



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ
ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΜΠΟΣΚΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗ

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Ι. ΤΣΙΝΙΑΣ

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Φεβρουάριος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ
ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ΓΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΜΠΟΣΚΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗ

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Ι. ΤΣΙΝΙΑΣ, Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Ι. ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ, Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Ι. ΤΣΙΝΙΑΣ, Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Ι. ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ, Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.
4. Γ. ΜΠΙΤΣΩΡΗΣ, Καθ. Παν. Πατρών
5. Ι. ΣΠΗΛΙΩΤΗΣ, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.
6. Α. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.
7. Ι. ΚΟΛΕΤΣΟΣ Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Φεβρουάριος 2014

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμότατα τον επιβλέποντα καθήγητή μου κ. Ι. Τσινιά, για τη συνεχή καθοδήγηση και συμπαράσταση που μου έδειξε καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής. Ιδιαίτερα πολύτιμα ήταν για εμένα τόσο το παράδειγμά του στην προσέγγιση και επίλυση επιστημονικών προβλημάτων όσο και η παρότρυνση του να αναπτύσσω πρωτοβουλίες σε αυτή την κατεύθυνση.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα δυο μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής, τους καθηγητές κ. Κ. Κυριακόπουλο και Ι. Καραφύλλη για τις συμβουλές και τις υποδείξεις τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον κ. Καραφύλλη, για την παρότρυνσή του κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, να ασχοληθώ με τη μαθηματική θεωρία ελέγχου. Ακόμα, ευχαριστώ και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, τους καθηγητές κ. Γ. Μπιτσώρη, Ι. Σπηλιώτη, Α. Χαραλαμπίδου και Ι. Κολέτσο, για τη συμμετοχή τους και τις υποδείξεις τους.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Εύα και Ευριπίδη, την αδερφή μου Σόνια και τους φίλους Ήβη Τσαντίλη και Γιάννη Καραγιώργο για την πολύτιμη συμπαράσταση που μου παρείχαν, καθώς και τους φίλους Μιλτιάδη Καραμανλή και Άρη Καπελόνη που με βοήθησαν σε θέματα τεχνικής υποστήριξης σε κρίσιμες περιόδους.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω το ΙΚΥ, για την οικονομική στήριξη που μου παρείχε κατά τη διάρκεια του πρώτου ενάμιση χρόνου εκπόνησης της διατριβής.



Σύνοψη και Δομή της Διατριβής

- **Συνοπτικά αποτελέσματα της διδακτορικής διατριβής**

Η εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη και σχεδίαση παρατηρητή αποτελεί κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας ελέγχου και τις τελευταίες δεκαετίες έχουν εξαχθεί σημαντικά αποτελέσματα (βλέπε πχ [1]-[8], [10]-[15], [19], [20], [22], [23], [25]-[29], [33]-[46], [48]-[50], [52]-[55], [60]-[63], [65]-[69], [71]-[73]). Αναφέρονται επίσης οι εργασίες [66], [71], [46], [73], [58], που σχετίζονται με την επίλυση του προβλήματος της σταθεροποίησης με ανάδραση εξόδου, μέσω χρήσης παρατηρητή και δυναμικής ανάδρασης.

Στην παρούσα διατριβή επιλύεται το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για ορισμένες κατηγορίες χρονικώς μεταβαλλόμενων μη γραμμικών συστημάτων. Τα αποτελέσματα δημοσιεύθηκαν στις εργασίες [16] και [17] και αφορούν σε δυο υποκατηγορίες της γενικής κλάσης χρονικώς μεταβαλλόμενων τριγωνικών συστημάτων:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g_1(t, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= g_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= g_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{0.1\alpha}$$
$$\tag{0.1\beta}$$

όπου $y(\cdot)$ είναι η έξοδος του συστήματος.

Στο Κεφάλαιο 2, μελετώνται συστήματα της μορφής (0.1) με

$$g_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) := f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_i) + a_i(t, x_1)x_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1$$

δηλαδή τριγωνικά συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + a_1(t, x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2) + a_2(t, x_1)x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, x_1)x_n \end{aligned} \tag{0.2\alpha}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{0.2\beta}$$

όπου αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή είναι επιλύσιμο, με τις παρακάτω υποθέσεις:

A1. Για κάθε αρχικό χρόνο $t_0 \geq 0$ και κατάσταση $x_0 \in M$, όπου M ένα μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , η αντίστοιχη λύση $x(\cdot, t_0, x_0)$ του (0.2) ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$.

A2. Για κάθε αρχικό χρόνο $t_0 \geq 0$, κατάσταση $x_0 \in M$, όπου το σύνολο M δίνεται στην A1 και $i = 1, \dots, n - 1$ ισχύει $a_i(t, y(t, t_0, x_0)) \neq 0$, για σχεδόν κάθε $t \geq t_0$, όπου $y(\cdot, t_0, x_0)$ είναι η αντίστοιχη έξοδος του (0.2).

Ειδικότερα, οι υποθέσεις A1 και A2, εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας **διακοπτόμενης** (switching) ακολουθίας μη αιτιατών (εν γένει) δυναμικών συστημάτων (παρατηρητών) που καθιστά δυνατή την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (0.2). Το παραπάνω αποτέλεσμα, βασίζεται σε ένα γενικότερο αποτέλεσμα επίλυσης του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή, που αφορά σύνθετα συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + B(t, x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2) \end{aligned} \tag{0.3\alpha}$$

$$y = x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \tag{0.3\beta}$$

όπου $y(\cdot)$ είναι η έξοδος του συστήματος. Μεταξύ των άλλων, αποδεικνύεται ότι μια γενική υπόθεση “ανιχνευσιμότητας” του συστήματος (0.3) εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ακολουθίας μη αιτιατών παρατηρητών, που καθιστά δυνατή την επίλυση του προβλήματος παρατηρητή για το σύστημα (0.3).

Στο Κεφάλαιο 3, μελετάται το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για την περίπτωση των τριγωνικών συστημάτων (0.1) με

$$g_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) := f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_i) + a_i(t, x_1)x_{i+1}^{m_i}, i = 1, \dots, n - 1$$

δηλαδή συστημάτων της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + a_1(t, x_1)x_2^{m_1} \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2) + a_2(t, x_1)x_3^{m_2} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{0.4\alpha}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, x_1)x_n^{m_{n-1}} \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{0.4\beta}$$

που αν και είναι παρατηρήσιμα (με την έννοια του Ορισμού 1.18, Κεφάλαιο 1), έχουν εν γένει μη παρατηρήσιμη γραμμικοποίηση στα ενδεχόμενα σημεία ισοροπίας. Οι υποθέσεις που επιβάλλονται, είναι οι ακόλουθες:

A1'. Για κάθε αρχικό χρόνο $t_0 \geq 0$ και κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$, η αντίστοιχη λύση $x(\cdot, t_0, x_0)$ του (0.4) ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$.

A2'. Ισχύει $|a_i(t, y)| > 0$, για κάθε $t \geq 0, y \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n - 1$.

A3'. Οι εκθέτες $m_i, i = 1, \dots, n - 1$ είναι περιττοί φυσικοί.

Οι παραπάνω υποθέσεις, εξασφαλίζουν ότι το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή είναι επιλύσιμο για το σύστημα (0.4), μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας αιτιατών παρατηρητών.

Μια εύλογη κατεύθυνση για τη γενίκευση των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 3, είναι η επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για συστήματα της μορφής (0.4), όταν αντί των Υποθέσεων A1' και A2', επιβάλλονται οι ασθενέστερες Υποθέσεις A1 και A2. Λόγω των ιδιαίτερα αυξημένων τεχνικών απαιτήσεων στην αντίστοιχη αποδεικτική διαδικασία, η αντιμετώπιση του προαναφερθέντος προβλήματος δεν αποτέλεσε άμεσο στόχο της διατριβής και αποτελεί αντικείμενο περαιτέρω έρευνας.

Σημειώνεται ότι, σύμφωνα με τη μεθοδολογία που υιοθετείται στην παρούσα διατριβή, η εκτίμηση της κατάστασης επιτυγχάνεται μέσω ενός παρατηρητή τύπου Luenberger, όταν είναι εκ των προτέρων γνωστό, ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος ανήκει σε ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n , ενώ στη γενική περίπτωση, η εκτίμηση της κατάστασης επιτυγχάνεται με τη χρήση μιας διακοπτόμενης ακολουθίας παρατηρητών. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι λόγω

της Υπόθεσης A2, τα δυναμικά του παρατηρητή (αντίστοιχα, της διακοπτόμενης ακολουθίας παρατηρητών) στην ανάλυση του Κεφαλαίου 2 είναι μια απεικόνιση εξαρτώμενη από την έξοδο $y(\cdot)$ του συστήματος, η οποία εν γένει δεν είναι αιτιατή, λόγω του ενδεχόμενου μηδενισμού των απεικονίσεων $\mathbb{R}_{\geq 0} \ni t \rightarrow a_i(t, y(t, t_0, x_0)) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n - 1$. Στην περίπτωση του παρατηρητή (αντίστοιχα, της διακοπτόμενης ακολουθίας παρατηρητών) του Κεφαλαίου 3, όπου επιβάλλεται η ισχυρότερη Υπόθεση A2', τα δυναμικά του παρατηρητή είναι αιτιατά.

Η μελέτη των αποτελεσμάτων της διατριβής, επεκτείνεται άμεσα στην περίπτωση συστημάτων με είσοδο. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= h_1(t, x_1, u) + b_1(t, x_1, u)x_2 \\ \dot{x}_2 &= h_2(t, x_1, x_2, u) + b_2(t, x_1, u)x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= h_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u) + b_{n-1}(t, x_1, u)x_n \\ \dot{x}_n &= h_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

τότε για δοσμένο $t_0 \geq 0$ και είσοδο $u \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^m)$, το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \tilde{f}_1(t, x_1) + \tilde{a}_1(t, x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}_2(t, x_1, x_2) + \tilde{a}_2(t, x_1)x_3 \\ &\vdots\end{aligned}\tag{0.5\alpha}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n-1} &= \tilde{f}_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + \tilde{a}_{n-1}(t, x_1)x_n \\ \dot{x}_n &= \tilde{f}_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\end{aligned}\tag{0.5\beta}$$

όπου $\tilde{f}_i(t, x_1, x_2, \dots, x_i) := h_i(t, x_1, x_2, \dots, x_i, u(t))$, $\forall t \geq t_0$, $(x_1, x_2, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^i$, $i = 1, \dots, n$ και $\tilde{a}_i(t, x_1) = b_i(t, x_1, u(t))$, $\forall t \geq t_0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n - 1$ έχει τη χρονικώς μεταβαλλόμενη μορφή (0.2). Επιπλέον, αν το σύστημα (0.5) ικανοποιεί τις υποθέσεις A1 και A2, τότε σύμφωνα με τα ανωτέρω, το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή είναι επιλύσιμο για το (0.5), όπου τα δυναμικά του αντίστοιχου παρατηρητή εξαρτώνται από την είσοδο του αρχικού συστήματος. Αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν για την περίπτωση συστημάτων (0.3), (0.4) όπου τα δυναμικά τους περιέχουν εισόδους.

Τα ανωτέρω αποτελέσματα αποτελούν γενικεύσεις σχετικών αποτελεσμάτων από τη διεθνή βιβλιογραφία, κυρίως σε ότι αφορά τη σχεδίαση παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα. Η καινοτομία τους συνίσταται μεταξύ άλλων στις ασθενείς υποθέσεις που επιβάλλονται στα δυναμικά των συστημάτων που μελετώνται, καθώς και στην ιδέα χρήσης της “διακοπτόμενης” ακολουθίας παρατηρητών.

Λεπτομερής σύγκριση των εν λόγω αποτελεσμάτων με αντίστοιχα αποτελέσματα από τη διεθνή βιβλιογραφία γίνεται στην εισαγωγή του δευτέρου κεφαλαίου της διατριβής.

Τέλος αναφέρεται η εργασία [18], όπου επιλύθηκε το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για γενικά τριγωνικά συστήματα (0.1), με την υπόθεση ότι ισχύει η $A1'$ και επιπλέον, ότι για κάθε $i = 1, \dots, n - 1$ και $(t, x_1, x_2, \dots, x_i) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^i$, η απεικόνιση $f(t, x_1, x_2, \dots, x_i, \cdot)$ με $\mathbb{R} \ni z \rightarrow f(t, x_1, x_2, \dots, x_i, z) \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη.

• Δομή της διδακτορικής διατριβής

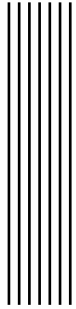
Η δομή της διατριβής είναι η ακόλουθη.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται οι κυριότεροι συμβολισμοί και ορισμοί που χρησιμοποιούνται στο κείμενο και γίνεται μια ιστορική αναδρομή στο πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή. Πρέχονται, οι ορισμοί της παρατηρησιμότητας και της ανιχνευσιμότητας για γραμμικά αυτόνομα συστήματα και παρουσιάζονται τα γνωστά αποτελέσματα από τη γραμμική θεωρία για την επίλυση του προβλήματος του παρατηρητή. Ακολούθως, δίνονται κάποιοι από τους κύριους ορισμούς που υιοθετούνται στη βιβλιογραφία για την παρατηρησιμότητα για την μη γραμμική περίπτωση. Παρουσιάζονται αποτελέσματα που παρέχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες, για την εύρεση μετασχηματισμού συντεταγμένων, προκειμένου γενικά μη γραμμικά συστήματα, να αποκτούν στις νέες συντεταγμένες ειδικότερη μορφή. Τέλος, παρατίθενται αποτελέσματα για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για τις εν λόγω μορφές συστημάτων, καθώς και αποτελέσματα από τη διεθνή βιβλιογραφία για τριγωνικά συστήματα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας [16]. Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου δίνεται ο ορισμός της επίλυσης του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας παρατηρητών. Επίσης, γίνεται σύγκριση των εξαχθέντων αποτελεσμάτων με τα υπάρχοντα στη διεθνή βιβλιογραφία. Στη συνέχεια παρέχονται ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος του παρατηρητή μέσω μιας διακοπτόμενης *μη αιτιατής* ακολουθίας δυναμικών συστημάτων, για χρονικώς μεταβαλλόμενα μη γραμμικά

συστήματα με γραμμική έξοδο. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα εφαρμόζονται σε σύνθετα συστήματα της μορφής (0.3) και στα τριγωνικά συστήματα (0.2) με την υπόθεση “ανιχνευσιμότητας” και τις Υποθέσεις A1, A2 που προαναφέρθηκαν. Ακολούθως, ισχυροποιούνται οι συνθήκες της ανωτέρω ανάλυσης και εξάγονται αντίστοιχα αποτελέσματα, στα οποία δίνονται ικανές συνθήκες για την επίλυσιμότητα του προβλήματος του παρατηρητή μέσω μιας *αιτιατής* ακολουθίας δυναμικών συστημάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας [17]. Αρχικά, εδραιώνονται ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος του παρατηρητή, μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας αιτιατών δυναμικών συστημάτων για γενικά χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα με γραμμική έξοδο. Στη συνέχεια, η ανάλυση εφαρμόζεται σε τριγωνικά συστήματα της μορφής (0.4) που πληρούν τις υποθέσεις A1', A2' και A3'.



Περιεχόμενα

Σύνοψη και Δομή της Διατριβής	iii
Περιεχόμενα	ix
1 Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Συμβολισμοί και Ορισμοί	2
1.3 Παρατηρησιμότητα/Παρατηρητές για Γραμμικά Αυτόνομα Συστήματα	4
1.4 Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα	9
1.5 Παρατηρητές για μη Γραμμικά Συστήματα	31
2 Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα	63
2.1 Εισαγωγή	63
2.2 Η Γενική Περίπτωση	71
2.3 Σύνθετα Συστήματα	94
2.4 Τριγωνικά Συστήματα	107
2.5 Επιλυσιμότητα του Strong ODP	116
2.6 Παραδείγματα	127
2.7 Παράρτημα	135
3 Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση	147
3.1 Εισαγωγή	147

Περιεχόμενα

3.2 Προκαταρκτικά Αποτελέσματα	151
3.3 Τριγωνικά Συστήματα	173
3.4 Παραδείγματα	190
Βιβλιογραφία	199

1 Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μια ιστορική αναδρομή στο πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για μη γραμμικά συστήματα. Το κεφάλαιο έχει την ακόλουθη δομή.

Στην Ενότητα 1.2 δίνονται οι κύριοι συμβολισμοί και ορισμοί που χρησιμοποιούνται στη διατριβή.

Στην Ενότητα 1.3 παρουσιάζονται αποτελέσματα από τη θεωρία των γραμμικών αυτόνομων συστημάτων. Συγκεκριμένα, ορίζονται οι έννοιες της παρατηρησιμότητας και της ανιχνευσιμότητας και δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες, για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για την περίπτωση ενός γραμμικού αυτόνομου συστήματος.

Η παρατηρησιμότητα αποτελεί πολύ πιο σύνθετη έννοια για την περίπτωση των μη γραμμικών συστημάτων. Στην Ενότητα 1.4 δίνονται ορισμένοι κεντρικοί ορισμοί της παρατηρησιμότητας για μη γραμμικά συστήματα και παρουσιάζονται αποτελέσματα που παρέχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την εύρεση μετασχηματισμού συντεταγμένων, προκειμένου ένα μη γραμμικό σύστημα να αποκτήσει στις νέες συντεταγμένες ειδικότερη μορφή, για την οποία υπάρχει η δυνατότητα σχεδίασης παρατηρητή. Ιδιαίτερης σημασίας για την παρούσα διατριβή είναι η λεγόμενη p -κανονική μορφή ενός μη γραμμικού συστήματος, η οποία

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

παρουσιάζεται στο τέλος της Ενότητας 1.4 και αποτελεί ένα βασικό κίνητρο για τη μελέτη των τριγωνικών συστημάτων του Κεφαλαίου 3.

Τέλος, στην Ενότητα 1.5 παρατίθενται αποτελέσματα που αφορούν στο πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα καθώς και συστήματα των οποίων τα δυναμικά είναι γραμμικά ως προς το μη μετρήσιμο κομμάτι του διανύσματος κατάστασης.

1.2 Συμβολισμοί και Ορισμοί

- Για δοσμένο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με x' το ανάστροφό του και με $|x|$ την ευκλείδεια νόρμα του.
- Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $|A| := \max\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ για την επαγόμενη νόρμα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- Με \mathcal{N} δηλώνουμε την κλάση των συνεχών συναρτήσεων $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ που είναι γνησίως αύξουσες.
- Με \mathcal{K} δηλώνουμε την κλάση των συναρτήσεων $\phi(\cdot)$ που ανήκουν στην κλάση \mathcal{N} και ικανοποιούν την ιδιότητα $\phi(0) = 0$.
- Με \mathcal{K}_{∞} δηλώνουμε την κλάση των συναρτήσεων $\phi(\cdot)$ που ανήκουν στην κλάση \mathcal{K} και ικανοποιούν την ιδιότητα $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty$.
- Με \mathcal{L} δηλώνουμε την κλάση των συνεχών συναρτήσεων $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ με $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$.
- Μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ανήκει στην κλάση \mathcal{NN} , αν οι συναρτήσεις $\phi(t, \cdot)$ και $\phi(\cdot, s)$ ανήκουν στην κλάση \mathcal{N} , για κάθε $t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- Μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ανήκει στην κλάση \mathcal{KL} , αν οι συναρτήσεις $\phi(t, \cdot)$ και $\phi(\cdot, s)$ ανήκουν στις κλάσεις \mathcal{L} και \mathcal{K} , για κάθε $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ και $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, αντίστοιχα.
- Για δοσμένο $R > 0$, συμβολίζουμε με B_R την κλειστή μπάλα με ακτίνα R και κέντρο το $0 \in \mathbb{R}^n$.
- Δοθείσης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου U ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , συμβολίζουμε με Df την παράγωγο της.
- Δοθείσης μιας ν φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R} , συμβολίζουμε με $D^{(\nu)}f$ τη ν -οστή της παράγωγο.
- Συμβολίζουμε με $\text{cl}(A)$ την κλειστότητα ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$.

- Συμβολίζουμε με $\text{conv}(A)$ την κυρτή θήκη ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$.
- Συμβολίζουμε με $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ το διαγώνιο πίνακα με στοιχεία $a_{i,i} = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ στην κύρια διαγώνιο του.

Ορισμός 1.1 Έστω $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Η $V(\cdot)$ καλείται **θετικά ορισμένη** (positive definite), αν ισχύει $V(0) = 0$ και $V(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$. Η $V(\cdot)$ καλείται **ομοιόμορφα μη φραγμένη** (radially unbounded), αν ισχύει $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$.

Ορισμός 1.2 Έστω \mathcal{O} ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Η $\Phi(\cdot)$ καλείται C^∞ **διαφορομορφισμός** (ή διαφορομορφισμός), αν είναι C^∞ , 1-1 και η $\Phi^{-1} : \Phi(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}$ είναι επίσης C^∞ .

Ορισμός 1.3 Έστω \mathcal{O} ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $a \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R})$, $f, g \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$. Τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $L_f^i a \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R})$, $i \in \mathbb{N}$ και τα διανυσματικά πεδία $[f, g] \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$, $\text{ad}_f^i g \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ως εξής:

$$L_f a(x) := Da(x)f(x) (= L_f^1 a(x)), x \in \mathcal{O}$$

$$L_f^{i+1} a(x) := Da(x)L_f^i a(x), x \in \mathcal{O}, i \in \mathbb{N} \quad (1.1\alpha)$$

$$[f, g](x) := Dg(x)f(x) - Df(x)g(x), x \in \mathcal{O} \quad (1.1\beta)$$

$$\text{ad}_f^0 g(x) := g(x), x \in \mathcal{O}$$

$$\text{ad}_f^{i+1} g(x) := [f, \text{ad}_f^i g](x), x \in \mathcal{O}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (1.1\gamma)$$

Ορισμός 1.4 Έστω \mathcal{O} ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Μια **κατανομή** (distribution) είναι μια απεικόνιση \mathcal{D} που αντιστοιχεί σε κάθε $x \in \mathcal{O}$ έναν υπόχωρο $\mathcal{D}(x)$ του \mathbb{R}^n . Λέμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο $f \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$ **ανήκει σημειακά** στη \mathcal{D} και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f \in \mathcal{D}$, αν ισχύει $f(x) \in \mathcal{D}(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{O}$. Η κατανομή \mathcal{D} καλείται **ενεπιγμένη** (involutive), αν για κάθε ζεύγος διανυσματικών πεδίων $f, g \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$ με $f, g \in \mathcal{D}$, ισχύει $[f, g] \in \mathcal{D}$.

Ορισμός 1.5 Θεωρούμε το χρονικώς μεταβαλλόμενο σύστημα

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (1.2\alpha)$$

$$y = h(t, x) \quad (1.2\beta)$$

$$t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

όπου το σύνολο U είναι μη κενό, η συνάρτηση $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz, η $h(\cdot, \cdot)$ είναι συνεχής και ο χώρος των αποδεκτών εισόδων του (1.2) είναι ένα υποσύνολο \mathcal{U} του $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$. Δοσμένων $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $u \in \mathcal{U}$, λέμε ότι το (1.2α) (ή το (1.2)) είναι **δεξιά πλήρες**, αν η (μοναδική) λύση $x(\cdot, t_0, x_0; u)$ του (1.2α) με αρχική συνθήκη (t_0, x_0) και είσοδο u , ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$.

1.3 Παρατηρησιμότητα/Παρατηρητές για Γραμμικά Αυτόνομα Συστήματα

Η συστηματική μελέτη του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για γραμμικά συστήματα οφείλεται στον Luenberger ([49], [50]). Στην παρούσα ενότητα παρατίθενται μερικά βασικά αποτελέσματα που αφορούν στο πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για γραμμικά αυτόνομα συστήματα:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.3\alpha)$$

$$y = Cx, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k \quad (1.3\beta)$$

Συμβολίζουμε με \mathcal{Y} το σύνολο των εξόδων του (1.3) και με \mathcal{U} το σύνολο των αποδεκτών εισόδων του (1.3), όπου \mathcal{U} κάποιος γραμμικός υπόχωρος του $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^m)$.

Ορισμός 1.6 Το σύστημα (1.3) είναι **παρατηρήσιμο** (observable) αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$y(t, x_1; u) = y(t, x_2; u), \forall u \in \mathcal{U}, t \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

όπου $y(\cdot, x_0; u) = Cx(\cdot, x_0; u)$ η έξοδος του συστήματος (1.3) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και είσοδο $u \in \mathcal{U}$.

Πρόταση 1.7 Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(α) Το σύστημα (1.3) είναι παρατηρήσιμο.

(β) Το ζεύγος (A, C) είναι παρατηρήσιμο, δηλαδή το σύστημα

$$\dot{x} = Ax \quad (1.4\alpha)$$

$$y = Cx \quad (1.4\beta)$$

1.3. Παρατηρησιμότητα/Παρατηρητές για Γραμμικά Αυτόνομα Συστήματα

με τους πίνακες A και C όπως δίνονται στην (1.3), είναι παρατηρήσιμο με την έννοια του Ορισμού 1.6.

(γ) Ισχύει η συνεπαγωγή

$$y(t, x_0; 0) = Cx(t, x_0; 0) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

όπου $y(\cdot, x_0; 0)$ η έξοδος του (1.3) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και είσοδο $u \equiv 0$, ή ισοδύναμα, η έξοδος του (1.4) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(δ) Ικανοποιείται η **συνθήκη βαθμού παρατηρησιμότητας** (observability rank condition):

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Ορισμός 1.8 Το σύστημα (1.3) είναι **ανιχνεύσιμο** (detectable), αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$Cx(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (1.5)$$

όπου $x(\cdot) := x(\cdot, x_0; 0)$ η λύση του (1.3α) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και με είσοδο $u \equiv 0$, ή ισοδύναμα, η λύση του (1.4α) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1.9 Από τον Ορισμό 1.8 συμπεραίνουμε ότι η ιδιότητα της ανιχνευσιμότητας για το σύστημα (1.3) εξαρτάται αποκλειστικά από το ζεύγος πινάκων (A, C) . Για το λόγο αυτό λέμε εναλλακτικά ότι το (A, C) είναι ανιχνεύσιμο, στην περίπτωση που το (1.3) είναι ανιχνεύσιμο με βάση τον Ορισμό 1.8.

Στην ακόλουθη πρόταση παραθέτουμε ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της ανιχνευσιμότητας του ζεύγους (A, C) .

Πρόταση 1.10 Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Το ζεύγος (A, C) είναι ανιχνεύσιμο, δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή (1.5) για το σύστημα (1.4).

(β) Το ζεύγος (A', C') είναι σταθεροποιήσιμο, δηλαδή το σύστημα

$$\dot{x} = A'x + C'u, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k$$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

είναι σταθεροποιήσιμο μέσω γραμμικής ανάδρασης $u = Fx$, όπου $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

(γ) Ισχύει μια από τις επόμενες ιδιότητες:

(i) Το (A, C) είναι παρατηρήσιμο.

(ii) Το (A, C) δεν είναι παρατηρήσιμο, όμως για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με

$$\tilde{C} = CT^{-1} = (C_1 \ 0) \quad (1.6)$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

και ούτως ώστε το ζεύγος (A_{11}, C_1) να είναι παρατηρήσιμο, (ένας πίνακας με τις ανωτέρω ιδιότητες υπάρχει πάντα) ο A_{22} είναι Hurwitz.

(δ) Υπάρχει πίνακας $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ούτως ώστε ο $A - LC$ να είναι Hurwitz.

Ορισμός 1.11 Ένας γραμμικός παρατηρητής για το σύστημα (1.3) είναι ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\dot{z} = Kz + Mu + Ly, \quad z \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k \quad (1.8)$$

συνοδευόμενο με μια συνεχή απεικόνιση $\theta : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α) **Ολική σύγκλιση του σφάλματος** (global error convergence). Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \in \mathbb{R}^p$ και $u \in \mathcal{U}$ ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0; u) - \theta(z(t, z_0; (u, y)), y(t))| = 0$$

όπου $x(\cdot, x_0; u)$ η λύση του (1.3) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και είσοδο $u \in \mathcal{U}$ και $z(\cdot, z_0; (u, y))$ η λύση του (1.8) με αρχική κατάσταση $z_0 \in \mathbb{R}^p$ και είσοδο $(u, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$.

(β) **Ευστάθεια του σφάλματος** (error stability). Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \in \mathbb{R}^p$ και $u \in \mathcal{U}$ να ισχύει η συνεπαγωγή:

$$|x_0 - \theta(z_0, Cx_0)| < \delta \Rightarrow |x(t, x_0; u) - \theta(z(t, z_0; (u, y)), y(t))| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

1.3. Παρατηρησιμότητα/Παρατηρητές για Γραμμικά Αυτόνομα Συστήματα

Στο παρακάτω θεώρημα δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ενός γραμμικού παρατηρητή για το σύστημα (1.3) (βλέπε [64, σελ 319]).

Θεώρημα 1.12 Για το σύστημα (1.3) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύστημα (1.3) είναι ανιχνεύσιμο.

(β) Υπάρχει ένας γραμμικός παρατηρητής για το σύστημα (1.3).

(γ) Υπάρχει ένας γραμμικός παρατηρητής για το σύστημα (1.3) με $\theta(z, y) = z$, $\forall (z, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Συγκεκριμένα, για τους πίνακες K, L, M στο δεξί μέλος του συστήματος (1.8) ισχύει $K = A - LC$, $M = B$ και ο $K = A - LC$ είναι Hurwitz. Επομένως το σύστημα (1.8) θα έχει τη μορφή:

$$\dot{z} = (A - LC)z + Bu + Ly \quad (1.9)$$

Παρατηρούμε ότι λόγω της απαίτησης $\theta(z, y) = z$, η διάσταση του συστήματος (1.9) στο Θεώρημα 1.12(γ), είναι ίδια με τη διάσταση του συστήματος (1.3). Εν γένει, είναι δυνατό να κατασκευαστεί ένας γραμμικός παρατηρητής για το σύστημα (1.3) με διάσταση μικρότερη από αυτή της διάστασης του συστήματος. Ένας τέτοιος παρατηρητής καλείται **παρατηρητής μειωμένης τάξης** (reduced order observer). Στη συνέχεια, εξάγουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ούτως ώστε το σύστημα (1.3) να έχει έναν παρατηρητή μειωμένης τάξης.

Υποθέτουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας, ισχύει $\text{rank}C = k < n$ (όπου k η διάσταση του χώρου της εξόδου), επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας T με $CT^{-1} = (I \ 0)$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό συντεταγμένων $\tilde{x} = Tx$, οπότε το σύστημα (1.3) είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \quad (1.10\alpha)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} \\ \tilde{B} &= TB \\ \tilde{C} &= CT^{-1} = (I \ 0) \end{aligned} \quad (1.10\beta)$$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

Αποδεικνύεται άμεσα ότι το σύστημα (1.3) είναι ανιχνεύσιμο αν και μόνο αν το σύστημα (1.10) είναι ανιχνεύσιμο. Το σύστημα (1.10) γράφεται αναλυτικότερα ως εξής:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1u \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= A_{21}\tilde{x}_1 + A_{22}\tilde{x}_2 + B_2u \\ y &= \tilde{x}_1, \tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^k, \tilde{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-k}\end{aligned}\tag{1.11}$$

Για το σύστημα (1.11) ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.13 (α) Το σύστημα (1.11) είναι ανιχνεύσιμο, αν και μόνο αν το ζεύγος (A_{22}, A_{12}) είναι ανιχνεύσιμο.

(β) Αν το σύστημα (1.11) είναι ανιχνεύσιμο, τότε το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (A_{22} + LA_{11})z + (B_2 + LB_1)u \\ &\quad + (A_{12} + LA_{11} - A_{22}L - LA_{12}L)y\end{aligned}\tag{1.12}$$

με

$$\theta(z, y) = (y, z - Ly)\tag{1.13}$$

όπου ο $L \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$ είναι τέτοιος ώστε ο πίνακας $A_{22} - LA_{12}$ να είναι Hurwitz, είναι ένας γραμμικός παρατηρητής για το σύστημα (1.10).

Παρατήρηση 1.14 Η επιλογή ενός πίνακα L στο Θεώρημα 1.13, τέτοιου ώστε ο $A_{22} - LA_{12}$ να είναι Hurwitz είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.10(δ) και του Θεωρήματος 1.13(α).

Από τα Θεωρήματα 1.12 και 1.13 έπεται το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.15 Για το σύστημα (1.3) υπάρχει ένας γραμμικός παρατηρητής αν και μόνο αν υπάρχει ένας γραμμικός παρατηρητής μειωμένης τάξης. Ειδικότερα, το σύστημα (1.12) με την απεικόνιση $\hat{\theta}(z, y) = T^{-1}\theta(z, y)$, όπου ο αντιστρέψιμος πίνακας T και η απεικόνιση $\theta(\cdot, \cdot)$, δίνονται στις (1.10β) και (1.13), αντίστοιχα, είναι ένας γραμμικός παρατηρητής του (1.3).

1.4 Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα

• Παρατηρησιμότητα μη γραμμικών συστημάτων

Στο πρώτο μέρος της παρούσας ενότητας δίνονται ορισμένοι από τους κυριότερους ορισμούς παρατηρησιμότητας για μη γραμμικά συστήματα. Οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που παρατίθενται είναι από τις εργασίες [30], [24], [25] και τα συγγράμματα [26], [64]. Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.14\alpha)$$

$$y = h(x) \quad (1.14\beta)$$

$$x \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$$

όπου \mathcal{O} ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , το σύνολο U είναι μη κενό, η συνάρτηση $h(\cdot)$ είναι συνεχής και η $f(\cdot)$ συνεχής και τοπικά Lipschitz. Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο \mathcal{U} του $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$ έτσι ώστε για κάθε $u \in \mathcal{U}$ και $x_0 \in \mathcal{O}$, το σύστημα (1.14) να είναι δεξιά πλήρες και η λύση του $x(t, x_0; u)$, $t \geq 0$ να ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$x(t, x_0; u) \in \mathcal{O}, \forall t \geq 0$$

Ορισμός 1.16 (α) Λέμε ότι η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ **διαχωρίζει τις καταστάσεις** (distinguishes the states) $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$ **σε χρόνο** $T > 0$, αν ισχύει:

$$\max_{t \in [0, T]} |h(x(t, x_1; u)) - h(x(t, x_2; u))| > 0$$

(β) Λέμε ότι η είσοδος $u \in \mathcal{U}$ **διαχωρίζει τις καταστάσεις** $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$, αν υπάρχει χρόνος $T > 0$, ούτως ώστε η u να διαχωρίζει τις καταστάσεις x_1, x_2 σε χρόνο T .

(γ) Λέμε ότι οι καταστάσεις $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$ είναι **μη διαχωρίσιμες** (indistinguishable) και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $x_1 I x_2$, αν για κάθε $u \in \mathcal{U}$, οι x_1, x_2 δε διαχωρίζονται μέσω της u , ισοδύναμα, αν ισχύει:

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$h(x(t, x_1; u)) = h(x(t, x_2; u)), \forall t \geq 0$$

(δ) Έστω $V \subset \mathcal{O}$. Λέμε ότι οι καταστάσεις $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$ είναι *V-μη διαχωρίσιμες* (*V-indistinguishable*) και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $x_1 I_V x_2$, αν για κάθε $u \in \mathcal{U}$ και $T > 0$ με

$$x(t, x_1; u), x(t, x_2; u) \in V, \forall t \in [0, T]$$

ισχύει:

$$h(x(t, x_1; u)) = h(x(t, x_2; u)), \forall t \in [0, T]$$

Παρατήρηση 1.17 Σημειώνεται ότι η σχέση I του Ορισμού 1.16(γ) είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$, ενώ εν γένει, η σχέση I_V του Ορισμού 1.16(δ) είναι μόνο αυτοπαθής και συμμετρική.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$I(x_0) := \{x \in \mathcal{O} : x_0 I x\}$$

$$I_V(x_0) := \{x \in V : x_0 I_V x\}$$

Ορισμός 1.18 (α) Λέμε ότι το σύστημα (1.14) είναι *παρατηρήσιμο στο* $x_0 \in \mathcal{O}$, αν για κάθε $x \in \mathcal{O}$ με $x \neq x_0$, υπάρχει είσοδος $u \in \mathcal{U}$ που διαχωρίζει τις καταστάσεις x_0, x , ή ισοδύναμα, αν ισχύει $I(x_0) = \{x_0\}$. Λέμε ότι το σύστημα (1.14) είναι *παρατηρήσιμο* (observable), αν είναι παρατηρήσιμο στο x για κάθε $x \in \mathcal{O}$, ή ισοδύναμα, αν ισχύει $I(x) = \{x\}$ για κάθε $x \in \mathcal{O}$.

(β) Λέμε ότι το σύστημα (1.14) είναι *τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο στο* $x_0 \in \mathcal{O}$, αν υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή V του x_0 , έτσι ώστε για κάθε ανοιχτή περιοχή W του x_0 με $W \subset V$ να ισχύει $I_W(x_0) = \{x_0\}$. Λέμε ότι το σύστημα (1.14) είναι *τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο* (locally weakly observable), αν είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο για κάθε $x \in \mathcal{O}$.

Παρατήρηση 1.19 Στη γραμμική περίπτωση, οι έννοιες της παρατηρησιμότητας και της τοπικής ασθενούς παρατηρησιμότητας ταυτίζονται και είναι ισοδύναμες με τον Ορισμό 1.6 καθώς και με τους υπόλοιπους ορισμούς παρατηρησιμότητας που θα δοθούν στη συνέχεια.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι απεικονίσεις $f(\cdot, \cdot)$, $h(\cdot)$ του συστήματος (1.14) είναι C^∞ και συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(\mathcal{O})$ την άλγεβρα Lie των C^∞ διανυσματικών πεδίων του \mathcal{O} και με $C^\infty(\mathcal{O})$ τις λείες συναρτήσεις από το \mathcal{O} στο \mathbb{R} . Επίσης, ορίζουμε τα σύνολα:

\mathcal{F}_0 : Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων $f_u(\cdot) := f(\cdot, u)$ για σταθερό $u \in U$. ($\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{X}(\mathcal{O})$)

\mathcal{F} : Η ελάχιστη υποάλγεβρα Lie της $\mathcal{X}(\mathcal{O})$ που περιέχει την \mathcal{F}_0 .

\mathcal{G} : Το ελάχιστο υποσύνολο του $C^\infty(\mathcal{O})$ που περιέχει τις απεικονίσεις h_i , $i = 1, 2, \dots, k$ και είναι **κλειστό ως προς την παραγωγή Lie** με στοιχεία της \mathcal{F}_0 , δηλαδή για κάθε $r \in \mathcal{G}$ και $\chi \in \mathcal{F}_0$ ισχύει $L_\chi r \in \mathcal{G}$. Σημειώνεται ότι λόγω της ιδιότητας $L_{[r,s]}\chi = L_r L_s \chi - L_s L_r \chi$, που ισχύει για κάθε $r, s \in C^\infty(\mathcal{O})$ και $\chi \in \mathcal{X}(\mathcal{O})$, το σύνολο \mathcal{G} είναι κλειστό και ως προς την παραγωγή Lie με στοιχεία της \mathcal{F} .

$d\mathcal{G}$: Το σύνολο των 1-μορφών $d\phi$ με $\phi \in \mathcal{G}$.

Ορισμός 1.20 (α) Λέμε ότι το σύστημα (1.14) ικανοποιεί τη **συνθήκη βαθμού παρατηρησιμότητας** (observability rank condition) στο $x \in \mathcal{O}$ και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\text{rank} d\mathcal{G}(x) = n$, αν υπάρχουν 1-μορφές $d\phi_1, d\phi_2, \dots, d\phi_n \in d\mathcal{G}$ ούτως ώστε τα διανύσματα γραμμές (covectors) $d\phi_1(x), d\phi_2(x), \dots, d\phi_n(x)$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β) Δοθείσης μιας ιδιότητας \mathcal{P} , λέμε ότι η \mathcal{P} ικανοποιείται **generically** στο \mathcal{O} , αν ικανοποιείται σε ένα ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο του \mathcal{O} .

Στα παρακάτω θεωρήματα, (βλέπε [30]) δίνονται ικανές συνθήκες ούτως ώστε το σύστημα (1.14) να είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο, και αντιστρόφως, ιδιότητες τις οποίες το σύστημα (1.14) ικανοποιεί όταν είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο.

Θεώρημα 1.21 *Αν το σύστημα (1.14) ικανοποιεί τη συνθήκη βαθμού παρατηρησιμότητας για κάθε $x \in \mathcal{O}$, τότε είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο.*

Θεώρημα 1.22 *Αν το σύστημα (1.14) είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο, τότε ικανοποιεί τη συνθήκη βαθμού παρατηρησιμότητας generically στο \mathcal{O} .*

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.14) είναι γραμμικό ως προς την είσοδο, με βαθμωτή είσοδο και βαθμωτή έξοδο (single-input/single-output), επομένως έχει τη μορφή

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1.15\alpha)$$

$$y = h(x), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad (1.15\beta)$$

όπου οι συναρτήσεις $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ είναι C^∞ . Για είσοδο $u \equiv 0$, το σύστημα (1.15) λαμβάνει τη μορφή:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.16\alpha)$$

$$y = h(x), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \quad (1.16\beta)$$

Για συστήματα της μορφής (1.16) η τοπική ασθενής παρατηρησιμότητα συνεπάγεται μια ισχυρότερη ιδιότητα από τη συνθήκη βαθμού παρατηρησιμότητας generically στο \mathcal{O} . Συγκεκριμένα, η παρακάτω πρόταση, (βλέπε [24]) αποτελεί μια ισχυρότερη εκδοχή του Θεωρήματος 1.22 για το σύστημα (1.16).

Πρόταση 1.23 *Αν το σύστημα (1.16) είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο, τότε η απεικόνιση $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως*

$$\psi(x) := \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

έχει Ιακωβιανό πίνακα $D\psi(x)$ βαθμού n generically στο \mathcal{O} .

Ακολουθώντας, ορίζουμε τις έννοιες της ομοιόμορφης παρατηρησιμότητας και της ομοιόμορφης παρατηρησιμότητας για κάθε είσοδο, για συστήματα της μορφής (1.16) και (1.15), αντίστοιχα, οι οποίες αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της τοπικής ασθενούς παρατηρησιμότητας.

Ορισμός 1.24 Το σύστημα (1.16) καλείται **ομοιόμορφα παρατηρήσιμο** (uniformly observable) αν η απεικόνιση $\psi(\cdot)$ όπως δίνεται στην (1.17) είναι ολικός διαφορομορφισμός από το \mathcal{O} στο $\psi(\mathcal{O})$.

Ορισμός 1.25 (α) Το σύστημα (1.15) καλείται **παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο** (observable for any input), αν για κάθε $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$, $T > 0$ και $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$ η είσοδος u διαχωρίζει τις καταστάσεις x_1 και x_2 .

(β) Το σύστημα (1.15) καλείται **ομοιόμορφα παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο** (uniformly observable for any input), αν είναι παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο, και επιπλέον, αν το σύστημα (1.16), δηλαδή το σύστημα (1.15) με είσοδο $u \equiv 0$, είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο.

• **Κανονικές μορφές ομοιόμορφα παρατηρήσιμων/“ομοιόμορφα παρατηρήσιμων για κάθε είσοδο συστημάτων”**

Από την πρόταση και το θεώρημα που ακολουθούν (βλέπε [25]), προκύπτει ότι οι έννοιες της ομοιόμορφης παρατηρησιμότητας και της “ομοιόμορφης παρατηρησιμότητας για κάθε είσοδο”, για συστήματα της μορφής (1.16) και (1.15), αντίστοιχα, είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ούτως ώστε τα εν λόγω συστήματα να είναι ισοδύναμα μέσω ενός διαφορομορφισμού με συστήματα συγκεκριμένης δομής.

Πρόταση 1.26 Το σύστημα (1.16) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο, αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο μέσω ενός διαφορομορφισμού $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \psi(\mathcal{O})$ με ένα σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \tilde{f}(x) \quad (1.18\alpha)$$

$$y = x_1 \quad (1.18\beta)$$

Θεώρημα 1.27 Το σύστημα (1.15) είναι “ομοιόμορφα παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο”, αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο μέσω ενός διαφορομορφισμού $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \psi(\mathcal{O})$, με ένα σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} u = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u \quad (1.19\alpha)$$

$$y = x_1 \quad (1.19\beta)$$

Παρατήρηση 1.28 Από την Πρόταση 1.26 και το Θεώρημα 1.27, συνεπάγεται εύκολα, ότι τόσο ένα ομοιόμορφα παρατηρήσιμο σύστημα της μορφής (1.16) όσο και ένα “ομοιόμορφα παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο” σύστημα της μορφής (1.15), είναι παρατηρήσιμο με την έννοια του Ορισμού 1.18(α). Πράγματι, για να δείξουμε ότι ένα ομοιόμορφα παρατηρήσιμο σύστημα της μορφής (1.16) είναι παρατηρήσιμο, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ζεύγος $x_a, x_b \in \mathcal{O}$ αρχικών καταστάσεων του (1.16) με $y(t, x_a) = y(t, x_b), \forall t \geq 0$, (όπου $y(\cdot, x_0)$ η έξοδος του (1.16) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathcal{O}$) ισχύει $x_a = x_b$. Λαμβάνοντας υπόψη την (1.18β), εξάγουμε ότι στις νέες συντεταγμένες θα ισχύει $x_1(t, \psi(x_a)) = x_1(t, \psi(x_b)), \forall t \geq 0$ και συνεπώς, από την (1.18α) ότι $x_i(t, \psi(x_a)) = x_i(t, \psi(x_b)), \forall t \geq 0, i = 2, 3, \dots, n$. Επομένως, οι λύσεις $x(\cdot, \psi(x_a))$ και $x(\cdot, \psi(x_b))$ στις νέες συντεταγμένες ταυτίζονται, από όπου εξάγουμε ότι $\psi(x_a) = \psi(x_b)$ και αφού η $\psi(\cdot)$ είναι 1-1, θα ισχύει $x_a = x_b$. Στην περίπτωση ενός συστήματος της μορφής (1.15) που είναι “ομοιόμορφα παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο”, μπορούμε με αντίστοιχα επιχειρήματα να δείξουμε ότι ικανοποιεί την ισχυρότερη (της παρατηρησιμότητας) ιδιότητα, κάθε είσοδος $u \in \mathcal{U}$ να διαχωρίζει κάθε ζεύγος καταστάσεων $x_a, x_b \in \mathcal{O}$.

• Γενική τριγωνική κανονική μορφή μη γραμμικών παρατηρήσιμων συστημάτων

Στο σημείο αυτό, παραθέτουμε ικανές συνθήκες ούτως ώστε ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα (1.14) με $k = 1$ να είναι τοπικά ισοδύναμο (μέσω διαφο-

1.4. Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα

ρομορφισμού) με ένα σύστημα τριγωνικής δομής (βλέπε [26]). Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο σύστημα είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο. Πριν την παράθεση των προαναφερθέντων αποτελεσμάτων δίνουμε έναν απαραίτητο ορισμό.

Ορισμός 1.29 Θεωρούμε το σύστημα (1.14) με $k = 1$ και για κάθε $u \in U$ την ακολουθία κατανομών

$$\mathcal{D}(u) := \{\mathcal{D}_0(u) \supset \mathcal{D}_1(u) \supset \cdots \supset \mathcal{D}_{n-1}(u)\}$$

στο \mathcal{O} που ορίζεται ως:

$$\mathcal{D}_0(u)(x) := \ker(Dh(x)), \forall x \in \mathcal{O}$$

$$\mathcal{D}_i(u)(x) := \mathcal{D}_{i-1}(u)(x) \cap \ker(DL_{f_u}^i h(x)), \forall x \in \mathcal{O}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$f_u(x) := f(x, u), \forall x \in \mathcal{O}$$

Η ακολουθία $\mathcal{D}(u)$ καλείται *παρατηρήσιμη ακολουθία κατανομών* του συστήματος (1.14). Λέμε ότι η παρατηρήσιμη ακολουθία κατανομών του (1.14) είναι *ομοιόμορφη*, αν κάθε κατανομή της $\mathcal{D}_i(u)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ είναι ανεξάρτητη του $u \in U$ και έχει σταθερή διάσταση $n - i - 1$ για κάθε $x \in \mathcal{O}$.

Στο παρακάτω θεώρημα, δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ούτως ώστε το σύστημα (1.14) με $k = 1$ να είναι τοπικά ισοδύναμο με ένα σύστημα τριγωνικής δομής.

Θεώρημα 1.30 Για το σύστημα (1.14) με $k = 1$ ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Η παρατηρήσιμη ακολουθία κατανομών του συστήματος (1.14) είναι ομοιόμορφη, αν και μόνο αν για κάθε $x_0 \in \mathcal{O}$ υπάρχει μια περιοχή V του x_0 και ένας διαφορομορφισμός $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.14) να έχει τη μορφή

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tilde{f}_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= \tilde{f}_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_n &= \tilde{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ y &= \tilde{h}(x_1) \end{aligned} \tag{1.20}$$

και να ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_1}(x_1) &\neq 0, \forall x \in \psi(V) \\ \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, u) &\neq 0, \forall (x, u) \in \psi(V) \times U \\ &\vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_{n-1}}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &\neq 0, \forall (x, u) \in \psi(V) \times U \end{aligned}$$

(β) Αν η παρατηρήσιμη ακολουθία κατανομών του συστήματος (1.14) είναι ομοιόμορφη, τότε το (1.14) είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο.

• Το πρόβλημα της γραμμικοποίησης

Στη συνέχεια εξετάζεται το πρόβλημα της εύρεσης ικανών συνθηκών, ούτως ώστε ένα μη γραμμικό σύστημα (χωρίς εισόδους)

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.21\alpha}$$

$$y = h(x), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k \tag{1.21\beta}$$

1.4. Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα

όπου $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$ να είναι (τοπικά) ισοδύναμο μέσω ενός (τοπικού) διαφορομορφισμού $z = \Phi(x)$ με ένα σύστημα της μορφής:

$$\dot{z} = Az + \beta(y) \quad (1.22\alpha)$$

$$y = \tilde{h}(z), z \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k \quad (1.22\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την απαίτηση το σύστημα (1.21) να είναι ισοδύναμο με το (1.22) σε μια περιοχή του $x_0 \in \mathbb{R}^n$, καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.31 Λέμε ότι το *πρόβλημα της γραμμικοποίησης* είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, αν υπάρχουν μια περιοχή U του x_0 , αλλαγή συντεταγμένων (C^∞ διαφορομορφισμός)

$$\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

και μια απεικόνιση $\beta \in C^\infty(h(U); \mathbb{R}^k)$ ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.21) να έχει τη μορφή (1.22).

Ισοδύναμα, το πρόβλημα της γραμμικοποίησης είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, αν υπάρχουν περιοχή U του x_0 και απεικονίσεις $\Phi \in C^\infty(U; \mathbb{R}^n)$, $\beta \in C^\infty(h(U); \mathbb{R}^k)$ ούτως ώστε η $\Phi(\cdot)$ να είναι διαφορομορφισμός και να αποτελεί λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης:

$$D\Phi(x)f(x) = A\Phi(x) + \beta(h(x)), \forall x \in U \quad (1.23)$$

• **Ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος της γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο (Krener and Isidori, 1983)**

Η πρώτη κύρια συμβολή στην επίλυση του ανωτέρω προβλήματος έγινε με την εργασία [40] για συστήματα με βαθμωτή έξοδο, δηλαδή για συστήματα της μορφής (1.21) με $k = 1$, όπου $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, ενώ η ίδια μεθοδολογία γενικεύτηκε και για την περίπτωση συστημάτων της μορφής (1.21) με πολλές εξόδους στην εργασία [41]. Ακολούθως, παρατίθενται τα αποτελέσματα

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

της εργασίας [40], όπου δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την εύρεση ενός τοπικού μετασχηματισμού συντεταγμένων, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.21) να έχει τη μορφή (1.22) με $k = 1$ και επιπλέον, να ισχύει $h(\Phi^{-1}(z)) = Cz$, όπου $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, δηλαδή η έξοδος του συστήματος στις νέες συντεταγμένες να είναι γραμμική. Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.32 Λέμε ότι το *πρόβλημα της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο* είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) με $k = 1$ στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, αν υπάρχουν μια περιοχή U του x_0 , αλλαγή συντεταγμένων (C^∞ διαφορομορφισμός)

$$\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

και μια απεικόνιση $\beta \in C^\infty(h(U); \mathbb{R}^n)$ ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.21) με $k = 1$ να έχει τη μορφή (1.22) με γραμμική έξοδο $\tilde{h}(z) = Cz$, όπου $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ και το ζεύγος (A, C) είναι παρατηρήσιμο.

Ισοδύναμα, το πρόβλημα της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) με $k = 1$ στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, αν υπάρχουν περιοχή U του x_0 και απεικονίσεις $\Phi \in C^\infty(U; \mathbb{R}^n)$, $\beta \in C^\infty(h(U); \mathbb{R}^n)$ ούτως ώστε η $\Phi(\cdot)$ να είναι διαφορομορφισμός, να αποτελεί λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (1.23) και επιπλέον να ισχύει

$$h(x) = C\Phi(x), \forall x \in U \quad (1.24)$$

όπου $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ και το ζεύγος (A, C) είναι παρατηρήσιμο.

Παρατήρηση 1.33 Η επίλυση του προβλήματος της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης είναι ισοδύναμη με την επίλυση του εν λόγω προβλήματος, όταν οι πίνακες A και C στον Ορισμό 1.32 έχουν την ειδική παρατηρήσιμη μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = (0, \cdots, 0, 1)$$

1.4. Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα

Στο παρακάτω θεώρημα δίνονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επιλυση του προβλήματος της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο για το σύστημα (1.21) με $k = 1$.

Θεώρημα 1.34 *Το πρόβλημα της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) με $k = 1$ στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Ικανοποιείται η συνθήκη:*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} Dh(x_0) \\ DL_f h(x_0) \\ \vdots \\ DL_f^{n-1} h(x_0) \end{pmatrix} = n \quad (1.25)$$

(ii) *Το μοναδικό διανυσματικό πεδίο $\tau(\cdot)$ που επιλύει το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{pmatrix} Dh(x) \\ DL_f h(x) \\ \vdots \\ DL_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \tau(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall x \in U \quad (1.26)$$

σε μια περιοχή U του $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$[\text{ad}_f^i \tau, \text{ad}_f^j \tau](x) = 0, \forall x \in U, 0 \leq i, j \leq n-1 \quad (1.27)$$

όπου οι τελεστές $L_f^i(\cdot)$, $[(\cdot), (\cdot)]$ και $\text{ad}_{(\cdot)}^i(\cdot)$ δίνονται στον Ορισμό 1.3.

Το Θεώρημα 1.34 είναι συνέπεια των προτάσεων που ακολουθούν.

Πρόταση 1.35 *Το πρόβλημα της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) με $k = 1$ στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Ικανοποιείται η (1.25).*

(ii) *Υπάρχει μια C^∞ απεικόνιση F από ένα ανοιχτό υποσύνολο V του \mathbb{R}^n επί μιας περιοχής U του x_0 που ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση*

$$DF(z) = \left(\tau(F(z)) \quad -\text{ad}_f \tau(F(z)) \quad \cdots \quad (-1)^{n-1} \text{ad}_f^{n-1} \tau(F(z)) \right) \quad (1.28)$$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

για κάθε $z \in V$, όπου $\tau(\cdot)$ το μοναδικό διανυσματικό πεδίο που επιλύει την (1.26) στην U .

Πρόταση 1.36 Έστω $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ διανυσματικά πεδία του \mathbb{R}^n κλάσεως C^∞ . Θεωρούμε τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(z) = \tau_i(F(z)), i = 1, 2, \dots, n \quad (1.29)$$

όπου $F(\cdot)$ μια απεικόνιση από ένα ανοιχτό σύνολο του \mathbb{R}^n σε ένα ανοιχτό σύνολο του \mathbb{R}^n . Έστω $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\tau_1(x_0), \tau_2(x_0), \dots, \tau_n(x_0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε υπάρχουν περιοχές U του x_0 και V του z_0 και ένας διαφορομορφισμός $F : V \rightarrow U$ με $F(z_0) = x_0$ που επιλύει την (1.29) αν και μόνο αν ισχύει:

$$[\tau_i, \tau_j](x) = 0, \forall x \in U, 1 \leq i, j \leq n \quad (1.30)$$

• **Ικανές συνθήκες για την τοπική επίλυση του προβλήματος της γραμμικοποίησης (Kazantzis and Kravaris, 1998)**

Στη συνέχεια, παρατίθενται τα αποτελέσματα μιας διαφορετικής προσέγγισης που παρέχει ικανές συνθήκες, ούτως ώστε το σύστημα (1.21) να είναι ισοδύναμο μέσω ενός διαφορομορφισμού $\Phi(\cdot)$ με ένα σύστημα της μορφής (1.22), χωρίς την επιπλέον απαίτηση η απεικόνιση της εξόδου στις νέες συντεταγμένες να είναι γραμμική. Το βασικό αποτέλεσμα αφορά συστήματα με αναλυτικό δεξί μέλος, εδραιώθη στην εργασία [38] και γενικεύτηκε μερικώς στις εργασίες [43] και [44]. Και στις δυο περιπτώσεις τα αποτελέσματα είναι τοπικά. Ολικά αποτελέσματα με παρόμοια προσέγγιση και με ασθενέστερες υποθέσεις δίνονται στο πρόσφατο άρθρο [6].

Ακολούθως, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας [38]. Θεωρούμε το σύστημα (1.21) και υποθέτουμε ότι οι απεικονίσεις $f(\cdot)$ και $h(\cdot)$ είναι αναλυτικές με $f(0) = 0$ και $h(0) = 0$. Αναζητούμε έναν τοπικό μετασχηματισμό συντεταγμένων

1.4. Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα

$$\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n, \Phi(0) = 0$$

όπου $U, \Phi(U)$ περιοχές του $0 \in \mathbb{R}^n$, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.21) να έχει τη μορφή (1.22), όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και η $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι αναλυτική απεικόνιση. Όπως σημειώθηκε και ανωτέρω, δεν υπάρχει πλέον αντίστοιχη απαίτηση με την (1.24), δηλαδή γραμμικότητα της εξόδου του συστήματος στις νέες συντεταγμένες. Αναζητούμε επομένως ικανές συνθήκες ούτως ώστε να υπάρχει ένας διαφορομορφισμός $\Phi(\cdot)$, που ικανοποιεί σε μια περιοχή του μηδενός τη μερική διαφορική εξίσωση (1.23), για κατάλληλη επιλογή του πίνακα A και της απεικόνισης $\beta(\cdot)$.

Ορισμός 1.37 Δοθέντος ενός $n \times n$ πίνακα F με ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, λέμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός μ είναι **μη συσχετισμένος** (nonresonant) ως προς το εν λόγω σύνολο ιδιοτιμών, αν δεν συνδέεται με αυτές μέσω μιας σχέσης της μορφής $\mu = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i$, όπου οι m_1, m_2, \dots, m_n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $\sum_{i=1}^n m_i \geq 1$.

Εν συνεχεία κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις για το σύστημα (1.21).

A1. Ο Ιακωβιανός πίνακας F του διανυσματικού πεδίου $f(x)$ για $x = 0$ ($F = DF(0)$) έχει ιδιοτιμές $\kappa_i, i = 1, 2, \dots, n$ με

$$0 \notin \text{conv}(\{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n\}) \quad (1.31)$$

A2. Αν συμβολίσουμε με H τον $k \times n$ πίνακα $H = Dh(0)$, τότε ο $nk \times n$ πίνακας

$$O = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

έχει βαθμό n .

Θεώρημα 1.38 ([38]) Θεωρούμε ότι το σύστημα (1.21) ικανοποιεί τις Υποθέσεις A1 και A2. Επιπλέον, θεωρούμε ένα Hurwitz πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και μια αναλυτική απεικόνιση $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\beta(0) = 0$ και $D\beta(0) = B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, ούτως ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

- Το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο.

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

• Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μη συσχετισμένες ως προς τις ιδιοτιμές του πίνακα F της Υποθέσης A1, με την έννοια του Ορισμού 1.37.

Τότε, η μερική διαφορική εξίσωση (1.23) με αρχική συνθήκη $\Phi(0) = 0$, έχει μοναδική αναλυτική 1-1 λύση σε μια περιοχή του μηδενός, συνεπώς το πρόβλημα της γραμμικοποίησης είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) στο $0 \in \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1.39 Σημειώνεται ότι μια εύλογη (και εύκολη) επιλογή της συνάρτησης $\beta(\cdot)$ είναι η $\beta(y) = By$, όπου ο πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ είναι τέτοιος ώστε το ζεύγος (A, B) να είναι ελέγξιμο.

Η απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος βασίζεται σε ένα θεώρημα του Lyapunov [51, σελ 626] για ολόμορφες απεικονίσεις, το οποίο διατυπώνουμε ακολούθως για πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.40 Θεωρούμε την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{\partial w}{\partial x} \phi(x, w) = \psi(x, w), w(0) = 0 \quad (1.33)$$

με

$$\phi(0, 0) = 0, \psi(0, 0) = 0, \frac{\partial \phi}{\partial w}(0, 0) = 0$$

όπου $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ δοθέντα αναλυτικά διανυσματικά πεδία. Υποθέτουμε ότι το σύνολο των ιδιοτιμών $\{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n\}$ του $n \times n$ πίνακα $\partial \phi / \partial x(0, 0)$ ικανοποιούν τη συνθήκη

$$0 \notin \text{conv}(\{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n\})$$

και ότι είναι μη συσχετισμένες ως προς το σύνολο των ιδιοτιμών $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ του $p \times p$ πίνακα $\partial \psi / \partial w(0, 0)$, με την έννοια του Ορισμού 1.37.

Τότε, η μερική διαφορική εξίσωση (1.33) με αρχική συνθήκη $w(0) = 0$, έχει μοναδική αναλυτική λύση $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ σε μια γειτονιά του $x = 0$.

