



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

**Υπολογιστική ανάλυση προβλημάτων
αλληλεπίδρασης εξαρμώσεων και ρωγμών**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

υποβληθείσα στον Τομέα Μηχανικής

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Π. ΜΠΑΞΕΒΑΝΑΚΗΣ

Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός Π.Θ.

M.Phil. in Engineering, University of Cambridge

Επιβλέπων

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Γ. ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ

Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα, Μάιος 2014

Επιβλέπων:

Χαράλαμπος Γεωργιάδης, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Μέλη Συμβουλευτικής Επιτροπής:

Αντώνιος Γιαννακόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Γεώργιος Τσαμασφύρος, Ομότιμος Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής:

Δημήτριος Ευταξιώπουλος, Επίκουρος Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Ευστάθιος Θεοτόκογλου, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Μαρίνος Καττής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, ΕΜΠ.

Σταύρος Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής υπό της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλοί αποδοχή των γνώμων του συγγραφέως.

(Ν. 5343/1932, Άρθρο 202)

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, κατά το χρονικό διάστημα Ιανουάριος 2008 έως Μάιος 2014.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Χ. Γεωργιάδη για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστούμε, για την πρόταση του συγκεκριμένου θέματος και την πολύτιμη βοήθειά του. Παράλληλα, ευχαριστίες οφείλω στον Καθηγητή Α. Γιαννακόπουλο για την συνεργασία μας σε ζητήματα πέραν της διατριβής αυτής. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον Ομότιμο Καθηγητή κ. Τσαμασφύρο και τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής για τις συμβουλές τους κατά τη διάρκεια τόσο της εκπόνησης, όσο και της διόρθωσης της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την Καθηγήτρια Χ. Markenscoff για τις εποικοδομητικές συζητήσεις μας σε θέματα Μηχανικής των Εξαρμώσεων.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στους φίλους και συνεργάτες Δρ. Πάνο Γουργιώτη και Δρ. Θανάση Ζήση, για την άριστη ερευνητική συνεργασία, τα ταξίδια και τις ατέλειωτες συζητήσεις.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αδιάκοπη στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Κωνσταντίνος Π. Μπαξεβανάκης
Αθήνα, Μάιος 2014

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	xi
Summary	xiii
1 Εισαγωγή.....	1
1.1 Γενικά περί εξαρμώσεων.....	1
1.2 Αλληλεπίδραση ρωγμών και εξαρμώσεων.....	3
1.3 Γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου	5
1.4 Διάρθρωση της διατριβής.....	7
2 Ανάλυση επίπεδων εξαρμώσεων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων	9
2.1 Εισαγωγή.....	9
2.2 Μεθοδολογία	11
2.2.1 Το θερμικό ανάλογο για επίπεδες εξαρμώσεις	11
2.2.2 Συντηρητικά ολοκληρώματα και κινούσες δυνάμεις.....	18
2.2.3 Το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα για επίπεδες εξαρμώσεις.....	24
2.3 Εφαρμογές.....	29
2.3.1 Αλληλεπίδραση επίπεδης εξάρμωσης με ημιάπειρη ρωγμή.....	29
2.3.2 Επίπεδη εξάρμωση κοντά σε διεπιφάνεια δύο υλικών	34
2.3.3 Αλληλεπίδραση επίπεδης εξάρμωσης με κυκλικό έγκλεισμα	37
2.3.4 Αλληλεπίδραση επίπεδης εξάρμωσης με κυκλική οπή.....	40
2.3.5 Συστοιχίες εξαρμώσεων σε μικροδοκούς	42
2.4 Συμπεράσματα.....	44
3 Θεωρία Τάσεων Ζεύγους	47
3.1 Γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου	47
3.2 Βασικές εξισώσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους.....	50
3.3 Επίπεδη παραμόρφωση	58

3.3.1	Καρτεσιανές συντεταγμένες	58
3.3.2	Πολικές συντεταγμένες.....	62
3.4	Αντι-επίπεδη παραμόρφωση	64
3.4.1	Καρτεσιανές συντεταγμένες	65
3.4.2	Πολικές συντεταγμένες.....	67
4	Αλληλεπίδραση ρωγμών με διακριτές εξαρμώσεις στη θεωρία τάσεων ζεύγους ...	69
4.1	Εισαγωγή.....	69
4.2	Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με διακριτή ορθή εξάρμωση.....	72
4.2.1	Κατάστρωση του προβλήματος	72
4.2.2	Συναρτήσεις Green	74
4.2.3	Επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων και αποτελέσματα	81
4.2.4	Ολοκλήρωμα J και κινούσα δύναμη της εξάρμωσης	93
4.3	Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση	102
4.3.1	Κατάστρωση του προβλήματος	102
4.3.2	Συνάρτηση Green.....	104
4.3.3	Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και αποτελέσματα	105
4.3.4	Υπολογισμός του ολοκληρώματος J	112
4.4	Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση	116
4.4.1	Κατάστρωση του προβλήματος	116
4.4.2	Συνάρτηση Green.....	118
4.4.3	Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και αποτελέσματα	122
4.4.4	Υπολογισμός του ολοκληρώματος J	128
4.5	Εξάρμωση εκτός του επιπέδου της ρωγμής	132
4.6	Συμπεράσματα.....	136
5	Αλληλεπίδραση ρωγμών με δίπολα εξαρμώσεων στη θεωρία τάσεων ζεύγους	137
5.1	Εισαγωγή.....	137
5.2	Δίπολα εξαρμώσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους.....	140
5.3	Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με οριζόντιο δίπολο ορθών εξαρμώσεων ..	145
5.3.1	Κατάστρωση του προβλήματος	145
5.3.2	Συναρτήσεις Green	147
5.3.3	Επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων και αποτελέσματα	148
5.3.4	Ολοκλήρωμα J και κινούσα δύναμη του διπόλου εξαρμώσεων.....	157

5.4	Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με οριζόντιο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων.....	163
5.4.1	Κατάστρωση του προβλήματος	163
5.4.2	Συνάρτηση Green.....	165
5.4.3	Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και αποτελέσματα	165
5.4.4	Υπολογισμός του ολοκληρώματος J	172
5.5	Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με οριζόντιο δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων.....	174
5.5.1	Κατάστρωση του προβλήματος	174
5.5.2	Συνάρτηση Green.....	176
5.5.3	Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και αποτελέσματα	177
5.5.4	Υπολογισμός του ολοκληρώματος J	183
5.6	Συμπεράσματα.....	185
6	Γενικά Συμπεράσματα	187
6.1	Επισκόπηση των αποτελεσμάτων.....	187
6.2	Θέματα μελλοντικής έρευνας.....	189
Παράρτημα Α: Συναρτήσεις Green για τα προβλήματα αλληλεπίδρασης με ορθές εξαρμώσεις		
A.1	Ελαστικά πεδία δεσμευμένης στρωφικής εξάρμωσης.....	191
A.2	Ελαστικά πεδία διπόλου δεσμευμένων στρωφικών εξαρμώσεων	195
Παράρτημα Β: Ολοκληρώματα πεπερασμένου μέρους		
Παράρτημα Γ: Αριθμητικοί κώδικες.....		
Γ.1	Κώδικας περιγραφής εξαρμώσεων σε λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων	205
Γ.2	Κώδικες επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων	207
Βιβλιογραφία		
217		

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη προβλημάτων εξαρμώσεων και ρωγμών στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Η αλληλεπίδραση ρωγμών και εξαρμώσεων είναι ένα θεμελιώδες πρόβλημα της Μηχανικής των Θραύσεων, εφόσον η αλληλεπίδραση αυτή καθορίζει, σε αρκετές περιπτώσεις, την μακροσκοπική όγκιμη ή ψαθυρή απόκριση του υλικού.

Αρχικά, παρουσιάζεται μία μεθοδολογία ανάλυσης επίπεδων εξαρμώσεων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία βασίζεται σε ένα ανάλογο από την θερμοελαστικότητα και την περιγραφή των εξαρμώσεων μέσω ολοκληρωμάτων τάσεων. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή, εξετάζεται το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας ημιάπειρης ρωγμής με επίπεδες εξαρμώσεις. Ο ρυθμός έκλυσης ενέργειας στο άκρο της ρωγμής και η κινούσα δύναμη που ασκείται στην εξάρμωση υπολογίζονται αριθμητικά μέσω συντηρητικών ολοκληρωμάτων της γραμμικής ελαστοστατικής. Για τον έλεγχο της ακρίβειας της προτεινόμενης μεθοδολογίας, επιλύονται προβλήματα με γνωστές αναλυτικές λύσεις ενώ παρέχονται νέα αποτελέσματα σε περιπτώσεις σύνθετων διατάξεων και ανισοτροπικής καταστατικής συμπεριφοράς. Επιπλέον, ενσωματώνεται το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα στην μέθοδο με σκοπό την εξάλειψη των ιδιομορφιών του τασικού πεδίου στον πυρήνα των εξαρμώσεων, παρέχοντας μία σύνδεση με τις θεωρίες ανωτέρου βαθμού.

Ακολούθως, μελετώνται προβλήματα αλληλεπίδρασης κεντρικών ρωγμών με (επίπεδες και αντι-επίπεδες) εξαρμώσεις και δίπολα εξαρμώσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Η έρευνα αυτή έχει ως στόχο την εξέταση της απόκλισης από τις λύσεις της κλασσικής ελαστικότητας όταν ληφθεί υπόψιν η μικροδομή του υλικού. Η αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών γίνεται χρησιμοποιώντας αναλυτικές τεχνικές και εφαρμόζοντας την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων. Η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών κατά μήκος των χειλέων της οδηγεί σε ιδιόμορφες ή υπεριδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες επιλύονται αριθμητικά. Τα αποτελέσματα διαφέρουν σημαντικά από τις προβλέψεις της κλασσικής θεωρίας. Ειδικότερα, το ρηγματωμένο σώμα συμπεριφέρεται πιο ‘δύσκαμπτα’ στην θεωρία τάσεων ζεύγους ενώ εμφανίζεται

σημαντική αύξηση των τάσεων στα άκρα της ρωγμής. Τα παραγόμενα πεδία μετατοπίσεων και τάσεων στα προβλήματα αλληλεπίδρασης με δίπολα εξαρμώσεων, είναι ασθενέστερα σε σύγκριση με την περίπτωση αλληλεπίδρασης με διακριτές εξαρμώσεις. Αυτό συμβαίνει καθώς το τασικό πεδίο των διπόλων εξαρμώσεων φθίνει ταχύτερα συναρτήσει της απόστασης από ό,τι το αντίστοιχο των διακριτών εξαρμώσεων. Παράλληλα, παρατηρείται σημαντική διακύμανση του ρυθμού έκλυσης ενέργειας στα άκρα των ρωγμών και των κινουσών δυνάμεων των εξαρμώσεων. Τα μεγέθη αυτά εξαρτώνται από την μικροδομή και την απόσταση μεταξύ ρωγμής και ατελειών, καθώς παρατηρήθηκε άλλοτε ελάττωση και άλλοτε αύξησή τους σε σχέση με την πρόβλεψη της κλασσικής ελαστικότητας. Στα αντι-επίπεδα προβλήματα σημειώνεται πιο ομαλό κλείσιμο των χειλέων της ρωγμής (ραμφοειδής τρόπος) ενώ ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας στο πρόβλημα αυτό μειώνεται όταν ληφθεί υπόψιν η μικροδομή του υλικού.

Summary

The subject of the present dissertation is the study of dislocation and crack problems within the framework of classical and couple-stress elasticity. The interaction between cracks and dislocations is a fundamental problem of Fracture Mechanics, since this interaction determines, in many cases, the macroscopic brittle or ductile material response.

At first, a new methodology about the modelling of dislocations using the finite element method is presented, based on an analogue from thermoelasticity and the integral representation of dislocations through stresses. Using this method, we study the interaction between a semi-infinite crack and edge dislocations. The energy release rate and the configurational force exerted on the dislocation are evaluated numerically through conserved integrals of linear elastostatics. In order to explore the accuracy of the proposed methodology, solutions are sought in problems where the analytical solutions are available in the literature. We also contribute with new results in cases of complex geometries and anisotropic material response. Besides, a variable core dislocation model is incorporated in the model in order to eliminate the stress singularities near the dislocation core, providing, thus, a connection with higher grade theories.

Further, interaction problems between cracks and (edge and screw) dislocations or dislocation dipoles in the context of couple-stress elasticity theory are studied. This work aims at investigating the possible deviations from the classical elasticity solutions when the material microstructure is considered. These problems are treated by the use of analytical methods and the application of the distributed dislocation technique. Satisfaction of the boundary conditions along the crack faces leads to singular or hypersingular integral equations that are solved numerically. The results for the near-tip fields differ in several respects from the predictions of the classical fracture mechanics. In particular, the present results indicate that a cracked solid governed by couple-stress elasticity behaves in a more rigid way as compared to a solid governed by classical elasticity, while the stress level at the crack-tip region is appreciably higher. The displacement and stress fields of the interaction problems between cracks and dislocation dipoles are weaker than in the case of discrete dislocations. This is explained by the fact

that the stress field of dislocation dipoles decreases more quickly with distance than that of discrete dislocations. Moreover, a great variation of the energy release rate at the crack tips and of the configurational forces of the defects is reported. Both quantities depend on the microstructure and the distance between the crack tips and the defects. In some cases they reduce while in other cases an increase is reported compared to the classical elasticity prediction. In the anti-plane problems, a smoother displacement field is observed (cusp-like closure) whereas the energy release rate is always reduced as the material microstructure becomes more pronounced.

Κεφάλαιο 1

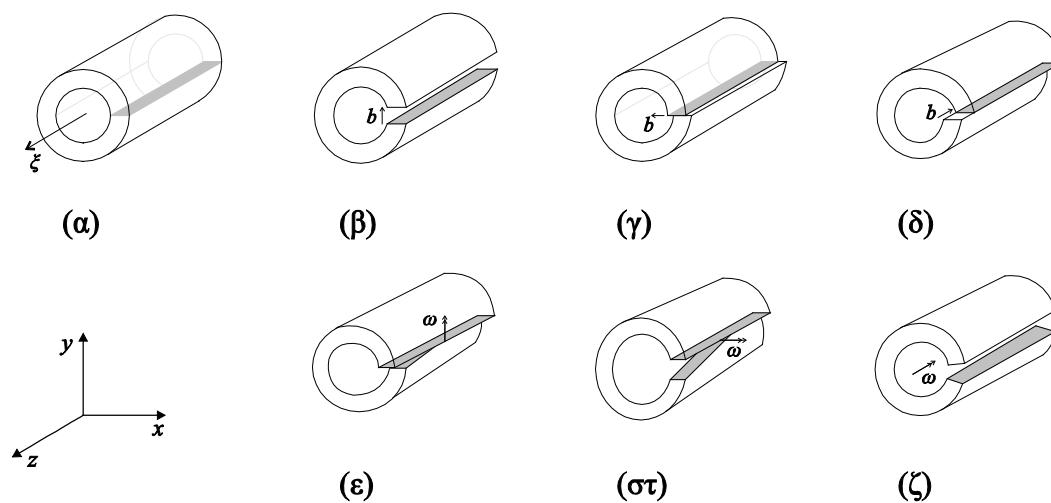
Εισαγωγή

1.1 Γενικά περί εξαρμώσεων

Οι εξαρμώσεις (dislocations) είναι ίσως η πιο γνωστή κατηγορία ατελειών (defects) σε υλικά με κρυσταλλική δομή. Με τον όρο εξάρμωση ορίζεται η γραμμική ατέλεια σε έναν κρύσταλλο, η οποία οριοθετεί την περιοχή εκείνη που έχει υποστεί ολίσθηση από τον υπόλοιπο κρύσταλλο. Στην βιβλιογραφία, η εξάρμωση συναντάται και ως γραμμοαταξία, δυστοπία, κρυσταλλική ατέλεια και εξάρθρωση.

Επιχειρώντας μία σύντομη ιστορική αναδρομή, οι πρώτες σκέψεις για την ύπαρξη εξάρμώσεων στα μέταλλα εντοπίζονται στα τέλη του 19^{ου} αιώνα ([Ewing and Rosenhain, 1900](#)). Οι σκέψεις αυτές πηγάζουν από παρατηρήσεις της δημιουργίας ζωνών ολίσθησης κατά την πλαστική παραμόρφωση των μετάλλων. Αρχικά, η εξήγηση του φαινομένου αυτού δεν ήταν ξεκάθαρη. Ωστόσο, με την ανακάλυψη των ακτίνων X, εκτιμήθηκε ότι η μακροσκοπική αυτή ολίσθηση πρέπει να οφείλεται σε ολίσθηση τμήματος ενός κρυστάλλου σε σχέση με τον υπόλοιπο αδιατάρακτο κρύσταλλο. Παράλληλα, σε μία προσπάθεια να ερμηνευθεί η αναντιστοιχία της θεωρητικά προβλεπόμενης αντοχής τέλειων κρυστάλλων και των πειραματικών αποτελεσμάτων, θεωρήθηκαν διαφόρων ειδών ατέλειες. Ο [Weingarten \(1901\)](#) θεώρησε ατέλειες, οι οποίες δημιουργούνται από κοπή επιφανειών και μετατόπισή των εκατέρωθεν τμημάτων, και έδειξε ότι οι μετατοπίσεις των αποσυνδεδεμένων επιφανειών είναι απαραίτητες έτσι ώστε οι παραμορφώσεις του στερεού σώματος να παραμένουν φραγμένες. Στη συνέχεια, ο [Volterra \(1907\)](#) ταξινόμησε τις ατέλειες σε έξι είδη (Σχ. 1.1) και υπολόγισε τα ελαστικά πεδία γύρω από αυτές. Ο [Volterra](#) ονόμασε τις ατέλειες ‘στρεβλώσεις’ (distorsioni) ενώ αργότερα ο [Love \(1920\)](#) τους απέδωσε τον όρο εξαρμώσεις (dislocations). Οι λύσεις της θεωρίας ελαστικότητας αξιοποιήθηκαν μετέπειτα και συνδέθηκαν με την κρυσταλλική ολίσθηση με τις ταυτόχρονες εργασίες των [Orowan \(1934\)](#), [Polanyi \(1934\)](#), και [Taylor \(1934\)](#). Εξίσου

σημαντικές στην ανάπτυξη του πεδίου της Μηχανικής των Εξαρμώσεων είναι οι εργασίες των [Peach and Koehler \(1950\)](#) και [Eshelby \(1951\)](#), στις οποίες εισάγεται η έννοια της ‘κινούσας δύναμης’ (driving force) της εξάρμωσης. Στις μετέπειτα δεκαετίες, καταγράφονται εργασίες που αφορούν εξαρμώσεις στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικότητας, θεωριών κρυσταλλικού πλέγματος, (γενικευμένων) θεωριών συνεχούς μέσου καθώς και πειραματικές μέθοδοι παρατήρησης εξαρμώσεων (ιδέ [Hull and Bacon, 2011](#)) ή αριθμητικής μοντελοποίησης αυτών (ιδέ Κεφάλαιο 2). Αναλυτικές παρουσιάσεις της εξέλιξης της Μηχανικής των Εξαρμώσεων μπορούν να βρεθούν στην εργασία του [Hirth \(1985\)](#) και στα συγγράμματα των [Nabarro \(1967\)](#) και [Hirth and Lothe \(1982\)](#).



Σχ. 1.1. Οι έξι τύποι εξαρμώσεων όπως ταξινομήθηκαν από τον Volterra.

Οι εξαρμώσεις χαρακτηρίζονται από δύο διανύσματα, το διάνυσμα της γραμμής της εξάρμωσης (dislocation line) και το διάνυσμα Burgers ([Burgers, 1939](#)). Στο Σχ. 1.1α απεικονίζεται το διάνυσμα της γραμμής της εξάρμωσης, ξ . Το διάνυσμα Burgers, b , είναι το μέτρο της μετατόπισης στις περιπτώσεις των εξαρμωμένων κυλίνδρων (β, γ, δ). Το διάνυσμα Burgers παριστάνεται με το σύμβολο \perp . Το πάνω μέρος του συμβόλου προσδιορίζει την διεύθυνση του εξτρά επιπέδου ατόμων που εισάγει η εξάρμωση, ενώ η βάση του ορίζει το επίπεδο ολίσθησής της. Το σύμβολο \perp αντιστοιχεί στην περίπτωση (γ) του Σχ. 1.1. Οι εξαρμώσεις (β, γ, δ) είναι μεταφορικού τύπου καθώς εισάγουν μετατόπιση στο στερεό σώμα, ενώ οι περιπτώσεις (ε, στ, ζ) είναι στροφικού τύπου (disclinations). Στην ειδική περίπτωση που τα διανύσματα b και ξ είναι παράλληλα, προκύπτουν επίπεδες εξαρμώσεις (edge dislocations) ενώ όταν είναι κάθετα, η προκύπτουσα εξάρμωση είναι αντι-επίπεδη (screw dislocation). Σε κάθε άλλη περίπτωση,

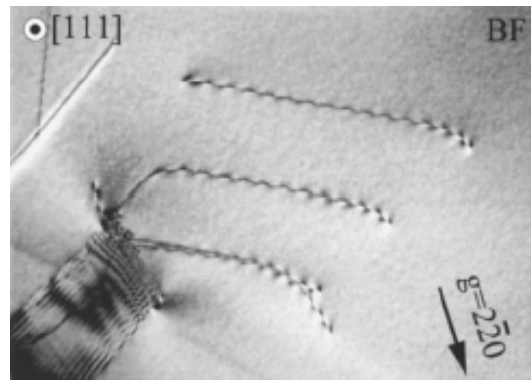
η εξάρμωση είναι μικτού τύπου (mixed dislocation). Συχνά, οι εξαρμώσεις τύπου (β) και (γ) καλούνται ορθές (climb) και εφαιτομενικές (glide) αντίστοιχα. Οι στροφικές εξαρμώσεις χαρακτηρίζονται από το διάνυσμα Frank, ω (Frank, 1958). Οι τύποι (ε) και (στ) είναι στροφικές εξαρμώσεις τύπου συστροφής (twist disclinations) ενώ ο τύπος (ζ) είναι στροφική εξάρμωση τύπου σφήνας (wedge disclination) (deWit, 1973). Πρέπει να σημειωθεί ότι οι στροφικές εξαρμώσεις σπάνια εμφανίζονται ως απομονωμένες ατέλειες καθώς οι μετατοπίσεις που εισάγουν είναι αναλογικές της εξωτερικής ακτίνας του κυλίνδρου και επομένως δεν εξαλείφονται στο άπειρο. Αντίθετα, οι μεταφορικές εξαρμώσεις εμφανίζονται είτε διακριτές είτε ως συσσωματώματα.

Οι εξαρμώσεις συνήθως συνδέονται με τις μηχανικές ιδιότητες των μετάλλων και φαινόμενα όπως η θραύση, η κόπωση και η εργοσκλήρυνσή τους. Μπορούν όμως να παρατηρηθούν και σε άλλα υλικά, όπως τα κεραμικά (Carter and Norton, 2007). Πράγματι, παρά την μακροσκοπική ψαθυρή τους συμπεριφορά, τα κεραμικά υλικά περιέχουν εξαρμώσεις οι οποίες δύνανται να κινητοποιηθούν σε υψηλές θερμοκρασίες. Επίσης, δομές εξαρμώσεων υπάρχουν στην φύση, γι' αυτό και ιδέες της θεωρίας εξαρμώσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν, για παράδειγμα, στην Σεισμική Μηχανική ή την Βραχομηχανική. Ενδεικτικά αναφέρουμε την εργασία των Cordier *et al.* (2014), οι οποίοι μελέτησαν την αλληλεπίδραση των στροφικών εξαρμώσεων που υπάρχουν στους βράχους ολιβίνη για να ερμηνεύσουν την πλαστική παραμόρφωση του άνω μανδύα της γης.

1.2 Αλληλεπίδραση ρωγμών και εξαρμώσεων

Η μικρομηχανική αλληλεπίδραση ρωγμών και εξαρμώσεων είναι ένα θεμελιώδες πρόβλημα της Μηχανικής των Θραύσεων, εφόσον η αλληλεπίδραση αυτή καθορίζει, σε αρκετές περιπτώσεις, την μακροσκοπική όλκιμη ή ψαθυρή απόκριση του υλικού. Η πλαστική παραμόρφωση και οι μικροδομικές μεταβολές κοντά στην αιχμή της ρωγμής έχουν ερευνηθεί στη βιβλιογραφία, καθότι η μηχανική συμπεριφορά στα άκρα ρωγμών είναι σημαντική σε όλες τις θεωρίες θραύσης και φθοράς. Το άκρο μίας ρωγμής θεωρείται η κύρια πηγή έκλυσης εξαρμώσεων (Σχ. 1.2). Ένα αρχικά αιχμηρό άκρο ρωγμής συνήθως αμβλύνεται κατά ένα ατομικό επίπεδο, καθώς η εξάρμωση επεκτείνεται υπό την εφαρμογή του συγκεντρωμένου στο άκρο της ρωγμής τασικού πεδίου. Η διαδικασία αυτή σχετίζεται

με την μακροσκοπικά όλκιμη συμπεριφορά του υλικού. Η άμβλυνση του άκρου της ρωγμής έχει ως αποτέλεσμα την θωράκισή της από την εξωτερικά επιβαλλόμενη φόρτιση, μειώνοντας κατά συνέπεια τον τοπικό συντελεστή έντασης τάσεων. Από την άλλη, οι εξαρμώσεις που έχουν δημιουργηθεί από άλλες πηγές, δεν θωρακίζουν απαραίτητα την ρωγμή. Μία αναλυτική επισκόπηση των φαινομένων αυτών δίνεται στην εργασία του Thomson (1987).



Σχ. 1.2. Έκλυση εξαρμώσεων από το άκρο μίας ρωγμής σε πυρίτιο (Si) (Carter and Norton, 2007).

Το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας ρωγμής με μία εξάρμωση μπορεί να προσεγγιστεί από διαφορετικές οδούς. Όπως αναφέρει γλαφυρά ο Mura (1970), “...η έρευνα στο επιστημονικό πεδίο των εξαρμώσεων μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους: γεωμετρία, θεωρία ελαστικότητας και φυσική. Η γεωμετρία είναι ένα χάος ενώ η φυσική μία ζούγκλα· μόνο η θεωρία ελαστικότητας είναι ξεκάθαρη (προσέγγιση)”. Στη σημερινή εποχή, παρά την ραγδαία αύξηση της υπολογιστικής ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η κλίμακα του προβλήματος (μm) το καθιστά απαγορευτικό για ανάλυση μέσω, π.χ. μοριακής δυναμικής.

Στα πλαίσια της κλασικής ελαστικότητας, ο Atkinson (1966) παρουσίασε τα ελαστικά πεδία στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης μία ημιάπειρης ρωγμής με μία εξάρμωση, σε ένα πλαίσιο γενικής ανισοτροπίας. Οι Rice and Thomson (1974) πρότειναν ένα ενεργειακό κριτήριο για την έκλυση εξαρμώσεων από το άκρο μίας ρωγμής και μελέτησαν τον επακόλουθο τρόπο θραύσης, όλκιμη ή ψαθυρή. Λίγο αργότερα, ο Asaro (1975) υπολόγισε την δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ εξάρμωσης και ημιάπειρης ρωγμής σε ένα ανισότροπο υλικό. Στη συνέχεια, ο Thomson (1978) και ο Weertman (1978) εισήγαγαν την ιδέα της θωράκισης του άκρου της ρωγμής από της παρουσία της εξάρμωσης και την έννοια της ‘ελεύθερης εξαρμώσεων ζώνης’ (dislocation free zone).

Μία εκλυόμενη από το άκρο της ρωγμής εξάρμωση αναμένεται να ολισθήσει μακριά από αυτό έως ότου η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ τους ισορροπηθεί από την αντίσταση του κρυσταλλικού πλέγματος (lattice friction), οπότε η εξάρμωση ισορροπεί. Η απόσταση μεταξύ του άκρου της ρωγμής και του σημείου όπου η εξάρμωση έρχεται σε ισορροπία ονομάζεται ελεύθερη εξαρμώσεων ζώνη. Αξίζει να αναφερθούμε, επίσης, στις εργασίες των [Majumdar and Burns \(1981\)](#) οι οποίοι θεώρησαν διάφορες διατάξεις εξαρμώσεων γύρω από το άκρο μίας ημιάπειρης ρωγμής και των [Lin and Thomson \(1986\)](#) οι οποίοι εξέτασαν τις συνθήκες έκλυσης εξαρμώσεων, επέκτασης ή θωράκισης της ρωγμής κάτω από διάφορες συνθήκες φόρτισης. Επιπλέον, παρότι η ύπαρξη εξαρμώσεων ήταν σε αμφισβήτηση μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1950, υπάρχουν στη βιβλιογραφία αρκετές εργασίες πειραματικής διερεύνησης αυτών των φαινομένων και μπορούμε ενδεικτικά να αναφερθούμε στους [Chia and Burns \(1984\)](#), [Kobayashi and Ohr \(1980, 1981\)](#), [Michot and George \(1986\)](#), και [Ohr \(1987\)](#).

1.3 Γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου

Ο [Kröner \(1968\)](#) στο συνέδριο της IUTAM που ήταν αφιερωμένο στις γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου και αποτέλεσε ορόσημο για την μετέπειτα εξέλιξή τους, περιέγραψε τις θεωρίες αυτές ως “...θεωρίες μηχανικής της ύλης για περιπτώσεις όπου οι συμβατικές θεωρίες συνεχούς δεν προσφέρουν μία ικανοποιητική προσέγγιση”. Το νόημα της περιγραφής αυτής εστιάζει στο γεγονός ότι οι κλασσικές θεωρίες συνεχούς αδυνατούν να περιγράψουν φαινόμενα κλίμακας (size effects) που έχουν παρατηρηθεί σε πειραματικές εργασίες. Μία γενική επισκόπηση των γενικευμένων θεωριών συνεχούς μέσου περιλαμβάνεται στην Παράγραφο 3.1. Γενικά, οι θεωρίες αυτές βασίζονται στην θεώρηση ότι το συνεχές μέσο αποτελείται από στοιχειώδη παραμορφώσιμα σωματίδια, τα μακρο-μέσα. Επιπλέον, λόγω της εν γένει εξάρτησης της παραμορφωσιακής ενέργειας από βαθμίδες συγκεκριμένων πεδίων, όπως: η (δεύτερη) βαθμίδα της μετατοπίσεως (τύπος I, στη θεωρία του [Mindlin](#)), η βαθμίδα της τροπής (τύπος II) ή η βαθμίδα της στροφής (θεωρία τάσεων ζεύγους), εισάγονται νέες σταθερές του υλικού, που υποδεικνύουν την παρουσία χαρακτηριστικού ‘εσωτερικού’ μεγέθους στην συμπεριφορά του. Το χαρακτηριστικό αυτό μέγεθος μπορεί να συνδεθεί με το μέγεθος της μικροδομής του υλικού. Έτσι, ενσωματώνονται φαινόμενα κλίμακας στην ανάλυση τάσεων, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί με την κλασσική θεωρία. Μέσω των θεωριών βαθμίδας, μπορούν

να περιγραφούν συνεχή μέσα με περιοδική δομή, όπως είναι π.χ. τα κρυσταλλικά πλέγματα, οι κρυσταλλίτες ενός πολυκρυσταλλικού υλικού ή οι κόκκοι ενός κοκκώδους υλικού.

Οι γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου έχουν χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο αριθμό εφαρμογών σε διάφορα επιστημονικά πεδία. Οι πρώτες εφαρμογές εντοπίζονται στην δεκαετία του 1960 (Weitsman, 1965; Cook and Weitsman, 1966; Eshel and Rosenfeld, 1970). Πιο πρόσφατα χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση διαφόρων προβλημάτων σε περιοχές όπως η Διάδοση Κυμάτων (Vardoulakis and Georgiadis, 1997; Georgiadis *et al.*, 2000; Georgiadis and Velgaki, 2003; Georgiadis *et al.*, 2004; Charalambopoulos and Gergidis, 2008; Gourgiotis *et al.*, 2013), η Μηχανική των Θραύσεων (Chen *et al.*, 1998; Zhang *et al.*, 1998; Georgiadis, 2003; Paulino *et al.*, 2003; Grentzelou and Georgiadis, 2005; Wei, 2006; Radi, 2007, 2008; Gourgiotis and Georgiadis, 2007, 2008, 2009; Aravas and Giannakopoulos, 2009; Gourgiotis *et al.*, 2012; Mishuris *et al.*, 2012), η Πλαστικότητα (Fleck *et al.*, 1994; Vardoulakis and Sulem, 1995; Begley and Hutchinson, 1998; Gao *et al.*, 1999; Huang *et al.*, 2000; Fleck and Hutchinson, 2001; Hwang *et al.*, 2002), η Μηχανική των Εξαρμώσεων (Lubarda, 2003; Lazar and Maugin, 2005; Po *et al.*, 2014), η Μηχανική των Επαφών (Zisis *et al.*, 2014), η Εμβιομηχανική (Vavva *et al.*, 2009; Giannakopoulos *et al.*, 2013), καθώς και σε Προβλήματα Ευστάθειας (Exadaktylos and Vardoulakis, 1998; Papargyri-Beskou *et al.*, 2003) και Μηχανικής των Κατασκευών (Giannakopoulos and Stamoulis, 2007; Filopoulos *et al.*, 2010; Papargyri-Beskou *et al.*, 2010; Fafalis *et al.*, 2012; Giannakopoulos *et al.*, 2012). Παράλληλα, έχουν αναπτυχθεί προχωρημένες αριθμητικές μέθοδοι για την μελέτη προβλημάτων στα πλαίσια των θεωριών βαθμίδας (Oden *et al.*, 1970; Shu *et al.*, 1999; Amanatidou and Aravas, 2002; Engel *et al.*, 2002; Providas and Kattis, 2002; Tsepoura *et al.*, 2002; Polyzos *et al.*, 2003; Giannakopoulos *et al.*, 2006; Tsamasphyros *et al.*, 2007; Markolefas *et al.*, 2008, 2009; Papanicolopoulos *et al.*, 2009; Tsamasphyros and Vrettos, 2010). Με βάση τα μέχρι σήμερα αποτελέσματα, συμπεραίνεται ότι οι θεωρίες βαθμίδας επεκτείνουν το εύρος ισχύος της έννοιας του συνεχούς σε μία προσπάθεια γεφύρωσης του χάσματος μεταξύ των κλασικών θεωριών συνεχούς μέσου και των θεωριών κρυσταλλικού πλέγματος.

Γενικά, οι θεωρίες με φαινόμενα βαθμίδας στοχεύουν στην προσομοίωση υλικών με εσωτερικά μήκη της τάξεως των 0.1 – 10 μm (Shi *et al.*, 2000). Επειδή τα φαινόμενα ενίσχυσης (strengthening effects) που προκύπτουν από τις βαθμίδες γίνονται σημαντικά όταν οι βαθμίδες αυτές είναι αρκετά μεγάλες, τέτοια φαινόμενα θα είναι αξιοσημείωτα όταν το υλικό παραμορφώνεται σε πολύ μικρούς όγκους, όπως πολύ κοντά σε αιχμές

ρωγμών και εγκοπών, σε μικρές οπές και εγκλείσματα και σε μικρο- ή νανο- διεισδύσεις. Παραδείγματα των φαινομένων κλίμακας σε στερεά με ελαστική παραμόρφωση περιλαμβάνουν τη διάδοση κυμάτων με μικρά μήκη κύματος σε στρωσιγενή υλικά (layered materials) (Herrmann and Achenbach, 1968), την κάμψη δοκού πολυκρυσταλλικού αλουμινίου (Kakunai *et al.*, 1985) και τον λυγισμό ελαστικών ινών σε σύνθετα υλικά (Fleck and Shu, 1995). Στον τομέα της διάδοσης κυμάτων που σχετίζεται με εφαρμογές ηλεκτρονικών συσκευών, χρησιμοποιούνται συχνά επιφανειακές συχνότητες κυμάτων της τάξεως των GHz και, επομένως, εμφανίζονται μήκη κύματος της τάξεως του μm (Farnell, 1978). Σε τέτοιες περιπτώσεις, φαινόμενα διασποράς σε υψηλές συχνότητες μπορούν να εξηγηθούν μόνο με βάση τις θεωρίες βαθμίδας (Georgiadis and Velgaki, 2003; Georgiadis *et al.*, 2004).

Στην Παράγραφο 3.2 δίνονται λεπτομέρειες σχετικά με τον προσδιορισμό των επιπλέον υλικών σταθερών που εισάγονται στις θεωρίες βαθμίδας.

1.4 Διάρθρωση της διατριβής

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση ζητημάτων μικροαντοχής και φαινομένων κλίμακας σε προβλήματα εξαρμώσεων και ρωγμών. Αναλυτικότερα, στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται μία μεθοδολογία ανάλυσης εξαρμώσεων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας και μελετάται, μεταξύ άλλων, το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης ημιάπειρης ρωγμής με επίπεδες εξαρμώσεις. Στην μέθοδο αυτή ενσωματώνεται ένα γεωμετρικό μοντέλο, το οποίο εξαλείφει τις ιδιομορφίες των τασικών πεδίων των εξαρμώσεων, μέσω της εισαγωγής ενός επιπλέον μήκους στο πρόβλημα. Το γεγονός αυτό αποτελεί το έναυσμα της μετάβασης σε θεωρίες ανωτέρου βαθμού. Το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης ρωγμών και εξαρμώσεων δεν έχει μελετηθεί σε κάποια γενικευμένη θεωρία συνεχούς μέσου. Σε πρώτη προσέγγιση επιλέγουμε να υιοθετήσουμε την απλούστερη θεωρία βαθμίδας, την θεωρία τάσεων ζεύγους.

Ακολούθως, στο Κεφάλαιο 3 επιχειρείται μία περιεκτική παρουσίαση των γενικευμένων θεωριών συνεχούς και στη συνέχεια παρουσιάζονται οι αρχές της θεωρίας τάσεων ζεύγους και δίνονται οι βασικές εξισώσεις στην περίπτωση επίπεδης και αντι-επίπεδης παραμόρφωσης.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετώνται προβλήματα αλληλεπίδρασης κεντρικών ρωγμών με επίπεδες και αντι-επίπεδες εξαρμώσεις στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, χρησιμοποιώντας αναλυτικές τεχνικές. Αρχικά, εξάγονται τα πεδία των διακριτών εξαρμώσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους, τα οποία θα αποτελέσουν συναρτήσεις Green για τα προβλήματα ρωγμών. Χρησιμοποιώντας την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων, σχηματίζονται οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που περιγράφουν τα προβλήματα, οι οποίες επιλύονται αριθμητικά.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται ένας εναλλακτικός τρόπος κατάστροφης προβλημάτων ρωγμών που προκύπτει από την γενίκευση της τεχνικής των διανεμημένων εξαρμώσεων. Στην μεθοδολογία αυτή, οι συναρτήσεις Green των προβλημάτων ρωγμών προκύπτουν από τα πεδία δίπολων εξαρμώσεων, τα οποία υπολογίζονται στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου, εξετάζονται προβλήματα αλληλεπίδρασης ρωγμών με δίπολα εξαρμώσεων.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 δίνονται γενικά συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα. Η διατριβή αυτή ολοκληρώνεται με τρία Παραρτήματα, στα οποία παρουσιάζονται λεπτομερώς διάφοροι υπολογισμοί, καθώς επίσης και οι αριθμητικοί κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των προβλημάτων των προηγούμενων κεφαλαίων.



Κεφάλαιο 2

Ανάλυση επίπεδων εξαρμώσεων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μία μεθοδολογία ανάλυσης επίπεδων εξαρμώσεων (edge dislocations) με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στα πλαίσια της κλασσικής ελαστικότητας. Η μεθοδολογία αναπτύσσεται βάσει ενός ανάλογου από την θερμοελαστικότητα και την περιγραφή των εξαρμώσεων μέσω ολοκληρωμάτων τάσεων. Ο [Biot \(1935\)](#) παρουσίασε μία μέθοδο προσομοίωσης των ελαστικών πεδίων γύρω από μία εξάρμωση βασισμένη σε θερμικές τάσεις, η οποία αποτέλεσε τη βάση μελέτης εξαρμώσεων με πειραματικές τεχνικές (οπτικές μεθόδους). Επιπλέον, η αναπαράσταση των εξαρμώσεων μέσω ολοκληρωμάτων τάσεων που διατυπώθηκε στην εργασία των [Mindlin and Salvadori \(1950\)](#) μας επιτρέπει να παρακάμψουμε την ασυμβατότητα στις μετατοπίσεις και να εισάγουμε την περιγραφή σε συνήθη κώδικα πεπερασμένων στοιχείων.

Η κατανόηση της μηχανικής των εξαρμώσεων είναι ένα πολύ σημαντικό κεφάλαιο της γραμμικής ελαστικότητας. Στη βιβλιογραφία είναι διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις για σχετικά απλά προβλήματα ([Hirth and Lothe, 1982](#)). Ωστόσο, σύνθετες γεωμετρίες και ανισοτροπική καταστατική συμπεριφορά καθιστούν τα προβλήματα αδύνατα προς αναλυτική προσέγγιση. Η γνώση των τασικών πεδίων γύρω από τις εξαρμώσεις είναι σημαντική. Η ισορροπία και η ευστάθεια μίας εξάρμωσης απαιτεί η κινούσα δύναμη (Peach-Koehler material force) ([Peach and Koehler, 1950](#)) που ασκείται σε αυτήν να εξισορροπείται από τις ατομικές αλληλεπιδράσεις στο επίπεδο ολίσθησής της, όπως αυτές εκφράζονται μέσω της τάσης Peierls ([Peierls, 1940](#)). Η εκτίμηση των ελαστικών πεδίων και η κατανόηση της κίνησης των εξαρμώσεων είναι ουσιώδης για την θεωρία

Πλαστικότητα, την Μηχανική των Θραύσεων και την κόπωση των υλικών. Από την άλλη, η γνώση των μηχανισμών κίνησης των εξαρμώσεων έχει επιρροή και σε σύγχρονες τεχνολογικές εφαρμογές όπως μικρο- και νανο- διεισδύσεις, αντοχή νανο-σύνθετων υλικών και μικρο-ηλεκτρο-μηχανολογικές συσκευές (MEMS).

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν υπάρξει διάφορες απόπειρες αριθμητικής προσομοίωσης εξαρμώσεων. Τα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί μπορούν να διαχωριστούν σε συνεχή ([van der Giessen and Needleman, 1995](#)) και διακριτά ([Amodeo and Ghoniem, 1990](#); [Kubin and Canova, 1992](#); [Zbib et al., 1998](#)). Στις περισσότερες προσεγγίσεις, η προσομοίωση ενός χωρίου με n_d εξαρμώσεις επιτυγχάνεται υπερθέτοντας τις αναλυτικές λύσεις πλήρους χωρίου και ένα πεδίο τάσεων ειδώλου (image stress field) για κάθε εξάρμωση. Η λύση επιτυγχάνεται μέσω ενός κώδικα πεπερασμένων στοιχείων θεωρώντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ώστε να εξαλειφθούν οι τάσεις του πλήρους χωρίου. Ένα προφανές μειονέκτημα αυτών των προσεγγίσεων είναι ότι σε κάθε σημείο επίλυσης του αριθμητικού αλγορίθμου, απαιτείται άθροιση των αναλυτικών πεδίων όλων των εξαρμώσεων, γεγονός που αυξάνει το υπολογιστικό κόστος. Επιπλέον, η επέκτασή τους σε σύνθετες γεωμετρίες ή ανισότροπα υλικά είναι δύσκολη εφόσον βασίζονται σε αναλυτικές εκφράσεις. Άλλες διαθέσιμες μεθοδολογίες βασισμένες σε γενικευμένες μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων (XFEM) είναι αυτές των [Wang et al. \(2001\)](#), [Xiang et al. \(2003\)](#), [Lemarchand et al. \(2001\)](#) και [Gracie et al. \(2007\)](#). Αυτές οι μέθοδοι αν και δεν βασίζονται σε αναλυτικές μεθόδους έχουν προβλήματα στην ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών. Από την άλλη, υπάρχουν αρκετές μεθοδολογίες μοριακής δυναμικής οι οποίες δεν χρησιμοποιούνται σε προβλήματα μηχανικών. Οι κλίμακες των περισσότερων τεχνολογικών εφαρμογών καθιστά δύσκολη τη χρήση αυτών των προσεγγίσεων, γι' αυτό και έχουν γίνει απόπειρες ενσωμάτωσής τους σε μεθοδολογίες πεπερασμένων στοιχείων (ιδέ π.χ. [Tadmor et al., 1996](#)). Επομένως, υπάρχει η ανάγκη ανάπτυξης μίας μεθοδολογίας που δεν θα βασίζεται σε αναλυτικές λύσεις και δεν θα χρησιμοποιεί υπέρθεση ή υπολογισμό τάσεων ειδώλου.

Στο παρόν κεφάλαιο επεκτείνουμε την εργασία των [Giannakopoulos et al. \(2007\)](#) εμπλουτίζοντας τη μεθοδολογία και μελετώντας διάφορα προβλήματα με σύνθετες γεωμετρίες και ανισοτροπία. Στην Παράγραφο 2.2.1 παρουσιάζουμε τη μεθοδολογία για την ανάλυση επίπεδων εξαρμώσεων. Στην Παράγραφο 2.2.2 χρησιμοποιούμε τα συντηρητικά ολοκληρώματα J και M για τον υπολογισμό της κινούσας δύναμης μίας εξάρμωσης. Στην Παράγραφο 2.2.3, περιγράφουμε το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα

(variable core model) και την εισαγωγή του στην προτεινόμενη μεθοδολογία, με σκοπό την εξάλειψη των ιδιομορφιών στο τασικό πεδίο στην περιοχή του πυρήνα της εξάρμωσης (Lubarda and Markenscoff, 2000). Στην Ενότητα 2.3 μελετώνται διάφορες εφαρμογές σε γεωμετρίες με γνωστή αναλυτική λύση ώστε αρχικά να ελεγχθεί η ακρίβεια της μεθόδου και έπειτα να παραχθούν νέα αποτελέσματα σε περιπτώσεις ανισοτροπικής συμπεριφοράς.

2.2 Μεθοδολογία

2.2.1 Το θερμικό ανάλογο για επίπεδες εξαρμώσεις

Θεωρούμε ένα ελαστικό σώμα υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ($\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} = 0$). Απουσία καθολικών δυνάμεων, οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων σ_{ij} πρέπει να υπακούουν τις εξισώσεις ισορροπίας, οι οποίες σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφονται

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 . \quad (2.1)$$

Οι συνιστώσες της τροπής πρέπει να ικανοποιούν την τοπική συνθήκη συμβιβαστού

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 0 . \quad (2.2)$$

Θεωρούμε μία αυθαίρετη τασική συνάρτηση του Airy, $\Phi(x, y)$, ώστε να ικανοποιείται η Εξ. (2.1). Οι συνιστώσες των τάσεων γράφονται ως

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} . \quad (2.3)$$

Η τοπική συνθήκη συμβιβαστού είναι απαραίτητη ώστε δεδομένες συνιστώσες τροπής να δίνουν συνεχείς μετατοπίσεις σε ένα απλώς συνεκτικό σώμα. Αν το σώμα είναι

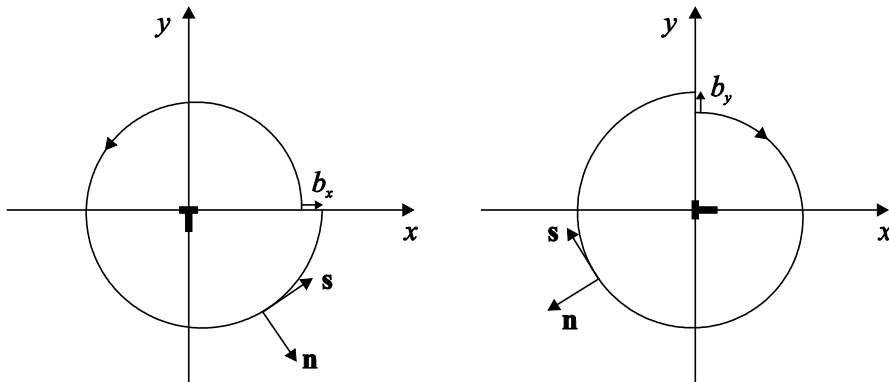
πολλαπλώς συνεκτικό, πρέπει να επιβληθούν επιπλέον συνθήκες καθολικού συμβιβαστού στη μορφή επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων (Michell, 1899). Στο Σχ. 2.1 απεικονίζονται οι δύο τύποι επίπεδων εξαρμώσεων όπως παρουσιάστηκαν από τον Volterra (1907), όπου οι ποσότητες b_x και b_y είναι οι συνιστώσες του διανύσματος Burgers. Για έναν κλειστό βρόχο που περιβάλλει μία εξάρμωση τύπου Volterra, οι καθολικές συνθήκες συμβιβαστού γράφονται ως

$$\oint d\omega_z = 0, \quad (2.4)$$

$$\oint du_x = b_x, \quad \oint du_y = b_y. \quad (2.5)$$

όπου $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$ είναι το διάνυσμα στροφής.

Η Εξ. (2.4) είναι απαραίτητη ώστε να μην υπάρχει καμία στροφική εξάρμωση (εξάρμωση τύπου Somigliana).



Σχ. 2.1. Οι συνιστώσες του διανύσματος Burgers επίπεδων εξαρμώσεων τύπου Volterra και οι κλειστοί βρόχοι που τις περιβάλλουν.

Οι σχέσεις μεταξύ τροπών και μετατοπίσεων είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (2.6)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.6), η Εξ. (2.4) γράφεται συναρτήσει των συνιστωσών της τροπής ως

$$\oint \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) dy \right] = 0 . \quad (2.7)$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας τις Εξ. (2.2), (2.6) και (2.7), οι συνιστώσες του διανύσματος Burgers, (Εξ. (2.5)) παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned} b_x &= - \oint x \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} dy \right) - \oint y \left[\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} dx - \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) dy \right], \\ b_y &= - \oint x \left[\left(2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} dy \right] - \oint y \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} dy \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Για τα κάθετα και εφαπτόμενα διανύσματα στις κλειστές καμπύλες που περιβάλλουν τις εξαρμώσεις (Σχ. 2.1) ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right\}^T, \quad \mathbf{s} = \left\{ \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right\}^T, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} ds = \frac{\partial}{\partial x} dy - \frac{\partial}{\partial y} dx, \quad \frac{\partial}{\partial s} ds = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy. \quad (2.10)$$

Απουσία θερμικού πεδίου, οι τάσεις συσχετίζονται με τις τροπές βάσει της ακόλουθης γενικής έκφρασης

$$\{\sigma_{ij}\} = \{c_{ijkl}\}_{6 \times 6} \{\varepsilon_{kl}\}. \quad (2.11)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα ανισότροπο θερμοελαστικό σώμα με κυβική συμμετρία κατά τη διεύθυνση των αξόνων x και y . Σε αυτή την περίπτωση μόνο τρεις ελαστικές σταθερές είναι ανεξάρτητες (c_{11}, c_{12}, c_{44}). Υπό την επίδραση μίας θερμοκρασιακής κατανομής $\theta(x, y)$, οι καταστατικές σχέσεις μεταξύ των τάσεων και των τροπών γράφονται ως

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha_x(1+\nu)\theta, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha_y(1+\nu)\theta.\end{aligned}\quad (2.12)$$

όπου α_x και α_y είναι συντελεστές θερμικής διαστολής στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα.

Οι τρεις ανεξάρτητες υλικές παράμετροι του προβλήματος μπορούν να γραφούν ως

$$E = \frac{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 3c_{12})}{c_{11} + 2c_{12}}, \quad \nu = \frac{c_{12}}{c_{11} + 2c_{12}}, \quad \mu = c_{44}. \quad (2.13)$$

Στον Πίνακα 2.1 δίνονται οι ελαστικές σταθερές για τους κρυστάλλους που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές αυτού του κεφαλαίου, όπου $H = 2c_{44} + c_{12} - c_{11}$ είναι ο συντελεστής ανισοτροπίας και $A = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$ ο λόγος ανισοτροπίας.

Πίνακας 2.1. Ελαστικές σταθερές για το χρώμιο (Cr), τον χαλκό (Cu) και το βολφράμιο (W) (Hirth and Lothe, 1982).

Crystal	c_{11} (10^{10} Pa)	c_{12} (10^{10} Pa)	c_{44} (10^{10} Pa)	H (10^{10} Pa)	A	μ (10^{10} Pa)	E (10^{10} Pa)	ν
Cr	35.00	5.78	10.10	-9.02	0.69	10.10	32.85	0.124
Cu	16.84	12.14	7.54	10.38	3.21	7.54	6.09	0.295
W	52.10	20.10	16.00	0.00	1.00	16.00	38.97	0.218

Οι σχέσεις του Michell (2.8) και η συνθήκη συμβιβαστού (2.2) μπορούν να γραφούν συναρτήσει των τάσεων, σημειώνοντας ότι οι ποσότητες $x\sigma_{xx}$, $y\sigma_{xy}$, $y\sigma_{xx}$ και $x\sigma_{xy}$ είναι συνεχείς

$$\begin{aligned}b_x &= (1+\nu) \oint \left(\alpha_x x \frac{\partial \theta}{\partial s} - \alpha_y y \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) ds - \frac{(1+\nu)}{E} \oint (\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y) ds \\ &+ \frac{(1-\nu^2)}{E} \oint \left[x \frac{\partial (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial s} - y \frac{\partial (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial n} \right] ds + \left[\frac{1}{\mu} - \frac{2(1+\nu)}{E} \right] \oint \sigma_{xy} dy,\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
b_y &= (1+\nu) \oint \left(\alpha_x x \frac{\partial \theta}{\partial n} + \alpha_y y \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) ds + \frac{(1+\nu)}{E} \oint (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) ds \\
&\quad + \frac{(1-\nu^2)}{E} \oint \left[x \frac{\partial (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial n} + y \frac{\partial (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial s} \right] ds - \left[\frac{1}{\mu} - \frac{2(1+\nu)}{E} \right] \oint \sigma_{xy} dx, \\
\frac{(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \left[\frac{1}{\mu} - \frac{2(1+\nu)}{E} \right] \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \\
(1+\nu) \left(\alpha_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right). &
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Αντίστοιχα, από την συνέχεια των τάσεων προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\oint \sigma_{xy} dy = 0, \quad \oint \sigma_{xy} dx = 0, \quad \nabla^2 \Phi = - \frac{(\alpha_x + \alpha_y)(1+\nu)\theta}{\frac{1}{\mu} - \frac{2\nu(1+\nu)}{E}} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}. \tag{2.16}$$

Η ολική ισορροπία των τάσεων στις κλειστές καμπύλες που περιβάλλουν τις εξαρμώσεις εκφράζεται από τις σχέσεις

$$\oint (\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y) ds = 0, \quad \oint (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) ds = 0. \tag{2.17}$$

Θεωρούμε τώρα μία αρμονική θερμοκρασιακή κατανομή ώστε να αποφύγουμε οποιαδήποτε στροφική εξάρμωση

$$\left(\alpha_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \theta = 0. \tag{2.18}$$

Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν η τοπική συνθήκη συμβιβαστού (2.2) και η καθολική συνθήκη που αφορά τη στροφή (2.7). Οι σχέσεις του Michell (2.14) παίρνουν την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
b_x &= -(1+\nu) \oint \left(\alpha_y y \frac{\partial \theta}{\partial n} - \alpha_x x \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) ds, \\
b_y &= (1+\nu) \oint \left(\alpha_y y \frac{\partial \theta}{\partial s} + \alpha_x x \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) ds.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Πρέπει, πλέον, να βρούμε μία θερμοκρασιακή κατανομή που θα ικανοποιεί τις Εξ. (2.18) και (2.19). Ως ένα παράδειγμα, επιλέγουμε την ακόλουθη κατανομή για επίπεδες εξαρμώσεις b_x και b_y , χρησιμοποιώντας έναν ορθοκανονικό κάρναβο όπου h_x και h_y είναι η διάσταση του πεπερασμένου στοιχείου στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα (Σχ. 2.2)

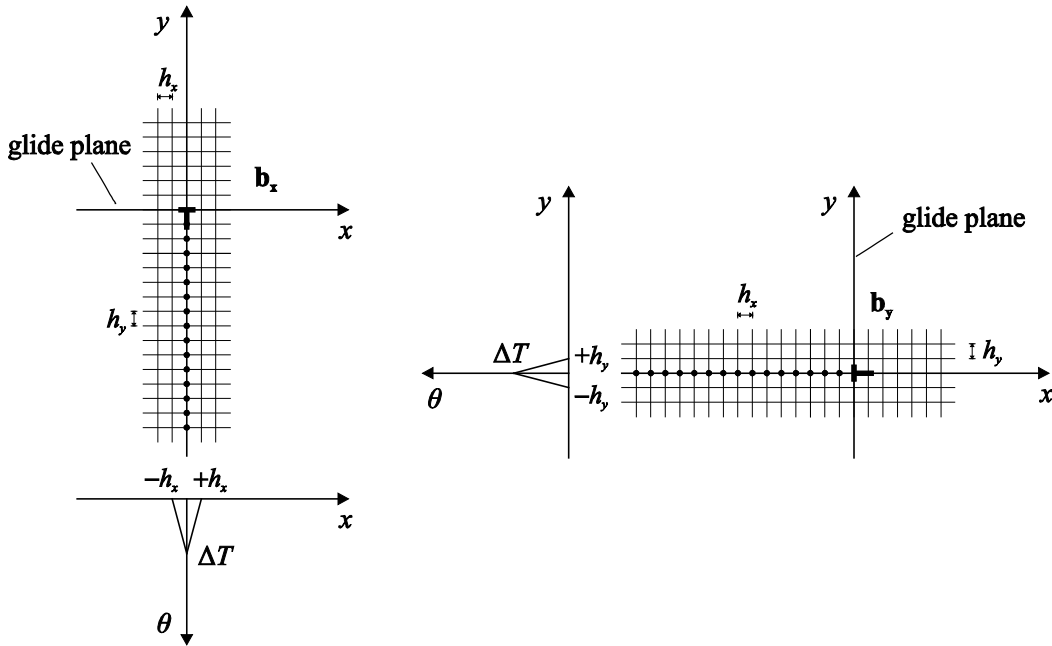
$$\begin{aligned}
\theta &= \Delta T, & x &= 0, & y &\leq 0, \\
\theta &= \Delta T \frac{x+h_x}{h_x}, & -h_x &\leq x \leq 0, & y &\leq 0, \\
\theta &= \Delta T \frac{h_x-x}{h_x}, & 0 &\leq x \leq h_x, & y &\leq 0, \\
\theta &= 0, & & & & \text{οπουδήποτε αλλού,}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\theta &= \Delta T, & y &= 0, & x &\leq 0, \\
\theta &= \Delta T \frac{y+h_y}{h_y}, & -h_y &\leq y \leq 0, & x &\leq 0, \\
\theta &= \Delta T \frac{h_y-y}{h_y}, & 0 &\leq y \leq h_y, & x &\leq 0, \\
\theta &= 0, & & & & \text{οπουδήποτε αλλού.}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Αντικαθιστώντας τη συγκεκριμένη θερμοκρασιακή κατανομή στην Εξ. (2.19) καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$b_x = (1+\nu)\alpha_x \Delta T h_x, \quad b_y = -(1+\nu)\alpha_y \Delta T h_y. \tag{2.22}$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις επιτρέπουν την περιγραφή επίπεδων εξαρμώσεων μέσω κώδικα πεπερασμένων στοιχείων.



Σχ. 2.2. Παράδειγμα θερμοκρασιακής κατανομής για την περιγραφή επίπεδων εξαρμώσεων σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων.

Στρέφοντας την προσοχή μας στην εισαγωγή της μεθοδολογίας σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων, μπορούμε να διακριτοποιήσουμε τον χώρο γύρω από την εξάρμωση μέσω μίας ομοιόμορφης κατανομής στοιχείων μεγέθους $h_x \times h_y$. Ζητούμε γραμμική θερμοελαστική απόκριση και εφαρμόζουμε μία θερμοκρασιακή κατανομή στις ομάδες κόμβων όπως στο Σχ. 2.2, επιβάλλοντας τους ακόλουθους περιορισμούς για τους συντελεστές θερμικής διαστολής

$$\Delta T = \frac{b_x}{(1+\nu)\alpha_x h_x}, \quad \alpha_x = \alpha, \quad \alpha_y = 0, \quad \alpha_z = 0, \quad (2.23)$$

$$\Delta T = -\frac{b_y}{(1+\nu)\alpha_y h_y}, \quad \alpha_y = \alpha, \quad \alpha_x = 0, \quad \alpha_z = 0.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συντελεστές θερμικής διαστολής δεν είναι οι πραγματικοί αλλά παίρνουν τιμές κατάλληλες για τους υπολογισμούς, δεδομένου ότι δεν υπάρχει πραγματικό θερμοκρασιακό πεδίο στο πρόβλημα. Επιπλέον, οι παραπάνω τιμές της θερμοκρασίας πρέπει να τροποποιηθούν ανάλογα με τον τύπο στοιχείου που χρησιμοποιείται, προκειμένου να ληφθεί υπόψη στην αριθμητική ολοκλήρωση της Εξ. (2.19). Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιηθούν 4-κομβικά στοιχεία (όπως στην παρούσα εργασία), τότε οι τιμές που προκύπτουν από την Εξ. (2.23) πρέπει να πολλαπλασιαστούν

επί τον συντελεστή $1/0.57735$. Τέλος, η διαδικασία ολοκληρώνεται σε ένα βήμα επίλυσης.

2.2.2 Συντηρητικά ολοκληρώματα και κινούσες δυνάμεις

Ο στόχος οποιασδήποτε αριθμητικής προσομοίωσης εξαρμώσεων είναι η πρόβλεψη των ελαστικών πεδίων που αναπτύσσονται γύρω τους και η εκτίμηση των κινουσών δυνάμεων που ασκούνται, προκειμένου να δοθούν απαντήσεις σε ζητήματα αντοχής ή να προβλεφθεί η κινητικότητα τους. Η κινούσα δύναμη Peach-Koehler (Peach and Koehler, 1950) μπορεί να γραφεί συναρτήσει των τάσεων ως

$$F_k = -e_{ijk} \xi_i \sigma_{jl} b_l, \quad (2.24)$$

όπου e_{ijk} είναι το σύμβολο εναλλαγής Levi-Civita και ξ_i είναι η διεύθυνση της γραμμής της εξάρμωσης. Για τα διδιάστατα προβλήματα ισχύει $\xi_x = \xi_y = 0$, $\xi_z = 1$, οπότε

$$F_x = \sigma_{yx} b_x + \sigma_{yy} b_y, \quad F_y = -\sigma_{xx} b_x - \sigma_{xy} b_y, \quad F_z = 0. \quad (2.25)$$

Ωστόσο, η εκτίμηση των τάσεων ενδέχεται να μην είναι αρκετά ακριβής κοντά στον πυρήνα μίας εξάρμωσης, λόγω της ύπαρξης ιδιομορφιών.

Εναλλακτικά, η εσωτερική δύναμη μίας εξάρμωσης ορίζεται ως η βαθμίδα της παραμορφωσιακής ενέργειας U ως προς την θέση της εξάρμωσης (c_i), δηλαδή

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial c_i}. \quad (2.26)$$

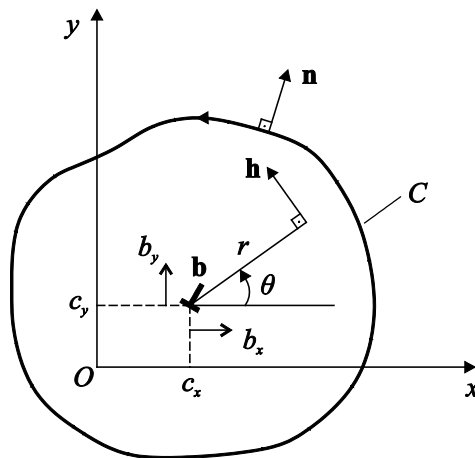
Αυτή η αναπαράσταση μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί στην προτεινόμενη μεθοδολογία. Ο υπολογισμός των συνιστωσών της δύναμης (F_x, F_y) βασίζεται στην έκλυση ενέργειας από μία μικρή μετακίνηση της εξάρμωσης (σε απόσταση ενός πεπερασμένου στοιχείου) κατά τη διεύθυνση x και y αντίστοιχα

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{U_{new} - U_{initial}}{h_x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{U_{new} - U_{initial}}{h_y}, \quad (2.27)$$

όπου U_{new} και $U_{initial}$ είναι οι τιμές της παραμορφωσιακής ενέργειας στην τελική (μετά την μετακίνηση) και αρχική θέση της εξάρμωσης.

Η διαδικασία αυτή είναι παρόμοια με την τεχνική του Parks (1974) για τον προσδιορισμό του συντελεστή έντασης τάσεων σε προβλήματα ρωγμών. Αυτή η προσέγγιση, παρότι αρκετά ακριβής, έχει ένα εμφανές μειονέκτημα καθότι το πρόβλημα πρέπει να επιλυθεί τουλάχιστον δύο φορές. Το γεγονός αυτό αυξάνει το υπολογιστικό κόστος και μπορεί να αποδειχθεί σοβαρό εμπόδιο στη μελέτη δυναμικών προβλημάτων εξαρμώσεων.

Ο Eshelby (1951) συνέδεσε την κινούσα δύναμη μίας εξάρμωσης με το συντηρητικό ολοκλήρωμα J . Το ολοκλήρωμα J εκφράζει τον ρυθμό απελευθέρωσης ενέργειας λόγω μετακίνησης του συστήματος αναφοράς μίας ατέλειας (defect) και χρησιμοποιείται ευρέως στη Μηχανική των Θραύσεων. Θεωρούμε μία επίπεδη εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ η οποία περιβάλλεται από κλειστή καμπύλη C (Σχ. 2.3).



Σχ. 2.3. Διάταξη αναφοράς για τον ορισμό του συντηρητικού ολοκληρώματος J .

Το ολοκλήρωμα J ορίζεται στη διάταξη αναφοράς ως

$$J_i = \int_C (W n_i - n_j \sigma_{jk} u_{k,i}) ds, \quad (2.28)$$

όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο στην κλειστή καμπύλη C διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του σώματος, $W = W(\nabla \mathbf{u})$ είναι η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας ανά μονάδα όγκου μίας αφόρτιστης διάταξης αναφοράς, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ είναι το πεδίο μετατοπίσεων στη διάταξη αναφοράς και $\sigma_{ij} = \partial W / \partial u_{j,i}$ είναι ο πρώτος Piola ταυστής των τάσεων. Στην παρούσα γραμμικά ελαστική διατύπωση, σ_{ij} είναι ο ταυστής των τάσεων Cauchy και $W = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy})$. Συνεπώς, η Εξ. (2.26) γράφεται ως

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial c_i} = J_i . \quad (2.29)$$

Οι δύο συνιστώσες του ολοκληρώματος J ταυτίζονται με τις συνιστώσες της κινούσας δύναμης της εξάρμωσης. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος J εμπεριέχεται σε αρκετά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων ή μπορεί εύκολα να προστεθεί. Αυτός ο τρόπος υπολογισμού της κινούσας δύναμης έχει δύο πλεονεκτήματα έναντι του υπολογισμού βάσει του ρυθμού έκλυσης ενέργειας (Εξ. (2.26)): (i) το αποτέλεσμα προκύπτει από μία επίλυση του προβλήματος, (ii) ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί στη μελέτη προβλημάτων με μη-γραμμική καταστατική συμπεριφορά υλικών ή μεγάλες παραμορφώσεις (Batra, 1987). Πρέπει να επισημανθεί πως το ολοκλήρωμα J είναι συντηρητικό για μεταφορικά ομογενή υλικά. Αν η κλειστή καμπύλη περιβάλλει ένα ομογενές σώμα δίχως ατέλειες προκύπτει $J_i = 0$ και συνεπώς $F_i = 0$, όπως αναμένεται.

Θεωρούμε, τώρα, ένα άλλο συντηρητικό ολοκλήρωμα της γραμμικής ελαστοστατικής, το ολοκλήρωμα M , το οποίο ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τον Günther (1962) και τους Knowles and Sternberg (1972). Το ολοκλήρωμα αυτό εκφράζει τον ρυθμό απελευθέρωσης ενέργειας λόγω μίας όμοιας-προς-εαυτή επέκτασης (self-similar expansion) της ατέλειας και ορίζεται ως

$$M_O = \int_C x_i (W n_i - n_j \sigma_{jk} u_{k,i}) ds , \quad (2.30)$$

όπου ο δείκτης του ολοκληρώματος δηλώνει την εξάρτηση από το σύστημα αναφοράς. Για παράδειγμα, αν το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε μία κλειστή καμπύλη C , πρώτα με

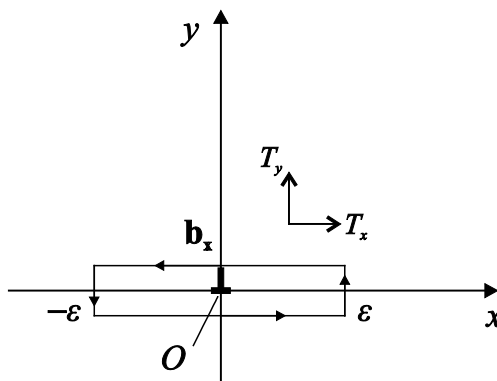
αναφορά την αρχή των συντεταγμένων x_P και έπειτα το x_Q (P και Q δύο διαφορετικά σημεία της διάταξης αναφοράς), τότε ισχύει

$$M_P = M_Q + (x_Q - x_P)_i J_i, \quad (2.31)$$

όπου ο επαναλαμβανόμενος δείκτης i δηλώνει άθροιση από 1 έως 2 (ή από x έως y).

Όταν η καμπύλη C δεν περιβάλλει κάποια ατέλεια σε ένα ομογενές απλώς συνεκτικό σώμα, προκύπτει $M_O = 0$. Ο Freund (1978) χρησιμοποίησε αυτόν τον διατηρητικό νόμο για να υπολογίσει τους συντελεστές έντασης τάσεων σε προβλήματα ρωγμών και πρότεινε ως δρόμο ολοκλήρωσης ένα παραλληλόγραμμο με ‘μηδενιζόμενο’ ύψος κατά την διεύθυνση y . Χρησιμοποιώντας μία αντίστοιχη κλειστή καμπύλη, είναι δυνατό να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα M για μία διακριτή επίπεδη εξάρμωση.

Θεωρούμε μία διακριτή επαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ η οποία περιβάλλεται από μία κλειστή καμπύλη όπως φαίνεται στο Σχ. 2.4



Σχ. 2.4. Διάταξη αναφοράς για τον υπολογισμό του συντηρητικού ολοκληρώματος M γύρω από μία διακριτή επαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$.

Επιλέγοντας ως σημείο αναφοράς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O , η Εξ. (2.30) γράφεται ως

$$\begin{aligned} M_O &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (-T_x u_{x,x} - T_y u_{y,x}) dx + \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} (-T_x u_{x,x} - T_y u_{y,x}) dx = \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [\sigma_{yx} u_{x,x} + \sigma_{yy} u_{y,x}] x dx + \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} [\sigma_{yx} u_{x,x} + \sigma_{yy} u_{y,x}] x dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Οι εκφράσεις των ελαστικών πεδίων στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας είναι (Hirth and Lothe, 1982)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}(x, y) &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ u_x(x, y) &= \frac{b}{2\pi} \left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2 + y^2)} \right].\end{aligned}\quad (2.33)$$

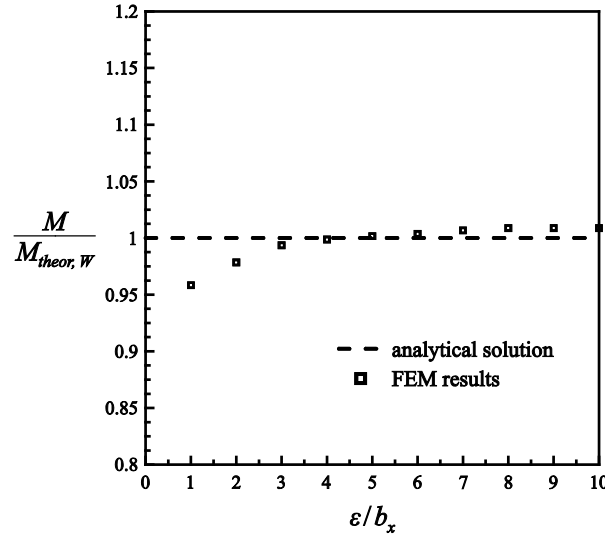
Για τη δεδομένη διάταξη αναφοράς, προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x}, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad u_{x,x}(x, y) = \frac{b}{2\pi} \frac{\partial \tan^{-1}(y/x)}{\partial x}. \quad (2.34)$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων της Εξ. (2.32) δίνει την τιμή του M_o σε κλειστή μορφή

$$M_o = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)}. \quad (2.35)$$

Η ίδια έκφραση υπολογίστηκε από τους Asaro and Lubarda (2006) χρησιμοποιώντας ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος M δεν έχει ενσωματωθεί σε προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων. Με βάση την παραπάνω ιδέα, δημιουργούμε μία κλειστή καμπύλη σε απόσταση ενός πεπερασμένου στοιχείου πάνω και κάτω από την εφαπτομενική εξάρμωση και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα M αριθμητικά. Οι τιμές των ποσοτήτων που περιλαμβάνονται στα ολοκληρώματα της Εξ. (2.32) υπολογίζονται σε μία λωρίδα κόμβων πλάτους 2ε κατά μήκος του άξονα x (Σχ. 2.4). Στην ισότροπη περίπτωση του βολφραμίου (Πίνακας 2.1), υπολογίζουμε σύμφωνα με την Εξ. (2.35) την θεωρητική τιμή $M_{theor,W} = 1.628b^2 \times 10^{10} N$. Παράλληλα, υπολογίζουμε αριθμητικά την τιμή του ολοκληρώματος M για διάφορα πλάτη του κλειστού περιγράμματος και καταλήγουμε στην συγκλίνουσα τιμή $M_{num,W} = 1.642b^2 \times 10^{10} N$. Στο Σχ. 2.5 δίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα ανηγμένα ως προς την θεωρητική τιμή.



Σχ. 2.5. Υπολογισμός του ολοκληρώματος M για μία διακριτή επαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ και διάφορα πλάτη της κλειστής καμπύλης (2ε).

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος M είναι ένας εναλλακτικός τρόπος ελέγχου της σύγκλισης της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και σε ανισότροπους κρυστάλλους όπου είναι δύσκολο να διατυπωθούν αποτελέσματα σε κλειστή μορφή. Ο περιορισμός αυτής της προσέγγισης είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε περίπτωση γραμμικής ελαστικότητας, αντίθετα με το ολοκλήρωμα J .

Ο Rice (1985) συνέδεσε το ολοκλήρωμα M με τον θετικά ορισμένο συμμετρικό προ-λογαριθμικός τανυστή συντελεστών ενέργειας (prelogarithmic energy factor tensor) K_{ij} της ανισοτροπικής θεωρίας εξαρμώσεων (Eshelby *et al.*, 1953). Το τασικό πεδίο μίας επίπεδης εξάρμωσης $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ σε ένα ανισοτροπικό υλικό υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης μπορεί να γραφεί σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) ως (Σχ. 2.3)

$$\sigma_{ij} = (D_{ij}(\theta)/r) + \bar{\sigma}_{ij}(x, y), \quad (2.36)$$

όπου $D_{ij}(\theta)/r$ είναι το αυτεντατικό πεδίο (self-stress) και η ποσότητα $\bar{\sigma}_{ij}(x, y)$ περιλαμβάνει το αποτέλεσμα των επιβαλλόμενων φορτίσεων και τάσεων ειδώλου. Αν $\mathbf{h} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της αυξανόμενης γωνίας θ , ισχύει η ακόλουθη έκφραση

$$h_i(\theta)D_{ij}(\theta) = 2K_{ij}b_i \quad . \quad (2.37)$$

Ο προ-λογαριθμικός τανυστής συντελεστών ενέργειας παίρνει το όνομα αυτό από την έκφραση της παραμορφωσιακής ενέργειας (ανά μονάδα μήκους στη διεύθυνση z) ενός εξαρμωμένου σώματος με (εσωτερική) ακτίνα πυρήνα r_0 και εξωτερική διάσταση R

$$U = K_{ij}b_i b_j \ln \frac{R}{r_0} \quad . \quad (2.38)$$

Τελικά ο [Rice \(1985\)](#) απέδειξε ότι το ολοκλήρωμα M είναι στην ουσία ο συντελεστής ενέργειας εξάρμωσης (dislocation energy factor), δηλαδή ισχύει

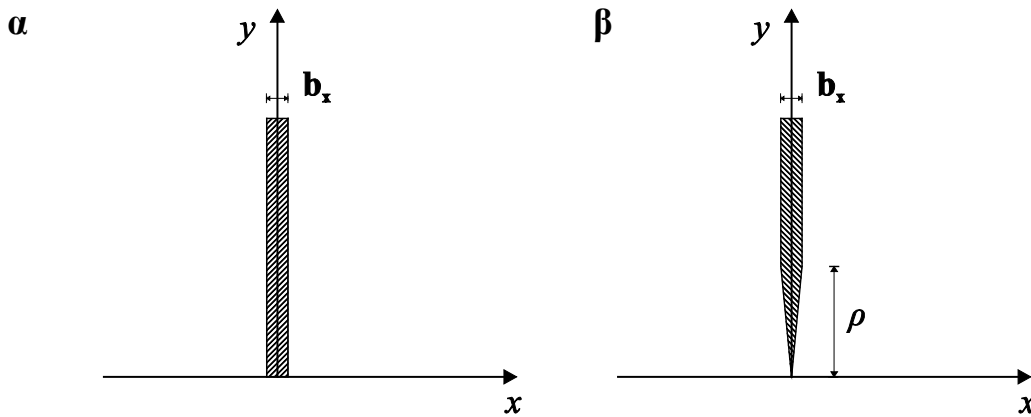
$$M_o = K_{ij}b_i b_j \quad . \quad (2.39)$$

Με βάση αυτή τη συσχέτιση (Εξ. (2.35) και (2.39)) και τον ορισμό της δύναμης Peach-Koehler συναρτήσει των τάσεων (Εξ. (2.24)), η μεθοδολογία για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος M μπορεί να χρησιμοποιηθεί περαιτέρω στον υπολογισμό της κινούσας δύναμης μίας εξάρμωσης. Στην Παράγραφο 2.3.1 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα αυτής της συσχέτισης.

