Προθεσμιακές Διακυμάνσεις Εκτιμημένες από την Αγορά Παραγώγων

Κωνσταντίνος Γκιώνης

Διατμηματικών Προγραμμάτων Μεταπτυχιακών Σπουδών

"Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και την Οικονομία"

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Η εργασία κατατέθηκε για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδικευσης ΕΜΠ

Αθήνα 2014

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 4

1 Περίληψη 1ου Κεφαλαίου 8

2 Περίληψη 2ου Κεφαλαίου 12

3 Περίληψη 3ου Κεφαλαίου 16

Συμπεράσματα 21

Αναφορές 23

Εισαγωγή

Τα χαμηλότερα κόστη συναλλαγών, η ευκολία ανοικτών πωλήσεων (short selling) και η δημιουργία μόχλευσης είναι ανάμεσα στα κίνητρα για τα οποία πληροφορημένοι και έμπειροι επενδυτές προτιμούν την αγορά παραγώγων. Επιπλέον, η αγορά παραγώγων μας επιτρέπει να αντλήσουμε πληροφορίες για την μελλοντική κατάσταση ενός τίτλου, καθώς οι προβλέψεις των επενδυτών για τις μελλοντικές καταστάσεις του τίτλου ενσωματώνονται στις τιμές των αντίστοιχων παραγώγων. Συνεπώς, μπορεί να υποστηριχθεί, πως μια πλουσιότερη και ποιοτικότερη κλάση πληροφορίας δύναται να εξαχθεί από την αγορά παραγώγων έναντι της άμεσης αγοράς (spot market). Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιούμε τη πληροφορία αυτή για να τιμολογήσουμε προθεσμιακές διακυμάνσεις, να μελετήσουμε τις στατιστικές τους ιδιότητες και τελικώς να τις χρησιμοποιήσουμε ως εργαλείο πρόβλεψης για την πραγματική οικονομική δραστηριότητα.

Ο βασικός στόχος της εργασίας ήταν ο φοιτητής να έρθει σε επαφή με τη σύγχρονη έρευνα που γίνεται στα ποσοτικά οικονομικά (quantitative finance), χρησιμοποιώντας την εργασία των Bakshi, Panayotov, and Skoulakis (2011) ως το κύριο οδηγό. Ακολουθώντας τους, χρησιμοποιούμε μια επενδυτική θέση στην αγορά παραγώγων ούτως ώστε να κατασκευάσουμε τη χρονική διάρθρωση (term structure) των προθεσμιακών διακυμάνσεων που αφορούν τον δείκτη S&P 500.

Καλούμε *πραγματοποιθείσα διακύμανση* (realized variance) των αποδόσεων μιας υποκείμενης τιμής (με θετικές τιμές) S από τη στιγμή 0 έως t, την τετραγωνική μεταβολή της διαδικασίας $\log S$ τη στιγμή t. Ειδικότερα, αν η S περιγράφεται από μία διαδικασία χωρίς άλματα και έχει στιγμιαία διαδικασία διακύμανσης σ_t, τότε η πραγματοποιθείσα από τη στιγμή t μέχρί την $t+\tau$ είναι

$$\langle X \rangle_t^\tau = \int_t^{t+\tau} \sigma_u^2 du, \text{ όπου } X_t := \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

και με $\langle \cdot \rangle$ συμβολίζουμε τη τετραγωνική μεταβολή. Bakshi et al. (2011), για σταθερό προεξοφλητικό επιτόκιο (ουδέτερου κινδύνου - risk-free rate) επιτόκιο r^* και μέτρο ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{Q}$, θεωρούν την ακόλουθη απαίτηση (claim)

$$H_t^{t,\tau} = e^{-r^*\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left\{ e^{-\int_t^{t+\tau}\sigma_u^2 du} \middle| \mathcal{F}_t \right\},$$

για να ορίσουν τις *προθεσμιακές διακυμάνσεις* για χρόνους $t \in (t+\tau_1, t+\tau_2)$, με $\tau_1 < \tau_2$, ως

$$f_t^{\tau_1,\tau_2} := \ln H_t^{t,t_1} - \ln H_t^{t,t_2}$$

Είναι εμφανής η αντιστοιχία των προηγούμενων σχέσεων με τα ομόλογα που δεν περιέχουν κίνδυνο και τα αντίστοιχα προθεσμιακά επιτόκια που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$B_t^{t,\tau} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left\{ e^{-\int_t^{t+\tau} r_u^2 du} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \text{ and } g_t^{\tau_1,\tau_2} := \ln B_t^{t,t_1} - \ln B_t^{t,t_2}$$

για μία στιγμιαία διαδικασία μεταβαλλόμενου επιτοκίου r_t. Τα προθεσμιακά επιτόκια έχουν συχνά χρησιμοποιηθεί στην έρευνα των οικονομικών (μεταξύ άλλων βλ. Fama and Bliss, 1987; Campbell and Shiller, 1991; Cochrane and Piazzesi, 2005). Εξ όσων γνωρίζουμε δεν υπάρχει πρωτύτερη έρευνα από αυτήν των Bakshi et al. (2011), που να έχουν χρησιμοποιηθεί οι προθεσμιακές διακυμάνσεις για την αντιμετώπιση ερωτημάτων στα χρηματοοικονομικά.

Για να κατασκευάσουμε τη διάρθρωση των προθεσμιακών διακυμάνσεων, πρέπει πρώτα να τιμολογήσουμε την απαίτηση $H_t^{t,\tau}$. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε με μεγάλη λεπτομέρεια την δουλειά των Carr and Lee (2009b), και ειδικεύουμε τα αποτελέσματα τους όπως οι Bakshi et al. (2011) για να βρούμε

$$H_t^{t,\tau} = e^{-r^*\tau} E^{\mathbb{Q}} \left\{ \sqrt{\frac{8}{7}} \sqrt{\frac{S_{t+\tau}}{S_t}} \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{\sqrt{7}}{2} \ln\left(\frac{S_{t+\tau}}{S_t}\right)\right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}$$

Τέλος δείχνουμε πως αυτή η τιμολόγηση μπορεί να εκφραστεί ως ένα χαρτοφυλάκιο παραγώγων, σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$H_t^{t,\tau} = e^{-r\tau} + \int_{K>S_t} \omega[K] C_t^{\tau}[K] dk + \int_{K<S_t} \omega[K] P_t^{\tau}[K] dK$$

όπου

$$\omega[K] = \frac{\frac{8}{\sqrt{14}} \cos\left(\arctan(1/\sqrt{7}) + (\sqrt{7}/2)\ln(K/S_t)\right)}{\sqrt{S_t} K^{3/2}}$$

και $C_t^{\tau}[K]$, $P_t^{\tau}[K]$ είναι οι τιμές, τη στιγμή t, δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, που ωριμάζουν τη στιγμή $t+\tau$ και έχουν τιμή εξάσκησης K.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί και τον πυρήνα της εργασίας, χρησιμοποιούμε την παραπάνω σχέση για να κατασκευάσουμε μια χρονοσειρά 121 παρατηρήσεων, οι οποίες κυμαίνονται από τον Σεπτέμβρη του 1998 έως το Σεπτέμβρη 2008, για μια χρονική διάρθρωση προθεσμιακών διακυμάνσεων η οποία αποτελείται από ωριμάνσεις που αντιστοιχούν χοντρικά σε 19, 49, 79 και 109 ημέρες. Η παραπάνω τιμολόγηση ως το άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων πάνω σε συνεχείς ημιευθείες τιμών εξάσκησης εμπεριέχει πολλές προκλήσεις. Η πρώτη αφορά την συλλογή τιμών για κάθε ημέρα της χρονοσειράς, κάθε ωρίμανση και για όσο το δυνατόν περισσότερες τιμές εξάσκησης. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιήσαμε την βάση δεδομένων OptionMetrics.

