

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ**  
**ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**



**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Προβλήματα ανάλυσης και σχεδιασμού συστημάτων  
ελέγχου**

**Βασιλική Ειρήνη Καρακώστα**

**ΑΘΗΝΑ 2015**

Επιβλέπων Καθηγητής:

*Κος Ιωάννης Τσινιάς*, Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

1. *Κος Ιωάννης Τσινιάς*, Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
2. *Κος Βασίλειος Κοκκίνης*, Επίκουρος Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
3. *Κος Ιάσων Καραφύλλης*, Επίκουρος Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε προς απόκτηση του διπλώματος της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, στα πλαίσια των υποχρεώσεων των τελειόφοιτων σπουδαστών του αντίστοιχου τμήματος της Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Τα συστήματα ελέγχου αποτελούν αντικείμενο της εφαρμοσμένης μηχανικής που αναλύει τα αποτελέσματα και τις αλληλεπιδράσεις των μαθηματικών συστημάτων. Η ανάλυση και ο σχεδιασμός ενός συστήματος ελέγχου αποτελεί ένα σημαντικό τομέα στο σύγχρονο επιστημονικό χώρο. Με μια πληθώρα εφαρμογών, που εκτείνονται από απλές συσκευές μέχρι πιο πολύπλοκες, όπως ένα διαστημικό λεωφορείο, τα συστήματα ελέγχου αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής μας ζωής.

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής είναι η μελέτη των γραμμικών δυναμικών συστημάτων σε σχέση με τις έννοιες της ελεγκσιμότητας, της παρατηρησιμότητας και της πραγματοποίησης. Επίσης, εξετάζονται τα προβλήματα απαλοιφής διαταραχών για τα οποία παρατίθενται και μια σειρά παραδειγμάτων.

# Ευχαριστίες

Οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Ιωάννη Τσινιά, Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας και την υπομονή που επέδειξε για εμένα μέχρι την ολοκλήρωσή της.

Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω την αγαπημένη μου μητέρα για τις θυσίες που έκανε για την εκπαίδευσή μου και τη στήριξη που μου προσέφερε όλα αυτά τα χρόνια.

# Περιεχόμενα

Πρόλογος .....	2
Ευχαριστίες .....	3
Πίνακας περιεχομένων .....	4
Περίληψη.....	6
Abstract .....	7
<b>1. Περιγραφή των γραμμικών δυναμικών συστημάτων .....</b>	<b>8</b>
1.1. Βασικές έννοιες .....	8
1.2. Το θεώρημα Cayley - Hamilton .....	11
<b>2. Ελεγχιμότητα.....</b>	<b>13</b>
2.1. Προσιτά σύνολα.....	13
2.2. Θεώρημα Kalman.....	15
2.3. Ορισμοί – Κριτήριο ελεγχιμότητας .....	18
2.4. Ελέγξιμοι υπόχωροι .....	20
<b>3. Ισοδυναμία γραμμικών συστημάτων .....</b>	<b>23</b>
3.1. Ορισμοί και βασικά χαρακτηριστικά .....	23
3.2. Ελεγχιμότητα και ισοδυναμία .....	25
3.3. Το κριτήριο Hautus .....	30
<b>4. Σταθεροποίηση γραμμικών συστημάτων.....</b>	<b>35</b>
4.1. Ορισμοί - συνθήκη .....	35
4.2. Το λήμμα Heyman .....	37
4.2.1. Εφαρμογή στο λήμμα Heyman .....	39
<b>5. Παρατηρησιμότητα .....</b>	<b>42</b>
5.1. Ορισμοί – συνθήκη παρατηρησιμότητας.....	42
5.2. Ιδιότητες.....	44
<b>6. Παρατηρήτης Κατάστασης.....</b>	<b>46</b>
6.1. Ο παρατηρήτης.....	46
6.2. Ανιχνευσιμότητα (detectability).....	48
<b>7. Πραγματοποίηση για συστήματα.....</b>	<b>54</b>
7.1. Πραγματοποίηση για SISO Συστήματα .....	54
7.2. Πραγματοποίηση για MIMO Συστήματα .....	58
<b>8. Ελάχιστη πραγματοποίηση.....</b>	<b>60</b>

8.1. Ελάχιστη πραγματοποίηση για SISO Συστήματα.....	60
8.1.1.Εφαρμογή στην ελάχιστη πραγματοποίηση σε SISO σύστημα.....	64
8.2. Ελάχιστη Πραγματοποίηση για MIMO Συστήματα .....	67
<b>9. Πρόβλημα απαλοιφής διαταραχών .....</b>	<b>73</b>
9.1. Ορισμός - συνθήκη.....	73
9.2. Ο υπόχωρος V.....	76
9.3. Προϋποθέσεις επίλυσης του προβλήματος απαλοιφής διαταραχών .....	79
<b>10. Εφαρμογές στο πρόβλημα απαλοιφής διαταραχών .....</b>	<b>83</b>
10.1 Εφαρμογή 1 .....	83
10.2 Εφαρμογή 2 .....	85
10.3 Εφαρμογή 3 .....	88
10.4 Εφαρμογή 4 .....	90
10.5 Εφαρμογή 5 .....	92
10.6 Εφαρμογή 6 .....	95
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>98</b>

# Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη των συστημάτων ελέγχου, τα οποία αποτελούν σημαντικό κομμάτι της εφαρμοσμένης μηχανικής που βασίζεται στην ανάλυση των μαθηματικών συστημάτων. Η εργασία ξεκινά με την περιγραφή των γραμμικών δυναμικών συστημάτων και την απόδειξη του θεωρήματος Cayley-Hamilton. Στη συνέχεια ορίζεται η έννοια της ελεγχιμότητας και προσδιορίζονται οι ιδιότητές της. Εξετάζεται η ισοδυναμία και η σταθεροποίηση των γραμμικών συστημάτων μέσα από μια σειρά θεωρημάτων, πορισμάτων και προτάσεων. Ακολουθεί ο ορισμός της παρατηρησιμότητας, η οποία οδηγεί στη μελέτη μιας νέας κατηγορίας συστημάτων που ονομάζονται παρατηρητές κατάστασης.

Στα επόμενα κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας αναλύεται η πραγματοποίηση για τα συστήματα SISO και MIMO και παρουσιάζεται ο τρόπος για τον υπολογισμό της ελάχιστης πραγματοποίησης τόσο για τα SISO συστήματα όσο και για τα MIMO.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας εξετάζονται τα προβλήματα απολοιφής διαταραχών τα οποία εφαρμόζονται σε παραδείγματα για διάφορα ηλεκτρικά κυκλώματα.

**Λέξεις – Κλειδιά:** Συστήματα Ελέγχου, Ελεγχιμότητα, Παρατηρησιμότητα, Πραγματοποίηση, Απαλοιφή Διαταραχών, SISO / MIMO συστήματα

# Abstract

The purpose of this dissertation is the study of control systems, an important part of applied mechanics based on mathematical systems. The paper begins with the description of linear dynamic systems and the proof of Cayley - Hamilton theorem. Afterwards, we focus on the definition of controllability and its attributes. The equivalence and the stability of linear systems are examined through a variety of theorems, conclusions and proposals. Following we have the definition of observability which leads to the examination of a new system category, known as observant situation.

In the next chapters of the dissertation, is analyzed the realization of SISO and MIMO systems and it is presented the calculation of the least realization both for SISO and MIMO systems.

In the last part of dissertation there is a detailed presentation of disturbance decoupling problems and some of their applies in electrical circuits.

**Key Words:** Control Systems, Controllability, Observability, Realization, Disturbance Decoupling, SISO / MIMO Systems



# Κεφάλαιο 1:

## Περιγραφή των Γραμμικών Συστημάτων Ελέγχου

### 1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Με τον όρο σύστημα εννοούμε ένα μέρος του φυσικού κόσμου, το οποίο θεωρούμε ότι αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων που λειτουργούν συγχρόνως κατά προδιαγεγραμμένο τρόπο έτσι ώστε να επιτυγχάνεται κάποιος σκοπός. Πιο συγκεκριμένα πολυμετάβλητο σύστημα ονομάζουμε κάθε σύστημα ελέγχου το οποίο δέχεται πλήθος εισόδων και δίνει πλήθος εξόδων. Η μαθηματική αναπαράσταση του συστήματος απαιτεί: (α) την επιλογή ενός συστήματος συντεταγμένων, (β) την επιλογή των μεταβλητών που μας ενδιαφέρουν για την περιγραφή του φυσικού συστήματος και (γ) την εφαρμογή των φυσικών νόμων που διέπουν την σχέση και τη συμπεριφορά των μεταβλητών υπό εξέταση. Σε κάθε φυσικό σύστημα αντιστοιχεί ένα μαθηματικό μοντέλο, δηλαδή ένα σύνολο εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν τη σχέση των διαφόρων μεταβλητών του συστήματος. Σκοπός μας είναι η περιγραφή, μελέτη και ανάλυση κάθε συστήματος ξεχωριστά μέσω του εκάστοτε μαθηματικού προτύπου. Τα συστήματα που εξετάζουμε είναι δυναμικά συστήματα, δηλαδή συστήματα των οποίων οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις του χρόνου και οι εξισώσεις που τα περιγράφουν περιλαμβάνουν μεταβολές αυτών των μεγεθών.

Οι εξισώσεις κατάστασης είναι μία περιγραφή στο πεδίο του χρόνου. Με τον όρο κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος ελέγχου αναφερόμαστε στο μικρότερο δυνατό σύνολο μεταβλητών των οποίων η γνώση της τιμής κατά τη χρονική στιγμή  $t=t_0$  σε συνδυασμό με τη γνώση της εισόδου για  $t \geq t_0$ , καθορίζει πλήρως την συμπεριφορά του συστήματος για  $t \geq t_0$ . Δηλαδή, τα πρότυπα του χώρου των καταστάσεων περιγράφουν την εσωτερική δομή ενός συστήματος με τη βοήθεια του διανύσματος κατάστασης και εκφράζουν την σχέση μεταξύ εισόδων, διανύσματος κατάστασης και εξόδων του συστήματος. Στην παράσταση συστήματος στο χώρο κατάστασης, το σύστημα χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων που συνδέουν τις μεταβλητές κατάστασης.

Ένα δυναμικό γραμμικό σύστημα ελέγχου περιγράφεται από τη διανυσματική γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x}=Ax+Bu, x(t_0)=x_0 \quad (1.1)$$

και η έξοδος δίνεται από την:

$$y=Cx+Du \quad (1.2)$$

όπου το  $x(t)$  ανήκει  $\mathbb{R}^n$ , το  $x(t_0)$  αποτελεί την αρχική συνθήκη του συστήματος, το  $u(t)$  ανήκει στο  $\mathbb{R}^m$  και είναι η είσοδος του συστήματος και το  $y(t)$  ανήκει στο  $\mathbb{R}^p$  και είναι η έξοδος του συστήματος.

Ο χώρος καταστάσεων του συστήματος (1.1), (1.2) ορίζεται ως ο χώρος  $X=K^n$ , με το  $K$  να είναι είτε το  $\mathbb{R}$  είτε το  $\mathbb{C}$ . Συνεπώς το  $X$  είναι ο χώρος όλων των δυνατών καταστάσεων του συστήματος. Τα στοιχεία του  $X$ ,  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ονομάζονται διανύσματα κατάστασης, τα οποία περιγράφουν με μοναδικό τρόπο την μελλοντική απόκριση του συστήματος δεδομένης της τρέχουσας κατάστασης, της εξόδου και των δυναμικών εξισώσεων.

Ο χώρος των τιμών εισόδου/ελέγχου του συστήματος είναι ένα υποσύνολο  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ , έτσι ώστε ο χώρος εισόδων να είναι το σύνολο όλων των δυνατών εισόδων του συστήματος με τιμές στο  $U$ . Τα στοιχεία του  $U$ ,  $u=(u_1, u_2, \dots, u_m)$  ονομάζονται διανύσματα εισόδου/ελέγχου.

Οι πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  και  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  είναι κατάλληλων διαστάσεων πραγματικοί σταθεροί πίνακες, όπου  $A$  είναι ο πίνακας του συστήματος,  $B$  ο πίνακας εισόδων/ελέγχου,  $C$  ο πίνακας εξόδου και  $D$  ο πίνακας που συνδέει απευθείας την είσοδο/έλεγχο ( $u$ ) με την έξοδο.

Ένα δυναμικό σύστημα με μία είσοδο ( $m=1$ ) και μία έξοδο ( $p=1$ ) καλείται SISO (single input and single output) διαφορετικά καλείται MIMO (multiple input and multiple output). Η λύση του συστήματος ορίζεται για κάθε  $t$  και γράφεται:

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-r)}Bu(r)dr$$

όπου:

$$e^{At}=1+At+A^2 \frac{t^2}{2!}+\dots+A^n \frac{t^n}{n!}+\dots$$

Οι εξισώσεις (1.1) και (1.2) με χρήση του μετασχηματισμού Laplace μετατρέπονται στις:

$$(sI-A)X(s)=BU(s)$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s)=CX(s)+DU(s)$$

όπου  $U(s)$  και  $Y(s)$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $u(t)$  και  $y(t)$  αντίστοιχα όταν  $x(0)=0$ . Η  $Y(s)$ , μετά την αντικατάσταση της  $X(s)$ , γράφεται:

$$Y(s) = [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s)$$

όπου

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

είναι ο πίνακας μεταφοράς.

Το πολυώνυμο

$$d(s) = \det(sI-A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \in \mathbb{R}[s]$$

ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος και η τάξη του συστήματος είναι ίση με το βαθμό  $n$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.1) και (1.2) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε ως δεδομένα τόσο την αρχική συνθήκη  $x(t_0)$  όσο και την αρχική είσοδο  $u(t)$ , τότε τα  $x(t)$  και  $y(t)$  για  $t \geq t_0$  μπορούν να υπολογισθούν από τους ακόλουθους τύπους:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.6)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.7)$$

Θέτοντας  $u(t)=0$ , με  $t$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $t \geq t_0$ , διαπιστώνουμε ότι για οποιαδήποτε  $t_1 \geq t_0$  και  $t \geq t_0$ , η (1.6) γράφεται:

$$x(t) = e^{A(t-t_1)}x(t_1).$$

Επομένως, ο πίνακας  $\Phi(t, t_1) = e^{A(t-t_1)}$  λειτουργεί ως μεταφορά από μια κατάσταση σε μια άλλη. Επειδή η κατάσταση ενός γραμμικού συστήματος για μια χρονική στιγμή μπορεί να προκύψει από κάποια άλλη μέσω του πίνακα  $\Phi$ , μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $t_0=0$ .

Ο πίνακας ώθησης (impulse matrix) του συστήματος ορίζεται ως:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = Ce^{At}B1_+(t) + D\delta(t)$$

όπου  $\delta(t)$  είναι η μονάδα ώθησης (impulse) και  $1_+(t)$  είναι το βήμα (unit step) που ορίζεται ως:

$$1_+(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Η σχέση εισόδου – εξόδου περιγράφεται από την εξίσωση συνέλιξης:

$$y(t) = (g * u)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

## 1.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ CALEY - HAMILTON

### Θεώρημα 1.1 (Cayley-Hamilton):

Κάθε πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Συνεπώς αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι:

$$d(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

τότε θα ισχύει:

$$d(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0.$$

### Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι

$$d(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (1.3)$$

και επίσης ισχύει

$$(sI - A)\text{adj}(sI - A) = \det(sI - A)I \quad (1.4)$$

όπου

$$\text{adj}(sI - A) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0 \quad (1.5)$$

Με αντικατάσταση των (1.4), (1.5) στην (1.3) παίρνουμε:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)I = (sI - A)\text{adj}(sI - A) \Leftrightarrow$$

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)I = (sI - A)(b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0)$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές του  $s$  προκύπτει:

$$\begin{aligned}
a_0 I &= -Ab_0 \\
a_1 I &= -Ab_1 + b_0 \\
&\vdots \\
a_{n-1} I &= -Ab_{n-1} + b_{n-2} \\
I &= b_{n-1}
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αν πολλαπλασιαστούν με  $I, A, A^2, \dots, A^n$  δίνουν:

$$\begin{aligned}
a_0 I &= -Ab_0 \\
a_1 A &= -A^2b_1 + Ab_0 \\
&\vdots \\
a_{n-1} A^{n-1} &= -A^n b_{n-1} + A^{n-1} b_{n-2} \\
A^n &= b_{n-1} A^n
\end{aligned}$$

Το άθροισμα των παραπάνω εξισώσεων υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned}
&A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = \\
&A^n b_{n-1} + (-A^n b_{n-1} + A^{n-1} b_{n-2}) + \dots + (-A^2 b_1 + Ab_0) + -Ab_0 = 0
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. ▪

Το επόμενο πόρισμα είναι χρήσιμο για την περαιτέρω ανάλυση και είναι άμεση απόρροια του Θ. Cayley-Hamilton.

**Πόρισμα 1.1:**

Αν  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  τότε για κάθε ακέραιο  $l \geq n$  ο πίνακας  $A^l$  είναι γραμμικός συνδυασμός των μικρότερων δυνάμεων του πίνακα  $A$ .

# Κεφάλαιο 2:

## Ελεγχιμότητα

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα  $\Sigma$  του οποίου η χρονική συμπεριφορά περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.2)$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της διανυσματικής διαφορικής εξίσωσης με αρχική κατάσταση την χρονική στιγμή  $t_0 \geq 0$  την  $x_0 = x(t_0)$ , με  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  και είσοδο  $u(t): [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι η:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.3)$$

Ένα από τα πλέον σημαντικά προβλήματα της μαθηματικής θεωρίας συστημάτων ελέγχου είναι το πρόβλημα της ύπαρξης και κατασκευής μιας εισόδου  $u(t): [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}^m$  τέτοια ώστε αν  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα του χώρου των καταστάσεων τότε, για κάποιο χρόνο  $T > t_0$ , να είναι:

$$x_1 = x(T) = e^{A(T-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{T-t_0} e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.4)$$

τότε λέμε ότι η είσοδος ελέγχου  $u(t)$  οδηγεί την κατάσταση  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  του συστήματος από την αρχική κατάσταση  $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  στην τελική κατάσταση  $x_1 = x(T) \in \mathbb{R}^n$  μέσα σε χρόνο  $T$ . Το παραπάνω πρόβλημα εισάγει την έννοια της ελεγχιμότητας.

### 2.1 ΠΡΟΣΙΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

#### Ορισμός 2.1:

Ονομάζουμε αποδεκτό χώρο εισόδων (ή ελέγχων)  $\Omega$  του συστήματος (2.1) όλες τις μετρήσιμες και ουσιωδώς τοπικά φραγμένες απεικονίσεις  $u(\cdot)$  με πεδίο ορισμού το

$\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$  και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^m$ , έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη της λύσης του συστήματος τουλάχιστον για  $t$  κοντά στο  $t_0$ .

### Ορισμός 2.2:

Το προσιτό σύνολο  $A(t, x_0)$  του σημείου  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , χρόνου  $t > 0$ , ορίζεται ως το σύνολο που αποτελείται από όλες τις καταστάσεις  $x$  που μπορεί να οδηγηθεί το σύστημα (2.1) σε χρόνο  $t$ , ξεκινώντας από το  $x_0$  τη χρονική στιγμή  $t=0$  με κάποιο αποδεκτό έλεγχο  $u \in \Omega$ :

$$A(t, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \Omega \text{ με } x = x(t, x_0, u)\}$$

Όταν ο χώρος εισόδων  $\Omega$  δεν υφίσταται περιορισμούς το προσιτό σύνολο συμβολίζεται με  $A(t, x)$ . Στην περίπτωση που ο χώρος εισόδων υφίσταται τον περιορισμό  $u \in D := [a_i, b_i]^m$  (για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι  $a_i = -1$  και  $b_i = +1$ ) τότε το προσιτό σύνολο συμβολίζεται με  $M(t, x)$ , όπου  $M(t, x) \subset A(t, x)$ . Δηλαδή:

$$A(t, x) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u = u(s), s \in [0, t] \text{ έτσι ώστε } x = x(t, x_0, u)\}$$

$$M(t, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u = u(s) \in U, s \in [0, t] \text{ έτσι ώστε } x = x(t, x_0, u)\}, \text{ με } u(\cdot) \in U = [-1, 1].$$

### Ιδιότητες:

Θεωρούμε σύστημα της μορφής  $\dot{x} = Ax + Bu$ , όπου οι είσοδοι  $u$  δεν υφίστανται περιορισμούς. Για το σύστημα αυτό ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- I. Το  $A(t, 0)$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $\mathbb{R}^n$ ,  $A(t, 0) \leq \mathbb{R}^n$  για κάθε  $t \geq 0$
- II. Το  $A(t, x_0)$  είναι γραμμική πολλαπλότητα του  $\mathbb{R}^n$ ,

$$A(t, x_0) = e^{At} x_0 + A(t, 0),$$

δηλαδή για κάθε

$$\omega \in A(t, x_0) \text{ ισχύει } \omega = e^{At} x_0 + \bar{\omega} \text{ για κάποιο } \bar{\omega} \in A(t, 0)$$

### Απόδειξη:

- I. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^n$  και  $x_1, x_2 \in A(t, 0)$  ισχύει  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A(t, 0)$ . Έχουμε ότι  $x_i = A(t, 0, u_i)$  για κάποια είσοδο  $u_i$ . Τα  $x_1, x_2$  γράφονται:

$$x_1 = e^{At}0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u_1(s) ds$$

$$x_2 = e^{At}0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u_2(s) ds$$

Με αντικατάσταση στην  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= \int_0^t e^{A(t-s)} B \lambda_1 u_1(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} B \lambda_2 u_2(s) ds \\ &= \int_0^t e^{A(t-s)} B (\lambda_1 u_1(s) + \lambda_2 u_2(s)) ds = x = A(t, 0, u) \in A(t, 0) \quad (u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \end{aligned}$$

II. Θεωρούμε ότι  $\omega \in A(t, x_0)$  τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \omega = x(t, x_0, u) &= e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \\ &= e^{At} x_0 + (e^{At} 0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds) = e^{At} x_0 + x(t, 0, u) \end{aligned}$$

Άρα

$$\omega = e^{At} x_0 + \bar{\omega}$$

για κάποιο  $\bar{\omega} \in A(t, 0)$ . Επομένως,

$$A(t, x_0) \subseteq e^{At} x_0 + A(t, 0)$$

Ομοίως

$$e^{At} x_0 + A(t, 0) \subseteq A(t, x_0)$$

οπότε καταλήγουμε ότι

$$A(t, x_0) = e^{At} x_0 + A(t, 0) \quad \blacksquare$$

## 2.2 ΘΕΩΡΗΜΑ KALMAN

### Θεώρημα (KALMAN) 2.1:

Θεωρούμε το σύστημα  $\dot{x} = Ax + Bu$ , με είσοδο  $u$  χωρίς περιορισμούς τότε, για κάθε  $t > 0$  θα ισχύει:

$$A(t, 0) = \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.5)$$

όπου το  $\text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$  είναι η γραμμική θήκη των γραμμών των  $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$

και σύμφωνα με την ιδιότητα II:



$$A(t, x_0) = e^{At}x_0 + \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

**Απόδειξη:**

Αρχικά θα δείξουμε ότι:

$$A(t, 0) \subset \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B].$$

Έστω  $x \in A(t, 0)$  τότε

$$x = x(t, 0, u) = e^{At}0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$e^{A(t-s)} = I + (t-s)A + \frac{(t-s)^2}{2!}A^2 + \dots$$

οπότε με αντικατάσταση στην προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t (I + (t-s)A + \frac{(t-s)^2}{2!}A^2 + \dots)Bu(s)ds \\ &= \int_0^t (B + (t-s)AB + \frac{(t-s)^2}{2!}A^2B + \dots)u(s)ds \\ &= \int_0^t Bu(s)ds + \int_0^t (t-s)ABu(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2!}A^2Bu(s)ds + \dots \\ &= B \int_0^t u(s)ds + AB \int_0^t (t-s)u(s)ds + A^2B \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2!}u(s)ds + \dots \\ &= B k_0 + AB k_1 + A^2B k_2 + \dots \end{aligned}$$

όπου  $k_0, k_1, \dots, k_{n+1}$  κατάλληλοι σταθεροί πίνακες ( $m \times 1$ ).