2.2.3 Το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα για επίπεδες εξαρμώσεις

Τα ελαστικά πεδία που προβλέπει η κλασική ελαστικότητα για μία διακριτή επίπεδη εξάρμωση σε άπειρο χωρίο καταρρέουν σε αποστάσεις κοντά στον πυρήνα αυτής οδηγώντας σε ιδιομορφίες της μορφής r^{-1} , όπου r η απόσταση από το κέντρο της εξάρμωσης. Αυτού του τύπου οι τασικές ιδιομορφίες οδηγούν σε λογαριθμική ιδιομορφία της ολικής παραμορφωσιακής ενέργειας. Αυτό σημαίνει πως τα συνήθη κριτήρια σύγκλισης που εφαρμόζονται σε αναλύσεις με πεπερασμένα στοιχεία δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα εξαρμώσεων. Μπορούμε, ωστόσο, να προτείνουμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος M ως εναλλακτικό τρόπο ελέγχου της σύγκλισης της προτεινόμενης μεθοδολογίας, όπως συζητήθηκε στην Παράγραφο 2.2.2. Εν γένει, μεθοδολογίες μοριακής δυναμικής χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση των φαινομένων κοντά στον πυρήνα των εξαρμώσεων (ιδέ π.χ. [Tadmor et al., 1996](#)).

Στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας γραμμικής ελαστικότητας, οι [Lubarda and Markenscoff \(2007\)](#) παρουσίασαν ένα μοντέλο μεταβλητού πυρήνα (variable core model) το οποίο εξαλείφει τις τασικές ιδιομορφίες στον πυρήνα μίας εξάρμωσης. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας ότι η ασυνέχεια στην μετατόπιση b πραγματοποιείται σταδιακά σε μία απόσταση ρ . Η εξάρμωση μοντελοποιείται ως ένα ζεύγος στροφικών εξαρμώσεων προτού το όριο ανάμεσά τους μηδενιστεί ([Eshelby, 1966](#)). Για μία εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$, η απλούστερη κατανομή της μετατόπισης είναι μία γραμμική αύξηση κατά μήκος του θετικού άξονα y , όπως περιγράφεται στο Σχ. 2.6. Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, οποιαδήποτε μη γραμμική αύξηση της ασυνέχειας της μετατόπισης μπορεί να είναι επίσης ενδιαφέρουσα. Στη θεωρία εξαρμώσεων, αυτή η ασυνέχεια μεταβλητής μετατόπισης αντιπροσωπεύει μία εξάρμωση τύπου Somigliana.



Σχ. 2.6. **α**) Μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση σταθερού πλάτους. **β**) Μία εξάρμωση μεταβλητού πυρήνα η οποία δημιουργείται από μία γραμμική αύξηση της ασυνέχειας της μετατόπισης σε μία απόσταση ρ κατά μήκος του θετικού άξονα y .

Η αντίστοιχη διατμητική τάση κατά μήκος του άξονα x για την εξάρμωση μεταβλητού πυρήνα είναι

$$\sigma_{xy}(x,0) = \frac{\mu b_x}{2\pi(1-\nu)} \frac{x}{x^2 + \rho^2} \quad (2.40)$$

Αυτή η έκφραση εξαλείφει την κλασσική ιδιομορφία r^{-1} στο κέντρο της εξάρμωσης και παράγει πεπερασμένα αποτελέσματα σε όλο το πεδίο. Μακριά από τον πυρήνα, παρουσιάζει φυσικά αναμενόμενη συμπεριφορά αναπαράγοντας το πεδίο μίας εξάρμωσης

τύπου Volterra. Η διατμητική τάση μηδενίζεται στο κέντρο της εξάρμωσης, παρουσιάζει μέγιστες (κατά απόλυτο) τιμές στα σημεία $x = \pm\rho$ και μηδενίζεται πάλι καθώς το $x \rightarrow \pm\infty$. Η ασυνέχεια της μετατόπισης κατά μήκος του άξονα x είναι

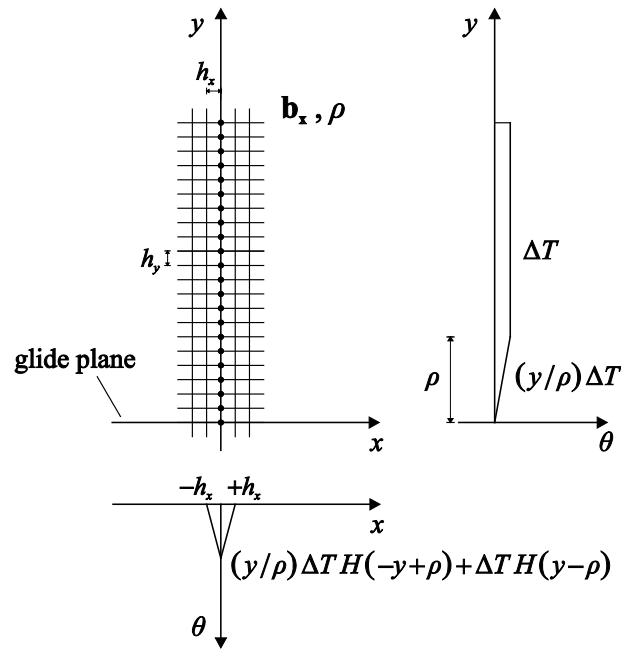
$$\delta(x) = \frac{b}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\rho}\right). \quad (2.41)$$

Από την Εξ. (2.41), το μήκος ρ μπορεί να οριστεί ως η απόσταση από το κέντρο της εξάρμωσης μέχρι το σημείο όπου η ασυνέχεια είναι $|\delta(\rho)| = b/4$. Η μέγιστη τιμή της ασυνέχειας στο επίπεδο ολίσθησης (άξονας x) είναι $\delta_{\max} = b/2$, σε άπειρη απόσταση από το κέντρο της εξάρμωσης.

Το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί στην προτεινόμενη μεθοδολογία ανάλυσης εξαρμώσεων επιλέγοντας μία κατάλληλη θερμοκρασιακή κατανομή. Για την περίπτωση της γραμμικά αυξανόμενης μετατόπισης, μία κατανομή μπορεί να είναι η ακόλουθη (Σχ. 2.7)

$$\begin{aligned} \theta &= y \frac{\Delta T}{\rho}, & x &= 0, & 0 \leq y \leq \rho, \\ \theta &= y \frac{\Delta T}{\rho} \frac{x+h_x}{h_x}, & -h_x \leq x \leq 0, & 0 \leq y \leq \rho, \\ \theta &= y \frac{\Delta T}{\rho} \frac{h_x-x}{h_x}, & 0 \leq x \leq h_x, & 0 \leq y \leq \rho, \\ \theta &= \Delta T, & x &= 0, & y \geq \rho, \\ \theta &= \Delta T \frac{x+h_x}{h_x}, & -h_x \leq x \leq 0, & y \geq \rho, \\ \theta &= \Delta T \frac{h_x-x}{h_x}, & 0 \leq x \leq h_x, & y \geq \rho, \\ \theta &= 0, & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{aligned} \quad (2.42)$$

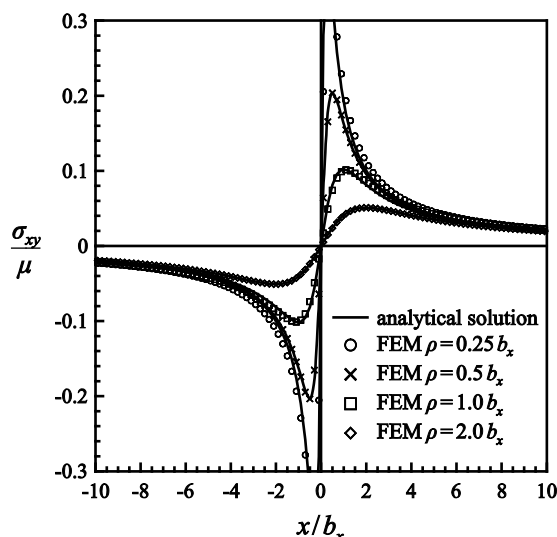
Η κατανομή αυτή δημιουργεί μία συστοιχία εξαρμώσεων μεταβλητού πλάτους (dislocation wall) στο διάστημα $0 \leq y \leq \rho$.



Σχ. 2.7. Παράδειγμα θερμοκρασιακής κατανομής για την περιγραφή επαπτομενικής εξάρμωσης μεταβλητού πυρήνα σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων ($H(x)$ είναι η βηματική συνάρτηση Heaviside).

Η κατανομή της διατμητικής τάσης σ_{xy} κατά μήκος του άξονα x για εξαρμώσεις μεταβλητού πυρήνα διαφορετικού πλάτους ρ σε άπειρο ισότροπο υλικό δίνονται στο Σχ. 2.8. Τα θεωρητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την Εξ. (2.40) απεικονίζονται με συνεχείς γραμμές ενώ οι αριθμητικές τιμές από την επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία με τα αντίστοιχα σύμβολα. Η αριθμητική λύση προσεγγίζει ικανοποιητικά την θεωρητική έκφραση των Lubarda and Markenscoff (2007) και οι μέγιστες τιμές της διατμητικής τάσης επαληθεύονται. Σημειώνουμε πως πειραματικές παρατηρήσεις αποδεικνύουν ότι εξαρμώσεις με ευρύτερους πυρήνες συναντώνται σε μαλακότερα μέταλλα (Vitek, 1992).

Το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα παράγει μία φραγμένη έκφραση για την παραμορφωσιακή ενέργεια της εξάρμωσης ενώ και οι αντίστοιχες εκφράσεις για την τάση Peierls και την κατανομή των μετατοπίσεων στον εξαρμωμένο κρύσταλλο μπορούν να συγκριθούν επιτυχώς με το μοντέλο Peierls-Nabarro και με προσομοιώσεις μοριακής δυναμικής (ιδέ π.χ. Aslanides and Pontikis, 1998). Χρησιμοποιώντας το μοντέλο αυτό, προκύπτουν μη ιδιόμορφες λύσεις σε προβλήματα αλληλεπίδρασης εξαρμώσεων ή μερικών (partial) εξαρμώσεων με ελεύθερα σύνορα (Gars and Markenscoff, 2012).



Σχ. 2.8. Σύγκριση θεωρητικής λύσης (συνεχής γραμμή) με αριθμητικά αποτελέσματα (σύμβολα) για την διατμητική τάση σ_{xy} εξαρμώσεων μεταβλητού πυρήνα διαφορετικού πλάτους ρ σε άπειρο ισότροπο σώμα.

Εναλλακτικά, μη ιδιόμορφες λύσεις εξαρμώσεων προκύπτουν χρησιμοποιώντας γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου. Στη θεωρία βαθμίδας τροπής, οι [Lazar and Maugin \(2005\)](#) παρουσίασαν τις λύσεις για επίπεδες και αντι-επίπεδες εξαρμώσεις. Στον Πίνακα 2.2 καταγράφονται οι μέγιστες τιμές των ανηγμένων με την ποσότητα $\mu b_x / 2\pi(1-\nu)$ τασικών πεδίων που προβλέπει το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα και η θεωρία βαθμίδας τροπής για μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση σε άπειρο ισότροπο χωρίο. Η σταθερά κ έχει διαστάσεις $[\text{μήκος}]^{-1}$. Παρατηρούμε πως συγκρίνοντας, για παράδειγμα, την μέγιστη διατμητική τάση που καθορίζει την κίνηση των εξαρμώσεων μπορεί να υπάρξει σύνδεση ενός μοντέλου κλασσικής ελαστικότητας εφοδιασμένου με ένα γεωμετρικό μήκος, με ένα μοντέλο θεωρίας ανωτέρου βαθμού.

Πίνακας 2.2. Σύγκριση των μέγιστων τιμών των ανηγμένων με την ποσότητα $\mu b_x / 2\pi(1-\nu)$ τάσεων που προβλέπει το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα ([Lubarda and Markenscoff, 2007](#)) και η θεωρία βαθμίδας τροπής ([Lazar and Maugin, 2005](#)) για μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση σε άπειρο ισότροπο χωρίο.

Μοντέλο μεταβλητού πυρήνα		Θεωρία βαθμίδας τροπής	
Μέγιστη τιμή	Θέση	Μέγιστη τιμή	Θέση
$ \sigma_{xx}(0, y) = 2/\rho$	$ y = 0$	$ \sigma_{xx}(0, y) \approx 0.546\kappa$	$ y \approx 0.996\kappa^{-1}$
$ \sigma_{yy}(0, y) = 1/4\rho$	$ y = \rho$	$ \sigma_{yy}(0, y) \approx 0.260\kappa$	$ y \approx 1.494\kappa^{-1}$
$ \sigma_{xy}(x, 0) = 1/2\rho$	$ x = \rho$	$ \sigma_{xy}(x, 0) \approx 0.260\kappa$	$ x \approx 1.494\kappa^{-1}$

2.3 Εφαρμογές

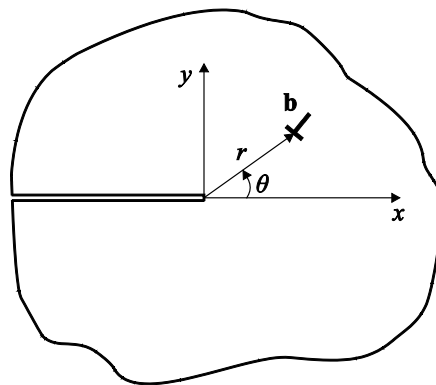
Σε αυτή την ενότητα διερευνάται η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθοδολογίας με την επίλυση εφαρμογών για τις οποίες αναλυτικές λύσεις είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία. Σε όλες τις περιπτώσεις ελέγχονται οι υπάρχουσες λύσεις και συμπληρώνονται με νέα αποτελέσματα. Τα προβλήματα που παρουσιάζονται επιλέχθηκαν ώστε να τονιστεί η ευκολία εφαρμογής της μεθόδου σε διαφορετικές καταστάσεις όπως ανισοτροπία, ανομοιογένειες και συστοιχίες εξαρμώσεων.

2.3.1 Αλληλεπίδραση επίπεδης εξάρμωσης με ημιάπειρη ρωγμή

Θεωρούμε μία ημιάπειρη ρωγμή και μία επίπεδη εξάρμωση τυχαίου προσανατολισμού σε μία απόσταση r από το άκρο της ρωγμής, σε ένα γραμμικά ελαστικό και ισότροπο σώμα (Σχ. 2.9). Η έκφραση της ακτινικής δύναμης Peach-Koehler ανάμεσα στο άκρο της ρωγμής και την εξάρμωση δίνεται από τη σχέση (Rice and Thomson, 1974)

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)r} \quad (2.43)$$

όπου μ είναι το μέτρο διάτμησης και ν ο λόγος Poisson.



Σχ. 2.9. Ημιάπειρη ρωγμή αλληλεπιδρά με διακριτή επίπεδη εξάρμωση.

Αυτή η έκφραση είναι ίδια με την περίπτωση μίας εξάρμωσης κοντά σε ένα ελεύθερο σύνορο με το διάνυσμα Burgers της να είναι παράλληλο στο σύνορο (στην περίπτωση

αυτή r είναι η κάθετη απόσταση από το σύνορο). Επίσης, παρατηρούμε πως η ακτινική δύναμη είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ που ορίζεται από τη θέση της εξάρμωσης.

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύτηκε για την περίπτωση ανισότροπου υλικού από τον [Asaro \(1975\)](#) υπό την μορφή

$$F_r = -\frac{E^\infty}{r}, \quad (2.44)$$

όπου E^∞ είναι ο συντελεστής ενέργειας μίας εξάρμωσης σε άπειρο σώμα απουσία της ρωγμής. Τότε, χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.39) προκύπτει η σχέση

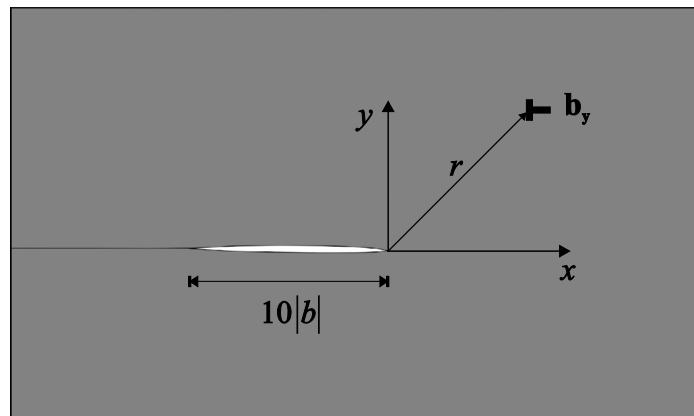
$$E^\infty = M_d = K_{ij} b_i b_j. \quad (2.45)$$

Στην ισότροπη περίπτωση η Εξ. (2.45) ταυτίζεται με την Εξ. (2.35) και η Εξ. (2.44) απλοποιείται στην Εξ. (2.43) αφού ισχύουν οι σχέσεις

$$K_{11} = K_{22} = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}, \quad K_{12} = K_{21} = 0. \quad (2.46)$$

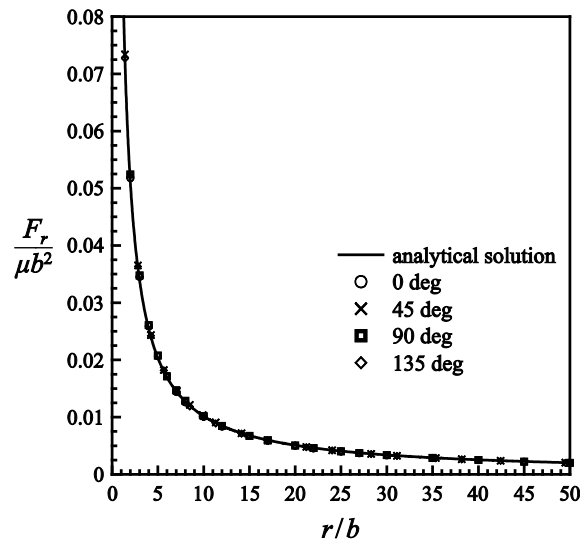
Όσον αφορά την μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία, δημιουργούμε ένα ορθογώνιο χωρίο, το οποίο αποτελείται από περίπου 70.000 4-κομβικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης χρησιμοποιώντας το λογισμικό [ABAQUS Standard \(2012\)](#). Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η ιδιομορφία τύπου $r^{-1/2}$ που εμφανίζεται στις τροπές καθώς το $r \rightarrow 0$, ένας εκλεπτυσμένος κάρναβος από τετραγωνικά (quadratic) στοιχεία δημιουργείται στην περιοχή αυτή. Το μήκος της ρωγμής είναι πρακτικά άπειρο ($800|b|$) και η μέση διάσταση του στοιχείου ισούται με $h = |b|$. Για ορισμένες θέσεις της εξάρμωσης, το αντίστοιχο πεδίο μετατοπίσεων γίνεται αφύσικο καθώς παρατηρείται αλληλοδιείσδυση των χειλέων της ρωγμής. Συνεπώς, πρέπει να γίνει μοντελοποίηση με στοιχεία επαφής κατά μήκος των χειλέων ώστε να προκύψει μία φυσικά αναμενόμενη απόκριση. Το κλείσιμο των ρωγμών είναι σημαντικό ζήτημα για την κόπωση των υλικών ([Cherepanov, 1988](#)) και υπάρχουν αρκετές αναφορές στη βιβλιογραφία σε αυτό ([Loyola de Oliveira and Michot, 1994](#); [Riemelmoser and Pippan, 1999](#); [Ju and Oh, 2008](#)). Έχει παρατηρηθεί ότι η ρωγμή

παραμένει ανοιχτή όταν αλληλεπιδρά με ‘αμβλύνουσες’ εξαρμώσεις (blunting dislocations) (εξαρμώσεις των οποίων το επίπεδο ολίσθησης διασταυρώνεται με το επίπεδο της ρωγμής στο άκρο της) ενώ αναμένεται απομακρυσμένο κλείσιμο της ρωγμής για ‘ταράζουσες’ εξαρμώσεις (wake dislocations) (εξαρμώσεις των οποίων το επίπεδο ολίσθησης διασταυρώνεται με το επίπεδο της ρωγμής πέραν του άκρου της). Στο Σχ. 2.10 απεικονίζεται το πεδίο μετατοπίσεων λόγω αλληλεπίδρασης μίας ημιάπειρης ρωγμής με μία διακριτή ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ η οποία βρίσκεται σε απόσταση $r = 10|b|$ και γωνία $\theta = 45\text{deg}$ από το άκρο της ρωγμής, σε ένα ισότροπο υλικό (βολφράμιο). Παρατηρούμε κλείσιμο της ρωγμής σε απόσταση $r = 10|b|$ από το άκρο.



Σχ. 2.10. Πεδίο μετατοπίσεων λόγω αλληλεπίδρασης μίας ημιάπειρης ρωγμής με μία διακριτή ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ σε απόσταση $r = 10|b|$ και γωνία $\theta = 45\text{deg}$ από το άκρο της ρωγμής.

Στη συνέχεια, επιλύουμε το πρόβλημα τοποθετώντας την εξάρμωση σε διάφορες αποστάσεις και γωνίες και υπολογίζουμε την δύναμη αλληλεπίδρασης με βάση την μεθοδολογία υπολογισμού του ολοκληρώματος J . Σημειώνουμε πως ο δρόμος ολοκλήρωσης μπορεί είτε να περιβάλλει την εξάρμωση είτε το άκρο της ρωγμής. Οι [Tada et al. \(2000\)](#) παρέχουν τη λύση του υπό εξέταση προβλήματος σε μορφή μιγαδικής τασικής συνάρτησης Westergaard. Αποδεικνύεται εύκολα πως η τιμή του ολοκληρώματος J στο άκρο της ρωγμής δίνεται από την Εξ. (2.43). Τα αποτελέσματα της δύναμης αλληλεπίδρασης δίνονται στο Σχ. 2.11. Τα αριθμητικά αποτελέσματα (σύμβολα) συμφωνούν επαρκώς με την θεωρητική πρόβλεψη (συνεχής γραμμή) επιβεβαιώνοντας την ανεξαρτησία της δύναμης αλληλεπίδρασης από την γωνία θ . Η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι πάντοτε ελκτική σε αυτό το πρόβλημα. Η μοντελοποίηση με στοιχεία επαφής δεν επηρεάζει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J .

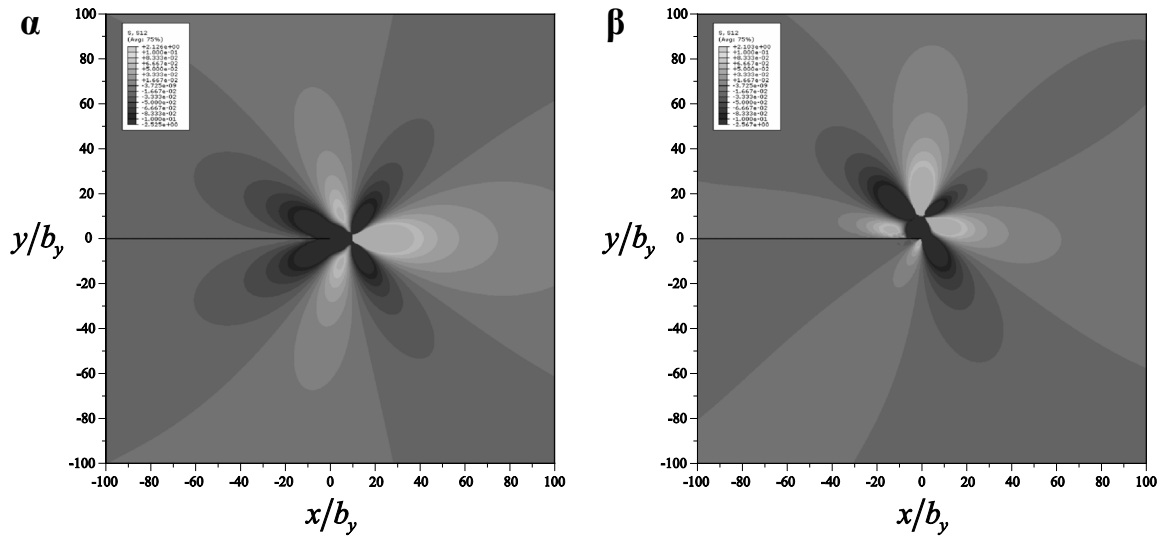


Σχ. 2.11. Σύγκριση θεωρητικής λύσης (συνεχής γραμμή) με αριθμητικά αποτελέσματα (σύμβολα) για την δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ ημιάπειρης ρωγμής και ορθής εξάρμωσης για διάφορες τιμές της απόστασης r και της γωνίας θ σε ένα ισότροπο υλικό.

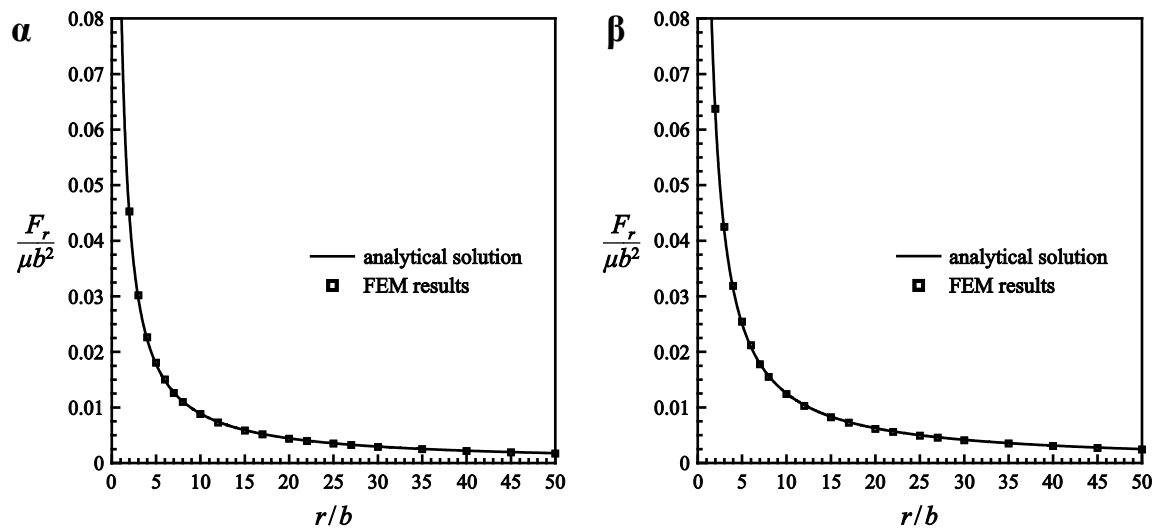
Στο Σχ. 2.12 παρουσιάζουμε το διατμητικό πεδίο σ_{xy} λόγω αλληλεπίδρασης με μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ σε γωνία $\theta = 0 \text{ deg}$ και απόσταση $r = 10|b|$ και μία διακριτή ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ σε γωνία $\theta = 90 \text{ deg}$ και ίδια απόσταση. Όπως αναμενόταν, τα τασικά πεδία έχουν διαφοροποιηθεί σημαντικά σε σύγκριση με τις λύσεις άπειρου χωρίου, λόγω της παρουσίας της ρωγμής.

Ακολούθως, μελετούμε την επιρροή της ανισοτροπίας στο πρόβλημα. Επιλύουμε αριθμητικά το πρόβλημα για μία εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ σε γωνία $\theta = 0 \text{ deg}$ και διάφορες αποστάσεις r . Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της κινούσας δύναμης είναι χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2.44) και (2.45) και την μεθοδολογία υπολογισμού του ολοκληρώματος M που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 2.2.2. Οι τιμές του ολοκληρώματος M για τους δύο κρυστάλλους είναι $M_{num,Cu} = 0.671b^2 \times 10^{10} N$ για τον χαλκό και $M_{num,Cr} = 1.265b^2 \times 10^{10} N$ για το χρώμιο.

Στο Σχ. 2.13 φαίνεται η διακύμανση της ακτινικής δύναμης για τους δύο ανισότροπους κρυστάλλους. Τα αποτελέσματα με βάση το ολοκλήρωμα M απεικονίζονται με συνεχή γραμμή ('analytical solution') και η λύση με χρήση του ολοκληρώματος J με τα τετράγωνα σύμβολα. Παρατηρούμε πως η ανισοτροπία επηρεάζει σημαντικά το πρόβλημα καθώς η ελκτική δύναμη είναι περίπου 40% μεγαλύτερη στο χρώμιο σε σχέση με τον χαλκό.

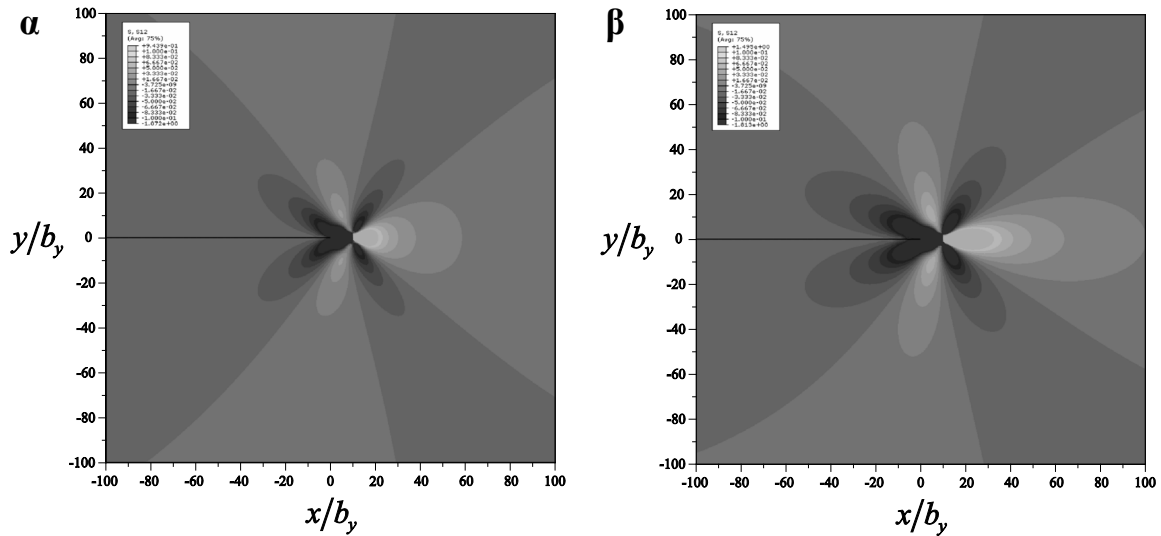


Σχ. 2.12. **α)** Ανηγγμένο τασικό πεδίο σ_{xy}/b λόγω αλληλεπίδρασης με μία ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ σε γωνία $\theta = 0 \text{ deg}$. **β)** Το αντίστοιχο πεδίο για μία εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ σε γωνία $\theta = 90 \text{ deg}$. Η απόσταση από το άκρο της ρωγμής είναι $r = 10|b|$ και το εύρος των ισοτασικών $(-0.10 \div 0.10) \text{ Pa/m}$.



Σχ. 2.13. Σύγκριση της ανηγμένης δύναμης αλληλεπίδρασης με βάση τη μεθοδολογία του ολοκληρώματος M (συνεχής γραμμή) και του ολοκληρώματος J (σύμβολα) για μία εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ σε γωνία $\theta = 0 \text{ deg}$ και διάφορες αποστάσεις από το άκρο της ρωγμής, σε ένα σώμα από **(α)** χαλκό και **(β)** χρώμιο.

Επισημαίνεται, εξάλλου, ότι οι δύο τακτικές υπολογισμού δίνουν συγκλίνοντα αποτελέσματα. Η μεθοδολογία του ολοκληρώματος M είναι όχι μόνο ένας τρόπος ελέγχου της ακρίβειας της λύσης αλλά στην ουσία μία αποδοτική μέθοδος για ανισότροπα υλικά. Τα αντίστοιχα τασικά πεδία (Σχ. 2.14) διαφέρουν σημαντικά συγκρινόμενα με την ισότροπη περίπτωση (Σχ. 2.12), τόσο σε σχήμα όσο και σε ένταση.



Σχ. 2.14. α) Ανηγγμένο τασικό πεδίο σ_{xy}/b λόγω αλληλεπίδρασης με μία ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ σε γωνία $\theta = 0 \text{ deg}$, σε ένα σώμα από **(α)** χαλκό και **(β)** χρώμιο **β)**. Η απόσταση από το άκρο της ρωγμής είναι $r = 10|b|$ και το εύρος των ισοτασικών $(-0.10 \div 0.10) \text{ Pa/m}$.

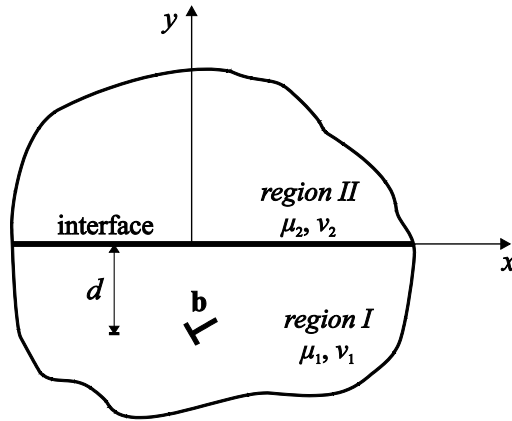
2.3.2 Επίπεδη εξάρμωση κοντά σε διεπιφάνεια δύο υλικών

Θεωρούμε ένα σώμα αποτελούμενο από δύο υλικά, μοντελοποιημένο ως δύο ισότροποι ημίχωροι πλήρως προσκολλημένοι, και μία επίπεδη εξάρμωση σε τυχαία γωνία και απόσταση d από την διεπιφάνεια των δύο υλικών. Ο ημίχωρος στον οποίο βρίσκεται η εξάρμωση συμβολίζεται ως περιοχή I με μέτρο διάτμησης και λόγο Poisson (μ_1, ν_1) ενώ το υπόλοιπο σώμα ως περιοχή II με παραμέτρους (μ_2, ν_2) (Σχ. 2.15).

Αυτό το πρόβλημα μελετήθηκε αρχικά από τον [Head \(1953\)](#). Έπειτα, οι [Dundurs and Sendekyj \(1965\)](#) έδωσαν την έκφραση της κινούσας δύναμης που ασκείται στην εξάρμωση. Οι ελαστικές σταθερές του προβλήματος μειώνονται εισάγοντας τις παραμέτρους του Dundurs

$$\alpha = \frac{(\mu_2/\mu_1)(\kappa_1 + 1) - (\kappa_2 + 1)}{(\mu_2/\mu_1)(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}, \quad \beta = \frac{(\mu_2/\mu_1)(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1)}{(\mu_2/\mu_1)(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}, \quad (2.47)$$

όπου $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$.



Σχ. 2.15. Εξάρμωση σε σώμα δύο υλικών.

Η δύναμη Peach-Koehler δίνεται συναρτήσει των παραμέτρων α και β από την έκφραση

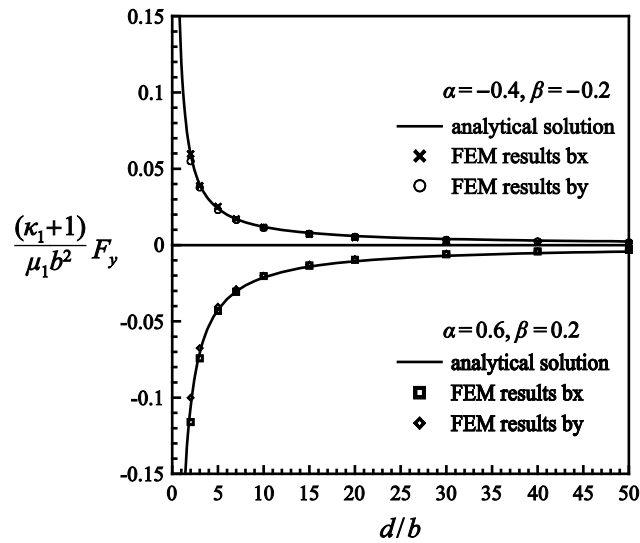
$$F_y = -\frac{\mu_1 b^2 (\alpha + \beta^2)}{\pi (\kappa_1 + 1) (1 - \beta^2) d} \quad (2.48)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως η δύναμη δίνεται από την ίδια έκφραση ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του διανύσματος Burgers της εξάρμωσης ενώ το πρόσημό της καθορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων α και β . Ο Dundurs (1969) παρουσίασε μία κατάταξη από συνδυασμούς υλικών στο επίπεδο $\alpha - \beta$ και τα αντίστοιχα κριτήρια για έλξη ή απώθηση της εξάρμωσης από τη διεπιφάνεια.

Επιλέγουμε δύο συνδυασμούς υλικών οι οποίοι αναμένεται να παράγουν απωθητική και ελκτική δύναμη στην εξάρμωση όταν αυτή βρίσκεται στην περιοχή I , ($\alpha = 0.6, \beta = 0.2$) και ($\alpha = -0.4, \beta = -0.2$) αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε δύο διατάξεις εξαρμώσεων, μία εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ και μία ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ ώστε να ελέγξουμε την ανεξαρτησία της δύναμης από τον προσανατολισμό της εξάρμωσης. Χρησιμοποιούμε έναν ορθοκανονικό κάρναβο αποτελούμενο από περίπου 60.000 4-κομβικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης, χωρίς ιδιαίτερη διακριτοποίηση στην περιοχή της εξάρμωσης ή της διεπιφάνειας.

Στο Σχ. 2.16 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τους δύο συνδυασμούς υλικών και τους δύο προσανατολισμούς εξαρμώσεων που θεωρήσαμε. Οι θετικές τιμές αντιστοιχούν σε έλξη της εξάρμωσης προς την διεπιφάνεια και οι αρνητικές σε απώθησή

της. Σε όλες τις περιπτώσεις, τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκλίνουν στη θεωρητική λύση και τα πρόσημα της δύναμης επαληθεύονται.

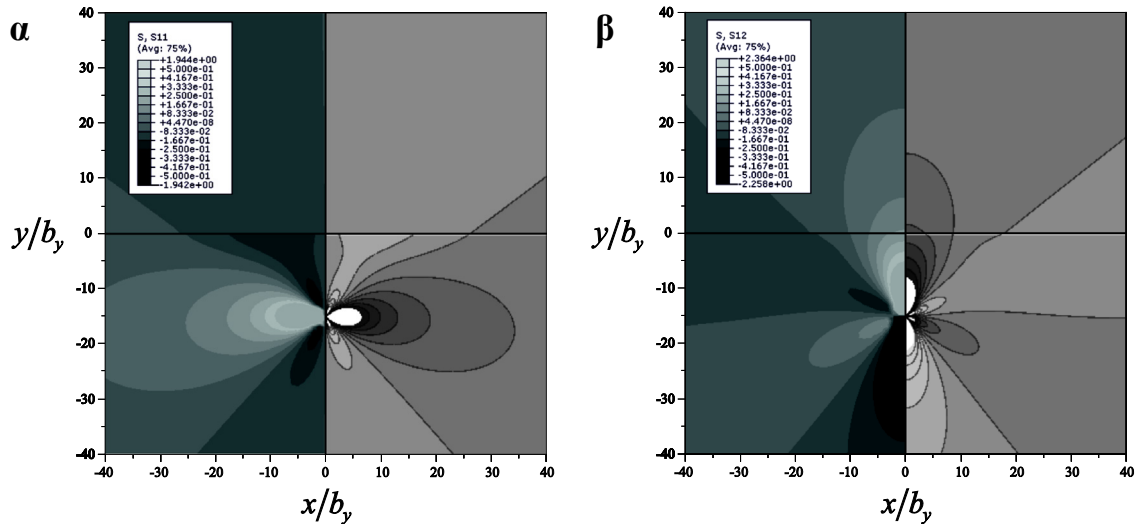


Σχ. 2.16. Σύγκριση θεωρητικής λύσης (συνεχής γραμμή) με αριθμητικά αποτελέσματα (σύμβολα) για την δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ διεπιφάνειας και εξάρμωσης για δύο συνδυασμούς υλικών και δύο προσανατολισμούς εξαρμώσεων.

Τα τασικά πεδία του προβλήματος παρουσιάστηκαν από τον Lubarda (1997). Θεωρούμε μία διακριτή ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ σε απόσταση $d = 15|b|$ από τη διεπιφάνεια και συνδυασμό υλικών ($\alpha = -0.4, \beta = -0.2$). Στο Σχ. 2.17 συγκρίνουμε τα πεδία της ορθής τάσης σ_{xx} και της διατμητικής τάσης σ_{xy} που προκύπτουν από την προτεινόμενη μεθοδολογία ως προς αυτά της αναλυτικής λύσης. Στο αριστερό τμήμα κάθε εικόνας απεικονίζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα ενώ στο δεξί η ακριβής λύση. Η ορθή τάση σ_{xx} παρουσιάζει μία ασυνέχεια κατά μήκος της διεπιφάνειας όπως αναμένεται ενώ η διατμητική τάση σ_{xy} είναι συνεχής μεταξύ των δύο περιοχών. Παρατηρούμε, επίσης, μία αναντιστοιχία σε κάποιες ισοτασικές καμπύλες, η οποία εξαλείφεται όσο απομακρυνόμαστε από την διεπιφάνεια. Επομένως, στην περιοχή αυτή πρέπει να δημιουργηθεί ένας εκλεπτυσμένος κάρναβος για να βελτιωθεί η ακρίβεια όταν η εξάρμωση βρίσκεται πολύ κοντά στην διεπιφάνεια.

Τέλος, είναι εύκολο ναδειχθεί ότι η Εξ. (2.48) απλοποιείται στην έκφραση της δύναμης που ασκείται σε μία εξάρμωση που βρίσκεται κοντά σε ένα ελεύθερο σύνορο, θεωρώντας την περιοχή II κενή υλικού. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση ισχύει ($\alpha = -1.0, \beta = -0.5$) και η έκφραση για την δύναμη δίνεται από την Εξ. (2.43). Η άλλη

οριακή κατάσταση είναι μίας εξάρμωσης σε άπειρο ισότροπο σώμα όπου ισχύει ($\alpha = \beta = 0$) και η δύναμη αλληλεπίδρασης μηδενίζεται, όπως αναμένεται.



Σχ. 2.17. Ανηγμένο τασικό πεδίο **(α)** σ_{xx}/b και **(β)** σ_{xy}/b μίας ορθής εξάρμωσης $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ κοντά σε διεπιφάνεια δύο υλικών με συνδυασμό ($\alpha = -0.4, \beta = -0.2$). Η απόσταση από την διεπιφάνεια είναι $d = 15|b|$ και το εύρος των ισοτασικών $(-0.50 \div 0.50)$ Pa/m. Στο αριστερό τμήμα των εικόνων απεικονίζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα ενώ στο δεξί η ακριβής λύση.

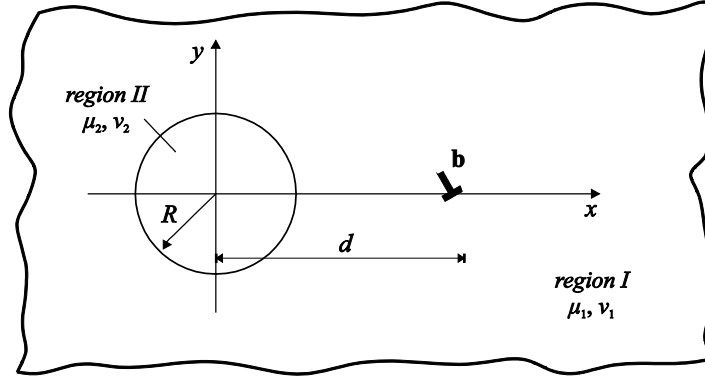
2.3.3 Αλληλεπίδραση επίπεδης εξάρμωσης με κυκλικό έγκλεισμα

Η μελέτη της αλληλεπίδρασης εξαρμώσεων και ανομοιογενειών είναι σημαντική για την κατανόηση των φαινομένων ενίσχυσης (strengthening) ή σκλήρυνσης (hardening) των υλικών. Εγκλείσματα όπως άτομα σε ενδοπλεγματική θέση (interstitial atoms), πλεγματικά κενά (vacancies), συσσωματώματα (precipitates) ή ίνες σε μία στερεά μήτρα επηρεάζουν τις μηχανικές ιδιότητες των υλικών όταν αλληλεπιδρούν με εξαρμώσεις.

Σε αυτή την παράγραφο μελετάται η αλληλεπίδραση μίας εξάρμωσης τυχαίου προσανατολισμού με ένα κυκλικό έγκλεισμα (inclusion). Διαχωρίζουμε δύο ισότροπες περιοχές στο σώμα, την μήτρα (περιοχή I) με μέτρο διάτμησης και λόγο Poisson (μ_1, ν_1) και το έγκλεισμα ακτίνας R (περιοχή II) με παραμέτρους (μ_2, ν_2). Η εξάρμωση βρίσκεται στην περιοχή I σε απόσταση d από το κέντρο του εγκλείσματος (Σχ. 2.18).

Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε από τους [Dundurs and Mura \(1964\)](#) θεωρώντας ότι το έγκλεισμα είναι πλήρως συνδεδεμένο με την μήτρα, δηλαδή υποθέτοντας συνέχεια των μετατοπίσεων και των τάσεων κατά μήκος του κυκλικού συνόρου (adhering interface).

Αργότερα, οι [Dundurs and Gangadharan \(1969\)](#) εξέτασαν εκ νέου το πρόβλημα θεωρώντας μία ολισθαίνουσα διεπιφάνεια κατά μήκος του κυκλικού συνόρου όπου δεν μεταφέρονται εφαπτομενικές τάσεις μεταξύ των δύο περιοχών, ενώ οι κάθετες μετατοπίσεις και τάσεις είναι συνεχείς κατά μήκος του κυκλικού συνόρου.



Σχ. 2.18. Εξάρμωση κοντά σε κυκλικό έγκλεισμα.

Στην παρούσα εργασία μελετούμε το πρόβλημα του πλήρως συνδεδεμένου με την μήτρα εγκλείσματος. Η δύναμη που ασκείται στην εξάρμωση λόγω της παρουσίας του εγκλείσματος εξαρτάται στον προσανατολισμό του διανύσματος Burgers. Για διακριτές εφαπτομενικές $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ και ορθές $\mathbf{b} = (0, b_y)$ εξαρμώσεις ισχύουν αντίστοιχα οι ακόλουθες σχέσεις ([Dundurs, 1969](#))

$$F_x(b_x) = \frac{2\mu_1 b_x^2}{\pi(\kappa_1 + 1)(1 - \beta^2)R} \left\{ \frac{\alpha + \beta^2}{\varepsilon(\varepsilon^2 - 1)} + [\alpha + \beta^2 - 2(1 + \alpha)\beta] \frac{1}{\varepsilon^3} \right\}, \quad (2.49)$$

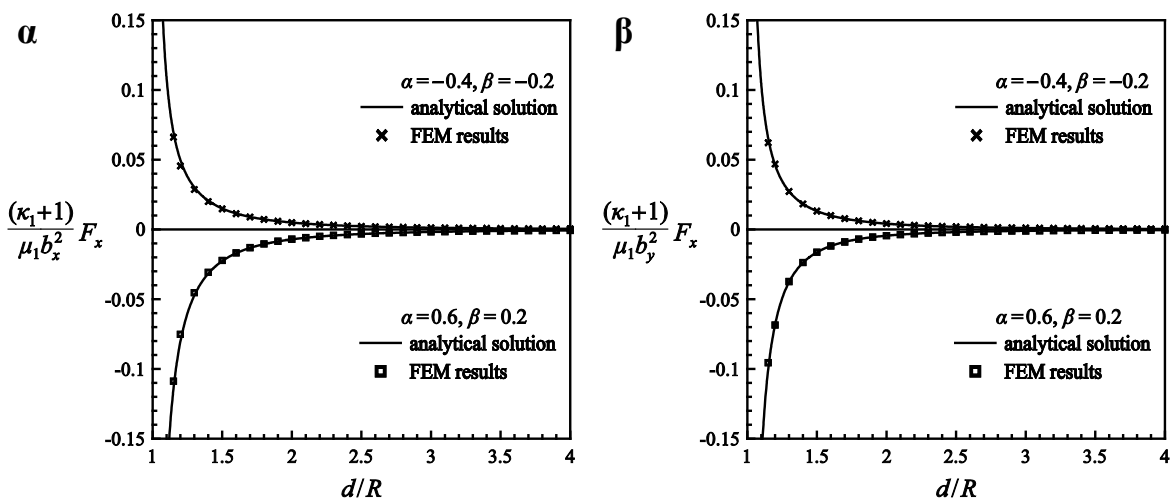
$$F_x(b_y) = \frac{2\mu_1 b_y^2}{\pi(\kappa_1 + 1)(1 - \beta^2)R} \left\{ \frac{\alpha + \beta^2}{\varepsilon(\varepsilon^2 - 1)} - \frac{1 + \alpha}{2} \left[1 - \beta - \frac{(1 - \alpha)(1 + \beta)}{1 + \alpha - 2\beta} \right] \frac{1}{\varepsilon^3} \right\},$$

όπου $\varepsilon = d/R$ και οι παράμετροι α και β δίνονται από την Εξ. (2.47).

Το πρόσημο της δύναμης εξαρτάται πάλι από τις παραμέτρους των υλικών των δύο περιοχών. Για ορισμένους συνδυασμούς υλικών, υπάρχει κάποια απόσταση στην οποία η δύναμη που ασκείται στην εξάρμωση μηδενίζεται. Σύμφωνα με τη γεωμετρία που έχουμε υιοθετήσει, θετικές τιμές δύναμης αντιστοιχούν σε απόθεση της εξάρμωσης από το έγκλεισμα ενώ οι αρνητικές τιμές σε έλξη προς αυτό. Από την Εξ. (2.49) μπορεί να προκύψει η Εξ. (2.48) ως οριακή κατάσταση.

Επιλέγουμε τους ίδιους συνδυασμούς παραμέτρων με την Παράγραφο 2.3.2, $(\alpha = 0.6, \beta = 0.2)$ και $(\alpha = -0.4, \beta = -0.2)$, οι οποίοι αναμένεται να παράγουν απωθητική και ελκτική δύναμη στην εξάρμωση αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε δύο διατάξεις εξαρμώσεων, μία εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ και μία ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$. Ο ορθοκανονικός κάνναβος σε αυτή την περίπτωση αποτελείται από περίπου 40.000 4-κομβικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα δίνονται στο Σχ. 2.19α για την περίπτωση της εφαπτομενικής εξάρμωσης και στο Σχ. 2.19β για την περίπτωση της ορθής εξάρμωσης. Οι θετικές τιμές της δύναμης αντιπροσωπεύουν έλξη της εξάρμωσης προς το έγκλεισμα και οι αρνητικές απώθηση. Η εκτίμηση του προσήμου και η εξάρτηση της έντασης της δύναμης από τον προσανατολισμό της εξάρμωσης επιβεβαιώνονται. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρείται μεγάλη ακρίβεια μεταξύ αριθμητικών αποτελεσμάτων και αναλυτικής λύσης.



Σχ. 2.19. Σύγκριση θεωρητικής λύσης (συνεχής γραμμή) με αριθμητικά αποτελέσματα (σύμβολα) για την δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ εγκλείσματος και (α) εφαπτομενικής ή (β) ορθής εξάρμωσης για δύο συνδυασμούς υλικών.

Επιπλέον, είναι χρήσιμη για ζητήματα μικροαντοχής η ανάλυση των τασικών πεδίων του προβλήματος. Τα πεδία αυτά, παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις για διαφορετικούς συνδυασμούς υλικών. Η αλληλεπίδραση μεταξύ μίας εξάρμωσης και ενός εγκλείσματος μπορεί να οδηγήσει σε θραύση του εγκλείσματος ή σε αποκόλληση του εγκλείσματος από τη μήτρα. Αυτά τα φαινόμενα θα προκαλέσουν απώλεια αντοχής ή

ακαμψίας του σώματος. Από την άλλη, η παρουσία εγκλεισμάτων μπορεί να λειτουργήσει ως μηχανισμός 'κλειδώματος' των εξαρμώσεων.

2.3.4 Αλληλεπίδραση επίπεδης εξάρμωσης με κυκλική οπή

Μία οριακή κατάσταση του προβλήματος που μελετήθηκε στην Παράγραφο 2.3.3 είναι το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας εξάρμωσης με μία κυκλική οπή (void). Η δύναμη που ασκείται στην εξάρμωση προκύπτει από την Εξ. (2.49) θέτοντας τις τιμές ($\alpha = -1.0, \beta = -0.5$)

$$F_x(b_x) = -\frac{\mu_1 b_x^2}{\pi(\kappa_1 + 1)R} \frac{2(2\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon^3(\varepsilon^2 - 1)}, \quad F_x(b_y) = -\frac{\mu_1 b_y^2}{\pi(\kappa_1 + 1)R} \frac{2}{\varepsilon(\varepsilon^2 - 1)}. \quad (2.50)$$

Μία προφανής παρατήρηση είναι πως η δύναμη που ασκείται στην εξάρμωση είναι πάντα ελκτική ενώ διατηρείται η εξάρτησή της από τον προσανατολισμό της εξάρμωσης.

Στη γενικότερη περίπτωση, η εξάρμωση μπορεί να βρίσκεται σε μία τυχαία γωνία από την οπή. Θεωρούμε μία διακριτή ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ σε μία γωνία φ και απόσταση d από το κέντρο της οπής ακτίνας R (Σχ. 2.20). Ο Kienzler (2007) μελέτησε το πρόβλημα και παρουσίασε τις εκφράσεις για το ολοκλήρωμα J γύρω από την εξάρμωση, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις συνιστώσες της κινούσας δύναμης

$$J_x = -\frac{E^* b^2 \cos \varphi}{4\pi R \varepsilon^3} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 - 1} + 1 + 2 \sin^2 \varphi \right), \quad (2.51)$$

$$J_y = -\frac{E^* b^2 \sin \varphi}{4\pi R \varepsilon^3} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 - 1} + 2 \sin^2 \varphi \right).$$

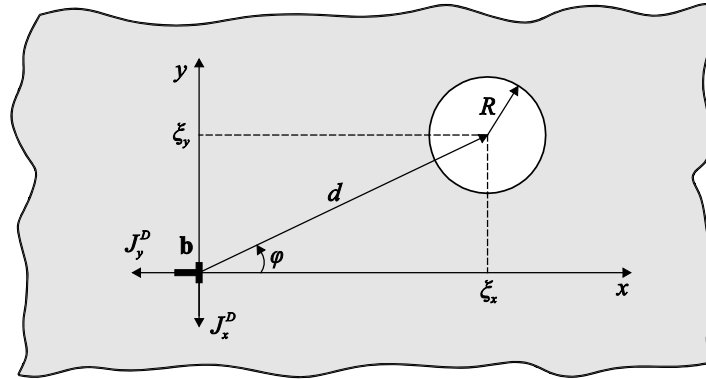
όπου $E^* = E/(1 - \nu^2)$, E είναι το μέτρο ελαστικότητας, ν ο λόγος Poisson και $\varepsilon = d/R$.

Αντίστοιχα, η έκφραση για το ολοκλήρωμα M επιλέγοντας ως σημείο αναφοράς το κέντρο της οπής είναι

$$M = +\frac{E^* b^2}{4\pi \varepsilon^2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 - 1} + 1 + \sin^2 \varphi \right). \quad (2.52)$$

Αν J_i^D είναι οι συνιστώσες του ολοκληρώματος J γύρω από την εξάρμωση, ισχύει ότι

$$M + \xi_x J_x^D + \xi_y J_y^D = 0 \quad . \quad (2.53)$$



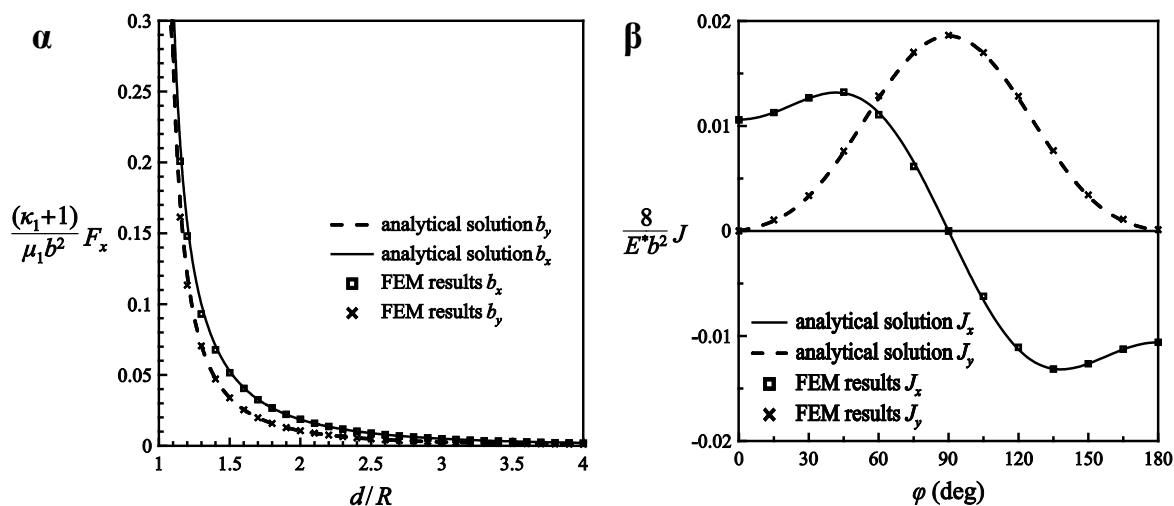
Σχ. 2.20. Εξάρμωση κοντά σε κυκλική οπή.

Για τη μελέτη αυτής της γεωμετρίας, χρησιμοποιούμε τον κάρναβο της παραγράφου 2.3.3 θεωρώντας αρχικά τις περιπτώσεις μίας εφαπτομενικής εξάρμωσης $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ και μίας ορθής εξάρμωσης $\mathbf{b} = (0, b_y)$ σε γωνία $\varphi = 0 \text{ deg}$ σε ένα ισότροπο υλικό (βολφράμιο). Λόγω συμμετρίας, οι προηγούμενες περιπτώσεις είναι ισοδύναμες με μίας ορθής εξάρμωσης $\mathbf{b} = (0, b_y)$ και μίας εφαπτομενικής εξάρμωσης $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ σε γωνία $\varphi = 90 \text{ deg}$ αντίστοιχα. Έπειτα, εξετάζουμε την διακύμανση του ολοκληρώματος J για μία ορθή εξάρμωσης $\mathbf{b} = (0, b_y)$ σε διάφορες γωνίες φ και σταθερή απόσταση $d = 2R$.

Στο Σχ. 2.21α απεικονίζονται τα αποτελέσματα της αρχικής διερεύνησης. Η συνεχής γραμμή αντιπροσωπεύει την αναλυτική λύση για μία εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ και η διακεκομμένη την αναλυτική λύση για μία ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ ενώ τα αριθμητικά αποτελέσματα εμφανίζονται με σύμβολα. Παρατηρούμε ότι η δύναμη είναι πάντα ελκτική όπως αναμένεται και τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκλίνουν στην αναλυτική λύση. Η δύναμη είναι ισχυρότερη σε σχέση με το πρόβλημα του εγκλείσματος ενώ υπάρχει σημαντική απόσταση στο αποτέλεσμα για τους δύο προσανατολισμούς της εξάρμωσης.

Στο Σχ. 2.21β φαίνεται η διακύμανση της κινούσας δύναμη ως προς την γωνία φ . Τα αποτελέσματα απεικονίζονται με βάση την σύμβαση προσήμου, θετικές τιμές

αντιστοιχούν σε έλξη της εξάρμωσης και αρνητικές σε απώθησή της. Η ακρίβεια της μεθόδου κρίνεται ικανοποιητική και σε αυτή την περίπτωση. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της δύναμης σημειώνεται για $\varphi = 90\text{deg}$ και αντιστοιχεί σε εφαπτομενική κίνηση της εξάρμωσης προς την οπή. Τα αποτελέσματα για το ολοκλήρωμα M επιβεβαιώνουν την Εξ. (2.52) λαμβάνοντας υπόψιν την Εξ. (2.53).



Σχ. 2.21. **α)** Σύγκριση θεωρητικής λύσης (γραμμές) με αριθμητικά αποτελέσματα (σύμβολα) για την δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ εγκλείσματος και οπής για δύο προσανατολισμούς εξάρμωσης. **β)** Σύγκριση θεωρητικής λύσης (γραμμές) με αριθμητικά αποτελέσματα (σύμβολα) για την διακύμανση του ολοκληρώματος J ως προς τη γωνία φ .

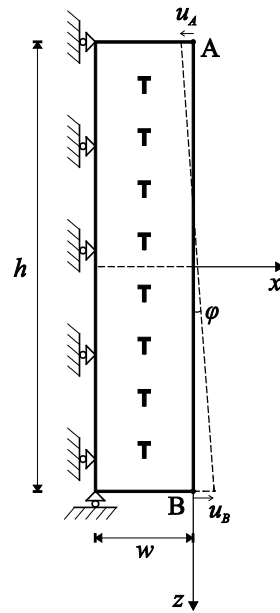
2.3.5 Συστοιχίες εξαρμώσεων σε μικροδοκούς

Η πλαστική παραμόρφωση των κρυστάλλων οδηγεί σε καμπύλες κρυσταλλικές επιφάνειες ολίσθησης λόγω της μεγάλης κλίμακας κατανομής παραμενουσών τάσεων. Η κρυσταλλική καμπυλότητα μπορεί να αναπαραχθεί σε δύο διαστάσεις από συγκεκριμένες χωρικές κατανομές εξαρμώσεων ιδίου προσήμου (Nye, 1953).

Θεωρούμε μία μικροδοκό ύψους h και πλάτους w που περιέχει έναν αριθμό n_d εφαπτομενικών εξαρμώσεων υπό συνθήκες καθαρής κάμψης (Σχ. 2.22). Το παραμορφωμένο σχήμα της δεξιάς παρειάς θεωρείται μία ευθεία γραμμή. Η γωνία στροφής φ δίνεται από τη σχέση

$$\tan \varphi = \frac{u_B - u_A}{h}, \quad (2.54)$$

όπου u_A και u_B είναι οι μετατοπίσεις στο δεξί πάνω και κάτω άκρο της δοκού αντίστοιχα.



Σχ. 2.22. Μικροδοκός που περιέχει n_d εφαπτομενικές εξαρμώσεις.

Η ακτίνα καμπυλότητας R και η καμπυλότητα κ εκφράζονται ως

$$R = \frac{w + \frac{(u_A + u_B)}{2}}{\tan \varphi}, \quad \kappa = \frac{1}{R}. \quad (2.55)$$

Η πυκνότητα εξαρμώσεων ανά μονάδα επιφάνειας ορίζεται ως

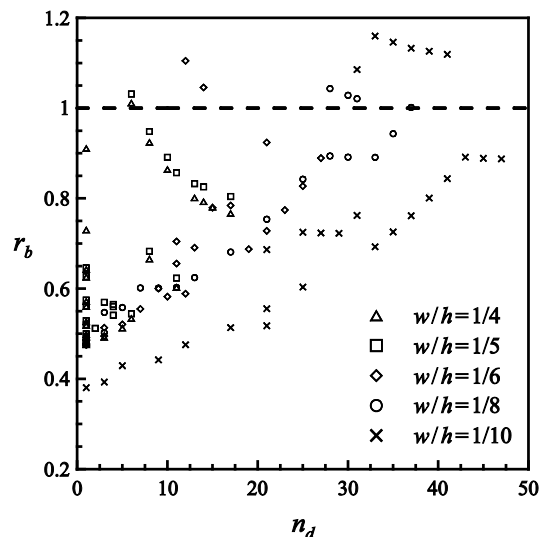
$$\rho_G = \frac{n_d}{wh}. \quad (2.56)$$

Ο συντελεστής κάμψης r_b δίνεται από την σχέση

$$r_b = \frac{\rho_G b}{\kappa}. \quad (2.57)$$

Χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μεθοδολογία, μελετούμε την διακύμανση του συντελεστή κάμψης ως προς τον λόγο των διαστάσεων της μικροδοκού w/h και τον

αριθμό των εξαρμώσεων n_d . Όσον αφορά την διακριτοποίηση, δημιουργούμε έναν ορθοκανονικό κάνναβο αποτελούμενο από περίπου 25.000 4-κομβικά στοιχεία. Τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής δίνονται στο Σχ. 2.23.



Σχ. 2.23. Διακύμανση του συντελεστή κάμψης r_b ως προς τον αριθμό των εξαρμώσεων n_d και τις διαστάσεις της μικροδοκού.

Παρατηρούμε πως ακόμη και για σταθερές τιμές του λόγου w/h , υπάρχει διασπορά των τιμών του συντελεστή κάμψης, οφειλόμενη στην χωρική κατανομή των εξαρμώσεων. Οι υψηλότερες τιμές αντιστοιχούν σε κατανομές εξαρμώσεων τοποθετημένες κοντά στο πάνω ή κάτω άκρο της μικροδοκού. Γενικά, ο συντελεστής κάμψης αυξάνει όσο ο λόγος των διαστάσεων της δοκού μειώνεται. Τελικά, για μεγάλες πυκνότητες εξαρμώσεων, τα αποτελέσματα προσεγγίζουν στην τιμή του Nye, $r_b = 1$.

2.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μία μεθοδολογία ανάλυσης επίπεδων εξαρμώσεων μέσω της περιγραφής ενός θερμοελαστικού προβλήματος σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων. Ο υπολογισμός της κινούσας δύναμης Peach-Koehler συνδέθηκε με τα συντηρητικά ολοκληρώματα J και M . Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος M , προτάθηκε μία αριθμητική μέθοδος η οποία μπορεί να λειτουργήσει ως κριτήριο σύγκλισης της λύσης των πεπερασμένων στοιχείων. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε το

μοντέλο του μεταβλητού πυρήνα ως τρόπος εξάλειψης των ιδιομορφιών της λύσης. Η ακρίβεια της μεθοδολογίας μελετήθηκε σε προβλήματα με γνωστές αναλυτικές λύσεις, οι οποίες ελέγχθηκαν και συμπληρώθηκαν με νέα αποτελέσματα. Η σύγκλιση μεταξύ θεωρητικών λύσεων και αριθμητικών αποτελεσμάτων ήταν ικανοποιητική σε όλες τις θεωρούμενες γεωμετρίες. Το υπολογιστικό κόστος της μεθοδολογίας είναι χαμηλό και οι χρόνοι επίλυσης αρκετά σύντομοι. Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να επεκταθεί για την μελέτη δυναμικών προβλημάτων εξαρμώσεων ενώ έχει αναπτυχθεί ανάλογη μεθοδολογία για την εξέταση βρόχων εξαρμώσεων (dislocation loops) (Baxevanakis and Giannakopoulos, 2010).



Κεφάλαιο 3

Θεωρία Τάσεων Ζεύγους

3.1 Γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου

Προτού επικεντρωθούμε στην θεωρία τάσεων ζεύγους, επιχειρούμε μία περιεκτική παρουσίαση των γενικευμένων θεωριών συνεχούς μέσου για ελαστικά υλικά και των σχέσεων μεταξύ τους. Αναλυτικότερες παρουσιάσεις μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των [Vardoulakis and Sulem \(1995\)](#), [Eringen \(1999\)](#), [Altenbach and Eremeyev \(2013\)](#), και [Maugin \(2013\)](#).

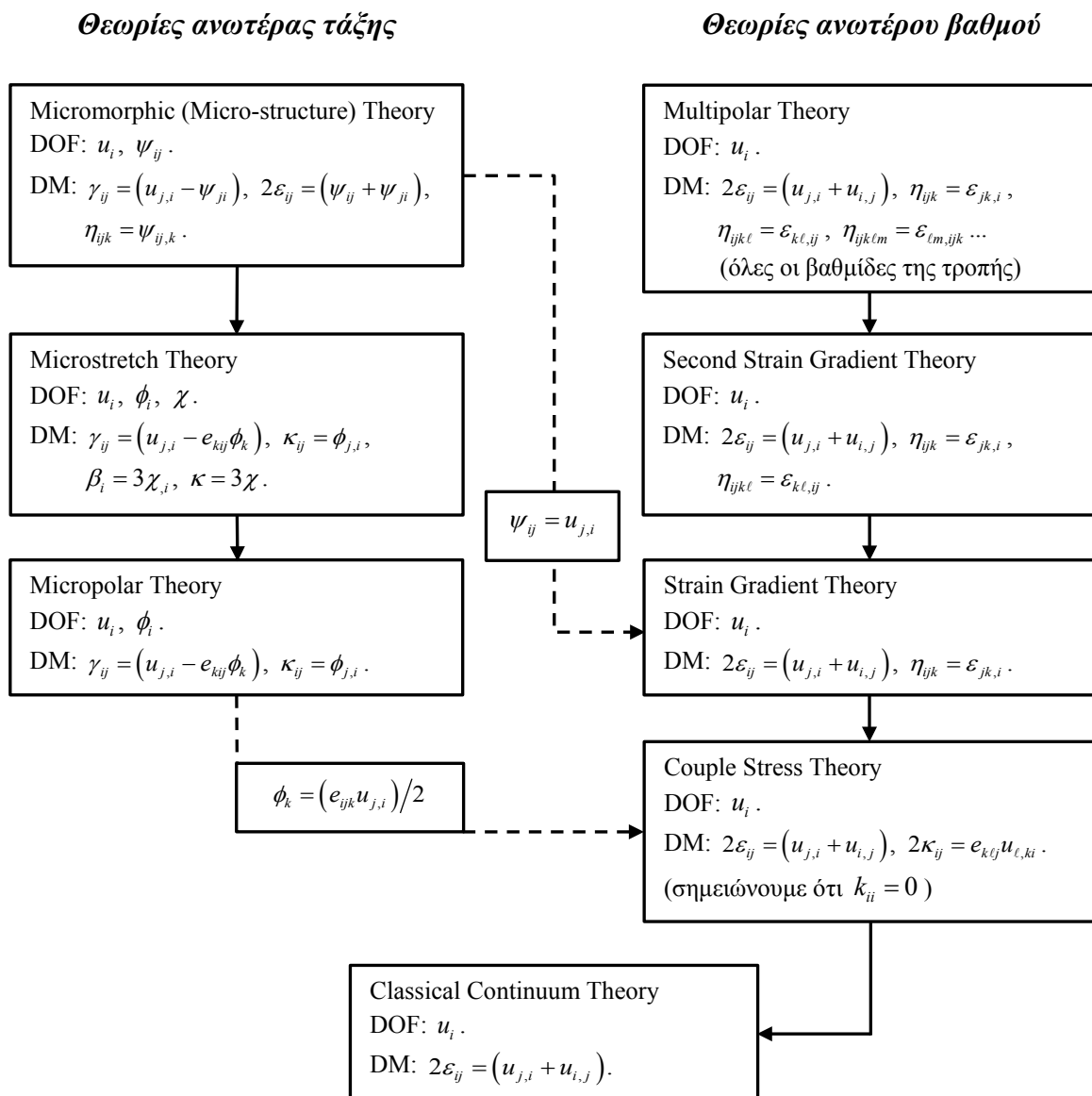
Μία προφανής γενίκευση της κλασσικής θεωρίας συνεχούς μέσου είναι η υπόθεση ότι δύο υλικά σωματίδια αλληλεπιδρούν όχι μέσω μίας δύναμης αλλά μέσω ενός ζεύγους δυνάμεων. Απαρχή αυτής της γενίκευσης μπορεί να θεωρηθεί η θεωρία δοκού Euler-Bernoulli, όπου τα διανύσματα μετατόπισης και στροφής είναι ανεξάρτητες κινηματικές ποσότητες ενώ οι ελκυστές τάσεων και τάσεων ζεύγους (ροπής) εμφανίζονται ως ανεξάρτητα εσωτερικά φορτία. Η ιδέα ανεξάρτητων τάσεων ζεύγους σε ένα ελαστικό συνεχές μέσο μελετήθηκε από διάφορους επιστήμονες τον 19^ο αιώνα ([MacCullagh, 1839](#); [Lord Kelvin, 1882, 1884, 1890](#); [Voigt, 1887](#)). Το 1909, οι αδερφοί E. και F. Cosserat ανέπτυξαν μία μη γραμμική θεωρία ελαστικότητας ([Cosserat and Cosserat, 1909](#)). Ειδικότερα, εισήγαγαν μία απολύτως στερεά τριάδα (directors) διανυσμάτων σε κάθε υλικό σημείο του συνεχούς η οποία μπορεί να στρέφεται ανεξάρτητα από την τοπική στροφή του μέσου κατά την παραμόρφωση. Πλέον, κάθε υλικό σημείο έχει έξι βαθμούς ελευθερίας (3 μεταφορικούς και 3 στροφικούς). Με αυτό τον τρόπο εισάγεται η επίδραση των τάσεων ζεύγους κατά την παραμόρφωση ενός ελαστικού μέσου σε ένα συνεχές τύπου Cosserat.

Στην εργασία των αδερφών Cosserat δεν δόθηκε η δέουσα προσοχή για αρκετό χρονικό διάστημα. Στις αρχές της δεκαετίας του 1960, η θεωρία ελαστικότητας με τάσεις ζεύγους γίνεται ξανά αντικείμενο έρευνας και θεωρίες τύπου Cosserat μελετώνται

ανεξάρτητα από διάφορους συγγραφείς. Μεταξύ άλλων, οι Grioli (1960), Rajagopal (1960), Aero and Kuvshinskii (1961), Eringen (1962), Mindlin and Tiersten (1962), και Koiter (1964) εξέτασαν μία ειδική περίπτωση της θεωρίας Cosserat στην οποία η στροφή της στερεάς τριάδας δεν είναι μία ανεξάρτητη κινηματική παράμετρος αλλά ορίζεται συναρτησίως της βαθμίδας των μετατοπίσεων. Η θεωρία αυτή είναι γνωστή ως θεωρία τάσεων ζεύγους (couple stress theory). Στην θεωρία τάσεων ζεύγους μόνο η βαθμίδα του διανύσματος στροφής εισάγεται στην έκφραση της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας, δηλαδή μόνο οκτώ από τις δεκαοκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες της πρώτης βαθμίδας της τροπής. Περισσότερες λεπτομέρειες για τη θεωρία αυτή θα δοθούν στις επόμενες ενότητες του παρόντος κεφαλαίου. Στη συνέχεια, όλες οι ανεξάρτητες συνιστώσες της πρώτης βαθμίδας της τροπής εισήχθησαν στην πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας σε μη γραμμική μορφή από τον Toupin (1962, 1964) και σε γραμμική μορφή από τον Mindlin (1964). Η εκδοχή αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως θεωρία βαθμίδας τροπής (strain gradient theory). Οι Green and Rivlin (1964) έθεσαν τις βάσεις μίας γενικής περίπτωσης στην οποία περιέχονται όλες οι βαθμίδες ανωτέρας τάξης του τανυστή της τροπής, η οποία αναφέρεται ως πολυπολική θεωρία (multipolar theory). Ο Mindlin (1965) διατύπωσε, ως ειδική περίπτωση της πολυπολικής θεωρίας, μία θεωρία στην οποία συμπεριλαμβάνονται τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη βαθμίδα του τανυστή της τροπής, γνωστή ως θεωρία δεύτερης βαθμίδας τροπής (second strain gradient theory). Όλες οι παραπάνω θεωρίες όπου η παραμορφωσιακή ενέργεια συνδέεται με βαθμίδες τροπής αναφέρονται στην βιβλιογραφία με τον όρο ‘θεωρίες ανωτέρου βαθμού’ (higher grade theories) (δεξιά στήλη Σχ. 3.1).

Ένας εναλλακτικός τρόπος επέκτασης της κλασσικής ελαστικότητας ώστε να συμπεριληφθεί η επίδραση των παραμορφώσεων της μικροδομής του υλικού είναι μέσω της εισαγωγής πρόσθετων βαθμών ελευθερίας στο συνεχές μέσο. Αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας ορίζονται ως ανεξάρτητοι από τους συνήθεις βαθμούς ελευθερίας του κλασσικού συνεχούς μέσου (πεδίο μετατοπίσεων). Θεωρίες αυτού του τύπου είναι γνωστές ως ‘θεωρίες ανωτέρας τάξης’ (higher order theories) (αριστερή στήλη Σχ. 3.1). Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται η μη γραμμική μικρομορφική θεωρία (micromorphic theory) που αναπτύχθηκε από τους Eringen and Şuhubi (1964) και η γραμμική μικροδομική θεωρία (microstructure theory) του Mindlin (1964). Η γραμμική εκδοχή της μικρομορφικής θεωρίας (Eringen, 1999) ταυτίζεται με την μικροδομική θεωρία του Mindlin. Στην μικρομορφική θεωρία, κάθε υλικό σημείο διαθέτει τρεις παραμορφώσιμες στερεές τριάδες (directors) που εισάγουν εννέα πρόσθετους βαθμούς

ελευθερίας, ψ_{ij} , οι οποίοι είναι αδιάστατες ποσότητες όπως η τροπή. Ουσιαστικά, εισάγεται στο συνεχές μέσο ένα ‘μικρο-στοιχείο’ το οποίο μπορεί να περιστρέφεται και να μετατοπίζεται ανεξάρτητα από την τοπική παραμόρφωση του ‘μακρο-στοιχείου’ (material particle) κατά Mindlin.



DOF, βαθμός ελευθερίας; DM, μέτρο παραμόρφωσης; ψ_{ij} , τανυστής βαθμών ελευθερίας για την παραμορφώσιμη τριάδα (μικρο-στοιχείο); u_i , διάνυσμα μετατόπισης; ϕ_i , διάνυσμα στροφής των στερεών τριάδων; χ , βαθμός ελευθερίας για την τάση των στερεών τριάδων.

Σχ. 3.1. Γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου και οι σχέσεις μεταξύ τους (Tekoğlu and Onck, 2008).