Δεύτερον, καθώς δεν υπάρχουν διαθέσιμες τιμές των παραγώγων για όλες τις τιμές εξάσκησης, τα ολοκληρώματα πρέπει να εκτιμηθούν. Για να είναι στατιστικά ποιοτική η εκτίμηση πρέπει καταρχάς να καθαρίσουμε τα δεδομένα από τιμές που δεν είναι «δίκαιες», στη συνέχεια να εκτιμήσουμε την καμπύλη των τιμών ουδετέρου κινδύνου ως συνάρτηση των τιμών εξάσκησης και τέλος να ολοκληρώσουμε αριθμητικά. Πριν προχωρήσουμε στην υλοποίηση της μεθόδου που επιλέξαμε, παρουσιάσαμε αναλυτικά την αντίστοιχη βιβλιογραφία. Ειδικότερα, καθώς δεν υλοποιήσαμε σωστά κάποιες από τις μεθόδους με αποτέλεσμα να παράγουν χαμηλής ποιότητας αποτελέσματα, δοκιμάσαμε μια απλούστερη μεθόδου που εξ όσων γνωρίζουμε δεν έχει ξαναχρησιμοποιηθεί και από τα αποτελέσματα φαίνεται πως συμπεριφέρεται αρκετά καλά.

Συγκεκριμένα αφού καθαρίσουμε τα δεδομένα από μηδενικές τιμές, τιμές που αναφέρονται σε παράγωγα τα οποία δεν έχουν όγκους συναλλαγών ή ανοικτά συμβόλαια, αποκλείουμε τιμές που δημιουργούν ευκαιρίες για κέρδος μηδενικού ρίσκου (arbitrage) με το να παραβιάζουν την μονοτονία και τη κυρτότητα των τιμών ως προς τις τιμές εξάσκησης. Για τις εναπομείναντες τιμές και για κάθε μέρα και τιμή εξάσκησης δουλεύουμε ως εξής. Προσαρμόζουμε ένα κυβικό πολυώνυμο στο λογάριθμο των τιμών χρησιμοποιώντας το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης, όπου χρησιμοποιούμε ως βάρη τις τιμές vega των παραγώγων για να αντιμετωπίσουμε το θόρυβο που εμπεριέχεται στης τιμές που αντιστοιχούν στις λεγόμενες κατά πολύ out-of-the-money και κοντά στις in-the money τιμές.

Αφού υπολογίσουμε τις τιμές $H_t^{t,\tau}$ για κάθε μέρα και ωρίμανση, ο υπολογισμών των χρονοσειρών των προθεσμιακών συμβολαίων είναι τετριμμένος. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο ξεκινάμε με το να μελετήσουμε τις στατιστικές ιδιότητες των προθεσμιακών διακυμάνσεων. Για να εξοικειωθεί ο αναγνώστης με τη θεωρία από την οποία αντλούμε τα συμπεράσματα μας, παρουσιάζουμε συνοπτικά τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των χρονοσειρών καθώς και τα πιο συχνώς χρησιμοποιούμενα μοντέλα. Βρίσκουμε πως δεν υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις έναντι της στασιμότητας (stationarity) των χρονοσειρών με αποτέλεσμα να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για στατιστικές προβλέψεις. Επίσης, αφού δοκιμάσαμε διάφορα μοντέλα και τα συγκρίναμε με τα συνήθη κριτήρια πληροφορίας καταλήξαμε, όπως οι Bakshi et al. (2011), πως το μοντέλο ARMA(1,1)-GARCH(1,1) είναι κατάλληλο για τις προθεσμιακές διακυμάνσεις.

Σαν εφαρμογή, ακολουθώντας τους Bakshi et al. (2011), ελέγχουμε κατά πόσο οι προθεσμιακές διακυμάνσεις μπορούν να προβλέψουν τη πραγματική οικονομική δραστηριότητα, η οποία θεωρήσαμε πως εκφράζεται από τη μη αγροτική μισθοδοσία (non-farm payroll) και την βιομηχανική παραγωγή χρησιμοποιώντας ως επεξηγηματικές μεταβλητές τις κατασκευασμένες προθεσμιακές διακυμάνσεις και τη κλίση της απόδοσης των εντόκων γραμματίων του δημοσίου (treasury bills), η οποία υπολογίστηκε σαν τη διαφορά των δεκαετών και τριμηνιαίων ομολόγων.

Ο προγραμματισμός στην R (Core Team) (2013) έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη συγγραφή της εργασίας. Επίσης, οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την επεξεργασία των δεδομένων και για τη στατιστική ανάλυση έχουν το δικό τους ενδιαφέρον και έτσι στο παράρτημα παρατίθεται ο κώδικας συνοδευόμενος από εκτενή σχολιασμό. Τέλος η διπλωματική εργασία συγγράφτηκε στα αγγλικά και το παρόν κείμενο αποτελεί την εκτενή ελληνική περίληψη που τη συνοδεύει.

1 Περίληψη 1ου Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε την δουλειά των Carr and Lee (2009b) ώστε να τιμολογήσουμε τις προθεσμιακές διακυμάνσεις. Η ελληνική μετάφραση περιέχει τους ορισμούς και τα σχετικά θεωρήματα. Για εκτενή σχολιασμό και τις σχετικές αποδείξεις παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο αγγλικό κείμενο.

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$, όπου $\mathcal{T} = [0, +\infty] \subset \mathbb{R}$, ένας χώρος πιθανότητας με διήθηση (filtration) ο οποίος ικανοποιεί τις συνήθης συνθήκες, δηλαδή

- Ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ είναι πλήρης.
- Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ περιέχει όλα τα σύνολα $\mathcal{F}$ μηδενικής πιθανότητας.
- Η διήθηση $\mathcal{F}_t$ είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή $\forall\, t \in \mathcal{T}$ η σ-άλγεβρα $\mathbb{F}_{t+} \equiv \bigcap_{\epsilon>t} \mathcal{F}_\epsilon$ είναι ίση με την $\mathcal{F}_t$.

Συμβολίζουμε με S_t τη τιμή του υποκείμενου αγαθού τη στιγμή t και υποθέτουμε πως ικανοποιεί την ακόλουθη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ)

$$dS_t = \sigma_t S_t dW_t, \text{ με } S_0 > 0 \quad \text{σ.β.} \tag{1}$$

για μια $(\mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$-κίνηση Brown W_t και την $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία σ_t, η οποία είναι τέτοια ώστε

$$\int_0^T \sigma_t^2 dt < m \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Με $\mathbb{Q}$ συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας ουδετέρου ρίσκου. Έτσι για μια συνάρτηση απόδοσης (payoff function) F ($\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη) και για ένα συμβόλαιο Ευρωπαικού τύπου που της αντιστοιχεί και λήγει τη στιγμή T, η "δίκαιη" αξία του συμβολαίου τη στιγμή t να είναι ίση με

$$V(t) = \mathbb{E}_t^Q[F(S_T)] \equiv \mathbb{E}^Q[F(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Επίσης θεωρούμε τη διαδικασία του λογαρίθμου των αποδόσεων

$$X_t := \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \log(S_t) - \log(S_0)$$

Αποδεικνύεται πως

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_u^2 du \tag{3}$$

όπου με $\langle \cdot \rangle$ συμβολίζουμε τη τετραγωνική μεταβολή.