Από το Πρόρισμα 1.1 έχουμε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας  $A$  ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση δηλαδή:

$$0 = A^n + n_{n-1}A^{n-1} + \dots + n_1A + n_0 I$$

$$A^n = -n_{n-1}A^{n-1} - \dots - n_1A - n_0 I$$

$$A^{n+1} = -n_{n-1}A^n - \dots - n_1A^2 - n_0A$$

Καταλήγουμε έτσι ότι :

$$A^{k \geq n} \in \text{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$$

Επομένως έχουμε:

$$x = Bk'_0 + ABk'_1 + \dots + A^{n-1}Bk'_{n+1} \in \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$$

όπου  $k'_0, k'_1, \dots, k'_{n+1}$  κατάλληλοι σταθεροί πίνακες ( $m \times 1$ )

και άρα  $x = x(t, 0, u) = e^{At}0 + \int_0^t e^{A(t-s)}bu(s)ds \in \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ ,

δηλαδή,

$$A(t, 0) \leq \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

Έστω τώρα ότι,

$$A(t, 0) < \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

Στην περίπτωση αυτή θα υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα  $\omega$  του χώρου  $\text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$  το οποίο θα είναι κάθετο στον  $A(t, 0)$  και συνεπώς θα έχουμε:

$$\omega'x = 0 \text{ για κάθε } x \in A(t, 0) \text{ ,}$$

$$\omega^2x(t, 0, u) = 0 \text{ για κάθε είσοδο } u.$$

Ισοδύναμα:

$$\omega' \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds = 0 \text{ για κάθε είσοδο } u$$

$$\int_0^t \omega' e^{A(t-s)}Bu(s)ds = 0$$

και επομένως  $\omega' e^{A(t-s)} = 0$  για κάθε  $s \in [0, t]$  η οποία γράφεται:

$$\omega'(I + (t-s)A + \frac{(t-s)^2}{2!}A^2 + \dots)B = 0$$

$$\Rightarrow \omega'B + (t-s)\omega'AB + \frac{(t-s)^2}{2!}\omega'A^2B + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega'B = 0 \\ \dots \\ \omega'A^{n-1}B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega'[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = 0$$

$$\Rightarrow \omega \text{ κάθετο στον } \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς έχουμε ήδη υποθέσει στην αρχή ότι

$$\omega \in \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

και αυτό συμβαίνει μόνο αν  $\omega = 0$ , άρα ισχύει η (2.5). ▪

### 2.3 ΟΡΙΣΜΟΙ – ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑΣ

Η θεωρία της ελεγχιμότητας ασχολείται με τη μελέτη του μεγέθους των προσιτών συνόλων. Όσο μεγαλύτερα είναι τα προσιτά σύνολα, τόσο μεγαλύτερη είναι και η ικανότητα του συστήματος για έλεγχο.

#### Ορισμός 2.3:

Έστω ένα σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , λέμε ότι το (2.1) είναι ελέγξιμο από το  $x_0$  όταν υπάρχει  $t > 0$  τέτοιο ώστε το προσιτό σύνολο  $A(t, x_0)$  να έχει μη κενό εσωτερικό ως προς τον  $\mathbb{R}^n$ .

#### Ορισμός 2.4:

Ένα σύστημα της μορφής (2.1) καλείται ελέγξιμο όταν με κατάλληλη επιλογή της είσοδο  $u(t)$ , μπορεί να οδηγηθεί από μια αρχική κατάσταση  $x_0 = x(t_0)$  σε μία τελική κατάσταση  $x_1 = x(t_1)$  μέσα σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

#### Παρατήρηση:

Η ελεγχιμότητα μιας κατάστασης  $x(0) \neq 0$  εξασφαλίζει την ύπαρξη της εισόδου  $u(t)$  η οποία πραγματοποιεί τη μετάβαση από την αρχική κατάσταση  $x(0) \neq 0$  στη μηδενική κατάσταση  $x(T) = 0$  σε χρόνο  $T > 0$  και δεν περιγράφει την τροχιά  $x(t)$  από το  $x(0) \neq 0$  στο  $x(T) = 0$ .

#### Θεώρημα 2.2:

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- I.  $(A, B)$  είναι ελέγξιμο
- II. Ο πίνακας  $W_c(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^* e^{A^* \tau} d\tau$  είναι θετικά ορισμένος για κάθε  $t > 0$ .
- III. Ο πίνακας

$$C_n = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

είναι πλήρους τάξης ως προς τις γραμμές ή με άλλα λόγια  $\langle A | \text{span} B \rangle := \sum_{i=1}^n \text{span}(A^{i-1}B) = \mathbb{R}^n$ . Ο πίνακας  $C_n$  ονομάζεται πίνακας ελεγχιμότητας.

**Απόδειξη:**

(II)  $\Leftrightarrow$  (I) Έστω  $W_c(t_1) > 0$  για κάποιο  $t_1 > 0$  και έστω ότι η είσοδος ορίζεται ως:

$$u(\tau) = -B^* e^{A^*(t_1-\tau)} W_c^{-1}(t_1) (e^{At_1} x_0 - x_1) \quad (2.8)$$

Η απόκριση τη χρονική στιγμή  $t_1$  είναι

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε  $x(0) = x_0$  και κάθε  $x(t_1) = x_1$ , η είσοδος (2.8) θα μεταφέρει την κατάσταση  $x_0$  στην  $x_1$  σε χρόνο  $t$ . Πράγματι αντικαθιστώντας αυτό το  $u(t)$  στο  $x(t_1)$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{At_1} x(0) - \left( \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^* e^{A^*(t_1-\tau)} d\tau \right) W_c^{-1}(t_1) (e^{At_1} x_0 - x_1) = \\ &= e^{At_1} x(0) - W_c(t_1) W_c^{-1}(t_1) (e^{At_1} x_0 - x_1) = x_1 \end{aligned}$$

Άρα αν  $W_c(t_1)$  θετικά ορισμένος τότε το ζεύγος  $(A, B)$  είναι ελέγξιμο.

Αντίστροφα, για να δείξουμε ότι η ελεγχσιμότητα του  $(A, B)$  συνεπάγεται ότι  $W_c(t) > 0$  για οποιοδήποτε  $t > 0$ , υποθέτουμε ότι  $(A, B)$  ελέγξιμο αλλά  $W_c(t_1)$  είναι μη αντιστρέψιμος για κάποιο  $t_1 > 0$ . Αφού  $e^{At} B B^* e^{A^*t} \geq 0$  για όλα τα  $t$ , τότε υπάρχει ένα διάνυσμα  $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε

$$u^* e^{At} B = 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Έστω  $x(t_1) = x_1 = 0$ , τότε από την (2.3), έχουμε

$$0 = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση με  $u^*$  παίρνουμε

$$0 = u^* e^{At_1} x(0).$$

Αν επιλέξουμε την αρχική κατάσταση  $x(0) = e^{-At_1} u$ , τότε  $u = 0$ , που είναι άτοπο. Έτσι ο  $W_c(t_1)$  δεν μπορεί να είναι μη αντιστρέψιμος για οποιοδήποτε  $t > 0$ .

(II)  $\Leftrightarrow$  (III) Έστω ότι  $W_c(t) > 0$  για κάθε  $t > 0$  και ότι ο πίνακας ελεγχσιμότητας  $C_n$  δεν είναι πλήρους τάξης ως προς τις γραμμές. Τότε υπάρχει ένα  $u \in \mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε

$$u^* A^i B = 0 \quad \text{για κάθε } 0 \leq i \leq n-1.$$

Οπότε,

$$u^* e^{At} B = 0$$

για όλα τα  $t$  ή ισοδύναμα,  $u^* W_c(t) = 0$  για όλα τα  $t$ , το οποίο είναι άτοπο άρα ο πίνακας ελεγχιμότητας  $C_n$  πρέπει να είναι πλήρους τάξης ως προς τις γραμμές.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι ο  $C_n$  είναι πλήρους τάξης ως προς τις γραμμές αλλά ο  $W_c(t)$  είναι μη αντιστρέψιμος για κάποιο  $t_1$ . Τότε υπάρχει  $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε  $u^* e^{At} B = 0$  για κάθε  $t \in [0, t_1]$ . Αν θέσουμε  $t=0$  έχουμε  $u^* B = 0$ .

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την  $i$  παράγωγο του  $u^* e^{At} B = 0$  με  $t=0$  για να πάρουμε

$$u^* A^i B = 0, \quad i > 0.$$

Επομένως έχουμε ότι,

$$u^* [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = 0$$

ή, με άλλα λόγια, ο πίνακας ελεγχιμότητας δεν είναι πλήρους τάξης ως προς τις γραμμές το οποίο είναι άτοπο. ▪

Για τον πίνακα ελεγχιμότητας  $C_n$  παρατηρούμε ότι κατασκευάζεται άμεσα από τους πίνακες-συντελεστές  $A, B$  της εξίσωσης κατάστασης. Στην περίπτωση της μίας εισόδου, οπότε και ο  $B$  είναι ένας πίνακας στήλη όπως και οι  $AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ , ο πίνακας ελεγχιμότητας  $C_n$  είναι ένας  $n \times n$  τετραγωνικός πίνακας.

Ένα συμπέρασμα που προκύπτει από το Θεώρημα 2.2 είναι ότι ένα σύστημα μιας εισόδου είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν ο πίνακας ελεγχιμότητας είναι αντιστρέψιμος.

## 2.4 ΕΛΕΓΞΙΜΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Ο ελέγξιμος υποχώρος του συστήματος, ο οποίος συμβολίζεται ως  $V = \langle A|B \rangle$  είναι ο :

$$V = \text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

και λέμε ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο όταν  $V = \mathbb{R}^n$ , δηλαδή όταν ο  $V$  ταυτίζεται με τον χώρο κατάστασης ή διαφορετικά όταν  $\dim V = n$  όπου  $n$  είναι η διάσταση του χώρου των καταστάσεων. Έτσι έχουμε ότι το σύστημα  $\dot{x} = Ax + bu$  με εισόδους  $u(\cdot) \in \mathbb{R}$  είναι ελέγξιμο, αν για κάθε  $t > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$  ισχύει  $A(t, x_0) = \mathbb{R}^n$ .

**Σημείωση:**

- I. Ο λόγος που σταματάμε στη δύναμη  $n-1$  ( $A^{n-1}B$ ) οφείλεται στο Πόρισμα 1.1, ότι δηλαδή για κάθε  $k > n$  έχουμε:

$$A^k \in \text{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$$

αφού το  $A^n B$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $I, A, \dots, A^{n-1}$ .

- II. Αντίστοιχα το σύστημα  $\dot{x} = Ax + Bu$  με εισόδους  $u(\cdot) \in [-1, 1]$  είναι ελέγξιμο αν για κάθε  $t > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$  το  $M(t, x_0)$  έχει μη κενό εσωτερικό ως προς  $\mathbb{R}^n$ .
- III. Για συστήματα μιας εισόδου  $\dot{x} = Ax + bu$  με  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$ ,  $b$ :στήλη η ελεγχιμότητα είναι ισοδύναμη με την αλγεβρική συνθήκη:

$$\det[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \neq 0 \tag{2.7}$$

**Πρόταση 2.1:**

Ο ελέγξιμος υποχώρος του συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

είναι ο μικρότερος υποχώρος  $V$  του  $\mathbb{R}^n$  με τις εξής ιδιότητες:

- I.  $AV \subset V$  με  $AV = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists x \in V \text{ με } z = Ax\}$  ( $V$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος)
- II.  $\text{span}B \subset V$

**Απόδειξη:**

Έχουμε:  $V = \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} \Rightarrow$  (II) προφανής.

Πολλαπλασιάζουμε με  $A$  οπότε:

$$AV = A \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = \text{span}\{AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B, A^n B\}$$

όπου  $A^n \in \text{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$ . Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\begin{aligned} AV &\subset \text{span}\{AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B, (\lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1})B\} \\ &\Rightarrow AV \subset \text{span}\{AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B, (\lambda_0 B + \lambda_1 AB + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1}B)\} \subset \\ &\quad \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} \\ &\Rightarrow AV \subset V \end{aligned}$$

Εκρεμμεί να δείξουμε ότι ο ελέγξιμος υποχώρος  $V$  είναι ο μικρότερος υποχώρος του  $\mathbb{R}^n$  που ικανοποιεί τις 1 και 2. Έστω ότι ο  $\bar{V}$  είναι ο μικρότερος υποχώρος με αυτές τις ιδιότητες. Τότε με βάση την ιδιότητα 2 έχουμε ότι  $\text{span}B \subset \bar{V}$  και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με  $A$  προκύπτει ότι:  $\text{span}\{AB\} \subset A\bar{V} \subset \bar{V}$  (λόγω της ιδιότητας 1). Πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά με  $A$  τελικά καταλήγουμε στο  $\text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} \subset \bar{V}$  και επομένως  $\bar{V} = \text{span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = V$ . ▪

# Κεφάλαιο 3:

## Ισοδυναμία Γραμμικών Συστημάτων

Για να περάσουμε από ένα πραγματικό/φυσικό σύστημα σε ένα σύστημα ελέγχου  $\Sigma(A,B)$ , απαιτείται ένα μαθηματικό μοντέλο. Όμως, αυτό το μοντέλο δεν είναι μοναδικό, αφού εξαρτάται από την επιλογή των μεταβλητών. Έστω λοιπόν δύο γραμμικά συστήματα

$$\Sigma: \dot{x} = Ax + Bu, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.1)$$

$$\bar{\Sigma}: \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad (z,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.2)$$

ορισμένα στον ίδιο χώρο καταστάσεων  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.1 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

#### Ορισμός 3.1:

Τα  $\Sigma, \bar{\Sigma}$  είναι ισοδύναμα (Συμβολισμός:  $\Sigma \sim \bar{\Sigma}$ ), αν υπάρχει  $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  αντιστρέψιμος έτσι ώστε για κάθε είσοδο  $u(\cdot) \in \Omega$  και για κάθε

$$z_0 = Px_0 \quad (3.3)$$

ισχύει

$$z(t, z_0, u) = Px(t, x_0, u), \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \quad (3.4)$$

Αν παραγωγίσουμε την (3.4) ως προς  $t$  προκύπτει ότι:

$$\dot{z} = P\dot{x} = P(Ax + Bu) = PAx + PBu = PAP^{-1}z + PBu$$

Έχουμε δηλαδή:

$$\bar{A}z + \bar{B}u(\cdot) = PAx + PBu(\cdot) \quad \text{με } z = Px, \text{ για κάθε } x_0, u(\cdot) \quad (3.5)$$

ή το ίδιο

$$\begin{cases} \bar{A} = PAP^{-1} \\ \bar{B} = PB \end{cases} \quad (3.6)$$



Επομένως, τα  $\Sigma$  και  $\bar{\Sigma}$  είναι ισοδύναμα τότε και μόνο τότε υπάρχει γραμμική αλλαγή συντεταγμένων  $z=Px$ , με  $\det P \neq 0$  τέτοια ώστε το  $\Sigma$  να μετασχηματίζεται στις καινούργιες συντεταγμένες  $z$  του  $\bar{\Sigma}$ , όπου υποχρεωτικά οι  $\bar{A}$  και  $\bar{B}$  πληρούν τις προϋποθέσεις (3.6). Στην πραγματικότητα το  $z$  δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας γραμμικός συνδυασμός των αρχικών καταστάσεων.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι πως η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη από την αλλαγή συντεταγμένων. Πράγματι, αρχικά η συνάρτηση μεταφοράς ήταν  $H(s)=C(sI-A)^{-1}B$ . Με την αλλαγή συντεταγμένων έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{H}(s) &= (CP^{-1})(sI - PAP^{-1})^{-1}(PB) \\ &= CP^{-1}(sPP^{-1} - PAP^{-1})^{-1}PB \\ &= CP^{-1}[P(sI-A)P^{-1}]^{-1}PB \\ &= CP^{-1}P(sI-A)^{-1}P^{-1}PB \\ &= C(sI-A)^{-1}B = H(s)\end{aligned}$$

Η σχέση  $\sim$  είναι πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας αφού εύκολα προκύπτει ότι:

- I. Αν  $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$  τότε  $\Sigma_2 \sim \Sigma_1$
- II. Αν  $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$  και  $\Sigma_2 \sim \Sigma_3$  τότε  $\Sigma_1 \sim \Sigma_3$

#### Παρατήρηση:

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cayley-Hamilton δείξαμε στην Πρόταση 2.1 ότι ισχύουν τα παρακάτω:

- I. Ο χώρος  $\langle A/B \rangle$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος, δηλαδή

$$Ax \in \langle A/B \rangle, \forall x \in \langle A/B \rangle \quad (3.7a)$$

και περιέχει το  $\text{span}B$ :

$$\text{span}B \leq \langle A/B \rangle \quad (3.7b)$$

- II. Ο χώρος  $\langle A/B \rangle$  είναι ο μικρότερης διάστασης υποχώρος του  $\mathbb{R}^n$  με τις ιδιότητες (3.7a) και (3.7b).

### 3.2 ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

#### Πρόταση 3.1:

Αν τα  $\Sigma, \bar{\Sigma}$  είναι ισοδύναμα τότε έχουν τον ίδιο βαθμό ελεγχιμότητας. Επομένως το  $\Sigma$  είναι ελέγξιμο, τότε και μόνο αν το  $\bar{\Sigma}$  είναι ελέγξιμο.

#### **Απόδειξη:**

Γνωρίζουμε ότι  $\langle A/B \rangle = \text{span}[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  για το σύστημα  $\Sigma$ . Ομοίως έχουμε και για το σύστημα  $\bar{\Sigma}$ :

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}/\bar{B} \rangle &= \text{span}[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \\ &= \text{span}[PB, PAP^{-1}PB, \dots, (PAP^{-1})^{n-1}PB] \\ &= \text{span}[PB, PAB, \dots, PA^{n-1}B] \\ &= \text{span}P[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \\ &= \text{span}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \end{aligned}$$

αφού ο  $P$  είναι αντιστρέψιμος. Άρα πράγματι

$$\text{span}\langle \bar{A}/\bar{B} \rangle = \text{span}\langle A/B \rangle \Rightarrow \dim\langle \bar{A}/\bar{B} \rangle = \dim\langle A/B \rangle$$

Επομένως  $\Sigma$  ελέγξιμο  $\Leftrightarrow \bar{\Sigma}$  ελέγξιμο. ▪

#### Πρόταση 3.2:

Ειδικά, για ισοδύναμα συστήματα μιας εισόδου:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.8}$$

$$\dot{z} = \bar{A}x + \bar{B}u \tag{3.9}$$

ισχύουν τα ακόλουθα:

I. Ο πίνακας ισοδυναμίας  $P$  δίνεται από τη σχέση

$$\bar{C}_n = PC_n \tag{3.10}$$

όπου  $C_n, \bar{C}_n$  οι πίνακες ελεγχιμότητας με:

$$C_n = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b], \bar{C}_n = [\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}] \tag{3.11}$$

II. Αν το  $(\Sigma)$  είναι ελέγξιμο  $\Leftrightarrow (\bar{\Sigma})$  ελέγξιμο

III. Επιπλέον οι  $A, \bar{A}$  έχουν ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

**Απόδειξη:**

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.6) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} [\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}] &= \\ [Pb, PAP^{-1}Pb, (PAP^{-1})(PAP^{-1}Pb), \dots, PA^{n-1}b] &= \\ P[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \end{aligned}$$

άρα ισχύει το (I).

Από την προηγούμενη εξίσωση και αφού ο P είναι αντιστρέψιμος προκύπτει ότι:  $\text{rank}C_n = \text{rank}PC_n = \text{rank}\bar{C}_n$  επομένως έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών άρα και τον ίδιο βαθμό ελεγχιμότητας. Σύμφωνα λοιπόν με την Πρόταση 3.1 αν το (Σ) είναι ελέγξιμο θα είναι και το ( $\bar{\Sigma}$ ). Τέλος από την πρώτη σχέση της (3.6) προκύπτει η τρίτη ιδιότητα. ■

Αντίστροφα ισχύει το ακόλουθο:

**Θεώρημα 3.1:**

Έστω δύο συστήματα μιας εισόδου της μορφής:

$$\Sigma: \dot{x} = Ax + bu$$

$$\bar{\Sigma}: \dot{z} = \bar{A}x + \bar{b}u$$

Αν τα συστήματα είναι ελέγξιμα και οι πίνακες A,  $\bar{A}$  είναι όμοιοι τότε τα δυο συστήματα είναι ισοδύναμα.

