, για να δηλώσουμε ότι η διαδρομή ολοκλήρωσης διέρχεται κάτωθεν του σημείου $\zeta = k$ στο μιγαδικό ζ -επίπεδο. Το ολοκλήρωμα στην (3.29) υπολογίζεται αρχικά, για μιγαδικές τιμές του k , με $\text{Im}\{k\} > 0$ και διάστημα ολοκλήρωσης τον πραγματικό ημιάξονα (αυτό σημαίνει ότι η κεραία περιβάλλεται από μέσο που παρουσιάζει απώλειες). Κατόπιν, κάνουμε αναλυτική συνέχιση (analytic continuation) του ολοκληρώματος για την περίπτωση που $k > 0$. Στην περίπτωση αυτή η (3.29) είναι αναλυτικά συνεχής στο $k > 0$. Από την (3.3), η $\bar{r}(\zeta)$ στην (3.29) μετασχηματίζεται:

$$\bar{r}(\zeta) = \frac{iVk \sin(\zeta\Delta/2)}{\zeta_0 \zeta\Delta/2} \quad (3.30)$$

Αν το ολοκλήρωμα στην (3.29) συγκλίνει, τότε η (3.29) δίνει, ακριβώς, την λύση της PE (3.19) - η οποία, προφανώς, ταυτίζεται με την λύση της HE (3.20). Αντιθέτως, ένα αποκλίνον ολοκλήρωμα στην (3.29) σημαίνει ότι τόσο η HE όσο και η PE είναι μη επιλύσιμες αναλυτικά.

Οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις της συνάρτησης $\bar{w}(\zeta)$ για μεγάλες τιμές του ζ - που μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν από τον Πίνακα 3.1 και τις ασυμπτωτικές σχέσεις των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel που δίνονται στο Παράρτημα Γ του

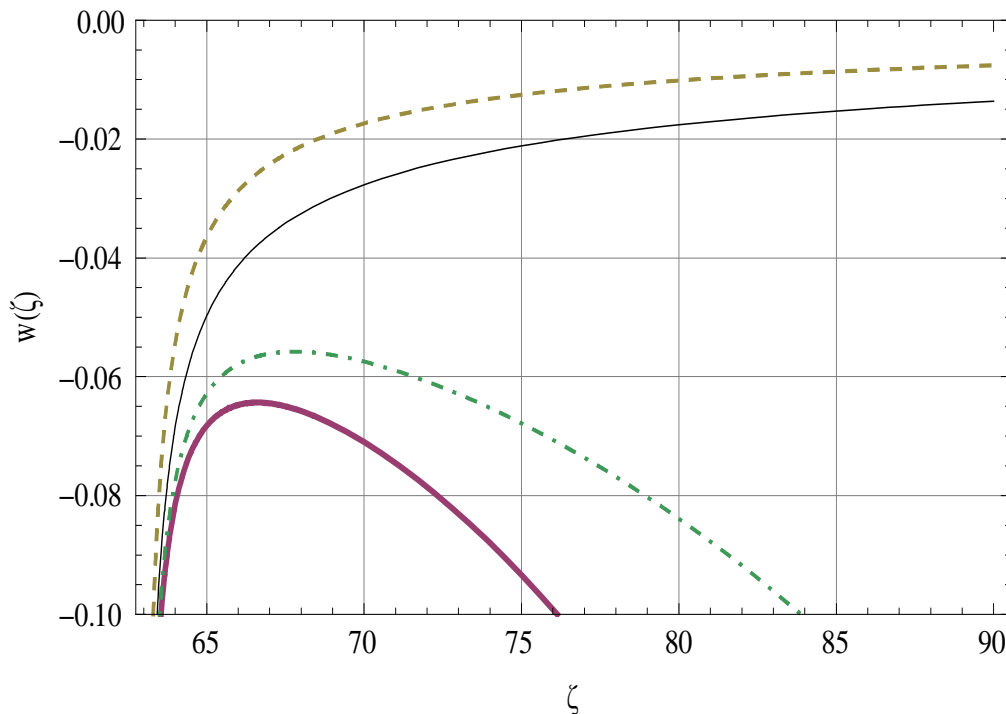
Κεφαλαίου 2 - δίνονται στον Πίνακα 3.2. Η τελευταία (τέταρτη) στήλη αναφέρεται στην επιλυσιμότητα της αντίστοιχης ολοκληρωτικής εξίσωσης. Η επιλυσιμότητα ή μη της εξίσωσης αποτελεί συνέπεια της τρίτης στήλης. Συγκεκριμένα, οι δύο μη επιλύσιμες περιπτώσεις αντιστοιχούν σε εκθετικά μεγάλες ολοκληρωτέες (βλέπε επίσης το Σχήμα 3.4). Από την άλλη πλευρά, στις δύο επιλύσιμες περιπτώσεις η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση συμπεριφέρεται ως $\cos(\zeta z) \sin(\zeta \Delta / 2) / \zeta^2$, για μεγάλες τιμές του ζ , και συνεπώς είναι ολοκληρώσιμη. Υπογραμμίζουμε ότι για τις ασυμπτωτικές εκφράσεις της προτελευταίας γραμμής του Πίνακα 3.2 θα πρέπει να υποθέσουμε ότι το ρ έχει σταθερή και μη μηδενική τιμή. Αν $\rho = 0$, οι προαναφερθείσες εκφράσεις δεν δίνουν τις αντίστοιχες της προηγούμενης γραμμής.

	Large- ζ behavior of $w(\zeta)$	Large- ζ behavior of integrand $\pi^{-1}w(\zeta)\bar{r}(\zeta)\cos(\zeta z)$ in (3.29)	HE and PE are...
Exact	$w_{\text{ex}}(\zeta) \sim \frac{-4\pi a}{\zeta}$	$\frac{iVk}{\zeta_0} \frac{\sin(\zeta \Delta / 2) \cos(\zeta z)}{\zeta \Delta / 2} \frac{-4a}{\zeta}$	solvable
Approximate	$w_{\text{ap}}(\zeta) \sim -2\sqrt{2\pi a} \frac{e^{a\zeta}}{\zeta^{3/2}}$,	$\frac{iVk}{\zeta_0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\zeta \Delta / 2) \cos(\zeta z)}{\zeta \Delta / 2} -2\sqrt{2\pi a} \frac{e^{a\zeta}}{\zeta^{3/2}}$,	unsolvable
Effective, $0 < \rho < a$	$w_{\text{eff}}(\zeta) \sim \frac{-2\pi\sqrt{a\rho}}{\zeta} e^{(a-\rho)\zeta}$	$\frac{iVk}{\zeta_0} \frac{\sin(\zeta \Delta / 2) \cos(\zeta z)}{\zeta \Delta / 2} \frac{-2\sqrt{a\rho}}{\zeta} e^{(a-\rho)\zeta}$	unsolvable
Effective, $\rho = a$	$w_{\text{eff}}(\zeta) \sim \frac{-2\pi a}{\zeta}$	$\frac{iVk}{\zeta_0} \frac{\sin(\zeta \Delta / 2) \cos(\zeta z)}{\zeta \Delta / 2} \frac{-2a}{\zeta}$	solvable

Πίνακας 3.2: Ασυμπτωτικές εκφράσεις της $w(\zeta)$ και των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων της (3.29). Επιλυσιμότητα των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Συνοψίζοντας, έχουμε επαληθεύσει ότι για την άπειρη κεραία, με τον ακριβή πυρήνα, η ολοκληρωτική εξίσωση είναι επιλύσιμη. Αντιθέτως, αποδείξαμε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση με τον προσεγγιστικό πυρήνα - η οποία δίνεται από την ολοκληρωτική εξίσωση για το ενεργό ρεύμα όταν $\rho = 0$ - είναι μη επιλύσιμη. Στην

περίπτωση του ενεργού ρεύματος η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση δεν επιλύεται αναλυτικά όταν η παράμετρος ρ παίρνει μικρές θετικές τιμές. Καθίσταται, ωστόσο, επιλύσιμη όταν $\rho = a$. Στο εξής, θα αναφερόμαστε στην τελευταία περίπτωση με τον χαρακτηρισμό «ενεργή-επιλύσιμη» περίπτωση, χρησιμοποιώντας για το αντίστοιχο ρεύμα τον συμβολισμό $I_{\text{eff}}(a, z)$. Υπενθυμίζουμε ότι, για την άπειρη κεραία, η ολοκληρωτική εξίσωση με τον προσεγγιστικό πυρήνα, είναι επίσης μη επιλύσιμη στην περίπτωση της ΓΔΣ (βλέπε Κεφάλαιο 2) - επιλύεται ωστόσο αναλυτικά για το μοντέλο της Γεννήτριας Magnetic Frill [41].



Σχήμα 3.4: Οι συναρτήσεις $w(\zeta)$ για πραγματικές τιμές του ζ με $\zeta > k$, όπως προσδιορίστηκαν από τις εκφράσεις του Πίνακα 3.1: $w_{\text{ex}}(\zeta)$ (λεπτή συνεχής γραμμή), $w_{\text{ap}}(\zeta)$ (έντονη συνεχής γραμμή), $w_{\text{eff}}(\zeta)$ για $\rho = a$ (διακεκομμένη γραμμή), και $w_{\text{eff}}(\zeta)$ για $\rho = a/4$ (διακεκομμένη με σημεία γραμμή), $k = 20\pi \text{ m}^{-1} \cong 62.8 \text{ m}^{-1}$ και $a = 0.07022 \text{ m}$. Όλες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν ιδιομορφία αριστερά του σημείου $\zeta = k$. Για μεγάλα ζ , οι συναρτήσεις $w_{\text{ap}}(\zeta)$ και $w_{\text{eff}}(\zeta)$ ($\rho = a/4$) παίρνουν εκθετικά μεγάλες, αρνητικές τιμές (οι τιμές στα δεξιά του διαγράμματος είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται), ενώ οι τιμές των $w_{\text{ex}}(\zeta)$ και $w_{\text{eff}}(\zeta)$ ($\rho = a$) δεν είναι μεγάλες. Ο λόγος των δύο τελευταίων μεγεθών προσεγγίζει το 2 καθώς το ζ αυξάνει.

Όπως προκύπτει από την σχέση ορισμού του (3.1), το ενεργό ρεύμα (για $\rho = a$) είναι ανάλογο με το κοντινό μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ταλαντούμενο προσεγγιστικό ρεύμα. Η επιλυσιμότητα, για $\rho = a$, σημαίνει ότι αυτό το μαγνητικό πεδίο παρουσιάζει ομαλή συμπεριφορά. Αν και η ομαλότητα αυτή είναι εμφανής, από την απαλοιφή των ταλαντώσεων, εκπλήσσει το γεγονός ότι σε τόσο κοντινή απόσταση ($\rho = a$) από την πηγή τροφοδοσίας ($\rho = 0$) επιτυγχάνεται πλήρης εξομάλυνση.

Όπως είδαμε, η προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση και η, για $\rho < a$, ολοκληρωτική εξίσωση με τον ενεργό πυρήνα δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά για την περίπτωση της άπειρης, σε μήκος, κεραίας. Για την πεπερασμένη κεραία, όπως ήταν λογικό, αναμέναμε παρόμοια συμπεριφορά με το αντίστοιχο μοντέλο της ΓΔΣ και πιο συγκεκριμένα, αναμέναμε τα αριθμητικά αποτελέσματα να παρουσιάζουν ταλαντώσεις πλησίον του κέντρου της κεραίας, όπως άλλωστε φαίνεται και στα Σχήματα 3.1 και 3.2 (στην περίπτωση του μοντέλου ΓΜΦ δεν παρατηρούμε ταλαντώσεις [41]). Όπως προκύπτει από την ανάλυση του Κεφαλαίου 2, της [41] και ιδιαίτερα της [42], θα πρέπει να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο της παρουσίας των ταλαντώσεων ως αποτέλεσμα της μη επιλυσιμότητας των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Θα εξετάσουμε το σημείο αυτό εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

3.4.2 Επιλύσιμες Περιπτώσεις: Ιδιότητες των Λύσεων

Ας επιστρέψουμε, στο σημείο αυτό, στην άπειρη κεραία και ας εξετάσουμε πιο αναλυτικά την ενεργή-επιλύσιμη περίπτωση και την περίπτωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον ακριβή πυρήνα. Έχουμε ήδη υπογραμμίσει ότι η συνάρτηση $I(z)$ δεν αποτελεί, από φυσικής απόψεως, ρεύμα αγωγιμότητας για την κεραία όταν $|z| < \Delta/2$. Παρόλα αυτά πρέπει να αναφέρουμε ότι το ολοκλήρωμα στην (3.29) συγκλίνει ακόμα και όταν $z = 0$. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από τον Πίνακα 3.2 καθότι, για τις δύο επιλύσιμες περιπτώσεις, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση συμπεριφέρεται ως $\sin(\zeta\Delta/2)/\zeta^2$ για μεγάλες τιμές του ζ . Ωστόσο, για $\Delta \rightarrow 0$ η ολοκληρωτέα στον Πίνακα 3.2 συμπεριφέρεται ως $1/\zeta$ για μεγάλα ζ , επαληθεύοντας την γνωστή άπειρη χωρητικότητα του διακένου και την λογαριθμική ιδιομορφία που παρουσιάζει η επιδεκτικότητα στην περίπτωση της ΓΔΣ όπως είδαμε στην παράγραφο 2.3. Αντίθετα λοιπόν με την ΓΔΣ, που εξετάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και στην [43], τα

μεγέθη $I_{\text{ex}}(z)$ και $I_{\text{eff}}(a, z)$ δεν παρουσιάζουν λογαριθμική ιδιομορφία στο $z=0$. Είναι συνεχή στο $z=0$ και έχουν $(I_{\text{ex}}(0), I_{\text{eff}}(a, 0))$ πεπερασμένες τιμές. Καθώς υπάρχει πεπερασμένο διάκενο, αυτό ήταν αναμενόμενο λόγω της φυσικής του προβλήματος. Κατόπιν των ανωτέρω, η συμπεριφορά που παρατηρήσαμε, για μικρά z , στο Σχήμα 3.3, για την περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας, είναι σύμφωνη με τα αναλυτικά μας αποτελέσματα για την άπειρη κεραία.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την συμπεριφορά του ρεύματος στα άκρα του διακένου, που έχει φυσική σημασία για το μοντέλο της ΓΠΔ που εξετάζουμε, και παρουσιάζει μεγαλύτερο θεωρητικό ενδιαφέρον. Το ολοκλήρωμα στην (3.29) συγκλίνει όταν $z = \Delta/2$ και, ως εκ τούτου, τα μεγέθη $I_{\text{ex}}(\Delta/2)$ και $I_{\text{eff}}(a, \Delta/2)$ είναι πεπερασμένα, όπως επίσης και οι αντίστοιχες σύνθετες αντιστάσεις εισόδου της κεραίας. Η πρώτη παράγωγος του ρεύματος $I'(z)$ - που είναι ανάλογη του φορτίου ανά μονάδα μήκους - δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$I'(z) = \int_{0, (k)}^{+\infty} \frac{-1}{\pi} \zeta w(\zeta) \bar{r}(\zeta) \sin(\zeta z) d\zeta \quad (3.31)$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση του ακριβούς ρεύματος $I_{\text{ex}}(z)$. Μπορούμε να δούμε από τον Πίνακα 3.2 ότι:

$$\frac{-1}{\pi} \zeta w_{\text{ex}}(\zeta) \bar{r}(\zeta) \sim \frac{i8Vka \sin(\zeta\Delta/2)}{\zeta_0\Delta \zeta}, \quad \text{καθώς } \zeta \rightarrow \infty \quad (3.32)$$

Συνεπώς, εκτός των άλλων, η $I'(z)$ είναι ο ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης που συμπεριφέρεται ως $\sin(\zeta\Delta/2)/\zeta$ για μεγάλες τιμές της μεταβλητής ολοκλήρωσης ζ . Για τον λόγο αυτό, η $I'_{\text{ex}}(z)$ αποκλίνει λογαριθμικά καθώς το z προσεγγίζει το $\Delta/2$, με:

$$\frac{I'_{\text{ex}}(z)}{V} \sim -i \frac{4ka}{\zeta_0\Delta} \ln \left| z - \frac{\Delta}{2} \right|, \quad \text{καθώς } z \rightarrow \frac{\Delta}{2} \quad (3.33)$$

Η εξίσωση (3.33) αποδεικνύεται στο Παράρτημα Β. Στο ίδιο παράρτημα αποδεικνύεται επίσης ότι:

$$\frac{I'_{\text{eff}}(a, z)}{V} \sim -i \frac{2ka}{\zeta_0 \Delta} \ln \left| z - \frac{\Delta}{2} \right|, \quad \text{καθώς} \quad z \rightarrow \frac{\Delta}{2} \quad (3.34)$$

Οι σχέσεις (3.33) και (3.34) διαφέρουν κατά έναν παράγοντα $1/2$. Αυτό οφείλεται σε έναν αντίστοιχο παράγοντα στις ασυμπτωτικές εκφράσεις των μεγεθών $w_{\text{ex}}(\zeta)$ και $w_{\text{eff}}(\zeta)$ (βλέπε τον Πίνακα 3.2 και το Σχήμα 3.4). Συνοψίζοντας, τόσο το ακριβές $I_{\text{ex}}(z)$ όσο και το ενεργό (για $\rho = a$) $I_{\text{eff}}(a, z)$ ρεύμα, έχουν πεπερασμένες τιμές στο άκρο του διακένου $z = \Delta/2$. Ωστόσο, οι παράγωγοι τους, $I'_{\text{ex}}(z)$ και $I'_{\text{eff}}(a, z)$, συμπεριφέρονται σύμφωνα με τις σχέσεις (3.33) και (3.34) αντίστοιχα, με τους συντελεστές των λογαριθμικών ιδιομορφιών τους να διαφέρουν κατά έναν παράγοντα $1/2$. Συνεπώς, σύμφωνα με τα προηγούμενα, οι παράγωγοι $I'(z)$ (πλησίον του $z = \Delta/2$) συμπεριφέρονται όπως ακριβώς και τα ρεύματα $I(z)$ στην περίπτωση της ΓΔΣ (πλησίον του $z = 0$) [43]. Τονίζουμε ότι κατά την διάρκεια της ανάλυσής μας δεν υποθέσαμε μικρό εύρος διακένου.