Στόχος μας είναι να τιμολογήσουμε τη ποσότητα $\exp(\lambda \langle X \rangle_T)$, για $\lambda \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε στη συνέχεια να μπορούμε να τιμολογήσουμε τις προθεσμιακές διακυμάνσεις. Επίσης ορίζουμε την συνάρτηση Black-Scholes ως

$$F^{BS}(s, 0, \omega) := F(s), \quad \text{for } v = 0 \tag{4}$$

για ένα αγαθό με μηδενικό κίνδυνο και

$$F^{BS}(s, v, \omega) := \int_0^\infty F(sy, \omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi} v y} e^{-(\ln(y) + v^2/2)^2/(2v^2)} dy, \quad \text{for } v > 0 \tag{5}$$

για κάποιο που εμπεριέχει κίνδυνο. Ο πυρήνας του ολοκληρώματος αντιστοιχεί σε μια λογαριθμική κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = -v^2/2$ και $\sigma = v$. Σημειώνουμε πως το s στην F^{BS} αντιστοιχεί στη τρέχουσα τιμή του υποκείμενου αγαθού και η s στην F αντιστοιχεί στη τιμή που μπορεί να λάβει το αγαθό στη λήξη, με την έννοια πως για κάθε $y \in [0, \infty]$ ο όρος sy είναι μία από τις πιθανές τιμές του αγαθού στη λήξη. Προφανώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση Black-Scholes για να τιμολογήσουμε προϊόντα των οποίον ο υποκείμενος τίτλος περιγράφεται από την (1). Αν υποθέσουμε πως οι S_t και σ_t είναι εξαρτημένες τότε η τιμολόγηση τους δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1 (Mixing Formula). *Υποθέστε πως η μη ανεξαρτησία των S_t και σ_t εκφράζεται από την ακόλουθη ΣΔΕ*

$$dS_t = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_t S_t dW_{1t} + \rho \sigma_t S_t dW_{2t} \tag{6}$$

όπου $|\rho| \leq 1$, οι W_1 και W_2 είναι $\mathcal{F}_t$-κινήσεις brown, οι σ_t και W_2 είναι προσαρμοσμένες στην $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ και οι $\mathcal{H}_t$ και $\mathcal{F}_T^{W_1}$ να είναι ανεξάρτητες. Τότε

$$\mathbb{E}_t^Q[F(S_T)] = \mathbb{E}_t^Q \left[F^{BS} \left(S_t M_{t,T}(\rho),\, \bar{\sigma}_{t,T} \sqrt{1 - \rho^2} \right) \right] \tag{7}$$

όπου η σχέση $F^{BS}(\cdot, \cdot)$ περιγράφεται από τις (4)-(5),

$$M_{t,T}(\rho) := \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} \int_t^T \sigma_u^2 du + \rho \int_t^T \sigma_u dW_{2u} \right)$$

και

$$\bar{\sigma}_{t,T} := \left(\int_t^T \sigma_u^2 du \right)^{1/2}$$

Παρατηρήστε πως η παραπάνω τιμολόγηση εξαρτάται από την παράμετρο ρ και έτσι η τιμή του παραγώγου που αντιστοιχεί στην συνάρτηση $F(\cdot)$ θα άλλαζε τιμή ανάλογα με το πόσο εξαρτημένες είναι οι διαδικασίες S_t και σ_t. Αν αναπτύξουμε την (7) σε σειρά Taylor θα βρούμε πως

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t^Q[F(S_T)] &= \mathbb{E}_t^Q\left[F^{BS}\left(S_t M_{t,T}(\rho),\, \bar{\sigma}_{t,T}\sqrt{1-\rho^2}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_t^Q\left[F^{BS}(S_t,\, \bar{\sigma}_{t,T})\right] + \rho S_t \mathbb{E}_t^Q\left[\frac{\partial F^{BS}(S_t,\, \bar{\sigma}_{t,T})}{\partial \sigma}\int_t^T \sigma_u dW_{2u}\right] + O(\rho^2)\end{aligned}$$

Έτσι αν ο όρος $\frac{\partial F^{BS}(S_t,\bar{\sigma}_{t,T})}{\partial \sigma}$ είναι ίσος με μια $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη σταθερή συνάρτηση, ο δεύτερος όρος θα μηδενίζεται και η τιμολόγηση θα εξαρτάται από την παράμετρο ρ μόνο κατά $O(\rho^2)$.

Ορισμός 1. *Λέμε πως μια συνάρτηση απόδοσης F είναι πρώτης τάξης ρ-ουδέτερη ή ρ-άνοση ή συσχετικά-ουδέτερη ή συσχετικά-άνοση τη στιγμή $t < T \in \mathcal{T}$, αν υπάρχει $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη συνάρτηση c, ώστε*

$$\frac{\partial F^{BS}}{\partial s}(S_t, \sigma) = c, \quad \forall\, \sigma \geq 0$$

σχεδόν βεβαίως.

Αν υποθέσουμε πως οι S_t και σ_t είναι ανεξάρτητες τότε μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο

Πρόταση 2. *Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{C}$ και $t \in [0, T] \subset \mathcal{T}$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda \langle X \rangle_T}\right] = e^{\lambda \langle X \rangle_t}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[(S_T/S_t)^{1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2\lambda}}\right] \tag{8}$$

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να τιμολογήσουμε την $e^{\lambda \langle X \rangle_T}$ τιμολογώντας μια δύναμη της τιμής (S_T/S_t). Συγκεκριμένα μας δίνει δύο τέτοιες εκφράσεις. Οι Carr and Lee (2009a) δείχνουν πως η ανεξαρτησία των διαδικασιών S_t και σ_t υπονοεί την ακόλουθη σχέση,

$$\mathbb{E}_t^Q\left[f\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\right] = \mathbb{E}_t^Q\left[\frac{S_T}{S_t} f\left(\frac{S_t}{S_T}\right)\right] \tag{9}$$

η οποία καλείται put-call symetry και σύμφωνα με την οποία μπορούμε να λάβουμε μια άπειρη οικογένεια ισοδύναμων τιμολογήσεων για την $e^{\lambda \langle X \rangle_T}$. Από όλες αυτές επιλέγουμε μία η οποία είναι συσχετικά-ουδέτερη έτσι ώστε σε περίπτωση που οι διαδικασίες S_t και σ_t είναι εξαρτημένες, η τιμολόγηση θα εξαρτάτε από την συσχέτιση αυτή μόνο κατά $O(\rho^2)$.

Πρόταση 3. *Για κάθε* $\lambda \in \mathbb{C}$ *και* $t \in [0, T] \subset \mathcal{T}$,

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda \langle X \rangle_T}\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[G_{exp}(S_T, S_t, \langle X \rangle_t; \lambda)] \tag{10}$$

όπου

$$G_{exp}(S, u, q; \lambda) := e^{\lambda q}[\theta_+(S/u)^{p+} + \theta_-(S/u)^{p-}]$$

και

$$\theta_\pm(\lambda) := \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{1+8\lambda}}, \qquad p_\pm(\lambda) := \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1+8\lambda}}$$

η συνάρτηση αποδόσεων $G(S_T) := G_{exp}(S_T, S_t, \langle X \rangle_t; \lambda)$ *είναι συσχετικά ουδέτερη.*

Στη συνέχεια για ειδικεύουμε το αποτέλεσμα για $\lambda = 1$ ώστε να βρούμε την συσχετικά-ουδέτερη τιμολόγηση για την $e^{-\langle X \rangle_T}$.

Πόρισμα 1. *Η συσχετικά-ουδέτερη συνάρτηση απόδοση της* S_T *που αντιστοιχεί στη ποσότητα* $e^{-\langle X \rangle_T}$ *τη στιγμή* $t < T \in \mathcal{T}$ *είναι*

$$G_t(S_T) = \sqrt{\frac{8}{7}}\sqrt{\frac{S_T}{S_t}} \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{\sqrt{7}}{2}\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\right) \tag{11}$$

Έτσι σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση και το πόρισμα που την ακολουθεί εκτείνουμε τη τιμολόγηση της $e^{-\langle X \rangle_T}$ σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από δικαιώματα αγοράς και πώλησης.