- **Ικανές συνθήκες για την τοπική επίλυση του προβλήματος της γραμμικοποίησης (Krener and Xiao, 2002, 2004)**

Ακολουθώντας, παραθέτουμε τα αποτελέσματα των εργασιών [43] και [44] όπου μελετάται πάλι το σύστημα (1.21) (με $f(\cdot)$ και $h(\cdot)$ αναλυτικές απεικονίσεις) και δίνονται ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος της γραμμικοποίησης, όπως διατυπώνεται στον Ορισμό 1.31. Πριν την παράθεση του κεντρικού θεωρήματος των ανωτέρω εργασιών, δίνουμε έναν απαραίτητο ορισμό.

Ορισμός 1.41 Δοθέντος ενός $n \times n$ πίνακα F με φάσμα $\sigma(F) = \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και σταθερών $C > 0$, $\nu > 0$, λέμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός μ είναι τύπου (C, ν) ως προς το $\sigma(F)$ αν για κάθε διάνυσμα (m_1, m_2, \dots, m_n) με μη αρνητικές ακέραιες συνιστώσες και $|m| := \sum_{i=1}^n m_i \geq 2$, ισχύει:

$$|\mu - m \cdot \lambda| \geq \frac{C}{|m|^\nu} \quad (1.34)$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι το κεντρικό αποτέλεσμα των εργασιών [43] και [44] και αποτελεί μερική γενίκευση του Θεωρήματος 1.38.

Θεώρημα 1.42 Υποθέτουμε ότι τα διανυσματικά πεδία του συστήματος (1.21) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι αναλυτικές απεικονίσεις με $f(0) = 0$, $h(0) = 0$ και $Df(0) = F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Dh(0) = H \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Έστω $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια αναλυτική απεικόνιση με $\beta(0) = 0$ και $D\beta(0) = B \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες.

- Υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας T που αποτελεί λύση της εξίσωσης πινάκων $TF = AT - BH$.
- Υπάρχουν σταθερές $C > 0$, $\nu > 0$ τέτοιες ώστε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A να είναι τύπου (C, ν) ως προς το φάσμα $\sigma(F)$ του πίνακα F , με την έννοια του Ορισμού 1.41.
- Υπάρχουν σταθερές $C > 0$, $\nu > 0$ τέτοιες ώστε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα F να είναι τύπου (C, ν) ως προς το φάσμα $\sigma(F)$ του πίνακα F , με την έννοια του Ορισμού 1.41.

Τότε υπάρχει μοναδική αναλυτική λύση $z = \Phi(x)$ της μερικής διαφορικής εξίσωσης (1.23) με αρχική συνθήκη $\Phi(0) = 0$ σε μια περιοχή του $x = 0$, με $D\Phi(0) = T$.

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

Συνεπώς, η $\Phi(\cdot)$ είναι τοπικός διαφορομορφισμός και επομένως, το πρόβλημα της γραμμικοποίησης είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) στο $0 \in \mathbb{R}^n$.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται σε ένα θεώρημα του Siegel [9, σελ 190]. Τέλος στην παρακάτω πρόταση δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες, προκειμένου να ικανοποιείται η πρώτη υπόθεση του ανωτέρω θεωρήματος, δηλαδή η εξίσωση πινάκων $TF = AT - BH$ με άγνωστο τον πίνακα T να έχει μοναδική και αντιστρέψιμη λύση.

Πρόταση 1.43 *Θεωρούμε τους πίνακες $F, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $H \in \mathbb{R}^{k \times n}$ και την εξίσωση πινάκων*

$$TF = AT - BH \quad (1.35)$$

με άγνωστο πίνακα T . Τότε η (1.35) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν για τα φάσματα $\sigma(F)$ και $\sigma(A)$ των πινάκων F και A , αντίστοιχα, ισχύει $\sigma(F) \cap \sigma(A) = \emptyset$. Επιλέον, με την υπόθεση $\sigma(F) \cap \sigma(A) = \emptyset$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Ο πίνακας T που αποτελεί τη μοναδική λύση της εξίσωσης (1.35) είναι αντιστρέψιμος.
- Το ζεύγος (F, H) είναι παρατηρήσιμο και το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο.
- **Ικανές συνθήκες για την ολική επίλυση του προβλήματος της γραμμικοποίησης (Andrieu and Praly, 2006)**

Συνεχίζουμε με την παράθεση των αποτελεσμάτων της εργασίας [6], στην οποία γενικεύονται οι ιδέες των εργασιών [38] και [43]. Θεωρούμε πάλι το σύστημα (1.21) και έστω \mathcal{O} ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Συμβολίζουμε με $(\sigma_{\mathcal{O}}^-(x), \sigma_{\mathcal{O}}^+(x))$ το μέγιστο χρονικό διάστημα, για το οποίο η λύση $X(x, t)$ με αρχική συνθήκη $x \in \mathcal{O}$ του (1.21), ορίζεται και βρίσκεται εντός του συνόλου \mathcal{O} . Στην παρακάτω ανάλυση, δίνονται ικανές συνθήκες ούτως ώστε να υπάρχουν ένας φυσικός $m \in \mathbb{N}$, ένας μιγαδικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ και συνεχείς απεικονίσεις $T : \text{cl}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}^{m \times k}$, $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}^{m \times k}$ με την $T(\cdot)$ να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο \mathcal{O} , ούτως ώστε να ικανοποιείται η μερική διαφορική εξίσωση

$$DT(x)f(x) = AT(x) + \beta(h(x)), \forall x \in \mathcal{O} \quad (1.36)$$

1.4. Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα

και επομένως, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $z = T(x)$, τότε η διαφορική εξίσωση της κατάστασης του συστήματος (1.21) στο $\mathbb{C}^{m \times k}$ θα έχει τη μορφή:

$$\dot{z} = Az + \beta(y) \quad (1.37)$$

Επιπλέον, θέλουμε η $T(\cdot)$ να είναι ομοιόμορφα 1-1, δηλαδή να υπάρχει μια συνάρτηση $\rho(\cdot)$ κλάσεως K_∞ ούτως ώστε να ισχύει:

$$|x_1 - x_2| \leq \rho(|T(x_1) - T(x_2)|), \forall (x_1, x_2) \in \text{cl}(\mathcal{O})^2 \quad (1.38)$$

Προτού προχωρήσουμε στη διατύπωση ικανών συνθηκών για την ύπαρξη της απεικόνισης $T(\cdot)$, δίνουμε έναν απαραίτητο ορισμό.

Ορισμός 1.44 Έστω \mathcal{O} ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Λέμε ότι το σύστημα (1.21) είναι *δεξιά πλήρες* (forward complete) και αντίστοιχα *αριστερά πλήρες* (backward complete) *εντός του συνόλου* \mathcal{O} , αν για κάθε $x \in \mathcal{O}$ ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\sigma_{\mathcal{O}}^+(x) < \infty \implies \sigma_{\mathcal{O}}^+(x) < \sigma_{\mathbb{R}^n}^+(x) \quad (1.39)$$

Ακολουθώντας, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\check{X}(x, s)$ για τη λύση του τροποποιημένου συστήματος

$$\dot{x} = \check{f}(x) = \chi(x)f(x) \quad (1.40)$$

όπου η $f(\cdot)$ δίνεται στην (1.21) και η $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια οποιαδήποτε τοπικά Lipschitz συνάρτηση με τις ιδιότητες

$$\chi(x) = 1, \text{ αν } x \in \mathcal{O}, \quad \chi(x) = 0, \text{ αν } x \notin \mathcal{O} + \delta_u$$

για κάποιο θετικό αριθμό δ_u . Στο παρακάτω θεώρημα δίνονται ικανές συνθήκες για την ύπαρξη της επιθυμητής απεικόνισης $T(\cdot)$.

Θεώρημα 1.45 (Υπαρξη της απεικόνισης $T(\cdot)$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας (γνήσια) θετικός αριθμός δ_u , τέτοιος ώστε το σύστημα (1.21) να είναι αριστερά πλήρες εντός του συνόλου $\mathcal{O} + \delta_u$. Τότε, για κάθε Hurwitz $m \times m$ μιγαδικό πίνακα A , υπάρχει μια C^1 απεικόνιση $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}^{m \times k}$ ούτως ώστε η συνάρτηση $T : \text{cl}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}^{m \times k}$ που ορίζεται ως:

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$T(x) = \int_{-\infty}^0 \exp(-As) \beta(h(\check{X}(x, s))) ds \quad (1.41)$$

να είναι συνεχής και να ικανοποιεί την (1.36).

Στο παρακάτω θεώρημα δίνονται ικανές συνθήκες προκειμένου η απεικόνιση $T(\cdot)$ να είναι 1-1. Για τη διατύπωση του, εισάγεται η έννοια της “ \mathcal{O} -διαχωρισιμότητας από αριστερά” και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός B_{1m} , για το ακόλουθο διάλυμα του \mathbb{R}^m :

$$B_{1m} := \underbrace{(1, \dots, 1)}_m \quad (1.42)$$

Ορισμός 1.46 Λέμε ότι το σύστημα (1.21) είναι \mathcal{O} -διαχωρίσιμο από αριστερά, αν υπάρχουν δυο (γνήσια) θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\delta_y < \delta_d$, τέτοιοι ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathcal{O} + \delta_y$ με $x_1 \neq x_2$, να υπάρχει $t \in (\max\{\sigma_{\mathcal{O} + \delta_d}^-(x_1), \sigma_{\mathcal{O} + \delta_d}^-(x_2)\}, 0]$, ούτως ώστε να ισχύει:

$$h(X(x_1, t)) \neq h(X(x_2, t))$$

Θεώρημα 1.47 Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.21) είναι αριστερά πλήρες εντός του συνόλου $\mathcal{O} + \delta_u$ και \mathcal{O} -διαχωρίσιμο από αριστερά, όπου για τη σταθερά δ_d , ισχύει $\delta_d \in (0, \delta_u)$. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχουν μια 1-1 και C^1 απεικόνιση $b : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$, μια συνεχής συνάρτηση $M : \mathcal{O} + \delta_y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ και ένας αρνητικός πραγματικός αριθμός ℓ , έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{O} + \delta_y$ οι απεικονίσεις $t \rightarrow \exp(-\ell t)b(h(\check{X}(x, t)))$ και $t \rightarrow \exp(-\ell t)\frac{\partial}{\partial x}b(h(\check{X}(x, t)))$ να ικανοποιούν για κάθε $t \in (\sigma_{\mathbb{R}^n}^-(x), 0]$ τη συνθήκη

$$\left| \exp(-\ell t)b(h(\check{X}(x, t))) \right| + \left| \exp(-\ell t)\frac{\partial}{\partial x}b(h(\check{X}(x, t))) \right| \leq M(x)$$

όπου $\check{X}(x, \cdot)$ είναι η λύση του συστήματος (1.40) με αρχική συνθήκη $x \in \mathbb{R}^n$ και η $\chi(\cdot)$ είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\chi(x) = 1, \text{ αν } x \in \mathcal{O} + \delta_d, \quad \chi(x) = 0, \text{ αν } x \notin \mathcal{O} + \delta_u$$

1.4. Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα

Με τις παραπάνω υποθέσεις, υπάρχει ένα υποσύνολο S του \mathbb{C}^{n+1} , μηδενικού μέτρου, ούτως ώστε η συνάρτηση $T : \text{cl}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}^{(n+1) \times k}$ που ορίζεται χρησιμοποιώντας το συμβολισμό (1.42) ως

$$T(x) = \int_{-\infty}^0 \exp(-As) B_{1m} b(h(\check{X}(x, s))) ds$$

να είναι 1-1, δεδομένου ότι ο πίνακας A είναι διαγώνιος, με $n + 1$ μιγαδικές ιδιοτιμές λ_i επιλεγμένες με τον περιορισμό να μην ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S$ και τα πραγματικά τους μέρη να είναι γνήσια μικρότερα από τη σταθερά ℓ .

Ακολούθως δίνονται ικανές συνθήκες προκειμένου η απεικόνιση $T(\cdot)$ να είναι 1-1, στην περίπτωση όπου το σύστημα (1.21) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο με μια έννοια λίγο πιο γενική από αυτή του Ορισμού 1.24, και η διάσταση του χώρου της εξόδου είναι $k = 1$. Ειδικότερα, λέμε ότι το (1.21) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο, αν υπάρχουν ένας φυσικός $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq n$ και μια επαρκώς λεία συνάρτηση $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ούτως ώστε η απεικόνιση $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ που ορίζεται ως

$$H(x) := \begin{pmatrix} b(h(x)) \\ L_f b(h(x)) \\ \vdots \\ L_f^{m-1} b(h(x)) \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

να είναι 1-1, όταν θεωρούμε τον περιορισμό της στο σύνολο $\text{cl}(\mathcal{O})$.

Θεώρημα 1.48 Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια επαρκώς λεία συνάρτηση $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε για την απεικόνιση $H(\cdot)$ όπως δίνεται από την (1.43), να υπάρχουν ένας θετικός πραγματικός αριθμός L και μια κλάσεως \mathcal{K}_∞ συνάρτηση $\rho(\cdot)$ ούτως ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} |L_f^m b(h(x_1)) - L_f^m b(h(x_2))| &\leq L |H(x_1) - H(x_2)|, \forall (x_1, x_2) \in \text{cl}(\mathcal{O})^2 \\ |x_1 - x_2| &\leq \rho(|H(x_1) - H(x_2)|), \forall (x_1, x_2) \in \text{cl}(\mathcal{O})^2 \end{aligned}$$

Τότε, για κάθε διαγώνιο Hurwitz $m \times m$ μιγαδικό πίνακα A , με m τον αριθμό των γραμμών του πίνακα $H(\cdot)$, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός κ^* , έτσι ώστε για

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

κάθε $\kappa > \kappa^*$, να υπάρχει μια απεικόνιση $T : \mathcal{C}l(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}^m$ που είναι συνεχής, ομοιόμορφα 1-1 και ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση:

$$DT(x)f(x) = \kappa AT(x) + B_{1m}b(h(x)), \forall x \in \mathcal{O}$$

- **Ισοδυναμία ενός γραμμικού ως προς την είσοδο συστήματος βαθμωτής εισόδου και εξόδου με την p -κανονική μορφή του (Respondek, 2003)**

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της εργασίας [59], όπου δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το μετασχηματισμό ενός συστήματος με βαθμωτή είσοδο στην p -κανονική μορφή του. Ειδικότερα, θεωρούμε ένα σύστημα της μορφής:

$$\dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u \tag{1.44}$$

όπου $\xi \in \mathcal{O}$, ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n με $0 \in \mathcal{O}$ και f, g είναι C^∞ διανυσματικά πεδία του \mathcal{O} με $f(0) = 0$ και $g(0) \neq 0$. Το πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών ούτως ώστε το (1.44) να είναι ισοδύναμο μέσω μετασχηματισμού ανάδρασης της μορφής

$$x = \phi(\xi) \tag{1.45\alpha}$$

$$u = \alpha(\xi) + \beta(\xi)v \tag{1.45\beta}$$

με ένα σύστημα της ακόλουθης τριγωνικής δομής:

1.4. Παρατηρησιμότητα/Κανονικές Μορφές για μη Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2^{p_1} + \sum_{i=0}^{p_1-1} x_2^i \phi_{1,i}(x_1) \\
 \dot{x}_2 &= x_3^{p_2} + \sum_{i=0}^{p_2-1} x_3^i \phi_{2,i}(x_1, x_2) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n^{p_{n-1}} + \sum_{i=0}^{p_{n-1}-1} x_n^i \phi_{n-1,i}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\
 \dot{x}_n &= v
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

όπου οι συντελεστές p_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ είναι θετικοί φυσικοί αριθμοί. Σημειώνεται ότι το ίδιο πρόβλημα μελετήθηκε και στην εργασία των D. Chen και W. Lin [21], όπου επιλύθηκε το ίδιο πρόβλημα για αναλυτικά συστήματα μέσω μετασχηματισμών ανάδρασης της μορφής:

$$\begin{aligned}
 x &= \phi(\xi) \\
 u &= \alpha(\xi) + v
 \end{aligned}$$

Όπως σημειώθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, η ανωτέρω κανονική μορφή αποτελεί ένα βασικό κίνητρο για τη μελέτη του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για τα τριγωνικά συστήματα του Κεφαλαίου 3. Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 3 θεωρούμε την κλάση των τριγωνικών συστημάτων (4) που παρουσιάστηκαν στη σύνοψη της διατριβής, τα οποία λόγω του χρονικώς μεταβαλλόμενου δεξιού τους μέλους και των όρων $a_i(t, x_1)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ αποτελούν μια γενικότερη κατηγορία συστημάτων της μορφής (1.46), όταν ισχύει

$$\begin{aligned}
 \phi_{j,i}(x_1, x_2, \dots, x_j) &= 0, \forall (x_1, x_2, \dots, x_j) \in \mathbb{R}^n, j = 1, 2, \dots, n - 1, \\
 & i = 1, 2, \dots, p_j - 1
 \end{aligned}$$

οι συντελεστές p_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ είναι περιττοί φυσικοί και η είσοδος $v := v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$ είναι χρονικώς μεταβαλλόμενη ανάδραση της κατάστασης του συστήματος. Επίσης, σημειώνεται ότι το

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

πρόβλημα της σταθεροποίησης συστημάτων της μορφής (1.46) μέσω ανάδρασης μελετήθηκε στις εργασίες [56] και [57], ενώ το πρόβλημα της σταθεροποίησης των εν λόγω συστημάτων μέσω ανάδρασης εξόδου εξετάστηκε στα άρθρα [73] και [58].

Για τη διατύπωση των ικανών και αναγκαίων συνθηκών προκειμένου το σύστημα (1.44) να είναι ισοδύναμο μέσω μετασχηματισμού ανάδρασης (1.45) με ένα σύστημα της μορφής (1.46), δίνεται ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 1.49 Λέμε ότι σύστημα (1.44) έχει *ελάχιστο δείκτη* (minimum index) $(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})$, αν τα διανυσματικά πεδία h_1, h_2, \dots, h_n , όπου:

$$\begin{aligned} h_1 &= g \\ h_{j+1} &= ad_{h_j}^{q_j} f, j = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο $0 \in \mathbb{R}^n$, και επιπλέον, η $(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})$ είναι η μικρότερη με τη λεξικογραφική διάταξη $(n-1)$ -άδα που ικανοποιεί την εν λόγω ιδιότητα. Επίσης, θεωρούμε την ακολουθία κατανομών $\mathcal{D}^1 \subset \mathcal{D}^2 \subset \dots \subset \mathcal{D}^n$, όπου:

$$\mathcal{D}^j = \text{span}\{h_1, h_2, \dots, h_j\}$$

Θεώρημα 1.50 Το σύστημα (1.44) είναι τοπικά ισοδύναμο μέσω μετασχηματισμού ανάδρασης (1.45) με την p -κανονική μορφή του (1.46), αν και μόνο αν ικανοποιεί σε μια περιοχή του $0 \in \mathbb{R}^n$ τις ακόλουθες συνθήκες.

- (i) Ο ελάχιστος δείκτης του (1.44) είναι $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$.
- (ii) Οι κατανομές \mathcal{D}^j είναι ενειλιγμένες για κάθε $j = 1, 2, \dots, n-1$.
- (iii) Ισχύει $[f, \mathcal{D}^j] \subset \mathcal{D}^{j+1}$, για κάθε $j = 1, 2, \dots, n-2$.

Η απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος βασίζεται μεταξύ των άλλων στο ακόλουθο πόρισμα ενός θεωρήματος του Mather στη θεωρία ιδιομορφιών.

Πόρισμα 1.51 Έστω $\psi = \psi(z, w)$ μια C^∞ απεικόνιση από μια γειτονιά του $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$ στον \mathbb{R} . Υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial^i \psi}{\partial z^i}(0, 0) = 0, i = 0, 1, \dots, k-1$$

και

$$\frac{\partial^k \psi}{\partial z^k}(0, 0) \neq 0$$

Τότε, υπάρχει ένας τοπικός μετασχηματισμός $\tilde{z} = g(z, w)$, αντιστρέψιμος ως προς z , ούτως ώστε να ισχύει

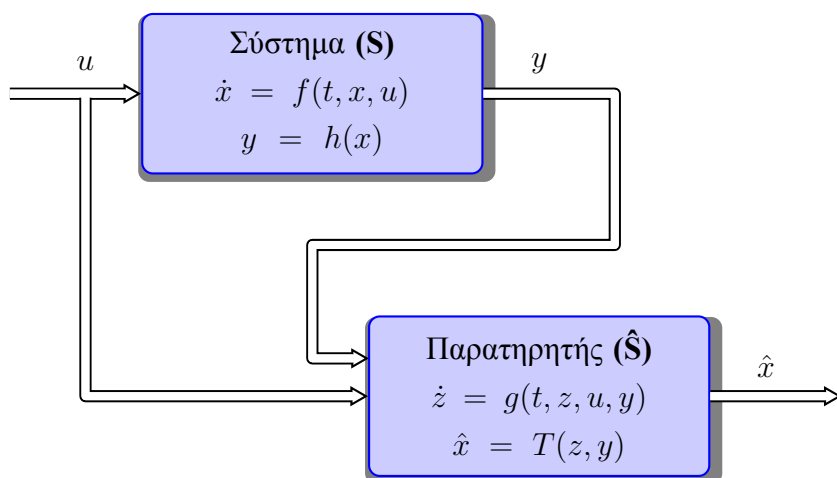
$$\psi(g^{-1}(\tilde{z}, w), w) = \sigma \tilde{z}^k + \sum_{i=0}^{k-2} a_i(w) \tilde{z}^i$$

όπου $\sigma = 1$ αν ο k είναι περιττός, $\sigma = \pm 1$ αν ο k είναι άρτιος και οι a_i είναι C^∞ συναρτήσεις με $a_i(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-2$.

1.5 Παρατηρητές για μη Γραμμικά Συστήματα

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται μεθοδολογίες για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για ορισμένες σημαντικές κατηγορίες συστημάτων, συμπεριλαμβανομένων και εκείνων της προηγούμενης ενότητας, για τα οποία υπάρχουν μετασχηματισμοί συντεταγμένων, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες να έχουν ειδικότερη (απλούστερη) μορφή. Η έννοια του παρατηρητή στη γενική μη γραμμική περίπτωση γενικεύει την έννοια του παρατηρητή για τη γραμμική περίπτωση (Ορισμός 1.11). Συγκεκριμένα, ένας παρατηρητής για ένα γενικό μη γραμμικό, χρονικώς μεταβαλλόμενο σύστημα (\mathbf{S}) με εισόδους και εξόδους, είναι ένα σύστημα $(\hat{\mathbf{S}})$ που έχει ως είσοδο την είσοδο και την έξοδο του συστήματος (\mathbf{S}) και η έξοδος του, προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κατάσταση του αρχικού συστήματος (\mathbf{S}) .

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή



Εκτίμηση Κατάστασης
 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \hat{x}(t)| = 0$

- Σχεδίαση τοπικού παρατηρητή όταν το πρόβλημα της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο είναι επιλύσιμο

Στην παρακάτω πρόταση δίνονται ικανές συνθήκες, ούτως ώστε το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή να είναι επιλύσιμο για συστήματα της μορφής (1.21) με $k = 1$, για τα οποία το πρόβλημα της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο είναι επιλύσιμο (για παράδειγμα αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.42).

Πρόταση 1.52 Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα της παρατηρήσιμης γραμμικοποίησης με γραμμική έξοδο είναι επιλύσιμο για το σύστημα (1.21) με $k = 1$ στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (Ορισμός 1.32), δηλαδή υπάρχουν μια περιοχή U του x_0 , ένας διαφορομορφισμός $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ και πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.21) με $k = 1$ να έχει τη μορφή (1.22) με $\tilde{h}(z) = Cz$ και το ζεύγος (A, C) να είναι παρατηρήσιμο. Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια

1.5. Παρατηρητές για μη Γραμμικά Συστήματα

φραγμένη περιοχή V του x_0 με $\text{cl}(V) \in U$ ούτως ώστε για κάθε $\tilde{x} \in V$ να ισχύει

$$x(\tilde{x}, t) \in V, \forall t \geq 0$$

όπου $x(\tilde{x}, \cdot)$ η λύση του (1.21) με $k = 1$ με αρχική κατάσταση \tilde{x} . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

- (i) Υπάρχει ένας πίνακας $G \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ούτως ώστε ο $A + GC$ να είναι Hurwitz.
- (ii) Έστω $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$ η ελάχιστη και η μέγιστη, αντίστοιχα, ιδιοτιμή του θετικά ορισμένου πίνακα P που αποτελεί τη λύση της εξίσωσης πινάκων

$$(A + GC)'P + P(A + GC) = -I$$

και

$$R := \sup\{r > 0 : \Phi(V) + B_r \in \Phi(U)\} > 0$$

$$\bar{R} := \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}$$

Τότε το σύστημα

$$\dot{\zeta} = (A + GC)\zeta - Gy + \beta(y), \zeta(0) = \Phi(\tilde{\xi}) \quad (1.47)$$

είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.21) με $k = 1$. Συγκεκριμένα, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(α)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(\tilde{x}, t) - \Phi^{-1}(\zeta(\Phi(\tilde{\xi}), t))| = 0, \forall \tilde{x}, \tilde{\xi} \in \Phi^{-1}(B_{\bar{R}}(\Phi(x_0)) \cap \Phi(V)) \quad (1.48)$$

(β)

$$\tilde{x} = \tilde{\xi} \Rightarrow x(\tilde{x}, t) = \Phi^{-1}(\zeta(\Phi(\tilde{\xi}), t)), \forall t \geq 0, \tilde{x}, \tilde{\xi} \in \Phi^{-1}(B_{\bar{R}}(\Phi(x_0)) \cap \Phi(V)) \quad (1.49)$$

- Σχεδίαση τοπικού παρατηρητή όταν το πρόβλημα της γραμμικοποίησης είναι τοπικά επιλύσιμο

Στην πρόταση που ακολουθεί, δίνονται ικανές συνθήκες για την ύπαρξη παρατηρητή για συστήματα της μορφής (1.21) που ικανοποιούν τις συνθήκες είτε του Θεωρήματος 1.38 είτε του Θεωρήματος 1.42 και επομένως υπάρχει μετασχηματισμός συντεταγμένων, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες να έχουν τη μορφή (1.22).

Πρόταση 1.53 Θεωρούμε το σύστημα (1.21) και έστω ένας Hurwitz πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και μια αναλυτική απεικόνιση $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι υποθέσεις είτε του Θεωρήματος 1.38 είτε του Θεωρήματος 1.42, συνεπώς, υπάρχει μια περιοχή U του $0 \in \mathbb{R}^n$ και ένας διαφορομορφισμός $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ με $\Phi(0) = 0$, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.21) να έχει τη μορφή (1.22). Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια φραγμένη περιοχή V του 0 με $\text{cl}(V) \in U$ ούτως ώστε για κάθε $\tilde{x} \in V$ να ισχύει

$$x(\tilde{x}, t) \in V, \forall t \geq 0$$

όπου $x(\tilde{x}, \cdot)$ η λύση του (1.21) με αρχική κατάσταση \tilde{x} και έστω $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$ η ελάχιστη και η μέγιστη, αντίστοιχα, ιδιοτιμή του θετικά ορισμένου πίνακα P που αποτελεί τη λύση της εξίσωσης πινάκων

$$A'P + PA = -I$$

και

$$R := \sup\{r > 0 : \Phi(V) + B_r \in \Phi(U)\} > 0$$

$$\bar{R} := \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}$$

Τότε το σύστημα

$$\dot{z} = f(z) + (D\Phi(z))^{-1}(\beta(y) - \beta(h(z))), z(0) = \tilde{z} \quad (1.50)$$

είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.21). Συγκεκριμένα, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(α)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(\tilde{x}, t) - z(\tilde{z}, t)| = 0, \forall \tilde{x}, \tilde{z} \in \Phi^{-1}(B_{\bar{R}}(\Phi(x_0)) \cap \Phi(V)) \quad (1.51)$$

(β)

$$\tilde{x} = \tilde{z} \Rightarrow x(\tilde{x}, t) = z(\tilde{z}, t), \forall t \geq 0, \tilde{x}, \tilde{z} \in \Phi^{-1}(B_{\bar{R}}(\Phi(x_0)) \cap \Phi(V)) \quad (1.52)$$

Επιπλέον, το σφάλμα στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες, όπου η (1.21) γράφεται ως

$$\dot{\xi} = A\xi + \beta(y)$$

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}(\Phi(z) - \Phi(x)) = A(\Phi(z) - \Phi(x)) \quad (1.53)$$

• **Σχεδίαση ολικού παρατηρητή όταν το πρόβλημα της γραμμικοποίησης είναι ολικά επιλύσιμο**

Στο ακόλουθο θεώρημα, δίνονται ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για το σύστημα (1.21) όταν η αρχική του κατάσταση βρίσκεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο \mathcal{O} του \mathbb{R}^n και ικανοποιούνται υποθέσεις όπως αυτές του Θεωρήματος 1.48. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχουν ένας φυσικός $m \in \mathbb{N}$ και μια ομοιόμορφα 1-1 απεικόνιση $T : \text{cl}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}^{m \times k}$ ούτως ώστε η διαφορική εξίσωση της κατάστασης του συστήματος (1.21) στο $\mathbb{C}^{m \times k}$ να είναι γραμμική, εκτός από όρους που εξαρτώνται από την έξοδο του συστήματος.

Θεώρημα 1.54 (Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη παρατηρητή) Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.21) είναι δεξιά πλήρες εντός του συνόλου \mathcal{O} και ότι υπάρχουν ένας φυσικός $m \in \mathbb{N}$, ένας Hurwitz $m \times m$ μιγαδικός πίνακας A , συνεχείς απεικονίσεις $T : \text{cl}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}^{m \times k}$, $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}^{m \times k}$ και μια συνάρτηση $\rho(\cdot)$ κλάσεως \mathcal{K}_∞ ,

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

ούτως ώστε να ισχύουν οι (1.36) και (1.38). Τότε υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $T^* : \mathbb{C}^{m \times k} \rightarrow \mathcal{cl}(\mathcal{O})$, ούτως ώστε για κάθε $x \in \mathcal{O}$ και $z \in \mathbb{C}^{m \times k}$, η (μοναδική) λύση $(X(x, t), Z(x, z, t))$ του συστήματος

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.54\alpha)$$

$$\dot{z} = Az + \beta(h(x)) \quad (1.54\beta)$$

να ορίζεται για κάθε $t \in [0, \sigma_{\mathbb{R}^n}^+(x))$ και έτσι ώστε να ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$\sigma_{\mathcal{O}}^+(x) = \sigma_{\mathbb{R}^n}^+(x) \implies \lim_{t \rightarrow \sigma_{\mathbb{R}^n}^+(x)} |T^*(Z(x, z, t)) - X(x, t)| = 0 \quad (1.55)$$

η οποία βεβαιώνει ότι το σύστημα (1.54β) είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.21).

Σημειώνεται ότι το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και με ασθενέστερες υποθέσεις. Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.21) δεν είναι αναγκαία δεξιά πλήρες εντός του συνόλου \mathcal{O} , αλλά ικανοποιεί την ιδιότητα του ακόλουθου ορισμού:

Ορισμός 1.55 Λέμε ότι το σύστημα (1.21) ικανοποιεί την ιδιότητα της **μη φραγμένης παρατηρησιμότητας** (forward unboundedness observability) **εντός του συνόλου \mathcal{O}** αν υπάρχει μια θετικά ορισμένη και ομοιόμορφα μη φραγμένη συνάρτηση $V_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ και μια συνεχής συνάρτηση $\gamma_f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ούτως ώστε να ισχύει:

$$DV_f(x)f(x) \leq V_f(x) + \gamma_f(h(x)), \forall x \in \mathcal{O}$$

Η διαφοροποίηση στην ανάλυση που υιοθετείται στην εν λόγω γενικότερη περίπτωση, έγκειται στο γεγονός ότι ο παρατηρητής έχει την έκφραση:

$$\dot{z} = \gamma(y)[Az + \beta(y)]$$

και στην αντικατάσταση της απεικόνισης $f(\cdot)$ από την $f_\gamma(\cdot)$, όπου

$$f_\gamma(x) := \frac{f(x)}{\gamma(h(x))}$$

και η $\gamma(\cdot)$ είναι μια C^1 συνάρτηση που ικανοποιεί την ανισότητα

$$\gamma(h(x)) \geq 1 + \gamma_f(h(x)), \forall x \in \text{cl}(\mathcal{O})$$

• **Ολικοί παρατηρητές για ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα με ολικά Lipschitz δεξί μέλος (Gauthier, Hammouri and Othmann, 1992)**

Ακολούθως παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εργασίας [25] με την οποία εισήχθησαν στην περιοχή του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή οι αποκαλούμενοι *παρατηρητές υψηλού κέρδους* (high gain observers). Η μεθοδολογία του άρθρου [25] εφαρμόζεται σε συστήματα της μορφής (1.15), όπου $f, g \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R}^n)$, $h \in C^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ και \mathcal{O} είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , καθώς και στην ειδική περίπτωση όπου το σύστημα (1.15) έχει είσοδο $u \equiv 0$ και επομένως γράφεται στη μορφή (1.16). Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.16) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο, επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 1.24, υπάρχει ένας διαφορομορφισμός $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \psi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^n$, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.16) να έχει τη μορφή (1.18). Για το σύστημα (1.18) κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

A3. Η συνάρτηση $\varphi : \psi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ στην (1.18), μπορεί να επεκταθεί από το $\psi(\mathcal{O})$ σε όλο τον \mathbb{R}^n σε μια C^∞ ολικά Lipschitz συνάρτηση.

Το παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζει ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για το σύστημα (1.18).

Θεώρημα 1.56 *Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.18) ικανοποιεί την A3 και θεωρούμε το σύστημα*

$$\dot{z} = \tilde{f}(z) - S_\infty^{-1} C'(Cz - y), z \in \mathbb{R}^n \quad (1.56)$$

όπου

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$C := (1, 0, \dots, 0), \quad A' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

και $S_\infty := S_\infty(\theta)$ είναι η λύση της εξίσωσης πινάκων

$$0 = -\theta S_\infty - A' S_\infty - S_\infty A + C' C, \theta > 0 \quad (1.58)$$

όπου για τα στοιχεία $(S_\infty(\theta))_{i,j}$ του πίνακα $S_\infty(\theta)$ ισχύει η ιδιότητα:

$$(S_\infty(\theta))_{i,j} = (S_\infty(1))_{i,j} \frac{1}{\theta^{i+j-1}} \quad (1.59)$$

Τότε, για κάθε επαρκώς μεγάλη σταθερά θ , το σύστημα (1.56) είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.18), και το σφάλμα ανάμεσα στις λύσεις $x(\cdot) := x(\cdot, x_0)$ και $z(\cdot) := z(\cdot, z_0)$ των (1.18) και (1.56), αντίστοιχα, ικανοποιεί την εκτίμηση

$$|x(t) - z(t)| \leq K(\theta) \exp\left(-\frac{\theta t}{3}\right) |x_0 - z_0|, \forall t \geq 0, x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.60)$$

όπου $K(\theta)$ μια θετική σταθερά (που εξαρτάται από τη σταθερά θ).

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα των παραπάνω αποτελεσμάτων για συστήματα της μορφής (1.15). Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.15) είναι “ομοιόμορφα παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο”, επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 1.27 υπάρχει ένας διαφορομορφισμός $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \psi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^n$, ούτως ώστε στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (1.15) να έχει τη μορφή (1.19). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.19) ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

A3’. Η συνάρτηση $\varphi : \psi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ στην (1.19), μπορεί να επεκταθεί από το $\psi(\mathcal{O})$ σε όλο τον \mathbb{R}^n σε μια C^∞ ολικά Lipschitz συνάρτηση.

A4. Οι συναρτήσεις $g_i : \mathbb{R}^i \cap \text{pr}_i(\psi(\mathcal{O})) \rightarrow \mathbb{R}$ στην (1.19), μπορούν να επεκταθούν σε ολικά Lipschitz απεικονίσεις στον \mathbb{R}^i , $i = 1, 2, \dots, n$, όπου $\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{pr}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) := (x_1, x_2, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^i$.

Το παρακάτω θεώρημα είναι το κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας [25].

Θεώρημα 1.57 Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.19) ικανοποιεί τις A3', A4 και θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{z} = \tilde{f}(z) + \tilde{g}(z)u - S_\infty^{-1}C'(Cz - y), z \in \mathbb{R}^n \quad (1.61)$$

όπου οι πίνακες C και S_∞ δίνονται στο Θεώρημα 1.56. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η είσοδος $u(\cdot)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για κάθε $t \geq 0$ από κάποια σταθερά $u_0 \geq 0$. Τότε, για κάθε επαρκώς μεγάλη σταθερά θ , το σύστημα (1.61) είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.19), και το σφάλμα ανάμεσα στις λύσεις $x(\cdot) := x(\cdot, x_0; u)$ και $z(\cdot) := z(\cdot, z_0; u)$ των (1.19) και (1.61), αντίστοιχα, ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$|x(t) - z(t)| \leq K(\theta) \exp\left(-\frac{\theta t}{3}\right) |x_0 - z_0|, \forall t \geq 0, x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.62)$$

όπου $K(\theta)$ μια θετική σταθερά (που εξαρτάται από τη σταθερά θ).

• Σχεδίαση ολικού παρατηρητή για ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα χωρίς εισόδους (Astolfi and Praly, 2006)

Στην συνέχεια, παρατίθενται τα αποτελέσματα της εργασίας [10], όπου δίνονται ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για την κλάση των ομοιόμορφα παρατηρήσιμων συστημάτων του Ορισμού 1.24. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = f(x) \quad (1.63\alpha)$$

$$y = x_1 \quad (1.63\beta)$$

Υποθέτουμε ότι το (1.63) ικανοποιεί την ιδιότητα της *ευστάθειας εξόδου-προς-κατάσταση* (output-to-state stability), δηλαδή ισχύει η ακόλουθη συνθήκη.

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

A5. (Ευστάθεια Εξόδου-προς-Κατάσταση) Υπάρχουν συναρτήσεις $\gamma_1 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}_{\geq 0})$, $\gamma_2 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}_{\geq 0})$ και $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_{\geq 0})$ ούτως ώστε να ισχύει

$$|x| \leq \gamma_2(V(x)) \quad (1.64)$$

και

$$DV(x)f(x) \leq -V(x) + \gamma_1(x_1) \quad (1.65)$$

Από την (1.64) και τη συνέχεια της $f_n(\cdot)$, προκύπτει ότι υπάρχει μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\gamma \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}_{> 0})$ με

$$\gamma(s) \geq 1 \text{ για κάθε } s \geq 0 \quad (1.66)$$

ούτως ώστε να ισχύει

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \gamma(V(x)) \quad (1.67)$$

Πρόταση 1.58 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\gamma_1(\cdot)$ και $\gamma(\cdot)$, όπως δίνονται στις (1.65) και (1.67), αντίστοιχα και έστω το σύστημα

$$\dot{w} = -w + \gamma_1(x_1), w \in \mathbb{R} \quad (1.68)$$

με θετική αρχική συνθήκη. Επίσης, έστω $\hat{\gamma} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}_{> 0})$ με

$$\hat{\gamma}(w) \geq \gamma(4w + 2) \quad (1.69)$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Αν η λύση του (1.63α) ορίζεται στο μέγιστο από δεξιά διάστημα $[0, T_{\max})$, τότε η λύση του (1.68) ορίζεται επίσης στο $[0, T_{\max})$.

(ii) Αν ορίσουμε ένα νέο χρόνο τ ως τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{\tau} = \hat{\gamma}(w), \tau(0) = 0 \quad (1.70)$$

και χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$(\dot{a}^*) \left(= \frac{da}{d\tau} \right) = \frac{\dot{a}}{\hat{\gamma}(w)}$$

τότε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{x_2}{\hat{\gamma}(w)} \\ &\vdots \\ x_{n-1}^* &= \frac{x_n}{\hat{\gamma}(w)} \\ x_n^* &= \frac{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\hat{\gamma}(w)} \\ \dot{w} &= -\frac{w - \gamma_1(x_1)}{\hat{\gamma}(w)} \end{aligned}$$

είναι δεξιά πλήρες.

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $\hat{\gamma}(\cdot)$ και το σύστημα (1.68) όπως δίνονται στην ανωτέρω πρόταση, είναι δυνατή η σχεδίαση ενός παρατηρητή μειωμένης τάξης που επιτυγχάνει την ασυμπτωτική εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (1.63) εντός του μεγίστου από δεξιά διαστήματος ύπαρξης λύσης του (1.63α), είτε το τελευταίο είναι άπειρο είτε πεπερασμένο. Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα, που αποτελεί το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας [10].

Θεώρημα 1.59 *Θεωρούμε το ομοιόμορφα παρατηρήσιμο σύστημα (1.63) και υποθέτουμε ότι ικανοποιεί την Υπόθεση A5. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $a_i := a_i(w)$, $i = 2, 3, \dots, n$ ούτως ώστε το σύστημα*

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -a_i z_i + [(i-1)\dot{a}_i + a_i^2](-a_i)^{i-2} x_1 + \dot{a}_i \sum_{j=1}^{i-2} (i-j-1)(-a_i)^{i-j-2} \hat{x}_j - v_i, \\ i &= 2, 3, \dots, n \\ \dot{w} &= -w + \gamma_1(x_1) \end{aligned} \tag{1.71}$$

με

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$\begin{aligned}\dot{a}_i &= \frac{da_i}{dw}(w)[-w + \gamma_1(x_1)], i = 2, 3, \dots, n \\ \hat{x}_i &:= -(-a_i)^{i-1}x_0 - \sum_{j=1}^{i-2} (-a_i)^{i-j-1}\hat{x}_j - z_i, i = 2, 3, \dots, n \\ v_i &:= \hat{x}_{i+1}, i = 2, 3, \dots, n-1 \\ v_n &:= \hat{\gamma}(w)\text{sat}\left(\frac{f_n(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}{\hat{\gamma}(w)}\right)\end{aligned}$$

και τη $\hat{\gamma}(\cdot)$ όπως δίνεται από την (1.69), να αποτελεί ολικό παρατηρητή μειωμένης τάξης για το σύστημα (1.63). Συγκεκριμένα, αν γράψουμε το σύστημα (1.71) μαζί με τις απεικονίσεις $\hat{x}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$ στη μορφή:

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathfrak{f}(\mathcal{X}, y) \quad (1.72\alpha)$$

$$\hat{x} = \mathfrak{h}(\mathcal{X}, y) = (y, \hat{x}_2(\mathcal{X}, y), \dots, \hat{x}_n(\mathcal{X}, y)) \quad (1.72\beta)$$

τότε, για κάθε λύση $X(x, t)$ του συστήματος (1.63α) με μέγιστο από δεξιά διάστημα ύπαρξης λύσης $[0, T_{\max})$, και για κάθε αρχική συνθήκη χ του (1.72α), η λύση $(X(x, t), \mathcal{X}((x, \chi), t))$ της σύνδεσης των συστημάτων (1.63) και (1.72α) ορίζεται επίσης στο $[0, T_{\max})$ και ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} |X(x, t) - \mathfrak{h}(\mathcal{X}((x, \chi), t)), X_1(x, t)| = 0$$

• Ικανές Lyapunov συνθήκες για την ολική επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή (Tsinias, 1989)

Στη συνέχεια, παρατίθενται τα αποτελέσματα της εργασίας [67], όπου δίνονται ικανές τύπου Lyapunov συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για μη γραμμικά συστήματα με εισόδους και με γραμμική έξοδο. Ειδικότερα, θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.73\alpha)$$

$$y = Hx \quad (1.73\beta)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$$

όπου ο χώρος εισόδων \mathcal{U} αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις του χρόνου με τιμές σε ένα υποσύνολο U του \mathbb{R}^m . Υποθέτουμε ότι για κάθε είσοδο $u \in \mathcal{U}$ και αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$, η αντίστοιχη λύση $x(\cdot, x_0; u)$ του (1.73α) ορίζεται για όλους τους θετικούς χρόνους. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η απεικόνιση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (x, u) \rightarrow f(x, u)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, και συμβολίζουμε με $D_x f(x, u)$ την παράγωγό της ως προς x . Για το σύστημα (1.73) υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

A6. Υπάρχουν ένας θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας P και μια σταθερά $k_1 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $e \in \ker H \setminus \{0\}$ να υπάρχει μια περιοχή S_e του e , ούτως ώστε να ισχύει:

$$v' P D_x f(x, u) v \leq -k_1 |v|^2, \forall (x, v, u) \in \mathbb{R}^n \times S_e \times U \quad (1.74)$$

A7. Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ και μια σταθερά $k_2 > 0$, με $p(u) \geq k_2, \forall u \in U$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$|v' P D_x f(x, u) v| \leq p(u) |v|^2, \forall (x, v, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U \quad (1.75)$$

Το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας [67] είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.60 *Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.73) ικανοποιεί τις Συνθήκες A6 και A7. Τότε:*

(i) *Για κάθε επαρκώς μεγάλη θετική σταθερά c , ο παρατηρητής*

$$\dot{z} = f(z, u) + R(u)(y - Hz) \quad (1.76)$$

με

$$R(u) = cp(u)P^{-1}H' \quad (1.77)$$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

όπου οι $p(\cdot)$ και P δίνονται στις A6 και A7, επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (1.73). Ειδικότερα, για τη λύση $e(\cdot)$ της εξίσωσης

$$\dot{e} = f(x, u) - f(z, u) - R(u)He \quad (1.78)$$

του σφάλματος $e = x - z$ ανάμεσα στην τροχιά του συστήματος (1.73) και την τροχιά του παρατηρητή (1.76), ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t, e_0, x(t, x_0; u); u) = 0 \quad (1.79)$$

για κάθε αρχική συνθήκη $(e_0, x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ και για κάθε $u \in \mathcal{U}$. Επιπλέον, η ανωτέρω σύγκλιση είναι εκθετική.

(ii) Για κάθε ζεύγος x_a και x_b αρχικών καταστάσεων του (1.73), οι οποίες δεν είναι διαχωρίσιμες από κάποια είσοδο $\bar{u} \in \mathcal{U}$ με την έννοια του Ορισμού 1.16(γ), δηλαδή ισχύει

$$y(t, x_a; \bar{u}) = y(t, x_b; \bar{u}), \forall t \geq 0$$

θα ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, x_a; \bar{u}) - x(t, x_b; \bar{u})) = 0 \quad (1.80)$$

Σημειώνεται ότι για γραμμικά συστήματα

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.81\alpha)$$

$$y = Hx, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k \quad (1.81\beta)$$

η Ιδιότητα (ii) του ανωτέρω θεωρήματος, είναι ισοδύναμη με την ανιχνευσιμότητα του ζεύγους (A, H) . Επιπλέον, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.61 Για το σύστημα (1.81) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) Το ζεύγος (A, H) είναι ανιχνεύσιμο.

(ii) Το σύστημα (1.81) ικανοποιεί την Ιδιότητα A6. Ειδικότερα, υπάρχουν ένας θετικά ορισμένος πίνακας P και μια γνήσια θετική σταθερά k_1 ούτως ώστε να ισχύει:

$$e'PAe \leq -k_1|e|^2, \forall e \in \ker H \quad (1.82)$$

(iii) Υπάρχει μια γνήσια θετική σταθερά c , έτσι ώστε το γραμμικό σύστημα

$$\dot{z} = Az + cP^{-1}H'(y - Hz) + Bu \quad (1.83)$$

να είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.81).

• Σχεδίαση ολικού παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα (Praly, 2003)

Συνεχίζουμε με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της εργασίας [54], για το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή. Τα αποτελέσματα αφορούν τριγωνικά συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g_1(x_1, u) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2, u) + x_3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.84\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p-1} &= g_{p-1}(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, u) + x_p \\ \dot{x}_p &= g_p(x_1, x_2, \dots, x_p, u) \\ y &= x_1, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.84\beta)$$

όπου οι συναρτήσεις $g_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, p$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες. Για το σύστημα (1.84) κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

A8. Υπάρχει μια συνάρτηση $\gamma \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}_{>0})$ ούτως ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} |g_i(x_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_i + \xi_i, u) - g_i(x_1, x_2, \dots, x_i, u)| &\leq \gamma(x_1)(|\xi_2| + \dots + |\xi_i|), \\ \forall x_1, \dots, x_i, \xi_2, \dots, \xi_i, u \in \mathbb{R}, i &= 2, \dots, p \end{aligned}$$

Θεώρημα 1.62 Έστω σταθερές k_i , $i = 1, 2, \dots, p$, γνήσια θετικοί αριθμοί q , a και ένας συμμετρικός πίνακας Q , έτσι ώστε να ισχύει

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$\begin{aligned} Q\mathcal{O} + \mathcal{O}'Q &\leq -aQ \\ qI &\leq Q \leq I \end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -k_{p-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

και έστω b μια επαρκώς μεγάλη σταθερά, τέτοια ώστε να ισχύει

$$bQ \geq QD + DQ \geq -bQ \quad (1.86)$$

όπου D ο διαγώνιος πίνακας $D = \text{diag}(0, 1, \dots, p-1)$. Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1.84) ικανοποιεί την Ιδιότητα A8 και θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= g_1(y) + \hat{x}_2 + k_1 r(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= g_2(y, \hat{x}_2) + \hat{x}_3 + k_3 r^2(y - \hat{x}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{p-1} &= g_{p-1}(y, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{p-1}, u) + \hat{x}_p + k_{p-1} r^{p-1}(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_p &= g_p(y, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_p, u) + k_p r^p(y - \hat{x}_1) \\ \dot{r} &= \ell(r, y), r(0) \geq 1 \end{aligned} \quad (1.87)$$

όπου

$$\ell(r, y) := -\frac{1}{b}r \left(\frac{a}{3}(r-1) - \frac{2(p-1)}{\sqrt{q}}\gamma(y) \right) \quad (1.88)$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Αν η λύση $x(\cdot, x_0)$ του (1.84) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται στο μέγιστο από δεξιά διάστημα $[0, T_{\max}(x_0))$, τότε και η λύση $\hat{x}(\cdot, \hat{x}_0, r_0; y)$ του (1.87) με αρχική κατάσταση $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r_0 \geq 1$, ορίζεται επίσης στο $[0, T_{\max}(x_0))$. Επιπλέον,

1.5. Παρατηρητές για μη Γραμμικά Συστήματα

αν ορίσουμε το κανονικοποιημένο σφάλμα (scaled error) $\epsilon := (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_p)$ ανάμεσα στην τροχιά του συστήματος (1.84) και του συστήματος (1.87), όπου

$$\epsilon_i := \frac{x_i - \hat{x}_i}{r^{i-1+b}}, i = 1, 2, \dots, p \quad (1.89)$$

τότε υπάρχουν γνήσια θετικές σταθερές M, β ούτως ώστε να ισχύει

$$|\epsilon(t)| \leq M e^{-\beta t} |\epsilon(0)|, \forall t \in [0, T_{\max}(x_0)) \quad (1.90)$$

(ii) Αν επιπλέον υποθέσουμε, ότι για κάθε αρχική κατάσταση x_0 του (1.84), η έξοδος του είναι ομοιόμορφα φραγμένη από κάποια σταθερά $C(x_0) > 0$ για όλους τους χρόνους στο $[0, T_{\max}(x_0))$, τότε το σύστημα (1.84) είναι δεξιά πλήρες (συνεπώς από το σκέλος (i) και το (1.87) είναι δεξιά πλήρες) και το σύστημα (1.87) είναι ένας παρατηρητής για το (1.84). Ειδικότερα, για κάθε ζεύγος αρχικών καταστάσεων x_0 και (\hat{x}_0, r_0) με $r_0 \geq 1$ των (1.84) και (1.87), αντίστοιχα, υπάρχει μια θετική σταθερά $M(x_0, r_0)$ ούτως ώστε να ισχύει

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq M(x_0, r_0) e^{-\beta t} |x_0 - \hat{x}_0|, \forall t \geq 0 \quad (1.91)$$

με τη σταθερά β όπως δίνεται στο σκέλος (i) του θεωρήματος.

• Σχεδίαση ολικού παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα (Krishnamurthy, Khorrami, 2003)

Ακολουθως, παρατίθενται αποτελέσματα από την εργασία [45], όπου μελετάται το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή για συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \phi_1(x_1) + a_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phi_2(x_1, x_2) + a_2(x_1)x_3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.92\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= \phi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(x_1)x_n \\ \dot{x}_n &= \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= x_1, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.92\beta)$$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

όπου οι συναρτήσεις $\phi_i(\cdot)$ και $a_i(\cdot)$ είναι C^∞ . Για το σύστημα (1.92) κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις.

A9. Υπάρχει μια σταθερά $\sigma > 0$ ούτως ώστε να ισχύει

$$|a_i(x_1)| \geq \sigma, \forall x_1 \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

Από την εν λόγω συνθήκη, έπεται ότι το σύστημα (1.92) είναι παρατηρήσιμο.

A10. Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$|\phi(x_1, x_2, \dots, x_i) - \phi(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i)| \leq \gamma(x_1) \sum_{j=2}^i |x_j - \hat{x}_j|,$$

$$\forall x_i, \hat{x}_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \dots, n$$

A11. Υπάρχουν θετικές σταθερές σ και $\rho_3, \rho_4, \dots, \rho_{n-1}$ τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$|a_i(x_1)| \geq \sigma, \forall x_1 \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$|a_i(x_1)| \leq \rho_i |a_{i-1}(x_1)|, \forall x_1 \in \mathbb{R}, i = 3, 4, \dots, n-1$$

Θεώρημα 1.63 (i) Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $a_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ ικανοποιούν την Ιδιότητα A11. Τότε για κάθε σταθερά $b \in (-1, \infty)$, υπάρχουν σταθερές $\nu_1, \underline{\nu}_2, \bar{\nu}_2$, απεικονίσεις $g_2(\cdot), g_3(\cdot), \dots, g_n(\cdot)$ και ένας θετικά ορισμένος πίνακας P , ούτως ώστε να ισχύουν οι Lyapunov ανισότητες

$$PA + A'P \leq -\nu_1 I, \nu_1 > 0 \quad (1.93)$$

$$\underline{\nu}_2 \leq P(D + bI) + (D + bI)P \leq \bar{\nu}_2 I, \underline{\nu}_2 > 0, \bar{\nu}_2 > 0 \quad (1.94)$$

όπου

$$D := \text{diag}(1, 2, \dots, n-1)$$

$$A := \begin{pmatrix} -g_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -g_3 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -g_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ -g_n & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

1.5. Παρατηρητές για μη Γραμμικά Συστήματα

(ii) Αν επιπροσθέτως της A11, υποθέσουμε ότι ικανοποιούνται οι Ιδιότητες A9 και A10 και θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \phi_i(x_1, z_2 + r f_2(x_1), \dots, z_i + r^{i-1} f_i(x_1)) + a_i(x_1) z_{i+1} \\ &\quad + r^i a_i(x_1) f_{i+1}(x_1) - r^{i-1} g_i(x_1) \frac{\phi_1(x_1)}{a_1(x_1)} \\ &\quad - r^{i-1} g_i(x_1) (z_2 + r f_2(x_1)) - (i-1) \dot{r} r^{i-2} f_i(x_1), i = 2, 3, \dots, n \\ \dot{r} &= r(-\alpha_1(r-1) + \alpha_2 \gamma(x_1)), r(0) \geq 1 \end{aligned} \quad (1.95)$$

με

$$\begin{aligned} f_i(x_1) &:= \int_0^{x_1} \frac{g_i(s)}{a_1(s)} ds, x_1 \in \mathbb{R}, i = 2, 3, \dots, n \\ z_{n+1} &:= 0 \\ f_{n+1} &:= 0 \\ a_n &:= 0 \end{aligned}$$

όπου οι απεικονίσεις $g_i(\cdot)$, $i = 2, 3, \dots, n$ δίνονται στο σκέλος (i) του θεωρήματος και οι σταθερές α_1 και α_2 στην (1.95) ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\begin{aligned} \nu_1 - \alpha_1 \bar{\nu}_2 &\geq 0 \\ \alpha_2 \underline{\nu}_2 - 2\lambda_{\max}(P)(n-1) &\geq 0 \end{aligned}$$

με τις σταθερές ν_1 , $\underline{\nu}_2$, $\bar{\nu}_2$ και $\lambda_{\max}(P)$ τη μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα P , όπως δίνονται στο σκέλος (i) του θεωρήματος, τότε για κάθε αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $[0, T_{\max}(x_0))$ το μέγιστο από δεξιά διάστημα ύπαρξης λύσης του (1.92) και η λύση $z(\cdot, z_0, r_0; y)$ του (1.95), με αρχική κατάσταση $z_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r_0 \geq 1$, ορίζεται επίσης στο $[0, T_{\max}(x_0))$. Επιπλέον, αν ορίσουμε τις απεικονίσεις $\hat{x}_i(\cdot)$, $i = 2, 3, \dots, n$, με

$$\hat{x}_i = z_i + r^{i-1} f_i(x_1), i = 2, 3, \dots, n \quad (1.96)$$

και το κανονικοποιημένο σφάλμα $\epsilon := (\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n)$ όπου

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$\epsilon_i := \frac{\hat{x}_i - x_i}{r^{i-1+b}}, i = 2, 3, \dots, n \quad (1.97)$$

με τη σταθερά b όπως δίνεται στο σκέλος (i) του θεωρήματος, τότε υπάρχουν θετικές σταθερές M, β ούτως ώστε να ισχύει:

$$|\epsilon(t)| \leq M e^{-\beta t} |\epsilon(0)|, \forall t \in [0, T_{\max}(x_0)) \quad (1.98)$$

(iii) Αν επιπλέον, υποθέσουμε ότι για κάθε αρχική κατάσταση x_0 του (1.92), η έξοδος του είναι ομοιόμορφα φραγμένη από κάποια σταθερά $C(x_0) > 0$ για όλους τους χρόνους στο $[0, T_{\max}(x_0))$, τότε το σύστημα (1.92) είναι δεξιά πλήρες (συνεπώς από το σκέλος (ii) και το (1.95) είναι δεξιά πλήρες) και το σύστημα (1.95) είναι ένας παρατηρητής για το (1.92). Συγκεκριμένα, για κάθε ζεύγος αρχικών καταστάσεων x_0 και (z_0, r_0) με $r_0 \geq 1$ των (1.92) και (1.95) αντίστοιχα, υπάρχει μια θετική σταθερά $M(x_0, r_0)$ ούτως ώστε να ισχύει

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq M(x_0, r_0) e^{-\beta t} |x_0 - \hat{x}(0)|, \forall t \geq 0 \quad (1.99)$$

όπου

$$\hat{x}(t) := (x_1(t), \hat{x}_2(z_2(t), r(t), x_1(t)), \dots, \hat{x}_n(z_n(t), r(t), x_1(t)))$$

και η σταθερά β δίνεται στο σκέλος (ii) του θεωρήματος.

• Σχεδίαση ολικού παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα (Tsinias, 2008)

Σε αυτό το σημείο, παρουσιάζονται αποτελέσματα από την εργασία [71] που αφορούν την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα της μορφής

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, y) + a_1(t, y)x_2 \\ f_2(t, y, x_2) + a_2(t, y)x_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, y)x_n \\ f_n(t, y, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$= f(t, y, x_2, \dots, x_n) := F(t, x, y) \quad (1.100\alpha)$$

$$y = x_1, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \quad (1.100\beta)$$

όπου για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ οι συναρτήσεις $f_i(\cdot)$ είναι συνεχείς και τοπικά Lipschitz και οι συναρτήσεις $a_i(\cdot)$ είναι C^1 . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\sigma \in \mathcal{NN}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\left(\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^i \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, \dots, x_i) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(t, |x_1|), \forall (t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \quad (1.101)$$

και ένα μη κενό σύνολο $M \subset \mathbb{R}^n$ καθώς και μια συνάρτηση $k \in \mathcal{NNN}$ ούτως ώστε να ισχύει:

$$|x_1(t, t_0, x_0)| \leq k(t, t_0, |x_0|), \forall t \in [t_0, T_{\max}(t_0, x_0)), (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times M \quad (1.102)$$

Πριν την παράθεση του κύριου αποτελέσματος της εργασίας [71] δίνουμε κάποιους απαραίτητους ορισμούς, που θα χρησιμοποιηθούν και στα Κεφάλαια 2 και 3, για ένα γενικό χρονικώς μεταβαλλόμενο σύστημα

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.103\alpha)$$

$$y = h(t, x), t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k \quad (1.103\beta)$$

όπου $y(\cdot)$ είναι η έξοδος του συστήματος, η απεικόνιση $h(\cdot, \cdot)$ είναι συνεχής και η $f(\cdot, \cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz.

Ορισμός 1.64 Έστω $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το (1.103α) είναι *M-δεξιά πλήρες* (forward complete), αν υπάρχει συνάρτηση $\beta \in \mathcal{NN}$, τέτοια ώστε η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (1.103α) με αρχική κατάσταση x_0 τον αρχικό χρόνο $t = t_0$, να ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$|x(t)| \leq \beta(t, |x_0|), \forall t \geq t_0 \geq 0, x_0 \in M \quad (1.104)$$

Παρατήρηση 1.65 Στην περίπτωση όπου $M = \mathbb{R}^n$ γνωρίζουμε (βλέπε [32]) ότι η ύπαρξη της λύσης $x(\cdot, t_0, x_0)$ του (2.1α) για κάθε $t \geq t_0 \geq 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας συνάρτησης $\beta \in \mathcal{NN}$ που ικανοποιεί την (1.104).

Στη συνέχεια, για κάθε μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n , για το οποίο το (1.103α) είναι *M-δεξιά πλήρες* και $t_0 \geq 0$, υιοθετούμε το συμβολισμό $O(t_0, M)$, για το σύνολο όλων των εξόδων του (1.103) με αρχική κατάσταση $x_0 \in M$ τη χρονική στιγμή t_0 , δηλαδή:

$$O(t_0, M) := \{y : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k : y(t) = h(t, x(t, t_0, x_0)), t \geq t_0; x_0 \in M\} \quad (1.105)$$

Κεντρικής σημασίας για την παράθεση των παρακάτω αποτελεσμάτων, αλλά και για το μεγαλύτερο μέρος της ανάλυσης του Κεφαλαίου 2, είναι ο προσδιορισμός των εννοιών μιας αιτιατής και μιας τ -μη αιτιατής απεικόνισης, τις οποίες ορίζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 1.66 Έστω k, ℓ, n θετικοί φυσικοί, M και S μη κενά υποσύνολα των \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^ℓ , αντίστοιχα και για κάθε $t_0 \geq 0$, έστω $\Omega(t_0, M)$ ένα μη κενό σύνολο συναρτήσεων $y = y_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ παραμετροποιημένων ως προς $x_0 \in M$. Για δοσμένα $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και $0 \leq \tau \leq \infty$ λέμε ότι η απεικόνιση

$$([\bar{t}_0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \times \Omega(t_0, M) \ni (t, x; y) \mapsto a_y(t, x) \in S$$

είναι *τ -μη αιτιατή* (noncausal) *ως προς το σύνολο* $\Omega(t_0, M)$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq \bar{t}_0 \geq 0$ και $y \in \Omega(t_0, M)$, η τιμή $a(t) := a_y(t, x)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές $\{y(s) : \bar{t}_0 \leq s \leq t + \tau\}$ της $y(\cdot)$. Λέμε ότι η $a_y(\cdot, \cdot)$ είναι *αιτιατή* (causal) *ως προς το σύνολο* $\Omega(t_0, M)$, αν είναι 0-μη αιτιατή ως προς το $\Omega(t_0, M)$.

