



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

↳ Μη Γραμμικός Παρατηρητής Χρονομεταβλητού Κέρδους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Γ. Κίτσος

Επιβλέπων: **Ιωάννης Τσινιάς**
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάιος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

↳ Μη Γραμμικός Παρατηρητής Χρονομεταβλητού Κέρδους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Γ. Κίτσος

Επιβλέπων: **Ιωάννης Τσινιάς**
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 29η Μαΐου 2014

I. Τσινιάς

N. Μαράτος

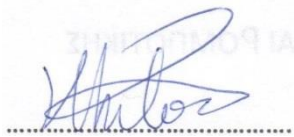
I. Καραφύλλης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάιος 2014



Κωνσταντίνος Γ. Κίτσος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Κωνσταντίνος Γ. Κίτσος.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	
ABSTRACT	
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Δυναμικά Συστήματα - Βασικές Έννοιες και Ιδιότητες	6
1.1 Το Δυναμικό Σύστημα	6
1.1.1 Εισαγωγή.....	6
1.1.2 Το Μοντέλο Κατάστασης.....	8
1.2 Η Λύση του Δυναμικού Συστήματος.....	13
1.2.1 Εισαγωγή.....	13
1.2.2 Ύπαρξη, Μοναδικότητα, Συνέχεια.....	13
1.2.3 Αρχή Σύγκρισης.....	17
1.3 Ευστάθεια.....	20
1.3.1 Ορισμός Ευστάθειας	21
1.3.2 Λήμμα Barbalat, Αρχή του Αναλλοίωτου.....	23
1.3.3 Θεωρήματα Lyapunov	26
1.3.4 Μη Αυτόνομα Συστήματα.....	31
1.4 Σύνοψη Κεφαλαίου	37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Παρατηρησιμότητα και Παρατηρητές.....	38
2.1 Εισαγωγικές Έννοιες.....	38
2.2 Παρατηρητές Γραμμικών Συστημάτων	40
2.2.1 Κριτήρια Παρατηρησιμότητας.....	40
2.2.2 Παρατηρήσιμη Κανονική Μορφή.....	42
2.2.3 Παρατηρητής Luenberger.....	42
2.2.4 Παρατηρητής Kalman	43
2.3 Παρατηρητές Μη Γραμμικών Συστημάτων	45
2.3.1 Γενικό Πρόβλημα Παρατηρητή.....	45
2.3.2 Παρατηρησιμότητα Μη Γραμμικών Συστημάτων	46
2.4 Σχεδίαση Μη Γραμμικών Παρατηρητών	51
2.4.1 Βασικές Δομές.....	51
2.4.2 Παρατηρητές Λογικής Luenberger	51
2.4.3 Παρατηρητές Λογικής Kalman	55
2.5 Παρατηρήσιμη Κανονική Μορφή.....	56
2.6 Υψικερδείς Παρατηρητές (High Gain Observers)	61
2.7 Σύνοψη Κεφαλαίου	66
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Μη Γραμμ. Χρονομεταβλητός Παρατηρητής με Αυξανόμενο Κέρδος... 67	
3.1 Οριοθέτηση του Προβλήματος.....	67

3.2 Θεμελιώδη Σχεδιαστικά Εργαλεία	68
3.2.1 Γραμμικές Ανισότητες Μητρών.....	68
3.2.2 Ολοκλήρωμα Dawson.....	69
3.2.3 Μη Γραμμικός Προγραμματισμός	70
3.3 Σχεδίαση Παρατηρητή.....	71
3.3.1 Παρουσίαση και Υποθέσεις του Προβλήματος	71
3.3.2 Χαρακτηριστικά Παρατηρητή.....	72
3.3.3 Μελέτη Ευστάθειας κατά Lyapunov	75
3.3.4 Αλγόριθμος Σχεδίασης Παρατηρητή	84
3.4 Συμπεράσματα.....	89
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Προσαρμοστικοί Παρατηρητές Αυξανόμενου Κέρδους για Εκτίμηση Κατάστασης και Παραμέτρων.....	90
4.1 Οριοθέτηση του Προβλήματος.....	90
4.1.1 Πρόλογος.....	90
4.1.2 Εισαγωγικές Έννοιες.....	90
4.2 Διάγνωση Λαθών και Εκτίμηση Παραμέτρων	92
4.2.1 Διάγνωση Λαθών (Fault Diagnosis).....	92
4.2.2 Εκτίμηση Παραμέτρων	93
4.3 Προσαρμοστικοί Παρατηρητές	94
4.3.1 Προσαρμοστική Εκτίμηση Κατάστασης.....	94
4.3.2 Συνδυαστική Εκτίμηση Κατάστασης και Παραμέτρων.....	97
4.4 Σχεδίαση Προσαρμοστικών Παρατηρητών.....	101
4.4.1 Εκτίμηση Λαθών σε Αισθητήρες Μη Γραμμικών Συστημάτων	101
4.4.1.1 Κλασική Υψικερδής Προσέγγιση.....	101
4.4.1.2 Σχεδίαση Αυξανόμενου Κέρδους.....	109
4.4.2 Εκτίμηση Κατάστασης και Παραμέτρου.....	123
4.5 Συμπεράσματα.....	134
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	135

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με αναφορά στον τρόπο προσέγγισης της παρούσας εργασίας, παρέχεται η δυνατότητα στον αναγνώστη να αποκτήσει πλήρη γνώση σχετικά με συγκεκριμένη περιοχή της θεωρίας των Μη Γραμμικών Παρατηρητών, ώστε αρχίζοντας από τα θεμελιώδη μέρη των Δυναμικών Συστημάτων, τα οποία αιτιωδώς και με την απαίτηση μαθηματικού φορμαλισμού, καταλήγουν στις παρατιθέμενες τεχνικές σχεδίασης των Μη Γραμμικών παρατηρητών, να εισαχθεί σε μία νέα προτεινόμενη σχεδίαση. Η προκειμένη σχεδίαση μη γραμμικού παρατηρητή χρονομεταβλητής παραμέτρου κέρδους, η οποία καθιστά το κέρδος του παρατηρητή χρονικά αυξανόμενο, με σκοπό βελτιωμένη μεταβατική απόκριση του σφάλματός του, έναντι της θεμελιώδους υψικερδούς σχεδίασης, αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Περαιτέρω, ακολουθείται αντίστοιχη τεχνική σχεδίασης χρονομεταβλητού κέρδους, στην περίπτωση των προσαρμοστικών παρατηρητών για εκτίμηση παραμέτρων και λαθών, εφαρμοζόμενη σε δύο κλάσεις μη γραμμικών συστημάτων. Η κύρια τεχνική για τις προτεινόμενες σχεδιάσεις βασίζεται στους υψικερδείς παρατηρητές και στην θεμελιώδη απαίτηση της Ευστάθειας Lyapunov, η οποία μελετάται εκτενώς.

Λέξεις-Κλειδιά: Μη γραμμικά Συστήματα, Μη γραμμικοί Παρατηρητές, Υψικερδείς Παρατηρητές, Ευστάθεια Lyapunov, Προσαρμοστικοί Παρατηρητές, Εκτίμηση Παραμέτρου, Ανίχνευση και Απομόνωση Λάθους.

ABSTRACT

In this essay, the reader can obtain certain knowledge on the theory of nonlinear observers, from a mathematically formalistic viewpoint, by starting from the underlying theory of Dynamical Systems and Observers' Theory and Design and finally reaching a newly developed design technique. The present diploma thesis seeks to suggest a time-varying increasing-gain observer, by considering time variance of a gain parameter, in order to achieve better transient performance of the estimation error, comparing to the well-known technique of high gain observer design. Finally, based on the previous suggested technique, an increasing gain design technique is implemented on two classes of nonlinear systems for state – parameter estimation and for fault estimation. The main design technique suggested relies on high gain observers and on the fundamental demand of Lyapunov Stability.

Keywords: Nonlinear Systems, Nonlinear Observers, High Gain Observers, Lyapunov Stability, Adaptive Observers, Parameter Estimation, Fault Detection and Isolation.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η μαθηματική θεωρία των δυναμικών συστημάτων είναι η θεμελιώδης βάση, κεντρικές περιοχές της οποίας αποτελούν πρωτογενές αντικείμενο μελέτης της προκειμένης εργασίας, με καταληκτικό σκοπό την επέκταση στον σύγχρονο και εφαρμοσμένο τομέα της ανάλυσης των μη γραμμικών παρατηρητών. Η ανάπτυξη της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων, εν συνδυασμό με την μαθηματική θεωρία ελέγχου και την θεωρία συστημάτων καθόρισαν μονοσήμαντα την γένεση σύγχρονων και επιστημονικά ανερχόμενων τεχνικών σχεδίασης ολοκληρωμένων συστημάτων και αναρίθμητων τεχνολογικών και επιστημονικών εφαρμογών.

Η παρούσα διπλωματική εργασία, λοιπόν, επικεντρώνεται στο, ειδικά τελευταίως, άκρως ενεργό πεδίο έρευνας, τα μη γραμμικά συστήματα. Πιο συγκεκριμένα, αντικείμενό της αποτελεί μία από τις βασικότερες περιοχές των μη γραμμικών συστημάτων, η θεωρία και σχεδίαση των μη γραμμικών παρατηρητών. Οι μη γραμμικοί παρατηρητές, ως αποτέλεσμα μαθηματικής προσέγγισης, συνδυαστικής πολλών μαθηματικών πεδίων και τεχνικών, παρέχουν την ανάκτηση πληροφορίας και δομικών μερών των μη γραμμικών συστημάτων, τα οποία δεν μπορούν να ληφθούν άμεσα μέσω μετρητικών οργάνων ή η ανάκτησή τους υπόκειται σε περιορισμούς.

Το σύγχρονο πεδίο εφαρμογής των μη γραμμικών παρατηρητών, η οποία συμβαδίζει με τις ταχέως αναπτυσσόμενες τεχνικές του μη γραμμικού ελέγχου και δοθέντος ότι απαιτούνται ολοένα και ευρύτερες ελαχιστοποιήσεις στο μέγεθος των ενεργοποιητών από κοινού με αυτό των αισθητήρων, εκτείνεται από την Μηχαντρονική (Ρομποτική) και την Μηχανολογία αυτοκινούμενων μέσων, την Ηλεκτρονική και τους κινητήρες επαγωγής, τις Βιοχημικές διεργασίες (βιοαντιδραστήρες) και την Ρευστοδυναμική, μέχρι τον συγχρονισμό χαοτικών συστημάτων και τις Νευροεπιστήμες (νευρωνικά μοντέλα).

Από την θεωρία και σχεδίαση των μη γραμμικών παρατηρητών, επιλέγεται ως κεντρική η τεχνική του υψικερδούς παρατηρητή, λόγω των αναρίθμητων εφαρμογών της, η οποία παραλλάσσεται και επεκτείνεται σε μια νέα σχεδίαση, για μία κλάση μη γραμμικών συστημάτων, με χρήση χρονομεταβλητής παραμέτρου κέρδους, ώστε αυτό να είναι ομαλώς χρονικά αυξανόμενο (Κεφάλαιο 3). Οι τεχνικές σχεδίασης που ακολουθούνται αναλύονται διεξοδικά στα πρώτα δύο μέρη της εργασίας, οπότε στο Κεφάλαιο 3 δομείται βήμα προς βήμα η σχεδιαστική διαδικασία, που καταλήγει στην επίλυση ενός προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια, εισάγεται και το πεδίο των προσαρμοστικών παρατηρητών (Κεφάλαιο 4), που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση ενδογενών παραμέτρων ή εξωγενώς προερχόμενων παραμετροποιήσιμων στοιχείων, π.χ. λάθη αισθητήρων. Επί αυτού του αντικειμένου, προτείνεται η επέκταση των υπαρχόντων υψικερδών τεχνικών σχεδίασης σε αυτήν παρόμοια της νέας μεθόδου παρατηρητή αυξανόμενου κέρδους, κατά την λογική που αναλύεται στο Κεφάλαιο 3.

Στα πρώτα δύο κεφάλαια, τα σχετικά με την θεωρία των δυναμικών συστημάτων και των μη γραμμικών παρατηρητών, δίνονται τα βασικά θεωρήματα με τις αποδείξεις τους, όπου αυτές κρίνεται σκόπιμο ότι είναι απαραίτητες στην μετέπειτα ανάλυση, καθώς αυτές, όπως καταδεικνύεται, είναι αφ' ενός τεκμηριώδεις, αφ' ετέρου επικουρικές στην αναλυτική σχεδίαση των προτεινόμενων παρατηρητών. Συγκεκριμένα, τα δομικά μέρη των μη γραμμικών

συστημάτων, η ύπαρξη και συνέχεια των λύσεων (π.χ. συνθήκες Καραθεοδωρή, Lipschitz), η θεωρία της ευστάθειας κατά Lyapunov, η οποία χρησιμοποιείται ως το βασικότερο σχεδιαστικό εργαλείο και ως πρωτογενής απαίτηση για το σφάλμα του παρατηρητή, οι συνθήκες παρατηρησιμότητας που καθιστούν τον πρόβλημα επιλύσιμο, σχεδιαστικές τεχνικές παρατηρητών, στις οποίες θα βασισθεί ο πυρήνας της εργασίας κ.ο.κ., αναλύονται διεξοδικά. Από την μία, η ποιοτική συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων του πρώτου κεφαλαίου, ειδικά της Lipschitz συνέχειας και της Lyapunov ευστάθειας, είναι αυτή που γεννά την ανάγκη ύπαρξης εκτιμητών, δηλαδή παρατηρητών για την ανάκτηση μη μετρούμενων δομικών μερών τους και ταυτόχρονα παρέχει απαραίτητα χρηστικά εργαλεία για την σχεδίαση τους, από την άλλη η έννοια της παρατηρησιμότητας και των σχεδιαστικών εργαλείων παρατηρητών του δεύτερου κεφαλαίου, ειδικά της λογικής Luenberger και των υψικερδών παρατηρητών, είναι η κύρια διαδικαστική βάση των επομένων δύο κεφαλαίων. Τα θεωρήματα και τα πορίσματα, κατά την κλιμακωτή δομή παρουσίασής τους στην εργασία, όπου και γίνονται εναλασσόμενες παραπομπές, έχουν συσχετισμό μεταξύ τους και καταλήγουν στον βασικό πυρήνα της παρούσας εργασίας, με τρόπο ώστε ο αναγνώστης να αποκτήσει όλο το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο.

Επί της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, κρίνεται απαραίτητο να αποδοθούν ιδιαίτερες ευχαριστίες στον επιβλέποντα κ. Τσινιά, που μου μεταλαμπάδευσε το ειδικό ενδιαφέρον στο αντικείμενο της μαθηματικής θεωρίας ελέγχου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Δυναμικά Συστήματα - Βασικές έννοιες και ιδιότητες

1.1 Το Δυναμικό Σύστημα

1.1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μια εποπτική προσέγγιση των δυναμικών συστημάτων, εν γένει, μαζί με τα δομικά τους στοιχεία και κάποιες από τις πιο βασικές τους ιδιότητες, με σκοπό να δοθεί το θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάλυση των μη γραμμικών συστημάτων, μια κλάση των οποίων θα εξετασθεί στην εργασία.

Καίριο ζήτημα της θεωρίας δυναμικών συστημάτων είναι ο ορισμός του μαθηματικού μοντέλου, με τον οποίο ασχολείται η μαθηματική συστημική θεωρία. Τα συστήματα εν γένει μοντελοποιούν υπαρκτές διεργασίες, για τις οποίες υπάρχουν δεδομένα παρατήρησης προκειμένου να είναι εφικτή η μαθηματική τους προσομοίωση. Τα υπό μοντελοποίηση συστήματα είτε ανακτώνται από τη φύση, ως μέρος παρατηρούμενων φυσικών διεργασιών (π.χ. βιολογικά, περιβαλλοντικά συστήματα) ή είναι συστήματα τεχνικά, που ενέχουν ανθρώπινη επέμβαση (π.χ. μηχανικά συστήματα, ηλεκτρονικά κυκλώματα). Η μαθηματική δομή, η οποία ανακτάται στην περιγραφή ενός φαινομένου, ως ερώτημα προς εξέταση καθορίζεται από την *συμπεριφορά* του συστήματος, η οποία είναι ένα υποσύνολο ενός σύμπαντος πιθανοτικών εκβάσεων, τις οποίες το μοντέλο καθιστά επιτρεπτές. Το σύνολο, μέσα στο οποίο το υπό μελέτη φαινόμενο παράγει μια σειρά εκβάσεων, είναι το σύμπαν ή *universum* του μοντέλου. Οι *συμπεριφορικές εξισώσεις* μοντελοποίησης είναι αυτές που παρέχουν τον λειτουργικό, αν και μη μονοσήμαντο, τρόπο καθορισμού συμπεριφοράς, του νόμου αποκλεισμού δηλαδή, υπό πρίσμα αντίστροφης οπτικής, που αποκλείει την πραγματοποίηση συγκεκριμένων συμβάντων. Αυτές, μαζί με τις άδηλες - *επικουρικές μεταβλητές* (latent variables) και την συμπεριφορά, αποτελούν την γλώσσα του μοντέλου.

Ορισμός 1.1. Μαθηματικό μοντέλο είναι ένα ζεύγος (\mathbb{U}, \mathbb{B}) όπου το σύνολο \mathbb{U} είναι το *σύμπαν* (*universum*), τα στοιχεία του οι *εκβάσεις* και το υποσύνολό του \mathbb{B} , η *συμπεριφορά*.

Το σύνολο των δομικών στοιχείων ενός συστήματος, αλληλεπιδρώντων ή ανεξάρτητων, που συνθέτουν ένα συμπαγές όλον, μπορούν να περιγραφούν από τις καταστάσεις, οι οποίες είναι αυτές οι μαθηματικές μεταβλητές που ως μέρη του συστήματος αρκούν για να καθορίσουν την συμπεριφορά του. Όταν οι καταστάσεις του συστήματος μεταβάλλονται με τον χρόνο, το σύστημα είναι *δυναμικό*. Οι καταστάσεις περιέχουν την παρελθοντική πληροφορία του δυναμικού συστήματος και είναι ικανές και αναγκαίες (συνήθως και ελάχιστες) προκειμένου να καθορίσουν και την πορεία του, βάσει της γνώσης της παροντικής εισόδου και της προϊστορίας του συστήματος.

Η απαρχή των δυναμικών συστημάτων βρίσκεται στους ερευνητές του ηλιακού συστήματος, όπως στον Kepler, στον Γαλιλαίο, στον Brahe, στον Νεύτωνα, στον Lagrange, στον Laplace και στον Maxwell, καθώς μελέτησαν την ύπαρξη συμφυών μαθηματικών κανονικοτήτων στην απόσταση των πλανητών από τον ήλιο, των περιόδων και ταχυτήτων περιστροφής τους. Ο Νεύτωνας, ως εισηγητής των διαφορικών εξισώσεων, έλυσε το πρόβλημα των δύο σωμάτων (κίνηση γης περί τον ήλιο). Η σημαίνουσα έννοια της ευστάθειας ενός δυναμικού συστήματος, ιδιότητα η οποία επικεντρώνεται στην μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος υπό πιθανές εκτροπές από την κατάσταση ισορροπίας, ερευνήθηκε αρχικά από τον Νεύτωνα στο έργο «Principia Mathematica», όπου μελέτησε την απόκριση περικεντρικής κίνησης σωματιδίου υπό μικρή διαταραχή και κατ' επέκτασιν την ιδιότητα της σελήνης να θέτει σε τροχιά την Γη. Ακολούθησαν οι Torricelli, Euler, Dirichlet, Liouville, Routh, Laplace, Lagrange, Maxwell όπου συνέβαλαν ιδιαίτερος στην θεωρία δυναμικής ευστάθειας, όπως μελέτησαν τις τροχιακές αποκλίσεις πλανητών και δορυφόρων σε συμβιβασμό με το Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης του Νεύτωνα. Ο Poincaré, στα τέλη του 1800, μελέτησε τα ζητήματα της ευστάθειας του ηλιακού συστήματος, ως απάντηση στο άλυτο πρόβλημα των τριών σωμάτων και εισήγαγε την έννοια του χάους, κατά την οποία ένα ντετερμινιστικό σύστημα επιδεικνύει απεριοδική συμπεριφορά που εξαρτάται με μεγάλη ευαισθησία από τις αρχικές συνθήκες. Το 1920-1950 εισάγεται ο μη γραμμικός ταλαντωτής (Van der Pol, Andronov κ.λ.π.) με την ταυτόχρονη ανακάλυψη του ραδιοφώνου, του ραντάρ και του laser. Ταυτόχρονα, οι Birkhoff, Kolmogorov, Arnold, Moser μελετούν την περίπλοκη συμπεριφορά στην χαμιλτονιανή μηχανική και ο Lorenz τους παράξενους ελκυστές. Ακολουθούν οι Ruelle, May, Feigenbaum, Winfree, Mandelbrot και λοιποί.

Η θεωρία ελέγχου, ως συνέπεια της μελέτης των δυναμικών συστημάτων παρουσία ανατροφοδότησης, έχει τις απαρχές της στον Κτησίβιο, με τις κατασκευές του πλωτήρα και του υδραυλικού ωρολογίου, των αντλιών, του ανυψωτήρα, και στον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα με το σύστημα αυτομάτου ανοίγματος των θυρών ναού, τον διανομέα οίνου και πολλά άλλα αυτοματικά συστήματα που περιέχονται στα έργα «Πνευματικά» και «Αυτοματοποιητική». Επιγραμματικά, ακολούθησαν οι επιστήμονες William Salmon, Lee, Salmon, James Watt, Poluzov, Cornelius Drebel, Bonnemain, Francis Bacon, Boulton, Huygens, Wischnegradsky, Minorsky. Οι πιο σύγχρονοι είναι οι Ford, Haren, Black, Nyquist, Bode, Nichols, Luenberger, Kolmogorov, Wiener, Pontryagin, Bellman, Bolza, Kalman, Devol κλπ. Η θεωρία δυναμικής ευστάθειας, από τους πιο σημαντικούς τομείς των δυναμικών συστημάτων και της θεωρίας ελέγχου, αναπτύχθηκε συστηματικά στα τέλη του 19^{ου} αιώνα από τον Aleksandr Mikhailovich Lyapunov στο έργο του «The General Problem of the Stability of Motion». Τα δύο γενικά προβλήματα του κλασικού ελέγχου είναι το πρόβλημα *ρυθμιστή* (regulation) και η *βελτιστοποίηση τροχιάς* (η αρχή της στο πρόβλημα βραχυστοχρόνου του Bernoulli). Από τους δεκάδες σύγχρονους τομείς με τους οποίους ασχολείται η μαθηματική θεωρία ελέγχου ειδικά, η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην *παρατηρησιμότητα* συστημάτων και στις τεχνικές σχεδίασης *παρατηρητών*, οι οποίες στηρίζονται απολύτως στην θεωρία δυναμικών συστημάτων.

Το δυναμικό σύστημα \mathcal{G} περιέχει την πληροφορία εισόδου u , κατάστασης x και εξόδου y , η οποία σε κάθε χρονική στιγμή t παρέχει τον πλήρη καθορισμό του. Ο χρόνος είναι διατεταγμένο υποσύνολο των πραγματικών ($t \in \mathcal{T}$). Στην παρούσα μελέτη θεωρούνται μόνο συστήματα συνεχούς χρόνου, ενώ η μελέτη για διακριτό χρόνο παραλείπεται. Οι τιμές της εισόδου $u(t)$ λαμβάνονται από το ορισμένο σύνολο τιμών εισόδου U και η συνάρτηση u δεν είναι αυθαίρετη σε δοθέν χρονικό

διάστημα, αλλά ανήκει σε μια εφικτή (αποδεκτή) κλάση εισόδων, στον συναρτησιακό χώρο \mathcal{U} , δηλαδή για κάθε $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ και $t \in \mathcal{T}$, $u(t) \in U$ [$\mathcal{U} \in \mathfrak{R}^m$ το σύνολο των εφικτών εισόδων (set of admissible inputs) που καθορίζει και το προσιτό σύνολο τροχιών (reachable set), δηλαδή το σύνολο των σημείων στο οποίο είναι εφικτό να καταλήξουν όλες οι τροχιές των καταστάσεων]. Παρομοίως, η έξοδος $y(t) \in Y$, όπου Y το ορισμένο σύνολο τιμών με $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$, επί ενός χρονικού διαστήματος, όπου \mathcal{Y} ορίζει τον χώρο των εξόδων. Η κατάσταση του συστήματος x και επομένως και η έξοδος σε κάποιο χρόνο $t \in \mathcal{T}$ στηρίζεται τόσο στην αρχική κατάσταση $x(t_0) = x_0$ όσο και στο τμήμα εισόδων $u: [t_0, t) \rightarrow U$, ούτως ώστε να καθορίζεται επαρκώς η παρούσα και η μελλοντική κατάσταση $x(t) = s(t, t_0 x_0, u)$ του \mathcal{G} . Βάσει των ανωτέρω, το δυναμικό σύστημα αντιμετωπίζεται σαν σχέση αντιστοιχίας μεταξύ διανυσματικών χώρων που ικανοποιούν σειρά αξιωμάτων, ώστε να καθορίζεται ο δυναμικός κανόνας που περιγράφει τις καταστάσεις στον χώρο καταστάσεων \mathcal{D} . Στην θεωρία ελέγχου, η είσοδος u αντικατοπτρίζει τον εκλεγόμενο νόμο ελέγχου που θα εφαρμοσθεί στο σύστημα για την ικανοποίηση επιθυμούμενων προδιαγραφών, το διάνυσμα καταστάσεων $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ τις εκλεγόμενες μεταβλητές κατάστασης που αντιστοιχούν σε μεγέθη του υπό μελέτη σύστημα (π.χ. θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση σε μηχανικά συστήματα) και η έξοδος y αντικατοπτρίζει τις μετρήσεις που λαμβάνονται στην έξοδο του συστήματος, ως μέρους του διανύσματος κατάστασης. Αυτές οι εξοδοί αντιστοιχούν σε εφικτά μετρούμενες καταστάσεις σε αντιδιαστολή με τις μη μετρούμενες, οι οποίες όμως μπορούν να εκτιμηθούν, όπως θα αναλυθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

1.1.2 Το μοντέλο κατάστασης

Ορισμός 1.2. Ως **δυναμικό σύστημα \mathcal{G}** ορίζεται μια οκταπλή δομή (octuple) $(\mathcal{D}, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, \mathcal{T}, s, h)$, όπου $s: \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{D} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{D}$ και $h: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \times U \rightarrow Y$, με τις παρακάτω αξιωματικές ιδιότητες:

- 1) Συνέχεια: $\forall t_0 \in \mathcal{T}, x_0 \in \mathcal{D}, u \in \mathcal{U}$, η $s(\cdot, t_0 x_0, u)$ είναι συνεχής για όλα τα $t \in \mathcal{T}$.
- 2) Συνέπεια: Για όλα τα $x_0 \in \mathcal{D}, u \in \mathcal{U}, t_0 \in \mathcal{T}$, $s(t_0, t_0 x_0, u) = x_0$.
- 3) Αιτιότητα : Για όλα τα $t_0 \in \mathcal{T}$ και $x_0 \in \mathcal{D}$, $s(t, t_0, x_0, u_1) = s(t, t_0, x_0, u_2) \forall t \in \mathcal{T}$ τότε $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ ικανοποιούν $u_1(\tau) = u_2(\tau), \tau \in [t_0, t]$.
- 4) Ιδιότητα ομάδας (ιδιότητα μετάβασης ή cocycle property):
 $s(t_2, t_0, x_0, u) = s(t_2, t_1, s(t_1, t_0, x_0, u), u) \forall t_0, t_1, t_2 \in \mathcal{T}, t_0 \leq t_1 \leq t_2, x_0 \in \mathcal{D}, u \in \mathcal{U}$ (από την θεωρία ομάδων η group ή semi-group property συνεπάγεται την προσθετική ιδιότητα της αβελιανής ομάδας στην πράξη σύνθεσης συναρτήσεων)
- 5) Απεικόνιση εξόδου (output readout map): Υπάρχει $y \in \mathcal{Y}$, τέτοιο ώστε $y(t) = h(t, s(t, t_0, x_0, u), u(t))$ για όλα τα $x_0 \in \mathcal{D}, u \in \mathcal{U}, t_0, t \in \mathcal{T}$

Ως γενικό πλαίσιο, θα δοθεί η ανάλυση του γραμμικού δυναμικού συστήματος και στην συνέχεια του μη γραμμικού. Όπως προειπώθη, τα δυναμικά συστήματα αποτελούνται από σύνολο μεταβλητών κατάστασης, των οποίων η γνώση σε αρχική στιγμή t_0 , μαζί με την εξωτερικά τιθέμενη στο σύστημα είσοδο u για $t \geq t_0$ καθορίζει πλήρως την συμπεριφορά τους για $t \geq t_0$. Τα δυναμικά συστήματα, από οποιοδήποτε βαθμού σύστημα διαφορικών εξισώσεων και αν περιγράφονται, ανάγονται σε κάποιο σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, το οποίο λαμβάνει την κάτωθι απλουστευτική μορφή του **μοντέλου κατάστασης**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_1] \end{cases} \quad (1.1)$$

όπου $x(t) \in \mathcal{D}$, η κατάσταση του συστήματος ή το διάνυσμα καταστάσεων, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathcal{D}$, $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ το σήμα εισόδου ή ελέγχου και η $F: [t_0, t_1] \times \mathcal{D} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τμηματικά συνεχής στον t και συνεχής στην κατάσταση x και στην είσοδο u στο $[t_0, t_1] \times \mathcal{D} \times U$. Η είσοδος λαμβάνεται τμηματικά συνεχής στον χρόνο με τιμές στο U , με $u: [t_0, t_1] \rightarrow U$. Το σύστημα αυτό ονομάζεται **μη γραμμικό χρονομεταβλητό ελεγχόμενο (nonlinear controlled time-varying system)**.

Η επιλογή των μεταβλητών κατάστασης πρέπει να είναι τέτοια ώστε αυτές να είναι οι ελάχιστες δυνατές (αν και μη μοναδικές) προκειμένου να περιγράψουν πλήρως το σύστημα και να παρέχουν μονοσήμαντα την μελλοντική του συμπεριφορά. Η μη γραμμικότητα της F αλλά και της συνάρτησης εξόδου υποδεικνύει την μη γραμμική συνάφεια μεταξύ των παραμέτρων, καθώς ελάχιστα συστήματα στη φύση είναι όντως γραμμικά. Η μη γραμμικότητα είναι σαφώς πολλών τύπων (π.χ. τετραγωνική, κυβική, ημιτονική) και η μορφή της εξαρτάται από την μοντελοποίηση και η ύπαρξή της από τις μεθόδους γραμμικοποίησης που μπορεί να ακολουθηθούν. Σαφώς, στο γενικό μοντέλο του χώρου κατάστασης μπορεί να ενέχονται και άλλες παράμετροι, όπως διαταραχές, αλλά το τυπικό μοντέλο της (1.1) με τις μη γραμμικότητες της συνάρτησης f αρκεί για το γενικό πλαίσιο ερεύνης της παρούσας μελέτης. Στο Παράδειγμα 1.1 διαπιστώνεται η διαδικασία περιγραφής ενός συστήματος κίνησης, που υπακούει στις δευτέρου βαθμού δυναμικές εξισώσεις του Νεύτωνα, με το παραπάνω μοντέλο του χώρου κατάστασης.

Ορισμός 1.3. Για κάθε $t_0 \in \mathcal{T}$, $x_0 \in \mathcal{D}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, η συναρτησιακή σχέση $t \mapsto x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = s(t, t_0, x_0, u(\cdot))$, περιγράφει την εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος και ονομάζεται **τροχιά** ή **ροή (flow/trajectory)**.

Ορισμός 1.4. Το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1.2)$$

με $f: [t_0, t_1] \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μη ελεγχόμενο (unforced) και χρονομεταβλητό.

Ορισμός 1.5. Στην περίπτωση που μετάθεση στον άξονα του χρόνου παράγει ισοδύναμο σύστημα, τότε ορίζεται το **χρονικά αναλλοίωτο (time-invariant)** ή **αυτόνομο σύστημα**. Πιο αυστηρά, το δυναμικό σύστημα \mathcal{G} είναι χρονικά αναλλοίωτο αν υπακούει στα κάτωθι αξιώματα

- (i) Το $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ περιέχει και το 0 και είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης (π.χ. $\mathcal{T} + \mathcal{T} \subset \mathcal{T}$).
- (ii) Το \mathcal{U} είναι αναλλοίωτο στην πράξη δεξιάς ολίσθησης (π.χ. $S_\tau \mathcal{U} \subset \mathcal{U} \forall \tau \in \mathcal{T}, \tau \geq 0$
- (iii) Για κάθε $t_0, t, \tau \in \mathcal{T}, t \geq t_0, \tau \geq 0$ και $x_0 \in \mathcal{D}, u(\cdot) \in \mathcal{U}$

$$\varphi(t + \tau; t_0 + \tau, x_0, S_\tau u(\cdot)) = \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)).$$
- (iv) Όταν υπάρχει και απεικόνιση εξόδου, η απεικόνιση h δεν εξαρτάται από τον χρόνο, δηλ. $h(t, x(t), u) = h(x(t), u), t \in \mathcal{T}$.

Το αυτόνομο σύστημα χωρίς έξοδο περιγράφεται από την εξίσωση κατάστασης:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), x(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_1], \\ f(t, x) &= f(t_0, x) \forall (t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}, \text{ με } f: [t_0, t_1] \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ &\text{η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής} \\ \dot{x}(t) &= f(x(t)), x(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_1], f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ορισμός 1.6. Στην ειδική περίπτωση που παρουσιάζεται γραμμικότητα στην εξίσωση του δυναμικού συστήματος, ορίζεται το **γραμμικό σύστημα** ως εξής: Το δυναμικό σύστημα της (1.3) με $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ και $f(t, x) = A(t)x$, με $A: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ τμηματικά συνεχής μήτρα στο $[t_0, t_1]$ ονομάζεται **γραμμικό χρονομεταβλητό (Linear Time-Varying)**. Αν $f(t, x) = Ax$, με $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $x \in \mathbb{R}^n$, τότε το σύστημα είναι ένα **γραμμικό αυτόνομο δυναμικό σύστημα (linear autonomous ή Linear Time-Invariant Γ.Χ.Α ή L.T.I.)**.

Στην πιο γενική περίπτωση που υπάρχει και είσοδος $u(t) \in \mathbb{R}^m$ και έξοδος $y(t) \in \mathbb{R}^q$, με \mathbb{K} οποιοδήποτε πεδίο, το δυναμικό σύστημα \mathcal{G} είναι \mathbb{K} – γραμμικό, αν

- (i) $U, \mathcal{U}, \mathcal{D}, \mathcal{Y}, Y$ διανυσματικοί χώροι του \mathbb{K}
- (ii) Οι απεικονίσεις $s(t, t_0, \cdot, \cdot): \mathcal{D} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{D}$ και $h(t, \cdot, \cdot): \mathcal{D} \times U \rightarrow Y$ είναι \mathbb{K} – γραμμικές για όλα τα $t_0, t \in \mathcal{T}, t \geq t_0$.

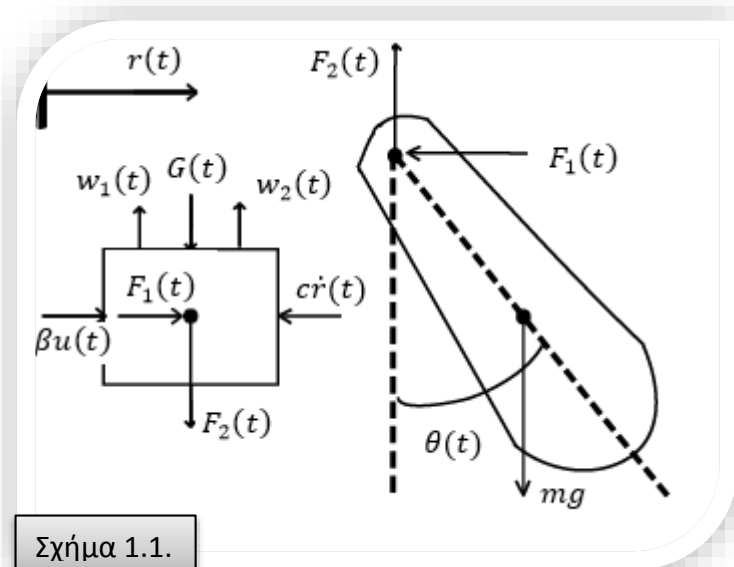
Το μοντέλο στο χώρο κατάστασης περιγράφεται ως εξής

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (\text{Γ.Χ.Μ. ή L.T.V.}) \quad (1.4)$$

με $A: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, B: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, C: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}, D: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, ένα από την μηχανική και ένα από τις νευροεπιστήμες, των οποίων οι ιδιότητες είναι προτυπώδεις για την εφαρμογή ελέγχου και παρατηρητών, όπως θα αναλυθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1.1. Ένα τετρωμένο παράδειγμα δυναμικού συστήματος είναι το **ανάστροφο εκκρεμές**.



Σχήμα 1.1.

ανάστροφο εκκρεμές.

Δοθέντος αρχικά συστήματος κίνησης βαγονιού και του εκκρεμούς, γράφονται οι εξισώσεις κίνησης ξεχωριστά. Η οριζόντια κίνηση του βαγονιού υπακούει στην $M\ddot{r}(t) = \beta u(t) - c\dot{r}(t) + F_1(t)$, με τον πρώτο όρο αντιστοιχούντα στην οριζόντια δύναμη οδήγησης, τον δεύτερο στην τριβή και τον τρίτο στην δύναμη επαφής στον άξονα περιστροφής.

Η κίνηση του εκκρεμούς σε $(x(t), y(t))$ συντεταγμένες

κέντρου μάζας του στον χρόνο t δίνεται με την οριζόντια και κατακόρυφη εξίσωση κίνησης:

$$m\ddot{x}(t) = m \frac{d^2}{dt^2} [\dot{r}(t) + l\sin\theta(t)] = -F_1(t) \text{ και}$$

$$m\ddot{y}(t) = ml \frac{d^2}{dt^2} [-\cos\theta(t)] = -mg + F_2(t)$$

Η περιστροφή περί το κέντρο μάζας, δίνεται από την $J\ddot{\theta}(t) = -F_2(t)l\sin\theta(t) + F_1(t)l\cos\theta(t) - c_p\dot{\theta}(t)$, όπου $c_p\dot{\theta}(t)$ η δύναμη τριβής στην περιστροφική κίνηση.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, έχουμε την δυναμική απόκριση του συστήματος:

$$M(\theta)\ddot{r} = (J + ml^2)(\beta u - c\dot{r} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta) + ml\cos\theta(mgl\sin\theta + c_p\dot{\theta})$$

$$M(\theta)\ddot{\theta} = -ml\cos\theta(\beta u - c\dot{r} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta) - (M + m)(c_p\dot{\theta} + mgl\sin\theta) \quad ,$$

$$\text{με } M(\theta) = (M + \mu)J + ml^2M + m^2l^2\sin^2\theta.$$

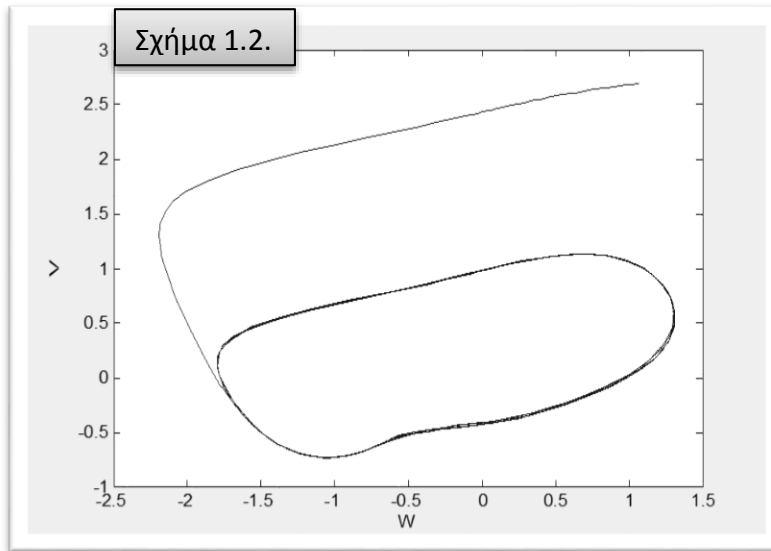
Το μοντέλο κατάστασης κατασκευάζεται θέτοντας

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) = (r(t), \theta(t), \dot{r}(t), \dot{\theta}(t)).$$

Το ανάστροφο εκκρεμές, βασικό υπόδειγμα μελέτης νόμου ελέγχου σταθεροποίησης στην κατακόρυφη θέση, αναπτύσσεται θέτοντας $\varphi = \theta - \pi$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{M(x_2)} [(J + ml^2)(\beta u - cx_3 - mlx_4^2\sin x_2) - ml\cos x_2(-mgl\sin x_2 + c_px_4)] \\ \dot{x}_4 = \frac{ml\cos x_2}{M(x_2)} (\beta u - cx_3 - mlx_4^2\sin x_2) - \frac{M + m}{M(x_2)} (-mgl\sin x_2 + c_px_4) \end{cases} \quad (1.5)$$

Παράδειγμα 1.2. Ένα παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος (κυβικού τύπου μη



γραμμικότητας) από τις νευροεπιστήμες, το μοντέλο FitzHugh-Nagumo (FHN) ως απλοποιητική εκδοχή του μοντέλου Hodgkin-Huxley, το οποίο αναπτύχθηκε το 1961 από τους Fitzhug και Nagumo, εκ των οποίων ο δεύτερος κατασκεύασε το κυκλωματικό ανάλογο, είναι σημαντικό για τις ιδιότητες των ταλαντώσεων

χαλάρωσης (relaxation oscillations) και των ιδιοτήτων του πορτραίτου φάσης του, τυπικές συμπεριφορές παραγωγής αιχμών (spikes) στην μεμβράνη του νευρώνα μετά από μια εξωτερική ρευματική διέγερση. Η μελέτη των διεγερσιακών αποκρίσεων του μοντέλου HH οδήγησε στην κατασκευή FHN, κατόπιν τροποποίησης του ταλαντωτικού μοντέλου Van der Pol. Οι εξισώσεις του είναι $\dot{V} = V - \frac{V^3}{3} - W + I_{ext}$, $\tau\dot{W} = V + a - bW$, όπου V το δυναμικό της μεμβράνης, W μια

βοηθητική μεταβλητή ανάκτησης και I η ένταση του ρεύματος διέγερσης. Μία προσομοίωση του εξής τροποποιημένου μοντέλου

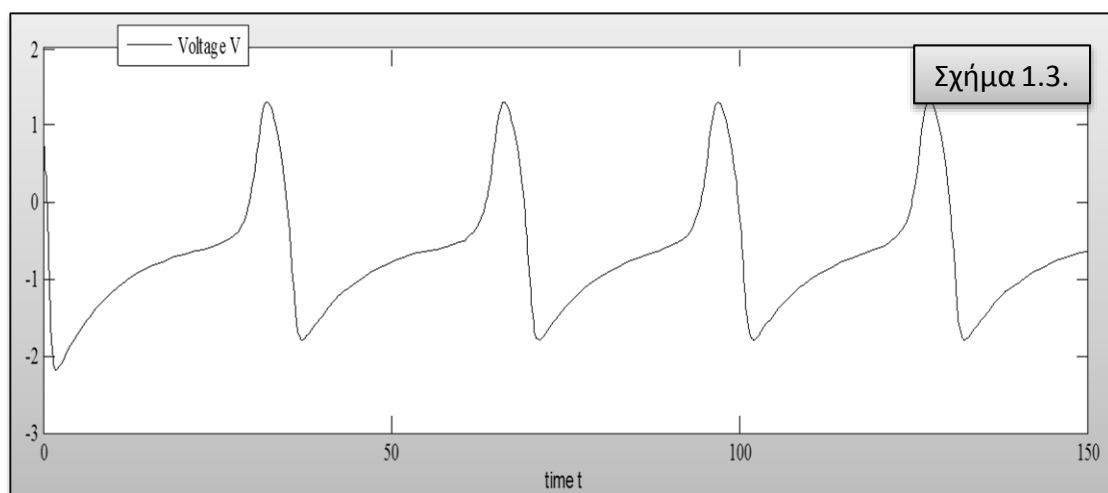
$$\dot{V} = V - \frac{V^3}{3} - W \quad (1.6)$$

$$\dot{W} = \varepsilon(g(V) - W - \eta)$$

$$g(V) = \begin{cases} \beta V, & V > 0 \\ aV, & V \leq 0 \end{cases}$$

παρουσιάζει τις τροχιές καταστάσεων και το πορτραίτο φάσης, για την οικογένεια των τροχιών στο $(x_1, x_2) = (V, W)$ επίπεδο και με συνθήκες

$$(V(0), W(0)) = (1.0656, 2.6903), a = 0.5, b = 1.96, \eta = 0.20531, \varepsilon = 0.2966.$$



1.2 Η Λύση του Δυναμικού Συστήματος

1.2.1 Εισαγωγή

Η λύση της εξίσωσης κατάστασης του δυναμικού συστήματος έχει ορισμένες θεμελιώδεις ιδιότητες, οι οποίες είναι σημαντικές στην ανάλυση των παραμέτρων του δυναμικού συστήματος. Τέτοιες είναι η ύπαρξη και η μοναδικότητά τους, η σχέση εξάρτησής τους από τις αρχικές συνθήκες και από παράμετρο, η επεκτασιμότητα (extendability) και η εκρηκτικότητα (exploding solutions), η διαφορισιμότητα και η ευαισθησία. Τέτοιες ιδιότητες είναι ικανές να δώσουν την εκ των προτέρων γνώση της απόκρισης του συστήματος και να στερεώσουν την έννοια της επαναληψιμότητας της διεργασίας, η οποία θεμελιώνει την ταυτότητα των αποτελεσμάτων και των αποκρίσεων του συστήματος στον χρόνο. Κάποιες από αυτές τις ιδιότητες θα δοθούν παρακάτω.

1.2.2 Ύπαρξη, Μοναδικότητα, Συνέχεια

Ακολουθώντας, θα δοθούν επιγραμματικά οι συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t \geq t_0, t \in \mathcal{T} \quad (1.7)$$

$x(t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_{t_0, x_0} = (t_{min}, t_{max})$ είναι το «μέγιστο» διάστημα ύπαρξης λύσης για την $x(\cdot)$ και $f: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχής στο \mathcal{D} . Αν η σχεδόν παντού συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $x(\cdot): \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$ ικανοποιεί την (1.7) σχεδόν παντού στο \mathcal{T} (εκτός από ένα σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue), τότε είναι λύση της στο διάστημα $\mathcal{T}_{t_0, x_0} \subseteq \mathbb{R}$, με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$. Επίσης, θα δοθούν οι μοναδικότητες των λύσεων των συστημάτων (1.1) στο «μέγιστο» χρονικό διάστημα $\mathcal{T}_{t_0, x_0, u(\cdot)}$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (1.8)$$

Το «μέγιστο» χρονικό διάστημα και η αντίστοιχη «μέγιστη» λύση», προϋποθέτουν ότι η λύση αυτή δεν έχει μια κάποια δεξιά προέκταση που να είναι λύση.

Προεξαγγελτικά, δίνεται ο ορισμός της νόρμας, διανυσματικής (vector norm) αλλά και μήτρας (matrix norm), η οποία θα χρησιμοποιείται κατά κόρον στην συνέχεια.

Ορισμός 1.7. Η διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ επί του \mathbb{R}^n είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τα κάτωθι αξιώματα:

- 1) $\|x\| \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$
- 2) $\|x\| = 0$ ανν $x = 0$
- 3) $\|ax\| = |a|\|x\|, a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η νόρμα μήτρας.

Πρόταση 1.1. Η διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|_p$ για $1 \leq p < \infty$ ορίζεται ως:

$$\|x\|_p \triangleq \left[\sum_{i=1}^n |x_{(i)}|^p \right]^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} |x_{(i)}|.$$

Για $p = 2$, η νόρμα ονομάζεται ευκλείδεια και συνήθως ο δείκτης 2 παραλείπεται. Αντίστοιχα, για την νόρμα (τετραγωνικής) μήτρας $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ισχύουν:

$$\|A\|_p = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{(i,j)}|^p \right]^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|A\|_\infty \triangleq \max_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m} |A_{(i,j)}|.$$

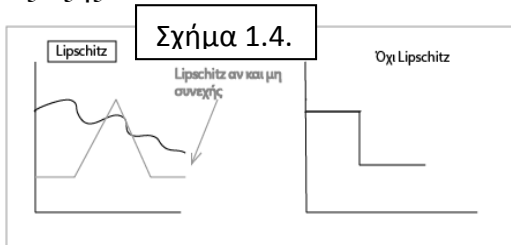
Ορισμός 1.8. Έστω $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Τότε η f ορίζεται ως **Lipschitz συνεχής** στο $x_0 \in \mathcal{D}$ αν υπάρχει μια σταθερά Lipschitz $L = L(x_0) > 0$ και μια γειτονιά $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ του x_0 , για την οποία

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in \mathcal{N} \quad (1.9)$$

Η f είναι Lipschitz συνεχής στο \mathcal{D} αν είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε σημείο του \mathcal{D} . Η f είναι ομοιόμορφα ή καθολικά Lipschitz συνεχής στο \mathcal{D} αν η ανισοτική συνθήκη ισχύει $\forall x, y \in \mathcal{D}$.

Σε περαιτέρω επεξήγηση, στην βαθμωτή περίπτωση έχουμε $\forall x, y \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \xrightarrow{y=x+h} |f(x) - f(x+h)| \leq L|h| \Rightarrow \forall h \left| \frac{f(x) - f(x+h)}{h} \right| \leq L$. Ειδικά αν $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(x+h)}{h} \right| \leq L$, τότε $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq L$, πράγμα που δείχνει ότι στην βαθμωτή περίπτωση, η f είναι Lipschitz αν έχει φραγμένη παράγωγο.

Στην περίπτωση που η $f: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, παρομοίως ορίζεται η συνθήκη Lipschitz ως εξής:



$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$ και σε επίπεδο διανυσματικών συνιστωσών:

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|.$$

Χάρην φορμαλισμού, παρατίθεται και ο ορισμός του διαφορίσιμου δυναμικού συστήματος (**differentiable dynamical system**) στο ανοικτό υποσύνολο $\mathcal{D} \subset \mathbb{K}^n$.

Ορισμός 1.9. Το δυναμικό σύστημα $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{U}, U, \mathcal{Y}, Y, \mathcal{T}, s, h)$ είναι **διαφορίσιμο** αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- (i) $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα.
- (ii) U, Y υποσύνολα του \mathbb{K}^m και \mathbb{K}^p , \mathcal{D} ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{K}^n .
- (iii) Υπάρχει συνάρτηση $f: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \times U \rightarrow \mathbb{K}^n$, τέτοια ώστε για όλα τα $t_0 \in \mathcal{T}$, $x_0 \in \mathcal{D}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.8)

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)), \quad t \in \mathcal{T}$$

$$x(t_0) = x_0$$
 έχει μοναδική λύση $x(\cdot)$ επί ενός μεγίστου ανοικτού χρονικού διαστήματος $\mathcal{T}_{t_0, x_0, u(\cdot)}$ και $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot)), t \in \mathcal{T}_{t_0, x_0, u(\cdot)}$.
- (iv) $h: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \times U \rightarrow Y$ συνεχής.

Ορισμός 1.10. Έστω το σύστημα της (1.7) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ με $f: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}^n$, ένα διάστημα $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ και $\mathcal{D} \subset \mathbb{K}^n$. Η f ικανοποιεί τις **συνθήκες Καραθεοδωρή**, αν

- (1) Η $f(\cdot, x): \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{K}^n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση για κάθε σταθερό $x \in \mathcal{D}$
- (2) Η $f(t, \cdot): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}^n$ είναι συνεχής για κάθε σταθερό $t \in \mathcal{T}$
- (3) Η $\|f(\cdot, \tilde{x})\|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο \mathcal{T} για κάποιο $\tilde{x} \in \mathcal{D}$
- (4) για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \mathcal{D}$, υπάρχει τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση m , τέτοια ώστε $\|f(t, \xi)\| \leq m(t)$, $\forall (t, \xi) \in \mathcal{R} \times K$.

Θεώρημα 1.1 (Υπαρξης). Αν η f ικανοποιεί τις συνθήκες Καραθεοδωρή, τότε για κάθε $x_0 \in \mathcal{D}$, υπάρχει λύση για την (1.7) και κάθε λύση μπορεί να επεκταθεί σε μια «μέγιστη» λύση. Αν η λύση $x: [0, \omega) \rightarrow \mathcal{D}$ είναι μια «μέγιστη» λύση με $\omega < \infty$, τότε για κάθε $\tau \in [0, \omega)$ και για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$; $\exists \sigma \in [\tau, \omega)$ τέτοιο ώστε $x(\sigma) \notin K$.

Βάσει του ανωτέρω θεωρήματος, υπό τις συνθήκες Καραθεοδωρή, για κάθε αρχική κατάσταση x_0 , το πρόβλημα αρχικών τιμών της (1.7) έχει τουλάχιστον μία λύση (μπορεί να υπάρχουν περισσότερες) και κάθε λύση μπορεί να επεκταθεί προς μεγιστότητα. Η ύπαρξη ακριβώς μίας «μέγιστης» λύσης (η ιδιότητα της **μοναδικότητας**) συνάγεται από την επιπλέον τοπική συνθήκη Lipschitz:

Συνθήκη (v): Για κάθε συμπαγές σύνολο $C = I \times K \subset \mathcal{T} \times \mathcal{D}$, υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $L_C(\cdot): I \rightarrow \mathbb{R}_+$, για την οποία $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_C(t)\|x - y\|$, $\forall (t, x), (t, y) \in C$.

Θεώρημα 1.2 (Carathéodory). Αν η $f: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}^n$, με \mathcal{T} ένα ανοικτό διάστημα και \mathcal{D} ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , ικανοποιεί τις τέσσερις συνθήκες Καραθεοδωρή και την Συνθήκη (v) Lipschitz στο $\mathcal{T} \times \mathcal{D}$, τότε $\forall (t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{D}$ υπάρχει μια μοναδική λύση $x(\cdot) = \varphi(\cdot, t_0, x_0)$ στο (1.7), επί κάποιου μεγίστου ανοικτού διαστήματος $\mathcal{J}_{t_0, x_0} \subset \mathcal{T}$, που περιέχει το t_0 , τέτοιο ώστε $x(t_0) = x_0$. Επιπλέον,

(i) Αν $t_+(t_0, x_0) := \sup \mathcal{J}_{t_0, x_0} < \sup \mathcal{T}$, τότε η $x(t)$ είναι μη φραγμένη για $t \nearrow t_+(t_0, x_0)$ ή το σύνολο $\partial \mathcal{D}$ του \mathcal{D} είναι μη κενό και $\text{dist}(x(t), \partial \mathcal{D}) \rightarrow 0$ καθώς $t \nearrow t_+(t_0, x_0)$.

Ανάλογη πρόταση ισχύει όταν $t \searrow t_-(t_0, x_0) := \inf \mathcal{J}_{t_0, x_0}$ αν $t_-(t_0, x_0) > \inf \mathcal{T}$.

(ii) Αν \mathcal{D}_ψ το πεδίο ορισμού της γενικής λύσης ψ , $\mathcal{D}_\psi = \{(t, t_0, x_0); t \in \mathcal{J}_{t_0, x_0}, (t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{D}\}$, τότε αυτό είναι ανοικτό στο $\mathcal{T}^2 \times \mathbb{K}^n$ και η $\psi: \mathcal{D}_\psi \rightarrow \mathbb{K}^n$ είναι συνεχής.

Αν όπως στην (i) $t_+ = t_+(t_0, x_0) < \sup \mathcal{T}$, τότε το t_+ καλείται **πεπερασμένος χρόνος διαφυγής** της λύσης $\psi(\cdot; t_0, x_0)$. Αν επιπλέον αυτή η λύση είναι μη φραγμένη στο $[t_0, t_+)$ λέμε ότι «εκρήγνυται» σε πεπερασμένο χρόνο.

Για να επεκταθεί η παραπάνω ανάλυση σε συστήματα ελεγχόμενα της μορφής (1.1) $\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t))$, πρέπει να διακριβωθεί ότι η $f(t, x(t), u(t)) = F(t, x(t), u(t))$ ικανοποιεί τις τέσσερις συνθήκες Καραθεοδωρή για κάθε $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Πόρισμα 1.1. Έστωσαν τα σύνολα $\mathcal{T}, U, \mathcal{U}, \mathcal{D}, Y$ του Ορισμού 1.2, $h: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \times U \rightarrow Y$: συνεχής συνάρτηση και $f: \mathcal{T} \times \mathcal{D} \times U \rightarrow \mathbb{K}^n$ μετρήσιμη (jointly measurable) στο $(t, u) \in \mathcal{T} \times U$ για κάθε $x \in \mathcal{D}$ και συνεχής στο $x \in \mathcal{D}$ για κάθε στατικό ζεύγος $(t, u) \in \mathcal{T} \times U$. Αν το \mathcal{U} αποτελείται από τοπικά L^p -ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ($1 \leq p < \infty$) επί του \mathcal{T} και αν για κάθε συμπαγές σύνολο $C = I \times K \subset \mathcal{T} \times \mathcal{D}$, υπάρχουν σταθερές m_C, l_C , τέτοιες ώστε

$$\|f(t, x, u)\| \leq m_C(\|u\|^p + 1), \quad t \in I, u \in U \text{ για κάποια } x \in \mathcal{D}$$

$$\|f(t, x, u) - f(t, y, u)\| \leq l_C(\|u\|^p + 1)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in C, u \in U$$

τότε το πρόβλημα αρχικής τιμής στην (1.8) $\dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t))$, $t \in \mathcal{T}, x(t_0) = x_0$ έχει μία μοναδική λύση $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ σε ένα «μέγιστο» διάστημα ύπαρξης λύσεων $\mathcal{T}_{t_0, x_0, u(\cdot)}$ για όλα τα $(t_0, x_0, u(\cdot)) \in \mathcal{T} \times \mathcal{D} \times \mathcal{U}$.

Παραπάνω χρησιμοποιήθηκαν ειδικοί όροι, όπως οι μετρήσιμοι χώροι, μετρήσιμες συναρτήσεις, σ-άλγεβρα, L^p - χώροι¹ και ειδικοί όροι της τοπολογίας, οι οποίοι δεν θα αναλυθούν περαιτέρω. Χάριν απλοποίησης, παρατίθενται τα ακόλουθα απλουστευτικά θεωρήματα για το σύστημα (1.7), στα οποία δίνεται βάρος μόνο στην Lipschitz συνθήκη.