Πρόταση 4. *Έστω* $F \in C^2(\mathbb{R})$, *δηλαδή* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Έστω επίσης* $t, T \in \mathcal{T}$ *ώστε* $t < T$. *Τότε*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^Q[e^{-r\tau}F(S_T)] = e^{-r\tau}F(S_t) + F'(S_t)[C_t(S_t) + P_t(S_t)] + \\ \int_{S_t}^{\infty} F''(K)C_t(K)dK + \int_0^{S_t} F''(K)P_t(K)dK \end{aligned} \tag{12}$$

όπου $\tau = T - t$ *και* $C_t(x), P_t(x)$ *είναι οι τιμές κατά τη στιγμή* t *ενός δικαιώματος αγοράς και πώλησης αντίστοιχα που λήγουν τη στιγμή* T *και έχουν τιμή εξάσκησης* x.

Πόρισμα 2. *Η συνάρτηση απόδοσης* (11) *εκτείνεται ως ακολούθως*

$$\mathbb{E}_t^Q[e^{-r\tau}G_t(S_T)] = e^{-r\tau} + \int_{K>S_t} \omega[K]C_t[K]dk + \int_{K<S_t} \omega[K]P_t[K]dK \tag{13}$$

όπου

$$\omega[K] = \frac{\frac{8}{\sqrt{14}}\cos\left(\arctan(1/\sqrt{7}) + (\sqrt{7}/2)\ln(K/S_t)\right)}{\sqrt{S_t}K^{3/2}} \tag{14}$$

2 Περίληψη 2ου Κεφαλαίου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε έναν τρόπο για να τιμολογήσουμε εκθετικά συμβόλαια Ευρωπαϊκού τύπου της πραγματοποιθείσας μεταβλητότητας. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον συμβολισμό των Bakshi et al. (2011), δείξαμε πως η τιμή τη στιγμή t της

$$H_t^{(t,n)} = \int_t^{t+\tau_n} \sigma_u^2 du \tag{15}$$

είναι

$$H_t^{(t,n)} = e^{-r\tau_n} + \int_{K>S_t} \omega[K] C_t^{(n)}[K] dK + \int_{K<S_t} \omega[K] P_t^{(n)}[K] dK \tag{16}$$

όπου r είναι το σταθερό προεξοφλητικό επιτόκιο, $C_t^{(n)}[K]$ και $P_t^{(n)}[K]$ είναι οι τιμές κατά τη στιγμή t Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης που λήγουν τη στιγμή $t+\tau_n$ με τιμή εξάσκησης K, και

$$\omega[K] = -\frac{8}{\sqrt{14}} \frac{\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{\sqrt{7}}{2}\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)\right)}{\sqrt{S_t} K^{3/2}} \tag{17}$$

Υποθέτουμε, εξ ορισμού, ότι $\tau_n = 0$, $H_t^{(t,0)} = 1$. Στο κεφάλαιο αυτό υπολογίζουμε τις τιμές των παραπάνω ποσοτήτων για τον δείκτη S&P 500. Ειδικότερα υπολογίζουμε τη (16) για τη τελευταία ημέρα διαπραγμάτευσης για κάθε μήνα από το Σεπτέμβριο του 1998 έως το Σεπτέμβριο του 2008 (121 μήνες) και για τ_n περίπου ίσο με 19, 49, 79 και 109 ημέρες. Έπειτα με τις τιμές

$$H_t^{(t,n)}, \quad \text{for } t = 1, \dots, T = 121, \text{ and } n = 1, 2, 3, 4 \tag{18}$$

κατασκευάζουμε τη χρονοσειρά των προθεσμιακών διακυμάνσεων

$$\mathbf{f}_t \equiv \begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ f_t^{(2)} \\ f_t^{(3)} \\ f_t^{(4)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \ln H_t^{(t,0)} - \ln H_t^{(t,1)} \\ \ln H_t^{(t,1)} - \ln H_t^{(t,2)} \\ \ln H_t^{(t,2)} - \ln H_t^{(t,3)} \\ \ln H_t^{(t,3)} - \ln H_t^{(t,4)} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Σημειώστε πως αφού $H_t^{(t,0)} = 1$ τότε $y_t^{(1)} = -\ln H_t^{t,1}$.

Τα δεδομένα για τις τιμές των παραγώγων τις κατεβάσαμε από την βάση δεδομένων OptionMetrics. Συγκεκριμένα κατεβάσαμε, εκτελώντας την κατάλληλη ερώτηση στη διαδικτυακή διαπροσωπία του Wharton Research Data Services (WRDS), ένα αρχείου τύπου csv με 1,568,099 παρατηρήσεις. Οι παρατηρήσεις αφορούσαν το διάστημα 01/09/1998 έως 31/09/2008. Η κάθε παρατήρηση περιείχε την ημερομηνία διαπραγμάτευσης, την ημερομηνία λήξης, την υψηλότερη τιμή προσφοράς, τη χαμηλότερη τιμή ζήτησης, τον όγκο συναλλαγών, το πλήθος ανοικτών συμβολαίων και τη τιμή εξάσκησης πολλαπλασιασμένη με 1000. Επιπλέον, περιείχε την τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility) και τις τιμές Delta, Gamma, Theta και Vega/Kappa των παραγώγων. Φορτώσαμε τα δεδομένα στην R και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το ημερολόγιο του NYSE κρατήσαμε τις παρατηρήσεις που αναφέρονται στη τελευταία μέρα διαπραγμάτευσης κάθε μήνα, καταλήγοντας με 74,592 παρατηρήσεις, οι οποίες αναφέρονται σε 121 διαφορετικές ημέρες. Επιπλέον για της ημέρες αυτές κατεβάσαμε και τη τιμή του δείκτη S&P 500 από τη βάση δεδομένων Centre for Research in Security Prices (CRSP), πάλι από την διαδικτυακή διαπροσωπία του WRDS.

Θεωρήσαμε πως το διατραπεζικό επιτόκιο προσφοράς Λονδίνου (LIBOR) σε αμερικανικά δολάρια (USD) αναπαριστά το προεξοφλητικό επιτόκιο. Από διάφορες πηγές συλλέξαμε τη χρονική διάρθρωση των επιτοκίων για τις 121 ημέρες. Συγκεκριμένα για κάθε ημέρα, η χρονική διάρθρωση αναφέρεται στα επιτόκια δανεισμού μίας ημέρας, μίας εβδομάδας, δύο εβδομάδων και από έναν έως δώδεκα μήνες. Τα LIBORs είναι επιτόκια ετήσιου απλού ανατοκισμού και έτσι ο τόκος για τη πληρωμή ενός δολλαρίου σε t χρόνο στο μέλλον είναι

$$r = 1 \times \left(\frac{\frac{\text{bbalibor}}{\text{rate}}}{100} \right) \times \left(\frac{\frac{\text{Number of days}}{\text{until t}}}{360} \right)$$

όπου το bbalibor αντικαθίσταται κάνοντας γραμμική παρεμβολή στα LIBORs των οποίων οι λήξεις περικλείουν τη στιγμή t. Στη συνέχεια μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους συντελεστές προεξόφλησης

$$\text{discount} = \frac{1}{1+r}$$

και τα αντίστοιχα προεξοφλητικά επιτόκια συνεχούς ανατοκισμού

$$r_c = \left(\frac{360}{\frac{\text{Number of days}}{\text{until expiration}}} \right) \ln \left(\frac{1}{\text{discount}} \right)$$

Έτσι έχοντας συμπεριλάβει το ύψος του δείκτη και το προεξοφλητικό επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού για κάθε ημέρα, προχωρήσαμε στο "καθαρισμό" των δεδομένων. Συγκεκριμένα αποβάλλαμε δεδομένα με τιμή προσφοράς ίση με το μηδέν, με μηδενικό όγκο ανοικτών συμβολαίων, με μηδενικό όγκο συναλλαγών και με τεκμαρτή μεταβλητότητα μεγαλύτερη του 100% ή μη διαθέσιμη.