**Απόδειξη:**

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, με  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έτσι ώστε να ισχύουν οι (3.6), δηλαδή

$$\begin{cases} \bar{A} = PAP^{-1} & (3.6a) \\ \bar{b} = Pb & (3.6b) \end{cases}$$

Έστω πίνακας P για τον οποίο ισχύουν οι εξισώσεις (3.10) και (3.11). Ισοδύναμα έχουμε ότι ο πίνακας P ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
Pb &= \bar{b} \\
PA\bar{b} &= \overline{A\bar{b}} \\
&\vdots \\
PA^{n-1}\bar{b} &= \overline{A^{n-1}\bar{b}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Δείχνουμε ότι ο  $P$  ικανοποιεί τις (3.6). Η (3.6b) ικανοποιείται όπως φαίνεται από την πρώτη ισότητα της (3.12). Αφού το  $\bar{S}$  είναι ελέγξιμο τα  $\bar{b}, \overline{A\bar{b}}, \dots, \overline{A^{n-1}\bar{b}}$  είναι μια βάση του  $\mathbb{R}^n$  και αρκεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned}
\overline{A\bar{b}} &= (PAP^{-1})\bar{b} \\
\overline{A(\overline{A\bar{b}})} &= (PAP^{-1})\overline{A\bar{b}} \\
&\vdots \\
\overline{A(\overline{A^{n-1}\bar{b}})} &= (PAP^{-1})(\overline{A^{n-1}\bar{b}})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Με χρήση της (3.12) μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί επαγωγικά ότι:

$$(\overline{A^{i+1}\bar{b}}) = \overline{A(\overline{A^i\bar{b}})} = (PAP^{-1})(\overline{A^i\bar{b}}) = PA^{i+1}\bar{b}, \quad i=0,1,\dots,n-2 \tag{3.14}$$

Για να δείξουμε ότι ικανοποιείται και η τελευταία επιθυμητή ισότητα από την (3.13) θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τη (3.14) για  $i=n-2$  οπότε έχουμε:

$$\overline{A^{n-1}\bar{b}} = (PAP^{-1})(\overline{A^{n-2}\bar{b}}) = PA^{n-1}\bar{b}$$

και αντικαθιστώντας στην τελευταία από τις (3.13) έχουμε:

$$\overline{A^n\bar{b}} = PA^n\bar{b} \tag{3.15}$$

Στη συνέχεια επειδή  $A$  και  $\bar{A}$  όμοιοι, λόγω του πορίσματος του θεωρήματος Cayley-Hamilton ικανοποιούν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση, δηλαδή, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\lambda_i, i=0,\dots,n-1$ , έτσι ώστε

$$A^n = \lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} \tag{3.16.a}$$

$$\bar{A}^n = \lambda_0 I + \lambda_1 \bar{A} + \dots + \lambda_{n-1} \bar{A}^{n-1} \tag{3.16.b}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.16a) και (3.16b) η (3.15) γράφεται:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \overline{A^i\bar{b}} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i PA^i\bar{b}$$

που είναι άμεση συνέπεια της (3.14). ▪

Συνέπεια του Θεωρήματος 3.1 είναι το ακόλουθο:

**Θεώρημα 3.2:**

Έστω το σύστημα που δίνεται από την εξίσωση (3.8) το οποίο είναι ελέγξιμο και έστω ότι ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$d(s)=s^n+\alpha_1s^{n-1}+\dots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$$

Τότε το  $\Sigma$  είναι ισοδύναμο με το παρακάτω σύστημα (“κανονική ελέγξιμη μορφή”).

$$\bar{\Sigma}=(\bar{A},\bar{b}): \dot{z}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

**Απόδειξη:**

Θεωρούμε γνωστό ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $\bar{A}$  ισούται με

$$d(s)=s^n+\alpha_1s^{n-1}+\dots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n.$$

Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι το  $\bar{\Sigma}$  είναι ελέγξιμο, δηλαδή τα:

$$\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1 ικανοποιούνται και άρα  $\Sigma \sim \bar{\Sigma}$ . ■

Στην περίπτωση, όπου  $\dim(A/B) < n$ , όπου δηλαδή το σύστημα (3.8) δεν είναι ελέγξιμο, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 3.3:**

Έστω σύστημα της μορφής (3.1) το οποίο δεν είναι ελέγξιμο και έστω:

$$\dim(A/B)=n_1 < n$$

τότε το σύστημα (3.1) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

όπου οι πίνακες  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  και  $B_1$  έχουν διαστάσεις  $n_1 \times n_1$ ,  $n_1 \times (n-n_1)$ ,  $(n-n_1) \times (n-n_1)$  και  $n_1 \times m$  αντίστοιχα και το ζευγάρι  $A_{11}$ ,  $B_1$  είναι ελέγξιμο, δηλαδή

$$\dim\langle A_{11}/B_1 \rangle = n_1 \quad (3.17)$$

### Απόδειξη:

Έστω  $V$  ο ελέγξιμος υποχώρος  $\langle A/B \rangle$  του (3.1) για τον οποίο ισχύει:

$$\dim V = n_1$$

από την υπόθεση. Θεωρούμε μια βάση του  $\langle A/B \rangle$  που δίνεται από τα  $\{v_1, \dots, v_{n_1}\}$ , και έστω  $e_i = (0, \dots, 0, 1(i), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Επίσης θεωρούμε πίνακα  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $Pv_i = e_i$ ,  $i=1, \dots, n_1$ , ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό  $z = Px$  το σύστημα (3.1) ισοδυναμεί με το:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \quad (3.18)$$

και ο ελέγξιμος υποχώρος  $\bar{V}$  του (3.18) προκύπτει από τη σχέση:

$$\bar{V} = PV = \text{span}\{e_1, \dots, e_{n_1}\} \quad (3.19)$$

όπου  $V = \langle A/B \rangle$ . Προφανώς ο  $\bar{V}$  διατηρεί τις ιδιότητες (3.7a,b) του  $V$ , δηλαδή

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \bar{V} \subset \bar{V}$$

$$\text{span} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \subset \bar{V}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι  $A_{21} = 0$  και  $B_2 = 0$ . Ονομάζουμε  $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  και  $\bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ . Γνωρίζουμε ότι ο  $V$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος, δηλαδή

$$AV \subset V \Rightarrow PAV \subset PV = \bar{V}.$$

Όμως

$$\bar{A} = PAP^{-1} \Rightarrow \bar{A}P = PA.$$

Άρα

$$\bar{A}PV \subset \bar{V} \Rightarrow \bar{A}\bar{V} \subset \bar{V}$$

επομένως ο  $\bar{V}$  είναι  $\bar{A}$ -αναλλοίωτος.

Επίσης ο  $V$  είναι ο μικρότερος  $A$ -αναλλοίωτος υποχώρος με την ιδιότητα  $B \subset V$ . Γνωρίζουμε ότι  $\bar{B} = PB$  και με βάση την προηγούμενη σχέση, προκύπτει:

$$B \subset V \Rightarrow PB \subset PV \Rightarrow \bar{B} \subset PV = \bar{V} \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{V}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ο  $\bar{V}$  είναι ο ελάχιστος υπόχωρος που περιέχει το  $\bar{B}$  και είναι  $\bar{A}$ -αναλλοίωτος. Άρα

$$\bar{V} = \langle \bar{A}/\bar{B} \rangle = \bar{B} + \bar{A}\bar{B} + \dots + \bar{A}^{n-1}\bar{B}$$

Με άλλα λόγια ο  $\bar{V}$  είναι ο ελέγξιμος υποχώρος του  $\bar{\Sigma}$ . Αλλά  $\bar{A}\bar{V} \subset \bar{V}$  είναι το ίδιο με  $\bar{A}e_1 \in \text{span}\{e_1, \dots, e_{n_1}\}$ . Το  $\bar{A}e_1$  είναι η  $i$ -στήλη του πίνακα  $\bar{A}$  η οποία είναι γραμμικός συνδυασμός των  $e_1, \dots, e_{n_1}$ . Φαίνεται εύκολα τώρα, ότι οι τελευταίες  $n-n_1$  συνιστώσες κάθε  $i$ -στήλης του  $\bar{A}$  είναι μηδενικά, για κάθε  $i=1, \dots, n_1$ . Επομένως  $A_{21}=0$ . Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι  $B_2=0$ .

Τέλος εύκολα προκύπτει ότι

$$\text{rank}[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = \text{rank}[B_1, A_{11}B_1, \dots, A_{11}^{n-1}B_1] = \dim \bar{V} = n_1. \quad \blacksquare$$

Η πρόταση αυτή ουσιαστικά μας λέει ότι για το μη ελέγξιμο σύστημα:

$$\Sigma: \dot{x} = Ax + Bu, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

υπάρχει ισοδύναμο σύστημα:

$$\bar{\Sigma}: \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad (z, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

το οποίο είναι της μορφής:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u & (3.20) \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 & (3.21) \end{cases}$$

όπου το ζευγάρι  $(A_{11}, B_1)$  είναι ελέγξιμο.

Η εξίσωση (3.20) αποτελεί το ελέγξιμο κομμάτι του συστήματος, ενώ η (3.21) το μη ελέγξιμο τμήμα του.

### 3.3 ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ HAUTUS

Ένα σπουδαίο πόρισμα της Πρότασης 3.3 είναι το «Κριτήριο Hautus» το οποίο αποδεικνύουμε για την περίπτωση των συστημάτων μίας εισόδου.

**Πόρισμα 3.1 (Κριτήριο Hautus):**

Έστω το σύστημα μίας εισόδου:

$$\Sigma: \dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι και αναλλοίωτοι μέσω γραμμικής αλλαγής συντεταγμένων:

- I.  $(A, b)$  ελέγξιμο
- II.  $\text{rank}[\lambda I - A, b] = n$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$

**Απόδειξη:**

Πρώτα θα δείξουμε ότι οι ισχυρισμοί (I) και (II) παραμένουν αναλλοίωτοι.

- I. Έστω  $(A, b)$  και  $(\bar{A}, \bar{b})$  ισοδύναμα συστήματα. Έστω  $(\bar{A}, \bar{b})$  ελέγξιμο, τότε πρέπει:

$$\det(\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}) \neq 0 \quad (3.22)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{cases} \bar{A} = PAP^{-1} \\ \bar{b} = Pb \end{cases}$$

με  $P$  αντιστρέψιμο, οπότε η (3.22) γίνεται:

$$\begin{aligned} \det(\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}) &= \\ \det(P(b, Ab, \dots, A^{n-1}b)) &= \\ \det P \det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) &\neq 0 \end{aligned}$$

Όμως

$$\det P \neq 0$$

αφού  $P$  αντιστρέψιμος άρα:

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0$$

και επομένως  $(A, b)$  ελέγξιμο.

- II. Έστω  $(A, b)$  και  $(\bar{A}, \bar{b})$  ισοδύναμα συστήματα, δηλαδή  $\bar{A} = PAP^{-1}$  και  $\bar{b} = Pb$  για κάποιο αντιστρέψιμο πίνακα  $P$ .

Έστω:

$$\text{rank}[\lambda I - A] = n$$



Πολλαπλασιάζουμε αριστερά με  $P$  και δεξιά με  $P^{-1}$  και παίρνουμε:

$$\text{rank}[\lambda I - P A P^{-1}] = n$$

$$\Rightarrow \text{rank}[\lambda I - \bar{A}] = n$$

$$\Rightarrow \text{rank}[\lambda I - \bar{A}, \bar{b}] = n$$

Έστω στη συνέχεια ότι

$$\text{rank}[\lambda I - A, b] < n, \text{ για κάποιο } \lambda$$

και από την υπόθεση (II) είναι:

$$\text{rank}[\lambda I - A, b] = n - 1$$

$$b \notin \text{span}(\lambda I - A) \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.22)$$

και έστω ότι

$$\text{span}(\bar{A} - \lambda I, \bar{b}) = \text{span}(P A P^{-1} - \lambda I, P b) < n \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{C}$$

Άρα

$$P b \in \text{span}(P A P^{-1} - \lambda I) \Leftrightarrow$$

$$P b = (P A P^{-1} - \lambda I) \omega, \text{ για κάποιο } \omega \in \mathbb{R}^n$$

Οπότε έχουμε:

$$P b = (P A P^{-1} - \lambda P P^{-1}) \omega$$

$$P b = P(A - \lambda I) P^{-1} \omega$$

$$b = (A - \lambda I) \xi, \text{ όπου } \xi = P^{-1} \omega \Leftrightarrow$$

$$b \in \text{span}(\lambda I - A)$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της (3.22)

(I)  $\Rightarrow$  (II). Υποθέτουμε ότι:

$$\text{rank}[\lambda I - A, b] < n \Rightarrow \text{υπάρχει } v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$$

τέτοιο ώστε

$$v'[\lambda I - A, b] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v'(\lambda I - A) = 0 \\ v'b = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

$$\Leftrightarrow \lambda v' = v' A \quad (3.25)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.25) από δεξιά με  $b$  έχουμε:

$$\lambda v' b = v' A b$$

η οποία λόγω της (3.24) γίνεται:

$$v' A b = 0 \quad (3.26)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την (3.25) από δεξιά με  $A b$  και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \lambda v' A b &= v' A A b \\ &\Rightarrow v' A^2 b = 0 \end{aligned}$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\begin{aligned} v' A^k b &= 0, \quad k=0, 1, \dots, n-1 \\ &\Rightarrow v=0 \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

(II) $\Rightarrow$ (I). Έστω ότι δεν ισχύει η (I) λόγω του αναλλοίωτου του (II) χωρίς βλάβη της γενικότητας το σύστημα γράφεται:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

με  $(A_1, b_1)$  ελέγξιμο.

Έστω  $(\lambda, v)$  ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A_3$  με:

$$\lambda v' = v' A_3 \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad d \neq 0$$

τότε:

$$\begin{aligned} d' \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} &= (0 \quad v') \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \\ &= (0 \quad v' A_3) = (0 \quad \lambda v') \\ &= \lambda d' = \lambda d' \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow d' A = \lambda d' I \end{aligned} \quad (3.27)$$

Επίσης έχουμε:

$$d' b = (0 \quad v') \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

Από τις (3.27) και (3.28) προκύπτει ότι:

$$d'[\lambda I-A, b] = [\lambda d'I - d'A, d'b] = 0$$

Άρα

$$\text{rank}[\lambda I-A, b] < n$$

το οποίο είναι άτοπο. ▪

# Κεφάλαιο 4:

## Σταθεροποίηση Γραμμικών Συστημάτων

Θεωρούμε τη γραμμική περίπτωση

$$\dot{x}=Ax+Bu \quad (4.1)$$

Το πρόβλημα της σταθεροποίησης συνίσταται στο να βρεθεί μια απεικόνιση της μορφής  $u=Fx$  έτσι ώστε το σύστημα που προκύπτει:

$$\dot{x}=(A+BF)x$$

να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ή ισοδύναμα ο  $A+BF$  να είναι Hurwitz.

### 4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ - ΣΥΝΘΗΚΗ

#### Ορισμός 4.1:

Ένα σύστημα της μορφής (4.1) ονομάζεται σταθεροποιήσιμο με γραμμική ανάδραση, αν υπάρχει  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  έτσι ώστε ο πίνακας  $A+BF$  να είναι Hurwitz, δηλαδή, τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του είναι γνησίως αρνητικά, ή ισοδύναμα το  $0 \in \mathbb{R}^n$  του «κλειστού» συστήματος

$$\dot{x}=(A+BF)x \quad (4.2)$$

είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές. Η απεικόνιση  $u=Fx$  ονομάζεται ανάδραση.

Είναι γνωστό ότι η ασυμπτωτική ευστάθεια του μηδενός για το (4.2) είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι οι τροχιές του συστήματος συγκλίνουν εκθετικά στο μηδέν, δηλαδή υπάρχουν σταθερές  $k, l > 0$  τέτοιες ώστε:

$$|x(t, x_0)| \leq ke^{-lt}|x_0|, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

Για τα συστήματα μιας εισόδου έχουμε το ακόλουθο.

#### Θεώρημα 4.1:

Αν ένα σύστημα της μορφής (4.1) μιας εισόδου είναι ελέγξιμο τότε είναι και σταθεροποιήσιμο.

### Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι το σύστημα (4.1) είναι ελέγξιμο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A έχει τη μορφή:

$$\det(sI-A)=a_0+a_1s+\dots+a_{n-1}s^{n-1}+s^n$$

Λόγω του Θεωρήματος 3.2 θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας την κανονική ελέγξιμη μορφή όπου:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \bar{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε την ανάδραση:

$$u=Fx=f_1x_1+\dots+f_nx_n, \quad f_i \in \mathbb{R}$$

Τότε με κατάλληλη επιλογή των σταθερών  $f_i$  προκύπτει ο πίνακας

$$\bar{A}+\bar{B}F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_1 - \alpha_0 & f_2 - \alpha_1 & \dots & f_n - \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα (4.3) ταυτίζεται με το πολυώνυμο:

$$s^n + (f_n - \alpha_{n-1})s^{n-1} + (f_{n-1} - \alpha_{n-2})s^{n-2} + \dots + f_1 - \alpha_0$$

το οποίο έχει ρίζες με πραγματικό μέρος αρνητικό. Επομένως ο πίνακας (4.3) είναι Hurwitz και το σύστημα σταθεροποιήσιμο. ■

Η επόμενη πρόταση δείχνει πως ένα ελέγξιμο σύστημα m-εισόδων μπορεί να μετασχηματισθεί με χρήση γραμμικής ανάδρασης σε ένα σύστημα μιας εισόδου, έτσι ώστε να διατηρείται η ιδιότητα της ελεγχιμότητας. Συγκεκριμένα, αν το ζευγάρι (A,B) είναι ελέγξιμο και αν η πρώτη στήλη  $b_1$  είναι διάφορη του μηδενός τότε υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση  $x \rightarrow u=Fx$ , έτσι ώστε το σύστημα μιας εισόδου  $\dot{x}=(A+BF)x+u_1b_1$  να είναι ελέγξιμο.

## 4.2 ΤΟ ΛΗΜΜΑ HEYMAN

### Πρόταση 4.1 (Λήμμα Heyman):

Έστω σύστημα της μορφής (4.1) με πολλές εισόδους. Αν  $b_1 \neq 0$  και το ζευγάρι  $(A, B)$  είναι ελέγξιμο τότε υπάρχει σταθερός πίνακας  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έτσι ώστε το ζευγάρι  $(A+BF, b_1)$  να είναι ελέγξιμο.

### Απόδειξη:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε σύστημα δυο εισόδων:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + u_1 b_1 + u_2 b_2, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.4)$$

Επειδή το σύστημα (4.1) είναι ελέγξιμο υπάρχουν ακέραιοι  $k, l \geq 0$  τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\text{span}\{b_1, Ab_1, \dots, A^{k-1}b_1, b_2, \dots, A^{l-1}b_2\} = \mathbb{R}^n, \quad \text{με } k+l=n \quad (4.5)$$

Έστω ότι τα  $x_i$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bullet \quad x_{i+1} = Ax_i + b_1, \quad i=1, \dots, k-1 \quad (4.6a)$$

$$\bullet \quad x_{i+1} = Ax_i + b_2, \quad i=k, \dots, n-1 \quad (4.6b)$$

Από τις (4.5) και (4.6) προκύπτει ότι τα  $x_i, i=1, \dots, n-1$  αποτελούν μια βάση του  $\mathbb{R}^n$  οπότε έχουμε:

$$\text{span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\} = \mathbb{R}^n$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχει πίνακας  $F$ , με  $F \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  έτσι ώστε το ζευγάρι  $(A+BF, b_1)$  να είναι ελέγξιμο. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα  $b_1, (A+BF)b_1, \dots, (A+BF)^{n-1}b_1$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως μια βάση του  $\mathbb{R}^n$ . Αρκεί να ισχύουν οι κάτωθι:

$$(A+BF)x_i = x_{i+1}, \quad i=1, \dots, n-1 \quad (4.7)$$

με κατάλληλη επιλογή του  $F$ . Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό των  $x_i$  η (4.7) γράφεται:

$$\begin{aligned} & Ax_i + BFx_i = x_{i+1}, \quad i=1, \dots, n-1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} Ax_i + BFx_i = Ax_i + b_1, & i=1, \dots, k-1 \\ Ax_i + BFx_i = Ax_i + b_2, & i=k, \dots, n-1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} BFx_i = b_1, & i=1, \dots, k-1 \\ BFx_i = b_2, & i=k, \dots, n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow [BFx_1 \quad BFx_2 \quad \dots \quad BFx_{n-1}] &= [b_1 \quad b_1 \quad \dots \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_2] \\ \Leftrightarrow BFX &= D \\ \Leftrightarrow BF &= DX^{-1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Έχουμε ότι  $B=(b_1, b_2)$  με  $B \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  με  $b_1$  και  $b_2$  γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα θα υπάρχει πίνακας  $\Xi \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  τέτοιος ώστε  $\Xi B = I$ . Άρα η (4.8) είναι ισοδύναμη με την εύρεση του  $F \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  έτσι ώστε:

$$F = \Xi DX^{-1} \quad (4.9)$$

οπότε αποδείχθηκε το ζητούμενο. ▪

### Θεώρημα 4.2:

Το σύστημα (4.1) είναι σταθεροποιήσιμο, αν και μόνο αν ισχύει μια από τις παρακάτω ιδιότητες:

- I. Το σύστημα είναι ελέγξιμο.
- II. Το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο αλλά σε μια οποιαδήποτε κανονική μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

του (4.1) ο πίνακας  $A_{22}$  είναι Hurwitz.

### **Απόδειξη:**

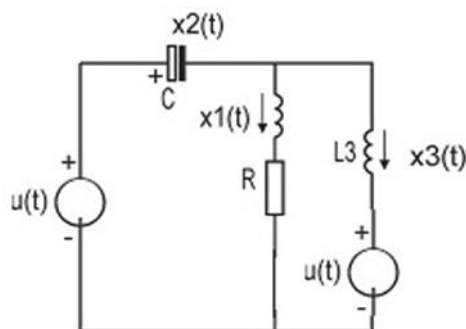
- I. Στην περίπτωση που το σύστημα είναι μιας εισόδου το αποτέλεσμα προκύπτει από το Θεώρημα 4.1. Αν το σύστημα είναι πολλών εισόδων, εφαρμόζοντας το Λήμμα του Heyman βρίσκουμε πίνακα  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ο οποίος μετασχηματίζει το σύστημα σε ελέγξιμο μίας εισόδου, οπότε πάλι μέσω του Θεωρήματος 4.1 καταλήγουμε στο ζητούμενο.
- II. Στην περίπτωση που το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο έχουμε ότι  $\dim(A/B) < n$ , και από την Πρόταση 3.3 το σύστημα (4.1) είναι ισοδύναμο με την κανονική μορφή. Αφού το ζευγάρι  $(A_{11}, B_1)$  είναι ελέγξιμο θα είναι και σταθεροποιήσιμο, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1, άρα υπάρχει πίνακας  $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$  έτσι ώστε ο  $A_{11} + B_1 F_1$  να είναι Hurwitz. Ο πίνακας του συστήματος που προκύπτει είναι:

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_1 F_1 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

και προφανώς είναι Hurwitz τότε και μόνο αν ο  $A_{22}$  είναι Hurwitz. ▪

#### 4.2.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΛΗΜΜΑ HEYMAN

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος το οποίο αποτελείται από τις αυτεπαγωγές  $L_1$ ,  $L_3$  οι οποίες διαρρέονται από ρεύμα έντασης  $x_1$ ,  $x_3$  αντίστοιχα, το πηνίο  $C$  στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται τάση  $x_2$ , την αντίσταση  $R$  και τις πηγές  $u_1$  και  $u_2$ .