Θεώρημα 1.3. Έστω η τμηματικά συνεχής στο $t, f(t, x)$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} \forall t \in [t_0, t_1]$ Τότε υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η εξίσωση κατάστασης (1.7) με τις αρχικές συνθήκες να έχει μοναδική λύση στο $[t_0, t_0 + \delta]$.

Η ανωτέρω ιδιότητα της τοπικά Lipschitz συνέχειας μπορεί να επεκταθεί και στην έννοια της καθολικά Lipschitz συνέχειας και να δώσει το θεώρημα **καθολικής ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων**:

Θεώρημα 1.4. Έστω η τμηματικά συνεχής στο $t, f(t, x)$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1]$. Τότε η εξίσωση κατάστασης (1.7) έχει μοναδική λύση επί του $[t_0, t_1]$.

Η γενική λύση του (1.7) σε ολοκληρωτική μορφή

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

¹ συναρτησιακοί χώροι ή **Lebesgue χώροι**, μια κλάση Banach χώρων, που χρησιμοποιούν μια γενίκευση των p -νορμών πεπερασμένων διαστάσεων διανυσματικών χώρων. **Banach χώροι** είναι οι γραμμικοί χώροι με νόρμα που έχουν στοιχείο στο οποίο συγκλίνει κάθε ακολουθία Cauchy.

υποδεικνύει την εξάρτηση συνέχειας της λύσης από τις αρχικές συνθήκες x_0, t_0 και την $f(t, x)$. Αρχικά δίνεται το **θεώρημα συνέχειας** του αυτόνομου συστήματος και ύστερα ένα θεώρημα που αποτυπώνει την συνέχεια των λύσεων, καταλήγοντας στην βασική μαθηματική συνθήκη συνέχειας, ως προς αρχικές συνθήκες αλλά και παράμετρο λ .

Θεώρημα 1.5. Έστω το σύστημα (1.3) $\dot{x}(t) = f(x(t)), x(t_0) = x_0$ και $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ομοιομόρφως Lipschitz συνεχής στο \mathcal{D} . Έστω επιπλέον $x(t), y(t)$ λύσεις με αρχικές συνθήκες x_0, y_0 επί του κλειστού διαστήματος $[t_0, t_1]$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $t \in [t_0, t_1]$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, t - t_0) > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|x_0 - y_0\| < \delta$, τότε $\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon$.

Θεώρημα 1.6. Έστω $f(t, x)$ τμηματική συνεχής ως προς t και Lipschitz ως προς x επί του $[t_0, t_1] \times \mathcal{D}$. Έστω $y(t)$ και $z(t)$ λύσεις των

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), y(t_0) = y_0 \\ \dot{z}(t) &= f(t, z(t)) + g(t, z(t)), z(t_0) = z_0 \end{aligned}$$

τέτοιες ώστε $y(t), z(t) \in \mathcal{D}$ για όλα τα $t \in [t_0, t_1]$ και

$\|g(t, x)\| \leq \mu, \forall (t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{D}$ για κάποιο $\mu > 0$. Τότε

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

όπου L η σταθερά Lipschitz.

Θεώρημα 1.7 (Συνέχεια και Διαφορισιμότητα). Έστω η $f(t, x, \lambda)$ συνεχής ως προς (t, x, λ) και τοπικά Lipschitz ως προς x (ομοιομόρφως ως προς t και λ) επί του $[t_0, t_1] \times \mathcal{D} \times \{\|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$, όπου το $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο. Έστω $y(t, \lambda_0)$ μια λύση του $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \lambda_0)$, με $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in \mathcal{D}$. Υποθέτουμε επίσης ότι η $y(t, \lambda_0)$ ανήκει στο \mathcal{D} για κάθε $t \in [t_0, t_1]$. Τότε, δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν

$$\|z_0 - y_0\| < \delta \text{ και } \|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

τότε υπάρχει μοναδική λύση $z(t, \lambda)$ του $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \lambda)$, ορισμένη στο $[t_0, t_1]$, με $z(t_0, \lambda) = z_0$. Επίσης, η $z(t, \lambda)$ ικανοποιεί την

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Περαιτέρω, επειδή η f αναλυτική ως προς όλες τις μεταβλητές κατάστασης και την παράμετρο, συνεπάγεται ότι η λύση είναι επίσης αναλυτική (συνεχώς διαφορίσιμη) σε σχέση με την παράμετρο.

Τα θεωρήματα συνέχειας των λύσεων, στην απόδειξή τους, κάνουν χρήση της ανισότητας *Grönwall - Bellman* και τα θεωρήματα μοναδικότητας χρησιμοποιούν το *λήμμα σύγκρισης (comparison lemma)*, τα οποία παρατίθενται.

1.2.3 Αρχή Σύγκρισης

Ακολουθεί το *λήμμα σύγκρισης και ανισότητα* του Thomas Hakon Grönwall, η οποία χρησιμοποιήθηκε από τον Richard Bellman για το φράξιμο των λύσεων και στην ευστάθεια. Συμπεριλαμβάνεται και μια γενίκευση της ανισότητας Grönwall (από τον A. Filatov). Αυτές θα χρησιμοποιηθούν και στην συνέχεια της εργασίας, όπου θα φραγεί το σφάλμα του υπό σχεδιασμό παρατηρητή.

Λήμμα 1.1 (comparison lemma). Έστω x διαφορίσιμη συνάρτηση για $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\leq kx(t). \text{ Τότε} \\ x(t) &\leq x(t_0)e^{-k(t_0-t)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Απόδειξη. Έχουμε $\frac{d}{dt}(e^{-kt}x(t)) = \dot{x}(t)e^{-kt} - kx(t)e^{-kt} = e^{-kt}(\dot{x}(t) - kx(t))$ και επειδή το δεξιό μέλος εξ υποθέσεως είναι αρνητικό, η $e^{-kt}x(t)$ είναι φθίνουσα. Άρα, $e^{-kt}x(t) \leq e^{-kt_0}x(t_0)$ για $t_0 \leq t \leq t_1$, άρα καταλήγουμε στην (1.10). \square

Θεώρημα 1.8 (Grönwall). Έστωσαν x, α, β πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $[t_0, T]$, $\beta(t) > 0$ για $t \in [t_0, T]$ για τις οποίες ισχύει:

$$x(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)x(s)ds. \quad (1.11)$$

Τότε,

$$x(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)\alpha(s) \exp\left[\int_{t_0}^t \alpha(u)du\right] ds \quad (1.12)$$

Λήμμα 1.2 (Grönwall Lemma). Έστω η συνεχής συνάρτηση $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$x(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t \beta x(s)ds, t \geq t_0 \quad (1.13)$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta \geq 0$. Τότε

$$x(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}, t \geq t_0 \quad (1.14)$$

Απόδειξη Λήμματος. Έστω:

$$y(t) = \alpha + \int_{t_0}^t \beta x(s)ds, t \geq t_0 \quad (1.15)$$

Από την (1.13) έπεται $x(t) \leq y(t), t \geq t_0$ και επομένως, με παραγωγή της (1.15)

$$\dot{y}(t) = \beta x(t) \leq \beta y(t), y(t_0) = \alpha, t \geq t_0 \quad (1.16)$$

Ορίζουμε $z(t) \triangleq \dot{y}(t) - \beta y(t)$. Είναι $z(t) \leq 0, t \geq t_0$ από την (1.16). Επομένως, ως λύση της διαφορικής $\dot{y}(t) = z(t) + \beta y(t)$ σε ολοκληρωτική μορφή προκύπτει

$$y(t) = y(t_0)e^{\beta(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\beta(t-s)}z(s)ds,$$

από όπου

$y(t) \leq y(t_0)e^{\beta(t-t_0)} = \alpha e^{\beta(t-t_0)}, t \geq t_0$ και επειδή $x(t) \leq y(t), t \geq t_0$, καταλήγουμε στην (1.14). Παρομοίως αποδεικνύεται και το Θ. Grönwall \square

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.8. ακολουθεί το ίδιο σκεπτικό, αλλά δεν εμπίπτει στο αντικείμενο της παρούσας εργασίας η χρήση του.

Ο Α. Filatov απέδειξε την παρακάτω γενικευμένη ανισότητα του Grönwall.

Θεώρημα 1.9. Έστω $x(t)$ συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$x(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t [\beta + \gamma x(s)] ds, \text{ για } t \geq t_0 \quad (1.17)$$

για $\alpha, \beta \geq 0, \gamma > 0$. Τότε για $t \geq t_0$, ισχύει για την $x(t)$

$$x(t) \leq \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) (e^{\gamma(t-t_0)} - 1) + \alpha e^{\gamma(t-t_0)} \quad (1.18)$$

Απόδειξη. Ομοίως με την παραπάνω απόδειξη, έστω

$$y(t) = \alpha + \int_{t_0}^t (\beta + \gamma x(s)) ds, t \geq t_0. \quad (1.19)$$

$\dot{y}(t) = \beta + \gamma x(t) \leq \beta + \gamma y(t)$ επειδή $x(t) \leq y(t), t \geq t_0$. Έστω $z(t) \triangleq \dot{y}(t) - \gamma y(t) - \beta$. Είναι $z(t) \leq 0$ και λύνοντας ως προς $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0)e^{\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\gamma(t-s)}(z(s) + \beta) ds \Rightarrow \\ \Rightarrow y(t) &= \alpha e^{\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\gamma(t-s)}(z(s) + \beta) ds \stackrel{z(t) \leq 0}{\implies} y(t) \leq \alpha e^{\gamma(t-t_0)} + \beta \int_{t_0}^t e^{\gamma(t-s)} ds \\ &= \alpha e^{\gamma(t-t_0)} + \beta e^{\gamma t} \left(\frac{e^{-\gamma t_0}}{\gamma} - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) \\ &= \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) (e^{\gamma(t-t_0)} - 1) + \alpha e^{\gamma(t-t_0)} \stackrel{x(t) \leq y(t)}{\implies} (1.18). \quad \square \end{aligned}$$

1.3 Ευστάθεια του δυναμικού συστήματος

1.3.1 Ορισμός Ευστάθειας

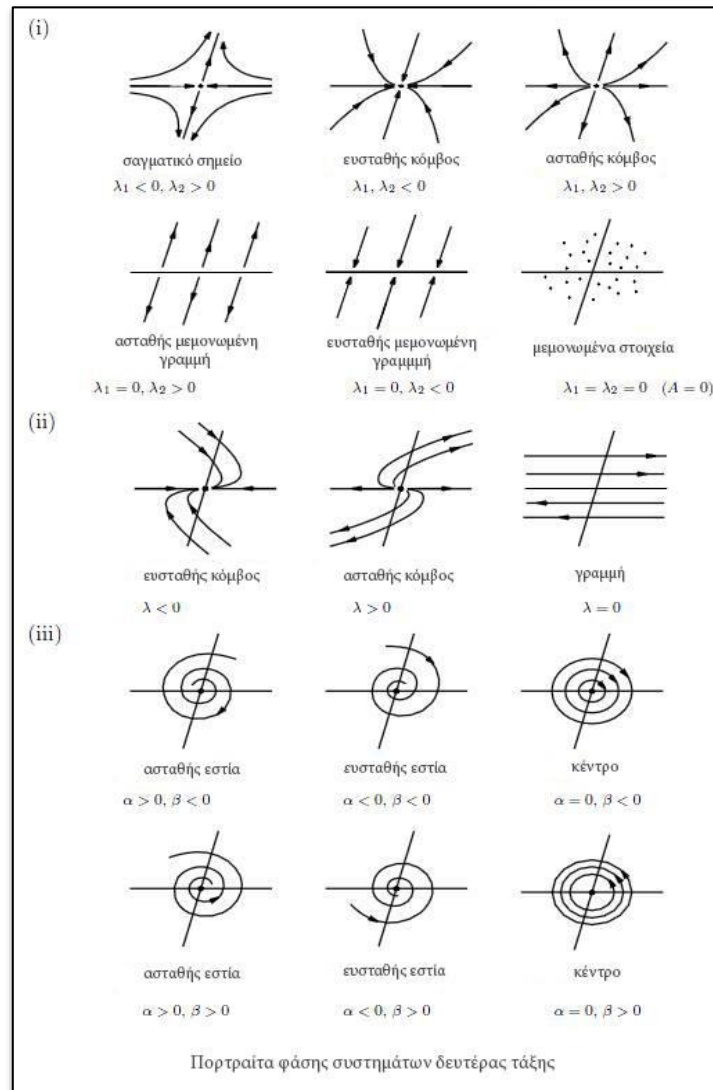
Θα δοθούν βασικές αρχές και ορισμοί της **ευστάθειας** του δυναμικού συστήματος, ενός από τα πιο σημαντικά αντικείμενα της θεωρίας συστημάτων, της ανάλυσης των δυναμικών συστημάτων και των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου. Ειδικά, στο πλαίσιο της εργασίας, απαιτείται η χρήση των βασικότερων εργαλείων της Lyapunov-ο-στρεφούς ευστάθειας, προκειμένου να δοθούν οι συνθήκες ευστάθειας της δυναμικής του σφάλματος των παρατηρητών, ειδικά αυτές της εκθετικής ευστάθειας, όπως θα αναλυθεί παρακάτω.

Στην μηχανική, μελετάται το **σημείο ισορροπίας** ή κατάσταση ισορροπίας. Επί παραδείγματι, ολισθαίνουσα σφαίρα επί ακανόνιστης επιφάνειας, εξάγει τα σημεία ισορροπίας της, τέτοια ώστε σε αυτά η σφαίρα να παραμένει στατική. Τα σημεία στα οποία η σφαίρα ακριβώς θα επιστρέψει μετά τοπική διαταραχή, είναι ευσταθή σημεία

Σχήμα 1.5.

ισορροπίας ενώ τα σημεία από τα οποία θα εκτραπεί μετά μικρή διαταραχή, είναι ασταθή. Η ευστάθεια, τοπική ή ολική του μηχανικού αυτού συστήματος εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος, το εύρος της διαταραχής και τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή την αρχική κατάσταση του συστήματος προ της διαταραχής. Κάποια σημεία τα οποία καθιστούν την έννοια της ευστάθειας περίπλοκη είναι π.χ. ο τρόπος μεταβολής της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας ή π.χ. αν η δυναμική του συστήματος είναι χρονομεταβλητή, δηλαδή π.χ. αν θεωρηθεί ότι η μάζα της σφαίρας αλλάζει με τον χρόνο.

Πιο γενικά, το σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος είναι ευσταθές αν, για αρκούντως μικρές τιμές αρχικής διαταραχής, η διαταραγμένη κίνηση παραμένει υποχρεωτικά σε μια οσοδήποτε μικρή περιοχή του χώρου κατάστασης. Για την ανάλυση των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, γίνεται χρήση της άμεσης και έμμεσης μεθόδου του Lyapunov, καθώς και της αρχής του αναλλοίωτου (invariance principle) Barbashin - Krasovskii - LaSalle. Σε αντίθεση με τα γραμμικά



συστήματα, τα μη γραμμικά έχουν πολλά σημεία ισορροπίας. Το σύστημα (1.7) $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$ έχει το σημείο x_{eq} ως **σημείο ισορροπίας** του αν η λύση του αρχικής κατάστασης x_{eq} δεν μεταβάλλεται, ήτοι $x(t) := s(t, t_0, x_{eq}) = x_{eq}$, δηλαδή είναι η λύση της $\dot{x} = 0 \Rightarrow f(t, x_{eq}) = 0$. Προϋποτίθεται ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας. Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας θα μελετηθεί στην συνέχεια επί τη βάση σημαντικών θεωρημάτων του Lyapunov, για τα οποία θα δοθούν εισαγωγικά το Λήμμα του Barbalat και η αρχή του αναλλοίωτου.

Για να δειχθεί η διαφορετική μορφή σημείων ισορροπίας των γραμμικών συστημάτων, ευσταθών και ασταθών, παρουσιάζεται η περίπτωση **γραμμικού δευτέρας τάξης** συστήματος, για το οποίο αυτά κατατάσσονται ανάλογα με την συμπεριφορά της καταστατικής λύσης γύρω από αυτά και ανάλογα με τις ιδιοτιμές λ_i ($i = 1, 2$), (i) **πραγματικές διαφορετικές**, (ii) **ίσες πραγματικές**, (iii) **μιγαδικές** ($\alpha \pm j\beta$) της 2×2 μήτρας A , όπως στο Σχήμα 1.5.

Ακολουθούν οι ορισμοί συγκεκριμένων **τύπων ευστάθειας κατά Lyapunov**, για το σημείο ισορροπίας $x_{eq} = 0$. Σημειώνεται ότι η τοπολογική ισοδυναμία των νορμών συνάγει ότι η ευστάθεια της θέσης ισορροπίας δεν εξαρτάται από την επιλεγόμενη νόρμα.

Ορισμός 1.11. Η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$ του μη γραμμικού χρονομεταβλητού συστήματος της (1.7) καλείται

- **ευσταθής κατά Lyapunov** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $t_0 \in \mathbb{R}_+$, υπάρχει θετικό δ οσοδήποτε μικρό, εξαρτώμενο από t_0 , ε τέτοιο ώστε $\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t)\| := \|s(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon; \forall t \geq t_0$

- **ασυμπτωτικά ευσταθής** κατά Lyapunov, αν

1) είναι ευσταθής κατά Lyapunov και

2) υπάρχει θετικός αριθμός $\delta(t_0) > 0, t_0 \in \mathbb{R}_+$ για τον οποίο ισχύει:

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0) \Rightarrow \|s(t, t_0, x_0)\| \rightarrow 0; \forall t \geq t_0$$

Ενώ η ευστάθεια κατά L απαιτεί την παραμονή της λύσης στην μπάλα ακτίνας ε , η ασυμπτωτική ευστάθεια απαιτεί την επιστροφή της τροχιάς στην κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

- **ομοιόμορφα ευσταθής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και $t_0 > 0$, υπάρχει θετικός $\delta = \delta(\varepsilon)$, τ.ω.

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|s(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon; \forall t \geq t_0$$

Αν $\delta \neq \delta(t_0)$, έχουμε ομοιόμορφη ευστάθεια. Αν το σύστημα είναι αυτόνομο, τότε δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ ευστάθειας και ομοιόμορφης ευστάθειας.

- **ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής** αν είναι ευσταθής κατά Lyapunov και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ομοιόμορφα στο t_0 και $x_0 \forall t_0 \in \mathbb{R}_+$.
- **ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής** αν είναι ευσταθής κατά Lyapunov και $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ για κάθε $t_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R}^n$.
- **ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής** αν είναι ομοιόμορφα ευσταθής και $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ομοιόμορφα στο t_0 και $x_0 \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- (ομοιόμορφα) **εκθετικά ευσταθής** αν υπάρχουν βαθμωτά μεγέθη $\alpha, \beta, \delta > 0$, για τα οποία αν $\|x(t_0)\| < \delta$ τότε $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\beta t} \forall t \geq t_0, t_0 \in \mathbb{R}_+$.
- **ολικά** (ομοιόμορφα) **εκθετικά ευσταθής** αν υπάρχουν βαθμωτοί $\alpha, \beta > 0$, για τους οποίους $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\beta t}, t \geq t_0$ για όλα τα $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}_+$.
- **ασταθής** αν δεν είναι ευσταθής κατά Lyapunov.

Στο αντικείμενο της **δυναμικής ευστάθειας** εμπίπτει και η μελέτη της ευστάθειας των τροχιών στο χώρο κατάστασης κάτω από διαταραχές της αρχικής κατάστασης. Η ευστάθεια των τροχιών αφορά στην μελέτη των μακράς διαρκείας συμπεριφορών των τοπικών τροχιών (local flows), δηλαδή των τροχιών που ορίζονται από την $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ στον \mathbb{K}^n , με την προϋπόθεση να ικανοποιούνται οι συνθήκες Καραθεοδωρή. Αυτό που απαιτείται είναι να μην υπάρχει πεπερασμένος χρόνος διαφυγής (finite escape time) της τοπικής τροχιάς, δηλαδή να μην διαφεύγει από το πεδίο ορισμού σε πεπερασμένο χρόνο. Η μελέτη των τοπικών τροχιών στους τοπολογικούς χώρους αφορά την Τοπολογική Δυναμική και όχι την παρούσα μελέτη.

Ακολουθεί ο ορισμός των **συναρτήσεων σύγκρισης (comparison functions)** κλάσης \mathcal{K} , \mathcal{L} και \mathcal{KL} , οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην Lyapunov ανάλυση.

Ορισμός 1.12. Η συνεχής συνάρτηση $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$, με $a \in (0, \infty]$ ανήκει στην **κλάση \mathcal{K}** αν είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha(0) = 0$.

Η συνεχής συνάρτηση $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ανήκει στην **κλάση \mathcal{K}_∞** αν είναι γνησίως αύξουσα, $\alpha(0) = 0$ και $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(s) = \infty$.

Η συνεχής συνάρτηση $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ανήκει στην **κλάση \mathcal{L}** αν είναι γνησίως φθίνουσα και $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(s) = 0$.

Η συνεχής συνάρτηση $\alpha: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ανήκει στην **κλάση \mathcal{KL}** αν για κάθε σταθερό s , η $\alpha(r, s)$ είναι κλάσης \mathcal{K} ως προς r και για κάθε σταθερό r , είναι κλάσης \mathcal{L} ως προς s .

Οι συναρτήσεις σύγκρισης έχουν ορισμένες ιδιότητες όπως:

αν α_1 και α_2 είναι συναρτήσεις κλάσης \mathcal{K} στο $[0, a)$, οι α_3 και α_4 είναι συναρτήσεις κλάσης \mathcal{K}_∞ και η β κλάσης \mathcal{KL} , τότε η αντίστροφη α_1^{-1} , ορισμένη στο $[0, \alpha_1(a))$, είναι κλάσης \mathcal{K} , η α_1^{-1} στο $[0, \infty)$ ανήκει στην κλάση \mathcal{K}_∞ , η σύνθεση $\alpha_1 \circ \alpha_2$ στην κλάση \mathcal{K} , η $\alpha_3 \circ \alpha_4$ στην κλάση \mathcal{K}_∞ και η $\sigma(r, s) \triangleq \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ στην \mathcal{KL} .

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς των κλάσης $\mathcal{K}, \mathcal{KL}$ συναρτήσεων, η λύση $x(t) \equiv 0$ είναι **ευσταθής** αν υπάρχει μια συνάρτηση $\alpha(\cdot)$ κλάσης \mathcal{K} και μια σταθερά δ , ώστε για $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \alpha(\|x(0)\|) \forall t \geq 0$. Η μηδενική λύση είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής** αν και μόνον αν υπάρχει μια συνάρτηση $\beta(\cdot, \cdot)$ κλάσης \mathcal{KL} και μια σταθερά ε , ώστε $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) \forall t \geq 0$. Η απόδειξη παραλείπεται.

Ακολουθεί ο ορισμός των **θετικά ορισμένων συναρτήσεων**, των **θετικά ημι-ορισμένων** και των **αρνητικά ορισμένων**.

Ορισμός 1.13. Η συνάρτηση $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι θετικά ημι-ορισμένη αν $0 \in \mathcal{D}, V(0) = 0$ και $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{D} / 0$. Η V λέγεται θετικά ορισμένη όταν $V(x) >$

$0 \forall x \in \mathcal{D} / 0$. Είναι αρνητικά ορισμένη (ημι-ορισμένη) αν η $-V$ είναι θετικά ορισμένη (ημι-ορισμένη).

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των συναρτήσεων κλάσης \mathcal{K} , η συνάρτηση $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ είναι θετικά ορισμένη αν υπάρχουν συναρτήσεις α_1, α_2 κλάσης \mathcal{K} , ώστε:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \forall x \in B_r(0) = \{x \in \mathfrak{R}^n: \|x\| \leq r\} \subset \mathcal{D}. \quad (1.20)$$

Αν επιπλέον, $\mathcal{D} = \mathfrak{R}^n$ και $V(\cdot)$ ακτινικά μη φραγμένη², οι α_1, α_2 επιλέγονται στην κλαση \mathcal{K}_∞ .

Στην περίπτωση που $V(x) = x^T P x$, P : συμμετρική μήτρα, αυτή είναι θετικά ορισμένη αν και μόνον αν όλες οι ιδιοτιμές λ της P είναι αυστηρά θετικές. Αν λ_{\max} και λ_{\min} η μέγιστη και ελάχιστη ιδιοτιμή, τότε από την μόνιμη ανισότητα (βλέπε απόδειξη Θεωρήματος 2.7, §2.4.2 Κεφαλαίου 2):

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2 \quad (1.21)$$

έχουμε $\alpha_1(\|x\|) = \lambda_{\min}(P)\|x\|^2$, $\alpha_2(\|x\|) = \lambda_{\max}(P)\|x\|^2$. Αντίστοιχα η V είναι θετικά ημι-ορισμένη, αρνητικά ημι-ορισμένη και αρνητικά ορισμένη αν οι ιδιοτιμές της P είναι αυστηρά μη αρνητικές, αυστηρά αρνητικές και αυστηρά μη θετικές αντίστοιχα.

1.3.2 Λήμμα Barbalat, Αρχή του Αναλλοίωτου

Αρχικά παρουσιάζεται το ***ω-οριακό σημείο*** για οποιαδήποτε συνάρτηση $x: \mathfrak{R}_+ = [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}^n$. Το $\xi \in \mathfrak{R}^n$ είναι ω-οριακό σημείο κατά Birkhoff της x αν υπάρχει μη φραγμένη ακολουθία $(t_n) \subset \mathfrak{R}_+$, τέτοια ώστε $x(t_n) \rightarrow \xi$ για $n \rightarrow \infty$. Το σύνολο $\Omega(x)$ είναι το σύνολο όλων των ω-οριακών σημείων της x , δηλαδή το ***ω-οριακό σύνολο*** της x .

Λήμμα 1.3. Για οποιαδήποτε συνάρτηση $x: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ισχύουν τα κάτωθι

- 1) Το $\Omega(x)$ είναι κλειστό
- 2) Το $\Omega(x)$ είναι κενό αν και μόνον αν $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ για $t \rightarrow \infty$.
- 3) Αν η x είναι συνεχής και φραγμένη, τότε το $\Omega(x)$ είναι μη κενό, συμπαγές και συνεκτικό, η x τείνει σε αυτό και είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο στο οποίο τείνει³ αυτή η συνάρτηση.
- 4) Αν η x είναι συνεχής και το $\Omega(x)$ μη κενό και φραγμένο, τότε x φραγμένη και τείνουν στο $\Omega(x)$.

Ορισμός 1.14. Το G ονομάζεται ***χρονικά αναλλοίωτο*** ως προς το αυτόνομο σύστημα (1.3) αν ισχύει η συνεπαγωγή $x(t_0) = x_0 \in G \Rightarrow \varphi(t, x_0) \in G \forall t \in \mathfrak{R}$. Αν οι πραγματικοί αντικατασταθούν από το $\mathfrak{R}_+ = [0, \infty)$, τότε έχουμε το ***θετικά αναλλοίωτο*** σύνολο.

Λήμμα 1.4. Αν $x: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ μία φραγμένη λύση του αυτόνομου συστήματος της (1.3), τότε το οριακό σύνολο $\Omega(x)$ είναι μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, η x τείνει σε αυτό και είναι το μικρότερο δυνατό σύνολο στο οποίο τείνει η x . Είναι επίσης αναλλοίωτο στην τροχιά φ που παράγεται από την f .

² Η συνεχώς διαφορίσιμη V είναι ***ακτινικά μη φραγμένη (radially unbounded)*** αν $V(x) \rightarrow \infty$ για $\|x\| \rightarrow \infty$.

³ Μια συνάρτηση $x: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ***τείνει (approaches)*** το σύνολο Ω αν $d_\Omega(x(t)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, όπου $d_\Omega(x) = \inf\{\|x - a\|: a \in \Omega\}$ η ευκλείδεια συνάρτηση απόστασης.

Η συνάρτηση $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι **Riemann ολοκληρώσιμη** αν το ολοκλήρωμα Riemann $\int_0^\infty y(s)ds$ υπάρχει, δηλαδή η y είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, t]$ για κάθε $t \geq 0$ και το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t y(s)ds$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Λήμμα 1.5 (Λήμμα Barbalat). Αν η $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ομοιόμορφα⁴ συνεχής και κατά Riemann ολοκληρώσιμη, τότε $y(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Έστω $y(t)$ δεν τείνει στο 0 για $t \rightarrow \infty$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και μια ακολουθία (t_n) του \mathbb{R}_+ , τέτοια ώστε $t_{n+1} - t_n > 1$ και $|y(t_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της y , υπάρχει $\delta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$: $|t_n - t| \leq \delta \Rightarrow |y(t_n) - y(t)| \leq \varepsilon/2$. Έτσι, για κάθε t στο $[t_n, t_n + \delta]$ και $n \in \mathbb{N}$, $|y(t)| \geq |y(t_n)| - |y(t_n) - y(t)| \geq \varepsilon/2$. Άρα

$$\left| \int_{t_n}^{t_n+\delta} y(t)dt \right| = \int_{t_n}^{t_n+\delta} |y(t)|dt \geq \frac{\varepsilon\delta}{2}$$

για κάθε n θετικό ακέραιο, πράγμα που αντιβαίνει στην ύπαρξη του Riemann ολοκληρώματος $\int_0^\infty y(t)dt$. \square

Το παρακάτω πόρισμα απαιτείται για την αρχή του αναλλοίωτου του LaSalle και εξάγεται από το Λήμμα Barbalat και από το 3) του Λήμματος 1.3.

Πόρισμα 1.2. Έστω C ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής με $x(\mathbb{R}_+) \subset C$ ⁵. Αν η $g \circ x$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε $\Omega(x) \subset g^{-1}(0)$ και η x τείνει στο $g^{-1}(0)$.

Θεώρημα 1.10 (ολοκληρωτική αρχή αναλλοίωτου). Έστω G μη κενό, κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $x_0 \in G$. Για το αυτόνομο σύστημα της (1.3) $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, έστω «μέγιστο» διάστημα ύπαρξης I_{x_0} , τροχιά $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ η μοναδική λύση του (1.3), $\varphi(\cdot, x_0)$ φραγμένη στο \mathbb{R}_+ και $\varphi(\mathbb{R}_+, x_0) \subset G$. Αν η συνάρτηση $t \mapsto g(\varphi(t, x_0))$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R}_+ , τότε η $\varphi(\cdot, x_0)$ τείνει στο μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο που περιέχεται στο $g^{-1}(0)$.

Απόδειξη. Εφόσον η $\varphi(\cdot, x_0)$ είναι φραγμένη στους μη αρνητικούς και ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του αυτόνομου συστήματος, η παράγωγος της η $\varphi(\cdot, x_0)$ είναι επίσης φραγμένη στους μη αρνητικούς (βλέπε και Θεώρημα 1.7). Τουτέστιν, η $\varphi(\cdot, x_0)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο \mathbb{R}_+ . \square

Ακολουθεί μια εφαρμογή της ολοκληρωτικής αρχής αναλλοίωτου και του Πορίσματος 1.2.

Παράδειγμα 1.3. Το θεώρημα 1.10 μαζί με το Λήμμα Barbalat εφαρμόζονται στην περίπτωση ενός παρατηρούμενου στην έξοδο του συστήματος. Όπως θα αναλυθεί και στο επόμενο κεφάλαιο, είναι αδύνατον να μετρηθεί (να παρατηρηθεί) η πλήρης κατάσταση $x(t)$ στον χρόνο t (π.χ. με διαθέσιμα μετρητικά όργανα),

⁴ Η h είναι ομοιόμορφα συνεχής αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|\xi_1 - \xi_2\| \leq \delta \Rightarrow \|h(\xi_1) - h(\xi_2)\| \leq \varepsilon$.

⁵ Αν $A \subset \mathbb{R}^n$, $h: A \rightarrow \mathbb{R}^p$, $U \subset \mathbb{R}^p$, με $h^{-1}(U)$ συμβολίζω την απεικόνιση $h^{-1}(U) := \{\xi \in A: h(\xi) \in U\}$ και $h^{-1}(u)$ για $u \in \mathbb{R}^p$ συμβολίζει την απεικόνιση $h^{-1}(\{u\})$.

αλλά μόνο ένα μέρος αυτής, η οποία είναι μια ποσότητα που θεωρείται ότι μετράται ή παρατηρείται. Η παρατήρηση στην έξοδο είναι $y = c(x)$, $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $c(0) = 0$, με c συνεχή. Αντικείμενο της παρατηρησιμότητας σχετίζεται με τον αποκλεισμό της πιθανότητας διαφορετικές αρχικές καταστάσεις να εξαγάγουν την ίδια παρατήρηση. Αυτή είναι η βασική αρχή της παρατηρησιμότητας, δηλαδή η ικανότητα η αρχική κατάσταση ενός παρατηρήσιμου συστήματος να μπορεί να εξαχθεί από την παρατήρηση. Το αυτόνομο σύστημα (1.3) με παρατήρηση y

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), & x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = c(x) \end{cases} \quad (1.22)$$

καλείται **παρατηρήσιμο σύστημα μηδενικής κατάστασης** (zero-state observable system) αν $x(\cdot) = 0$ είναι η μοναδική λύση που εξάγεται από την παρατήρηση $y(\cdot) = 0$. Το επόμενο πόρισμα σηματοδοτεί ότι για ένα παρατηρήσιμο μηδενικής κατάστασης κάθε φραγμένη λύση με παρατήρηση y στο L^p αναγκαστικά συγκλίνει στο μηδέν.

Πόρισμα 1.3. Έστω το παραπάνω παρατηρήσιμο σύστημα μηδενικής κατάστασης. Για δοθέν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, έστω $\mathbb{R}_+ \subset I(x_0)$ και έστω η $\varphi(\cdot, x_0)$ φραγμένη στο \mathbb{R}_+ . Αν $\int_0^\infty \|c(\varphi(t, x_0))\|^p dt < \infty$ για κάποιο $p \in (0, \infty)$, τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = 0$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.3 επειδή $\varphi(\cdot, x_0)$ συνεχής φραγμένη, πλησιάζει το ω-οριακό της σύνολο $\Omega := \Omega(\varphi(\cdot, x_0))$ και αυτό είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο. Από το Θεώρημα (1.10) για $G = \mathbb{R}^n$ και $g(\cdot) = \|c(\cdot)\|^p$, έχουμε $\Omega \subset g^{-1}(0) = c^{-1}(0)$. Έστω ξ ένα σημείο του Ω . Από την αρχή αναλλοιώτου για το Ω , η $\varphi(t, \xi)$ ανήκει στο Ω για κάθε t . Συνεπώς, $c(\varphi(\cdot, \xi)) = 0$. Η παρατηρησιμότητα μηδενικής κατάστασης βεβαιώνει ότι $\varphi(\cdot, \xi) = 0$, δείχνοντας ότι $\xi = 0$. Άρα $\Omega = \{0\}$, επομένως $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = 0$. \square

Πόρισμα 1.4 (Αρχή Αναλλοιώτου του LaSalle). Έστω \mathcal{D} μη κενό ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχώς διαφορίσιμη και $x_0 \in \mathcal{D}$. Υποθέτουμε επίσης $\mathbb{R}_+ \subset I(x_0)$ και ότι υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο G του \mathbb{R}^n , τέτοιο ώστε $\varphi(\mathbb{R}_+, x_0) \subset G \subset \mathcal{D}$. Αν $V_f(\xi) \leq 0$ για όλα τα $\xi \in G$, τότε η $\varphi(\cdot, x_0)$ πλησιάζει το μέγιστο αναλλοίωτο υποσύνολο που περιέχεται στο $V_f^{-1}(0) \cap G$.

Απόδειξη. Επειδή G συμπαγές και V συνεχής στο G , η V είναι φραγμένη στο G . Επίσης

$$\int_0^t V_f(\varphi(s, x_0)) ds = \int_0^t \frac{d}{ds} V(\varphi(s, x_0)) ds = V(\varphi(t, x_0)) - V(x_0),$$

⁶ Η κατευθυντική παράγωγος ή *παράγωγος Lie* ορίζεται ως το εσωτερικό διανυσματικό γινόμενο της βαθμίδας του ορίσματος επί την συνάρτηση στον δείκτη του συμβολισμού, δηλ. $V_f(\xi) = \langle \nabla V(\xi), f(\xi) \rangle$.

άρα η συνάρτηση $t \mapsto \int_0^t V_f(\varphi(s, x_0)) ds$ φράσσεται από κάτω, αλλά επειδή είναι και ταυτόχρονα μη αύξουσα (επειδή $V_f \leq 0$), πρέπει να συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό για $t \rightarrow \infty$. Επομένως, η συνάρτηση $t \mapsto V_f(\varphi(t, x_0))$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R}_+ . Επίσης, με χρήση του θεωρήματος 1.10 για $g = V_f$, ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

Ακολουθεί η Lyapunov ανάλυση της ευστάθειας.

1.3.3 Θεωρήματα Lyapunov

Ο Lyapunov (βλέπε και §1.1.1) εισήγαγε δύο τρόπους μελέτης της ευστάθειας, την *άμεση* και την *έμμεση μέθοδο Lyapunov*. Η ανάλυση της ευστάθειας των μηχανικών συστημάτων, όπου γίνεται χρήση της χαμιλτονιανής τεχνικής με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, οδήγησε τον Lyapunov στην γενίκευση της τεχνικής χρήσει συναρτήσεων γενικευμένης ενέργειας, αντίστοιχων των συναρτήσεων ενέργειας, για οποιοδήποτε δυναμικό σύστημα.

Επειδή η απεικόνιση μετάβασης φ δεν είναι αναλυτικά δοσμένη σε μορφή τύπου αναλυτικού για το ζεύγος αρχικών συνθηκών (t_0, x_0) και άρα δεν μπορεί να μελετηθεί απευθείας, η μελέτη ευστάθειας γίνεται έμμεσα. Η έμμεση μέθοδος Lyapunov χρησιμοποιεί την γραμμικοποίηση, αλλά αυτό έχει μόνο τοπική σημασία και δεν δίνει εκτίμηση του χωρίου ελκυσμού (domain ή basin of attraction). Η δεύτερη ή άμεση μέθοδος Lyapunov, η οποία θα περιγραφεί, είναι πιο γενική όταν αποφεύγεται η γραμμικοποίηση.

Θεώρημα 1.11 (Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov). Έστω ότι το \mathcal{D} είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , τέτοιο ώστε $0 \in \mathcal{D}$ και έστω μια συνάρτηση $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη με $V(0) = 0$. Αν $V(x) > 0$ για όλα τα $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ και $V_f(x) \leq 0$ για όλα τα $x \in \mathcal{D}$, τότε το 0 είναι ένα **ευσταθές** σημείο ισορροπίας για το αυτόνομο σύστημα της (1.3).

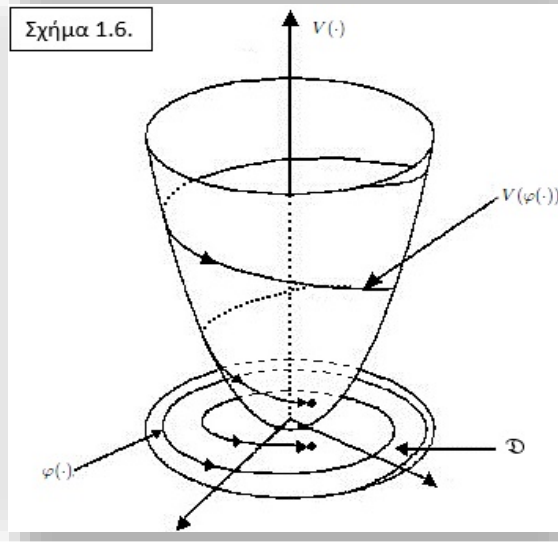
Αν $V_f(x) < 0, x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$ του αυτόνομου συστήματος είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής**.

Αν υπάρχουν πραγματικοί $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ και $p \geq 1$, τέτοιοι ώστε η $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ να ικανοποιεί τις (1.23), (1.24), τότε λύση η $x(t) \equiv 0$ είναι **εκθετικά ευσταθής**.

$$\alpha \|x\|^p \leq V(x) \leq \beta \|x\|^p \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad (1.23)$$

$$V_f(x) \leq -\varepsilon V(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad (1.24)$$

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι μια κλειστή σφαίρα $\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ ⁷ περιέχεται στο \mathcal{D} . Καθώς το σύνορο⁸ $\partial\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ της μπάλας είναι συμπαγές και η V είναι συνεχής και θετικά ορισμένη επί του συνόρου, η V λαμβάνει μια ελάχιστη τιμή $a > 0$ [$a > 0$ καθότι $0 \notin \partial\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ και $V(x) > 0, x \in \mathcal{D}, x \neq 0$] επί του συνόρου, ώστε $V(x) \geq a \forall x \in \partial\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ και $V(x) = a$ για κάποιο $x \in \partial\mathcal{B}_\varepsilon(0)$. Έστω $\beta \in (0, a)$ και ορίζεται το τοξωτά συνδεδεμένο⁹ σύνολο \mathcal{D}_β ως κομμάτι του $\{x \in \mathcal{D}: V(x) \leq \beta\}$ που περιέχει και την αρχή, δηλαδή το \mathcal{D}_β είναι το σύνολο όλων των $x \in \mathcal{D}$, τέτοιων ώστε να υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ με $\psi(0) = x, \psi(1) = 0$ και $V(\psi(\mu)) \leq \beta \forall \mu \in [0, 1]$. Ισχύει ότι $\mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(0)$. Για να αποδειχθεί αυτό, έστω δια της εις άτοπον ότι $\mathcal{D}_\beta \not\subset \mathcal{B}_\varepsilon(0)$. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει σημείο $p \in \mathcal{D}_\beta$, τέτοιο ώστε $p \in \partial\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ και επομένως $V(p) \geq a > \beta$, που είναι άτοπον.



Καθώς $\dot{V}(x) \triangleq V_f(x) = V'(x)f(x) \leq 0, x \in \mathcal{D}_\beta$, έπεται ότι η $V(x(t))$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση του χρόνου και άρα $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, t \geq 0$. Επομένως, το \mathcal{D}_β είναι σύνολο θετικά αναλλοίωτο για το αυτόνομο σύστημα. Επειδή επίσης είναι συμπαγές, από τα θεωρήματα μοναδικότητας λύσης της παραγράφου 1.2.1 καταλήγουμε ότι για κάθε $x(0) \in \mathcal{D}_\beta$, το αυτόνομο σύστημα έχει μια μοναδική λύση για t μη αρνητικά.

Καθώς $V(\cdot)$ συνεχής με $V(0) = 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε $V(x) < \beta, x \in \mathcal{B}_\delta(0)$, όπου η μπάλα $\mathcal{B}_\delta(0)$, ορίζεται στο Σχόλιο⁷. Στη συνέχεια, έστω η $x(t)$ που ικανοποιεί το αυτόνομο (1.3) με $\|x(0)\| < \delta$. Καθώς $\mathcal{B}_\delta(0) \subset \mathcal{D}_\beta \subset \mathcal{B}_\varepsilon(0) \subseteq \mathcal{D}$ και $V_f(x) \leq 0, x \in \mathcal{D}$, έπεται

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V_f(x(s)) ds \leq 0, \quad t \geq 0,$$

και έτσι $\forall x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0)$,

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) < \beta, \quad t \geq 0. \quad (1.25)$$

Επειδή $V(x) \geq a, x \in \partial\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ και $\beta \in (0, a)$, συνάγεται ότι $x(t) \notin \partial\mathcal{B}_\varepsilon(0), t \geq 0$. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|x(0)\| < \delta$, τότε $\|x(t)\| <$

⁷ Η ανοικτή μπάλα $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^n$ ακτίνας ε και κέντρου με διάνυσμα θέσης x ορίζεται $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n: \|x - y\| < \varepsilon\}$, για οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ στο \mathbb{R}^n . Μπορεί και να χαρακτηριστεί και ε -γειτονιά.

⁸ Το $\partial S = \bar{S} \cap (\mathbb{R}^n \setminus S)$ είναι το **σύνορο** του τοπολογικού χώρου S , όπου Το \bar{S} είναι το σύνολο των **σημείων κλειστότητας (closure point)** του S . Το κλείσιμο του S είναι η ένωση $S \cup \partial S$. Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο κλειστότητας του S αν $\forall \varepsilon > 0 S \cap \mathcal{B}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.

⁹ Το S είναι **τοξωτά συνδεδεμένο σύνολο** (arcwise connected set) αν δύο σημεία του μπορούν να ενωθούν από μια συνεχή καμπύλη που ανήκει στο σύνολο S .

$\varepsilon, t \geq 0$, δηλαδή καταλήγουμε στην συνθήκη ευστάθειας κατά Lyapunov για την μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$. \square

Για την *ασυμπτωτική ευστάθεια* της μηδενικής λύσης, υποθέτουμε $V_f(x) < 0, x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}, x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0)$. Έπεται ότι $x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0), t \geq 0$. Η V φθίνει και κάτω φράσσεται από το μηδέν.

Έστω ότι η λύση $x(t), t \geq 0$ δεν συγκλίνει στο μηδέν. Άρα, η $V(x(t)), t \geq 0$ είναι κάτω φραγμένη από ένα L . Από την συνέχεια της $V(\cdot)$, υπάρχει $\delta_1 > 0$ για το οποίο $V(x) < L$ για $x \in \mathcal{B}_{\delta_1}(0)$, δηλαδή $x(t) \notin \mathcal{B}_{\delta_1}(0)$, για όλα τα $t \geq 0$. Ορίζουμε $L_1 \triangleq \min_{\delta_1 \leq \|x\| \leq \varepsilon} \{-V_f(x)\}$. Η συνθήκη $V_f(x) < 0$ συνεπάγεται $-V_f(x) \geq L_1, \delta_1 \leq \|x\| \leq \varepsilon$ ή ισοδύναμα,

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t V_f(x(s)) ds \leq 0 \leq -tL_1,$$

και άρα $\forall x(0) \in \mathcal{B}_\delta(0), V(x(t)) \leq V(x(0)) - tL_1$. Υποθέτοντας $t > \frac{V(x(0)) - L}{L_1}$, έχουμε $V(x(t)) < L$, άτοπον. Άρα $x(t) \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$, θεμελιώνοντας την ασυμπτωτική κατά Lyapunov ευστάθεια. \square

Για την *εκθετική ευστάθεια κατά Lyapunov* της μηδενικής λύσης του αυτονόμου συστήματος, η συνθήκη $V_f(x) \leq -\varepsilon V(x)$, συνεπάγεται

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0. \quad (1.26)$$

Από την υπόθεση $V(x(0)) \leq \beta \|x(0)\|^p$ και την $a \|x(t)\|^p \leq V(x(t))$, ακολουθεί ότι

$$a \|x(t)\|^p \leq \beta \|x(0)\|^p e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0, \quad (1.27)$$

που συνεπάγεται ότι

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{\beta}{a}\right)^{1/p} \|x(0)\| e^{(-\varepsilon/p)t}, \quad t \geq 0, \quad (1.28)$$

πράγμα που εξάγει την εκθετική ευστάθεια. \square

Στο Σχήμα 1.6 φαίνεται η μορφή μιας συνάρτησης Lyapunov που αντιστοιχεί στις τροχιές (πορτραίτο φάσης) του διδιάστατου διανύσματος κατάστασης.

Στο παραπάνω θεώρημα ευστάθειας του Lyapunov, μελετάται η ευστάθεια της λύσης $x(t) \equiv 0$, αλλά ακόμη και αν $x_e \neq 0$ το σημείο ισορροπίας, το θεώρημα ισχύει αντικαθιστώντας $V(x_e) = 0$ και $x \neq x_e$.

Το πόρισμα 1.4 της αρχής του αναλλοίωτου του LaSalle, μαζί με το θεώρημα 1.11 του Lyapunov, οδηγούν στο θεώρημα ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Θεώρημα 1.12 (Θεώρημα Ασυμπτωτικής Ευστάθειας). Έστω το ανοικτό μη κενό σύνολο $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{R}^n$ που περιέχει το 0 και έστω η $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ που είναι συνεχώς διαφορίσιμη με $V(0) = 0$. Αν $V(x) > 0 \forall x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}, V_f(x) \leq 0 \forall x \in \mathcal{D}$ και το $\{0\}$ είναι το μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο του $V_f^{-1}(0)$, τότε το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Τα παρακάτω παραδείγματα παρουσιάζουν βασικές τεχνικές επιλογής συναρτήσεων Lyapunov σε εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων.

Παράδειγμα 1.4. Στο μοντέλο εκκρεμούς με μήκος νήματος l , βάρους m , διδάστατης γωνίας στροφής θ , δύναμης τριβής $kl\dot{\theta}(t)$, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$ml\ddot{\theta}(t) = -mgsin\theta(t) - kl\dot{\theta}(t)$$

Ορίζοντας $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = [\theta(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T$, έχουμε το μοντέλο κατάστασης

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2. \end{cases}$$

Στο $\theta = x_1 = \dot{\theta} = x_2 = 0$, δηλαδή στο $x(t) = 0$ εντοπίζεται το σημείο ισορροπίας. Η συνάρτηση ενέργειας, η οποία επιλέγεται για συνάρτηση Lyapunov, $V(x) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1) > 0$ στο $\mathcal{D} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \triangleq V_f(x) &= \nabla V \cdot f(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \right] [f_1(x), f_2(x)]^T \\ &= [mgl\sin x_1, ml^2x_2] \left[x_2, -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \right]^T = -kl^2x_2^2. \end{aligned}$$

Άρα, η $V_f(x)$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένη, καθώς $V_f(x) = 0$ για $x_2 = 0$, δηλαδή κατά μήκος του x_1 - άξονα. Το θεώρημα του Lyapunov αδυνατεί να εξαγάγει συμπέρασμα ασυμπτωτικής ευστάθειας, λόγω της ημιαρνητικότητας της συνάρτησης Lyapunov, δηλαδή του γεγονότος ότι δεν είναι αυστηρά αρνητική.

Όμως, βάσει του Θεωρήματος 1.12, θεωρώντας την περιοχή $\mathcal{D}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ με $-\pi < x_1 < \pi$ και $-a < x_2 < a \forall a \in \mathfrak{R}_+$. Για να δειχθεί ότι το $\{0\}$ είναι το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο, πρέπει να δειχθεί ότι η V_f δεν μηδενίζεται παντού επί των τροχιών που εσωκλείονται στο \mathcal{D}' , εκτός από το σημείο $(0,0)$. $V_f(x) = 0 \Rightarrow 0 = -kl^2x_2^2 \Leftrightarrow x_2 = 0$, επομένως $x_2 = 0 \forall t \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$. Άρα, από το μοντέλο κατάστασης $-\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0$ και έτσι $x_2 = 0 \forall t \Rightarrow \sin x_1 = 0$. Περιορίζοντας το x_1 στο $(-\pi, \pi)$, η τελευταία συνθήκη ικανοποιείται αν και μόνον αν $x_1 = 0$. Άρα, η αρχή $(0,0)$ είναι (τοπικά) ασυμπτωτικά ευσταθής, καθώς το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο, στο οποίο η χρονική παράγωγος της V μηδενίζεται, είναι το $x = 0$.

Παράδειγμα 1.5. Το σύστημα $\dot{x}_1 = -x_1 + g(x_2)$, $\dot{x}_2 = -x_2 + h(x_1)$, ένα σύστημα με μη γραμμική διασταυρούμενη σύζευξη μέσω των g, h , για τις οποίες $|g(u)| \leq |u|/2$ και $|h(u)| \leq |u|/2$. Εκλέγοντας

$V = (x_1^2 + x_2^2)/2 \geq 0$. $\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^2 + x_1g(x_2) + x_2h(x_1) \leq -x_1^2 - x_2^2 + |x_1x_2| \leq -(1/2)(x_1^2 + x_2^2) = -V$. Από το Θεώρημα 1.11 του Lyapunov, το σύστημα παρουσιάζει ολική εκθετική ευστάθεια.

Παράδειγμα 1.6. Το γραμμικό αυτόνομο σύστημα $\dot{x} = Ax, A \in \mathfrak{R}^{n \times n}, x(0) = x_0$. Η ανάλυση μπορεί να γίνει με την μελέτη των ιδιοτιμών της A , όπου αν έχουν πραγματικό μέρος μη θετικό, το σύστημα είναι ευσταθές και η λύση του δίνεται από την $x(t) = e^{At}x_0$. Το σύστημα μελετάται με την τετραγωνικού τύπου συνάρτηση Lyapunov, μια τεχνική που θα ακολουθηθεί και στην μελέτη της παρούσας εργασίας. Εκλέγεται η $V(x) = x^T Px, P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ συμμετρική και θετικά ορισμένη μήτρα. Έτσι, η $V(\cdot)$ είναι θετικά ορισμένη. Ισχύει $\dot{V} = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} \Rightarrow$

$\dot{V} = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + P A) x = -x^T Q x$, με $A^T P + P A = -Q$. Ισχύει $Q^T = Q$ και αν είναι θετικά ορισμένη, τότε η \dot{V} είναι αρνητικά ορισμένη και επομένως η αρχή των αξόνων είναι ασυμπωτικά ευσταθής. Εκλέγοντας αρχικά μια συμμετρική, θετικά ορισμένη μήτρα Q και λύνοντας ως προς P , επιβεβαιώνω ότι είναι θετικά ορισμένη.

Επειδή η τεχνική της εξίσωσης Lyapunov $A^T P + P A = -Q$, υπό την μορφή όμως ανισοτικής σχέσης (γραμμικές ανισότητες μητρών), θα χρειασθεί στην συνέχεια της εργασίας, παρατίθεται το παρακάτω θεώρημα και η απόδειξή του.

Θεώρημα 1.13. Οι ιδιοτιμές λ_i της $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος αν και μόνον αν δοθείσης συμμετρικής θετικά ορισμένης μήτρας Q , υπάρχει θετικά ορισμένη συμμετρική μήτρα P που ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov.

Απόδειξη. Έστω $Q > 0, \exists P > 0$ που ικανοποιεί την $A^T P + P A = -Q$. Οπότε, $V(x) = x^T P x > 0$ και $\dot{V} = -x^T Q x < 0$ και από το Θεώρημα 1.11 του Lyapunov, αποδεικνύεται η ασυμπωτική ευστάθεια. Για το αντίστροφο, έστω $Re(\lambda_i) < 0$ και δοθέντος Q , ορίζω

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt. \quad (1.29)$$

Η μήτρα P είναι συμμετρική, καθότι $(e^{A^T t})^T = e^{A t}$. Η P είναι θετικά ορισμένη, διότι αν υπήρχε $x \neq 0$, τέτοιο ώστε $x^T P x = 0$, τότε

$$x^T P x = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} x^T e^{A^T t} Q e^{A t} x dt = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} y^T Q y dt = 0, y = e^{A t} x \Leftrightarrow$$

$$y = e^{A t} x = 0 \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

καθώς η $e^{A t}$ είναι θετική ποσότητα. Άτοπον, άρα η P είναι θετικά ορισμένη.

Από την εξίσωση Lyapunov,

$$\begin{aligned} P A + A^T P &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} A dt + \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt \\ &= e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_0^{\infty} = -Q \end{aligned}$$

από όπου η P είναι όντως λύση της εξίσωσης Lyapunov. Πρέπει να δειχθεί ότι είναι και μοναδική. Αν υπήρχε και άλλη λύση $\tilde{P} \neq P$, τότε $(P - \tilde{P})A + A^T(P - \tilde{P}) = 0 \Rightarrow e^{A^T t} [(P - \tilde{P})A + A^T(P - \tilde{P})] e^{A t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{A t}) = 0$,

οπότε η ποσότητα $e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{A t}$ είναι σταθερή για κάθε t . Αυτό μπορεί να ισχύει αν και μόνον αν $P - \tilde{P} = 0$, δηλαδή $P = \tilde{P}$, πράγμα άτοπον. \square

Επειδή στην παρούσα μελέτη, το υπό ανάλυση σύστημα είναι μη αυτόνομο και η ανάλυση Lyapunov που θα ακολουθηθεί είναι αντίστοιχη, έπονται τα παρακάτω θεωρήματα χωρίς αποδείξεις, ως συνέπεια των θεωρημάτων για αυτόνομα συστήματα.

1.3.4 Μη αυτόνομα συστήματα

Μελετάται το μη αυτόνομο σύστημα της (1.2), επειδή οι μη γραμμικοί παρατηρητές που θα κατασκευασθούν στην συνέχεια αφορούν σε μη αυτόνομα συστήματα και το θεώρημα ευστάθειας που ακολουθεί είναι απαραίτητο στην μελέτη ευστάθειας των παρατηρητών. Τα αντίστοιχα θεωρήματα παρέχουν παρόμοιο αποτέλεσμα με αυτά των χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων, αλλά ασθενέστερο. Έστω χρονομεταβλητό σύστημα μορφής:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.30)$$

με $f: [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz στο x και τμηματικά συνεχή στο t . Η λύση $x(t) \equiv 0$ αποτελεί **σημείο ισορροπίας** στο $t = t_0$ αν $f(0, t) = 0, \forall t \geq t_0$.

Λήμμα 1.6. Το σημείο ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος (1.30) είναι:

- **ομοιόμορφα ευσταθές** αν και μόνον αν υπάρχει κλάσης \mathcal{K} συνάρτηση $\alpha(\cdot)$ και σταθερά $\delta > 0$ ανεξάρτητη του t_0 , ώστε

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \forall t \geq t_0. \quad (1.31)$$
- **ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές** αν και μόνον αν υπάρχει κλάσης \mathcal{KL} συνάρτηση $\beta(\cdot, \cdot)$ και σταθερά $\delta > 0$ ανεξάρτητη του t_0 , ώστε

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (1.32)$$
- **ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε αρχική κατάσταση $x(t_0)$.
- **εκθετικά ευσταθές** αν και μόνον αν υπάρχουν σταθερές $k, a, \lambda > 0$ ώστε

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq a\|x(t_0)\|ke^{-\lambda t}, \forall t \geq t_0. \quad (1.33)$$
- **ολικά εκθετικά ευσταθές** αν η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε αρχική συνθήκη.

Αντίστοιχα με τα αυτόνομα συστήματα ορίζονται και οι θετικά (ημι)ορισμένες συναρτήσεις.

Ορισμός 1.14. Η συνεχής συνάρτηση $W: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές της, για την οποία $0 \in \mathcal{D}$

Είναι **θετικά ορισμένη** στο \mathcal{D} αν \exists χρονικά αμετάβλητη θετικά ορισμένη συνάρτηση $V_1(\cdot)$, ώστε $V_1(x) \leq W(t, x), \forall x \in \mathcal{D}$ και $W(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Είναι **θετικά ημι-ορισμένη** αν $W(t, x) \geq 0 \forall x \neq 0, x \in \mathcal{D}$.