Παρατήρηση 1.67 Προφανώς, αν η $a_y(\cdot, \cdot)$ είναι τ_0 -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, M)$, τότε είναι και τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, M)$ για κάθε $\tau \geq \tau_0$. Επιπλέον, αν $\emptyset \neq D \subset M$ και $y \in \Omega(t_0, D)$, τότε αν η απεικόνιση $a_y(\cdot, \cdot)$ είναι τ_0 -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, M)$, είναι επίσης τ_0 -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, D)$.

Το κεντρικό αποτελέσμα της εργασίας [71] για συστήματα της μορφής (1.100) είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.68 (i) *Αν ικανοποιούνται οι (1.101) και (1.102), τότε το σύστημα (1.100) είναι M -δεξιά πλήρες.*

(ii) *Υποθέτουμε ότι επιπροσθέτως των (1.101) και (1.102) το σύστημα (1.100) ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη.*

A12. *Για κάθε $x_0 \in M$, $t_0 \geq 0$ και $i = 1, 2, \dots, n - 1$, ισχύει:*

$$a_i(t, x_1(t, t_0, x_0)) \neq 0, \text{ για σχεδόν κάθε } t \geq t_0 \quad (1.106)$$

Τότε για κάθε $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$ (όπου το σύνολο $O(t_0, M)$ ορίζεται από την (1.105) για το σύστημα (1.100)), υπάρχουν ένας χρονικός μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{t_0, \tau, y} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $\phi_{t_0, \tau, y} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, και οι δυο απεικονίσεις τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$, έτσι ώστε το σύστημα

$$\dot{z} = F(t, z, y) - \phi(t)P^{-1}(t)H'(y - Hz) \quad (1.107)$$

όπου

$$H = \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_n \quad (1.108)$$

και η $F(\cdot)$ δίνεται στην (1.100α), να είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.100). Συγκεκριμένα, το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - z(\cdot)$ ανάμεσα στη λύση $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0)$ του (1.100) και τη λύση $z(\cdot) = z(\cdot, t_0, z_0; y)$ του παρατηρητή (1.107) ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0, \forall x_0 \in M, z_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.109)$$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

(iii) Ακολουθώντας, υποθέτουμε ότι το σύνολο M είναι κλειστό. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (1.101) και (1.102) και αντί της (1.106), το σύστημα (1.100) ικανοποιεί μια εκ των δυο παρακάτω ισχυρότερων υποθέσεων.

A13. Για κάθε $x_0 \in M$, $t_0 \geq 0$ και $i = 1, 2, \dots, n - 1$, ισχύει

$$a_i(t, x_1(t, t_0, x_0)) \neq 0, \text{ για κάθε } t \geq t_0 \quad (1.110)$$

A14. Κάθε συνάρτηση $a_i(\cdot)$ είναι ανεξάρτητη του x_1 , και αν ορίσουμε $\delta_i(\cdot) = a_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, τότε ικανοποιείται η ιδιότητα:

$$\delta_i(t) \neq 0, \text{ για κάθε } t \geq 0 \quad (1.111)$$

Τότε για κάθε $t_0 \geq 0$ και $y \in O(t_0, M)$, υπάρχουν ένας χρονικός μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{t_0, y} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $\phi_{t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, και οι δυο απεικονίσεις αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$, έτσι ώστε το σύστημα (1.107) με τον πίνακα γραμμή H και την απεικόνιση $F(\cdot)$ όπως δίνονται στις (1.108) και (1.100a), αντίστοιχα, να είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.100). Συγκεκριμένα, το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - z(\cdot)$ ανάμεσα στη λύση $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0)$ του (1.100) και τη λύση $z(\cdot) = z(\cdot, t_0, z_0; y)$ του παρατηρητή (1.107) ικανοποιεί την (1.109).

Παρατήρηση 1.69 (i) Ο λόγος που τα δυναμικά του παρατηρητή του Θεωρήματος 1.68(ii) είναι μη αιτιατά, είναι ότι λόγω της υπόθεσης (1.106), όταν υπάρχουν χρονικές στιγμές που κάποιος όρος $a_i(\cdot, x_1(\cdot, t_0, x_0))$ μηδενίζεται, χρειάζεται να γνωρίζουμε για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ το μέλλον της εξόδου για επόμενες χρονικές στιγμές $\tau \geq t$ πλησίον του t , προκειμένου να κατασκευάσουμε την επιθυμητή απεικόνιση $\phi(\cdot)$ που εμπεριέχεται στη δυναμική του παρατηρητή (1.107).

(ii) Σε αντίθεση με τα προαναφερθέντα αποτελέσματα άλλων εργασιών, η εξάρτηση των απεικονίσεων $\phi(\cdot)$ και $P^{-1}(\cdot)$ στην (1.107) από την έξοδο $y(\cdot)$, έχει ως συνέπεια το δεξί μέλος του παρατηρητή (1.107) να εξαρτάται από την εκάστοτε έξοδο του συστήματος.

• Σχεδίαση ολικού παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα (Andrieu, Praly and Astolfi, 2009)

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που αφορούν στην επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για τριγωνικά συστήματα, ολοκληρώνεται με τα αποτελέσματα της εργασίας [7], όπου μελετώνται συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(u, y) + a_1(y)x_2 + \delta_1(t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(u, y, x_2) + a_2(y)x_3 + \delta_2(t) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.112\alpha}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(u, y, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(y)x_n + \delta_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n &= f_n(u, y, x_2, \dots, x_n) + \delta_n(t) \\ y &= x_1 + \delta_y(t), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.112\beta}$$

$$\tag{1.112\alpha'}$$

όπου οι συναρτήσεις $f_i(\cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz, και οι απεικονίσεις $\delta(\cdot) = (\delta_1(\cdot), \delta_2(\cdot), \dots, \delta_n(\cdot))$ και $\delta_y(\cdot)$, αναπαριστούν τις άγνωστες εισόδους και το θόρυβο της μέτρησης, αντίστοιχα.

Επίσης, χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς.

$$\mathcal{S}x := (x_2, x_3, \dots, x_n, 0)' \tag{1.113}$$

$$f(u, y, x) := (f_1(u, y, x), \dots, f_n(u, y, x)) \tag{1.114}$$

$$A(y) := \text{diag}(a_1(y), \dots, a_n(y)) \tag{1.115}$$

Το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας [7] είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.70 Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μια συνεχής συνάρτηση $\mathbf{a}(\cdot)$ και σταθερές ρ , $\underline{\mathbf{a}}$ και $\bar{\mathbf{a}}$, ούτως ώστε για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ να ισχύει:

$$0 < \rho \leq \mathbf{a}(y), \quad 0 < \underline{\mathbf{a}} \leq \frac{a_j(y)}{\mathbf{a}(y)} \leq \bar{\mathbf{a}}, \forall y \in \mathbb{R} \tag{1.116}$$

όπου οι $a_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$ δίνονται στην (1.115). Επιπλέον, θεωρούμε ότι υπάρχουν ένας πραγματικός αριθμός $d_\infty \in [0, \frac{1}{n-1})$, ένας θετικός πραγματικός αριθμός c_∞ , μια συνεχής απεικόνιση $\Gamma(\cdot)$ και πραγματικοί αριθμοί $v_j \in [0, \frac{1}{j-1})$, $j =$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

2, 3, ..., n, έτσι ώστε για κάθε $i = 2, 3, \dots, n$ και $(\hat{x}, x, y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} & |f_i(u, y, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i) - f_i(u, y, x_2, \dots, x_i)| \\ & \leq \Gamma(u, y) \left(1 + \sum_{j=2}^n |\hat{x}_j|^{v_j} \right) \sum_{j=2}^i |\hat{x}_j - x_j| + c_\infty \sum_{j=2}^i |\hat{x}_j - x_j|^{\frac{1-d_\infty(n-i-1)}{1-d_\infty(n-j)}} \end{aligned}$$

Τότε, για κάθε επαρκώς μικρή σταθερά $b > 0$, υπάρχει μια συνάρτηση $K(\cdot)$ έτσι ώστε για κάθε επαρκώς μικρό γνήσια θετικό πραγματικό αριθμό c_1 και επαρκώς μεγάλους πραγματικούς αριθμούς c_2 και c_3 , να υπάρχουν συναρτήσεις $\beta_w(\cdot)$ και $\beta_L(\cdot)$ κλάσεως \mathcal{KL} και συναρτήσεις $\gamma_w(\cdot)$ και $\gamma_L(\cdot)$ κλάσεως \mathcal{K} , ούτως ώστε το σύστημα

$$\dot{\hat{x}} = A(y)\mathcal{S}\hat{x} + f(u, y, \hat{x}) + L\mathfrak{L}A(y)K\left(\frac{\hat{x}_1 - y}{L^b}\right) \quad (1.117\alpha)$$

$$\dot{L} = L[c_1(c_2 - L) + c_3\Omega(u, y, \hat{x})] \quad (1.117\beta)$$

όπου ο τελεστής \mathcal{S} και η απεικόνιση $f(\cdot)$ δίνονται στις (1.113) και (1.114), αντίστοιχα, και

$$\begin{aligned} \Omega(u, y, \hat{x}) & := \Gamma(u, y) \left(1 + \sum_{j=2}^n |\hat{x}_j|^{v_j} \right) \\ \mathfrak{L} & := \text{diag}(L^b, \dots, L^{n+b-1}) \end{aligned}$$

με αρχική τιμή $L(0) \geq c_2$, να ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα. Για κάθε λύση $t \rightarrow x(t)$ του (1.112) με μέγιστο από δεξιά διάστημα ύπαρξης λύσης $[0, T_{\max})$, η λύση του συστήματος (1.117) ορίζεται στο ίδιο διάστημα, και το σφάλμα $\epsilon := \hat{x} - x$ ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{L}(t)^{-1}\epsilon(t)| \leq \beta_w(\mathfrak{L}(0)^{-1}\epsilon(0), t) \\ & + \sup_{s \in [0, t]} \gamma_w \left(\left| \begin{pmatrix} \frac{\delta(s)}{c_2} \\ \mathbf{a}(y(s))\delta_y(s) \end{pmatrix} \right| \right), \forall t \in [0, T_{\max}) \quad (1.118\alpha) \end{aligned}$$

όπου η $L(\cdot)$ ικανοποιεί την εκτίμηση

$$L(t) \leq 4c_2 + \beta_L \left(\left(\begin{array}{c} \epsilon(0) \\ L(0) \end{array} \right), t \right) + \sup_{s \in [0, t]} \gamma_L \left(\left\| \left(\begin{array}{c} \frac{\delta(s)}{c_2} \\ \mathbf{a}(y(s))\delta_y(s) \\ \Gamma(u(s), y(s)) \\ x(s) \end{array} \right) \right\| \right), \forall t \in [0, T_{\max}) \quad (1.118\beta)$$

Παρατήρηση 1.71 Από τις (1.118α) και (1.118β), προκύπτει ότι όταν η λύση $x(\cdot)$ του συστήματος (1.117) καθώς και οι διαταραχές $\delta(\cdot)$ και $\delta_y(\cdot)$ είναι φραγμένες απεικονίσεις στο $[0, T_{\max})$, τότε ισχύει $T_{\max} = \infty$ και το σφάλμα $\epsilon(\cdot)$ είναι φραγμένο. Αν περεταίρω, υποτεθεί ότι ισχύει $\delta(t) = 0$ και $\delta_y(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, τότε το σφάλμα ικανοποιεί την επιπλέον ιδιότητα:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\epsilon(t)| = 0$$

συνεπώς το σύστημα (1.117) είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα (1.112).

- **Εκτίμηση κατάστασης σε πεπερασμένο χρόνο μέσω υβριδικών παρατηρητών για συστήματα γραμμικά ως προς το μη μετρήσιμο κομμάτι της εξόδου τους (Karafyllis and Jiang, 2011)**

Ολοκληρώνουμε την ιστορική αναδρομή στο πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της εργασίας [33], όπου δίνονται ικανές συνθήκες ούτως ώστε να επιτυγχάνεται η εκτίμηση της κατάστασης συστημάτων που είναι γραμμικά ως προς το μη μετρήσιμο κομμάτι της εξόδου τους μέσω ενός υβριδικού παρατηρητή σε *πεπερασμένο χρόνο*. Ειδικότερα, μελετώνται συστήματα της μορφής

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(y, u)x + b(y, u) \\ \dot{y}_i &= f_i(y, u) + \sum_{j=1}^n c_{i,j}(y)x_j, i = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (1.119\alpha)$$

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k, \\ (x, y) &\in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, u \in U \subset \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (1.119\beta)$$

όπου $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ένα ανοιχτό σύνολο, $U \subset \mathbb{R}^m$ ένα μη κενό κλειστό σύνολο, $A(y, u) = \{a_{i,j}(y, u), i, j = 1, 2, \dots, n\}$ και οι απεικονίσεις $a_{i,j} : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $b : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c_{i,j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_i : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$ είναι τοπικά Lipschitz, όπου $\Omega := \{y \in \mathbb{R}^k : \exists x \text{ τέτοιο ώστε } (x, y) \in \mathcal{O}\}$. Για το σύστημα (1.119) υποθέτουμε ότι ισχύει ο ακόλουθος ορισμός παρατηρησιμότητας, τον οποίο δίνουμε για ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (1.120\alpha)$$

$$y = h(x) \quad (1.120\beta)$$

$$x \in D \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $U \subset \mathbb{R}^m$ ένα μη κενό κλειστό σύνολο, η απεικόνιση $F(\cdot, \cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz, η $h(\cdot)$ είναι συνεχής και υποθέτουμε ότι για κάθε $x_0 \in D$ και $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$ το σύστημα (1.120) είναι δεξιά πλήρες. Για το (1.120) δίνεται ο ακόλουθος ορισμός παρατηρησιμότητας.

Ορισμός 1.72 Θεωρούμε το σύστημα (1.120).

(α) Λέμε ότι η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ *διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση* $x_0 \in D$ *σε χρόνο* $r > 0$, αν ισχύει

$$\max_{t \in [0, r]} |h(x(t, x_0; u)) - h(x(t, \xi; u))| > 0, \text{ για κάθε } \xi \in D \text{ με } x_0 \neq \xi \quad (1.121)$$

(β) Λέμε ότι το σύστημα (1.120) είναι *ισχυρά παρατηρήσιμο σε χρόνο* $r > 0$, αν κάθε είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά κάθε κατάσταση $x_0 \in D$ σε χρόνο r .

1.5. Παρατηρητές για μη Γραμμικά Συστήματα

Για το σύστημα (1.119) υποθέτουμε ότι είναι δεξιά πλήρες, συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση $[0, \infty) \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) = (x(t, x_0, y_0; u), y(t, x_0, y_0; u)) \in \mathcal{O}$ που ικανοποιεί την (1.119) για σχεδόν κάθε $t \geq 0$ και $(x_0, y_0) = (x(0, x_0, y_0; u), y(0, x_0, y_0; u))$. Επίσης, συμβολίζουμε με $\Phi(\cdot, x_0, y_0; u)$ τον πίνακα μετάβασης (transition matrix) του γραμμικού χρονικώς μεταβαλλόμενου συστήματος

$$\dot{x} = A(y, u)x \quad (1.122)$$

με εισόδους $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$ και $y(\cdot) = y(\cdot, x_0, y_0; u)$. Από την ολοκλήρωση των εξισώσεων (1.119) προκύπτει, ότι για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$ και $t \geq 0$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$x(t, x_0, y_0; u) = \Phi(t, x_0, y_0; u)x_0 + \theta(t, x_0, y_0; u) \quad (1.123)$$

$$p(t, x_0, y_0; u) = q'(t, x_0, y_0; u)x_0 \quad (1.124)$$

όπου

$$\theta(t, x_0, y_0; u) := \int_0^t \Phi(t, x_0, y_0; u)(\Phi(\tau, x_0, y_0; u))^{-1}b(y(\tau, x_0, y_0; u), u(\tau))d\tau \quad (1.125)$$

$$\begin{aligned} p(t, x_0, y_0; u) := & y(t, x_0, y_0; u) - y_0 - \int_0^t f(y(s, x_0, y_0; u), u(s))ds \\ & - \int_0^t C'(s, x_0, y_0; u)\theta(s, x_0, y_0; u)ds \end{aligned} \quad (1.126)$$

$$f(y, u) := (f_1(y, u), f_2(y, u), \dots, f_k(y, u))' \quad (1.127)$$

$$C'(t, x_0, y_0; u) := \begin{pmatrix} c_{1,1}(y(t, x_0, y_0; u)) & \cdots & c_{1,n}(y(t, x_0, y_0; u)) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k,1}(y(t, x_0, y_0; u)) & \cdots & c_{k,n}(y(t, x_0, y_0; u)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n} \quad (1.128)$$

$$q(t, x_0, y_0; u) := \int_0^t \Phi'(s, x_0, y_0; u)C(s, x_0, y_0; u)ds \quad (1.129)$$

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

Πρόταση 1.73 Για το σύστημα (1.119) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) Η είσοδος $u \in L^\infty([0, r]; U)$ διαχωρίζει ισχυρά την κατάσταση $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ σε χρόνο $r > 0$.

(β) Το πρόβλημα

$$\min_{\xi \in B(y_0)} \int_0^r |p(t, x_0, y_0; u) - q'(t, x_0, y_0; u)|^2 dt \quad (1.130)$$

όπου $B(y_0) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : (\xi, y_0) \in \mathcal{O}\}$, έχει ως μοναδική λύση την $\xi = x_0$.

(γ) Ο συμμετρικός πίνακας

$$Q(r, x_0, y_0; u) := \int_0^r q(t, x_0, y_0; u)q'(t, x_0, y_0; u)dt \quad (1.131)$$

είναι θετικά ορισμένος. Επιπλέον, ισχύει

$$x_0 = (Q(r, x_0, y_0; u))^{-1} \int_0^r q(t, x_0, y_0; u)p(t, x_0, y_0; u)dt \quad (1.132)$$

(δ) Ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$q'(t, x_0, y_0; u)\xi = 0, \forall t \in [0, r] \Rightarrow \xi = 0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.133)$$

Σημειώνεται ότι όλες οι απεικονίσεις που συμπεριλαμβάνονται στις (1.123)-(1.129) μπορούν να υπολογιστούν αν γνωρίζουμε τις τιμές της εξόδου $y(\tau) = y(\tau, x_0, y_0; u)$ και της είσοδου $u(\tau)$ για κάθε $\tau \in [0, t]$. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε τον τελεστή

$$P : L^\infty([0, r]; \Omega) \times L^\infty([0, r]; U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

όπου $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k : \exists x \text{ έτσι ώστε } (x, y) \in \mathcal{O}\}$ και για κάθε $(y, u) \in L^\infty([0, r]; \Omega) \times L^\infty([0, r]; U)$, η τιμή $P(y, u)$ δίνεται ως

$$P(y, u) = \Phi(r, y; u)Q^{-1} \int_0^r q(\tau)p(\tau)d\tau + \theta(r) \quad (1.134)$$

όπου $\Phi(t, y; u)$ ο θεμελιώδης πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$\dot{z} = A(y, u)z$$

$$Q := \int_0^r q(\tau)q'(\tau)d\tau$$

και

$$q(\tau) := \int_0^\tau \Phi'(s, y; u)C(s)ds$$

$$C'(\tau) := \{c_{i,j}(y(\tau)), i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$p(\tau) := y(\tau) - y(0) - \int_0^\tau f(y(s), u(s))ds - \int_0^\tau C'(s)\theta(s)ds$$

$$f(y, u) := (f_1(y, u), f_2(y, u), \dots, f_k(y, u))'$$

$$\theta(\tau) := \int_0^\tau \Phi(\tau, y; u)\Phi^{-1}(s, y; u)b(y(s), u(s))ds$$

για κάθε $\tau \in [0, r]$. Για το σύστημα (1.119) υποθέτουμε ότι ισχύει η παρακάτω συνθήκη.

A15. Το σύστημα (1.119) είναι ισχυρώς παρατηρήσιμο σε χρόνο $r > 0$.

Παρατήρηση 1.74 Από την Πρόταση 1.73, την A15 και τον ορισμό του τελεστή $P(\cdot, \cdot)$, προκύπτει ότι για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ και $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$, ισχύει η ισότητα

$$x(t, x_0, y_0; u) = P(\delta_{t-r}y, \delta_{t-r}u), \forall t \geq r \quad (1.135)$$

όπου $(\delta_{t-r}y)(s) = y(t - r + s, x_0, y_0; u)$, $\delta_{t-r}u(s) = u(t - r + s)$ για κάθε $s \in [0, r]$.

Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω παρατήρηση, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν υβριδικό παρατηρητή που επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (1.119) σε πεπερασμένο χρόνο. Δοσμένων $t_0 \geq 0$ και $(z_0, w_0) \in \mathcal{O}$ υπολογίζουμε τις τιμές $(z(t), w(t)) \in \mathcal{O}$ μέσω του ακόλουθου αλγορίθμου:

Βήμα i (i=0,1,2,...). Υπολογισμός της τιμής $z(t)$ για $t \in [t_0 + ir, t_0 + (i+1)r]$.

(1) Υπολογίζονται οι τιμές $z(t)$ για $t \in [t_0 + ir, t_0 + (i+1)r)$ επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση

1. Ιστορική Αναδρομή για το Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A(w, u)z + b(w, u) \\ \dot{w}_i &= f_i(w, u) + \sum_{j=1}^n c_{i,j}(w)z_j, i = 1, 2, \dots, k \\ (z, w) &\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k\end{aligned}$$

με αρχική συνθήκη $(z(t_0), w(t_0)) = (z_0, w_0)$ για $i = 0$.

(2) Ορίζεται $z(t_0 + (i + 1)r) = P(\delta_{t_0+ir}y, \delta_{t_0+ir}u)$ και $w(t_0 + (i + 1)r) = y(t_0 + (i + 1)r)$ όπου $P : C^0([0, r]; \Omega) \times L^\infty([0, r]; U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ο τελεστής που ορίζεται από την (1.134).

Ο προτεινόμενος παρατηρητής που επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (1.119) σε πεπερασμένο χρόνο δίνεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.75 *Θεωρούμε το σύστημα (1.119) και υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η Υπόθεση H1. Έστω $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot)) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ η μοναδική λύση της σύνδεσης του συστήματος (1.119) με το σύστημα*

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A(w, u)z + b(w, u), t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ \dot{w}_i &= f_i(w, u) + \sum_{j=1}^n c_{i,j}(w)z_j, i = 1, 2, \dots, k, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (1.136) \\ (z, w) &\in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \\ z(\tau_{i+1}) &= P(\delta_{\tau_i}y, \delta_{\tau_i}u) \\ w(\tau_{i+1}) &= y(\tau_{i+1}) \\ \tau_{i+1} &= \tau_i + r\end{aligned}$$

με αρχική συνθήκη $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ και είσοδο $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0}; U)$. Τότε, για τη λύση $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot)) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ της σύνδεσης των συστημάτων (1.119)-(1.136) ισχύει

$$z(t) = x(t) \text{ και } w(t) = y(t), \text{ για κάθε } t \geq r \quad (1.137)$$

2

Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα της εργασίας [16], όπου γενικεύεται η προσέγγιση τύπου Lyapunov των εργασιών [67], [68], [69] και ειδικότερα του πρόσφατου άρθρου [71], προκειμένου να εξαχθούν ικανές συνθήκες για την επίλυση του Προβλήματος Σχεδίασης Παρατηρητή (**Observer Design Problem (ODP)**), μέσω μιας διακοπτόμενης (switching) ακολουθίας μη αιτιατών (noncausal) χρονικώς μεταβαλλόμενων δυναμικών συστημάτων για μια ευρεία κλάση μη γραμμικών συστημάτων, με ασθενέστερες υποθέσεις από τις υπάρχουσες στη βιβλιογραφία. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην επιλυσιμότητα του ODP για συστήματα τριγωνικής μορφής. Η μεθοδολογία σχεδίασης παρατηρητή που υιοθετείται στο παρόν κεφάλαιο γενικεύει αντίστοιχες προσεγγίσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί σε προγενέστερες εργασίες για την επίλυση ανάλογων προβλημάτων (βλέπε π.χ. [4], [22], [48]). Το εν λόγω κεφάλαιο έχει την ακόλουθη δομή.

Στην παρούσα ενότητα προσδιορίζονται οι έννοιες που σχετίζονται με την επιλυσιμότητα του ODP μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας μη αιτιατών δυναμικών συστημάτων, για γενικά χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα της μορφής:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.1\alpha)$$

$$y = h(t, x), t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k \quad (2.1\beta)$$

όπου $y(\cdot)$ είναι η έξοδος του συστήματος, η $h(\cdot, \cdot)$ είναι συνεχής και η $f(\cdot, \cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz.

Στην Ενότητα 2.2 δίνονται ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του ODP για συστήματα της μορφής 2.1 με γραμμική έξοδο, μέσω ενός διακοπτόμενου μη αιτιατού παρατηρητή. Τα κύρια αποτελέσματα της Ενότητας 2.2 (Προτάσεις 2.9 και 2.10), αποτελούν γενίκευση της Πρότασης 2.1 στην εργασία [71] και χρησιμοποιούνται στην Ενότητα 2.3, για την εξαγωγή νέων αποτελεσμάτων (Πορίσματα 2.13 και 2.14), που παρέχουν ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του μη αιτιατού ODP για μια κλάση σύνθετων συστημάτων της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + G(t, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.2\alpha)$$

$$y = x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \quad (2.2\beta)$$

Ειδικότερα, στο Πόρισμα 2.13 δίνονται ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του μη αιτιατού ODP για μια κλάση αυτόνομων συστημάτων της μορφής (2.2). Το εν λόγω αποτέλεσμα αποτελεί γενίκευση του γνωστού από τη θεωρία γραμμικών συστημάτων αποτελέσματος, σύμφωνα με το οποίο το γραμμικό αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + Bx_2$$

$$\dot{x}_2 = Cx_1 + Dx_2$$

$$y = x_1, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$

είναι **ανιχνεύσιμο** και συνεπώς η εκτίμηση της κατάστασης του είναι δυνατή μέσω ενός παρατηρητή τύπου Luenberger, αν και μόνο αν το ζεύγος (B, D) είναι ανιχνεύσιμο (βλέπε Θεώρημα 1.12 και Θεώρημα 1.13).

Στην Ενότητα 2.4 κάνουμε χρήση των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν στις δύο προηγούμενες ενότητες, προκειμένου να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου, την Πρόταση 2.16, που αφορά την επιλυσιμότητα του ODP για τριγωνικά συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + a_1(t, x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2) + a_2(t, x_1)x_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.3α}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, x_1)x_n \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.3β}$$

Ειδικότερα, στην Πρόταση 2.16 αποδεικνύεται ότι το ολικό ODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.3) μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας μη αιτιατών παρατηρητών, αν υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n , ούτως ώστε το σύστημα (2.3α) είναι M -δεξιά πλήρες (forward complete) και ικανοποιείται η ακόλουθη ασθενής υπόθεση.

I. Για κάθε αρχικό χρόνο $t_0 \geq 0$ και κατάσταση $x_0 \in M$, ισχύει $a_i(t, y(t, t_0, x_0)) \neq 0$ για σχεδόν κάθε $t \geq t_0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, όπου $y(\cdot, t_0, x_0)$ η έξοδος του συστήματος.

Στην Ενότητα 2.5 δίνονται ικανές συνθήκες για την επίλυση του ODP για συστήματα της μορφής (2.1), (2.2) και (2.3) μέσω ενός αιτιατού (causal) παρατηρητή. Η Πρόταση 2.20, τα Πορίσματα 2.22, 2.23 και η Πρόταση 2.24 αποτελούν τις αιτιατές εκδοχές της Πρότασης 2.10, των Πορισμάτων 2.13, 2.14 και της Πρότασης 2.16, αντίστοιχα. Ειδικότερα, στην Πρόταση 2.24 αποδεικνύεται ότι το ολικό ODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.3) μέσω μιας διακοπτόμενης ακολουθίας αιτιατών παρατηρητών, αν το σύστημα (2.3α) είναι M -δεξιά πλήρες και ικανοποιείται η ακόλουθη ισχυρότερη υπόθεση:

II. Για κάθε αρχικό χρόνο $t_0 \geq 0$ και κατάσταση $x_0 \in M$, ισχύει $a_i(t, y(t, t_0, x_0)) \neq 0$ για κάθε $t \geq t_0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Τέλος, κάποια ενδεικτικά παραδείγματα παρατίθενται στην έκτη ενότητα.

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

•Σύγκριση με Προγενέστερα Αποτελέσματα

Τα κύρια αποτελέσματα του κεφαλαίου (εργασία [16]), που αφορούν την εκτίμηση της κατάστασης τριγωνικών συστημάτων της μορφής (2.3) (Προτάσεις 2.16 και 2.24), βασίζονται σε ασθενέστερες υποθέσεις από τις προϋπάρχουσες στη βιβλιογραφία για το εν λόγω αντικείμενο. Για παράδειγμα, στα άρθρα [10, Astolfi and Praly, 2006, Ενότητα 1.5], [25, Gauthier, Hammouri and Othmann, 1992, Ενότητα 1.5], [26], [28], [54, Praly, 2003, Ενότητα 1.5] και [62] γίνεται η παραδοχή ότι $a_i \equiv 1$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ενώ στα [7, Andrieu, Praly and Astolfi, 2009, Ενότητα 1.5], [15], [35], [46] γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει μια σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε να ισχύει $|a_i(t, x_1)| \geq c$, για κάθε $t \geq 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Μια άλλη σημαντική καινοτομία των αποτελεσμάτων της εργασίας [16], είναι ότι η διακοπτόμενη μεθοδολογία που υιοθετείται, μας επιτρέπει να επιτύχουμε την ολική (global) εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος, χωρίς περιορισμούς για τους όρους $f_i(\cdot)$, σε αντίθεση με τις περισσότερες προϋπάρχουσες εργασίες που πραγματεύονται το ODP για τριγωνικά συστήματα, στις οποίες υπεισέρχονται επιπρόσθετοι περιορισμοί για τα δυναμικά των αντίστοιχων συστημάτων (βλέπε π.χ. [7], [15], [25], [26], [28], [46], [54], [62], [72]). Ειδικότερα, τα αποτελέσματα των εργασιών [15], [25], [26], [28], [62] και [72] βασίζονται στην αυστηρή υπόθεση ότι κάθε όρος $f_i(\cdot)$ είναι μια ολικά Lipschitz συνάρτηση. Από την άλλη μεριά, τα αποτελέσματα που παραθέτουμε για την επιλυσιμότητα του ODP, βασίζονται στην παραδοχή ότι τα συστήματα που πραγματευόμαστε είναι δεξιά πλήρη, συνεπώς η μεθοδολογία μας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στα ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα της ειδικής μορφής (1.63), τα οποία εν γένει δεν είναι δεξιά πλήρη, αλλά ικανοποιούν την ιδιότητα της **Ευστάθειας Εξόδου-προς-Κατάσταση** (Ιδιότητα A5, Astolfi and Praly, 2006, Ενότητα 1.5) ή την ασθενέστερη εκδοχή αυτής στην έκτη ενότητα του ίδιου άρθρου. Αξίζει να αναφερθεί, ότι όταν ισχύει μια εκ των δυο Υποθέσεων I και II ανωτέρω, είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι το σύστημα (2.3) είναι **παρατηρήσιμο** (σύμφωνα με τον Ορισμό 1.18). Τέλος, σημειώνεται ότι με την Υπόθεση II (και επαρκή λειότητα του δεξιού του μέλους), το σύστημα (2.3) μπορεί να μετασχηματιστεί ολικά στην κανονική μορφή (1.63), δηλαδή στη μορφή (2.3) με $a_i \equiv 1$ και $f_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Όμως, ακόμα και στην περίπτωση

όπου με την Υπόθεση II, το ODP είναι επιλύσιμο για το μετασχηματισμένο σύστημα στην κανονική μορφή (1.63), δεν μπορούμε εν γένει να αποφανθούμε ότι το ODP είναι επιλύσιμο για το αρχικό σύστημα, αν δεν γίνουν επιπλέον υποθέσεις για τις συναρτήσεις $a_i(\cdot, \cdot)$ και $f_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Ιδιότητα 2.1 Θεωρούμε ένα ζεύγος μετρικών χώρων X_1, X_2 και μια πλειονότιμη απεικόνιση $X_1 \ni x \rightarrow Q(x) \subset X_2$. Λέμε ότι η $Q(\cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, αν για κάθε ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset X_1$ και $(q_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset X_2$ με $x_\nu \rightarrow x \in X_1$ και $q_\nu \in Q(x_\nu)$, υπάρχει υπακολουθία $(x_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ και $q \in Q(x)$ με $q_{\nu_k} \rightarrow q$.

Ορισμός 2.2 Έστω $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι το (2.1) είναι M -δεξιά πλήρες (βλέπε Ορισμό 1.64). Λέμε ότι το **Σχεδόν Αιτιατό Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή** (*Almost Causal Observer Design Problem (AC-ODP)*) είναι επιλύσιμο για το (2.1) ως προς το M , αν για κάθε $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$ (όπου το σύνολο $O(t_0, M)$ ορίζεται από την (1.105) για το σύστημα (2.1)), υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση

$$g := g_{t_0, y}(t, z, w) : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

η οποία είναι τ -μη αιτιατή (βλέπε Ορισμό 1.66) ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$ και ένα μη κενό σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε για κάθε $z_0 \in \bar{M}$, η αντίστοιχη τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, t_0, z_0; y)$; $z(t_0) = z_0$ του παρατηρητή

$$\dot{z} = g(t, z, y) \quad (2.5)$$

να ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$ και το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - z(\cdot)$, ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$, $x_0 \in M$ του (2.1) και την τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, t_0, z_0; y)$ του (2.5), να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (2.6)$$

Λέμε ότι το **Ισχυρό Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή** (*Strong Observer Design Problem (S-ODP)*) είναι επιλύσιμο για το (2.1) ως προς το M , αν ικανοποιείται η (2.6) και επιπλέον η απεικόνιση $g(\cdot)$ στη (2.4) είναι αιτιατή ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$.

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

Παρατήρηση 2.3 (Μια εναλλακτική διατύπωση του ODP μέσω ενός παρατηρητή με αιτιατό δεξί μέλος). Όπως έχει επισημανθεί και στην εργασία [71, Remark 3.1], η επιλυσιμότητα του AC-ODP είναι ισοδύναμη με την επιλυσιμότητα του ODP μέσω ενός συναρτησιακού (με χρονική υστέρηση) συστήματος με αιτιατή δυναμική. Ακριβέστερα, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το AC-ODP είναι επιλύσιμο, αν και μόνο αν για κάθε $t_0 > 0$, $\tau \in (0, t_0)$ και $y \in O(t_0 - \tau, M)$, υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $g := g_{t_0, y}(t, z, w) : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ της οποίας η τιμή $g(t) := g_{t_0, y}(t, z, w)$ εξαρτάται μόνο από παρελθοντικές τιμές $\{y(s) : t_0 - \tau \leq s \leq t\}$ της $y(\cdot)$ και ένα μη κενό σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε για κάθε $z_0 \in \bar{M}$, η τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, t_0, z_0; y)$; $z(t_0) = z_0$ του συστήματος $\dot{z} = g(t, z, y)$ να ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$ και το σφάλμα $e(t) := x(t - \tau) - z(t)$, $t \geq t_0$ ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0 - \tau, x_0)$, $x_0 \in M$ του (2.1α) και την τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, t_0, z_0; y)$ του ανωτέρω συστήματος να ικανοποιεί τη (2.6).

Ορισμός 2.4 Λέμε ότι το *Σχεδόν Αιτιατό Διακοπτόμενο Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή (Almost Causal Switching Observer Design Problem (AC-SODP))* είναι επιλύσιμο για το (2.1) ως προς το M , αν για κάθε $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, υπάρχουν:

- μια γνησίως αύξουσα ακολουθία χρόνων $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ με

$$t_1 = t_0 \text{ και } \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty \quad (2.7)$$

- μια ακολουθία συνεχών απεικονίσεων

$$g_m := g_{m, t_0, y}(t, z, w) : [t_{m-1}, t_{m+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

η οποία είναι τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$ και ένα μη κενό σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε κάθε λύση $z_m(\cdot)$ του συστήματος

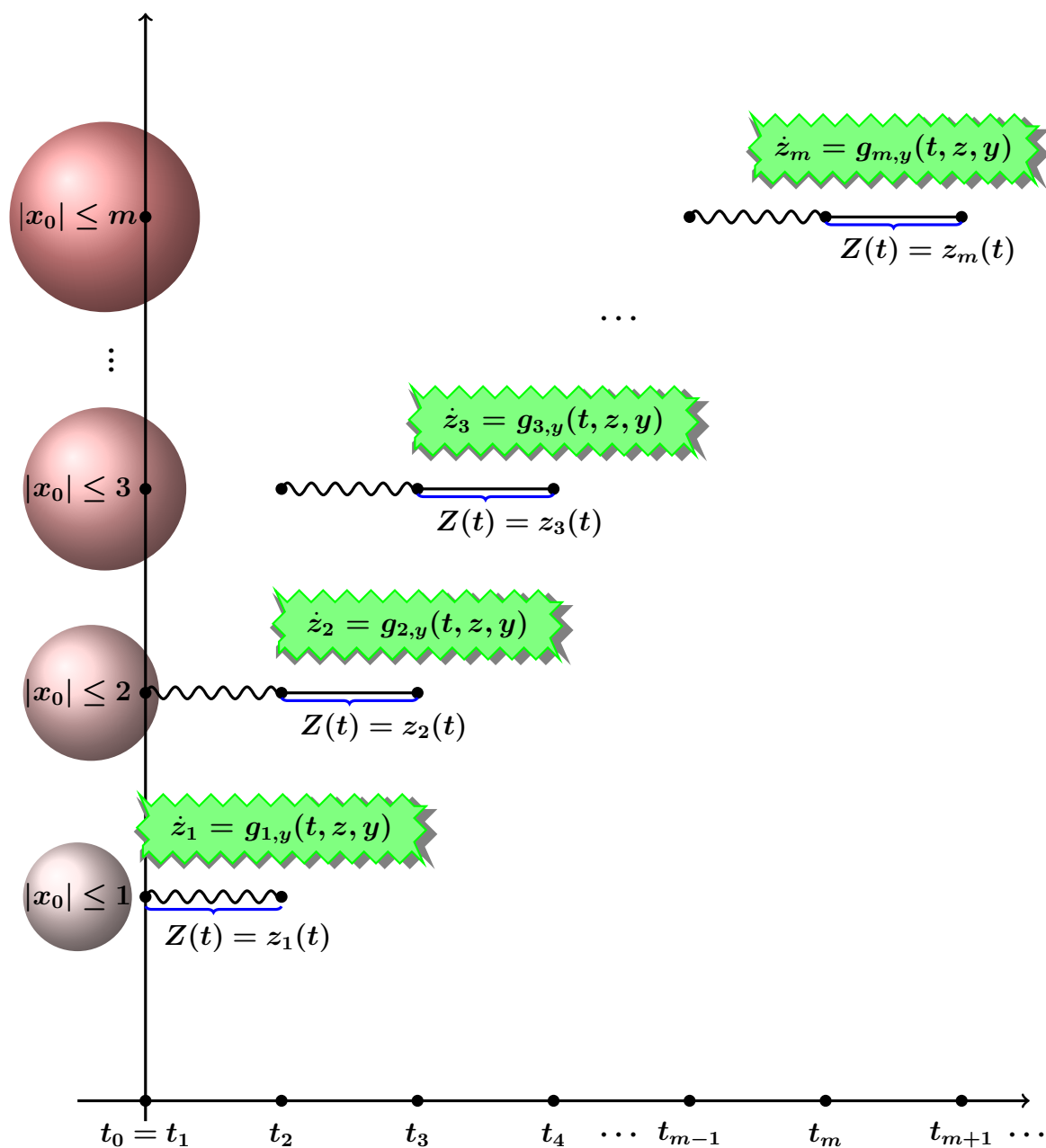
$$\dot{z}_m = g_m(t, z_m, y), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], m \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

με αρχική κατάσταση $z(t_{m-1}) \in \bar{M}$ να ορίζεται για κάθε $t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$ και έτσι ώστε αν θεωρήσουμε την τμηματικά συνεχή συνάρτηση $Z : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως

$$Z(t) := z_m(t), t \in [t_m, t_{m+1}), m \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

όπου για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $z_m(\cdot)$ αντιστοιχεί στη λύση του (2.9), το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - Z(\cdot)$, ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$, $x_0 \in M$ του (2.1α) και τη $Z(\cdot)$ να ικανοποιεί τη (2.6). Τέλος, λέμε ότι το **Ισχυρό Διακοπτόμενο Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή (Strong Switching Observer Design Problem (S-SODP))** είναι επιλύσιμο για το (2.1) ως προς το M , αν ικανοποιείται η (2.6) και επιπλέον, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η απεικόνιση $g_m(\cdot)$ στη (2.8) είναι αιτιατή ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$.

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα



Διακοπτόμενη ακολουθία παρατηρητών των οποίων τα δεξιά μέλη εξαρτώνται από την έξοδο $y(\cdot)$

2.2 Η Γενική Περίπτωση

Στην παρούσα ενότητα επικεντρώνουμε την ανάλυση μας σε συστήματα με γραμμική έξοδο, που έχουν τη μορφή

$$\dot{x} = f(t, x) := F(t, x, H(t)x) \quad (2.11\alpha)$$

$$y = h(t, x) := H(t)x, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k \quad (2.11\beta)$$

όπου η $H : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n}$ είναι C^0 και η $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^0 και τοπικά Lipschitz ως προς $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε το σύστημα (2.11α) να είναι M -δεξιά πλήρες, δηλαδή η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (2.11α) να ικανοποιεί τη (1.104), (βλέπε Ορισμό 1.64) για κάποια $\beta \in \mathcal{NN}$. Πέραν της (1.104), υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση

$$A \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^{n \times n}) \quad (2.12)$$

και σταθερές $L > 1$ και $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$, έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

A1. Για κάθε $\xi > 0$, υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow Q_R(t) := Q_{R,\xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell \quad (2.13)$$

που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$ και $(x, z, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ με

$$y \in Y_R(t) := \{y \in \mathbb{R}^k : y = H(t)x, |x| \leq \beta(t, R)\}, \quad (2.14)$$

$$|x| \leq \beta(t, R) \text{ και } |x - z| \leq \xi$$

να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \Delta F(t, x, z; y) &:= F(t, x, y) - F(t, z, y) \\ &= A(t, q, y)(x - z), \text{ για κάποιο διάνυσμα } q \in Q_R(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

A2. (“Υπόθεση Ανισχνευσιμότητας”) Υπάρχει μια σταθερά $\varepsilon_R > 0$ (ανεξάρτητη της σταθεράς L), τέτοια ώστε για κάθε $\xi > 0$, να υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_R := Q_{R,\xi}$ όπως στη (2.13) που να ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και έτσι ώστε για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau_0 > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, να υπάρχουν ένας χρονικώς-μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας

$$P_R := P_{R,t_0,\bar{t}_0,\tau_0,\xi,y} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$$

και μια συνάρτηση

$$d_R := d_{R,t_0,\bar{t}_0,\tau_0,\xi,y} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$$

και οι δυο απεικονίσεις τ_0 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$, που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$P_R(t) \geq I_{n \times n}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P_R(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.16\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t d_R(s) ds > -\varepsilon_R, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_R(s) ds = \infty; \quad (2.16\beta)$$

και επιπλέον

$$e' P_R(t) A(t, q, y(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e \leq -d_R(t) e' P_R(t) e, \quad (2.16\gamma)$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker H(t), q \in Q_R(t)$$

δεδομένου ότι

$$y \in O(t_0, B_R \cap M) \quad (2.17)$$

Παρατήρηση 2.5 Παραλλαγές της Υπόθεσης A2 έχουν χρησιμοποιηθεί στις εργασίες [67]-[69], [71]. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου οι A , H και P ανωτέρω, είναι σταθεροί πίνακες και $d(\cdot) \equiv c$ για σταθερό $c > 0$, η (2.16γ) γράφεται ως

$$e' P A e \leq -c e' P e, \forall e \in \ker H \quad (2.18)$$

Όπως αναφέρεται και στην εργασία [67, Theorem 2] (βλέπε Θεώρημα 1.61), η εν λόγω συνθήκη είναι ισοδύναμη με την ανιχνευσιμότητα του ζεύγους (H, A) .

Στην Πρόταση 2.9 αποδεικνύουμε ότι με τις Υποθέσεις A1 και A2, το AC-ODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.11) ως προς το $O(t_0, B_R \cap M)$. Για την απόδειξη της τελευταίας χρειάζονται ορισμένα προκαταρκτικά τεχνικά αποτελέσματα (Λήμματα 2.6, 2.7 και Πόρισμα 2.8 παρακάτω). Έστω $k, \ell, n, p \in \mathbb{N}$ και (H, A) ένα ζεύγος συνεχών απεικονίσεων:

$$H := H(t, y); H : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}; \quad (2.19\alpha)$$

$$A := A(t, q, y); H : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.19\beta)$$

Επίσης, έστω U και W μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R}^n με $U \cap W \neq \emptyset$ και για κάθε $t_0 \geq 0$, έστω $\Omega(t_0, U)$ ένα (μη κενό) σύνολο συνεχών συναρτήσεων $y := y_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$, παραμετροποιημένων ως προς $x_0 \in U$. Για το ζεύγος (H, A) ανωτέρω κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση:

H1. Υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση $[0, \infty) \ni t \rightarrow Q(t) \subset \mathbb{R}^\ell$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, έτσι ώστε για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau_0 > 0$ και $y \in \Omega(t_0, U)$ να υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος θετικά ορισμένος πίνακας $P := P_{t_0, \bar{t}_0, y} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d := d_{t_0, \bar{t}_0, y} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και οι δυο απεικονίσεις τ_0 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\begin{aligned} e'P(t)A(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e &\leq -d(t)e'P(t)e, \\ \forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker H(t, y(t)), q &\in Q(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

δεδομένου ότι

$$y \in \Omega(t_0, U \cap W) \quad (2.21)$$

Λήμμα 2.6 Έστω το ζεύγος (H, A) των χρονικώς μεταβαλλόμενων απεικονίσεων που δίνονται στη (2.19) και υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η Υπόθεση H1. Τότε για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > \tau_0 > 0$, $y \in \Omega(t_0, U)$ και $\bar{d} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ με

$$\bar{d}(t) < d(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.22)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

υπάρχει μια συνάρτηση $\phi = \phi_{t_0, \bar{t}_0, \tau, y} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και τέτοια ώστε

$$e'P(t)A(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e \leq \phi(t)|H(t, y(t))e|^2 - \bar{d}(t)e'P(t)e, \quad (2.23)$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^n, q \in Q(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)}$$

Απόδειξη

Έστω t_0, \bar{t}_0, τ_0 και τ όπως ανωτέρω και $y \in \Omega(t_0, U)$. Για να απλοποιήσουμε την απόδειξη, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση I. Θεωρούμε μια συνάρτηση $y \in \Omega(t_0, U)$ για την οποία γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι ισχύει η (2.21).

Για κάθε $y(\cdot)$ που ικανοποιεί τη (2.21) και για κάθε $t \geq \bar{t}_0, q \in \mathbb{R}^\ell$ και $e \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε:

$$D(t, q, e) := e'P(t)A(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e + \bar{d}(t)e'P(t)e; \quad (2.24\alpha)$$

$$K(t) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, D(t, q, w) < 0, \forall q \in Q(t)\} \quad (2.24\beta)$$

Παρατηρούμε ότι για εκείνα τα $t \geq \bar{t}_0$ για τα οποία ισχύει $\text{rank}H(t, y(t)) < n$, το σύνολο $K(t)$ είναι μη κενό, καθώς περιλαμβάνει όλα τα διανύσματα $w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1$ με $w \in \ker H(t, y(t))$. Πράγματι, έστω $w \in \mathbb{R}^n$ με $|w| = 1$ και $w \in \ker H(t, y(t))$. Από τις (2.20), (2.21), (2.22), (2.24α) και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο $P(\cdot)$ είναι θετικά ορισμένος, εξάγουμε ότι για κάθε $q \in Q(t)$ ισχύει:

$$\begin{aligned} D(t, q, w) &= w'P(t)A(t, q, y(t))w + \frac{1}{2}w'\dot{P}(t)w + \bar{d}(t)w'P(t)w \\ &= w'P(t)A(t, q, y(t))w + \frac{1}{2}w'\dot{P}(t)w + d(t)w'P(t)w \\ &\quad + (\bar{d}(t) - d(t))w'P(t)w \leq (\bar{d}(t) - d(t))w'P(t)w < 0 \end{aligned}$$

και επομένως $w \in K(t)$, που συνεπάγεται ότι $K(t) \neq \emptyset$. Από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι:

$$w \in \ker H(t, y(t)) \text{ και } |w| = 1 \Rightarrow w \in K(t) \quad (2.25)$$

Στη συνέχεια, για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ συμβολίζουμε με $K^c(t)$ το συμπλήρωμα του $K(t)$ ως προς το σύνορο της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το $0 \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή $K^c(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, w \notin K(t)\}$, το οποίο λαμβάνοντας υπόψη τη (2.24β) γράφεται:

$$K^c(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1 \text{ και } D(t, q, w) \geq 0, \text{ για κάποιο } q \in Q(t)\} \quad (2.26)$$

Σημειώνουμε ότι το $K^c(t)$ είναι κενό, αν και μόνο αν ισχύει

$$D(t, q, w) < 0 \text{ για κάθε } q \in Q(t) \text{ και } w \in \mathbb{R}^n \text{ με } |w| = 1 \quad (2.27)$$

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ το σύνολο $K^c(t)$ είναι κλειστό. Έστω $t \geq \bar{t}_0$ και υποθέτουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας, ισχύει $K^c(t) \neq \emptyset$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset K^c(t)$, με $w_\nu \rightarrow w$ ισχύει $w \in K^c(t)$. Πράγματι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, αφού $w_\nu \in K^c(t)$, εξάγουμε από τη (2.26) ότι υπάρχει $q_\nu \in Q(t)$ με $D(t, q_\nu, w_\nu) \geq 0$. Δεδομένου ότι η απεικόνιση $Q(\cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε, ότι ισχύει $q_\nu \rightarrow q$ για κάποιο $q \in Q(t)$. Αφού $(q_\nu, w_\nu) \rightarrow (q, w)$, εξάγουμε από τη συνέχεια της $D(t, \cdot, \cdot)$ ότι $D(t, q_\nu, w_\nu) \rightarrow D(t, q, w) \geq 0$, συνεπώς από τη (2.26) ότι $w \in K^c(t)$, επομένως το $K^c(t)$ είναι κλειστό. Ακολούθως, ορίζουμε την απεικόνιση $\omega : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ που δίνεται ως:

$$\omega(t) := \begin{cases} \min\{|H(t, y(t))w| : w \in K^c(t)\}, & \text{αν } K^c(t) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{αν } K^c(t) = \emptyset \end{cases} \quad (2.28)$$

Στην περίπτωση όπου $K^c(t) \neq \emptyset$, το σύνολο $\{|H(t, y(t))w| : w \in K^c(t)\}$ είναι συμπαγές λόγω της συνέχειας των $H(t, y(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $|\cdot| : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ και της συμπάγειας του $K^c(t)$. Επομένως η $\omega(\cdot)$ είναι καλά ορισμένη και τ_0 -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, ενώ επιπλέον, λόγω της (2.25), ισχύει $\omega(t) > 0$ για κάθε $t \geq \bar{t}_0$. Ακολούθως, δείχνουμε ότι για κάθε $T > \bar{t}_0$ ισχύει:

$$\inf\{\omega(t) : t \in [\bar{t}_0, T]\} > 0 \quad (2.29)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση θα ισχύει $\omega(t_\nu) \rightarrow 0$ για κάποια ακολουθία $t_\nu \rightarrow t \in [\bar{t}_0, T]$. Στην περίπτωση αυτή και λαμβάνοντας υπόψη τη (2.28), μπορούμε να υποθέσουμε, ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας, ισχύει $K^c(t_\nu) \neq \emptyset$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, επομένως θα υπάρχει $w_\nu \in K^c(t_\nu)$ με $|H(t_\nu, y(t_\nu))w_\nu| \rightarrow 0$. Αφού $|w_\nu| = 1$, μπορούμε πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι υπάρχει $w \in \mathbb{R}^n$ με $|w| = 1$ και $w_\nu \rightarrow w$, συνεπώς από τη συνέχεια της $H(\cdot, y(\cdot))$ προκύπτει ότι $H(t, y(t))w = 0$. Επομένως, εξάγουμε από τη (2.25) ότι $w \in K(t)$. Από την άλλη, ισχύει $w_\nu \in K^c(t_\nu)$, και άρα $D(t_\nu, q_\nu, w_\nu) \geq 0$, για κάποιο διάνυσμα $q_\nu \in Q(t_\nu)$, που σε συνδυασμό με την Ιδιότητα 2.1 για την απεικόνιση $Q(\cdot)$ και τη συνέχεια της $D(\cdot, \cdot, \cdot)$ συνεπάγεται ότι $\underline{\lim} D(t_\nu, q_\nu, w_\nu) \rightarrow D(t, q, w) \geq 0$ για κάποιο $q \in Q(t)$. Για να δείξουμε το τελευταίο, παρατηρούμε αρχικά, ότι αφού $D(t_\nu, q_\nu, w_\nu) \geq 0$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, θα υπάρχει σταθερά $c \geq 0$ με $\underline{\lim} D(t_\nu, q_\nu, w_\nu) = c$. Συνεπώς, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι ισχύει $\lim D(t_\nu, q_\nu, w_\nu) = c$. Από την Ιδιότητα 2.1 για την απεικόνιση $Q(\cdot)$, αφού $t_\nu \rightarrow t$, υπάρχει υπακολουθία $(q_{\nu_\kappa})_{\kappa \in \mathbb{N}}$ και $q \in Q(t)$ με $q_{\nu_\kappa} \rightarrow q$, επομένως, αφού $(t_{\nu_\kappa}, q_{\nu_\kappa}, w_{\nu_\kappa}) \rightarrow (t, q, w)$ και η $D(\cdot, \cdot, \cdot)$ είναι συνεχής, θα έχουμε:

$$c = \lim D(t_\nu, q_\nu, w_\nu) = \lim D(t_{\nu_\kappa}, q_{\nu_\kappa}, w_{\nu_\kappa}) = D(t, q, w)$$

Επομένως $w \in K^c(t)$, το οποίο είναι άτοπο και συνεπώς ισχύει η (2.29). Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνάρτηση $\bar{\omega} : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ως:

$$\bar{\omega}(t) := \begin{cases} \frac{1}{\omega^2(t)}, & \text{αν } K^c(t) \neq \emptyset \\ 0, & \text{αν } K^c(t) = \emptyset \end{cases} \quad (2.30)$$

Η απεικόνιση $\bar{\omega}(\cdot)$ είναι τ_0 -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, ενώ επιπλέον, από τις (2.29) και (2.30) προκύπτει ότι για κάθε $T > \bar{t}_0$ υπάρχει μια σταθερά $M := M(T) > 0$, τέτοια ώστε:

$$\sup\{\bar{\omega}(t) : t \in [\bar{t}_0, T]\} \leq M \quad (2.31)$$

Ακολουθώντας, ορίζουμε την απεικόνιση

$$C(t) := \sup\{\bar{\omega}(t)(|P(t)||A(t, q, y(t))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t)| + |\bar{d}(t)||P(t)|) : q \in Q(t)\} \quad (2.32)$$

η οποία είναι επίσης τ_0 -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$. Επιπλέον, από τις (2.31) και (2.32), καθώς και το γεγονός ότι η $Q(\cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $T > \bar{t}_0$ το σύνολο $\cup_{t \in [\bar{t}_0, T]} Q(t)$ είναι φραγμένο και επομένως, υπάρχει μια σταθερά $\bar{M} := \bar{M}(T) > 0$ τέτοια ώστε:

$$\sup\{C(t) : t \in [\bar{t}_0, T]\} \leq \bar{M} \quad (2.33)$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε τουναντίον, ότι το $\cup_{t \in [\bar{t}_0, T]} Q(t)$ δεν είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(t_\nu, q_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ με $t_\nu \in [\bar{t}_0, T]$, $q_\nu \in Q(t_\nu)$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και $|q_\nu| \rightarrow \infty$. Λόγω της συμπίεσης του συνόλου $[\bar{t}_0, T]$ μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $t_\nu \rightarrow t \in [\bar{t}_0, T]$. Από την Ιδιότητα 2.1 για την απεικόνιση $Q(\cdot)$, θα υπάρχει υπακολουθία $(q_{\nu_\kappa})_{\kappa \in \mathbb{N}}$ και $q \in Q(t)$ με $q_{\nu_\kappa} \rightarrow q$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $|q_{\nu_\kappa}| \rightarrow \infty$. Επομένως, από τις (2.31), (2.32) και τη συνέχεια των απεικονίσεων $P(\cdot)$, $A(\cdot, \cdot, \cdot)$, $y(\cdot)$, $\dot{P}(\cdot)$ και $\bar{d}(\cdot)$ εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned} & \sup\{C(t) : t \in [\bar{t}_0, T]\} \\ &= \sup\{\bar{\omega}(t)(|P(t)||A(t, q, y(t))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t)| + |\bar{d}(t)||P(t)|) : t \in [\bar{t}_0, T], q \in Q(t)\} \\ &\leq \sup\{\bar{\omega}(t)(|P(t)||A(t, q, y(t))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t)| + |\bar{d}(t)||P(t)|) : \\ &\quad (t, q) \in [\bar{t}_0, T] \times \cup_{t \in [\bar{t}_0, T]} Q(t)\} \\ &\leq \sup\{\bar{\omega}(t) : t \in [\bar{t}_0, T]\} \times \sup\{(|P(t)||A(t, q, y(t))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t)| + |\bar{d}(t)||P(t)|) : \\ &\quad (t, q) \in [\bar{t}_0, T] \times \cup_{t \in [\bar{t}_0, T]} Q(t)\} < \infty \end{aligned}$$

άρα ικανοποιείται η (2.33). Αφού $\tau > \tau_0$, μπορούμε με τη μεθοδολογία της απόδειξης της Πρότασης 2.1(i) στο άρθρο [71] να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $\phi \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, η οποία είναι τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\phi(t) > C(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.34)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

Λόγω της υπόθεσης ότι ισχύει η (2.21), η επιθυμητή (2.23) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως:

$$w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1 \Rightarrow w'P(t)A(t, q, y(t))w + \frac{1}{2}w'\dot{P}(t)w \leq \phi(t)|H(t, y(t))w|^2 - \bar{d}(t)w'P(t)w, \forall t \geq \bar{t}_0, q \in Q(t) \quad (2.35)$$

Πράγματι, για $e = 0$ ο παραπάνω ισχυρισμός είναι φανερός, ενώ για $e \neq 0$, η ισοδυναμία μεταξύ των (2.23) και (2.35) προκύπτει άμεσα, θέτοντας $w = e/|e|$. Επομένως, προκειμένου να δείξουμε ότι ισχύει η (2.23), αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιείται η (2.35). Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Αρχικά, θεωρούμε εκείνα τα $t \geq \bar{t}_0$ για τα οποία $K^c(t) \neq \emptyset$ και έστω $w \in K^c(t)$. Τότε, προκειμένου να δείξουμε τη (2.35), αρκεί λαμβάνοντας υπόψη τη (2.28), να αποδείξουμε ότι:

$$\sup\{|P(t)||A(t, q, y(t))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t)| + |\bar{d}(t)||P(t)| : q \in Q(t)\} \leq \phi(t)\omega^2(t) \quad (2.36)$$

Η τελευταία είναι άμεση συνέπεια των (2.30), (2.32) και (2.34). Ακολουθώντας, υποθέτουμε ότι $K(t) \neq \emptyset$ και επιλέγουμε $w \in K(t)$. Τότε η συνεπαγωγή (2.35) είναι συνέπεια της (2.24). Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε εκείνα τα $t \geq \bar{t}_0$ για τα οποία $K^c(t) = \emptyset$. Τότε, εξάγουμε από τη (2.27) ότι $D(t, q, w) < 0$, για κάθε $w \in \mathbb{R}^n$ με $|w| = 1$ και $q \in Q(t)$, επομένως η (2.35) είναι συνέπεια της (2.24α).

Περίπτωση II. Θεωρούμε μια συνάρτηση $y \in \Omega(t_0, U)$ για την οποία δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι ισχύει η (2.21).

