



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Βέλτιστος Έλεγχος σε Παραβολικές  
Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αριθμητική  
Ανάλυση και Εφαρμογές

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

ΕΥΘΥΜΙΟΥ Ν. ΚΑΡΑΤΖΑ

Διπλωματούχου Μαθηματικού

Αθήνα, Φεβρουάριος 2015





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# Βέλτιστος Έλεγχος σε Παραβολικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αριθμητική Ανάλυση και Εφαρμογές

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

**ΕΥΘΥΜΙΟΥ Ν. ΚΑΡΑΤΖΑ**

Διπλωματούχου Μαθηματικού

Συμβουλευτική Επιτροπή: Κωνσταντίνος Χρυσοφίνος  
Γιώνας Χρυσοβέργης  
Βασίλειος Κοκκίνης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 4<sup>η</sup> Φεβρουάριος 2015.

|                      |                  |                        |
|----------------------|------------------|------------------------|
| ...                  | ...              | ...                    |
| Κ. Χρυσοφίνος        | Ι. Χρυσοβέργης   | Β. Κοκκίνης            |
| Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π. | Καθηγητής Ε.Μ.Π. | Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π. |

|                  |                      |                      |
|------------------|----------------------|----------------------|
| ...              | ...                  | ...                  |
| Ι. Τσινιάς       | Α. Χαλαμπίδης        | Ι. Κωλέτσος          |
| Καθηγητής Ε.Μ.Π. | Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π. | Επ. καθηγητής Ε.Μ.Π. |

...  
Εμ. Γεωργούλης  
Καθηγητής  
Leicester University

Αθήνα, Φεβρουάριος 2015

...

**ΕΥΘΥΜΙΟΣ Ν. ΚΑΡΑΤΖΑΣ**  
Διδάκτωρ Μαθηματικός Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ε.Μ.Π.

© 2015 - All rights reserved

---

## Βέλτιστος Έλεγχος σε Παραβολικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αριθμητική Ανάλυση και Εφαρμογές

### Σύντομη περίληψη:

Το κύριο αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής είναι ο καταναμημένος και συνοριακός έλεγχος σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων εξελικτικού τύπου με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin. Εξετάζουμε πρόβλημα συνοριακού ελέγχου τύπου Robin για γραμμικές παραβολικές εξισώσεις, καταναμημένο έλεγχο σε ημιγραμμικό παραβολικό πρόβλημα, καθώς και καταναμημένο έλεγχο σε εξελικτικό πρόβλημα Stokes. Παρουσιάζουμε αποτελέσματα με έλεγχο με περιορισμούς, με ελάχιστη ομαλότητα στα δεδομένα του προβλήματος και επαληθεύονται αριθμητικά ακόμη και για  $L^2(\Omega)$  δεδομένα, αποδεικνύονται η ευστάθεια, η σύγκλιση, και εξετάζονται συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης για το τετραγωνικό συναρτησιακό. Τέλος παραθέτουμε αριθμητικά αποτελέσματα για ένα πρόβλημα βιολογίας που αποτελείται από σύστημα δυο εξισώσεων μιας γραμμικής και μιας ημιγραμμικής παραβολικής εξίσωσης με καταναμημένο έλεγχο.

**Λέξεις κλειδιά:** Βέλτιστος έλεγχος, Ασυνεχή χρονικού βηματισμού σχήματα Galerkin, Προσεγγίσεις πεπερασμένων στοιχείων, Εξισώσεις Στοκες, Πρόβλημα ταχύτητας, Ημιγραμμικά προβλήματα, Φιτζυγη Ναγμο, Καταναμημένος έλεγχος, Ροβιν συνοριακός έλεγχος, Εκτιμήσεις σφαλμάτων.

---



---

# Optimal Control and Parabolic Partial Differential Equations, Numerical Analysis and Applications

## **Abstract:**

The main object of the thesis is distributed and boundary optimal control in evolutionary - parabolic partial differential equations problems using a discontinuous in time Galerkin finite element method. We examine a Robin type boundary control problem for linear parabolic equations, distributed control in semilinear parabolic problem and distributed control in evolutionary Stokes problem. We present results and optimal convergence rates in the cases of constrained and unconstrained control, minimal smoothness for the data of the problem and we numerically verify them even for  $L^2(\Omega)$  data. We prove stability, convergence, and we examine first and second order conditions for the quadratic functional. Finally, we present numerical results for a biological problem which consists of two equations, a linear and a semilinear parabolic equation with distributed control.

We study first order in time and second order in space linear and semilinear evolutionary problems that often occur in applications to boundary problems for parabolic problems and Stokes systems. We will present semilinear parabolic problems with zero Dirichlet boundary conditions, linear parabolic problems with Robin boundary conditions, Stokes and Fitzugh-Nagumo systems with zero Dirichlet boundary conditions.

Particularly, the aim is to focus on specific problems often encountered in practice than to study more general problems in which the same analysis techniques may be applied. This allows someone, in short time, to produce immediate results which are easy to use in applications.

---





# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I Περιγραφή της Διατριβής</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Εισαγωγικές έννοιες</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1 Εισαγωγή . . . . .   | 4         |
| 1.1.1 Βασικά στοιχεία προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. . . . .                 | 4         |
| 1.2 Μελέτη προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. . . . .                            | 5         |
| 1.3 Περιγραφή των προβλημάτων υπό μελέτη . . . . .                           | 5         |
| 1.4 Σχετικά αποτελέσματα - παλιότερες μελέτες . . . . .                      | 10        |
| <b>2 Βασικές έννοιες</b>   | <b>13</b> |
| 2.1 Χώροι Sobolev . . . . .  | 14        |
| 2.1.1 Ασθενείς παράγωγοι . . . . .   | 14        |
| 2.1.2 Ορισμός χώρων Sobolev . . . . .  | 14        |
| 2.1.3 Συμπάγεια . . . . .  | 15        |
| 2.1.4 Ο χώρος $H^{-1}$ . . . . .   | 16        |
| 2.2 Βασικές ιδιότητες ιχνών . . . . .  | 16        |
| 2.2.1 Ενδιάμεσοι-κλασματικοί χώροι . . . . .                                 | 16        |
| 2.3 Χώροι που εμπεριέχουν χρόνο . . . . .                                    | 18        |
| 2.3.1 Χώροι λύσεων . . . . .   | 19        |
| 2.4 Χρήσιμες ανισότητες . . . . .  | 19        |
| 2.5 Fréchet, Gâteaux και παράγωγος κατά κατεύθυνση . . . . .                 | 20        |
| <b>3 Συνεχές Σύστημα Βελτιστοποίησης, Ύπαρξη Λύσης</b>                       | <b>21</b> |
| 3.1 Βασικές υποθέσεις . . . . .  | 22        |
| 3.2 Συνεχές πρόβλημα ελέγχου και ύπαρξη λύσης. . . . .                       | 23        |
| 3.3 Το Σύστημα βελτιστοποίησης . . . . .                                     | 26        |
| <b>4 Προσεγγισιμότητα και Αριθμητική Ανάλυση</b>                             | <b>31</b> |
| 4.1 Το διακριτό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου . . . . .                         | 32        |
| 4.1.1 Προκαταρκτική μελέτη και ιδιότητες πλέγματος . . . . .                 | 32        |
| 4.1.2 Το πλήρες διακριτοποιημένο πρόβλημα βελτιστοποίησης . . . . .          | 35        |
| 4.1.3 Το διακριτοποιημένο σύστημα βελτιστοποίησης . . . . .                  | 42        |
| 4.2 Εκτιμήσεις σφαλμάτων . . . . .   | 47        |
| 4.2.1 Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου. . . . .                    | 47        |
| 4.2.2 Ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου. . . . .                    | 60        |
| 4.2.3 Πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου Stokes. . . . .                         | 75        |
| <b>5 Πείραμα Συνοριακού Ελέγχου σε Παραβολικές Γραμμικές μ.δ.ε.</b>          | <b>85</b> |
| 5.1 Συνοριακές συνθήκες Robin - Περιγραφή του μοντέλου . . . . .             | 86        |
| 5.1.1 Ομαλότητα στα αρχικά δεδομένα . . . . .                                | 86        |
| 5.1.2 Μικρή ομαλότητα στα αρχικά δεδομένα . . . . .                          | 91        |
| 5.1.3 Πείραμα με χρήση γραμμικών πολυωνύμων στο χώρο και στο χρόνο . . . . . | 92        |
| <b>6 Πείραμα Καταναμημένου Ελέγχου σε Ημιγραμμικές Παραβολικές μ.δ.ε.</b>    | <b>97</b> |
| 6.1 Καταναμημένος έλεγχος - Περιγραφή του μοντέλου . . . . .                 | 98        |
| 6.1.1 Σταθερά πολυώνυμα στο χρόνο, και γραμμικά στο χώρο . . . . .           | 98        |
| 6.1.2 Ισχυρές συνθήκες Wolfe-Powel . . . . .                                 | 99        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>7</b>  | <b>Πείραμα Κατανεμημένου Ελέγχου σε Εξισώσεις Stokes</b>   | <b>101</b> |
| 7.1       | Κατανεμημένος έλεγχος - Περιγραφή του μοντέλου . . . . .   | 102        |
| 7.1.1     | Ομαλά δεδομένα . . . . .   | 103        |
| 7.1.2     | Δεδομένα με μικρή ομαλότητα (ασυνέχεια στα $y_0, y_d, g$ ) . . . . .                                     | 105        |
| <b>8</b>  | <b>Εφαρμογή στη Βιολογία, Πείραμα Κατανεμημένου Ελέγχου σε Συστήματα Ημιγραμμικών Παραβολικών μ.δ.ε.</b> | <b>111</b> |
| 8.1       | Κατανεμημένος έλεγχος σε συστήματα FitzHugh-Nagumo . . . . .   | 112        |
| 8.1.1     | Εισαγωγή - Ιστορική αναδρομή . . . . .   | 112        |
| 8.1.2     | Περιγραφή του μοντέλου . . . . .   | 113        |
| 8.1.3     | Η ασθενής μορφή . . . . .  | 113        |
| 8.1.4     | Το πλήρως διακριτοποιημένο πρόβλημα . . . . .  | 114        |
| 8.1.5     | Αριθμητικές εφαρμογές . . . . .  | 115        |
| <b>9</b>  | <b>Ευχαριστίες</b>   | <b>123</b> |
|           | <b>Λίστα συμβόλων</b>  | <b>123</b> |
|           | <b>Κατάλογος Πινάκων</b>   | <b>127</b> |
|           | <b>Κατάλογος Σχημάτων</b>  | <b>129</b> |
| <b>A'</b> | <b>Παράρτημα</b>   | <b>131</b> |
| A'.1      | Προβολές . . . . .   | 133        |
| A'.2      | Εκθετική παρεμβολή . . . . .   | 137        |
| A'.3      | Διακριτή χαρακτηριστική συνάρτηση . . . . .  | 138        |
| <b>II</b> | <b>Περιγραφή της Διατριβής στα Αγγλικά - (Thesis Description in English)</b>                             | <b>139</b> |
| <b>1</b>  | <b>Introduction</b>  | <b>143</b> |
| 1.1       | Description of the problems under consideration . . . . .  | 144        |
| 1.2       | Related results . . . . .  | 148        |
| <b>2</b>  | <b>The Continuous Optimality System, The Existence Of The Solution</b>                                   | <b>151</b> |
| 2.1       | Assumptions . . . . .  | 152        |
| 2.2       | The continuous control problem and the existence of solution . . . . .                                   | 153        |
| 2.3       | The optimality system . . . . .  | 156        |
| <b>3</b>  | <b>Approximation and Numerical Analysis</b>  | <b>159</b> |
| 3.1       | The discrete optimal control problem . . . . .   | 160        |
| 3.1.1     | Preliminaries and mesh properties . . . . .  | 160        |
| 3.1.2     | The fully-discrete optimal control problem . . . . .   | 163        |
| 3.1.3     | The discrete optimality system . . . . .   | 170        |
| 3.2       | Error estimates . . . . .  | 174        |
| 3.2.1     | Robin boundary control problem. . . . .  | 174        |
| 3.2.2     | Unconstrained Controls: Preliminary estimates for the optimality system . . . . .                        | 181        |
| 3.2.3     | Semilinear distributed optimal control problem. . . . .  | 187        |
| 3.2.4     | Stokes distributed optimal control problem. . . . .  | 201        |
| <b>4</b>  | <b>Robin Boundary Control Experiment in Linear Parabolic Pdes</b>  | <b>213</b> |
| 4.1       | Robin boundary conditions, setting the model . . . . .   | 214        |
| 4.1.1     | Smooth initial data . . . . .  | 214        |
| 4.1.2     | Nonsmooth initial data . . . . .   | 219        |
| 4.1.3     | Experiment using linear polynomials in space and time . . . . .  | 219        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>5</b> | <b>Distributed Control Experiment In Semilinear Parabolic Pdes</b>  | <b>225</b> |
| 5.1      | Distributed control - Description of the model . . . . .  | 226        |
| 5.1.1    | Constant polynomials in time, and linear in space . . . . .   | 226        |
| 5.1.2    | Strong Wolfe-Powel conditions . . . . .   | 227        |
| <b>6</b> | <b>Experiment for Stokes Equations with Distributed control</b>   | <b>229</b> |
| 6.1      | Distributed control in Stokes - description of the model . . . . .  | 230        |
| 6.1.1    | Smooth data . . . . .   | 231        |
| 6.1.2    | Rough initial data (discontinuity of $y_0, y_d, g$ ) . . . . .  | 233        |
| <b>7</b> | <b>An Application In Biology, Experiment With Distributed Control in Semilinear Parabolic Systems Of Pdes</b> | <b>239</b> |
| 7.1      | Distributed control subject to FitzHugh-Nagumo systems . . . . .  | 240        |
| 7.1.1    | Introduction - Related results . . . . .  | 240        |
| 7.1.2    | Description of the model . . . . .  | 241        |
| 7.1.3    | Weak form . . . . .   | 241        |
| 7.1.4    | The full discretized system . . . . .   | 242        |
| 7.1.5    | Numerical Experiments . . . . .   | 243        |
|          | <b>List Of Symbols</b>  | <b>249</b> |
|          | <b>List of Tables</b>   | <b>251</b> |
|          | <b>List of Figures</b>  | <b>253</b> |
| <b>A</b> | <b>Appendix</b>   | <b>255</b> |
| A.1      | Projections . . . . .   | 257        |
| A.2      | The exponential interpolant . . . . .   | 261        |
| A.3      | The discrete characteristic function . . . . .  | 262        |
|          | <b>Bibliography</b>   | <b>263</b> |



# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

---

Η παρούσα διατριβή έχει υποβληθεί στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου, ως επιμέρους τμήμα σύμφωνα με τις απαιτήσεις για τη λήψη διδακτορικού διπλώματος. Η δουλειά που παρουσιάζεται ξεκίνησε το 2009 και ολοκληρώθηκε το 2014, υπό την επίβλεψη του Αναπλ. Καθηγητή Κωνσταντίνου Χρυσαφίνου.

Η διατριβή είναι συνέχεια της μεταπτυχιακής εργασίας με τίτλο “*Ανάλυση και προσεγγίσεις προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου για εξελικτικές εξισώσεις: βασικές έννοιες, μερικά βασικά αποτελέσματα*” υπό την επίβλεψη του Αναπλ. Καθ. Χρυσαφίνου, την οποία υποστήριξα το 2009, αν και η πιο βαθιά μελέτη σχετικά με τις μ.δ.ε. άρχισε αρκετά πρωτύτερα με τη μεταπτυχιακή μου εργασία με τίτλο “*Υπερβολικές μ.δ.ε. στην αεροακουστική έρευνα, μοντέλο της ραδιοφωνικής κεραίας*” υπό την επίβλεψη του Καθ. Δ. Τσουμπελή, την οποία υποστήριξα το 2001 στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Πατρών.

## ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Ο πλήρης τίτλος της διατριβής είναι “*Πεπερασμένα Στοιχεία, Ασυνεχής Μέθοδος Galerkin και Βέλτιστος Έλεγχος Παραβολικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Αριθμητική Ανάλυση, Μικρή Ομαλότητα Δεδομένων και Εφαρμογές*”. Θεωρούμε κυρίως πρώτης τάξης χρονικά και δεύτερης τάξης γραμμικά και ημιγραμμικά εξελικτικά προβλήματα που εμφανίζονται συχνά σε εφαρμογές ως συνοριακά προβλήματα τιμών για παραβολικά προβλήματα, και συστήματα Stokes. Θα μελετηθούν παραβολικά ημιγραμμικά προβλήματα με μηδενικές Dirichlet συνοριακές συνθήκες, παραβολικά γραμμικά προβλήματα με Robin συνοριακές συνθήκες, συστήματα Stokes και Fitzugh-Nagumo με μηδενικές Dirichlet συνοριακές συνθήκες.

Ειδικότερα, ο σκοπός είναι να επικεντρωθούμε σε συγκεκριμένα προβλήματα που συναντάμε συχνά στη πράξη παρά να μελετήσουμε γενικά προβλήματα στα οποία οι ίδιες τεχνικές ανάλυσης πιθανόν να εφαρμόζονται. Αυτό επιτρέπει σε κάποιον, σε μικρό χρονικό διάστημα, να παράγει πιο άμεσα αποτελέσματα και εύχρηστα στις εφαρμογές.



*Αφιερώνεται  
στους γονείς μου Νικόλαο και Μαρία,  
στη σύζυγό μου Γεωργία και  
στους γιους μου Νικόλα και μπέμπη*





# Μέρος I

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

ΤΗΣ

ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ



# 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

---

*Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τις εισαγωγικές θεωρητικές και υπολογιστικές αρχές που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.*

### Περιεχόμενα

---

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1.1   | Εισαγωγή . . . . .                                     | 4  |
| 1.1.1 | Βασικά στοιχεία προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. . . . . | 4  |
| 1.2   | Μελέτη προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. . . . .          | 5  |
| 1.3   | Περιγραφή των προβλημάτων υπό μελέτη . . . . .         | 5  |
| 1.4   | Σχετικά αποτελέσματα - παλιότερες μελέτες . . . . .    | 10 |

---

## 1.1 Εισαγωγή

Στα επόμενα, και για καλύτερη κατανόηση, παραθέτουμε εισαγωγικά τις συνθήκες βελτιστοποίησης, υπολογισμούς για τις παραγώγους κατά κατεύθυνση και κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις σ' αυτά, όπως πολύ εύστοχα κατέγραψε ο E. Casas στο CIMPA School on Optimization and Control το 2006.

### 1.1.1 Βασικά στοιχεία προβλήματος βέλτιστου ελέγχου.

Σε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου βρίσκουμε τα ακόλουθα βασικά στοιχεία

- A. Έναν έλεγχο  $g$  τον οποίο μπορούμε να τον χειριστούμε όπως θέλουμε, και μπορεί να επιλεγεί από μια οικογένεια εφικτών ελέγχων  $\mathbb{K}$ .
- B. Την κατάσταση  $y$  του συστήματος που πρέπει να ελεγχθεί, η οποία και εξαρτάται από τον έλεγχο. Κάποιοι περιορισμοί μπορούν να επιβληθούν στην βασική μεταβλητή  $y$ , δηλαδή δεν είναι ικανοποιητική κάθε πιθανή κατάσταση του συστήματος.
- Γ. Η εξίσωση κατάστασης που καταδεικνύει την εξάρτηση μεταξύ του ελέγχου και της βασικής μεταβλητής. Στις επόμενες παραγράφους αυτή η εξίσωση συνθηκών θα είναι μια μερική διαφορική εξίσωση,  $y$  είναι η λύση της εξίσωσης και  $g$  είναι μια συνάρτηση που εμφανίζεται στην βασική εξίσωση έτσι ώστε κάθε αλλαγή στον έλεγχο  $g$  προκαλεί αλλαγή και στη λύση  $y$ .
- Δ. Μια συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί, η οποία ονομάζεται συνάρτησης κόστους, και εξαρτάται από τον έλεγχο και τη βασική μεταβλητή  $(y, g)$ .

Στόχος είναι να προσδιορίσουμε επιτρεπτό έλεγχο, ο οποίος ονομάζεται βέλτιστος έλεγχος, που μας παρέχει ικανοποιητική κατάσταση του συστήματος και ελαχιστοποιεί την τιμή του συναρτησιακού  $J$ .

Τα θεμελιώδη ερωτήματα που προκύπτουν και πρέπει να μελετήσουμε είναι η ύπαρξη της λύσης και ο υπολογισμός της. Εντούτοις, για να βρούμε τη λύση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιες αριθμητικές μεθόδους, και για την αριθμητική ανάλυση προκύπτουν κάποιες λεπτεπίλεπτες μαθηματικές ερωτήσεις.

Το πρώτο βήμα για να λύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα απαιτεί τη διακριτοποίηση του προβλήματος ελέγχου, η οποία συνήθως γίνεται με πεπερασμένα στοιχεία. Μια φυσική ερώτηση είναι: “πόσο καλή είναι η προσέγγιση”. Προφανώς θα θέλαμε να έχουμε κάποιες εκτιμήσεις σφαλμάτων για αυτές τις προσεγγίσεις. Με σκοπό να παράγουμε τις εκτιμήσεις σφαλμάτων είναι θεμελιώδες να έχουμε κάποια ομαλότητα για το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, και συχνά είναι απαραίτητη (ανάλογα και με τις υποθέσεις που πιθανόν θα κάνουμε), και κάποια τάξη διαφορισμότητας ή τουλάχιστον κάποιες παράγωγοι με την ασθενή έννοια. Η ομαλότητα του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου μπορεί να βρεθεί από τις πρώτης τάξης συνθήκες βελτιστοποίησης. Ένα άλλο εργαλείο κλειδί για την εύρεση και απόδειξη των εκτιμήσεων σφαλμάτων είναι η χρήση δεύτερης τάξης συνθηκών βελτιστοποίησης. Οπότε η ανάλυση μας απαιτεί να βρούμε τη πρώτη και δεύτερη τάξη συνθήκη βελτιστοποίησης.

**Σημείωση 1.1.1.** Αν  $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ , και  $\Gamma$  το σύνορο, ένα τυπικό συναρτησιακό στη θεωρία ελέγχου είναι το

$$J(g) = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \|y_g(x) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|g\|_{L^2(S)}^2 \right\} dt$$

όπου  $S = \Omega$  ή  $\Gamma$ , και  $y_d \in L^2$  συμβολίζει την ιδανική κατάσταση του συστήματος και  $\alpha > 0$ . Ο όρος  $\int_0^T \frac{\alpha}{2} \|g\|_{L^2(S)}^2 dt$  μπορεί να θεωρηθεί ως όρος κόστους και τότε λέμε ότι ο έλεγχος είναι “ακριβός” αν το

$\alpha$  είναι μεγάλο, και ο έλεγχος είναι “φθηνός” αν ο  $\alpha$  είναι μικρός ή μηδέν. Από μαθηματική πλευρά η παρουσία αυτού του όρου, με  $\alpha > 0$ , έχει ομαλοποιητική επίδραση στον βέλτιστο έλεγχο.

**Σημείωση 1.1.2.** Υπάρχουν πολλές επιλογές για το σύνολο των εφικτών ελέγχων, πιο συχνός όμως είναι ο  $\mathbb{K} = L^2$ . Σημαντικό είναι ότι ο  $\mathbb{K}$  πρέπει να είναι κλειστός και κυρτός. Επιπλέον αν ο  $\mathbb{K}$  δεν είναι φραγμένος, τότε απαιτούνται κάποιες υποθέσεις πιστικότητας για το συναρτησιακό  $J$  για να εξασφαλίσουν την ύπαρξη λύσης.

## 1.2 Μελέτη προβλήματος βέλτιστου ελέγχου.

Εφόσον διακριτοποιήσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιους αριθμητικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης για να λύσουμε το πρόβλημα. Όταν το πρόβλημα δεν είναι κυρτό, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης ουσιαστικά παρέχει τοπικό ελάχιστο. Η ερώτηση τώρα είναι αν αυτά τα τοπικά ελάχιστα είναι ενδεικτικά για το αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Τα ακόλουθα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν όταν μελετάμε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου είναι:

- α) Ύπαρξη λύσης.
- β) Πρώτης και δεύτερης τάξης συνθήκες βελτιστοποίησης.
- γ) Αριθμητική προσέγγιση.
- δ) Αριθμητική ανάλυση του διακριτού προβλήματος ελέγχου.
- ε) Αριθμητικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης.

Οι πρώτης τάξης συνθήκες βελτιστοποίησης είναι απαραίτητες για τοπική βελτιστοποίηση εκτός από την περίπτωση κυρτών προβλημάτων που τότε γίνονται επαρκείς συνθήκες για ολική βελτιστοποίηση. Στην απουσία κυρτότητας για ολική βελτιστοποίηση απαιτούνται και οι συνθήκες βελτιστοποίησης δεύτερης τάξης. Οι επαρκείς συνθήκες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην αριθμητική ανάλυση αυτών των προβλημάτων. Οι συνθήκες βελτιστοποίησης δεύτερης τάξης δείχνουν καθαρά αν οι επαρκείς συνθήκες είναι λογικές με την έννοια ότι η εκπλήρωσή τους δεν είναι πολύ περιοριστική για να απαιτηθεί.

## 1.3 Περιγραφή των προβλημάτων υπό μελέτη

Σ' αυτή τη παράγραφο περιγράφουμε τα προβλήματα τα οποία θα αντιμετωπίσουμε στη διατριβή. Πιο συγκεκριμένα θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση μεταξύ του  $y$  και μιας δοσμένης κατανομής  $y_d$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |y - y_d|^2.$$

Σχετικά με τον έλεγχο έχουμε τον όρο στο συναρτησιακό:

$$\int_0^T \int_S |g|^2,$$

όπου  $S$  είναι  $\Omega$  ή  $\Gamma$  ανάλογα με το αν ασκούμε συνοριακό ή καταναμημένο έλεγχο.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν σε συνδυασμό με το συναρτησιακό που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε (θα έχουμε περιορισμούς που θα αποτελούνται από εξελικτικές μ.δ.ε.).

**Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου.** Θεωρούμε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου που σχετίζεται με την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού παρακολούθησης υπό την επίδραση γραμμικής παραβολικής μ.δ.ε. (μερικής διαφορικής εξίσωσης) χωρίς ουσιαστική ομαλότητα στα αρχικά δεδομένα. Ειδικότερα, δεδομένης συνάρτησης στόχου  $y_d$  αναζητούμε βασική μεταβλητή  $y$  και μεταβλητή Robin συνοριακού ελέγχου  $g$  τέτοια ώστε το συναρτησιακό

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt, \quad (1.3.1)$$

να ελαχιστοποιείται υπό τους περιορισμούς,

$$\begin{aligned} y_t - \eta \Delta y &= f \text{ στο } (0, T] \times \Omega, \\ y + \frac{\eta}{\lambda} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} &= g \text{ στο } (0, T] \times \Gamma, \\ y(0, x) &= y_0 \text{ στο } \Omega. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Εδώ, το  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  συμβολίζει ένα ανοιχτό πολυγωνικό και κυρτό χωρίο, με σύνορο Lipschitz  $\Gamma$ . Ο έλεγχος  $g$  εφαρμόζεται στο σύνορο  $\Gamma$  και είναι τύπου Robin. Η ανάλυσή μας και τα αποτελέσματά μας θα επικεντρωθούν στη περίπτωση με υποθέσεις χαμηλής ομαλότητας, δηλαδή, αρχικά δεδομένα  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , αλλά η ανάλυσή μας θα είναι επίσης εφαρμόσιμη και σε άλλες περιπτώσεις όπου η λύση παρουσιάζει επιπλέον ομαλότητα. Επιπροσθέτως, ενδιαφερόμαστε για τη περίπτωση σημειακών περιορισμών για τον έλεγχο υπό την έννοια  $g_a \leq g(t, x) \leq g_b$  για σ.π.  $(t, x) \in (0, T] \times \Gamma$ , όπου  $g_a, g_b \in \mathbb{R}$ . Μια ακριβής μοντελοποίηση θα δοθεί παρακάτω. Ο όρος δύναμης  $f$  και οι παράμετροι  $\lambda > 0$ ,  $\eta > 0$  είναι δεδομένα, ενώ το  $\alpha > 0$  συμβολίζει τη παράμετρο ποινής η οποία περιορίζει το μέγεθος του ελέγχου. Η περίπτωση αρχικών δεδομένων χωρίς ομαλότητα είναι πολύ σημαντική στο πλαίσιο των εν λόγω συνοριακών προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου και ασκείται μεγάλη προσοχή ώστε να συμπεριληφθεί η περίπτωση αυτή στην ανάλυσή μας.

Ο κύριος σκοπός μας είναι να δείξουμε πως οι εκτιμήσεις σφαλμάτων του αντίστοιχου συστήματος βελτιστοποίησης έχει την ίδια δομή με τις εκτιμήσεις χωρίς έλεγχο γραμμικής παραβολικής εξίσωσης με Robin συνοριακά δεδομένα.

Η βασική -αλλά όχι η μόνη - δομική δυσκολία που σχετίζεται με συνοριακά προβλήματα βέλτιστου ελέγχου με αρχικά δεδομένα χωρίς ομαλότητα προέρχεται από την έλλειψη αρκετής ομαλότητας της βασικής, της συζυγούς και της μεταβλητής ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, αν  $y_0 \in L^2(\Omega)$  τότε η ομαλότητα της βασικής μεταβλητής περιορίζεται σε  $L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Ως εκ τούτου, κλασικά προς “τα πίσω” επιχειρήματα (“boot-strap arguments”) για τις χωρίς έλεγχο παραβολικές μ.δ.ε., που βασίζονται στο πρότυπο ελλειπτικών προβολών Ritz-Galerkin συνήθως αποτυγχάνουν εξαιτίας της έλλειψης ομαλότητας. Κατά συνέπεια, δεν έχουν υπολογιστεί οι εκτιμήσεις σφάλματος για χωροχρονικές προσεγγίσεις των παραβολικών προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου ανώμαλων αρχικών δεδομένων  $y_0 \in L^2(\Omega)$  σε Lipschitz χωρία.

Για να ξεπεραστεί η έλλειψη ομαλότητας, αναλύουμε ένα σχήμα το οποίο βασίζεται σε μια ασυνεχή χρονική προσέγγιση, η οποία είναι κατάλληλη για τα προβλήματα χωρίς αρκετά ομαλές λύσεις. Η ανάλυση αναδεικνύει την καλή συμπεριφορά αυτών των σχημάτων, ακόμη και με την παρουσία συνοριακών ελέγχων Robin. Το βασικό χαρακτηριστικό των διακριτών συστημάτων μας είναι ότι παρουσιάζουν τις ίδιες ιδιότητες ομαλότητας με το συνεχές ασθενές πρόβλημα. Τα αποτελέσματά μας μπορούν να συνοψισθούν ως εξής:

1. Αναπτύσσουμε συμμετρικές εκτιμήσεις σφαλμάτων υπό ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας για τα δεδομένα μας, στη φυσική νόρμα ενδιαφέροντος  $W_R(0, T) \equiv L^\infty[0, T; L^2(\Omega)] \cap L^2[0, T; H^1(\Omega)] \times L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  που σχετίζεται με το ασυνεχές χρονικού βηματισμού σχήμα, δηλαδή,

$$\|\text{σφάλμα}\|_{W_R(0, T)} \leq C \|\text{καλύτερο σφάλμα προσέγγισης}\|_{W_R(0, T)},$$

το οποίο ορίζει ότι το σφάλμα είναι τόσο καλό όσο η ομαλότητα και η προσεγγιστική θεωρία του

επιτρέπει να είναι.

2. Ορίζουμε μια νέα γενικευμένη προβολή του χωροχρόνου που παρουσιάζει καλύτερες προσεγγιστικές ιδιότητες στον  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , και που είναι επίσης εφαρμόσιμες για  $y_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Χρησιμοποιώντας την παραπάνω προβολή και ένα κατάλληλο δυϊκό επιχείρημα για ένα βοηθητικό σύστημα παίρνουμε μια τάξη σύγκλισης  $\mathcal{O}(h)$  για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα, όταν  $\tau \leq Ch^2$ .
3. Στη περίπτωση συνοριακών ελέγχων, που καταδεικνύουν την εφαρμοσιμότητα των εκτιμήσεων μας κατά την έννοια διακριτών μεταβολών του Hinze[65]. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει να ξεπεραστεί η έλλειψη της ισχυρής ομαλότητας που έχουμε στην βασική μεταβλητή κατάστασης, λόγω της αποτυχίας του κλασικού προς “τα πίσω” (“boot-strap”) επιχειρήματος για τον έλεγχο και τη βασική μεταβλητή κατάστασης.

Οι παρακάτω εκτιμήσεις είναι καινούριες και βέλτιστες από την άποψη της προβλεπόμενης ομαλότητας των λύσεων, και της παρουσίας των θεμελιωδών οριακών συνθηκών. Επιπλέον, ακόμη και με τη παρουσία πρόσθετης ομαλότητας στα δεδομένα, δηλαδή,  $y_0 \in H^1(\Omega)$ , και παρά τη χρήση των  $L^2$  προβολών που εμφανίζουν καλύτερες προσεγγιστικές ιδιότητες, η τάξη  $\mathcal{O}(h^{3/2})$  (όταν  $\tau \leq Ch^2$ ) φαίνεται να είναι η βέλτιστη, δεδομένου ότι δεν υπάρχει δυνατότητα να αποκτήσουν μια καλύτερη εκτίμηση τουλάχιστον όταν εμπλέκονται πολυγωνικά και κυρτά χωρία. Μπορούμε επίσης να επισημάνουμε ότι ο συνοριακός έλεγχος Robin μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσέγγιση ποινής σε Dirichlet συνοριακά προβλήματα ελέγχου [9, 17, 70]. Για το λόγο αυτό, η εξάρτηση από τις παραμέτρους  $\lambda, \alpha, \eta$  από τις διάφορες σταθερές που εμφανίζονται στις εκτιμήσεις μας παρακολουθείται προσεκτικά.

**Ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου.** Το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου που θεωρείται εδώ, σχετίζεται με την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού που υπόκειται σε ημι-γραμμικές παραβολικές μ.δ.ε. Ειδικότερα, επιδιώκουμε  $y$  και ελέγχους  $g$  (καταναμημένου τύπου) τέτοιους ώστε το

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \quad (1.3.3)$$

να ελαχιστοποιείται εφόσον υπόκεινται στους περιορισμούς

$$\begin{aligned} y_t - \operatorname{div}[A(x)\nabla y] + \phi(y) &= f + g \text{ στο } (0, T) \times \Omega, \\ y &= 0 \text{ στο } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0, x) &= y_0 \text{ στο } \Omega. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Η φυσική έννοια του υπό μελέτη προβλήματος βελτιστοποίησης είναι να αναζητήσουμε τα  $y$  και τους ελέγχους  $g$ , έτσι ώστε τα  $y$  να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά σε ένα δεδομένο στόχο  $y_d$ . Εδώ το  $\Omega$  υποδηλώνει ένα φραγμένο χωρίο στο  $\mathbb{R}^2$ , με Lipschitz σύνορο  $\Gamma$ , όπου τα  $y_0, f$  δηλώνουν τα αρχικά δεδομένα και τον όρο δύναμης, αντίστοιχα, και το  $\alpha$  είναι μια παράμετρος ποινής που μετρά το μέγεθος του στοιχείου ελέγχου. Η μη γραμμική απεικόνιση  $\phi$  ικανοποιεί κάποια συνέχεια και ιδιότητες μονοτονίας, και ο  $A(x) \in C^1(\bar{\Omega})$  είναι μια συνάρτηση συμμετρική μήτρα η οποία είναι ομοιόμορφα θετικά ορισμένη. Το πεδίο εφαρμογής της παρούσας εργασίας είναι η ανάλυση σφάλματος της πρώτης τάξεως απαραίτητων συνθηκών (συστήματος βελτιστοποίησης) του παραπάνω προβλήματος βέλτιστου ελέγχου με τη χρήση ενός ασυνεχούς (στο χρόνο) σχήματος Galerkin (dG). Το αντίστοιχο σύστημα βελτιστοποίησης αποτελείται από μια βασική (προς τα εμπρός στο χρόνο) εξίσωση και μια συζυγής (οπισθόδρομη χρονικά) εξίσωση η οποία είναι συζευγμένη μέσω μιας συνθήκης βελτιστοποίησης, και μη γραμμικών όρων, βλέπε π.χ. [50, 56, 80, 93, 109].

Ο κύριος στόχος είναι να δείξουμε ότι οι dG προσεγγίσεις του συστήματος βελτιστοποίησης παρουσιάζουν παρόμοιες προσεγγιστικές ιδιότητες με την τυπική γραμμική (χωρίς έλεγχο) παραβολική εξίσωση. Ειδικότερα, φαίνεται ότι για κατάλληλα δεδομένα  $f, y_0, y_d$  το σφάλμα των dG προσεγγίσεων είναι τόσο καλό όσο επιτρέπει η ομαλότητα των λύσεων και οι ιδιότητες προσέγγισης των υποχώρων του.

Αυτό επιτυγχάνεται με το να αποδείξουμε την ακόλουθη συμμετρική εκτίμηση, η οποία αναφέρει ότι,

$$\begin{aligned} \|\sigma\alpha\|_X \leq & C \left( \|\sigma\alpha\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma\alpha\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \right. \\ & + \|\sigma\alpha\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \\ & \left. + \|\sigma\alpha\|_{X_1} \right). \end{aligned}$$

Εδώ, η  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ , και  $\|\cdot\|_{X_1}$  υποδηλώνει μια νόρμα που σχετίζεται με μια πιθανή αλλαγή των υποχώρων των πεπερασμένων στοιχείων σε κάθε (ή κάθε λίγα) χρονικά βήματα και μπορεί να παραληφθεί όταν χρησιμοποιούνται οι ίδιοι υπόχωροι σε κάθε χρονικό βήμα. Ο όρος  $\|\sigma\alpha\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  τίθεται από την άποψη της κατάλληλης τοπικής  $L^2$  προβολής και επιτρέπει βέλτιστες τάξεις σύγκλισης όταν η λύση είναι επαρκώς ομαλή. Η σταθερά  $C$  δεν εξαρτάται εκθετικά από ποσότητες της μορφής  $1/\alpha$ . Η εξάρτηση από το  $\alpha$  των διαφόρων σταθερών που εμφανίζονται σε αυτές τις εκτιμήσεις είναι χαρακτηριστική στο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου και ως εκ τούτου θα πρέπει να παρακολουθούνται προσεκτικά. Ειδικότερα, στα περισσότερα υπολογιστικά και πρακτικά παραδείγματα μηχανικής, μας ενδιαφέρουν μικρές τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ , και σε ορισμένες περιπτώσεις ακόμη και συγκρίσιμη με τη παράμετρο διακριτοποίησης  $h$ .

Η δομή της εκτίμησης είναι παρόμοια με αυτήν σε προηγούμενη εργασία των Chrysafinos και Walkington [31] η οποία αφορά τις dG προσεγγίσεις της γραμμικής (χωρίς έλεγχο) παραβολικής μ.δ.ε., καθώς αυτό αφορά βέλτιστες εκτιμήσεις σφαλμάτων όσον αφορά την ομαλότητα των λύσεων και την προσεγγιστική θεωρία για τους επιλεγμένους υποχώρους.

Η απόδειξη της κύριας εκτίμησης, βασίζεται στις εκτιμήσεις ενός βοηθητικού και ουσιαστικά μη συζυγμένου συστήματος μαζί με ένα προς “τα πίσω” (“boot-strap”) επιχείρημα και τις εκτιμήσεις ευστάθειας σε αυθαίρετα χρονικά σημεία κάτω από ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας. Το βασικό στοιχείο της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι η χρήση ενός “δύϊκού” τύπου επιχείρηματος για ασυνεχή χρονικού βηματισμού σχήματα, ώστε να διευκολυνθεί η αποσύνδεση του συστήματος βελτιστοποίησης. Ειδικότερα, με τη χρήση της συζυγούς μεταβλητής ως συνάρτησης δοκιμής στην βασική εξίσωση, και τη βασική μεταβλητή ως συνάρτηση δοκιμής στη συζυγή εξίσωση, θα δείξουμε πρώτα ότι

$$\|\sigma\alpha\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq \|\sigma\alpha\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \alpha^{1/2} \|\sigma\alpha\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}.$$

Στη συνέχεια, για  $\alpha$  κατάλληλα μικρό, έχουμε εφαρμόσει ένα “προς τα πίσω” (“boot-strap”) επιχείρημα για την απόκτηση της επιθυμητής συμμετρικής εκτίμησης. Για καλύτερη γνώση, οι ανωτέρω συμμετρικές εκτιμήσεις και ιδιαίτερα η δομή τους είναι νέες όσον αφορά τη ρύθμιση ελέγχου.

Το κίνητρο για τη χρήση μιας dG προσέγγισης, πηγάζει από τις επιδόσεις της σε μια τεράστια έκταση των προβλημάτων, όπου τα δεδομένα στοιχεία πληρούν χαμηλές ιδιότητες ομαλότητας, όπως των προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου. Επιπλέον, η έννοια των συμμετρικών εκτιμήσεων σφάλματος μπορεί να συλλάβει αποτελεσματικά την αλληλεπίδραση μεταξύ ομαλότητας των λύσεων και των ιδιοτήτων προσέγγισης των υποχώρων. Αυτές οι προβλέψεις είναι επίσης πρόσφατα εφαρμόσιμες σε μια ποικιλία προβλημάτων, τέτοιων όπως η ανάλυση σφαλμάτων των κινούμενων πλεγμάτων, Lagrangian μεθοδολογίες για κινούμενο πλέγμα, βλέπε π.χ. τα [42, 85] και μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του κλασικού Λήμματος C ea [34].

Επιπλέον, ασυνεχή (στο χρόνο) σχήματα μπορούν να επιτρέψουν τη χρήση διαφορετικών υποχώρων σε κάθε χρονικό βήμα, και ως εκ τούτου βασικές ιδέες προσαρμοστικότητας με φυσικό τρόπο. Σε πρόσφατα έργα [20, 21, 83, 84, 87, 88] αναλύθηκαν ασυνεχή Galerkin σχήματα για προβλήματα κατανεμημένου βέλτιστου ελέγχου υπό γραμμικές παραβολικές μ.δ.ε. και έχει αναλυθεί η περίπτωση των ημι-γραμμικών περιορισμών, βλέπε π.χ. [22, 94]. Έχει μελετηθεί η σύγκλιση ασυνεχών σχημάτων χρονικού βηματισμού για προβλήματα βέλτιστου ελέγχου (χωρίς περιορισμούς ελέγχου) που σχετίζονται με ημι-γραμμικές παραβολικές μ.δ.ε., υπό υποθέσεις ελάχιστης ομαλότητας σχετικά με τα δεδομένα και τις παραδοχές αύξουσας μονοτονίας για τον ημι-γραμμικό όρο, βλέπε π.χ. το [22]. Στη πολύ πρόσφατη εργασία [94] παρουσιάζονται οι πρώτης τάξεως (σε χρόνο) εκτιμήσεις σφαλμάτων για τους ελέγχους για ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου που σχετίζονται με ημι-γραμμικές παραβολικές μ.δ.ε., με τους περιορισμούς του ελέγχου, σε περίπτωση που τα αρχικά δεδομένα ανήκουν στον  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  υπό ασθενή υπόθεση



για τον ημι-γραμμικό όρο. Οι έλεγχοι διακριτοποιούνται με σταθερά τμηματικά πολυώνυμα σε χρόνο και στο χώρο, ωστόσο, η ανάλυση είναι επίσης εφαρμόσιμη όταν χρησιμοποιούνται σταθερά τμηματικά πολυώνυμα (στο χρόνο) και γραμμικά τμηματικά (στο χώρο). Για τη βασική εξίσωση κατάσταση, χρησιμοποιείται η χαμηλότερης τάξης ( $k = 0$ ) ασυνεχής (στο χρόνο) μέθοδος Galerkin σε συνδυασμό με σύμμορφα (coforming) πεπερασμένα στοιχεία (στο χώρο). Έχουν παρουσιαστεί οι πρώτες τάξης (στο χρόνο) εκτιμήσεις στο [94], αφού αντιμετωπίζονται επιτυχώς μια ποικιλία δυσκολιών λόγω της παρουσίας των περιορισμών ελέγχου και η αντίστοιχη μη κυρτότητα.

Οι τελευταίες εκτιμήσεις και η ανάλυση του [94] είναι διαφορετικές σε σύγκριση με αυτές που παρουσιάζονται στη παρούσα μελέτη. Εστιάζουμε κυρίως στην ανάπτυξη εκτιμήσεων που κατέχουν συμμετρική δομή (και τα καλύτερα χαρακτηριστικά που περιγράφονται παραπάνω) για το σχετικό σύστημα βελτιστοποίησης.

**Πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου Stokes.** Θεωρούμε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου που σχετίζεται με την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού υπό τις εξελικτικές εξισώσεις Stokes. Ειδικότερα, δοσμένης μιας συνάρτησης στόχου  $y_d$  ψάχνουμε ταχύτητα  $y$  και μεταβλητή ελέγχου  $g$  τέτοια ώστε το συναρτησιακό

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt, \quad (1.3.5)$$

να ελαχιστοποιείται υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} y_t - \nu \Delta y + \nabla p &= f + g && \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div} y &= 0 && \text{στο } (0, T) \times \Omega \\ y &= 0 && \text{στο } (0, T) \times \Gamma \\ y(0, x) &= y_0 && \text{στο } \Omega. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Εδώ, το  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , δείχνει μια ανοικτή φραγμένη πολυγωνική (πολύεδρη) και κυρτή περιοχή. Οι εκτιμήσεις μας ισχύουν στις γενικές περιπτώσεις ενός Lipschitz συνόρου  $\Gamma$ , εντούτοις για τη μελέτη σχημάτων υψηλότερων τάξεων, θα υποθέσουμε ομαλότερο σύνορο. Σημειώνουμε πως ο έλεγχος  $g$  είναι καταναμημένου τύπου. Η ανάλυση και τα αποτελέσματά μας θα ισχύουν και για σχήματα αυθαίρετης τάξης, με τις κατάλληλες υποθέσεις ομαλότητας, αλλά ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην περίπτωση των μη ομαλών αρχικών δεδομένων, δηλ.,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega) \equiv \{v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} v = 0, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0\}$ . Επιπλέον, ενδιαφερόμαστε επίσης για τη περίπτωση των σημειακών περιορισμών ελέγχου υπό την έννοια  $g_a \leq g(t, x) \leq g_b$  για σ.π.  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ , όπου  $g_a, g_b \in \mathbb{R}$ . Ο όρος δύναμης  $f$  και η σταθερά ιξώδους  $\nu > 0$  δίνονται ως δεδομένα, ενώ το  $\alpha > 0$  δείχνει μια παράμετρο ποινής που περιορίζει το μέγεθος του ελέγχου και είναι συγκρίσιμη με τις παραμέτρους διακριτοποίησης.

Ο κύριος στόχος είναι να δείχτεί ότι οι εκτιμήσεις λάθους του αντίστοιχου συστήματος βελτιστοποίησης έχουν την ίδια δομή με εκείνες των μη ελεγχόμενων εξελικτικών εξισώσεων Stokes. Ειδικότερα, αναπτύσσουμε μια σχεδόν συμμετρική εκτίμηση λάθους στις ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας στη φυσική ενεργειακή νόρμα  $\|\cdot\|_{W_S(0,T)} \equiv \|\cdot\|_{L^\infty[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]}$  συνδεδεμένη στο ασυνεχές στο χρόνο χωροχρονικού βηματισμού σχήμα μας, δηλ., μια εκτίμηση της μορφής,

$$\begin{aligned} \|\sigma\text{φάλμα}\|_{W_S(0,T)} &\leq C \|\sigma\text{φάλμα καλύτερης προσέγγισης-προβολών}\|_{W_S(0,T)} \\ &+ \|\sigma\text{φάλμα καλύτερης προσέγγισης της πίεσης}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}. \end{aligned}$$

Αυτή η εκτίμηση ισχύει και σε περίπτωση σχημάτων υψηλότερων τάξεων, με τις κατάλληλες υποθέσεις ομαλότητας, δεδομένου ότι διαχωρίζει το ζήτημα της ομαλότητας του βέλτιστου ζευγαριού από την επιλογή του σχήματος προσέγγισης. Κατά συνέπεια, οι εκτιμήσεις της υψηλής τάξης σχημάτων μπορούν να συμπεριληφθούν επίσης παρόμοια με την χωρίς έλεγχο περίπτωση, τουλάχιστον σε περίπτωση των χωρίς περιορισμούς ελέγχων, όταν τα κλασικά (“boot-strap”) “προς τα πίσω” επιχειρήματα απαιτούν ενισχυμένη ομαλότητα. Για αυτόν τον λόγο, ερευνάμε επίσης τις αραιού (coarse) χρονικού βηματισμού προσεγγίσεις.

Ένα άλλο κύριο χαρακτηριστικό της ανωτέρω εκτίμησης είναι ότι ισχύει και στις περιπτώσεις χαμηλής

ομαλότητας στα δεδομένα. Ακριβέστερα, η συμμετρική εκτίμηση λάθους απαιτεί μόνο την ταχύτητα  $y \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  και τη πίεση  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ , όπου  $\mathbf{V}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \text{div} v = 0\}$ , και  $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p dx = 0\}$ .

Σημειώστε ότι εάν  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  τότε η ομαλότητα της βασικής μεταβλητής περιορίζεται σε  $L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ , όπου  $\mathbf{V}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \text{div} v = 0\}$ . Επιπλέον, παρά το γεγονός ότι  $y_t + \nabla p \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  δεν είναι γνωστό εάν  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  και  $y_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Κατά συνέπεια η πίεση  $p$  ικανοποιεί την (1.3.6) υπό μια έννοια κατανομής. Συνεπώς, η υπόθεση  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  είναι η ελάχιστη, ώστε να εγγυηθεί την αποσύζευξη μεταξύ  $y_t$  και  $p$  και ως εκ τούτου για να επικυρώσει μια κατάλληλη ασπινής διατύπωση για μη ομαλά αρχικά δεδομένα από την άποψη της αριθμητικής ανάλυσης.

Η εκτίμηση λάθους για χωροχρονικές προσεγγίσεις του προβλήματος ταχύτητας με μη ομαλά αρχικά δεδομένα  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  δεν έχει αντιμετωπιστεί προηγουμένως, παρά το γεγονός ότι η περίπτωση των μη ομαλών αρχικών δεδομένων είναι μεγάλης σπουδαιότητας στο πλαίσιο του ελέγχου των ροών ρευστών, βλέπε π.χ. [56]. Για να υπερνικήσουμε την έλλειψη ομαλότητας, αναλύουμε ένα σχήμα που είναι βασισμένο σε μια ασυνεχή χωροχρονική προσέγγιση, η οποία είναι κατάλληλη για τα προβλήματα χωρίς αρκετά ομαλές λύσεις. Η ανάλυση επιδεικνύει την ευνοϊκή συμπεριφορά τέτοιων σχημάτων. Καθορίζουμε μια νέα γενικευμένη χωροχρονική προβολή που εκθέτει καλύτερες ιδιότητες προσέγγισης μέσα στον  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , αλλά είναι εφαρμόσιμη επίσης όταν έχουμε μόνο  $y_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Κατά συνέπεια, κατασκευάζοντας μια γενικευμένη χωροχρονική προβολή και χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο επιχειρήματα δεικνύει, λαμβάνουμε τάξη σύγκλισης  $\mathcal{O}(h)$  για την  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  νόρμα, όταν  $\tau \leq Ch^2$ . Ομοίως, σε περίπτωση φραγμένων ελέγχων καταδεικνύεται η δυνατότητα εφαρμογής των εκτιμήσεών μας μέσα από την έννοια διακριτών μεταβολών στο [65]. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει να υπερνικήσουμε την έλλειψη ενισχυμένης ομαλότητας ως αποτέλεσμα ενός “προς τα πίσω” (“boot-strap”) επιχειρήματος για τον έλεγχο και τη βασική μεταβλητή.

## 1.4

### Σχετικά αποτελέσματα - παλιότερες μελέτες

**Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου.** Έχει μελετηθεί το ασυνεχές Galerkin σχήμα, βλέπε π.χ. [89, 88], όπου αναπτύσσονται οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις για τα κατανομημένα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου με και χωρίς περιορισμούς ελέγχου αντίστοιχα για την εξίσωση θερμοτήτας. Έχουν παρουσιαστεί οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφαλμάτων από την άποψη των κατάλληλων χωροχρονικών προβολών, βλέπε π.χ. [20, 21], και παράγονται για τα χωρίς περιορισμούς κατανομημένα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου σχετικά με τις παραβολικές και πεπλεγμένες (implicit) παραβολικές μ.δ.ε. με γενικούς και ενδεχομένως χρονικά εξαρτημένους συντελεστές στο ελλειπτικό μέρος. Πρόσφατα, έχουν αναπτυχθεί εκτιμήσεις λάθους σχετικές με τα κατανομημένα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου για τις ημιγραμμικές παραβολικές μ.δ.ε., [94], με περιορισμούς ελέγχου και  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  αρχικά δεδομένα, και οι εκ των προτέρων συμμετρικού τύπου εκτιμήσεις σφάλματος, στο [27], για τα προβλήματα χωρίς περιορισμούς ελέγχου. Οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις λάθους για το πρόβλημα της ταχύτητας του ρευστού με περιορισμούς ελέγχου έχουν αναλυθεί στα [13, 14]. Επίσης έχει εξετασθεί πρόσφατα, ένα αποτέλεσμα σύγκλισης για τα ασυνεχή χρονικού βηματισμού σχήματα για τα Robin προβλήματα βέλτιστου ελέγχου (χωρίς περιορισμούς ελέγχου) που αφορούσε τις ημιγραμμικές παραβολικές μ.δ.ε., κάτω από  $L^2(\Omega)$  δεδομένα, βλέπε π.χ. [23]. Τέλος, έχουν αναλυθεί οι πλήρως-διακριτοποιημένες προσεγγίσεις του συνοριακού Neumann προβλήματος ελέγχου, π.χ. στο [86], σχετικό με ομογενείς γραμμικές παραβολικές μ.δ.ε., για το πεπλεγμένο - άμεσο σχήμα Euler, για ομαλά χωρία και για αρκετά ομαλά δεδομένα.

Επίσης έχουν παρουσιαστεί διάφορα αποτελέσματα σχετικά με την ανάλυση των συνοριακών βέλτιστων προβλημάτων ελέγχου στα [56, 80, 93, 109]. Τα διάφορα συνοριακά προβλήματα ελέγχου σχετικά με τις χρονικά εξαρτημένες μ.δ.ε. έχουν μελετηθεί επίσης σε προηγούμενες εργασίες όπως [4, 7, 25, 61, 67, 77, 79, 108, 109, 112].

**Ημιγραμμικό πρόβλημα κατανεμημένου ελέγχου.** Έχουν μελετηθεί διάφορα προβλήματα με τους κατανεμημένους ελέγχους, βλέπε π.χ. [50, 56, 72, 80, 82, 93, 109], όπως επίσης και η ανάλυση των αριθμητικών αλγορίθμων για προβλήματα βέλτιστου ελέγχου, [11, 19, 18, 25, 37, 38, 49, 53, 58, 60, 65, 66, 76, 79, 86, 97, 107, 108, 109, 111, 112], (βλ. επίσης τις αναφορές τους).

Οι εκ των υστέρων εκτιμήσεις για τα dG σχήματα για τα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου που αφορούν γραμμικές παραβολικές μ.δ.ε., έχουν μελετηθεί παλιότερα στα [83, 84], όπως έχει κατασκευαστεί και αναλυθεί και ένας προσαρμοστικός (adaptive) αλγόριθμος χωροχρονικών πεπερασμένων στοιχείων στο [87]. Οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφαλμάτων για ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου του κατανεμημένου τύπου, που υπό συνθήκη την εξίσωση θερμοότητας έχουν παρουσιαστεί στο [88], όπως και οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφαλμάτων για τα dG σχήματα [20, 21], για το πρόβλημα το σχετικό με γραμμικού παραβολικού μ.δ.ε. και πεπλεγμένης (implicit) παραβολικής μ.δ.ε. αντίστοιχα, με πιθανόν μη αυτοσυζυγείς εξαρτώμενους από το χρόνο συντελεστές. Επίσης έχει εφαρμοστεί στο [90] ένα σχήμα Petrov-Galerkin Crank-Nicolson σε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου με περιορισμούς ελέγχου σχετικούς με γραμμική παραβολικού τύπου μ.δ.ε., ενώ έχει επίσης αναλυθεί στο [6] μια τύπου Crank-Nicolson μοντελοποίηση. Και στα δύο έγγραφα αποδεικνύεται δεύτερης τάξης σύγκλιση.

Υπάρχει άφθονη βιβλιογραφία σχετικά με τα dG σχήματα για τη λύση παραβολικών εξισώσεων χωρίς εφαρμογή των ελέγχων, π.χ. [104]. Η σχέση της ασυνεχούς μεθόδου Galerkin με τις προσαρμοστικές (adaptive) τεχνικές έχει μελετηθεί λεπτομερώς στο [44, 45, 104]. Έχουν παρουσιαστεί αποτελέσματα σχετικά με τις προσεγγίσεις πεπερασμένων στοιχείων ημιγραμμικών και γενικά μη γραμμικών παραβολικών προβλημάτων, βλέπε π.χ. [1, 48, 46, 47].

**Πρόβλημα κατανεμημένου ελέγχου Stokes.** Έχουν παρουσιαστεί διάφορα αποτελέσματα σχετικά με την ανάλυση παρόμοιων προβλημάτων ελέγχου, π.χ. στα [2, 12, 56, 66, 101, 106] όπου αναπτύσσονται και αναλύονται οι διάφορες πτυχές, συμπεριλαμβανομένου πρώτης και δεύτερης τάξης απαραίτητες συνθήκες. Αντίθετα βιβλιογραφία σχετικά με την αριθμητική ανάλυση για τα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου σχετικά με εξελικτικές Navier-Stokes εξισώσεις είναι πολύ περιορισμένη. Όστόσο έχει αποδειχθεί στα [61, 59], η σύγκλιση ενός αλγορίθμου κλίσης σε περίπτωση κατανεμημένων ελέγχων και φραγμένων κατανεμημένων ελέγχων. Έχουν μελετηθεί οι εκτιμήσεις λάθους για ημιδιακριτή στο χώρο διακριτοποίηση βλέπε π.χ. στο [36] σε περίπτωση κατανεμημένων ελέγχων χωρίς περιορισμούς ελέγχου με τη χρησιμοποίηση μιας προσέγγισης διακριτών μεταβολών. Επίσης έχουν παρουσιαστεί στο [36] πλήρως-διακριτές εκτιμήσεις λάθους για το πεπλεγμένο σχήμα Euler για το πρόβλημα εύρεσης ταχύτητας (χωρίς περιορισμούς ελέγχου) για την ομογενή εξίσωση Stokes χρησιμοποιώντας τη προσέγγιση διακριτών μεταβολών, και για ομαλά δεδομένα.

Πρόσφατα, αναλύθηκαν οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις λάθους για το πρόβλημα παρακολούθησης της ταχύτητας για ροές Navier-Stokes με περιορισμούς ελέγχου στα [13, 14]. Το χαμηλής τάξης ασυνεχές χρονικά σχήμα Galerkin (τμηματικά σταθερά πολώνυμα), που συνδυάστηκε με σύμμορφα (conforming) στοιχεία στο χώρο για την ταχύτητα και την πίεση, και οι εκτιμήσεις για τη βασική μεταβλητή, τη συζυγή, και τις μεταβλητές ελέγχου παρήχθησαν για τρεις χωριστές επιλογές διακριτοποίησης του ελέγχου (τμηματικά σταθερά, γραμμικά πολώνυμα, και διακριτοποίηση μεταβολών). Η μελέτη σε Stokes συστήματα, παρακινήθηκε από αποτελέσματα πολύ πρόσφατης δουλειάς των Chrysafinos και Casas, [13, 14] ως προσπάθεια να επεκταθούν αυτά τα αποτελέσματα ώστε να συμπεριληφθούν οι περιπτώσεις των μη ομαλών δεδομένων, και τα υψηλής τάξης σχήματα μέσω μιας συμμετρικής εκτίμησης.

Άλλα αποτελέσματα σχετικά με τις ασυνεχείς χρονικού βηματισμού προσεγγίσεις συσχετίζονται με τους κατανεμημένους ελέγχους για τις γραμμικές και ημιγραμμικές παραβολικές μ.δ.ε. Πρόσφατα αναπτύχθηκαν οι εκτιμήσεις λάθους, οι σχετικές με τα κατανεμημένα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου για τις ημιγραμμικές παραβολικές μ.δ.ε., βλέπε π.χ. το [94], με περιορισμούς ελέγχου και  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  αρχικά δεδομένα, και τις εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφαλμάτων συμμετρικού τύπου, στο [27] για τα προβλήματα χωρίς περιορισμούς ελέγχου. Τέλος, αναφέρουμε πως έχουν δημοσιευτεί διάφορες εργασίες σχετικά με τα παραβολικά προβλήματα βέλτιστου ελέγχου με, και χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο που μπορούν να συμπεριλάβουν υψηλότερης τάξης σχήματα όπως στα [6, 20, 21, 88, 89, 95, 100].

Διάφορα αποτελέσματα σχετικά με την ανάλυση των προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου έχουν παρουσιαστεί στα [56, 80, 93, 109] (βλ. επίσης τις αναφορές τους). Για τα γενικά αποτελέσματα σχετικά με την

ασυνεχή μέθοδο Galerkin για παραβολικού τύπου μ.δ.ε. (χωρίς εφαρμογή των ελέγχων) παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [104, 73] (βλ. επίσης τις αναφορές τους). Μια εκ των υστέρων εκτίμηση και τα σχετικά ζητήματα προσαρμοστικότητας (adaptivity) μέσα στο ασυνεχές Galerkin πλαίσιο για τα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου ερευνήθηκαν επίσης στις εργασίες των [84, 87] (βλ. επίσης τις αναφορές τους).

# 2

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

---

Σ' αυτή την ενότητα παραθέτουμε εισαγωγικά στοιχεία και ιδιότητες χώρων Sobolev. Ορίζουμε τους χώρους των ασθενών λύσεων που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια, καθώς και άλλα εργαλεία συναρτησιακής ανάλυσης που κυρίως χρησιμοποιούνται στην ανάλυση για ημικραμμικά παραβολικά προβλήματα.

### Περιεχόμενα

---

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.1   | Χώροι Sobolev . . . . .                                  | 14 |
| 2.1.1 | Ασθενείς παράγωγοι . . . . .                             | 14 |
| 2.1.2 | Ορισμός χώρων Sobolev . . . . .                          | 14 |
| 2.1.3 | Συμπάγεια . . . . .                                      | 15 |
| 2.1.4 | Ο χώρος $H^{-1}$ . . . . .                               | 16 |
| 2.2   | Βασικές ιδιότητες ιχνών . . . . .                        | 16 |
| 2.2.1 | Ενδιάμεσοι-κλασματικοί χώροι . . . . .                   | 16 |
| 2.3   | Χώροι που εμπεριέχουν χρόνο . . . . .                    | 18 |
| 2.3.1 | Χώροι λύσεων . . . . .                                   | 19 |
| 2.4   | Χρήσιμες ανισότητες . . . . .                            | 19 |
| 2.5   | Fréchet, Gâteaux και παράγωγος κατά κατεύθυνση . . . . . | 20 |

---

## 2.1 Χώροι Sobolev

Στην πράξη πρέπει να επιτύχουμε το σχεδιασμό χώρων αποτελούμενων από συναρτήσεις που έχουν κάποιες, αλλά όχι τόσο σημαντικές, ιδιότητες ομαλότητας. Τέτοιοι χώροι είναι οι χώροι Sobolev και παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### 2.1.1 Ασθενείς παράγωγοι

Ξεκινάμε με ουσιαστική αποδυνάμωση της έννοιας της μερικής παραγώγου (weak derivative).

**Σημείωση.** Ας συμβολίσουμε με  $C_c^\infty(U)$  το χώρο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , με συμπαγές στήριγμα (compact support) στο  $U$ . Θα ονομάζουμε συχνά μια συνάρτηση  $\phi$  που ανήκει στον  $C_c^\infty(U)$  ως συνάρτηση δοκιμής (test function).

**Ορισμός 2.1.1.** Υποθέτουμε ότι  $u, v \in L^1_{loc}(U)$ , και  $\alpha$  ένας πολυδείκτης (multiindex). Λέμε ότι η  $v$  είναι μια  $\alpha^{-οστη}$  ασθενής μερική παράγωγος του  $u$ , γράφοντας

$$D^\alpha u = v,$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \quad (2.1.1)$$

για όλες τις συναρτήσεις δοκιμής  $\phi \in C_c^\infty(U)$ .

Με άλλα λόγια, αν μας δίνεται  $u$  και αν συμβαίνει να υπάρχει μια συνάρτηση  $v$  που ικανοποιεί την (2.1.1) για όλα τα  $\phi$ , λέμε ότι η  $D^\alpha u = v$  είναι η ασθενής έννοια. Αν δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση  $v$ , τότε η  $u$  δεν αποτελεί μια ασθενή  $\alpha^{-οστη}$  παράγωγο.

**Λήμμα 2.1.2. (Μοναδικότητα των ασθενών παραγώγων)** Μια ασθενής  $\alpha^{-οστη}$  μερική παράγωγος του  $u$ , αν υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

### 2.1.2 Ορισμός χώρων Sobolev

Έστω  $1 \leq p \leq \infty$  και  $k$  ένας μη αρνητικός ακέραιος. Ορίζουμε τώρα ορισμένους χώρους συναρτήσεων, οι οποίοι έχουν ασθενείς παραγώγους διαφόρων τάξεων πάνω σε χώρους  $L^p$ .

**Ορισμός 2.1.3.** Ο χώρος Sobolev

$$W^{k,p}(U)$$

περιέχει όλες τις τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε για κάθε πολυδείκτη  $\alpha$  με  $|\alpha| \leq k$ , η  $D^\alpha u$  υπάρχει με την ασθενή έννοια και ανήκει στον  $L^p$ .

**Σημείωση**

1. Αν  $p = 2$ , συνήθως γράφουμε

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Το γράμμα  $H$  χρησιμοποιείται, αφού, καθώς θα δούμε, ο  $H^k(U)$  είναι ένας χώρος Hilbert. Ας σημειώσουμε πως  $H^0(U) = L^2(U)$ .

2. Από εδώ και στο εξής θα αναγνωρίζουμε συναρτήσεις στον  $W^{k,p}(U)$  που συμφωνούν σχεδόν παντού.

**Ορισμός 2.1.4.** Αν  $u \in W^{k,p}(U)$ , ορίζουμε την νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases}$$

**Συμβολισμός:** αν η πραγματικών τιμών συνάρτηση  $f$  είναι μετρήσιμη, ορίζουμε το στοιχειώδες ανώτατο φράγμα (essential supremum):

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{\mu \in \mathbb{R} \mid |\{f > \mu\}| = 0\}.$$

**Ορισμός 2.1.5.** 1. Έστω  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ ,  $u \in W^{k,p}(U)$ . Λέμε ότι  $u_m$  συγκλίνει στο  $u$  στο  $W^{k,p}(U)$ , και γράφουμε:  $u_m \rightarrow u$  στο  $W^{k,p}(U)$ , αν  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$ .

2. Γράφουμε:  $u_m \rightarrow u$  στο  $W_{loc}^{k,p}(U)$ , εννοώντας ότι  $u_m \rightarrow u$  στο  $W^{k,p}(V)$ , για κάθε  $V \subset\subset U$ .

**Ορισμός 2.1.6.** Συμβολίζουμε με  $W_0^{k,p}(U)$ , το περίβλημα του  $C_c^\infty(U)$  στο  $W^{k,p}(U)$

Οπότε  $u \in W_0^{k,p}(U)$  αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C_c^\infty(U)$  τέτοιες ώστε  $u_m \rightarrow u$  στο  $W^{k,p}(U)$ . Μεταφοράζοντας τον  $W_0^{k,p}(U)$ , αποτελείται από τις συναρτήσεις  $u \in W^{k,p}(U)$  τέτοιες ώστε

$$D^\alpha u = 0 \text{ στο } \partial U \text{ για όλα τα } |\alpha| \leq k-1.$$

**Συμβολισμός.** Συνήθως γράφουμε

$$H_0^k(U) = W_0^{k,2}(U).$$

Αν  $n = 1$  και  $U$  είναι ένα ανοιχτό διάστημα στον  $\mathbb{R}^1$ , τότε  $u \in W^{1,p}(U)$  αν και μόνο αν η  $u$  ισούται με μια σχεδόν παντού απολύτως συνεχή συνάρτηση της οποίας η συνηθισμένη παράγωγος (η οποία υπάρχει σχεδόν παντού) υπάρχει στον  $L^p(U)$ . Ένας τόσο απλός χαρακτηρισμός είναι παρ' όλα αυτά διαθέσιμος μόνο για  $n = 1$ . Γενικά μία συνάρτηση μπορεί να ανήκει σε ένα χώρο Sobolev και ακόμη να είναι ασυνεχής και/ή φραγμένη.

### 2.1.3 Συμπάγεια

Η ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev υποδηλώνει την εμφύτευση του χώρου  $W^{1,p}(U)$  μέσα στο  $L^{p^*}(U)$  για  $1 \leq p < n$ ,  $p^* = \frac{np}{n-p}$ . Θα ισχυριστούμε στη συνέχεια ότι ο χώρος  $W^{1,p}(U)$  είναι πράγματι συμπαγώς εμφυτευμένος στον  $L^q(U)$  για  $1 \leq q < p^*$ . Η συμπάγεια είναι θεμελιώδης για τις εφαρμογές της γραμμικής και μη γραμμικής συναρτησιακής ανάλυσης στη θεωρία των μ.δ.ε. όπως θα δούμε παρακάτω.

**Ορισμός 2.1.7.** Έστω  $X$  και  $Y$  χώροι Banach, με  $X \subset Y$ . Λέμε ότι ο  $X$  είναι συμπαγώς εμφυτευμένος στον  $Y$ , γράφοντας

$$X \subset\subset Y,$$

υπό την προϋπόθεση

- $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$  ( $x \in X$ ) για κάποια σταθερά  $C$ , και
- κάθε φραγμένη ακολουθία στον  $X$  είναι προσυμπαγής (precompact) στον  $Y$ .

**Θεώρημα 2.1.8** (Θεώρημα συμπίεσης Rellich-Kondrachov). Θεωρούμε  $U$  ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ , και το  $\partial U$  είναι  $C^1$ . Υποθέτουμε  $1 \leq p < n$ . Τότε

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U) \text{ για κάθε } 1 \leq q < p^*.$$

### 2.1.4 Ο χώρος $H^{-1}$ .

Όπως θα δούμε στη συνέχεια στη μελέτη των γραμμικών ελλειπτικών, παραβολικών και υπερβολικών μ.δ.ε., είναι σημαντικά να έχουμε έναν άμεσο χαρακτηρισμό του δυϊκού χώρου του  $H_0^1$ .

**Ορισμός 2.1.9.** Συμβολίζουμε με  $H^{-1}(U)$  τον δυϊκό χώρο του  $H_0^1(U)$ .

Με άλλα λόγια η  $f$  ανήκει στον  $H^{-1}(U)$  με την προϋπόθεση ότι η  $f$  είναι ένα φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό στον  $H_0^1(U)$ . Ας σημειώσουμε πολύ προσεχτικά ότι δεν προσδιορίζουμε τον χώρο  $H_0^1$  μαζί με τον δυϊκό του. Αντίθετα όπως θα δούμε σε λίγο, έχουμε

$$H_0^1(U) \subset L^2(U) \subset H^{-1}(U).$$

**Συμβολισμός.** Θα γράφουμε  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  για να συμβολίσουμε το δυϊκό ζεύγος μεταξύ  $H^{-1}(U)$  και  $H_0^1(U)$ .

**Ορισμός 2.1.10.** Αν  $f \in H^{-1}(U)$ , ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} := \sup\{\langle f, u \rangle \mid u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}.$$

**Θεώρημα 2.1.11** (Χαρακτηρισμός του  $H^{-1}$ ). 1. Θεωρούμε ότι  $f \in H^{-1}(U)$ . Τότε υπάρχουν συναρτήσεις  $f^0, f^1, \dots, f^n$  στον  $L^2(U)$  τέτοιες ώστε

$$\langle f, u \rangle = \int_U (f^0 u + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i}) dx \quad (v \in H_0^1(U)) \quad (2.1.2)$$

2. Επιπλέον

$$\|u\|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left( \int_U \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2} \mid \eta f \text{ ικανοποιεί την (2.1.2) για } f^0, \dots, f^n \in L^2(U) \right\}$$

**Συμβολισμός.** Γράφουμε " $f = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i$ " όταν ισχύει η σχέση (2.1.2).

## 2.2 Βασικές ιδιότητες ιχνών

### 2.2.1 Ενδιάμεσοι-κλασματικοί χώροι

Για  $0 < \sigma < 1$  και  $1 < s < 2$  ισχύει

$$H^2(\Omega) \subset H^s(\Omega) \subset H^\sigma(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$



Εάν το  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , ο  $H^s(\Omega)$  μπορεί να χαρακτηριστεί από μετασχηματισμούς Fourier, βλέπε π.χ. [52, σελίδες 6-7] :

$$I_\sigma = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|y(x) - y(\xi)|^2}{|x - \xi|^{n+2\sigma}} dx d\xi < \infty,$$

$$\|y\|_{H^\sigma(\Omega)} = \left( \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 + I_\sigma(y) \right)^{1/2}, \quad 0 < \sigma < 1,$$

$$\|y\|_{H^s(\Omega)} = \left( \|y\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n I_{s-[s]}(\partial_{x_i} y) \right)^{1/2}, \quad 1 < s < 2.$$

Οπότε έχουμε τους χώρους Sobolev  $H^s(\Omega)$ , και  $H^s(\Gamma)$ , με  $s \in \mathbb{R}$  με νόρμες  $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$  και  $\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$  αντιστοίχως. Για το πρόβλημα Robin συνοριακού ελέγχου θα χρησιμοποιούμε τους χώρους  $H^{1/2}(\Gamma)$ , τον δυϊκό του  $H^{-1/2}(\Gamma)$ , και το δυϊκό ζεύγος συμβολίζεται με  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ . Έστω ότι  $u$  είναι μια συνάρτηση που ανήκει στο χώρο απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγές στήριγμα  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  και ως συμβολίσουμε τις συνοριακές τιμές της με  $\gamma_0 u$ . Το επόμενο θεώρημα ίχνους επεκτείνει τον τελεστή  $\gamma_0$  σε συναρτήσεις στον  $W^{s,p}(\Omega)$ .

**Θεώρημα 2.2.1.** Έστω  $\Omega$  ένα φραγμένο ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$  με σύνορο  $\Gamma$  τάξης  $C^{k,1}$  (συνεχές - Lipschitz συνεχές τάξης  $C^m$  για κάποιο ακέραιο  $m$ ) και έστω  $p \geq 1$  και  $s \geq 0$ , δυο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε  $s \leq k+1$ ,  $s-1/p = l+\sigma$  όπου  $l \geq 0$  είναι ένας ακέραιος και  $0 < \sigma < 1$ . Τότε η απεικόνιση  $u \rightarrow \gamma_0 u$  ορισμένη στον  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  έχει μια μοναδική γραμμική συνεχή επέκταση ως ένας τελεστής από τον

$$W^{s,p}(\Omega) \text{ στον } W^{s-1/p,p}(\Gamma).$$

Εκτός από το συνοριακό τελεστή τιμών  $\gamma_0$ , θα χρειαστούμε επίσης το ίχνος της κάθετης παραγώγου  $\gamma_1 u$  ορισμένο για  $u$  στον  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  με

$$\gamma_1 u = \partial u / \partial \mathbf{n} = \sum_{i=1}^N \gamma_0(\partial u / \partial x_i) n_i,$$

όπου με  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$  συμβολίζουμε το μοναδιαίο προς τα έξω κάθετο διάνυσμα στο  $\Gamma$  οπότε

**Θεώρημα 2.2.2.** Υπό τις υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος με  $l \geq 1$  η απεικόνιση

$$u \rightarrow \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\}$$

ορισμένη στον  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  έχει μια γραμμική συνεχή επέκταση ως τελεστής από τον

$$W^{s,p}(\Omega) \text{ στον } W^{s-1/p,p}(\Gamma) \times W^{s-1-1/p,p}(\Gamma).$$

**Σημείωση 2.2.3.** Αν το σύνορο του  $\Omega$  έχει γωνίες, το κάθετο διάνυσμα έχει ασυνέχειες και είναι προφανές πως η  $\partial u / \partial \mathbf{n}$  είναι χαμηλής ομαλότητας όσο ομαλό και αν είναι το  $u$ . Παρόλα αυτά το παραπάνω θεώρημα μπορεί να επεκταθεί και σ' αυτή τη περίπτωση βλέπε π.χ. [52].

**Σημείωση 2.2.4.** Ορίζουμε με τη βοήθεια των κλασματικών χώρων και των θεωρημάτων ίχνών που περιγράψαμε στα προηγούμενα, τις βασικές ιδιότητες ίχνών. Πιο συγκεκριμένα

$$H^{1/2}(\Gamma) = \left\{ y \in L^2(\Gamma) \mid |y|_{H^{1/2}(\Gamma)} < \infty \right\},$$

$$|y|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \left( \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|y(x) - y(\xi)|^2}{|x - \xi|^{n-1+1}} dx d\xi \right)^{1/2},$$

$$\|y\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \left( \|y\|_{L^2(\Gamma)}^2 + |y|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}.$$

Για την απεικόνιση  $\gamma_0 : y \mapsto y|_{\Gamma}$ , ισχύουν τα ακόλουθα

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto H^{1/2}(\Gamma),$$

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \mapsto H^{s-1/2}(\Gamma), \quad s > 1/2,$$

ο  $\gamma_0$  είναι “επί” τελεστής από τον  $H^s(\Omega)$  στον  $H^{s-1/2}(\Gamma)$ .

Για τον τελεστή  $\gamma_1 : y \mapsto \partial y / \partial n$  έχουμε

$$\gamma_1 : H^2(\Omega) \mapsto H^{1/2}(\Gamma),$$

$$\gamma_1 : H^s(\Omega) \mapsto H^{s-3/2}(\Gamma), \quad s > 3/2,$$

όπου ο  $\gamma_1$  είναι “επί” τελεστής από τον  $H^s(\Omega)$  στον  $H^{s-3/2}(\Gamma)$ .

Επίσης είναι

$$H_0^1(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0 y = 0\},$$

$$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*, \quad H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*.$$

### 2.3 Χώροι που εμπεριέχουν χρόνο

Για καθέναν από τους παραπάνω χώρους Sobolev, ορίζουμε τους χωροχρονικούς χώρους,  $L^p[0, T; X]$ ,  $L^\infty[0, T; X]$ , με τους κλασικούς χώρους, εφοδιασμένους με τις νόρμες:

$$\|v\|_{L^p[0, T; X]} = \left( \int_0^T \|v\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|v\|_{L^\infty[0, T; X]} = \operatorname{esssup}_{t \in [0, T]} \|v\|_X.$$

Το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων  $v : [0, T] \rightarrow X$ , συμβολίζεται με  $C[0, T; X]$ , με νόρμα που ορίζεται ως εξής

$$\|v\|_{C[0, T; X]} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X.$$

Τελικώς συμβολίζουμε με  $H^1[0, T; X]$ ,

$$\|v\|_{H^1[0, T; X]} = \left( \int_0^T \|v\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^T \|v_t\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C < \infty.$$

Ειδικά για το διανυσματικό εξελικτικό πρόβλημα έχουμε το παρακάτω συμβολισμό: Χρησιμοποιούμε τον κλασικό συμβολισμό για τους χώρους Sobolev  $H^s(\Omega)$  και τις αντίστοιχες διανυσματικές ιδιότητες  $\mathbf{H}^s(\Omega)$  για  $s \in \mathbb{R}$  με νόρμες που θα συμβολίζουμε με  $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$  και  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)}$  αντίστοιχως. Επιπλέον, έστω  $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}$ ,  $\mathbf{H}_0^1 = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}$ . Επίσης συμβολίζουμε με  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ , τον δυϊκό του  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  και το αντίστοιχο δυϊκό ζεύγος με  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}^1(\Omega)} \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Με  $\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ,  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ,  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$ ,  $\mathbf{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ,

$$H^{2,1}[0, T; \Omega] = \{y \in L^2[0, T; \Omega] : \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2[0, T; \Omega], 1 \leq i, j \leq 2\}$$

και

$$\|y\|_{H^{2,1}[0, T; \Omega]} = \left\{ \int_{[0, T; \Omega]} \left( |y|^2 + \left| \frac{\partial y}{\partial t} \right|^2 \right) dx dt + \sum_{i=1}^2 \int_{[0, T; \Omega]} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^2 dx dt + \sum_{i, j=1}^2 \int_{[0, T; \Omega]} \left| \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx dt \right\}^{1/2}.$$

Επίσης συμβολίζουμε  $\mathbf{H}^{2,1}[0, T; \Omega] = H^{2,1}[0, T; \Omega] \times H^{2,1}[0, T; \Omega]$  και τους αντίστοιχους χώρους μηδενικής απόκλισης (divergence free)<sup>i</sup> με  $\mathbf{V}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \text{div} v = 0\}$ ,  $\mathbf{W}(\Omega) = \{v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \text{div} v = 0, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0\}$ , εφοδιασμένο με τους  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  και  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  αντιστοίχως, και με  $\mathbf{V}(\Omega)^*$  τον δυϊκό του  $\mathbf{V}(\Omega)$ . Τελικώς, για την πίεση θα χρειαστούμε τον χώρο,  $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0\}$  εφοδιασμένο με την  $L^2(\Omega)$  νόρμα.

### 2.3.1 Χώροι λύσεων

Ο χώρος ασθενών λύσεων των μ.δ.ε. που εξετάζουμε στη περίπτωση της βελτιστοποίησης σε εξελικτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος καθώς και από τις συνοριακές συνθήκες που εξετάζουμε. Ακολουθούν κάποια τέτοια παραδείγματα, που θα χρησιμοποιηθούν. Συμβολίζουμε το χώρο λύσεων με  $W(0, T)$  χρησιμοποιώντας και ένα δείκτη που έχει σχέση με το πρόβλημα το οποίο μελετάμε το χώρο λύσεων:

*Πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου:*

$$W_R(0, T) := L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap L^\infty[0, T; L^2(\Omega)] \times L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$$

με νόρμα

$$\|u\|_{W_R(0, T)}^2 \equiv \|u\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^2 + \|u\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}^2 + \|u\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}^2.$$

*Πρόβλημα καταμεμημένου ελέγχου:*

$$W_D(0, T) = L^2[0, T; H_0^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{-1}(\Omega)]$$

με νόρμα

$$\|v\|_{W_D(0, T)}^2 = \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^2 + \|v_t\|_{L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]}^2.$$

*Πρόβλημα καταμεμημένου ελέγχου σε συστήματα:*

Συχνά θα χρησιμοποιούμε το χώρο λύσεων

$$W_S(0, T) := L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$$

εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|v\|_{W_S(0, T)}^2 \equiv \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)]}^2 + \|u\|_{L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}^2.$$

## 2.4 Χρήσιμες ανισότητες

Παραθέτουμε κάποιες χρήσιμες ανισότητες, και πιο συγκεκριμένα τις Grönwall, Sobolev, γενικευμένη Hölder, Friedrichs και Young, ανισότητες που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα.

*Ανισότητα Grönwall* (βλέπε π.χ. [43, Παράρτημα B], [20, Παράρτημα A]): Αν  $(1 - C\tau^n)a^n + b^n \leq$

<sup>i</sup> το ρευστό είναι εντελώς ασυμπιεστό και ο συνολικός όγκος δεν μεταβάλλεται δηλαδή το ρευστό δε συστέλλεται ή διαστέλλεται.

$a^{n-1} + f^n$  και  $\max_n C\tau^n < 1$ , τότε

$$a^N + \sum_{n=1}^N e^{C(t^N - t^n)} b^n \leq (1 + T\mathcal{O}(\tau)) \left( e^{Ct^N} a^0 + \sum_{n=1}^N e^{C(t^N - t^n)} f^n \right)$$

όπου  $\tau = \max \tau^n$  και  $t^n = \sum_{i=1}^n \tau^n$ .

*Συνοριακή ανισότητα Sobolev* (βλέπε π.χ. [10, Θεώρημα 1.6.6]): Για πραγματικό αριθμό  $p$  με  $1 \leq p \leq \infty$ , και εφόσον ο  $\Omega$  έχει σύνορο Lipschitz τότε υπάρχει μια σταθερά  $C$ , τέτοια ώστε

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{L^p(\Omega)}^{1-1/p} \|v\|_{W_p^1(\Omega)}^{1/p}, \forall v \in W_p^1(\Omega).$$

*Γενικευμένη ανισότητα Hölder*: Για κάθε μετρήσιμο σύνολο  $E$ , οποιασδήποτε διάστασης και για  $(1/s_1) + (1/s_2) + (1/s_3) = 1$ ,  $s_i \geq 1$ ,

$$\int_E f_1 f_2 f_3 dE \leq \|f_1\|_{L^{s_1}(E)} \|f_2\|_{L^{s_2}(E)} \|f_3\|_{L^{s_3}(E)}.$$

*Ανισότητα Young*: Για κάθε  $a, b \geq 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $ab \leq \delta a^2 + (1/4\delta)b^2$ .

*Γενικευμένη ανισότητα Friedrichs* (βλέπε π.χ. [92, Θεώρημα 1.9]): Υπάρχει  $C_F > 0$  (που εξαρτάται μόνο από το  $\Omega$ ) τέτοια ώστε:

$$\|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C_F \|y\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

## 2.5

### Fréchet, Gâteaux και παράγωγος κατά κατεύθυνση

Θυμίζουμε ότι για Banach χώρους  $X$  και για  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty)$ , το όριο

$$f'(x, h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda},$$

όταν υπάρχει ονομάζεται *παράγωγος κατά κατεύθυνση (directional derivative)* του  $h \in X$  στο  $x$ . Η απεικόνιση  $h \rightarrow f'(x, h)$  ονομάζεται *διαφορικό κατά κατεύθυνση (directional differential)* της  $f$  στο  $x$  αν είναι καλά ορισμένο για όλα τα  $h \in X$ . Η συνάρτηση  $f$  ονομάζεται *ασθενώς (weakly) ή Gâteaux διαφορίσιμη* στο  $x$  αν το  $h \rightarrow f'(x, h)$  είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό στον  $X$ . Το αντίστοιχο στοιχείο από τον  $X^*$  θα συμβολίζεται με  $\text{grad}f(x)$ :

$$f'(x, h) = (h, \text{grad}f(x))_{X \times X^*}, \forall h \in X.$$

Επιπλέον, αν

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x) - (y, \text{grad}f(x))_{X \times X^*}}{|y|_X} = 0.$$

τότε η  $f$  είναι Fréchet διαφορίσιμη στο  $x$ . Προφανώς κάθε Fréchet διαφορίσιμη είναι Gâteaux διαφορίσιμη επίσης. Η επέκταση των παραπάνω ορισμών σε διανυσματικές συναρτήσεις είναι άμεση. Ο κανόνας της αλυσίδας βεβαιώνει πως αν η  $g : X_1 \rightarrow X_2$  (χώροι Banach) είναι μία Gâteaux διαφορίσιμη απεικόνιση και  $\phi : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι Fréchet διαφορίσιμη, τότε η  $f : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  που δίνεται από την  $f(x) = \phi(g(x))$  είναι Gâteaux διαφορίσιμη και  $\text{grad}f(x) = \text{grad}\phi(g(x)) [\text{grad}g(x)]$  (Tapia [1971]).

# 3

## ΣΥΝΕΧΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ, ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΗΣ

---

*Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές υποθέσεις που θα χρησιμοποιηθούν, μια εισαγωγική μελέτη ως προς την ύπαρξη λύσης καθώς και το συνεχές σύστημα βελτιστοποίησης.*

### Περιεχόμενα

---

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Βασικές υποθέσεις . . . . .                         | 22 |
| 3.2 | Συνεχές πρόβλημα ελέγχου και ύπαρξη λύσης . . . . . | 23 |
| 3.3 | Το Σύστημα βελτιστοποίησης . . . . .                | 26 |

---

### 3.1 Βασικές υποθέσεις

**Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου.** Για κάθε  $\eta \geq 0$ , η διγραμμική μορφή που σχετίζεται με το τελεστή μας είναι:

$$a(y, v) = \eta \int_{\Omega} \nabla y \nabla v dx, \quad \forall y, v \in H^1(\Omega),$$

και ικανοποιεί τις συνθήκες πιστικότητας και συνέχειας

$$a(y, y) \geq \eta \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad a(y, v) \leq C\eta \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall y, v \in H^1(\Omega).$$

**Ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου.** Και, σε αυτή τη περίπτωση ο διγραμμικός τελεστής που ορίζεται από το

$$a(y, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla y \nabla v dx \quad \forall y, v \in H^1(\Omega),$$

επίσης ικανοποιεί τις συνθήκες πιστικότητας και συνέχειας

$$a(y, y) \geq \eta \|y\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad a(y, v) \leq C_c \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall y, v \in H_0^1(\Omega).$$

Τα δεδομένα ικανοποιούν τις ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας οι οποίες εγγυώνται την ύπαρξη ασθενούς λύσεως  $y \in W(0, T)$ , δηλαδή,

$$f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)], \quad y_0 \in L^2(\Omega)$$

ενώ ο καταναμημένος έλεγχος  $g$  είναι στο χώρο  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Πρέπει να πούμε πως με τις παραπάνω υποθέσεις ομαλότητας κάποιος θα μπορούσε να δείξει μόνο τη σύγκλιση των διακριτών σχημάτων όπως μπορούμε να δούμε στην εργασία [22, Ενότητα 3] (ακόμη και στη περίπτωση χωρίς έλεγχο).

Για εκτιμήσεις σφαλμάτων, χρειαζόμαστε επιπλέον ομαλότητα ώστε να εγγυηθούμε τάξεις σύγκλισης. Πιο συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε πως  $y \in L^\infty[0, T; L^4(\Omega)]$ , που στην ουσία απαιτεί  $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Η επιλογή του χώρου ελέγχου απλοποιεί σημαντικά την εφαρμογή του αλγορίθμου πεπερασμένων στοιχείων, αφού οδηγεί σε αλγεβρική συνθήκη βελτιστοποίησης. Οπότε αποφεύγουμε τη χρήση χώρων κλασματικής τάξης, ή τη λύση μιας επιπλέον μ.δ.ε. η οποία εμφανίζεται όταν άλλες νόρμες του ελέγχου  $g$  εμπεριέχονται στο συναρτησιακό, βλέπε π.χ. [56].

Για την επακόλουθη ανάλυση αρκεί ο στόχος  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Ωστόσο στις περισσότερες περιπτώσεις το  $y_d$  είναι στη πραγματικότητα ομαλότερο, αφού στην ουσία αντιστοιχεί σε μια λύση της παραβολικής μ.δ.ε., και οπότε μπορεί να θεωρηθεί πως  $y_d \in W_D(0, T)$ . Για την ανάλυση μας στα διακριτά σχήματα, ο ημιγραμμικός όρος απαιτείται να ικανοποιεί τις ακόλουθες δομικές υποθέσεις:

**Υπόθεση 3.1.1.** (α) Για τη σύγκλιση της βασικής μεταβλητής: Ο ημιγραμμικός όρος  $\phi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  ικανοποιεί,

$$\phi'(s) \geq 0, \quad |\phi(s)| \leq C|s|^p, \quad |\phi'(s)| \leq C|s|^{p-1}, \quad s\phi(s) \geq C|s|^{p+1}, \quad \text{για } 1 < p \leq 3.$$

(β) Για τη σύγκλιση της βασικής και της συζυγούς μεταβλητής: Επιπλέον του (α), ο  $\phi'$  είναι Lipschitz συνεχής, με σταθερά Lipschitz  $C_L$ , ή  $\phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  με  $|\phi''(s)| \leq C|s|^{p-2}$  για  $2 < p \leq 3$ .

(γ) Αν ο ημιγραμμικός χώρος περιέχει επίσης χωροχρονικές σταθερές, δηλαδή,  $\phi(s) \equiv \phi(t, x, s) : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τότε, επιπλέον με τα (α)-(β), απαιτείται τα  $\phi(0), \phi'(0)$  να είναι ομοιόμορφα φραγμένα.

**Σημείωση 3.1.2.** Η σύγκλιση μπορεί να αποδειχθεί απλά υποθέτοντας μονοτονία ή αύξουσα μονοτονία από την υπόθεση: 3.1.1 (α)-(β) πάνω στα  $\phi, \phi'$  (βλ. [22, Section 3]). Η υπόθεση συνέχειας Lipschitz στον

$\phi'$  επιβάλλεται μόνο για να ελαχιστοποιήσει τις τεχνικές δυσκολίες. Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ, ισχύουν ακόμα στις πιο ασθeneίς υποθέσεις του [94], με τα αρχικά δεδομένα να ανήκουν στον  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [109] (βλ. επίσης τις αναφορές) για μια λεπτομερή ανάλυση από τις πιθανές υποθέσεις στον ημιγραμμικό όρο και στην ομαλότητα δεδομένων. Εδώ, εμείς έχουμε επιλέξει να επιβάλουμε τις ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας που εγγυώνται την ύπαρξη της αντίστοιχης διακριτής λύσης στο χώρο  $L^\infty[0, T; L^2(\Omega)] \cap L^2[0, T; H_0^1(\Omega)]$ .

**Πρόβλημα κατανεμημένου ελέγχου Stokes.** Εδώ ο ημιγραμμική μορφή η σχετική με τον τελεστή μας είναι

$$a(y, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla y \nabla v dx, \quad \forall y, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

και ικανοποιεί τις συνθήκες πιστικότητας και συνέχειας

$$a(y, y) \geq \nu \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \alpha(y, v) \leq C\nu \|y\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall y, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Τελικώς ο ημιγραμμικός χώρος ο σχετικός με τη πίεση είναι

$$b(v, q) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot v dx, \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), q \in L^2(\Omega),$$

που ικανοποιεί τις κλασικές συνθήκες συνέχειας και μέγιστου ελάχιστου όπως στο [52, 102], δηλαδή,

$$b(v, q) \leq C \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)},$$

και

$$\inf_{q \in L^2_0(\Omega)} \sup_{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)}} \geq c > 0.$$

Στην επόμενη ενότητα παραθέτουμε τα βασικά αποτελέσματα για την ύπαρξη λύσης υπό τις παραπάνω υποθέσεις.

### 3.2 Συνεχές πρόβλημα ελέγχου και ύπαρξη λύσης

Σε αυτή τη παράγραφο μελετάμε την ύπαρξη λύσης των προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς εξελικτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Μελετάμε συνοριακό ή κατανεμημένο έλεγχο, και για κάθε περίπτωση είναι απαραίτητο να παρατηρήσουμε και να αποδείξουμε την ευστάθεια των προβλημάτων και την ύπαρξη μοναδικής λύσης ή όχι. Πρέπει να αναφέρουμε πως όταν το συναρτησιακό προς ελαχιστοποίηση είναι κυρτό (όπως στη περίπτωση των γραμμικών προβλημάτων), εύκολα αποδεικνύεται πως έχουμε μοναδική λύση. Αν όμως το συναρτησιακό δεν είναι κυρτό, όπως στα ημιγραμμικά προβλήματα, έχουμε ολική λύση αλλά δεν είναι μοναδική αφού μπορούμε να έχουμε ελαχιστοποίηση με διάφορες συναρτήσεις ελέγχου.

**Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου.** Σε αυτό το παράδειγμα μελετάμε τη περίπτωση χωρίς, αλλά και αυτή με περιορισμούς συνάρτηση ελέγχου. Ξεκινώντας παρουσιάζουμε την ασθeneή μορφή της βασικής εξίσωσης. Δοσμένων των  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $g \in L^2[0, T; H^{-1/2}(\Gamma)]$ , και  $y_0 \in L^2(\Omega)$  αναζητούμε  $y \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$  τέτοιο ώστε για σ.π.  $t \in (0, T]$ , και για όλα τα  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\langle y_t, v \rangle + a(y, v) + \lambda \langle y, v \rangle_{\Gamma} = \langle f, v \rangle + \lambda \langle g, v \rangle_{\Gamma} \quad \text{και} \quad (y(0), v) = (y_0, v). \quad (3.2.1)$$

Μια ισοδύναμη μορφή κατάλληλη για την ανάλυση σε dG σχήματα, είναι το να αναζητούμε  $y \in W_R(0, T)$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,

$$(y(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y, v_t \rangle + a(y, v) + \lambda \langle y, v \rangle_\Gamma) dt = (y_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + \lambda \langle g, v \rangle_\Gamma) dt. \quad (3.2.2)$$

Ακολουθεί η ύπαρξη, μοναδικότητα και η ομαλότητα, βλέπε και [25] αποτέλεσμα της (3.2.2).

**Θεώρημα 3.2.1.** Υποθέτουμε πως  $g \in L^2[0, T; H^{-1/2+\theta}(\Gamma)] \cap H^\theta[0, T; H^{-1/2}(\Gamma)]$ ,  $y_0 \in H^\theta(\Omega)$ , και  $f \in L^2[0, T; H^{1-\theta}(\Omega)^*]$  για κάποιο  $\theta \in [0, 1]$ . Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό  $y \in L^2[0, T; H^{1+\theta}(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{1-\theta}(\Omega)^*]$  που ικανοποιεί την (3.2.2) και

$$\|y\|_{L^2[0, T; H^{1+\theta}(\Omega)]} + \|y_t\|_{L^2[0, T; H^{1-\theta}(\Omega)^*]} \leq C \left( \|f\|_{L^2[0, T; H^{1-\theta}(\Omega)^*]} + \|u_0\|_{H^\theta(\Omega)} + \|g\|_{L^2[0, T; H^{-1/2+\theta}(\Gamma)]} + \|g\|_{H^\theta[0, T; H^{-1/2}(\Gamma)]} \right).$$

Επιπλέον, η απεικόνιση της βασικής μεταβλητής στον έλεγχο  $G : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow W_R(0, T)$ , που συνδέει στον κάθε έλεγχο  $g$  τη βασική μεταβλητή  $G(g) = y_g \equiv y(g)$  μέσω της (3.2.2) είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Οπότε το συναρτησιακό κόστους συχνά συμβολίζεται με την ανηγμένη μορφή,  $J(y, g) \equiv J(y(g)) \equiv J(g) : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι επίσης καλώς ορισμένη και συνεχής.

**Ορισμός 3.2.2.** Έστω  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , και  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  δοσμένα δεδομένα. Τότε, το σύνολο των επιθυμητών ελέγχων (συμβολιζόμενο με  $\mathcal{A}_{ad}$ ), ορίζεται ως εξής:

1. Έλεγχος χωρίς περιορισμούς:  $\mathcal{A}_{ad} \equiv L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ .
2. Έλεγχος με περιορισμούς:  $\mathcal{A}_{ad} \equiv \{g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)] : g_a \leq g(t, x) \leq g_b \text{ για σ.π. } (t, x) \in (0, T) \times \Gamma\}$ .

Το ζεύγος  $(y(g), g) \in W_R(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ , ονομάζεται βέλτιστη λύση αν  $J(y(g), g) \leq J(w(h), h) \forall (w(h), h) \in W_R(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ .

Συχνά θα υιοθετούμε το συμβολισμό  $y \equiv y_g \equiv y(g)$ . Παρακάτω, παρουσιάζουμε το κύριο αποτέλεσμα από το [109] σχετικό με την ύπαρξη μιας βέλτιστης λύσης.

**Θεώρημα 3.2.3.** Έστω  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  είναι δοσμένα. Τότε, το πρόβλημα συνροιακού ελέγχου έχει μοναδική λύση την  $(\bar{y}(\bar{g}), \bar{g}) \in W_R(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ .

**Ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου.** Αρχικά, παραθέτουμε ένα αποτέλεσμα που αφορά την επιλυσιμότητα του προβλήματος σε ασθενή μορφή (δοσμένων  $f, g, y_0$  και αναζητώντας  $y \in W_D(0, T)$  για όλα τα  $v \in W_D(0, T)$ ):

$$(y(T), v(T)) + \int_0^T \left( -\langle y, v_t \rangle + a(y, v) + \langle \phi(y), v \rangle \right) dt = (y_0, v(0)) + \int_0^T \left( \langle f, v \rangle + \langle g, v \rangle \right) dt. \quad (3.2.3)$$

στον φυσικό ενεργειακό χώρο με υποθέσεις ελάχιστης ομαλότητας.

**Θεώρημα 3.2.4.** Έστω  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Τότε, υπάρχει μια μοναδική λύση  $y \in W_D(0, T)$  η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη ενεργειακή σχέση

$$\|y\|_{W_D(0, T)} \leq C \left( \|f\|_{L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \right).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στη βιβλιογραφία π.χ. [25, 43, 113]. □

Στη συνέχεια, αναφέρουμε τον ορισμό του συνόλου των επιθυμητών - αποδεκτών λύσεων  $\mathcal{A}_{ad}$  και τον ορισμό του (τοπικού) βέλτιστου ζεύγους λύσεων.



**Ορισμός 3.2.5.** 1. Με δεδομένα  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , και στόχο  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , τότε το ζεύγος  $(y, g)$  λέμε ότι είναι αποδεκτό στοιχείο αν τα  $y \in W_D(0, T)$ ,  $g \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  ικανοποιούν την (3.2.3). (Σημειώνουμε πως το  $J(y, g)$  είναι φραγμένο, σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.4).