Ακολουθώντας τους Jiang and Tian (2005) ορίσαμε τα in-the-money (ITM) δικαιώματα ως τα δικαιώματα αγοράς με τιμή εξάσκησης μικρότερα του 97% της τιμής του υποκείμενου αγαθού και ως τα δικαιώματα πώλησης με τιμή εξάσκησης μεγαλύτερη του 103% της τιμής του υποκείμενου αγαθού. Στη συνέχεια αποβάλλαμε τις παρατηρήσεις οι οποίες αναφέρονται σε ITM δικαιώματα. Τέλος διώξαμε τις τιμές που παραβιάζουν την μονοτονία και την κυρτότητα ως προς τις τιμές εξάσκησης. Για το πως ελέγχουμε τη μονοτονία και τη κυρτότητα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο αγγλικό κείμενο.

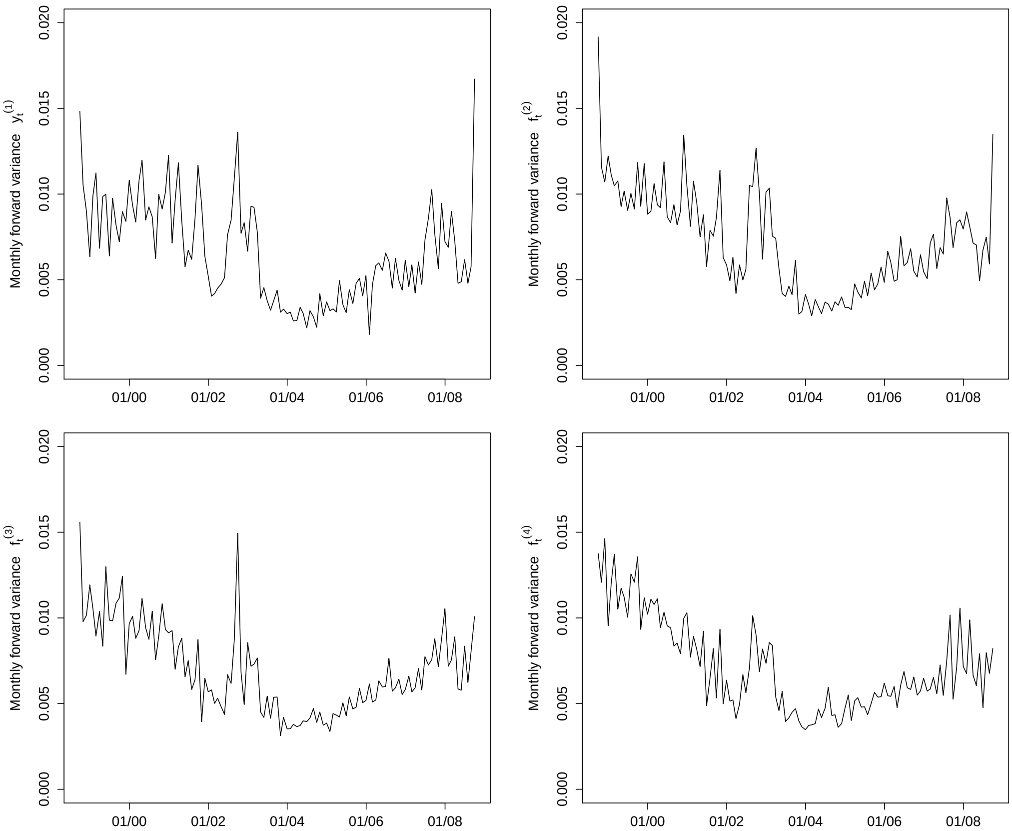
Για να υπολογίσουμε τις ποσότητες που περιγράφονται από την εξίσωση (18) χρειαζόμαστε για κάθε ημέρα τιμές παραγώγων που λήγουν έπειτα από 19, 49, 79 και 109 ημέρες. Προσπαθήσαμε να παρεμβάλουμε όσο το δυνατόν λιγότερο και έτσι βασισμένη στο δείγμα μας θεωρήσαμε πως

$$\tau_1 \in [16,\, 23], \quad \tau_2 \in [43,\, 53], \quad \tau_3 \in [78,\, 85], \quad \tau_4 \in [107,\, 114]$$

Όλες οι ημέρες, εκτός μίας, είχαν τιμές παραγώγων που λήγουν μέσα στα τρία πρώτα διαστήματα. Για το τελευταίο διάστημα έλλειπαν πολλές παρατηρήσεις. Για να καλύψουμε τις ελλείψεις αυτές παρεμβάλαμε ως εξής. Καταρχάς αποβάλλαμε κάθε τιμή εξάσκησης η οποία δεν έχει τουλάχιστον δύο ωριμάνσεις ή οι ωριμάνσεις της δεν περιέχουν την επιθυμητή έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε πως θα παρεμβάλουμε και δεν θα προεκτείνουμε (extrapolation). Για κάθε τιμή εξάσκησης, από τις εναπομείναντες, προσαρμόζουμε μια καμπύλη στις τεκμαρτές μεταβλητότητες των παραγώγων συναρτήσει των ωριμάνσεων. Συγκεκριμένα αν υπήρχαν λιγότερες από τρεις ωριμάνσεις προσαρμόσαμε μια φυσική κυβική spline, διαφορετικά προσαρμόσαμε μια ομαλοποιημένη spline με την παράμετρο ομαλοποίησης να διαλέγεται αυτομάτως από την R. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στη σχετική ενότητα του αγγλικού κειμένου.

Έχοντας τώρα παρατηρήσεις για κάθε ημέρα και κάθε διάστημα ωρίμανσης υπολογίζουμε τις ποσότητες (18). Η μέθοδος που προτείνουμε βασίζεται από τις θεμελιώδεις ιδιότητες της μονοτονίας και της κυρτότητας των τιμών ως προς τις τιμές εξάσκησης. Αρχικά δοκιμάσαμε να προσαρμόσουμε ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης. Η προσαρμογή αυτή δεν δούλεψε καλά, καθώς η κυρτότητα των τιμών δεν είναι σταθερή ως προς τις τιμές εξάσκησης και ειδικότερα αλλάζει ιδιαιτέρως γρήγορα καθώς προχωράμε στις κατά πολύ out-of-the money περιοχές. Στη συνέχεια δοκιμάσαμε να προσαρμόσουμε ένα κυβικό πολυώνυμο αλλά παρατηρήσαμε προβλήματα υπερπροσαρμογής (overfitting). Για να ελαττώσουμε το ρυθμό μεταβολής της κυρτότητας προσαρμόσαμε το τετραγωνικό πολυώνυμο στους λογαρίθμους των τιμών. Επιπλέον, για να αντιμετωπίσουμε λάθη αριθμητικών προσεγγίσεων λόγο του εκθετικού μετασχηματισμού και για να υπάρχει ομογένεια στο πλέγμα των τιμών ως προς τις διαφορετικές ωριμάνσεις, παρεμβάλαμε ως προς τις τιμές εξάσκησης διαιρεμένες με την τιμή του υποκείμενου αγαθού αντί ως προς τις τιμές εξάσκησης.

Σχήμα 1: Η χρονοσειρά των προθεσμιακών διακυμάνσεων για τη τελευταία μέρα διαπραγμάτευσης των μηνών που ξεκινούν από το Σεπτέμβρη του 1998 και καταλήγουν στο Σεπτέμβρη του 2008. Το υποκείμενο αγαθό είναι ο δείκτης S&P 500.