Δύο ειδικές περιπτώσεις της μικρομορφικής θεωρίας είναι η θεωρία μικρο-τάνυσης (microstretch theory) (Eringen, 1971, 1990) και η μικροπολική θεωρία (micropolar theory) (Eringen, 1966). Στην θεωρία μικρο-τάνυσης εισάγονται τέσσερις πρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας: τρεις για την στροφή (ϕ_i) και ένας για την τάνυση (χ) των στερεών τριάδων. Στην περίπτωση του μικροπολικού συνεχούς μέσου, οι τριάδες είναι απολύτως στέρεες και εισάγονται τρεις στροφικοί βαθμοί ελευθερίας (ϕ_i) πρόσθετοι στους τρεις μεταφορικούς της κλασσικής θεωρίας. Αν οι στερεές τριάδες θεωρηθούν πλήρως συζευγμένες με το κάθε υλικό σημείο του συνεχούς, οι στροφικοί βαθμοί ελευθερίας της μικροπολικής θεωρίας ταυτίζονται με τις κλασσικές στροφές $\phi_k = e_{ijk} u_{j,i} / 2$ (όπου e_{ijk} είναι το σύμβολο εναλλαγής Levi-Civita) και η μικροπολική θεωρία ανάγεται στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Επιπλέον, η θεωρία τάσεων ζεύγους είναι μία ειδική περίπτωση της θεωρίας βαθμίδας τροπής. Μία ακόμη σύνδεση μεταξύ των θεωριών ανωτέρας τάξης και ανωτέρου βαθμού είναι η αναγωγή της μικρομορφικής θεωρίας στην θεωρία βαθμίδας τροπής όταν οι πρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας ψ_{ij} ορίζονται ίση με την βαθμίδα της μετατόπισης $u_{i,j}$.

Οι παραπάνω γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου και οι σχέσεις μεταξύ τους συνοψίζονται στο Σχ. 3.1.

3.2 Βασικές εξισώσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους

Η θεωρία τάσεων ζεύγους αναφέρεται στη βιβλιογραφία με διάφορα ονόματα, όπως ‘Cosserat theory with constrained rotation’ (Toupin, 1964), ‘Couple stress theory’ (Koiter, 1964), ‘Indeterminate couple stress theory’ (Eringen, 1968), ‘Cosserat pseudo-continuum’ (Nowacki, 1986). Όπως ήδη αναφέρθηκε, η αυστηρή θεμελίωση της θεωρίας αυτής έγινε τη δεκαετία του 1960 με τις εργασίες των Toupin (1962), Mindlin and Tiersten (1962) και Koiter (1964). Ενδιαφέρουσες παρουσιάσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους μπορούν επίσης να βρεθούν στις εργασίες των Aero and Kuvshinskii (1961), Pal'mov (1964), Muki and Sternberg (1965). Επιπλέον, στην εργασία των Georgiadis and Velgaki (2003) παρουσιάζεται μία πιο πληρέστερη περιγραφή της θεωρίας καθώς περιλαμβάνονται φαινόμενα αδράνειας και μικρο-αδράνειας, επισημαίνοντας έτσι τη μικροδομική προέλευση της θεώρησης τάσεων ζεύγους.

Οι βασικές υποθέσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους είναι οι εξής: (i) κάθε υλικό σημείο έχει τρεις ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας (τρεις συνιστώσες μετατόπισης), (ii) η Αρχή των Τάσεων (Stress Principle) των Euler-Cauchy επεκτείνεται λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη ελκυστών τάσεων ζεύγους (ροπής), (iii) η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας εξαρτάται όχι μόνο από την τροπή αλλά και από την βαθμίδα της στροφής. Απουσία αδρανειακών φαινομένων, οι νόμοι διατήρησης της ορμής και της στροφορμής για έναν όγκο ελέγχου CV με επιφάνεια S γράφονται ως (Mindlin and Tiersten, 1962; Georgiadis and Velgaki, 2003)

$$\int_S t_p^{(n)} dS + \int_{CV} f_p d(CV) = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_S (x_q t_k^{(n)} e_{pqk} + M_p^{(n)}) dS + \int_{CV} (x_q f_k e_{pqk} + C_p) d(CV) = 0, \quad (3.2)$$

όπου $t_p^{(n)}$ είναι η επιφανειακή δύναμη ανά μονάδα επιφανείας (ελκυστής των τάσεων), f_p είναι οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου, $M_p^{(n)}$ είναι η επιφανειακή ροπή ανά μονάδα επιφανείας, C_p είναι οι καθολικές ροπές ανά μονάδα όγκου και x_q είναι οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης κάθε υλικού στοιχείου με στοιχειώδη όγκο $d(CV)$.

Οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους ορίζονται λαμβάνοντας υπόψη την ισορροπία ενός στοιχειώδους υλικού τετραέδρου (τετράεδρο Cauchy) και χρησιμοποιώντας τις Εξ. (3.1) και (3.2) αντίστοιχα (ιδέ π.χ. Aero and Kuvshinskii, 1961; Malvern, 1969). Ο ασύμμετρος τανυστής των τάσεων σ_{pq} ορίζεται ως

$$t_p^{(n)} = \sigma_{qp} n_q, \quad (3.3)$$

και ο επίσης ασύμμετρος τανυστής των τάσεων ζεύγους μ_{pq} ως

$$M_p^{(n)} = \mu_{qp} n_q. \quad (3.4)$$

Θεωρώντας την ισορροπία μίας λεπτής λωρίδας (thin slice) του υλικού, μπορούν εύκολα να αποδειχθούν οι σχέσεις $\mathbf{t}^{(n)} = -\mathbf{t}^{(n)}$ και $\mathbf{M}^{(n)} = -\mathbf{M}^{(n)}$, όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο σε ένα στοιχείο επιφανείας (είτε στο σύνορο, είτε σε οποιαδήποτε

ιδεατή επιφάνεια στο εσωτερικό του σώματος) διάνυσμα με φορά προς τα έξω (ιδέ π.χ. Jaunzemis, 1967). Οι τάσεις ζεύγους μ_{pq} έχουν διαστάσεις [δύναμη][μήκος]⁻¹. Επιπλέον, η τάση σ_{pq} χωρίζεται σε ένα συμμετρικό και ένα αντισυμμετρικό τμήμα ως

$$\sigma_{pq} = \tau_{pq} + \alpha_{pq} , \quad (3.5)$$

όπου $\tau_{pq} = \tau_{qp}$ και $\alpha_{pq} = -\alpha_{qp}$, ενώ ο τανυστής των τάσεων ζεύγους μ_{pq} χωρίζεται σε ένα αποκλίνον $\mu_{pq}^{(D)}$ και ένα σφαιρικό τμήμα $\mu_{pq}^{(S)}$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\mu_{pq} = m_{pq} + \frac{1}{3} \delta_{pq} \mu_{kk} \quad (3.6)$$

όπου $m_{pq} \equiv \mu_{pq}^{(D)}$, $\mu_{pq}^{(S)} \equiv (1/3) \delta_{pq} \mu_{kk}$, και δ_{pq} είναι το δέλτα του Kronecker.

Σύμφωνα με τους ανωτέρω ορισμούς και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green-Gauss προκύπτουν οι εξισώσεις ισοροπίας δυνάμεων και ροπών

$$\partial_p \sigma_{pq} + f_q = 0 , \quad (3.7)$$

$$\partial_p \mu_{pq} + \sigma_{kp} e_{pqk} + C_q = 0 , \quad (3.8)$$

όπου $\partial_p () \equiv \partial () / \partial x_p$.

Οι παραπάνω εξισώσεις με χρήση της Εξ. (3.5) γράφονται ως

$$\partial_p \tau_{pq} + \partial_p \alpha_{pq} + f_q = 0 , \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2} \partial_p \mu_{pk} e_{pqk} + \alpha_{pq} + \frac{1}{2} C_k e_{pqk} = 0 . \quad (3.10)$$

Τελικά, συνδυάζοντας τις Εξ. (3.9) και (3.10) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\text{curl} \left\{ \text{div} \left[(1/3) \delta_{pq} \mu_{kk} \right] \right\} = 0$, προκύπτει η παρακάτω ενιαία εξίσωση ισοροπίας

$$\partial_p \tau_{pq} - \frac{1}{2} \partial_p \partial_r m_{rk} e_{pqk} + f_q - \frac{1}{2} \partial_p C_k e_{pqk} = 0 . \quad (3.11)$$

Για την κινηματική περιγραφή του σώματος ορίζονται, στα πλαίσια μίας γεωμετρικά γραμμικής θεωρίας, οι ακόλουθες ποσότητες

$$\omega_q = \frac{1}{2} e_{qpk} u_{k,p} , \quad (3.12)$$

$$\kappa_{pq} = \omega_{q,p} , \quad (3.13)$$

όπου ω_q είναι το διάνυσμα στροφής και κ_{pq} είναι ο τανυστής καμπυλότητας (curvature or torsion-flexure tensor). Ο τανυστής αυτός έχει διαστάσεις [μήκος]⁻¹ και ορίζεται είτε ως η βαθμίδα της στροφής είτε ως ο στροβιλισμός της τροπής

$$\kappa_{pq} = (1/2) e_{qkl} \partial_p \partial_k u_l \equiv e_{qkl} \partial_k \varepsilon_{pl} . \quad (3.14)$$

Η Εξ. (3.14) αποτελεί την εξίσωση συμβιβαστού μεταξύ τροπών και καμπυλοτήτων. Επιπλέον, η ταυτότητα $\partial_s \kappa_{pq} = \partial_p \partial_s \omega_q = \partial_p \kappa_{sq}$ εκφράζει τις εξισώσεις συμβιβαστού για τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο τανυστής κ_{pq} είναι ασύμμετρος και έχει μόνο οκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες αφού λόγω της αντισυμμετρίας του συμβόλου εναλλαγής ισχύει $\kappa_{pp} = 0$ (traceless tensor). Όσον αφορά τον τανυστή των τροπών, ισχύουν οι συνήθεις εξισώσεις συμβιβαστού κατά Saint Venant (ιδέ π.χ. Barber, 2010).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η αρμόζουσα μεταβολική έκφραση για την θεωρία τάσεων ζεύγους γράφεται ως

$$\int_V \delta W (\varepsilon_{pq}, \partial_p \omega_q) dV = \int_V f_q \delta u_q dV + \int_V C_q \delta \omega_q dV + \int_S t_q^{(n)} \delta u_q dS + \int_S M_q^{(n)} \delta \omega_q dS . \quad (3.15)$$

Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, σε κάθε σημείο μίας λείας συνοριακής επιφάνειας μπορούν να οριστούν τρεις τροποποιημένοι ελκυστές δύναμης και δυο εφαπτομενικοί ελκυστές ροπής (Mindlin and Tiersten, 1962; Koiter, 1964)

$$P_q^{(n)} = \sigma_{pq} n_p - \frac{1}{2} e_{qpr} n_p \partial_r m_{(nn)} \text{ στο } bdy , \quad (3.16)$$

$$R_q^{(n)} = m_{pq}n_p - m_{(nn)}n_q \text{ στο } bdy, \quad (3.17)$$

όπου $m_{(nn)} = n_p n_q m_{pq}$ είναι η κάθετη συνιστώσα του αποκλίνοντος τανυστή τάσεων ζεύγους m_{pq} . Πρέπει να σημειώσουμε πως η ύπαρξη ακμών στη συνοριακή επιφάνεια οδηγεί σε επιπλέον συνοριακές συνθήκες (Koiter, 1964).

Οι τροποποιημένοι ελκυστές δύναμης και ροπής $(P_q^{(n)}, R_q^{(n)})$ σχετίζονται με τους ελκυστές $(t_q^{(n)}, M_q^{(n)})$ σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις

$$P_q^{(n)} = t_q^{(n)} - \frac{1}{2}n_k e_{kpq} \partial_p (M_p^{(n)} n_p), \quad (3.18)$$

$$R_q^{(n)} = M_q^{(n)} - (M_p^{(n)} n_p) n_q. \quad (3.19)$$

Από την Εξ. (3.19) προκύπτει ότι $n_q R_q^{(n)} = 0$, συνεπώς ο ελκυστής ροπής $R_q^{(n)}$ είναι εφαπτόμενος σε κάθε σημείο του συνόρου (δηλαδή, έχει μηδενική κάθετη στο σύνορο συνιστώσα).

Με μία πρώτη ματιά, θα ήταν εύλογη η θεώρηση πως οι επιφανειακοί ελκυστές $t_q^{(n)}$ και $M_q^{(n)}$ μπορούν να ορισθούν ανεξάρτητα σε κάθε σημείο της συνοριακής επιφάνειας του σώματος βάσει των Εξ. (3.3) και (3.4). Ωστόσο, όπως υπέδειξε ο Koiter (1964), ο αριθμός των έξι συνοριακών συνθηκών (τρεις συνιστώσες για τον ελκυστή δύναμης $t_p^{(n)}$ και τρεις για τον ελκυστή ροπής $M_p^{(n)}$) θα ερχόταν σε αντίθεση με τις πέντε γεωμετρικές συνθήκες που μπορούν να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα σημείο του συνόρου. Πράγματι, επειδή στη θεωρία τάσεων ζεύγους το διάνυσμα της στροφής ω_q εξαρτάται από το διάνυσμα της μετατόπισης u_q (όπως φαίνεται στην Εξ. (3.12)), η κάθετη συνιστώσα της στροφής προσδιορίζεται πλήρως από την κατανομή των εφαπτομενικών μετατοπίσεων στο σύνορο. Επομένως, μόνο οι τρεις συνιστώσες της μετατόπισης και οι δυο εφαπτομενικές συνιστώσες της στροφής μπορούν να περιγραφούν ανεξάρτητα στο σύνορο. Αντίστοιχα, μόνο πέντε επιφανειακοί ελκυστές (οι ενεργειακά συζυγείς των παραπάνω κινηματικών μεγεθών) μπορούν να οριστούν σε ένα σημείο μίας λείας συνοριακής επιφάνειας. Οι ελκυστές αυτοί δίνονται στις Εξ. (3.16) και (3.17). Μία ανάλογη κατάσταση συναντάται

στην θεωρία πλακών Kirchhoff, όπου ο αριθμός των συνοριακών συνθηκών σε μία ελεύτερη παρειά της πλάκας μειώνεται από τρεις σε δύο. Αντίθετα, στη μικροπολική θεωρία Cosserat όπου η στροφή είναι πλήρως ανεξάρτητη από το διάνυσμα της μετατόπισης, οι συνοριακές συνθήκες είναι έξι (Nowacki, 1972) και μπορούν άμεσα να εξαχθούν από την ισορροπία του τετραέδρου Cauchy (Εξ. (3.3) και (3.4)).

Όσον αφορά τις καταστατικές εξισώσεις της θεωρίας, στην απλούστερη περίπτωση γραμμικής και ισότροπης καταστατικής συμπεριφοράς, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας λαμβάνει την ακόλουθη τετραγωνική μορφή

$$W = W(\varepsilon_{pq}, \kappa_{pq}) = (1/2)\lambda \varepsilon_{pp} \varepsilon_{qq} + \mu \varepsilon_{pq} \varepsilon_{pq} + 2\eta \kappa_{pq} \kappa_{pq} + 2\eta' \kappa_{pq} \kappa_{qp}, \quad (3.20)$$

η οποία περιλαμβάνει τέσσερις διαφορετικές υλικές σταθερές, τις συνήθεις σταθερές Lamé (λ, μ) με διαστάσεις [δύναμη][μήκος]⁻² και δύο μικροδομικές σταθερές (η, η') που εισάγονται από τη θεωρία τάσεων ζεύγους και έχουν διαστάσεις δύναμης.

Γραμμικές και ισότροπες καταστατικές σχέσεις προκύπτουν από την Εξ. (3.20) μέσω των ακόλουθων μεταβολικών εκφράσεων

$$\tau_{pq} \equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{pq}} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{pq}, \quad (3.21)$$

$$m_{pq} \equiv \frac{\partial W}{\partial \kappa_{pq}} = 4\eta \kappa_{pq} + 4\eta' \kappa_{qp}. \quad (3.22)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις καταστατικές σχέσεις (3.21) και (3.22) στην εξίσωση ισορροπίας (3.11) και χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές σχέσεις (3.12) και (3.13) καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας ως προς τις μετατοπίσεις (απουσία καθολικών δυνάμεων και ροπών) (Muki and Sternberg, 1965)

$$\nabla^2 u_q - \ell^2 \nabla^4 u_q + \partial_q \left[\frac{1}{1-2\nu} u_{p,p} + \ell^2 \nabla^2 (u_{p,p}) \right] = 0, \quad (3.23)$$

όπου $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$ είναι ο λόγος Poisson, $\ell \equiv (\eta/\mu)^{1/2}$ το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού, ∇^2 είναι ο τελεστής Laplace και $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ είναι ο διαρμονικός τελεστής. Οι

παραπάνω εξισώσεις εκφυλίζονται στις εξισώσεις Navier-Cauchy της κλασσικής ελαστικότητας όταν $\ell \rightarrow 0$.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή βαθμίδας $\nabla(\cdot) \equiv \partial_p(\cdot)$ στην Εξ. (3.23) καταλήγουμε στην έκφραση

$$\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) \equiv u_{q,ppp} = 0. \quad (3.24)$$

Παρατηρούμε ότι η συστολή/διαστολή (dilatation) $\varepsilon_{qq} = u_{q,q}$, υπακούει στην ίδια εξίσωση με την κλασσική ελαστικότητα (Koiter, 1964).

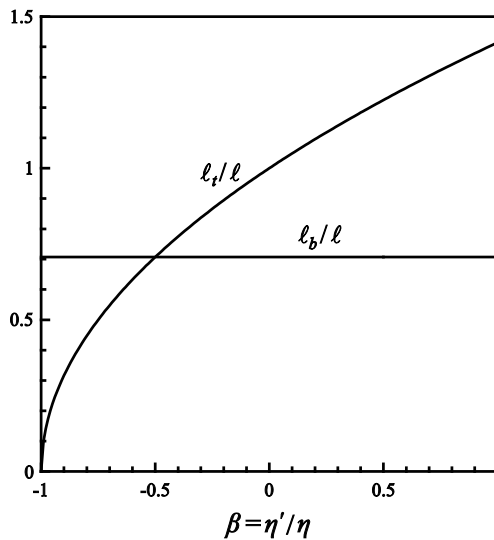
Επιπλέον, τα ακόλουθα σημεία πρέπει να επισημανθούν: (i) Εφόσον ισχύει η σχέση $\kappa_{pp} = 0$, θα ισχύει και η σχέση $m_{pp} = 0$ και συνεπώς ο τανυστής m_{pq} έχει μόνο οκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες. (ii) Το σφαιρικό τμήμα $(1/3)\mu_{kk}$ του τανυστή τάσεων ζεύγους μ_{pq} δεν εμφανίζεται ούτε στην τελική εξίσωση κίνηση ούτε στις καταστατικές εξισώσεις και επομένως η ποσότητα αυτή παραμένει *απροσδιόριστη* (indeterminate) στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Αυτό σημαίνει πως το πεδίο μ_{pq} είναι μοναδικό, εκτός από ένα πρόσθετο αυθαίρετο (σταθερό) και ισότροπο πεδίο τάσεων ζεύγους. (iii) Οι ακόλουθοι περιορισμοί μεταξύ των σταθερών του υλικού πρέπει να ισχύουν ώστε η παραμορφωσιακή ενέργεια να είναι θετικά ορισμένη και να υπάρχει μοναδικότητα της λύσεως (Mindlin and Tiersten, 1962)

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad \eta > 0, \quad -1 < \frac{\eta'}{\eta} < 1. \quad (3.25)$$

Οι σταθερές του υλικού ℓ , η και η' εξαρτώνται από την μικροδομή και μπορούν να προσδιοριστούν πειραματικά. Ο Lakes (1986) πραγματοποίησε πειράματα κάμψης και στρέψης σε πορώδη υλικά και προσδιόρισε, μεταξύ άλλων, τα χαρακτηριστικά μήκη σε κάμψη ℓ_b και στρέψη ℓ_t . Αυτά τα μεγέθη συνδέονται με τις σταθερές της θεωρίας τάσεων ζεύγους μέσω των σχέσεων (Radi, 2008)

$$\ell_b = \frac{\ell}{\sqrt{2}}, \quad \ell_t = \ell \sqrt{1 + \frac{\eta'}{\eta}}. \quad (3.26)$$

Από τα πειραματικά δεδομένα του [Lakes \(1986\)](#) προκύπτουν οι τιμές $\ell_b = 0.032$ mm και $\ell_t = 0.065$ mm για έναν κυψελοειδή αφρό που αποτελείται από κοίλες μικροφουσαλίδες γυαλιού ενσωματωμένες σε μία εποξειδική μήτρα και οι τιμές $\ell_b = 0.327$ mm και $\ell_t = 0.620$ mm για έναν υψηλής πυκνότητας άκαμπτο αφρό πολυουρεθάνης. Αυτά τα δεδομένα δίνουν με βάση τις Εξ. (3.26) τις τιμές $\ell = 0.045$ mm και $\beta = \eta'/\eta = 1$ για το πρώτο υλικό και $\ell = 0.462$ mm και $\beta = 0.797$ για το δεύτερο. Η μεταβολή των χαρακτηριστικών μηκών κάμψης και στρέψης απεικονίζεται στο Σχ. 3.2. Στην οριακή τιμή $\beta = -1$ παρατηρείται εξάλειψη του χαρακτηριστικού μήκους σε στρέψη ενώ για $\beta = -0.5$ ισχύει η σχέση $\ell_t = \ell_b$ και για $\beta = 0$ η σχέση $\ell_t = \ell = \sqrt{2} \ell_b$.



Σχ. 3.2. Μεταβολή των χαρακτηριστικών μηκών σε κάμψη ℓ_b και στρέψη ℓ_t με τον λόγο β .

Η παράμετρος η μπορεί να εκτιμηθεί μέσω μελετών στον τομέα της διάδοσης κυμάτων ([Georgiadis and Velgaki, 2003](#)). Στην εργασία αυτή θεωρήθηκε ότι το υλικό αποτελείται από μοναδιαίες κυψελίδες κυβικού σχήματος με ακμή $2h$. Συγκρίνοντας τις μορφές των καμπυλών διασποράς των κυμάτων Rayleigh με εκείνες που προκύπτουν από την ανάλυση κρυσταλλικού πλέγματος των [Gazis et al. \(1960\)](#), μπορεί να εκτιμηθεί ότι ο συντελεστής τάσεων ζεύγους η (couple-stress modulus) είναι της τάξεως των $0.1\mu h^2$. Περαιτέρω απόπειρες προσδιορισμού των σταθερών του υλικού που χρησιμοποιούνται στην θεωρία τάσεων ζεύγους μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των [Hu et al. \(1999\)](#), [Bigoni and Drugan \(2007\)](#), και [Beveridge et al. \(2013\)](#).

3.3 Επίπεδη παραμόρφωση

Στην ενότητα αυτή εξάγονται οι βασικές εξισώσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης. Αρχικά οι εξισώσεις διατυπώνονται σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ενώ στη συνέχεια δίνονται και σε πολικές συντεταγμένες.

3.3.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες

Θεωρούμε ένα σώμα που καταλαμβάνει περιοχή στο (x, y) -επίπεδο και βρίσκεται υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Σχ. 3.3). Το διδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων που δημιουργείται είναι το ακόλουθο

$$u_x \equiv u_x(x, y) \neq 0, \quad u_y \equiv u_y(x, y) \neq 0, \quad u_z \equiv 0, \quad (3.27)$$

με τον άξονα z να είναι κάθετος στο επίπεδο (x, y) .

Σχετικά με την κινηματική περιγραφή του ελαστικού σώματος, ισχύουν οι κατωτέρω εκφράσεις για τις συνιστώσες του τανυστή της τροπής

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (3.28)$$

Αντίστοιχα, για το διάνυσμα της στροφής και τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας έχουμε

$$\omega_z \equiv \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad (3.29)$$

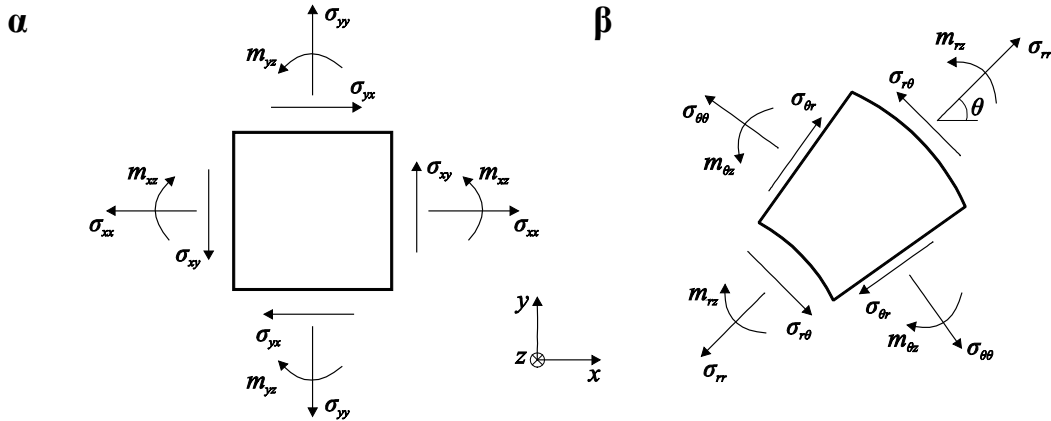
$$\kappa_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \kappa_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (3.30)$$

Σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, ο συμμετρικός τανυστής των τάσεων τ_{pq} έχει τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες εντός του επιπέδου (x, y) , που γράφονται συναρτήσει του πεδίου μετατοπίσεων σύμφωνα με τις Εξ. (3.21), (3.29) και (3.30)

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (3.31)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (3.32)$$

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (3.33)$$



Σχ. 3.3. α) Οι συνιστώσες των τάσεων και των τάσεων ζεύγους σε καρτεσιανές συντεταγμένες για ένα στοιχειώδες σωματίδιο σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. **β)** Οι αντίστοιχες συνιστώσες των τάσεων και των τάσεων ζεύγους σε πολικές συντεταγμένες.

Ο τανυστής τάσεων ζεύγους m_{pq} έχει δύο ανεξάρτητες συνιστώσες εντός του επιπέδου (x, y) , που γράφονται συναρτήσει των μετατοπίσεων σύμφωνα με τις Εξ. (3.22), (3.29) και (3.30) ως

$$m_{xz} = 2\mu\ell^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right), \quad (3.34)$$

$$m_{yz} = 2\mu\ell^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right). \quad (3.35)$$

Θεωρώντας μηδενικές καθολικές δυνάμεις και ροπές, το αντισυμμετρικό τμήμα των τάσεων γράφεται σύμφωνα με την Εξ. (3.10)

$$\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = 0, \quad (3.36)$$

$$\alpha_{xy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} \right) = -2\mu\ell^2 \nabla^2 \omega, \quad \alpha_{yx} = -\alpha_{xy}. \quad (3.37)$$

όπου $\nabla^2 \equiv \partial_x^2() + \partial_y^2()$ είναι ο διδιάστατος τελεστής Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες και $\partial_x() \equiv \partial()/\partial x$, $\partial_y() \equiv \partial()/\partial y$.

Οι συνιστώσες του ασύμμετρου τανυστή τάσεων σ_{pq} γράφονται ως

$$\sigma_{xx} = \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (3.38)$$

$$\sigma_{yy} = \tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (3.39)$$

$$\sigma_{yx} = \tau_{yx} + \alpha_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \mu\ell^2 \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \right), \quad (3.40)$$

$$\sigma_{xy} = \tau_{xy} + \alpha_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \mu\ell^2 \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \right). \quad (3.41)$$

Η έκφραση για την πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας (3.20) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} W &= (\lambda/2)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 + \mu(\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + 2\mu\ell^2(\kappa_{xz}^2 + \kappa_{yz}^2) \\ &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \tau_{xy}^2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 - 2\nu\tau_{xx}\tau_{yy} - \nu^2(\tau_{xx} + \tau_{yy})^2 \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{8\mu\ell^2} (m_{xz}^2 + m_{yz}^2). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας τις Εξ. (3.36), (3.37) και (3.42) με τις (3.7) και (3.8), αποκτούμε το ακόλουθο σύστημα συζευγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις συνιστώσες του διδιάστατου πεδίου μετατοπίσεων (u_x, u_y)

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left[2(1-\nu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \ell^2 \left(\frac{\partial^4 u_y}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_y}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial y^4} \right) = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \ell^2 \left(\frac{\partial^4 u_x}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_x}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} \right) = 0 . \quad (3.44)$$

Στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης, η πλήρης λύση των Εξ. (3.7) και (3.8) επιδέχεται αναπαράστασης μέσω τασικών συναρτήσεων της μορφής (Mindlin, 1963)

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad (3.45)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (3.46)$$

και

$$m_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad m_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (3.47)$$

όπου $\Phi \equiv \Phi(x, y)$ και $\Psi \equiv \Psi(x, y)$ είναι δύο αυθαίρετες αλλά επαρκώς ομαλές τασικές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές συνδέονται μέσω του ακόλουθου συζευγμένου συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) = -2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) = 2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \quad (3.49)$$

Έπειτα από αποσύζευξη του παραπάνω συστήματος οδηγούμαστε στις παρακάτω εξισώσεις πεδίου για τις τασικές συναρτήσεις του Mindlin

$$\nabla^4 \Phi = 0, \quad \nabla^2 (1 - \ell^2 \nabla^2) \Psi = 0. \quad (3.50)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι όταν οι ποσότητες ℓ , $\partial \Psi / \partial x$ και $\partial \Psi / \partial y$ τείνουν στο μηδέν, η παραπάνω αναπαράσταση ανάγεται στην κλασική αναπαράσταση του Airy.

3.3.2 Πολικές συντεταγμένες

Θεωρώντας ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων (r, θ, z) (Σχ. 3.3β), το πεδίο μετατοπίσεων για ένα σώμα που βρίσκεται σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης γράφεται ως

$$u_r \equiv u_r(r, \theta) \neq 0, \quad u_\theta \equiv u_\theta(r, \theta) \neq 0, \quad u_z \equiv 0, \quad (3.51)$$

Σχετικά με την κινηματική περιγραφή του ελαστικού σώματος, ισχύουν οι κατωτέρω εκφράσεις για τις συνιστώσες του τανυστή της τροπής

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}. \quad (3.52)$$

Αντίστοιχα, για το διάνυσμα της στροφής και τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας έχουμε

$$\omega_z \equiv \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right), \quad (3.53)$$

$$\kappa_{rz} = \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \kappa_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}. \quad (3.54)$$

Οι ανεξάρτητες συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή των τάσεων τ_{pq} και του τανυστή των τάσεων ζεύγους m_{pq} γράφονται σε πολικές συντεταγμένες ως

$$\tau_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \lambda \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (3.55)$$

$$\tau_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (3.56)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \frac{1}{r} \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \quad (3.57)$$

$$m_{rz} = 4\mu\ell^2 \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad m_{\theta z} = 4\mu\ell^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}. \quad (3.58)$$

Θεωρώντας μηδενικές καθολικές δυνάμεις και ροπές, το αντισυμμετρικό τμήμα των τάσεων γράφεται σύμφωνα με την Εξ. (3.10)

$$\alpha_{rr} = \alpha_{\theta\theta} = 0, \quad \alpha_{r\theta} = -2\mu\ell^2\nabla^2\omega, \quad \alpha_{\theta r} = -\alpha_{r\theta}, \quad (3.59)$$

όπου $\nabla^2 \equiv \partial_r^2(\) + r^{-1}\partial_r(\) + r^{-2}\partial_\theta^2(\)$ είναι ο διδιάστατος τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες και $\partial_r(\) \equiv \partial(\)/\partial r$, $\partial_\theta = \partial(\)/\partial\theta$.

Οι συνιστώσες του ασύμμετρου τανυστή τάσεων σ_{pq} γράφονται ως

$$\sigma_{rr} \equiv \tau_{rr}, \quad (3.60)$$

$$\sigma_{\theta\theta} \equiv \tau_{\theta\theta}, \quad (3.61)$$

$$\sigma_{r\theta} \equiv \tau_{r\theta} + \alpha_{r\theta} = \tau_{r\theta} - 2\mu\ell^2\nabla^2\omega, \quad (3.62)$$

$$\sigma_{\theta r} \equiv \tau_{\theta r} + \alpha_{\theta r} = \tau_{\theta r} + 2\mu\ell^2\nabla^2\omega. \quad (3.63)$$

Οι εξισώσεις πεδίου (3.43) και (3.44) λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$b_r - \ell^2 \left[\nabla^2 b_r - \frac{1}{r^2} b_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(1-2\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \ell^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0, \quad (3.64)$$

$$b_\theta - \ell^2 \left[\nabla^2 b_\theta - \frac{1}{r^2} b_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial b_r}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{(1-2\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \ell^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = 0, \quad (3.65)$$

όπου $\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_r u_r + r^{-1} u_r + r^{-1} \partial_\theta u_\theta$ και οι ποσότητες b_r και b_θ ορίζονται ως

$$b_r = \nabla^2 u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad (3.66)$$

$$b_\theta = \nabla^2 u_\theta - \frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \quad (3.67)$$

Οι εκφράσεις των τάσεων και των τάσεων ζεύγους συναρτήσεως των τασικών συναρτήσεων του Mindlin γράφονται σε πολικές συντεταγμένες ως

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad (3.68)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad (3.69)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad (3.70)$$

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad (3.71)$$

και

$$m_{rz} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad m_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad (3.72)$$

όπου $\Phi \equiv \Phi(r, \theta)$ και $\Psi \equiv \Psi(r, \theta)$ είναι δύο αυθαίρετες αλλά επαρκώς ομαλές τασικές συναρτήσεις οι οποίες συνδέονται μέσω του ακόλουθου συζευγμένου συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\partial}{\partial r} (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) = -2(1-\nu) \ell^2 \frac{1}{r} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right), \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) = 2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right). \quad (3.74)$$

3.4 Αντι-επίπεδη παραμόρφωση

Στην ενότητα αυτή εξάγονται οι βασικές εξισώσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους στην περίπτωση αντι-επίπεδης παραμόρφωσης. Αρχικά οι εξισώσεις διατυπώνονται σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ενώ στη συνέχεια δίνονται και σε πολικές συντεταγμένες.

3.4.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες

Θεωρούμε ένα σώμα που καταλαμβάνει περιοχή στο επίπεδο (x, y) και βρίσκεται υπό συνθήκες αντι-επίπεδης παραμόρφωσης (Σχ. 3.4). Το διδιάστατο πεδίο μετατοπίσεων που αναπτύσσεται είναι το ακόλουθο

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z \equiv w \neq 0, \quad w \equiv w(x, y). \quad (3.75)$$

Για τις συνιστώσες του τανυστή της τροπής, ισχύουν οι παρακάτω εκφράσεις

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.76)$$

Το διάνυσμα της στροφής και οι συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας γράφονται σύμφωνα με τις Εξ. (3.12) και (3.13) ως

$$\omega_x = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega_y = -\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (3.77)$$

$$\kappa_{xx} = -\kappa_{yy} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (3.78)$$

Οι συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή των τάσεων τ_{pq} και του τανυστή τάσεων ζεύγους m_{pq} γράφονται με χρήση των καταστατικών σχέσεων (3.21), (3.22) και των γεωμετρικών σχέσεων (3.76) ως

$$\tau_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.79)$$

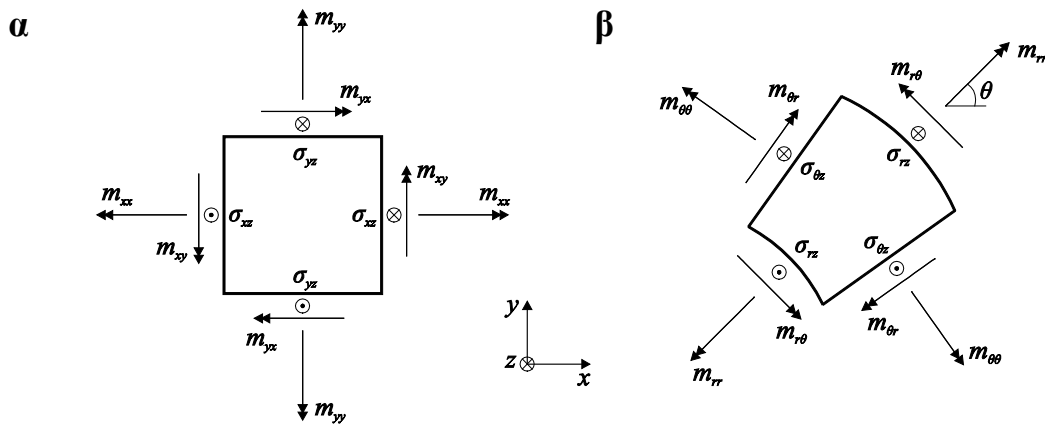
$$m_{xx} = 4(\eta + \eta')\kappa_{xx} = 2(\eta + \eta') \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3.80)$$

$$m_{yy} = 4(\eta + \eta')\kappa_{yy} = -2(\eta + \eta') \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -m_{xx}, \quad (3.81)$$

$$m_{xy} = 4\eta\kappa_{xy} + 4\eta'\kappa_{yx} = -2\eta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\eta'\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3.82)$$

$$m_{yx} = 4\eta\kappa_{yx} + 4\eta'\kappa_{xy} = 2\eta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\eta'\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.83)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις εμφανίζεται η σταθερά η' , σε αντίθεση με την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης.



Σχ. 3.4. α) Οι συνιστώσες των τάσεων και των τάσεων ζεύγους σε καρτεσιανές συντεταγμένες για ένα στοιχειώδες σωματίδιο σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. **β)** Οι αντίστοιχες συνιστώσες των τάσεων και των τάσεων ζεύγους σε πολικές συντεταγμένες.

Θεωρώντας μηδενικές καθολικές δυνάμεις και ροπές, το αντισυμμετρικό τμήμα των τάσεων δίνεται από τις σχέσεις

$$\alpha_{zx} = -\alpha_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \quad (3.84)$$

$$\alpha_{zy} = -\alpha_{yz} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \quad (3.85)$$

Οι συνιστώσες του ασύμμετρου τανυστή τάσεων σ_{pq} γράφονται σύμφωνα με την Εξ. (3.5) ως

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial}{\partial x} (w - \ell^2 \nabla^2 w), \quad \sigma_{zx} = \mu \frac{\partial}{\partial x} (w + \ell^2 \nabla^2 w), \quad (3.86)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial}{\partial y} (w - \ell^2 \nabla^2 w), \quad \sigma_{zy} = \mu \frac{\partial}{\partial y} (w + \ell^2 \nabla^2 w). \quad (3.87)$$

Η έκφραση για την πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας (3.20) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} W &= 2\mu(\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) + 2(\eta + \eta')(\kappa_{xx}^2 + \kappa_{yy}^2) + 2\eta(\kappa_{xy}^2 + \kappa_{yx}^2) + 4\eta'\kappa_{xy}\kappa_{yx} \\ &= \frac{1}{2\mu}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) + \frac{1}{4(\eta + \eta')} \left\{ m_{xx}^2 + \frac{1}{2(\eta - \eta')} [\eta(m_{xy}^2 + m_{yx}^2) - 2\eta'm_{xy}m_{yx}] \right\}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (3.84), (3.85) και (3.88) με τις (3.7) και (3.8), αποκτούμε την ακόλουθη εξίσωση πεδίου

$$\nabla^2 w - \ell^2 \nabla^4 w = 0. \quad (3.89)$$

3.4.2 Πολικές συντεταγμένες

Θεωρώντας ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων (r, θ, z) (Σχ. 3.4β), το πεδίο μετατοπίσεων για ένα σώμα που βρίσκεται σε συνθήκες αντι-επίπεδης παραμόρφωσης γράφεται ως

$$u_r = u_\theta = 0, \quad w = w(r, \theta) \neq 0. \quad (3.90)$$

Για τις συνιστώσες του τανυστή της τροπής, ισχύουν οι παρακάτω εκφράσεις

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (3.91)$$

Αντίστοιχα, για το διάνυσμα της στροφής και τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας έχουμε

$$\omega_r = \omega_{\theta z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \omega_\theta = \omega_{zr} = -\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (3.92)$$

$$\kappa_{rr} = \frac{\partial \omega_r}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad \kappa_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} + \frac{\omega_r}{r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (3.93)$$

$$\kappa_{r\theta} = \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \kappa_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} - \frac{\omega_\theta}{r} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.94)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ζεύγους m_{pq} και του ασύμμετρου τανυστή των τάσεων σ_{pq} γράφονται σε πολικές συντεταγμένες ως

$$m_{rr} = -m_{\theta\theta} = 4(\eta + \eta') \kappa_{rr}, \quad (3.95)$$

$$m_{r\theta} = 4\eta \kappa_{r\theta} + 4\eta' \kappa_{\theta r}, \quad m_{\theta r} = 4\eta \kappa_{\theta r} + 4\eta' \kappa_{r\theta}, \quad (3.96)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{\partial}{\partial r} (w - \ell^2 \nabla^2 w), \quad \sigma_{zr} = \mu \frac{\partial}{\partial r} (w + \ell^2 \nabla^2 w), \quad (3.97)$$

$$\sigma_{\theta z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (w - \ell^2 \nabla^2 w), \quad \sigma_{z\theta} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (w + \ell^2 \nabla^2 w). \quad (3.98)$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι η εξίσωση πεδίου (3.89) παραμένει ίδια και σε πολικές συντεταγμένες.



Κεφάλαιο 4

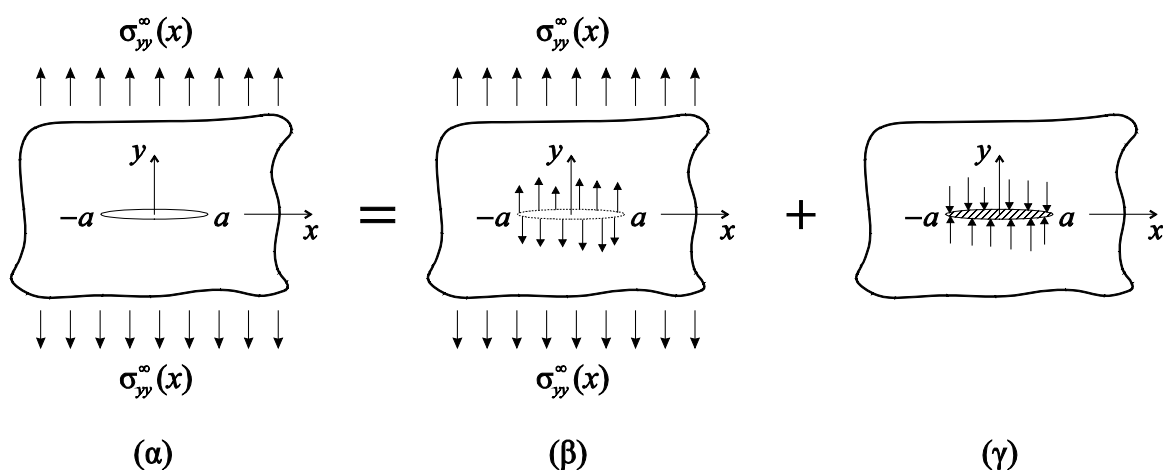
Αλληλεπίδραση ρωγμών με διακριτές εξαρμώσεις στη θεωρία τάσεων ζεύγους

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται προβλήματα αλληλεπίδρασης *κεντρικών* ρωγμών με επίπεδες και αντι-επίπεδες εξαρμώσεις στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, χρησιμοποιώντας την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων (distributed dislocation technique). Η τεχνική αυτή εισήχθη από τους [Bilby et al. \(1963\)](#) και [Bilby and Eshelby \(1968\)](#) και απεδείχθη, στη συνέχεια, ως μία εξαιρετικά αποτελεσματική τεχνική για την επίλυση πληθώρας προβλημάτων ρωγμών στην κλασική ελαστικότητα. Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι το γεγονός πως παρέχει λύσεις πλήρους πεδίου με σχετικά μικρές αναλυτικές απαιτήσεις σε σύγκριση με την πολύπλοκη τεχνική των διπλών ολοκληρωτικών εξισώσεων (dual integral equation method) όπως επίσης και με μικρό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τις μεθόδους των πεπερασμένων και συνοριακών στοιχείων.

Η τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων βασίζεται στην εφαρμογή της Αρχής του Bueckner ([Bueckner, 1958](#)). Στο Σχ. 4.1α περιγράφεται μία κεντρική ρωγή υπό εφελκυστικό πεδίο. Η λύση αυτού του προβλήματος μπορεί να προκύψει ως υπέρθεση των λύσεων δύο επιμέρους προβλημάτων. Στο πρώτο βοηθητικό πρόβλημα (Σχ. 4.1β) θεωρούμε ένα *αρηγμάτωτο* σώμα ίδιας γεωμετρίας με το αρχικό, το οποίο υπόκειται στην ίδια φόρτιση με το συνολικό πρόβλημα. Στο δεύτερο πρόβλημα (Σχ. 4.1γ), θεωρούμε ένα εξωτερικά *αφόρτιστο* σώμα ίδιας γεωμετρίας με το αρχικό. Κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής υπάρχουν τάσεις (διορθωτικές τάσεις) ίσες και αντίθετες με αυτές που προέκυψαν στο πρώτο επιμέρους πρόβλημα, ώστε τελικά τα χείλη της ρωγμής να παραμένουν αφόρτιστα. Σύμφωνα με την Αρχή του Bueckner, ο συντελεστής έντασης τάσεων (stress

intensity factor) του δεύτερου επιμέρους προβλήματος είναι ίσος με αυτόν του αρχικού προβλήματος. Η τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων είναι ένας μαθηματικός τρόπος εισαγωγής των διορθωτικών τάσεων και παράλληλα διαχωρισμού των χειλέων της ρωγμής. Υπό αυτή την έννοια, στη διαδικασία αυτή οι εξαρμώσεις δεν πρέπει να θεωρούνται ατέλειες του κρυσταλλικού πλέγματος αλλά μέσο περιγραφής μίας συνεπούς τασιακής κατάστασης. Μία λεπτομερής περιγραφή της τεχνικής και εφαρμογές της μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο των Hills *et al.* (1996).



Σχ. 4.1. Εφαρμογή της Αρχής του Bueckner. (α) Συνολικό πρόβλημα, (β) τάσεις στο αρηγμάτωτο σώμα και (γ) διορθωτικές τάσεις.

Ο αριθμός των εργασιών που αφορούν στην επίλυση προβλημάτων ρωγμών στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους παρουσιάζει αύξηση τα τελευταία χρόνια. Οι Sternberg and Muki (1967) μελέτησαν πρώτοι το πρόβλημα της κεντρικής ρωγμής τύπου I (Mode I) εφαρμόζοντας την μέθοδο των διπλών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Στην εργασία αυτή, παρουσιάστηκαν μόνο ασυμπτωτικά αποτελέσματα τα οποία έδειξαν ότι τόσο οι τάσεις όσο και οι τάσεις ζεύγους εμφανίζουν ιδιομορφία τύπου $r^{-1/2}$, όπου r είναι η ακτινική απόσταση από το άκρο της ρωγμής. Από την άλλη, σε αντιδιαστολή με την λύση της κλασσικής ελαστικότητας, το διάνυσμα της στροφής έχει πεπερασμένη τιμή στο άκρο της ρωγμής. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο, ο Ejike (1969) εξέτασε το πρόβλημα της κεντρικής κυκλικής ρωγμής (penny-shaped crack) στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Στη συνέχεια, οι Atkinson and Leppington (1977) μελέτησαν το πρόβλημα της ημιάπειρης ρωγμής υπό εφελκυστικό πεδίο με την αναλυτική τεχνική Wiener-Hopf. Ο Itou (1981) υπολόγισε αριθμητικά τον συντελεστή έντασης τάσεων κατά την διάδοση μίας ρωγμής Yoffe. Οι Huang *et al.* (1997) υπολόγισαν το εντατικό πεδίο

κοντά στο άκρο μίας ρωγμής τύπου I και II χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική μέθοδο Knein-Williams. Επιπλέον, οι Huang *et al.* (1999) και ο Radi (2007, 2008) παρουσίασαν λύσεις πλήρους πεδίου για επίπεδα και αντι-επίπεδα προβλήματα ημιάπειρων ρωγμών σε ελαστικά και ελαστοπλαστικά υλικά που χαρακτηρίζονται από την θεωρία τάσεων ζεύγους. Πρόσφατα, οι Gourgiotis and Georgiadis (2007, 2008) χρησιμοποίησαν την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων για να μελετήσουν επίπεδες και αντι-επίπεδες κεντρικές ρωγμές ενώ οι Gourgiotis *et al.* (2012) έλυσαν το πρόβλημα της ημιάπειρης ρωγμής υπό συγκεντρωμένη διατμητική φόρτιση χρησιμοποιώντας την αναλυτική τεχνική Wiener-Hopf. Τέλος, οι Mishuris *et al.* (2012) και οι Gourgiotis and Piccolroaz (2014) ασχολήθηκαν με προβλήματα δυναμικά επεκτεινόμενων ημιάπειρων ρωγμών τύπου III και II αντίστοιχα, στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους.

Το παρόν κεφάλαιο περιλαμβάνει τέσσερις ενότητες. Στην Παράγραφο 4.2 παρουσιάζεται το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας κεντρικής ρωγμής με μία διακριτή ορθή εξάρμωση. Η εξάρμωση βρίσκεται σε μία απόσταση κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής (cleavage plane). Για την ανάπτυξη των διορθωτικών τάσεων, στα πλαίσια της κλασσικής ελαστικότητας, θα ήταν αρκετή η κατανομή *διακριτών ορθών εξαρμώσεων*. Αντίθετα, στη θεωρία τάσεων ζεύγους, απαιτείται επιπρόσθετα η κατανομή σταθερών ασυνεχειών στο διάνυσμα της στροφής, οι οποίες έχουν ονομαστεί από τους Gourgiotis and Georgiadis (2008) *δεσμευμένες στροφικές εξαρμώσεις* (constrained wedge disclinations). Το τασικό πεδίο που εισάγεται μέσω της κατανομής των δύο ατελειών αποτελεί τις συναρτήσεις Green του προβλήματος και υπολογίζεται με χρήση του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier. Τελικά, οδηγούμαστε σε ένα σύστημα συζευγμένων ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων με πυρήνες λογαριθμικούς και Cauchy, το οποίο επιλύεται αριθμητικά. Όσον αφορά τα αποτελέσματα, υπολογίζονται μεταξύ άλλων, οι συντελεστές έντασης τάσεων και τα ολοκληρώματα J στα δύο άκρα της ρωγμής καθώς και η κινούσα δύναμη Peach-Koehler που ασκείται στην εξάρμωση.

Στην Παράγραφο 4.3 επιλύεται το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας κεντρικής ρωγμής με μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση. Σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση Green προκύπτει από το τασικό πεδίο μίας *διακριτής εφαπτομενικής εξάρμωσης* το οποίο βρίσκεται με τη βοήθεια των τασικών συναρτήσεων του Mindlin. Εφαρμόζοντας την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων καταλήγουμε σε μία ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση η οποία επιλύεται αριθμητικά. Αντίστοιχα, στην Παράγραφο 4.4, μελετάται το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας κεντρικής ρωγμής με μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση. Πραγματοποιώντας κατανομή *διακριτών αντι-επίπεδων εξαρμώσεων*

οδηγούμαστε σε μία υπεριδιόμορφη (hypersingular) ολοκληρωτική εξίσωση με κυβική ιδιομορφία, η οποία επιλύεται αριθμητικά.

Τέλος, στην Παράγραφο 4.5 θεωρούμε το γενικότερο πρόβλημα, όπου μία εξάρμωση τυχαίου προσανατολισμού βρίσκεται εκτός του επιπέδου της ρωγμής. Αυτή η γεωμετρία οδηγεί σε ένα μικτού τύπου πρόβλημα όπου πρέπει να διανεμηθούν στα χείλη της ρωγμής διακριτές ορθές, εφαπτομενικές και δεσμευμένες στροφικές εξαρμώσεις ώστε να παραμένουν αφόρτιστα. Επιπλέον, για ορισμένες θέσεις και προσανατολισμούς της εξάρμωσης έχουμε μερικό κλείσιμο των χειλέων της ρωγμής οπότε η αρχική κατάστρωση του προβλήματος καταστρατηγείται.

4.2 Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με διακριτή ορθή εξάρμωση

4.2.1 Κατάστρωση του προβλήματος

Θεωρούμε μία κεντρική ρωγή μήκους $2a$ σε ένα ελαστικό άπειρο στερεό σώμα με μικροδομή και μία διακριτή ορθή εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, b_y)$ σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής, υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Σχ. 4.2). Τα χείλη της ρωγμής περιγράφονται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$ και είναι αφόρτιστα. Οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής γράφονται σύμφωνα με τις Εξ. (3.16) και (3.17) ως

$$\sigma_{yx}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad m_{yz} = 0, \quad \text{για } |x| < a. \quad (4.1)$$

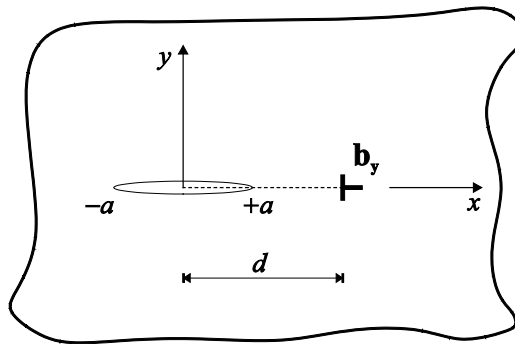
Όπως θα αποδειχθεί στην Παράγραφο 4.2.2, η παρουσία μίας διακριτής ορθής εξάρμωσης σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής δημιουργεί ορθές τάσεις σ_{yy} και τάσεις ζεύγους m_{yz} κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma_{yx}(d, 0) \rightarrow 0, \quad \sigma_{yy}(d, 0) \rightarrow \sigma_{yy}^{cl.d}, \quad m_{yz}(d, 0) \rightarrow m_{yz}^{cl.d}, \quad (4.2)$$

όπου $\sigma_{yy}^{cl,d}$ και $m_{yz}^{cl,d}$ είναι οι ορθές τάσεις και οι τάσεις ζεύγους μίας διακριτής ορθής εξάρμωσης στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Επίσης, οι συνθήκες στο άπειρο είναι

$$\sigma_{xx}^{\infty}, \sigma_{yy}^{\infty}, \sigma_{yx}^{\infty}, \sigma_{xy}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xz}^{\infty}, m_{yz}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το} \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων. Η Εξ. (4.3) υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει άλλη εξωτερική φόρτιση στο πρόβλημα πέραν της εξάρμωσης.



Σχ. 4.2. Κεντρική ρωγμή αλληλεπίδραση με διακριτή ορθή εξάρμωση.

Η λύση του προβλήματος μπορεί να προκύψει ως υπέρθεση των λύσεων δύο επιμέρους προβλημάτων. Αρχικά, θεωρούμε ένα αρηγμάτωτο σώμα το οποίο υπόκειται στη φόρτιση της Εξ. (4.2). Το τασικό πεδίο αυτού του προβλήματος προκύπτει με εφαρμογή του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier σε έναν ημίχωρο με μικτές συνοριακές συνθήκες

$$u_y(x, 0^+) = -\frac{b}{2}H(x), \quad \omega(x, 0^+) = 0, \quad \sigma_{yx}(x, 0^+) = 0. \quad (4.4)$$

Η λύση του προβλήματος είναι το τασικό πεδίο μίας διακριτής ορθής εξάρμωσης και δίνεται στην Παράγραφο 4.2.2 (Εξ. (4.29)-(4.34)).

Στη συνέχεια, για το δεύτερο επιμέρους πρόβλημα (διορθωτική λύση), θεωρούμε ένα σώμα ίδιας γεωμετρίας με το αρχικό ρηγματωμένο δίχως την επίδραση της διακριτής ορθής εξάρμωσης. Η μοναδική φόρτιση εφαρμόζεται πάνω στα χείλη της ρωγμής και αποτελείται από ίσες και αντίθετες τάσεις από αυτές που προέκυψαν στο αρηγμάτωτο σώμα. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned}\sigma_{yx}(x, 0) &= 0, & \sigma_{yy}(x, 0) &= -\sigma_{yy}^{cl.d}(x-d, 0), \\ m_{yz}(x, 0) &= -m_{yz}^{cl.d}(x-d, 0), & \text{για } |x| &< a,\end{aligned}\quad (4.5)$$

και

$$\sigma_{yy}^{\infty}, \sigma_{yx}^{\infty}, \sigma_{xy}^{\infty}, \sigma_{xx}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xz}^{\infty}, m_{yz}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

Στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας, για την ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών (4.5α) και (4.5β), θα επαρκούσε η κατανομή διακριτών ορθών εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής. Ωστόσο, στην θεωρία τάσεων ζεύγους, δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα οι τρεις συνοριακές συνθήκες (4.5) με κατανομή μόνο διακριτών ορθών εξαρμώσεων. Κατάλληλη κατανομή εξαρμώσεων μπορεί να ικανοποιήσει είτε την συνοριακή συνθήκη (4.5α) είτε την (4.5β). Από την άλλη, στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, είναι γνωστό ότι ενεργειακά συζυγή μεγέθη του ελκυστή μονοπολικής δύναμης $P_y = \sigma_{yy}n_y$ και του εφαπτομενικού ελκυστή ροπής $R_z = m_{yz}n_y$ είναι η μετατόπιση u_y και η στροφή ω , αντίστοιχα. Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι προκειμένου να ικανοποιήσουμε όλες τις συνοριακές συνθήκες, θα πρέπει να διανείμουμε στα χείλη της ρωγμής όχι μόνο ασυνέχειες στη μετατόπιση u_y (ορθές εξαρμώσεις) αλλά και ασυνέχειες στο διάνυσμα της στροφής (δεσμευμένες στροφικές εξαρμώσεις).

Στην Παράγραφο 4.2.2 υπολογίζουμε το τασικό πεδίο που παράγεται από μία διακριτή ορθή εξάρμωση και μία διακριτή δεσμευμένη στροφική εξάρμωση, από το οποίο θα προκύψουν οι κατάλληλες συναρτήσεις Green του προβλήματος.

4.2.2 Συναρτήσεις Green

Λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζουν τα δυο παραπάνω προβλήματα εξαρμώσεων ως προς το επίπεδο $y=0$, εξετάζουμε μόνο το άνω ημιεπίπεδο του σώματος το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή $(-\infty < x < \infty, y \geq 0)$. Η λύση των προβλημάτων αυτών θα επιτευχθεί με τη χρήση του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier. Ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ορίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (ιδέ π.χ. [Carrier et al., 2005](#))

$$\begin{aligned}
 f^*(\xi, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{ix\xi} dx, \\
 f(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, y) e^{-ix\xi} d\xi,
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

όπου $i \equiv (-1)^{1/2}$. Μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις πεδίου (3.43) και (3.44), προκύπτει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων ως προς τις μετατοπίσεις (u_x^*, u_y^*) το οποίο γράφεται στη μορφή

$$[K] \begin{bmatrix} u_x^* \\ u_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

με τον διαφορικό τελεστή $[K]$ να ορίζεται ως

$$[K] = \begin{bmatrix} -\ell^2 d^4 + (1 + \ell^2 \xi^2) d^2 - (1+k) \xi^2 & i\xi \ell^2 d (\xi^2 - d^2) - i\xi k d \\ i\xi \ell^2 d (\xi^2 - d^2) - i\xi k d & (1 + \xi^2 \ell^2 + k) d^2 - \xi^2 (1 + \xi^2 \ell^2) \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

όπου $k = 1/(1-2\nu)$, $d(\) \equiv d(\)/dy$, $d^2(\) \equiv d^2(\)/dy^2$, κ.ο.κ.

Για να έχει το ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων της Εξ. (4.8) λύση διαφορετική από την τετριμμένη, πρέπει η ορίζουσα του πίνακα $[K]$ να είναι μηδενική. Συνεπώς,

$$(d^2 - \xi^2)^2 [\ell^2 (d^2 - \xi^2) - 1] = 0. \tag{4.10}$$

Η Εξ. (4.10) έχει δύο διπλές ρίζες, $d = \pm|\xi|$, και δύο απλές ρίζες, $d = \pm(1 + \ell^2 \xi^2)^{1/2}/\ell$. Το πρώτο ζεύγος ριζών παραμένει ίδιο με την κλασσική ελαστικότητα ενώ το δεύτερο εμφανίζεται στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Η γενική λύση του συστήματος των ομογενών διαφορικών εξισώσεων της Εξ. (4.8) προκύπτει έπειτα από εκτεταμένη άλγεβρα και έχει την ακόλουθη φραγμένη μορφή καθώς το $y \rightarrow +\infty$

$$u_x^*(\xi, y) = A_1(\xi)e^{-|\xi|y} + A_2(\xi)y e^{-|\xi|y} + A_3(\xi)e^{-\frac{y\alpha}{\ell}}, \quad (4.11)$$

$$u_y^*(\xi, y) = -i\xi^{-1} \left[|\xi| A_1(\xi) + (3-4\nu) A_2(\xi) \right] e^{-|\xi|y} - iy \frac{|\xi|}{\xi} A_2(\xi) e^{-|\xi|y} - i \frac{\xi}{\alpha} A_3(\xi) e^{-\frac{y\alpha}{\ell}}, \quad (4.12)$$

όπου $\alpha \equiv \alpha(\xi) = (1 + \ell^2 \xi^2)^{1/2}$ ενώ οι άγνωστες συναρτήσεις $(A_1(\xi), A_2(\xi), A_3(\xi))$ θα προσδιοριστούν από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών κάθε συγκεκριμένου προβλήματος.

Έχοντας, πλέον, τις μετασχηματισμένες γενικές λύσεις των Εξ. (4.11) και (4.12), μπορούμε να γράψουμε τις μετασχηματισμένες εκφράσεις για την στροφή (Εξ. (3.29)), τις τάσεις (Εξ. (3.38)-(3.41)) και τις τάσεις ζεύγους (Εξ. (3.34), (3.35)) ως

$$\omega^*(\xi, y) = -\frac{1}{2} \left(i\xi u_y^* + \frac{du_x^*}{dy} \right), \quad (4.13)$$

$$\sigma_{xx}^*(\xi, y) = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[-(1-\nu) i\xi u_x^* + \nu \frac{du_y^*}{dy} \right], \quad (4.14)$$

$$\sigma_{yy}^*(\xi, y) = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{du_y^*}{dy} - i\nu \xi u_x^* \right], \quad (4.15)$$

$$\sigma_{yx}^*(\xi, y) = \mu \left(-i\xi u_y^* + \frac{du_x^*}{dy} \right) + \mu \ell^2 \left(i\xi^3 u_y^* + \xi^2 \frac{du_x^*}{dy} - i\xi \frac{d^2 u_y^*}{dy^2} - \frac{d^3 u_x^*}{dy^3} \right), \quad (4.16)$$

$$\sigma_{xy}^*(\xi, y) = \mu \left(-i\xi u_y^* + \frac{du_x^*}{dy} \right) - \mu \ell^2 \left(i\xi^3 u_y^* + \xi^2 \frac{du_x^*}{dy} - i\xi \frac{d^2 u_y^*}{dy^2} - \frac{d^3 u_x^*}{dy^3} \right), \quad (4.17)$$

$$m_{yz}^*(\xi, y) = -2\mu \ell^2 \left(i\xi \frac{du_y^*}{dy} + \frac{d^2 u_x^*}{dy^2} \right), \quad (4.18)$$

$$m_{xz}^*(\xi, y) = 2\mu \ell^2 \left(-\xi^2 u_y^* + i\xi \frac{du_x^*}{dy} \right). \quad (4.19)$$

Στη συνέχεια, επιβάλλουμε στην αρχή του επιπέδου (x, y) , μία διακριτή ορθή εξάρμωση με διάνυσμα Burgers $\mathbf{b} = (0, b_y, 0)$ και μία δεσμευμένη στροφική εξάρμωση με

διάνυσμα Frank $\Omega = (0, 0, \Omega)$. Οι παραπάνω διακριτές ατέλειες περιγράφονται από τα ακόλουθα μικτά προβλήματα συνοριακών τιμών, στο άνω ημιεπίπεδο ($-\infty < x < \infty, y \geq 0$)

$$u_y(x, 0^+) = -\frac{b}{2}H(x), \quad \omega(x, 0^+) = 0, \quad \sigma_{yx}(x, 0^+) = 0. \quad (4.20)$$

$$u_y(x, 0^+) = 0, \quad \omega(x, 0^+) = \frac{\Omega}{2}H(x), \quad \sigma_{yx}(x, 0^+) = 0. \quad (4.21)$$

όπου $H(x)$ είναι η βηματική συνάρτηση Heaviside.

Στην κλασσική ελαστικότητα, το πρόβλημα της διακριτής ορθής εξάρμωσης περιγράφεται από τις Εξ. (4.20α) και (4.20β) όπου ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός. Όσον αφορά τη δεσμευμένη στροφική εξάρμωση, παρατηρούμε ότι η ασυνέχεια στο διάνυσμα της στροφής (Εξ. (4.21β)) δεν επηρεάζει την ορθή μετατόπιση (Εξ. (4.21α)), γι' αυτό άλλωστε και η χρήση του όρου 'δεσμευμένος'. Η ατέλεια αυτή είναι διαφορετική από την 'κλασσική' στροφική εξάρμωση (Σχ. 4.3α), που συναντάται τόσο στην κλασσική θεωρία ελαστικότητας (deWit, 1973) όσο και στην θεωρία τάσεων ζεύγους (Anthony, 1970). Σε εκείνη την περίπτωση η ασυνέχεια στο διάνυσμα της στροφής οδηγεί σε ασυνεχή ορθή μετατόπιση στο επίπεδο $y = 0$, η οποία δίνεται από τη σχέση $u_y(x, 0^+) = (\Omega/2)xH(x)$. Συνεπώς, η χρήση 'κλασσικών' στροφικών εξαρμώσεων δεν είναι κατάλληλη για την αντιμετώπιση του προβλήματος ρωγμής στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους.

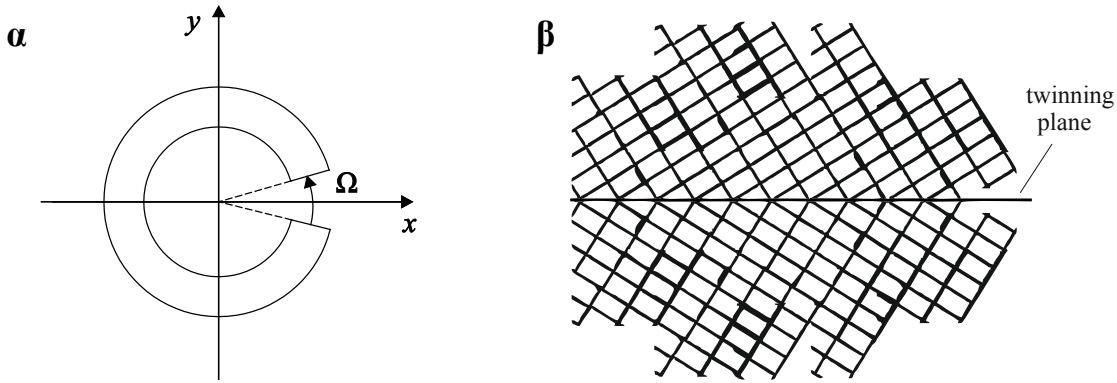
Ένα γεωμετρικό ανάλογο της δεσμευμένης στροφικής εξάρμωσης από την επιστήμη των υλικών είναι η κρυσταλλική διδυμία (crystal twinning). Οι διδυμίες παρατηρούνται σε κρυστάλλους όπου ένα μέρος του κρυστάλλου είναι μετατοπισμένο σε σχέση με το υπόλοιπο, έτσι ώστε το ένα μέρος να αποτελεί το κατοπτρικό είδωλο του άλλου ως προς ένα επίπεδο που ονομάζεται επίπεδο διδυμίας (twinning plane) (Σχ. 4.3β). Αυτό το φαινόμενο μπορεί να παρατηρηθεί κατά την πλαστική παραμόρφωση κρυστάλλων ή κατά τη διάρκεια θερμικών κατεργασιών και σχετίζεται με φαινόμενα αλλαγών φάσης (phase transformation) (ιδέ π.χ. Christian and Mahajan, 1995).

Επιστρέφοντας στην εύρεση των συναρτήσεων Green του προβλήματος, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στις συνοριακές συνθήκες (4.20) και (4.21) και λαμβάνουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$u_y^*(\xi, 0^+) = -b(\pi/2)^{1/2} \delta_+(\xi), \quad \omega^*(\xi, 0^+) = 0, \quad \sigma_{yx}^*(\xi, 0^+) = 0, \quad (4.22)$$

$$u_x^*(\xi, 0^+) = 0, \quad \omega^*(\xi, 0^+) = \Omega(\pi/2)^{1/2} \delta_+(\xi), \quad \sigma_{yx}^*(\xi, 0^+) = 0. \quad (4.23)$$

όπου $\delta_+(\xi) = [\delta(\xi)/2] + [i/2\pi\xi]$ είναι η κατανομή Heisenberg (ιδέ [Roos, 1969](#)) και $\delta(\xi)$ είναι η κατανομή Dirac. Πρέπει να σημειωθεί ότι η συνεισφορά της κατανομής Dirac στα παραπάνω προβλήματα συνοριακών τιμών αντιστοιχεί, για τη μεν περίπτωση της ορθής εξάρμωσης σε μετατόπιση απολύτου στερεού σώματος, ενώ για την περίπτωση της στροφικής εξάρμωσης σε στροφή απολύτου στερεού σώματος.



Σχ. 4.3. α) 'Κλασική' στροφική εξάρμωση με διάνυσμα Frank $\Omega = (0, 0, \Omega)$. β) Διδυμία δύο τετράγωνων κρυστάλλων.

Ακολουθώντας, συνδυάζοντας τις Εξ. (4.22) και (4.23) με τις Εξ. (4.11) και (4.12), καταλήγουμε σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για τις συναρτήσεις $(A_1(\xi), A_2(\xi), A_3(\xi))$. Έπειτα από αλγεβρικές πράξεις και υπέρθεση των λύσεων για τα δύο προβλήματα διακριτών εξαρμώσεων, καταλήγουμε στο παρακάτω μετασχηματισμένο πεδίο μετατοπίσεων

$$u_x^*(\xi, y) = \frac{b}{(2\pi)^{1/2}} \left[\left(-\frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)|\xi|} + \frac{y}{4(1-\nu)} - \ell^2|\xi| \right) e^{-y|\xi|} + \ell\alpha e^{-\frac{y\alpha}{\ell}} \right] + \frac{i\Omega}{(2\pi)^{1/2}} \left[\frac{\ell\alpha}{\xi} e^{-\frac{y\alpha}{\ell}} - \ell^2 \operatorname{sgn}(\xi) e^{-y|\xi|} \right], \quad (4.24)$$

$$u_y^*(\xi, y) = \frac{ib}{(2\pi)^{1/2}} \left[\left(-\frac{1}{2\xi} - \frac{\text{sgn}(\xi)y}{4(1-\nu)} + \ell^2\xi \right) e^{-y|\xi|} - \ell^2\xi e^{-\frac{y\alpha}{\ell}} \right] + \frac{\Omega}{(2\pi)^{1/2}} \left[\ell^2 e^{-\frac{y\alpha}{\ell}} - \ell^2 e^{-y|\xi|} \right], \quad (4.25)$$

όπου $\text{sgn}(\)$ είναι η συνάρτηση προσήμου (signum function).

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (Εξ. (4.7β)) και τις Εξ. (4.13)-(4.19), αποκτούμε τις εκφράσεις για τις τάσεις και τις τάσεις ζεύγους γύρω από μία διακριτή ορθή εξάρμωση και μία δεσμευμένη στροφική εξάρμωση (Εξ. (A.8)-(A.13), Παράρτημα A). Οι σχέσεις για την ορθή τάση σ_{yy} (Εξ. (4.15)) και την τάση ζεύγους m_{yz} (Εξ. (4.18)) κατά μήκος της γραμμής της ρωγμής $y = 0$ παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_{yy}(x, y=0) = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)x} + \frac{2\mu b}{\pi x} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] - \frac{\mu\Omega}{\pi} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] - \frac{\mu\Omega}{\pi} K_0\left(\frac{|x|}{\ell}\right), \quad (4.26)$$

$$m_{yz}(x, y=0) = -\frac{\mu b}{\pi} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] - \frac{\mu b}{\pi} K_0\left(\frac{|x|}{\ell}\right) + \frac{\mu\ell\Omega}{2\pi} \text{sgn}(x) \cdot G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{x^2}{4\ell^2} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1/2, 1/2, 0 \end{matrix} \right), \quad (4.27)$$

όπου $K_i(|x|/\ell)$ είναι οι i τάξης τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel του δευτέρου είδους και $G_{c,d}^{a,b}(\)$ είναι η συνάρτηση MeijerG (ιδέ π.χ. Erdélyi *et al.*, 1953). Οι Εξ. (4.26) και (4.27) αποτελούν τις συναρτήσεις Green του προβλήματος.

Σχετικά με τα χαρακτηριστικά του παραπάνω τασικού πεδίου, σημειώνουμε τα εξής σημεία:

(i) Καθώς το $x \rightarrow 0$, ισχύουν οι ακόλουθες ασυμπτωτικές σχέσεις για τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel και την συνάρτηση MeijerG

$$\begin{aligned} \frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) &= O(1), & \frac{1}{x} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] &= O((2x)^{-1}), \\ K_0\left(\frac{|x|}{\ell}\right) &= O(-\ln|x|), & \operatorname{sgn}(x) \cdot G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{x^2}{4\ell^2} \middle|_{-1/2, 1/2, 0}^1 \right) &= O(-4\ell x^{-1}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Με βάση τις παραπάνω ασυμπτωτικές σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι καθώς το $x \rightarrow 0$, η ορθή τάση σ_{yy} παρουσιάζει ιδιομορφία τύπου Cauchy λόγω της ορθής εξάρμωσης και λογαριθμική ιδιομορφία λόγω της δεσμευμένης στροφικής εξάρμωσης. Αντίστοιχα, η τάση ζεύγους m_{yz} εμφανίζει ιδιομορφία τύπου Cauchy λόγω της δεσμευμένης στροφικής εξάρμωσης και λογαριθμική ιδιομορφία λόγω της ορθής εξάρμωσης.

(ii) Καθώς το $x \rightarrow \pm\infty$, αποδεικνύεται ότι $\sigma_{yy} \rightarrow 0$ ενώ $m_{yz} \rightarrow \mp\mu\ell\Omega$, δηλαδή, η δεσμευμένη στροφική εξάρμωση δεν εισάγει ορθές τάσεις στο άπειρο. Η ιδιότητα αυτή έρχεται σε αντίθεση με την ‘κλασσική’ στροφική εξάρμωση η οποία εισάγει ορθές τάσεις λογαριθμική ιδιομορφία στο άπειρο τόσο στην κλασσική ελαστικότητα (deWit, 1973) όσο και στη θεωρία τάσεων ζεύγους (Anthony, 1970).

(iii) Καθώς το χαρακτηριστικό μήκος $\ell \rightarrow 0$, αποδεικνύεται ότι η τάση ζεύγους $m_{yz}(x, y=0)$ μηδενίζεται. Άρα, η δεσμευμένη στροφική εξάρμωση εισάγει τάσεις και τάσεις ζεύγους μόνο όταν $\ell \neq 0$, δηλαδή μόνο όταν λαμβάνεται υπόψη η μικροδομή του υλικού. Αντίθετα, όταν $\ell \rightarrow 0$, η ορθή τάση $\sigma_{yy}(x, y=0)$ εκφυλίζεται στην αντίστοιχη της κλασσικής ελαστικότητας για την περίπτωση διακριτής ορθής εξάρμωσης. Η τάση αυτή δίνεται από την σχέση $\sigma_{yy} = \mu b/2\pi(1-\nu)x$ (Εξ. (4.26)) και αποτελεί την συνάρτηση Green του προβλήματος στην κλασσική θεωρία.

Τέλος, οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους μίας διακριτής ορθής εξάρμωσης (η εξωτερική φόρτιση του προβλήματος) δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)r} (\cos\theta + \cos 3\theta) - \frac{2\mu b}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 3\theta \\ &\quad - \frac{\mu b}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\cos\theta - \cos 3\theta), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)r}(3\cos\theta - \cos 3\theta) + \frac{2\mu b}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 3\theta + \frac{\mu b}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\cos\theta - \cos 3\theta), \quad (4.30)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)r}(\sin\theta - \sin 3\theta) - \frac{2\mu b}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta - \frac{\mu b}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (3\sin\theta - \sin 3\theta), \quad (4.31)$$

$$\sigma_{yx} = -\frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)r}(\sin\theta - \sin 3\theta) - \frac{2\mu b}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta + \frac{\mu b}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\sin\theta + \sin 3\theta), \quad (4.32)$$

$$m_{xz} = \frac{\mu b}{\pi} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 2\theta, \quad (4.33)$$

$$m_{yz} = -\frac{\mu b}{\pi} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 2\theta - \frac{\mu b}{\pi} K_0(r/\ell). \quad (4.34)$$

4.2.3 Επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων και αποτελέσματα

Έχοντας υπολογίσει τα εντατικά πεδία των διακριτών ατελειών, πρέπει να τις κατανειμούμε στα χείλη της ρωγμής ώστε να αναπτυχθούν οι διορθωτικές τάσεις της Εξ. (4.5). Το εντατικό πεδίο που προκαλείται από την συνεχή κατανομή ορθών εξαρμώσεων και δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων βρίσκεται με ολοκλήρωση των συναρτήσεων Green (Εξ. (4.26) και (4.27)) κατά μήκος των χηλίων της ρωγμής. Η συνοριακή συνθήκη (4.5α) ικανοποιείται αυτομάτως εφόσον καμία από τις παραπάνω διακριτές εξαρμώσεις δεν παράγει διατμητικές τάσεις στην γραμμή της ρωγμής $y = 0$, όπως φαίνεται στις Εξ. (4.20γ) και (4.21γ). Τελικά, η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών (4.5α) και (4.5β) οδηγεί σε ένα σύστημα συζευγμένων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής ανάλυσης, απομονώνουμε τα ιδιόμορφα μέρη των πυρήνων των ολοκληρωτικών εξισώσεων και καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}
-\sigma_{yy}^{cl.d}(x-d, 0) &= \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{x-t} dt + \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt \\
&+ \frac{2\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_1(x-t) dt - \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot R_2(x-t) dt, \quad |x| < a,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
-m_{yz}^{cl.d}(x-d, 0) &= -\frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{x-t} dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt \\
&- \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_2(x-t) d\xi + \frac{\mu\ell}{2\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot R_3(x-t) dt, \quad |x| < a,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

όπου το σύμβολο CPV \int δηλώνει ολοκλήρωμα κύριας τιμής (Cauchy Principal Value).