2. Με δεδομένα  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , και στόχο  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  αναζητούμε ζεύγος  $(y, g) \in \mathcal{A}_{ad}$  τέτοιο ώστε  $J(y, g) \leq J(w, h) \quad \forall (w, h) \in \mathcal{A}_{ad}$ , όταν  $\|y - w\|_{W_D(0, T)} + \|g - h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq \delta$  για  $\delta > 0$  κατάλληλα επιλεγμένο.

Παρακάτω παρουσιάζουμε το βασικό αποτέλεσμα που αφορά την ύπαρξη μιας βέλτιστης λύσης για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού (1.3.3).

**Θεώρημα 3.2.6.** Υποθέτουμε πως  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Τότε, το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου έχει λύση την  $(y, g) \in W_D(0, T) \times L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στη βιβλιογραφία π.χ. [25, 50, 80, 109].  $\square$

**Σημείωση 3.2.7.** Η λύση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου έχοντας περιορισμούς μη γραμμικές παραβολικές μ.δ.ε. δεν είναι γενικά μοναδική. Ωστόσο, κάτω από κάποιες επιπλέον υποθέσεις στα δεδομένα του προβλήματος βελτιστοποίησης και στη κατασκευή του ημιγραμμικού όρου είναι δυνατόν να αποδειχτεί πως υπάρχει ένας μοναδικός έλεγχος  $g$  (βλέπε π.χ. [82, Κεφάλαιο 3, σελ. 43]), και πως το αντίστοιχο σύστημα βελτιστοποίησης δέχεται μοναδική λύση.

**Πρόβλημα κατανεμημένου ελέγχου Stokes.** Μια πιθανή μοντελοποίηση του προβλήματος (1.3.6) ορίζεται ως εξής: Δοσμένων  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ ,  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ , και ελέγχου  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , αναζητούμε  $(y, p) \in W_S(0, T) \times L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  τέτοιο ώστε για σ.π.  $t \in (0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \langle y_t, v \rangle + a(y, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle + (g, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(y, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ (y(0), v) &= (y_0, v) \quad \forall v \in \mathbf{W}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Μια εναλλακτική ασθενής μορφή για το πρόβλημα (1.3.6) κατάλληλο για την περίπτωση μη ομαλών αρχικών δεδομένων, ορίζεται χρησιμοποιώντας μηδενικής απόκλισης (divergence-free) συναρτήσεις δοκιμής και μπορεί να γραφεί ως εξής: Δοσμένων  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , και  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  ψάχνουμε  $y \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$  τέτοια ώστε για σ.π.  $t \in (0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \langle y_t, v \rangle + a(y, v) &= \langle f, v \rangle + (g, v) \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega), \\ (y(0), v) &= (y_0, v) \quad \forall v \in \mathbf{W}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Τελικώς, από τη σκοπιά της αριθμητικής ανάλυσης, μια επιθυμητή ασθενής μοντελοποίηση κατάλληλη για την ανάλυση σχημάτων ασυνεχούς μεθόδου Galerkin, είναι να αναζητούμε  $y \in W_S(0, T)$ , και  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  τέτοια ώστε για όλα τα  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , και για όλα τα  $q \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,

$$\begin{aligned} (y(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y_t, v_t \rangle + a(y, v) + b(v, p)) dt &= (y_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + (g, v)) dt, \\ \int_0^T b(y, q) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Ακολουθούν κάποια σχόλια που αφορούν τις ασθενείς λύσεις των διαδιάστατων εξισώσεων Stokes και την ισοδυναμία των μορφών (3.2.4), (3.2.5) και (3.2.6).

**Σημείωση 3.2.8.** Υπενθυμίζουμε πως τα κλασικά θεωρήματα ομαλότητας, βλέπε π.χ. [35, 102] δείχνουν ότι εάν  $f, g \in L^2[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$  και  $y_0 \in V(\Omega)$  τότε η λύση  $(y, p)$  των εξισώσεων (3.2.4)

ικανοποιεί την

$$(y, p) \in L^2[0, T; H^2(\Omega) \cap V(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{W}(\Omega)] \times L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)].$$

Σε αυτήν τη περίπτωση οι ασθενείς μορφές (3.2.4), (3.2.5), και (3.2.6) είναι ουσιαστικά ισοδύναμες. Αν τα δεδομένα  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}^*(\Omega)]$ ,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  τότε υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση που ικανοποιεί την  $y \in L^2[0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^{-1}[0, T; \mathbf{V}^*(\Omega)]$ , ενώ η πίεση  $p$  ικανοποιεί την (1.3.6) με την έννοια της κατανομής, και  $y_t + \nabla p \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Στην παραπάνω περίπτωση, πρέπει να πούμε πως δεν είναι προφανές αν η πίεση ανήκει στον  $L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  υπό ελάχιστες συνθήκες ομαλότητας, βλέπε π.χ. [102], και οπότε οι μορφές (3.2.4) και (3.2.6) δεν είναι απαραίτητα έγκυρες, εκτός και εάν κάνουμε υποθέσεις ύπαρξης για την πίεση όπως  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ .

Η απεικόνιση ελέγχου προς την βασική μεταβλητή  $G : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow W_S(0, T)$ , η οποία συσχετίζει για κάθε έλεγχο  $g$  την βασική μεταβλητή  $G(g) = y_g \equiv y(g)$  μέσω της (3.2.5) είναι καλά ορισμένη, και συνεχής. Επιπλέον, πρέπει να πούμε ότι εάν τα δεδομένα του προβλήματος έχουν επιπλέον ομαλότητα, π.χ., εάν  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ , και  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , τότε  $y(g) \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap V(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  και  $p \in L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ . Οπότε, το συναρτησιακό κόστους, το οποίο συχνά συμβολίζεται,  $J(y, g) \equiv J(y(g)) \equiv J(g) : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}$ , είναι καλά ορισμένο και συνεχές.

**Ορισμός 3.2.9.** Έστω τα δεδομένα  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ , και  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$ . Τότε, το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων (που συμβολίζεται με  $\mathcal{A}_{ad}$ ), ορίζεται από την:

1. Έλεγχος χωρίς Περιορισμούς:  $\mathcal{A}_{ad} \equiv L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ .
2. Έλεγχος με Περιορισμούς:  $\mathcal{A}_{ad} \equiv \{g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] : g_a \leq g(t, x) \leq g_b \text{ για σ.π. } (t, x) \in (0, T) \times \Omega\}$ .

Το ζεύγος  $(y(g), g) \in W_S(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ , λέγεται ότι είναι βέλτιστο αν  $J(y(g), g) \leq J(w(h), h) \forall (w(h), h) \in W_S(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ .

Ακολουθεί το κύριο αποτέλεσμα σύμφωνα με το [109] που αφορά την ύπαρξη μιας βέλτιστης λύσης:

**Θεώρημα 3.2.10.** Έστω  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  είναι τα δοσμένα δεδομένα. Τότε, το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου έχει μοναδική λύση την  $(\bar{y}(\bar{g}), \bar{g}) \in W_S(0, T) \times L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Επιπλέον υπάρχει πίεση  $\bar{p}$  που ικανοποιεί την (1.3.6) με την έννοια της κατανομής. Εάν επιπλέον,  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , τότε  $\bar{p} \in L^2[0, T; H_0^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$  και το ζεύγος  $(\bar{y}, \bar{p})$  ικανοποιεί την (3.2.6).

### 3.3 Το Σύστημα βελτιστοποίησης

**Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου.** Ένα σύστημα εξισώσεων βελτιστοποίησης μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας τις κλασικές τεχνικές, βλέπε για παράδειγμα το [109] ή [25, Ενότητα 2]. Αρχικά διατυπώνουμε τη βασική ιδιότητα διαφορισμότητας του συναρτησιακού κόστους.

**Λήμμα 3.3.1.** Το συναρτησιακό κόστους  $J : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τάξης  $C^\infty$  και για κάθε  $g, u \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ ,

$$J'(g)u = \int_0^T \int_\Gamma (\mu(g) + \alpha g) u dx dt,$$

όπου  $\mu(g) \equiv \mu_g \in W_R(0, T)$  είναι η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος: Για όλα τα  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,

$$\int_0^T ((\mu_g, v_t) + a(\mu_g, v) + \lambda(\mu_g, v)_\Gamma) dt = -(\mu_g(0), v(0)) + \int_0^T (y_g - y_d, v) dt, \quad (3.3.7)$$

όπου  $\mu_g(T) = 0$ . Επιπλέον,  $(\mu_g)_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ .

Οπότε το σύστημα βελτιστοποίησης που αποτελείται από τη βασική και τη συζυγή εξίσωση, και η συνθήκη βελτιστοποίησης παίρνουν τη μορφή:

**Λήμμα 3.3.2.** Έστω  $(\bar{y}_g, \bar{g}) \equiv (\bar{y}, \bar{g}) \in W_R(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$  συμβολίζει το μοναδικό βέλτιστο ζεύγος του Ορισμού 3.2.2. Τότε, υπάρχει μια συζυγής μεταβλητή  $\bar{\mu} \in W_R(0, T)$  που ικανοποιεί,  $\bar{\mu}(T) = 0$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,

$$(\bar{y}(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle \bar{y}, v_t \rangle + a(\bar{y}, v) + \lambda \langle \bar{y}, v \rangle_\Gamma) dt = (\bar{y}_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + \lambda \langle \bar{g}, v \rangle_\Gamma) dt, \quad (3.3.8)$$

$$\int_0^T (\langle \bar{\mu}, v_t \rangle + a(v, \bar{\mu}) + \lambda \langle \bar{\mu}, v \rangle_\Gamma) dt = -(\bar{\mu}(0), v(0)) + \int_0^T (\bar{y} - y_d, v) dt, \quad (3.3.9)$$

$$1) \text{ Έλεγχος χωρίς περιορισμούς: } \int_0^T (\alpha \bar{g} + \lambda \bar{\mu}, u)_\Gamma dt = 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}_{ad}, \quad (3.3.10)$$

$$2) \text{ Έλεγχος με περιορισμούς: } \int_0^T \int_\Gamma (\alpha \bar{g} + \lambda \bar{\mu})(u - \bar{g}) dx dt \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}_{ad}. \quad (3.3.11)$$

Επιπλέον,  $\bar{y}_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ , και η (3.3.11), είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $\bar{g}(t, x) = Proj_{[g_a, g_b]}(-\frac{\lambda}{\alpha} \bar{\mu}(t, x)) \equiv Proj_{[g_a, g_b]}(\frac{\eta}{\alpha} \frac{\partial \bar{\mu}(t, x)}{\partial \mathbf{n}})$  για σ.π.  $(t, x) \in (0, T] \times \Gamma$ .

Απόδειξη. Η δημιουργία του συστήματος βελτιστοποίησης αναφέρεται στη βιβλιογραφία (βλέπε π.χ. [109]). Για την βελτιωμένη ομαλότητα του  $\bar{\mu}$ , σημειώνουμε ότι  $\bar{y} - y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  και εφαρμόζουμε το ανάλογο του Θεωρήματος 3.2.1 για την (3.3.9) για να προκύψει πως  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ .  $\square$

**Σημείωση 3.3.3.** Σημειώνουμε πως για ομαλό σύνορο και για κάθε  $v \in H^2(\Omega)$  έχουμε πως η κάθετη παράγωγος  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$  είναι καλά ορισμένη και ανήκει στον  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Αυτό όμως δεν ανήκει στη περίπτωση που το  $\Gamma$  είναι πολυγωνικό χωρίο (δηλ. μόνο Lipschitz συνεχής), παρόλο το γεγονός ότι σε κάθε συνιστώσα του συνόρου (συμβολιζόμενη με  $\Gamma_i$ ) βλέπουμε καθαρά πως  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_i} \in H^{1/2}(\Gamma_i)$ . Για αποτελέσματα ομαλότητας για γενικά πολυγωνικά χωρία παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [51]. Αν το σύνορο είναι ομαλό, π.χ. κλάσης  $C^2$  τότε  $\bar{\mu}|_\Gamma \in L^2[0, T; H^{3/2}(\Gamma)] \cap H^{3/4}[0, T; L^2(\Gamma)]$ . Οπότε μπορεί να εφαρμοστεί ένα “προς τα πίσω επιχείρημα” (“bootstrap argument”) (βλέπε και [86]) με σκοπό να βελτιώσουμε την ομαλότητα του  $\bar{g}, \bar{y}$ . Για παράδειγμα, στη περίπτωση του ελέγχου χωρίς περιορισμούς,  $\bar{g} \in L^2[0, T; H^{3/2}(\Gamma)] \cap H^{3/4}[0, T; L^2(\Gamma)]$  έχουμε ως αποτέλεσμα  $\bar{y} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ , όταν  $y_0 \in H^1(\Omega)$ .

**Ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμεμένου ελέγχου.** Υποθέτουμε τώρα πως το  $(y, g) \in \mathcal{A}_{ad}$  είναι μια (τοπική) βέλτιστη λύση με την έννοια του Ορισμού 3.2.5. Τότε, ένα σύστημα βελτιστοποίησης που αντιστοιχεί στο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου του Ορισμού 3.2.5 μπορεί εύκολα να παραχθεί βασιζόμενοι στις γνωστές τεχνικές όπως στα [25, 50, 80, 93] πολλαπλασιαστών Lagrange. Δοσμένων των  $f, y_0, y_d$  και ικανοποιώντας τις υποθέσεις το Ορισμού 3.2.5, αναζητούμε  $y, \mu \in W_D(0, T)$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $v \in W_D(0, T)$ ,

$$(y(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y, v_t \rangle + a(y, v) + \langle \phi(y), v \rangle) dt = (y_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + (g, v)) dt, \quad (3.3.12)$$

$$\int_0^T (\langle \mu, v_t \rangle + a(\mu, v) + \langle \phi'(y)\mu, v \rangle) dt = -(\mu(0), v(0)) + \int_0^T (y - y_d, v) dt, \quad (3.3.13)$$

$$\mu(T, x) = 0,$$

$$\int_0^T (\alpha g + \mu, u) dt = 0, \quad \forall u \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]. \quad (3.3.14)$$

**Σημείωση 3.3.4.** Παρατηρούμε πως σύμφωνα με την συνθήκη βελτιστοποίησης έχουμε ότι ο έλεγχος  $g$  είναι στη πραγματικότητα ομαλότερος, δηλαδή  $g = -(1/\alpha)\mu \in W_D(0, T)$ . Το τελευταίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε αποτελέσματα βελτιωμένης ομαλότητας για τη βασική και συζυγή μεταβλητή μέσω ενός “προς τα πίσω επιχείρημα” (“bootstrap argument”), όταν είναι διαθέσιμη επιπλέον ομαλότητα στα  $y_d, f, y_0$ .

**Πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου Stokes.** Ομοίως με προηγούμενα από [56, 109] ή παρόμοια με [13, Ενότητα 3], διατυπώνουμε τη βασική ιδιότητα διαφορισμότητας του συναρτησιακού κόστους.

**Λήμμα 3.3.5.** Το συναρτησιακό κόστους  $J : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τάξης  $C^\infty$  και για κάθε  $g, u \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ ,

$$J'(g)u = \int_0^T \int_\Omega (\mu(g) + \alpha g) u dx dt,$$

όπου  $\mu(g) \equiv \mu_g \in W_S(0, T)$  είναι η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος: Για όλα τα  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,

$$\int_0^T ((\mu_g, v_t) + a(\mu_g, v)) dt = -(\mu_g(0), v(0)) + \int_0^T (y_g - y_d, v) dt. \quad (3.3.15)$$

όπου  $\mu_g(T) = 0$ . Επιπλέον,  $(\mu_g)_t \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , και υπάρχει πίεση  $\phi \in L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$  τέτοια ώστε η προς τα πίσω στο χρόνο εξίσωση Stokes ικανοποιείται με την ασθενή έννοια (3.2.6).

Οπότε το σύστημα βελτιστοποίησης που αποτελείται από την βασική και τη συζυγή εξίσωση, και η συνθήκη βελτιστοποίησης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

**Λήμμα 3.3.6.** Έστω  $(\bar{y}_g, \bar{g}) \equiv (\bar{y}, \bar{g}) \in W_S(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$  συμβολίζει το μοναδικό βέλτιστο ζεύγος του Ορισμού 3.2.9. Οπότε, υπάρχει μια συζυγής μεταβλητή  $\bar{\mu} \in W_S(0, T)$  που την ικανοποιεί,  $\bar{\mu}(T) = 0$  τέτοια ώστε για όλα τα  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,

$$(\bar{y}(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle \bar{\mu}, v_t \rangle + a(\bar{y}, v)) dt = (\bar{y}_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + (g, v)) dt, \quad (3.3.16)$$

$$\int_0^T (\langle \bar{\mu}, v_t \rangle + a(v, \bar{\mu})) dt = -(\bar{\mu}(0), v(0)) + \int_0^T (\bar{y} - y_d, v) dt, \quad (3.3.17)$$

$$1) \text{ Έλεγχος χωρίς περιορισμούς: } \int_0^T (\alpha \bar{g} + \bar{\mu}, u) dt = 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}_{ad}, \quad (3.3.18)$$

$$2) \text{ Έλεγχος με περιορισμούς: } \int_0^T \int_\Omega (\alpha \bar{g} + \bar{\mu})(u - \bar{g}) dx dt \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}_{ad}. \quad (3.3.19)$$

Επιπλέον,  $\bar{y}_t \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , και η (3.3.19), είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $\bar{g}(t, x) = \text{Proj}_{[g_a, g_b]}(-\frac{1}{\alpha}\bar{\mu}(t, x))$  για σ.π.  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ . Επιπλέον, υπάρχει μια πίεση  $\bar{\phi} \in L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$  που συσχετίζεται με τη συζυγή μεταβλητή  $\bar{\mu}$  που ικανοποιεί το προς τα πίσω χρονικά εξελικτικό πρόβλημα Stokes, με την έννοια της (3.2.6).

**Απόδειξη.** Η κατασκευή του συστήματος βελτιστοποίησης βρίσκεται στη βιβλιογραφία, π.χ. στο [109]. Για βελτιωμένη ομαλότητα της  $\bar{\mu}$ , παρατηρούμε πως  $\bar{\mu}(T) = 0$ , και  $\bar{y} - y_d \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  και οπότε η (3.3.17) υποδηλώνει πως έχουμε  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Για την ομαλότητα της αντίστοιχης πίεσης  $\bar{\phi}$  αναφερόμαστε στη Σημείωση 3.2.8.  $\square$

**Σημείωση 3.3.7.** Για βελτιωμένα αποτελέσματα ομαλότητας με περιορισμούς στον έλεγχο, παραθέτουμε τον αναγνώστη στο [13, 14]. Αν το σύνορο είναι ομαλό, π.χ. κλάσης  $C^2$  τότε  $\bar{g} \in \mathbf{H}^1(\Omega_T) \cap C[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)] \cap L^2[0, T; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)]$  όταν  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$  και  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Πιο συγκεκριμένα, οι (3.3.16) και (3.3.17), παίρνουν την ακόλουθη μορφή: Για όλα τα  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , και  $q \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,

$$\begin{aligned} (\bar{y}(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle \bar{y}, v_t \rangle + a(\bar{y}, v) + b(v, \bar{p})) dt &= (\bar{y}_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + (\bar{g}, v)) dt, \\ \int_0^T b(\bar{y}, q) dt &= 0, \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T (\langle \bar{\mu}, v_t \rangle + a(v, \bar{\mu}) + b(v, \bar{\phi})) dt &= -(\bar{\mu}(0), v(0)) + \int_0^T (\bar{y} - y_d, v) dt, \\ \int_0^T b(\bar{\mu}, q) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Οπότε, είναι ξεκάθαρο ότι η  $\bar{p}, \bar{\phi} \in L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ . Όταν δεν υπάρχουν περιορισμοί τότε επίσης μπορεί να εφαρμοστεί ένα “προς τα πίσω επιχειρήμα” (“bootstrap argument”) με σκοπό να βελτιώσουμε την ομαλότητα των  $\bar{g}, \bar{\mu}, \bar{y}$ .



# 4

## ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το πλήρως διακριτοποιημένο σύστημα βελτιστοποίησης και οι εκτιμήσεις σφαλμάτων για το καθένα από τα προβλήματα που περιγράψαμε στα προηγούμενα.

### Περιεχόμενα

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4.1 Το διακριτό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου . . . . .</b>                  | <b>32</b> |
| 4.1.1 Προκαταρκτική μελέτη και ιδιότητες πλέγματος . . . . .                 | 32        |
| 4.1.2 Το πλήρες διακριτοποιημένο πρόβλημα βελτιστοποίησης . . . . .          | 35        |
| 4.1.3 Το διακριτοποιημένο σύστημα βελτιστοποίησης . . . . .                  | 42        |
| <b>4.2 Εκτιμήσεις σφαλμάτων . . . . .</b>                                    | <b>47</b> |
| 4.2.1 Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου. . . . .                    | 47        |
| 4.2.1.1 Η πλήρως διακριτή προβολή. . . . .                                   | 47        |
| 4.2.1.2 Έλεγχοι χωρίς περιορισμούς: Εισαγωγικές εκτιμήσεις . . . . .         | 54        |
| 4.2.1.3 Συμμετρικές εκτιμήσεις για αρχικά δεδομένα χωρίς ομαλότητα . . . . . | 57        |
| 4.2.1.4 Έλεγχοι με περιορισμούς: Η διακριτή προσέγγιση μεταβολών. . . . .    | 58        |
| 4.2.2 Ημιακριτικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου. . . . .                    | 60        |
| 4.2.2.1 Το πλήρως διακριτό σύστημα βελτιστοποίησης . . . . .                 | 60        |
| 4.2.2.2 Εκτιμήσεις σφαλμάτων για το σύστημα βελτιστοποίησης . . . . .        | 60        |
| 4.2.2.3 Ένα βοηθητικό σύστημα βελτιστοποίησης . . . . .                      | 60        |
| 4.2.3 Πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου Stokes. . . . .                         | 75        |
| 4.2.3.1 Η πλήρως διακριτή προβολή . . . . .                                  | 75        |
| 4.2.3.2 Συμμετρικές εκτιμήσεις για το σύστημα βελτιστοποίησης. . . . .       | 81        |
| 4.2.3.3 Έλεγχοι με περιορισμούς: Η διακριτή προσέγγιση μεταβολών. . . . .    | 83        |

### 4.1 Το διακριτό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου

Εδώ θα μελετήσουμε τη κατασκευή χώρων πεπερασμένων στοιχείων για τα προβλήματα που προαναφέρθηκαν, το πλήρως διακριτοποιημένο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου καθώς και τις συνθήκες ευστάθειας.

#### 4.1.1 Προκαταρκτική μελέτη και ιδιότητες πλέγματος

**Συνοριακό πρόβλημα Robin ελέγχου.** Θεωρούμε μια οικογένεια τριγωνοποιήσεων (ας πούμε  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ ) του  $\Omega$  ορισμένη με το κλασικό τρόπο ([34]). Για κάθε στοιχείο  $T \in \mathcal{T}_h$  συσχετίζουμε δυο παραμέτρους  $h_T$  και  $\rho_T$ , που συμβολίζουν τη διάμετρο του συνόλου  $T$ , και τη διάμετρο της μεγαλύτερης μπάλας που περιέχεται στο  $T$  αντιστοίχως. Το μέγεθος του πλέγματος συμβολίζεται με  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ . Θα θεωρηθούν οι ακόλουθες κλασικές ιδιότητες του πλέγματος:

(i) Υπάρχουν δυο θετικές σταθερές  $\rho_T$  και  $\delta_T$  τέτοιες ώστε  $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \rho_T$  και  $\frac{h}{h_T} \leq \delta_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$  και  $\forall h > 0$ .

(ii) Δοσμένου  $h$ , έστω με  $\{T_j\}_{j=1}^{N_h}$  συμβολίζουμε την οικογένεια των τριγώνων που ανήκουν στο  $\mathcal{T}_h$  και έχουν μια πλευρά στο σύνορο  $\Gamma$ . Οπότε αν οι πλευρές του  $T_j \cap \Gamma$  συμβολίζονται με  $x_{j,\Gamma}$ ,  $x_{j+1,\Gamma}$  τότε η ευθεία γραμμή  $[x_{j,\Gamma}, x_{j+1,\Gamma}] \equiv T_j \cap \Gamma$ . Σε αυτό το σημείο, θα θεωρήσουμε επίσης πως  $x_{1,\Gamma} = x_{N_h+1,\Gamma}$ .

Πάνω στο πλέγμα  $\mathcal{T}_h$  θεωρούμε πεπερασμένους διανυσματικούς χώρους  $U_h \subset H^1(\Omega)$  κατασκευασμένους από τμηματικά πολυώνυμα στον  $\Omega$ . Κλασικές υποθέσεις θεωρίας προσεγγίσεων θα χρησιμοποιηθούν σε αυτούς τους χώρους. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε  $v \in H^{l+1}(\Omega)$ , υπάρχει ένας ακέραιος  $\ell \geq 1$ , και μια σταθερά  $C > 0$  (ανεξάρτητη του  $h$ ) τέτοια ώστε:

$$\inf_{v_h \in U_h} \|v - v_h\|_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{l+1-s} \|v\|_{H^{l+1}(\Omega)}, \quad \text{για } 0 \leq l \leq \ell \text{ και } s = -1, 0, 1.$$

Χρησιμοποιούμε επίσης, αντίστροφες ανισότητες (inverse inequalities) στις ψευδο-ομοιόμορφες (quasi-uniform) τριγωνοποιήσεις, δηλαδή υπάρχουν σταθερές  $C \geq 0$ , τέτοιες ώστε  $\|v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C/h \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$ , και  $\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C/h \|v_h\|_{H^1(\Omega)^*}$ , κ.τ.λ.

Οι προσεγγίσεις θα κατασκευαστούν σε μια ψευδο-ομοιόμορφη (quasi-uniform) διαμέριση  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  του  $[0, T]$ , δηλαδή υπάρχει μια σταθερά  $0 < \theta < 1$  τέτοια ώστε  $\min_{n=1, \dots, N} (t^n - t^{n-1}) \geq \theta \max_{n=1, \dots, N} (t^n - t^{n-1})$ . Επίσης χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $\tau^n = t^n - t^{n-1}$ ,  $\tau = \max_{n=1, \dots, N} \tau^n$  και ορίζουμε με  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$  το χώρο των πολυωνύμων βαθμού  $k$  ή μικρότερο έχοντας τιμές στον  $U_h$ . Ψάχνουμε προσεγγιστικές λύσεις που ανήκουν στο χώρο

$$\mathcal{U}_h = \{y_h \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]\}.$$

Οι συναρτήσεις του  $\mathcal{U}_h$  είναι αριστερά συνεχείς με δεξιά όρια και οπότε θα γράφουμε  $y_h^n \equiv y_{h-}^n$  για  $y_h(t^n) = y_h(t_{-}^n)$ , και ενώ η ασυνέχεια στο  $t^n$ , συμβολίζεται με  $[y_h^n] = y_{h+}^n - y_h^n$ . Στους παραπάνω ορισμούς έχουμε υιοθετήσει το συμβολισμό  $y_{h,\tau} \equiv y_h$ ,  $\mathcal{U}_{h,\tau} \equiv \mathcal{U}_h$  κ.τ.λ. Για τη χρονική διακριτοποίηση επικεντρωνόμαστε στα σχήματα χαμηλής τάξης ( $k = 0$ ) και την ασυνεχή μέθοδο Galerkin που αντιστοιχεί στην έμμεση μέθοδο Euler. Δίνουμε έμφαση στο ότι άλλα σχήματα (συμπεριλαμβανομένου της αυθαίρετης τάξης σε χρόνο και χώρο) μπορούν να συμπεριληφθούν στη παρούσα μελέτη. Ωστόσο, η περιορισμένη ομαλότητα αποτελεί εμπόδιο για τη μελέτη σχημάτων ανώτερης τάξης.

Για τη μεταβλητή ελέγχου έχουμε δυο επιλογές για τη περίπτωση με περιορισμούς και τη περίπτωση χωρίς περιορισμούς αντιστοίχως στον έλεγχο. Και στις δυο περιπτώσεις η διακριτοποίησή μας εξαρτάται από τη συνθήκη βελτιστοποίησης, βλέπε π.χ. [30].



**Περίπτωση 1: Έλεγχος χωρίς περιορισμούς:** Εφαρμόζουμε μια διακριτοποίηση που επιτρέπει την παρουσία ασυνεχειών, π.χ., ορίζουμε

$$\mathcal{G}_h = \{g_h \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)] : g_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; G_h]\}.$$

Στη συνέχεια προσδιορίζεται ένας σύμμορφος υπόχωρος (conforming subspace)  $G_h \subset L^2(\Gamma)$  σε κάθε χρονικό διάστημα  $(t^{n-1}, t^n]$ , ο οποίος ικανοποιεί τις κλασικές ιδιότητες προσεγγισιμότητας. Υπάρχουν και άλλες επιλογές του  $G_h$ . Εδώ επικεντρωνόμαστε στην φυσική επιλογή  $G_h = U_h|_\Gamma$  και για μια λεπτομερέστερη ανάλυση παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [52, 57]. Για τους υπολογισμούς σφαλμάτων θα χρειαστεί μόνο  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  ομαλότητα. Συνοψίζοντας, για την επιλογή τμηματικά γραμμικών πολυωνύμων (στο χώρο), επιλέγουμε:

$$\begin{aligned} U_h &= \{u_h \in C(\bar{\Omega}) : u_h|_T \in \mathcal{P}_1, \text{ για όλα τα } T \in \mathcal{T}_h\}, \\ G_h &= \{u_h \in C(\Gamma) : u_h|_{[x_i, \Gamma, x_{i+1}, \Gamma]} \in \mathcal{P}_1, \text{ για } i = 1, \dots, N_h\}. \end{aligned}$$

**Περίπτωση 2: Έλεγχος με περιορισμό:** Σ' αυτή τη περίπτωση, εφαρμόζουμε την αρχή διακριτοποίησης μεταβολών (variational discretization concept), βλέπε π.χ. [65] που επιτρέπει τη φυσική διακριτοποίηση του ελέγχου μέσω της συζυγούς μεταβλητής και δεν διακριτοποιούμε τη μεταβλητή ελέγχου απευθείας.

**Ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου.** Όμοια με τη προηγούμενη περίπτωση του συνοριακού Robin ελέγχου, οι πλήρως διακριτοποιημένες προσεγγίσεις κατασκευάζονται σε μια διαμέριση  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  του  $[0, T]$ . Σε κάθε χρονικό διάστημα  $(t^{n-1}, t^n]$ , μήκους  $\tau_n \equiv t^n - t^{n-1}$  προσδιορίζεται ένας υπόχωρος  $U_h^n$  του  $H_0^1(\Omega)$ , και θεωρείται πως κάθε  $U_h^n$  ικανοποιεί τα κλασικά θεωρητικά αποτελέσματα προσεγγισιμότητας ([34]). Επίσης θεωρούμε ότι τα χρονικά βήματα είναι ψευδο-ομοιόμορφα (quasi-uniform), δηλαδή, υπάρχει  $0 \leq \theta \leq 1$  τέτοιο ώστε  $\min_{n=1, \dots, N} \tau_n \geq \theta \max_{n=1, \dots, N} \tau_n$ . Τώρα ψάχνουμε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες ανήκουν στο χώρο

$$\mathcal{U}_h = \{y_h \in L^2[0, T; H_0^1(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]\}.$$

Εδώ με  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$  συμβολίζουμε το χώρο των πολυωνύμων βαθμού  $k$  ή μικρότερου έχοντας τιμές στον  $U_h^n$ . Επίσης χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό,  $y_{h, \tau} \equiv y_h$ ,  $\mathcal{U}_{h, \tau} \equiv \mathcal{U}_h$  κ.τ.λ. Η διακριτοποίηση του ελέγχου μπορεί να επιτευχθεί αποτελεσματικά μέσω της διακριτοποίησης της συζυγούς μεταβλητής  $\mu$ . Ωστόσο, τονίζουμε ότι η μόνη υπόθεση ομαλότητας για τον διακριτό έλεγχο είναι  $g_h \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ .

Κατά σύμβαση, η συναρτήσεις του  $\mathcal{U}_h$  είναι αριστερά συνεχείς με δεξιά όρια και οπότε γράφουμε (υιοθετώντας το συμβολισμό)  $y^n$  για  $y_h(t^n) = y_h(t^n_-)$ , και  $y_+^n$  για  $y_h(t^n_+)$ . Ο παραπάνω συμβολισμός θα χρησιμοποιείται επίσης για τη συνάρτηση σφάλματος  $e = y - y_h$ . Σύμφωνα με αποτελέσματα από γνωστό θεώρημα εμφύτευσης  $W_D(0, T) \subset C[0, T; L^2(\Omega)]$  (βλέπε π.χ. [43, Κεφάλαιο 5]), η ακριβής λύση  $y$  είναι στον  $C[0, T; L^2(\Omega)]$ . Έτσι η ασυνέχεια (jump) για το σφάλμα στο  $t^n$  συμβολίζεται με  $[e^n]$  και είναι  $[e^n] = [y^n] = y_+^n - y^n$ .

**Πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου Stokes.** Ομοίως ορίζεται μια οικογένεια τριγωνοποίησης (συμβολιζόμενη όπως στο [34] με  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ ) του  $\Omega$ . Θεωρούμε ότι κάθε στοιχείο  $T \in \mathcal{T}_h$ , δυο παράμετροι  $h_T$  και  $\rho_T$  συμβολίζουν τη διάμετρο του συνόλου  $T$ , και τη διάμετρο της μεγαλύτερης μπάλας που περιέχεται στο  $T$  αντιστοίχως, και το σχετικό μέγεθος πλέγματος συμβολιζόμενο με  $h \equiv \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ . Υποθέτουμε τις ακόλουθες ιδιότητες πλέγματος:

(i) Υπάρχουν δυο θετικές σταθερές  $\rho_T$  και  $\delta_T$  τέτοιες ώστε  $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \rho_T$  και  $\frac{h}{h_T} \leq \delta_T$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$  και  $\forall h > 0$ .

(ii) Ορίζουμε  $\bar{\Omega}_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$  και συμβολίζουμε με  $\Omega_h$ , και  $\Gamma_h$  το εσωτερικό και το σύνορο αντιστοίχως. Επίσης υποθέτουμε πως οι πλευρές του συνόρου του  $\mathcal{T}_h$  είναι σημεία του  $\Gamma$ .

Στο πλέγμα  $\mathcal{T}_h$  θεωρούμε δυο πεπερασμένης διάστασης χώρους  $\mathbf{Y}_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  και  $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$  κατασκευασμένους από τμηματικά πολυώνυμα στον  $\Omega_h$ , τα οποία μηδενίζονται στον  $\Omega - \Omega_h$ . Παρατηρούμε πως κάτω από της παραπάνω υποθέσεις κατασκευής, αν ο  $\Omega$  είναι κυρτός, τότε και ο  $\Omega_h$  είναι κυρτός, και  $|\Omega - \Omega_h| \leq Ch^2$ . Οι παραπάνω υποθέσεις είναι αρκετές με σκοπό να παράγουμε εκτιμήσεις για τις περιπτώσεις όπου τα αρχικά δεδομένα ανήκουν στον  $\mathbf{W}(\Omega)$  ή  $\mathbf{V}(\Omega)$ .

Η υπόθεση για το χωρίο να είναι κυρτό και πολυγωνικό (ή πολυεδρικό στον  $\mathbb{R}^3$ ) είναι απαραίτητη εφόσον δεν είναι γνωστό αν η κυρτότητα είναι αρκετή να εγγυηθεί την  $\mathbf{H}^2$  ελλειπτική ομαλότητα των στατικών εξισώσεων Stokes στον  $\mathbb{R}^3$ . Επιπλέον, περισσότερη ομαλότητα στο σύνορο  $\Gamma$  (ονομαστικά  $C^3$ ) υποδηλώνει την  $\mathbf{H}^3$  ομαλότητα για τις στατικές Stokes, αλλά τυπικά απαιτούνται πολύ περισσότερο περίπλοκα στοιχεία. Όταν έχουμε να κάνουμε με σχήματα υψηλότερης τάξης, δίνουμε έμφαση στην επιπλέον ομαλότητα στο  $\Gamma$  που πρέπει να υποθέσουμε βλ έπε για παράδειγμα [35, 102], μαζί με συνθήκες συμβατότητας με σκοπό να εξασφαλίσουμε την κατάλληλη ομαλότητα για τις λύσεις.

Κλασικές υποθέσεις θεωρίας προσεγγισιμότητας θα εφαρμοστούν σε αυτούς τους χώρους. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε  $v \in \mathbf{H}^{l+1}(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  υπάρχει ένας ακέραιος  $\ell \geq 1$  και μια σταθερά  $C > 0$  (ανεξάρτητη του  $h$ ) τέτοια ώστε:

$$\inf_{v_h \in \mathbf{Y}_h} \|v - v_h\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)} \leq Ch^{l+1-s} \|v\|_{\mathbf{H}^{l+1}(\Omega)}, \quad \text{για } 0 \leq l \leq \ell \text{ και } s = -1, 0, 1. \quad (4.1.1)$$

Επίσης για κάθε  $q \in H^l(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , όταν

$$\inf_{q_h \in Q_h} \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^l \|q\|_{H^l(\Omega)}, \quad \text{για } 0 \leq l \leq \ell. \quad (4.1.2)$$

Επιπλέον, οι χώροι  $\mathbf{Y}_h$  και  $Q_h$  πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη μέγιστου-ελάχιστου (inf-sup), δηλ., υπάρχει ένα  $C > 0$  (ανεξάρτητο του  $h$ ) τέτοιο ώστε

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in \mathbf{Y}_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_h)} \|q_h\|_{L^2(\Omega_h)}} > C. \quad (4.1.3)$$

Θεωρούμε επίσης το διακριτό μηδενικής απόκλισης ανάλογο του  $\mathbf{Y}_h$  και συμβολίζεται με

$$\mathbf{U}_h = \{v_h \in \mathbf{Y}_h : b(v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}.$$

Επίσης θα κατασκευαστούν προσεγγίσεις σε μια ψευδο-ομοιόμορφη (quasi-uniform) διαμέριση  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  του  $[0, T]$ , δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά  $0 < \theta < 1$  τέτοια ώστε  $\min_{n=1, \dots, N} (t^n - t^{n-1}) \geq \theta \max_{n=1, \dots, N} (t^n - t^{n-1})$ . Συμβολίζουμε με  $\tau^n = t^n - t^{n-1}$ ,  $\tau = \max_{n=1, \dots, N} \tau^n$ , με  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ , και  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$  τους χώρους των πολυωνύμων βαθμού  $k$  ή λιγότερο, έχοντας τιμές στον  $\mathbf{Y}_h$ ,  $\mathbf{U}_h$  και  $Q_h$  αντιστοίχως. Αναζητούμε προσεγγιστικές λύσεις για τη ταχύτητα και τη πίεση που ανήκουν στους χώρους

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_h &= \{y_h \in L^2[0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]\}, \\ \mathcal{U}_h &= \{y_h \in L^2[0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]\}, \\ \mathcal{Q}_h &= \{y_h \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]\}. \end{aligned}$$

Η επόμενη σημείωση εστιάζει τη προσοχή μας στο γιατί η χρήση ίδιου βαθμού πολυωνύμων ως προς το χρόνο είναι η φυσική επιλογή για τη διακριτοποίηση (στο χρόνο) της πίεσης.

**Σημείωση 4.1.1.** Είναι φανερό ότι το ανάλογο του διακριτού μηδενικής απόκλισης υποχώρου του  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$  είναι,  $\mathcal{Z}_h^n = \{v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h] : \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]\}.$

Τότε, το [32, Λήμμα 2.3] υποδηλώνει πως ο  $\mathcal{Z}_h^n \equiv \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ . Οπότε, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_h &\equiv \{v_h \in \mathcal{Y}_h : \int_0^T b(v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h\} \\ &= \{v_h \in \mathcal{Y}_h : v_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{Z}_h^n\} \\ &= \{v_h \in \mathcal{Y}_h : v_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]\} \equiv \mathcal{U}_h. \end{aligned}$$

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην [32, Ενότητα 2] για περισσότερες λεπτομέρειες.

Στους παραπάνω συμβολισμούς, κατά σύμβαση, οι συναρτήσεις του  $\mathcal{U}_h$  είναι αριστερά συνεχείς με δεξιά όρια. Οπότε θα γράψουμε  $y^n$  για το  $y(t^n) \equiv y(t_-^n)$ ,  $y_+^{n-1}$  για το  $y(t_+^{n-1})$ ,  $y_h^n$  για το  $y_h(t^n) = y_h(t_-^n)$  και  $y_{h+}^n$  για το  $y(t_+^n)$ , ενώ η ασυνέχεια (jump) στο  $t^n$  συμβολίζεται με  $[y_h^n] = y_{h+}^n - y_h^n$ . Στους παραπάνω ορισμούς, έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει τον ακόλουθο συμβολισμό,  $y_{h,\tau} \equiv y_h$ ,  $\mathcal{Y}_{h,\tau} \equiv \mathcal{Y}_h$ ,  $\mathcal{U}_{h,\tau} \equiv \mathcal{U}_h$  κ.τ.λ. Αυτό εξαιτίας του γεγονότος ότι η παράμετρος χρονικής διακριτοποίησης  $\tau$  μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητα του  $h$ .

Τονίζουμε πως άλλα σχήματα (όπως σχημάτων αυθαίρετης τάξης στο χρόνο και στο χώρο) θα συμπεριληφθούν στις παρακάτω αποδείξεις. Ωστόσο, η περιορισμένη ομαλότητα αποτελεί φράγμα στην ανάπτυξη εκτιμήσεων υψηλότερης τάξης, τουλάχιστον στην παρουσία περιορισμών στον έλεγχο. Η περίπτωση σχημάτων χαμηλής τάξης στο χώρο και στο χρόνο έχει αντιμετωπιστεί με λεπτομέρεια στις πρόσφατες εργασίες [13, 14] για το πρόβλημα εντοπισμού ταχύτητας σε ροές Navier-Stokes, με περιορισμούς για τον έλεγχο, όταν τα δεδομένα είναι  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ .

Για την μεταβλητή ελέγχου έχουμε δυο ξεχωριστές επιλογές για τη περίπτωση με και χωρίς περιορισμούς αντίστοιχα. Και στις δυο περιπτώσεις η διακριτοποίησή μας έχει ως κίνητρο τη συνθήκη βελτιστοποίησης.

**Περίπτωση 1: Για ελέγχους χωρίς περιορισμούς:** Μας απασχολούν οι φυσικές χωροχρονικές διακριτοποιήσεις που επιτρέπουν τη παρουσία ασυνεχειών (στο χρόνο). Ειδικότερα, ορίζουμε ως  $\mathcal{G}_h \equiv \mathcal{Y}_h$ . Στα επόμενα θα χρειαστούμε για τις εκτιμήσεις σφαλμάτων μόνο  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  ομαλότητα.

**Περίπτωση 2: Για ελέγχους με περιορισμούς:** Παρόμοια με τη προηγούμενη περίπτωση, μας απασχολούν οι αφχές διακριτοποίησης μεταβολών βλέπε π.χ. [65] οι οποίες επιτρέπουν τη φυσική διακριτοποίηση των ελέγχων μέσω της συζυγούς μεταβλητής. Στην ουσία δεν διακριτοποιούμε απευθείας τη μεταβλητή ελέγχου δηλαδή στον  $\mathcal{G}_h \equiv L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ .

#### 4.1.2 Το πλήρες διακριτοποιημένο πρόβλημα βελτιστοποίησης

**Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου.** Το ασυνεχές χρονικού βηματισμού πλήρως διακριτοποιημένο σχήμα για την απεικόνιση του ελέγχου στη βασική μεταβλητή  $G_h : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathcal{U}_h$ , η οποία συσχετίζει το κάθε έλεγχο  $g$  στην βασική του μεταβλητή  $G_h(g) = y_{g,h} \equiv y_h(g)$  ορίζεται ως εξής: Για κάθε  $g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ , για δοσμένα δεδομένα  $y^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , και στόχο  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  αναζητούμε  $y_h \in \mathcal{U}_h$  τέτοιο ώστε για  $n = 1, \dots, N$ , και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ ,

$$\begin{aligned} (y_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + \lambda \langle y_h, v_h \rangle_\Gamma \right) dt \\ = (y_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + \lambda \langle g, v_h \rangle_\Gamma \right) dt. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Σημειώνουμε πως στον παραπάνω ορισμό χρειάζεται μόνο  $g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  ομαλότητα για να επαληθευτεί το πλήρες διακριτοποιημένο σχήμα. Υπολογισμοί ευστάθειας στα σημεία της χρονικής διαμέρισης καθώς και οι  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  και  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  νόρμες εύκολα προκύπτουν θέτοντας  $v_h = y_h$  στην

(4.1.4). Για τους υπολογισμούς σε αυθαίρετα χρονικά σημεία μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές που παρουσιάστηκαν στην [31, Ενότητα 2] για γενικές γραμμικές παραβολικές εξισώσεις, (βλέπε επίσης [23, Ενότητα 3] για υπολογισμούς ευστάθειας σε ημιγραμμικές παραβολικές μ.δ.ε. με Robin δεδομένα). Παρόμοια με τη συνεχή περίπτωση, η πλήρως διακριτοποιημένη απεικόνιση από τον έλεγχο στη βασική μεταβλητή  $G_h : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathcal{U}_h$  είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Ακολουθεί ο ορισμός του διακριτοποιημένου προβλήματος βελτιστοποίησης με έλεγχο σε Robin συνθήκες:

**Ορισμός 4.1.2.** Έστω δοσμένα δεδομένα  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Υποθέτουμε ότι το σύνολο των διακριτοποιημένων επιθυμητών ελέγχων συμβολίζεται με  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{G}_h \cap \mathcal{A}_{ad}$ , και έστω  $J_h(y_h, g_h) \equiv \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |y_h - y_d|^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} |g_h|^2 dx dt$ . Εδώ το ζεύγος  $(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  ικανοποιεί την (4.1.4). Όταν το ζεύγος  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$ , τότε λέμε πως είναι μια βέλτιστη λύση αν  $J_h(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \leq J_h(w_h, u_h)$ ,  $\forall (w_h, u_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$ .

Η ύπαρξη λύσης του διακριτοποιημένου προβλήματος βέλτιστου ελέγχου μπορεί να αποδειχθεί με κλασικές τεχνικές, ενώ η μοναδικότητα προκύπτει από τη δομή του συναρτησιακού, και τη γραμμικότητα της εξίσωσης. Οι βασικοί υπολογισμοί ευστάθειας αναφορικά με το βέλτιστο ζεύγος  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in W_R(0, T) \times L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  μπορεί εύκολα να προκύψει. Παραθέτουμε στη συνέχεια τους υπολογισμούς σε αυθαίρετα χρονικά σημεία για σχήματα αυθαίρετης τάξης με ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας, υιοθετημένα και προσαρμοσμένα στη δικιά μας περίπτωση από την [23, Ενότητα 3]. Οι υπολογισμοί εστιάζουν τη προσοχή μας στο γεγονός ότι η φυσική επιλογή της διακριτής ενεργειακής νόρμας για τη βασική μεταβλητή σχετικά με ασυνεχή σχήματα χρονικού βηματισμού είναι  $\|\cdot\|_{W_R(0, T)} = \|\cdot\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}$ .

**Λήμμα 4.1.3.** Έστω  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Αν  $(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  συμβολίζει το ζεύγος λύσεων του διακριτοποιημένου προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. Τότε,

$$\|y_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C \max \left\{ 1, \left( \frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/2} \right\} (\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]}).$$

Εδώ, η  $C \geq 0$  εξαρτάται από το  $1/C_F \min\{\eta, \lambda\}$ ,  $C_k$  και το  $\Omega$  αλλά όχι από τα  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $h$ .

**Απόδειξη. Βήμα 1.** Εφόσον το ζεύγος  $(\bar{y}_h, 0)$  είναι ένα επιθυμητό ζεύγος για το διακριτό πρόβλημα, είναι

$$\begin{aligned} J(y_h, g_h) &\leq J(\bar{y}_h, 0) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\bar{y}_h - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|\bar{y}_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2 + \|y_d\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \right) \\ &\leq C \left( \|f\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

**Βήμα 2.** Θετόντας  $v_h = y_h$  στη σχέση

$$(y^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle -y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + \lambda \langle y_h, v_h \rangle_\Gamma) = (y^{n-1}, v_{+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + \lambda \langle g_h, v_h \rangle_\Gamma)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( C_F \min\{\eta, \lambda\} \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt \\ \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{1}{C_F} \min\{\eta, \lambda\} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + \lambda \|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το φράγμα για το  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt$  από τη σχέση  $J(y_h, g_h) \leq J(\bar{y}_h, 0)$

και παίρνουμε

$$\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \|[y]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{t^n} \left( C_F \min\{\eta, \lambda\} \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \leq C_{st} \max\{1, \frac{\lambda}{a}\}.$$

**Βήμα 3.** Σχετικά με το φράγμα σε αυθαίρετα χρονικά σημεία χρησιμοποιούμε την εκθετική παρεμβολή  $e^{-\rho(t-t^{n-1})}y_h$  συμβολιζόμενη με  $\widehat{y}_h$

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_{ht}, \widehat{y}_h) dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_{ht}, y_h) e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt \\ &= \frac{1}{2} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t^n-t^{n-1})} + \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt \\ &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( |a(y_h, \widehat{y}_h)| + \lambda |\langle y_h, \widehat{y}_h \rangle_{\Gamma}| + |\langle f, \widehat{y}_h \rangle| + \lambda |\langle g_h, \widehat{y}_h \rangle_{\Gamma}| \right) dt \end{aligned}$$

Απο το θεώρημα προβολής το  $\widehat{y}_h$  φράσσεται απο το  $y_h$ , επίσης είναι

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |a(y_h, y_h)| dt \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 dt,$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle f, \widehat{y}_h \rangle| dt \leq \frac{C_k}{C_F} \min\{\eta, \lambda\} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 dt + C_F \min\{\eta, \lambda\} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \lambda |\langle g_h, \widehat{y}_h \rangle_{\Gamma}| + \lambda |\langle y_h, \widehat{y}_h \rangle_{\Gamma}| dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + C_k \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{a} \right) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t^n-t^{n-1})} + \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\rho}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt \\ \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{1}{C_F} \min\{\eta, \lambda\} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + (\eta + C_F \min\{\eta, \lambda\}) \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha \|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ \left. + \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha} \right) \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt \end{aligned}$$

και τελικά έχουμε για  $\rho = \frac{1}{\tau_n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-1} + \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (e^{-1}/2\tau_n) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{\min\{\eta, \lambda\}}{C_F} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + (\eta + C_F \min\{\eta, \lambda\}) \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha \|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right. \\ \left. + \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha} \right) \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Επίσης από την αντίστροφη εκτίμηση (inverse estimate)  $\|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_k}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$  έχουμε

$$\begin{aligned} \|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; C^2(\Omega)]} \leq C_k \left( \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (1/C_F) \min\{\eta, \lambda\} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (\eta + C_F \min\{\eta, \lambda\}) \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha \|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \left( \lambda + \lambda^2/a \right) \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt \right), \end{aligned}$$

οπότε ο όρος  $\|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2$  φράσσεται όπως προηγουμένως και έχουμε τη ζητούμενη εκτίμηση.

Σημειώνουμε πως η παραπάνω εκτίμηση είναι έγκυρη ακόμη και για τη περίπτωση των περιορισμών στον έλεγχο υποθέτοντας ότι  $0 \in \mathcal{A}_{ad}^d$ .  $\square$

**Ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου.** Η διακριτή βασική εξίσωση μπορεί να οριστεί ως ακολούθως: Κάτω από τις υποθέσεις του Ορισμού 3.2.5, αναζητούμε  $y_h \in \mathcal{U}_h$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $g_h \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ ,

$$\begin{aligned} (y^n, v^n) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + (\phi(y_h), v_h) \right) dt = (y^{n-1}, v_+^{n-1}) \\ &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (g_h, v_h) \right) dt, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n], \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

για  $n = 1, \dots, N$ . Το διακριτό επιθυμητό σύνολο  $\mathcal{A}_{ad}^d$  και το διακριτό (τοπικό) πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου είναι τώρα καλά ορισμένα κατ' αναλογία με το συνεχές πρόβλημα.

**Ορισμός 4.1.4.** Υποθέτουμε πως ισχύουν οι υποθέσεις που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

1.  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \{(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times L^2[0, T; U_h^n] \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει η (4.1.5)}\}$ .
2. Διακριτό βέλτιστο (τοπικό) Βέλτιστο Ζεύγος: Ψάχνουμε ζεύγος  $(y_h, g_h) \in \mathcal{A}_{ad}^d$  τέτοιο ώστε  $J(y_h, g_h) \leq J(w_h, u_h)$  για όλα τα  $(w_h, u_h) \in \mathcal{A}_{ad}^d$  όταν  $\|y_h - w_h\|_{L^2[0, T; H_0^1(\Omega)]} + \|y_h - w_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} + \|g_h - u_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq \delta'$  για κατάλληλο επιλεγμένο  $\delta' > 0$ .

Έστω  $\tilde{y}_h$  είναι η λύση του (4.1.5) χωρίς έλεγχο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, είναι κατανοητό ότι το ζεύγος  $(\tilde{y}_h, 0) \in \mathcal{A}_{ad}^d$ , και  $\delta'$  είναι επιλεγμένο με τέτοιο τρόπο ώστε να διασφαλίζεται ότι  $J(y_h, g_h) \leq J(\tilde{y}_h, 0)$ . Η απόδειξη της ύπαρξης βέλτιστης λύσης του διακριτού προβλήματος και του αντίστοιχου διακριτού συστήματος διακριτοποίησης (1ης Τάξης Συννήχη Βελτιστοποίησης) απαιτούν υπολογισμούς ευστάθειας για τη λύση της (4.1.5), υπό υποθέσεις ελάχιστης ομαλότητας (βλέπε π.χ. [22, Ενότητα 3]). Αυτοί οι υπολογισμοί ευστάθειας χρειάζονται επίσης για τη παραγωγή υπολογισμών σφαλμάτων. Η νόρμα  $\|y_h\|_X \equiv \|y_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} + \|y_h\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}$  χρησιμοποιείται ως μια φυσική ενεργειακή νόρμα που σχετίζεται με τη dG μοντελοποίηση, εφόσον η διακριτή χρονική παράγωγος δεν παρουσιάζει καμία ουσιαστική ομαλότητα εξαιτίας της παρουσίας ασυνεχειών.

Κάτω από τις επιπρόσθετες υποθέσεις για τον ημιγραμμικό όρο, παράγουμε ένα φράγμα ευστάθειας, το οποίο βελτιώνει την εξάρτηση του  $\tau$  σε σχέση με τη παράμετρο ποιότης  $\alpha$  συγκρινόμενα με το αποτέλεσμα του [22, Λήμμα 3.6].

**Υπόθεση 4.1.5.** Υποθέτουμε πως το  $\{t^n\}_{n=0}^N$  συμβολίζει μια ψευδο-ομοιόμορφη (quasi-uniform) διαμέριση του  $[0, T]$ . Επιπλέον της Υπόθεσης 3.1.1, υποθέτουμε πως ο  $\phi$  ικανοποιεί την ακόλουθη υπόθεση: Για όλα τα  $n = 1, \dots, N$  και  $s_1, s_2 \in L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]$ , με  $\|s_1 - s_2\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq \varepsilon$ , για κάποιο  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $C_L > 0$  (αλγεβρική σταθερά) τέτοια ώστε

$$\|\phi(s_1) - \phi(s_2)\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq C_L \|s_1 - s_2\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}.$$

**Σημείωση 4.1.6.** Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με  $C_L$  τις σταθερές που εξαρτώνται μόνο από σταθερές Lipschitz των Υποθέσεων 3.1.1 και 4.1.5, και με  $C_k$  σταθερές που εξαρτώνται από το  $k$ . Και οι δυο σταθερές μπορούν να είναι διαφορετικές σε διαφορετικές εμφανίσεις.

**Λήμμα 4.1.7.** Υποθέτουμε πως τα  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ ,  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$  είναι δεδομένες συναρτήσεις, και έστω ο  $\phi$  ικανοποιεί τις Υποθέσεις 3.1.1 και 4.1.5. Αν  $(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times$

$L^2[0, T; U_h^n]$  είναι ένα ζεύγος λύσεων του διακριτού (τοπικού) προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, τότε

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|y_h - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (\alpha/2) \int_0^T \|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C \left( \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\eta) \int_0^T \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \equiv C_{st} \end{aligned}$$

όπου  $C$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το  $\Omega$ . Επιπλέον, για όλα τα  $n = 1, \dots, N$

$$\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \|[y^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{t^n} \eta \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq D_{yst},$$

με  $D_{yst} \equiv C_{st} \max\{1, 1/\alpha^{1/2}\}$ . Έστω  $\tau \equiv \max_{i=1, \dots, n} \tau_i$ , με  $\tau_i = t^i - t^{i-1}$ . Αν  $\tau \leq \min\{C_k/8C_L C_{st}^{1/2}, C_k \alpha^{1/2}/8\}$ , τότε ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση

$$\|y_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \leq CD_{yst},$$

όπου  $C$  εξαρτάται από τα  $(C_c/\eta), C_k$  και  $\Omega$  αλλά όχι από τα  $\alpha, \tau, h$ .

*Απόδειξη.* Για τις δύο πρώτες εκτιμήσεις, απλώς παρατηρούμε πως  $J(y_h, g_h) \leq J(\bar{y}_h, 0) \equiv (1/2) \int_0^T \|\bar{y}_h - U\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$ , όπου το  $\bar{y}_h$  αντιστοιχεί στη λύση της (4.1.5) χωρίς έλεγχο. Η εκτίμηση για το  $\bar{y}_h$  προκύπτει από το [31, Ενότητα 2]. Για τη δεύτερη εκτίμηση θέτουμε  $v_h = y_h$  στην (4.1.5), και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Young για να πάρουμε

$$\begin{aligned} & (1/2) \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & \leq (1/2) \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/(4\alpha^{1/2})) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Η εκτίμηση τώρα προκύπτει προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες και χρησιμοποιώντας το πρώτο υπολογισμό. Για την εκτίμηση σε αυθαίρετα σημεία η απόδειξη βασίζεται σε παλιότερες ιδέες ([32]). Για χάρη πληρότητας περιγράφουμε την απόδειξη. Θέτουμε  $v_h = \bar{y}_h$  στην (4.1.5), όπου  $\bar{y}_h$  είναι η εκθετική παρεμβολή του  $e^{-\rho(t-t^{n-1})} y_h$  του  $y_h$  (για κάποιο  $\rho > 0$ ) και ορίζεται στο Παράρτημα Α'2. Οπότε, ο ορισμός του  $\bar{y}_h$  επιτρέπει να πάρουμε

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_{ht}, \bar{y}_h) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_{ht}, y_h) e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt = (1/2) \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t^n-t^{n-1})} \\ & - (1/2) \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση ως προς το χρόνο στην (4.1.5), και χρησιμοποιώντας την (4.1.6), έχουμε

$$\begin{aligned} & (1/2) \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} + (1/2) \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2) \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h), \bar{y}_h \rangle dt \\ & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} |a(y_h, \bar{y}_h)| dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle f, \bar{y}_h \rangle| dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle g_h, \bar{y}_h \rangle| dt. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α'2.2, μπορούμε να φράξουμε το  $\bar{y}_h$  σε όρους του  $y_h$  σε διάφορες νόρμες.

Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Young καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} + (1/2)\|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h), \bar{y}_h \rangle dt \\
& \leq C_k \left( \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (C_c + \eta)\|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2) dt \right. \\
& \left. + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\alpha^{1/2}\|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2})\|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \right). \tag{4.1.7}
\end{aligned}$$

Απομένει να φράξουμε τον ημιγραμμικό όρο. Για αυτό το σκοπό χρησιμοποιώντας την Υπόθεση 3.1.1, έχουμε

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h), \bar{y}_h \rangle dt \geq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h) - \phi(\bar{y}_h), \bar{y}_h \rangle dt.$$

Μεταφέροντας το τελευταίο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (4.1.7) έχουμε το φράγμα ως ακολούθως: Το Λήμμα Α'.2.2, δείχνει πως η διαφορά  $y_h - \bar{y}_h$  παραμένει μικρή. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εκτιμήσεις για το  $\|y_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$  μπορούμε να φράξουμε το  $\|y_h - \bar{y}_h\|_{L^2[t^{n-1},t^n;L^2(\Omega)]} \leq C_k \rho \tau_n \|y_h\|_{L^2[t^{n-1},t^n;L^2(\Omega)]} \leq C_k \rho \tau C_{st}^{1/2}$ . Επομένως, έχουμε από την Υπόθεση 4.1.5 και την ανισότητα Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h) - \phi(\bar{y}_h), \bar{y}_h \rangle dt & \leq C_L \|y_h - \bar{y}_h\|_{L^2[t^{n-1},t^n;L^2(\Omega)]} \|\bar{y}_h\|_{L^2[t^{n-1},t^n;L^2(\Omega)]} \\
& \leq C_k C_L \rho \tau_n C_{st}^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω ανισότητες στην (4.1.7) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} + (1/2)\|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt \\
& \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (C_c + \eta)\|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha^{1/2}\|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + \left( (1/\alpha^{1/2}) + C_k C_L \rho \tau_n C_{st}^{1/2} \right) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
& \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (C_c + \eta)\|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha^{1/2}\|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + \tau_n \left( (1/\alpha^{1/2}) + C_k C_L \rho \tau_n C_{st}^{1/2} \right) \|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1},t^n;L^2(\Omega)]}^2.
\end{aligned}$$

Οπότε, επιλέγοντας  $\rho = 1/\tau_n$  και χρησιμοποιώντας την αντίστροφη εκτίμηση  $\|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1},t^n;L^2(\Omega)]}^2 \leq C_k/\tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$ , παρατηρούμε πως ο τελευταίος όρος στο αριστερό μέλος μπορεί να φραχτεί όπως παρακάτω,

$$\begin{aligned}
(\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt & \geq (e^{-1}/2\tau_n) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
& \geq C_k \|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1},t^n;L^2(\Omega)]}^2.
\end{aligned}$$

Τελικώς φράσσουμε τον τελευταίο όρο στο δεξί μέλος. Επιλέγοντας το  $\tau_n > 0$  με τέτοιο τρόπο ώστε να κρύψουμε αυτόν τον όρο από το αριστερό μέλος στο δεξί, δηλ.,  $C_{st}^{1/2} C_k C_L \tau_n \leq C_k/8$  και



$(\tau_n/\alpha^{1/2}) \leq C_k/8$ , για  $\tau_n \leq \min\{C_k/8C_L C_{st}^{1/2}, (\alpha^{1/2}C_k/8)\}$  παίρνουμε,

$$(1/4)\|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 \leq \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (C_c + \eta)\|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha^{1/2}\|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt.$$

Η εκτίμηση τώρα ακολουθεί χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις στην ενεργειακή νόρμα και τα σημεία διαμέρισης.  $\square$

**Σημείωση 4.1.8.** Η Υπόθεση 4.1.5 είναι επίσης χρήσιμη με σκοπό να ελαχιστοποιήσουμε τις τεχνικές λεπτομέρειες στην επακόλουθη παραγωγή των συμμετρικών εκτιμήσεων σφαλμάτων. Ωστόσο, τονίζουμε πως η συνθήκη αύξουσας μονοτονίας ικανοποιείται με τον εκθέτη  $1 \leq p \leq 2$ , και μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πως  $\|\phi(y_h) - \phi(\bar{y}_h)\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq C(C_{st}, C_k)\|y_h - \bar{y}_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}$ .

Όμοια με τη περίπτωση του [22, Θεώρημα 3.8], (όπου το  $\phi$  ικανοποιεί τις συνθήκες μονοτονίας και αύξουσας μονοτονίας) ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα σύγκλισης υπό ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας, όταν χρησιμοποιούνται οι ίδιοι υπόχωροι<sup>1</sup> σε κάθε χρονικό διάστημα, π.χ.  $U_h^n = U_h \subset H_0^1(\Omega)$ , για  $n = 1, \dots, N$ .

**Θεώρημα 4.1.9.** Δεδομένου σταθερού (fixed)  $h$  και διαμέρισης  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  του  $[0, T]$ , με  $\tau = \max_{i=1, \dots, N} \tau_i$ , ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 4.1.7, και έστω ότι ισχύει η υπόθεση 3.1.1. Υποθέτουμε πως  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  και έστω  $\alpha > 0$ . Τότε, για  $U_h^n \equiv U_h \subset H_0^1(\Omega)$  και για ψευδο-ομοιόμορφους (quasi-uniform) χρονικούς βηματισμούς, έχουμε,

- Υπάρχει  $y_h \in \mathcal{U}_h$  και  $g_h \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  τέτοια ώστε το ζεύγος  $(y_h, g_h)$  ικανοποιεί τη διακριτή εξίσωση (4.1.5) και το συναρτησιακό  $J(y_h, g_h)$  ελαχιστοποιείται.
- Το διακριτό ζεύγος  $(y_h, g_h)$  συγκλίνει καθώς τα  $\tau, h \rightarrow 0$  στη λύση  $(y, g)$  του συνεχούς προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, με την ακόλουθη έννοια:

$$\begin{aligned} y_h &\rightarrow y && \text{ασθενώς στον } L^2[0, T; H_0^1(\Omega)], \\ y_h &\rightarrow y && \text{ασθενώς-* στον } L^\infty[0, T; L^2(\Omega)], \\ y_h &\rightarrow y && \text{ισχυρώς στον } L^2[0, T; L^2(\Omega)], \\ g_h &\rightarrow g && \text{ασθενώς στον } L^2[0, T; L^2(\Omega)]. \end{aligned}$$

**Σημείωση 4.1.10.** Οι εκτιμήσεις ευστάθειας υπό ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας είναι έγκυρες ακόμη και όταν χρησιμοποιηθούν διαφορετικοί υπόχωροι σε κάθε χρονικό διάστημα. Το αποτέλεσμα της σύγκλισης του [22, Θεωρήματος 3.8] βασίζεται στο επιχείρημα διακριτής συμπίεσης του *Walkington* (βλέπε [110, Θεώρημα 3.1]) για ασυνεχή χρονικού βηματισμού σχήματα τα οποία δημιουργούνται όταν  $U_h^n \equiv U_h$ . Ωστόσο είναι πιθανό να επεκτείνουμε το κύριο αποτέλεσμα ακόμη και στη περίπτωση με διαφορετικούς υπόχωρους. Υπογραμμίζουμε επίσης ότι η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.9 απαιτεί μόνο τις υποθέσεις μονοτονίας και αύξουσας μονοτονίας της Υπόθεσης 3.1.1.

**Πρόβλημα κατανεμημένου ελέγχου Stokes.** Το ασυνεχές χρονικού βηματισμού πλήρως διακριτοποιημένο σχήμα για την απεικόνιση από τον έλεγχο στη βασική μεταβλητή  $G_h : L^2[0, T; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$ , απεικονίζει τον κάθε έλεγχο  $g$  στην αντίστοιχη κατάσταση  $G_h(g) = y_{g,h} \equiv y_h(g)$ : Για κάθε δεδομένο  $g \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , και δοθέντων  $y^0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ , αναζητούμε  $y_h \in \mathcal{U}_h$  τέτοιο ώστε για  $n = 1, \dots, N$ , και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ ,

$$(y_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) \right) dt = (y_h^{n-1}, v_h^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (g, v_h) \right) dt. \quad (4.1.8)$$

<sup>1</sup>Σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα  $V$ , μια ακολουθία  $\{u_k\}$  του  $V$  συγκλίνει ασθενώς στο  $u \in V$  αν  $\langle v^*, u_n \rangle \rightarrow \langle v^*, u \rangle$  για κάθε  $v^* \in V^*$ . Σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα  $V$ , μια ακολουθία  $\{u_k^*\}$  του  $V^*$  συγκλίνει ασθενώς-\* στο  $u^* \in V^*$  αν  $\langle u_n^*, v \rangle \rightarrow \langle u^*, v \rangle$  για κάθε  $v \in V$ . Ταυτίζεται με την ασθενή σύγκλιση αν ο  $V$  είναι αναλλαστατικός, ειδικά αν  $V^* = V$ , π.χ. αν ο  $V$  είναι Hilbert.

Προκύπτουν εύκολα εκτιμήσεις σφαλμάτων στα σημεία διαμέρισης για τις νόρμες  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  θέτοντας  $v_h = y_h$  στην (4.1.8). Για εκτιμήσεις σε αυθαίρετα σημεία παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [32, Παράρτημα Α]. Οπότε, οι εκτιμήσεις ευστάθειας υποδηλώνουν πως ο έλεγχος απεικονίζεται στη πλήρως διακριτοποιημένη βασική μεταβλητή μέσω της απεικόνισης  $G_h : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$ , είναι καλά ορισμένη, και συνεχής. Παρόμοια με τη συνεχή περίπτωση, όταν για τα δεδομένα είναι διαθέσιμη περισσότερη ομαλότητα, δηλαδή  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , τότε αναζητούμε  $(y_h, p_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  τέτοια ώστε να ισχύει η παρακάτω τυποποίηση: Για  $n = 1, \dots, N$ , και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,

$$\begin{aligned} (y_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + b(v_h, p_h) \right) dt &= (y_h^{n-1}, v_h^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (g, v_h) \right) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(y_h, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Το πλήρες διακριτοποιημένο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου μπορεί να οριστεί ως εξής:

**Ορισμός 4.1.11.** Θεωρούμε δοσμένα δεδομένα  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$ . Υποθέτουμε ότι το σύνολο των διακριτών επιθυμητών ελέγχων συμβολίζεται με  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{G}_h \cap \mathcal{A}_{ad}$ , και έστω  $J_h(y_h, g_h) \equiv \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} |y_h - y_d|^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} |g_h|^2 dx dt$ . Εδώ το ζεύγος  $(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  ικανοποιεί την (4.1.8). Τότε το ζεύγος  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$ , λέγεται πως είναι βέλτιστη λύση αν  $J_h(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \leq J_h(w_h, u_h) \forall (w_h, u_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$ .

Η ύπαρξη και μοναδικότητα του διακριτού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου μπορεί να αποδειχθεί με κλασικές τεχνικές. Στη συνέχεια θα δούμε τις εκτιμήσεις σε αυθαίρετα σημεία, για σχήμα αυθαίρετης τάξης κάτω από ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας, προσαρμοσμένα στη περίπτωση μας από την [32, Ενότητα 4]. Στην εκτίμηση υπογραμμίζεται το γεγονός πως η φυσική διακριτή ενεργειακή νόρμα για τη βασική μεταβλητή σχετική με τα ασυνεχή σχήματα χρονικού βηματισμού είναι  $\|\cdot\|_{W_S(0, T)} = \|\cdot\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}$ .

**Λήμμα 4.1.12.** Υποθέτουμε ότι  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ . Αν το  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  συμβολίζει το ζεύγος λύσεων του διακριτού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, τότε υπάρχει σταθερά  $C > 0$  εξαρτώμενη από τα  $1/\alpha$ ,  $C_k$  και  $\Omega$  αλλά όχι από τα  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $h$ , τέτοια ώστε,

$$\|\bar{y}_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \leq C(1/\alpha) \left( \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]}^2 \right).$$

#### 4.1.3 Το διακριτοποιημένο σύστημα βελτιστοποίησης

**Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου.** Χρησιμοποιώντας γνωστές τεχνικές και τους υπολογισμούς ευστάθειας για τον  $W_R(0, T)$ , είναι εύκολο να δείξουμε την διαφορισμότητα της σχέσης  $g \rightarrow y_h(g)$ , για κάθε  $g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ . Οπότε, το διακριτό αντίστοιχο του Λήμματος 3.3.2, παίρνει την ακόλουθη μορφή:

**Λήμμα 4.1.13.** Το συναρτησιακό κόστους  $J_h : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι καλά ορισμένο, διαφορίσιμο, και για κάθε  $g, u \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ ,

$$J'_h(g)u = \int_0^T \int_\Gamma (\mu_h(g) + \alpha g) u dx dt,$$

όπου  $\mu_h(g) \equiv \mu_{g, h} \in W_R(0, T)$  είναι η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος: Για όλα τα  $n =$

1, ..., N, και για όλα τα  $v_h \in P_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$\begin{aligned} -(\mu_{g,h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \mu_{g,h}, v_{ht} \rangle + a(v_h, \mu_{g,h}) + \lambda \langle \mu_{g,h}, v_h \rangle_{\Gamma}) dt \\ = -(\mu_{g,h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle y_{g,h} - y_d, v_h \rangle dt, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

όπου  $\mu_{g,h+}^N = 0$ . Εδώ,  $y_{h,g} \equiv y_h(g)$  είναι η λύση του (4.1.4).

Οπότε, το πλήρως διακριτοποιημένο σύστημα βελτιστοποίησης παίρνει την ακόλουθη μορφή.

**Λήμμα 4.1.14.** Έστω  $(\bar{y}_h(\bar{g}_h), \bar{g}_h) \equiv (\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  συμβολίζει το μοναδιαίο βέλτιστο ζεύγος του Ορισμού 4.1.2. Τότε, υπάρχει μια συζυγής μεταβλητή  $\bar{\mu}_h \in \mathcal{U}_h$  που ικανοποιεί  $\bar{\mu}_+^N = 0$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ , και για όλα τα  $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} (\bar{y}_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle \bar{y}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{y}_h, v_h) + \lambda \langle \bar{y}_h, v_h \rangle_{\Gamma}) dt \\ = (\bar{y}_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + \lambda \langle \bar{g}_h, v_h \rangle_{\Gamma}) dt, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$\begin{aligned} -(\bar{\mu}_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \bar{\mu}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{\mu}_h, v_h) + \lambda \langle \bar{\mu}_h, v_h \rangle_{\Gamma}) dt \\ = -(\bar{\mu}_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{y}_h - y_d, v_h) dt, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

και ισχύει η ακόλουθη συνθήκη βελτιστοποίησης: Για όλα τα  $u_h \in \mathcal{A}_{ad}^d$ ,

$$1) \text{ Έλεγχος χωρίς περιορισμούς: } \int_0^T (\alpha \bar{g}_h + \lambda \bar{\mu}_h, u_h)_{\Gamma} dt = 0, \quad (4.1.13)$$

$$2) \text{ Έλεγχος με περιορισμούς: } \int_0^T \int_{\Gamma} (\alpha \bar{g}_h + \lambda \bar{\mu}_h) (u_h - \bar{g}_h) dx dt \geq 0. \quad (4.1.14)$$

Οι υπολογισμοί για τη συζυγή μεταβλητή στα σημεία της χρονικής διαμέρισης και στον  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  μπορούν να παραχθούν εύκολα, ενώ για τους υπολογισμούς στην  $L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$  παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία [23]. Ο ακόλουθος υπολογισμός τονίζει το γεγονός ότι οι διακριτές λύσεις που παράγονται από τα ασυνεχή σχήματα με χρονικό βηματισμό χαρακτηρίζονται από τις ίδιες ιδιότητες ομαλότητας με το συνεχές πρόβλημα.

**Λήμμα 4.1.15.** Θεωρούμε ως  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h)$  τη διακριτή βέλτιστη λύση και οι  $(\bar{y}_h, \bar{\mu}_h, \bar{g}_h)$  ικανοποιούν το σύστημα (4.1.11)-(4.1.12)-(4.1.13) ή το (4.1.14). Τότε,

$$\|\bar{\mu}_h\|_{L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]} + \lambda^{1/2} \|\bar{\mu}_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq C \|\bar{y}_h - y_d\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]},$$

όπου το  $C$  δεν εξαρτάται από τα  $\alpha, \tau, h$  αλλά μόνο από τα  $1/\eta, C_k, \Omega$ .

*Απόδειξη.* Στη συνέχεια βασιζόμαστε στις τεχνικές του [32, Θεώρημα 4.10], προσαρμοσμένες με σκοπό να χειριστούμε τα δεδομένα στο σύνορο Robin, και την “προς τα πίσω” χρονικά φύση της μ.δ.ε. Αρχικά, παρατηρούμε πως  $\mu(T) = 0$ , και  $y_h - y_d \in L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$ . Οπότε, σε κάθε χρονική στιγμή  $t \in (t^{n-1}, t^n]$  έστω  $a_p(\cdot) \in U_h$  είναι η ακόλουθη διακριτή προσέγγιση της Λαπλασιανής (με Robin συνοριακά δεδομένα),

$$(a_p, v_h) = (1/\eta)a(\bar{\mu}_h, v_h) + (\lambda/\eta)(\bar{\mu}_h, v_h)_{\Gamma}, \quad \forall v_h \in U_h.$$

Οπότε,  $a_p \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ , και θέτοντας  $v_h(\cdot) \in U_h$ , και  $v_h(\cdot) = a_p(\cdot) \in U_h$ , παίρνουμε

$$(1/2) \frac{d}{dt} (\|\nabla \bar{\mu}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda/\eta) \|\bar{\mu}_h\|_{L^2(\Gamma)}^2) = (a_p, \bar{\mu}_h),$$

και

$$a(\bar{\mu}_h, a_p) + \lambda \langle \bar{\mu}_h, a_p \rangle_\Gamma = \eta(a_p, a_p).$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση χρονικά στην (4.1.11), θέτοντας  $v_h = a_p$  στην ισότητα που προκύπτει, χρησιμοποιώντας τις δυο τελευταίες ισότητες και τον ορισμό του  $a_p(t^n)$ , δηλ.,  $(a_p(t^n), \bar{\mu}_{h+}^n - \bar{\mu}_h^n) = (\nabla \bar{\mu}_h^n, \nabla(\bar{\mu}_{h+}^n - \bar{\mu}_h^n)) + (\lambda/\eta)(\bar{\mu}_h^n, \bar{\mu}_{h+}^n - \bar{\mu}_h^n)_\Gamma$  έχουμε,

$$\begin{aligned} & (1/2) \|\nabla \bar{\mu}_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + (\lambda/2\eta) \|\bar{\mu}_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma)} + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|a_p\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq (1/2) \|\nabla \bar{\mu}_h^n\|_{L^2(\Omega)} + (\lambda/2\eta) \|\bar{\mu}_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma)} + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{y}_h - y_d, a_p) dt. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα υποδηλώνει φράγματα στα σημεία διαμέρισης και συνεπώς φράγματα στην  $L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]$ , όταν  $k = 0, 1$  αφού εισάγουμε το φράγμα ευστάθειας στο  $\bar{y}_h$ . Για υψηλότερης τάξης χρονικά σχήματα ακολουθούμε απευθείας την τεχνική του [32, Θεώρημα 4.10].  $\square$

**Ημγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου.** Το πλήρως διακριτοποιημένο σύστημα βελτιστοποίησης ορίζεται ως ακολούθως: Αναζητούμε  $y_h, \mu_h \in \mathcal{U}_h$  τέτοιο ώστε για  $n = 1, \dots, N$  και για κάθε  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$ ,

$$\begin{aligned} (y^n, v^n) & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + (\phi(y_h), v_h) \right) dt \\ & = (y_+^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (g_h, v_h) \right) dt, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned} -(\mu_+^n, v^n) & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle \mu_h, v_{ht} \rangle + a(v_h, \mu_h) + (\phi'(y_h) \mu_h, v_h) \right) dt \\ & = -(\mu_+^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_h - y_d, v_h) dt, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

$$\int_0^T (\alpha g_h + \mu_h, u_h) dt = 0 \quad \forall u_h \in L^2[0, T; U_h^n]. \quad (4.1.17)$$

Εδώ, τα  $y^0 = y_{h0}$ ,  $\mu_+^N = 0$ ,  $f$ ,  $y_d$  είναι δοσμένα δεδομένα, και το  $y_{h0}$  συμβολίζει μια προσέγγιση για το  $y_0$ .

**Σημείωση 4.1.16.** Για σχήματα χαμηλής τάξης ( $k = 0$ , ή  $k = 1$ ) η απόδειξη της ύπαρξης του διακριτού συστήματος βελτιστοποίησης μπορεί να παραχθεί από κλασικές τεχνικές. Για σχήματα υψηλότερης τάξης, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην [23, Ενότητα 4].

**Σημείωση 4.1.17.** Σημειώνουμε ότι δοκιμάζοντας στη συνθήκη βελτιστοποίησης (4.1.17) πολωνυμικές συναρτήσεις με χρονική δομή, μπορούμε εύκολα να δούμε πως η (4.1.17) είναι ισοδύναμη με την  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (\alpha g_h + \mu_h, v_h) = 0$  για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$ , και  $n = 1, \dots, N$ .

Το υπόλοιπο αυτής της ενότητας αφιερώνεται στις εκτιμήσεις ευστάθειας για τη συζυγή μεταβλητή  $\mu_h$ . Αυτές οι εκτιμήσεις θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην επακόλουθη ανάλυση για τις εκτιμήσεις σφαλμάτων για το πλήρως διακριτοποιημένο σύστημα βελτιστοποίησης.

**Λήμμα 4.1.18.** Υποθέτουμε πως τα  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ ,  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$  είναι δοσμένες συναρτήσεις. Θεωρούμε ότι ο ημγραμμικός όρος  $\phi$  ικανοποιεί τις υποθέσεις 3.1.1-4.1.5. Αν τα  $(y_h, \mu_h)$  ικανοποιούν τις (4.1.15)-(4.1.16)-(4.1.17) τότε

$$\int_0^T \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_{st} \alpha,$$

$$\|\mu_+^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|\mu^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_0^T \|\mu_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C_{st} \alpha^{1/2}$$

για όλα τα  $n = 1, \dots, N$ ,  $\|\mu_+^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{st} \alpha^{1/2}$ , όπου  $C_{st}$  ορίζεται στο Λήμμα 4.1.7. Θεωρούμε επιπλέον τις υποθέσεις του Λήμματος 4.1.7,  $\tau \equiv \max_{i=1, \dots, n} \tau_i$ , και  $((D_{yst} C_L^2 C_k^2 / 4\eta) + (C_k / 4\alpha^{1/2}))\tau \leq (1/4)$ . Οπότε, προκύπτει

$$\|\mu_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \leq C C_{st} \alpha^{1/2} \equiv D_{\mu st},$$

όπου το  $C$  δεν εξαρτάται από τα  $\alpha, \tau, h$ , αλλά μόνο από τα  $C_c/\eta, C_k$  και  $\Omega$ , όπου το  $D_{yst}$  συμβολίζει τη σταθερά ευστάθειας του Λήμματος 4.1.7.

*Απόδειξη.* Οι δύο πρώτες εκτιμήσεις ταυτίζονται με αυτές στο [22, Λήμμα 3.8]. Για την εκτίμηση σε αυθαίρετα χρονικά σημεία παρόμοια με το [22, Ενότητα 4], θέτουμε  $v_h = \bar{\mu}_h$  όπου  $\bar{\mu}_h$  είναι η εκθετική παρεμβολή  $e^{-\rho(t^n - t)} \mu_h$  του  $\mu_h$  (για κάποιο  $\rho > 0$ ) και ορίζεται στο Παράρτημα Α'2 (κατάλληλα τροποποιημένη ώστε να εφαρμοστεί στο προς τα πίσω χρονικά πρόβλημα). Τότε το ανάλογο της (4.1.7), παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & (1/2) \|\mu_+^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t - t^{n-1})} + (1/2) \|\mu^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2) \|\mu_+^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t - t^{n-1})} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y_h) \mu_h, \bar{\mu}_h \rangle dt \\ & \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|\mu_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + (C_k/\alpha^{1/2}) \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha^{1/2} \|y_h - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Απομένει να χειριστούμε τον ημιγραμμικό όρο. Παρατηρούμε πως προσθαφαίρωντας το  $\mu_h$ , ο ημιγραμμικός όρος παίρνει τη μορφή,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y_h) \mu_h, \bar{\mu}_h \rangle dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y_h) \mu_h, \bar{\mu}_h - \mu_h \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y_h) \mu_h, \mu_h \rangle dt.$$

Επομένως, μπορούμε να διώξουμε τον τελευταίο όρο εξαιτίας της μονοτονίας του  $\phi$ , και μετακινώντας τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την Lipschitz συνέχεια του  $\phi'$ , την ανισότητα παρεμβολής  $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ , την ανισότητα Hölder και το Παράρτημα Α'2 παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y_h) \mu_h, \bar{\mu}_h - \mu_h \rangle| dt \leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^4(\Omega)} \|\bar{\mu}_h - \mu_h\|_{L^4(\Omega)} dt \\ & \leq C C_L D_{yst}^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\mu_h\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{\mu}_h - \mu_h\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\bar{\mu}_h - \mu_h\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} dt \\ & \leq C_k C_L D_{yst}^{1/2} \rho \tau_n \|\mu_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \|\mu_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}. \end{aligned}$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young με  $\delta > 0$ , παράγουμε την

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y_h) \mu_h, \bar{\mu}_h - \mu_h \rangle| dt \leq (C_k^2 C_L^2 D_{yst} \rho^2 \tau_n^2 / 4\eta) \|\mu_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt.$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες σχέσεις στην (4.1.18) και επιλέγοντας  $\rho = 1/\tau_n$ , έχουμε την επιθυμητή εκτίμηση εργαζόμενοι ομοίως με το Λήμμα 4.1.7.  $\square$

**Σημείωση 4.1.19.** Τελικώς κλείνουμε αυτήν την ενότητα παρατηρώντας ότι τα διακριτά φράγματα ευστάθειας για τη συζυγή μεταβλητή είναι καλύτερα ως προς την παράμετρο  $\alpha$  όπως είναι αναμενόμενο.

**Πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου Stokes.** Χρησιμοποιώντας εκτιμήσεις ευστάθειας και γνωστές τεχνικές για τον  $W_S(0, T)$ , είναι εύκολο να δείξουμε τη διαφορισιμότητα της σχέσης  $g \rightarrow y_h(g)$  για κάθε  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ .

**Λήμμα 4.1.20.** *Το συναρτησιακό κόστους  $J_h : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι καλά ορισμένο, διαφορίσιμο, και για κάθε  $g, u \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ ,*

$$J'_h(g)u = \int_0^T \int_{\Omega_h} (\mu_h(g) + \alpha g) u dx dt,$$

όπου  $\mu_h(g) \equiv \mu_{g,h} \in W_S(0, T)$  είναι η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος: Για όλα τα  $n = 1, \dots, N$  και για όλα τα  $v_h \in P_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ ,

$$-(\mu_{g,h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \mu_{g,h}, v_{ht} \rangle + a(v_h, \mu_{g,h})) dt = -(\mu_{g,h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle y_{g,h} - y_d, v_h \rangle dt, \quad (4.1.19)$$

όπου  $\mu_{g,+}^N = 0$ . Εδώ, το  $y_{g,h} \equiv y_h(g)$  είναι η λύση της (4.1.8).

Οπότε, το πλήρως διακριτοποιημένο σύστημα βελτιστοποίησης παίρνει την ακόλουθη μορφή.

**Λήμμα 4.1.21.** *Εστω το  $(\bar{y}_h(\bar{g}_h), \bar{g}_h) \equiv (\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  συμβολίζει το μοναδικό βέλτιστο ζεύγος του Ορισμού 4.1.11. Τότε, υπάρχει μια συζυγής μεταβλητή  $\bar{\mu}_h \in \mathcal{U}_h$  που ικανοποιεί,  $\bar{\mu}_+^N = 0$  τέτοια ώστε για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ , και για όλα τα  $n = 1, \dots, N$*

$$\begin{aligned} (\bar{y}_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle \bar{y}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{y}_h, v_h)) dt &= (\bar{y}_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + (\bar{g}_h, v_h)) dt, \\ -(\bar{\mu}_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \bar{\mu}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{\mu}_h, v_h)) dt &= -(\bar{\mu}_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{y}_h - y_d, v_h) dt, \end{aligned}$$

και ισχύει η ακόλουθη συνθήκη βελτιστοποίησης: Για όλα τα  $u_h \in \mathcal{A}_{ad}^d$ ,

$$1) \text{ Για ελέγχους χωρίς περιορισμούς: } \int_0^T (\alpha \bar{g}_h + \bar{\mu}_h, u_h) dt = 0, \quad (4.1.20)$$

$$2) \text{ Για ελέγχους με περιορισμούς: } \int_0^T \int_{\Omega_h} (\alpha \bar{g}_h + \bar{\mu}_h)(u_h - \bar{g}_h) dx dt \geq 0. \quad (4.1.21)$$

**Σημείωση 4.1.22.** *Παρόμοια με τη Σημείωση 3.3.7, αν  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ , τότε οι εξισώσεις (4.1.20), (4.1.21) μπορούν να ξαναγραφούν στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in L^2[0, T; Q_h]$ , και για όλα τα  $n = 1, \dots, N$*

$$\begin{aligned} (\bar{y}_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle \bar{y}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{y}_h, v_h) + b(v_h, \bar{p}_h)) dt &= (\bar{y}_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + (\bar{g}_h, v_h)) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{y}_h, q_h) dt &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} -(\bar{\mu}_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \bar{\mu}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{\mu}_h, v_h) + b(v_h, \bar{\phi}_h)) dt &= -(\bar{\mu}_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{y}_h - y_d, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{\mu}_h, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Εκτιμήσεις στα σημεία διαμέρισης και στον χώρο  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  μπορούν να παραχθούν εύκολα, ενώ για τις εκτιμήσεις στον  $L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία [32]. Ο ακόλουθος υπολογισμός δείχνει ξεκάθαρα το γεγονός ότι οι διακριτές λύσεις που παράγονται με ασυνεχή χρονικό βηματισμό σχήματα έχουν τις ίδιες ιδιότητες ομαλότητας με το αντίστοιχο συνεχές πρόβλημα.

**Λήμμα 4.1.23.** Έστω πως με  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h)$  συμβολίζουμε την διακριτή βέλτιστη λύση και τα  $(\bar{y}_h, \bar{\mu}_h, \bar{g}_h)$  ικανοποιούν το σύστημα (4.1.20)-(4.1.20)-(4.1.20) ή την (4.1.21). Τότε,

$$\|\bar{\mu}_h\|_{L^\infty[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C\|\bar{y}_h - y_d\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]},$$

όπου η  $C$  δεν εξαρτάται από τα  $\alpha, \tau, h$  παρά μόνο από τα  $1/\nu, C_k, \Omega$ . Αν επιπλέον,  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]$  τότε η λύση  $\bar{y}_h$  της (4.1.21) επίσης ικανοποιεί,

$$\|\bar{y}_h\|_{L^\infty[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C.$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη για την προς τα εμπρός χρονικά εξελικτική εξίσωση Stokes δίνεται στο [32, Θεώρημα 4.10]. Για το χρονικά οπισθόδρομο πρόβλημα παρατηρούμε πως  $\bar{y}_h - y_d \in L^2[0,T;\mathbf{W}(\Omega)]$ , και οπότε με μια παραλλαγή της τεχνικής παράγουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.  $\square$

## 4.2 Εκτιμήσεις σφαλμάτων

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις τάξεις σύγκλισης στις κατάλληλες νόρμες, για τα αντίστοιχα προβλήματα και θα παρουσιάσουμε τις εκτιμήσεις σφαλμάτων.

### 4.2.1 Γραμμικό πρόβλημα συνοριακού Robin ελέγχου.

Το κλειδί στη μελέτη των εκτιμήσεων είναι ο ορισμός μιας κατάλληλης γενικευμένης χωροχρονικής dG προβολής τέτοια ώστε να μπορούμε να χειριστούμε τη χαμηλή ομαλότητα του  $y_t \in L^2[0,T;H^1(\Omega)^*]$ , και ένα βοηθητικό σύστημα βελτιστοποίησης το οποίο παίζει το ρόλο μιας καθολικής χωροχρονικής προβολής και παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες προσεγγισιμότητας.

#### 4.2.1.1 Η πλήρως διακριτή προβολή.

Έστω ότι  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  είναι οι λύσεις του παρακάτω συστήματος. Δεδομένων  $f, y_0$ , και αρχικών συνθηκών  $w_h^0 = y_h^0$ , όπου με  $y_h^0 \equiv P_h y_0$  συμβολίζουμε την αρχική προσέγγιση του  $y_0$ ,  $z_+^N = 0$ , αναζητούμε  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  τέτοια ώστε για  $n = 1, \dots, N$  και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$\begin{aligned} (w_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle w_h, v_{ht} \rangle + a(w_h, v_h) + \lambda \langle w_h, v_h \rangle_\Gamma \right) dt \\ = (w_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + \lambda \langle \bar{g}, v_h \rangle_\Gamma \right) dt, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

$$\begin{aligned} -(z_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle z_h, v_{ht} \rangle + a(z_h, v_h) + \lambda \langle z_h, v_h \rangle_\Gamma \right) dt \\ = -(z_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (w_h - y_d, v_h) dt. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

Οι λύσεις  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  υπάρχουν εξαιτίας της ομαλότητας των  $\bar{y}, \bar{\mu} \in W_R(0, T)$ . Οι λύσεις του βοηθητικού συστήματος βελτιστοποίησης έχουν το ρόλο της “γενικευμένης προβολής” μέσα στον  $\mathcal{U}_h$ . Ο

βασικός υπολογισμός της ενεργειακής νόρμας του  $\bar{y} - w_h, \bar{\mu} - z_h$  θα παραχθεί σε όρους τοπικών  $L^2$  προβολών που σχετίζονται με τις ασυνεχείς χρονικού βηματισμού μεθόδους, βλέπε π.χ. [104].

**Ορισμός 4.2.1.** (1) Η προβολή  $P_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$  ικανοποιεί την  $(P_n^{loc}v)^n = P_h v(t^n)$ , και

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (v - P_n^{loc}v, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h]. \quad (4.2.26)$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει τη σύμβαση ότι  $(P_n^{loc}v)^n \equiv (P_n^{loc}v)(t^n)$  και  $P_h : L^2(\Omega) \rightarrow U_h$  είναι ο τελεστής ορθογώνιας προβολής στον  $U_h \subset H^1(\Omega)$ .

(2) Η προβολή  $P_h^{loc} : C[0, T; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$  ικανοποιεί

$$P_h^{loc}v \in \mathcal{U}_h \text{ και } (P_h^{loc}v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = P_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

Λόγω της έλλειψης ομαλότητας και κυρίως του ότι  $\bar{y} \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , κατασκευάζουμε μια χωροχρονική γενικευμένη  $L^2$  προβολή που συνδυάζει την κλασική dG χρονικού βηματισμού προβολή, και τη χωρική, γενικευμένη  $L^2$  προβολή  $Q_h : H^1(\Omega)^* \rightarrow U_h$ . Ανακαλούμε πως ο ορισμός του  $Q_h$  υποδηλώνει ότι  $\langle v - Q_h v, v_h \rangle = 0$ , για όλα τα  $v \in H^1(\Omega)^*$  και  $v_h \in U_h$  (βλέπε για παράδειγμα την [26, ενότητα 2]).

**Ορισμός 4.2.2.** (1) Η προβολή  $Q_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)^*] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$  ικανοποιεί την  $(Q_n^{loc}v)^n = Q_h v(t^n)$ , και την

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle v - Q_n^{loc}v, v_h \rangle = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h].$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τη σύμβαση ότι  $(Q_n^{loc}v)^n \equiv (Q_n^{loc}v)(t^n)$  και  $Q_h : H^1(\Omega)^* \rightarrow U_h$  είναι ο τελεστής γενικευμένης ορθογώνιας προβολής στον  $U_h \subset H^1(\Omega)$ .

(2) Η προβολή  $Q_h^{loc} : C[0, T; H^1(\Omega)^*] \rightarrow \mathcal{U}_h$  ικανοποιεί την

$$Q_h^{loc}v \in \mathcal{U}_h \text{ και } (Q_h^{loc}v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = Q_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

Για  $k = 0$ , η προβολή  $Q_h^{loc} : C[0, T; H^1(\Omega)^*] \rightarrow \mathcal{U}_h$  ανάγει την  $Q_h^{loc}v(t) = Q_h v(t^n)$  για όλα τα  $t \in (t^{n-1}, t^n]$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

Το βασικό χαρακτηριστικό της  $Q_h^{loc}$  είναι ότι ταυτίζεται με την  $P_h^{loc}$ , όταν  $v \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  δηλαδή,  $P_h^{loc}v = Q_h^{loc}v$  όταν  $v \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , και οπότε παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες προσεγγισιμότητας, αλλά είναι επίσης εφαρμόσιμη για  $v \equiv \bar{y}_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Για το “προς τα πίσω” χρονικά πρόβλημα χρειάζεται η τροποποίηση των παραπάνω προβολών (επίσης συμβολιζόμενο με  $P_n^{loc}$ ,  $Q_n^{loc}$  αντιστοίχως). Για παράδειγμα, επιπλέον της σχέσης (4.2.26), χρειάζεται να επιβάλουμε την “συνθήκη ταυρίσματος” (matching condition) στα αριστερά, δηλαδή,  $(P_n^{loc}v)_+^{n-1} = P_h v(t_+^{n-1})$  αντί της επιβολής της συνθήκης στα δεξιά. Στο παρακάτω Λήμμα, συλλέγουμε μερικά αποτελέσματα όσον αφορά τις (βέλτιστες) τάξεις σύγκλισης για την παραπάνω προβολή. Εδώ, δίνουμε έμφαση στις ιδιότητες προσέγγισης για την γενικευμένη προβολή  $Q_h^{loc}$ , κάτω από υποθέσεις ελάχιστης ομαλότητας, δηλαδή, για  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$  για το σχήμα χαμηλότερης τάξης.

**Λήμμα 4.2.3.** Έστω  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , και  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  ορίζεται στους Ορισμούς 4.2.1 και 4.2.2 αντιστοίχως. Τότε, για όλα τα  $v \in L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; L^2(\Omega)]$  υπάρχει σταθερά  $C \geq 0$  ανεξάρτητα των  $h, \tau$  τέτοια ώστε

$$\|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C(h^{l+1}\|v\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}\|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}).$$

Αν επιπλέον,  $k = 0, l = 1$  και  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$  τότε υπάρχει μια σταθερά  $C \geq 0$



ανεξάρτητη από τα  $h, \tau$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C(h\|v\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|v\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \|v_t\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)^*]})), \\ \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} &\leq C(\|v\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + (\tau/h^2)\|v_t\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)^*]}). \end{aligned}$$

Έστω  $k = 0, l = 1$  και  $v \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ . Τότε υπάρχει σταθερά  $C \geq 0$  ανεξάρτητη από τα  $h, \tau$  τέτοια ώστε,

$$\|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C(h\|v\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|v_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]})).$$

Απόδειξη. Βλέπε Παράρτημα Α1.  $\square$

**Σημείωση 4.2.4.** Η εκτίμηση ευστάθειας στον  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  απαιτεί το περιορισμό για το χρονικό βήμα  $\tau \leq Ch^2$  εξαιτίας της έλλειψης ομαλότητας ως προς το χρόνο. Αν το  $v \in L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; L^2(\Omega)]$  τότε η πρώτη εκτίμηση του Λήμματος 4.2.3 υποδηλώνει πως,

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C(h^l\|v\|_{L^2[0,T;H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}/h\|v^{(k+1)}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}).$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας το [32, Θεώρημα 4.3, Πρόσχημα 4.8], έχουμε τις παρακάτω (τοπικές στο χρόνο) εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned} \|v - P_n^{loc} v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} &\leq C(\|v - P_h v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} + \tau^{k+1}\|P_h v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}) \\ &\leq C(h^l\|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^{l+1}(\Omega)]} + (\tau^{k+1}/h)\|v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}). \end{aligned}$$

όπου στη τελευταία εκτίμηση έχουμε χρησιμοποιήσει μια αντίστροφη εκτίμηση. Σημειώνουμε πως αν είναι διαθέσιμη περισσότερη ομαλότητα, η αντίστροφη εκτίμηση δεν είναι απαραίτητη. Πιο συγκεκριμένα αν  $v^{(k+1)} \in L^2[0, T; H^1(\Omega)]$ , τότε ισχύουν οι βελτιωμένες τάξεις σύγκλισης  $\mathcal{O}(h^l + \tau^{k+1})$  στη νόρμα  $\|\cdot\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ . Ωστόσο, παρατηρούμε ότι για το συνοριακό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου η αυξημένη ομαλότητα  $v_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  δεν είναι διαθέσιμη. Οπότε, δίνουμε έμφαση στο ότι η έλλειψη ομαλότητας ενεργεί ως φράγμα για την ανάπτυξη ενός σχήματος υψηλότερης τάξης. Εργαζόμενοι όμοια, έχουμε μια εκτίμηση σε αυθαίρετα χρονικά σημεία, δηλαδή,

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(h^{l+1}\|v\|_{L^\infty[0,T;H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}/h\|v^{(k+1)}\|_{L^\infty[0,T;H^1(\Omega)]}).$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε το κύριο αποτέλεσμα σχετικά με το βοηθητικό πρόβλημα, το οποίο ενεργεί ως μια γενικευμένη χωροχρονική dG προβολή. Στόχος μας είναι να βρούμε ότι το σφάλμα προβολής είναι τόσο καλό όσο η τοπική dG προβολή επιτρέπει να είναι, και οπότε είναι βέλτιστη υπό την έννοια της διαθέσιμης ομαλότητας.