Είναι **φθίνουσα** στο \mathcal{D} αν υπάρχει θετικά ορισμένη συνάρτηση $V_2(\cdot)$, ώστε $|W(t, x)| \leq V_2(x), \forall x \in \mathcal{D}$, δηλαδή τείνει ομοιόμορφα στο μηδέν ως προς τον χρόνο t , για $\|x\| \rightarrow 0$. Προφανώς, κάθε θετικά ορισμένη χρονικά αμετάβλητη συνάρτηση είναι φθίνουσα.

Είναι **ακτινικά μη φραγμένη** αν $W(t, x) \rightarrow \infty$ για $\|x\| \rightarrow \infty$.

Συμπερασματικά, από την σχέση (1.20) για τις θετικά ορισμένες συναρτήσεις μιας μεταβλητής και από τον παραπάνω Ορισμό 1.14, η $W(\cdot, \cdot)$ είναι **θετικά ορισμένη** στο \mathcal{D} αν και μόνον αν $\exists V_1(\cdot)$, τέτοια ώστε $V_1(x) \leq W(t, x), \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists a_1(\cdot)$:

$$a_1(\|x\|) \leq V_1(x) \leq W(t, x), \forall x \in B_r \subset \mathcal{D}. \quad (1.34)$$

Αν η $W(\cdot, \cdot)$ είναι και φθίνουσα, τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.14, υπάρχει μια $V_2(\cdot)$:

$$W(t, x) \leq V_2(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

και από την σχέση (1.20) συνάγεται η υπαρχή $a_2(\cdot)$, για την οποία ισχύει

$$W(t, x) \leq V_2(x) \leq a_2(\|x\|), \forall x \in B_r \subset \mathcal{D}.$$

Έπεται ότι η $W(\cdot, \cdot)$ είναι **θετικά ορισμένη και φθίνουσα** αν και μόνον αν υπάρχουν χρονικά αναλλοίωτες θετικά ορισμένες συναρτήσεις $V_1(\cdot), V_2(\cdot)$ για τις οποίες

$$V_1(x) \leq W(t, x) \leq V_2(x), \forall x \in \mathcal{D},$$

επομένως υπάρχουν και συναρτήσεις $a_1(\cdot), a_2(\cdot) \in \mathcal{K}$ για τις οποίες

$$a_1(\|x\|) \leq W(t, x) \leq a_2(\|x\|), \forall x \in B_r \subset \mathcal{D}. \quad (1.35)$$

Τέλος, η $W(\cdot, \cdot)$ είναι θετικά ορισμένη και φθίνουσα και ακτινικά μη φραγμένη, αν και μόνον αν οι $a_1(\cdot), a_2(\cdot)$ εκλέγονται στην κλάση \mathcal{K}_∞ .

Θεώρημα 1.14 Αν σε μια περιοχή \mathcal{D} του σημείου ισορροπίας $x = 0$ του συστήματος της (1.30) υπάρχει διαφορίσιμη \mathcal{C}^1 συνάρτηση $W(\cdot, \cdot): [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, για την οποία ισχύει:

- (i) $W(t, x)$ θετικά ορισμένη
- (ii) Η παράγωγος της $W(\cdot, \cdot)$ κατά μήκος οποιασδήποτε λύσης της (1.3) είναι αρνητικά ημισορισμένη στο \mathcal{D} , τότε το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές

Θεώρημα 1.15 Έστω $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος της (1.30) και ανήκει στο $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Έστω $W: [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{C}^1 (συνεχώς διαφορίσιμη) συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$1. \quad V_1(x) \leq W(t, x) \leq V_2(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}, \forall t \quad (1.36)$$

$$2. \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla W \cdot f(t, x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}, \forall t, \quad (1.37)$$

με $V_i, i = 1, 2$ συνεχείς, θετικά ορισμένες συναρτήσεις στο \mathcal{D} , τότε, το σημείο ισορροπίας παρουσιάζει **ομοιόμορφη ευστάθεια**.

Απόδειξη. Η χρονική παράγωγος της W κατά μήκος των τροχιών του (1.2), είναι

$$\dot{W}(t, x) = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} f(t, x) \leq 0$$

Για σταθερές $r, c > 0$, τέτοιες ώστε η σφαίρα $B_r \subset \mathcal{D}$ και $c < \min_{|x|=r} V_1(x)$. Για το αντιστοιχούν εσωτερικό της μπάλας $\{x \in B_r | V_1(x) \leq c\}$, ορίζεται το χρονοεξαρτημένο σύνολο $\Omega_{t,c} = \{x \in B_r | W(t, x) \leq c\}$. Τότε, το $\Omega_{t,c}$ περιέχει το σύνολο $\{x \in B_r | V_2(x) \leq c\}$, καθ' ό,τι $V_2(x) \leq c \Rightarrow W(t, x) \leq c$. Επίσης, το $\Omega_{t,c}$ είναι υποσύνολο του $\{x \in B_r | V_1(x) \leq c\}$, καθ' ό,τι $W(t, x) \leq c \Rightarrow V_1(x) \leq c$. Επομένως,

$$\{x \in B_r | V_2(x) \leq c\} \subset \Omega_{t,c} \subset \{x \in B_r | V_1(x) \leq c\} \subset B_r \subset \mathcal{D} \quad (1.38)$$

Επειδή $\dot{W}(t, x) \leq 0$ στο $\mathcal{D} \forall t_0 \geq 0$ και για κάθε $x_0 \in \Omega_{t_0,c}$, η λύση που ξεκινά από το (t_0, x_0) παραμένει στο $\Omega_{t,c} \forall t \geq t_0$. Άρα, κάθε λύση που ξεκινά στο $\{x \in B_r | V_2(x) \leq c\}$ παραμένει στο $\Omega_{t,c}$ και συνεπώς και στο $\{x \in B_r | V_1(x) \leq c\}$, για κάθε μελλοντική στιγμή. Επιπλέον, καθώς $\dot{W} \leq 0$, $W(t, x(t)) \leq W(t_0, x(t_0)), \forall t \geq t_0$.

Από τον Ορισμό 1.14, υπάρχουν συναρτήσεις a_1, a_2 κλάσης \mathcal{K} , ορισμένες στο $[0, r]$

$$a_1(\|x\|) \leq V_1(x) \leq W(t, x) \leq V_2(x) \leq a_2(\|x\|) \quad (1.39)$$

Από τις παραπάνω ανισότητες,

$$\|x(t)\| \leq a_1^{-1}(W(t, x(t))) \leq a_1^{-1}(W(t_0, x(t_0))) \leq a_1^{-1}(a_2(\|x(t_0)\|)) \quad (1.40)$$

Επειδή η $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ είναι και αυτή κλάσης \mathcal{K} από τις ιδιότητες των συναρτήσεων σύγκρισης του Ορισμού 1.12, η ανισότητα $\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|))$, από το Λήμμα 1.6, δείχνει ότι η αρχή είναι ομοιόμορφα ευσταθής. \square

Θεώρημα 1.16 (Ομοιόμορφη Ασυμπτωτική Ευστάθεια). Έστω ότι υπάρχει κλάσης \mathcal{C}^1 συνάρτηση $W(\cdot, \cdot): [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$, ώστε

$$1. \quad V_1(x) \leq W(t, x) \leq V_2(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}, \forall t \quad (1.41)$$

$$2. \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla W \cdot f(t, x) \leq -V_3(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}, \forall t, \quad (1.42)$$

με $V_i, i = 1, 2, 3$ συνεχείς, θετικά ορισμένες συναρτήσεις στο \mathcal{D} . Τότε, το σημείο ισορροπίας παρουσιάζει ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια.

Αν οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται καθολικά ($\mathcal{D} = \mathfrak{R}^n$) και επιπλέον η V_1 είναι ακτινικά μη φραγμένη (βλέπε Σχόλιο² και Ορισμό 1.14: $V_1(x) \rightarrow \infty$ για $\|x\| \rightarrow \infty$), τότε το $x = 0$ είναι **ολικά ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές**.

Απόδειξη. Όπως στο Θεώρημα 1.15, οι τροχιές που εκκινούν από το $\{x \in B_r | V_2(x) \leq c\}$ παραμένουν στο $\{x \in B_r | V_1(x) \leq c\} \forall t \geq t_0$. Από τον Ορισμό 1.14, υπάρχει κλάσης \mathcal{K} συνάρτηση α_3 , ορισμένη στο $[0, r]$, ώστε

$$\dot{W}(t, x) = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} f(t, x) \leq -V_3(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

Από την ανισότητα $W \leq \alpha_2(\|x\|) \Leftrightarrow \alpha_2^{-1}(W) \leq \|x\| \Leftrightarrow \alpha_3(\alpha_2^{-1}(W)) \leq \alpha_3(\|x\|)$

η W ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα

$$\dot{W} \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(W)) \triangleq -\alpha(W) \quad (1.43)$$

Όπου $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$ είναι κλάσης \mathcal{K} (Ορισμός 1.12) οριζόμενη στο $[0, r]$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποτίθεται ότι η α είναι τοπικά Lipschitz [Άλλωστε, και να μην είναι, μπορεί να επιλεγεί μια κλάσης \mathcal{K} τοπικά Lipschitz συνάρτηση β , ώστε $\alpha(r) \geq \beta(r)$ και άρα $\dot{W} \leq -\beta(W)$].

Έστω ότι η συνάρτηση $y(t)$ ικανοποιεί το αυτόνομο σύστημα $\dot{y} = -\alpha(y), y(t_0) = W(t_0, x(t_0)) \geq 0$. Από το Λήμμα 1.1 (Σύγκρισης), $W(t, x(t)) \leq y(t), \forall t \geq t_0$. Από τις ιδιότητες των συναρτήσεων σύγκρισης του Ορισμού 1.12, υπάρχει συνάρτηση $\sigma(r, s)$ κλάσης \mathcal{KL} στο $[0, r] \times [0, \infty)$, για την οποία

$$W(t, x(t)) \leq \sigma(W(t_0, x(t_0)), t - t_0), \forall W(t_0, x(t_0)) \in [0, c]. \quad (1.44)$$

Συνεπώς, κάθε λύση που εκκινεί από το $\{x \in B_r | V_2(x) \leq c\}$ ικανοποιεί για όλους τους χρόνους την ανισότητα

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(W(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(W(t_0, x(t_0)), t - t_0)) \leq \\ &\alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)) \triangleq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Εκ του Ορισμού 1.12, η β είναι κλάσης \mathcal{KL} . Ικανοποιείται, από το Λήμμα 1.6, για τους ορισμούς ευστάθειας, η $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0$, επομένως, η $x = 0$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αν $\mathcal{D} = \mathfrak{R}^n$, οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ορίζονται στο $[0, \infty)$. Έτσι, οι α και β είναι ανεξάρτητες της σταθεράς c . Καθώς, η $V_1(x)$ είναι ακτινικά μη φραγμένη, η c

εκλέγεται οσοδήποτε μεγάλη, ώστε να περιλαμβάνει κάθε αρχική κατάσταση στο $\{V_2(x) \leq c\}$. Εν προκειμένω, η ανισότητα $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ ικανοποιείται για κάθε αρχική κατάσταση και η αρχή είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής. \square

Τέλος, δίνεται με την απόδειξή του το σημαντικό θεώρημα εκθετικής ευστάθειας που χρησιμοποιείται στους παρατηρητές εκθετικής σύγκλισης, όπως θα αναλυθούν στην συνέχεια.

Θεώρημα 1.17 (Εκθετική Ευστάθεια). Έστω ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 1.16 και επιπλέον έστω ότι υπάρχουν θετικές σταθερές K_1, K_2, K_3

$$K_1 \|x\|^p \leq W(t, x) \leq K_2 \|x\|^p \quad (1.46)$$

$$\dot{W}(x) \leq -K_3 \|x\|^p \quad (1.47)$$

τότε, η μηδενική είναι **εκθετικά ευσταθής** λύση. Αν οι συνθήκες ισχύουν καθολικά, έχουμε ολική εκθετική ευστάθεια.

Απόδειξη. Από τις συγκριτικές σχέσεις (1.38) των συνόλων που προέκυψαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.15, παρατηρείται ότι οι τροχιές που εκκινούν στο $\{K_2 \|x\|^p \leq c\}$ για αρκούντως μικρή σταθερά c , παραμένουν φραγμένες για κάθε $t \geq t_0$. Από τις ανισότητες (1.46) και (1.47), η W ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα

$$\dot{W} \leq -\frac{K_3}{K_2} W \quad (1.48)$$

Από το Λήμμα 1.1 (Σύγκρισης),

$$W(t, x(t)) \leq W(t_0, x(t_0)) e^{-(K_3/K_2)(t-t_0)} \quad (1.49)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \left[\frac{W(t, x(t))}{K_1} \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\frac{W(t_0, x(t_0)) e^{-(K_3/K_2)(t-t_0)}}{K_1} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\frac{K_2 \|x(t_0)\|^p e^{-(K_3/K_2)(t-t_0)}}{K_1} \right]^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^{\frac{1}{p}} \|x(t_0)\| e^{-(K_3/K_2)(t-t_0)} \end{aligned}$$

Συνεπώς, η αρχή παρουσιάζει εκθετική ευστάθεια. Αν οι συνθήκες ισχύουν καθολικά, η σταθερά c μπορεί να επιλεγεί οσοδήποτε μεγάλη, οπότε η προηγούμενη ανισότητα ισχύει για κάθε αρχική κατάσταση. \square

Υπάρχουν και αντίστοιχα θεωρήματα αστάθειας, ως συμπληρωματικά της έννοιας της ευστάθειας, αλλά παραλείπονται, καθώς δεν απασχολούν την παρούσα μελέτη.

Στα **γραμμικά χρονομεταβλητά συστήματα** ακολουθείται αντίστοιχη μεθοδολογία. Παρουσιάζονται τα παρακάτω θεωρήματα, χρήσιμα στην ανάλυση Lyapunov που θα γίνει στα επόμενα κεφάλαια για τους παρατηρητές.

Θεώρημα 1.18. Το σημείο ισορροπίας του

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (1.50)$$

με $A(\cdot)$: μήτρα $n \times n$ είναι **εκθετικά ευσταθές** αν και μόνον αν υπάρχουν θετικές σταθερές k_1, k_2 , ώστε

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq k_1 e^{-k_2(t-t_0)} \quad \forall t_0 \geq 0, \forall t \geq t_0,$$

όπου $\Phi(\cdot, \cdot)$ η μήτρα μετάβασης, η οποία δίνει την λύση $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ και η νόρμα $\|\Phi(t, t_0)\| = \max_{\|x\|=1} \|\Phi(t, t_0)x\|$.

Απόδειξη. Εκλέγεται η συνάρτηση $W(t, x) = x^T P(t)x$, όπου $P(t)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη μήτρα, συμμετρική, φραγμένη και θετικά ορισμένη. Υπ' αυτές τις συνθήκες, υπάρχουν σταθερές θετικές k_1, k_2 , ώστε $k_1 x^T x \leq x^T P(t)x \leq k_2 x^T x \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$, επομένως η $W(t, x)$ είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη και φθίνουσα. $\dot{W}(t, x) = \dot{x}^T P(t)x + x^T P(t)\dot{x} + x^T \dot{P}(t)x = x^T A^T P x + x^T P A x + x^T \dot{P}(t)x = x^T [P A + A^T P + \dot{P}(t)]x = -x^T Q(t)x$, όπου η μήτρα $Q(t)$ είναι συμμετρική εκ κατασκευής. Από το Θεώρημα 1.16, το σημείο ισορροπίας είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλαδή υπάρχουν σταθερές k_3, k_4 , για τις οποίες $k_3 x^T x = k_3 \|x\|^2 \leq Q(t) \leq k_4 \|x\|^2 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ και άρα το σημείο ισορροπίας είναι εκθετικά ευσταθές από το Θεώρημα 1.17. \square

Θεώρημα 1.19 (Krasovskii). Το γραμμικό χρονομεταβλητό σύστημα (1.50) έχει εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας το $x = 0$ αν και μόνον αν, για κάθε συμμετρική, θετικά ορισμένη, συνεχή και φραγμένη μήτρα $Q(t)$, υπάρχει μια συμμετρική, θετικά ορισμένη, συνεχώς διαφορίσιμη και φραγμένη μήτρα $P(t)$, η οποία ικανοποιεί την

$$P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \dot{P}(t) = -Q(t) \quad (1.51)$$

Απόδειξη. Έστω

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (1.52)$$

Η μορφή της P καταδεικνύει την συμμετρικότητά της.

Ισχύει:

$$\begin{aligned} x^T P x &= \int_t^\infty x^T \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) x d\tau \\ &= \int_t^\infty \left(\Phi^T(\tau, t) x(t) \right)^T Q(\tau) \left(\Phi(\tau, t) x(t) \right) d\tau = \int_t^\infty x^T(\tau) Q(\tau) x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Καθώς το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, υπάρχουν k_1, k_2 , για τις οποίες: $\|x(t)\| \leq k_1 e^{-k_2(t-t_0)}$

Επομένως,

$$x^T P x = \int_t^\infty k_1 e^{-k_2(t-t_0)} Q(\tau) k_1 e^{-k_2(t-t_0)} d\tau = \int_t^\infty k_1^2 Q(\tau) e^{-2k_2(\tau-t)} d\tau$$

Επειδή $Q(t)$ φραγμένη, υπάρχει $M: \|Q(t)\| \leq M$. Άρα,

$$x^T P x = \int_t^\infty k_1^2 M e^{-2k_2(\tau-t)} d\tau$$

Ισχύει επομένως, $x^T P x \leq \frac{k_1^2 M}{2k_2}$

Αυτό, επίσης, συνεπάγεται ότι $x^T P x \leq A_2 \|x\|^2$

Καθώς η Q είναι θετικά ορισμένη, $\exists \alpha > 0$ τέτοιο ώστε $x^T Q x \geq \alpha x^T x$. Επίσης, η A ως φραγμένη συνεπάγεται $\|A(t)\| \leq N, \forall t \in \mathfrak{R}$. Άρα

$$\begin{aligned} x^T P x &= \int_t^\infty x^T \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) x d\tau = \int_t^\infty x^T(\tau) Q(\tau) x(\tau) d\tau \\ &\geq \int_t^\infty \alpha \frac{\|A(\tau)\|}{N} \|x(\tau)\|^2 d\tau \\ &\geq \int_t^\infty \frac{\alpha}{N} \|x^T(\tau) A(\tau) x(\tau)\| d\tau \geq \left\| \int_t^\infty \frac{\alpha}{N} x^T(\tau) \frac{d}{d\tau} x(\tau) d\tau \right\| \end{aligned}$$

Άρα $x^T P x \geq \frac{\alpha}{N} x^T x$, δηλαδή $A_1 \|x\|^2 \leq x^T P x$ και συνεπώς $A_1 \|x\|^2 \leq x^T P x \leq A_2 \|x\|^2$ από όπου συνεπάγεται ότι η P είναι θετικά ορισμένη και φραγμένη.

Η μήτρα μετάβασης $\Phi(\tau, t)$ ικανοποιεί την $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) = -\Phi(\tau, t) A(t)$. Άρα, από την (1.52),

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\tau, t) d\tau + \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial t} \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau - Q(t) \\ &= - \left[\int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right] A(t) \\ &\quad - A^T(t) \left[\int_t^\infty \Phi^T(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right] \\ &= -P(t) A(t) - A^T(t) P(t) - Q(t). \end{aligned}$$

Επομένως, η συνθήκη είναι αναγκαία και είναι και προφανώς ικανή λόγω ικανοποίησης της συνθήκης Lyapunov $P(t) A(t) + A^T(t) P(t) + \check{Q}(t) = 0$; $\check{Q}(t) = \dot{P}(t) + Q(t) > 0$. \square

1.4 Σύνοψη Κεφαλαίου

Δόθηκαν τα δομικά στοιχεία του δυναμικού συστήματος, των οποίων είναι απαραίτητη η γνώση, αφ' ενός για την μοντελοποίηση, αφ' ετέρου για την ανάλυση των συμπεριφορών του, όσο και απαραίτητη είναι η εκτίμηση κάποιων στοιχείων του (καταστάσεις ή παράμετροι), τα οποία δεν είναι εφικτό να μετρηθούν με πρακτικές μεθόδους. Παρουσιάστηκαν οι συνθήκες ύπαρξης και οι ιδιότητες των λύσεων, για των οποίων την εξεύρεση θα δοθούν στα επόμενα τρόποι εξαγωγής τους από την έξοδο του συστήματος, όταν αυτές δεν είναι διαθέσιμες εξ αρχής. Δόθηκαν βασικά θεωρήματα και ορισμοί, που ήταν απαραίτητα στην ανάλυση, όπως τα λήμματα σύγκρισης και οι συνθήκες Lipschitz, τα οποία αποτελούν κατασκευαστικά εργαλεία για τους παρατηρητές, στον οποίων την σχεδίαση επικεντρώνεται η παρούσα μελέτη. Δόθηκαν, τέλος, τα θεωρήματα ευστάθειας, τα οποία είναι απαραίτητα στοιχεία συμπεριφοράς τόσο για την λύση όσο και για την εκτίμηση (παρατήρηση) των λύσεων, καθώς και οι θεμελιώδεις μέθοδοι Lyapunov, που αποτελούν κατασκευαστικά εργαλεία για την σχεδίαση των παρατηρητών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παρατηρησιμότητα και Παρατηρητές

2.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Στην εισαγωγική ανάλυση του δυναμικού συστήματος του προηγούμενου κεφαλαίου, προϋποτίθεται ότι υπάρχει το διάνυσμα κατάστασης x διαθέσιμο. Λόγω της αδυναμίας ύπαρξης αισθητήρων και μετρητικών οργάνων για κάθε επιμέρους κατάσταση (λόγοι κόστους, τεχνικοί περιορισμοί), όμως, σπάνια είναι διαθέσιμο ολόκληρο το διάνυσμα κατάστασης. Η διαθέσιμη μετρήσιμη έξοδος του συστήματος αρκεί από μόνη της να παράσχει **ανακατασκευή κατάστασης** (*state reconstruction*). Βάσει κάποιων **κριτηρίων παρατηρησιμότητας** (*observability conditions*), τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια, είναι δυνατόν να ανακτηθεί μια εκτίμηση \hat{x} της πραγματικής κατάστασης με χρήση ενός νέου δυναμικού συστήματος, του **παρατηρητή** ή **εκτιμητή** (*observer* ή *estimator*), που κατ' ουσίαν αποτελεί έναν αλγόριθμο εκτίμησης των τιμών των μεταβλητών κατάστασης.

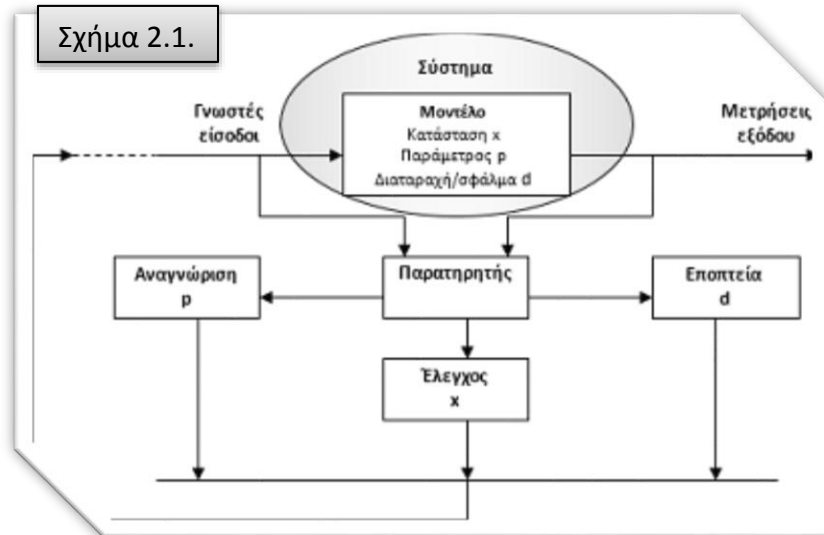
Το πρόβλημα της σχεδίασης παρατηρητή ανακύπτει στην απαίτηση ενδογενούς πληροφορίας από εξωγενή, άμεσα διαθέσιμη, πληροφορία, όχι μόνο για την εκτίμηση της **κατάστασης**, που είναι τα χρονομεταβλητά σήματα του συστήματος, αλλά και για τα σταθερά σήματα (**παράμετροι**) και εξωτερικά μη μετρήσιμα σήματα (**διαταραχές**). Η ενδογενής πληροφορία που ανακτάται με χρήση των παρατηρητών, είναι χρήσιμη σε συστημικές λειτουργίες, όπως: μοντελοποίηση - modeling (**ταυτοποίηση παραμέτρου - identification**), εποπτεία - monitoring (**διάγνωση λαθών-σφαλμάτων - fault detection**), όπως στην περίπτωση των συστατικών τροφοδοσίας ενός αντιδραστήρα ή τις δυνάμεις περιβάλλοντος σε ένα πλοίο, οδήγηση (**έλεγχος**) του συστήματος (π.χ. γραμμικοποίηση ανατροφοδότησης, LQ βέλτιστος έλεγχος, προβλεπτικός έλεγχος βασισμένος σε μοντέλο, διαμερισματικά μοντέλα [multicompartment models]). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1, αυτές οι λειτουργίες συνεπενεργούν στην λειτουργία του συνολικού συστήματος, αποκτώντας σημαντικό ρόλο στο κεντρικό ζήτημα ελέγχου. Στο Παράδειγμα 1.1 του προηγούμενου κεφαλαίου, το ανάστροφο εκκρεμές αποτελεί σύστημα, το οποίο μπορεί να οδηγηθεί (π.χ. σταθεροποίηση) με εφαρμογή ελέγχου (DC κινητήρας) και αυτό οδηγεί στην αναγκαιότητα εκτίμησης κάποιων καταστάσεων του μοντέλου, με χρήση παρατηρητή, οι οποίες δεν είναι πρακτικά εφικτό να μετρηθούν, παραδείγματος χάριν η γωνιακή ταχύτητα, οι δυνάμεις, η ροπή φορτίου του κινητήρα κ.λ.π. Στο νευρωνικό μοντέλο του Παραδείγματος 1.2, γεννάται η ανάγκη ταυτοποίησης (identification) της συνάρτησης $g(\cdot)$, με προσέγγιση στηριζόμενη σε παρατηρητή.

Σε γενικές γραμμές, ο παρατηρητής στηρίζεται σε ένα μοντέλο, με on-line προσαρμογή και βασίζεται σε διαθέσιμες μετρήσεις με σκοπό την ανακατασκευή της πληροφορίας και επομένως κατά περίπτωση χαρακτηρίζεται ως **βασισμένος σε μοντέλο, βασισμένος σε μετρήσεις, κλειστού βρόχου και ανακατασκευής πληροφορίας**.

Συνήθως το μοντέλο είναι το ίδιο το μοντέλο κατάστασης και υποτίθεται ότι όλα τα μέρη της πληροφορίας προς ανακατασκευή παρέχονται από τις μεταβλητές κατάστασης. Το δυναμικό μοντέλο μπορεί να είναι συνεχούς ή διακριτού χρόνου, ντετερμινιστικό ή στοχαστικό, πεπερασμένων διαστάσεων ή μη πεπερασμένων, ομαλό ή με ιδιομορφίες.

Στην παρούσα μελέτη, οι παρατηρητές που θα μελετηθούν αφορούν σε συστήματα ντετερμινιστικά, περιγραφής συνεχούς χρόνου στον χώρο κατάστασης και πεπερασμένων διαστάσεων.

Στα επόμενα θα παρουσιαστούν βασικά κριτήρια



παρατηρησιμότητας και η συνήθης τεχνική σχεδίασης παρατηρητή για *γραμμικά* συστήματα. Θα ακολουθήσει η περίπτωση των *μη γραμμικών* συστημάτων, για τα οποία δεν υπάρχουν καθολικές τεχνικές σχεδίασης παρατηρητή, αλλά θα δοθούν οι πιο διαδεδομένες τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα, π.χ. των υψηλέρων παρατηρητών (high-gain observers) σαν υπόβαθρο της νέας τεχνικής σχεδίασης του μη γραμμικού παρατηρητή αυξανόμενου κέρδους που θα περιγραφεί στο Κεφάλαιο 3. Θα αναλυθούν επίσης τα ζητήματα *ευστάθειας του σφάλματος παρατήρησης*, με κύρια βάση τις τεχνικές Lyapunov του προηγούμενου κεφαλαίου, ως θεμελιώδους απαίτησης κατά την σχεδίαση των παρατηρητών.

2.2 Παρατηρητές Γραμμικών Συστημάτων

2.2.1 Κριτήρια παρατηρησιμότητας

Εξετάζεται το γραμμικό πολυμεταβλητό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα, που αναπαριστάται στο πεδίο χρόνου από το μοντέλο κατάστασης

$$\text{LTI}(A, B, C, D): \dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du \quad (2.1)$$

όπου x το n – διάστατο διάνυσμα κατάστασης, u το p – διάστατο διάνυσμα εισόδων και y το m – διάστατο διάνυσμα εξόδων και οι μήτρες $A: n \times n, B: n \times p, C: m \times n, D: m \times p$.

Η παρατηρησιμότητα αφορά στην δυνατότητα ανακατασκευής των αρχικών καταστάσεων (μετρούμενων) και άρα ανακατασκευασιμότητας (state reconstructability) των τροχιών της κατάστασης.

Ορισμός 2.1. Έστω το μοντέλο κατάστασης της (2.1) $\text{LTI}(A, B, C, D)$ και $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ο χώρος κατάστασής του. Το σύστημα καλείται **παρατηρήσιμο** αν για κάθε άγνωστη αρχική κατάσταση $x(0) \in \mathcal{D}$, υπάρχει σταθερά πεπερασμένου χρόνου $T > 0$, τέτοια ώστε για αρχική κατάσταση $x(0)$, η γνώση της εισόδου $u(t)$ και της εξόδου $y(t)$, ορισμένων στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ αρκεί για να καθορίσει μοναδικά την κατάσταση $x(0)$. Αλλιώς, το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο.

Ακολουθούν επιγραμματικά οι συνθήκες παρατηρησιμότητας, για το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα.

Θεώρημα 2.1. Το σύστημα της (2.1) $\text{LTI}(A, B, C, D)$ είναι παρατηρήσιμο αν ικανοποιείται μια από τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες:

- (i) Όλες οι στήλες του Ce^{At} είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- (ii) Όλες οι στήλες του $C(sI - A)^{-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για $s \in \mathbb{C}$.
- (iii) Αν η μήτρα A έχει διακριτές ιδιοτιμές¹⁰, τότε για κάθε ιδιοτιμή λ , $Cu \neq 0$, όπου u το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.
- (iv) Η μήτρα Grammian παρατηρησιμότητας

$$W_0(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

είναι αντιστρέψιμη για κάθε $t > 0$.

- (v) Η $nq \times n$ μήτρα παρατηρησιμότητας

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

έχει βαθμό n (δηλαδή $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$).

- (vi) Η μήτρα $(n + q) \times n$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

¹⁰ Η **ιδιοτιμή** λ της μήτρας A προκύπτει από την λύση της εξίσωσης $\det(\lambda I - A) = 0$. **Ιδιοδιάνυσμα** u για την αντίστοιχη ιδιοτιμή, προκύπτει ως λύση της $(\lambda I - A)u = 0$.

είναι πλήρους βαθμού για κάθε ιδιοτιμή λ της A .

(vii) Αν επιπλέον όλες οι ιδιοτιμές της A έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, η μοναδική λύση της $A^T W_0 + W_0 A = -C^T C$ είναι θετικά ορισμένη και εκφράζεται με την Grammian

$$W_0 = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

Αποδεικνύονται κάποιες από τις παραπάνω βασικές συνθήκες παρατηρησιμότητας για το $LTI(A, B, C, D)$, $A: n \times n$, $B: n \times 1$, $C: 1 \times n$, $D = 0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η εξίσωση κατάστασης έχει λύση που δίνεται από τον τύπο

$$x(t_1) = e^{A t_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = C^{-1} y(t_1).$$

Για σταθερό $u = u^*$, η παραπάνω εξίσωση της $y(t_1) = C x(t_1)$ ορίζει έναν γραμμικό μετασχηματισμό $L: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ που απεικονίζει το x_0 στο y : $y(t) = (L_{x_0})(t)$. Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο αν και μόνον αν η απεικόνιση L_{x_0} είναι ένα-πρός-ένα, έτσι ώστε η αντίστροφη απεικόνιση να καθορίζει μονοσήμαντα το $x_0 = L^{-1} y$.

Άρα, $LTI(A, B, C, D)$ παρατηρήσιμο αν $L_{x_1} = L_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.

Για δύο αρχικές συνθήκες, οι έξοδοι

$$y(t_1) = (L_{x_1})(t) = C e^{A t_1} x_0 + C \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)} B u^*(\tau) d\tau$$

$$y(t_2) = (L_{x_2})(t) = C e^{A t_2} x_0 + C \int_0^{t_2} e^{A(t-\tau)} B u^*(\tau) d\tau$$

και $y_1 - y_2 = L_{x_1} - L_{x_2} = C e^{A t_1} (x_1 - x_2)$. Επειδή $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, έπεται ότι $C e^{A t} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\mathcal{N}(C e^{A t}) = 0^{11}$.

Επειδή, παραπάνω είναι προφανές ότι η παρατηρησιμότητα είναι ανεξάρτητη του u και του B , υποθέτω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $u = 0$. Εδώ

$$y(t) = C e^{A t} x_0 = C \left(I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots \right) x_0.$$

Οι $n - 1$ δυνάμεις του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα

$$y \equiv 0 \Leftrightarrow C x_0 = C A x_0 = C A^2 x_0 = \dots = C A^{n-1} x_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \mathcal{O} x_0 = 0 \quad \text{και}$$

$\mathcal{O} x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ισχύει αν και μόνον αν $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.

Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν για την περίπτωση του γραμμικού χρονομεταβλητού

$$LTV(A, B, C, D): \dot{x} = A(t)x + B(t)u, y = C(t)x \quad (2.2)$$

¹¹ Μηδενικός Χώρος (Null Space) της $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ είναι ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{X}: Ax = 0\}$

Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο στο t_0 αν υπάρχει πεπερασμένο t_1 , τέτοιο ώστε για κάθε αρχική κατάσταση $x(t_0) = x_0$, η γνώση της εισόδου και της εξόδου στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$ επαρκεί για τον μονοσήμαντο καθορισμό της αρχικής κατάστασης.

Θεώρημα 2.2. Το ζεύγος $(A(t), C(t))$ του LTV (2.2) είναι παρατηρήσιμο στο t_0 αν και μόνον αν υπάρχει πεπερασμένο $t_1 > t_0$, ώστε η $n \times n$ μήτρα Gramian

$$W_0(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

να είναι αντιστρέψιμη, όπου Φ η μήτρα μετάβασης που ορίζεται ως η μοναδική λύση της $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$, με αρχική συνθήκη $\Phi(t_0, t_0) = I$.

Ισοδύναμα, αν οι $A(t), C(t)$ είναι διαφορίσιμες $(n-1)$ φορές, τότε το ζεύγος $(A(t), C(t))$ είναι παρατηρήσιμο αν υπάρχει πεπερασμένο $t_1 > t_0$, τέτοιο ώστε

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n \text{ με } N_{m+1}(t) = N_m(t)A(t) + \frac{d}{dt} N_m(t), m = 0, 1, \dots, n-1 \text{ με } N_0 = C(t).$$

2.2.2 Παρατηρήσιμη Κανονική Μορφή

Δίνεται και η λεγόμενη παρατηρήσιμη μορφή για τα γραμμικά συστήματα, ώστε να γενικευθεί παρακάτω για τα μη γραμμικά συστήματα. Έστω το LTI (A, B, C, D) με $A: n \times n, B: n \times 1, C: 1 \times n, D = 0$ και έστω η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς

$$\hat{H}(s) = y(s)/u(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Υποθέτοντας ότι το ζεύγος (A, C) συνιστά ένα παρατηρήσιμο ζεύγος, υπάρχει αντιστρέψιμος μετασχηματισμός $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ώστε με τον μετασχηματισμό ομοιότητας $\check{x} = Tx$ στις νέες συντεταγμένες \check{x} , το μοντέλο κατάστασης της (2.1) λαμβάνει την κανονική παρατηρήσιμη μορφή.

$$\dot{\check{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \\ \vdots \\ \check{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad \dots \quad 1] \check{x}$$

2.2.3 Παρατηρητής Luenberger

Η θεωρία των παρατηρητών εισήχθη στις εργασίες του David Luenberger (1964, 1966 και 1971), οπότε ο παρατηρητής του γραμμικού συστήματος ονομάζεται παρατηρητής Luenberger. Σύμφωνα με αυτόν, οποιοδήποτε σύστημα που οδηγείται από την έξοδο του δοθέντος συστήματος, λειτουργεί ως παρατηρητής αυτού. Χρησιμοποιούνται δύο τεχνικές σχεδίασης, του **παρατηρητή πλήρους τάξης**, όπου ο παρατηρητής έχει την ίδια διάσταση με το παρατηρούμενο σύστημα και ο **παρατηρητής μειωμένης τάξης**, όπου ο παρατηρητής, χρησιμοποιώντας την γνώση ορισμένων μεταβλητών κατάστασης, εκτιμά τις μεταβλητές εκείνες που δεν

είναι ανακτήσιμες από τις μετρήσεις στο σύστημα. Ο παρατηρητής Luenberger συνήθως υλοποιείται on-line ως δυναμικό σύστημα οδηγούμενο από την ίδια είσοδο με το πρωτότυπο σύστημα και τις μετρήσεις που έρχονται από το πρωτότυπο σύστημα $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$.

Όλες οι δομές παρατηρητών εν γένει, γραμμικών και μη γραμμικών, όπως θα φανεί και στα επόμενα, αποτελούν δυναμικά συστήματα που περιέχουν ένα αντίγραφο του πρωτότυπου και έναν διορθωτικό όρο (π.χ. μια διαφορά μεταξύ της τρέχουσας εξόδου και της εξόδου που εκτιμάται («προβλέπεται») από τον ίδιο τον παρατηρητή.

Έστω η γραμμική δομή παρατηρητή

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (2.3)$$

όπου $L \in \mathbb{R}^{n-1}$ είναι το **κέρδος του παρατηρητή**.

Το **σφάλμα του παρατηρητή** είναι

$\tilde{x} \triangleq x - \hat{x}$ για το οποίο ισχύει

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (Ax + Bu) - (A\hat{x} + Bu + Ly - LC\hat{x}) = (A - LC)(x - \hat{x}) \Rightarrow \dot{\tilde{x}} \\ &= (A - LC)\tilde{x}. \end{aligned}$$

Το σφάλμα εκτίμησης τείνει εκθετικά στο μηδέν, δηλαδή η δυναμική σφάλματος παρατήρησης παρουσιάζει **ασυμπτωτική (εκθετική) ευστάθεια**, όταν οι ιδιοτιμές της $(A - LC)$ τίθενται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου και τούτο επιτυγχάνεται με κατάλληλη επιλογή του κέρδους παρατηρητή L . Επομένως, η συνθήκη παρατηρησιμότητας, αρκεί για την επιλογή κατάλληλου κέρδους, ώστε να καθορισθεί ο ρυθμός σύγκλισης του σφάλματος εκτίμησης, δηλαδή του ρυθμού με τον οποίο η εκτιμώμενη κατάσταση προσεγγίζει την πραγματική. Σχεδιαστικά, επειδή οι πολύ ταχέως συγκλίνοντες παρατηρητές (πολύ μικρού πραγματικού μέρους ιδιοτιμές) παράγουν θόρυβο στο σύστημα, προτιμάται η σχεδιαστική αρχή $|Re\{\lambda_{\min}\}_{\text{παρατηρητή}} > 10|Re\{\lambda_{\max}\}_{\text{συστήματος}}$. Όπως γίνεται αντιληπτό, η απαίτηση εκθετικής ευστάθειας, η οποία συνήθως επιτυγχάνεται με εργαλεία ανάλυσης Lyapunov, είναι βασική σχεδιαστική απαίτηση των παρατηρητών.

Ο γραμμικός παρατηρητής είναι απαραίτητος στην εφαρμογή **ελέγχου με ανατροφοδότηση κατάστασης**, όπου η κατάσταση δεν είναι γνωστή στην έξοδο. Με βάση την **αρχή διαχωρισμού**, η παρατήρηση \hat{x} διοχετεύεται στον έλεγχο $u = K\hat{x}$, όπου η σχεδίαση του ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης και του παρατηρητή μπορεί να γίνει ανεξάρτητα χωρίς οι ιδιοτιμές του παρατηρητή να επηρεάζονται από την ανατροφοδότηση και αντιστρόφως. Οι ιδιοτιμές της μήτρας \bar{A} είναι η ένωση των ιδιοτιμών της $(A + BK)$ και $(A - LC)$, όπου $\bar{A} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$ η μήτρα του συστήματος $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}$, με $\bar{x} = [x \quad \tilde{x}]$.

2.2.4 Παρατηρητής Kalman

Σε αυτήν την περίπτωση ακολουθείται η λογική του Φίλτρου Kalman για το γραμμικό σύστημα (2.2) LTV(A, B, C, D): $\dot{x} = A(t)x + B(t)u, y = C(t)x$.

Θεώρημα 2.3. Αν το σύστημα της (2.2) είναι παρατηρήσιμο, τότε υπάρχει παρατηρητής της μορφής:

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - K(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t))$$

με το κέρδος $K(t)$ να δίνεται από την:

$$K(t) = M(t)C^T(t)W^{-1}$$

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t) + M(t)A^T(t) - M(t)C^T(t)W^{-1}C(t)M(t) + V + \delta M(t)$$

$$M(0) = M_0 = M_0^T > 0, W = W^T > 0$$

με επιλεγόμενα είτε $\delta > 2\|A(t)\| \forall t$ είτε $V = V^T > 0$.

Ο ρυθμός της σύγκλισης ρυθμίζεται από τις σταθερές δ ή V . Για $\delta = 0$, έχουμε τον κλασικό παρατηρητή Kalman και ο παρατηρητής είναι βέλτιστος, με την έννοια ότι ελαχιστοποιείται το κριτήριο:

$$\int_0^t \left[(C(\tau)z(\tau) - y(\tau))^T W^{-1} (C(\tau)z(\tau) - y(\tau)) + v^T(\tau) V^{-1} v(\tau) \right] dt \\ + (z_0 - \hat{x}_0)^T M_0^{-1} (z_0 - \hat{x}_0)$$

ως προς z για το

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + v(t), y(t) = C(t)z(t).$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3 δεν απασχολεί την παρούσα μελέτη, καθώς τα εργαλεία του μοντέλου του μη γραμμικού παρατηρητή αυξανόμενου κέρδους που θα καθορισθεί προσομοιάζουν αποκλειστικά στα εργαλεία του παρατηρητή Luenberger, ωστόσο η απόδειξη για τον Kalman παρατηρητή χρησιμοποιεί εργαλεία Lyapunov. Συνοψίζεται, δείχνοντας αρχικά ότι $\exists a_1, a_2, t_0$, ώστε για κάθε $t \geq t_0$: $0 < a_1 I \leq M^{-1}(t) \leq a_2 I$ από την συνθήκη παρατηρησιμότητας και ότι η αντιστοιχούσα στο σφάλμα $e = \hat{x} - x$ τετραγωνική συνάρτηση Lyapunov $V(t, e) = e^T(t)M^{-1}(t)e(t)$ φθίνει με ρυθμό που ρυθμίζεται από τις σταθερές δ ή την ελάχιστη ιδιοτιμή $\lambda_{\min}(V)$.

2.3 Παρατηρητές Μη Γραμμικών Συστημάτων

2.3.1 Γενικό Πρόβλημα Παρατηρητή

Το υπό μελέτη σύστημα περιγράφεται από το μοντέλο κατάστασης.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Θεωρείται ότι στο (2.4) οι συναρτήσεις εισόδου $u(\cdot)$, όπως περιγράφηκαν στην §1.1.2 είναι τοπικά φραγμένες και μετρήσιμες στο σύνολο \mathcal{U} και οι συναρτήσεις f και h είναι κλάσης C^∞ (απειρώτως συνεχώς διαφορίσιμες) ως προς τα ορίσματά τους. Η λύση του (2.4) στον χρόνο t για είσοδο ελέγχου u στο $[t_0, t]$ συμβολίζεται $\chi_u(t, x_0) \triangleq \varphi(t; t_0, x_0, u(\cdot))$, με $x_0 = x(t_0)$ και $\varphi(t_0; t_0, x_0, u(\cdot)) = \chi_u(t_0, x_0) = x_0$ όπως στον Ορισμό 1.3.

Δοθέντος του μοντέλου της (2.4), το πρόβλημα του παρατηρητή αφορά στην εξεύρεση εκτίμησης $\hat{x}(t)$ για την $x(t)$ βάσει γνώσης των $u(\tau)$, $y(\tau)$ στο $0 \leq \tau \leq t$. Προφανώς, το πρόβλημα παρουσιάζεται όταν δεν μπορεί να γίνει η αντιστροφή της συνάρτησης h ως προς την x ανά πάσα στιγμή.

Μια λύση είναι η **βελτιστοποίηση**, όπως στον Kalman παρατηρητή της §2.2.4, δηλαδή να βρεθεί μια βέλτιστη εκτίμηση $\hat{x}(0)$ της $x(0)$ που περιγράφει την εξέλιξη της $y(\tau)$ στο $[0, t]$ και από αυτό να ανακτηθεί μια εκτίμηση $\hat{x}(t)$ ολοκληρώνοντας από το $\hat{x}(0)$ την (2.4) και υπό την $u(\tau)$. Για την αποφυγή των διαταραχών, μπορεί να βελτιστοποιηθεί η εκτίμηση της αρχικής κατάστασης σε ένα κινητό ορίζοντα (moving horizon), δηλαδή να ελαχιστοποιηθεί ως προς z_{t-T} και $t > T$ κάποιο κριτήριο της μορφής

$$\int_{t-T}^t \|h(\chi_u(\tau, z_{t-T})) - y(\tau)\|^2 d\tau$$

με $y(\tau)$ την μετρούμενη έξοδο επί του $[t-T, t]$ υπό την θεωρούμενη είσοδο u . Αυτή αποτελεί μια γενική διατύπωση της λύσης, που στηρίζεται σε διαθέσιμα εργαλεία βελτιστοποίησης της συστηματικής διατύπωσης, αλλά αντιμετωπίζει μειονεκτήματα υπολογιστικού φόρτου, τοπικών ελαχίστων κ.λπ. στην μη γραμμική βελτιστοποίηση.

Σαν εναλλακτική, χρησιμοποιείται η ιδέα της ανατροφοδότησης, όπως στα προβλήματα ελέγχου. Δηλαδή, με γνωστή αρχική $x(0)$, μπορεί να γίνει ολοκλήρωση της (2.4) με αρχικό όριο $x(0)$ και έτσι να γίνει μια εκτίμηση για την $x(t)$, όμως με $x(0)$ άγνωστη, μπορεί να γίνει on-line διόρθωση στην ολοκλήρωση για $\hat{x}(t)$ που προκύπτει από την (2.4), με κάποια αρχική, εσφαλμένη έστω, εκτίμηση $\hat{x}(0)$, κάνοντας χρήση του σφάλματος μέτρησης $h(\hat{x}(t)) - y(t)$. Επομένως, η εκτίμηση $\hat{x}(t)$, μπορεί να προκύψει από την λύση ενός συστήματος της μορφής:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + L(t, h(\hat{x}(t)) - y(t)), \text{ με } L(t, 0) = 0 \quad (2.5)$$

Αυτό το δευτερεύον σύστημα αποτελεί την συνηθέστερη δομή του μη γραμμικού παρατηρητή.

Ορισμός 2.2 (Παρατηρητής). Δοθέντος του συστήματος (2.4), ο παρατηρητής δίνεται από ένα δευτερεύον σύστημα της γενικής μορφής:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t), u(t), y(t), t) \\ \hat{x}(t) = H(X(t), u(t), y(t), t) \end{cases} \quad (2.6)$$

τέτοιο ώστε

- (i) $\hat{x}(0) = x(0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0;$
- (ii) $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty;$

Αν η (ii) ισχύει για κάθε $x(0)$, $\hat{x}(0)$ (ολική ευστάθεια) ο παρατηρητής είναι **καθολικός**.

Αν στην (ii) η σύγκλιση είναι εκθετική, ο παρατηρητής είναι **εκθετικός**.

Αν στην (ii) υπάρχει δυνατότητα ρύθμισης του ρυθμού σύγκλισης, ο παρατηρητής είναι **ρυθμιζόμενος (tunable)**.

2.3.2 Παρατηρησιμότητα Μη Γραμμικών Συστημάτων

Ανάλογα με την λογική των γραμμικών συστημάτων, πρέπει να δοθούν συνθήκες παρατηρησιμότητας για τα μη γραμμικά. Η κατασκευή του παρατηρητή στηρίζεται στην γνώση μόνο των $u(\tau)$, $y(\tau)$ και πιθανώς ενός αριθμού των χρονικών παραγώγων $y^{(k)}(\tau)$, $u^{(l)}(\tau)$ $k, l \geq 0$ μέχρι τον χρόνο t , ώστε να ανακατασκευασθεί η $x(t)$, με βάση τον ορισμό της παρατηρησιμότητας. Όμως, εάν η y δεν φέρει όλη την πληροφορία του διανύσματος κατάστασης, πάλι μπορούν να ικανοποιηθούν οι συνθήκες του Ορισμού 2.2, όπως στην περίπτωση του Παραδείγματος 2.1.

Στα επόμενα θεωρήματα αλλά και στις αποδείξεις χρησιμοποιούνται κάποιοι συμβολισμοί, οι οποίοι θα επεξηγούνται μεν αναλυτικότερα στα Σχόλια, συνοψίζονται δε ακόλουθα:

- Διαφορικό της h : $dh = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right)$
- Παράγωγος Lie: $\mathcal{L}_f h = \langle dh, f \rangle = \frac{\partial h}{\partial x} f$ και επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της παραγώγου Lie: $\mathcal{L}_f^i h =: \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^{i-1} h)$.
- Αγκύλες Lie μεταξύ δύο διανυσματικών πεδίων:

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

με $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ τις μήτρες Jacobian για τις απεικονίσεις g, f . Επαναλαμβανόμενη διαδικασία αγκυλών διανυσματικού πεδίου g με το πεδίο f , δίνει:

$$ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g]; \quad ad_f^0 g = g.$$

- Παράγωγος Lie διαφορικού:

$$\mathcal{L}_f dh = \left(\frac{\partial dh^T}{\partial x} f \right)^T + dh \frac{\partial f}{\partial x}$$

Οπότε $d\mathcal{L}_f h = \mathcal{L}_f dh$ και $\mathcal{L}_{[f,g]} h = \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f - \mathcal{L}_f \mathcal{L}_g h$.

Παράδειγμα 2.1. $\dot{x} = -2x + u, y = 0$. Αν και δεν λαμβάνεται πληροφορία για την κατάσταση από την έξοδο, το σύστημα $\dot{\hat{x}} = -2\hat{x} + u$ ικανοποιεί της (i), (ii) και δίνει μια εκτίμηση της κατάστασης, καθ' ό,τι το σφάλμα συγκλίνει εκθετικά: $\hat{x} - x = -2(\hat{x} - x)$. Αυτή η ιδιότητα είναι η **ανιχνευσιμότητα (detectability)**. Σε αυτήν την περίπτωση όμως δεν μπορεί να γίνει ρύθμιση (tuning) του ρυθμού σύγκλισης.

Παράδειγμα 2.2. Στο σύστημα $\dot{x} = 0, y = x^2$ δεν είναι δυνατόν να γίνει διάκριση μεταξύ θετικών και αρνητικών τιμών της κατάστασης, μόνο με γνώση της εξόδου, λόγω της τετραγωνικής μη γραμμικότητας. Το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο σε

μια περιοχή της αρχής (μηδέν). Αν υπάρχει όμως επιπλέον πληροφορία ότι η x ανήκει σε μια ανοικτή περιοχή κάποιου σημείου x_0 , που δεν περιέχει το μηδέν, τότε η τιμή της εξάγεται από την έξοδο από τον τύπο $x = \text{sgn}(x_0)\sqrt{y}$, όπου $\text{sgn}(\cdot)$ η συνάρτηση προσήμου. Άρα το σύστημα είναι **τοπικά παρατηρήσιμο** γύρω από οποιοδήποτε σημείο εξαιρουμένου του μηδέν.

Παράδειγμα 2.3. Έστω $\kappa \geq 1, \kappa \in \mathbb{Z}$ και το σύστημα $\dot{x} = x^{2\kappa}, y = x^2$. Όπως στο Παράδειγμα 2.2, η γνώση της y στον χρόνο t δεν επαρκεί για την άντληση της x στον t . Παρ'όλ'αυτά, $\dot{y} = 2x^{2\kappa+1}$ και επομένως

$$x = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ \frac{\dot{y}}{2y^\kappa}, & y \neq 0 \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα του παραδείγματος είναι παρατηρήσιμο διότι η γνώση των \dot{y} και y είναι επαρκής για να καθορίσει την κατάσταση.

Εισάγονται οι γεωμετρικές συνθήκες της παρατηρησιμότητας. Αρχικά, ορίζονται οι **α -διακρίσιμες καταστάσεις (indistinguishable)**, καθώς στο πλαίσιο της παρατηρησιμότητας, η μέτρηση εξόδου πρέπει να δίνει την δυνατότητα να διακρίνονται οι διάφορες αρχικές καταστάσεις, δηλαδή να τις καθιστά διακρίσιμες ή αλλιώς να μην επιδέχεται α -διακρίσιμες καταστάσεις.

Ορισμός 2.3 (Α-διακρισιμότητα ή Indistinguishability). Το ζεύγος $(x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ είναι α -διακρίσιμο για το σύστημα (2.4) αν:

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0; h(\chi_u(t, x_0)) = h(\chi_u(t, x'_0)) \quad (2.7)$$

Ορισμός 2.4 Παρατηρησιμότητα. Ένα σύστημα της μορφής (2.4) είναι παρατηρήσιμο [αντίστ. στο x_0] αν δεν επιδέχεται κανένα α -διακρίσιμο ζεύγος [αντίστ. καμμία α -διακρίσιμη κατάσταση από την x_0].

Το Παράδειγμα 2.2 επιτάσσει την χαλάρωση των συνθηκών παρατηρησιμότητας.

Ορισμός 2.5. Το σύστημα (2.4) είναι **ασθενώς παρατηρήσιμο** αν υπάρχει μια περιοχή U για οποιαδήποτε κατάσταση x , στην οποία να μην υπάρχει καμμία α -διακρίσιμη κατάσταση από την x .

Ένας ακόμη ορισμός μεγαλύτερης τοπικότητας ακολουθεί.

Ορισμός 2.6. Το σύστημα (2.4) είναι **τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο** αν υπάρχει μια περιοχή U για οποιαδήποτε κατάσταση x , ώστε για κάθε περιοχή V της x που περιέχεται στην U , να μην υπάρχει καμμία α -διακρίσιμη από την x κατάσταση στην περιοχή V , όταν θεωρούμε χρονικά πλαίσια, μέσα στα οποία όλες οι τροχιές παραμένουν στην περιοχή V .

Αδρομερώς, ο παραπάνω ορισμός σημαίνει ότι γίνεται να διακρίνουμε κάθε κατάσταση από τις γειτονικές της, χωρίς να απαιτείται να απομακρυνθούμε από αυτές. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να εισαγάγει την συνθήκη παρατηρησιμότητας με τον βαθμό της μήτρας και τον παρατηρήσιμο χώρο.

Ορισμός 2.7 Παρατηρήσιμος Χώρος. Ο παρατηρήσιμος χώρος για το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.8)$$

ορίζεται ως ο ελάχιστος διανυσματικός χώρος, συμβολιζόμενος με $\mathcal{O}(h)$ των συναρτήσεων C^∞ που περιέχουν τα στοιχεία του διανύσματος h που είναι κλειστός ως προς την κατευθυντική παραγωγή Lie κατά μήκος του

διανυσματικού πεδίου $f_u := f(\cdot, u)$ για κάθε σταθερή $u \in \mathbb{R}^m$, όπου η παράγωγος Lie ορίστηκε στο Σχόλιο⁶. Δηλαδή, $\forall \varphi \in \mathcal{O}(h), \mathcal{L}_{f_u} \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, u) \in \mathcal{O}(h)$.

Έστωσαν $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ οι χώροι που ορίζονται ως $\mathcal{D} = \text{span}_{\mathcal{X}}\{dx\}, \mathcal{U} = \text{span}_{\mathcal{X}}\{du^{(j)}, j \geq 0\}, \mathcal{Y} = \text{span}_{\mathcal{X}}\{dy^{(j)}, 0 \leq j \leq i\}$. Η αλυσίδα υπόχωρων $0 \subset \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \dots \subset \mathcal{O}_k \subset \dots \subset \mathcal{O}_\infty$ με $\mathcal{O}_k := \mathcal{D} \cap (\mathcal{Y}^k + \mathcal{U})$ καλείται **φιλτραρίσμα παρατηρησιμότητας**. Για την περίπτωση των γραμμικών της §2.2.1, $\mathcal{O}_k = \text{span}_{\mathcal{X}}\{CA^k dx, CA^{k-1} dx, \dots, CA dx, C dx\}$. Το όριο του φιλτραρίσματος παρατηρησιμότητας είναι $\mathcal{O}_\infty := \mathcal{D} \cap (\mathcal{Y} + \mathcal{U})$. Ο υπόχωρος $\mathcal{O}_\infty \subseteq \mathcal{E}$ είναι ο παρατηρήσιμος χώρος¹².

Ορισμός 2.8 (Rank Συνθήκη Παρατηρησιμότητας). Το σύστημα (2.4) ικανοποιεί την rank συνθήκη παρατηρησιμότητας αν

$$\forall x; \dim d\mathcal{O}(h)|_x = n \quad (2.9)$$

όπου $d\mathcal{O}(h)|_x$ είναι το σύνολο των διαφορικών $d\varphi(x)$ με $\varphi \in \mathcal{O}(h)$.

Θεώρημα 2.4. Ένα σύστημα της μορφής (2.4) που ικανοποιεί την rank συνθήκη παρατηρησιμότητας στο x_0 είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο στο x_0 . Αντιστρόφως, αν ένα σύστημα μορφής (2.4) είναι τοπικά ασθενώς παρατηρήσιμο, ικανοποιεί την rank συνθήκη παρατηρησιμότητας σε ένα ανοικτό πυκνό υποσύνολο του \mathcal{D} ¹³.