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε, ξεχωριστά, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $I(z)/V$ και θα τα συγκρίνουμε για την ενεργή-επιλύσιμη περίπτωση και την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις αποδεικνύεται στο Παράρτημα Γ.1 ότι:

$$\text{Re} \left\{ \frac{I(z)}{V} \right\} = \int_0^k \frac{-1}{\pi} \text{Im} \{ w(\zeta) \} \text{Im} \{ \bar{r}(\zeta) \} \cos(\zeta z) d\zeta \quad (3.35)$$

και

$$\text{Im} \left\{ \frac{I(z)}{V} \right\} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{k-\varepsilon} \text{Re} \{ w(\zeta) \} \text{Im} \{ \bar{r}(\zeta) \} \cos(\zeta z) d\zeta + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} w(\zeta) \text{Im} \{ \bar{r}(\zeta) \} \cos(\zeta z) d\zeta \right] \quad (3.36)$$

Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (3.36) εμπεριέχει ένα ολοκλήρωμα κύριας τιμής κατά Cauchy (Cauchy principle-value ολοκλήρωμα). Αν χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις του Πίνακα 3.1 για τα $w_{\text{ex}}(\zeta)$ και $w_{\text{eff}}(\zeta)$ καθώς και την Wronskian ορίζουσα $J_1(z)Y_0(z) - J_0(z)Y_1(z) = 2/(\pi z)$ [55], μπορούμε να γράψουμε την (3.35) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{I_{\text{ex}}(z)}{V} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{I_{\text{eff}}(a, z)}{V} \right\} = \\ &= \frac{4k}{\pi \zeta_0} \int_0^k \frac{1}{(k^2 - \zeta^2)} \frac{1}{\left[\left[J_0 \left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2} \right) \right]^2 + \left[Y_0 \left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2} \right) \right]^2 \right]} \frac{\sin(\zeta \Delta / 2)}{\zeta \Delta / 2} \cos(\zeta z) d\zeta \end{aligned} \quad (3.37)$$

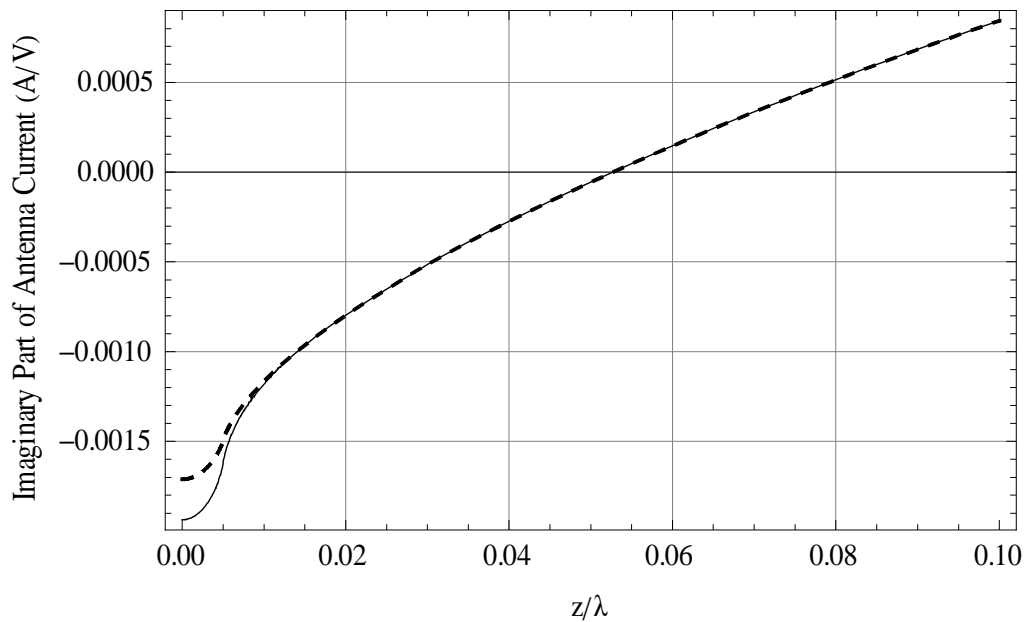
Παρατηρούμε δηλαδή ότι, για $\rho = a$, το πραγματικό μέρος του ενεργού ρεύματος δίνει ακριβώς το πραγματικό μέρος του ακριβούς $\operatorname{Re} \{ I_{\text{ex}}(z)/V \}$. Η ισότητα (3.37) αποτελεί πλεονέκτημα της μεθόδου του ενεργού ρεύματος και ισχύει και για το μοντέλο της ΓΔΣ [43]. Μία φυσική ερμηνεία της ανωτέρω ισότητας - τόσο για την περίπτωση της ΓΔΣ όσο και για την αντίστοιχη της ΓΠΔ που δεν αναφέρεται στην [43] - θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Όπως είδαμε στο Σχήμα 3.1, οι αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις για την πεπερασμένη κεραία δεν είναι ίσες. Είναι, ωστόσο, κοντά μεταξύ τους.

Παίρνοντας το ανάπτυγμα της $\sin(\zeta \Delta / 2)/(\zeta \Delta / 2)$ στην σχέση (3.37) και συγκρίνοντας την τελευταία με τις εξισώσεις (2.11) και (4.15) της [43], παρατηρούμε ότι όταν το εύρος του διακένου είναι μικρό τα δύο πραγματικά, ίσα, μέρη στην περίπτωση της ΓΠΔ διαφέρουν από τα αντίστοιχα του μοντέλου της ΓΔΣ κατά μία μικρή ποσότητα της τάξεως του Δ^2 .

Αν και τα πραγματικά μέρη του ακριβούς και του ενεργού ρεύματος ταυτίζονται στην άπειρη κεραία, όπως προαναφέραμε, δεν συμβαίνει το ίδιο και με τα αντίστοιχα φανταστικά μέρη αυτών. Οι δυσκολίες στην αριθμητική ολοκλήρωση εξισώσεων της μορφής της (3.29) έχουν αναφερθεί ήδη από το 2008 [35]. Ομοίως, η (3.36), στην παρούσα μορφή, δεν επιτρέπει τον απευθείας υπολογισμό της. Για να ξεπεράσουμε την δυσκολία αυτή και να εξάγουμε αριθμητικά αποτελέσματα μετασχηματίζουμε την (3.36) σύμφωνα με την ταυτότητα (βλέπε Παράρτημα Γ.2):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{k-\varepsilon} f_L(\zeta) d\zeta + \int_{k+\varepsilon}^{\infty} f_R(\zeta) d\zeta \right] = \int_0^k f_L(\zeta) + f_R(2k-\zeta) d\zeta + \int_{2k}^{\infty} f_R(\zeta) d\zeta \quad (3.38)$$

όπου οι $f_L(\zeta)$ και $f_R(\zeta)$ είναι ομαλές συναρτήσεις ορισμένες στα διαστήματα $0 < \zeta < k$ και $\zeta > k$ αντίστοιχα, και το όριο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης υποθέτουμε ότι υπάρχει. Το δεξιό μέλος της (3.38) εξασφαλίζει μία έκφραση που δύναται να ολοκληρωθεί με τις συνήθεις ρουτίνες αριθμητικής ολοκλήρωσης. Θα πρέπει να σημειωθεί βέβαια ότι οι μετασχηματισμένες ολοκληρωτέες που προκύπτουν από την (3.36) - αν εφαρμόσουμε την προαναφερθείσα ταυτότητα - εξακολουθούν να εξασθενούν με αργό ρυθμό στο άπειρο. Παρόλα αυτά, οι ανωτέρω συναρτήσεις, δίνουν επαρκή αποτελέσματα για τους στόχους της παρούσας μελέτης, δεδομένου ότι η τελευταία δεν απαιτεί γρήγορο ρυθμό σύγκλισης και υψηλή ακρίβεια. Στο Σχήμα 3.5



Σχήμα 3.5: $\text{Im}\{I_{\text{ex}}(z)/V\}$ (συνεχής γραμμή) και $\text{Im}\{I_{\text{eff}}(z)/V\}$ (διακεκομμένη γραμμή) όπως υπολογίστηκαν για την άπειρη κεραία από την εξίσωση (3.36), εφαρμόζοντας την ταυτότητα (3.38). $\Delta/\lambda=0.01$, $a/\lambda=0.007022$.

παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα της (3.36) για το ακριβές και το ενεργό ρεύμα. Παρατηρούμε ότι τα δύο φανταστικά μέρη είναι αρκετά κοντά. Στην κλίμακα

του διαγράμματος, μάλιστα, συμπίπτουν μεταξύ τους με εξαίρεση μία μικρή περιοχή πλησίον του $z = 0$. Στο σημείο $z = 0$, η διαφορά μεγιστοποιείται περίπου στο 12%. Η διαφορά αυτή είναι πολύ μικρότερη από τον παράγοντα διαφοράς 2 που συναντούμε στην περίπτωση της ΓΔΣ [43] που, όπως προείπαμε, το ρεύμα παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία στο σημείο αυτό. Κατ' επέκταση, η εφαρμογή της μεθόδου του ενεργού ρεύματος στο μοντέλο της ΓΠΔ δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα σε σχέση με την ΓΔΣ και ως εκ τούτου κρίνεται περισσότερο επωφελής για το μοντέλο που εξετάζουμε. Υπενθυμίζουμε ότι από το Σχήμα 3.2 εξήχθησαν αντίστοιχα συμπεράσματα για τις αριθμητικές λύσεις της πεπερασμένης κεραιάς.

3.5 Επεκτάσεις για την Κατανομή Τετραγωνικής Ρίζας (Square Root Distribution)

Στις προηγούμενες παραγράφους υποθέσαμε ότι το πεδίο που αναπτύσσεται κατά μήκος του διακένου είναι σταθερό. Στην τρέχουσα παράγραφο θα επεκτείνουμε την ανωτέρω ανάλυση στην περίπτωση όπου το πεδίο, στο διάκενο, ακολουθεί την κατανομή τετραγωνικής ρίζας [13], [47], [50]. Οι υπολογισμοί είναι ακριβώς ίδιοι και για το λόγο αυτό παραλείπονται χάριν συντομίας. Η κατανομή τετραγωνικής ρίζας για το μοντέλο που εξετάζουμε (ΓΠΔ) έγκειται στην αντικατάσταση της $r(z)$ της εξίσωσης (3.3) από την συνάρτηση:

$$r(z) = \begin{cases} iVk [(\Delta/2)^2 - z^2]^{-1/2} / (\pi\zeta_0), & |z| < \Delta/2 \\ 0, & \Delta/2 < |z| < h \end{cases} \quad (3.39)$$

Ο MF $\bar{r}(\zeta)$ δίνεται από την (3.30) αν αντικαταστήσουμε την $\sin(\zeta\Delta/2)/(\zeta\Delta/2)$ με την συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξεως $J_0(\zeta\Delta/2)$:

$$\bar{r}(\zeta) = \frac{iVk}{\zeta_0} J_0(\zeta\Delta/2) \quad (3.40)$$

	Large- ζ behavior of $w(\zeta)$	Large- ζ behavior of integrand $\pi^{-1}w(\zeta)\bar{r}(\zeta)\cos(\zeta z)$ in (3.29)	HE and PE are...
Exact	$w_{\text{ex}}(\zeta) \sim \frac{-4\pi a}{\zeta}$	$\frac{iV k}{\zeta_0} J_0(\zeta\Delta/2)\cos(\zeta z) \frac{-4a}{\zeta}$	solvable
Approximate	$w_{\text{ap}}(\zeta) \sim -2\sqrt{2\pi a} \frac{e^{a\zeta}}{\zeta^{3/2}}$,	$\frac{iV k}{\zeta_0} \frac{1}{\pi} J_0(\zeta\Delta/2)\cos(\zeta z) -2\sqrt{2\pi a} \frac{e^{a\zeta}}{\zeta^{3/2}}$,	unsolvable
Effective, $0 < \rho < a$	$w_{\text{eff}}(\zeta) \sim \frac{-2\pi\sqrt{a\rho}}{\zeta} e^{(a-\rho)\zeta}$	$\frac{iV k}{\zeta_0} J_0(\zeta\Delta/2)\cos(\zeta z) \frac{-2\sqrt{a\rho}}{\zeta} e^{(a-\rho)\zeta}$	unsolvable
Effective, $\rho = a$	$w_{\text{eff}}(\zeta) \sim \frac{-2\pi a}{\zeta}$	$\frac{iV k}{\zeta_0} J_0(\zeta\Delta/2)\cos(\zeta z) \frac{-2a}{\zeta}$	solvable

Πίνακας 3.3: Ασυμπτωτικές εκφράσεις της $w(\zeta)$ και των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων της (3.29) για την περίπτωση όπου το πεδίο στο διάκενο ακολουθεί την κατανομή τετραγωνικής ρίζας. Επιλυσιμότητα των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Ως συνέπεια, όπως και στην περίπτωση του σταθερού πεδίου, έτσι και στην κατανομή τετραγωνικής ρίζας το πραγματικό μέρος του ενεργού ρεύματος δίνει ακριβώς το πραγματικό μέρος του ρεύματος της κεραίας.

Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζουμε τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων της (3.29) για την νέα κατανομή του πεδίου. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα για την επιλυσιμότητα των ολοκληρωτικών εξισώσεων παραμένουν ως είχαν στην περίπτωση του σταθερού πεδίου (βλέπε Πίνακα 3.2). Δηλαδή, με άλλα λόγια, οι εξισώσεις Hallén και Rocklington επιλύονται αναλυτικά μόνο στην περίπτωση του ακριβούς και ενεργού πυρήνα (για $\rho = a$). Όπως και πριν, τα μεγέθη $I_{\text{ex}}(0)$, $I_{\text{ex}}(\Delta/2)$ και $I_{\text{eff}}(a, \Delta/2)$ είναι πεπερασμένα. Η μόνη ουσιαστική διαφορά έγκειται στην συμπεριφορά του φορτίου ανά μονάδα μήκους της κεραίας. Συγκεκριμένα, καθώς προσεγγίζουμε το άκρο του διακένου από μικρές τιμές του z (εσωτερικά), η συνάρτηση $I'_{\text{ex}}(z)/V$ έχει πεπερασμένη τιμή. Αντιθέτως, προσεγγίζοντας το άκρο εξωτερικά, παρατηρούμε μία ιδιομορφία τετραγωνικής ρίζας (square root singularity),

$I'_{\text{ex}}(z)/V = O\left(1/\sqrt{z-\Delta/2}\right)$ καθώς $z \rightarrow \Delta/2+0$. Η τελευταία εξίσωση ισχύει επίσης και για την $I'_{\text{eff}}(a, z)/V$, με τον συντελεστή του πρωτεύοντα όρου να διαφέρει - όπως πριν - κατά τον παράγοντα $1/2$. Ολοκληρώνοντας, η (3.37) ισχύει και στην περίπτωση της νέας κατανομής αν αντικαταστήσουμε την $\sin(\zeta\Delta/2)/(\zeta\Delta/2)$ με την συνάρτηση $J_0(\zeta\Delta/2)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{I_{\text{ex}}(z)}{V}\right\} &= \operatorname{Re}\left\{\frac{I_{\text{eff}}(a, z)}{V}\right\} = \\ &= \frac{4k}{\pi\zeta_0} \int_0^k \frac{1}{(k^2 - \zeta^2)} \frac{1}{\left[\left[J_0\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)\right]^2 + \left[Y_0\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)\right]^2\right]} J_0(\zeta\Delta/2) \cos(\zeta z) d\zeta \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.6 Συμπεράσματα

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις λεπτών νηματοειδών κεραιών που τροφοδοτούνται με την ΓΠΔ, τόσο με τον προσεγγιστικό όσο και με τον ακριβή πυρήνα, έχουν αποτελέσει, εδώ και πολλά χρόνια, αντικείμενο μελέτης και μερικές φορές αντιπαράθεσης. Ορμώμενοι από την θεωρία του προηγούμενου κεφαλαίου αλλά και σύγχρονων εργασιών επί του θέματος [41], [42], στο παρόν κεφάλαιο συζητήσαμε θεμελιώδεις ιδιότητες που σχετίζονται με τις αριθμητικές λύσεις των ΗΕ και ΡΕ. Επεκτείναμε, επίσης, την μέθοδο του ενεργού ρεύματος της [43] για το μοντέλο της ΓΠΔ και εξετάσαμε μερικές από τις θεμελιώδεις ιδιότητές της. Αυτή η εύκολη, στην εφαρμογή, μέθοδος ορίζεται από την σχέση (3.1) (με $\rho = a$), η οποία, για την ειδική περίπτωση των ημιτονοειδών συναρτήσεων βάσης, απλοποιείται στην (3.18) όπου I_n είναι η ταλαντούμενη αριθμητική λύση της μη επιλύσιμης, αναλυτικά, ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον προσεγγιστικό πυρήνα.

Τα συμπεράσματά μας προέρχονται, ως επί το πλείστον, από την αναλυτική μελέτη της άπειρης, σε μήκος, κεραιάς. Το ολοκλήρωμα της (3.29) αποτελεί, τυπικά, την λύση των ΗΕ και ΡΕ. Η λύση αυτή είναι αληθής αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Αποδείξαμε ότι αυτό ισχύει για τις περιπτώσεις του ακριβούς και του ενεργού ($\rho = a$) πυρήνα αλλά όχι για τον προσεγγιστικό και τον ενεργό με $\rho < a$. Για

τις δύο πρώτες - επιλύσιμες - περιπτώσεις, εξετάσαμε τις οριακές τιμές - κοντά στο κέντρο της κεραίας και πλησίον του άκρου του διακένου - της λύσης (3.29), και παρατηρήσαμε αντίστοιχη συμπεριφορά με τα αριθμητικά αποτελέσματα των Σχημάτων 3.1-3.3 που αναφέρονται στην πεπερασμένη κεραία. Δείξαμε ότι το ενεργό ρεύμα είναι κοντά στο ακριβές και το συγκρίναμε με τις αντίστοιχες λύσεις της ΓΔΣ. Τέλος, επεκτείναμε αρκετά από τα αποτελέσματά μας για την γνωστή κατανομή τετραγωνικής ρίζας.

Το ενεργό ρεύμα είναι, ουσιαστικά, το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση $\rho = a$ από την ταχέως ταλαντούμενη «πηγή» του. Το γεγονός ότι το πεδίο αυτό έχει ομαλή συμπεριφορά - όπως είναι εμφανές από την απαλοιφή των ταλαντώσεων - παρουσιάζει, ως φαινόμενο, ομοιότητες με το κοντινό πεδίο των υπερκατευθυντικών κεραιών και με κάποιες πρόσφατα αναφερθείσες απόψεις για την Μέθοδο Βοηθητικών Πηγών (Method of Auxiliary Sources - MAS) [56], [57]. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε την προέλευση και την φυσική σημασία του ταλαντούμενου και του ενεργού ρεύματος και θα αναφερθούμε στις ανωτέρω ομοιότητες με περισσότερες λεπτομέρειες.

Παράρτημα Α

Εξαγωγή της Εξίσωσης (3.20)

Η ΗΕ που αντιστοιχεί στη εξίσωση (3.19) μπορεί να προσδιοριστεί από την (3.4) παρατηρώντας ότι, για $|z| > \Delta/2$, το δεξιό μέλος της (3.4) δύναται να γραφεί ως $D_1 \exp(ik|z|) + D_2 \exp(-ik|z|)$, όπου D_1 και D_2 ανεξάρτητα του z . Εκτός από μία γενική πολλαπλασιαστική σταθερά, το δεξιό αυτό μέλος της εξίσωσης εκφράζει το διανυσματικό δυναμικό και, όταν $h = \infty$, θα πρέπει να είναι ένα απομακρυνόμενο κύμα (υπενθυμίζουμε την χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$). Ως εκ τούτου $D_2 = 0$, και λύνοντας ως προς C παίρνουμε τελικά $C = iV [1 - \exp(ik\Delta/2)] / (\zeta_0 k \Delta)$. Με την τελευταία σταθερά C και με $h = \infty$, η (3.4) μας δίνει την εξίσωση του Hallén (3.20).