Πληροφορίες για ολοκληρώματα τέτοιου είδους μπορούν να βρεθούν στα βιβλία των [Muskhelishvili \(1953\)](#), [Gakhov \(1966\)](#) και [Estrada and Kanwal \(2000\)](#). Επίσης, οι ποσότητες $B_I(t)$ και $W(t)$ είναι οι πυκνότητες της ορθής και της δεσμευμένης στροφικής εξάρμωσης αντίστοιχα, οι οποίες ορίζονται ως

$$B_I(t) = \frac{db(t)}{dt} = -\frac{d\Delta u_y(t)}{dt}, \quad \Delta u_y(x) = -\int_{-a}^x B_I(t) dt. \tag{4.37}$$

$$W(t) = a \frac{d\Omega(t)}{dt} = a \frac{d\Delta\omega(t)}{dt}, \quad \Delta\omega(x) = \frac{1}{a} \int_{-a}^x W(t) dt. \tag{4.38}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, $\Delta u_y(x)$ είναι η σχετική ορθή μετατόπιση και $\Delta\omega(x)$ η σχετική στροφή του πάνω και κάτω χείλους της ρωγμής, αντίστοιχα. Επιπλέον, η πυκνότητα της ορθής εξάρμωσης μπορεί να ερμηνευθεί φυσικά ως η (αρνητική) κλίση της μετατόπισης ενώ η πυκνότητα της δεσμευμένης στροφικής εξάρμωσης ως η καμπυλότητα σε κάθε σημείο της ρωγμής. Παρατηρούμε ότι οι πυκνότητες των ατελειών είναι αδιάστατα μεγέθη. Οι πυρήνες $R_q(x-t)$, με $q=1, 2, 3$, ορίζονται ως

$$R_1(x-t) = \frac{1}{x-t} \left[\frac{2\ell^2}{(x-t)^2} - K_2(|x-t|/\ell) - \frac{1}{2} \right],$$

$$R_2(x-t) = \left[\frac{2\ell^2}{(x-t)^2} - K_2(|x-t|/\ell) \right] + K_0(|x-t|/\ell) + \ln(|x-t|/\ell), \quad (4.39)$$

$$R_3(x-t) = \operatorname{sgn}(x-t) \cdot G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{(x-t)^2}{4\ell^2} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1/2, 1/2, 0 \end{matrix} \right) + \frac{4\ell}{x-t}.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel (Εξ. (4.28)), αποδεικνύεται ότι οι δύο πρώτοι πυρήνες της Εξ. (4.39) είναι ομαλοί καθώς το $x \rightarrow t$ και $\ell > 0$. Όσον αφορά τον τρίτο πυρήνα, αναπτύσσοντας την συνάρτηση MeijerG καθώς το $x \rightarrow t$, λαμβάνουμε την έκφραση

$$\operatorname{sgn}(x-t) \cdot G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{(x-t)^2}{4\ell^2} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1/2, 1/2, 0 \end{matrix} \right] = \quad (4.40)$$

$$-\frac{4\ell}{x-t} + (a_1 + a_2 \ln|x-t|) \cdot (x-t) + O\left((x-t)^3 \ln|x-t|\right),$$

όπου (a_1, a_2) είναι σταθερές που εξαρτώνται από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ . Επιπλέον, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow t} (x-t)^n \cdot \ln|x-t| = 0$ για $n > 0$, οπότε ο πυρήνας $R_3(x-t)$ είναι επίσης ομαλός στο κλειστό διάστημα $-a \leq (x, t) \leq a$.

Στη συνέχεια, οι άγνωστες πυκνότητες των εξαρμώσεων, $B_I(t)$ και $W(t)$, μπορούν να γραφούν ως γινόμενο μίας ομαλής, φραγμένης συνάρτησης και μίας ιδιόμορφης συνάρτησης, η οποία λαμβάνει υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πυκνότητας στα άκρα της ρωγμής (ιδέ π.χ. [Erdogan and Gupta, 1972](#); [Hills et al., 1996](#)). Στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, οι [Huang et al. \(1997\)](#) έδειξαν ότι τόσο η μετατόπιση u_y , όσο και η στροφή ω έχουν ασυμπτωτική συμπεριφορά $r^{1/2}$ κοντά στα άκρα της ρωγμής, όπου r είναι η ακτινική απόσταση από το άκρο της ρωγμής. Εξάλλου, τέτοιου είδους ασυμπτωτική συμπεριφορά επιβεβαιώνεται και από το θεώρημα μοναδικότητας για προβλήματα ρωγμών στη θεωρία τάσεων ζεύγους ([Grentzelou and Georgiadis, 2005](#)), σύμφωνα με το οποίο η μετατόπιση και η στροφή στην περιοχή του άκρου της ρωγμής πρέπει να είναι φραγμένες. Επομένως, οι πυκνότητες της ορθής και της δεσμευμένης στροφικής εξάρμωσης συμπεριφέρονται ως $r^{-1/2}$ και γράφονται στην ακόλουθη μορφή

$$B_I(t) = f(t) \cdot (a^2 - t^2)^{-1/2}, \quad W(t) = g(t) \cdot (a^2 - t^2)^{-1/2}. \quad (4.41)$$

όπου $f(t)$ και $g(t)$ είναι ομαλές, φραγμένες συναρτήσεις στο διάστημα $|t| \leq a$. Περαιτέρω, για να εξασφαλίζεται η μοναδικότητα των τιμών της ορθής μετατόπισης και της στροφής για έναν κλειστό βρόχο γύρω από την ρωγή, πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\int_{-a}^a B_I(t) dt = 0, \quad \int_{-a}^a W(t) dt = 0. \quad (4.42)$$

Προτού προχωρήσουμε στην αριθμητική επίλυση του συστήματος των Εξ. (4.35) και (4.36), εξετάζουμε δύο οριακές περιπτώσεις σχετικά με την επιρροή του χαρακτηριστικού μήκους ℓ . Αρχικά, καθώς το $\ell \rightarrow 0$, αποδεικνύεται ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (4.36) μηδενίζεται ταυτοτικά ενώ η Εξ. (4.35) εκφυλίζεται στην αντίστοιχη της κλασικής ελαστικότητας

$$\frac{\mu}{2\pi(1-\nu)(x-d)} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{x-t} dt, \quad |x| < a. \quad (4.43)$$

Έπειτα, για την περίπτωση $\ell \rightarrow \infty$, πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (4.36) με την ποσότητα $(1/\ell^2)$ και παρατηρώντας ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell^2} \ln \frac{|x-t|}{\ell} = 0, \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell^2} R_2(x-t) = 0, \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} R_3(x-t) = 0, \quad (4.44)$$

αποκτούμε την ακόλουθη μορφή για την Εξ. (4.36), σημειώνοντας πως και η φόρτιση της διακριτής ορθής εξάρμωσης (Εξ. (4.34)) μηδενίζεται για $\ell \rightarrow \infty$

$$\text{CPV} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{x-t} dt = 0, \quad |x| < a. \quad (4.45)$$

Η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση, σε συνδυασμό με την βοηθητική συνθήκη (4.42β), έχει ως μοναδική λύση την $W(t) = 0$. Επιπλέον, παρατηρώντας ότι $\lim_{\ell \rightarrow \infty} R_1(x-t) = 0$, η ολοκληρωτική εξίσωση (4.35) παίρνει την μορφή

$$\frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)(x-d)} = \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{x-t} dt, \quad |x| < a, \quad (4.46)$$

η οποία είναι και πάλι η εξίσωση της κλασσικής ελαστικότητας. Πρέπει, ωστόσο, να επισημανθεί ότι η περίπτωση $\ell \rightarrow \infty$, δεν παρουσιάζει κάποιο φυσικό ενδιαφέρον διότι, εν γένει, το χαρακτηριστικό μήκος είναι μικρή σε μέγεθος ποσότητα.

Ακολούθως, προχωρούμε στην επίλυση του συστήματος των ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων (4.35) και (4.36). Λαμβάνοντας υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των πυκνοτήτων στα άκρα της ρωγμής, και θεωρώντας τις αδιαστατοποιήσεις $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{t} = t/a$, $\tilde{d} = d/a$ και $p = a/\ell$, εκφράζουμε τις συναρτήσεις $B_I(\tilde{t})$ και $W(\tilde{t})$ με τον ακόλουθο τρόπο

$$B_I(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{-1/2}, \quad W(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{-1/2}, \quad |\tilde{t}| < 1, \quad (4.47)$$

όπου $T_n(\tilde{t})$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους (ιδέ π.χ. [Abramowitz and Stegun, 1964](#)), και (a_n, b_n) άγνωστοι συντελεστές (σταθερές). Έπειτα από κατάλληλη κανονικοποίηση στο διάστημα $[-1, 1]$, το σύστημα λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} -\sigma_{yy}^{cl,d}(\tilde{x}-\tilde{d}, 0) &= \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \text{CPV} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{-1/2}}{\tilde{x}-\tilde{t}} d\tilde{t} \\ &+ \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times \int_{-1}^1 T_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{-1/2} \cdot \ln(p|\tilde{x}-\tilde{t}|) d\tilde{t} \\ &+ \frac{2\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times Q_n^{(1)}(\tilde{x}) - \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times Q_n^{(2)}(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
-m_{yz}^{cl,d}(\tilde{x}-\tilde{d}, 0) &= -\frac{2\mu}{p^2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times \text{CPV} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{-1/2}}{\tilde{x}-\tilde{t}} d\tilde{t} \\
&+ \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \int_{-1}^1 T_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{-1/2} \cdot \ln(p|\tilde{x}-\tilde{t}|) d\tilde{t} \\
&- \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times Q_n^{(2)}(\tilde{x}) + \frac{\mu}{2p\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times Q_n^{(3)}(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

όπου οι συναρτήσεις $Q_n^{(s)}(\tilde{x})$ ορίζονται ως

$$Q_n^{(s)}(\tilde{x}) \equiv \int_{-1}^1 T_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{-1/2} \cdot R_s(a\tilde{x}-a\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad s = 1, 2, 3. \tag{4.50}$$

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην Εξ. (4.50) είναι ομαλά (μη-ιδιόμορφα) και υπολογίζονται μέσω της κλασσικής αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Chebyshev ενώ τα ιδιόμορφα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις Εξ. (4.48) και (4.49) υπολογίζονται σε κλειστή μορφή στο Παράρτημα B (Εξ. (B.11) και (B.17)). Επίσης, επισημαίνουμε ότι λόγω των βοηθητικών συνθηκών (4.42), οι συντελεστές a_0 και b_0 είναι μηδενικοί. Με βάση τα παραπάνω, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (4.48) και (4.49) λαμβάνουν την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή

$$\begin{aligned}
-\sigma_{yy}^{cl,d}(\tilde{x}-\tilde{d}, 0) &= -\frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_{n-1}(\tilde{x}) - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n T_n(\tilde{x})}{n} \\
&+ 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times Q_n^{(1)}(\tilde{x}) - \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n \times Q_n^{(2)}(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
-m_{yz}^{cl,d}(\tilde{x}-\tilde{d}, 0) &= \frac{2\mu}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n U_{n-1}(\tilde{x}) - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n T_n(\tilde{x})}{n} \\
&- \mu \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times Q_n^{(2)}(\tilde{x}) + \frac{\mu}{2p} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \times Q_n^{(3)}(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

ενώ οι συναρτήσεις $Q_n^{(s)}(\tilde{x})$ και η φόρτιση της διακριτής ορθής εξάρμωσης γράφονται ως

$$Q_n^{(s)}(\tilde{x}) \equiv \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m T_n(\tilde{t}) \cdot R_s(a\tilde{x} - a\tilde{t}), \quad s = 1, 2, 3, \quad (4.53)$$

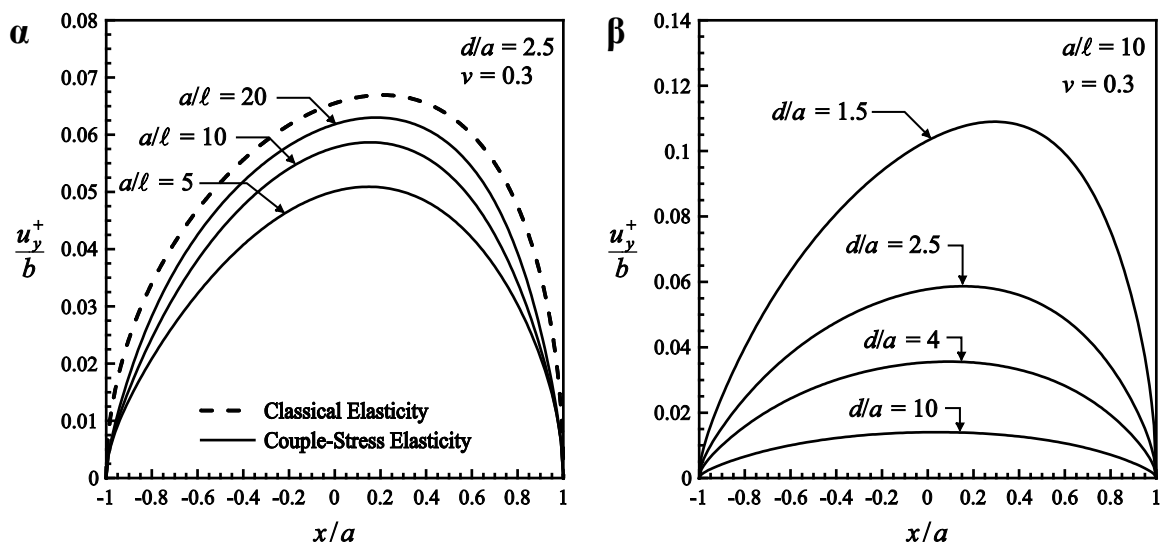
$$\sigma_{yy}^{cl,d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) = -\frac{\mu b}{2\pi a(1-\nu)(\tilde{x} - \tilde{d})} + \frac{2\mu b}{\pi a(\tilde{x} - \tilde{d})} \left[\frac{2}{p^2(\tilde{x} - \tilde{d})^2} - K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right], \quad (4.54)$$

$$m_{yz}^{cl,d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) = \frac{\mu b}{\pi a} K_0(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) + \frac{\mu b}{\pi a} \left[\frac{2}{p^2(\tilde{x} - \tilde{d})^2} - K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right]. \quad (4.55)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (4.51) και (4.52) λύνεται αριθμητικά με την κατάλληλη τεχνική ταξιθεσίας. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε ως σημεία ταξιθεσίας τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $U_{N-1}(\tilde{x})$, δηλαδή $\tilde{x}_k = \cos(k\pi/N)$ με $k = 1, 2, \dots, N-1$ ενώ ως σημεία ολοκλήρωσης τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $T_m(\tilde{t})$, δηλαδή $\tilde{t}_j = \cos[(2j-1)\pi/2m]$ με $j = 1, 2, \dots, m$. Οι Εξ. (4.51) και (4.52) μαζί με τις βοηθητικές συνθήκες (4.42) συνιστούν ένα αλγεβρικό σύστημα $2N$ εξισώσεων με $2N$ αγνώστους. Το σύστημα επιλύθηκε με χρήση του συμβολικού προγράμματος **MATHEMATICA** (Παράρτημα Γ.2). Η σύγκλιση της λύσης επιτυγχάνεται για διαφορετικό αριθμό σημείων N με βάση τον λόγο ℓ/a όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.1. Με γνωστούς πλέον τους συντελεστές a_n και b_n , υπολογίζουμε μέσω των Εξ. (4.47), τις πυκνότητες των δύο εξαρμώσεων.

Προχωρούμε τώρα στην παρουσίαση κάποιων αριθμητικών αποτελεσμάτων. Στο Σχ. 4.4α παρουσιάζεται η επιρροή του λόγου a/ℓ στην κάθετη μετατόπιση (Εξ. (4.37)) του άνω χείλους της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με μία διακριτή ορθή εξάρμωση, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Παρατηρούμε ότι καθώς το μήκος της ρωγμής γίνεται συγκρίσιμο με το χαρακτηριστικό μήκος ℓ , το υλικό επιδεικνύει πιο στιβαρή συμπεριφορά, έχουμε δηλαδή μικρότερες σε μέγεθος μετατοπίσεις στα χείλη της ρωγμής (rigidity effect). Οι μετατοπίσεις που προκύπτουν με βάση την κλασική θεωρία ελαστικότητας (διακεκομμένη γραμμή) αποτελούν άνω όριο για τις μετατοπίσεις στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Στο Σχ. 4.4β εξετάζεται η επίδραση της απόστασης της εξάρμωσης στο προφίλ των μετατοπίσεων της ρωγμής. Οι παράμετροι του υλικού είναι $a/\ell = 10$ και $\nu = 0.3$. Οι μετατοπίσεις που

προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις της εξάρμωσης διαφέρουν σημαντικά τόσο ως προς το σχήμα τους όσο και ως προς το μέγεθός τους. Σημειώνουμε πως στην οριακή περίπτωση $d/a = 1.0$ (πρόβλημα εξαρμωμένης ρωγμής), η φόρτιση στο αριστερό μέλος των Εξ. (4.51) και (4.52) μηδενίζεται. Η επίδραση της εξάρμωσης εισάγεται μέσω των βοηθητικών συνθηκών (4.42). Σε αυτή την περίπτωση η ρωγμή παραμένει ανοιχτή στο ένα άκρο της.

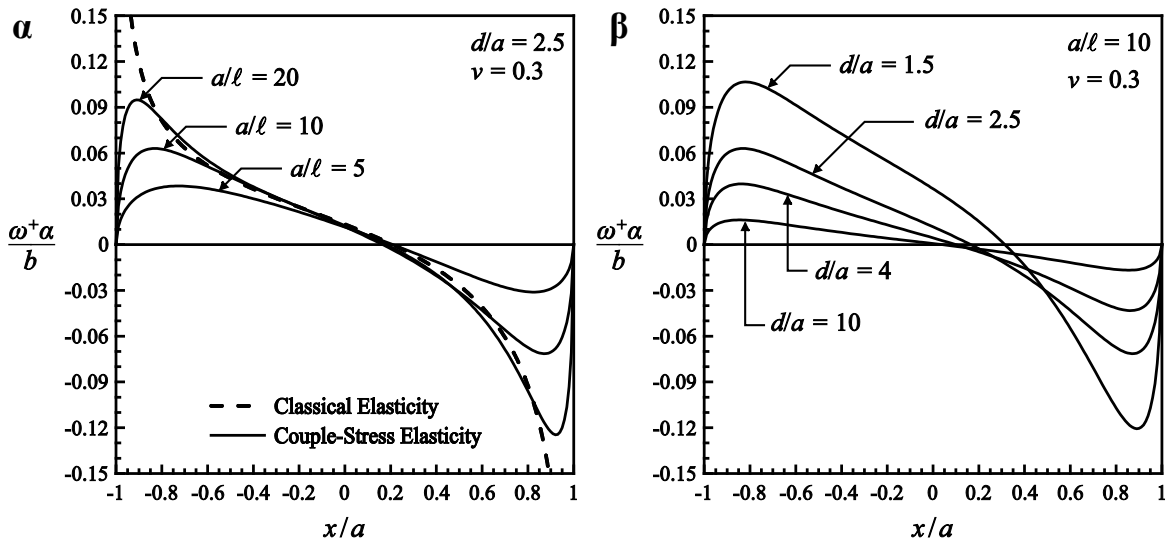


Σχ. 4.4. α) Κάθετη μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορους λόγους a/l λόγω αλληλεπίδρασης με μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$. **β)** Κάθετη μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορες θέσεις της εξάρμωσης σε ένα υλικό με $a/l = 10$. Ο λόγος Poisson είναι $\nu = 0.3$ όλες τις περιπτώσεις.

Αντίστοιχα, από την Εξ. (4.38), υπολογίζουμε την στροφή στα χείλη της ρωγμής. Στο Σχ. 4.5α απεικονίζεται η μεταβολή της στροφής στα χείλη της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου a/l . Παρατηρούμε πως η στροφή μηδενίζεται στα άκρα της ρωγμής. Επιπλέον, καθώς το $\ell \rightarrow 0$, το διάνυσμα στροφής στην θεωρία τάσεων ζεύγους συγκλίνει σημειακά στο αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας. Η συμπεριφορά αυτή είναι τυπική για προβλήματα όπου έχουμε εμφάνιση συνοριακού στρώματος. Στο Σχ. 4.5β παρουσιάζεται η μεταβολή της στροφής για διάφορες θέσεις της εξάρμωσης. Η αύξηση της στροφής στο δεξιό άκρο της ρωγμής είναι έντονη, όσο η εξάρμωση πλησιάζει προς αυτό.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την συμπεριφορά της ορθής τάσης σ_{yy} μπροστά από το άκρο της ρωγμής. Από την υπέρθεση των δύο επιμέρους προβλημάτων, προκύπτει η έκφραση

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} (|x| > a, y = 0) = & \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{x-t} dt + \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt \\ & + \frac{2\mu}{\pi a} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_1(x-t) dt - \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot R_2(x-t) dt + \sigma_{yy}^{cl,d}(x-d, 0). \end{aligned} \quad (4.56)$$



Σχ. 4.5. **α)** Στροφή του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορους λόγους a/ℓ λόγω αλληλεπίδρασης με μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$. **β)** Στροφή του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορες θέσεις της εξάρμωσης σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$. Ο λόγος Poisson είναι $\nu = 0.3$ σε όλες τις περιπτώσεις.

Τα ολοκληρώματα στην Εξ. (4.56) δεν είναι πλέον ιδιόμορφα για $|x| > a$ και υπολογίζονται στο Παράρτημα Β (Εξ. (B.20) και (B.26)). Όσον αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ορθής τάσης σ_{yy} κοντά στο άκρο της ρωγμής $x \rightarrow a^+$, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{x-t} dt = O((x-a)^{-1/2}), & \quad \int_{-a}^a W(t) \cdot \ln|x-t| dt = O(1), \\ \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_1(x-t) dt = O(1), & \quad \int_{-a}^a W(t) \cdot R_2(x-t) dt = O(1). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι η ορθή τάση σ_{yy} παρουσιάζει ιδιομορφία τύπου $x^{-1/2}$, όπως ακριβώς και στην κλασσική ελαστικότητα. Αντίστοιχα, για την τάση ζεύγους m_{yz} , από την υπέρθεση των δύο βοηθητικών προβλημάτων προκύπτει

$$m_{yz}(|x| > a, y = 0) = -\frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{x-t} dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt - \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_2(x-t) dt + \frac{\mu\ell}{2\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot R_3(x-t) dt + m_{yz}^{cl,d}(x-d, 0). \quad (4.58)$$

Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της τάσης ζεύγους m_{yz} κοντά στο άκρο της ρωγμής $x \rightarrow a^+$, μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις

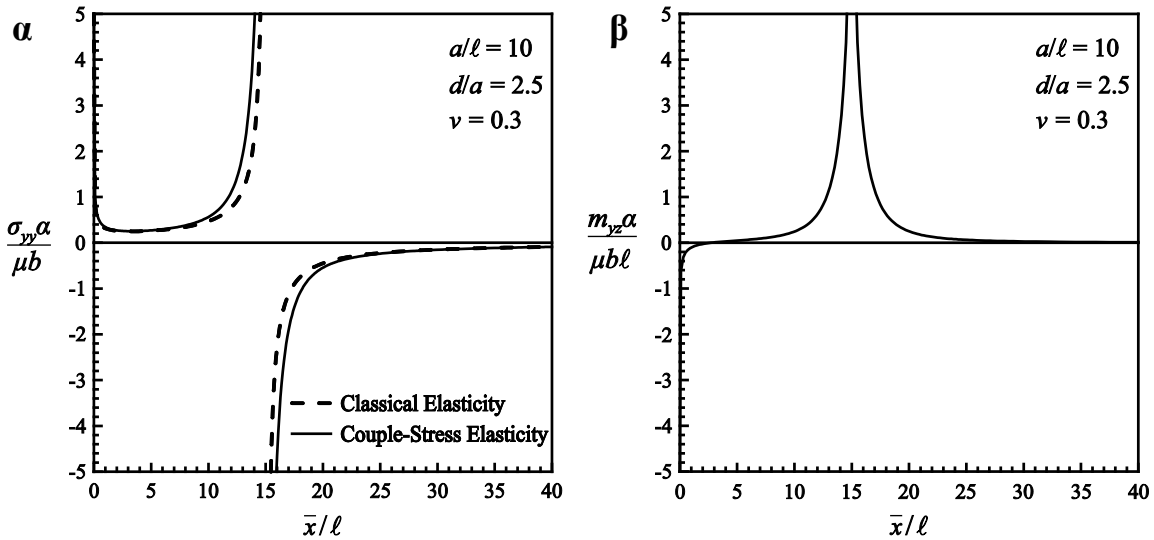
$$\int_{-a}^a \frac{W(t)}{x-t} dt = O((x-a)^{-1/2}), \quad \int_{-a}^a B_I(t) \cdot \ln|x-t| dt = O(1), \quad (4.59)$$

$$\int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_2(x-t) dt = O(1), \quad \int_{-a}^a W(t) \cdot R_3(x-t) dt = O(1).$$

Βάσει των παραπάνω σχέσεων, συμπεραίνουμε ότι η τάση ζεύγους m_{yz} έχει συμπεριφορά $x^{-1/2}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα των [Sternberg and Muki \(1967\)](#) και [Huang et al. \(1997\)](#).

Στο [Σχ. 4.6α](#) απεικονίζεται η κατανομή της ορθής τάσης σ_{yy} λόγω αλληλεπίδρασης με μία διακριτή ορθή εξάρμωση, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$ και λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Για λόγους εποπτείας, ορίζουμε μία νέα χωρική μεταβλητή $\bar{x} = x - a$, η οποία μετράει την απόσταση από το δεξί άκρο της ρωγμής. Παρατηρούμε ότι η επίδραση των τάσεων ζεύγους είναι σημαντική σε μία ζώνη εύρους 3ℓ από το άκρο της ρωγμής και 5ℓ γύρω από τον πυρήνα της εξάρμωσης. Πέραν των περιοχών αυτών, η κατανομή προσεγγίζει την λύση της κλασσικής θεωρίας. Η λύση εξαρτάται από τον λόγο a/ℓ και τον λόγο Poisson, όπως φαίνεται και στην [Εξ. \(4.56\)](#). Επίσης, διατηρείται η ιδιομορφία τύπου Cauchy όταν το $x \rightarrow d$ λόγω της εξάρμωσης, όπως και στην κλασσική θεωρία. Στο [Σχ. 4.6β](#)

παρουσιάζεται η κατανομή της τάσης ζεύγους m_{yz} . Παρατηρείται ότι η επιρροή των τάσεων ζεύγους περιορίζεται σε μία ζώνη εύρους 3ℓ μπροστά από το άκρο της ρωγμής και 10ℓ εκατέρωθεν της εξάρμωσης. Επίσης, για $\bar{x}/\ell = 15$, το πεδίο παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία λόγω της εξάρμωσης.



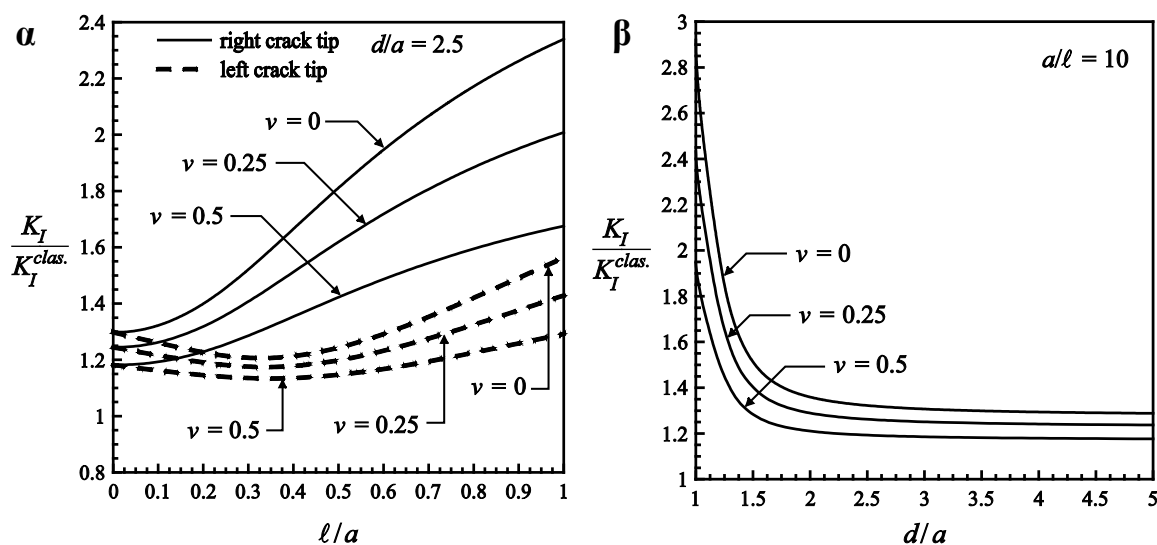
Σχ. 4.6. Κατανομή (α) της ορθής τάσης σ_{yy} και (β) της τάσης ζεύγους m_{yz} μπροστά από το δεξί άκρο της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα σώμα με $a/\ell = 10$ και λόγο Poisson $\nu = 0.3$.

Ακολούθως, εξετάζουμε τη μεταβολή του συντελεστή έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Για το δεξί άκρο της ρωγμής, ο συντελεστής ορίζεται ως $K_I = \lim_{x \rightarrow a^+} [2\pi(x-a)]^{1/2} \sigma_{yy}(x, 0)$, όπου η ορθή τάση $\sigma_{yy}(x, 0)$ δίνεται από την Εξ. (4.56). Ανάλογος είναι ο ορισμός και για το αριστερό άκρο της ρωγμής. Στο Σχ. 4.7α παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $K_I/K_I^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και του λόγου Poisson ν , για μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους είναι πάντα μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας (stress aggravation). Η συμπεριφορά είναι διαφορετική στα δύο άκρα λόγω ασυμμετρίας της φόρτισης. Οι καμπύλες που αφορούν το δεξί άκρο (συνεχείς γραμμές) είναι συνεχώς αύξουσες καθώς ο λόγος ℓ/a αυξάνει, ενώ στο αριστερό άκρο (διακεκομμένες γραμμές) παρατηρείται αρχικά ένας πτωτικός κλάδος και στην συνέχεια αύξουσα συμπεριφορά. Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση $\ell/a = 0$ (απουσία μικροδομής), θα έπρεπε να ισχύει

$K_I/K_I^{clas.} = 1$. Αντίθετα, ο λόγος των συντελεστών έντασης τάσεων εμφανίζει μία πεπερασμένη ασυνέχεια για $\ell/a = 0$. Η ασυνέχεια αυτή έχει παρατηρηθεί σε προβλήματα ρωγμών στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Οι [Sternberg and Muki \(1967\)](#) απέδωσαν τη συμπεριφορά αυτή στα έντονα φαινόμενα συνοριακού στρώματος που εμφανίζονται στην θεωρία αυτή. Επίσης, καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$, ο λόγος $K_I/K_I^{clas.}$ τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή $(3-2\nu)$.

Πίνακας 4.1. Λόγος $K_{I,r}/K_{I,r}^{clas.}$ λόγω αλληλεπίδρασης με μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.0$ σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0$.

N	$\ell/a=1.0$	$\ell/a=0.8$	$\ell/a=0.5$	$\ell/a=0.2$	$\ell/a=0.1$	$\ell/a=0.05$	$\ell/a=0.01$	$\ell/a=0.005$
10	2.61055	2.47282	2.11815	1.52564	1.35979	1.33328	1.88755	2.31070
20	2.61055	2.47282	2.11816	1.52565	1.35930	1.31383	1.33701	1.51537
30			2.11816	1.52565	1.35930	1.31382	1.30031	1.32368
40						1.31382	1.29958	1.30113
50							1.29945	1.29925
60							1.29945	1.29924
70								1.29924



Σχ. 4.7. α) Μεταβολή του λόγου των συντελεστών έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασική ελαστικότητα ως προς τον λόγο ℓ/a για μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$.

β) Διακύμανση του ίδιου λόγου στο δεξί άκρο της ρωγμής για διάφορες θέσεις της εξάρμωσης σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$.

Στο Σχ. 4.7β παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $K_I/K_I^{clas.}$ στο δεξί άκρο της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου d/a και του λόγου Poisson ν , σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$. Η

συμπεριφορά είναι συνεχώς πτωτική όσο η εξάρμωση απομακρύνεται από το άκρο της ρωγμής και αποκτά γρήγορα μία σταθερή τιμή. Η τιμή αυτή ταυτίζεται με εκείνη που προκύπτει στο πρόβλημα της ρωγμής υπό σταθερή απομακρυσμένη φόρτιση (τύπος I), για τον αντίστοιχο λόγο a/ℓ . Πράγματι, ανατρέχοντας στην εργασία των [Gourgiotis and Georgiadis \(2008\)](#), για $\ell/a = 0.1$ και $\nu = 0$ προκύπτει συντελεστής 1.28, ενώ για $\nu = 0.25$ και $\nu = 0.5$ οι συντελεστές είναι 1.23 και 1.17, αντίστοιχα. Παρόμοια συμπεριφορά σημειώνεται και στο αριστερό άκρο της ρωγμής.

4.2.4 Ολοκλήρωμα J και κινούσα δύναμη της εξάρμωσης

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζεται το ολοκλήρωμα J της Μηχανικής των Θραύσεων και διερευνάται η εξάρτησή του από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ , τον λόγο Poisson ν και την θέση της ορθής εξάρμωσης. Το ολοκλήρωμα J (ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας), διατυπώθηκε στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους από τους [Atkinson and Leppington \(1974\)](#) και αποδείχθηκε ότι είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης ([Atkinson and Leppington, 1977](#); [Lubarda and Markenscoff, 2000](#)). Η έκφραση για το ολοκλήρωμα J είναι η ακόλουθη

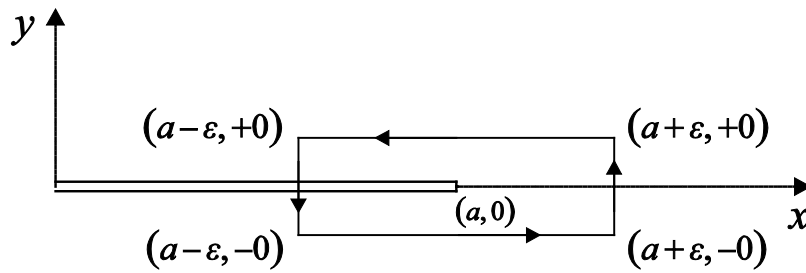
$$\begin{aligned} J &= \int_C \left[W n_x - t_q^{(n)} \frac{\partial u_q}{\partial x} - M_q^{(n)} \frac{\partial \omega_q}{\partial x} \right] dC = \int_C \left[W n_x - P_q^{(n)} \frac{\partial u_q}{\partial x} - R_q^{(n)} \frac{\partial \omega_q}{\partial x} \right] dC \\ &= \int_C W dy - \left[P_q^{(n)} \frac{\partial u_q}{\partial x} + R_q^{(n)} \frac{\partial \omega_q}{\partial x} \right] dC, \end{aligned} \quad (4.60)$$

όπου C είναι μία κατά τμήματα λεία καμπύλη που περικλείει την αιχμή της ρωγμής, W είναι η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας, $(t_q^{(n)}, M_q^{(n)})$ είναι οι επιφανειακοί ελκυστές που ορίζονται στις Εξ. (3.3) και (3.4), $P_q^{(n)}$ είναι ο τροποποιημένος ελκυστής δύναμης (Εξ. (3.16)) και $R_q^{(n)}$ ο επαπτομενικός ελκυστής ροπής (Εξ. (3.17)).

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J , επιλέγουμε ένα δρόμο ολοκλήρωσης μορφής παραλληλογράμμου ο οποίος περικλείει την αιχμή της ρωγμής και έχει ‘μηδενιζόμενο’ ύψος κατά την διεύθυνση y , ενώ παράλληλα ισχύει $\varepsilon \rightarrow +0$ (Σχ. 4.8), όμοια με την διαδικασία υπολογισμού του ολοκληρώματος M στην Παράγραφο 2.2.2. Η ιδέα της χρησιμοποίησης του παραλληλογράμμου αυτού, εισήχθη από τον [Freund \(1972\)](#)

για τη μελέτη του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας στην αιχμή μίας ρωγμής κατά την ταχεία (δυναμική) επέκτασή της ενώ έχει αποδειχθεί αποτελεσματική στον υπολογισμό ενεργειακών ποσοτήτων κοντά στα άκρα ρωγμών (ιδέ π.χ. [Burrige, 1976](#); [Georgiadis, 2003](#); [Gourgiotis and Georgiadis, 2008, 2009](#); [Gourgiotis and Piccolroaz, 2014](#)). Ο δρόμος ολοκλήρωσης αυτός παρέχει την δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί μόνο η ασυμπτωτική έκφραση των τάσεων και των μετατοπίσεων κοντά στην αιχμή της ρωγμής. Επιπλέον, με την συγκεκριμένη επιλογή, ο όρος $\int_C W dy$ στην Εξ. (4.60) μηδενίζεται καθώς το ύψος του παραλληλογράμμου τείνει στο μηδέν. Επομένως, το ολοκλήρωμα J γράφεται ως

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left(P_q^{(n)} \frac{\partial u_q}{\partial x} + R_q^{(n)} \frac{\partial \omega_q}{\partial x} \right) dx \right\}. \quad (4.61)$$



Σχ. 4.8. Δρόμος ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J .

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα ρωγμής, η διατμητική τάση σ_{yx} είναι μηδέν για $y = 0$ και ότι τα χείλη της ρωγμής ορίζονται από το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$, το ολοκλήρωμα J παίρνει τη μορφή

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left(\sigma_{yy}(x, y=0^+) \cdot \frac{\partial u_y(x, y=0^+)}{\partial x} + m_{yz}(x, y=0^+) \cdot \frac{\partial \omega(x, y=0^+)}{\partial x} \right) dx \right\}. \quad (4.62)$$

Επισημαίνεται ότι η δεσπόζουσα ιδιόμορφη συμπεριφορά για την ορθή τάση σ_{yy} και την τάση ζεύγους m_{yz} οφείλεται στα ολοκληρώματα τύπου Cauchy των Εξ. (4.56) και (4.58) αντίστοιχα. Οι τάσεις αυτές για $x \rightarrow a^+$ γράφονται ως ($\tilde{x} > 1$)

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}(x \rightarrow a^+, y = 0^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{x-t} dt \\ &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{a_n T_n(\tilde{t})}{(1-\tilde{t}^2)^{1/2} (\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} = \frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n \cdot (\tilde{x}-1)^{-1/2},\end{aligned}\quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}m_{yz}(x \rightarrow a^+, y = 0^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left(-\frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{x-t} dt \right) \\ &= -\lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \int_{-1}^1 \frac{b_n T_n(\tilde{t})}{(1-\tilde{t}^2)^{1/2} (\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} = -\frac{2\mu\ell^2}{a} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N b_n \cdot (\tilde{x}-1)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (4.64)$$

Για τις πυκνότητες των εξαρμώσεων $B_I(t)$ και $W(t)$, βάσει των ορισμών (Εξ. (4.37) και (4.38)), ισχύουν οι παρακάτω ασυμπτωτικές σχέσεις καθώς το $x \rightarrow a^-$ ($\tilde{x} < 1$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_y(x \rightarrow a^-, y = 0^+)}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a^-} B_I(x) = -\frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N a_n T_n(\tilde{x}) \cdot (1-\tilde{x}^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2^{3/2}} \sum_{n=1}^N a_n \cdot (1-\tilde{x})^{-1/2},\end{aligned}\quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega(x \rightarrow a^-, y = 0^+)}{\partial x} &= \frac{1}{2a} \lim_{x \rightarrow a^-} W(x) = \frac{1}{2a} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N b_n T_n(\tilde{x}) \cdot (1-\tilde{x}^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2^{3/2} a} \sum_{n=1}^N b_n \cdot (1-\tilde{x})^{-1/2}.\end{aligned}\quad (4.66)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, το ολοκλήρωμα J μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$J_r = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\mu}{2} \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 \Lambda_2 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = \frac{\mu\pi}{2} a \left\{ \Lambda_1 + \frac{1}{p^2} \Lambda_2 \right\}, \quad (4.67)$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=1}^N a_n \times \sum_{n=1}^N a_n, \quad \Lambda_2 = \sum_{n=1}^N b_n \times \sum_{n=1}^N b_n, \quad (4.68)$$

$\bar{x} = \tilde{x} - 1$ και για κάθε πραγματικό αριθμό λ , με εξαίρεση τις τιμές $\lambda = -1, -2, -3, \dots$, ορίζονται οι κατανομές τύπου ‘διχοτόμου’ (distributions of the bisection type), x_+^λ και x_-^λ βάσει των παρακάτω σχέσεων (ιδέ π.χ. [Gel'fand and Shilov, 1964](#))

$$x_+^\lambda = \begin{cases} |\bar{x}|^\lambda, & \bar{x} > 0 \\ 0, & \bar{x} < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad x_-^\lambda = \begin{cases} 0, & \bar{x} > 0 \\ |\bar{x}|^\lambda, & \bar{x} < 0 \end{cases}. \quad (4.69)$$

Τα ολοκληρώματα στην Εξ. (4.67) υπολογίζονται βάσει του θεωρήματος Fisher για γινόμενα κατανομών τύπου ‘διχοτόμου’ ([Fisher, 1971](#)). Ειδικότερα, γίνεται χρήση της σχέσης $(x_+)^{-1-\lambda} (x_-)^\lambda = -\pi\delta(x) [2\sin(\pi\lambda)]^{-1}$, όπου $\lambda \neq -1, -2, -3, \dots$ και $\delta(x)$ είναι η κατανομή δέλτα Dirac και της βασικής ιδιότητας της κατανομής Dirac, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1$.

Αντίστοιχα για το αριστερό άκρο της ρωγμής ($x \rightarrow -a^-$), οι εκφράσεις για την ορθή τάση σ_{yy} και την τάση ζεύγους m_{yz} γράφονται ως ($\tilde{x} < -1$)

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x \rightarrow -a^-, y = 0^+) &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow -1^-} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{a_n T_n(\tilde{t})}{(1-\tilde{t}^2)^{1/2} (\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} \\ &= -\frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n \cdot (\tilde{x}+1)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}
m_{yz}(x \rightarrow -a^-, y = 0^+) &= -\lim_{\tilde{x} \rightarrow -1^-} \frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \int_{-1}^1 \frac{b_n T_n(\tilde{t})}{(1-\tilde{t}^2)^{1/2} (\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} \\
&= \frac{2\mu\ell^2}{a} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N b_n (-1)^n \cdot (\tilde{x}+1)^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Για τις πυκνότητες $B_l(t)$ και $W(t)$, ισχύουν οι παρακάτω ασυμπτωτικές σχέσεις καθώς το $x \rightarrow -a^+$ ($\tilde{x} > -1$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_y(x \rightarrow -a^+, y = 0^+)}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow -1^+} \sum_{n=1}^N a_n T_n(\tilde{x}) \cdot (1-\tilde{x}^2)^{-1/2} \\
&= -\frac{1}{2^{3/2}} \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n \cdot (1+\tilde{x})^{-1/2},
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega(x \rightarrow -a^+, y = 0^+)}{\partial x} &= \frac{1}{2a} \lim_{\tilde{x} \rightarrow -1^+} \sum_{n=1}^N b_n T_n(\tilde{x}) \cdot (1-\tilde{x}^2)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{2^{3/2} a} \sum_{n=1}^N b_n (-1)^n \cdot (1+\tilde{x})^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Τελικά, το ολοκλήρωμα J για το αριστερό άκρο της ρωγμής γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned}
J_l &= -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu}{2} \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\ell}{a} \right)^2 \Lambda_2 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = -\frac{\mu\pi}{2} a \left\{ \Lambda_1 + \frac{1}{p^2} \Lambda_2 \right\},
\end{aligned} \tag{4.74}$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n \times \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n, \quad \Lambda_2 = \sum_{n=1}^N b_n (-1)^n \times \sum_{n=1}^N b_n (-1)^n. \tag{4.75}$$

Βάσει της παραπάνω ανάλυσης, μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα J . Στο Σχ. 4.9α παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και του λόγου Poisson ν , για μία

ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$. Η τιμή του ολοκληρώματος J στην κλασσική ελαστικότητα μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας έναν δρόμο ολοκλήρωσης όπως περιγράφηκε παραπάνω και τις εκφράσεις των ελαστικών πεδίων του προβλήματος (Markenscoff, 1993). Τελικά, αποκτούμε τις ακόλουθες σχέσεις για το ολοκλήρωμα J για το δεξί και αριστερό άκρο αντίστοιχα

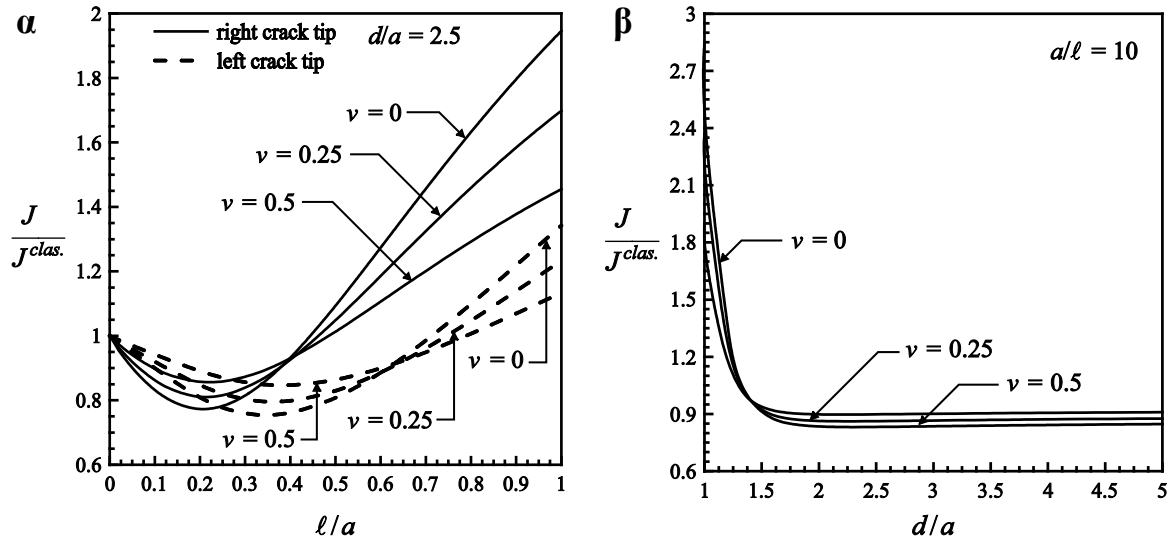
$$J_r = \frac{\mu b^2 \left[1 - \left(\frac{d+a}{d-a} \right)^{1/2} \right] \left[d-a - (d^2 - a^2)^{1/2} \right]}{8\pi a(1-\nu)(d-a)}, \quad (4.76)$$

$$J_\ell = -\frac{\mu b^2 \left[1 - \left(\frac{d+a}{d-a} \right)^{1/2} \right] \left[d-a - (d^2 - a^2)^{1/2} \right]}{8\pi a(1-\nu)(d+a)}.$$

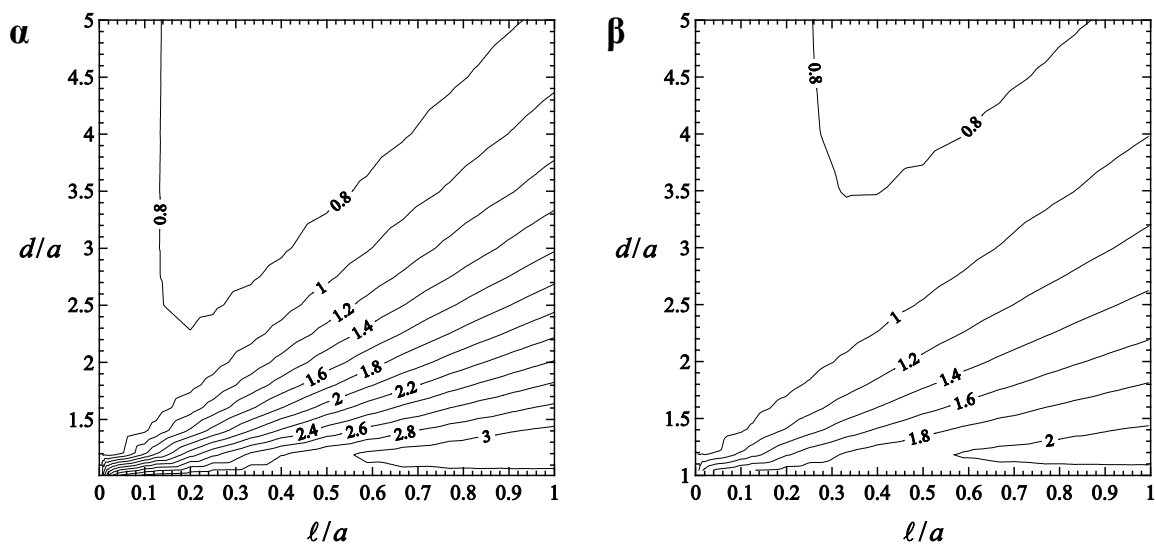
Παρατηρούμε ότι καθώς ο λόγος $\ell/a \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα J στην θεωρία τάσεων ζεύγους τείνει στο αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας. Αυτή η συμπεριφορά έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους (Atkinson and Leppington, 1977; Gourgiotis and Georgiadis, 2008; Gourgiotis *et al.*, 2012). Σε όλες τις καμπύλες, καθώς το ℓ/a αυξάνει, παρατηρείται ένας αρχικός πτωτικός κλάδος ($J < J^{clas.}$) μέχρι ένα πεπερασμένο ελάχιστο για $0.2 \leq \ell/a \leq 0.25$ (το διάστημα εξαρτάται από τον λόγο Poisson και τον λόγο d/a) ενώ στην συνέχεια ο λόγος αυξάνει ($J > J^{clas.}$). Δηλαδή, για ορισμένους λόγους ℓ/a , ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας μειώνεται (strengthening effect) ενώ για άλλους λόγους αυξάνεται (weakening effect). Ανάλογη εναλλασσόμενη συμπεριφορά του λόγου $J/J^{clas.}$ έχει παρατηρηθεί στην εργασία των Gourgiotis *et al.* (2012). Επίσης, καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$, ο λόγος $J/J^{clas.}$ τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή $(3-2\nu)$.

Στο Σχ. 4.9β παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ στο δεξί άκρο της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου d/a και του λόγου Poisson ν , σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$. Η συμπεριφορά είναι συνεχώς πτωτική το d/a αυξάνει και αποκτά γρήγορα μία σταθερή τιμή. Η τιμή αυτή μπορεί και πάλι να συσχετιστεί με εκείνη που προκύπτει στο πρόβλημα της ρωγμής υπό σταθερή απομακρυσμένη φόρτιση (τύπος I), για τον αντίστοιχο λόγο a/ℓ . Ανατρέχοντας στην εργασία των Gourgiotis and Georgiadis (2008), για

$\ell/a = 0.1$ και $\nu = 0$ προκύπτει συντελεστής 0.86, ενώ για $\nu = 0.25$ και $\nu = 0.5$ οι συντελεστές είναι 0.88 και 0.92, αντίστοιχα. Παρόμοια συμπεριφορά σημειώνεται και στο αριστερό άκρο της ρωγμής.



Σχ. 4.9. **α)** Μεταβολή του λόγου των ολοκληρωμάτων J στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασική ελαστικότητα ως προς τον λόγο ℓ/a για μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$. **β)** Διακύμανση του ίδιου λόγου στο δεξί άκρο της ρωγμής για διάφορες θέσεις της εξάρμωσης σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$.



Σχ. 4.10. Μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ ως προς τους λόγους ℓ/a και d/a για λόγο Poisson **α)** $\nu = 0$ και **β)** $\nu = 0.5$.

Επιθυμώντας να διερευνήσουμε περαιτέρω το φαινόμενο της ελάττωσης ή της αύξησης του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας που παρουσιάστηκε στο Σχ. 4.9α,

επιχειρούμε μία παραμετρική ανάλυση για διάφορες τιμές των λόγων ℓ/a , d/a και του λόγου Poisson. Στο Σχ. 4.10 απεικονίζεται σε μορφή ισοϋψών καμπύλων η εξάρτηση του λόγου $J/J^{clas.}$ στο δεξί άκρο της ρωγμής από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ και την θέση της ορθής εξάρμωσης, για λόγο Poisson $\nu = 0$ (Σχ. 4.10α) και $\nu = 0.5$ (Σχ. 4.10β). Η καμπύλη $J/J^{clas.} = 1$ αποτελεί το όριο μεταξύ μείωσης και αύξησης του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας. Επομένως, δημιουργείται μία περιοχή, η οποία οριοθετείται από την καμπύλη $J/J^{clas.} = 1$ καθώς το $d/a \rightarrow 1$, όπου ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας και κατ' επέκταση η 'οδηγούσα την διάδοση της ρωγμής δύναμη' (crack driving force) αυξάνονται. Η περιοχή αυτή περιορίζεται όσο ο λόγος Poisson αυξάνει.

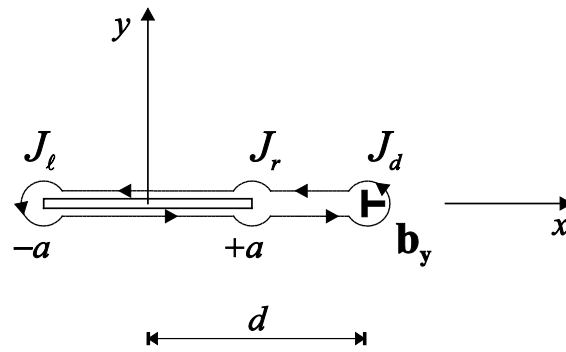
Στη συνέχεια, παρουσιάζει ενδιαφέρον ο υπολογισμός της κινούσας δύναμης Peach-Koehler που ασκείται στην εξάρμωση. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει με βάση τον ορισμό (Εξ. (2.24)) χρησιμοποιώντας την έκφραση για την ορθή τάση σ_{yy} (Εξ. (4.56)), δίχως όμως την συνεισφορά της διακριτής ορθής εξάρμωσης, $\sigma_{yy}^{cl,d}(x-d, 0)$ (Dundurs and Markenscoff, 1989). Εναλλακτικά, θεωρώντας έναν δρόμο ολοκλήρωσης που περικλείει τόσο την ρωγμή όσο και την εξάρμωση (Σχ. 4.11) και χρησιμοποιώντας την ισότητα μεταξύ δύναμης Peach-Koehler και ολοκληρώματος J γύρω από μία εξάρμωση (Εξ. (2.29)), μπορούμε να γράψουμε την έκφραση

$$F_x^{sd} = -(J_r + J_\ell), \quad (4.77)$$

όπου F_x^{sd} είναι η δύναμη Peach-Koehler κατά τη διεύθυνση x για μία διακριτή ορθή εξάρμωση ενώ J_r και J_ℓ οι τιμές των ολοκληρωμάτων J στο δεξί και αριστερό άκρο της ρωγμής αντίστοιχα.

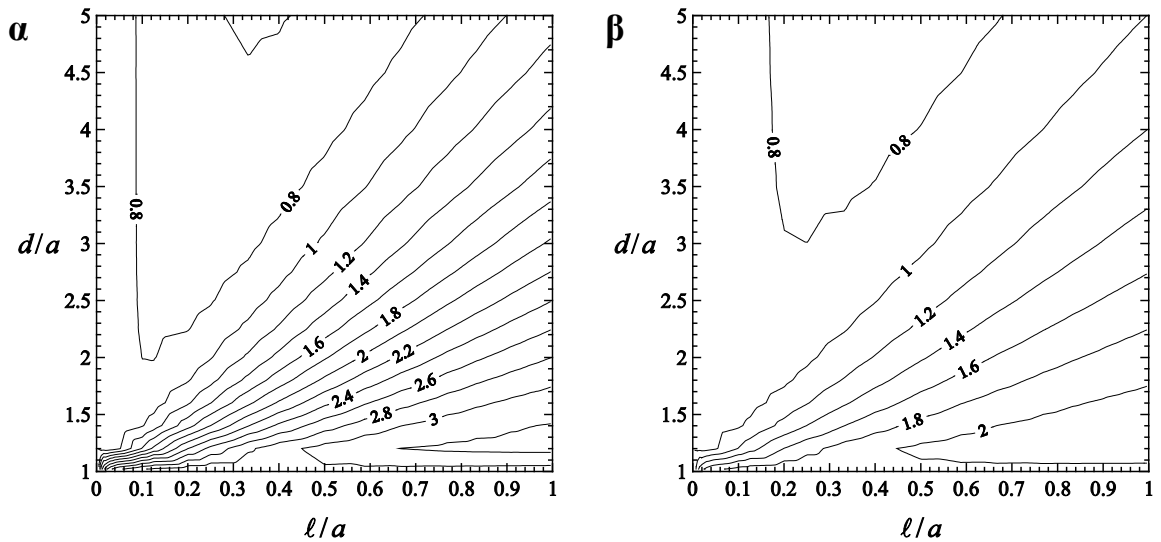
Με βάση τα αποτελέσματα για τα ολοκληρώματα J , αναμένουμε η κινούσα δύναμη της εξάρμωσης να εξαρτάται από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ , την απόσταση μεταξύ ρωγμής και εξάρμωσης d και τον λόγο Poisson $\nu = 0$ όντας άλλοτε μεγαλύτερη και άλλοτε μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή της στην κλασσική ελαστικότητα, η οποία δίνεται από την έκφραση (Zhang and Li, 1991b)

$$F_x^{sd,clas.} = -\frac{\mu b^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{d - (d^2 - a^2)^{1/2}}{d^2 - a^2}. \quad (4.78)$$



Σχ. 4.11. Δρόμος ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό της δύναμης Peach-Koehler γύρω από την εξάρμωση.

Στο Σχ. 4.12 παρουσιάζεται σε μορφή ισοϋψών καμπύλων η εξάρτηση του λόγου $F_x^{sd}/F_x^{sd,clas.}$ από τις τιμές των λόγων ℓ/a και d/a , για λόγο Poisson $\nu=0$ (Σχ. 4.12α) και $\nu=0.5$ (Σχ. 4.12β). Σε αντιστοιχία με τα αποτελέσματα για το ολοκλήρωμα J , δημιουργείται μία περιοχή που οριοθετείται από την καμπύλη $F_x/F_x^{clas.}=1$ καθώς το $d/a \rightarrow 1$, όπου η τιμή της κινούσας δύναμης της εξάρμωσης αυξάνεται στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους (weakening effect). Η περιοχή είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την αντίστοιχη για το ολοκλήρωμα J στο δεξί άκρο της ρωγμής (Σχ. 4.10) ενώ ελαττώνεται όσο ο λόγος Poisson αυξάνει.



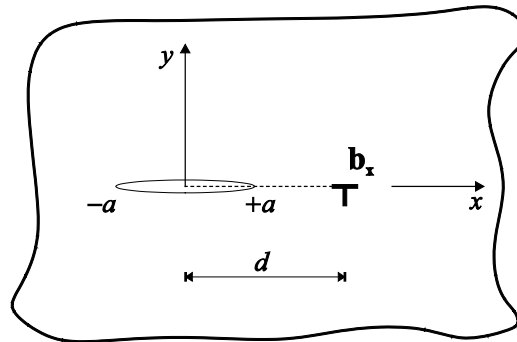
Σχ. 4.12. Μεταβολή του λόγου $F_x/F_x^{clas.}$ ως προς τους λόγους ℓ/a και d/a για λόγο Poisson **α)** $\nu=0$ και **β)** $\nu=0.5$.

4.3 Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση

4.3.1 Κατάστρωση του προβλήματος

Θεωρούμε μία κεντρική ρωγμή μήκους $2a$ σε ένα ελαστικό άπειρο στερεό σώμα με μικροδομή και μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση $\mathbf{b} = (b_x, 0)$ σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής, υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Σχ. 4.13). Τα χείλη της ρωγμής περιγράφονται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$ και είναι αφόρτιστα. Οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής γράφονται σύμφωνα με τις Εξ. (3.16) και (3.17) ως

$$\sigma_{yx}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad m_{yz} = 0, \quad \text{για } |x| < a. \quad (4.79)$$



Σχ. 4.13. Κεντρική ρωγμή αλληλεπίδρα με διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση.

Η παρουσία μίας διακριτής εφαπτομενικής εξάρμωσης σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής δημιουργεί μόνο διατμητικές τάσεις σ_{yx} κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής (ιδέ Παράγραφο 4.3.2), δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma_{yx}(d, 0) \rightarrow \sigma_{yx}^{gl,d}, \quad \sigma_{yy}(d, 0) \rightarrow 0, \quad m_{yz}(d, 0) \rightarrow 0, \quad (4.80)$$

όπου $\sigma_{yx}^{gl,d}$ είναι οι διατμητικές τάσεις μίας διακριτής εφαπτομενικής εξάρμωσης στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Επίσης, οι συνθήκες στο άπειρο είναι

$$\sigma_{xx}^{\infty}, \sigma_{yy}^{\infty}, \sigma_{yx}^{\infty}, \sigma_{xy}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xz}^{\infty}, m_{yz}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty, \quad (4.81)$$

όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων. Η Εξ. (4.81) υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει άλλη εξωτερική φόρτιση στο πρόβλημα πέραν της εξάρμωσης.

Η λύση του προβλήματος προκύπτει ως υπέρθεση των λύσεων δύο επιμέρους προβλημάτων. Αρχικά, θεωρούμε ένα αρηγματώτο σώμα το οποίο υπόκειται στη φόρτιση της Εξ. (4.80). Το τασικό πεδίο αυτού του προβλήματος είναι αυτό μίας διακριτής εφαπτομενικής εξάρμωσης και δίνεται στην Παράγραφο 4.3.2 (Εξ. (4.86) -(4.91)).

Στη συνέχεια, για το δεύτερο επιμέρους πρόβλημα (διορθωτική λύση), θεωρούμε ένα σώμα ίδιας γεωμετρίας με το αρχικό ρηγματωμένο δίχως την επίδραση της διακριτής εφαπτομενικής εξάρμωσης. Η μοναδική φόρτιση εφαρμόζεται πάνω στα χείλη της ρωγμής και αποτελείται από ίσες και αντίθετες τάσεις από αυτές που προέκυψαν στο αρηγματώτο σώμα. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{yx}(x, 0) = -\sigma_{yx}^{gl,d}(x-d, 0), \quad m_{yz}(x, 0) = 0, \quad \text{για } |x| < a, \quad (4.82)$$

και

$$\sigma_{yy}^{\infty}, \sigma_{yx}^{\infty}, \sigma_{xy}^{\infty}, \sigma_{xx}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xz}^{\infty}, m_{yz}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty. \quad (4.83)$$

Για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών (4.82), είναι αρκετή η κατανομή διακριτών εφαπτομενικών εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής, σε αντίθεση με το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης με μία διακριτή ορθή εξάρμωση. Αυτό συμβαίνει, καθότι μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση δεν παράγει ορθές τάσεις σ_{yy} ή τάσεις ζεύγους m_{yz} στο επίπεδο $y=0$, οπότε οι συνοριακές συνθήκες (4.82α) και (4.82γ) ικανοποιούνται αυτομάτως. Αντίστοιχα, στα πλαίσια της κλασικής ελαστικότητας, οι συνοριακές συνθήκες (4.82α) και (4.82β) που περιγράφουν το πρόβλημα, ικανοποιούνται μέσω κατανομής διακριτών εφαπτομενικών εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής.

Στην Παράγραφο 4.3.2 υπολογίζουμε το τασικό πεδίο που παράγεται από μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση, από το οποίο θα προκύψει η κατάλληλη συνάρτηση

Green του προβλήματος. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί είτε μέσω του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier είτε, όπως θα περιγραφεί στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιώντας τις τασικές συναρτήσεις του Mindlin.

4.3.2 Συνάρτηση Green

Επιβάλλουμε στην αρχή του επιπέδου (x, y) , μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση με διάνυσμα Burgers $\mathbf{b} = (b_x, 0, 0)$. Στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, οι κατάλληλες τασικές συναρτήσεις Mindlin για το πρόβλημα αυτό διατυπώθηκαν από τους [Cohen \(1966\)](#), [Knésli and Semela \(1972\)](#), και [Nowacki \(1974\)](#)

$$\Phi = -\frac{\mu b r}{4\pi(1-\nu)}(2\ln r + 1)\sin\theta, \quad (4.84)$$

$$\Psi = \frac{2\mu b \ell}{\pi} [K_1(r/\ell) - \ell/r] \cos\theta. \quad (4.85)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (4.84) και (4.85) στις Εξ. (3.45), (3.46) και (3.47), προκύπτουν οι εκφράσεις για τις ορθές και διατμητικές τάσεις, και τις τάσεις ζεύγους αντίστοιχα, για μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & -\frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)r}(3\sin\theta + \sin 3\theta) + \frac{2\mu b}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta \\ & - \frac{\mu b}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\sin\theta + \sin 3\theta), \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)r}(\sin 3\theta - \sin\theta) - \frac{2\mu b}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta \\ & + \frac{\mu b}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\sin\theta + \sin 3\theta), \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)r}(\cos\theta + \cos 3\theta) - \frac{2\mu b}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 3\theta \\ & - \frac{\mu b}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\cos\theta - \cos 3\theta), \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\sigma_{yx} = \frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)r}(\cos\theta + \cos 3\theta) - \frac{2\mu b}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 3\theta + \frac{\mu b}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (3\cos\theta + \cos 3\theta), \quad (4.89)$$

$$m_{xz} = \frac{\mu b}{\pi} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 2\theta - \frac{\mu b}{\pi} K_0(r/\ell), \quad (4.90)$$

$$m_{yz} = \frac{\mu b}{\pi} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 2\theta. \quad (4.91)$$

Χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές σχέσεις (4.28), παρατηρούμε ότι καθώς το $r \rightarrow 0$, οι τάσεις ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}$) διατηρούν την ιδιομορφία τύπου Cauchy που εμφανίζεται στην κλασσική ελαστικότητα. Αντίστοιχα, η τάση ζεύγους m_{xz} παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία ενώ η m_{yz} είναι φραγμένη καθώς το $r \rightarrow 0$. Το παραπάνω πεδίο εκφυλίζεται στο αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας καθώς το $\ell \rightarrow 0$.

Τελικά, από τις Εξ. (4.89), (4.87) και (4.91), προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για $y=0$ αντίστοιχα

$$\sigma_{yx}(x, y=0) = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)x} - \frac{2\mu b}{\pi x} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2(|x|/\ell) \right] + \frac{\mu b}{\pi\ell^2} x [K_2(|x|/\ell) - K_0(|x|/\ell)], \quad (4.92)$$

$$\sigma_{yy}(x, y=0) = 0, \quad m_{yz}(x, y=0) = 0. \quad (4.93)$$

Η Εξ. (4.92) αποτελεί την συνάρτηση Green του προβλήματος.

4.3.3 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και αποτελέσματα

Για την ανάπτυξη των διορθωτικών τάσεων (Εξ. (4.82)), πρέπει να κατανεύσουμε στα χείλη της ρωγμής διακριτές επαπτομενικές εξαρμώσεις. Το εντατικό πεδίο που προκαλείται από την συνεχή κατανομή των ατελειών αυτών υπολογίζεται με ολοκλήρωση της συνάρτησης Green (Εξ. (4.92)) κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής. Οι συνοριακές συνθήκες (4.82α) και (4.82γ) ικανοποιούνται αυτομάτως, όπως φαίνεται από την εξίσωση

(4.93). Βάσει των παραπάνω, οδηγούμαστε στην ολοκληρωτική εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα. Με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής ανάλυσης, απομονώνουμε το ιδίμορφο μέρος του πυρήνα της ολοκληρωτικής εξίσωσης και καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση, για $|x| < a$

$$-\sigma_{yx}^{gl.d}(x-d, 0) = \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{B_{II}(t)}{x-t} dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot R_4(x-t) dt, \quad (4.94)$$

όπου $B_{II}(t) = db(t)/dt = -d(\Delta u_x(t))/dt$ είναι η πυκνότητα της εφαπτομενικής εξάρμωσης στο σημείο t ($|t| < a$), ενώ $\Delta u_x = u_x(t, 0^+) - u_x(t, 0^-)$ είναι η σχετική εφαπτομενική μετατόπιση του πάνω και κάτω χείλους της ρωγμής. Ο πυρήνας $R_4(x-t)$ ορίζεται ως

$$R_4(x-t) = -\frac{2}{x-t} \left[\frac{2\ell^2}{(x-t)^2} - K_2(|x-t|/\ell) - \frac{1}{2} \right] - \frac{x-t}{\ell^2} \left[\frac{2\ell^2}{(x-t)^2} - K_2(|x-t|/\ell) + K_0(|x-t|/\ell) \right]. \quad (4.95)$$

Αναπτύσσοντας τον πυρήνα $R_4(x-t)$ σε σειρά καθώς το $x \rightarrow t$, λαμβάνουμε την έκφραση

$$R_4(x-t) = (a_1 + a_2 \ln|x-t|) \cdot (x-t) + O\left((x-t)^3 \ln|x-t|\right), \quad (4.96)$$

όπου (a_1, a_2) είναι σταθερές, οπότε διαπιστώνουμε ότι ο πυρήνας είναι ομαλός στο κλειστό διάστημα $-a \leq (x, t) \leq a$.

Στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, οι [Huang et al. \(1997\)](#) έδειξαν ότι η μετατόπιση u_x έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά $r^{1/2}$ κοντά στα άκρα της ρωγμής, όπου r είναι η ακτινική απόσταση από το άκρο της ρωγμής. Επομένως, η πυκνότητα της εφαπτομενικής εξάρμωσης συμπεριφέρεται ως $r^{1/2}$ και μπορεί να γραφεί ως

$$B_{II}(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\tilde{t}) (1-\tilde{t}^2)^{-1/2}, \quad |\tilde{t}| < 1, \quad (4.97)$$

όπου $T_n(\tilde{t})$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους, a_n είναι άγνωστοι συντελεστές και $\tilde{t} = t/a$. Επίσης, για να εξασφαλίζεται η μοναδικότητα των τιμών της εφαπτομενικής μετατόπισης για έναν κλειστό βρόχο γύρω από τη ρωγμή, πρέπει να ισχύει η ακόλουθη βοηθητική συνθήκη

$$\int_{-1}^1 B_{II}(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0. \quad (4.98)$$

Το ολοκλήρωμα κύριας τιμής που εμφανίζεται στην Εξ. (4.94) υπολογίζεται σε κλειστή μορφή στο Παράρτημα B (Εξ. (B.11)) ενώ το ομαλό ολοκλήρωμα μέσω της κλασσικής αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Chebyshev. Επιπλέον, λόγω της βοηθητικής συνθήκης (4.98), ο συντελεστής a_0 είναι μηδενικός. Με βάση τα παραπάνω και έπειτα από κατάλληλη κανονικοποίηση στο διάστημα $[-1, 1]$, η ολοκληρωτική εξίσωση (4.94) λαμβάνει την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή

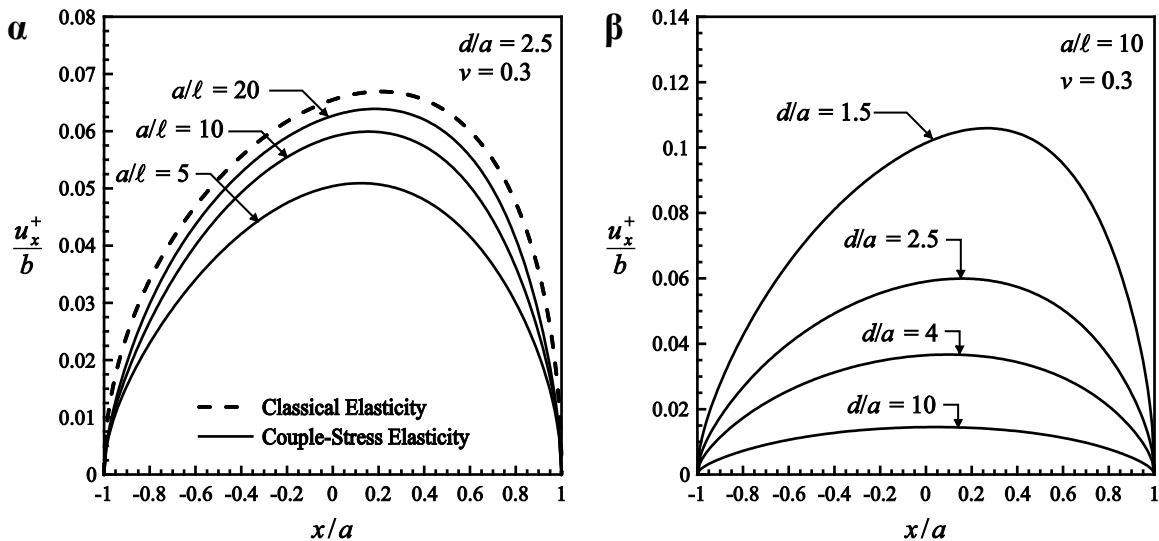
$$\begin{aligned} -\sigma_{yx}^{gl,d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) &= -\frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_{n-1}(\tilde{x}) \\ &+ 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m T_n(\tilde{t}_j) \cdot R_4(a\tilde{x} - a\tilde{t}_j), \quad |\tilde{x}| < 1, \end{aligned} \quad (4.99)$$

όπου $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{d} = d/a$, ενώ η φόρτιση της διακριτής εφαπτομενικής εξάρμωσης γράφεται ως

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{gl,d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) &= -\frac{\mu b}{2\pi a(1-\nu)(\tilde{x} - \tilde{d})} + \frac{2\mu b}{\pi a(\tilde{x} - \tilde{d})} \left[\frac{2}{p^2(\tilde{x} - \tilde{d})^2} - K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right] \\ &- \frac{\mu b p^2(\tilde{x} - \tilde{d})}{\pi a} \left[K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) - K_0(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right], \end{aligned} \quad (4.100)$$

όπου $p = a/\ell$.

Η εξίσωση (4.99) επιλύεται αριθμητικά με την κατάλληλη τεχνική ταξίθεσίας. Ως σημεία ταξίθεσίας επιλέγονται οι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $U_{N-1}(\tilde{x})$, δηλαδή $\tilde{x}_k = \cos(k\pi/N)$ με $k=1,2,\dots,N-1$ ενώ ως σημεία ολοκλήρωσης τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $T_m(\tilde{t})$, δηλαδή $\tilde{t}_j = \cos[(2j-1)\pi/2m]$ με $j=1,2,\dots,m$. Η Εξ. (4.99) μαζί με την βοηθητική συνθήκη (4.98) συνιστούν ένα αλγεβρικό σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους. Η επίλυσή του έγινε χρησιμοποιώντας το συμβολικό πρόγραμμα **MATHEMATICA**. Η σύγκλιση της λύσης επιτυγχάνεται για διαφορετικό αριθμό σημείων N με βάση τον λόγο ℓ/a όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.2. Με γνωστούς πλέον τους συντελεστές a_n , υπολογίζουμε μέσω της Εξ. (4.97), την πυκνότητα της εφαπτομενικής εξάρμωσης $B_{II}(\tilde{t})$.



Σχ. 4.14. α) Εφαπτομενική μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορους λόγους a/ℓ λόγω αλληλεπίδρασης με μία εφαπτομενική εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$. **β)** Εφαπτομενική μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορες θέσεις της εξάρμωσης σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$. Ο λόγος Poisson είναι $\nu = 0.3$ σε όλες τις περιπτώσεις.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα. Στο Σχ. 4.14α απεικονίζεται η επιρροή του λόγου a/ℓ στην εφαπτομενική μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Σημειώνουμε ότι καθώς το μήκος της ρωγμής γίνεται συγκρίσιμο με το χαρακτηριστικό μήκος ℓ , το υλικό επιδεικνύει πιο στιβαρή συμπεριφορά, έχουμε δηλαδή μικρότερες σε μέγεθος

μετατοπίσεις στα χείλη της ρωγμής. Για παράδειγμα, η μέγιστη μετατόπιση για $a/l = 5$ είναι κατά 24% μειωμένη σε σχέση με την μέγιστη μετατόπιση της κλασικής θεωρίας. Επίσης, οι μετατοπίσεις που προκύπτουν με βάση την κλασική θεωρία ελαστικότητας (διακεκομμένη γραμμή) αποτελούν άνω όριο για τις μετατοπίσεις στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Στο Σχ. 4.14β εξετάζεται η επίδραση της απόστασης της εξάρμωσης στο προφίλ των μετατοπίσεων της ρωγμής. Οι παράμετροι του υλικού είναι $a/l = 10$ και $\nu = 0.3$. Οι μετατοπίσεις που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις της εξάρμωσης διαφέρουν σημαντικά τόσο ως προς το σχήμα τους όσο και ως προς το μέγεθός τους.

Προχωρούμε τώρα στην εξέταση της συμπεριφοράς της διατμητικής τάσης σ_{yx} μπροστά από το άκρο της ρωγμής. Από την υπέρθεση των δύο επιμέρους προβλημάτων, προκύπτει η έκφραση

$$\begin{aligned} \sigma_{yx}(|x| > a, y = 0) &= \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{B_{II}(t)}{x-t} dt \\ &+ \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot R_4(x-t) dt + \sigma_{yx}^{gl.d}(x-d, 0). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Όσον αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά της διατμητικής τάσης σ_{yx} κοντά στο άκρο της ρωγμής $x \rightarrow a^+$, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\int_{-a}^a \frac{B_{II}(t)}{x-t} dt = O((x-a)^{-1/2}), \quad \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot R_4(x-t) dt = O(1). \quad (4.102)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι η διατμητική τάση σ_{yx} παρουσιάζει ιδιομορφία τύπου $x^{-1/2}$, όπως ακριβώς και στην κλασική ελαστικότητα.