Σχήμα 4.1

Εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff στο κύκλωμα προκύπτει το επόμενο σύστημα:

$$u_1(t) - x_2(t) - L_1 \dot{x}_1(t) - R x_1(t) = 0$$

$$u_1(t) - x_2(t) - L_3 \dot{x}_3(t) - u_2(t) = 0$$

$$C \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_3(t)$$

το οποίο γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{L_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} \end{bmatrix} u(t)$$

Αρχικά εξετάζουμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο. Επειδή  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $Ab_2$  γραμμικώς ανεξάρτητα παίρνουμε:

$$\det[b_1 \quad b_2 \quad Ab_2] = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{CL_3} \\ \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{L_1} \frac{1}{CL_3} \frac{1}{L_3} \neq 0$$



άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Απο το Λήμμα Heyman γνωρίζουμε πως θα υπάρχει πίνακας  $F$  της μορφής:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}$$

τέτοιος ώστε το ζευγάρι  $(A+BF, b_1)$  να είναι ελέγξιμο και το σύστημα απο ελέγξιμο σύστημα δυο εισόδων να μετασχηματίζεται σε ελέγξιμο σύστημα μίας εισόδου.

Αρχικά υπολογίζουμε τα  $x_i$  απο τις σχέσεις:

$$x_{i+1} = Ax_i + b_1, \quad i=1, \dots, k-1$$

και

$$x_{i+1} = Ax_i + b_2, \quad i=k, \dots, n-1$$

με  $k=1$  και  $n=2$ , οπότε έχουμε:

$$x_1 = b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ \frac{1}{L_3} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 + b_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1^2} \\ \frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_3} \\ -\frac{1}{L_3} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2 + b_2 = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{L_1^3} - \frac{1}{L_1} \left( \frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_3} \right) \\ -\frac{1}{C} \left( \frac{R}{L_1^2} + \frac{1}{L_3} \right) \\ -\frac{1}{L_3} \left( \frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_3} \right) - \frac{1}{L_3} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$BFx_i = b_1, \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$BFx_i = b_2, \quad i = k, \dots, n-1$$

θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $F$ .

Έχουμε ότι:

$$BFx_1 = b_2$$

και

$$BFx_2 = b_2$$

οπότε:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_3} & \frac{-1}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \frac{-R}{L_1^2} \\ 0 & \frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_3} \\ \frac{1}{L_3} & \frac{-1}{L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{L_3} & \frac{-1}{L_3} \end{bmatrix}$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε ότι:

$$f_{12} = \frac{CL_3(R-L_1)}{L_1(L_1+L_3)} f_{11}$$

$$f_{13} = -\frac{L_3}{L_1} f_{11}$$

$$f_{21} = -L_1 - \frac{L_1}{L_3} f_{23}$$

$$f_{22} = \frac{(R+L_1)C(L_1+L_3)}{L_1} + \frac{(-R+L_1)C(L_1+L_3)}{L_1L_3} f_{23}$$

με  $f_{11}$  και  $f_{23}$  αυθαίρετα.

Έτσι καταλήξαμε ότι το αρχικό μας ελέγξιμο σύστημα δύο εισόδων μετασχηματίζεται στο :

$$\dot{x} = (A+BF)x + b_1 u_1$$

όπου A, B, F και  $b_1$  γνωστά.

# Κεφάλαιο 5:

## Παρατηρησιμότητα

Ο ορισμός της παρατηρησιμότητας προκύπτει από ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα το οποίο διατυπώνεται με το ερώτημα:

*Ποιες είναι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες η γνώση του διανύσματος εξόδου  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ , για  $t$  μέσα σε ένα χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq t_1$ , επιτρέπει τον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης  $x(t_0)$  του συστήματος;*

Συγκεκριμένα, έστω ότι υπάρχει το σύστημα που αποτελείται τις εξισώσεις (5.1) και (5.2) :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (5.1)$$

$$y = Cx, \quad y \in \mathbb{R}^k \quad (5.2)$$

Μπορεί να βρεθεί σύστημα που εκτιμά τη λύση  $x(\bullet)$  του (5.1) έχοντας σαν πληροφορία την είσοδο  $u(\bullet)$  και την έξοδο  $y(\bullet)$ . Το σύστημα αυτό αποτελεί έναν παρατηρητή του (5.1) και η κατασκευή του στηρίζεται στην έννοια της παρατηρησιμότητας. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι η «έξοδος»  $y=Cx$  εκφράζει ότι η μέτρηση ολόκληρου του διανύσματος  $x(\bullet)$  κατάστασης δεν είναι εν γένει εφικτή για τον παρατηρητή ενός συστήματος, παρά μόνο ένα μέρος ή συνδυασμός των συνιστωσών της  $x(\bullet)$  είναι διαθέσιμο και αυτό ονομάζεται έξοδος.

### 5.1 ΟΡΙΣΜΟΙ – ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

#### Ορισμός 5.1:

Έστω δύο καταστάσεις  $x_1$  και  $x_2$  του συστήματος που περιγράφεται από τις (5.1) και (5.2). Το σύστημα αυτό είναι παρατηρήσιμο (observable) αν και μόνο αν η συνθήκη

$$y(t, x_1, u) = y(t, x_2, u), \quad \forall t \geq 0$$

συνεπάγεται

$$x_1 = x_2 \quad \text{με} \quad y(\cdot, x, u) = Cx(\cdot, x, u).$$

**Ορισμός 5.2:**

Το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις (5.1) και (5.2) ή από το ζευγάρι (C,A) λέγεται παρατηρήσιμο αν, για κάθε  $t_1 > 0$ , η αρχική κατάσταση  $x(0) = x_0$  μπορεί να προσδιοριστεί από οποιαδήποτε είσοδο  $u(t)$  και έξοδο  $y(t)$  στο χρονικό διάστημα  $[0, t_1]$ .

**Πρόταση 5.1:**

Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- I. Το (5.1) είναι παρατηρήσιμο.
- II. Το ζευγάρι (C,A) είναι παρατηρήσιμο.
- III.  $y(t, x_0) = Cx(t, x_0) = 0, \quad t \geq 0 \Rightarrow x_0 = 0$  όπου  $y(\cdot)$  η έξοδος του (5.1).
- IV. Ικανοποιείται η συνθήκη βαθμού παρατηρησιμότητας (observability rank condition):

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{5.3}$$

Ο πίνακας  $O_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$  ονομάζεται πίνακας παρατηρησιμότητας.

**Απόδειξη:**

(I)  $\Rightarrow$ (II)  $\Rightarrow$ (III) προφανείς. Εφόσον ισχύει η συνεπαγωγή (III), αλλά όχι η (IV), αυτό θα σήμαινε αυτομάτως ότι

$$x_0 \in \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

για κάποιο  $x_0 \neq 0$ . Συνδυάζοντας την εξίσωση (4.2) με το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε ότι  $CA^i x_0 = 0$  για κάθε  $i=0,1,2,\dots$  και επομένως ισχύει ότι  $Ce^{At} x_0 = 0$  για κάθε  $t$ . Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με τη συνεπαγωγή (III). Έτσι αποδεικνύεται ότι η (III)  $\Rightarrow$ (IV).

Τέλος απομένει να αποδειχθεί ότι η (IV)  $\Rightarrow$ (III). Θεωρούμε ότι ισχύει

$$y(\cdot, x_1, u) = y(\cdot, x_2, u) \quad \text{με} \quad x_1 \neq x_2$$

για κάποια είσοδο  $u$ . Με βάση αυτό συνεπάγεται ότι

$$Ce^{At}(x_1 - x_2) = 0$$

και συνεπώς οδηγούμαστε στην παρακάτω εξίσωση

$$0 \neq x_1 - x_2 \in \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Η προηγούμενη εξίσωση όμως είναι άτοπη λόγω του ισχυρισμού (IV). ▪

## 5.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι η έννοια της παρατηρησιμότητας και της ελεγχιμότητας είναι δυικές.

### Ορισμός 5.3:

Ορίζουμε ως Δυικό Σύστημα, του συστήματος (5.1) το σύστημα:

$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{x} = A'x + C'u \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

όπου ο πίνακας  $A' (= A^* = (\bar{A}^T))$  είναι ο πίνακας καταστάσεων του  $\Sigma'$  και ο  $C'$  δεν είναι πια πίνακας εξόδων αλλά πίνακας εισόδων του συστήματος  $\Sigma'$ .

Παρατηρούμε ότι με βάση τον ισχυρισμό (4) της Πρότασης 5.1 ισχύει:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}' = \text{rank}(C', A'C', \dots, (A')^{n-1}C')$$

έτσι έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

### Πρόταση 5.2:

Το ζευγάρι  $(C, A)$  είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν το ζευγάρι  $(A', C')$  είναι ελεγχίμο.

### Θεώρημα 5.1:

Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- I.  $(C, A)$  είναι παρατηρήσιμο.

- II. Ο πίνακας  $W_o(t) := \int_0^t e^{A^* \tau} C^* C e^{A \tau} d\tau$  είναι θετικά ορισμένος για κάθε  $t > 0$ .
- III. Ο πίνακας παρατηρησιμότητας

$$O_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

έχει μέγιστη τάξη ή  $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(CA^{i-1}) = 0$ .

**Απόδειξη:**

(I)  $\Leftrightarrow$  (III) Έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 5.1

(II)  $\Leftrightarrow$  (III) Αποδεικνύεται με αντίστοιχο τρόπο όπως στο Θεώρημα 2.2 ▪

**Πόρισμα 5.1:**

Θεωρούμε το σύστημα (5.1) με έξοδο (5.2). Στο σύστημα αυτό εφαρμόζουμε την γραμμική αλλαγή συντεταγμένων  $z = Px$ , με  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  αντιστρέψιμος. Αν το (5.1) είναι παρατηρήσιμο, τότε και μόνο τότε το σύστημα που προκύπτει από την αλλαγή συντεταγμένων, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= PAP^{-1}z + PBu \\ y &= CP^{-1}z \end{aligned}$$

έχει την ίδια ιδιότητα.

Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από την συνθήκη βαθμού παρατηρησιμότητας (Ισχυρισμός IV από την Πρόταση 5.1).

# Κεφάλαιο 6:

## Παρατηρητής Κατάστασης

Οι παρατηρητές κατάστασης είναι συστήματα τα οποία εισάγουμε στον χώρο των καταστάσεων και έχουν ως κύριο στόχο την εκτίμηση της κατάστασης ενός συστήματος μετά από σύντομο χρονικό διάστημα. Η λειτουργία τους βασίζεται στη χρήση των μετρήσιμων δεδομένων ενός συστήματος που δεν είναι άλλες από την είσοδο την οποία εμείς εισάγουμε στο σύστημα και την έξοδο που αυτό δίνει.

### 6.1 Ο ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ

Έστω ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα  $\Sigma$  μίας εισόδου και μίας εξόδου του οποίου η χρονική συμπεριφορά περιγράφεται από τις εξισώσεις του χώρου καταστάσεων:

$$\dot{x}=Ax+Bu \quad (6.1a)$$

$$y=Cx \quad (6.1b)$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Θεωρούμε ότι η έξοδος  $y(t)$  μπορεί να μετρηθεί για κάθε  $t \geq 0$ . Τέλος έστω ότι το διάνυσμα κατάστασης

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, t \geq 0$$

του  $\Sigma$  είναι άγνωστο (δηλαδή οι καταστάσεις  $x_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  δεν μπορούν όλες να μετρηθούν για κάθε  $t \geq 0$ ). Επιθυμούμε την κατασκευή ενός συστήματος το οποίο:

1. Έχει σαν εισόδους την είσοδο  $u(t)$  και την έξοδο  $y(t)$  του (6.1).
2. Έχει σαν έξοδο μια εκτίμηση  $z(t)$  του διανύσματος κατάστασης  $x(t)$  και
3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - x(t)) = 0$ .

Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  προσεγγίζεται από την κατάσταση  $z(t)$  του συστήματος:

$$\dot{z}(t) = Kz(t) + Ly(t) + Mu(t) \quad (6.2)$$

όπου  $z \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k, u \in \mathbb{R}^m$ .

Αναζητούμε μια τριάδα πινάκων  $K, L$  και  $M$ , με  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}, L \in \mathbb{R}^{n \times k}$  και  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  έτσι ώστε να ισχύει:

$$|x(t, x_0, u) - z(t, z_0, u)| \rightarrow 0 \text{ με } t \rightarrow \infty$$

για κάθε ζευγάρι αρχικών συνθηκών  $x_0, z_0$  και για κάθε είσοδο  $u$  και επιπλέον  $x(\bullet, x_0, u) = z(\bullet, z_0, u)$  αν  $x_0 = z_0$ , όπου  $z(\bullet)$  είναι η λύση του παρατηρητή (6.2).

Ορίζουμε το σφάλμα:

$$e(t) := x(t) - z(t)$$

Η σχεδίαση του παρατηρητή συνίσταται στον προσδιορισμό των πινάκων  $K, L$  και  $M$  έτσι ώστε το σφάλμα  $e$  να τείνει στο μηδέν όσο γίνεται πιο γρήγορα. Όπως ήδη αναφέραμε θέλουμε να ισχύει:

$$x_0 = z_0$$

επομένως

$$e(0) = x_0 - z_0 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{e}(0) = 0$$

$$\Rightarrow Ax_0 + Bu = Kz_0 + Ly + Mu$$

$$\Rightarrow Ax_0 + Bu = Kz_0 + LCx_0 + Mu$$

$$\Rightarrow (A - LC)x_0 + Bu = Kz_0 + Mu$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$K = A - LC, M = B \quad (6.3)$$

Ο παρατηρητής λοιπόν είναι ένα σύστημα που κατασκευάζεται με βάση τους πίνακες  $A, B, C$  του αρχικού συστήματος και ενός αυθαίρετου πίνακα  $L$ .

Ο πίνακας  $L$  μπορεί να επιλεγεί κατάλληλα έτσι ώστε  $e(t) \rightarrow 0$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Το σχεδιαστικό πρόβλημα του παρατηρητή κατάστασης είναι επομένως ο προσδιορισμός του κατάλληλου  $L$ , έτσι ώστε ο πίνακας  $K$  να έχει ιδιοτιμές  $\lambda_i$  με:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n$$

καθώς σε αυτή την περίπτωση:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

ισοδύναμα



$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - x(t)) = 0$$

Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα ότι αναζητούμε έναν πίνακα  $L$  τέτοιο ώστε ο  $K$  να είναι Hurwitz.

Το παραπάνω συμπέρασμα δημιουργεί την ανάγκη εισαγωγής μιας νέας έννοιας, της ανιχνευσιμότητας.

## 6.2 ANIXNEYSIMOTHTA (DETECTABILITY)

### Ορισμός 6.1:

Το σύστημα, ή το ζευγάρι  $(C, A)$ , είναι ανιχνεύσιμο, αν υπάρχει πίνακας  $L$  τέτοιος ώστε ο  $A-LC$  να είναι Hurwitz.

### Πρόταση 6.1:

Το σύστημα, ή το ζευγάρι  $(C, A)$ , είναι ανιχνεύσιμο, αν το ζευγάρι  $(A', C')$  είναι σταθεροποιήσιμο.

Στηριζόμενοι στον Ορισμό 6.1 και την Πρόταση 6.1 έχουμε για το σύστημα του παρατηρητή την παρακάτω Πρόταση:

### Πρόταση 6.2:

Έστω  $e(t)$  το σφάλμα μεταξύ της κατάστασης  $x(t)$  του συστήματος (6.1) και της κατάστασης  $z(t)$  του παρατηρητή. Αν το ζευγάρι  $(C, A)$  είναι ανιχνεύσιμο τότε υπάρχει πίνακας  $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$  έτσι ώστε η διαφορά  $e := x - z$  να τείνει στο μηδέν καθώς  $t \rightarrow \infty$ , όπου  $x = x(t, x_0, u)$  και  $z = z(t, z_0, u)$ . Επιπλέον  $e \equiv 0$  αν οι αρχικές συνθήκες  $x_0$  και  $z_0$  ταυτίζονται.

### **Απόδειξη:**

Λαμβάνοντας υπόψη τις (6.1), (6.2) και (6.3) υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{x} - \dot{z} &= (Ax + Bu) - ((A-LC)z + Ly + Bu) = Ax + Bu - (A-LC)z - Ly - Bu = \\ & Ax - Az + LCz - LCx = A[x-z] - LC[x-z] = Ae - LCe = (A-LC)e \end{aligned} \quad (6.4)$$

Για αυθαίρετη αρχική κατάσταση (δηλαδή για αυθαίρετο σφάλμα  $e_0$ )

$$e(0) = x(0) - z(0) = e_0 \neq 0$$

η λύση της (6.4) είναι η

$$e(t) = e^{(A-LC)t} e_0$$

Έστω ότι ο πίνακας A-LC έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  με

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i=1,2,\dots,n$$

τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

και άρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - x(t)) = 0$$

Εξακολουθεί να υφίσταται βέβαια το πρόβλημα της επιλογής του πίνακα  $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  έτσι ώστε ο πίνακας A-LC να έχει τις επιθυμητές ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  με αρνητικό πραγματικό μέρος. Γνωρίζουμε ότι το ζευγάρι (C,A) είναι ανιχνεύσιμο άρα ισοδύναμα το  $(A',C')$  είναι σταθεροποιήσιμο. Επομένως υπάρχει πίνακας F τέτοιος ώστε ο  $A'+C'F$  να είναι Hurwitz και ισοδύναμα  $A+F'C$  Hurwitz. Επομένως αν επιλέξουμε  $L=-F'$  τότε έχουμε για το σύστημα τις επιθυμητές ιδιότητες. ■

Οι επόμενες προτάσεις εδραιώνουν μερικές σημαντικές ιδιότητες της έννοιας της ανιχνευσιμότητας.

### **Θεώρημα 6.1:**

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- I. Ο (C,A) είναι detectable
- II. Ο πίνακας  $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$  έχει μέγιστη τάξη για κάθε  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ .
- III. Για κάθε  $\lambda$  και  $x$  τέτοια ώστε  $Ax = \lambda x$  και  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0, Cx \neq 0$ .
- IV. Υπάρχει πίνακας L τέτοιος ώστε ο A-LC να είναι Hurwitz.

### **Πρόταση 6.3:**

Το ζευγάρι (C,A) είναι detectable, αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

- I. Το (C,A) είναι παρατηρήσιμο.
- II. Το (C,A) δεν είναι παρατηρήσιμο, όμως για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με τις ιδιότητες:

$$\bar{C} = CP^{-1} = (C_1, 0)$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

το ζευγάρι  $(C_1, A_{11})$  είναι παρατηρήσιμο και ο πίνακας  $A_{22}$  είναι Hurwitz.

**Πρόταση 6.4:**

Έστω  $P, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ . Αν ο πίνακας  $P$  είναι θετικά ημιορισμένος, το ζευγάρι  $(C, A)$  είναι detectable και ικανοποιείται η Lyapunov ισότητα πινάκων:

$$A'P + PA = -C'C \quad (6.5)$$

τότε ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz.

**Απόδειξη:**

Γνωρίζουμε ότι μια λύση της (6.5) δίνεται από τη σχέση:

$$P = e^{A't} P e^{At} + \int_0^t e^{A't} C' C e^{Ar} dr, \quad t \geq 0 \quad (6.6)$$

Θεωρούμε ότι:

$$W(t) = \int_0^t e^{A't} C' C e^{Ar} dr, \quad t \geq 0$$

και λόγω της (6.6) έχουμε ότι:

$$W(t) \leq P, \quad \forall t \geq 0$$

άρα η απεικόνιση  $W(\bullet)$  είναι φραγμένη στο  $\mathbb{R}^+$  και συνεπώς ο  $A$  είναι Hurwitz. ■

**Λήμμα 6.1:**

Έστω  $C \in \mathbb{R}^{k \times n}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και το ζευγάρι  $(C, A)$  είναι detectable. Τότε οι επόμενοι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- I. Ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz.
- II. Η απεικόνιση  $\mathbb{R}^+ \ni t \rightarrow W(t) := \int_0^t e^{A't} C' C e^{Ar} dr$  είναι φραγμένη.

**Απόδειξη:**

Έστω ότι το ζευγάρι  $(C, A)$  είναι detectable αλλά δεν είναι παρατηρήσιμο. Από το Πρόταση 6.3 υπάρχει αλλαγή συντεταγμένων έτσι ώστε στις καινούργιες συντεταγμένες να γράφεται:

$$\bar{C} = (C_1, 0)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

με  $(C_1, A_{11})$  παρατηρήσιμο και  $A_{22}$  Hurwitz.

(II)⇒(I)

Παρατηρούμε πρώτα ότι στις καινούργιες συντατεγμένες ο πίνακας  $\bar{W}(\bullet)$  γράφεται:

$$\bar{W}(t) = \int_0^t e^{\bar{A}'r} \bar{C}' \bar{C} e^{Ar} dr = \int_0^t e^{A'_{11}t} C'_1 C_1 e^{A_{11}r} dr \quad (6.7)$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 6.4 είναι φραγμένος στον  $\mathbb{R}^+$ . Θεωρούμε ότι ο πίνακας  $A_{11}$  δεν είναι Hurwitz επομένως θα έχει μια ιδιοτιμή  $\lambda$  για την οποία θα ισχύει  $\text{Re}\lambda > 0$ . Έστω  $x \neq 0$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} e^{A_{11}t} x &= (x + tA_{11}x + \frac{t^2}{2!} A_{11}^2 x + \dots) \\ &= (1 + \lambda t + \lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \lambda^n \frac{t^n}{n!} + \dots) x = e^{\lambda t} x \end{aligned} \quad (6.8)$$

Από τις σχέσεις (6.7) και (6.8) προκύπτει ότι:

$$x^* \bar{W}(t) x = \left\{ \int_0^t e^{2r \text{Re}\lambda} dr \right\} |C_1 x|^2 \quad (6.9)$$

όπου  $x^*$  το ανάστροφο του συζυγούς του διανύσματος  $x$ . Επειδή ο πίνακας  $\bar{W}(t)$  είναι φραγμένος στο  $\mathbb{R}^+$ , η (6.9) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι  $\text{Re}\lambda > 0$  συνεπάγονται ότι:

$$C_1 x = 0 \quad (6.10)$$

και επειδή  $A_{11}x = \lambda x$ , προκύπτει από την (6.10) ότι

$$0 \neq x \in \ker \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 A_{11} \\ \vdots \\ C_1 A_{11}^{n-1} \end{pmatrix}$$

άτοπο, γιατί το  $(C_1, A_{11})$  είναι παρατηρήσιμο.