Η απόδειξη στηρίζεται στο ότι η συνθήκη rank παρατηρησιμότητας στο x_0 συνεπάγεται την ύπαρξη n στοιχείων του παρατηρήσιμου χώρου που ορίζουν έναν διαφομορφισμό¹⁴ (diffeomorphism) περί το x_0 . Επίσης, για κάθε α -διακρίσιμο ζεύγος (x_0, x'_0) και κάθε συναρτησιακό στοιχείο $\varphi \in \mathcal{O}(h), \varphi(x_0) = \varphi(x'_0)$.

Παράδειγμα 2.4. Το σύστημα $\dot{x} = f(x), y = h(x)$ είναι τοπικά παρατηρήσιμο σε μια περιοχή $U_0 \subset \mathcal{D}$, αν $\text{rank} \begin{pmatrix} \nabla h \\ \vdots \\ \nabla \mathcal{L}_f^{n-1} h \end{pmatrix} = n \forall x \in U_0$ ¹⁵, σύμφωνα με το Θεώρημα

2.4. Για την περίπτωση του γραμμικού συστήματος, $\nabla h(x) = C, \nabla \mathcal{L}_f h = \nabla \left(\frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} \right) = \nabla(CAx) = CA, \nabla \mathcal{L}_f^{n-1} h = CA^{n-1}$.

Οι παραπάνω συνθήκες αποτελούν τις **γεωμετρικές συνθήκες παρατηρησιμότητας**, αλλά δεν είναι αρκετές για τον καθορισμό της παρατηρησιμότητας, καθώς δεν αποτρέπουν τις περιπτώσεις εισόδων u , για τις οποίες η παρατηρησιμότητα χάνεται. Επειδή οι προσαρμοστικοί παρατηρητές του

¹² $d\mathcal{C} = \{dx_i, i = 1, \dots, n; du_j^{(k)}, j = 1, \dots, m, k \geq 0\}$ και $\mathcal{E} = \text{span}_{\mathcal{X}} d\mathcal{C}$ ο διανυσματικός χώρος που διασυνδέεται από τα στοιχεία του $d\mathcal{C}$ στο \mathcal{K} . Κάθε στοιχείο στο \mathcal{E} είναι ένα διάνυσμα της μορφής $v = \sum_{i=1}^n F_i dx_i + \sum_{j=1, \dots, m; k \geq 0} F_{jk} du_j^{(k)}$, όπου μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός από F_{jk} είναι μη μηδενικά στοιχεία του \mathcal{K} .

¹³ Υπενθυμίζεται από το κεφάλαιο 1 ότι το \mathcal{D} είναι γενικά το συνδεδεμένο πολυπύχνομα (manifold) ή πολλαπλότητα (ελλ. βιβλιογραφία) διάστασης n στο οποίο λαμβάνει τιμές το διάνυσμα κατάστασης. Η εργασία δεν επικεντρώνεται στους τοπολογικούς χώρους, αλλά μόνο στους ευκλείδειους, π.χ. ο \mathbb{R}^n .

¹⁴ Αν $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n, f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, η f είναι **διαφομορφισμός** από το \mathcal{X} στο \mathcal{Y} , αν είναι μια 1-1 συνεχής απεικόνιση με συνεχή αντίστροφη (f^{-1}) (δηλ. ομοιομορφισμός) και οι f, f^{-1} συνεχώς διαφορίσιμες.

¹⁵ Η **n -οστή παράγωγος Lie** ορίζεται $\mathcal{L}_f^n h(x) = \frac{\partial (\mathcal{L}_f^{n-1} h)}{\partial x} f(x)$, με $\mathcal{L}_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f$.

κεφαλαίου 4, έχει δομή που εξαρτάται και από εισόδους u , δηλαδή αφορούν σε ελεγχόμενα συστήματα, πρέπει να δοθούν και κάποιες **αναλυτικές συνθήκες** και ορισμοί παρατηρησιμότητας, όπως οι καθολικές εισοδοί και η ομοιόμορφη παρατηρησιμότητα.

Ορισμός 2.9 Ομοιόμορφη παρατηρησιμότητα. Ένα σύστημα είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο αν κάθε είσοδος του είναι καθολική. Καθολική είναι η είσοδος αν $\forall x_0 \neq x'_0, \exists \tau \geq 0: h(\chi_u(\tau, x_0)) \neq h(\chi_u(\tau, x'_0))$.

Παράδειγμα 2.5. Το τριγωνικό σύστημα (2.10) (triangular state affine form) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \varphi_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} u \quad (2.10)$$

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0]x, \quad x = [x_1, \dots, x_n]^T$$

Αν για δύο καταστάσεις $x \neq x'$ με στοιχεία x_k, x'_k που συμπίπτουν μέχρι το i και $x_{i+1} = x'_{i+1}$, τότε προφανώς από την δομή του (2.6) $\dot{x}_{i-1} - \dot{x}'_{i-1} \neq 0$ και άρα υπάρχει t_0 , ώστε $x_i(t) \neq x'_i(t)$ στο $0 < t < t_0$. Επαγωγικά, καταλήγουμε στην ύπαρξη κάποιου χρόνου, για τον οποίο $x_1(t) \neq x'_1(t)$ που ισχύει για κάθε είσοδο u .

Συμπερασματικά, η παρατηρησιμότητα είναι ανεξάρτητη από τις εισόδους, πράγμα που επιτρέπει την σχεδίαση παρατηρητών ανεξάρτητα από τις εισόδους, όπως στην περίπτωση των γραμμικά χρονικά αναλλοίωτων (LTI) συστημάτων. Αυτό το συμπέρασμα θα χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση του προσαρμοστικού παρατηρητή του κεφαλαίου 4.

Πρέπει, επίσης, η **καθολικότητα (universality)** της εισόδου να διασφαλίζεται καθ' όλο τον χρόνο, οπότε πρέπει επίσης η είσοδος να είναι και **παραμένουσα (persistent)**.

Πρόταση 2.1. Μια είσοδος u είναι καθολική στο $[0, t]$ αν και μόνον αν

$$\int_0^t \|h(\chi_u(\tau, x_0)) - h(\chi_u(\tau, x'_0))\|^2 d\tau > 0 \quad \forall x_0 \neq x'_0.$$

Ορισμός 2.10. Μια είσοδος u είναι παραμένουσα (persistent) για το σύστημα (2.4) αν

$$\exists t_0, T: \forall t \geq t_0, \forall x_t \neq x'_t, \int_t^{t+T} \|h(\chi_u(\tau, x_t)) - h(\chi_u(\tau, x'_t))\|^2 dt > 0 \quad (2.11)$$

Η παραπάνω ιδιότητα (2.11) εγγυάται την παρατηρησιμότητα σε δοθέν χρονικό διάστημα. Αυτό, όμως, δεν αποτρέπει να χαθεί η παρατηρησιμότητα καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο, όπως στο παράδειγμα 2.6.

Παράδειγμα 2.6. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1+x_2^2 \end{pmatrix} \end{cases}$. Όταν η x_{t-T} και η x'_{t-T}

διαφέρουν στο δεύτερο στοιχείο τους, αυτό συμβαίνει μόνο αν διαφέρουν και στο πρώτο στοιχείο τους και είναι εύκολο να δειχθεί, λύνοντας το σύστημα, ότι το αριστερό μέρος της ανισότητας (2.11), για φραγμένη είσοδο, περιγράφεται

χονδρικά από την ποσότητα $(e^{-4(t-T)} - e^{-4t})$, η οποία είναι θετική. Επομένως, για το σύστημα, κάθε φραγμένη είσοδος είναι παραμένουσα. Αλλά, είναι εμφανές ότι για $t \rightarrow \infty$, το σύστημα είναι όλο και λιγότερο παρατηρήσιμο. Οι δύο καταστάσεις μπορούν να ανακατασκευασθούν από ένα δευτερεύον σύστημα που μπορεί να δοθεί ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = y_2 - k_1(t) \left(\frac{\hat{x}_1}{1 + y_2^2} - y_1 \right) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_2 + u - k_2(\hat{x}_2 - y_2) \end{cases}$$

για οποιοδήποτε $k_2 > 0$ και κάποιο αυξανόμενο με το y_2 k_1 (π.χ. $k_1(1 + y_2^2)$). Επειδή $\frac{d}{dx}(\hat{x}_2 - x_2) = -k_2(\hat{x}_2 - x_2)$ το σφάλμα $\hat{x}_2 - x_2$ τείνει στο μηδέν και επειδή $\frac{d}{dx}(\hat{x}_1 - x_1) = -k_1(\hat{x}_1 - x_1)$, το σφάλμα $\hat{x}_1 - x_1$ τείνει στο μηδέν για απειριζόμενο όμως $k_1(t)$. Για να αποτραπεί αυτό, απαιτείται μια εγγύηση παρατηρησιμότητας που καθιστά την είσοδο **κανονικά παραμένουσα (regularly persistent)**.

Ορισμός 2.10. Η είσοδος u είναι κανονικά παραμένουσα αν

$\exists t_0, T: \forall x_{t-T}, x'_{t-T}, \forall t \geq t_0$,

$$\int_{t-T}^t \|h(\chi_u(\tau, x_{t-T})) - h(\chi_u(\tau, x'_{t-T}))\|^2 d\tau \geq \beta (\|x_{t-T} - x'_{t-T}\|)$$

για κάποια β κλάσης \mathcal{K} .

Η είσοδος u είναι τοπικά κανονική αν για κάποια β κλάσης \mathcal{KL}

$\exists t_0, \alpha: \forall x_{t-T}, x'_{t-T}, \forall T \leq T_0, \forall t \geq T$,

$$\int_{t-T}^t \|h(\chi_u(\tau, x_{t-T})) - h(\chi_u(\tau, x'_{t-T}))\|^2 d\tau \geq \beta \left(\|x_{t-T} - x'_{t-T}\|, \frac{1}{T} \right)$$

Πρόταση 2.2. Για συστήματα, όπως το (2.10) του Παραδείγματος 2.5, της μορφής (state affine):

$$f(x, u) = A(u)x + B(u), h(x) = C(u)x + D(u) \quad (2.12)$$

οι κανονικά παραμένουσες είσοδοι ικανοποιούν την (2.13)

$$\exists t_0, T, \alpha: \int_{t-T}^t \Phi_u^T(\tau, T-T) C^T C \Phi_u(\tau, T-T) d\tau \geq \alpha I > 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.13)$$

με $\Phi_u(\tau, t)$ την μήτρα μετάβασης: $\frac{d\Phi_u(\tau, t)}{d\tau} = A(u(\tau))\Phi_u(\tau, t)$, $\Phi_u(t, t) = I$.

Για συστήματα state affine, οι είσοδοι είναι τοπικά κανονικές αν

$\exists t_0, \alpha: \forall T \leq T_0, \forall t \geq T$,

$$\int_{t-T}^t \Phi_u^T(\tau, T-T) C^T C \Phi_u(\tau, T-T) d\tau \geq \alpha \frac{1}{T} \begin{bmatrix} T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T^n \end{bmatrix}.$$

Το αριστερό μέρος της (2.12) είναι η μήτρα Grammian των LTV συστημάτων (2.2)

$$W_0(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

Επομένως, οι κανονικά παραμένουσες είσοδοι για τα συστήματα state affine της μορφής (2.12), ορίζονται ως οι είσοδοι αυτές που καθιστούν ένα LTV σύστημα της μορφής (2.2) ομοιόμορφα πλήρως παρατηρήσιμο. Ο παραπάνω ορισμός δεν είναι εύκολο να εφαρμοσθεί γενικά σε μη γραμμικά συστήματα, αλλά για LTV ή state affine συστήματα, η εφαρμογή είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές καταστάσεις.

2.4 Σχεδίαση Μη Γραμμικών Παρατηρητών

2.4.1 Βασικές Δομές

Μελετήθηκαν εισαγωγικά οι βασικές δομές παρατηρητών για τα γραμμικά συστήματα, για ναδειχθεί κλιμακωτά η συνάφεια με τα μη γραμμικά, και επί του παρόντος μελετώνται για τα μη γραμμικά, για τα οποία δεν υπάρχουν καθολικές τεχνικές σχεδίασης. Για τα ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα, όπου δεν υπάρχει εξάρτηση από την είσοδο, μπορούν να σχεδιασθούν **ομοιόμορφοι** (π.χ. παρατηρητές Luenberger για τα LTI) και για τα μη ομοιόμορφα παρατηρήσιμα, **μη ομοιόμορφοι** παρατηρητές (π.χ. παρατηρητές Kalman για τα LTV). Ας σημειωθεί ότι μπορούν να σχεδιασθούν μη ομοιόμορφοι παρατηρητές για ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα, αλλά και σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να επιτευχθεί ομοιόμορφη σχεδίαση για μη ομοιόμορφα παρατηρήσιμα, πλην όμως ανιχνεύσιμα συστήματα (ιδιότητα detectability). Η λογική της §2.2 θα εκταθεί και για τα μη γραμμικά συστήματα, όπου σχεδιάζονται παρατηρητές λογικής Luenberger και παρατηρητές λογικής Kalman, αλλά λόγω της ειδικής κατεύθυνσης της παρούσας μελέτης, δεν επικεντρώνεται η ανάλυση σε μη παρατηρήσιμα συστήματα. Οι παρατηρητές που θα σχεδιασθούν, θα είναι καθολικοί, εκθετικοί και ρυθμιζόμενοι, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.

2.4.2 Παρατηρητές Λογικής Luenberger

Οι παρατηρητές **λογικής Luenberger** και τα παρακάτω αναπτυσσόμενα εργαλεία αφορούν την παρούσα μελέτη, καθώς οι παρατηρητές που θα σχεδιασθούν στα επόμενα κεφάλαια ακολουθούν την σχεδίαση των μη γραμμικών παρατηρητών λογικής Luenberger με τεχνικές Lyapunov-ο-στρεφείς, οπότε θα παρουσιασθούν ορισμένες προτυπώδεις τεχνικές σχεδίασης που έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(Cx, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.14)$$

Εδώ, η μη γραμμικότητα κατασκευάζεται από άμεσες μετρήσεις και συγχωνεύεται στον παρατηρητή. Κατ' αρχάς, η παρατηρησιμότητα του ζεύγους (A, C) συνεπάγεται την παρατηρησιμότητα του συστήματος (2.14) ανεξάρτητα της εισόδου. Έστω, λοιπόν, (A, C) παρατηρήσιμο και u οποιαδήποτε boreliανή είσοδος σε κάποιο διάστημα $[0, T]$ και x_0, x'_0 δύο αρχικές καταστάσεις. Έστω ότι οι αντιστοιχούσες έξοδοι $y(t) := y(x_0, u, t)$ και $y'(t) := y(x'_0, u, t)$ είναι ταυτοτικά ίσες στο παραπάνω διάστημα. Διαφορίζοντας τις εξόδους, $CAx(t) = CAx'(t)$ και επαγωγικά, $CA^k x(t) = CA^k x'(t)$, για $0 \leq k \leq n - 1$ και χρήσει της παρατηρησιμότητας του (A, C) , καταλήγουμε $x_0 = x'_0$. Επομένως, στα επόμενα συστήματα αντίστοιχης μορφής με την (2.14), αρκεί η ιδιότητα της παρατηρησιμότητας του ζεύγους (A, C) , δηλαδή η παρατηρησιμότητα του γραμμικού μέρους των συστημάτων, για την σχεδίαση των παρατηρητών.

Θεώρημα 2.5. Αν το ζεύγος (A, C) είναι παρατηρήσιμο, το (2.14) έχει παρατηρητή της μορφής $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(y, u) - K(C\hat{x} - y)$, με K επιλεγόμενο τέτοιο ώστε $(A - KC)$ ευσταθής μήτρα (έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος).

Το σφάλμα του παρατηρητή είναι γραμμικό και ο ρυθμός σύγκλισης μπορεί να ρυθμισθεί καταλλήλως με την επιλογή του κέρδους K , όπως στην περίπτωση του παρατηρητή Luenberger.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.15)$$

Ακολουθείται σε αυτήν την περίπτωση η διαδικασία εύρεσης ενός αντιστρέψιμου μετασχηματισμού συντεταγμένων που γραμμικοποιεί το μοντέλο κατάστασης, ο σχεδιασμός παρατηρητή για το προκύπτον γραμμικό σύστημα και η ανακατασκευή της κατάστασης του αρχικού συστήματος χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού.

Ο διαφομορφισμός $T(\cdot)$ που ικανοποιεί την $z = T(x)$, $T(0) = 0$, παράγει το μετασχηματισμένο σύστημα της κανονικής παρατηρήσιμης μορφής:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + \varphi(y, u) \\ y = C_0 z \end{cases} \quad (2.16)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_0 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], \varphi(y, u) = \begin{bmatrix} \varphi_1(y, u) \\ \vdots \\ \varphi_n(y, u) \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (2.15).

Θεώρημα 2.6. Αν υπάρχει μετασχηματισμός συντεταγμένων που απεικονίζει το (2.15) στο (2.16) και αν ορισθεί το δυναμικό σύστημα παρατηρητή:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A_0 \hat{z} + \varphi(y, u) - K(\hat{z}_n - y) \\ \hat{x} = T^{-1}(\hat{z}) \end{cases}$$

τέτοιο ώστε η μήτρα $(A_0 - K_0 C_0)$ να είναι ευσταθής, τότε $\hat{x} \rightarrow x$ για $t \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Αν $\tilde{z} = \hat{z} - z$, $\tilde{x} = \hat{x} - x$, έχουμε $\dot{\tilde{z}} = [A_0 \hat{z} + \varphi(y, u) - K(\hat{z}_n - y)] - [A_0 z + \varphi(y, u)] = (A_0 - K_0 C_0) \tilde{z}$. Αν η μήτρα έχει αρνητικού πραγματικού μέρους ιδιοτιμές, τότε $\tilde{z} \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$. $\tilde{x} = \hat{x} - x = T^{-1}(\tilde{z} + z) - T^{-1}(z) \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$. \square

Η παραπάνω μέθοδος βασίζεται σε ακύρωση των μη γραμμικοτήτων και στηρίζεται σε τεχνικές άλγεβρας Lie. Το μοντέλο, όμως, δεν είναι σθεναρό σε πιθανές αβεβαιότητες και η σύγκλιση του παρατηρητή δεν είναι εγγυημένη υπό αβεβαιότητες στο μοντέλο. Αυτή η τεχνική σχεδίασης ονομάζεται διαφορική γεωμετρική προσέγγιση και οι παρατηρητές **γεωμετρικοί**. Η προσέγγιση με εργαλεία διαφορικής γεωμετρίας ήταν κομβική στην σχεδίαση παρατηρητών.

Οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν σε μια περιοχή V του x_0 , όπως θα δοθεί στο Θεώρημα 2.9 στην ενότητα §2.5 που αφορά στον μετασχηματισμό οποιουδήποτε παρατηρήσιμου συστήματος στην παρατηρήσιμη κανονική μορφή, είναι:

1) $\dim[\text{span}\{dh(x), \dots, d\mathcal{L}\}] = n; \forall x \in V$

2) Το διανυσματικό πεδίο g οριζόμενο επί της V μέσω

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^j = \begin{cases} 0, & j = 0, \dots, n-2 \\ 1, & j = n-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{ικανοποιεί την } [g, \text{ad}_f^k g](x) = 0, k = 1, 3, 5, \dots, 2n - 3 \\ \blacksquare \text{ Έστω σύστημα της μορφής} & \begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

με **ιδιότητα Lipschitz** συνέχειας για την φ ως προς x (π.χ. η φ ικανοποιεί την $\|\varphi(x_1, u^*) - \varphi(x_2, u^*)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \forall x \in \mathfrak{D}$) και παρατηρησιμότητας για το (A, C) . Το σύστημα αυτό ονομάζεται Lipschitz. Έστω η δομή παρατηρητή

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}) \quad (2.18)$$

Θεώρημα 2.7 (Thau's Theorem). Δοθέντος του συστήματος (2.17) και του αντιστοιχούντος παρατηρητή (2.18), αν η εξίσωση Lyapunov

$$P(A - KC) + (A - KC)^T P = -Q \quad (2.19)$$

για P, Q συμμετρικές και θετικά ημι-ορισμένες, ικανοποιείται ώστε να ισχύει για σταθερά Lipschitz $L < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$, τότε το σφάλμα παρατήρησης $\tilde{x} = \hat{x} - x$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη. $\dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - KC)\tilde{x} + \varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)$. Για να δειχθεί ότι το σφάλμα \tilde{x} είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, έστω η συνάρτηση Lyapunov, $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x} \Rightarrow \dot{V}(\tilde{x}) = \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} = \tilde{x}^T [(A - KC)^T P + P(A - KC)] \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P [\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)]$. Βάσει της σχεδίασης του παρατηρητή Luenberger της §2.2.3, η ύπαρξη παρατηρήσιμου ζεύγους (A, C) συνεπάγεται ύπαρξη K που να καθιστά την μήτρα $(A - KC)$ ευσταθή. Με βάση το Θεώρημα 1.13 της §1.3, υπάρχει ζεύγος θετικά ορισμένων μητρών (P, Q) , ώστε $P(A - KC) + (A - KC)^T P = -Q$. Λαμβάνοντας $Q = C^T C$ και δεδομένου ότι η παρατηρησιμότητα του (A, C) είναι ισοδύναμη με την παρατηρησιμότητα του $(A - KC, C)$, προκύπτει η συνθήκη παρατηρησιμότητας (vii) του Θεωρήματος 2.1, οπότε η παρατηρησιμότητα του (A, C) είναι ισοδύναμη με την ευστάθεια της $(A - KC)$. Επομένως,

$$\dot{V}(\tilde{x}) = -\tilde{x}^T Q \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P [\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)] \quad (2.20)$$

Ισχύει η μόνιμη ανισότητα (1.21) για κάθε συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα με ιδιοτιμές λ

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2, \forall P > 0 \quad (2.21)$$

Για να αποδειχθεί, παρατηρείται ότι η $P = P^T$ είναι Ερμιτιανή, οπότε υπάρχει αντιστρέψιμη ορθοκανονική μήτρα T (μετασχηματισμός ομοιότητας), $T^T T = I$, που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα της P , σύμφωνα με τον Bellman, ώστε η $T^T P T = \text{diag}(\lambda_i)$ είναι διαγώνια μήτρα των ιδιοτιμών της P . Έστω $x = Tz$ και ισχύει $\|x\|^2 = z^T T^T T z = \|z\|^2$.

Επομένως, $x^T P x = z^T T^T P T z \leq \lambda_{\max}(P)\|z\|^2 = \lambda_{\max}(P)\|x\|^2$, επειδή $T^T P T = \text{diag}(\lambda_i) \leq \lambda_{\max}(P)I$ και $z^T z = \|z\|^2$. Ομοίως, και για την άλλη ανισότητα.

Για την (2.20), από την (2.21) ισχύει $\dot{V}(\tilde{x}) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|\tilde{x}\|^2 + 2\|\tilde{x}\|\|P\|\|\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)\|$, επειδή γενικά $A \leq \|A\|$, άρα $\tilde{x}^T P [\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)] \leq \|\tilde{x}\|\|P\|\|\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)\|$. Από την συνθήκη Lipschitz για την φ , έχουμε $\dot{V}(\tilde{x}) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|\tilde{x}\|^2 + 2\|\tilde{x}\|\lambda_{\max}(P)L\|\tilde{x}\|$, επειδή γενικά $\|P\| \leq \lambda_{\max}(P)$. Άρα, $\dot{V}(\tilde{x}) \leq -(\lambda_{\min}(Q) - 2L\lambda_{\max}(P))\|\tilde{x}\|^2$. Για να είναι $\dot{V}(\tilde{x}) \leq 0$, όπως επιτάσσεται από το Θεώρημα Lyapunov, πρέπει $L < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$. \square

Σε αυτήν την λογική κινούνται οι τεχνικές σχεδίασης του Thau και του Ragahvan (με εξίσωση Ricatti), προκειμένου να επιλεγεί το κατάλληλο κέρδος των παρατηρητών για συστήματα Lipschitz. Υπάρχει και η τεχνική των Rajamani και Cho, που συνδέουν την σχεδίαση του κέρδους με την έννοια της απόστασης από την μη παρατηρησιμότητα. Για τα συστήματα Lipschitz, υπάρχει αρχικά η υπόθεση η μήτρα A να είναι Hurwitz (ιδιοτιμές αρνητικού πραγματικού μέρους), πράγμα που μπορεί να επιτευχθεί με εφαρμογή ενός νόμου ελέγχου και δεύτερη υπόθεση η Lipschitz συνέχεια της μη γραμμικότητας. Για αυτήν την υπόθεση, η παραπάνω κλάση μη γραμμικών συστημάτων παρουσιάζει μειονεκτήματα στην σχεδίαση του παρατηρητή, αντίστοιχα με αυτά των υψικερδών παρατηρητών (βλέπε παρακάτω) που εφαρμόζονται σε ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα. Αυτές οι τεχνικές, όπως καταφάνηκε στην απόδειξη, είναι Lyapunov-ο-στρεφείς και αυτές θα ακολουθηθούν στο σχεδιαστικό μέρος στο Κεφάλαιο 3.

Το Θεώρημα 2.7 έχει εφαρμογή στην σχεδίαση του παρατηρητή του κεφαλαίου 3.

- Έστω το σύστημα
$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + \varphi(x, u) \\ y = C_0x \end{cases} \quad (2.22)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \dots & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, C_0 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Εδώ, ο παρατηρητής, όπως θα αναλυθεί στην §2.6, ονομάζεται **υψικερδής (high gain)** και χρησιμοποιεί ένα κέρδος, προκειμένου να κυριαρχήσει το γραμμικό μέρος του σφάλματος επί του μη γραμμικού.

Αν η φ είναι καθολικά Lipschitz (βλέπε Ορισμός 1.8, Κεφάλαιο 1) ως προς x και ομοιόμορφα ως προς u και

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x, u) = 0 \text{ για } j \geq i + 1, 1 \leq i, j \leq n,$$

στο τριγωνικό σύστημα (2.15) αντιστοιχεί παρατηρητής της μορφής

$$\dot{\hat{x}} = A_0\hat{x} + \varphi(\hat{x}, u) - \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^n \end{bmatrix} K_0(C_0\hat{x} - y)$$

με κέρδος K_0 , τέτοιο ώστε $(A_0 - K_0C_0)$ ευσταθής μήτρα. Οι υψικερδείς παρατηρητές θα αναλυθούν στην §2.6.

Ο ρυθμός σύγκλισης εξαρτάται από την επιλογή λ η οποία προτιμάται αρκούντως μεγάλη.

Υπάρχει και η τεχνική της γραμμικοποίησης, ως σχεδιαστικό εργαλείο, αλλά παραλείπεται διότι αφ' ενός υπόκειται σε περιορισμούς, όπως το ότι ο παρατηρητής λειτουργεί μόνο τοπικά για ένα αμετάβλητο σημείο του πρωτότυπου συστήματος και αφ' ετέρου επειδή τέτοιες τεχνικές δεν αφορούν την κεντρική μελέτη της παρούσας εργασίας. Πέραν των άνωθι δομών, έχουν αναπτυχθεί και άλλες πιο προχωρημένες τεχνικές, όπως η **τεχνική της διασύνδεσης** παρατηρητών (interconnection-based), όπου το σύστημα αποδομείται σε δύο επιμέρους, για τα οποία κατασκευάζονται ξεχωριστοί παρατηρητές.

Παρουσιάζονται εποπτικά και κάποιες κατασκευές κατά λογική Kalman, όπου η παρατηρησιμότητα εξαρτάται από τις εισόδους (όχι ομοιόμορφη παρατηρησιμότητα). Η σχεδίαση, πάλι, συναρτάται με αιρούμενες ή μη αιρούμενες μη γραμμικότητες.

2.4.3 Παρατηρητές Λογικής Kalman

Στην περίπτωση αυτή, τα συστήματα δεν είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμα και επομένως η παρατηρησιμότητά τους εξαρτάται από τις εισόδους. Επειδή δεν αφορά το αντικείμενο της παρούσας εργασίας, παρουσιάζεται απλώς η δομή του.

- Έστω το σύστημα στην μορφή state-affine

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + B(u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.23)$$

με $A(u(t))$ ομοιόμορφα φραγμένη. Αν η είσοδος είναι κανονικά παραμένουσα, τότε το δυναμικό σύστημα

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(u(t))\hat{x}(t) + B(u(t)) - K(t)(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (2.24)$$

αποτελεί παρατηρητή για το (2.23), με $K(t)$ υπολογιζόμενο από

$$K(t) = M(t)C^T W^{-1}$$

$$\dot{M}(t) = M(t)A^T(u(t)) + A(u(t))M(t) - M(t)C^T W^{-1}CM(t) + V + \delta M(t)$$

$$M(0) = M_0 = M_0^T > 0, W = W^T > 0$$

με επιλεγόμενα είτε $\delta > 2\|A(u(t))\| \forall t$ είτε $V = V^T > 0$, όπως στα LTV συστήματα.

- Έστω η δομή

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0(u, y)x + \varphi(x, u) \\ y = C_0 x \end{cases} \quad (2.25)$$

$$A_0(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(u, y) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1,n}(u, y) \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \text{φραγμένη, } C_0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

φ είναι καθολικά Lipschitz ως προς x και ομοιόμορφα ως προς u και $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x, u) = 0$ για $j \geq i + 1, 1 \leq i, j \leq n$. Αυτό σημαίνει ότι μια σχεδίαση υψικερδής για μη ομοιόμορφο παρατηρήσιμο σύστημα, με όμως την ιδιότητα παρατηρησιμότητας για μικρά χρονικά διαστήματα της Πρότασης 2.2 για state-affine συστήματα.

Αν λοιπόν η φ ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες και η είσοδος u είναι τοπικά κανονική για το (2.25), με την έννοια ότι καθιστά την $v(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ C\chi_u(t, x_0) \end{bmatrix}$ τοπικά κανονική για το σύστημα $\dot{x}(t) = A(u(t))x(t)$, $y(t) = Cx(t)$ για κάθε αρχική κατάσταση, τότε το (2.26) αποτελεί δομή παρατηρητή για το (2.25).

$$\dot{\hat{x}} = A_0(u, y)\hat{x} + \varphi(\hat{x}, u) + \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^n \end{bmatrix} K_0(t)(y - C_0\hat{x}) \quad (2.26)$$

$$K(t) = M(t)C^T W^{-1}$$

$$\dot{M}(t) = \lambda \left(M(t)A^T(u(t), y(t)) + A(u(t), y(t))M(t) - M(t)C^T W^{-1}CM(t) + \right.$$

$$\left. \delta M(t) \right), M(0) = M_0 = M_0^T > 0, W = W^T > 0, \delta > 2\|A(u, y)\| \text{ και } \lambda = \frac{1}{T}$$

αρκούντως μεγάλο.

2.5 Παρατηρήσιμη Κανονική Μορφή

Με βάση την ακόλουθη ανάλυση, τα ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.27)$$

με κατάσταση $x(t) \in \mathbb{R}^n$, γνωστή είσοδο $u(t) \in \mathbb{R}^m$ και $y(t) \in \mathbb{R}$ μετρούμενη έξοδο, μπορούν να μετασχηματισθούν σε μια παρατηρήσιμη μορφή, την κανονική, η οποία, όπως φάνηκε και στα προηγούμενα, είναι η μορφή για την οποία είναι δυνατή η σχεδίαση των παρατηρητών. Επομένως, κάθε σύστημα με την ιδιότητα της ομοιόμορφης παρατηρησιμότητας, ή πιο ειδικά της παρατηρησιμότητας κριτηρίου rank, δύναται να μετασχηματισθεί στην κανονική παρατηρήσιμη μορφή, ούτως ώστε στην σχεδίαση να μην μας αφορά η αρχική μορφή, αλλά μόνο η κανονική, για την οποία, λόγω των ιδιοτήτων της, η σχεδίαση παρατηρητή είναι εφικτή. Επίσης, οι σχεδιαζόμενοι παρατηρητές είναι σε αυτή την μορφή, για την οποία μπορεί να αναλυθεί η εκθετική ευστάθεια με την επιπλέον συνθήκη της καθολικής Lipschitz συνέχειας. Υπενθυμίζεται ότι το σύστημα (2.27) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο (δηλαδή παρατηρήσιμο ανεξάρτητα της εισόδου), αν για κάθε είσοδο $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$, με σταθερό T , η u είναι καθολική είσοδος, άρα για δύο αρχικές καταστάσεις, οι αντιστοιχούσες έξοδοι δεν είναι ταυτοτικά ίσες. Αυτή είναι η μορφή, στην οποία θα βασισθεί η κατασκευή εκθετικών παρατηρητών των κεφαλαίων 3 και 4.

Για λόγους απλότητας, έστω το μη γραμμικό σύστημα αφινικό στον έλεγχο, στη μορφή (control affine)

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + u_1 f_1 + \dots + u_m f_m \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.28)$$

με κατάσταση $x(t) \in \mathbb{R}^n$, την γνωστή είσοδο $u(t) \in \mathbb{R}^m$ και $y(t) \in \mathbb{R}$ την μετρούμενη έξοδο. Οι συναρτήσεις f_i υποτίθενται κλάσης C^∞ . Υπενθυμίζεται ότι για συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, κλάσης C^n , οι παράγωγοι Lie της φ κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου f_0 ορίζονται:

$\mathcal{L}_{f_0}(\varphi) = \sum_{i=1}^n f_{0i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, για $k = 1, \dots, n$, $\mathcal{L}_{f_0}^k(\varphi) = \mathcal{L}_{f_0}(\mathcal{L}_{f_0}^{k-1}(\varphi))$, $\mathcal{L}_{f_0}^0(\varphi) = \varphi$. Έστω $\Phi(x) = [\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)]$ ο μετασχηματισμός που ορίζεται από

$$\Phi_k(x) = \mathcal{L}_{f_0}^k(h)(x) \quad (2.29)$$

Θεώρημα 2.8. Αν το σύστημα (2.28) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο, τότε υπάρχει ανοικτό πυκνό υποσύνολο \mathcal{M} του \mathbb{R}^n , τέτοιο ώστε για κάθε αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathcal{M}$, υπάρχει περιοχή V , για την οποία η (2.29) απεικόνιση Φ σχηματίζει διαφομορφισμό από την V στο πεδίο ορισμού της. Επιπλέον, μετασχηματίζει το σύστημα (2.28) στην ακόλουθη κανονική μορφή:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \psi_0(z) + \sum_{i=1}^m \psi_i(z)u_i \\ y = Cz \end{cases} \quad (2.30)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix}, \psi_0(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi_n(z) \end{bmatrix}, \psi_k(z) = \begin{bmatrix} \psi_{k1}(z_1) \\ \psi_{k2}(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \psi_{kn-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) \\ \psi_{kn}(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0].$$

Αντιστρόφως, αν ένα σύστημα μορφής (2.28) μπορεί να μετασχηματισθεί στην κανονική μορφή (2.30) με χρήση οποιουδήποτε διαφομορφισμού, τότε το σύστημα είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο στο πεδίο ορισμού του διαφομορφισμού.

Απόδειξη. Έστω ότι το (2.28) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο. Τότε η $u = 0$ καθιστά το σύστημα παρατηρήσιμο. Το ότι η απεικόνιση Φ είναι ένας τοπικός διαφομορφισμός, σημαίνει ότι το σύνολο των σημείων του \mathbb{R}^n για τα οποία η μήτρα $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ είναι βαθμού n , είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Έστω, διά της εις άτοπον, ότι αυτό το σύνολο δεν είναι πυκνό. Τότε, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο \mathcal{W} του \mathbb{R}^n , τέτοιο ώστε για κάθε $\xi \in \mathcal{W}$, ο βαθμός της $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\xi)$ είναι μικρότερος ή ίσος του $n - 1$. Επομένως, υπάρχει $k \leq n - 1$ και υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, ώστε $d\mathcal{L}_{f_0}^j(h)(\xi) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(\xi) d\mathcal{L}_{f_0}^{i-1}(h)(\xi)$, $1 \leq j \leq n$. Λαμβάνοντας οποιεσδήποτε αρχικές καταστάσεις $\xi_0, \bar{\xi}_0$, τέτοιες ώστε $d\mathcal{L}_{f_0}^j(h)(\xi_0) = d\mathcal{L}_{f_0}^j(h)(\bar{\xi}_0)$, για $0 \leq j \leq k - 1$ και για τις αντιστοιχούσες τροχιές $\xi(t), \bar{\xi}(t)$ για την περίπτωση μη ελεγχόμενου συστήματος $u = 0$, έπεται $h(\xi(t)) = h(\bar{\xi}(t))$. Άρα, η μηδενική είσοδος $u = 0$ καθιστά το σύστημα (2.28) μη παρατηρήσιμο. Αυτό είναι άτοπον επειδή το σύστημα θεωρήθηκε παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο.

Τώρα θα δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Φ μετασχηματίζει το (2.28) στην κανονική παρατηρήσιμη μορφή (2.30). Καθώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο για κάθε είσοδο u_1, \dots, u_m , το ίδιο ισχύει και για εισόδους της μορφής $(0, \dots, u_i, \dots, 0)$. Επομένως είναι αρκετό να δοθεί η κανονική μορφή για το ομοιόμορφα παρατηρήσιμο σύστημα μιας εισόδου - μιας εξόδου (S.I.S.O.):

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + u f_1(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.31)$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η Φ να γίνεται ένας διαφομορφισμός από μια ανοικτή περιοχή αυτού του σημείου. Θέτοντας $z = \Phi(x)$, δηλαδή $z_i = \mathcal{L}_{f_0}^{i-1}(h)(x)$, $1 \leq i \leq n$. Με το νέο σύστημα συντεταγμένων, το (2.31) λαμβάνει την μορφή

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \psi_0(z) + u f_1(x) \\ y = Cz \end{cases} \quad (2.32)$$

όπου A η μήτρα όπως στην (2.30), $\psi_0(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi_n(z) \end{bmatrix}$, $\psi_k(z) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(z) \\ \psi_{12}(z) \\ \vdots \\ \psi_{1n-1}(z) \\ \psi_{1n}(z) \end{bmatrix}$, $C =$

$[1 \ 0 \ \dots \ 0]$. Πράγματι, για $1 \leq i \leq n - 1$,

$$\{\dot{z}_i(t) = \frac{d\mathcal{L}_{f_0}^{i-1}(h)}{dt}(x(t)) = \mathcal{L}_{f_0}^{i-1}(h)(x(t)) + u(t)\mathcal{L}_{f_i}(\mathcal{L}_{f_0}^{i-1}(h))(x(t)) = z_{i+1}(t) + u(t)\psi_{1i}(z(t)),$$

$$\text{όπου } \psi_{1i}(z) = \mathcal{L}_{f_i}(\mathcal{L}_{f_0}^{i-1}(h))(\Phi^{-1}(z)).$$

$$\text{Για } i = n; \quad \{\dot{z}_n(t) = \frac{d\mathcal{L}_{f_0}^{n-1}(h)}{dt}(x(t)) = \mathcal{L}_{f_0}^n(h)(x(t)) + u(t)\mathcal{L}_{f_1}(\mathcal{L}_{f_0}^{n-1}(h))(x(t)) = \psi_{0n}(z(t)) + u(t)\psi_{1n}(z(t)),$$

$$\text{όπου } \psi_{0n}(z) = \mathcal{L}_{f_0}^n(\Phi^{-1}(z)), \psi_{1n}(z) = \mathcal{L}_{f_1}(\mathcal{L}_{f_0}^{n-1}(h))(\Phi^{-1}(z)).$$

Εκ κατασκευής, $z_1(t) = h(x(t))$, άρα $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Θα δειχθεί ότι $\psi_{1i}(z) = \psi_{1i}(z_1, \dots, z_i)$, $1 \leq i \leq n$. Έστω, δια της εις άτοπον, ότι δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Έστω i_0 ο μικρότερος ακέραιος $i_0 \leq n-1$, για τον οποίο υπάρχει $j \geq i_0 + 1$ και $\frac{\partial \psi_{1i_0}}{\partial x_j} \neq 0$. Θα κατασκευασθεί είσοδος $u_0(t)$ που καθιστά το (2.32) μη παρατηρήσιμο και δεδομένου ότι η παρατηρησιμότητα δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων, η $u_0(t)$ θα καθιστά και το αρχικό (2.28) μη παρατηρήσιμο. Θέτω, λοιπόν, $v(z, \bar{z}) = \frac{\bar{z}_{i_0+1} - z_{i_0+1}}{\psi_{1i}(z) - \psi_{1i}(\bar{z})}$. Από τα παραπάνω, υπάρχουν αρχικές μετασχηματισμένες καταστάσεις z^0, \bar{z}^0 , με $z_i^0 = \bar{z}_i^0$ για $1 \leq i \leq n; i \neq j$ και $z_j^0 \neq \bar{z}_j^0$, τέτοιες ώστε $\psi_{1i}(z^0) - \psi_{1i}(\bar{z}^0)$. Επομένως, υπάρχουν περιοχές V_0, \bar{V}_0 των z^0, \bar{z}^0 αντίστοιχα, ώστε $\forall (z, \bar{z}) \in V_0 \times \bar{V}_0, \psi_{1i}(z) - \psi_{1i}(\bar{z}) \neq 0$ και άρα η $v(z, \bar{z})$ είναι καλώς ορισμένη στο $\Omega = V_0 \times \bar{V}_0$. Η υποψήφια είσοδος που καθιστά το (2.32) μη παρατηρήσιμο κατασκευάζεται θεωρώντας το ακόλουθο σύστημα που ορίζεται στο Ω :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \psi_0(z) + v(z, \bar{z})\psi_1(z) \\ \dot{\bar{z}} = A\bar{z} + \psi_0(\bar{z}) + v(z, \bar{z})\psi_1(\bar{z}) \end{cases} \quad (2.33)$$

Το ζεύγος (z^0, \bar{z}^0) ορίζεται όπως παραπάνω και έστω $(z^0(t), \bar{z}^0(t))$ η λύση του (2.33) που προκύπτει για (z^0, \bar{z}^0) . Τότε, επί ενός διαστήματος $[0, T]$ (πιθανός μικρός), το ζεύγος $(z^0(t), \bar{z}^0(t))$ είναι καλώς ορισμένο και παρομοίως η είσοδος $u_0(t) = v(z^0(t), \bar{z}^0(t))$. Θα δειχθεί ότι οι έξοδοι z_1^0, \bar{z}_1^0 , που αντιστοιχούν στις αρχικές καταστάσεις z^0, \bar{z}^0 , αντίστοιχα, είναι ίσες, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την ομοιόμορφη παρατηρησιμότητα του συστήματος.

Θέτοντας $e(t) = \bar{z}(t) - z(t)$, το σύστημα (2.33) γίνεται ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \psi_0(z) + v(z, \bar{z})\psi_1(z) \\ \dot{e} = Ae + (\psi_0(z) - \psi_0(e-z)) + v(z, e-z)(\psi_1(z) - \psi_1(e-z)) \end{cases} \quad (2.34)$$

Χρήσει του τύπου του v , παρατηρείται ότι το $e(0) = \bar{z}^0 - z^0$ είναι σημείο ισορροπίας για το χρονομεταβλητό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & Ae(t) + (\psi_0(z^0(t)) - \psi_0(e(t) - z^0(t))) \\ & + v(z^0(t), e(t) - z^0(t)) (\psi_1(z^0(t)) - \psi_1(e(t) - z^0(t))) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Έτσι, για $e(0) = \bar{z}^0 - z^0$, έχουμε $e_1(t) = 0$ στο $[0, T]$, άρα σε αυτό το διάστημα, οι έξοδοι $z_1^0(t), \bar{z}_1^0(t)$ ταυτίζονται. Συνεπώς, η επιλεγείσα είσοδος u_0 καθιστά τις δύο διαφορετικές αρχικές καταστάσεις z^0, \bar{z}^0 α-διακρίσιμες και αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι κάθε είσοδος καθιστά το σύστημα παρατηρήσιμο. Άρα,

η απεικόνιση Φ όντως μετασχηματίζει το (2.28) στην κανονική παρατηρήσιμη μορφή (2.30).

Το αντίστροφο είναι προφανές, καθ' ό,τι η παρατηρησιμότητα δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων και συνεπώς αρκεί να δειχθεί ότι το (2.30) είναι ομοιόμορφα παρατηρήσιμο. Λαμβάνοντας οιοσδήποτε διαφορετικές αρχικές καταστάσεις z^0, \bar{z}^0 και οποιαδήποτε είσοδο $u \in L^\infty([0, T], \mathfrak{R}^m)$, τέτοια ώστε οι αντιστοιχούσες τροχιές $z^0(t), \bar{z}^0(t)$ να είναι ορισμένες στο $[0, T]$ και οι έξοδοι $z_1^0(t), \bar{z}_1^0(t)$ να είναι ταυτοτικά ίσες στο ανωτέρω διάστημα, γίνεται παραγωγή αυτών των εξόδων και δείχνεται ότι $z_2^0(t), \bar{z}_2^0(t)$ και συνεχίζοντας την παραγωγή, δείχνεται ότι $z_k^0(t), \bar{z}_k^0(t) \forall k$. \square

Το παραπάνω θεώρημα αναφέρεται ουσιαστικά σε μια επέκταση της πιο συνήθους κανονικής μορφής, της κανονικής μορφής Brunowski, που παρουσιάζεται στην παρακάτω σχέση (2.37) για σύστημα μιας εξόδου και μη ελεγχόμενο.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.36)$$

Το ανωτέρω σύστημα, με βάση ορισμένες συνθήκες μετασχηματίζεται στο:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(y) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\text{με } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1].$$

Έστω η οικογένεια διανυσματικών πεδίων X_1, \dots, X_n , που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{X_1}(\mathcal{L}_f^k(h)) = 0, k = 0, \dots, n-1 \\ \mathcal{L}_{X_1}(\mathcal{L}_f^{n-1}(h)) = 1 \\ X_i = [X_{i-1}, f], i = 2, \dots, n^{16} \end{cases} \quad (2.38)$$

Έστω ο μετασχηματισμός $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]$ με $L_{X_i}(\Phi_j)(x) = \delta_i^j$ ¹⁷.

Θεώρημα 2.9. Έστω ότι το σύστημα (2.36) είναι παρατηρήσιμο με την συνθήκη rank σε κάποιο $x_0 \in \mathfrak{R}^n$. Ο μετασχηματισμός $z = \Phi(x)$ μετατρέπεται σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων περί το x_0 , στο οποίο το (2.36) λαμβάνει την μορφή (2.37) αν και μόνον αν οι ροές των διανυσματικών πεδίων X_1, \dots, X_n υποκαθίστανται¹⁸ (commute), δηλαδή $[X_i, X_j] = 0 \forall i, j$.

¹⁶ $[\cdot, \cdot]$ συμβολίζει την διανυσματική πράξη των *αγκολών Lie (Lie brackets)* μεταξύ των διανυσματικών πεδίων f και g και αποτελεί ένα νέο διανυσματικό πεδίο που ορίζεται από την σχέση $[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$.

¹⁷ $\delta_i^j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$ το *δέλτα Kronecker*.

¹⁸ Στην διαφορική γεωμετρία, δύο διανυσματικά πεδία υποκαθίστανται αν η αγκύλη Lie των δύο πεδίων ισούται με μηδέν.

Απόδειξη. Περιληπτικά, καθώς τα διανυσματικά πεδία X_1, \dots, X_n υποκαθίστανται (commute), από ταυτότητα Jacobi, ισχύει $f = \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i(x)X_{i+1}$. Άρα το (2.36) μετατρέπεται στο (2.37). \square

2.6 Υψικερδείς Παρατηρητές (High gain Observers)

Ακολουθεί παρουσίαση της τεχνικής του υψικερδούς παρατηρητή, καθώς αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί σε ευρύτατη κλάση μη γραμμικών συστημάτων αλλά και επειδή στην βελτίωση αυτής της τεχνικής εδράζεται το επόμενο κεφάλαιο. Οι εφαρμογές των υψικερδών παρατηρητών είναι πάρα πολλές, όπως η σταθεροποίηση μη γραμμικών συστημάτων, οι μη γραμμικοί σερβομηχανισμοί, ο προσαρμοστικός έλεγχος (adaptive control), ο ολισθαίνων έλεγχος (slide mode control), εφαρμογές σε κινητήρες επαγωγής (εκτίμηση της ταχύτητας του ροομέα, της παραγωγού του ρεύματος στάτορα υπό έλεγχο χωρίς αισθητήρες), στους βιοαντιδραστήρες, στην ανίχνευση λαθών και απομόνωσή τους, στην εκτίμηση παραμέτρων διαφόρων συστημάτων κ.λ.π. .

Εδώ, θα γίνει επικέντρωση στην δομή (2.17), δεδομένου ότι σε τέτοια μορφή συστήματα θα εφαρμοσθεί ο παρατηρητής χρονικά αυξανόμενου κέρδους. Η σκοπιμότητα σχεδίασης βρίσκεται στην ταχύτατη σύγκλιση της Luenberger σχεδίασης.

Η δομή του Lipschitz συστήματος (2.17) μπορεί να επεκταθεί και για συστήματα της μορφής

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), y(t) = C_0 x(t), \text{ με } \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{j>i+1} = 0 \text{ και } \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{j=i+1} \geq \alpha_i > 0 \forall x, u.$$

Επίσης, έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι και εκτείνονται και σε ομοιόμορφα παρατηρήσιμα συστήματα πολλών εξόδων.

$$\text{Έστω το σύστημα} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(y, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.39)$$

όπου το ζεύγος (A, C) θεωρείται παρατηρήσιμο. Λαμβάνεται παρατηρητής $\hat{x} = A\hat{x} + \varphi(y, u) + H(y - C\hat{x})$ με το σφάλμα παρατήρησης $\tilde{x} = x - \hat{x}$, να ικανοποιεί την $\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\tilde{x}$, οπότε την ασυμπτωτική ευστάθεια του σφάλματος εγγυάται η επιλογή H , ώστε η $(A - HC)$ να είναι Hurwitz. Οποιοδήποτε όμως σφάλμα στην φ μεταφέρεται στο σφάλμα παρατήρησης, συνεπώς το σφάλμα είναι της μορφής $\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\tilde{x} + \varphi(y, u) - \varphi_0(y, u)$, όπου φ_0 είναι το ονομαστικό μοντέλο της φ .

Προκειμένου να είναι ο παρατηρητής σθεναρός σε αβεβαιότητες κατά την μοντελοποίηση των μη γραμμικοτήτων, δίνεται μια ειδική τεχνική σχεδίασης, όπου επιλέγεται κέρδος αρκούντως υψηλό. Αυτό εφαρμόζεται σε ευρεία κλάση μη γραμμικών συστημάτων και στην περίπτωση ανατροφοδότησης κατάστασης στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου, αυτή μπορεί να υποκατασταθεί από τον ελεγκτή ανατροφοδότησης εξόδου, στον οποίο λαμβάνονται υπ'οψιν οι εκτιμώμενες καταστάσεις. Η σχεδίαση τέτοιων ελεγκτών υπόκειται στην αρχή διαχωρισμού για τα μη γραμμικά συστήματα, αντίστοιχη με αυτή των γραμμικών, όπου συνδυάζεται φραγμένος έλεγχος ανατροφοδότησης κατάστασης με υψικερδή παρατηρητή. Η ανατροφοδότηση κατάστασης σχεδιάζεται για να ικανοποιήσει τις σχεδιαστικές προδιαγραφές και εν συνεχεία ο υψικερδής παρατηρητής σχεδιάζεται αρκούντως ταχύς, ώστε να ανακτήσει την επίδοση που επιτυγχάνεται υπό τον έλεγχο ανατροφοδότησης. Ακολουθεί εν συντομία ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα.

$$\text{Παράδειγμα 2.7. Έστω το σύστημα} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varphi(x, u). \end{cases} \text{ Έστω ότι στην είσοδο } u = \gamma(x)$$

λαμβάνεται ο έλεγχος ανατροφοδότησης κατάστασης, που σταθεροποιεί το $(0,0)$. Χρησιμοποιώντας μόνο την έξοδο, χρησιμοποιείται παρατηρητής:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + h_1(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \varphi_0(\hat{x}, u) + h_2(y - \hat{x}_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -h_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -h_2\tilde{x}_1 + \delta(x, \tilde{x}) \end{cases}$$

όπου $\delta(x, \tilde{x}) = \varphi(x, \gamma(\hat{x})) - \varphi(\hat{x}, \gamma(\hat{x}))$. Το διάνυσμα κέρδους $H = [H_1 \ H_2]^T$ πρέπει να σχεδιασθεί κατά τρόπο ώστε $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$. Το H πρέπει να σχεδιασθεί με σκοπό την απόρριψη της επίδρασης του δ στο σφάλμα \tilde{x} . Ιδανικά, αυτό θα συνέβαινε $\forall \delta$ αν η συνάρτηση μεταφοράς

$$G_0(s) = \frac{\delta(s)}{\tilde{x}(s)} = \frac{1}{s^2 + h_1s + h_2} \begin{bmatrix} 1 \\ s + h_1 \end{bmatrix}$$

ήταν μηδενική. Επειδή αυτό είναι αδύνατον, επιλέγεται $\sup_{w \in \mathfrak{R}} |G_0(jw)| \rightarrow 0$, επιλέγοντας $h_2 \gg h_1 \gg 1$. Λαμβάνοντας $h_1 = \frac{\alpha_1}{\varepsilon}, h_2 = \frac{\alpha_2}{\varepsilon^2}$ για $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ και $0 < \varepsilon \ll 1$, η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται $G_0(s) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon s)^2 + \alpha_1 \varepsilon s + \alpha_2} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon s + \alpha_1 \end{bmatrix}$ και $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_0(s) = 0$. Ορίζοντας τις μεταβλητές $\eta_1 = \tilde{x}_1/\varepsilon$ και $\eta_2 = \tilde{x}_2$, ικανοποιείται το σύστημα:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\eta}_1 = -\alpha_1 \eta_1 + \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = -\alpha_2 \eta_1 + \varepsilon \delta(x, \tilde{x}) \end{cases}$$

από όπου φαίνεται ότι μειώνοντας το ε εξαφανίζεται η επίδραση της δ . Το $\eta_1(0)$ είναι τάξης $O(1/\varepsilon)$, όταν $x_1(0) \neq \hat{x}_1(0)$. Η λύση περιέχει όρο μορφής $(\alpha/\varepsilon)e^{-\alpha t/\varepsilon}$, ο οποίος τείνει σε κρουστική συνάρτηση (impulse function), όταν $\varepsilon \rightarrow 0$. Αυτή η ανεπιθύμητη συμπεριφορά που παρατηρείται στους υψικερδείς παρατηρητές είναι το **φαινόμενο μεταβατικών αιχμών (peaking phenomenon)**. Αυτό παρακάμπτεται με διάφορες μεθόδους, όπως στην περίπτωση σταθεροποίησης (stabilization) με εφαρμογή ελέγχου ανατροφοδότησης, όπου γίνεται ψαλίδισμα (saturation) του ελέγχου.

Βάσει του παραπάνω παραδείγματος, όπου αποδεικνύεται η σημασία εκλογής κέρδους υψηλού, παρουσιάζεται η γενική μορφή των υψικερδών παρατηρητών. Έστω σύστημα ευρισκόμενο στην κανονική παρατηρήσιμη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(z, u) \\ y = Cz \\ z \in \mathfrak{R}^n; u \in \mathfrak{R}^m \end{cases} \quad (2.40)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (2.41)$$

$$\varphi(z, u) = \begin{bmatrix} \varphi_1(z_1, u) \\ \varphi_2(z_1, z_2, u) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}, u) \\ \varphi_n(z, u) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Η παραπάνω κανονική μορφή αποτελεί επέκταση αυτής του Θεωρήματος 2.8, όπου εν προκειμένω η μη γραμμικότητα $\varphi(z, u)$ δεν είναι αφινική στον έλεγχο (control affine). Όπως ειπώθηκε, η παραπάνω κανονική τριγωνική δομή, λόγω των

ιδιοτήτων της, προστιθεμένης και της ακόλουθης συνθήκης, καθιστά την σχεδίαση των παρατηρητών εφικτή. Η φ , ανάλογα με τις προηγούμενες περιπτώσεις σχεδίασης, πρέπει να έχει και την ιδιότητα Lipschitz συνέχειας, σύμφωνα με την ακολουθούσα συνθήκη.

Συνθήκη Lipschitz. Η μη γραμμική συνάρτηση φ είναι καθολικά Lipschitz, δηλαδή για όλα τα φραγμένα υποσύνολα του \mathfrak{R}^m ; $\exists c > 0, \forall z, z' \in \mathfrak{R}^n$, ισχύει $\|\varphi(z, u) - \varphi(z', u)\| \leq L\|z - z'\|$. Αν οι θεωρούμενες τροχιές κείνται σε ένα φραγμένο υποσύνολο $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$, τότε η μη γραμμικότητα μπορεί να επεκταθεί σε μια καθολικά Lipschitz συνάρτηση $\tilde{\varphi}$ εκτός του Ω , ώστε οι τροχιές του νέου συστήματος να συμπίπτουν με αυτές του αρχικού.

Έστω σταθερά $\lambda > 0$ με αντίστοιχη μήτρα $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda^n \end{bmatrix} =$

$\text{diag}(\lambda, \dots, \lambda^n)$ και διανυσματικό κερδος $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$, τέτοιο ώστε η μήτρα

$$A + KC = \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ k_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ να γίνει Hurwitz.}$$

Ο υποψήφιος παρατηρητής είναι της μορφής:

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(u, \hat{z}) - A(\lambda)K(y - C\hat{z}) \quad (2.43)$$

όπου $y(t)$ είναι η μετρούμενη έξοδος συσχετιζόμενη με την άγνωστη κατάσταση.

Θεώρημα 2.10. Το σύστημα της (2.43) αποτελεί δομή παρατηρητή εκθετικής σύγκλισης για το σύστημα (2.40), δοθέντος ότι ισχύει η Lipschitz συνθήκη για την φ . Συγκεκριμένα, εάν U συμπαγές υποσύνολο του \mathfrak{R}^m , υπάρχει πεπερασμένη σταθερά $\lambda_0 > 0$, ώστε $\forall \lambda > \lambda_0$; $\exists \alpha, \beta > 0$; $\forall \hat{z}(0)$, για τις οποίες σταθερές προκύπτει για την άγνωστη προς εκτίμηση τροχιά $z(t)$ η σχέση εκθετικής σύγκλισης:

$$\|\hat{z}(t) - z(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|\hat{z}(0) - z(0)\|,$$

όπου $\|\cdot\|$ συμβολίζει την ευκλείδεια νόρμα της Πρότασης 1.1 του Κεφαλαίου 1.