**Θεώρημα 4.2.5.** Έστω ότι μας δίνονται τα  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$  και  $y_0 \in L^2(\Omega)$  και  $\bar{y}, \bar{\mu} \in W_R(0, T)$  είναι οι λύσεις των (3.3.7)-(3.3.8)-(3.3.9) ή (3.3.10), και έστω  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  είναι οι λύσεις των (4.2.24)-(4.2.25). Συμβολίζουμε με  $e_1 = \bar{y} - w_h, r_1 = \bar{\mu} - z_h$  και έστω  $e_p \equiv \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}, r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$ , όπου τα  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  ορίζονται στους Ορισμούς 4.2.1 και 4.2.2. Τότε, υπάρχει μια αλγεβρική σταθερά  $C > 0$  που εξαρτάται μόνο από το  $\Omega$  τέτοια ώστε,

$$\begin{aligned} &C_F \min\{\eta, \lambda\} \|e_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|[e_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2 \\ &\leq C(\|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/C_F \min\{\eta, \lambda\})(\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \lambda \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2)), \\ &C_F \min\{\eta, \lambda\} \|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=1}^N \|[r_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2 \\ &\leq C\left((1/C_F \min\{\eta, \lambda\})(\|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2) + \lambda \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C(\eta\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}), \\ \|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C(\eta\|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \\ &\quad + \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}). \end{aligned}$$

Εδώ,  $w_h^0 = y_h^0$ , όπου  $y_h^0$  συμβολίζει μια προσέγγιση του  $y_0$ , και η  $C$  είναι μια σταθερά εξαρτώμενη από το χωρίο  $\Omega$ .

*Απόδειξη. Βήμα 1: Προκαταρκτικοί υπολογισμοί.* Στα επόμενα συμβολίζουμε με  $e_1 = \bar{y} - w_h, r_1 = \bar{\mu} - z_h$  και διαχωρίζουμε τα  $e_1, r_1$  σε  $e_1 \equiv e_{1h} + e_p \equiv (Q_h^{loc}\bar{y} - w_h) + (\bar{y} - Q_h^{loc}\bar{y}), r_1 \equiv r_{1h} + r_p \equiv (P_h^{loc}\bar{\mu} - z_h) + (\bar{\mu} - P_h^{loc}\bar{\mu})$ , όπου  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  ορίζονται στους Ορισμούς 4.2.1 και 4.2.2. Αφαιρώντας την (4.2.24) από τις (3.3.8), και την (4.2.25) από την (3.3.9) έχουμε την συνθήκη ορθογωνιότητας: Για  $n = 1, \dots, N$ , και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$(e_1^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_1, v_{ht} \rangle + a(e_1, v_h) + \lambda \langle e_1, v_h \rangle_\Gamma \right) dt = (e_{1+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}), \quad (4.2.27)$$

$$-(r_{1+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_1, v_{ht} \rangle + a(r_1, v_h) + \lambda \langle r_1, v_h \rangle_\Gamma \right) dt = -(r_{1+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_1, v_h) dt. \quad (4.2.28)$$

Σημειώνουμε πως η συνθήκη ορθογωνιότητας (4.2.27) είναι ουσιαστικά αποσυνζευγμένη και ταυτίζεται με τη συνθήκη ορθογωνιότητας του [31, Σχέση (2.6)]. Οπότε εφαρμόζοντας το [31, Θεώρημα 2.2], παίρνουμε τη πρώτη εκτίμηση. Με παρόμοιο τρόπο, η συνθήκη ορθογωνιότητας (4.2.28) είναι ισοδύναμη με: Για  $n = 1, \dots, N$ , και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$\begin{aligned} &-(r_{1h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{1h}, v_{ht} \rangle + a(r_{1h}, v_h) + \lambda \langle r_{1h}, v_h \rangle_\Gamma \right) dt \\ &= -(r_{1h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle e_1, v_h \rangle - a(r_p, v_h) - \lambda \langle r_p, v_h \rangle_\Gamma \right) dt. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει τον Ορισμό 4.2.1 της προβολής  $P_h^{loc}$ , ο οποίος υποδηλώνει πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle r_p, v_{ht} \rangle dt = 0$ ,  $(r_{p+}^n, v_h^n) = 0$ , και  $(r_{p+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) = 0$ . Θέτοντας  $v_h = r_{1h}$  στην (4.2.29), χρησιμοποιώντας την ανισότητα Friedrich για να φράξουμε τον δεύτερο και τον τρίτο όρο στα αριστερά,

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(r_{1h}, r_{1h}) + \lambda \langle r_{1h}, r_{1h} \rangle_\Gamma) dt &\geq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{\eta}{2} \|\nabla r_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|r_{1h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_F}{2} \min\{\lambda, \eta\} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt \end{aligned}$$

την ανισότητα Young για να φράξουμε τους όρους στα δεξιά,

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(e_1, r_{1h})| dt &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (C_F \min\{\lambda, \eta\}/8) \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 + (C/C_F \min\{\lambda, \eta\}) \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} |a(r_{1h}, r_p)| dt &\leq (C_F \min\{\lambda, \eta\}/8) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C/(C_F \min\{\lambda, \eta\})) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

και με υπολογισμούς, έχουμε

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\|r_{1h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|[r_{1h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|r_{1h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{4}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|r_{1h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \\ & \quad + \frac{C_F \min\{\lambda, \eta\}}{4}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \frac{\eta}{2}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|\nabla r_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C\int_{t^{n-1}}^{t^n}\left((1/C_F \min\{\lambda, \eta\})\|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/C_F \min\{\lambda, \eta\})\|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda\|r_p\|_{L^2(\Gamma)}^2\right) dt. \end{aligned}$$

Η δεύτερη εκτίμηση προκύπτει μετά από άθροιση.

*Βήμα 2: Δυϊκά επιχειρήματα.* Στρέφουμε τη προσοχή μας στις δυο τελευταίες εκτιμήσεις. Με στόχο να παράγουμε μια βελτιωμένη τάξη σύγκλισης για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα, εφαρμόζουμε ένα δυϊκό επιχειρήμα για να πάρουμε ένα καλύτερο φράγμα για τη ποσότητα  $\|e_{1h}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2$ . Για αυτό το σκοπό, ορίζουμε ένα προς τα πίσω χρονικά παραβολικό πρόβλημα με δεξί μέλος  $e_{1h} \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , και μηδενικά Robin και τελικά δεδομένα, δηλ.,  $\lambda\phi + \eta\frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ , και  $\phi(T) = 0$ . Για  $n = 1, \dots, N$  και για όλα τα  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , αναζητούμε  $\phi \in W_R(0, T)$  τέτοια ώστε

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} ((\phi, v_t) + a(v, \phi) + \lambda(\phi, v)_{\Gamma}) dt + (\phi(t^{n-1}), v(t^{n-1})) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{1h}, v) dt. \quad (4.2.30)$$

Παρατηρούμε πως εφόσον  $e_{1h} \in L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$ , τότε  $\phi \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$  (βλέπε Θεώρημα 3.2.1). Ειδικότερα, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\|\phi\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]} + \|\phi_t\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} + \lambda\|\phi\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq C\|e_{1h}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}. \quad (4.2.31)$$

Η έλλειψη ομαλότητας στο δεξί μέλος της (4.2.30) εξαιτίας των ασυνεχειών, δείχνει πως δε μπορούμε να βελτιώσουμε την ομαλότητα του  $\phi$  στο  $[0, T]$ . Το σχετικό ασυνεχές σχήμα χρονικού βηματισμού μπορεί να παραχθεί ως ακολούθως: Δεδομένων τελικών δεδομένων  $\phi_{h+}^N = 0$ , αναζητούμε  $\phi_h \in \mathcal{U}_h$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathcal{U}_h]$ ,

$$-(\phi_{h+}^n, v_{h-}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} ((\phi_h, v_{ht}) + a(\phi_h, v_h) + \lambda(\phi_h, v_h)_{\Gamma}) dt + (\phi_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{1h}, v_h) dt. \quad (4.2.32)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.15, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση.

$$\|\phi_h\|_{L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]} + \lambda\|\phi_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq C_k\|e_{1h}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}. \quad (4.2.33)$$

Τώρα είναι φανερό πως έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση για το  $\phi - \phi_h$ , η οποία είναι άμεση εφαρμογή των προηγούμενων εκτιμήσεων στον  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$ , των προσεγγιστικών ιδιοτήτων του Λήμματος 4.2.3, των προβολών  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$ , και της συνοριακής ανισότητας Sobolev,

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi_h\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \lambda\|\phi - \phi_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} & \leq C(h + \tau^{1/2})(\|\phi\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]} + \|\phi_t\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}) \\ & \leq C(h + \tau^{1/2})\|e_{1h}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}. \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Σημειώνουμε πως η έλλειψη ομαλότητας στο δεξί μέλος, περιορίζει τη τάξη σύγκλισης σε αυτή του χαμηλότερης τάξης σχήματος  $l = 1, k = 0$ , ακόμη κι αν επιλεχθούν υψηλής τάξης χρονικά σχήματα. Θέτοντας  $v_h = e_{1h}$ , στη σχέση (4.2.32), έχουμε

$$-(\phi_{h+}^n, e_{1h-}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\phi_h, e_{1ht}) + a(e_{1h}, \phi_h) + \lambda(\phi_h, e_{1h})_{\Gamma} dt + (\phi_{h+}^{n-1}, e_{1h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση χρονικά έχουμε:

$$\begin{aligned} & -(\phi_{h+}^n, e_{1h-}^n) + (\phi_{h-}^n, e_{1h-}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-(\phi_{ht}, e_{1h}) + a(\phi_h, e_{1h}) + \lambda(\phi_h, e_{1h})_\Gamma) dt \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Θέτοντας  $v_h = \phi_h$  στην (4.2.27) και χρησιμοποιώντας ότι  $e_1 = e_p + e_{1h}$ , και τον Ορισμό 4.2.2 της προβολής  $Q_h^{loc}$  παίρνουμε,

$$\begin{aligned} & (e_{1h-}^n, \phi_{h-}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-(e_{1h}, \phi_{ht}) + a(e_{1h}, \phi_h) + \lambda(e_{1h}, \phi_h)_\Gamma) dt \\ & = -(e_{1h-}^{n-1}, \phi_{h+}^{n-1}) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h) + \lambda(e_p, \phi_h)) dt. \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Εδώ, έχουμε χρησιμοποιήσει το ότι ο ορισμός της προβολής  $Q_h^{loc}$  του Ορισμού 4.2.2, δείχνει πως  $(e_p^n, \phi_{h-}^n) = 0$ ,  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_p, v_{ht}) dt = 0$  και  $(e_p^{n-1}, \phi_{h+}^{n-1}) = 0$ . Χρησιμοποιώντας την (4.2.35) για να αντικαταστήσουμε τους τρεις πρώτους όρους της (4.2.36) καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} & (\phi_{h+}^n, e_{1h}^n) - (e_{1h-}^{n-1}, \phi_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h) + \lambda(e_p, \phi_h)_\Gamma) dt \\ & = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h - \phi) + a(e_p, \phi) + \lambda(e_p, \phi_h - \phi)_\Gamma + \lambda(e_p, \phi)_\Gamma) dt \\ & = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h - \phi) + \lambda(e_p, \phi_h - \phi)_\Gamma - \eta(e_p, \Delta\phi) + \eta(e_p, \frac{\partial\phi}{\partial n})_\Gamma + \lambda(e_p, \phi)_\Gamma) dt \\ & = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h - \phi) + \lambda(e_p, \phi_h - \phi)_\Gamma - \eta(e_p, \Delta\phi)) dt, \end{aligned}$$

όπου στις δυο τελευταίες εξισώσεις έχουμε χρησιμοποιήσει χωρική παραγοντική ολοκλήρωση, και ο ορισμός του  $\phi$  ως ένα δυϊκό πρόβλημα με μηδενικά Robin συνοριακά δεδομένα αντιστοίχως. Οπότε,

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (\phi_{h+}^n, e_{1h-}^n) - (e_{1h-}^{n-1}, \phi_{h+}^{n-1}) \\ & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \eta \|\phi_h - \phi\|_{H^1(\Omega)} \|e_p\|_{H^1(\Omega)} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\eta \|e_p\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|e_p\|_{L^2(\Gamma)} \|\phi_h - \phi\|_{L^2(\Gamma)}) dt. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω ανισότητες και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\phi_+^N \equiv 0$  και  $e_{1h-}^0 = 0$  (εξ ορισμού) και ανακαθορίζοντας τους όρους, παίρνουμε

$$\begin{aligned} & (1/2) \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq C\eta \int_0^T \|e_p\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H^2(\Omega)} dt \\ & \quad + C \int_0^T (\eta \|\phi_h - \phi\|_{H^1(\Omega)} \|e_p\|_{H^1(\Omega)} + \lambda \|e_p\|_{L^2(\Gamma)} \|\phi_h - \phi\|_{L^2(\Gamma)}) dt \\ & \leq C \left( \eta \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \|\phi\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \eta \|\phi_h - \phi\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \right. \\ & \quad \left. \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \|\phi_h - \phi\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \right) \\ & \leq C \left( \eta \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \right. \\ & \quad \left. + (h + \tau^{1/2}) \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} (\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}) \right). \end{aligned}$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα Cauchy-Schwarz, τα φράγματα ευστάθειας της δυϊκής εξίσωσης (4.2.31), και τις εκτιμήσεις σφάλματος (4.2.34) για τον  $\phi_h - \phi$ . Τελικώς, η εκτίμηση για τον

όρο  $\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$  προκύπτει χρησιμοποιώντας ένα παρόμοιο δυϊκό επιχείρημα.  $\square$

Εφόσον έχουμε μια εκτίμηση στην νόρμα  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$ , και το βοηθητικό πρόβλημα είναι ουσιαστικά αποσυνδεδεμένο, μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας οι τεχνικές της [31, Ενότητα 2] για να παράγουμε μια  $L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$  εκτίμηση (βλέπε επίσης την Πρόταση 4.2.10).

**Θεώρημα 4.2.6.** *Εστω  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  οι λύσεις των (4.2.24)-(4.2.25). Συμβολίζουμε με  $e_1 = \bar{y} - w_h$ ,  $r_1 = \bar{\mu} - z_h$  και υποθέτουμε πως ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.5. Τότε υπάρχει μια σταθερά  $C$  που εξαρτάται από τα  $C_k$ ,  $\Omega$  τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} \|e_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C(\|e_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)} + \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}), \\ \|r_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C(\|r_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda\|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}). \end{aligned}$$

$$\text{Εδώ } e_p = \bar{y} - Q_h^{loc}\bar{y}, r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc}\bar{\mu}.$$

*Απόδειξη.* Διαχωρίζοντας τα σφάλματα όπως στο προηγούμενο θεώρημα, δηλ.,  $e_1 = e_{1h} + e_p$  αρκεί να φράξουμε τον όρο  $\sup_{t^{n-1} < t \leq t^n} \|e_{1h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Αυτό έχει γίνει στο [31, Θεώρημα 2.5] (σημειώνουμε πως η συνθήκη ορθογωνιότητας είναι αποσυσζευγμένη).  $\square$

**Σημείωση 4.2.7.** *Ο συνδυασμός των δυο τελευταίων Θεωρημάτων δείχνει την “συμμετρική, ελεύθερης ομαλότητας” κατασκευή της εκτίμησής μας. Ουσιαστικά υποθέτουμε πως τα αρχικά δεδομένα είναι  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , και ο όρος δύναμης  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Τότε, ορίζουμε τη φυσική ενεργειακή νόρμα την  $\|(\cdot, \cdot)\|_X$  εφοδιασμένη με την ασθενή μορφή υπό υποθέσεις ελάχιστης ομαλότητας*

$$\|(e_1, r_1)\|_X \equiv \|e_1\|_{W_R(0,T)} + \|r_1\|_{W_R(0,T)}.$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 4.2.39, 4.2.6 έχουμε μια εκτίμηση της μορφής

$$\begin{aligned} \|\text{σφάλμα}\|_X &\leq C\left(\|\text{σφάλμα αρχικών δεδομένων}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\text{σφάλμα καλύτερης προσέγγισης-προβολών}\|_X\right). \end{aligned}$$

Η παραπάνω εκτίμηση δείχνει πως το σφάλμα είναι τόσο καλό όσο επιτρέπουν οι συνθήκες προσεγγισιμότητας υπό τις υποθέσεις φυσικής παραβολικής ομαλότητας, και θα μπορούσαμε να το δούμε ως το πλήρως διακριτό ανάλογο του Λήμματος Cέα ([34]). Οπότε, οι τάξεις σύγκλισης για τα  $e_1, r_1$  εξαρτώνται μόνο από τα αποτελέσματα προσεγγισιμότητας και ομαλότητας μέσω του σφάλματος προβολών  $e_p, r_p$  όπως φαίνεται στο Λήμμα 4.2.3 και τη Σημείωση 4.2.4. Αν  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , δηλαδή,  $\bar{y} \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , και  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$  τότε για  $l = 1, k = 0$ , και για  $\tau \leq Ch^2$  έχουμε

1.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C$ ,
2.  $\|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C(h\|\bar{\mu}\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|\bar{\mu}_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]})$ ,
3.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(h\|\bar{y}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|\bar{y}_t\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)^*]})$ ,
4.  $\|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(h^2\|\bar{\mu}\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau\|\bar{\mu}_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]})$ ,
5.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \leq C\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^{1/2}\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^{1/2} \leq C(h + \tau^{1/2})^{1/2}$ .

Οπότε οι παραπάνω εκτιμήσεις, και το Θεώρημα 4.2.5, συνεπάγονται για  $\tau \leq Ch^2$  οι ακόλουθες τάξεις σύγκλισης:  $\|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h)$ , και  $\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \approx \mathcal{O}(h)$ .

Οι εκτιμήσεις είναι εφαρμόσιμες ακόμη και στη περίπτωση ομαλότερων λύσεων. Για παράδειγμα, αν επιπλέον τα  $y, \mu \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$  (εδώ  $l = 1$  και  $k = 0$ ),

1.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C(h\|y\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|y_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]})$ .
2.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(h^2\|y\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau\|y_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]})$ .

$$3. \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \leq C(h^2 + \tau)^{1/2}(h + \tau^{1/2})^{1/2}.$$

Για τη συνοριακή νόρμα έχουμε χρησιμοποιήσει τη συνοριακή ανισότητα Sobolev. Τίσιες τάξεις σύγκλισης ισχύουν για τις  $r_p$  νόρμες. Οπότε, από το Θεώρημα 4.2.5, προκύπτει πως  $\|e_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h)$ ,  $\|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h)$ ,  $\|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h^{3/2})$  και  $\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h^{3/2})$  όταν  $\tau \leq Ch^2$ .

**4.2.1.2** Έλεγχος χωρίς περιορισμούς: Εισαγωγικές εκτιμήσεις

Απομένει να συγκρίνουμε το διακριτό σύστημα βελτιστοποίησης (4.1.11)-(4.1.12)-(4.1.13) με το βοηθητικό σύστημα (4.2.24)-(4.2.25).

**Λήμμα 4.2.8.** Έστω  $\bar{y}_h, \bar{\mu}_h, w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  οι λύσεις του διακριτού συστήματος βελτιστοποίησης (4.1.11)-(4.1.12)-(4.1.13) και του βοηθητικού συστήματος (4.2.24)-(4.2.25) αντιστοίχως. Συμβολίζουμε με  $e_1 \equiv \bar{y} - w_h, r_1 \equiv \bar{\mu} - z_h$ , και έστω  $e_{2h} \equiv w_h - \bar{y}_h, r_{2h} \equiv z_h - \bar{\mu}_h$ . Τότε υπάρχει αλγεβρική σταθερά  $C > 0$  τέτοια ώστε:

$$\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + (\lambda/\alpha^{1/2})\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \leq C\lambda/\alpha^{1/2}\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}.$$

Απόδειξη. Αφαιρώντας τη (4.1.12) από την (4.2.25) παράγεται η εξίσωση: Για  $n = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} & -(r_{2h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, v_{ht} \rangle + a(r_{2h}, v_h) + \lambda \langle r_{2h}, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt \\ & = -(r_{2h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, v_h) dt \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]. \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

Αφαιρώντας τη (4.1.11) από τη (4.2.24) και χρησιμοποιώντας τις (3.3.10)-(4.1.13), έχουμε: Για  $n = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} (e_{2h}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, v_{ht} \rangle + a(e_{2h}, v_h) + \lambda \langle e_{2h}, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt & = (e_{2h}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} -(\lambda^2/\alpha)(\bar{\mu} - \bar{\mu}_h, v_h)_{\Gamma} dt \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Θέτουμε  $v_h = e_{2h}$  στην (4.2.37) για να πάρουμε

$$\begin{aligned} -(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, e_{2ht} \rangle + a(r_{2h}, e_{2h}) + \lambda \langle r_{2h}, e_{2h} \rangle_{\Gamma} \right) dt & + (r_{2h+}^{n-1}, e_{2h+}^{n-1}) \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

Όμοια, θέτοντας  $v_h = r_{2h}$  στην (4.2.38) έχουμε

$$\begin{aligned} (e_{2h}^n, r_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, r_{2ht} \rangle + a(e_{2h}, r_{2h}) + \lambda \langle e_{2h}, r_{2h} \rangle_{\Gamma} \right) dt & - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -(\lambda^2/\alpha) \langle r_1, r_{2h} \rangle_{\Gamma} - (\lambda^2/\alpha) \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση ως προς το χρόνο στην (4.2.40), και αφαιρώντας την εξίσωση που προκύπτει από την (4.2.39), φτάνουμε στην

$$(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda^2/\alpha) \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt = -(\lambda^2/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle r_1, r_{2h} \rangle_{\Gamma} dt. \quad (4.2.41)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young για να φράξουμε το δεξί μέλος προκύπτει,

$$\left| (\lambda^2/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, r_{2h})_{\Gamma} dt \right| \leq (\lambda^2/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + (\lambda^2/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt,$$

προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν από το 1 μέχρι το  $N$ , και παρατηρώντας πως  $\sum_{n=1}^N ((r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1})) = 0$  (αφού  $e_{2h}^0 \equiv 0$ ,  $r_{2h+}^N = 0$ ) παίρνουμε την επιθυμητή εκτίμηση.  $\square$

Οι εκτιμήσεις εύκολα προκύπτουν από το προηγούμενο Λήμμα και τις εκτιμήσεις για τις προβολές  $e_1$  και  $r_1$  μαζί με ένα κλασικό “προς τα πίσω” (“boot-strap”) επιχείρημα.

**Πρόταση 4.2.9.** Έστω  $\bar{y}_h, \bar{\mu}_h, w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  οι λύσεις του συστήματος βελτιστοποίησης (4.1.11)-(4.1.12)-(4.1.13) και του βοηθητικού συστήματος (4.2.24)-(4.2.25) αντιστοίχως. Συμβολίζουμε με  $e_1 \equiv \bar{y} - w_h$ ,  $r_1 \equiv \bar{\mu} - z_h$ , και έστω  $e_{2h} \equiv w_h - \bar{y}_h$ ,  $r_{2h} \equiv z_h - \bar{\mu}_h$ . Τότε, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|[e_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_F \min\{\eta, \lambda\} \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \lambda \int_0^T \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \\ \leq (C/\lambda\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt, \\ \|r_{2h+}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|[r_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_F \min\{\eta, \lambda\} \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \lambda \int_0^T \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \\ \leq (C\lambda^2/\alpha C_F \min\{\eta, \lambda\}) \int_0^T \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt, \end{aligned}$$

όπου η  $C$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το  $\Omega$ .

*Απόδειξη. Βήμα 1: Εκτιμήσεις για τη βασική μεταβλητή:* Θέτοντας  $v_h = e_{2h}$  στην (4.2.38) και παρατηρώντας πως  $\mu - \mu_h = r_1 + r_{2h}$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} (1/2)\|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ + \lambda \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), e_{2h} \rangle dt \leq -(\lambda^2/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1 + r_{2h}, e_{2h})_{\Gamma} dt. \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young για το πρώτο όρο στο δεξί μέλος,

$$\left| \frac{1}{\alpha} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, e_{2h})_{\Gamma} dt \right| \leq (\lambda/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + (1/\lambda\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt.$$

Οπότε συγκεντρώνοντας τα παραπάνω φράγματα στην (4.2.42) έχουμε,

$$\begin{aligned} (1/2)\|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ + (\lambda/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq (1/\lambda\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2) dt. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Friedrich και με κάποιους υπολογισμούς παίρνουμε την εκτίμηση μετά από άθροιση χρησιμοποιώντας την εκτίμηση της  $\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}$  του Λήμματος 4.2.8.

*Βήμα 2: Εκτιμήσεις για τη συζυγή μεταβλητή:* Θέτοντας  $v_h = r_{2h}$  στην (4.2.37), και χρησιμοποιώντας

τις ανισότητες Friedrich και Young, και το Λήμμα 4.2.8 για να φράξουμε τη νόρμα του  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$  έχουμε

$$\begin{aligned} & -(1/2)\|r_{2h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|r_{2h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_F \min\{\eta/2, \lambda/4\} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt + \frac{\eta}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\lambda}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

και αφού

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt \leq (2/C_F \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\lambda}{4}\}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (C_F \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\lambda}{4}\}/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

αντικαθιστώντας τη τελευταία ανισότητα στην 4.2.44, έχουμε

$$\begin{aligned} & -(1/2)\|r_{2h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|r_{2h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_F \min\{\frac{\eta}{4}, \frac{\lambda}{2}\} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & + \eta/4 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \lambda/2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq (2/C_F \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\lambda}{4}\}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

η οποία υποδηλώνει την επιθυμητή εκτίμηση μετά από άθροιση και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.8.  $\square$

Μια εκτίμηση για ανυπαίρετα χρονικά σημεία μπορεί να παραχθεί εφαρμόζοντας τις προσεγγίσεις της τεχνικής για τις διακριτές χαρακτηριστικές του [31] στην γραμμική με σύνορο Robin περίπτωση. Εδώ, θα χρειαστούν επίσης οι υπολογισμοί ευστάθειας σε ανυπαίρετα χρονικά σημεία.

**Πρόταση 4.2.10.** Υποθέτουμε πως ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.5, και της Πρότασης 4.2.9. Τότε υπάρχει μια σταθερά  $C$  εξαρτώμενη μόνο από τη σταθερά  $C_k$ , και το χωρίο τέτοια ώστε,

$$\begin{aligned} \|e_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} & \leq C(\eta\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} + (\lambda^{3/2}/\alpha)\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}), \\ \|r_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} & \leq C(\eta\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + (\lambda/\alpha^{1/2})\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}). \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη ακολουθεί τις τεχνικές του [31, Ενότητα 2], προσαρμοσμένη στη περίπτωση των Robin συνοριακών δεδομένων. Για πληρότητα παρουσιάζουμε την απόδειξη της πρώτης εκτίμησης, ενώ τη δεύτερη μπορούμε να τη χειριστούμε παρόμοια. Αρχικά ανακαλούμε το κύριο προσεγγιστικό εργαλείο, την διακριτή χαρακτηριστική εξίσωση. Για κάθε πολυώνυμο  $s \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n)$ , συμβολίζουμε τη διακριτή χαρακτηριστική εξίσωση  $\chi_{[t^{n-1}, t]} s$  με το πολυώνυμο  $\hat{s} \in \{\hat{s} \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n), \hat{s}(t^{n-1}) = s(t^{n-1})\}$  η οποία ικανοποιεί τη

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \hat{s} q = \int_{t^{n-1}}^t s q \quad \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}(t^{n-1}, t^n).$$

Το κίνητρο για τη παραπάνω κατασκευή προκύπτει από τη παρατήρηση πως  $q = s'$  παίρνοντας  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} s' \hat{s} = \int_{t^{n-1}}^t s s' = \frac{1}{2}(s^2(t) - s^2(t^{n-1}))$ . Η κατασκευή μπορεί να επεκταθεί στις προσεγγίσεις  $\chi_{[t^{n-1}, t]} v$  για  $v \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; V]$  όπου  $V$  είναι ένας γραμμικός χώρος. Η διακριτή προσέγγιση του  $\chi_{[t^{n-1}, t]} v$  στον  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; V]$  ορίζεται στον  $\hat{v} = \sum_{i=0}^k \hat{s}_i(t) v_i$  και αν  $V$  είναι ένας χώρος ημι-εσωτερικού γινομένου τότε,  $\forall w \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; V]$

$$\hat{v}(t^{n-1}) = v(t^{n-1}), \quad \text{και} \quad \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\hat{v}, w)_V = \int_{t^{n-1}}^t (v, w)_V.$$

Το [31, Λήμμα 2.4] δείχνει κάποιες ιδιότητες συνέχειας, και πιο συγκεκριμένα

$$\|\hat{v}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]} \leq C_k \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]},$$



$$\|\hat{v} - \chi_{[t^{n-1}, t]} v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]} \leq C_k \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]},$$

όπου  $C_k$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το  $k$ . Ξεκινώντας ολοκληρώνουμε κατά μέλη χρονικά την (4.2.38), και αντικαθιστώντας με  $v_h = \hat{e}_{2h}$ , όπου το  $\hat{e}_{2h}$  συμβολίζει τη προσέγγιση της διακριτής χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\chi_{[t^{n-1}, t]} e_{2h}$  (για κάθε συγκεκριμένο -fixed-  $t \in [t^{n-1}, t^n]$ ), όπως είναι κατασκευασμένο παραπάνω. Ο ορισμός του  $\hat{e}_{2h}$  και το γεγονός ότι  $e_{2ht} \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h]$  υποδηλώνει πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2ht}, \hat{e}_{2h}) dt = \int_{t^{n-1}}^t (e_{2ht}, e_{2h}) dt$  και οπότε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|e_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(e_{2h}, \hat{e}_{2h}) dt &= \frac{1}{2} \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ -\lambda \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, \hat{e}_{2h})_{\Gamma} dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\lambda^2/\alpha)(r_1 + r_{2h}, \hat{e}_{2h})_{\Gamma} dt. \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Υπενθυμίζουμε επίσης πως η ιδιότητα συνέχειας για το  $a(\cdot, \cdot)$ , δείχνει

$$\left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(e_{2h}, \hat{e}_{2h}) + \lambda(e_{2h}, \hat{e}_{2h})_{\Gamma} dt \right| \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\eta \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2) dt,$$

ενώ ο όρος σύζευξης μπορεί να γραφεί:

$$\left| \frac{\lambda^2}{\alpha} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1 + r_{2h}, \hat{e}_{2h})_{\Gamma} dt \right| \leq (C_k \lambda^3 / \alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2) dt + C_k \lambda \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt.$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα Young με κατάλληλο  $\delta > 0$ , και σε διάφορες χρονικές στιγμές της ιδιότητας συνέχειας της προσέγγισης της διακριτής χαρακτηριστικής. Οπότε, αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις στη (4.2.45), έχουμε μια ανισότητα της μορφής,  $(1 - C\tau)a^n \leq a^{n-1} + f^n$ , όπου  $a^n = \sup_{s \in [t^{n-1}, t^n]} \|e_{2h}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Πράγματι, έστω  $t \in [t^{n-1}, t^n]$  επιλεγμένο ως  $a^n \equiv \|e_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  και παρατηρώντας πως  $\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a^{n-1}$  προκύπτει η επιθυμητή εκτίμηση μετά από πρόσθεση και από το Λήμμα 4.2.8.  $\square$

#### 4.2.1.3 Συμμετρικές εκτιμήσεις για αρχικά δεδομένα χωρίς ομαλότητα

Πολλές εκτιμήσεις μπορούν να προκύψουν χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τις προηγούμενες παραγράφους και κλασικά αποτελέσματα της θεωρίας προσεγγίσεων. Ξεκινώντας παραθέτουμε τις συμμετρικές εκτιμήσεις σφαλμάτων οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ανάλογες του κλασικού Λήμματος Céa.

**Θεώρημα 4.2.11.** Έστω  $\bar{y}_h, \bar{\mu}_h \in U_h$  και  $(\bar{y}, \bar{\mu}) \in W_R(0, T)$  οι λύσεις του διακριτού και του συνεχούς συστήματος βελτιστοποίησης (4.1.11)-(4.1.12)-(4.1.13) και (3.3.8)-(3.3.9)-(3.3.10) αντιστοίχως. Έστω  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$  το σφάλμα προσέγγισης, όπου τα  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  ορίζονται στους Ορισμούς 4.2.1, και 4.2.2 αντιστοίχως. Τότε η ακόλουθη ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση για το σφάλμα  $e = \bar{y} - \bar{y}_h$  και  $r = \bar{\mu} - \bar{\mu}_h$ :

$$\|(e, r)\|_X \leq \tilde{C}(1/\alpha) \|(e_p, r_p)\|_X$$

όπου η  $\tilde{C}$  εξαρτάται από τις σταθερές των Θεωρημάτων 4.2.5, 4.2.6, και τις Προτάσεις 4.2.9, 4.2.10, και είναι ανεξάρτητη από τα  $\tau, h, \alpha$ .

*Απόδειξη.* Η πρώτη εκτίμηση ακολουθεί από την τριγωνική ανισότητα και τις προηγούμενες εκτιμήσεις των Θεωρημάτων 4.2.5 και 4.2.6 και των προτάσεων 4.2.9 και 4.2.10.  $\square$

Ακολουθεί μια βελτιωμένη εκτίμηση για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα για τη βασική μεταβλητή, και στην  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  για την συζυγή μεταβλητή συνδυάζοντας τις εκτιμήσεις του Θεωρημάτων 4.2.5, και του Λήμματος 4.2.8.

**Θεώρημα 4.2.12.** Θεωρούμε πως  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , και ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.5 και του Λήμματος 4.2.8. Έστω  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$  το σφάλμα προσέγγισης, όπου τα  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  ορίζονται στους ορισμούς 4.2.1, και 4.2.2 αντιστοίχως. Τότε, υπάρχει μια σταθερά  $C$  ανεξάρτητη των  $h, \tau, \alpha$  τέτοια ώστε,

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\leq C \left( \|e_p\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} + \tau^{1/2} (\|e_p\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \right. \\ &\quad \left. + \|e_p\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]) + (\lambda/\alpha^{1/2}) \|r_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \right), \\ \|r\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} &\leq C \|r_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^{1/2} \|r_1\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^{1/2}, \end{aligned}$$

όπου το  $r_1$  υπολογίζεται με βάση τα σφάλματα των προβολών  $e_p, r_p$  του Θεωρήματος 4.2.5.

*Απόδειξη.* Ο πρώτος υπολογισμός προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα και τα προηγούμενα αποτελέσματα του Θεωρήματος 4.2.5, και του Λήμματος 4.2.8. Ο δεύτερος υπολογισμός προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα, την εκτίμηση του Λήμματος 4.2.8 για να φράξουμε το  $r_{2h}$ , και τη συνοριακή ανισότητα Sobolev.  $\square$

Χρησιμοποιώντας τώρα την συνηθισμένη ομαλότητα και τη θεωρία προσεγγισιμότητας παίρνουμε τις τάξεις σύγκλισης. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις τάξεις σύγκλισης σε δυο ξεχωριστές περιπτώσεις, που εξαρτώνται από τη διαθέσιμη ομαλότητα.

**Πρόταση 4.2.13.** Υποθέτουμε πως πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.5 και του Λήμματος 4.2.8, και έστω  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Υποθέτουμε πως τμηματικά γραμμικά πολυώνυμα χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουμε τους υποχώρους  $U_h \subset H^1(\Omega)$  σε κάθε χρονικό βήμα, και τμηματικά σταθερά πολυώνυμα  $k=0$  για τη χρονική διακριτοποίηση. Τότε για  $\tau \leq Ch^2$  έχουμε,

$$\|e\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq Ch \text{ και } \|r\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq Ch.$$

Αν επιπλέον,  $\bar{y}, \bar{\mu} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$  τότε,

$$\begin{aligned} \|(e, r)\|_X &\leq \tilde{C}(1/\alpha)(h + \tau^{1/2}), \\ \|e\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\leq C(1/\alpha^{1/2})(h^2 + \tau + (h^2 + \tau)^{1/2}(h + \tau^{1/2})^{1/2} + (h + \tau^{1/2})^2), \\ \|r\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} &\leq C(h^2 + \tau)^{1/2}(h + \tau^{1/2})^{1/2}, \end{aligned}$$

που δείχνει πως για  $\tau \approx h^2$ , οι τάξεις σύγκλισης είναι

$$\begin{aligned} \|(e, r)\|_X &\approx \mathcal{O}(h), \\ \|e\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^{3/2}), \\ \|r\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} &\approx \mathcal{O}(h^{3/2}). \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Οι τάξεις σύγκλισης προκύπτουν απευθείας από το Θεώρημα 4.2.11, το Θεώρημα 4.2.12, το Λήμμα 4.2.3 και τη Σημείωση 4.2.7.  $\square$

**4.2.1.4** Έλεγχος με περιορισμούς: Η διακριτή προσέγγιση μεταβολών.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι εκτιμήσεις μας είναι επίσης εφαρμόσιμες στην περίπτωση των σημειακών περιορισμών ελέγχου χρησιμοποιώντας τη διακριτοποιημένη προσέγγιση μεταβολών του Hinze

([65]). Η διακριτή προσέγγιση μεταβολών υποδηλώνει πως  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$ , δηλαδή, ο έλεγχος, δεν είναι διακριτοποιημένος άμεσα αλλά έμμεσα, μέσω της συζυγούς μεταβλητής. Οπότε το διακριτοποιημένο πρόβλημα ελέγχου τώρα ταυτίζεται με το: Ελαχιστοποίηση συναρτησιακού  $J_h(y_h(g), g) = \int_0^T \|y_h(g) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \alpha \int_0^T \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt$  υπό την (4.1.4), όπου  $y_h(g) \in \mathcal{U}_h$  συμβολίζει τη λύση της (4.1.4) με δεξί μέλος έναν δοσμένο έλεγχο  $g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ . Οπότε, ο βέλτιστος έλεγχος (υιοθετώντας πάλι το συμβολισμό  $\bar{g}_h$ ) ικανοποιεί τις ακόλουθες πρώτης τάξης συνθήκες βελτιστοποίησης,

$$J'_h(\bar{g}_h)(u - \bar{g}_h) \geq 0, \quad \text{για όλα τα } u \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)],$$

όπου ο  $\bar{g}_h$  μπορεί να πάρει τη μορφή  $\bar{g}_h = Proj_{[g_a, g_b]}(-\frac{\lambda}{\alpha}\bar{\mu}_h(\bar{g}_h))$ , όμοια με τη συνεχή περίπτωση. Σημειώνουμε πως ο  $\bar{g}_h$  δεν είναι γενικά μια συνάρτηση πεπερασμένων στοιχείων που αντιστοιχεί στο πεπερασμένων στοιχείων πλέγμα μας, οπότε η αλγοριθμική κατασκευή απαιτεί προσοχή, βλέπε π.χ. [65]. Ωστόσο, σε αρκετές πρακτικές καταστάσεις, ο κύριος σκοπός είναι να ελαχιστοποιήσουμε και να υπολογίσουμε τη βασική μεταβλητή και όχι απαραίτητα τον έλεγχο που χρησιμοποιούμε για να επιτύχουμε το σκοπό μας. Για τη δεύτερη παράγωγο εύκολα υπολογίζουμε μια εκτίμηση ανεξάρτητη του  $\bar{g}$ ,  $\bar{g}_h$ , και πιο συγκεκριμένα,

$$J''_h(u)(\bar{u}, \bar{u}) \geq \alpha \|\bar{u}\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}^2, \quad \text{για όλα τα } \bar{u} \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)].$$

**Θεώρημα 4.2.14.** Έστω  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , και  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Υποθέτουμε πως  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$  και έστω  $\bar{g}, \bar{g}_h$  οι λύσεις που αντιστοιχούν στο συνεχές και στο διακριτό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου. Τότε ισχύει:

$$\|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq C(1/\alpha) \|\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g})\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}.$$

όπου  $\mu_h(\bar{g})$  και  $\mu(\bar{g})$  είναι οι λύσεις των (4.1.10) και (3.3.7) αντιστοίχως. Επιπλέον, αν  $\tau \leq Ch^2$ ,

$$\|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \approx \mathcal{O}(h).$$

Απόδειξη. Σημειώνουμε πως  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$ , και οπότε οι συνθήκες βελτιστοποίησης δείχνουν πως

$$J'_h(\bar{g}_h)(\bar{g} - \bar{g}_h) \geq 0 \quad \text{και} \quad J'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) \leq 0. \quad (4.2.46)$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας τη δεύτερης τάξης συνθήκη, και το θεώρημα μέσης τιμής, έχουμε για κάθε  $u \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ , (και ως εκ τούτου για αυτό που προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής) και τις ανισότητες (4.2.46),

$$\begin{aligned} \alpha \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}^2 &\leq J''_h(u)(\bar{g} - \bar{g}_h, \bar{g} - \bar{g}_h) = J'_h(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) - J'_h(\bar{g}_h)(\bar{g} - \bar{g}_h) \\ &\leq J'_h(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) - J'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) = \int_0^T \int_{\Gamma} (\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g}))(\bar{g} - \bar{g}_h) dx dt \\ &\leq C \|\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g})\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}, \end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ξεκάθαρα την πρώτη εκτίμηση. Τώρα, μια τάξη σύγκλισης μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με το Θεώρημα 4.2.5. Πράγματι, παρατηρούμε πως αφαιρώντας την (4.1.10) από την (3.3.7) και θέτοντας  $\bar{r} = \mu_h(\bar{g}) - \mu(\bar{g})$ , και  $\bar{e} = y_h(\bar{g}) - y(\bar{g})$ , έχουμε το ανάλογο της συνθήκης ορθογωνιότητας (4.2.27)-(4.2.28), για όλα τα  $n = 1, \dots, N$  και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$(\bar{e}_1^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle \bar{e}_1, v_{ht} \rangle + a(\bar{e}_1, v_h) + \lambda(\bar{e}_1, v_h)_{\Gamma} \right) dt = (\bar{e}_1^{n-1}, v_{h+}^{n-1}),$$

$$-(\bar{r}_+^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle \bar{r}, v_{ht} \rangle + a(\bar{r}, v_h) + \lambda(\bar{r}, v_h)_{\Gamma} \right) dt = -(\bar{r}_{1+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{e}, v_h) dt,$$

Χρησιμοποιώντας τη συνοριακή ανισότητα Sobolev τις εκτιμήσεις του Θεωρήματος 4.2.5 και τις τάξεις

σύγκλισης της Πρότασης 4.2.13, έχουμε την επιθυμητή εκτίμηση αφού τονίσουμε την μειωμένη ομαλότητα για το  $\bar{e}$ .  $\square$

#### 4.2.2 Ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου.

Στη συνέχεια επεκτείνουμε τη θεωρία που παρουσιάσαμε, στη περίπτωση που έχουμε ημιγραμμικό όρο στην βασική εξίσωση και καταναμημένο έλεγχο σε όλο το χωρίο  $\Omega$ . Όπως αναμένεται εμφανίζονται τεχνικές δυσκολίες στις αποδείξεις των θεωρημάτων εξαιτίας του ημιγραμμικού όρου. Επιπλέον χρησιμοποιούμε ένα βοηθητικό σύστημα για την αποσύζευξη του συστήματος και διευκόλυνση στον χειρισμό του.

##### 4.2.2.1 Το πλήρως διακριτό σύστημα βελτιστοποίησης

Επίσης παρακάτω θα αποδείξουμε πως οι dG προσεγγίσεις του συστήματος βελτιστοποίησης παρουσιάζουν τις ίδιες τάξεις σύγκλισης με την αντίστοιχη (χωρίς έλεγχο) γραμμική παραβολική μ.δ.ε. για κατάλληλα δεδομένα  $f$ ,  $y_0$ ,  $y_d$  και τη παράμετρο  $\alpha$ .

##### 4.2.2.2 Εκτιμήσεις σφαλμάτων για το σύστημα βελτιστοποίησης

Στη περίπτωση του ημιγραμμικού προβλήματος καταναμημένου ελέγχου, επίσης το κλειδί για τις αποδείξεις για τις εκτιμήσεις σφαλμάτων είναι οι υπολογισμοί ευστάθειας σε αυθαίρετα χρονικά σημεία μαζί με τις εκτιμήσεις για το βοηθητικό σύστημα (βασίζόμενοι σε κατάλληλες  $L^2$  τεχνικές προβολών), και ένα “δυϊκό επιχείρημα” με σκοπό να χειριστούμε τους μη γραμμικούς χώρους. Για να βρούμε μια πραγματική τάξη σύγκλισης, ουσιαστικά χρειάζεται περισσότερη ομαλότητα:

**Υπόθεση 4.2.15.** Έστω  $(y, g)$  είναι ένα βέλτιστο ζεύγος με την έννοια του Ορισμού 3.2.5. Επιπλέον, έστω  $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  και υποθέτουμε πως  $\alpha^{1/2} \|y\|_{L^\infty[0, T; L^4(\Omega)]}^2 \leq C_d$ , όπου η  $C_d$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα  $f, y_d, y_0$ , τις σταθερές  $C_c, \eta$  και το χωρίο  $\Omega$ .

**Σημείωση 4.2.16.** Η παραπάνω υπόθεση δείχνει έναν ήπιο περιορισμό στο μέγεθος του  $y$ , σε όρους της παραμέτρου ποινής  $\alpha$  και των δεδομένων. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία [113] για μια λεπτομερή ανάλυση των αποτελεσμάτων ομαλότητας και της ημιγραμμικής παραβολικής μ.δ.ε.

##### 4.2.2.3 Ένα βοηθητικό σύστημα βελτιστοποίησης

Αρχικά, ορίζουμε ένα βοηθητικό σύστημα βελτιστοποίησης το οποίο θα βοηθήσει να αποσυσζεύσουμε το διακριτό σύστημα βελτιστοποίησης. Έστω  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  είναι οι λύσεις του ακόλουθου συστήματος. Δοθέντων των δεδομένων  $f, y_d, y_0$ , και των αρχικών συνθηκών  $w_{h0} = y_{h0}$ , όπου  $y_{h0}$  είναι η αρχική προσέγγιση των  $y_0$ ,  $z_+^N = 0$ , αναζητούμε  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  τέτοιο ώστε για  $n = 1, \dots, N$  και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$ ,

$$\begin{aligned} (w^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle w_h, v_{ht} \rangle + a(w_h, v_h) + \langle \phi(y), v_h \rangle \right) dt \\ = (w^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle - (1/\alpha)(\mu, v_h) \right) dt, \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

$$\begin{aligned}
& -(z_+^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle z_h, v_{ht} \rangle + a(z_h, v_h) + \langle \phi'(y)\mu, v_h \rangle \right) dt \\
& = -(z_+^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (w_h - y_d, v_h) dt.
\end{aligned} \tag{4.2.48}$$

Οι λύσεις  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  υπάρχουν εφόσον οι ημιγραμμικοί όροι  $\phi(y), \phi'(y)\mu$  ανήκουν τουλάχιστον στον  $L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ , σύμφωνα με τις Υποθέσεις 3.1.1-4.1.5 και την ομαλότητα των  $y, \mu \in W_D(0, T)$ . Οι λύσεις του βοηθητικού συστήματος βελτιστοποίησης παίζουν το ρόλο “γενικευμένων προβολών” στον  $\mathcal{U}_h$ . Η βασική εκτίμηση της ενεργειακής νόρμας  $y - w_h, \mu - z_h$  θα παραχθεί με βάση τοπικές  $L^2$  προβολές χρησιμοποιώντας τεχνικές του [31, Ενότητα 2] στο βοηθητικό σύστημα (3.3.12)-(3.3.13), (4.2.47)-(4.2.48).

Όμοια με το συνοριακό Robin πρόβλημα σημαντικό σε αυτές τις εκτιμήσεις είναι το ότι είναι έγκυρες ακόμη και κάτω από υποθέσεις ελάχιστης ομαλότητας. Κατά παρόμοιο τρόπο λοιπόν, ορίζουμε τη κλασική προβολή που εφαρμόζεται και για τον ημιγραμμικό όρο, (χρειάζεται όμως προσοχή γιατί στη περίπτωση του καταναμημένου ελέγχου σε ημιγραμμικό πρόβλημα εργαζόμαστε σε διαφορετικούς χώρους από αυτούς που αναφέρθηκαν στα προηγούμενα προβλήματα). Οπότε χρειαζόμαστε τις ακόλουθες, σχετικές με τη μέθοδο dG προβολές, βλέπε π.χ. [104].

**Ορισμός 4.2.17.** (1) Η προβολή  $P_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$  ικανοποιεί την  $(P_n^{loc} v)^n = P_n v(t^n)$ , και την

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (v - P_n^{loc} v, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h^n]. \tag{4.2.49}$$

Εδώ, έχουμε χρησιμοποιήσει τη σύμβαση  $(P_n^{loc} v)^n \equiv (P_n^{loc} v)(t^n)$  και  $P_n : L^2(\Omega) \rightarrow U_h^n$  είναι ο τελεστής ορθογώνιας προβολής στον  $U_h^n \subset H_0^1(\Omega)$ .

(2) Η προβολή  $P_h^{loc} : C[0, T; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$  ικανοποιεί τη σχέση

$$P_h^{loc} v \in \mathcal{U}_h \text{ και } (P_h^{loc} v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = P_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

Επιπλέον της συνθήκης (4.2.49), για το χρονικά οπισθόδρομο πρόβλημα χρειάζεται να επιβάλλουμε τη “συνθήκη ταυρίσματος” στα αριστερά, δηλαδή,  $(P_n^{loc} v)_+^{n-1} = P_n v(t_+^{n-1})$  αντί της επιβολής της συνθήκης στα αριστερά. Υπογραμμίζουμε πως η προβολή του Ορισμού 4.2.17 μπορεί να θεωρηθεί ως η μονοβηματική dG προσέγγιση της  $v_t = f$  στο διάστημα  $(t^{n-1}, t^n)$  με ακριβή αρχικά δεδομένα  $v(t^{n-1})$  και να καθορίζεται ως  $f = v_t$ , ενώ η παραλλαγή της προβολής για την οπισθόδρομη χρονικά μονοβηματική dG προσέγγιση της οπισθόδρομης χρονικά σ.δ.ε. με δοσμένα τελικά δεδομένα. Υπενθυμίζουμε πως λόγω του [104, Θεώρημα 12.1] αυτές οι προβολές ικανοποιούν τις αναμενόμενες ιδιότητες προσέγγισης. Παρακάτω παραθέτουμε το κύριο αποτέλεσμα για το βοηθητικό πρόβλημα.

**Θεώρημα 4.2.18.** Έστω τα δεδομένα  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)], y_0 \in L^2(\Omega)$ , και  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , και έστω πως ισχύει η Υπόθεση 3.1.1. Αν τα  $y, \mu \in W_D(0, T)$  είναι οι λύσεις του (3.3.12)-(3.3.13) και  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  οι λύσεις του (4.2.47)-(4.2.48) υπολογισμένες χρησιμοποιώντας το dG σχήμα. Συμβολίζουμε με  $e_1 = y - w_h, r_1 = \mu - z_h$  και έστω  $e_p \equiv y - P_h^{loc} y, r_p = \mu - P_h^{loc} \mu$ , όπου  $P_h^{loc}$  ορίζεται στον Ορισμό 4.2.17. Τότε, υπάρχει μια αλγεβρική σταθερά  $C > 0$  που εξαρτάται μόνο από το  $\Omega$  τέτοιο ώστε,

$$\begin{aligned}
& \eta \|e_1\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \| [e_1^i] \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_c^2/\eta) \|e_p\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^2 \right) \\
& + \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \| (I - P_i) y(t^i) \|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_{i+1}\eta)) \| P_{i+1} (I - P_i) y(t^i) \|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\eta \|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=1}^N \|[r_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( (1/\eta) \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right) \\ + \sum_{i=1}^N 2 \min \left( \|(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_i\eta)) \|P_i(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right).$$

Εδώ,  $w_{0h} = y_{0h}$ , όπου  $y_{0h}$  συμβολίζει μια προσέγγιση της  $y_0$ ,  $\tau_i = t^i - t^{i-1}$ ,  $P_n$  συμβολίζουν την  $L^2$  προβολή του  $U_h^n$  και έχουμε χρησιμοποιήσει τη σύμβαση  $P_0 \equiv P_1$ ,  $P_{N+1} \equiv P_N$ .

Απόδειξη. Σε αυτή την απόδειξη, συμβολίζουμε με  $e_1 = y - w_h$ ,  $r_1 = \mu - z_h$  και διαχωρίζουμε τα  $e_1, r_1$  σε  $e_1 \equiv e_{1h} + e_p \equiv (P_h^{loc} y - w_h) + (y - P_h^{loc} y)$ ,  $r_1 \equiv r_{1h} + r_p \equiv (P_h^{loc} \mu - z_h) + (\mu - P_h^{loc} \mu)$ , όπου  $P_h^{loc}$  ορίζεται στον Ορισμό 4.2.17. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω συμβολισμό και αφαιρώντας τη (4.2.47) από τη (3.3.12), και τη (4.2.48) από τη (3.3.13) παίρνουμε τη συνθήκη ορθογωνιότητας: Για  $n = 1, \dots, N$

$$(e_1^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_1, v_{ht} \rangle + a(e_1, v_h) \right) dt = (e_1^{n-1}, v_+^{n-1}), \quad (4.2.50)$$

$$-(r_{1+}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_1, v_{ht} \rangle + a(r_1, v_h) \right) dt = -(r_{1+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_1, v_h) dt, \quad (4.2.51)$$

για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$ . Παρατηρούμε πως η συνθήκη ορθογωνιότητας (4.2.50) είναι ουσιαστικά αποσυνδεδεμένη και ταυτίζεται με τη συνθήκη ορθογωνιότητας της [31, Σχέση (2.6)]. Οπότε εφαρμόζοντας το [31, Θεώρημα 2.2], καταλήγουμε στη πρώτη εκτίμηση. Με παρόμοιο τρόπο, η συνθήκη ορθογωνιότητας (4.2.51) είναι ισοδύναμη με:

$$-(r_{1h+}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{1h}, v_{ht} \rangle + a(r_{1h}, v_h) \right) dt = -(r_{1h+}^{n-1}, v_+^{n-1}) \\ + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (e_1, v_h) - a(r_p, v_h) \right) dt + (r_{p+}^n, v^n), \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n].$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει τον ορισμό της προβολής. Θέτοντας  $v_h = r_{1h}$  στη (4.2.52), χρησιμοποιώντας τα φράγματα,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |(e_1, r_{1h})| dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (\eta/4) \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 + (C/\eta) \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt,$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |a(r_{1h}, r_p)| dt \leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C_c^2/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

και με κάποιους υπολογισμούς, παίρνουμε

$$-\frac{1}{2} \|r_{1h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[r_{1h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|r_{1h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\eta}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ \leq C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1/\eta) \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt + |(I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n|. \quad (4.2.52)$$

Τελικώς για το τελευταίο όρο, παρατηρούμε ότι  $r_{h+}^n \in U_h^{n+1}$  και επομένως,

$$\begin{aligned} ((I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) &= ((I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n - r_{1h+}^n) \\ &\leq \|(I - P_{n+1})\mu(t_+^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/4) \|r_{1h+}^n - r_{1h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Είναι δυνατό να παραχθεί ένα εναλλακτικό φράγμα χρησιμοποιώντας μια αντίστροφη εκτίμηση

$\|r_{1h}^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C_k/\tau_n) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt$ , και παρατηρώντας πως  $r_{1h}^n \in U_h^n$ ,

$$\begin{aligned} ((I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) &= (P_n(I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) \leq \|P_n(I - P_{n+1})\mu(t_+^n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|r_{1h}^n\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (C_k^2/\tau_n\eta) \|P_n(I - P_{n+1})\mu(t_+^n)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα Young. Συγκεντρώνοντας τις δυο τελευταίες εκτιμήσεις και την εξίσωση (4.2.52) παίρνουμε την επιθυμητή εκτίμηση μετά από άθροισμα και κάποιους υπολογισμούς.  $\square$

**Σημείωση 4.2.19.** Αν χρησιμοποιούνται οι ίδιοι υπόχωροι σε κάθε χρονικό βήμα, δηλαδή,  $U_h^n \equiv U_h \subset H_0^1(\Omega)$  τότε παρατηρούμε πως δεν υπάρχει συνεισφορά από τον όρο αθροίσματος στο Θεώρημα 4.2.18. Σημειώνουμε πως για  $i = 1, \dots, N$  η τοπική  $L^2(\Omega)$  προβολή  $P_i \equiv P_{i+1} \equiv P_{L^2} : L^2(\Omega) \rightarrow U_h$  είναι η ίδια σε κάθε χρονικό βήμα. Οπότε, το  $r_{h+}^n \in U_h$  μας δείχνει πως

$$((I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) \equiv ((I - P_{L^2})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) \equiv 0.$$

Οπότε, η (4.2.52) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} -(1/2)\|r_{h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|r_{1h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|r_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\eta/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ \leq C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1/\eta) \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι όμοια για το προς τα εμπρός (χρονικά) πρόβλημα, έχουμε τους ακόλουθους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} \eta \|e_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|e_1^i\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left( \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_c^2/\eta) \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right), \\ \eta \|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=1}^N \|r_1^i\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left( (1/\eta) \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right). \end{aligned}$$

Επακολούθως, παράγεται ένας υπολογισμός για την  $L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα χρησιμοποιώντας τη διακριτή χαρακτηριστική (βλέπε στο Παράρτημα Α'3), και το επακόλουθο Θεώρημα 4.2.28. Εφόσον, μια εκτίμηση για την  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  νόρμα έχει ήδη παραχθεί, και το βοηθητικό σύστημα βελτιστοποίησης είναι ουσιαστικά αποσυνζευγμένο, οι τεχνικές της [31, Ενότητα 2] μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας.

**Θεώρημα 4.2.20.** Έστω  $w_h, z_h \in U_h$  οι λύσεις του (4.2.47)-(4.2.48) υπολογισμένες χρησιμοποιώντας το  $dG$  σχήμα. Συμβολίζουμε με  $e_1 = y - w_h$ ,  $r_1 = \mu - z_h$  και υποθέτουμε πως πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.18. Τότε υπάρχει μια σταθερά  $C$  που εξαρτάται από τα  $C_k, \Omega$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \|e_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left[ \|e_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_c^2/\eta) \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_{i+1}\eta)) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \right], \\ \|r_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left[ \|r_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (1/\eta) \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N 2 \min \left( \|(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_i\eta)) \|P_i(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Διαχωρίζοντας το σφάλμα όπως στο προηγούμενο θεώρημα (καθώς και στο Robin πρόβλημα στα προηγούμενα), δηλ.,  $e_1 = e_{1h} + e_p$  αρκεί να φράξουμε τον όρο  $\sup_{t^{n-1} < t \leq t^n} \|e_{1h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Αυτό έχει γίνει στο [31, Θεώρημα 2.5] (τονίζουμε πως η συνθήκη ορθογωνιότητας είναι αποσυνζευγμένη). Η

εκτίμηση για τη συζυγή μεταβλητή μπορεί να παραχθεί παρόμοια ξεκινώντας από τη συνθήκη ορθογωνιότητας (4.2.51), και χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη προσέγγιση για τη διακριτή χαρακτηριστική για το οπισθόδρομο χρονικά πρόβλημα.  $\square$

**Σημείωση 4.2.21.** Παρόμοια με τη Σημείωση 4.2.19 ισχύει ένα βελτιωμένο φράγμα όταν  $U_h^n = U_h$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Ειδικότερα,

$$\begin{aligned} \|e_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left( \|e_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_c^2/\eta) \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right), \\ \|r_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left( \|r_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (1/\eta) \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right). \end{aligned}$$

**Σημείωση 4.2.22.** Ο συνδυασμός των δυο τελευταίων Θεωρημάτων, καταδεικνύει τη “συμμετρική” δομή των εκτιμήσεων. Πιο συγκεκριμένα, έστω  $\|(\cdot, \cdot)\|_X$ ,  $\|(\cdot, \cdot)\|_{X_1}$  ορίζονται από την

$$\begin{aligned} \|(e_1, r_1)\|_X^2 &\equiv \|e_1\|_X^2 + \|r_1\|_X^2 \equiv \|e_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \\ &\quad + \|e_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + \|r_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \|(e_1, r_1)\|_{X_1}^2 &\equiv \|e_1\|_{X_1}^2 + \|r_1\|_{X_1}^2 \\ &\equiv \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_{i+1}\eta)) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N 2 \min \left( \|(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_i\eta)) \|P_i(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 4.2.18, 4.2.20 έχουμε μια εκτίμηση της μορφής

$$\begin{aligned} \|\sigma\delta\alpha\mu\|_X &\leq C \left( \|\sigma\delta\alpha\mu\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma\delta\alpha\mu\|_{\text{καλύτερης προσέγγισης}} \right) \\ &\quad + \|\sigma\delta\alpha\mu\|_{X_1}. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω υπολογισμός δείχνει πως το σφάλμα είναι εφαρμόσιμο για υψηλότερης τάξης στοιχεία υπό τις φυσικές παραβολικές υποθέσεις ομαλότητας. Αν  $U_h^n \equiv U_h$  για  $n = 1, \dots, N$  τότε το σφάλμα υποχώρων μπορεί να παραλειφθεί, και οπότε έχουμε μια συμμετρική εκτίμηση της μορφής

$$\|\sigma\delta\alpha\mu\|_X \leq C \left( \|\sigma\delta\alpha\mu\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma\delta\alpha\mu\|_{\text{καλύτερης προσέγγισης}} \right), \quad (4.2.53)$$

το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως το πλήρως διακριτό ανάλογο του Λήμματος Cέα ([34]).

Απομένει να συγκρίνουμε το διακριτό σύστημα βελτιστοποίησης (4.1.15)-(4.1.16) με το βοηθητικό σύστημα (4.2.47)-(4.2.48). Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με  $e_{2h} \equiv w_h - y_h$ , και με  $r_{2h} \equiv z_h - \mu_h$ . Ξεκινάμε αναγνωρίζοντας ένα βοηθητικό φράγμα για το  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2$  και  $(1/\alpha) \|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2$  σε όρους του  $\alpha^{1/2} \|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2$  και όρους προβολών  $e_1, r_1$ . Εδώ, παρατηρούμε πως χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε  $\alpha < 1$ , το οποίο αντιστοιχεί στη φυσική περίπτωση.

**Λήμμα 4.2.23.** Υποθέτουμε πως πληρούνται οι Υποθέσεις 3.1.1-4.1.5-4.2.15. Έστω  $y_h, \mu_h, w_h, z_h \in U_h$  είναι οι λύσεις του συστήματος βελτιστοποίησης (4.1.15)-(4.1.16) και του βοηθητικού συστήματος (4.2.47)-(4.2.48) αντιστοίχως, υπολογισμένα με το ασυνεχές σχήμα Galerkin. Συμβολίζουμε με  $e_1 \equiv y - w_h$ ,  $r_1 \equiv \mu - z_h$ , και έστω  $e_{2h} \equiv w_h - y_h$ ,  $r_{2h} \equiv z_h - \mu_h$ . Τότε, υπάρχει σταθερά  $C$  που εξαρτάται από τα  $\eta, C_L, C_c$  και τις σταθερές  $C_d, C_{st}$  της Υπόθεσης 4.2.15 και του Λήμματος 4.1.7 αντιστοίχως τέτοια ώστε για  $\tau$  να ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 4.1.7 και 4.1.18, και για  $\alpha < CC_L$  να ισχύει



η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (1/\alpha) \int_0^T \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C \int_0^T \left( (1/\alpha) \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt + C\alpha^{1/2} \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Αφαιρώντας τη (4.1.16) από τη (4.2.48) παίρνουμε την εξίσωση,

$$\begin{aligned} & -(r_{2h+}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, v_{ht} \rangle + a(r_{2h}, v_h) + \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, v_h \rangle \right) dt \\ & = -(r_{2h+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, v_h) dt \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]. \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

Αφαιρώντας τη (4.1.15) από τη (4.2.47) παίρνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} & (e_{2h}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, v_{ht} \rangle + a(e_{2h}, v_h) + \langle \phi(y) - \phi(y_h), v_h \rangle \right) dt \\ & = (e_{2h}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} -(1/\alpha)(\mu - \mu_h, v_h) dt \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]. \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

Θα βρούμε ένα βοηθητικό φράγμα για το  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2$  και το  $(1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2$  σε όρους του  $\alpha^{1/2}\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2$  και όρους προβολών. Για αυτό το σκοπό θέτουμε  $v_h = e_{2h}$  στην (4.2.54) για να προκύψει

$$\begin{aligned} & -(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, e_{2ht} \rangle + a(r_{2h}, e_{2h}) + \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, e_{2h} \rangle \right) dt + (r_{2h+}^{n-1}, e_{2h+}^{n-1}) \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

και  $v_h = r_{2h}$  στη (4.2.55),

$$\begin{aligned} & (e_{2h}^n, r_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, r_{2ht} \rangle + a(e_{2h}, r_{2h}) + \langle \phi(y) - \phi(y_h), v_h \rangle \right) dt - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} -(1/\alpha)(r_1, r_{2h}) - (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση ως προς το χρόνο στη (4.2.57), και αφαιρώντας την εξίσωση που προκύπτει από την (4.2.56), καταλήγουμε στη

$$\begin{aligned} & (r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, e_{2h} \rangle - \langle \phi(y) - \phi(y_h), r_{2h} \rangle \right) dt - (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, r_{2h}) dt. \end{aligned} \quad (4.2.58)$$

Χρειάζεται να φράξουμε τους τρεις όρους στο δεξί μέλος. Ξεκινάμε υπολογίζοντας τους δυο τελευταίους όρους. Για αυτό το σκοπό, παρατηρούμε πως,

$$\left| (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, r_{2h}) dt \right| \leq (1/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,$$

αφού η Υπόθεση 4.1.5 (σημειώνουμε σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.9 πως υπάρχει  $\varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε

$\|y_h - y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq \varepsilon$ ) και η ανισότητα Young δίνουν

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi(y) - \phi(y_h), r_{2h} \rangle| dt \leq C_L^2 \alpha \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2) dt + (1/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Επιπλέον, για τον τελευταίο όρο μπορούμε να φράζουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nl} &\equiv \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, e_{2h} \rangle| dt \\ &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y)(\mu - \mu_h), e_{2h} \rangle| dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle (\phi'(y) - \phi'(y_h))\mu_h, e_{2h} \rangle| dt \equiv \mathbf{I}_{nl}^1 + \mathbf{I}_{nl}^2. \end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα  $\mathbf{I}_{nl}^1$ , προσθαφαρώντας το  $\phi'(0)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nl}^1 &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y)(\mu - \mu_h), e_{2h} \rangle| dt \\ &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} (|\langle (\phi'(y) - \phi'(0))(\mu - \mu_h), e_{2h} \rangle| + |\langle \phi'(0)(\mu - \mu_h), e_{2h} \rangle|) dt. \end{aligned}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια Lipschitz του  $\phi'$ , το μοιόμορφο φράγμα του  $\phi'(0)$ , την εμφύτευση  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ , και την ανισότητα Young με κατάλληλο  $\delta > 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nl}^1 &\leq CC_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y\|_{L^4(\Omega)} \|r_{2h} + r_1\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt \\ &\quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h} + r_1\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (1/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \alpha C(C_L) \|y\|_{L^\infty[0, T; L^4(\Omega)]}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + C\alpha \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (1/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \alpha^{1/2} C(C_L, C_d) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + C\alpha \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

όπου στη τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την Υπόθεση 4.2.15. Εδώ η  $C(C_L, C_d)$  συμβολίζει μια σταθερά που εξαρτάται από το  $C_L$ , τα δεδομένα  $f, y_0, y_d, \eta$  και το  $\Omega$ . Επιπλέον, η συνέχεια Lipschitz του  $\phi'$  και η γενικευμένη ανισότητα Hölder υποδηλώνουν πως

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nl}^2 &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle (\phi'(y) - \phi'(y_h))\mu_h, e_{2h} \rangle| dt \\ &\leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{L^4(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Το πρώτο μέρος του  $\mathbf{I}_{nl}^2$  μπορεί να φραχτεί χρησιμοποιώντας την εμφύτευση  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  και την ανισότητα Young

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{H^1(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt \leq (CD_{\mu st}/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

όπου συμβολίζουμε με  $D_{\mu st}$  τη σταθερά ευστάθειας του Λήμματος 4.1.18. Τελικώς, παρατηρούμε πως η ανισότητα παρεμβολής  $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ , η ανισότητα ευστάθειας του  $\mu_h$  του Λήμματος

4.1.18 και η ανισότητα Young με κατάλληλο  $\delta$ , υποδηλώνει πως

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} dt \leq \|\mu_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt \\ & \leq (1/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + C \|\mu_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & \leq (1/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + CC_{st} \alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω φράγματα στην (4.2.58) και προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν από το 1 μέχρι το  $N$ , παρατηρώντας πως  $\sum_{n=1}^N ((r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1})) = 0$  (εφόσον  $e_{2h}^0 \equiv 0$ ,  $r_{2h+}^N = 0$ ), και επιλέγοντας  $\alpha < C(C_L)$  για να “κρύψουμε” το  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$ , παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.  $\square$

**Σημείωση 4.2.24.** Στη παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιούμε τη συνέχεια Lipschitz του  $\phi'$  για να αποφύγουμε επιπλέον τεχνικές λεπτομέρειες. Η υπόθεση πως  $y \in L^\infty[0, T; L^4(\Omega)]$ , θα απαιτήσει να επιβάλουμε επιπρόσθετη ομαλότητα στα δεδομένα, ειδικότερα,  $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , αλλά όχι επιπλέον ομαλότητα στον έλεγχο και το στόχο.

Οι εκτιμήσεις προκύπτουν χρησιμοποιώντας τεχνικές προβολών του Θεωρήματος 4.2.18 οι οποίες θα επιτρέψουν να χειριστούμε τις προς τα εμπρός και τις προς τα πίσω (στο χρόνο) συζευγμένες μ.δ.ε., μαζί με ένα “προς τα πίσω” (“boot-strap”) επιχειρήμα.

**Θεώρημα 4.2.25.** Έστω ότι πληρούνται οι Υποθέσεις 3.1.1-4.1.5-4.2.15. Θεωρούμε  $y_h, \mu_h, w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  ως λύσεις του συστήματος βελτιστοποίησης (4.1.15)-(4.1.16) και του βοηθητικού συστήματος (4.2.47)-(4.2.48) αντιστοίχως, υπολογισμένες με το σχήμα ασυνεχούς Galerkin. Συμβολίζουμε με  $e_1 \equiv y - w_h$ ,  $r_1 \equiv \mu - z_h$ , και έστω  $e_{2h} \equiv w_h - y_h$ ,  $r_{2h} \equiv z_h - \mu_h$ . Τότε, υπάρχει μια σταθερά  $\mathbf{D}$ , που εξαρτάται από το  $\|y\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}/\eta$ , τη σταθερά  $\mathbf{C}$  του Λήμματος 4.2.23, και το  $\rho \equiv \frac{CC_{st}^2 \eta + \beta \mathbf{C}}{\eta/4 + CC_{st}^2 \eta + \beta \mathbf{C}} < 1$  (για  $\beta > 0$ ) τέτοιο ώστε για  $\tau$  να ικανοποιεί τις υποθέσεις των Λημμάτων 4.1.7, και 4.1.18, και ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} & \|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \sum_{i=0}^{N-1} \|e_{2h}^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + (\eta/\alpha) \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (1/\alpha) \|r_{2h}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha) \sum_{i=1}^N \|r_{2h}^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \mathbf{D}(1/\alpha^2) \int_0^T (\|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2) dt. \end{aligned}$$

Εδώ η σταθερά  $\mathbf{D}$  είναι ανεξάρτητη των  $\tau, h, \alpha$ .

**Σημείωση 4.2.26.** Παρατηρούμε πως μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου οι τιμές του  $\alpha$  είναι μικρές, και πιθανώς συγκρίσιμες με το  $h$ , οι οποίες εγγυώνται γρήγορη σύγκλιση στο στόχο  $y_d$ . Ως εκ τούτου, απαιτείται μεγάλη προσοχή για να αποφευχθεί η χρήση ανισοτήτων τύπου Grönwall που ουσιαστικά οδηγούν σε σταθερές της μορφής  $\exp(1/\alpha)$ .

*Απόδειξη. Βήμα 1: Προκαταρκτικά αποτελέσματα για τη βασική μεταβλητή:* Θέτοντας  $v_h = e_{2h}$  στην (4.2.55) και παρατηρώντας πως  $\mu - \mu_h = r_1 + r_{2h}$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), e_{2h} \rangle dt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1 + r_{2h}, e_{2h}) dt, \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

Για το πρώτο όρο στο δεξί μέλος, παρατηρούμε πως

$$\left| (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, e_{2h}) dt \right| \leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C/\eta\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Στα επόμενα επικεντρωνόμαστε στους μη γραμμικούς όρους. Τονίζουμε πως η μονοτονία του  $\phi$  υποδηλώνει πως

$$\mathbf{I}_{nl} \equiv \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), e_{2h} \rangle dt \geq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(w_h), e_{2h} \rangle dt,$$

και οπότε μετακινώντας τον παραπάνω όρο στο δεξί μέλος μπορούμε να φράξουμε αυτόν τον όρο χρησιμοποιώντας την Υπόθεση 4.1.5, την ανισότητα Poincaré, και την ανισότητα Young, όπως ακολουθεί

$$|\mathbf{I}_{nl}| \leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)} dt \leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt.$$

Επομένως συλλέγοντας τα παραπάνω φράγματα στην (4.2.59) και πολλαπλασιάζοντας με  $\alpha^{1/2}$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \alpha^{1/2} \left( \|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right) \\ & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (C/\eta\alpha^{3/2}) \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + (CC_L\alpha^{1/2}/\eta) \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt - (1/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_{2h}, e_{2h}) dt. \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

*Βήμα 2: Προκαταρκτικά αποτελέσματα για τη συζυγή μεταβλητή:* Θέτοντας  $v_h = r_{2h}$  στην (4.2.54), έχουμε

$$\begin{aligned} & -(1/2) \|r_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|r_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt. \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

Χρησιμοποιώντας την μονοτονία του  $\phi$ , και παρατηρώντας πως  $\mu - \mu_h = r_1 + r_{2h}$ , η μη γραμμικότητα της συζυγούς εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y)\mu_h, r_{2h} \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu_h - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt \\ &\geq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)r_1, r_{2h} \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu_h - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt. \end{aligned}$$

Μετακινώντας τα τελευταία δυο ολοκληρώματα στο δεξί μέλος παίρνουμε κατάλληλα φράγματα. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια Lipschitz του  $\phi'$ , το ομοίμορφο φράγμα του  $\phi'(0)$ , τη γενικευμένη ανισότητα Hölder's και την εμφύτευση  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)r_1, r_{2h} \rangle dt \right| &\leq \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle (\phi'(y) - \phi'(0))r_1, r_{2h} \rangle dt \right| + \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(0)r_1, r_{2h} \rangle dt \right| \\ &\leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C_y/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)r_1, r_{2h} \rangle dt \right| &\leq \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle (\phi'(y) - \phi'(0))r_1, r_{2h} \rangle dt \right| + \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(0)r_1, r_{2h} \rangle dt \right| \\ &\leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C_y/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

όπου η  $C_y$  εξαρτάται μόνο από το  $\|y\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}$  και το χωρίο. Παρόμοια, για το δεύτερο ολοκλήρωμα η συνέχεια Lipschitz του  $\phi'$ , η γενικευμένη ανισότητα Hölder και το γεγονός ότι  $y - y_h = e_1 + e_{2h}$  δείχνει,

$$\left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle (\phi'(y) - \phi'(y_h))\mu_h, r_{2h} \rangle dt \right| \leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_1 + e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|r_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt \leq \mathbf{II}_{nl}^1 + \mathbf{II}_{nl}^2.$$

Απομένει να φράξουμε τα τελευταία δυο ολοκλήρωματα. Αρχίζοντας από το  $\mathbf{II}_{nl}^2$ , χρησιμοποιώντας την ιδιότητα παρεμβολής  $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  και τις εκτιμήσεις ευστάθειας για το  $\mu_h$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_{nl}^2 &\leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|r_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt \\ &\leq \eta/4 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt \\ &\quad + (CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \eta/4 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \|\mu_h\|_{L^\infty[t^{n-1},t^n;L^2(\Omega)]}^4 \eta/16 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + (CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \alpha^{1/2} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2}) \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\ &\leq \eta/4 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (CC_{st}^2 \alpha \eta/16) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + (CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \alpha^{1/2} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2}) \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το φράγμα ευστάθειας για το Λήμμα 4.1.18. Για το  $\mathbf{II}_{nl}^1$ , χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder και την εμφύτευση  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ , έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_{nl}^1 &\leq C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_1\|_{H^1(\Omega)} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt \\ &\leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (CC_L C_{st} \alpha^{1/2}/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Βάζοντας τα φράγματα του  $\mathbf{II}_{nl}^1, \mathbf{II}_{nl}^2$  στην (4.2.61), και πολλαπλασιάζοντας με  $(1/\alpha^{1/2})$ , έχουμε

$$\begin{aligned} &-(1/2\alpha^{1/2}) \|r_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2\alpha^{1/2}) \|r_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2\alpha^{1/2}) \|r_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ (\eta/2\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \mathbf{D} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2}) \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt + (1/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt \\ &+ CC_{st}^2 \alpha^{1/2} \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + CC_L/\eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha) \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \quad (4.2.62) \end{aligned}$$

όπου το  $\mathbf{D}$  εξαρτάται από τα  $CC_L C_{st}/\eta$ , και το  $C_y/\eta$ .

*Βήμα 3: Συνδυασμός των (4.2.60)-(4.2.62):* Στα επόμενα θα διατυπώσουμε το κυρτό συνδυασμό των (4.2.60)-(4.2.62) πολλαπλασιάζοντας με  $1 - \rho$  την εξίσωση (4.2.62) και με  $\rho$  την εξίσωση (4.2.60),

$0 < \rho < 1$ , (το  $\rho$  θα προσδιοριστεί αργότερα), και προσθέτουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν:

$$\begin{aligned}
& \rho\alpha^{1/2} \left( \|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + (\rho\eta\alpha^{1/2}/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& \left( (1-\rho)/2\alpha^{1/2} \right) \left( -\|r_{2h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_{2h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& + ((1-\rho)\eta/4\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& \leq \mathbf{D}(1/\alpha^{3/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt + (1-\rho)CC_{st}^2\alpha^{1/2}\eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& + (1-\rho)(CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + (1-\rho)\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt - (\rho/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt. \tag{4.2.63}
\end{aligned}$$

Υπάρχουν δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Αν  $0 < \rho \leq (1/2)$ , τότε  $\rho \leq (1-\rho)$  και μπορούμε να φράξουμε τους τελευταίους δυο όρους με το  $2(1-\rho)/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(e_{2h}, r_{2h})| dt$ , και επομένως χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young να την φράξουμε με την

$$2(1-\rho)/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \alpha^{1/2}\|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2})\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt.$$

Αντικαθιστώντας τη τελευταία ανισότητα στην (4.2.63), και προσθέτοντας από 1 έως το  $N$  έχουμε

$$\begin{aligned}
& \rho\alpha^{1/2}\|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho\alpha^{1/2} \sum_{i=1}^N \|[e_{2h}^{i-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\rho\eta\alpha^{1/2}/4) \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& + (1-\rho)/2\alpha^{1/2} \sum_{i=1}^N \|[r_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1-\rho)/2\alpha^{1/2})\|r_{2h+}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1-\rho)\eta/4\alpha^{1/2}) \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& \leq \mathbf{D}(1/\alpha^{3/2}) \int_0^T \left( \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt + (1-\rho)CC_{st}^2\alpha^{1/2}\eta \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& + (1-\rho)CC_L/\eta \int_0^T \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + 2(1-\rho) \int_0^T \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \tag{4.2.64}
\end{aligned}$$

όπου το  $\mathbf{D}$  εξαρτάται μόνο από τη σταθερά ευστάθειας  $C_{st}$ ,  $\eta$ ,  $C_L$ . Παρατηρούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 4.2.23 για να αντικαταστήσουμε τα τελευταία δυο ολοκληρώματα με τους όρους προβολής  $e_1, r_1$  και το  $\alpha^{1/2}\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ . Οπότε,

$$\begin{aligned}
& \rho\alpha^{1/2}\|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho\alpha^{1/2} \sum_{i=1}^N \|[e_{2h}^{i-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\rho\eta\alpha^{1/2}/4) \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& + ((1-\rho)/2\alpha^{1/2}) \sum_{i=1}^N \|[r_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1-\rho)/2\alpha^{1/2})\|r_{2h+}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1-\rho)\eta/4\alpha^{1/2}) \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& \leq \mathbf{D}(\rho)(1/\alpha^{3/2}) \int_0^T \left( \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + (1-\rho)CC_{st}^2\alpha^{1/2}\eta \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (1-\rho)3C\alpha^{1/2} \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \tag{4.2.65}
\end{aligned}$$

Εδώ, η  $\mathbf{C}$  συμβολίζει τη σταθερά του Λήμματος 4.2.23. Οπότε, επιλέγοντας  $\rho$  με σκοπό να κρύψουμε

τον όρο  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  στα αριστερά, δηλ.,

$$(1 - \rho)(CC_{st}^2\eta + 3\mathbf{C})\alpha^{1/2} = \rho\eta\alpha^{1/2}/4, \quad \rho \equiv \frac{CC_{st}^2\eta + 3\mathbf{C}}{\eta/4 + CC_{st}^2\eta + 3\mathbf{C}} < 1,$$

(τονίζουμε πως το  $\rho$  είναι ανεξάρτητο του  $\alpha$ ) καταλήγουμε στην επιθυμητή εκτίμηση. Σημειώνουμε επίσης πως έχουμε χειριστεί τη περίπτωση  $0 < \rho \leq 1/2$ , η οποία υποδηλώνει μια υπόθεση για το μέγεθος των δεδομένων, και ειδικότερα,  $CC_{st}^2\eta + 3\mathbf{C} < \eta/4$ . Απομένει να χειριστούμε τη περίπτωση που  $1/2 < \rho < 1$ . Ενδιαφερόμαστε για το χειρισμό των δυο τελευταίων όρων της (4.2.63). Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε πως

$$(1 - \rho)/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt - (\rho/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt \leq |(1 - 2\rho)|/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(e_{2h}, r_{2h})| dt.$$

Εφόσον,  $1/2 < \rho < 1$ , παίρνουμε  $|(1 - 2\rho)| = (2\rho - 1) \leq \beta(1 - \rho)$  για κάποιο  $\beta > 0$ . Ωστόσο, παρατηρούμε πως αν το  $\beta > 0$  είναι αρκετά μεγάλο, τότε  $\rho \approx 1$  εφόσον  $\rho \leq (1 + \beta)/(2 + \beta) \approx 1$ . Το υπόλοιπο της απόδειξης παραμένει το ίδιο. Το ανάλογο της (4.2.65) παίρνει τη μορφή,

$$\begin{aligned} & \rho\alpha^{1/2}\|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho\alpha^{1/2} \sum_{i=1}^N \|e_{2h}^{i-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\rho\eta\alpha^{1/2}/4) \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & + ((1 - \rho)/2\alpha^{1/2}) \sum_{i=1}^N \|r_{2h}^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1 - \rho)/2\alpha^{1/2}) \|r_{2h}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + ((1 - \rho)\eta/4\alpha^{1/2}) \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & \leq \mathbf{D}(\rho)(1/\alpha^{3/2}) \int_0^T (\|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2) dt \\ & + (1 - \rho)CC_{st}^2\alpha^{1/2}\eta \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \beta(1 - \rho)\mathbf{C}\alpha^{1/2} \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Οπότε, επιλέγοντας  $\rho$  (ανεξάρτητα από το  $\alpha$ ) με σκοπό να κρύψουμε τους τελευταίους δυο όρους στο δεξί μέλος, δηλ., για

$$(1 - \rho)(CC_{st}^2\eta + \beta\mathbf{C})\alpha^{1/2} = \rho\eta\alpha^{1/2}/4, \quad \rho \equiv \frac{CC_{st}^2\eta + \beta\mathbf{C}}{\eta/4 + CC_{st}^2\eta + \beta\mathbf{C}} < 1,$$

και έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.  $\square$

**Σημείωση 4.2.27.** Στις περισσότερες πρακτικές καταστάσεις, τέτοιες όπως μικρού χρονικού βηματισμού ή όχι μεγάλων δεδομένων  $C_{st}$ , παρατηρούμε πως οι τιμές των παραμέτρων  $\rho$  ή  $1 - \rho$  δεν είναι συγκρίσιμες με τον όρο  $\alpha^{1/2} \ll 1$ , οπότε η εξάρτηση των υπολογισμών από τον  $\alpha$  δε χειροτερεύει περαιτέρω.

Βασιζόμενοι στις εκτιμήσεις των ενεργειακών νορμών συνεχίζουμε ώστε να πάρουμε εκτιμήσεις σε αυθαίρετες χρονικές στιγμές. Εφόσον, μια εκτίμηση της ενεργειακής νόρμας  $\|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  έχει ήδη υπολογιστεί στο Θεώρημα 4.2.25, το σύστημα βελτιστοποίησης είναι αποσυσζευγμένο. Μια εκτίμηση σε αυθαίρετα χρονικά σημεία για την προς τα εμπρός εξίσωση μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας τη τεχνική προσέγγισης των διακριτών χαρακτηριστικών του [31] στη περίπτωση με τον ημιγραμμικό όρο. Οπότε, θα χρειαστεί η εκτίμηση ευστάθειας σε αυθαίρετα χρονικά σημεία.

**Θεώρημα 4.2.28.** Θεωρούμε τις λύσεις  $y_h, \mu_h \in \mathcal{U}_h$  των (4.1.15)-(4.1.16). Αν επιπλέον των υποθέσεων των Θεωρημάτων 4.2.18, 4.2.25, το  $\tau$  ικανοποιεί την  $\tau \leq C_k/\eta$ , τότε υπάρχει μια σταθερά  $\bar{\mathbf{D}}$  εξαρτώμενη από τους λόγους  $(C_y/\eta), (C_c/\eta), e^{TC_k/\eta}$  και τη σταθερά  $\mathbf{D}$  του Θεωρήματος 4.2.25, τέτοιες

ώστε

$$\|e_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq \tilde{\mathbf{D}}(1/\alpha^2) \int_0^T \left( \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt.$$

Εδώ η  $\tilde{\mathbf{D}}$  είναι επίσης ανεξάρτητη των  $\tau, h, \alpha$ .

Απόδειξη. Ξεκινάμε με παραγοντική ολοκλήρωση ως προς το χρόνο στην (4.2.55), και αντικαθιστώντας με  $v_h = \hat{e}_{2h}$ , όπου το  $\hat{e}_{2h}$  συμβολίζει τη προσέγγιση της διακριτής χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\chi_{[t^{n-1}, t]} e_{2h}$  (για κάθε συγκεκριμένο -fixed-  $t \in [t^{n-1}, t^n]$ ), όπως είναι κατασκευασμένη στο Παράρτημα Α'3. Ο ορισμός του  $\hat{e}_{2h}$  (βλέπε Παράρτημα Α'3) και το γεγονός ότι  $e_{2ht} \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$  υποδηλώνει πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2ht}, \hat{e}_{2h}) dt = \int_{t^{n-1}}^t (e_{2ht}, e_{eh}) dt$  το οποίο δείχνει,

$$\begin{aligned} (1/2)\|e_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( a(e_{2h}, \hat{e}_{2h}) + \langle \phi(y) - \phi(y_h), \hat{e}_{2h} \rangle \right) dt \\ = (1/2)\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (1/\alpha)(r_1 + r_{2h}, \hat{e}_{2h}) dt. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε επίσης πως η ιδιότητα συνέχειας για το  $a(\cdot, \cdot)$ , και η Πρόταση Α'.3.1, υποδηλώνουν πως

$$\left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(e_{2h}, \hat{e}_{2h}) dt \right| \leq C(C_k, C_c) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

εφόσον ο όρος σύζευξης μπορεί να φραχτεί ως ακολούθως:

$$\left| \frac{1}{\alpha} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1 + r_{2h}, \hat{e}_{2h}) dt \right| \leq (C_k/\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt + C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα Young για κατάλληλο  $\delta > 0$  και τη Πρόταση Α'.3.1. Για τον ημιγραμμικό όρο, υπενθυμίζουμε πως η συνθήκη αύξουσας μονοτονίας και η ανισότητα Hölder, η εμφύτευση  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  υποδηλώνει

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), \hat{e}_{2h} \rangle dt \leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \|\hat{e}_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young τελικά καταλήγουμε στην:

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), \hat{e}_{2h} \rangle dt \leq C_k(C_y + C_L) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt,$$

όπου η  $C_y$  εξαρτάται μόνο από το  $\|y\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}$ . Επομένως, αντικαθιστώντας τους παραπάνω υπολογισμούς στην (4.2.66), παίρνουμε μια ανισότητα της μορφής,  $(1 - C\tau_n)a^n \leq a^{n-1} + f^n$ , όπου  $a^n = \sup_{s \in (t^{n-1}, t^n]} \|e_{2h}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Πράγματι, έστω  $t \in (t^{n-1}, t^n]$  επιλεγμένο ως  $a^n \equiv \|e_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  και παρατηρώντας πως  $C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_k \tau_n a^n$ , για  $\tau_n$  ικανοποιώντας  $\tau_n C_k < 1/4$  η επιθυμητή εκτίμηση ακολουθεί από το διακριτό Λήμμα Grönwall, χρησιμοποιημένο στα προηγούμενα φράγματα του Λήμματος 4.2.23, των Θεωρημάτων 4.2.18, 4.2.25, και υπολογισμούς.  $\square$

Ακολουθούν εκτιμήσεις για τη συζυγή μεταβλητή  $\mu$  χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές καθώς και τους προηγούμενους υπολογισμούς για τη βασική μεταβλητή. Παρακάτω διατυπώνουμε τη σχετική εκτίμηση.

**Θεώρημα 4.2.29.** Έστω  $y_h, \mu_h \in \mathcal{U}_h$  οι λύσεις του (4.1.15)-(4.1.16). Υποθέτουμε πως πληρούνται οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 4.2.25-4.2.28. Τότε υπάρχει μια σταθερά  $\tilde{\mathbf{D}} > 0$  (παρόμοια του Θεωρήματος



4.2.28) τέτοια ώστε

$$\|r_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq \tilde{\mathbf{D}} \int_0^T \left( \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt.$$

Διάφορες εκτιμήσεις μπορούν να προκύψουν, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τη προηγούμενη ενότητα και κλασικά αποτελέσματα από τη θεωρία προσεγγίσεων. Ξεκινάμε παραθέτοντας τις συμμετρικές εκτιμήσεις σφαλμάτων.

**Θεώρημα 4.2.30.** Υποθέτουμε πως πληρούνται οι υποθέσεις 3.1.1-4.1.5-4.2.15. Έστω  $y_h, \mu_h \in \mathcal{U}_h$  οι προσεγγιστικές λύσεις του συστήματος βελτιστοποίησης (4.1.15)-(4.1.16) υπολογισμένες χρησιμοποιώντας το σχήμα της ασυνεχούς μεθόδου Galerkin. Υποθέτουμε πως τα  $\tau = \max_{i=1,\dots,n} \tau_n$ ,  $h$ , ικανοποιούν τις συνθήκες των Λημμάτων 4.1.7, 4.1.18 και του Θεωρήματος 4.2.28. Τότε, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \|e\|_X^2 + (1/\alpha)\|r\|_X^2 &\leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^2) \left( \|e_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_p\|_X^2 + \|r_p\|_X^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/\tau^{i+1}\eta) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N 2 \min \left( \|(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/\tau^i\eta) \|P_i(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

όπου η σταθερά  $\tilde{\mathbf{C}}$  εξαρτάται από τις σταθερές ευστάθειας των Λημμάτων 4.1.7, 4.1.18, και τις σταθερές  $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \tilde{\mathbf{D}}$  του Λήμματος 4.2.23 και των Θεωρημάτων 4.2.25, 4.2.28 αντιστοίχως, αλλά είναι ανεξάρτητο των  $\tau, h, \alpha$ . Επιπλέον, υποθέτουμε πως χρησιμοποιούνται οι ίδιοι υπόχωροι, δηλαδή,  $U_h^n = U_h$ . Οπότε,

$$\|e\|_X^2 + (1/\alpha)\|r\|_X^2 \leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^2) \left( \|e_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_p\|_X^2 + \|r_p\|_X^2 \right).$$

*Απόδειξη.* Ο πρώτος υπολογισμός προκύπτει χρησιμοποιώντας τη τριγωνική ανισότητα και τις προηγούμενες εκτιμήσεις των Θεωρημάτων 4.2.18-4.2.25. Ο δεύτερος υπολογισμός προκύπτει από τη Σημείωση 4.2.19.  $\square$

Χρησιμοποιώντας τώρα κλασικά αποτελέσματα της θεωρίας προσεγγίσεων παράγουμε τις τάξεις σύγκλισης. Παρακάτω, παρουσιάζουμε τις τάξεις σύγκλισης σε δυο ξεχωριστές περιπτώσεις, ανάλογα με τη διαθέσιμη ομαλότητα.

**Πρόταση 4.2.31.** Θεωρούμε πως πληρούνται οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 4.2.18-4.2.25. Υποθέτουμε επίσης πως τα  $y, \mu$  ικανοποιούν,

$$(y, \mu) \in L^\infty[0, T; H^{l+1} \cap H_0^1(\Omega)] \quad (y^{(k+1)}, \mu^{(k+1)}) \in L^\infty[0, T; H^1(\Omega)].$$

Θεωρούμε πως τμηματικά πολυώνυμα βαθμού  $l$  χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουμε τους χώρους  $U_h^n \subset H^1(\Omega)$  σε κάθε χρονικό βήμα, όπου το  $h$  συμβολίζει την παράμετρο χρονικής διακριτοποίησης. Τότε ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\|e\|_X^2 + (1/\alpha)\|r\|_X^2 \leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^2) \left( h^{2l} + \tau^{2(k+1)} + h^{2l} \min\{h^4/(\tau^2\eta), h^2/\tau\} \right).$$

Εδώ η σταθερά  $\tilde{\mathbf{C}}$  είναι η σταθερά του Θεωρήματος 4.2.30. Στην περίπτωση που  $U_h^n = U_h$  τότε αιτιολογείται η ακόλουθη εκτίμηση

$$\|e\|_X^2 + (1/\alpha)\|r\|_X^2 \leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^2) \left( h^{2l} + \tau^{2(k+1)} \right).$$

Απόδειξη. Απομένει να εκτιμήσουμε τα  $e_p, r_p$ . Χρησιμοποιώντας το [33, Συμπέρασμα 4.8], και τις συνηθισμένες ιδιότητες προσεγγισιμότητας του  $P_n$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \|y - P_n^{loc} y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} &\leq C(\|y - P_n y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|P_n y^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}) \\ &\leq C(h^l \|y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|y^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}). \end{aligned}$$

Οπότε,  $\|y - P_h^{loc} y\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C(h^l \|y\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|y^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}$ . Εργαζόμενοι παρόμοια, έχουμε

$$\|y - P_h^{loc} y\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C(h^{l+1} \|y\|_{L^\infty[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|y^{(k+1)}\|_{L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]}).$$

Παρόμοια αποτελέσματα επίσης ισχύουν για το  $r_p$ . Παραμένει να φράξουμε τους όρους σφάλματος λόγω της αλλαγής υποχώρων. Γι' αυτό το σκοπό είναι εύκολο να δούμε πως

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/\tau^{i+1}\eta) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \\ \leq C \|y\|_{C^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]}^2 \min \left\{ \frac{h^{2l+4}}{\tau^2 \eta}, \frac{h^{2+2l}}{\tau} \right\}, \end{aligned}$$

ενώ μια παρόμοια εκτίμηση ισχύει για τους όρους τους σχετικούς με τη συζυγή μεταβλητή.  $\square$

Το τελευταίο μας αποτέλεσμα αφορά εκτιμήσεις σφαλμάτων κάτω από πιο αυστηρές υποθέσεις ομαλότητας, και πιο συγκεκριμένα στην χρονική παράγωγο.

**Πρόταση 4.2.32.** Έστω πως πληρούνται οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 4.2.18-4.2.25. Υποθέτουμε επίσης πως τα  $y, \mu$  ικανοποιούν,

$$(y, \mu) \in L^\infty[0, T; H^{l+1} \cap H_0^1(\Omega)], \quad (y^{(k+1)}, \mu^{(k+1)}) \in L^\infty[0, T; L^2(\Omega)],$$

και έστω πως χρησιμοποιούνται οι ίδιοι υπόχωροι σε κάθε χρονικό βηματισμό  $U_h^n = U_h$  και χρησιμοποιούνται τμηματικά πολυώνυμα βαθμού  $l$  για να κατασκευάσουμε τον υπόχωρο  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , όπου το  $h$  συμβολίζει τη παράμετρο της χρονικής διακριτοποίησης. Υποθέτουμε πως ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.30. Τότε, έχουμε,

$$\|e\|_X^2 + (1/\alpha) \|r\|_X^2 \leq \tilde{C}(1/\alpha^2) (h^{2l} + (\tau^{2k+2}/h^2)),$$

όπου η  $\tilde{C}$  συμβολίζει τη σταθερά του Θεωρήματος 4.2.30.

Απόδειξη. Εργαζόμενοι παρόμοια με το προηγούμενο Θεώρημα και μια αντίστροφη εκτίμηση οδηγούμαστε στο

$$\begin{aligned} \|y - P_n^{loc} y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 &\leq C \|y - P_n y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 + C_k \tau^{2(k+1)} \|P_n y^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 \\ &\leq C \left( \|y - P_n y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 + \tau^{2(k+1)}/h^2 \|P_n y^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 \right). \end{aligned}$$

Το σφάλμα προσέγγισης στον  $L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]$  μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον ίδιο τρόπο. Η συζυγής μεταβλητή μπορεί επίσης να αντιμετωπιστεί με τον ίδιο τρόπο. Οπότε, χρησιμοποιώντας την ευστάθεια για την ορθογώνια προβολή, έχουμε τον επιθυμητό υπολογισμό.  $\square$

**Σημείωση 4.2.33.** Είναι φανερό από τις αποδείξεις των Προτάσεων 4.2.31 και 4.2.32 πως οι υποθέσεις βελτιωμένης ομαλότητας για τα  $(y, \mu)$  χρειάζονται μόνο για να υπολογίσουμε (βέλτιστες) τάξεις σύγκλισης ως προς το  $\|\cdot\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}$  κομμάτι της  $\|\cdot\|_X$  νόρμας. Αντίθετα, αν επιλέξουμε τους ίδιους υπόχωρους σε κάθε χρονικό βήμα  $U_h^n = U_h$  τότε δεν υπάρχει συνεισφορά από τους όρους ασυνέχειας (jump terms), και οπότε μπορούμε να συνδυάσουμε τα αποτελέσματα της Σημείωσης 4.2.19, και του Θεωρήματος 4.2.25, για να συνδέσουμε τα σφάλματα  $\|e\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}$  και  $\|r\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}$  με τα σφάλματα

προβολών  $y - P_h^{loc} y$  και  $\mu - P_h^{loc} \mu$  στις ίδιες νόρμες. Ως συνέπεια, οι τάξεις σύγκλισης της Πρότασης 4.2.32, ως προς τις  $\|\cdot\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  νόρμες απαιτούν μόνο  $(y, \mu) \in L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; L^2(\Omega)]$  ομαλότητα.

**Σημείωση 4.2.34.** Εξαιτίας της απουσίας περιορισμών για τον έλεγχο, μια εκτίμηση για τους  $\epsilon$ -λέγχους  $g - g_h$  προκύπτει απευθείας από τους υπολογισμούς για την συζυγή μεταβλητή  $\|\mu - \mu_h\|_X$  χρησιμοποιώντας τη συνθήκη βελτιστοποίησης. Ωστόσο, όπως είναι φανερό και στα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα, αναμένεται για τον έλεγχο μια βελτιωμένη τάξη σύγκλισης στην  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα.

#### 4.2.3 Πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου Stokes.

Όμοια επεκτείνουμε τη μελέτη μας σε προβλήματα Stokes και εργαζόμαστε στους αντίστοιχους χώρους που έχουν προαναφερθεί. Ορίζουμε ένα βοηθητικό σύστημα που παίζει το ρόλο μιας γενικευμένης dG προβολής. Θα δουλεύουμε με τις ασθενείς μορφές που υποστηρίζουν την ύπαρξη πίεσης  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  (και οπότε της  $\bar{y}_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ ). Οπότε, η συνέχεια του συστήματος βελτιστοποίησης αποτελείται από τις εξισώσεις (3.3.20)-(3.3.21) και (3.3.18) ή (3.3.19), και το διακριτό σύστημα βελτιστοποίησης (4.1.22)-(4.1.23) και (4.1.20) ή (4.1.21).

##### 4.2.3.1 Η πλήρως διακριτή προβολή

Δοσμένων δεδομένων  $f, y_0$ , και των αρχικών συνθηκών  $w_h^0 = y_h^0$ , όπου  $y_h^0 \equiv P_h y_0$  είναι οι αρχικές προσεγγίσεις των  $y_0$ ,  $z_+^N = 0$ , αναζητούμε  $(w_h, p_{1h}), (z_h, \phi_{1h}) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  τέτοια ώστε για  $n = 1, \dots, N$  και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathcal{Q}_h]$ ,

$$(w_h^n, v_h^n) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle w_h, v_{ht} \rangle - a(w_h, v_h) - b(v_h, p_{1h}) \right) dt = (w_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (\bar{g}, v_h) \right) dt$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(w_h, q_h) dt = 0, \quad (4.2.66)$$

$$-(z_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle z_h, v_{ht} \rangle + a(z_h, v_h) + b(v_h, \phi_{1h}) \right) dt = -(z_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (w_h - y_d, v_h) dt$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z_h, q_h) dt = 0. \quad (4.2.67)$$

Οι λύσεις  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  υπάρχουν για οποιαδήποτε δοσμένα δεδομένα  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ , και  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Στην ουσία, οι υπολογισμοί ευστάθειας δείχνουν πως  $w_h, z_h \in W_S(0, T)$  και επιπλέον εξαιτίας της βελτιωμένης ομαλότητας του  $w_h - y_d$  έχουμε  $z_h \in L^\infty[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ .

Οι λύσεις του βοηθητικού συστήματος βελτιστοποίησης παίζουν το ρόλο “γενικευμένης προβολής” στον  $\mathcal{U}_h$ . Η βασική εκτίμηση για την ενεργειακή νόρμα του  $\bar{y} - w_h, \bar{\mu} - z_h$  θα προκύψει σε όρους τοπικής  $L^2$  προβολής στο βοηθητικό σύστημα. Παρόμοια με τα προηγούμενα προβλήματα, χρειάζεται η ακόλουθη προβολή, η σχετική με την ασυνεχή χρονικού βηματισμού μέθοδο για τις εξισώσεις Navier-Stokes (βλέπε π.χ. [32, Ορισμούς 4.1, 4.2]).

**Ορισμός 4.2.35.** (1) Η προβολή  $P_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$  ικανοποιεί την  $(P_n^{loc} v)^n = P_h v(t^n)$ , και

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (v - P_n^{loc} v, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]. \quad (4.2.68)$$

Εχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό  $(P_n^{loc}v)^n \equiv (P_n^{loc}v)(t^n)$  και  $P_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$  είναι ο τελεστής ορθογώνιας προβολής πάνω στον διακριτό μοναδικής απόκλισης υπόχωρο  $\mathbf{U}_h$ .

(2) Η προβολή  $P_h^{loc} : C[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathbf{U}_h$  ικανοποιεί την

$$P_h^{loc}v \in \mathbf{U}_h \text{ και } (P_h^{loc}v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = P_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

Επίσης εξαιτίας της έλλειψης ομαλότητας και της σύζευξης μεταξύ της χρονικής παραγώγου και της πίεσης, θα χρειαστούμε την ακόλουθη γενικευμένη dG προβολή, η οποία θα μπορεί να εφαρμοστεί όταν  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,  $\bar{y}_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Ειδικότερα, κατασκευάζουμε μια χωροχρονική γενικευμένη  $\mathbf{L}^2$  μηδενικής απόκλισης προβολή (βλέπε επίσης [30]) που συνδυάζει την κλασική χρονικού βηματισμού dG προβολή, και τη γενικευμένη  $\mathbf{L}^2$  προβολή  $Q_h : \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$ . Για ιδιότητες της  $Q_h$  βλέπε για παράδειγμα [69, ενότητα 2]. Θυμίζουμε πως ο ορισμός του  $Q_h$  δείχνει πως  $\langle v - Q_h v, v_h \rangle = 0$ , για όλα τα  $v \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  και τα  $v_h \in \mathbf{U}_h$ . Η προβολή είναι καλώς ορισμένη στον  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ , και ταυτίζεται με την  $P_h$  για  $v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ .

**Ορισμός 4.2.36.** (1) Η προβολή  $Q_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$  ικανοποιεί την  $(Q_n^{loc}v)^n = Q_h v(t^n)$ , και

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle v - Q_n^{loc}v, v_h \rangle = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h].$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό  $(Q_n^{loc}v)^n \equiv (Q_n^{loc}v)(t^n)$  και  $Q_h : \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$  είναι ο τελεστής της γενικευμένης ορθογώνιας προβολής στον  $\mathbf{U}_h$ .

(2) Η προβολή  $Q_h^{loc} : C[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)] \rightarrow \mathbf{U}_h$  ικανοποιεί την

$$Q_h^{loc}v \in \mathbf{U}_h \text{ και } (Q_h^{loc}v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = Q_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

Για  $k = 0$ , η προβολή  $Q_h^{loc} : C[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)] \rightarrow \mathbf{U}_h$  ανάγεται στην  $Q_h^{loc}v(t) = Q_h v(t^n)$  για όλα τα  $t \in (t^{n-1}, t^n]$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

Παρόμοια με το Robin πρόβλημα εξ ορισμού, η  $Q_h^{loc}$  ταυτίζεται με την  $P_h^{loc}$ , όταν  $v \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  δηλαδή,  $P_h^{loc}v = Q_h^{loc}v$  όταν  $v \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , και όποτε παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες προσεγγισιμότητας. Ωστόσο, δίνουμε έμφαση ότι είναι εφαρμόσιμη για  $v \equiv y_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Για το οπισθόδρομο στο χρόνο πρόβλημα μια παραλλαγή των παραπάνω προβολών (επίσης συμβολιζόμενων με  $P_n^{loc}$ ,  $Q_n^{loc}$  αντιστοίχως) ορίζεται με παρόμοιο τρόπο. Για παράδειγμα, επιπλέον της σχέσης (4.2.68), χρειαζόμαστε να επιβάλλουμε τη “συνθήκη ταιριάσματος” στα αριστερά, δηλαδή,  $(P_n^{loc}v)_+^{n-1} = P_h v(t_+^{n-1})$  αντί της επιβολής της συνθήκης στα δεξιά.

Στο επόμενο Λήμμα συλλέγουμε κάποια αποτελέσματα όσο αφορά τις (βέλτιστες) τάξεις σύγκλισης για τη παραπάνω προβολή. Εδώ, η έμφαση δίνεται στις ιδιότητες προσεγγισιμότητας για τη γενικευμένη προβολή  $Q_h^{loc}$ , υπό ελάχιστες υποθέσεις ομαλότητας, δηλαδή, για  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  για το χαμηλότερης τάξης σχήμα.

**Λήμμα 4.2.37.** Έστω  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , και  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  ορισμένο στους Ορισμούς 4.2.35 και 4.2.36 αντιστοίχως. Τότε, για όλα τα  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . υπάρχει μια σταθερά  $C$  ανεξάρτητη των  $h, \tau$  τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h^{l+1}\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}\|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}), \\ \|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(h^l\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}/h\|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}). \end{aligned}$$

Έστω  $k = 0, l \geq 1$ , και  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap V(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Τότε, υπάρχει μια σταθερά  $c$  ανεξάρτητη των  $h, \tau$  τέτοιο ώστε,

$$\|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C(h\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]}).$$

Έστω  $k = 0, l \geq 1$ , και  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Τότε υπάρχει μια σταθερά  $C > 0$  ανεξάρτητη των  $h, \tau$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}), \\ \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + (\tau^{1/2}/h)(\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]}). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Βλέπε Παράρτημα Α1.  $\square$

**Σημείωση 4.2.38.** Ο υπολογισμός ευστάθειας στον  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  απαιτεί το περιορισμό για το χρονικό βήμα  $\tau \leq Ch^2$  εξαιτίας της έλλειψης ομαλότητας ως προς το χρόνο. Για τον δεύτερο υπολογισμό, τονίζουμε πως αν είναι διαθέσιμη περισσότερη ομαλότητα, δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη εκτίμηση. Ειδικότερα το  $v^{(k+1)} \in L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ , οπότε έχουμε τη βελτιωμένη τάξη σύγκλισης  $\mathcal{O}(h^l + \tau^{k+1})$  στην  $\|\cdot\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]}$  νόρμα. Ωστόσο, παρατηρούμε πως για τα χαμηλότερης τάξης σχήματα  $k = l \leq 1$  η αυξημένη ομαλότητα  $v_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  δεν είναι διαθέσιμη, τουλάχιστον με τη παρουσία περιορισμών για τον έλεγχο. Οπότε, δίνουμε έμφαση στο ότι η έλλειψη ομαλότητας αποτελεί εμπόδιο για την ανάπτυξη σχημάτων υψηλότερης τάξης. Λειτουργώντας παρόμοια, παίρνουμε επίσης τις εκτιμήσεις σε αυθαίρετα σημεία όπως στο [32]. Τελικώς, είναι σημαντικό να πούμε πως ισχύουν οι προσεγγιστικές ιδιότητες της  $Q_h^{loc}$  στον  $\|\cdot\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}$  νόρμας (βλέπε π.χ. [69, Πρόταση 2.12]) μόνο στον υπόχωρο μηδενικής απόκλισης,  $\mathbf{V}^{-1} \equiv \{v \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) : \operatorname{div} v = 0\}$  εφοδιασμένο με τη νόρμα  $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^{-1}} = \|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-1}}$ . Στη συνέχεια έχουμε τη προϋπόθεση μηδενικής απόκλισης:

$$\langle v, \nabla \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \text{ στο } H_0^2(\Omega) \equiv \{\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : (\nabla \phi)|_\Gamma = 0\},$$

όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1}$ . Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην [69, Ενότητα 2.3] για μια λεπτομερή ανάλυση της αντίστοιχης προβολής και των ιδιοτήτων της. Σημειώνουμε ωστόσο πως στην επακόλουθη ανάλυση η χρήση της  $\|\cdot\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}$  εκτίμησης προβολής δεν είναι απαραίτητη.

Το επόμενο αποτέλεσμα δηλώνει πως το σφάλμα σχετικό με τη βοηθητική προβολή είναι τόσο καλό όσο το επιτρέπει το τοπικό dG σφάλμα προβολών, και οπότε είναι βέλτιστο ως προς την έννοια της διαθέσιμης ομαλότητας.

**Θεώρημα 4.2.39.** Έστω  $f \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  και  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  είναι δοσμένα, και  $(\bar{y}, \bar{p}), (\bar{\mu}, \bar{\phi}) \in W_S(0, T) \times L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  είναι οι λύσεις των (3.3.20)-(3.3.21)-(3.3.19) ή (3.3.20), και  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  είναι οι λύσεις των (4.2.66)-(4.2.67). Συμβολίζουμε με  $\bar{e} = \bar{y} - w_h, \bar{r} = \bar{\mu} - z_h$  και έστω  $e_p \equiv \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}, r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$ , όπου τα  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  είναι ορισμένα στους Ορισμούς 4.2.35 και 4.2.36. Τότε, υπάρχει μια αλγεβρική σταθερά  $C > 0$  που εξαρτάται μόνο από τα  $\Omega$  τέτοια ώστε, για κάθε  $q_h \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,

- 1)  $\|\bar{e}\|_{W(0, T)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|\bar{e}^i\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C(\|\bar{e}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/\nu)(\|e_p\|_{W(0, T)}^2 + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2)),$
- 2)  $\|\bar{r}\|_{W(0, T)}^2 + \sum_{i=1}^N \|\bar{r}^i\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C(1/\nu)(\|\bar{e}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}^2 + \|r_p\|_{W(0, T)}^2 + \|\phi - q_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2),$
- 3)  $\|\bar{e}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq C(1/\nu)(\nu\|e_p\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|e_p\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]})),$
- 4)  $\|\bar{r}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq C(\nu\|\bar{e}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|r_p\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]})).$

Εδώ,  $w_h^0 = y_h^0$ , όπου  $y_h^0$  συμβολίζει τη προσέγγιση του  $y_0$ , και  $C$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το χωρίο  $\Omega$ .

Απόδειξη. Εκτιμήσεις (1)-(2): Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με  $\bar{e} = \bar{y} - w_h, \bar{r} = \bar{\mu} - z_h$  και διαχωρίζουμε τα  $\bar{e}, \bar{r}$  σε  $\bar{e} \equiv e_{1h} + e_p \equiv (Q_h^{loc} \bar{y} - w_h) + (\bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}), \bar{r} \equiv r_{1h} + r_p \equiv (P_h^{loc} \bar{\mu} - z_h) + (\bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu})$ , όπου  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  ορίζονται στους Ορισμούς 4.2.35 και 4.2.36. Αφαιρώντας την (4.2.66) από την (3.3.20), και

την (4.2.67) από την (3.3.21) παίρνουμε τη συνθήκη ορθογωνιότητας: Για  $n = 1, \dots, N$ , και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$

$$\begin{aligned} (\bar{e}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle \bar{e}, v_{ht} \rangle + a(\bar{e}, v_h) + b(v_h, \bar{p} - p_{1h}) \right) dt &= (\bar{e}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}), \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{y} - w_h, q_h) dt &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.69)$$

$$\begin{aligned} -(\bar{r}_+^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle \bar{r}, v_{ht} \rangle + a(\bar{r}, v_h) + b(v_h, \bar{\phi} - \phi_{1h}) \right) dt &= -(\bar{r}_+^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{e}, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{\mu} - z_h, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

Παρατηρούμε πως η συνθήκη ορθογωνιότητας (4.2.69) είναι αποσυζευγμένη και ταυτίζεται με την συνθήκη ορθογωνιότητας [32, Εξίσωση (4.4)]. Οπότε εφαρμόζοντας τα σχετικά θεωρήματα του [32, Θεωρήματα 4.6 και 4.7], παίρνουμε τη πρώτη εκτίμηση. Για τη δεύτερη εκτίμηση, παρατηρούμε πως η συνθήκη ορθογωνιότητας (4.2.70) είναι ισοδύναμη με: Για  $n = 1, \dots, N$ , και για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$ ,

$$\begin{aligned} -(r_{1h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{1h}, v_{ht} \rangle + a(r_{1h}, v_h) + b(v_h, \bar{\phi} - \phi_{1h}) \right) dt \\ = -(r_{1h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (\bar{e}, v_h) - a(r_p, v_h) \right) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{\mu} - z_h, q_h) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

Εδώ, έχουμε χρησιμοποιήσει τον Ορισμό 4.2.35 της προβολής  $P_h^{loc}$ , που δείχνει πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle r_p, v_{ht} \rangle dt = 0$  και  $(r_{p+}^n, v^n) = 0$ . Θέτοντας  $v_h = r_{1h} \in \mathcal{U}_h$  στην (4.2.71), χρησιμοποιώντας το περιορισμό μη συμπίεστότητας,  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(r_{1h}, \bar{\phi} - \phi_{1h}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(r_{1h}, \bar{\phi} - q_h)$  έχουμε,

$$\begin{aligned} -(1/2) \|r_{1h+}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|[r_{1h}^n]\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|r_{1h+}^{n-1}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (\nu/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \\ \leq C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (1/\nu) \|\bar{e}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/\nu) \|r_p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\bar{\phi} - q_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (4.2.72)$$

Προσθέτοντας τις ανισότητες (4.2.72) και χρησιμοποιώντας τη τριγωνική ανισότητα παίρνουμε την εκτίμηση για τα σημεία διαμέρισης και στον  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ . Αφού έχει αποδειχθεί η εκτίμηση για το  $\|\bar{r}\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]}$ , η εκτίμηση στον  $L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  προκύπτει χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα του Θεωρήματος [32, Θεώρημα 4.7], τροποποιημένο ώστε να χειριστούμε την οπισθόδρομη χρονικά εξίσωση Stokes.

*Εκτιμήσεις (3) και (4):* Στρέφουμε τη προσοχή μας στις τελευταίες δυο εκτιμήσεις. Με στόχο να αποδείξουμε μια βελτιωμένη τάξη σύγκλισης για τη νόρμα  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , κατασκευάζουμε ένα δυϊκό επιχειρήμα ώστε να πάρουμε ένα καλύτερο φράγμα για τη ποσότητα  $\|e_{1h}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}^2$ . Γι αυτό το σκοπό, γενικεύουμε το δυϊκό επιχειρήμα της απόδειξης της [14, Ενότητα 3] ή του [30, Λήμμα 4.3] με στόχο να χειριστούμε σχήματα αυθαίρετης τάξης, και τον διακριτό περιορισμό μη συμπίεστότητας. Ορίζουμε ένα οπισθόδρομο χρονικά εξελικτικό πρόβλημα με δεξί μέλος  $e_{1h} \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , και μηδενικά τελικά δεδομένα, δηλ., για  $n = 1, \dots, N$  και για όλα τα  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , αναζητούμε  $(z, \psi) \in W(0, T) \times L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \int_0^T (\langle z, v_t \rangle + a(v, z) + b(v, \psi)) dt + (\phi(t^{n-1}), v(t^{n-1})) &= \int_0^T (e_{1h}, v) dt, \\ \int_0^T b(z, q) dt &= 0 \quad \forall q \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]. \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

Σημειώνουμε πως εφόσον  $e_{1h} \in L^\infty[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$ , τότε η Σημείωση 3.2.8 υποδηλώνει πως ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\|z\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]} + \|z_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|\psi\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C \|e_{1h}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}. \quad (4.2.74)$$

Η έλλειψη ομαλότητας του δεξιού μέλους της (4.2.73) εξαιτίας της παρουσίας ασυνεχειών, δείχνει πως δε μπορούμε να βελτιώσουμε την ομαλότητα του  $z$  στον  $[0, T]$ . Το σχετικό ασυνεχές χρονικού βηματισμού σχήμα μπορεί να οριστεί ως ακολούθως: δοσμένων τελικών δεδομένων  $z_{h+}^N = 0$ , αναζητούμε  $(z_h, \psi_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$ ,

$$\begin{aligned} -(z_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} ((z_h, v_{ht}) + a(z_h, v_h) + b(\psi_h, v_h)) dt + (z_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{1h}, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z_h, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.75)$$

Επομένως χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.23, έχουμε  $\|z_h\|_{L^\infty[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C_k \|e_{1h}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}$ . Τώρα είναι ξεκάθαρο ότι έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση για το  $z - z_h$ , το οποίο είναι άμεση εφαρμογή των προηγούμενων εκτιμήσεων στον  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ , των προσεγγιστικών ιδιοτήτων του Λήμματος 4.2.37, και των προβολών  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$ , (βλέπε π.χ. το [32, Θεώρημα 4.6]),

$$\begin{aligned} \nu \|z - z_h\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C (h + \tau^{1/2}) (\|z\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]} + \|z_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|\psi\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}) \\ &\leq C (h + \tau^{1/2}) \|e_{1h}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}. \end{aligned} \quad (4.2.76)$$

Παρατηρούμε πως η έλλειψη ομαλότητας στο δεξί μέλος περιορίζει την τάξη σύγκλισης σε αυτή που δίνεται από το χαμηλότερης τάξης σχήμα  $l \geq 1$ ,  $k = 0$ , ακόμη κι εάν επιλεχθούν υψηλότερης τάξης σχήματα (χρονικά). Θέτοντας  $v_h = e_{1h}$ , στην (4.2.75), και χρησιμοποιώντας το γεγονός πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(e_{1h}, \psi_h) dt = 0$  έχουμε,

$$-(z_{h+}^n, e_{1h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (z_h, e_{1ht}) + a(e_{1h}, z_h) dt + (z_{h+}^{n-1}, e_{1h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt.$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση ως προς το χρόνο, παίρνουμε,

$$-(z_{h+}^n, e_{1h}^n) + (z_h^n, e_{1h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (- (z_{ht}, e_{1h}) + a(z_h, e_{1h})) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt. \quad (4.2.77)$$

Θέτοντας  $v_h = z_h$  στην (4.2.69) και χρησιμοποιώντας το  $\bar{e} = e_p + e_{1h}$ , ο ορισμός της προβολής  $Q_h^{loc}$  του Ορισμού 4.2.36, και το γεγονός πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z_h, \bar{p} - p_{1h}) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z_h, \bar{p} - q_h) dt$  μας δίνει,

$$(e_{1h}^n, z_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (- (e_{1ht}, z_{ht}) + a(e_{1h}, z_h)) dt - (e_{1h}^{n-1}, z_{h+}^{n-1}) = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, z_h) + b(z_h, \bar{p} - q_h)) dt, \quad (4.2.78)$$

Εδώ, έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει το γεγονός πως ο ορισμός της προβολής  $Q_h^{loc}$  του Ορισμού 4.2.36, δείχνει πως  $(e_p^n, z_h^n) = 0$ ,  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_p, v_{ht}) dt = 0$  και  $(e_p^{n-1}, z_{h+}^{n-1}) = 0$ . Χρησιμοποιώντας την (4.2.77) για να αντικαθιστήσουμε τους τρεις πρώτους όρους της (4.2.78) καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} (z_{h+}^n, e_{1h}^n) - (e_{1h}^{n-1}, z_{h+}^{n-1}) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, z_h) + b(z_h, \bar{p} - q_h)) dt \\ &= - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, z_h - z) + a(e_p, z) + b(z_h - z, \bar{p} - q_h)) dt \\ &= - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, z_h - z) + \nu(e_p, \Delta z) + b(z_h - z, \bar{p} - q_h)) dt, \end{aligned}$$

όπου στις δυο τελευταίες ισότητες έχουμε χρησιμοποιήσει παραγοντική ολοκλήρωση (στο χώρο) και ο περιορισμός μη συμπίεστότητας μας δείχνει πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z, p - q_h) dt = 0$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + (z_{h+}^n, e_{1h}^n) - (e_{1h}^{n-1}, z_{h+}^{n-1}) &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \nu (\|z_h - z\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|e_p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}) dt \\ &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|e_p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\Delta z\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|z - z_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\bar{p} - q_h\|_{L^2(\Omega)}) dt. \end{aligned}$$

Οπότε προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες και χρησιμοποιώντας το ότι  $\phi_+^N \equiv 0$  και  $e_{1h-}^0 = 0$  (εξ ορισμού) και αναδιατάσσοντας τους όρους, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (1/2) \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left( \nu \|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \|z\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)]} \right. \\ &+ \nu \|z_h - z\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} (\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + (1/\nu) \|p - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}) \\ &\leq C \left( \nu \|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \right. \\ &\left. + (1/\nu) (h + \tau^{1/2}) \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} (\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + (1/\nu) \|p - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}) \right). \end{aligned}$$

Εδώ, έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα Cauchy-Schwarz, τα φράγματα ευστάθειας της δυϊκής εξίσωσης (4.2.74) και τις εκτιμήσεις σφαλμάτων (4.2.76) για το  $z_h - z$ . Τελικώς, η εκτίμηση για το  $\|\bar{r}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$  προκύπτει χρησιμοποιώντας ένα παρόμοιο δυϊκό επιχείρημα.  $\square$

**Σημείωση 4.2.40.** Ο συνδυασμός των τελευταίων δυο Θεωρημάτων δείχνει τη “συμμετρική μηδενικής απόκλισης” κατασκευή της εκτίμησης. Ειδικότερα υποθέτουμε πως τα αρχικά δεδομένα  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ , και ο όρος δύναμης  $f \in L^2[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , και ορίζουμε τη φυσική ενεργειακή νόρμα  $\|(\nu_1, \nu_2)\|_{W_S(0,T)} \equiv \|\nu_1\|_{W_S(0,T)} + \|\nu_2\|_{W_S(0,T)}$  εφοδιασμένη με την ασθενή μορφή. Οπότε, η εκτίμηση υπό υποθέσεις ελάχιστης ομαλότητας μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\|(\bar{e}, \bar{r})\|_{W_S(0,T)} \leq C (\|(e_p, r_p)\|_{W_S(0,T)} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}).$$

Η παραπάνω εκτίμηση καταδεικνύει πως το σφάλμα είναι τόσο καλό όσο οι ιδιότητες προσεγγισιμότητας επιτρέπουν να είναι, υπό τις υποθέσεις της φυσικής παραβολικής ομαλότητας, και μπορεί κάποιος να το δει ως το πλήρως διακριτό ανάλογο του Λήμματος Céa, βλέπε π.χ. [34]. Οπότε, οι τάξεις σύγκλισης για τα  $\bar{e}, \bar{r}$  εξαρτώνται μόνο από τα αποτελέσματα της ομαλότητας και τις προσεγγισιμότητας μέσω του σφάλματος προβολών  $e_p$  όπως φαίνεται στο Λήμμα 4.2.37 και τη Σημείωση 4.2.38. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιείται το στοιχείο Taylor-Hood και  $\bar{y} \in L^2[0,T;\mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ ,  $\bar{p} \in L^2[0,T;L_0^2(\Omega)]$ , τότε για  $\tau \leq Ch^2$  έχουμε

1.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C$ ,  $\|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C$ ,
2.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq Ch \|y\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \tau^{1/2} \|y_t\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}$ .

Οπότε οι παραπάνω υπολογισμοί και το Θεώρημα 4.2.39 δείχνουν πως  $\|\bar{e}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h)$ , για  $\tau \leq Ch^2$ . Προφανώς η εκτίμηση του Θεωρήματος 4.2.39 εφαρμόζεται και στη περίπτωση πιο ομαλών λύσεων. Για παράδειγμα, για ομαλές λύσεις, το Taylor-Hood στοιχείο συνδυασμένο με σχήμα χρονικού βηματισμού  $dG$ , τάξης  $k$  μας δίνει τις εξής τάξεις σύγκλισης,

1.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C(h^2 + \tau^{k+1})$ ,
2.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq C(h^3 + \tau^{k+1})$ .

Οπότε, το Θεώρημα 4.2.39, υποδηλώνει πως για  $\tau \leq Ch^2$

$$\begin{aligned} \|\bar{e}\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^2 + \tau^{k+1}), \\ \|\bar{r}\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^2 + \tau^{k+1}), \\ \|\bar{e}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^3 + \tau^{k+1}), \end{aligned}$$



$$\|\bar{r}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h^3 + \tau^{k+1}).$$

**4.2.3.2** Συμμετρικές εκτιμήσεις για το σύστημα βελτιστοποίησης.

Απομένει να συγκρίνουμε το διακριτό σύστημα βελτιστοποίησης (4.1.22)-(4.1.23)-(4.1.20) με το βοηθητικό σύστημα (4.2.66)-(4.2.67).

**Λήμμα 4.2.41.** Έστω  $(\bar{y}_h, \bar{p}_h), (\bar{\mu}_h, \bar{\phi}_h), (w_h, p_{1h}), (z_h, \phi_{1h}) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  οι λύσεις του διακριτού συστήματος βελτιστοποίησης (4.1.22)-(4.1.23)-(4.1.20) και του βοηθητικού συστήματος (4.2.66)-(4.2.67) αντιστοίχως. Συμβολίζουμε με  $\bar{e} \equiv \bar{y} - w_h, \bar{r} \equiv \bar{\mu} - z_h$ , και έστω  $e_{2h} \equiv w_h - \bar{y}_h, r_{2h} \equiv z_h - \bar{\mu}_h$ . Τότε υπάρχει αλγεβρική σταθερά  $C > 0$  τέτοια ώστε:

$$\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} + (1/\alpha^{1/2})\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq C(1/\alpha^{1/2})\|\bar{r}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}.$$

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \|e_{2h}^N\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|e_{2h}^i\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^T \|e_{2h}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt &\leq (C/\alpha^{3/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt, \\ \|r_{2h}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|r_{2h}^i\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^T \|r_{2h}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt &\leq (C/\alpha^{1/2}) \int_0^T \|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

όπου  $C$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το  $\Omega$ .

*Απόδειξη.* Αφαιρώντας τη σχέση (4.1.23) από τη (4.2.67) παίρνουμε την εξίσωση: Για  $n = 1, \dots, N$ ,  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n, \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathcal{Q}_h]$

$$\begin{aligned} -(r_{2h+}^n, v^n) + (r_{2h+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, v_{ht} \rangle + a(r_{2h}, v_h) + b(v_h, \phi_{1h} - \bar{\phi}_h) \right) dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(r_{2h}, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.79)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (4.1.22) από τη (4.2.66) και χρησιμοποιώντας τις (3.3.18)-(4.1.20), παίρνουμε: Για  $n = 1, \dots, N$ , για όλα τα  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n, \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathcal{Q}_h]$ ,

$$\begin{aligned} (e_{2h}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, v_{ht} \rangle + a(e_{2h}, v_h) + b(v_h, p_{1h} - \bar{p}_h) \right) dt \\ = (e_{2h}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} -(1/\alpha)(\bar{\mu} - \bar{\mu}_h, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(e_{2h}, q_h) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.2.80)$$

Θέτουμε  $v_h = e_{2h}$  στην (4.2.79) και παρατηρώντας πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(e_{2h}, \phi_{1h} - \bar{\phi}_h) dt = 0$ , παίρνουμε

$$-(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, e_{2ht} \rangle + a(r_{2h}, e_{2h}) \right) dt + (r_{2h+}^{n-1}, e_{2h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt. \quad (4.2.81)$$

Θέτοντας  $v_h = r_{2h}$  στην (4.2.80), και παρατηρώντας πως  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(r_{2h}, p_{1h} - \bar{p}_h) dt = 0$  έχουμε,

$$\begin{aligned} (e_{2h}^n, r_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, r_{2ht} \rangle + a(e_{2h}, r_{2h}) \right) dt - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) \\ = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -(1/\alpha)\langle \bar{r}, r_{2h} \rangle - (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (4.2.82)$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση ως προς το χρόνο στην (4.2.82), και αφαιρώντας την εξίσωση που προκύπτει από τη (4.2.81), καταλήγουμε στην

$$(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha) \|r_{2h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) dt = -(1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \bar{r}, r_{2h} \rangle dt. \quad (4.2.83)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young για να φράζουμε το δεξί μέλος, προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν από το 1 έως το  $N$ , και παρατηρώντας πως  $\sum_{n=1}^N ((r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1})) = 0$  (αφού  $e_{2h}^0 \equiv 0$ ,  $r_{2h+}^N = 0$ ) έχουμε τη πρώτη εκτίμηση. Για τη δεύτερη εκτίμηση, απλώς θέτουμε  $v_h = e_{2h}$  στην (4.2.80) και χρησιμοποιούμε την προηγούμενη εκτίμηση για το  $r_{2h}$ . Τελικώς, η τρίτη εκτίμηση προκύπτει εύκολα θέτοντας  $v_h = r_{2h}$  στην (4.2.79) στην εκτίμηση για το  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$  και αλγεβρικούς υπολογισμούς.  $\square$

Διάφορες εκτιμήσεις μπορούν να παραχθούν χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 4.2.39 και του Λήμματος 4.2.41 και τα αποτελέσματα της θεωρίας προσεγγισιμότητας. Ξεκινώντας παρουσιάζουμε τις σχεδόν συμμετρικές εκτιμήσεις σφαλμάτων ανάλογες με το κλασικό Λήμμα του Cέα.

**Θεώρημα 4.2.42.** Έστω  $(\bar{y}_h, \bar{p}_h)$ ,  $(\bar{\mu}_h, \bar{\phi}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  και  $(\bar{y}, \bar{p})$ ,  $(\bar{\mu}, \bar{\phi}) \in W_S(0, T) \times L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  είναι οι προσεγγιστικές λύσεις του διακριτού και του συνεχούς συστήματος βελτιστοποίησης (4.1.22)-(4.1.23)-(4.1.20) και (3.3.16)-(3.3.17)-(3.3.18) αντιστοίχως. Θεωρούμε  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$  τα σφάλματα προβολών, όπου  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  είναι ορισμένα στους Ορισμούς 4.2.35 και 4.2.36 αντιστοίχως. Τότε, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση για το σφάλμα  $e = \bar{y} - \bar{y}_h$  και  $r = \bar{\mu} - \bar{\mu}_h$ :

$$\|(e, r)\|_{W_S(0,T)} \leq \tilde{C}(1/\alpha^{3/2}) (\|(e_p, r_p)\|_{W_S(0,T)} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}),$$

όπου η  $\tilde{C}$  εξαρτάται από τις σταθερές του Θεωρήματος 4.2.39 και του Λήμματος 4.2.41,  $1/\nu^2$ , και είναι ανεξάρτητη των  $\tau, h, \alpha$ , και  $q_h \in \mathcal{Q}_h$  αυθαίρετο.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε πως μια εκτίμηση για το  $\|e_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}$  και  $\|r_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}$  μπορεί να παραχθεί όμοια με το [32, Θεώρημα 4.6] εφόσον τα (4.2.78)-(4.2.79) είναι αποσυσζευγμένα εξαιτίας της εκτίμησης του Λήμματος 4.2.41. Οπότε, προκύπτει η εκτίμηση χρησιμοποιώντας τη τριγωνική ανισότητα και τις προηγούμενες εκτιμήσεις του Θεωρήματος 4.2.39 και του Λήμματος 4.2.41.  $\square$

Ένας βελτιωμένος υπολογισμός για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα, για τη βασική και τη συζυγή μεταβλητή προκύπτει συνδυάζοντας τις εκτιμήσεις του Θεωρήματος 4.2.39, και της πρώτης εκτίμησης του Λήμματος 4.2.41.

**Θεώρημα 4.2.43.** Υποθέτουμε πως ισχύουν  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , και οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.39 και του Λήμματος 4.2.41. Έστω  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$  είναι τα σφάλματα προβολών, όπου  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  ορίζονται στους Ορισμούς 4.2.35, και 4.2.36 αντιστοίχως. Τότε, υπάρχει μια σταθερά  $C$  που εξαρτάται από τα  $\Omega, 1/\nu$  τέτοια ώστε,

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C(1/\alpha^{1/2}) \left( \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{1/2} (\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}) \right. \\ &\quad \left. + \tau^{1/2} (\|r_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}) \right), \\ \|r\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C \left( \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{1/2} (\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}) \right. \\ &\quad \left. + \tau^{1/2} (\|r_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}) \right). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η πρώτη εκτίμηση προκύπτει χρησιμοποιώντας τη τριγωνική ανισότητα και τις προηγούμενες εκτιμήσεις του Θεωρήματος 4.2.39 και του Λήμματος 4.2.41.  $\square$

Κλείνουμε αυτήν τη παράγραφο παραθέτοντας τις τάξεις σύγκλισης σε δύο περιπτώσεις για το στοιχείο Taylor-Hood ανάλογα με τη διαθέσιμη ομαλότητα. Προφανώς μπορούν να προκύψουν πολλές άλλες εκτιμήσεις, ανάλογα με τα επιλεγμένα στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν.

**Πρόταση 4.2.44.** Δεδομένου πως ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.39 και του Λήμματος 4.2.41.

1) Έστω  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , και υπάρχει  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ , τέτοια ώστε η ασθενής μορφή (3.3.20) να είναι έγκυρη. Υποθέτουμε πως χρησιμοποιούνται τα στοιχεία Taylor-Hood για να κατασκευάσουμε τους υποχώρους και τμηματικά σταθερά πολυώνυμα  $k = 0$  για την χρονική διακριτοποίηση. Τότε, για  $\tau \leq Ch^2$  έχουμε,

$$\|e\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq Ch \text{ και } \|r\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq Ch.$$

2) Έστω  $\bar{y}, \bar{\mu} \in L^2[0, T; \mathbf{H}^3(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ ,  $\bar{p}, \bar{\phi} \in L^2[0, T; H^2(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ . Υποθέτουμε πως χρησιμοποιούνται στοιχεία Taylor-Hood συνδυασμένα με τμηματικά πολυώνυμα βαθμού  $k$  για τη χρονική διακριτοποίηση, τότε ισχύουν οι ακόλουθες τάξεις σύγκλισης:

$$\begin{aligned} \|(e, r)\|_{W(0, T)} &\leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^{3/2})(h^2 + \tau^{k+1}), \\ \|e\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(1/\alpha^{1/2})(h^3 + \tau^{k+1} + \tau^{1/2}(h^2 + \tau^{k+1})), \\ \|r\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h^3 + \tau^{k+1} + \tau^{1/2}(h^2 + \tau^{k+1})). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Οι τάξεις σύγκλισης προκύπτουν απευθείας από το Θεώρημα 4.2.39, το Θεώρημα 4.2.43, το Λήμμα 4.2.37 και τη Σημείωση 4.2.40.  $\square$

#### 4.2.3.3 Έλεγχος με περιορισμούς: Η διακριτή προσέγγιση μεταβολών.

Αποδεικνύουμε ότι η διακριτή προσέγγιση μεταβολών του Hinze ([65]) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο παραπάνω πλαίσιο. Παρόμοια με τη περίπτωση του γραμμικού προβλήματος με Robin συνοριακό έλεγχο, στη διακριτή προσέγγιση μεταβολών ο έλεγχος δεν διακριτοποιείται άμεσα αλλά έμμεσα, και ειδικότερα ορίζουμε  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$ . Οπότε, το διακριτό βέλτιστου ελέγχου πρόβλημά μας ταυτίζεται με το: Ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού

$$J_h(y_h(g), g) = \int_0^T \|y_h(g) - y_d\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + \alpha \int_0^T \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt$$

υπό την (4.1.2), όπου  $y_h(g) \in \mathcal{U}_h$  συμβολίζει τη λύση του (4.1.2) με δεξί μέλος το δεδομένο έλεγχο  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Ο βέλτιστος έλεγχος (χρησιμοποιώντας το συμβολισμό  $\bar{g}_h$ ) ικανοποιεί την ακόλουθη πρώτης τάξης συνθήκη βελτιστοποίησης,

$$J_h'(\bar{g}_h)(u - \bar{g}_h) \geq 0, \quad \text{για όλα τα } u \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)],$$

Όπου  $\bar{g}_h$  παίρνει τη μορφή  $\bar{g}_h = \text{Proj}_{[g_a, g_b]}(-\frac{1}{\alpha} \bar{\mu}_h(\bar{g}_h))$ , όμοια με τη συνεχή περίπτωση. Σημειώνουμε πως το  $\bar{g}_h$  δεν είναι γενικά μια συνάρτηση πεπερασμένων στοιχείων που αντιστοιχεί στο πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούμε. Οπότε μια αλγοριθμική κατασκευή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι στη βιβλιογραφία, βλέπε π.χ. [65]. Ωστόσο, στις περισσότερες περιπτώσεις, ενδιαφέρον έχει η βασική μεταβλητή και όχι ο έλεγχος. Για τη δεύτερη παράγωγο εύκολα παίρνουμε μια εκτίμηση ανεξάρτητη των  $\bar{g}, \bar{g}_h$ , και ειδικότερα,

$$J_h''(u)(\tilde{u}, \tilde{u}) \geq \alpha \|\tilde{u}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}^2, \quad \text{για όλα τα } \tilde{u} \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)].$$

**Θεώρημα 4.2.45.** Έστω  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , και υπάρχει μια συσχετισμένη πίεση  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ . Υποθέτουμε πως  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$  και έστω  $\bar{g}, \bar{g}_h$  είναι οι λύσεις του αντίστοιχου συνεχούς και διακριτού συστήματος βέλτιστου ελέγχου. Τότε, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(1/\alpha)\|\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g})\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \\ &\leq C(\|e_p\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}) \\ &\quad + \tau^{1/2}(\|e_p\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}) \\ &\quad + \tau^{1/2}(\|r_p\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}), \end{aligned}$$

όπου  $\mu \in (\mu_h(\bar{g}), \phi_h(\bar{g}))$  και  $(\mu(\bar{g}), \bar{\phi})$  συμβολίζουμε τις λύσεις των (4.1.19) και (3.3.15) αντίστοιχως, και  $e_p \equiv y(\bar{g}) - Q_h^{loc} y(\bar{g})$ ,  $r_p = \mu(\bar{g}) - P_h^{loc} \mu(\bar{g})$  είναι τα αντίστοιχα σφάλματα ελέγχου. Επιπλέον, αν  $\tau \leq Ch^2$ , τότε έχουμε

$$\|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq Ch.$$

Απόδειξη. Υπογραμμίζουμε πως  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$ , και οπότε οι πρώτης τάξης αναγκαίες συνθήκες δίνουν

$$J'_h(\bar{g}_h)(\bar{g} - \bar{g}_h) \geq 0 \quad \text{και} \quad J'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) \leq 0. \quad (4.2.84)$$

Κατά συνέπεια, χρησιμοποιώντας τις δεύτερης τάξης συνθήκες και το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε για κάθε  $u \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , (και ως εκ τούτου για τη παράσταση που προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής) και τις ανισότητες (4.2.84),

$$\begin{aligned} \alpha\|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}^2 &\leq J''_h(u)(\bar{g} - \bar{g}_h, \bar{g} - \bar{g}_h) = J'_h(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) - J'_h(\bar{g}_h)(\bar{g} - \bar{g}_h) \\ &\leq J'_h(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) - J'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) = \int_0^T \int_{\Omega} (\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g}))(\bar{g} - \bar{g}_h) dx dt \\ &\leq C\|\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g})\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}, \end{aligned}$$

και έτσι έχουμε τη πρώτη εκτίμηση. Τώρα, μπορεί εύκολα να προκύψει χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με το Θεώρημα 4.2.39. Πράγματι, αφαιρώντας την (4.1.19) από την (3.3.15) και θέτοντας  $\bar{r} = \mu_h(\bar{g}) - \mu(\bar{g})$ , και  $\bar{e} = y_h(\bar{g}) - y(\bar{g})$ . Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις του Θεωρήματος 4.2.39, και τις τάξεις σύγκλισης της Πρότασης 4.2.44, έχουμε τη ζητούμενη εκτίμηση, αφού παρατηρήσουμε τη μειωμένη ομαλότητα του  $\bar{e}$ .  $\square$

Αφού μελετήσαμε τις τάξεις σύγκλισης στις σχετικές νόρμες για το καθένα από τα υπό μελέτη προβλήματα, στα κεφάλαια που ακολουθούν περιγράφουμε τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα, και επαληθεύουμε τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα.

# 5

## ΠΕΙΡΑΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΕ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Μ.Δ.Ε.

---

*Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τις θεωρητικές αρχές και τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα για ένα πρόβλημα συνοριακού ελέγχου σε παραβολικές γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με Robin συνοριακές συνθήκες.*

### Περιεχόμενα

---

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 5.1   | Συνοριακές συνθήκες Robin - Περιγραφή του μοντέλου . . . . .           | 86 |
| 5.1.1 | Ομαλότητα στα αρχικά δεδομένα . . . . .                                | 86 |
| 5.1.2 | Μικρή ομαλότητα στα αρχικά δεδομένα . . . . .                          | 91 |
| 5.1.3 | Πείραμα με χρήση γραμμικών πολυωνύμων στο χώρο και στο χρόνο . . . . . | 92 |

---

## 5.1 Συνοριακές συνθήκες Robin - Περιγραφή του μοντέλου

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια σχετικά με το πρόβλημα συνοριακού ελέγχου Robin θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt$$

υπό τους περιορισμούς,

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= f, & \text{στο } (0, T) \times \Omega, \\ y + \lambda^{-1} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} &= g, & \text{στο } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0, x) &= y_0, & \text{στο } \Omega. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Θεωρούμε αριθμητικά παραδείγματα για το μοντέλο πρόβλημα στον χώρο  $\Omega \times I = \Omega \times [0, T] = [0, 1]^2 \times [0, 0.1]$  στις περιπτώσεις με:

- α)** Ομαλά αρχικά δεδομένα για την βασική μεταβλητή (με γνωστή αναλυτική λύση) χρησιμοποιώντας πολυώνυμο μηδενικού βαθμού χρονικά και πρώτου βαθμού στο χώρο,
- β)** Ασυνεχή αρχικά δεδομένα  $y_0 \in L^2(\Omega)$  - σε αυτή τη περίπτωση πρέπει να αναφέρουμε ότι έχουμε άγνωστη πραγματική λύση, θεωρώντας ως ακριβή λύση την λύση στο χώρο - χρονικό πλέγμα  $dt = 2.71267e - 05$ ,  $h = 5.20833e - 03$  (3687 και 37249 βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα), και
- γ)** Ομαλά αρχικά δεδομένα για την βασική μεταβλητή (με γνωστή πραγματική λύση) χρησιμοποιώντας πολυώνυμο πρώτου βαθμού χρονικά και χωρικά.

Σημειώνουμε ότι ο συνοριακός έλεγχος δεν παρουσιάζει συνεχείς πρώτες παραγώγους σε ορισμένα σημεία.

Στα παραδείγματα σταθεροποιούμε την παράμετρο ομαλοποίησης του συναρτησιακού στη τιμή  $\alpha = \pi^{-4}$ . Το συνοριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης λύνεται με το πακέτο FreeFem++, βλέπε π.χ. το [64] χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο κλίσεων σε έναν 4 Six-Core AMD Opteron(tm) Processor 8431, 96 GB RAM υπολογιστή.

### 5.1.1 Ομαλότητα στα αρχικά δεδομένα

Έστω  $a = -\sqrt{5}$ . Επιλέγουμε δεξί μέλος

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2) &= \pi^2 e^{a\pi^2 t} \left( 2(x_2^2 - x_2 + x_1^2) \cos(\pi x_1 x_2) \cos(\pi x_1(x_2 - 1)) \right. \\ &\quad \left. - (2x_2^2 - 2x_2 + 2x_1^2 + a + 1) \sin(\pi x_1 x_2) \sin(\pi x_1(x_2 - 1)) \right), \end{aligned}$$

αρχική συνθήκη  $y_0(x_1, x_2) = \sin(\pi(1 + x_1 x_2)) \sin(\pi x_1(x_2 - 1))$ , με βέλτιστο ζεύγος λύσεων  $(\bar{y}, \bar{g})$  του παραπάνω προβλήματος

$$\bar{y}(t, x_1, x_2) = \exp(a\pi^2 t) \sin(\pi(1 + x_1 x_2)) \sin(\pi x_1(x_2 - 1)),$$

ενώ η  $\bar{g}$  έχει υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την Robin συνθήκη σε κάθε συνιστώσα - πλευρά τετραγώνου  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  (ξεκινώντας από τη κάτω πλευρά) του συνόρου με

$$\bar{g}(t, x_1, x_2) = e^{\pi^2 at} \begin{cases} 0 & \text{στο } \Gamma_1, \\ \pi x_2 \sin(\pi x_2 - \pi) + \pi(1 - x_2) \sin(\pi x_2) & \text{στο } \Gamma_2, \\ \cos(\pi(x_2 - 1)) & \text{στο } \Gamma_3, \\ 0 & \text{στο } \Gamma_4. \end{cases}$$

Για αυτή την επιλογή δεδομένων και συνάρτηση στόχου  $y_d(t, x_1, x_2) = 0.5$ , τα αντίστοιχα σφάλματα για την βασική μεταβλητή καθώς και για την συνάρτηση ελέγχου για διαφορετικά πλέγματα φαίνονται στον Πίνακα 5.1.

**Πίνακας 5.1:** Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με  $k = 0$ ,  $\tau = h^2/2$  ομαλά αρχικά δεδομένα και  $y_d = 0.5$ .

| Διακριτοποίηση  | Σφάλματα       |                                |                                |             |
|-----------------|----------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
|                 | $\tau = h^2/2$ | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$   |
| $h = 0.2357022$ |                | 0.018310605                    | 0.070340370                    | 0.002395820 |
| $h = 0.1178511$ |                | 0.004085497                    | 0.031958661                    | 0.001857961 |
| $h = 0.0589255$ |                | 0.001335615                    | 0.016375314                    | 0.001738954 |
| $h = 0.0294627$ |                | 0.000766443                    | 0.008819160                    | 0.001711876 |
| $h = 0.0147313$ |                | 0.000676697                    | 0.005626214                    | 0.001705198 |
| Τάξη Σύγκλισης  |                | 1.526118558                    | 0.998546583                    | -           |

Οι τάξεις σύγκλισης που βλέπουμε είναι αυτές που προβλέπει η θεωρία και ίσες με 1.5 για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα και 1 για την  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  νόρμα ( $\mathcal{O}(\tau + h^{3/2})$  και  $\mathcal{O}(\tau + h)$  αντιστοίχως, σύμφωνα με τα θεωρητικά αποτελέσματα της Πρότασης 4.2.13). Ειδικότερα η τάξη σύγκλισης 1.5 για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα είναι η βέλτιστη που μπορούμε να πάρουμε, με αυτά τα συνοριακά δεδομένα, αφού από τον ορισμό της προβολής, είναι η  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  νόρμα που μας περιορίζει λόγω του συνόρου. Οπότε αντί να έχουμε τάξη σύγκλισης 2 όπως έχουμε στο κατανεμημένο έλεγχο με συνοριακές συνθήκες Dirichlet μηδέν, η τάξη σύγκλισης ελαττώνεται στη τιμή 1.5.

Παρόμοια αποτελέσματα έχουν προκύψει για συναρτήσεις στόχου 0, και  $0.5 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)$ . Πιο συγκεκριμένα παρατηρώντας τα αποτελέσματα που φαίνονται στους Πίνακες 5.1, 5.2, 5.3 για τους τρεις διαφορετικούς στόχους, βλέπουμε κατά προσέγγιση τις ίδιες τάξεις σύγκλισης για τα σφάλματα της βασικής μεταβλητής στους χώρους  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  και  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  καθώς και παρεμφερείς τιμές για το συναρτησιακό.

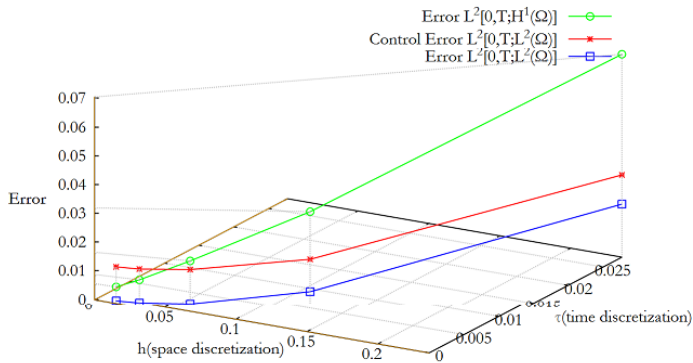
**Πίνακας 5.2:** Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με  $k = 0$ ,  $\tau = h^2/2$  ομαλά αρχικά δεδομένα και  $y_d = 0$ .

| Διακριτοποίηση  | Σφάλματα       |                                |                                |             |
|-----------------|----------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
|                 | $\tau = h^2/2$ | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$   |
| $h = 0.2357022$ |                | 0.018437187                    | 0.070206813                    | 0.003505277 |
| $h = 0.1178511$ |                | 0.004163875                    | 0.036356131                    | 0.002718328 |
| $h = 0.0589255$ |                | 0.001477032                    | 0.017039099                    | 0.002520912 |
| $h = 0.0294627$ |                | 0.000961147                    | 0.010077840                    | 0.002473947 |
| $h = 0.0147313$ |                | 0.000883837                    | 0.007476681                    | 0.002462163 |
| Τάξη Σύγκλισης  |                | 1.420572191                    | 0.875175799                    | -           |

Το 3-διάστατο Σχήμα 5.1 δείχνει από μία διαφορετική πλευρά, πώς μεταβάλλονται τα σφάλματα στους χώρους  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  και  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  καθώς τα  $\tau$ ,  $h$  αλλάζουν. Ειδικότερα ξεκινώντας, για

**Πίνακας 5.3:** Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με  $k = 0$ ,  $\tau = h^2/2$  ομαλά αρχικά δεδομένα και  $y_d = 0.5 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)$ .

| Διακριτοποίηση<br>$\tau = h^2/2$ | Σφάλματα                       |                                |             |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
|                                  | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$   |
| $h = 0.2357022$                  | 0.018033381                    | 0.070977749                    | 0.004957926 |
| $h = 0.1178511$                  | 0.003666894                    | 0.032317405                    | 0.004953116 |
| $h = 0.0589255$                  | 0.001015930                    | 0.016629768                    | 0.004905743 |
| $h = 0.0294627$                  | 0.000821597                    | 0.009086474                    | 0.004909695 |
| $h = 0.0147313$                  | 0.000879346                    | 0.005954120                    | 0.004907448 |
| Τάξη Σύγκλισης                   | 1.485364815                    | 0.988524738                    | -           |



**Σχήμα 5.1:** Σφάλματα για τη βασική μεταβλητή και τη μεταβλητή ελέγχου για  $\tau = h^2/2$ .

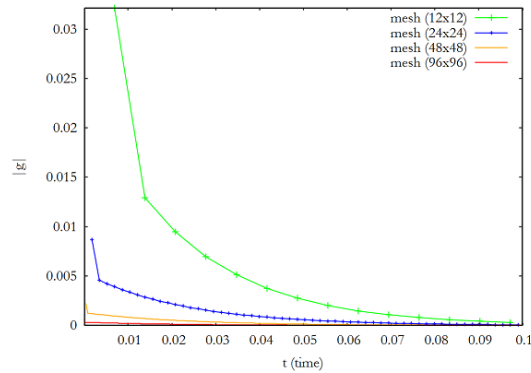
$h = 0.2357022$ , και  $\tau = 0.05555449$ , έχουμε σχετικά μεγάλα σφάλματα για την  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  νόρμα σφάλματος, και αρκετά μικρότερα σφάλματα για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , της τάξης του 0.070 και 0.018 αντίστοιχως. Καθώς εξελίσσεται το πείραμα τα σφάλματα ελαττώνονται μέχρι να φτάσουν στις τιμές 0.0056 και 0.00067 αντίστοιχα όπου και τα σφάλματα αρχίζουν να σταθεροποιούνται εξαιτίας της πολύ πυκνής χωρικής και χρονικής διαμερίσης, και επομένως των σφαλμάτων ολοκλήρωσης και στρογγυλοποίησης. Στο παραπάνω γράφημα είναι φανερό επίσης, ότι τα σφάλματα για τη συνάρτηση ελέγχου σταθεροποιούνται πιο γρήγορα αφού όπως είναι φυσιολογικό “δουλεύει” περισσότερο στα πρώτα βήματα ώστε να έχουμε ένα επιθυμητό έλεγχο.

Το 2-διάστατο Σχήμα 5.2, παρουσιάζει πως η νόρμα για τον έλεγχο  $\|g(t)\|_{L^2(\Omega)}$  μεταβάλλεται ως προς την εξέλιξη του χρόνου, στα πλέγματα για τις διάφορες διαμερίσεις των  $\tau, h$ . Το αριστερό γράφημα του Σχήματος 5.3, δείχνει πως η απόσταση από το στόχο  $\|y(t) - y_d(t)\|_{L^2(\Omega)}$ , μεταβάλλεται ως προς την εξέλιξη του χρόνου, σε διαφορετικά πλέγματα, και πιο συγκεκριμένα όσο περισσότερο πυκνό πλέγμα χρησιμοποιούμε, τόσο μικρότερη απόσταση από το στόχο επιτυγχάνουμε.

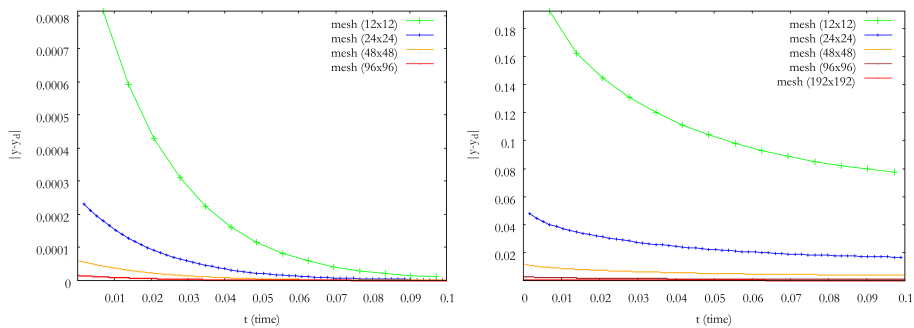
**Επίδραση από τις μεταβολές της ομαλοποιητικής παραμέτρου  $\alpha$  για το συναρτησιακό.** Στο Σχήμα 5.4 παρατηρούμε πως για μικρές τιμές της ομαλοποιητικής παραμέτρου εφαρμόζεται από τη μέθοδο κλίσεων μεγάλος έλεγχος, και αντίστροφα παρατηρήθηκαν μικρές τιμές της συνάρτησης ελέγχου για μεγάλες τιμές του  $\alpha$ . Από την εκτέλεση του κώδικα σε όλες αυτές τις περιπτώσεις παρατηρήσαμε ομαλή λειτουργία και τις αναμενόμενες τάξεις σύγκλισης για  $10^{-1} < \alpha < 10^{-5}$ .

**Η απόσταση της λύσης από το στόχο.** Σημαντική παρατήρηση είναι το ότι δε παρατηρήσαμε αλλαγή στη πρόοδο της απόστασης της αριθμητικής λύσης από το στόχο για τις διάφορες τιμές του  $\alpha$

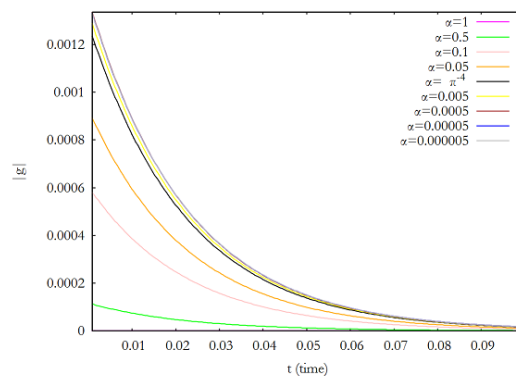




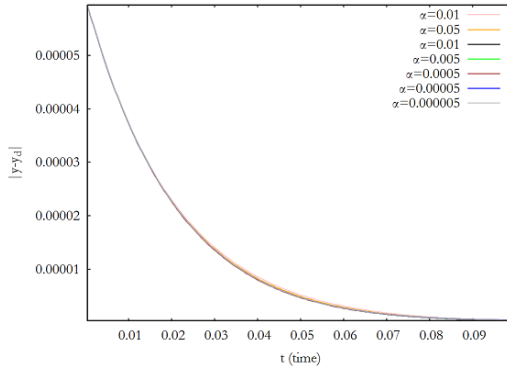
Σχήμα 5.2: Η νόρμα για τη συνάρτηση ελέγχου  $\|g(t)\|_{L^2(\Omega)}$ .



Σχήμα 5.3: Απόσταση από το στόχο  $\|y(t) - y_d(t)\|_{L^2(\Omega)}$ . α) Ομαλά δεδομένα. β) Δεδομένα με μικρή ομαλότητα  $L^2(\Omega)$  - ασυνέχεια.



Σχήμα 5.4: Επίδραση από τις μεταβολές της ομαλοποιητικής παραμέτρου για το συναρτησιακό  $\alpha$  στον έλεγχο  $\|g(t)\|_{L^2(\Omega)}$  για σταθερό πλέγμα  $48 \times 48$ , και τις διάφορες τιμές του  $\alpha$ .



**Σχήμα 5.5:** Επίδραση από τις μεταβολές της ομαλοποιητικής παραμέτρου για το συναρτησιακό  $\alpha$  στην απόσταση της λύσης από το στόχο  $\|y(t) - y_d(t)\|_{L^2(\Omega)}$ .

όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.5.

**Ο αλγόριθμος για τμηματικά σταθερά πολυώνυμα στο χρόνο.** Για τα παραπάνω αποτελέσματα χρησιμοποιήσαμε το παρακάτω κώδικα, αφού αρχικοποιήσαμε τα  $n = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , την παράμετρο ανοχής  $tol$  και τον έλεγχο  $g^0|_{\Gamma}$ . Να σημειώσουμε πως π.χ. το  $y^n$  είναι ακολουθία τμηματικά γραμμικών πολυωνύμων στο χρόνο, (με κάθε όρο αυτής της ακολουθίας να αντιπροσωπεύει άλλη ακολουθία τιμών σχετική με το χώρο) κατά την  $n$  επανάληψη της μεθόδου κλίσεων.

- **Βήμα 0** (Αρχική κατάσταση) Επίλυση με  $g|_{\Gamma} := g^0|_{\Gamma}$  για  $y := y^0$  του συστήματος

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= f, \\ y|_{\Gamma} + \lambda^{-1} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} &= g|_{\Gamma}, \\ y(0, x) &= y_0, \end{aligned}$$

- **Βήμα 1** (Επίλυση συζυγούς εξίσωσης) Υπολογισμός  $\mu := \mu^n$ ,

$$\begin{aligned} \mu_t + \Delta \mu &= y - y_d, \\ \mu|_{\Gamma} + \lambda^{-1} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \\ \mu(T, x) &= 0. \end{aligned}$$

- **Βήμα 2** (Νέα κατεύθυνση καθόδου) Λαμβάνουμε ως (descent) κατεύθυνση καθόδου την αρνητική κλίση του συναρτησιακού κόστους

$$-J'(g|_{\Gamma}) = -(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma})$$

- **Βήμα 3** (Έλεγχος του βήματος): Προσδιορισμός του βέλτιστου μεγέθους βήματος  $\varepsilon_n$ :

$$J(g^n|_{\Gamma} + \varepsilon_n(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma})) = \min_{\varepsilon > 0} J(g^n|_{\Gamma} + \varepsilon(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma}))$$

- **Βήμα 4** (Νέα συνάρτηση ελέγχου): Θέτουμε

$$g^{n+1}|_{\Gamma} := g^n|_{\Gamma} + \varepsilon_n(\alpha g^n|_{\Gamma} + \mu^n|_{\Gamma})$$

- **Βήμα 5** (Νέα κατάσταση): Ελέγχουμε αν  $J^n \leq J^{n-1}$  και θέτουμε  $\varepsilon = 1.5\varepsilon$ . Αν  $J^n \geq J^{n-1}$  θέτουμε  $\varepsilon = 0.5\varepsilon$ . Εκτελούμε το **Βήμα 0** με  $g|_\Gamma := g^{n+1}|_\Gamma$  για  $y := y^n$  και  $n = n + 1$ . Ο αλγόριθμος σταματά όταν  $|J^n - J^{n-1}|/J^n \leq \text{tol}$ .

Να σημειώσουμε πως για τη λύση της βασικής εξίσωσης χρειάζεται να γράψουμε τη βασική εξίσωση σε κατάλληλη ασυνεχή στο χρόνο Galerkin μορφή. Ειδικότερα οι προσεγγιστικές συναρτήσεις είναι τμηματικά σταθερά πολυώνυμα στο χρόνο οπότε η μέθοδος ανάγεται στην τροποποιημένη προς τα πίσω μέθοδο Euler (μέθοδο dG0):

$$(I + dtA)y_{i+1} + y_{i+1}|_\Gamma = y_i + g_{i+1}|_\Gamma + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f ds.$$

Ομοίως για τη λύση της συζυγούς εξίσωσης χρειάζεται να γράψουμε την οπισθόδρομη χρονικά εξίσωση στη μορφή

$$(I + dtA)\mu_i + \mu_i|_\Gamma = \mu_{i+1} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (y_i - y_d) ds.$$

Όπου ο τελεστής  $A$  αντιστοιχεί στο τελεστή Laplace.

### 5.1.2 Μικρή ομαλότητα στα αρχικά δεδομένα

Για αυτό το πρόβλημα τα  $\Omega$ ,  $T$ , είναι τα ίδια όπως στο πρώτο παράδειγμα, δηλαδή,  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $T = 0.1$ . Η διαφορά είναι ότι σε αυτό το παράδειγμα τα αρχικά δεδομένα  $y_0$  είναι μια ασυνεχής συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση

$$y_0 = \begin{cases} \sin(\pi(1 + x_1x_2))\sin(\pi x_1(x_2 - 1)) & \text{αν } x_1, x_2 \geq 0.5, \\ 10 + \sin(\pi(1 + x_1x_2))\sin(\pi x_1(x_2 - 1)) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τα σχετικά αποτελέσματα για τα σφάλματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.4, όπου η τάξη σύγκλισης  $\mathcal{O}(h)$  όταν  $\tau \leq Ch^2$ , για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  επαληθεύεται για την βασική και τη συζυγή μεταβλητή. Τα αποτελέσματα σχετικά με τη τάξη σύγκλισης και την αναμενόμενη τάξη σύγκλισης δείχνουν λίγο καλύτερα, εξαιτίας του τρόπου “κατασκευής” της ακριβούς λύσης. Συγκρίνοντας το παρόν παράδειγμα με αυτό με τα ομαλά δεδομένα παρατηρούμε πως το συναρτησιακό έχει πολύ μεγαλύτερες τιμές και το σφάλμα π.χ. στο  $h = 0.014$  είναι επίσης μεγαλύτερο. Προφανώς λόγω της ασυνέχειας η νόρμα

**Πίνακας 5.4:** Τάξεις Σύγκλισης για τη διαδιάστατη λύση με  $k = 0$ ,  $\tau = h^2/2$  και αρχικά δεδομένα με μικρή ομαλότητα.

| Διακριτοποίηση<br>$\tau = h^2/2$ | Σφάλματα                         |                                  |              |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------|
|                                  | $\ e\ _{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.2357022$                  | 0.4093275092                     | 0.008552165422                   | 0.9411555956 |
| $h = 0.1178511$                  | 0.1555909764                     | 0.005056762072                   | 0.8225865966 |
| $h = 0.0589255$                  | 0.0714820269                     | 0.002440981965                   | 0.7424795375 |
| $h = 0.0294627$                  | 0.0302970740                     | 0.001179518135                   | 0.7066657202 |
| $h = 0.01473139$                 | 0.0100448501                     | 0.001097951813                   | 0.6883517113 |
| Τάξη Σύγκλισης                   | 1.2520017243                     | 0.952697386266                   | -            |

σφάλματος  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  δε συγκλίνει λόγω της ασυνέχειας, μιας και τα δεδομένα  $y_0 \in L^2(\Omega)$  και αυτή η αρχική ασυνέχεια μεταδίδεται μέσω των χαρακτηριστικών σε ολόκληρη τη λύση. Τελικώς, το γράφημα στα δεξιά του Σχήματος 5.3, δείχνει πως η απόσταση από το στόχο μειώνεται σταδιακά με το πέρασμα του χρόνου, και όπως περιμέναμε είναι πολύ πιο δύσκολο για την βασική μεταβλητή με την επίδραση της συνάρτησης ελέγχου να φτάσει στο στόχο.

### 5.1.3 Πείραμα με χρήση γραμμικών πολυωνύμων στο χώρο και στο χρόνο

Για να παρουσιάσουμε την εφαρμοσιμότητα σχημάτων υψηλότερης τάξης ως προς το χρόνο, θεωρούμε μία αραιού χρονικού βηματισμού προσέγγιση που βασίζεται στο σχήμα χρονικού βηματισμού  $k = 1$ .

Σε αυτό το σημείο αναφερόμαστε στο παράδειγμα της παραγράφου 5.1.1, με γνωστή ομαλή βασική μεταβλητή  $\bar{y}$  να δίνεται από την  $\bar{y}(t, x_1, x_2) = \exp(\alpha\pi^2 t) \sin(\pi(1 + x_1 x_2)) \sin(\pi x_1(x_2 - 1))$ , για  $k = 1$ ,  $l = 1$ . Σημειώνουμε πως παρόλο το γεγονός ότι έχουμε επιλέξει ομαλή βασική μεταβλητή, η παρουσία συνοριακού ελέγχου Robin περιορίζει την ομαλότητα τουλάχιστον κοντά στο σύνορο για τη χρονική παράγωγο για τη συζυγή μεταβλητή καθώς και για τη μεταβλητή ελέγχου. Ωστόσο παρόλα αυτά, περιμένουμε ότι θα εμφανιστεί η παραβολική ομαλότητα καθώς ο χρόνος εξελίσσεται. Οι εκτιμήσεις μας βέλτιστης προσέγγισης για ομαλή βασική, συζυγή μεταβλητή και μεταβλητή ελέγχου, παράγουν μια τάξη σύγκλισης ως προς τη νόρμα  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  της τάξης  $\mathcal{O}(\tau^2 + h)$ , όταν θεωρούνται τμηματικά γραμμικά πολυώνυμα και για το χρόνο και για το χώρο, δηλ.  $k = 1$ ,  $l = 1$ .

Στα ακόλουθα παραδείγματα παρουσιάζουμε τις τάξεις σύγκλισης σε μια αραιού χρονικού βηματισμού προσέγγιση. Ειδικότερα, για την επιλογή  $\tau = h^{1/2}$  και  $\tau = h^{3/4}$ , η οποία αντιστοιχεί σε πολύ λίγα χρονικά βήματα, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους Πίνακες 5.5 και 5.6, αντιστοίχως. Να

**Πίνακας 5.5:** Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με  $k = 1$ ,  $l = 1$ ,  $\tau = \mathcal{O}(h^{3/4})$ , ομαλά αρχικά δεδομένα και  $y_d = 0$ .

| Διακριτοποίηση<br>$\tau = h^{3/4}/16$ | Σφάλματα                         |                                  |             |
|---------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------|
|                                       | $\ e\ _{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$   |
| $h = 0.2357022$                       | 0.007064919                      | 0.071348872                      | 0.002392313 |
| $h = 0.1178511$                       | 0.002639725                      | 0.031653985                      | 0.002355530 |
| $h = 0.0589255$                       | 0.001462584                      | 0.017397858                      | 0.002305098 |
| $h = 0.0294627$                       | 0.000873854                      | 0.009497292                      | 0.002258746 |
| $h = 0.0147313$                       | 0.000566631                      | 0.005500319                      | 0.002230101 |
| $h = 0.0073656$                       | 0.000410072                      | 0.003614028                      | 0.002214837 |
| Τάξη Σύγκλισης                        | 0.910047586                      | 0.924325857                      | -           |

**Πίνακας 5.6:** Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με  $k = 1$ ,  $l = 1$ ,  $\tau = \mathcal{O}(h^{1/2})$ , ομαλά αρχικά δεδομένα και  $y_d = 0$ .

| Διακριτοποίηση<br>$\tau = h^{1/2}/16$ | Σφάλματα                         |                                  |             |
|---------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------|
|                                       | $\ e\ _{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$   |
| $h = 0.2357022$                       | 0.008385394                      | 0.068070558                      | 0.002676642 |
| $h = 0.1178511$                       | 0.004769310                      | 0.040332082                      | 0.002579619 |
| $h = 0.0589255$                       | 0.002736129                      | 0.019010050                      | 0.002468955 |
| $h = 0.0294627$                       | 0.001954915                      | 0.012117836                      | 0.002384007 |
| $h = 0.0147313$                       | 0.001398719                      | 0.008222888                      | 0.002322462 |
| $h = 0.0073656$                       | 0.001003904                      | 0.005980212                      | 0.002276926 |
| Τάξη Σύγκλισης                        | 0.645943041                      | 0.762328463                      | -           |

σημειώσουμε πως για τη λύση της βασικής εξίσωσης χρειάζεται να γράψουμε τη βασική εξίσωση σε κατάλληλη ασυνεχή στο χρόνο Galerkin μορφή dG1. Ειδικότερα οι προσεγγιστικές συναρτήσεις είναι τμηματικά γραμμικά πολυώνυμα στο χρόνο. Για λόγους σαφήνειας περιγράφουμε το πως προκύπτει το σύστημα εξισώσεων σε αυτή τη περίπτωση. Υπενθυμίζουμε πως το ασυνεχές χρονικού βηματισμού

πλήρως διακριτοποιημένο σχήμα είναι το

$$\begin{aligned} (y_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_{ht}, v_h \rangle + a(y_h, v_h) + \lambda \langle y_h, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt \\ &= (y_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + \lambda \langle g, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt, \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h], 1 \leq n \leq N, \\ y^0 &= y_0. \end{aligned}$$

Οπότε στη περίπτωση  $k = 1$ , δηλ. γραμμικών πολυωνύμων για το  $t$ , μπορούμε να γράψουμε  $y_h(t) = Y_0^n + Y_1^n(t - t_{n-1})/\tau$  στο διάστημα  $(t^{n-1}, t^n]$  με  $\tau = t^n - t^{n-1}$  και παίρνοντας ως συνάρτηση δοκιμής την  $v_h = \tau^{-l}(s - t_{n-1})^l$  για  $l = 0, 1$  και μετά από χρονική ολοκλήρωση και συμβολίζοντας  $Y_0^n = Y_0$ ,  $Y_1^n = Y_1$  έχουμε το ζητούμενο σύστημα όπως φαίνεται στον επόμενο αλγόριθμο. με  $y_i = Y_0 + Y_1$ . Παρόμοια εργαζόμαστε για την λύση της οπισθόδρομης χρονικά εξίσωσης. με  $\mu_i = M_0 + M_1$ .

**Ο αλγόριθμος για τμηματικά γραμμικά πολυώνυμα στο χρόνο.** Ομοίως με τον προηγούμενο αλγόριθμο, για τα παραπάνω αποτελέσματα χρησιμοποιήσαμε το παρακάτω κώδικα, αφού αρχικοποιήσαμε τα  $n = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , την παράμετρο ανοχής  $tol$  και τον έλεγχο  $g^0|_{\Gamma}$ . Να σημειώσουμε πως π.χ. το  $y^n$  είναι ακολουθία τμηματικά γραμμικών πολυωνύμων στο χρόνο, (με κάθε όρο αυτής της ακολουθίας να αντιπροσωπεύει άλλη ακολουθία τιμών σχετική με το χώρο) κατά την  $n$  επανάληψη της μεθόδου κλίσεων:

- **Βήμα 0** (Αρχική κατάσταση) Επίλυση με  $g|_{\Gamma} := g^0|_{\Gamma}$  για  $y =: y^0$  του συστήματος

$$\begin{aligned} (I + dtA)Y_0 + (I + \frac{1}{2}dtA)Y_1 + (Y_0 + \frac{1}{2}Y_1)|_{\Gamma} &= g_{i+1}|_{\Gamma} + y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f ds \\ \frac{1}{2}dtAY_0 + (\frac{1}{2}I + \frac{1}{3}dtA)Y_1 + (\frac{1}{2}Y_0 + \frac{1}{3}Y_1)|_{\Gamma} &= \frac{1}{2}g_{i+1}|_{\Gamma} + \frac{1}{dt} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i) f ds \end{aligned}$$

$$\text{με } y = Y_0 + Y_1$$

- **Βήμα 1** (Επίλυση συζυγούς εξίσωσης) Υπολογισμός  $\mu =: \mu^n$ ,

$$\begin{aligned} (I + dtA)M_0 + (I + \frac{1}{2}dtA)M_1 + (M_0 + \frac{1}{2}M_1)|_{\Gamma} &= \mu_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (y_i - y_d) ds \\ \frac{1}{2}dtAM_0 + (\frac{1}{2}I + \frac{1}{3}dtA)M_1 + (\frac{1}{2}M_0 + \frac{1}{3}M_1)|_{\Gamma} &= \frac{1}{dt} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (y_i - y_d)(s - t_i) ds \end{aligned}$$

$$\text{με } \mu = M_0 + M_1$$

- **Βήμα 2** (Νέα κατεύθυνση καθόδου) Λαμβάνουμε ως (descent) κατεύθυνση καθόδου την αρνητική κλίση του συναρτησιακού κόστους

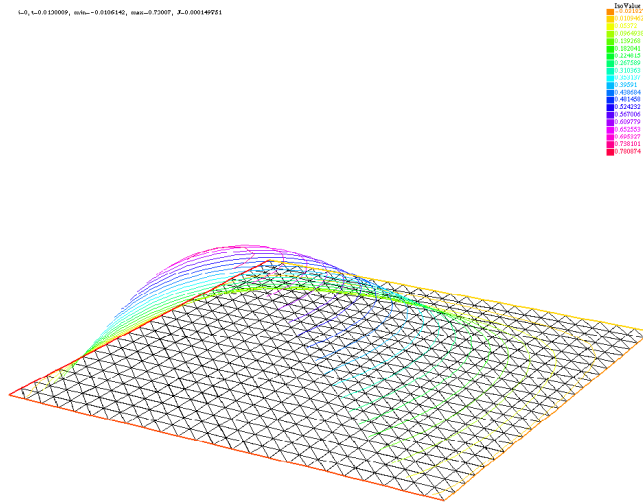
$$-J'(g|_{\Gamma}) = -(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma})$$

- **Βήμα 3** (Έλεγχος του βήματος): Προσδιορισμός του βέλτιστου μεγέθους βήματος  $\varepsilon_n$ :

$$J(g^n|_{\Gamma} + \varepsilon_n(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma})) = \min_{\varepsilon > 0} J(g^n|_{\Gamma} + \varepsilon(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma}))$$

- **Βήμα 4** (Νέα συνάρτηση ελέγχου): Θέτουμε

$$g^{n+1}|_{\Gamma} := g^n|_{\Gamma} + \varepsilon_n(\alpha g^n|_{\Gamma} + \mu^n|_{\Gamma})$$



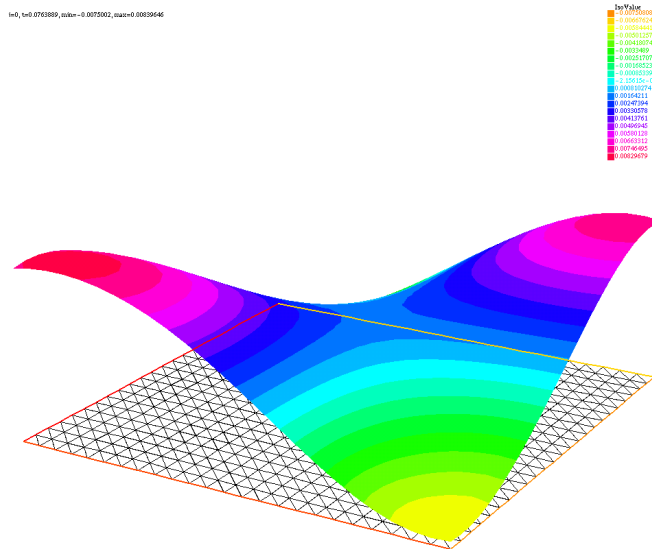
Σχήμα 5.6: Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής.

- **Βήμα 5** (Νέα κατάσταση): Ελέγχουμε αν  $J^n \leq J^{n-1}$  και θέτουμε  $\varepsilon = 1.5\varepsilon$ . Αν  $J^n \geq J^{n-1}$  θέτουμε  $\varepsilon = 0.5\varepsilon$ . Εκτελούμε το **Βήμα 0** με  $g|_\Gamma := g^{n+1}|_\Gamma$  για  $y := y^n$  και  $n = n + 1$ . Ο αλγόριθμος σταματά όταν  $|J^n - J^{n-1}|/J^n \leq tol$ .

**Σημείωση 5.1.1.** Σχετικά με τον αλγόριθμο κλίσης σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήσαμε έναν αλγόριθμο βασισμένο στην Απότομη Κάθοδο (steepest-descent/projected gradient) μέθοδο. Πρέπει να αναφέρουμε πως η παραπάνω μέθοδος συγκλίνει αργά, ωστόσο είναι πολύ εύκολο να υλοποιηθεί και οπότε κατάλληλη για αριθμητικά πειράματα. Επίσης επειδή τα εξελικτικά προβλήματα απαιτούν πολύ μεγάλη υπολογιστική προσπάθεια εξαιτίας της χρονικής μεταβολής, οι μέθοδοι κλίσεων είναι πολύ χρήσιμες εναλλακτικές μέθοδοι των μεθόδων με υψηλότερη τάξη σύγκλισης, αφού απαιτούν λιγότερους υπολογιστικούς πόρους. Το βήμα για τη προβολή,  $\varepsilon_n$  είναι απαραίτητο αφού ο όρος  $g_i^n + \varepsilon_n(\gamma_i g_i + \mu_i)$ , μπορεί να μην είναι επιθυμητός. Ειδικότερα χρησιμοποιείται η αρνητικά μειωμένη κλίση ως κατεύθυνση αναζήτησης και στη συνέχεια υπολογίζεται το βήμα προς αυτή την κατεύθυνση. Το βήμα  $\varepsilon_n$  προκύπτει από μια κατάλληλη στρατηγική γραμμικής αναζήτησης (line search strategy). Ένα τυπικό χαρακτηριστικό των μεθόδων κλίσεων είναι η καλή προοπτική ώστε να οδηγηθούμε στη λύση στις πρώτες επαναλήψεις, ενώ ελαττώνεται η αποτελεσματικότητά τους στις επόμενες επαναλήψεις. Ωστόσο στο επόμενο κεφάλαιο σχετικό με κατανεμημένο έλεγχο σε ημιγραμμικό παραβολικό πρόβλημα θα βελτιώσουμε το κώδικα κάνοντας χρήση ισχυρών κανόνων - συνθηκών Wolfe-Powell και αντί των κατευθύνσεων αρνητικών κατευθύνσεων της παραγώγου του συναρτησιακού τη κατεύθυνση Fletcher-Reeves.

**Σημείωση 5.1.2.** Στα Σχήματα 5.6, 5.7 παραθέτουμε ενδεικτικά κάποια στιγμιότυπα της βασικής και της συζυγούς μεταβλητής.

**Σημείωση 5.1.3.** Είναι εύλογο να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των πειραμάτων με ομαλά δεδομένα στη περίπτωση  $k = 0$  και  $k = 1$ . Πιο συγκεκριμένα ως συγκρίνουμε για παράδειγμα τα αποτελέσματα των Πινάκων 5.3 και 5.5. Παρατηρούμε πως παρόλο που η τάξη σύγκλισης είναι αρκετά μικρότερη, για τη περίπτωση  $k = 1$  τα σφάλματα π.χ. για  $h = 0.014$  παρόλο που παραμένουν ίδια για την  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  και περίπου ίσα με 0.005, είναι μικρότερα για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα από 0.008 για  $k = 0$  σε 0.005 για  $k = 1$ , δηλαδή έχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Αξιοσημείωτο είναι επίσης πως στη περίπτωση  $k = 1$  εξαιτίας του αραιού χρονικού βηματισμού παρόλο που χρησιμοποιούμε την ίδια μνήμη  $H/Y$  έχουμε τη δυνατότητα να προχωρήσουμε σε περισσότερο πυκνή διαμερίση. Αυτό είναι εφικτό μιας



Σχήμα 5.7: Στιγμιότυπο της συζυγούς μεταβλητής.

και έχουμε μικρότερο μέγεθος μνήμης αποθήκευσης δεδομένων, αφού τα χρονικά σημεία είναι πολύ λιγότερα, και είναι αυτό που παίζει κρίσιμο ρόλο στη δέσμευση λιγότερης μνήμης του υπολογιστή. Αυτή λοιπόν η δυνατότητα να προχωρήσουμε σε περισσότερο πυκνή διαμέριση μας επιτρέπει ακόμη καλύτερα αποτελέσματα και για τη νόρμα σφάλματος  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  από 0.005 για  $k = 0$  σε 0.0036 για  $k = 1$ , και για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα από 0.008 για  $k = 0$  σε 0.0004 για  $k = 1$ . Τέλος να επισημάνουμε πως το ελαχιστοποιημένο συναρτησιακό  $J$  από τη τιμή 0.0049 που έχουμε στη περίπτωση  $k = 0$  επιτυγχάνουμε στη περίπτωση  $k = 1$  πολύ μικρότερη τιμή ελαχιστοποιημένου συναρτησιακού ίση με 0.0022.

Αναφέρουμε πως οι βαθμοί ελευθερίας σχετικά με το μικρού χρονικού βηματισμού (*coarse time stepping*) παράδειγμα  $k = 1$ ,  $\tau = \mathcal{O}(h^{3/4})$  για κάθε διαμέριση, (βλέπε Πίνακα 5.5) εξελίσσονται ως εξής (για τη κάθε μια από τις 5 μεταβλητές του συστήματος - 2 για το ευθύ, 2 για το συζυγές πρόβλημα και μια για τον έλεγχο)

- για το χωρικό κομμάτι έχουμε διαδοχικά βαθμούς ελευθερίας 49, 169, 625, 2401, 9409, 37249, (148225),
- για το χρονικό κομμάτι έχουμε διαδοχικά βαθμούς ελευθερίας 5, 8, 14, 23, 38, 64, (108),

ενώ για τη περίπτωση  $k = 0$ ,  $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ , για κάθε μια από τις 3 μεταβλητές

- για το χωρικό κομμάτι έχουμε διαδοχικά βαθμούς ελευθερίας 49, 169, 625, 2401, 9409, (37249),
- για το χρονικό κομμάτι έχουμε διαδοχικά βαθμούς ελευθερίας 4, 15, 58, 231, 922, (3687).





# 6

## ΠΕΙΡΑΜΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΕ ΗΜΙΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ Μ.Δ.Ε.

---

Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τις θεωρητικές αρχές και τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα για ένα πρόβλημα ημιγραμμικής παραβολικής εξίσωσης με καταναμημένο έλεγχο σε συνθήκες *Dirichlet* Μηδέν.

### Περιεχόμενα

---

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 6.1   | Καταναμημένος έλεγχος - Περιγραφή του μοντέλου . . . . .     | 98 |
| 6.1.1 | Σταθερά πολυώνυμο στο χρόνο, και γραμμικά στο χώρο . . . . . | 98 |
| 6.1.2 | Ισχυρές συνθήκες Wolfe-Powel . . . . .                       | 99 |

---

## 6.1 Καταναμημένος έλεγχος - Περιγραφή του μοντέλου

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια σχετικά με το ημιγραμμικό πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου θα επαληθεύσουμε αριθμητικά τους εκ των προτέρων υπολογισμούς σφαλμάτων για  $k = 0$ ,  $l = 1$ , στις περιπτώσεις  $\tau = h^2$  και  $\tau = h$  για το σφάλμα των συναρτήσεων ελέγχου, βασικής μεταβλητής και συζυγούς μεταβλητής, και θα παρουσιάσουμε και αποτελέσματα για τη περίπτωση με ισχυρές συνθήκες Wolfe-Powel.

Θεωρούμε το ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα για το μοντέλο με γνωστή ακριβής αναλυτική λύση στο  $\Omega \times (0, T) = (0, 1)^2 \times (0, 0.1)$  και ομογενείς Dirichlet συνοριακές συνθήκες, παρόμοιο με αυτό που παρουσιάζεται στο [94]. Πιο συγκεκριμένα, ελαχιστοποιούμε το συναρτησιακό

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

υπό τους περιορισμούς,

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + (1/3)y^3 &= f + g && \text{στο } (0, T) \times \Omega, \\ y &= 0 && \text{στο } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0, x) &= y_0 && \text{στο } \Omega. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε παράμετρο ομαλοποίησης  $\alpha = \pi^{-4}$ , δεξί μέλος

$$f(t, x_1, x_2) = -\pi^4 e^{-\sqrt{5}\pi^2 T} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) + \frac{1}{3} \left( \frac{-1}{2 - \sqrt{5}} \pi^2 e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \right)^3,$$

συνάρτηση στόχου

$$\begin{aligned} y_d(t, x_1, x_2) &= \left( 2\pi^2 e^{-\sqrt{5}\pi^2 T} - \frac{\pi^4}{(2 - \sqrt{5})^2} \left( e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left( e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} - e^{-\sqrt{5}\pi^2 T} \right) \right) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \end{aligned}$$

και αρχική συνθήκη  $y_0(x_1, x_2) = \frac{-1}{2 - \sqrt{5}} \pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ , με τέτοιο τρόπο ώστε η βέλτιστη λύση  $(y, \mu, g)$  του παραπάνω προβλήματος να είναι η

$$y(t, x_1, x_2) = \frac{-1}{2 - \sqrt{5}} \pi^2 e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2),$$

$$\mu(t, x_1, x_2) = (e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} - e^{-\sqrt{5}\pi^2 T}) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2),$$

$$g(t, x_1, x_2) = -\pi^4 (e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} - e^{-\sqrt{5}\pi^2 T}) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

### 6.1.1 Σταθερά πολυώνυμα στο χρόνο, και γραμμικά στο χώρο

Για τα παραπάνω αποτελέσματα χρησιμοποιήσαμε το παρακάτω κώδικα, αφού αρχικοποιήσαμε τα  $n = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , την παράμετρο ανοχής  $tol$  και τον έλεγχο  $g^0$ . Να σημειώσουμε πως π.χ. το  $y^n$  είναι ακολουθία τμηματικά γραμμικών πολυωνύμων στο χρόνο, (με κάθε όρο αυτής της ακολουθίας να αντιπροσωπεύει άλλη ακολουθία τιμών σχετική με το χώρο) κατά την  $n$  επανάληψη της μεθόδου κλίσεων:

- **Βήμα 0** (Αρχική κατάσταση) Επίλυση με  $g := g^0$  για  $y := y^0$  του συστήματος

$$\begin{aligned}y_t - \Delta y + \frac{1}{3}y^3 &= g + f, \\y_\Gamma &= 0, \\y(0, x) &= y_0,\end{aligned}$$

- **Βήμα 1** (Επίλυση συζυγούς εξίσωσης) Υπολογισμός  $\mu := \mu^n$ ,

$$\begin{aligned}\mu_t + \Delta \mu + y^2 \mu &= y - y_d, \\ \mu_\Gamma &= 0, \\ \mu(T, x) &= 0.\end{aligned}$$

- **Βήμα 2** (Νέα κατεύθυνση καθόδου) Λαμβάνουμε ως (descent) κατεύθυνση καθόδου την αρνητική κλίση του συναρτησιακού κόστους

$$-J'(g) = -(\alpha g + \mu)$$

- **Βήμα 3** (Έλεγχος του βήματος): Προσδιορισμός του βέλτιστου μεγέθους βήματος  $\varepsilon_n$ :

$$J(g^n + \varepsilon_n(\alpha g + \mu)) = \min_{\varepsilon > 0} J(g^n + \varepsilon(\alpha g + \mu))$$

- **Βήμα 4** (Νέα συνάρτηση ελέγχου): Θέτουμε

$$g^{n+1} := g^n + \varepsilon_n(\alpha g^n + \mu^n)$$

- **Βήμα 5** (Νέα κατάσταση): Ελέγχουμε αν  $J^n \leq J^{n-1}$  και θέτουμε  $\varepsilon = 1.5\varepsilon$ . Αν  $J^n \geq J^{n-1}$  θέτουμε  $\varepsilon = 0.5\varepsilon$ . Εκτελούμε το **Βήμα 0** με  $g := g^{n+1}$  για  $y := y^n$  και  $n = n+1$ . Ο αλγόριθμος σταματά όταν  $|J^n - J^{n-1}|/J^n \leq tol$ .

Όμοια με το προηγούμενο κεφάλαιο, για τη λύση της βασικής εξίσωσης χρειάζεται να γράψουμε τη βασική εξίσωση στη μορφή

$$(I + dtA)y_{i+1} + \frac{1}{3}y_{i+1}^3 = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f + g)ds,$$

και για τη λύση της συζυγούς εξίσωσης χρειάζεται να γράψουμε την οπισθόδρομη χρονικά εξίσωση στη μορφή

$$(I + dtA)\mu_i + y_i^2 \mu_i = \mu_{i+1} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (y_i - y_d)ds.$$

Ο μη γραμμικός όρος αντιμετωπίστηκε ξεχωριστά με γραμμικοποίηση αλλά και με γενική επαναληπτική μέθοδο.

### 6.1.2 Ισχυρές συνθήκες Wolfe-Powel

Στα παραπάνω πειράματα όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε έναν αλγόριθμο βασισμένο στην Απότομη Κάθοδο (steepest - descent / projected gradient) μέθοδο. Το βήμα για τη προβολή,  $\varepsilon_n$  είναι επίσης απαραίτητο αφού ο όρος κατεύθυνσης, μπορεί να μην είναι επιθυμητός. Χρησιμοποιείται η συζυγής κατεύθυνση Fletcher-Reeves ως κατεύθυνση αναζήτησης και στη συνέχεια υπολογίζεται το βήμα προς αυτή την κατεύθυνση. Το βήμα  $\varepsilon_n$  και εδώ προκύπτει από μια κατάλληλη

Πίνακας 6.1: Τάξεις Σύγκλισης για την 2-διάστατη λύση με  $k = 0, l = 1$  ( $h = \tau$ ).

| Διακριτοποίηση   | Σφάλματα   |                                  |                                  |
|------------------|------------|----------------------------------|----------------------------------|
|                  | $h = \tau$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ |
| $h = 0.02946280$ | 3.631050   | 0.05551130                       | 0.02498330                       |
| $h = 0.01473140$ | 1.508560   | 0.02618430                       | 0.01082740                       |
| $h = 0.00736570$ | 0.772711   | 0.01454260                       | 0.00561528                       |
| $h = 0.00368285$ | 0.391391   | 0.00758848                       | 0.00281426                       |
| Τάξη Σύγκλισης   | 1.071233   | 0.95696566                       | 1.05004366                       |

Πίνακας 6.2: Τάξη σύγκλισης για το διδιάστατο πρόβλημα με  $k = 0, l = 1$  ( $h^2 = \tau$ ).

| Διακριτοποίηση  | Σφάλματα     |                                  |                                  |
|-----------------|--------------|----------------------------------|----------------------------------|
|                 | $h^2 = \tau$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ |
| $h = 0.1178510$ | 2.254550     | 0.04141390                       | 0.07661170                       |
| $h = 0.0589256$ | 1.003230     | 0.01943350                       | 0.02208320                       |
| $h = 0.0294628$ | 0.470049     | 0.00914215                       | 0.00546600                       |
| $h = 0.0147314$ | 0.229416     | 0.00445367                       | 0.00135706                       |
| Τάξη Σύγκλισης  | 1.051790     | 1.06430666                       | 1.89617666                       |

στρατηγική γραμμικής αναζήτησης (line search strategy). Να σημειώσουμε πως στα πειράματα αυτής της παραγράφου (βλέπε Πίνακα 6.3) και ειδικότερα στη περίπτωση  $k = 0$  αν και σαταλήσαμε περισσότε-

Πίνακας 6.3: Τάξη σύγκλισης για το διδιάστατο πρόβλημα με  $k = 0, l = 1$  ( $h^2 = \tau$ ).

| Διακριτοποίηση  | Σφάλματα     |                                  |                                  |
|-----------------|--------------|----------------------------------|----------------------------------|
|                 | $h^2 = \tau$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ |
| $h = 0.1178510$ | 2.195070     | 0.0411142                        | 0.348617                         |
| $h = 0.0589256$ | 0.989756     | 0.0192208                        | 0.098052                         |
| $h = 0.0294628$ | 0.467749     | 0.0091017                        | 0.027175                         |
| $h = 0.0147314$ | 0.229123     | 0.0044466                        | 0.008308                         |
| Τάξη Σύγκλισης  | 1.086690     | 1.0695966                        | 1.796943                         |

ρους υπολογιστικούς πόρους σε μνήμη, καταφέραμε να μειώσουμε σημαντικά τον αριθμό επαναλήψεων του διπλού βρόγχου επαναλήψεων της μεθόδου κλίσεων από κατά μέσο όρο 31 επαναλήψεις σε 23, (διατηρώντας σχεδόν τις ίδιες τάξεις σύγκλισης και παρεμφερή αποτελέσματα) χρησιμοποιώντας τις ισχυρές Wolfe - Powel συνθήκες:

- $J(y_{k+1}, g_{k+1}) \leq J(y_k, g_k) + \sigma \varepsilon_k J'^T_k d_k$  (κανόνας Armijo)
- $|J'_{k+1} d_k| \leq -\rho J'_k d_k$

με  $0 < \rho \leq \sigma < 1$  και  $d_{k+1} = -J'_{k+1} + \beta_{k+1} d_k$ , με  $d_0 = -J'_k$  και με την επιλογή για τον ορισμό των συζυγών κατευθύνσεων Fletcher-Reeves :  $\beta_k = \frac{J'_k{}^T J'_k}{\|J'_{k-1}\|^2}$ .

# 7

## ΠΕΙΡΑΜΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ STOKES

---

Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τις θεωρητικές αρχές και τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα για ένα πρόβλημα κατανεμημένου ελέγχου σε εξισώσεις Stokes με συνθήκες Dirichlet μηδέν στο σύνορο.

### Περιεχόμενα

---

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 7.1     | Κατανεμημένος έλεγχος - Περιγραφή του μοντέλου . . . . .             | 102 |
| 7.1.1   | Ομαλά δεδομένα . . . . .   | 103 |
| 7.1.1.1 | Χρονική $k = 0$ και χωρική Taylor/Hood διακριτοποίηση . . . . .      | 103 |
| 7.1.1.2 | Χρονική $k = 1$ , και χωρική Taylor/Hood διακριτοποίηση . . . . .    | 103 |
| 7.1.2   | Δεδομένα με μικρή ομαλότητα (ασυνέχεια στα $y_0, y_d, g$ ) . . . . . | 105 |
| 7.1.2.1 | Διακριτοποίηση χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο . . . . .              | 105 |
| 7.1.2.2 | Διακριτοποίηση με περιορισμούς στον έλεγχο . . . . .                 | 106 |

---

## 7.1

## Καταναμημένος έλεγχος - Περιγραφή του μοντέλου

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε το μαθηματικό μοντέλο που θα εξετάσουμε σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα σχετικά με το πρόβλημα καταναμημένου ελέγχου σε εξελικτικά προβλήματα Stokes.

Τα παραδείγματα είναι βασισμένα σε αυτά που παρουσιάζονται στην [60, Ενότητα 3]. Η πίεση και η ταχύτητα πρέπει να διακριτοποιηθούν σε συμβατούς χώρους πεπερασμένων στοιχείων με τις κατάλληλες inf-sup συνθήκες να ικανοποιούνται. Τέτοιοι κατάλληλοι χώροι είναι για παράδειγμα τα Taylor Hood  $P2/P1$  στοιχεία για τη χωρική προσέγγιση της ταχύτητας/πίεσης. Για την χρονική προσέγγιση χρησιμοποιούμε dG σχήματα χρονικού βήματος τάξης  $k = 0, k = 1$  δηλαδή, τμηματικά σταθερά και τμηματικά γραμμικά στοιχεία αντιστοίχως.

Θεωρούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για την περίπτωση  $k = 0$ , και τρία παραδείγματα για την δυσκολότερη αλλά με καλύτερες τάξεις σύγκλισης περίπτωση  $k = 1$  για το πρόβλημα μοντέλο στον  $\Omega \times [0, T] = [0, 2]^2 \times [0, 0.1]$ , επιλέγοντας  $\bar{y}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$  με γνωστή αναλυτική ακριβής λύση την :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = ((\cos(2kx) - 1) \sin(2my), \sin(2mx)(1 - \cos(2ky)))e^{-\nu t/2} \\ \bar{p} &= e^{-\nu t} ((\sin(kx)^2 \sin(my)^2)/k^2 + (\cos(2kx) - 1)^2 \sin(2my)^2 \\ &\quad + \sin(2mx)^2 (1 - \cos(2ky))^2)/2, \\ \bar{g} &= (\bar{g}_1, \bar{g}_2),\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\bar{g}_1 &= (((k\nu \sin(kx)^2 - k\nu \cos(kx)^2 + k\nu) \cos(my) \sin(my) + ((-8km^2 - 8k^3) \sin(kx)^2 \\ &\quad + (8km^2 + 8k^3) \cos(kx)^2 - 8km^2) \cos(my) \sin(my)))/ke^{-\nu t/2}, \\ \bar{g}_2 &= (((k^2\nu \sin(2mx) \cos(2ky) - k^2\nu \sin(2mx)) + (-8k^2m^2 - 8k^4) \sin(2mx) \cos(2ky) \\ &\quad + 8k^2m^2 \sin(2mx)))/(2k^2))e^{-\nu t/2},\end{aligned}$$

αρχική ταχύτητα  $\bar{y}_0 = ((\cos(2kx) - 1) \sin(2my), \sin(2mx)(1 - \cos(2ky)))$  και στόχο  $\mathbf{y}_d = (y_{d1}, y_{d2}) = (0.5, 0.5)$ .

Ο όρος δύναμης  $f = (f_1, f_2)$  μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την βασική εξίσωση, τοποθετώντας την παραπάνω ακριβής λύση, και πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}f_1 &= (((\cos(kx) \sin(kx) \sin(my)^2 + (16k^2 \cos(kx) \sin(kx)^3 + (16k^2 \cos(kx) \\ &\quad - 16k^2 \cos(kx)^3) \sin(kx)) \cos(my)^2 \sin(my)^2 + ((16km \cos(mx) \sin(mx)^3 \\ &\quad - 16km \cos(mx)^3 \sin(mx)) \cos(ky)^2 - 8km \cos(mx) \sin(mx)^3 \\ &\quad + 8km \cos(mx)^3 \sin(mx)) \sin(ky)^2 + (8km \cos(mx) \sin(mx)^3 \\ &\quad - 8km \cos(mx)^3 \sin(mx)) \cos(ky)^2 - 8km \cos(mx) \sin(mx)^3 \\ &\quad + 8km \cos(mx)^3 \sin(mx)))/ke^{-\nu t}, \\ f_2 &= (((2m \sin(kx)^2 \cos(my) \sin(my) + (-4k^2m \sin(2kx)^2 - 8k^2m \cos(2kx) \\ &\quad + 8k^2m) \cos(2my) \sin(2my) + (4k^3 \sin(2mx)^2 - 4k^3 \sin(2mx)^2 \cos(2ky)) \sin(2ky)) \\ &\quad / (2k^2))e^{-\nu t}.\end{aligned}$$

Αναμένουμε για την ταχύτητα  $\mathcal{O}(h^3 + \tau^{k+1})$  και  $\mathcal{O}(h^2 + \tau^{k+1})$  τάξεις σύγκλισης για τις νόρμες  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  και  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  αντιστοίχως.

Σε όλα τα παραδείγματα, επιλέγουμε σταθερή την παράμετρο ομαλοποίησης στο συναρτησιακό και ίση με  $\alpha = 10^{-4}$ , και οι ελεύθερες παράμετροι παρόμοια με το [32],  $\nu = 1, k = \pi, m = \pi$ , και  $\lambda = 1$ . Το

πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου επιλύεται με το πακέτο πεπερασμένων στοιχείων FreeFem++, βλέπε και [64], χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο κλίσεων.

### 7.1.1 Ομαλά δεδομένα

Σ' αυτή την ενότητα μελετάμε τη περίπτωση που τα αρχικά δεδομένα είναι ομαλά και με γνωστή βέλτιστη λύση. Να παρατηρήσουμε πως ως αρχικό βήμα έχουμε  $h = 0.47$  αρκετά μεγαλύτερο από τα αντίστοιχα παραδείγματα στα προηγούμενα κεφάλαια διότι εδώ το χωρίο είναι μεγαλύτερο (τετράγωνο πλευράς 2), οπότε μας επιτρέπεται μια τέτοια διαμέριση. Στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου αναφέρονται και οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας.

Σε όλα τα παραδείγματα επιβεβαιώνονται οι τάξεις σύγκλισης σύμφωνα με τη θεωρία. Γενικά όμως είναι δύσκολο να λυθεί υπολογιστικά το σύστημα, και ειδικά για τη περίπτωση  $k = 1$  έχουμε μόνο για το διάλυμα της ταχύτητας ένα σύστημα 4 εξισώσεων.

#### 7.1.1.1 Χρονική $k = 0$ και χωρική Taylor/Hood διακριτοποίηση

**Παράδειγμα 1** ( $k = 0$  για  $\tau = h^2/8$ ) Έστω  $\tau = h^2/8$ . Περιμένουμε

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2) \text{ και } \|e\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2).$$

Για αυτή την επιλογή πλέγματος τα αντίστοιχα σφάλματα φαίνονται στο Πίνακα 7.1.