(I) ⇒(II)

Έστω ότι ο  $A$  είναι Hurwitz. Τότε έχουμε ότι:

$$|e^{At}| \leq K e^{-lt}$$

για κάθε  $t \geq 0$  και κάποιες σταθερές  $K, l > 0$ . Με αντικατάσταση στην (6.6) προκύπτει ότι :

$$\bar{W}(t) \leq K^2 |C|^2 \int_0^t e^{-lr} dr$$

και άρα ο  $\bar{W}(\bullet)$  είναι φραγμένος στον  $\mathbb{R}^+$ . ■

Οι ισχυρισμοί του Λήμματος 6.1 παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από γραμμική αλλαγή συντεταγμένων. Πράγματι, αν ο  $A$  είναι Hurwitz τότε και κάθε πίνακας της

μορφής  $PAP^{-1}$  με  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  αντιστρέψιμο είναι επίσης Hurwitz. Έστω η αλλαγή συντεταγμένων  $z=Px$  τότε έχουμε:

$$(\bar{C}, \bar{A}) := (CP^{-1}, PAP^{-1})$$

Ο αντίστοιχος πίνακας  $\bar{W}(\bullet)$  γράφεται:

$$\bar{W}(t) = \int_0^t e^{\bar{A}'r} \bar{C}' \bar{C} e^{\bar{A}r} dr$$

Όμως  $e^{PAP^{-1}t} = Pe^{At}P^{-1}$  οπότε έχουμε:

$$\bar{W}(t) = P'W(t)P$$

Άρα ο  $W(\bullet)$  είναι φραγμένος, αν και μόνο αν ο  $\bar{W}(\bullet)$  έχει την ίδια ιδιότητα.

Ένα ιδιαίτερος ενδιαφέρον αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

**Πόρισμα 6.1:**

Το ζευγάρι  $(C,A)$  είναι ανιχνεύσιμο, αν και μόνο αν έχουμε ότι για κάθε λύση  $x(\bullet)$  του  $\dot{x} = Ax$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$Cx(t) \rightarrow 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty \quad (6.11)$$

**Απόδειξη:**

Έστω ότι το  $(C,A)$  είναι ανιχνεύσιμο. Αυτό συνεπάγεται ότι το σύστημα

$$\dot{z} = (A-LC)z + Ly$$

είναι ένας παρατηρητής για το σύστημα

$$\dot{x} = Ax, y = Cx$$

επομένως ισχύει:

$$|x(t) - z(t)| \rightarrow 0 \text{ με } t \rightarrow \infty, \forall x(0), z(0) \in \mathbb{R}^n \quad (6.12)$$

Έστω έξοδος  $y=Cx(t) \rightarrow 0$ . Επειδή  $A-LC$  είναι Hurwitz έπεται πως

$$z(t) \rightarrow 0 \text{ με } t \rightarrow \infty \quad (6.13).$$

Οι (6.12) και (6.13) συνεπάγονται ότι  $x(t) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Για να δείξουμε το αντίστροφο θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το σύστημα θα έχει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

με  $y = (c_1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 x_1$ . Εύκολα δείχνεται ότι η συνεπαγωγή (6.11) παραμένει αναλλοίωτη μέσω αλλαγής συντεταγμένων. Θεωρούμε επομένως ως δεδομένο ότι ισχύει η συνεπαγωγή:

$$Cx(t) = c_1 x_1(t) \rightarrow 0 \Rightarrow x_1(t) \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty \text{ και } x_2(t) \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty$$

Με  $x_1(t) = 0$  το «κάτω» υποσύστημα γράφεται:

$$\dot{x}_2 = A_{12}x_1 + A_{22}x_2 \text{ με } x_1(t) = 0$$

άρα ο πίνακας  $A_{22}$  είναι Hurwitz και επομένως το ζευγάρι  $(C, A)$  είναι ανιχνεύσιμο. ▀

# Κεφάλαιο 7:

## Πραγματοποίηση για Συστήματα

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πρακτικά πιο εύκολο να περιγράφεται ένα δυναμικό σύστημα με όρους πινάκων μεταφοράς. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, σε ορισμένα εξαιρετικά πολύπλοκα συστήματα για τα οποία οι αναλυτικές διαφορικές εξισώσεις είναι πολύ δύσκολες ή πολύπλοκες για να γραφτούν. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε το  $H(s) = \frac{\mathcal{L}y}{\mathcal{L}u}$ , όπου  $y$  έξοδος και  $u$  η αντίστοιχη είσοδος, ο οποίος είναι κατάλληλος ρητός πίνακας μεταφοράς και αναζητούμε ένα σύστημα το οποίο να αποτελεί μια υλοποίηση του  $H(s)$ .

### 7.1 ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ SISO ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7.1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (7.1.2)$$

με  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^k$ , η συνάρτηση

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (7.1.3)$$

ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του (7.1.1), (7.1.2). Έστω  $Y = \mathcal{L}\{y\}$  και  $U = \mathcal{L}\{u\}$  οι μετασχηματισμένες κατά Laplace της εξόδου και της εισόδου αντίστοιχα τότε θα ισχύει:

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Γνωρίζουμε ότι  $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$  οπότε η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(s) = \mathcal{L}\{Ce^{At}B\} \quad (7.1.4)$$

Ειδικά για συστήματα μιας εισόδου-εξόδου της μορφής:

$$\dot{x} = Ax + ub \quad (7.1.5)$$

$$y=cx \quad (7.1.6)$$

με  $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , η (7.1.4) γράφεται:

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}\{ce^{At}b\} = c \mathcal{L}\{e^{At}\}b \\ &= \mathcal{L}\{c(I+At+A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots)b\} \\ &= c(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}\{\frac{t^i}{i!}\}A^i)b = \sum_{i=1}^{\infty} (cA^{i-1}b) s^{-i} \end{aligned}$$

Επομένως

$$H(s) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i s^{-i}, \text{ με } h_i := cA^{i-1}b \quad (7.1.7)$$

όπου οι συντελεστές  $h_i$  ονομάζονται παράμετροι Markov.

Είναι γνωστό ότι:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

έτσι η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται:

$$\begin{aligned} H(s) &= c \frac{\text{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} b \\ \Leftrightarrow H(s) &= \frac{b(s)}{a(s)} \end{aligned} \quad (7.1.7a)$$

με  $b(s) := c \text{adj}(sI-A)b$ ,  $a(s) := \det(sI-A)$ , όπου το πολυώνυμο  $a(\bullet)$  είναι ακριβώς  $n$ -βαθμού, ενώ το  $b(\bullet)$  βαθμού το πολύ  $n-1$ , όπου  $n$  είναι η διάσταση του χώρου καταστάσεων. Η συνάρτηση μεταφοράς επομένως του (7.1.5), (7.1.6) είναι μια γνησίως ρητή συνάρτηση με:

$$\text{deg}b < \text{deg}a.$$

### **Πρόταση 7.1.1:**

Μια πραγματοποίηση  $(A,b,c)$  για το σύστημα (7.1.5),(7.1.6) της συνάρτησης μεταφοράς  $H(s)$  στην (7.1.7a) με του πίνακες  $A$ ,  $b$  στην κανονική μορφή ελεγχιμότητας δίνεται από την τριάδα πινάκων

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c := [b_{n-1} \quad \dots \quad b_1 \quad b_0] \quad (7.1.8)$$



### Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι για τον χαρακτηριστικό πίνακα:

$$sI-A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & s + \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

ισχύει η ταυτότητα:

$$(sI-A) \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & s + \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.1.9)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a(s) \end{bmatrix} = ba(s)$$

η οποία γράφεται ως

$$(sI-A)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \frac{1}{a(s)} \quad (7.1.10)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με  $c$  παίρνουμε

$$c (sI-A)^{-1}b = [b_{n-1} \quad \dots \quad b_1 \quad b_0] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \frac{1}{a(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

δηλαδή

$$c (sI-A)^{-1}b = H(s)$$

και άρα οι πίνακες (7.1.8) αποτελούν μια πραγματοποίηση της  $H(s)$  διότι το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (7.1.11)$$

$$y(t) = cx(t)$$

έχει συνάρτηση μεταφοράς την  $H(s)$ .

Αντίστροφα, με δεδομένη μια ρητή συνάρτηση  $H(s)$  θα κατασκευάσουμε ένα σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς θα ισούται με την  $H(s)$ .

Έστω ότι μας δίνεται μια γνησίως ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$H(s) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i / (s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i) \quad (7.1.12)$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου  $b_0=1, b_i=0, i=1, \dots, n-1$ , δηλαδή

$$H_1(s) = 1 / (s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i) \quad (7.1.13)$$

Γνωρίζουμε ότι οι μετασχηματισμένες κατά Laplace,  $Y(\bullet)$  και  $U(\bullet)$  της εξόδου και εισόδου αντίστοιχα του ζητούμενου συστήματος ικανοποιούν τη σχέση:

$$Y(s) = H_1(s)U(s)$$

Ισοδύναμα:

$$Y(s) = [1 / (s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i)] U(s)$$

$$\Leftrightarrow (s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i) Y(s) = U(s)$$

$$\Leftrightarrow s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = U(s)$$

Άρα έχουμε ότι:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u(t) \quad (7.1.14)$$

Επομένως, θέτοντας  $x_1=y, x_2=y^{(1)}, \dots, x_n=y^{(n-1)}$  στην (7.1.14) προκύπτει το ζητούμενο σύστημα (7.1.5), (7.1.6) όπου:

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{c} := [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (7.1.15)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την γενική περίπτωση (7.1.12) χρησιμοποιώντας την προηγούμενη περίπτωση. Όπως και πριν ισχύει:

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

όμως  $H(s) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i H_1(s)$  και χρησιμοποιώντας την (7.1.14) καταλήγουμε ότι:

$$y(t) = b_{n-1} x_n + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η ζητούμενη πραγματοποίηση είναι της μορφής:

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{c} := [b_{n-1} \quad \dots \quad b_1 \quad b_0]$$

Η παραπάνω πραγματοποίηση είναι τάξης  $n$ , δηλαδή ίση με τη διάσταση του χώρου των καταστάσεων και το ζευγάρι  $(A, b)$  είναι η κανονική ελέγξιμη μορφή. ■

## 7.2 ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ ΜΙΜΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ο πιο απλός τρόπος για να επιτύχουμε μια πραγματοποίηση είναι με την πραγματοποίηση κάθε στοιχείου του πίνακα  $H(s)$  και μετά το συνδυασμό όλων αυτών των επιμέρους πραγματοποιήσεων για το σχηματισμό μίας πραγματοποίησης για  $H(s)$ . Παίρνουμε την κάθε στήλη του  $H(s)$  ξεχωριστά. Αν οι  $[A_i, B_i, C_i, D_i]$  περιγράφουν τον χώρο καταστάσεων που συνδέεται με την  $i$  στήλη του  $H(s)$ , που συμβολίζεται με  $H_i(s)$ , τότε ο  $H(s)$  περιγράφεται από τις:

$$[\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n), [B_1, B_2, \dots, B_n], [C_1, C_2, \dots, C_n], [D_1, D_2, \dots, D_n]]$$

όπου  $\text{diag}(A_1, A_2) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$  κ.ο.κ.

Η είσοδος αυτού του συστήματος είναι το διάνυσμα  $[u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ .

Έστω ότι έχουμε έναν  $2 \times 2$  πίνακα μεταφοράς

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) & H_2(s) \\ H_3(s) & H_4(s) \end{bmatrix}$$

και ας υποθέσουμε ότι ο  $H_i(s)$  έχει μια πραγματοποίηση

$$H_i(s) = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, i=1, \dots, 4$$

να σημειωθεί ότι ο  $H_i(s)$  μπορεί να είναι και ο ίδιος ένας πολλών εισόδων και εξόδων

πίνακας μεταφοράς. Η πραγματοποίηση για  $H(s)$  μπορεί να δοθεί από

$$H(s) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & B_4 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}$$

### Ορισμός 7.2.1:

Δεδομένου ενός πίνακα

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \dots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \dots & H_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{p1}(s) & H_{p2}(s) & \dots & H_{pm}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}^{pxm}(s)$$

κανονικών ρητών συναρτήσεων  $H_{ij}(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ ,  $i=1,2,\dots,p$ ,  $j=1,2,\dots,m$  διαστάσεων  $pxm$ , μια τετράδα πινάκων ( $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{nxm}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{pxn}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{pxm}$ ) ονομάζεται πραγματοποίηση του  $H(s)$ , αν το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα  $\Sigma$  του χώρου καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7.2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7.2.2)$$

έχει ως πίνακα συνάρτησης μεταφοράς τον πίνακα  $H(s)$ , αν δηλαδή  $C(sI-A)^{-1}B + D = H(s)$ .

# Κεφάλαιο 8:

## Ελάχιστη Πραγματοποίηση

### 8.1 ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ SISO ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

**Ορισμός 8.1.1:**

Δίνεται μια γνησίως ρητή συνάρτηση  $H(\bullet)$  με βαθμό παρανομαστή ίσο με  $n$ . Λέμε ότι το σύστημα

$$\dot{x}=Ax+ub, \quad y=cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R} \quad (8.1.1)$$

είναι μια ελάχιστη πραγματοποίηση της  $H(\bullet)$  όταν ο ακέραιος  $\bar{n}$  είναι μικρότερος ή ίσος από τη διάσταση των καταστάσεων κάθε άλλης δυνατής πραγματοποίησης της  $H(\bullet)$ .

**Ορισμός 8.1.2:**

Ο συμμετρικός πίνακας

$$H_m := \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \dots & h_{2m-1} \end{pmatrix} \quad (m=1,2,\dots)$$

όπου  $h_i$  οι παράμετροι Markov, ονομάζεται πίνακας Hankel του συστήματος (7.1.5), (7.1.6) τάξεως  $m$ .

Γνωρίζουμε ότι οι παράμετροι Markov δίνονται απο τη σχέση:

$$h_i = cA^{i-1}b$$

και με απλή αντικατάσταση ο πίνακας Hankel γράφεται:

$$\begin{aligned} H_m &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \dots & h_{2m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb & cAb & \dots & cA^{m-1}b \\ cAb & cA^2b & \dots & cA^m b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA^{m-1}b & cA^m b & \dots & cA^{2m-2}b \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{m-1} \end{pmatrix} (b \quad Ab \quad \dots \quad A^{m-1}b) = O_m C_m \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο πίνακας Hankel δίνεται από το γινόμενο των πινάκων παρατηρησιμότητας και ελεγχιμότητας του συστήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (7.1.5) και (7.1.6).

**Λήμμα 8.1.1:**

Αν έχουμε δύο ισοδύναμα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  τότε η συνάρτηση μεταφοράς καθώς και ο πίνακας Hankel, παραμένουν ίδια.

**Απόδειξη:**

Έστω το σύστημα της μορφής (8.1.1). Θεωρούμε το ισοδύναμο σύστημα με την αλλαγή συντεταγμένων  $z=Px$  με  $\det P \neq 0$ . Στις νέες συντεταγμένες το σύστημα (8.1.1) γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{z} &= PAP^{-1}z + uPb \\ y &= cP^{-1}z \end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς έχουμε:

$$H'(s) = (cP^{-1})(sI - PAP^{-1})(Pb) = c[P(sI - PAP^{-1})P^{-1}]^{-1}b = c(sI - A)^{-1}b = H(s)$$

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε για τους πίνακες Hankel:

$$\begin{aligned} H'_m &= \begin{pmatrix} c' \\ c'A' \\ \vdots \\ c'A'^{m-1} \end{pmatrix} (b' \quad A'b' \quad \dots \quad A'^{m-1}b') \\ &= \begin{pmatrix} cP^{-1} \\ cP^{-1}PAP^{-1} \\ \vdots \\ cP^{-1}PA^{m-1}P^{-1} \end{pmatrix} (Pb \quad PAP^{-1}Pb \quad \dots \quad PA^{m-1}P^{-1}Pb) \\ &= \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{m-1} \end{pmatrix} (b \quad Ab \quad \dots \quad A^{m-1}b) = H_m \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Θεώρημα 8.1.1:**

Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

- I. Η πραγματοποίηση (A,b,c) είναι ελάχιστη.
- II. Η συνάρτηση μεταφοράς  $c(sI - A)^{-1}b$  της (A,b,c) είναι ανάγωγη.
- III. Το ζευγάρι (A,b) είναι ελέγξιμο και το (c,A) παρατηρήσιμο.

### Απόδειξη:

(I) $\Rightarrow$ (II)

Έστω ότι η πραγματοποίηση (A,b,c) είναι ελάχιστη ενώ η συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι ανάγωγη. Αυτό σημαίνει ότι η H(s) με απλοποίηση γράφεται:

$$H(s)=b(s)/a(s)=\hat{b}(s)/\hat{a}(s)$$

με  $\deg \hat{a} < \deg a$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μπορούμε να πετύχουμε πραγματοποίηση της  $\hat{b}/\hat{a}$  με διάσταση ίση με  $\deg \hat{a}$ . Όμως η διάσταση του  $\hat{a}$  είναι μικρότερη από την διάσταση του χώρου καταστάσεων της (A,b,c), που σημαίνει ότι η (A, b, c) δεν είναι ελάχιστη το οποίο είναι άτοπο λόγω υπόθεσης.

(II) $\Rightarrow$ (I)

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι ανάγωγη και δίνεται απο τη σχέση :

$$H(s)=b(s)/a(s)$$

με  $\deg a = n$ , αλλά η πραγματοποίηση (A,b,c) δεν είναι ελάχιστη. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ελάχιστη πραγματοποίηση  $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$  με διάσταση  $\bar{n} < n$  ( $\deg \hat{a} = \bar{n}$ ). Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(s)=b(s)/a(s)=\hat{b}(s)/\hat{a}(s)$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η H(s) είναι ανάγωγη δηλαδή τα b(s) και a(s) είναι πρώτα μεταξύ τους.

(III) $\Rightarrow$ (I)

Έστω το ελέγξιμο και παρατηρήσιμο σύστημα

$$\dot{x}=Ax+ub, \quad y=cx \quad (8.1.2)$$

$$x \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \text{ με } \bar{n} \leq n$$

για το οποίο έχουμε ότι η τριάδα (A, b, c) αποτελεί μια πραγματοποίηση της:

$$H(s)=\sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i / (s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i)$$

η οποία δεν είναι ελάχιστη.

Οι πίνακες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας δίνονται απο τις σχέσεις:

$$C_{(A,b)} := (b, Ab, \dots, A^{\bar{n}-1}b) \quad (8.1.3a)$$

$$O_{(c,A)} := \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{\bar{n}-1} \end{pmatrix} \quad (8.1.3b)$$

και έχουν έχουν τάξη  $\bar{n}$ . Ο πίνακα Hankel του συστήματος (8.1.2) δίνεται απο την σχέση:

$$H_{\bar{n}-1} = \begin{pmatrix} cb & cAb & \dots & cA^{\bar{n}-1}b \\ cAb & cA^2b & \dots & cA^{\bar{n}}b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA^{\bar{n}-1}b & cA^{\bar{n}}b & \dots & cA^{2\bar{n}-2}b \end{pmatrix}$$

και είναι τάξης  $\bar{n} - 1$ .

Θα υπάρξει πραγματοποίηση  $(A_1, b_1, c_1)$  τάξεως  $n_1 < \bar{n}$  της ίδιας συνάρτησης μεταφοράς η οποία θα είναι ελάχιστη. Ο πίνακας  $H_{\bar{n}-1}$  θα είναι ίδιος και για τις δυο πραγματοποιήσεις γιατί τα στοιχεία του αποτελούν τις πρώτες  $2\bar{n} - 2$  παράμετρος Markov της ίδιας συνάρτησης μεταφοράς. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{pmatrix} cb & cAb & \dots & cA^{\bar{n}-1}b \\ cAb & cA^2b & \dots & cA^{\bar{n}}b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA^{\bar{n}-1}b & cA^{\bar{n}}b & \dots & cA^{2\bar{n}-2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1b_1 & c_1A_1b_1 & \dots & c_1A_1^{\bar{n}-1}b_1 \\ c_1A_1b_1 & c_1A_1^2b_1 & \dots & c_1A_1^{\bar{n}}b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1A_1^{\bar{n}-1}b_1 & c_1A_1^{\bar{n}}b_1 & \dots & c_1A_1^{2\bar{n}-2}b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{\bar{n}-1} \end{pmatrix} (b, Ab, \dots, A^{\bar{n}-1}b) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1A_1 \\ \vdots \\ c_1A_1^{\bar{n}-1} \end{pmatrix} (b_1, A_1b_1, \dots, A_1^{\bar{n}-1}b_1)$$

και επομένως

$$O_{(c,A)}C_{(A,b)} = O_{(c_1,A_1)}C_{(A_1,b_1)} \quad (8.1.4)$$

Όμως έχουμε ότι  $\text{rank} O_{(c,A)}C_{(A,b)} = \bar{n}$  και  $\text{rank} O_{(c_1,A_1)}C_{(A_1,b_1)} \leq n_1$ , το οποίο αντιβαίνει την ισότητα (8.1.4).

(I)  $\Rightarrow$  (III)

Έστω  $(A,b,c)$  ελάχιστη πραγματοποίηση τάξεως  $n$  της  $H(s) = b(s)/a(s)$  και έστω ότι το  $(A, b)$  δεν είναι ελέγξιμο. Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς μένει αναλλοίωτη, αντί του αρχικού συστήματος θεωρούμε, εφαρμόζοντας την αλλαγή συντεταγμένων  $z = Px$ , με  $\det P \neq 0$ , το σύστημα:

$$\dot{z} = \bar{A}z + u\bar{b}, \quad y = \bar{c}z \quad (8.1.5)$$

με



$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{c} = (c_1 \quad c_2)$$

όπου  $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, A_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, A_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, b_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}, c_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}, c_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}, n_1 + n_2 = n$  και το ζευγάρι  $(A_1, b_1)$  είναι ελέγξιμο με  $\text{rank} C_{(A_1, b_1)} = n_1$ .