Για τη γενική περίπτωση ανωτέρω, κάνουμε ορισμένες απαραίτητες τροποποιήσεις της αποδεικτικής διαδικασίας της Περίπτωσης I. Ειδικότερα, ορίζουμε τις απεικονίσεις $D(\cdot, \cdot, \cdot)$, $K(\cdot)$ και $\omega(\cdot)$ όπως δίνονται από τις (2.24α), (2.24β) και (2.28), αντίστοιχα, όπου όμως τώρα ισχύει $\omega(t) \geq 0$, για κάθε $t \geq \bar{t}_0$. Εν συνεχεία, αντί της (2.30), ορίζουμε την απεικόνιση $\bar{\omega} : [\bar{t}_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ως εξής:

$$\bar{\omega}(t) := \begin{cases} \frac{1}{\omega^2(t)}, & \text{αν ισχύει } \inf\{\omega(s) : s \in [t - \frac{\tau - \tau_0}{2}, t + \frac{\tau - \tau_0}{2}] \cap [\bar{t}_0, \infty)\} > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.37)$$

Προφανώς, η $\bar{\omega}(\cdot)$ είναι $(\tau_0 + \frac{\tau - \tau_0}{2})$ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και ικανοποιεί τη (2.31). Ακολούθως, θεωρούμε τη συνάρτηση $C(\cdot)$, όπως ακριβώς δίνεται από τη (2.32). Αφού $\tau > \tau_0 + \frac{\tau - \tau_0}{2}$, μπορούμε να βρούμε μια απεικόνιση $\phi \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, και τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (2.34). Τότε, όταν ισχύει η (2.21), έπεται από τη (2.29) ότι η συνάρτηση $\bar{\omega}(\cdot)$ όπως ορίζεται στη (2.30) ταυτίζεται με την $\bar{\omega}(\cdot)$, όπως αυτή δίνεται από τη (2.37), και συνεπώς, ακολουθώντας επακριβώς τα βήματα της απόδειξης της Περίπτωσης I, δείχνουμε ότι ισχύει η (2.23). \square

Λήμμα 2.7 *Πέραν των υποθέσεων του Λήμματος 2.6, υποθέτουμε ότι η τ_0 -μη αιτιατή συνάρτηση $d(\cdot)$ της HI, ικανοποιεί τις συνθήκες*

$$\int_{\bar{t}}^t d(s)ds > -\varepsilon, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d(s)ds = \infty \quad (2.38)$$

για δοσμένο $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $\hat{\varepsilon} > \varepsilon$ και $\tau > \tau_0$ υπάρχουν μια τ_0 -μη αιτιατή συνάρτηση $\hat{d} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και μια τ -μη αιτιατή συνάρτηση $\phi \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ (και οι δυο ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$), έτσι ώστε

$$\hat{d}(t) < d(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.39)$$

και ούτως ώστε η (2.23) να ικανοποιείται με $\hat{d}(\cdot)$ στη θέση της $\bar{d}(\cdot)$, και η (2.38) να ισχύει με $\hat{d}(\cdot)$ και $\hat{\varepsilon}$, στη θέση των $d(\cdot)$ και ε , αντίστοιχα.

Απόδειξη

Έστω $\hat{\varepsilon} > \varepsilon$. Ορίζουμε τη

$$\hat{d}(t) := d(t) - \frac{2(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)}{\pi(1 + t^2)}, t \geq \bar{t}_0$$

Προφανώς, η $\hat{d}(\cdot)$ είναι τ_0 -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και προκύπτει άμεσα ότι ικανοποιούνται η (2.39) και η (2.38), με $\hat{d}(\cdot)$ και $\hat{\varepsilon}$, στη θέση των $d(\cdot)$ και ε , αντίστοιχα. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τη (2.39) και το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.6, εξάγουμε ότι για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > \tau_0 > 0$ και $y \in \Omega(t_0, U)$, υπάρχει μια συνάρτηση $\phi := \phi_{t_0, \bar{t}_0, \tau, y} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και τέτοια ώστε να ισχύει η (2.23) με $\hat{d}(\cdot)$ στη θέση της $\bar{d}(\cdot)$. \square

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

Πόρισμα 2.8 Θεωρούμε το ζεύγος (H, A) όπως ορίζεται στη (2.19) με $p = k$ και τις $H(t, y) := H(t)$, $A(t, q, y)$ όπως δίνονται στις (2.11β) και A1, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η A2 και θεωρούμε τις σταθερές $R, \varepsilon_R, \xi, \bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και $\tau_0 > 0$ και τις απεικονίσεις $Q_R(\cdot) := Q_{R,t_0}(\cdot)$, $P_R(\cdot) = P_{R,t_0,\bar{t}_0,\tau_0,\xi,y}(\cdot)$ και $d_R(\cdot) = d_{R,t_0,\bar{t}_0,\tau_0,\xi,y}(\cdot)$, με $y \in O(t_0, M)$, όπως ακριβώς δίνονται στην A2. Τότε για κάθε $\bar{\varepsilon}_R > \varepsilon_R$ και $\tau > \tau_0$, υπάρχουν συναρτήσεις $\bar{d}_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, και οι δυο τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\bar{d}_R(t) < d_R(t), \forall t \geq \bar{t}_0; \quad (2.40\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t \bar{d}_R(s) ds > -\bar{\varepsilon}_R, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} \bar{d}_R(s) ds = \infty; \quad (2.40\beta)$$

$$e' P_R(t) A(t, q, y(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e - \phi_R(t) |H(t) e|^2 \leq -d_R(t) e' P_R(t) e, \quad (2.40\gamma)$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^n, q \in Q_R(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)}$$

Ειδικότερα, σύμφωνα με την ανάλυση στην απόδειξη του Λήμματος 2.6 (Περίπτωση II), η συνάρτηση $\phi_R(\cdot)$ είναι μια οποιαδήποτε τ -μη αιτιατή απεικόνιση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\phi_R(t) > C_R(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.41\alpha)$$

$$C_R(t) := \sup\{\bar{\omega}_R(t) (|P_R(t)| |A(t, q, y(t))| + \frac{1}{2} |\dot{P}_R(t)| + |\bar{d}_R(t)| |P_R(t)|) : q \in Q_R(t)\} \quad (2.41\beta)$$

$$\bar{\omega}_R(t) := \begin{cases} \frac{1}{\omega_R^2(t)}, & \text{αν ισχύει } \inf\{\omega_R(s) : s \in [t - \frac{\tau-\tau_0}{2}, t + \frac{\tau-\tau_0}{2}] \cap [\bar{t}_0, \infty)\} > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.41\gamma)$$

$$\omega_R(t) := \begin{cases} \min\{|H(t, y(t)) w| : w \in K_R^c(t)\}, & \text{αν } K_R^c(t) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{αν } K_R^c(t) = \emptyset \end{cases} \quad (2.41\delta)$$

$$K_R(t) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, w' P_R(t) A(t, q, y(t)) w + \frac{1}{2} w' \dot{P}_R(t) w + \bar{d}_R(t) w' P_R(t) w < 0, \forall q \in Q(t)\}, t \geq \bar{t}_0 \quad (2.41\epsilon)$$

Απόδειξη

Λόγω της Υπόθεσης A2 προκύπτει ότι ικανοποιείται η Ιδιότητα H1 για το ζεύγος (H, A) με

$$U := M, W := B_R, \Omega(t_0, U) := O(t_0, M), \forall t_0 \geq 0,$$

$$P := P_R, d := d_R \text{ και } Q := Q_R$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με την υπόθεση (2.16β) και το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.7 συνεπάγονται το εν λόγω πόρισμα. Ειδικότερα, σύμφωνα με την ανάλυση στην απόδειξη του Λήμματος 2.6, για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > \tau_0 > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, κάθε τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$ απεικόνιση $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ όπως δίνεται από τις (2.41α)-(2.41ε), ικανοποιεί την επιθυμητή (2.40γ). \square

Η ακόλουθη πρόταση γενικεύει μερικώς την Πρόταση 2.1 στο άρθρο [71], δίνοντας ικανές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για συστήματα της μορφής (2.11), **με την επιπλέον υπόθεση, ότι η αρχική κατάσταση ανήκει σε ένα εξαρχής δοσμένο συμπαγές σύνολο**. Ειδικότερα, είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι η αρχική κατάσταση x_0 του (2.11α) ανήκει στη συμπαγή μπάλα ακτίνας $R > 0$ με κέντρο το μηδέν.

Πρόταση 2.9 (Ικανές συνθήκες για την επίλυση του AC-ODP για το σύστημα (2.11)). Θεωρούμε το σύστημα (2.11) και ένα σύνολο M (μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^n) έτσι ώστε το (2.11α) να είναι M -δεξιά πλήρες. Για την αρχική κατάσταση $x_0 \in M$ του (2.11α), υποθέτουμε ότι ισχύει $|x_0| \leq R$, για κάποια γνωστή σταθερά $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$. Τότε, αν ικανοποιούνται οι Υποθέσεις A1 και A2 με το σύνολο M και τη σταθερά R ως ανωτέρω και κάποια σταθερά $L > 1$, το AC-ODP είναι επιλύσιμο για το (2.11) ως προς το $B_R \cap M$. Ειδικότερα, για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > 0$, $\bar{\varepsilon}_R > \varepsilon_R$ (όπου ε_R η σταθερά στην A2), σταθερά ξ με

$$\xi \geq \beta(\bar{t}_0, R) \sqrt{L} \exp[\bar{\varepsilon}_R] \quad (2.42)$$

και για κάθε $y \in O(t_0, B_R \cap M)$, υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ που ικανοποιεί τη (2.16α) και συναρτήσεις $\bar{d}_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, B_R \cap M)$ και τέτοιες ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

(i) Για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, το σύστημα

$$\dot{z} = F(t, z, y) + \phi_R(t)P_R^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z) \quad (2.43\alpha)$$

$$\text{με αρχική κατάσταση } z(\bar{t}_0) = 0 \quad (2.43\beta)$$

είναι δεξιά πλήρες και το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - z(\cdot)$ ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (2.11α) και την τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, \bar{t}_0, z_0; y)$ του (2.43) ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$|e(t)| < \beta(\bar{t}_0, R)\sqrt{L} \exp \left[- \int_{\bar{t}_0}^t \bar{d}_R(s) ds \right], \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.44\alpha)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \forall x_0 \in B_R \cap M \quad (2.44\beta)$$

(ii) Το AC-ODP είναι επιλύσιμο για το (2.11) ως προς το $B_R \cap M$. Ειδικότερα, το σύστημα (2.43α) με αρχική κατάσταση $z(t_0) = 0$, είναι παρατηρητής για το (2.11).

Απόδειξη

Έστω $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > 0$, $\bar{\varepsilon}_R > \varepsilon_R$ και ξ μια σταθερά που ικανοποιεί τη (2.42). Επίσης, θεωρούμε μια έξοδο $y(\cdot)$ που ικανοποιεί τη (2.17), δηλαδή $y \in O(t_0, B_R \cap M)$. Σύμφωνα με τις Υποθέσεις A1 και A2 υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, και οι δυο απεικονίσεις τ_0 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$ για κάποιο $\tau_0 \in (0, \tau)$, έτσι ώστε να ισχύει η (2.16) με τη συνάρτηση $Q_R := Q_{R, \xi}$ όπως ακριβώς δίνεται στην A1. Τότε, αφού $\bar{\varepsilon}_R > \varepsilon_R$ και $\tau > \tau_0$, έπεται από το Πόρισμα 2.8 ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\bar{d}_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$ -συνεπώς, λόγω της (2.17) και τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, B_R \cap M)$ - και τέτοιες ώστε να ικανοποιείται η (2.40). Έστω $e := x - z$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τη (2.11β), η εξίσωση σφάλματος ανάμεσα στις (2.43α) και (2.11α) γράφεται:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= F(t, x, y) - F(t, z, y) - \phi_R(t)P_R^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z) \\ &= F(t, x, y) - F(t, z, y) - \phi_R(t)P_R^{-1}(t)H'(t)(H(t)x - H(t)z) \\ &= F(t, x, y) - F(t, z, y) - \phi_R(t)P_R^{-1}(t)H'(t)H(t)e, \forall t \geq \bar{t}_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Έστω $[t_0, T_{\max})$ το μέγιστο από δεξιά διάστημα ύπαρξης της λύσης $e(\cdot)$ του (2.45) με αρχική συνθήκη:

$$e(\bar{t}_0) = x(\bar{t}_0, t_0, x_0) - z(\bar{t}_0) = x(\bar{t}_0, t_0, x_0) \quad (2.46)$$

Σημειώνουμε ότι λόγω των (1.104), (2.42), (2.46) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $L > 1$, $\bar{\varepsilon}_R > 0$, έχουμε:

$$|e(\bar{t}_0)| = |x(\bar{t}_0, t_0, x_0)| \leq \beta(\bar{t}_0, x_0) \leq \beta(\bar{t}_0, x_0) \sqrt{L} \exp[\bar{\varepsilon}_R] \leq \xi$$

Επομένως, από την ανωτέρω προκύπτει ότι $|e(\bar{t}_0)| < \xi$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει $|e(t)| < \xi$, για κάθε $t \in [\bar{t}_0, T_{\max})$ και συνεπώς $T_{\max} = \infty$. Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση, θα υπάρχει χρόνος $\bar{t} \in (\bar{t}_0, T_{\max})$, με

$$|e(\bar{t})| = \xi \quad (2.47\alpha)$$

$$|e(t)| < \xi, \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}) \quad (2.47\beta)$$

Προκειμένου να καταλήξουμε σε άτοπο, επικαλούμαστε τις (1.104), (1.105), (2.11β), (2.14), καθώς και το γεγονός ότι $y \in O(t_0, B_R \cap M)$, από όπου έπεται ότι:

$$y(t) \in Y_R(t), \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}] \quad (2.48)$$

συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη (2.15) στην A1, προκύπτει από τις (2.47) και (2.48) ότι

$$\begin{aligned} & F(t, x(t), y(t)) - F(t, z(t), y(t)) = \Delta F(t, x(t), z(t); y(t)) \\ & = A(t, q, y(t))(x(t) - z(t)), \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}] \text{ και για κάποιο } q := q(t) \in Q_R(t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Υπολογίζοντας τη χρονική παράγωγο $\dot{V}(t, e)$ της $V(t, e) := \frac{1}{2} e' P_R(t) e$, $e \in \mathbb{R}^n$ κατά μήκος των τροχιών $e(\cdot) := e(\cdot, \bar{t}_0, e(\bar{t}_0); x(\cdot))$ του (2.45) και επικαλούμενοι τη (2.49), έχουμε:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, e(t)) &:= \frac{d}{dt}(V(t, e(t))) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e'(t)P_R(t)e(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\dot{e}'(t)P_R(t)e(t) + \frac{1}{2}e'(t)\dot{P}_R(t)e(t) + \frac{1}{2}e'(t)P(t)\dot{e}(t) \\
&= \frac{1}{2}e'(t)\dot{P}_R(t)e(t) + e'(t)P_R(t)(F(t, x(t), y(t)) - F(t, z(t), y(t))) \\
&\quad - e'(t)P_R(t)\phi_R(t)P_R^{-1}(t)H'(t)H(t)e(t) \\
&= \frac{1}{2}e'(t)\dot{P}_R(t)e(t) + e'(t)P_R(t)A(t, q, y(t))e(t) - \phi_R(t)|H(t)e(t)|^2, \\
&\quad \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}] \text{ και για κάποιο } q := q(t) \in Q_R(t)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Από τις (2.40γ) και (2.50) προκύπτει ότι:

$$\dot{V}(t, e(t)) \leq -2\bar{d}_R(t)V(t, e(t)), \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}] \tag{2.51}$$

Η (2.51) συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{2}e'(t)P_R(t)e(t) \leq \frac{1}{2}e'(\bar{t}_0)P_R(\bar{t}_0)e(\bar{t}_0) \exp\left[-\int_{\bar{t}_0}^t 2\bar{d}_R(s)ds\right], \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}]$$

επομένως, λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη ανισότητα της (2.16α), έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 \leq e'(t)P_R(t)e(t) &\leq e'(\bar{t}_0)P_R(\bar{t}_0)e(\bar{t}_0) \exp\left[-\int_{\bar{t}_0}^t 2\bar{d}_R(s)ds\right], \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}] \Rightarrow \\
|e(t)|^2 &\leq |e'(\bar{t}_0)||P_R(\bar{t}_0)||e(\bar{t}_0)| \exp\left[-\int_{\bar{t}_0}^t 2\bar{d}_R(s)ds\right], \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}] \Rightarrow \\
|e(t)| &\leq |e(\bar{t}_0)||P_R(\bar{t}_0)|^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\int_{\bar{t}_0}^t \bar{d}_R(s)ds\right], \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}]
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Επιπλέον, αφού $|z(\bar{t}_0)| = 0$, εξάγουμε από την (1.104) ότι:

$$|e(\bar{t}_0)| = |x(\bar{t}_0, t_0, x_0)| \leq \beta(\bar{t}_0, R) \tag{2.53}$$

Από τη δεύτερη ανισότητα της (2.16α), καθώς και τις (2.40β), (2.42), (2.52) και (2.53), προκύπτει ότι

$$|e(t)| < \beta(\bar{t}_0, R)\sqrt{L} \exp[\bar{\varepsilon}_R] \leq \xi, \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}]$$

και συνεπώς $|e(\bar{t})| < \xi$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τη (2.47α). Επομένως, η λύση $e(\cdot) := e(\cdot, \bar{t}_0, e(\bar{t}_0); x(\cdot))$ του (2.45) ικανοποιεί το φράγμα $|e(t)| < \xi$ για κάθε $t \in [\bar{t}_0, T_{\max})$ και άρα $\bar{t} = T_{\max} = \infty$. Συνεπώς, επικαλούμενοι πάλι τη δεύτερη ανισότητα της (2.16α) και τις (2.52), (2.53), εξάγουμε ότι ισχύει η (2.44α). Από τη (2.44α) και την ισότητα στη (2.40β) προκύπτει και η ισχύς της (2.44β) και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη του σκέλους (i) της πρότασης. Το σκέλος (ii) είναι άμεση συνέπεια του σκέλους (i). \square

Γενικεύουμε τώρα το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.9, εξασφαλίζοντας ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ενός διακοπόμενου παρατηρητή που επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (2.11), *χωρίς κάποια εκ των προτέρων γνώση σχετικά με την αρχική του κατάσταση*. Κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

A3. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως στη (2.12) και μια σταθερά $L > 1$, έτσι ώστε για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$, να ισχύουν οι A1 και A2 ταυτόχρονα.

Ακολουθεί η διατύπωση του κύριου αποτελέσματος που αφορά την επίλυση του AC-SODP για το σύστημα (2.11).

Πρόταση 2.10 (*Ικανές συνθήκες για την επίλυση του AC-SODP για το σύστημα (2.11)*). *Θεωρούμε το σύστημα (2.11) και ένα σύνολο M (μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^n) έτσι ώστε το (2.11α) να είναι M -δεξιά πλήρες. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το (2.11α) ικανοποιεί την Υπόθεση A3 με το σύνολο M ως ανωτέρω. Τότε το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.11) ως προς το M .*

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $0 \in \text{cl}(M)$ και επομένως $B_R \cap M \neq \emptyset$ για κάθε $R > 0$, το οποίο σύμφωνα με την Υπόθεση A3, σημαίνει ότι ικανοποιούνται οι Ιδιότητες A1 και A2 για κάθε $R = 1, 2, \dots$. Έστω $t_0 \geq 0$ ο αρχικός χρόνος του συστήματος (2.11). Για αυθαίρετο $\tau > 0$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

κατασκευάζουμε μια ακολουθία χρόνων $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ και μια κατάλληλη ακολουθία τ -μη αιτιατών ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$ συναρτήσεων $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του Ορισμού 2.4. Έστω $\tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$ μια έξοδος του (2.11). Επιπλέον, επικαλούμενοι την Υπόθεση A3, θεωρούμε μια σταθερά $L > 1$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι A1 και A2 για κάθε $R > 0$. Η απόδειξη βασίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 1. (Επαγωγική Υπόθεση) Για L, t_0, τ και $y(\cdot)$ ως ανωτέρω και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν:

- θετικές σταθερές ε_m, ξ_m και $t_m := t_{m, t_0, t_{m-1}, \tau, \xi_m, y}$, τέτοιες ώστε κάθε χρόνος $t_m, m \geq 2$ να είναι τ -μη αιτιατός ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$ και η ακολουθία $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$t_{m+1} \geq t_m + 1, m = 1, 2, \dots \quad (2.54\alpha)$$

$$\text{και συνεπώς } \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty \quad (2.54\beta)$$

όπου ο πρώτος όρος t_1 ισούται με το χρόνο εκκίνησης του συστήματος t_0 ;

- μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_m(\cdot) := Q_{m, \xi_m}(\cdot)$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και τέτοια ώστε να ισχύει η (2.15) με $R := m, t_0$ όπως ανωτέρω και $\xi := \xi_m$;
- ένας τ -μη αιτιατός συμμετρικός πίνακας $P_m := P_{m, t_0, t_{m-1}, \tau, \xi_m, y} \in C^1([t_{m-1}, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και τ -μη αιτιατές συναρτήσεις $\bar{d}_m := \bar{d}_{m, t_0, t_{m-1}, \tau, \xi_m, y} \in C^0([t_{m-1}, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_m := \phi_{m, t_0, t_{m-1}, \tau, \xi_m, y} \in C^1([t_{m-1}, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, ούτως ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$P_m(t) \geq I_{n \times n}, \forall t \geq t_{m-1}; |P_m(t_{m-1})| \leq L; \quad (2.55\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t \bar{d}_m(s) ds > -2\varepsilon_m, \forall t \geq \bar{t} \geq t_{m-1}; \int_{t_{m-1}}^{\infty} \bar{d}_m(s) ds = \infty; \quad (2.55\beta)$$

$$e' P_m(t) A(t, q, y(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_m(t) e - \phi_m(t) |H(t) e|^2 \leq -\bar{d}_m(t) e' P_m(t) e, \quad (2.55\gamma)$$

$$\forall t \geq t_{m-1}, e \in \mathbb{R}^n, q \in Q_m(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.17) με } R = m$$

Ειδικότερα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, οι εν λόγω σταθερές ξ_m και t_m ορίζονται αναδρομικά ως

$$\xi_i := \beta(t_{i-1}, i)\sqrt{L} \exp[2\varepsilon_i], i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.56)$$

$$t_i := \min \left\{ t \geq t_{i-1} + 1 : \exp \left[- \int_{t_{i-1}}^t \bar{d}_i(s) ds \right] \leq \frac{1}{i\xi_i} \right\} \quad (2.57)$$

$i = 2, 3, \dots, m$ για $m \geq 2$; $t_1 := t_0$

όπου στις (2.55) και (2.56), ο χρόνος t_{m-1} για $m = 1$, ταυτίζεται με τον αρχικό χρόνο t_0 του συστήματος (2.11).

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για $m := 1$. Από την Υπόθεση A3, γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι A1 και A2 με $R = 1$. Σύμφωνα με τις εν λόγω υποθέσεις, υπάρχει μια σταθερά $\varepsilon_1 > 0$, τέτοια ώστε αν για τον ανωτέρω χρόνο t_0 ορίσουμε $t_1 := t_0$, $\xi_1 := \beta(t_0, 1)\sqrt{L} \exp[2\varepsilon_1]$, τότε υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_1 := Q_{1, \xi_1}$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και εξασφαλίζει την ισχύ της (2.15), ενώ επιπλέον για $\bar{t}_0 := t_1 (= t_0)$, $\tau_0 := \frac{\tau}{2}$ και την ανωτέρω έξοδο $y(\cdot)$, μπορούμε να βρούμε ένα ζεύγος τ_0 -μη αιτιατών απεικονίσεων $d_1 \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $P_1 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (2.16α), (2.16β) για $R = 1$ και περεταίρω να ισχύει η (2.16γ), δεδομένου ότι ικανοποιείται η (2.17) (για $R = 1$). Συνεπώς, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του Πορίσματος 2.8 με $R = 1$, $\bar{\varepsilon}_R = 2\varepsilon_1$ και με $\bar{t}_0, \tau, \tau_0, \xi_1, \varepsilon_1$ και $y(\cdot)$ ως ανωτέρω, προκύπτει ότι υπάρχουν τ -μη αιτιατές απεικονίσεις $\bar{d}_1 \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_1 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ που ικανοποιούν τις (2.55β), (2.55γ) για $m = 1$. (Η επιθυμητή (2.55α) είναι άμεση συνέπεια της ισχύος της (2.16α) για $R = 1$).

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. (Γενικό Επαγωγικό Βήμα) Υποθέτουμε ακολούθως ότι η (2.55) ικανοποιείται για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$, για κάποιον ακέραιο $m \in \mathbb{N}$ και κατάλληλους χρόνους t_i με $t_{i+1} \geq t_i + 1, i = 1, 2, \dots, m - 1$. Για $m := m + 1$ ορίζουμε τις αντίστοιχες σταθερές $\varepsilon_{m+1}, \xi_{m+1}, t_{m+1}$ και απεικονίσεις $Q_{m+1}(\cdot), P_{m+1}(\cdot), \bar{d}_{m+1}(\cdot)$ και $\phi_{m+1}(\cdot)$ ως ακολούθως. Λόγω της Υπόθεσης A3 επικαλούμαστε πάλι τις A1 και A2 με $R := m + 1$. Σύμφωνα με τις εν λόγω υποθέσεις, υπάρχει μια σταθερά $\varepsilon_{m+1} > 0$, τέτοια ώστε αν ορίσουμε $\xi_{m+1} := \beta(t_m, m+1)\sqrt{L} \exp[2\varepsilon_{m+1}]$, τότε υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_{m+1} := Q_{m+1, \xi_{m+1}}$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και εξασφαλίζει την ισχύ της (2.15), ενώ επιπλέον για $\bar{t}_0 := t_m \geq t_0$, $\tau_0 := \frac{\tau}{2}$ και την ανωτέρω έξοδο $y(\cdot)$, μπορούμε να βρούμε ένα ζεύγος τ_0 -μη αιτιατών απεικονίσεων

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$d_{m+1} \in C^0([t_m, \infty); \mathbb{R})$ και $P_{m+1} \in C^1([t_m, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (2.16α), (2.16β) για $R = m + 1$ και περαιτέρω να ισχύει η (2.16γ), δεδομένου ότι ικανοποιείται η (2.17) (για $R = m + 1$). Συνεπώς, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του Πορίσματος 2.8 με $R = m + 1$, $\bar{\varepsilon}_R = 2\varepsilon_{m+1}$ και με $\bar{t}_0, \tau, \tau_0, \xi_{m+1}, \varepsilon_{m+1}$ και $y(\cdot)$ ως ανωτέρω, προκύπτει ότι υπάρχουν τ -μη αιτιατές απεικονίσεις $\bar{d}_{m+1} \in C^0([t_m, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_{m+1} \in C^0([t_m, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ που ικανοποιούν τις (2.55β), (2.55γ) για $m = m + 1$. (Η επιθυμητή (2.55α) είναι άμεση συνέπεια της ισχύος της (2.16α) για $R = m + 1$). Ο χρόνος t_{m+1} ορίζεται όπως στη (2.57) με $i := m + 1$, δηλαδή:

$$t_{m+1} := \min \left\{ t \geq t_m + 1 : \exp \left[- \int_{t_m}^t \bar{d}_{m+1}(s) ds \right] \leq \frac{1}{(m+1)\xi_{m+1}} \right\} \quad (2.58)$$

και σημειώνουμε ότι λόγω της ισότητας στη (2.55β) για $m = m + 1$, είναι καλά ορισμένος. Τέλος, η (2.54α) είναι άμεση συνέπεια της (2.57). Ολοκληρώθηκε επομένως η απόδειξη του Ισχυρισμού 1.

Κατασκευή του Διακοπτόμενου Παρατηρητή. Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.54)-(2.57), προχωράμε στην κατασκευή της διακοπτόμενης ακολουθίας των παρατηρητών που επιτυγχάνουν την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (2.11), σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4. Θεωρούμε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το σύστημα

$$\dot{z}_m = g_m(t, z_m, y(t)), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], \quad (2.59\alpha)$$

$$\text{με αρχική κατάσταση } z_m(t_{m-1}) = 0 \quad (2.59\beta)$$

$$g_m(t, z, y) \begin{cases} := F(t, z, y) + \phi_m(t)P_m^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z) \\ \quad \text{για } |z| \leq \zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], y \in \mathbb{R}^k \\ := (F(t, z, y) + \phi_m(t)P_m^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z)) \frac{2\zeta_m(t) - |z|}{\zeta_m(t)} \\ \quad \text{για } \zeta_m(t) \leq |z| \leq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], y \in \mathbb{R}^k \\ := 0, \quad \text{για } |z| \geq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], y \in \mathbb{R}^k \end{cases} \quad (2.59\gamma)$$

$$\zeta_m(t) := \beta(t, m) + \xi_m, t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \quad (2.59\delta)$$

όπου οι ακολουθίες $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ και $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ έχουν προσδιοριστεί στον προηγούμενο ισχυρισμό. Σημειώνουμε ότι η $g_m(\cdot)$ είναι $C^0([t_{m-1}, t_{m+1}] \times$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n$) καθώς και τοπικά Lipschitz ως προς $(z, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Πράγματι, η $g_m(\cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz ως το γινόμενο των δυο τοπικά Lipschitz συναρτήσεων (βαθμωτής και διανυσματικής)

$$f_1(t, z, y) := F(t, z, y) + \phi_m(t)P_m^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z),$$

$$t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], z \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k$$

και

$$f_2(t, z) := \begin{cases} 1 & \text{για } |z| \leq \zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], \\ \frac{2\zeta_m(t) - |z|}{\zeta_m(t)}, & \text{για } \zeta_m(t) \leq |z| \leq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}], \\ 0, & \text{για } |z| \geq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \end{cases}$$

Πράγματι, ισχύει ο ακόλουθος ισχυρισμός.

Ισχυρισμός 2. Η συνάρτηση $f_2(\cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz.

Για να αποδείξουμε τον Ισχυρισμό 2, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $|z_1|, |z_2| \leq \zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \Rightarrow$ το ζητούμενο είναι προφανές.
- $|z_1|, |z_2| \geq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \Rightarrow$ το ζητούμενο είναι πάλι προφανές.
- $|z_1| \leq \zeta_m(t), \zeta_m(t) \leq |z_2| \leq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \Rightarrow$

$$|f_2(t, z_1) - f_2(t, z_2)| = \left| 1 - \frac{2\zeta_m(t) - |z_2|}{\zeta_m(t)} \right| = \left| \frac{\zeta_m(t) - |z_2|}{\zeta_m(t)} \right|$$

$$\leq \left| \frac{|z_1| - |z_2|}{\zeta_m(t)} \right| \leq \frac{1}{\zeta_m(t)} |z_1 - z_2|$$

- $\zeta_m(t) \leq |z_1|, |z_2| \leq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \Rightarrow$

$$|f_2(t, z_1) - f_2(t, z_2)| = \left| \frac{2\zeta_m(t) - |z_1|}{\zeta_m(t)} - \frac{2\zeta_m(t) - |z_2|}{\zeta_m(t)} \right| = \left| \frac{|z_1| - |z_2|}{\zeta_m(t)} \right| \leq \frac{1}{\zeta_m(t)} |z_1 - z_2|$$

- $\zeta_m(t) \leq |z_1| \leq 2\zeta_m(t), |z_2| \geq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \Rightarrow$

$$|f_2(t, z_1) - f_2(t, z_2)| = \left| \frac{2\zeta_m(t) - |z_1|}{\zeta_m(t)} \right| \leq \left| \frac{|z_1| - |z_2|}{\zeta_m(t)} \right| \leq \frac{1}{\zeta_m(t)} |z_1 - z_2|$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$\bullet |z_1| \leq \zeta_m(t), |z_2| \geq 2\zeta_m(t), t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \Rightarrow$$

$$|f_2(t, z_1) - f_2(t, z_2)| = 1 \leq \left| \frac{|z_1| - |z_2|}{\zeta_m(t)} \right| \leq \frac{1}{\zeta_m(t)} |z_1 - z_2|$$

Από τις ανωτέρω προκύπτει ότι η $f_2(\cdot)$ είναι ολικά Lipschitz με σταθερά $\max\{1/\zeta_m(t) : t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]\}$ και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη του Ισχυρισμού 2.

Επιπλέον, η απεικόνιση $[t_{m-1}, t_{m+1}] \times \mathbb{R}^n \ni (t, z) \rightarrow g_m(t, z, y(t)) \in \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη, επομένως για κάθε αρχική συνθήκη $z_m(t_0) \in \mathbb{R}^n, t_0 \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$ η αντίστοιχη λύση του (2.59α) ορίζεται για κάθε $t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$. Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε την επιθυμητή (2.6). Έστω $Z : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ όπως δίνεται από τη (2.10), δηλαδή $Z(t) := z_m(t), t \in [t_m, t_{m+1}), m \in \mathbb{N}$ όπου για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η απεικόνιση $z_m(\cdot)$ είναι η λύση του (2.59). Σημειώνουμε ότι για κάθε αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n \cap M$ του (2.11α), υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ με $m_0 \geq 2$, ούτως ώστε να ισχύει:

$$m_0 \geq |x_0| \quad (2.60)$$

Έστω $m \geq m_0$. Λόγω της (2.59β), θα υπάρχει χρόνος $\bar{t} \in (t_{m-1}, t_{m+1}]$ με $|z_m(t)| < \zeta_m(t)$ για κάθε $t \in [t_{m-1}, \bar{t})$.

Ισχυρισμός 3. Ισχυριζόμαστε ότι $\bar{t} = t_{m+1}$, δηλαδή:

$$|z_m(t)| < \zeta_m(t), \forall t \in [t_{m-1}, t_{m+1}) \quad (2.61)$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 3. Στην αντίθετη περίπτωση, θα υπάρχει $\bar{t} \in (t_{m-1}, t_{m+1})$ με

$$|z_m(\bar{t})| = \zeta_m(\bar{t}) \text{ και } |z_m(t)| < \zeta_m(t), \forall t \in [t_{m-1}, \bar{t}) \quad (2.62)$$

οπότε λαμβάνοντας υπόψη τις (2.59α), (2.59γ) και (2.62), η $z_m(\cdot)$ θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{z}_m = F(t, z_m, y(t)) + \phi_m(t) P_m^{-1}(t) H'(t)(y(t) - H(t)z_m), \forall t \in [t_{m-1}, \bar{t}] \quad (2.63)$$

Ορίζουμε

$$e_m(t) := x(t) - z_m(t), \forall t \in [t_{m-1}, t_{m+1}] \quad (2.64)$$

Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 1, η απεικόνιση $Q_m(\cdot) := Q_{m, \xi_m}(\cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και τη (2.15) με $R := m, t_0$ ως ανωτέρω και $\xi := \xi_m$. Επίσης, λόγω των (2.55α), (2.55β) και (2.55γ), πληρούνται οι σχέσεις (2.16α), (2.40β) και (2.40γ), αντίστοιχα, με $\bar{t}_0 := t_{m-1}$, $\bar{\varepsilon}_R := 2\varepsilon_m$ και με $R = m, t_0, \tau, \xi$ ως ανωτέρω. Επιπλέον, λόγω του Ορισμού (2.56), η σταθερά $\xi (= \xi_m)$ ικανοποιεί τη (2.42) με $R = m$ και $\bar{t}_0 = t_{m-1}$. Τέλος, σημειώνουμε ότι, αφού $|x_0| \leq m = R$, έχουμε ότι $y \in O(t_0, B_R \cap M)$. Οι προηγούμενες ιδιότητες σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.9(i), συνεπάγονται ότι ισχύει η εκτίμηση (2.44α) στο διάστημα $[t_{m-1}, \bar{t}]$, δηλαδή:

$$|e_m(t)| < \beta(t_{m-1}, m)\sqrt{L} \exp \left[- \int_{t_{m-1}}^t \bar{d}_m(s) ds \right], \forall t \in [t_{m-1}, \bar{t}] \quad (2.65)$$

Από τις (2.55β), (2.56) και (2.65) εξάγουμε:

$$|e_m(t)| < \xi_m, \forall t \in [t_{m-1}, \bar{t}] \quad (2.66)$$

Επομένως, από τις (1.104), (2.59δ), (2.60), (2.64), (2.66) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $m \geq m_0$ και $\bar{t} \leq t_{m+1}$ προκύπτει ότι

$$|z_m(\bar{t})| \leq |x(\bar{t})| + |e_m(\bar{t})| < \beta(\bar{t}, m) + \xi_m = \zeta_m(\bar{t}) \quad (2.67)$$

που έρχεται σε αντίθεση με τη (2.62). Συμπεραίνουμε ότι για το ανωτέρω m , $\bar{t} = t_{m+1}$ και άρα ισχύει η (2.61). Ολοκληρώθηκε επομένως η απόδειξη του Ισχυρισμού 3.

Με τα παραπάνω επιχειρήματα, αποδεικνύεται ότι και η (2.65) ισχύει για κάθε $t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$. Στη συνέχεια, σημειώνουμε ότι από την ανισότητα στη (2.55β) μαζί με τους ορισμούς (2.56), (2.57) και το γεγονός ότι $\bar{\varepsilon}_m = 2\varepsilon_m$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \exp \left[- \int_{t_{m-1}}^t \bar{d}_m(s) ds \right] &\leq \exp \left[- \int_{t_{m-1}}^{t_m} \bar{d}_m(s) ds \right] \exp \left[- \int_{t_m}^t \bar{d}_m(s) ds \right] \leq \\ &\frac{1}{m\xi_m} \exp [2\varepsilon_m] \leq \frac{1}{m\sqrt{L}\beta(t_{m-1}, m)}, \forall t \in [t_m, t_{m+1}] \end{aligned} \quad (2.68)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τη (2.68) και το γεγονός ότι η ανισότητα στη (2.65) ισχύει για κάθε $t \in [t_{m-1}, t_{m+1}]$, προκύπτει ότι:

$$|e_m(t)| < \beta(t_{m-1}, m)\sqrt{L} \exp \left[- \int_{t_{m-1}}^t \bar{d}_m(s) ds \right] \leq \frac{1}{m}, \forall t \in [t_m, t_{m+1}] \quad (2.69)$$

Τέλος, δείχνουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - Z(t)| = 0$. Ισοδύναμα:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T > 0 : |x(t) - Z(t)| < \varepsilon, \forall t > T \quad (2.70)$$

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και $\bar{m} = \bar{m}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με $\bar{m} \geq 0$, έτσι ώστε $\frac{1}{\bar{m}} < \varepsilon$ και $T = T(\varepsilon) := t_{\bar{m}}$. Τότε, έπεται από την (2.54) ότι για κάθε $t > T$ υπάρχει $m \geq \bar{m}$ με $t_m \leq t < t_{m+1}$, επομένως αφού $m \geq m_0$ και τις (2.10) και (2.69), εξάγουμε ότι

$$|x(t) - Z(t)| = |x(t) - z_m(t)| = |e_m(t)| \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{\bar{m}} < \varepsilon, \forall t > T = T(\varepsilon)$$

Η τελευταία συνεπάγεται τη (2.70) και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη της Πρότασης 2.10. \square

Τονίζεται ότι τα αποτελέσματα της παρούσας ενότητας εξακολουθούν να ισχύουν και με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η (2.16γ) ισχύει για “*σχεδόν κάθε* $t \geq t_0$ ”. Ο λόγος είναι ότι αν η ανισότητα στη (2.16γ) ισχύει για σχεδόν κάθε $t \geq t_0$, τότε για κάθε $\bar{\varepsilon}_R > \varepsilon_R$ και $\tau > \tau_0$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη $d_R(\cdot)$ από μια άλλη τ -μη αιτιατή συνάρτηση $\bar{d}_R(\cdot)$ που ικανοποιεί τη (2.16β) με τη σταθερά $\bar{\varepsilon}_R$ στη θέση της ε_R και έτσι ώστε να ισχύει πάλι η (2.16γ) “για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ ”. Αυτό είναι συνέπεια του ακόλουθου λήμματος, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Λήμμα 2.11 Θεωρούμε το ζεύγος (H, A) των συνεχών απεικονίσεων που ορίστηκαν στη (2.19) και έστω U, W μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R}^n με $U \cap W \neq \emptyset$ και για κάθε $t_0 \geq 0$, έστω $\Omega(t_0, U)$ ένα μη κενό σύνολο συνεχών συναρτήσεων $y := y_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ παραμετροποιημένων ως προς $x_0 \in U$. Υποθέτουμε επίσης, ότι υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση $[0, \infty) \ni t \rightarrow Q(t) \subset \mathbb{R}^\ell$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, έτσι ώστε για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0$, $\tau_0 > 0$ και $y \in$

$\Omega(t_0, U)$ να υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος θετικά ορισμένος πίνακας $P \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, και οι δυο απεικονίσεις τ_0 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$\int_{\bar{t}}^t d(s)ds > -\varepsilon, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d(s)ds = \infty \quad (2.71\alpha)$$

$$e'P(t)A(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e \leq -d(t)e'P(t)e, \quad (2.71\beta)$$

για σχεδόν κάθε $t \geq \bar{t}_0, \forall e \in \ker H(t, y(t)), q \in Q(t)$,

δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Για κάθε $\hat{\varepsilon} > \varepsilon, \tau > \tau_0$ και $y(\cdot)$ ως ανωτέρω, υπάρχει μια συνάρτηση $\hat{d} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, με

$$\hat{d}(t) < d(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.72)$$

και ούτως ώστε να ικανοποιείται πάλι η (2.71β) για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ με $\hat{d}(\cdot)$ στη θέση της $d(\cdot)$, ενώ ταυτόχρονα να ισχύει η (2.71α) με $\hat{d}(\cdot)$ και $\hat{\varepsilon}$, στη θέση των $d(\cdot)$ και ε , αντίστοιχα.

(ii) Για κάθε $\bar{\varepsilon} > \hat{\varepsilon}, \bar{\tau} > \tau$ (με $\hat{\varepsilon}, \tau$ και $y(\cdot)$ ως ανωτέρω), υπάρχουν μια τ -μη αιτιατή απεικόνιση $\bar{d} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και μια $\bar{\tau}$ -μη αιτιατή (ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$) συνάρτηση $\phi \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, με

$$\bar{d}(t) < \hat{d}(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.73)$$

και έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.71α) με $\bar{d}(\cdot)$ και $\bar{\varepsilon}$, στη θέση των $d(\cdot)$ και ε , αντίστοιχα, ενώ επιπλέον να ισχύει:

$$e'P(t)A(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e - \phi(t)|H(t, y(t))e|^2 \leq -\bar{d}(t)e'P(t)e, \quad (2.74)$$

$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^n, q \in Q(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)

Απόδειξη

Η απόδειξη του πρώτου σκέλους βασίζεται στην παρατήρηση ότι η (2.71β) γράφεται ισοδύναμα:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$e'P(t)A(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e \leq -d(t)e'P(t)e, \quad (2.75)$$

για σχεδόν κάθε $t \geq \bar{t}_0, \forall e \in \ker H(t, y(t)) : |e| = 1, q \in Q(t)$,
 δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)

Επικαλούμενοι τη (2.75), χρησιμοποιούμε παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Fact II [71, σελίδα 1046] προκειμένου να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας. Για λόγους πληρότητας, η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα του παρόντος κεφαλαίου. Τέλος, το σκέλος (ii) είναι άμεση συνέπεια του σκέλους (i) και του Λήμματος 2.7. \square

2.3 Σύνθετα Συστήματα

Σε αυτή την ενότητα εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της Ενότητας 2.2, προκειμένου να εξάγουμε ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του AC-ODP για μια κλάση σύνθετων συστημάτων. Χρειαζόμαστε όμως πρώτα ένα τεχνικό προκαταρκτικό λήμμα. Έστω $k, \ell, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη χρονικώς μεταβαλλόμενη απεικόνιση:

$$J : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}; \quad (2.76\alpha)$$

$$J(t, q, y) := \begin{pmatrix} \mathbf{A}(q) & \mathbf{B}(t, y) \\ \mathbf{C}(q) & \mathbf{D}(t, q, y) \end{pmatrix} \quad (2.76\beta)$$

όπου $\mathbf{A} \in C^0(\mathbb{R}^\ell; \mathbb{R}^{n_1 \times n_1})$, $\mathbf{C} \in C^0(\mathbb{R}^\ell; \mathbb{R}^{n_2 \times n_1})$, $\mathbf{B} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^{n_1 \times n_2})$ και $\mathbf{D} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^{n_2 \times n_2})$. Έστω U, W μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R}^n με $U \cap W \neq \emptyset$ και για κάθε $t_0 \geq 0$, έστω $\Omega(t_0, U)$ ένα μη κενό σύνολο συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων $y := y_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ παραμετροποιημένων ως προς $x_0 \in U$. Για το ζεύγος (\mathbf{B}, \mathbf{D}) στη (2.76) κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

H2. Υπάρχουν σταθερές $L > 1, E > 0$ και μια πλειονότιμη απεικόνιση $[0, \infty) \ni t \rightarrow Q(t) \subset \mathbb{R}^\ell$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, ούτως ώστε για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0, \tau_0 > 0$ και $y \in \Omega(t_0, U)$, να υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_2 \times n_2})$ και μια συνάρτηση $d \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$,

και οι δυο απεικονίσεις τ_0 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

$$P(t) > I_{n_2 \times n_2}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.77\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t d(s)ds > -E, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d(s)ds = \infty \quad (2.77\beta)$$

$$e'P(t)\mathbf{D}(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e \leq -d(t)e'P(t)e, \quad (2.77\gamma)$$

για σχεδόν κάθε $t \geq \bar{t}_0$; $\forall e \in \ker \mathbf{B}(t, y(t))$, $q \in Q(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)

Λήμμα 2.12 Θεωρούμε τη χρονικώς μεταβαλλόμενη απεικόνιση $J(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.76) και υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η Υπόθεση H2. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > 0$ και $y \in \Omega(t_0, U)$, υπάρχουν απεικονίσεις

$$S \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}), T \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}) \text{ και } \bar{d} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$$

όλες τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και τέτοιες ώστε αν ορίσουμε

$$\bar{P} := \begin{pmatrix} T & S \\ S' & P \end{pmatrix} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}) \quad (2.78)$$

με την $P(\cdot)$ όπως δίνεται στην H2, να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\bar{P}(t) > I_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}, \forall t \geq \bar{t}_0; |\bar{P}(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.79\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t \bar{d}(s)ds > -(E + \varepsilon), \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} \bar{d}(s)ds = \infty \quad (2.79\beta)$$

$$(0, e')\bar{P}(t)J(t, q, y(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(0, e')\dot{\bar{P}}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} \leq -\bar{d}(t)(0, e')P(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix},$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^{n_2}, q \in Q(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)} \quad (2.79\gamma)$$

Απόδειξη

Τονίζουμε αρχικά, ότι σύμφωνα με την Υπόθεση H2, η (2.77γ) ισχύει για “*σχεδόν κάθε*” και όχι για “*κάθε*” t . Για κάθε $\tau_1 \in (\tau_0, \tau)$ και $\varepsilon > 0$ προκύπτει, λαμβάνοντας υπόψη τις (2.77β), (2.77γ) και επικαλούμενοι το Λήμμα 2.11 με $\bar{\tau} := \tau_1$,

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$\varepsilon := E$, $\bar{\varepsilon} := E + \frac{\varepsilon}{2}$, $A(t, q, y) := \mathbf{D}(t, q, y)$, $H(t, y) := \mathbf{B}(t, y)$ και $U, W, \Omega(t_0, U)$, $t_0 \geq 0$, $P(\cdot)$ και $d(\cdot)$ ως ανωτέρω, ότι υπάρχει ένα ζεύγος τ_1 -μη αιτιατών συναρτήσεων $d_1 \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ με:

$$d_1(t) < d(t), \forall t \geq \bar{t}_0; \quad (2.80\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t d_1(s)ds > -(E + \frac{\varepsilon}{2}), \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_1(s)ds = \infty \quad (2.80\beta)$$

$$e'P(t)\mathbf{D}(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e \leq \phi(t)|\mathbf{B}(t, y(t))e|^2 - d_1(t)e'P(t)e, \quad (2.80\gamma)$$

$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^{n_2}, q \in Q(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)

Σημειώνουμε ότι λόγω των ορισμών (2.76) και (2.78), η επιθυμητή (2.79γ) ισοδυναμεί με την:

$$e'S'(t)\mathbf{B}(t, y(t))e + e'P(t)\mathbf{D}(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e \leq -\bar{d}(t)e'P(t)e, \quad (2.81)$$

$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^{n_2}, q \in Q(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)

Λαμβάνοντας υπόψη τη (2.80γ) και το γεγονός ότι οι (2.79γ) και (2.81) είναι ισοδύναμες, συμπεραίνουμε, ότι για να δείξουμε τη (2.79), αρκεί να βρούμε απεικονίσεις $T(\cdot)$, $S(\cdot)$ και $\bar{d}(\cdot)$ που ικανοποιούν τις (2.79α), (2.79β), όλες τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$e'S'(t)\mathbf{B}(t, y(t))e + \phi(t)|\mathbf{B}(t, y(t))e|^2 - d_1(t)e'P(t)e \leq -\bar{d}(t)e'P(t)e, \quad (2.82)$$

$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^{n_2}$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)

Έστω

$$S(t) := -l(t)\mathbf{B}(t, y(t)), t \geq \bar{t}_0 \quad (2.83)$$

για κάποια $l \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$l(\bar{t}_0) = 0 \quad (2.84\alpha)$$

$$l(t) \leq \phi(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.84\beta)$$

και πρόκειται να προσδιοριστεί. Επιπλέον, θέτουμε τον ακόλουθο περιορισμό για την επιθυμητή $\bar{d}(\cdot)$:

$$d_1(t) \geq \bar{d}(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.85)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη (2.83), η (2.82) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} -l(t)|\mathbf{B}(t, y(t))e|^2 + \phi(t)|\mathbf{B}(t, y(t))e|^2 &\leq (d_1(t) - \bar{d}(t))e'P(t)e, \\ \forall t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^{n_2}, \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)} \end{aligned}$$

Από την πρώτη ανισότητα της (2.77α) και τη (2.85), εξάγουμε ότι για να δείξουμε την ανωτέρω, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} (\phi(t) - l(t))|\mathbf{B}(t, y(t))w|^2 &\leq d_1(t) - \bar{d}(t), \\ \forall t \geq \bar{t}_0, w \in \mathbb{R}^{n_2} : |w| = 1, \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Από τη (2.86) συμπεραίνουμε ότι αρκεί να βρούμε τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ απεικονίσεις $l(\cdot)$, $\bar{d}(\cdot)$ και $T(\cdot)$, έτσι ώστε να ισχύουν οι (2.79α), (2.79β), (2.84) και (2.85) και επιπλέον:

$$(\phi(t) - l(t))m(t) \leq d_1(t) - \bar{d}(t), \forall t \geq \bar{t}_0; \quad (2.87\alpha)$$

$$m(t) := 1 + \max\{|\mathbf{B}(t, y(t))w|^2 : w \in \mathbb{R}^{n_2}, |w| = 1\}, t \geq \bar{t}_0 \quad (2.87\beta)$$

(Σημειώνεται ότι επιθυμούμε να ισχύει η (2.87) ανεξαρτήτως πλέον της ισχύος της (2.21), ενώ στην αντίστοιχη ανάλυση για την επιλυσιμότητα του S-ODP/S-SODP δε θα μπορούμε να έχουμε την άρση αυτού του περιορισμού.) Λαμβάνοντας υπόψη τη (2.80β) και το γεγονός ότι οι $d_1(\cdot)$ και $\phi(\cdot)$ είναι τ_1 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ένα ζεύγος τ -μη αιτιατών συναρτήσεων $l(\cdot)$ και $\bar{d}(\cdot)$, ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι (2.79β), (2.84), (2.85) και (2.87). Πράγματι, παρατηρούμε αρχικά ότι λόγω της συνέχειας της απεικόνισης $B(\cdot, y(\cdot))$ η $m(\cdot)$ όπως ορίζεται από τη (2.87β) είναι συνεχής, ενώ επιπλέον είναι αυστηρά θετική (ειδικότερα, ισχύει $m(t) \geq 1$, $\forall t \geq \bar{t}_0$). Επομένως, με τις σταθερές $\varepsilon, \tau, \tau_1$ ως ανωτέρω, μπορούμε να ορίσουμε

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$M := \max\{m(t)\phi(t) : t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_0 + \tau - \tau_1]\} > 0 \quad (2.88\alpha)$$

$$\delta\tau := \min\left\{\frac{\varepsilon}{4M}, \tau - \tau_1\right\} \quad (2.88\beta)$$

$$l(t) \begin{cases} := 0, & t = \bar{t}_0 \\ \in [0, \phi(t)], & t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_0 + \delta\tau] \\ := \phi(t), & t \in [\bar{t}_0 + \delta\tau, \infty) \end{cases} \quad (2.88\gamma)$$

$$h(t) \begin{cases} := -M, & t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_0 + \delta\tau] \\ \in [-M, 0], & t \in [\bar{t}_0 + \delta\tau, \bar{t}_0 + 2\delta\tau] \\ := 0, & t \in [\bar{t}_0 + 2\delta\tau, \infty) \end{cases} \quad (2.88\delta)$$

$$\bar{d}(t) := d_1(t) + h(t), t \geq \bar{t}_0 \quad (2.88\epsilon)$$

και έτσι ώστε να ισχύει $l \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $h, \bar{d} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$. Από τις (2.88γ) και (2.88δ), (2.88ε), προκύπτει ότι οι $l(\cdot)$ και $\bar{d}(\cdot)$ ικανοποιούν τις (2.84) και (2.85). Επιπλέον, από τις (2.88α)-(2.88ε), και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι $d_1(\cdot)$ και $\phi(\cdot)$ είναι τ_1 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, συμπεραίνουμε ότι οι $l(\cdot)$ και $d(\cdot)$ είναι τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$. Εν συνεχεία, δείχνουμε ότι ικανοποιείται η (2.87α) για κάθε $t \geq \bar{t}_0$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(α) $t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_0 + \delta\tau]$.

Τότε προκύπτει από τις (2.88α)-(2.88ε) ότι:

$$(\phi(t) - l(t))m(t) \leq \phi(t)m(t) \leq M = -h(t) = d_1(t) - \bar{d}(t)$$

(β) $t \in [\bar{t}_0 + \delta\tau, \infty)$.

Τότε από τις (2.88γ)-(2.88ε) έχουμε:

$$(\phi(t) - l(t))m(t) = 0 \leq -h(t) = d_1(t) - \bar{d}(t)$$

Τέλος από τις (2.80β), (2.88β), (2.88δ) και (2.88ε) προκύπτει ότι η $d(\cdot)$ ικανοποιεί τη (2.79β), αφού για κάθε $t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
 \int_{\bar{t}}^t \bar{d}(s)ds &= \int_{\bar{t}}^t d_1(s)ds + \int_{\bar{t}}^t h(s)ds \geq \int_{\bar{t}}^t d_1(s)ds + \int_{\bar{t}_0}^{\infty} h(s)ds \\
 &> -\left(E + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \int_{\bar{t}_0}^{\infty} h(s)ds = -\left(E + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0+2\delta\tau} h(s)ds \\
 &\geq -\left(E + \frac{\varepsilon}{2}\right) - M2\delta\tau \geq -\left(E + \frac{\varepsilon}{2}\right) - M2\frac{\varepsilon}{4M} = -(E + \varepsilon)
 \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα η (2.87) συνεπάγεται τη (2.79γ). Τέλος η απόδειξη της επιθυμητής (2.79α) είναι απόρροια του ακόλουθου ισχυρισμού.

Ισχυρισμός. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα χρονικώς μεταβαλλόμενο πίνακα $T \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_1 \times n_1})$, τ -μη αιτιατό ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, έτσι ώστε και οι δυο ανισότητες της (2.79α) να ικανοποιούνται με την απεικόνιση $\bar{P}(\cdot)$ όπως δίνεται από τις (2.78), (2.83) και (2.88γ).

Η απόδειξη του ανωτέρω ισχυρισμού δίνεται στο Παράρτημα. \square

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του AC-SODP για συστήματα της μορφής (2.2), όπου οι $f_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ και $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ είναι C^0 και τοπικά Lipschitz ως προς $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ και $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, αντίστοιχα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$G(t, x_1, x_2) := \mathbf{B}(t, x_1)x_2, t \geq 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \quad (2.89)$$

για μια απεικόνιση $\mathbf{B} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_1}; \mathbb{R}^{n_1 \times n_2})$, τοπικά Lipschitz ως προς $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ και ότι υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο M του $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ έτσι ώστε το (2.2α) να είναι M -δεξιά πλήρες, δηλαδή η λύση $x(\cdot) := (x_1(\cdot), x_2(\cdot))$ του (2.2α) να ικανοποιεί την εκτίμηση (1.104) για κάποια $\beta \in \mathcal{NN}$. Τέλος, ορίζουμε:

$$\Delta f_2(t, x_2, z_2; y) := f_2(t, y, x_2) - f_2(t, y, z_2); \quad (2.90)$$

$$H := \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n_1}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n_2} \quad (2.91)$$

και υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$ και μια απεικόνιση $\mathbf{D} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\ell} \times \mathbb{R}^{n_1}; \mathbb{R}^{n_2 \times n_2})$, έτσι ώστε για κάθε $R > 0$ και $\xi > 0$ να υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow Q_R(t) := Q_{R,\xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell \quad (2.92)$$

που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, ούτως ώστε για κάθε $t \geq 0$ να ισχύει:

$$\exists q \in Q_R(t) : \Delta f_2(t, x_2, z_2; y) = \mathbf{D}(t, q, y)(x_2 - z_2), \quad (2.93)$$

δεδομένου ότι $y \in Y_R(t), x_2, z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, |x_2| \leq \beta(t, R)$ και $|x_2 - z_2| \leq \xi$

όπου το σύνολο $Y_R(t)$ δίνεται από τη (2.14) με την H όπως ορίζεται στη (2.91).

Πόρισμα 2.13 (*Ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του AC-SODP για σύνθετα συστήματα της μορφής (2.2)*). Έστω M ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Υποθέτουμε ότι το (2.2α) είναι M -δεξιά πλήρες και ότι το δεξί του μέλος ικανοποιεί τη (2.93). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $L > 1$ έτσι ώστε για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$, να υπάρχει μια σταθερά $\varepsilon_R > 0$ ώστε για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > 0$, $\xi > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, να μπορούμε να βρούμε ένα χρονικώς μεταβαλλόμενο συμμετρικό πίνακα $P_R = P_{R,t_0,\bar{t}_0,\tau,\xi,y} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_2 \times n_2})$ και μια συνάρτηση $d_R := d_{R,t_0,\bar{t}_0,\tau,\xi,y} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ (και οι δυο απεικονίσεις τ_0 -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$), που να ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$P_R(t) > I_{n_2 \times n_2}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P_R(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.94\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t d_R(s) ds > -\varepsilon_R, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_R(s) ds = \infty \quad (2.94\beta)$$

και επιπλέον

$$e' P_R(t) \mathbf{D}(t, q, y(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e \leq -d_R(t) e' P_R(t) e, \quad (2.94\gamma)$$

για σχεδόν κάθε $t \geq \bar{t}_0$, $\forall e \in \ker \mathbf{B}(t, y(t)), q \in Q_R(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)

όπου οι $Q_R(\cdot)$ και $\mathbf{D}(\cdot, \cdot, \cdot)$ δίνονται στις (2.92) και (2.93), αντίστοιχα. Τότε το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.2) ως προς το M .

Απόδειξη

Προκειμένου να αποδείξουμε την πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα (2.2) ικανοποιεί την A3, αφού σύμφωνα με την Πρόταση 2.10, η ισχύς της A3

συνεπάγεται την επιλυσιμότητα του AC-SODP. Ορίζουμε για κάθε $t \geq 0$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ και $q \in \mathbb{R}^\ell$:

$$F(t, x, y) := \begin{pmatrix} f_1(t, y) + \mathbf{B}(t, y)x_2 \\ f_2(t, y, x_2) \end{pmatrix}; \quad (2.95\alpha)$$

$$A(t, q, y) := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}(t, y) \\ 0 & \mathbf{D}(t, q, y) \end{pmatrix} \quad (2.95\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.90), (2.93) και (2.95) προκύπτει ότι για κάθε $t \geq 0$, $y \in Y_R(t)$ και $x, z \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ με $|x| \leq \beta(t, R)$ και $|x - z| \leq \xi$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F(t, x, y) - F(t, z, y) &= \begin{pmatrix} f_1(t, y) + \mathbf{B}(t, y)x_2 \\ f_2(t, y, x_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(t, y) + \mathbf{B}(t, y)z_2 \\ f_2(t, y, z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}(t, y) \\ 0 & \mathbf{D}(t, q, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \end{pmatrix} = A(t, q, y)(x - z), \text{ για κάποιο } q \in Q_R(t) \end{aligned} \quad (2.96)$$

συνεπώς για κάθε $R > 0$ το σύστημα (2.2) ικανοποιεί την A1. Ακολούθως, δείχνουμε ότι για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$ ικανοποιείται και η Συνθήκη A2. Ειδικότερα, δείχνουμε ότι για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > 0$, $\xi > 0$ και $y \in O(t_0, M)$ υπάρχουν τ -μη αιτιατές (ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$) απεικονίσεις $\bar{P}_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)})$ και $\bar{d}_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ ούτως ώστε να ισχύουν οι (2.16α), (2.16β) και επιπλέον να ικανοποιείται η (2.16γ) δεδομένης της (2.17), με τη σταθερά L και τις απεικονίσεις $A(\cdot, \cdot, \cdot)$, $Q_R := Q_{R, \xi}$ όπως ακριβώς δίνονται στις (2.94α), (2.95β) και (2.92), αντίστοιχα και με τη σταθερά $\varepsilon_R := 2\varepsilon_R$, όπως η τελευταία δίνεται στη (2.94β). Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.12. Σημειώνουμε ότι η $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.95β), συμπίπτει με την απεικόνιση $J(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.76) με $\mathbf{A}(q) := 0$, $\mathbf{C}(q) := 0$ και με τις $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$ και $\mathbf{D}(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως ορίζονται στις (2.89) και (2.93), αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με τις υποθέσεις της (2.94), ικανοποιείται η συνθήκη (2.77) της H2, με $Q := Q_R (= Q_{R, \xi})$, $U := M$, $W := B_R$, $\Omega(t_0, U) := O(t_0, M)$, $\forall t_0 \geq 0$, $E := \varepsilon_R$, $P := P_R$, $d := d_R$ και με L και $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ ως ανωτέρω. Συμπεραίνουμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος 2.12, επομένως αν επιλέξουμε $\varepsilon := \varepsilon_R$, τότε για κάθε

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$ υπάρχουν τ -μη αιτιατές χρονικώς μεταβαλλόμενες απεικονίσεις $S_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_1 \times n_2})$, $T_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_1 \times n_1})$ και $\bar{d}_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, τέτοιες ώστε αν ορίσουμε

$$\bar{P}_R := \begin{pmatrix} T_R & S_R \\ S'_R & P_R \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\bar{P}_R(t) > I_{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}, \forall t \geq \bar{t}_0; |\bar{P}_R(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.98\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t \bar{d}_R(s) ds > -(E + \varepsilon) = -2\varepsilon_R, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} \bar{d}_R(s) ds = \infty; \quad (2.98\beta)$$

$$(0, e'_2) \bar{P}_R(t) A(t, q, y(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (0, e'_2) \dot{P}_R(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} \leq -\bar{d}_R(t) (0, e'_2) \bar{P}_R(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad (2.98\gamma)$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, e_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, q \in Q_R(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη (2.91) και θέτοντας $e := (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, η (2.98γ) γράφεται:

$$e' \bar{P}_R(t) A(t, q, y(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e \leq -\bar{d}_R(t) e' \bar{P}_R(t) e, \quad (2.99)$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker H, q \in Q_R(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)}$$

Από τις (2.98α), (2.98β) και (2.99) προκύπτει ότι για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$, ισχύει και η Συνθήκη A2. Επομένως, το σύστημα (2.2) ικανοποιεί την A3, συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 2.10, το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το (2.2) ως προς το M . \square

Το ακόλουθο αποτέλεσμα προκύπτει από το Πόρισμα 2.13 και παρέχει ικανές συνθήκες για την την επιλυσιμότητα του AC-SODP για μια κατηγορία αυτόνομων σύνθετων συστημάτων της μορφής (2.2).