Παράρτημα Β

Εξαγωγή των Εξισώσεων (3.33) και (3.34)

Για συντομία, έστω $f(\zeta) = -\zeta w_{\text{ex}}(\zeta)\bar{r}(\zeta)/\pi$ και $B = i8Vka/(\zeta_0\Delta)$ έτσι ώστε οι (3.32) και (3.31) να είναι αντίστοιχα:

$$f(\zeta) \sim B \frac{\sin(\zeta\Delta/2)}{\zeta}, \quad \text{καθώς } \zeta \rightarrow +\infty \quad (\text{B.1})$$

και

$$I'_{\text{ex}}(z) = \int_{0, (k)}^{\infty} f(\zeta) \sin(\zeta z) d\zeta, \quad (\text{B.2})$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας στην (B.2) την ασυμπτωτική έκφραση της (B.1) έχουμε:

$$I'_{\text{ex}}(z) = \int_{0, (k)}^{\infty} \left[f(\zeta) - B \frac{\sin(\zeta\Delta/2)}{\zeta} \right] \sin(\zeta z) d\zeta + B \int_0^{\infty} \frac{\sin(\zeta\Delta/2)}{\zeta} \sin(\zeta z) d\zeta \quad (\text{B.3})$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα στην σχέση (B.3), το οποίο περιλαμβάνεται σε πίνακα γνωστών ολοκληρωμάτων [58], μπορεί να υπολογιστεί γράφοντας αρχικά:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\zeta\Delta/2)}{\zeta} \sin(\zeta z) d\zeta = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos[\zeta(z-\Delta/2)]}{\zeta} d\zeta - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos[\zeta(z+\Delta/2)]}{\zeta} d\zeta \right\} \quad (\text{B.4})$$

Στη συνέχεια, θέτοντας $t = \zeta |z \pm \Delta/2|$ και συνδυάζοντας τα δύο ολοκληρώματα που προκύπτουν παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin(\zeta \Delta / 2)}{\zeta} \sin(\zeta z) d\zeta &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|z-\Delta/2|\varepsilon}^{|z+\Delta/2|\varepsilon} \frac{\cos t}{t} dt \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{|z-\Delta/2|\varepsilon}^{|z+\Delta/2|\varepsilon} \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_{|z-\Delta/2|\varepsilon}^{|z+\Delta/2|\varepsilon} \frac{dt}{t} \right] \\
&= \frac{1}{2} \ln |z + \Delta / 2| - \frac{1}{2} \ln |z - \Delta / 2| \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Το δεξιό μέλος της (B.5) (τελευταία έκφραση) είναι το όριο του δεύτερου ολοκληρώματος της προηγούμενης έκφρασης - το αντίστοιχο όριο του πρώτου ολοκληρώματος είναι μηδέν. Συνεχίζοντας, αντικαθιστούμε την σχέση (B.5) στην (B.3) και παίρνουμε το όριο καθώς $z \rightarrow \Delta / 2$. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (B.3) παραμένει πεπερασμένος, και το ίδιο συμβαίνει και για τον πρώτο λογάριθμο του δεξιού μέλους της (B.5). Συνεπώς, ο δεύτερος λογάριθμος αποτελεί τον επικρατέστερο όρο του αθροίσματος και:

$$I'_{\text{ex}}(z) = -\frac{B}{2} \ln |z - \Delta / 2| + O(1), \quad \text{καθώς } z \rightarrow \Delta / 2 \tag{B.6}$$

που μας δίνει την εξίσωση (3.33). Η διαδικασία υπολογισμού της (3.34) είναι ακριβώς ανάλογη με αυτήν της (3.33). Η μόνη, ουσιαστική, διαφορά έγκειται σε ένα συντελεστή $1/2$ στη σταθερά B .

Παράρτημα Γ

Υπολογισμός του Ολοκληρώματος της (3.29) - Επιλύσιμες Περιπτώσεις

Γ.1 Εξαγωγή των Εξισώσεων (3.35) και (3.36)

Η διαδικασία προσδιορισμού των σχέσεων (3.35) και (3.36) είναι παραπλήσια με αυτή που αναφέρεται στο Παράρτημα Α της [59], που αφορά το ακριβές ρεύμα για το μοντέλο της ΓΔΣ. Έστω $f(\zeta)$ η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση της (3.29), έτσι ώστε:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} w(\zeta) \bar{r}(\zeta) \cos(\zeta z) \quad (\Gamma.1)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.30), τον Πίνακα 3.1 και τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Bessel για μικρά ορίσματα (βλέπε Παράρτημα Γ Κεφαλαίου 2), μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι, τόσο στην περίπτωση του ακριβούς ρεύματος όσο και στην αντίστοιχη ενεργή-επιλύσιμη περίπτωση, έχουμε:

$$f(\zeta) = \frac{\xi}{(\zeta - k) \ln(\zeta - k)} + O(1), \quad \text{καθώς } \zeta \rightarrow k \quad (\text{Im}\{\zeta\} < 0) \quad (\Gamma.2)$$

Η σταθερά (ανεξάρτητη του ζ) ξ μπορεί να υπολογιστεί αλλά είναι ήσσονος σημασίας για την ανάλυση μας. Για $\varepsilon > 0$, ας υποθέσουμε ότι L_ε είναι η διαδρομή με αφετηρία το $k - \varepsilon$ και πέρασ το $k + \varepsilon$, η οποία κείται εξολοκλήρου στο κάτω μισό του ζ -επιπέδου. Ο επικρατούν όρος της (Γ.2) δεν είναι ολοκληρώσιμος. Ωστόσο, το όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, του ολοκληρώματος του όρου αυτού κατά μήκος της L_ε υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν - αυτό είναι αληθές καθότι τα άκρα ολοκλήρωσης είναι συμμετρικά περί του $\zeta = k$. Ο όρος του υπολοίπου (τάξεως 1) της (Γ.2) είναι ολοκληρώσιμος και επομένως το αντίστοιχο όριο του ολοκληρώματός του, κατά μήκος της L_ε , θα είναι επίσης ίσο με μηδέν. Κατόπιν των ανωτέρω, η (3.29) μπορεί να γραφεί ως ένα ολοκλήρωμα κύριας τιμής κατά Cauchy της κάτωθι μορφής:

$$\frac{I(z)}{V} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{k-\varepsilon} r(\zeta) d\zeta + \int_{k+\varepsilon}^{\infty} r(\zeta) d\zeta \right], \quad (\Gamma.3)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι, αντίθετα με άλλες εφαρμογές που περιλαμβάνουν Cauchy-principal value ολοκληρώματα, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στην (Γ.3) δεν έχει απλό πόλο στο $\zeta = k$, αλλά συμπεριφέρεται σύμφωνα με την σχέση (Γ.2). Το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (Γ.3) είναι καθαρά φανταστικό. Συνεπώς, αν πάρουμε το πραγματικό μέρος της (Γ.3) έχουμε την σχέση (3.35), στην οποία δεν απαιτείται να πάρουμε το όριο $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$. Το υπόλοιπο κομμάτι της (Γ.3) δίνει την εξίσωση (3.36).

Γ.2 Απόδειξη της Ταυτότητας (3.38)

Έστω $f_L(\zeta)$ και $f_R(\zeta)$ ομαλές συναρτήσεις, ορισμένες στα διαστήματα $0 < \zeta < k$ και $\zeta > k$ αντίστοιχα, ώστε να υπάρχει το όριο:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{k-\varepsilon} f_L(\zeta) d\zeta + \int_{k+\varepsilon}^{\infty} f_R(\zeta) d\zeta \right]. \quad (\Gamma.4)$$

Θέτοντας την μεταβλητή $t = 2k - \zeta$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (Γ.4) και επιλέγοντας ενδιάμεσο άκρο ολοκλήρωσης το μηδέν παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{k+\varepsilon}^{\infty} f_R(\zeta) d\zeta &= \int_{-\infty}^{k-\varepsilon} f_R(2k-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f_R(2k-t) dt + \int_0^{k-\varepsilon} f_R(2k-t) dt \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

Θέτοντας $\zeta = 2k - t$ και $\zeta = t$ στο πρώτο και δεύτερο ολοκλήρωμα της (Γ.5) αντίστοιχα έχουμε:

$$\int_{k+\varepsilon}^{\infty} f_R(\zeta) d\zeta = \int_{2k}^{\infty} f_R(\zeta) d\zeta + \int_0^{k-\varepsilon} f_R(2k-\zeta) d\zeta \quad (\Gamma.6)$$

Αντικαθιστούμε την (Γ.6) στην (Γ.4) και παίρνουμε τελικά:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{k-\varepsilon} f_L(\zeta) + f_R(2k-\zeta) d\zeta + \int_{2k}^{\infty} f_R(\zeta) d\zeta \right] \quad (\Gamma.7)$$

Το όριο της (Γ.7) καθώς $\varepsilon \rightarrow 0^+$ μας δίνει την ζητούμενη ταυτότητα.

Βιβλιογραφία – Παραπομπές

- [1] S. A. Schelkunoff, “Theory of antennas of arbitrary size and shape,” *Proc. IRE*, vol. 29, pp. 493-521, Sept. 1941.
- [2] S. A. Schelkunoff, “Antenna theory and experiment,” *J. Appl. Phys.*, vol. 15, pp. 54-60, Jan. 1944.
- [3] S. A. Schelkunoff, “Concerning Hallén’s integral equation for cylindrical antennas,” *Proc. I.R.E.*, vol. 33, pp. 872-878, Dec. 1945.
- [4] E. Hallén, “Theoretical investigations into the transmitting and receiving qualities of antennas,” *Nova Acta (Upsala) [21]*, vol. 11, pp. 1-44, Nov. 1938.
- [5] L. Infeld, “The influence of the width of the gap upon the theory of antennas,” *Quart. Appl. Math.*, vol. V, no. 2, pp. 113-132, July 1947.
- [6] J. A. Stratton and L. J. Chu, “Steady-state solutions of electromagnetic field problems. I. Forced oscillations of a cylindrical conductor,” *J. Appl. Phys.*, vol. 12, pp. 230-235, March 1941.
- [7] J. A. Stratton and L. J. Chu, “Steady-state solutions of electromagnetic field problems. II. Forced oscillations of a conducting sphere,” *J. Appl. Phys.*, vol. 12, pp. 236-240, March 1941.
- [8] L. J. Chu and J. A. Stratton, “Steady-state solutions of electromagnetic field problems. III. Forced oscillations of a prolate spheroid,” *J. Appl. Phys.*, vol. 12, pp. 241-248, March 1941.
- [9] G. E. Albert and J. L. Synge, “The general problem of antenna radiation and the fundamental integral equation, with application to an antenna of revolution—Part I,” *Quart. Appl. Math.*, vol. VI, pp. 117-131, 1948.
- [10] C. D. Taylor and D. R. Wilton, “The extended boundary condition solution of the dipole antenna of revolution,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 20, no. 6, pp. 772-776, Nov. 1972.
- [11] R. W. P. King, *The Theory of Linear Antennas*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1956.
- [12] R. W. P. King, “Gap problem in antenna theory,” *J. Appl. Phys.*, vol. 26, no. 3, pp. 317-321, March 1955.

- [13] R. H. Duncan, "Theory of infinite cylindrical antenna including the feedpoint singularity in antenna current," *J. Res. NBS*, vol. 66D, no. 2, pp. 181-188, March-April 1962.
- [14] Y. M. Chen and J. B. Keller, "Current on and input impedance of a cylindrical antenna," *J. Res. NBS*, vol. 66D, no. 1, pp. 15-21, Jan.-Feb. 1962.
- [15] S. Silver and W. K. Saunders, "The external field produced by a slot in an infinite circular cylinder," *J. Appl. Phys.*, vol. 21, pp. 153-158, Feb. 1950.
- [16] R. L. Fante, "On the admittance of the infinite cylindrical antenna," *Radio Sci.*, vol. 1 (new series), no. 9, pp. 1041-1044, Sept. 1966.
- [17] R. L. Fante, "Erratum", *Radio Sci.*, vol. 1 (new series), no. 10, p. 1234, Dec. 1967.
- [18] E. K. Miller, "Admittance dependence of the infinite cylindrical antenna upon exciting gap thickness," *Radio Sci.*, vol. 2 (new series), no. 12, pp. 1431-1435, Oct. 1966.
- [19] E. Hallén, *Electromagnetic Theory*, New York, J. Wiley & Sons, 1962.
- [20] R. W. P. King, "The linear antenna—eighty years of progress," *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 1, pp. 2-16, Jan. 1967.
- [21] T. T. Wu, "Introduction to linear antennas," ch. 8 in *Antenna Theory*, pt. I, R. E. Collin and F. J. Zucker, Eds. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [22] N. Inagaki and T. Sekiguchi, "A note on the antenna integral equation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 17, no. 2, pp. 223-224, March 1969.
- [23] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York, Macmillan, 1968.
- [24] F. M. Tesche, "The effect of the thin-wire approximation and the source gap model on the high-frequency integral equation solution of radiating antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 20, pp. 210-211, March 1972.
- [25] R. E. Collin, "Equivalent line current for cylindrical dipole antennas and its asymptotic behavior," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, no. 2, pp. 200-204, Feb. 1984.
- [26] R. E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation*, New York: McGraw-Hill, 1985.
- [27] S. A. Schelkunoff, *Advanced Antenna Theory*, New York: Wiley, 1952.
- [28] A. Sakitani and S. Egashira, "Considerations on feed expressions for the numerical analysis of antennas," *Electronics and Communications in Japan, Part I*, vol. 68, no. 7, pp. 65-74, 1985.

- [29] E. K. Miller and F. J. Deadrick, "Some computational aspects of thin-wire modeling," ch. 4 in R. Mittra, Ed., *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*. New York: Springer, 1975.
- [30] E. K. Miller and J. A. Landt, "Direct time-domain techniques for transient radiation and scattering from wires," *Proc. IEEE*, vol. 68, no. 11, pp. 1396-1423, Nov. 1980.
- [31] E. K. Miller, "PC for AP and other EM reflections," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 39, no. 1, pp. 94-97, 1997.
- [32] [Online]. Super nec MoM Technical Reference Manual. Available: <http://www.supernec.com/manuals/snmomtrm.htm>
- [33] D. H. Werner, "A Method of Moments approach for the efficient and accurate modeling of moderately thick cylindrical wire antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 46, no. 3, pp. 373-382, March 1998.
- [34] D. Wu, N. Inagaki, and N. Kikuma, "Hallén type integral equation for cylindrical antennas with finite gap excitation," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E82 B, no. 12, pp. 2145-2152, Dec. 1999.
- [35] S. N. Makarov, A. Puzella, and V. Iyer, "Scan impedance for an infinite dipole array: accurate theoretical model compared to numerical software," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 50, no. 6, pp. 132-149, Dec. 2008.
- [36] V. A. Neganov, I. V. Matveev, and S. V. Medvedev, "A method for reducing Pocklington's equation of electric vibrators to a singular integral equation," *Technical Physics Letters*, vol 26, no. 6, pp. 535-538, 2000.
- [37] V. A. Neganov, M. G. Kornev, and I. V. Matveev, "A new integral equation for calculating thin electric vibrators," *Technical Physics Letters*, vol 27, no. 2, pp. 160-163, 2001.
- [38] V. A. Neganov and D. Tabakov, "The physical regularization of incorrect electrodynamic problems," *PIERS Symposium Proceedings, Marrakesh, Morocco*, pp. 915-919, Mar. 20-23, 2011.
- [39] K. Nishimoto, H. Miyashita, H. Ohmine, and T. Katagi, "Solution of Hallén's integral equations by means of Nyström method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 5, pp. 2589-2596, May 2013.
- [40] Y. H. Lo, S. He, L. Jiang, and W. C. Chew, "Finite-width gap excitation and impedance models," *2011 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation*, pp. 1297-1300, July 2011, Spokane, WA.

- [41] G. Fikioris, J. Lionas, and C. G. Lioutas, "The use of the frill generator in thin-wire integral equations," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 51, no. 8, pp. 1847—1854, August 2003.
- [42] P. J. Papakanellos, G. Fikioris, and A. Michalopoulou, "On the oscillations appearing in numerical solutions of solvable and nonsolvable integral equations for thin-wire antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 58, no. 5, pp. 1635-1644, May 2010.
- [43] G. Fikioris, P. J. Papakanellos, Th. K. Mavrogordatos, N. Lafkas, and D. Koulikas, "Eliminating unphysical oscillations arising in Galerkin solutions to classical integral equations of antenna theory," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 71, no. 2, pp. 559-585, 2011.
- [44] V. A. Yatskevitch and S. F. Karshakevitch, "Convergence process stability of numerical solution in electrodynamics," *Izvestiya VUZov. Radioelektronika*, vol. XXIV, no. 2, pp. 66-72, 1981 (in Russian).
- [45] V. A. Yatskevich and S. F. Karshakevich, "Stability of the convergence of the numerical solution in electrodynamics," *Radioelectronics and Communications Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 57-62, The Allerton Press, 1981.
- [46] D. S. Jones, *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, 2nd ed. New York: IEEE Press, 1995, pp. 286-287, p. 309.
- [47] R. A. Hurd and J. Jacobsen, "Admittance of an infinite cylindrical antenna with realistic gap field," *Electron. Letters*, vol. 4, no. 19, pp. 420-421, Aug. 1968.
- [48] T. Do-Nhat and R. H. MacPhie, "The static electric field distribution between two semi-infinite circular cylinders: a model for the feed gap field of a dipole antenna," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 35, no. 11, pp. 1273-1280, Nov. 1987.
- [49] T. Do-Nhat and R. H. MacPhie, "Effect of gap length on the input admittance of center fed coaxial waveguides and infinite dipoles," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 35, no. 11, pp. 1293-1299, Nov. 1987.
- [50] E. K. Miller, "An approximate form for the admittance of a long, thin antenna," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 10, no. 1, pp. 127-128, Jan. 1968.
- [51] C. P. Junker, A. A. Kishk, and A. W. Glisson, "A novel delta gap source model for center fed cylindrical dipoles," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, no. 5, pp. 537-540, May 1995.

- [52] G. Meltz, P. Freyhit, and C. D. Lustig, "Admittance of a plasma-covered cylindrical antenna," *Radio Sci.*, vol. 2, no. 2, pp. 203-224, 1967.
- [53] W. Ding, G. Wang, G. Liang, and Bo Yuan, "An enhanced gap source model," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 61, no. 3, pp. 1266-1272, March 2013.
- [54] G. Fikioris, "The approximate integral equation for a cylindrical scatterer has no solution," *J. Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 15, no. 9, pp. 1153—1159, September 2001.
- [55] Digital Library of Mathematical Functions. 2013-01-03. National Institute of Standards and Technology from <http://dlmf.nist.gov/>
- [56] P. Andrianesis and G. Fikioris, "Superdirective-type near fields in the Method of Auxiliary Sources (MAS)," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 60, no. 6, pp. 3056-3060, June 2012.
- [57] S. P. Skobelev, "Comments..." (to [56], with authors' reply), *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 61, no. 4, pp. 2360, April 2013.
- [58] I. S. Gradshtyn and I. M. Ryzhik's *Table of Integrals, Series, and Products* 7th Ed., A. Jefferey and D. Zwillinger, Eds., Academic Press, 2007, formula 3.741.1.
- [59] G. Fikioris and C. A. Valagiannopoulos, "Input admittances arising from explicit solutions to integral equations for infinite-length dipole antennas," *Progress in Electromagnetics Research*, vol. 55 (PIER 55), pp. 285-306, 2005.