**Πίνακας 7.1:** Τάξεις Σύγκλισης για  $k = 0$  και  $\tau = h^2/8$ .

| Διακριτοποίηση<br>$\tau = h^2/8$ | Σφάλματα Ταχύτητας - Ελέγχου   |                                |  |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|
|                                  | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ \bar{g} - \bar{g}_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.4714050$                  | 0.110215                       | 1.81853                        | 5.33150  |
| $h = 0.2357022$                  | 0.011512                       | 0.43118                        | 0.63211  |
| $h = 0.1178511$                  | 0.002031                       | 0.11109                        | 0.11369  |
| $h = 0.0589255$                  | 0.001255                       | 0.02922                        | 0.07081  |
| Τάξη Σύγκλ.                      | 2.152143                       | 1.98600                        | 2.07596  |

#### 7.1.1.2 Χρονική $k = 1$ , και χωρική Taylor/Hood διακριτοποίηση

**Παράδειγμα 2** ( $k = 1$  για  $\tau = h/16$ ) Έστω  $\tau = h/16$ . Περιμένουμε

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|e\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2).$$

Για αυτή την επιλογή πλέγματος τα αντίστοιχα σφάλματα φαίνονται στον Πίνακα 7.2. Τονίζουμε ότι η αρκετά “άγρια” επιλογή βήματος  $\tau \approx h$  δίνει επίσης τα αναμενόμενα θεωρητικά αποτελέσματα, τα οποία επισημαίνουν την “πεπλεγμένη (implicit)” φύση των dG σχημάτων χρονικού βήματος.

Πίνακας 7.2: Τάξεις Σύγκλισης για  $k = 1$  με  $\tau = h/16$ .

| Διακριτοποίηση  | Σφάλματα Ταχύτητας - Ελέγχου |                                |                                |  |
|-----------------|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|
|                 | $\tau = h/16$                | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ \bar{g} - \bar{g}_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.4714050$ |                              | 0.108866                       | 2.315120                       | 5.470750   |
| $h = 0.2357022$ |                              | 0.010535                       | 0.453111                       | 0.607322   |
| $h = 0.1178511$ |                              | 0.001838                       | 0.113375                       | 0.083115   |
| $h = 0.0589255$ |                              | 0.000832                       | 0.028927                       | 0.020270   |
| Τάξη Σύγκλ.     |                              | 2.343953                       | 2.107000                       | 2.686666   |

**Παράδειγμα 3** ( $k = 1$  για  $\tau = h^{3/2}/10$ ) Έστω  $\tau = h^{3/2}/10$ . Περιμένουμε

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^3), \quad \|e\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2).$$

Για αυτή την επιλογή πλέγματος τα αντίστοιχα σφάλματα φαίνονται στον Πίνακα 7.3. Εδώ, παίρνουμε τα σφάλματα για την  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  νόρμα, με μία πιο “άγρια” επιλογή χρονικού βήματος.

Πίνακας 7.3: Τάξεις Σύγκλισης για  $k = 1$  με  $\tau = h^{3/2}/10$ .

| Διακριτοποίηση  | Σφάλματα Ταχύτητας - Ελέγχου |                                |                                |  |
|-----------------|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|
|                 | $\tau = h^{3/2}/10$          | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ \bar{g} - \bar{g}_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.4714050$ |                              | 0.1138780                      | 2.420150                       | 5.718610   |
| $h = 0.2357022$ |                              | 0.0104282                      | 0.455479                       | 0.610602   |
| $h = 0.1178511$ |                              | 0.0014891                      | 0.112681                       | 0.082763   |
| $h = 0.0589255$ |                              | 0.0004965                      | 0.028212                       | 0.020051   |
| Τάξη Σύγκλ.     |                              | 2.6137833                      | 2.140366                       | 2.718333   |

**Παράδειγμα 4** ( $k = 1$  για  $\tau = h^2/8$ ) Έστω  $\tau = h^2/8$ . Περιμένουμε

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^3), \quad \|e\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2).$$

Για αυτή την επιλογή πλέγματος τα αντίστοιχα σφάλματα φαίνονται στο Πίνακα 7.4.

Πίνακας 7.4: Τάξεις Σύγκλισης για  $k = 1$  με  $\tau = h^2/8$ .

| Διακριτοποίηση  | Σφάλματα Ταχύτητας - Ελέγχου |                                |                                |  |
|-----------------|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|
|                 | $\tau = h^2/8$               | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ \bar{g} - \bar{g}_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.4714050$ |                              | 0.105817                       | 2.251280                       | 5.320290   |
| $h = 0.2357022$ |                              | 0.010357                       | 0.461360                       | 0.618637   |
| $h = 0.1178511$ |                              | 0.001298                       | 0.112730                       | 0.082865   |
| $h = 0.0589255$ |                              | 0.000355                       | 0.028156                       | 0.020091   |
| Τάξη Σύγκλ.     |                              | 2.739333                       | 2.106666                       | 2.671000   |

**Σημείωση 7.1.1.** Εδώ παρατηρούμε πως συγκρίνοντας τη περίπτωση  $k = 0$ , με τη περίπτωση  $k = 1$ , βλέπε π.χ. Πίνακες 7.1, 7.4, έχουμε σχεδόν ίδια σφάλματα για την περίπτωση σφαλμάτων στην  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  νόρμα και σχεδόν ίσα με 0.02922 για  $k = 0$  και 0.028156 για  $k = 1$ . Επίσης παρατηρούμε πολύ μικρότερα σφάλματα για την  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  της τάξης από 0.001 για  $k = 0$  σε 0.0003 για  $k = 1$ . Το ελαχιστοποιημένο συναρτησιακό ελαχιστοποιείται καλύτερα όταν  $k = 1$  και πιο συγκεκριμένα έχει τιμή 0.07 για  $k = 0$ , ενώ όταν  $k = 1$  είναι 0.02.



**7.1.2** Δεδομένα με μικρή ομαλότητα (ασυνέχεια στα  $y_0, y_d, g$ )

Σ' αυτήν την ενότητα μελετάμε τη περίπτωση που τα αρχικά δεδομένα είναι μη ομαλά και η ακριβής αριθμητική λύση είναι άγνωστη. Ειδικότερα για να συγκρίνουμε και να βρούμε τα σφάλματα, θεωρούμε ως λύση μια λύση σε προχωρημένο πλέγμα π.χ. σε διαμέριση  $96 \times 96$  του τετραγώνου, και η σύγκριση γίνεται χρησιμοποιώντας παρεμβολή για τα διαφορετικά  $U_h$ .

Στα επόμενα παραδείγματα θα χρησιμοποιήσουμε χρονική  $k = 0$  και χωρική Taylor/Hood διακριτοποίηση.

**7.1.2.1** Διακριτοποίηση χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο

Όπως φαίνεται παρακάτω εφαρμόζουμε ασυνέχεια στα αρχικά δεδομένα καθώς και στο στόχο  $y_d$ :

**Παράδειγμα 5 ( $k = 0$  για  $\tau = h^2/8$  και ασυνέχεια)** Σε αυτό το παράδειγμα αναμένουμε τάξεις σύγκλισης

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h), \quad \|r\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h).$$

Επιλέγουμε  $f = (f_1, f_2)$  όπως προηγουμένως αλλά ασυνέχεια στο στόχο, στον έλεγχο και στη βασική μεταβλητή  $y$  καθώς και στη συζυγή μεταβλητή  $\mu$  όπως παρακάτω:

$$y_d(x_1, x_2) = (y_{d1}(x_1, x_2), y_{d2}(x_1, x_2)),$$

όπου

$$y_{d1}(x_1, x_2) = y_{d2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.5 + 6, & y \geq 0.5 \text{ και } x \geq 0.5 \\ 0.5, & y < 0.5 \text{ και } x < 0.5 \end{cases},$$

$$y_0(x_1, x_2) = (y_{01}(x_1, x_2), y_{02}(x_1, x_2)),$$

όπου

$$y_{01}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + (\cos(2kx) - 1)\sin(2my), & y \geq 0.5 \text{ και } x \geq 0.5 \\ (\cos(2kx) - 1)\sin(2my), & y < 0.5 \text{ και } x < 0.5 \end{cases},$$

$$y_{02}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + \sin(2mx)(1 - \cos(2ky)), & y \geq 0.5 \text{ και } x \geq 0.5 \\ \sin(2mx)(1 - \cos(2ky)), & y < 0.5 \text{ και } x < 0.5 \end{cases}.$$

Για την εκκίνηση της μεθόδου κλίσης χρησιμοποιήθηκε αρχικός έλεγχος:

$$g_0(x_1, x_2) = (g_{01}(x_1, x_2), g_{02}(x_1, x_2)).$$

όπου

$$g_{01}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + (((k\nu\sin(kx)^2 - k\nu\cos(kx)^2 + k\nu)\cos(my)\sin(my) - ((8km^2 + 8k^3)\sin(kx)^2 + (8km^2 + 8k^3)\cos(kx)^2 - 8km^2)\cos(my)\sin(my)))/k, & \text{για } y \geq 0.5 \text{ και } x \geq 0.5, \\ (((k\nu\sin(kx)^2 - k\nu\cos(kx)^2 + k\nu)\cos(my)\sin(my) - ((8km^2 + 8k^3)\sin(kx)^2 + (8km^2 + 8k^3)\cos(kx)^2 - 8km^2)\cos(my)\sin(my)))/k, & \text{για } y < 0.5 \text{ και } x < 0.5, \end{cases}$$

$$g_{02}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + (((k^2\nu\sin(2mx)\cos(2ky) - k^2\nu\sin(2mx)) + (-8k^2m^2 - 8k^4)\sin(2mx)\cos(2ky) + 8k^2m^2\sin(2mx))/(2k^2)), & y \geq 0.5 \text{ και } x \geq 0.5, \\ (((k^2\nu\sin(2mx)\cos(2ky) - k^2\nu\sin(2mx)) + (-8k^2m^2 - 8k^4)\sin(2mx)\cos(2ky) + 8k^2m^2\sin(2mx))/(2k^2)), & y < 0.5 \text{ και } x < 0.5. \end{cases}$$

**Πίνακας 7.5:** Τάξεις Σύγκλισης για  $k = 0$  με  $\tau = h^2/8$  με ασυνέχεια στα αρχικά δεδομένα και ασυνέχεια στο στόχο.

| Διακριτοποίηση<br>$\tau = h^2/8$ | Σφάλματα Ταχύτητας - Ελέγχου   |                                |                             |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
|                                  | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(\mathbf{y}, \mathbf{g})$ |
| $h = 0.4714050$                  | 0.126828                       | 0.0079597                      | 14.80282                    |
| $h = 0.235702$                   | 0.036255                       | 0.0015081                      | 9.742095                    |
| $h = 0.117851$                   | 0.014052                       | 0.0004364                      | 9.608375                    |
| $h = 0.058925$                   | 0.004472                       | 0.0000703                      | 9.619787                    |
| $h = 0.029462$                   | -                              | -                              | 9.612306                    |
| Τάξη Σύγκλ.                      | 1.608596                       | 2.2742714                      | -                           |

### 7.1.2.2 Διακριτοποίηση με περιορισμούς στον έλεγχο

Σ' αυτήν την ενότητα μελετάμε τη περίπτωση που τα αρχικά δεδομένα είναι μη ομαλά και η ακριβής αριθμητική λύση είναι επίσης άγνωστη, αλλά εξετάζουμε τη περίπτωση περιορισμών στον έλεγχο:  $-85 \leq g_i \leq 85$  για το Παράδειγμα 6, και  $-0.5 \leq g_i \leq 0.5$ . Για το Παράδειγμα 7 εφαρμόζουμε ασυνέχεια στα αρχικά δεδομένα καθώς και στο στόχο  $y_d$  όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 6** ( $k = 0$  για  $\tau = h^2/8$  με ασυνέχεια και περιορισμούς στον έλεγχο) Αναμένουμε τάξεις σύγκλισης επίσης

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h), \quad \|r\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h).$$

Επιλέγουμε  $f = (f_1, f_2)$  όπως προηγουμένως με ασυνέχεια στο στόχο, στον έλεγχο και στη βασική μεταβλητή  $y$  καθώς και στη συζυγή μεταβλητή  $\mu$ .

Για την εκκίνηση της μεθόδου κλίσης χρησιμοποιήθηκε αρχικός έλεγχος:

$$g_0(x_1, x_2) = (g_{01}(x_1, x_2), g_{02}(x_1, x_2)) = (0, 0).$$

**Παράδειγμα 7** ( $k = 0$  για  $\tau = h^2/8$  με ασυνέχεια και περιορισμούς στον έλεγχο) Αναμένουμε τάξεις σύγκλισης επίσης

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h), \quad \|r\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h).$$

Επιλέγουμε  $f = (f_1, f_2)$  όπως προηγουμένως με ασυνέχεια, στον έλεγχο και στη βασική μεταβλητή  $y$  αλλά όχι στη συνάρτηση στόχο.

**Πίνακας 7.6:** Τάξεις Σύγκλισης για  $k = 0$  με  $\tau = h^2/8$  με ασυνέχεια στα αρχικά δεδομένα, ασυνέχεια στο στόχο και ασθενείς περιορισμούς στον έλεγχο.

| Διακριτοποίηση | Σφάλματα Ταχύτητας - Συναρτησιακό |                             |
|----------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| $\tau = h^2/8$ | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$    | $J(\mathbf{y}, \mathbf{g})$ |
| $h = 0.471405$ | 0.125484                          | 14.35750                    |
| $h = 0.235702$ | 0.038590                          | 9.417572                    |
| $h = 0.117851$ | 0.014412                          | 9.289013                    |
| $h = 0.058925$ | 0.004503                          | 9.299375                    |
| $h = 0.029462$ | -                                 | 9.291695                    |
| Τάξη Σύγκλ.    | 1.600097                          | -                           |

Για την εκκίνηση της μεθόδου κλίσης χρησιμοποιήθηκε αρχικός έλεγχος:

$$g_0(x_1, x_2) = (g_{01}(x_1, x_2), g_{02}(x_1, x_2)) = (6, 6).$$

**Πίνακας 7.7:** Τάξεις Σύγκλισης για  $k = 0$  με  $\tau = h^2/8$  με ασυνέχεια στα αρχικά δεδομένα και ισχυρούς περιορισμούς στον έλεγχο.

| Διακριτοποίηση | Σφάλματα Ταχύτητας - Συναρτησιακό |                             |
|----------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| $\tau = h^2/8$ | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$    | $J(\mathbf{y}, \mathbf{g})$ |
| $h = 0.471405$ | 0.125664                          | 22.65422                    |
| $h = 0.235702$ | 0.038621                          | 14.78615                    |
| $h = 0.117851$ | 0.014417                          | 14.55425                    |
| $h = 0.058925$ | 0.004504                          | 14.55310                    |
| $h = 0.029462$ | -                                 | 14.53629                    |
| Τάξη Σύγκλ.    | 1.600733                          | -                           |

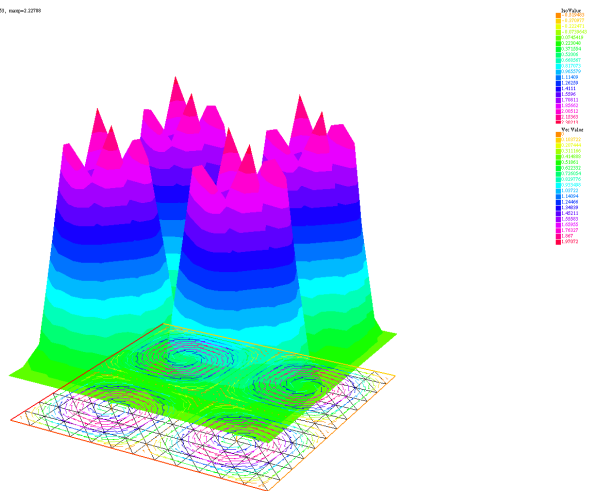
**Σημείωση 7.1.2.** Στα πειράματα χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο και με αυστηρούς περιορισμούς στον έλεγχο για μη ομαλά αρχικά δεδομένα, όπως φαίνεται στους Πίνακες αποτελεσμάτων 7.5 και 7.7 παρατηρούμε παρεμφερείς τιμές για την  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα σφάλματος, και ίδια τάξη σύγκλισης, όπως ήταν αναμενόμενο, ενώ το ελαχιστοποιημένο συναρτησιακό έχει πολύ μεγαλύτερες τιμές όταν επιβάλλονται ισχυροί περιορισμοί στον έλεγχο.

**Σημείωση 7.1.3.** Στα Σχήματα 7.1, 7.2 παραθέτουμε ενδεικτικά κάποια στιγμιότυπα της βασικής μεταβλητής για το παράδειγμα με ομαλά δεδομένα σε δυο διαφορετικά πλέγματα. Σημειώνουμε πως στις βάσεις των σχημάτων εμφανίζονται τα αντίστοιχα διανύσματα, ενώ η τρισδιάστατη απεικόνιση πάνω από τη βάση του σχήματος αναπαριστά τη πίεση. Στα Σχήματα 7.3, 7.4, 7.5 παραθέτουμε ενδεικτικά κάποια στιγμιότυπα της βασικής μεταβλητής για το παράδειγμα με μη ομαλά δεδομένα για τη βασική και τη συζυγή μεταβλητή, σε αρχικό στάδια, με την εκκίνηση με τα ασυνεχή δεδομένα, και στη συνέχεια καθώς η βασική λύση πλησιάζει το στόχο.

**Σημείωση 7.1.4.** Αναφέρουμε πως οι βαθμοί ελευθερίας σχετικά με τα παραπάνω παραδείγματα, για κάθε διαμέριση, εξελίσσονται ως εξής,

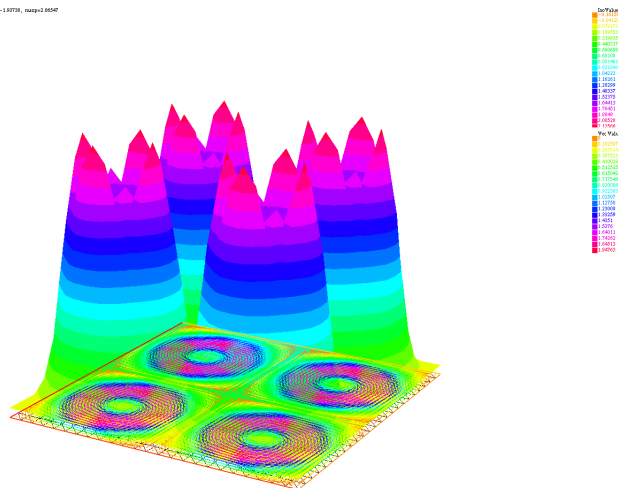
- αν  $\tau = \mathcal{O}(h^2)/8$ , είναι  $[Uh.ndof, Ph.ndof, Time.ndof] = [169, 49, 72], [625, 169, 288], [2401, 625, 1152], [9409, 2401, 4608], ([37249, 9409, 18432])$  σε κάθε πλέγμα,
- αν  $\tau = \mathcal{O}(h)/16$ , είναι  $[Uh.ndof, Ph.ndof, Time.ndof] = [169, 49, 68], [625, 169, 136], [2401, 625, 272], [9409, 2401, 544], ([37249, 9409, 1087])$ ,
- αν  $\tau = \mathcal{O}(h^{3/2})/10$ , είναι  $[Uh.ndof, Ph.ndof, Time.ndof] = [169, 49, 43], [625, 169, 85], [2401, 625, 170], [9409, 2401, 340], ([37249, 9409, 679])$ ,

ω<sub>0</sub>=0.00000, κλάσι=1.00000, κλάσι2=2.00000, κλάσι3=1.00000, κλάσι4=2.00000, κλάσι5=1.00000, κλάσι6=2.00000

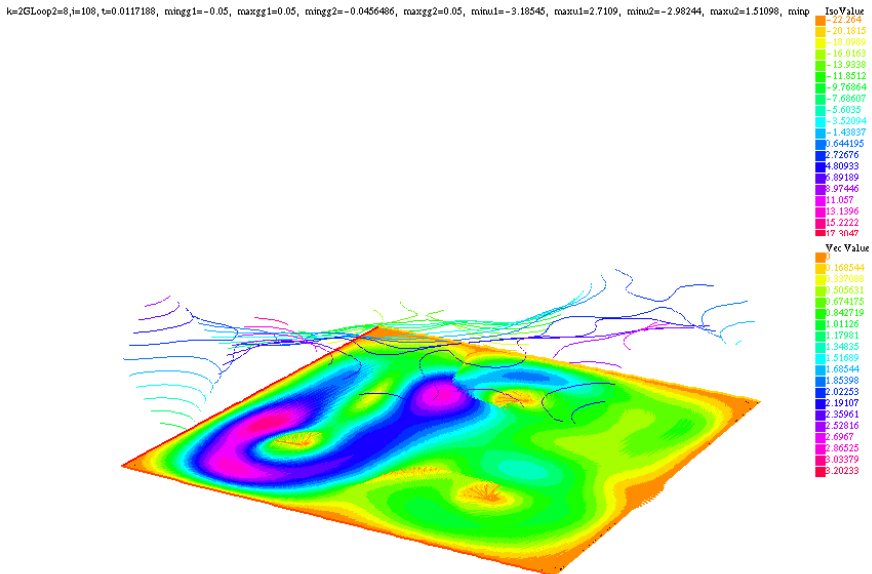


Σχήμα 7.1: Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής σε πλέγμα 12x12 με ομαλά δεδομένα.

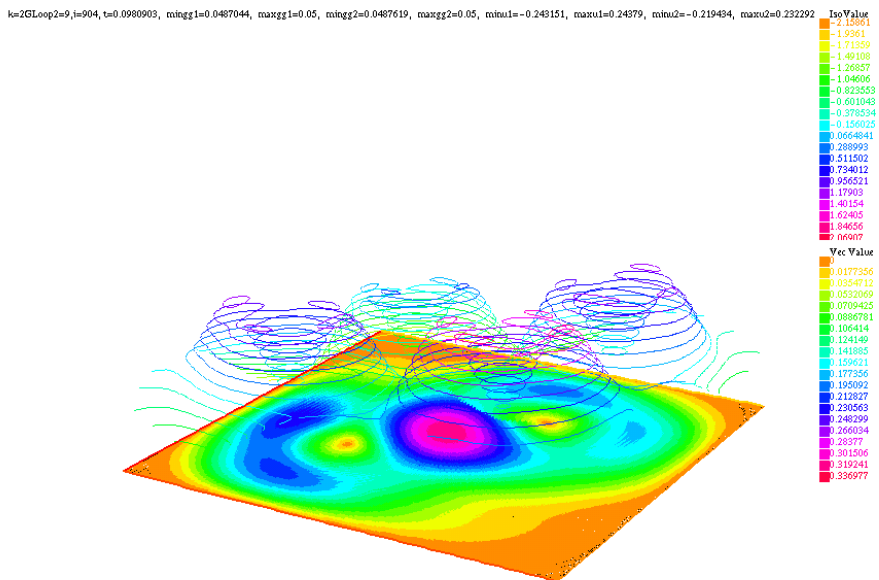
ω<sub>0</sub>=0.00000, κλάσι=1.00000, κλάσι2=2.00000, κλάσι3=1.00000, κλάσι4=2.00000, κλάσι5=1.00000, κλάσι6=2.00000



Σχήμα 7.2: Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής σε πλέγμα 24x24 με ομαλά δεδομένα.

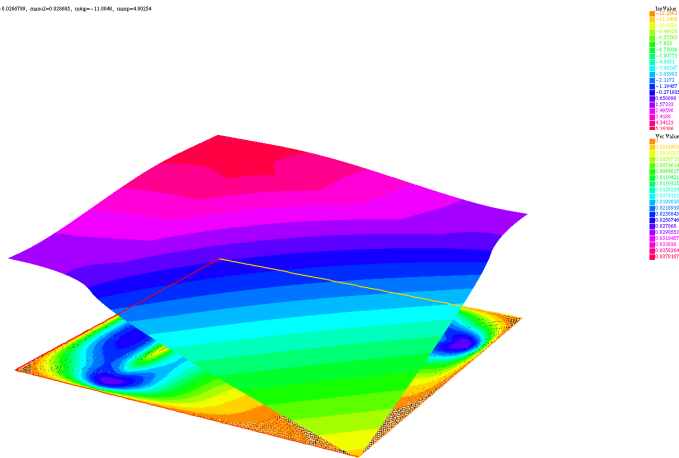


Σχήμα 7.3: Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής με μη ομαλά δεδομένα σε αρχικό χρονικό στάδιο.



Σχήμα 7.4: Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής με μη ομαλά δεδομένα σε τελικό χρονικό στάδιο.

κ1E10α0κ1α11, κ4E0E1E1, κ5κ1α-0.02E107, κ6κ1α-0.02E05, κ7α2α-0.02E079, κ8α2α-0.02E05, κ9αα-1E04E, κ10αα-0.02E4



Σχήμα 7.5: Στιγμιότυπο της συζυγούς μεταβλητής με μη ομαλά δεδομένα.

επίσης να σημειώσουμε πως για  $k = 0$  έχουμε να λύσουμε ως προς 8 μεταβλητές το σύστημα - 3 για το ευθύ, 3 για το συζυγές πρόβλημα και 2 για τον έλεγχο, και για  $k = 1$  έχουμε να λύσουμε ως προς 14 μεταβλητές το σύστημα - 6 για το ευθύ, 6 για το συζυγές πρόβλημα και 2 για τον έλεγχο. Υπενθυμίζουμε πως κάθε μεταβλητή είναι ακολουθία πολυωνύμων στο χώρο (τιμές σε κάθε σημείο του πλέγματος).

**Σημείωση 7.1.5.** Τέλος υπενθυμίζουμε πως στα τελευταία παραδείγματα θεωρήσαμε ως λύση τη λύση σε προχωρημένο πλέγμα, και ενδεικτικά είχαμε τους βαθμούς ελευθερίας που αναφέρονται στις παρενθέσεις, στη παραπάνω σημείωση.

# 8

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ, ΠΕΙΡΑΜΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΗΜΙΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΩΝ Μ.Δ.Ε.

---

*Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τις θεωρητικές αρχές και τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα για ένα πρόβλημα κατανεμημένου ελέγχου σε συστήματα ημιγραμμικών παραβολικών εξισώσεων με Dirichlet μηδέν συνοριακές συνθήκες - (FitzHugh-Nagumo σύστημα).*

### Περιεχόμενα

---

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 8.1   | Κατανεμημένος έλεγχος σε συστήματα FitzHugh-Nagumo . . . . . | 112 |
| 8.1.1 | Εισαγωγή - Ιστορική αναδρομή . . . . .                       | 112 |
| 8.1.2 | Περιγραφή του μοντέλου . . . . .                             | 113 |
| 8.1.3 | Η ασθενής μορφή . . . . .                                    | 113 |
| 8.1.4 | Το πλήρως διακριτοποιημένο πρόβλημα . . . . .                | 114 |
| 8.1.5 | Αριθμητικές εφαρμογές . . . . .                              | 115 |

---

## 8.1 Κατανεμημένος έλεγχος σε συστήματα FitzHugh-Nagumo

### 8.1.1 Εισαγωγή - Ιστορική αναδρομή

Η θεωρία Βέλτιστου ελέγχου έχει πολλές και πολύ χρήσιμες εφαρμογές, σε πολλούς επιστημονικούς τομείς όπως την Βιολογία την Ιατρική, τη Μηχανική, τη Κοινωνιολογία. Στη συνέχεια παραθέτουμε μια εφαρμογή που σχετίζεται με τη Βιολογία και μας δείχνει πόσο σημαντική και άμεσα εφαρμόσιμη είναι η θεωρία βέλτιστου ελέγχου σε πραγματικά προβλήματα.

Μια από τις πιο σημαντικές ανακαλύψεις του 20ου αιώνα στη βιοφυσική είναι η κατανόηση για το πως τα νεύρα μεταφέρουν πληροφορία. Η βασική ανακάλυψη σχετίζει τη μεταφορά ιόντων καλίου και νατρίου (επίσης νατρίου και ασβεστίου) κατά μήκος της εξωτερικής μεμβράνης ενός κυττάρου του νεύρου σε ηλεκτρικά σήματα τα οποία μπορούν να διαδίδονται κατά μήκος της μεμβράνης μετά από κατάλληλη διέγερση. Οι Alan Hodgkin και Andrew Huxley (δουλεύοντας νωρίς στη δεκαετία του 1950) περιέγραψαν τη θεωρία για τη μεταφορά ιόντων, δημιούργησαν ένα μαθηματικό μοντέλο, και ερμήνευσαν τα πειραματικά δεδομένα για ηλεκτρικά σήματα διεγερμένα σε καλαμαφοειδείς νευροαξόνες, και βραβεύτηκαν με βραβείο Nobel στη Φυσιολογία και Ιατρική το 1963. Το γνήσιο Hodgkin-Huxley μοντέλο αποτελείται από τέσσερις σ.δ.ε. Απλοποιήσεις του βασικού μοντέλου, τροποποιήσεις προσαρμοσμένες σε άλλα διεγέρσιμα μέσα (για παράδειγμα μυϊκών κυττάρων) και εξάρτησης από το χώρο έχουν μελετηθεί εκτενώς.

Μια από τις περισσότερο σημαντικές απλοποιήσεις του μοντέλου Hodgkin-Huxley παρουσιάστηκε πρωτοποριακά από τον Richard Fitzhugh, από τη πλευρά της μαθηματικής και αριθμητικής ανάλυσης. Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα για ένα ανάλογο μοντέλο κατασκευάστηκε από τον Jin-Ichi Nagumo. Αυτό το μοντέλο των δυο καταστάσεων, το οποίο ακόμη χρησιμοποιείται εκτενώς, περιγράφει τη ποιοτική ηλεκτρική συμπεριφορά διεγερμένων κυττάρων νεύρου. Θα μελετήσουμε αυτό το μοντέλο. Οστόσο είμαστε μακριά από το να κατανοήσουμε πλήρως τα βιολογικά διεγέρσιμα μέσα. Πολλές σύγχρονες μελέτες επικεντρώνονται στη μεταφορά ιόντων. Οι ζωντανές μεμβράνες περιέχουν διάφορα κανάλια ιόντων (κατά μήκος της μεμβράνης) και είναι επιλεκτικά σε συγκεκριμένα ιόντα. Οι μηχανισμοί μεταφοράς και οι διακόπτες που ανοίγουν και κλείνουν τα κανάλια ιόντων είναι θεμελιώδη για τη λειτουργία πολλών βιολογικών διεργασιών. Επίσης, δίκτυα νευρικών κυττάρων και άλλα διεγέρσιμα μέσα είναι πανταχού παρών στη βιολογία. Η μελέτη τέτοιων δικτύων μπορεί να οδηγήσει στη κατανόηση για το πως λειτουργεί ο εγκέφαλος. Τα μαθηματικά παίζουν έναν αυξανόμενο ρόλο σημασίας σ' αυτή τη περιοχή διεπιστημονικής έρευνας.

Η μεταβλητή κατάστασης  $y_1$  αναπαριστά τη τάση και επίσης ονομάζεται, δράση ή δυναμικό μεμβράνης και η  $y_2$  ονομάζεται μεταβλητή ανάκτησης (η μεταβλητή τάσης εμφανίζει κυβική μη γραμμικότητα που επιτρέπει αναγεννώσιμη αυτο-διέγερση μέσω της θετικής ανάδρασης, και η μεταβλητή ανάκτησης έχει μια γραμμική δυναμική που παρέχει μια περισσότερο αργή αρνητική ανάδραση).

Το μοντέλο Fitzhugh-Nagumo δεν κατασκευάστηκε τόσο για να κάνει πρόβλεψη αλλά για να συλλάβει τα βασικά ποιοτικά χαρακτηριστικά της ηλεκτρικής δραστηριότητας κατά μήκος ενός νεύρου.

Η πιο σημαντική πρόβλεψη του μοντέλου (το οποίο συμφωνεί με πειραματικά δεδομένα) είναι η ύπαρξη ενός ορίου του παλμού ερεθίσματος που παράγει οδευόντα κύματα τάσης (και ανάκτησης) κύματα που διαδίδονται μακριά από το χωρική θέση του ερεθίσματος. Το οδευόν κύμα του δυναμικού της μεμβράνης που διαδίδεται-ταξιδεύει είναι ο μηχανισμός που ευθύνεται για τη μεταφορά πληροφοριών κατά μήκος του νεύρου. πρόβλεψης.

Το κύκλωμα Hodgkin-Huxley υποτίθεται πως μοντελοποιεί την ηλεκτρική δραστηριότητα σε ένα σημείο ενός νεύρου. Η διαδικασία ανοίγματος και κλεισίματος καναλιών ιόντων μοντελοποιείται με τη διάχυση



της τάσης (η οποία αντιστοιχεί στην αδιάστατη κατάσταση  $y_1$ ). Η χωρική εξάρτηση μοντελοποιείται ως διάχυση, όπου  $\delta$  είναι η διαχυσιμότητα. Προσθέτοντας αυτόν τον όρο στο δεξί μέλος του μοντέλου κυκλώματος και μεταβάλλοντας επίσης τη χωρική μεταβλητή, παίρνουμε την αδιάστατη μορφή των εξισώσεων FitzHugh-Nagumo.

Η διάχυση στις εξισώσεις FitzHugh-Nagumo μοντελοποιεί τη χωρική σύζευξη μεταξύ των καναλιών ιόντων κατά μήκος του νεύρου.

Είναι αξιοσημείωτο πως για  $\delta \ll 1$  το σύστημά μας γίνεται παρόμοιο με αυτό που περιγράφεται στη πρόσφατη εργασία [78].

### 8.1.2 Περιγραφή του μοντέλου

Σ' αυτήν την ενότητα παραθέτουμε το μαθηματικό μοντέλο που σχετίζεται με τη παραπάνω περιγραφή, και πιο συγκεκριμένα θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό

$$\begin{aligned} J(y, g) &= \frac{1}{2} \int_0^T \|y_1 - y_{1d}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T \|g_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \|y_2 - y_{2d}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T \|g_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial t} - \Delta y_1 + y_1^3 - y_1 &= -y_2 + g_1 + f_1 \text{ στο } (0, T] \times \Omega, \quad y_1 = 0 \text{ στο } (0, T] \times \Gamma, \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} - \delta \Delta y_2 + \varepsilon a_1 y_2 &= \varepsilon y_1 + g_2 + f_2 \text{ στο } (0, T] \times \Omega, \quad y_2 = 0 \text{ στο } (0, T] \times \Gamma, \\ y_1(0, x) &= y_{10} \quad y_2(0, x) = y_{20} \text{ στο } \Omega, \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

και τους περιορισμούς ελέγχου

$$g_{ia} \leq g_i(t, x) \leq g_{ib} \text{ για σχεδόν παντού } (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \text{ όπου } g_{ia}, g_{ib} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

### 8.1.3 Η ασθενής μορφή

Ξεκινώντας παραθέτουμε την ασθενή μορφή της βασικής εξίσωσης. Δεδομένων των  $f_1, f_2 \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ , των ελέγχων  $g_1, g_2 \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , και αρχικών καταστάσεων  $y_{10}, y_{20} \in L^2(\Omega)$  αναζητούμε  $y_1, y_2 \in L^2[0, T; H_0^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{-1}(\Omega)]$  τέτοια ώστε για σχεδόν παντού  $t \in (0, T]$ , και για όλα τα  $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle y_{1t}, v \rangle + \alpha \langle y_1, v \rangle + \langle y_1^3 - y_1, v \rangle &= \langle f_1, v \rangle + \langle g_1, v \rangle \quad \text{και} \quad \langle y_1(0), v \rangle = \langle y_{10}, v \rangle \\ \langle y_{2t}, v \rangle + \delta \alpha \langle y_2, v \rangle &= \varepsilon \langle y_1 - a_1 y_2, v \rangle + \langle g_2, v \rangle + \langle f_2, v \rangle \quad \text{και} \quad \langle y_2(0), v \rangle = \langle y_{20}, v \rangle. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Μια ισοδύναμη μορφή η οποία είναι πιο κατάλληλη για την ανάλυση dG σχημάτων είναι να αναζητούμε  $(y_{g_i}, g_i) \equiv (y_i, g_i) \in W(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}, i = 1, 2$ , (μοναδικά βέλτιστα ζεύγη). Τότε υπάρχει μια συζυγή μεταβλητή  $\mu_1, \mu_2 \in W(0, T)$  που ικανοποιεί  $\mu_1(T) = \mu_2(T) = 0$  τέτοια ώστε για όλα τα

$v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{-1}(\Omega)],$

$$\begin{aligned} & (y_1(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y_1, v_t \rangle + \alpha(y_1, v) + (y_1^3 - y_1, v)) dt \\ &= (y_{10}, v(0)) + \int_0^T (\langle f_1 - y_2, v \rangle) dt + \int_0^T (\langle g_1, v \rangle) dt, \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

$$\begin{aligned} & (y_2(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y_2, v_t \rangle + \delta\alpha(y_2, v)) dt \\ &= (y_{20}, v(0)) + \int_0^T (\langle \varepsilon(y_1 - a_1 y_2), v \rangle + \langle f_2, v \rangle) dt + \int_0^T (\langle g_2, v \rangle) dt, \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\langle \mu_1, v_t \rangle + \alpha(\mu_1, v) + \langle (3y_1^2 - 1)\mu_1, v \rangle) dt \\ &= -(\mu_1(0), v(0)) + \int_0^T (\langle y_1 - y_{1d}, v \rangle) dt \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\langle \mu_2, v_t \rangle + \alpha(\mu_2, v) - \langle \varepsilon a_1 \mu_2, v \rangle) dt \\ &= -(\mu_2(0), v(0)) + \int_0^T (\langle y_2 - y_{2d}, v \rangle) dt, \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

με περιορισμούς ελέγχων:

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\langle \alpha g_1 + \mu_1, u_1 - g_1 \rangle, \langle \alpha g_2 + \mu_2, u_2 - g_2 \rangle) dx dt \geq 0 \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{A}_{ad}. \quad (8.1.8)$$

Επιπλέον, αν  $y_{it}, \mu_{it} \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)],$  σημειώνουμε πως η (8.1.8), είναι ισοδύναμη με

$$g_i(t, x) = Proj_{[g_{ia}, g_{ib}]} \left( -\frac{1}{\alpha} \mu_i(t, x) \right)$$

για σχεδόν παντού  $(t, x) \in (0, T] \times \Omega.$  Επιπλέον,  $\mu_{it} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap L^2[0, T; L^2(\Omega)], \quad i = 1, 2.$

### 8.1.4 Το πλήρως διακριτοποιημένο πρόβλημα

Έστω  $(y_h(g_{ih}), g_{ih}) \equiv (y_{ih}, g_{ih}) \in \mathcal{U}_h \times L^2[0, T; U_h], i = 1, 2,$  συμβολίζουν τα μοναδικά βέλτιστα ζεύγη. Τότε, υπάρχει μια συζυγή μεταβλητή  $\mu_1, \mu_2 \in U_h$  που ικανοποιεί  $\mu_{1h+}^N = \mu_{2h+}^N = 0$  τέτοια ώστε  $v_h \in P_k[t^{n-1}, t_n; U_h],$  και για όλα τα  $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} & (y_1^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle y_{1h}, v_{ht} \rangle + \alpha(y_{1h}, v_h) + (y_{1h}^3 - y_{1h}, v_h)) dt \\ &= (y_1^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f_1 - y_{2h}, v_h \rangle) dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle g_1, v_h \rangle) dt \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

$$\begin{aligned} & (y_2^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle y_{2h}, v_{ht} \rangle + \delta\alpha(y_{2h}, v_h)) dt \\ &= (y_2^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \varepsilon(y_{1h} - a_1 y_{2h}), v_h \rangle + \langle f_2, v_h \rangle) dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle g_2, v_h \rangle) dt \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

$$\begin{aligned}
(\mu_{1+}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \mu_{1h}, v_{ht} \rangle + \alpha (\mu_{1h}, v_h) + \langle (3y_{1h}^2 - 1)\mu_{1h}, v \rangle) dt \\
= -(\mu_{1+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} ((y_{1h} - y_{1d}, v)) dt
\end{aligned} \quad (8.1.11)$$

$$\begin{aligned}
(\mu_{2+}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \mu_{2h}, v_{ht} \rangle + \alpha (\mu_{2h}, v_h) - \langle \varepsilon a_1 \mu_{2h}, v_h \rangle) dt \\
= -(\mu_{2+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} ((y_{2h} - y_{2d}, v)) dt.
\end{aligned} \quad (8.1.12)$$

με τους περιορισμούς ελέγχων

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( (\alpha g_{1h} + \mu_{1h})(u_{1h} - g_{1h}), (\alpha g_{2h} + \mu_{2h})(u_{2h} - g_{2h}) \right) dx dt \geq 0 \quad (8.1.13)$$

$\forall u_{1h}, u_{2h} \in \mathcal{A}_{ad}^d.$

Επιπλέον, η (8.1.13), είναι ισοδύναμη με την

$$g_{ih}(t, x) = Proj_{[g_{ia}, g_{ib}]} \left( -\frac{1}{\alpha} \mu_{ih}(t, x) \right), i = 1, 2,$$

για σχεδόν παντού  $(t, x) \in (0, T] \times \Omega$ .

Λόγω της παρουσίας των ορίων  $g_{ia}, g_{ib}$  για τη μεταβλητή ελέγχου, μια προβολή πάνω στο σύνολο των αποδεκτών ελέγχων είναι απαραίτητη, η οποία δίνεται από τη συνάρτηση αποκοπής. Εξαιτίας της παρουσίας φραγμάτων για τη μεταβλητή ελέγχου, χρειάζεται μια προβολή πάνω στο σύνολο των επιθυμητών ελέγχων, η οποία δίνεται από τη συνάρτηση αποκοπής

$$\mathbb{P}_{[g_{ia}; g_{ib}]}(g) = \max\{g_{ia}, \min\{g_{ib}, g\}\}.$$

### 8.1.5 Αριθμητικές εφαρμογές

Σ' αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε τις τάξεις σύγκλισης σφαλμάτων σε περιπτώσεις με περιορισμούς στον έλεγχο και χωρίς περιορισμούς όταν για την προσέγγιση χρησιμοποιούμε  $k = 0, l = 1$  (σταθερά πολυώνυμα στο χρόνο και γραμμικά στο χώρο), με  $\tau = \mathcal{O}(h^2)$  και  $\tau = \mathcal{O}(h)$  για την βασική μεταβλητή, και τη συζυγή μεταβλητή στην  $L^2[0, T; H_0^1(\Omega)]$  νόρμα, και τον έλεγχο στην  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  νόρμα.

Για τα αποτελέσματα χρησιμοποιήσαμε το παρακάτω κώδικα, αφού αρχικοποιήσαμε  $n = 0, \varepsilon = 1, tol$  και  $g_1^0$  και  $g_2^0$ . Να σημειώσουμε πως π.χ. το  $y_i^n$  είναι επίσης ακολουθία τμηματικά γραμμικών πολυωνύμων στο χώρο κατά την  $n$  επανάληψη της μεθόδου κλίσεων, και στη περίπτωση χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο θεωρούμε πως τα όρια περιορισμού του ελέγχου  $g_{ia} \rightarrow -\infty, g_{ib} \rightarrow \infty$ . Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε τον αλγόριθμο

- **Βήμα 0** (Αρχική κατάσταση) Επίλυση με  $g_1 := g_1^0, g_2 := g_2^0$  για  $y_1 =: y_1^0, y_2 =: y_2^0$  του συστήματος

$$y_{1t} - \Delta y_1 + y_1^3 - y_1 = -y_2 + g_1 + f_1,$$

$$y_{2t} - \delta \Delta y_2 + \varepsilon a_1 y_2 = \varepsilon y_1 + g_2 + f_2,$$

$$y_{1\Gamma} = y_{2\Gamma} = 0,$$

$$y_1(0, x) = y_{10} \quad y_2(0, x) = y_{20},$$

- **Βήμα 1** (Επίλυση συζυγούς εξίσωσης) Υπολογισμός των συζυγών μεταβλητών  $\mu_1 =: \mu_1^n$ ,  $\mu_2 =: \mu_2^n$ , επιλύοντας το σύστημα

$$\begin{aligned}\mu_{1t} + \Delta\mu_1 + (3y_1^2 - 1)\mu_1 &= y_1 - y_{1d}, \\ \mu_{2t} + \delta\Delta\mu_2 + \varepsilon a_1\mu_2 &= y_2 - y_{2d}, \\ \mu_{1\Gamma} &= \mu_{2\Gamma} = 0, \\ \mu_1(T, x) &= \mu_2(T, x) = 0.\end{aligned}$$

- **Βήμα 2** (Νέα κατεύθυνση καθόδου) Λαμβάνουμε ως κατεύθυνση καθόδου την αρνητική κλίση του συναρτησιακού κόστους

$$-J'(g_1, g_2) = -(\gamma_1 g_1 + \mu_1, \gamma_2 g_2 + \mu_2),$$

- **Βήμα 3** (Ελεγχος του βήματος): Προσδιορισμός του βέλτιστου μεγέθους βήματος  $\varepsilon_n$  επιλύοντας το πρόβλημα

$$\begin{aligned}J\left(\mathbb{P}_{[g_{1a}, g_{1b}]} \{g_1^n + \varepsilon_n(\gamma_1 g_1 + \mu_1)\}, \mathbb{P}_{[g_{2a}, g_{2b}]} \{g_2^n + \varepsilon_n(\gamma_2 g_2 + \mu_2)\}\right) = \\ = \min_{\varepsilon > 0} J\left(\mathbb{P}_{[g_{1a}, g_{1b}]} \{g_1^n + \varepsilon(\gamma_1 g_1 + \mu_1)\}, \mathbb{P}_{[g_{2a}, g_{2b}]} \{g_2^n + \varepsilon(\gamma_2 g_2 + \mu_2)\}\right),\end{aligned}$$

- **Βήμα 4** (Νέα συνάρτηση ελέγχου): Θέτουμε

$$\begin{aligned}g_1^{n+1} &:= \mathbb{P}_{[g_{1a}, g_{1b}]} \{g_1^n + \varepsilon_n(\gamma_1 g_1^n + \mu_1^n)\}, \\ g_2^{n+1} &:= \mathbb{P}_{[g_{2a}, g_{2b}]} \{g_2^n + \varepsilon_n(\gamma_2 g_2^n + \mu_2^n)\},\end{aligned}$$

- **Βήμα 5** (Νέα κατάσταση): Ελέγχουμε αν  $J^n \leq J^{n-1}$  και θέτουμε  $\varepsilon = 1.5\varepsilon$ . Αν  $J^n \geq J^{n-1}$  θέτουμε  $\varepsilon = 0.5\varepsilon$ . Εκτελούμε το **Βήμα 0** με  $g_1 := g_1^{n+1}$ ,  $g_2 := g_2^{n+1}$  για  $y_1 =: y_1^n$ ,  $y_2 =: y_2^n$  και  $n = n + 1$ . Ο αλγόριθμος σταματά όταν  $|J^n - J^{n-1}|/J^n \leq tol$ .

Θεωρούμε παραδείγματα με γνωστή λύση στο  $\Omega \times (0, T) = (0, 0.01)^2 \times (0, 0.01)$  και ομογενείς Dirichlet συνοριακές συνθήκες, παρόμοια με το Κεφάλαιο 6.

Θα επιλέξουμε παραμέτρους  $\delta = 4$ ,  $a_1 = 2$ ,  $L = 0.01$ ,  $H = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.0001$  σύμφωνα με τη πρόσφατη εργασία [24], θεωρώντας τις ομαλοποιητικές σταθερές - σχετικές με το μέγεθος του ελέγχου για το συναρτησιακό:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10^{-4}$ .

**Παράδειγμα 1.** Υποθέτουμε συναρτήσεις στόχου

$$\begin{aligned}y_{1d}(t, x_1, x_2) &= -(e^{-\varepsilon t}(\varepsilon \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 - \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 \\ &+ \pi^2 \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L)L^2 - \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 \\ &+ \pi^2 \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)) + 3 \sin(\pi y/H)^3 H^2 \sin(\pi x/L)^3 L^2 e^{-3\varepsilon t} \\ &- 3e^{-\varepsilon T - 2\varepsilon t} \sin(\pi y/H)^3 H^2 \sin(\pi x/L)^3 L^2 + e^{-\varepsilon T} (\sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 \\ &- \pi^2 \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L)L^2 - \pi^2 \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L))) / (H^2 L^2) \\ y_{2d}(t, x_1, x_2) &= ((((((2a_1 \varepsilon^2 - 1) \sin(\pi y/H)H^2 - 2\delta \varepsilon \pi^2 \sin(\pi y/H)) \sin(\pi x/L) \\ &+ 2\varepsilon \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 - 2\delta \varepsilon \pi^2 \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L))e^{T/(2\varepsilon)} \\ &+ (2\delta \varepsilon \pi^2 e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) - 2a_1 \varepsilon^2 e^{t/(2\varepsilon)} \sin((\pi y/H)H^2) \sin(\pi x/L)L^2 \\ &+ 2\delta \varepsilon \pi^2 e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L))e^{-T/(2\varepsilon) - t/(2\varepsilon)}) / (2\varepsilon H^2 L^2),\end{aligned}$$

και αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned}y_{10}(x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\y_{20}(x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H),\end{aligned}$$

με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε βέλτιστη λύση για το παραπάνω πρόβλημα,  $(y_1, \mu_1, g_1), (y_2, \mu_2, g_2)$  ίση με

$$\begin{aligned}y_1(t, x_1, x_2) &= e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\y_2(t, x_1, x_2) &= e^{-t/(2\varepsilon)} (\sin(\pi x_1/L)) (\sin(\pi x_2/H)), \\\mu_1(t, x_1, x_2) &= (e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon T}) \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H) \\\mu_2(t, x_1, x_2) &= (e^{t/(2\varepsilon)} - e^{T/(2\varepsilon)}) \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\g_1(t, x_1, x_2) &= \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( (e^{-3\varepsilon t - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) (e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H))^2 \right. \\&\quad \left. \sin(\pi x/L)^2 - \varepsilon e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)}) \right), \\g_2(t, x_1, x_2) &= \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( a_1 \varepsilon e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) \right).\end{aligned}$$

Τονίζουμε πως έχουμε περιορισμούς στον έλεγχο και πιο συγκεκριμένα  $(g_i \in [g_{ia}, g_{ib}])$ .

**Πίνακας 8.1:** Τάξεις Σύγκλισης για την δισδιάστατη λύση για τον έλεγχο, τη βασική και συζυγή μεταβλητή με  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ), και περιορισμούς στον έλεγχο.

| Διακριτοποίηση<br>$h = 2\tau$ | Σφάλματα                         |                                  |                                      |
|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
|                               | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.002357022$             | 0.0439518                        | 88.6349                          | 4.25156ε-005                         |
| $h = 0.001178511$             | 0.0214931                        | 31.4208                          | 1.20440ε-005                         |
| $h = 0.000589255$             | 0.0108039                        | 12.0744                          | 4.41810ε-006                         |
| $h = 0.000294627$             | 0.0054238                        | 5.55306                          | 3.26909ε-006                         |
| $h = 0.000147313$             | 0.0027193                        | 2.82740                          | 3.07129ε-006                         |
| Τάξη Σύγκλισης                | 1.0036512                        | 1.24257                          | 0.947767750                          |

**Πίνακας 8.2:** Τάξεις Σύγκλισης για την δισδιάστατη λύση για τον έλεγχο, τη βασική και συζυγή μεταβλητή με  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ), και περιορισμούς στον έλεγχο.

| Διακριτοποίηση<br>$h = \tau^{1/2}/16$ | Σφάλματα                         |                                  |                                      |
|---------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
|                                       | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.00235702$                      | 0.0448696                        | 96.2116                          | 4.3365ε-005                          |
| $h = 0.00138889$                      | 0.0216560                        | 25.3040                          | 1.2195ε-005                          |
| $h = 0.00058925$                      | 0.0109022                        | 11.1981                          | 4.4012ε-006                          |
| $h = 0.00029462$                      | 0.0054459                        | 5.71635                          | 3.1558ε-006                          |
| Τάξη Σύγκλισης                        | 1.0141566                        | 1.35768                          | 1.26015110                           |

**Παράδειγμα 2.** Σ' αυτό το παράδειγμα η συνάρτηση ελέγχου είναι χωρίς περιορισμούς και θεωρούμε τις δυνάμεις

$$\begin{aligned}f_1(t, x_1, x_2) &= (e^{-3\varepsilon t - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) (-e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)} H^2 L^2 + e^{3\varepsilon t} \\&\quad + \pi^2 e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)} / H^2 + \pi^2 e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)} / L^2)), \\f_2(t, x_1, x_2) &= (e^{-\varepsilon t - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) (-e^{\varepsilon t} - 2\varepsilon^2 e^{t/(2\varepsilon)} \\&\quad + 2\pi^2 \delta \varepsilon e^{\varepsilon t} / H^2 + 2\pi^2 \delta \varepsilon e^{\varepsilon t} / L^2)) / (2\varepsilon),\end{aligned}$$

τις συναρτήσεις στόχου

$$\begin{aligned} y_{1d}(t, x_1, x_2) &= 2 - \cos(\pi x/L) \sin(\pi y/H), \\ y_{2d}(t, x_1, x_2) &= 2 - \sin(\pi x/L) \cos(\pi y/H), \end{aligned}$$

και αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} y_{10}(x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\ y_{20}(x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \end{aligned}$$

με βέλτιστη λύση  $(y_1, g_1), (y_2, g_2)$ :

$$\begin{aligned} y_1(t, x_1, x_2) &= e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\ y_2(t, x_1, x_2) &= e^{-t/(2\varepsilon)} (\sin(\pi x_1/L)) (\sin(\pi x_2/H)), \\ g_1(t, x_1, x_2) &= e^{-3\varepsilon t - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) (e^{t/(2\varepsilon)} \sin((\pi x_2)/H))^2 \sin((\pi x_1)/L)^2 \\ &\quad - \varepsilon e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)}, \\ g_2(t, x_1, x_2) &= a_1 \varepsilon e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L). \end{aligned}$$

Πρέπει να αναφέρουμε πως το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου έχει επίσης λυθεί όπως και τα παραδείγματα

**Πίνακας 8.3:** Τιμές του συναρτησιακού και τάξεις σύγκλισης για την διδιάστατη λύση για τον έλεγχο και τη βασική μεταβλητή με  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ), και χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο.

| Διακριτοποίηση<br>$h = 2\tau$ | Σφάλματα                         |                                      |              |
|-------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------|
|                               | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.002357022$             | 0.0544954                        | 4.74548e-005                         | 5.65672e-006 |
| $h = 0.001178511$             | 0.0219039                        | 1.02414e-005                         | 3.64340e-006 |
| $h = 0.000589255$             | 0.0107374                        | 2.60774e-006                         | 3.49583e-006 |
| $h = 0.000294627$             | 0.0054011                        | 7.16507e-007                         | 3.52582e-006 |
| $h = 0.000147313$             | 0.0027120                        | 2.46111e-007                         | 3.53950e-006 |
| Τάξη Σύγκλισης                | 1.0815777                        | 1.8972500000                         | -            |

**Πίνακας 8.4:** Τιμές του συναρτησιακού και τάξεις σύγκλισης για την διδιάστατη λύση για τον έλεγχο και τη βασική μεταβλητή με  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ), και χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο.

| Διακριτοποίηση<br>$h = \tau^{1/2}/22$ | Σφάλματα                       |                                  |                                      |              |
|---------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------|
|                                       | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.002357022$                     | 6.28133e-005                   | 0.0544269                        | 4.73965e-005                         | 5.64252e-006 |
| $h = 0.001388890$                     | 1.30951e-005                   | 0.0218849                        | 1.02321e-005                         | 3.63497e-006 |
| $h = 0.000589250$                     | 3.27452e-006                   | 0.0108686                        | 2.63420e-006                         | 3.55844e-006 |
| $h = 0.000294627$                     | 8.19355e-007                   | 0.0054478                        | 7.20667e-007                         | 3.55338e-006 |
| Τάξη Σύγκλισης                        | 2.0868133333                   | 1.1068586                        | 2.0131000000                         | -            |

στα προηγούμενα κεφάλαια με το λογισμικό FreeFem++, βλέπε π.χ. [64].

**Παράδειγμα 3.** Σ' αυτό το παράδειγμα έχουμε περιορίσει τον έλεγχο στο διάστημα  $[g_a, g_b]$  και με δυνάμεις στο δεξί μέλος:

$$\begin{aligned}
f_1(t, x_1, x_2) &= (e^{-3\epsilon t - t/(2\epsilon)}(e^{t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H))^3 H^2 \sin(\pi x/L)^3 L^2 - \epsilon e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)} \\
&\quad \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 - e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 \\
&\quad + e^{3\epsilon t} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 + \pi^2 e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) L^2 \\
&\quad - \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( e^{-3\epsilon t} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) (\sin(\pi y/H)^2 \sin(\pi x/L)^2 - \epsilon e^{2\epsilon t}) \right) \\
&\quad e^{3\epsilon t + t/(2\epsilon)} H^2 L^2 + \pi^2 e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) \Big) / (H^2 L^2), \\
f_2(t, x_1, x_2) &= (e^{-\epsilon t - t/(2\epsilon)} (2a_1 \epsilon^2 e^{\epsilon t} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 - e^{\epsilon t} \sin(\pi y/H) \\
&\quad H^2 \sin(\pi x/L) L^2 - 2\epsilon^2 e^{t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 + 2\pi^2 \delta \epsilon e^{\epsilon t} \\
&\quad \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) L^2 - 2\epsilon \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( a_1 \epsilon e^{-t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) \right) \\
&\quad e^{\epsilon t + t/(2\epsilon)} H^2 L^2 + 2\pi^2 \delta \epsilon e^{\epsilon t} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) \Big) / (2\epsilon H^2 L^2),
\end{aligned}$$

τις ίδιες συναρτήσεις στόχων καθώς και τις αρχικές συνθήκες όπως στο Παράδειγμα 2, έτσι ώστε η βέλτιστη λύση,  $(y_1, g_1)$ ,  $(y_2, g_2)$  του παραπάνω προβλήματος να δίνονται όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned}
y_1(t, x_1, x_2) &= e^{-\epsilon t} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\
y_2(t, x_1, x_2) &= e^{-t/(2\epsilon)} (\sin(\pi x_1/L)) (\sin(\pi x_2/H)), \\
g_1(t, x_1, x_2) &= \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( e^{-3\epsilon t - t/(2\epsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) (e^{t/(2\epsilon)} \sin(\pi x_2/H)^2 \right. \\
&\quad \left. \sin(\pi x_1/L)^2 - \epsilon e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)}) \right), \\
g_2(t, x_1, x_2) &= \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( a_1 \epsilon e^{-t/(2\epsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) \right).
\end{aligned}$$

Για αυτήν την επιλογή δεδομένων τα αντίστοιχα σφάλματα για τη βασική μεταβλητή και τη μεταβλητή ελέγχου σε διάφορα πλέγματα φαίνονται στους Πίνακες 8.5 και 8.6.

**Πίνακας 8.5:** Τάξεις Σύγκλισης για την δισδιάστατη λύση με  $k = 0$ ,  $l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ )

| Διακριτοποίηση    | Σφάλματα                         |                                      |              |
|-------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------|
|                   | $\ e\ _{L^2[0,T;H_1^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.002357022$ | 0.0544956                        | 5.26533e-005                         | 5.65673e-006 |
| $h = 0.001178511$ | 0.0219040                        | 1.20416e-005                         | 3.64340e-006 |
| $h = 0.000589255$ | 0.0107375                        | 3.21396e-006                         | 3.49583e-006 |
| $h = 0.000294620$ | 0.0054011                        | 1.06383e-006                         | 3.52583e-006 |
| $h = 0.000147310$ | 0.0027120                        | 3.96590e-007                         | 3.53950e-006 |
| Τάξη Σύγκλισης    | 1.0821677                        | 1.7631825000                         | -            |

**Πίνακας 8.6:** Τάξεις Σύγκλισης για την δισδιάστατη λύση με  $k = 0$ ,  $l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ )

| Διακριτοποίηση    | Σφάλματα                       |                                  |                                      |              |
|-------------------|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------|
|                   | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H_1^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.002357022$ | 6.28160e-005                   | 0.0544271                        | 5.25886e-005                         | 5.64252e-006 |
| $h = 0.001388890$ | 1.30974e-005                   | 0.0218850                        | 1.20306e-005                         | 3.63497e-006 |
| $h = 0.000589250$ | 3.27688e-006                   | 0.0108686                        | 3.24638e-006                         | 3.55844e-006 |
| $h = 0.000294627$ | 8.21734e-007                   | 0.0054478                        | 1.06902e-006                         | 3.55339e-006 |
| Τάξη Σύγκλισης    | 2.0854400000                   | 1.1068586                        | 1.8734666666                         | -            |

**Παράδειγμα 4.** Σ' αυτό το παράδειγμα έχουμε ως στόχο συνάρτηση με πολύ μεγάλες τιμές και "μακρά" από τις τιμές της βασικής μεταβλητής. Σημειώνουμε πως σ' αυτό το παράδειγμα δεν περιορίζουμε τον έλεγχο. Οι δυνάμεις στο δεξί μέλος είναι:

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2) &= -(-(\pi^2 e^{(-\varepsilon t)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L))/H^2) + e^{-3\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H)^3 \sin(\pi x_1/L)^3 \\ &\quad - \varepsilon e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) - e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) \\ &\quad + e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L), \\ f_2(t, x_1, x_2) &= (\pi^2 \delta e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L))/H^2 - \varepsilon e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) \\ &\quad + a_1 \varepsilon e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) - (e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L))/(2\varepsilon), \end{aligned}$$

συναρτήσεις στόχων

$$\begin{aligned} y_{1d}(t, x_1, x_2) &= -\sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) e^{-\varepsilon T - 3\varepsilon t} (-\varepsilon H^2 L^2 e^{\varepsilon T + 2\varepsilon t} - 2H^2 L^2 e^{\varepsilon T + 2\varepsilon t} + \pi^2 L^2 e^{\varepsilon T + 2\varepsilon t} \\ &\quad + \pi^2 H^2 e^{\varepsilon T + 2\varepsilon t} + 3 \sin(\pi x_2/H)^2 H^2 \sin(\pi x_1/L)^2 L^2 e^{\varepsilon T} \\ &\quad - 3\varepsilon e^{\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H)^2 H^2 \sin(\pi x_1/L)^2 L^2 + e^{3\varepsilon t} H^2 L^2 - \pi^2 e^{3\varepsilon t} L^2 - \pi^2 e^{3\varepsilon t} H^2)/(H^2 L^2), \\ y_{2d}(t, x_1, x_2) &= e^{-T/(2\varepsilon) - t/(2\varepsilon)} / (2\varepsilon H^2 L^2) (((2a_1 \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1) \sin(\pi x_2)/H) H^2 \\ &\quad - 2\pi^2 \delta \varepsilon \sin(\pi x_2/H)) \sin(\pi x_1/L) L^2 - 2\pi^2 \delta \varepsilon \sin(\pi x_2/H) H^2 \sin(\pi x_1/L) e^{T/(2\varepsilon)} \\ &\quad + (2\pi^2 \delta \varepsilon e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) - 2a_1 \varepsilon^2 e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) H^2) \sin(\pi x_1/L) L^2 \\ &\quad + 2\pi^2 \delta \varepsilon \exp(t/(2\varepsilon)) \sin(\pi x_2/H) H^2 \sin(\pi x_1/L), \end{aligned}$$

καθώς και τις αρχικές συνθήκες όπως στο Παράδειγμα 2, έτσι ώστε οι δύο τριάδες οι οποίες αποτελούν και τη βέλτιστη λύση,  $(y_1, \mu_1, g_1)$ ,  $(y_2, \mu_2, g_2)$  του παραπάνω προβλήματος να δίνονται όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned} y_1(t, x_1, x_2) &= e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\ y_2(t, x_1, x_2) &= e^{-t/(2\varepsilon)} (\sin(\pi x_1/L)) (\sin(\pi x_2/H)), \\ \mu_1(t, x_1, x_2) &= (e^{\varepsilon T} - e^{\varepsilon t}) e^{-\varepsilon T - \varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L), \\ \mu_2(t, x_1, x_2) &= (e^{T/(2\varepsilon)} - e^{t/(2\varepsilon)}) e^{-T/(2\varepsilon) - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L), \\ g_1(t, x_1, x_2) &= \pi^2 e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) / L^2, \\ g_2(t, x_1, x_2) &= \pi^2 \delta e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) / L^2. \end{aligned}$$

Για αυτήν την επιλογή δεδομένων τα αντίστοιχα σφάλματα για τη βασική μεταβλητή και τη μεταβλητή έλεγχο σε διάφορα πλέγματα φαίνονται στους Πίνακες 8.7 και 8.8.

**Πίνακας 8.7:** Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με  $k = 0$ ,  $l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ )

| Διακριτοποίηση<br>$h = \tau$ | Σφάλματα                             |                                      |  |  |                                      |
|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|--|--------------------------------------|
|                              | $\ e_{y_1}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{y_2}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{\mu_1}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{\mu_2}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.0023570$              | 0.07174                              | 0.0457565                            | 1.64568e-006                           | 0.017634                               | 9.29315                              |
| $h = 0.0013888$              | 0.02924                              | 0.0192318                            | 6.74248e-007                           | 0.007384                               | 1.96774                              |
| $h = 0.0005892$              | 0.01438                              | 0.0096866                            | 3.32127e-007                           | 0.003687                               | 0.50788                              |
| $h = 0.0002946$              | 0.00723                              | 0.0048361                            | 1.62793e-007                           | 0.001809                               | 0.14044                              |
| $h = 0.0001473$              | 0.00362                              | 0.0024077                            | 8.07215e-008                           | 0.000890                               | 0.04936                              |
| Τάξη Σύγκλισης               | 1.07636                              | 1.0620475                            | 1.086875                               | 1.07702                                | -                                    |

**Σημείωση 8.1.1.** Πρέπει να παρατηρήσουμε πως σε όλα τα παραδείγματα του παρόντος κεφαλαίου οι τιμές για το  $h$  είναι πολύ πιο μικρότερες από αυτές των παραδειγμάτων σε προηγούμενα κεφάλαια. Αυτό συμβαίνει διότι το πείραμα λαμβάνει χώρα σε πιο μικροσκοπικό επίπεδο και πιο συγκεκριμένα σε τετράγωνο πλευράς 0.01, οπότε και οι τιμές για το χρονικό βηματισμό  $\tau$  θα είναι πιο μικρές αφού εκτελούμε πειράματα με τις επιλογές  $\tau = \mathcal{O}(h)$ , και  $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ . Αυτό βέβαια δεν επηρεάζει το πλήθος των χωροχρονικών βαθμών ελευθερίας σε κάθε πλέγμα, ο οποίος είναι παρόμοιος με τα προηγούμενα



Πίνακας 8.8: Τάξεις Σύγκλισης για την διαδιάστατη λύση με  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ )

| Διακριτοποίηση<br>$h = \tau^{1/2}/22$ | Σφάλματα                             |  |  |  |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--|--|--|--------------------------------------|
|                                       | $\ e_{v_1}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{v_2}\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ e_{\mu_1}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{\mu_2}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.0023570$                       | 0.071655                             | 0.044594                               | 1.97478e-006                           | 0.0225159                              | 9.087240                             |
| $h = 0.0013888$                       | 0.029221                             | 0.019430                               | 6.69304e-007                           | 0.0074020                              | 1.985270                             |
| $h = 0.0005892$                       | 0.014532                             | 0.009640                               | 3.21201e-007                           | 0.0035714                              | 0.506377                             |
| $h = 0.0002946$                       | 0.007271                             | 0.004792                               | 1.58142e-007                           | 0.0017506                              | 0.139421                             |
| $h = 0.0001473$                       | 0.003634                             | 0.002391                               | 7.92880e-008                           | 0.0008706                              | 0.049084                             |
| Τάξη Σύγκλισης                        | 1.075285                             | 1.0552                                 | 1.15961                                | 1.173165                               | -                                    |

και ούτε επίσης το μέγεθος αποθήκευσης των πινάκων που θα χρειαστεί να αποθηκευτούν στη μνήμη του υπολογιστή.

Παρόλα ταύτα παρατηρούνται οι αναμενόμενες τάξεις σύγκλισης για τα σφάλματα στην  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  και είναι ίδιες όπως είναι αναμενόμενο με αυτές του ημιγραμμικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου στο Κεφάλαιο 6, αφού και το παρόν πρόβλημα είναι ημιγραμμικό σύστημα εξισώσεων με βέλτιστο έλεγχο και επίσης ίδιες με αυτές της εργασίας [24] (Fitzugh- Nagumo σύστημα χωρίς έλεγχο). Ωστόσο στο τελευταίο παράδειγμα, χρησιμοποιώντας πιο ακραίο στόχο, και ακραίες τιμές για τον έλεγχο και κάνοντας μια πιο αναλυτική μελέτη για τη κάθε μια μεταβλητή ξεχωριστά, παρατηρούμε πολύ μεγαλύτερα σφάλματα για τον έλεγχο αλλά είναι αξιοσημείωτο ότι έχουμε και πάλι τις αναμενόμενες τάξεις σύγκλισης όπως φαίνεται στους Πίνακες 8.8 και 8.7.

**Σημείωση 8.1.2.** Τέλος να παρατηρήσουμε πως όπως είναι αναμενόμενο, συγκρίνοντας τα προβλήματα με περιορισμούς στον έλεγχο με τα αντίστοιχα χωρίς περιορισμούς, έχουμε παρεμφερείς τιμές σφαλμάτων για τη βασική και συζυγή μεταβλητή αλλά αυξημένες τιμές για τα σφάλματα ελέγχου, όπως επίσης και για το συναρτησιακό (βλέπε παρόμοια φαινόμενα και στα παραδείγματα σε εξελικτικά προβλήματα Stokes με περιορισμούς στον έλεγχο στο Κεφάλαιο 7).



# 9

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Είναι μεγάλη ευχαρίστηση να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε κάποιους ανθρώπους που με βοήθησαν και με στήριξαν τα τελευταία πέντε χρόνια.

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα μου, Κ. Χρυσοφίνο, για τη βοήθεια και τη συνέπεια για τη διαδρομή μου από το μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης στο διδακτορικό δίπλωμα. Αν και μερικές φορές οι περιστάσεις δεν ήταν ιδανικές είμαι ευγνώμων για το χρόνο και την υπευθυνότητα, και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε όλο αυτό το καιρό.

Ευχαριστώ επίσης, τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Χρυσοβέργη και Κοκκίνη, για τη ευγενική παρουσία τους, τη διδασκαλία τους, και τις εύστοχες και για βαθύ προβληματισμό ερωτήσεις τους ειδικά κατά τη παρουσίαση της ενδιάμεσης για το διδακτορικό ομιλίας μου.

Πολύ σημαντική ήταν επίσης η οικονομική ενίσχυση και η υποτροφία του Ιδρύματος Παπακυριακόπουλου, καθώς και η διδασκαλία εργαστηρίων που μου εμπιστεύτηκε η διεύθυνση του Τομέα Μαθηματικών Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. και που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ πλήρες χρόνου και να μελετήσω σε βάθος το θέμα της διατριβής μου.

Τέλος, είμαι παντοτινά ευγνώμων στη σύζυγό μου Γεωργία, για όλη την αγάπη και υποστήριξη, ακόμη και όταν είχα πολύ δουλειά ακόμη και στο σπίτι, και οι ώρες εργασίας είχαν κατά πολύ υπερβεί το υγιές όριο. Ευχαριστώ πολύ και τους γιους μου Νικόλα και μπέμπη, που κάθε πρωί μου ζωγράφιζαν ένα τεράστιο χαμόγελο στο πρόσωπό μου.

*Ευθύμης Καρατζάς*

*Αθήνα, Ελλάδα, Ιανουάριος 2015*



# ΛΙΣΤΑ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

|  |  |    |
|--|--|----|
| $(\cdot, \cdot)$                       | εσωτερικό γινόμενο του $L^2(\Omega)$ .....   | 14 |
| $(\cdot, \cdot)_\Gamma$                | εσωτερικό γινόμενο του $L^2(\Gamma)$ .....   | 14 |
| $\mathbf{H}^1(\Omega)$                 | $\equiv H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ .....   | 19 |
| $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$              | $\equiv (H_0^1(\Omega))^*$ .....   | 19 |
| $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$               | $\equiv H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ .....   | 19 |
| $\mathbf{L}^p(\Omega)$                 | $\equiv L^p(\Omega; \mathbb{R}^2)$ .....   | 19 |
| $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ | κάθετη προς τα έξω παράγωγος στο $\partial\Omega$ .....  | 18 |
| $\Gamma$                               | $\equiv \partial\Omega$ το σύνορο του $\Omega$ .....   | 14 |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$         | δυσικό ζεύγος.....   | 14 |
| $\mathbb{N}$                           | το σύνολο φυσικών αριθμών.....   | 14 |
| $\Omega$                               | φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^N$ .....   | 14 |
| $H^k(\Omega)$                          | $\equiv W^{k,2}$ .....   | 14 |
| $H^k(\Omega)^*$                        | ο δυσικός του $H^k(\Omega)$ .....  | 14 |
| $H^{-1}(\Omega)$                       | ο δυσικός του $H_0^1(\Omega)$ .....  | 14 |
| $H^{2,1}[0, T; \Omega]$                | $\equiv W^{2,1,2}[0, T; \Omega]$ .....   | 19 |
| $L^p(\Omega)$                          | χώρος $p$ -ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $\Omega$ , $1 \leq p \leq \infty$ .....   | 14 |
| $W^{2,1,p}[0, T; \Omega]$              | $\equiv L^p[0, T; W^{2,p}(\Omega)] \cap W^{1,p}[0, T; L^p(\Omega)]$ .....  | 19 |
| $W^{k,p}$                              | χώρος Sobolev $p$ -ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με παραγώγους κατανομών μέχρι τάξης $k$ , $p$ -ολοκληρώσιμες στο $\Omega$ ..... | 14 |
| $W_D(0, T)$                            | $\equiv L^2[0, T; H_0^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ .....   | 19 |
| $W_R(0, T)$                            | $\equiv L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap L^\infty[0, T; L^2(\Omega)] \times L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ .....                         | 19 |
| $W_S(0, T)$                            | $\equiv L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ .....                                       | 19 |



# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

|   |     |
|---|-----|
| 5.1 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 0$ , $\tau = h^2/2$ ομαλά αρχικά δεδομένα και $y_d = 0.5$ . . . . .  | 87  |
| 5.2 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 0$ , $\tau = h^2/2$ ομαλά αρχικά δεδομένα και $y_d = 0$ . . . . .  | 87  |
| 5.3 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 0$ , $\tau = h^2/2$ ομαλά αρχικά δεδομένα και $y_d = 0.5 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)$ . . . . .  | 88  |
| 5.4 Τάξεις Σύγκλισης για τη διδιάστατη λύση με $k = 0$ , $\tau = h^2/2$ και αρχικά δεδομένα με μικρή ομαλότητα. . . . .   | 91  |
| 5.5 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 1$ , $l = 1$ , $\tau = \mathcal{O}(h^{3/4})$ , ομαλά αρχικά δεδομένα και $y_d = 0$ . . . . .   | 92  |
| 5.6 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 1$ , $l = 1$ , $\tau = \mathcal{O}(h^{1/2})$ , ομαλά αρχικά δεδομένα και $y_d = 0$ . . . . .   | 92  |
| 6.1 Τάξεις Σύγκλισης για την 2-διάστατη λύση με $k = 0$ , $l = 1$ ( $h = \tau$ ). . . . .   | 100 |
| 6.2 Τάξη σύγκλισης για το διδιάστατο πρόβλημα με $k = 0$ , $l = 1$ ( $h^2 = \tau$ ). . . . .  | 100 |
| 6.3 Τάξη σύγκλισης για το διδιάστατο πρόβλημα με $k = 0$ , $l = 1$ ( $h^2 = \tau$ ). . . . .  | 100 |
| 7.1 Τάξεις Σύγκλισης για $k = 0$ και $\tau = h^2/8$ . . . . .   | 103 |
| 7.2 Τάξεις Σύγκλισης για $k = 1$ με $\tau = h/16$ . . . . .   | 104 |
| 7.3 Τάξεις Σύγκλισης για $k = 1$ με $\tau = h^{3/2}/10$ . . . . .   | 104 |
| 7.4 Τάξεις Σύγκλισης για $k = 1$ με $\tau = h^2/8$ . . . . .  | 104 |
| 7.5 Τάξεις Σύγκλισης για $k = 0$ με $\tau = h^2/8$ με ασυνέχεια στα αρχικά δεδομένα και ασυνέχεια στο στόχο. . . . .  | 106 |
| 7.6 Τάξεις Σύγκλισης για $k = 0$ με $\tau = h^2/8$ με ασυνέχεια στα αρχικά δεδομένα, ασυνέχεια στο στόχο και ασθενείς περιορισμούς στον έλεγχο. . . . .   | 107 |
| 7.7 Τάξεις Σύγκλισης για $k = 0$ με $\tau = h^2/8$ με ασυνέχεια στα αρχικά δεδομένα και ισχυρούς περιορισμούς στον έλεγχο. . . . .  | 107 |
| 8.1 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση για τον έλεγχο, τη βασική και συζυγή μεταβλητή με $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ), και περιορισμούς στον έλεγχο. . . . .                             | 117 |
| 8.2 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση για τον έλεγχο, τη βασική και συζυγή μεταβλητή με $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ), και περιορισμούς στον έλεγχο. . . . .                           | 117 |
| 8.3 Τιμές του συναρτησιακού και τάξεις σύγκλισης για την διδιάστατη λύση για τον έλεγχο και τη βασική μεταβλητή με $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ), και χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο.118        | 118 |
| 8.4 Τιμές του συναρτησιακού και τάξεις σύγκλισης για την διδιάστατη λύση για τον έλεγχο και τη βασική μεταβλητή με $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ), και χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο. . . . . | 118 |
| 8.5 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ) . . . . .   | 119 |
| 8.6 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ) . . . . .   | 119 |
| 8.7 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ) . . . . .   | 120 |
| 8.8 Τάξεις Σύγκλισης για την διδιάστατη λύση με $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ) . . . . .   | 121 |





# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 5.1 | Σφάλματα για τη βασική μεταβλητή και τη μεταβλητή ελέγχου για $\tau = h^2/2$ . . . . .   | 88  |
| 5.2 | Η νόρμα για τη συνάρτηση ελέγχου $\ g(t)\ _{L^2(\Omega)}$ . . . . .  | 89  |
| 5.3 | Απόσταση από το στόχο $\ y(t) - y_d(t)\ _{L^2(\Omega)}$ . α) Ομαλά δεδομένα. β) Δεδομένα με μικρή ομαλότητα $L^2(\Omega)$ - ασυνέχεια. . . . .   | 89  |
| 5.4 | Επίδραση από τις μεταβολές της ομαλοποιητικής παραμέτρου για το συναρτησιακό $\alpha$ στον έλεγχο $\ g(t)\ _{L^2(\Omega)}$ για σταθερό πλέγμα $48 \times 48$ , και τις διάφορες τιμές του $\alpha$ . . . . . | 89  |
| 5.5 | Επίδραση από τις μεταβολές της ομαλοποιητικής παραμέτρου για το συναρτησιακό $\alpha$ στην απόσταση της λύσης από το στόχο $\ y(t) - y_d(t)\ _{L^2(\Omega)}$ . . . . .                                       | 90  |
| 5.6 | Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής. . . . .  | 94  |
| 5.7 | Στιγμιότυπο της συζυγούς μεταβλητής. . . . .   | 95  |
| 7.1 | Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής σε πλέγμα $12 \times 12$ με ομαλά δεδομένα. . . . .   | 108 |
| 7.2 | Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής σε πλέγμα $24 \times 24$ με ομαλά δεδομένα. . . . .   | 108 |
| 7.3 | Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής με μη ομαλά δεδομένα σε αρχικό χρονικό στάδιο. . . . .  | 109 |
| 7.4 | Στιγμιότυπο της βασικής μεταβλητής με μη ομαλά δεδομένα σε τελικό χρονικό στάδιο. . . . .  | 109 |
| 7.5 | Στιγμιότυπο της συζυγούς μεταβλητής με μη ομαλά δεδομένα. . . . .  | 110 |





## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

---

### Περιεχόμενα

---

**Παράρτημα 1** Παράθεση των αποτελεσμάτων που σχετίζονται με προβολές.

**Παράρτημα 2** Παράθεση των αποτελεσμάτων που σχετίζονται με εκθετική παρεμβολή.

**Παράρτημα 3** Παράθεση των αποτελεσμάτων που σχετίζονται με τη διακριτή χαρακτηριστική συνάρτηση.



## Α'.1

 Προβολές

**Λήμμα Α'.1.1.** Έστω  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , και  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  ορίζεται στους Ορισμούς 4.2.1 και 4.2.2 αντιστοίχως. Τότε, για όλα τα  $v \in L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; L^2(\Omega)]$ . υπάρχει σταθερά  $C \geq 0$  ανεξάρτητα των  $h, \tau$  τέτοια ώστε

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C(h^{l+1} \|v\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}).$$

Αν επιπλέον,  $k = 0, l = 1$ , και  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$  τότε υπάρχει μια σταθερά  $C \geq 0$  ανεξάρτητο από τα  $h, \tau$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\leq C(h \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \tau^{1/2} (\|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \|v_t\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]})), \\ \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} &\leq C(\|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + (\tau/h^2) \|v_t\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]}). \end{aligned}$$

Έστω  $k = 0, l = 1$ , και  $v \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ . Τότε υπάρχει σταθερά  $C \geq 0$  ανεξάρτητη από τα  $h, \tau$  τέτοια ώστε,

$$\|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C(h \|v\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]} + \tau^{1/2} (\|v_t\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]})).$$

*Απόδειξη.* Η πρώτη εκτίμηση δίνεται στο [32, Θεώρημα 4.3, και Συμπέρασμα 4.8]. Για τη δεύτερη, χρησιμοποιώντας το [32, Θεώρημα 4.3, Συμπέρασμα 4.8], και τις ιδιότητες προσεγγισιμότητας του  $P_h$ , παίρνουμε για κάθε  $v \in L^2[t^{n-1}, t^n; H^{l+1}(\Omega)]$ , με την  $(k+1)^{th}$  χρονική παράγωγο  $v^{(k+1)} \in L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]$ , τους ακόλουθους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} \|v - P_n^{loc} v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} &\leq C(\|v - P_n v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|P_n v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}) \\ &\leq C(h^l \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^{l+1}(\Omega)]} + (\tau^{k+1}/h) \|v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}). \end{aligned}$$

όπου στον τελευταίο υπολογισμό έχουμε χρησιμοποιήσει μια αντίστροφη ανισότητα. Οπότε,

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C(h^l \|v\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \frac{\tau^{k+1}}{h} \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}).$$

το οποίο αποδεικνύει τη δεύτερη εκτίμηση. Για τη δεύτερη εκτίμηση, για κάθε  $t \in (t^{n-1}, t^n]$ , προσθαφαιρώντας τους κατάλληλους όρους, και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του  $Q_h^{loc}$ , παίρνουμε,

$$\|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \leq \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v(t) - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(t^n) - Q_h v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt.$$

Για το πρώτο όρο,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C\tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v_t\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2) dt.$$

Ο δεύτερος όρος μπορεί να προσεγγιστεί με τη τριγωνική ανισότητα, την ιδιότητα προσεγγισιμότητας  $\|v(t) - Q_h v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|v(t)\|_{H^1(\Omega)}$ , και το φράγμα του  $\|v(t) - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}$ . Ορίζουμε  $e(t) = v(t^n) - v(t)$ , και παρατηρούμε πως  $(1/2) \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle e_t, e \rangle = -\langle v_t(t), v(t^n) - v(t) \rangle$ . Επομένως ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες στο  $(s, t^n]$ , έχουμε  $(1/2) (\|e(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) = \int_s^{t^n} -\langle v_t(t), v(t^n) - v(t) \rangle dt$ . Σημειώνουμε πως  $e(t^n) = 0$ , και οπότε παίρνουμε μετά από ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο χρόνο,  $(1/2) \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\langle v(s), v(t^n) - v(s) \rangle - \int_s^{t^n} \langle v_t(t), v(t) \rangle dt$ . Οπότε, διώχνοντας τους θετικούς όρους, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young,  $(1/4) \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^{t^n} \|v_t\|_{H^1(\Omega)^*} \|v\|_{H^1(\Omega)} dt$ . Χρησιμοποιώντας την εμφύτευση  $L^2[s, t^n; H^1(\Omega)] \cap H^1[s, t^n; H^1(\Omega)^*] \subset$

$L^\infty[s, t^n; L^2(\Omega)]$ , την ανισότητα Hölder και ολοκληρώνοντας χρονικά από το  $t^{n-1}$  στο  $t^n$ , τελικώς καταλήγουμε στην

$$(1/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C\tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v_t\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2) ds.$$

Για τη τρίτη εκτίμηση, αρχικά παρατηρούμε πως η γενικευμένη ορθογώνια προβολή  $Q_h : H^1(\Omega)^* \rightarrow U_h$  είναι ευσταθής στη νόρμα  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^*}$ . Ωστόσο, για όλα τα  $v \in H^1(\Omega)^*$ ,  $w \in H^1(\Omega)$ , από τον ορισμό των προβολών  $Q_h$  και  $P_h$ ,

$$\begin{aligned} \|Q_h v\|_{H^1(\Omega)^*} &= \sup_{w \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle Q_h v, w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} \leq \sup_{w \in H^1(\Omega)} \left( \frac{|\langle Q_h v - v, w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} + \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} \right) \\ &\leq \sup_{w \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle Q_h v - v, w - P_h w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} + \|v\|_{H^1(\Omega)^*}, \end{aligned}$$

όπου στη τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι  $\langle Q_h v - v, P_h w \rangle = 0$ . Σημειώνουμε επίσης πως από τον ορισμό της προβολής  $P_h$ , έχουμε πως  $\langle Q_h v - v, w - P_h w \rangle = \langle -v, w - P_h w \rangle$ . Οπότε, η  $H^1(\Omega)$  ευστάθεια για την προβολή  $P_h$  υποδηλώνει,

$$\begin{aligned} \|Q_h v\|_{H^1(\Omega)^*} &\leq \sup_{w \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle v, w - P_h w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} + \|v\|_{H^1(\Omega)^*} \leq C \frac{\|v\|_{H^1(\Omega)^*} \|w - P_h w\|_{H^1(\Omega)}}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} + \|v\|_{H^1(\Omega)^*} \\ &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)^*}. \end{aligned}$$

Επομένως, ο ορισμός του  $Q_h^{loc}$  για  $k = 0$ ,  $l = 1$ , η αντίστροφη εκτίμηση  $\|Q_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq C/h \|Q_h v\|_{H^1(\Omega)^*}$ , και η ευστάθεια της  $Q_h$  στη νόρμα  $H^1(\Omega)^*$  δείχνει πως

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} &= \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - Q_h v(t^n)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - Q_h v(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|Q_h v(t) - Q_h v(t^n)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \frac{C}{h^2} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|Q_h v(t) - Q_h v(t^n)\|_{H^1(\Omega)^*}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \frac{C}{h^2} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - v(t^n)\|_{H^1(\Omega)^*}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \frac{C}{h^2} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v_t\|_{H^1(\Omega)^*}^2 ds dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + C \frac{\tau}{h^2} \|v_t\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]} \end{aligned}$$

για όλα τα  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη της τέταρτης εκτίμησης. Η τελευταία εκτίμηση μπορεί να παραχθεί παρόμοια με τη δεύτερη, αφού παρατηρήσουμε πως  $Q_h^{loc} \equiv P_h^{loc}$ , και  $\frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\langle \nabla v_t, \nabla v \rangle$  και

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|e(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\nabla e(t), \nabla e(t)) + \lambda(e(t), e(t))_\Gamma).$$

Στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο στο  $(s, t^n]$ , και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του

γινομένου, έχουμε

$$\begin{aligned} -(1/2)(\|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2) &= \int_s^{t^n} -(\nabla v_t(t), \nabla(v(t^n) - v(t)) + \langle e_t, e \rangle_\Gamma dt \\ &= \int_s^{t^n} ((\nabla v_t(t), \nabla v(t)) + \langle v_t, v \rangle_\Gamma) dt + \int_s^{t^n} -(\nabla v_t(t), \nabla v(t^n)) - \langle v_t, v(t^n) \rangle_\Gamma dt. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε πως έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι  $e(t^n) = 0$ . Οπότε ολοκληρώνοντας κατά μέρη χωρικά, το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος, χρησιμοποιώντας τη μηδενική συνθήκη Robin την ανισότητα Hölder, έχουμε

$$\begin{aligned} (1/2)(\|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2) &= \int_s^{t^n} ((v_t, \Delta v) - \left\langle v_t, \frac{\partial v}{\partial n} \right\rangle_\Gamma - \langle v_t, v \rangle_\Gamma) dt + \|\nabla v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - (\nabla v(s), \nabla v(t^n)) + \langle v(s), v(t^n) \rangle_\Gamma - \|v(t^n)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq C \|v_t\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^2(\Omega)]} + \|\nabla v(s)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + C \|v(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + C \|v(t^n)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq C (\|v_t\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 + \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^2(\Omega)]}^2 + \|\nabla v\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Gamma)]}). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ίχνους για να φράξουμε το  $\|v\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Gamma)]} \leq C \|v\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}$  η εμφύτευση  $L^2[t^{n-1}, t^n; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)] \subset L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]$  και ολοκληρώνοντας άλλη μια φορά από το  $t^{n-1}$  στο  $t^n$ , τελικώς καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq C \tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^2(\Omega)}^2) ds.$$

από την οποία παίρνουμε την επιθυμητή εκτίμηση μετά από άθροισμα κατά μέλη.  $\square$

**Λήμμα Α'.1.2.** Έστω  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , και  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  ορισμένο στους Ορισμούς 4.2.35 και 4.2.36 αντιστοίχως. Τότε, για όλα τα  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . υπάρχει μια σταθερά  $C$  ανεξάρτητη των  $h, \tau$  τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h^{l+1} \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}), \\ \|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(h^l \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}/h \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}), \end{aligned}$$

Έστω  $k = 0, l \geq 1$ , και  $w \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Τότε, υπάρχει μια σταθερά  $c$  ανεξάρτητη των  $h, \tau$  τέτοιο ώστε,

$$\|w - P_h^{loc} w\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C(h \|w\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]} + \tau^{1/2} (\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]}).$$

Έστω  $k = 0, l \geq 1$ , και  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Τότε υπάρχει μια σταθερά  $C > 0$  ανεξάρτητη των  $h, \tau$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \tau^{1/2} \|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}), \\ \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + (\tau^{1/2}/h) (\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]}). \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Η πρώτη εκτίμηση δίνεται στο [32, Θεώρημα 4.3, και Συμπέρασμα 4.8]. Για τη δεύτερη, χρησιμοποιώντας το [32, Θεώρημα 4.3, Συμπέρασμα 4.8], και τις προσεγγιστικές ιδιότητες του  $P_h$ , έχουμε για κάθε  $v \in L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]$ , με την  $(k+1)^{\text{η}}$  παράγωγο ως προς το χρόνο  $v^{(k+1)} \in L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned} \|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(\|v - P_h v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|P_h v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^1(\Omega)]}) \\ &\leq C(h^l \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + (\tau^{k+1}/h) \|v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{L}^2(\Omega)]}). \end{aligned}$$

όπου στον τελευταίο υπολογισμό έχουμε χρησιμοποιήσει μια αντίστροφη εκτίμηση. Οπότε αποδεικνύεται η δεύτερη εκτίμηση:

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C(h^l \|v\|_{L^2[0,T;H^{l+1}(\Omega)]} + \frac{\tau^{k+1}}{h} \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}).$$

Η τρίτη εκτίμηση είναι στη βιβλιογραφία και η απόδειξη παραλείπεται. Η τέταρτη εκτίμηση, προκύπτει από γνωστά επιχειρήματα με μικρές τροποποιήσεις για να χειριστούμε τη μηδενικής απόκλισης φύση της προβολής. Για χάριν πληρότητας διατυπώνουμε τα βασικά επιχειρήματα. Για κάθε  $t \in (t^{n-1}, t^n)$ , προσθαφαιρώντας κατάλληλους όρους, και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του  $Q_h^{loc}$ , παίρνουμε,

$$\|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v(t) - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(t^n) - Q_h v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt.$$

Για το πρώτο όρο, ορίζουμε  $e(t) = v(t^n) - v(t)$ , και παρατηρούμε πως  $(1/2) \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle e_t, e \rangle = -\langle v_t(t), v(t^n) - v(t) \rangle$ . Επομένως ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο στο διάστημα  $(s, t^n)$ , παίρνουμε  $(1/2) (\|e(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) = \int_s^{t^n} -\langle v_t(t), v(t^n) - v(t) \rangle dt$ . Παρατηρούμε πως  $e(t^n) = 0$ , και επομένως παίρνουμε μετά από χρονική ολοκλήρωση κατά μέλη,  $(1/2) \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\langle v(s), v(t^n) - v(s) \rangle - \int_s^{t^n} \langle v_t(t), v(t) \rangle dt$ . Επίσης, διώνοντας τους θετικούς όρους, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young,  $(1/4) \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^{t^n} \|v_t\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} dt$ . Χρησιμοποιώντας την εμφύτευση  $L^2[s, t^n; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[s, t^n; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)] \subset L^\infty[s, t^n; L^2(\Omega)]$ , την ανισότητα Hölder, και ολοκλήρωση στο χρόνο από το  $t^{n-1}$  μέχρι το  $t^n$ , τελικά καταλήγουμε

$$(1/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C\tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v_t\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2 + \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2) ds,$$

η οποία δείχνει την επιθυμητή εκτίμηση για το πρώτο όρο. Ο δεύτερος όρος, μπορεί να αποδειχθεί παρόμοια χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, και τη προσεγγιστική ιδιότητα

$$\sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v(t^n) - Q_h v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \leq \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v(t^n) - v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(t) - Q_h v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt,$$

όπου ο τελευταίος όρος μπορεί να φραχτεί από τον  $\|v(t) - Q_h v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ , (υπογραμμίζουμε πως  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)]$ ). Για τη τελευταία εκτίμηση, θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο υπολογισμό, αφού τονίσουμε τη μηδενικής απόκλισης φύση της προβολής μας. Αρχικά παρατηρούμε πως η γενικευμένη ορθογώνια προβολή  $Q_h : \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$  είναι ευσταθής  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}$  νόρμα, βλ έπε π.χ. το [69], για όλα τα  $v \in \mathbf{V}^{-1}(\Omega)$ . Πράγματι, για όλα τα  $v \in \mathbf{V}^{-1}(\Omega)$ ,  $w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , από τον ορισμό των  $Q_h$  και  $P_h$ ,

$$\begin{aligned} \|Q_h v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} &= \sup_{w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{|\langle Q_h v, w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \leq \sup_{w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \left( \frac{|\langle Q_h v - v, w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \right) \\ &\leq \sup_{w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{|\langle Q_h v - v, w - P_h w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \|v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}, \end{aligned}$$

όπου στη τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι  $\langle Q_h v - v, P_h w \rangle = 0$ . Σημειώνουμε πως από τον ορισμό της προβολής  $P_h$ , έχουμε  $\langle Q_h v - v, w - P_h w \rangle = \langle -v, w - P_h w \rangle$ . Επομένως, η  $H^1(\Omega)$  ευστάθεια της  $P_h$  προβολής στην  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  νόρμα για κάθε  $v \in V(\Omega)$ , υποδηλώνει,

$$\begin{aligned} \|Q_h v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} &\leq \sup_{w \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{|\langle v, w - P_h w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \frac{\|v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|w - P_h w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \|v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Επίσης, ο ορισμός του  $Q_h^{loc}$  για  $k = 0$ ,  $l \geq 1$ , η αντίστροφη ανισότητα  $\|Q_h v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C/h \|Q_h v\|_{L^2(\Omega)}$ ,



δείχνουν

$$\begin{aligned}
 \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} &= \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - Q_h v(t^n)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &= \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - Q_h v(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|Q_h v(t) - Q_h v(t^n)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &\leq C \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \frac{C}{h} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|Q_h v(t) - Q_h v(t^n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &\leq C \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \frac{C}{h} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - v(t^n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &\leq C \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \frac{C}{h} \left( \sum_{n=1}^N \tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v_t\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2 + \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &\leq C \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + C \frac{\tau^{1/2}}{h} (\|v_t\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]}).
 \end{aligned}$$

για όλα τα  $v \in L^2[0,T;\mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη της τέταρτης εκτίμησης.  $\square$

## A'.2 Εκθετική παρεμβολή

Η πολυωνυμική παρεμβολή των συναρτήσεων  $e^{-\rho(t-t^{n-1})}v$ , όπου  $v \in \mathcal{P}_k[t^{n-1},t^n;V]$  και ο  $V$  να είναι γραμμικός χώρος, χρειάζεται για την απόδειξη αποτελεσμάτων ευστάθειας. Εδώ παραθέτουμε τον ορισμό και τα κύρια αποτελέσματα από το [32].

**Ορισμός A'.2.1.** Έστω  $V$  ένας γραμμικός χώρος, και το  $\rho > 0$  είναι δεδομένο. Αν  $v = \sum_{i=0}^k r_i(t)v_i \in \mathcal{P}_k[t^{n-1},t^n;V]$ , με  $r_i \in \mathcal{P}_k[t^{n-1},t^n]$  και  $v_i \in V$ , ορίζουμε την εκθετική παρεμβολή του  $v$  με

$$\bar{v} = \sum_{i=0}^k \bar{r}_i(t)v_i,$$

όπου  $\bar{r}_i \in \mathcal{P}_k[t^{n-1},t^n]$  είναι η προσέγγιση του  $r_i(t)e^{-\rho(t-t^{n-1})}$  που ικανοποιεί την  $r_i(t^{n-1}) = \bar{r}_i(t^{n-1})$  και

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \bar{r}_i(t)q(t)dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} r_i(t)q(t)e^{-\rho(t-t^{n-1})}dt, \quad q \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1},t^n].$$

Το ακόλουθο Λήμμα (βλέπε [32, Λήμμα 3.4]) εξασφαλίζει πως η διαφορά  $v - \bar{v}$  παραμένει μικρή σε διάφορες φόρμες.

**Λήμμα A'.2.2.** Έστω  $V$  και  $Q$  γραμμικοί χώροι και  $v \rightarrow \bar{v}$  είναι η απεικόνιση κατασκευασμένη στον Ορισμό A'.2.1, για δοσμένο  $\rho > 0$ . Αν  $L(\cdot, \cdot) : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  συμβολίζει μια διγραμμική απεικόνιση, και  $v \in \mathcal{P}_k[t^{n-1},t^n;V]$  τότε

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} L(\bar{v}(t), q(t))dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} L(v(t), q(t))e^{-\rho(t-t^{n-1})}dt, \quad \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1},t^n;Q].$$

Αν  $(\cdot, \cdot)_V$  είναι ένα (ημι) εσωτερικό γινόμενο στον  $V$ , τότε υπάρχει μια σταθερά  $C_k$  ανεξάρτητη του  $\rho > 0$ , τέτοια ώστε

$$\|v - \bar{v}\|_{L^2[t^{n-1},t^n;V]} \leq C_k \rho(t^n - t^{n-1}) \|v\|_{L^2[t^{n-1},t^n;V]}.$$

### Α'.3 Διακριτή χαρακτηριστική συνάρτηση

Τονίζουμε πως ο υπολογισμός του σφάλματος σε αυθαίρετες χρονικές στιγμές  $t \in [t^{n-1}, t^n]$  μπορεί να διευκολυνθεί με την αντικατάσταση  $v_h = \chi_{[t^{n-1}, t]} y_h$  στις διακριτές εξισώσεις. Ωστόσο, αυτή η επιλογή δεν είναι διαθέσιμη αφού  $\chi_{[t^{n-1}, t]} y_h$  δεν ανήκει στον  $\mathcal{U}_h$ , εκτός εάν  $t$  είναι σημείο της διαμέρισης. Οπότε πρέπει να κατασκευαστούν οι προσεγγίσεις τέτοιων συναρτήσεων. Αυτό έχει γίνει στο [31, Ενότητα 2.3]. Για χάρη πληρότητας παραθέτουμε τα κύρια αποτελέσματα. Οι προσεγγίσεις είναι κατασκευασμένες στο διάστημα  $[0, \tau]$ , όπου  $\tau = t^n - t^{n-1}$  και δεν αλλάζουν κατά τους μετασχηματισμούς.

Έστω  $t \in (0, \tau)$ . Θεωρούμε πολυώνυμο  $s \in \mathcal{P}_k(0, \tau)$ , και συμβολίζουμε τη διακριτή προσέγγιση του  $\chi_{[0,t]} s$  με το πολυώνυμο  $\hat{s} \in \{\hat{s} \in \mathcal{P}_k(0, \tau), \hat{s}(0) = s(0)\}$  το οποίο ικανοποιεί την

$$\int_0^\tau \hat{s} q = \int_0^t s q \quad \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}(0, \tau).$$

Το κίνητρο για τη παραπάνω κατασκευή προέρχεται από τη βασική παρατήρηση πως για  $q = s'$  παίρνουμε  $\int_0^\tau s' \hat{s} = \int_0^t s s' = \frac{1}{2}(s^2(t) - s^2(0))$ .

Η κατασκευή μπορεί να επεκταθεί σε προσεγγίσεις του  $\chi_{[0,t]} v$  για  $v \in \mathcal{P}_k[0, \tau; V]$  όπου  $V$  είναι γραμμικός χώρος. Η διακριτή προσέγγιση του  $\chi_{[0,t]} v$  στον  $\mathcal{P}_k[0, \tau; V]$  ορίζεται από την  $\hat{v} = \sum_{i=0}^k \hat{s}_i(t) v_i$  και αν το  $V$  είναι ένας χώρος ημι-εσωτερικού γινομένου, τότε,

$$\hat{v}(0) = v(0), \quad \text{και} \quad \int_0^\tau (\hat{v}, w)_V = \int_0^t (v, w)_V \quad \forall w \in \mathcal{P}_{k-1}[0, \tau; V].$$

Τελικώς παραθέτουμε το κύριο αποτέλεσμα από το [31].