Πόρισμα 2.14 *Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + B(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1) + D(x_1)x_2\end{aligned}\quad (2.100\alpha)$$

$$y = x_1 \quad (2.100\beta)$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$

όπου οι $f_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, $f_2 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$, $B : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $D : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ είναι τοπικά Lipschitz και υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένα μη κενό σύνολο $M \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ και μια συνάρτηση $\beta \in \mathcal{N}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$|x_1(t, x_0)| \leq \beta(|x_0|), \forall t \geq 0, x_0 \in M \quad (2.101)$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, μια φραγμένη οικογένεια πινάκων $\{P_R \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, R > 0\}$, έτσι ώστε να ισχύει $P_R > I_{n_2 \times n_2}$ για κάθε $R > 0$ και μια οικογένεια θετικών σταθερών $\{c_R, R > 0\}$, ούτως ώστε να ικανοποιείται μια από τις ακόλουθες ιδιότητες.

P1. Το \bar{M} είναι μη κενό και ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

$$x_0 \in M \Rightarrow x_1(t, x_0) \notin \bar{M}, \text{ για σχεδόν κάθε } t \geq 0 \quad (2.102\alpha)$$

$$e \in \ker B(x_1) \Rightarrow e' P_R D(x_1) e \leq -c_R e' P_R e, \quad (2.102\beta)$$

$$\forall |x_1| \leq R, x_1 \notin \bar{M}, R > 0$$

P2. Η συνεπαγωγή στη (2.102β) ισχύει για κάθε $R > 0$ και $|x_1| \leq R$.

Τότε, ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Πορίσματος 2.13 και επομένως το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το (2.100) ως προς το M .

Απόδειξη

Προφανώς, το σύστημα (2.100) έχει τη μορφή (2.2) με τη $G(\cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.89) με $\mathbf{B} := B$ και η (2.93) ικανοποιείται με την απεικόνιση $\mathbf{D} := D$. Επιπλέον, από τη (2.101) προκύπτει ότι το (2.100α) είναι M -δεξιά πλήρες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $x_0 \in M$ το μέγιστο από δεξιά διάστημα ύπαρξης λύσης του (2.100α) είναι το $[0, T_{\max})$, όπου $T_{\max} < \infty$. Τότε θα ισχύει

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x(t)| = \overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |(x_1(t), x_2(t))| = \infty \quad (2.103)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

όπου $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot)) := (x_1(\cdot, x_0), x_2(\cdot, x_0)) = x(\cdot, x_0)$ η λύση του (2.100α) με αρχική κατάσταση $x_0 \in M$. Από τη (2.101) θα ισχύει

$$|x_1(t)| \leq \beta(|x_0|), \forall t \in [0, T_{\max}) \quad (2.104)$$

και συνεπώς

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x_1(t)| < \infty \quad (2.105)$$

Επιπλέον, από τη (2.100α) προκύπτει ότι

$$|x_2(t)| \leq |x_2(0)| + \int_0^t |f_2(x_1(s))| ds + \int_0^t |D(x_1(s))||x_2(s)| ds$$

επομένως από το Λήμμα Gronwall εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned} |x_2(t)| &\leq |x_2(0)| + \int_0^t |f_2(x_1(s))| ds \\ &+ \int_0^t \exp \left\{ \int_s^t |D(x_1(\tau))| d\tau \right\} \left\{ |x_2(0)| + \int_0^s |f_2(x_1(\tau))| d\tau \right\} |D(x_1(s))| ds \end{aligned}$$

και άρα από τη (2.105), τη συνέχεια των απεικονίσεων $x_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $D(\cdot)$ και την ανωτέρω, έπεται ότι:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x_2(t)| < \infty \quad (2.106)$$

Από τις (2.103), (2.105) και (2.106) καταλήγουμε σε άτοπο, επομένως θα ισχύει $T_{\max} = \infty$.

Ακολούθως, υποθέτουμε ότι ισχύει η P1. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει $B_R \cap M \neq \emptyset$, για κάθε $R > 0$. Τότε, θέτοντας $\bar{R} := \beta(R)$, $R > 0$ προκύπτει από τις υποθέσεις μας ότι $P_{\bar{R}} > I_{n_2 \times n_2}$, $\bar{c}_R > 0$ για κάθε $R > 0$ και ότι η οικογένεια $\{P_{\bar{R}}, \bar{R} > \beta(0) \geq 0\}$ είναι φραγμένη. Το τελευταίο σε συνδυασμό με τη (2.102), συνεπάγεται ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες της (2.94) για κάθε $R > 0$ με $\bar{R} := \beta(R)$, $P_R := P_{\bar{R}}$ και $d_R := \bar{c}_R$. Πράγματι, η πρώτη ανισότητα της (2.94α) συμπίπτει με την υπόθεση $P_R = P_{\bar{R}} > I_{n_2 \times n_2}$ για κάθε $R > 0$, ενώ η δεύτερη είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι η οικογένεια

$\{P_{\bar{R}}, \bar{R} > \beta(0)\}$ είναι φραγμένη, οπότε η (2.94α) ικανοποιείται για κάθε $R > 0$ με την απεικόνιση $P_R = P_{\bar{R}}$. Επιπλέον, αφού $d_R = c_{\bar{R}} > 0$ θα ισχύει και η (2.94β) για κάθε $R > 0$. Τέλος, όταν ισχύει $x_0 \in B_R \cap M$, και συνεπώς

$$|x_0| < R \Rightarrow \beta(|x_0|) \leq \beta(R) = \bar{R}$$

έπεται από τη (2.102α) ότι

$$|x_1(t, x_0)| \notin \bar{M}, \text{ για σχεδόν κάθε } t \geq 0$$

Λόγω της (2.100β) έχουμε $y(t) = x_1(t, x_0), \forall t \geq 0$ οπότε από τις ανωτέρω και τη (2.102β) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} e' P_{\bar{R}} D(y(t)) e &\leq c_{\bar{R}} e' P_{\bar{R}} e, \text{ για σχεδόν κάθε } t \geq 0, \\ e &\in \ker B(y(t)), \text{ δεδομένου ότι } y \in O(0, B_R \cap M) \end{aligned}$$

επομένως ικανοποιείται η (2.94γ). Συμπεραίνουμε ότι ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του Πορίσματος 2.13, συνεπώς το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.100) ως προς το M . Μια απλούστερη ανάλυση οδηγεί στα ίδια συμπεράσματα, όταν ισχύει η ιδιότητα P2 (ειδικότερα, το Πόρισμα 2.22 της Ενότητας 2.5 εξασφαλίζει σε αυτή την περίπτωση την επιλυσιμότητα του S-SODP για το σύστημα (2.100)). \square

Παρατήρηση 2.15 (i) Στην περίπτωση που το δεξί μέλος του (2.100) είναι αναλυτική συνάρτηση με $f_1(0) = 0, f_2(0) = 0$, η συνθήκη (2.102α) ικανοποιείται, αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι:

$$\bar{M} := \{x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \text{ με } x_1 = 0\}; \quad (2.107\alpha)$$

$$\begin{aligned} M &:= \{x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \text{ έτσι ώστε} \\ &\quad \underbrace{B(0) D(0) \dots D(0)}_k x_2 \neq 0 \text{ για κάποιον ακέραιο } k\} \quad (2.107\beta) \end{aligned}$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε στην αντίθετη περίπτωση ότι υπάρχει ένα υποσύνολο N του $[0, \infty)$ με μη μηδενικό μέτρο, ούτως ώστε να ισχύει:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$x_0 \in M \text{ και } x_1(t, x_0) \in \bar{M}, \text{ για κάθε } t \in N$$

ή ισοδύναμα, λόγω της (2.107α)

$$x_0 \in M \text{ και } x_1(t, x_0) = 0, \text{ για κάθε } t \in N \quad (2.108)$$

Λόγω της αναλυτικότητας του δεξιού μέλους της (2.100α), η $x_1(\cdot, x_0)$ θα είναι αναλυτική για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, αφού το σύνολο N είναι μη μηδενικού μέτρου θα περιέχει μια συγκλίνουσα ακολουθία $(t_\nu)_\nu \subset N$ και επομένως από τη (2.108) η $x_1(\cdot, x_0)$ ως αναλυτική συνάρτηση που μηδενίζεται σε μια συγκλίνουσα ακολουθία του πεδίου ορισμού της θα είναι παντού μηδέν (βλέπε [47] σελ 14, Corollary 1.127), δηλαδή θα ισχύει:

$$x_0 \in M \text{ και } x_1(t, x_0) = 0, \text{ για κάθε } t \geq 0 \quad (2.109)$$

Το ίδιο θα ισχύει και για κάθε τάξης παράγωγο της $x_1(\cdot, x_0)$, επομένως θα έχουμε:

$$x_0 \in M \text{ και } \frac{d^\nu}{dt^\nu} x_1(t, x_0) = 0, \forall \nu \in \mathbb{N}, t \geq 0 \quad (2.110)$$

Εν συνεχεία, θα δείξουμε ότι

$$B(0)(D(0))^{\nu-1} x_2(0) = 0, \forall \nu \in \mathbb{N} \quad (2.111)$$

όπου $x_0 = (x_1(0), x_2(0)) \in M$ η αρχική κατάσταση του συστήματος, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τη (2.107β). Η απόδειξη της ανωτέρω συνεπαγωγής βασίζεται στην ακόλουθη επαγωγική υπόθεση:

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} x_1(t, x_0) = B(0)(D(0))^{\nu-1} x_2(t), \forall \nu \in \mathbb{N}, t \geq 0 \quad (2.112)$$

Πράγματι, η (2.111) είναι άμεση συνέπεια της (2.112). Απομένει πλέον να δείξουμε την επαγωγική υπόθεση (2.112). Για $\nu = 1$ προκύπτει από τις (2.100α), (2.109) και την υπόθεση $f_1(0) = 0$ ότι

$$\frac{d}{dt} x_1(t, x_0) = f_1(x_1(t)) + B(x_1(t))x_2(t) = f_1(0) + B(0)x_2(t) = B(0)x_2(t)$$

επομένως η (2.112) ικανοποιείται για $\nu = 1$. Ακολουθώντας δεχόμαστε ότι η (2.112) ισχύει για $\nu \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι ισχύει και για $\nu + 1 \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, λαμβάνοντας υπόψη τις (2.100α), (2.109), (2.112) και την υπόθεση $f_2(0) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d^{\nu+1}}{dt^{\nu+1}}x_1(t, x_0) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^\nu}{dt^\nu}x_1(t, x_0) \right) \\ &= \frac{d}{dt}(B(0)(D(0))^{\nu-1}x_2(t)) \\ &= B(0)(D(0))^{\nu-1}(f_2(x_1(t)) + D(x_1(t))x_2(t)) \\ &= B(0)(D(0))^{\nu-1}(f_2(0) + D(0)x_2(t)) = B(0)(D(0))^\nu x_2(t) \end{aligned}$$

και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη της επαγωγικής υπόθεσης. Επιπλέον, από τη (2.107β) έπεται ότι $M = \mathbb{R}^n$, αν υποθέσουμε ότι το ζεύγος $(B(0), D(0))$ είναι παρατηρήσιμο.

(ii) Όπως σημειώθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, το αποτέλεσμα του Πορίσματος 2.14 όταν ισχύει η υπόθεση P2, γενικεύει το γεγονός ότι για γραμμικά αυτόνομα συστήματα της μορφής (2.100) δηλαδή για συστήματα

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ με έξοδο } y = \begin{pmatrix} I_{n_1 \times n_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

η ανιχνευσιμότητα του ζεύγους (B, D) είναι ισοδύναμη με την ανιχνευσιμότητα του (2.113), όπου η τελευταία είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη, το ζεύγος $\left(\begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ να είναι σταθεροποιήσιμο μέσω γραμμικής ανάδρασης (βλέπε Πρόταση 1.10, Θεώρημα 1.13(α)).

2.4 Τριγωνικά Συστήματα

Στην παρούσα ενότητα χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα από τις Ενότητες 2.2 και 2.3, προκειμένου να εξάγουμε ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του AC-SODP για τριγωνικά συστήματα της μορφής (2.3), όπου υποθέτουμε ότι $f_i \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^i; \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$ και $a_i \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Η παρακάτω πρόταση, γενικεύει την Πρόταση 3.1 στην εργασία [71] (Θεώρημα

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

1.68), αφού δεν υπάρχει πλέον η απαίτηση οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων $f_i(\cdot)$, να ικανοποιούν την εκτίμηση (1.101) (growth condition). Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.16 (*Ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του AC-SODP για τριγωνικά συστήματα της μορφής (2.3)*). Έστω M ένα μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Υποθέτουμε ότι το (2.3) είναι M -δεξιά πλήρες, δηλαδή η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (2.3α) ικανοποιεί την εκτίμηση (1.104) για δοσμένη $\beta \in \mathcal{NN}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι για κάθε $t_0 \geq 0$, $x_0 \in M$ και $i = 1, 2, \dots, n-1$ ισχύει:

$$a_i(t, x_1(t, t_0, x_0)) \neq 0, \text{ για σχεδόν κάθε } t \geq t_0 \quad (2.114)$$

Τότε το σύστημα ικανοποιεί την A3 και επομένως το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το (2.3) ως προς το M .

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε την επιλυσιμότητα του AC-SODP, αρκεί από το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.10, να δείξουμε ότι το σύστημα (2.3) ικανοποιεί τη Συνθήκη A3. Ειδικότερα, θα δείξουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ και μια σταθερά $L > 1$, έτσι ώστε για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$, να ισχύουν οι A1 και A2. Έστω $R > 0$ και $\xi > 0$. Ορίζουμε:

$$F(t, x, y) := \begin{pmatrix} f_1(t, y) + a_1(t, y)x_2 \\ f_2(t, y, x_2) + a_2(t, y)x_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, y)x_n \\ f_n(t, y, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, (t, x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (2.115)$$

Έστω $\sigma_{R,\xi} \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε:

$$\sigma_{R,\xi}(t) \geq \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^i \max \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, y, x_2, \dots, x_i) \right| : |(y, x_2, \dots, x_i)| \leq 2\beta(t, R) + \xi \right\}, \forall t \geq 0 \quad (2.116)$$

και ορίζουμε την πλειονότιμη απεικόνιση

$$\begin{aligned}
 [0, \infty) \ni t &\rightarrow Q_R(t) := Q_{R,\xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell, \ell = \frac{n(n+1)}{2} \\
 Q_R(t) &:= \{q = (q_{1,1}; q_{2,1}, q_{2,2}; \dots; q_{n,1}, q_{n,2}, \dots, q_{n,n}) \in \mathbb{R}^\ell : |q| \leq \sigma_{R,\xi}(t)\}
 \end{aligned}
 \tag{2.117}$$

η οποία προφανώς ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1. Επίσης, για κάθε $t \geq 0$ θεωρούμε το σύνολο $Y_R(t)$ όπως δίνεται από τη (2.14) με

$$H := (1, 0, \dots, 0) \tag{2.118}$$

Από τις (2.115)-(2.118) και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού έπεται ότι για κάθε $t \geq 0$, $y \in Y_R(t)$ και $x, z \in \mathbb{R}^n$ με $|x| \leq \beta(t, R)$ και $|x - z| \leq \xi$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
 F(t, x, y) - F(t, z, y) &= A(t, q, y)(x - z), \text{ για κάποιο } q \in Q_R(t) \\
 &\text{με } q_{i,1} = 0, i = 1, 2, \dots, n \tag{2.119\alpha}
 \end{aligned}$$

$$A(t, q, y) := \begin{pmatrix} q_{1,1} & a_1(t, y) & 0 & \cdots & 0 \\ q_{2,1} & q_{2,2} & a_2(t, y) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & q_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1}(t, y) \\ q_{n,1} & q_{n,2} & q_{n,3} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.119\beta}$$

Πράγματι, έστω $t \geq 0$, $y \in Y_R(t)$ και $x, z \in \mathbb{R}^n$ με $|x| \leq \beta(t, R)$ και $|x - z| \leq \xi$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής και τη (2.115) εξάγουμε ότι

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{aligned}
 F(t, x, y) - F(t, z, y) &= \begin{pmatrix} f_1(t, y) + a_1(t, y)x_2 \\ f_2(t, y, x_2) + a_2(t, y)x_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, y)x_n \\ f_n(t, y, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \\
 &\quad - \begin{pmatrix} f_1(t, y) + a_1(t, y)z_2 \\ f_2(t, y, z_2) + a_2(t, y)z_3 \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, z_2, \dots, z_{n-1}) + a_{n-1}(t, y)z_n \\ f_n(t, y, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & a_1(t, y) & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, y, x_2 + \theta_1(z_2 - x_2)) & a_2(t, y) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}(t, y, x_2 + \theta_{n-2}(z_2 - x_2), \dots, x_{n-1} + \theta_{n-2}(z_{n-1} - x_{n-1})) & \dots \\ 0 & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(t, y, x_2 + \theta_{n-1}(z_2 - x_2), \dots, x_n + \theta_{n-1}(z_n - x_n)) & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & a_{n-1}(t, y) & \dots \\ \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, y, x_2 + \theta_{n-1}(z_2 - x_2), \dots, x_n + \theta_{n-1}(z_n - x_n)) & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} - z_{n-1} \\ x_n - z_n \end{pmatrix} \\
 &= A(t, q, y)(x - z), \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1} \in (0, 1)
 \end{aligned}$$

με την απεικόνιση $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.119β), όπου οι όροι $q_{i,1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ικανοποιούν τη (2.119α), ενώ για τους υπόλοιπους ισχύει:

$$q_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, y, x_2 + \theta_{i-1}(z_2 - x_2), \dots, x_i + \theta_{i-1}(z_i - x_i)), i = 2, 3, \dots, n,$$

$$j = 2, 3, \dots, i$$
(2.120)

Αφού $y \in Y_R(t)$, προκύπτει από τις (1.104), (2.14) και (2.118) ότι θα ισχύει:

$$|y| \leq \beta(t, R)$$

Από την ανωτέρω και το γεγονός ότι $|x| \leq \beta(t, R)$ και $|x - z| \leq \xi$ εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned} & |(y, x_2 + \theta_{i-1}(z_2 - x_2), \dots, x_i + \theta_{i-1}(z_i - x_i))| \\ & \leq |(y, 0, \dots, 0)| + |(0, x_2, \dots, x_i)| + \theta_{i-1} |(0, z_2 - x_2, \dots, z_i - x_i)| \\ & \leq |y| + |x| + \theta_{i-1} |z - x| \leq |y| + |x| + |z - x| \leq 2\beta(t, R) + \xi \end{aligned}$$
(2.121)

Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.116), (2.117) και (2.121), συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα $q \in \mathbb{R}^\ell$ όπως δίνεται από τις (2.117), (2.119α) και (2.120), ανήκει στο σύνολο $Q_R(t)$, συνεπώς ισχύει η A1. Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.12 της προηγούμενης ενότητας και ακολουθώντας ανάλογη επαγωγή με εκείνη στην απόδειξη της Πρότασης 3.1 στην εργασία [71], δείχνουμε ότι με την υπόθεση (2.114), ικανοποιείται και η Συνθήκη A2. Ειδικότερα, δείχνουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $L > 1$, τέτοια ώστε για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$ να υπάρχει $\varepsilon_R > 0$ ούτως ώστε για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\tau > 0$, $\xi > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, να μπορούμε να βρούμε ένα χρονικώς μεταβαλλόμενο συμμετρικό πίνακα $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, και οι δυο απεικονίσεις τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$, που να ικανοποιούν τις (2.16α), (2.16β) καθώς και τη (2.16γ), δεδομένου ότι ισχύει η (2.17), με τις $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ και $Q_R := Q_{R,\xi}$ όπως δίνονται από τις (2.119β) και (2.117), αντίστοιχα. Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού θα γίνει με επαγωγή. Έστω L, R και ξ ως ανωτέρω και έστω ε μια θετική σταθερά. Για $k = 2, 3, \dots, n$ ορίζουμε:

$$H_k := \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_k, e := (e_1, e_2, \dots, e_k)' \in \mathbb{R}^k; \quad (2.122\alpha)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$A_k(t, q, y) := \begin{pmatrix} q_{n-k+1, n-k+1} & a_{n-k+1}(t, y) & 0 & \cdots & 0 \\ q_{n-k+2, n-k+1} & & & & \\ \vdots & & \boxed{A_{k-1}(t, q, y)} & & \\ q_{n, n-k+1} & & & & \end{pmatrix} \quad (2.122\beta)$$

όπου

$$A_1(t, q, y) := q_{n, n} \quad (2.122\gamma)$$

Επίσης, ορίζουμε:

$$\varepsilon_k := \frac{k}{n}\varepsilon, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.123)$$

Ισχυρισμός 1. (Επαγωγική Υπόθεση) Έστω $k \in \mathbb{N}$ με $2 \leq k \leq n$. Τότε για L, R, ξ ως ανωτέρω και για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0, \tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{R,k} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{k \times k})$ και μια συνάρτηση $d_{R,k} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, και οι δυο απεικονίσεις τ -μη αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (2.16α), (2.16β) καθώς και η (2.16γ), δεδομένου ότι ισχύει η (2.17), με τις απεικονίσεις $d_R := d_{R,k}, H := H_k, P_R := P_{R,k}, A := A_k, Q_R := Q_{R,\xi}$ και τη σταθερά $\varepsilon_R := \varepsilon_k$, δηλαδή να έχουμε:

$$P_{R,k}(t) > I_{k \times k}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P_{R,k}(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.124\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t d_{R,k}(s)ds > -\varepsilon_k, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_{R,k}(s)ds = \infty; \quad (2.124\beta)$$

$$e' P_{R,k}(t) A_k(t, q, y(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_{R,k}(t) e \leq -d_{R,k}(t) e' P_{R,k}(t) e, \quad (2.124\gamma)$$

$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker H_k, q \in Q_R(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)

Σημειώνουμε ότι για $k := n$, και λαμβάνοντας υπόψη τη (2.123), ο Ισχυρισμός 1 εγγυάται ότι ικανοποιούνται όλες οι απαιτήσεις της Συνθήκης A2 με $\varepsilon_R := \varepsilon$, επομένως, το αποτέλεσμα της παρούσας πρότασης είναι συνέπεια της Πρότασης 2.10.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για $k := 2$. Ορίζουμε:

$$H_2 := (1, 0), e := (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2; \quad (2.125\alpha)$$

$$A_2(t, q, y) := \begin{pmatrix} q_{n-1, n-1} & a_{n-1}(t, y) \\ q_{n, n-1} & q_{n, n} \end{pmatrix} \quad (2.125\beta)$$

Παρατηρούμε ότι η $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.125β), συμπίπτει με την απεικόνιση $J(\cdot, \cdot, \cdot)$, όπως δίνεται από τη (2.76), με $n_1 = n_2 = 1$ και

$$\mathbf{A}(q) := q_{n-1, n-1}, \mathbf{B}(t, y) := a_{n-1}(t, y), \quad (2.126)$$

$$\mathbf{C}(q) := q_{n, n-1} \text{ και } \mathbf{D}(t, q, y) := q_{n, n}$$

Ορίζουμε:

$$P_{R,1}(t) := L, t \geq \bar{t}_0 \quad (2.127\alpha)$$

και έστω $d_{R,1} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ μια μη αρνητική συνάρτηση για την οποία ισχύει η συνθήκη:

$$\int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_{R,1}(s) ds = \infty \quad (2.127\beta)$$

Προφανώς, το ζεύγος (\mathbf{B}, \mathbf{D}) όπως δίνεται από τη (2.126), ικανοποιεί την Ιδιότητα H2 με την $Q := Q_{R,\xi}$ όπως δίνεται από τη (2.117), με $U := M, W := B_R, \Omega(t_0, U) := O(t_0, M), \forall t_0 \geq 0, E := \varepsilon_1$ και με τις $P := P_{R,1}, d := d_{R,1}$ όπως δίνονται στη (2.127). Πράγματι, από τις (2.127α) και (2.127β), προκύπτει ότι ικανοποιούνται οι (2.77α) και (2.77β) της Ιδιότητας H2. Επίσης, λόγω των (2.114) και (2.126), ισχύει στην περίπτωση μας $\ker \mathbf{B}(t, y(t)) = \{0\}$ για σχεδόν κάθε $t \geq t_0$, όπου $t_0 \geq 0$ και $y \in O(t_0, M)$, άρα και η (2.77γ) της H2 ισχύει τετριμμένα. Έπεται τότε από το Λήμμα 2.12 και λαμβάνοντας υπόψη τη (2.123), ότι για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0, \tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, υπάρχουν τ -μη αιτιατές απεικονίσεις $S_{R,1} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}), T_{R,1} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_{R,2} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, τέτοιες ώστε αν ορίσουμε:

$$P_{R,2} := \begin{pmatrix} T_{R,1} & S_{R,1} \\ S'_{R,1} & P_{R,1} \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

με την $P_{R,1}(\cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.127α), να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$P_{R,2}(t) > I_{2 \times 2}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P_{R,2}(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.129\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t d_{R,2}(s)ds > -\varepsilon_2, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_{R,2}(s)ds = \infty; \quad (2.129\beta)$$

$$(0, e_2)P_{R,2}(t)A_2(t, q, y(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(0, e_2)\dot{P}_{R,2}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} \leq -d_{R,2}(t)(0, e_2)P_{R,2}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad (2.129\gamma)$$

$\forall t \geq \bar{t}_0, e_2 \in \mathbb{R}, q \in Q_R(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)

Από τη (2.125α), η ανισότητα (2.129γ) γράφεται:

$$e'P_{R,2}(t)A_2(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_{R,2}(t)e \leq -d_{R,2}(t)e'P_{R,2}(t)e, \quad (2.130)$$

$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker H_2, q \in Q_R(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)

Από τις (2.122), (2.124), (2.129α), (2.129β) και (2.130) συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες του Ισχυρισμού 1 ισχύουν για $k := 2$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. (Γενικό Επαγωγικό Βήμα) Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι αν η επαγωγική υπόθεση του Ισχυρισμού 1 ισχύει για κάποιο $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, τότε ισχύει και για $k := k+1$. Ειδικότερα, θα δείξουμε ότι για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0, \tau > 0, y \in O(t_0, M)$ και σταθερές L, R, ξ ως ανωτέρω, μπορούμε να βρούμε έναν τ -μη αιτιατό χρονικώς μεταβαλλόμενο συμμετρικό πίνακα $P_{R,k+1} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)})$ και μια τ -μη αιτιατή συνάρτηση $d_{R,k+1} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, έτσι ώστε να ισχύουν οι (2.16α), (2.16β) και περαιτέρω να ικανοποιείται η (2.16γ), δεδομένου ότι ισχύει η (2.17), με τις απεικονίσεις $H := H_{k+1}, A := A_{k+1}$ και $Q_R := Q_{R,\xi}$ όπως δίνονται από τις (2.122α), (2.122β) και (2.117), αντίστοιχα, τη σταθερά $\varepsilon_R := \varepsilon_{k+1}$ και κατάλληλες $d_R := d_{R,k+1}, P_R := P_{R,k+1}$ που πρόκειται να προσδιοριστούν. Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση

$$A_{k+1}(t, q, y) := \begin{pmatrix} q_{n-k, n-k} & a_{n-k}(t, y) & 0 & \cdots & 0 \\ q_{n-k+1, n-k} & & & & \\ \vdots & & \boxed{A_k(t, q, y)} & & \\ q_{n, n-k} & & & & \end{pmatrix} \quad (2.129\beta)$$

συμπίπτει με την $J(t, q, y)$, όπως δίνεται από τη (2.76) με $n_1 = 1, n_2 = k$ και

$$\mathbf{A}(q) := q_{n-k, n-k}, \mathbf{B}(t, y) := a_{n-k}(t, y) \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_k \quad (2.131)$$

$$\mathbf{C}(q) := \begin{pmatrix} q_{n-k+1, n-k} \\ \vdots \\ q_{n, n-k} \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{D}(t, q, y) := A_k(t, q, y)$$

Στο γενικό επαγωγικό βήμα ικανοποιείται πάλι η Ιδιότητα H2 για το ζεύγος (\mathbf{B}, \mathbf{D}) όπως δίνεται τώρα από τη (2.131), με την απεικόνιση $Q_R := Q_{R, \xi}$ και με τις συναρτήσεις $P := P_{R, k}, d := d_{R, k}$ όπως δίνονται στη (2.124) και με $U := M, W := B_R, \Omega(t_0, U) := O(t_0, M), \forall t_0 \geq 0, E := \varepsilon_k$. Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη τις (2.114) και (2.131), εξάγουμε ότι για κάθε $t_0 \geq 0$ και $y \in O(t_0, M)$ ισχύει $\ker \mathbf{B}(t, y(t)) = \ker \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_k$, για σχεδόν κάθε $t \geq t_0$.

Το τελευταίο σε συνδυασμό με τις (2.124α)-(2.124γ), συνεπάγεται ότι ισχύουν οι (2.77α)-(2.77γ) της H2. Συμπεραίνουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Λήμματος 2.12, επομένως λαμβάνοντας υπόψη και τη (2.123), προκύπτει ότι για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0, \tau > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, υπάρχουν τ -μη αιτιατές χρονικώς μεταβαλλόμενες απεικονίσεις $S_{R, k} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{1 \times k}), T_{R, k} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_{R, k+1} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, τέτοιες ώστε αν ορίσουμε

$$P_{R, k+1} := \begin{pmatrix} T_{R, k} & S_{R, k} \\ S'_{R, k} & P_{R, k} \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

με την $P_{R, k}(\cdot)$ όπως δίνεται στη (2.124α), να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$P_{R, k+1}(t) > I_{(k+1) \times (k+1)}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P_{R, k+1}(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.133\alpha)$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$\int_{\bar{t}}^t d_{R,k+1}(s)ds > -\varepsilon_{k+1}, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_{R,k+1}(s)ds = \infty; \quad (2.133\beta)$$

$$\begin{aligned} (0, e'_2)P_{R,k+1}(t)A_{k+1}(t, q, y(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(0, e'_2)\dot{P}_{R,k+1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ \leq -d_{R,k+1}(t)(0, e'_2)P_{R,k+1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}, \\ \forall t \geq \bar{t}_0, e_2 \in \mathbb{R}^k, q \in Q_R(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)} \end{aligned} \quad (2.133\gamma)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη (2.122α), η ανισότητα (2.133γ) γράφεται:

$$\begin{aligned} e'P_{R,k+1}(t)A_{k+1}(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_{R,k+1}(t)e \leq -d_{R,k+1}(t)e'P_{R,k+1}(t)e, \\ \forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker H_{k+1}, q \in Q_R(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)} \end{aligned} \quad (2.134)$$

Από τις (2.133α), (2.133β) και (2.134) συμπεραίνουμε ότι η επαγωγική υπόθεση ικανοποιείται και για $k := k + 1$ και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Επομένως για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$ ικανοποιούνται οι A1 και A2, συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 2.10 το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.3) ως προς το M . \square

2.5 Επιλυσιμότητα του Strong ODP

Στην παρούσα ενότητα δίνονται ικανές συνθήκες για την επιλύσιμότητα του S-(S)ODP για τις περιπτώσεις των συστημάτων που μελετήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, με τις ίδιες υποθέσεις λειότητας για τα δεξιά τους μέλη. Οι διατυπώσεις και αποδείξεις της ενότητας αυτής, αποτελούν τροποποιήσεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων από τις Ενότητες 2.2, 2.3 και 2.4. Θεωρούμε πάλι το σύστημα (2.11) και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα κλειστό μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε το (2.11α) να είναι M -δεξιά πλήρες, δηλαδή να ικανοποιείται η (1.104) για κάποια $\beta \in \mathcal{NN}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως στη (2.12) και σταθερές $L > 1$ και $R > 0$, έτσι ώστε να ισχύει η A1 και αντί της A2 να ικανοποιείται η ακόλουθη

ισχυρότερη υπόθεση.

A2'. Η Συνθήκη A2 ικανοποιείται με το σύνολο M ως ανωτέρω και με την επιπλέον παραδοχή ότι για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$, $\xi > 0$ και $y \in O(t_0, M)$, οι απεικονίσεις

$$[\bar{t}_0, \infty) \times M \ni (t, x_0) \rightarrow \begin{cases} P_{R,t_0,\bar{t}_0,\xi,y(\cdot,t_0,x_0)}(t) \\ \dot{P}_{R,t_0,\bar{t}_0,\xi,y(\cdot,t_0,x_0)}(t) \\ d_{R,t_0,\bar{t}_0,\xi,y(\cdot,t_0,x_0)}(t) \end{cases} \quad (2.135)$$

είναι συνεχείς και αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$

Ακολούθως, δείχνουμε ότι με τις Συνθήκες A1 και A2', το S-ODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.11). Όπως και στη δεύτερη ενότητα, αποδεικνύουμε αρχικά ένα προκαταρκτικό αποτέλεσμα που αποτελεί μια ισχυρότερη παραλλαγή του Λήμματος 2.6. Θεωρούμε πάλι το ζεύγος (H, A) των συνεχών απεικονίσεων της (2.19) και έστω U ένα κλειστό και W ένα συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n με $U \cap W \neq \emptyset$ και για κάθε $t_0 \geq 0$, έστω $\Omega(t_0, U)$ ένα (μη κενό) σύνολο συνεχών συναρτήσεων $y := y_{t_0,x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ παραμετροποιημένων ως προς $x_0 \in U$, έτσι ώστε για κάθε σταθερό $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, να ισχύει ότι η απεικόνιση

$$[t_0, \infty) \times U \ni (t, x_0) \rightarrow y_{t_0,x_0}(t) \text{ είναι συνεχής} \quad (2.136)$$

Επίσης, αντί της H1, κάνουμε την ακόλουθη ισχυρότερη υπόθεση.

H1'. Η Συνθήκη H1 ικανοποιείται και επιπλέον, για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και $y := y_{t_0,x_0} \in \Omega(t_0, U)$ οι απεικονίσεις

$$[\bar{t}_0, \infty) \times U \ni (t, x_0) \rightarrow \begin{cases} P_{t_0,\bar{t}_0,y_{t_0,x_0}}(t) \\ \dot{P}_{t_0,\bar{t}_0,y_{t_0,x_0}}(t) \\ d_{t_0,\bar{t}_0,y_{t_0,x_0}}(t) \end{cases} \quad (2.137)$$

είναι συνεχείς και αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

Το ακόλουθο αποτέλεσμα (Λήμμα 2.17), αποτελεί μια ισχυρότερη εκδοχή του Λήμματος 2.6.

Λήμμα 2.17 *Θεωρούμε το ζεύγος (H, A) των συνεχών απεικονίσεων της (2.19) για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύει η $H1'$. Τότε για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και $\bar{d} := \bar{d}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0, x_0}} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ που ικανοποιεί τη (2.22) και την επιπλέον ιδιότητα, ότι η απεικόνιση*

$$[\bar{t}_0, \infty) \times U \ni (t, x_0) \rightarrow \bar{d}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0, x_0}}(t) \quad (2.138)$$

είναι συνεχής και αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$

υπάρχει μια συνάρτηση $\phi = \phi_{t_0, \bar{t}_0} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, ανεξάρτητη της $y(\cdot)$, και συνεπώς αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, έτσι ώστε να ισχύει η (2.23).

Απόδειξη

(Σκιαγράφηση): Έστω $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times (U \cap W)$, $\bar{t}_0 \geq t_0$, $y(t; x_0) := y_{t_0, x_0}(t)$ και $\bar{d}(t; x_0) := \bar{d}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0, x_0}}(t)$, όπως οι $y_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ και $\bar{d} := \bar{d}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0, x_0}} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ δίνονται στη διατύπωση του λήμματος. Ορίζουμε τις απεικονίσεις $D(t, q, e; x_0)$, $K(t; x_0)$, $K^c(t; x_0)$, $\omega(t; x_0)$ και $\bar{\omega}(t; x_0)$ όπως στις (2.24α), (2.24β), (2.26), (2.28) και (2.30), αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ορίζουμε:

$$D(t, q, e; x_0) := e'P(t; x_0)A(t, q, y(t; x_0))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t; x_0)e + \bar{d}(t; x_0)e'P(t; x_0)e \quad (2.139\alpha)$$

$$K(t; x_0) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1, D(t, q, w; x_0) < 0, \forall q \in Q(t)\} \quad (2.139\beta)$$

$$K^c(t; x_0) := \{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1 \text{ και } D(t, q, w; x_0) \geq 0, \text{ για κάποιο } q \in Q(t)\} \quad (2.139\gamma)$$

$$\omega(t; x_0) := \begin{cases} \min\{|H(t, y(t; x_0))w| : w \in K^c(t; x_0)\}, & \text{αν } K^c(t; x_0) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{αν } K^c(t; x_0) = \emptyset \end{cases} \quad (2.139\delta)$$

$$\bar{\omega}(t; x_0) := \begin{cases} \frac{1}{\omega^2(t; x_0)}, & \text{αν } K^c(t; x_0) \neq \emptyset \\ 0, & \text{αν } K^c(t; x_0) = \emptyset \end{cases} \quad (2.139\epsilon)$$

Ακολουθώντας, όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 2.6 και χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις συνέχειας (2.136), (2.137) και (2.138) για τις απεικονίσεις $y(t; x_0) :=$

$y_{t_0, x_0}(t)$, $P(t; x_0) := P_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0, x_0}}(t)$, $\dot{P}(t; x_0) := \dot{P}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0, x_0}}(t)$ και $\bar{d}(t; x_0) := \bar{d}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0, x_0}}(t)$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η

$$D : [\bar{t}_0, \infty) \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \times (U \cap W) \rightarrow \mathbb{R} \text{ είναι συνεχής} \quad (2.140)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος 2.6, αποδεικνύονται οι αντίστοιχες των σχέσεων (2.25) και (2.27), δηλαδή ότι

$$w \in \ker H(t, y(t; x_0)) \text{ και } |w| = 1 \Rightarrow w \in K(t; x_0) \quad (2.141)$$

πως το σύνολο $K^c(t; x_0)$ είναι κενό, αν και μόνο αν ισχύει

$$D(t, q, w; x_0) < 0 \text{ για κάθε } q \in Q(t) \text{ και } w \in \mathbb{R}^n \text{ με } |w| = 1 \quad (2.142)$$

καθώς και ότι οι συναρτήσεις $\omega(t; x_0)$ και $\bar{\omega}(t; x_0)$ είναι καλώς ορισμένες. Λαμβάνοντας υπόψη τη συμπάγεια του συνόλου $U \cap W$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση συνέχειας (2.140) για την απεικόνιση $D(t, q, e; x_0)$ μπορούμε ακολούθως να δείξουμε ότι για κάθε $T > \bar{t}_0$ ισχύει:

$$\inf\{\omega(t; x_0) : (t, x_0) \in [\bar{t}_0, T] \times (U \cap W)\} > 0 \quad (2.143)$$

Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση θα ισχύει $\omega(t_\nu; x_0^\nu) \rightarrow 0$ για κάποια ακολουθία $(t_\nu, x_0^\nu) \rightarrow (t, x_0) \in [\bar{t}_0, T] \times (U \cap W)$. Από τη (2.139δ) μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι ισχύει $K^c(t_\nu; x_0^\nu) \neq \emptyset$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και επομένως υπάρχει $w_\nu \in K^c(t_\nu; x_0^\nu)$ με $|H(t_\nu, y(t_\nu; x_0^\nu))w_\nu| \rightarrow 0$. Αφού $|w_\nu| = 1$, υποθέτουμε πάλι, ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει $w_\nu \rightarrow w \in \mathbb{R}^n$ με $|w| = 1$. Απο τη συνέχεια της $H(\cdot, y(\cdot, \cdot))$ προκύπτει (χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με εκείνα στην απόδειξη του Λήμματος 2.6) ότι $H(t, y(t; x_0))w = 0$ και συνεπώς από τη (2.141) ότι ισχύει $w \in K(t; x_0)$. Ακολούθως, από τη συνέχεια της $D(\cdot, \cdot, \cdot; \cdot)$ (ως προς t, q, w και x_0) αποδεικνύεται όπως ακριβώς και στην απόδειξη του Λήμματος 2.6 ότι $w \in K^c(t; x_0)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

Από τη (2.143) έπεται ότι για κάθε $T > \bar{t}_0$, υπάρχει μια σταθερά $M := M(T)$ με

$$M \geq \sup\{\bar{\omega}(t; x_0) : (t, x_0) \in [\bar{t}_0, T] \times (U \cap W)\} \quad (2.144)$$

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση:

$$C(t; x_0) := \sup\{\bar{\omega}(t; x_0)(|P(t; x_0)||A(t, q, y(t; x_0))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t; x_0)| + |\bar{d}(t; x_0)||P(t; x_0)|) : q \in Q(t)\} \quad (2.145)$$

Ακολουθως, δείχνουμε ότι για κάθε $T > \bar{t}_0$ υπάρχει μια σταθερά $\bar{M} := \bar{M}(T) > 0$, τέτοια ώστε

$$\sup\{C(t; x_0) : (t, x_0) \in [\bar{t}_0, T] \times (U \cap W)\} \leq \bar{M} \quad (2.146)$$

Πράγματι, όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 2.6 προκύπτει ότι αφού η απεικόνιση $Q(\cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, το σύνολο $\cup_{t \in [\bar{t}_0, T]} Q(t)$ είναι φραγμένο. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τις (2.144), (2.145) και το γεγονός ότι λόγω των (2.136), (2.137) και (2.138) οι απεικονίσεις $P(\cdot, \cdot)$, $\dot{P}(\cdot, \cdot)$, $\bar{d}(\cdot, \cdot)$ και $A(\cdot, \cdot, y(\cdot, \cdot))$, είναι συνεχείς ως προς (t, x_0) και (t, q, x_0) αντίστοιχα, εξάγουμε (όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 2.6) ότι

$$\begin{aligned} & \sup\{C(t; x_0) : t \in [\bar{t}_0, T] \times (U \cap W)\} \\ &= \sup\{\bar{\omega}(t; x_0)(|P(t; x_0)||A(t, q, y(t; x_0))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t; x_0)| + |\bar{d}(t; x_0)||P(t; x_0)|) : \\ & \quad (t, x_0) \in [\bar{t}_0, T] \times (U \cap W), q \in Q(t)\} \\ &\leq \sup\{\bar{\omega}(t; x_0) : (t, x_0) \in [\bar{t}_0, T] \times (U \cap W)\} \\ &\times \sup\{(|P(t; x_0)||A(t, q, y(t; x_0))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(t; x_0)| + |\bar{d}(t; x_0)||P(t; x_0)|) : \\ & \quad (t, q, x_0) \in [\bar{t}_0, T] \times \cup_{t \in [\bar{t}_0, T]} Q(t) \times (U \cap W)\} < \infty \end{aligned}$$

οπότε ικανοποιείται η (2.146). Επομένως, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\phi \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, ανεξάρτητη της $y \in \Omega(t_0, U)$, έτσι ώστε αντί της (2.34) να ισχύει:

$$\phi(t) > \sup\{C(t; x_0), x_0 \in U \cap W\}, \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.147)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας ανάλογα επιχειρήματα με εκείνα του πρώτου μέρους της απόδειξης του Λήμματος 2.6, συμπεραίνουμε ότι η $\phi(\cdot)$ ικανοποιεί την επιθυμητή (2.23). \square

Τα αποτελέσματα του Πορίσματος 2.18 και της Πρότασης 2.19 παρακάτω, αποτελούν τα “αιτιατά” ανάλογα του Πορίσματος 2.8 και της Πρότασης 2.9, αντίστοιχα. Οι αποδείξεις τους βασίζονται στο αποτέλεσμα του Λήμματος 2.17.

Πόρισμα 2.18 *Θεωρούμε το ζεύγος (H, A) της (2.19) με τις $H(t, y) := H(t)$ και $A(t, q, y)$ όπως ορίζονται στη (2.11β) και την Υπόθεση A1, αντίστοιχα. Τότε, αν ικανοποιείται η A2', ισχύουν όλα τα συμπεράσματα του Πορίσματος 2.8, δηλαδή για κάθε $\bar{\varepsilon}_R > \varepsilon_R$ υπάρχουν συναρτήσεις $\bar{d}_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ που ικανοποιούν τη (2.40). Επιπλέον, η $\phi_R(\cdot)$ είναι ανεξάρτητη του $y \in O(t_0, M)$ και η $\bar{d}_R(\cdot)$ αιτιατή ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$.*

Πρόταση 2.19 *(Ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του S-ODP για συστήματα της μορφής (2.11)). Θεωρούμε το σύστημα (2.11) και έστω M ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , τέτοιο ώστε το (2.11α) να είναι M -δεξιά πλήρες. Για την αρχική κατάσταση $x_0 \in M$ του συστήματος είναι εκ των προτέρων γνωστό, ότι $|x_0| \leq R$ για κάποια δοσμένη σταθερά $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$ και υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι Υποθέσεις A1 και A2', με το σύνολο M και τη σταθερά R ως ανωτέρω και για συγκεκριμένο $L > 1$. Τότε ισχύουν τα αποτελέσματα (i) και (ii) της Πρότασης 2.9, για έναν κατάλληλο αιτιατό χρονικώς μεταβαλλόμενο συμμετρικό πίνακα $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ που ικανοποιεί τη (2.16α) και αιτιατές συναρτήσεις $\bar{d}_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, επομένως το S-ODP είναι επιλύσιμο για το (2.11) ως προς το σύνολο $B_R \cap M$.*

Ακολούθως δίνονται ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του S-SODP. Αντί της συνθήκης A3 χρησιμοποιείται η ακόλουθη ισχυρότερη εκδοχή της.

A3'. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως στη (2.12) και μια σταθερά $L > 1$, έτσι ώστε για κάθε $R > 0$ με $B_R \cap M \neq \emptyset$ να ικανοποιούνται οι A1 και A2'.

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

Επικαλούμενοι τα αποτελέσματα του Πορίσματος 2.18 και της Πρότασης 2.19, μπορούμε, χρησιμοποιώντας ίδια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης της Πρότασης 2.10, να αποδείξουμε την ακόλουθη αιτιατή εκδοχή της Πρότασης 2.10.

Πρόταση 2.20 (*Ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του S-SODP για συστήματα της μορφής (2.11)*). Υποθέτουμε ότι το σύστημα (2.11) ικανοποιεί την $A3'$ και επιπλέον ότι είναι M -δεξιά πλήρες. Τότε το S-SODP είναι επιλύσιμο για το (2.11) ως προς το M .

Εν συνεχεία, εξάγουμε ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του S-SODP για σύνθετα συστήματα της μορφής (2.2). Θεωρούμε πάλι την απεικόνιση $J(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως ορίζεται από τη (2.76) και έστω U ένα κλειστό και W ένα συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n με $U \cap W \neq \emptyset$. Επιπλέον, για κάθε $t_0 \geq 0$, έστω $\Omega(t_0, U)$ ένα μη κενό σύνολο συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων $y := y_{t_0, x_0} : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ παραμετροποιημένων ως προς $x_0 \in U$, έτσι ώστε για κάθε δοσμένο $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ να ικανοποιείται η συνθήκη (2.136) και περαιτέρω να ισχύει ότι η απεικόνιση

$$[t_0, \infty) \times U \ni (t, x_0) \rightarrow \dot{y}_{t_0, x_0}(t) \text{ είναι συνεχής} \quad (2.148)$$

(όπου $\dot{y}_{t_0, x_0}(\cdot)$ η παράγωγος της $y_{t_0, x_0}(\cdot)$). Υποθέτουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ισχυρότερη της H2 συνθήκη για το ζεύγος (\mathbf{B}, \mathbf{D}) της (2.76).

H2'. Ικανοποιείται η Συνθήκη H2 και επιπλέον θεωρούμε ότι για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και $y := y_{t_0, x_0} \in \Omega(t_0, U)$, ισχύει η ιδιότητα (2.137), ενώ αντί της (2.77γ) ικανοποιείται η ακόλουθη ισχυρότερη απαίτηση:

$$e'P(t)\mathbf{D}(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'\dot{P}(t)e \leq -d(t)e'P(t)e, \quad (2.149)$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker \mathbf{B}(t, y(t)), q \in Q(t), \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)}$$

Το Λήμμα 2.21 και τα Πορίσματα 2.22 και 2.23 παρακάτω, αποτελούν τις αιτιατές εκδοχές του Λημμάτος 2.12 και των Πορισμάτων 2.13 και 2.14, αντίστοιχα.

Λήμμα 2.21 *Θεωρούμε την απεικόνιση $J(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.76) και υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η H2'. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και $y_{t_0, x_0} \in \Omega(t_0, U)$, υπάρχουν απεικονίσεις*

$$S := S_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}), T := T_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_1 \times n_1})$$

$$\text{και } \bar{d} := \bar{d}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$$

έτσι ώστε για κάθε ε , t_0 και \bar{t}_0 να ισχύει ότι οι απεικονίσεις

$$[\bar{t}_0, \infty) \times U \ni (t, x_0) \rightarrow \begin{cases} S_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0}(t) \\ \dot{S}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0}(t) \\ T_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0}(t) \\ \dot{T}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0}(t) \\ \bar{d}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0}(t) \end{cases} \quad (2.150)$$

είναι συνεχείς και αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$

και τέτοιες ώστε αν ορίσουμε

$$\bar{P} := \bar{P}_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0} = \begin{pmatrix} T & S \\ S' & P \end{pmatrix} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}) \quad (2.151)$$

με την $P(\cdot)$ όπως δίνεται στην H2', να ικανοποιείται η (2.79).

Απόδειξη

(Σκιαγράφηση): Η απόδειξη βασίζεται στο αποτέλεσμα του Λήμματος 2.17 και αποτελεί μια απλούστερη εκδοχή της απόδειξης του Λήμματος 2.12. Θεωρούμε πάλι το ζεύγος (H, A) με τις απεικονίσεις $H(t, y) := \mathbf{B}(t, y)$ και $A(t, q, y) := \mathbf{D}(t, q, y)$ όπως δίνονται από τη (2.76) και παρατηρούμε, ότι λόγω της (2.149), ικανοποιείται η Ιδιότητα H1' για το ζεύγος $(H, A) = (\mathbf{B}, \mathbf{D})$, όπου για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και $y := y_{t_0, x_0} \in \Omega(t_0, U)$, οι αντίστοιχες απεικονίσεις $P(\cdot)$ και $d(\cdot)$ δίνονται στις σχέσεις (2.77α), (2.77β). Έστω ε , t_0 , \bar{t}_0 και $y_{t_0, x_0}(\cdot)$ όπως στη διατύπωση του λήμματος. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.17, το ίδιο στοιχειώδες επιχείρημα με εκείνο στην απόδειξη του Λήμματος 2.7 και επικαλούμενοι τη (2.137), προκύπτει ότι υπάρχουν συναρτήσεις $d_1 := (d_1)_{t_0, \bar{t}_0, y_{t_0}, x_0} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, (η $\phi(\cdot)$ ανεξάρτητη της $y(\cdot) := y_{t_0, x_0}(\cdot)$) αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, ώστε να ικανοποιείται η (2.80). Τότε, όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 2.12, προκειμένου να δείξουμε τη (2.79), αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν απεικονίσεις $T(\cdot)$,

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$S(\cdot)$ και $\bar{d}(\cdot)$ που ικανοποιούν τη (2.150), τέτοιες ώστε να ισχύουν οι (2.79α), (2.79β) και (2.82). Ορίζουμε την απεικόνιση $S(\cdot)$ όπως στη (2.83) (όπου η $l \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ πρόκειται να προσδιοριστεί) και παρατηρούμε, ότι λόγω των (2.136), (2.148) και της υπόθεσης $\mathbf{B} \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^{n_1 \times n_1})$, αν η $l(\cdot)$ είναι ανεξάρτητη της $y_{t_0, x_0}(\cdot)$, τότε οι $S(\cdot)$ και $\dot{S}(\cdot)$ θα ικανοποιούν τη (2.150). Στη συνέχεια, ακολουθώντας επακριβώς τα βήματα της απόδειξης του Λήμματος 2.12, συμπεραίνουμε ότι αρκεί να βρούμε αιτιατές απεικονίσεις $l(\cdot)$, $\bar{d}(\cdot)$ και $T(\cdot)$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (2.79α), (2.79β), (2.84), (2.85) και (2.150) και επιπλέον να ισχύει:

$$(\phi(t) - l(t))|\mathbf{B}(t, y_{t_0, x_0}(t))w|^2 \leq d_1(t) - \bar{d}(t), \quad (2.152)$$

$$\forall t \geq \bar{t}_0, w \in \mathbb{R}^{n_2} : |w| = 1, \text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη (2.84β) και ορίζοντας

$$m(t) := 1 + \max\{|\mathbf{B}(t, y_{t_0, x_0}(t))w|^2 : w \in \mathbb{R}^{n_2}, |w| = 1, x_0 \in U \cap W\}, t \geq \bar{t}_0 \quad (2.153\alpha)$$

αρκεί, αντί της (2.152) να δείξουμε ότι:

$$(\phi(t) - l(t))m(t) \leq d_1(t) - \bar{d}(t), \forall t \geq \bar{t}_0, \quad (2.153\beta)$$

$$\text{δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)}$$

Ορίζοντας τις $l(\cdot)$ και $\bar{d}(\cdot)$ όπως στις (2.88α)-(2.88ε) (με $\delta\tau := \frac{\varepsilon}{4M}$) και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι $\phi(\cdot)$ και $m(\cdot)$ (όπως η τελευταία δίνεται από τη (2.153α)) είναι ανεξάρτητες της $y_{t_0, x_0}(\cdot)$ και ότι η $d_1(\cdot)$ είναι αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, προκύπτει ότι η $\bar{d}(\cdot)$ είναι αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ και η $l(\cdot)$ ανεξάρτητη της $y_{t_0, x_0}(\cdot)$, επομένως, σύμφωνα με την ανωτέρω ανάλυση, τόσο η $\bar{d}(\cdot)$ όσο και η $S(\cdot)$ θα ικανοποιούν τη (2.150). Επιπλέον, όπως ακριβώς και στην απόδειξη του Λήμματος 2.12, εξάγουμε ότι οι $l(\cdot)$, $\bar{d}(\cdot)$ ικανοποιούν τις (2.79β), (2.84) και (2.85). Τέλος, κατασκευάζοντας την απεικόνιση $T(\cdot)$ όπως στο Λήμμα 2.12 και λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 2.28 στο παράρτημα του κεφαλαίου, συμπεραίνουμε ότι η $T(\cdot)$ και ο πίνακας $\bar{P}(\cdot)$ όπως ο τελευταίος δίνεται από τη (2.151), ικανοποιούν τις (2.150) και (2.79α), αντίστοιχα. \square

Πόρισμα 2.22 (Ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του *S-SODP* για συστήματα της μορφής (2.2)). Έστω M ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Υποθέτουμε ότι το σύστημα (2.2α) ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Πορίσματος 2.13 και επιπλέον, ότι για κάθε σταθερό R, t_0, \bar{t}_0 και ξ οι απεικονίσεις

$$[\bar{t}_0, \infty) \times M \ni (t, x_0) \rightarrow \begin{cases} P_{R,t_0,\bar{t}_0,\xi,y(\cdot,t_0,x_0)}(t) \\ \dot{P}_{R,t_0,\bar{t}_0,\xi,y(\cdot,t_0,x_0)}(t) \\ d_{R,t_0,\bar{t}_0,\xi,y(\cdot,t_0,x_0)}(t) \end{cases} \quad (2.154)$$

είναι συνεχείς και αιτιατές ως προς το σύνολο $O(t_0, M)$

και ότι αντί της (2.94γ), ισχύει:

$$e' P_R(t) \mathbf{D}(t, q, y(t)) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e \leq -d_R(t) e' P_R(t) e, \quad (2.155)$$

$\forall t \geq \bar{t}_0, e \in \ker \mathbf{B}(t, y(t)), q \in Q_R(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)

Τότε το *S-SODP* είναι επιλύσιμο για το σύστημα (2.2) ως προς το M .

Απόδειξη

Η απόδειξη στηρίζεται στα ίδια επιχειρήματα με εκείνα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Πορίσματος 2.13. Η μόνη διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι (λόγω των ισχυρότερων υποθέσεων (2.154) και (2.155)) επικαλούμαστε τα αποτελέσματα της Πρότασης 2.20 και του Λήμματος 2.21, αντί της Πρότασης 2.10 και του Λήμματος 2.12, αντίστοιχα. \square

Πόρισμα 2.23 (Ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του *S-SODP* για αυτόνομα συστήματα της μορφής (2.100)). Θεωρούμε το σύστημα (2.100) και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό κλειστό σύνολο $M \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ και μια συνάρτηση $\beta \in \mathcal{N}$, ούτως ώστε να ικανοποιείται η (2.101). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένα σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, μια φραγμένη οικογένεια πινάκων $\{P_R \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, R > 0\}$, έτσι ώστε να ισχύει $P_R > I_{n_2 \times n_2}$ για κάθε $R > 0$ και μια οικογένεια θετικών σταθερών $\{c_R, R > 0\}$, ούτως ώστε να ισχύει μια από τις ακόλουθες ιδιότητες.

PI'. Το \bar{M} είναι μη κενό και ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$x_0 \in M \Rightarrow x_1(t, x_0) \notin \bar{M} \text{ για κάθε } t \geq 0; \quad (2.156\alpha)$$

$$e \in \ker B(x_1) \Rightarrow e' P_R D(x_1) e \leq -c_R e' P_R e, \quad (2.156\beta)$$

$$\forall |x_1| \leq R, x_1 \notin \bar{M}, R > 0$$

P2'. Η συνεπαγωγή στη (2.156β) ισχύει για κάθε $R > 0$ και $|x_1| \leq R$.

Τότε, ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Πορίσματος 2.22 και επομένως το S -SODP είναι επιλύσιμο για το (2.100) ως προς το M .

Απόδειξη

Η απόδειξη βασίζεται στα ίδια επιχειρήματα με εκείνα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Πορίσματος 2.14, με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Πορίσματος 2.22 αντί για το Πρόσλημα 2.13. Για λόγους πληρότητας, σημειώνουμε ότι οι απεικονίσεις $P_R(\cdot)$ και $d_R(\cdot)$ που θέλουμε να ικανοποιούν τις απαιτήσεις του Πορίσματος 2.22 είναι σταθερές και επομένως η (2.154) ισχύει τετριμμένα. \square

Πρόταση 2.24 (Ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του S -SODP για τριγωνικά συστήματα της μορφής (2.3)). Για το σύστημα (2.3) υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n ούτως ώστε το (2.3α) να είναι M -δεξιά πλήρες, δηλαδή η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (2.3α) να ικανοποιεί την εκτίμηση (1.104) για δοσμένη $\beta \in \mathcal{NN}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι για κάθε $t_0 \geq 0$, $x_0 \in M$ και $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ισχύει:

$$a_i(t, x_1(t, t_0, x_0)) \neq 0, \text{ για κάθε } t \geq t_0 \quad (2.157)$$

Τότε το σύστημα ικανοποιεί την $A3'$ και επομένως το S -SODP είναι επιλύσιμο για το (2.3) ως προς το M .

Απόδειξη

Η απόδειξη βασίζεται πάλι στα ίδια επιχειρήματα με εκείνα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη της Πρότασης 2.16. Η διαφορά εδώ είναι ότι επικαλούμαστε τα αποτελέσματα της Πρότασης 2.20 και του Λήμματος 2.21 αντί της Πρότασης 2.10 και του Λήμματος 2.12. Για λόγους σαφήνειας, σημειώνουμε ότι στο πρώτο βήμα της επαγωγής όπου επικαλούμαστε την Πρόταση 2.21, οι συναρτήσεις $P := P_{R,1}$ και $d := d_{R,1}$ είναι σταθερές και επομένως ικανοποιούν τη (2.137).

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε ότι στον επαγωγικό ισχυρισμό η (2.137) ισχύει για τις συναρτήσεις $P := P_{R,k}$ και $d := d_{R,k}$, τότε, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.21, συμπεραίνουμε ότι και οι $P := P_{R,k+1}$ και $d := d_{R,k+1}$ ικανοποιούν την εν λόγω σχέση. \square

2.6 Παραδείγματα

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή των Πορισμάτων 2.13 και 2.22.