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = (c_1 \quad c_2) \begin{pmatrix} sI - A_1 & -A_2 \\ 0 & sI - A_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$(c_1 \quad c_2) \begin{pmatrix} (sI - A_1)^{-1} & * \\ 0 & (sI - A_3)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 (sI - A_1)^{-1} b_1$$

απο την οποία προκύπτει πως η τριάδα  $(A_1, b_1, c_1)$  είναι επίσης μια πραγματοποίηση της  $H(s)$  τάξεως  $n_1$  με  $n_1 < n$ . Όμως αυτό είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η πραγματοποίηση  $(A, b, c)$  είναι ελάχιστη, αρα το  $(A, b)$  είναι ελέγξιμο.

Έστω τώρα ότι το  $(c, A)$  δεν είναι παρατηρήσιμο. Τότε υπάρχει αλλαγή συντεταγμένων τέτοια ώστε το σύστημα να παίρνει την ισοδύναμη μορφή (8.1.5) με

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \bar{c} = (c_1 \quad 0)$$

όπου  $(c_1, A_1)$  παρατηρήσιμο με  $\text{rank} O_{(c_1, A_1)} = n_1 < n$ . Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς:

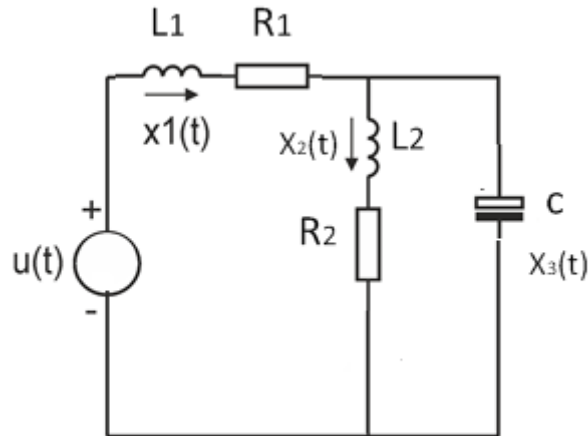
$$H(s) = (c_1 \quad 0) \begin{pmatrix} sI - A_1 & 0 \\ -A_2 & sI - A_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$(c_1 \quad 0) \begin{pmatrix} (sI - A_1)^{-1} & 0 \\ * & (sI - A_3)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = c_1 (sI - A_1)^{-1} b_1$$

η οποία σημαίνει πως η τριάδα  $(A_1, b_1, c_1)$  είναι επίσης μια πραγματοποίηση της  $H(s)$  αλλά τάξεως  $n_1 < n$ , άτοπο. Άρα το  $(c, A)$  είναι παρατηρήσιμο. ■

### 8.1.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ SISO ΣΥΣΤΗΜΑ

Έστω το κύκλωμα του σχήματος το οποίο αποτελείται από τις αυτεπαγωγές  $L_1, L_2$  οι οποίες διαρρέονται από ρεύμα έντασης  $x_1, x_2$  αντίστοιχα, το πηνίο  $C$  στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται τάση  $x_3$ , τις αντιστάσεις  $R_1, R_2$  και την πηγή  $u$ .



Σχήμα 8.1

Το κύκλωμα, μετά από εφαρμογή των νόμων του Kirchoff, περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα:

$$u - L_1 \dot{x}_1 - R_1 x_1 - L_2 \dot{x}_2 - R_2 x_2 = 0$$

$$u - R_1 x_1 - L_1 \dot{x}_1 - x_3 = 0$$

$$C \dot{x}_3 = x_1 - x_2$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\text{με } A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το (A,b) είναι ελέγξιμο αφού:

$$\det[b \quad Ab \quad A^2b] = -\frac{1}{c^2 L_1^3 L_2} \neq 0.$$

Θεωρούμε τώρα ως έξοδο

$$y = [0 \quad 0 \quad 1]x$$

δηλαδή την τάση στα άκρα του πυκνωτή. Θα εξετάσουμε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο για την έξοδο αυτή. Έχουμε ότι:

$$\det \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \frac{R_2}{L_2} - \frac{R_1}{L_1}.$$

Αν  $\frac{R_2}{L_2} - \frac{R_1}{L_1} \neq 0$  τότε το σύστημα είναι παρατηρήσιμο, στην αντίθετη περίπτωση όχι.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$  δίνεται από τη σχέση:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

όπου  $b(s) := \text{cadj}(sI-A)b$  και  $a(s) := \det(sI-A)$ .

Είναι:

$$a(s) = \det(sI-A)$$

$$= \det \begin{bmatrix} s + \frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s + \frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{c} & +\frac{1}{c} & s \end{bmatrix}$$

$$= s^3 + s^2 \left( \frac{R_2}{L_2} + \frac{R_1}{L_1} \right) + s \left( \frac{1}{cL_2} + \frac{R_2 R_1}{L_2 L_1} + \frac{1}{cL_1} \right) + \frac{R_1}{cL_1 L_2} + \frac{R_2}{L_1 L_2}$$

και

$$b(s) = \text{cadj}(sI-A)b$$

$$= [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + \frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s + \frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{c} & +\frac{1}{c} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{L_1} \left( -\frac{s}{L_1} - \frac{R_2}{L_1 L_2} \right)$$

και η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{L_1} \left( -\frac{s}{L_1} - \frac{R_2}{L_1 L_2} \right)}{s^3 + s^2 \left( \frac{R_2}{L_2} + \frac{R_1}{L_1} \right) + s \left( \frac{1}{cL_2} + \frac{R_2 R_1}{L_2 L_1} + \frac{1}{cL_1} \right) + \frac{R_1}{cL_1 L_2} + \frac{R_2}{L_1 L_2}}$$

με  $\text{deg}b < \text{deg}a$  και  $\text{deg}a = 3$  όσο δηλαδή και η διάσταση του χώρου καταστάσεων. Για να είναι η συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$  ανάγωγη πρέπει:

$$L_1 R_1 + cL_1 R_2 - L_1 R_2 - \frac{R_2 L_1^2}{L_2} \neq 0.$$

Στην περίπτωση που ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{R_2}{L_2} - \frac{R_1}{L_1} \neq 0$$

και

$$L_1 R_1 + C L_1 R_2 - L_1 R_2 - \frac{R_2 L_1^2}{L_2} \neq 0$$

τότε η τριάδα (A, b, c) είναι μια ελάχιστη πραγματοποίηση της H(s).

Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε ότι:

$$\frac{R_2}{L_2} - \frac{R_1}{L_1} = 0$$

και

$$L_1 R_1 + C L_1 R_2 - L_1 R_2 - \frac{R_2 L_1^2}{L_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow C L_2 R_1 - L_2 R_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow L_2 R_1 (C - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 1$$

Με απλοποίηση παίρνουμε:

$$H(s) = \frac{-1}{-s^2 L_1^2 - s R_1 L_1 - \frac{L_1^2 + L_1 L_2}{L_2}}$$

και βλέπουμε ότι η H(s) είναι ανάγωγη.

Έτσι έχουμε ότι οι πίνακες:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{L_1^2 + L_1 L_2}{L_2} & R_1 L_1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \bar{c} = [0 \quad 1]$$

αποτελούν μια ελάχιστη πραγματοποίηση της H(s).

Τέλος εύκολα διαπιστώνουμε ότι  $(\bar{A}, \bar{b})$  ελέγξιμο και  $(\bar{c}, \bar{A})$  παρατηρήσιμο αφού:

$$\det[\bar{b} \quad \bar{A}\bar{b}] = -1 \neq 0$$

και

$$\det \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}\bar{A} \end{bmatrix} = -\frac{L_1^2 + L_1 L_2}{L_2} \neq 0 .$$

## 8.2. ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ ΜΙΜΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

### Ορισμός 8.2.1:

Μια πραγματοποίηση του χώρου καταστάσεων (A,B,C,D) του H(s) λέγεται ότι είναι μια ελάχιστη πραγματοποίηση του H(s) αν ο A έχει τη μικρότερη δυνατή διάσταση.

Όπως και στην περίπτωση των συστημάτων μίας εισόδου και μίας εξόδου έτσι και εδώ έχουμε:

**Θεώρημα 8.2.1:**

Μια πραγματοποίηση του χώρου καταστάσεων  $(A,B,C,D)$  του  $H(s)$  είναι ελάχιστη αν και μόνο αν  $(A,B)$  είναι ελέγξιμο και  $(C,A)$  είναι παρατηρήσιμο.

**Απόδειξη:**

Θα δείξουμε πρώτα ότι αν  $(A,B,C,D)$  είναι μια ελάχιστη πραγματοποίηση του  $H(s)$ , τότε  $(A,B)$  πρέπει να είναι ελέγξιμο και  $(C,A)$  πρέπει να είναι παρατηρήσιμο. Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι  $(A,B)$  δεν είναι ελέγξιμο και  $(C,A)$  δεν είναι παρατηρήσιμο. Τότε από την ανάλυση Kalman, υπάρχει μια μικρότερης διάστασης πραγματοποίηση του χώρου καταστάσεων η οποία είναι ελέγξιμη και παρατηρήσιμη και η οποία έχει τον ίδιο πίνακα μεταφοράς; αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ελαχιστοποίησης. Ως εκ τούτου,  $(A,B)$  πρέπει να είναι ελέγξιμο και  $(C,A)$  πρέπει να είναι παρατηρήσιμο.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αν μια  $n$ -οστής τάξης πραγματοποίηση του  $(A,B,C,D)$  είναι ελέγξιμη και παρατηρήσιμη, τότε είναι και ελάχιστη. Έστω ότι δεν είναι ελάχιστη και έστω  $(A_m, B_m, C_m, D)$  η ελάχιστη πραγματοποίηση του  $H(s)$  με τάξη  $k < n$ . Από τη σχέση:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m + D$$

έχουμε

$$CA^iB = C_m A_m^i B_m, \forall i \geq 0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$OC = O_m C_m \tag{8.2.1}$$

όπου  $C$  και  $O$  οι πίνακες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας των  $(A,B)$  και  $(C,A)$ , αντίστοιχα και :

$$C_m := [B_m \quad A_m B_m \quad \dots \quad A_m^{n-1} B_m]$$

$$O_m := \begin{bmatrix} C_m \\ C_m A_m \\ \vdots \\ C_m A_m^{n-1} \end{bmatrix}$$

Από την ανισότητα του Sylvester έχουμε

$$\text{rank } C + \text{rank } O - n \leq \text{rank}(O C) \leq \min(\text{rank } C, \text{rank } O),$$

και, ως εκ τούτου, έχουμε  $\text{rank}(O C) = n$  αφού  $\text{rank } C = \text{rank } O = n$  από τις υποθέσεις ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας. Ομοίως, δεδομένου ότι  $(A_m, B_m, C_m, D)$  ελάχιστο, έχουμε ότι  $(A_m, B_m)$  ελέγξιμο και  $(C_m, A_m)$  παρατηρήσιμο. Επιπλέον,

$$\text{rank } O_m C_m = k < n,$$

το οποίο είναι άτοπο δεδομένου ότι  $\text{rank } O C = \text{rank } O_m C_m$  από την ισότητα (8.2.1). ▀

### **Θεώρημα 8.2.2:**

Έστω  $(A_1, B_1, C_1, D)$  και  $(A_2, B_2, C_2, D)$  δυο ελάχιστες πραγματοποιήσεις ενός πραγματικού ρητού πίνακα μεταφοράς  $H(s)$ , και έστω  $C_1, C_2, O_1$  και  $O_2$  οι αντίστοιχοι πίνακες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε:

$$A_2 = P A_1 P^{-1}, B_2 = P B_1, C_2 = C_1 P^{-1}.$$

Επιπλέον, ο  $P$  μπορεί να προσδιοριστεί ως  $P = (O_2^* O_2)^{-1} O_2^* O_1$  ή  $P^{-1} = C_1 C_2^* (C_2 C_2^*)^{-1}$ .

### **Θεώρημα 8.2.3:**

Έστω  $H(s)$  ο πίνακας μεταφοράς ενός συστήματος  $\Sigma$ . Αν

$$\Sigma_1 = (A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}, C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}, D_1 \in \mathbb{R}^{p \times m})$$

$$\Sigma_2 = (A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}, C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}, D_2 \in \mathbb{R}^{p \times m})$$

είναι πραγματοποιήσεις ελάχιστης τάξης του  $H(s)$ , τότε οι πραγματοποιήσεις  $\Sigma_1, \Sigma_2$  είναι όμοιες. Ισοδύναμα αν

$$H(s) := C_1 (s I - A_1)^{-1} B_1 + D_1 = C_2 (s I - A_2)^{-1} B_2 + D_2 \quad (8.2.2.)$$

και οι πραγματοποιήσεις  $\Sigma_1, \Sigma_2$  της  $H(s)$  είναι ελάχιστης τάξης τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  τέτοιος ώστε

$$A_1 = Q_1^{-1} A_2 Q_1$$

$$B_1 = Q_1^{-1} B_2$$

$$C_1 = C_2 Q_1$$

$$D_1 = D_2$$

### **Απόδειξη**

Έστω

$$C_i = [B_i \quad A_i B_i \quad \dots \quad A_i^{n-1} B_i]$$

$$O_i = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

$i=1,2$ . Εφόσον  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ο πίνακας  $(sI - A_i)^{-1}$  αναπτύσσεται σαν σειρά Laurent ως εξής:

$$(sI - A_i)^{-1} = \frac{1}{s} I + \frac{1}{s^2} A_i + \frac{1}{s^3} A_i^2 + \dots$$

οπότε η συνάρτηση μεταφοράς για το  $\Sigma_1$  γράφεται:

$$\begin{aligned} H(s) &= C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D_1 \\ &= D_1 + C_1 B_1 \frac{1}{s} + C_1 A_1 B_1 \frac{1}{s^2} + C_1 A_1^2 B_1 \frac{1}{s^3} + \dots \end{aligned}$$

και για το  $\Sigma_2$ :

$$\begin{aligned} H(s) &= C_2 (sI - A_2)^{-1} B_2 + D_2 \\ &= D_2 + C_2 B_2 \frac{1}{s} + C_2 A_2 B_2 \frac{1}{s^2} + C_2 A_2^2 B_2 \frac{1}{s^3} + \dots \end{aligned}$$

Από την (8.2.2) έχουμε:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_2 \\ C_1 A_1^k B_1 &= C_2 A_2^k B_2 \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} C_1 B_1 & C_1 A_1 B_1 & \dots & C_1 A_1^{n-1} B_1 \\ C_1 A_1 B_1 & C_1 A_1^2 B_1 & \dots & C_1 A_1^n B_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} B_1 & C_1 A_1^n B_1 & \dots & C_1 A_1^{2n-2} B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 B_2 & C_2 A_2 B_2 & \dots & C_2 A_2^{n-1} B_2 \\ C_2 A_2 B_2 & C_2 A_2^2 B_2 & \dots & C_2 A_2^n B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} B_2 & C_2 A_2^n B_2 & \dots & C_2 A_2^{2n-2} B_2 \end{bmatrix}$$

ή την

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} \end{bmatrix} [B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1] = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix} [B_2 \quad A_2 B_2 \quad \dots \quad A_2^{n-1} B_2]$$

$$O_1 C_1 = O_2 C_2 \quad (8.2.4)$$

Εφόσον οι πραγματοποιήσεις είναι ελάχιστης τάξης οι σχέσεις:

$$\text{rank} C_1 = \text{rank} C_2 = \text{rank} O_1 = \text{rank} O_2 = n$$

συνεπάγονται τις

$$\text{rank}(C_1 C_1^T) = n$$

$$\text{rank}(O_1 O_1^T) = n$$

Αν ορίσουμε τους πίνακες:

$$Q_1 := C_2 C_1^T (C_1 C_1^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$Q_2 := (O_1^T O_1)^{-1} O_1^T O_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

απο την

$$\begin{aligned} Q_2 Q_1 &:= (O_1^T O_1)^{-1} O_1^T O_2 C_2 C_1^T (C_1 C_1^T)^{-1} \\ &= (O_1^T O_1)^{-1} O_1^T O_1 C_1 C_1^T (C_1 C_1^T)^{-1} = I \end{aligned}$$

προκύπτει ότι οι πίνακες  $Q_2$ ,  $Q_1$  είναι αντιστρέψιμοι και

$$Q_2 = Q_1^{-1}$$

Επίσης

$$Q_2 C_2 = (O_1^T O_1)^{-1} O_1^T O_2 C_2 = (O_1^T O_1)^{-1} O_1^T O_1 C_1 = C_1 \quad (8.2.5)$$

η οποία γράφεται

$$C_2 = Q_1 C_1$$

Επίσης

$$O_2 Q_1 = O_2 C_2 C_1^T (C_1 C_1^T)^{-1} = O_1 C_1 C_1^T (C_1 C_1^T)^{-1} = O_1$$

η οποία γράφεται

$$O_2 = O_1 Q_2 \quad (8.2.6)$$

Η (8.2.5) γράφεται

$$Q_2 [B_2 \quad A_2 B_2 \quad \dots \quad A_2^{n-1} B_2] = [B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1]$$

απο την οποία έχουμε ότι

$$Q_2 B_2 = B_1 \Rightarrow B_1 = Q_1^{-1} B_2 \quad (8.2.7)$$

Ομοίως μέσω της (8.2.6) μπορούμε να δείξουμε ότι

$$C_2 Q_2^{-1} = C_1 \Rightarrow C_1 = C_2 Q_1 \quad (8.2.8)$$

Τέλος οι σχέσεις (8.2.4) συνεπάγονται στην σχέση



$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} \end{bmatrix} A_1 [B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1] = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix} A_2 [B_2 \quad A_2 B_2 \quad \dots \quad A_2^{n-1} B_2]$$

η οποία γράφεται

$$O_1 A_1 C_1 = O_2 A_2 C_2 = O_1 Q_2 A_2 C_2 = O_1 Q_1^{-1} A_2 Q_1 C_1$$

και η οποία συνεπάγεται την

$$A_1 = Q_1^{-1} A_2 Q_1 \tag{8.2.9}$$

Οι σχέσεις (8.2.7), (8.2.8), (8.2.9) δείχνουν ότι οι πραγματοποιήσεις  $\Sigma_1, \Sigma_2$  της  $H(s)$  είναι όμοιες. ▪

# Κεφάλαιο 9:

## Πρόβλημα της Αποφυγής Διαταραχών

Έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B u(t) + S q(t) & t \geq 0 & \quad (\Sigma) \\ y(t) &= Cx(t) & t \geq 0 & \end{aligned}$$

με  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη εξίσωση έχει προστεθεί ένας νέος όρος  $q(t) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  ο οποίος παριστάνει τις διαταραχές, ενώ ο  $S$  είναι πίνακας διαστάσεων  $n \times \bar{n}$  σταθερός ως προς το χρόνο.

Το πρόβλημα απαλοιφής διαταραχών συνίσταται στην εύρεση μιας ανάδρασης  $u=Fx$ , τέτοιας ώστε η έξοδος  $y(t)$  του συστήματος που θα προκύψει να μην επηρεάζεται από τις διαταραχές  $q(t)$ .

Έστω λοιπόν ότι  $u(t) = Fx(t)$ , τότε το σύστημα  $(\Sigma)$  γίνεται:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + BF)x(t) + Sq(t) & (\Sigma) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

με  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  και  $S \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$

### 9.1 ΟΡΙΣΜΟΣ - ΣΥΝΘΗΚΗ

#### Ορισμός 9.1:

Το σύστημα  $(\Sigma)$  είναι απαλλαγμένο από τις διαταραχές, αν για κάθε αρχική κατάσταση  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  η έξοδος  $y(t)$  με  $t \geq 0$  παραμένει η ίδια για κάθε  $q(t)$ .

Όπως γνωρίζουμε η κατάσταση του συστήματος  $(\Sigma)$  δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = e^{(A+BF)t} x(0) + \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} Sq(\tau) d\tau \quad (9.1)$$

ενώ για την έξοδο έχουμε:

$$y(t) = Ce^{(A+BF)t} x(0) + C \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} Sq(\tau) d\tau \quad (9.2)$$

Για να είναι το σύστημα απαλλαγμένο από τις διαταραχές πρέπει ο τελευταίος όρος της (9.2) να είναι μηδέν, δηλαδή :

$$C \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} S q(\tau) d\tau = 0 \quad (9.3)$$

για κάθε  $q(t)$ ,  $t \geq 0$ , ή ισοδύναμα το  $q(t)$  δεν πρέπει να εμφανίζεται στις παραγώγους του  $y(t)$ .

### Λήμμα 9.1

Το σύστημα  $(\Sigma)$  είναι απαλλαγμένο, από τις διαταραχές τότε και μόνο όταν υπάρχει ανάδραση  $u = Fx$  έτσι ώστε:

$$\langle A + BF | S \rangle \subset K \quad (9.4)$$

όπου  $S = \text{span} S$  και  $K = \text{Ker } C$ .

### **Απόδειξη:**

Όπως γνωρίζουμε ο  $\langle A + BF | S \rangle$  είναι ο ελέγξιμος υποχώρος του  $(\Sigma)$  και ισχύει:

$$\langle A + BF | S \rangle = S + (A + BF)S + \dots + (A + BF)^{n-1}S \quad (9.5)$$

Έστω λοιπόν ότι το  $(\Sigma)$  είναι απαλλαγμένο από τις διαταραχές. Τότε σύμφωνα με την (9.3) έχουμε:

$$C \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} S q(\tau) d\tau = 0$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε  $q(\bullet)$  και  $t \geq 0$  αρά:

$$C e^{(A+BF)t} S = 0 \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \quad (9.6\alpha)$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς  $t$  την (9.6α) προκύπτει:

$$\begin{aligned} C(A + BF)e^{(A+BF)t}S &= 0 \\ C(A + BF)^2e^{(A+BF)t}S &= 0 \\ &\vdots \\ C(A + BF)^{n-1}e^{(A+BF)t}S &= 0 \end{aligned} \quad (9.6\beta)$$

Θέτοντας στις σχέσεις (9.6),  $t = 0$  βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} CS &= 0 \\ C(A + BF)S &= 0 \\ C(A + BF)^2S &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ C(A + BF)^{n-1}S &= 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

Από τις σχέσεις (9.7) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} S &\subset K \\ (A + BF)S &\subset K \\ (A + BF)^2S &\subset K \\ &\vdots \\ (A + BF)^{n-1}S &\subset K \end{aligned} \quad (9.8)$$

Τέλος από τις (9.8) προκύπτει ότι:

$$S + (A + BF)S + \dots + (A + BF)^{n-1}S \subset K$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (9.4). Από αυτήν προκύπτουν οι σχέσεις (9.8) και επομένως οι (9.7). Επικαλούμαστε το πόρισμα του θεωρήματος Cayley-Hamilton

$$(A + BF)^n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (A + BF)^i$$

και με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε  $k \geq n$  ισχύει:

$$(A + BF)^k = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i (A + BF)^i \quad (9.9)$$

Επειδή

$$e^{(A+BF)t} = I + (A + BF)t + \frac{(A + BF)^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{(A + BF)^n t^n}{n!} + \dots$$

συμπεραίνουμε ότι για κάθε  $t \geq 0$  υπάρχουν συντελεστές  $a_i = a_i(t)$ ,  $i=0,1,\dots,n-1$  έτσι ώστε:

$$e^{(A+BF)t} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (A + BF)^i t^i \quad (9.10)$$

Αφετέρου από τις (9.7) παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} a_0 CS &= a_0 CIS = 0 \\ a_1 tC(A + BF)S &= a_1 C(A + BF)tS = 0 \\ a_2 \frac{t^2}{2!} C(A + BF)^2 S &= a_2 C(A + BF)^2 \frac{t^2}{2!} S = 0 \\ &\vdots \\ a_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} C(A + BF)^{n-1} S &= a_{n-1} C(A + BF)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} S = 0 \end{aligned} \quad (9.11)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$C \left\{ a_0 I + a_1 (A + BF)t + a_2 (A + BF)^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a_{n-1} (A + BF)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right\} S = 0 \quad (9.12)$$

Επομένως από τις (9.10) και (9.12) παίρνουμε:

$$C e^{(A+BF)t} S = 0, \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό (9.1) το σύστημα είναι απαλλαγμένο από τις διαταραχές.