Απόδειξη. Έστω ο μετασχηματισμός σφάλματος $e(t) \triangleq A^{-1}(\lambda)(\hat{z}(t) - z(t)) = [e_1(t) \dots e_n(t)]^T$, όπου το σφάλμα του παρατηρητή είναι $\tilde{z}(t) = \hat{z}(t) - z(t)$, όπου προφανώς η διαγώνιος μήτρα $A(\lambda)$ είναι άνω φραγμένη, καθώς η σταθερά λ είναι πεπερασμένη. Λόγω αυτού, η ασυμπτωτική ευστάθεια του $e(t)$ εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του $\hat{z}(t) - z(t)$. Για την παράγωγο του e ισχύει

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A^{-1}(\lambda) \left(\dot{\hat{z}}(t) - \dot{z}(t) \right) \stackrel{(2.40), (2.43)}{\implies} \dot{e} = A^{-1}A(\hat{z} - z) - A^{-1}AKC(z - \hat{z}) + \\ &A^{-1}(\varphi(u, \hat{z}) - \varphi(u, z)) = A^{-1}A\dot{e} + KC\dot{e} + A^{-1}(\varphi(u, \hat{z}) - \varphi(u, z)) \quad [\text{Για λόγους} \\ &\text{συντομίας πράξεων και ευκρίνειας, τα χρονικά ορίσματα των συναρτήσεων} \\ &\text{παραλείπονται}] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{e} = \lambda(A + KC)e + \Delta\varphi \quad (2.44)$$

καθώς όπως είναι προφανές, λόγω της ειδικής δομής των μητρών $A, K, \Lambda, \Lambda^{-1} = \text{diag}(1/\lambda, \dots, 1/\lambda^n)$, K και C , ισχύουν

$$\Lambda^{-1}A\Lambda = \lambda A \text{ και } KC\Lambda = \lambda KC \quad (2.45)$$

Με $\Delta\varphi = [\Delta\varphi_1 \ \dots \ \Delta\varphi_n]^T$ έχει συμβολισθεί η διαφορά $\Lambda^{-1}(\varphi(u, \hat{z}) - \varphi(u, z))$.

Ισχύει για το i -οστό στοιχείο της $\Delta\varphi = \Lambda^{-1}(\varphi(u, \hat{z}) - \varphi(u, z))$:

$$|\Delta\varphi_i| = \left| \frac{1}{\lambda^i} (\varphi_i(u, \hat{z}) - \varphi_i(u, z)) \right| \leq L \frac{1}{\lambda^i} \sqrt{\lambda^2 e_1^2 + \dots + \lambda^{2i} e_i^2} \quad (2.46)$$

καθώς $\Delta\varphi_i = \lambda^{-i}(\varphi_i(u, \hat{z}) - \varphi_i(u, z))$,

$$\|\varphi_i(u, \hat{z}) - \varphi_i(u, z)\| \leq L \|\hat{z}_i - z_i\| = L \|\lambda^{-i} e_i\| = L \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda e_i|^2} \right\|$$

όπου L η σταθερά Lipschitz της Συνθήκης. Αυτή η σταθερά εξαρτάται μόνο από το άνω φράγμα της $\|u(t)\|$, όπως προκύπτει από το Πρόγραμμα 1.1 του Θεωρήματος Καραθεοδωρή στο Κεφάλαιο 1.

Ισχύει $\frac{1}{\lambda^i} \sqrt{\lambda^2 e_1^2 + \dots + \lambda^{2i} e_i^2} \leq \frac{1}{\lambda^i} \sqrt{\lambda^{2i} (e_1^2 + \dots + e_i^2)} = \|e\|$ για εκλεγόμενο $\lambda \geq 1$, άρα

$$|\Delta\varphi_i| \leq L \|e\| \quad (2.47)$$

Καθώς, εκ κατασκευής, το ζεύγος (A, C) είναι παρατηρήσιμο, από την ανάλυση Luenberger και την συνθήκη (vii) του Θεωρήματος 2.1, η μήτρα $A + KC$ μπορεί να γίνει Hurwitz και συνεπώς να υπάρχει τετραγωνική, θετικά ορισμένη, συμμετρική μήτρα $P: n \times n$, ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση Lyapunov:

$$(A + KC)^T P + P(A + KC) = -I_n \text{ με } I_n = I \text{ την μοναδιαία μήτρα} \quad (2.48)$$

Λαμβάνοντας,

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t) \geq 0$$

Και κάνοντας χρήση της (2.44), η χρονική παράγωγος της V είναι

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T(t) P e(t) + e^T(t) P \dot{e}(t) \\ &= \lambda e^T(A + KC)^T P e + \Delta\varphi^T P e + \lambda e^T P(A + KC)e + e^T P \Delta\varphi \xrightarrow{(2.48)} \end{aligned}$$

$$\dot{V}(e) = -\lambda e^T e + 2e^T P \Delta\varphi \Rightarrow$$

$$\dot{V}(e(t)) = -\lambda \|e(t)\|^2 + 2e^T(t) P \Delta\varphi \quad (2.49)$$

καθώς $e^T(t) P \Delta\varphi + \Delta\varphi^T P e = e^T P \Delta\varphi + (P \Delta\varphi)^T e = 2e^T P \Delta\varphi$. Με χρήση της (2.47),

$$\dot{V}(e(t)) = -(\lambda - 2L\|P\|) \|e(t)\|^2 \quad (2.50)$$

από την μόνιμη ανισότητα $P \leq \|P\|$ για κάθε μήτρα.

Επίσης,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P)\|e(t)\|^2 \leq V(e(t)) = e^T(t)Pe(t) \leq \lambda_{\max}(P)\|e(t)\|^2 \Rightarrow \\ \|e(t)\|^2 \geq \frac{V(e(t))}{\lambda_{\max}(P)} \end{aligned} \quad (2.51)$$

από την μόνιμη ανισότητα (2.21). Άρα, η (2.50) γίνεται:

$$\dot{V}(e(t)) \leq -\frac{\lambda - 2L\|P\|}{\lambda_{\max}(P)}V(e(t)) \quad (2.52)$$

Λαμβάνοντας $\lambda_0 > 2L\|P\| = \beta$, τότε για κάθε $\lambda > \lambda_0$, από το Λήμμα 1.1 (Λήμμα Σύγκρισης), η (2.52) συνεπάγεται

$$V(e(t)) \leq V(e(0))e^{-(\lambda-\beta)t} \quad (2.53)$$

Άρα, $\lambda_{\min}(P)\|e(t)\|^2 \leq V(e(t)) \leq V(e(0))e^{-(\lambda-\beta)t} \leq \lambda_{\max}(P)\|e(0)\|^2 e^{-(\lambda-\beta)t} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|e(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\|e(0)\|^2 e^{-(\lambda-\beta)t} \Rightarrow \|\hat{z}(t) - z(t)\|^2 = \\ \|\Lambda(\lambda)e(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\|\Lambda(\lambda)\|^2\|e(0)\|^2 e^{-(\lambda-\beta)t} \end{aligned} \quad (2.54)$$

πράγμα που αποδεικνύει την εκθετική ευστάθεια του μετασχηματισμένου σφάλματος εκτίμησης και άρα και του σφάλματος παρατήρησης, καθώς $\|\Lambda(\lambda)\|$ φραγμένη. \square

Η πιο γενική απόδειξη της παραπάνω προσέγγισης για την εκθετική ευστάθεια βρίσκεται στο Θεώρημα 1.17 του Κεφαλαίου 1.

2.7 Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο παρόν κεφάλαιο, δόθηκαν οι θεμελιώδεις ερμηνείες της *παρατηρησιμότητας* και της συνακόλουθης σχεδίασης παρατηρητών. Η παρατηρησιμότητα των συστημάτων, ως θεμελιώδης έννοια, είναι το στοιχείο που συναρτάται αιτιωδώς με την κατασκευή παρατηρητών, καθώς παρέχει αφ' ενός τις συνθήκες για τις οποίες μπορούν αυτοί να κατασκευασθούν, αφ' ετέρου τα σχεδιαστικά εργαλεία, των οποίων οι παρατηρητές κάνουν χρήση. Παρουσιάστηκε η *τεχνική σχεδίασης για γραμμικά συστήματα*, από την οποία γεννήθηκε όλη η σύγχρονη μεθοδολογία σχεδίασης των μη γραμμικών παρατηρητών, για τους οποίους, όμως, δεν υπάρχουν καθολικές τεχνικές σχεδίασης λόγω της πολυπλοκότητάς τους. Οι σύγχρονες και βασικότερες *τεχνικές σχεδίασης μη γραμμικών παρατηρητών* συνοψίσθηκαν, με περισσότερη έμφαση στους *παρατηρητές λογικής Luenberger* και τις τεχνικές σχεδίασης βασισμένες σε εργαλεία Lyapunov, των οποίων το θεωρητικό υπόβαθρο είναι απαραίτητο στα επόμενα κεφάλαια. Δόθηκε έμφαση στους *υψικερδείς (high gain) παρατηρητές*, με βάση την λογική των οποίων θα σχεδιασθούν οι παρατηρητές των επομένων κεφαλαίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μη Γραμμικός Χρονομεταβλητός Παρατηρητής με Αυξανόμενο Κέρδος

3.1 Οριοθέτηση του Προβλήματος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δόθηκαν οι βασικότερες τεχνικές σχεδίασης παρατηρητών για διάφορες κλάσεις μη γραμμικών συστημάτων. Όλες οι τεχνικές, ειδικά οι κατά Luenberger που σχετίζονται με το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου, κάνουν χρήση κοινών σχεδιαστικών εργαλείων. Τέτοια είναι η παρατηρήσιμη κανονική μορφή, οι Lyapunov τεχνικές για την σύγκλιση του σφάλματος, οι ιδιότητες Lipschitz για την μη γραμμικότητα του συστήματος και οι ιδιότητες σχεδίασης των υψικερδών παρατηρητών.

Οι παραδοσιακές μέθοδοι, οι σχετικές με σχεδίαση υψικερδών παρατηρητών, στηρίζονται στην εφαρμογή χρονικά σταθερού κέρδους λ στην μήτρα κέρδους $\text{diag}(\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$. Όμως, η εφαρμογή εξ αρχής υψηλού και χρονικά σταθερού κέρδους προκαλεί το φαινόμενο μεταβατικών αιχμών (peaking phenomenon) που εμφανίζεται στο αρχικό σφάλμα παρατήρησης καθιστώντας το απαγορευτικά υψηλό, γεγονός που συνιστά ανεπιθύμητη συμπεριφορά στους παρατηρητές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι αρχικές εκτιμήσεις απέχουν από τις πραγματικές και ο υψηλός πολλαπλασιαστικός παράγοντας λ προκαλεί αιχμηρές αποκλίσεις. Ακολούθως, προτείνεται το μοντέλο ομαλής αύξησης του κέρδους λ με τον χρόνο, μέχρι την μέγιστη τιμή του, ώστε και το συγκλίνον σφάλμα του παρατηρητή να παρουσιάζει στην μεταβατική κατάσταση ομαλότερη συμπεριφορά, με την ίδια όμως ταχύτητα σύγκλισης με τον υψικερδή παρατηρητή. Κατ' αυτόν τον τρόπο σχεδίασης, ο προτεινόμενος παρατηρητής θα ονομάζεται *παρατηρητής αυξανόμενου κέρδους*. Η μέθοδος κατασκευής της χρονομεταβλητής αυξανόμενης μεταβλητής κέρδους λ βασίζεται κυρίως στην κατάλληλη επιλογή συναρτησιακού Lyapunov και με βάση τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για αυτό, κατασκευάζεται η παράμετρος κέρδους.

Προγενέστερες προσεγγίσεις προτάσσουν τους προσαρμοστικούς υψικερδείς παρατηρητές (Ahrens & Khalil, 2009; Andrieu, Prali & Astolfi, 2009; Boizot, Busvelle & Gauthier, 2010; Ibrir, 2009; Oueder, Farza, Ben, Abdennour, & M'Saad, 2012; Sanfelice & Praly, 2011). Η παρούσα εργασία (Alessandri & Rossi, 2013) επικεντρώνεται στην σχεδίαση του χρονομεταβλητού παρατηρητή με ορισμένες καινοτομίες, συγκριτικά με τις ήδη διαθέσιμες (Chitour, 2002; Liu, 2009; Tsinias, 2008), η οποία βασίζεται στην δομή του κανονικού υψικερδούς παρατηρητή, αλλά επιτρέπει να τεθεί στις αρχικές χρονικές στιγμές μικρές τιμές, οι οποίες αυξάνουν βαθμιαία και ομαλά.

3.2 Θεμελιώδη Σχεδιαστικά Εργαλεία

Για την σχεδίαση του προτεινόμενου παρατηρητή, πέρα από τις γενικές τεχνικές που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, απαιτούνται και ορισμένα νέα εργαλεία, όπως η επίλυση **προβλημάτων βελτιστοποίησης** (optimization problem) υποκείμενων σε μη γραμμικούς περιορισμούς (ισοτικούς και ανισοτικούς), η επίλυση **γραμμικών ανισοτήτων μητρών** (linear matrix inequalities) και η ανάπτυξη McLaurin για μία **συνάρτηση Dawson** που χρησιμοποιείται. Τα παραπάνω σχεδιαστικά εργαλεία υλοποιούνται και πρέπει να επιλύονται προγραμματιστικά για το παρόν πρόβλημα, λόγω της πολυπλοκότητάς τους. Ένα επίσης διαφορετικό σχεδιαστικό εργαλείο το οποίο χρησιμοποιείται, είναι η χρήση αντί της κλασικής τετραγωνικής συνάρτησης Lyapunov, ενός **συναρτησιακού Lyapunov**, δηλαδή μη αρνητικού συναρτησιακού της κατάστασης, που τείνει στο 0 για $t \rightarrow \infty$.

3.2.1 Γραμμικές Ανισότητες Μητρών

Η επίλυση γραμμικών ανισοτήτων μητρών της μορφής

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_N A_N < 0 \quad (3.1)$$

όπου $x = [x_1 \dots x_N]$ το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης, που πρέπει να υπολογισθούν και A_0, \dots, A_N δοσμένες συμμετρικές μήτρες, είναι κομβικό ζήτημα σε προβλήματα ελέγχου, όπως στην σθεναρή ευστάθεια, στο έλεγχο LQG, στον έλεγχο στοχαστικών συστημάτων, στον έλεγχο H_∞ κ.λ.π. Μπορεί να εκληφθεί ως κυρτός περιορισμός για το διάνυσμα μεταβλητών x

Η ανισότητα της μορφής, η οποία απαιτείται για το πρόβλημα του κεφαλαίου,

$$A^T P + PA - C^T Y - YC + \mu I < 0, \quad (3.2)$$

με περιορισμό $P > 0$ και αγνώστους $\mu > 0$, $Y = PK \in \mathbb{R}^n$ και $P > 0$.

Μπορεί εύκολα να μετασχηματισθεί στην παραπάνω μορφή $A(x) < 0$ και ο περιορισμός $P > 0$ ενσωματώνεται στην ίδια ανισότητα. Οι μήτρες P , A είναι $n \times n$ και η C $1 \times n$ και η μ βαθμωτή.

Οι παραπάνω ανισότητες λύνονται προγραμματιστικά (Gahinet & Nemirovski), με χρήση αριθμητικών μεθόδων, όπως με ελλειψοειδή αλγόριθμο και αλγορίθμους εσωτερικών σημείων (μέθοδοι κέντρων, μέθοδοι primal-dual και ειδικά η προβολική μέθοδος του Nemirovsky). Το πρόβλημα αφού ελέγχεται αν είναι επιλύσιμο (feasible) με την Matlab συνάρτηση feasp, αμέσως προκύπτουν οι λύσεις του. Το πρόβλημα εφικτότητας (feasibility) αφορά στην εύρεση πεδίου εφικτών λύσεων για μια ανισότητα:

$$F(x) < 0$$

όπου στην πραγματικότητα βρίσκεται μια ελάχιστη σταθερά t_{\min} , ώστε:

$$F(x) < t_{\min} I$$

Πρέπει η t_{\min} να είναι αρνητική ώστε το πρόβλημα να έχει εφικτή λύση, ειδικά αν δεν υπάρχει εφικτή λύση.

Η Lyapunov συνθήκη $A^T P + PA + I = 0$, μπορεί να δώσει ισχυρότερες λύσεις μέσω ανισότητας που προκύπτει από μια S - διαδικασία και γι' αυτό επιλέγεται έναντι της κλασικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 3.1. Λαμβάνοντας την Lyapunov $V(x) = x^T P x$ για το σύστημα $\dot{x} = Ax + g(x)$ με $\|g(x)\| \leq \gamma \|x\|$ και για εκθετική απαίτηση $\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x)$ ($\alpha > 0$), προκύπτει

$$\dot{V}(x) + \alpha V(x) = x^T (A^T + PA + \alpha P)x + 2x^T P z = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T + PA + \alpha P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \text{ με } z = g(x).$$

Η z ικανοποιεί την $z^T z \leq \gamma^2 x^T x$ και άρα απαιτείται $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T + PA + \alpha P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq 0$ καθ' όσον $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \geq 0$. Από την S -διαδικασία, αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν για κάποιο $\tau \geq 0$; $\begin{bmatrix} A^T + PA + \alpha P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \leq -\tau \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ ή

$$P > 0, \begin{bmatrix} A^T + PA + \alpha P + \tau \gamma^2 I & P \\ P & -\tau I \end{bmatrix} \leq 0 \text{ ή}$$

$$P \geq I, \begin{bmatrix} A^T + PA + \alpha P + \tau \gamma^2 I & P \\ P & -\tau I \end{bmatrix} \leq 0.$$

3.2.2 Ολοκλήρωμα Dawson

Το Ολοκλήρωμα ή συνάρτηση Dawson, είναι της μορφής:

$$F(x) = D_+(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{s^2} ds \quad (3.3)$$

$$D_-(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-s^2} ds \quad (3.4)$$

Στο πρόβλημα που επακολουθεί γίνεται χρήση της μορφής (3.4), η οποία ικανοποιεί το διαφορικό πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} D'_-(x) - 2xD_-(x) = 1 \\ D_-(0) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Αναζητείται ανάπτυγμα σειράς MacLaurin για την συνάρτηση (3.4), οπότε θεωρείται μια λύση του προβλήματος Cauchy (3.5) στο $(-r, r)$; $r > 0$ της μορφής

$$D_-(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.6)$$

Η MacLaurin σειρά έχει παράγοντες $a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$. Η n -οστή παράγωγος της D_- στο 0 προκύπτει από το (3.5) εύκολα παραγωγίζοντας διαδοχικά και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $D_-(0) = 0$. Έτσι, μετά προφανείς πράξεις, προκύπτει επαγωγικά για κάθε φυσικό n ότι:

$$\begin{cases} a_{2n} = 0 \\ a_{2n+1} = \frac{2^n}{(2n+1)!!} \end{cases} \quad (3.7)$$

όπου το διπλό παραγοντικό ορίζεται από

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n, & n \text{ περιττός} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \quad (3.8)$$

Η προκύψασα λύση

$$D_-(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \quad (3.9)$$

ισχύει για κάθε x , με ακτίνα σύγκλισης $r = \infty$, καθώς υπακούει στο Θεώρημα Cauchy.

Θεώρημα 3.1 (Cauchy). Έστω f αναλυτική επί ανοικτού συνόλου $\text{dom } f \subseteq K \times F$, που λαμβάνει τιμές στο F , όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} . Το πρόβλημα αρχικών τιμών $\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ έχει μοναδική τοπική αναλυτική λύση.

3.2.3 Μη Γραμμικός Προγραμματισμός

Κατά την σχεδίαση του παρατηρητή, θα επιλυθεί ένα περίπλοκο πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού υπολογιστικά.

Το πρόβλημα έγκειται στην ελαχιστοποίηση μιας μη γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης που υπόκειται σε φραγμένους περιορισμούς, γραμμικούς ή μη γραμμικούς και όπου αυτοί είναι ισοτικοί ή ανισοτικοί.

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & \text{υπό περιορισμούς:} \\ & h(x) = c \\ & g(x) \leq b \\ & lb \leq x \leq ub \\ & x = (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος είναι οι:

- Interior-point, ειδικά για μεγάλης κλίμακος προβλήματα αραιής δομής.
- SQP (Sequential Quadratic Programming) είναι επαναληπτικός αλγόριθμος που επιλύει γενικό μη γραμμικό πρόβλημα και θέτει φράγματα σε κάθε επανάληψη.
- Active-Set: Επιλύει προβλήματα με όλους τους συνδυασμούς περιορισμών.
- Trust-region reflective: επιλύει προβλήματα φραγμένου περιορισμού ή γραμμικές ισότητες μόνον.

Η συνάρτηση `fmincon` στο Matlab επιλύει τέτοια προβλήματα εύρεσης ελαχίστου υπό περιορισμούς μιας βαθμωτής συνάρτησης, αρχίζοντας από μια αρχική εκτίμηση για την λύση και εκτελώντας επαναλήψεις.

3.3 Σχεδίαση Παρατηρητή

Ακολουθεί η διαδικασία σχεδίασης, στην βάση των προαναφερθέντων εργαλείων, βήμα προς βήμα (Alessandri & Rossi).

3.3.1 Παρουσίαση και Υποθέσεις του Προβλήματος

Μελετάται στο παρόν πρόβλημα η ακόλουθη κλάση τριγωνικών μη γραμμικών συστημάτων (συνεχούς χρόνου):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(x(t), t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (3.10)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3.11)$$

$$\varphi(x(t), t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1(t), t) \\ \varphi_2(x_1(t), x_2(t), t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), t) \\ \varphi_n(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Το διάνυσμα $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης και το $y(t) \in \mathfrak{R}$ η βαθμωτή μέτρηση, οι μήτρες $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $C \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ στην παρατηρήσιμη κανονική μορφή και η τριγωνική μη γραμμικότητα $\varphi: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_{\geq 0}^{19} \rightarrow \mathfrak{R}^n$. Στα επόμενα, χάριν ευκρίνειας, το όρισμα t του χρόνου στις εκάστοτε χρονομεταβλητές συναρτήσεις πολλές φορές θα παραλείπεται.

Βάσει της ανάλυσης στην §2.5, τα παρατηρήσιμα συστήματα μπορούν να μετασχηματισθούν κατόπιν κατάλληλου διαφομορφισμού στην κανονική μορφή, οπότε λαμβάνεται απευθείας αυτή η δομή και για αυτόν τον λόγο θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι το πρόβλημα αφορά σχεδίαση ευρύτερης κλάσης μη γραμμικών συστημάτων. Ειδικά η τριγωνική δομή (3.10), όπως φάνηκε στο Κεφάλαιο 2, είναι προτιμητέα για την σχεδίαση, λόγω των ιδιοτήτων της. Όπως ειπώθηκε στην Εισαγωγή, η σχεδίαση που θα ακολουθηθεί είναι της λογικής των υψικερδών παρατηρητών, με την διαφορά ότι εδώ το διαγώνιο στοιχείο $\lambda^i; i = 1, \dots, n$ της διαγωνίου μήτρας κέρδους $\Lambda(\lambda)$ είναι χρονομεταβλητή, οπότε $\lambda := \lambda(t)$.

Ακολουθούν οι σχεδιαστικές υποθέσεις για την συνήθη Lipschitz συνθήκη, αλλά και για την παράμετρο $\lambda(t)$, εκ των οποίων η 3.1 είναι απαραίτητη συνθήκη για την καθολική ύπαρξη των λύσεων του μη γραμμικού συστήματος (3.10), όπως αναλύθηκε διεξοδικά στην §1.2.2 του Κεφαλαίου 1, και οι Συνθήκες 3.2, 3.3 είναι οι αντίστοιχες προϋποθέσεις για την καθολική ύπαρξη λύσεων του δυναμικού συστήματος του παρατηρητή.

Υπόθεση 3.1. Υπάρχει $L \in \mathfrak{R}^n, L = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]$ με $L_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, τέτοιο ώστε:

$$|\varphi_i(x_1 + w_1, x_2 + w_2, \dots, x_i + w_i) - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_i)| \leq L_i \sum_{j=1}^i |w_j| \quad \forall w_i \in \mathfrak{R} \quad (3.13)$$

¹⁹ Το $\mathfrak{R}_{\geq 0}$ συμβολίζει το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών.

και $i = 1, 2, \dots, n$. \square

Υπόθεση 3.2. Η συνάρτηση $t \mapsto \lambda(t)$ είναι συνεχής στο $\mathfrak{R}_{\geq 0}$, ισχύει $\lambda(t) \geq 1 \forall t \geq 0$ και υπάρχει σταθερά, για την οποία:

$$|\lambda(t)| \leq c_0, \forall t \geq 0 \quad (3.14)$$

Υπόθεση 3.3. Η συνάρτηση $t \mapsto \lambda(t)$ είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού και η παράγωγος $\dot{\lambda}(t)$ είναι σχεδόν παντού φραγμένη στο $\mathfrak{R}_{\geq 0}$. \square

3.3.2 Χαρακτηριστικά του Παρατηρητή

Επιλέγεται η κλασική δομή υψικερδούς παρατηρητή πλήρους τάξης, όπως στο Κεφάλαιο 2:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), t) + \Lambda(\lambda(t))K(y - C\hat{x}(t)) \quad (3.15)$$

Η διαγώνιος μήτρα Λ είναι της μορφής

$$\Lambda(\lambda(t)) = \begin{bmatrix} \lambda(t) & 0 & & 0 \\ & \lambda^2(t) & & \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda^n(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

και το διάνυσμα κέρδους $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$ είναι το διάνυσμα κατάλληλα επιλεγόμενων κερδών $k_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Το γινόμενο $\Lambda(\lambda(t))K$ μπορεί να παρασταθεί από την μήτρα

$$G(\lambda(t)) = \text{diag}(k_1\lambda(t) \ k_2\lambda^2(t) \ \dots \ k_n\lambda^n(t)). \quad (3.17)$$

Όπως και στο Θεώρημα 2.10, επιλέγεται μετασχηματισμένο σφάλμα παρατήρησης, του οποίου η ασυμπτωτική ευστάθεια εξασφαλίζει την ευστάθεια του σφάλματος παρατήρησης

$$\hat{e}(t) = \hat{x}(t) - x(t), \quad (3.18)$$

βάσει της Υπόθεσης 3.2. Αυτό γίνεται για να παραχθεί κατάλληλη δομή δυναμικής σφάλματος παρατήρησης, που διευκολύνει τις πράξεις. Επιλέγεται η αλλαγή συντεταγμένων:

$$\hat{e}(t) = T(\lambda(t))e(t) \text{ με } e \in \mathfrak{R}^n \quad (3.19)$$

Ο μετασχηματισμός $T(\lambda(t))$ επιλέγεται ίσος με την διαγώνιο μήτρα $\Lambda(\lambda(t))$ της (3.16).

$$T(\lambda(t)) := \Lambda(\lambda(t)) \quad (3.20)$$

Από (3.10) και (3.15), το σφάλμα παρατήρησης $\hat{e}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ έχει την κάτωθι δυναμική:

$$\dot{\hat{e}}(t) = (A - G(\lambda(t))C)\hat{e}(t) + \varphi(x(t), t) - \varphi(\hat{x}(t), t) \quad (3.21)$$

Η διαφορά των μη γραμμικοτήτων, πρωτότυπης και παρατηρούμενης, συμβολίζεται με $\Delta\varphi = [\Delta\varphi_1 \ \dots \ \Delta\varphi_n]^T$, όπου

$$\Delta\varphi := \varphi(x(t), t) - \varphi(\hat{x}(t), t) = \varphi(x(t), t) - \varphi(x(t) - \hat{e}(t), t) \quad (3.22)$$

$$\dot{\hat{e}}(t) = (A - G(\lambda(t))C)\hat{e}(t) + \Delta\varphi \quad (3.23)$$

Λήμμα 3.1. Έστω η απεικόνιση $t \mapsto \lambda(t)$, για την οποία (από την Υπόθεση 3.2) $\lambda(t) \geq 1, |\lambda(t)| \leq c_0; \forall t \geq 0$. Ισχύουν τα εξής συμπεράσματα:

- (i) Το μετασχηματισμένο σφάλμα e της (3.19) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν το πρωτότυπο σφάλμα \hat{e} της (3.18) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- (ii) Υπάρχει θετική σταθερά k_φ , για την οποία ισχύει η ανισότητα:

$$\left\| \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \left(\varphi(x(t), t) - \varphi(x(t) - \Lambda(\lambda(t))e(t), t) \right) \right\| \leq k_\varphi \|e(t)\|$$

για κάθε $t \geq 0$ και k_f ανεξάρτητη των $\lambda(t), t$, ή ισοδύναμα, βάσει της (3.21):

$$\left\| \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \Delta \varphi \right\| \leq k_\varphi \|e(t)\|^{20} \quad (3.24)$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση $\lambda(t) \geq 1$, η αντίστροφη της $\Lambda(\lambda(t))$ είναι πάντοτε καλώς ορισμένη για κάθε $t \geq 0$. Βάσει του συμβολισμού της νόρμας, εύκολα προκύπτει από την (3.16) για την διαγώνια αντιστρέψιμη μήτρα $\Lambda(\lambda(t))$:

$$\left\| \Lambda(\lambda(t)) \right\| = \lambda_{\max}(\Lambda(\lambda(t))) = \lambda^n(t) \text{ και } \left\| \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \right\| = \lambda_{\max}(\Lambda^{-1}(\lambda(t))) = \lambda^{-1}(t).$$

Από την (3.19) και την Υπόθεση 3.2, ισχύει

$$\left\| \hat{e}(t) \right\| \leq \left\| \Lambda(\lambda(t)) \right\| \|e(t)\| = \lambda^n(t) \|e(t)\| \leq c_0^n \|e(t)\| \quad (3.25)$$

και επειδή, επίσης,

$$\|e(t)\| \leq \left\| \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \right\| \|\hat{e}(t)\| = 1/\lambda(t) \|\hat{e}(t)\| \leq \|\hat{e}(t)\| \quad (3.26)$$

ισχύει η ιδιότητα (i).

Για την ιδιότητα (ii) ισχύει

$$\begin{aligned} & \left\| \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \cdot \left(\varphi(x(t), t) - \varphi(x(t) - \Lambda(\lambda(t))e(t), t) \right) \right\| \\ & = \left\| \Lambda^{-1} \cdot \left(\varphi(x) - \varphi(x - \Lambda e) \right) \right\|^{21} = \left\| \Lambda^{-1} \cdot \Delta \varphi \right\| \\ & = \left\| \begin{array}{c} \frac{1}{\Lambda_{11}} (\varphi_1(x_1) - \varphi_1(x_1 - \Lambda_{11}e_1)) \\ \frac{1}{\Lambda_{22}} (\varphi_2(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1 - \Lambda_{11}e_1, x_2 - \Lambda_{22}e_2)) \\ \vdots \\ \frac{1}{\Lambda_{nn}} (\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - \varphi_n(x_1 - \Lambda_{11}e_1, x_2 - \Lambda_{22}e_2, \dots, x_n - \Lambda_{nn}e_n)) \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (3.27)$$

όπου $\Lambda_{ii} := \Lambda_{ii}(\lambda(t)) = \lambda^i(t); i = 1, 2, \dots, n$.

Επειδή, για $\lambda \geq 1; \lambda^j \leq \lambda^i \Leftrightarrow \Lambda_{jj} \leq \Lambda_{ii}; j = 1, 2, \dots, i$ και από την Υπόθεση 3.1,

²⁰ Η χρησιμοποιούμενη νόρμα $\|\cdot\|$ απεικονίζει την πράξη $\|M\| := \sqrt{\lambda_{\max}(M^T M)}$ για κάθε πραγματική μήτρα, όπου $\lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(P)$ συμβολίζουν την μέγιστη και ελάχιστη ιδιοτιμή μιας συμμετρικής μήτρας P . Αν επιπλέον, $P > 0$ (θετικά ορισμένη), τότε $\|P\| = \lambda_{\max}(P)$.

²¹ Για ευκρίνεια των πράξεων, το όρισμα λ της μήτρας Λ , τα χρονικά όρισματα των διανυσμάτων αλλά και το δεύτερο χρονικό όρισμα της φ , πολλές φορές παραλείπονται, δηλαδή $\varphi(x) := \varphi(x(t), t)$.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\Lambda_{ii}} (\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_i) - \varphi_i(x_1 - \Lambda_{11}e_1, x_2 - \Lambda_{22}e_2, \dots, x_i - \Lambda_{ii}e_i)) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\Lambda_{ii}} \right| L_i \sum_{j=1}^i |\Lambda_{jj}e_j| \leq L_i \sum_{j=1}^i |e_j|; \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.28)$$

Για την νόρμα της (3.27), μέσω της (3.28)

$$\| \Lambda^{-1} \cdot \Delta\varphi \| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\Lambda_{ii}} \Delta\varphi_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(L_i \sum_{j=1}^i |e_j| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

Ισχύει προφανώς

$$\left(L_i \sum_{j=1}^i |e_j| \right)^2 \leq i L_i^2 \sum_{j=1}^i e_j^2 \quad (3.30)$$

Άρα, η (2.30) γίνεται

$$\| \Lambda^{-1} \cdot \Delta\varphi \| \leq \left(\sum_{i=1}^n i L_i^2 \sum_{j=1}^i e_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{i=1,2,\dots,n} L_i \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \|e\| \quad (3.31)$$

Οπότε η k_φ επιλέγεται ίση με

$$k_\varphi := \max_{i=1,2,\dots,n} L_i \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (3.32)$$

και συνεπώς αποδεικνύεται η (ii).

Από (3.19), παράγεται η δυναμική του σφάλματος στις νέες συντεταγμένες ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \Lambda(\lambda(t))e(t) \Rightarrow \dot{e}(t) = \Lambda'(\lambda(t))\dot{\lambda}(t)e(t) + \Lambda(\lambda(t))\dot{e}(t) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \dot{e}(t) = \Lambda^{-1}(\lambda(t))\dot{e}(t) - \Lambda^{-1}(\lambda(t))\Lambda'(\lambda(t))\dot{\lambda}(t)e(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Δεδομένου ότι λόγω της ειδικής δομής του δυναμικού συστήματος, ισχύουν κατόπιν απλών πράξεων:

$$\Lambda^{-1}(\lambda(t)) \cdot A \cdot \Lambda(\lambda(t)) = \lambda(t) \cdot A \quad (3.34)$$

$$\Lambda^{-1}(\lambda(t)) \cdot G(\lambda(t)) \cdot C \cdot \Lambda(\lambda(t)) = \Lambda^{-1}(\lambda(t))\Lambda(\lambda(t))KC\Lambda(\lambda(t)) = \lambda(t)KC \quad (3.35)$$

Επομένως, με χρήση της (3.21) αλλά και των (3.34), (3.35), η (3.33) γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \cdot (A - G(\lambda(t)) \cdot C) - \Lambda^{-1}(\lambda(t))\Lambda'(\lambda(t))\dot{\lambda}(t)e(t) + \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \\ & \quad \cdot (\varphi(x(t), t) - \varphi(x(t) - \Lambda(\lambda(t))e(t), t)) \\ & \Rightarrow \dot{e}(t) = \lambda(t)(A - KC)e(t) - \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))e(t) + \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \cdot \Delta\varphi \end{aligned} \quad (3.35)$$

όπου η μητρά $S(\lambda(t))$ είναι

$$S(\lambda(t)) := \Lambda^{-1}(\lambda(t))\Lambda'(\lambda(t)) = \frac{1}{\lambda(t)} \text{diag}(1, 2, \dots, n) \quad (3.36)$$

$$\text{καθώς } \Lambda'(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & 2\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \dots & n\lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \text{diag}(1, 2, \dots, n).$$

και η διαφορά $\Delta\varphi$ είναι

$$\Delta\varphi := \varphi(x(t), t) - \varphi(\hat{x}(t), t) = \varphi(x(t), t) - \varphi(x(t) - \hat{e}(t), t). \quad \square$$

3.3.3 Μελέτη Ευστάθειας κατά Lyapunov

Θα ακολουθηθεί η συνήθης τεχνική ικανοποίησης συνθηκών εκθετικής ευστάθειας με χρήση εργαλείων Lyapunov, όπως στους υψικερδείς παρατηρητές, μόνο που εν προκειμένω, μέσω αυτής της μεθόδου θα ευρεθεί η άγνωστη και ζητούμενη παράμετρος κέρδους $\lambda(t)$, προκειμένου να σχεδιασθεί και το δυναμικό σύστημα του υπό μελέτη παρατηρητή.

Καθώς, εκ κατασκευής, το ζεύγος (A, C) είναι παρατηρήσιμο, από την ανάλυση Luenberger και το (vii) του Θεωρήματος 2.1 του Κεφαλαίου 2, η μήτρα $A - KC$ μπορεί να γίνει Hurwitz με κατάλληλη επιλογή του K και συνεπώς να υπάρχει ζεύγος τετραγωνικών, θετικά ορισμένων, συμμετρικών μητρών $P: n \times n$, $Q: n \times n$ ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση Lyapunov $(A - KC)^T P + P(A - KC) = -Q$. Εν προκειμένω, για σχεδιαστικούς λόγους, επιλέγεται ανισοτική μορφή της παραπάνω συνθήκης, συνεπώς, δεδομένου ότι (A, C) παρατηρήσιμο, υπάρχει τετραγωνική, θετικά ορισμένη, συμμετρική μήτρα $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ και σταθερά $\mu > 0$, που ικανοποιούν την

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + \mu I < 0 \quad (3.37)$$

Εν συνεχεία, επιλέγεται η συνάρτηση Lyapunov για το σφάλμα $e(t)$, με δυναμική αυτήν της (3.35). Εδώ, δεν επιλέγεται η συνήθης τετραγωνική μορφή της §2.6 των υψικερδών παρατηρητών, αλλά λόγω της χρονομεταβλητότητας της παραμέτρου λ , επιλέγεται ένα συναρτησιακό, το οποίο κατασκευάζεται με τρόπο ώστε να παραχθούν οι συναρτήσεις $A_{\alpha, \eta}$ και $B_{\alpha, \eta}$, όπως θα φανεί ακολούθως, και η μορφή του να είναι κατάλληλη για την αλγοριθμική σχεδίαση της χρονομεταβλητής παραμέτρου $\lambda(t)$.

Δοθέντων μήτρας P , που ικανοποιεί την (3.37) και οποιασδήποτε σταθεράς $\alpha > 0$, θεωρείται το συναρτησιακό Lyapunov $\mathcal{W}: (z, t) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}$ με τύπο

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(z, t) := & z^T P z \\ & + 2e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| \left(\Lambda^{-1}(\lambda(s)) \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \left(\varphi(x(s)) - \varphi(x(s) - \Lambda(\lambda(s)) \cdot e(s)) \right) \right)^T P e(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \end{aligned}$$

ή πιο σύντομα

$$\mathcal{W}(z, t) := z^T P z + 2e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| \left(\Lambda^{-1}(\lambda(s)) \cdot \Delta\varphi \right)^T P e(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \quad (3.38)$$

στο οποίο, όπως στις παραδοχές στο Σχόλιο²¹, τα χρονικά ορίσματα παραλείπονται.

Στην (3.38), οι απεικονίσεις $t \mapsto x(t)$ και $t \mapsto e(t)$ αντιστοιχούν στις λύσεις των (3.10) και (3.35).

Παρατηρείται ότι $\mathcal{W}(z, t) \geq 0 \forall z, t$ και $\mathcal{W}(z, t) = 0$ αν και μόνον αν $e(t) = 0 \forall t \geq 0$ και $z = 0$, σε ακολουθία με την αρχή αναλλοίωτου του LaSalle (Πόρισμα 1.4, §1.3, Κεφάλαιο 1).

Καθώς θα απαιτηθεί η εφαρμογή των συνθηκών εκθετικής ευστάθειας, όπως αναλύονται στο Θεώρημα 1.17 (§1.3.4, Κεφάλαιο 1), προκειμένου αυτές να οδηγήσουν στην σχεδίαση της ζητούμενης παραμέτρου $\lambda(t)$, πρέπει να προηγηθεί η ακόλουθη ανάλυση.

Λήμμα 3.2. Για $\lambda(t) \geq 1$, αν υπάρχει $\eta > 0$, τέτοιο ώστε

$$\eta \geq \sup_{t \geq 0} \{ \|\lambda(t)(A - KC) - \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\| \} \quad (3.39)$$

με $S(\lambda(t))$ την μήτρα της (3.36), τότε ισχύουν οι ανισότητες:

$$e^{at^2} \int_t^\infty \|e(s)\|^2 e^{-as^2} ds \leq A_{\alpha, \eta}(t) \|e(t)\|^2 \quad (3.40)$$

$$te^{at^2} \int_t^\infty \|e(s)\|^2 e^{-as^2} ds \leq B_{\alpha, \eta}(t) \|e(t)\|^2 \quad (3.41)$$

όπου οι συναρτήσεις $A_{\alpha, \eta}$ και $B_{\alpha, \eta}$ ορίζονται ως εξής:

- Η $A_{\alpha, \eta}: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}$ είναι διαφορίσιμη και γνησίως φθίνουσα και ορίζεται από:

$$A_{\alpha, \eta}(t) := e^{at^2 - 2(\eta + k_\varphi)t} \int_t^\infty e^{-as^2 + 2(\eta + k_\varphi)s} ds \quad (3.42)$$

- Η $B_{\alpha, \eta}: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}$ είναι διαφορίσιμη και ορίζεται ως εξής:

$$B_{\alpha, \eta}(t) := te^{at^2 - 2(\eta + k_\varphi)t} \int_t^\infty e^{-as^2 + 2(\eta + k_\varphi)s} ds = tA_{\alpha, \eta}(t) \quad (3.43)$$

και ισχύουν

$$(i) \quad \dot{B}_{\alpha, \eta}(t) = (1 + 2at^2 - 2(\eta + k_\varphi)t)A_{\alpha, \eta}(t) - t \quad (3.44)$$

- (ii) Υπάρχει $t_{max} > 0$, για το οποίο η $B_{\alpha, \eta}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, t_{max}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[t_{max}, \infty)$.

- (iii) Η $B_{\alpha, \eta}$ είναι κοίλη στο $[0, t_{max}]$.

Απόδειξη. Η δυναμική του σφάλματος e στις νέες συντεταγμένες, τίθεται ως πρόβλημα αρχικών τιμών από την (3.35) ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{e}(\tau) = \lambda(\tau)(A - KC)e(\tau) - \dot{\lambda}(\tau)S(\lambda(\tau))e(\tau) + \\ \Lambda^{-1}(\lambda(\tau)) \left(\varphi(x(\tau), \tau) - \varphi(x(\tau) - \Lambda(\lambda(\tau))e(\tau), \tau) \right) & \tau \geq t_0 \Leftrightarrow \\ e(t_0) = e_0 \in \mathfrak{R}^n \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\begin{cases} \dot{e}(\tau) = \lambda(\tau)(A - KC)e(\tau) - \dot{\lambda}(\tau)S(\lambda(\tau))e(\tau) + \Lambda^{-1}(\lambda(\tau))\Delta\varphi \\ e(t_0) = e_0 \in \mathfrak{R}^n \end{cases}$$

και $S(\lambda(\tau)) := \frac{1}{\lambda(\tau)} \text{diag}(1, 2, \dots, n)$.

Η (3.45) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$e(\tau) = e_0 + \int_{t_0}^{\tau} \left((\lambda(s)(A - KC) - \dot{\lambda}(s)S(\lambda(s))) e(s) + \Lambda^{-1}(\lambda(s)) \cdot \Delta\varphi \right) ds$$

Από (3.24) και (3.39) και την μόνιμη ανισότητα $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, προκύπτει

$$\begin{aligned} \|e(\tau)\| &\leq \|e_0\| + \int_{t_0}^{\tau} (\|\lambda(s)(A - KC) - \dot{\lambda}(s)S(\lambda(s))\| \|e(s)\| + k_{\varphi} \|e(s)\|) ds \Rightarrow \\ \|e(\tau)\| &\leq \|e_0\| + \int_{t_0}^{\tau} (\eta + k_{\varphi}) \|e(s)\| ds, \quad \tau \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Από το Λήμμα 1.2 του Grönwall (§1.2.3, Κεφάλαιο 1), έπεται

$$\|e(\tau)\| \leq \|e_0\| e^{(\eta+k_{\varphi})(\tau-t_0)}, \quad \forall \tau \geq t_0 \quad (3.47)$$

Εφαρμόζοντας την (3.47) στο αριστερό μέλος της (3.40), προκύπτει

$$e^{at^2} \int_t^{\infty} \|e(s)\|^2 e^{-as^2} ds \leq e^{at^2} \int_t^{\infty} \|e(t)\|^2 e^{2(\eta+k_{\varphi})(s-t)} e^{-as^2} ds = A_{\alpha,\eta}(t) \|e(t)\|^2$$

Περαιτέρω, μελετάται η συμπεριφορά των $A_{\alpha,\eta}$, $B_{\alpha,\eta}$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_{\alpha,\eta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{\infty} e^{-as^2+2(\eta+k_{\varphi})s} ds}{e^{-at^2+2(\eta+k_{\varphi})t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2at - 2(\eta + k_{\varphi})} = 0$$

από τον κανόνα De L'Hôpital.

Για να δειχθεί ότι η $A_{\alpha,\eta}$ είναι γνησίως άυξουσα, λαμβάνεται η παράγωγος

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\alpha,\eta}(t) &= (2at - 2(\eta + k_{\varphi})) e^{at^2-2(\eta+k_{\varphi})t} \int_t^{\infty} e^{-as^2+2(\eta+k_{\varphi})s} ds - 1 \\ &= \omega(t) e^{at^2-2(\eta+k_{\varphi})t} \end{aligned} \quad (3.48)$$

όπου η διαφορίσιμη συνάρτηση $\omega: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}$ ορίζεται από

$$\omega(t) := (2at - 2(\eta+k_{\varphi})) \int_t^{\infty} e^{-as^2+2(\eta+k_{\varphi})s} ds - e^{-at^2+2(\eta+k_{\varphi})t} \quad (3.49)$$

Η αρχική τιμή

$$\omega(0) = -2(\eta+k_{\varphi}) \int_0^{\infty} e^{-as^2+2(\eta+k_{\varphi})s} ds - 1$$

είναι αυστηρά αρνητική και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$$

καθώς $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds = 0$ και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_{\varphi})t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha t^2}}{e^{-2(\eta + k_{\varphi})t}} = 0 \text{ από Θεώρημα De L'Hôpital.}$$

Επιπλέον, η παράγωγος της ω είναι

$$\dot{\omega}(t) = 2\alpha \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (3.50)$$

Άρα, η ω είναι γνησίως αύξουσα και $\omega(t) < 0$ στο $\mathfrak{R}_{\geq 0}$. Με χρήση της (3.48) αποδεικνύεται η μονοτονία της $A_{\alpha, \eta}$, καθώς $\dot{A}_{\alpha, \eta}(t) < 0 \quad \forall t \geq 0$.

Παρομοίως, η $B_{\alpha, \eta}$, όπως δίνεται από την (3.43), είναι διαφορίσιμη και $B_{\alpha, \eta}(t) > 0; \quad \forall t > 0$. Επιπλέον, $B_{\alpha, \eta}(0) = 0$ και καθώς από τον κανόνα De L'Hôpital

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds = 0$$

προκύπτει έπειτα από απλές αλγεβρικές πράξεις:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_{\alpha, \eta}(t) = \frac{1}{2\alpha} > 0 \quad (3.51)$$

Η παράγωγος της $B_{\alpha, \eta}$ είναι:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\alpha, \eta}(t) &= e^{\alpha t^2 - 2(\eta + k_{\varphi})t} \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds \\ &\quad + t(2\alpha t - 2(\eta + k_{\varphi}))e^{\alpha t^2 - 2(\eta + k_{\varphi})t} \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds - t \end{aligned} \quad (3.52)$$

και άρα αποδεικνύεται η (3.44).

Θεωρείται

$$\dot{B}_{\alpha, \eta}(t) = e^{\alpha t^2 - 2(\eta + k_{\varphi})t} \psi(t) \quad (3.53)$$

όπου η $\psi: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}$ δίνεται από:

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds + (2\alpha t^2 - 2(\eta + k_{\varphi})t) \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds \\ &\quad - t e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_{\varphi})t} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Η ψ είναι διαφορίσιμη, $\psi(0) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds > 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ και

$$\dot{\psi}(t) = -e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_\varphi)t} + (4\alpha t - 2(\eta + k_\varphi)) \int_t^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_\varphi)s} ds - e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_\varphi)t}$$

Θέτοντας

$$\delta(t) := (2\alpha t - (\eta + k_\varphi)) \int_t^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_\varphi)s} ds - e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_\varphi)t}$$

έπεται

$$\delta(0) := -(\eta + k_\varphi) \int_0^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_\varphi)s} ds - 1 < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$$

$$\dot{\delta}(t) = 2\alpha \int_t^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_\varphi)s} ds - (\eta + k_\varphi) e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_\varphi)t}$$

Παρατηρείται ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\delta}(t) = 0$$

$$\dot{\delta}(0) = 2\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_\varphi)s} ds - (\eta + k_\varphi) > (\eta + k_\varphi) + \sqrt{\alpha\pi} e^{\frac{(\eta + k_\varphi)^2}{\alpha}} > 0$$

και

$$\dot{\delta}(t) = -2\alpha e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_\varphi)t} - (\eta + k_\varphi) (-2\alpha t + 2(\eta + k_\varphi)) e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_\varphi)t} > 0$$

αν και μόνον αν $t > t_1 := \frac{(\eta + k_\varphi)^2 + \alpha}{a(\eta + k_\varphi)}$.

Τότε, η δ είναι φθίνουσα στο $[0, t_1]$ και άυξουσα στο $[t_1, \infty)$. Επειδή $\delta(0) > 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $t_2 \in [0, t_1]$, ώστε $\delta(t_2) = 0$.

Καθώς $\dot{\delta}(t) > 0$ για $t \in [0, t_2]$, $\dot{\delta}(t) < 0$ για $t \in [t_2, \infty)$ και $\dot{\psi}(t) = 2\delta(t)$, έπεται ότι η ψ είναι αύξουσα στο $[0, t_2]$ και φθίνουσα στο $[t_2, \infty)$.

Συνεπώς, από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $t_3 \in (0, t_2)$, τέτοιο ώστε $\dot{\psi}(t) < 0$ για $t \in [0, t_3)$ και $\dot{\psi}(t) > 0$ για $t \in (t_3, \infty)$, καθ' ότι $\dot{\psi}(0) = 2\delta(0) < 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi}(t) = 0$.

Άρα, η ψ φθίνει στο $[0, t_3]$ και αυξάνει στο $[t_3, \infty)$. Καθ' ότι $\psi(0) > 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$, υπάρχει χρονική στιγμή $t_{\max} \in (0, t_3)$, για την οποία $\psi(t) > 0$ για $t \in [0, t_{\max})$ και $\psi(t) < 0$ για $t \in (t_{\max}, \infty)$.

Επομένως, από την (3.53) λαμβάνεται ότι η $B_{\alpha,\eta}(t)$ είναι αύξουσα στο $[0, t_{\max}]$ και φθίνουσα στο $[t_{\max}, \infty)$. Επιπλέον, επειδή $B_{\alpha,\eta}(0) = 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} B_{\alpha,\eta}(t) = \frac{1}{2\alpha}$, η $B_{\alpha,\eta}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο t_{\max} και $B_{\alpha,\eta}(t_{\max}) > \frac{1}{2\alpha}$.

Για την μελέτη της κυρτότητας της $B_{\alpha,\eta}$ στο $[0, t_{\max}]$, λαμβάνεται λεπτομερέστερα η διαφορίσιμη $\dot{B}_{\alpha,\eta}$.

$$\dot{B}_{\alpha,\eta}(0) = \psi(0) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds > 0$$

και $\dot{B}_{\alpha,\eta}(t_{\max}) = 0$.

Επιπλέον,

$$\ddot{B}_{\alpha,\eta}(t) = e^{\alpha t^2 - 2(\eta + k_{\varphi})t} \left(\dot{\psi}(t) + 2(\alpha t - (\eta + k_{\varphi}))\psi(t) \right) = e^{\alpha t^2 - 2(\eta + k_{\varphi})t} \zeta(t)$$

όπου η $\zeta: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από:

$$\zeta(t) := \dot{\psi}(t) + 2(\alpha t - (\eta + k_{\varphi}))\psi(t)$$

είναι διαφορίσιμη και $\zeta(0) < 0$ και $\zeta(t_{\max}) = \dot{\psi}(t_{\max}) < 0$

Από την (3.54), ισχύει, καθώς $\psi(t) > 0; \forall t \in [0, t_{\max}]$

$$(1 + 2\alpha t^2 - 2(\eta + k_{\varphi})t) \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds > t e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_{\varphi})t} \quad (3.55)$$

$\forall t \in [0, t_{\max}]$.

Επίσης, καθώς $\dot{\psi}(t) < 0; \forall t \in [0, t_{\max}]$:

$$(2\alpha t - (\eta + k_{\varphi})) \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds - e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_{\varphi})t} < e^{-\alpha t^2 + 2(\eta + k_{\varphi})t} \quad (3.56)$$

$\forall t \in [0, t_{\max}]$

Από τις ανισότητες (3.55) και (3.56), μετά από σύντομες πράξεις, προκύπτει ότι

$$\dot{\zeta}(t) = \ddot{\psi}(t) + 2\alpha\psi(t) + 2(\alpha t - (\eta + k_{\varphi}))\dot{\psi}(t) > 2(\eta + k_{\varphi})^2 \int_t^{\infty} e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_{\varphi})s} ds$$

Για $0 \leq t < t_{\max}$.

Οπότε, $\dot{\zeta}(t) > 0$ και η ζ είναι γνησίως αύξουσα $\forall t \in [0, t_{\max}]$. Συμπεραίνεται επομένως ότι $\zeta(t) < 0$, $\ddot{B}_{\alpha,\eta}(t) < 0 \forall t \in [0, t_{\max}]$ και άρα η $\dot{B}_{\alpha,\eta}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεπώς η $B_{\alpha,\eta}$ είναι κοίλη στο παραπάνω χρονικό διάστημα. \square

Πλέον, με την αναλυτική μελέτη των ιδιοτήτων των χρονομεταβλητών συναρτήσεων $A_{\alpha,\eta}$ και $B_{\alpha,\eta}$, θα δοθούν σημαντικές ανισότητες, τις οποίες

ικανοποιεί το συναρτησιακό Lyapunov $\mathcal{W}(z, t) := z^T P z + 2e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| (\Lambda^{-1}(\lambda(s)) \cdot \Delta\varphi)^T P e(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds$ της (3.38).

Θεώρημα 3.2. Έστω e λύση της δυναμικής του σφάλματος εκτίμησης (3.35) και $\mu > 0$, $P > 0$ και διάνυσμα κέρδους K , για τα οποία η ανισότητα (3.37) $(A - KC)^T P + P(A - KC) + \mu I < 0$ να ισχύει για κάθε $t \geq 0$ και έστω ότι $\dot{\lambda}(t) \geq 0$ σχεδόν παντού²² στο $t \geq 0$. Τότε, για το συναρτησιακό $\mathcal{W}(z, t)$ ισχύει ότι είναι καλώς ορισμένο και ισχύουν οι κάτωθι ανισότητες σχεδόν παντού στο $t \geq 0$.

$$\lambda_{\min}(P) \|e(t)\|^2 \leq \mathcal{W}(e(t), t) \leq \lambda_{\max}(P) \left(1 + 2k_\varphi A_{\alpha, \eta}(0)\right) \|e(t)\|^2 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_e(e(t), t)}{\partial z} \dot{e} + \frac{\partial \mathcal{W}_e(e(t), t)}{\partial t} \leq -\left(\mu \lambda(t) - 4\alpha \lambda_{\max}(P) k_\varphi B_{\alpha, \eta}(t)\right) \|e(t)\|^2 \quad (3.58)$$

Απόδειξη. Από την (3.4) του Λήμματος 3.1 για την σταθερά Lipschitz, και λαμβάνοντας το συναρτησιακό Lyapunov της (3.38), προκύπτει:

$$\mathcal{W}(z, t) \leq \lambda_{\max}(P) \|z\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) k_\varphi e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \|e(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds$$

Επειδή, από την (3.40),

$$e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \|e(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds \leq A_{\alpha, \eta}(t) \|e(s)\|^2$$

η ανισότητα γίνεται

$$\mathcal{W}(z, t) \leq \lambda_{\max}(P) \|z\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) k_\varphi e^{\alpha t^2} A_{\alpha, \eta}(t) \|e(s)\|^2$$

και επειδή η $A_{\alpha, \eta}: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}$ γνησίως φθίνουσα:

$$\mathcal{W}(e(t), t) \leq \lambda_{\max}(P) \left(1 + 2k_\varphi A_{\alpha, \eta}(0)\right) \|e(t)\|^2$$

Επιπλέον, επειδή

$$\int_t^\infty \left| (\Lambda^{-1}(\lambda(s)) \cdot \Delta\varphi)^T P e(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \geq 0; \quad \forall t$$

αποδεικνύεται και το κάτω φράγμα της $\mathcal{W}(e(t), t)$.