**Πρόταση Α'.3.1.** Υποθέτουμε πως ο  $V$  είναι ένας χώρος (ήμι) εσωτερικού γινομένου. Τότε η απεικόνιση  $\sum_{i=0}^k s_i(t) v_i \rightarrow \sum_{i=0}^k \hat{s}_i(t) v_i$  στον  $\mathcal{P}_k[0, \tau; V]$  είναι συνεχής στον  $\|\cdot\|_{L^2[0, \tau; V]}$ . Ειδικότερα,

$$\|\hat{v}\|_{L^2[0, \tau; V]} \leq C_k \|v\|_{L^2[0, \tau; V]}, \quad \|\hat{v} - \chi_{[0,t]} v\|_{L^2[0, \tau; V]} \leq C_k \|v\|_{L^2[0, \tau; V]},$$

όπου  $C_k$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το  $k$ .

Απόδειξη. Βλέπε [31, Λήμμα 2.4]. □

**Σημείωση Α'.3.2.** Συνδυάζοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις με το πεπερασμένης διάστασης  $\mathcal{P}_k[0, \tau]$  παίρνουμε μια εκτίμηση της μορφής

$$\|\hat{v}\|_{L^\infty[0, \tau; L^2(\Omega)]} \leq C_k \|v\|_{L^\infty[0, \tau; L^2(\Omega)]}.$$

# Μέρος II

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ ΣΤΑ ΑΓΓΛΙΚΑ - (THESIS DESCRIPTION IN ENGLISH)





NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICS  
AND PHYSICAL SCIENCES  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

# Optimal Control and Parabolic Partial Differential Equations, Numerical Analysis and Applications

DOCTOR OF PHILOSOPHY

**EFTHIMIOS N. KARATZAS**

**Thesis Committee:** Konstantinos Chrysafinos  
Ion Chrysovergis  
Vasilios Kokkinis

The PH.D. Degree Proposal has been examined and approved on 4<sup>th</sup> February 2015.

...  
K. Chrysafinos  
Assoc. Prof. NTUA

...  
I. Chrysovergis  
Professor NTUA

...  
B. Kokkinis  
Lecturer NTUA

...  
I. Tsinias  
Professor NTUA

...  
A. Charalampopoulos  
Assoc. Prof. NTUA

...  
I. Koletsos  
Lecturer NTUA

...  
Em. Georgoulis  
Professor  
Leicester University

Athens, February 2015



---

# Optimal Control and Parabolic Partial Differential Equations, Numerical Analysis and Applications

## **Abstract:**

The main object of the thesis is distributed and boundary optimal control in evolutionary - parabolic partial differential equations problems using a discontinuous in time Galerkin finite element method. We examine a Robin type boundary control problem for linear parabolic equations, distributed control in semilinear parabolic problem and distributed control in evolutionary Stokes problem. We present results and optimal convergence rates in the cases of constrained and unconstrained control, minimal smoothness for the data of the problem and we numerically verify them even for  $L^2(\Omega)$  data. We prove stability, convergence, and we examine first and second order conditions for the quadratic functional. Finally, we present numerical results for a biological problem which consists of two equations, a linear and a semilinear parabolic equation with distributed control.

We study first order in time and second order in space linear and semilinear evolutionary problems that often occur in applications to boundary problems for parabolic problems and Stokes systems. We will present semilinear parabolic problems with zero Dirichlet boundary conditions, linear parabolic problems with Robin boundary conditions, Stokes and Fitzugh-Nagumo systems with zero Dirichlet boundary conditions.

Particularly, the aim is to focus on specific problems often encountered in practice than to study more general problems in which the same analysis techniques may be applied. This allows someone, in short time, to produce immediate results which are easy to use in applications.

---





# 1

## INTRODUCTION

---

*In this chapter it is presented an introduction to the problems that we will study in the following sections.*

### Contents

---

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Description of the problems under consideration . . . . . | 144 |
| 1.2 | Related results . . . . .                                 | 148 |

---

## 1.1 Description of the problems under consideration

In this section we describe the problems that we will consider in the thesis. More specifically, we want to minimize the distance between  $y$  and a given distribution  $y_d$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |y - y_d|^2.$$

For the control function we have the term in the functional:

$$\int_0^T \int_S |g|^2,$$

where  $S$  is  $\Omega$  or  $\Gamma$  depending on having boundary or distributed control. Below we present the problems to be dealt with in conjunction with the functional we want to minimize (subject to evolutionary pdes).

**Robin Boundary control problem.** We consider an optimal control problem associated to the minimization of the tracking functional subject to linear parabolic pdes with rough initial data. In particular, given a target function  $y_d$  we seek state variable  $y$  and the Robin boundary control variable  $g$  such that the functional

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt, \quad (1.1.1)$$

is minimized subject to the constrains,

$$\begin{aligned} y_t - \eta \Delta y &= f \text{ in } (0, T] \times \Omega, \\ y + \frac{\eta}{\lambda} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} &= g \text{ on } (0, T] \times \Gamma, \\ y(0, x) &= y_0 \text{ in } \Omega. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Here,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  denotes an open bounded polygonal and convex domain, with Lipschitz boundary  $\Gamma$ . The control  $g$  is applied on the boundary  $\Gamma$  and it is of Robin type. Our analysis and results will be primarily focused on the case of low regularity assumptions, i.e., initial data  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , but our analysis will be also applicable in other cases where the solution possesses additional regularity. Furthermore, we are also interested in case of pointwise control constraints in the sense that  $g_a \leq g(t, x) \leq g_b$  for a.e.  $(t, x) \in (0, T] \times \Gamma$ , where  $g_a, g_b \in \mathbb{R}$ . A precise formulation will be given in the next section. The forcing term  $f$  and the parameters  $\lambda > 0$ ,  $\eta > 0$  are given data, while  $\alpha > 0$  denotes a penalty parameter which limits the size of the control and it is comparable to the discretization parameters. The case of rough initial data is very important within the context of such boundary optimal control problems and great care is exercised in order to include this case into our analysis.

The main goal is to show that the error estimates of the corresponding optimality system have the same structure to the estimates of the uncontrolled linear parabolic equation with Robin boundary data.

The key -but not the only- structural difficulty associated to boundary optimal control problems with rough initial data stems from the lack of sufficient regularity of the state, adjoint and control variables. In particular, if  $y_0 \in L^2(\Omega)$  then the regularity of the state variable is limited to  $L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Hence, classical boot-strap arguments for the uncontrolled parabolic pdes which rely on standard Rietz-Galerkin elliptic projections typically fail due to the lack of regularity. As a

consequence, error estimates for space-time approximations of parabolic optimal control problems with rough initial data  $y_0 \in L^2(\Omega)$  in Lipschitz domains have not been treated before.

To overcome the lack of regularity, we analyze a scheme which is based on a discontinuous time-stepping approach, which is suitable for problems without regular enough solutions. The analysis showcases the favorable behavior of such schemes even in presence of essential boundary Robin controls. The key feature of our discrete schemes is that they exhibit the same regularity properties to the continuous weak problem. Our results can be summarized as follows:

1. We develop a symmetric error estimate under minimal regularity assumptions on the natural norm

$W_R(0, T) \equiv L^\infty[0, T; L^2(\Omega)] \cap L^2[0, T; H^1(\Omega)] \times L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  associated to our discontinuous time-stepping scheme, i.e.,

$$\|\text{error}\|_{W_R(0, T)} \leq C \|\text{best approximation error}\|_{W_R(0, T)},$$

which states that the error is as good as the regularity and approximation theory allows it to be.

2. We define a new generalized space-time projection that exhibits best approximation properties in  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , and which is also applicable for  $y_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Using the above projection, and an appropriate duality argument for an auxiliary system, we obtain a rate of  $\mathcal{O}(h)$  for the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm, when  $\tau \leq Ch^2$ .
3. In case of bounded controls, we demonstrate the applicability of our estimates within the variational discretization concept of [65]. This approach allows to overcome the lack of the enhanced regularity resulting on state variable due to the failure of classical “boot-strap” arguments for the control and state variable.

To our best knowledge our estimates are new, and optimal in terms of the prescribed regularity of the solutions, and the presence of essential boundary conditions. In addition, even in presence of additional regularity on the data, i.e.,  $y_0 \in H^1(\Omega)$ , and despite the use of  $L^2$  projections which exhibit best approximation properties, the rate  $\mathcal{O}(h^{3/2})$  (when  $\tau \leq Ch^2$ ) appears to be optimal since there is no possibility to obtain a better estimate at least when polygonal and convex domains are involved. We also point out that the Robin boundary control can be viewed as a penalization approach for Dirichlet boundary control problems (see for instance the works of [9, 17, 70] and references within). For this reason the dependence upon the parameters  $\lambda, \alpha, \eta$  of various constants appearing in our estimates is carefully tracked.

**Semilinear distributed optimal control problem.** The optimal control problem considered here, is associated to the minimization of the tracking functional subject to semi-linear parabolic pdes. In particular, we seek states  $y$  and controls  $g$  (of distributed type) such that

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \quad (1.1.3)$$

is minimized subject to the constraints,

$$\begin{aligned} y_t - \operatorname{div}[A(x)\nabla y] + \phi(y) &= f + g \text{ in } (0, T) \times \Omega, \\ y &= 0 \text{ on } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0, x) &= y_0 \text{ in } \Omega. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

The physical meaning of the optimization problem under consideration is to seek states  $y$  and controls  $g$  such that  $y$  is as close as possible to a given target  $U$ . Here,  $\Omega$  denotes a bounded domain in  $\mathbb{R}^2$ , with Lipschitz boundary  $\Gamma$ ,  $y_0, f$  denote the initial data and the forcing term respectively, and  $\alpha$

is a penalty parameter which measures the size of the control. The nonlinear mapping  $\phi$  satisfies certain continuity and monotonicity properties, and  $A(x) \in C^1(\Omega)$  is a symmetric matrix valued function that is uniformly positive definite. The scope of this work is the error analysis of the first order necessary conditions (optimality system) of the above optimal control problem by using a discontinuous (in time), Galerkin (dG) scheme. The corresponding optimality system consists of a primal (forward in time) equation and an adjoint (backwards in time) equation which are coupled through an optimality condition, and nonlinear terms (see, e.g [50, 56, 80, 93, 109]).

The main aim is to show that the dG approximations of the optimality system exhibit similar approximation properties to the standard linear (uncontrolled) parabolic equation. In particular, it is shown that the error of the dG approximations is as good as the regularity of the solutions and the approximation properties of the subspaces enables it to be, for suitable data  $f, y_0, U$ .

This is achieved by proving the following symmetric estimate, which states that,

$$\begin{aligned} \|\text{error}\|_X \leq C & \left( \|\text{in. data error}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ & + \|\text{best approx. error}\|_X \\ & \left. + \|\text{subsp. error}\|_{X_1} \right). \end{aligned}$$

Here,  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ , and  $\|\cdot\|_{X_1}$  denotes a norm related to a possible change of finite element subspaces every other (or every few) time steps and can be omitted when the same subspaces are being used in every time step. The term  $\|\text{best approx. error}\|_X$  is posed in terms of suitable local  $L^2$  projections and allows optimal rates of convergence when the solution is sufficiently smooth. The constant  $C$  does not depend exponentially on quantities of the form  $1/\alpha$ . The dependance upon  $\alpha$  of various constants appearing in these estimates is essential to the underlying optimal control problem and hence it should be carefully tracked. In particular, in most computational and practical engineering examples, we are interested for small values of the parameter  $\alpha$ , and in certain cases even comparable to the discretization parameter  $h$ .

The structure of the estimate is similar to the work of [31] which concerns the dG approximations of linear (uncontrolled) parabolic pde's, and it leads to optimal error estimates in terms of the regularity of the solutions and the approximation theory of the chosen subspaces.

The proof of the main estimate, is based on estimates of an auxiliary and essentially uncoupled system together with a “boot-strap” argument and stability estimates at arbitrary time-points under minimal regularity assumptions. The key element of the proposed methodology is the use of a “duality” type of argument for discontinuous time-stepping schemes, to facilitate the decoupling of the optimality system. In particular, using the adjoint variable as test function in the primal equation, and the primal variable as test function in the adjoint equation, we first show that

$$\|\text{error}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq \|\text{best approx. error}\|_X^2 + \alpha^{1/2} \|\text{error}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2.$$

Then, for  $\alpha$  suitably small, we apply a “boot-strap” argument to obtain the desired symmetric estimate. To our best knowledge the above symmetric estimates and their particular structure are new within our optimal control setting.

The motivation for using a dG approach, stems from its performance in a vast area of problems where the given data satisfy low regularity properties, such as optimal control problems. Furthermore, the concept of symmetric error estimates can effectively capture the interplay between regularity of solutions and approximation properties of the subspaces. Such estimates are also recently applicable to a variety of problems such as error analysis of moving meshes, Lagrangian moving mesh methodologies (see e.g. [42, 85]) and can be viewed as generalization of the classical Céa Lemma (see e.g. [34]).

In addition, discontinuous (in time) schemes accommodate the use of different subspaces in each time step, and hence basic adaptivity ideas, in a natural way. In the recent works of [20, 21, 83, 84, 87, 88] discontinuous Galerkin schemes were analyzed for distributed optimal control problems constrained to linear parabolic pde's, while the case of semi-linear constraints is analyzed in [22, 94]. In [22],

convergence of discontinuous time-stepping schemes for optimal control problems (without control constraints) related to semi-linear parabolic pde's is studied, under minimal regularity assumptions on the data and growth assumptions on the semi-linear term. In the very recent work of [94] first order (in time) error estimates for the controls are presented for an optimal control problem related to semi-linear parabolic pde's, with control constraints, in case that the initial data belong to  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  under weak hypothesis on semi-linear term. The controls are discretized by piecewise constants in time and space, however the analysis is also applicable when piecewise constants (in time) piecewise linears (in space) are being used. For the state equation, the lowest order ( $k = 0$ ) discontinuous Galerkin (in time) combined with standard conforming finite elements (in space), are being used. The first-order (in time) estimates presented in [94] successfully address a variety of difficulties due to the presence of control constraints, and the corresponding nonconvexity.

The estimates and the analysis of [94] are different compared to the ones presented here. Our work primarily focuses on the development of estimates that possess the symmetric structure (and their advantageous features described above) for the associated optimality system.

**Stokes distributed optimal control problem.** We consider an optimal control problem associated to the minimization of the tracking functional subject to the evolutionary Stokes equations. In particular, given a target function  $y_d$  we seek velocity  $y$  and control variable  $g$  such that the functional

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt, \quad (1.1.5)$$

is minimized subject to the constrains,

$$\begin{aligned} y_t - \nu \Delta y + \nabla p &= f + g && \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div} y &= 0 && \text{on } (0, T) \times \Omega \\ y &= 0 && \text{on } (0, T) \times \Gamma \\ y(0, x) &= y_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Here,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  denotes an open bounded polygonal (polyhedral) and convex domain. Our estimates are valid under the general assumption of a Lipschitz boundary  $\Gamma$ , however when considering high order schemes, we will assume more regular boundary. The control  $g$  is of distributed type. Our analysis and results will be applicable for schemes of arbitrary order, under suitable regularity assumptions, but special emphasis is placed in the case of rough initial data, i.e.,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega) \equiv \{v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} v = 0, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0\}$ . Furthermore, we are also interested in case of pointwise control constraints in the sense that  $g_a \leq g(t, x) \leq g_b$  for a.e.  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ , where  $g_a, g_b \in \mathbb{R}$ . The forcing term  $f$  and the viscosity constant  $\nu > 0$  are given data, while  $\alpha > 0$  denotes a penalty parameter which limits the size of the control and it is comparable to the discretization parameters. The main goal is to show that the error estimates of the corresponding optimality system have the same structure to those of the uncontrolled evolutionary Stokes equations. In particular, we develop an almost symmetric error estimate under minimal regularity assumptions on the natural energy norm  $\|\cdot\|_{W(0, T)} \equiv \|\cdot\|_{L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]}$  associated to our discontinuous time-stepping scheme, i.e., an estimate of the form,

$$\begin{aligned} \|\text{error}\|_{W_S(0, T)} &\leq C \|\text{best approximation error}\|_{W_S(0, T)} \\ &+ \|\text{best approx. error pressure}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}. \end{aligned}$$

This estimate is valid in case of high order schemes, under suitable regularity assumptions, since it separates the issue of regularity of the optimal pair from the choice of the approximation scheme. As a consequence, estimates of high order can be also included similar to the uncontrolled case, at least in case of unbounded controls, when classical boot-strap arguments imply enhanced regularity. To this end, we also explore coarse time-stepping approaches.

Another key feature of the above estimate is that the estimate is valid under low regularity assumptions on the given data. More precisely, the symmetric error estimate, only requires velocity  $y \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  and pressure  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ , where  $\mathbf{V}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div} v = 0\}$ , and  $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p dx = 0\}$ .

Note that if  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  then the regularity of the state variable is limited to  $L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ , where  $\mathbf{V}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div} v = 0\}$ . Furthermore, despite the fact that  $y_t + \nabla p \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  it is not known whether  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  and  $y_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . As a consequence the pressure  $p$  satisfies (1.1.6) in a distributional sense. Hence, the assumption  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  is the minimal one, to guarantee the decomposition between  $y_t$  and  $p$  and hence to validate a suitable weak formulation for rough initial data from the numerical analysis viewpoint. Error estimates for space-time approximations of the velocity tracking problem with rough initial data  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  have not been treated before, despite the fact that the case of rough initial data is of extreme importance within the context of controlling fluid flows (see e.g. [56]). To overcome the lack of regularity, we analyze a scheme which is based on a discontinuous time-stepping approach, which is suitable for problems without regular enough solutions. The analysis showcases the favorable behavior of such schemes. We define a new generalized space-time projection which exhibits best approximation properties in  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , but is also applicable when  $\mathbf{y}_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  only. Thus, constructing a global space-time projection, and using an appropriate duality argument, and we obtain a rate of  $\mathcal{O}(h)$  for the  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  norm, when  $\tau \leq Ch^2$ .

Similarly, In case of bounded controls, we demonstrate the applicability of our estimates within the variational discretization concept of [65]. This approach allows to overcome the lack of the enhanced regularity resulting from a “boot-strap” argument for the control and state variable.

To our best knowledge our estimates are new, and optimal in terms of the prescribed regularity of the solutions and the presence of the incompressibility constraint.

## 1.2 Related results

**Robin boundary control problem.** Previous related results regarding discontinuous time-stepping approaches are almost exclusively related to distributed controls. For instance, the discontinuous Galerkin framework is explored in the works of [89] and [88] where a-priori estimates are developed for distributed optimal control problems with and without control constraints respectively for the heat equation. In [20, 21] a priori error estimates in terms of suitable space-time projections, are derived for unconstrained distributed optimal control problems related to parabolic and implicit parabolic pdes with general and possibly time-dependent coefficients in the elliptic part. Recently error estimates related to distributed optimal control problems for semi-linear parabolic pdes are developed in the works of [94], with control constraints and  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  initial data, and in [27] a priori error estimates of symmetric type for problems without control constraints. A-priori error estimates for the velocity tracking problem with control constraints are analyzed in the works of [13, 14]. A convergence result for discontinuous time-stepping schemes for Robin optimal control problems (without control constraints) related to semi-linear parabolic pdes, under  $L^2(\Omega)$  data is recently considered in [23]. Finally, in [86] fully-discrete approximations of a Neumann boundary control problem related to homogeneous linear parabolic pdes are analyzed, for the implicit Euler scheme, for smooth domains and for regular enough data.

Several results regarding the analysis of optimal boundary control problems can be found in [56, 80, 93, 109] (see also references within). Various boundary control problems related to time-dependent pdes were studied in the previous works of [4, 7, 25, 61, 67, 77, 79, 108, 109, 112].

**Semilinear distributed optimal control problem.** Several problems with distributed controls have been studied before analytically in [50, 56, 72, 80, 82, 93, 109] (see also references within). Several

results related to the analysis of numerical algorithms for optimal control problems were studied in [11, 19, 18, 25, 37, 38, 49, 53, 58, 60, 65, 66, 76, 79, 86, 97, 107, 108, 109, 111, 112].

A posteriori estimates for dG schemes were studied in [83, 84] for optimal control problems related to linear parabolic pde's, while in [87] an adaptive space-time finite element algorithm is constructed and analyzed. A priori error estimates for an optimal control problem of distributed type, having states constrained to the heat equation are presented in [89], while in [20, 21], a priori error estimates for dG schemes for the tracking problem related to linear parabolic pde's and implicit parabolic pde's respectively, with non-selfadjoint possibly time dependent coefficients are established. In [90] a Petrov-Galerkin Crank-Nicolson scheme is applied to an optimal control problem with control constraints related to linear parabolic pde's, while in [6] a Crank-Nicolson formulation is analyzed. In both papers, second order rates of convergence are obtained.

There is an abundant literature concerning dG schemes for the solution of parabolic equations without applying controls (see e.g. [104] and references therein). The relation of the discontinuous Galerkin method to adaptive techniques was studied in detail in [44, 45, 104]. Some results related to finite element approximation of semi-linear and general nonlinear parabolic problems are presented in [1, 48, 46, 47].

**Stokes distributed optimal control problem.** Several results regarding the analysis of similar control problems were presented in [2, 12, 56, 66, 101, 106] (see also references within), where various aspects, including first and second order necessary conditions are developed and analyzed. To the contrary the literature regarding numerical analysis for optimal control problems related to evolutionary Navier-Stokes equations is very limited. In [61, 59] convergence of a gradient algorithm is proven, in case of distributed controls, and of bounded distributed controls. Error estimates for the semi-discrete (in space) discretization are derived in [37] in case of distributed controls without control constraints by using a variational discretization approach, while in [36] fully-discrete error estimates for the implicit Euler scheme is presented for the velocity tracking problem (without control constraints) for the homogeneous Stokes equations using the variational discretization approach, and for smooth data. Recently, a-priori error estimates for the velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with control constraints were analyzed in the works of [13, 14]. The lowest order (piecewise constants) discontinuous Galerkin scheme in time, combined with conforming elements in space for the velocity and the pressure was analyzed, and estimates for the state, adjoint, and control variables were derived for three separate choices of control discretization (piecewise constants, linears, and the variational discretization). Our work, is motivated by the results of [13, 14] and it can be viewed as an attempt to extend these results to include the cases of rough data, and high order schemes via the derivation of a symmetric estimate.

Other results concerning discontinuous time-stepping approaches are almost related to distributed controls for linear and semilinear parabolic pdes. Recently error estimates related to distributed optimal control problems for semi-linear parabolic pdes are developed in the works of [94], with control constraints and  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  initial data, and in [27] a priori error estimates of symmetric type for problems without control constraints. Finally, we also mention several related works [6, 20, 21, 88, 89, 95, 100] regarding parabolic optimal control problems with and without control constraints which may involve high order discrete schemes.

Several results regarding the analysis of optimal control problems can be found in [56, 80, 93, 109] (see also references within). For general results related to the discontinuous Galerkin method parabolic pde's (without applying controls) we refer the reader to [104, 73] (see also references therein). A posteriori estimates and related adaptivity issues within the discontinuous Galerkin framework for optimal control problems were also explored in the works of [84, 87] (see also references within).





# 2

## THE CONTINUOUS OPTIMALITY SYSTEM, THE EXISTENCE OF THE SOLUTION

---

*In this chapter we present the basic assumptions to be used, an introductory study on the existence of a solution and the continuous optimization system.*

### Contents

---

|  |     |
|--|-----|
| 2.1 Assumptions . . . . .  | 152 |
| 2.2 The continuous control problem and the existence of solution . . . . . | 153 |
| 2.3 The optimality system . . . . .  | 156 |

---

## 2.1 Assumptions

**Robin boundary control linear problem.** For any  $\eta \geq 0$ , The bilinear form associated to our operator is given by

$$a(y, v) = \eta \int_{\Omega} \nabla y \nabla v dx, \quad \forall y, v \in H^1(\Omega),$$

and satisfies the standard coercivity and continuity conditions

$$a(y, y) \geq \eta \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \alpha(y, v) \leq C\eta \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall y, v \in H^1(\Omega).$$

**Semilinear distributed optimal control problem.** In this case too, the bilinear form associated to our operator, is defined by

$$a(y, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla y \nabla v dx \quad \forall y, v \in H^1(\Omega),$$

and satisfies the standard coercivity and continuity conditions

$$a(y, y) \geq \eta \|y\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \alpha(y, v) \leq C_c \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall y, v \in H^1(\Omega).$$

The data satisfy the minimal regularity assumptions which guarantee the existence of a weak solution  $y \in W(0, T)$ , i.e.,

$$f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)], \quad y_0 \in L^2(\Omega)$$

while the distributed control  $g$  will be sought in  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Note that under the above regularity assumptions one can only show convergence of the discrete schemes see [22, Section 3] (even in the uncontrolled case).

For error estimates, additional regularity assumptions are needed in order to guarantee rates of convergence. In particular, we will assume that  $y \in L^\infty[0, T; L^4(\Omega)]$ , which typically requires that  $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . The choice of the control space significantly simplifies the implementation of the finite element algorithm, since it leads to an algebraic optimality condition. Hence, it avoids the use of spaces of fractional order, or the solution of an extra pde which typically occurs when other norms are included in the functional (see e.g. [56]).

For the subsequent analysis it suffices that the target  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . However in most cases  $y_d$  is actually smoother, since the target typically corresponds to the solution a parabolic pde, and hence it can be assumed that  $y_d \in W_D(0, T)$ . For the analysis of our discrete schemes, the semi-linear term is required to fulfill the following structural assumptions.

**Assumption 2.1.1.** (a) For convergence of the state variable: The semi-linear term  $\phi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  satisfies,

$$\phi'(s) \geq 0, \quad |\phi(s)| \leq C|s|^p, \quad |\phi'(s)| \leq C|s|^{p-1}, \quad s\phi(s) \geq C|s|^{p+1}, \quad \text{for } 1 < p \leq 3.$$

(b) For convergence of the state and adjoint variable: In addition to (a),  $\phi'$  be Lipschitz continuous, with Lipschitz constant  $C_L$ , or  $\phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  with  $|\phi''(s)| \leq C|s|^{p-2}$  for  $2 < p \leq 3$ .

(c) If the semi-linear also includes time-space coefficients, i.e.,  $\phi(s) \equiv \phi(t, x, s) : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  then, in addition to (a)-(b),  $\phi(0), \phi'(0)$  are required to be uniformly bounded.

**Remark 2.1.2.** Convergence can be shown by simply assuming growth and monotonicity conditions of Assumption 2.1.1 (a)-(b) on  $\phi, \phi'$  (see [22, Section 3]). The Lipschitz continuity assumption on  $\phi'$  is imposed only to minimize technicalities. Most of the results presented here, are still valid under the weaker assumptions of [94], provided that the initial data belong to  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . We refer

the reader to [109] (see also references within) for a detailed analysis of possible assumptions on the semi-linear term and on the regularity of the data. Here, we have chosen to impose the minimal regularity assumptions that guarantee the existence on the corresponding discrete solution on the space  $L^\infty[0, T; L^2(\Omega)] \cap L^2[0, T; H_0^1(\Omega)]$ .

**Evolutionary Stokes problem with distributed control.** The bilinear form associated to our operator is given by

$$a(y, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla y \nabla v dx, \quad \forall y, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

and satisfies the standard coercivity and continuity conditions

$$a(y, y) \geq \nu \|\nabla y\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2, \quad \alpha(y, v) \leq C\nu \|y\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall y, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Finally the bilinear form associated to the pressure is given by

$$b(v, q) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot v dx, \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), q \in L^2(\Omega),$$

which satisfies the standard continuity and inf-sup conditions (see e.g [52, 102]), i.e.,

$$b(v, q) \leq C \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)},$$

and

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)}} \geq c > 0.$$

Next we introduce the basic results related to the solution existence under the above assumptions.

## 2.2 The continuous control problem and the existence of solution

Here, we will study the existence of an optimal solution constrained to evolutionary partial differential equations. We will handle boundary and distributed control, and for every case it is necessary to prove the stability and the the existence of a unique (or not unique) optimal solution. We have to mention that if the minimization functional is convex (like linear problems), it is easy to prove that we have unique solution. If the functional is not convex, like semilinear problems, we have a whole solution but but it is not unique since we can minimize functional using various control functions.

**Robin boundary control linear problem.** In this problem we study the case with and without constraints for the control function. Starting present weak form of the basic equation. Starting we introduce the weak form of the state equation. Given  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $g \in L^2[0, T; H^{-1/2}(\Gamma)]$ , and  $y_0 \in L^2(\Omega)$  we seek  $y \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$  such that for a.e.  $t \in (0, T)$ , and for all  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\langle y_t, v \rangle + a(y, v) + \lambda \langle y, v \rangle_{\Gamma} = \langle f, v \rangle + \lambda \langle g, v \rangle_{\Gamma} \quad \text{and} \quad (y(0), v) = (y_0, v). \quad (2.2.1)$$

An equivalent weak formulation suitable for dG schemes, is to seek  $y \in W_R(0, T)$  such that for all  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,

$$(y(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y, v_t \rangle + a(y, v) + \lambda \langle y, v \rangle_{\Gamma}) dt = (y_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + \lambda \langle g, v \rangle_{\Gamma}) dt. \quad (2.2.2)$$

The basic existence, uniqueness and regularity result of (2.2.2) follows (see e.g. [25]):

**Theorem 2.2.1.** *Suppose  $g \in L^2[0, T; H^{-1/2+\theta}(\Gamma)] \cap H^\theta[0, T; H^{-1/2}(\Gamma)]$ ,  $y_0 \in H^\theta(\Omega)$ , and  $f \in L^2[0, T; H^{1-\theta}(\Omega)^*]$  for some  $\theta \in [0, 1]$ . Then, there exists a unique  $y \in L^2[0, T; H^{1+\theta}(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{1-\theta}(\Omega)^*]$  satisfying (2.2.2) and*

$$\|y\|_{L^2[0, T; H^{1+\theta}(\Omega)]} + \|y_t\|_{L^2[0, T; H^{1-\theta}(\Omega)^*]} \leq C \left( \|f\|_{L^2[0, T; H^{1-\theta}(\Omega)^*]} + \|u_0\|_{H^\theta(\Omega)} + \|g\|_{L^2[0, T; H^{-1/2+\theta}(\Gamma)]} + \|g\|_{H^\theta[0, T; H^{-1/2}(\Gamma)]} \right).$$

Thus, the control to state mapping  $G : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow W_R(0, T)$ , which associates to each control  $g$  the state  $G(g) = y_g \equiv y(g)$  via (2.2.2) is well defined, and continuous. Hence, the cost functional, frequently denoted to by its reduced form,  $J(y, g) \equiv J(y(g)) \equiv J(g) : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$  is also well defined and continuous.

**Definition 2.2.2.** *Let  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , and  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  given data. Then, the set of admissible controls (denoted by  $\mathcal{A}_{ad}$ ), is defined by:*

1. *Unconstrained Controls:*  $\mathcal{A}_{ad} \equiv L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ .
2. *Constrained Controls:*  $\mathcal{A}_{ad} \equiv \{g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)] : g_a \leq g(t, x) \leq g_b \text{ for a.e. } (t, x) \in (0, T) \times \Gamma\}$ .

*The pair  $(y(g), g) \in W_R(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ , is said to be an optimal solution if  $J(y(g), g) \leq J(w(h), h) \forall (w(h), h) \in W_R(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ .*

We will occasionally abbreviate the notation  $y \equiv y_g \equiv y(g)$ . Below, we state the main result concerning the existence of an optimal solution (see for instance [109]).

**Theorem 2.2.3.** *Let  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  be given. Then, the boundary control problem has unique solution  $(\bar{y}(\bar{g}), \bar{g}) \in W_R(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ .*

**Semilinear distributed optimal control problem.** First, we quote a result regarding the solvability of the weak problem (given  $f, g, y_0$  we seek  $y \in W_D(0, T)$  for all  $v \in W_D(0, T)$ ):

$$(y(T), v(T)) + \int_0^T \left( -\langle y, v_t \rangle + a(y, v) + \langle \phi(y), v \rangle \right) dt = (y_0, v(0)) + \int_0^T \left( \langle f, v \rangle + (g, v) \right) dt, \quad (2.2.3)$$

on the natural energy space under minimal regularity assumptions.

**Theorem 2.2.4.** *Let  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Then, there exists a unique solution  $y \in W_D(0, T)$  which satisfies the following energy estimate*

$$\|y\|_{W_D(0, T)} \leq C \left( \|f\|_{L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \right).$$

*Proof.* The proof is standard (see e.g. [25, 43, 113]). □

Next, we state the definition of the set of admissible solutions  $\mathcal{A}_{ad}$  and of the (local) optimal pair.

**Definition 2.2.5.** 1. *Given data  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , and target  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , then  $(y, g)$  is said to be an admissible element (pair) if  $y \in W_D(0, T)$ ,  $g \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  satisfy (2.2.3). (Note that  $J(y, g)$  is bounded, due to Theorem 2.2.4).*

2. *Given data  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , and target  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  we seek pair  $(y, g) \in \mathcal{A}_{ad}$  such that  $J(y, g) \leq J(w, h) \forall (w, h) \in \mathcal{A}_{ad}$ , when  $\|y - w\|_{W_D(0, T)} + \|g - h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq \delta$  for  $\delta > 0$  appropriately chosen.*

Below, we state the main result concerning the existence of an optimal solution for the minimization of the functional (1.1.3).

**Theorem 2.2.6.** *Suppose  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Then, the optimal control problem has solution  $(y, g) \in W_D(0, T) \times L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ .*

*Proof.* Similar to [25, 50, 80, 109]. □

**Remark 2.2.7.** *The solution to optimal control problems having states constrained to nonlinear parabolic pde's is in general not unique. However, we note that under additional assumptions on the data of the control problem and the structure of the semi-linear term it is possible to prove that there exists a unique optimal control  $g$  (see e.g. [82, Chapter 3, pp 43]), and that the corresponding optimality system admits a unique solution.*

**Evolutionary Stokes problem with distributed control.** A possible weak formulation of the problem (1.1.6) is defined by: Given data  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ ,  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ , and control  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , we seek  $(y, p) \in W_S(0, T) \times L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  such that for a.e.  $t \in (0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \langle y_t, v \rangle + a(y, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle + (g, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(y, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ (y(0), v) &= (y_0, v) \quad \forall v \in \mathbf{W}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

A weak formulation of (1.1.6) suitable for the case of rough initial data, is defined by using divergence-free test functions and can be written as follows: Given  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , and  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  we seek  $y \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$  such that for a.e.  $t \in (0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \langle y_t, v \rangle + a(y, v) &= \langle f, v \rangle + (g, v) \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega), \\ (y(0), v) &= (y_0, v) \quad \forall v \in \mathbf{W}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

To the contrary, from the numerical analysis viewpoint, a desirable weak formulation suitable for the analysis of dG schemes, is to seek  $y \in W_S(0, T)$ , and  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  such that for all  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , and for all  $q \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,

$$\begin{aligned} (y(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y, v_t \rangle + a(y, v) + b(v, p)) dt &= (y_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + (g, v)) dt, \\ \int_0^T b(y, q) dt &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Some comments regarding the existence and uniqueness of weak solutions of the evolutionary Stokes and the equivalence of formulations (2.2.4), (2.2.5) and (2.2.6) follow.

**Remark 2.2.8.** *Recall that standard regularity theorems in [35, 102] show that if  $f, g \in L^2[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$  and  $y_0 \in V(\Omega)$  then the solution  $(y, p)$  of equations (2.2.4) satisfies*

$$(y, p) \in L^2[0, T; H^2(\Omega) \cap V(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{W}(\Omega)] \times L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)].$$

*In this case weak formulations (2.2.4), (2.2.5), and (2.2.6) are essentially equivalent. If the data  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}^*(\Omega)]$ ,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  then there exists a unique weak solution that satisfies  $y \in L^2[0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^{-1}[0, T; \mathbf{V}^*(\Omega)]$ , while the pressure  $p$  satisfies (1.1.6) in a distributional sense, and  $y_t + \nabla p \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . In the above case, we note that it is not evident whether the pressure belongs to  $L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  under minimal regularity assumptions (see e.g. [102]), and hence formulation (2.2.4) and (2.2.6) is not necessarily valid, unless the existence of a pressure  $p \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  is assumed.*

The control to state mapping  $G : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow W_S(0, T)$ , which associates to each control  $g$  the state  $G(g) = y_g \equiv y(g)$  via (2.2.5) is well defined, and continuous. Furthermore, we note

that if more regularity is available to data, i.e., if  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ , and  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , then  $y(g) \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap V(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  and  $p \in L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ . Hence, the cost functional is frequently denoted by its reduced form,  $J(y, g) \equiv J(y(g)) \equiv J(g) : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous and well defined.

**Definition 2.2.9.** Let  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ , and  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$ . Then, the set of admissible controls (denoted by  $\mathcal{A}_{ad}$ ), is defined by:

1. Unconstrained Controls:  $\mathcal{A}_{ad} \equiv L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ .
2. Constrained Controls:  $\mathcal{A}_{ad} \equiv \{g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] : g_a \leq g(t, x) \leq g_b \text{ for a.e. } (t, x) \in (0, T) \times \Omega\}$ .

The pair  $(y(g), g) \in W_S(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ , is said to be an optimal solution if  $J(y(g), g) \leq J(w(h), h) \forall (w(h), h) \in W_S(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$ .

The main result concerning the existence of an optimal solution follows directly from the setting of our problem (see for e.g. [109]) since  $\mathcal{A}_{ad} \neq \emptyset$  (note that  $(y(0), 0) \in W_S(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$  for instance, with loss of generality).

**Theorem 2.2.10.** Let  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  be given data. Then, the optimal control problem has unique solution  $(\bar{y}(\bar{g}), \bar{g}) \in W_S(0, T) \times L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . In addition there exists a pressure  $\bar{p}$  that satisfies (1.1.6) in a distributional sense. If in addition,  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , then  $\bar{p} \in L^2[0, T; H_0^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$  and the pair  $(\bar{y}, \bar{p})$  also satisfies (2.2.6).

## 2.3 The optimality system

**Robin boundary control linear problem.** An optimality system of equations can be derived by using standard techniques; see for instance [109] or [25, Section 2]. We first state the basic differentiability property of the cost functional.

**Lemma 2.3.1.** The cost functional  $J : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$  is of class  $C^\infty$  and for every  $g, u \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ ,

$$J'(g)u = \int_0^T \int_\Gamma (\mu(g) + \alpha g) u dx dt,$$

where  $\mu(g) \equiv \mu_g \in W_R(0, T)$  is the unique solution of following problem: For all  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,

$$\int_0^T (\langle \mu_g, v_t \rangle + a(\mu_g, v) + \lambda \langle \mu_g, v \rangle_\Gamma) dt = -(\mu_g(0), v(0)) + \int_0^T (y_g - y_d, v) dt, \quad (2.3.7)$$

where  $\mu_g(T) = 0$ . In addition,  $(\mu_g)_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ .

Therefore the optimality system which consists of the state and adjoint equations, and the optimality condition takes the form:

**Lemma 2.3.2.** Let  $(\bar{y}_{\bar{g}}, \bar{g}) \equiv (\bar{y}, \bar{g}) \in W_R(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$  denote the unique optimal pair of Definition 2.2.2. Then, there exists an adjoint  $\bar{\mu} \in W_R(0, T)$  satisfying,  $\bar{\mu}(T) = 0$  such that for all  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,

$$(\bar{y}(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle \bar{y}, v_t \rangle + a(\bar{y}, v) + \lambda \langle \bar{y}, v \rangle_\Gamma) dt = (\bar{y}_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + \lambda \langle \bar{g}, v \rangle_\Gamma) dt, \quad (2.3.8)$$

$$\int_0^T (\langle \bar{\mu}, v_t \rangle + a(v, \bar{\mu}) + \lambda \langle \bar{\mu}, v \rangle_\Gamma) dt = -(\bar{\mu}(0), v(0)) + \int_0^T (\bar{y} - y_d, v) dt, \quad (2.3.9)$$

$$1) \text{ Unconstrained Controls: } \int_0^T (\alpha \bar{g} + \lambda \bar{\mu}, u)_\Gamma dt = 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}_{ad}, \quad (2.3.10)$$

$$2) \text{ Constrained Controls: } \int_0^T \int_\Gamma (\alpha \bar{g} + \lambda \bar{\mu})(u - \bar{g}) dx dt \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}_{ad}. \quad (2.3.11)$$

In addition,  $\bar{y}_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ , and (2.3.11), is equivalent to  $\bar{g}(t, x) = \text{Proj}_{[g_a, g_b]}(-\frac{\lambda}{\alpha} \bar{\mu}(t, x)) \equiv \text{Proj}_{[g_a, g_b]}(\frac{\eta}{\alpha} \frac{\partial \bar{\mu}(t, x)}{\partial \mathbf{n}})$  for a.e.  $(t, x) \in (0, T] \times \Gamma$ .

*Proof.* The derivation of the optimality system is standard (see e.g. [109]). For the enhanced regularity on  $\bar{\mu}$ , we note that  $\bar{y} - y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  and apply the analogue of Theorem 2.2.1 for (2.3.9) to get that  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ .  $\square$

**Remark 2.3.3.** We point out that for smooth boundary and for any  $v \in H^2(\Omega)$  we obtain that the normal derivative  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$  is well defined and belongs to  $H^{1/2}(\Gamma)$ . This is not the case when  $\Gamma$  is polygonal domain (say only Lipschitz continuous), despite the fact that on each straight component (denoted by  $\Gamma_i$ ) we clearly obtain  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_i} \in H^{1/2}(\Gamma_i)$ . We refer the reader to [51]. for related regularity results for general polygonal domains. If the boundary is smooth, e.g. of class  $C^2$  then  $\bar{\mu}|_\Gamma \in L^2[0, T; H^{3/2}(\Gamma)] \cap H^{3/4}[0, T; L^2(\Gamma)]$ . Hence, a bootstrap argument can be applied in order to improve the regularity of  $\bar{g}, \bar{y}$  see e.g. [86]. For example, in case of unconstrained controls,  $\bar{g} \in L^2[0, T; H^{3/2}(\Gamma)] \cap H^{3/4}[0, T; L^2(\Gamma)]$  too, which results  $\bar{y} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ , when  $y_0 \in H^1(\Omega)$ .

**Semilinear distributed control problem.** Suppose now that  $(y, g) \in \mathcal{A}_{ad}$  is a (local) optimal solution in the sense of Definition 2.2.5. Then, an optimality system corresponding to the optimal control problem of Definition 2.2.5 can be easily derived based on well known Lagrange multiplier techniques, see e.g. [25, 50, 80, 93]. Given  $f, y_0, y_d$  satisfying the assumptions of Definition 2.2.5, we seek  $y, \mu \in W_D(0, T)$  such that for all  $v \in W_D(0, T)$ ,

$$(y(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y, v_t \rangle + a(y, v) + \langle \phi(y), v \rangle) dt = (y_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + (g, v)) dt, \quad (2.3.12)$$

$$y(0, x) = y_0,$$

$$\int_0^T (\langle \mu, v_t \rangle + a(\mu, v) + \langle \phi'(y)\mu, v \rangle) dt = -(\mu(0), v(0)) + \int_0^T (y - y_d, v) dt, \quad (2.3.13)$$

$$\mu(T, x) = 0,$$

$$\int_0^T (\alpha g + \mu, u) dt = 0, \quad \forall u \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]. \quad (2.3.14)$$

**Remark 2.3.4.** Note that due to optimality condition we obtain that the control  $g$  is actually smoother, i.e.,  $g = -(1/\alpha)\mu \in W_D(0, T)$ . The later can be used to obtain improved regularity results for the primal and adjoint variables via when additional regularity on  $y_d, f, y_0$  is available.

**Evolutionary Stokes distributed optimal control problem.** An optimality system of equations can be derived by using standard techniques; see for instance [56, 109] or [13, Section 3], We first state the basic differentiability property of the cost functional.

**Lemma 2.3.5.** The cost functional  $J : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}$  is of class  $C^\infty$  and for every  $g, u \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ ,

$$J'(g)u = \int_0^T \int_\Omega (\mu(g) + \alpha g) u dx dt,$$

where  $\mu(g) \equiv \mu_g \in W_S(0, T)$  is the unique solution of following problem: For all  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,

$$\int_0^T (\langle \mu_g, v_t \rangle + a(\mu_g, v)) dt = -(\mu_g(0), v(0)) + \int_0^T (y_g - y_d, v) dt. \quad (2.3.15)$$

where  $\mu_g(T) = 0$ . In addition,  $(\mu_g)_t \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , and there exists pressure  $\phi \in L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$  such that the backwards in time Stokes equation is satisfied in the sense of weak formulation (2.2.6).

Therefore the optimality system which consists of the state and adjoint equations, and the optimality condition takes the following form.

**Lemma 2.3.6.** *Let  $(\bar{y}_{\bar{g}}, \bar{g}) \equiv (\bar{y}, \bar{g}) \in W_S(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}$  denote the unique optimal pair of Definition 2.2.9. Then, there exists an adjoint  $\bar{\mu} \in W_S(0, T)$  satisfying,  $\bar{\mu}(T) = 0$  such that for all  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,*

$$(\bar{y}(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle \bar{y}, v_t \rangle + a(\bar{y}, v)) dt = (\bar{y}_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + (g, v)) dt, \quad (2.3.16)$$

$$\int_0^T (\langle \bar{\mu}, v_t \rangle + a(v, \bar{\mu})) dt = -(\bar{\mu}(0), v(0)) + \int_0^T (\bar{y} - y_d, v) dt, \quad (2.3.17)$$

$$1) \text{ Unconstrained Controls: } \int_0^T (\alpha \bar{g} + \bar{\mu}, u) dt = 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}_{ad}, \quad (2.3.18)$$

$$2) \text{ Constrained Controls: } \int_0^T \int_{\Omega} (\alpha \bar{g} + \bar{\mu})(u - \bar{g}) dx dt \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}_{ad}. \quad (2.3.19)$$

In addition,  $\bar{y}_t \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , and (2.3.19), is equivalent to  $\bar{g}(t, x) = \text{Proj}_{[g_a, g_b]}(-\frac{1}{\alpha} \bar{\mu}(t, x))$  for a.e.  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ . In addition, there exists a pressure  $\bar{\phi} \in L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$  associated to the adjoint variable  $\bar{\mu}$  satisfying the backwards' in time evolutionary Stokes, in the sense of formulation (2.2.6).

*Proof.* The derivation of the optimality system is standard (see e.g. [109]). For the enhanced regularity on  $\bar{\mu}$ , we note that  $\bar{\mu}(T) = 0$ , and  $\bar{y} - y_d \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  and hence (2.3.17) implies that to get that  $\bar{\mu} \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . For the regularity of the corresponding pressure  $\bar{\phi}$  we refer to Remark 2.2.8.  $\square$

**Remark 2.3.7.** *We refer the reader to [13, 14]. for enhanced related regularity results when control constraints are involved. If the boundary is smooth, e.g. of class  $C^2$  then  $\bar{g} \in \mathbf{H}^1(\Omega_T) \cap C[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)] \cap L^2[0, T; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)]$  when  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$  and  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . In particular, (2.3.16) and (2.3.17), take the following form: For all  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , and  $q \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,*

$$(\bar{y}(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle \bar{y}, v_t \rangle + a(\bar{y}, v) + b(v, \bar{p})) dt = (\bar{y}_0, v(0)) + \int_0^T (\langle f, v \rangle + (\bar{g}, v)) dt, \quad (2.3.20)$$

$$\int_0^T b(\bar{y}, q) dt = 0,$$

$$\int_0^T (\langle \bar{\mu}, v_t \rangle + a(v, \bar{\mu}) + b(v, \bar{\phi})) dt = -(\bar{\mu}(0), v(0)) + \int_0^T (\bar{y} - y_d, v) dt, \quad (2.3.21)$$

$$\int_0^T b(\bar{\mu}, q) dt = 0.$$

Thus,  $\bar{p}, \bar{\phi} \in L^2[0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ . When control constraints are not present then a bootstrap argument can be applied in order to improve the regularity of  $\bar{g}, \bar{\mu}, \bar{y}$  in a straightforward manner.



# 3

## APPROXIMATION AND NUMERICAL ANALYSIS

---

*In this chapter we introduce the fully discrete optimization system and the error estimates for each of the problems that we described above.*

### Contents

---

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>3.1</b> | <b>The discrete optimal control problem . . . . .</b>  | <b>160</b> |
| 3.1.1      | Preliminaries and mesh properties . . . . .  | 160        |
| 3.1.2      | The fully-discrete optimal control problem . . . . .   | 163        |
| 3.1.3      | The discrete optimality system . . . . .   | 170        |
| <b>3.2</b> | <b>Error estimates . . . . .</b>   | <b>174</b> |
| 3.2.1      | Robin boundary control problem. . . . .  | 174        |
| 3.2.1.1    | The fully-discrete projection . . . . .  | 174        |
| 3.2.2      | Unconstrained Controls: Preliminary estimates for the optimality system . . . . .              | 181        |
| 3.2.2.1    | Unconstrained Controls: Symmetric error estimates - estimates for rough initial data . . . . . | 185        |
| 3.2.2.2    | Control Constraints: The variational discretization approach . . . . .                         | 186        |
| 3.2.3      | Semilinear distributed optimal control problem. . . . .  | 187        |
| 3.2.3.1    | The fully-discrete optimality system . . . . .   | 187        |
| 3.2.3.2    | Error estimates for the optimality system . . . . .  | 187        |
| 3.2.3.3    | An auxiliary optimality system . . . . .   | 188        |
| 3.2.4      | Stokes distributed optimal control problem. . . . .  | 201        |
| 3.2.4.1    | The fully-discrete projection . . . . .  | 202        |
| 3.2.4.2    | Symmetric estimates for the optimality system . . . . .  | 207        |
| 3.2.4.3    | Control Constraints: The variational discretization approach . . . . .                         | 210        |

---

### 3.1 The discrete optimal control problem

Here we will study the construction of finite element spaces suitable for the above problems, the fully discrete optimal control problem and stability estimates.

#### 3.1.1 Preliminaries and mesh properties

**Robin boundary control problem.** We consider a family of triangulations (say  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ ) of  $\Omega$ , defined in the standard way, ([34]). To every element  $T \in \mathcal{T}_h$ , we associate two parameters  $h_T$  and  $\rho_T$ , denoting the diameter of the set  $T$ , and the diameter of the largest ball contained in  $T$  respectively. The size of the mesh is denoted by  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ . The following standard properties of the mesh will be assumed:

- (i) There exist two positive constants  $\rho_{\mathcal{T}}$  and  $\delta_{\mathcal{T}}$  such that  $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \rho_{\mathcal{T}}$  and  $\frac{h}{h_T} \leq \delta_{\mathcal{T}} \forall T \in \mathcal{T}_h$  and  $\forall h > 0$ .
- (ii) Given  $h$ , let  $\{T_j\}_{j=1}^{N_h}$  denote the family of triangles belonging to  $\mathcal{T}_h$  and having one side included on the boundary  $\Gamma$ . Thus, if the vertices of  $T_j \cap \Gamma$  are denoted by  $x_{j,\Gamma}$ ,  $x_{j+1,\Gamma}$  then the straight line  $[x_{j,\Gamma}, x_{j+1,\Gamma}] \equiv T_j \cap \Gamma$ . Here, we also assume that  $x_{1,\Gamma} = x_{N_h+1,\Gamma}$ .

On the mesh  $\mathcal{T}_h$  we consider finite dimensional spaces  $U_h \subset H^1(\Omega)$  constructed by piecewise polynomials in  $\Omega$ . Standard approximation theory assumptions are assumed on these spaces. In particular, for any  $v \in H^{l+1}(\Omega)$ , there exists an integer  $\ell \geq 1$ , and a constant  $C > 0$  (independent of  $h$ ) such that:

$$\inf_{v_h \in U_h} \|v - v_h\|_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{l+1-s} \|v\|_{H^{l+1}(\Omega)}, \quad \text{for } 0 \leq l \leq \ell \text{ and } s = -1, 0, 1.$$

We also use inverse inequalities on quasi-uniform triangulations, i.e., there exist constants  $C \geq 0$ , such that  $\|v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C/h \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$ , and  $\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C/h \|v_h\|_{H^1(\Omega)^*}$ , etc.

Approximations will be constructed on a (quasi-uniform) partition  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  of  $[0, T]$ , i.e., there exists a constant  $0 < \theta < 1$  such that  $\min_{n=1, \dots, N} (t^n - t^{n-1}) \geq \theta \max_{n=1, \dots, N} (t^n - t^{n-1})$ . We also use the notation  $\tau^n = t^n - t^{n-1}$ ,  $\tau = \max_{n=1, \dots, N} \tau^n$  and we denote by  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$  the space of polynomials of degree  $k$  or less having values in  $U_h$ . We seek approximate solutions who belong to the space

$$\mathcal{U}_h = \{y_h \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]\}.$$

By convention, the functions of  $\mathcal{U}_h$  are left continuous with right limits and hence will write  $y_h^n \equiv y_{h-}^n$  for  $y_h(t^n) = y_h(t^n_-)$ , and  $y_{h+}^n$  for  $y_h(t^n_+)$ , while the jump at  $t^n$ , is denoted by  $[y_h^n] = y_{h+}^n - y_{h-}^n$ . In the above definitions, we have used the following notational abbreviation,  $y_{h,\tau} \equiv y_h$ ,  $\mathcal{U}_{h,\tau} \equiv \mathcal{U}_h$  etc. For the time-discretization, our main focus will be the lowest order scheme ( $k = 0$ ) which corresponds to the discontinuous Galerkin variant of the implicit Euler. We emphasize that other schemes (including schemes of arbitrary order in time and space) can be included in our proofs. However, the limited regularity will be acting as a barrier in terms of developing estimates of higher order.

For the control variable, we have two separate choices for the constrained and the unconstrained case respectively. In both cases our discretization is motivated by the optimality condition see also [30].

**Case 1: Unconstrained Controls :** We employ a discretization which allows the presence of discontinuities (in time), i.e., we define,

$$\mathcal{G}_h = \{g_h \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)] : g_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; G_h]\}.$$

Here, a conforming subspace  $G_h \subset L^2(\Gamma)$  is specified at each time interval  $(t^{n-1}, t^n]$ , which satisfy standard approximation properties. Even though various choices of  $G_h$ , are possible, here we focus our attention to the natural choice,  $G_h = U_h|_\Gamma$  and we refer the reader to [52, 57]. (see also references within) for a detailed analysis. Only  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  regularity will be needed in the error estimates. To summarize, for the choice of piecewise linears (in space), we choose:

$$\begin{aligned} U_h &= \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathcal{P}_1, \text{ for all } T \in \mathcal{T}_h\}, \\ G_h &= \{u_h \in C(\Gamma) : u_h|_{[x_i, \Gamma, x_{i+1}, \Gamma]} \in \mathcal{P}_1, \text{ for } i = 1, \dots, N_h\}. \end{aligned}$$

**Case 2: Constrained Controls:** Analogously to the previous case, we employ the variational discretization concept (see e.g. [65]) which allows the natural discretization of the controls via the adjoint variable. In this case, we do not explicitly discretize the control variable, i.e.,  $\mathcal{G}_h \equiv L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ .

**Semilinear distributed optimal control problem.** Similarly with the boundary control problem, the fully-discrete approximations are constructed on a partition  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  of  $[0, T]$ . On each time interval  $(t^{n-1}, t^n]$ , of length  $\tau_n \equiv t^n - t^{n-1}$ , a subspace  $U_h^n$  of  $H_0^1(\Omega)$ , is specified, and it is assumed that each  $U_h^n$  satisfies the classical approximation theory results (see e.g. ([34]). We also assume that the time-steps are quasi-uniform, i.e., there exists  $0 \leq \theta \leq 1$ , such that  $\min_{n=1, \dots, N} \tau_n \geq \theta \max_{n=1, \dots, N} \tau_n$ . Now, we seek approximate solutions who belong to the space

$$\mathcal{U}_h = \{y_h \in L^2[0, T; H_0^1(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n]} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]\}.$$

Here  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$  denotes the space of polynomials of degree  $k$  or less having values in  $U_h^n$ . We also use the following notational abbreviation,  $y_{h, \tau} \equiv y_h$ ,  $\mathcal{U}_{h, \tau} \equiv \mathcal{U}_h$  etc. The discretization of the control can be effectively achieved through the discretization of the adjoint variable  $\mu$ . However, we point out that the only regularity assumption on the discrete control is  $g_h \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ .

By convention, the functions of  $\mathcal{U}_h$  are left continuous with right limits and hence will subsequently write (abusing the notation)  $y^n$  for  $y_h(t^n) = y_h(t^n_+)$ , and  $y^n_+$  for  $y_h(t^n_+)$ . The above notation will also be used for the error  $e = y - y_h$  function. Due to a well known embedding result  $W_D(0, T) \subset C[0, T; L^2(\Omega)]$  (see e.g. [43, Chapter 5]), the exact solution  $y$  is in  $C[0, T; L^2(\Omega)]$ , so that the jump in the error at  $t^n$ , denoted by  $[e^n]$ , is  $[e^n] = [y^n] = y^n_+ - y^n$ .

**Evolutionary Stokes problem with distributed control.** Similarly a family of triangulations ([34]) denoted by  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  of  $\Omega$  is defined in the standard way. We assume that to every element  $T \in \mathcal{T}_h$ , two parameters  $h_T$  and  $\rho_T$  denoting the diameter of the set  $T$ , and the diameter of the largest ball contained in  $T$  respectively are assigned, and the associated size of the mesh is denoted by  $h \equiv \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ . The following standard properties of the mesh will be assumed:

(i) There exist two positive constants  $\rho_{\mathcal{T}}$  and  $\delta_{\mathcal{T}}$  such that  $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \rho_{\mathcal{T}}$  and  $\frac{h}{h_T} \leq \delta_{\mathcal{T}}$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$  and  $\forall h > 0$ .

(ii) Define  $\bar{\Omega}_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$  and denote by  $\Omega_h$ , and  $\Gamma_h$  its interior and boundary respectively. We also assume that the boundary vertices of  $\mathcal{T}_h$  are points of  $\Gamma$ .

On the mesh  $\mathcal{T}_h$  we consider two finite dimensional spaces  $\mathbf{Y}_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  and  $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$  constructed by piecewise polynomials in  $\Omega_h$ , and vanishing in  $\Omega - \Omega_h$ . We note that under the above structural assumptions, if  $\Omega$  is convex, then  $\Omega_h$  is convex, and  $|\Omega - \Omega_h| \leq Ch^2$ . The above assumptions are enough in order to obtain an estimate for the cases, where the initial data belong to  $\mathbf{W}(\Omega)$  or  $\mathbf{V}(\Omega)$ .

The assumption on the domain to be convex and polygonal (or polyhedral in  $\mathbb{R}^3$ ) is necessary since it is not known if convexity is enough to guarantee the  $\mathbf{H}^2$  elliptic regularity of the stationary Stokes equations in  $\mathbb{R}^3$ . Furthermore, more regularity on the boundary  $\Gamma$  ( $C^3$ ), implies  $\mathbf{H}^3$  regularity of the stationary Stokes, but typically demands much more complicated elements. When dealing with higher

order schemes, we emphasize that additional smoothness on  $\Gamma$  should be assumed see for instance [35, 102], together with compatibility conditions in order to guarantee the appropriate regularity of the solutions.

Standard approximation theory assumptions are assumed on these spaces. In particular, for any  $v \in \mathbf{H}^{l+1}(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , there exists an integer  $\ell \geq 1$ , and a constant  $C > 0$  (independent of  $h$ ) such that:

$$\inf_{v_h \in \mathbf{Y}_h} \|v - v_h\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)} \leq Ch^{l+1-s} \|v\|_{\mathbf{H}^{l+1}(\Omega)}, \quad \text{for } 0 \leq l \leq \ell \text{ and } s = -1, 0, 1. \quad (3.1.1)$$

Also for any  $q \in H^l(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , then

$$\inf_{q_h \in Q_h} \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^l \|q\|_{H^l(\Omega)}, \quad \text{for } 0 \leq l \leq \ell. \quad (3.1.2)$$

In addition, the spaces  $\mathbf{Y}_h$  and  $Q_h$  must satisfy the inf-sup condition, i.e., there exists  $C > 0$  (independent of  $h$ ) such that

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in \mathbf{Y}_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_h)} \|q_h\|_{L^2(\Omega_h)}} > C. \quad (3.1.3)$$

We also consider the discrete divergence free analog of  $\mathbf{Y}_h$  denoted by

$$\mathbf{U}_h = \{v_h \in \mathbf{Y}_h : b(v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}.$$

We will also use inverse inequalities on quasi-uniform triangulations, i.e., there exist constants  $C, c > 0$ , such that  $\|v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C/h \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$ , and  $\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c/h \|v_h\|_{H^1(\Omega)^*}$ , etc. Approximations will be constructed on a (quasi-uniform) partition  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  of  $[0, T]$ , i.e., there exists a constant  $0 < \theta < 1$  such that  $\min_{n=1, \dots, N} (t^n - t^{n-1}) \geq \theta \max_{n=1, \dots, N} (t^n - t^{n-1})$ . We denote by  $\tau^n = t^n - t^{n-1}$ ,  $\tau = \max_{n=1, \dots, N} \tau^n$  and by  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ , and  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$  the spaces of polynomials of degree  $k$  or less having values in  $\mathbf{Y}_h$ ,  $\mathbf{U}_h$  and  $Q_h$  respectively. We seek approximate solutions for the velocity and the pressure who belong to the space

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_h &= \{y_h \in L^2[0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n)} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]\}, \\ \mathcal{U}_h &= \{y_h \in L^2[0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n)} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]\}, \\ \mathcal{Q}_h &= \{y_h \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)] : y_h|_{(t^{n-1}, t^n)} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]\}. \end{aligned}$$

The following remark highlights why the use of same degree of polynomials with respect to time is the natural choice for the discretization (in time) of the pressure.

**Remark 3.1.1.** *It is obvious that the analogue of the discrete divergence free subspace of  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$  is,  $\mathcal{Z}_h^n = \{v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h] : \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]\}$ . Then, [32, Lemma 2.3] states that  $\mathcal{Z}_h^n \equiv \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ . Therefore, we may write that*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_h &\equiv \{v_h \in \mathcal{Y}_h : \int_0^T b(v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h\} \\ &= \{v_h \in \mathcal{Y}_h : v_h|_{(t^{n-1}, t^n)} \in \mathcal{Z}_h^n\} \\ &= \{v_h \in \mathcal{Y}_h : v_h|_{(t^{n-1}, t^n)} \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]\} \equiv \mathcal{U}_h. \end{aligned}$$

We refer the reader to [32, Section 2] for more details.

In the above notations, by convention, the functions of  $\mathcal{U}_h$  are left continuous with right limits. Thus, we will write  $y^n$  for  $y(t^n) \equiv y(t^n_-)$ ,  $y_+^n$  for  $y(t^n_+)$ ,  $y_h^n$  for  $y_h(t^n) = y_h(t^n_-)$ , and  $y_{h+}^n$  for  $y(t^n_+)$ , while the jump at  $t^n$ , is denoted by  $[y_h^n] = y_{h+}^n - y_h^n$ . In the above definitions, we have also used the following notational abbreviation,  $y_{h,\tau} \equiv y_h$ ,  $\mathcal{Y}_{h,\tau} \equiv \mathcal{Y}_h$ ,  $\mathcal{U}_{h,\tau} \equiv \mathcal{U}_h$  etc. This is due to the fact that the time-discretization parameter  $\tau$  can be chosen independent of  $h$ .

We emphasize that other schemes (including schemes of arbitrary order in time and space) will be included in our proofs. However, the limited regularity will be acting as a barrier in terms of developing estimates of high order, at least in presence of control constraints. The case of the lowest order scheme, in time and space, has been treated in detail in the recent works of [13, 14] for the velocity tracking problem of Navier-Stokes flows, with control constraints, when data  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ .

For the control variable, we have two separate choices for the constrained and the unconstrained case respectively. In both cases our discretization is motivated by the optimality condition.

**Case 1: The Unconstrained Controls:** We employ the natural space-time discretization which allows the presence of discontinuities (in time). In particular, we define by  $\mathcal{G}_h \equiv \mathcal{Y}_h$ . Only  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  regularity will be needed in the error estimates.

**Case 2: Constrained Controls :** Analogously to the previous case, we employ the variational discretization concept see e.g. [65] which allows the natural discretization of the controls via the adjoint variable. In this case, we do not explicitly discretize the control variable, i.e.,  $\mathcal{G}_h \equiv L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ .

### 3.1.2 The fully-discrete optimal control problem

**Robin boundary control problem.** The discontinuous time-stepping fully-discrete scheme for the control to state mapping  $G_h : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathcal{U}_h$ , which associates to each control  $g$  its state  $G_h(g) = y_{g,h} \equiv y_h(g)$  is defined as follows: For any boundary data  $g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ , for given data  $y^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , and target  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  we seek  $y_h \in \mathcal{U}_h$  such that for  $n = 1, \dots, N$ , and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$\begin{aligned} (y_h^n, v_h^n) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + \lambda \langle y_h, v_h \rangle_\Gamma \right) dt \\ &= (y_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + \lambda \langle g, v_h \rangle_\Gamma \right) dt. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

We note that in the above definition only  $g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  regularity is needed to validate the fully-discrete formulation. Stability estimates at partition time-points as well as in  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  and  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  norms easily follow by setting  $v_h = y_h$  into (3.1.4). For the estimate at arbitrary time-points, we may apply the techniques which were developed in [31, Section 2] for general linear parabolic PDEs, (see also [23, Section 3] for stability estimate for semilinear parabolic PDEs with Robin data). Similar to the continuous case, the control to fully-discrete state mapping  $G_h : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathcal{U}_h$ , is well defined, and continuous. The definition of the discrete Robin boundary control problem, now follows:

**Definition 3.1.2.** Let  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  be given data. Suppose that the set of discrete admissible controls is denoted by  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{G}_h \cap \mathcal{A}_{ad}$ , and let  $J_h(y_h, g_h) \equiv \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |y_h - y_d|^2 dxdt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_\Gamma |g_h|^2 dxdt$ . Here the pair  $(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  satisfy (3.1.4). Then, the pair  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$ , is said to be an optimal solution if  $J_h(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \leq J_h(w_h, u_h)$ ,  $\forall (w_h, u_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$ .

The existence the discrete optimal control problem can be proved by standard techniques while uniqueness follows from the structure of the functional, and the linearity of the equation. The basic stability estimates in terms of the optimal pair  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in W_R(0, T) \times L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  can be easily obtained. We close this subsection by quoting the estimate at arbitrary time-points, for schemes of arbitrary order under minimal regularity assumptions, adapted to our case from [23, Section 3]. The estimate highlights the fact that the natural choice of the discrete energy norm for the state variable associated to discontinuous time-stepping schemes is  $\|\cdot\|_{W_R(0, T)} = \|\cdot\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}$ .

**Lemma 3.1.3.** *Let  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . If  $(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  denotes the solution pair of the discrete optimal control problem. Then,*

$$\|y_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C \max\left\{1, \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{1/2}\right\} (\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]}).$$

Here,  $C \geq 0$  depends on  $1/C_F \min\{\eta, \lambda\}$ ,  $C_k$  and  $\Omega$  but not on  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $h$ .

*Proof.* We will sketch the proof:

**Step 1.** Since  $(\tilde{y}_h, 0)$  is an admissible pair for the discrete problem it is

$$\begin{aligned} J(y_h, g_h) &\leq J(\tilde{y}_h, 0) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\tilde{y}_h - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|\tilde{y}_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2 + \|y_d\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \right) \\ &\leq C \left( \|f\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

**Step 2.** Setting  $v_h = y_h$  to relation

$$(y^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle -y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + \lambda \langle y_h, v_h \rangle_\Gamma) = (y^{n-1}, v^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + \lambda \langle g_h, v_h \rangle_\Gamma)$$

we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( C_F \min\{\eta, \lambda\} \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt \\ \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{1}{C_F} \min\{\eta, \lambda\} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + \lambda \|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Next we use the bound for  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt$  from the relation  $J(y_h, g_h) \leq C(\|f\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|y_d\|_{L^2(\Omega)}^2)$  and we have

$$\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \|[y^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{t^n} \left( C_F \min\{\eta, \lambda\} \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \leq C_{st} \max\left\{1, \frac{\lambda}{a}\right\}.$$

**Step 3.** For the bound in arbitrary time points we use the exponential interpolation  $e^{-\rho(t-t^{n-1})}y_h$  denoted by  $\widehat{y}_h$

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_{ht}, \widehat{y}_h) dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_{ht}, y_h) e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt \\ &= \frac{1}{2} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t^n-t^{n-1})} + \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt \\ &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( |a(y_h, \widehat{y}_h)| + \lambda |\langle y_h, \widehat{y}_h \rangle_\Gamma| + |\langle f, \widehat{y}_h \rangle| + \lambda |\langle g_h, \widehat{y}_h \rangle_\Gamma| \right) dt. \end{aligned}$$

From projection theorem  $\widehat{y}_h$  is bounded from  $y_h$ , also it is

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |a(y_h, \widehat{y}_h)| dt \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 dt,$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left| \langle f, \widehat{y}_h \rangle \right| dt \leq \frac{C_k}{C_F} \min\{\eta, \lambda\} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 dt + C_F \min\{\eta, \lambda\} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \lambda \left| \langle g_h, \widehat{y}_h \rangle_\Gamma \right| + \lambda \left| \langle y_h, \widehat{y}_h \rangle_\Gamma \right| dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + C_k \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{a} \right) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt.$$

So

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t^n - t^{n-1})} + \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\rho}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t - t^{n-1})} dt \\ & \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{1}{C_F} \min\{\eta, \lambda\} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + (\eta + C_F \min\{\eta, \lambda\}) \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha \|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha} \right) \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt \end{aligned}$$

and finally for  $\rho = \frac{1}{\tau_n}$  we take

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-1} + \frac{1}{2} \|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (e^{-1}/2\tau_n) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{\min\{\eta, \lambda\}}{C_F} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + (\eta + C_F \min\{\eta, \lambda\}) \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha \|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha} \right) \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt, \end{aligned}$$

also from the inverse estimate  $\|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_k}{\tau_n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$  we have

$$\begin{aligned} \|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n, C^2(\Omega)]} & \leq C_k \left( \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (1/C_F) \min\{\eta, \lambda\} \|f\|_{H^1(\Omega)^*}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\eta + C_F \min\{\eta, \lambda\}) \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha \|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \lambda + \lambda^2/a \right) \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt \right), \end{aligned}$$

then the term  $\|g_h\|_{L^2(\Gamma)}^2$  is bounded like before and we have the desired estimate.

We note that the above estimate is valid even if the control constraints are present assuming that  $0 \in \mathcal{A}_{ad}^d$ .  $\square$

**Semilinear distributed optimal control problem.** The discrete state equation can be defined as follows: Under the assumptions of Definition 2.2.5, we seek state  $y_h \in \mathcal{U}_h$ , such that for any  $g_h \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ ,

$$\begin{aligned} (y^n, v^n) & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + (\phi(y_h), v_h) \right) dt = (y^{n-1}, v_+^{n-1}) \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (g_h, v_h) \right) dt, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n], \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

for  $n = 1, \dots, N$ . The discrete admissible set  $\mathcal{A}_{ad}^d$  and the discrete (local) optimal control problem is now defined analogously to the continuous problem.

**Definition 3.1.4.** *Suppose that the assumptions of the previous Chapter hold.*

1.  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \{(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times L^2[0, T; U_h^n] \text{ such that (3.1.5) holds}\}.$
2. *Discrete (local) Optimal Pair:* We seek pair  $(y_h, g_h) \in \mathcal{A}_{ad}^d$  such that  $J(y_h, g_h) \leq J(w_h, u_h)$  for all  $(w_h, u_h) \in \mathcal{A}_{ad}^d$  when

$\|y_h - w_h\|_{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]} + \|y_h - w_h\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|g_h - u_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq \delta'$  for  $\delta' > 0$  appropriately chosen.

Let  $\tilde{y}_h$  be the solution of (3.1.5) without control. Without loss of generality, it is understood that the pair  $(\tilde{y}_h, 0) \in \mathcal{A}_{ad}^d$ , and  $\delta'$  are chosen in a way to guarantee that  $J(y_h, g_h) \leq J(\tilde{y}_h, 0)$ . The proof of existence of optimal solution of the discrete problem and its corresponding discrete optimality system of equations (first order necessary conditions) require stability estimates for the solution of (3.1.5), under minimal regularity assumptions (see e.g. [22, Section 3]). These stability estimates are also needed for the derivation of error estimates. The  $\|y_h\|_X \equiv \|y_h\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|y_h\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  norm is used as the natural energy norm associated to the DG formulation, since the discrete time-derivative does not possess any meaningful regularity due to the presence of discontinuities.

Now we are ready to state stability estimates for the discrete optimal control problem. Under an additional assumption on the semi-linear term, we derive a stability bound, which improves the dependence of  $\tau$  upon the penalty parameter  $\alpha$  compared to the result of [22, Lemma 3.6].

**Assumption 3.1.5.** *Suppose that  $\{t^n\}_{n=0}^N$  denotes a quasi-uniform partition of  $[0, T]$ . In addition to Assumption 2.1.1, we assume that  $\phi$  satisfies the following assumption: For all  $n = 1, \dots, N$  and  $s_1, s_2 \in L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]$ , with  $\|s_1 - s_2\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq \varepsilon$ , for some  $\varepsilon > 0$ , there exists  $C_L > 0$  (algebraic constant) such that*

$$\|\phi(s_1) - \phi(s_2)\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq C_L \|s_1 - s_2\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}.$$

**Remark 3.1.6.** *In the remaining of this paper, we will denote by  $C_L$  constants that depend only upon Lipschitz constants of Assumptions 2.1.1 and 3.1.5, and by  $C_k$  constants that depend upon  $k$ . Both constants can be different in different appearances.*

**Lemma 3.1.7.** *Suppose that  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ ,  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$  are given functions, and let  $\phi$  satisfy Assumptions 2.1.1, and 3.1.5. If  $(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times L^2[0, T; U_h^n]$  denotes a solution pair of the discrete (local) optimal control problem, then*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|y_h - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (\alpha/2) \int_0^T \|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C \left( \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\eta) \int_0^T \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \equiv C_{st} \end{aligned}$$

where  $C$  is a constant depending only on  $\Omega$ . In addition, for all  $n = 1, \dots, N$

$$\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \|y^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{t^n} \eta \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq D_{yst},$$

with  $D_{yst} \equiv C_{st} \max\{1, 1/\alpha^{1/2}\}$ . Let  $\tau \equiv \max_{i=1, \dots, n} \tau_i$ , with  $\tau_i = t^i - t^{i-1}$ . If  $\tau \leq \min\{C_k/8C_L C_{st}^{1/2}, C_k \alpha^{1/2}/8\}$ , then the following estimate holds:

$$\|y_h\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq C D_{yst},$$

where  $C$  depends on  $(C_c/\eta)$ ,  $C_k$  and  $\Omega$  but not on  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $h$ .

*Proof.* For the first two estimates we simply note that  $J(y_h, g_h) \leq J(\tilde{y}_h, 0) \equiv (1/2) \int_0^T \|\tilde{y}_h - U\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$ , where  $\tilde{y}_h$  corresponds to the solution of (3.1.5) without control. The estimate on  $\tilde{y}_h$  follows from [31, Section 2]. For the second estimate, we set  $v_h = y_h$  into (3.1.5), and



use Young's inequality to obtain

$$\begin{aligned} & (1/2)\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & \leq (1/2)\|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/(4\alpha^{1/2})) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

The estimate now follows by adding the above inequalities and using the first estimate. For the estimate at arbitrary points, the proof uses ideas of ([32]). For completeness, we sketch the proof. Set  $v_h = \bar{y}_h$  into (3.1.5), where  $\bar{y}_h$  is the exponential interpolant of  $e^{-\rho(t-t^{n-1})}y_h$  of  $y_h$  (for some  $\rho > 0$ ) and defined as in Appendix A'2. Then, the definition of  $\bar{y}_h$  allows to obtain

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_{ht}, \bar{y}_h) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_{ht}, y_h) e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt = (1/2)\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t^n-t^{n-1})} \\ & - (1/2)\|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Hence, integrate by parts with respect to time in (3.1.5), and using (3.1.6), we obtain

$$\begin{aligned} & (1/2)\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} + (1/2)\|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h), \bar{y}_h \rangle dt \\ & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} |a(y_h, \bar{y}_h)| dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle f, \bar{y}_h \rangle| dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(g_h, \bar{y}_h)| dt. \end{aligned}$$

Using Lemma A.2.2, we may bound  $\bar{y}_h$  in terms of  $y_h$  in various norms. In particular, using Young's inequalities, we obtain

$$\begin{aligned} & (1/2)\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} + (1/2)\|[y^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h), \bar{y}_h \rangle dt \\ & \leq C_k \left( \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (C_c + \eta)\|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2) dt \right. \\ & \left. + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\alpha^{1/2}\|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2})\|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \right). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

It remains to bound the semi-linear term. For this purpose, using Assumption 2.1.1, we obtain,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h), \bar{y}_h \rangle dt \geq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h) - \phi(\bar{y}_h), \bar{y}_h \rangle dt.$$

Moving the last integral on the right hand side of (3.1.7) we obtain a bound as follows: Lemma A.2.2, implies that the difference  $y_h - \bar{y}_h$  remains small. In particular, using the previously derived estimate on  $\|y_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$  we may bound  $\|y_h - \bar{y}_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq C_k \rho \tau_n \|y_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq C_k \rho \tau C_{st}^{1/2}$ . Therefore, we deduce from Assumption 3.1.5, and Hölder's inequality

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y_h) - \phi(\bar{y}_h), \bar{y}_h \rangle dt & \leq C_L \|y_h - \bar{y}_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \|\bar{y}_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \\ & \leq C_k C_L \rho \tau_n C_{st}^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Collecting the above inequalities into (3.1.7), we obtain

$$\begin{aligned}
& (1/2)\|y^n\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} + (1/2)\|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt \\
& \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (C_c + \eta)\|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha^{1/2}\|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + \left( (1/\alpha^{1/2}) + C_k C_L \rho \tau_n C_{st}^{1/2} \right) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
& \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (C_c + \eta)\|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha^{1/2}\|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + \tau_n \left( (1/\alpha^{1/2}) + C_k C_L \rho \tau_n C_{st}^{1/2} \right) \|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2.
\end{aligned}$$

Hence, selecting  $\rho = 1/\tau_n$  and using the inverse estimate  $\|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 \leq C_k/\tau_n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$ , we observe that the last term on the left hand side can be bounded from below by,

$$\begin{aligned}
(\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt & \geq (e^{-1}/2\tau_n) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
& \geq C_k \|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2.
\end{aligned}$$

It remains to bound the last term at the right hand side. Choosing  $\tau_n > 0$  in a way hide this term on the left hand side, at the right hand side, i.e.,  $C_{st}^{1/2} C_k C_L \tau_n \leq C_k/8$  and  $(\tau_n/\alpha^{1/2}) \leq C_k/8$ , i.e., for  $\tau_n \leq \min\{(C_k/8 C_L C_{st}^{1/2}), (\alpha^{1/2} C_k/8)\}$  we obtain,

$$\begin{aligned}
(1/4)\|y_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 & \leq \|y^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
+ C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (C_c + \eta)\|y_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha^{1/2}\|g_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt.
\end{aligned}$$

The estimate now follows by using the previously derived estimates at the energy norm and at partition points.  $\square$

**Remark 3.1.8.** *The Assumption 3.1.5 is also helpful in order to minimize technicalities in the subsequent derivation of symmetric error estimates. However, we note that if the growth condition is satisfied with exponent  $1 \leq p \leq 2$ , it can be easily shown that  $\|\phi(y_h) - \phi(\bar{y}_h)\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq C(C_{st}, C_k)\|y_h - \bar{y}_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}$ .*

Similar to the case of [22, Theorem 3.8], (where  $\phi$  satisfies growth and monotonicity conditions) the following convergence result can be established when the same subspaces are being used at every time interval, i.e.,  $U_h^n = U_h \subset H_0^1(\Omega)$ , for  $n = 1, \dots, N$ . under minimal regularity assumptions.

**Theorem 3.1.9.** *Given fixed  $h$  and partition  $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  of  $[0, T]$ , with  $\tau = \max_{i=1, \dots, N} \tau_i$ , satisfying the assumptions of Lemma 3.1.7, and let the Assumption 2.1.1 hold. Suppose also that  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  and let  $\alpha > 0$ . Then, for  $U_h^n \equiv U_h \subset H_0^1(\Omega)$  and for quasi-uniform time-steps, we obtain,*

- *There exist  $y_h \in \mathcal{U}_h$  and  $g_h \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  such that the pair  $(y_h, g_h)$  satisfies the discrete equation (3.1.5) and the functional  $J(y_h, g_h)$  is minimized.*
- *The discrete pair  $(y_h, g_h)$  converges as  $\tau, h \rightarrow 0$  to solution  $(y, g)$  of the continuous optimal*

control problem, in the following sense:

$$\begin{aligned} y_h &\rightarrow y && \text{weakly in } L^2[0, T; H_0^1(\Omega)], \\ y_h &\rightarrow y && \text{weakly-}^* \text{ in } L^\infty[0, T; L^2(\Omega)], \\ y_h &\rightarrow y && \text{strongly in } L^2[0, T; L^2(\Omega)], \\ g_h &\rightarrow g && \text{weakly in } L^2[0, T; L^2(\Omega)]. \end{aligned}$$

**Remark 3.1.10.** *The stability estimates under minimal regularity assumptions are valid even when different subspaces are being used at every time interval. The convergence result of [22, Theorem 3.8] is based on a discrete compactness argument of Walkington (see [110, Theorem 3.1]) for discontinuous time-stepping schemes which is established when  $U_h^n \equiv U_h$ . However it is possible to extend the main result even in case of different subspaces. We note also that the proof of Theorem 3.1.9 requires only the growth and monotonicity assumptions of Assumption 2.1.1.*

**Evolutionary Stokes problem with distributed control.** The discontinuous time-stepping fully-discrete scheme for the control to state mapping  $G_h : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$ , associates to each control  $g$  the corresponding state  $G_h(g) = y_{g,h} \equiv y_h(g)$ : For any data  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , for given data  $y^0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ , we seek  $y_h \in \mathcal{U}_h$  such that for  $n = 1, \dots, N$ , and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ ,

$$(y_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) \right) dt = (y_h^{n-1}, v_h^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (g, v_h) \right) dt. \quad (3.1.8)$$

Stability estimates at partition points as well as in  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  norm easily follow by setting  $v_h = y_h$  into (3.1.8). For the estimate at arbitrary time-points, we refer the reader to [32, Appendix A]. Thus, the stability estimates imply that the control to fully-discrete state mapping  $G_h : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$ , is well defined, and continuous. Similar to the continuous case, when more regularity is available to data, i.e.,  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , then we seek  $(y_h, p_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  such that the following formulation is satisfied : For  $n = 1, \dots, N$ , and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,

$$\begin{aligned} (y_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + b(v_h, p_h) \right) dt &= (y_h^{n-1}, v_h^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (g, v_h) \right) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(y_h, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

The fully-discrete optimal control problem can be defined as follows :

**Definition 3.1.11.** *Let  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$  be given data. Suppose that the set of discrete admissible controls is denoted by  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{G}_h \cap \mathcal{A}_{ad}$ , and let  $J_h(y_h, g_h) \equiv \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} |y_h - y_d|^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} |g_h|^2 dx dt$ . Here the pair  $(y_h, g_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  satisfy (3.1.8). Then, the pair  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$ , is said to be an optimal solution if  $J_h(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \leq J_h(w_h, u_h) \forall (w_h, u_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$ .*

The existence and uniqueness of the discrete optimal control problem can be proved by standard techniques. We close this subsection by quoting the estimate at arbitrary time-points, for schemes of arbitrary order under minimal regularity assumptions, adapted to our case from [32, Section 4]. The estimate highlights the fact that the natural discrete energy norm for the state variable associated to discontinuous time-stepping schemes is  $\|\cdot\|_{W_S(0,T)} = \|\cdot\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\cdot\|_{L^\infty[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ .

**Lemma 3.1.12.** *Suppose that  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ . If  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  denotes the solution pair of the discrete optimal control problem, then there exists constant  $C > 0$  depending on  $1/\nu$ ,  $C_k$  and  $\Omega$  but not on  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $h$ , such that,*

$$\|\bar{y}_h\|_{L^\infty[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}^2 \leq C(1/\alpha) \left( \|y^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2[0,T;\mathbf{V}(\Omega)^*]}^2 \right).$$

|              |                                |
|--------------|--------------------------------|
| <b>3.1.3</b> | The discrete optimality system |
|--------------|--------------------------------|

**Robin boundary control problem.** Using well known techniques and the stability estimates in  $W_R(0, T)$ , it is easy to show the differentiability of the relation  $g \rightarrow y_h(g)$ , for any  $g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ . Hence, the discrete analogue of Lemma 2.3.2, takes the following form:

**Lemma 3.1.13.** *The cost functional  $J_h : L^2[0, T; L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$  is well defined, differentiable, and for every  $g, u \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ ,*

$$J'_h(g)u = \int_0^T \int_{\Gamma} (\mu_h(g) + \alpha g) u dx dt,$$

where  $\mu_h(g) \equiv \mu_{g,h} \in W_R(0, T)$  is the unique solution of following problem: For all  $n = 1, \dots, N$ , and for all  $v_h \in P_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$\begin{aligned} -(\mu_{g,h+}^n, v_h^n) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \mu_{g,h}, v_{ht} \rangle + a(v_h, \mu_{g,h}) + \lambda \langle \mu_{g,h}, v_h \rangle_{\Gamma}) dt \\ &= -(\mu_{g,h+}^{n-1}, v_h^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle y_{g,h} - y_d, v_h \rangle dt, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

where  $\mu_{g,h+}^N = 0$ . Here,  $y_{h,g} \equiv y_h(g)$  is the solution of (3.1.4).

Thus, the fully-discrete optimality system takes the following form.

**Lemma 3.1.14.** *Let  $(\bar{y}_h(\bar{g}_h), \bar{g}_h) \equiv (\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  denote the unique optimal pair of Definition 3.1.2. Then, there exists an adjoint  $\bar{\mu}_h \in \mathcal{U}_h$  satisfying,  $\bar{\mu}_+^N = 0$  such that for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ , and for all  $n = 1, \dots, N$*

$$\begin{aligned} (\bar{y}_h^n, v_h^n) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle \bar{y}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{y}_h, v_h) + \lambda \langle \bar{y}_h, v_h \rangle_{\Gamma}) dt \\ &= (\bar{y}_h^{n-1}, v_h^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + \lambda \langle \bar{g}_h, v_h \rangle_{\Gamma}) dt, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} -(\bar{\mu}_{h+}^n, v_h^n) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \bar{\mu}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{\mu}_h, v_h) + \lambda \langle \bar{\mu}_h, v_h \rangle_{\Gamma}) dt \\ &= -(\bar{\mu}_{h+}^{n-1}, v_h^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{y}_h - y_d, v_h) dt, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

and the following optimality condition holds: For all  $u_h \in \mathcal{A}_{ad}^d$ ,

$$1) \text{ Unconstrained Controls: } \int_0^T (\alpha \bar{g}_h + \lambda \bar{\mu}_h, u_h)_{\Gamma} dt = 0, \quad (3.1.13)$$

$$2) \text{ Constrained Controls: } \int_0^T \int_{\Gamma} (\alpha \bar{g}_h + \lambda \bar{\mu}_h) (u_h - \bar{g}_h) dx dt \geq 0. \quad (3.1.14)$$

Estimates for the adjoint variable at partition points and in  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  can be derived easily, while for an estimate in  $L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$  we refer the reader to [23]. The following estimate highlights the fact that the discrete solutions produced by discontinuous time-stepping schemes possess the same regularity properties of the continuous problem.

**Lemma 3.1.15.** *Let  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h)$  denote the discrete optimal solution and  $(\bar{y}_h, \bar{\mu}_h, \bar{g}_h)$  satisfy the system (3.1.11)-(3.1.12)-(3.1.13) or (3.1.14). Then,*

$$\|\bar{\mu}_h\|_{L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]} + \lambda^{1/2} \|\bar{\mu}_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq C \|\bar{y}_h - y_d\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]},$$

where  $C$  does not depend on  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $h$  but only on  $1/\eta$ ,  $C_k$ ,  $\Omega$ .

*Proof.* The proof follows based on the techniques of [32, Theorem 4.10], modified in order to handle the Robin boundary data, and the backward in time nature of our pde. First, we note that  $\mu(T) = 0$ , and  $y_h - y_d \in L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$ . Hence, at each time  $t \in (t^{n-1}, t^n]$  let  $a_p(\cdot) \in U_h$  denote the following discrete approximation of the Laplacian (with Robin boundary data),

$$(a_p, v_h) = (1/\eta)a(\bar{\mu}_h, v_h) + (\lambda/\eta)(\bar{\mu}_h, v_h)_\Gamma, \quad \forall v_h \in U_h.$$

Thus,  $a_p \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ , and hence setting  $v_h(\cdot) = \bar{\mu}_{ht}(\cdot) \in U_h$ , and  $v_h(\cdot) = a_p(\cdot) \in U_h$ , we obtain

$$(1/2) \frac{d}{dt} (\|\nabla \bar{\mu}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda/\eta)\|\bar{\mu}_h\|_{L^2(\Gamma)}^2) = (a_p, \bar{\mu}_{ht}),$$

and

$$a(\bar{\mu}_h, a_p) + \lambda(\bar{\mu}_h, a_p)_\Gamma = \eta(a_p, a_p).$$

Integrating by parts in time (3.1.11), setting  $v_h = a_p$  into the resulting equality, using the last two equalities, the definition of  $a_p(t^n)$ , i.e.,  $(a_p(t^n), \bar{\mu}_{h+}^n - \bar{\mu}_h^n) = (\nabla \bar{\mu}_h^n, \nabla(\bar{\mu}_{h+}^n - \bar{\mu}_h^n)) + (\lambda/\eta)(\bar{\mu}_h^n, \bar{\mu}_{h+}^n - \bar{\mu}_h^n)_\Gamma$ , and standard algebra, we obtain,

$$\begin{aligned} & (1/2)\|\nabla \bar{\mu}_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda/2\eta)\|\bar{\mu}_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|a_p\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq (1/2)\|\nabla \bar{\mu}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda/2\eta)\|\bar{\mu}_{h+}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{y}_h - y_d, a_p) dt. \end{aligned}$$

The above inequality implies bounds at the partition points, and hence bounds in  $L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]$ , when  $k = 0, 1$  after inserting the stability bound on  $\bar{y}_h$ . For high-order (in time) schemes, we directly follow the approach of [32, Theorem 4.10].  $\square$

**Semilinear problem with distributed optimal control.** The fully-discrete optimality system is defined as follows: We seek  $y_h, \mu_h \in \mathcal{U}_h$  such that for  $n = 1, \dots, N$  and for every  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$ ,

$$\begin{aligned} (y^n, v^n) & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_h, v_{ht} \rangle + a(y_h, v_h) + (\phi(y_h), v_h) \right) dt \\ & = (y^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + (g_h, v_h) \right) dt, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$\begin{aligned} -(\mu_+^n, v^n) & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle \mu_h, v_{ht} \rangle + a(v_h, \mu_h) + (\phi'(y_h)\mu_h, v_h) \right) dt \\ & = -(\mu_+^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (y_h - y_d, v_h) dt, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$\int_0^T (\alpha g_h + \mu_h, u_h) dt = 0 \quad \forall u_h \in L^2[0, T; U_h^n]. \quad (3.1.17)$$

Here,  $y^0 = y_{h0}$ ,  $\mu_+^N = 0$ ,  $f$ ,  $y_d$  are given data, and  $y_{h0}$  denotes an approximation of  $y_0$ .

**Remark 3.1.16.** For low order schemes ( $k = 0$ , or  $k = 1$ ) the proof of existence of the discrete optimality system can be derived by standard techniques. For high order schemes, we refer the reader to [23, Section 4].

**Remark 3.1.17.** Note that testing the optimality condition (3.1.17) with functions of polynomial in time structure, we may easily see that (3.1.17) is equivalent to  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (\alpha g_h + \mu_h, v_h) = 0$  for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$ , and  $n = 1, \dots, N$ .

The remaining of this section is devoted to stability estimates on the adjoint variable  $\mu_h$ . These estimates will play a crucial role in the subsequent analysis of error estimates for the fully-discrete optimality system.

**Lemma 3.1.18.** Suppose that  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ ,  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$  are given functions, let  $\phi$  satisfy Assumptions 2.1.1-3.1.5. If  $(y_h, \mu_h)$  satisfy (3.1.15)-(3.1.16)-(3.1.17) then

$$\int_0^T \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_{st} \alpha,$$

$$\|\mu_+^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|\mu^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_0^T \|\mu_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C_{st} \alpha^{1/2}$$

and for  $n = 1, \dots, N$ ,  $\|\mu_+^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{st} \alpha^{1/2}$ , where  $C_{st}$  is defined in Lemma 3.1.7. Suppose that in addition to the assumptions of Lemma 3.1.7,  $\tau \equiv \max_{i=1, \dots, n} \tau_i$ , satisfies  $((D_{yst} C_L^2 C_k^2 / 4\eta) + (C_k / 4\alpha^{1/2}))\tau \leq (1/4)$ . Then, we obtain,

$$\|\mu_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \leq C C_{st} \alpha^{1/2} \equiv D_{\mu st},$$

where  $C$  does not depend on  $\alpha, \tau, h$ , but only on  $C_c/\eta, C_k$  and  $\Omega$ , and  $D_{yst}$  denotes the stability constant of Lemma 3.1.7.

*Proof.* The first two estimates are identical to [22, Lemma 3.8]. For the estimate at arbitrary time, we proceed as follows. Similar to [22, Section 4], we set  $v_h = \bar{\mu}_h$  where  $\bar{\mu}_h$  is the exponential interpolant  $e^{-\rho(t^n-t)}\mu_h$  of  $\mu_h$  (for some  $\rho > 0$ ) and defined as in Appendix A'2 (suitably modified to handle the backwards in time problem). Then, the analog of (3.1.7), takes the form

$$\begin{aligned} & (1/2)\|\mu_+^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} + (1/2)\|\mu^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|\mu_+^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + (\rho/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\rho(t-t^{n-1})} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y_h)\mu_h, \bar{\mu}_h \rangle dt \\ & \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|\mu_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + (C_k/\alpha^{1/2})\|\mu_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha^{1/2}\|y_h - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

It remains to treat the semi-linear term. Note that adding and subtracting  $\mu_h$ , the semi-linear term takes the form,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y_h)\mu_h, \bar{\mu}_h \rangle dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y_h)\mu_h, \bar{\mu}_h - \mu_h \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y_h)\mu_h, \mu_h \rangle dt.$$

Hence, we may drop the last term due to the monotonicity of  $\phi$ , and move the first term at the right hand side. Then, using the Lipschitz continuity of  $\phi'$ , the interpolation inequality  $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ , Hölder's inequality, and Appendix A'2, we obtain,

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y_h)\mu_h, \bar{\mu}_h - \mu_h \rangle| dt \leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y_h\|_{L^2(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^4(\Omega)} \|\bar{\mu}_h - \mu_h\|_{L^4(\Omega)} dt \\ & \leq C C_L D_{yst}^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\mu_h\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\bar{\mu}_h - \mu_h\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\bar{\mu}_h - \mu_h\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} dt \\ & \leq C_k C_L D_{yst}^{1/2} \rho \tau_n \|\mu_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \|\mu_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}. \end{aligned}$$

Therefore, using Young's inequality with  $\delta > 0$ , we deduce that

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y_h) \mu_h, \bar{\mu}_h - \mu_h \rangle| dt \leq (C_k^2 C_L^2 D_{yst} \rho^2 \tau_n^2 / 4\eta) \|\mu_h\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{H^1(\Omega)}^2 dt.$$

Then, combining the last three relations into (3.1.18) and selecting  $\rho = 1/\tau_n$ , we obtain the desired estimate working identical to Lemma 3.1.7.  $\square$

**Remark 3.1.19.** *We close this section by noting that the discrete stability bounds for the adjoint variable scale better in terms of the parameter  $\alpha$  compared to stability constant of the state variable, as expected.*

**Stokes distributed optimal control problem.** Using well known techniques and the stability estimates in  $W_S(0, T)$ , it is easy to show the differentiability of the relation  $g \rightarrow y_h(g)$ , for any  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ .

**Lemma 3.1.20.** *The cost functional  $J_h : L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}$  is well defined, differentiable, and for every  $g, u \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ ,*

$$J'_h(g)u = \int_0^T \int_{\Omega_h} (\mu_h(g) + \alpha g) u dx dt,$$

where  $\mu_h(g) \equiv \mu_{g,h} \in W_S(0, T)$  is the unique solution of following problem: For all  $n = 1, \dots, N$  and for all  $v_h \in P_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ ,

$$-(\mu_{g,h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \mu_{g,h}, v_{ht} \rangle + a(v_h, \mu_{g,h})) dt = -(\mu_{g,h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle y_{g,h} - y_d, v_h \rangle dt, \quad (3.1.19)$$

where  $\mu_{g,+}^N = 0$ . Here,  $y_{g,h} \equiv y_h(g)$  is the solution of (3.1.8).

Thus, the fully-discrete optimality system takes the following form.

**Lemma 3.1.21.** *Let  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h, \bar{g}_h) \equiv (\bar{y}_h, \bar{g}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{A}_{ad}^d$  denote the unique optimal pair of Definition 3.1.11. Then, there exists an adjoint  $\bar{\mu}_h \in \mathcal{U}_h$  satisfying,  $\bar{\mu}_+^N = 0$  such that for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$ , and for all  $n = 1, \dots, N$*

$$\begin{aligned} (\bar{y}_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle \bar{y}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{y}_h, v_h)) dt &= (\bar{y}_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + (\bar{g}_h, v_h)) dt, \\ -(\bar{\mu}_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \bar{\mu}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{\mu}_h, v_h)) dt &= -(\bar{\mu}_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{y}_h - y_d, v_h) dt, \end{aligned}$$

and the following optimality condition holds: For all  $u_h \in \mathcal{A}_{ad}^d$ ,

$$1) \text{ Unconstrained Controls: } \int_0^T (\alpha \bar{g}_h + \bar{\mu}_h, u_h) dt = 0, \quad (3.1.20)$$

$$2) \text{ Constrained Controls: } \int_0^T \int_{\Omega_h} (\alpha \bar{g}_h + \bar{\mu}_h) (u_h - \bar{g}_h) dx dt \geq 0. \quad (3.1.21)$$

**Remark 3.1.22.** *Similar to Remark 2.3.7, if  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ , then equations (3.1.20), (3.1.20) can be rewritten in the following equivalent form: For all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in L^2[0, T; Q_h]$ ,*

and for all  $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} (\bar{y}_h^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle \bar{y}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{y}_h, v_h) + b(v_h, \bar{p}_h)) dt &= (\bar{y}_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + (\bar{g}_h, v_h)) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{y}_h, q_h) dt &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

$$\begin{aligned} -(\bar{\mu}_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \bar{\mu}_h, v_{ht} \rangle + a(\bar{\mu}_h, v_h) + b(v_h, \bar{\phi}_h)) dt &= -(\bar{\mu}_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{y}_h - y_d, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{\mu}_h, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Estimates at partition points and in  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  can be derived easily, while for an estimate in  $L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  we refer the reader to [32]. The following estimate clearly highlights the fact that the discrete solutions produced by discontinuous time-stepping schemes possess the same regularity properties of the continuous problem.

**Lemma 3.1.23.** *Let  $(\bar{y}_h, \bar{g}_h)$  denote the discrete optimal solution and  $(\bar{y}_h, \bar{\mu}_h, \bar{g}_h)$  satisfy the system (3.1.20)-(3.1.20)-(3.1.20) or (3.1.21). Then,*

$$\|\bar{\mu}_h\|_{L^\infty[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C \|\bar{y}_h - y_d\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]},$$

where  $C$  does not depend on  $\alpha, \tau, h$  but only on  $1/\nu, C_k, \Omega$ . If in addition,  $y_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  then the solution  $\bar{y}_h$  of (3.1.21) also satisfies,

$$\|\bar{y}_h\|_{L^\infty[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C.$$

*Proof.* The proof is given for the forward in time evolutionary Stokes equations in [32, Theorem 4.10]. For the backwards in time problem, we simply note that  $\bar{y}_h - y_d \in L^2[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$ , and hence by a simple modification of the technique, we obtain the desired result.  $\square$

## 3.2 Error estimates

Next we will study the rates of convergence in appropriate norms for the problems under consideration, and we will introduce some results.

### 3.2.1 Robin boundary control problem.

The key ingredient of the proof is the definition of a suitable generalized space-time dG projection capable of handling the low regularity of  $y_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , and an auxiliary optimality system which plays the role of a global space-time projection and exhibits best approximation properties.