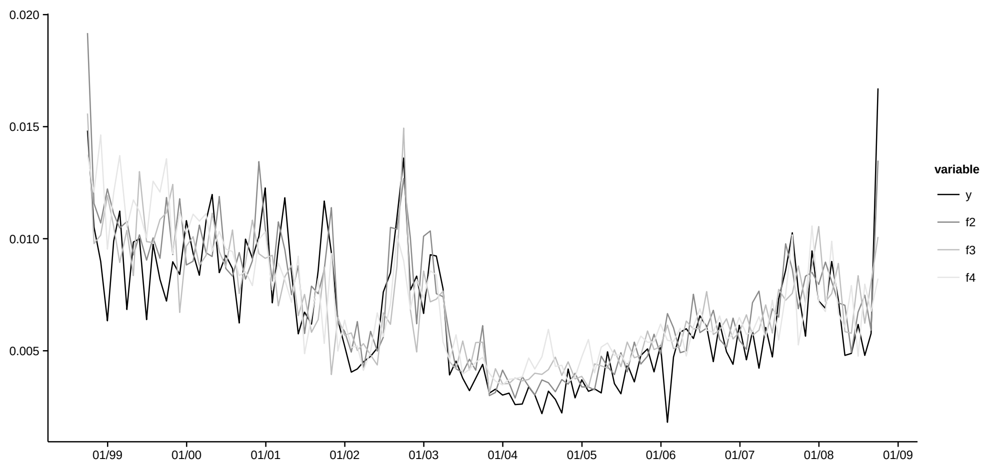


Τέλος για να αντιμετωπίσουμε το θόρυβο στις OTM και ITM τιμές χρησιμοποιήσαμε ως βάρη στο μοντέλο παλινδρόμησης τις τιμές vega των παραγώγων. Συγκεκριμένα οι ITM παρατηρήσεις έλαβαν τα βάρη των συμμετρικών OTM. Δηλαδή η πρώτη ITM με τη τελευταία OTM, η δεύτερη ITM με τη προτελευταία και ούτω κάθε εξής. Οι ουρές προσεγγίστηκαν με το να πολλαπλασιάσουμε με 1.02 τη μέγιστη τιμή του x άξονα για τα δικαιώματα αγοράς και με 0.97 την ελάχιστη τιμή του x άξονα στα δικαιώματα πώλησης. Η ακρίβεια του πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε ήταν 0.001, η οποία μεταφράζεται σε περίπου ένα δολάριο στο χώρο των τιμών εξάσκησης. Τέλος για να πραγματοποιήσουμε την ολοκλήρωση χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο του τραπεζίου. Στη συνέχεια προχωρήσαμε στον υπολογισμό των προθεσμιακών διακυμάνσεων οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα-1.

3 Περίληψη 3ου Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τις στατιστικές ιδιότητες των προθεσμιακών διακυμάνσεων του Σχήματος-2 που κατασκευάσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο και στη συνέχεια ελέγχουμε κατά πόσο μπορούν να προβλέψουν τη πραγματική οικονομική δραστηριότητα.

Σχήμα 2: Οι χρονοσειρές των προθεσμιακών διακυμάνσεων στο ίδιο γράφημα. Το $y_t^{(1)}$ έχει μετατραπεί σε ένα επιτόκιο 30-ημέρων (αντί 19-ημερών που είναι).

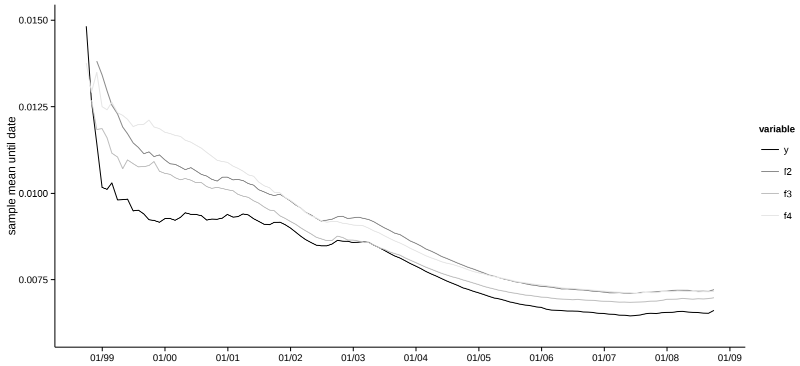


Στον Πίνακα-2 έχουμε συγκεντρωμένα τα στοιχεία για τη στατιστική συμπεριφορά των προθεσμιακών διακυμάνσεων. Σύμφωνα με το Πλαίσιο-A παρατηρούμε πως τα στοιχειά της χρονικής διάρθρωσης των προθεσμιακών διακυμάνσεων παρουσιάζουν υψηλές συσχετίσεις με αποτέλεσμα να περιέχουν σε μεγάλο βαθμό την ίδια πληροφορία. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με το αποτέλεσμα των Bakshi et al. (2011).

Σύμφωνα με τις αυτοσυσχετίσεις στο Πλαίσιο B παρατηρούμε πως η μέγιστη αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης είναι 0.758. Επιπλέον η αργή ελάττωση των αυτοσυσχετίσεων υπαινίσσονται πως ένα ARMA(p,q) μοντέλο θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Ακολουθώντας τους Bakshi et al. (2011) εξετάσαμε διάφορα ARMA-GARCH μοντέλα, με τον συντελεστή GARCH να μην συμπεριλαμβάνεται πάντα. Κάποια από τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα-3.2. Καταλήξαμε πως το μοντέλο ARMA(1,1)-GARCH(1,1) είναι βέλτιστο για τις προθεσμιακές διακυμάνσεις. Στο Πλαίσιο D παρουσιάζουμε τις εκτιμημένες τιμές των συντελεστών του μοντέλου.

Τέλος βάση του Σχήματος-3 και λαμβάνοντας υπόψιν το μικρό μέγεθος του

Σχήμα 3: Γράφημα εργοδικού μέσου. Το $y_t^{(1)}$ έχει μετατραπεί σε μηνιαίο επιτόκιο. Σημειώνουμε επίσης πως το δείγμα μας είναι μικρό. Περιέχει 121 παρατηρήσεις.



Πίνακας 1: Τιμές των κριτηρίων πληροφορίας για δύο ARMA-GRACH μοντέλα. Το ARMA(1,1) – GARCH(1,1) καλύτερο σύμφωνα με όλα τα κριτήρια.

	$y_t^{(1)}$	$f_t^{(2)}$	$f_t^{(3)}$	$f_t^{(4)}$
ARMA(1,1) - GARCH(1,1) model				
Akaike	-10.088	-9.373	-9.767	-9.988
Bayes	-9.973	-9.257	-9.652	-9.872
Shibata	-10.091	-9.376	-9.771	-9.991
Hannan-Quinn	-10.041	-9.326	-9.721	-9.941
ARMA(2,2) - GARCH(2,2) model				
Akaike	-9.963	-9.258	-9.681	-9.815
Bayes	-9.755	-9.050	-9.473	-9.607
Shibata	-9.974	-9.268	-9.691	-9.825
Hannan-Quinn	-9.879	-9.174	-9.596	-9.730

[α] Fittings and calculations by the Ghalanos (2014) package.

δείγματος μας, παρατηρούμε πως δεν υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις έναντι της στασιμότητας. Επιπλέον με τον έλεγχο Dickey-Fuller, που βρίσκεται στο Πλαίσιο C παρατηρούμε πως η υπόθεση της μη στασιμότητας μπορεί να απορριφθεί. Τέλος στο τελευταίο πλαίσιο παρέχουμε το τυπικό σφάλμα του συντελεστή AR σαν περαιτέρω ενδείξεις για τη συμπεριφορά του όρου AR κοντά στη μονάδα.

Έχοντας λάβει ενδείξεις υπέρ της χρησιμοποίησης των προθεσμιακών διακυμάνσεων ως επεξηγηματικές μεταβλητές, προχωρήσαμε στο να ελέγξουμε κατά πόσο προβλέπουν τη πραγματική οικονομική δραστηριότητα σύμφωνα με τα ακόλουθα γραμμικά μοντέλα

$$g_{t+1}^{\text{payroll}} = a + b'\mathbf{f}_t + c\,\text{yslope}_t + \epsilon_{t+1} \tag{20}$$

$$g_{t+1}^{\text{indus prod}} = a + b'\mathbf{f}_t + c\,\text{yslope}_t + \epsilon_{t+1} \tag{21}$$

Πίνακας 2: Στατιστικές ιδιότητες των προθεσμιακών διακυμάνσεων.