Για τον υπολογισμό της τάσης ζεύγους m_x , ολοκληρώνοντας την Εξ. (4.90) κατά μήκος των χηλιών της ρωγμής ($|x| < a, y = 0$) και χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της ασυμπτωτικής ανάλυσης, λαμβάνουμε την έκφραση

$$m_{xz}(|x| > a, y = 0) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot \ln|x-t| dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot R_5(x-t) dt + m_{xz}^{gl,d}(x-d, 0), \quad (4.103)$$

όπου ο ομαλός πυρήνας $R_5(x-t)$ ορίζεται ως

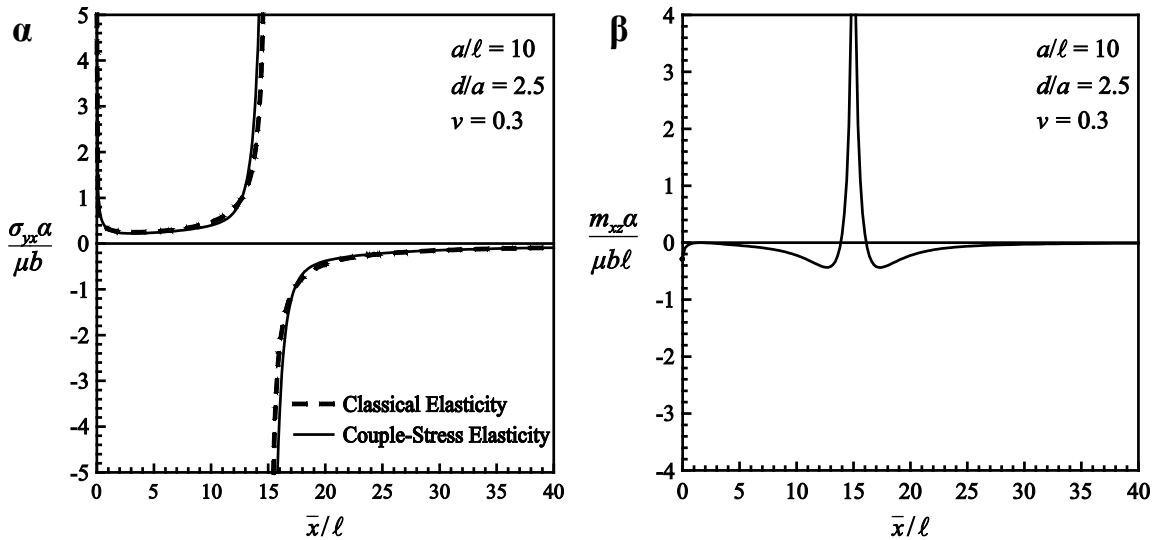
$$R_5(x-t) = \left[\frac{2\ell^2}{(x-t)^2} - K_2(|x-t|/\ell) \right] - \left[K_0(|x-t|/\ell) + \ln(|x-t|/\ell) \right]. \quad (4.104)$$

Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της τάσης ζεύγους m_{xz} κοντά στο άκρο της ρωγμής $x \rightarrow a^+$, μπορούμε να γράψουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$\int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot \ln|x-t| dt = O(1), \quad \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot R_5(x-t) dt = O(1). \quad (4.105)$$

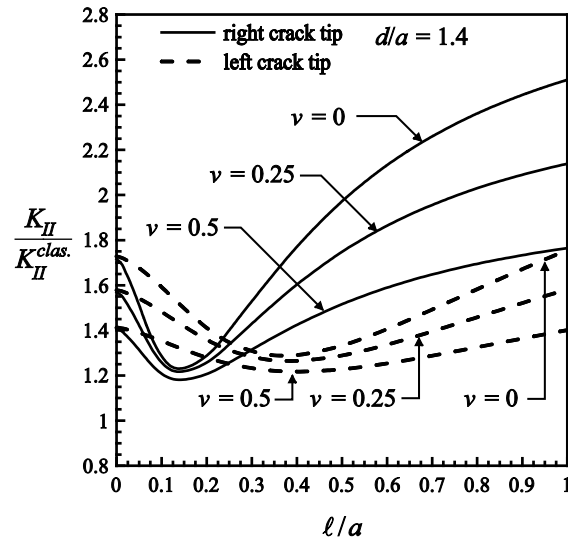
Βάσει των παραπάνω σχέσεων, συμπεραίνουμε ότι η τάση ζεύγους m_{xz} είναι φραγμένη στην αιχμή της ρωγμής. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα των [Huang et al. \(1997\)](#).

Στο Σχ. 4.15α απεικονίζεται η κατανομή της διατμητικής τάσης σ_{yx} λόγω αλληλεπίδρασης με μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$ και λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Υπενθυμίζουμε πως η χωρική μεταβλητή \bar{x} μετράει την απόσταση από το δεξιό άκρο της ρωγμής. Η επίδραση των τάσεων ζεύγους είναι ορατή σε μία ζώνη 7ℓ γύρω από τον πυρήνα της εξάρμωσης και 2ℓ από το άκρο της ρωγμής. Το πεδίο παραμένει ιδιόμορφο όταν το $x \rightarrow d$, όπως και στην κλασική θεωρία. Στο Σχ. 4.15β παρουσιάζεται η κατανομή της τάσης ζεύγους m_{xz} . Μπροστά από το δεξί άκρο της ρωγμής, η τιμή της είναι πεπερασμένη (αρνητική), έπειτα αυξάνει πλησιάζοντας το μηδέν, ενώ εκατέρωθεν της εξάρμωσης το πεδίο μεταβάλλεται από πεπερασμένες αρνητικές τιμές σε μη φραγμένες θετικές όταν το $x \rightarrow d$ (λογαριθμική ιδιομορφία). Σημειώνουμε ότι για κάποιες θέσεις της εξάρμωσης, παρατηρούνται θετικές τιμές της τάσης ζεύγους στο διάστημα $0 \leq \bar{x} \leq d - a$.



Σχ. 4.15. Κατανομή (α) της διατμητικής τάσης σ_{yx} και (β) της τάσης ζεύγους m_{xz} μπροστά από το δεξί άκρο της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με μία εφαπτομενική εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα σώμα με $a/l = 10$ και λόγο Poisson $\nu = 0.3$.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τη μεταβολή του συντελεστή έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Για το δεξί άκρο της ρωγμής, ο συντελεστής ορίζεται ως $K_{II} = \lim_{x \rightarrow a^+} [2\pi(x-a)]^{1/2} \sigma_{yx}(x, 0)$, όπου η ορθή τάση $\sigma_{yx}(x, 0)$ δίνεται από την Εξ. (4.101). Ανάλογος είναι ο ορισμός και για το αριστερό άκρο της ρωγμής. Στο Σχ. 4.16 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $K_{II}/K_{II}^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου l/a και του λόγου Poisson ν , για μία εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 1.4$. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους είναι πάντα μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας. Όλες οι καμπύλες παρουσιάζουν αρχικά έναν πτωτικό κλάδο μέχρι ένα πεπερασμένο ελάχιστο για $0.1 \leq l/a \leq 0.15$ (το διάστημα εξαρτάται από τον λόγο Poisson και τον λόγο d/a) και στην συνέχεια αυξάνουν μέχρι την ασυμπτωτική τιμή $(3-2\nu)$ καθώς το $l/a \rightarrow \infty$. Επίσης, για $l/a = 0$ σημειώνεται μία πεπερασμένη ασυνέχεια ($K_{II}/K_{II}^{clas.} \neq 1$) η οποία αποδίδεται στα έντονα φαινόμενα συνοριακού στρώματος που εμφανίζονται στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Η αύξηση των συντελεστών έντασης τάσης είναι μεγαλύτερη σε σχέση με το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης με διακριτή ορθή εξάρμωση (Σχ. 4.7α).



Σχ. 4.16. Μεταβολή του λόγου των συντελεστών έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο l/a για μία εφαπτομενική εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 1.4$.

Πίνακας 4.2. Λόγος $K_{II,r} / K_{II,r}^{clas.}$ λόγω αλληλεπίδρασης με μία εφαπτομενική εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.0$ σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0$.

N	$l/a = 1.0$	$l/a = 0.8$	$l/a = 0.5$	$l/a = 0.2$	$l/a = 0.1$	$l/a = 0.05$	$l/a = 0.01$	$l/a = 0.005$
10	1.78048	1.55748	1.18799	1.24669	1.51183	1.66267	2.71730	2.96546
20	1.78051	1.55750	1.18801	1.24668	1.51058	1.63311	1.77377	2.12084
30	1.78051	1.55750	1.18801	1.24668	1.51058	1.63310	1.71490	1.75901
40						1.63310	1.71424	1.72635
50							1.71405	1.72338
60							1.71405	1.72335
70								1.72335

4.3.4 Υπολογισμός του ολοκληρώματος J

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζεται το ολοκλήρωμα J της Μηχανικής των Θραύσεων και διερευνάται η εξάρτησή του από το χαρακτηριστικό μήκος l , τον λόγο Poisson ν και την απόσταση της εφαπτομενικής εξάρμωσης από το άκρο της ρωγμής. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J , χρησιμοποιούμε έναν δρόμο ολοκλήρωσης μορφής παραλληλογράμμου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.4.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα ρωγμής, η τάση ζεύγους m_{yz} είναι μηδέν για $y = 0$ και ότι τα χείλη της ρωγμής ορίζονται από το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$, το ολοκλήρωμα J (Εξ. (4.61)) παίρνει τη μορφή

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \sigma_{yx}(x, y=0^+) \cdot \frac{\partial u_x(x, y=0^+)}{\partial x} dx \right\}. \quad (4.106)$$

Η δεσπόζουσα ιδιόμορφη συμπεριφορά για την διατμητική τάση σ_{yx} οφείλεται στο ολοκλήρωμα τύπου Cauchy της Εξ. (4.101). Η τάση αυτή για $x \rightarrow a^+$ γράφεται ως ($\tilde{x} > 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_{yx}(x \rightarrow a^+, y=0^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{B_{II}(t)}{x-t} dt \\ &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{a_n T_n(\tilde{t})}{(1-\tilde{t}^2)^{1/2} (\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} = \frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n \cdot (\tilde{x}-1)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Για την πυκνότητα της εφαπτομενικής εξάρμωσης $B_{II}(t)$ ισχύει βάσει του ορισμού η παρακάτω ασυμπτωτική σχέση καθώς το $x \rightarrow a^-$ ($\tilde{x} < 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x(x \rightarrow a^-, y=0^+)}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a^-} B_{II}(x) = -\frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N a_n T_n(\tilde{x}) \cdot (1-\tilde{x}^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2^{3/2}} \sum_{n=1}^N a_n \cdot (1-\tilde{x})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, το ολοκλήρωμα J μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$J_r = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\mu}{2} \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = \frac{\mu\pi}{2} a \Lambda_1, \quad (4.109)$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=1}^N a_n \times \sum_{n=1}^N a_n, \quad (4.110)$$

$\bar{x} = \tilde{x} - 1$ και για κάθε πραγματικό αριθμό λ , με εξαίρεση τις τιμές $\lambda = -1, -2, -3, \dots$, ορίζονται οι κατανομές τύπου ‘διχοτόμου’, x_+^λ και x_-^λ βάσει της Εξ. (4.69). Το

ολοκλήρωμα στην Εξ. (4.109) υπολογίζεται βάσει του θεωρήματος Fisher για γινόμενα κατανομών τύπου ‘διχοτόμου’.

Αντίστοιχα για το αριστερό άκρο της ρωγμής ($x \rightarrow -a^-$), η έκφραση για την διατμητική τάση σ_{yx} γράφεται ως ($\tilde{x} < -1$)

$$\begin{aligned} \sigma_{yx}(x \rightarrow -a^-, y = 0^+) &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow -1^-} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{a_n T_n(\tilde{t})}{(1-\tilde{t}^2)^{1/2} (\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} \\ &= -\frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n \cdot (\tilde{x}+1)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Για την πυκνότητα της εφαπτομενικής εξάρμωσης $B_{II}(t)$ ισχύει η παρακάτω ασυμπτωτική σχέση καθώς το $x \rightarrow -a^+$ ($\tilde{x} > -1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x(x \rightarrow -a^+, y = 0^+)}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow -1^+} \sum_{n=1}^N a_n T_n(\tilde{x}) \cdot (1-\tilde{x}^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2^{3/2}} \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n \cdot (1+\tilde{x})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Τελικά, το ολοκλήρωμα J για το αριστερό άκρο της ρωγμής γράφεται στη μορφή

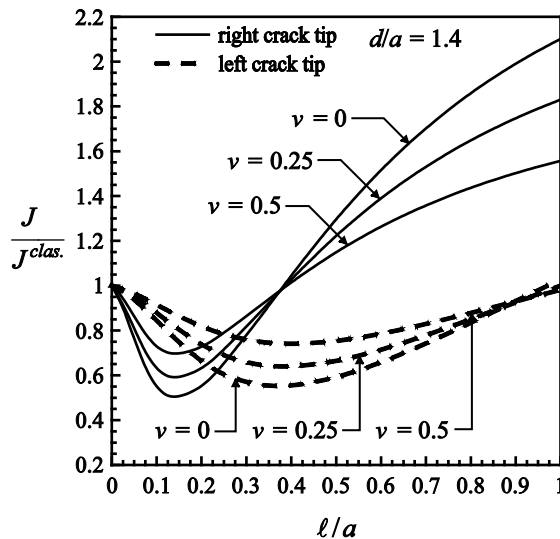
$$J_\ell = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu}{2} \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = -\frac{\mu\pi}{2} a \Lambda_1, \quad (4.113)$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n \times \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n. \quad (4.114)$$

Βάσει της παραπάνω ανάλυσης, μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα J . Στο Σχ. 4.17 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και του λόγου Poisson ν , για μία εφαπτομενική εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 1.4$. Η τιμή του ολοκληρώματος J στην

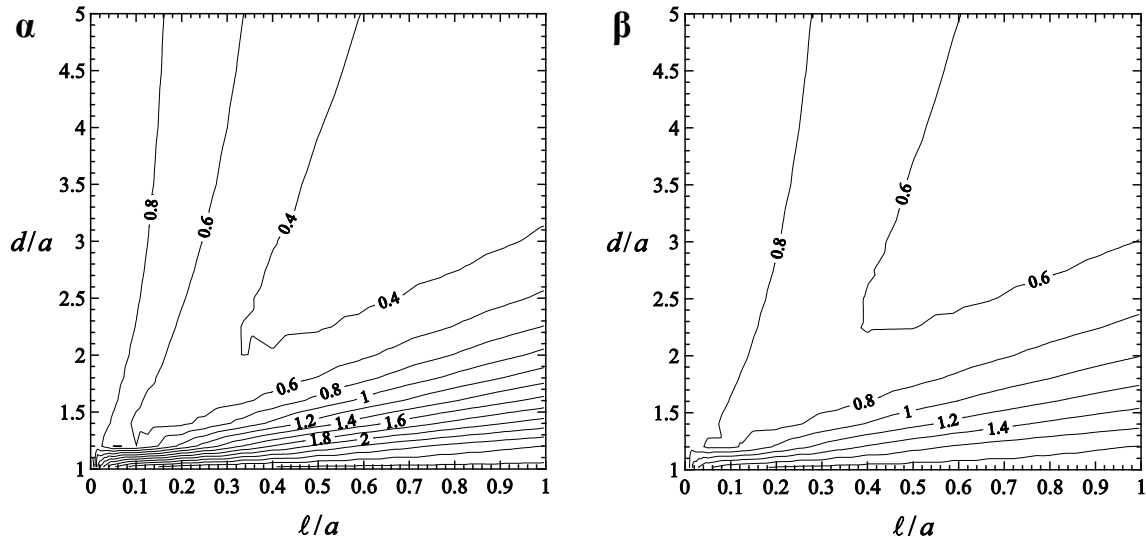
κλασσική ελαστικότητα είναι ίδια με το πρόβλημα αλληλεπίδρασης με μία διακριτή ορθή εξάρμωση και δίνεται στις Εξ. (4.76). Παρατηρούμε ότι καθώς ο λόγος $\ell/a \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα J στην θεωρία τάσεων ζεύγους τείνει στο αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας. Σε όλες τις καμπύλες, καθώς το ℓ/a αυξάνει, παρατηρείται ένας αρχικός πτωτικός κλάδος ($J < J^{clas.}$) μέχρι ένα πεπερασμένο ελάχιστο για $0.1 \leq \ell/a \leq 0.15$ (το διάστημα εξαρτάται από τον λόγο Poisson και τον λόγο d/a) ενώ στην συνέχεια ο λόγος αυξάνει ($J > J^{clas.}$). Δηλαδή, για ορισμένους λόγους ℓ/a , ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας μειώνεται (strengthening effect) ενώ για άλλους λόγους αυξάνεται (weakening effect). Επίσης, καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$, ο λόγος $J/J^{clas.}$ τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή $(3 - 2\nu)$.



Σχ. 4.17. Μεταβολή του λόγου των ολοκληρωμάτων J στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο ℓ/a για μία επαπτομενική εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 1.4$.

Επιπλέον, επιχειρώντας μία παραμετρική ανάλυση για διάφορες τιμές των λόγων ℓ/a , d/a και του λόγου Poisson, προσδιορίζουμε την περιοχή τιμών για την οποία ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας αυξάνει. Στο Σχ. 4.18 απεικονίζεται σε μορφή ισοϋψών καμπύλων η εξάρτηση του λόγου $J/J^{clas.}$ στο δεξί άκρο της ρωγμής από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ και την θέση της επαπτομενικής εξάρμωσης, για λόγο Poisson $\nu = 0$ (Σχ. 4.18α) και $\nu = 0.5$ (Σχ. 4.18β). Παρατηρούμε ότι δημιουργείται μία περιοχή, οριοθετούμενη από την καμπύλη $J/J^{clas.} = 1$ καθώς το $d/a \rightarrow 1$, όπου ο ρυθμός

απελευθέρωσης ενέργειας και κατ' επέκταση η 'οδηγούσα την διάδοση της ρωγμής δύναμη' (crack driving force) αυξάνονται. Η περιοχή αυτή περιορίζεται όσο ο λόγος Poisson αυξάνει, ωστόσο η μεταβολή της δεν είναι μεγάλη. Σε αντίστοιχα συμπεράσματα μπορούμε να φτάσουμε υπολογίζοντας την κινούσα δύναμη Peach-Koehler που ασκείται στην εξάρμωση είτε βάσει του ορισμού της (Εξ. (2.24)) και την έκφραση για την διατμητική τάση σ_{yx} (Εξ. (4.101)) είτε βάσει της Εξ. (4.77).



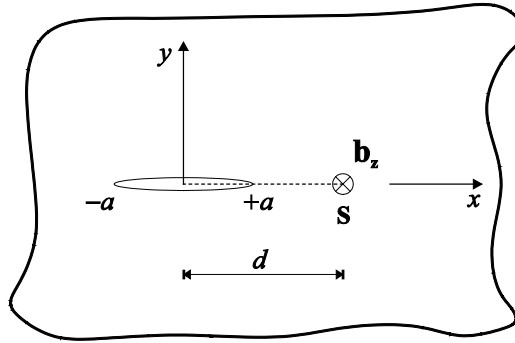
Σχ. 4.18. Μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ ως προς τους λόγους l/a και d/a για λόγο Poisson **α)** $\nu=0$ και **β)** $\nu=0.5$.

4.4 Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση

4.4.1 Κατάστρωση του προβλήματος

Θεωρούμε μία κεντρική ρωγμή μήκους $2a$ σε ένα ελαστικό άπειρο στερεό σώμα με μικροδομή και μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση $\mathbf{b} = (0, 0, b_z)$ σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής, υπό συνθήκες αντι-επίπεδης παραμόρφωσης (Σχ. 4.19). Τα χείλη της ρωγμής περιγράφονται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$ και είναι αφόρτιστα. Οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής γράφονται σύμφωνα με τις Εξ. (3.16) και (3.17) ως

$$\sigma_{yz}(x, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}(x, 0) = 0, \quad m_{yx} = 0, \quad \text{για } |x| < a. \quad (4.115)$$



Σχ. 4.19. Κεντρική ρωγμή αλληλεπίδρα με διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση.

Η παρουσία μίας διακριτής αντι-επίπεδης εξάρμωσης σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής δημιουργεί διατμητικές τάσεις σ_{yz} και τάσεις ζεύγους m_{yy} κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής (ιδέ Παράγραφο 4.4.2), δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma_{yz}(d, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}(d, 0) \rightarrow \sigma_{yz}^{scr.d} + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{scr.d}, \quad m_{yx}(d, 0) \rightarrow 0, \quad (4.116)$$

όπου $\sigma_{yz}^{scr.d}$ και $m_{yy}^{scr.d}$ είναι οι διατμητικές τάσεις και οι τάσεις ζεύγους μίας διακριτής αντι-επίπεδης εξάρμωσης στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Επίσης, οι συνθήκες στο άπειρο είναι

$$\sigma_{xz}^{\infty}, \sigma_{yz}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xx}^{\infty}, m_{yy}^{\infty}, m_{yx}^{\infty}, m_{xy}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty, \quad (4.117)$$

όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων. Η ‘τροποποιημένη’ συνοριακή συνθήκη (4.116α) δικαιολογείται φυσικώς από το γεγονός ότι η μετατόπιση w και η στροφή $\omega_y = -(1/2)(\partial w / \partial x)$ δεν μπορούν να περιγραφούν ανεξάρτητα στα χείλη της ρωγμής. Η Εξ. (4.117) υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει άλλη εξωτερική φόρτιση στο πρόβλημα πέραν της εξάρμωσης.

Όπως και προηγούμενα, η λύση του προβλήματος προκύπτει ως υπέρθεση των λύσεων δύο επιμέρους προβλημάτων. Αρχικά, θεωρούμε ένα αρηγμάτωτο σώμα το οποίο υπόκειται στη φόρτιση της Εξ. (4.116). Το τασικό πεδίο που αναπτύσσεται είναι αυτό μίας

διακριτής αντι-επίπεδης εξάρμωσης και δίνεται στην Παράγραφο 4.4.2 (Εξ. (4.128)-(4.134)).

Στη συνέχεια, για το δεύτερο επιμέρους πρόβλημα (διορθωτική λύση), θεωρούμε ένα σώμα ίδιας γεωμετρίας με το αρχικό ρηγματωμένο δίχως την επίδραση της διακριτής αντι-επίπεδης εξάρμωσης. Η μοναδική φόρτιση εφαρμόζεται πάνω στα χείλη της ρωγμής και αποτελείται από ίσες και αντίθετες τάσεις από αυτές που προέκυψαν στο αρηγμάτωτο σώμα. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}(x, 0) &= \sigma_{yz}^{scr.d}(x-d, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{scr.d}(x-d, 0), \\ m_{yx}(x, 0) &= 0, \quad \text{για } |x| < a, \end{aligned} \quad (4.118)$$

και

$$\sigma_{xz}^{\infty}, \sigma_{yz}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xx}^{\infty}, m_{yy}^{\infty}, m_{yx}^{\infty}, m_{xy}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty. \quad (4.119)$$

Για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών (4.118), είναι αρκετή η κατανομή διακριτών αντι-επίπεδων εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής. Αυτό συμβαίνει, καθότι μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση δεν παράγει τάσεις ζεύγους m_{yx} στο επίπεδο $y=0$. Αντίστοιχα, στα πλαίσια της κλασσικής ελαστικότητας, η συνοριακή συνθήκη (4.118α) που περιγράφει το πρόβλημα ικανοποιείται μέσω κατανομής διακριτών αντι-επίπεδων εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής.

Στην Παράγραφο 4.4.2 υπολογίζουμε το τασικό πεδίο που παράγεται από μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση, από το οποίο θα προκύψει η κατάλληλη συνάρτηση Green του προβλήματος.

4.4.2 Συνάρτηση Green

Λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει το πρόβλημα της αντι-επίπεδης εξάρμωσης ως προς το επίπεδο $y=0$, εξετάζουμε μόνο το άνω ημιεπίπεδο του σώματος το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή $(-\infty < x < \infty, y \geq 0)$. Η λύση του προβλήματος θα επιτευχθεί με τη χρήση του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier (Εξ. (4.7)).

Μετασχηματίζοντας την εξίσωση πεδίου (3.89), προκύπτει η ακόλουθη συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς την μετατόπιση w^*

$$\ell^2 \frac{d^4 w^*}{dy^4} - (2\ell^2 \xi^2 + 1) \frac{d^2 w^*}{dy^2} + (\ell^2 \xi^4 + \xi^2) w^* = 0 . \quad (4.120)$$

Η γενική λύση της Εξ. (4.120) έχει την ακόλουθη φραγμένη μορφή καθώς το $y \rightarrow +\infty$

$$w^*(\xi, y) = A_1(\xi) e^{-|\xi|y} + A_2(\xi) e^{-\frac{y(1+\ell^2 \xi^2)^{1/2}}{\ell}} . \quad (4.121)$$

Στη συνέχεια, επιβάλλουμε στην αρχή του επιπέδου (x, y) , μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση με διάνυσμα Burgers $\mathbf{b} = (0, 0, b_z)$, η οποία περιγράφεται από το ακόλουθο μικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών, στο άνω ημιεπίπεδο $(-\infty < x < \infty, y \geq 0)$

$$w(x, 0^+) = -\frac{b}{2} H(x), \quad m_{yx}(x, 0^+) = 0 . \quad (4.122)$$

όπου $H(x)$ είναι η βηματική συνάρτηση Heaviside.

Χρησιμοποιώντας την καταστατική σχέση για την τάση ζεύγους m_{yx} (Εξ. (3.83)) και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Fourier στις συνοριακές συνθήκες (4.122), λαμβάνουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$w^*(\xi, 0^+) = -b(\pi/2)^{1/2} \delta_+(\xi), \quad m_{yx}^*(\xi, 0^+) = 2\eta \frac{d^2 w^*}{dy^2} + 2\eta' \xi^2 w^* = 0 , \quad (4.123)$$

όπου $\delta_+(\xi)$ είναι η κατανομή Heisenberg και $\delta(\xi)$ είναι η κατανομή Dirac.

Ακολούθως, από τις Εξ. (4.121) και (4.123), προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για τις συναρτήσεις $A_1(\xi)$ και $A_2(\xi)$

$$\begin{aligned} A_1(\xi) &= -(\pi/2)^{1/2} b(1 + \ell^2(1 + \beta)\xi^2) \delta_+(\xi), \\ A_2(\xi) &= (\pi/2)^{1/2} b\ell^2(1 + \beta)\xi^2 \delta_+(\xi), \end{aligned} \quad (4.124)$$

όπου $\beta = \eta'/\eta$.

Συνδυάζοντας τις Εξ. (4.121) και (4.124) και χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (Εξ. (4.7β)) και τις ιδιότητες των κατανομών Heisenberg και Dirac, καταλήγουμε στην ακόλουθη ολοκληρωτική αναπαράσταση για την μετατόπιση w

$$w(x, y) = -\frac{b}{4} - \frac{b}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-y\xi}}{\xi} \sin(\xi x) d\xi - \frac{b\ell^2(1+\beta)}{2\pi} \int_0^\infty \xi \left(e^{-y\xi} - e^{-\frac{y}{\ell}(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}} \right) \sin(\xi x) d\xi. \quad (4.125)$$

Τα ολοκληρώματα της Εξ. (4.125) υπολογίζονται σε κλειστή μορφή ως

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y\xi}}{\xi} \sin(\xi x) d\xi = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right), \quad \int_{-a}^a \xi e^{-y\xi} \sin(\xi x) d\xi = 2\frac{xy}{r^4}, \quad (4.126)$$

$$\int_{-a}^a \xi e^{-\frac{y}{\ell}(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}} \sin(\xi x) d\xi = \frac{xy}{(r\ell)^2} K_2\left(\frac{r}{\ell}\right).$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, η μετατόπιση w για μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση γράφεται ως

$$w = \frac{b}{2\pi} \theta - \frac{b}{4\pi} (1+\beta) \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 2\theta \quad (4.127)$$

Πρέπει να σημειωθεί μόνο ο πρώτος όρος της Εξ. (4.127) συνεισφέρει στην ασυνέχεια της μετατόπισης w ενώ η ποσότητα εντός της αγκύλης παραμένει φραγμένη καθώς το $r \rightarrow 0$. Επομένως, η μετατόπιση w παραμένει πεπερασμένη καθώς πλησιάζουμε στον πυρήνα της εξάρμωσης, όπως και στην κλασική θεωρία.

Το τασικό πεδίο μίας διακριτής αντι-επίπεδης εξάρμωσης στην θεωρία τάσεων ζεύγους υπολογίζεται αντικαθιστώντας την Εξ. (4.127) στις καταστατικές σχέσεις (3.79)-(3.87)

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & -\frac{\mu b}{2\pi r} \sin \theta + \frac{\mu b(1+\beta)}{2\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta \\ & + \frac{\mu b(1+\beta)}{16\pi\ell^2} r [K_0(r/\ell) + K_2(r/\ell)] (\sin \theta + \sin 3\theta), \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & \frac{\mu b}{2\pi r} \cos \theta - \frac{\mu b(1+\beta)}{2\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 3\theta \\ & + \frac{\mu b(1+\beta)}{16\pi\ell^2} r [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (\cos \theta - \cos 3\theta), \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{\mu b}{2\pi r} \sin \theta + \frac{\mu b\ell^2(1+\beta)}{\pi r^3} \sin 3\theta, \quad (4.130)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu b}{2\pi r} \cos \theta - \frac{\mu b\ell^2(1+\beta)}{\pi r^3} \cos 3\theta, \quad (4.131)$$

$$\begin{aligned} m_{yy} = -m_{xx} = & \frac{\mu b\ell^2(1+\beta)}{\pi r^2} \cos 2\theta - \frac{3\mu b\ell^2(1+\beta)^2}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 4\theta \\ & - \frac{\mu b(1+\beta)^2}{8\pi} \{ K_0(r/\ell) + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \cos 4\theta \}, \end{aligned} \quad (4.132)$$

$$\begin{aligned} m_{yx} = & \frac{3\mu b\ell^2(1+\beta)^2}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta - \frac{\mu b(1+\beta)}{2\pi} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \\ & \times \sin 2\theta - \frac{\mu b(1+\beta)^2}{8\pi} \{ 2K_2(r/\ell) \sin 2\theta - [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \sin 4\theta \}, \end{aligned} \quad (4.133)$$

$$\begin{aligned} m_{xy} = & \frac{3\mu b\ell^2(1+\beta)^2}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta - \frac{\mu b(1+\beta)}{2\pi} \sin 2\theta \\ & \times \left[\frac{2\ell^2}{r^2} + \frac{(1-\beta)}{2} K_2(r/\ell) \right] + \frac{\mu b(1+\beta)^2}{8\pi} [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Σχετικά με τα χαρακτηριστικά του παραπάνω τασικού πεδίου, σημειώνουμε τα εξής σημεία: (i) Λαμβάνοντας υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel (Εξ. (4.28)), συμπεραίνουμε ότι το συμμετρικό τμήμα των τάσεων (Εξ. (4.128)-(4.129)) εμφανίζει ιδιομορφία r^{-1} καθώς το $r \rightarrow 0$, ενώ οι τάσεις (Εξ. (4.130)-(4.131)) και οι τάσεις ζεύγους (Εξ. (4.132)-(4.134))

συμπεριφέρονται ως r^{-3} και r^{-2} αντίστοιχα. (ii) Σύμφωνα με την Εξ. (3.25), η παράμετρος $\beta = \eta'/\eta$ πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα $-1 < \beta < 1$. Στην περίπτωση που το $\beta \rightarrow -1$, δηλαδή για $\eta = -\eta'$, το παραπάνω τασικό πεδίο εκφυλίζεται στο αντίστοιχο της κλασσικής ελαστικότητας.

Τελικά, από τις Εξ. (4.131) και (4.132) για $y = 0$, προκύπτει η συνάρτηση Green του προβλήματος

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, y=0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}(x, y=0) &= \frac{\mu b}{2\pi x} - \frac{2\mu b \ell^2 (1+\beta)}{\pi x^3} \\ &+ \frac{6\mu b \ell^2 (1+\beta)^2}{\pi x^3} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2(|x|/\ell) \right] \\ &- \frac{\mu b (1+\beta)^2}{4\pi x} [5K_2(|x|/\ell) - 3K_0(|x|/\ell)]. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Η παραπάνω έκφραση έχει συμπεριφορά $O(x^{-3})$ καθώς το $x \rightarrow 0$ ενώ για $\beta = -1$ εκφυλίζεται στην αντίστοιχη συνάρτηση Green της κλασσικής ελαστικότητας.

4.4.3 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και αποτελέσματα

Για την ανάπτυξη των διορθωτικών τάσεων (Εξ. (4.118)), πρέπει να κατανειμούμε στα χείλη της ρωγμής διακριτές αντι-επίπεδες εξαρμώσεις. Το εντατικό πεδίο που προκαλείται από την συνεχή κατανομή των ατελειών αυτών υπολογίζεται με ολοκλήρωση της συνάρτησης Green (Εξ. (4.135)) κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής. Βάσει των παραπάνω, οδηγούμαστε στην ολοκληρωτική εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα. Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της ασυμπτωτικής ανάλυσης, απομονώνουμε τα ιδιόμορφα μέρη των πυρήνων της ολοκληρωτικής εξίσωσης και καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση

$$\begin{aligned} - \left[\sigma_{yz}^{scr.d}(x-d, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{scr.d}(x-d, 0) \right] &= -c_1 \ell^2 \text{FP} \int_{-a}^a \frac{B_{III}(t)}{(x-t)^3} dt \\ &+ c_2 \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{B_{III}(t)}{x-t} dt + c_3 \int_{-a}^a B_{III}(t) \cdot R_6(x-t) dt, \quad |x| < a, \end{aligned} \quad (4.136)$$

όπου το σύμβολο $\text{FP}\int$ δηλώνει ολοκλήρωμα πεπερασμένου μέρους (Hadamard Finite Part). Πληροφορίες για ολοκληρώματα τέτοιου είδους μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των [Muskhelishvili \(1953\)](#), [Kutt \(1975\)](#), [Ioakimidis \(1983\)](#), [Kaya and Erdogan \(1987\)](#), [Tsamasphyros and Dimou \(1990\)](#), [Stolle and Strauss \(1992\)](#), [Monegato \(1994\)](#) και στο Παράρτημα B. Η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση χαρακτηρίζεται ως κυβικά υπεριδιόμορφη (hypersingular). Η πυκνότητα της αντι-επίπεδης εξάρμωσης στο σημείο t ($|t| < a$) ορίζεται ως $B_{III}(t) = db(t)/dt = -d(\Delta w(t))/dt$, όπου $\Delta w = w(t, 0^+) - w(t, 0^-)$ είναι η σχετική αντι-επίπεδη μετατόπιση του πάνω και κάτω χείλους της ρωγμής. Οι σταθερές c_i , με $i = 1, 2, 3$, ορίζονται ως

$$c_1 = \frac{\mu(1+\beta)(3-\beta)}{2\pi}, \quad c_2 = \frac{\mu(\beta^2 + 2\beta + 9)}{16\pi}, \quad c_3 = \frac{\mu(1+\beta)^2}{\pi}, \quad (4.137)$$

και ο πυρήνας $R_6(x-t)$ ως

$$R_6(x-t) = -\frac{\ell^2}{(x-t)^3} \left[6 \left(K_2(|x-t|/\ell) - \frac{2\ell^2}{(x-t)^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \\ + \frac{1}{4(x-t)} \left[3K_0(|x-t|/\ell) - 5K_2(|x-t|/\ell) - \frac{1}{4} \right]. \quad (4.138)$$

Αναπτύσσοντας τον πυρήνα $R_6(x-t)$ σε σειρά καθώς το $x \rightarrow t$ και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας είναι ομαλός στο κλειστό διάστημα $-a \leq (x, t) \leq a$. Επίσης, σημειώνουμε ότι για $\beta = -1$, η Εξ. (4.136) εκφυλίζεται στην αντίστοιχη εξίσωση της κλασσικής ελαστικότητας.

Στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, οι [Zhang et al. \(1998\)](#) έδειξαν, χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική μέθοδο Knein-Williams, ότι η μετατόπιση w έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά $r^{3/2}$ κοντά στα άκρα της ρωγμής (όπου r είναι η ακτινική απόσταση από το άκρο της ρωγμής). Επομένως, η πυκνότητα της αντι-επίπεδης εξάρμωσης συμπεριφέρεται ως $r^{1/2}$ και μπορεί να γραφεί ως

$$B_{III}(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(\tilde{t}) (1-\tilde{t}^2)^{1/2}, \quad |\tilde{t}| < 1, \quad (4.139)$$

όπου $U_n(\tilde{t})$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους, a_n είναι άγνωστοι συντελεστές και $\tilde{t} = t/a$. Επίσης, για να εξασφαλίζεται η μοναδικότητα των τιμών της αντι-επίπεδης μετατόπισης για έναν κλειστό βρόχο γύρω από τη ρωγμή, πρέπει να ισχύει η ακόλουθη βοηθητική συνθήκη

$$\int_{-1}^1 B_{III}(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0. \quad (4.140)$$

Έπειτα από κατάλληλη κανονικοποίηση στο διάστημα $[-1, 1]$, η ολοκληρωτική εξίσωση (4.136) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} -\left[\sigma_{yz}^{scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) \right] = & -\frac{c_1}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \text{FP} \int_{-a}^a \frac{U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{(\tilde{x} - \tilde{t})^3} d\tilde{t} \\ & + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{\tilde{x} - \tilde{t}} d\tilde{t} + c_3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times Q_n(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1, \end{aligned} \quad (4.141)$$

όπου $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{d} = d/a$, $p = a/\ell$ ενώ η συνάρτηση $Q_n(\tilde{x})$ ορίζεται ως

$$Q_n(\tilde{x}) \equiv \int_{-1}^1 U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2} \cdot R_6(a\tilde{x} - a\tilde{t}) d\tilde{t}. \quad (4.142)$$

Τα ιδιόμορφα ολοκληρώματα στην Εξ. (4.141) υπολογίζονται σε κλειστή μορφή στο Παράρτημα B (Εξ. (B.14) και (B.12)) ενώ το ομαλό ολοκλήρωμα στην Εξ. (4.142) υπολογίζεται μέσω της κλασσικής αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Chebyshev. Επίσης, λόγω της βοηθητικής συνθήκης (4.140), ο συντελεστής a_0 είναι μηδενικός. Με βάση τα παραπάνω, η ολοκληρωτική εξίσωση (4.141) λαμβάνει την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή

$$\begin{aligned}
& - \left[\sigma_{yz}^{scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) \right] = \frac{\pi c_1}{4p^2(1 - \tilde{x}^2)} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(n^2 + n)U_{n+1}(\tilde{x}) - (n^2 + 3n + 2)U_{n-1}(\tilde{x}) \right] \\
& + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_{n+1}(\tilde{x}) + c_3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times Q_n(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1,
\end{aligned} \tag{4.143}$$

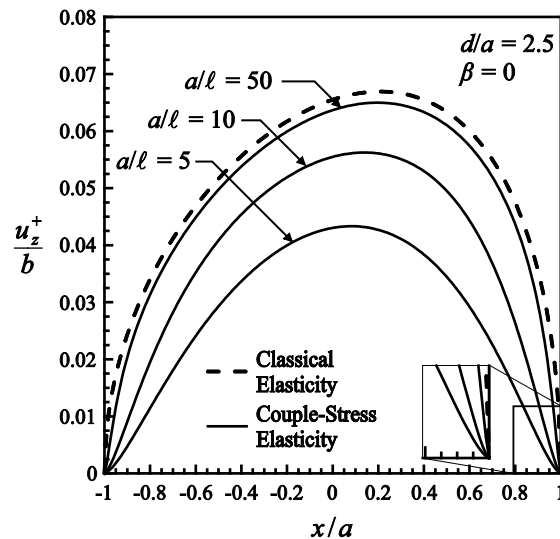
ενώ η συνάρτηση $Q_n(\tilde{x})$ και η φόρτιση της διακριτής αντι-επίπεδης εξάρμωσης γράφονται ως

$$Q_n(\tilde{x}) \equiv \pi \sum_{j=1}^m \frac{(1 - \tilde{t}^2)}{1 + m} U_n(\tilde{t}) \cdot R_6(a\tilde{x} - a\tilde{t}), \tag{4.144}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{yz}^{scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) = -\frac{\mu b}{2\pi a(\tilde{x} - \tilde{d})} + \frac{2\mu b(1 + \beta)}{\pi a p^2(\tilde{x} - \tilde{d})^3} \\
& - \frac{6\mu b(1 + \beta)^2}{\pi a p^2(\tilde{x} - \tilde{d})^3} \left[\frac{2}{p^2(\tilde{x} - \tilde{d})^2} - K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right] \\
& + \frac{\mu b(1 + \beta)^2}{4\pi a(\tilde{x} - \tilde{d})} \left[5K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) - 3K_0(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right].
\end{aligned} \tag{4.145}$$

Η εξίσωση (4.143) επιλύεται αριθμητικά με την κατάλληλη τεχνική ταξιθεσίας. Ως σημεία ταξιθεσίας επιλέγονται οι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $T_{N+1}(\tilde{x})$, δηλαδή $\tilde{x}_k = \cos[(2k - 1)\pi/2(N + 1)]$ με $k = 1, 2, \dots, N + 1$ ενώ ως σημεία ολοκλήρωσης τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $U_m(\tilde{t})$, δηλαδή $\tilde{t}_j = \cos[j\pi/(m + 1)]$ με $j = 1, 2, \dots, m$. Η Εξ. (4.143) μαζί με την βοηθητική συνθήκη (4.140) συνιστούν ένα αλγεβρικό σύστημα $N + 2$ εξισώσεων με $N + 1$ αγνώστους, το οποίο επιλύεται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιώντας το συμβολικό πρόγραμμα **MATHEMATICA**. Η σύγκλιση της λύσης επιτυγχάνεται για διαφορετικό αριθμό σημείων N με βάση τον λόγο l/a όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.3. Με γνωστούς πλέον τους συντελεστές a_n , υπολογίζουμε μέσω της Εξ. (4.139), την πυκνότητα της αντι-επίπεδης εξάρμωσης $B_{III}(\tilde{t})$.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα. Στο Σχ. 4.20 απεικονίζεται η επιρροή του λόγου a/ℓ στην αντι-επίπεδη μετατόπιση ($u_z \equiv w$) του άνω χείλους της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με $\beta = 0$. Παρατηρούμε ότι κοντά στην κορυφή της ρωγμής (ιδέ μεγέθυνση), τα χείλη κλείνουν πιο ομαλά ($\bar{x}^{3/2}$) σε σύγκριση με την πρόβλεψη της κλασσικής θεωρίας, αποτέλεσμα που εμφανίζεται επίσης και σε πειραματικές εργασίες (Elsner *et al.*, 1994). Επίσης, όπως και στις περιπτώσεις των επίπεδων προβλημάτων που μελετήθηκαν νωρίτερα, σημειώνουμε ότι καθώς το μήκος της ρωγμής γίνεται συγκρίσιμο με το χαρακτηριστικό μήκος ℓ , το υλικό επιδεικνύει πιο στιβαρή συμπεριφορά (μικρότερες μετατοπίσεις των χειλέων της ρωγμής).

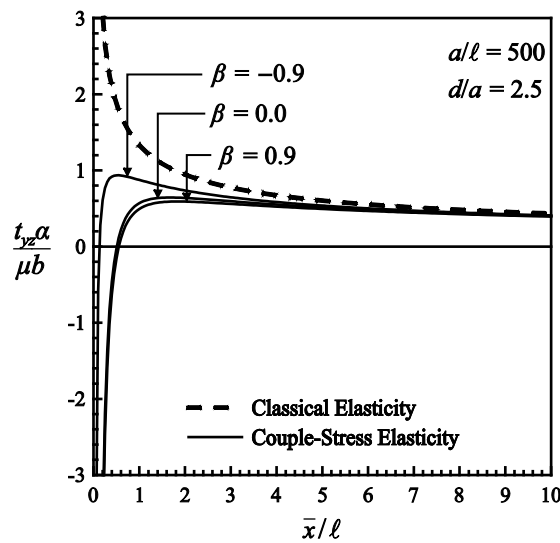


Σχ. 4.20. Αντι-επίπεδη μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορους λόγους a/ℓ λόγω αλληλεπίδρασης με μία αντι-επίπεδη εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με $\beta = 0$.

Οι διατμητικές τάσεις (τ_{yz}, σ_{yz}) και οι τάσεις ζεύγους (m_{xx}, m_{yy}) μπορούν να υπολογιστούν ολοκληρώνοντας τις Εξ. (4.129), (4.131) και (4.132) αντίστοιχα, κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής ($|x| < a, y = 0$). Όσον αφορά την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά, εξετάζοντας το δεξιό άκρο της ρωγμής και λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-a}^a \frac{B_{III}(t)}{x-t} dt = O((x-a)^{1/2-n}), \text{ για } n \geq 0, \text{ καθώς το } x \rightarrow a^+ \text{ (} x > a \text{)}, \quad (4.146)$$

συμπεραίνουμε ότι οι τάσεις τ_{yz} συμπεριφέρονται ως $\bar{x}^{1/2}$ ενώ οι τάσεις σ_{yz} και οι τάσεις ζεύγους (m_{xx}, m_{yy}) ως $\bar{x}^{-3/2}$ και $\bar{x}^{-1/2}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, βάσει των παραπάνω, η ολική τάση $t_{yz} \equiv \sigma_{yz} + (1/2)\partial_x m_{yy}$ συμπεριφέρεται ως $\bar{x}^{-3/2}$. Υπενθυμίζουμε ότι η ολική τάση t_{yz} προέρχεται από τον ‘τροποποιημένο’ ελκυστή δύναμης $P_q^{(n)}$ (Εξ. (3.16)) και είναι το μέγεθος που ορίζεται ως συνοριακή συνθήκη στα χείλη της ρωγμής (Εξ. (4.115α)). Αντίστοιχη ασυμπτωτική συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί στο πρόβλημα ρωγμής τύπου III στα πλαίσια της διπολικής θεωρίας βαθμίδας (Georgiadis, 2003).



Σχ. 4.21. Κατανομή της ολικής τάσης t_{yz} μπροστά από το δεξί άκρο της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με μία αντι-επίπεδη εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα σώμα με $a/l = 500$ για διάφορες τιμές του β .

Στο Σχ. 4.21 παρουσιάζεται η κατανομή της ολικής τάσης t_{yz} λόγω αλληλεπίδρασης με μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με $a/l = 500$ και τρεις τιμές της παραμέτρου β . Παρατηρούμε ότι η ολική τάση t_{yz} λαμβάνει αρνητικές τιμές σε μία μικρή περιοχή μπροστά από το δεξί (και το αριστερό) άκρο της ρωγμής ($\bar{x} < 0.5\ell$), επιδεικνύοντας έναν χαρακτήρα συνοχής (cohesive-traction character) στην επικείμενη ζώνη θραύσεως. Επιπλέον, η κατανομή της ολικής τάσης παρουσιάζει τοπικά μία φραγμένη μέγιστη τιμή ($\bar{x} < 2\ell$), η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο προσδιορισμού της κρίσιμης τάσης για την περαιτέρω ανάπτυξη της ρωγμής. Για $\bar{x} > 2\ell$, η κατανομή της ολικής τάσης τείνει στην πρόβλεψη της κλασσικής θεωρίας. Όσον αφορά την παράμετρο β , σημειώνουμε ότι καθώς το $\beta \rightarrow -1$,

η ‘ζώνη συνοχής’ περιορίζεται ενώ παράλληλα αυξάνει η μέγιστη τιμή της ολικής τάσης. Παρόμοια συμπεριφορά για την συγκέντρωση των τάσεων εμφανίζεται στα προβλήματα ρωγμής τύπου III στην θεωρία τάσεων ζεύγους (Gourgiotis and Georgiadis, 2007) και στην διπολική θεωρία βαθμίδας (Georgiadis, 2003) καθώς και σε πειραματικά αποτελέσματα (Prakash *et al.*, 1992).

4.4.4 Υπολογισμός του ολοκληρώματος J

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζεται το ολοκλήρωμα J της Μηχανικής των Θραύσεων και διερευνάται η εξάρτησή του από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ , την παράμετρο β και την απόσταση της αντι-επίπεδης εξάρμωσης από το άκρο της ρωγμής. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J , χρησιμοποιούμε έναν δρόμο ολοκλήρωσης μορφής παραλληλογράμμου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.4.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα ρωγμής, η τάση ζεύγους m_{yx} είναι μηδέν για $y = 0$ και ότι τα χείλη της ρωγμής ορίζονται από το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$, το ολοκλήρωμα J (Εξ. (4.61)) παίρνει τη μορφή

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t_{yz}(x, y=0^+) \cdot \frac{\partial w(x, y=0^+)}{\partial x} dx \right\}. \quad (4.147)$$

Η δεσπόζουσα ιδιόμορφη συμπεριφορά για την ολική τάση t_{yz} οφείλεται στο υπεριδιόμορφο ολοκλήρωμα (ιδέ ολοκληρωτική εξίσωση (4.136)). Η τάση αυτή για $x \rightarrow a^+$ γράφεται ως ($\tilde{x} > 1$)

$$\begin{aligned} t_{yz}(x \rightarrow a^+, y=0^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left(-\frac{c_1}{p^2} \int_{-a}^a \frac{B_{III}(t)}{(x-t)^3} dt \right) \\ &= -\lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \frac{c_1}{p^2} \int_{-1}^1 \frac{a_n U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})^3} d\tilde{t} = -\frac{c_1}{p^2} \frac{\pi}{2^{5/2}} \sum_{n=1}^N a_n (1+n) \cdot (\tilde{x}-1)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Για την πυκνότητα της αντι-επίπεδης εξάρμωσης $B_{III}(t)$ ισχύει βάσει του ορισμού η παρακάτω ασυμπτωτική σχέση καθώς το $x \rightarrow a^-$ ($\tilde{x} < 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x \rightarrow a^-, y = 0^+)}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a^-} B_{III}(x) = -\frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N a_n U_n(\tilde{x}) \cdot (1 - \tilde{x}^2)^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n (n+1) \cdot (1 - \tilde{x})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.149)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, το ολοκλήρωμα J μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$J_r = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = \pi a \Lambda_1, \quad (4.150)$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{\pi c_1}{8p^2} \sum_{n=1}^N a_n (n+1) \times \sum_{n=1}^N a_n (n+1), \quad (4.151)$$

$\bar{x} = \tilde{x} - 1$ και για κάθε πραγματικό αριθμό λ , με εξαίρεση τις τιμές $\lambda = -1, -2, -3, \dots$, ορίζονται οι κατανομές τύπου ‘διχοτόμου’, x_+^λ και x_-^λ βάσει της Εξ. (4.69), ενώ το ολοκλήρωμα στην Εξ. (4.150) υπολογίζεται βάσει του θεωρήματος Fisher για γινόμενα κατανομών τύπου ‘διχοτόμου’.

Αντίστοιχα για το αριστερό άκρο της ρωγμής ($x \rightarrow -a^-$), η έκφραση για την ολική τάση t_{yz} γράφεται ως ($\tilde{x} < -1$)

$$\begin{aligned} t_{yz}(x \rightarrow a^+, y = 0^+) &= \\ &= -\lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \frac{c_1}{p^2} \int_{-1}^1 \frac{a_n U_n(\tilde{t}) (1 - \tilde{t}^2)^{1/2}}{(\tilde{x} - \tilde{t})^3} d\tilde{t} = \frac{c_1}{p^2} \frac{\pi}{2^{5/2}} \sum_{n=1}^N a_n (1+n) (-1)^n \cdot (\tilde{x} - 1)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (4.152)$$

Για την πυκνότητα της εφαπτομενικής εξάρμωσης $B_{II}(t)$ ισχύει η παρακάτω ασυμπτωτική σχέση καθώς το $x \rightarrow -a^+$ ($\tilde{x} > -1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x \rightarrow -a^+, y = 0^+)}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow -1^+} \sum_{n=1}^N a_n U_n(\tilde{x}) \cdot (1 - \tilde{x}^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n (n+1)(-1)^n \cdot (1 + \tilde{x})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.153)$$

Τελικά, το ολοκλήρωμα J για το αριστερό άκρο της ρωγμής γράφεται στη μορφή

$$J_\ell = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\tilde{x} \right\} = -\pi a \Lambda_1, \quad (4.154)$$

όπου

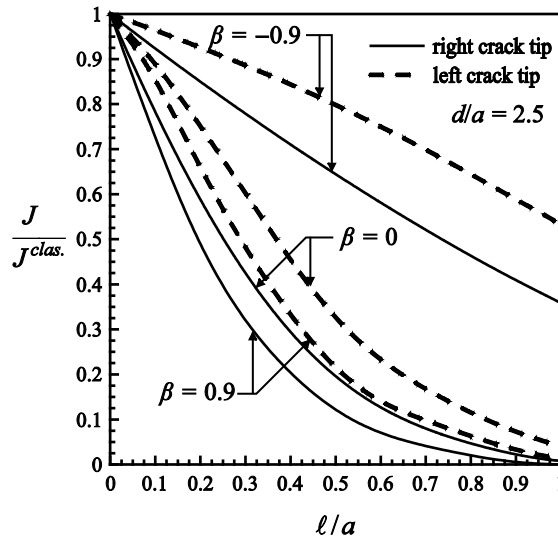
$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n \times \sum_{n=1}^N a_n (-1)^n. \quad (4.155)$$

Βάσει της παραπάνω ανάλυσης, μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα J . Στο Σχ. 4.22 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και της παραμέτρου β , για μία αντι-επίπεδη εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$. Η τιμή του ολοκληρώματος J στην κλασική ελαστικότητα μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας έναν δρόμο ολοκλήρωσης όπως περιγράφηκε παραπάνω και τις εκφράσεις των ελαστικών πεδίων του προβλήματος (Zhang and Li, 1991a). Οι εκφράσεις του ολοκληρώματος J στην κλασική ελαστικότητα για το δεξί και αριστερό άκρο αντίστοιχα είναι

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{\mu b^2 \left[1 - \left(\frac{d+a}{d-a} \right)^{1/2} \right] \left[d-a - (d^2 - a^2)^{1/2} \right]}{8\pi a (d-a)}, \\ J_\ell &= -\frac{\mu b^2 \left[1 - \left(\frac{d+a}{d-a} \right)^{1/2} \right] \left[d-a - (d^2 - a^2)^{1/2} \right]}{8\pi a (d+a)}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

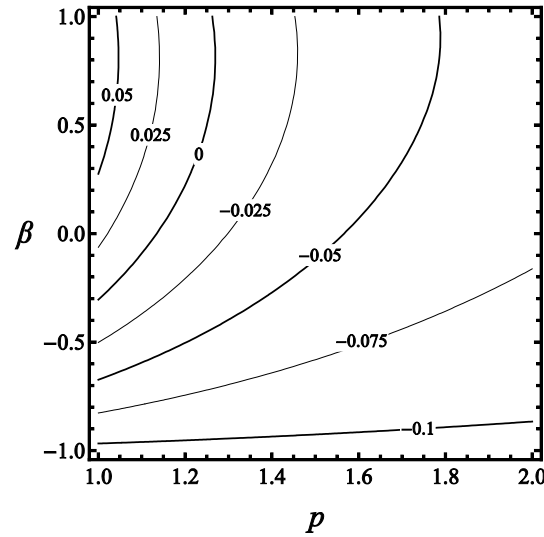
Παρατηρούμε ότι καθώς ο λόγος $\ell/a \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα J στην θεωρία τάσεων ζεύγους τείνει με συνεχή τρόπο στο αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας. Σε όλες

τις καμπύλες, ο λόγος $J/J^{clas.}$ φθίνει καθώς το ℓ/a αυξάνει. Η απόκριση αυτή είναι ανεξάρτητη από την απόσταση της εξάρμωσης από το άκρο της ρωγμής. Συνεπώς, ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας μειώνεται (strengthening effect) όταν ληφθεί υπόψιν η μικροδομή του υλικού. Αντίστοιχη συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί στα προβλήματα ρωγμής τύπου I και II στα πλαίσια της διπολικής θεωρίας βαθμίδας (Gourgiotis and Georgiadis, 2009).



Σχ. 4.22. Μεταβολή του λόγου των ολοκληρωμάτων J στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο ℓ/a για μία αντι-επίπεδη εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$.

Ο λόγος $J/J^{clas.}$ τείνει στο μηδέν για $\ell/a > 0.85$ στις περιπτώσεις $\beta = 0$ και $\beta = 0.9$. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί εξετάζοντας της συμπεριφορά της φόρτισης της αντι-επίπεδης εξάρμωσης στο άκρο της ρωγμής. Στο Σχ. 4.23 απεικονίζεται η διακύμανση της τιμής της ολικής τάσης t_{yz} στο δεξί άκρο της ρωγμής ως προς τις παραμέτρους $\beta = \eta'/\eta$ και $p = a/\ell$. Από το διάγραμμα αυτό συμπεραίνουμε ότι η ολική τάση λαμβάνει κυρίως αρνητικές τιμές εκτός μίας περιοχής ($\beta > -0.3$ και $p < 1.25$) όπου γίνεται θετική. Για παράδειγμα, για $\beta = 0$, η ολική τάση t_{yz} μηδενίζεται για $p = 1.13$. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε $\ell/a = 0.88$, όπου πράγματι η τιμή του λόγου $J/J^{clas.}$ στο Σχ. 4.22 είναι σχεδόν μηδενική. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ο λόγος $J/J^{clas.}$ λαμβάνει υψηλότερες τιμές στο αριστερό άκρο της ρωγμής, σε αντίθεση με τα προηγούμενα προβλήματα, ενώ η φόρτιση στο αριστερό άκρο είναι πάντοτε αρνητική.



Σχ. 4.23. Μεταβολή της ολικής τάσης t_{yz} στο δεξί άκρο της ρωγμής ως προς τις παραμέτρους $\beta = \eta'/\eta$ και $p = a/\ell$ λόγω αλληλεπίδρασης με μία αντι-επίπεδη εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$.

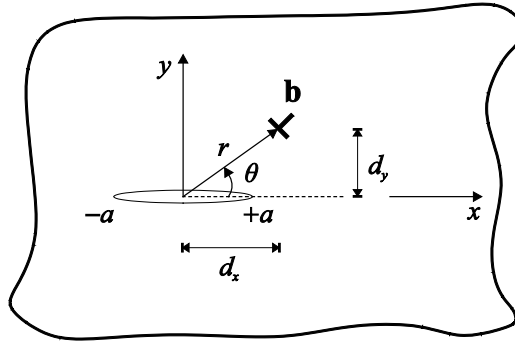
Πίνακας 4.3. Λόγος $J_{,r}/J_{,r}^{clas.}$ λόγω αλληλεπίδρασης με μία αντι-επίπεδη εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.0$ σε ένα υλικό με $\beta = -0.9$.

N	$\ell/a=1.0$	$\ell/a=0.8$	$\ell/a=0.5$	$\ell/a=0.2$	$\ell/a=0.1$	$\ell/a=0.05$	$\ell/a=0.01$	$\ell/a=0.005$
10	0.27016	0.37823	0.57837	0.81850	0.80671	0.17252	0.66546	2.55497
20	0.27017	0.37827	0.57839	0.81810	0.90653	0.95216	0.09993	0.22237
30	0.27017	0.37827	0.57839	0.81806	0.90681	0.95287	0.38653	0.09138
40				0.81806	0.90681	0.95287	0.95458	0.19633
50							0.99012	0.72165
60							0.99049	0.97271
70							0.99049	0.99431
80								0.99522
90								0.99522

4.5 Εξάρμωση εκτός του επιπέδου της ρωγμής

Στα προβλήματα που εξετάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους του κεφαλαίου αυτού, θεωρήθηκε ότι η κεντρική ρωγή αλληλεπιδρά με εξαρμώσεις οι οποίες βρίσκονται κατά μήκος του επιπέδου της. Στην γενικότερη περίπτωση, μία εξάρμωση μπορεί να βρίσκεται εκτός του επιπέδου της ρωγμής και να έχει τυχαίο προσανατολισμό (Σχ. 4.24). Όπως ήδη συζητήθηκε στην Παράγραφο 2.3.1, τέτοιου είδους αλληλεπίδραση μπορεί να δημιουργήσει ένα θλιπτικό πεδίο γύρω από τη ρωγή και να οδηγήσει σε (μερικό) κλείσιμο της, στις περιπτώσεις των προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης (Παράγραφοι 4.2 και 4.3). Στα πλαίσια της κλασικής ελαστικότητας, το πρόβλημα αυτό

μελετήθηκε από την [Comninou \(1987\)](#), η οποία θεώρησε επιπλέον της φόρτισης της εξάρμωσης, απομακρυσμένη εφελκυστική και διατμητική φόρτιση. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν τα βασικά βήματα για την κατάστρωση και επίλυση του προβλήματος αυτού στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους.



Σχ. 4.24. Κεντρική ρωγμή αλληλεπιδρά με διακριτή επίπεδη εξάρμωση τυχαίου προσανατολισμού.

Μία εξάρμωση τυχαίου προσανατολισμού δημιουργεί στα χείλη της ρωγμής ορθές τάσεις σ_{yy} , διατμητικές τάσεις σ_{yx} και τάσεις ζεύγους m_{yz} . Έστω $N(x)$, $S(x)$ οι αναπτυσσόμενες ορθές και διατμητικές τάσεις στα χείλη της ρωγμής και $\Delta u_y(x)$, $\Delta u_x(x)$ η σχετική ορθή και εφαπτομενική μετατόπιση των χειλέων αντίστοιχα. Για να παραμείνει ανοιχτή η ρωγμή πρέπει να ισχύει $N(x) = S(x) = 0$ και $\Delta u_y(x) > 0$. Στην περίπτωση που η ρωγμή είναι κλειστή, ισχύει $\Delta u_y(x) = 0$, $N(x) < 0$ ενώ η ποσότητα $S(x)$ μπορεί να είναι είτε αρνητική είτε θετική. Σε αυτή την περίπτωση, η σχετική εφαπτομενική μετατόπιση των κλειστών χειλέων της ρωγμής θα εμποδίζεται από την τριβή. Αν ο συντελεστής τριβής f είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ισχύει

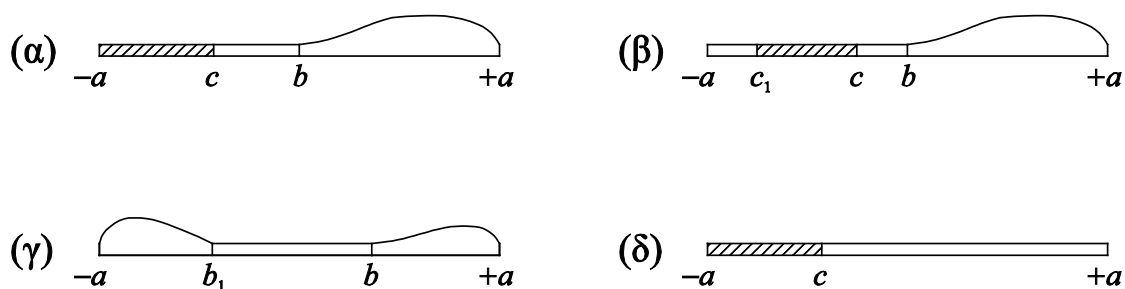
$$|S(x)| < -f N(x), \quad N(x) < 0, \quad (4.157)$$

τότε τα χείλη θα παραμείνουν προσκολλημένα (stick zone). Αντίθετα, αν ο συντελεστής τριβής δεν είναι αρκετά μεγάλος ώστε να προκαλέσει 'σταθεροποίηση' των χειλέων, θα υπάρχει μία ζώνη ολίσθησης (slip zone) όπου ισχύει

$$S(x) = \rho N(x), \quad N(x) < 0, \quad (4.158)$$

όπου $\rho = -f \operatorname{sgn} \Delta u_x(x)$.

Η διάταξη και τα όρια των διάφορων ζωνών δεν είναι γνωστά εξ αρχής στο πρόβλημα αλλά αποτελούν μέρος της διαδικασίας επίλυσης. Στις περιοχές όπου η ρωγμή παραμένει ανοιχτή, πρέπει να διανεμηθούν διακριτές ορθές εξαρμώσεις και δεσμευμένες στροφικές εξαρμώσεις. Επιπλέον, αν η φόρτιση υποδηλώνει την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων, πρέπει να διανεμηθούν στην περιοχή αυτή και διακριτές εφαπτομενικές εξαρμώσεις. Αντίστοιχα, στις περιοχές ολίσθησης, πρέπει να διανεμηθούν μόνο διακριτές εφαπτομενικές εξαρμώσεις ενώ στις περιοχές προσκόλλησης δεν υπάρχει σχετική μετακίνηση των χειλέων οπότε δεν απαιτείται η διανομή ατελειών.



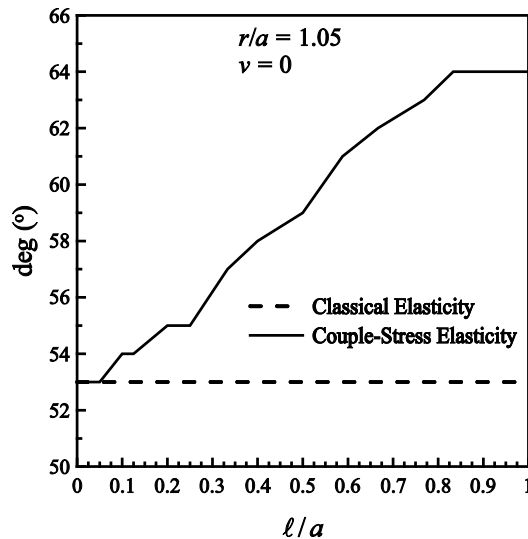
Σχ. 4.25. Διάφορες διατάξεις των περιοχών προσκόλλησης (διαγραμμισμένο τμήμα), ολίσθησης και ανοιχτών χειλέων κατά μήκος της ρωγμής.

Στο Σχ. 4.25 απεικονίζονται διάφορες περιπτώσεις διατάξεων κατά μήκος της ρωγμής. Θεωρούμε, για παράδειγμα, την διάταξη της περίπτωσης (α). Στην περιοχή που η ρωγμή παραμένει ανοιχτή ($b < x < +a$), το πρόβλημα περιγράφεται από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Εξ. (4.35) και (4.36) και τις βοηθητικές συνθήκες (4.42). Αντίστοιχα, στην περιοχή $c < x < +a$ ισχύει η ολοκληρωτική εξίσωση (4.94) με την βοηθητική συνθήκη (4.98). Είναι φανερό πως πέραν του προσδιορισμού των πυκνοτήτων $B_I(t)$, $B_{II}(t)$ και $W(t)$, απαιτείται και ο προσδιορισμός των σημείων b και c . Οι πυκνότητες $B_I(t)$ και $B_{II}(t)$ είναι συζευγμένες μέσω του νόμου τριβής (Εξ. (4.158)). Επίσης, λόγω του ραμφοειδούς τρόπου κλεισίματος της ρωγμής, οι πυκνότητες είναι φραγμένες στο αριστερό άκρο (σημεία b και c) ενώ απειρίζονται στο σημείο $x = +a$. Συνεπώς, απαιτείται τροποποίηση των εκφράσεων (4.47) και (4.97) ώστε να ληφθεί υπόψιν η ασυμπτωτική συμπεριφορά των πυκνοτήτων στα άκρα (ιδέ Hills *et al.*, 1996).

Γίνεται εύκολα αντιληπτό πως η διαδικασία επίλυσης δεν είναι απλή. Σε ανάλογα προβλήματα (Comninou, 1987; Hills *et al.*, 1996), αρχικά θεωρείται η γενική διάταξη των

παραπάνω περιοχών και το εύρος αυτών. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι πυκνότητες των εξαρμώσεων ενώ τα όρια των περιοχών βρίσκονται με μία επαναληπτική διαδικασία ώστε να ικανοποιούνται οι βοηθητικές συνθήκες. Παράλληλα, ελέγχεται ότι δεν παραβιάζονται οι σχέσεις (4.157) και (4.158), αλλιώς η αρχική υπόθεση των περιοχών τροποποιείται.

Στην παρούσα εργασία, περιοριζόμαστε στην διερεύνηση της γωνίας θ για την οποία έχουμε μερικό κλείσιμο της ρωγμής, όταν αυτή αλληλεπιδρά με μία διακριτή ορθή εξάρμωση. Για τον προσδιορισμό της γωνίας κλεισίματος της ρωγμής, αρκεί η επίλυση των Εξ. (4.35) και (4.36) όπου η φόρτιση λόγω της ορθής εξάρμωσης (ορθές τάσεις σ_{yy} και τάσεις ζεύγους m_{yz}) δίνονται από τις Εξ. (4.30) και (4.34). Η απόσταση της εξάρμωσης από το κέντρο της ρωγμής είναι ίση με $r/a = 1.05$.



Σχ. 4.26. Μεταβολή της γωνίας κλεισίματος της ρωγμής στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο l/a λόγω αλληλεπίδρασης με μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $r/a = 1.05$ σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0$.

Στο Σχ. 4.26 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της διερεύνησης αυτή συναρτήσει του λόγου l/a . Παρατηρούμε πως για $l/a \rightarrow 0$, η γωνία παραμένει ίση με την κλασσική λύση, δηλαδή $\theta = 53^\circ$. Όσο ο λόγος l/a αυξάνει, σημειώνεται αύξηση της γωνίας μέχρι την σταθερή τιμή $\theta = 64^\circ$ για $l/a > 0.8$. Συνεπώς, η γωνία για την οποία κλείνει η ρωγμή μεταβάλλεται σημαντικά όταν ληφθεί υπόψη η μικροδομή του υλικού.

Η επίλυση κλειστών ρωγμών αφήνεται ως ζήτημα μελλοντικής έρευνας. Στόχος είναι η ανάπτυξη μίας μεθοδολογίας όπου η αρχική διάταξη των διαφόρων περιοχών δεν

θα είναι ζήτημα διαίσθησης (ιδέ π.χ. Dubourg and Villechaise, 1989; Kalker, 1990) και μετέπειτα η παραμετρική μελέτη του προβλήματος.

4.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκαν προβλήματα αλληλεπίδρασης κεντρικών ρωγμών με διακριτές εξαρμώσεις, στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Η κατάστρωση των προβλημάτων έγινε χρησιμοποιώντας την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων. Για το σκοπό αυτό, υπολογίστηκαν τα πεδία των διακριτών εξαρμώσεων, επιλύοντας μικτά προβλήματα συνοριακών τιμών με εφαρμογή του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier. Η χρήση της τεχνικής των διανεμημένων εξαρμώσεων οδήγησε σε ιδιόμορφες (επίπεδα προβλήματα) ή υπεριδιόμορφες (αντι-επίπεδο πρόβλημα) ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες επιλύθηκαν αριθμητικά. Σε όλες τις περιπτώσεις προέκυψε ότι το ρηγματωμένο υλικό συμπεριφέρεται πιο δύσκαμπτα από ότι προβλέπει η κλασσική ελαστικότητα. Στα επίπεδα προβλήματα, ο συντελεστής έντασης τάσεων εμφανίζει σημαντική αύξηση σε σχέση με τον αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας. Στο πρόβλημα της αλληλεπίδρασης με μία διακριτή ορθή εξάρμωση, βρέθηκε ότι το διάνυσμα της στροφής είναι φραγμένο στο άκρο της ρωγμής ενώ στο αντι-επίπεδο πρόβλημα προέκυψε ότι η ρωγμή κλείνει πιο ομαλά από ό,τι στην κλασσική θεωρία. Επίσης, υπολογίστηκαν τα ολοκληρώματα J στα άκρα των ρωγμών και συσχετίστηκαν με την κινούσα δύναμη Peach-Koehler γύρω από τις εξαρμώσεις. Στα επίπεδα προβλήματα, ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας εξαρτάται από την απόσταση της εξάρμωσης και από την μικροδομή, καθώς παρατηρήθηκε άλλοτε ελάττωση και άλλοτε αύξησή του. Αντίθετα, στο αντι-επίπεδο πρόβλημα, ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας μειώνεται όταν ληφθεί υπόψιν η μικροδομή του υλικού.



Κεφάλαιο 5

Αλληλεπίδραση ρωγμών με δίπολα εξαρμώσεων στη θεωρία τάσεων ζεύγους

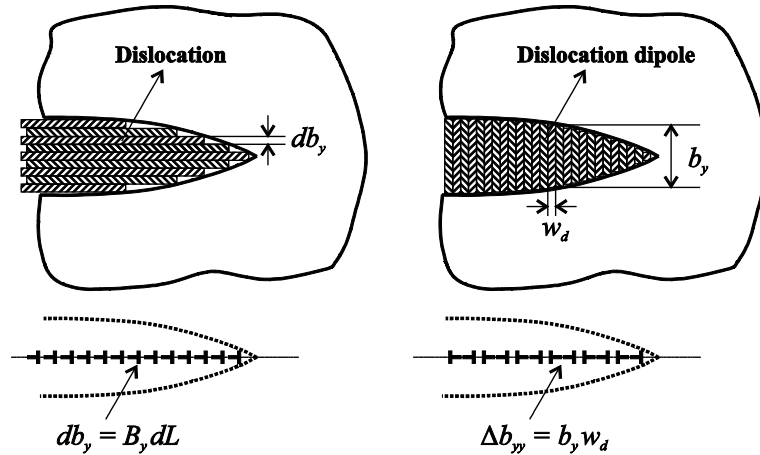
5.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 4 χρησιμοποιήθηκε η τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων για την μελέτη προβλημάτων αλληλεπίδρασης κεντρικών ρωγμών με εξαρμώσεις, στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Ο όρος ‘διανεμημένες εξαρμώσεις’ δεν περιορίζεται μόνο σε διακριτές εξαρμώσεις (single dislocations) αλλά περιλαμβάνει οποιονδήποτε ‘πυρήνα παραμόρφωσης’ (strain nucleus) παράγει κατάλληλες διορθωτικές τάσεις ώστε η ρωγμή να παραμένει αφόρτιστη.

Στο παρόν κεφάλαιο γενικεύουμε την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων χρησιμοποιώντας ως πυρήνες παραμόρφωσης δίπολα εξαρμώσεων. Ως δίπολο εξαρμώσεων ορίζεται ένα ζεύγος παράλληλων εξαρμώσεων με αντίθετα διανύσματα Burgers το οποίο βρίσκεται σε μία απόσταση w_d . Το γινόμενο του διανύσματος Burgers επί την απόσταση w_d που χωρίζει τις δύο εξαρμώσεις ονομάζεται μέτρο (strength or intensity) του διπόλου. Με βάση την απόσταση w_d , μπορεί να γίνει διαχωρισμός των διπόλων σε απειροστά (infinitesimal dipole) και πεπερασμένα (finite dipole) (Kroupa, 1965). Στα προβλήματα ρωγμών χρησιμοποιούνται απειροστά δίπολα εξαρμώσεων. Σε αντίθεση με τις διακριτές εξαρμώσεις οι οποίες είναι γραμμικές ατέλειες (line defects), τα δίπολα εξαρμώσεων είναι επιφανειακές ατέλειες (area defects) του κρυσταλλικού πλέγματος.

Οι δύο τρόποι κατάστρωσης διδιάστατων προβλημάτων ρωγμών απεικονίζονται σχηματικά στο Σχ. 5.1. Στην κατάστρωση με βάση διακριτές εξαρμώσεις, το προφίλ των μετατοπίσεων της ρωγμής αναπαρίσταται από μία δέσμη λεπτών λωρίδων, όπου η κάθε λωρίδα αντιπροσωπεύει μία εξάρμωση. Η σχετική μετατόπιση των χειλέων της ρωγμής

δίνεται από το άθροισμα των διανυσμάτων Burgers όλων των εξαρμώσεων στο εκάστοτε σημείο. Αντίθετα, στην κατάστρωση με βάση απειροστά δίπολα εξαρμώσεων, το άνοιγμα της ρωγμής σχηματίζεται από λωρίδες μικρού εύρους οι οποίες βρίσκονται σε παράταξη, όπου κάθε λωρίδα αντιπροσωπεύει ένα απειροστό δίπολο εξαρμώσεων. Σε αυτή την περίπτωση, το διάνυσμα Burgers κάθε δίπολου ισούται με την σχετική ορθή μετατόπιση των χειλέων της ρωγμής στο ίδιο σημείο.



Σχ. 5.1. Μοντελοποίηση μίας ρωγμής τύπου I μέσω διανομής διακριτών εξαρμώσεων διανύσματος Burgers db_y ή μέσω απειροστών δίπολων εξαρμώσεων με μέτρο Δb_{yy} .

Από μαθηματικής πλευράς, στην περίπτωση της διανομής διακριτών εξαρμώσεων, το πρόβλημα καταστρώνεται με βάση την κλίση της μετατόπισης (slope formulation) η οποία χρησιμοποιείται ως πυκνότητα στις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Από την άλλη, στην κατάστρωση μέσω δίπολων εξαρμώσεων, χρησιμοποιείται ως πυκνότητα η σχετική μετατόπιση των χειλέων της ρωγμής (displacement formulation). Επομένως, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που περιγράφουν τα προβλήματα ρωγμών θα είναι σε κάθε περίπτωση υπεριδιόμορφες. Αυτό το γεγονός εισάγει κάποιες δυσκολίες στην διαδικασία επίλυσης όπως, για παράδειγμα, την ανάγκη υπολογισμού κάποιων ολοκληρωμάτων πεπερασμένου σε κλειστή μορφή. Πέραν αυτού, η κατάστρωση του προβλήματος ως προς την μετατόπιση των χειλέων της ρωγμής έχει μία σειρά από πλεονεκτήματα τα οποία έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία. Αρχικά, είναι πιο άμεση, εφόσον δεν απαιτείται ένα παραπάνω βήμα ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων. Σε προβλήματα όπως αυτό της παραγράφου 4.5, η επίλυση επιταχύνεται σημαντικά. Επιπλέον, η συνάρτηση της μετατόπισης $u_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ είναι συνεχής στο διάστημα $-a \leq x \leq a$ ενώ αντίθετα η κλίση της μετατόπισης είναι μη φραγμένη στα άκρα της ρωγμής. Ένα ακόμη

πλεονέκτημα σύμφωνα με τους [Chan et al. \(2001\)](#) είναι ότι αυτή η προσέγγιση παρέχει έναν εναλλακτικό και συχνά απλούστερο τρόπο ασυμπτωτικής ανάλυσης των πυρήνων των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Εξάλλου, οι [Korsunsky and Hills \(1995\)](#), έδειξαν συγκρίνοντας τις δύο μεθοδολογίες, ότι για δεδομένο βαθμό ακρίβειας απαιτούνται λιγότεροι όροι στη μέθοδο των δίπολων εξαρμώσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να επεκταθεί σε αξονοσυμμετρικά και σε τριδιάστατα προβλήματα ρωγμών (eigenstrain method), χρησιμοποιώντας ως πυρήνες παραμόρφωσης δακτυλίους διπόλων εξαρμώσεων και βρόχους εξαρμώσεων (dislocation loops) αντίστοιχα. Επιπλέον πληροφορίες και εφαρμογές της μεθόδου μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των [Korsunsky and Hills \(1996\)](#), [Dai \(2002\)](#) και στο βιβλίο των [Hills et al. \(1996\)](#).