#### 3.2.1.1 The fully-discrete projection

Let  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be defined as the solutions of the following system. Given data  $f, y_0$ , and initial conditions  $w_h^0 = y_h^0$ , where  $y_h^0 \equiv P_h y_0$  denote the initial approximation of  $y_0$ ,  $z_h^N = 0$ , we seek



$w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  such that for  $n = 1, \dots, N$  and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$\begin{aligned} (w_h^n, v_h^n) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle w_h, v_{ht} \rangle + a(w_h, v_h) + \lambda \langle w_h, v_h \rangle_\Gamma \right) dt \\ &= (w_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + \lambda \langle \bar{g}, v_h \rangle_\Gamma \right) dt, \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned} -(z_{h+}^n, v_h^n) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle z_h, v_{ht} \rangle + a(z_h, v_h) + \lambda \langle z_h, v_h \rangle_\Gamma \right) dt \\ &= -(z_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (w_h - y_d, v_h) dt. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

The solutions  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  exist due to the regularity of  $\bar{y}, \bar{\mu} \in W_R(0, T)$ . The solutions of the auxiliary optimality system play the role of “global projections” onto  $\mathcal{U}_h$ . The basic estimate on the energy norm of  $\bar{y} - w_h, \bar{\mu} - z_h$  will be derived in terms of local  $L^2$  projections associated to discontinuous time-stepping methods see e.g. [104].

**Definition 3.2.1.** (1) The projection  $P_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$  satisfies  $(P_n^{loc} v)^n = P_h v(t^n)$ , and

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (v - P_n^{loc} v, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h]. \quad (3.2.26)$$

Here we have used the convention  $(P_n^{loc} v)^n \equiv (P_n^{loc} v)(t^n)$  and  $P_h : L^2(\Omega) \rightarrow U_h$  is the orthogonal projection operator onto  $U_h \subset H^1(\Omega)$ .

(2) The projection  $P_h^{loc} : C[0, T; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$  satisfies

$$P_h^{loc} v \in \mathcal{U}_h \text{ and } (P_h^{loc} v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = P_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

Due to the lack of regularity, and in particular the fact that  $\bar{y} \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , we construct a space-time generalized  $L^2$  projection which combines the standard dG time stepping projection, and the spacial generalized  $L^2$  projection  $Q_h : H^1(\Omega)^* \rightarrow U_h$ . Recall that the definition of  $Q_h$  states that  $\langle v - Q_h v, v_h \rangle = 0$ , for all  $v \in H^1(\Omega)^*$  and  $v_h \in U_h$  (see for instance [26, Section 2]).

**Definition 3.2.2.** (1) The projection  $Q_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)^*] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$  satisfies  $(Q_n^{loc} v)^n = Q_h v(t^n)$ , and

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle v - Q_n^{loc} v, v_h \rangle = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h].$$

Here we also use the convention  $(Q_n^{loc} v)^n \equiv (Q_n^{loc} v)(t^n)$  and  $Q_h : H^1(\Omega)^* \rightarrow U_h$  is the generalized orthogonal projection operator onto  $U_h \subset H^1(\Omega)$ .

(2) The projection  $Q_h^{loc} : C[0, T; H^1(\Omega)^*] \rightarrow \mathcal{U}_h$  satisfies

$$Q_h^{loc} v \in \mathcal{U}_h \text{ and } (Q_h^{loc} v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = Q_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

For  $k = 0$ , the projection  $Q_h^{loc} : C[0, T; H^1(\Omega)^*] \rightarrow \mathcal{U}_h$  reduces to  $Q_h^{loc} v(t) = Q_h v(t^n)$  for all  $t \in (t^{n-1}, t^n]$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

The key feature of  $Q_h^{loc}$  is that it coincides to  $P_h^{loc}$ , when  $v \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  i.e. ,  $P_h^{loc} v = Q_h^{loc} v$  when  $v \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , and hence exhibits best approximation properties, but is also applicable for  $v \equiv \bar{y}_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . For the backwards in time problem a modification of the above projections (still denoted by  $P_n^{loc}$ ,  $Q_n^{loc}$  respectively ) will be needed. For example, in addition to relation (3.2.26), we need to impose the “matching condition” on the left, i.e.,  $(P_n^{loc} v)_+^{n-1} = P_h v(t_+^{n-1})$

instead of imposing the condition on the right. In the following Lemma, we collect several results regarding (optimal) rates of convergence for the above projection. Here, the emphasis is placed on the approximation properties of the generalized projection  $Q_h^{loc}$ , under minimal regularity assumptions, i.e., for  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$  for the lowest order scheme.

**Lemma 3.2.3.** *Let  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , and  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  defined in Definitions 3.2.1 and 3.2.2 respectively. Then, for all  $v \in L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; L^2(\Omega)]$  there exists constant  $C \geq 0$  independent of  $h, \tau$  such that*

$$\|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C(h^{l+1}\|v\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}\|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}).$$

*If in addition,  $k = 0, l = 1$ , and  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$  then there exists a constant  $C \geq 0$  independent of  $h, \tau$  such that*

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\leq C(h\|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \|v_t\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]}), \\ \|v - Q_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} &\leq C(\|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + (\tau/h^2)\|v_t\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]}). \end{aligned}$$

*Let  $k = 0, l = 1$ , and  $v \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ . Then there exists constant  $C \geq 0$  independent of  $h, \tau$  such that,*

$$\|v - Q_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C(h\|v\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|v_t\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]}).$$

*Proof.* See Appendix A'1. □

**Remark 3.2.4.** *The stability estimate in  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  requires the time-step restriction of  $\tau \leq Ch^2$  due to the lack of regularity with respect to time. If  $v \in L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; L^2(\Omega)]$  then the first estimate of Lemma 3.2.3 implies that,*

$$\|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C(h^l\|v\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}/h\|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}).$$

*Indeed, using [32, Theorem 4.3, Corollary 4.8], we obtain the following (local in time) estimates :*

$$\begin{aligned} \|v - P_n^{loc}v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} &\leq C(\|v - P_hv\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} + \tau^{k+1}\|P_hv^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}) \\ &\leq C(h^l\|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^{l+1}(\Omega)]} + (\tau^{k+1}/h)\|v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}). \end{aligned}$$

*where at the last estimate we have used an inverse estimate. We note that if more regularity is available, the inverse estimate is not necessary. In particular if  $v^{(k+1)} \in L^2[0, T; H^1(\Omega)]$ , then the improved rate of  $\mathcal{O}(h^l + \tau^{k+1})$  holds in  $\|\cdot\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}$  norm. However, we note that for our boundary optimal control problem the increased regularity  $v_t \in L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  is not available. Hence, we emphasize that the lack of regularity acts as a barrier for developing a true higher order scheme. Working similarly we also obtain an estimate at arbitrary time-points, i.e.,*

$$\|v - P_h^{loc}v\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C(h^{l+1}\|v\|_{L^\infty[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}/h\|v^{(k+1)}\|_{L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]}).$$

Below, we state the main result for related to the auxiliary problem, which acts as the global space-time dG projection. Our goal is to state that the projection error is as good as the local dg projection error allows it to be, and hence it is optimal in the sense of the available regularity.

**Theorem 3.2.5.** *Let  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$  and  $y_0 \in L^2(\Omega)$  be given, and  $\bar{y}, \bar{\mu} \in W_R(0, T)$  be the solutions of (2.3.7)-(2.3.8)-(2.3.9) or (2.3.10), and  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions of (3.2.24)-(3.2.25). Denote by  $e_1 = \bar{y} - w_h$ ,  $r_1 = \bar{\mu} - z_h$  and let  $e_p \equiv \bar{y} - Q_h^{loc}\bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc}\bar{\mu}$ , where  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  are defined in Definitions 3.2.1 and 3.2.2. Then, there exists an algebraic constant  $C > 0$  depending only*

on  $\Omega$  such that,

$$\begin{aligned}
& C_F \min\{\eta, \lambda\} \|e_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|[e_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2 \\
& \leq C(\|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/C_F \min\{\eta, \lambda\})(\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \lambda \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2)), \\
& C_F \min\{\eta, \lambda\} \|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=1}^N \|[r_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2 \\
& \leq C\left((1/C_F \min\{\eta, \lambda\})(\|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2) + \lambda \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2\right), \\
& \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(\eta \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]})), \\
& \|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(\eta \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \\
& \quad + \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]})).
\end{aligned}$$

Here,  $w_h^0 = y_h^0$ , where  $y_h^0$  denotes an approximation of  $y_0$ , and  $C$  a constant depending upon on the domain  $\Omega$ .

*Proof. Step 1: Preliminary estimates.* Throughout this proof, we denote by  $e_1 = \bar{y} - w_h$ ,  $r_1 = \bar{\mu} - z_h$  and we split  $e_1, r_1$  to  $e_1 \equiv e_{1h} + e_p \equiv (Q_h^{loc} \bar{y} - w_h) + (\bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y})$ ,  $r_1 \equiv r_{1h} + r_p \equiv (P_h^{loc} \bar{\mu} - z_h) + (\bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu})$ , where  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  are defined in Definitions 3.2.1 and 3.2.2. Subtracting (3.2.24) from (2.3.8), and (3.2.25) from (2.3.9) we obtain the orthogonality condition: For  $n = 1, \dots, N$ , and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$(e_1^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_1, v_{ht} \rangle + a(e_1, v_h) + \lambda \langle e_1, v_h \rangle_\Gamma \right) dt = (e_1^{n-1}, v_{h+}^{n-1}), \quad (3.2.27)$$

$$-(r_{1+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_1, v_{ht} \rangle + a(r_1, v_h) + \lambda \langle r_1, v_h \rangle_\Gamma \right) dt = -(r_{1+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_1, v_h) dt. \quad (3.2.28)$$

Note that the orthogonality condition (3.2.27) is essentially uncoupled and identical to the orthogonality condition of [31, Relation (2.6)]. Hence applying [31, Theorem 2.2], we derive the first estimate. In a similar way, the orthogonality condition (3.2.28) is equivalent to: For  $n = 1, \dots, N$ , and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$\begin{aligned}
& -(r_{1h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{1h}, v_{ht} \rangle + a(r_{1h}, v_h) + \lambda \langle r_{1h}, v_h \rangle_\Gamma \right) dt \\
& = -(r_{1h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (e_1, v_h) - a(r_p, v_h) - \lambda \langle r_p, v_h \rangle_\Gamma \right) dt.
\end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Here, we have used the Definition 3.2.1 of the projection  $P_h^{loc}$ , which implies that  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle r_p, v_{ht} \rangle dt = 0$ ,  $(r_{p+}^n, v_h^n) = 0$ , and  $(r_{p+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) = 0$ . Setting  $v_h = r_{1h}$  into (3.2.29), using the Friedrichs' inequality to bound the second and the third term on the left,

$$\begin{aligned}
\int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(r_{1h}, r_{1h}) + \lambda \langle r_{1h}, r_{1h} \rangle_\Gamma) dt & \geq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \frac{\eta}{2} \|\nabla r_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|r_{1h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{C_F}{2} \min\{\lambda, \eta\} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt
\end{aligned}$$

Young's inequality to bound the terms on the right,

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(e_1, r_{1h})| dt &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (C_F \min\{\lambda, \eta\}/8) \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 + (C/C_F \min\{\lambda, \eta\}) \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} |a(r_{1h}, r_p)| dt &\leq (C_F \min\{\lambda, \eta\}/8) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C/(C_F \min\{\lambda, \eta\})) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

and standard algebra, we obtain

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \|r_{1h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[r_{1h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|r_{1h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \\ &\quad + \frac{C_F \min\{\lambda, \eta\}}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \frac{\eta}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla r_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (1/C_F \min\{\lambda, \eta\}) \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/C_F \min\{\lambda, \eta\}) \|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|r_p\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

The second estimate now follows upon summation.

*Step 2: Duality arguments.* We turn our attention to the last two estimates. In order to obtain the improved rate for the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm we employ a duality argument to derive a better bound for the quantity  $\|e_{1h}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2$ . For this purpose, we define a backwards in time parabolic problem with right hand side  $e_{1h} \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , and zero Robin and terminal data, i.e.,  $\lambda\phi + \eta \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ , and  $\phi(T) = 0$ . For  $n = 1, \dots, N$  and for all  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , we seek  $\phi \in W_R(0, T)$  such that

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \phi, v_t \rangle + a(v, \phi) + \lambda \langle \phi, v \rangle_{\Gamma}) dt + (\phi(t^{n-1}), v(t^{n-1})) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{1h}, v) dt. \quad (3.2.30)$$

Note that since  $e_{1h} \in L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$ , then  $\phi \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$  (see Theorem 2.2.1). In particular, the following estimate hold:

$$\|\phi\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]} + \|\phi_t\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} + \lambda \|\phi\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq C \|e_{1h}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}. \quad (3.2.31)$$

The lack of regularity of the right hand side of (3.2.30) due to the presence of discontinuities, implies that we can not improve regularity of  $\phi$  in  $[0, T]$ . The associated discontinuous time-stepping scheme can be defined as follows: Given, terminal data  $\phi_{h+}^N = 0$ , we seek  $\phi_h \in \mathcal{U}_h$  such that for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$-(\phi_{h+}^n, v_{h-}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} ((\phi_h, v_{ht}) + a(\phi_h, v_h) + \lambda \langle \phi_h, v_h \rangle_{\Gamma}) dt + (\phi_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{1h}, v_h) dt. \quad (3.2.32)$$

Hence using Lemma 3.1.15, the following stability estimate holds.

$$\|\phi_h\|_{L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]} + \lambda \|\phi_h\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq C_k \|e_{1h}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}. \quad (3.2.33)$$

It is now clear that we have the following estimate for  $\phi - \phi_h$ , which is a straightforward application of the previous estimates in  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$ , the approximation properties of Lemma 3.2.3, of projections  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$ , and the boundary Sobolev inequality,

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi_h\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \lambda \|\phi - \phi_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} &\leq C(h + \tau^{1/2}) (\|\phi\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]} + \|\phi_t\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}) \\ &\leq C(h + \tau^{1/2}) \|e_{1h}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

We note that the lack of regularity on the right hand side, restricts the rate of convergence to the rate given by the lowest order scheme  $l = 1, k = 0$ , even if high order schemes (in time) are chosen.

Setting  $v_h = e_{1h}$ , into (3.2.32), we obtain,

$$-(\phi_{h+}^n, e_{1h-}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\phi_h, e_{1ht}) + a(e_{1h}, \phi_h) + \lambda \langle \phi_h, e_{1h} \rangle_{\Gamma} dt + (\phi_{h+}^{n-1}, e_{1h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Integrating by parts in time, we deduce,

$$\begin{aligned} & -(\phi_{h+}^n, e_{1h-}^n) + (\phi_{h-}^n, e_{1h-}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-(\phi_{ht}, e_{1h}) + a(\phi_h, e_{1h}) + \lambda \langle \phi_h, e_{1h} \rangle_{\Gamma}) dt \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Setting  $v_h = \phi_h$  into (3.2.27) and using  $e_1 = e_p + e_{1h}$ , and the definition of projection  $Q_h^{loc}$  of Definition 3.2.2 we obtain,

$$\begin{aligned} & (e_{1h-}^n, \phi_{h-}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-(e_{1h}, \phi_{ht}) + a(e_{1h}, \phi_h) + \lambda \langle e_{1h}, \phi_h \rangle_{\Gamma}) dt \\ & = -(e_{1h-}^{n-1}, \phi_{h+}^{n-1}) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h) + \lambda \langle e_p, \phi_h \rangle) dt. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Here, we have used the fact that the definition of projection  $Q_h^{loc}$  of Definition 3.2.2, implies that  $(e_p^n, \phi_{h-}^n) = 0$ ,  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_p, v_{ht}) dt = 0$  and  $(e_p^{n-1}, \phi_{h+}^{n-1}) = 0$ . Using (3.2.35) to replace the first three terms of (3.2.36) we arrive to

$$\begin{aligned} & (\phi_{h+}^n, e_{1h}^n) - (e_{1h-}^{n-1}, \phi_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h) + \lambda \langle e_p, \phi_h \rangle_{\Gamma}) dt \\ & = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h - \phi) + a(e_p, \phi) + \lambda \langle e_p, \phi_h - \phi \rangle_{\Gamma} + \lambda \langle e_p, \phi \rangle_{\Gamma}) dt \\ & = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h - \phi) + \lambda \langle e_p, \phi_h - \phi \rangle_{\Gamma} - \eta(e_p, \Delta \phi) + \eta \langle e_p, \frac{\partial \phi}{\partial n} \rangle_{\Gamma} + \lambda \langle e_p, \phi \rangle_{\Gamma}) dt \\ & = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (a(e_p, \phi_h - \phi) + \lambda \langle e_p, \phi_h - \phi \rangle_{\Gamma} - \eta(e_p, \Delta \phi)) dt, \end{aligned}$$

where at the last two equalities we have used integration by parts (in space), and the definition of  $\phi$  as a dual problem with zero Robin boundary data respectively. Therefore,

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (\phi_{h+}^n, e_{1h-}^n) - (e_{1h-}^{n-1}, \phi_{h+}^{n-1}) \\ & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \eta \|\phi_h - \phi\|_{H^1(\Omega)} \|e_p\|_{H^1(\Omega)} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\eta \|e_p\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta \phi\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|e_p\|_{L^2(\Gamma)} \|\phi_h - \phi\|_{L^2(\Gamma)}) dt. \end{aligned}$$

Then summing the above inequalities and using the fact that  $\phi_+^N \equiv 0$  and  $e_{1h-}^0 = 0$  (by definition)

and rearranging terms, we obtain

$$\begin{aligned}
(1/2)\|e_{1h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C\eta \int_0^T \|e_p\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H^2(\Omega)} dt \\
&\quad + C \int_0^T (\eta \|\phi_h - \phi\|_{H^1(\Omega)} \|e_p\|_{H^1(\Omega)} + \lambda \|e_p\|_{L^2(\Gamma)} \|\phi_h - \phi\|_{L^2(\Gamma)}) dt \\
&\leq C \left( \eta \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \|\phi\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \eta \|\phi_h - \phi\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \right. \\
&\quad \left. \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \|\phi_h - \phi\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \right) \\
&\leq C \left( \eta \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \right. \\
&\quad \left. + (h + \tau^{1/2}) \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} (\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}) \right).
\end{aligned}$$

Here, we have used the Cauchy-Schwarz inequality, the stability bounds of dual equation (3.2.31), i.e., and the error estimates (3.2.34) on  $\phi_h - \phi$ . Finally, the estimate on  $\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$  follows by using a similar duality argument.  $\square$

Since, an estimate on the  $L^2[0,T;H^1(\Omega)]$ , norm is already obtained, and the auxiliary optimality system is now essentially uncoupled, the techniques of [31, Section 2] can be applied directly to derive an estimate in  $L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]$  see also Proposition 3.2.10).

**Theorem 3.2.6.** *Let  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions of (3.2.24)-(3.2.25). Denote by  $e_1 = \bar{y} - w_h$ ,  $r_1 = \bar{\mu} - z_h$  and suppose that the assumptions of Theorem 3.2.5 hold. Then there exists a constant  $C$  depending on  $C_k, \Omega$  such that*

$$\begin{aligned}
\|e_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C (\|e_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)} + \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda \|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}), \\
\|r_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C (\|r_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda \|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}).
\end{aligned}$$

Here  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$ .

*Proof.* Splitting the error as in the previous theorem, i.e.,  $e_1 = e_{1h} + e_p$  it suffices to bound the term  $\sup_{t^{n-1} < t \leq t^n} \|e_{1h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . This is done in [31, Theorem 2.5] (note that the orthogonality condition is uncoupled). The estimate for the adjoint variable can be derived similarly.  $\square$

**Remark 3.2.7.** *The combination of the last two Theorems implies the ‘‘symmetric, regularity free’’ structure of our estimate. In particular, suppose that the initial data  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , and the forcing term  $f \in L^2[0,T;H^1(\Omega)^*]$ . Then, define the natural energy norm  $\|(\cdot, \cdot)\|_X$  endowed by the weak formulation under minimal regularity assumptions as follows:*

$$\|(e_1, r_1)\|_X \equiv \|e_1\|_{W_R(0,T)} + \|r_1\|_{W_R(0,T)}.$$

Then, using Theorems 3.2.39, 3.2.6 we obtain an estimate of the form

$$\begin{aligned}
\|\text{error}\|_X &\leq C \left( \|\text{in. data error}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \|\text{best approx. error}\|_X \right).
\end{aligned}$$

The above estimate indicates that the error is as good as the approximation properties enables it to be, under the natural parabolic regularity assumptions, and it can be viewed as the fully-discrete analogue of Céa Lemma see e.g. ([34]). Hence, the rates of convergence for  $e_1, r_1$  depend only on the approximation and regularity results, via the projection error  $e_p, r_p$  as indicated in Lemma 3.2.3 and Remark 3.2.4. If  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , i.e.,  $\bar{y} \in L^2[0,T;H^1(\Omega)] \cap H^1[0,T;H^1(\Omega)^*]$ , and  $\bar{\mu} \in L^2[0,T;H^2(\Omega)] \cap H^1[0,T;L^2(\Omega)]$  then for  $l = 1, k = 0$ , and for  $\tau \leq Ch^2$  we obtain that

1.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C,$
2.  $\|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C(h\|\bar{\mu}\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|\bar{\mu}_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}),$
3.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(h\|\bar{y}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|\bar{y}_t\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)^*]}),$
4.  $\|r_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(h^2\|\bar{\mu}\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau\|\bar{\mu}_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}),$
5.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \leq C\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^{1/2}\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^{1/2} \leq C(h + \tau^{1/2})^{1/2}.$

Therefore, the above estimates, and Theorem 3.2.5, imply for  $\tau \leq Ch^2$  the following rates :  $\|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h)$ , and  $\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \approx \mathcal{O}(h)$ .

The estimate is applicable even in case more regular solutions. For example, if in addition both  $y, \mu \in L^2[0,T;H^2(\Omega)] \cap H^1[0,T;L^2(\Omega)]$  (here  $l = 1$ , and  $k = 0$ ),

1.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C(h\|y\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|y_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}).$
2.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(h^2\|y\|_{L^2[0,T;H^2(\Omega)]} + \tau\|y_t\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}).$
3.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \leq C(h^2 + \tau)^{1/2}(h + \tau^{1/2})^{1/2}.$

For the boundary norm we have used Sobolev's boundary inequality. Same rates hold also the related norms of  $r_p$ . Therefore, from Theorem 3.2.5, we obtain that  $\|e_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h)$ ,  $\|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h)$ ,  $\|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h^{3/2})$  and  $\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h^{3/2})$  when  $\tau \leq Ch^2$ .

### 3.2.2 Unconstrained Controls: Preliminary estimates for the optimality system

It remains to compare the discrete optimality system (3.1.11)-(3.1.12)-(3.1.13) to the auxiliary system (3.2.24)-(3.2.25).

**Lemma 3.2.8.** *Let  $\bar{y}_h, \bar{\mu}_h, w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions the discrete optimality system (3.1.11)-(3.1.12)-(3.1.13) and of the auxiliary system (3.2.24)-(3.2.25) respectively. Denote by  $e_1 \equiv \bar{y} - w_h$ ,  $r_1 \equiv \bar{\mu} - z_h$ , and let  $e_{2h} \equiv w_h - \bar{y}_h$ ,  $r_{2h} \equiv z_h - \bar{\mu}_h$ . Then there exists algebraic constant  $C > 0$  such that:*

$$\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + (\lambda/\alpha^{1/2})\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \leq C\lambda/\alpha^{1/2}\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}.$$

*Proof.* Subtracting (3.1.12) from (3.2.25) we obtain the equation: For  $n = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} & -(r_{2h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, v_{ht} \rangle + a(r_{2h}, v_h) + \lambda \langle r_{2h}, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt \\ &= -(r_{2h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, v_h) dt \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Subtracting (3.1.11) from (3.2.24) and using (2.3.10)-(3.1.13), we obtain: For  $n = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} & (e_{2h}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( - \langle e_{2h}, v_{ht} \rangle + a(e_{2h}, v_h) + \lambda \langle e_{2h}, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt = (e_{2h}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) \\ & \quad + \int_{t^{n-1}}^{t^n} -(\lambda^2/\alpha)(\bar{\mu} - \bar{\mu}_h, v_h)_{\Gamma} dt \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

We set  $v_h = e_{2h}$  into (3.2.37) to obtain

$$\begin{aligned} -(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, e_{2ht} \rangle + a(r_{2h}, e_{2h}) + \lambda \langle r_{2h}, e_{2h} \rangle_\Gamma \right) dt + (r_{2h+}^{n-1}, e_{2h+}^{n-1}) \\ = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Similarly, setting  $v_h = r_{2h}$  into (3.2.38) we deduce,

$$\begin{aligned} (e_{2h}^n, r_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, r_{2ht} \rangle + a(e_{2h}, r_{2h}) + \lambda \langle e_{2h}, r_{2h} \rangle_\Gamma \right) dt - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) \\ = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -(\lambda^2/\alpha) \langle r_1, r_{2h} \rangle_\Gamma - (\lambda^2/\alpha) \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Integrating by parts with respect to time in (3.2.40), and subtracting the resulting equation from (3.2.39), we arrive to

$$(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda^2/\alpha) \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) dt = -(\lambda^2/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle r_1, r_{2h} \rangle_\Gamma dt. \quad (3.2.41)$$

Using Young's inequality to bound the right hand side,

$$\left| (\lambda^2/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle r_1, r_{2h} \rangle_\Gamma dt \right| \leq (\lambda^2/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + (\lambda^2/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt,$$

adding the resulting inequalities from 1 to  $N$ , and noting that  $\sum_{n=1}^N ((r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1})) = 0$  (since  $e_{2h}^0 \equiv 0$ ,  $r_{2h+}^N = 0$ ) we obtain the desired estimate.  $\square$

Estimates easily follow by the previous Lemma and the estimates on the projections  $e_1$  and  $r_1$  together with a classical "boot-strap" argument.

**Proposition 3.2.9.** *Let  $\bar{y}_h, \bar{\mu}_h, w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions the optimality system (3.1.11)-(3.1.12)-(3.1.13) and of the auxiliary system (3.2.24)-(3.2.25) respectively. Denote by  $e_1 \equiv \bar{y} - w_h$ ,  $r_1 \equiv \bar{\mu} - z_h$ , and let  $e_{2h} \equiv w_h - \bar{y}_h$ ,  $r_{2h} \equiv z_h - \bar{\mu}_h$ . Then, the following estimate holds :*

$$\begin{aligned} \|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|[e_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_F \min\{\eta, \lambda\} \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \lambda \int_0^T \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \\ \leq (C/\lambda\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|r_{2h+}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|[r_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_F \min\{\eta, \lambda\} \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \lambda \int_0^T \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \\ \leq (C\lambda^2/\alpha C_F \min\{\eta, \lambda\}) \int_0^T \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt, \end{aligned}$$

where  $C$  is constant depending only upon  $\Omega$ .

*Proof. Step 1: Estimates for the state :* Setting  $v_h = e_{2h}$  into (3.2.38) and noting that  $\mu - \mu_h = r_1 + r_{2h}$



we obtain

$$(1/2)\|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ + \lambda \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), e_{2h} \rangle dt \leq -(\lambda^2/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1 + r_{2h}, e_{2h})_{\Gamma} dt. \quad (3.2.42)$$

Using Young's inequality for the first term on the right hand side,

$$\left| \frac{1}{\alpha} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, e_{2h})_{\Gamma} dt \right| \leq (\lambda/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + (1/\lambda\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt.$$

Therefore collecting the above bounds (3.2.42) gives,

$$(1/2)\|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1/2)\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ + (\lambda/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq (1/\lambda\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2) dt. \quad (3.2.43)$$

Using Friedrichs' inequality, and standard algebra we obtain the estimate upon summation by using the estimate on  $\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}$  of Lemma 3.2.8.

*Step 2: Estimates for the adjoint :* Setting  $v_h = r_{2h}$  into (3.2.37), and using Friedrichs' and Young's inequalities, and Lemma 3.2.8 to bound the norm of  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$  we obtain the desired estimate.

$$-(1/2)\|r_{2h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|r_{2h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_F \min\{\eta/2, \lambda/4\} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt + \frac{\eta}{2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\lambda}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt \quad (3.2.44)$$

and since

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt \leq (2/C_F \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\lambda}{4}\}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (C_F \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\lambda}{4}\}/2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

substituting the last inequality into 3.2.44, we obtain

$$-(1/2)\|r_{2h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|r_{2h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_F \min\{\frac{\eta}{4}, \frac{\lambda}{2}\}/2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ + \eta/4 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \lambda/2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq (2/C_F \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\lambda}{4}\}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,$$

which implies the desired estimate after summation by using Lemma 3.2.8.  $\square$

An estimate at arbitrary time points for the forward in time equation can be derived by applying the approximation of the discrete characteristic technique of [31] into the Robin boundary linear case. Here, the stability estimate at arbitrary time-points will be also needed.

**Proposition 3.2.10.** *Suppose that the assumptions of Theorem 3.2.5, and Proposition 3.2.9 hold. Then there exists a constant  $C$  depending only upon constant  $C_k$ , and the domain such that,*

$$\|e_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(\eta\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \lambda\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} + (\lambda^{3/2}/\alpha)\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}), \\ \|r_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(\eta\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + (\lambda/\alpha^{1/2})\|r_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}).$$

*Proof.* The proof closely follows the techniques of [31, Section 2], adjusted to the Robin boundary

data case. For completeness, we state the proof for the first estimate, while the second one can be treated similarly. First, we briefly recall the main tool of approximations of the discrete characteristic function. For any polynomial  $s \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n)$ , and we denote the discrete approximation of  $\chi_{[t^{n-1}, t]}s$  by the polynomial  $\hat{s} \in \{\hat{s} \in \mathcal{P}_k(t^{n-1}, t^n), \hat{s}(t^{n-1}) = s(t^{n-1})\}$  which satisfies

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \hat{s}q = \int_{t^{n-1}}^t sq \quad \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}(t^{n-1}, t^n).$$

The motivation for the above construction stems from the elementary observation that for  $q = s'$  we obtain  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} s' \hat{s} = \int_{t^{n-1}}^t s s' = \frac{1}{2}(s^2(t) - s^2(t^{n-1}))$ . The construction can be extended to approximations of  $\chi_{[t^{n-1}, t]}v$  for  $v \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; V]$  where  $V$  is a linear space. The discrete approximation of  $\chi_{[t^{n-1}, t]}v$  in  $\mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; V]$  is defined by  $\hat{v} = \sum_{i=0}^k \hat{s}_i(t)v_i$  and if  $V$  is a semi-inner product space then,  $\forall w \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; V]$

$$\hat{v}(t^{n-1}) = v(t^{n-1}), \quad \text{and} \quad \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\hat{v}, w)_V = \int_{t^{n-1}}^t (v, w)_V.$$

Then, [31, Lemma 2.4] states various continuity properties, and in particular that

$$\|\hat{v}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]} \leq C_k \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]},$$

$$\|\hat{v} - \chi_{[t^{n-1}, t]}v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]} \leq C_k \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]},$$

where  $C_k$  is a constant depending on  $k$ . We begin by integrating by parts with respect to time in (3.2.38), and substituting  $v_h = \hat{e}_{2h}$ , where  $\hat{e}_{2h}$  denotes the approximation of the discrete characteristic function  $\chi_{[t^{n-1}, t]}e_{2h}$  (for any fixed  $t \in [t^{n-1}, t^n]$ ), as constructed above. The definition of the  $\hat{e}_{2h}$  and the fact that  $e_{2ht} \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h]$  implies that  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2ht}, \hat{e}_{2h})dt = \int_{t^{n-1}}^t (e_{2ht}, e_{2h})dt$  and hence,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|e_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(e_{2h}, \hat{e}_{2h})dt = \frac{1}{2} \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & - \lambda \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, \hat{e}_{2h})_{\Gamma} dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\lambda^2/\alpha)(r_1 + r_{2h}, \hat{e}_{2h})_{\Gamma} dt. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Recall also that the continuity property on  $a(\cdot, \cdot)$ , imply

$$\left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(e_{2h}, \hat{e}_{2h}) + \lambda(e_{2h}, \hat{e}_{2h})_{\Gamma} dt \right| \leq C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\eta \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2) dt,$$

while the coupling term can be bounded as:

$$\left| \frac{\lambda^2}{\alpha} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1 + r_{2h}, \hat{e}_{2h})_{\Gamma} dt \right| \leq (C_k \lambda^3 / \alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|r_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|r_1\|_{L^2(\Gamma)}^2) dt + C_k \lambda \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt.$$

Here we have used Young's inequality with appropriate  $\delta > 0$ , and in various instances of the continuity property of the approximation of the discrete characteristic. Hence, substituting the above estimates into (3.2.45), we obtain an inequality of the form,  $(1 - C\tau)a^n \leq a^{n-1} + f^n$ , where  $a^n = \sup_{s \in (t^{n-1}, t^n]} \|e_{2h}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Indeed, let  $t \in (t^{n-1}, t^n]$  to be chosen as  $a^n \equiv \|e_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  and note that  $\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a^{n-1}$ . Hence the desired estimate follows by summation and by Lemma 3.2.8.  $\square$

|                |  |
|----------------|--|
| <b>3.2.2.1</b> | Unconstrained Controls: Symmetric error estimates - estimates for rough initial data |
|----------------|--|

Various estimates can be derived, using results of previous subsections and standard approximation theory results. We begin by stating symmetric error estimates which can be viewed as the analogue of the classical Céa's Lemma.

**Theorem 3.2.11.** *Let  $\bar{y}_h, \bar{\mu}_h \in \mathcal{U}_h$  and  $(\bar{y}, \bar{\mu}) \in W_R(0, T)$  denote the approximate solutions of the discrete and continuous optimality systems (3.1.11)-(3.1.12)-(3.1.13) and (2.3.8)-(2.3.9)-(2.3.10) respectively. Let  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$  denote the projection error, where  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  defined in Definition of 3.2.1, and 3.2.2 respectively. Then, the following estimate holds for the error  $e = \bar{y} - \bar{y}_h$  and  $r = \bar{\mu} - \bar{\mu}_h$ :*

$$\|(e, r)\|_X \leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha) \|(e_p, r_p)\|_X$$

where  $\tilde{\mathbf{C}}$  depends upon constants of Theorems 3.2.5, 3.2.6, and Proposition 3.2.9, 3.2.10, and is independent of  $\tau, h, \alpha$ .

*Proof.* The first estimate follows by using triangle inequality and previous estimates of Theorem 3.2.5 and 3.2.6 and Propositions 3.2.9 and 3.2.10.  $\square$

An improved estimate for the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm for the state, and in  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  for the adjoint follow by combining the estimates of Theorem 3.2.5, and Lemma 3.2.8.

**Theorem 3.2.12.** *Suppose that  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , and the assumptions of Theorem 3.2.5 and Lemma 3.2.8 hold. Let  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$  denote the projection error, where  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  defined in Definition of 3.2.1, and 3.2.2 respectively. Then, there exists a constant  $C$  independent of  $h, \tau, \alpha$  such that,*

$$\begin{aligned} \|e\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\leq C \left( \|e_p\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} + \tau^{1/2} (\|e_p\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \right. \\ &\quad \left. + \|e_p\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}) + (\lambda/\alpha^{1/2}) \|r_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \right), \\ \|r\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} &\leq C \|r_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^{1/2} \|r_1\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^{1/2}, \end{aligned}$$

where  $r_1$  is estimated in terms of projection errors  $e_p, r_p$  by Theorem 3.2.5.

*Proof.* The first estimate follows by using triangle inequality and previous estimates of Theorem 3.2.5, Lemma 3.2.8. The second estimate follows by triangle inequality, the estimate of Lemma 3.2.8 to bound  $r_{2h}$ , and Sobolev's boundary inequality.  $\square$

Using now standard regularity and approximation theory results we obtain convergence rates. Below, we state convergence rates in two distinct cases, depending on the available regularity.

**Proposition 3.2.13.** *Suppose that the assumptions of Theorem 3.2.5 and Lemma 3.2.8, hold, and let  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ . Assume that piecewise linear polynomials are being used to construct the subspaces  $U_h \subset H^1(\Omega)$  in each time step, and piecewise constants polynomials  $k = 0$  for the temporal discretization. Then, for  $\tau \leq Ch^2$  we obtain,*

$$\|e\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq Ch \quad \text{and} \quad \|r\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq Ch.$$

If in addition,  $\bar{y}, \bar{\mu} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$  then,

$$\begin{aligned} \|(e, r)\|_X &\leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha)(h + \tau^{1/2}), \\ \|e\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\leq C(1/\alpha^{1/2})(h^2 + \tau + (h^2 + \tau)^{1/2}(h + \tau^{1/2})^{1/2} + (h + \tau^{1/2})^2), \\ \|r\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} &\leq C(h^2 + \tau)^{1/2}(h + \tau^{1/2})^{1/2}, \end{aligned}$$

which imply for  $\tau \approx h^2$ , the rates

$$\begin{aligned} \|(e, r)\|_X &\approx \mathcal{O}(h), \\ \|e\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^{3/2}), \\ \|r\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} &\approx \mathcal{O}(h^{3/2}). \end{aligned}$$

*Proof.* The rates directly follow from Theorem 3.2.11, Theorem 3.2.12, Lemma 3.2.3 and Remark 3.2.7.  $\square$

### 3.2.2.2 Control Constraints: The variational discretization approach

It is worth noting that our estimates are also applicable in case of point-wise control constraints, when using the variational discretization approach of Hinze ([65]). The variational discretization approach implies that  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$ , i.e., the control is not discretized explicitly, but only implicitly via the adjoint variable. Thus, our discrete optimal control problem now coincides to: Minimize functional  $J_h(y_h(g), g) = \int_0^T \|y_h(g) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \alpha \int_0^T \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt$  subject to (3.1.4), where  $y_h(g) \in \mathcal{U}_h$  denotes the solution of (3.1.4) with right hand side given control  $g \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ . Then, the optimal control (abusing the notation, denoted again by  $\bar{g}_h$ ) satisfies the following first order optimality condition,

$$J'_h(\bar{g}_h)(u - \bar{g}_h) \geq 0, \quad \text{for all } u \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)],$$

where  $\bar{g}_h$  can take the form  $\bar{g}_h = Proj_{[g_a, g_b]}(-\frac{\lambda}{\alpha} \bar{\mu}_h(\bar{g}_h))$ , similar to continuous case. We note that the  $\bar{g}_h$  is not in general a finite element function corresponding to our finite element mesh, hence its algorithmic construction requires extra care see e.g. [65]. However, in most practical situations, the main goal is to minimize and compute the state variable and not necessary the control that is used to achieve our goal. For the second derivative we easily obtain an estimate independent of  $\bar{g}, \bar{g}_h$ , and in particular,

$$J''_h(u)(\tilde{u}, \tilde{u}) \geq \alpha \|\tilde{u}\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}^2, \quad \text{for all } \tilde{u} \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)].$$

**Theorem 3.2.14.** *Let  $y_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , and  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ . Suppose that  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$  and let  $\bar{g}, \bar{g}_h$  denote the solutions of the corresponding continuous and discrete optimal control problems. Then, the following estimate hold:*

$$\|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \leq C(1/\alpha) \|\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g})\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]}.$$

where  $\mu_h(\bar{g})$  and  $\mu(\bar{g})$  denote the solutions of (3.1.10) and (2.3.7) respectively. Furthermore, if  $\tau \leq Ch^2$ ,

$$\|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; L^2(\Gamma)]} \approx \mathcal{O}(h).$$

*Proof.* We note that  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$ , and hence the optimality conditions imply that

$$J'_h(\bar{g}_h)(\bar{g} - \bar{g}_h) \geq 0 \quad \text{and} \quad J'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) \leq 0. \quad (3.2.46)$$

Therefore, using the second order condition and the mean value theorem, we obtain for any  $u \in L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ , (and hence for the one resulting from the mean value theorem) and inequalities

(3.2.46),

$$\begin{aligned} \alpha \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}^2 &\leq J''(u)(\bar{g} - \bar{g}_h, \bar{g} - \bar{g}_h) = J'_h(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) - J'_h(\bar{g}_h)(\bar{g} - \bar{g}_h) \\ &\leq J'_h(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) - J'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) = \int_0^T \int_{\Gamma} (\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g}))(\bar{g} - \bar{g}_h) dx dt \\ &\leq C \|\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g})\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]} \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Gamma)]}, \end{aligned}$$

which clearly implies the first estimate. Now, a rate of convergence can be obtained using similar arguments to Theorem 3.2.5. Indeed, note that subtracting (3.1.10) from (2.3.7) and setting  $\bar{r} = \mu_h(\bar{g}) - \mu(\bar{g})$ , and  $\bar{e} = y_h(\bar{g}) - y(\bar{g})$ , we obtain the analog of orthogonality condition (3.2.27)-(3.2.28), i.e., for all  $n = 1, \dots, N$  and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h]$ ,

$$\begin{aligned} (\bar{e}_1^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle \bar{e}_1, v_{ht} \rangle + a(\bar{e}_1, v_h) + \lambda \langle \bar{e}_1, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt &= (\bar{e}_1^{n-1}, v_{h+}^{n-1}), \\ -(\bar{r}_+^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle \bar{r}, v_{ht} \rangle + a(\bar{r}, v_h) + \lambda \langle \bar{r}, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt &= -(\bar{r}_+^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{e}, v_h) dt, \end{aligned}$$

Using Sobolev's boundary inequality, the estimates of Theorem 3.2.5, and the rates of Proposition 3.2.13, we obtain the desired estimate, after noting the reduced regularity of  $\bar{e}$ .  $\square$

### 3.2.3 Semilinear distributed optimal control problem.

Next we expand the above theory in the case we have a semilinear term in the state equation and distributed control in  $\Omega$ . As expected technical difficulties appear to the proof of theorems due to semilinear term, we also use an auxiliary system for decoupling the system and make things easier to handle.

#### 3.2.3.1 The fully-discrete optimality system

The rest of the paper is devoted in proving that the dG approximations of the optimality system exhibit the same rate of convergence to the related (uncontrolled) linear parabolic pde, for appropriate data  $f$ ,  $y_0$ ,  $y_d$  and the parameter  $\alpha$ .

#### 3.2.3.2 Error estimates for the optimality system

In the case of semilinear distributed optimal control problem, the key ingredient of the proof will be the stability estimate at arbitrary time-points, along with estimates for an auxiliary optimality system (based on suitable  $L^2$  projection techniques), and a "duality argument" in order to treat the nonlinear terms. In order to obtain an actual rate of convergence more regularity is needed.

**Assumption 3.2.15.** *Let  $(y, g)$  be an optimal pair in the sense of Definition 2.2.5. In addition, let  $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  and assume that  $\alpha^{1/2} \|y\|_{L^\infty[0, T; L^4(\Omega)]}^2 \leq C_d$ , where  $C_d$  is constant depending only upon data  $f, y_d, y_0$ , the constants  $C_c, \eta$  and the domain  $\Omega$ .*

**Remark 3.2.16.** *The above assumption implies a mild restriction on the size of  $y$ , in terms of the penalty parameter  $\alpha$  and the given data. We refer the reader to [113] for a detailed analysis of regularity results for semi-linear parabolic pdes. Analogous  $L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]$  stability results for the discrete optimal control problem, and for the optimality system (3.1.15)-(3.1.16)-(3.1.17) will be studied in detail elsewhere.*

### 3.2.3.3 An auxiliary optimality system

First, we define an auxiliary optimality system which will help uncoupling the discrete optimality system. Let  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be defined as the solutions of the following system. Given data  $f, y_d, y_0$ , and initial conditions  $w_{h0} = y_{h0}$ , where  $y_{h0}$  denote the initial approximation of  $y_0$ ,  $z_+^N = 0$ , we seek  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  such that for  $n = 1, \dots, N$  and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$ ,

$$\begin{aligned} (w^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle w_h, v_{ht} \rangle + a(w_h, v_h) + \langle \phi(y), v_h \rangle \right) dt \\ = (w^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle - (1/\alpha)(\mu, v_h) \right) dt, \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

$$\begin{aligned} -(z_+^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle z_h, v_{ht} \rangle + a(z_h, v_h) + \langle \phi'(y)\mu, v_h \rangle \right) dt \\ = -(z_+^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (w_h - y_d, v_h) dt. \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

The solutions  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  exist since  $\phi(y), \phi'(y)\mu$  belong at least to  $L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ , due to Assumptions 2.1.1-3.1.5 and the regularity of  $y, \mu \in W_D(0, T)$ . The solutions of the auxiliary optimality system play the role of “global projections” onto  $\mathcal{U}_h$ . The basic estimate on the energy norm of  $y - w_h, \mu - z_h$  will be derived in terms of local  $L^2$  projections using techniques of [31, Section 2] into the auxiliary system (2.3.12)-(2.3.13), (3.2.47)-(3.2.48).

Similarly with the Robin boundary control problem, important for these estimates is to be valid under low regularity assumptions. Therefore, we define the classical projection that can apply to semilinear term too, (extra care is needed in the case of distributed control in a semilinear problem because of working in different spaces than those reported in previous problems). So we need the following, regarding the method dG projections, see e.g. [104].

**Definition 3.2.17.** (1) *The projection  $P_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$  satisfies  $(P_n^{loc}v)^n = P_nv(t^n)$ , and*

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (v - P_n^{loc}v, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h^n]. \quad (3.2.49)$$

*Here we have used the convention  $(P_n^{loc}v)^n \equiv (P_n^{loc}v)(t^n)$  and  $P_n : L^2(\Omega) \rightarrow U_h^n$  is the orthogonal projection operator onto  $U_h^n \subset H_0^1(\Omega)$ .*

(2) *The projection  $P_h^{loc} : C[0, T; L^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$  satisfies*

$$P_h^{loc}v \in \mathcal{U}_h \text{ and } (P_h^{loc}v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = P_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

For the backwards in time problem a modification of the above projection still denoted by  $P_n^{loc}$ . will be needed. In particular, in addition to relation (3.2.49), we need to impose the “matching condition” on the left, i.e.,  $(P_n^{loc}v)_+^{n-1} = P_nv(t_+^{n-1})$  instead of imposing the condition on the right. Note that the projection of Definition 3.2.17 can be viewed as the one step DG approximation of  $v_t = f$  on the

interval  $(t^{n-1}, t^n]$  with exact initial data  $v(t^{n-1})$  and  $f = v_t$ , specified, while the modified projection for the backwards in time stems from the one step DG approximation of the backwards in time ODE, with given terminal data. Recall that due to [104, Theorem 12.1] or [33] these projections satisfy the expected approximation properties. Below, we state the main result for the auxiliary problem.

**Theorem 3.2.18.** *Let  $f \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,  $y_0 \in L^2(\Omega)$ , and  $y_d \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , be given, and let Assumption 2.1.1 hold. Let  $y, \mu \in W_D(0, T)$  be the solutions of (2.3.12)-(2.3.13) and  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions of (3.2.47)-(3.2.48) computed using the DG scheme. Denote by  $e_1 = y - w_h$ ,  $r_1 = \mu - z_h$  and let  $e_p \equiv y - P_h^{loc} y$ ,  $r_p \equiv \mu - P_h^{loc} \mu$ , where  $P_h^{loc}$  is defined in Definition 3.2.17. Then, there exists an algebraic constant  $C > 0$  depending only on  $\Omega$  such that,*

$$\eta \|e_1\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|[e_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_c^2/\eta) \|e_p\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^2 \right) \\ + \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_{i+1}\eta)) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right),$$

$$\eta \|r_1\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=1}^N \|[r_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( (1/\eta) \|e_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2 + (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]}^2 \right) \\ + \sum_{i=1}^N 2 \min \left( \|(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_i\eta)) \|P_i(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right).$$

Here,  $w_{0h} = y_{0h}$ , where  $y_{0h}$  denotes an approximation of  $y_0$ ,  $\tau_i = t^i - t^{i-1}$ ,  $P_n$  denotes the  $L^2$  projection on  $U_h^n$  and we have used the convention  $P_0 \equiv P_1$ ,  $P_{N+1} \equiv P_N$ .

*Proof.* Throughout this proof, we denote by  $e_1 = y - w_h$ ,  $r_1 = \mu - z_h$  and we split  $e_1, r_1$  to  $e_1 \equiv e_{1h} + e_p \equiv (P_h^{loc} y - w_h) + (y - P_h^{loc} y)$ ,  $r_1 \equiv r_{1h} + r_p \equiv (P_h^{loc} \mu - z_h) + (\mu - P_h^{loc} \mu)$ , where  $P_h^{loc}$  is defined in Definition 3.2.17. Using the above notation, and subtracting (3.2.47) from (2.3.12), and (3.2.48) from (2.3.13) we obtain the orthogonality condition: for  $n = 1, \dots, N$

$$(e_1^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_1, v_{ht} \rangle + a(e_1, v_h) \right) dt = (e_1^{n-1}, v_+^{n-1}), \quad (3.2.50)$$

$$-(r_1^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_1, v_{ht} \rangle + a(r_1, v_h) \right) dt = -(r_1^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_1, v_h) dt, \quad (3.2.51)$$

for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$ . Note that the orthogonality condition (3.2.50) is essentially uncoupled and identical to the orthogonality condition of [31, Relation (2.6)]. Hence applying [31, Theorem 2.2], we derive the first estimate. In a similar way, the orthogonality condition (3.2.51) is equivalent to:

$$-(r_{1h}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{1h}, v_{ht} \rangle + a(r_{1h}, v_h) \right) dt = -(r_{1h}^{n-1}, v_+^{n-1}) \\ + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (e_1, v_h) - a(r_p, v_h) \right) dt + (r_{p+}^n, v^n), \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n].$$

Here, we have used the definition of the projection. Setting  $v_h = r_{1h}$  into (3.2.52), using the bounds,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |(e_1, r_{1h})| dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (\eta/4) \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 + (C/\eta) \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} |a(r_{1h}, r_p)| dt \leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C_c^2/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

and standard algebra, we obtain

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\|r_{1h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|[r_{1h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|r_{1h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\eta}{2}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C\int_{t^{n-1}}^{t^n}\left((C_c^2/\eta)\|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1/\eta)\|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2\right)dt + |(I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n|. \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

Finally for the last term, observe that  $r_{h+}^n \in U_h^{n+1}$  and hence,

$$\begin{aligned} ((I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) &= ((I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n - r_{1h+}^n) \\ &\leq \|(I - P_{n+1})\mu(t_+^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/4)\|r_{1h+}^n - r_{1h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

An alternative bound can be obtained by using the inverse estimate  $\|r_{1h}^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C_k/\tau_n)\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt$ , and noting that  $r_{1h}^n \in U_h^n$ ,

$$\begin{aligned} ((I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) &= (P_n(I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) \leq \|P_n(I - P_{n+1})\mu(t_+^n)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|r_{1h}^n\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (C_k^2/(\tau_n\eta))\|P_n(I - P_{n+1})\mu(t_+^n)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + (\eta/4)\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

where at the last step we have also used Young's inequality. Collecting the last two estimates and equation (3.2.52) we obtain the desired estimate upon summation and standard  $\square$

**Remark 3.2.19.** *If the same subspaces are being used every time step, i.e.,  $U_h^n \equiv U_h \subset H_0^1(\Omega)$  then we observe that there is no contribution from the summation term in Theorem 3.2.18. Indeed, inspecting the above proof, we note that for  $i = 1, \dots, N$  the local  $L^2(\Omega)$  projection  $P_i \equiv P_{i+1} \equiv P_{L^2} : L^2(\Omega) \rightarrow U_h$  is the same at each time step. Therefore,  $r_{h+}^n \in U_h$  implies that*

$$((I - P_{n+1})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) \equiv ((I - P_{L^2})\mu(t_+^n), r_{1h}^n) \equiv 0.$$

Hence, (3.2.52) takes the form

$$\begin{aligned} & -(1/2)\|r_{1h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|[r_{1h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|r_{1h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\eta/2)\int_{t^{n-1}}^{t^n}\|r_{1h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C\int_{t^{n-1}}^{t^n}\left((C_c^2/\eta)\|r_p\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1/\eta)\|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2\right)dt. \end{aligned}$$

Working similarly for the forward (in time) problem, we obtain the following estimates:

$$\begin{aligned} \eta\|e_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=0}^{N-1}\|[e_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\left(\|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_c^2/\eta)\|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2\right), \\ \eta\|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \sum_{i=1}^N\|[r_1^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\left((1/\eta)\|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (C_c^2/\eta)\|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2\right). \end{aligned}$$

Subsequently, an estimate on the  $L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]$  norm is derived, using the approximation of the discrete characteristic see Appendix A'3, and the subsequent Theorem 3.2.28. Since, an estimate on the  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  norm is already obtained, and the auxiliary optimality system is now essentially uncoupled, the techniques of [31, Section 2] can be applied directly.

**Theorem 3.2.20.** *Let  $w_h, z_h \in U_h$  be the solutions of (3.2.47)-(3.2.48) computed using the DG scheme. Denote by  $e_1 = y - w_h$ ,  $r_1 = \mu - z_h$  and suppose that the assumptions of Theorem 3.2.18*



hold. Then there exists a constant  $C$  depending on  $C_k, \Omega$  such that

$$\begin{aligned} \|e_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left[ \|e_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_c^2/\eta) \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_{i+1}\eta)) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \right], \\ \|r_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left[ \|r_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (1/\eta) \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N 2 \min \left( \|(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_i\eta)) \|P_i(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

*Proof.* Splitting the error as in the previous theorem, i.e.,  $e_1 = e_{1h} + e_p$  it suffices to bound the term  $\sup_{t^{n-1} < t \leq t^n} \|e_{1h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . This is done in [31, Theorem 2.5] (note that the orthogonality condition is uncoupled). The estimate for the adjoint variable can be derived similarly starting from orthogonality condition (3.2.51), and using a suitable approximation for the discrete characteristic for the backwards in time problem.  $\square$

**Remark 3.2.21.** *Similar to Remark 3.2.19 an improved bound holds when  $U_h^n = U_h$ ,  $n = 1, \dots, N$ . In particular,*

$$\begin{aligned} \|e_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left( \|e_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + \|e_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_c^2/\eta) \|e_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right), \\ \|r_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left( \|r_p\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (1/\eta) \|e_1\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + (C_c^2/\eta) \|r_p\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \right). \end{aligned}$$

**Remark 3.2.22.** *The combination of the last two Theorems implies the “symmetric” structure of our estimate. In particular, let  $\|(\cdot, \cdot)\|_X$ ,  $\|(\cdot, \cdot)\|_{X_1}$  be defined by*

$$\begin{aligned} \|(e_1, r_1)\|_X^2 &\equiv \|e_1\|_X^2 + \|r_1\|_X^2 \equiv \|e_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 + \|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2 \\ &\quad + \|e_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 + \|r_1\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|(e_1, r_1)\|_{X_1}^2 &\equiv \|e_1\|_{X_1}^2 + \|r_1\|_{X_1}^2 \\ &\equiv \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_{i+1}\eta)) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N 2 \min \left( \|(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/(\tau_i\eta)) \|P_i(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Then, using Theorems 3.2.18, 3.2.20 we obtain an estimate of the form

$$\begin{aligned} \|\text{error}\|_X &\leq C \left( \|\text{in. data error}\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{best approx. error}\|_X \right. \\ &\quad \left. + \|\text{subsp. error}\|_{X_1} \right). \end{aligned}$$

The above estimate indicates that the error is as good as the approximation properties enables it to be, and it is applicable for higher order elements under the natural parabolic regularity assumptions. If  $U_h^n \equiv U_h$  for  $n = 1, \dots, N$  then the subspace error can be dropped, and thus we obtain symmetric estimate of the form

$$\|\text{error}\|_X \leq C \left( \|\text{in. data error}\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{best approx. error}\|_X \right), \quad (3.2.53)$$

which can be viewed as the fully-discrete analogue of Céa’s Lemma see e.g. ([34]).

It remains to compare the discrete optimality system (3.1.15)-(3.1.16) to the auxiliary system (3.2.47)-(3.2.48). In the remaining of this work, we denote by  $e_{2h} \equiv w_h - y_h$ , and by  $r_{2h} \equiv z_h - \mu_h$ . We begin by establishing an auxiliary bound for  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2$  and  $(1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2$  in terms of  $\alpha^{1/2}\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2$  and projection terms  $e_1, r_1$ . Here, we note that without loss of generality we assume  $\alpha < 1$ , which corresponds to the physical case.

**Lemma 3.2.23.** *Suppose that Assumptions 2.1.1-3.1.5-3.2.15 hold. Let  $y_h, \mu_h, w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions the optimality system (3.1.15)-(3.1.16) and of the auxiliary system (3.2.47)-(3.2.48) respectively, computed using the discontinuous Galerkin scheme. Denote by  $e_1 \equiv y - w_h$ ,  $r_1 \equiv \mu - z_h$ , and let  $e_{2h} \equiv w_h - y_h$ ,  $r_{2h} \equiv z_h - \mu_h$ . Then, there exists constant  $\mathbf{C}$  depending on  $\eta, C_L, C_c$  and the constants  $C_d, C_{st}$  of Assumption 3.2.15 and Lemma 3.1.7 respectively such that for  $\tau$  satisfying the Assumptions of Lemmas 3.1.7, and 3.1.18, and for  $\alpha < CC_L$  the following estimate holds:*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (1/\alpha) \int_0^T \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq C \int_0^T \left( (1/\alpha)\|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt + \mathbf{C}\alpha^{1/2} \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

*Proof.* Subtracting (3.1.16) from (3.2.48) we obtain the equation,

$$\begin{aligned} & -(r_{2h+}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, v_{ht} \rangle + a(r_{2h}, v_h) + \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, v_h \rangle \right) dt \\ & = -(r_{2h+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, v_h) dt \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]. \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

Subtracting (3.1.15) from (3.2.47) we obtain the equation:

$$\begin{aligned} & (e_{2h}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, v_{ht} \rangle + a(e_{2h}, v_h) + \langle \phi(y) - \phi(y_h), v_h \rangle \right) dt \\ & = (e_{2h}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} -(1/\alpha)(\mu - \mu_h, v_h) dt \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h^n]. \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

We will obtain an auxiliary bound for  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2$  and  $(1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2$  in terms of  $\alpha^{1/2}\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}^2$  and projection terms. For this purpose we set  $v_h = e_{2h}$  into (3.2.54) to obtain

$$\begin{aligned} & -(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, e_{2ht} \rangle + a(r_{2h}, e_{2h}) + \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, e_{2h} \rangle \right) dt + (r_{2h+}^{n-1}, e_{2h+}^{n-1}) \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

and  $v_h = r_{2h}$  into (3.2.55),

$$\begin{aligned} & (e_{2h}^n, r_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, r_{2ht} \rangle + a(e_{2h}, r_{2h}) + \langle \phi(y) - \phi(y_h), v_h \rangle \right) dt - (e_{2h+}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} -(1/\alpha)(r_1, r_{2h}) - (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

Integrating by parts with respect to time in (3.2.57), and subtracting the resulting equation from (3.2.56), we arrive to

$$\begin{aligned} & (r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\ & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, e_{2h} \rangle - \langle \phi(y) - \phi(y_h), r_{2h} \rangle \right) dt - (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, r_{2h}) dt. \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

We need to bound the three terms of the right hand side. We begin by estimating the last two terms. For this purpose, note that,

$$\left| (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, r_{2h}) dt \right| \leq (1/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,$$

while Assumption 3.1.5 (note that there exists  $\varepsilon > 0$  such that  $\|y_h - y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \leq \varepsilon$ ) and Young's inequality imply that

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi(y) - \phi(y_h), r_{2h} \rangle| dt \leq C_L^2 \alpha \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt + (1/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Furthermore, for the final term, we may bound

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nl} &\equiv \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, e_{2h} \rangle| dt \\ &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y)(\mu - \mu_h), e_{2h} \rangle| dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle (\phi'(y) - \phi'(y_h))\mu_h, e_{2h} \rangle| dt \equiv \mathbf{I}_{nl}^1 + \mathbf{I}_{nl}^2. \end{aligned}$$

For integral  $\mathbf{I}_{nl}^1$ , adding and subtracting  $\phi'(0)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nl}^1 &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle \phi'(y)(\mu - \mu_h), e_{2h} \rangle| dt \\ &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} (|\langle (\phi'(y) - \phi'(0))(\mu - \mu_h), e_{2h} \rangle| + |\langle \phi'(0)(\mu - \mu_h), e_{2h} \rangle|) dt. \end{aligned}$$

Hence, using the Lipschitz continuity of  $\phi'$ , the uniform bound on  $\phi'(0)$ , the embedding  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ , and Young's inequality with suitable  $\delta > 0$ , we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nl}^1 &\leq CC_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y\|_{L^4(\Omega)} \|r_{2h} + r_1\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt \\ &\quad + C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h} + r_1\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (1/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \alpha C(C_L) \|y\|_{L^\infty[0, T; L^4(\Omega)]}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + C\alpha \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (1/4\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \alpha^{1/2} C(C_L, C_d) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + C\alpha \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

where at the last inequality we have used Assumption 3.2.15. Here  $C(C_L, C_d)$  denote constant depending upon  $C_L$ , the data  $f$ ,  $y_0$ ,  $y_d$ ,  $\eta$  and  $\Omega$ . In addition, the Lipschitz continuity of  $\phi'$  and the generalized Hölder's inequality, imply that

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{nl}^2 &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\langle (\phi'(y) - \phi'(y_h))\mu_h, e_{2h} \rangle| dt \\ &\leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{L^4(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

The first part of  $\mathbf{I}_{nl}^2$  can be bounded by using the embedding  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  and Young's inequality,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{H^1(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt \leq (CD_{\mu st}/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

where here we denote by  $D_{\mu st}$  the stability constant of Lemma 3.1.18. Finally, observe that interpolation inequality  $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ , the stability inequality of  $\mu_h$  of Lemma 3.1.18 and Young's inequality with appropriate  $\delta$ , imply that

$$\begin{aligned} & \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} dt \leq \|\mu_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt \\ & \leq (1/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + C\|\mu_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & \leq (1/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + CC_{st}\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Substituting the above bounds into (3.2.58) and adding the resulting inequalities from 1 to  $N$ , noting that  $\sum_{n=1}^N ((r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1})) = 0$  (since  $e_{2h}^0 \equiv 0$ ,  $r_{2h+}^N = 0$ ), and choosing  $\alpha < C(C_L)$  to hide  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$ , we obtain the desired estimate.  $\square$

**Remark 3.2.24.** *In the above proof we have used the Lipschitz continuity of  $\phi'$  to avoid any additional technicalities. The assumption that  $y \in L^\infty[0, T; L^4(\Omega)]$ , will require to impose additional regularity assumptions on the data, in particular,  $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , but not additional regularity on the control and the target.*

Estimates follow using projection techniques of Theorem 3.2.18 which allow to treat the forward and backward (in time) coupled PDE's together with a "boot-strap" argument.

**Theorem 3.2.25.** *Let Assumptions 2.1.1-3.1.5-3.2.15 hold. Let  $y_h, \mu_h, w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions of the optimality system (3.1.15)-(3.1.16) and of the auxiliary system (3.2.47)-(3.2.48) respectively, computed using the discontinuous Galerkin scheme. Denote by  $e_1 \equiv y - w_h$ ,  $r_1 \equiv \mu - z_h$ , and let  $e_{2h} \equiv w_h - y_h$ ,  $r_{2h} \equiv z_h - \mu_h$ . Then, there exists constant  $\mathbf{D}$ , depending on  $\|y\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}/\eta$ , the constant  $\mathbf{C}$  of Lemma 3.2.23, and  $\rho \equiv \frac{CC_{st}^2\eta + \beta\mathbf{C}}{\eta/4 + CC_{st}^2\eta + \beta\mathbf{C}} < 1$  (for  $\beta > 0$ ) such that for  $\tau$  satisfying the assumptions of Lemmas 3.1.7, and 3.1.18, the following estimate holds:*

$$\begin{aligned} & \|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \sum_{i=0}^{N-1} \|[e_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + (\eta/\alpha) \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (1/\alpha) \|r_{2h+}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha) \sum_{i=1}^N \|[r_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \mathbf{D}(1/\alpha^2) \int_0^T (\|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2) dt. \end{aligned}$$

Here the constant  $\mathbf{D}$  is independent of  $\tau, h, \alpha$ .

**Remark 3.2.26.** *We note that we are interested in the case where the values of  $\alpha$  are small, and possibly comparable to  $h$ , which guarantee fast convergence to the target  $y_d$ . Hence, great care is exercised to avoid the use of Grönwall's type arguments which typically lead to constants of the form  $\exp(1/\alpha)$ .*

*Proof. Step 1: Preliminary estimates for the state:* Setting  $v_h = e_{2h}$  into (3.2.55) and noting that

$\mu - \mu_h = r_1 + r_{2h}$  we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), e_{2h} \rangle dt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1 + r_{2h}, e_{2h}) dt, \end{aligned} \quad (3.2.59)$$

For the first term on the right hand side, note that

$$\left| (1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1, e_{2h}) dt \right| \leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C/\eta\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Next we focus on the nonlinear terms. Notice that the monotonicity of  $\phi$  implies that

$$\mathbf{I}_{nl} \equiv \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), e_{2h} \rangle dt \geq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(w_h), e_{2h} \rangle dt,$$

and hence we moving the above term on the right hand side, we may bound the term by using Assumption 3.1.5, Poincaré inequality, and Young's inequality, as follows:

$$|\mathbf{I}_{nl}| \leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)} dt \leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt.$$

Therefore collecting the above bounds into (3.2.59) and multiplying by  $\alpha^{1/2}$  we obtain:

$$\begin{aligned} & \alpha^{1/2} \left( \|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right) \\ & \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (C/\eta\alpha^{3/2}) \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + (CC_L\alpha^{1/2}/\eta) \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt - (1/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_{2h}, e_{2h}) dt. \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

*Step 2: Preliminary estimates for the adjoint:* Setting  $v_h = r_{2h}$  into (3.2.54), we obtain

$$\begin{aligned} & -(1/2) \|r_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|r_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt \leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt. \end{aligned} \quad (3.2.61)$$

Using the monotonicity of  $\phi$ , and noting that  $\mu - \mu_h = r_1 + r_{2h}$ , the nonlinearity of the adjoint equation can be written as:

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt & = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu - \phi'(y)\mu_h, r_{2h} \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu_h - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt \\ & \geq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)r_1, r_{2h} \rangle dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)\mu_h - \phi'(y_h)\mu_h, r_{2h} \rangle dt. \end{aligned}$$

Moving the last two integrals on the right hand side, we derive appropriate bounds. For the first integral, using the Lipschitz continuity of  $\phi'$ , the uniform bound on  $\phi'(0)$ , the generalized Hölder's inequality and the embedding  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ , we easily obtain

$$\begin{aligned} \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)r_1, r_{2h} \rangle dt \right| & \leq \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle (\phi'(y) - \phi'(0))r_1, r_{2h} \rangle dt \right| + \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(0)r_1, r_{2h} \rangle dt \right| \\ & \leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C_y/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(y)r_1, r_{2h} \rangle dt \right| &\leq \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle (\phi'(y) - \phi'(0))r_1, r_{2h} \rangle dt \right| + \left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi'(0)r_1, r_{2h} \rangle dt \right| \\ &\leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (C_y/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

where  $C_y$  depends only on  $\|y\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}$  and the domain. Similarly, for the second integral, the Lipschitz continuity of  $\phi'$ , the generalized Hölder inequality and the fact that  $y - y_h = e_1 + e_{2h}$  imply,

$$\left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle (\phi'(y) - \phi'(y_h))\mu_h, r_{2h} \rangle dt \right| \leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_1 + e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|r_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt \leq \mathbf{II}_{nl}^1 + \mathbf{II}_{nl}^2.$$

It remains to bound the last two integrals. Starting from  $\mathbf{II}_{nl}^2$ , using the interpolation inequality  $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  and stability estimates on  $\mu_h$ , we obtain:

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_{nl}^2 &\leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_{2h}\|_{L^4(\Omega)} \|r_{2h}\|_{L^4(\Omega)} dt \\ &\leq \eta/4 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt \\ &\quad + (CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)} \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \eta/4 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \|\mu_h\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^4 \eta/16 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + (CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \alpha^{1/2} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2}) \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\ &\leq \eta/4 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (CC_{st}^2 \alpha \eta/16) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + (CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \alpha^{1/2} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2}) \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \end{aligned}$$

where we have used the stability bound of Lemma 3.1.18. For  $\mathbf{II}_{nl}^1$ , using the Hölder's inequality and the embedding  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ , we obtain,

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_{nl}^1 &\leq C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\mu_h\|_{L^2(\Omega)} \|e_1\|_{H^1(\Omega)} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt \\ &\leq (\eta/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (CC_L C_{st} \alpha^{1/2}/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Inserting the bounds on  $\mathbf{II}_{nl}^1, \mathbf{II}_{nl}^2$  into (3.2.61), and multiplying by  $(1/\alpha^{1/2})$ , we obtain

$$\begin{aligned} &-(1/2\alpha^{1/2}) \|r_{2h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2\alpha^{1/2}) \|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2\alpha^{1/2}) \|r_{2h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ (\eta/2\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \mathbf{D} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2}) \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt + (1/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt \\ &+ CC_{st}^2 \alpha^{1/2} \eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + CC_L/\eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha) \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \quad (3.2.62) \end{aligned}$$

where  $\mathbf{D}$  depends upon  $CC_L C_{st}/\eta$ , and  $C_y/\eta$ .

*Step 3: Combination of (3.2.60)-(3.2.62):* Next we will form the convex combination of (3.2.60)-(3.2.62) by multiplying  $1 - \rho$  equation (3.2.62) and by  $\rho$  equation (3.2.60),  $0 < \rho < 1$ , ( $\rho$  to be

determined later ), and we add the resulting equations:

$$\begin{aligned}
& \rho\alpha^{1/2} \left( \|e_{2h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[e_{2h}^{n-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + (\rho\eta\alpha^{1/2}/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& \left( (1-\rho)/2\alpha^{1/2} \right) \left( -\|r_{2h+}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[r_{2h}^n]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_{2h+}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& + ((1-\rho)\eta/4\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& \leq \mathbf{D}(1/\alpha^{3/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt + (1-\rho)CC_{st}^2\alpha^{1/2}\eta \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& + (1-\rho)(CC_L/\eta) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + (1-\rho)/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt - (\rho/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt. \tag{3.2.63}
\end{aligned}$$

There are two distinct cases. If  $0 < \rho \leq (1/2)$ , then  $\rho \leq (1-\rho)$  and we may bound the last two terms, by  $2(1-\rho)/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(e_{2h}, r_{2h})| dt$ , and hence using Young's inequality,

$$2(1-\rho)/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \alpha^{1/2}\|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha^{1/2})\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt.$$

Substituting the last inequality into (3.2.63), and summing from 1 to  $N$  we deduce

$$\begin{aligned}
& \rho\alpha^{1/2}\|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho\alpha^{1/2} \sum_{i=1}^N \|[e_{2h}^{i-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\rho\eta\alpha^{1/2}/4) \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& + (1-\rho)/2\alpha^{1/2} \sum_{i=1}^N \|[r_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1-\rho)/2\alpha^{1/2})\|r_{2h+}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1-\rho)\eta/4\alpha^{1/2}) \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& \leq \mathbf{D}(1/\alpha^{3/2}) \int_0^T \left( \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt + (1-\rho)CC_{st}^2\alpha^{1/2}\eta \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& + (1-\rho)CC_L/\eta \int_0^T \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + 2(1-\rho) \int_0^T \left( \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \tag{3.2.64}
\end{aligned}$$

where  $\mathbf{D}$  depends only upon the stability constant  $C_{st}$ ,  $\eta$ ,  $C_L$ . Note that we may use Lemma 3.2.23 to replace, the last two integrals, by projection terms  $e_1, r_1$  and  $\alpha^{1/2}\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ . Thus,

$$\begin{aligned}
& \rho\alpha^{1/2}\|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho\alpha^{1/2} \sum_{i=1}^N \|[e_{2h}^{i-1}]\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\rho\eta\alpha^{1/2}/4) \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& + ((1-\rho)/2\alpha^{1/2}) \sum_{i=1}^N \|[r_{2h}^i]\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1-\rho)/2\alpha^{1/2})\|r_{2h+}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1-\rho)\eta/4\alpha^{1/2}) \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
& \leq \mathbf{D}(\rho)(1/\alpha^{3/2}) \int_0^T \left( \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt \\
& + (1-\rho)CC_{st}^2\alpha^{1/2}\eta \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + (1-\rho)3\mathbf{C}\alpha^{1/2} \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \tag{3.2.65}
\end{aligned}$$

Here,  $\mathbf{C}$  denotes the constant of Lemma 3.2.23. Then, choosing  $\rho$  in order to hide the term  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  on the left, i.e.,

$$(1-\rho)(CC_{st}^2\eta + 3\mathbf{C})\alpha^{1/2} = \rho\eta\alpha^{1/2}/4, \quad \rho \equiv \frac{CC_{st}^2\eta + 3\mathbf{C}}{\eta/4 + CC_{st}^2\eta + 3\mathbf{C}} < 1,$$

(noting that  $\rho$  is independent of  $\alpha$ ) we arrive at the desired estimate. We also note that so far we have treated the case  $0 < \rho \leq 1/2$ , which implies an assumption on the size of data, and in particular,  $CC_{st}^2\eta + 3\mathbf{C} < \eta/4$ . It remains to treat the case where  $1/2 < \rho < 1$ . Again, we are interested in treating the last two terms of (3.2.63). For this purpose, note that

$$(1 - \rho)/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt - (\rho/\alpha^{1/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, r_{2h}) dt \leq |(1 - 2\rho)|/\alpha^{1/2} \int_{t^{n-1}}^{t^n} |(e_{2h}, r_{2h})| dt.$$

Since,  $1/2 < \rho < 1$ , we deduce  $|(1 - 2\rho)| = (2\rho - 1) \leq \beta(1 - \rho)$ , for some  $\beta > 0$ . Indeed, we note that if  $\beta > 0$  big enough, then  $\rho \approx < 1$  since  $\rho \leq (1 + \beta)/(2 + \beta) \approx < 1$ . The remaining of the proof remains the same. The analog of (3.2.65) takes the form,

$$\begin{aligned} & \rho\alpha^{1/2} \|e_{2h}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho\alpha^{1/2} \sum_{i=1}^N \| [e_{2h}^{i-1}] \|_{L^2(\Omega)}^2 + (\rho\eta\alpha^{1/2}/4) \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & + ((1 - \rho)/2\alpha^{1/2}) \sum_{i=1}^N \| [r_{2h}^i] \|_{L^2(\Omega)}^2 + ((1 - \rho)/2\alpha^{1/2}) \|r_{2h+}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + ((1 - \rho)\eta/4\alpha^{1/2}) \int_0^T \|r_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ & \leq \mathbf{D}(\rho)(1/\alpha^{3/2}) \int_0^T \left( \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt \\ & + (1 - \rho)CC_{st}^2\alpha^{1/2}\eta \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \beta(1 - \rho)\mathbf{C}\alpha^{1/2} \int_0^T \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Then, choosing  $\rho$  (independent of  $\alpha$ ) in order to hide the last two terms on the left hand side, i.e, for

$$(1 - \rho)(CC_{st}^2\eta + \beta\mathbf{C})\alpha^{1/2} = \rho\eta\alpha^{1/2}/4, \quad \rho \equiv \frac{CC_{st}^2\eta + \beta\mathbf{C}}{\eta/4 + CC_{st}^2\eta + \beta\mathbf{C}} < 1,$$

we obtain the desired estimate.  $\square$

**Remark 3.2.27.** *In most practical situations, such as short time-setting or not very large data  $C_{st}$ , we note that the values of the parameters  $\rho$  or  $1 - \rho$  are not comparable to  $\alpha^{1/2} \ll 1$ , hence the dependence of the estimate upon  $\alpha$  does not deteriorate further.*

Based on the estimates at the energy norms, we proceed to derive estimates at arbitrary times. Since, an estimate on the energy norm  $\|r_1\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  is already obtained in Theorem 3.2.25, the optimality system is now essentially uncoupled. An estimate at arbitrary time points for the forward in time equation can be derived by applying the approximation of the discrete characteristic technique of [31] into the semi-linear case. Here, the stability estimate at arbitrary time-points will be also needed.

**Theorem 3.2.28.** *Let  $y_h, \mu_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions of (3.1.15)-(3.1.16). If in addition to the assumptions of Theorems 3.2.18, 3.2.25,  $\tau$  satisfies  $\tau \leq C_k/\eta$ , then there exists a constant  $\tilde{\mathbf{D}}$  depending on the ratios  $(C_y/\eta), (C_c/\eta), e^{TC_k/\eta}$  and the constant  $\mathbf{D}$  of Theorem 3.2.25, such that*

$$\|e_{2h}\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq \tilde{\mathbf{D}}(1/\alpha^2) \int_0^T \left( \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt.$$

Here,  $\tilde{\mathbf{D}}$  is also independent of  $\tau, h, \alpha$ .

*Proof.* We begin by integrating by parts with respect to time in (3.2.55), and substituting  $v_h = \hat{e}_{2h}$ , where  $\hat{e}_{2h}$  denotes the approximation of the discrete characteristic function  $\chi_{[t^{n-1}, t]} e_{2h}$  (for any fixed  $t \in [t^{n-1}, t^n]$ ), as constructed in Appendix A'3. The definition of the  $\hat{e}_{2h}$  (see Appendix A'3) and the



fact that  $e_{2ht} \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; U_h^n]$  implies that  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2ht}, \hat{e}_{2h}) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2ht}, e_{eh}) dt$  which implies,

$$\begin{aligned} (1/2)\|e_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1/2)\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( a(e_{2h}, \hat{e}_{2h}) + \langle \phi(y) - \phi(y_h), \hat{e}_{2h} \rangle \right) dt \\ = (1/2)\|e_{2h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (1/\alpha)(r_1 + r_{2h}, \hat{e}_{2h}) dt. \end{aligned}$$

Recall also that the continuity property on  $a(\cdot, \cdot)$ , and Proposition A.3.1, imply

$$\left| \int_{t^{n-1}}^{t^n} a(e_{2h}, \hat{e}_{2h}) dt \right| \leq C(C_k, C_c) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt,$$

while the coupling term can be bounded as:

$$\left| \frac{1}{\alpha} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (r_1 + r_{2h}, \hat{e}_{2h}) dt \right| \leq (C_k/\alpha^2) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|r_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt + C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Here we have used Young's inequality with appropriate  $\delta > 0$  and Proposition A.3.1. For the semilinear term, recall that the growth condition, and generalized Hölder, inequality, the embedding  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$  imply

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), \hat{e}_{2h} \rangle dt \leq C_L \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \|\hat{e}_{2h}\|_{H^1(\Omega)} dt.$$

Using Young's inequality, we finally arrive at:

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \phi(y) - \phi(y_h), \hat{e}_{2h} \rangle dt \leq C_k(C_y + C_L) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_{2h}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt,$$

where  $C_y$  depends only upon  $\|y\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}$ . Hence, substituting the above estimates into (3.2.66), we obtain an inequality of the form,  $(1 - C\tau_n)a^n \leq a^{n-1} + f^n$ , where  $a^n = \sup_{s \in (t^{n-1}, t^n]} \|e_{2h}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Indeed, let  $t \in (t^{n-1}, t^n]$  to be chosen as  $a^n \equiv \|e_{2h}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  and note that  $C_k \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_k \tau_n a^n$ , for  $\tau_n$  satisfying  $\tau_n C_k < 1/4$  the desired estimate follows by the discrete Grönwall, Lemma, upon using the previous bounds of Lemma 3.2.23, Theorems 3.2.18, 3.2.25, and standard algebra.  $\square$

Estimate on the adjoint variable  $\mu$ , follow using similar techniques and the previously derived estimates on the primal variable. Below, we state the relevant estimate.

**Theorem 3.2.29.** *Let  $y_h, \mu_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions of (3.1.15)-(3.1.16). Suppose that the Assumptions of Theorems 3.2.25-3.2.28 hold. Then there exists a constant  $\tilde{\mathbf{D}} > 0$  (similar to Theorem 3.2.28) such that*

$$\|r_{2h}\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \leq \tilde{\mathbf{D}} \int_0^T \left( \|e_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|r_1\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) dt.$$

Various estimates can be derived, using results of the previous Section, and standard approximation theory results. We begin by stating symmetric error estimates.

**Theorem 3.2.30.** *Suppose that Assumptions 2.1.1-3.1.5-3.2.15. hold. Let  $y_h, \mu_h \in \mathcal{U}_h$  denote the approximate solutions of the optimality system (3.1.15)-(3.1.16) computed using the discontinuous Galerkin scheme. Suppose that  $\tau = \max_{i=1, \dots, n} \tau_n$ ,  $h$ , satisfy the conditions of Lemmas 3.1.7, 3.1.18*

and Theorem 3.2.28. Then, the following estimate holds:

$$\begin{aligned} \|e\|_X^2 + (1/\alpha)\|r\|_X^2 &\leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^2) \left( \|e_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_p\|_X^2 + \|r_p\|_X^2 \right) \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/\tau^{i+1}\eta) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N 2 \min \left( \|(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/\tau^i\eta) \|P_i(I - P_{i+1})\mu(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

where  $\tilde{\mathbf{C}}$  depends upon the stability constants of Lemmas 3.1.7, 3.1.18, and the constants  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}$  of Lemma 3.2.23 and Theorems 3.2.25, 3.2.28 respectively, but is independent of  $\tau, h, \alpha$ . In addition, suppose that the same subspaces are being used, i.e.,  $U_h^n = U_h$ . Then,

$$\|e\|_X^2 + (1/\alpha)\|r\|_X^2 \leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^2) \left( \|e_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_p\|_X^2 + \|r_p\|_X^2 \right).$$

*Proof.* The first estimate follows by using triangle inequality and previous estimates of Theorems 3.2.18-3.2.25. The second estimate follows by Remark 3.2.19.  $\square$

Using now standard regularity and approximation theory results we obtain convergence rates. Below, we state convergence rates in two distinct cases, depending on the available regularity.

**Proposition 3.2.31.** *Suppose that the assumptions of Theorems 3.2.18-3.2.25 hold. Suppose also that  $y, \mu$  satisfy,*

$$(y, \mu) \in L^\infty[0, T; H^{l+1} \cap H_0^1(\Omega)] \quad (y^{(k+1)}, \mu^{(k+1)}) \in L^\infty[0, T; H^1(\Omega)].$$

Assume that piecewise polynomials of degree  $l$  are being used to construct the subspaces  $U_h^n \subset H^1(\Omega)$  in each time step, where  $h$  denotes the spacial discretization parameter. Then the following estimate holds:

$$\|e\|_X^2 + (1/\alpha)\|r\|_X^2 \leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^2) \left( h^{2l} + \tau^{2(k+1)} + h^{2l} \min\{h^4/(\tau^2\eta), h^2/\tau\} \right).$$

Here the constant  $\tilde{\mathbf{C}}$  denotes the constant of Theorem 3.2.30. In case that  $U_h^n = U_h$  then the following estimate is valid

$$\|e\|_X^2 + (1/\alpha)\|r\|_X^2 \leq \tilde{\mathbf{C}}(1/\alpha^2) \left( h^{2l} + \tau^{2(k+1)} \right).$$

*Proof.* It remains to estimate  $e_p, r_p$ . Using [33, Corollary 4.8], and the standard approximation properties of  $P_n$ , we obtain,

$$\begin{aligned} \|y - P_n^{loc} y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} &\leq C \left( \|y - P_n y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|P_n y^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} \right) \\ &\leq C \left( h^l \|y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|y^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} \right). \end{aligned}$$

Therefore,  $\|y - P_h^{loc} y\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C \left( h^l \|y\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|y^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \right)$ .

Working similarly, we also obtain that

$$\|y - P_h^{loc} y\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C \left( h^{l+1} \|y\|_{L^\infty[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|y^{(k+1)}\|_{L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]} \right).$$

Similar estimates also hold for  $r_p$ . It remains to bound the error terms due to the change of subspaces.

For that purpose, it is easy to see that

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} 2 \min \left( \|(I - P_i)y(t^i)\|_{L^2(\Omega)}^2, (1/\tau^{i+1}\eta) \|P_{i+1}(I - P_i)y(t^i)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq C \|y\|_{C[0,T;H^{l+1}(\Omega)]}^2 \min \left\{ \frac{h^{2l+4}}{\tau^2\eta}, \frac{h^{2+2l}}{\tau} \right\}, \end{aligned}$$

while a similar estimates also holds for the terms involving the adjoint variable.  $\square$

Our last result concerns error estimates under more restrictive regularity assumptions on the solution, and in particular on the time-derivative.

**Proposition 3.2.32.** *Suppose that the assumptions of Theorems 3.2.18-3.2.25 hold. Suppose also that  $y, \mu$  satisfy,*

$$(y, \mu) \in L^\infty[0, T; H^{l+1} \cap H_0^1(\Omega)], \quad (y^{(k+1)}, \mu^{(k+1)}) \in L^\infty[0, T; L^2(\Omega)],$$

Assume that the same subspaces are being used in every time-step  $U_h^n = U_h$  and piecewise polynomials of degree  $l$  are being used to construct the subspace  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , where  $h$  denotes the spacial discretization parameter. Suppose that the assumptions of Theorem 3.2.30 hold. Then, we obtain,

$$\|e\|_X^2 + (1/\alpha) \|r\|_X^2 \leq \tilde{C}(1/\alpha^2) \left( h^{2l} + (\tau^{2k+2}/h^2) \right),$$

where  $\tilde{C}$  denote the constant of Theorem 3.2.30.

*Proof.* Working similar to the previous theorem, and an inverse estimate lead to

$$\begin{aligned} \|y - P_n^{loc} y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 & \leq C \|y - P_n y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 + C_k \tau^{2(k+1)} \|P_n y^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 \\ & \leq C \left( \|y - P_n y\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}^2 + \tau^{2(k+1)}/h^2 \|P_n y^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 \right). \end{aligned}$$

The projection error in  $L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]$  can be treated similarly. The adjoint variable can be treated similarly. Thus, using the stability of the orthogonal projection, we obtain the desired estimate.  $\square$

**Remark 3.2.33.** *It is clear from the proofs of Propositions 3.2.31 and 3.2.32 that the enhanced regularity assumptions on  $(y, \mu)$  is only needed to obtain (optimal) rates with respect to  $\|\cdot\|_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}$  part of the corresponding  $\|\cdot\|_X$  norm. Indeed, if we choose the same subspaces in each time step  $U_h^n = U_h$  then there is no contribution from the jump-terms, and hence we may combine the results or Remark 3.2.19, and Theorem 3.2.25, to relate the errors  $\|e\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  and  $\|r\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  with projection errors  $y - P_h^{loc} y$  and  $\mu - P_h^{loc} \mu$  at the same norms. As a consequence, the rates of convergence of Proposition 3.2.32, with respect to  $\|\cdot\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$  norms only require  $(y, \mu) \in L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; L^2(\Omega)]$  regularity.*

**Remark 3.2.34.** *Due to the absence of control constraints, an estimate on the controls  $g - g_h$  follow directly from the estimate on the adjoint  $\|\mu - \mu_h\|_X$  using the optimality condition. However, as it is indicated in the subsequent numerical experiments, an improved rate of convergence in the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm is expected for the controls. This issue will be investigated elsewhere.*

### 3.2.4 Stokes distributed optimal control problem.

Suchlike we extend our study to Stokes evolutionary problems and to spaces we mentioned before. First, an auxiliary system which plays the role of a global space-time dG projection is defined.

Throughout the remaining of our paper, we will work with weak formulations that assume the existence of a pressure  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  (and hence of  $\bar{y}_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ ). Hence, the continuity of optimality system consists of equations (2.3.20)-(2.3.21) and (2.3.18) or (2.3.19), and the discrete optimality system by (3.1.22)-(3.1.23) and (3.1.20) or (3.1.21).

### 3.2.4.1 The fully-discrete projection

Given data  $f, y_0$ , and initial conditions  $w_h^0 = y_h^0$ , where  $y_h^0 \equiv P_h y_0$  denote the initial approximation of  $y_0$ ,  $z_+^N = 0$ , we seek  $(w_h, p_{1h}), (z_h, \phi_{1h}) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  such that for  $n = 1, \dots, N$  and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathcal{Q}_h]$ ,

$$(w_h^n, v_h^n) - \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle w_h, v_{ht} \rangle - a(w_h, v_h) - b(v_h, p_{1h})) dt = (w_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f, v_h \rangle + (\bar{g}, v_h)) dt$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(w_h, q_h) dt = 0, \tag{3.2.66}$$

$$-(z_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle z_h, v_{ht} \rangle + a(z_h, v_h) + b(v_h, \phi_{1h})) dt = -(z_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (w_h - y_d, v_h) dt$$

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z_h, q_h) dt = 0. \tag{3.2.67}$$

The solutions  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  exist for any given data  $f \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)^*]$ ,  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ , and  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . In particular, the stability estimates imply that  $w_h, z_h \in W_S(0, T)$ . In addition, due to the enhanced regularity of  $w_h - y_d$ , we also obtain that  $z_h \in L^\infty[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ .

The solutions of the auxiliary optimality system play the role of “global projections” onto  $\mathcal{U}_h$ . The basic estimate on the energy norm of  $\bar{y} - w_h, \bar{\mu} - z_h$  will be derived in terms of local  $L^2$  projection techniques into the auxiliary system. The following standard projection associated to discontinuous time-stepping methods for the Navier-Stokes equations (see e.g. [32, Definitions 4.1, 4.2]) is needed.

**Definition 3.2.35.** (1) The projection  $P_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$  satisfies  $(P_n^{loc} v)^n = P_h v(t^n)$ , and

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} (v - P_n^{loc} v, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]. \tag{3.2.68}$$

Here we have used the convention  $(P_n^{loc} v)^n \equiv (P_n^{loc} v)(t^n)$  and  $P_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$  is the orthogonal projection operator onto discrete divergence free subspace  $\mathbf{U}_h$ .

(2) The projection  $P_h^{loc} : C[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$  satisfies

$$P_h^{loc} v \in \mathcal{U}_h \text{ and } (P_h^{loc} v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = P_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

Due to the lack of regularity and the coupling between the time-derivative and the pressure, we will also need the following generalized dG projection, which will be applicable when  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,  $\bar{y}_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . In particular, we construct a space-time generalized  $\mathbf{L}^2$  divergence free projection (see also e.g. [30]) which combines the standard dG time stepping projection, and the generalized  $\mathbf{L}^2$  projection  $Q_h : \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$ . For various properties of  $Q_h$  see for instance [69, Section 2]. Recall that the definition of  $Q_h$  states that  $\langle v - Q_h v, v_h \rangle = 0$ , for all  $v \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  and  $v_h \in \mathbf{U}_h$ . The projection is well defined in  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ , and coincides to  $P_h$  for  $v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ .

**Definition 3.2.36.** (1) The projection  $Q_n^{loc} : C[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)] \rightarrow \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h]$  satisfies

$(Q_n^{loc}v)^n = Q_h v(t^n)$ , and

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle v - Q_n^{loc}v, v_h \rangle = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; \mathbf{U}_h].$$

Here we also use the convention  $(Q_n^{loc}v)^n \equiv (Q_n^{loc}v)(t^n)$  and  $Q_h : \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$  is the generalized orthogonal projection operator onto  $\mathbf{U}_h$ .

(2) The projection  $Q_h^{loc} : C[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$  satisfies

$$Q_h^{loc}v \in \mathcal{U}_h \text{ and } (Q_h^{loc}v)|_{(t^{n-1}, t^n]} = Q_n^{loc}(v|_{[t^{n-1}, t^n]}).$$

For  $k = 0$ , the projection  $Q_h^{loc} : C[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)] \rightarrow \mathcal{U}_h$  reduces to  $Q_h^{loc}v(t) = Q_h v(t^n)$  for all  $t \in (t^{n-1}, t^n]$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

In the same way as Robin, by definition,  $Q_h^{loc}$  coincides to  $P_h^{loc}$ , when  $v \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  i.e.,  $P_h^{loc}v = Q_h^{loc}v$  when  $v \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , and hence exhibits best approximation properties. However, we emphasize that is also applicable for  $v \equiv y_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . For the backwards in time problem a modification of the above projections (still denoted by  $P_n^{loc}$ ,  $Q_n^{loc}$  respectively) is defined in a similar manner. For example, in addition to relation (3.2.68), we need to impose the ‘‘matching condition’’ on the left, i.e.,  $(P_n^{loc}v)_+^{n-1} = P_h v(t_+^{n-1})$  instead of imposing the condition on the right.

In the following Lemma, we collect several results regarding (optimal) rates of convergence for the above projection. Here, the emphasis is placed on the approximation properties of the generalized projection  $Q_h^{loc}$ , under minimal regularity assumptions, i.e., for  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  for the lowest order scheme.

**Lemma 3.2.37.** *Let  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , and  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  defined in Definitions 3.2.35 and 3.2.36 respectively. Then, for all  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . there exists constant  $C$  independent of  $h, \tau$  such that*

$$\begin{aligned} \|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h^{l+1}\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}\|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}), \\ \|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(h^l\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}/h\|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}). \end{aligned}$$

Let  $k = 0, l \geq 1$ , and  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap V(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Then, there exists constant  $c$  independent of  $h, \tau$  such that,

$$\|v - P_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C(h\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]})).$$

Let  $k = 0, l \geq 1$ , and  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Then, there exists a constant  $C > 0$  independent of  $h, \tau$  such that

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}), \\ \|v - Q_h^{loc}v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + (\tau^{1/2}/h)(\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]})). \end{aligned}$$

*Proof.* See Appendix A'1. □

**Remark 3.2.38.** *The stability estimate in  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  requires the time-step restriction of  $\tau \leq Ch^2$  due to the lack of regularity with respect to time. For the second estimate, we also note that if more regularity is available, the inverse estimate is not necessary. In particular if  $v^{(k+1)} \in L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ , then the improved rate of  $\mathcal{O}(h^l + \tau^{k+1})$  holds in  $\|\cdot\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]}$  norm. However, we note that for the lowest order scheme  $k = l \leq 1$ , the increased regularity  $v_t \in L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  is not available at least in presence of control constraints. Hence, we emphasize that the lack of regularity acts as a barrier for developing a true higher order scheme. Working similarly we also obtain an estimate at arbitrary time-points, (see for instance [32]). Finally, it is worth noting that approximation properties of  $Q_h^{loc}$  in  $\|\cdot\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}$  norm (see for instance [69, Proposition 2.12]) hold only on the divergence*

free subspace,  $\mathbf{V}^{-1} \equiv \{v \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) : \text{divv} = 0\}$  endowed with the norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^{-1}} = \|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-1}}$ . Here, the divergence free condition is understood as follows:

$$\langle v, \nabla \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \text{ in } H_0^2(\Omega) \equiv \{\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : (\nabla \phi)|_{\Gamma} = 0\},$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1}$ . We refer the reader to [69, Section 2.3] for a detailed analysis of the projection and its properties, but we point out that in the subsequent analysis the use of  $\|\cdot\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}$  projection estimates is not needed.

The next result states that the error related to the auxiliary projection is as good as the local dG projection error allows it to be, and hence it is optimal in the sense of the available regularity.

**Theorem 3.2.39.** *Let  $f \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$  and  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$  be given, and  $(\bar{y}, \bar{p}), (\bar{\mu}, \bar{\phi}) \in W_S(0, T) \times L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  be the solutions of (2.3.20)-(2.3.21)-(2.3.19) or (2.3.20), and  $w_h, z_h \in \mathcal{U}_h$  be the solutions of (3.2.66)-(3.2.67). Denote by  $\bar{e} = \bar{y} - w_h$ ,  $\bar{r} = \bar{\mu} - z_h$  and let  $e_p \equiv \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$ , where  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  are defined in Definitions 3.2.35 and 3.2.36. Then, there exists an algebraic constant  $C > 0$  depending only on  $\Omega$  such that, for any  $q_h \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ ,*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \|\bar{e}\|_{\bar{W}(0,T)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|\bar{e}^i\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C(\|\bar{e}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/\nu)(\|e_p\|_{\bar{W}(0,T)}^2 + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2)), \\ 2) \quad & \|\bar{r}\|_{\bar{W}(0,T)}^2 + \sum_{i=1}^N \|\bar{r}^i\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C(1/\nu)(\|\bar{e}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}^2 + \|r_p\|_{\bar{W}(0,T)}^2 + \|\phi - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2), \\ 3) \quad & \|\bar{e}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq C(1/\nu)(\nu\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]})), \\ 4) \quad & \|\bar{r}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq C(\nu\|\bar{e}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \\ & \quad + \tau^{1/2}(\|r_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0,T;L_0^2(\Omega)]})). \end{aligned}$$

Here,  $w_h^0 = y_h^0$ , where  $y_h^0$  denotes an approximation of  $y_0$ , and  $C$  a constant depending upon on the domain  $\Omega$ .

*Proof. Estimates (1)-(2):* Throughout this proof, we denote by  $\bar{e} = \bar{y} - w_h$ ,  $\bar{r} = \bar{\mu} - z_h$  and we split  $\bar{e}, \bar{r}$  to  $\bar{e} \equiv e_{1h} + e_p \equiv (Q_h^{loc} \bar{y} - w_h) + (\bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y})$ ,  $\bar{r} \equiv r_{1h} + r_p \equiv (P_h^{loc} \bar{\mu} - z_h) + (\bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu})$ , where  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  are defined in Definitions 3.2.35 and 3.2.36. Subtracting (3.2.66) from (2.3.20), and (3.2.67) from (2.3.21) we obtain the orthogonality condition: For  $n = 1, \dots, N$ , and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$

$$\begin{aligned} (\bar{e}_+^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle \bar{e}, v_{ht} \rangle + a(\bar{e}, v_h) + b(v_h, \bar{p} - p_{1h}) \right) dt &= (\bar{e}_+^{n-1}, v_{h+}^{n-1}), \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{y} - w_h, q_h) dt &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.69}$$

$$\begin{aligned} -(\bar{r}_+^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle \bar{r}, v_{ht} \rangle + a(\bar{r}, v_h) + b(v_h, \bar{\phi} - \phi_{1h}) \right) dt &= -(\bar{r}_+^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\bar{e}, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{\mu} - z_h, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.70}$$

Note that the orthogonality condition (3.2.69) is essentially uncoupled and identical to the orthogonality condition of [32, Equation (4.4)]. Hence applying [32, Theorems 4.6 and 4.7], we derive the first estimate. For the second estimate, we note that the orthogonality condition (3.2.70) is equivalent

to: For  $n = 1, \dots, N$ , and for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$ ,

$$\begin{aligned} & -(r_{1h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{1h}, v_{ht} \rangle + a(r_{1h}, v_h) + b(v_h, \bar{\phi} - \phi_{1h}) \right) dt \\ & \quad = -(r_{1h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (\bar{e}, v_h) - a(r_p, v_h) \right) dt, \\ & \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(\bar{\mu} - z_h, q_h) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

Here, we have used the Definition 3.2.35 of the projection  $P_h^{loc}$ , which implies that  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle r_p, v_{ht} \rangle dt = 0$  and  $(r_{p+}^n, v^n) = 0$ . Setting  $v_h = r_{1h} \in \mathcal{U}_h$  into (3.2.71), using the incompressibility constraint to write,  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(r_{1h}, \bar{\phi} - \phi_{1h}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(r_{1h}, \bar{\phi} - q_h)$  we obtain,

$$\begin{aligned} & -(1/2) \|r_{1h+}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|r_{1h}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/2) \|r_{1h+}^{n-1}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (\nu/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|r_{1h}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \\ & \quad \leq C \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( (1/\nu) \|\bar{e}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/\nu) \|r_p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

Summing inequalities (3.2.72), we obtain the estimate at partition points and at the  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  using triangle inequality. Once the estimate for  $\|\bar{r}\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]}$ , is obtained, the estimate at  $L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  follows using the arguments of Theorem [32, Theorem 4.7], modified to handle the backwards in time Stokes equation.