Η χρονική παράγωγος του συναρτησιακού Lyapunov, κάνοντας χρήση και της δυναμικής του σφάλματος $\dot{e}(t) = \lambda(t)(A - KC)e(t) - \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))e(t) + \Lambda^{-1}(\lambda(t)) \cdot \Delta\varphi$ που υπολογίστηκε στην (3.35) είναι:

²² Σχεδόν παντού (almost everywhere): το σύνολο των στοιχείων για τα οποία συγκεκριμένη ιδιότητα δεν ισχύει είναι σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.

$$\begin{aligned}
& \frac{d\mathcal{W}(e(t), t)}{dt} \\
&= \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) + \frac{d}{dt} \left[\int_t^\infty \left| (\Lambda^{-1}(\lambda(s)) \cdot \Delta\varphi)^T Pe(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \right] \\
&= \lambda(t)e^T(t)(A - KC)^T Pe(t) + \lambda(t)e^T(t)P(A - KC)e(t) - e^T(t)\dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))Pe(t) \\
&\quad - e^T(t)P\dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))e(t) + \Delta\varphi^T \Lambda^{-1}(\lambda(t))Pe(t) + e^T(t)P\Lambda^{-1}(\lambda(t)) \cdot \Delta\varphi \\
&\quad + 4\alpha t e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| (\Lambda^{-1}(\lambda(s)) \cdot \Delta\varphi)^T Pe(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds - 2e^T(t)P\Lambda^{-1}(\lambda(t)) \cdot \Delta\varphi \\
&\Rightarrow \frac{d\mathcal{W}(e(t), t)}{dt} \leq \lambda(t)e^T(t)[(A - KC)^T P + P(A - KC)]e(t) - e^T(t)\dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))Pe(t) \\
&\quad + 4\alpha t e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| (\Lambda^{-1}(\lambda(s)) \cdot \Delta\varphi)^T Pe(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Για τις παραπάνω πράξεις χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις:

$$S(\lambda(t))P + PS(\lambda(t)) = 2S(\lambda(t))P$$

λόγω της συμμετρίας των S και P , αλλά και της γενικής σχέσης:

$$x^T Ay + y^T A^T x = 2x^T Ay = 2y^T Ax$$

για οποιαδήποτε μήτρα A και διανύσματα x, y . Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας την συνθήκη Lipschitz (3.4) και την τετραγωνική ανισότητα Lyapunov (3.37), ισχύει:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{W}(e(t), t)}{dt} &\leq -\mu\lambda(t)\|e(t)\|^2 + 4\alpha\lambda_{\max}(P)k_\varphi e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \|e(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds \\
&\leq -\left(\mu\lambda(t) - 4\alpha\lambda_{\max}(P)k_\varphi B_{\alpha,\eta}(t)\right)\|e(t)\|^2
\end{aligned}$$

καθώς ισχύει από την (3.41):

$$t e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \|e(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds \leq B_{\alpha,\eta}(t)\|e(s)\|^2$$

και καθώς

$$-e^T(t)\dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))Pe(t) \leq 0$$

επειδή $\dot{\lambda}(t) \geq 0$ εξ υποθέσεως και επειδή οι μήτρες S και P είναι θετικά ορισμένες. \square

Θεώρημα 3.3. Δεδομένων $\sigma > 0$ και $\mu > 0$, $P > 0$, K , που να ικανοποιούν την τετραγωνική ανισότητα Lyapunov (3.37), ο παρατηρητής που δίνεται από την (3.15) με παράμετρο κέρδους $\lambda(t)$ τέτοια ώστε $\dot{\lambda}(t) \geq 0$ και

$$\lambda(t) \geq \max\left(\frac{\sigma + 4\alpha\lambda_{\max}(P)k_{\varphi}B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu}, 1\right) \quad (3.60)$$

συνιστά εκθετικό παρατηρητή, με σφάλμα εκτίμησης ολικά εκθετικά ευσταθές, για το οποίο ισχύει:

$$\|e(t)\| \leq \left(\frac{\beta}{\lambda_{\min}(P)}\right)^{\frac{1}{2}} \|e(t_0)\| e^{-\frac{\sigma}{2\beta}(t-t_0)}; \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.61)$$

όπου $\beta := \lambda_{\max}(P) (1 + 2k_{\varphi}A_{\alpha,\eta}(0))$.

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί την λογική του Θεωρήματος 1.19 (Krasovskii) της §1.3.4 του Κεφαλαίου 1, όπως δόθηκε με την απόδειξή του.

Χρησιμοποιώντας την (3.60) του Θεωρήματος 3.3 και την (3.58) του Θεωρήματος 3.2, προκύπτει η ανισότητα:

$$\frac{d\mathcal{W}(e(t), t)}{dt} \leq -\sigma\|e(t)\|^2 \quad (3.62)$$

Η (3.62) με χρήση του δεξιού μέλους της ανισότητας (3.57), γίνεται:

$$\frac{d\mathcal{W}(e(t), t)}{dt} \leq -\frac{\sigma}{\lambda_{\max}(P) (1 + 2k_{\varphi}A_{\alpha,\eta}(0))} \mathcal{W}(e(t), t) \quad (3.63)$$

για όλα τα $e(t)$ λύσεις της (3.35).

Από το Λήμμα 1.1 (Λήμμα Σύγκρισης) της §1.2.3 του Κεφαλαίου 1, προκύπτει:

$$\mathcal{W}(e(t), t) \leq \mathcal{W}(e(t_0), t_0) e^{-\frac{\sigma(t-t_0)}{\lambda_{\max}(P)(1+2k_{\varphi}A_{\alpha,\eta}(0))}}$$

και, επομένως, από το αριστερό μέλος της ανισότητας (3.57):

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \left(\frac{\mathcal{W}(e(t), t)}{\lambda_{\min}(P)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{\mathcal{W}(e(t_0), t_0) e^{-\frac{\sigma(t-t_0)}{\lambda_{\max}(P)(1+2k_{\varphi}A_{\alpha,\eta}(0))}}}{\lambda_{\min}(P)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\beta\|e(t_0)\|^2 e^{-\frac{\sigma(t-t_0)}{\beta}}}{\lambda_{\min}(P)}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Καθώς η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $e(t_0) \in \mathfrak{R}^n$, η δυναμική του σφάλματος εκτίμησης είναι ολικά εκθετικά ευσταθής. \square

3.3.4 Αλγόριθμος Σχεδίασης Παρατηρητή

Αναπτύσσεται μια ad-hoc διαδικασία για την σχεδίαση του προτεινόμενου παρατηρητή, ως ακολούθως.

Κατ' αρχάς, η συνθήκη (3.37), είναι ισοδύναμη της γραμμικής ανισότητας μητρών:

$$A^T P - C^T Y^T + P A - Y C + \mu I < 0 \quad (3.64)$$

όπου οι άγνωστοι είναι η σταθερά $\mu > 0$, η μήτρα $Y = P K \in \mathfrak{R}^n$, $P > 0$. Αφού επιλυθεί αυτό το πρόβλημα, πρέπει να τεθεί $K = P^{-1} Y$, για να υπολογισθεί το διάλυμα σταθερού κέρδους.

Η $B_{\alpha,\eta}(t)$ όπως αποδείχθηκε στο Λήμμα 3.2, είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα ίσο με $B_{\alpha,\eta}(t_{max})$. Για κάθε δεδομένο $\sigma > 0$, από το Θεώρημα 3.3, η ολική ευστάθεια του σφάλματος εκτίμησης, επιτυγχάνεται με χρήση χρονικά σταθερής παραμέτρου $\lambda(t)$, που δίνεται από την

$$\lambda(t) = \max\left(\frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{max})}{\mu}, 1\right) \quad (3.65)$$

για κάθε $t \geq 0$, με μία επιλογή της η η οποία να ικανοποιεί την ανισότητα (3.39) και όπου

$$p := 4\lambda_{max}(P)k_{\varphi} \quad (3.66)$$

Η η πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε, από την (3.39) και με χρήση της (3.65):

$$\eta \geq \|A - KC\| \max\left(\frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{max})}{\mu}, 1\right)$$

καθώς $\dot{\lambda}(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Η παραπάνω επιλογή της $\lambda(t)$ αντιστοιχεί σε υψικερδή παρατηρητή, κατά την συνήθη δομή του, οπότε ο υψικερδής παρατηρητής στην προκειμένη σχεδίαση αποκτάται σαν μια ειδική περίπτωση του παρατηρητή αυξανόμενου κέρδους. Ο υψικερδής παρατηρητής, σχεδιάζεται εύκολα με μια απλή τετραγωνική συνάρτηση Lyapunov, ενώ αντιθέτως η σχεδίαση της περίπτωσης του αυξανόμενου κέρδους αποδεικνύεται δυσκολότερη αλγοριθμικά και προγραμματιστικά.

Η σχεδίαση του παρατηρητή αυξανόμενου κέρδους μπορεί να επιτευχθεί με χρήση μιας πιο γενικής επιλογής για την παράμετρο κέρδους $\lambda(t)$, όπως επί παραδείγματι:

$$\lambda(t) = \max(\lambda_1(t), 1) \quad (3.67)$$

όπου η λ_1 ορίζεται από:

$$\lambda_1(t) := \begin{cases} \frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu}, & t \in [0, t_{max}] \\ \frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{max})}{\mu}, & t > t_{max} \end{cases}$$

καθώς ένα μικρό κέρδος επιτρέπεται με ένα αρκούντως μικρό σ αμέσως μετά την χρονική στιγμή $t = 0$, επειδή $\lim_{t \rightarrow 0^+} B_{\alpha,\eta}(t) = 0$.

Δυστυχώς, είναι αρκετά δύσκολο να για την (3.67) να μπορεί να επιλέξει την η , εξαιτίας της ανάγκης να ικανοποιείται η ανισότητα (3.39) μαζί με την (3.67). Για να ξεπερασθεί αυτή η δυσκολία, μια απλή διόρθωση αφορά στην χρήση της ιδιότητας της κυρτότητας (κοίλη) της $B_{\alpha,\eta}$. Λόγω του ό.τι η $B_{\alpha,\eta}$ είναι κοίλη, η καμπύλη της μπορεί να αντικατασταθεί από την εφαπτομένη της σε μία δεδομένη στιγμή $t^* \in [0, t_{max}]$, που πρέπει να επιλεγεί καταλλήλως ώστε να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\sup_{t \geq 0} \{\dot{\lambda}(t)\} \leq \dot{\lambda}(t^*); t^* \in [0, t_{max}] \quad (3.68)$$

οπότε η (3.67) βελτιώνεται ως ακολούθως:

$$\lambda(t) = \max(\lambda_2(t), 1) \quad (3.69)$$

όπου

$$\lambda_2(t) := \begin{cases} \frac{\sigma + \alpha p [B_{\alpha,\eta}(t^*) + \dot{B}_{\alpha,\eta}(t^*)\{t - t^*\}]}{\mu^*}, & t \in [0, t^*] \\ \frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu^*}, & t \in (t^*, t_{max}] \\ \frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{max})}{\mu^*}, & t > t_{max} \end{cases}$$

Οι σταθερές t^* , t_{max} , α , σ , μ^* και η , για να επιτευχθεί η παραπάνω σχεδίαση της παραμέτρου κέρδους $\lambda(t)$, προκύπτουν από την επίλυση του παρακάτω προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min_{t^*, t_{max}, \alpha, \sigma, \mu^*, \eta} \eta \quad (3.70\alpha)$$

$$t^* \geq 0, t_{max} \geq 0, \alpha > 0, \sigma > 0, \mu^* > 0, \eta > 0 \quad (3.70\beta)$$

$$t^* \leq t_{max} \quad (3.70\gamma)$$

$$\mu^* \leq \mu \quad (3.70\delta)$$

$$\dot{B}_{\alpha,\eta}(t_{max}) = 0 \quad (3.70\epsilon)$$

$$\eta \geq \|A - KC\| \max\left(\frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{max})}{\mu^*}, 1\right) + \frac{n \alpha p \dot{B}_{\alpha,\eta}(t^*)}{\mu^* \max\left(\frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t^*)}{\mu^*}, 1\right)} \quad (3.70\sigma\tau)$$

Στο πρόβλημα (3.70), η η αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση και οι (3.70β), (3.70γ), (3.70δ), (3.70στ) αποτελούν τους μη γραμμικούς ανισοτικούς περιορισμούς, ενώ η (3.70ε) είναι ισοτικός περιορισμός.

Επειδή η συνάρτηση της παραμέτρου $\lambda(t)$ (3.69) ικανοποιεί την (3.68) εκ κατασκευής, η λύση της (3.70) επιτρέπει στην (3.69) να συμμορφώνεται με την γενική ανισότητα (3.60) και βεβαιώνει ότι η ανισότητα (3.39) για την η ,

ικανοποιείται για μια τιμή της η όσο το δυνατόν μικρότερη, ώστε η ποσότητα $\|\lambda(t)(A - KC) - \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\|$ να φράσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|\lambda(t)(A - KC) - \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\| &\leq \|\lambda(t)(A - KC)\| + \|\dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\| \\ &\leq \|(A - KC)\|\lambda(t) + \frac{n\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \end{aligned} \quad (3.71)$$

και το δεξιό μέλος της (3.71) φράσσεται άνω από το δεξιό μέρος της (3.70στ), οπότε κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει η ανισότητα (3.70στ) του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού.

Η απόδειξη ύπαρξης λύσεων για το παραπάνω πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού είναι αρκετά δύσκολο να μελετηθεί, καθώς οι συναρτήσεις $B_{\alpha,\eta}(t)$ και $\dot{B}_{\alpha,\eta}(t)$ είναι πρακτικά μόνο διαθέσιμες μέσω αναπτυγμάτων σειρών (McLaurin). Όμως, είναι αποδείξιμο ότι για το παραπάνω πρόβλημα, ένα μη κενό σύνολο του πεδίου ορισμού του προβλήματος υπάρχει ούτως ώστε η (3.70στ) να ικανοποιείται με επιλογή χρόνου t^* κοντά στον t_{max} , μαζί με αρκούντως μεγάλες σταθερές α και η .

Τέλος, παρατίθεται μια αναλυτική έκφραση για τις συναρτήσεις $t \mapsto B_{\alpha,\eta}(t)$ και $t \mapsto \dot{B}_{\alpha,\eta}(t)$, ώστε να είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού και κατ' επέκτασιν η σχεδίαση του παρατηρητή. Παρακάτω, καθορίζεται το ανάπτυγμα σειράς για την $A_{\alpha,\eta}(t) = \dot{B}_{\alpha,\eta}(t)/t$, οπότε η $B_{\alpha,\eta}(t)$ τίθεται στην (3.70) προσεγγιζόμενη από πεπερασμένο αριθμό όρων της απειροσειράς.

Σύμφωνα με την §3.2.2, η συνάρτηση Dawson έχει ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned} D_-(x) &= e^{x^2} \int_0^x e^{-s^2} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \\ n!! &= \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n, & n \text{ περιττός} \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \end{aligned}$$

Η (3.42) γίνεται:

$$A_{\alpha,\eta}(t) := e^{\alpha t^2 - 2(\eta + k_\varphi)t} \int_t^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + k_\varphi)s} ds = e^{\alpha(t-\bar{t})^2} \int_t^\infty e^{-\alpha(s-\bar{t})^2} ds$$

όπου

$$-\alpha s^2 + 2(\eta + k_\varphi)s = -\alpha(s - \bar{t})^2 + \alpha\bar{t}^2 \quad (3.72)$$

με

$$\bar{t} := \frac{\eta + k_\varphi}{\alpha} \quad (3.73)$$

Η σύνθεση της συνάρτησης D_- με την $t \mapsto v(t) := \sqrt{\alpha}(t - \bar{t})$, η McLaurin γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\alpha} \frac{(2\alpha)^n}{(2n+1)!!} (t - \bar{t})^{2n+1} = D_-(\sqrt{\alpha}(t - \bar{t})) = e^{\alpha(t-\bar{t})^2} \int_t^\infty \sqrt{\alpha} e^{-\alpha(s-\bar{t})^2} ds$$

Έπεται ότι:

$$A_{\alpha,\eta}(t) = e^{\alpha(t-\bar{t})^2} \left[\int_t^{\bar{t}} e^{-\alpha(s-\bar{t})^2} ds + \int_{\bar{t}}^{\infty} e^{-\alpha(s-\bar{t})^2} ds \right] \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\alpha)^n}{(2n+1)!!} (t-\bar{t})^{2n+1} + \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} e^{\alpha(t-\bar{t})^2} \quad (3.74)$$

Η παραπάνω σειρά έχει κέντρο στο $\bar{t} := \frac{\eta+k_\varphi}{\alpha}$ και άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Δεδομένης ακτίνας $\rho > 0$, ισχύει $|t-\bar{t}|^{2n+1} \leq \rho^{2n+1}$ αν $t \in [\bar{t}-\rho, \bar{t}+\rho]$. Επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v^n}{(2n+1)!!} = 0$ για οποιοδήποτε $v \in \mathfrak{R}$, μπορεί να καθορισθεί ακέραιος k_0 , ώστε

$$\forall n \geq k_0; \frac{(2\alpha\rho^2)^n}{(2n+1)!!} \leq \theta^n$$

όπου $\theta \in (0,1)$.

Έπεται ότι το σφάλμα στην προσέγγιση της σειράς με τους πρώτους k_0 όρους, μπορεί να φραγεί ως ακολούθως:

$$\left| \sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{(2\alpha)^n}{(2n+1)!!} (t-\bar{t})^{2n+1} \right| \leq \rho \sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{(2\alpha\rho^2)^n}{(2n+1)!!} \leq \rho \sum_{n=k_0}^{\infty} \theta^n = \rho \frac{\theta^{k_0}}{1-\theta}.$$

Συνοψίζοντας, ο υπολογιστικός **Αλγόριθμος Σχεδίασης** του παρατηρητή βήμα προς βήμα, είναι:

- Για το μη γραμμικό σύστημα του προβλήματος, υπολογίζεται η σταθερά Lipschitz L_i σε κάποιο δεδομένο πεδίο ορισμού των καταστάσεων για την μη γραμμικότητα φ και ακολούθως υπολογίζεται η σταθερά $k_\varphi := \max_{i=1,2,\dots,n} L_i \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$.
- Επιλύεται υπολογιστικά το πρόβλημα των γραμμικών ανισοτήτων μητρών: $A^T P - C^T Y^T + P A - Y C + \mu I < 0$

με αγνώστους $\mu > 0$, μήτρα $Y = PK \in \mathfrak{R}^n$, $P > 0$. Αφού επιλυθεί αυτό το πρόβλημα, πρέπει να τεθεί $K = P^{-1}Y$, για να υπολογισθεί το διάνυσμα σταθερού κέρδους. Επιλυόμενο, υπολογίζεται η σταθερά μ και η μήτρα P της οποίας βρίσκεται η μέγιστη ιδιοτιμή για να υπολογισθεί ο όρος $p := 4\lambda_{\max}(P)k_\varphi$ και υπολογίζεται και η ευκλείδεια νόρμα $\|A - KC\|$.

- Επιλέγεται αριθμός πεπερασμένων k_0 όρων για την προσέγγιση, με ελάχιστο σφάλμα προσέγγισης, της

$$B_{\alpha,\eta}(t) = -t \sum_{n=0}^{k_0} \frac{(2\alpha)^n}{(2n+1)!!} (t-\bar{t})^{2n+1} + t \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} e^{\alpha(t-\bar{t})^2}$$

και της παραγώγου από τον τύπο

$$\dot{B}_{\alpha,\eta}(t) = (1 + 2\alpha t^2 - 2(\eta + k_\varphi)t) \frac{B_{\alpha,\eta}(t)}{t} - t$$

- Επιλύεται υπολογιστικά το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού, ως προς $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ που τίθεται στην παρακάτω μορφή, έχοντας θέσει:

$$x_1 = t^*, x_2 = t_{max}, x_3 = \alpha, x_4 = \sigma, x_5 = \lambda^*, x_6 = \eta$$

$$\min x_6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 > 0, x_4 > 0, x_5 > 0, x_6 > 0$$

$$x_1 \leq x_2$$

$$x_5 \leq \mu$$

$$(1 + 2x_3x_2^2 - 2(x_6 + k_\varphi)x_2) \left[- \sum_{n=0}^{k_0} \frac{(2x_3)^n}{(2n+1)!!} (x_2 - \bar{t})^{2n+1} + \sqrt{\frac{\pi}{4x_3}} e^{x_3(x_2 - \bar{t})^2} \right] = 0$$

$$x_6 \geq \|A - KC\| \cdot$$

$$\cdot \max \left(\frac{x_4 + px_3 \left[-x_2 \sum_{n=0}^{k_0} \frac{(2x_3)^n}{(2n+1)!!} (x_2 - \bar{t})^{2n+1} + x_2 \sqrt{\frac{\pi}{4x_3}} e^{x_3(x_2 - \bar{t})^2} \right]}{x_5}, 1 \right) + \frac{nx_3p(1 + 2x_3x_1^2 - 2(x_6 + k_\varphi)x_1) \left[- \sum_{n=0}^{k_0} \frac{(2x_3)^n}{(2n+1)!!} (x_1 - \bar{t})^{2n+1} + \sqrt{\frac{\pi}{4x_3}} e^{x_3(x_1 - \bar{t})^2} \right]}{x_5 \max \left(\frac{x_4 + px_3 \left[-x_1 \sum_{n=0}^{k_0} \frac{(2x_3)^n}{(2n+1)!!} (x_1 - \bar{t})^{2n+1} + x_1 \sqrt{\frac{\pi}{4x_3}} e^{x_3(x_1 - \bar{t})^2} \right]}{x_5}, 1 \right)}$$

όπου

$$\bar{t} := \frac{x_6 + k_\varphi}{x_3}$$

- Έχοντας υπολογίσει τα παραπάνω, ο σχεδιαζόμενος παρατηρητής είναι ο $\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), t) + \Lambda(\lambda(t))K(y - C\hat{x}(t))$

για τον οποίο:

$$\lambda(t) = \max(\lambda_2(t), 1)$$

όπου

$$\lambda_2(t) := \begin{cases} \frac{\sigma + \alpha p [B_{\alpha, \eta}(t^*) + \dot{B}_{\alpha, \eta}(t^*) \{t - t^*\}]}{\mu^*}, & t \in [0, t^*] \\ \frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t)}{\mu^*}, & t \in (t^*, t_{max}) \\ \frac{\sigma + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t_{max})}{\mu^*}, & t > t_{max} \end{cases}$$

3.4 Συμπεράσματα

Παρουσιάστηκε βήμα προς βήμα αλγοριθμική τεχνική εξεύρεσης του χρονομεταβλητού αυξανόμενου κέρδους ενός μη γραμμικού παρατηρητή για μια κλάση προβλημάτων. Η αναλυτική αποδεικτική μέθοδος καταλήγει σε έναν πρακτικά επιλύσιμο αλγόριθμο, ο οποίος υλοποιείται με υπολογιστικά εργαλεία και μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλα τα προβλήματα της δοθείσας κλάσης. Αυτό που εισάγεται με την νέα αυτήν τεχνική είναι να επιτυγχάνεται καλύτερη μεταβατική απόκριση της καμπύλης σφάλματος και να εξομαλύνεται το φαινόμενο αιχμών (peaking phenomena), καθώς το κέρδος λαμβάνεται ομαλώς αυξανόμενο. Η νέα αυτή κατασκευαστική τεχνική έκανε χρήση της ιδέας του συναρτησιακού Lyapunov. Ζητήματα που ανακύπτουν για περαιτέρω μελέτη είναι η χαλάρωση των αρχικών υποθέσεων του συστήματος, η γενίκευση των αποτελεσμάτων και η χρήση των μεθόδων και σε άλλες κλάσεις μη γραμμικών συστημάτων, η (ανα)προσαρμογή του κέρδους σε πραγματικό χρόνο (real-time gain adaptation) και τέλος η μελέτη της ύπαρξης γενικής λύσης του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Προσαρμοστικοί Παρατηρητές Αυξανόμενου Κέρδους για Εκτίμηση Κατάστασης - Παραμέτρων

4.1 Οριοθέτηση του Προβλήματος

4.1.1 Πρόλογος

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μια προσέγγιση δύο διαφορετικών κλάσεων προβλημάτων που ανακύπτουν στο επιστημονικό αντικείμενο της εκτίμησης κατάστασης - παραμέτρων και της διάγνωσης λαθών²³, με χρήση παρατηρητών. Η εκτίμηση παραμέτρων και κατάστασης, που απαιτείται, ικανοποιεί ένα προσαρμοστικό σχήμα. Οι κλάσεις των συστημάτων που θα μελετηθούν παρέχουν ένα μοντέλο προσαρμοστικού νόμου, το οποίο έχει προταθεί να σχεδιάζεται με χρήση υψικερδών (high gain) τεχνικών.

Κατόπιν της ανάλυσης του προηγουμένου κεφαλαίου, όπου βελτιωτικά προτείνεται ο υψικερδής παρατηρητής μη σταθερής παραμέτρου κέρδους, αλλά χρονικά αυξανόμενης, στο παρόν κεφάλαιο προτείνεται παρόμοια προσέγγιση για τα προσαρμοστικά σχήματα της εκτίμησης κατάστασης - παραμέτρων και διάγνωσης λαθών, έναντι της προταθείσας υψικερδούς προσέγγισης.

Στις επόμενες παραγράφους θα δοθεί το θεωρητικό υπόβαθρο της εκτίμησης κατάστασης - παραμέτρου και διάγνωσης λάθους, οι γενικές τεχνικές εκτίμησης με προσαρμοστικά σχήματα, τα προταθέντα μοντέλα υψικερδούς σχεδίασης και τέλος, το προτεινόμενο μοντέλο σχεδίασης αυξανόμενου κέρδους που βασίζεται σε αυτά τα μοντέλα και επιπλέον στην σχεδιαστική λογική του Κεφαλαίου 3.

4.1.2 Εισαγωγικές Έννοιες

Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2, βασικές διεργασίες που απαιτείται να διεκπεραιωθούν στο πλαίσιο ενός ολοκληρωμένου προβλήματος ελέγχου είναι αυτές της 1. *μοντελοποίησης* (modeling) και 2. *εποπτείας* (monitoring). Για την πρώτη, με δεδομένη την δομή του μοντέλου, το πρόβλημα επικεντρώνεται στην εκτίμηση των παραμέτρων του. Αυτό το πρόβλημα έχει μελετηθεί εκτενώς υπό το πρίσμα εργαλείων, όπως της *ταυτοποίησης* (identification) και των ιδιοτήτων της *ταυτοποιησιμότητας* (identifiability). Μπορεί όμως να αναχθεί σε πρόβλημα παρατηρητή, αν θεωρηθεί ότι οι άγνωστες παράμετροι συνιστούν αμετάβλητες (σταθερές) μεταβλητές κατάστασης. Για την δεύτερη, η μελέτη της εμπίπτει στην περιοχή της *ανίχνευσης λάθους, διάγνωσης* (fault detection and diagnosis) και *απομόνωσης* (isolation). Οι συνηθέστερες πηγές λάθους, με τις οποίες ασχολείται ο τομέας της ανίχνευσης και απομόνωσης λάθους, είναι τα σφάλματα στους ενεργοποιητές (actuators) των συστημάτων που επηρεάζουν την εξίσωση κατάστασης. Ειδικά τελευταία, έχει γίνει ο συγκεκριμένος τομέας πιο ενεργό ζήτημα μελέτης. Και σε αυτήν την περίπτωση, η σχεδίαση παρατηρητή ενδείκνυται προκειμένου να ανιχνευθούν τα πιθανά λάθη (faults).

²³ Ως «λάθος» αποδίδεται στα ελληνικά ο όρος fault της βιβλιογραφίας.

Στα προηγούμενα μελετήθηκε εκτενώς το πρόβλημα της ανακατασκευής της κατάστασης, λόγω δυσκολίας ανάκτησης μετρήσεων της ενδογενούς δυναμικής του συστήματος. Όπως διαπιστώθηκε, οι τεχνικές υψικερδούς σχεδίασης αποδείχθηκαν αποδοτικές για την εκτίμηση της κατάστασης και οδήγησαν στην χρήση των υψικερδών παρατηρητών. Επιπλέον, με την νέα τεχνική ομαλής αύξησης της παραμέτρου κέρδους, διαπιστώθηκε μια βελτίωση στην συμπεριφορά όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3. Το παρόν κεφάλαιο εστιάζει στο φαινόμενο της εμφάνισης αγνώστων παραμέτρων στο σύστημα, από τις οποίες εξαρτάται το σύστημα. Επικεντρώνεται στην τεχνική σχεδίασης παρατηρητή, ο οποίος να εκτιμά και τις μεταβλητές κατάστασης, αλλά και τις παραμέτρους. Η τεχνική του να στηριχθεί η σχεδίαση σε σχεδίαση κάποιου παρατηρητή για το σύστημα, υποθέτοντας γνωστές παραμέτρους και να επιχειρηθεί να βρεθεί κατάλληλος *προσαρμοστικός νόμος* (adaptation law) για τις άγνωστες παραμέτρους, ώστε να διατηρηθεί η σύγκλιση του παρατηρητή υπό την παρουσία αυτών των αγνώστων παραμέτρων, είναι η συνηθέστερη για αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων. Αυτή η σχεδίαση καθιστά τον παρατηρητή *προσαρμοστικό*. Όταν το διάνυσμα κατάστασης μπορεί να εκτιμηθεί με αυτήν την μέθοδο, τούτο αντιστοιχεί σε σθεναρή σχεδίαση (robust design) (σχετική με παραμετρικές αβεβαιότητες), οπότε ο παρατηρητής είναι *προσαρμοστικός παρατηρητής κατάστασης* (adaptive state observer), ενώ όταν και η παράμετρος μπορεί να εκτιμηθεί ή όταν το διάνυσμα κατάστασης μπορεί να εκτιμηθεί μόνο απλό κοινού με τις παραμέτρους, τότε επιλύεται ένα πρόβλημα *συνδυαστικής εκτίμησης κατάστασης και παραμέτρου* (joint parameter and state estimation).

Αφού παρουσιασθούν τα γενικά χαρακτηριστικά των προσαρμοστικών παρατηρητών, θα γίνει σχεδίαση προσαρμοστικών παρατηρητών αυξανόμενου κέρδους, κατά την λογική του Κεφαλαίου 3, για ένα πρόβλημα εκτίμησης σφαλμάτων αισθητήρων και για ένα πρόβλημα εκτίμησης κατάστασης και παραμέτρων, έναντι της υψικερδούς σχεδίασης, που εφαρμόζεται συνήθως σε αυτά τα συστήματα.

4.2. Διάγνωση Λαθών και Εκτίμηση Παραμέτρων

4.2.1. Διάγνωση Λαθών (Fault Diagnosis)

Γίνεται μια επισκόπηση του προβλήματος της διάγνωσης λαθών (faults), επί τη βάσει προσέγγισης με παρατηρητή, οπότε γίνεται επί ενός αναλυτικού μοντέλου. Στο επίπεδο εξίσωσης κατάστασης, η διεργασία που θα εποπτευθεί (monitored process) εκφράζεται από:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), d(t), f(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), d(t), f(t)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης, $y \in \mathbb{R}^p$ το μετρούμενο διάνυσμα, $u \in \mathbb{R}^m$ το γνωστό διάνυσμα εισόδων, το $d \in \mathbb{R}^v$ αντιπροσωπεύει ένα διάνυσμα εισόδων αγνώστων διαταραχών και το $f \in \mathbb{R}^q$ το διάνυσμα των πιθανών λαθών (σφαλμάτων).

Το πρόβλημα της διάγνωσης είναι αυτό της ανίχνευσης και απομόνωσης των σφαλμάτων που επηρεάζουν την διεργασία, με χρήση της γνώσης του μοντέλου (4.1) μαζί με την είσοδο u και τις μετρήσεις y .

Στην τεχνική της σχεδίασης παρατηρητή, η βασική ιδέα είναι να γίνει χρήση του σφάλματος εξόδου μεταξύ της μετρούμενης εξόδου και της εξόδου του παρατηρητή, ως ενδείκτη για τις εμφανίσεις των λαθών. Το σφάλμα αυτό, μετά την μεταβατική κατάσταση εξαιτίας των αρχικών συνθηκών, πρέπει να εξαφανίζεται υπό την απουσία λαθών, ενώ θα εκφεύγει από το μηδέν όταν υπάρχει κάποιο λάθος. Αυτός ο ενδείκτης ή ανιχνευτής, ονομάζεται υπολειμματικός (residual) και συνεπώς το πρόβλημα διάγνωσης λαθών ανάγεται σε πρόβλημα γεννήτριας υπολοίπου. (Fundamental Problem of Residual Generator (FPRG)). Σε περίπτωση συστημάτων με πολλές εξόδους, μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολυεπίπεδοι παρατηρητές για την ανίχνευση και απομόνωση των λαθών, όπου οι παρατηρητές επιλέγονται δομικά ευαίσθητοι σε κάποια λάθη και μη ευαίσθητοι σε κάποια άλλα. Μια τέτοια προσέγγιση απαιτεί ένα επιπρόσθετο επίπεδο απόφασης, όπου θα καθορίζεται πότε το υπόλοιπο διαφέρει εξαιρετικά από το μηδέν και πού είναι πιθανότερο να ευρίσκονται τα λάθη.

Το πρόβλημα της γεννήτριας υπολοίπου (FPRG) συμπυκνώνεται στο εξής πρόβλημα: για κάθε λάθος f , πρέπει να βρεθεί ένα βοηθητικό σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varphi(z, y, u) \\ r &= \psi(z, y, u) \end{aligned} \quad (4.2)$$

για το οποίο το r επηρεάζεται από την f , δεν επηρεάζεται από την d και τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν όταν η f είναι ταυτοτικά μηδενική.

Αν βρεθεί, λοιπόν, μετασχηματισμός του πρωτότυπου συστήματος που να ανάγει σε υποσύστημα το οποίο να επηρεάζεται μόνον από την f , τότε το FPRG ανάγεται σε πρόβλημα παρατηρητή. Μια ασθενέστερη εκδοχή είναι το r να επηρεάζεται περισσότερο από την f παρά την d και κάποια γεννήτρια υπολοίπου βασισμένη σε παρατηρητή να μειώνει την επίδραση των διαταραχών έναντι αυτής των λαθών.

Στην περίπτωση υποσυστήματος που δεν επηρεάζεται από τις διαταραχές (ή όταν αυτές αγνοούνται), τα πιθανά λάθη μπορούν να ανιχνευθούν με άμεση εκτίμηση. Δηλαδή, λαμβάνοντας υπ' όψιν a priori γνώση μοντέλων λαθών (fault models), γίνεται αναγωγή σε πρόβλημα εκτίμησης παραμέτρων, πρόβλημα το οποίο αναλύεται ακολούθως.

4.2.2. Εκτίμηση Παραμέτρων

Μια προσέγγιση στο πρόβλημα της διάγνωσης λαθών είναι με αλγόριθμους εκτίμησης παραμέτρων, που είναι εφικτή όταν τα λάθη μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω μεταβολών σε παραμέτρους. Το πρόβλημα σε επίπεδο αναπαράστασης μοντέλου κατάστασης, περιγράφεται από το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(\theta, x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\quad (4.3)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα κατάστασης, $y \in \mathbb{R}^p$ το μετρούμενο διάνυσμα, $u \in \mathbb{R}^m$ το γνωστό διάνυσμα εισόδων, $\theta \in \mathbb{R}^q$ ένα διάνυσμα αγνώστων μεταβλητών που θεωρείται ότι είναι σταθερές (αυτές μπορεί να αντιπροσωπεύουν άγνωστες παραμέτρους του μοντέλου ή παραμέτρους λάθους).

Πέραν των μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί υπό το πρίσμα του πεδίου της παραμετρικής ταυτοποίησης (Identification), π.χ. στο πρόβλημα του συγχρονισμού χαοτικών συστημάτων, μια άμεση μέθοδος με παρατηρητή συνοψίζεται κάτωθι.

Έστω το εκτεταμένο διάνυσμα κατάστασης $X := \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$ και η επακόλουθη εκτεταμένη αναπαράσταση:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= F(X(t), u(t), t) \\ y(t) &= H(X(t))\end{aligned}\quad (4.4)$$

με $\dot{\theta} = 0$.

Εν συνεχεία, επιχειρείται η σχεδίαση παρατηρητή για αυτό το σύστημα, βασισμένη στα διαθέσιμα εργαλεία των μη γραμμικών παρατηρητών. Αυτή η προσέγγιση όμως δεν λαμβάνει το πλεονέκτημα της μη μεταβλητότητας του θ και επιπλέον μπορεί να καταστρέφει συγκεκριμένα δομικά στοιχεία της (4.3) που είναι απαραίτητα για την σχεδίαση παρατηρητή, για παράδειγμα να ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα, μπορεί να μετασχηματισθεί σε μη γραμμικό αν ακολουθηθεί η παραπάνω διαδικασία.

Για αυτόν τον λόγο, ακολουθείται η προσαρμοστική κατεύθυνση, που βασίζεται σε σχεδίαση για το πρωτότυπο σύστημα μετατραπείσα από κατάλληλο προσαρμοστικό νόμο.

4.3. Προσαρμοστικοί Παρατηρητές

Θεωρείται το σύστημα της (4.3). Το πρόβλημα που ανακύπτει είναι είτε η ανάκτηση εκτίμησης για την κατάσταση $x(t)$ βασισμένης σε γνώση των $y(t), u(t), f, h$ παρά το άγνωστο διάνυσμα παραμέτρων θ , είτε η από κοινού εκτίμηση των $x(t)$ και θ από τις γνωστές $y(t), u(t), f, h$. Παρ' όλο που αυτό μπορεί να εκληφθεί ως πρόβλημα σχεδίασης σθεναρού παρατηρητή, συνήθως αναφέρεται ως πρόβλημα προσαρμοστικού παρατηρητή.

Η προσαρμοστική εκτίμηση κατάστασης είναι εφικτή υπό κάποιες συνθήκες παθητικότητας για τις παραμέτρους ως εισόδους και η εκτίμηση παραμέτρων επιπλέον απαιτεί κάποια συνθήκη παραμένουσας διέγερσης, όπως είναι σύνηθες στα προβλήματα ταυτοποίησης.

Ορισμός 4.1. Το σύστημα $\dot{\xi} = f(\xi, u), y = h(\xi, u)$ είναι αυστηρά **παθητικό** (state passive), αν υπάρχει σωρευτική συνάρτηση (storage function) V , θετικά ημι-ορισμένη και μια θετικά ορισμένη συνάρτηση γ , ώστε

$$u^T y \geq \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) + \gamma(x) \quad (4.5)$$

Ορισμός 4.2. Ένα σήμα $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^r$ ικανοποιεί την ιδιότητα της **παραμένουσας διέγερσης** (persistent excitation) αν υπάρχουν $T, k_1, k_2 > 0$ για τα οποία ισχύει $\forall t \geq 0$:

$$k_1 I_r \geq \int_t^{t+T} g(\tau) g^T(\tau) d\tau \geq k_2 I_r \quad (4.6)$$

Σημειώνεται ότι η ιδιότητα (4.6) αντιστοιχεί στο γεγονός ότι το σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ y = g^T(t)\theta \end{cases} \quad (4.7)$$

ικανοποιεί την ιδιότητα της ομοιόμορφης παρατηρησιμότητας και το άνω φράγμα μπορεί να παραλειφθεί αν θεωρούνται φραγμένα σήματα.

Η συνθήκη της παραμένουσας διέγερσης μαζί με μια κατάλληλη δομή για πιθανή σχεδίαση παρατηρητή έρχεται πρώτιστα σε μία σχεδίαση ταυτόχρονης εκτίμησης κατάστασης και παραμέτρου.

Παρουσιάζονται οι δύο μορφές σχεδίασης, οι προσαρμοστικοί παρατηρητές κατάστασης και οι παρατηρητές συνδυαστικής εκτίμησης κατάστασης και παραμέτρου.

4.3.1 Προσαρμοστική Εκτίμηση Κατάστασης

Οι περισσότεροι διαθέσιμοι προσαρμοστικοί παρατηρητές αφορούν σε συστήματα που είναι γραμμικά στην άγνωστη παράμετρο θ . Οπότε θεωρούνται συστήματα της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(y(t), z(t), v(t)) + g(y(t), z(t), v(t))\theta \\ y(t) = [I_p \quad 0]x(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

με $x(t) = [y(t) \quad z(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $v(t) \in \mathbb{R}^m$, $\theta \in \mathbb{R}^q$.

Κατά την προσέγγιση του προσαρμοστικού παρατηρητή, η βασική ιδέα είναι να βασισθεί σε κάποια πιθανή σχεδίαση παρατηρητή όταν όλες οι παράμετροι είναι

γνωστές, οπότε και υποτίθεται ότι υπάρχει παρατηρητής που παρέχει εκτίμηση \hat{x}_θ όταν θ γνωστό, μαζί με μια συνάρτηση Lyapunov V για την δυναμική του σφάλματος παρατήρησης $\hat{x}_\theta - x$. Κατά αυτόν τον τρόπο, όλα τα διαθέσιμα αποτελέσματα για τους προσαρμοστικούς παρατηρητές συνοψίζονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 4.1. Έστω σύστημα της μορφής (4.8) και ένας παρατηρητής που παρέχει μια εκτίμηση \hat{x}_θ για την x όταν το θ είναι γνωστό, μαζί με μια συνάρτηση Lyapunov V για το $\hat{x}_\theta - x$. Οπότε:

(I) Αν

$$\frac{\partial V}{\partial e} g(y, \sigma, v) = \varphi([I_p \quad 0]e, y, \sigma, v)$$

για κάποια συνάρτηση φ , με g ολικά φραγμένη και f, g καθολικά Lipschitz ως προς z και ομοιόμορφα ως προς (u, y, t) , τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_\theta(t) - x(t)\| = 0 \text{ όταν } \dot{\hat{\theta}} = -\Lambda \varphi^T(\hat{y} - y, y, \hat{z}, v), \Lambda > 0.$$

(II) Αν επιπλέον το g έχει την ιδιότητα της παραμένουσας διέγερσης και \dot{g} φραγμένο, τότε επίσης ισχύει $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(t) - \theta\| = 0$.

Τα παραπάνω θεμελιώνονται με μετατροπή της συνάρτησης Lyapunov ως εξής: $V + \varepsilon^T \Lambda^{-1} \varepsilon$ με $\varepsilon := \hat{\theta} - \theta$, μαζί με ιδιότητα σύγκλισης που εξάγεται από την ιδιότητα (II) της παραμένουσας διέγερσης. Η συνθήκη (I), επίσης, μπορεί να εκληφθεί ως συνθήκη παθητικότητας. \square

Τα συστήματα, για τα οποία ένας προσαρμοστικός παρατηρητής μπορεί να σχεδιασθεί, γράφονται υπό συγκεκριμένη μορφή, που εκφράζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 4.3. Σύστημα της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha(y, \zeta, v) + \beta(y, \zeta, v)\theta \\ \dot{\zeta} = Z(y, \zeta, v) \end{cases} \quad (4.9)$$

με $y \in \mathbb{R}^p$, $\zeta \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^m$, $\theta \in \mathbb{R}^q$

ανήκει στην μη γραμμική **προσαρμοστική μορφή** (adaptive form), αν

- I. Η y είναι η μετρούμενη έξοδος
- II. Υπάρχει κατάλληλη φθίνουσα θετικά ορισμένη συνάρτηση $V(t, e)$ κλάσης \mathcal{C}^1 , ώστε για κάθε αρχική συνθήκη του (4.9), κάθε αποδεκτή (εφικτή) είσοδο v , κάθε αντίστοιχη έξοδος $y(t)$, κάθε $z, e \in \mathbb{R}^r$ και κάθε $t \geq 0$, να ισχύει:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, e) + \frac{\partial V}{\partial e} \left(Z(y(t)), e + z, v(t) - Z(y(t)), z, v(t) \right) \leq -\kappa(e) \quad (4.10)$$

για κάποια συνάρτηση κ θετικά ορισμένη.

- III. Για τις ίδιες συνθήκες με παραπάνω, αν $x(t)$ αντιστοιχεί στην λύση της εξίσωσης κατάστασης του (4.9), ισχύουν οι ανισότητες:

$$\text{i) } \begin{cases} \|\alpha(y(t), e + z, v(t)) - \alpha(y(t), z, v(t))\| \leq \gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e)}; \gamma_\alpha > 0 \\ \|\beta(y(t), e + z, v(t)) - \beta(y(t), z, v(t))\| \leq \gamma_\beta \sqrt{\kappa(e)}; \gamma_\beta > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\text{ii) } \|\beta(y(t), \zeta(t), v(t))\| \leq b; b > 0 \quad (4.12)$$

Όπως παρατηρείται, η δομή (4.9) εγγυάται μια πιθανή σχεδίαση προσαρμοστικού παρατηρητή κατάστασης. Προσθέτοντας επιπλέον μια συνθήκη παραμένουσας διέγερσης, παρέχεται και η ασυμπτωτική εκτίμηση του θ .

Πρόταση 4.2. Δοθέντος συστήματος της μορφής (4.9), τότε το

$$\begin{cases} \dot{\hat{y}} = \alpha(y, \hat{\zeta}, v) + \beta(y, \hat{\zeta}, v)\hat{\theta} - k_y(\hat{y} - y); k_y > 0 \\ \dot{\hat{\zeta}} = Z(y, \hat{\zeta}, v) \\ \dot{\hat{\theta}} = -k_\theta \beta^T(y, \hat{\zeta}, v) \cdot (\hat{y} - y); k_\theta > 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

αποτελεί προσαρμοστικό παρατηρητή κατάστασης, με την έννοια ότι τα σφάλματα $\|\hat{y}(t) - y(t)\|$, $\|\hat{\zeta}(t) - \zeta(t)\|$ τείνουν στο μηδέν για $t \rightarrow \infty$.

Αν, επιπλέον, η β ικανοποιεί συνθήκη παραμένουσας διέγερσης και η $\hat{\beta}$ είναι φραγμένη, τότε επίσης και το σφάλμα $\|\hat{\theta}(t) - \theta\|$ τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Η δομή (4.9) είναι σαν μια κανονική μορφή για την σχεδίαση των προσαρμοστικών παρατηρητών, καθώς συστήματα της Πρότασης 4.1 με μια τετραγωνική συνάρτηση Lyapunov για το σφάλμα του παρατηρητή, μπορούν κατόπιν μετασχηματισμού συντεταγμένων να τεθούν στην μορφή (4.9).

Η τεχνική της προσαρμοστικής εκτίμησης κατάστασης αποτυπώνεται στο παρακάτω παράδειγμα και συνοψίζει την βάση για την προσέγγιση των προβλημάτων που θα απασχολήσουν το παρόν κεφάλαιο. Σε αυτό, το προσαρμοστικό σχήμα είναι ένας παρατηρητής που επιτυγχάνει εκτίμηση κατάστασης και δεδομένων επιπλέον συνθηκών για την είσοδο, μπορεί να επιτύχει και εκτίμηση παραμέτρου.

Παράδειγμα 4.1. Το σύστημα $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \theta u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2\theta u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$ είναι τύπου γραμμικής

μορφής $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\theta u(t)$, $y(t) = Cx(t)$ και είναι προφανώς παρατηρήσιμο όταν η παράμετρος θ είναι γνωστή. Ο παρατηρητής θα σχεδιαζόταν ως $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\theta u(t) - K(C\hat{x}(t) - y(t))$. Αλλά επειδή θ άγνωστη, απαιτείται εκτίμηση $\hat{\theta}$ και συνακόλουθη εύρεση προσαρμοστικού νόμου για αυτήν την εκτίμηση. Με $K = (3 \ 2)^T$ και $\hat{\theta} = -\kappa u(C\hat{x} - y)$, $\kappa > 0$ μπορεί να αποδειχθεί ότι για φραγμένες εισόδους, $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$. Το κέρδος $(K^T, \kappa u)^T$ παράγεται off-line, αλλά θα μπορούσε να εξαχθεί και με on-line υπολογισμό το χρονομεταβλητό κέρδος (με σχεδίαση λογικής Kalman). Το σύστημα ικανοποιεί και μια συνθήκη παθητικότητας μεταξύ εισόδου θ και εξόδου y .

Αν $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2 - 2x_1$ τότε το σύστημα μετασχηματίζεται στην (4.9). Σε αυτήν την περίπτωση $\beta = u$ και άρα η επιπλέον συνθήκη ώστε να επιτευχθεί και εκτίμηση παραμέτρου, είναι ότι η u πρέπει να είναι φραγμένη, όπως και η \dot{u} , και ότι ικανοποιεί την συνθήκη παραμένουσας διέγερσης.

Στην παρούσα παράγραφο, καταδείχθηκε μια συγκεκριμένη μορφή που επιτρέπει σχεδίαση προσαρμοστικού παρατηρητή και καθώς αυτή η μορφή παράγεται κατόπιν αλλαγής συντεταγμένων κατάστασης, επιτρέπει την προσαρμοστική εκτίμηση της κατάστασης. Στην επόμενη παράγραφο, θεωρώντας επιπλέον αλλαγή συντεταγμένων που εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους, επιτυγχάνεται μια

γενικότερη μορφή που θα επιτρέψει την ταυτόχρονη (συνδυαστική) εκτίμηση των διανυσμάτων κατάστασης και των διανυσματικών παραμέτρων (joint state and parameter estimation).

4.3.2 Συνδυαστική Εκτίμηση Κατάστασης και Παραμέτρων

Η σχεδίαση του προσαρμοστικού μοντέλου για από κοινού εκτίμηση κατάστασης - παραμέτρων περιγράφεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.3. Θεωρουμένου συστήματος:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(y(t), z(t), v(t)) + g(y(t), z(t), v(t))\theta \\ y(t) = [I_p \quad 0]x(t) \end{cases} \quad \text{όπως στην προηγούμενη}$$

παράγραφο, αυτό μπορεί να μετασχηματισθεί με αλλαγή συντεταγμένων $z = \Phi(x, \theta, t)$ εξαρτώμενη από χρόνο και παραμέτρους, με $x = \Psi(z, \theta, t)$ φραγμένο, στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{cases} \dot{z} = Z(z, y, u, t) \\ y = H(z, y, u, t) + D(z, y, u, t)\theta \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \theta \in \mathbb{R}^q \quad (4.14)$$

για την οποία:

- I. Υπάρχει κατάλληλη θετικά ορισμένη φθίνουσα \mathcal{C}^1 συνάρτηση $V(t, e)$, για την οποία για κάθε αρχική συνθήκη του (4.14), για κάθε αποδεκτή είσοδο u , για κάθε $z, e \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p$ και κάθε $t \geq 0$, ισχύει:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, e) + \frac{\partial V}{\partial e}(Z(e + z, y, u(t), t) - Z(z, y, u(t), t)) \leq -\gamma(e) \quad (4.15)$$

- II. Για κάθε εφικτή είσοδο u και αντίστοιχες τροχιές $z(t)$, η D ικανοποιεί συνθήκη παραμένουσας δέγερσης και είναι ομοιόμορφα φραγμένη από κάποιο σταθερά d , με $\|D(e + z, u(t), t) - D(z, u(t), t)\| \leq \gamma_D \sqrt{\gamma(e)}$ και $\|H(e + z, u(t), t) - H(z, u(t), t)\| \leq \gamma_H \sqrt{\gamma(e)}$ για οποιαδήποτε e, z και κάποια $\gamma_D, \gamma_H > 0$, ένας προσαρμοστικός παρατηρητής για ταυτόχρονη εκτίμηση κατάστασης x και διανυσματικών παραμέτρων θ μπορεί να σχεδιασθεί ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = Z(\hat{z}, y, u, t) \\ \dot{\hat{\theta}} = -\lambda D^T(\hat{z}, y, u, t) \cdot (D(\hat{z}, y, u, t)\hat{\theta} + H(\hat{z}, y, u, t) - y), \lambda > 0 \\ \hat{x} = \Psi(\hat{z}, \hat{\theta}, t) \end{cases} \quad (4.16)$$

Η παραπάνω Πρόταση έπεται από την δομή των σφαλμάτων παρατήρησης $e_z := \hat{z} - z$ και $e_\theta := \hat{\theta} - \theta$:

$$\begin{aligned} \dot{e}_z &= Z(e_z + z, y, u, t) - Z(z, y, u, t) \\ \dot{e}_\theta &= -\lambda D^T(\hat{z}, y, u, t)D(\hat{z}, y, u, t)e_\theta + \Delta(z, \hat{z}, u, t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου το Δ εξαρτάται από τα σφάλματα $D(\hat{z}, u, t) - D(z, u, t)$ και $H(\hat{z}, u, t) - H(z, u, t)$. Εξ αυτού, το e_z συγκλίνει και ομοίως το Δ , ενώ από την συνθήκη παραμένουσας δέγερσης της $D(\hat{z}, u, t)$ (η συνθήκη για το $D(\hat{z}, u, t)$ συνάγεται από την ίδια συνθήκη για το $D(z, u, t)$, καθώς το σφάλμα $D(\hat{z}, u, t) - D(z, u, t)$ είναι κλάσης \mathcal{L}^2) το 0 είναι ολικά εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για την χωρίς διαταραχή ($\Delta = 0$) εξίσωση του e_θ .

Η απόδειξη θεμελιώνεται θεωρώντας μήτρα P , που ικανοποιεί την:

$$\dot{P} + PD^T(\hat{z}, u, t)D(\hat{z}, u, t) + D^T(\hat{z}, u, t)D(\hat{z}, u, t)P = -I \quad (4.18)$$

και λαμβάνοντας την $V(t, e_z) + \varepsilon e_\theta^T P e_\theta$ ως συνάρτηση Lyapunov για το συνολικό σφάλμα, με ε αρκούντως μικρό. \square

Σημειώνεται ότι η μορφή της (4.9) της προηγούμενης παραγράφου μπορεί να μετασχηματισθεί στην (4.14) μέσω απλού μετασχηματισμού $z_1 := y - \Gamma\theta$ με μήτρα Γ , τέτοια ώστε $\dot{\Gamma} = -k\Gamma + \beta(y, \zeta, v)$ για κάθε $k > 0$. Αυτό συνεπάγεται:

$$\dot{z}_1 = -kz_1 + \alpha + ky \quad (4.19)$$

ενώ η εξίσωση για το ζ παραμένει ίδια και έξοδος $y = z_1 + \Gamma\theta$.

Σημειώνεται, επίσης, ότι στην περίπτωση σχεδίασης προσαρμοστικού παρατηρητή για γραμμικό σύστημα, οι συνθήκες που το καθιστούν ικανό για προσαρμοστική εκτίμηση, συμπίπτουν με αυτές που το μετασχηματίζουν στην (4.14). Θεωρείται σύστημα της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Psi(t)\theta \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

Απαιτείται να υπάρχει μήτρα $K(t)$, η οποία να ικανοποιεί:

1. Η $\xi = 0$ είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του $\dot{\xi}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\xi(t)$.
2. Η λύση του $\dot{\Gamma}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Gamma(t) + \Psi(t)$ είναι τέτοια ώστε η $C\Gamma(t)$ να ικανοποιεί συνθήκη παραμένουσας διεγερσης.

Εξ αυτού, μια απλή αλλαγή συντεταγμένων $z = x - \Gamma\theta$ συνεπάγεται:

$$\dot{z}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]z(t) + K(t)y(t); y(t) = C(t)z(t) + C(t)\Gamma(t)\theta$$

που ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 4.3.

Εκτελώντας την ίδια αλλαγή συντεταγμένων, εξαρτώμενη από παράμετρο και χρόνο, μπορούν να σχεδιασθούν προσαρμοστικοί παρατηρητές για κλάσεις μη γραμμικών συστημάτων, των οποίων οι ονομαστικές δομές (δηλαδή με γνωστές τις παραμέτρους) μπορούν να δομήσουν παρατηρητή, αλλά για τον οποίο δεν μπορεί να αποκτηθεί η γραμμική στην παράμετρο δομή της (4.14). Αυτή είναι η περίπτωση των συστημάτων που επιδέχονται σχεδίαση με υψικερδή παρατηρητή. Μια τέτοια μορφή δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.4. Έστω σύστημα μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \varphi(x(t), u(t)) + \psi(x(t), u(t))\theta \\ y(t) = C_0 x(t) \end{cases} \quad (4.20)$$

$x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^m, y \in \mathfrak{R}, \theta \in \mathfrak{R}^q$. Λαμβάνονται οι υποθέσεις:

[Y1] Οι A_0, C_0, φ, ψ ικανοποιούν τις:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}; C_0 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.21)$$

$$\varphi(x, u) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, u) \\ \varphi_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \\ \varphi_n(x, u) \end{bmatrix}; \psi(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \psi_{n1}(x, u) & \dots & \psi_{nq}(x, u) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

[Y2] Οι φ, ψ είναι λείες (C^∞) συναρτήσεις ως προς τα ορίσματά τους και η u είναι φραγμένη καθιστώντας φραγμένες καταστάσεις $\|x(t)\| \leq X$ για $\|\theta\| \leq \Theta$.

[Y3] Δοθέντος K_0 για το οποίο η $(A_0 - K_0 C_0)$ είναι Hurwitz, οι είσοδοι u είναι τέτοιες ώστε το διάνυσμα κατάστασης να ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα: για οποιαδήποτε αρχικά $x(0) \in \mathfrak{R}^n$ και $\Gamma(0) \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, η λύση της:

$$\dot{\Gamma}(t) = \lambda(A_0 - K_0 C_0)\Gamma(t) + \lambda\psi(x(t), u(t)) \quad (4.23)$$

είναι τέτοια ώστε για κάποιο $t_0 \geq 0$:

∃ α, T ανεξάρτητα του λ ώστε $\forall t \geq t_0$, και για λ αρκούντως μεγάλο,

$$\int_t^{t+T} \Gamma^T(\tau) C_0^T C_0 \Gamma(\tau) d\tau \geq \alpha I \quad (4.24)$$

Τότε, για επιλεγόμενο λ αρκούντως μεγάλο, το ακόλουθο σύστημα συνιστά ασυμπτωτικό παρατηρητή για το (4.20), με την έννοια ότι για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $x(0)$ και οποιοσδήποτε $\hat{\theta}(0), \hat{x}(0)$ που φράσσονται από τα Θ και X αντίστοιχα, τα $\|\hat{x}(t) - x(t)\|$ και $\|\hat{\theta}(t) - \theta\|$ τείνουν εκθετικά στο μηδέν:

$$\dot{\hat{\Gamma}}(t) = \lambda(A_0 - K_0 C_0)\hat{\Gamma}(t) + \lambda\psi(\hat{x}(t), u(t))$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & A_0 \hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), u(t)) + \psi(\hat{x}(t), u(t))\tilde{\theta}(t) \\ & + \Lambda^{-1}(\lambda)[\lambda K_0 + \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T][y(t) - C_0 \hat{x}(t)] \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \lambda^n \hat{\Gamma}^T(t) C_0^T [y(t) - C_0 \hat{x}(t)] \quad (4.25)$$

$$\tilde{x} = \hat{x} \text{ αν } \|\hat{x}\| \leq X, \text{ αλλιώς } \frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|} X$$

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} \text{ αν } \|\hat{\theta}\| \leq \Theta, \text{ αλλιώς } \frac{\hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|} \Theta.$$

$$\text{με } \Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda^{i-1}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Οι [Y1] και [Y2], σημαίνουν ότι το ονομαστικό σύστημα επιδέχεται υψικερδή σχεδίαση. Η [Y3] ικανοποιείται όταν η $\psi(x(t), u(t))$ ικανοποιεί την συνθήκη παραμένουσας διέγερσης.

4.4. Σχεδίαση Προσαρμοστικών Παρατηρητών

Σε αυτό το κεφάλαιο, προτείνεται η σχεδίαση προσαρμοστικών παρατηρητών για δύο προβλήματα, τα οποία ανήκουν στις κατηγορίες που αναλύθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Η σχεδίαση που προτείνεται στηρίζεται στην ανάλυση του Κεφαλαίου 3 και προεκτείνει τις ήδη υπάρχουσες μεθόδους υψικερδών παρατηρητών σε αυτές των παρατηρητών αυξανόμενου κέρδους. Το πρώτο σχεδιαστικό πρόβλημα αφορά σε εκτίμηση λαθών αισθητήρα σε μια κλάση μη γραμμικών συστημάτων, ενώ το δεύτερο σε εκτίμηση κατάστασης και παραμέτρου για μια κλάση μη γραμμικών συστημάτων.

4.4.1 Εκτίμηση Λαθών σε Αισθητήρες Μη Γραμμικών Συστημάτων

Σχετικά με το αντικείμενο αυτό, για την κλασική προσέγγιση, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο άρθρο (Zhang and Besançon, 2005), όπου προτείνεται η υψικερδής σχεδίαση.