	$y_t^{(1)}$	$f_t^{(2)}$	$f_t^{(3)}$	$f_t^{(4)}$
Πλαίσιο A: *Cross-correlations*				
$y_t^{(1)}$	1.000			
$f_t^{(2)}$	0.833	1.000		
$f_t^{(3)}$	0.794	0.815	1.000	
$f_t^{(4)}$	0.756	0.833	0.761	1.000
Πλαίσιο B: *Autocorrelations*				
ACF(1)	0.641	0.686	0.664	0.758
ACF(2)	0.534	0.637	0.622	0.762
ACF(3)	0.527	0.633	0.703	0.757
ACF(4)	0.440	0.529	0.558	0.670
ACF(5)	0.439	0.522	0.568	0.668
ACF(6)	0.449	0.516	0.591	0.636
Πλαίσιο C: *Unit root test – Phillips-Perron: null is I(1)*				
Dickey-Fuller	-4.17	-5.02	-5.49	-4.63
p-vlaue	0.01	0.01	0.01	0.01
Πλαίσιο D: *ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model parameter estimates*				
ARMA(1,1)				
AR	0.994	0.993	0.995	0.989
MA	-0.426	-0.453	-0.626	-0.609
GARCH(1,1)				
Const.	0.000	0.000	0.000	0.000
ARCH	0.003	0.000	0.377	0.521
GARCH	0.924	0.000	0.607	0.377
Πλαίσιο E: *Near-unit-root behavior under ARMA(1,1)-GARCH(1,1)*				
AR st error	0.018	0.071	0.000	0.218

[α] Ο έλεγχος Phillip-Perron υπολογίστηκε με το βασικό πακέτο της R. The ARMA(1,1)-GARCH(1,1) προσαρμόστηκε με το πακέτο Ghalanos (2014).

Συγκεκριμένα ελέγχουμε κατά πόσο οι προθεσμιακές διακυμάνσεις προβλέπουν τη μη αγροτική μισθοδοσία και την βιομηχανική παραγωγή αντίστοιχα. Στον Πίνακα-3 βρίσκονται συγκεντρωμένα τα αποτελέσματα. Για κάθε μία από τις μεταβλητές απόκρισης έχουμε προσαρμόσει δύο μοντέλα. Ένα το οποίο περιέχει μονάχα τις προθεσμιακές διακυμάνσεις και ένα το οποίο περιλαμβάνει και τη κλίση της απόδοσης των εντόκων γραμματίων του δημοσίου (treasury bills), η οποία συμβολίζεται με yslope$_t$ και υπολογίστηκε σαν τη διαφορά των δεκαετών και τριμηνιαίων ομολόγων. Η yslope$_t$ χρησιμοποιείται για τη πρόβλεψη της πραγματικής οικονομικής δραστηριότητας, όπως για παράδειγμα έχει χρησιμοποιηθεί από τους Estrella and Hardouvelis (1989), και έτσι τη συμπεριλαμβάνουμε για να δούμε αν οι προθεσμιακές διακυμάνσεις μπορούν να προσφέρουν διαφορετική πληροφορία.

Για να αποφασίσουμε ποια μέθοδο προσαρμογής θα επιλέξουμε ελέγξαμε αρχικά την ομοσκεδαστικότητα και την αυτοσυσχέτιση των σφαλμάτων. Χρησιμοποιώντας γραφικές μεθόδους αλλά και τον έλεγχο Durbin-Watson (DW), ο οποίος ελέγχει κατά πόσο τα σφάλματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έναντι του ότι ακολουθούν ένα αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο πρώτου βαθμού, καταλήξαμε πως ο Newey and West (1987) εκτιμητής πρέπει να χρησιμοποιηθεί για το Μοντέλο-20 και ο συνήθης για το Μοντέλο-21. Για πληρότητα παρέχουμε και τους δύο ελέγχους για το Μοντέλο-21. Επίσης χρησιμοποιήσαμε τον Newey and West (1987) εκτιμητή με την παράμετρο υστέρησης (lag parameter) να επιλέγεται αυτομάτως από την R μέσω του πακέτου Zeileis (2004), που υλοποιεί την μέθοδο των Newey and West (1994) στην R.

Στον Πίνακα-3 οι p-τιμές των ελέγχων με τον NW και τον συνήθη εκτιμητή ελέγχουν κατά πόσο οι συντελεστές είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή κατά πόσο είναι στατιστικώς σημαντικοί. Για τη μη αγροτική μισθοδοσία παρατηρούμε πως σε επίπεδο σημαντικότητας 5% οι προθεσμιακές διακυμάνσεις εκτός της $f_t^(2)$ είναι στατιστικά σημαντικές. Επίσης αν συμπεριλάβουμε την yslope$_t$ τότε σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και η $f_t^(3)$ παύει να είναι στατιστικώς σημαντική. Αντιθέτως για την βιομηχανική παραγωγή παρατηρούμε πως τόσο η yslope$_t$ όσο και οι προθεσμιακές διακυμάνσεις δεν είναι στατιστικά σημαντικές και συνεπώς δεν καταφέρνουν να εξηγήσουν την μεταβλητότητα της βιομηχανικής παραγωγής.

Τα αποτελέσματα των Bakshi et al. (2011) είναι παρόμοια αλλά με σημαντικές διαφορές. Συγκεκριμένα βρίσκουν και εκείνοι πως η f_t^2 δεν είναι στατιστικώς σημαντική για την μη αγροτική μισθοδοσία. Αντιθέτως η $f_t^{(3)}$ επιβιώνει και όταν συμπεριληφθεί στο μοντέλο η yslope$_t$. Αντιθέτως από εμάς, βρίσκουν πως οι $y_t^{(1)}$ και η $f_t^{(4)}$ είναι στατιστικώς σημαντικές για την βιομηχανική παραγωγή, συμπεριλαμβανομένης και μη της yslope$_t$. Τέλος οι προσαρμοσμένοι συντελεστές προσδιορισμού είναι παρόμοιοι με τους δικούς μας με τη διαφορά πως οι δική μας

Πίνακας 3: Συγκεκτρωτικά αποτελέσματα σύμφωνα με τα οποία εξετάζουμε κατα πόσο η πραγματική οικονομική δραστηριότητα μπορεί να προβλεφθεί από τις προθεσμιακές διακυμάνσεις.

Dependent variable		Const.	$y_t^{(1)}$	$f_t^{(2)}$	$f_t^{(3)}$	$f_t^{(4)}$	yslope$_t$	$\bar{R}^2$ ⌊DW⌋
Panel A: *Non-farm payroll*								
g_{t+1}^{payroll}	Coef.	0.001	−0.556	−0.093	0.157	0.279	−0.037	37.32%
	NW-8, p-val	0.049	0.000	0.143	0.077	0.000	0.006	⌊0.000⌋
g_{t+1}^{payroll}	Coef.	0.000	−0.627	−0.102	0.226	0.344		27.75%
	NW-8, p-val	0.862	0.000	0.093	0.009	0.000		⌊0.000⌋
Panel B: *Ind. Production*								
$g_{t+1}^{\text{indus prod}}$	Coef.	0.002	−0.819	0.527	−0.598	0.432	−0.033	0.63%
	NW-6, p-val	0.378	0.378	0.262	0.342	0.325	0.603	⌊0.112⌋
	usual p-val	0.429	0.202	0.269	0.192	0.322	0.524	
$g_{t+1}^{\text{indus prod}}$	Coef.	0.001	−0.882	0.518	−0.537	0.490		1.14%
	NW-7, p-val	0.570	0.291	0.259	0.332	0.171		⌊0.124⌋
	usual p-val	0.617	0.164	0.275	0.230	0.250		

$^{\alpha}$ The Heteroskedasticity and autocorrelation consistent (HAC) covariance matrix estimator was calculated using the **sandwich** package by Zeileis (2004). The p-values and the DW test by the **lmtest** package of Zeileis and Hothorn (2002).