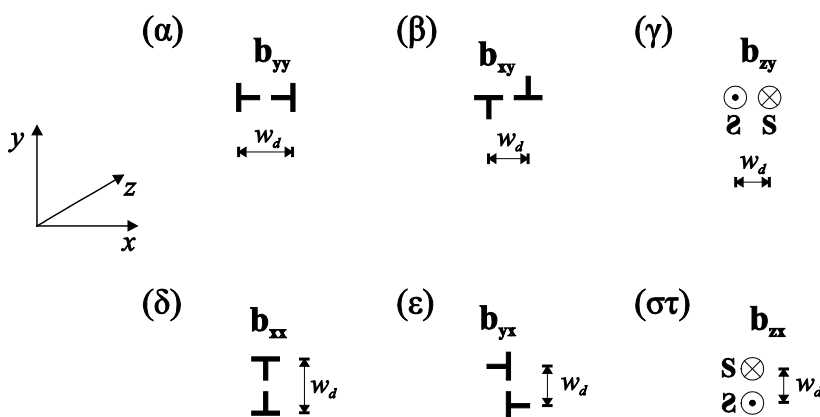
Προηγούμενες εργασίες σχετικές με την αλληλεπίδραση ρωγμών και διπόλων εξαρμώσεων μπορούν να βρεθούν στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας. Συγκεκριμένα, οι [Ballarini and Denda \(1988\)](#) υπολόγισαν τους συντελεστές έντασης τάσης στα άκρα μίας κεντρικής ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με ένα επίπεδο δίπολο εξαρμώσεων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών. Το αντίστοιχο αντι-επίπεδο πρόβλημα μελετήθηκε από τους [Lin et al. \(1993\)](#). Παράλληλα, οι [Wang and Lee \(1992, 1993\)](#) προσδιόρισαν τις θέσεις ισορροπίας ενός διπόλου πλησίον μίας ημιάπειρης ρωγμής και το κριτήριο για την έκλυση διπόλων από το άκρο της.

Το παρόν κεφάλαιο περιλαμβάνει τέσσερις ενότητες. Στην Παράγραφο 5.2 εξάγονται στην θεωρία τάσεων ζεύγους τα τασικά πεδία των διπόλων εξαρμώσεων που θα χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις Green για την μελέτη των προβλημάτων ρωγμών. Στην Παράγραφο 5.3 παρουσιάζεται το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας κεντρικής ρωγμής με ένα οριζόντιο δίπολο ορθών εξαρμώσεων. Για την ανάπτυξη των διορθωτικών τάσεων, αναλογικά με το πρόβλημα της παραγράφου 4.2, απαιτείται η διανομή σταθερών ασυνεχειών στο διάνυσμα της στροφής, πέραν φυσικά της διανομής *απειροστών διπόλων ορθών εξαρμώσεων*. Στην περίπτωση αυτή, οι στροφικές ατέλειες θα είναι *απειροστά δίπολα δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων*. Τελικά, το πρόβλημα περιγράφεται από ένα σύστημα συζευγμένων υπεριδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων με τετραγωνική ιδιομορφία, το οποίο επιλύεται αριθμητικά. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος J και της κινούσας δύναμης που ασκείται στο δίπολο εξαρμώσεων αποκαλύπτει φαινόμενα ενίσχυσης (strengthening effect) ή εξασθένισης (weakening effect) εξαρτώμενα από το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού. Στη συνέχεια, στην Παράγραφο 5.4, εξετάζεται το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας κεντρικής ρωγμής με ένα οριζόντιο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων. Σε αυτή την περίπτωση, οι διορθωτικές τάσεις

αναπτύσσονται από την συνεχή διανομή *απειροστών διπόλων εφαπτομενικών εξαρμώσεων*. Το πρόβλημα περιγράφεται από μία υπεριδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση με τετραγωνική ιδιομορφία η οποία επιλύεται αριθμητικά. Τέλος, στην Παράγραφο 5.5, μελετάται το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μία κεντρικής ρωγμής με ένα οριζόντιο δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων. Πραγματοποιώντας κατανομή *απειροστών διπόλων αντι-επίπεδων εξαρμώσεων* οδηγούμαστε σε μία υπεριδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση τετάρτου βαθμού, η οποία επιλύεται αριθμητικά.

5.2 Δίπολα εξαρμώσεων στη θεωρία τάσεων ζεύγους

Στην παράγραφο αυτή εξάγονται τα τασικά πεδία των δίπολων εξαρμώσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.2, οι τρεις τύποι μεταφορικών εξαρμώσεων (ορθή, εφαπτομενική και αντι-επίπεδη) μπορούν να συνδυαστούν ώστε να προκύψουν τρεις τύποι οριζόντιων και τρεις τύποι κατακόρυφων διπόλων εξαρμώσεων. Το μέτρο του διπόλου συμβολίζεται ως b_{ij} , όπου ο δείκτης i δηλώνει την διεύθυνση των διανυσμάτων Burgers των εξαρμώσεων που απαρτίζουν το δίπολο ενώ ο δείκτης j δηλώνει την κάθετη διεύθυνση στην απόσταση w_d που χωρίζει τις δύο εξαρμώσεις. Οι περιπτώσεις (α) και (δ) αντιστοιχούν σε ορθή μετατόπιση των χειλέων της ρωγμής, οι περιπτώσεις (β) και (ε) σε εφαπτομενική μετατόπιση, ενώ οι περιπτώσεις (γ) και (στ) σε αντι-επίπεδη μετατόπισή.



Σχ. 5.2. Οριζόντια και κατακόρυφα δίπολα εξαρμώσεων.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα δίπολα εξαρμώσεων διαχωρίζονται σε πεπερασμένα και απειροστά. Το τασικό πεδίο ενός πεπερασμένου διπόλου προκύπτει από επαλληλία των

πεδίων των δύο διακριτών εξαρμώσεων από τα οποία αποτελείται. Αν θέλουμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε στην κλασική ελαστικότητα την ορθή τάση σ_{yy} ενός πεπερασμένου οριζόντιου διπόλου ορθών εξαρμώσεων (Σχ. 5.2α) το οποίο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, από την Εξ. (4.30) για την γραμμή $y = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= \sigma_{yy}^1(x - w_d/2, 0) + \sigma_{yy}^2(x + w_d/2, 0) = \\ &= -\frac{\mu|b_y|}{2\pi(1-\nu)(x - w_d/2)} + \frac{\mu|b_y|}{2\pi(1-\nu)(x + w_d/2)} = \frac{2\mu|b_y|w_d}{\pi(1-\nu)(4x^2 - w_d^2)}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Στην περίπτωση του απειροστού διπόλου, πρέπει το $w_d \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$ ενώ η ποσότητα $w_d b$ να είναι πεπερασμένη, οπότε η Εξ. (5.1) γράφεται ως

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{\mu|b_y|w_d}{2\pi(1-\nu)x^2}. \quad (5.2)$$

Στην ουσία, το πεδίο ενός απειροστού διπόλου εξαρμώσεων προκύπτει από παραγωγή του πεδίου της διακριτής εξάρμωσης από την οποία αποτελείται. Από την Εξ. (5.2), είναι προφανές ότι η τάση φθίνει γρηγορότερα συναρτήσει της απόστασης σε σχέση με μία διακριτή εξάρμωση. Η ελαστική ενέργεια των διπόλων είναι σημαντικά χαμηλότερη από αυτή των διακριτών εξαρμώσεων, γι' αυτό και συναντώνται σε μεγάλες πυκνότητες. Περισσότερες λεπτομέρειες για την γεωμετρία και τον τρόπο δημιουργίας των διπόλων εξαρμώσεων μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Tetelman (1962) και Kroupa (1966).

Με βάση την παραπάνω διαδικασία, υπολογίζουμε τα πεδία των απειροστών διπόλων εξαρμώσεων που θα χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις Green στα προβλήματα ρωγμών. Το τασικό πεδίο ενός απειροστού οριζόντιου διπόλου ορθών εξαρμώσεων υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.29)-(4.34) ως

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} \cos 4\theta - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 4\theta \\ &= -\frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ K_0(r/\ell) + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \cos 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} (2\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 4\theta \\ & + \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ K_0(r/\ell) + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \cos 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & -\frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} (\sin 2\theta - \sin 4\theta) - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta \\ & - \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ 2K_0(r/\ell) \sin 2\theta + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \sin 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yx} = & -\frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} (\sin 2\theta - \sin 4\theta) - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta \\ & + \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ 2K_0(r/\ell) \sin 2\theta - [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \sin 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} m_{xz} = & -\frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\sin \theta - \sin 3\theta) \\ & + \frac{2\mu b w_d}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} m_{yz} = & -\frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\cos \theta - \cos 3\theta) \\ & - \frac{2\mu b w_d}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 3\theta. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές σχέσεις (5.29), παρατηρούμε ότι καθώς το $r \rightarrow 0$, οι τάσεις ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}$) εμφανίζουν τετραγωνική ιδιομορφία όπως και στην κλασσική ελαστικότητα, ενώ οι τάσεις ζεύγους m_{xz} και m_{yz} παρουσιάζουν ιδιομορφία τύπου Cauchy. Το παραπάνω πεδίο εκφυλίζεται στο αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας καθώς το $\ell \rightarrow 0$ (Weertman, 1996).

Το τασικό πεδίο ενός απειροστού οριζόντιου διπόλου εφαπτομενικών εξαρμώσεων υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.86)-(4.91) ως

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & -\frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} (\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta \\ & - \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ 2K_0(r/\ell) \sin 2\theta - [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \sin 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & -\frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2}(\sin 2\theta - \sin 4\theta) - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta \\ & + \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ 2K_0(r/\ell)\sin 2\theta - [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)]\sin 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} \cos 4\theta - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 4\theta \\ & - \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ K_0(r/\ell) + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)]\cos 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yx} = & \frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} \cos 4\theta - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 4\theta \\ & + \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} [3K_0(r/\ell)(1 - \cos 4\theta) + 4K_2(r/\ell)(\cos 2\theta + \cos 4\theta)], \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} m_{xz} = & -\frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (3\cos\theta + \cos 3\theta) \\ & + \frac{2\mu b w_d}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 3\theta, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} m_{yz} = & -\frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\sin\theta + \sin 3\theta) \\ & + \frac{2\mu b w_d}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση και χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές σχέσεις (5.29), συμπεραίνουμε ότι καθώς το $r \rightarrow 0$, οι τάσεις $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx})$ εμφανίζουν τετραγωνική ιδιομορφία όπως και στην κλασσική ελαστικότητα, ενώ οι τάσεις ζεύγους m_{xz} και m_{yz} παρουσιάζουν ιδιομορφία τύπου Cauchy. Επίσης, καθώς το $\ell \rightarrow 0$, το παραπάνω πεδίο εκφυλίζεται στο αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας (Weertman, 1996).

Τέλος, το τασικό πεδίο ενός απειροστού οριζόντιου διπόλου αντι-επίπεδων εξαρμώσεων υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.128)-(4.134) ως

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & -\frac{\mu b w_d}{2\pi r^2} \sin 2\theta + \frac{3\mu b w_d(1+\beta)}{2\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta \\ & - \frac{\mu b w_d(1+\beta)}{16\pi\ell^2} \{ 2K_2(r/\ell)\sin 2\theta - [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)]\sin 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & \frac{\mu b w_d}{2\pi r^2} \cos 2\theta - \frac{3\mu b w_d (1+\beta)}{2\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 4\theta \\ & - \frac{\mu b w_d (1+\beta)}{16\pi \ell^2} \{ K_0(r/\ell) + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \cos 4\theta \}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{\mu b w_d}{2\pi r^2} \sin 2\theta + \frac{3\mu b \ell^2 w_d (1+\beta)}{\pi r^4} \sin 4\theta, \quad (5.17)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu b w_d}{2\pi r^2} \cos 2\theta - \frac{3\mu b \ell^2 w_d (1+\beta)}{\pi r^4} \cos 4\theta, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} m_{yy} = -m_{xx} = & \frac{2\mu b \ell^2 w_d (1+\beta)}{\pi r^3} \cos 3\theta - \frac{12\mu b \ell^2 w_d (1+\beta)^2}{\pi r^3} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \\ & \times \cos 5\theta + \frac{\mu b w_d (1+\beta)^2}{4\pi r} \{ K_2(r/\ell) \cos 3\theta - [6K_0(r/\ell) - 9K_2(r/\ell)] \cos 5\theta \} \\ & + \frac{\mu b w_d (1+\beta)^2}{32\pi \ell^2} r [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (2\cos\theta - \cos 3\theta - \cos 5\theta), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} m_{yx} = & -\frac{2\mu b \ell^2 w_d (1+\beta)}{\pi r^3} \sin 3\theta + \frac{12\mu b \ell^2 w_d (1+\beta)^2}{\pi r^3} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 5\theta \\ & + \frac{3\mu b w_d (1+\beta)^2}{4\pi r} [2K_0(r/\ell) - 3K_2(r/\ell)] \sin 5\theta + \frac{\mu b w_d (1+\beta)(1-3\beta)}{4\pi r} \\ & \times K_2(r/\ell) \sin 3\theta - \frac{\mu b w_d (1-\beta^2)}{16\pi \ell^2} r [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (\sin\theta + \sin 3\theta) \\ & + \frac{\mu b w_d (1+\beta)^2}{32\pi \ell^2} r [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (\sin 3\theta + \sin 5\theta), \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} m_{xy} = & -\frac{2\mu b \ell^2 w_d (1+\beta)}{\pi r^3} \sin 3\theta + \frac{12\mu b \ell^2 w_d (1+\beta)^2}{\pi r^3} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 5\theta \\ & + \frac{3\mu b w_d (1+\beta)^2}{4\pi r} [2K_0(r/\ell) - 3K_2(r/\ell)] \sin 5\theta - \frac{\mu b w_d (1+\beta)(3-\beta)}{4\pi r} \\ & \times K_2(r/\ell) \sin 3\theta + \frac{\mu b w_d (1-\beta^2)}{16\pi \ell^2} r [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (\sin\theta + \sin 3\theta) \\ & + \frac{\mu b w_d (1+\beta)^2}{32\pi \ell^2} r [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (\sin 3\theta + \sin 5\theta). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel (Εξ. (5.29)), συμπεραίνουμε ότι το συμμετρικό τμήμα των τάσεων (Εξ. (5.15)-(5.16)) εμφανίζει ιδιομορφία r^{-2} καθώς το $r \rightarrow 0$, ενώ οι τάσεις (Εξ. (5.17)-(5.18)) και οι τάσεις ζεύγους (Εξ. (5.19)-(5.21)) συμπεριφέρονται ως r^{-4} και r^{-3} αντίστοιχα. Στην περίπτωση που το $\beta \rightarrow -1$, δηλαδή για $\eta = -\eta'$, το παραπάνω τασικό πεδίο εκφυλίζεται στο αντίστοιχο της κλασσικής ελαστικότητας (Weertman, 1996).

5.3 Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με οριζόντιο δίπολο ορθών εξαρμώσεων

5.3.1 Κατάστρωση του προβλήματος

Θεωρούμε μία κεντρική ρωγμή μήκους $2a$ σε ένα ελαστικό άπειρο στερεό σώμα με μικροδομή και ένα οριζόντιο δίπολο ορθών εξαρμώσεων \mathbf{b}_{yy} σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής, υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Σχ. 5.3). Τα χείλη της ρωγμής περιγράφονται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$ και είναι αφόρτιστα. Οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος των χηλιών της ρωγμής γράφονται σύμφωνα με τις Εξ. (3.16) και (3.17) ως

$$\sigma_{yx}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad m_{yz} = 0, \quad \text{για } |x| < a. \quad (5.22)$$

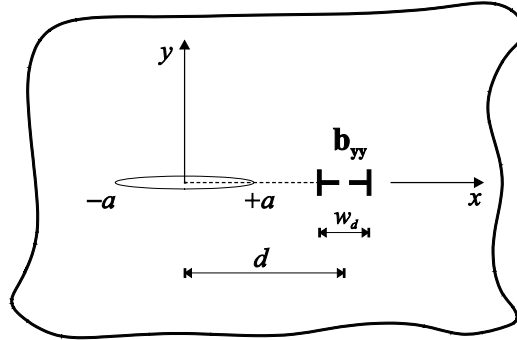
Σύμφωνα με τις Εξ. (5.4) και (5.8), η παρουσία του διπόλου ορθών εξαρμώσεων δημιουργεί ορθές τάσεις σ_{yy} και τάσεις ζεύγους m_{yz} κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής (όμοια και στην περίπτωση πεπερασμένου διπόλου), δηλαδή

$$\sigma_{yx}(d, 0) \rightarrow 0, \quad \sigma_{yy}(d, 0) \rightarrow \sigma_{yy}^{h.cl.d}, \quad m_{yz}(d, 0) \rightarrow m_{yz}^{h.cl.d}, \quad (5.23)$$

όπου $\sigma_{yy}^{h.cl.d}$ και $m_{yz}^{h.cl.d}$ είναι οι ορθές τάσεις και οι τάσεις ζεύγους ενός οριζόντιου διπόλου ορθών εξαρμώσεων στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Επίσης, οι συνθήκες στο άπειρο είναι

$$\sigma_{xx}^{\infty}, \sigma_{yy}^{\infty}, \sigma_{yx}^{\infty}, \sigma_{xy}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xz}^{\infty}, m_{yz}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty, \quad (5.24)$$

όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων. Η Εξ. (5.24) υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει άλλη εξωτερική φόρτιση στο πρόβλημα πέραν του διπόλου εξαρμώσεων.



Σχ. 5.3. Κεντρική ρωγμή αλληλεπίδρα με οριζόντιο δίπολο ορθών εξαρμώσεων.

Όμοια με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στο Κεφάλαιο 4, η λύση του προβλήματος προκύπτει ως υπέρθεση των λύσεων δύο επιμέρους προβλημάτων. Στο πρώτο πρόβλημα, θεωρούμε ένα αρηγμάτωτο σώμα το οποίο υπόκειται στη φόρτιση της Εξ. (5.23). Το τασικό πεδίο αυτού του προβλήματος, για την περίπτωση του απειροστού οριζόντιου διπόλου ορθών εξαρμώσεων, δίνεται από τις Εξ. (5.3)-(5.8). Αν θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο δίπολο, το τασικό πεδίο προκύπτει από επαλληλία των πεδίων των δύο διακριτών εξαρμώσεων από τα οποία αποτελείται, όπως περιγράφεται στην Εξ. (5.1).

Στο δεύτερο επιμέρους πρόβλημα (διορθωτική λύση), θεωρούμε ένα σώμα ίδιας γεωμετρίας με το αρχικό ρηγματωμένο δίχως την επίδραση του διπόλου εξαρμώσεων. Η μοναδική φόρτιση εφαρμόζεται πάνω στα χείλη της ρωγμής και αποτελείται από ίσες και αντίθετες τάσεις από αυτές που προέκυψαν στο αρηγμάτωτο σώμα. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} \sigma_{yx}(x, 0) &= 0, & \sigma_{yy}(x, 0) &= -\sigma_{yy}^{h.cl.d}(x-d, 0), \\ m_{yz}(x, 0) &= -m_{yz}^{h.cl.d}(x-d, 0), & \text{για } |x| < a, \end{aligned} \quad (5.25)$$

και

$$\sigma_{yy}^{\infty}, \sigma_{yx}^{\infty}, \sigma_{xy}^{\infty}, \sigma_{xx}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xz}^{\infty}, m_{yz}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το} \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.26)$$

Όπως αναφέρθηκε στην Παράγραφο 4.2, η ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών (5.25) δεν είναι δυνατή με κατανομή μόνο ενός είδους πυρήνα παραμόρφωσης. Ακολουθώντας αντίστοιχους συλλογισμούς, συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει να διανείμουμε στα χείλη της ρωγμής όχι μόνο ασυνέχειες στη μετατόπιση u_y (απειροστά δίπολα ορθών εξαρμώσεων) αλλά και ασυνέχειες στο διάνυσμα της στροφής (απειροστά δίπολα δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων). Αντίθετα, στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας, για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών (5.25α) και (5.25β), επαρκεί η κατανομή απειροστών διπόλων ορθών εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής.

5.3.2 Συναρτήσεις Green

Οι συναρτήσεις Green του προβλήματος προκύπτουν από υπέρθεση του πεδίου ενός απειροστού διπόλου ορθών εξαρμώσεων (Εξ. (5.3)-(5.8)) και ενός απειροστού διπόλου δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων (Εξ. (A.15)-(A.20), Παράρτημα A). Οι σχέσεις για την ορθή τάση σ_{yy} (Εξ. (A.16)) και την τάση ζεύγους m_{yz} (Εξ. (A.20)) κατά μήκος της γραμμής της ρωγμής $y = 0$ παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y = 0) = & \frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)x^2} + \frac{6\mu b w_d}{\pi x^2} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] \\ & + \frac{\mu b w_d}{\pi \ell^2} \left[K_0\left(\frac{|x|}{\ell}\right) - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] - \frac{4\mu \Omega w_d}{2\pi x} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$m_{yz}(x, y = 0) = -\frac{2\mu b w_d}{\pi x} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] + \frac{\mu \Omega w_d}{\pi} \left[K_0\left(\frac{|x|}{\ell}\right) - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right], \quad (5.28)$$

όπου $K_i(|x|/\ell)$ είναι οι i τάξης τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel του δευτέρου είδους.

Οι Εξ. (5.27) και (5.28) αποτελούν τις συναρτήσεις Green του προβλήματος.

Σχετικά με τα χαρακτηριστικά του παραπάνω τασικού πεδίου, σημειώνουμε τα εξής σημεία:

(i) Καθώς το $x \rightarrow 0$, ισχύουν οι ακόλουθες ασυμπτωτικές σχέσεις για τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2 \left(\frac{|x|}{\ell} \right) \right] &= O((2x)^{-1}), & \frac{1}{x^2} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2 \left(\frac{|x|}{\ell} \right) \right] &= O((2x)^{-2}), \\ \left[K_0 \left(\frac{|x|}{\ell} \right) - K_2 \left(\frac{|x|}{\ell} \right) \right] &= O((-2x)^{-2} - \ln|x|). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Με βάση τις παραπάνω ασυμπτωτικές σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι καθώς το $x \rightarrow 0$, η ορθή τάση σ_{yy} παρουσιάζει τετραγωνική και λογαριθμική ιδιομορφία λόγω του διπόλου ορθών εξαρμώσεων και ιδιομορφία τύπου Cauchy λόγω του διπόλου δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων. Αντίστοιχα, η τάση ζεύγους m_{yz} εμφανίζει τετραγωνική και λογαριθμική ιδιομορφία λόγω του διπόλου δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων και ιδιομορφία τύπου Cauchy λόγω του διπόλου ορθών εξαρμώσεων.

(ii) Καθώς το $x \rightarrow \pm\infty$, αποδεικνύεται ότι $\sigma_{yy} \rightarrow 0$ και $m_{yz} \rightarrow 0$, δηλαδή το δίπολο δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων δεν εισάγει ορθές τάσεις στο άπειρο.

(iii) Καθώς το χαρακτηριστικό μήκος $\ell \rightarrow 0$, αποδεικνύεται ότι η τάση ζεύγους $m_{yz}(x, y=0)$ μηδενίζεται. Επομένως, το δίπολο δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων εισάγει τάσεις και τάσεις ζεύγους μόνο όταν $\ell \neq 0$, δηλαδή μόνο όταν λαμβάνεται υπόψη η μικροδομή του υλικού. Αντίθετα, όταν $\ell \rightarrow 0$, η ορθή τάση $\sigma_{yy}(x, y=0)$ εκφυλίζεται στην αντίστοιχη της κλασσικής ελαστικότητας για την περίπτωση απειροστού διπόλου ορθών εξαρμώσεων. Η τάση αυτή δίνεται από την σχέση $\sigma_{yy} = \mu b w_d / 2\pi(1-\nu)x^2$ (Εξ. (5.27)) και αποτελεί την συνάρτηση Green του προβλήματος στην κλασσική θεωρία.

5.3.3 Επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων και αποτελέσματα

Οι διορθωτικές τάσεις (5.25) αναπτύσσονται από τη συνεχή κατανομή απειροστών διπόλων ορθών εξαρμώσεων και απειροστών διπόλων δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων. Το εντατικό πεδίο που προκαλείται από την κατανομή των ατελειών αυτών, βρίσκεται με ολοκλήρωση των συναρτήσεων Green (Εξ. (5.27) και (5.28)) κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής. Σημειώνουμε ότι η συνοριακή συνθήκη (5.25α) ικανοποιείται

αυτομάτως εφόσον οι παραπάνω ατέλειες δεν παράγουν διατμητικές τάσεις στην γραμμή της ρωγμής $y = 0$, όπως φαίνεται στην Εξ. (A.17). Η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών (5.25α) και (5.25β) οδηγεί σε ένα σύστημα συζευγμένων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής ανάλυσης, απομονώνουμε τα ιδίμορφα μέρη των πυρήνων των ολοκληρωτικών εξισώσεων και καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}
 -\sigma_{yy}^{h.cl.d}(x-d, 0) &= \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \text{FP} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{\mu}{\pi a} \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{x-t} dt \\
 &\quad - \frac{\mu}{4\pi\ell^2} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_1(x-t) dt \\
 &\quad + \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot R_2(x-t) dt, \quad |x| < a,
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
 -m_{yz}^{h.cl.d}(x-d, 0) &= -\frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \text{FP} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{\mu}{\pi} \text{CPV} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{x-t} dt \\
 &\quad - \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_2(x-t) dt \\
 &\quad + \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot R_3(x-t) dt, \quad |x| < a,
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

όπου τα σύμβολα $\text{FP} \int$ και $\text{CPV} \int$ δηλώνουν ολοκλήρωμα πεπερασμένου μέρους και ολοκλήρωμα κύριας τιμής αντίστοιχα. Οι πυκνότητες των απειροστών διπόλων ορθών εξαρμώσεων και των διπόλων δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων, $B_I(t)$ και $W(t)$, ορίζονται ως

$$B_I(t) = \frac{db_{yy}(t)}{dt} = \Delta u_y(x), \quad W(t) = -a \frac{d\Omega(t)}{dt} = -a\Delta\omega(t). \tag{5.32}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, $\Delta u_y(x)$ είναι η σχετική ορθή μετατόπιση και $\Delta\omega(x)$ η σχετική στροφή του πάνω και κάτω χείλους της ρωγμής, αντίστοιχα. Η πυκνότητα των διπόλων

ορθών εξαρμώσεων ισούται με την σχετική μετατόπιση ενώ η πυκνότητα των διπόλων δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων με τη στροφή των χειλέων σε κάθε σημείο της ρωγμής. Οι πυρήνες $R_q(x-t)$, με $q = 1, 2, 3$, ορίζονται ως

$$\begin{aligned} R_1(x-t) &= \frac{6}{(x-t)^2} \left[\frac{2\ell^2}{(x-t)^2} - K_2(|x-t|/\ell) - \frac{1}{6} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\ell^2} \left[K_0(|x-t|/\ell) - K_2(|x-t|/\ell) + \frac{1}{4} \ln(|x-t|/\ell) \right], \\ R_2(x-t) &= -\frac{1}{x-t} \left[\frac{4\ell^2}{(x-t)^2} - K_2(|x-t|/\ell) - 1 \right], \\ R_3(x-t) &= \frac{2\ell^2}{(x-t)^2} + K_0(|x-t|/\ell) - K_2(|x-t|/\ell) + \ln(|x-t|/\ell). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel (Εξ (5.29)), αποδεικνύεται ότι οι πυρήνες της Εξ. (5.33) είναι ομαλοί καθώς ο $x \rightarrow t$ και $\ell > 0$.

Στη συνέχεια, οι άγνωστες πυκνότητες των διπόλων εξαρμώσεων, $B_I(t)$ και $W(t)$, μπορούν να εκφραστούν ως γινόμενο μίας ομαλής, φραγμένης συνάρτησης και μίας ιδιόμορφης συνάρτησης, η οποία λαμβάνει υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πυκνότητας στα άκρα της ρωγμής. Υπενθυμίζουμε ότι στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, τόσο η μετατόπιση u_y όσο και η στροφή ω έχουν ασυμπτωτική συμπεριφορά $r^{1/2}$ κοντά στα άκρα της ρωγμής, όπου r είναι η ακτινική απόσταση από το άκρο της ρωγμής (Huang *et al.*, 1997). Επομένως, οι δύο πυκνότητες γράφονται ως

$$B_I(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(\tilde{t}) (1-\tilde{t}^2)^{1/2}, \quad W(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n(\tilde{t}) (1-\tilde{t}^2)^{1/2}, \quad |\tilde{t}| < 1, \quad (5.34)$$

όπου $U_n(\tilde{t})$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα Chebyshev δευτέρου είδους, (a_n, b_n) είναι άγνωστοι συντελεστές και $\tilde{t} = t/a$. Σημειώνουμε ότι στην κατάστρωση με βάση απειροστά δίπολα εξαρμώσεων, δεν απαιτείται κάποια επιπλέον βοηθητική συνθήκη (ιδέ (4.42)) για την εξασφάλιση της μοναδικότητας των τιμών της ορθής μετατόπισης και της

στροφής, για ένα κλειστό βρόχο γύρω από τη ρωγμή. Με άλλα λόγια, οι συνθήκες αυτές εξασφαλίζουν ότι $\Delta u_y(a) = \Delta u_y(-a) = 0$ και $\Delta \omega(a) = \Delta \omega(-a) = 0$, δηλαδή, ότι δεν υπάρχει κάποια εναπομένουσα διακριτή εξάρμωση (net dislocation) κατά μήκος της ρωγμής. Στα δίπολα εξαρμώσεων, η μία διακριτή εξάρμωση ‘εξολοθρεύει’ την άλλη (self-annihilation), οπότε οι επιπλέον συνθήκες είναι περιττές.

Έπειτα από κατάλληλη κανονικοποίηση στο διάστημα $[-1, 1]$, το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (5.30) και (5.31) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} -\sigma_{yy}^{h.cl.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) &= \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \text{FP} \int_{-1}^1 \frac{U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})^2} d\tilde{t} - \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \\ &\times \text{CPV} \int_{-1}^1 \frac{U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{\tilde{x}-\tilde{t}} d\tilde{t} - \frac{\mu p^2}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \int_{-1}^1 U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2} \cdot \ln(p|\tilde{x}-\tilde{t}|) d\tilde{t} \\ &+ \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times Q_n^{(1)}(\tilde{x}) + \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times Q_n^{(2)}(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} -m_{yz}^{h.cl.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) &= -\frac{2\mu}{p^2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times \text{FP} \int_{-1}^1 \frac{U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})^2} d\tilde{t} - \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \\ &\times \text{CPV} \int_{-1}^1 \frac{U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{\tilde{x}-\tilde{t}} d\tilde{t} - \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times \int_{-1}^1 U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2} \cdot \ln(p|\tilde{x}-\tilde{t}|) d\tilde{t} \\ &+ \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times Q_n^{(2)}(\tilde{x}) + \frac{\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times Q_n^{(3)}(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1, \end{aligned} \quad (5.36)$$

όπου $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{d} = d/a$ και $p = a/\ell$, ενώ οι συναρτήσεις $Q_n^{(s)}(\tilde{x})$ ορίζονται ως

$$Q_n^{(s)}(\tilde{x}) \equiv \int_{-1}^1 U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2} \cdot R_s(a\tilde{x} - a\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad s = 1, 2, 3. \quad (5.37)$$

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην Εξ. (5.37) είναι ομαλά (μη-ιδιόμορφα) και υπολογίζονται μέσω της κλασσικής αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Chebyshev ενώ τα ιδιόμορφα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις Εξ. (5.35) και (5.36) υπολογίζονται σε κλειστή μορφή στο Παράρτημα Β (Εξ. (B.13), (B.12) και (B.18)). Με βάση τα

παραπάνω, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις λαμβάνουν την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή

$$\begin{aligned}
-\sigma_{yy}^{h.cl.d}(\tilde{x}-\tilde{d}, 0) &= -\frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) U_n(\tilde{x}) - \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_{n+1}(\tilde{x}) \\
&\quad - \frac{\mu p^2}{4\pi} \left\{ a_0 \left(\frac{\pi}{4} T_2(\tilde{x}) - \frac{\pi}{2} \ln 2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{T_{n+2}(\tilde{x})}{n+2} - \frac{T_n(\tilde{x})}{n} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times Q_n^{(1)}(\tilde{x}) + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times Q_n^{(2)}(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
-m_{yz}^{h.cl.d}(\tilde{x}-\tilde{d}, 0) &= \frac{2\mu}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (n+1) U_n(\tilde{x}) - \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{n+1}(\tilde{x}) \\
&\quad - \frac{\mu}{\pi} \left\{ b_0 \left(\frac{\pi}{4} T_2(\tilde{x}) - \frac{\pi}{2} \ln 2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{T_{n+2}(\tilde{x})}{n+2} - \frac{T_n(\tilde{x})}{n} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \mu \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times Q_n^{(2)}(\tilde{x}) + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times Q_n^{(3)}(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

ενώ οι συναρτήσεις $Q_n^{(s)}(\tilde{x})$ γράφονται ως

$$Q_n^{(s)}(\tilde{x}) \equiv \sum_{j=1}^m \frac{(1-\tilde{t}^2)}{1+m} U_n(\tilde{t}) \cdot R_s(a\tilde{x}-a\tilde{t}), \quad s=1, 2, 3. \tag{5.40}$$

Στην περίπτωση που η ρωγμή αλληλεπιδρά με ένα απειροστό δίπολο ορθών εξαρμώσεων, η φόρτιση γράφεται ως

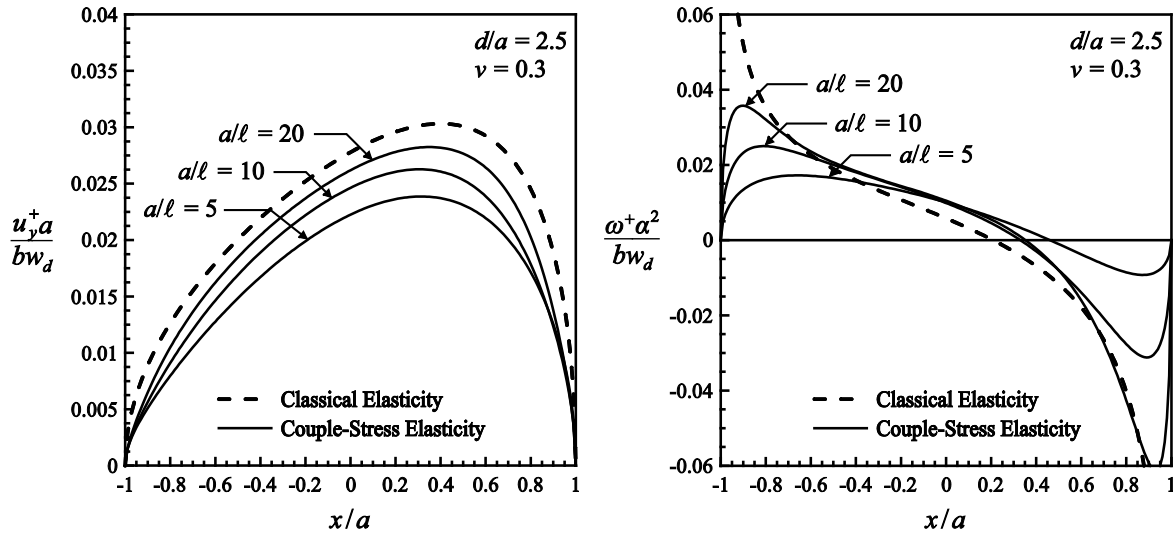
$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^{h.cl.d}(\tilde{x}-\tilde{d}, 0) &= \frac{\mu b w_d}{2\pi a^2 (1-\nu)(\tilde{x}-\tilde{d})^2} + \frac{6\mu b w_d}{\pi a^2 (\tilde{x}-\tilde{d})^2} \left[\frac{2}{p^2 (\tilde{x}-\tilde{d})^2} - K_2(p|\tilde{x}-\tilde{d}|) \right] \\
&\quad + \frac{\mu b w_d p^2}{\pi a^2} \left[K_0(p|\tilde{x}-\tilde{d}|) - K_2(p|\tilde{x}-\tilde{d}|) \right],
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$m_{yz}^{h.cl.d}(\tilde{x}-\tilde{d}, 0) = -\frac{2\mu b w_d}{\pi a^2 (\tilde{x}-\tilde{d})} \left[\frac{2}{p^2 (\tilde{x}-\tilde{d})^2} - K_2(p|\tilde{x}-\tilde{d}|) \right]. \tag{5.42}$$

Αντίθετα, αν η ρωγμή αλληλεπιδρά με ένα πεπερασμένο δίπολο ορθών εξαρμώσεων, η φόρτιση προκύπτει με βάση τις Εξ. (4.30) και (4.34), εφαρμόζοντας επαλληλία των πεδίων όπως περιγράφεται στην Εξ. (5.1) (ιδέ και κώδικα στο Παράρτημα Γ.2).

Το σύστημα των εξισώσεων (5.38) και (5.39) λύνεται αριθμητικά με την κατάλληλη τεχνική ταξιθεσίας. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε ως σημεία ταξιθεσίας τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $T_{N+1}(\tilde{x})$, δηλαδή $\tilde{x}_k = \cos[(2k+1)\pi/2(N+1)]$ με $k = 0, 1, \dots, N$ ενώ ως σημεία ολοκλήρωσης τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $U_m(\tilde{t})$, δηλαδή $\tilde{t}_j = \cos[j\pi/(m+1)]$ με $j = 1, 2, \dots, m$. Οι Εξ. (5.38) και (5.39) συνιστούν ένα αλγεβρικό σύστημα $2N+2$ εξισώσεων με $2N+2$ αγνώστους το οποίο επιλύθηκε με χρήση του συμβολικού προγράμματος **MATHEMATICA** (Παράρτημα Γ.2). Με γνωστούς πλέον τους συντελεστές a_n και b_n , υπολογίζουμε μέσω των Εξ. (5.34), τις πυκνότητες των δύο εξαρμώσεων.

Προχωρούμε τώρα στην παρουσίαση κάποιων αριθμητικών αποτελεσμάτων. Στο Σχ. 5.4α παρουσιάζεται η επιρροή του λόγου a/ℓ στην κάθετη μετατόπιση (Εξ. (5.32)) του άνω χείλους της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Όπως και στα προηγούμενα προβλήματα ρωγμών, παρατηρούμε ότι το υλικό επιδεικνύει πιο στιβαρή συμπεριφορά καθώς το μήκος της ρωγμής γίνεται συγκρίσιμο με το χαρακτηριστικό μήκος ℓ . Η λύση της κλασσικής ελαστικότητας παραμένει άνω όριο για τις μετατοπίσεις στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Αντίστοιχα, από την Εξ. (5.32), υπολογίζουμε την στροφή στα χείλη της ρωγμής. Στο Σχ. 5.4β απεικονίζεται η μεταβολή της στροφής του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου a/ℓ . Σημειώνουμε πως η στροφή είναι φραγμένη στα άκρα της ρωγμής, λαμβάνοντας μηδενικές τιμές. Επιπλέον, καθώς το $\ell \rightarrow 0$, το διάνυσμα στροφής στην θεωρία τάσεων ζεύγους συγκλίνει σημειακά στο αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας. Τόσο η μετατόπιση όσο και η στροφή των χειλέων μεταβάλλονται σημαντικά με την απόσταση του διπόλου εξαρμώσεων από το άκρο της ρωγμής. Γενικά, οι παραγόμενες μετατοπίσεις και στροφές είναι μικρότερες σε σύγκριση με την περίπτωση αλληλεπίδρασης με μία διακριτή ορθή εξάρμωση. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο εφόσον το τασικό πεδίο των διπόλων εξαρμώσεων φθίνει ταχύτερα συναρτήσει της απόστασης σε σχέση με εκείνο των διακριτών εξαρμώσεων.



Σχ. 5.4. α) Κάθετη μετατόπιση και β) στροφή του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορους λόγους a/ℓ λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0.3$.

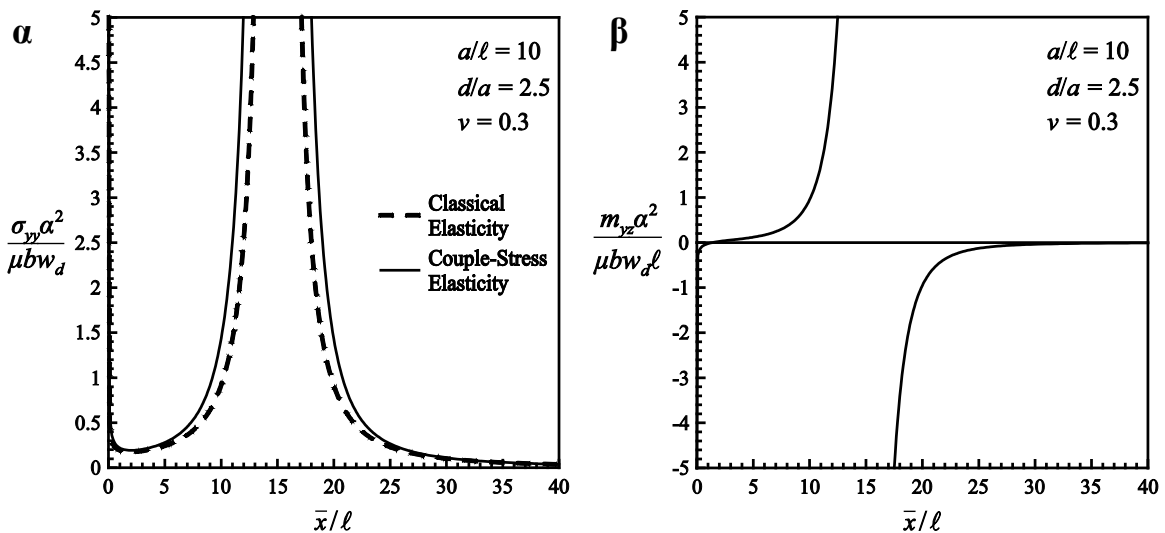
Ακολουθώς, εξετάζουμε την συμπεριφορά της ορθής τάσης σ_{yy} και της τάσης ζεύγους m_{yz} μπροστά από το άκρο της ρωγμής. Από την υπέρθεση των δύο επιμέρους προβλημάτων, προκύπτουν οι εκφράσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(|x| > a, y = 0) = & \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{x-t} dt \\ & - \frac{\mu}{4\pi\ell^2} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_1(x-t) dt \\ & + \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot R_2(x-t) dt + \sigma_{yy}^{h.cl.d}(x-d, 0), \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} m_{yz}(|x| > a, y = 0) = & -\frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{x-t} dt \\ & - \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_I(t) \cdot R_2(x-t) dt \\ & + \frac{\mu}{\pi a} \int_{-a}^a W(t) \cdot R_3(x-t) dt + m_{yz}^{h.cl.d}(x-d, 0). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Τα ολοκληρώματα στις Εξ (5.43) και (5.44) δεν είναι πλέον ιδιόμορφα για $|x| > a$ και υπολογίζονται στο Παράρτημα Β (Εξ. (B.22), (B.21) και (B.27)). Η διερεύνηση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των παραπάνω μεγεθών κοντά στο άκρο της ρωγμής $x \rightarrow a^+$, έδειξε ότι τόσο η ορθή τάση σ_{yy} , όσο και η τάση ζεύγους m_{yz} παρουσιάζουν ιδιομορφία τύπου $x^{-1/2}$ (ιδέ και Εξ. (4.146)).

Στο Σχ. 5.5α απεικονίζεται η κατανομή της ορθής τάσης σ_{yy} λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$ και λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Υπενθυμίζουμε πως η μεταβλητή \bar{x} μετράει την απόσταση από το δεξί άκρο της ρωγμής ($\bar{x} = x - a$). Παρατηρούμε ότι η επίδραση των τάσεων ζεύγους είναι σημαντική σε μία ζώνη εύρους 3ℓ από το άκρο της ρωγμής (το εύρος της ζώνης αυτής εξαρτάται από την θέση του διπόλου εξαρμώσεων) και 10ℓ γύρω από τον πυρήνα του διπόλου εξαρμώσεων. Πέραν των περιοχών αυτών, η κατανομή προσεγγίζει την λύση της κλασσικής θεωρίας. Η κατανομή της ορθής τάσης εξαρτάται από τον λόγο a/ℓ και τον λόγο Poisson, όπως άλλωστε φαίνεται στην Εξ. (5.43). Επίσης, όταν το $x \rightarrow d$, διατηρείται η τετραγωνική ιδιομορφία λόγω του πεδίου του διπόλου εξαρμώσεων, όπως και στην κλασσική ελαστικότητα.



Σχ. 5.5. Κατανομή (α) της ορθής τάσης σ_{yy} και (β) της τάσης ζεύγους m_{yz} μπροστά από το δεξί άκρο της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα σώμα με $a/\ell = 10$ και λόγο Poisson $\nu = 0.3$.

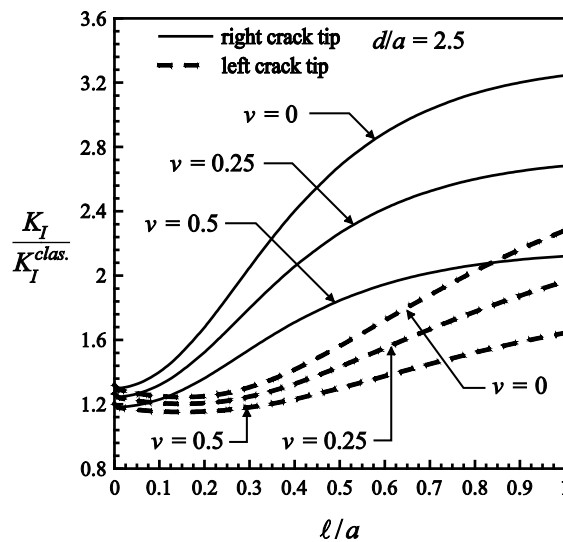
Στο Σχ. 5.5β παρουσιάζεται η κατανομή της τάσης ζεύγους m_{yz} . Η επιρροή των τάσεων ζεύγους είναι εμφανής σε μία ζώνη 15ℓ εκατέρωθεν του διπόλου εξαρμώσεων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η επιρροή των τάσεων ζεύγους μπροστά από το άκρο της ρωγμής περιορίζεται σε μία περιοχή εύρους 2ℓ . Η ζώνη αυτή αυξάνει όσο απομακρύνεται το δίπολο εξαρμώσεων από το άκρο της ρωγμής. Επίσης, για $\bar{x}/\ell=15$, το πεδίο παρουσιάζει ιδιομορφία τύπου Cauchy λόγω του διπόλου εξαρμώσεων.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τη μεταβολή του συντελεστή έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους στα δύο άκρα της ρωγμής. Για το δεξί άκρο της ρωγμής, ο συντελεστής ορίζεται ως $K_I = \lim_{x \rightarrow a^+} [2\pi(x-a)]^{1/2} \sigma_{yy}(x, 0)$, όπου η ορθή τάση $\sigma_{yy}(x, 0)$ δίνεται από την Εξ. (5.43). Στο σημείο αυτό, λύνουμε το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (5.38) και (5.39) τοποθετώντας στο αριστερό μέλος την φόρτιση μίας διακριτής ορθής εξάρμωσης (Εξ. (4.54) και (4.55)), ώστε να συγκρίνουμε την σύγκλιση των δύο μεθοδολογιών. Η διερεύνηση της σύγκλισης με τη μέθοδο των δίπολων εξαρμώσεων συνοψίζεται στον Πίνακα 5.1. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα αυτά με τα αντίστοιχα της μεθόδου των διανεμημένων εξαρμώσεων (Πίνακας 4.1), διαπιστώνουμε ότι στη μέθοδο των δίπολων εξαρμώσεων απαιτούνται λιγότεροι όροι για δεδομένο βαθμό ακρίβειας. Επιστρέφοντας στην αλληλεπίδραση με δίπολα εξαρμώσεων, στο Σχ. 5.6 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $K_I/K_I^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και του λόγου Poisson ν , για ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a=2.5$. Όπως και προηγούμενα, ο συντελεστής έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους είναι πάντα μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας (stress aggravation). Η συμπεριφορά είναι διαφορετική στα δύο άκρα λόγω ασυμμετρίας της φόρτισης. Οι καμπύλες που αφορούν το δεξί άκρο (συνεχείς γραμμές) είναι συνεχώς αύξουσες στο διάστημα $0 \leq \ell/a \leq 1$, ενώ στη συνέχεια φθίνουν και καταλήγουν στην τιμή $(3-2\nu)$ καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$. Αντίθετα, στις καμπύλες που αφορούν το αριστερό άκρο της ρωγμής (διακεκομμένες γραμμές), παρατηρείται αρχικά ένας πτωτικός κλάδος και στην συνέχεια αύξουσα συμπεριφορά μέχρι την ασυμπτωτική τιμή $(3-2\nu)$, καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$. Επίσης, ο λόγος των συντελεστών έντασης τάσεων εμφανίζει μία πεπερασμένη ασυνέχεια για $\ell/a=0$, συμπεριφορά η οποία αποδίδεται στα έντονα φαινόμενα συνοριακού στρώματος που εμφανίζονται στην θεωρία τάσεων

ζεύγους. Τέλος, σημειώνουμε πως η απόκριση του λόγου $K_I/K_I^{clas.}$ είναι σταθερή είτε θεωρήσουμε αλληλεπίδραση με πεπερασμένο είτε με απειροστό δίπολο εξαρμώσεων.

Πίνακας 5.1. Λόγος $K_{I,r}/K_{I,r}^{clas.}$ λόγω αλληλεπίδρασης με μία ορθή εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.0$ σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0$.

N	$\ell/a=1.0$	$\ell/a=0.8$	$\ell/a=0.5$	$\ell/a=0.2$	$\ell/a=0.1$	$\ell/a=0.05$	$\ell/a=0.01$	$\ell/a=0.005$
10	2.61055	2.47282	2.11816	1.52565	1.35923	1.31378	1.29180	1.35035
20	2.61055	2.47282	2.11816	1.52565	1.35930	1.31382	1.29898	1.28930
30					1.35930	1.31382	1.29933	1.29880
40							1.29945	1.29894
50							1.29945	1.29924
60								1.29924



Σχ. 5.6. Μεταβολή του λόγου των συντελεστών έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο ℓ/a για ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$.

5.3.4 Ολοκλήρωμα J και κινούσα δύναμη του διπόλου εξαρμώσεων

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζεται το ολοκλήρωμα J της Μηχανικής των Θραύσεων και διερευνάται η εξάρτησή του από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ και τον λόγο Poisson. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J , χρησιμοποιούμε έναν δρόμο ολοκλήρωσης μορφής παραλληλογράμμου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.4.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα ρωγμής, η διατμητική τάση σ_{yx} είναι μηδέν για $y = 0$ και ότι τα χείλη της ρωγμής ορίζονται από το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$, το ολοκλήρωμα J (Εξ. (4.61)) παίρνει τη μορφή

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left(\sigma_{yy}(x, y=0^+) \cdot \frac{\partial u_y(x, y=0^+)}{\partial x} + m_{yz}(x, y=0^+) \cdot \frac{\partial \omega(x, y=0^+)}{\partial x} \right) dx \right\}. \quad (5.45)$$

Επισημαίνεται ότι η δεσπόζουσα ιδιόμορφη συμπεριφορά για την ορθή τάση σ_{yy} και την τάση ζεύγους m_{yz} οφείλεται στα υπεριδιόμορφα ολοκληρώματα τετραγωνικής ιδιομορφίας των Εξ. (5.43) και (5.44) αντίστοιχα. Οι τάσεις αυτές για $x \rightarrow a^+$ γράφονται ως ($\tilde{x} > 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x \rightarrow a^+, y=0^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{(x-t)^2} dt \\ &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{a_n U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} = \frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n (n+1) \cdot (\tilde{x}-1)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} m_{yz}(x \rightarrow a^+, y=0^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left(-\frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{W(t)}{(x-t)^2} dt \right) \\ &= -\lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \frac{2\mu\ell^2}{\pi a} \int_{-1}^1 \frac{b_n U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} = -\frac{2\mu\ell^2}{a} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N b_n \cdot (n+1) (\tilde{x}-1)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Για τις πυκνότητες των εξαρμώσεων $B_I(t)$ και $W(t)$, βάσει των ορισμών (Εξ. (5.32)), ισχύουν οι παρακάτω ασυμπτωτικές σχέσεις καθώς το $x \rightarrow a^-$ ($\tilde{x} < 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y(x \rightarrow a^-, y = 0^+)}{\partial x} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\partial B_I(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\sum_{n=1}^N a_n U_n(\tilde{x}) \cdot (1 - \tilde{x}^2)^{1/2} \right] \\ &= -\frac{1}{2^{3/2}} \sum_{n=1}^N a_n (n+1) \cdot (1 - \tilde{x})^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(x \rightarrow a^-, y = 0^+)}{\partial x} &= -\frac{1}{2a} \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\partial W(x)}{\partial x} = -\frac{1}{2a} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\sum_{n=1}^N b_n U_n(\tilde{x}) \cdot (1 - \tilde{x}^2)^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{2^{3/2} a} \sum_{n=1}^N b_n (n+1) \cdot (1 - \tilde{x})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, το ολοκλήρωμα J μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} J_r &= -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\mu}{2} \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\ell}{a} \right)^2 \Lambda_2 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = \frac{\mu\pi}{2} a \left\{ \Lambda_1 + \frac{1}{p^2} \Lambda_2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=0}^N a_n (n+1) \times \sum_{n=0}^N a_n (n+1), \quad \Lambda_2 = \sum_{n=0}^N b_n (n+1) \times \sum_{n=0}^N b_n (n+1), \quad (5.51)$$

$\bar{x} = \tilde{x} - 1$ και για κάθε πραγματικό αριθμό λ , με εξαίρεση τις τιμές $\lambda = -1, -2, -3, \dots$, ορίζονται οι κατανομές τύπου ‘διχοτόμου’, x_+^λ και x_-^λ βάσει της Εξ. (4.69). Τα ολοκληρώματα στην Εξ. (5.50) υπολογίζονται βάσει του θεωρήματος Fisher για γινόμενα κατανομών τύπου ‘διχοτόμου’.

Ακολουθώντας μία αντίστοιχη διαδικασία, το ολοκλήρωμα J για το αριστερό άκρο της ρωγμής ($x \rightarrow -a^-$) γράφεται στη μορφή

$$J_\ell = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu}{2} \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\ell}{a} \right)^2 \Lambda_2 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = -\frac{\mu\pi}{2} a \left\{ \Lambda_1 + \frac{1}{p^2} \Lambda_2 \right\}, \quad (5.52)$$

όπου

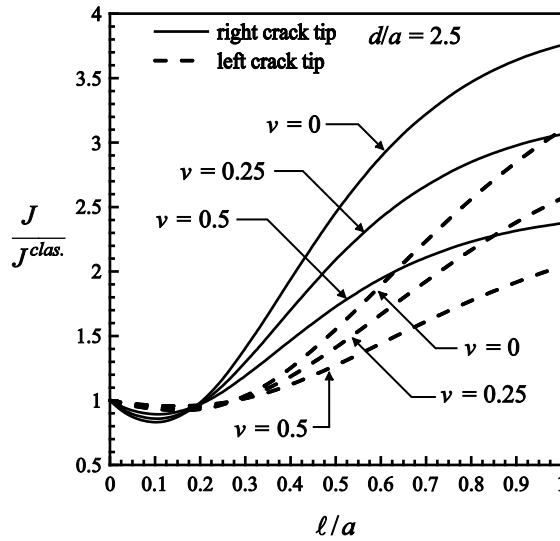
$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=0}^N a_n (n+1) (-1)^n \times \sum_{n=0}^N a_n (n+1) (-1)^n, \\ \Lambda_2 = \sum_{n=0}^N b_n (n+1) (-1)^n \times \sum_{n=0}^N b_n (n+1) (-1)^n. \quad (5.53)$$

Με βάση τις Εξ. (5.50) και (5.52), μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα J . Στο Σχ. 5.7 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και του λόγου Poisson ν , για ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$. Το ολοκλήρωμα J στην κλασική θεωρία μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας έναν δρόμο ολοκλήρωσης μορφής παραλληλογράμμου και τις εκφράσεις των ελαστικών πεδίων του προβλήματος (Markenscoff, 1993). Εφαρμόζοντας την διαδικασία αυτή, αποκτούμε τις παρακάτω εκφράσεις για το ολοκλήρωμα J στο δεξί και αριστερό άκρο της ρωγμής, στην περίπτωση φόρτισης της ρωγμής με ένα απειροστό δίπολο εξαρμώσεων

$$J_r = \frac{\mu b^2 w_d^2}{8\pi a (1-\nu) (d^2 - a) (d - a)^2}, \quad J_\ell = -\frac{\mu b^2 w_d^2}{8\pi a (1-\nu) (d^2 - a) (d + a)^2}. \quad (5.54)$$

Καθώς ο λόγος $\ell/a \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα J στην θεωρία τάσεων ζεύγους τείνει στο αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας. Τόσο στο αριστερό όσο και στο δεξί άκρο, καθώς το ℓ/a αυξάνει, παρατηρείται ένας αρχικός πτωτικός κλάδος ($J < J^{clas.}$) μέχρι ένα πεπερασμένο ελάχιστο για $0.1 \leq \ell/a \leq 0.15$ (το διάστημα εξαρτάται από τον λόγο Poisson και τον λόγο d/a) ενώ στην συνέχεια ο λόγος αυξάνει ($J > J^{clas.}$). Τελικά, καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$, ο λόγος $J/J^{clas.}$ τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή $(3-2\nu)$. Σημειώνεται, δηλαδή,

αντίστοιχη εναλλασσόμενη συμπεριφορά του λόγου $J/J^{clas.}$ όπως αυτή που παρατηρήθηκε στην αλληλεπίδραση με διακριτές επίπεδες εξαρμώσεις.



Σχ. 5.7. Μεταβολή του λόγου των ολοκληρωμάτων J στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο l/a για ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με $a/l = 10$.

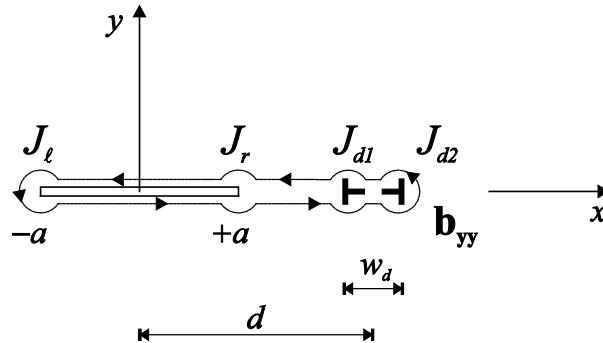
Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την κινούσα δύναμη Peach-Koehler που ασκείται στο δίπολο ορθών εξαρμώσεων. Θεωρώντας έναν δρόμο ολοκλήρωσης που περικλείει τόσο την ρωγή όσο και το δίπολο εξαρμώσεων (Σχ. 5.8) και χρησιμοποιώντας την ισότητα μεταξύ δύναμης Peach-Koehler και ολοκληρώματος J γύρω από μία εξάρμωση (Εξ. (2.29)), μπορούμε να γράψουμε την έκφραση

$$F_x^{dd} = F_x^{sd1} - F_x^{dd1} = -(J_r + J_l), \quad (5.55)$$

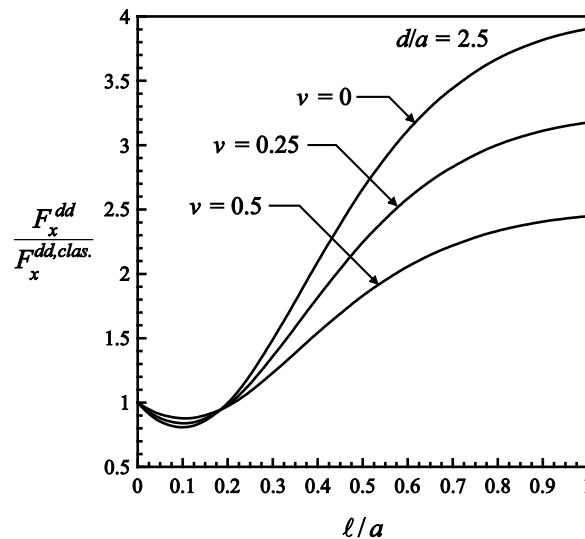
όπου F_x^{dd} είναι η δύναμη Peach-Koehler που ασκείται κατά τη διεύθυνση x στο δίπολο εξαρμώσεων, F_x^{sd1} και F_x^{sd2} είναι οι δυνάμεις Peach-Koehler που ασκούνται στην εγγύτερη στη ρωγή και την πιο απομακρυσμένη εξάρμωση του διπόλου αντίστοιχα, ενώ J_r και J_l οι τιμές των ολοκληρωμάτων J στο δεξί και αριστερό άκρο της ρωγμής.

Με βάση τα αποτελέσματα για τα ολοκληρώματα J , αναμένουμε η κινούσα δύναμη του διπόλου εξαρμώσεων να είναι άλλοτε μεγαλύτερη και άλλοτε μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή της στην κλασσική ελαστικότητα, η οποία δίνεται από την έκφραση

$$F_x^{dd,clas.} = -\frac{\mu b^2 w_d^2 d}{2\pi(1-\nu)(d^2 - a)(d^2 - a^2)} \quad (5.56)$$



Σχ. 5.8. Δρόμος ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό της δύναμης Peach-Koehler γύρω από το δίπολο ορθών εξαρμώσεων.



Σχ. 5.9. Μεταβολή του λόγου της δύναμης Peach-Koehler στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο l/a για ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με $a/l = 10$.

Στο Σχ. 5.9 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $F_x^{dd} / F_x^{dd,clas.}$ για διάφορες τιμές του λόγου l/a και του λόγου Poisson ν , για ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$. Σε αντιστοιχία με τα αποτελέσματα για το ολοκλήρωμα J , καθώς το $l/a \rightarrow 0$, η κινούσα δύναμη στην θεωρία τάσεων ζεύγους τείνει στην τιμή της κλασσικής ελαστικότητας. Επίσης, όσο το l/a αυξάνει, ο λόγος $F_x^{dd} / F_x^{dd,clas.}$ μειώνεται μέχρι ένα πεπερασμένο ελάχιστο για $l/a \approx 0.1$ και στην συνέχεια αυξάνει. Για $l/a > 1$,

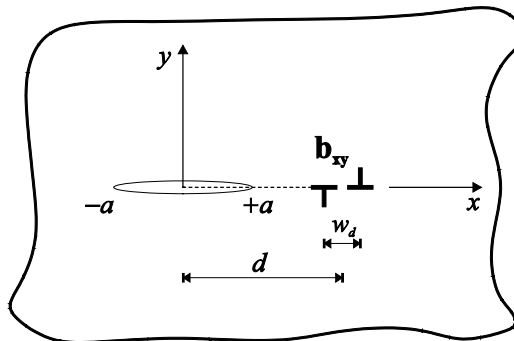
παρατηρείται πτώση του λόγου $F_x^{dd} / F_x^{dd,clas.}$ μέχρι την ασυμπτωτική τιμή $(3 - 2\nu)$ καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$. Στο μεγαλύτερο εύρος τιμών του λόγου ℓ/a σημειώνεται αύξηση της κινούσας δύναμης του διπόλου εξαρμώσεων στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους (weakening effect). Σημειώνεται, δηλαδή, αντίστοιχη εναλλασσόμενη συμπεριφορά του λόγου $J/J^{clas.}$ όπως αυτή που παρατηρήθηκε στην αλληλεπίδραση με διακριτές επίπεδες εξαρμώσεις.

5.4 Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με οριζόντιο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων

5.4.1 Κατάστρωση του προβλήματος

Θεωρούμε μία κεντρική ρωγή μήκους $2a$ σε ένα ελαστικό άπειρο στερεό σώμα με μικροδομή και ένα οριζόντιο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων \mathbf{b}_{xy} σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής, υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Σχ. 5.10). Τα χείλη της ρωγμής περιγράφονται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$ και είναι αφόρτιστα. Οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής γράφονται σύμφωνα με τις Εξ. (3.16) και (3.17) ως

$$\sigma_{yx}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad m_{yz} = 0, \quad \text{για } |x| < a. \quad (5.57)$$



Σχ. 5.10. Κεντρική ρωγή αλληλεπιδρά με οριζόντιο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων.

Η παρουσία ενός διπόλου εφαπτομενικών εξαρμώσεων δημιουργεί μόνο διατμητικές τάσεις σ_{yx} κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής (ιδέ Παράγραφο 5.2), δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma_{yx}(d, 0) \rightarrow \sigma_{yx}^{h.gl.d}, \quad \sigma_{yy}(d, 0) \rightarrow 0, \quad m_{yz}(d, 0) \rightarrow 0, \quad (5.58)$$

όπου $\sigma_{yx}^{h.gl.d}$ είναι οι διατμητικές τάσεις ενός οριζόντιου διπόλου εφαπτομενικών εξαρμώσεων στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Επίσης, οι συνθήκες στο άπειρο είναι

$$\sigma_{xx}^{\infty}, \sigma_{yy}^{\infty}, \sigma_{yx}^{\infty}, \sigma_{xy}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xz}^{\infty}, m_{yz}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty, \quad (5.59)$$

όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων. Η Εξ. (5.59) υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει άλλη εξωτερική φόρτιση στο πρόβλημα πέραν του διπόλου εξαρμώσεων.

Η λύση του προβλήματος προκύπτει ως υπέρθεση των λύσεων δύο επιμέρους προβλημάτων. Αρχικά, θεωρούμε ένα αρηγμάτωτο σώμα το οποίο υπόκειται στη φόρτιση της Εξ. (5.58). Στην περίπτωση που η ρωγμή αλληλεπιδρά με ένα απειροστό οριζόντιο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων, το τασικό πεδίο του προβλήματος δίνεται από τις Εξ. (5.9)-(5.14). Αν το δίπολο είναι πεπερασμένο, το τασικό πεδίο προκύπτει από επαλληλία των πεδίων των δύο διακριτών εξαρμώσεων από τα οποία αποτελείται, όπως περιγράφεται στην Εξ. (5.1).

Στο δεύτερο επιμέρους πρόβλημα (διορθωτική λύση), θεωρούμε ένα σώμα ίδιας γεωμετρίας με το αρχικό ρηγματωμένο δίχως την επίδραση του διπόλου εξαρμώσεων. Η μοναδική φόρτιση εφαρμόζεται πάνω στα χείλη της ρωγμής και αποτελείται από ίσες και αντίθετες τάσεις από αυτές που προέκυψαν στο αρηγμάτωτο σώμα. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{yx}(x, 0) = -\sigma_{yx}^{h.gl.d}(x-d, 0), \quad m_{yz}(x, 0) = 0, \quad \text{για } |x| < a, \quad (5.60)$$

και

$$\sigma_{yy}^{\infty}, \sigma_{yx}^{\infty}, \sigma_{xy}^{\infty}, \sigma_{xx}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xz}^{\infty}, m_{yz}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty. \quad (5.61)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (5.60) ικανοποιούνται με την κατανομή απειροστών διπόλων εφαπτομενικών εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής, σε αντίθεση με το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων. Όπως φαίνεται από τις Εξ. (5.10) και (5.14), ο πυρήνας παραμόρφωσης αυτός δεν παράγει ορθές τάσεις σ_{yy} ή τάσεις ζεύγους m_{yz} στο επίπεδο $y = 0$, οπότε οι συνοριακές συνθήκες (5.60α) και (5.60γ) ικανοποιούνται αυτομάτως. Όμοια είναι η αντιμετώπιση του προβλήματος και στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας, όπου οι συνοριακές συνθήκες (5.60α) και (5.60β) που περιγράφουν το πρόβλημα, ικανοποιούνται μέσω κατανομής απειροστών διπόλων εφαπτομενικών εξαρμώσεων. Τελικά, το πρόβλημα περιγράφεται από μία υπεριδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση με τετραγωνική ιδιομορφία.

5.4.2 Συνάρτηση Green

Η συνάρτηση Green του προβλήματος προκύπτει από το τασικό πεδίο ενός απειροστού διπόλου εφαπτομενικών εξαρμώσεων. Η σχέση για την διατμητική τάση σ_{yx} (Εξ. (5.12)) κατά μήκος της γραμμής της ρωγμής $y = 0$ παίρνει τη μορφή

$$\sigma_{yx}(x, y=0) = \frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)x^2} - \frac{6\mu b w_d}{\pi x^2} \left[\frac{2\ell^2}{x^2} - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] + \frac{2\mu b w_d}{\pi \ell^2} K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right). \quad (5.62)$$

Η Εξ. (5.62) αποτελεί την συνάρτηση Green του προβλήματος.

5.4.3 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και αποτελέσματα

Για την ανάπτυξη των διορθωτικών τάσεων (Εξ. (5.60)), πρέπει να κατανεύσουμε στα χείλη της ρωγμής απειροστά δίπολα εφαπτομενικών εξαρμώσεων. Το εντατικό πεδίο που προκαλείται από την συνεχή κατανομή των ατελειών αυτών υπολογίζεται με ολοκλήρωση της συνάρτησης Green (Εξ. (5.62)) κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής. Βάσει των παραπάνω, οδηγούμαστε στην ολοκληρωτική εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα. Με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής ανάλυσης, απομονώνουμε τα ιδιόμορφα μέρη των πυρήνων της ολοκληρωτικής εξίσωσης και καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση, για $|x| < a$

$$\begin{aligned}
-\sigma_{yx}^{h.gl.d}(x-d, 0) &= \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \text{FP} \int_{-a}^a \frac{B_{II}(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{3\mu}{4\pi\ell^2} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt \\
&+ \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot R_4(x-t) dt, \quad |x| < a,
\end{aligned} \tag{5.63}$$

όπου $B_{II}(t) = db_{xy}(t)/dt = \Delta u_x(t)$ είναι η πυκνότητα των απειροστών διπόλων εφαπτομενικών εξαρμώσεων στο σημείο t ($|t| < a$), ενώ $\Delta u_x = u_x(t, 0^+) - u_x(t, 0^-)$ είναι η σχετική εφαπτομενική μετατόπιση του πάνω και κάτω χείλους της ρωγμής. Ο πυρήνας $R_4(x-t)$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned}
R_4(x-t) &= -\frac{2}{x-t} \left[\frac{6\ell^2}{(x-t)^2} - 3K_2(|x-t|/\ell) + \frac{1}{2} \right] \\
&+ \frac{1}{\ell^2} \left[2K_2(|x-t|/\ell) + \frac{3}{4} \ln(|x-t|/\ell) \right].
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel (Εξ (5.29)), αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας της Εξ. (5.64) είναι ομαλός καθώς το $x \rightarrow t$ και $\ell > 0$.

Ακολουθως, η άγνωστη πυκνότητα των διπόλων εξαρμώσεων, $B_{II}(t)$, εκφράζεται ως γινόμενο μίας ομαλής, φραγμένης συνάρτησης και μίας ιδιόμορφης συνάρτησης η οποία λαμβάνει υπόψιν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πυκνότητας στα άκρα της ρωγμής. Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα (ιδέ Παράγραφο 4.3.3), στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, οι Huang *et al.* (1997) έδειξαν ότι η μετατόπιση u_x έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά $r^{1/2}$ κοντά στα άκρα της ρωγμής, όπου r είναι η ακτινική απόσταση από το άκρο της ρωγμής. Επομένως, η άγνωστη πυκνότητα μπορεί να γραφεί ως

$$B_{II}(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(\tilde{t}) (1-\tilde{t}^2)^{1/2}, \quad |\tilde{t}| < 1, \tag{5.65}$$

όπου $U_n(\tilde{t})$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους, a_n είναι άγνωστοι συντελεστές και $\tilde{t} = t/a$. Σημειώνουμε ότι στην κατάστρωση με βάση απειροστά δίπολα εξαρμώσεων, δεν απαιτείται κάποια επιπλέον βοηθητική συνθήκη για την εξασφάλιση της μοναδικότητας των τιμών της εφαπτομενικής μετατόπισης για ένα κλειστό βρόχο γύρω από τη ρωγμή.

Τα ιδιόμορφα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην Εξ. (4.94) υπολογίζονται σε κλειστή μορφή στο Παράρτημα Β (Εξ. (B.13), και (B.18)) ενώ το ομαλό ολοκλήρωμα μέσω της κλασσικής αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Chebyshev. Με βάση τα παραπάνω και έπειτα από κατάλληλη κανονικοποίηση στο διάστημα $[-1, 1]$, η ολοκληρωτική εξίσωση (5.63) λαμβάνει την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή

$$\begin{aligned}
 -\sigma_{yx}^{h.gl.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) = & -\frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) U_n(\tilde{x}) \\
 & - \frac{3\mu p^2}{4\pi} \left\{ a_0 \left(\frac{\pi}{4} T_2(\tilde{x}) - \frac{\pi}{2} \ln 2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{T_{n+2}(\tilde{x})}{n+2} - \frac{T_n(\tilde{x})}{n} \right) \right] \right\} \\
 & + \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \sum_{j=1}^m \frac{(1-\tilde{t}^2)}{1+m} U_n(\tilde{t}) \cdot R_4(a\tilde{x} - a\tilde{t}), \quad |\tilde{x}| < 1,
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

όπου $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{d} = d/a$, $p = a/\ell$. Στην περίπτωση που η ρωγμή αλληλεπιδρά με ένα απειροστό δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων, η φόρτιση γράφεται ως

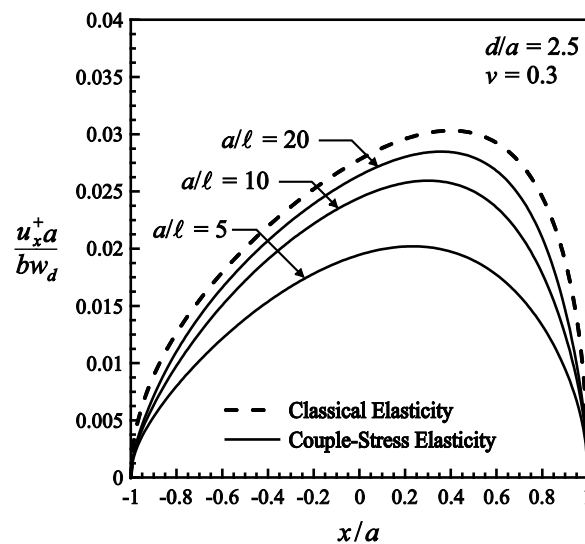
$$\begin{aligned}
 \sigma_{yx}^{h.gl.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) = & \frac{\mu b w_d}{2\pi a^2 (1-\nu) (\tilde{x} - \tilde{d})^2} - \frac{6\mu b w_d}{\pi a^2 (\tilde{x} - \tilde{d})^2} \\
 & \times \left[\frac{2}{p^2 (\tilde{x} - \tilde{d})^2} - K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right] + \frac{2\mu b w_d p^2}{\pi a^2} K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|).
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

Αντίθετα, αν η ρωγμή αλληλεπιδρά με ένα πεπερασμένο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων, η φόρτιση προκύπτει με βάση την Εξ. (4.89), εφαρμόζοντας επαλληλία των πεδίων όπως περιγράφεται στην Εξ. (5.1).

Η εξίσωση (5.66) επιλύεται αριθμητικά με την κατάλληλη τεχνική ταξιθεσίας. Ως σημεία ταξιθεσίας επιλέγονται οι ρίζες του πολυωνόμου Chebyshev $T_{N+1}(\tilde{x})$, δηλαδή

$\tilde{x}_k = \cos[(2k+1)\pi/2(N+1)]$ με $k = 0, 1, \dots, N$ ενώ ως σημεία ολοκλήρωσης τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $U_m(\tilde{t})$, δηλαδή $\tilde{t}_j = \cos[j\pi/(m+1)]$ με $j = 1, 2, \dots, m$. Η Εξ. (5.66) συνιστά ένα αλγεβρικό σύστημα $N+1$ εξισώσεων με $N+1$ αγνώστους το οποίο επιλύθηκε με χρήση του συμβολικού προγράμματος **MATHEMATICA**. Με γνωστούς πλέον τους συντελεστές a_n , υπολογίζουμε μέσω της Εξ. (5.65), την πυκνότητα των διπόλων εφαπτομενικών εξαρμώσεων $B_{II}(\tilde{t})$.

Προχωρούμε τώρα στην παρουσίαση ορισμένων αριθμητικών αποτελεσμάτων. Στο Σχ. 5.11 απεικονίζεται η επιρροή του λόγου a/ℓ στην εφαπτομενική μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με μία διακριτή εφαπτομενική εξάρμωση, η οποία βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Στην περίπτωση της φόρτισης αυτής, παρατηρούνται μεγαλύτερες μειώσεις της μετατόπισης σε σύγκριση με την λύση της κλασσικής θεωρίας, από ό,τι στα προηγούμενα προβλήματα ρωγμών. Για παράδειγμα, η μέγιστη μετατόπιση για $a/\ell = 20$ είναι κατά 6% μειωμένη σε σχέση με την μέγιστη μετατόπιση της κλασσικής θεωρίας, ενώ για $a/\ell = 10$ και $a/\ell = 5$ οι μειώσεις είναι 15% και 34% αντίστοιχα. Στην περίπτωση της φόρτισης με διακριτές εφαπτομενικές εξαρμώσεις, οι αντίστοιχες τιμές μείωσης είναι 5%, 10% και 24%.