4.4.1.1 Κλασική Υψικερδής Σχεδίαση

Η ανίχνευση και απομόνωση λαθών (FDI) έχει μελετηθεί αρκετά για γραμμικά συστήματα, αλλά εξαιτίας της σημασίας των μη γραμμικοτήτων σε πολλές εφαρμογές, είναι τελευταία ενεργό πεδίο έρευνας η μελέτη των μη γραμμικών (Hammouri *et al.*, 1998; Xu and Zhang, 2004). Τα πιο γνωστά αποτελέσματα αφορούν σε λάθη που εντοπίζονται σε ενεργοποιητές (actuators), οπότε επηρεάζουν την εξίσωση της κατάστασης στο μοντέλο κατάστασης. Εν προκειμένω, θεωρείται ότι το σφάλμα είναι στο μετρητικό όργανο της εξόδου, δηλαδή στον αισθητήρα (sensor), οπότε επηρεάζεται η εξίσωση της εξόδου.

Ειδικότερα, η θεωρούμενη κλάση μη γραμμικών συστημάτων υποκειμένων σε λάθη αισθητήρων, είναι της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t)) + \bar{g}(\bar{x}(t))u(t) \\ y(t) = \bar{h}(\bar{x}(t)) + q(t) \end{cases} \quad (4.4.1.1)$$

όπου $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ η κατάσταση, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ η είσοδος, $y(t) \in \mathbb{R}$ η έξοδος, $q(t) \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο λάθος αισθητήρα που επιδρά στο σύστημα.

Οι $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times l}$ και $\bar{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε να υπάρχει υψικερδής παρατηρητής για το σύστημα χωρίς λάθη ($q(t) = 0$: Fault free system).

Σκοπός είναι να ανακτηθεί εκτίμηση του λάθους αισθητήρα $q(t)$. Προς τον σκοπό αυτό, πρέπει να υποθεθεί ότι το $q(t)$ μπορεί να μοντελοποιηθεί από γραμμική παλινδρόμηση με δοθείσες συναρτήσεις παλινδρόμησης $\psi_1(t), \dots, \psi_p(t)$ ως εξής:

$$q(t) = \theta_1 \psi_1(t) + \dots + \theta_p \psi_p(t) \quad (4.4.1.2)$$

Αυτό το μοντέλο μπορεί να παραχθεί από φυσική γνώση σχετικά με το πιθανό σήμα λάθους, επί παραδείγματι αν κάποιες διαταραχές γνωστών συχνοτήτων μπορούν να επηρεάσουν την μέτρηση εξόδου. Το μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί επίσης και γενικευμένη προσέγγιση του σήματος λάθους. Για σήμα λάθους με chirping, θα μπορούσε να προσεγγισθεί από πεπερασμένο αριθμό ημιτονοειδών.

Με την παραπάνω διατύπωση, το πρόβλημα εκτίμησης λάθους αισθητήρα, εκπίπτει σε πρόβλημα εκτίμησης παραμέτρων $\theta_1, \dots, \theta_p$. Ο μη γραμμικός

προσαρμοστικός παρατηρητής που σχεδιάζεται επιτρέπει ευθεία εκτίμηση των παραμέτρων λάθους της εξίσωσης εξόδου και ταυτόχρονα του διανύσματος κατάστασης.

Η γενική κλάση (4.4.1.1), όπως αποδείχθηκε στην §2.6 του Κεφαλαίου 2, μπορεί να μετασχηματισθεί με αλλαγή συντεταγμένων

$$x(t) = [h(\bar{x}(t)) \quad L_f h(\bar{x}(t)) \quad \dots \quad L_f^{n-1} h(\bar{x}(t))] \quad (4.4.1.1.3)$$

για την περίπτωση του συστήματος χωρίς λάθος $q(t) = 0$, στο σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = C_0 x(t) \end{cases} \quad (4.4.1.1.4)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}; C_0 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.4.1.1.5)$$

Οι $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times l}$ παρουσιάζουν τριγωνικότητα ως εξής:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ f_n(x) \end{bmatrix}; g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ g_n(x) \end{bmatrix} \quad (4.4.1.1.6)$$

Για σταθερά λ , ορίζεται η μήτρα

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & & 0 \\ & \lambda^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda^n \end{bmatrix} \quad (4.4.1.1.7)$$

Έστω S η λύση της εξίσωσης μητρών:

$$A_0^T S + S A_0 + S = C_0^T C_0 \quad (4.4.1.1.8)$$

Λήμμα 4.4.1.1.1. Η λύση S της (4.4.1.1.8) είναι μήτρα συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Απόδειξη. Η (4.4.1.1.8) γράφεται ως:

$$\left[-\left(A_0 + \frac{1}{2} I \right) \right]^T S + S \left[-\left(A_0 + \frac{1}{2} I \right) \right] = -C_0^T C_0$$

Είναι εμφανές ότι η μήτρα

$$-\left(A_0 + \frac{1}{2}I\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

είναι ασυμπωτικά ευσταθής ($Re(\lambda) < 0, \lambda: \det\left(\lambda I + \left(A_0 + \frac{1}{2}I\right)\right) = 0$), ότι η μήτρα $C_0^T C_0$ είναι θετικά ημι-ορισμένη και ότι το ζεύγος $\left(-\left(A_0 + \frac{1}{2}I\right), C_0\right)$ είναι παρατηρήσιμο, καθώς ικανοποιεί την rank συνθήκη, δεδομένου ότι (A_0, C_0) παρατηρήσιμο. Η S είναι θετικά ορισμένη και συμμετρική σύμφωνα με το Θεώρημα 1.13 του Κεφαλαίου 1 και την συνθήκη (vii) παρατηρησιμότητας του Θεωρήματος 2.1 του Κεφαλαίου 2, καθώς η παρατηρησιμότητα του $\left(-\left(A_0 + \frac{1}{2}I\right), C_0\right)$ συνεπάγεται ύπαρξη μήτρας P για την οποία $\left[-\left(A_0 + \frac{1}{2}I\right)\right]^T P + P \left[-\left(A_0 + \frac{1}{2}I\right)\right] = -Q$. Η επιλογή θετικά ορισμένης μήτρας $Q = C_0^T C_0$, ως αποτέλεσμα της παρατηρησιμότητας, παρέχει την ιδιότητα της $P := S$. \square

Ορίζεται επίσης διάνυσμα κέρδους

$$K_0 = \frac{1}{2}S^{-1}C_0^T \quad (4.4.1.1.9)$$

Λήμμα 4.4.1.1.2. Το αυτόνομο γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = (A_0 - K_0 C_0)x(t)$$

με A_0, C_0 στην παρατηρήσιμη κανονική μορφή (4.4.1.1.5), και το K_0 οριζόμενο στην (4.4.1.1.9), είναι ασυμπωτικά ευσταθές, δηλαδή η μήτρα $(A_0 - K_0 C_0)$ είναι Hurwitz.

Απόδειξη. Εκλέγεται συνάρτηση Lyapunov τετραγωνική:

$$V(x) = x^T(t)Sx(t)$$

όπου S όπως στο Λήμμα 4.4.1.1.1. Τότε,

$$\frac{dV(t)}{dt} = x^T(t)[A_0^T S - C_0^T K_0^T S + SA_0 - SK_0 C_0]x(t)$$

Επειδή $A_0^T S + SA_0 + S = C_0^T C_0$ και $K_0 = \frac{1}{2}S^{-1}C_0^T$, $\frac{dV(t)}{dt} = -x^T(t)Sx(t)$, οπότε το σύστημα είναι ασυμπωτικά ευσταθές. \square

Με βάση την ανάλυση της §2.6 του Κεφαλαίου 2, όλες οι παραπάνω ιδιότητες αρκούν για να σχεδιασθεί υψικερδής παρατηρητής για το σύστημα άνευ λάθους και για επιλογή σταθεράς κέρδους λ αρκούντως μεγάλη και $u(t)$ φραγμένης.

Παρουσία όμως του διανυσματικού λάθους στον αισθητήρα, που με την γραμμική παρεμβολή, γράφεται

$$q(t) = \psi(t)\theta$$

$$\psi(t) = [\psi_1(t) \quad \dots \quad \psi_p(t)]; \theta = [\theta_1 \quad \dots \quad \theta_p]^T \quad (4.4.1.1.10)$$

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων (4.4.1.1.3) μπορεί να θέσει το σύστημα με λάθος αισθητήρα, στην μορφή:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = C_0x(t) + \psi(t)\theta \end{cases} \quad (4.4.1.1.10)$$

με A_0, C_0 , όπως στην (4.4.1.1.5) και f, g όπως στην (4.4.1.1.6).

Βάσει αυτής της μορφής, το πρόβλημα εκτίμησης λάθους αισθητήρα ανάγεται σε εκτίμηση της διανυσματικής παραμέτρου θ .

Ο ακόλουθος προσαρμοστικός παρατηρητής προτείνεται για αναδρομική συνδεδετική εκτίμηση κατάστασης - παραμέτρου:

$$\dot{Y}(t) = \lambda(A_0 - K_0C_0)Y(t) - \lambda K_0\psi(t) \quad (4.4.1.1.11\alpha)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) + \Lambda \cdot \{K_0 + \lambda^{-1}Y(t)\Gamma[C_0Y(t) + \psi(t)]^T\} [y(t) - C_0\hat{x}(t) - \psi(t)\hat{\theta}(t)] \quad (4.4.1.1.11\beta)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma[C_0Y(t) + \psi(t)]^T [y(t) - C_0\hat{x}(t) - \psi(t)\hat{\theta}(t)] \quad (4.4.1.1.11\gamma)$$

Η $Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ είναι μια μήτρα σημάτων που παράγονται από γραμμικό φιλτράρισμα του διανύσματος $\psi(t)$, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ η εκτίμηση της κατάστασης, $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^p$ είναι η εκτίμηση των παραμέτρων, λ θετική πραγματική σταθερά, η μήτρα Λ ορίζεται στην (4.4.1.1.7), το διανυσματικό κέρδος K_0 ορίζεται στην (4.4.1.1.9) και η $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ είναι μία θετικά ορισμένη συμμετρική μήτρα.

Όπως σε όλα τα προβλήματα εκτίμησης παραμέτρων, η εκτίμηση του διανύσματος θ απαιτεί συνθήκη παραμένουσας διέγερσης.

Υπόθεση 4.1.1.1.1. Έστω ότι το διάνυσμα $\psi(t)$ ικανοποιεί συνθήκη παραμένουσας διέγερσης, ώστε για οποιαδήποτε σταθερά $\lambda > 0$ αρκούντως μεγάλη, το διάνυσμα-γραμμή σημάτων $\varphi(t) \in \mathbb{R}^p$ που λαμβάνεται από γραμμικό φιλτράρισμα του $\psi(t)$, με φίλτρο που ορίζεται από τις εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = \lambda(A_0 - K_0C_0)Y(t) - \lambda K_0\psi(t) \\ \varphi(t) = C_0Y(t) + \psi(t) \end{cases} \quad (4.4.1.1.12)$$

ικανοποιεί για κάποιες σταθερές α, T και $\forall t \geq t_0$ την ακόλουθη ανισότητα:

$$\int_t^{t+T} \varphi^T(\tau)\varphi(\tau)d\tau \geq \alpha I_p \quad (4.4.1.1.13)$$

Θεώρημα 4.4.1.1.1. Έστω $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ οποιαδήποτε θετικά ορισμένη συμμετρική μήτρα. Αν $f(x)$ και $g(x)$ καθολικά Lipschitz, $u(t)$ και $\psi(t)$ φραγμένα διανύσματα, τότε αν ισχύει η Υπόθεση 4.4.1.1.1, για αρκούντως μεγάλη σταθερά $\lambda > 0$, οι διαφορικές εξισώσεις 4.4.1.1.11 συνιστούν έναν **καθολικό, εκθετικό** (βλέπε Ορισμό 2.2, §2.3.1, Κεφάλαιο 2) **προσαρμοστικό** παρατηρητή για το σύστημα (4.4.1.1.10), δηλαδή για οποιοδήποτε αρχικές συνθήκες $x(t_0)$,

$\hat{x}(t_0)$, $\hat{\theta}(t_0)$ και για όλα τα $\theta \in \mathfrak{R}^n$, τα σφάλματα $\hat{x}(t) - x(t)$ και $\hat{\theta}(t) - \theta$ τείνουν εκθετικά στο μηδέν καθώς $t \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Η (4.4.1.11β) με χρήση της (4.4.1.11γ) γίνεται

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) + \Lambda K_0 [y(t) - C_0 \hat{x}(t) - \psi(t)\hat{\theta}(t)] + \lambda^{-1} \Lambda Y(t) \dot{\hat{\theta}}(t) \quad (4.4.1.14)$$

Τα σφάλματα παρατήρησης ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} e_x(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ e_\theta(t) &= \hat{\theta}(t) - \theta \end{aligned} \quad (4.4.1.15)$$

Από την (4.4.1.4) και την (4.4.1.14):

$$\dot{e}_x(t) = A_0 e_x(t) + f(\hat{x}(t)) - f(x(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) - g(x(t))u(t) - \Lambda K_0 [C_0 e_x(t) + \psi(t)e_\theta(t)] + \lambda^{-1} \Lambda Y(t) \dot{e}_\theta(t) \quad (4.4.1.16)$$

Για λόγους πράξεων, απαιτείται ο μετασχηματισμός συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda^{-1} \Lambda z(t) \\ \hat{x}(t) &= \lambda^{-1} \Lambda \hat{z}(t) \\ e_x(t) &= \lambda^{-1} \Lambda e_z(t) \end{aligned} \quad (4.4.1.17)$$

Εξαιτίας των ειδικών μορφών των μητρών, είναι προφανείς οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} A_0 \Lambda &= \lambda A_0 \\ C_0 \Lambda &= \lambda C_0 \end{aligned} \quad (4.4.1.18)$$

Έπεται ότι η δυναμική του $e_z(t)$ είναι

$$\dot{e}_z(t) = \lambda(A_0 - K_0 C_0) e_z(t) + \xi(t) - \lambda K_0 \psi(t) e_\theta(t) + Y(t) \dot{e}_\theta(t) \quad (4.4.1.19)$$

έχοντας ορίσει τον όρο $\xi(t)$ ως εξής:

$$\xi(t) = \lambda \Lambda^{-1} [f(\lambda^{-1} \Lambda \hat{z}(t)) - f(\lambda^{-1} \Lambda z(t))] + \lambda \Lambda^{-1} [g(\lambda^{-1} \Lambda \hat{z}(t)) - g(\lambda^{-1} \Lambda z(t))] u(t) \quad (4.4.1.20)$$

Ορίζεται ο γραμμικός συνδυασμός των σφαλμάτων εκτίμησης, προκειμένου να επιτευχθεί η *συνδυαστική εκτίμηση κατάστασης - παραμέτρων*:

$$e(t) = e_z(t) - Y(t) e_\theta(t) \quad (4.4.1.21)$$

Παραγωγίζοντας, η δυναμική του *συνδυαστικού σφάλματος (joint estimation error)* γίνεται:

$$\dot{e}(t) = \lambda(A_0 - K_0 C_0) [e(t) + Y(t) e_\theta(t)] + \xi(t) - \lambda K_0 \psi(t) e_\theta(t) + Y(t) \dot{e}_\theta(t) - [\dot{Y}(t) e_\theta(t) + Y(t) \dot{e}_\theta(t)] \Rightarrow$$

$$\dot{e}(t) = \lambda(A_0 - K_0 C_0) e(t) + \xi(t) + [\lambda(A_0 - K_0 C_0) Y(t) - \lambda K_0 \psi(t) - \dot{Y}(t)] e_\theta(t) \quad (4.4.1.22)$$

Από την (4.4.1.11α) για την δυναμική της $Y(t)$, έπεται για την (4.4.1.22):

$$\dot{e}(t) = \lambda(A_0 - K_0 C_0) e(t) + \xi(t) \quad (4.4.1.23)$$

Αν και από το Λήμμα 4.4.1.1.2, η μήτρα $(A_0 - K_0 C_0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, πρέπει να διερευνηθεί αν το $e(t)$ τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, εξαιτίας του όρου $\xi(t)$ που εξαρτάται από το $e_\theta(t)$. Οπότε, η συμπεριφορά του $e(t)$ πρέπει να μελετηθεί μαζί με το $e_\theta(t)$.

Από (4.4.1.11γ), την $y(t) = C_0 x(t) + \psi(t)\theta$ και την ισότητα $\dot{\theta} = 0$, η δυναμική του σφάλματος παραμέτρου $e_\theta(t)$, γίνεται:

$$\dot{e}_\theta(t) = -\Gamma[C_0 Y(t) + \psi(t)]^T [C_0 e_z(t) + \psi(t)e_\theta(t)]$$

Επειδή $e_z(t) = e(t) + Y(t)e_\theta(t)$ από την (4.4.1.1.21), έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\theta(t) &= -\Gamma[C_0 Y(t) + \psi(t)]^T C_0 e(t) - \Gamma[C_0 Y(t) + \psi(t)]^T [C_0 Y(t) + \psi(t)]e_\theta(t) \\ &= -\Gamma\varphi^T(t)C_0 e(t) - \Gamma\varphi^T(t)\varphi(t)e_\theta(t) \end{aligned}$$

όπου $\varphi(t) = C_0 Y(t) + \psi(t)$ από την (4.4.1.1.14).

Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στην μελέτη της ευστάθειας του *συστήματος συνδεδειμένου σφάλματος*:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \lambda(A_0 - K_0 C_0)e(t) + \xi(t) \\ \dot{e}_\theta(t) = -\Gamma\varphi^T(t)C_0 e(t) - \Gamma\varphi^T(t)\varphi(t)e_\theta(t) \end{cases} \quad (4.4.1.1.24)$$

Αρχικά, λαμβάνεται μόνο το ομογενές μέρος της διαφορικής εξίσωσης για το $e_\theta(t)$, δηλαδή το γραμμικό χρονομεταβλητό σύστημα:

$$\dot{e}_\theta(t) = -\Gamma\varphi^T(t)\varphi(t)e_\theta(t) \quad 4.4.1.1.25)$$

Η λύση του γραμμικού χρονομεταβλητού συστήματος γράφεται προφανώς ως:

$$e_\theta(t) = e_\theta(t_0)e^{-\Gamma \int_{t_0}^t \varphi^T(\tau)\varphi(\tau)d\tau} \quad (4.4.1.1.26)$$

Από την ιδιότητα παραμένουσας διέγερσης (4.4.1.1.13), $\int_t^{t+T} \varphi^T(\tau)\varphi(\tau)d\tau \geq \alpha I_p$, άρα το σφάλμα $e_\theta(t)$ είναι εκθετικά ευσταθές.

Από το Θεώρημα 1.19 της §1.3.4 του Κεφαλαίου 1, η ευστάθεια του $e_\theta(t)$ συνεπάγεται ότι για κάθε συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα $Q(t) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, π.χ. $Q(t) = I_p$, υπάρχει συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρας $P(t) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\dot{P}(t) = [\Gamma\varphi^T(t)\varphi(t)]^T P(t) + P(t)[\Gamma\varphi^T(t)\varphi(t)] - I_p \quad (4.4.1.1.27)$$

Η $P(t)$ έχει άνω και κάτω φράγμα, σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.19

$$A_1 I \leq P(t) \leq A_2 I$$

Προκειμένου να μελετηθεί η *ευστάθεια του συστήματος σφάλματος* (4.4.1.1.24), θεωρείται η συνάρτηση Lyapunov:

$$V(t) = e^T(t)S e(t) + e_\theta^T(t)P(t)e_\theta(t) \quad (4.4.1.1.28)$$

όπου S η θετικά ορισμένη λύση της (4.4.1.1.8) και $P(t)$ η λύση της (4.4.1.1.27).

Η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov, για $K_0 = \frac{1}{2}S^{-1}C_0^T$, είναι:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{e}^T(t)Se(t) + e^T(t)S\dot{e}(t) + \dot{e}_\theta^T(t)P(t)\varepsilon_\theta(t) + e_\theta^T(t)P(t)\dot{\varepsilon}_\theta(t) \\
&+ e_\theta^T(t)\dot{P}(t)\varepsilon_\theta(t) \\
&= -\lambda e^T(t)Se(t) + 2e^T(t)S\xi(t) - e^T(t)[P(t)\Gamma\varphi^T(t)C_0]^T\varepsilon_\theta(t) \\
&- e_\theta^T(t)[P(t)\Gamma\varphi^T(t)C_0]e(t) - e_\theta^T(t)\varepsilon_\theta(t) \quad (4.4.1.1.29)
\end{aligned}$$

Λόγω της ιδιότητας Lipschitz των τριγωνικών συναρτήσεων f και g , ο μη γραμμικός όρος $\xi(t) = \lambda\Lambda^{-1}[f(\lambda^{-1}\Lambda\hat{z}(t)) - f(\lambda^{-1}\Lambda z(t))] + \lambda\Lambda^{-1}[g(\lambda^{-1}\Lambda\hat{z}(t)) - g(\lambda^{-1}\Lambda z(t))]u(t)$ ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα:

$$\|\xi(t)\| \leq \mu(\lambda^{-1})\|e_z(t)\| = \mu(\lambda^{-1})\|e(t) + Y(t)e_\theta(t)\|$$

με $\mu(\lambda^{-1}) > 0$, ένα πολυώνυμο του (λ^{-1}) , το οποίο εξαρτάται από τις σταθερές Lipschitz των συναρτήσεων f και g και από το άνω φράγμα της εισόδου $u(t)$. Επομένως, υπάρχουν δύο πολυώνυμα $\mu_1(\lambda^{-1})$ και $\mu_2(\lambda^{-1})$, ώστε για τον όρο $2e^T(t)S\xi(t)$ της (4.4.1.1.29) να ισχύει:

$$\begin{aligned}
2e^T(t)S\xi(t) &\leq \|2e^T(t)S\xi(t)\| \\
&\leq \mu_1(\lambda^{-1})\|e(t)\|^2 + \mu_2(\lambda^{-1})\|e(t)\|\|e_\theta(t)\| \quad (4.4.1.1.30)
\end{aligned}$$

Επειδή οι μήτρες $P(t)$ και $Y(t)$ είναι άνω φραγμένες, υπάρχει μια θετική σταθερά c :

$$2\|P(t)\Gamma\varphi^T(t)C_0\| \leq c \quad (4.4.1.1.31)$$

Εφαρμόζοντας την μόνιμη ανισότητα $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, με $a = [\mu_2(\lambda^{-1}) + c] \cdot \|e(t)\|$, $b = \|e_\theta(t)\|$, η (4.4.1.1.29) συνεπάγεται:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -e^T(t)[\lambda S - \mu_1(\lambda^{-1})I]e(t) - \|e_\theta(t)\|^2 + [\mu_2(\lambda^{-1}) + c] \cdot \|e(t)\|\|e_\theta(t)\| \\
&\leq -e^T(t)[\lambda S - \mu_1(\lambda^{-1})I]e(t) - \|e_\theta(t)\|^2 + \frac{(\mu_2(\lambda^{-1}) + c)^2}{2}\|e(t)\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\|e_\theta(t)\|^2 \\
&= -e^T(t) \left[\lambda S - \mu_1(\lambda^{-1})I - \frac{(\mu_2(\lambda^{-1}) + c)^2}{2}I \right] e(t) - \frac{1}{2}\|e_\theta(t)\|^2
\end{aligned}$$

Επιλέγεται, λόγω της υψικερδούς σχεδίασης, σταθερά λ αρκούντως υψηλή, ώστε:

$$\lambda S - \mu_1(\lambda^{-1})I - \frac{(\mu_2(\lambda^{-1}) + c)^2}{2}I > \frac{1}{2}I \quad (4.4.1.1.32)$$

Συνεπώς,

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{2}\|e(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|e_\theta(t)\|^2 \quad (4.4.1.1.33)$$

Επειδή για τις μέγιστες και ελάχιστες ιδιοτιμές λ_{\max} , λ_{\min} των $S, P(t)$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(S)\|e(t)\|^2 + \lambda_{\min}(P(t))\|e(t)\|^2 &\leq V(t) \\
&\leq \lambda_{\max}(S)\|e(t)\|^2 + \lambda_{\max}(P(t))\|e(t)\|^2
\end{aligned}$$

έπεται ότι

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{2} \left[e^T \frac{S}{\lambda_{\max}(S)} e + e_{\theta}^T \frac{P(t)}{\lambda_{\max}(P(t))} e_{\theta} \right] \leq -\frac{1}{2} \min \left(\frac{1}{\lambda_{\max}(S)}, \frac{1}{\lambda_{\max}(P(t))} \right) V$$

Συμπεραίνεται ότι για επιλογή λ αρκούντως μεγάλης, όπως στην (4.4.1.1.32), το συνδυαστικό σφάλμα $e(t)$ και το σφάλμα παραμέτρου $e_{\theta}(t)$ τείνουν εκθετικά στο μηδέν, και επομένως και το μετασχηματισμένο σφάλμα εκτίμησης κατάστασης $e_z(t) := e(t) + Y(t)e_{\theta}(t)$ τείνει στο μηδέν και άρα και το σφάλμα εκτίμησης κατάστασης $e_x(t) := \lambda^{-1} \Lambda e_z(t)$ τείνει εκθετικά στο μηδέν. \square

4.4.1.2 Σχεδίαση Αυξανόμενου Κέρδους

Προτείνεται η σχεδίαση του προσαρμοστικού παρατηρητή με αύξουσα χρονομεταβλητή παράμετρο $\lambda := \lambda(t)$. Θεωρείται ότι η χρησιμοποιούμενη νόρμα $\|\cdot\|$ απεικονίζει την πράξη $\|M\| := \sqrt{\lambda_{\max}(M^T M)}$ για κάθε πραγματική μήτρα, όπου $\lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(P)$ συμβολίζουν την μέγιστη και ελάχιστη ιδιοτιμή μιας συμμετρικής μήτρας P . Αν επιπλέον, $P > 0$ (θετικά ορισμένη), τότε $\|P\| = \lambda_{\max}(P)$.

Μελετάται το παρατηρήσιμο σύστημα της μορφής (4.4.1.1.10) με το λάθος εντοπιζόμενο στον αισθητήρα:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = C_0 x(t) + q(t) \end{cases} \quad (4.4.1.2.1)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}; C_0 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.4.1.2.2)$$

Οι $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n, g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times l}$ παρουσιάζουν τριγωνικότητα ως εξής:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ f_n(x) \end{bmatrix}; g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ g_n(x) \end{bmatrix} \quad (4.4.1.2.3)$$

Το διανυσματικό λάθος στον αισθητήρα γράφεται, κατόπιν γραμμικής παρεμβολής:

$$\begin{aligned} q(t) &= \psi(t)\theta \\ \psi(t) &= [\psi_1(t) \quad \dots \quad \psi_p(t)]; \theta = [\theta_1 \quad \dots \quad \theta_p]^T \end{aligned} \quad (4.4.1.2.4)$$

Για την παράμετρο $\lambda(t)$, ορίζεται η διαγώνιος μήτρα

$$\Lambda(\lambda(t)) = \begin{bmatrix} \lambda(t) & 0 & & 0 \\ & \lambda^2(t) & & \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & \dots & \lambda^n(t) \end{bmatrix} \quad (4.4.1.2.5)$$

Δεδομένου ότι (A, C) παρατηρήσιμο, υπάρχει τετραγωνική, θετικά ορισμένη, συμμετρική μήτρα $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ και σταθερά $\mu > 0$, που ικανοποιούν την γραμμική ανισότητα μητρών:

$$(A_0 - K_0 C_0)^T P_0 + P_0 (A_0 - K_0 C_0) + \mu I < 0 \quad (4.4.1.2.6)$$

$$\Leftrightarrow A^T P - C^T Y^T + PA - YC + \mu I < 0 \quad (4.4.1.2.7)$$

όπου οι άγνωστοι είναι η σταθερά $\mu > 0$, η μήτρα $Y = PK \in \mathfrak{R}^n, P > 0$. Αφού επιλυθεί αυτό το πρόβλημα, πρέπει να τεθεί $K = P^{-1}Y$, για να υπολογισθεί το διάνυσμα σταθερού κέρδους.

Ο ακόλουθος προσαρμοστικός παρατηρητής προτείνεται:

$$\dot{Y}(t) = \lambda(t)(A_0 - K_0 C_0)Y(t) - \lambda(t)K_0\psi(t) \quad (4.4.1.2.8\alpha)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) + \Lambda(\lambda(t)) \cdot \{K_0 + \lambda^{-1}(t)Y(t)\Gamma[C_0Y(t) + \psi(t)]^T\}[y(t) - C_0\hat{x}(t) - \psi(t)\hat{\theta}(t)] \quad (4.4.1.2.8\beta)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma[C_0Y(t) + \psi(t)]^T[y(t) - C_0\hat{x}(t) - \psi(t)\hat{\theta}(t)] \quad (4.4.1.2.8\gamma)$$

Η $Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ είναι μια μήτρα σημάτων που παράγονται από γραμμικό φίλτράρισμα του διανύσματος $\psi(t)$, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ η εκτίμηση της κατάστασης, $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^p$ είναι η εκτίμηση των παραμέτρων, $\lambda(t)$ θετική χρονομεταβλητή παράμετρος, η μήτρα Λ ορίζεται στην (4.4.1.1.7), το διανυσματικό σταθερό κέρδος K_0 ορίζεται στην (4.4.1.1.9) και η $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ είναι μία επιλεγόμενη θετικά ορισμένη συμμετρική μήτρα.

Γίνονται οι παρακάτω υποθέσεις, για λόγους που θα εξηγηθούν παρακάτω αναλυτικά:

Υπόθεση 4.1.1.2.1. Οι τριγωνικές μη γραμμικές συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι καθολικά Lipschitz ικανοποιώντας τις σχέσεις:

$$\|\Lambda^{-1}(\lambda(t))[f(\Lambda(\lambda(t))x) - f(\Lambda(\lambda(t))y)]\| \leq k_f \|x - y\|$$

$$\|\Lambda^{-1}(\lambda(t))[g(\Lambda(\lambda(t))x) - g(\Lambda(\lambda(t))y)]\| \leq k_g \|x - y\|$$

για υπολογιζόμενες σταθερές k_f και k_g και τα $u(t)$ και $\psi(t)$ είναι φραγμένα διανύσματα. \square

Υπόθεση 4.1.1.2.2. Η παράμετρος κέρδους $t \mapsto \lambda(t)$ είναι εκ κατασκευής συνεχής στο $\mathbb{R}_{\geq 0}$ και υπάρχει θετική σταθερά c_0 , ώστε $1 \leq \lambda(t) \leq c_0$; $\forall t \geq 0$. Επίσης, είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη με την παράγωγο $\dot{\lambda}(t)$ σχεδόν παντού φραγμένη στο $\mathbb{R}_{\geq 0}$ και $\dot{\lambda}(t) \geq 0$; σχεδόν $\forall t \geq 0$. \square

Υπόθεση 4.1.1.2.3. Έστω ότι το διάνυσμα $\psi(t)$ ικανοποιεί συνθήκη παραμένουσας διέγερσης, ώστε για οποιαδήποτε παράμετρο $\lambda(t) > 0$ αρκούντως μεγάλη, το διάνυσμα-γραμμή σημάτων $\varphi(t) \in \mathbb{R}^p$ που λαμβάνεται από γραμμικό φίλτράρισμα του $\psi(t)$, με φίλτρο που ορίζεται από τις εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = \lambda(t)(A_0 - K_0 C_0)Y(t) - \lambda(t)K_0\psi(t) \\ \varphi(t) = C_0Y(t) + \psi(t) \end{cases} \quad (4.4.1.2.9)$$

ικανοποιεί για κάποιες σταθερές α, T και $\forall t \geq t_0$ την ακόλουθη ανισότητα:

$$\int_t^{t+T} \varphi^T(\tau)\varphi(\tau)d\tau \geq \alpha I_p \quad (4.4.1.2.10)$$

\square

Τα σφάλματα κατάστασης και διανυσματικής παράμετρου δίνονται από:

$$e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

$$e_\theta(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$$

Πραγματοποιείται ο μετασχηματισμός συντεταγμένων:

$$\begin{aligned}x(t) &= \Lambda(\lambda(t))z(t) \\ \hat{x}(t) &= \Lambda(\lambda(t))\hat{z}(t)\end{aligned}\quad (4.4.1.2.11)$$

$$e_x(t) = \Lambda(\lambda(t))e_z(t) \Leftrightarrow e_z(t) = \Lambda^{-1}(\lambda(t))e_x(t)$$

Εξαιτίας των ειδικών μορφών των μητρών, είναι προφανείς οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}(\lambda(t))A_0\Lambda(\lambda(t)) &= \lambda(t)A_0 \\ C_0\Lambda(\lambda(t)) &= \lambda(t)C_0\end{aligned}$$

Για το σφάλμα εκτίμησης παραμέτρου, ισχύει:

$$\dot{e}_\theta(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) - \dot{\theta} \stackrel{\dot{\theta}=0}{\Rightarrow} \dot{e}_\theta(t) = \Gamma[C_0Y(t) + \psi(t)]^T[y(t) - C_0\hat{x}(t) - \psi(t)\hat{\theta}(t)]$$

Το σφάλμα κατάστασης έχει την εξής δυναμική:

$$\begin{aligned}\dot{e}_x(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= A_0e_x(t) + \{f(\hat{x}(t)) - f(x(t))\} + \{g(\hat{x}(t)) - g(x(t))\}u(t) \\ &\quad - \Lambda(\lambda(t))K_0\{C_0e_x(t) + \psi(t)e_\theta(t)\} + \lambda^{-1}(t)\Lambda(\lambda(t))Y(t)\dot{e}_\theta(t)\end{aligned}$$

Η δυναμική του $e_z(t)$, λόγω της (4.4.1.2.11), δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned}\dot{e}_z(t) &= \lambda(t)\frac{\partial}{\partial\lambda}\{\Lambda^{-1}(\lambda(t))\}e_x(t) + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\dot{e}_x(t) \\ &= \lambda(t)\frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{bmatrix} \lambda^{-1}(t) & 0 & 0 \\ & \lambda^{-2}(t) & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & & \dots & \lambda^{-n}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda(t) & 0 & 0 \\ & \lambda^2(t) & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & & \dots & \lambda^n(t) \end{bmatrix}e_z(t) \\ &\quad + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\dot{e}_x(t) = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & \dots & n \end{bmatrix}e_z(t) + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\dot{e}_x(t) \\ &= \lambda(t)S(\lambda(t))e_z(t) + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\dot{e}_x(t)\end{aligned}$$

όπου ορίζεται η μήτρα $S(\lambda(t))$ από:

$$S(\lambda(t)) \triangleq -\frac{1}{\lambda(t)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & \dots & n \end{bmatrix}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\dot{e}_z(t) &= \lambda(t)S(\lambda(t))e_z(t) + \lambda(t)A_0e_z(t) + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\{f(\hat{x}(t)) - f(x(t))\} \\ &\quad + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\{g(\hat{x}(t)) - g(x(t))\}u(t) - \lambda(t)K_0C_0e_z(t) - K_0\psi(t)e_\theta(t) \\ &\quad + \lambda^{-1}(t)Y(t)\dot{e}_\theta(t)\end{aligned}\quad (4.4.1.2.12)$$

Χρησιμοποιώντας την $\varphi(t) = C_0Y(t) + \psi(t)$ και την

$$\dot{e}_\theta(t) = -\Gamma\varphi^T(t)C_0\Lambda(\lambda(t))e_z(t) - \Gamma\varphi^T(t)\psi(t)e_\theta(t), \text{ η (4.4.1.2.12) γίνεται:}$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_z(t) = & [\lambda(t)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t)) - Y(t)\Gamma\varphi^T(t)C_0]e_z(t) \\ & + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\{f(\hat{x}(t)) - f(x(t))\} \\ & + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\{g(\hat{x}(t)) - g(x(t))\}u(t) \\ & - (K_0\psi(t) + \lambda^{-1}(t)Y(t)\Gamma\varphi^T(t)\psi(t))e_\theta(t)\end{aligned}$$

Οι μη γραμμικοί όροι

$$\begin{aligned}& \Lambda^{-1}(\lambda(t))\{f(\Lambda(\lambda(t))\hat{z}(t)) - f(x(t))\} \\ & + \Lambda^{-1}(\lambda(t))\{g(\Lambda(\lambda(t))\hat{z}(t)) - g(x(t))\}u(t) \triangleq \xi(t)\end{aligned}$$

μπορούν να τεθούν ίσοι με $\xi(t)$, επομένως, παραλείποντας για λόγους ευκρίνειας τα χρονικά ορίσματα και το όρισμα λ από την Λ και την S , η δυναμική του σφάλματος γίνεται:

$$\dot{e}_z = [\lambda(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}S - Y\Gamma\varphi^T C_0]e_z + \xi - (K_0\psi + \lambda^{-1}Y\Gamma\varphi^T\psi)e_\theta \quad (4.4.1.2.13)$$

$$\text{όπου } \xi := \Lambda^{-1}\{f(\hat{x}) - f(x)\} + \Lambda^{-1}\{g(\hat{x}) - g(x)\}u \quad (4.4.1.2.14)$$

και εκ της υποθέσεως 4.1.1.2.1,

$$\|\xi\| \leq (k_f + k_g \bar{u})\|e_z\|$$

Ορίζεται ο γραμμικός συνδυασμός των σφαλμάτων εκτίμησης, προκειμένου να επιτευχθεί η *συνδεδειγμένη εκτίμηση κατάστασης - παραμέτρου*:

$$e(t) = e_z(t) - \frac{1}{\lambda(t)}Y(t)e_\theta(t) \quad (4.4.1.2.15)$$

Η δυναμική του είναι:

$$\dot{e}(t) = \dot{e}_z(t) - \lambda^{-1}(t)\dot{Y}(t)e_\theta(t) - \lambda^{-1}(t)Y(t)\dot{e}_\theta(t) + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}Y(t)e_\theta(t)$$

Με χρήση της (4.4.1.2.9) και της (4.4.1.2.12), η δυναμική του συνδεδειγμένου σφάλματος γίνεται:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{e} = & \dot{\lambda}S e_z + \lambda A_0 e_z + \xi - \lambda K_0 C_0 e_z - K_0 \psi e_\theta + \lambda^{-1} Y \dot{e}_\theta(t) \\ & - \lambda^{-1} [\lambda(A_0 - K_0 C_0) Y(t) - \lambda K_0 \psi] e_\theta(t) - \lambda^{-1} Y \dot{e}_\theta(t) \\ & + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)} Y(t) e_\theta(t) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\dot{e} = \lambda(A_0 - K_0 C_0)e + \dot{\lambda}S e + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} U Y e_\theta + \xi$$

όπου

$$\xi := \Lambda^{-1}\{f(\hat{x}) - f(x)\} + \Lambda^{-1}\{g(\hat{x}) - g(x)\}u$$

και

$$U := I - \text{diag}(1, \dots, n)$$

Για το σφάλμα διανυσματικής παραμέτρου, η δυναμική είναι:

$$\begin{aligned}\dot{e}_\theta(t) = & -\Gamma\varphi^T(t)C_0\Lambda(\lambda(t))e_z(t) - \Gamma\varphi^T(t)\psi(t)e_\theta(t) \\ = & -\lambda(t)\Gamma\varphi^T(t)C_0e_z(t) - \Gamma\varphi^T(t)\psi(t)e_\theta(t) \xrightarrow{(4.4.1.2.15)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{e}_\theta = -\lambda\Gamma\varphi^T C_0 e - \Gamma\varphi^T C_0 Y e_\theta - \Gamma\varphi^T \psi e_\theta \xrightarrow{\varphi=C_0 Y + \psi} \dot{e}_\theta = -\Gamma\varphi^T \varphi e_\theta - \lambda\Gamma\varphi^T C_0 e.$$

Άρα, το σύστημα του συνδεδειγμένου σφάλματος είναι το εξής:

$$\begin{cases} \dot{e} = \lambda(A_0 - K_0C_0)e + \lambda Se + \frac{\lambda}{\lambda^2}UYe_\theta + \xi \\ \dot{e}_\theta = -\Gamma\varphi^T\varphi e_\theta - \lambda\Gamma\varphi^TC_0e \end{cases} \quad (4.4.1.2.16)$$

με $\xi := \Lambda^{-1}\{f(\hat{x}) - f(x)\} + \Lambda^{-1}\{g(\hat{x}) - g(x)\}u$, $S := -\lambda^{-1}\text{diag}(1, \dots, n)$, $U := I - \text{diag}(1, \dots, n)$.

Το ομογενές μέρος της διαφορικής εξίσωσης για το $e_\theta(t)$, δηλαδή το γραμμικό χρονομεταβλητό σύστημα είναι εκθετικά ευσταθές

$$\dot{e}_\theta(t) = -\Gamma\varphi^T(t)\varphi(t)e_\theta(t)$$

διότι η λύση του γράφεται σε ολοκληρωτική μορφή ως: $e_\theta(t) = e_\theta(t_0)e^{-\Gamma\int_{t_0}^t\varphi^T(\tau)\varphi(\tau)d\tau}$ και από την ιδιότητα παραμένουσας διέγερση (4.4.1.2.10), ισχύει: $\int_t^{t+T}\varphi^T(\tau)\varphi(\tau)d\tau \geq \alpha I_p$.

Από το Θεώρημα 1.19 της §1.3.4 του Κεφαλαίου 1, η ευστάθεια του $e_\theta(t)$ συνεπάγεται ότι για κάθε συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα $Q(t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, π.χ. $Q(t) = I_p$, υπάρχει συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα $P(t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\dot{P}(t) = [\Gamma\varphi^T(t)\varphi(t)]^TP(t) + P(t)[\Gamma\varphi^T(t)\varphi(t)] - I_p \quad (4.4.1.2.17)$$

Η $P(t)$ έχει άνω και κάτω φράγμα, σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.19

$$A_1I \leq P(t) \leq A_2I$$

Προκειμένου να μελετηθεί η ευστάθεια του συνδυαστικού συστήματος σφάλματος (4.4.1.2.16) θεωρείται η **συνάρτηση Lyapunov**:

$$V(t) = e^T(t)P_0e(t) + e_\theta^T(t)P(t)e_\theta(t) \quad (4.4.1.2.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{e}^T(t)P_0e(t) + e^T(t)P_0\dot{e}(t) + \dot{e}_\theta^T(t)P(t)e_\theta(t) + e_\theta^T(t)P(t)\dot{e}_\theta(t) \\ &\quad + e_\theta^T(t)\dot{P}(t)e_\theta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V} &= \lambda e^T[(A_0 - K_0C_0)^TP_0 + P_0(A_0 - K_0C_0)]e + 2\lambda e^TSP_0e + 2\frac{\lambda}{\lambda^2}e_\theta^TY^TUP_0e \\ &\quad + 2e^TP_0\xi - 2\lambda e_\theta^TP\Gamma\varphi^TC_0e - e_\theta^Te_\theta \end{aligned} \quad (4.4.1.2.19)$$

Λόγω της ιδιότητας Lipschitz των τριγωνικών συναρτήσεων f και g , ο μη γραμμικός όρος $\xi(t) = \Lambda^{-1}[f(\Lambda\hat{z}(t)) - f(\Lambda z(t))] + \Lambda^{-1}[g(\Lambda\hat{z}(t)) - g(\Lambda z(t))]$ ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα:

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\| &\leq (k_f + k_g\bar{u})\|e_z(t)\| \\ &= (k_f + k_g\bar{u})\|\lambda(t)e(t) + Y(t)e_\theta(t)\| \end{aligned}$$

με $(k_f + k_g\bar{u}) > 0$ να εξαρτάται από τις σταθερές Lipschitz των συναρτήσεων f και g και από το άνω φράγμα της εισόδου $u(t)$. Επομένως, ο όρος $2e^TP_0\xi$ της (4.4.1.2.19) φράσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} 2e^T P_0 \xi &\leq \|2e^T P_0 \xi\| \\ &\leq 2\lambda(k_f + k_g \bar{u}) \|e\|^2 + 2(k_f + k_g \bar{u}) \|Y\| \|e\| \|e_\theta\| \end{aligned} \quad (4.4.1.2.20)$$

Επειδή οι μήτρες $P(t)$ και $Y(t)$ είναι άνω φραγμένες, υπάρχει μια υπολογίσιμη θετική σταθερά c_1 :

$$2\|P(t)Y^T(t)C_0\| \leq c_1 \quad (4.4.1.2.21)$$

Ομοίως, υπάρχει μια υπολογίσιμη σταθερά c_2 τέτοια ώστε

$$\|Y(t)\| \leq \bar{v}; \quad 2\|Y(t)UP_0\| \leq c_2 \quad (4.4.1.2.22)$$

Λόγω της (4.4.1.2.6) η (4.4.1.2.19) γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu\lambda\|e\|^2 + 2\|YUP_0\| \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} \|e\| \|e_\theta\| + \lambda(k_f + k_g \bar{u}) \|e\|^2 \\ &\quad + 2(k_f + k_g \bar{u}) \|Y\| \|e\| \|e_\theta\| + 2\lambda\|PY^T C_0\| \|e\| \|e_\theta\| - \|e_\theta\|^2 \\ &\leq -(\mu\lambda - \lambda(k_f + k_g \bar{u})) \|e\|^2 \\ &\quad + \left[c_1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + 2(k_f + k_g \bar{u})\bar{v} + \lambda c_2 \right] \|e\| \|e_\theta\| - \|e_\theta\|^2 \end{aligned}$$

καθώς η ποσότητα $2\dot{\lambda}e^T S P_0 e$ είναι ≤ 0 , λόγω του ότι εκ κατασκευής $\dot{\lambda}(t) \geq 0$, $P_0 > 0$ θετικά ορισμένη μήτρα και η $S(\lambda(t)) \triangleq -\frac{1}{\lambda(t)} \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ είναι αρνητικά ορισμένη και δεδομένου ότι εκ κατασκευής, η παράμετρος $\lambda(t)$ είναι θετική.

Εφαρμόζοντας την μόνιμη ανισότητα $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, με $a = \|e\| \left\{ c_1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + 2(k_f + k_g \bar{u})\bar{v} + \lambda c_2 \right\}$, $b = \|e_\theta(t)\|$, η \dot{V} φράσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\mu\lambda - \lambda(k_f + k_g \bar{u})) \|e\|^2 + \frac{1}{2} \left(c_1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + 2(k_f + k_g \bar{u})\bar{v} + \lambda c_2 \right)^2 \|e\|^2 + \frac{1}{2} \|e_\theta\|^2 \\ &\quad - \|e_\theta\|^2 \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(c_1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + 2(k_f + k_g \bar{u})\bar{v} + \lambda c_2 \right)^2 - \mu\lambda + \lambda(k_f + k_g \bar{u}) \right] \|e\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|e_\theta\|^2 \end{aligned} \quad (4.4.1.2.23)$$

Πρέπει να ικανοποιείται η επόμενη συνθήκη, προκειμένου το συνδυαστικό σφάλμα να παρουσιάζει εκθετική ευστάθεια, ανάλογα με την ανάλυση της §4.4.1.1:

$$\frac{1}{2} \left(c_1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + 2(k_f + k_g \bar{u})\bar{v} + \lambda c_2 \right)^2 - \mu\lambda + \lambda(k_f + k_g \bar{u}) \leq 0 \quad (4.4.1.2.24)$$

Υπό την παραπάνω συνθήκη, τα σφάλματα εκτίμησης κατάστασης και παραμέτρων τείνουν εκθετικά στο μηδέν.

Για την σχεδίαση της χρονομεταβλητής παραμέτρου $\lambda(t)$, λαμβάνεται το μετασχηματισμένο σφάλμα εκτίμησης κατάστασης:

$$\begin{aligned} \dot{e}_z &= [\lambda(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}S - Y\Gamma\varphi^T C_0] e_z + \xi - (K_0 \psi + \lambda^{-1} Y\Gamma\varphi^T \psi) e_\theta \\ &= [\lambda(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}S - Y\Gamma\varphi^T C_0] e_z + \xi - K_0 \psi e_\theta - Y\Gamma\varphi^T \psi Y^{-1} e_z \\ &\quad + Y\Gamma\varphi^T \psi Y^{-1} e \end{aligned}$$

Το σφάλμα παρατήρησης και το συνδυαστικό σφάλμα προφανώς είναι φραγμένα από κάποιες μέγιστες τιμές τους: $\|e_\theta(t)\| \leq e_{\theta\max}$, $\|e(t)\| \leq e_{\max}$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \dot{e}_z(\tau) = [\lambda(\tau)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(\tau)S(\lambda(\tau)) - Y(\tau)\Gamma\varphi^T(\tau)\varphi(\tau)Y^{-1}(\tau)]e_z(\tau) \\ + \xi(\tau) - K_0\psi(\tau)e_\theta(\tau) + Y(\tau)\Gamma\varphi^T(\tau)\psi(\tau)Y^{-1}(\tau)e(\tau) \\ e_z(t_0) = e_{z0} \in \mathfrak{R}^n \end{cases} \quad (4.4.1.2.25)$$

$$\forall \tau \geq t_0$$

δίνεται από την ολοκληρωτική σχέση:

$$e_z(\tau) = e_{z0} + \int_{t_0}^{\tau} \{[\lambda(s)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(s)S(\lambda(s)) - Y(s)\Gamma\varphi^T(s)\varphi(s)Y^{-1}(s)]e_z(s) + \xi(s) - K_0\psi(s)e_\theta(s) + Y(s)\Gamma\varphi^T(s)\psi(s)Y^{-1}(s)e(s)\} ds$$

Εκ των υποθέσεων του προβλήματος,

$$\|\xi(t)\| \leq (k_f + k_g \bar{u})\|e_z(t)\|$$

Για σταθερές k_f και k_g και άνω φράγμα της εισόδου ίσο με \bar{u} .

και ισχύει

$$\begin{aligned} & \| -K_0\psi(\tau)e_\theta(\tau) + Y(\tau)\Gamma\varphi^T(\tau)\psi(\tau)Y^{-1}(\tau)e(\tau) \| \\ & \leq \|K_0\psi(\tau)\| \|e_\theta(\tau)\| + \|Y(\tau)\Gamma\varphi^T(\tau)\psi(\tau)Y^{-1}(\tau)\| \|e(\tau)\| \\ & \leq \delta(e_{\theta\max}, e_{\max}) := \delta \end{aligned}$$

για κάποια θετική σταθερά δ , που εξαρτάται από τα άνω φράγματα των σφαλμάτων $e_{\theta\max}$, e_{\max} , η οποία όμως δεν είναι υπολογίσιμη (άγνωστη).

Άρα,

$$\begin{aligned} \|e_z(\tau)\| & \leq \|e_{z0}\| \\ & + \int_{t_0}^{\tau} \{ \|\lambda(s)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(s)S(\lambda(s)) - Y\Gamma\varphi^T(s)\varphi(s)Y^{-1}(s)\| \|e_z(s)\| \\ & + (k_f + k_g \bar{u})\|e_z(s)\| + \delta \} ds \\ \Rightarrow \|e_z(\tau)\| & \leq \|e_{z0}\| + \int_{t_0}^{\tau} \{(\eta + \kappa)\|e_z(s)\| + \delta\} ds; \quad \forall \tau \geq t_0 \end{aligned} \quad (4.4.1.2.26)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα νορμών:

$$\|\lambda(s)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(s)S(\lambda(s)) - Y(s)\Gamma\varphi^T(s)\varphi(s)Y^{-1}(s)\| \leq \|\lambda(s)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(s)S(\lambda(s))\| + \|Y(s)\Gamma\varphi^T(s)\varphi(s)Y^{-1}(s)\|$$

και $\|Y(s)\Gamma\varphi^T(s)\varphi(s)Y^{-1}(s)\| \leq c$ για μία θετική σταθερά εκ των υποθέσεων για τις φραγμένες μήτρες, ενώ έγινε και η σχεδιαστική υπόθεση, όπως στο Κεφάλαιο 3, ότι υπάρχει σταθερά η , η οποία ικανοποιεί την:

$$\eta \geq \sup_{t \geq 0} \{ \|\lambda(t)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\| \} \quad (4.4.1.2.26)$$

Η σταθερά κ λήφθηκε ίση με $\kappa = (k_f + k_g \bar{u}) + c$, όπου η ποσότητα $(k_f + k_g \bar{u})$ εξαρτάται από τις σταθερές Lipschitz των μη γραμμικών συναρτήσεων f, g καθώς και από το φράγμα της εισόδου $u(t)$, ενώ η c από τα άνω φράγματα μητρών.

Με βάση το Θεώρημα 1.9 της §1.2 του Κεφαλαίου 1, ισχύει

$$x(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t [\beta + \gamma x(s)] ds \xrightarrow{\alpha, \beta \geq 0, \gamma > 0} x(t) \leq \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) (e^{\gamma(t-t_0)} - 1) + \alpha e^{\gamma(t-t_0)}$$

άρα, για την (4.4.1.2.26) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \|e_z(\tau)\| &\leq \|e_{z0}\| e^{(\eta+\kappa)(\tau-t_0)} + \frac{\delta}{\eta+\kappa} (e^{(\eta+\kappa)(\tau-t_0)} - 1) \\ &= e^{(\eta+\kappa)(\tau-t_0)} \left(\|e_{z0}\| + \frac{\delta}{\eta+\kappa} \right) - \frac{\delta}{\eta+\kappa} \\ &\leq e^{(\eta+\kappa)(\tau-t_0)} \left(\|e_{z0}\| + \frac{\delta}{\eta+\kappa} \right) \end{aligned} \quad (4.4.1.2.27)$$

καθώς $-\frac{\delta}{\eta+\kappa} < 0$.

Όπως στο Λήμμα 3.2 του Κεφαλαίου 3,

$$\begin{aligned} e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \|e_z(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds \\ &\leq e^{\alpha t^2} \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta+\kappa} \right)^2 \int_t^\infty e^{2(\eta+\kappa)(s-t)} ds \\ &= \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta+\kappa} \right)^2 e^{\alpha t^2 - 2(\eta+\kappa)t} \int_t^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta+\kappa)s} ds \\ &= A_{\alpha, \eta}(t) \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta+\kappa} \right)^2 \end{aligned}$$

όπου η $A_{\alpha, \eta}$, που δίνεται από τον τύπο:

$$A_{\alpha, \eta}(t) := e^{\alpha t^2 - 2(\eta+\kappa)t} \int_t^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta+\kappa)s} ds$$

όπως και η

$$B_{\alpha, \eta}(t) = t A_{\alpha, \eta}(t)$$

έχουν ταυτόσημη συμπεριφορά με τις αναλυθείσες συναρτήσεις του Λήμματος 3.2.

Οπότε, βάσει της παραπάνω ανάλυσης, ισχύει το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 4.4.1.2.1. Για $\lambda(t) \geq 1$, αν υπάρχει $\eta > 0$, τέτοια ώστε

$$\eta \geq \sup_{t \geq 0} \{ \|\lambda(t)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\| \} \quad (4.4.1.2.28)$$

με $S(\lambda(t)) \triangleq -\frac{1}{\lambda(t)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 2 & \\ 0 & \dots & n \end{bmatrix}$, τότε ισχύουν οι ανισότητες:

$$e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \|e_z(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds \leq A_{\alpha, \eta}(t) \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \quad (4.4.1.2.29)$$

$$te^{\alpha t^2} \int_t^\infty \|e_z(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds \leq B_{\alpha, \eta}(t) \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \quad (4.4.1.2.30)$$

όπου οι συναρτήσεις $A_{\alpha, \eta}$ και $B_{\alpha, \eta}$ ορίζονται ως εξής:

- Η $A_{\alpha, \eta}: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}$ είναι διαφορίσιμη και γνησίως φθίνουσα και ορίζεται:

$$A_{\alpha, \eta}(t) := e^{\alpha t^2 - 2(\eta + \kappa)t} \int_t^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + \kappa)s} ds$$

- Η $B_{\alpha, \eta}: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}$ είναι διαφορίσιμη και ορίζεται ως εξής:

$$B_{\alpha, \eta}(t) := te^{\alpha t^2 - 2(\eta + \kappa)t} \int_t^\infty e^{-\alpha s^2 + 2(\eta + \kappa)s} ds = tA_{\alpha, \eta}(t)$$

και ισχύουν:

- 1) $\dot{B}_{\alpha, \eta}(t) = (1 + 2\alpha t^2 - 2(\eta + \kappa)t)A_{\alpha, \eta}(t) - t$
- 2) Υπάρχει $t_{max} > 0$, για το οποίο η $B_{\alpha, \eta}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, t_{max}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[t_{max}, \infty)$.
- 3) Η $B_{\alpha, \eta}$ είναι κοίλη στο $[0, t_{max}]$. \square

Θεώρημα 4.4.1.2.1. Για δεδομένη σταθερά $\mu > 0$, μήτρα $P > 0$ και διάνυσμα K , τέτοια ώστε να ισχύει η τετραγωνική ανισότητα Lyapunov (4.4.1.2.6), το μετασχηματισμένο σφάλμα $e_z(t)$ με δυναμική που δίνεται από την (4.4.1.2.12), τείνει εκθετικά στο μηδέν αν για την θετική σταθερά σ , για την οποία ισχύει:

$$\sigma > \frac{\eta + \kappa}{2} \quad (4.4.1.2.31)$$

η παράμετρος κέρδους του προσαρμοστικού παρατηρητή (4.4.1.2.8) ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\lambda(t) \geq \max \left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + 4\alpha\lambda_{max}(P_0)(k_f + k_g \bar{u})B_{\alpha, \eta}(t)}{\mu}, 1 \right) \quad (4.4.1.2.32)$$

Απόδειξη. Εκλέγεται το Lyapunov συναρτησιακό:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(e_z, t) &:= e_z^T P_0 e_z \\
&+ 2e^{at^2} \int_t^\infty \left| \left(\Lambda^{-1}(\lambda(s)) \{ f(\lambda^{-1} \Lambda \hat{z}(s)) - f(x(s)) \} \right. \right. \\
&\left. \left. + \Lambda^{-1}(\lambda(s)) \{ g(\lambda^{-1} \Lambda \hat{z}(s)) - g(x(s)) \} u(s) \right)^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \\
&= e_z^T P_0 e_z + 2e^{at^2} \int_t^\infty \left| (\xi(s))^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds
\end{aligned}$$

όπου η P_0 η θετικά ορισμένη μήτρα της (4.4.1.2.6). Ισχύει

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W}(e_z, t) = \dot{e}_z^T P_0 e_z + e_z^T P_0 \dot{e}_z + 2 \frac{d}{dt} \left\{ e^{at^2} \int_t^\infty \left| (\xi(s))^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \right\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{\mathcal{W}} &= \lambda e_z^T [(A_0 - K_0 C_0)^T P_0 + P_0 (A_0 - K_0 C_0)] e_z + 2 \lambda e_z^T S P_0 e_z \\
&\quad - 2 e_z^T P_0 \Upsilon \Gamma \varphi^T \varphi \Upsilon^{-1} e_z + 2 \xi^T P_0 e_z - 2 e_z^T P_0 K_0 \psi e_\theta \\
&\quad + 2 e_z^T P_0 \Upsilon \Gamma \varphi^T \psi \Upsilon^{-1} e \\
&\quad + 4 \alpha t e^{at^2} \int_t^\infty \left| (\xi(s))^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds - 2 \xi^T P_0 e_z(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{\mathcal{W}} &= \lambda e_z^T [(A_0 - K_0 C_0)^T P_0 + P_0 (A_0 - K_0 C_0)] e_z + 2 \lambda e_z^T S P_0 e_z \\
&\quad - 2 e_z^T P_0 \Upsilon \Gamma \varphi^T \varphi \Upsilon^{-1} e_z + 2 e_z^T P_0 K_0 \psi e_\theta + 2 e_z^T P_0 \Upsilon \Gamma \varphi^T \psi \Upsilon^{-1} e \\
&\quad + 4 \alpha t e^{at^2} \int_t^\infty \left| (\xi(s))^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathcal{W}(e_z, t) &\leq -\mu \lambda(t) \|e_z(t)\|^2 + 2 \lambda_{\max}(P_0) \|\Upsilon(t) \Gamma \varphi^T(t) \varphi(t) \Upsilon^{-1}(t)\| \|e_z(t)\|^2 \\
&\quad + 2 \|K_0 \psi(t) e_\theta(t) + \Upsilon(t) \Gamma \varphi^T(t) \psi(t) \Upsilon^{-1}(t) e(t)\| \|e_z(t)\| \\
&\quad + 4 \alpha t e^{at^2} \int_t^\infty \left| (\xi(s))^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η αρνητική τιμή της ποσότητας $2 \lambda(t) e_z^T(t) S \lambda(t) P_0 e_z(t)$, λόγω της αρνητικότητας της S και της θετικότητας της P και της $\lambda(t)$, αλλά και η τετραγωνική Lyapunov ανισότητα $(A_0 - K_0 C_0)^T P_0 + P_0 (A_0 - K_0 C_0) + \mu I < 0$.