▪

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το αλγεβρικό πρόβλημα για την αποφυγή των διαταραχών στην έξοδο του συστήματος ( $\Sigma$ ) περιγράφεται ως ακολούθως:

Δοσμένων των πινάκων  $A: \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B: \mathbb{R}^{m \times n}$  και των υποχώρων  $S = \text{span} S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K = \text{Ker} C \subset \mathbb{R}^n$  να βρούμε ένα πίνακα  $F: \mathbb{R}^{n \times m}$  τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\langle A + BF | S \rangle \subset K \quad (9.13)$$

Στη συνέχεια εξάγουμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ισχύ της (9.13).

## 9.2 Ο ΥΠΟΧΩΡΟΣ V

### Ορισμός 9.2

Έστω  $A: \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $B: \mathbb{R}^{m \times n}$ . Ο υπόχωρος  $V \subset \mathbb{R}^n$  είναι (A, B) – αναλλοίωτος αν υπάρχει ένας πίνακας  $F: \mathbb{R}^{n \times m}$  τέτοιος ώστε:

$$(A + BF)V \subset V \quad (9.14)$$

Από τον ορισμό αυτό είναι φανερό ότι κάθε A-αναλλοίωτος υποχώρος του  $\mathbb{R}^n$  είναι και (A,B)- αναλλοίωτος. Πράγματι αρκεί να πάρουμε  $F=0$  οπότε από την (9.14) προκύπτει ότι:

$$AV = (A + B0)V \subset V$$

Με  $J(A,B; \mathbb{R}^n)$  συμβολίζουμε το σύνολο των (A,B)-αναλλοίωτων υποχώρων του  $\mathbb{R}^n$ . δηλαδή:

$$J(A, B; \mathbb{R}^n) = \{V: (A + BF)V \subset V \text{ και } V \subset \mathbb{R}^n\} \quad (9.15)$$

Όταν οι  $A$  και  $B$  εννοούνται γράφουμε απλά  $J(\mathbb{R}^n)$  για το σύνολο αυτό.

### Λήμμα 9.2

Έστω  $V \subset \mathbb{R}^n$  και  $\mathbf{B} = \text{span } B$ . Ο  $V$  είναι  $(A, B)$ -αναλλοίωτος υποχώρος του  $\mathbb{R}^n$  αν και μόνο αν:

$$AV \subset V + \mathbf{B} \quad (9.16)$$

### Απόδειξη

Έστω  $V \subset J(A, B; \mathbb{R}^n)$  και  $v \in V$ . Σύμφωνα με την (9.14)

$$(A + BF)v = w \text{ με } w \in V$$

ή ισοδύναμα:

$$Av = w - BFv \in V + \mathbf{B}$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (9.16) και έστω ότι  $\{v_1, \dots, v_\mu\}$  αποτελεί μια βάση του  $V$ , τότε υπάρχει  $w_i \in V$  και  $u_i \in U$ , με  $i = 1, 2, \dots, \mu$  τέτοια ώστε:

$$Av_i = w_i - Bu_i$$

Έστω ακόμη ότι  $F_0: V \rightarrow U$  με  $F_0 v_i = u_i, i = 1, 2, \dots, \mu$  και  $F$  η επέκταση της  $F_0$  στο  $\mathbb{R}^n$ . Τότε

$$(A + BF)v_i = w_i \in V$$

δηλαδή

$$(A + BF)V \subset V$$

ή ισοδύναμα

$$V \in J(A, B; \mathbb{R}^n). \quad \blacksquare$$

Με  $F(A, B; \mathbb{R}^n)$  συμβολίζουμε στη συνέχεια την κλάση πινάκων  $F: \mathbb{R}^{n \times m}$  για τους οποίους  $(A + BF)V \subset V$  με  $V \in J(A, B; \mathbb{R}^n)$  δηλαδή:

$$F(A, B; V) = \{F, F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \mid (A + BF)V \subset V \text{ με } V \in J(A, B; \mathbb{R}^n)\} \quad (9.17)$$

Όταν οι  $A$  και  $B$  θεωρούνται δεδομένοι γράφουμε απλώς  $F(V)$ .

### Λήμμα 9.3

Η τάξη των υποχώρων  $J(A, B; \mathbb{R}^n)$  είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση υποχώρων.

#### **Απόδειξη:**

Έστω  $V_1, V_2 \in J(A, B; \mathbb{R}^n)$  τότε από το λήμμα (9.2) έχουμε ότι:

$$A(V_1 + V_2) = AV_1 + AV_2 \subset V_1 + V_2 + \mathbf{B}$$

Δηλαδή  $V_1 + V_2 \in J(A, B)$ . ▪

### Ορισμός 9.3

Έστω  $G$  ένα σύνολο  $(A, B)$ -αναλλοίωτων υποχώρων του  $\mathbb{R}^n$ . Ορίζουμε μέγιστο στοιχείο  $V^*$  του  $G$  τον υποχώρο εκείνο που περιέχει κάθε άλλο στοιχείο του  $G$ , δηλαδή  $V^* \in G$  και  $V^* \geq V$  για κάθε  $V \in G$ . Είναι φανερό ότι ο  $V^*$  είναι μοναδικός. Συμβολικά γράφουμε  $V^* = \sup\{V: V \in G\}$  ή απλώς  $V^* = \sup G$

### Λήμμα 9.4

Έστω  $G$  ένα μη κενό σύνολο υποχώρων του  $\mathbb{R}^n$ , κλειστό ως προς την πρόσθεση. Τότε το  $G$  περιέχει ένα μέγιστο στοιχείο  $V^*$ .

#### **Απόδειξη:**

Αφού ο  $\mathbb{R}^n$  είναι πεπερασμένης διάστασης υπάρχει ένας υποχώρος  $V^* \in G$  με την μεγαλύτερη διάσταση. Από την κλειστότητα του  $G$  ως προς την πρόσθεση έχουμε ότι αν  $V \in G$  τότε  $V + V^* \in G$ . Αρά  $\dim V^* \geq \dim(V + V^*) \geq \dim V^*$  απ' όπου προκύπτει ότι  $V^* = V + V^*$ . Επομένως  $V \subset V^*$  για κάθε  $V \in G$ , δηλαδή  $V^* = \sup G$ .

Έστω  $K$  ένας υποχώρος του  $\mathbb{R}^n$  και έστω  $J(A, B; K)$  το σύνολο των  $(A, B)$ -αναλλοίωτων υποχώρων του  $\mathbb{R}^n$  που περιέχονται στον  $K$ . Δηλαδή:

$$J(A, B; K) = \{V: V \in J(A, B; \mathbb{R}^n) \text{ και } V \subset K\} \quad (9.18)$$

Με  $A, B$  δοσμένους γράφουμε απλά  $J(K)$ . Προφανώς  $0 \in J(K)$ , αρά  $J(K) \neq \emptyset$ . Από το Λήμμα 9.3 προκύπτει ότι το  $J(K)$  είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Από το Λήμμα 9.4 προκύπτει επίσης ότι το  $J(K)$  περιέχει ένα μέγιστο στοιχείο  $V^* = \sup J(K)$ . ▪

### 9.3 ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟΦΥΓΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

#### Θεώρημα 9.1

Το πρόβλημα απαλοιφής διαταραχών είναι επιλύσιμο αν και μόνο αν

$$\mathbf{S} \subset V^* \quad (9.19)$$

όπου  $V^* = \sup J(A, B; K)$ ,  $K = \ker C$  και  $\mathbf{S} = \text{span} \mathbf{S}$

#### Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει η (9.19). Διαλέγουμε σύμφωνα με τον Ορισμό 9.2,  $F \in F(V^*)$  οπότε  $(A + BF)V^* \subset V^*$ .

Αφού  $\mathbf{S} \subset V^*$  προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} + (A + BF)\mathbf{S} + \dots + (A + BF)^{n-1}\mathbf{S} &= \langle A + BF | \mathbf{S} \rangle \subset \\ &\subset \langle A + BF | V^* \rangle = V^* + (A + BF)V^* + \dots + (A + BF)^{n-1}V^* \end{aligned} \quad (9.20)$$

Όμως  $V^* = \sup J(A, B; K)$  που σημαίνει ότι:

$$(A + BF)V^* \subset V^*, \quad V^* \subset K \quad (9.21)$$

Επομένως :

$$\langle A + BF | V^* \rangle = V^* \quad (9.22)$$

Από τις (9.20), (9.21) και (9.22) προκύπτει τελικά ότι:

$$\langle A + BF | \mathbf{S} \rangle \subset K$$

και σύμφωνα με το Λήμμα 9.1 βλέπουμε ότι το πρόβλημα είναι επιλύσιμο.

Αντίστροφα, έστω ότι το πρόβλημα είναι επιλύσιμο, δηλαδή σύμφωνα πάλι με το Λήμμα 9.1 υπάρχει ανάδραση  $F$  έτσι ώστε

$$\langle A + BF | \mathbf{S} \rangle \subset K$$

Προφανώς, ο υποχώρος  $V = \langle A + BF | \mathbf{S} \rangle$  ανήκει στο  $J(A, B; K)$ , όπως ορίζεται από τη σχέση (9.18). Επομένως  $V \subset V^*$ . Επίσης  $\mathbf{S} \subset V$ . Αρά τελικά προκύπτει, ότι  $\mathbf{S} \subset V^*$ . ▪

Το επόμενο θεώρημα παρουσιάζει πρακτικό ενδιαφέρον.



### Θεώρημα 9.2

Έστω το σύστημα (  $\Sigma$  ):

$$\dot{x} = (A + bF)x + Sq, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = Cx$$

Η έξοδος του (  $\Sigma$  ) είναι απαλλαγμένη από τις διαταραχές  $q$  τότε και μόνο όταν υπάρχει αλλαγή συντεταγμένων  $z = Px$  ώστε το σύστημα που προκύπτει να έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{S}_1 \\ 0 \end{bmatrix} q \quad (\hat{\Sigma})$$

$$y = (0 \hat{C}_2) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

όπου

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} = P(A + bF)P^{-1} = \hat{A}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = PS = \hat{S}$$

$$(0 \hat{C}_2) = CP^{-1} = \hat{C}$$

### **Απόδειξη**

Έστω ότι το πρόβλημα είναι επιλύσιμο, τότε υπάρχει ανάδραση  $F$  τέτοια ώστε η έξοδος του συστήματος (  $\hat{\Sigma}$  ) να είναι απαλλαγμένη από διαταραχές.

Ισοδύναμα υπάρχει υποχώρος  $V$  τέτοιος ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$(A + bF)V \subset V \quad (9.23)$$

$$V \subset \ker C \quad (9.24)$$

$$S = \text{span} S \subset V \quad (9.25)$$

Έστω ότι  $\dim V = n_1 < n$ . Θεωρούμε τα διανύσματα

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_{n_1} = (0, \dots, 1_{(n_1)} \dots 0)^T$$

και τον υποχώρο  $\hat{V} = \text{span}(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$  του  $\mathbb{R}^n$

Αφού οι  $V$  και  $\hat{V}$  έχουν την ίδια διάσταση  $n_1$ , θα είναι ισόμορφοι δηλαδή θα υπάρχει πίνακας  $P$  αντιστρέψιμος έτσι ώστε

$$PV = \widehat{V}$$

Εκτελώντας στο  $(\Sigma)$  τον μετασχηματισμό  $z = Px$  παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{S}_1 \\ \widehat{S}_2 \end{bmatrix} q$$

$$y = (\widehat{C}_1 \ \widehat{C}_2) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (9.24), (9.25), (9.26) παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από αυτή την αλλαγή συντεταγμένων.

Πράγματι,

$$\widehat{A}\widehat{V} = P(A + bF)P^{-1}PV = P(A + bF)V \subset PV = \widehat{V}$$

Η (9.24) είναι ισοδύναμη με την  $CV = 0$  τότε  $\widehat{C}\widehat{V} = CP^{-1}PV = CV = 0$  ή ισοδύναμα  $\widehat{V} \subset \ker \widehat{C}$ . Τέλος  $\widehat{S} = \text{span} \widehat{S} = \text{span} PS \subset PV = \widehat{V}$

Πήραμε δηλαδή τις σχέσεις:

$$\widehat{A}\widehat{V} \subset \widehat{V} \quad (9.26)$$

$$\widehat{V} \subset \ker \widehat{C} \quad (9.27)$$

$$\widehat{S} \subset \widehat{V} \quad (9.28)$$

Από την (9.26) έχουμε ότι  $\widehat{A}e_i \in \text{span}(e_1, \dots, e_{n_1})$ , για κάθε  $i = 1, \dots, n_1$ . Αλλά το  $\widehat{A}e_i$  είναι η  $i$ -στήλη του πίνακα  $\widehat{A}$ . Αρά εύκολα προκύπτει ότι οι τελευταίες  $n - n_1$  συνιστώσες κάθε  $i$ -στήλης του  $\widehat{A}$  θα είναι μηδενικές για κάθε  $i = 1, \dots, n_1$ . Δηλαδή  $\widehat{A}_{21} = 0$ . Από την (9.28) έχουμε ότι  $\widehat{S} \subset \widehat{V}$  η ισοδύναμα  $\widehat{S}e_i \in \text{span}(e_1, \dots, e_{n_1})$ . Επομένως όλες οι τελευταίες  $n - n_1$  συνιστώσες του  $\widehat{S}$  θα είναι μηδέν. Συνεπώς  $\widehat{S}_2 = 0$ . Τέλος από την (9.27) έχουμε ότι  $\widehat{C}\widehat{V} = 0$  ή ισοδύναμα  $\widehat{C}e_i = 0$  απ' όπου προκύπτει ότι οι πρώτες  $n - n_1$  συνιστώσες του  $\widehat{C}$  είναι μηδέν, δηλαδή  $\widehat{C}_1 = 0$ . Αντίστροφα αν υπάρχει αλλαγή συντεταγμένων έτσι ώστε το σύστημα που προκύπτει να έχει τη μορφή  $(\widehat{\Sigma})$  τότε προφανώς η έξοδος γράφεται  $y = \widehat{C}_2 z_2$  με  $\dot{z}_2 = A_{22} z_2$ . Δηλαδή  $y(t) = \widehat{C}_2 e^{\widehat{A}_{22}t} z_2(0)$  και αρά η έξοδος του  $(\widehat{\Sigma})$  παραμένει ανεπηρέαστη από το  $q$ . Αυτή όμως η ιδιότητα μεταφέρεται αναλλοίωτη στη έξοδο του αρχικού συστήματος.

■

Με τον αλγόριθμο που παρέχει το επόμενο θεώρημα προσδιορίζουμε το χώρο  $V^* = \sup J(A, B; K)$

### Θεώρημα 9.3

Έστω πίνακες  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  και υπόχωρος  $K \subset \mathbb{R}^n$

Ορίζουμε την ακολουθία  $V^\mu$  ως εξής:

$$V^0 = K$$
$$V^\mu = K \cap A^{-1}(\mathbf{B} + V^{\mu-1}), \quad \mu = 1, 2, \dots$$

όπου  $A^{-1}U = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax=y, y \in U\}$ . Τότε  $V^\mu \subset V^{\mu-1}$  και για κάποιο  $k \leq \dim K$

$$V^k = \sup J(A, B; K)$$

#### Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι η  $V^\mu$  είναι μια μη αύξουσα ακολουθία. Επίσης  $V^1 = K \cap A^{-1}(\mathbf{B} + V^0) = V^0 \cap A^{-1}(\mathbf{B} + V^0)$  απ' όπου προκύπτει ότι  $V^1 \subset V^0$ . Αν  $V^\mu \subset V^{\mu-1}$  τότε:

$$V^{\mu+1} = K \cap A^{-1}(\mathbf{B} + V^\mu) \subset K \cap A^{-1}(\mathbf{B} + V^{\mu-1}) = V^\mu \quad (9.29)$$

Έτσι για κάποιο  $k \leq \dim K$ ,  $V^\mu = V^k$  ( $\mu \geq k$ ). Από τον ορισμό του  $J(K)$  γνωρίζουμε ότι  $V \in J(K)$  τότε και μόνο όταν

$$V \subset K \text{ και } V \subset A^{-1}(V + \mathbf{B})$$

Από την (9.29) έχουμε ότι  $V \subset V^0$  και αν  $V \subset V^{\mu-1}$  τότε:

$$V \subset K \cap A^{-1}(V + \mathbf{B})$$
$$\subset K \cap A^{-1}(V^{\mu-1} + \mathbf{B}) = V^\mu$$

Αρά  $V \subset V^k \in J(K)$ . ▪

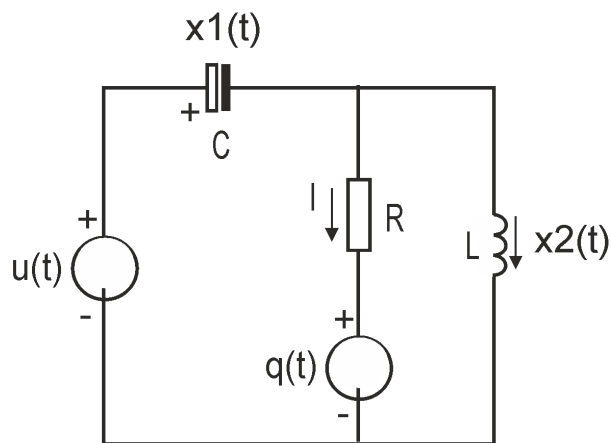
# Κεφάλαιο 10:

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται κάποιες εφαρμογές του προβλήματος απαλοιφής διαταραχών σε ηλεκτρικά κυκλώματα.

### 10.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 10.1



Σχήμα 10.1

Αν  $x_1$  η τάση στα άκρα του πυκνωτή C και  $x_2, I$  τα ρεύματα που διαρρέουν την αυτεπαγωγή L και την αντίσταση R αντίστοιχα,  $u$  η πηγή και  $q$  οι διαταραχές που εισάγει η R, τότε εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchoff βρίσκουμε:

$$u - x_1 - RI - q = 0$$

$$u - x_1 - L\dot{x}_2 = 0$$

$$C\dot{x}_1 = I + x_2$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} q \quad (10.1)$$

Ζητάμε να βρεθεί αν υπάρχει ανάδραση  $u(t) = Fx(t)$ , έτσι ώστε το σύστημα να είναι απαλλαγμένο από τη διαταραχή, δηλαδή να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

α.  $(A + BF)V \subset V$  ή ισοδύναμα  $AV \subset V + B$

β.  $S \in V$

γ.  $V \subset \ker C$

Έστω:

$$y = x_2 = [0 \quad 1]x \quad (10.2)$$

η έξοδος του συστήματος.

Θέτοντας  $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ ,  $S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \quad 1]$

Οι εξισώσεις (10.1) και (10.2) γράφονται:

$$\dot{x} = Ax + bu + Sq$$

$$y = Cx$$

Για να είναι η έξοδος απαλλαγμένη από τις διαταραχές θα πρέπει να υπάρχει χώρος  $V$  που να ικανοποιεί τις ιδιότητες (α), (β) και (γ) με  $\ker C = \{x: Cx = 0\} =$

$$\left\{ x: (0,1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{x: x_2 = 0\}, \text{ δηλαδή } \ker C = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{ και } \text{span} S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{span} b = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Έστω  $V = \ker C = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  τότε ισχύουν οι (α), (β) και (γ).

Για παράδειγμα έχουμε:

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \in V + B = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Δηλαδή  $AV \subset V + B$ . Αρά το πρόβλημα απαλοιφής διαταραχών για την έξοδο  $z = x_2$  είναι επιλύσιμο, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει ανάδραση  $u = Fx = (f_1, f_2)x$  τέτοια ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$C(A + bF)S = 0 \quad (10.3)$$

Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι:

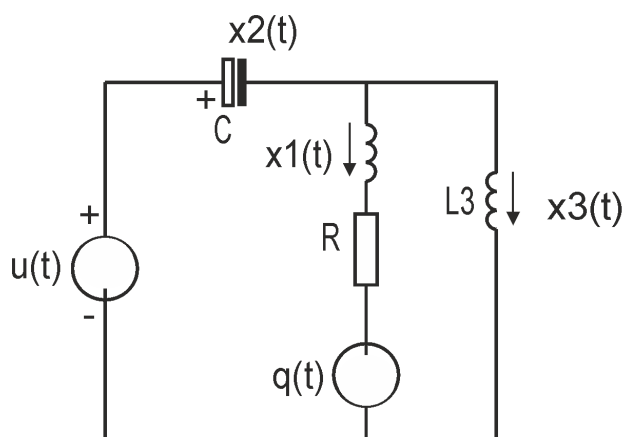
$$C(A + bF)S = -\frac{f_2 - 1}{LRC} \quad (10.4)$$

Από τις (10.3) και (10.4) προκύπτει ότι:  $f_2 = 1$ .

Αρά η ανάδραση είναι της μορφής  $u = Fx = (f_1, 1)x$ , με  $f_1$  τυχαίο πραγματικό.

## 10.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Έστω το κύκλωμα του Σχήματος 10.2 με χωρητικότητα  $C$  και αυτεπαγωγές  $L_1 = L_3 = L$ . Έστω ότι η αντίσταση  $R$  εισάγει κάποιο διαταραχή  $q(t)$ . Η συνάρτηση  $u(t)$  θεωρείται είσοδος του συστήματος. Οι μεταβλητές κατάστασης  $x_1(t)$ ,  $x_3(t)$  είναι τα ρεύματα που διαρρέουν τις αυτεπαγωγές και  $x_2(t)$  η τάση στα άκρα του πυκνωτή.