Παράδειγμα 2.25 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + a(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1a(x_1) + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} \end{aligned} \quad (2.158\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \\ y &= x_1, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (2.158\beta)$$

όπου η $a(\cdot)$ είναι μια μη μηδενική αναλυτική συνάρτηση. Το σύστημα (2.158) έχει τη μορφή (2.2) με

$$f_1 := -x_1, f_2 = \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_1^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1a(x_1) + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} \\ -\frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \end{pmatrix}$$

και τη $G(\cdot)$ όπως ορίζεται στη (2.89) με

$$\mathbf{B}(y) := (a(y), 0), y \in \mathbb{R} \quad (2.159)$$

Έστω $M_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ισχυριζόμαστε ότι το (2.158) ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Πορίσματος 2.13 με $M := M_1 \times \mathbb{R}^2$, συνεπώς το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το (2.158) ως προς το M . Πράγματι, υπολογίζοντας τη χρονική παράγωγο \dot{V} της $V := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ κατά μήκος των τροχιών του (2.158α), εξάγουμε ότι

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x_1(-x_1 + a(x_1)x_2) + 2x_2 \left(-x_1a(x_1) + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} \right) \\ &+ 2x_3 \left(-\frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right) = -2x_1^2 + \frac{2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} - \frac{2x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \leq 2 \end{aligned}$$

για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, συνεπώς το (2.158α) είναι δεξιά πλήρες. Ειδικότερα, η λύση του $x(\cdot) := x(\cdot, x_0)$ με αρχική κατάσταση x_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$ ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$|x(t, x_0)| \leq \beta(t, |x_0|), \beta(t, R) := \sqrt{2t} + R, t, R \geq 0 \quad (2.160)$$

Πράγματι, από το ανωτέρω φράγμα για τη \dot{V} εξάγουμε ότι

$$V(x(t, x_0)) \leq 2t + V(x_0) \Rightarrow |x(t, x_0)|^2 \leq 2t + |x_0|^2$$

οπότε η (2.160) είναι άμεση συνέπεια της ανωτέρω. Στη συνέχεια, για κάθε $R, \xi > 0$ θεωρούμε συναρτήσεις $\underline{\sigma}_{R,\xi}^{i,j}, \bar{\sigma}_{R,\xi}^{i,j} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R})$, $i, j = 1, 2$ έτσι ώστε για κάθε $1 \leq i, j \leq 2$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\bar{\sigma}_{R,\xi}^{i,j}(t) \geq \max \left\{ \frac{\partial f_2^i}{\partial x_{j+1}}(y, x_2, x_3) : |(y, x_2, x_3)| \leq 2\beta(t, R) + \xi \right\}, \forall t \geq 0; \quad (2.161\alpha)$$

$$\underline{\sigma}_{R,\xi}^{i,j}(t) \leq \min \left\{ \frac{\partial f_2^i}{\partial x_{j+1}}(y, x_2, x_3) : |(y, x_2, x_3)| \leq 2\beta(t, R) + \xi \right\}, \forall t \geq 0; \quad (2.161\beta)$$

Ειδικότερα, μπορούμε να επιλέξουμε στη (2.161α):

$$\bar{\sigma}_{R,\xi}^{2,2}(t) := -\frac{1}{32t + 16R^2 + 2\xi^2 + 1} \quad (2.162)$$

Πράγματι, ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2^2}{\partial x_3}(y, x_2, x_3) &= -\frac{1}{y^2 + x_2^2 + 1} \leq -\frac{1}{y^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} \\ &\leq -\frac{1}{(2\beta(t, R) + \xi)^2 + 1} \leq -\frac{1}{8\beta^2(t, R) + 2\xi^2 + 1}, \\ \forall t \geq 0, x &= (y, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 2\beta(t, R) + \xi \end{aligned} \quad (2.163)$$

όπου λόγω της (2.160) και του ορισμού (2.162), έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\beta^2(t, R) + 2\xi^2 + 1} &= -\frac{1}{8(\sqrt{2t} + R)^2 + 2\xi^2 + 1} \\ &\leq -\frac{1}{32t + 16R^2 + 2\xi^2 + 1} = \bar{\sigma}_{R,\xi}^{2,2}(t), \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τη (2.163) συνεπάγονται, ότι η $\bar{\sigma}_{R,\xi}^{2,2}(\cdot)$ όπως δίνεται από τη (2.162) ικανοποιεί τη (2.161α). Ακολουθώντας, ορίζουμε:

$$Q_R(t) := \{q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4 : \underline{\sigma}_{R,\xi}^{i,j}(t) \leq q_{i+2(j-1)} \leq \bar{\sigma}_{R,\xi}^{i,j}(t), \quad (2.164\alpha) \\ 1 \leq i, j \leq 2\}, t \geq 0;$$

$$\mathbf{D}(q) := \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}, q := (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4 \quad (2.164\beta)$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και με επιχειρήματα ίδια με εκείνα στην αρχή της απόδειξης της Πρότασης 2.16 (σχέσεις (2.115)-(2.121)), προκύπτει από τις (2.161) και (2.164), ότι για κάθε $t \geq 0$ υπάρχει $q \in Q_R(t)$ ούτως ώστε να ισχύει η (2.93) με το σύνολο $Y_R(t)$ όπως δίνεται από τη (2.14), με $H := (1 \ 0 \ 0)$ και τη $\beta(\cdot, \cdot)$ όπως ορίζεται στη (2.160), δηλαδή ισχύει

$$f_2(t, y, x_2) - f_2(t, y, z_2) = \mathbf{D}(q)(x_2 - z_2),$$

δεδομένου ότι $y \in Y_R(t)$, $x_2, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $|x_2| \leq \beta(t, R)$ και $|x_2 - z_2| \leq \xi$

Εν συνεχεία, δείχνουμε ότι ικανοποιούνται και οι υπόλοιπες υποθέσεις του Πορίσματος 2.13. Ειδικότερα, δείχνουμε ότι για κάθε ζεύγος σταθερών $L > 1$ και $R > 0$ υπάρχει $\varepsilon_R > 0$, έτσι ώστε για κάθε $\bar{t}_0 \geq 0$, $\xi > 0$ και $y \in O(0, M)$, να υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και μια συνάρτηση $d_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, και οι δυο απεικονίσεις αιτιατές ως προς το σύνολο $O(0, M)$ που ικανοποιούν τη (2.94). Θεωρούμε επομένως μια σταθερά $L > 1$ και έστω $R > 0$, $\varepsilon_R > 0$, $\bar{t}_0 \geq 0$, $\xi > 0$ και $y \in O(0, M)$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε αιτιατές ως προς το σύνολο $O(0, M)$ απεικονίσεις $P_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και $d_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$P_R(t) > I_{2 \times 2}, \forall t \geq \bar{t}_0; |P_R(\bar{t}_0)| \leq L; \quad (2.165\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}}^t d_R(s) ds > -\varepsilon_R, \forall t \geq \bar{t} \geq \bar{t}_0; \int_{\bar{t}_0}^{\infty} d_R(s) ds = \infty; \quad (2.165\beta)$$

$$e' P_R(t) \mathbf{D}(q) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e \leq -d_R(t) e' P_R(t) e, \quad (2.165\gamma)$$

για σχεδόν κάθε $t \geq \bar{t}_0$, $\forall e \in \ker \mathbf{B}(y(t))$, $q \in Q_R(t)$, δεδομένου ότι ισχύει η (2.17)

με $M = M_1 \times \mathbb{R}^2$ ($M_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) και τις απεικονίσεις $\mathbf{B}(\cdot)$, $Q_R(\cdot)$ και $\mathbf{D}(\cdot)$ όπως δίνονται από τις (2.159), (2.164α) και (2.164β), αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι αφού η $a(\cdot)$ είναι αναλυτική και μη μηδενική θα ισχύει

$$a(y(t)) \neq 0, \text{ για σχεδόν κάθε } t \geq 0 \quad (2.166)$$

για κάθε έξοδο $y \in O(0, M)$ του (2.158). Πράγματι, αφού το σύστημα έχει αναλυτικό δεξί μέλος, για κάθε $x_0 \in M$, η $y(\cdot) = x_1(\cdot, x_0)$ είναι αναλυτική συνάρτηση και επομένως το ίδιο και η $a(y(\cdot))$. Χρησιμοποιώντας ίδια επιχειρήματα με εκείνα για την απόδειξη της (2.102α) στην Παρατήρηση 2.15, αν υποθέσουμε ότι δεν ικανοποιείται η (2.166) για κάποιο $x_0 = (x_{10}, x_{20}) \in M_1 \times \mathbb{R}^2 = M$, θα πρέπει να ισχύει

$$a(y(t)) = 0, \forall t \geq 0 \quad (2.167)$$

και συνεπώς

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} a(y(t)) = 0, \forall \nu \in \mathbb{N}, t \geq 0 \quad (2.168)$$

Ακολουθώντας, θα δείξουμε ότι:

$$D^{(\nu)} a(y(0)) y(0) = 0, \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad (2.169)$$

Επομένως, αφού η $a(\cdot)$ είναι μη μηδενική αναλυτική συνάρτηση, θα ισχύει $D^{(\nu)} a(y(0)) \neq 0$, για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$ και άρα από τη (2.169) προκύπτει ότι $y(0) = 0$. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι

$$x_1(0, x_0) = x_1(0, (x_{10}, x_{20})) = x_{10} = 0 \quad (2.170)$$

που είναι άτοπο, αφού $x_{10} \in M_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Η απόδειξη της (2.169) βασίζεται στην ακόλουθη επαγωγική υπόθεση:

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} a(y(t)) = (-1)^\nu D^{(\nu)} a(y(t)) (y(t))^\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}, t \geq 0 \quad (2.171)$$

Πράγματι, από τις (2.168) και (2.171) έπεται άμεσα η (2.169). Για $\nu = 1$ εξάγουμε από τις (2.158) και (2.167) ότι

$$\frac{d}{dt} a(y(t)) = Da(y(t)) \dot{y}(t) = Da(y(t)) (-y(t) + a(y(t))x_2(t)) = (-1)Da(y(t))y(t)$$

οπότε η (2.171) ικανοποιείται για $\nu = 1$. Υποθέτουμε ακολούθως ότι η (2.171) ισχύει για $\nu \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu + 1 \in \mathbb{N}$. Πράγματι, από τις (2.158), (2.167), (2.168) και (2.171) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\nu+1}}{dt^{\nu+1}} a(y(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^\nu}{dt^\nu} a(y(t)) \right) = (-1)^\nu \frac{d}{dt} (D^{(\nu)} a(y(t)) (y(t))^\nu) \\ &= (-1)^\nu [D^{(\nu+1)} a(y(t)) (-y(t) + a(y(t))x_2(t)) (y(t))^\nu \\ &\quad + D^{(\nu)} a(y(t)) \nu (y(t))^{\nu-1} (-y(t) + a(y(t))x_2(t))] \\ &= (-1)^{\nu+1} D^{(\nu+1)} a(y(t)) (y(t))^{\nu+1} \\ &\quad + a(y(t)) (-1)^\nu [D^{(\nu+1)} a(y(t)) x_2(t) (y(t))^\nu \\ &\quad + D^{(\nu)} a(y(t)) \nu (y(t))^{\nu-1} x_2(t)] - \nu (-1)^\nu D^{(\nu)} a(y(t)) (y(t))^\nu \\ &= (-1)^{\nu+1} D^{(\nu+1)} a(y(t)) (y(t))^{\nu+1} \end{aligned}$$

Αποδείχτηκε επομένως η ισχύς της (2.166). Ακολούθως, λαμβάνοντας υπόψη τις (2.159) και (2.166), παρατηρούμε ότι η επιθυμητή (2.165γ) είναι ισοδύναμη με την:

$$\begin{aligned} (0, e)P_R(t)\mathbf{D}(q) \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(0, e)\dot{P}_R(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} &\leq -d_R(t)(0, e)P_R(t) \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} \\ \text{για σχεδόν κάθε } t \geq \bar{t}_0, \forall e \in \mathbb{R}, q \in Q_R(t) & \quad (2.172) \end{aligned}$$

Ορίζουμε:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$P_R(t) := \begin{pmatrix} p_1(t) & p(t) \\ p(t) & p_2(t) \end{pmatrix}, t \geq \bar{t}_0 \quad (2.173)$$

όπου οι $p_1, p_2, p \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ πρόκειται να προσδιοριστούν. Από τις (2.164) και (2.173), έπεται ότι για να δείξουμε τη (2.172), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} p(t)q_2 + p_2(t)q_4 + \frac{1}{2}\dot{p}_2(t) &\leq -d_R(t)p_2(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \\ (q_2, q_4) \in \mathbb{R}^2 : \underline{\sigma}_{R,\xi}^{1,2}(t) \leq q_2 \leq \bar{\sigma}_{R,\xi}^{1,2}(t), \underline{\sigma}_{R,\xi}^{2,2}(t) \leq q_4 \leq \bar{\sigma}_{R,\xi}^{2,2}(t) \end{aligned} \quad (2.174)$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} p_1(t) &:= L, t \geq \bar{t}_0 \\ p_2(t) &:= L, t \geq \bar{t}_0 \\ p(t) &:= 0, t \geq \bar{t}_0 \end{aligned}$$

και

$$d_R(t) := \frac{1}{32t + 16R^2 + 2\xi^2 + 1}, t \geq \bar{t}_0$$

και παρατηρούμε ότι λόγω της (2.162) ισχύει:

$$L(q_4 + d_R(t)) \leq 0, \forall t \geq \bar{t}_0, q_4 \in \mathbb{R} : q_4 \leq \bar{\sigma}_{R,\xi}^{2,2}(t) \quad (2.175)$$

Τότε, η επιθυμητή (2.174) είναι συνέπεια της (2.175). Επίσης, από τον ανωτέρω ορισμό των $d_R(\cdot)$ και $P_R(\cdot)$, έπονται άμεσα οι (2.165α) και (2.165β). Επομένως, το σύστημα (2.158) ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Πορίσματος 2.13 και συνεπώς το AC-SODP είναι επιλύσιμο για το (2.158) ως προς το M . Τέλος, αν κάνουμε την ισχυρότερη υπόθεση ότι ισχύει $a(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διαπιστώνουμε εύκολα ότι το σύστημα (2.158) ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Πορίσματος 2.22 με $M = \mathbb{R}^3$ και άρα το S-SODP είναι επιλύσιμο για το (2.158) ως προς το M .

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή των Προτάσεων 2.16 και 2.24.

Παράδειγμα 2.26 Θεωρούμε το τρισδιάστατο σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a(t, x_1)x_3 + g(t, x_1, x_2) - \xi x_2^q \end{aligned} \quad (2.176\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= 0 \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (2.176\beta)$$

$$(2.176\alpha')$$

όπου ξ είναι μια θετική σταθερά, q ένας θετικός περιττός φυσικός, και $a \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι

$$a(t, x_1) \neq 0, \forall (t, x_1) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), a(t, 0) = 0, \forall t \geq 0 \quad (2.177\alpha)$$

$$g(t, 0, 0) = 0, \forall t \geq 0 \quad (2.177\beta)$$

και ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$ να ισχύει:

$$|a(t, x_1)| \leq C|x_1|, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ μακριά από το μηδέν} \quad (2.178\alpha)$$

$$|g(t, x_1, x_2)| \leq C|(x_1, x_2)|, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ μακριά από το μηδέν} \quad (2.178\beta)$$

Το σύστημα (2.176) έχει τη μορφή (2.3) με $a_1(t, x_1) := 1$, $a_2(t, x_1) := a(t, x_1)$ και είναι εύκολο να επαληθευτεί, ότι λόγω των (2.177) και (2.178), ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις της Πρότασης 2.16 με $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \neq 0\}$, συνεπώς το AC-SODP είναι επιλύσιμο ως προς το M . Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας τη (2.178), μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε αρχική κατάσταση $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}) \in \mathbb{R}^3$ τη χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$, οι λύσεις του (2.176α) ορίζονται για όλους τους χρόνους $t \geq t_0$. Πράγματι, υπολογίζοντας τη χρονική παράγωγο \dot{V} της $V := x_1^2 + x_2^2$ κατά μήκος των τροχιών του (2.176α) και λαμβάνοντας υπόψη τη (2.178), καθώς και το γεγονός ότι $x_3(t) = x_{30}$, $\forall t \geq t_0$, ότι $\xi > 0$ και πως ο q είναι ένας περιττός φυσικός, εξάγουμε ότι για $(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ μακριά από το μηδέν ισχύει:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2x_1x_2 + 2x_2(a(t, x_1)x_3 + g(t, x_1, x_2) - \xi x_2^q) \\
&= 2x_1x_2 + 2x_2a(t, x_1)x_3 + 2x_2g(t, x_1, x_2) - 2\xi x_2^{q+1} \\
&\leq x_1^2 + x_2^2 + 2C|x_1||x_2||x_{30}| + 2C|x_2||x_1, x_2| \\
&\leq x_1^2 + x_2^2 + C|x_{30}|(x_1^2 + x_2^2) + C(x_2^2 + x_1^2 + x_2^2) \\
&\leq (1 + 2C + C|x_{30}|)(x_1^2 + x_2^2) \leq \frac{1 + 2C + C|x_{30}|}{2}V
\end{aligned}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη (2.177) μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει η (2.114). Πράγματι, αν δεν ικανοποιείται η (2.114), θα υπάρχει $t_0 \geq 0$ και

$$x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}) \in M \Rightarrow x_{10} \neq 0 \quad (2.179)$$

ούτως ώστε για τη λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (2.176α) να ισχύει:

$$a(t, x_1(t)) = 0, \text{ για κάθε } t \in N, \quad (2.180)$$

όπου N ένα κλειστό υποσύνολο του $[t_0, \infty)$ με μη μηδενικό μέτρο. Από τη (2.177α) έπεται ότι θα ισχύει $x_1(t) = 0$ για κάθε $t \in N$ και επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του N , για κάποιο $\bar{t} \in N$ θα υπάρχει μια ακολουθία $(t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset N$ με $t_\nu \rightarrow \bar{t}$. Συνεπώς, αφού $x_1(\bar{t}) = x_1(t_\nu) = 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ θα ισχύει:

$$x_1(\bar{t}) = \dot{x}_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) = 0$$

Από την ανωτέρω, τις (2.176α), (2.177) και τη μοναδικότητα της λύσης του (2.176α) προκύπτει:

$$x(t) = (0, 0, x_{30}), \forall t \geq t_0$$

που έρχεται σε αντίφαση με τη (2.179). Τέλος, αν αντί της (2.177α) κάνουμε την ισχυρότερη υπόθεση ότι $a(t, x_1) \neq 0$, για κάθε $(t, x_1) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$, προκύπτει ότι το σύστημα (2.176) ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις της Πρότασης 2.24 με $M = \mathbb{R}^3$, επομένως το S-SODP είναι επιλύσιμο για το (2.176) ως προς το M .

Το ακόλουθο παράδειγμα αποτελεί εφαρμογή της Πρότασης 2.16 σε ένα **μη γραμμικό ταλαντωτή** με τετραγωνικές δυνάμεις απόσβεσης, που περιγράφει ένα μηχανικό σύστημα.

Παράδειγμα 2.27 Θεωρούμε την περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος μάζας m γύρω από έναν οριζόντιο άξονα O , εντός ενός ρευστού. Υποθέτουμε ότι μπορούμε να μετρήσουμε τη γωνία περιστροφής θ του σώματος, ότι οι ρευστοδυναμικές αντιστάσεις είναι ανάλογες του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής με σταθερά αναλογίας $\kappa > 0$ και επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την απόσταση ℓ του κέντρου μάζας του, από τον άξονα O . Αν τέλος στο σώμα ασκείται χρονικώς μεταβαλλόμενη ροπή $T(\cdot)$ όπου $T(\cdot)$ μια μη μηδενική αναλυτική συνάρτηση, λαμβάνουμε την εξίσωση κίνησης:

$$I\ddot{\theta} + \kappa \operatorname{sgn}(\dot{\theta})(\dot{\theta})^2 + mg\ell \sin \theta = T(t)$$

Θεωρώντας τις μεταβλητές κατάστασης $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ και $x_3 = \frac{mg\ell}{I}$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(t) - c \operatorname{sgn}(x_2)x_2^2 - x_3 \sin x_1 \end{aligned} \quad (2.181\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= 0 \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (2.181\beta)$$

με $f(t) = \frac{T(t)}{I}$, $t \geq 0$ και $c = \frac{\kappa}{I} > 0$ περιγράφει το εν λόγω μηχανικό σύστημα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το (2.181) έχει τη μορφή (2.3) και είναι εύκολο να επαληθευτεί, ότι αφού η $f(\cdot)$ είναι μη μηδενική αναλυτική συνάρτηση και ισχύει $c > 0$, ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.16, συνεπώς είναι δυνατή η σχεδίαση μιας ακολουθίας μη αιτιατών παρατηρητών για την εκτίμηση της κατάστασής του, επομένως και του μήκους $\ell = \frac{x_3 I}{mg}$.

2.7 Παράρτημα

Απόδειξη του σκέλους (i) του Λήμματος 2.11

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

Αρχικά θα βρούμε μια τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$ συνάρτηση $\tilde{d} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ με

$$\tilde{d}(t) \leq d(t), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.182\alpha)$$

$$\int_{\bar{t}_0}^{\infty} (d(s) - \tilde{d}(s)) ds \leq \delta\varepsilon := \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon}{2} \quad (2.182\beta)$$

και τέτοια ώστε να ισχύει η (2.71β) για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ με $\tilde{d}(\cdot)$ στη θέση της $d(\cdot)$. Για την ανάλυση που ακολουθεί, αφού $P \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ ο πίνακας $P(t)$ είναι θετικά ορισμένος, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι ισχύει:

$$P(t) \geq I_{n \times n}, \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (2.183)$$

Έστω N το υποσύνολο του $[\bar{t}_0, \infty)$ για το οποίο δεν ικανοποιείται η ανισότητα της (2.71β). Προφανώς το μέτρο του N θα είναι μηδέν. Ορίζουμε:

$$\delta\tau := \frac{\tau - \tau_0}{2} \quad (2.184\alpha)$$

$$I_\kappa := [\bar{t}_0 + (\kappa - 1)\delta\tau, \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau] := [a_\kappa, b_\kappa], \kappa \in \mathbb{N} \quad (2.184\beta)$$

$$M_{\kappa,1} := \max\{|d(s)| : s \in I_\kappa \cup I_{\kappa+1}\}, \kappa \in \mathbb{N} \quad (2.185\alpha)$$

$$M_{\kappa,2} := \max\{|P(s)||A(s, q, y(s))| + \frac{1}{2}|\dot{P}(s)| : s \in I_\kappa \cup I_{\kappa+1}, q \in Q(s)\}, \kappa \in \mathbb{N} \quad (2.185\beta)$$

$$M_\kappa := \max\{M_{\kappa,1}, M_{\kappa,2}\}, \kappa \in \mathbb{N}, M_0 := 0 \quad (2.186\alpha)$$

$$\bar{M}_\kappa := \max\{M_\kappa, \bar{M}_{\kappa-1}\}, \kappa \in \mathbb{N}, \bar{M}_0 := M_1 \quad (2.186\beta)$$

Από τις (2.185α)-(2.186β) έπονται οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$-\bar{M}_\kappa \leq d(t) \leq \bar{M}_\kappa, \forall t \in I_\kappa \cup I_{\kappa+1} \quad (2.187\alpha)$$

$$\bar{M}_\kappa \geq |P(t)||A(t, q, y(t))| + |\dot{P}(t)|, \forall t \in I_\kappa \cup I_{\kappa+1}, q \in Q(t) \quad (2.187\beta)$$

Πράγματι, από τις (2.185α), (2.186α) και (2.186β) έχουμε:

$$|\bar{M}_\kappa| \geq |M_\kappa| \geq |M_{\kappa,1}| \geq |d(t)|, \forall t \in I_\kappa \cup I_{\kappa+1}$$

επομένως ισχύει η (2.187α), ενώ από τις (2.185β), (2.186α) και (2.186β) προκύπτει ότι:

$$\bar{M}_\kappa \geq M_\kappa \geq M_{\kappa,2} \geq |P(t)||A(t, q, y(t))| + |\dot{P}(t)|, \forall t \in I_\kappa \cup I_{\kappa+1}, q \in Q(t)$$

Εν συνεχεία, ορίζουμε:

$$\delta_\kappa := \min \left\{ \frac{\delta\tau}{2}, \frac{\delta\varepsilon}{2^{\kappa+2}\bar{M}_\kappa} \right\} \quad (2.188)$$

Αφού για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ το μέτρο του $I_\kappa \cap N$ είναι μηδενικό, μπορούμε για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ να βρούμε ένα φυσικό αριθμό $\nu_\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και διαστήματα $\{I_\kappa^i\}_{i=1,2,\dots,\nu_\kappa}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$I_\kappa^i := [a_\kappa^i, b_\kappa^i] \quad (2.189\alpha)$$

$$a_\kappa^1 < b_\kappa^1 < a_\kappa^2 < \dots < b_\kappa^{i-1} < a_\kappa^i < b_\kappa^i < a_\kappa^{i+1} < \dots < b_\kappa^{\nu_\kappa-1} < a_\kappa^{\nu_\kappa} < b_\kappa^{\nu_\kappa}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\nu_\kappa} I_\kappa^i \subset I_\kappa \quad (2.189\beta)$$

$$\sum_{i=1}^{\nu_\kappa} (b_\kappa^i - a_\kappa^i) < \delta_\kappa \quad (2.189\gamma)$$

$$a_\kappa (= \bar{t}_0 + (\kappa - 1)\delta\tau) \in \text{cl}(N) \text{ αν και μόνο αν } a_\kappa^1 = a_\kappa \quad (2.189\delta)$$

$$b_\kappa (= \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau) \in \text{cl}(N) \text{ αν και μόνο αν } b_\kappa^{\nu_\kappa} = b_\kappa \quad (2.189\epsilon)$$

όπου με $\text{cl}(N)$ συμβολίζουμε την κλειστότητα του συνόλου N . Από τη (2.189α) συμπεραίνουμε ότι τα διαστήματα $\{I_\kappa^i\}_{i=1,2,\dots,\nu_\kappa}$ είναι μεταξύ τους ξένα και από τις (2.184α), (2.189α) και (2.189β) ότι ισχύει:

$$a_\kappa \leq a_\kappa^1 \leq b_\kappa^{\nu_\kappa} \leq b_\kappa \quad (2.190\alpha)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.184β) και (2.189α) ορίζουμε:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$b_{\kappa}^0 := a_{\kappa}, a_{\kappa}^{\nu_{\kappa}+1} := b_{\kappa} \quad (2.190\beta)$$

$$\rho_{\kappa}^{i,L} := \min \left\{ \frac{b_{\kappa}^i - a_{\kappa}^i}{2}, \frac{a_{\kappa}^i - b_{\kappa}^{i-1}}{3} \right\}, i = 1, 2, \dots, \nu_{\kappa}, \kappa \in \mathbb{N} \quad (2.191\alpha)$$

$$\rho_{\kappa}^{i,R} := \min \left\{ \frac{b_{\kappa}^i - a_{\kappa}^i}{2}, \frac{a_{\kappa}^{i+1} - b_{\kappa}^i}{3} \right\}, i = 1, 2, \dots, \nu_{\kappa}, \kappa \in \mathbb{N} \quad (2.191\beta)$$

Από τις (2.189α) και (2.190α)-(2.191β) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\nu_{\kappa}, \kappa \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\rho_{\kappa}^{i,L} > 0, \forall i = 2, 3, \dots, \nu_{\kappa}; \rho_{\kappa}^{1,L} \geq 0 \quad (2.192\alpha)$$

$$\rho_{\kappa}^{i,R} > 0, \forall i = 1, 2, \dots, \nu_{\kappa} - 1; \rho_{\kappa}^{\nu_{\kappa},R} \geq 0 \quad (2.192\beta)$$

και επιπλέον:

$$\rho_{\kappa}^{1,L} = 0 \iff a_{\kappa}^1 = a_{\kappa} \quad (2.193\alpha)$$

$$\rho_{\kappa}^{\nu_{\kappa},R} = 0 \iff b_{\kappa}^{\nu_{\kappa}} = b_{\kappa} \quad (2.193\beta)$$

Ειδικότερα, για κάθε $\nu_{\kappa}, \kappa \in \mathbb{N}$, εξάγουμε από τις (2.189α) και (2.190α)-(2.192β) ότι:

$$\begin{aligned} a_{\kappa} = b_{\kappa}^0 &\leq a_{\kappa}^1 - \rho_{\kappa}^{1,L} \leq a_{\kappa}^1 < b_{\kappa}^1 < b_{\kappa}^1 + \rho_{\kappa}^{1,R} < a_{\kappa}^2 - \rho_{\kappa}^{2,L} < \dots \\ &< b_{\kappa}^{i-1} + \rho_{\kappa}^{i-1,R} < a_{\kappa}^i - \rho_{\kappa}^{i,L} < a_{\kappa}^i < b_{\kappa}^i < b_{\kappa}^i + \rho_{\kappa}^{i,R} < a_{\kappa}^{i+1} - \rho_{\kappa}^{i+1,L} < \dots \\ &< b_{\kappa}^{\nu_{\kappa}-1} + \rho_{\kappa}^{\nu_{\kappa}-1,R} < a_{\kappa}^{\nu_{\kappa}} - \rho_{\kappa}^{\nu_{\kappa},L} < a_{\kappa}^{\nu_{\kappa}} < b_{\kappa}^{\nu_{\kappa}} \leq b_{\kappa}^{\nu_{\kappa}} + \rho_{\kappa}^{\nu_{\kappa},R} \leq a_{\kappa}^{\nu_{\kappa}+1} = b_{\kappa} \end{aligned} \quad (2.194)$$

Από τις (2.184β), (2.187α) και (2.194) μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\tilde{d}(\cdot)$ με:

$$\tilde{d}(t) \left\{ \begin{array}{l} := -\bar{M}_{\kappa-1}, t \in [a_{\kappa}, b_{\kappa}^1) \\ \in [-\bar{M}_{\kappa-1}, d(t)], t \in [b_{\kappa}^1, b_{\kappa}^1 + \rho_{\kappa}^{1,R}) \\ := -d(t), t \in [b_{\kappa}^{i-1} + \rho_{\kappa}^{i-1,R}, a_{\kappa}^i - \rho_{\kappa}^{i,L}) \\ \in [-\bar{M}_{\kappa}, d(t)], t \in [a_{\kappa}^i - \rho_{\kappa}^{i,L}, a_{\kappa}^i) \\ := -\bar{M}_{\kappa}, t \in [a_{\kappa}^i, b_{\kappa}^i) \\ \in [-\bar{M}_{\kappa}, d(t)], t \in [b_{\kappa}^i, b_{\kappa}^i + \rho_{\kappa}^{i,R}) \\ := d(t), t \in [b_{\kappa}^{\nu_{\kappa}} + \rho_{\kappa}^{\nu_{\kappa},R}, b_{\kappa}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{αν } a_{\kappa}^1 = a_{\kappa} \\ \text{για } i = 2, 3, \dots, \nu_{\kappa} \\ \text{αν } a_{\kappa}^1 = a_{\kappa} \\ \text{για } i = 1, 2, \dots, \nu_{\kappa} \\ \text{αν } a_{\kappa}^1 > a_{\kappa} \end{array} \quad (2.195)$$

όπου $\kappa \in \mathbb{N}$ και

$$\rho_{\kappa}^{0,R} := 0 \quad (2.196)$$

και ούτως ώστε να ισχύει ότι:

$$\eta \tilde{d}(\cdot) \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } t \in (\bar{t}_0 + (\kappa - 1)\delta\tau, \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau), \kappa \in \mathbb{N} \quad (2.197)$$

Ακολούθως, αποδεικνύουμε ότι η $\tilde{d}(\cdot)$ όπως ορίζεται από τη (2.195), είναι συνεχής, ικανοποιεί τις (2.182α), (2.182β) και επιπλέον η (2.71β) ισχύει με $\tilde{d}(\cdot)$ στη θέση της $d(\cdot)$, για κάθε $t \geq \bar{t}_0$.

• **Η $\tilde{d}(\cdot)$ είναι συνεχής για κάθε $t \geq \bar{t}_0$.**

Έστω $t \geq \bar{t}_0$. Τότε υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ με $\bar{t}_0 + (\kappa - 1)\delta\tau \leq t < \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau$. Αν $\kappa = 1$, τότε η $\tilde{d}(\cdot)$ είναι συνεχής στο \bar{t}_0 λόγω της (2.195). Επιπλέον, από τη (2.197) η $\tilde{d}(\cdot)$ είναι συνεχής για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ όταν ισχύει $\bar{t}_0 + (\kappa - 1)\delta\tau < t < \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau$. Απομένει να δείξουμε ότι η $\tilde{d}(\cdot)$ είναι συνεχής για κάθε $t = \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau$, $\kappa \in \mathbb{N}$.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(α) $t_0 + \kappa\delta\tau \in [t_0, \infty) \setminus \text{cl}(N)$.

Τότε από τις (2.189δ), (2.189ε), (2.193α), (2.193β), (2.194) και (2.195) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(t) &= d(t), t \in [b_{\kappa}^{\nu_{\kappa}} + \rho_{\kappa}^{\nu_{\kappa},R}, \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau) \\ \tilde{d}(t) &= d(t), t \in [\bar{t}_0 + \kappa\delta\tau, a_{\kappa+1}^1 - \rho_{\kappa+1}^{1,L}) \end{aligned}$$

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

άρα η $\tilde{d}(\cdot)$ είναι συνεχής στο $\bar{t}_0 + \kappa\delta\tau$.

(β) $t_0 + \kappa\delta\tau \in \text{cl}(N)$.

Τότε, πάλι από τις (2.189δ), (2.189ε), (2.193α), (2.193β), (2.194) και (2.195) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\tilde{d}(t) &= -\bar{M}_\kappa, t \in [a_\kappa^\nu, \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau) \\ \tilde{d}(t) &= -\bar{M}_\kappa, t \in [\bar{t}_0 + \kappa\delta\tau, b_{\kappa+1}^1)\end{aligned}$$

άρα η $\tilde{d}(\cdot)$ είναι συνεχής στο $\bar{t}_0 + \kappa\delta\tau$.

• Η $\tilde{d}(\cdot)$ ικανοποιεί τη (2.182α).

Από τη (2.187α) συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$-\bar{M}_\kappa \leq d(t), -\bar{M}_{\kappa-1} \leq d(t), \forall t \in I_\kappa$$

οπότε το ζητούμενο έπεται άμεσα από την ανωτέρω και τις (2.184β), (2.195).

• Η $\tilde{d}(\cdot)$ ικανοποιεί τη (2.182β).

Από τη (2.182α) εξάγουμε ότι η απεικόνιση $t \rightarrow \int_{\bar{t}_0}^t (d(s) - \tilde{d}(s))ds$ είναι αύξουσα, οπότε για να δείξουμε τη (2.182β) αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_0 + \kappa\delta\tau} (d(s) - \tilde{d}(s))ds \leq \delta\varepsilon, \forall \kappa \in \mathbb{N} \quad (2.198\alpha)$$

Προκειμένου να ισχύει η (2.198α) αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\int_{\bar{t}_0 + (\kappa-1)\delta\tau}^{\bar{t}_0 + \kappa\delta\tau} (d(s) - \tilde{d}(s))ds \leq \frac{\delta\varepsilon}{2^\kappa}, \forall \kappa \in \mathbb{N} \quad (2.198\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.187α), (2.188), (2.189γ), (2.189δ), (2.191α), (2.191β) και (2.195) εξάγουμε ότι όταν $a_\kappa \in [\bar{t}_0, \infty) \setminus \text{cl}(N)$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\bar{t}_0 + (\kappa-1)\delta\tau}^{\bar{t}_0 + \kappa\delta\tau} (d(s) - \tilde{d}(s)) ds \\
 &= \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} \int_{a_\kappa^i - \rho_\kappa^{i,L}}^{b_\kappa^i + \rho_\kappa^{i,R}} (d(s) - \tilde{d}(s)) ds \leq \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} \int_{a_\kappa^i - \rho_\kappa^{i,L}}^{b_\kappa^i + \rho_\kappa^{i,R}} (d(s) + \bar{M}_\kappa) ds \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} \int_{a_\kappa^i - \rho_\kappa^{i,L}}^{b_\kappa^i + \rho_\kappa^{i,R}} 2\bar{M}_\kappa ds = 2\bar{M}_\kappa \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} (\rho_\kappa^{i,L} + (b_\kappa^i - a_\kappa^i) + \rho_\kappa^{i,R}) \\
 &\leq 2\bar{M}_\kappa \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} \left(\frac{b_\kappa^i - a_\kappa^i}{2} + b_\kappa^i - a_\kappa^i + \frac{b_\kappa^i - a_\kappa^i}{2} \right) \\
 &= 4\bar{M}_\kappa \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} (b_\kappa^i - a_\kappa^i) \leq 4\bar{M}_\kappa \frac{\delta\varepsilon}{2^{\kappa+2}\bar{M}_\kappa} = \frac{\delta\varepsilon}{2^\kappa}
 \end{aligned}$$

επομένως ικανοποιείται η (2.198β). Επικαλούμενοι τώρα τις (2.186β), (2.187α), (2.188), (2.189γ), (2.189δ), (2.191α), (2.191β), (2.193α) και (2.195), στην περίπτωση όπου $a_\kappa \in \text{cl}(N)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\bar{t}_0 + (\kappa-1)\delta\tau}^{\bar{t}_0 + \kappa\delta\tau} (d(s) - \tilde{d}(s)) ds \\
 &= \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} \int_{a_\kappa^i - \rho_\kappa^{i,L}}^{b_\kappa^i + \rho_\kappa^{i,R}} (d(s) - \tilde{d}(s)) ds \\
 &\leq \int_{a_\kappa^1}^{b_\kappa^1 + \rho_\kappa^{1,R}} (d(s) + \bar{M}_{\kappa-1}) ds + \sum_{i=2}^{\nu_\kappa} \int_{a_\kappa^i - \rho_\kappa^{i,L}}^{b_\kappa^i + \rho_\kappa^{i,R}} (d(s) + \bar{M}_\kappa) ds \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} \int_{a_\kappa^i - \rho_\kappa^{i,L}}^{b_\kappa^i + \rho_\kappa^{i,R}} (d(s) + \bar{M}_\kappa) ds \leq \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} \int_{a_\kappa^i - \rho_\kappa^{i,L}}^{b_\kappa^i + \rho_\kappa^{i,R}} 2\bar{M}_\kappa ds \\
 &= 2\bar{M}_\kappa \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} (\rho_\kappa^{i,L} + (b_\kappa^i - a_\kappa^i) + \rho_\kappa^{i,R}) \leq 2\bar{M}_\kappa \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} \left(\frac{b_\kappa^i - a_\kappa^i}{2} + b_\kappa^i - a_\kappa^i + \frac{b_\kappa^i - a_\kappa^i}{2} \right) \\
 &= 4\bar{M}_\kappa \sum_{i=1}^{\nu_\kappa} (b_\kappa^i - a_\kappa^i) \leq 4\bar{M}_\kappa \frac{\delta\varepsilon}{2^{\kappa+2}\bar{M}_\kappa} = \frac{\delta\varepsilon}{2^\kappa}
 \end{aligned}$$

επομένως η (2.198β) ισχύει για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

• Η (2.71β) ισχύει με $\tilde{d}(\cdot)$ στη θέση της $d(\cdot)$ για κάθε $t \geq \bar{t}_0$.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

(α) $t \in [\bar{t}_0, \infty) \setminus \text{cl}(N)$.

Τότε, από τις (2.71β), (2.182α) και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πίνακας $P(t)$ είναι θετικά ορισμένος εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned} e'P(t)A(t, q, y(t))e + \frac{1}{2}e'P(t)e &\leq -d(t)e'P(t)e \\ &\leq -d(t)e'P(t)e + (d(t) - \tilde{d}(t))e'P(t)e = -\tilde{d}(t)e'P(t)e \\ \forall e \in \ker H(t), q \in Q(t), &\text{ δεδομένου ότι ισχύει η (2.21)} \end{aligned}$$

(β) $t \in \text{cl}(N)$.

Τότε θα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ με $t \in [\bar{t}_0 + (\kappa - 1)\delta\tau, \bar{t}_0 + \kappa\delta\tau)$, δηλαδή $t \in I_\kappa$. Επιπλέον, αφού η (2.71β) είναι ισοδύναμη με την (2.75), αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιείται η τελευταία για το συγκεκριμένο χρόνο t . Από τις (2.189α), (2.189β) και (2.195), συμπεραίνουμε ότι θα ισχύει είτε $\tilde{d}(t) = -\bar{M}_\kappa$ είτε $\tilde{d}(t) = -\bar{M}_{\kappa-1}$, και αφού (λόγω της (2.186β)) $\bar{M}_\kappa \geq \bar{M}_{\kappa-1} \geq 0$, αρκεί λαμβάνοντας υπόψη τη (2.183) να δείξουμε ότι:

$$|P(t)||A(t, q, y(t))| + |\dot{P}(t)| \leq \bar{M}_{\kappa-1}, \forall q \in Q(t)$$

όπου $t \in I_\kappa$. Η τελευταία όμως είναι άμεση συνέπεια της (2.187β).

Από την ανωτέρω ανάλυση και ειδικότερα από τις (2.184α)-(2.186β) και (2.195), προκύπτει ότι η $\tilde{d}(\cdot)$ είναι τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$. Ακολουθώντας, όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 2.7, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\hat{d} \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, τ -μη αιτιατή ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, με

$$\hat{d}(t) < \tilde{d}(t), \forall t \geq t_0 \tag{2.199}$$

η οποία λόγω της (2.182α) ικανοποιεί τη (2.72), ενώ λόγω της (2.182β) ισχύει η (2.71α) με $\hat{d}(\cdot)$ και $\hat{\varepsilon}$, στη θέση των $d(\cdot)$ και ε , αντίστοιχα. Τέλος, αφού ο $P(t)$ είναι θετικά ορισμένος για κάθε $t \geq \bar{t}_0$, από τις (2.183), (2.199) και το γεγονός ότι η (2.71β) ισχύει για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ με $\tilde{d}(\cdot)$ στη θέση της $d(\cdot)$, προκύπτει άμεσα ότι η (2.71β) ισχύει για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ και με $\hat{d}(\cdot)$ στη θέση της $d(\cdot)$. \square

Απόδειξη του ισχυρισμού της ενότητας 2.3

Αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός χρονικώς μεταβαλλόμενου πίνακα $T \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}^{n_1 \times n_1})$, τ -μη αιτιατό ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$, έτσι ώστε και οι δυο ανισότητες της (2.79α) να ικανοποιούνται με την $\bar{P}(\cdot)$ όπως δίνεται από τις (2.78), (2.83) και (2.88γ). Αρχικά ορίζουμε:

$$I_k := \begin{pmatrix} 0_{k \times (n_1 - k)} & I_{k \times k} \end{pmatrix}, S_k(t) := I_k S(t), k = 1, 2, \dots, n_1, t \geq \bar{t}_0 \quad (2.200)$$

όπου η $S(\cdot)$ προσδιορίζεται στις (2.83) και (2.88γ). Προφανώς, από τις (2.83), (2.88γ) και (2.200) έχουμε:

$$S_k(\bar{t}_0) = 0, k = 1, 2, \dots, n_1 \quad (2.201)$$

Επίσης ορίζουμε:

$$T_k(t) := \begin{pmatrix} \tau_{k,k}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau_{1,1}(t) \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots, n_1, t \geq \bar{t}_0 \quad (2.202)$$

$$P_k(t) := \begin{pmatrix} T_k(t) & S_k(t) \\ S'_k(t) & P(t) \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots, n_1, P_0(t) := P(t), t \geq \bar{t}_0 \quad (2.203)$$

όπου οι $\tau_{k,k} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ πρόκειται να προσδιοριστούν. Προχωράμε επαγωγικά στην κατασκευή των $\tau_{k,k}$, $k = 1, 2, \dots, n_1$ έτσι ώστε κάθε απεικόνιση $P_k(\cdot)$ να ικανοποιεί και τις δυο απαιτήσεις της (2.79α). Ειδικότερα, λαμβάνοντας υπόψη τις (2.77α), (2.201)-(2.203) μπορούμε να δείξουμε (με επαγωγή) ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $1 \leq k \leq n_1$ και $i = 1, 2, \dots, k$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \det(P_i(t) - I_{(n_2+i) \times (n_2+i)}) &:= (\tau_{i,i}(t) - 1) \det(P_{i-1}(t) - I_{(n_2+i-1) \times (n_2+i-1)}) \\ &\quad + K_i(t), t \geq \bar{t}_0; \end{aligned} \quad (2.204\alpha)$$

όπου

2. Ικανές Συνθήκες για την Ύπαρξη Παρατηρητή για Χρονικώς Μεταβαλλόμενα μη Γραμμικά Συστήματα

$$\tau_{i,i} := L - \frac{K_i(t)}{\det(P_{i-1}(t) - I_{(n_2+i-1) \times (n_2+i-1)})}, t \geq \bar{t}_0, \quad (2.204\beta)$$

κάθε συνάρτηση $K_i \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, k$ είναι ανεξάρτητη των $\tau_{j,j}(\cdot)$, $i \leq j \leq k$ και επιπλέον ισχύει:

$$\det(P_i(t) - I_{(n_2+i) \times (n_2+i)}) > 0, \forall t \geq \bar{t}_0; \quad (2.204\gamma)$$

$$K_i(\bar{t}_0) = 0 \quad (2.204\delta)$$

Από τις (2.77α) και (2.204γ) έπεται ότι κάθε $P_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n_1$ ικανοποιεί την πρώτη ανισότητα της (2.79α). Επιπλέον, από τις (2.201)-(2.203) προκύπτει ότι:

$$P_k(\bar{t}_0) := \begin{pmatrix} \tau_{k,k}(\bar{t}_0) & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & \tau_{1,1}(\bar{t}_0) & & \\ & & 0 & & P(\bar{t}_0) \end{pmatrix}$$

επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη ανισότητα της (2.77α) καθώς και τις (2.204β) και (2.204δ), συμπεραίνουμε ότι για κάθε διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_2+k}) \in \mathbb{R}^{n_2+k}$ με $|x| = 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} |P_k(\bar{t}_0)x| &= |(\tau_{k,k}(\bar{t}_0)x_1, \dots, \tau_{1,1}(\bar{t}_0)x_k, P(\bar{t}_0)(x_{k+1}, \dots, x_{k+n_2})')| \\ &= \left(\sum_{i=1}^k |\tau_{k+1-i, k+1-i}(\bar{t}_0)|^2 |x_i|^2 + |P(\bar{t}_0)(x_{k+1}, \dots, x_{k+n_2})'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k L^2 |x_i|^2 + |L(x_{k+1}, \dots, x_{k+n_2})'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L|x| \end{aligned}$$

και άρα η απεικόνιση $P_k(\cdot)$ ικανοποιεί και τη δεύτερη ανισότητα της (2.79α). Συνεπώς, ο χρονικώς μεταβαλλόμενος πίνακας $\bar{P}(\cdot) := P_{n_1}(\cdot)$ ικανοποιεί και τις δυο ανισότητες της (2.79α). \square

Παρατήρηση 2.28 Στην περίπτωση του SODP προκύπτει από τη (2.83) και τη (2.150) (για τις $S(\cdot)$ και $\dot{S}(\cdot)$) ότι οι απεικονίσεις

$$[\bar{t}_0, \infty) \times U \ni (t, x_0) \rightarrow \begin{cases} S_{k,t_0,\bar{t}_0,y_{t_0,x_0}}(t) (= S_k(t)) \\ \dot{S}_{k,t_0,\bar{t}_0,y_{t_0,x_0}}(t) (= \dot{S}_k(t)) \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n_1$$

όπως δίνονται από τη (2.200) είναι συνεχείς και αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$. Επομένως, αφού οι συναρτήσεις

$$[\bar{t}_0, \infty) \times U \ni (t, x_0) \rightarrow \begin{cases} K_{i,t_0,\bar{t}_0,y_{t_0,x_0}}(t) (= K_i(t)) \\ \tau_{i,i,t_0,\bar{t}_0,y_{t_0,x_0}}(t) (= \tau_{i,i}(t)) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n_1$$

είναι πολυωνυμικές και ρητές (αντίστοιχα) συναρτήσεις των στοιχείων των πινάκων $S_i(\cdot)$, $T_{i-1}(\cdot)$ (για $i \geq 2$) και $P(\cdot)$ (η εν λόγω ιδιότητα έπεται άμεσα από τις (2.202), (2.203), (2.204α) και (2.204β)) αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι είναι συνεχείς και αιτιατές ως προς το σύνολο $\Omega(t_0, U)$. Επομένως και η απεικόνιση $T = T_{n_1}$ (όπως η τελευταία δίνεται από τη (2.202) με $k = n_1$) ικανοποιεί τις ιδιότητες της (2.150).

3

Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο, παρατίθενται τα αποτελέσματα της εργασίας [17], όπου επεκτείνεται η μεθοδολογία του άρθρου [71], προκειμένου ναδειχθεί ότι το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή είναι επιλύσιμο για την ακόλουθη κλάση χρονικά μεταβαλλόμενων μη γραμμικών συστημάτων

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + a_1(t, x_1)x_2^{m_1} \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2) + a_2(t, x_1)x_3^{m_2} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, x_1)x_n^{m_{n-1}} \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{3.1\alpha}$$

$$y = x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \tag{3.1\beta}$$

όπου υποθέτουμε ότι οι εκθέτες

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$m_i, i = 1, \dots, n - 1 \text{ είναι περιττοί φυσικοί} \quad (3.1\gamma)$$

και με τις επιπλέον υποθέσεις ότι οι τιμές των συναρτήσεων $|a_i(\cdot, \cdot)|, i = 1, 2, \dots, n - 1$ είναι **αυστηρά θετικές**, δηλαδή ισχύει $|a_i(t, y)| > 0$ για κάθε $t \geq 0$ και $y \in \mathbb{R}$ και ότι το σύστημα (3.1α) είναι **δεξιά πλήρες**. Το εν λόγω κεφάλαιο έχει την ακόλουθη δομή. Στην παρούσα ενότητα προσδιορίζονται οι απαραίτητες για την ανάλυσή μας έννοιες, συμπεριλαμβανομένης αυτής του **διακοπόμενου παρατηρητή** (switching observer) που υιοθετήθηκε αρχικά στην εργασία [16] για γενικά χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3.2\alpha)$$

$$y = h(t, x), t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \quad (3.2\beta)$$

όπου $y(\cdot)$ είναι η έξοδος του συστήματος και διατυπώνεται το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου (Θεώρημα 3.2).

Η Ενότητα 3.2 περιλαμβάνει προκαταρκτικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση του προβλήματος σχεδίασης παρατηρητή για συστήματα της μορφής (3.2α) με γραμμική έξοδο (Προτάσεις 3.3 και 3.5).

Στην Ενότητα 3.3 χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα της Ενότητας 3.2 προκειμένου να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2. Παραδείγματα εφαρμογής της εν λόγω μεθοδολογίας δίνονται στην Ενότητα 3.4.

Για τις απεικονίσεις στην (3.2) υποθέτουμε ότι η $f(\cdot, \cdot)$ είναι τοπικά Lipschitz, η $h(\cdot, \cdot)$ είναι συνεχής και επιπλέον, υποθέτουμε ότι το (3.2α) είναι δεξιά πλήρες. Ειδικότερα, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.65, υπάρχει μια συνάρτηση $\beta \in \mathcal{NN}$ τέτοια ώστε η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (2.1α) με αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τον αρχικό χρόνο $t_0 \geq 0$, να ικανοποιεί την εκτίμηση (1.104). Επομένως, αν θεωρήσουμε ένα μη κενό υποσύνολο M του \mathbb{R}^n , ορίζεται για κάθε $t_0 \geq 0$ το σύνολο $O(t_0, M)$ όλων των εξόδων του (3.2), όπως δίνεται από την (1.105).

Ορισμός 3.1 Έστω $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το **Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή (Observer Design Problem (ODP))** είναι επιλύσιμο για το σύστημα (3.2) ως προς το M , αν για κάθε $t_0 \geq 0$ υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $G :=$

$G_{t_0}(t, z, w) : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ και ένα μη κενό σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε για κάθε $z_0 \in \bar{M}$ και έξοδο $y \in O(t_0, M)$ η αντίστοιχη λύση $z(\cdot) := z(\cdot, t_0, z_0; y)$, $z(t_0) = z_0$ του παρατηρητή $\dot{z} = G(t, z, y)$ να ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$ και το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - z(\cdot)$ ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$, $x_0 \in M$ του (3.2α) και την τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, t_0, z_0; y)$ του παρατηρητή, να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (3.3)$$

Λέμε ότι το **Διακοπτόμενο Πρόβλημα Σχεδίασης Παρατηρητή (Switching Observer Design Problem (SODP))** είναι επιλύσιμο για το σύστημα (3.2) ως προς το M , αν για κάθε $t_0 \geq 0$ υπάρχουν:

- μια γνησίως αύξουσα ακολουθία χρόνων $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με

$$t_1 = t_0 \text{ και } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty \quad (3.4)$$

- μια ακολουθία συνεχών απεικονίσεων

$$G_k := G_{k, t_{k-1}}(t, z, w) : [t_{k-1}, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \rightarrow \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

και ένα μη κενό σύνολο $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$, ούτως ώστε η λύση $z_k(\cdot)$ του συστήματος

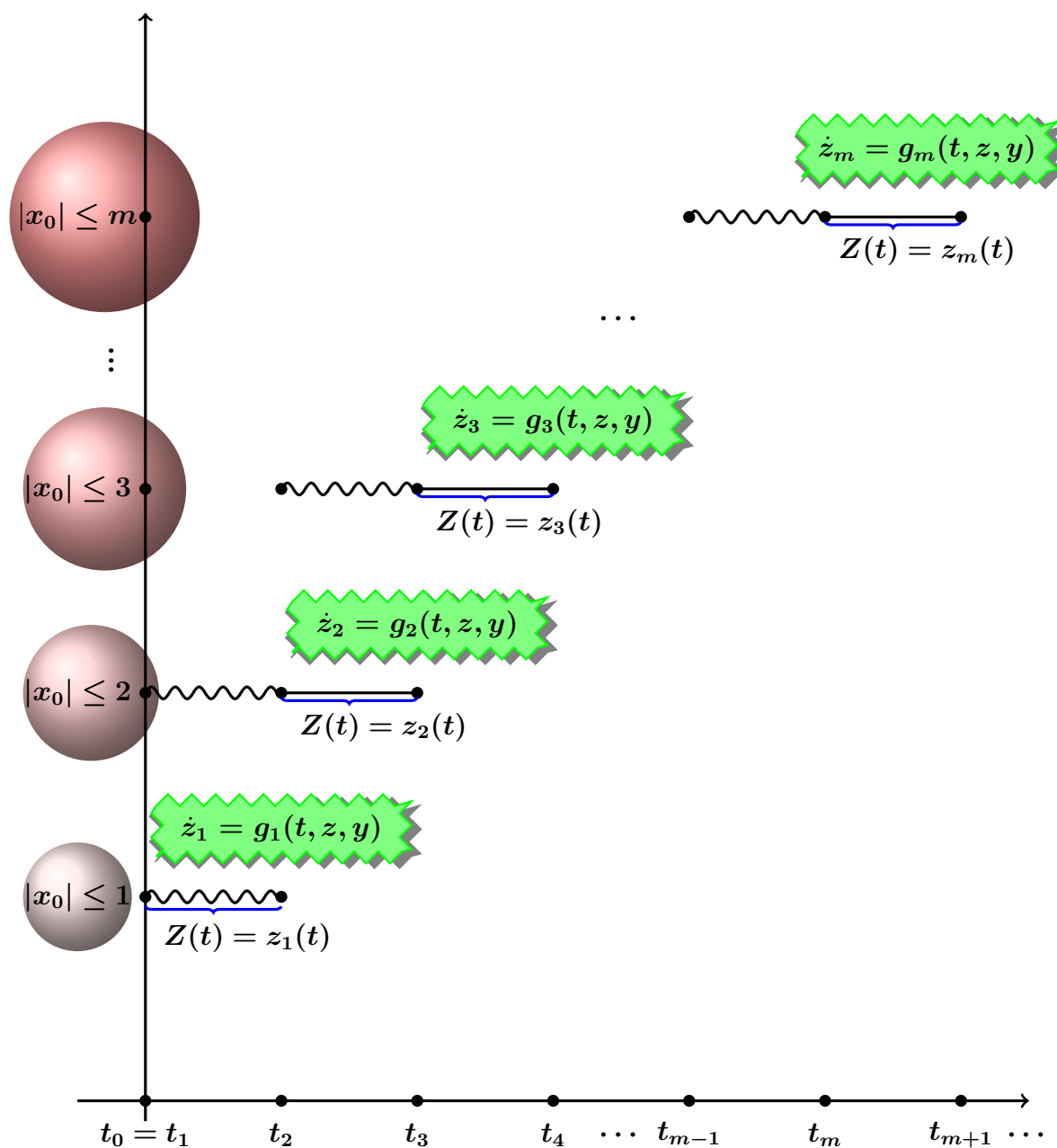
$$\dot{z}_k = G_k(t, z_k, y), t \in [t_{k-1}, t_{k+1}] \quad (3.6)$$

με αρχική κατάσταση $z(t_{k-1}) \in \bar{M}$ και $y \in O(t_0, M)$, να ορίζεται για κάθε $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$ και έτσι ώστε αν θεωρήσουμε την τμηματικά συνεχή απεικόνιση $Z : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως

$$Z(t) := z_k(t), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

όπου $z_k(\cdot)$ η λύση του (3.6) για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - Z(\cdot)$ ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (3.2α) και τη $Z(\cdot)$ να ικανοποιεί την (3.3).

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση



Διακοπτόμενη ακολουθία παρατηρητών των οποίων τα δεξιά μέλη είναι ανεξάρτητα της εξόδου $y(\cdot)$

Το κύριο αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2 Θεωρούμε το σύστημα (3.1) όπου $f_i \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^i; \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$ και $a_i \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Υποθέτουμε ότι το (3.1α)

είναι δεξιά πλήρες και ειδικότερα, ότι η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (3.1α) ικανοποιεί την εκτίμηση (1.104) για δοσμένη $\beta \in \mathcal{NN}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$|a_i(t, y)| > 0, \forall t \geq 0, y \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.8)$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

- (i) Το SODP είναι επιλύσιμο για το (3.1) ως προς τον \mathbb{R}^n .
- (ii) Αν επιπλέον υποθέσουμε, ότι είναι εκ των προτέρων γνωστό πως η αρχική κατάσταση του συστήματος (3.1) ανήκει σε δοσμένη μπάλα B_R με ακτίνα $R > 0$ και κέντρο το $0 \in \mathbb{R}^n$, τότε το ODP είναι επιλύσιμο για το (3.1) ως προς την B_R .

3.2 Προκαταρκτικά Αποτελέσματα

Προκειμένου να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.2, χρειάζεται αρχικά να εξάγουμε κάποια τεχνικά αποτελέσματα για συστήματα της μορφής (3.2) με γραμμική έξοδο:

$$\dot{x} = f(t, x) := F(t, x, H(t)x) \quad (3.9\alpha)$$

$$y = h(t, x) := H(t)x, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \quad (3.9\beta)$$

όπου η $H : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{n} \times n}$ είναι C^0 και η $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^0 και (τοπικά) Lipschitz ως προς $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το σύστημα (3.9α) είναι δεξιά πλήρες, δηλαδή ότι η λύση $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (3.9α) ικανοποιεί την εκτίμηση (1.104) για κάποια $\beta \in \mathcal{NN}$. Ακολουθώντας, για κάθε $R > 0$ και $t \geq 0$ ορίζουμε το σύνολο:

$$Y_R(t) := \{y \in \mathbb{R}^{\bar{n}} : y = H(t)x(t, t_0, x_0), \text{ για κάποιο } t_0 \in [0, t] \text{ και } x_0 \in B_R\} \quad (3.10)$$

όπου η $H(\cdot)$ δίνεται στην (3.9β). Προφανώς ισχύει $Y_R(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \geq 0$, ενώ επιπλέον, λόγω της (1.104), η πλειονότιμη απεικόνιση $[0, \infty) \ni t \rightarrow Y_R(t) \subset \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και ισχύει $y(t) \in Y_R(t)$, για κάθε $t \geq t_0 \geq 0$

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

και $y \in O(t_0, B_R)$ (όπου το σύνολο $O(t_0, M)$ ορίζεται από την (1.105) για το σύστημα (3.9α)).

Οι Προτάσεις 3.3 και 3.5 που ακολουθούν, είναι κεντρικής σημασίας για την παρακάτω ανάλυση. Μέρη των αποδείξεων τους βασίζονται σε κατάλληλες γενικεύσεις της μεθοδολογίας που χρησιμοποιείται για τις αποδείξεις των κύριων αποτελεσμάτων στις εργασίες [71] και [16] (Προτάσεις 2.9 και 2.10 στο Κεφάλαιο 2). Στην Πρόταση 3.3 διατυπώνονται ικανές συνθήκες για την επιλυσιμότητα του ODP για συστήματα της μορφής (3.9), με την επιπλέον υπόθεση ότι οι αρχικές καταστάσεις x_0 του (3.9) ανήκουν στη συμπαγή μπάλα B_R με ακτίνα $R > 0$ και κέντρο το μηδέν. Προτού προχωρήσουμε στη διατύπωση της Πρότασης 3.3, παραθέτουμε την ακόλουθη απαραίτητη για τη συνέχεια υπόθεση:

H1. Υπάρχει μια συνάρτηση $g \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R})$ που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$0 < g(t) < 1, \forall t \geq 0; \quad (3.11\alpha)$$

$$\dot{g}(t) \geq -g(t), \forall t \geq 0; \quad (3.11\beta)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (3.11\gamma)$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση $A \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}; \mathbb{R}^{n \times n})$ και σταθερές $L > 1, c_1, c_2 > 0, R > 0$ με

$$c_1 \geq \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

A1. Για κάθε $\xi \geq 1$, υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow Q_R(t) := Q_{R,\xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell \quad (3.13)$$

με $Q_R(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \geq 0$, που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, y \in Y_R(t), x, z \in \mathbb{R}^n \text{ με } |x| \leq \beta(t, R) \text{ και } |x - z| \leq \xi \Rightarrow \\ \Delta F(t, x, z, y) := F(t, x, y) - F(t, z, y) \\ = A(t, q, x, x - z, y)(x - z), \text{ για κάποιο } q \in Q_R(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

με την $Y_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.10).

A2. Για κάθε $\xi \geq 1$, υπάρχει μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_R := Q_{R,\xi}$ όπως στην Ιδιότητα A1, έτσι ώστε για κάθε $t_0 \geq 0$ να μπορούμε να βρούμε ένα χρονικώς μεταβαλλόμενο συμμετρικό πίνακα $P_R := P_{R,\xi,t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d_R := d_{R,\xi,t_0} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ που να ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$P_R(t) \geq I_{n \times n}, \forall t \geq t_0; |P_R(t_0)| \leq L; \quad (3.15\alpha)$$

$$d_R(t) > c_1, \forall t \geq t_0 + 1; \int_{t_1}^{t_2} d_R(s) ds > -c_2, \forall t_2 \geq t_1 \geq t_0 \quad (3.15\beta)$$

$$\begin{aligned} e'P_R(t)A(t, q, x, e, y)e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_R(t)e &\leq -d_R(t)e'P_R(t)e, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e \in \ker H(t), y \in Y_R(t) : & \quad (3.15\gamma) \\ |x| \leq \beta(t, R), |e| \leq \xi, e'P_R(t)e &\geq g(t) \end{aligned}$$

με την $Y_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.10).