Σχ. 5.11. Εφαπτομενική μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορους λόγους a/ℓ λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0.3$.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την συμπεριφορά της διατμητικής τάσης σ_{yx} μπροστά από το άκρο της ρωγμής. Από την υπέρθεση των δύο επιμέρους προβλημάτων, προκύπτει η έκφραση

$$\begin{aligned} \sigma_{yx}(|x| > a, y = 0) = & \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{B_{II}(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{3\mu}{4\pi\ell^2} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt \\ & + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot R_4(x-t) dt + \sigma_{yx}^{h,gl,d}(x-d, 0). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Για τον προσδιορισμό της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της διατμητικής τάσης σ_{yx} κοντά στο άκρο της ρωγμής $x \rightarrow a^+$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (4.146), εφόσον η πυκνότητα της αντι-επίπεδης εξάρμωσης στην κατάστρωση με διακριτές εξαρμώσεις έχει ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά με τις πυκνότητες των διπόλων εξαρμώσεων στα επίπεδα προβλήματα του κεφαλαίου αυτού. Τελικά, συμπεραίνουμε ότι η διατμητική τάση σ_{yx} παρουσιάζει ιδιομορφία τύπου $x^{-1/2}$, όπως ακριβώς και στην κλασική ελαστικότητα.

Η τάση ζεύγους m_{xz} προκύπτει από ολοκλήρωση της Εξ. (5.13) κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής ($|x| < a, y = 0$). Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της ασυμπτωτικής ανάλυσης καταλήγουμε στην έκφραση

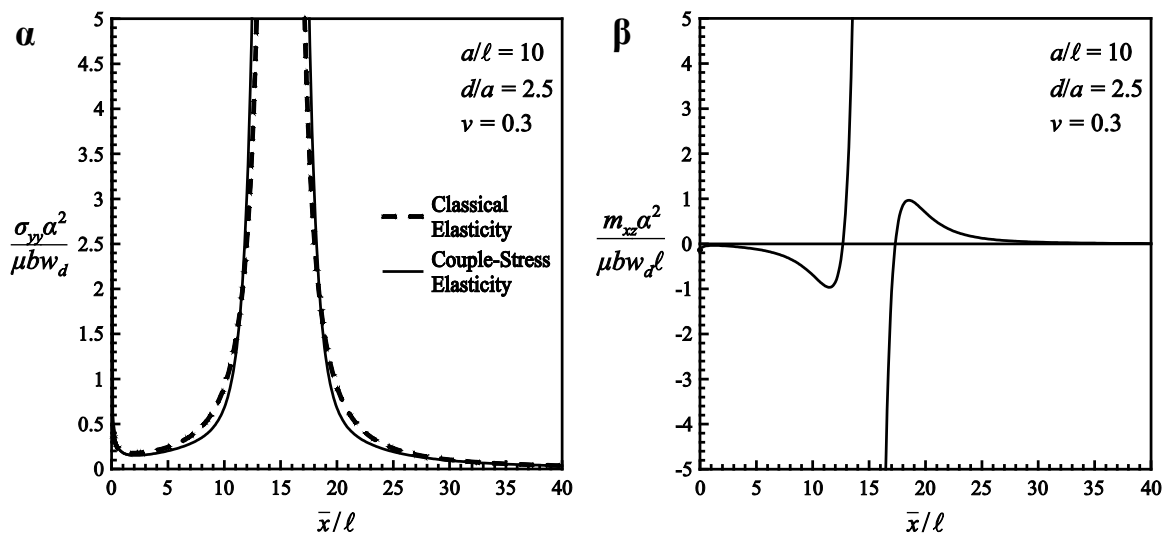
$$\begin{aligned} m_{xz}(|x| > a, y = 0) = & -\frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a \frac{B_{II}(t)}{x-t} dt \\ & + \frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a B_{II}(t) \cdot R_5(x-t) dt + m_{xz}^{h,gl,d}(x-d, 0), \end{aligned} \quad (5.69)$$

όπου ο ομαλός πυρήνας $R_5(x-t)$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned} R_5(x-t) = & \frac{4\ell^2}{(x-t)^3} - \frac{x-t}{\ell^2} \left[K_2(|x-t|/\ell) - K_0(|x-t|/\ell) \right] \\ & + \frac{1}{x-t} \left[1 - 2K_2(|x-t|/\ell) \right]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

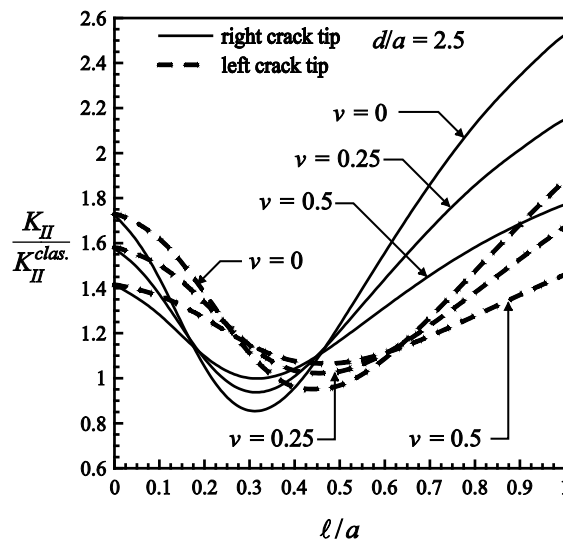
Η διερεύνηση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της τάσης ζεύγους m_{xz} όταν το $x \rightarrow a^+$, έδειξε ότι είναι φραγμένη στην αιχμή της ρωγμής.

Στο Σχ. 5.12α απεικονίζεται η κατανομή της διατμητικής τάσης σ_{yx} λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο επαπτομενικών εξαρμώσεων, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με $a/l = 10$ και λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Η επιρροή των τάσεων ζεύγους είναι εμφανής σε μία ζώνη 12ℓ εκατέρωθεν του διπόλου εξαρμώσεων, ενώ μπροστά στο άκρο της ρωγμής η λύση της θεωρίας τάσεων ζεύγους σχεδόν ταυτίζεται με την κλασσική λύση. Για διαφορετικές θέσεις του διπόλου εξαρμώσεων, γίνεται εμφανής η επιρροή και μπροστά στην αιχμή της ρωγμής. Όταν το $x \rightarrow d$, διατηρείται η τετραγωνική ιδιομορφία λόγω του πεδίου του διπόλου εξαρμώσεων που εμφανίζεται και στην κλασσική ελαστικότητα, ενώ οπουδήποτε αλλού η κατανομή προσεγγίζει την λύση της κλασσικής θεωρίας. Στο Σχ. 5.12β παρουσιάζεται η κατανομή της τάσης ζεύγους m_{xz} . Μπροστά από το δεξί άκρο της ρωγμής, η τιμή της είναι πεπερασμένη (αρνητική), έπειτα αυξάνει πλησιάζοντας το μηδέν, ενώ εκατέρωθεν της εξάρμωσης το πεδίο μεταβάλλεται από πεπερασμένες αρνητικές τιμές σε μη φραγμένες θετικές όταν το $x \rightarrow d$, παρουσιάζοντας ιδιομορφία τύπου Cauchy. Για διαφορετικές θέσεις του διπόλου εξαρμώσεων, παρατηρούνται θετικές τιμές της τάσης ζεύγους στο διάστημα $0 \leq \bar{x} \leq d - a$.



Σχ. 5.12. Κατανομή (α) της διατμητικής τάσης σ_{yx} και (β) της τάσης ζεύγους m_{xz} μπροστά από το δεξί άκρο της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο επαπτομενικών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα σώμα με $a/l = 10$ και λόγο Poisson $\nu = 0.3$.

Ακολουθώντας, εξετάζουμε τη μεταβολή του συντελεστή έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Για το δεξί άκρο της ρωγμής, ο συντελεστής ορίζεται ως $K_{II} = \lim_{x \rightarrow a^+} [2\pi(x-a)]^{1/2} \sigma_{yx}(x, 0)$, όπου η ορθή τάση $\sigma_{yx}(x, 0)$ δίνεται από την Εξ. (5.68). Στο Σχ. 5.13 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $K_{II}/K_{II}^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και του λόγου Poisson ν , για ένα δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο συντελεστής έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους είναι άλλοτε μεγαλύτερος και άλλοτε μικρότερος από τον αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας, θυμίζοντας την συμπεριφορά του ολοκληρώματος J στα επίπεδα προβλήματα ρωγμών που μελετήθηκαν στα προηγούμενα. Συγκεκριμένα, καθώς το ℓ/a αυξάνει, όλες οι καμπύλες παρουσιάζουν αρχικά έναν πτωτικό κλάδο μέχρι ένα πεπερασμένο ελάχιστο στο διάστημα $0.3 \leq \ell/a \leq 0.35$ για το δεξί άκρο και $0.35 \leq \ell/a \leq 0.45$ για το αριστερό άκρο, ενώ στην συνέχεια αυξάνουν μέχρι την ασυμπτωτική τιμή $(3-2\nu)$ καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$. Επίσης, για $\ell/a = 0$, παρατηρούμε ότι $K_{II}/K_{II}^{clas.} \neq 1$, γεγονός το οποίο αποδίδεται στα έντονα φαινόμενα συνοριακού στρώματος που εμφανίζονται στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Σημειώνουμε, τέλος, πως για διαφορετικές θέσεις του διπόλου εξαρμώσεων, ισχύει παντού $K_{II} > K_{II}^{clas.}$.



Σχ. 5.13. Μεταβολή του λόγου των συντελεστών έντασης τάσεων στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασική ελαστικότητα ως προς τον λόγο ℓ/a για ένα δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$.

5.4.4 Υπολογισμός του ολοκληρώματος J

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζεται το ολοκλήρωμα J της Μηχανικής των Θραύσεων και διερευνάται η εξάρτησή του από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ και τον λόγο Poisson. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J , χρησιμοποιούμε έναν δρόμο ολοκλήρωσης μορφής παραλληλογράμμου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.4.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα ρωγμής, η τάση ζεύγους m_{yz} είναι μηδέν για $y = 0$ και ότι τα χείλη της ρωγμής ορίζονται από το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$, το ολοκλήρωμα J (Εξ. (4.61)) παίρνει τη μορφή

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \sigma_{yx}(x, y=0^+) \cdot \frac{\partial u_x(x, y=0^+)}{\partial x} dx \right\}. \quad (5.71)$$

Η δεσπόζουσα ιδιόμορφη συμπεριφορά για την διατμητική τάση σ_{yx} οφείλεται στο υπεριδιόμορφο ολοκλήρωμα τετραγωνικής ιδιομορφίας της Εξ. (5.68). Η τάση αυτή για $x \rightarrow a^+$ γράφεται ως ($\tilde{x} > 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_{yx}(x \rightarrow a^+, y=0^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{B_I(t)}{(x-t)^2} dt \\ &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \frac{\mu(3-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{-1}^1 \frac{a_n U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{1/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})} d\tilde{t} = \frac{\mu(3-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n (n+1) \cdot (\tilde{x}-1)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Για την πυκνότητα των διπόλων εφαπτομενικών εξαρμώσεων $B_{II}(t)$ ισχύει βάσει του ορισμού η παρακάτω ασυμπτωτική σχέση καθώς το $x \rightarrow a^-$ ($\tilde{x} < 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x(x \rightarrow a^-, y=0^+)}{\partial x} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\partial B_{II}(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=1}^N a_n U_n(\tilde{x}) \cdot (1-\tilde{x}^2)^{1/2} \right] \\ &= -\frac{1}{2^{3/2}} \sum_{n=1}^N a_n (n+1) \cdot (1-\tilde{x})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, το ολοκλήρωμα J μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$J_r = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\mu}{2} \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = \frac{\mu\pi}{2} a \Lambda_1, \quad (5.74)$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=0}^N a_n (n+1) \times \sum_{n=0}^N a_n (n+1), \quad (5.75)$$

$\bar{x} = \tilde{x} - 1$ και για κάθε πραγματικό αριθμό λ , με εξαίρεση τις τιμές $\lambda = -1, -2, -3, \dots$, ορίζονται οι κατανομές τύπου ‘διχοτόμου’, x_+^λ και x_-^λ βάσει της Εξ. (4.69). Το ολοκλήρωμα στην Εξ. (4.109) υπολογίζεται βάσει του θεωρήματος Fisher για γινόμενα κατανομών τύπου ‘διχοτόμου’.

Ακολουθώντας μία αντίστοιχη διαδικασία, το ολοκλήρωμα J για το αριστερό άκρο της ρωγμής ($x \rightarrow -a^-$) γράφεται στη μορφή

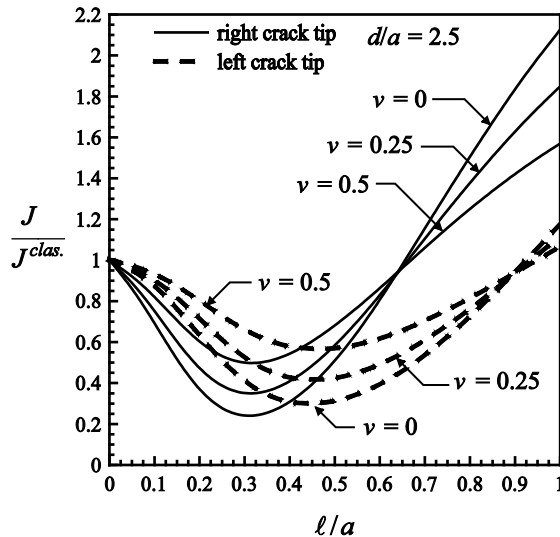
$$J_\ell = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu}{2} \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = -\frac{\mu\pi}{2} a \Lambda_1, \quad (5.76)$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \sum_{n=0}^N a_n (n+1) (-1)^n \times \sum_{n=0}^N a_n (n+1) (-1)^n. \quad (5.77)$$

Με βάση τις Εξ. (5.74) και (5.76), υπολογίζουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα J . Στο Σχ. 5.14 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και του λόγου Poisson ν , για ένα δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$. Η τιμή του ολοκληρώματος J στην κλασική ελαστικότητα είναι ίδια με το πρόβλημα αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων (Εξ. (5.54)). Παρατηρούμε ότι καθώς ο λόγος $\ell/a \rightarrow 0$, η λύση μεταβαίνει ομαλά στην αντίστοιχη της κλασικής ελαστικότητας ($J/J^{clas.} \rightarrow 1$). Όλες οι καμπύλες

παρουσιάζουν έναν αρχικό πτωτικό κλάδο καθώς ο λόγος ℓ/a αυξάνει, μέχρι ένα πεπερασμένο ελάχιστο το οποίο είναι διαφορετικό για το δεξί και το αριστερό άκρο ενώ εξαρτάται από τον λόγο Poisson και τον λόγο d/a . Στο υπόλοιπο διάστημα, ο λόγος $J/J^{clas.}$ αυξάνει τείνοντας ασυμπτωτικά στην τιμή $(3-2\nu)$ καθώς το $\ell/a \rightarrow \infty$.



Σχ. 5.14. Μεταβολή του λόγου των ολοκληρωμάτων J στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο ℓ/a για ένα δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με $a/\ell = 10$.

5.5 Αλληλεπίδραση κεντρικής ρωγμής με οριζόντιο δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων

5.5.1 Κατάστρωση του προβλήματος

Θεωρούμε μία κεντρική ρωγμή μήκους $2a$ σε ένα ελαστικό άπειρο στερεό σώμα με μικροδομή και ένα οριζόντιο δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων \mathbf{b}_y σε απόσταση d από το κέντρο της ρωγμής, υπό συνθήκες αντι-επίπεδης παραμόρφωσης (Σχ. 4.19). Τα χείλη της ρωγμής περιγράφονται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$ και είναι αφόρτιστα. Οι συνοριακές συνθήκες κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής γράφονται σύμφωνα με τις Εξ. (3.16) και (3.17) ως

$$\sigma_{yz}(x, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}(x, 0) = 0, \quad m_{yx} = 0, \quad \text{για } |x| < a. \quad (5.78)$$

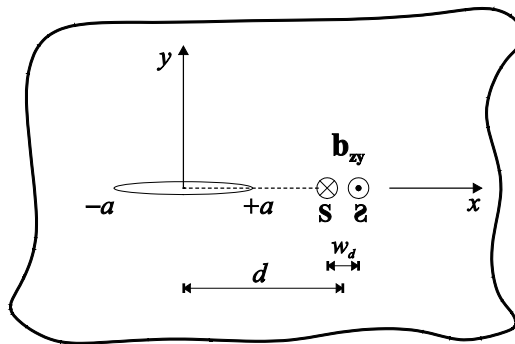
Η παρουσία ενός διπόλου αντι-επίπεδων εξαρμώσεων δημιουργεί διατμητικές τάσεις σ_{yz} και τάσεις ζεύγους m_{yy} κατά μήκος του επιπέδου της ρωγμής (ιδέ Παράγραφο 5.2), δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma_{yz}(d, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}(d, 0) \rightarrow \sigma_{yz}^{h.scr.d} + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{h.scr.d}, \quad m_{yx}(d, 0) \rightarrow 0, \quad (5.79)$$

όπου $\sigma_{yz}^{h.scr.d}$ και $m_{yy}^{h.scr.d}$ είναι οι διατμητικές τάσεις και οι τάσεις ζεύγους ενός οριζόντιου διπόλου αντι-επίπεδων εξαρμώσεων στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Επίσης, οι συνθήκες στο άπειρο είναι

$$\sigma_{xz}^{\infty}, \sigma_{yz}^{\infty} \rightarrow 0, \quad m_{xx}^{\infty}, m_{yy}^{\infty}, m_{yx}^{\infty}, m_{xy}^{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty, \quad (5.80)$$

όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων. Η Εξ. (5.80) υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει άλλη εξωτερική φόρτιση στο πρόβλημα πέραν της εξάρμωσης.



Σχ. 5.15. Κεντρική ρωγμή αλληλεπίδρα με οριζόντιο δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων.

Η λύση του προβλήματος προκύπτει ως υπέρθεση των λύσεων δύο επιμέρους προβλημάτων. Αρχικά, θεωρούμε ένα αρηγμάτωτο σώμα το οποίο υπόκειται στη φόρτιση της Εξ. (5.79). Στην περίπτωση που η ρωγμή αλληλεπίδρα με ένα απειροστό οριζόντιο

δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων, το τασικό πεδίο του προβλήματος δίνεται από τις Εξ. (5.15)-(5.21). Αν θεωρήσουμε πεπερασμένο δίπολο εξαρμώσεων, το τασικό πεδίο προκύπτει από επαλληλία των πεδίων των δύο διακριτών εξαρμώσεων από τα οποία αποτελείται, όπως περιγράφεται στην Εξ. (5.1).

Στη συνέχεια, για το δεύτερο επιμέρους πρόβλημα, θεωρούμε ένα σώμα ίδιας γεωμετρίας με το αρχικό ρηγματωμένο δίχως την επίδραση του διπόλου αντι-επίπεδων εξαρμώσεων. Η μοναδική φόρτιση εφαρμόζεται πάνω στα χείλη της ρωγμής και αποτελείται από ίσες και αντίθετες τάσεις από αυτές που προέκυψαν στο αρηγμάτωτο σώμα. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}(x, 0) &= \sigma_{yz}^{h.scr.d}(x-d, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{h.scr.d}(x-d, 0), \\ m_{yx}(x, 0) &= 0, \quad \text{για } |x| < a, \end{aligned} \quad (5.81)$$

και

$$\sigma_{xz}^\infty, \sigma_{yz}^\infty \rightarrow 0, \quad m_{xx}^\infty, m_{yy}^\infty, m_{yx}^\infty, m_{xy}^\infty \rightarrow 0 \quad \text{καθώς το } r \rightarrow \infty. \quad (5.82)$$

Για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών (5.81), είναι αρκετή η κατανομή διπόλων αντι-επίπεδων εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής. Όπως φαίνεται από την Εξ. (5.20), ένα δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων δεν παράγει τάσεις ζεύγους m_{yx} στο επίπεδο $y=0$, οπότε η συνοριακή συνθήκη (5.81β) ικανοποιείται αυτομάτως. Αντίστοιχα, στα πλαίσια της κλασσικής ελαστικότητας, η διανομή διπόλων αντι-επίπεδων εξαρμώσεων κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη (5.81α) που περιγράφει το πρόβλημα. Τελικά, στην κλασσική θεωρία, το πρόβλημα περιγράφεται από μία υπεριδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση με τετραγωνική ιδιομορφία.

5.5.2 Συνάρτηση Green

Η συνάρτηση Green του προβλήματος προκύπτει από το τασικό πεδίο ενός απειροστού διπόλου αντι-επίπεδων εξαρμώσεων. Από τις Εξ. (5.18) και (5.19) για $y=0$, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz}(x, y=0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}(x, y=0) &= \frac{\mu b w_d}{2\pi x^2} - \frac{6\mu b w_d \ell^2 (1+\beta)}{\pi x^4} \\
&+ \frac{30\mu b w_d \ell^2 (1+\beta)^2}{\pi x^4} \left[\frac{2\ell^2}{x^4} - K_2(|x|/\ell) \right] - \frac{3\mu b w_d (1+\beta)^2}{4\pi x^2} \\
&\times [9K_2(|x|/\ell) - 5K_0(|x|/\ell)] - \frac{\mu b w_d (1+\beta)^2}{4\pi \ell^2} [K_2(|x|/\ell) - K_0(|x|/\ell)].
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Η παραπάνω έκφραση έχει συμπεριφορά $O(x^{-4})$ καθώς το $x \rightarrow 0$ ενώ για $\beta = -1$ εκφυλίζεται στην αντίστοιχη συνάρτηση Green της κλασικής ελαστικότητας.

5.5.3 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και αποτελέσματα

Για την ανάπτυξη των διορθωτικών τάσεων (Εξ. (5.81)), πρέπει να κατανεύσουμε στα χείλη της ρωγμής απειροστά δίπολα αντι-επίπεδων εξαρμώσεων. Το εντατικό πεδίο που προκαλείται από την συνεχή κατανομή των ατελειών αυτών υπολογίζεται με ολοκλήρωση της συνάρτησης Green (Εξ. (5.83)) κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής. Βάσει των παραπάνω, οδηγούμαστε στην υπεριδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση τετάρτου βαθμού που περιγράφει το πρόβλημα. Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της ασυμπτωτικής ανάλυσης, απομονώνουμε τα ιδιόμορφα μέρη των πυρήνων της ολοκληρωτικής εξίσωσης και καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση, για $|x| < a$

$$\begin{aligned}
-\left[\sigma_{yz}^{h.scr.d}(x-d, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{h.scr.d}(x-d, 0) \right] &= -3c_1 \ell^2 \text{FP} \int_{-a}^a \frac{B_{III}(t)}{(x-t)^4} dt \\
&+ c_2 \text{FP} \int_{-a}^a \frac{B_{III}(t)}{(x-t)^2} dt - \frac{\mu}{32\ell^2} \int_{-a}^a B_{III}(t) \cdot \ln \frac{|x-t|}{\ell} dt + c_3 \int_{-a}^a B_{III}(t) \cdot R_6(x-t) dt,
\end{aligned} \tag{5.84}$$

όπου $B_{III}(t) = db_{zy}(t)/dt = \Delta u_z(t)$ είναι η πυκνότητα των απειροστών διπόλων αντι-επίπεδων εξαρμώσεων στο σημείο t ($|t| < a$), ενώ $\Delta u_z = u_z(t, 0^+) - u_z(t, 0^-)$ είναι η σχετική αντι-επίπεδη μετατόπιση του πάνω και κάτω χείλους της ρωγμής. Οι σταθερές c_i , με $i = 1, 2, 3$, ορίζονται ως

$$c_1 = \frac{\mu(1+\beta)(3-\beta)}{2\pi}, \quad c_2 = \frac{\mu(\beta^2 + 2\beta + 9)}{16\pi}, \quad c_3 = \frac{\mu(1+\beta)^2}{\pi}, \quad (5.85)$$

και ο πυρήνας $R_6(x-t)$ ως

$$\begin{aligned} R_6(x-t) = & -\frac{\ell^2}{(x-t)^4} \left[30 \left(K_2(|x-t|/\ell) - \frac{2\ell^2}{(x-t)^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \\ & + \frac{1}{8(x-t)^2} \left[30K_0(|x-t|/\ell) - 54K_2(|x-t|/\ell) - \frac{1}{2} \right] \\ & + \frac{1}{4\ell^2} \left[K_0(|x-t|/\ell) - K_2(|x-t|/\ell) + \frac{1}{8} \ln(|x-t|/\ell) \right]. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Αναπτύσσοντας τον πυρήνα $R_6(x-t)$ σε σειρά καθώς το $x \rightarrow t$ και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας είναι ομαλός στο κλειστό διάστημα $-a \leq (x, t) \leq a$. Επίσης, για $\beta = -1$, η Εξ. (5.84) εκφυλίζεται στην αντίστοιχη εξίσωση της κλασσικής ελαστικότητας.

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η μετατόπιση u_z έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά $r^{3/2}$ κοντά στα άκρα της ρωγμής (όπου r είναι η ακτινική απόσταση από το άκρο της ρωγμής) (Zhang *et al.*, 1998), η άγνωστη πυκνότητα των διπόλων εξαρμώσεων $B_{III}(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$B_{III}(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(\tilde{t}) (1-\tilde{t}^2)^{3/2}, \quad |\tilde{t}| < 1, \quad (5.87)$$

όπου $U_n(\tilde{t})$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους, a_n είναι άγνωστοι συντελεστές και $\tilde{t} = t/a$. Όπως και στα προηγούμενα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου, δεν απαιτείται κάποια επιπλέον βοηθητική συνθήκη για την εξασφάλιση της μοναδικότητας των τιμών της εφαπτομενικής μετατόπισης για ένα κλειστό βρόχο γύρω από τη ρωγμή.

Έπειτα από κατάλληλη κανονικοποίηση στο διάστημα $[-1, 1]$, η ολοκληρωτική εξίσωση (5.84) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή για $|\tilde{x}| < 1$

$$\begin{aligned}
& - \left[\sigma_{yz}^{h.scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{h.scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) \right] = \\
& - \frac{3c_1}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \text{FP} \int_{-a}^a \frac{U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{3/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})^4} d\tilde{t} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \text{FP} \int_{-a}^a \frac{U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{3/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})^2} d\tilde{t} \\
& - \frac{\mu p^2}{32} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times \int_{-1}^1 U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{3/2} \cdot \ln(p|\tilde{x}-\tilde{t}|) d\tilde{t} + c_3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times Q_n(\tilde{x}),
\end{aligned} \tag{5.88}$$

όπου $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{d} = d/a$ και $p = a/\ell$, ενώ η συνάρτηση $Q_n(\tilde{x})$ ορίζεται ως

$$Q_n(\tilde{x}) \equiv \int_{-1}^1 U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{3/2} \cdot R_6(a\tilde{x} - a\tilde{t}) d\tilde{t} . \tag{5.89}$$

Τα ιδιόμορφα ολοκληρώματα στην Εξ. (5.88) υπολογίζονται σε κλειστή μορφή στο Παράρτημα B (Εξ. (B.16), (B.15) και (B.19)) ενώ το ομαλό ολοκλήρωμα στην Εξ. (5.89) υπολογίζεται μέσω της κλασσικής αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Chebyshev. Με βάση τα παραπάνω, η ολοκληρωτική εξίσωση λαμβάνει την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή

$$\begin{aligned}
& - \left[\sigma_{yz}^{h.scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{h.scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) \right] = \\
& - \frac{3c_1}{p^2} \left\{ a_0 \pi + a_1 4\pi U_1(\tilde{x}) + a_2 [3\pi U_0(\tilde{x}) + 10\pi U_2(\tilde{x})] \right. \\
& \quad + a_3 4\pi [2U_1(\tilde{x}) + 5\pi U_3(\tilde{x})] + \sum_{n=4}^{\infty} a_n \frac{\pi}{96(1-\tilde{x}^2)^2} \left[(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)U_{n+4}(\tilde{x}) \right. \\
& \quad \quad - (4n^3 + 18n^2 + 44n + 30)U_{n+2}(\tilde{x}) + (6n^3 + 18n^2 + 54n + 42)U_n(\tilde{x}) \\
& \quad \quad \left. \left. - (4n^3 + 6n^2 + 20n + 18)U_{n-2}(\tilde{x}) + (n^3 - n)U_{n-4}(\tilde{x}) \right] \right\} \\
& + c_2 \left\{ -a_0 \frac{3\pi}{4} [U_0(\tilde{x}) - U_2(\tilde{x})] - a_1 \pi [U_1(\tilde{x}) - U_3(\tilde{x})] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\pi}{4} [(n-1)U_{n-2}(\tilde{x}) - 2(n+1)U_n(\tilde{x}) + (n+3)U_{n+2}(\tilde{x})] \right\} \\
& \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \\
& -\frac{\mu p^2}{32} \left\{ a_0 \frac{\pi}{4} \left[T_2(\tilde{x}) - \frac{1}{8} T_4(\tilde{x}) - \frac{3}{2} \ln 2 \right] - a_1 \frac{\pi}{4} \left[T_1(\tilde{x}) - \frac{1}{2} T_3(\tilde{x}) + \frac{1}{10} T_5(\tilde{x}) \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{\pi}{16} a_2 \left[3T_2(\tilde{x}) - \frac{3}{2} T_4(\tilde{x}) + \frac{1}{3} T_6(\tilde{x}) - 2 \ln 2 \right] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \frac{\pi}{8} \left[\frac{T_{n-2}(\tilde{x})}{n-2} - \frac{3T_n(\tilde{x})}{n} + \frac{3T_{n+2}(\tilde{x})}{n+2} - \frac{T_{n+4}(\tilde{x})}{n+4} \right] \right\} \\
& + c_3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times Q_n(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < 1
\end{aligned} \tag{5.90}$$

ενώ η συνάρτηση $Q_n(\tilde{x})$ γράφεται ως

$$Q_n(\tilde{x}) \equiv \pi \sum_{j=1}^m \frac{(1-\tilde{t}^2)}{1+m} U_n(\tilde{t}) \cdot R_6(a\tilde{x} - a\tilde{t}). \tag{5.91}$$

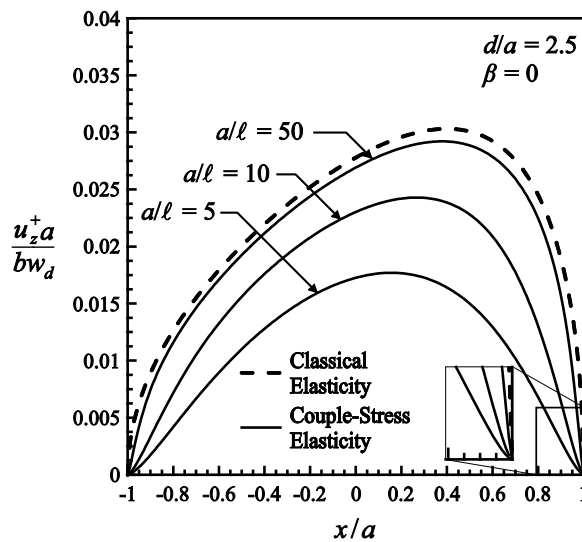
Στην περίπτωση που η ρωγμή αλληλεπιδρά με ένα απειροστό δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων, η φόρτιση γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz}^{h.scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) + \frac{1}{2} \partial_x m_{yy}^{h.scr.d}(\tilde{x} - \tilde{d}, 0) &= \frac{\mu b w_d}{2\pi a^2 (\tilde{x} - \tilde{d})^2} - \frac{6\mu b w_d (1+\beta)}{\pi a^2 p^2 (\tilde{x} - \tilde{d})^4} \\
&+ \frac{30\mu b w_d (1+\beta)^2}{\pi a^2 p^2 (\tilde{x} - \tilde{d})^4} \left[\frac{2}{p^2 (\tilde{x} - \tilde{d})^4} - K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right] \\
&- \frac{3\mu b w_d (1+\beta)^2}{4\pi a^2 (\tilde{x} - \tilde{d})^2} \left[9K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) - 5K_0(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right] \\
&- \frac{\mu b w_d p^2 (1+\beta)^2}{4\pi a^2} \left[K_2(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) - K_0(p|\tilde{x} - \tilde{d}|) \right].
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Αντίθετα, αν η ρωγμή αλληλεπιδρά με ένα πεπερασμένο δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων, η φόρτιση προκύπτει με βάση τις Εξ. (4.131) και (4.132), εφαρμόζοντας επαλληλία των πεδίων όπως περιγράφεται στην Εξ. (5.1).

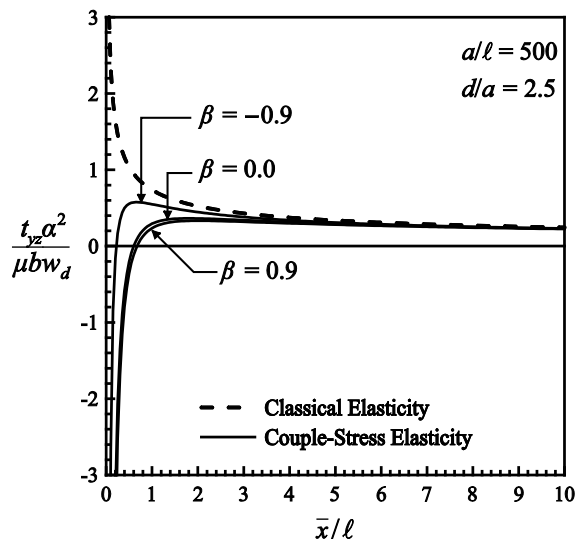
Η εξίσωση (5.90) επιλύεται αριθμητικά με την κατάλληλη τεχνική ταξιθεσίας. Ως σημεία ταξιθεσίας επιλέγονται οι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $T_{N+1}(\tilde{x})$, δηλαδή $\tilde{x}_k = \cos[(2k+1)\pi/2(N+1)]$ με $k = 0, 1, \dots, N$ ενώ ως σημεία ολοκλήρωσης τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev $U_m(\tilde{t})$, δηλαδή $\tilde{t}_j = \cos[j\pi/(m+1)]$ με $j = 1, 2, \dots, m$. Η Εξ. (5.90) συνιστά ένα αλγεβρικό σύστημα $N+1$ εξισώσεων με $N+1$ αγνώστους το οποίο επιλύθηκε με χρήση του συμβολικού προγράμματος **MATHEMATICA**. Με γνωστούς πλέον τους συντελεστές a_n , υπολογίζουμε μέσω της Εξ. (5.87), την πυκνότητα των διπόλων αντι-επίπεδων εξαρμώσεων $B_{III}(\tilde{t})$.

Προχωρούμε στην παρουσίαση ορισμένων αριθμητικών αποτελεσμάτων. Στο Σχ. 5.16 απεικονίζεται η επιρροή του λόγου a/ℓ στην αντι-επίπεδη μετατόπιση ($u_z \equiv w$) του άνω χείλους της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με $\beta = 0$. Οι παραγόμενες μετατοπίσεις είναι μικρότερες σε σύγκριση με την περίπτωση αλληλεπίδρασης με μία διακριτή αντι-επίπεδη εξάρμωση. Κοντά στην κορυφή της ρωγμής (ιδέ μεγέθυνση), τα χείλη κλείνουν πιο ομαλά ($\bar{x}^{-3/2}$) σε σύγκριση με την πρόβλεψη της κλασσικής θεωρίας. Επιπλέον, καθώς το μήκος της ρωγμής γίνεται συγκρίσιμο με το χαρακτηριστικό μήκος ℓ , το υλικό επιδεικνύει πιο στιβαρή συμπεριφορά ενώ η λύση της κλασσικής ελαστικότητας παραμένει άνω όριο για τις μετατοπίσεις στην θεωρία τάσεων ζεύγους.



Σχ. 5.16. Αντι-επίπεδη μετατόπιση του άνω χείλους της ρωγμής για διάφορους λόγους a/ℓ λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα υλικό με $\beta = 0$.

Οι διατμητικές τάσεις (τ_{yz}, σ_{yz}) και οι τάσεις ζεύγους (m_{xx}, m_{yy}) μπορούν να υπολογιστούν ολοκληρώνοντας τις Εξ. (5.16), (5.18) και (5.19) αντίστοιχα, κατά μήκος των χειλέων της ρωγμής ($|x| < a, y = 0$). Υπενθυμίζουμε ότι οι τάσεις τ_{yz} συμπεριφέρονται ως $\bar{x}^{-1/2}$ ενώ οι τάσεις σ_{yz} και οι τάσεις ζεύγους (m_{xx}, m_{yy}) ως $\bar{x}^{-3/2}$ και $\bar{x}^{-1/2}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, βάσει των παραπάνω, η ολική τάση $t_{yz} \equiv \sigma_{yz} + (1/2)\partial_x m_{yy}$ συμπεριφέρεται ως $\bar{x}^{-3/2}$.



Σχ. 5.17. Κατανομή της ολικής τάσης t_{yz} μπροστά από το δεξί άκρο της ρωγμής λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$ σε ένα σώμα με $a/l = 500$ για διάφορες τιμές του β .

Στο Σχ. 5.17 παρουσιάζεται η κατανομή της ολικής τάσης t_{yz} λόγω αλληλεπίδρασης με ένα δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $d/a = 2.5$, σε ένα υλικό με $a/l = 500$ και τρεις τιμές της παραμέτρου β . Η ολική τάση επιδεικνύει έναν χαρακτήρα συνοχής στην επικείμενη ζώνη θραύσεως καθότι λαμβάνει αρνητικές τιμές σε μία μικρή περιοχή μπροστά από το άκρο της ρωγμής ($\bar{x} < 0.5\ell$). Επιπλέον για $\bar{x} < 2\ell$ η κατανομή παρουσιάζει τοπικά μία φραγμένη μέγιστη τιμή ενώ για $\bar{x} > 2\ell$ τείνει στην πρόβλεψη της κλασσικής θεωρίας. Τέλος, σημειώνουμε ότι καθώς το $\beta \rightarrow -1$, η ‘ζώνη συνοχής’ περιορίζεται ενώ παράλληλα αυξάνει η μέγιστη τιμή της ολικής τάσης.

5.5.4 Υπολογισμός του ολοκληρώματος J

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζεται το ολοκλήρωμα J της Μηχανικής των Θραύσεων και διερευνάται η εξάρτησή του από το χαρακτηριστικό μήκος ℓ και την παράμετρο β . Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος J , χρησιμοποιούμε έναν δρόμο ολοκλήρωσης μορφής παραλληλογράμμου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.4.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα ρωγμής, η τάση ζεύγους m_{yx} είναι μηδέν για $y = 0$ και ότι τα χείλη της ρωγμής ορίζονται από το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$, το ολοκλήρωμα J (Εξ. (4.61)) παίρνει τη μορφή

$$J = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t_{yz}(x, y=0^+) \cdot \frac{\partial w(x, y=0^+)}{\partial x} dx \right\}. \quad (5.93)$$

Η δεσπόζουσα ιδιόμορφη συμπεριφορά για την ολική τάση t_{yz} οφείλεται στο υπεριδιόμορφο ολοκλήρωμα τετάρτου βαθμού (ιδέ ολοκληρωτική εξίσωση (5.84)). Η τάση αυτή για $x \rightarrow a^+$ γράφεται ως ($\tilde{x} > 1$)

$$\begin{aligned} t_{yz}(x \rightarrow a^+, y=0^+) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left(-\frac{3c_1}{p^2} \int_{-a}^a \frac{B_{III}(t)}{(x-t)^4} dt \right) \\ &= -\lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \frac{3c_1}{p^2} \int_{-1}^1 \frac{a_n U_n(\tilde{t})(1-\tilde{t}^2)^{3/2}}{(\tilde{x}-\tilde{t})^4} d\tilde{t} = -\frac{3c_1}{p^2} \frac{\pi}{2^{5/2}} \sum_{n=1}^N a_n (1+n) \cdot (\tilde{x}-1)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Για την πυκνότητα των διπόλων αντι-επίπεδων εξαρμώσεων $B_{III}(t)$ ισχύει βάσει του ορισμού η παρακάτω ασυμπτωτική σχέση καθώς το $x \rightarrow a^-$ ($\tilde{x} < 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z(x \rightarrow a^-, y=0^+)}{\partial x} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a^-} B_{III}(x) = \frac{1}{2} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N a_n U_n(\tilde{x}) \cdot (1-\tilde{x}^2)^{3/2} \\ &= -\frac{3}{2^{1/2}} \sum_{n=1}^N a_n (n+1) \cdot (1-\tilde{x})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, το ολοκλήρωμα J μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$J_r = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = \pi a \Lambda_1, \quad (5.96)$$

όπου

$$\Lambda_1 = \frac{9\pi c_1}{8p^2} \sum_{n=0}^N a_n (n+1) \times \sum_{n=0}^N a_n (n+1), \quad (5.97)$$

$\bar{x} = \tilde{x} - 1$ και για κάθε πραγματικό αριθμό λ , με εξαίρεση τις τιμές $\lambda = -1, -2, -3, \dots$, ορίζονται οι κατανομές τύπου ‘διχοτόμου’, x_+^λ και x_-^λ βάσει της Εξ. (4.69), ενώ το ολοκλήρωμα στην Εξ. (4.150) υπολογίζεται βάσει του θεωρήματος Fisher για γινόμενα κατανομών τύπου ‘διχοτόμου’.

Ακολουθώντας μία αντίστοιχη διαδικασία, το ολοκλήρωμα J για το αριστερό άκρο της ρωγμής ($x \rightarrow -a^-$) γράφεται στη μορφή

$$J_\ell = -2a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \Lambda_1 \cdot \int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} (x_+)^{-1/2} \cdot (x_-)^{-1/2} d\bar{x} \right\} = -\pi a \Lambda_1, \quad (5.98)$$

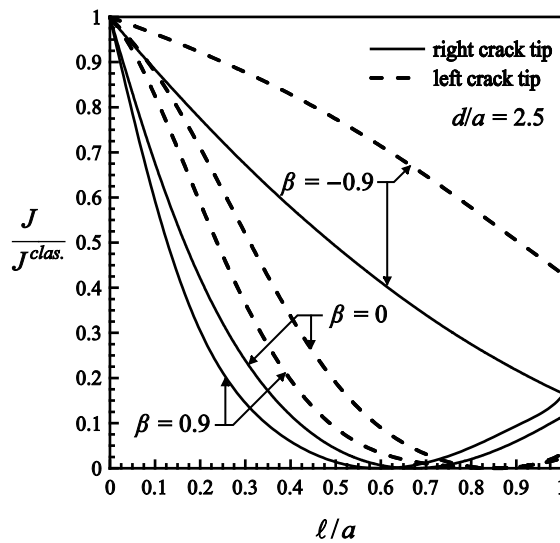
όπου

$$\Lambda_1 = \frac{9\pi c_1}{8p^2} \sum_{n=0}^N a_n (n+1) (-1)^n \times \sum_{n=0}^N a_n (n+1) (-1)^n, \quad (5.99)$$

Με βάση τις Εξ. (5.96) και (5.98), υπολογίζουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα J . Στο Σχ. 5.18 παρουσιάζεται η μεταβολή του λόγου $J/J^{clas.}$ στα δύο άκρα της ρωγμής για διάφορες τιμές του λόγου ℓ/a και της παραμέτρου β , για ένα δίπολο αντι-επίπεδων εξαρμώσεων σε απόσταση $d/a = 2.5$. Η τιμή του ολοκληρώματος J στην κλασική ελαστικότητα μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας έναν δρόμο ολοκλήρωσης μορφής παραλληλογράμμου και τις εκφράσεις των ελαστικών πεδίων του προβλήματος (Lin *et al.*, 1993). Εφαρμόζοντας την διαδικασία αυτή, αποκτούμε τις παρακάτω εκφράσεις για το ολοκλήρωμα J στο δεξί και αριστερό άκρο της ρωγμής, στην περίπτωση φόρτισης της ρωγμής με ένα απειροστό δίπολο εξαρμώσεων

$$J_r = \frac{\mu b^2 w_d^2}{8\pi a(d^2 - a)(d - a)^2}, \quad J_\ell = -\frac{\mu b^2 w_d^2}{8\pi a(d^2 - a)(d + a)^2}. \quad (5.100)$$

Παρατηρούμε ότι καθώς ο λόγος $\ell/a \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα J στην θεωρία τάσεων ζεύγους τείνει με συνεχή τρόπο στο αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας. Σε όλες τις καμπύλες, ο λόγος $J/J^{clas.}$ φθίνει καθώς το ℓ/a αυξάνει. Η απόκριση αυτή είναι ανεξάρτητη από την απόσταση του διπόλου εξαρμώσεων από το άκρο της ρωγμής. Συνεπώς, ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας μειώνεται (strengthening effect) όταν ληφθεί υπόψιν η μικροδομή του υλικού. Επιπλέον, ο λόγος $J/J^{clas.}$ τείνει στο μηδέν για $\ell/a > 0.60$ στις περιπτώσεις $\beta = 0$ και $\beta = 0.9$. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη συμπεριφορά της φόρτισης του διπόλου αντι-επίπεδων εξαρμώσεων στο άκρο της ρωγμής, η οποία είναι αντίστοιχη με αυτή που απεικονίζεται στο Σχ. 4.22.



Σχ. 5.18. Μεταβολή του λόγου των ολοκληρωμάτων J στην θεωρία τάσεων ζεύγους και στην κλασσική ελαστικότητα ως προς τον λόγο ℓ/a για μία αντι-επίπεδη εξάρμωση σε απόσταση $d/a = 2.5$.

5.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκαν προβλήματα αλληλεπίδρασης κεντρικών ρωγμών με δίπολα εξαρμώσεων, στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Η κατάστρωση των προβλημάτων έγινε γενικεύοντας την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων και χρησιμοποιώντας ως πυρήνες παραμόρφωσης απειροστά δίπολα εξαρμώσεων. Τα πεδία

των ατελειών αυτών υπολογίστηκαν για πρώτη φορά στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Από την εφαρμογή της τεχνικής προέκυψαν υπεριδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις για όλα τα προβλήματα ρωγμών, οι οποίες επιλύθηκαν αριθμητικά. Συγκρίνοντας την κατάσταση με δίπολα εξαρμώσεων με την κλασική κατάσταση μέσω διακριτών εξαρμώσεων, διαπιστώνουμε ότι στην πρώτη απαιτούνται λιγότεροι όροι για δεδομένο βαθμό ακρίβειας. Λόγω ομοιότητας της φόρτισης με τα προβλήματα αλληλεπίδρασης με διακριτές εξαρμώσεις, αρκετά αποτελέσματα είναι αντίστοιχα. Σε όλες τις περιπτώσεις προέκυψε ότι το ρηγματωμένο υλικό συμπεριφέρεται πιο δύσκαμπτα από ότι προβλέπει η κλασική ελαστικότητα. Γενικά, τα παραγόμενα πεδία μετατοπίσεων και τάσεων είναι μικρότερα σε σύγκριση με την αλληλεπίδραση με διακριτές εξαρμώσεις εφόσον το τασικό πεδίο των διπόλων εξαρμώσεων φθίνει ταχύτερα συναρτήσει της απόστασης. Ο συντελεστής έντασης τάσεων στο πρόβλημα αλληλεπίδρασης με οριζόντιο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων εμφάνισε μείωση σε σχέση με τον αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας, για κάποιο εύρος του λόγου ℓ/a . Ο ρυθμός έκλυσης ενέργειας στα επίπεδα προβλήματα επηρεάζεται σημαντικά από την απόσταση του διπόλου εξαρμώσεων και την μικροδομή καθώς εμφανίζεται άλλοτε μειωμένος και άλλοτε αυξημένος σε σχέση με την κλασική πρόβλεψη. Αντίθετα, στο αντι-επίπεδο πρόβλημα, ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας μειώνεται όταν ληφθεί υπόψιν η μικροδομή του υλικού. Στα μελλοντικά μας σχέδια περιλαμβάνεται η μελέτη προβλημάτων ρωγμών στα οποία τα δίπολα εξαρμώσεων βρίσκονται εκτός της γραμμής της ρωγμής.



Κεφάλαιο 6

Γενικά Συμπεράσματα

6.1 Επισκόπηση των αποτελεσμάτων

Ανακεφαλαιώνοντας, στην διατριβή αυτή μελετήθηκαν προβλήματα εξαρμώσεων και ρωγμών στην κλασική θεωρία και στην θεωρία τάσεων ζεύγους, χρησιμοποιώντας αριθμητικές και αναλυτικές τεχνικές. Αρχικά, αναπτύχθηκε μία μεθοδολογία για την ανάλυση επίπεδων εξαρμώσεων μέσω της περιγραφής ενός θερμοελαστικού προβλήματος σε κώδικα πεπερασμένων στοιχείων. Μέσω αυτής της μεθόδου, εξετάστηκε το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μίας ημιάπειρης ρωγμής με μία διακριτή εξάρμωση καθώς και τα προβλήματα της αλληλεπίδρασης μίας εξάρμωσης με διεπιφάνεια δύο υλικών, κυκλικό έγκλεισμα και κυκλική οπή. Σε όλα τα προβλήματα υπολογίστηκαν οι κινούσες δυνάμεις Peach-Koehler των εξαρμώσεων μέσω των συντηρητικών ολοκληρωμάτων J και M . Στο πρώτο πρόβλημα, επιβεβαιώθηκε η ανεξαρτησία της δύναμης αλληλεπίδρασης από την γωνία μεταξύ της αιχμής της ρωγμής και της εξάρμωσης. Επιπλέον, η επέκταση σε ανισότροπους κρυστάλλους έδειξε ότι η ανισοτροπία επηρεάζει σημαντικά τόσο την ελκτική δύναμη αλληλεπίδρασης όσο και τα παραγόμενα τασικά πεδία του προβλήματος. Στα υπόλοιπα προβλήματα, θεωρήθηκαν διάφοροι συνδυασμοί υλικών και προσανατολισμοί της εξάρμωσης και τα αποτελέσματα ελέγχθηκαν με τις διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις. Η σύγκλιση μεταξύ θεωρητικών λύσεων και αριθμητικών αποτελεσμάτων ήταν ικανοποιητική, ωστόσο, βελτιώσεις στην διακριτοποίηση προτείνονται σε προβλήματα διεπιφανειών. Για τον έλεγχο της σύγκλισης, προτάθηκε ένα κριτήριο μέσω του συντηρητικού ολοκληρώματος M . Ο χρόνος επίλυσης των προβλημάτων είναι αρκετά σύντομος και το υπολογιστικό κόστος χαμηλό. Παράλληλα, χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο μεταβλητού πυρήνα εξαρμώσεων, το οποίο εξαλείφει τις ιδιομορφίες της λύσης γύρω από τους πυρήνες των εξαρμώσεων και μπορεί να συνδεθεί με θεωρίες ανωτέρου βαθμού.

Στη συνέχεια, μελετήθηκαν προβλήματα αλληλεπίδρασης κεντρικών ρωγμών με διακριτές εξαρμώσεις, στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους ώστε να διερευνηθεί η επιρροή της μικροδομής στη λύση. Για την κατάστρωση των προβλημάτων χρησιμοποιήθηκε η τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων η οποία οδήγησε σε ιδιόμορφες (επίπεδα προβλήματα) ή υπεριδιόμορφες (αντι-επίπεδο πρόβλημα) ολοκληρωτικές εξισώσεις. Από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων αυτών προέκυψε ότι το ρηγματωμένο υλικό συμπεριφέρεται πιο δύσκαμπτα από ότι προβλέπει η κλασική ελαστικότητα. Στο πρόβλημα αλληλεπίδρασης της ρωγμής με μία διακριτή ορθή εξάρμωση βρέθηκε ότι το διάνυσμα της στροφής είναι φραγμένο στο άκρο της ρωγμής, σε αντίθεση με την κλασική λύση. Ο συντελεστής έντασης τάσεων εμφανίζεται σημαντικά αυξημένος σε σχέση με τον αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας και στα δύο άκρα της ρωγμής. Τα ολοκληρώματα J γύρω από τα άκρα των ρωγμών και η κινούσα δύναμη Peach-Koehler γύρω από τις εξαρμώσεις εξαρτώνται από την μικροδομή και την απόσταση μεταξύ ρωγμής και εξάρμωσης, καθώς παρατηρήθηκε άλλοτε ελάττωση και άλλοτε αύξησή τους σε σχέση με την πρόβλεψη της κλασικής ελαστικότητας. Στο αντι-επίπεδο πρόβλημα παρατηρήθηκε ότι τα χείλη της ρωγμής κλείνουν πιο ομαλά από ό,τι στην κλασική θεωρία. Ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας στο πρόβλημα αυτό μειώνεται όταν ληφθεί υπόψη η μικροδομή του υλικού.

Ακολούθως, μελετήθηκαν προβλήματα αλληλεπίδρασης κεντρικών ρωγμών με δίπολα εξαρμώσεων, στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Στα προβλήματα αυτά, η κατάστρωση των ρωγμών έγινε με βάση απειροστά δίπολα εξαρμώσεων, σε μία γενίκευση της τεχνικής των διανεμημένων εξαρμώσεων. Σε αυτή την προσέγγιση, προέκυψαν υπεριδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις για όλα τα προβλήματα ρωγμών, οι οποίες επιλύθηκαν αριθμητικά. Η επίλυση βάσει της κατάστρωσης αυτής είναι ταχύτερη σε σχέση με την κλασική κατάστρωση μέσω διακριτών εξαρμώσεων, καθότι απαιτούνται λιγότεροι όροι για δεδομένο βαθμό ακρίβειας. Παράλληλα, στη μέθοδο αυτή, χρησιμοποιείται ως πυκνότητα των ολοκληρωτικών εξισώσεων σχετική μετατόπιση των χειλέων της ρωγμής. Τα παραγόμενα πεδία μετατοπίσεων και τάσεων στα προβλήματα αυτά, είναι ασθενέστερα σε σύγκριση με την αλληλεπίδραση με διακριτές εξαρμώσεις καθότι το τασικό πεδίο των διπόλων εξαρμώσεων φθίνει ταχύτερα συναρτήσει της απόστασης. Ο συντελεστής έντασης τάσεων στο πρόβλημα αλληλεπίδρασης με οριζόντιο δίπολο εφαπτομενικών εξαρμώσεων εμφάνισε μείωση σε σχέση με τον αντίστοιχο της κλασικής θεωρίας, για κάποιο εύρος επιρροής της μικροδομής. Ο ρυθμός έκλυσης

ενέργειας εμφάνισε αντίστοιχη συμπεριφορά με ό,τι περιγράφηκε νωρίτερα τόσο στα επίπεδα όσο και στο αντι-επίπεδο πρόβλημα.

6.2 Θέματα μελλοντικής έρευνας

Κάθε ερευνητική προσπάθεια δίνει απαντήσεις σε κάποια ερωτήματα και, ιδανικά, ανοίγει νέα θέματα έρευνας. Όσον αφορά την μεθοδολογία ανάλυσης εξαρμώσεων, άμεσος στόχος είναι η επέκτασή της για την μελέτη αντι-επίπεδων προβλημάτων και, κυρίως, δυναμικών προβλημάτων εξαρμώσεων. Όπως αναφέρθηκε ήδη, οι περισσότερες διαθέσιμες αριθμητικές μεθοδολογίες ανάλυσης εξαρμώσεων βασίζονται σε υπέρθεση αναλυτικών λύσεων και παρουσιάζουν αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι ουσιώδες για προβλήματα μικροαντοχής, θραύσης και κόπωσης των υλικών. Παράλληλα, η υλοποίηση της ιδέας του θερμικού αναλόγου σε κάποιον αριθμητικό κώδικα θεωρίας βαθμίδας αποτελεί μελλοντική πρόκληση.

Σχετικά με την αναλυτική προσέγγιση προβλημάτων ρωγμών στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, στα άμεσα σχέδιά είναι η ανάπτυξη μίας μεθοδολογίας ανάλυσης (μερικώς) κλειστών ρωγμών. Η ρωγή μπορεί να υποστεί μερικό κλείσιμο λόγω της αλληλεπίδρασης με διακριτές εξαρμώσεις ή δίπολα εξαρμώσεων. Σε αυτό το πρόβλημα, συγκριτικό πλεονέκτημα παρουσιάζει η κατάστρωση με βάση απειροστά δίπολα εξαρμώσεων, καθώς το προφίλ των μετατοπίσεων θα δίνεται άμεσα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα προβλήματα όπου το χαρακτηριστικό μήκος των θεωριών βαθμίδας μπορεί να συγκριθεί με κάποιο γεωμετρικό μήκος. Σε αυτή την κατεύθυνση, προτείνεται η ανάλυση της αλληλεπίδρασης ρωγμών με εξαρμώσεις μεταβλητού πυρήνα στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Ανοικτά προβλήματα στην θεωρία τάσεων ζεύγους (και ανώτερες αυτής) είναι η αλληλεπίδραση ρωγμών με ελεύθερα σύνορα, διεπιφάνειες ή εγκλείσματα. Προγενέστερα, θα πρέπει να αναζητηθούν οι λύσεις των προβλημάτων διακριτών εξαρμώσεων στις παραπάνω γεωμετρίες, οι οποίες θα αποτελέσουν συναρτήσεις Green για τα προβλήματα ρωγμών. Τέλος, επιθυμητή είναι σε επόμενο στάδιο η επέκταση των προβλημάτων αυτών σε υλικά με διαβαθμισμένες ιδιότητες (functionally graded materials).

Ο κατάλογος θεμάτων προς μελλοντική έρευνα θα μπορούσε ενδεχομένως να συνεχιστεί. Όμως, η πλήρης ανάπτυξή τους ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας αυτής, η οποία ολοκληρώνεται στο σημείο αυτό.



Παράρτημα Α

Συναρτήσεις Green για τα προβλήματα αλληλεπίδρασης με ορθές εξαρμώσεις

A.1 Ελαστικά πεδία δεσμευμένης στροφικής εξάρμωσης

Στο Παράρτημα αυτό, εξάγεται το πεδίο μετατοπίσεων και τάσεων που αναπτύσσεται από μία διακριτή ορθή εξάρμωση (discrete climb dislocation) με διάνυσμα Burgers $\mathbf{b} = (0, b_y, 0)$ και μία διακριτή δεσμευμένη στροφική εξάρμωση (discrete constrained wedge disclination) με διάνυσμα Frank $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους.

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (Εξ. (4.7β)), οι εκφράσεις του μετασχηματισμένου πεδίου μετατοπίσεων (Εξ. (4.24) και (4.25)) λαμβάνουν την ακόλουθη ολοκληρωτική μορφή

$$\begin{aligned} u_x(x, y) = & \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\infty \left[-\frac{(1-2\nu)}{\xi} + y \right] e^{-y\xi} \cos(\xi x) d\xi - \frac{b\ell^2}{\pi} \int_0^\infty \xi e^{-y\xi} \cos(\xi x) d\xi \\ & + \frac{b\ell}{\pi} \int_0^\infty (1 + \ell^2 \xi^2)^{1/2} e^{-\frac{y(1+\ell^2 \xi^2)^{1/2}}{\ell}} \cos(\xi x) d\xi - \frac{\Omega \ell^2}{\pi} \int_0^\infty e^{-y\xi} \sin(\xi x) d\xi \\ & + \frac{\Omega \ell}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + \ell^2 \xi^2)^{1/2}}{\xi} e^{-\frac{y(1+\ell^2 \xi^2)^{1/2}}{\ell}} \sin(\xi x) d\xi, \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
u_y(x, y) = & -\frac{b}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\xi} + \frac{y}{4(1-\nu)} \right] e^{-y\xi} \sin(\xi x) d\xi + \frac{b\ell^2}{\pi} \int_0^\infty \xi e^{-y\xi} \sin(\xi x) d\xi \\
& - \frac{b\ell^2}{\pi} \int_0^\infty \xi e^{\frac{y(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\ell}} \sin(\xi x) d\xi - \frac{\Omega\ell^2}{\pi} \int_0^\infty e^{-y\xi} \cos(\xi x) d\xi \\
& + \frac{\Omega\ell^2}{\pi} \int_0^\infty e^{\frac{y(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\ell}} \cos(\xi x) d\xi.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Τα ολοκληρώματα των Εξ. (A.1) και (A.2) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας αποτελέσματα από την θεωρία κατανομών (ιδέ π.χ. Zemanian, 1965; Roos, 1969).

Ειδικότερα, έχουμε

$$\begin{aligned}
I_1 &\equiv \int_0^\infty \frac{e^{-y\xi}}{\xi} \sin(\xi x) d\xi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & I_2 &\equiv \int_0^\infty e^{-y\xi} \cos(\xi x) d\xi = \frac{y}{r^2}, \\
I_3 &\equiv \int_0^\infty e^{-y\xi} \sin(\xi x) d\xi = \frac{x}{r^2}, & I_4 &\equiv \int_0^\infty \xi e^{-y\xi} \cos(\xi x) d\xi = \frac{y^2 - x^2}{r^4}, \\
I_5 &\equiv \int_0^\infty \xi e^{-y\xi} \sin(\xi x) d\xi = \frac{2xy}{r^4}, & I_6 &\equiv \int_0^\infty e^{\frac{y(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\ell}} \cos(\xi x) d\xi = \frac{yK_1(r/\ell)}{r\ell}, \\
I_7 &\equiv \int_0^\infty \xi e^{\frac{y(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\ell}} \sin(\xi x) d\xi = -\frac{\partial}{\partial x}(I_6) = \frac{xyK_2(r/\ell)}{r^2\ell^2}, \\
I_8 &\equiv \int_0^\infty (1+\ell^2\xi^2)^{1/2} e^{\frac{y(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\ell}} \cos(\xi x) d\xi = -\ell \frac{\partial}{\partial y}(I_6) = \frac{y^2K_2(r/\ell)}{r^2\ell} - \frac{K_1(r/\ell)}{r}, \\
I_9 &\equiv \int_0^\infty \frac{e^{-y\xi}}{\xi} \cos(\xi x) d\xi = -\frac{1}{2} \ln r^2 - \gamma, & I_{10} &\equiv \int_0^\infty \frac{1}{\xi} e^{\frac{y(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\ell}} \sin(\xi x) d\xi, \\
I_{11} &\equiv \int_0^\infty \frac{(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\xi} e^{\frac{y(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\ell}} \sin(\xi x) d\xi = -\ell \frac{\partial}{\partial y}(I_{10}),
\end{aligned} \tag{A.3}$$

όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $K_i(r/\ell)$ είναι οι i τάξης τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel του δευτέρου είδους και γ είναι η σταθερά του Euler. Παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα I_k

με $k = 1, 2, \dots, 9$, υπολογίζονται σε κλειστή μορφή, ενώ τα ολοκληρώματα I_{10} και I_{11} υπολογίζονται αριθμητικά. Βάσει των παραπάνω αποτελεσμάτων, το πεδίο μετατοπίσεων γράφεται

$$u_x(x, y) = \frac{b(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \ln r + \frac{b(y^2-x^2)}{8\pi(1-\nu)r^2} - \frac{b(y^2-x^2)}{2\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] + \frac{b}{2\pi} K_0(r/\ell) - \frac{\Omega \ell^2 x}{r^2} + \frac{\Omega \ell}{\pi} I_{11} + \frac{\Omega y}{4}, \quad (\text{A.4})$$

$$u_y(x, y) = \frac{b}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{bxy}{4\pi(1-\nu)r^2} + \frac{bxy}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] - \frac{\Omega y}{2\pi} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] - \frac{\Omega y}{2\pi} K_2(r/\ell) - \frac{\Omega x}{4}. \quad (\text{A.5})$$

Η στροφή ω δίνεται από την σχέση

$$\omega(x, y) = -\frac{by}{4\pi\ell^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] - \frac{by}{4\pi\ell^2} K_0(r/\ell) + \frac{\Omega}{2\pi} I_{10} - \frac{\Omega}{4}. \quad (\text{A.6})$$

Η ύπαρξη του ολοκληρώματος I_{10} στην Εξ. (A.6) έχει ως αποτέλεσμα την ασυνέχεια της στροφής στο επίπεδο $y=0$. Αναπτύσσοντας σε σειρά την προς ολοκλήρωση ποσότητα του ολοκληρώματος I_{10} , καθώς το $\xi \rightarrow \infty$, λαμβάνουμε την έκφραση

$$(1/\xi) e^{-\frac{y(1+\ell^2\xi^2)^{1/2}}{\ell}} = e^{-y\xi} \left[(1/\xi) - y/(2\xi^2\ell^2) + y^2/(8\ell^4\xi^3) + \dots \right]. \quad (\text{A.7})$$

Ο αντίστροφος ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier του πρώτου όρου του παραπάνω αναπτύγματος δίνεται από το ολοκλήρωμα I_1 , το οποίο είναι ασυνεχές για $y=0$, ενώ οι υπόλοιποι όροι του αναπτύγματος μηδενίζονται για $y=0$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι στην έκφραση της κάθετης μετατόπισης u_y (Εξ. (A.5)), οι όροι που οφείλονται στην δεσμευμένη στροφική εξάρμωση Ω είναι παντού συνεχείς. Επομένως, η ασυνέχεια στο

διάνυσμα της στροφής λόγω της δεσμευμένης στροφικής εξάρμωσης δεν επηρεάζει την κάθετη μετατόπιση. Πρέπει, τέλος, να σημειωθεί ότι στις Εξ. (A.5) και (A.6) έχει προστεθεί ένα πεδίο μετατόπισης ($b/4$) και στροφής ($-\Omega/4$) απολύτως στερεού σώματος, έτσι ώστε η κάθετη μετατόπιση u_y και η στροφή ω να είναι μηδενικές στο επίπεδο ($y = 0^+, x > 0$).

Οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους που προκύπτουν από την επαλληλία των δύο εξαρμώσεων δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{\mu b x}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x^2 - y^2)}{r^4} + \frac{2\mu b x (3y^2 - x^2)}{\pi r^4} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] - \frac{\mu b xy^2}{\pi \ell^2 r^2} \\ & \times [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] + \frac{\mu \Omega (x^2 - y^2)}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] + \frac{\mu \Omega}{\pi} K_0(r/\ell), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{\mu b x}{2\pi(1-\nu)} \frac{(3y^2 + x^2)}{r^4} - \frac{2\mu b x (3y^2 - x^2)}{\pi r^4} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] + \frac{\mu b xy^2}{\pi \ell^2 r^2} \\ & \times [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] - \frac{\mu \Omega (x^2 - y^2)}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] - \frac{\mu \Omega}{\pi} K_0(r/\ell), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yx} = & \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(x^2 - y^2)}{r^4} - \frac{2\mu b y (3x^2 - y^2)}{\pi r^4} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] + \frac{\mu b yx^2}{\pi \ell^2 r^2} \\ & \times [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] + \frac{2\mu \Omega xy}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} - 4\mu \ell^2 \nabla^2 \omega, \quad (\text{A.11})$$

$$m_{xz}(x, y) = -\frac{2\mu b xy}{\pi r^2} \left[K_2(r/\ell) - \frac{2\ell^2}{r^2} \right] + \frac{\mu \Omega}{\pi} y [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)], \quad (\text{A.12})$$

$$m_{yz}(x, y) = \frac{\mu b (x^2 - y^2)}{\pi r^2} \left[K_2(r/\ell) - \frac{2\ell^2}{r^2} \right] - \frac{\mu b}{\pi} K_0(r/\ell) - \frac{2\mu \ell \Omega}{\pi} I_{11}. \quad (\text{A.13})$$

Οι Εξ. (A.8)-(A.13) αποτελούν τις συναρτήσεις Green πλήρους πεδίου για το πρόβλημα αλληλεπίδρασης μίας κεντρικής ρωγμής με μία διακριτή ορθή εξάρμωση (πρόβλημα τύπου I), στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των τάσεων σε οποιαδήποτε σημείο του

ρηγματωμένου σώματος. Επίσης, σημειώνουμε ότι για $y = 0$, το ολοκλήρωμα I_{11} υπολογίζεται αναλυτικά

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 + \ell^2 \xi^2)^{1/2}}{\xi} \sin(\xi x) d\xi = -\frac{1}{4} \operatorname{sgn}(x) \cdot G_{1,3}^{2,1} \left(\frac{x^2}{4\ell^2} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1/2, 1/2, 0 \end{matrix} \right), \quad (\text{A.14})$$

όπου $G_{c,d}^{a,b}(\cdot)$ είναι η συνάρτηση MeijerG. Επομένως, οι συναρτήσεις Green για το πρόβλημα αλληλεπίδρασης με διακριτή ορθή εξάρμωση υπολογίζονται σε κλειστή μορφή (Εξ. (4.26) και (4.27)).

A.2 Ελαστικά πεδία διπόλου δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων

Με βάση την διαδικασία που περιγράφεται στις Εξ. (5.1) και (5.2), υπολογίζουμε το τασικό πεδίο που αναπτύσσεται από ένα απειροστό οριζόντιο δίπολο ορθών εξαρμώσεων και ένα δίπολο δεσμευμένων στροφικών εξαρμώσεων. Οι Εξ. (A.15)-(A.20) αποτελούν τις συναρτήσεις Green πλήρους πεδίου για προβλήματα τύπου I στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, όταν η κατάστρωση τους γίνεται με βάση την μετατόπιση των χειλέων της ρωγμής.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} \cos 4\theta - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 4\theta \\ & - \frac{\mu b w_d}{4\pi \ell^2} \{ K_0(r/\ell) + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \cos 4\theta \} + \frac{2\mu \Omega w_d}{\pi r} \cos 3\theta \\ & \times \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] - \frac{\mu \Omega w_d r}{4\pi \ell^2} [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (\cos \theta - \cos 3\theta), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2} (2\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \cos 4\theta \\ & + \frac{\mu b w_d}{4\pi \ell^2} \{ K_0(r/\ell) + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \cos 4\theta \} - \frac{2\mu \Omega w_d}{\pi r} \cos 3\theta \\ & \times \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] + \frac{\mu \Omega w_d r}{4\pi \ell^2} [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (\cos \theta - \cos 3\theta), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yx} = & -\frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2}(\sin 2\theta - \sin 4\theta) - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta \\
& + \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ 2K_0(r/\ell) \sin 2\theta - [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \sin 4\theta \} + \frac{2\mu\Omega w_d}{\pi r} \\
& \times \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta + \frac{\mu\Omega w_d r}{4\pi\ell^2} [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (\sin \theta + \sin 3\theta),
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} = & -\frac{\mu b w_d}{2\pi(1-\nu)r^2}(\sin 2\theta - \sin 4\theta) - \frac{6\mu b w_d}{\pi r^2} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 4\theta \\
& - \frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} \{ 2K_0(r/\ell) \sin 2\theta + [3K_0(r/\ell) - 4K_2(r/\ell)] \sin 4\theta \} + \frac{2\mu\Omega w_d}{\pi r} \\
& \times \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta - \frac{\mu\Omega w_d r}{4\pi\ell^2} [K_0(r/\ell) - K_2(r/\ell)] (3\sin \theta - \sin 3\theta),
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
m_{xz} = & -\frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\sin \theta - \sin 3\theta) \\
& + \frac{2\mu b w_d}{\pi r} \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] \sin 3\theta - \frac{\mu\Omega w_d}{\pi} K_2(r/\ell) \sin 2\theta,
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
m_{yz} = & -\frac{\mu b w_d}{4\pi\ell^2} r [K_2(r/\ell) - K_0(r/\ell)] (\cos \theta - \cos 3\theta) - \frac{2\mu b w_d}{\pi r} \cos 3\theta \\
& \times \left[\frac{2\ell^2}{r^2} - K_2(r/\ell) \right] - \frac{2\mu\ell\Omega}{\pi} [I_{11}(x - w_d/2, y) - I_{11}(x - w_d/2, y)].
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Για $y = 0$, τα ολοκληρώματα I_{11} στην Εξ. (A.20) υπολογίζονται αναλυτικά

$$-\frac{2\mu\ell\Omega}{\pi} [I_{11}(x - w_d/2, 0) - I_{11}(x - w_d/2, 0)] = \frac{\mu\Omega w_d}{\pi} \left[K_0\left(\frac{|x|}{\ell}\right) - K_2\left(\frac{|x|}{\ell}\right) \right] \tag{A.21}$$

Επομένως, οι συναρτήσεις Green για το πρόβλημα αλληλεπίδρασης με ένα οριζόντιο δίπολο ορθών εξαρμώσεων υπολογίζονται σε κλειστή μορφή (Εξ. (5.27) και (5.28)).



Παράρτημα Β

Ολοκληρώματα πεπερασμένου μέρους

Στο Παράρτημα αυτό δίνεται ο ορισμός του ολοκληρώματος πεπερασμένου μέρους (Hadamard Finite Part integral), βάσει του οποίου υπολογίζονται σε κλειστή μορφή τα υπεριδιόμορφα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στα προβλήματα ρωγμών στα Κεφάλαια 4 και 5.

Για κάθε συνάρτηση $\varphi(x) \in C^{n,a}(-1,1) \cap L^1[-1,1]$ με $0 < a \leq 1$, όπου $C^{n,a}$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων με n τάξης Hölder συνεχή παράγωγο και L^1 είναι ο χώρος των απολύτως ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με

$$L^1[-1,1] = \left\{ \varphi: [-1,1] \rightarrow \mathfrak{R}, \|\varphi\|_1 = \int_{-1}^1 |\varphi(x)| dx < \infty \right\}, \quad (\text{B.1})$$

το πεπερασμένο μέρος του υπεριδιόμορφου ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^n} dt, \quad |x| < 1, \quad (\text{B.2})$$

ορίζεται ως (Stolle and Strauss, 1992)

$$\text{FP} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^n} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^n} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^n} dt - \varepsilon^{1-n} \psi(x) \right\}, \quad (\text{B.3})$$

όπου $n > 1$ και

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\varepsilon^k}{(n-k-1)!} [1 + (-1)^{n-k}] \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}. \quad (\text{B.4})$$

Αν στην Εξ. (B.3) θέσουμε $n=1$ και $\psi(x)=0$, το ολοκλήρωμα γίνεται ολοκλήρωμα κύριας τιμής (Cauchy Principal Value), δηλαδή

$$\text{CPV} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \right\}. \quad (\text{B.5})$$

Αντίστοιχα, για $n=2$, $n=3$ και $n=4$, λαμβάνουμε σύμφωνα με τον ορισμό

$$\text{FP} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{2\varphi(x)}{\varepsilon} \right\} \quad (\text{B.6})$$

$$\text{FP} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^3} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^3} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^3} dt - \frac{2\varphi'(x)}{\varepsilon} \right\} \quad (\text{B.7})$$

$$\text{FP} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^4} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^4} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^4} dt - \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{2}{3} \varphi(x) + \varepsilon \varphi''(x) \right) \right\} \quad (\text{B.8})$$

όπου $\varphi(x) \in C^{n,a}(-1,1) \cap L^1[-1,1]$, με $n=2, 3, 4$ και $0 < a \leq 1$.

Εναλλακτικά, το ολοκλήρωμα πεπερασμένου μέρους μπορεί να οριστεί ως (Monegato, 1994)

$$\text{FP} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{n+1}} dt = \frac{1}{n} \frac{d}{dx} \text{FP} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^n} dt, \quad |x| < 1, \quad (\text{B.9})$$

όπου $\varphi(x) \in C^{n,a}(-1,1) \cap L^1[-1,1]$, με $n=2, 3, 4$ και $0 < a \leq 1$.

Επιπλέον, στην βιβλιογραφία συναντάται και ο ακόλουθος ορισμός (Monegato, 1994)

$$\text{FP} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^n} dt = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(x)(t-x)^k}{k!}}{(t-x)^n} dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} \text{FP} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(t-x)^{n-k}}. \quad (\text{B.10})$$

Σημειώνεται ότι για $\varphi(x) \in C^{n,a}(-1, 1) \cap L^1[-1, 1]$, το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της Εξ. (B.10) είναι ολοκλήρωμα Riemann.

Βάσει του ορισμού (Εξ. (B.9)), υπολογίζουμε τα παρακάτω ολοκληρώματα για $|x| < 1$ (ιδέ και [Kaya and Erdogan, 1987](#); [Chrysakis and Tsamasphyros, 1992](#); [Chan et al., 2003](#))

$$\text{CPV} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)(1-t^2)^{-1/2}}{x-t} dt = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ -\pi U_{n-1}(x), & n \geq 1, \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$\text{CPV} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{x-t} dt = \pi T_{n+1}(x), \quad n \geq 0, \quad (\text{B.12})$$

$$\text{FP} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{(x-t)^2} dt = -\pi(n+1)U_n(x), \quad n \geq 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \text{FP} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{(x-t)^3} dt = \\ = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\pi}{4(1-x^2)} [(n^2 + 3n + 2)U_{n-1}(x) - (n^2 + n)U_{n+1}(x)], & n \geq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \text{FP} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{3/2}}{(x-t)^2} dt = \\ = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} [U_0(x) - U_2(x)], & n = 0, \\ -\pi [U_1(x) - U_3(x)], & n = 1, \\ \frac{\pi}{4} [(n-1)U_{n-2}(x) - 2(n+1)U_n(x) + (n+3)U_{n+2}(x)], & n \geq 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned}
& \text{FP} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{3/2}}{(x-t)^4} dt = \\
& = \begin{cases} \pi, & n=0, \\ 4\pi U_1(x), & n=1, \\ 3\pi U_0(x) + 10\pi U_2(x), & n=2, \\ 4\pi [2U_1(x) + 5\pi U_3(x)], & n=3, \\ \frac{\pi}{96(1-x^2)^2} \left[(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)U_{n+4}(x) \right. \\ \quad - (4n^3 + 18n^2 + 44n + 30)U_{n+2}(x) \\ \quad + (6n^3 + 18n^2 + 54n + 42)U_n(x) & n \geq 4, \\ \quad - (4n^3 + 6n^2 + 20n + 18)U_{n-2}(x) \\ \quad \left. + (n^3 - n)U_{n-4}(x) \right], \end{cases} \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 T_n(t)(1-t^2)^{-1/2} \cdot \ln(|x-t|) dt = \begin{cases} -\pi \ln 2, & n=0, \\ -\frac{\pi}{n} T_n(x), & n \geq 1, \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

$$\int_{-1}^1 U_n(t)(1-t^2)^{1/2} \cdot \ln(|x-t|) dt = \begin{cases} \frac{\pi}{4} T_2(x) - \frac{\pi}{2} \ln 2, & n=0, \\ -\frac{\pi}{2} \left[\frac{T_n(x)}{n} - \frac{T_{n+2}(x)}{n+2} \right], & n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

$$\int_{-1}^1 U_n(t)(1-t^2)^{3/2} \cdot \ln(|x-t|) dt = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \left[T_2(x) - \frac{1}{8} T_4(x) - \frac{3}{2} \ln 2 \right], & n=0, \\ -\frac{\pi}{4} \left[T_1(x) - \frac{1}{2} T_3(x) + \frac{1}{10} T_5(x) \right], & n=1, \\ -\frac{\pi}{16} \left[3T_2(x) - \frac{3}{2} T_4(x) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{3} T_6(x) - 2 \ln 2 \right], & n=2, \\ \frac{\pi}{8} \left[\frac{T_{n-2}(x)}{n-2} - \frac{3T_n(x)}{n} \right. \\ \quad \left. + \frac{3T_{n+2}(x)}{n+2} - \frac{T_{n+4}(x)}{n+4} \right], & n \geq 3, \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

όπου $T_n(t)$ και $U_n(t)$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα Chebyshev πρώτου και δεύτερου είδους.