Κεφάλαιο 4

Θεμελιώδεις Ιδιότητες της Γεννήτριας Πεπερασμένου Διακένου (Finite Gap Generator) - Φυσική Ερμηνεία

4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο, θα συνεχίσουμε και θα ολοκληρώσουμε την μελέτη μας για το μοντέλο της Γεννήτριας Πεπερασμένου Διακένου - ΓΠΔ (Finite Gap Generator - FGG) εξετάζοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις Hallén και Rocklington (HE, PE). Όπως στο Κεφάλαιο 3, έτσι και εδώ, θα εξετάσουμε θεμελιώδεις ιδιότητες που σχετίζονται με την επιλυσιμότητα των παραπάνω εξισώσεων και τις λύσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή της Μεθόδου των Ροπών σ' αυτές. Η μελέτη μας θα στηριχτεί στο Κεφάλαιο 2 καθώς και στις [1], [2], που αφορούν την Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης - ΓΔΣ (Delta Function Generator - DFG) και την Γεννήτρια Magnetic Frill - ΓΜΦ (Magnetic Frill Generator - MFG). Επιπρόσθετα, θα εξετάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου του «ενεργού ρεύματος» στην ΓΠΔ, που έχει αναλυθεί πρόσφατα στην [3] για το μοντέλο της ΓΔΣ. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η ανωτέρω μέθοδος παρέχει ένα «λογικό» ρεύμα που προκύπτει από την εκ των υστέρων επεξεργασία των ταλαντούμενων αποτελεσμάτων της Μεθόδου των Ροπών στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα.

Τα αποτελέσματα μας, στο τρέχον κεφάλαιο, αναπτύσσονται σε δύο άξονες που επαληθεύουν και ερμηνεύουν τα συμπεράσματα που εξήχθησαν στο Κεφάλαιο 3. Ο πρώτος άξονας επικεντρώνεται στις προαναφερθείσες ταλαντώσεις που σχετίζονται με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Στο Σχήμα 3.2 του προηγούμενου κεφαλαίου παρατηρήσαμε ταλαντώσεις στις τιμές του ρεύματος πλησίον του $z=0$ και τις συσχετίσαμε με την «μη επιλυσιμότητα» των ολοκληρωτικών εξισώσεων για την κεραία απείρου μήκους. Για την άπειρη κεραία, το ενεργό ρεύμα ικανοποιεί μία ολοκληρωτική εξίσωση η οποία μάλιστα, σύμφωνα με τον Πίνακα 3.2, επιλύεται αναλυτικά για $\rho = a$ ενώ είναι μη επιλύσιμη για $\rho < a$. Κατά συνέπεια, για την περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας - στην οποία το ενεργό ρεύμα δεν υπολογίζεται

από την ολοκληρωτική εξίσωση αλλά από την σχέση (3.17) ή (3.18), όπου το μήκος της διακριτοποίησης z_0 είναι μη μηδενικό - είναι λογικό να αναμένουμε ταλαντώσεις κοντά στο $z=0$ όταν $\rho < a$. Το τελευταίο επαληθεύεται στην παράγραφο 4.2 όπου θα ερμηνεύσουμε την φύση των ταλαντώσεων μέσω μιας διαδικασίας δύο βημάτων:

α) Αρχικά εξάγουμε μια ασυμπτωτική έκφραση για το ταλαντούμενο ενεργό ρεύμα στην περίπτωση της άπειρης κεραίας. Η εν λόγω έκφραση για την ειδική περίπτωση όπου $\rho=0$, δίνει το ταλαντούμενο ρεύμα που προκύπτει από τον προσεγγιστικό πυρήνα.

β) Επαληθεύουμε, μέσω αντιπροσωπευτικών αριθμητικών αποτελεσμάτων, ότι η ανωτέρω ασυμπτωτική έκφραση εφαρμόζεται επίσης στην πεπερασμένη κεραία. Συγκρίνουμε την έκφραση αυτή με την αντίστοιχη του Κεφαλαίου 2 για την ΓΔΣ και συσχετίζουμε τα αποτελέσματά μας με την υπερκατευθυντικότητα και άλλα παρόμοια φαινόμενα.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι στην άπειρη κεραία, όταν $\rho=a$, το ενεργό ρεύμα $I_{\text{eff}}(a, z)$ είναι πολύ κοντά στο ακριβές $I_{\text{ex}}(z)$. Ο πυρήνας του δεύτερου άξονα των αποτελεσμάτων μας, ο οποίος εφαρμόζεται τόσο στην περίπτωση της ΓΔΣ όσο και στην αντίστοιχη της ΓΠΔ, είναι η εξίσωση:

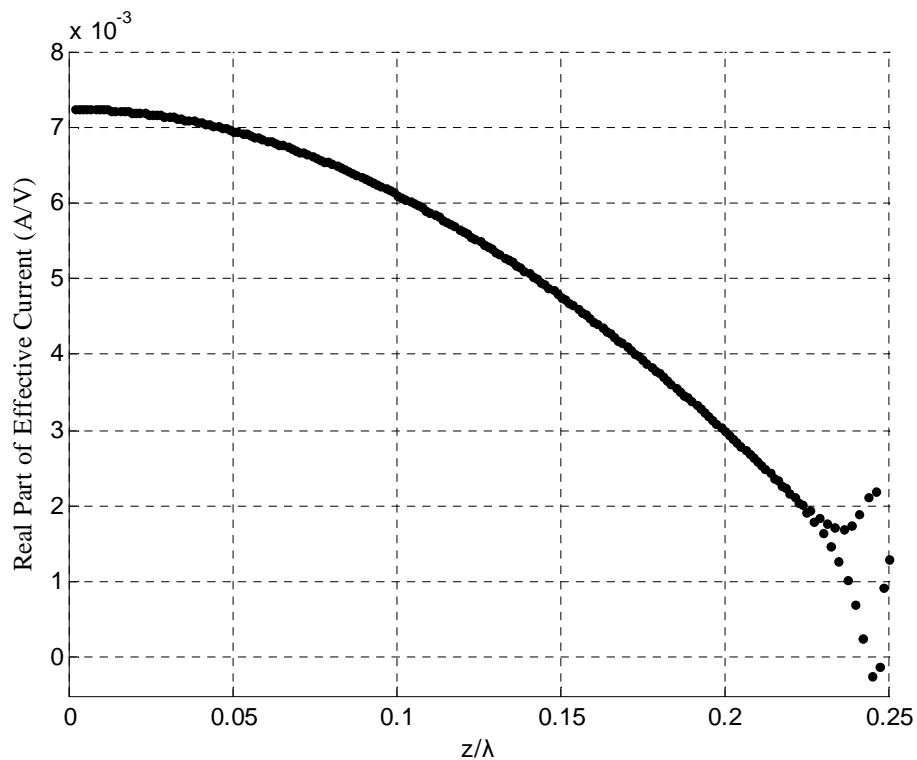
$$I_{\text{eff}}(a, z) = 2\pi a J_{sz}^{\text{out}}(z) \quad (4.1)$$

όπου $\mathbf{J}_s^{\text{out}}(z) = \hat{\mathbf{z}} J_{sz}^{\text{out}}(z)$ είναι η πυκνότητα του ρεύματος που αναπτύσσεται στην εξωτερική επιφάνεια της κυλινδρικής κεραίας απείρου μήκους. Όπως είπαμε στην παράγραφο 3.1, το μέγεθος $\mathbf{J}_s^{\text{out}}(z)$ έχει αναφερθεί στην [4] και σε άλλες εργασίες πριν το 1970. Στην παράγραφο 4.3 θα υπολογίσουμε το $\mathbf{J}_s^{\text{out}}(z)$ και κάποια άλλα σχετικά μεγέθη εφαρμόζοντας, για την περίπτωση της ΓΠΔ, έναν υπολογισμό που αναπτύσσεται σε σχετικό κεφάλαιο του γνωστού βιβλίου του Wu για την ΓΔΣ [5]. Θα αποδείξουμε την (4.1), και κάποιες σχετικές εξισώσεις, κάνοντας συγκρίσεις με σχέσεις του προηγούμενου κεφαλαίου. Όπως θα δούμε παρακάτω, η εξίσωση (4.1) είναι ακριβής. Ωστόσο, πιστεύουμε ότι η (4.1) - που παρέχει μια φυσική ερμηνεία του

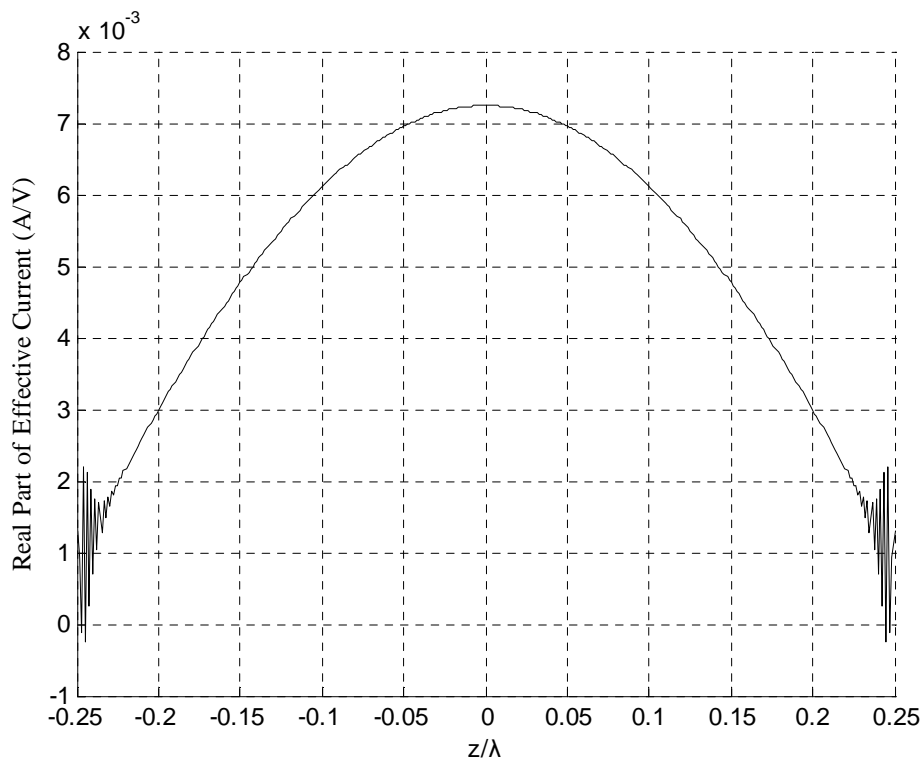
ενεργού ρεύματος και κάποιων συμπερασμάτων του Κεφαλαίου 3 και της [3] - δεν είναι προφανής. Πράγματι, η (4.1) δεν αναφέρεται στην εργασία [3]. Η ύπαρξη της, όπως άλλωστε και η μέθοδός μας για τον υπολογισμό της, επιβεβαιώνουν ότι η τροφοδοτούμενη μέσω πεπερασμένου διακένου «σωληνοειδής διπολική κεραία» αποτελεί ένα χρήσιμο θεωρητικό μοντέλο, όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 3.1.

4.2 Προσεγγιστικό και Ενεργό Ρεύμα για μη Μηδενικό Μήκος Διακριτοποίησης - Ταλαντώσεις

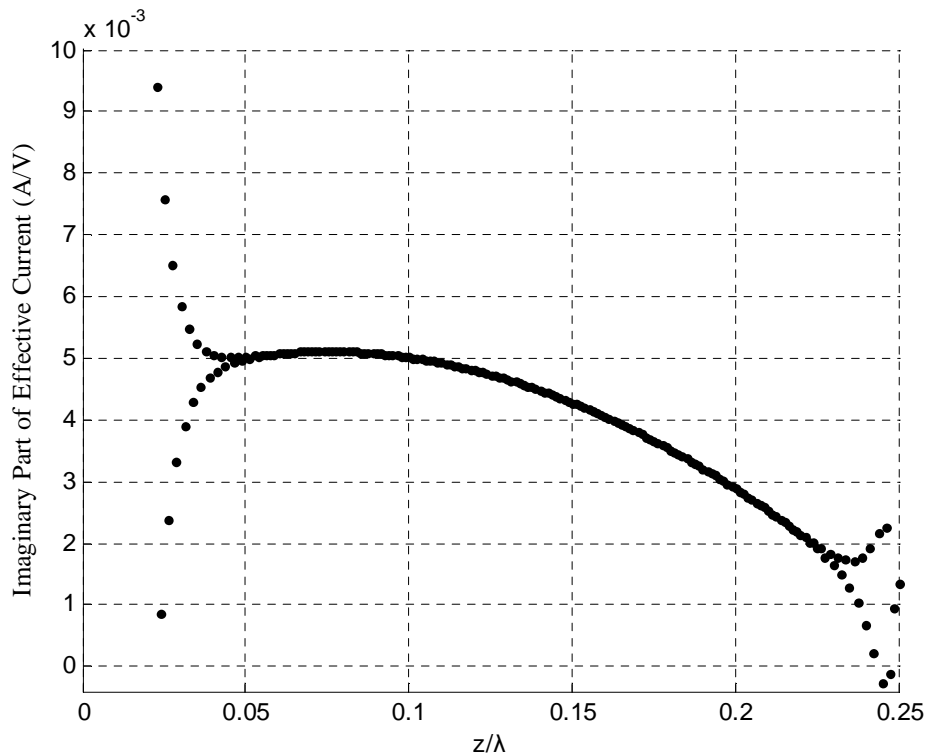
Σε όλη την έκταση της ενότητας αυτής υποθέτουμε ότι το μήκος της διακριτοποίησης z_0 είναι μικρό αλλά μη μηδενικό. Ας παρουσιάσουμε πρώτα αριθμητικά αποτελέσματα που επαληθεύουν ότι, για $\rho < a$, το ενεργό ρεύμα στην πεπερασμένη κεραία εμφανίζει ταλαντώσεις όπως υποστηρίξαμε και στην προηγούμενη παράγραφο. Οι παράμετροι που επιλέχθηκαν για τα Σχήματα 4.1-4.4 είναι ίδιες με τις αντίστοιχες των Σχημάτων 3.1 και 3.2 για το ενεργό ρεύμα I_{eff} , με την εξαίρεση ότι εδώ επιλέγουμε $\rho = a/4$ αντί του $\rho = a$.



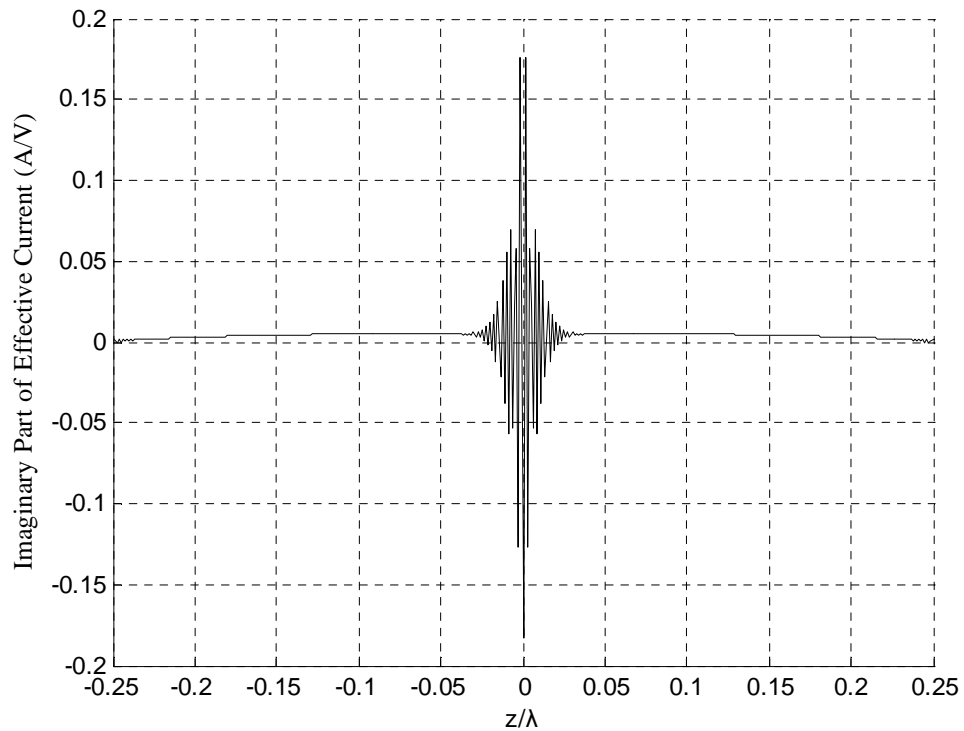
Σχήμα 4.1: $\text{Re}\{I_{\text{eff}}(z)/V\}$ όπως υπολογίστηκε από την εξίσωση (3.18) του Κεφαλαίου 3 για $\rho = a/4$. $N=200$, $q=3$, $\Delta/\lambda=0.0075$, $a/\lambda=0.007022$, $h/\lambda=0.25$.



Σχήμα 4.2: Όπως το Σχήμα 4.1, συνδέοντας τα ταλαντούμενα σημεία με συνεχή γραμμή (εμφανίζονται επίσης οι τιμές για αρνητικά z).



Σχήμα 4.3: Όπως το Σχήμα 4.1 για το αντίστοιχο φανταστικό μέρος του ρεύματος. Πλησίον του $z/\lambda=0$ κάποιες από τις ταλαντούμενες τιμές είναι εκτός κλίμακας και δεν απεικονίζονται.



Σχήμα 4.4: Όπως το Σχήμα 4.3 απεικονίζοντας όλες τις ταλαντούμενες τιμές με συνεχή γραμμή (εμφανίζονται επίσης οι τιμές για αρνητικά z). Παρατηρούμε ότι το πλάτος των ταλαντώσεων πλησίον του $z/\lambda=0$ είναι πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο των ταλαντώσεων στα άκρα της κεραίας. Οι τελευταίες δεν είναι ευδιάκριτες στην κλίμακα του διαγράμματος.

Όπως αναμενόταν, και αντίθετα με το I_{eff} των Σχημάτων 3.1 και 3.2, το ενεργό ρεύμα, για $\rho = a/4$, έχει ταλαντούμενες τιμές. Οι τελευταίες μάλιστα, αν και το πλάτος τους είναι μικρότερο, είναι παρόμοιες με αυτές του I_{ap} στα Σχήματα 3.1 και 3.2.