Πρόταση 3.3 (Επιλυσιμότητα του ODP για συστήματα της μορφής (3.9)) Θεωρούμε το σύστημα (3.9) και υποθέτουμε ότι είναι δεξιά πλήρες, δηλαδή ισχύει η εκτίμηση (1.104) για κάποια $\beta \in \mathcal{NN}$, καθώς και ότι ικανοποιείται η Υπόθεση H1. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$ υπάρχουν συναρτήσεις $\bar{d}_R := \bar{d}_{R,\xi,t_0} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ με

$$\bar{d}_R(t) < d_R(t), \forall t \geq t_0; \quad (3.16\alpha)$$

$$\bar{d}_R(t) \geq c_1, \forall t \geq t_0 + 1; \int_{t_1}^{t_2} \bar{d}_R(s) ds > -2c_2, \forall t_2 \geq t_1 \geq t_0; \quad (3.16\beta)$$

και $\phi_R := \phi_{R,\xi,t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} e'P_R(t)A(t, q, x, e, y)e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_R(t)e &\leq \phi_R(t)|H(t)e|^2 - \bar{d}_R(t)e'P_R(t)e, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e \in \mathbb{R}^n, y \in Y_R(t) : & \quad (3.16\gamma) \\ |x| \leq \beta(t, R), |e| \leq \xi, e'P_R(t)e &\geq g(t) \end{aligned}$$

(ii) Επιπλέον, ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και σταθερά ξ με:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\xi \geq \sqrt{L} \exp\{2c_2\} \beta(\bar{t}_0, \bar{R}) \quad (3.17\alpha)$$

$$\bar{R} := R + 1 \quad (3.17\beta)$$

η λύση $z(\cdot)$ του συστήματος

$$\dot{z} = G_{\bar{t}_0}(t, z, y) := F(t, z, y) + \phi_R(t) P_R^{-1}(t) H'(t)(y - H(t)z) \quad (3.18\alpha)$$

$$\text{με αρχική κατάσταση } z(\bar{t}_0) = 0 \quad (3.18\beta)$$

με την $P_R(\cdot) := P_{R, \xi, \bar{t}_0}(\cdot)$ όπως δίνεται στην A2 και τη $\phi_R := \phi_{R, \xi, \bar{t}_0} \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ όπως στην (3.16γ), ορίζεται για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ και το σφάλμα $e(t) := x(t) - z(t)$, $t \geq \bar{t}_0$ ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$ του (3.9α), με αρχική κατάσταση $x_0 \in B_R$ τη χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ και την τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, \bar{t}_0, 0; y)$ του (3.18) ικανοποιεί τις εκτιμήσεις:

$$|e(t)| < \xi, \forall t \geq \bar{t}_0; \quad (3.19\alpha)$$

$$|e(t)| \leq \max\{\xi \exp\{-c_1(t - (\bar{t}_0 + 1))\}, \sqrt{g(t)}\}, \forall t \geq \bar{t}_0 + 1 \quad (3.19\beta)$$

Από τις (3.11γ) και (3.19β), έπεται ότι για $\bar{t}_0 := t_0$ το ODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (3.9) ως προς την B_R . Ειδικότερα, το σφάλμα $e(t) := x(t) - z(t)$, $t \geq t_0$ ανάμεσα στην τροχιά $x(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0)$, $x_0 \in B_R$ του (3.9α) και την τροχιά $z(\cdot) := z(\cdot, t_0, z_0; y)$, $z_0 = 0$ του παρατηρητή $\dot{z} = G_{t_0}(t, z, y)$ ικανοποιεί την (3.3).

Παρατήρηση 3.4 (i) Σημειώνεται ότι η (3.15β) ικανοποιείται όταν για την απεικόνιση $d_R(\cdot)$ ισχύει $d_R(t) > c_1$, για κάθε $t \geq t_0$.

(ii) Το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.3 εξακολουθεί να ισχύει, αν θεωρήσουμε μια αυθαίρετη σταθερά $c_1 > 0$, που δεν ικανοποιεί κατανάγκη την (3.12) και αντί της (3.11β), θεωρήσουμε ότι ισχύει $\dot{g}(t) \geq -2c_1 g(t)$, για κάθε $t \geq 0$.

Βασιζόμενοι στις εκτιμήσεις (3.19α) και (3.19β) της Πρότασης 3.3, μπορούμε να αποδείξουμε το αποτέλεσμα την ακόλουθης πρότασης, που παρέχει ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ενός διακοπτόμενου παρατηρητή που επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του (3.9), χωρίς κάποια εκ των προτέρων γνώση για την αρχική του κατάσταση. Κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση:

H2. Υπάρχουν σταθερές $L > 1$, $c_1, c_2 > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η (3.12), ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια συνάρτηση $g \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R})$ που ικανοποιεί την (3.11) και μια απεικόνιση $A \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}; \mathbb{R}^{n \times n})$, έτσι ώστε για κάθε $R > 0$ να ικανοποιείται η H1, δηλαδή να ισχύουν ταυτόχρονα οι A1 και A2.

Πρόταση 3.5 (Επιλυσιμότητα του SODP για συστήματα της μορφής (3.9))
Υποθέτουμε ότι το σύστημα (3.9α) είναι δεξιά πλήρες και επιπλέον, ότι το (3.9) ικανοποιεί την H2. Τότε το SODP είναι επιλύσιμο για το (3.9) ως προς τον \mathbb{R}^n .

Απόδειξη των Προτάσεων 3.3 και 3.5. Προκειμένου να αποδείξουμε τις Προτάσεις 3.3 και 3.5, χρειαζόμαστε ένα τεχνικό προκαταρκτικό αποτέλεσμα (Λήμμα 3.6 παρακάτω). Έστω $\ell, m, n, \bar{n} \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε ένα ζεύγος (H, A) συνεχών απεικονίσεων με:

$$H := H(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{n} \times m} \quad (3.20\alpha)$$

$$A := A(t, q, x, e, y) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.20\beta)$$

και κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση.

H3. Έστω $g(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R})$ που ικανοποιεί την (3.11α). Υποθέτουμε ότι για δοσμένη σταθερά $R > 0$ και για κάθε $\xi \geq 1$, υπάρχουν μια συνάρτηση $\beta_R := \beta_{R,\xi} \in \mathcal{N}$ και πλειονότιμες απεικονίσεις $[0, \infty) \ni t \rightarrow Y_R(t) := Y_{R,\xi}(t) \subset \mathbb{R}^{\bar{n}}$ και $[0, \infty) \ni t \rightarrow Q_R(t) := Q_{R,\xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell$ με $Y_R(t) \neq \emptyset$ και $Q_R(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \geq 0$, που ικανοποιούν την Ιδιότητα 2.1, τέτοιες ώστε για κάθε $t_0 \geq 0$, να μπορεί να βρεθεί ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R := P_{R,\xi,t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{m \times m})$ με

$$P_R(t) \geq I_{m \times m}, \forall t \geq t_0 \quad (3.21)$$

και μια συνάρτηση $d_R := d_{R,\xi,t_0} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, ούτως ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} e' P_R(t) A(t, q, x, e, y) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e &\leq -d_R(t) e' P_R(t) e, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e \in \ker H(t), y \in Y_R(t) : & \quad (3.22) \\ |x| \leq \beta_R(t), |e| \leq \xi, e' P_R(t) e &\geq g(t) \end{aligned}$$

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

Λήμμα 3.6 Θεωρούμε το ζεύγος (H, A) των συνεχών χρονικώς μεταβαλλόμενων απεικονίσεων της (3.20) και υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η H3 για δοσμένο $R > 0$. Τότε για κάθε $\xi \geq 1$, $t_0 \geq 0$ και $\bar{d}_R := \bar{d}_{R,\xi,t_0} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ με

$$\bar{d}_R(t) < d_R(t), \forall t \geq t_0 \quad (3.23)$$

υπάρχει μια συνάρτηση $\phi_R := \phi_{R,\xi,t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ ούτως ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} e' P_R(t) A(t, q, x, e, y) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_R(t) e &\leq \phi_R(t) |H(t) e|^2 - \bar{d}_R(t) e' P_R(t) e, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e \in \mathbb{R}^m, y \in Y_R(t) : & \quad (3.24) \\ |x| \leq \beta_R(t), |e| \leq \xi, e' P_R(t) e &\geq g(t) \end{aligned}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη σταθερά R όπως δίνεται στη διατύπωση του λήμματος και έστω $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$. Επίσης, θεωρούμε τις απεικονίσεις Y_R, Q_R, P_R και d_R όπως δίνονται στην H3 και μια συνάρτηση \bar{d}_R που ικανοποιεί την (3.23). Ακολούθως, ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $\rho_R := \rho_{R,\xi,t_0} : [t_0, \infty) \times \{w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ως:

$$\rho_R(t, w) := \sqrt{\frac{g(t)}{w' P_R(t) w}} \quad (3.25)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.11α), (3.21), τον Ορισμό (3.25) και το γεγονός ότι $\xi \geq 1$, προκύπτει ότι $\rho_R(t, w) < \xi$, για κάθε $t \in [t_0, \infty)$ και $w \in \mathbb{R}^m$ με $|w| = 1$. Τότε, για κάθε $(t, w) \in [t_0, \infty) \times \{w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1\}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το ακόλουθο μη κενό κλειστό διάστημα $I_R := I_{R,\xi,t_0} \subset \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$I_R(t, w) := [\rho_R(t, w), \xi] \quad (3.26)$$

Προφανώς, η πλειονότιμη απεικόνιση $[t_0, \infty) \times \{w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1\} \ni (t, w) \rightarrow I_R(t, w)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1. Επίσης, από τις (3.25) και (3.26), έπεται ότι για κάθε υπόχωρο X του \mathbb{R}^m ισχύει:

$$\begin{aligned} & \{e \in X : |e| \leq \xi \text{ και } e'P_R(t)e \geq g(t)\} \\ & = \{w\sigma : w \in X \text{ και } |w| = 1, \sigma \in I_R(t, w)\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.27) με $X := \ker H(t)$, προκύπτει ότι η (3.22) είναι ισοδύναμη με την:

$$\begin{aligned} & w'P_R(t)A(t, q, x, w\sigma, y)w + \frac{1}{2}w'\dot{P}_R(t)w \leq -d_R(t)w'P_R(t)w, \\ & \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, w \in \ker H(t), \sigma \in I_R(t, w), y \in Y_R(t) : \quad (3.28) \\ & |x| \leq \beta_R(t), |w| = 1 \end{aligned}$$

Επίσης, εφαρμόζοντας την (3.27) με $X := \mathbb{R}^m$, η επιθυμητή (3.24) ισοδυναμεί με την εύρεση μιας συνάρτησης $\phi_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ ούτως ώστε να ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\begin{aligned} & w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1 \Rightarrow w'P_R(t)A(t, q, x, w\sigma, y)w + \frac{1}{2}w'\dot{P}_R(t)w \leq \\ & \phi_R(t)|H(t)w|^2 - \bar{d}_R(t)w'P_R(t)w, \quad (3.29) \\ & \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), |x| \leq \beta_R(t), \sigma \in I_R(t, w), y \in Y_R(t) \end{aligned}$$

Προκειμένου να δείξουμε την (3.29), προχωράμε ως ακολούθως. Θεωρούμε την απεικόνιση $D_R := D_{R, \xi, t_0} : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [t_0, \infty)$, το σύνολο $K_R(t) := K_{R, \xi, t_0}(t)$, που ορίζονται αντίστοιχα ως:

$$D_R(t, q, x, e, \sigma, y) := e'P_R(t)A(t, q, x, e\sigma, y)e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_R(t)e + \bar{d}_R(t)e'P_R(t)e; \quad (3.30\alpha)$$

$$\begin{aligned} & K_R(t) := \{|w| = 1 : D_R(t, q, x, w, \sigma, y) < 0, \text{ για κάθε } q \in Q_R(t), \quad (3.30\beta) \\ & |x| \leq \beta_R(t), \sigma \in I_R(t, w), y \in Y_R(t)\} \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι για εκείνα τα $t \geq t_0$ για τα οποία ισχύει $\text{rank } H(t) < m$, το σύνολο $K_R(t)$ είναι μη κενό, λόγω της συνεπαγωγής:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$w \in \ker H(t) \text{ και } |w| = 1 \Rightarrow w \in K_R(t) \quad (3.31)$$

Πράγματι, έστω $w \in \ker H(t)$ για κάποιο $w \in \mathbb{R}^m$ με $|w| = 1$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (3.21), (3.23), (3.28) και (3.30), εξάγουμε ότι $D_R(t, q, x, w, \sigma, y) \leq (\bar{d}_R(t) - d_R(t))w'P_R(t)w < 0$, για κάθε $q \in Q_R(t)$, $|x| \leq \beta_R(t)$, $\sigma \in I_R(t, w)$ και $y \in Y_R(t)$, που συνεπάγεται ότι $w \in K_R(t)$ και άρα ισχύει η (3.31). Επομένως, $K_R(t) \neq \emptyset$, δεδομένου ότι $\text{rank}H(t) < m$. Για κάθε $t \geq t_0$, ορίζουμε το σύνολο $K_R^c(t) := \{w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1, w \notin K_R(t)\}$. Από την (3.30β), έπεται ότι:

$$K_R^c(t) = \{|w| = 1 : D_R(t, q, x, w, \sigma, y) \geq 0, \\ \text{για κάποιο } q \in Q_R(t), |x| \leq \beta_R(t), \sigma \in I_R(t, w), y \in Y_R(t)\} \quad (3.32)$$

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι για κάθε $t \geq t_0$ το σύνολο $K_R^c(t)$ είναι κλειστό. Πράγματι, έστω $t \geq t_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $K_R^c(t) \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset K_R^c(t)$ με $w_\nu \rightarrow w$ ισχύει $w \in K_R^c(t)$. Ορίζουμε:

$$\bar{Q}_R(t, w) := Q_R(t) \times \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \beta_R(t)\} \times I_R(t, w) \times Y_R(t), \\ (t, w) \in [t_0, \infty) \times \{w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1\} \quad (3.33)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $w_\nu \in K_R^c(t)$, έπεται από τις (3.32) και (3.33) ότι υπάρχει $(q_\nu, x_\nu, \sigma_\nu, y_\nu) \in \bar{Q}_R(t, w_\nu)$ με $D_R(t, q_\nu, x_\nu, w_\nu, \sigma_\nu, y_\nu) \geq 0$. Επιπλέον, η πλειονότιμη απεικόνιση $[t_0, \infty) \times \{w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1\} \ni (t, w) \rightarrow \bar{Q}_R(t, w) \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, επομένως από τη συνέχεια της απεικόνισης D_R προκύπτει, χρησιμοποιώντας ίδια επιχειρήματα με εκείνα στην απόδειξη του Λήμματος 2.6, ότι $\liminf D_R(t, q_\nu, x_\nu, w_\nu, \sigma_\nu, y_\nu) \rightarrow D_R(t, q, x, w, \sigma, y) \geq 0$, για κάποιο $(q, x, \sigma, y) \in \bar{Q}_R(t, w)$. Τότε, από τις (3.32) και (3.33) εξάγουμε ότι $w \in K_R^c(t)$, συνεπώς το σύνολο $K_R^c(t)$ είναι κλειστό. Στη συνέχεια, ορίζουμε την απεικόνιση $\omega_R := \omega_{R, \xi, t_0} : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ ως:

$$\omega_R(t) := \begin{cases} \min\{|H(t)w| : w \in K_R^c(t)\}, & \text{αν } K_R^c(t) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{αν } K_R^c(t) = \emptyset \end{cases} \quad (3.34)$$

Σημειώνεται ότι όταν ισχύει $K_R^c(t) \neq \emptyset$, το σύνολο $\{|H(t)w| : w \in K_R^c(t)\}$ είναι μη κενό και συμπαγές και επομένως η $\omega_R(\cdot)$ είναι καλώς ορισμένη. Συνεπώς, από τις (3.31) και (3.34) έπεται ότι $\omega_R(t) > 0$, για κάθε $t \geq t_0$. Επιπλέον, ισχύει:

$$\inf\{\omega_R(t) : t \in [t_0, T]\} > 0, \forall T > t_0 \quad (3.35)$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε στην αντίθετη περίπτωση ότι ισχύει $\omega_R(t_\nu) \rightarrow 0$ για κάποια ακολουθία $(t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset [t_0, T]$ με $t_\nu \rightarrow t$. Τότε από την (3.34) μπορούμε να υποθέσουμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει $K_R^c(t_\nu) \neq \emptyset$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, επομένως, υπάρχει $w_\nu \in K_R^c(t_\nu)$ έτσι ώστε $|H(t_\nu)w_\nu| \rightarrow 0$. Αφού $|w_\nu| = 1$, μπορούμε πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $w_\nu \rightarrow w$ για κάποιο $w \in \mathbb{R}^m$ με $|w| = 1$. Επομένως, από τη συνέχεια της $H(\cdot)$ συνεπάγεται ότι $H(t)w = 0$, και άρα από την (3.31) προκύπτει ότι $w \in K_R(t)$. Από την άλλη μεριά ισχύει $w_\nu \in K_R^c(t_\nu)$, οπότε λαμβάνοντας υπόψη τις (3.32) και (3.33), προκύπτει ότι $D_R(t_\nu, q_\nu, x_\nu, w_\nu, \sigma_\nu, y_\nu) \geq 0$ για κάποιο διάνυσμα $(q_\nu, x_\nu, \sigma_\nu, y_\nu) \in \bar{Q}_R(t_\nu, w_\nu)$. Το τελευταίο σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η $\bar{Q}_R(\cdot, \cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και ότι η D_R είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι $\liminf D_R(t_\nu, q_\nu, x_\nu, w_\nu, \sigma_\nu, y_\nu) \rightarrow D_R(t, q, x, w, \sigma, y) \geq 0$ για κάποιο $(q, x, \sigma, y) \in \bar{Q}_R(t, w)$, επομένως από τις (3.32) και (3.33) εξάγουμε ότι $w \in K_R^c(t)$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, ικανοποιείται η (3.35). Θεωρούμε ακολούθως τη συνάρτηση $\bar{\omega}_R := \bar{\omega}_{R, \xi, t_0} : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ που ορίζεται ως:

$$\bar{\omega}_R(t) := \begin{cases} \frac{1}{\omega_R^2(t)}, & K_R^c(t) \neq \emptyset \\ 0, & K_R^c(t) = \emptyset \end{cases} \quad (3.36)$$

Από τις (3.35), (3.36) και το γεγονός ότι οι απεικονίσεις $Q_R(\cdot)$ και $Y_R(\cdot)$ ικανοποιούν την Ιδιότητα 2.1, μπορούμε χρησιμοποιώντας ίδια επιχειρήματα με εκείνα στην απόδειξη του Λήμματος 2.6, να βρούμε μια συνάρτηση $\phi_R := \phi_{R, \xi, t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ με την ιδιότητα:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\begin{aligned} \phi_R(t) > \bar{\omega}_R(t) \sup\{|P_R(t)||A(t, q, x, e, y)| + \frac{1}{2}|\dot{P}_R(t)| + |\bar{d}_R(t)||P_R(t)| : \\ q \in Q_R(t), |x| \leq \beta_R(t), |e| \leq \xi, y \in Y_R(t)\}, \forall t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να δείξουμε ότι ισχύει η (3.29) με τη $\phi_R(\cdot)$ όπως προσδιορίστηκε ανωτέρω. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Αρχικά θεωρούμε εκείνα τα $t \geq t_0$ για τα οποία ισχύει $K_R^c(t) \neq \emptyset$. Τότε, αν $K_R(t) \neq \emptyset$ και $w \in K_R(t)$, η συνεπαγωγή (3.29) προκύπτει άμεσα από την (3.30) και το γεγονός ότι $\phi_R(t) > 0$. Στην άλλη περίπτωση, όπου $w \in K_R^c(t)$, προκειμένου να δείξουμε τη συνεπαγωγή (3.29), αρκεί λαμβάνοντας υπόψη τις (3.25), (3.26) και (3.34) να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sup\{|P_R(t)||A(t, q, x, w\sigma, y)| + \frac{1}{2}|\dot{P}_R(t)| + |\bar{d}_R(t)||P_R(t)| : \\ q \in Q_R(t), |x| \leq \beta_R(t), |w| = 1, 0 \leq \sigma \leq \xi, y \in Y_R(t)\} \leq \phi_R(t)\omega_R^2(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Η τελευταία προκύπτει από τις (3.36) και (3.37). Τέλος, θεωρούμε εκείνα τα $t \geq t_0$ για τα οποία $K_R^c(t) = \emptyset$, ή ισοδύναμα $K_R(t) = \{w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1\}$. Σε αυτή την περίπτωση, η (3.29) είναι άμεση συνέπεια της (3.30). \square

Παρατήρηση 3.7 Στην περίπτωση όπου ισχύει $0 < \text{rank } H(t) < m$, για κάθε $t \geq 0$, μπορούμε να επιτύχουμε μια αμεσότερη κατασκευή της $\phi_R(\cdot)$, ούτως ώστε να ικανοποιείται η (3.24). Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη αυτή την επιπλέον υπόθεση καθώς και τις (3.21), (3.22), (3.23), (3.25) και (3.26), μπορούμε να προσδιορίσουμε μια συνεχή συνάρτηση $\Gamma_R : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, ούτως ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} w'P_R(t)A(t, q, x, \sigma w, y)w + \frac{1}{2}w\dot{P}_R(t)w \leq -\bar{d}_R(t)w'P_R(t)w, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), |x| \leq \beta_R(t), \sigma \in I_R(t, w), y \in Y_R(t), \quad (3.39\alpha) \\ |w| = 1 : \exists e \in \ker H(t) \text{ με } |e| = 1 \text{ και } |w - e| \leq \Gamma_R(t, e) \end{aligned}$$

ενώ επιπλέον ισχύει $\{w \in \mathbb{R}^m : |w| = 1 \text{ και } \forall e \in \ker H(t) \text{ με } |e| = 1, |w - e| > \Gamma_R(t, e)\} \neq \emptyset$. Το τελευταίο σε συνδυασμό με την (3.39α), συνεπάγεται ότι κάθε $C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ συνάρτηση $\phi_R := \phi_{R,\xi,t_0}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} \phi_R(t) > \hat{\omega}_R(t) \sup\{|P_R(t)||A(t, q, x, e, y)| + \frac{1}{2}|\dot{P}_R(t)| + |\bar{d}_R(t)||P_R(t)| : \\ q \in Q_R(t), |x| \leq \beta_R(t), |e| \leq \xi, y \in Y_R(t)\}, \forall t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.39\beta)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_R(t) \\ := \frac{1}{\inf\{|H(t)w| : |w| = 1 \text{ και } \forall e \in \ker H(t) \text{ με } |e| = 1, |w - e| > \Gamma_R(t, e)\}} \\ t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.39\gamma)$$

ικανοποιεί και την (3.24). Ενδεικτικό για τον εν λόγω τρόπο κατασκευής της $\phi_R(\cdot)$ είναι το Παράδειγμα 3.10 της Ενότητας 3.3.

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε την Πρόταση 3.3.

Απόδειξη της Πρότασης 3.3

Η απόδειξη του σκέλους (i) βασίζεται στο αποτέλεσμα του Λήμματος 3.6. Έστω $R > 0$ όπως στη διατύπωση της πρότασης και έστω $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $d_R := d_{R,\xi,t_0}$ όπως στην Υπόθεση A2 και ορίζουμε τη σταθερά $c := \min\{d_R(t_0 + 1) - c_1, c_2\}$, η οποία λόγω της πρώτης ανισότητας της (3.15β), είναι αυστηρά θετική. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη ανισότητα της (3.15β), μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\bar{d}_R := \bar{d}_{R,\xi,t_0} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ που να ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bar{d}_R(t) = d_R(t) - c, \forall t \in [t_0, t_0 + 1] \quad (3.40\alpha)$$

$$c_1 \leq \bar{d}_R(t) < d_R(t), \forall t \geq t_0 + 1 \quad (3.40\beta)$$

Τόσο η επιθυμητή (3.16α) όσο και η πρώτη ανισότητα της (3.16β) είναι άμεσες συνέπειες της (3.40). Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της σταθεράς c ανωτέρω, τη δεύτερη ανισότητα της (3.15β) και την (3.40α), έχουμε

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{d}_R(s) ds = \int_{t_1}^{t_2} (d_R(s) - c) ds = \int_{t_1}^{t_2} d_R(s) ds - c(t_2 - t_1) > -2c_2,$$

για κάθε $t_2 \geq t_1, t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + 1]$

που λόγω της (3.40β) και της υπόθεσης $c_1 > 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει η δεύτερη ανισότητα της (3.16β). Προκειμένου να δείξουμε την (3.16γ), θεωρούμε το ζεύγος (H, A) όπως δίνεται στην (3.20) με $m = n$, όπου οι $\ell, n, \bar{n}, H(t)$ και $A(t, q, x, e, y)$ δίνονται στις Υποθέσεις A1 και A2. Σημειώνεται ότι λόγω της A2 και ειδικότερα λόγω της (3.15γ), της πρώτης ανισότητας της (3.15α) και του γεγονότος ότι η $Y_R(\cdot)$ ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, ικανοποιείται η Ιδιότητα H3 για το ζεύγος (H, A) με τις $Y_R(\cdot), Q_R(\cdot), P_R(\cdot), d_R(\cdot), g(\cdot)$ και $\beta_R(\cdot) := \beta(\cdot, R)$ όπως δίνονται στις (3.10), (3.13), (3.15α), (3.15β), (3.11) και (1.104), αντίστοιχα. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση $\bar{d}_R(\cdot)$ ανωτέρω ικανοποιεί την (3.16α), μπορούμε από το αποτέλεσμα του Λήμματος 3.6, για τα δοσμένα $R > 0$, $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$, να βρούμε μια συνάρτηση $\phi_R := \phi_{R, \xi, t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ που να ικανοποιεί την (3.16γ). Ολοκληρώθηκε συνεπώς η απόδειξη του σκέλους (i) της πρότασης. Συνεχίζουμε με την απόδειξη του σκέλους (ii). Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι (3.19α) και (3.19β). Θεωρούμε τη σταθερά $R > 0$ όπως δίνεται στη διατύπωση της πρότασης και έστω $\bar{t}_0 \geq t_0 \geq 0$ και ξ μια σταθερά που ικανοποιεί την (3.17). Λόγω της υπόθεσης (1.104), ισχύει

$$\beta(t, s) \geq s, \text{ για κάθε } t \geq 0 \text{ και } s \geq 0 \quad (3.41)$$

και αφού $L > 1$ και $c_2 > 0$, έπεται από τις (3.17) και (3.41) ότι $\xi > 1$. Επιπλέον, από το αποτέλεσμα του σκέλους (i) με ξ ως ανωτέρω και $t_0 := \bar{t}_0$, υπάρχουν συναρτήσεις $\bar{d}_R \in C^0([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_R \in C^1([\bar{t}_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ που ικανοποιούν την (3.16). Έστω $e(\cdot) := x(\cdot, t_0, x_0) - z(\cdot, \bar{t}_0, z_0; y)$ το σφάλμα ανάμεσα στην τροχιά του συστήματος (3.9α) και την τροχιά του (3.18α) με $x_0 \in B_R$ και $z_0 = z(\bar{t}_0) = 0$. Λαμβάνοντας υπόψη την (3.9β), προκύπτει ότι το σφάλμα $e(\cdot)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \dot{e} &= F(t, x, y) - F(t, z, y) - \phi_R(t) P_R^{-1}(t) H'(t) (y - H(t)z) \\ &= F(t, x, y) - F(t, z, y) - \phi_R(t) P_R^{-1}(t) H'(t) H(t) e, t \geq \bar{t}_0 \end{aligned} \quad (3.42\alpha)$$

και προφανώς (λόγω της (3.18β)) ισχύει:

$$e(\bar{t}_0) = x(\bar{t}_0, t_0, x_0) - z(\bar{t}_0, \bar{t}_0, z_0; y) = x(\bar{t}_0, t_0, x_0) \quad (3.42\beta)$$

Σημειώνεται ότι αφού $L > 1$, $c_2 > 0$ και λαμβάνοντας υπόψη τις (1.104), (3.17) και (3.42β), θα ισχύει:

$$|e(\bar{t}_0)| \leq \beta(\bar{t}_0, \bar{R}) < \xi, \forall x_0 \in B_R \quad (3.43)$$

Εξαγωγή της (3.19α). Αποδεικνύουμε ότι για κάθε $x_0 \in B_R$ ισχύει $|e(t)| < \xi$ για κάθε $t \in [\bar{t}_0, T_{\max})$, και συνεπώς $T_{\max} = \infty$, όπου $[\bar{t}_0, T_{\max})$ το μέγιστο αποδεξιά διάστημα ύπαρξης της λύσης $e(\cdot)$ του συστήματος (3.42α), που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο $x_0 \in B_R$ και ικανοποιεί την (3.42β). Υποθέτουμε στην αντίθετη περίπτωση, λαμβάνοντας υπόψη την (3.43), ότι υπάρχει $x_0 \in B_R$ και $\bar{t} \in (\bar{t}_0, T_{\max})$, ούτως ώστε να ισχύει:

$$|e(\bar{t})| = \xi \quad (3.44\alpha)$$

$$|e(t)| < \xi, \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}) \quad (3.44\beta)$$

Από την (3.10), προκύπτει ότι αφού $x_0 \in B_R$, η έξοδος $y(\cdot)$ του (3.9) θα ικανοποιεί τον εγκλεισμό

$$y(t) \in Y_R(t), \forall t \in [\bar{t}_0, \infty) \quad (3.45)$$

και η τελευταία σε συνδυασμό με τις (3.14), (1.104) και (3.44), συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} \Delta F(t, x(t), z(t), y(t)) &= A(t, q, x(t), x(t) - z(t), y(t))(x(t) - z(t)), \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}), \\ &\text{για κάποιο } q := q(t) \in Q_R(t) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ορίζουμε τη Lyapunov συνάρτηση

$$V(t, e) := e' P_R(t) e, t \geq \bar{t}_0, e \in \mathbb{R}^n \quad (3.47)$$

και υπολογίζουμε τη χρονική της παράγωγο κατά μήκος των τροχιών $e(\cdot)$ του συστήματος (3.42α). Από τις (3.46) και (3.47) προκύπτει ότι:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, e(t)) &= e'(t)\dot{P}_R(t)e(t) + 2e'(t)P_R(t)A(t, q, x(t), e(t), y(t))e(t) \\ &\quad - 2\phi_R(t)|H(t)e(t)|^2, \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}], \text{ για κάποιο } q := q(t) \in Q_R(t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη ανισότητα της (3.15α), την (3.43) και τον Ορισμό (3.47), έχουμε:

$$V(\bar{t}_0, e(\bar{t}_0)) = e'(\bar{t}_0)P_R(\bar{t}_0)e(\bar{t}_0) \leq L|e(\bar{t}_0)|^2 \leq L\beta^2(\bar{t}_0, \bar{R}) \quad (3.49)$$

Ισχυρισμός 1. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει:

$$V(t, e(t)) < L \exp\{4c_2\}\beta^2(\bar{t}_0, \bar{R}), \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}] \quad (3.50)$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Στην αντίθετη περίπτωση, λαμβάνοντας υπόψη την (3.49), συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει $\tau \in (\bar{t}_0, \bar{t}]$ ούτως ώστε να ισχύει:

$$V(\tau, e(\tau)) \geq L \exp\{4c_2\}\beta^2(\bar{t}_0, \bar{R}) > L\beta^2(\bar{t}_0, \bar{R}) \quad (3.51)$$

όπου για την εξαγωγή της δεύτερης ανισότητας λάβαμε υπόψη ότι $L > 0$ και $c_2 > 0$. Τότε, από τις (3.11α), (3.49) και (3.51) θα υπάρχει $\bar{\tau} \in [\bar{t}_0, \tau)$, έτσι ώστε να ισχύει

$$V(\bar{\tau}, e(\bar{\tau})) = L\beta^2(\bar{t}_0, \bar{R}); \quad V(t, e(t)) \geq L\beta^2(\bar{t}_0, \bar{R}) \geq 1 \geq g(t), \forall t \in [\bar{\tau}, \tau] \quad (3.52)$$

όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τις επιλογές $L > 1$, $\bar{R} > 1$ (βλέπε (3.17)) και την ανισότητα (3.41). Από την υπόθεση (3.16γ), τις σχέσεις (1.104), (3.44), (3.45), (3.47), (3.48), (3.52) καθώς και το γεγονός ότι $x_0 \in B_R$, εξάγουμε ότι:

$$\dot{V}(t, e(t)) \leq -2\bar{d}_R(t)V(t, e(t)), \forall t \in [\bar{\tau}, \tau] \quad (3.53)$$

Από την (3.53) συνεπάγεται ότι $V(t, e(t)) \leq V(\bar{\tau}, e(\bar{\tau})) \exp\left(-2 \int_{\bar{\tau}}^t \bar{d}_R(s) ds\right)$ για κάθε $t \in [\bar{\tau}, \tau]$, επομένως, από τη δεύτερη ανισότητα της (3.16β) και την (3.52), προκύπτει ότι:

$$V(\tau, e(\tau)) \leq V(\bar{\tau}, e(\bar{\tau})) \exp\left(-2 \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \bar{d}_R(s) ds\right) < L \exp\{4c_2\} \beta^2(\bar{t}_0, \bar{R})$$

Η τελευταία έρχεται σε αντίθεση με την (3.51), άρα ικανοποιείται η (3.50) και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη του Ισχυρισμού 1.

Από την πρώτη ανισότητα της (3.15α), τις (3.17α), (3.47) και την (3.50) προκύπτει ότι $|e(t)| < \sqrt{L} \exp\{2c_2\} \beta(\bar{t}_0, \bar{R}) = \xi$ για κάθε $t \in [\bar{t}_0, \bar{t}]$, συνεπώς $|e(\bar{t})| < \xi$, το οποίο σε συνδυασμό με την (3.44α) συνεπάγεται ότι $T_{\max} = \infty$ και επομένως ικανοποιείται η (3.19α). Από την τελευταία και το γεγονός ότι το σύστημα (3.9α) είναι δεξιά πλήρες, συμπεραίνουμε ότι η λύση $z(\cdot) := z(\cdot, \bar{t}_0, 0; y)$ του (3.18) ορίζεται για κάθε $t \geq \bar{t}_0$.

Απόδειξη της (3.19β). Σημειώνουμε αρχικά ότι αφού $T_{\max} = \infty$ και ισχύει η (3.19α), οι σχέσεις (3.48) και (3.50) ικανοποιούνται για κάθε $t \geq \bar{t}_0$ και $x_0 \in B_R$, δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, e(t)) &= e'(t) \dot{P}_R(t) e(t) + 2e'(t) P_R(t) A(t, q, x(t), e(t), y(t)) e(t) \\ &\quad - 2\phi_R(t) |H(t)e(t)|^2, \forall t \geq \bar{t}_0, \text{ για κάποιο } q := q(t) \in Q_R(t) \end{aligned} \quad (3.54\alpha)$$

$$V(t, e(t)) < L \exp\{4c_2\} \beta^2(\bar{t}_0, \bar{R}), \forall t \geq \bar{t}_0 \quad (3.54\beta)$$

Για την απόδειξη της (3.19β), χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός 2. Για κάθε $x_0 \in B_R$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$V(\bar{t}, e(\bar{t})) \leq g(\bar{t}), \text{ για κάποιο } \bar{t} \geq \bar{t}_0 + 1 \Rightarrow V(t, e(t)) \leq g(t), \text{ για κάθε } t > \bar{t} \quad (3.55)$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. Πράγματι, ας υποθέσουμε στην αντίθετη περίπτωση ότι υπάρχει $x_0 \in B_R$, ούτως ώστε να ισχύει:

$$V(\bar{t}, e(\bar{t})) \leq g(\bar{t}), \text{ για κάποιο } \bar{t} \geq \bar{t}_0 + 1 \text{ και } V(\tau, e(\tau)) > g(\tau), \text{ για κάποιο } \tau > \bar{t} \quad (3.56)$$

Τότε από την (3.55), θα υπάρχει $\bar{\tau} \in [\bar{t}, \tau)$ ώστε να ισχύει:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$V(\bar{\tau}, e(\bar{\tau})) = g(\bar{\tau}); V(t, e(t)) > g(t), \forall t \in (\bar{\tau}, \tau] \quad (3.57)$$

Από την υπόθεση (3.16γ), τις σχέσεις (1.104), (3.19α), (3.45), (3.47), (3.54α), (3.57) και το γεγονός ότι $x_0 \in B_R$, εξάγουμε ότι $\dot{V}(t, e(t)) \leq -2\bar{d}_R(t)V(t, e(t))$, για κάθε $t \in [\bar{\tau}, \tau]$, επομένως, αφού $\bar{\tau} \geq \bar{t}_0 + 1$, προκύπτει από την πρώτη ανισότητα της (3.16β) ότι:

$$\dot{V}(t, e(t)) \leq -2c_1V(t, e(t)), \forall t \in [\bar{\tau}, \tau] \quad (3.58)$$

Ορίζουμε $h(t) := V(t, e(t)) - g(t)$, $t \in [\bar{\tau}, \tau]$. Τότε η (3.57) γράφεται ισοδύναμα

$$h(\bar{\tau}) = 0 \text{ και } h(t) > 0, \text{ για κάθε } t \in (\bar{\tau}, \tau]$$

επομένως, θα υπάρχει $T \in (\bar{\tau}, \tau)$ ούτως ώστε η παράγωγος \dot{h} της h να ικανοποιεί τη συνθήκη $\dot{h}(T) = \dot{V}(T, e(T)) - \dot{g}(T) > 0$. Η τελευταία σε συνδυασμό με τις (3.11β) και (3.58), συνεπάγεται ότι $c_1V(T, e(T)) < \frac{1}{2}\dot{g}(T)$, επομένως από την (3.12) προκύπτει ότι $V(T, e(T)) < g(T)$. Από την (3.57) όμως, έπεται ότι $V(T, e(T)) > g(T)$, το οποίο είναι άτοπο και άρα ισχύει η (3.55).

Είμαστε πλέον σε θέση να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της (3.19β). Έστω $x_0 \in B_R$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1.

$$V(\bar{t}_0 + 1, e(\bar{t}_0 + 1)) \leq g(\bar{t}_0 + 1) \quad (3.59)$$

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη τις (3.55) και (3.59), προκύπτει ότι $V(t, e(t)) \leq g(t)$ για κάθε $t \geq \bar{t}_0 + 1$, επομένως από την πρώτη ανισότητα της (3.15α) και την (3.47), εξάγουμε ότι $|e(t)| \leq \sqrt{g(t)}$ για κάθε $t \geq \bar{t}_0 + 1$, συνεπώς ικανοποιείται η (3.19β).

Περίπτωση 2.

$$V(\bar{t}_0 + 1, e(\bar{t}_0 + 1)) > g(\bar{t}_0 + 1) \text{ και } V(t, e(t)) > g(t), \forall t \geq \bar{t}_0 + 1 \quad (3.60)$$

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει από τις (1.104), (3.16γ), (3.19α), (3.45), (3.47), (3.54α), τη δεύτερη ανισότητα της (3.60) και το γεγονός ότι $x_0 \in B_R$, ότι $\dot{V}(t, e(t)) \leq$

$-2\bar{d}_R(t)V(t, e(t))$, για κάθε $t \geq \bar{t}_0 + 1$. Επομένως, από την πρώτη ανισότητα της (3.16β), συμπεραίνουμε ότι $\dot{V}(t, e(t)) \leq -2c_1V(t, e(t))$ για κάθε $t \geq \bar{t}_0 + 1$, και άρα από την (3.54β) έχουμε:

$$\begin{aligned} V(t, e(t)) &\leq V(\bar{t}_0 + 1, e(\bar{t}_0 + 1)) \exp\{-2c_1(t - (\bar{t}_0 + 1))\} \\ &< L \exp\{4c_2\} \beta^2(\bar{t}_0, \bar{R}) \exp\{-2c_1(t - (\bar{t}_0 + 1))\}, \forall t \geq \bar{t}_0 + 1 \end{aligned}$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τις (3.15α), (3.17) και (3.47) συνεπάγεται ότι $|e(t)| < \xi \exp\{-c_1(t - (\bar{t}_0 + 1))\}$, για κάθε $t \geq \bar{t}_0 + 1$, επομένως, ικανοποιείται η (3.19β).

Περίπτωση 3.

$$\begin{aligned} V(\bar{t}_0 + 1, e(\bar{t}_0 + 1)) &> g(\bar{t}_0 + 1) \\ \text{και υπάρχει } \bar{t} > \bar{t}_0 + 1, \text{ τέτοιο ώστε } &V(\bar{t}, e(\bar{t})) \leq g(\bar{t}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Λόγω της (3.61) μπορούμε να ορίσουμε τη χρονική στιγμή:

$$\tau := \min\{t > \bar{t}_0 + 1 : V(t, e(t)) = g(t)\} \quad (3.62)$$

Από τις (3.61) και (3.62) προκύπτει ότι $V(t, e(t)) \geq g(t)$, $\forall t \in [\bar{t}_0 + 1, \tau]$, επομένως επιχειρηματολογώντας όπως στην Περίπτωση 2 ανωτέρω, έχουμε:

$$|e(t)| < \xi \exp\{-c_1(t - (\bar{t}_0 + 1))\}, \forall t \in [\bar{t}_0 + 1, \tau] \quad (3.63)$$

Επίσης, από την (3.62) έπεται ότι $V(\tau, e(\tau)) = g(\tau)$ και συνεπώς από τις (3.15α), (3.47) και (3.55) εξάγουμε ότι:

$$V(t, e(t)) \leq g(t), \forall t \in [\tau, \infty) \Rightarrow |e(t)| \leq \sqrt{g(t)}, \forall t \in [\tau, \infty) \quad (3.64)$$

Από τις (3.63) και (3.64) συμπεραίνουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η (3.19β) και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη της Πρότασης 3.3. \square

Απόδειξη της Πρότασης 3.5

Θεωρούμε το σύστημα (3.9) με αρχικό χρόνο $t_0 \geq 0$. Προχωράμε στην κατασκευή μιας ακολουθίας χρόνων $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ και μιας κατάλληλης ακολουθίας απεικονίσεων $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$, ούτως ώστε η ακολουθία των συστημάτων (3.6) να επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (3.9), σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην πρώτη ενότητα για την επιλυσιμότητα του SODP. Έστω $y \in O(t_0, \mathbb{R}^n)$ μια έξοδος του (3.9). Θεωρούμε σταθερές $L > 1$ και $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει η (3.12) και ούτως ώστε για κάθε $R > 0$ να ικανοποιούνται οι Ιδιότητες A1 και A2, σύμφωνα με την Υπόθεση H2.

Ισχυρισμός 1. (Επαγωγική Υπόθεση) Θεωρούμε την απεικόνιση $Y_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.10), με $R := k = 1, 2, \dots$, και έστω $\beta(\cdot, \cdot)$, $g(\cdot)$ όπως δίνονται στις (1.104) και (3.11), αντίστοιχα. Τότε για L, c_1, c_2 όπως ανωτέρω και για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν θετικές σταθερές ξ_k και t_k , με $t_1 := t_0$ (όπου t_0 ο αρχικός χρόνος), μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_k(\cdot)$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1, ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_k \in C^1([t_{k-1}, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και συναρτήσεις $\bar{d}_k \in C^0([t_{k-1}, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_k \in C^1([t_{k-1}, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ ούτως ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\xi_k \geq 1 \quad (3.65)$$

$$t_1 := t_0; t_{k+1} \geq t_k + 1, k = 1, 2, \dots \quad (3.66\alpha)$$

$$\text{και συνεπώς } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty \quad (3.66\beta)$$

$$P_k(t) \geq I_{n \times n}, \forall t \geq t_{k-1}; |P_k(t_{k-1})| \leq L; \quad (3.67)$$

$$\bar{d}_k(t) \geq c_1, \forall t \geq t_{k-1} + 1; \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{d}_k(s) ds > -2c_2, \forall \tau_2 \geq \tau_1 \geq t_{k-1}; \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} e' P_k(t) A(t, q, x, e, y) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_k(t) e - \phi_k(t) |H(t) e|^2 &\leq -\bar{d}_k(t) e' P_k(t) e, \\ \forall t \geq t_{k-1}, q \in Q_k(t), x \in \mathbb{R}^n, e \in \mathbb{R}^n, y \in Y_k(t) : & \quad (3.69) \\ |x| \leq \beta(t, k), |e| \leq \xi_k, e' P_k(t) e \geq g(t) & \end{aligned}$$

Ειδικότερα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ οι επιθυμητές σταθερές ξ_i και t_i ανωτέρω ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\xi_i := \sqrt{L} \exp\{2c_2\} \beta(t_{i-1}, i + 1), i = 1, 2, \dots, k \quad (3.70)$$

$$t_i := \min\{\tau \geq t_{i-1} + 1 : \max\{\xi_i \exp\{-c_1(t - (t_{i-1} + 1))\}, \sqrt{g(t)}\} \leq \frac{1}{i},$$

για κάθε $t \geq \tau\}, i = 2, \dots, k$ για $k \geq 2$ και $t_1 := t_0$ (3.71)

όπου $t_{i-1}|_{i=1} := t_0$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για $k := 1$. Ορίζουμε τη σταθερά ξ_1 όπως στην (3.70) με $i := 1$, δηλαδή:

$$\xi_1 := \sqrt{L} \exp\{2c_2\} \beta(t_0, 2) \quad (3.72)$$

Αφού $L > 1$ και $c_2 > 0$, προκύπτει από τις (3.41) και (3.72) ότι $\xi_1 \geq 1$, δηλαδή ότι ικανοποιείται η (3.65) για $k = 1$. Τότε, αφού σύμφωνα με την υπόθεση μας ισχύει η A2 για $R := 1$, συμπεραίνουμε ότι για το δοσμένο ξ_1 ανωτέρω, υπάρχουν μια πλειονότιμη απεικόνιση $Q_1 := Q_{1, \xi_1}$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και ένα ζεύγος απεικονίσεων $d_1 \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $P_1 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, όπου η $P_1(\cdot)$ ικανοποιεί την (3.67) και έτσι ώστε για $R = 1$ να ισχύουν οι συνθήκες (3.15β) και (3.15γ). Τότε, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.3(i) με $R = 1$ και τα δοσμένα ξ_1, t_0 προκύπτει ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\bar{d}_1 \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_1 \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ που ικανοποιούν τις (3.68) και (3.69) με $k = 1$. Τέλος, ορίζουμε $t_1 := t_0$ και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για την περίπτωση $k = 1$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. (Γενικό επαγωγικό βήμα). Υποθέτουμε ακολούθως ότι ισχύουν όλες οι απαιτήσεις του Ισχυρισμού 1 για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύουν και για $k := k + 1$. Ορίζουμε τη σταθερά ξ_{k+1} όπως στην (3.70) με $i := k + 1$, δηλαδή:

$$\xi_{k+1} := \sqrt{L} \exp\{2c_2\} \beta(t_k, k + 2) \quad (3.73)$$

Αφού $L > 1$ και $c_2 > 0$, προκύπτει από τις (3.41) και (3.73) ότι $\xi_{k+1} \geq 1$, δηλαδή ότι ικανοποιείται η (3.65) για $k = k + 1$. Ακολούθως ορίζουμε τις απει-

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

κονίσεις t_{k+1} , $Q_{k+1}(\cdot)$, $P_{k+1}(\cdot)$, $\bar{d}_{k+1}(\cdot)$ και $\phi_{k+1}(\cdot)$ για $k = k + 1$. Πάλι από την Υπόθεση Η2, προκύπτει ότι ισχύει η Α2 για $R := k + 1$. Επομένως για τη δοσμένη σταθερά ξ_{k+1} όπως ορίζεται από την (3.73), υπάρχουν μια πλειονότιμη συνάρτηση $Q_{k+1} := Q_{k+1, \xi_{k+1}}$ που ικανοποιεί την Ιδιότητα 2.1 και ένα ζεύγος απεικονίσεων $d_{k+1} \in C^0([t_k, \infty); \mathbb{R})$ και $P_{k+1} \in C^1([t_k, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ όπου η τελευταία ικανοποιεί την (3.67) και έτσι ώστε να ισχύουν οι (3.15β), (3.15γ) για $R = k + 1$. Τότε, πάλι από το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.3(i) με $R = k + 1$ και τη δοσμένη από την (3.73) σταθερά ξ_{k+1} , μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις $\bar{d}_{k+1} \in C^0([t_k, \infty); \mathbb{R})$ και $\phi_{k+1} \in C^1([t_k, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, που ικανοποιούν τις (3.68) και (3.69) με $k = k + 1$. Τέλος ορίζουμε το χρόνο t_{k+1} όπως στην (3.71) με $i = k + 1$, δηλαδή:

$$t_{k+1} := \min\{\tau \geq t_k + 1 : \max\{\xi_{k+1} \exp\{-c_1(t - (t_k + 1))\}, \sqrt{g(t)}\} \leq \frac{1}{k+1}, \text{ για κάθε } t \geq \tau\}$$

Αφού $c_1 > 0$, επαληθεύεται εύκολα με τη βοήθεια της (3.11γ), ότι η σταθερά t_{k+1} είναι καλά ορισμένη και ικανοποιεί την (3.66α). Ολοκληρώθηκε επομένως και το γενικό βήμα της επαγωγικής υπόθεσης.

Κατασκευή του διακοπτόμενου παρατηρητή. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Ισχυρισμού 1, προχωράμε στην κατασκευή του διακοπτόμενου παρατηρητή για το σύστημα (3.9). Ορίζουμε την ακολουθία συστημάτων:

$$\dot{z}_k = G_k(t, z_k, y(t)), t \in [t_{k-1}, t_{k+1}] \quad (3.74\alpha)$$

$$\text{με αρχική κατάσταση } z_k(t_{k-1}) = 0, k = 1, 2, \dots \quad (3.74\beta)$$

$$G_k(t, z, y) \begin{cases} := F(t, z, y) + \phi_k(t)P_k^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z) \\ \quad \text{για } |z| \leq \zeta_k, t \in [t_{k-1}, t_{k+1}], y \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \\ := (F(t, z, y) + \phi_k(t)P_k^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z))^{\frac{2\zeta_k - |z|}{\zeta_k}} \\ \quad \text{για } \zeta_k \leq |z| \leq 2\zeta_k, t \in [t_{k-1}, t_{k+1}], y \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \\ := 0, \quad \text{για } |z| \geq 2\zeta_k, t \in [t_{k-1}, t_{k+1}], y \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \end{cases} \quad (3.74\gamma)$$

$$\zeta_k := \beta(t_{k+1}, k) + \xi_k \quad (3.74\delta)$$

με τις ακολουθίες $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ και $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ όπως προσδιορίζονται στον Ισχυρισμό 1. Η απεικόνιση $G_k(\cdot)$ είναι $C^0([t_{k-1}, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}; \mathbb{R}^n)$ και αποδεικνύεται όπως ακριβώς και στην απόδειξη της Πρότασης 2.10, ότι είναι και τοπικά Lipschitz ως προς $(z, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{n}}$, επομένως, για κάθε αρχική κατάσταση $z_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$, το σύστημα (3.74α) έχει μοναδική λύση σε μια γειτονιά του t_0 . Επιπλέον, η απεικόνιση $[t_{k-1}, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n \ni (t, z) \rightarrow G_k(t, z, y(t)) \in \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη, επομένως η αντίστοιχη λύση του (3.74) ορίζεται για κάθε $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$.

Απόδειξη της σύγκλισης του σφάλματος (3.3). Θεωρούμε την απεικόνιση $Z : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ όπως ορίζεται από την (3.7), δηλαδή $Z(t) := z_k(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, όπου για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $z_k(\cdot)$ είναι η λύση του (3.74). Έστω $k_0 \in \mathbb{N}$ με $k_0 \geq 2$, ούτως ώστε για την αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ του (3.9α) να ισχύει:

$$k_0 \geq |x_0| \quad (3.75)$$

Θεωρούμε τώρα έναν οποιοδήποτε ακέραιο $k \geq k_0$. Από την (3.74β), θα υπάρχει ένας μέγιστος χρόνος $\bar{t} \in (t_{k-1}, t_{k+1}]$ για τον οποίο θα ισχύει $|z_k(t)| < \zeta_k$ για κάθε $t \in [t_{k-1}, \bar{t})$.

Ισχυρισμός 2. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει $\bar{t} = t_{k+1}$, δηλαδή:

$$|z_k(t)| < \zeta_k, \forall t \in [t_{k-1}, t_{k+1}) \quad (3.76)$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. Υποθέτουμε ότι στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει $\bar{t} \in (t_{k-1}, t_{k+1})$ με

$$|z_k(\bar{t})| = \zeta_k \text{ και } |z_k(t)| < \zeta_k, \forall t \in [t_{k-1}, \bar{t}) \quad (3.77)$$

Από τις (3.74α), (3.74γ) και (3.77), προκύπτει ότι για το δοσμένο φυσικό k ανωτέρω, θα ισχύει:

$$\dot{z}_k = F(t, z_k, y) + \phi_k(t)P_k^{-1}(t)H'(t)(y - H(t)z_k), \forall t \in [t_{k-1}, \bar{t}] \quad (3.78)$$

Ακολούθως, επικαλούμαστε πάλι την Υπόθεση H2, σύμφωνα με την οποία ικανοποιούνται οι A1 και A2 με $R := k$, όπου λόγω του Ορισμού (3.70) και της

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

(3.74β), η σταθερά ξ_k ικανοποιεί την (3.17) με $R = k$ και $\bar{t}_0 := t_{k-1}$. Αφού $|x_0| \leq k = R$ και λαμβάνοντας υπόψη τις (3.67), (3.68), (3.69), (3.78) και το αποτέλεσμα του σκέλους (ii) της Πρότασης 3.3, έπεται ότι ισχύει η εκτίμηση (3.19α), δηλαδή

$$|e_k(t)| < \xi_k, \forall t \in [t_{k-1}, \bar{t}] \quad (3.79\alpha)$$

όπου

$$e_k(t) := x(t) - z_k(t), t \in [t_{k-1}, t_{k+1}] \quad (3.79\beta)$$

Από τις (1.104), (3.74δ), (3.75), (3.79) και το γεγονός ότι $k \geq k_0$ και $\bar{t} \leq t_{k+1}$, λαμβάνουμε την εκτίμηση

$$|z_k(\bar{t})| \leq |x(\bar{t})| + |e_k(\bar{t})| < \beta(\bar{t}, k_0) + \xi_k \leq \beta(t_{k+1}, k) + \xi_k = \zeta_k \quad (3.80)$$

που έρχεται σε αντίθεση με την (3.77), επομένως ισχύει η (3.76) για το δοσμένο k και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη του Ισχυρισμού 2.

Από τον Ισχυρισμό 2, συμπεραίνουμε ότι η $z_k(\cdot)$ ικανοποιεί την (3.78) για κάθε $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$, το οποίο λόγω της (3.19β) του σκέλους (ii) της Πρότασης 3.3 και της (3.66α), συνεπάγεται ότι:

$$|e_k(t)| \leq \max\{\xi_k \exp\{-c_1(t - (t_{k-1} + 1))\}, \sqrt{g(t)}\}, \forall t \in [t_{k-1} + 1, t_{k+1}] \quad (3.81)$$

Από τις (3.71) και (3.81) εξάγουμε ότι:

$$|e_k(t)| \leq \frac{1}{k}, \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (3.82)$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι το σφάλμα $e(\cdot) := x(\cdot) - Z(\cdot)$ ανάμεσα στη λύση του συστήματος (3.9) και την απεικόνιση $Z(\cdot)$ όπως ορίζεται από την (3.7), ικανοποιεί την εκτίμηση (3.3). Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και $\bar{k} = \bar{k}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με $\bar{k} \geq k_0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\frac{1}{\bar{k}} < \varepsilon$. Ορίζουμε $T = T(\varepsilon) := t_{\bar{k}}$. Από την (3.66), έπεται ότι για κάθε $t > T$ υπάρχει ένας ακέραιος $k \geq \bar{k}$, με $t_k \leq t < t_{k+1}$ και επομένως, αφού $k \geq k_0$, από τις (3.7), (3.79β) και (3.82) θα ισχύει

$$|x(t) - Z(t)| = |x(t) - z_k(t)| = |e_k(t)| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\bar{k}} < \varepsilon$$

για κάθε $t > T = T(\varepsilon)$. Το τελευταίο συνεπάγεται την (3.3) και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη της Πρότασης 3.5. \square

3.3 Τριγωνικά Συστήματα

Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας προκειμένου να αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου, που αφορά την επιλυσιμότητα του SODP(ODP) για τριγωνικά συστήματα της μορφής (3.1). Επιπλέον, δίνουμε ένα ακόμα παράδειγμα, ούτως ώστε να αναδειχθεί η μεθοδολογία με την οποία σχεδιάζεται ο παρατηρητής.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2

Η απόδειξη των δυο ισχυρισμών του θεωρήματος βασίζεται στα αποτελέσματα των Προτάσεων 3.3 και 3.5. Στην ανάλυση που ακολουθεί, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι αντί της συνθήκης (3.8), ισχύει:

$$a_i(t, y) > 0, \forall t \geq 0, y \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.83)$$

Για λόγους ευκολίας, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι ισχύει $m_i \geq 3$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. (Η ίδια ανάλυση με ορισμένες στοιχειώδεις τροποποιήσεις, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή του αποτελέσματος στην περίπτωση όπου $m_i = 1$, για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$). Προκειμένου να αποδείξουμε το πρώτο σκέλος του θεωρήματος, δείχνουμε ότι το σύστημα (3.1) ικανοποιεί τη Συνθήκη H2. Ειδικότερα, αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν ένας φυσικός $\ell \in \mathbb{N}$, μια απεικόνιση $A \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^{n \times n})$, σταθερές $L > 1, c_1, c_2 > 0$ που ικανοποιούν την (3.12) και μια συνάρτηση $g(\cdot)$ για την οποία ισχύει η (3.11), ούτως ώστε για κάθε $R > 0$, να ικανοποιούνται οι A1 και A2 για το σύστημα (3.1). Έστω $R > 0$ και $\xi \geq 1$. Ορίζουμε:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$F(t, x, y) := \begin{pmatrix} f_1(t, y) + a_1(t, y)x_2^{m_1} \\ f_2(t, y, x_2) + a_2(t, y)x_3^{m_2} \\ \vdots \\ f_{n-1}(t, y, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{n-1}(t, y)x_n^{m_{n-1}} \\ f_n(t, y, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

$$(t, x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (3.84)$$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $\sigma_R := \sigma_{R,\xi} \in \mathcal{N}$ για την οποία ισχύει:

$$\sigma_R(t) \geq \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^i \max \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, y, x_2, \dots, x_i) \right| : |(y, x_2, \dots, x_i)| \leq 2\beta(t, R) + \xi \right\}, \forall t \geq 0 \quad (3.85)$$

και έστω η πλειονότιμη απεικόνιση $[0, \infty) \ni t \rightarrow Q_R(t) := Q_{R,\xi}(t) \subset \mathbb{R}^\ell$, $\ell := \frac{n(n+1)}{2}$ που ορίζεται ως

$$Q_R(t) := \{q = (q_{1,1}; q_{2,1}, q_{2,2}; \dots; q_{n,1}, q_{n,2}, \dots, q_{n,n}) \in \mathbb{R}^\ell : |q| \leq \sigma_R(t)\} \quad (3.86)$$

και ικανοποιεί προφανώς την Ιδιότητα 2.1. Επίσης, θεωρούμε την $Y_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.10) με

$$H := \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_n \quad (3.87)$$

Από τις (3.84)-(3.87) και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού προκύπτει, χρησιμοποιώντας ίδια επιχειρήματα με εκείνα στην απόδειξη της Πρότασης 2.16, ότι για κάθε $t \geq 0$, $y \in Y_R(t)$ και $x, z \in \mathbb{R}^n$ με $|x| \leq \beta(t, R)$ και $|x - z| \leq \xi$ ισχύει:

$$F(t, x, y) - F(t, z, y) = A(t, q, x, x - z, y)(x - z), \text{ για κάποιο } q \in Q_R(t),$$

$$\text{με } q_{i,1} = 0, i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.88\alpha)$$

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

ορίσουμε $\bar{b}_i(\alpha, \beta) := b_i(\alpha, \beta) - \vartheta_i \beta^{2\gamma_i}$, τότε για κάθε μη μηδενικό $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned}\bar{b}_i(\alpha, \beta) &= b_i \left(\left(\frac{\alpha}{|(\alpha, \beta)|}, \frac{\beta}{|(\alpha, \beta)|} \right) |(\alpha, \beta)| \right) - \vartheta_i \beta^{2\gamma_i} \\ &= |(\alpha, \beta)|^{2\gamma_i} b_i \left(\frac{\alpha}{|(\alpha, \beta)|}, \frac{\beta}{|(\alpha, \beta)|} \right) - \vartheta_i \beta^{2\gamma_i} \\ &\geq \vartheta_i ((\alpha^2 + \beta^2)^{\gamma_i} - \beta^{2\gamma_i}) \geq 0\end{aligned}$$

επομένως ικανοποιείται η (3.90).