είναι υψηλότερη στην μη-αγροτική μισθοδοσία και χαμηλότερη στην βιομηχανική παραγωγή.

Για τις προθεσμιακές διακυμάνσεις που επιβιώνουν στην μη αγροτική μισθοδοσία παρατηρούμε πως μία αύξηση στην $y_t^{(1)}$ ακολουθείται από μία μείωση στην μη αγροτική μισθοδοσία. Αντιθέτως μία αύξηση στις $f_t^{(3)}$ και $f_t^{(4)}$ ακολουθείται από μια αύξηση στην μη αγροτική μισθοδοσία, με την επιρροή της $f_t^{(4)}$ να είναι μεγαλύτερη. Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουν οι Bakshi et al. (2011) με τη διαφορά πως η επιρροή της $f_t^{(3)}$ είναι ελαφρώς μεγαλύτερη της $f_t^{(4)}$.

Συμπεράσματα

Ο βασικός σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν ο φοιτητής να έρθει σε επαφή με τη σύγχρονη έρευνα στο τομέα των ποσοτικών χρηματοοικονομικών. Στο πρώτο κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί και το μαθηματικό κομμάτι τις εργασίας, παρουσιάσαμε με μεγάλη λεπτομέρεια τη δουλειά των Carr and Lee (2009b). Συγκεκριμένα δείξαμε πως μία γενική εκθετική απαίτηση της μορφής $e^{\lambda\langle X\rangle_T}$ μπορεί να εκφραστεί σε όρους του υποκείμενου αγαθού με την έννοια ότι υπάρχει μια συνάρτηση απόδοσης G τέτοια ώστε υπό το μέτρου ουδετέρου κινδύνου $\mathbb{Q}$ να ισχύει ότι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\lambda\langle X\rangle_T}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G(S_T)]$$

Στη συνέχεια ακολουθώντας τους Bakshi et al. (2011) ειδικεύσαμε το παραπάνω αποτέλεσμα για $\lambda = -1$ ούτως ώστε να ορίσουμε τις προθεσμιακές διακυμάνσεις και εκφράσαμε το δεξί μέλος της εξίσωσης σαν ένα χαρτοφυλάκιο Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης. Τονίζουμε πως η παραπάνω μέθοδος αναφέρεται σε μια υποκείμενη αξία S_t χωρίς άλματα, είναι μη παραμετρική και η τιμολόγηση είναι άνοση (πρώτου βαθμού) στη συσχέτιση της S_t και της διαδικασίας της στιγμιαίας διακύμανσης σ_t. Στο δεύτερο κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί το προγραμματιστικό κομμάτι και το πυρήνα της εργασίας, δημιουργήσαμε τη χρονική διάρθρωση των προθεσμιακών διακυμάνσεων του δείκτη S&P 500 αποτελούμενη από τέσσερις ωριμάνσεις για τη περίοδο που ξεκινά από το Σεπτέμβριο του 1998 και τελειώνει το Σεπτέμβριο του 2008. Ο βασικές προκλήσεις του κεφαλαίου ήταν ο καθαρισμός των τιμών και η εξαγωγή της καμπύλης τιμών ουδετέρου ρίσκου. Καθαρίσαμε τις τιμές των παραγώγων έτσι ώστε να είναι μονότονες και κυρτές ως προς τις τιμές εξάσκησης. Για να εξασφαλίσουμε τη κυρτότητα υποθέσαμε πως η τιμή που αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή εξάσκησης αποτελούσε μια δίκαιη τιμή. Η υπόθεση αυτή είναι αυθαίρετη και θα ήταν καλύτερο να εφαρμόσουμε μια διαφορετική μέθοδο. Παρόλα αυτά, οι όγκοι συναλλαγών των υποτιθέμενων δίκαιων τιμών ήταν, στις περισσότερες περιπτώσεις, υψηλή με αποτέλεσμα η πιθανότητα να μην έχουν τιμολογηθεί σωστά να είναι χαμηλή. Για να εξάγουμε τη καμπύλη τιμών ουδέτερου κινδύνου πειραματιστήκαμε με διάφορες μεθόδους της βιβλιογραφίας. Η λαθεμένη υλοποίηση τους οδήγησε σε αποτελέσματα χαμηλής ποιότητας και αυτό μας οδήγησε στο να εφαρμόσουμε μια νέα μέθοδο η οποία είχε καλά αποτελέσματα, βασιζόταν σε θεμελιώδεις ιδιότητες της θεωρίας που αφορά την απουσία arbitrage στις τιμές, είναι εύκολα εφαρμόσιμη και τέλος η στατιστική της ποιότητα αντλείται από τη θεωρία της παλινδρόμησης.

Στο τρίτο κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί το στατιστικό κομμάτι της εργασίας, ακολουθώντας τους Bakshi et al. (2011) μελετήσαμε τις στατιστικές ιδιότητες των προθεσμιακών διακυμάνσεων και την δυνατότητα τους να προβλέψουν τη πραγματική οικονομική δραστηριότητα. Τα αποτελέσματα μας έχουν πολλές ομοιότητες με αυτά των Bakshi et al. (2011) αλλά και σημαντικές διαφορές. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν υπάρχει κάποιο πρωτόκολλο για το καθαρισμό των δεδομένων και την εξαγωγή των καμπυλών ουδετέρου ρίσκου με αποτέλεσμα τα αποτελέσματα να επηρεάζονται από την εκάστοτε μέθοδο και να είναι διαφορετικά.

Τέλος θα θέλαμε να είχαμε βελτιώσει περισσότερο τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για το υπολογισμό των προθεσμιακών διακυμάνσεων και να πειραματιστούμε μαζί τους για διαφορετικές χρονικές περιόδους και υποκείμενα αγαθά. Επίσης θα θέλαμε, όπως οι Bakshi et al. (2011) να μελετήσουμε κατά πόσο μπορούν να προβλέψουν τις αποδόσεις άλλων αξιών, να τις χρησιμοποιήσουμε για να ερευνήσουμε άλλα ερωτήματα της χρηματοοικονομικής θεωρίας και τέλος να πλαισιώσουμε τα παρατηρηθέντα αποτελέσματα με το κατάλληλα θεωρητικά επιχειρήματα.

Αναφορές

Bakshi, G., Panayotov, G., Skoulakis, G., 2011. Improving the predictability of real economic activity and asset returns with forward variances inferred from option portfolios. Journal of Financial Economics 100, 475 – 495.

Campbell, J. Y., Shiller, R. J., 1991. Yield spreads and interest rate movements: A bird's eye view. The Review of Economic Studies 58, 495–514.

Carr, P., Lee, R., 2009a. Put-call symmetry: Extensions and applications. Mathematical Finance 19, 523–560.

Carr, P., Lee, R., 2009b. Robust replication of volatility derivatives working paper. Unbublished working paper, New York University and University of Chicago .

Cochrane, J. H., Piazzesi, M., 2005. Bond risk premia. American Economic Review 95, 138–160.

Estrella, A., Hardouvelis, G. A., 1989. The term structure as a predictor of real economic activity. Tech. rep.

Fama, E. F., Bliss, R. R., 1987. The information in long-maturity forward rates. The American Economic Review pp. 680–692.

Ghalanos, A., 2014. rugarch: Univariate GARCH models. R package version 1.3-3.

Jiang, G. J., Tian, Y. S., 2005. The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content. Review of Financial Studies 18, 1305–1342.

Newey, W., West, K. D., 1987. A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. Econometrica 55, 703–08.

Newey, W. K., West, K. D., 1994. Automatic lag selection in covariance matrix estimation. The Review of Economic Studies 61, 631–653.

R (Core Team), 2013. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Zeileis, A., 2004. Econometric computing with hc and hac covariance matrix estimators. Journal of Statistical Software 11, 1–17.

Zeileis, A., Hothorn, T., 2002. Diagnostic checking in regression relationships. R News 2, 7–10.