4.2.1 Ασυμπτωτική Έκφραση για την Άπειρη Κεραία

Για να ερμηνεύσουμε τις ταλαντώσεις που παρατηρήσαμε στα αριθμητικά μας αποτελέσματα, στην παρούσα παράγραφο θα εφαρμόσουμε την αριθμητική μέθοδο του προηγούμενου κεφαλαίου στην PE για την *άπειρη* κεραία, δηλαδή στις εξισώσεις (3.19) και (3.25). Αντί της (3.6), αναζητούμε λύση για την PE της μορφής:

$$I(z) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n s_n(z) \quad (4.2)$$

Αντικαθιστώντας την (4.2) στην ΡΕ, πολλαπλασιάζοντας με $t_l(z)$ - βλέπε εξίσωση (1.39) - και ολοκληρώνοντας στο διάστημα από $z = -\infty$ έως $z = \infty$ παίρνουμε το σύστημα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{l-n} I_n = B_l \quad (4.3)$$

αντί του, πεπερασμένων διαστάσεων, συστήματος (3.8). Τα μεγέθη E_l και B_l δίνονται, και εδώ, από τις σχέσεις (3.11) και (3.14) αντίστοιχα. Αντίθετα με το πεπερασμένο σύστημα (3.8), το (4.3) μπορεί να υποστεί περαιτέρω, αναλυτική, επεξεργασία διότι αποτελεί ένα απείρων διαστάσεων Toeplitz σύστημα. Τέτοιου είδους συστήματα μπορούν να επιλυθούν ακριβώς χρησιμοποιώντας σειρές Fourier. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\text{Im}\{k\} > 0$ και πολλαπλασιάζουμε την (4.3) με $e^{il\theta}$. Στη συνέχεια, αθροίζουμε ως προς την παράμετρο l , αλλάζουμε την σειρά του αθροίσματος και εισάγουμε τις:

$$\tilde{E}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l e^{il\theta}, \quad \tilde{I}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l e^{il\theta} \quad \text{και} \quad \tilde{B}(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l e^{il\theta} \quad (4.4)$$

έτσι ώστε:

$$\tilde{E}(\theta) \tilde{I}(\theta) = \tilde{B}(\theta) \quad (4.5)$$

Οι αντίστροφες σχέσεις των εξισώσεων (4.4) είναι:

$$E_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{E}(\theta) e^{-il\theta} d\theta, \quad A_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{A}(\theta) e^{-il\theta} d\theta \quad \text{και} \quad I_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{I}(\theta) e^{-il\theta} d\theta \quad (4.6)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.14), και υποθέτοντας ότι η (3.13) εξακολουθεί να ισχύει, μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την συνάρτηση $\tilde{B}(\theta)$ της σχέσης (4.4).

Προκύπτει:

$$\tilde{B}(\theta) = \frac{iVk \sin(q\theta)}{\zeta_0 2q \tan(\theta/2)} \quad (4.7)$$

Ακολουθώντας τα βήματα της παραγράφου 3 της [3], μπορούμε να δείξουμε ότι η $\tilde{E}(\theta)$ που εμφανίζεται στην (4.5) μπορεί να γραφεί ως:

$$\tilde{E}(\theta) = \frac{2k}{z_0 \sin(kz_0)} [\cos \theta - \cos(kz_0)] \tilde{A}(\theta) \quad (4.8)$$

όπου

$$\tilde{A}(\theta) = z_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{K} \left(\frac{2m\pi - \theta}{z_0}, \rho \right) \frac{\sin^2(\theta/2)}{(m\pi - \theta/2)^2} \quad (4.9)$$

στην οποία η συνάρτηση $\overline{K}(\zeta, \rho)$ είναι ο Μετασχηματισμός Fourier - MF του πυρήνα. Οι εξισώσεις (4.5)-(4.8) μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν:

$$I_l = \frac{1}{\pi} \int_{0, (kz_0)}^{\pi} \frac{\tilde{D}(\theta)}{\tilde{A}(\theta)} \cos(l\theta) d\theta \quad (4.10)$$

όπου

$$\tilde{D}(\theta) = \frac{iV}{4\zeta_0} \frac{z_0}{q} \frac{\sin(kz_0) \sin(q\theta)}{\tan(\theta/2) [\cos \theta - \cos(kz_0)]} \quad (4.11)$$

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της σχέσης (4.10), είναι παρόμοιος με την (3.29). Συνεπώς, ισχύουν τα αναφερόμενα για την τελευταία εξίσωση και στην περίπτωση της (4.10). Συγκεκριμένα, η (4.10) ισχύει για $\text{Im}\{k\} > 0$ και για διαδρομή ολοκλήρωσης κατά μήκος του πραγματικού άξονα. Επιπλέον, το ολοκλήρωμα της (4.10), δύναται να επεκταθεί αναλυτικά για πραγματικά θετικά k εφόσον η διαδρομή ολοκλήρωσης διέρχεται κάτωθεν του σημείου $\theta = kz_0$. Οι εξισώσεις (4.9)-(4.11), που ισχύουν και για τις τρεις περιπτώσεις πυρήνων (ακριβή,

προσεγγιστικό, ενεργό), παρέχουν την ακριβή λύση του, απείρων διαστάσεων, συστήματος (4.3) για μη μηδενικό μήκος διακριτοποίησης z_0 . Για τις δύο επιλύσιμες περιπτώσεις (με τον ακριβή πυρήνα και τον ενεργό με $\rho = a$), είναι λογικό να αναμένουμε ότι οι εξισώσεις (4.9)-(4.11) συγκλίνουν στην αληθή λύση, που δίνεται από την (3.29), καθώς $z_0 \rightarrow 0$. Το τελευταίο επιβεβαιώνεται στο Παράρτημα Α. Εκεί αποδεικνύεται ότι για σταθερές τιμές των παραμέτρων lz_0 και qz_0 παίρνουμε:

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} I_{l,\text{ex}} = I_{\text{ex}}(lz_0), \quad \lim_{z_0 \rightarrow 0} I_{l,\text{eff}} = I_{\text{eff}}(a, lz_0) \quad (4.12)$$

Στην συνέχεια, ακολουθώντας τα βήματα της παραγράφου 2.6, θα εξετάσουμε τις δύο μη επιλύσιμες περιπτώσεις που παρουσιάζουν και μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\bar{K}(\zeta, \rho)$ που εμφανίζεται στις (4.9)-(4.11) για να εκφράσουμε τα μεγέθη $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, a)$ ή $\bar{K}_{\text{eff}}(\zeta, \rho)$ με $\rho < a$. Αρχικά, σημειώνουμε ότι ο Πίνακας 3.1 και η εξίσωση (3.28) δίνουν:

$$\bar{K}_{\text{eff}}(\zeta, \rho) \sim \frac{1}{2|\zeta|\rho} \sqrt{\frac{1}{2\pi a|\zeta|}} \frac{e^{-a|\zeta|}}{K_1(\rho|\zeta|)} \quad (4.13)$$

για $a|\zeta| \gg 1$, καθώς επίσης:

$$\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, a) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi a|\zeta|}} e^{-a|\zeta|} \quad (4.14)$$

για $a|\zeta| \gg 1$. Όπως είναι προφανές, η (4.14) αποτελεί το όριο της (4.13) καθώς $\rho \rightarrow 0$. Από τις (4.9), (4.13) και (4.14) προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα στην (4.10) αποκλίνει, καθώς $z_0 \rightarrow 0$, όπως ακριβώς αναμενόταν από την μη επιλυσιμότητα της αντίστοιχης PE. Μπορούμε να εξετάσουμε την ακριβή φύση της αποκλίνουσας συμπεριφοράς που παρουσιάζει το ανωτέρω ολοκλήρωμα προσδιορίζοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της σχέσης (4.10) για μικρές τιμές του z_0 . Προχωρούμε στην προαναφερθείσα ανάλυση υποθέτοντας ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

$$\frac{z_0}{a} \ll 1, \frac{z_0}{a-\rho} \ll 1, l \frac{z_0}{a} = O(1) \text{ και } q \frac{z_0}{a} = O(1) \quad (4.15)$$

Εξαιτίας των (4.13)-(4.15) στην (4.9) κυριαρχούν δύο όροι, για $m=0$ και για $m=1$.
Συνεπώς:

$$\tilde{A}(\theta) \sim 4z_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\bar{K}\left(\frac{\theta}{z_0}, \rho\right) \frac{1}{\theta^2} + \bar{K}\left(\frac{2\pi-\theta}{z_0}, \rho\right) \frac{1}{(2\pi-\theta)^2} \right] \quad (4.16)$$

Αντικαθιστώντας την (4.16) στην εξίσωση (4.10), και θέτοντας $\phi = \pi - \theta$, παίρνουμε:

$$I_l \sim \frac{(-1)^l}{4\pi z_0} \int_{0, (\pi-kz_0)}^{\pi} \frac{\tilde{D}(\pi-\phi) / \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\bar{K}\left(\frac{\pi-\phi}{z_0}, \rho\right) / (\pi-\phi)^2 + \bar{K}\left(\frac{\pi+\phi}{z_0}, \rho\right) / (\pi+\phi)^2} \cos(l\phi) d\phi \quad (4.17)$$

Λόγω των συνθηκών (4.15), η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα της (4.17) προέρχεται από μία στενή περιοχή πλησίον του $\phi=0$. Επομένως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άνω άκρο ολοκλήρωσης, π , της (4.17) με 1. Το τελευταίο, μας δίνει την δυνατότητα να αντικαταστήσουμε την συνάρτηση του πυρήνα $\bar{K}\left((\pi \pm \phi)/z_0, \rho\right)$, στην (4.17), από την ασυμπτωτική της προσέγγιση που δίνεται στην (4.13) ή (4.14). Στο ολοκλήρωμα που προκύπτει, εν συνεχεία, αλλάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης $x = \phi a / z_0$. Για την περίπτωση του ενεργού ρεύματος καταλήγουμε στην σχέση:

$$I_{l,\text{eff}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k z_0 \sqrt{\frac{z_0}{a}} (-1)^l e^{\frac{\pi a}{z_0}} f\left(\frac{z_0}{a}, q \frac{z_0}{a}, l \frac{z_0}{a}, ka\right) \quad (4.18)$$

όπου

$$f\left(\frac{z_0}{a}, q \frac{z_0}{a}, l \frac{z_0}{a}, ka\right) = \int_0^{a/z_0} g\left(x; \frac{z_0}{a}, q \frac{z_0}{a}, ka\right) \cos\left(l \frac{z_0}{a} x\right) dx \quad (4.19)$$

στην οποία

$$g\left(x; \frac{z_0}{a}, q \frac{z_0}{a}, ka\right) = \frac{\tilde{D}\left(\pi - \frac{z_0}{a}x\right) / \left[k z_0^2 \cos^2\left(\frac{1}{2} \frac{z_0}{a}x\right) \right]}{e^{x\left(\pi - \frac{z_0}{a}x\right)^{-7/2} / \frac{\rho}{z_0} K_1\left[\frac{\rho}{z_0}\left(\pi - \frac{z_0}{a}x\right)\right]} + e^{-x\left(\pi + \frac{z_0}{a}x\right)^{-7/2} / \frac{\rho}{z_0} K_1\left[\frac{\rho}{z_0}\left(\pi + \frac{z_0}{a}x\right)\right]} \quad (4.20)$$

Για την περίπτωση του προσεγγιστικού ρεύματος, οι εκφράσεις που αντιστοιχούν στις (4.18)-(4.20) είναι το όριο των τελευταίων καθώς $\rho \rightarrow 0$. Θα υπολογίσουμε το όριο αυτό στην τελική έκφραση για το ενεργό ρεύμα που δίνεται στην εξίσωση (4.22) παρακάτω.

Το επόμενο βήμα έγκειται στην προσέγγιση της συνάρτησης f της σχέσης (4.18) από τους δύο πρώτους όρους της σειράς Maclaurin αυτής, ως προς την μεταβλητή z_0/a (θεωρώντας τις παραμέτρους lz_0/a και qz_0/a σταθερές). Η f , στην (4.18), εξαρτάται από την z_0/a διότι η g εξαρτάται από την παράμετρο αυτή και επιπλέον η z_0/a αποτελεί το άνω άκρο ολοκλήρωσης στην (4.19). Σύμφωνα με τον τύπο του Leibniz (1.21), αντικαθιστώντας το προαναφερθέν άκρο ολοκλήρωσης με ∞ και αντικαθιστώντας την g από τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin αυτής καταλήγουμε στην ζητούμενη προσέγγιση της f που αναφέραμε παραπάνω. Πράγματι, από τις (4.11) και (4.20) σύμφωνα με τις συνθήκες (4.15) το ανάπτυγμα της g είναι:

$$g\left(x; \frac{z_0}{a}, \frac{qz_0}{a}, ka\right) \sim i \frac{V}{\zeta_0} \frac{\pi^{7/2}}{32} \frac{(-1)^q}{(qz_0/a)} \left(\frac{\rho}{z_0}\right) K_1\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right) \frac{1}{\cosh x} x \sin\left(\frac{qz_0}{a}x\right) \left(\frac{z_0}{a}\right)^2 \\ + i \frac{V}{\zeta_0} \frac{\pi^{5/2}}{64} \frac{(-1)^q}{(qz_0/a)} \left[\frac{\rho}{z_0} \pi K_0\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right) - 7 K_1\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right) + \frac{\rho}{z_0} \pi K_2\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right) \right] \\ \cdot \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} x^2 \sin\left(\frac{qz_0}{a}x\right) \left(\frac{z_0}{a}\right)^3 \quad (4.21)$$

Όταν η (4.21) αντικατασταθεί στην (4.19) και το άνω άκρο ολοκλήρωσης τεθεί ίσο με ∞ , προκύπτουν δύο ολοκληρώματα που δύναται να υπολογιστούν αναλυτικά από πίνακες γνωστών ολοκληρωμάτων ή με την χρήση συμβολικής γλώσσας

προγραμματισμού. Η έκφραση της f που θα προκύψει, αν αντικατασταθεί στην (4.18), θα δώσει τελικά:

$$\begin{aligned}
I_{l,\text{eff}} \sim & i \frac{V}{\zeta_0} \frac{\pi^5}{256\sqrt{2}} \frac{ka}{q} \left(\frac{z_0}{a}\right)^{5/2} (-1)^{l+q} \frac{\rho}{z_0} K_1\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right) e^{\frac{\pi a}{z_0}} \\
& \cdot \left\{ F\left((q+l)\frac{z_0}{a} \frac{\pi}{2}\right) + F\left((q-l)\frac{z_0}{a} \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{8\pi} \frac{z_0}{a} \frac{1}{K_1\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right)} \right. \\
& \cdot \left[\frac{\rho}{z_0} \pi K_0\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right) - 7K_1\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right) + \frac{\rho}{z_0} \pi K_2\left(\frac{\rho}{z_0} \pi\right) \right] \\
& \cdot \left. \left[G\left((q+l)\frac{z_0}{a} \pi\right) + G\left((q-l)\frac{z_0}{a} \pi\right) \right] \right\} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

όπου

$$F(x) = \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}, \quad G(x) = \frac{x(3 - \cosh x) + 4 \sinh x}{\cosh^3(x/2)} \quad (4.23)$$

Παίρνοντας το όριο της (4.22) για μικρά ρ , καταλήγουμε σε μία παρόμοια έκφραση για το προσεγγιστικό ρεύμα:

$$\begin{aligned}
I_{l,\text{ap}} \sim & i \frac{V}{\zeta_0} \frac{\pi^4}{256\sqrt{2}} \frac{ka}{q} \left(\frac{z_0}{a}\right)^{5/2} (-1)^{l+q} e^{\frac{\pi a}{z_0}} \\
& \cdot \left\{ F\left((q+l)\frac{z_0}{a} \frac{\pi}{2}\right) + F\left((q-l)\frac{z_0}{a} \frac{\pi}{2}\right) - \frac{5}{8\pi} \frac{z_0}{a} \left[G\left((q+l)\frac{z_0}{a} \pi\right) + G\left((q-l)\frac{z_0}{a} \pi\right) \right] \right\} \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Οι σχέσεις (4.22) και (4.24) αποτελούν τις ασυμπτωτικές εκφράσεις της αριθμητικής λύσης που αναζητούμε σύμφωνα με τις συνθήκες (4.15). Οι δύο όροι της F είναι οι κυρίαρχοι όροι των εκφράσεων αυτών ενώ οι αντίστοιχοι της G είναι όροι διόρθωσης. Η (4.24) είναι παρόμοια με την (2.38). Ωστόσο, η τελευταία ισχύει για διαφορετικό μοντέλο τροφοδοσίας (ΓΔΣ) και για διαφορετική αριθμητική μέθοδο (μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις).

Οι εκφράσεις (4.22) και (4.24) δείχνουν ξεκάθαρα πως η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε αποκλίνει για μικρές τιμές του z_0 , τουλάχιστον για τα σημεία της κεραίας που βρίσκονται κοντά στο σημείο τροφοδοσίας (βλέπε την τρίτη συνθήκη της (4.15)). Συγκεκριμένα:

α) ο παράγοντας $(-1)^l$ σημαίνει ότι το ρεύμα ταλαντώνεται γρήγορα κατά μήκος της κεραίας,

β) το ταλαντούμενο ρεύμα είναι καθαρά φανταστικό,

γ) ο παράγοντας $K_1(\rho\pi/z_0)\exp(\pi a/z_0)$ στην (4.22), ο $\exp(\pi a/z_0)$ στην (4.24) και οι δύο πρώτες συνθήκες στην (4.15) δείχνουν ότι το ταλαντούμενο ρεύμα είναι εκθετικά μεγάλο.

δ) τέλος, ο παράγοντας $(-1)^q$ δηλώνει ότι, στο σημείο τροφοδοσίας, η αριθμητική λύση αλλάζει πρόσημο καθώς η παράμετρος q αυξάνει κατά 1 (υπενθυμίζουμε ότι η παράμετρος αυτή σχετίζεται με τον αριθμό των συναρτήσεων βάσης κατά μήκος του διακένου).

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα ασυμπτωτικά μας αποτελέσματα με τα αντίστοιχα που εξήχθησαν, στο Κεφάλαιο 2, για το μοντέλο της ΓΔΣ: Οι παρατηρήσεις α)-γ) ισχύουν, επίσης, σ' αυτή την περίπτωση και ο εκθετικός παράγοντας στην (4.24) είναι ίδιος με τον αντίστοιχο στην σχέση (2.38). Η παρατήρηση δ), προφανώς, δεν έχει ανάλογο για την περίπτωση της ΓΔΣ. Μεταξύ των διαφορών της (4.24) με την (2.36), σημειώνουμε, ιδιαίτερα, ότι η τελευταία έκφραση έχει ένα παράγοντα $(z_0/a)^{1/2}$ αντί του $(z_0/a)^{5/2}$ που συναντούμε στην (4.24). Συνεπώς, οι ταλαντώσεις στην περίπτωση της ΓΠΔ είναι μικρότερες από την περίπτωση της ΓΔΣ.