Ακολούθως, αποδεικνύουμε ότι ισχύει και η A2 και ειδικότερα ότι υπάρχουν σταθερές $L > 1$, $c_1, c_2 > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η (3.12) και μια συνάρτηση $g(\cdot)$ που ικανοποιεί την (3.11), ούτως ώστε για κάθε $R > 0$, $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$ να υπάρχουν ένας χρονικός μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_R := P_{R, \xi, t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$ και μια συνάρτηση $d_R := d_{R, \xi, t_0} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ που να ικανοποιούν την (3.15), με τις $H, A(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot), Y_R(\cdot)$ και $Q_R(\cdot)$ όπως δίνονται από τις (3.87), (3.88β), (3.10) και (3.86), αντίστοιχα και με τη $\beta(\cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από την (1.104) για το σύστημα (3.1). Προκειμένου να δείξουμε την A2 προχωράμε με επαγωγή ως ακολούθως. Επιλέγουμε σταθερές $L > 1$, $c_1 := 1$, $c_2 := n$ (η c_2 είναι ίση με τη διάσταση του χώρου κατάστασης) και έστω $g(\cdot)$ μια C^1 συνάρτηση που ικανοποιεί την (3.11) (μπορούμε για παράδειγμα να επιλέξουμε $g(t) := \frac{1}{2}e^{-t}$, $t \geq 0$). Επίσης, έστω $R > 0$. Για $k = 2, 3, \dots, n$ ορίζουμε:

$$H_k := \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_k, e := (e_{n-k+1}; \hat{e}')' \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, \hat{e} := (e_{n-k+2}, \dots, e_n)' \in \mathbb{R}^{k-1}; \quad (3.91\alpha)$$

$$A_k(t, q, x, e, y) := \begin{pmatrix} q_{n-k+1, n-k+1} \begin{pmatrix} a_{n-k+1}(t, y) \\ \times b_{n-k+1}(x_{n-k+2}, e_{n-k+2}) \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ q_{n-k+2, n-k+1} & & & \\ \vdots & & & \\ q_{n, n-k+1} & & & \boxed{A_{k-1}(t, q, x, \hat{e}, y)} \end{pmatrix} \quad (3.91\beta)$$

όπου

$$A_1(t, q, x, e_n, y) := q_{n, n} \quad (3.91\gamma)$$

Ισχυρισμός 1. (Επαγωγική Υπόθεση) Έστω $k \in \mathbb{N}$ με $2 \leq k \leq n$. Τότε για L, R και $g(\cdot)$ ως ανωτέρω και για κάθε $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$, υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{R,k} := P_{R,\xi,t_0,k} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{k \times k})$ και μια συνάρτηση $d_{R,k} := d_{R,\xi,t_0,k} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$P_{R,k}(t) > I_{k \times k}, \forall t \geq t_0; |P_{R,k}(t_0)| \leq L; \quad (3.92\alpha)$$

$$d_{R,k}(t) > n-k+1, \forall t \geq t_0+1; \int_{t_1}^{t_2} d_{R,k}(s)ds > -k, \forall t_2 \geq t_1, t_1, t_2 \in [t_0, t_0+1]; \quad (3.92\beta)$$

$$\begin{aligned} e' P_{R,k}(t) A_k(t, q, x, e, y) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_{R,k}(t) e &\leq -d_{R,k}(t) e' P_{R,k}(t) e, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e \in \ker H_k, y \in Y_R(t) : & \quad (3.92\gamma) \\ |x| \leq \beta(t, R), |e| \leq \xi, e' P_{R,k}(t) e &\geq g(t) \end{aligned}$$

όπου οι $H_k, A_k(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot), Y_R(\cdot)$ και $Q_R(\cdot)$ δίνονται στις (3.91α), (3.91β), (3.10) και (3.86), αντίστοιχα.

Από την (3.91), προκύπτει ότι οι απεικονίσεις H_n και $A_n(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ συμπίπτουν με τις H και $A(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, όπως οι τελευταίες δίνονται από τις (3.87) και (3.88β), αντίστοιχα, επομένως η A2 είναι συνέπεια του Ισχυρισμού 1, με $H := H_n, A(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot) := A_n(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ και με τις απεικονίσεις $d_R := d_{R,n}, P_R := P_{R,n}$ όπως δίνονται στις (3.92α), (3.92β). Πράγματι, οι (3.15α), (3.15γ) εξάγονται άμεσα από τις (3.92α), (3.92γ), ενώ και οι δυο ανισότητες της (3.15β) είναι συνέπεια της (3.92β) με $k = n$, λαμβάνοντας υπόψη ότι $c_1 = 1$ και $c_2 = n$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για $k := 2$. Για την περίπτωση $k = 2$ ορίζουμε:

$$H_2 := (1, 0), e := (e_{n-1}, e_n)' \in \mathbb{R}^2; \quad (3.93\alpha)$$

$$A_2(t, q, x, e, y) := \begin{pmatrix} q_{n-1,n-1} & a_{n-1}(t, y) b_{n-1}(x_n, e_n) \\ q_{n,n-1} & q_{n,n} \end{pmatrix} \quad (3.93\beta)$$

Για L, R και $g(\cdot)$ ως ανωτέρω και για κάθε $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{R,2} := P_{R,\xi,t_0,2} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και μια συνάρτηση $d_{R,2} := d_{R,\xi,t_0,2} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$P_{R,2}(t) > I_{2 \times 2}, \forall t \geq t_0; |P_{R,2}(t_0)| \leq L; \quad (3.94\alpha)$$

$$d_{R,2}(t) > n - 1, \forall t \geq t_0 + 1; \int_{t_1}^{t_2} d_{R,2}(s) ds > -2, \forall t_2 \geq t_1, t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + 1]; \quad (3.94\beta)$$

$$\begin{aligned} e' P_{R,2}(t) A_2(t, q, x, e, y) e + \frac{1}{2} e' \dot{P}_{R,2}(t) e &\leq -d_{R,2}(t) e' P_{R,2}(t) e, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e = (e_{n-1}, e_n) \in \mathbb{R}^2, y \in Y_R(t) : & \quad (3.94\gamma) \\ |x| \leq \beta(t, R), e \in \ker H_2, |e| \leq \xi, e' P_{R,2}(t) e &\geq g(t) \end{aligned}$$

όπου οι H_2 , $A_2(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, $Y_R(\cdot)$ και $Q_R(\cdot)$ δίνονται στις (3.93α), (3.93β), (3.10) και (3.86), αντίστοιχα. Έστω $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$. Ορίζουμε

$$P_{R,2}(t) := \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) \\ p_R(t) & L \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

όπου οι συναρτήσεις $p_{R,1}, p_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ πρόκειται να προσδιοριστούν. Επίσης, από τις (3.93α) και (3.95), έχουμε:

$$\begin{aligned} \{e \in \ker H_2 : |e| \leq \xi \text{ και } e' P_{R,2}(t) e \geq g(t)\} \\ = \{e = (0, e_n)' : \sqrt{g(t)/L} \leq |e_n| \leq \xi\} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.93), (3.95) και (3.96), η επιθυμητή (3.94γ) γράφεται:

$$\begin{aligned} (0, e_n) \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) \\ p_R(t) & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-1, n-1} & a_{n-1}(t, y) b_{n-1}(x_n, e_n) \\ q_{n, n-1} & q_{n, n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{2} (0, e_n) \overbrace{\begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) \\ p_R(t) & L \end{pmatrix}}^{\cdot} \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix} \leq -d_{R,2}(t) (0, e_n) \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) \\ p_R(t) & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix} \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e = (e_{n-1}, e_n) \in \mathbb{R}^2, y \in Y_R(t) : \\ |x| \leq \beta(t, R), \sqrt{g(t)/L} \leq |e_n| \leq \xi \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 & p_R(t)a_{n-1}(t, y)b_{n-1}(x_n, e_n) + Lq_{n,n} \leq -Ld_{R,2}(t), \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), \\
 & x \in \mathbb{R}^n, e = (e_{n-1}, e_n) \in \mathbb{R}^2, y \in Y_R(t) : |x| \leq \beta(t, R), \sqrt{g(t)/L} \leq |e_n| \leq \xi
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Στη συνέχεια, απαιτούμε η συνάρτηση $p_R(\cdot)$ που πρόκειται να προσδιορίσουμε να ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$p_R(t) \leq 0, \forall t \geq t_0; p_R(t_0) = 0 \tag{3.98}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.86), (3.89), (3.90), (3.98) και την ισοδυναμία ανάμεσα στις (3.94γ) και (3.97), προκύπτει ότι προκειμένου να δείξουμε την (3.94γ), αρκεί να προσδιορίσουμε συναρτήσεις $p_{R,1}, p_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_{R,2} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι (3.94α), (3.94β) και (3.98) και επιπλέον να ισχύει:

$$\begin{aligned}
 & p_R(t)w_R(t)(\bar{b}_{n-1}(x_n, e_n) + \vartheta_{n-1}e_n^{m_{n-1}-1}) + L\sigma_R(t) \leq -Ld_{R,2}(t), \forall t \geq t_0, \\
 & q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e_n \in \mathbb{R} : |x| \leq \beta(t, R), \sqrt{g(t)/L} \leq |e_n| \leq \xi
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

όπου η $\bar{b}(\cdot)$ δίνεται στην (3.90). Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τις (3.89), (3.90β), (3.98) και (3.99), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$p_R(t)w_R(t)\vartheta_{n-1}\frac{g^{\frac{m_{n-1}-1}{2}}(t)}{L^{\frac{m_{n-1}-1}{2}}} + L\sigma_R(t) \leq -Ld_{R,2}(t), \forall t \geq t_0 \tag{3.100}$$

για κατάλληλες συναρτήσεις $p_{R,1}, p_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_{R,2} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ που ικανοποιούν τις (3.94α), (3.94β) και (3.98).

Κατασκευή των p_R και $d_{R,2}$. Έστω

$$M_2 := \max\{\sigma_R(t) : t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{2}]\} \tag{3.101α}$$

$$\tau_2 := \min\left\{\frac{1}{M_2}, 1\right\} \tag{3.101β}$$

Ορίζουμε τις $\theta := \theta_{R,\xi,t_0}, p_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_{R,2} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ως εξής:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\theta(t) \begin{cases} := 0, & t = t_0 \\ \in [0, 1], & t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau_2}{2}] \\ := 1, & t \in [t_0 + \frac{\tau_2}{2}, \infty) \end{cases} \quad (3.102)$$

$$p_R(t) := -\theta(t) \frac{L^{\frac{m_{n-1}+1}{2}}(n + \sigma_R(t))}{\vartheta_{n-1} w_R(t) g^{\frac{m_{n-1}-1}{2}}(t)}, t \geq t_0 \quad (3.103)$$

$$d_{R,2}(t) \begin{cases} := -M_2, & t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau_2}{2}] \\ \in [-M_2, n], & t \in [t_0 + \frac{\tau_2}{2}, t_0 + \tau_2] \\ := n, & t \in [t_0 + \tau_2, \infty) \end{cases} \quad (3.104)$$

Αποδεικνύουμε ότι ικανοποιούνται οι (3.94β), (3.98) και (3.100) με τις $p_R(\cdot)$ και $d_{R,2}(\cdot)$ όπως δίνονται από τις (3.103) και (3.104), αντίστοιχα. Πράγματι, η (3.98) έπεται άμεσα από τις (3.89), (3.102), (3.103) και το γεγονός ότι $\vartheta_{n-1} > 0$. Η πρώτη ανισότητα της (3.94β) είναι συνέπεια των (3.101β) και (3.104). Επίσης, από τις (3.101β) και (3.104) προκύπτει ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} d_{R,2}(s) \geq -\tau_2 M_2 \geq -1, \text{ για κάθε } t_2 \geq t_1, t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + 1]$$

επομένως ικανοποιείται και η δεύτερη ανισότητα της (3.94β). Στην συνέχεια, δείχνουμε ότι ισχύει και η (3.100), με τις $p_R(\cdot)$ και $d_{R,2}(\cdot)$ όπως ορίστηκαν προηγουμένως. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau_2}{2}]$. Στην περίπτωση αυτή, από τις (3.89), (3.98), (3.101), (3.104) και το γεγονός ότι $\vartheta_{n-1} > 0$, προκύπτει ότι:

$$p_R(t) w_R(t) \vartheta_{n-1} \frac{g^{\frac{m_{n-1}-1}{2}}(t)}{L^{\frac{m_{n-1}-1}{2}}} + L\sigma_R(t) \leq L\sigma_R(t) \leq LM_2 = -Ld_{R,2}(t)$$

επομένως, η (3.100) ισχύει για κάθε $t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau_2}{2}]$.

Περίπτωση 2. $t \in [t_0 + \frac{\tau_2}{2}, \infty)$. Τότε, από τις (3.102)-(3.104) έχουμε:

$$p_R(t) w_R(t) \vartheta_{n-1} \frac{g^{\frac{m_{n-1}-1}{2}}(t)}{L^{\frac{m_{n-1}-1}{2}}} + L\sigma_R(t) = -Ln \leq -Ld_{R,2}(t)$$

συνεπώς, η (3.100) ισχύει και για κάθε $t \in [t_0 + \frac{\tau_2}{2}, \infty)$.

Συμπεραίνουμε επομένως, ότι η (3.100) ισχύει για κάθε $t \geq t_0$.

Κατασκευή της $p_{R,1}$. Τέλος, κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $p_{R,1} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται και οι δυο απαιτήσεις της (3.94α), με την $P_{R,2}(\cdot)$ όπως δίνεται από τις (3.95) και (3.103). Λαμβάνοντας υπόψη ότι $L > 1$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$p_{R,1}(t) := \frac{p_R^2(t)}{L-1} + L, t \geq t_0 \quad (3.105)$$

με την $p_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.103). Από τις (3.95) και (3.105) εξάγουμε ότι:

$$\det(P_{R,2}(t) - I_{2 \times 2}) = \det \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) - 1 & p_R(t) \\ p_R(t) & L - 1 \end{pmatrix} = (L - 1)^2 > 0, \forall t \geq t_0 \quad (3.106)$$

Από την (3.106) και την υπόθεση μας ότι $L > 1$, προκύπτει ότι $P_{R,2}(t) - I_{2 \times 2} > 0$ για κάθε $t \geq t_0$ και επομένως ικανοποιείται η πρώτη ανισότητα της (3.94α). Τέλος, η δεύτερη ανισότητα της (3.94α) έπεται άμεσα από τις (3.95), (3.98) και (3.105). Ολοκληρώθηκε επομένως η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 για $k = 2$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. (Γενικό βήμα της επαγωγικής διαδικασίας) Υποθέτουμε ότι ο Ισχυρισμός 1 ισχύει για κάποιο φυσικό k με $2 \leq k < n$. Εδικότερα, υποθέτουμε ότι για L, R και $g(\cdot)$ ως ανωτέρω και για κάθε $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$, υπάρχουν ένας χρονικώς μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{R,k} := P_{R,\xi,t_0,k} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{k \times k})$ και μια συνάρτηση $d_{R,k} := d_{R,\xi,t_0,k} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει η (3.92) με τις απεικονίσεις $H_k, A_k(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot), Y_R(\cdot)$ και $Q_R(\cdot)$ όπως δίνονται στις (3.91α), (3.91β), (3.10) και (3.86), αντίστοιχα. Αποδεικνύουμε ότι ο Ισχυρισμός 1 ισχύει και για $k := k + 1$. Θεωρούμε το ζεύγος (H, A) όπως δίνεται από την (3.20) με

$$H(t) := H_k, A(t, q, x, e, y) := A_k(t, q, x, e, y), \\ \ell := \frac{n(n+1)}{2}, m := k, n := n, \text{ και } \bar{n} := 1$$

όπου οι H_k και A_k ορίζονται στις (3.91α) και (3.91β), αντίστοιχα. Τότε, λόγω της πρώτης ανισότητας της (3.92α) και της (3.92γ) ικανοποιείται η H3 της προηγούμενης ενότητας με τη $g(\cdot)$ ως ανωτέρω, τις $Y_R(\cdot), Q_R(\cdot)$ και τη $\beta_R(\cdot) := \beta(\cdot, R)$

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

όπως δίνονται στις (3.10), (3.86) και (1.104), αντίστοιχα, και με τις απεικονίσεις $P_R(\cdot) := P_{R,k}(\cdot)$, $d_R(\cdot) := d_{R,k}(\cdot)$ όπως δίνονται στις (3.92α), (3.92β). Τότε, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\bar{d}_{R,k}(\cdot) = \bar{d}_{R,\xi,t_0,k}(\cdot)$ που ορίζεται ως:

$$\bar{d}_{R,k}(t) := d_{R,k}(t) - \frac{1}{2}, t \geq t_0 \quad (3.107)$$

έχουμε $\bar{d}_{R,k}(t) < d_{R,k}(t)$ για κάθε $t \geq t_0$, επομένως ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Λήμματος 3.6 και συνεπώς μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\phi_{R,k} := \phi_{R,\xi,t_0,k} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$, ούτως ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} e'P_{R,k}(t)A_k(t, q, x, e, y)e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_{R,k}(t)e &\leq \phi_{R,k}(t)|H_k e|^2 - \bar{d}_{R,k}(t)e'P_{R,k}(t)e, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e \in \mathbb{R}^k, y \in Y_R(t) : & \quad (3.108) \\ |x| \leq \beta(t, R), |e| \leq \xi, e'P_{R,k}(t)e &\geq g(t) \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι λόγω των (3.92β) και (3.107), η $\bar{d}_{R,k}(\cdot)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{R,k}(t) &> n - k + \frac{1}{2}, \forall t \geq t_0 + 1; \\ \int_{t_1}^{t_2} \bar{d}_{R,k}(s)ds &> -(k + \frac{1}{2}), \forall t_2 \geq t_1, t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + 1] \end{aligned} \quad (3.109)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.108) και (3.109), είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε ότι ο Ισχυρισμός 1 ισχύει για $k = k + 1$. Ειδικότερα, για τις ίδιες σταθερές L, R και τη συνάρτηση $g(\cdot)$ ως ανωτέρω και για κάθε $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$, δείχνουμε ότι υπάρχουν ένας χρονικός μεταβαλλόμενος συμμετρικός πίνακας $P_{R,k+1} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)})$ και μια συνάρτηση $d_{R,k+1} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (3.92α) και (3.92β) με $k = k + 1$ και επιπλέον να ισχύει:

$$\begin{aligned} e'P_{R,k+1}(t)A_{k+1}(t, q, x, e, y)e + \frac{1}{2}e'\dot{P}_{R,k+1}(t)e &\leq -d_{R,k+1}(t)e'P_{R,k+1}(t)e, \\ \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e \in \ker H_{k+1}, y \in Y_R(t) : & \quad (3.110) \\ |x| \leq \beta(t, R), |e| \leq \xi, e'P_{R,k+1}(t)e &\geq g(t) \end{aligned}$$

όπου

$$H_k := \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{k+1}, e := (e_{n-k}; \hat{e}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, \hat{e} := (e_{n-k+1}, \dots, e_n)' \in \mathbb{R}^k; \quad (3.111\alpha)$$

$$A_{k+1}(t, q, x, e, y) := \begin{pmatrix} q_{n-k, n-k} & \begin{pmatrix} a_{n-k}(t, y) \\ \times b_{n-k}(x_{n-k+1}, e_{n-k+1}) \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ q_{n-k+1, n-k} & & & & \\ \vdots & & \boxed{A_k(t, q, x, \hat{e}, y)} & & \\ q_{n, n-k} & & & & \end{pmatrix} \quad (3.111\beta)$$

$$P_{R, k+1}(t) := \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) & 0 & \dots & 0 \\ p_R(t) & & & & \\ 0 & & \boxed{P_{R,k}(t)} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \quad (3.111\gamma)$$

και οι $Y_R(\cdot)$, $Q_R(\cdot)$ δίνονται στις (3.10), (3.86), αντίστοιχα. Για τις δοσμένες σταθερές $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$ προσδιορίζουμε ακολούθως συναρτήσεις $p_{R,1}, p_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_{R, k+1} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι (3.92α), (3.92β) με $k = k + 1$ και επιπλέον να ισχύει η (3.110) με τις H_{k+1} , $A_{k+1}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ και $P_{R, k+1}(\cdot)$ όπως δίνονται από την (3.111), δηλαδή να ισχύει

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\begin{aligned}
 & (0, e_{n-k+1}, \dots, e_n) \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) & 0 & \dots & 0 \\ p_R(t) & & & & \\ 0 & \boxed{P_{R,k}(t)} & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} q_{n-k,n-k} & \begin{pmatrix} a_{n-k}(t, y) \\ \times b_{n-k}(x_{n-k+1}, e_{n-k+1}) \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ q_{n-k+1,n-k} & & & & \\ \vdots & \boxed{A_k(t, q, x, \hat{e}, y)} & & & \\ q_{n,n-k} & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{n-k+1} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} (0, e_{n-k+1}, \dots, e_n) \overbrace{\begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) & 0 & \dots & 0 \\ p_R(t) & & & & \\ 0 & \boxed{P_{R,k}(t)} & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}} \\
 & \times \begin{pmatrix} 0 \\ e_{n-k+1} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \leq -d_{R,k+1}(t)(0, e_{n-k+1}, \dots, e_n) \\
 & \times \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) & 0 & \dots & 0 \\ p_R(t) & & & & \\ 0 & \boxed{P_{R,k}(t)} & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{n-k+1} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e := (e_{n-k}; \hat{e}')' \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, y \in Y_R(t) :$

$|x| \leq \beta(t, R), e \in \ker H_{k+1}, |e| \leq \xi, e' P_{R,k+1}(t) e \geq g(t)$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 & e_{n-k+1}^2 p_R(t) a_{n-k}(t, y) b_{n-k}(x_{n-k+1}, e_{n-k+1}) + \hat{e}' P_{R,k}(t) A_k(t, q, x, \hat{e}, y) \hat{e} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \hat{e}' \dot{P}_{R,k}(t) \hat{e} \leq -d_{R,k+1}(t) \hat{e}' P_{R,k}(t) \hat{e}, \\
 & \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), x \in \mathbb{R}^n, e := (e_{n-k}; \hat{e}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, y \in Y_R(t) : \\
 & \quad |x| \leq \beta(t, R), e \in \ker H_{k+1}, |e| \leq \xi, \hat{e}' P_{R,k+1}(t) e \geq g(t) \quad (3.112)
 \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι λόγω των (3.111α) και (3.111γ) ισχύει:

$$e' P_{R,k+1}(t) e = \hat{e}' P_{R,k}(t) \hat{e}, \forall e = (e_{n-k}; \hat{e}') \in \ker H_{k+1}$$

επομένως, λαμβάνοντας υπόψη την ανωτέρω και τις (3.91α), (3.108), προκειμένου να δείξουμε την (3.112), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 & e_{n-k+1}^2 (p_R(t) a_{n-k}(t, y) b_{n-k}(x_{n-k+1}, e_{n-k+1}) + \phi_{R,k}(t)) \\
 & \leq (\bar{d}_{R,k}(t) - d_{R,k+1}(t)) \hat{e}' P_{R,k}(t) \hat{e}, \forall t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.113) \\
 & \hat{e} \in \mathbb{R}^k, y \in Y_R(t) : |x| \leq \beta(t, R), |\hat{e}| \leq \xi, \hat{e}' P_{R,k+1}(t) \hat{e} \geq g(t)
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε ορισμένες επιπλέον απαιτήσεις για τις συναρτήσεις $p_R(\cdot)$ και $d_R(\cdot)$. Ειδικότερα, θέλουμε να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$p_R(t) \leq 0, \forall t \geq t_0; p_R(t_0) = 0; \quad (3.114\alpha)$$

$$d_{R,k+1}(t) \leq \bar{d}_{R,k}(t), \forall t \geq t_0 \quad (3.114\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.89), (3.90), (3.114) και το γεγονός ότι η επιθυμητή ανισότητα στην (3.113) πρέπει να ισχύει για εκείνα τα διανύσματα $\hat{e} \in \mathbb{R}^k$ για τα οποία $|\hat{e}| \leq \xi$ και $\hat{e}' P_{R,k}(t) \hat{e} \geq g(t)$, συμπεραίνουμε πως για να δείξουμε την (3.113) καθώς και ότι οι (3.92α), (3.92β) ικανοποιούνται για $k = k + 1$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}
 & e_{n-k+1}^2 ((p_R(t) w_R(t) \vartheta_{n-k} e_{n-k+1}^{m_{n-k}-1} + \phi_{R,k}(t)) \\
 & \leq (\bar{d}_{R,k}(t) - d_{R,k+1}(t)) g(t), \forall t \geq t_0, |e_{n-k+1}| \leq \xi \quad (3.115)
 \end{aligned}$$

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

για κατάλληλες συναρτήσεις $p_{R,1}, p_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_{R,k+1} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ούτως ώστε να ισχύουν οι (3.92α), (3.92β) για $k = k + 1$ και επιπλέον, οι $p_R(\cdot)$ και $d_R(\cdot)$ να ικανοποιούν την (3.114). Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι εν λόγω απεικονίσεις.

Κατασκευή της απεικόνισης p_R . Θεωρούμε το φυσικό $\gamma := \frac{m_{n-k+1}}{2}$ και ορίζουμε

$$p_R(t) := -\frac{\zeta(t)\phi_{R,k}^\gamma(t)}{\vartheta_{n-k}w_R(t)}, t \geq t_0 \quad (3.116)$$

για κάποια $\zeta(\cdot) = \zeta_{R,\xi,t_0}(\cdot)$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$\zeta(t) \geq 0, \forall t \geq t_0; \zeta(t_0) = 0 \quad (3.117)$$

και πρόκειται να προσδιοριστεί στη συνέχεια. Από την παρούσα ανάλυση, συμπεραίνουμε ότι για να δείξουμε την (3.115) με τις $p_R(\cdot)$ και $d_{R,k+1}(\cdot)$ ως ανωτέρω, αρκεί να κατασκευαστεί ένα ζεύγος συναρτήσεων $\zeta \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_{R,k+1} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ που ικανοποιούν τις (3.114β), (3.117) και (3.92β) για $k = k + 1$, και επιπλέον να ισχύει η συνθήκη:

$$-\zeta(t)s^\gamma + s \leq (\bar{d}_{R,k}(t) - d_{R,k+1}(t))g(t), \forall t \geq t_0, s \in [0, \phi_{R,k}(t)\xi^2] \quad (3.118)$$

Κατασκευή των συναρτήσεων ζ και $d_{R,k+1}$. Έστω

$$M_{k+1} := \left| \max \left\{ -\bar{d}_{R,k}(t) + \frac{1}{g(t)}s + \frac{1}{4} : t \in \left[t_0, t_0 + \frac{1}{2} \right], s \in [0, \phi_{R,k}(t)\xi^2] \right\} \right| \quad (3.119\alpha)$$

$$\tau_{k+1} := \min \left\{ \frac{1}{4M_{k+1}}, \frac{1}{2} \right\} \quad (3.119\beta)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\theta := \theta_{R,\xi,t_0} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ως ακολούθως:

$$\theta(t) \begin{cases} := 0, & t = t_0 \\ \in [0, 1], & t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}] \\ := 1, & t \in [t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}, \infty) \end{cases} \quad (3.120)$$

Σημειώνεται ότι λόγω της (3.119) θα ισχύει:

$$\bar{d}_{R,k}(t) - \frac{1}{4} \geq -M_{k+1}, \forall t \in [t_0, t_0 + \tau_{k+1}] \quad (3.121)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.121), μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $d_{R,k+1} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ως εξής:

$$d_{R,k+1}(t) \begin{cases} := -M_{k+1}, & t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}] \\ \in [-M_{k+1}, \bar{d}_{R,k}(t) - \frac{1}{4}], & t \in [t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}, t_0 + \tau_{k+1}] \\ := \bar{d}_{R,k}(t) - \frac{1}{4}, & t \in [t_0 + \tau_{k+1}, \infty) \end{cases} \quad (3.122)$$

Τέλος, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\zeta(t) := \frac{\theta(t)}{\gamma(\frac{1}{4}g(t))^{\gamma-1}}, t \geq t_0 \quad (3.123)$$

η οποία είναι C^1 και λόγω της (3.120), ικανοποιεί την (3.117). Ακολούθως, δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις $\zeta(\cdot)$ και $d_{R,k+1}(\cdot)$ ικανοποιούν την (3.92β) και την ανισότητα (3.118).

Απόδειξη της (3.92β) για $k = k + 1$. Αρχικά, λαμβανόντας υπόψη τις (3.109), (3.119β) και (3.122), συμπεραίνουμε ότι ισχύει $d_{R,k+1}(t) > n - k + \frac{1}{4} > n - (k + 1) + 1$, για κάθε $t \geq t_0 + 1$, επομένως ικανοποιείται η πρώτη ανισότητα της (3.92β) για $k = k + 1$. Επίσης, από τις (3.119β) και (3.122), έχουμε

$$\begin{aligned} t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \tau_{k+1}], t_2 \geq t_1 &\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d_{R,k+1}(s) ds \\ &\geq - \int_{t_1}^{t_2} M_{k+1} ds \geq - \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{k+1}} M_{k+1} ds \geq -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (3.124\alpha)$$

ενώ επιπλέον, από τις (3.109), (3.119β) και (3.122) εξάγουμε ότι:

$$\begin{aligned} t_1, t_2 \in [t_0 + \tau_{k+1}, t_0 + 1], t_2 \geq t_1 &\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d_{R,k+1}(s) ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \bar{d}_{R,k}(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} (d_{R,k+1}(s) - \bar{d}_{R,k}(s)) ds \\ &> - \left(k + \frac{1}{2} \right) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{4} ds \geq - \left(k + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} = - \left(k + \frac{3}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.124\beta)$$

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

Από την (3.124) συμπεραίνουμε ότι η δεύτερη ανισότητα της (3.92β) ικανοποιείται και για $k = k + 1$, δηλαδή ισχύει:

$$\int_{t_1}^{t_2} d_{R,k+1}(s)ds > -(k+1), \forall t_2 \geq t_1, t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + 1]$$

Απόδειξη της (3.118). Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}]$. Αρχικά, σημειώνουμε ότι λόγω της (3.119α) ισχύει $M_{k+1} \geq -\bar{d}_{R,k}(t) + \frac{\phi_{R,k}(t)\xi^2}{g(t)}$ για κάθε $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{2}]$, το οποίο σε συνδυασμό με τις (3.119β) και (3.122), συνεπάγεται ότι:

$$d_{R,k+1}(t) \leq \bar{d}_{R,k}(t) - \frac{\phi_{R,k}(t)\xi^2}{g(t)}, \forall t \in [t_0, t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}] \quad (3.125)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.117) και (3.125), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} -\zeta(t)s^\gamma + s - (\bar{d}_{R,k}(t) - d_{R,k+1}(t))g(t) &\leq s - (\bar{d}_{R,k}(t) - d_{R,k+1}(t))g(t) \\ &\leq s - \phi_{R,k}(t)\xi^2 \leq 0, \forall s \in [0, \phi_{R,k}(t)\xi^2] \end{aligned}$$

από όπου έπεται η (3.118).

Περίπτωση 2. $t \in [t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}, \infty)$. Σημειώνεται, ότι από την (3.122) έχουμε $\bar{d}_{R,k}(t) - d_{R,k+1}(t) \geq \frac{1}{4}$, για κάθε $t \in [t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}, \infty)$, επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις (3.120) και (3.123), θα ισχύει:

$$\begin{aligned} -\zeta(t)s^\gamma + s - (\bar{d}_{R,k}(t) - d_{R,k+1}(t))g(t) &\leq -\zeta(t)s^\gamma + s - \frac{1}{4}g(t) \\ &= -\frac{1}{\gamma(\frac{1}{4}g(t))^{\gamma-1}}s^\gamma + s - \frac{1}{4}g(t), \forall t \in [t_0 + \frac{\tau_{k+1}}{2}, \infty), s \geq 0 \end{aligned} \quad (3.126)$$

Επίσης, αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε σταθερό $t \geq 0$, οι τιμές της συνάρτησης

$$h_t(s) := -\frac{1}{\gamma(\frac{1}{4}g(t))^{\gamma-1}}s^\gamma + s - \frac{1}{4}g(t), s \geq 0$$

είναι γνήσια αρνητικές. Πράγματι, ισχύει

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

Από την πρώτη ανισότητα της (3.92α), την (3.128) και το κριτήριο του Sylvester για θετικά ορισμένους πίνακες, εξάγουμε ότι $P_{R,k+1}(t) > I_{(k+1) \times (k+1)}$ για κάθε $t \geq t_0$, επομένως ικανοποιείται η πρώτη ανισότητα της (3.92α) και για $k = k+1$. Τέλος, η δεύτερη ανισότητα της (3.92α) για την απεικόνιση $P_{R,k+1}(\cdot)$ είναι άμεση συνέπεια των (3.111γ), (3.116), (3.127) και της επαγωγικής υπόθεσης (3.92α) (από όπου γνωρίζουμε, ότι για την απεικόνιση $P_{R,k}(\cdot)$ ισχύει $|P_{R,k}(t_0)| \leq L$).

Δείξαμε επομένως ότι ικανοποιούνται όλες οι απαιτήσεις του Ισχυρισμού 1, το οποίο συνεπάγεται, ότι για κάθε $R > 0$ ισχύει η Συνθήκη A2. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι ικανοποιείται η Υπόθεση H2 για το σύστημα (3.1) και συνεπώς από το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.5, εξάγουμε ότι το SODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (3.1) ως προς τον \mathbb{R}^n . Η απόδειξη του δεύτερου σκέλους του Θεωρήματος 3.2, για την περίπτωση όπου είναι εκ των προτέρων γνωστό πως οι αρχικές καταστάσεις του (3.1) ανήκουν στη μπάλα B_R με ακτίνα $R > 0$ και κέντρο το $0 \in \mathbb{R}^n$, είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.3. Για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε ότι σε αυτή την περίπτωση, επαναλαμβάνουμε επακριβώς την ίδια ανάλυση, για να δείξουμε ότι οι A1 και A2 ικανοποιούνται για τη συγκεκριμένη σταθερά R και στη συνέχεια επικαλούμαστε το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.3, προκειμένου να δείξουμε ότι το ODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (3.1) ως προς την B_R . \square

Παρατήρηση 3.8 Σημειώνεται, ότι η ανάλυση της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2, οδηγεί στην κατασκευή ενός χρονικώς μεταβαλλόμενου παρατηρητή, ακόμα και στην περίπτωση αυτόνομων συστημάτων της μορφής (3.1).

3.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.9 Θεωρούμε το τρισδιάστατο σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1) + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2) + \frac{1}{1+x_1^2} x_3^3 \end{aligned} \quad (3.129\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= f_3(t, x_1, x_2, x_3) \\ y &= x_1, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (3.129\beta)$$

όπου $f_i \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^i; \mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $C \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$x_1 f_1(t, x_1) \leq C(t) x_1^2 \quad (3.130\alpha)$$

$$x_2 f_2(t, x_1, x_2) \leq C(t) x_2^2 \quad (3.130\beta)$$

$$x_3 f_3(t, x_1, x_2, x_3) \leq C(t) x_3^2 \quad (3.130\gamma)$$

για κάθε $t \geq 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

Προφανώς το ανωτέρω σύστημα έχει τη μορφή (3.1), με $m_1 = m_2 := 3$, και $a_1 := 1, a_2 := (1+x_1^2)^{-1}$. Επιπλέον, έπεται από την υπόθεση (3.130) ότι το (3.129α) είναι δεξιά πλήρες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι για δοσμένα $t_0 \geq 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}^3$, η λύση $x(\cdot) := (x_1(\cdot), x_2(\cdot), x_3(\cdot))$ του (3.129α) ορίζεται στο μέγιστο από δεξιά διάστημα $[t_0, T_{\max})$ με $T_{\max} < \infty$. Τότε θα ισχύει:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x(t)| = \infty \quad (3.131)$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο της $V(x_3) = x_3^2$ κατά μήκος των λύσεων του (3.129α), εξάγουμε από την (3.130γ) και το Λήμμα Gronwall ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_3^2(t)) &= 2x_3(t)f(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \leq 2C(t)x_3^2 \Rightarrow \\ x_3^2(t) &\leq x_3^2(t_0) + 2 \int_{t_0}^t C(s)x_3^2(s)ds \Rightarrow \\ x_3^2(t) &\leq x_3^2(t_0) \exp \left[2 \int_{t_0}^t C(s)ds \right] \end{aligned}$$

και συνεπώς:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x_3(t)| < \infty \quad (3.132)$$

Εν συνεχεία, υπολογίζοντας την παράγωγο της $V(x_2) = x_2^2$ κατά μήκος των λύσεων του (3.129α), και χρησιμοποιώντας τις (3.130β), (3.132) και το Λήμμα Gronwall, προκύπτει ότι

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x_2(t)| < \infty \quad (3.133)$$

και τέλος, με αντίστοιχα επιχειρήματα, ότι ισχύει:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x_1(t)| < \infty \quad (3.134)$$

Από τις (3.131)-(3.134) καταλήγουμε σε άτοπο, επομένως ισχύει $T_{\max} = \infty$. Συνεπώς, ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2 και επομένως, το SODP είναι επιλύσιμο ως προς τον \mathbb{R}^3 για το σύστημα (3.129). Αν περαιτέρω υποθέσουμε, πως είναι εκ των προτέρων γνωστό, ότι οι αρχικές του καταστάσεις ανήκουν σε δοσμένη μπάλα B_R με κέντρο το $0 \in \mathbb{R}^3$, τότε το ODP είναι επιλύσιμο ως προς την B_R .

Στο παρακάτω παράδειγμα, επιλύεται το πρόβλημα σχεδίασης παρατηρητή, χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα της απόδειξης του πρώτου βήματος της επαγωγής του Θεωρήματος 3.2, ενώ παράλληλα αξιοποιούμε και την Παρατήρηση 3.7, για να επιτύχουμε μια αμεσότερη κατασκευή των απεικονίσεων στο δεξί μέλος του παρατηρητή.

Παράδειγμα 3.10 Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \phi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.135\alpha)$$

$$y = x_1, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.135\beta)$$

όπου η $\phi(\cdot)$ είναι C^1 και ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\max\{|\phi(x_1, x_2)|, |\frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x_1, x_2)|\} \leq 1, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.136)$$

Προφανώς, το σύστημα (3.135) έχει τη μορφή (3.1) με $n = 2$, $m_1 = 3$ και $a_1(\cdot, \cdot) \equiv 1$. Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη την (3.136), μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι το (3.135α) είναι δεξιά πλήρες. Ειδικότερα, ικανοποιείται η εκτίμηση (1.104) με τη συνάρτηση

$$\beta(t, s) := 2(s + 1)^3 e^{3t}, (t, s) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \quad (3.137)$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι για κάποια αρχική συνθήκη $(x_{10}, x_{20}) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει $T_{\max} < \infty$, όπου $[0, T_{\max})$ το μέγιστο από δεξιά διάστημα υπάρξης της λύσης $x(\cdot) := (x_1(\cdot), x_2(\cdot))$ του (3.135α). Τότε, θα ισχύει:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x(t)| = \infty \quad (3.138)$$

Από τις (3.135α), (3.136) και το Λήμμα Gronwall, προκύπτει ότι για κάθε $t \in [0, T_{\max})$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_2 \phi(x_1, x_2) \Rightarrow \\ x_2(t) &= x_{20} + \int_0^t x_2(s) \phi(x_1(s), x_2(s)) ds \Rightarrow \\ |x_2(t)| &\leq |x_{20}| + \int_0^t |x_2(s)| |\phi(x_1(s), x_2(s))| ds \Rightarrow \\ |x_2(t)| &\leq |x_{20}| + \int_0^t |x_2(s)| ds \Rightarrow \\ |x_2(t)| &\leq |x_{20}| e^t \end{aligned} \quad (3.139\alpha)$$

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2^3 \Rightarrow \\
 x_1(t) &= x_{10} + \int_0^t x_2^3(s) ds \Rightarrow \\
 |x_1(t)| &\leq |x_{10}| + \int_0^t |x_2^3(s)| ds \Rightarrow \\
 |x_1(t)| &\leq |x_{10}| + \int_0^t (|x_{20}|e^s)^3 ds \Rightarrow \\
 |x_1(t)| &\leq |x_{10}| + |x_{20}|^3 \int_0^t e^{3s} ds \Rightarrow \\
 |x_2(t)| &\leq |x_{10}| + |x_{20}|^3 \left(\frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \right) \tag{3.139β}
 \end{aligned}$$

Απο τις (3.139α) και (3.139β) συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x_1(t)| < \infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow T_{\max}} |x_2(t)| < \infty$$

που έρχεται σε αντίφαση με την (3.138) και συνεπώς ισχύει $T_{\max} = \infty$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι (3.139α) και (3.139β) ισχύουν για κάθε $t \geq 0$ καθώς και τη στοιχειώδη ανισότητα $a + b^3 \leq (|(a, b)| + 1)^3$, λαμβάνουμε την εκτίμηση:

$$\begin{aligned}
 |(x_1(t), x_2(t))| &= (x_1^2(t) + x_2^2(t))^{\frac{1}{2}} \leq |x_1(t)| + |x_2(t)| \\
 &\leq |x_{20}|e^t + |x_{10}| + |x_{20}|^3 \left(\frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \right) \\
 &\leq |x_{20}|e^t + |x_{10}| + |x_{20}|^3 e^{3t} \\
 &\leq |x_{20}|e^t + (|x_{10}| + |x_{20}|^3) e^{3t} \\
 &\leq |x_{20}|e^t + (|(x_{10}, x_{20})| + 1)^3 e^{3t} \\
 &\leq 2(|(x_{10}, x_{20})| + 1)^3 e^{3t}, \forall t \geq 0
 \end{aligned}$$

Από την ανωτέρω προκύπτει ότι ικανοποιείται η (1.104) με τη συνάρτηση $\beta(\cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από την (3.137). Επιπλέον, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2, μπορούμε να δείξουμε ότι το σύστημα (3.135) ικανοποιεί τις Υποθέσεις

A1 και A2 για κάθε $R > 0$. Πράγματι, έστω $L > 1$ και έστω κάποιες σταθερές $R > 0$, $\xi \geq 1$ και $t_0 \geq 0$. Προκειμένου να κατασκευάσουμε το χρονικά μεταβαλλόμενο πίνακα $P_R(\cdot)$, υιοθετούμε την προσέγγιση του πρώτου βήματος της επαγωγής στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2. Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\sigma_R(t)(= \sigma_{R,\xi}(t)) := 2\beta(t, R) + \xi + 1 \quad (3.140)$$

με τη $\beta(\cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από την (3.137), η οποία λόγω της (3.136), ικανοποιεί την (3.85) για το σύστημα (3.135). Επίσης, θεωρούμε τις πλειονότητες απεικονίσεις $Q_R(= Q_{R,\xi})$ και $Y_R(\cdot)$ όπως ορίζονται από τις (3.86) και (3.10), αντίστοιχα, με τη συνάρτηση $\sigma_R(\cdot)$ ανωτέρω, με $\ell := 3$ και $H := (1, 0)$ και έστω:

$$A(q, x, e)(= A(t, q, x, e, y)) := \begin{pmatrix} 0 & b(x_2, e_2) \\ 0 & q_{2,2} \end{pmatrix} \quad (3.141\alpha)$$

$$b(\alpha, \beta) := \alpha^2 + \alpha(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.141\beta)$$

Η Ιδιότητα A1 είναι άμεση συνέπεια των (3.137), (3.140) και (3.141). Επίσης, ισχύει και η σχέση (3.89) με $w_R(\cdot) := 1$. Προκειμένου να δείξουμε ότι ικανοποιείται και η A2, ορίζουμε τη συνάρτηση $g(t) := \frac{1}{2}e^{-t}$, $t \geq 0$ και προχωράμε στην κατασκευή ενός χρονικώς μεταβαλλόμενου συμμετρικού πίνακα $P_R(= P_{R,2}) := P_{R,\xi,t_0,2} \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}^{2 \times 2})$ και μιας συνάρτησης $d_R(= d_{R,2}) := d_{R,\xi,t_0,2} \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$ ούτως ώστε να ικανοποιείται η (3.94) με τις απεικονίσεις $H_2 := H$, $A_2 := A$, την $Q_R(\cdot)$ ανωτέρω και $n = 2$. Θεωρούμε την $P_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.95). Ακολουθώντας την ανάλυση του πρώτου βήματος της επαγωγής στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2, και χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να επιτύχουμε το ρητό προσδιορισμό συναρτήσεων $p_{R,1}, p_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R})$ και $d_R \in C^0([t_0, \infty); \mathbb{R})$, που ικανοποιούν τις (3.105), (3.103) και (3.104), αντίστοιχα. Για λόγους πληρότητας, σημειώνουμε ότι η επιθυμητή (3.100) θα γράφεται ως:

$$p_R(t) \frac{\vartheta_1}{2L} e^{-t} + L\sigma_R(t) \leq -Ld_R(t) \quad (3.142)$$

και μπορούμε να επιλέξουμε

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$d_R(t) := 2, t \geq t_0 + 1$$

$$p_R(t) := -\frac{2}{\vartheta_1} L^2(\sigma_R(t) + 2)e^t, t \geq t_0 + 1$$

όπου η $\sigma_R(\cdot)$ δίνεται στην (3.140). Από τους ανωτέρω ορισμούς συμπεραίνουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις της A2. Επομένως ισχύει η Υπόθεση H2, δηλαδή ικανοποιούνται οι A1 και A2 για κάθε $R > 0$, συνεπώς από τα αποτελέσματα του Λήμματος 3.6 και της Πρότασης 3.3, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $\phi_R \in C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ ούτως ώστε να ισχύει η (3.16γ) και το σφάλμα ανάμεσα στην τροχιά του (3.135α) και του (3.18) να ικανοποιεί την (3.19). Προκειμένου να κατασκευάσουμε τη $\phi_R(\cdot)$, ακολουθούμε τη μεθοδολογία της απόδειξης του Λήμματος 3.6. Ειδικότερα, θεωρούμε για κάθε $t \geq t_0$ και $w := (w_1, w_2)$ με $|w| = 1$, το σύνολο $I_R(t, w)$ όπως δίνεται από τις (3.25), (3.26) και την απεικόνιση $D_R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ όπως δίνεται από την (3.30α) με

$$\bar{d}_R(t) = d_R(t) - \frac{1}{2}, t \geq t_0 \quad (3.143)$$

και την $A(\cdot, \cdot, \cdot)$ όπως ορίζεται στην (3.141). Επίσης, για κάθε $t \geq t_0$ θεωρούμε τα σύνολα $K_R(t)$ και $K_R^c(t)$ όπως ακριβώς δίνονται από τις (3.30β) και (3.32), με $\beta_R(\cdot) := \beta(\cdot, R)$ όπως η τελευταία ορίζεται στην (3.137) και τις $Q_R(\cdot), Y_R(\cdot)$ ως ανωτέρω. Επιπλέον, θεωρούμε τη συνάρτηση $\omega_R(\cdot)$ όπως δίνεται από την (3.34). Τότε, η $\phi_R(\cdot)$ είναι οποιαδήποτε $C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ συνάρτηση που ικανοποιεί τις (3.37), (3.36). Απο το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.5, προκύπτει ότι το SODP είναι επιλύσιμο για το σύστημα (3.135) ως προς τον \mathbb{R}^2 . Ειδικότερα, για $R := 1, 2, \dots, k, \dots$ η διακοπτόμενη ακολουθία των χρονικώς μεταβαλλόμενων συστημάτων (3.74) με τις απεικονίσεις $P_k(\cdot)$ και $\phi_k(\cdot)$ όπως δίνονται ανωτέρω, για $R = k$ και κατάλληλες σταθερές ξ_k και t_k (όπως ορίζονται στις (3.70) και (3.71), αντίστοιχα) επιτυγχάνει την εκτίμηση της κατάστασης του συστήματος (3.135).

Μπορούμε εναλλακτικά να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση $\phi_R(\cdot)$, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της Παρατήρησης 3.7. Στην περίπτωση αυτή, αρκεί να βρούμε μια απεικόνιση $\Gamma_R : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ που ικανοποιεί την (3.39α) και ταυτόχρονα τη συνθήκη:

$$\{w \in \mathbb{R}^2 : |w| = 1 \text{ και για κάθε } e \in \ker H \text{ με } |e| = 1, \\ \text{ισχύει } |w - e| > \Gamma_R(t, e)\} \neq \emptyset \quad (3.144)$$

Πράγματι, έχουμε $\ker H = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_1 = 0\}$ οπότε η (3.39α) γράφεται

$$w' P_R(t) A(q, x, \sigma w) w + \frac{1}{2} w \dot{P}_R(t) w + \bar{d}_R(t) w' P_R(t) w \leq 0; \quad (3.145\alpha)$$

$$\forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), |x| \leq \beta(t, R), \sigma \in I_R(t, w), y \in Y_R(t), \quad (3.145\beta)$$

$$|w| = 1 : \exists e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 : e_1 = 0, |e| = 1, |w - e| \leq \Gamma_R(t, e)$$

όπου $w := (w_1, w_2)$ και $x := (x_1, x_2)$. Τότε η (3.145α) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\begin{aligned} \Omega(t, q, x, \sigma w) &:= (w_1, w_2) \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) \\ p_R(t) & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b(x_2, \sigma w_2) \\ 0 & q_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &+ (w_1, w_2) \begin{pmatrix} \dot{p}_{R,1}(t) & \dot{p}_R(t) \\ \dot{p}_R(t) & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &+ \bar{d}_R(t) (w_1, w_2) \begin{pmatrix} p_{R,1}(t) & p_R(t) \\ p_R(t) & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{1}{2} \dot{p}_{R,1}(t) + \bar{d}_R(t) p_{R,1}(t) \right] w_1^2 \\ &+ [p_{R,1}(t) b(x_2, \sigma w_2) + p_R(t) q_{2,2} + \dot{p}_R(t) + 2\bar{d}_R(t) p_R(t)] w_1 w_2 \\ &+ [p_R(t) b(x_2, \sigma w_2) + Lq + \bar{d}_R(t) L] w_2^2 \\ &:= K(t, q, x, \sigma w) w_1^2 + L(t, q, x, \sigma w) w_1 w_2 + M(t, q, x, \sigma w) w_2^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.146)$$

δεδομένου ότι ισχύει η (3.145β), όπου οι $K = K(t, q, x, \sigma w)$, $L = L(t, q, x, \sigma w)$ και $M = M(t, q, x, \sigma w)$ είναι συνεχείς απεικονίσεις. Ειδικότερα, η τελευταία δίνεται ως:

$$M(t, q, x, \sigma w) := p_R(t) b(x_2, \sigma w_2) + Lq + L\bar{d}_R(t)$$

και λόγω των (3.90), (3.96), (3.142) και (3.143) ικανοποιεί την ιδιότητα:

3. Σχεδίαση Παρατηρητή για μη Γραμμικά Τριγωνικά Συστήματα με μη Παρατηρήσιμη Γραμμικοποίηση

$$\begin{aligned} M(t, q, x, \sigma e) < 0, \forall t \geq t_0, q \in Q_R(t), |x| \leq \beta(t, R), \\ \sigma \in I_R(t, e), |e| = 1, e_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.147)$$

Προκειμένου να δείξουμε την (3.145), αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (3.146), δεδομένου ότι ισχύει η (3.145β) για καποια συνεχή συνάρτηση $\Gamma_R : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, ή ισοδύναμα, να αποδείξουμε ότι η (3.146) ικανοποιείται για κάθε $t \geq t_0$, $w \in \mathbb{R}^2$ με $w_1^2 + w_2^2 = 1$ και $\sqrt{w_1^2 + (w_2 \mp 1)^2} = \sqrt{2|1 \mp w_2|} \leq \Gamma_R(t; (0, \pm 1))$, $\sigma \in I_R(t, w)$, $y \in Y_R(t)$, $q \in Q_R(t)$ και $|x| \leq \beta(t, R)$. Ταυτόχρονα, η συνάρτηση $\Gamma_R(\cdot, \cdot)$ πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύει η (3.144), δηλαδή να ισχύει:

$$\{w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : |w| = 1, \sqrt{2|1 \mp w_2|} > \Gamma_R(t; (0, \pm 1))\} \neq \emptyset$$

Από τις (3.146) και (3.147) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \Omega(t, q, x, \sigma w)|_{w_1=0, w_2=\pm 1} = M(t, q, x, \sigma w)|_{w_1=0, w_2=\pm 1} < 0 \\ \forall t \geq t_0, q \in Q(t), |x| \leq \beta(t, R), \sigma \in I_R(t, (0, \pm 1)) \end{aligned}$$

Η ύπαρξη της συνάρτησης $\Gamma_R(\cdot, \cdot)$ με τις ανωτέρω ιδιότητες είναι συνέπεια της προηγούμενης ανισότητας. Τέλος, η επιθυμητή $\phi_R(\cdot)$ είναι οποιαδήποτε $C^1([t_0, \infty); \mathbb{R}_{>0})$ συνάρτηση που ικανοποιεί την (3.39).



Βιβλιογραφία

- [1] Ahmed-Ali T, Lamnabhi-Lagarrigue F. *Sliding Observer-controller Design for Uncertain Triangular Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 1999; **44** 1244-1249
- [2] Ahrens JH, Khalil HK. *High gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach*. Automatica 2009; **45** 936-943
- [3] Alamir M. *Optimization based non-linear observers revisited*. Int J of Control 1999; **72** 1204-1217
- [4] Alessandri A, Coletta P. *Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems*. Proc of the 2001 American Control Conf
- [5] Ammar S, Mabrouk M. *Observer and output feedback stabilization for a class of nonlinear systems*. Int J of Control 2010; **83** 983-995
- [6] Andrieu V, Praly L. *On the existence of a Kazantzis-Kravaris/Luenberger observer*. SIAM J Control Opt 2006; **45** 432-456
- [7] Andrieu V, Praly L, Astolfi A. *High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms*. Automatica 2009; **45** 422-428
- [8] Arcak M, Kokotovic PV. *Nonlinear Observers: A circle criterion design and robustness analysis*. Automatica 2001; **37** 1923-1930
- [9] Arnold VI. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin 1998
- [10] Astolfi A, Praly L. *Global complete observability and output-to-state stability imply the existence of a globally convergent observer*. Math Control Sign Syst 2006; **18** 32-65

- [11] Back J, Seo JH. *Immersion of Non-linear Systems up to Output Injection: Characteristic Equation Approach*. Int J of Control 2004; **77** 723-734
- [12] Back J, Seo JH. *Constructive algorithm for system immersion into non-linear observer form*. Int J of Control 2008; **81** 317-331
- [13] Bartolini G, Punta E. *Reduced-Order Observer in the Sliding-Mode Control of Nonlinear Nonaffine Systems*. IEEE Trans Automat Control 2010; **55** 2368-2373
- [14] Besancon G, Ticlea A. *An Immersion-Based Observer Design for Rank-Observable Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 2007; **52** 83-88
- [15] Boizot N, Busvelle E, Gauthier J-P. *An adaptive high-gain observer for nonlinear systems*. Automatica 2010; **46** 1483-1488
- [16] Boskos D, Tsinias J. *Sufficient Conditions on the Existence of Switching Observers for Nonlinear Time-varying Systems*. Eur J Control 2013; **19** 87-103
- [17] Boskos D, Tsinias J. *Observer design for nonlinear triangular systems with unobservable linearisation*. Int J of Control 2013; **86** 721-739
- [18] Boskos D, Tsinias J. *Observer design for a general class of triangular systems*. Submitted to the MTNS Symposium 2014
- [19] Boutat D, Benali A, Hammouri H, Busawon K. *New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs*. Automatica 2009; **45** 2187-2193
- [20] Cacace F, Germani A, Manes C. *An observer for a class of nonlinear systems with time varying observation delay*. Systems and Control Lett 2010; **59** 305-312
- [21] Chen D, Lin W. *On p -Normal Forms of Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 2003; **48** 1242-1248
- [22] Doris A, Juloski AL, Heemels WPMH, van de Wouw N, Nijmeijer H. *Switching Observer Design for an Experimental Piece-wise Linear Beam System*. Proc of the 16th IFAC World Congress 2005
- [23] Farza M, Saad MM', Maatoug T, Kamoun M. *Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems*. Automatica 2009; **45** 2292-2299
- [24] Gauthier J-P, Bornard G. *Observability for any $u(t)$ for a Class of Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 1981; **26** 922-926
- [25] Gauthier J-P, Hammouri H, Othman S. *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*. IEEE Trans Automat Control 1992; **37** 875-880

-
- [26] Gauthier J-P, Kupka I. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge 2001
- [27] Hammami MA. *Global observers for homogeneous vector fields*. Nonlinear Anal Model Control 2005; **10** 197-210
- [28] Hammouri H, Targui B, Armanet F. *High gain observer based on a triangular structure*. Int J Robust Nonlinear Control 2002; **12** 497-518
- [29] Hammouri H, Bornard G, Busawon K. *High Gain Observer for Structured Multi-Output Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 2010 **55** 987-992
- [30] Hermann R, Krener A. *Nonlinear Controllability and Observability*. IEEE Trans Automat Control 1977 **22** 728-740
- [31] Jouan P. *Immersion of Nonlinear Systems into Linear Systems Modulo Output Injection*. SIAM J Control Opt 2003; **41** 1756-1778
- [32] Karafyllis I. *Non-uniform in time robust global asymptotic output stability*. Systems and Control Lett 2005; **54** 181-193
- [33] Karafyllis I, Jiang ZP. *Hybrid Dead-beat Observers for a Class of Nonlinear Systems*. Systems and Control Lett 2011; **60** 608–617
- [34] Karafyllis I, Kravaris C. *Robust Output Feedback Stabilization and Nonlinear Observer Design*. Systems and Control Lett 2005; **54** 925–938
- [35] Karafyllis I, Kravaris C. *Nonuniform in time state estimation of dynamic systems*. Systems and Control Lett 2008; **57** 714–725
- [36] Karafyllis I, Kravaris C. *From Continuous-Time Design to Sampled-Data Design of Observers*. IEEE Trans Automat Control 2009; **54** 2169-2174
- [37] Karagiannis D, Carnevale D, Astolfi A. *Invariant Manifold Based Reduced-Order Observer Design for Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 2008; **53** 2602-2614
- [38] Kazantzis N, Kravaris C. *Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem*. Systems and Control Lett 1998; **34** 241-247
- [39] Kreisselmeier G, Engel R. *Nonlinear observers for autonomous Lipschitz continuous systems*. IEEE Trans Automat Control 2003; **48** 451-464
- [40] Krener AJ, Isidori A. *Linearization by output injection and nonlinear observers*. Systems and Control Lett 1983; **3** 47-52
- [41] Krener AJ, Respondek W. *Nonlinear observers with linearizable error dynamics*. SIAM J Control Opt 1985; **23** 197-216

- [42] Krener AJ, Xiao M. *Observers for Linearly Unobservable Nonlinear Systems*. Systems and Control Lett 2002; **46** 281-288
- [43] Krener AJ, Xiao M. *Nonlinear observer design in the Siegel domain*. SIAM J Control Opt 2002; **41** 932-953
- [44] Krener AJ, Xiao M. *Erratum: Nonlinear observer design in the Siegel domain*. SIAM J Control Opt 2004; **43** 377-378
- [45] Krishnamurthy P, Khorrami F, Chandra RS. *High-Gain-Based Observer and Backstepping Controller for Generalized Output Feedback Canonical Form*. IEEE Trans Automat Control 2003; **48** 2277-2284
- [46] Krishnamurthy P, Khorrami F. *Dynamic high-gain scaling: state and output feedback with application to systems with ISS appended dynamics driven by all states*. IEEE Trans Automat Control 2004; **49** 2219-2239
- [47] Krantz SG, Parks HR. *A Primer of Real Analytic Functions*. Birkhauser, Boston 2002
- [48] Liu Y. *Switching Observer Design for Uncertain Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 1997; **42** 1699-1703
- [49] Luenberger DG. *Observing the State of a Linear System*. IEEE Trans Mil Electronics 1964; **8** 74-80
- [50] Luenberger DG. *An Introduction to Observers*. IEEE Trans Automat Control 1971; **16** 596-602
- [51] Lyapunov AM. (*The general problem of the stability of motion*, Lyapunov Centenary Issue, English Translation) *CHAPTER II. Study of steady motion*. Int J of Control 1992; **55** 591-700
- [52] Ménard T, Moulay E, Perruquetti W. *A Global High-Gain Finite-Time Observer*. IEEE Trans Automat Control 2010; **55** 1500-1506
- [53] Praly L, Jiang ZP. *Further results on robust semiglobal stabilization with dynamic input uncertainties*. Proc of the 37th IEEE CDC 1998
- [54] Praly L. *Asymptotic Stabilization via Output Feedback for Lower Triangular Systems With Output Dependent Incremental Rate*. IEEE Trans Automat Control 2003; **48** 1103-1108
- [55] Praly L, Isidori A, Marconi L. *A new observer for an unknown harmonic oscillator*. Proc of the 17th International Symposium, MTNS, Japan 2006

- [56] Qian C, Lin W. *Non-Lipschitz Continuous Stabilizers for Nonlinear Systems with Uncontrollable Unstable Linearization*. Systems and Control Lett 2001; **42** 185-200
- [57] Qian C, Lin W. *A Continuous Feedback Approach to Global Strong Stabilization of Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 2001; **46** 1061-1079
- [58] Qian C, Lin W. *Recursive Observer Design, Homogeneous Approximation, and Nonsmooth Output Feedback Stabilization of Nonlinear Systems*. IEEE Trans Automat Control 2006; **51** 1457-1471
- [59] Respondek W, *Transforming a Single-Input System to a p -Normal Form via Feedback*. Proc of the 42nd IEEE CDC 2003; 1574-1579
- [60] Respondek W, Pogromsky A, Nijmeijer H. *Time scaling for observer design with linearizable error dynamics*. Automatica 2004; **40** 277-285
- [61] Sanfelice RG, Praly L. *On the Performance of High-gain Observers with Gain Adaptation Under Measurement Noise*. Automatica 2011; **47** 2165-2176
- [62] Shen Y, Huang Y. *Uniformly Observable and Globally Lipschitzian Nonlinear Systems Admit Global Finite-Time Observers*. IEEE Trans Automat Control 2009; **54** 2621-2625
- [63] Shim H, Praly L. *Remarks on Equivalence between Full Order and Reduced Order Nonlinear Observers*. Proc of the 42nd IEEE CDC 2003
- [64] Sontag E. *Mathematical Control Theory*. 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1998
- [65] Starkov KE. *Designing observers for polynomial systems*. Automatika I Telemekhanika 1991; **2** 64-73
- [66] Teel A, Praly L. *Tools for Semiglobal Stabilization by Partial State and Output Feedback*. SIAM J Control Opt 1995; **33** 1443-1488
- [67] Tsinias J. *Observer design for nonlinear systems*. Systems and Control Lett 1989; **13** 135-142
- [68] Tsinias J. *Further results on the observer design problem*. Systems Control Lett 1990; **14** 411-418
- [69] Tsinias J. *Backstepping design for time-varying nonlinear systems with unknown parameters*. Systems and Control Lett 2000; **39** 219-227
- [70] Tsinias J. *Άριστος Έλεγχος, Σημειώσεις για το μάθημα του εξαμήνου ΤΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π.: “Μαθηματικός Βέλτιστος Έλεγχος”*.

Βιβλιογραφία

- [71] Tsiniias J. *Time-varying observers for a class of nonlinear systems*. Systems and Control Lett 2008; **57** 1037-1047
- [72] Wang Y, Lynch AF. *Multiple Time Scalings of a Multi-Output Observer Form*. IEEE Trans Automat Control 2010; **55** 966-971
- [73] Yang B, Lin W. *Homogeneous Observers, Iterative Design, and Global Stabilization of High-order Nonlinear Systems by Smooth Output Feedback*. IEEE Trans Automat Control 2004; **49** 1069-1080