Χρησιμοποιώντας τις προηγουμένως ληφθείσες σταθερές φραγής, από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\|K_0 \psi(t) e_\theta(t) + \Upsilon(t) \Gamma \varphi^T(t) \psi(t) \Upsilon^{-1}(t) e(t)\| &\leq d \\
\|\Upsilon(s) \Gamma \varphi^T(s) \varphi(s) \Upsilon^{-1}(s)\| &\leq c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{W}(e_z, t) &\leq -\mu\lambda(t)\|e_z(t)\|^2 + 2c\lambda_{\max}(P_0)\|e_z(t)\|^2 + 2\delta\|e_z(t)\| \\
&\quad + 4\alpha t e^{\alpha t^2} \int_t^{\infty} |(\xi(s))^T P_0 e_z(s)| e^{-\alpha s^2} ds \\
&\leq -(\mu\lambda(t) - 2c\lambda_{\max}(P_0))\|e_z(t)\|^2 + 2\delta\|e_z(t)\| \\
&\quad + 4\alpha t e^{\alpha t^2} \int_t^{\infty} \lambda_{\max}(P_0)(k_f + k_g \bar{u})\|e_z(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathcal{W}(e_z, t) &\leq -(\mu\lambda(t) - 2c\lambda_{\max}(P_0))\|e_z(t)\|^2 + 2\delta\|e_z(t)\| \\
&\quad + 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(k_f + k_g \bar{u})B_{\alpha,\eta}(t) \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το φράγμα του σφάλματος, όπως τέθηκε στην ανισότητα του Λήμματος 4.4.1.2.1.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathcal{W}(e_z, t) &\leq -(\mu\lambda(t) - 2c\lambda_{\max}(P_0)) \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 + 2\delta\|e_z(t)\| \\
&\quad + 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(k_f + k_g \bar{u})B_{\alpha,\eta}(t) \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \\
&= -[\mu\lambda(t) - 2c\lambda_{\max}(P_0) - 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(k_f + k_g \bar{u})B_{\alpha,\eta}(t)]\|e_z(t)\|^2 \\
&\quad - 2 \left[\frac{\delta}{\eta + \kappa} (\mu\lambda(t) - 2c\lambda_{\max}(P_0) - 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(k_f + k_g \bar{u})B_{\alpha,\eta}(t)) \right. \\
&\quad \left. - \delta \right] \|e_z(t)\| \\
&\quad - [\mu\lambda(t) - 2c\lambda_{\max}(P_0) - 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(k_f + k_g \bar{u})B_{\alpha,\eta}(t)] \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2
\end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση της προφανούς σχέσης:

$$\|e_z(t)\| \leq \|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa}$$

Από την ανισοτική μορφή (4.4.1.2.32) για την παράμετρο κέρδους $\lambda(t)$, προκύπτει για την παράγωγο του συναρτησιακού:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W}(e_z, t) \leq -\sigma\|e_z(t)\|^2 - 2 \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \sigma - \delta \right) \|e_z(t)\| - \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \sigma \quad (4.4.1.2.33)$$

Προκειμένου το σφάλμα να είναι εκθετικά ευσταθές, πρέπει

$$-\sigma\|e_z(t)\|^2 - 2 \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \sigma - \delta \right) \|e_z(t)\| - \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \sigma \leq 0 \quad \forall e_z(t); \quad \forall t \geq 0$$

$$4 \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \sigma - \delta \right)^2 - 4 \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \sigma^2 < 0 \Leftrightarrow \sigma > \frac{\eta + \kappa}{2}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(P_0)\|e_z(t)\|^2 &\leq \mathcal{W}(e_z, t) \\ &\leq \lambda_{\max}(P_0)\|e_z(t)\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_0)(k_f + k_g\bar{u})A_{\alpha,\eta}(t)\|e_z(t)\|^2 \\ &\leq \lambda_{\max}(P_0)[1 + 2(k_f + k_g\bar{u})A_{\alpha,\eta}(0)]\|e_z(t)\|^2\end{aligned}$$

Άρα, με βάση τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.19 (Krasovskii) της §1.3.4 του Κεφαλαίου 1, το μετασχηματισμένο σφάλμα κατάστασης παρουσιάζει ασυμπτωτική ευστάθεια για τις συνθήκες (4.4.1.2.31) και (4.4.1.2.32). \square

Παρατηρείται ότι η σταθερά δ , η οποία δεν είναι υπολογίσιμη, καθώς εξαρτάται από τα $e_{\theta\max}$, e_{\max} , που δεν είναι γνωστά, απαλείφθηκε και επομένως δεν εμφανίζεται στην σχεδίαση του παρατηρητή.

Η ανισοτική σχέση (4.4.1.2.31) που προέκυψε:

$$\sigma > \frac{\eta + \kappa}{2}$$

θα χρησιμοποιηθεί ως ανισοτικός περιορισμός στο πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού.

Επιπλέον, θα χρησιμοποιηθεί η ανισοτική σχέση (4.4.1.2.24), η οποία είναι απαραίτητη για την ασυμπτωτική ευστάθεια του συνδυαστικού σφάλματος.

$$\frac{1}{2}\left(c_1\frac{\lambda}{\lambda^2} + 2(k_f + k_g\bar{u})\bar{v} + \lambda c_2\right)^2 - \mu\lambda + \lambda(k_f + k_g\bar{u}) \leq 0$$

Βάσει της παραπάνω ανάλυσης, αποδείχθηκε το κάτωθι θεώρημα:

Θεώρημα 4.4.1.2.2. Έστω $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ οποιαδήποτε θετικά ορισμένη συμμετρική μήτρα. Αν $f(x)$ και $g(x)$ καθολικά Lipschitz, $u(t)$ και $\psi(t)$ φραγμένα διανύσματα, τότε αν για την παράμετρο κέρδους $\lambda(t)$ ισχύουν οι ανισότητες:

$$\lambda(t) \geq \max\left(\frac{\frac{\eta + \kappa}{2} + 2c\lambda_{\max}(P_0) + 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(k_f + k_g\bar{u})B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu}, 1\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(c_1\frac{\lambda}{\lambda^2} + 2(k_f + k_g\bar{u})\bar{v} + \lambda c_2\right)^2 - \mu\lambda + \lambda(k_f + k_g\bar{u}) \leq 0$$

τότε, οι διαφορικές εξισώσεις 4.4.1.2.8 συνιστούν έναν **καθολικό, εκθετικό προσαρμοστικό** παρατηρητή για το σύστημα (4.4.1.2.1), δηλαδή για οποιοδήποτε αρχικές συνθήκες $x(t_0)$, $\hat{x}(t_0)$, $\hat{\theta}(t_0)$ και για όλα τα $\theta \in \mathbb{R}^n$, τα σφάλματα $\hat{x}(t) - x(t)$ και $\hat{\theta}(t) - \theta$ τείνουν εκθετικά στο μηδέν καθώς $t \rightarrow \infty$.

Όπως στο κεφάλαιο 3, η παράμετρος κέρδους του παρατηρητή σχεδιάζεται ως εξής:

$$\lambda(t) = \max(\lambda_2(t), 1)$$

$$\lambda_2(t) := \begin{cases} \frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p [B_{\alpha,\eta}(t^*) + \dot{B}_{\alpha,\eta}(t^*)\{t - t^*\}]}{\mu^*}, & t \in [0, t^*] \\ \frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu^*}, & t \in (t^*, t_{max}] \\ \frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) \alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{max})}{\mu^*}, & t > t_{max} \end{cases}$$

$$\text{Με } p := 4\alpha\lambda_{max}(P_0)(k_f + k_g\bar{u})$$

Οι σταθερές k_f, k_g , το άνω φράγμα \bar{u} της εισόδου, το άνω φράγμα \bar{v} της μήτρας $Y(t)$, οι σταθερές $c, c_1, c_2, \kappa = (k_f + k_g\bar{u}) + c$, μπορούν να υπολογισθούν ή να γίνουν παραδοχές για το εκάστοτε σχεδιαστικό πρόβλημα, προκειμένου να τεθούν στις σχέσεις στις οποίες απαιτούνται. Η ανεπιθύμητη σταθερά δ , κατά την διαδικασία κατασκευής του παρατηρητή, απαλείφθηκε στις πράξεις, οπότε δεν απαιτείται να υπολογισθεί προφανώς. Οι σταθερές $t^*, t_{max}, \alpha, \sigma, \mu^*$ και η , για να επιτευχθεί η παραπάνω σχεδίαση της παραμέτρου κέρδους $\lambda(t)$, προκύπτουν από την επίλυση ενός προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού, αντιστοίχου με αυτό του Κεφαλαίου 3, κάνοντας χρήση των προκυψάντων ανισοτικών περιορισμών από την προηγηθείσα ανάλυση.

Η ανισότητα (4.4.1.2.24)

$$\left(c_1 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + 2(k_f + k_g\bar{u})\bar{v} + \lambda c_2 \right)^2 - 2\mu\lambda + 2\lambda(k_f + k_g\bar{u}) \leq 0$$

δίνει για $t = t^*$ και σύμφωνα με την κατά τμήματα προσεγγιστική μορφή της παραμέτρου λ

$$\left(c_1 \frac{\alpha p \dot{B}_{\alpha,\eta}(t^*)}{\mu^* \left[\max \left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t^*)}{\mu^*}, 1 \right) \right]^2} + 2(k_f + k_g\bar{u})\bar{v} \right. \\ \left. + c_2 \max \left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t^*)}{\mu^*}, 1 \right) \right)^2 \\ + 2(k_f + k_g\bar{u} - \mu) \max \left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t^*)}{\mu^*}, 1 \right) \leq 0$$

και για $t = t_{max}$

$$\left(2(k_f + k_g\bar{u})\bar{v} + c_2 \max \left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) \alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{max})}{\mu^*}, 1 \right) \right)^2 \\ + 2(k_f + k_g\bar{u} - \mu) \max \left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) \alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{max})}{\mu^*}, 1 \right) \leq 0$$

Το προς επίλυση πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού είναι το εξής:

$$\min_{t^*, t_{max}, \alpha, \sigma, \mu^*, \eta}$$

$$\square t^* \geq 0, t_{max} \geq 0, \alpha > 0, \sigma > 0, \mu^* > 0, \eta > 0$$

$$\square t^* \leq t_{max}$$

$$\square \mu^* \leq \mu$$

$$\square \dot{B}_{\alpha, \eta}(t_{max}) = 0$$

$$\square \eta \geq \|A - KC\| \max\left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t_{max})}{\mu^*}, 1\right)$$

$$+ \frac{n\alpha p \dot{B}_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^* \max\left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1\right)}$$

$$\square \sigma > \frac{\eta + \kappa}{2}$$

$$\square \left(c_1 \frac{\alpha p \dot{B}_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^* \left[\max\left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1\right) \right]^2} + 2(k_f + k_g \bar{u})\bar{v} \right.$$

$$\left. + c_2 \max\left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1\right) \right)^2$$

$$+ 2(k_f + k_g \bar{u} - \mu) \max\left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1\right) \leq 0$$

$$\square \left(2(k_f + k_g \bar{u})\bar{v} + c_2 \max\left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) \alpha p B_{\alpha, \eta}(t_{max})}{\mu^*}, 1\right) \right)^2$$

$$+ 2(k_f + k_g \bar{u} - \mu) \max\left(\frac{\sigma + 2c\lambda_{max}(P_0) \alpha p B_{\alpha, \eta}(t_{max})}{\mu^*}, 1\right) \leq 0$$

4.4.2 Εκτίμηση Κατάστασης και Παραμέτρου

Η σχεδίαση βασίζεται στο μοντέλο υψικερδούς προσαρμοστικού παρατηρητή που προτάθηκε από (Besançon, Zhang, Hammouri). Παρόμοια με την μεθοδολογία της προηγούμενης παραγράφου, και εδώ θα προταθεί παρατηρητής αυξανόμενου κέρδους.

Έστω σύστημα της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \varphi(x(t), u(t)) + \psi(x(t), u(t))\theta \\ y(t) = C_0 x(t) \end{cases} \quad (4.4.2.1)$$

$x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^m$, $y \in \mathfrak{R}$, $\theta \in \mathfrak{R}^q$.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}; C_0 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$\varphi(x, u) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, u) \\ \varphi_2(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \\ \varphi_n(x, u) \end{bmatrix}; \psi(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \psi_{n1}(x, u) & \dots & \psi_{nq}(x, u) \end{bmatrix} \quad (4.4.2.2)$$

Το μοντέλο αυτό παρουσιάστηκε στην Πρόταση 4.4 της §4.3.1, ως πρόβλημα συνδεδειγμένης εκτίμησης κατάστασης - παραμέτρου και η απόδειξη για την υψικερδή περίπτωση παραλείπεται. Επειδή η σχεδίαση αυξανόμενου κέρδους ακολουθεί την λογική της §4.4.1.2, αυτή θα παρουσιασθεί ακολούθως πολύ πιο συνοπτικά.

Ο προσαρμοστικός παρατηρητής είναι της μορφής:

$$\dot{\hat{\Gamma}}(t) = \lambda(t)(A_0 - K_0 C_0)\hat{\Gamma}(t) + \lambda(t)\psi(\hat{x}(t), u(t)) \quad (4.4.2.3\alpha)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), u(t)) + \psi(\hat{x}(t), u(t))\hat{\theta}(t) + \Lambda^{-1}(\lambda(t))[\lambda(t)K_0 + \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T][y(t) - C_0 \hat{x}(t)] \quad (4.4.2.3\beta)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \lambda^n(t)\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T[y(t) - C_0 \hat{x}(t)] \quad (4.4.2.3\gamma)$$

$$\text{με } \Lambda(\lambda(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & 1/\lambda(t) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\lambda^{n-1}(t) \end{bmatrix} = \text{diag}\left(1/\lambda^{i-1}(t)\right), i = 1, 2, \dots, n.$$

Υπόθεση 4.4.2.1. Οι φ , ψ είναι λείες (C^∞) συναρτήσεις ως προς τα ορίσματά τους και η u είναι φραγμένη καθιστώντας φραγμένες καταστάσεις $\|x(t)\| \leq X$ για $\|\theta\| \leq \theta$.

Επίσης, δοθέντος K_0 για το οποίο η $(A_0 - K_0 C_0)$ είναι Hurwitz και

$$(A_0 - K_0 C_0)^T P_0 + P_0 (A_0 - K_0 C_0) + \mu I < 0 \quad (4.4.2.4)$$

οι είσοδοι u είναι τέτοιες ώστε το διάνυσμα κατάστασης να ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

για οποιαδήποτε αρχικά $x(0) \in \mathfrak{R}^n$ και $\Gamma(0) \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, η λύση της:

$$\dot{\Gamma}(t) = \lambda(t)(A_0 - K_0 C_0)\Gamma(t) + \lambda(t)\psi(x(t), u(t))$$

είναι τέτοια ώστε για κάποιο $t_0 \geq 0$:

∃α, T ανεξάρτητα του λ ώστε $\forall t \geq t_0$, και για λ αρκούντως μεγάλο,

$$\int_t^{t+T} \Gamma^T(\tau) C_0^T C_0 \Gamma(\tau) d\tau \geq \alpha I \quad (4.4.2.5)$$

Υπόθεση 4.4.2.2. Για κάποια σταθερά δ ανεξάρτητη της μεταβλητής λ, ισχύει:

$$\|\Lambda(\lambda(t))\psi(\hat{x}(t), u(t))(\hat{\theta} - \theta)\| \leq \frac{\delta}{\lambda^{n-1}(t)} \quad (4.4.2.6)$$

και η $\hat{\Gamma}(t)$ είναι άνω φραγμένη. □

Υπόθεση 4.4.2.3. Για την συνάρτηση $\varphi(x(t), u(t))$ και την μήτρα $\psi(x(t), u(t))$ ισχύουν οι σχέσεις για θετικές σταθερές $\gamma_\varphi, \gamma_\psi$:

$$\|\Lambda(\lambda(t))[\varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \varphi(x(t), u(t))]\| \leq \gamma_\varphi \|\Lambda(\lambda(t))(\hat{x}(t) - x(t))\| \quad (4.4.2.7)$$

$$\|\Lambda(\lambda(t))[\psi(\hat{x}(t), u(t)) - \psi(x(t), u(t))]\| \leq \gamma_\psi \|\Lambda(\lambda(t))(\hat{x}(t) - x(t))\| \quad (4.4.2.8)$$

για υπολογιζόμενες σταθερές k_f και k_g και τα $u(t)$ και $\psi(t)$ είναι φραγμένα διανύσματα. □

Υπόθεση 4.4.2.4. Η παράμετρος κέρδους $t \mapsto \lambda(t)$ είναι εκ κατασκευής συνεχής στο $\mathfrak{R}_{\geq 0}$ και υπάρχει θετική σταθερά c_0 , ώστε $1 \leq \lambda(t) \leq c_0$; $\forall t \geq 0$. Επίσης, είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη με την παράγωγο $\dot{\lambda}(t)$ σχεδόν παντού φραγμένη στο $\mathfrak{R}_{\geq 0}$ και $\dot{\lambda}(t) \geq 0$; σχεδόν $\forall t \geq 0$. □

Αρχικά, αναζητείται η συνθήκη ευστάθειας του συνδυαστικού σφάλματος, όπως στην προηγούμενη παράγραφο.

Τα σφάλματα κατάστασης και διανυσματικής παραμέτρου λαμβάνονται με μετασχηματισμό συντεταγμένων, ως:

$$\begin{aligned} e_z(t) &= \Lambda(\lambda(t))[\hat{x}(t) - x(t)] = \Lambda(\lambda(t))e_x(t) \\ e_\theta(t) &= \frac{1}{\lambda^n(t)}(\hat{\theta}(t) - \theta) \end{aligned} \quad (4.4.2.9)$$

Εξαιτίας των ειδικών μορφών των μητρών, είναι προφανείς οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(\lambda(t))A_0\Lambda(\lambda(t)) &= \lambda(t)A_0 \\ C_0\Lambda(\lambda(t)) &= C_0 \end{aligned}$$

Για το σφάλμα εκτίμησης παραμέτρου, ισχύει:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\theta(t) &= \frac{1}{\lambda^n(t)}(\dot{\hat{\theta}}(t) - \dot{\theta}) \\ &= -n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^{n+1}(t)}(\hat{\theta}(t) - \theta) \stackrel{\dot{\theta}=0}{\implies} \dot{e}_\theta(t) = \hat{\Gamma}^T(t)C_0^T[y(t) - C_0\hat{x}(t)] - n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}e_\theta(t) \end{aligned} \quad (4.4.2.10)$$

Το σφάλμα κατάστασης έχει την εξής δυναμική:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_z(t) &= \Lambda(\lambda(t))[\hat{x}(t) - x(t)] + \dot{\lambda}(t)\Lambda'(\lambda(t))\Lambda^{-1}(\lambda(t))e_z(t) \\
&= \lambda(t)(A_0 - K_0C_0)e_z(t) + \Lambda(\lambda(t))[\varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \varphi(x(t), u(t))] \\
&\quad + \Lambda(\lambda(t))[\psi(\hat{x}(t), u(t))\hat{\theta}(t) - \psi(x(t), u(t))\theta] \\
&\quad - \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0\Lambda^{-1}(\lambda(t))e_z(t) + \dot{\lambda}(t)\Lambda'(\lambda(t))\Lambda^{-1}(\lambda(t))e_z(t) \\
\Rightarrow \dot{e}_z(t) &= \lambda(t)(A_0 - K_0C_0)e_z(t) + \Lambda(\lambda(t))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \\
&\quad + \Lambda(\lambda(t))\psi(\hat{x}(t), u(t))(\hat{\theta}(t) - \theta) - \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0e_z(t) \\
&\quad + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))e_z(t)
\end{aligned} \tag{4.4.2.11}$$

όπου ορίσθηκε:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &:= \varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \varphi(x(t), u(t)) \\
\Delta\psi &:= \psi(\hat{x}(t), u(t)) - \psi(x(t), u(t)) \\
S(\lambda(t)) &:= -\frac{1}{\lambda(t)} \text{diag}(0, \dots, n-1)
\end{aligned}$$

Η (4.4.2.10), αν ειδωθεί ως πρόβλημα αρχικών τιμών, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{e}_z(\tau) = \lambda(\tau)(A_0 - K_0C_0)e_z(\tau) + \Lambda(\lambda(\tau))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) + \\ \Lambda(\lambda(\tau))\psi(\hat{x}(\tau), u(\tau))(\hat{\theta}(\tau) - \theta) - \hat{\Gamma}(\tau)\hat{\Gamma}^T(\tau)C_0^T C_0e_z(\tau) + \dot{\lambda}(\tau)S(\lambda(\tau))e_z(\tau) \\ e_z(t_0) = e_{z0} \end{cases}$$

Η παραπάνω είναι ισοδύναμη με την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\begin{aligned}
e_z(\tau) &= e_{z0} + \int_{t_0}^{\tau} \{ \lambda(s)(A_0 - K_0C_0)e_z(s) + \Lambda(\lambda(s))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \\
&\quad + \Lambda(\lambda(s))\psi(\hat{x}(s), u(s))(\hat{\theta}(s) - \theta) - \hat{\Gamma}(s)\hat{\Gamma}^T(s)C_0^T C_0e_z(s) \\
&\quad + \dot{\lambda}(s)S(\lambda(s))e_z(s) \} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|e_z(\tau)\| &\leq \|e_{z0}\| \\
&\quad + \int_{t_0}^{\tau} [\| \lambda(s)(A_0 - K_0C_0) + \dot{\lambda}(s)S(\lambda(s)) - \hat{\Gamma}(s)\hat{\Gamma}^T(s)C_0^T C_0 \\
&\quad + \Lambda(\lambda(s))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \| \|e_z(s)\| \\
&\quad + \Lambda(\lambda(s))\psi(\hat{x}(s), u(s))(\hat{\theta}(s) - \theta) \|] ds \\
&\leq \|e_{z0}\| + \int_{t_0}^{\tau} \left[(\eta + \gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta + \bar{\gamma}^2) \|e_z(s)\| + \frac{\delta}{\lambda^{n-1}(t)} \right] ds
\end{aligned}$$

Για κάποιο $\eta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$\eta \geq \sup_{t \geq 0} \{ \| \lambda(t)(A_0 - K_0C_0) + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t)) \| \}$$

και έχοντας κάνει χρήση της Υπόθεσης 4.4.2.2 και των σχέσεων (4.4.2.7), (4.4.2.8).

Θέτοντας

$$\kappa = \gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta + \bar{\gamma}^2$$

και δεδομένου ότι $\lambda(t) > 1$; $\forall t \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\lambda^{n-1}(t)} \leq \delta$,

$$\|e_z(\tau)\| \leq \|e_{z0}\| + \int_{t_0}^{\tau} [(\eta + \kappa)\|e_z(s)\| + \delta] ds \tag{4.4.2.12}$$

Από το Θεώρημα 1.9, της §1.2, του Κεφαλαίου 1, ισχύει ότι:

$$\|e_z(\tau)\| \leq \frac{\delta}{\eta + \kappa} (e^{(\eta + \kappa)(\tau - t_0)} - 1) + e^{(\eta + \kappa)(\tau - t_0)} \|e_{z0}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|e_z(\tau)\| \leq \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} + \|e_{z0}\| \right) e^{(\eta+\kappa)(\tau-t_0)} \quad (4.4.2.13)$$

Βάσει της προτέρας ανάλυσης, ισχύει το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 4.4.2.1. Για $\lambda(t) \geq 1$, αν υπάρχει $\eta > 0$, τέτοια ώστε

$$\eta \geq \sup_{t \geq 0} \{ \|\lambda(t)(A_0 - K_0 C_0) + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\| \} \quad (4.4.2.14)$$

με $S(\lambda(t)) \triangleq -\frac{1}{\lambda(t)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$, τότε ισχύουν οι ανισότητες:

$$e^{at^2} \int_t^\infty \|e_z(s)\|^2 e^{-as^2} ds \leq A_{\alpha,\eta}(t) \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \quad (4.4.2.15)$$

$$te^{at^2} \int_t^\infty \|e_z(s)\|^2 e^{-as^2} ds \leq B_{\alpha,\eta}(t) \left(\|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \quad (4.4.2.16)$$

όπου οι συναρτήσεις $A_{\alpha,\eta}$ και $B_{\alpha,\eta}$ ορίζονται ως εξής:

- Η $A_{\alpha,\eta}: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}$ είναι διαφορίσιμη και γνησίως φθίνουσα και ορίζεται:

$$A_{\alpha,\eta}(t) := e^{at^2 - 2(\eta+\kappa)t} \int_t^\infty e^{-as^2 + 2(\eta+\kappa)s} ds$$

- Η $B_{\alpha,\eta}: \mathfrak{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}$ είναι διαφορίσιμη και ορίζεται ως εξής:

$$B_{\alpha,\eta}(t) := te^{at^2 - 2(\eta+\kappa)t} \int_t^\infty e^{-as^2 + 2(\eta+\kappa)s} ds = tA_{\alpha,\eta}(t)$$

και ισχύουν:

- 4) $\dot{B}_{\alpha,\eta}(t) = (1 + 2at^2 - 2(\eta + \kappa)t)A_{\alpha,\eta}(t) - t$
- 5) Υπάρχει $t_{max} > 0$, για το οποίο η $B_{\alpha,\eta}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, t_{max}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[t_{max}, \infty)$.
- 6) Η $B_{\alpha,\eta}$ είναι κοίλη στο $[0, t_{max}]$. \square

Θεώρημα 4.4.2.1. Για δεδομένη σταθερά $\mu > 0$, μήτρα $P > 0$ και διάνυσμα K , τέτοια ώστε να ισχύει η τετραγωνική ανισότητα Lyapunov (4.4.2.4), το μετασχηματισμένο σφάλμα $e_z(t)$ με δυναμική που δίνεται από την (4.4.2.11), τείνει εκθετικά στο μηδέν αν για την θετική σταθερά σ , για την οποία ισχύει:

$$\sigma > \frac{(\eta + \kappa)\lambda_{max}(P_0)}{2} \quad (4.4.2.16)$$

η παράμετρος κέρδους του προσαρμοστικού παρατηρητή (4.4.1.2.8) ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\lambda(t) \geq \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{max}(P_0) + 4\alpha \lambda_{max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta) B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu}, 1 \right) \quad (4.4.2.17)$$

Απόδειξη. Εκλέγεται το συναρτησιακό Lyapunov:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(e_z, t) &:= e_z^T P_0 e_z \\ &+ 2e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| \left(\Lambda(\lambda(s)) \{ \varphi(\hat{x}(s), u(s)) - \varphi(x(s), u(s)) \} \right. \right. \\ &\left. \left. + \Lambda(\lambda(s)) \{ \varphi(\hat{x}(s), u(t)) - \varphi(x(s), u(s)) \} \theta \right)^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \\ &= e_z^T P_0 e_z + 2e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| \left(\Lambda(\lambda(s)) (\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \right)^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \end{aligned}$$

Ισχύει:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P_0) \|e_z(t)\|^2 &\leq \mathcal{V}(e_z, t) \\ &\leq \lambda_{\max}(P_0) \|e_z(t)\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_0) (\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta) A_{\alpha, \eta}(t) \|e_z(t)\|^2 \\ &\leq \lambda_{\max}(P_0) [1 + 2(\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta) A_{\alpha, \eta}(0)] \|e_z(t)\|^2 \end{aligned} \quad (4.4.2.18)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{V}(e_z, t) &= \dot{e}_z^T P_0 e_z + e_z^T P_0 \dot{e}_z \\ &+ 2 \frac{d}{dt} \left\{ e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| \left(\Lambda(\lambda(s)) (\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \right)^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \right\} \end{aligned}$$

Παραλείποντας τα ογκώδη ορίσματα των συναρτήσεων η $\dot{\mathcal{V}}$ γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= \lambda [e_z^T (A_0 - K_0 C_0)^T P_0 + P_0 (A_0 - K_0 C_0)] e_z + 2\lambda e_z^T S(\lambda) P_0 e_z - 2e_z^T P_0 \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^T C_0^T C_0 e_z \\ &+ 2e_z^T P_0 \Lambda (\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) + 2e_z^T P_0 \Lambda \psi(\hat{x}, u) (\hat{\theta} - \theta) \\ &+ 4\alpha t e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \left| \left(\Lambda(\lambda(s)) (\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \right)^T P_0 e_z(s) \right| e^{-\alpha s^2} ds \\ &- 2e_z^T P_0 \Lambda (\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &\leq -\mu\lambda \|e_z\|^2 + \|2e_z^T P_0 \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^T C_0^T C_0 e_z\| + \|2e_z^T P_0 \Lambda \psi(\hat{x}, u) (\hat{\theta} - \theta)\| \\ &+ 4\alpha (\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta) \lambda_{\max}(P_0) t e^{\alpha t^2} \int_t^\infty \|e_z(s)\|^2 e^{-\alpha s^2} ds \\ &\leq -\mu\lambda \|e_z\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_0) \bar{\gamma}^2 \|e_z\|^2 + 2 \frac{\delta}{\lambda^{n-1}} \lambda_{\max}(P_0) \|e_z\| \\ &+ 4\alpha (\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta) \lambda_{\max}(P_0) B_{\alpha, \eta}(t) \left(\|e_z\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \\ &\leq [-\mu\lambda + 2\lambda_{\max}(P_0) \bar{\gamma}^2] \|e_z\|^2 \\ &+ 4\alpha (\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta) \lambda_{\max}(P_0) B_{\alpha, \eta}(t) \left(\|e_z\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 + 2\delta \lambda_{\max}(P_0) \|e_z\| \end{aligned}$$

καθώς $2\lambda e_z^T S(\lambda) P_0 e_z \leq 0$, επειδή P θετικά ορισμένη, $S(\lambda)$ αρνητικά ορισμένη και $\dot{\lambda} \geq 0$.

Επειδή

$$\|e_z(t)\| \leq \|e_z(t)\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa}$$

προκύπτει:

$$\dot{V} \leq \left[-\mu\lambda + 2\lambda_{\max}(P_0)\bar{\gamma}^2 + 4\alpha(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta)\lambda_{\max}(P_0)B_{\alpha,\eta}(t) \right] \left(\|e_z\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 + 2\delta\lambda_{\max}(P_0)\|e_z\|$$

Επειδή

$$\lambda(t) \geq \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2\lambda_{\max}(P_0) + 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta)B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu}, 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sigma \left(\|e_z\| + \frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 + 2\delta\lambda_{\max}(P_0)\|e_z\| \\ &= -\sigma\|e_z\|^2 + \left(2\delta\lambda_{\max}(P_0) - \frac{2\delta\sigma}{\eta + \kappa} \right) \|e_z\| - \sigma \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 \end{aligned}$$

Για να είναι η V φθίνουσα, πρέπει:

$$\begin{aligned} \left(2\delta\lambda_{\max}(P_0) - \frac{2\delta\sigma}{\eta + \kappa} \right)^2 - 4\sigma^2 \left(\frac{\delta}{\eta + \kappa} \right)^2 < 0 \Rightarrow \\ \sigma > \frac{(\eta + \kappa)\lambda_{\max}(P_0)}{2} \end{aligned}$$

Σε αυτήν την ανισότητα, η οποία θα χρησιμοποιηθεί ως ανισοτικός περιορισμός στο πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού, όπως παρατηρείται απαλείφθηκε η άγνωστη ανεπιθύμητη σταθερά δ . \square

Το συνδετικό σφάλμα λαμβάνεται ίσο με:

$$e(t) = e_z(t) - \hat{\Gamma}(t)e_\theta(t) \quad (4.4.2.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{e}_z(t) - \dot{\hat{\Gamma}}(t)e_\theta(t) - \hat{\Gamma}(t)\dot{e}_\theta(t) \\ &= \lambda(t)(A_0 - K_0C_0)e_z(t) + \Lambda(\lambda(t))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \\ &\quad + \Lambda(\lambda(t))\psi(\hat{x}(t), u(t))(\hat{\theta}(t) - \theta) - \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0 e_z(t) \\ &\quad + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))e_z(t) \\ &\quad - \left\{ \lambda(t)(A_0 - K_0C_0)\hat{\Gamma}(t) + \lambda(t)\psi(\hat{x}(t), u(t)) \right\} e_\theta(t) \\ &\quad - \hat{\Gamma}(t) \left\{ -\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0 e_z(t) - n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} e_\theta(t) \right\} \\ &= \lambda(t)(A_0 - K_0C_0) \left(e(t) + \hat{\Gamma}(t)e_\theta(t) \right) + \Lambda(\lambda(t))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \\ &\quad + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t)) \left(e(t) + \hat{\Gamma}(t)e_\theta(t) \right) - \lambda(t)(A_0 - K_0C_0)\hat{\Gamma}(t)e_\theta(t) \\ &\quad + n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \hat{\Gamma}(t)e_\theta(t) \\ &= \left[\lambda(t)(A_0 - K_0C_0) + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t)) \right] e(t) \\ &\quad + \left[\dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\hat{\Gamma}(t) + n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \hat{\Gamma}(t) \right] e_\theta(t) + \Lambda(\lambda(t))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα του συνδετικού σφάλματος είναι το:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \left[\lambda(t)(A_0 - K_0C_0) + \dot{\lambda}(t)S(\lambda(t)) \right] e(t) + \\ \left[\dot{\lambda}(t)S(\lambda(t))\hat{\Gamma}(t) + n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \hat{\Gamma}(t) \right] e_\theta(t) + \Lambda(\lambda(t))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) \\ \dot{e}_\theta(t) = -\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0 e(t) - \left[n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + \hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0 \hat{\Gamma}(t) \right] e_\theta(t) \end{cases} \quad (4.4.2.20)$$

Το ομογενές μέρος της διαφορικής εξίσωσης για το $e_\theta(t)$, δηλαδή το γραμμικό χρονομεταβλητό σύστημα $\dot{e}_\theta(t) = -\left[n\frac{\lambda(t)}{\lambda(t)} + \hat{F}^T(t)C_0^T C_0 \hat{F}(t)\right] e_\theta(t)$ γράφεται σε ολοκληρωτική μορφή ως:

$$e_\theta(t) = e_\theta(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \left[n\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)} + \hat{F}^T(\tau)C_0^T C_0 \hat{F}(\tau)\right] d\tau}$$

Για να είναι το $e_\theta(t)$ εκθετικά ευσταθές, πρέπει να αποδειχθεί μια ιδιότητα παραμένουσας διέγερσης αντίστοιχη με της (4.4.2.5) για την $\hat{F}(t)$.

Λήμμα 4.4.2.2. Η μήτρα εκτίμησης $\hat{F}(t)$, όταν εξασφαλίζεται ασυμπτωτική ευστάθεια του σφάλματος εκτίμησης κατάστασης, ικανοποιεί συνθήκη παραμένουσας διέγερσης, αντίστοιχη της συνθήκης για την $\Gamma(t)$.

Απόδειξη. Θέτοντας $E := \hat{F} - \Gamma$, τότε

$$\dot{E} = \lambda(A_0 - K_0 C_0) + \lambda \Delta \psi$$

Για κάθε στήλη E_i της μήτρας E , εκλέγεται συνάρτηση Lyapunov:

$$V_i = E_i^T P_0 E_i$$

με $P_0: (A_0 - K_0 C_0)^T P_0 + P_0 (A_0 - K_0 C_0) = -I$

Είναι προφανές ότι λόγω της ασυμπτωτικής ευστάθειας του σφάλματος εκτίμησης κατάστασης $\|\hat{x} - x\| \leq m$, $\dot{V}_i \leq -\lambda \|E_i\|^2 + \lambda \delta m \|E_i\|$ για κάποια δ ανεξάρτητη της m . Άρα το $\|E\|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό, σε εξάρτηση από την m . Επίσης, εξ ορισμού, η Γ είναι άνω φραγμένη ανεξάρτητα της λ , από μία σταθερά π .

Ισχύει:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+T} \hat{F}^T(\tau) C_0^T C_0 \hat{F}(\tau) d\tau \\ &= \int_t^{t+T} \Gamma^T(\tau) C_0^T C_0 \Gamma(\tau) d\tau \\ &+ \int_t^{t+T} [E^T(\tau) C_0^T C_0 \Gamma(\tau) + \Gamma^T(\tau) C_0^T C_0 E(\tau)] d\tau \\ &+ \int_t^{t+T} E^T(\tau) C_0^T C_0 E(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Ισχύουν:

$$\int_t^{t+T} \hat{F}^T(\tau) C_0^T C_0 \hat{F}(\tau) d\tau \geq \alpha I, \quad \int_t^{t+T} E^T(\tau) C_0^T C_0 E(\tau) d\tau \geq 0$$

Αν $\|E\| \leq \mu_E$ και $\|\Gamma\| \leq \pi$, τότε:

$$\left\| \int_t^{t+T} E^T(\tau) C_0^T C_0 \Gamma(\tau) d\tau \right\| \leq \int_t^{t+T} \|E^T(\tau) C_0^T C_0 \Gamma(\tau)\| d\tau \leq T \pi \mu_E$$

Άρα,

$$\int_t^{t+T} E^T(\tau) C_0^T C_0 \Gamma(\tau) d\tau \geq -T \pi \mu_E I$$

και τελικά,

$$\int_t^{t+T} \hat{F}^T(\tau) C_0^T C_0 \hat{F}(\tau) d\tau \geq (\alpha - T \pi \mu_E) I$$

και άρα για μ_E αρκούντως μικρή και επομένως $\|\hat{x} - x\|$ αρκετά μικρό, ισχύει η συνθήκη παραμένουσας διέγερσης. \square

Βάσει του Λήμματος 4.4.2.2, επειδή η $\hat{\Gamma}(\tau)$ ικανοποιεί συνθήκη παραμένουσας διέγερσης και επομένως $\int_{t_0}^t \hat{\Gamma}^T(\tau)C_0^T C_0 \hat{\Gamma}(\tau) d\tau \geq (\alpha - T\pi\mu_E)I$ και επιπλέον επειδή $\int_{t_0}^t n \frac{\dot{\lambda}(\tau)}{\lambda(\tau)} d\tau \geq 0$ εκ κατασκευαστικής υποθέσεως για την μεταβλητή κέρδους $\lambda(t)$, η λύση του ομογενούς μέρους του σφάλματος εκτίμησης παραμέτρου, που δίνεται από τον τύπο $e_\theta(t) = e_\theta(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \left[n \frac{\dot{\lambda}(\tau)}{\lambda(\tau)} + \hat{\Gamma}^T(\tau)C_0^T C_0 \hat{\Gamma}(\tau) \right] d\tau}$ παρουσιάζει εκθετική ευστάθεια. Από το Θεώρημα 1.19 της §1.3.4 του Κεφαλαίου 1, η ευστάθεια του $e_\theta(t)$ συνεπάγεται ότι για κάθε συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα $Q(t) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, π.χ. $Q(t) = I_p$, υπάρχει συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρας $P(t) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, για την οποία $A_1 I \leq P(t) \leq A_2 I$ που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & \left[n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + \hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0 \hat{\Gamma}(t) \right]^T P(t) + \\ & + P(t) \left[n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + \hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0 \hat{\Gamma}(t) \right] - I \end{aligned} \quad (4.4.2.21)$$

Προκειμένου να μελετηθεί η ευστάθεια του συνδυαστικού συστήματος σφάλματος θεωρείται η συνάρτηση Lyapunov:

$$V(t) = e^T(t)P_0 e(t) + e_\theta^T(t)P(t)e_\theta(t) \quad (4.4.2.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{e}^T(t)P_0 e(t) + e^T(t)P_0 \dot{e}(t) + \dot{e}_\theta^T(t)P(t)e_\theta(t) + e_\theta^T(t)P(t)\dot{e}_\theta(t) \\ & + e_\theta^T(t)\dot{P}(t)e_\theta(t) \\ = & \lambda(t)e^T(t)[(A_0 - K_0 C_0)^T P_0 + P_0(A_0 - K_0 C_0)]e(t) \\ & + 2e^T(t)P_0 \Lambda(\lambda(t))(\Delta\varphi + \Delta\psi\theta) + 2\dot{\lambda}e^T(t)S(\lambda(t))P_0 e(t) \\ & + 2\dot{\lambda}e_\theta^T(t)\hat{\Gamma}^T(t)S(\lambda(t))P_0 e(t) + 2n \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} e^T(t)P_0 \hat{\Gamma}(t)e_\theta(t) \\ & - 2e_\theta^T(t)P(t)\hat{\Gamma}^T(t)C_0^T C_0 e(t) - e_\theta^T(t)e_\theta(t) \end{aligned} \quad (4.4.2.23)$$

Η παράγωγος της V , δεδομένου ότι $2\dot{\lambda}e^T(t)S(\lambda(t))P_0 e(t) < 0$ και $\|\hat{\Gamma}(t)\| \leq \bar{\gamma}$, φράσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\mu\lambda\|e\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta)\|e_z\|\|e\| + 2\dot{\lambda}\bar{\gamma}\lambda_{\max}(P_0) \frac{n-1}{\lambda} \|e_\theta\|\|e\| \\ & + 2n \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \bar{\gamma}\lambda_{\max}(P_0)\|e_\theta\|\|e\| + 2\lambda_{\max}(P_0)\bar{\gamma}\|e_\theta\|\|e\| - \|e_\theta\|^2 \\ \leq & -[\mu\lambda - 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta)]\|e\|^2 \\ & + 2\bar{\gamma}\lambda_{\max}(P_0) \left[(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta) + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}(n-1) + n \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + 1 \right] \|e_\theta\|\|e\| - \|e_\theta\|^2 \\ \leq & -[\mu\lambda - 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta)]\|e\|^2 \\ & + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}^2(P_0) \left[(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta) - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + 2n \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + 1 \right]^2 \|e\|^2 - \frac{1}{2}\|e_\theta\|^2 \end{aligned}$$

Εξ αυτού, προέπει

$$\begin{aligned} \mu\lambda &\geq 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta) \\ &\quad + 2\bar{\gamma}^2\lambda_{\max}^2(P_0) \left[(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta) - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + 2n\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + 1 \right]^2 \end{aligned} \quad (4.4.2.24)$$

Οπότε, αποδείχθηκε αναλυτικά το παρακάτω:

Θεώρημα 4.4.2.2. Αν για την παράμετρο κέρδους $\lambda(t)$ ισχύουν οι ανισότητες:

$$\lambda(t) \geq \max \left(\frac{\frac{(\eta + \kappa)\lambda_{\max}(P_0)}{2} + 2\bar{\gamma}^2\lambda_{\max}(P_0) + 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta)B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu}, 1 \right)$$

$$\mu\lambda(t) \geq 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta) + 2\bar{\gamma}^2\lambda_{\max}^2(P_0) \left[\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta + 1 + (2n - 1)\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \right]^2$$

(οι σταθερές ορίσθηκαν στις προηγούμενες σχέσεις αναλυτικά), τότε, οι διαφορικές εξισώσεις 4.4.1.2.3 συνιστούν έναν **καθολικό, εκθετικό προσαρμοστικό** παρατηρητή για το σύστημα (4.4.2.1), δηλαδή για οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες $x(t_0)$, $\hat{x}(t_0)$, $\hat{\theta}(t_0)$ και για όλα τα $\theta \in \mathfrak{R}^n$, τα σφάλματα $\hat{x}(t) - x(t)$ και $\hat{\theta}(t) - \theta$ τείνουν εκθετικά στο μηδέν καθώς $t \rightarrow \infty$.

Επομένως, το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού, ακολουθώντας την μεθοδολογία του Κεφαλαίου 3, όπου η παράμετρος κέρδους προσεγγίζεται τμηματικά, συνοψίζεται ως εξής:

$$\lambda_2(t) := \begin{cases} \frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2\lambda_{\max}(P_0) + \alpha p [B_{\alpha,\eta}(t^*) + \dot{B}_{\alpha,\eta}(t^*)\{t - t^*\}]}{\mu^*}, & t \in [0, t^*] \\ \frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2\lambda_{\max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha,\eta}(t)}{\mu^*}, & t \in (t^*, t_{\max}) \\ \frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2\lambda_{\max}(P_0)\alpha p B_{\alpha,\eta}(t_{\max})}{\mu^*}, & t > t_{\max} \end{cases}$$

$$\text{Με } p := 4\alpha\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta)$$

Οι σταθερές $\gamma_\varphi, \gamma_\psi$, το άνω φράγμα θ της εισόδου, το άνω φράγμα $\bar{\gamma}$ της μήτρας $\hat{\Gamma}(t)$, η σταθερά $\kappa = \gamma_\varphi + \gamma_\psi\theta + \bar{\gamma}^2$, η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_{\max}(P_0)$, ο βαθμός n του συστήματος, μπορούν να υπολογισθούν ή οι τιμές τους να υποθεθούν γνωστές για το εκάστοτε σχεδιαστικό πρόβλημα, προκειμένου να τεθούν στις σχέσεις στις οποίες απαιτούνται. Η ανεπιθύμητη σταθερά δ , κατά την διαδικασία κατασκευής του παρατηρητή, απαλείφθηκε στις πράξεις. Οι σταθερές $t^*, t_{\max}, \alpha, \sigma, \mu^*$ και η , για να επιτευχθεί η παραπάνω σχεδίαση της παραμέτρου κέρδους $\lambda(t)$, προκύπτουν από την επίλυση προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού.

Η ανισότητα (4.4.2.24), κάνοντας χρήση της τμηματικής προσεγγιστικής μορφής της παραμέτρου λ , δίνει τις εξής ανισότητες στο $t = t^*$ και $t = t_{\max}$:

$$\begin{aligned} & \mu \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1 \right) \\ & \geq 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta) \\ & \quad + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}^2(P_0) \left[\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta + 1 \right. \\ & \quad \left. + (2n - 1) \frac{\alpha p \dot{B}_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^* \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1 \right)} \right]^2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \mu \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}(P_0) \alpha p B_{\alpha, \eta}(t_{\max})}{\mu^*}, 1 \right) \\ & \geq 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta) + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}^2(P_0) [\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta + 1]^2 \end{aligned}$$

$\min_{t^*, t_{\max}, \alpha, \sigma, \mu^*, \eta}$

$$\square t^* \geq 0, t_{\max} \geq 0, \alpha > 0, \sigma > 0, \mu^* > 0, \eta > 0$$

$$\square t^* \leq t_{\max}$$

$$\square \mu^* \leq \mu$$

$$\square \dot{B}_{\alpha, \eta}(t_{\max}) = 0$$

$$\square \eta \geq \|A - KC\| \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t_{\max})}{\mu^*}, 1 \right) + \frac{n \alpha p \dot{B}_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^* \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1 \right)}$$

$$\square \sigma > \frac{(\eta + \kappa) \lambda_{\max}(P_0)}{2}$$

$$\square \mu \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1 \right)$$

$$\geq 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta)$$

$$\quad + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}^2(P_0) \left[\gamma_\varphi + \gamma_\psi \Theta + 1 \right.$$

$$\quad \left. + (2n - 1) \frac{\alpha p \dot{B}_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^* \max \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}(P_0) + \alpha p B_{\alpha, \eta}(t^*)}{\mu^*}, 1 \right)} \right]^2$$

$$\square \mu_{\max} \left(\frac{\sigma + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}(P_0) \alpha p B_{\alpha, \eta}(t_{\max})}{\mu^*}, 1 \right) \\ \geq 2\lambda_{\max}(P_0)(\gamma_{\varphi} + \gamma_{\psi}\Theta) + 2\bar{\gamma}^2 \lambda_{\max}^2(P_0)[\gamma_{\varphi} + \gamma_{\psi}\Theta + 1]^2$$

4.5. Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο, αφού αναλύθηκαν τα προβλήματα εκτίμησης παραμέτρων με παρατηρητή που υπόκειται σε προσαρμοστικό νόμο, προτάθηκαν τεχνικές σχεδίασης αυξανόμενου κέρδους επί του υπάρχοντος προσαρμοστικού μοντέλου με υψικερδή σχεδίαση. Ακολουθήθηκε μεθοδολογία βασισμένη στην κεντρική ιδέα του κεφαλαίου 3 και εφαρμόστηκε σε δύο κλάσεις μη γραμμικών συστημάτων, αυτό της εκτίμησης λάθους σε αισθητήρα και αυτό της εκτίμησης κατάστασης – παραμέτρου. Το βασικότερο μειονέκτημα που παρατηρήθηκε είναι η πολυπλοκότητα των αναλυτικών σχέσεων του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού και η υπολογιστικά άκρως περίπλοκη επίλυση, το οποίο απαιτείται προκειμένου να κατασκευασθεί το προσαρμοστικό μοντέλο του παρατηρητή. Ζητήματα όπως η «χαλάρωση» των υποθέσεων ή η απλοποίηση του αλγορίθμου υπολογιστικής επίλυσης, ώστε να επιλύονται καθολικά προβλήματα της συγκεκριμένης κλάσης, όπου να υπολογίζονται οι παράμετροι του εκάστοτε προβλήματος, πρέπει να μελετηθούν περαιτέρω. Η σθεναρότητα του μοντέλου είναι επίσης αντικείμενο προς μελέτη, καθώς και η ευαισθησία του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού σε ανεπιθύμητες μεταβολές, εξαιτίας της προσέγγισης συναρτήσεων με σειρές πεπερασμένων όρων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Κουσιουρή, Τ. (1990). Θεωρία γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων. Αυτοέκδοση, Αθήνα.
- [2] Τζαφέστας, Σ. (2004). Αυτόματος έλεγχος γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου. Αυτοέκδοση, Αθήνα.
- [3] Aeyels, D., Sepulchre, R., Peuteman, J. (1998). Asymptotic stability conditions for time-variant systems and observability: uniform and nonuniform criteria. *Mathematics of Control, Signals & Systems*. Springer Science & Business Media B.V., 11, 1-27
- [4] Ahrens, J. H., & Khalil, H. K. (2009). High-gain observers in the presence of measurement noise: a switched-gain approach. *Automatica*, 45(4), 936–943.
- [5] Alessandri, A., & Rossi, A. (2013). Time-varying increasing-gain observers for nonlinear systems. *Automatica*, 49, 2845–2852.
- [6] Aliprantis, Charalambos D., and Kim C. (2006). *Border. Infinite dimensional analysis : a hitchhiker's guide*. Berlin London: Springer.
- [7] Andrieu, V., Praly, L., & Astolfi, A. (2009). High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms. *Automatica*, 45(2), 422–428.
- [8] Anosov, D. V. *Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*. Berlin New York: Springer, 1997. Print.
- [9] Boizot, N., Busvelle, E., & Gauthier, J. P. (2010). An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. *Automatica*, 46(9), 1483–1488.
- [10] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Volume 15 of studies in applied mathematics. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- [11] Besançon, G. Zhang, Q., Hammouri H. (2004). High- Gain Observer based state and parameter estimation in nonlinear systems. A Proceedings Volume from the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS) Stuttgart, Germany, 1-3 September 2004.
- [12] Besançon, G. (2007). *Nonlinear observers and applications*. Lecture Notes in Control and Information Science 363. Springer Verlag.
- [13] Besançon, G., De Leon Morales, J. Huerta Guevara, O., (2006). On adaptive observers for state affine systems, *Int. journal of Control*.
- [14] Besançon, G., (2000). Remarks on adaptive observers for nonlinear systems, *Systems & Control Letters*.
- [15] Birkhoff, G. D. (1927). *Dynamical Systems*. Chicago: American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume IX.
- [16] Bonivento, C. (2007). *Advances in control theory and applications*. Berlin: Springer.
- [17] Chaperon M. (2009). On the Cauchy-Kowalevski theorem. *L'Enseignement Mathématique* 55, 359–371
- [18] Chen, C. C. (1999). *Linear system theory and design*. New York: Oxford University Press.
- [19] Chitour, Y. (2002). Time-varying high-gain observers for numerical differentiation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(9), 1565–1569.
- [20] Conte, G, C. H. Moog, and A. M. Perdon. *Algebraic methods for nonlinear control systems*. Berlin London: Springer, 2007. Print.
- [21] Dragomir, S. S. (2002). *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. Monograph.

- [22] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., & Chilali, M. (1985). LMI control toolbox user's guide. Natick, MA: The Math Works Inc.
- [23] Gauthier, J-P., H. Hammouri and S. Othman (1992). A simple observer for nonlinear systems, application to bioreactors. *IEEE Trans. on Automatic Control* 37(6), 875-880.
- [24] Haddad, Wassim M., and VijaySekhar Chellaboina. (2011). *Nonlinear Dynamical Systems and Control a Lyapunov-Based Approach*. Princeton: Princeton University Press.
- [25] Hinrichsen, D., & Anthony, P. (Eds.). (2005). *Mathematical systems theory I*. Berlin Springer
- [26] Huerta Guevara, O., (2004). *Estudios sobre el control y estimación de sistemas no lineales en tiempo continuo y discreto*. Tesis en opción al grado de doctor en ciencias de la ingeniería eléctrica con especialidad en control. San Nicolás de los Garza Nuevo León
- [27] Ibrir, S. (2009). Adaptive observers for time-delay nonlinear systems in triangular form. *Automatica*, 45(10), 2392–2399.
- [28] Isidori, Alberto. (1995). *Nonlinear control systems*. Berlin New York: Springer.
- [29] Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Information and system sciences series. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [30] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [31] LaSalle J.P., *Stability of nonautonomous systems*, *Nonlinear Analysis, Methods and Applications*, vo;1, no 1, 1976.
- [32] Liao, Xiaoxin, Liqiu Wang, and Pei. *Stability of dynamical systems*. Amsterdam Oxford: Elsevier, 2007. Print.
- [33] Liu, Y. (2009). Robust adaptive observer for nonlinear systems with unmodeled dynamics. *Automatica*, 45(8), 1891–1895.
- [34] Loría, A. & Panteley E. (2002). Uniform exponential stability of linear time-varying systems: revisited. *Systems & Control Letters*.
- [35] Luenberger, David G. (1984). *Linear and nonlinear programming*. Reading, Mass: Addison-Wesley.
- [36] Marquez, Horacio J. *Nonlinear control systems : analysis and design*. Hoboken, N.J: John Wiley, 2003. Print.
- [37] Meurer, Thomas, Knut Graichen, and Gilles. (2005). *Control and observer design for nonlinear finite and infinite dimensional systems*. Berlin New York: Springer. Print.
- [38] Narendra, K. S. and A. M. Annaswamy (1989). *Stable adaptive systems*. Prentice Hall. Boston.
- [39] Nesterov, Y., Nemirovsky, A. (1994). Interior-point polynomial methods in convex programming, vol. 13 of *Studies in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, PA.
- [40] Oueder, M., Farza, M., Ben Abdenour, R., & M'Saad, M. (2012). A high gain observer with updated gain for a class of MIMO non-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 61(2), 298–308.
- [41] Poznyak, A. S. *Advanced mathematical tools for automatic control engineers*. Amsterdam Boston: Elsevier, 2008. Print.
- [42] de Queiroz. M.S., Malisoff, M., Wolenski, P. (Eds.) (2004). *Optimal Control, Stabilization and nonsmooth analysis*. *Lecture Notes in Control and Information Science*. Volume 301. Springer Berlin Heidelberg.
- [43] Willems, J.C., Polderman, J.W. (1998). *Introduction to Mathematical Systems Theory A Behavioral Approach*. New York, NY: Springer New York. Print.
- [44] Raghavan, S., Hedrick, J.K. (1994). Observer Design for a class of Nonlinear Systems. *Int. J. Control* 59(2), 515-528.

- [45] Sanfelice, R. G., & Praly, L. (2011). On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise. *Automatica*, 47(10), 2165–2176.
- [46] Shen, Y. (2009). Fault diagnosis based on high-gain observer with an update law for a class of nonlinear systems. *J Control Theory Appl* 2010 8 (4) 447–452.
- [47] Shim, H., Seo, J. H., & Teel, A. R. (2003). Nonlinear observer design via passivation of the error dynamics. *Automatica*, 39(5), 885–892.
- [48] Tsinias, J. (2008). Time-varying observers for a class of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 57(12), 1037–1047.
- [49] Turner, Matthew C., and Declan Bates. *Mathematical methods for robust and nonlinear control* EPSRC Summer School. Berlin London: Springer, 2007. Print.
- [50] Vukić, Z. (2003). *Nonlinear control systems*. New York: Marcel Dekker.
- [51] Xu, Aiping and Zhang, Q. (2004). Nonlinear system fault diagnosis based on adaptive estimation. *Automatica* 40(7), 1181{1193.
- [52] Zhang, Q. (2001). Adaptive Observer for MIMO Linear Time Varying Systems. Thème 4 Simulation et optimization de systems complexes. Projet Sigma2. Rapport de recherche n° 4111. Institut National de Recherche et en Automatique.
- [53] Zhang, Q., Besançon, G., (2005). Nonlinear system fault estimation. Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 2005. Czech Republic.