4.2.2 Συνάφεια των Ασυμπτωτικών Εκφράσεων και της Πεπερασμένης Κεραίας - Αριθμητικά Αποτελέσματα

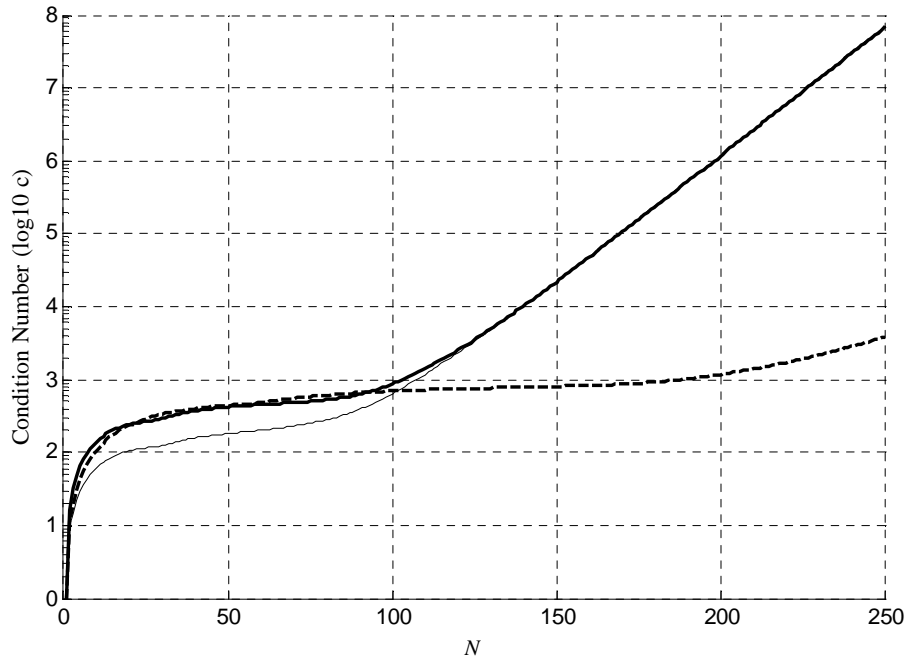
Τα ανωτέρω συμπεράσματα α) – δ) συμφωνούν με τα αριθμητικά αποτελέσματα για την πεπερασμένη κεραία όπως αυτά απεικονίζονται τόσο στα Σχήματα 4.1-4.4 όσο

και στα 3.1, 3.2. Συγκεκριμένα, το γεγονός ότι οι ταλαντώσεις, πλησίον του σημείου τροφοδοσίας, παρατηρούνται μόνο στο φανταστικό μέρος του ρεύματος συμφωνεί με την παρατήρηση β). Επιπλέον, οι Πίνακες 4.1 και 4.2 επιβεβαιώνουν ότι υπάρχει ποσοτική ομοιότητα μεταξύ των ταλαντούμενων τιμών για την πεπερασμένη και την άπειρη κεραία: Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τα αποτελέσματα του ασυμπτωτικού αναπτύγματος (4.24) (για την άπειρη κεραία) μαζί με τις πρώτες ταλαντούμενες τιμές (αυτές δηλαδή που είναι πλησιέστερες στο $z=0$) του Σχήματος 3.2 (οι οποίες υπολογίστηκαν από την αριθμητική μέθοδο της παραγράφου 3.2, για την πεπερασμένη κεραία). Η συμφωνία είναι αρκετά καλή. Παρατηρούμε, στον Πίνακα 4.2, αντίστοιχη συμφωνία μεταξύ της (4.22) και των ταλαντούμενων τιμών του ενεργού ρεύματος όπως αυτές προκύπτουν από την εξίσωση (3.18) και απεικονίζονται στο Σχήμα 4.2. Τα ανωτέρω αποτελούν ισχυρή ένδειξη ότι *οι παρατηρούμενες ταλαντώσεις της πεπερασμένης κεραίας, κοντά στο σημείο τροφοδοσίας της, δεν αποτελούν συνέπεια σφαλμάτων στρογγυλοποίησης (roundoff error) και/ ή πινάκων με υψηλό δείκτη κατάστασης (matrix ill-conditioning)*. Αντίθετα, οι ταλαντώσεις οφείλονται στην μη επιλυσιμότητα της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Σημειώνουμε ότι η «επιλυσιμότητα» είναι ένα από τα τρία χαρακτηριστικά που σύμφωνα με τον Hadamard καθορίζουν ένα «καλώς» ορισμένο πρόβλημα [2], [7]. Η «μοναδικότητα» της λύσης («uniqueness») και η «ευστάθεια» («stability») αυτής - συνεχής εξάρτηση της λύση από τα δεδομένα - αποτελούν τα άλλα δύο χαρακτηριστικά ενός τέτοιου προβλήματος. Ιδιαίτερα το τελευταίο, δεδομένου ότι στα περισσότερα προβλήματα τα δεδομένα αποτελούν μετρούμενες φυσικές ποσότητες, εξασφαλίζει ότι πιθανά μικρά σφάλματα στρογγυλοποίησης σε αυτά θα προκαλέσουν μικρά σφάλματα στην λύση. Διευκρινίζουμε ότι σύμφωνα με το [7] τα ανωτέρω χαρακτηριστικά σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι το πλάτος των ταλαντώσεων, που παρατηρούνται πλησίον του σημείου τροφοδοσίας της πεπερασμένης κεραίας και η εμφάνιση των οποίων οφείλεται αποκλειστικά στην μη επιλυσιμότητα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (βλέπε παρ. 4.2.1), ενδέχεται να ενισχυθεί σημαντικά για μεγάλες τιμές της παραμέτρου N ως αποτέλεσμα σφαλμάτων στρογγυλοποίησης και πινάκων με υψηλό δείκτη κατάστασης. Στην τελευταία μάλιστα περίπτωση (μεγάλες τιμές του N) η αριθμητική λύση παρουσιάζει αστάθεια (ακαθόριστες ταλαντώσεις) σε όλο το μήκος της κεραίας.

N=200	$\text{Im}(I_{ap,n}/V)$ (A/V) $q=3 \quad \Delta=0.0075$	$I_{ap,n}^{(\infty)}/iV$ (A/V) $q=3 \quad \Delta=0.0075$
n=0	-5.254	-4.571
n=1	4.848	4.217
n=2	-3.663	-3.263
n=3	1.977	1.976
n=4	-0.2768	-0.6501
n=5	-0.9429	-0.4630
n=6	1.588	1.198
n=7	-1.756	-1.534
n=8	1.674	1.572
n=9	-1.457	-1.440
n=10	1.226	1.239
n=11	-0.991	-1.027
n=12	0.8025	0.8318
n=13	-0.6294	-0.6648
n=14	0.5050	0.5268
n=15	-0.3894	-0.4152
n=16	0.3139	0.326
n=17	-0.238	-0.2553
n=18	0.1947	0.1995
n=19	-0.1443	-0.1557

Πίνακας 4.1: Σύγκριση των πρώτων 20 ταλαντούμενων τιμών του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ του Σχήματος 3.2 (για την πεπερασμένη κεραία) με τις αντίστοιχες τιμές του $I_{ap,n}^{(\infty)}/iV$ (για την άπειρη κεραία) όπως υπολογίστηκαν από την ασυμπτωτική έκφραση (4.24).

Παρόμοιες ταλαντώσεις (που θα πρέπει να αποδοθούν στην μη επιλυσιμότητα της ολοκληρωτικής εξίσωσης) παρατηρούνται και στην περίπτωση χρήσης τριγωνικών συναρτήσεων βάσης στην αριθμητική επίλυση της ΗΕ με την Τεχνική Σημειακής Ισότητας -ΤΣΙ (Point – Matching Technique).



Σχήμα 4.5: Λογάριθος του δείκτη κατάστασης c ($1^{\text{ης}}$ νόρμας) ως συνάρτηση του N . $h/\lambda = 0.25$, $a/\lambda = 0.007022$ (έντονη συνεχής γραμμή); $h/\lambda = 0.5$, $a/\lambda = 0.014044$ (λεπτή συνεχής γραμμή); $h/\lambda = 0.5$, $a/\lambda = 0.007022$ (διακεκομμένη γραμμή). Παρατηρούμε ότι όταν ο λόγος h/a είναι σταθερός, τα διαγράμματα συμπίπτουν οπτικά στην κλίμακα του σχήματος για μεγάλες τιμές του N .

Επισημαίνουμε ότι οι ταλαντώσεις, οι οποίες αναφέρονται στην παρούσα διατριβή, θα παρουσιάζονταν ακόμα και αν χρησιμοποιούσαμε έναν υποθετικό υπολογιστή με ιδανικό υλικό (hardware) και λογισμικό (software). Επισημαίνουμε, ακόμη, ότι η επίδραση των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης μπορεί να είναι σημαντική (βλέπε την ραγδαία αύξηση στον δείκτη κατάστασης που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.5).

Στο Σχήμα 4.5 απεικονίζεται ο δείκτης κατάστασης c ($1^{\text{ης}}$ νόρμας) του πίνακα E του συστήματος (3.8) - που προκύπτει κατά την αριθμητική επίλυση της PE - ως συνάρτηση της παραμέτρου N . Όπως στο Σχήμα 2.3, έτσι κι εδώ, τα διαγράμματα είναι ανεξάρτητα της πηγής που διεγείρει την κεραία (δεξί μέλος της PE). Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά από τα αντίστοιχα του Σχήματος 2.3 που αφορούν την αριθμητική επίλυση της HE. Παρόλα αυτά για μεγάλες τιμές του N ο δείκτης κατάστασης αυξάνει, και εδώ, σχεδόν εκθετικά με το N . Επιπρόσθετα πρέπει να σημειωθεί ότι, για δεδομένη τιμή της παραμέτρου N , παρουσιάζει μικρότερες τιμές από τις αντίστοιχες του Σχήματος 2.3 αποτελώντας ένδειξη ότι η αριθμητική

μέθοδος που εφαρμόστηκε στην PE (βλέπε παρ. 3.2) είναι αποτελεσματικότερη - όσον αφορά τα σφάλματα στρογγυλοποίησης - από την αντίστοιχη που εφαρμόστηκε στην HE (βλέπε παρ. 2.2).

N=200	$\text{Im}(I_{\text{eff},n}/V)$ (A/V)	$I_{\text{eff},n}^{(\infty)}/iV$ (A/V)
	$q=3 \quad \Delta=0.0075 \quad \rho=a/4$	$q=3 \quad \Delta=0.0075 \quad \rho=a/4$
n=0	-0.1826	-0.2621
n=1	0.1762	0.2394
n=2	-0.1268	-0.1735
n=3	0.0583	0.0795
n=4	0.0226	0.0119
n=5	-0,0528	-0,0728
n=6	0.07	0.0969
n=7	-0.0566	-0.0954
n=8	0.0556	0.082
n=9	-0.0374	-0.0657
n=10	0.0376	0.0507
n=11	-0.022	-0.0384
n=12	0.0251	0.0287
n=13	-0.0118	-0.0213
n=14	0.0172	0.0158

Πίνακας 4.2: Σύγκριση των πρώτων 15 ταλαντούμενων τιμών του $\text{Im}\{I_{\text{eff},n}/V\}$ του Σχήματος 4.3 (για την πεπερασμένη κεραία) με τις αντίστοιχες τιμές του $I_{\text{eff},n}^{(\infty)}/iV$ (για την άπειρη κεραία) όπως υπολογίστηκαν από την ασυμπτωτική έκφραση (4.22).

Αν και η παρουσία ταλαντώσεων, ως φαινόμενο στην παρούσα διατριβή, δεν σχετίζεται με σφάλματα στρογγυλοποίησης (παρόλο που ποσοτικά το πλάτος των ταλαντώσεων μπορεί να επηρεαστεί για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων της αριθμητικής μεθόδου), η επίδραση αυτών είναι πολύ πιθανό να συγχυστεί με τις ταλαντώσεις που οφείλονται στην μη επιλυσιμότητα, ιδιαίτερα, αν περιοριστούμε στην απλή παρατήρηση αριθμητικών αποτελεσμάτων [2], [8]. Συνοψίζοντας, οι

αναφερόμενες ταλαντώσεις οφείλονται αποκλειστικά στην μη επιλυσιμότητα των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Το πλάτος αυτών επηρεάζεται σημαντικά από σφάλματα στρογγυλοποίησης σε βαθμό που εξαρτάται κάθε φορά από την επιλογή των παραμέτρων της αριθμητικής μεθόδου που εφαρμόζουμε. Τα σφάλματα αυτά, στην υπό εξέταση περίπτωση, δεν αποτελούν αιτία πρόκλησης ταλαντώσεων, δρουν ενισχυτικά σ' αυτές αλλά δεν ερμηνεύουν την εμφάνισή τους. Οι ανωτέρω παρατηρήσεις επιβεβαιώνουν την ιδιαίτερη χρησιμότητα των ασυμπτωτικών μας εκφράσεων.

4.2.3 Αναλογίες με Άλλα Φαινόμενα

Αν εξαιρέσουμε τον παράγοντα $2\pi\rho$, το ενεργό ρεύμα είναι το κοντινό μαγνητικό πεδίο που παράγεται από ένα μεγάλο σε πλάτος και ραγδαίως ταλαντούμενο ρεύμα στον άξονα z (βλέπε την εξίσωση (3.1)). Σε κάθε περίπτωση, όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες (4.15), το εν λόγω πεδίο μειώνεται εντός της μικρής απόστασης a όπως προκύπτει από την σχέση (4.22). Επιπρόσθετα, είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η τελική τιμή του πεδίου αυτού (στο $\rho = a$) είναι μη ταλαντούμενη και πολύ μικρότερη από την αρχική μεγάλη τιμή (στο $\rho = 0$) που δίνεται από την (4.24). Τέτοιου είδους κοντινά πεδία, τα οποία μειώνονται ραγδαία όπως αναφέραμε, είναι γενικά ασυνήθιστα αλλά δεν συναντώνται μόνον εδώ. Συναντώνται επίσης κατά την εφαρμογή της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών (Method of Auxiliary Sources - MAS) [9]-[11].

Η Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών αποτελεί μία προσεγγιστική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Η προέλευση και οι εκδοχές της MAS καθώς και ο συσχετισμός της με άλλες μεθόδους έχουν αναλυθεί στα [12]-[16]. Στην απλή της μορφή, συναντάται σε προβλήματα σκέδασης από λείο και τέλειο ηλεκτρικά αγωγό (Perfect Electric Conductor - PEC). Ο εν λόγω αγωγός είναι συνήθως κλειστός και πεπερασμένος. Υποθέτουμε N πηγές ηλεκτρικού ρεύματος οι οποίες τοποθετούνται σε βοηθητική επιφάνεια εσωτερικά του τέλειου ηλεκτρικά αγωγού. Τα άγνωστα «ρεύματα MAS», των ανωτέρω πηγών, πρέπει να ικανοποιούν την οριακή συνθήκη μηδενισμού του εφαπτομενικού ηλεκτρικού πεδίου σε N σημεία ισότητας (collocation points) του σκεδαστή (επιφάνεια αγωγού). Κατόπιν των ανωτέρω, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα διαστάσεων $N \times N$ απ' όπου δύναται να υπολογιστούν οι ζητούμενοι ρευματικοί συντελεστές.

Στα [9],[13] και [14] εξετάζονται οι περιπτώσεις του «επίπεδου» και του «κυλινδρικού» σκεδαστή. Στην πρώτη περίπτωση, όταν η βοηθητική επιφάνεια βρίσκεται κάτω από το είδωλο της ρευματικής πηγής που «φωτίζει» τον αγωγό, το προκύπτον $N \times N$ σύστημα δίνει ταλαντούμενες τιμές για το πραγματικό μέρος των ρευμάτων MAS αντίστοιχα με τις παρατηρούμενες ταλαντώσεις των ρευματικών συντελεστών που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Rocklington με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Τα εν λόγω ρεύματα MAS παράγουν πεδία που εξομαλύνονται καθώς το σημείο παρατήρησης απομακρύνεται από την βοηθητική επιφάνεια δίνοντας τελικά ομαλές τιμές πεδίου στα σημεία πέραν της θέσης του ειδώλου. Κατ' αντιστοιχία, το ενεργό ρεύμα έχει ταλαντούμενες τιμές που εξομαλύνονται καθώς η παράμετρος ρ προσεγγίζει την ακτίνα a επιτυγχάνοντας την πλήρη εξομάλυνση στο $\rho = a$. Στην περίπτωση του «κυλινδρικού» σκεδαστή, τα ταλαντούμενα ρεύματα MAS, που παρατηρούνται όταν η ακτίνα της βοηθητικής επιφάνειας $\rho_{aux,cyl}$ είναι μικρότερη της κρίσιμης ακτίνας $\rho_{fil,cyl}$, δημιουργούν ταλαντούμενα πεδία που εξομαλύνονται στο διάστημα $\rho_{aux,cyl} < \rho < \rho_{fil,cyl}$, κατ' αναλογία με τις τιμές του ενεργού ρεύματος στο $0 < \rho < a$. Σημειώνουμε ότι στην [9] δίνονται ασυμπτωτικές εκφράσεις για το κοντινό πεδίο, τόσο για τον «κυλινδρικό» όσο και για τον «επίπεδο» σκεδαστή. Οι προαναφερθείσες εκφράσεις είναι ποιοτικά παρόμοιες με την (4.22).

Η ραγδαία μείωση του πεδίου που συναντούμε στην παρούσα διατριβή και στην Μέθοδο Βοηθητικών Πηγών [9] συμβαίνει στα πλαίσια εφαρμογής μιας αριθμητικής μεθόδου και όχι ενός πραγματικού (φυσικού) προβλήματος. Ένα πολύ γνωστό φυσικό φαινόμενο που τυπικά σχετίζεται με μεγάλα, ταχέως ταλαντούμενα ρεύματα τα οποία παράγουν ραγδαίως μειούμενα κοντινά πεδία, είναι η υπερκατευθυντικότητα. Το γεγονός ότι τα υπερκατευθυντικού τύπου φαινόμενα αναπτύσσονται στα πλαίσια της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον προσεγγιστικό πυρήνα δεν είναι παράλογο, καθώς η τελευταία εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως μία εξίσωση που αφορά ένα γραμμικό ρεύμα (στο $\rho = 0$) το οποίο είναι μικρότερο σε μέγεθος από το αληθές ρεύμα στο $\rho = a$. Στην πράξη, τα υπερκατευθυντικού τύπου φαινόμενα γίνονται πιο έντονα εάν αυξήσουμε την ακτίνα της κεραίας a - αυτό είναι εμφανές και στα εκθετικά των σχέσεων (4.22) και (4.24). Η σημασία των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, που αναφέραμε στην παράγραφο 4.2.2, μπορεί να λογιστεί ως ανάλογο της ευαισθησίας (για παράδειγμα στη μηχανική κατασκευή) που παρουσιάζουν οι υπερκατευθυντικές κεραίες.

Ολοκληρώνοντας, τα ανωτέρω φαινόμενα μας θυμίζουν, επίσης, τα κοντινά πεδία των συντονισμένων κυκλικών κεραίων. Τέτοιου είδους πεδία καθώς και οι σχέσεις αυτών με επιφανειακά κύματα αναφέρονται στην [17].

4.3 Άπειρη Κεραία: Φυσική Ερμηνεία του Ενεργού Ρεύματος

Στην παράγραφο αυτή επιστρέφουμε στην περίπτωση όπου $\rho = a$ και $z_0 = 0$. Στόχος μας είναι να εξετάσουμε περαιτέρω το ενεργό ρεύμα $I_{\text{eff}}(a, z)$ που εισάγαμε στην παράγραφο 3.4 και το συναντήσαμε, ξανά, ως όριο στην (4.12). Συγκεκριμένα, θα ξεκινήσουμε από βασικές αρχές προκειμένου να αποδείξουμε την ακριβή ισότητα που δίνεται στην (4.1) και να εξετάσουμε τη συνάφειά της με τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3.