Σχήμα 10.2

Ζητάμε να βρεθεί αν υπάρχει ανάδραση  $u(t) = Fx(t)$ , έτσι ώστε το σύστημα να είναι απαλλαγμένο από τη διαταραχή, δηλαδή να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

α.  $(A + BF)V \subset V$  ή ισοδύναμα  $AV \subset V + B$

β.  $S \in V$

γ.  $V \subset \ker C$

Χρησιμοποιώντας τους νόμους του Kirchhoff προκύπτει το επόμενο σύστημα:

$$u(t) - x_2(t) - L\dot{x}_1(t) - Rx_1(t) - q(t) = 0$$

$$u(t) - x_2(t) - L\dot{x}_3(t) = 0$$

$$C\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_3(t)$$

το οποίο γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q(t)$$

με

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έστω  $y = x_2 = (0 \ 1 \ 0)x$  η έξοδος, όπου  $x_2$  η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Τότε θα είναι  $C = (0 \ 1 \ 0)$

$$\ker C = \left\{ x : (0 \ 1 \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{x : x_2 = 0\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Επειδή θέλουμε ο  $(A,b)$ -αναλλοίωτος υποχώρος να είναι υποχώρος του  $\ker C$  επιλέγουμε  $V_1 = \ker C$ .

$$\text{Είναι } S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ δηλαδή η } (\beta) \text{ ικανοποιείται.}$$

Επίσης θέλουμε να δείξουμε ότι  $AV \subset V + B \equiv V$ , με  $V=V_1$ . Παρατηρούμε ότι  $Ae_1 \notin \text{span}\{e_1, e_2\}$  επομένως δεν ικανοποιείται η  $(\alpha)$ . Στη συνέχεια επιλέγουμε

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} \right\} \quad a_1, a_3 \in \mathbb{R}^n \text{ με } V_2 \subset \ker C$$

Στην περίπτωση αυτή πρέπει  $a_3 = 0$  για να ικανοποιείται η  $(\beta)$ . Επομένως

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Όμως σε αυτή την περίπτωση  $A \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin V_2 + \mathbf{B}$ . Επειδή ο  $V_2$  είναι ο μέγιστος υποχώρος

με  $V_2 \subset \ker C$  προκύπτει ότι για την έξοδο  $y = x_2$  δεν υπάρχει ανάδραση, που να απαλλάσσει το σύστημα από τη διαταραχή.

Στη συνέχεια παίρνουμε ως έξοδο το  $x_3$ , δηλαδή το ρεύμα που διαρρέει την αυτεπαγωγή  $L_3$  οπότε έχουμε:

$$y = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Cx$$

και

$$\ker C = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Αν  $V_1 = \ker C$  η  $(\gamma)$  και  $(\beta)$  ικανοποιούνται αφού:

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} .$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} R \\ -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \in V_1 + \mathbf{B} = \mathbb{R}^3$$

$$Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{L} \\ 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = -b \in V_1 + \mathbf{B} = \mathbb{R}^3$$

Αρά ο  $V_1 = \ker C$  είναι ο μεγαλύτερος  $(A,b)$ -αναλλοίωτος υποχώρος που περιέχει το  $S$  και  $V_1 \subset \ker C$ .

Έστω τώρα  $u = (f_1, f_2, f_3)x$  η ζητούμενη ανάδραση. Για απλοποίηση των πράξεων θεωρούμε  $R=L=C=1$ , έχουμε:



$$A + bF = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (f_1 f_2 f_3) = \begin{bmatrix} f_1 - 1 & f_2 - 1 & f_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ f_1 & f_2 - 1 & f_3 \end{bmatrix}$$

Θα πρέπει τότε:  $C(A + bF)S = (0 \ 0 \ 1)(A + bF) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -f_1 = 0.$

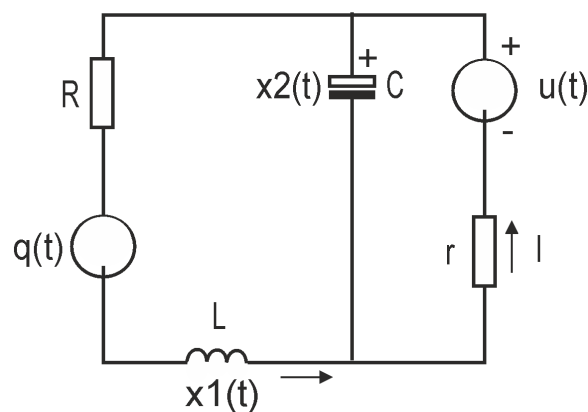
Στη συνέχεια από τη σχέση  $C(A + bF)^2 S = 0$  ή ισοδύναμα  $-f_1^2 + f_1 - f_2 + 1 - f_1 f_3 = 0$  βρίσκουμε:

$$f_2 = -1$$

Αρά η ανάδραση που απαλλάσσει το σύστημα από τη διαταραχή πρέπει να είναι της μορφής  $u = (0 \ -1 \ f_3)x$  όπου  $f_3$  πραγματικός.

### 10.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο κύκλωμα του Σχήματος 10.3 έχουμε αυτεπαγωγή  $L$  που διαρρέεται από ρεύμα  $x_1$ , αντίσταση  $R$  που εισάγει διαταραχή  $q$ , πηνίο  $C$  με τάση στα άκρα του  $x_2$  και πηγή  $u$  η οποία θεωρούμε ότι έχει εσωτερική αντίσταση  $r$  που διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$ .



Σχήμα 10.3

Το κύκλωμα αυτό περιγράφεται από το σύστημα:

$$L\dot{x}_1 = x_2 - Rx_1 - q$$

$$rCx_2 = u - x_2 - rx_1$$

Ισοδύναμα το σύστημα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{-1}{C} & \frac{-1}{Cr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Cr} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} q$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{-1}{C} & \frac{-1}{Cr} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Cr} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad S = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει ανάδραση  $u(t) = Fx(t)$ , τέτοια ώστε το σύστημα να είναι απαλλαγμένο από τη διαταραχή, δηλαδή να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

α.  $(A + BF)V \subset V$  ή ισοδύναμα  $AV \subset V + B$

β.  $S \in V$

γ.  $V \subset \ker C$

Θεωρούμε ως έξοδο την ένταση της αυτεπαγωγής:  $y = (1 \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ .

Έστω  $C = (1 \ 0)$  τότε  $\ker C = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = V$ . Αλλά  $S \notin V$ .

Για έξοδο:  $y = (0 \ 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ , δηλαδή την τάση στα άκρα του πυκνωτή, έχουμε  $\ker C =$

$\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = V$ , οπότε  $S \in V$ . Εξάλλου:  $Ae_1 = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} \\ \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \in V + B$ . Αρά ο  $V = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

είναι ο μεγαλύτερος  $(A, b)$  αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το  $S$  και  $V \subset \ker C$ .

Αν  $u = (f_1 \ f_2)x$  η ανάδραση, θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$C(A + bF)S = 0$$

ή ισοδύναμα:

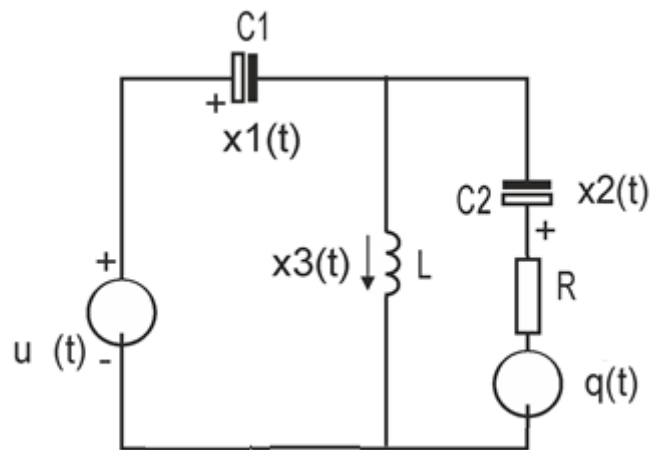
$$\frac{-1}{C} + \frac{f_1}{Cr} = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$f_1 = r$$

#### 10.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Θεωρούμε το κύκλωμα του Σχήματος 10.4 το οποίο αποτελείται από τα πηνία με χωρητικότητες  $C_1$ ,  $C_2$  στα άκρα των οποίων εφαρμόζονται οι τάσεις  $x_1$ ,  $x_2$ , την αυτεπαγωγή  $L$  η οποία διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $x_3$ , την αντίσταση  $R$ , την πηγή  $u$  και τη διαταραχή  $q$ .



Σχήμα 10.4

Με χρήση των νόμων του Kirchoff έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$C_1 \dot{x}_1 = x_3 + C_2 \dot{x}_2$$

$$u - x_1 - L \dot{x}_3 = 0$$

$$u - x_1 - x_2 - IR - q = 0$$

$$I = C_2 \dot{x}_2$$

το οποίο γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R} & -\frac{1}{C_1 R} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{C_2 R} & -\frac{1}{C_2 R} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R} \\ \frac{1}{C_2 R} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R} \\ -\frac{1}{C_2 R} \\ 0 \end{bmatrix} q$$

Ζητάμε να βρεθεί αν υπάρχει ανάδραση  $u(t) = Fx(t)$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

α.  $(A + BF)V \subset V$  ή ισοδύναμα  $AV \subset V + B$

β.  $S \in V$

γ.  $V \subset \ker C$

Έστω  $y = x_1 = (1 \ 0 \ 0)x$  η έξοδος, με  $x_1$  η τάση στα άκρα του πυκνωτή  $C_1$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε  $C = (1 \ 0 \ 0)$  και:

$$\ker C = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Επιλέγουμε  $V_1 = \ker C$ , οπότε έχουμε ότι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin V_1$$

άρα δεν ικανοποιείται η  $S \in V$ .

Στη συνέχεια παίρνουμε ως έξοδο την τάση του πυκνωτή  $C_2$  δηλαδή,  $y = (0 \ 1 \ 0)x$

και  $\ker C = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ . Παρατηρούμε ότι και πάλι  $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin V_2$ .

Επιλέγουμε ως έξοδο το ρεύμα που διαρρέει την αυτεπαγωγή  $L$ . Είναι  $y = (0 \ 0 \ 1)x$

και  $\ker C = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ . Στη περίπτωση αυτή έχουμε ότι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in V_3$$

Παρατηρούμε ότι:

$$A e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R} \\ -\frac{1}{C_2 R} \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \in V_3 + B$$

και

$$A e_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R} \\ -\frac{1}{C_2 R} \\ 0 \end{bmatrix} \in V_3 + \mathbf{B}$$

άρα ο  $V_3 = \ker C$  είναι ο μεγαλύτερος  $(A, b)$ -αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το  $S$ .

Έστω τώρα ότι η ζητούμενη ανάδραση είναι η  $u = (f_1 \quad f_2 \quad f_3)x$ . Έχουμε:

$$A + bf = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R} (f_1 - 1) & \frac{1}{C_1 R} (f_2 - 1) & \frac{1}{C_1 R} f_3 + \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2 R} (f_1 - 1) & \frac{1}{C_2 R} (f_2 - 1) & \frac{1}{C_2 R} f_3 \\ \frac{1}{L} (f_1 - 1) & \frac{1}{L} f_2 & \frac{1}{L} f_3 \end{bmatrix}$$

Πρέπει

$$C(A + bf)S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R} (f_1 - 1) & \frac{1}{C_1 R} (f_2 - 1) & \frac{1}{C_1 R} f_3 + \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2 R} (f_1 - 1) & \frac{1}{C_2 R} (f_2 - 1) & \frac{1}{C_2 R} f_3 \\ \frac{1}{L} (f_1 - 1) & \frac{1}{L} f_2 & \frac{1}{L} f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R} \\ -\frac{1}{C_2 R} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{C_1 R L} (f_1 - 1) - \frac{1}{C_2 R L} f_2 = 0$$

$$\Rightarrow (f_1 - 1) = -\frac{C_1}{C_2} f_2$$

και

$$C(A + bf)^2 S = 0$$

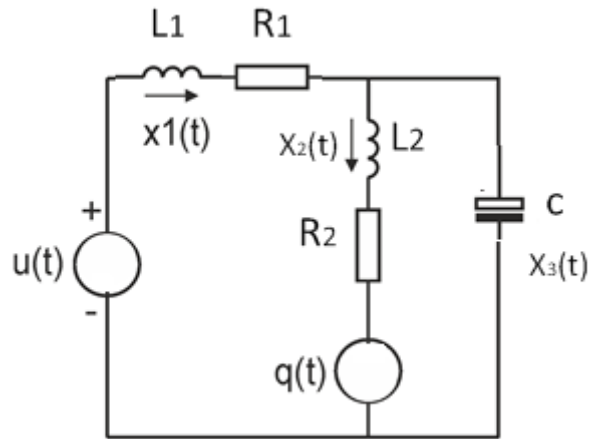
$$\Rightarrow (LC_2 - L)f_2^2 - 2RC_2 f_2 f_3 = 0$$

$$\Rightarrow f_2 = 0 \quad \text{ή} \quad f_3 = -\frac{L(C_2 - 1)}{2RC_2} f_2$$

Με  $f_2 = 0$  η ανάδραση είναι η  $u = (1 \quad 0 \quad f_3)x$  με  $f_3$  τυχαίο πραγματικό. Με  $f_2 \neq 0$  η ανάδραση είναι η  $u = (1 - \frac{C_1}{C_2} f_2, f_2, \frac{L(C_2 - 1)}{2RC_2} f_2)x$  με  $f_2$  τυχαίο πραγματικό.

## 10.5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Έχουμε το κύκλωμα του Σχήματος 10.5 με  $L_1, L_2$  αυτεπαγωγές που διαρρέονται από ρεύμα  $x_1, x_2$  αντίστοιχα, αντιστάσεις  $R_1, R_1$ , διαταραχή  $q$ , πηνίο  $C$  με τάση στα άκρα του  $x_3$  και πηγή  $u$ .



Σχήμα 10.5

Το κύκλωμα περιγράφεται από το σύστημα:

$$u - L_1 \dot{x}_1 - R_1 x_1 - L_2 \dot{x}_2 - R_2 x_2 - q = 0$$

$$u - R_1 x_1 - L_1 \dot{x}_1 - x_3 = 0$$

$$C \dot{x}_3 = x_1 - x_2$$

ή ισοδύναμα από το:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix} q$$

Ψάχνουμε ανάδραση  $u(t) = Fx(t)$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

α.  $(A + BF)V \subset V$  ή ισοδύναμα  $AV \subset V + B$

β.  $S \in V$

γ.  $V \subset \ker C$

Θεωρούμε ως είσοδο την ένταση της αυτεπαγωγής  $L_1$ :  $y = (1 \ 0 \ 0)x$ . Έχουμε επομένως ότι:

$$\ker C = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Έστω  $V_1 = \ker C$ , παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in V_1$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$A e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{R_2}{L_2} \\ -\frac{1}{c} \end{bmatrix} \in V_1 + \mathbf{B}$$

$$A e_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix} \in V_1 + \mathbf{B}$$

Αρά ο  $V_1 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  είναι ο μεγαλύτερος  $(A, b)$  αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το  $\mathbf{S}$  και  $V_1 \subset \ker C$ .

Έστω  $u = (f_1 \quad f_2 \quad f_3)x$  η ζητούμενη ανάδραση και:

$$A + bf = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}f_1 - \frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{L_1}f_2 & \frac{1}{L_1}f_3 - \frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

Θέλουμε να ισχύει η:

$$C(A+bf)\mathbf{S} = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}f_1 - \frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{L_1}f_2 & \frac{1}{L_1}f_3 - \frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L_1}f_2 \left(-\frac{1}{L_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f_2 = 0$$

Επίσης θα πρέπει να ισχύει:

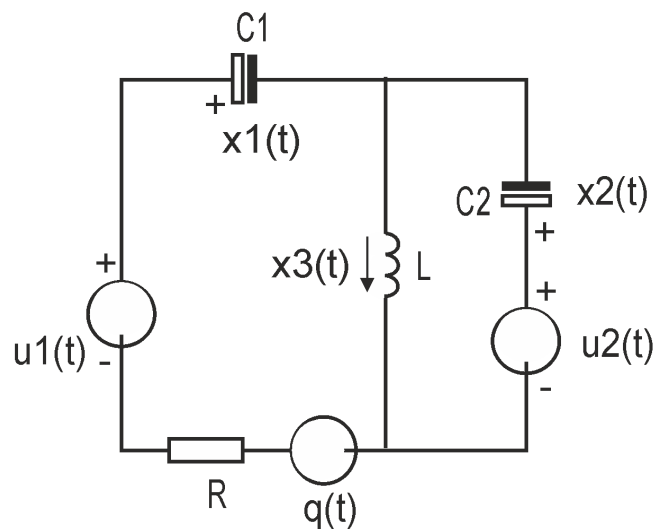
$$C(A+bf)^2\mathbf{S} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \\
[1 \quad 0 \quad 0] & \begin{bmatrix} (f_1 - R_1)^2/L_1 + (f_3 - 1)/CL_1 & -(f_3 - 1)/CL_1 & (f_1 - R_1)(f_3 - 1)/L_1^2 \\ 1/CL_2 & R_2^2/L_2^2 - 1/CL_2 & R_2/L_2^2 \\ (f_1 - R_1)/CL_1 & R_2/CL_2 & (f_3 - 1)/CL_1 - 1/CL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{CL_1L_2} (f_3 - 1) = 0 \\
& \Rightarrow f_3 = 1
\end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη ανάδραση είναι η  $u = (f_1 \quad 0 \quad 1)x$  όπου  $f_1$  πραγματικός.

## 10.6 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Το κύκλωμα του σχήματος το οποίο απαρτίζεται από τα πηνία με χωρητικότητες  $C_1$ ,  $C_2$  στα άκρα των οποίων εφαρμόζονται οι τάσεις  $x_1$ ,  $x_2$ , την αυτεπαγωγή  $L$  η οποία διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $x_3$ , την αντίσταση  $R$ , τη διαταραχή  $q$  και τις πηγές  $u_1$  και  $u_2$ .



Σχήμα 10.6

Με χρήση των νόμων του Kirchoff έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$u_1 - x_1 + x_2 - u_2 - q - RC_1 \dot{x}_1 = 0$$



$$L\dot{x}_3 + x_2 - u_2 = 0$$

$$RC_2\dot{x}_2 = -u_1 + x_1 - x_2 + u_2 + q + Rx_3$$

και ισοδύναμα από το:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & \frac{-1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & \frac{-1}{RC_1} \\ \frac{-1}{RC_2} & \frac{1}{RC_2} \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \\ 0 \end{bmatrix} q$$

$$\text{με } A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & \frac{-1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & \frac{-1}{RC_1} \\ \frac{-1}{RC_2} & \frac{1}{RC_2} \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \text{ και } S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αναζητούμε ανάδραση  $u(t) = Fx(t)$ , έτσι ώστε το σύστημα να είναι απαλλαγμένο από τη διαταραχή, δηλαδή να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

α.  $(A + BF)V \subset V$  ή ισοδύναμα  $AV \subset V + B$

β.  $S \in V$

γ.  $V \subset \ker C$

Θεωρούμε σαν έξοδο του συστήματος:  $y = (0 \ 1 \ 0)x = Cx$ , οπότε  $\ker C =$

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Εκλέγοντας  $V_1 = \ker C$ , παρατηρούμε ότι  $S \notin V_1$ , άλλα  $S$  δεν ανήκει και σε κανένα υποσύνολο του  $V_1$ , επομένως δεν ισχύει η επιθυμητή ιδιότητα (β) και το πρόβλημα απαλοιφής διαταραχής δεν επιλύεται.

Παίρνουμε τώρα σαν έξοδο την τάση στα άκρα της αυτεπαγωγής:  $y = (0 \ 0 \ 1)x$ .

$$\text{Τότε έχουμε: } \ker C = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = V_2$$

Προφανώς ισχύει  $S \in V_2$ .

Ελέγχουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη (α) δηλαδή:  $AV_2 \subset V_2 + B$ . Ισοδύναμα, διαπιστώνουμε ότι

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \\ 0 \end{bmatrix} \in V_2 + \mathbf{B} \quad \text{και} \quad Ae_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{-1}{RC_2} \\ \frac{-1}{L} \end{bmatrix} \in V_2 + \mathbf{B}$$

Επομένως ο  $V_2$  είναι ο μεγαλύτερος (A,B)-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το  $\mathbf{S}$  και ικανοποιεί την  $V_2 \subset \ker C$ .

Έστω  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \mathbf{x}$  η ζητούμενη ανάδραση. Τότε:

$$A + BF = \begin{bmatrix} \frac{-1}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & \frac{-1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & \frac{-1}{RC_1} \\ \frac{-1}{RC_2} & \frac{1}{RC_2} \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}$$

Για  $R = C_1 = C_2 = L = 1$ , η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned} A + BF &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} - f_{21} - 1 & f_{12} - f_{22} + 1 & f_{13} - f_{23} \\ -f_{11} + f_{21} + 1 & -f_{12} + f_{22} - 1 & -f_{13} + f_{23} + 1 \\ f_{21} & f_{22} - 1 & f_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Θα πρέπει  $C(A + BF)\mathbf{S} = 0$ , από όπου προκύπτει:  $-f_{21} + f_{22} - 1 = 0$

Εξάλλου, θα πρέπει  $C(A + BF)^2\mathbf{S} = 0$  η οποία δίνει  $f_{23} = 0$  και  $f_{21} + f_{22} - 1 = 0$

Τελικά η ανάδραση παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

# Βιβλιογραφία

1. Ι. Τσινιάς, Άριστος Έλεγχος, σημειώσεις για το μάθημα «Μαθηματικός Βέλτιστος Έλεγχος», Ε.Μ.Π.
2. Ι.Τσινιάς, Σχεδίαση και ανάλυση συστημάτων ελέγχου, σημειώσεις για το μάθημα «Σχεδιασμός και Ανάλυση Συστημάτων Ελέγχου», Ε.Μ.Π.
3. Α.Ι. Βαρδουλάκης, Εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία σημάτων, συστημάτων και ελέγχου Τόμος Β': Μοντέρνα θεωρία ελέγχου, Τζιόλα, 2012.
4. Kemin Zhou, John C. Doyle, Keith Glover, Robust and Optimal Control, Prentice Hall, 1995
5. X. Hu, A. Lindquist et al, Chapter 2,3 , lecture notes «Geometric Control Theory», KTH Royal Institute of Technology.