Για $|x| > 1$, τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ομαλά (μη-ιδιόμορφα) και υπολογίζονται βάσει των ακόλουθων εκφράσεων

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)(1-t^2)^{-1/2}}{x-t} dt = \pi \frac{\left[x - \operatorname{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2} \right]^n}{\operatorname{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2}}, \quad n \geq 0, \quad (\text{B.20})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{x-t} dt = \pi \left[x - \operatorname{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2} \right]^{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} \text{FP} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{(x-t)^2} dt &= -\pi(n+1) \left[1 - \frac{|x|}{(x^2-1)^{1/2}} \right] \\ &\times \left[x - \operatorname{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2} \right]^n, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{1/2}}{(x-t)^3} dt &= \frac{\pi}{2}(n+1) \left[x - \operatorname{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2} \right]^{n-1} \\ &\times \left[n \left(1 - \frac{|x|}{(x^2-1)^{1/2}} \right)^2 + \frac{|x| - (x^2-1)^{1/2}}{(x^2-1)^{3/2}} \right], \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{3/2}}{(x-t)^2} dt &= \\ &= \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \left[1 - 2x \left(x - \operatorname{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2} \right) \right], & n = 0, \\ \pi \left[x - \operatorname{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2} \right]^{n+1} \left[2x - (n+1) \operatorname{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2} \right], & n \geq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\text{FP} \int_{-1}^1 \frac{U_n(t)(1-t^2)^{3/2}}{(x-t)^4} dt = \frac{\pi(n+1)\text{sgn}(x) \left[x - \text{sgn}(x)(x^2-1)^{1/2} \right]^{n+1}}{6(x^2-1)^{3/2}} \quad (\text{B.25})$$

$$\times \left[3 - (n^2 + 2n + 3)(x^2 - 1) + 3(n+1)x\text{sgn}(x)(x^2 - 1)^{1/2} \right], \quad n \geq 0,$$

$$\int_{-1}^1 T_n(t)(1-t^2)^{-1/2} \cdot \ln(|x-t|) dt = \begin{cases} \pi \text{sgn}(x) \ln \left[x + (x^2 - 1)^{1/2} \right] & n = 0, \\ -\pi \ln 2, & \\ -\frac{\pi}{n} \left[x - \text{sgn}(x)(x^2 - 1)^{1/2} \right]^n, & n \geq 1, \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

$$\int_{-1}^1 U_n(t)(1-t^2)^{1/2} \cdot \ln(|x-t|) dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[x^2 - |x|(x^2 - 1)^{1/2} \right. \\ \left. + \ln \left(|x| + (x^2 - 1)^{1/2} \right) - \ln 2 - \frac{1}{2} \right], & n = 0, \\ -\frac{\pi}{2} x^{-n} \left[1 + \frac{(x^2 - 1)^{1/2}}{|x|} \right]^{-n} \\ \times \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+2)x^2} \left(1 + \frac{(x^2 - 1)^{1/2}}{|x|} \right)^{-2} \right], & n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

$$\int_{-1}^1 U_n(t)(1-t^2)^{3/2} \cdot \ln(|x-t|) dt = \begin{cases} -\frac{\pi}{8} \left[2x^4 - 6x^2 - x(2x^2 - 5)\text{sgn}(x)(x^2 - 1)^{1/2} \right. \\ \left. - 3 \ln \left(x + \text{sgn}(x)(x^2 - 1)^{1/2} \right) \right] - \frac{3\pi}{8} \left(\ln 2 + \frac{3}{4} \right), & n = 0, \\ -\frac{\pi}{4} \left[\frac{8}{5}x^5 - 4x^3 + 3x - \frac{8}{5}\text{sgn}(x)(x^2 - 1)^{5/2} \right], & n = 1, \\ \dots & \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 U_n(t)(1-t^2)^{3/2} \cdot \ln(|x-t|) dt =$$

$$= \begin{cases} \dots \\ -\frac{\pi}{24} [16x^6 - 42x^4 + 36x^2 \\ \quad + x(16x^4 + 34x^2 - 21) \operatorname{sgn}(x)(x^2 - 1)^{1/2} \\ \quad + 3 \ln(x + \operatorname{sgn}(x)(x^2 - 1)^{1/2})] + \frac{\pi}{8} \left(\ln 2 + \frac{29}{12} \right), & n = 2, \\ \frac{\pi}{(n^3 - 4n)(n + 4)} [x - \operatorname{sgn}(x)(x^2 - 1)^{1/2}]^n \\ \quad \times [-nx^2(n^2x^2 - 4x^2 - 2n^2 - 3n + 8) \\ \quad + nx(n^2x^2 - 4x^2 - n^2 + 10) \operatorname{sgn}(x)(x^2 - 1)^{1/2} \\ \quad - (n^3 + 3n^2 - 4n - 6)], & n \geq 3. \end{cases} \quad (\text{B.28})$$



Παράρτημα Γ

Αριθμητικοί κώδικες

Γ.1 Κώδικας περιγραφής εξαρμώσεων σε λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων

Στο Παράρτημα αυτό παρατίθεται οι αριθμητικοί κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διατριβή. Για την ανάλυση επίπεδων εξαρμώσεων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Κεφάλαιο 2) χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό [ABAQUS Standard \(2012\)](#). Η μοντελοποίηση και η ανάλυση των προβλημάτων διευκολύνεται μέσω της χρήσης της εφαρμογής CAE του παραπάνω λογισμικού. Εναλλακτικά, υπάρχει η δυνατότητα περιγραφής ενός προβλήματος μέσω ενός αρχείου εισαγωγής (input file). Ο παρακάτω κώδικας αποτελεί ένα απλό αρχείο εισαγωγής για το πρόβλημα αλληλεπίδρασης μίας επίπεδης εξάρμωσης με μία διεπιφάνεια δύο υλικών (Παράγραφος 2.3.2).

```
*HEADING
DISLOCATION EDGE IN A BIMATERIAL INTERFACE
*NODE
1, 0, 0
161, 160, 0
32001, 0, 160
32161, 160, 160
*NGEN, NSET=BOT
1, 161, 1
*NGEN, NSET=TOP
32001, 32161, 1
*NFILL, NSET=ALL
BOT, TOP, 160, 200
*NSET, NSET=LEFT, GENERATE
1, 32001, 200
*NSET, NSET=RIGHT, GENERATE
161, 32161, 200
**
*NSET, NSET=NCO, GENERATE
**16001, 16021, 1
16081, 16161, 1
```

```

*NSET, NSET=NCOU, GENERATE
16281, 16361, 1
*NSET, NSET=NCOR, GENERATE
16082, 16161, 1
*NSET, NSET=NCOD, GENERATE
15881, 15961, 1
*NSET, NSET=NCOL, GENERATE
16080, 16161, 1
**SHIFTED DISLOCATION CORE
***NSET, NSET=DISTIP
**16890
** DISLOCATION CORE
*NSET, NSET=DISTIPZ
16081
**
*ELEMENT, TYPE=CPE4
1, 1, 2, 202, 201
*ELGEN, ELSET=ALL
1, 160, 1, 1, 160, 200, 160
*ELSET, ELSET=GONE, GENERATE
20801, 25600, 1
**19201, 25600, 1
**17601, 25600, 1
**16001, 25600, 1
**14401, 25600, 1
**13601, 25600, 1
*ELSET, ELSET=WHOLE
ALL
**
*SOLID SECTION, ELSET=WHOLE, MATERIAL=AL, ORIENT=RECT
1.0, 0.0, 0.0
*SOLID SECTION, ELSET=GONE, MATERIAL=SQ, ORIENT=RECT
1.0, 0.0, 0.0
**
*ORIENTATION, NAME=RECT, SYSTEM=RECTANGULAR,
DEFINITION=COORDINATES
1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0
**
** E in 1010 Pa (Tungsten W)
**
*MATERIAL, NAME=AL
*ELASTIC
38.97, 0.218
**10.0, 0.05
*EXPANSION, TYPE=ORTHO
0.0, 1.0, 0.0, 20.0
**
** E in 1010 Pa (Copper Cu)
*MATERIAL, NAME=SQ
*ELASTIC
161.939, 0.103211
**0.000001, 0.5
**23.66, 0.189
**19.53, 0.295
**E and v for given Dundurs composite parameters, a and b
**31.3019, 0.486842
*EXPANSION, TYPE=ORTHO
0.0, 1.0, 0.0, 20.0
**
*BOUNDARY
**32001, 1, 2

```

```

161, 1, 2
1, 2
**
**
*INITIAL CONDITIONS, TYPE=TEMPERATURE
ALL, 0.0
*RESTART, WRITE, FREQ=500
**
**
*STEP
*STATIC
** a*DT= by/(2*(1+nu)*h)*(2/0.57735)
*TEMPERATURE, OP=MOD
**NCO, 1.422044252
NCOU, 1.422044252
**NCOR, 1.422044252
**NCOD, 1.422044252
**NCOL, 1.422044252
**
***NODE PRINT, NSET=ALL
**COOR1, COOR2, COOR3
***NODE PRINT, NSET=DISTIP
**COOR1, COOR2, COOR3
***NODE PRINT, NSET=DISTIPZ
**COOR1, COOR2, COOR3
**CONTOURS ARE CENTERED AT THE SHIFTED POINT (DISTIP)
**AND SHOULD INCLUDE THE DISLOCATION CORE (DISTIPZ)
*CONTOUR INTEGRAL, CONTOURS=50, TYPE=J
DISTIPZ, 1.0, 0.0, 0.0
*CONTOUR INTEGRAL, CONTOURS=50, TYPE=J
DISTIPZ, 0.0, 1.0, 0.0
*EL PRINT, ELSET=WHOLE, POSITION=CENTROIDAL, FREQUENCY=1000,
TOTALS=YES
ELSE
*END STEP
**
***STEP
***STATIC
***MODEL CHANGE, REMOVE
**GONE
***END STEP

```

Γ.2 Κώδικες επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις των προβλημάτων αλληλεπίδρασης κεντρικών ρωγμών με διακριτές εξαρμώσεις και δίπολα εξαρμώσεων (Κεφάλαια 4 και 5) επιλύθηκαν με χρήση του συμβολικού προγράμματος **MATHEMATICA**. Οι κώδικες αναπτύχθηκαν μέσω συναρτησιακού προγραμματισμού (functional programming), ώστε να επιταχυνθεί η διαδικασία επίλυσης. Παρακάτω, παρατίθενται ο κώδικας επίλυσης του προβλήματος αλληλεπίδρασης μίας κεντρικής ρωγμής με μία διακριτή ορθή εξάρμωση (Παράγραφος

4.2). Για διευκόλυνση των υπολογισμών, η συνάρτηση MeijerG έχει αντικατασταθεί με το ακόλουθο ανάπτυγμα που περιλαμβάνει τροποποιημένες συναρτήσεις Struve και Bessel

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\tilde{x} - \tilde{t}) \cdot G_{1,3}^{2,1} \left[\frac{p^2 (\tilde{x} - \tilde{t})^2}{4} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1/2, 1/2, 0 \end{matrix} \right] &= -4 \operatorname{sgn}(\tilde{x} - \tilde{t}) K_1(p|\tilde{x} - \tilde{t}|) - 2p(\tilde{x} - \tilde{t}) \\ &\times \left[2K_0(p|\tilde{x} - \tilde{t}|) + \pi L_1(p|\tilde{x} - \tilde{t}|) K_0(p|\tilde{x} - \tilde{t}|) + \pi L_0(p|\tilde{x} - \tilde{t}|) K_1(p|\tilde{x} - \tilde{t}|) \right] \end{aligned} \quad (\Gamma.1)$$

```

In[1]:= Remove ["Global` *"]
p = 10.0 ;
v = 0.3 ;
G = 10 ^ 9 ;
b = 1.0 ;
d = 2.5 ;
Nn = 40 ;
M = 120 ;

In[9]:= c1 = G * (3 - 2 * v) / 2 / Pi / (1 - v) ;
c2 = G / Pi ;

t = ParallelTable [N[Cos [(2 * j - 1) * Pi] / (2 * M)], {j, 1, M}]; (* integration points *)
x = ParallelTable [N[Cos [k * Pi / (Nn)], {k, 1, Nn - 1}]; (* collocation points *)
k1 [u_] = 1 / u (2 / p^2 (u)^2 - BesselK [2, p * Abs [u]] - 1 / 2);
k2 [u_] = (2 / p^2 (u)^2 - BesselK [2, p * Abs [u]]) + BesselK [0, p * Abs [u]] + N[Log [p * Abs [u]]];
k3 [u_] =
(-4 * Sign [u] * BesselK [1, Abs [u] * p] -
2 * p * (u) * (2 * BesselK [0, Abs [u] * p] + Pi * StruveL [1, p * (u)] * BesselK [0, Abs [u] * p] +
Pi * StruveL [0, Abs [u] * p] * BesselK [1, Abs [u] * p])) + 4 / (p * (u));

tk = Map [# [[]] &, x];
dislocsy = b G / (2 Pi (1 - v) (tk - d)) - (2 b G (-2 / (p^2 * (tk - d)^2) + BesselK [2, p * Abs [(tk - d)]]) / (Pi (tk - d)));
dislocmy = -b G BesselK [0, p * Abs [(tk - d)]] / Pi + 1 / Pi b G (-2 / (p^2 * (tk - d)^2) + BesselK [2, p * Abs [(tk - d)]]);
A[0] = 0;
B[0] = 0;

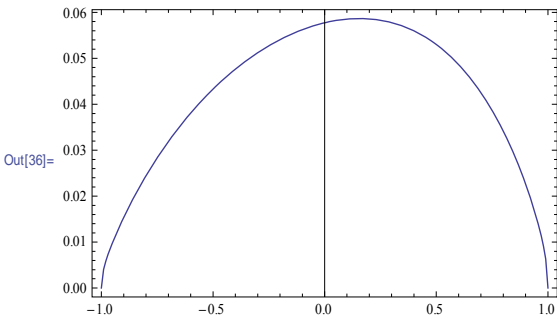
In[21]:= kk1 = Outer [k1 [#1 [[]] - #2 [[]]] &, x, t];
kk2 = Outer [k2 [#1 [[]] - #2 [[]]] &, x, t];
kk3 = Outer [k3 [#1 [[]] - #2 [[]]] &, x, t];
vvvr [n_] := Map [N[TrigReduce [ChebyshevT [n, # [[]]]] / M] &, t]
hh = ParallelSum [Map [A [n] * (-Pi) * c1 * TrigReduce [ChebyshevU [n - 1, # [[]]]] &, x], {n, 1, Nn - 1}] +
B[0] * (c2 * Pi * N[Log [2]]) + ParallelSum [Map [B [n] * Pi * c2 * TrigReduce [-ChebyshevT [n, # [[]]]] &, x] / n,
{n, 1, Nn - 1}] + ParallelSum [A [n] * 2 * G * kk1 . vvvr [n], {n, 1, Nn - 1}] -
ParallelSum [B [n] * G * kk2 . vvvr [n], {n, 1, Nn - 1}] - dislocsy ;
gg = ParallelSum [Map [B [n] * 2 * G / p^2 * TrigReduce [ChebyshevU [n - 1, # [[]]]] &, x], {n, 1, Nn - 1}] +
A[0] * (c2 * Pi * N[Log [2]]) + ParallelSum [Map [A [n] * Pi * c2 * TrigReduce [-ChebyshevT [n, # [[]]]] &, x] / n,
{n, 1, Nn - 1}] - ParallelSum [A [n] * G * kk2 . vvvr [n], {n, 1, Nn - 1}] +
ParallelSum [B [n] * G / (2 * p) * kk3 . vvvr [n], {n, 1, Nn - 1}] - dislocmy ;

ff1 = ParallelTable [A [k], {k, 1, Nn - 1}];
ff2 = ParallelTable [B [k], {k, 1, Nn - 1}];
ff = Join [ff1, ff2];
pp = Join [hh, gg];

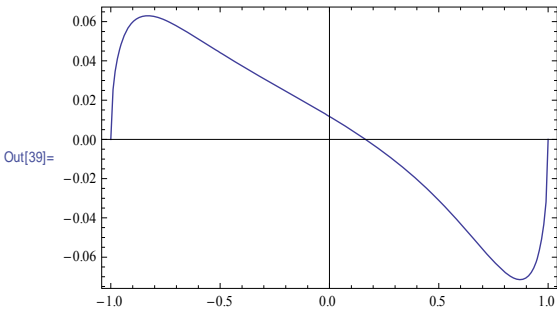
```

```
In[31]:= {bb, mm} = CoefficientArrays [pp, ff]
Out[31]:= {SparseArray[<78>, {78}], SparseArray[<6080>, {78, 78}]}

In[32]:= v = LinearSolve [mm, -bb];
In[33]:= v2 = v[[Nn ;; 2 * Nn - 2]];
In[34]:= disp [y_] :=
  Quiet @NIntegrate [-ParallelSum [v[[i]] + ChebyshevT [i, x] / Sqrt [1 - x^2], {i, 1, Nn - 1}] / 2, {x, -1, y}]
In[35]:= dispplot = ParallelTable [{x, disp [x]}, {x, -1.0, 1.0, 0.01}];
In[36]:= ListLinePlot [dispplot, PlotRange -> All, Frame -> True]
```



```
In[37]:= rot [y_] := Quiet @NIntegrate [Sum [v2[[i]] * ChebyshevT [i, x] / Sqrt [1 - x^2], {i, 1, Nn - 1}] / 2, {x, -1, y}]
In[38]:= rotplot = ParallelTable [{x, rot [x]}, {x, -1.0, 1.0, 0.01}];
In[39]:= ListLinePlot [rotplot, PlotRange -> All, Frame -> True]
```



$$\text{In[40]:= dislocsy} = \frac{b G}{2 \text{ Pi} (1 - \nu) (s - d)} - \frac{2 b G \left(-\frac{2}{p^2 * (s-d)^2} + \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [(s - d)]] \right)}{\text{Pi} (s - d)};$$

$$\text{dislocmy} = -\frac{b G \text{BesselK} [0, p * \text{Abs} [(s - d)]]}{\text{Pi}} + \frac{b G \left(-\frac{2}{p^2 * (s-d)^2} + \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [(s - d)]] \right)}{\text{Pi}};$$

```
In[42]:= kk1 = Outer [k1 [s - #[[[]]]] &, t];
kk2 = Outer [k2 [s - #[[[]]]] &, t];
kk3 = Outer [k3 [s - #[[[]]]] &, t];
```

$$\text{In[45]:= sy} [s_] = \text{ParallelSum} \left[\text{Part} [v, n] * \left(c1 * \text{Pi} * \frac{(s - (s^2 - 1)^{1/2} * \text{Sign} [s])^n}{(s^2 - 1)^{1/2} * \text{Sign} [s]} \right), \{n, 1, Nn - 1} \right] -$$

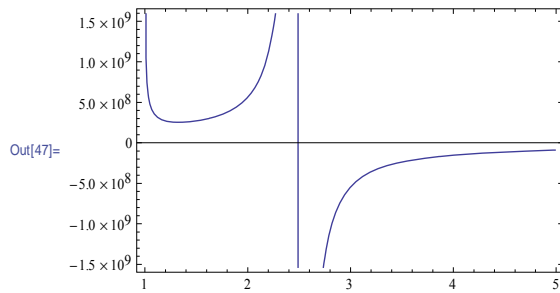
$$\text{ParallelSum} \left[\text{Part} [v2, n] * \left(c2 * \frac{\text{Pi} (s - \text{Sign} [s] * \sqrt{-1 + s^2})^n}{n} \right), \{n, 1, Nn - 1} \right] +$$

$$\text{ParallelSum} [\text{Part} [v, n] * 2 * G * kk1 . \text{vvr} [n], \{n, 1, Nn - 1}] -$$

$$\text{ParallelSum} [\text{Part} [v2, n] * G * kk2 . \text{vvr} [n], \{n, 1, Nn - 1}] - \text{dislocsy} + 0 * 10;$$

```
In[46]:= syplot = ParallelTable [{x, sy [x]}, {x, 1 + 1 / 10000, 5, 0.01}];
```

In[47]:= ListLinePlot [syypplot , Frame → True]



Out[47]=

$$\text{In[48]:= myz [s_] = ParallelSum [Part [v2, n] * \frac{2 * G}{\text{Pi} * p^2} * \left(-\text{Pi} * \frac{(s - (s^2 - 1)^{1/2} * \text{Sign} [s])^n}{(s^2 - 1)^{1/2} * \text{Sign} [s]} \right), \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] -$$

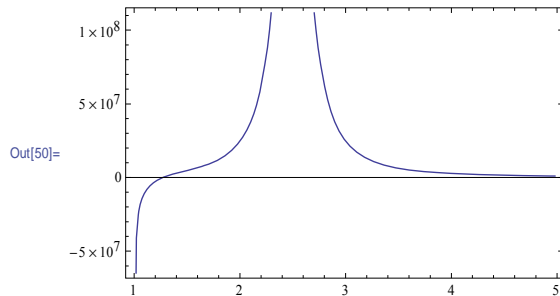
$$\text{ParallelSum [Part [v, n] * \left(c2 * \frac{\text{Pi} (s - \text{Sign} [s] * \sqrt{-1 + s^2})^n}{n} \right), \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] -}$$

$$\text{ParallelSum [Part [v, n] * G * kk2 . vvvv [n], \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] +}$$

$$\text{ParallelSum [Part [v2, n] * \frac{G}{2 * p} * kk3 . vvvv [n], \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] - \text{dislocmyz} ;$$

In[49]:= myzplot = ParallelTable [{x, myz [x]}, {x, 1 + 1/10000, 5, 0.02}];

In[50]:= ListLinePlot [myzplot , Frame → True]



Out[50]=

$$\text{In[51]:= KIright = Sqrt [2 * Pi] * Sum [Part [v, n] * \left(c1 * \text{Pi} * (s^2 - 1)^{1/2} * \frac{(s - (s^2 - 1)^{1/2} * \text{Sign} [s])^n}{(s^2 - 1)^{1/2} * \text{Sign} [s]} \right), \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] /. s \to 1$$

Out[51]= 3.75587×10^8

$$\text{In[52]:= KIleft = Sqrt [2 * Pi] * Sum [Part [v, n] * \left(c1 * \text{Pi} * (s^2 - 1)^{1/2} * \frac{(s - (s^2 - 1)^{1/2} * \text{Sign} [s])^n}{(s^2 - 1)^{1/2} * \text{Sign} [s]} \right), \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] /. s \to -1$$

Out[52]= 2.37363×10^8

In[53]:= JIright =

$$\frac{G * \text{Pi}}{2} * \left(\frac{3 - 2 * v}{4 * (1 - v)} * \text{Sum [Part [v, n], \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] * \text{Sum [Part [v, n], \{n, 1, \text{Nn} - 1\}]} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{p} \right)^2 * \text{Sum [Part [v2, n], \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] * \text{Sum [Part [v2, n], \{n, 1, \text{Nn} - 1\}]} \right)$$

Out[53]= 1.37466×10^7

In[54]:= JIleft =

$$-\frac{G * \text{Pi}}{2} * \left(\frac{3 - 2 * v}{4 * (1 - v)} * \text{Sum [Part [v, n] * (-1)^n, \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] * \text{Sum [Part [v, n] * (-1)^n, \{n, 1, \text{Nn} - 1\}]} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{p} \right)^2 * \text{Sum [Part [v2, n] * (-1)^n, \{n, 1, \text{Nn} - 1\}] * \text{Sum [Part [v2, n] * (-1)^n, \{n, 1, \text{Nn} - 1\}]} \right)$$

Out[54]= -6.2644×10^6

In[55]:= Jsum = JIright + JIleft

Out[55]= 7.48225×10^6


```
In[56]:= syy2 [s_] = Sum [Part [v, n] * (c1 * Pi * (s - (s^2 - 1)^(1/2) * Sign [s])^n) / ((s^2 - 1)^(1/2) * Sign [s])^n], {n, 1, Nn - 1}] -
Sum [Part [v2, n] * (c2 * Pi * (s - Sign [s] * Sqrt[-1 + s^2])^n) / n^n], {n, 1, Nn - 1}] +
Sum [Part [v, n] * 2 * G * kk1 . vvvz [n], {n, 1, Nn - 1}] - Sum [Part [v2, n] * G * kk2 . vvvz [n], {n, 1, Nn - 1}];

In[57]:= PK = syy2 [d]
Out[57]= 7.48225 * 10^6

In[58]:= PK * b / Jsum
Out[58]= 1.

In[59]:= {Klright, Klleft, Jlright, Jlleft}
Out[59]= {3.75587 * 10^8, 2.37363 * 10^8, 1.37466 * 10^7, -6.2644 * 10^6}
```

Στη συνέχεια, παρατίθενται ο κώδικας επίλυσης του προβλήματος αλληλεπίδρασης μίας κεντρικής ρωγμής με ένα δίπολο ορθών εξαρμώσεων (Παράγραφος 5.3)

```
In[1]:= Remove ["Global` *"]
p = 10.0 ;
v = 0.3 ;
G = 10 ^ 9;
b = 1.0 ;
d = 2.5 ;
w = 0.1 ;
Nn = 40 ;
M = 500 ;

In[10]:= c1 = G * (3 - 2 * v) / 2 / Pi / (1 - v) ;
c2 = G / Pi ;

t = ParallelTable [N[Cos [j * Pi / (M + 1) ]], {j, 1, M}]; (* integration points *)
x = ParallelTable [N[Cos [(2 * k + 1) * Pi / 2 / (Nn + 1) ]], {k, 0, Nn}]; (* collocation points *)
k1 [u_] := 12 / (p^2 (u)^4) - (1 + 6 BesselK [2, p * Abs [u]]) / (u)^2 +
p^2 (BesselK [0, p * Abs [u]] - BesselK [2, p * Abs [u]] + 1/4 N[Log [Abs [u]]])
k2 [u_] := 1/u (-4 / (p^2 (u)^2) + 2 BesselK [2, p * Abs [u]] + 1)
k3 [u_] := 2 / (p^2 (u)^2) + BesselK [0, p * Abs [u]] - BesselK [2, p * Abs [u]] + N[Log [Abs [u]]]
tk = Map [# [ ] &, x];
Finitesyy =
1/n b G ( 2 w ( 32/p^2 (w^2 + 12 (tk - d)^2) - (w^2 - 4 (tk - d)^2)^2 / (-1 + v) - 4 BesselK [2, p * Abs [-w/2 + tk - d]] / (w^2 - 4 (tk - d)^2)^3 - 4 BesselK [2, p * Abs [w/2 + tk - d]] / (w + 2 (tk - d)) );
Finitesyz =
1/n b G ( 64 w (tk - d) / (p^2 (w^2 - 4 (tk - d)^2)^2) + BesselK [0, p * Abs [-w/2 + tk - d]] - BesselK [0, p * Abs [w/2 + tk - d]] - BesselK [2, p * Abs [-w/2 + tk - d]] + BesselK [2, p * Abs [w/2 + tk - d]] );
```

```

Infinimalsy =
  -  $\frac{p^2}{2 \pi (tk - d)^4 (-1 + v)}$  b G w
   $\left( -\frac{24}{p^4} - \frac{1}{p^2} (tk - d)^2 + \frac{24}{p^4} v + 2 (tk - d)^4 (-1 + v) \text{BesselK} [0, p * \text{Abs} [tk - d]] - \right.$ 
   $\left. 2 (tk - d)^2 \left( \frac{6}{p^2} + (tk - d)^2 \right) (-1 + v) \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [tk - d]] \right);$ 
Infinimalmyz =  $-\frac{2 \left( b G \left( -\frac{2}{p^2} + (tk - d)^2 \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [tk - d]] \right) \right) w}{\pi (tk - d)^3};$ 

In[22]= kk1 = Outer [k1 [#1 [[]] - #2 [[]]] &, x, t];
kk2 = Outer [k2 [#1 [[]] - #2 [[]]] &, x, t];
kk3 = Outer [k3 [#1 [[]] - #2 [[]]] &, x, t];
vvvr [n_] := Map [N [  $\frac{1 - (\# [[]])^2}{1 + M} * \text{TrigReduce} [\text{ChebyshevU} [n, \# [[]]]]$  ] &, t]
hh = ParallelSum [Map [A [n] * (-Pi * c1 * (n + 1) * TrigReduce [ChebyshevU [n, # [[]]]] &, x], {n, 0, Nn}] -
ParallelSum [Map [B [n] * (Pi * c2 * TrigReduce [ChebyshevT [n + 1, # [[]]]] &, x], {n, 0, Nn}] -
 $\frac{1}{4} p^2 * c2 * A [0] * \left( \frac{\text{Pi}}{4} * \text{Map} [\text{TrigReduce} [\text{ChebyshevT} [2, \# [[]]]] \&, x] - \frac{\text{Pi}}{2} * \text{N} [\text{Log} [2]] \right) +$ 
ParallelSum [
Map [
A [n] *
 $\left( -\frac{1}{4} * p^2 * c2 * \left( \frac{1}{2} * \pi \left( -\frac{\text{TrigReduce} [\text{ChebyshevT} [n, \# [[]]]]}{n} + \frac{\text{TrigReduce} [\text{ChebyshevT} [2 + n, \# [[]]]]}{2 + n} \right) \right) \right) \&$ ,
x], {n, 1, Nn}] + ParallelSum [A [n] * c2 * Pi * kk1.vvvr [n], {n, 0, Nn}] +
Sum [B [n] * c2 * Pi * kk2.vvvr [n], {n, 0, Nn}] - 1 * Infinimalsy - 0 * Finitesy ;
gg = ParallelSum [Map [-B [n] *  $\frac{2}{p^2} * c2 (-\text{Pi} * (n + 1) * \text{TrigReduce} [\text{ChebyshevU} [n, \# [[]]]] \&, x]$ , {n, 0, Nn}] -
ParallelSum [Map [A [n] * Pi * c2 * TrigReduce [ChebyshevT [n + 1, # [[]]]] &, x], {n, 0, Nn}] -
c2 * B [0] *  $\left( \frac{\text{Pi}}{4} * \text{Map} [\text{TrigReduce} [\text{ChebyshevT} [2, \# [[]]]] \&, x] - \frac{\text{Pi}}{2} * \text{N} [\text{Log} [2]] \right) +$ 
ParallelSum [
Map [B [n] *  $\left( -c2 * \left( \frac{1}{2} * \pi \left( -\frac{\text{TrigReduce} [\text{ChebyshevT} [n, \# [[]]]]}{n} + \frac{\text{TrigReduce} [\text{ChebyshevT} [2 + n, \# [[]]]]}{2 + n} \right) \right) \right) \right) \&$ ,
x], {n, 1, Nn}] + ParallelSum [A [n] * c2 * Pi * kk2.vvvr [n], {n, 0, Nn}] +
ParallelSum [B [n] * c2 * Pi * kk3.vvvr [n], {n, 0, Nn}] - 1 * Infinimalmyz - 0 * Finitemyz ;
ff1 = ParallelTable [A [k], {k, 0, Nn}];
ff2 = ParallelTable [B [k], {k, 0, Nn}];
ff = Join [ff1, ff2];
pp = Join [hh, gg];

In[32]= {bb, mm} = CoefficientArrays [pp, ff]
Out[32]= {SparseArray[<82>, {82}], SparseArray[<6724>, {82, 82}]}

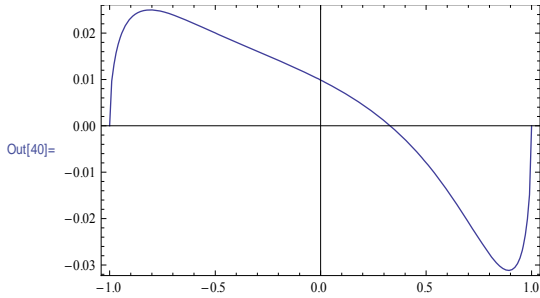
In[33]= v = LinearSolve [mm, -bb];
In[34]= v2 = v [[Nn + 2 ;; 2 * Nn + 2]];
In[35]= disp [y_] = ParallelSum [v [[i + 1]] * ChebyshevU [i, y] * Sqrt [1 - y^2], {i, 0, Nn}] / 2 / w / b;
In[36]= dispplot = ParallelTable [{x, disp [x]}, {x, -1, 1, 0.01}];
In[37]= ListLinePlot [dispplot, Frame -> True]

```

```
In[38]:= rot [y_] = -ParallelSum [v2 [[i + 1]] * ChebyshevU [i, y] * Sqrt [1 - y^2], {i, 0, Nn}] / 2 / w / b;
```

```
In[39]:= rotplot = ParallelTable [{x, rot [x]}, {x, -1, 1, 0.01}];
```

```
In[40]:= ListLinePlot [rotplot, Frame -> True]
```



```
In[41]:= Finitesyy =
```

$$\frac{1}{\pi} b G \left(\frac{2 w \left(\frac{32}{p^2} (w^2 + 12 (s-d)^2) - \frac{(w^2 - 4 (s-d)^2)^2}{-1+v} \right)}{(w^2 - 4 (s-d)^2)^3} - \frac{4 \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [-\frac{w}{2} + s - d]]}{w - 2 (s-d)} - \frac{4 \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [\frac{w}{2} + s - d]]}{w + 2 (s-d)} \right);$$

```
Finitemyz =
```

$$\frac{1}{\pi} b G \left(\frac{64 w (s-d)}{p^2 (w^2 - 4 (s-d)^2)^2} + \text{BesselK} [0, p * \text{Abs} [-\frac{w}{2} + s - d]] - \text{BesselK} [0, p * \text{Abs} [\frac{w}{2} + s - d]] - \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [-\frac{w}{2} + s - d]] + \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [\frac{w}{2} + s - d]] \right);$$

```
Infinitesimalsyy =
```

$$-\frac{p^2}{2 \pi (s-d)^4 (-1+v)} b G w \left(-\frac{24}{p^4} - \frac{1}{p^2} (s-d)^2 + \frac{24}{p^4} v + 2 (s-d)^4 (-1+v) \text{BesselK} [0, p * \text{Abs} [s-d]] - 2 (s-d)^2 \left(\frac{6}{p^2} + (s-d)^2 \right) (-1+v) \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [s-d]] \right);$$

$$\text{Infinitesimalmyz} = -\frac{2 \left(b G \left(-\frac{2}{p^2} + (s-d)^2 \text{BesselK} [2, p * \text{Abs} [s-d]] \right) \right) w}{\pi (s-d)^3};$$

```
In[45]:= kk1 = Outer [k1 [s - # [[]]] &, t];
```

```
kk2 = Outer [k2 [s - # [[]]] &, t];
```

```
kk3 = Outer [k3 [s - # [[]]] &, t];
```

```
In[48]:= syy [s_] = ParallelSum [v [[n + 1]] * (c1 * ( -Pi (n + 1) ( 1 - \frac{Abs [s]}{(s^2 - 1)^{1/2}} ) (s - Sign [s] (s^2 - 1)^{1/2})^n ), {n, 0, Nn}] -
```

```
ParallelSum [v2 [[n + 1]] * c2 * (Pi * (s - Sign [s] * (s^2 - 1)^{1/2})^{n+1}), {n, 0, Nn}] -
```

```
\frac{1}{4} p^2 * c2 * v [[1]] * ( \frac{Pi}{2} (s^2 - Abs [s] Sqrt [s^2 - 1]) + N [Log [Abs [s] + Sqrt [s^2 - 1]]] - N [Log [2]] - 1 / 2) +
```

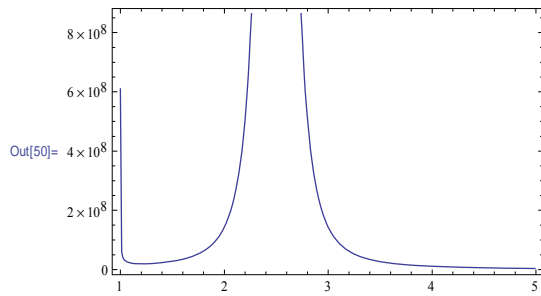
```
ParallelSum [v [[n + 1]] * ( -\frac{1}{4} p^2 * c2 * ( -\frac{Pi}{2} s^{-n} ( 1 + \frac{Sqrt [s^2 - 1]}{Abs [s]} )^{-n} ( \frac{1}{n} - \frac{1}{(n + 2) s^2} ( 1 + \frac{Sqrt [s^2 - 1]}{Abs [s]} )^{-2} ) ) )],
```

```
{n, 1, Nn}] + ParallelSum [v [[n + 1]] * c2 * Pi * kk1 . vvr [n], {n, 0, Nn}] +
```

```
ParallelSum [v2 [[n + 1]] * c2 * Pi * kk2 . vvr [n], {n, 0, Nn}] - 1 * Infinitesimalsyy - 0 * Finitesyy ;
```

```
In[49]:= syyplot = ParallelTable [{x, syy [x]}, {x, 1 + 1 / 10000, 5, 0.01}];
```

```
In[50]= ListLinePlot [syypplot , Frame → True ]
```



```
Out[50]=
```

$$\text{myz}[s_] = \text{ParallelSum} \left[-\sqrt{2}[[n+1]] * \frac{2}{p^2} * c2 \left(-\text{Pi} (n+1) \left(1 - \frac{\text{Abs}[s]}{(s^2-1)^{1/2}} \right) (s - \text{Sign}[s] (s^2-1)^{1/2})^n \right), \{n, 0, \text{Nn}\} \right] -$$

$$\text{ParallelSum} \left[v[[n+1]] * c2 * (\text{Pi} * (s - \text{Sign}[s] * (s^2-1)^{1/2})^{n+1}), \{n, 0, \text{Nn}\} \right] -$$

$$c2 * \sqrt{2}[[1]] * \left(\frac{\text{Pi}}{2} (s^2 - \text{Abs}[s] \text{Sqrt}[s^2-1]) + \text{N}[\text{Log}[\text{Abs}[s] + \text{Sqrt}[s^2-1]]] - \text{N}[\text{Log}[2]] - 1/2 \right) +$$

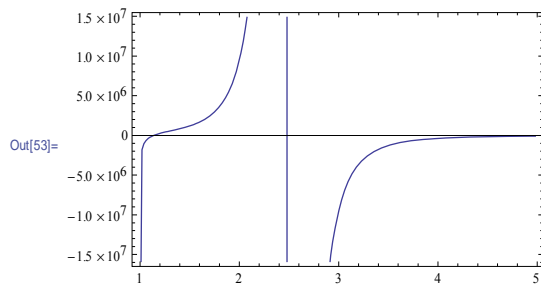
$$\text{ParallelSum} \left[\sqrt{2}[[n+1]] * \left(-c2 * \left(-\frac{\text{Pi}}{2} s^{-n} \left(1 + \frac{\text{Sqrt}[s^2-1]}{\text{Abs}[s]} \right)^{-n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+2)s^2} \left(1 + \frac{\text{Sqrt}[s^2-1]}{\text{Abs}[s]} \right)^{-2} \right) \right) \right), \{n, 1, \text{Nn}\} \right] +$$

$$\text{ParallelSum} \left[v[[n+1]] * c2 * \text{Pi} * \text{kk2} \cdot \text{vvvr}[n], \{n, 0, \text{Nn}\} \right] + \text{Sum} \left[\sqrt{2}[[n+1]] * c2 * \text{Pi} * \text{kk3} \cdot \text{vvvr}[n], \{n, 0, \text{Nn}\} \right] -$$

$$1 * \text{Infinitesimalmyz} - 0 * \text{Finitemyz} ;$$

```
In[52]= myzplot = ParallelTable [{x, myz[x]}, {x, 1 + 1/10000, 5, 0.02}];
```

```
In[53]= ListLinePlot [myzplot , Frame → True ]
```



```
In[54]= Ktright = Sqrt[2*Pi] * Sum[v[[n+1]] * (c1 * (Pi (n+1))), {n, 0, Nn}] /. s → 1
```

```
Out[54]= 2.16125 × 107
```

```
In[55]= Kleft = Sqrt[2*Pi] * Sum[v[[n+1]] * (-1)^n * (c1 * (Pi (n+1))), {n, 0, Nn}] /. s → -1
```

```
Out[55]= 8.51701 × 106
```

```
In[56]= Jtright =
```

$$\frac{G * \text{Pi}}{2} * \left(\frac{3 - 2 * v}{4 * (1 - v)} * \text{Sum}[v[[n+1]] * (n+1), \{n, 0, \text{Nn}\}] * \text{Sum}[v[[n+1]] * (n+1), \{n, 0, \text{Nn}\}] + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{p} \right)^2 * \text{Sum}[v2[[n+1]] * (n+1), \{n, 0, \text{Nn}\}] * \text{Sum}[v2[[n+1]] * (n+1), \{n, 0, \text{Nn}\}] \right)$$

```
Out[56]= 41649.3
```

```
In[57]= Jleft =
```

$$-\frac{G * \text{Pi}}{2} * \left(\frac{3 - 2 * v}{4 * (1 - v)} * \text{Sum}[v[[n+1]] * (n+1) * (-1)^n, \{n, 0, \text{Nn}\}] * \text{Sum}[v[[n+1]] * (n+1) * (-1)^n, \{n, 0, \text{Nn}\}] + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{p} \right)^2 * \text{Sum}[v2[[n+1]] * (n+1) * (-1)^n, \{n, 0, \text{Nn}\}] * \text{Sum}[v2[[n+1]] * (n+1) * (-1)^n, \{n, 0, \text{Nn}\}] \right)$$

```
Out[57]= -8393.
```

```
In[58]= Jsum = Jtright + Jleft
```

```
Out[58]= 33256.3
```

```
In[59]:= syy2 [s_] = ParallelSum [v [[n + 1]] * (c1 * (-Pi (n + 1) (1 - Abs [s] / (s^2 - 1)^{1/2}) (s - Sign [s] (s^2 - 1)^{1/2})^n)), {n, 0, Nn}] -
ParallelSum [v2 [[n + 1]] * c2 * (Pi * (s - Sign [s] * (s^2 - 1)^{1/2})^{n+1}), {n, 0, Nn}] -
1/4 p^2 * c2 * v [[1]] * (Pi/2 (s^2 - Abs [s] Sqrt [s^2 - 1]) + N[Log [Abs [s] + Sqrt [s^2 - 1]]] - N[Log [2]] - 1/2)) +
ParallelSum [v [[n + 1]] * (-1/4 p^2 * c2 * (-Pi/2 s^{-n} (1 + Sqrt [s^2 - 1] / Abs [s])^{-n} (1/n - 1/(n + 2) s^2 (1 + Sqrt [s^2 - 1] / Abs [s])^{-2}))),
{n, 1, Nn}] + ParallelSum [v [[n + 1]] * c2 * Pi * kk1 . vvvr [n], {n, 0, Nn}] +
ParallelSum [v2 [[n + 1]] * c2 * Pi * kk2 . vvvr [n], {n, 0, Nn}];
```

```
In[60]:= PK1 = syy2 [d - w/2]
```

```
Out[60]= 361172.
```

```
In[61]:= PK2 = syy2 [d + w/2]
```

```
Out[61]= 327885.
```

```
In[62]:= (PK1 - PK2) * b / Jsum
```

```
Out[62]= 1.0009
```

```
In[63]:= {Klright , Klleft , Jlright , Jlleft }
```

```
Out[63]= {2.16125 × 10^7, 8.51701 × 10^6, 41649.3, -8393.}
```



Βιβλιογραφία

- ABAQUS, version 6.12, 2012. User's Manual. Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc., Pawtucket, RI.
- Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1964. *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55.
- Aero, E., Kuvshinskii, E., 1961. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Sov. Phys. – Sol. State* 2, 1272-1281.
- Altenbach, H., Eremeyev, V.A., 2013. *Generalized Continua from the theory to engineering applications*. Springer.
- Amanatidou, E., Aravas, N., 2002. Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 191, 1723-1751.
- Amodeo, R.J., Ghoniem, N.M., 1990. Dislocation dynamics. I. A proposed methodology for deformation micromechanics. *J. Phys. F: Met. Phys.* 41, 6958-6967.
- Anthony, K.-H., 1970. Die theorie der disklationen. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 39, 43-88.
- Aravas, N., Giannakopoulos, A.E., 2009. Plane asymptotic crack-tip solutions in gradient elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 46, 4478-4503.
- Asaro, R., Lubarda, V., 2006. *Mechanics of Solids and Materials*. Cambridge University Press, New York.
- Asaro, R.J., 1975. An image force theorem for a dislocation near a crack in an anisotropic elastic medium. *J. Phys. F: Met. Phys.* 5, 2249.
- Aslanides, A., Pontikis, V., 1998. Atomistic study of dislocation cores in aluminium and copper. *Comput. Mater. Sci.* 10, 401-405.
- Atkinson, C., 1966. The interaction between a dislocation and a crack. *Int. J. Fract. Mech.* 2, 567-575.
- Atkinson, C., Leppington, F.G., 1974. Some calculations of the energy-release rate G for cracks in micropolar and couple-stress elastic media. *Int. J. Fract.* 10, 599-602.
- Atkinson, C., Leppington, F.G., 1977. The effect of couple stresses on the tip of a crack. *Int. J. Solids Struct.* 13, 1103-1122.

- Ballarini, R., Denda, M., 1988. The interaction between a crack and a dislocation dipole. *Int. J. Fract.* 37, 61-71.
- Barber, J.R., 2010. *Elasticity, 3rd ed.* Springer, Netherlands.
- Batra, R.C., 1987. The force on a lattice defect in an elastic body. *J. Elasticity* 17, 3-8.
- Baxevanakis, K.P., Giannakopoulos, A.E., 2010. Finite element analysis of discrete circular dislocations. *Comput. Model. Eng. Sci.* 60, 181-198.
- Begley, M.R., Hutchinson, J.W., 1998. The mechanics of size-dependent indentation. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 2049-2068.
- Beveridge, A.J., Wheel, M.A., Nash, D.H., 2013. The micropolar elastic behaviour of model macroscopically heterogeneous materials. *Int. J. Solids Struct.* 50, 246-255.
- Bigoni, D., Drugan, W.J., 2007. Analytical derivation of Cosserat moduli via homogenization of heterogeneous elastic materials. *J. Appl. Mech.* 74, 741-753.
- Bilby, B.A., Cottrell, A.H., Swinden, K.H., 1963. The spread of plastic yield from a notch. *Proc. R. Soc. Lond. A* 272, 304-314.
- Bilby, B.A., Eshelby, J.D., 1968. *Dislocations and the theory of fracture*, in: Liebowitz, H. (Ed.), *Fracture*, Vol. 1. Academic Press, New York.
- Biot, M., 1935. Distributed gravity and temperature loading in two-dimensional elasticity replaced by boundary pressures and dislocations. *J. Appl. Mech.* 2, 41-45.
- Bueckner, H.F., 1958. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. *J. Appl. Mech.* 80, 1225-1230.
- Burgers, J.M., 1939. Some considerations on the fields of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice. Parts I and II. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap.*, pp. 293-325, 378-399.
- Burridge, R., 1976. An influence function for the intensity factor in tensile fracture. *Int. J. Eng. Sci.* 14, 725-734.
- Carrier, G.F., Krook, M., Pearson, C.E., 2005. *Functions of a complex variable: Theory and technique.* Siam.
- Carter, C.B., Norton, M.G., 2007. *Ceramic materials.* Springer.
- Chan, Y.-S., Fannjiang, A.C., Paulino, G.H., 2003. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *Int. J. Eng. Sci.* 41, 683-720.
- Chan, Y.-S., Paulino, G.H., Fannjiang, A.C., 2001. The crack problem for nonhomogeneous materials under antiplane shear loading – a displacement based formulation. *Int. J. Solids Struct.* 38, 2989-3005.

- Charalambopoulos, A., Gergidis, L., 2008. On the dyadic scattering problem in three-dimensional gradient elasticity: an analytic approach. *J. Phys. A: Math. Theor.* 41, 395203.
- Chen, J.Y., Huang, Y., Ortiz, M., 1998. Fracture analysis of cellular materials: A strain gradient model. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 789-828.
- Cherepanov, G.P., 1988. Closure of microcracks during unloading and the formation of reverse dislocations. *Sov. Appl. Mech+* 24, 635-648.
- Chia, K.Y., Burns, S.J., 1984. Crack tip deformation in LiF single crystals. *Scripta Metall.* 18, 467-472.
- Christian, J.W., Mahajan, S., 1995. Deformation twinning. *Prog. Mater Sci.* 39, 1-157.
- Chrysakis, A.C., Tsamasphyros, G., 1992. Numerical solution of integral equations with a logarithmic kernel by the method of arbitrary collocation points. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 33, 143-148.
- Cohen, H., 1966. Dislocations in couple-stress elasticity. *J. Math. Phys.* 45, 35-44.
- Comninou, M., 1987. The interaction between a dislocation and a crack: Closure considerations. *Mech. Res. Commun.* 14, 245-253.
- Cook, T.S., Weitsman, Y., 1966. Strain-gradient effects around spherical inclusions and cavities. *Int. J. Solids Struct.* 2, 393-406.
- Cordier, P., Demouchy, S., Beausir, B., Taupin, V., Barou, F., Fressengeas, C., 2014. Disclinations provide the missing mechanism for deforming olivine-rich rocks in the mantle. *Nature* 507, 51-56.
- Cosserat, E., Cosserat, F., 1909. *Théorie des corps déformables*. Hermann et Fils, Paris.
- Dai, D.N., 2002. Modelling cracks in finite bodies by distributed dislocation dipoles. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 25, 27-39.
- deWit, R., 1973. Theory of disclinations. IV. Straight disclinations. *J. Res. N.B.S. A Phys. Ch.* 77A, 608-658.
- Dubourg, M., Villechaise, B., 1989. Unilateral contact analysis of a crack with frictions. *Eur. J. Mech. A. Solids* 8, 309-319.
- Dundurs, J., 1969. *Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities*, in: Mura, T. (Ed.), *Mathematical theory of dislocations*. ASME, New York, pp. 70-115.
- Dundurs, J., Gangadharan, A.C., 1969. Edge dislocation near an inclusion with a slipping interface. *J. Mech. Phys. Solids* 17, 459-471.
- Dundurs, J., Markenscoff, X., 1989. A Green's function formulation of anticracks and their Interaction with load-induced singularities. *J. Appl. Mech.* 56, 550-555.

- Dundurs, J., Mura, T., 1964. Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion. *J. Mech. Phys. Solids* 12, 177-189.
- Dundurs, J., Sendekyj, G., 1965. Behavior of an edge dislocation near a bimetallic interface. *J. Appl. Phys.* 36, 3353-3354.
- Ejike, U.B.C.O., 1969. The plane circular crack problem in the linearized couple-stress theory. *Int. J. Eng. Sci.* 7, 947-961.
- Elssner, G., Korn, D., Rühle, M., 1994. The influence of interface impurities on fracture energy of UHV diffusion bonded metal-ceramic bicrystals. *Scripta Metall. Mater.* 31, 1037-1042.
- Engel, G., Garikipati, K., Hughes, T.J.R., Larson, M.G., Mazzei, L., Taylor, R.L., 2002. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 191, 3669-3750.
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G., Bateman, H., 1953. *Higher transcendental functions*. McGraw-Hill, New York.
- Erdogan, F., Gupta, G.D., 1972. On the numerical solution of singular integral equations. *Q. Appl. Math.* 30, 525-534.
- Eringen, A., 1999. *Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids*. Springer-Verlag, New York.
- Eringen, A.C., 1962. *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill, New York.
- Eringen, A.C., 1966. Linear theory of micropolar elasticity. *J. Math. Mech.* 15, 909-923.
- Eringen, A.C., 1968. *Theory of micropolar elasticity*, in: Liebowitz, H. (Ed.), *Fracture – An Advanced Treatise*, Vol. 2. Academic Press, New York, pp. 621-729.
- Eringen, A.C., 1971. *Micropolar elastic solids with stretch*, Prof. Dr Mustafa Inan Anisina. Ari Kitabevi Matbaasi, Istanbul, pp. 1-18.
- Eringen, A.C., 1990. Theory of thermo-microstretch elastic solids. *Int. J. Eng. Sci.* 28, 1291-1301.
- Eringen, A.C., Şuhubi, E.S., 1964. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids–I. *Int. J. Eng. Sci.* 2, 189-203.
- Eshel, N.N., Rosenfeld, G., 1970. Effects of strain-gradient on the stress-concentration at a cylindrical hole in a field of uniaxial tension. *J. Eng. Math.* 4, 97-111.
- Eshelby, J.D., 1951. The force on an elastic singularity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 244, 87-112.

- Eshelby, J.D., 1966. A simple derivation of the elastic field of an edge dislocation. *Br. J. Appl. Phys.* 17, 11131-1135.
- Eshelby, J.D., Read, W.T., Shockley, W., 1953. Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory. *Acta Metall.* 1, 251-259.
- Estrada, R., Kanwal, R.P., 2000. *Singular integral equations*. Birkhäuser, Boston.
- Ewing, J.A., Rosenhain, W., 1900. Bakerian Lecture: The Crystalline Structure of Metals. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 193, 353-375.
- Exadaktylos, G.E., Vardoulakis, I., 1998. Surface instability in gradient elasticity with surface energy. *Int. J. Solids Struct.* 35, 2251-2281.
- Fafalis, D.A., Filopoulos, S.P., Tsamasphyros, G.J., 2012. On the capability of generalized continuum theories to capture dispersion characteristics at the atomic scale. *Eur. J. Mech. A. Solids* 36, 25-37.
- Farnell, G.W., 1978. *Types and properties of surface waves*, in: Oliner, A.A. (Ed.), *Acoustic Surface Waves*. Springer, pp. 13-60.
- Filopoulos, S.P., Papathanasiou, T.K., Markolefas, S.I., Tsamasphyros, G.J., 2010. Dynamic finite element analysis of a gradient elastic bar with micro-inertia. *Comput. Mech.* 45, 311-319.
- Fisher, B., 1971. The product of distributions. *Q. J. Math.* 22, 291-298.
- Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 2001. A reformulation of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 49, 2245-2271.
- Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F., Hutchinson, J.W., 1994. Strain gradient plasticity: Theory and experiment. *Acta Metall. Mater.* 42, 475-487.
- Fleck, N.A., Shu, J.Y., 1995. Microbuckle initiation in fibre composites : A finite element study. *J. Mech. Phys. Solids* 43, 1887-1918.
- Frank, F.C., 1958. I. Liquid crystals. On the theory of liquid crystals. *Disc. Faraday Soc.* 25, 19-28.
- Freund, L.B., 1972. Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. *J. Elasticity* 2, 341-349.
- Freund, L.B., 1978. Stress intensity factor calculations based on a conservation integral. *Int. J. Solids Struct.* 14, 241-250.
- Gakhov, F., 1966. *Boundary Value Problems*. Pergamon Press Ltd.
- Gao, H., Huang, Y., Nix, W.D., Hutchinson, J.W., 1999. Mechanism-based strain gradient plasticity— I. Theory. *J. Mech. Phys. Solids* 47, 1239-1263.

- Gars, B., Markenscoff, X., 2012. The Peierls stress for coupled dislocation partials near a free surface. *Philos. Mag.* 92, 1390-1421.
- Gazis, D.C., Herman, R., Wallis, R.F., 1960. Surface elastic waves in cubic crystals. *Phys. Rev.* 119, 533-544.
- Gel'fand, I., Shilov, G., 1964. *Generalized Functions, Vol. 1*. Academic Press, New York.
- Georgiadis, H.G., 2003. The Mode III crack problem in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity: Static and dynamic analysis. *J. Appl. Mech.* 70, 517-530.
- Georgiadis, H.G., Vardoulakis, I., Lykotrafitis, G., 2000. Torsional surface waves in a gradient-elastic half-space. *Wave Motion* 31, 333-348.
- Georgiadis, H.G., Vardoulakis, I., Velgaki, E.G., 2004. Dispersive Rayleigh-Wave Propagation in Microstructured Solids Characterized by Dipolar Gradient Elasticity. *J. Elasticity* 74, 17-45.
- Georgiadis, H.G., Velgaki, E.G., 2003. High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effects. *Int. J. Solids Struct.* 40, 2501-2520.
- Giannakopoulos, A.E., Amanatidou, E., Aravas, N., 2006. A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding Saint-Venant principle. *Int. J. Solids Struct.* 43, 3875-3894.
- Giannakopoulos, A.E., Aravas, N., Papageorgopoulou, A., Vardoulakis, I., 2013. A structural gradient theory of torsion, the effects of pretwist, and the tension of pretwisted DNA. *Int. J. Solids Struct.* 50, 3922-3933.
- Giannakopoulos, A.E., Baxevanakis, K.P., Gouldstone, A., 2007. Finite element analysis of Volterra dislocations in anisotropic crystals: A thermal analogue. *Arch. Appl. Mech.* 77, 113-122.
- Giannakopoulos, A.E., Petridis, S., Sophianopoulos, D.S., 2012. Dipolar gradient elasticity of cables. *Int. J. Solids Struct.* 49, 1259-1265.
- Giannakopoulos, A.E., Stamoulis, K., 2007. Structural analysis of gradient elastic components. *Int. J. Solids Struct.* 44, 3440-3451.
- Gourgiotis, P., Georgiadis, H., Sifnaiou, M., 2012. Couple-stress effects for the problem of a crack under concentrated shear loading. *Math. Mech. Solids* 17, 433-459.
- Gourgiotis, P., Piccolroaz, A., 2014. Steady-state propagation of a mode II crack in couple stress elasticity. arXiv: 1304.7444.
- Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2007. Distributed dislocation approach for cracks in couple-stress elasticity: shear modes. *Int. J. Fract.* 147, 83-102.

- Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2008. An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 45, 5521-5539.
- Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2009. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 57, 1898-1920.
- Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., Neocleous, I., 2013. On the reflection of waves in half-spaces of microstructured materials governed by dipolar gradient elasticity. *Wave Motion* 50, 437-455.
- Gracie, R., Ventura, G., Belytschko, T., 2007. A new fast finite element method for dislocations based on interior discontinuities. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 69, 423-441.
- Green, A.E., Rivlin, R.S., 1964. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17, 113-147.
- Grentzelou, C.G., Georgiadis, H.G., 2005. Uniqueness for plane crack problems in dipolar gradient elasticity and in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 42, 6226-6244.
- Grioli, G., 1960. Elasticità asimmetrica. *Ann. Mat. Pur. Appl.* 50, 389-417.
- Günther, W., 1962. Über einige randintegrale der elastomechanik. *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.* 14, 53-72.
- Head, A.K., 1953. Edge dislocations in inhomogeneous media. *Proc. Phys. Soc. B* 66, 793-801.
- Herrmann, G., Achenbach, J.D., 1968. *Applications of theories of Generalized Cosserat Continua to the dynamics of composite materials*, in: Kröner, E. (Ed.), *Mechanics of Generalized Continua*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 69-79.
- Hills, D.A., Kelly, P.A., Dai, D.N., Korsunsky, A.M., 1996. *Solution of crack problems: the distributed dislocation technique*. Kluwer Academic Publishers.
- Hirth, J.P., 1985. A brief history of dislocation theory. *Metall. Trans. A* 16, 2085-2090.
- Hirth, J.P., Lothe, J., 1982. *Theory of dislocations, 2nd ed.* Wiley, New York.
- Hu, G.K., Han, B., Liao, L., 1999. A note on microstructural interpretation of the material constants for couple stress theory. *Mech. Res. Commun.* 26, 541-545.
- Huang, Y., Chen, J.Y., Guo, T.F., Zhang, L., Hwang, K.C., 1999. Analytic and numerical studies on mode I and mode II fracture in elastic-plastic materials with strain gradient effects. *Int. J. Fract.* 100, 1-27.

- Huang, Y., Gao, H., Nix, W.D., Hutchinson, J.W., 2000. Mechanism-based strain gradient plasticity—II. Analysis. *J. Mech. Phys. Solids* 48, 99-128.
- Huang, Y., Zhang, L., Guo, T.F., Hwang, K.C., 1997. Mixed mode near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects. *J. Mech. Phys. Solids* 45, 439-465.
- Hull, D., Bacon, D.J., 2011. *Introduction to dislocations*. Elsevier.
- Hwang, K.C., Jiang, H., Huang, Y., Gao, H., Hu, N., 2002. A finite deformation theory of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 50, 81-99.
- Ioakimidis, N., 1983. A direct method for the construction of Gaussian quadrature rules for Cauchy type and finite-part integrals. *Anal. Numer. Theor. Approx.* 12, 131-141.
- Itou, S., 1981. The effect of couple-stresses on the stress concentration around a moving crack. *Int. J. Math. Math. Sci.* 4, 165-180.
- Jaunzemis, W., 1967. *Continuum Mechanics*. Macmillan, New York.
- Ju, J.W., Oh, S., 2008. Investigation of the crack-dislocation interaction effects. *Int. J. Damage Mech.* 17, 223-245.
- Kakunai, S., Masaki, J., Kuroda, R., Iwata, K., Nagata, R., 1985. Measurement of apparent young's modulus in the bending of cantilever beam by heterodyne holographic interferometry. *Exp. Mech.* 25, 408-412.
- Kalker, J.J., 1990. *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*. Kluwer Academic Publishers.
- Kaya, A.C., Erdogan, F., 1987. On the solution of integral equations with strongly strongly singular kernels. *Q. Appl. Math.* 45, 105-122.
- Kienzler, R., 2007. Reciprocity in fracture and defect mechanics. *Int. J. Fract.* 147, 3-11.
- Knésl, Z., Semela, F., 1972. The influence of couple-stresses on the elastic properties of an edge dislocation. *Int. J. Eng. Sci.* 10, 83-91.
- Knowles, J.K., Sternberg, E., 1972. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 44, 187-211.
- Kobayashi, S., Ohr, S.M., 1980. In situ fracture experiments in b.c.c. metals. *Philos. Mag. A* 42, 763-772.
- Kobayashi, S., Ohr, S.M., 1981. In situ observations of the formation of plastic zone ahead of a crack tip in copper. *Scripta Metall.* 15, 343-348.
- Koiter, W., 1964. Couple stresses in the theory of elasticity. Parts I and II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. B*, pp. 17-29.

- Korsunsky, A., Hills, D., 1995. The solution of plane crack problems by dislocation dipole procedures. *J. Strain Anal. Eng. Des.* 30, 21-27.
- Korsunsky, A., Hills, D., 1996. The solution of crack problems by using distributed strain nuclei. *P. I. Mech. Eng. C-J. Mec.* 210, 23-31.
- Kröner, E., 1968. *Mechanics of Generalized Continua*. Springer, Berlin.
- Kroupa, F., 1965. Dislocation dipoles of infinitesimal width. *Czech J Phys* 15, 896-900.
- Kroupa, F., 1966. Dislocation dipoles and dislocation loops. *J. Phys. Colloq.* 27, C3-154-C153-167.
- Kubin, L., Canova, G., 1992. The modelling of dislocation patterns. *Scripta Metall. Mater.* 27, 957-962.
- Kutt, H.R., 1975. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numer. Math.* 24, 205-210.
- Lakes, R.S., 1986. Experimental microelasticity of two porous solids. *Int. J. Solids Struct.* 22, 55-63.
- Lazar, M., Maugin, G.A., 2005. Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity. *Int. J. Eng. Sci.* 43, 1157-1184.
- Lemarchand, C., Devincre, B., Kubin, L.P., 2001. Homogenization method for a discrete-continuum simulation of dislocation dynamics. *J. Mech. Phys. Solids* 49, 1969-1982.
- Lin, I.H., Thomson, R., 1986. Cleavage, dislocation emission, and shielding for cracks under general loading. *Acta Metall.* 34, 187-206.
- Lin, K.M., Hu, C.T., Lee, S., 1993. Screw dislocation dipoles near an internal crack. *Eng. Fract. Mech.* 45, 321-331.
- Lord Kelvin, W.T.B., 1882, 1884, 1890. *Mathematical and physical papers (vol. I-III)*. Cambridge University Press.
- Love, A.E.H., 1920. *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, Cambridge
- Loyola de Oliveira, M.A., Michot, G., 1994. Analysis of crack-dislocation interaction: crack closure, crack opening. *Mat. Sci. Eng. A* 176, 139-145.
- Lubarda, V.A., 1997. Energy analysis of dislocation arrays near bimaterial interfaces. *Int. J. Solids Struct.* 34, 1053-1073.
- Lubarda, V.A., 2003. The effects of couple stresses on dislocation strain energy. *Int. J. Solids Struct.* 40, 3807-3826.

- Lubarda, V.A., Markenscoff, X., 2000. Conservation integrals in couple stress elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 48, 553-564.
- Lubarda, V.A., Markenscoff, X., 2007. Configurational force on a lattice dislocation and the Peierls stress. *Arch. Appl. Mech.* 77, 147-154.
- MacCullagh, J., 1839. An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction. *Trans. Roy. Irish Acad. Sci.* 21, 17-50.
- Majumdar, B.S., Burns, S.J., 1981. Crack tip shielding – an elastic theory of dislocations and dislocation arrays near a sharp crack. *Acta Metall.* 29, 579-588.
- Malvern, L., 1969. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Markenscoff, X., 1993. Interaction of dislocations and dislocation dipoles with cracks and anticracks. *Mater. Sci. Forum* 123, 525-530.
- Markolefas, S.I., Tsouvalas, D.A., Tsamasphyros, G.I., 2008. Some C0-continuous mixed formulations for general dipolar linear gradient elasticity boundary value problems and the associated energy theorems. *Int. J. Solids Struct.* 45, 3255-3281.
- Markolefas, S.I., Tsouvalas, D.A., Tsamasphyros, G.I., 2009. Mixed finite element formulation for the general anti-plane shear problem, including mode III crack computations, in the framework of dipolar linear gradient elasticity. *Comput. Mech.* 43, 715-730.
- MATHEMATICA, version 9.0, 2012. Wolfram Research, Inc., Champaign, IL.
- Maugin, G.A., 2013. *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century: A Concise Historical Perspective*. Springer.
- Michell, J.H., 1899. On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates. *Proc. London Math. Soc.* 31, 100-124.
- Michot, G., George, A., 1986. Dislocation emission from cracks – observations by X-ray topography in silicon. *Scripta Metall.* 20, 1495-1500.
- Mindlin, R.D., 1963. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Exp. Mech.* 3, 1-7.
- Mindlin, R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 16, 51-78.
- Mindlin, R.D., 1965. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 1, 417-438.
- Mindlin, R.D., Salvadori, M.G., 1950. *Analogies*, in: Hetényi, M. (Ed.), *Handbook of Experimental Stress Analysis*. John Wiley & Sons, New York.

- Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 415-448.
- Mishuris, G., Piccolroaz, A., Radi, E., 2012. Steady-state propagation of a Mode III crack in couple stress elastic materials. *Int. J. Eng. Sci.* 61, 112-128.
- Monegato, G., 1994. Numerical evaluation of hypersingular integrals. *J. Comput. Appl. Math.* 50, 9-31.
- Muki, R., Sternberg, E., 1965. The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 16, 611-648.
- Mura, T., 1970. *The elastic field of moving dislocations and disclinations*, in: Simmons, J., de Wit, R. (Eds.), *Fundamental Aspects of Dislocation Theory*. US Nat. Bur. Stand. Special Publ.
- Muskhelishvili, N.I., 1953. *Singular integral equations*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen.
- Nabarro, F.R., 1967. *Theory of Crystal Dislocations*. Oxford University Press, London.
- Nowacki, W., 1972. *Theory of micropolar elasticity*. CISM International Centre for Mechanical Sciences No. 25. Springer-Verlag.
- Nowacki, W., 1974. On discrete dislocations in micropolar elasticity. *Arch. Mech.* 26, 3-11.
- Nowacki, W., 1986. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Pergamon Press, Oxford.
- Nye, J.F., 1953. Some geometrical relations in dislocated crystals. *Acta Metall.* 1, 153-162.
- Oden, J.T., Rigsby, D.M., Cornett, D., 1970. On the numerical solution of a class of problems in a linear first strain–gradient theory of elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 2, 159-174.
- Ohr, S.M., 1987. Dislocation-crack interaction. *J. Phys. Chem. Solids* 48, 1007-1014.
- Orowan, E., 1934. On the kinetics of plastic flow. *Z. Phys.* 89, 614-634.
- Pal'mov, V.A., 1964. The plane problem in the theory of nonsymmetrical elasticity. *Appl. Math. Mech. (PMM)* 28, 1117-1120.
- Papanicolopoulos, S.A., Zervos, A., Vardoulakis, I., 2009. A three-dimensional C1 finite element for gradient elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 77, 1396-1415.
- Papargyri-Beskou, S., Giannakopoulos, A.E., Beskos, D.E., 2010. Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading. *Int. J. Solids Struct.* 47, 2755-2766.

- Papargyri-Beskou, S., Tsepoura, K.G., Polyzos, D., Beskos, D.E., 2003. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *Int. J. Solids Struct.* 40, 385-400.
- Parks, D.M., 1974. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *Int. J. Fract.* 10, 487-502.
- Paulino, G.H., Fannjiang, A.C., Chan, Y.S., 2003. Gradient elasticity theory for mode III fracture in functionally graded materials – Part I: Crack perpendicular to the material gradation. *J. Appl. Mech.* 70, 531-542.
- Peach, M., Koehler, J.S., 1950. The forces exerted on dislocations and the stress fields produced by them. *Phys. Rev.* 80, 436-439.
- Peierls, R., 1940. The size of a dislocation. *Proc. Phys. Soc.* 52, 34-37.
- Po, G., Lazar, M., Seif, D., Ghoniem, N., 2014. Singularity-free dislocation dynamics with strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 68, 161-178.
- Polanyi, M., 1934. On a kind of glide disturbance that could make a crystal plastic. *Z. Phys.* 89, 660-664.
- Polyzos, D., Tsepoura, K.G., Tsinopoulos, S.V., Beskos, D.E., 2003. A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems: Part I: Integral formulation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 192, 2845-2873.
- Prakash, V., Freund, L.B., Clifton, R.J., 1992. Stress wave radiation from a crack tip during dynamic initiation. *J. Appl. Mech.* 59, 356-365.
- Providas, E., Kattis, M.A., 2002. Finite element method in plane Cosserat elasticity. *Comput. Struct.* 80, 2059-2069.
- Radi, E., 2007. Effects of characteristic material lengths on mode III crack propagation in couple stress elastic-plastic materials. *Int. J. Plast.* 23, 1439-1456.
- Radi, E., 2008. On the effects of characteristic lengths in bending and torsion on Mode III crack in couple stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 45, 3033-3058.
- Rajagopal, E.S., 1960. The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity. *Ann. Phys.* 461, 192-201.
- Rice, J., 1985. *Conserved integrals and energetic forces*, in: Bilby, B.A., Miller, K.J., Willis, J.R. (Eds.), *Fundamentals of deformation and fracture*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, pp. 33-56.
- Rice, J.R., Thomson, R., 1974. Ductile versus brittle behaviour of crystals. *Philos. Mag.* 29, 73-97.
- Riemelmoser, F.O., Pippan, R., 1999. Discussion of “Reconsideration of error in the analysis of the wake dislocation problem”. *Metall. Mater. Trans. A* 30, 1452-1457.

- Roos, B.W., 1969. *Analytic functions and distributions in physics and engineering*. Wiley, New York.
- Shi, M.X., Huang, Y., Hwang, K.C., 2000. Fracture in a higher-order elastic continuum. *J. Mech. Phys. Solids* 48, 2513-2538.
- Shu, J.Y., King, W.E., Fleck, N.A., 1999. Finite elements for materials with strain gradient effects. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 44, 373-391.
- Sternberg, E., Muki, R., 1967. The effect of couple-stresses on the stress concentration around a crack. *Int. J. Solids Struct.* 3, 69-95.
- Stolle, H.W., Strauss, R., 1992. On the numerical integration of certain singular integrals. *Computing* 48, 177-189.
- Tada, H., Paris, P., Irwin, G., 2000. *The Analysis of Cracks Handbook*. New York: ASME Press.
- Tadmor, E.B., Ortiz, M., Phillips, R., 1996. Quasicontinuum analysis of defects in solids. *Philos. Mag. A* 73, 1529-1563.
- Taylor, G., 1934. The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I. Theoretical. *Proc. R. Soc. Lond. A* 145, 362-387.
- Tekoğlu, C., Onck, P.R., 2008. Size effects in two-dimensional Voronoi foams: A comparison between generalized continua and discrete models. *J. Mech. Phys. Solids* 56, 3541-3564.
- Tetelman, A.S., 1962. Dislocation dipole formation in deformed crystals. *Acta Metall.* 10, 813-820.
- Thomson, R., 1978. Brittle fracture in a ductile material with application to hydrogen embrittlement. *J. Mater. Sci.* 13, 128-142.
- Thomson, R.M., 1987. Physics of fracture. *J. Phys. Chem. Solids* 48, 965-983.
- Toupin, R.A., 1962. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 385-414.
- Toupin, R.A., 1964. Theories of elasticity with couple-stress. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17, 85-112.
- Tsamasphyros, G., Dimou, G., 1990. Gauss quadrature rules for finite part integrals. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 30, 13-26.
- Tsamasphyros, G.I., Markolefas, S., Tsouvalas, D.A., 2007. Convergence and performance of the h- and p-extensions with mixed finite element C0-continuity formulations, for tension and buckling of a gradient elastic beam. *Int. J. Solids Struct.* 44, 5056-5074.

- Tsamasphyros, G.I., Vrettos, C., 2010. A mixed finite volume formulation for the solution of gradient elasticity problems. *Arch. Appl. Mech.* 80, 609-627.
- Tsepoura, K.G., Papargyri-Beskou, S., Polyzos, D., 2002. A boundary element method for solving 3D static gradient elastic problems with surface energy. *Comput. Mech.* 29, 361-381.
- van der Giessen, E., Needleman, A., 1995. Discrete dislocation plasticity: a simple planar model. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* 3, 689-735.
- Vardoulakis, I., Georgiadis, H.G., 1997. SH surface waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy. *J. Elasticity* 47, 147-165.
- Vardoulakis, I., Sulem, J., 1995. *Bifurcation analysis in Geomechanics*. Blackie Academic & Professional, London.
- Vavva, M.G., Protopappas, V.C., Gergidis, L.N., Charalambopoulos, A., Fotiadis, D.I., Polyzos, D., 2009. Velocity dispersion of guided waves propagating in a free gradient elastic plate: Application to cortical bone. *J. Acoust. Soc. Am.* 125, 3414-3427.
- Vitek, V., 1992. Structure of dislocation cores in metallic materials and its impact on their plastic behaviour. *Prog. Mater. Sci.* 36, 1-27.
- Voigt, W., 1887. Theoretische studien uber die elasticitatsverhaltnisse der krystalle. *Abh. Ges. Wiss. Gottingen* 34, 3-100.
- Volterra, V., 1907. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 24, 401-517.
- Wang, S.-D., Lee, S., 1992. Mechanical equilibrium of an edge dislocation dipole near a crack tip. *Int. J. Fract.* 57, 317-324.
- Wang, S.-D., Lee, S., 1993. Edge dislocation dipoles near a semi-infinite crack tip. *Eng. Fract. Mech.* 46, 297-309.
- Wang, Y.U., Jin, Y.M., Cuitiño, A.M., Khachaturyan, A.G., 2001. Nanoscale phase field microelasticity theory of dislocations: model and 3D simulations. *Acta Mater.* 49, 1847-1857.
- Weertman, J., 1978. Fracture mechanics: A unified view for Griffith-Irwin-Orowan cracks. *Acta Metall.* 26, 1731-1738.
- Weertman, J., 1996. *Dislocation based Fracture Mechanics*. World Scientific, Singapore.
- Wei, Y., 2006. A new finite element method for strain gradient theories and applications to fracture analyses. *Eur. J. Mech. A. Solids* 25, 897-913.

- Weingarten, G., 1901. Sulle superficie di discontinuità nella teoria dell'elasticità dei corpi solidi. *Atti Accad. naz. Lincei Rc.* 10, 57.
- Weitsman, Y., 1965. Couple-stress effects on stress concentration around a cylindrical inclusion in a field of uniaxial tension. *J. Appl. Mech.* 32, 424-428.
- Xiang, Y., Cheng, L.-T., Srolovitz, D.J., Weinan, E., 2003. A level set method for dislocation dynamics. *Acta Mater.* 51, 5499-5518.
- Zbib, H.M., Rhee, M., Hirth, J.P., 1998. On plastic deformation and the dynamics of 3D dislocations. *Int. J. Mech. Sci.* 40, 113-127.
- Zemanian, A.H., 1965. *Distribution theory and transform analysis*. McGraw-Hill, New York.
- Zhang, L., Huang, Y., Chen, J.Y., Hwang, K.C., 1998. The mode III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects. *Int. J. Fract.* 92, 325-348.
- Zhang, T.-Y., Li, J.C.M., 1991a. Image forces and shielding effects of a screw dislocation near a finite-length crack. *Mat. Sci. Eng. A* 142, 35-39.
- Zhang, T.-Y., Li, J.C.M., 1991b. Image forces and shielding effects of an edge dislocation near a finite length crack. *Acta Metall. Mater.* 39, 2739-2744.
- Zisis, T., Gourgiotis, P.A., Baxevanakis, K.P., Georgiadis, H.G., 2014. Some basic contact problems in couple stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 51, 2084-2095.