4.3.1 Η Κυλινδρική Σωληνοειδής Κεραία Τροφοδοτούμενη από την Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου - ΓΠΔ

Ξεκινώντας θα πρέπει να περιγράψουμε ακριβώς το μοντέλο της κεραίας που θα εξετάσουμε. Πρόκειται για την «κυλινδρική σωληνοειδή κεραία» όπως αυτή παρουσιάζεται στην παράγραφο 1.2, με την παρουσία διακένου πεπερασμένου εύρους Δ (περίπτωση ΓΠΔ). Ακριβέστερα, το μοντέλο μας είναι ένας απείρου μήκους κυλινδρικός σωλήνας με τέλεια αγωγή τοιχώματα μηδενικού πάχους, και ένα διάκενο μήκους Δ το κέντρο του οποίου είναι τοποθετημένο στο $z = 0$. Στα άκρα του διακένου εφαρμόζουμε μία σταθερή διαφορά δυναμικού V . Δηλαδή:

$$E_z^{\text{out}}(a, z) = E_z^{\text{in}}(a, z) = \begin{cases} -V / \Delta, & |z| < \Delta / 2 \\ 0, & |z| > \Delta / 2 \end{cases} \quad (4.25)$$

όπου τα $E_z^{\text{out}}(\rho, z)$ και $E_z^{\text{in}}(\rho, z)$ προσδιορίζονται από τις (1.2), (1.12) και (1.27), και αποτελούν την z συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου για $\rho > a$ και $\rho < a$ αντίστοιχα. Ως συνήθως, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\bar{E}_z^{\text{out}}(\rho, \zeta)$ και $\bar{E}_z^{\text{in}}(\rho, \zeta)$ για να εκφράσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier - MF των μεγεθών $E_z^{\text{out}}(\rho, z)$ και $E_z^{\text{in}}(\rho, z)$ ως προς z . Κύριος στόχος μας είναι να βρούμε εκφράσεις για τα μεγέθη

$\mathbf{J}_s^{\text{out}}(z) = \hat{\mathbf{z}}\mathbf{J}_{sz}^{\text{out}}(z)$ και $\mathbf{J}_s^{\text{in}}(z) = \hat{\mathbf{z}}\mathbf{J}_{sz}^{\text{in}}(z)$, δηλαδή για τις πυκνότητες των επιφανειακών ρευμάτων στην εξωτερική και εσωτερική επιφάνεια της σωληνοειδούς κεραίας. Οι MF των μη μηδενικών συνιστωσών του πεδίου ικανοποιούν τις ίδιες εξισώσεις με την ΓΔΣ. Δηλαδή:

$$k\bar{E}_\rho(\rho, \zeta) = -\zeta c\bar{B}_\phi(\rho, \zeta) \quad (4.26)$$

$$k\bar{E}_z(\rho, \zeta) = \frac{ic}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho\bar{B}_\phi(\rho, \zeta)] \quad (4.27)$$

$$kc\bar{B}_\phi(\rho, \zeta) = -\zeta\bar{E}_\rho(\rho, \zeta) + i\frac{\partial}{\partial \rho}\bar{E}_z(\rho, \zeta) \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{E}_z(\rho, \zeta) + (k^2 - \zeta^2)\bar{E}_z(\rho, \zeta) = 0 \quad (4.29)$$

Οι εξισώσεις (4.26)-(4.29), οι οποίες αναφέρονται στην παράγραφο 8.4 του [5], ισχύουν τόσο για $\rho < a$ όσο και για $\rho > a$. Οι (4.26)-(4.28) είναι άμεση συνέπεια των εξισώσεων Maxwell, ενώ η (4.29) υπολογίζεται από τις (4.26)-(4.28). Η αναγκαία οριακή συνθήκη για την επίλυση των εξισώσεων (4.26)-(4.29) είναι ο MF της (4.25) ο οποίος δίνεται από την:

$$\bar{E}_z^{\text{out}}(a, \zeta) = \bar{E}_z^{\text{in}}(a, \zeta) = \frac{-V \sin(\zeta\Delta/2)}{\zeta\Delta/2} = \frac{i\zeta_0\bar{r}(\zeta)}{k} \quad (4.30)$$

όπου εισάγαμε την συνάρτηση $\bar{r}(\zeta)$ από την σχέση (3.30). Για $\rho > a$, η λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.29) που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη (4.30) και την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld είναι:

$$\bar{E}_z^{\text{out}}(\rho, \zeta) = \frac{i\zeta_0\bar{r}(\zeta)}{k} \frac{H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k^2 - \zeta^2})}{H_0^{(1)}(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})} = \frac{i\zeta_0\bar{r}(\zeta)}{k} \frac{K_0(\rho\sqrt{\zeta^2 - k^2})}{K_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})} \quad (4.31)$$

Η πρώτη έκφραση στην (4.31) είναι, εμφανώς, η λύση στο πρόβλημα οριακών συνθηκών. Αντίστοιχα με τον Πίνακα 3.1, η πρώτη έκφραση της (4.31) είναι δόκιμη για την περίπτωση όπου $|\zeta| < k$, ενώ η δεύτερη αποτελεί αναλυτική συνέχιση της πρώτης για $|\zeta| > k$. Ομοίως, όταν $\rho < a$, η λύση της (4.29) που ικανοποιεί την (4.30) είναι πεπερασμένη στον άξονα z και δίνεται από την εξίσωση:

$$\bar{E}_z^{\text{in}}(\rho, \zeta) = \frac{i\zeta_0 \bar{r}(\zeta)}{k} \frac{J_0\left(\rho\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)}{J_0\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} = \frac{i\zeta_0 \bar{r}(\zeta)}{k} \frac{I_0\left(\rho\sqrt{\zeta^2 - k^2}\right)}{I_0\left(a\sqrt{\zeta^2 - k^2}\right)} \quad (4.32)$$

Για να έχει νόημα η (4.32), πρέπει να απαιτήσουμε η παράμετρος ka να είναι μικρότερη από τον πρώτο θετικό μηδενισμό της J_0 ($ka < 2.405$ ή $a/\lambda < 0.383$) έτσι ώστε να μην διαδίδεται ρυθμός εντός της σωληνοειδούς κεραίας. Σημειώνουμε ότι η συνήθης υπόθεση της «λεπτής-γραμμικής» κεραίας είναι πολύ πιο αυστηρή από την προαναφερθείσα.

Απαλείφοντας την $\bar{E}_\rho(\rho, \zeta)$ από την (4.26) και την (4.28), παίρνουμε:

$$\bar{B}_\phi(\rho, \zeta) = \frac{ik}{c} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{E}_z(\rho, \zeta) \quad (4.33)$$

Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας τις (4.31)-(4.33) και τους συνήθεις τύπους των παραγώγων των συναρτήσεων Bessel, υπολογίζουμε τους MF των μεγεθών $\bar{J}_{sz}^{\text{out}}(\zeta) = \bar{B}_\phi^{\text{out}}(a, \zeta)/\mu_0$ και $\bar{J}_{sz}^{\text{in}}(\zeta) = -\bar{B}_\phi^{\text{in}}(a, \zeta)/\mu_0$ που δίνουν τις πυκνότητες $J_{sz}^{\text{out}}(z)$ και $J_{sz}^{\text{in}}(z)$ των επιφανειακών ρευμάτων. Ολοκληρώνοντας, γράφουμε:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{sz}^{\text{out}}(\zeta) &= \bar{r}(\zeta) \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \frac{H_1^{(1)}\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)}{H_0^{(1)}\left(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} = \bar{r}(\zeta) \frac{-1}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}} \frac{K_1\left(a\sqrt{\zeta^2 - k^2}\right)}{K_0\left(a\sqrt{\zeta^2 - k^2}\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \bar{r}(\zeta) w_{\text{eff}}(\zeta, a) \end{aligned} \quad (4.34)$$

και

$$\bar{J}_{sz}^{\text{in}}(\zeta) = \bar{r}(\zeta) \frac{-1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \frac{J_1(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})}{J_0(a\sqrt{k^2 - \zeta^2})} = \bar{r}(\zeta) \frac{-1}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}} \frac{I_1(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})}{I_0(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})} \quad (4.35)$$

όπου $w_{\text{eff}}(\zeta, a)$ η τιμή του $w_{\text{eff}}(\zeta)$ για $\rho = a$, σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier των (4.34) και (4.35) (με την συνήθη διαδρομή ολοκλήρωσης που αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο) δίνει τις ζητούμενες εκφράσεις για τα μεγέθη $J_{sz}^{\text{out}}(z)$ και $J_{sz}^{\text{in}}(z)$ αντίστοιχα. Οι τελευταίες εκφράσεις μπορούν να βρεθούν επίσης στην [4].

4.3.2 Συσχετισμοί με το Ενεργό Ρεύμα

Για την περίπτωση της ΓΠΔ, ισχύει η εξίσωση (4.1) διότι όταν η τελευταία έκφραση της (4.34) πολλαπλασιαστεί με $2\pi a$, η εξίσωση που θα προκύψει ταυτίζεται με την (3.27) στην ειδική περίπτωση όπου $\rho = a$. Το γεγονός ότι η (4.1) ισχύει επίσης για το μοντέλο της ΓΔΣ προκύπτει παίρνοντας το όριο $\Delta \rightarrow 0$. Προσθέτοντας τις σχέσεις (4.34) και (4.35) κατά μέλη και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με την σχέση που δίνει το ακριβές ρεύμα (εξίσωση (3.27)), με $w(\zeta) = w_{\text{ex}}(\zeta)$ όπου η συνάρτηση $w_{\text{ex}}(\zeta)$ δίνεται στον Πίνακα 3.1), παρατηρούμε ότι:

$$I_{\text{ex}}(z) = 2\pi a \left[J_{sz}^{\text{in}}(z) + J_{sz}^{\text{out}}(z) \right] = 2\pi a J_{sz}^{\text{in}}(z) + I_{\text{eff}}(a, z) \quad (4.36)$$

Με άλλα λόγια, η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον ακριβή πυρήνα είναι το άθροισμα των πυκνοτήτων των επιφανειακών ρευμάτων, στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια, της κεραίας πολλαπλασιασμένο με την περίμετρο αυτής. Το συμπέρασμα αυτό ήταν αναμενόμενο.

Οι ισότητες (4.1) και (4.36) προέρχονται από την (3.21) του προηγούμενου κεφαλαίου, όπου ορίσαμε το ενεργό ρεύμα ολοκληρώνοντας για όλες τις πραγματικές τιμές του z . Η επιλογή ενός ολοκληρώματος το οποίο θα εξαιρούσε το μήκος του διακένου ($|z| < \Delta/2$) από το διάστημα ολοκλήρωσης, αν και δεν φαίνεται παράλογη,

αντιβαίνει τους νόμους του Maxwell καθότι η χρονικά μεταβαλλόμενη ηλεκτρική ροή εντός του διακένου (ρεύμα μετατόπισης) συνεισφέρει στο δημιουργούμενο μαγνητικό πεδίο της σχέσης (3.1). Επιπρόσθετα, η τελευταία επιλογή δεν θα ήταν συμβατή με την σχέση (4.1). Συγκεκριμένα, αν επιλέγαμε ένα τέτοιο ολοκλήρωμα, η εξίσωση (4.1) δεν θα ήταν ακριβής αλλά θα ίσχυε, προσεγγιστικά, για μικρές τιμές του Δ .

4.3.3 Συσχετισμοί με τα Αποτελέσματα του Μοντέλου της ΓΔΣ

Στο σημείο αυτό θα περιγράψουμε την συνάφεια των αποτελεσμάτων των παραγράφων 4.3.1 και 4.3.2 με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 και της [3] που αφορούν την ΓΔΣ. Από τις (4.35) και (3.30), είναι εμφανές ότι η συνάρτηση $\bar{J}_{sz}^{\text{in}}(\zeta)/V$ είναι καθαρά φανταστική και άρτια ως προς την μεταβλητή ζ . Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier αυτής, $J_{sz}^{\text{in}}(z)/V$, θα έχει επίσης καθαρά φανταστικό σύνολο τιμών, και, ως συνέπεια, το πραγματικό μέρος του ολικού ρεύματος θα ταυτίζεται με το αντίστοιχο, πραγματικό μέρος, του ρεύματος της εξωτερικής επιφάνειας της κεραίας. Η παρατήρηση αυτή είναι αποτέλεσμα της απουσίας ρυθμών διάδοσης στο εσωτερικό της σωληνοειδούς κεραίας και ερμηνεύει την ισότητα $\text{Re}\{I_{\text{ex}}(z)/V\} = \text{Re}\{I_{\text{eff}}(a, z)/V\}$ (σχέση (3.37)) όπως επίσης και την παρόμοια ισότητα που έχει εξαχθεί για την περίπτωση της ΓΔΣ [3]. Ο παράγοντας διαφοράς $1/2$ μεταξύ των εξισώσεων (3.33) και (3.34) - και η αντίστοιχη διαφορά για το μοντέλο της ΓΔΣ - οφείλεται στο γεγονός ότι οι παράγωγοι των $2\pi a J_{sz}^{\text{out}}(z)/V$ και $2\pi a J_{sz}^{\text{in}}(z)/V$ συμπεριφέρονται σύμφωνα με την σχέση (3.34). Το τελευταίο μπορεί να επαληθευτεί προσδιορίζοντας την ασυμπτωτική προσέγγιση της (4.35) για μεγάλες τιμές του ζ . Αυτή η ταυτόσημη συμπεριφορά των δύο, ανωτέρω, παραγώγων σημαίνει ότι τα εσωτερικά και εξωτερικά φορτία ανά μονάδα μήκους της κεραίας απειρίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο κοντά στα άκρα του διακένου, όπως ήταν αναμενόμενο. Επιπρόσθετα, όπως κινούμαστε κατά μήκος της κεραίας και σε απόσταση από το διάκενο, η πυκνότητα του ρεύματος της εσωτερικής επιφάνειας εξασθενεί ραγδαία ερμηνεύοντας τις κοντινές τιμές που παίρνουν τα φανταστικά μέρη των ρευμάτων (ακριβές και ενεργό) όπως παρατηρούμε και στην περίπτωση της ΓΔΣ.

4.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, που αποτελεί άμεση συνέχεια του Κεφαλαίου 3, εξετάσαμε την φύση των ταλαντώσεων που παρατηρούνται στο προσεγγιστικό και ενεργό ρεύμα αναπτύσσοντας ασυμπτωτικές εκφράσεις για την αριθμητική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης για την άπειρη, σε μήκος, κεραία. Κατόπιν, δείξαμε ότι οι εκφράσεις αυτές δίνουν αποτελέσματα πολύ κοντά στα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για την πεπερασμένη κεραία. Αυτό καθιστά εμφανές ότι οι αναφερόμενες ταλαντώσεις δεν οφείλονται σε σφάλματα στρογγυλοποίησης ή σε πίνακες με υψηλό δείκτη κατάστασης. Παράλληλα, παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με το πολύ γνωστό φαινόμενο της υπερκατευθυντικότητας και με τα πρόσφατα ευρήματα της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών. Υπογραμμίζουμε ότι τα αποτελέσματά μας αφορούν αποκλειστικά τις ταλαντώσεις που εμφανίζονται πλησίον του κέντρου της κεραίας. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην [3], μία λεπτομερής μελέτη των ταλαντώσεων κοντά στα άκρα της κεραίας $z = \pm h$ εγκυμονεί πολλές δυσκολίες.

Επιπρόσθετα, στο παρόν κεφάλαιο, αποδείξαμε την ισότητα (4.1) που αφορά την άπειρη κεραία τόσο για την περίπτωση της ΓΠΔ όσο και για την αντίστοιχη περίπτωση της ΓΔΣ, και την χρησιμοποιήσαμε για να ερμηνεύσουμε κάποια από τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου και της [3]. Η (4.1) σημαίνει ότι η μέθοδος του ενεργού ρεύματος - η οποία χρησιμοποιεί τον προσεγγιστικό πυρήνα και είναι εύκολη στην εφαρμογή της - μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως μία απλή μέθοδος υπολογισμού του ρεύματος στην εξωτερική επιφάνεια της κεραίας, ενός μεγέθους που μπορεί να είναι χρήσιμο σε πολλές εφαρμογές.

Παράρτημα Α

Υπολογισμός της Εξίσωσης (4.12)

Θεωρούμε ως πυρήνα, $\bar{K}(\zeta, a)$, στην (4.9), τον ακριβή πυρήνα $\bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, a)$. Από την εξίσωση (4.9), προκύπτει ότι:

$$\tilde{A}(\theta) \sim z_o \bar{K}_{\text{ex}}(\theta/z_o, a) [\sin(\theta/2)/(\theta/2)]^2, \quad \text{καθώς } z_o \rightarrow 0 \quad (\text{A.1})$$

για κάθε τιμή του θ . Η ασυμπτωτική προσέγγιση της $\tilde{D}(\theta)$ για μικρά z_o , προκύπτει απευθείας από την (4.11), και δίνεται από την:

$$\tilde{D}(\theta) \sim \frac{iVk}{4\zeta_o} \frac{z_o^2}{q \tan(\theta/2)} \frac{\sin(q\theta)}{[\cos\theta - 1 + (kz_o)^2/2]}, \quad \text{καθώς } z_o \rightarrow 0 \quad (\text{A.2})$$

Αντικαθιστώντας τις (A.1) και (A.2) στην (4.10), θέτοντας την μεταβλητή $\zeta = \theta/z_o$, και παίρνοντας το όριο καθώς $z_o \rightarrow 0$, θεωρώντας τις παραμέτρους lz_o και qz_o σταθερές, παίρνουμε την σχέση:

$$I_l \sim \frac{iVk}{\pi\zeta_o} \int_{0,(k)}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, a)} \frac{\sin(\zeta qz_o)}{\zeta qz_o} \cos(\zeta lz_o) d\zeta \quad (\text{A.3})$$

η οποία, καθώς το q δίνεται από την (3.13), συμπίπτει με την ακριβή λύση που δίνεται από τις (3.29), (3.30) και (3.28). Αποδείξαμε, επομένως, την πρώτη εξίσωση της (4.12). Η ίδια διαδικασία μας δίνει και την δεύτερη εξίσωση της (4.12) (για την «ενεργό-επιλύσιμη» περίπτωση) διότι η βασική εξίσωση (A.1) εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση όπου ο ακριβής πυρήνας $\bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, a)$ αντικαθίσταται από τον ενεργό $\bar{K}_{\text{eff}}(\zeta, a)$.

Βιβλιογραφία – Παραπομπές

- [1] G. Fikioris, J. Lionas, and C. G. Lioutas, "The use of the frill generator in thin-wire integral equations," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 51, no. 8, pp. 1847–1854, August 2003.
- [2] P. J. Papakanellos, G. Fikioris, and A. Michalopoulou, "On the oscillations appearing in numerical solutions of solvable and nonsolvable integral equations for thin-wire antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 58, no. 5, pp. 1635-1644, May 2010.
- [3] G. Fikioris, P. J. Papakanellos, Th. K. Mavrogordatos, N. Lafkas, and D. Koulidakis, "Eliminating unphysical oscillations arising in Galerkin solutions to classical integral equations of antenna theory," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 71, no. 2, pp. 559-585, 2011.
- [4] Y. M. Chen and J. B. Keller, "Current on and input impedance of a cylindrical antenna," *J. Res. NBS*, vol. 66D, no. 1, pp. 15-21, Jan.-Feb. 1962.
- [5] T. T. Wu, "Introduction to linear antennas," ch. 8 in *Antenna Theory*, pt. I, R. E. Collin and F. J. Zucker, Eds. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [6] A. Sakitani and S. Egashira, "Considerations on feed expressions for the numerical analysis of antennas," *Electronics and Communications in Japan, Part I*, vol. 68, no. 7, pp. 65-74, 1985.
- [7] R. Kress, *Linear Integral Equations*, 2nd Ed. New York: Springer, 1999, p. 265.
- [8] G. Fikioris, N. Tsitsas, and I. Psarros, "On the nature of oscillations in discretizations of the extended integral equation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 59, no. 4, pp. 1415-1419, April 2011.
- [9] P. Andrianesis and G. Fikioris, "Superdirective-type near fields in the Method of Auxiliary Sources (MAS)," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 60, no. 6, pp. 3056-3060, June 2012.
- [10] S. P. Skobelev, "Comments..." (to [9], with authors' reply), *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 61, no. 4, pp. 2360, April 2013.
- [11] P. Andrianesis and G. Fikioris, "Reply to "Comments on 'Superdirective-type near fields in the Method of Auxiliary Sources (MAS)'"", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 61, no. 4, p. 2360, April 2013.

- [12] D. I. Kaklamani and H. T. Anastassiou, "Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics," *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, vol. 44, no. 3, pp. 48-64, June 2002.
- [13] G. Fikioris, "On two types of convergence in the method of auxiliary sources," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 54, no. 7, pp. 2022-2033, July 2006.
- [14] G. Fikioris and I. Psarros, "On the phenomenon of oscillations in the method of auxiliary sources," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 55, no. 5, pp. 1293-1304, May 2007.
- [15] *Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering (Vol. 4 in Computational Methods In Mechanics)*, T. Wriedt, Ed. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 1999.
- [16] A. Doicu, Y. Eremin, and T. Wriedt, *Acoustic and Electromagnetic Scattering Using Discrete Sources*. London, U.K.: Academic Press, 2000.
- [17] G. Fikioris and K. Matos, "Near fields of resonant circular arrays of cylindrical dipoles," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 50, no. 1, pp. 97-107, Feb. 2008.

Επίλογος

Συμπεράσματα και Κατευθύνσεις Μελλοντικής Έρευνας

Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Στην εργασία που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάσαμε θεμελιώδεις ιδιότητες των ολοκληρωτικών εξισώσεων Hallén (Hallén's Equation - HE) και Pocklington (Pocklington's Equation - PE) για την ρευματική κατανομή του κεντρικά τροφοδοτούμενου σωληνοειδούς διπόλου όταν αυτό διεγείρεται από την Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου - ΓΠΔ (Finite Gap Generator - FGG). Στόχος ήταν η σύγκριση του μοντέλου της ΓΠΔ με το αντίστοιχο της Γεννήτριας Δέλτα Συνάρτησης - ΓΔΣ (Delta Function Generator - DFG) όπως αυτό παρουσιάστηκε στην παρούσα αλλά και σε παλαιότερες κυρίως εργασίες. Επιπρόσθετα, προχωρήσαμε στην φυσική ερμηνεία πολλών ιδιοτήτων των δύο γεννητριών που δεν είχαν αναφερθεί στο παρελθόν. Για τον σκοπό αυτό η μελέτη μας κινήθηκε σε δύο άξονες.

Πυρήνας του πρώτου άξονα της μελέτης μας, ήταν η αριθμητική επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων με τον ακριβή και τον προσεγγιστικό πυρήνα για το μοντέλο της ΓΠΔ. Εφαρμόστηκε η αριθμητική Μέθοδος των Ροπών με ημιτονοειδείς συναρτήσεις βάσης και τριγωνικές συναρτήσεις δοκιμής στην PE. Τα προσεγγιστικά αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν αρκετά καλή συμφωνία με τα ακριβή κατά μήκος της πεπερασμένης κεραίας, με εξαίρεση το κέντρο και τα άκρα αυτής όπου η προσεγγιστική εξίσωση του Pocklington (και κατ' επέκταση του Hallén) παρουσίασε μη φυσιολογικές ταλαντώσεις. Το πλάτος των ταλαντούμενων τιμών συγκρίθηκε με το αντίστοιχο των τιμών που συναντώνται στο μοντέλο της ΓΔΣ. Το φαινόμενο των ταλαντώσεων αντιμετωπίστηκε με την μέθοδο του ενεργού ρεύματος, που είναι γνωστή από παλαιότερες εργασίες, επιτυγχάνοντας πλήρη εξομάλυνση. Με τον τρόπο αυτό κατέστη δυνατή η μελέτη και η σύγκριση της συμπεριφοράς χαρακτηριστικών μεγεθών της κεραίας όπως είναι το ρεύμα και η σύνθετη αγωγιμότητα, με αντίστοιχα μεγέθη της ΓΔΣ. Συγκεκριμένα, παρά την εμφανή λογαριθμική ιδιομορφία που παρουσιάζει η

επιδεκτικότητα στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας στην ΓΔΣ, στο μοντέλο της ΓΠΔ το μέγεθος αυτό έχει πεπερασμένη τιμή.

Ο δεύτερος άξονας της ανάλυσής μας επικεντρώθηκε στην αναλυτική επίλυση και μελέτη των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Μέσα από την διαδικασία αυτή επαληθεύσαμε πολλά από τα αριθμητικά μας αποτελέσματα για την πεπερασμένη κεραία. Αν και η μη επιλυσιμότητα των εξισώσεων PE και HE με τον προσεγγιστικό πυρήνα στη περίπτωση της πεπερασμένης, σε μήκος, κεραίας αποδείχθηκε εύκολα, μια περαιτέρω αναλυτική προσέγγιση της ίδιας της πεπερασμένης κεραίας είναι πρακτικά αδύνατη. Για τον λόγο αυτό, περιοριστήκαμε μόνο σε αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία ακολούθως επαληθεύσαμε μέσα από την αναλυτική μελέτη την άπειρης κεραίας. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier στην PE για την άπειρη κεραία ανάγαμε την επιλυσιμότητα αυτής, στην μελέτη της σύγκλισης του ολοκληρώματος (3.29). Επιπρόσθετα, αποδείξαμε ότι, με την επιλογή του κατάλληλου πυρήνα (ενεργός πυρήνας), το ενεργό ρεύμα ικανοποιεί την PE και συνεπώς την (3.29). Για την περίπτωση του ακριβούς και του ενεργού για $\rho = a$ πυρήνα, όπου το ολοκλήρωμα της (3.29) συγκλίνει, επαληθεύσαμε την πεπερασμένη τιμή της επιδεκτικότητας στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας. Αποδείξαμε επίσης, στις (3.33), (3.34), ότι το φορτίο ανά μονάδα μήκους της στα άκρα του διακένου παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία, κατ' αναλογία με το ρεύμα στο $z = 0$ στην περίπτωση της ΓΔΣ. Επιπρόσθετα, ερμηνεύσαμε την εξομάλυνση των ταλαντούμενων τιμών, που εξασφαλίζεται με την μέθοδο του ενεργού ρεύματος, αποδεικνύοντας ότι το ενεργό ρεύμα αποτελεί ακριβώς το ρεύμα στην εξωτερική επιφάνεια της άπειρης κεραίας - εξίσωση (4.1). Με βάση την (4.1), δικαιολογήσαμε την απόκλιση που παρουσιάζουν οι τιμές του ενεργού και του ακριβούς ρεύματος στην πεπερασμένη κεραία και την διαφορά του συντελεστή $\frac{1}{2}$ μεταξύ των εκφράσεων (3.33) και (3.34). Ολοκληρώνοντας, επιχειρήσαμε την αριθμητική επίλυση της επιλύσιμης PE και καταλήξαμε, όπως ήταν αναμενόμενο, στο ολοκλήρωμα της (3.29).

Για την περίπτωση όπου η (3.29) αποκλίνει εφαρμόσαμε την αριθμητική μέθοδο της πεπερασμένης στην άπειρη κεραία (μη επιλύσιμη PE) και καταλήξαμε σ' ένα, απείρων διαστάσεων, γραμμικό σύστημα. Μέσω του τελευταίου προσδιορίσαμε αναλυτικά τις ασυμπτωτικές εκφράσεις (4.22) και (4.24) για τις τιμές του ενεργού ($\rho < a$) και προσεγγιστικού ρεύματος αντίστοιχα, πλησίον του σημείου τροφοδοσίας. Συγκρίναμε τις τιμές των (4.22) και (4.24) με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα

της πεπερασμένης κεραίας παρατηρώντας ποσοτική και ποιοτική ομοιότητα μεταξύ των ταλαντούμενων τιμών. Με τις σχέσεις (4.22) και (4.24) ερμηνεύσαμε την φύση των παρατηρούμενων ταλαντώσεων στο κέντρο της κεραίας, οι οποίες είναι αποτέλεσμα της μη επιλυσιμότητας των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Ολοκληρώσαμε την διδακτορική μας εργασία συσχετίζοντας το φαινόμενο των ταλαντώσεων και της εξομάλυνσης αυτών με αντίστοιχα φαινόμενα που παρατηρούνται στην Μέθοδο Βοηθητικών Πηγών (Method of Auxiliary Sources - MAS) και στις υπερκατευθυντικές κεραίες. Επισημαίνουμε ότι σε όλη την έκταση της παρούσης αρκετές από της προσδιορισθείσες εξισώσεις για την ΓΠΔ επαληθεύτηκαν με τις αντίστοιχες της ΓΔΣ στο όριο μηδενικού διακένου ($\Delta \rightarrow 0$).

Κατευθύνσεις Μελλοντικής Έρευνας

Η ανάλυση της άπειρης κεραίας μας βοήθησε να εξηγήσουμε την φύση των παρατηρούμενων ταλαντώσεων στο κέντρο της πεπερασμένης κεραίας καθώς και την προέλευση του ενεργού ρεύματος. Επιπρόσθετα, μας βοήθησε να εξάγουμε αρκετές μαθηματικές εκφράσεις για την συμπεριφορά του ρεύματος και του φορτίου στα άκρα του διακένου, οι οποίες συσχετίστηκαν ποιοτικά και ποσοτικά με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Παράλληλα όμως, η ανωτέρω ανάλυση δημιούργησε και τις προϋποθέσεις για περαιτέρω μελέτη των αποτελεσμάτων μας.

Πράγματι, παρουσιάζει ενδιαφέρον η μελέτη των παρατηρούμενων ταλαντώσεων στα άκρα της κεραίας. Η εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου στην ημιάπειρη κεραία θα βοηθούσε αρκετά στην βαθύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς αυτής πλησίον του $z = h$. Θα οδηγούσε σε μία εξίσωση αθροίσματος Wiener-Hopf (Wiener-Hopf sum equation), η οποία όμως δεν είναι εύκολο να επιλυθεί αναλυτικά και δεν εξετάστηκε στην παρούσα εργασία.

Επιπλέον, η επαλήθευση των σχέσεων (3.33), (3.34) για την πεπερασμένη κεραία αποτελεί ένα ακόμα ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης. Στην παρούσα διατριβή εικάζουμε ότι οι εξισώσεις (3.33) και (3.34), οι οποίες αφορούν την άπειρη κεραία, είναι αληθείς για την πεπερασμένη, αν και αυτό φαίνεται δύσκολο να αποδειχθεί αναλυτικά.

Η φυσική ερμηνεία του ενεργού ρεύματος που δόθηκε στην παράγραφο 4.3.2 είναι αληθής, τουλάχιστον, για μεγάλου μήκους κεραίες όπου η (4.1) ισχύει

προσεγγιστικά. Δεν είναι ξεκάθαρο εάν η (4.1) είναι ακριβής για την περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας. Για να εξετάσουμε την περίπτωση αυτή θα πρέπει, προφανώς, να θεωρήσουμε, ως μοντέλο κεραίας, την κυλινδρική σωληνοειδή κεραία της παραγράφου 4.3.1 αλλά τερματισμένη σε ανοικτά άκρα στα σημεία $z = \pm h$. Η αναλυτική εξέταση του μοντέλου αυτού, όμως, εξακολουθεί να έχει δυσκολίες διότι για την πεπερασμένη κεραία δεν υπάρχει ακριβής έκφραση - παρόμοια της (3.27) - για το ενεργό ρεύμα.

Ολοκληρώνοντας, στην παράγραφο 4.2.1 αποδείξαμε ότι οι παρατηρούμενες ταλαντώσεις, πλησίον του σημείου τροφοδοσίας της κεραίας, οφείλονται στην μη επιλυσιμότητα των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Αποδώσαμε τις προαναφερθείσες ταλαντώσεις στις ιδιότητες του πεπερασμένου συστήματος (3.8) - που είναι συνέπεια των ιδιοτήτων των εξισώσεων (3.2) και (3.4) - και όχι σε σφάλματα στρογγυλοποίησης. Παρόμοιες ταλαντώσεις παρατηρήθηκαν και στα άκρα της κεραίας που όπως αναφέρθηκε ανωτέρω δεν είναι εύκολο να μελετηθούν αναλυτικά. Στην παράγραφο 4.2.2 αναφέραμε ότι το πλάτος των μη φυσιολογικών τιμών του ρεύματος - τόσο στο κέντρο όσο και στα άκρα της κεραίας - επηρεάζεται από την παράμετρο N . Η τιμή της τελευταίας όπως φαίνεται στα Σχήματα 2.3 και 4.5 επηρεάζει σημαντικά τον δείκτη κατάστασης των πινάκων A και E στα συστήματα (2.5) και (3.8) αντίστοιχα. Πέρα από την μέθοδο του ενεργού ρεύματος, η οποία εφαρμόστηκε στη παρούσα και εξασφάλισε την εξομάλυνση των ταλαντούμενων τιμών, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η εφαρμογή και η μελέτη «Μεθόδων Ομαλοποίησης» («Regularization Methods») στα ανωτέρω συστήματα. Μία γνωστή μέθοδος ομαλοποίησης, που μπορεί να εφαρμοστεί, είναι η μέθοδος Tikhonov. Οι ανωτέρω μέθοδοι εξάγουν προσεγγιστικά συγκλίνουσες λύσεις μέσω της επεξεργασίας των ιδιοτήτων του συστήματος (του δείκτη κατάστασης) που δύναται να επηρεάσουν την αποκλίνουσα συμπεριφορά (πλάτος ταλαντώσεων).

Δημοσιεύσεις Διδακτορικής Διατριβής

Δημοσιεύσεις σε Διεθνή Περιοδικά

- [1] I. Tastsoglou and G. Fikioris, “Fundamentals of Thin-Wire Integral Equations with the Finite-Gap Generator—Part I,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 61, no. 11, pp. 5517—5526, Nov. 2013.
- [2] I. Tastsoglou and G. Fikioris, “Fundamentals of Thin-Wire Integral Equations with the Finite-Gap Generator—Part II,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 61, no. 11, pp. 5527—5532, Nov. 2013.

Απάντηση σε Σχόλιο επί των [1], [2].

- [1] I. Tastsoglou and G. Fikioris, “Reply to ‘Comments on Fundamentals of Thin-Wire Integral Equations With the Finite-Gap Generator,’ S. P. Skobelev,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 62, no. 4, pp. 2327—2328, April 2014.

Δημοσιεύσεις σε Συνέδρια

- [1] I. Tastsoglou and G. Fikioris, “The Finite-Gap Generator in Thin-Wire Integral Equations.” In Proc. 6th Σ.Φ.Η.Μ.Μ.Υ, Athens, Greece, April 26-28, 2013.

Ιωάννης-Ιορδάνης
Ταστσόγλου

Σχ. Ηλεκτρ. Μηχ. & Μηχ. Υπολ.,
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
email: john_tasts@hotmail.com

Βιογραφικό Σημείωμα

Ακαδημαϊκή Εκπαίδευση

2007-2014: Δίπλωμα Διδάκτορα, *Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας: Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας και Τεχνολογίας Υλικών

Θέμα Διατριβής: Θεμελιώδεις Ιδιότητες των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Hallen και Rocklington σε Γραμμικές Κεραίες Τροφοδοτούμενες Μέσω Διακένων.

Επιβλέπων Καθηγητής: Αν. Καθ. Ε.Μ.Π Γεώργιος Φικιώρης

2003-2007: Δίπλωμα Μηχανικού Τηλεπικοινωνιών και Ηλεκτρονικών, *Σχολή Ικάρων*, Τμήμα Μηχανικών (Σ.Μ.Α).

Θέμα Διπλωματικής Εργασίας: Επικοινωνίες σε Ασύρματα MIMO Κανάλια (Μοντέλα Καναλιού, Αλγόριθμοι).

Επιβλέπων Καθηγητής: Επ. Καθ. Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών – Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών Σεραφείμ Καραμπογιάς.

Συγγραφική Δραστηριότητα

2013: Συμμετοχή, ως δεύτερος συγγραφέας, στην συγγραφή του βιβλίου “Selected Asymptotic Methods with Applications to Electromagnetics and Antennas” με τους Γεώργιο Φικιώρη (Αν. Καθ. ΕΜΠ) και Οδυσσέα Μπάκα (Μεταπτυχιακό φοιτητή της ΣΕΜΦΕ) που δημοσιεύτηκε από τον εκδοτικό οίκο Morgan & Claypool.

Διδακτική Εμπειρία

2012-σήμερα: Κύριος Εκπαιδευτής στο Μάθημα «*Γραμμές Μεταφοράς και Κεραίες*» στην Σχολή Τεχνικών Υπαξιωματικών Αεροπορίας (Σ.Τ.Υ.Α).

2011-σήμερα: Κύριος Εκπαιδευτής στο Μάθημα «*Ανώτερα Μαθηματικά*» στην Σχολή Τεχνικών Υπαξιωματικών Αεροπορίας (Σ.Τ.Υ.Α).

Ερευνητικά Ενδιαφέροντα

Ηλεκτρομαγνητισμός,
Κεραίες,
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Επαγγελματική Εκπαίδευση

2012-2013: Πτυχίο Επιθεωρητή Εργασιών Εξειδίκευσης FBW (Fly By Wire Συστήματος Ελέγχου Πτήσης) Α' Βαθμού Συντήρησης Αεροσκαφών Τύπου M-2000/-5 της *Ελληνικής Πολεμικής Αεροπορίας*.

2007-2008: Εξουσιοδότηση Εκτέλεσης Εργασιών SNA (Navigation and Attack System) Δεξιότητας 3 Α' Βαθμού Συντήρησης Αεροσκαφών Τύπου M-2000 της *Ελληνικής Πολεμικής Αεροπορίας*.

Ξένες Γλώσσες

Αγγλικά **Άριστα** (*First Certificate in English - Univ. of Cambridge*)

Ελληνικά **Μητρική**