*Estimates (3) and (4):* We turn our attention to the last two estimates. In order to obtain the improved rate for the  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , norm we employ a duality argument to derive a better bound for the quantity  $\|e_{1h}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}^2$ . For this purpose, we generalize the duality argument of the proof of [14, Section 3] or [30, Lemma 4.3] in order to handle arbitrary order schemes, and the discrete incompressibility constraint. We define a backwards in time evolutionary problem with right hand side  $e_{1h} \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , and zero terminal data, i.e., for  $n = 1, \dots, N$  and for all  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , we seek  $(z, \psi) \in W(0, T) \times L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  such that

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \langle z, v_t \rangle + a(v, z) + b(v, \psi) \right) dt + (\phi(t^{n-1}), v(t^{n-1})) = \int_0^T (e_{1h}, v) dt, \\ & \int_0^T b(z, q) dt = 0 \quad \forall q \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]. \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

Note that since  $e_{1h} \in L^\infty[0, T; \mathbf{W}(\Omega)]$ , then Remark 2.2.8 implies that the following estimate hold:

$$\|z\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]} + \|z_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|\psi\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C \|e_{1h}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}. \quad (3.2.74)$$

The lack of regularity of the right hand side of (3.2.73) due to the presence of discontinuities, implies that we can not improve regularity of  $z$  in  $[0, T]$ . The associated discontinuous time-stepping scheme can be defined as follows: Given, terminal data  $z_{h+}^N = 0$ , we seek  $(z_h, \psi_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  such that for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$ ,

$$\begin{aligned} & -(z_{h+}^n, v_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle z_h, v_{ht} \rangle + a(z_h, v_h) + b(\psi_h, v_h) \right) dt + (z_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{1h}, v_h) dt, \\ & \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z_h, q_h) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.75)$$

Hence using Lemma 3.1.23, we obtain  $\|z_h\|_{L^\infty[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C_k \|e_{1h}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}$ . It is now clear that we have the following estimate for  $z - z_h$ , which is a straightforward application of the previous estimates in  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ , the approximation properties of Lemma 3.2.37, of projections  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$ ,

(see for instance [32, Theorem 4.6]),

$$\begin{aligned} \nu \|z - z_h\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C \left( h + \tau^{1/2} \right) \left( \|z\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)]} + \|z_t\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|\psi\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \right) \\ &\leq C \left( h + \tau^{1/2} \right) \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}. \end{aligned} \quad (3.2.76)$$

We note that the lack of regularity on the right hand side, restricts the rate of convergence to the rate given by the lowest order scheme  $l \geq 1$ ,  $k = 0$ , even if high order schemes (in time) are chosen. Setting  $v_h = e_{1h}$ , into (3.2.75), and using the fact that  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(e_{1h}, \psi_h) dt = 0$  we obtain,

$$-(z_{h+}^n, e_{1h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (z_h, e_{1ht}) + a(e_{1h}, z_h) dt + (z_{h+}^{n-1}, e_{1h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt.$$

Integrating by parts in time, we deduce,

$$-(z_{h+}^n, e_{1h}^n) + (z_h^n, e_{1h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -(z_{ht}, e_{1h}) + a(z_h, e_{1h}) \right) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt. \quad (3.2.77)$$

Setting  $v_h = z_h$  into (3.2.69) and using  $\bar{e} = e_p + e_{1h}$ , the definition of projection  $Q_h^{loc}$  of Definition 3.2.36, and the fact that  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z_h, \bar{p} - p_{1h}) dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z_h, \bar{p} - q_h) dt$  we obtain,

$$(e_{1h}^n, z_h^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -(e_{1h}, z_{ht}) + a(e_{1h}, z_h) \right) dt - (e_{1h}^{n-1}, z_{h+}^{n-1}) = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( a(e_p, z_h) + b(z_h, p - q_h) \right) dt, \quad (3.2.78)$$

Here, we have also used the fact that the definition of projection  $Q_h^{loc}$  of Definition 3.2.36, implies that  $(e_p^n, z_h^n) = 0$ ,  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_p, v_{ht}) dt = 0$  and  $(e_p^{n-1}, z_{h+}^{n-1}) = 0$ . Using (3.2.77) to replace the first three terms of (3.2.78) we arrive to

$$\begin{aligned} (z_{h+}^n, e_{1h}^n) - (e_{1h}^{n-1}, z_{h+}^{n-1}) &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt = - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( a(e_p, z_h) + b(z_h, \bar{p} - q_h) \right) dt \\ &= - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( a(e_p, z_h - z) + a(e_p, z) + b(z_h - z, \bar{p} - q_h) \right) dt \\ &= - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( a(e_p, z_h - z) + \nu(e_p, \Delta z) + b(z_h - z, \bar{p} - q_h) \right) dt, \end{aligned}$$

where at the last two equalities we have used integration by parts (in space), and the incompressibility constraint which implies that  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(z, p - q_h) dt = 0$ . Therefore,

$$\begin{aligned} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{1h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + (z_{h+}^n, e_{1h}^n) - (e_{1h}^{n-1}, z_{h+}^{n-1}) &\leq \int_{t^{n-1}}^{t^n} \nu (\|z_h - z\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|e_p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}) dt \\ &+ \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\Delta z\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|z - z_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\bar{p} - q_h\|_{L^2(\Omega)} \right) dt. \end{aligned}$$

Then summing the above inequalities and using the fact that  $\phi_+^N \equiv 0$  and  $e_{1h-}^0 = 0$  (by definition) and rearranging terms, we obtain

$$\begin{aligned} (1/2) \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}^2 &\leq C \left( \nu \|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \|z\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)]} \right. \\ &\quad \left. + \nu \|z_h - z\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} \left( \|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + (1/\nu) \|p - q_h\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \right) \right) \\ &\leq C \left( \nu \|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \right. \\ &\quad \left. + (1/\nu) (h + \tau^{1/2}) \|e_{1h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \left( \|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + (1/\nu) \|p - q_h\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \right) \right). \end{aligned}$$

Here, we have used the Cauchy-Schwarz, inequality, the stability bounds of dual equation (3.2.74), i.e.,



and the error estimates (3.2.76) on  $z_h - z$ . Finally, the estimate on  $\|\bar{r}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$  follows by using a similar duality argument.  $\square$

**Remark 3.2.40.** *The combination of the last two Theorems implies the “symmetric, regularity free” structure of our estimate. In particular, suppose that the initial data  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ , and the forcing term  $f \in L^2[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , and we define the natural energy norm  $\|(\bar{v}_1, \bar{v}_2)\|_{W_S(0,T)} \equiv \|v_1\|_{W_S(0,T)} + \|v_2\|_{W_S(0,T)}$  endowed by the weak formulation. Then, the estimate under minimal regularity assumptions can be written as follows:*

$$\|(\bar{e}, \bar{r})\|_{W_S(0,T)} \leq C(\|(e_p, r_p)\|_{W_S(0,T)} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}).$$

The above estimate indicates that the error is as good as the approximation properties enables it to be, under the natural parabolic regularity assumptions; and it can be viewed as the fully-discrete analogue of Céa’s Lemma Céa, see e.g. [34]. Hence, the rates of convergence for  $\bar{e}, \bar{r}$  depend only on the approximation and regularity results, via the projection error  $e_p$  as indicated in Lemma 3.2.37 and Remark 3.2.38. For example, if the Taylor-Hood element is being used, and  $\bar{y} \in L^2[0,T;\mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ ,  $\bar{p} \in L^2[0,T;L_0^2(\Omega)]$ , then for  $\tau \leq Ch^2$  we obtain that

1.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C, \quad \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C,$
2.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq Ch\|y\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|y_t\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}.$

Therefore, the above estimates, and Theorem 3.2.39, imply  $\|\bar{e}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \approx \mathcal{O}(h)$ , for  $\tau \leq Ch^2$ . Obviously the estimate of Theorem 3.2.39 is applicable even in case more regular solutions. For example, for smooth solutions, the Taylor-Hood element combined with the dG time-stepping scheme of order  $k$  will allow the following rates,

1.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C(h^2 + \tau^{k+1}),$
2.  $\|e_p\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(h^3 + \tau^{k+1}).$

Thus, Theorem 3.2.39, implies that for  $\tau \leq Ch^2$

$$\begin{aligned} \|\bar{e}\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^2 + \tau^{k+1}), \\ \|\bar{r}\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^2 + \tau^{k+1}), \\ \|\bar{e}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^3 + \tau^{k+1}), \\ \|\bar{r}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\approx \mathcal{O}(h^3 + \tau^{k+1}). \end{aligned}$$

#### 3.2.4.2 Symmetric estimates for the optimality system

It remains to compare the discrete optimality system (3.1.22)-(3.1.23)-(3.1.20) to the auxiliary system (3.2.66)-(3.2.67).

**Lemma 3.2.41.** *Let  $(\bar{y}_h, \bar{p}_h), (\bar{\mu}_h, \bar{\phi}_h), (w_h, p_{1h}), (z_h, \phi_{1h}) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  be the solutions the discrete optimality system (3.1.22)-(3.1.23)-(3.1.20) and of the auxiliary system (3.2.66)-(3.2.67) respectively. Denote by  $\bar{e} \equiv \bar{y} - w_h, \bar{r} \equiv \bar{\mu} - z_h$ , and let  $e_{2h} \equiv w_h - \bar{y}_h, r_{2h} \equiv z_h - \bar{\mu}_h$ . Then there exists algebraic constant  $C > 0$  such that:*

$$\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + (1/\alpha^{1/2})\|r_{2h}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C(1/\alpha^{1/2})\|\bar{r}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}.$$

In addition, the following estimates holds: Then, the following estimate holds:

$$\begin{aligned} \|e_{2h}^N\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|[e_{2h}^i]\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^T \|e_{2h}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt &\leq (C/\alpha^{3/2}) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt, \\ \|r_{2h+}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|[r_{2h}^i]\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^T \|r_{2h}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt &\leq (C/\alpha^{1/2}) \int_0^T \|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

where  $C$  is constant depending only upon  $\Omega$ .

*Proof.* Subtracting (3.1.23) from (3.2.67) we obtain the equation: For  $n = 1, \dots, N$ ,  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n, \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$

$$\begin{aligned} -(r_{2h+}^n, v^n) + (r_{2h+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, v_{ht} \rangle + a(r_{2h}, v_h) + b(v_h, \phi_{1h} - \bar{\phi}_h) \right) dt &= \int_{t^{n-1}}^{t^n} (e_{2h}, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(r_{2h}, q_h) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.79)$$

Subtracting (3.1.22) from (3.2.66) and using (2.3.18)-(3.1.20), we obtain: For  $n = 1, \dots, N$ , for all  $v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n, \mathbf{Y}_h]$ ,  $q_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; Q_h]$ ,

$$\begin{aligned} (e_{2h}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, v_{ht} \rangle + a(e_{2h}, v_h) + b(v_h, p_{1h} - \bar{p}_h) \right) dt \\ = (e_{2h}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} -(1/\alpha)(\bar{\mu} - \bar{\mu}_h, v_h) dt, \\ \int_{t^{n-1}}^{t^n} b(e_{2h}, q_h) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

We set  $v_h = e_{2h}$  into (3.2.79) and note that  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(e_{2h}, \phi_{1h} - \bar{\phi}_h) dt = 0$ , to obtain

$$-(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \langle r_{2h}, e_{2ht} \rangle + a(r_{2h}, e_{2h}) \right) dt + (r_{2h+}^{n-1}, e_{2h+}^{n-1}) = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e_{2h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt. \quad (3.2.81)$$

Setting  $v_h = r_{2h}$  into (3.2.80), and noting  $\int_{t^{n-1}}^{t^n} b(r_{2h}, p_{1h} - \bar{p}_h) dt = 0$  we deduce,

$$\begin{aligned} (e_{2h}^n, r_{2h}^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -\langle e_{2h}, r_{2ht} \rangle + a(e_{2h}, r_{2h}) \right) dt - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) \\ = \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( -(1/\alpha)\langle \bar{r}, r_{2h} \rangle - (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.2.82)$$

Integrating by parts with respect to time in (3.2.82), and subtracting the resulting equation from (3.2.81), we arrive to

$$(r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left( \|e_{2h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1/\alpha)\|r_{2h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) dt = -(1/\alpha) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \langle \bar{r}, r_{2h} \rangle dt. \quad (3.2.83)$$

Using Young's inequality to bound the right hand side, adding the resulting inequalities from 1 to  $N$ , and noting that  $\sum_{n=1}^N ((r_{2h+}^n, e_{2h}^n) - (e_{2h}^{n-1}, r_{2h+}^{n-1})) = 0$  (since  $e_{2h}^0 \equiv 0$ ,  $r_{2h+}^N = 0$ ) we obtain the first estimate. For the second estimate, we simply set  $v_h = e_{2h}$  into (3.2.80) and use the previous estimate on  $r_{2h}$ . Finally, the third estimate easily follows by setting  $v_h = r_{2h}$  into (3.2.79), the estimate on  $\|e_{2h}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$  and standard algebra.  $\square$

Various estimates can be derived, using results of Theorem 3.2.39 and Lemma 3.2.41 and standard

approximation theory results. We begin by stating an almost symmetric error estimates which can be viewed as the analogue of the classical Céa's Lemma.

**Theorem 3.2.42.** *Let  $(\bar{y}_h, \bar{p}_h)$ ,  $(\bar{\mu}_h, \bar{\phi}_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{Q}_h$  and  $(\bar{y}, \bar{p})$ ,  $(\bar{\mu}, \bar{\phi}) \in W_S(0, T) \times L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$  denote the approximate solutions of the discrete and continuous optimality systems (3.1.22)-(3.1.23)-(3.1.20) and (2.3.16)-(2.3.17)-(2.3.18) respectively. Let  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$  denote the projection error, where  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  defined in Definition of 3.2.35, and 3.2.36 respectively. Then, the following estimate holds for the error  $e = \bar{y} - \bar{y}_h$  and  $r = \bar{\mu} - \bar{\mu}_h$ :*

$$\| (e, r) \|_{W_S(0, T)} \leq \tilde{C}(1/\alpha^{3/2})(\| (e_p, r_p) \|_{W_S(0, T)} + \| \bar{p} - q_h \|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} + \| \bar{\phi} - q_h \|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}),$$

where  $\tilde{C}$  depends upon constants of Theorem 3.2.39, and Lemma 3.2.41,  $1/\nu^2$ , and is independent of  $\tau, h, \alpha$ , and  $q_h \in \mathcal{Q}_h$  arbitrary.

*Proof.* First, we observe that an estimate for  $\| e_{2h} \|_{L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}$  and  $\| r_{2h} \|_{L^\infty[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}$  can be derived identical to [32, Theorem 4.6] since the (3.2.78)-(3.2.79) are uncoupled due to the estimate of Lemma 3.2.41. Therefore, the estimate follows by using triangle inequality and previous estimates of Theorem 3.2.39 and Lemma 3.2.41.  $\square$

An improved estimate for the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm for the state, and adjoint follow by combining the estimates of Theorem 3.2.39, and the first estimate of Lemma 3.2.41.

**Theorem 3.2.43.** *Suppose that  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , and the assumptions of Theorem 3.2.39 and Lemma 3.2.41 hold. Let  $e_p = \bar{y} - Q_h^{loc} \bar{y}$ ,  $r_p = \bar{\mu} - P_h^{loc} \bar{\mu}$  denote the projection error, where  $P_h^{loc}$ ,  $Q_h^{loc}$  defined in Definition of 3.2.35, and 3.2.36 respectively. Then, there exists a constant  $C$  depending upon  $\Omega, 1/\nu$  such that,*

$$\begin{aligned} \| e \|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\leq C(1/\alpha^{1/2}) \left( \| e_p \|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \| r_p \|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{1/2} (\| e_p \|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \| \bar{p} - q_h \|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}) \right. \\ &\quad \left. + \tau^{1/2} (\| r_p \|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \| \bar{\phi} - q_h \|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}) \right), \\ \| r \|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C \left( \| e_p \|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \| r_p \|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{1/2} (\| e_p \|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \| \bar{p} - q_h \|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}) \right. \\ &\quad \left. + \tau^{1/2} (\| r_p \|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \| \bar{\phi} - q_h \|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}) \right). \end{aligned}$$

*Proof.* The first estimate follows by using triangle inequality and previous estimates of Theorem 3.2.39 and Lemma 3.2.41.  $\square$

We close this subsection by stating convergence rates in two cases for the Taylor-Hood element, depending on the available regularity. Obviously a variety of other estimates can be derived, depending on the chosen elements.

**Proposition 3.2.44.** *Suppose that the assumptions of Theorem 3.2.39 and Lemma 3.2.41 hold.*

1) *Let  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , and there exists  $\bar{p} \in L^2[0, T; L_0^2(\Omega)]$ , such that the weak formulation (2.3.20) is valid. Assume that the Taylor-Hood element are being used to construct the subspaces and piecewise constants polynomials  $k = 0$  for the temporal discretization. Then, for  $\tau \leq Ch^2$  we obtain,*

$$\| e \|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq Ch \quad \text{and} \quad \| r \|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq Ch.$$

2) *Let  $\bar{y}, \bar{\mu} \in L^2[0, T; \mathbf{H}^3(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$ ,  $\bar{p}, \bar{\phi} \in L^2[0, T; H^2(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ . Suppose that the Taylor-Hood element combined with piecewise polynomials of degree  $k$  for the temporal*

discretization are being used, then the following rates hold:

$$\begin{aligned}\|(e, r)\|_{W(0,T)} &\leq \tilde{C}(1/\alpha^{3/2})(h^2 + \tau^{k+1}), \\ \|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C(1/\alpha^{1/2})(h^3 + \tau^{k+1} + \tau^{1/2}(h^2 + \tau^{k+1})), \\ \|r\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &\leq C(h^3 + \tau^{k+1} + \tau^{1/2}(h^2 + \tau^{k+1})).\end{aligned}$$

*Proof.* The rates directly follow from Theorem 3.2.39, Theorem 3.2.43, Lemma 3.2.37 and Remark 3.2.40.  $\square$

### 3.2.4.3 Control Constraints: The variational discretization approach

We demonstrate that the variational discretization approach of Hinze ([65]) can be used within our framework. In the variational discretization approach the control is not discretized explicitly, and in particular we define  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$ . Thus, our discrete optimal control problem now coincides to: Minimize functional

$$J_h(y_h(g), g) = \int_0^T \|y_h(g) - y_d\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt + \alpha \int_0^T \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt$$

subject to (3.1.2), where  $y_h(g) \in \mathcal{U}_h$  denotes the solution of (3.1.2) with right hand side given control  $g \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . The optimal control (abusing the notation, denoted again by  $\bar{g}_h$ ) satisfies the following first order optimality condition,

$$J'_h(\bar{g}_h)(u - \bar{g}_h) \geq 0, \quad \text{for all } u \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)],$$

where  $\bar{g}_h$  takes the form  $\bar{g}_h = Proj_{[g_a, g_b]}(-\frac{1}{\alpha}\bar{\mu}_h(\bar{g}_h))$ , similar to continuous case. We note that the  $\bar{g}_h$  is not in general a finite element function corresponding to our finite element mesh. Thus its algorithmic construction requires extra care (see e.g. [65]). However, in most cases the quantity of interest is the state variable, and not the control. For the second derivative we easily obtain an estimate independent of  $\bar{g}, \bar{g}_h$ , and in particular,

$$J''_h(u)(\tilde{u}, \tilde{u}) \geq \alpha \|\tilde{u}\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}^2, \quad \text{for all } \tilde{u} \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)].$$

**Theorem 3.2.45.** *Let  $y_0 \in \mathbf{W}(\Omega)$ ,  $f \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , and  $y_d \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , and there exists an associated pressure  $\bar{p} \in L^2[0, T; L^2_0(\Omega)]$ . Suppose that  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$  and let  $\bar{g}, \bar{g}_h$  denote the solutions of the corresponding continuous and discrete optimal control problems. Then, the following estimate hold:*

$$\begin{aligned}\|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(1/\alpha)\|\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g})\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \\ &\leq C(\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|r_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \\ &\quad + \tau^{1/2}(\|e_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{p} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}) \\ &\quad + \tau^{1/2}(\|r_p\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \|\bar{\phi} - q_h\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}),\end{aligned}$$

where  $(\mu_h(\bar{g}), \phi_h(\bar{g}))$  and  $(\mu(\bar{g}), \bar{\phi})$  denote the solutions of (3.1.19) and (2.3.15) respectively, and  $e_p \equiv y(\bar{g}) - Q_h^{loc}y(\bar{g})$ ,  $r_p = \mu(\bar{g}) - P_h^{loc}\mu(\bar{g})$  the corresponding projection errors. Furthermore, if  $\tau \leq Ch^2$ ,

$$\|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} \leq Ch.$$

*Proof.* We note that  $\mathcal{A}_{ad}^d \equiv \mathcal{A}_{ad}$ , and hence the first order necessary conditions imply that

$$J'_h(\bar{g}_h)(\bar{g} - \bar{g}_h) \geq 0 \quad \text{and} \quad J'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) \leq 0. \quad (3.2.84)$$

Therefore, using the second order condition and the mean value theorem, we obtain for any  $u \in L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , (and hence for the one resulting from the mean value theorem) and inequalities (3.2.84),

$$\begin{aligned} \alpha \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}^2 &\leq J_h''(u)(\bar{g} - \bar{g}_h, \bar{g} - \bar{g}_h) = J_h'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) - J_h'(\bar{g}_h)(\bar{g} - \bar{g}_h) \\ &\leq J_h'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) - J'(\bar{g})(\bar{g} - \bar{g}_h) = \int_0^T \int_{\Omega} (\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g}))(\bar{g} - \bar{g}_h) dx dt \\ &\leq C \|\mu(\bar{g}) - \mu_h(\bar{g})\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}, \end{aligned}$$

which clearly implies the first estimate. Now, a rate of convergence can be obtained using similar arguments to Theorem 3.2.39. Indeed, note that subtracting (3.1.19) from (2.3.15) and setting  $\bar{r} = \mu_h(\bar{g}) - \mu(\bar{g})$ , and  $\bar{e} = y_h(\bar{g}) - y(\bar{g})$ . Using the estimates of Theorem 3.2.39, and the rates of Proposition 3.2.44, we obtain the desired estimate, after noting the reduced regularity of  $\bar{e}$ .  $\square$

After studying the convergence rates in the relevant norms for each of the studied problems in the following chapters we describe the corresponding experimental results and verify the corresponding theoretical results.



# 4

## ROBIN BOUNDARY CONTROL EXPERIMENT IN LINEAR PARABOLIC PDES

---

*This chapter presents the theoretical principles and the experimental results for a boundary control problem for linear parabolic partial differential equations with Robin boundary conditions.*

### Contents

---

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.1   | Robin boundary conditions, setting the model . . . . .          | 214 |
| 4.1.1 | Smooth initial data . . . . .                                   | 214 |
| 4.1.2 | Nonsmooth initial data . . . . .                                | 219 |
| 4.1.3 | Experiment using linear polynomials in space and time . . . . . | 219 |

---

### 4.1 Robin boundary conditions, setting the model

According to the theory in previous chapters related to Robin boundary control problem we want to minimize the functional

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt$$

with constraints,

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= f, & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ y + \lambda^{-1} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} &= g, & \text{in } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0, x) &= y_0, & \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

We consider numerical examples for the model problem in space  $\Omega \times I = \Omega \times [0, T] = [0, 1]^2 \times [0, 0.1]$  in cases of:

- a) Smooth initial data for the state variable (with known analytical solution) using constant polynomials in time, and linear polynomials in space,
- b) Discontinuous initial data  $y_0 \in L^2(\Omega)$  - in this case we mention that we have not known analytical solution, and we consider exact solution the solution to space - time mesh  $dt = 2.71267e - 05$ ,  $h = 5.20833e - 03$  (3687 and 37249 degrees of freedom, respectively), and
- c) Smooth initial data for the state variable (with known analytical solution) using linear polynomials in time and space.

Note that the boundary control function does not have continuous first derivatives at certain points.

We stabilize the regularization parameter of the functional with  $\alpha = \pi^{-4}$ . The boundary optimal control problem is solved with the software package FreeFem ++, see e.g. [64] using a gradient algorithm to a 4 Six-Core AMD Opteron (tm) Processor 8431, 96 GB RAM computer.

#### 4.1.1 Smooth initial data

Let  $a = -\sqrt{5}$ . We choose force

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2) &= \pi^2 e^{a\pi^2 t} \left( 2(x_2^2 - x_2 + x_1^2) \cos(\pi x_1 x_2) \cos(\pi x_1(x_2 - 1)) \right. \\ &\quad \left. - (2x_2^2 - 2x_2 + 2x_1^2 + a + 1) \sin(\pi x_1 x_2) \sin(\pi x_1(x_2 - 1)) \right), \end{aligned}$$

initial data  $y_0(x_1, x_2) = \sin(\pi(1 + x_1 x_2)) \sin(\pi x_1(x_2 - 1))$ , with optimal pair  $(\bar{y}, \bar{g})$ , and

$$\bar{y}(t, x_1, x_2) = \exp(a\pi^2 t) \sin(\pi(1 + x_1 x_2)) \sin(\pi x_1(x_2 - 1)),$$

while  $\bar{g}$  has been calculated using the Robin boundary condition in each component of the square  $\Gamma_i$ ,



$i = 1, \dots, 4$  (starting from the bottom) side of the boundary with

$$\bar{g}(t, x_1, x_2) = e^{\pi^2 at} \begin{cases} 0 & \text{in } \Gamma_1, \\ \pi x_2 \sin(\pi x_2 - \pi) + \pi(1 - x_2) \sin(\pi x_2) & \text{in } \Gamma_2, \\ \cos(\pi(x_2 - 1)) & \text{in } \Gamma_3, \\ 0 & \text{in } \Gamma_4. \end{cases}$$

For this data option and target function  $y_d(t, x_1, x_2) = 0.5$ , the corresponding errors for the state variable and the control function for different meshes are shown in Table 4.1.

**Table 4.1:** Rates of Convergence for the two-dimensional solution with  $k = 0$ ,  $\tau = h^2/2$  smooth initial data and  $y_d = 0.5$ .

| Discretization  | Errors                         |                                |             |
|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
| $\tau = h^2/2$  | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$   |
| $h = 0.2357022$ | 0.018310605                    | 0.070340370                    | 0.002395820 |
| $h = 0.1178511$ | 0.004085497                    | 0.031958661                    | 0.001857961 |
| $h = 0.0589255$ | 0.001335615                    | 0.016375314                    | 0.001738954 |
| $h = 0.0294627$ | 0.000766443                    | 0.008819160                    | 0.001711876 |
| $h = 0.0147313$ | 0.000676697                    | 0.005626214                    | 0.001705198 |
| Rates           | 1.526118558                    | 0.998546583                    | -           |

The convergence rates we can see above is according to the theory and equal to 1.5 for  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm and 1 for  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  norm ( $\mathcal{O}(\tau + h^{3/2})$  and  $\mathcal{O}(\tau + h)$  respectively, in accordance with theoretical results of Proposition 3.2.13). In particular, the convergence rate 1.5 for  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm is the best we can get with these boundary data, since from the projection definition is the  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$  norm that limits the size of the convergence rate on the boundary. So instead of having convergence rate 2 as we have in the distributed control with zero Dirichlet boundary conditions, the convergence rate decreases in value 1.5.

Similar results have been obtained for target functions 0, and  $0.5 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)$ . More specifically observing the results shown in Tables 4.1, 4.2, 4.3 for different target functions, we can see almost the same convergence rates for the state variable errors in spaces  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  and  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  and similar values for the functional.

**Table 4.2:** Convergence rates for the 2d solution with  $k = 0$ ,  $\tau = h^2/2$  smooth initial data and  $y_d = 0$ .

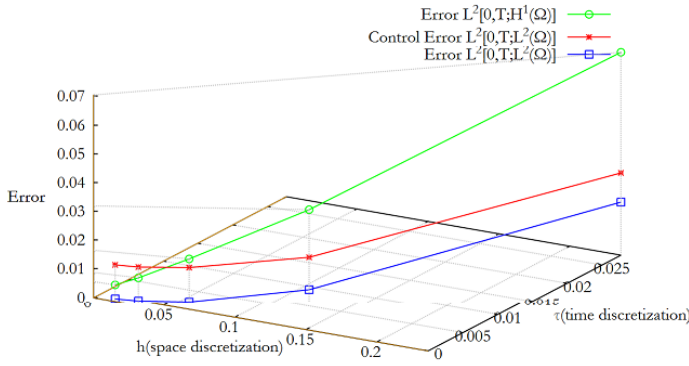
| Discretization  | Error                          |                                |             |
|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
| $\tau = h^2/2$  | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$   |
| $h = 0.2357022$ | 0.018437187                    | 0.070206813                    | 0.003505277 |
| $h = 0.1178511$ | 0.004163875                    | 0.036356131                    | 0.002718328 |
| $h = 0.0589255$ | 0.001477032                    | 0.017039099                    | 0.002520912 |
| $h = 0.0294627$ | 0.000961147                    | 0.010077840                    | 0.002473947 |
| $h = 0.0147313$ | 0.000883837                    | 0.007476681                    | 0.002462163 |
| Rate            | 1.420572191                    | 0.875175799                    | -           |

A 3d Figure 4.1 shows from a different view how the errors vary in spaces  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  and  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  as  $\tau, h$  change. In particular starting with  $h = 0.2357022$ , and  $\tau = 0.05555449$ , we have relatively large errors for the  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  norm error, and enough smaller for the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , 0.070 and 0.018 respectively.

As the experiment progresses the errors are reduced until they become 0.0056 and 0.00067 respectively where at this point they begin to stabilize because of the very dense spatial and temporal discretization,

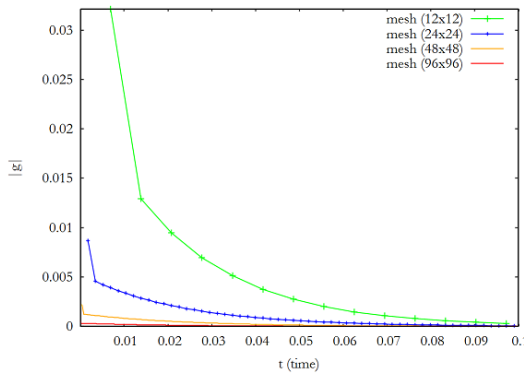
**Table 4.3:** Convergence rates for the 2d solution with  $k = 0$ ,  $\tau = h^2/2$  smooth initial data and  $y_d = 0.5 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)$ .

| Discretization<br>$\tau = h^2/2$ | Error                          |                                |             |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|
|                                  | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$   |
| $h = 0.2357022$                  | 0.018033381                    | 0.070977749                    | 0.004957926 |
| $h = 0.1178511$                  | 0.003666894                    | 0.032317405                    | 0.004953116 |
| $h = 0.0589255$                  | 0.001015930                    | 0.016629768                    | 0.004905743 |
| $h = 0.0294627$                  | 0.000821597                    | 0.009086474                    | 0.004909695 |
| $h = 0.0147313$                  | 0.000879346                    | 0.005954120                    | 0.004907448 |
| Rates                            | 1.485364815                    | 0.988524738                    | -           |

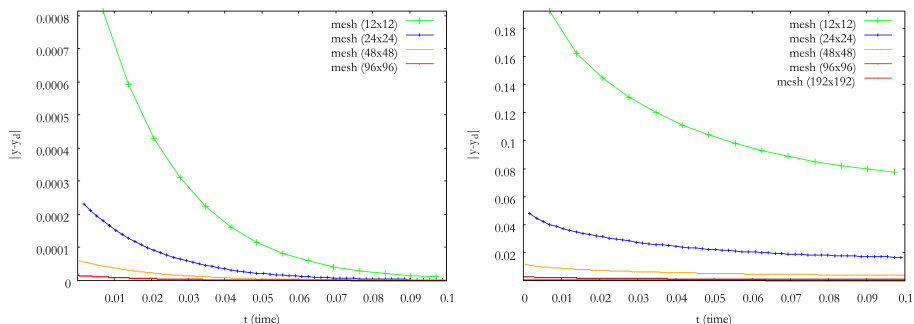


**Figure 4.1:** Errors for the state and control variable for  $\tau = h^2/2$ .

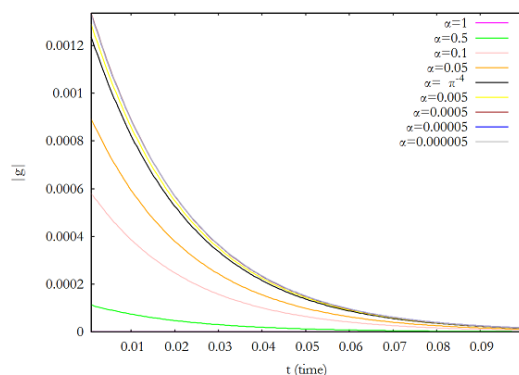
and therefore the integration and rounding errors. In the above graph it is clear also that the errors for the control function stabilized faster since the gradient algorithm “work” more in the early steps to have a desired control. A 2d Figure 4.2, shows how  $\|g(t)\|_{L^2(\Omega)}$  norm for the control function varies as time passes in  $\tau, h$  different meshes. The left Figure of 4.3, shows how the distance from the target  $\|y(t) - y_d(t)\|_{L^2(\Omega)}$ , varies as time passes in different meshes, and more particularly the more dense mesh we use the smaller distance from the target we get.



**Figure 4.2:** Norm for the control function  $\|g(t)\|_{L^2(\Omega)}$ .



**Figure 4.3:** Distance from target  $\|y(t) - y_d(t)\|_{L^2(\Omega)}$ . a) Smooth data. b) Nonsmooth data - discontinuity.



**Figure 4.4:** Effects to the control  $\|g(t)\|_{L^2(\Omega)}$  as regularization parameter  $\alpha$  varies with fixed mesh  $48 \times 48$ .

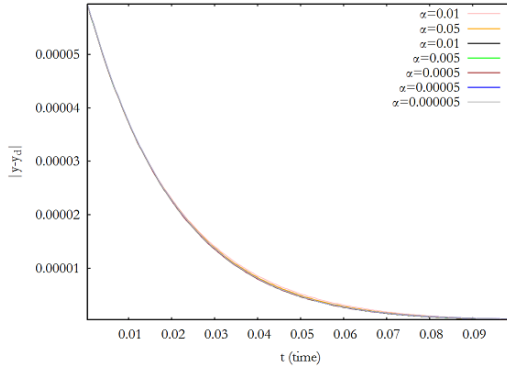
**Effects to the functional as regularization parameter  $\alpha$  changes.** Figure 4.4 shows that for small values of  $\alpha$ , gradient method uses big control values, and vice versa small control for big values for  $\alpha$ . We also noted that it's better to take  $10^{-1} < \alpha < 10^{-5}$ .

**Distance between numerical solution and target function.** An important observation is that we didn't notice change in the progress of the distance of the numerical solution from the target for the different values of  $\alpha$  as shown in Figure 4.5.

**The algorithm for piecewise constant polynomials in time.** For the above results we used the following code after we initialized  $n = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , tolerance  $tol$  and initial control  $g^0|_{\Gamma}$ . We note that e.g.  $y^n$  is a sequence of piecewise linear polynomials in time (and every term of this sequence is another sequence piecewise in space) in  $n$ th iteration of the gradient method.

- **Step 0 (Initial state)** For  $g|_{\Gamma} := g^0|_{\Gamma}$ ,  $y =: y^0$  solve the system

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= f, \\ y|_{\Gamma} + \lambda^{-1} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} &= g|_{\Gamma}, \\ y(0, x) &= y_0, \end{aligned}$$



**Figure 4.5:** Effects to the numerical solution and target function distance  $\|y(t) - y_d(t)\|_{L^2(\Omega)}$  as  $\alpha$  varies.

- **Step 1** (*Conjugate equation*) Solve for  $\mu =: \mu^n$ ,

$$\begin{aligned}\mu_t + \Delta\mu &= y - y_d, \\ \mu|_{\Gamma} + \lambda^{-1} \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{n}} &= 0, \\ \mu(T, x) &= 0.\end{aligned}$$

- **Step 2** (*New descent direction*) Choose as descent direction the negative gradient of the cost functional

$$-J'(g|_{\Gamma}) = -(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma})$$

- **Step 3** (*Checking step  $\varepsilon_n$* ): Find optimal size of  $\varepsilon_n$ :

$$J(g^n|_{\Gamma} + \varepsilon_n(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma})) = \min_{\varepsilon > 0} J(g^n|_{\Gamma} + \varepsilon(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma}))$$

- **Step 4** (*New control function*): Set

$$g^{n+1}|_{\Gamma} := g^n|_{\Gamma} + \varepsilon_n(\alpha g^n|_{\Gamma} + \mu^n|_{\Gamma})$$

- **Step 5** (*New state*): Check if  $J^n \leq J^{n-1}$  and set  $\varepsilon = 1.5\varepsilon$ . If  $J^n \geq J^{n-1}$  set  $\varepsilon = 0.5\varepsilon$ . Go to **Step 0** with  $g|_{\Gamma} := g^{n+1}|_{\Gamma}$  for  $y =: y^n$  and  $n = n + 1$ . Stop if  $|J^n - J^{n-1}|/J^n \leq \text{tol}$ .

Please note that for the solution of the state equation you need to write the basic equation in suitable discontinuous in time Galerkin form. Specifically, the approximation functions are piecewise constant polynomials in time so the method turns to the modified backward Euler (method dG0) :

$$(I + dtA)y_{i+1} + y_{i+1}|_{\Gamma} = y_i + g_{i+1}|_{\Gamma} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f ds.$$

Similarly for the solution of the conjugate equation we need to write the backward in time equation in the form

$$(I + dtA)\mu_i + \mu_i|_{\Gamma} = \mu_{i+1} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (y_i - y_d) ds.$$

Where operator  $A$  corresponds to the Laplace operator.

### 4.1.2 Nonsmooth initial data

This experiment has the same  $\Omega$ ,  $T$ , as in the first example, e.g.,  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $T = 0.1$ . The difference is that the initial data  $y_0$  is a discontinuous function defined by

$$y_0 = \begin{cases} \sin(\pi(1 + x_1x_2))\sin(\pi x_1(x_2 - 1)) & \text{if } x_1, x_2 \geq 0.5, \\ 10 + \sin(\pi(1 + x_1x_2))\sin(\pi x_1(x_2 - 1)) & \text{else.} \end{cases}$$

For this experiment the error results are shown in the Table 4.4, where the rate of  $\mathcal{O}(h)$  when  $\tau \leq Ch^2$ , for the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm is verified for the state and adjoint variable. Comparing the convergence rate results and the expected convergence rate we see better rates because of the way of the “exact solution” construction. Comparing also this example, with the smooth data example we observe that the functional has bigger values and the error e.g. in  $h = 0.014$  is also larger. The results give a little

**Table 4.4:** Convergence rates for the 2-d solution with  $k = 0$ ,  $\tau = h^2/2$  and nonsmooth initial data.

| Discretization   | Errors                           |                                  |              |
|------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------|
| $\tau = h^2/2$   | $\ e\ _{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.2357022$  | 0.4093275092                     | 0.008552165422                   | 0.9411555956 |
| $h = 0.1178511$  | 0.1555909764                     | 0.005056762072                   | 0.8225865966 |
| $h = 0.0589255$  | 0.0714820269                     | 0.002440981965                   | 0.7424795375 |
| $h = 0.0294627$  | 0.0302970740                     | 0.001179518135                   | 0.7066657202 |
| $h = 0.01473139$ | 0.0100448501                     | 0.001097951813                   | 0.6883517113 |
| Rate             | 1.2520017243                     | 0.952697386266                   | -            |

bit better rate of convergence due to the constructive way of the state variable. Obviously the error norm  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  doesn't give a rate, since the data  $y_0 \in L^2(\Omega)$  and the initial discontinuity is disseminated through characteristics in the whole exact solution. Finally the right graph in Figure 4.3, shows how the distance from target function reduces as time evolves, and as we expected it is more difficult the state variable to reach the target (under the control function effect).

### 4.1.3 Experiment using linear polynomials in space and time

To illustrate the potential applicability of higher order time stepping schemes, we consider a coarse time-stepping approach based on the  $k = 1$  time stepping scheme. Here, we return to the Example 4.1.1, with the known smooth solution  $y$  given by  $\bar{y}(t, x_1, x_2) = \exp(a\pi^2 t)\sin(\pi(1 + x_1x_2))\sin(\pi x_1(x_2 - 1))$ , for  $k = 1$ ,  $l = 1$ . Note that despite the fact that we have chosen smooth state variable, the presence of a Robin boundary control limits the regularity at least near by the boundary for the time derivative of the adjoint and control variables. However overall, we expect that the parabolic regularity will appear as time progresses. Our best approximation type estimates for “smooth” state, adjoint and control variables yield a convergence rate with respect to  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  norm of order  $\mathcal{O}(\tau^2 + h)$ , when piecewise linears are considered for both time and space i.e.,  $k = 1$ ,  $l = 1$ .

In the following experiments we present the rate based on a coarse time stepping approach. In particular, for  $\tau = h^{1/2}$ , and  $\tau = h^{3/4}$  which corresponds to very few time steps compared to the standard approaches, the Tables 4.5, 4.6, clearly indicate that we still obtain a rate, of almost  $\mathcal{O}(h)$ . Of course, it is expected that the rate is suboptimal due to the lack of smoothness near the boundary.

Please note that for the solution of the state equation you need to write the state equation in suitable

**Table 4.5:** Convergence rates for the 2-d solution with  $k = 1$ ,  $l = 1$ ,  $\tau = \mathcal{O}(h^{3/4})$ , smooth initial data and  $y_d = 0$ .

| Discretization  | Error               |                                |                                |           |
|-----------------|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------|
|                 | $\tau = h^{3/4}/16$ | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$ |
| $h = 0.2357022$ | 0.007064919         | 0.071348872                    | 0.002392313                    |           |
| $h = 0.1178511$ | 0.002639725         | 0.031653985                    | 0.002355530                    |           |
| $h = 0.0589255$ | 0.001462584         | 0.017397858                    | 0.002305098                    |           |
| $h = 0.0294627$ | 0.000873854         | 0.009497292                    | 0.002258746                    |           |
| $h = 0.0147313$ | 0.000566631         | 0.005500319                    | 0.002230101                    |           |
| $h = 0.0073656$ | 0.000410072         | 0.003614028                    | 0.002214837                    |           |
| Rate            | 0.910047586         | 0.924325857                    | -                              |           |

**Table 4.6:** Convergence rates for the 2-d solution with  $k = 1$ ,  $l = 1$ ,  $\tau = \mathcal{O}(h^{1/2})$ , smooth initial data and  $y_d = 0$ .

| Discretization  | Error               |                                |                                |           |
|-----------------|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------|
|                 | $\tau = h^{1/2}/16$ | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $J(y, g)$ |
| $h = 0.2357022$ | 0.008385394         | 0.068070558                    | 0.002676642                    |           |
| $h = 0.1178511$ | 0.004769310         | 0.040332082                    | 0.002579619                    |           |
| $h = 0.0589255$ | 0.002736129         | 0.019010050                    | 0.002468955                    |           |
| $h = 0.0294627$ | 0.001954915         | 0.012117836                    | 0.002384007                    |           |
| $h = 0.0147313$ | 0.001398719         | 0.008222888                    | 0.002322462                    |           |
| $h = 0.0073656$ | 0.001003904         | 0.005980212                    | 0.002276926                    |           |
| Rate            | 0.645943041         | 0.762328463                    | -                              |           |

discontinuous in time Galerkin form dG1. Specifically, the approximation functions are piecewise linear polynomials in time and space so the method turns to

$$\begin{aligned}
(y_{h+}^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) &+ \int_{t_{n-1}}^{t^n} \left( -\langle y_{ht}, v_h \rangle + a(y_h, v_h) + \lambda \langle y_h, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt \\
&= (y_h^{n-1}, v_{h+}^{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t^n} \left( \langle f, v_h \rangle + \lambda \langle g, v_h \rangle_{\Gamma} \right) dt, \forall v_h \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; U_h], 1 \leq n \leq N, \\
y^0 &= y_0.
\end{aligned}$$

So if  $k = 1$ , e.g. linear polynomial in time  $t$ , we can write  $y_h(t) = Y_0^n + Y_1^n(t - t_{n-1})/\tau$  in  $(t^{n-1}, t^n]$  with  $\tau = t^n - t^{n-1}$  and for test function  $v_h = \tau^{-l}(s - t_{n-1})^l$  for  $l = 0, 1$  after integration and denoting  $Y_0^n = Y_0$ ,  $Y_1^n = Y_1$  we take the appropriate system, (see the following algorithm) with  $y_i = Y_0 + Y_1$ . Similarly for the solution of the conjugate equation we need to write the backward in time equation with  $\mu_i = M_0 + M_1$ .

**The algorithm for piecewise linear polynomial in time.** Working similarly with the previous algorithm for the above results we used the following code, after initializing  $n = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , tolerance  $tol$  and the control function  $g^0|_{\Gamma}$ . We note that e.g.  $y^n$  is a sequence of piecewise linear polynomials in time (and every term of this sequence is another sequence piecewise in space) in  $n$ th iteration of the gradient method:

- **Step 0** (Initial state) For  $g|_{\Gamma} := g^0|_{\Gamma}$  solve the system  $y =: y^0$

$$\begin{aligned} (I + dtA)Y_0 + (I + \frac{1}{2}dtA)Y_1 + (Y_0 + \frac{1}{2}Y_1)|_{\Gamma} &= g_{i+1}|_{\Gamma} + y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f ds \\ \frac{1}{2}dtAY_0 + (\frac{1}{2}I + \frac{1}{3}dtA)Y_1 + (\frac{1}{2}Y_0 + \frac{1}{3}Y_1)|_{\Gamma} &= \frac{1}{2}g_{i+1}|_{\Gamma} + \frac{1}{dt} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i) f ds \end{aligned}$$

with  $y = Y_0 + Y_1$

- **Step 1** (Conjugate equation) Solve for  $\mu =: \mu^n$ ,

$$\begin{aligned} (I + dtA)M_0 + (I + \frac{1}{2}dtA)M_1 + (M_0 + \frac{1}{2}M_1)|_{\Gamma} &= \mu_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (y_i - y_d) ds \\ \frac{1}{2}dtAM_0 + (\frac{1}{2}I + \frac{1}{3}dtA)M_1 + (\frac{1}{2}M_0 + \frac{1}{3}M_1)|_{\Gamma} &= \frac{1}{dt} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (y_i - y_d)(s - t_i) ds \end{aligned}$$

with  $\mu = M_0 + M_1$

- **Step 2** (New descent direction) Choose as descent direction the negative gradient of the cost functional

$$-J'(g|_{\Gamma}) = -(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma})$$

- **Step 3** (Checking step  $\varepsilon_n$ ): Find optimal size of  $\varepsilon_n$ :

$$J(g^n|_{\Gamma} + \varepsilon_n(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma})) = \min_{\varepsilon > 0} J(g^n|_{\Gamma} + \varepsilon(\alpha g|_{\Gamma} + \mu|_{\Gamma}))$$

- **Step 4** (New control): Set

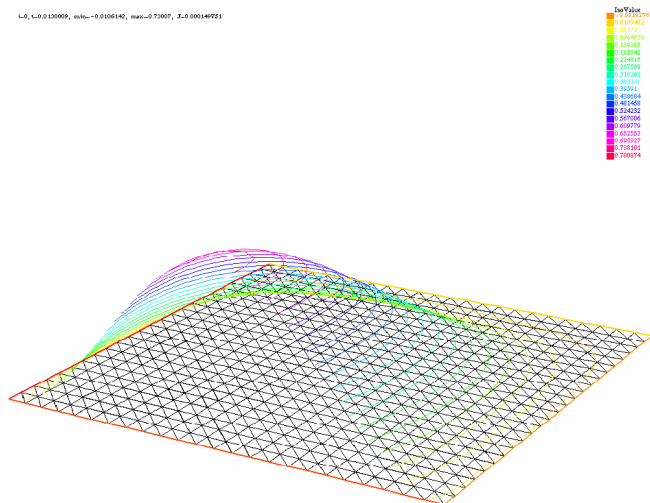
$$g^{n+1}|_{\Gamma} := g^n|_{\Gamma} + \varepsilon_n(\alpha g^n|_{\Gamma} + \mu^n|_{\Gamma})$$

- **Step 5** (New state): Check if  $J^n \leq J^{n-1}$  and set  $\varepsilon = 1.5\varepsilon$ . If  $J^n \geq J^{n-1}$  set  $\varepsilon = 0.5\varepsilon$ . Go to **Step 0** with  $g|_{\Gamma} := g^{n+1}|_{\Gamma}$  for  $y =: y^n$  and  $n = n + 1$ . Stop if  $|J^n - J^{n-1}|/J^n \leq tol$ .

**Remark 4.1.1.** This gradient method is based on the steepest-descent/projected gradient method. Its convergence is slow but it is easy to implement and so suitable for numerical exams. Also because evolutionary problems require great computational effort because of the time change, gradient methods are very useful alternatives methods with them with higher convergence order, requiring less computational resources. The projection step  $\varepsilon_n$  is necessary since the term  $g_i^n + \varepsilon_n(\gamma_i g_i + \mu_i)$  it may not be advisable. In particular, the reduced negative slope is used as search direction and then we calculate the step in this direction. The step  $\varepsilon_n$  is derived from a suitable linear search strategy (line search strategy). A typical gradient method has good prospect to lead to the solution in the first iterations, while decreasing their effectiveness in subsequent iterations. However in the next section (distributed control case in a semilinear parabolic problem) we will improve the code by using Strong Wolfe-Powell conditions and instead of negative derivative directions we will use the Fletcher-Reeves direction.

**Remark 4.1.2.** In Figures 4.6, 4.7 we present some instances for the state and conjugate variable.

**Remark 4.1.3.** It is reasonable to compare these results to that with smooth data in case of  $k = 0$  and  $k = 1$ . Specifically, let us compare for example the results of Tables 4.3 and 4.5. We note that although the convergence order is much smaller for the case  $k = 1$  errors e.g. for  $h = 0.014$  although remain the same for the  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  and approximately equal to 0.005, they are smaller for the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm and equal to 0.008 for  $k = 0$  and 0.005 for  $k = 1$ , i.e. we have better results. It is also noteworthy that in the case  $k = 1$  due to coarse - time stepping although we use the same PC memory we can continue to more dense partitioning. This is possible since we have used less





data storage memory size, since time points is much less, and it plays a crucial role in computer memory allocation. So we can continue into more dense partitioning which allows us to take even better results for the error norm  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$ , from 0.005 for  $k = 0$  to 0.0036 for  $k = 1$ , and for the  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm from 0.008 if  $k = 0$  to 0.0004 if  $k = 1$ . Finally note that for the minimized functional  $J$  from 0.0049 (in the case of  $k = 0$ ) we achieve much lower value of the functional in the case  $k = 1$  and equal to 0.0022.

Next we report that the degrees of freedom in the case of coarse time stepping example  $k = 1$ ,  $\tau = \mathcal{O}(h^{3/4})$ , (see Table 4.5) for every variable of the 5 system variables - 2 for the state, 2 for the conjugate problem and 1 for the control is

- for the spatial part the degrees of freedom we use successively in each mesh are 49, 169, 625, 2401, 9409, 37249, (148225),
- for the time part the degrees of freedom we use successively in each mesh are 5, 8, 14, 23, 38, 64, (108),

while in the case of  $k = 0$ ,  $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ , for every variable of the 3 system variables

- for the spatial part the degrees of freedom we use successively in each mesh are 49, 169, 625, 2401, 9409, (37249),
- for the time part the degrees of freedom we use successively in each mesh are 4, 15, 58, 231, 922, (3687).



# 5

## DISTRIBUTED CONTROL EXPERIMENT IN SEMILINEAR PARABOLIC PDES

---

*This chapter presents the basic concepts and the numerical results for a semilinear parabolic equation with distributed control and zero Dirichlet boundary.*

### Contents

---

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 5.1   | Distributed control - Description of the model . . . . .    | 226 |
| 5.1.1 | Constant polynomials in time, and linear in space . . . . . | 226 |
| 5.1.2 | Strong Wolfe-Powel conditions . . . . .                     | 227 |

---

## 5.1 Distributed control - Description of the model

We described in previous chapters the theory for semilinear problems with distributed control. Now we will verify numerically the posteriori error estimates for  $k = 0$ ,  $l = 1$ , in the cases of  $\tau = h^2$  and  $\tau = h$  for the error control, state and conjugate variable, and we will introduce the strong Wolfe-Powell conditions.

We construct the following numerical example for the model problem with known exact solution in  $\Omega \times (0, T) = (0, 1)^2 \times (0, 0.1)$  and homogenous Dirichlet boundary condition, similar with this in the work [94]. Specifically we minimize the functional

$$J(y, g) = \frac{1}{2} \int_0^T \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

subject to,

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + (1/3)y^3 &= f + g && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ y &= 0 && \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0, x) &= y_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

We choose regularization parameter  $\alpha = \pi^{-4}$ , force

$$f(t, x_1, x_2) = -\pi^4 e^{-\sqrt{5}\pi^2 T} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) + \frac{1}{3} \left( \frac{-1}{2 - \sqrt{5}} \pi^2 e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \right)^3,$$

target function

$$\begin{aligned} y_d(t, x_1, x_2) &= \left( 2\pi^2 e^{-\sqrt{5}\pi^2 T} - \frac{\pi^4}{(2 - \sqrt{5})^2} \left( e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left( e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} - e^{-\sqrt{5}\pi^2 T} \right) \right) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \end{aligned}$$

and initial data  $y_0(x_1, x_2) = \frac{-1}{2 - \sqrt{5}} \pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$ , with a way that the optimal solution  $(y, \mu, g)$  to be

$$\begin{aligned} y(t, x_1, x_2) &= \frac{-1}{2 - \sqrt{5}} \pi^2 e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \\ \mu(t, x_1, x_2) &= (e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} - e^{-\sqrt{5}\pi^2 T}) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \\ g(t, x_1, x_2) &= -\pi^4 (e^{-\sqrt{5}\pi^2 t} - e^{-\sqrt{5}\pi^2 T}) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2). \end{aligned}$$

### 5.1.1 Constant polynomials in time, and linear in space

We used the following code, after initializing  $n = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ , tolerance  $tol$  and control  $g^0|_{\Gamma}$ . We note that e.g.  $y^n$  is a sequence of piecewise linear polynomials in time (and every term of this sequence is another sequence piecewise in space) in  $n$ th iteration of the gradient method.

- **Step 0** (Initial state) For  $g := g^0$  solve  $y =: y^0$

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + \frac{1}{3}y^3 &= g + f, \\ y_{\Gamma} &= 0, \\ y(0, x) &= y_0, \end{aligned}$$

- **Step 1** (Conjugate equation) Find  $\mu =: \mu^n$ ,

$$\begin{aligned}\mu_t + \Delta\mu + y^2\mu &= y - y_d, \\ \mu_\Gamma &= 0, \\ \mu(T, x) &= 0.\end{aligned}$$

- **Step 2** (New descent direction) Choose as descent direction the negative gradient of the cost functional

$$-J'(g) = -(\alpha g + \mu)$$

- **Step 3** (Checking step  $\varepsilon_n$ ): Find optimal size of  $\varepsilon_n$ :

$$J(g^n + \varepsilon_n(\alpha g + \mu)) = \min_{\varepsilon > 0} J(g^n + \varepsilon(\alpha g + \mu))$$

- **Step 4** (New control function): Set

$$g^{n+1} := g^n + \varepsilon_n(\alpha g^n + \mu^n)$$

- **Step 5** (New state): Check if  $J^n \leq J^{n-1}$  then set  $\varepsilon = 1.5\varepsilon$ . If  $J^n \geq J^{n-1}$  set  $\varepsilon = 0.5\varepsilon$ . Go to **Step 0** with  $g := g^{n+1}$  for  $y =: y^n$  and  $n = n + 1$ . Stop if  $|J^n - J^{n-1}|/J^n \leq tol$ .

Please note similarly with the previous chapter that for the solution of the state equation we need to write the basic equation in suitable discontinuous in time Galerkin form:

$$(I + dtA)y_{i+1} + \frac{1}{3}y_{i+1}^3 = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f + g)ds,$$

and for the solution of the conjugate equation we need to write the backward in time equation in the form

$$(I + dtA)\mu_i + y_i^2\mu_i = \mu_{i+1} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (y_i - y_d)ds.$$

The semilinear term was handled with linearization and with fixed point method too and we saw similar results.

**Table 5.1:** Convergence Rates for the 2-d solution in the case of  $k = 0, l = 1$  ( $h = \tau$ ).

| Discretization   | Error                            |                                  |                                      |
|------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
|                  | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.02946280$ | 3.631050                         | 0.05551130                       | 0.02498330                           |
| $h = 0.01473140$ | 1.508560                         | 0.02618430                       | 0.01082740                           |
| $h = 0.00736570$ | 0.772711                         | 0.01454260                       | 0.00561528                           |
| $h = 0.00368285$ | 0.391391                         | 0.00758848                       | 0.00281426                           |
| Rate             | 1.071233                         | 0.95696566                       | 1.05004366                           |

### 5.1.2 Strong Wolfe-Powell conditions

As in previous chapter we use an algorithm based on steepest - descent / projected gradient method . The projection step,  $\varepsilon_n$  is necessary since the direction term, it might not be advisable.

**Table 5.2:** Convergence Rates for the 2-d solution in the case of  $k = 0, l = 1$  ( $h^2 = \tau$ ).

| Discretization  | Error                            |                                  |                                      |
|-----------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
|                 | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.1178510$ | 2.254550                         | 0.04141390                       | 0.07661170                           |
| $h = 0.0589256$ | 1.003230                         | 0.01943350                       | 0.02208320                           |
| $h = 0.0294628$ | 0.470049                         | 0.00914215                       | 0.00546600                           |
| $h = 0.0147314$ | 0.229416                         | 0.00445367                       | 0.00135706                           |
| Rate            | 1.051790                         | 1.06430666                       | 1.89617666                           |

We used the Fletcher-Reeves conjugate direction as search direction and then we computed the step for this direction. The step  $\varepsilon_n$  derived from a suitable linear search (line search strategy). Note that the experiments in this paragraph (see Table 5.3) and specifically when  $k = 0$  although we

**Table 5.3:** Convergence rate for the 2-d problem with  $k = 0, l = 1$  ( $h^2 = \tau$ ).

| Discretization  | Error                            |                                  |                                      |
|-----------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
|                 | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.1178510$ | 2.195070                         | 0.0411142                        | 0.348617                             |
| $h = 0.0589256$ | 0.989756                         | 0.0192208                        | 0.098052                             |
| $h = 0.0294628$ | 0.467749                         | 0.0091017                        | 0.027175                             |
| $h = 0.0147314$ | 0.229123                         | 0.0044466                        | 0.008308                             |
| Rate            | 1.086690                         | 1.0695966                        | 1.796943                             |

wasted more computational resources in memory, we were able to reduce significantly the number of iterations of the double iteration loop of the gradient method from an average of 31 iterations to 23, (keeping almost the same convergence classes and similar effects) using the strong Wolfe - Powel conditions:

1.  $J(y_{k+1}, g_{k+1}) \leq J(y_k, g_k) + \sigma \varepsilon_k J_k^T d_k$  (Armijo rule)
2.  $|J'_{k+1} d_k| \leq -\rho J'_k d_k$

with  $0 < \rho \leq \sigma < 1$  and  $d_{k+1} = -J'_{k+1} + \beta_{k+1} d_k$ ,  $d_0 = -J'_k$  and choosing the Fletcher-Reeves conjugate directions:  $\beta_k = \frac{J_k^T J'_k}{\|J'_{k-1}\|^2}$ .

# 6

## EXPERIMENT FOR STOKES EQUATIONS WITH DISTRIBUTED CONTROL

---

*This chapter presents the basic concepts and the related test results for a distributed control problem in evolutionary Stokes equations with zero Dirichlet boundary conditions.*

### Contents

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>6.1</b> | <b>Distributed control in Stokes - description of the model . . . . .</b> | <b>230</b> |
| 6.1.1      | Smooth data . . . . .   | 231        |
| 6.1.1.1    | Time $k = 0$ and Taylor/Hood space discretization . . . . .               | 231        |
| 6.1.1.2    | Time $k = 1$ , and Taylor/Hood space discretization . . . . .             | 231        |
| 6.1.2      | Rough initial data (discontinuity of $y_0, y_d, g$ ) . . . . .            | 233        |
| 6.1.2.1    | Discretization without control constraints . . . . .                      | 233        |
| 6.1.2.2    | Discretization with control constraints . . . . .                         | 234        |

---

## 6.1 Distributed control in Stokes - description of the model

In this paragraph we examine the mathematical model and the theoretical rates of convergence which examined in previous chapters related to evolutionary Stokes with distributed control.

The examples are based on [60, Section 3]. The pressure and the velocity need to discretized in suitable finite element spaces with the necessary inf-sup conditions. Such spaces include e.g. Taylor Hood  $P2/P1$  elements for the space approximation of velocity/pressure. For the time approximation we will use dG time stepping schemes  $k = 0$ ,  $k = 1$  e.g., piecewise constants and piecewise linears respectively. Our example, focus on the unconstrained and constrained control case, where a classical boot-strap argument implies smooth solutions for the state and adjoint variables, for smooth and non smooth data.

We consider numerical tests in the case  $k = 0$ , and some examples for the more difficult to compute but with better rates of convergence case of  $k = 1$  for the model problem. Our space is  $\Omega \times [0, T] = [0, 2]^2 \times [0, 0.1]$ , choosing  $\bar{y}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$  with known exact solution:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = ((\cos(2kx) - 1) \sin(2my), \sin(2mx)(1 - \cos(2ky)))e^{-\nu t/2} \\ \bar{p} &= e^{-\nu t}((\sin(kx)^2 \sin(my)^2)/k^2 + (\cos(2kx) - 1)^2 \sin(2my)^2 \\ &\quad + \sin(2mx)^2(1 - \cos(2ky))^2)/2, \\ \bar{g} &= (\bar{g}_1, \bar{g}_2),\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\bar{g}_1 &= (((k\nu \sin(kx)^2 - k\nu \cos(kx)^2 + k\nu) \cos(my) \sin(my) + ((-8km^2 - 8k^3) \sin(kx)^2 \\ &\quad + (8km^2 + 8k^3) \cos(kx)^2 - 8km^2) \cos(my) \sin(my)))/ke^{-\nu t/2}, \\ \bar{g}_2 &= (((k^2\nu \sin(2mx) \cos(2ky) - k^2\nu \sin(2mx)) + (-8k^2m^2 - 8k^4) \sin(2mx) \cos(2ky) \\ &\quad + 8k^2m^2 \sin(2mx)))/(2k^2))e^{-\nu t/2},\end{aligned}$$

initial velocity  $\bar{y}_0 = ((\cos(2kx) - 1) \sin(2my), \sin(2mx)(1 - \cos(2ky)))$  and target function  $\mathbf{y}_d = (y_{d1}, y_{d2}) = (0.5, 0.5)$ .

The force term  $f = (f_1, f_2)$  can easily computed from the state equation if we substitute the above exact solution to the equation, and particularly

$$\begin{aligned}f_1 &= (((\cos(kx) \sin(kx) \sin(my)^2 + (16k^2 \cos(kx) \sin(kx))^3 + (16k^2 \cos(kx) \\ &\quad - 16k^2 \cos(kx)^3) \sin(kx) \cos(my)^2 \sin(my)^2 + ((16km \cos(mx) \sin(mx))^3 \\ &\quad - 16km \cos(mx)^3 \sin(mx) \cos(ky)^2 - 8km \cos(mx) \sin(mx)^3 \\ &\quad + 8km \cos(mx)^3 \sin(mx) \sin(ky)^2 + (8km \cos(mx) \sin(mx)^3 \\ &\quad - 8km \cos(mx)^3 \sin(mx) \cos(ky)^2 - 8km \cos(mx) \sin(mx)^3 \\ &\quad + 8km \cos(mx)^3 \sin(mx)))/k)e^{-\nu t}, \\ f_2 &= (((2m \sin(kx)^2 \cos(my) \sin(my) + (-4k^2m \sin(2kx)^2 - 8k^2m \cos(2kx) \\ &\quad + 8k^2m) \cos(2my) \sin(2my) + (4k^3 \sin(2mx)^2 - 4k^3 \sin(2mx)^2 \cos(2ky)) \sin(2ky)) \\ &\quad / (2k^2))e^{-\nu t}.\end{aligned}$$

For the velocity we expect  $\mathcal{O}(h^3 + \tau^{k+1})$  and  $\mathcal{O}(h^2 + \tau^{k+1})$  rates of convergence in  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  and  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  norms respectively.

We choose constant regularisation parameter in the functional  $\alpha = 10^{-4}$ , and the free parameters similar to [32],  $\nu = 1$ ,  $k = \pi$ ,  $m = \pi$ , and  $\lambda = 1$ . The optimal control problem is solved with the



finite elements software package FreeFem++, see e.g. [64], using a gradient algorithm for the control function.

### 6.1.1 Smooth data

In this section we study the case of smooth initial data and we know the (exact) optimal solution. We choose a larger step  $h = 0.47$  comparing to the previous examples because of the bigger  $\Omega$  (square with edge 2), so it is allowed to take such big step. In the end of this chapter we will show the related degrees of freedom.

All the examples present the expected -due to theory- rates of convergence. In general it is difficult to solve numerically the system, and specially for  $k = 1$  where we have a system of 4 equations e.g. only for the velocity vector (similar to each other variable).

#### 6.1.1.1 Time $k = 0$ and Taylor/Hood space discretization

**Example 1** ( $k = 0$  for  $\tau = h^2/8$ ) Let  $\tau = h^2/8$ . We expect

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2) \text{ and } \|e\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2).$$

For this mesh choose the related errors are in Table 6.1.

**Table 6.1:** Convergence rates with  $k = 0$  and  $\tau = h^2/8$ .

| Discretization<br>$\tau = h^2/8$ | Errors                         |                                |  |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|
|                                  | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ \bar{g} - \bar{g}_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.4714050$                  | 0.110215                       | 1.81853                        | 5.33150  |
| $h = 0.2357022$                  | 0.011512                       | 0.43118                        | 0.63211  |
| $h = 0.1178511$                  | 0.002031                       | 0.11109                        | 0.11369  |
| $h = 0.0589255$                  | 0.001255                       | 0.02922                        | 0.07081  |
| Rate                             | 2.152143                       | 1.98600                        | 2.07596  |

#### 6.1.1.2 Time $k = 1$ , and Taylor/Hood space discretization

**Example 2** ( $k = 1$  for  $\tau = h/16$ ) Let  $\tau = h/16$ . We expect

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|e\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2).$$

For this mesh choose the related errors are in Table 6.2. We emphasize that the coarse time stepping  $\tau \approx h$  still gives the expected theoretical rates, which highlights the implicit nature of dG time stepping schemes. Here, we also note that the penalty parameter satisfies  $\alpha \ll h$ , in all mesh-size choices.

**Table 6.2:** Convergence rates with  $k = 1$  and  $\tau = h/16$ .

| Discretization  | Errors                                  |   |   |
|-----------------|---|---|---|
|                 | $\ e\ _{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]}$ | $\ \bar{g} - \bar{g}_h\ _{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.4714050$ | 0.108866                                | 2.315120                                | 5.470750  |
| $h = 0.2357022$ | 0.010535                                | 0.453111                                | 0.607322  |
| $h = 0.1178511$ | 0.001838                                | 0.113375                                | 0.083115  |
| $h = 0.0589255$ | 0.000832                                | 0.028927                                | 0.020270  |
| Rate            | 2.343953                                | 2.107000                                | 2.686666  |

**Example 3** ( $k = 1$  for  $\tau = h^{3/2}/10$ ) Let  $\tau = h^{3/2}/10$ . We expect

$$\|e\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^3), \quad \|e\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2).$$

For this mesh choice the errors are in Table 6.3. Here, we take the errors in  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  norm, with an almost coarse choice of time-stepping.

**Table 6.3:** Convergence rates with  $k = 1$  and  $\tau = h^{3/2}/10$ .

| Discretization  | Error                                   |   |   |
|-----------------|---|---|---|
|                 | $\ e\ _{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]}$ | $\ \bar{g} - \bar{g}_h\ _{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.4714050$ | 0.1138780                               | 2.420150                                | 5.718610  |
| $h = 0.2357022$ | 0.0104282                               | 0.455479                                | 0.610602  |
| $h = 0.1178511$ | 0.0014891                               | 0.112681                                | 0.082763  |
| $h = 0.0589255$ | 0.0004965                               | 0.028212                                | 0.020051  |
| Rate            | 2.6137833                               | 2.140366                                | 2.718333  |

**Example 4** ( $k = 1$  and  $\tau = h^2/8$ ) Let  $\tau = h^2/8$ . We expect

$$\|e\|_{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^3), \quad \|e\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} = \mathcal{O}(h^2).$$

For this mesh choice we take the results as shown in Table 6.4.

**Table 6.4:** Convergence rate with  $k = 1$  and  $\tau = h^2/8$ .

| Discretization  | Error                                   |   |   |
|-----------------|---|---|---|
|                 | $\ e\ _{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]}$ | $\ \bar{g} - \bar{g}_h\ _{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.4714050$ | 0.105817                                | 2.251280                                | 5.320290  |
| $h = 0.2357022$ | 0.010357                                | 0.461360                                | 0.618637  |
| $h = 0.1178511$ | 0.001298                                | 0.112730                                | 0.082865  |
| $h = 0.0589255$ | 0.000355                                | 0.028156                                | 0.020091  |
| Rate            | 2.739333                                | 2.106666                                | 2.671000  |

**Remark 6.1.1.** We can notice that comparing the cases of  $k = 0$  and  $k = 1$ , see e.g. Tables 6.1, 6.4, we have almost the same errors in  $L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]$  norm and almost equal with 0.02922 for  $k = 0$  and 0.028156 for  $k = 1$ . We also see smaller errors for the  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  norm equal to 0.001 if  $k = 0$  to 0.0003 for  $k = 1$ . The minimizing functional is better minimized when  $k = 1$  and particularly has value 0.07 if  $k = 0$ , while if  $k = 1$  it is 0.02.

---

**6.1.2** Rough initial data (discontinuity of  $y_0, y_d, g$ )

---

Finally, we close this section by presenting a computational example with rough (discontinuous) data  $y_0, y_d$ , and unknown true solution. Once again, the model problem is posed in  $\Omega \times [0, T] = [0, 2]^2 \times [0, 0.1]$ . Here, the obvious choice for the discretization in time is piecewise constants (in time)  $k = 0$  combined with the standard Taylor/Hood element in space.

We consider as solution the solution computed in the most advanced partitioned grid of the square (namely  $96 \times 96$ ), comparing it with our computations in each one of the previous meshes using interpolation between different  $U_h$ 's.

---

**6.1.2.1** Discretization without control constraints

---

We apply discontinuity on initial data and on target function  $y_d$  too:

**Example 5** ( $k = 0$  for  $\tau = h^2/8$  and discontinuity) The predicted convergence rates in this example is

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h), \quad \|r\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h).$$

We have force  $f = (f_1, f_2)$  like before but with discontinuity on target function, control and state variable  $y$  and on conjugate  $\mu$  as below:

$$y_d(x_1, x_2) = (y_{d1}(x_1, x_2), y_{d2}(x_1, x_2)),$$

where

$$y_{d1}(x_1, x_2) = y_{d2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.5 + 6, & y \geq 0.5 \text{ and } x \geq 0.5 \\ 0.5, & y < 0.5 \text{ and } x < 0.5 \end{cases},$$

$$y_0(x_1, x_2) = (y_{01}(x_1, x_2), y_{02}(x_1, x_2)),$$

and

$$y_{01}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + (\cos(2kx) - 1)\sin(2my), & y \geq 0.5 \text{ and } x \geq 0.5 \\ (\cos(2kx) - 1)\sin(2my), & y < 0.5 \text{ and } x < 0.5 \end{cases},$$

$$y_{02}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + \sin(2mx)(1 - \cos(2ky)), & y \geq 0.5 \text{ and } x \geq 0.5 \\ \sin(2mx)(1 - \cos(2ky)), & y < 0.5 \text{ and } x < 0.5 \end{cases}.$$

In order to start the gradient algorithm method we used initial control :

$$g_0(x_1, x_2) = (g_{01}(x_1, x_2), g_{02}(x_1, x_2)),$$

with

$$g_{01}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + (((k\nu\sin(kx)^2 - k\nu\cos(kx)^2 + k\nu)\cos(my)\sin(my) \\ -((8km^2 + 8k^3)\sin(kx)^2 + (8km^2 + 8k^3)\cos(kx)^2 - 8km^2) \\ \cos(my)\sin(my)))/k, & \text{for } y \geq 0.5 \text{ and } x \geq 0.5, \\ (((k\nu\sin(kx)^2 - k\nu\cos(kx)^2 + k\nu)\cos(my)\sin(my) \\ -((8km^2 + 8k^3)\sin(kx)^2 + (8km^2 + 8k^3)\cos(kx)^2 - 8km^2) \\ \cos(my)\sin(my)))/k, & \text{for } y < 0.5 \text{ and } x < 0.5, \end{cases}$$

$$g_{02}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6 + (((k^2\nu\sin(2mx)\cos(2ky) - k^2\nu\sin(2mx)) + (-8k^2m^2 - 8k^4)\sin(2mx)\cos(2ky) + 8k^2m^2\sin(2mx))/(2k^2)), & y \geq 0.5 \text{ and } x \geq 0.5, \\ (((k^2\nu\sin(2mx)\cos(2ky) - k^2\nu\sin(2mx)) + (-8k^2m^2 - 8k^4)\sin(2mx)\cos(2ky) + 8k^2m^2\sin(2mx))/(2k^2)), & y < 0.5 \text{ and } x < 0.5. \end{cases}$$

**Table 6.5:** Convergence rates with  $k = 0$  and  $\tau = h^2/8$  with discontinuity on initial data and on target function too.

| Discretization  | Error                          |                                |                             |
|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| $\tau = h^2/8$  | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(\mathbf{y}, \mathbf{g})$ |
| $h = 0.4714050$ | 0.126828                       | 0.0079597                      | 14.80282                    |
| $h = 0.235702$  | 0.036255                       | 0.0015081                      | 9.742095                    |
| $h = 0.117851$  | 0.014052                       | 0.0004364                      | 9.608375                    |
| $h = 0.058925$  | 0.004472                       | 0.0000703                      | 9.619787                    |
| $h = 0.029462$  | -                              | -                              | 9.612306                    |
| Rate            | 1.608596                       | 2.2742714                      | -                           |

**6.1.2.2** Discretization with control constraints

In this subsection we study the case of rough initial data and rough target function and the exact solution is unknown. In Examples 6, 7 we also examine the case of control constraints into two cases: relaxed constraints  $-85 \leq g_i \leq 85$  and more restricted constraints  $-0.5 \leq g_i \leq 0.5$ . In both cases we apply discontinuity on data and on target  $y_d$  as before.

**Example 6 ( $k = 0$  and  $\tau = h^2/8$  with discontinuity and relaxed control constraints)** The predicted convergence rates from the theory are

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h) , \|r\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h).$$

We choose  $f = (f_1, f_2)$  like Example 5 with discontinuity on target, control, state  $y$  and conjugate variable  $\mu$  (the results are in Table 6.6).

For the gradient algorithm starting we used control:

$$g_0(x_1, x_2) = (g_{01}(x_1, x_2), g_{02}(x_1, x_2)) = (0, 0).$$

**Example 7 ( $k = 0$  for  $\tau = h^2/8$  and discontinuity and strict control constraints)** We also expect convergence rates

$$\|e\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h) , \|r\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} = \mathcal{O}(h).$$

We choose  $f = (f_1, f_2)$  like before applying discontinuity on control, state  $y$  but not on target function (the results are in Table 6.7).

We started the gradient method using initial control:

$$g_0(x_1, x_2) = (g_{01}(x_1, x_2), g_{02}(x_1, x_2)) = (6, 6).$$

**Table 6.6:** Convergence rates with  $k = 0$  and  $\tau = h^2/8$  with discontinuity on initial data and on target function, and weak control constraints.

| Discretization | Error                                   |                             |
|----------------|---|-----------------------------|
| $\tau = h^2/8$ | $\ e\ _{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ | $J(\mathbf{y}, \mathbf{g})$ |
| $h = 0.471405$ | 0.125484                                | 14.35750                    |
| $h = 0.235702$ | 0.038590                                | 9.417572                    |
| $h = 0.117851$ | 0.014412                                | 9.289013                    |
| $h = 0.058925$ | 0.004503                                | 9.299375                    |
| $h = 0.029462$ | -                                       | 9.291695                    |
| Rate           | 1.600097                                | -                           |

**Table 6.7:** Convergence rate with  $k = 0$  and  $\tau = h^2/8$ , and discontinuity on initial data and strict control constraints.

| Discretization | Error                                   |                             |
|----------------|---|-----------------------------|
| $\tau = h^2/8$ | $\ e\ _{L^2[0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)]}$ | $J(\mathbf{y}, \mathbf{g})$ |
| $h = 0.471405$ | 0.125664                                | 22.65422                    |
| $h = 0.235702$ | 0.038621                                | 14.78615                    |
| $h = 0.117851$ | 0.014417                                | 14.55425                    |
| $h = 0.058925$ | 0.004504                                | 14.55310                    |
| $h = 0.029462$ | -                                       | 14.53629                    |
| Rate           | 1.600733                                | -                           |

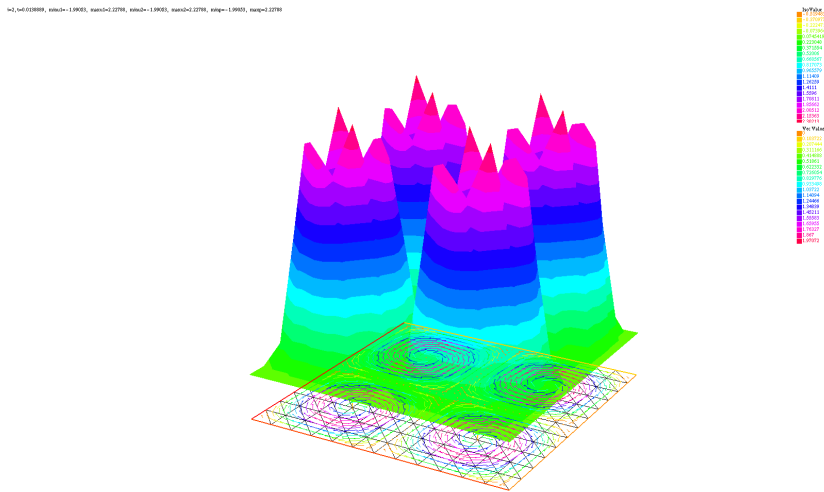
**Remark 6.1.2.** Concerning the examples with unconstrained controls and the examples with strict control constraints for rough initial data, as we can see in Tables 6.5 and 6.7 we notice similar values for the  $L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$  error norm, and the same convergence rate, as it was predicted from the theory, while the minimizing functional has bigger values in the case of strict control constraints.

**Remark 6.1.3.** About Figures 6.1, 6.2 we can see some snapshots of the state variable for example with smooth data in two different meshes. We note that on the bases of the Figures are shown the respective velocity vectors, while the three-dimensional imaging above the basis of figure represents the pressure. About Figures 6.3, 6.4, 6.5 we can see some snapshots of the state variable for the example with rough data for the state and adjoint variable, at the beginning as the algorithm starts and after some time while the state variable is close to the target.

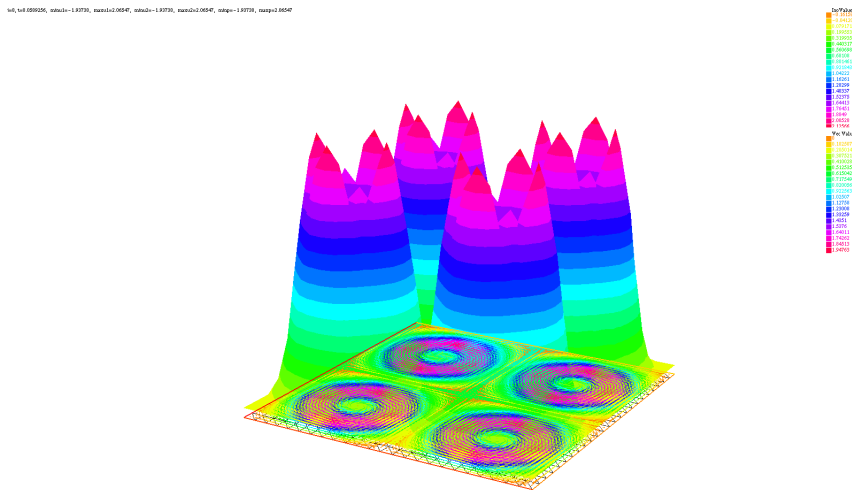
**Remark 6.1.4.** We mention that the degrees of freedom of the above examples, for each partition developed as follows

- If  $\tau = \mathcal{O}(h^2)/8$ , is  $[Uh.ndof, Ph.ndof, Time.ndof] = [169, 49, 72], [625, 169, 288], [2401, 625, 1152], [9409, 2401, 4608], ([37249, 9409, 18432])$  for each mesh,
- If  $\tau = \mathcal{O}(h)/16$ , is  $[Uh.ndof, Ph.ndof, Time.ndof] = [169, 49, 68], [625, 169, 136], [2401, 625, 272], [9409, 2401, 544], ([37249, 9409, 1087])$ ,
- If  $\tau = \mathcal{O}(h^{3/2})/10$ , is  $[Uh.ndof, Ph.ndof, Time.ndof] = [169, 49, 43], [625, 169, 85], [2401, 625, 170], [9409, 2401, 340], ([37249, 9409, 679])$ ,

we also note thato if  $k = 0$  we have to solve the system and find 8 variables - 3 for the state, 3 for the adjoint and 2 for the control, while for  $k = 1$  we have to solve the system and find 14 variables - 6 for the state, 6 for the adjoint and 2 for the control. We recall that each variable is sequence of polynomials in space (values at each grid point).



**Figure 6.1:** State variable snapshot on mesh  $12 \times 12$  and smooth initial data.



**Figure 6.2:** State variable snapshot on mesh  $24 \times 24$  and smooth initial data.

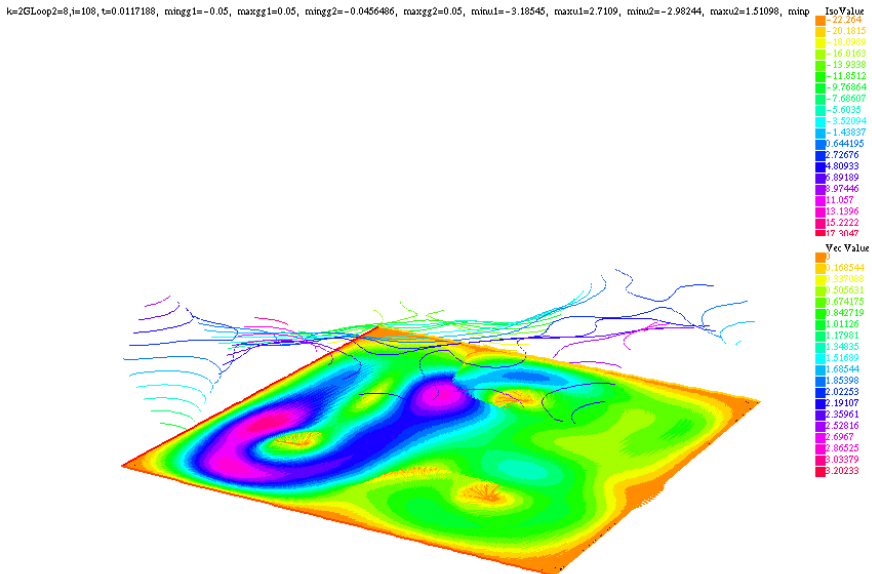


Figure 6.3: State variable snapshot for rough initial data as the algorithm starts.

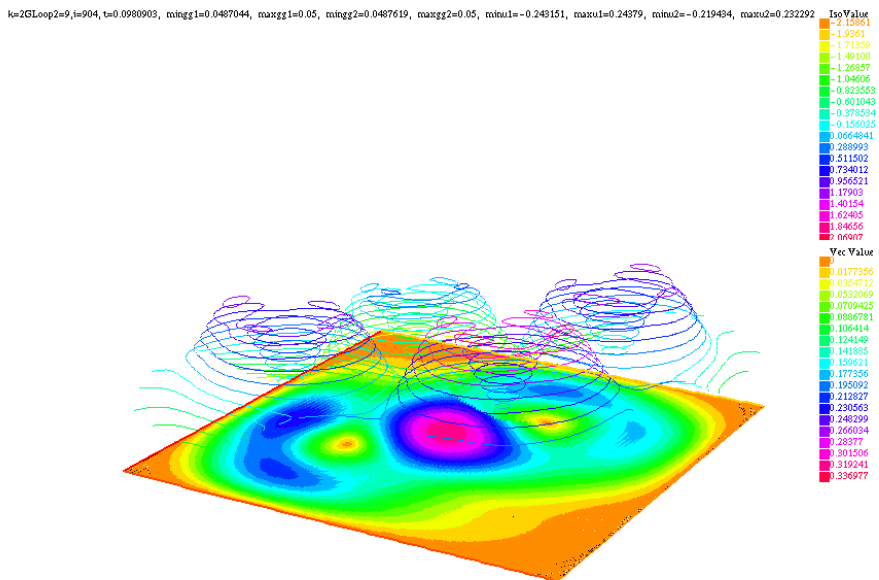
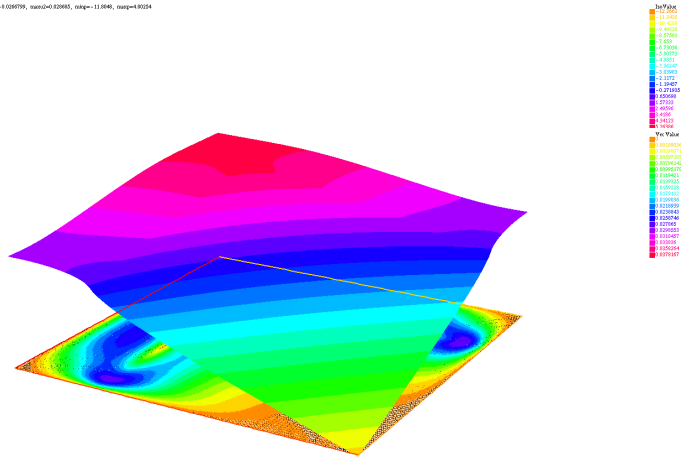


Figure 6.4: State variable snapshot for rough initial data as the algorithm finishes.

110[log(1.411), 141.000101, 10011-0.000101, 10011-0.000101, 10011-0.000101, 10011-0.000101, 10011-0.000101, 10011-0.000101, 10011-0.000101, 10011-0.000101]



**Figure 6.5:** Conjugate variable snapshot for rough initial data.

**Remark 6.1.5.** Finally we recall that in the last examples (nonsmooth case) we considered as solution the solution in advanced grid, and the degrees of freedom in that grid is the numbers enclosed in parentheses as the above remark indicates.



# 7

## AN APPLICATION IN BIOLOGY, EXPERIMENT WITH DISTRIBUTED CONTROL IN SEMILINEAR PARABOLIC SYSTEMS OF PDES

---

*In this chapter we present the basic theoretical concepts and the experimental results for a distributed control problem with zero Dirichlet boundary condition for a FitzHugh-Nagumo system (parabolic equations).*

### Contents

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>7.1</b> | <b>Distributed control subject to FitzHugh-Nagumo systems . . . . .</b> | <b>240</b> |
| 7.1.1      | Introduction - Related results . . . . .                                | 240        |
| 7.1.2      | Description of the model . . . . .                                      | 241        |
| 7.1.3      | Weak form . . . . .   | 241        |
| 7.1.4      | The full discretized system . . . . .                                   | 242        |
| 7.1.5      | Numerical Experiments . . . . .   | 243        |

---

## 7.1 Distributed control subject to FitzHugh-Nagumo systems

---

### 7.1.1 Introduction - Related results

---

The optimal control theory has a lot of useful applications in many scientific fields such as biology, medicine, engineering and sociology. Here we present an application related to biology that shows us how important and directly applicable is the optimal control theory to real problems.

One of the most important discoveries of the 20th century in biophysics is the understanding of the way that nerves carry information. The basic invention is related to transportation of sodium and potassium ions (also sodium and calcium) along the outer membrane of a cell of the nerve to electrical signals which may propagate along the membrane after appropriate stimulation. The Alan Hodgkin and Andrew Huxley (working early in 1950) described the theory of ion transport, they created a mathematical model, and interpreted the experimental data for electrical signals stimulated in squid giant axons and they were awarded the Nobel Prize in Physiology or Medicine in 1963. The original Hodgkin-Huxley model consists of a system with four odes. Simplifications of the basic model, modifications adaptable to other excitable media (e.g. muscle cells) and spatial dependence on space have been studied extensively.

One of the most significant simplifications of the Hodgkin-Huxley model presented by Richard Fitzhugh, from the side of the mathematical and numerical analysis. An electrical circuit for this model built by Jin-Ichi Nagumo. This model of two states, which is still used extensively describes the qualitative electrical behavior of stimulated nerve cells. We will study this model. However we are far from fully understanding the biological excitable media. Many modern studies are focusing on ion transport. Live membranes containing various ion channels (along the membrane) and is selective in specific ions. The transfers and switches that open and close ion channels are fundamental to the functioning of many biological processes. Also, nerve cell networks and other excitable media are ubiquitous in biology. The study of such networks can lead to understand how the brain works. Mathematics are playing an increasing important role in this interdisciplinary research area.

The variable state  $y_1$  represents the voltage and also called, action or membrane potential and  $y_2$  called recovery variable (a voltage variable exhibits a cubic nonlinearity allowing regenerative self-stimulation through positive feedback, and the recovery variable has a linear dynamics that provides a slower negative feedback).

The Fitzhugh-Nagumo model is not constructed to make prediction but to capture quality characteristics of the electrical activity along a neuron.

The most important provision of the model (which agrees with experimental data) is the existence of a limit pulse stimulus that produces travelling electrical voltage (and recovery) waves that propagate away from the spatial location of the stimulus. The traveling wave membrane potential travels and it is the mechanism responsible for the transferring of information along the neuron.

The Hodgkin-Huxley circuit supposedly models the electrical activity at a point of a nerve. The process of opening and closing ion channels is modeled by diffusion of the voltage (which corresponds to the dimensionless state  $y_1$ ). The spatial dependence is modeled as diffusion where  $\delta$  is the diffusivity. Adding this term in the right-hand side of the circuit model and also by changing the spatial variable, we obtain the dimensionless form of Fitzhugh-Nagumo equations. The Fitzhugh-Nagumo diffusion equations models the spatial coupling between ion channels along the nerve.

It is noteworthy that for  $\delta \ll 1$  our system is similar to that described in recent work [78].

|              |                          |
|--------------|--------------------------|
| <b>7.1.2</b> | Description of the model |
|--------------|--------------------------|

In this section we present a mathematical model that relates to the above description, and particularly we want to minimize the functional

$$\begin{aligned}
J(y, g) &= \frac{1}{2} \int_0^T \|y_1 - y_{1d}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T \|g_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \|y_2 - y_{2d}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T \|g_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,
\end{aligned} \tag{7.1.1}$$

subject to

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_1}{\partial t} - \Delta y_1 + y_1^3 - y_1 &= -y_2 + g_1 + f_1 \text{ in } (0, T] \times \Omega, \quad y_1 = 0 \text{ on } (0, T] \times \Gamma, \\
\frac{\partial y_2}{\partial t} - \delta \Delta y_2 + \varepsilon a_1 y_2 &= \varepsilon y_1 + g_2 + f_2 \text{ in } (0, T] \times \Omega, \quad y_2 = 0 \text{ on } (0, T] \times \Gamma, \\
y_1(0, x) &= y_{10} \quad y_2(0, x) = y_{20} \text{ in } \Omega,
\end{aligned} \tag{7.1.2}$$

and the control constraints

$$g_{ia} \leq g_i(t, x) \leq g_{ib} \text{ for a.e. } (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \text{ where } g_{ia}, g_{ib} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

|              |           |
|--------------|-----------|
| <b>7.1.3</b> | Weak form |
|--------------|-----------|

We begin by stating the weak formulation of the state equation. Given  $f_1, f_2 \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ , controls  $g_1, g_2 \in L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ , and states  $y_{10}, y_{20} \in L^2(\Omega)$  we seek  $y_1, y_2 \in L^2[0, T; H_0^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{-1}(\Omega)]$  such that for a.e.  $t \in (0, T]$ , and for all  $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle y_{1t}, v \rangle + \alpha \langle y_1, v \rangle + \langle y_1^3 - y_1, v \rangle &= \langle f_1, v \rangle + \langle g_1, v \rangle \quad \text{and} \quad (y_1(0), v) = (y_{10}, v) \\
\langle y_{2t}, v \rangle + \delta \alpha \langle y_2, v \rangle &= \varepsilon \langle y_1 - a_1 y_2, v \rangle + \langle g_2, v \rangle + \langle f_2, v \rangle \quad \text{and} \quad (y_2(0), v) = (y_{20}, v).
\end{aligned} \tag{7.1.3}$$

An equivalent weak formulation which is more suitable for the analysis of dG schemes is to seek unique optimal pairs  $(y_{gi}, g_i) \equiv (y_i, g_i) \in W(0, T) \times \mathcal{A}_{ad}, i = 1, 2$ . Then, there exists an adjoint  $\mu_1, \mu_2 \in W(0, T) = L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{-1}(\Omega)]$  satisfying,  $\mu_1(T) = \mu_2(T) = 0$  such that for all  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ ,

$$\begin{aligned}
(y_1(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y_{1t}, v_t \rangle + \alpha \langle y_1, v \rangle + \langle y_1^3 - y_1, v \rangle) dt \\
= (y_{10}, v(0)) + \int_0^T (\langle f_1 - y_2, v \rangle) dt + \int_0^T (\langle g_1, v \rangle) dt,
\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

$$\begin{aligned}
(y_2(T), v(T)) + \int_0^T (-\langle y_{2t}, v_t \rangle + \delta \alpha \langle y_2, v \rangle) dt \\
= (y_{20}, v(0)) + \int_0^T (\langle \varepsilon(y_1 - a_1 y_2), v \rangle + \langle f_2, v \rangle) dt + \int_0^T (\langle g_2, v \rangle) dt,
\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\langle \mu_1, v_t \rangle + \alpha(\mu_1, v) + \langle (3y_1^2 - 1)\mu_1, v \rangle) dt \\ & = -(\mu_1(0), v(0)) + \int_0^T ((y_1 - y_{1d}), v) dt \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\langle \mu_2, v_t \rangle + \alpha(\mu_2, v) - \langle \varepsilon a_1 \mu_2, v \rangle) dt \\ & = -(\mu_2(0), v(0)) + \int_0^T ((y_2 - y_{2d}), v) dt, \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

with control constraints:

$$\int_0^T \int_{\Omega} ((\alpha g_1 + \mu_1)(u_1 - g_1), (\alpha g_2 + \mu_2)(u_2 - g_2)) dx dt \geq 0 \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{A}_{ad}. \quad (7.1.8)$$

In addition,  $y_{it}, \mu_{it} \in L^2[0, T; H^{-1}(\Omega)]$ , and note that (7.1.8), is equivalent to

$$g_i(t, x) = Proj_{[g_{ia}, g_{ib}]} \left( -\frac{1}{\alpha} \mu_i(t, x) \right)$$

for a.e.  $(t, x) \in (0, T] \times \Omega$ . In addition,  $\mu_{it} \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap L^2[0, T; L^2(\Omega)]$ ,  $i = 1, 2$ .

**7.1.4** The full discretized system

Let  $(y_h(g_{ih}), g_{ih}) \equiv (y_{ih}, g_{ih}) \in \mathcal{U}_h \times L^2[0, T; U_h]$ ,  $i = 1, 2$ , denote the unique optimal pairs. Then, there exists an adjoint  $\mu_1, \mu_2 \in U_h$  satisfying,  $\mu_{1h+}^N = \mu_{2h+}^N = 0$  such that for all  $v_h \in P_k[t^{n-1}, t_n; U_h]$ , and for all  $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} & (y_1^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle y_{1h}, v_{ht} \rangle + \alpha(y_{1h}, v_h) + (y_{1h}^3 - y_{1h}, v_h)) dt \\ & = (y_1^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle f_1 - y_{2h}, v_h \rangle) dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle g_1, v_h \rangle) dt \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

$$\begin{aligned} & (y_2^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (-\langle y_{2h}, v_{ht} \rangle + \delta \alpha(y_{2h}, v_h)) dt \\ & = (y_2^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \varepsilon(y_{1h} - a_1 y_{2h}), v_h \rangle + \langle f_2, v_h \rangle) dt + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle g_2, v_h \rangle) dt \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

$$\begin{aligned} & (\mu_{1+}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \mu_{1h}, v_{ht} \rangle + \alpha(\mu_{1h}, v_h) + \langle (3y_{1h}^2 - 1)\mu_{1h}, v \rangle) dt \\ & = -(\mu_{1+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} ((y_{1h} - y_{1d}), v) dt \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

$$\begin{aligned} & (\mu_{2+}^n, v^n) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\langle \mu_{2h}, v_{ht} \rangle + \alpha(\mu_{2h}, v_h) - \langle \varepsilon a_1 \mu_{2h}, v_h \rangle) dt \\ & = -(\mu_{2+}^{n-1}, v_+^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^n} ((y_{2h} - y_{2d}), v) dt, \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

with control constraints:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} ((\alpha g_{1h} + \mu_{1h})(u_{1h} - g_{1h}), (\alpha g_{2h} + \mu_{2h})(u_{2h} - g_{2h})) dx dt \geq 0 \quad (7.1.13) \\ & \forall u_{1h}, u_{2h} \in \mathcal{A}_{ad}^d. \end{aligned}$$

In addition, (7.1.13), is equivalent to

$$g_{ih}(t, x) = Proj_{[g_{ia}, g_{ib}]} \left( -\frac{1}{\alpha} \mu_{ih}(t, x) \right), i = 1, 2,$$

for a.e.  $(t, x) \in (0, T] \times \Omega$ .

Due to the limits  $g_{ia}, g_{ib}$  for the control variable, a projection to the set of admissible controls is needed, which is given by the cutoff function:

$$\mathbb{P}_{[g_{ia}, g_{ib}]}(g) = \max\{g_{ia}, \min\{g_{ib}, g\}\}.$$

### 7.1.5 Numerical Experiments

In this section, we are going to validate numerically a priori error estimates for  $k = 0, l = 1$  (constant in time and linear in space polynomials), in the cases  $\tau = \mathcal{O}(h^2)$  and  $\tau = \mathcal{O}(h)$  for the state and conjugate variable in  $L^2[0, T; H_0^1(\Omega)]$  norm, and the control in  $L^2[0, T; L^2(\Omega)]$  norm.

We use an algorithm based in a steepest - descend (projected gradient) method, after we initialized  $n = 0, \varepsilon = 1, tol, g_1^0$  and  $g_2^0$ . We note that e.g.  $y_i^n$  is a sequence of piecewise linear polynomials in time (and every term of this sequence is another sequence piecewise in space) in  $n$ th iteration of the gradient method.

In the case of unconstrained control we assume that  $g_{ia} \rightarrow -\infty, g_{ib} \rightarrow \infty$ . Specifically, we use the code

- **Step 0 (Initial state)** For  $g_1 := g_1^0, g_2 := g_2^0$  solve the system  $y_1 =: y_1^0, y_2 =: y_2^0$

$$\begin{aligned} y_{1t} - \Delta y_1 + y_1^3 - y_1 &= -y_2 + g_1 + f_1, \\ y_{2t} - \delta \Delta y_2 + \varepsilon a_1 y_2 &= \varepsilon y_1 + g_2 + f_2, \\ y_{1\Gamma} = y_{2\Gamma} &= 0, \\ y_1(0, x) = y_{10} \quad y_2(0, x) &= y_{20}, \end{aligned}$$

- **Step 1 (Conjugate equation)** Find  $\mu_1 =: \mu_1^n, \mu_2 =: \mu_2^n$ , after solving the system

$$\begin{aligned} \mu_{1t} + \Delta \mu_1 + (3y_1^2 - 1)\mu_1 &= y_1 - y_{1d}, \\ \mu_{2t} + \delta \Delta \mu_2 + \varepsilon a_1 \mu_2 &= y_2 - y_{2d}, \\ \mu_{1\Gamma} = \mu_{2\Gamma} &= 0, \\ \mu_1(T, x) = \mu_2(T, x) &= 0. \end{aligned}$$

- **Step 2 (New descent direction)** Choose as descent direction the negative gradient of the cost functional

$$-J'(g_1, g_2) = -(\gamma_1 g_1 + \mu_1, \gamma_2 g_2 + \mu_2),$$

- **Step 3 (Checking step  $\varepsilon_n$ ):** Find optimal size of  $\varepsilon_n$

$$\begin{aligned} & J\left(\mathbb{P}_{[g_{1a}, g_{1b}]} \{g_1^n + \varepsilon_n(\gamma_1 g_1 + \mu_1)\}, \mathbb{P}_{[g_{2a}, g_{2b}]} \{g_2^n + \varepsilon_n(\gamma_2 g_2 + \mu_2)\}\right) = \\ & = \min_{\varepsilon > 0} J\left(\mathbb{P}_{[g_{1a}, g_{1b}]} \{g_1^n + \varepsilon(\gamma_1 g_1 + \mu_1)\}, \mathbb{P}_{[g_{2a}, g_{2b}]} \{g_2^n + \varepsilon(\gamma_2 g_2 + \mu_2)\}\right), \end{aligned}$$

- **Step 4** (*New control*): Set

$$g_1^{n+1} := \mathbb{P}_{[g_{1a}, g_{1b}]} \{g_1^n + \varepsilon_n(\gamma_1 g_1^n + \mu_1^n)\},$$

$$g_2^{n+1} := \mathbb{P}_{[g_{2a}, g_{2b}]} \{g_2^n + \varepsilon_n(\gamma_2 g_2^n + \mu_2^n)\},$$

- **Step 5** (*New state*): Check if  $J^n \leq J^{n-1}$  then set  $\varepsilon = 1.5\varepsilon$ . If  $J^n \geq J^{n-1}$  then set  $\varepsilon = 0.5\varepsilon$ . Go to **Step 0** with  $g_1 := g_1^{n+1}$ ,  $g_2 := g_2^{n+1}$ ,  $y_1 := y_1^n$ ,  $y_2 := y_2^n$  and do  $n = n + 1$ . Stop if  $|J^n - J^{n-1}|/J^n \leq tol$ .

We consider the following numerical examples for the model problem with known analytical exact solution on  $\Omega \times (0, T) = (0, 0.01)^2 \times (0, 0.01)$  and homogeneous Dirichlet boundary conditions, similarly with Chapter 5 and the one presented in [27].

We will chose parameters  $\delta = 4, a_1 = 2, L = 0.01, H = 0.01, \varepsilon = 0.0001$  due to the example in [24], and for the size of the control regularization parameters in functional we choose  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10^{-4}$ .

**Example 1.** We assume target function

$$\begin{aligned} y_{1d}(t, x_1, x_2) &= -(e^{-\varepsilon t}(\varepsilon \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 - \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 \\ &+ \pi^2 \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L)L^2 - \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 \\ &+ \pi^2 \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)) + 3 \sin(\pi y/H)^3 H^2 \sin(\pi x/L)^3 L^2 e^{-3\varepsilon t} \\ &- 3e^{-\varepsilon T - 2\varepsilon t} \sin(\pi y/H)^3 H^2 \sin(\pi x/L)^3 L^2 + e^{-\varepsilon T} (\sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 \\ &- \pi^2 \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L)L^2 - \pi^2 \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L))) / (H^2 L^2) \\ y_{2d}(t, x_1, x_2) &= ((((((2a_1 \varepsilon^2 - 1) \sin(\pi y/H)H^2 - 2\delta \varepsilon \pi^2 \sin(\pi y/H)) \sin(\pi x/L) \\ &+ 2\varepsilon \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L)L^2 - 2\delta \varepsilon \pi^2 \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L))e^{T/(2\varepsilon)} \\ &+ (2\delta \varepsilon \pi^2 e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) - 2a_1 \varepsilon^2 e^{t/(2\varepsilon)} \sin((\pi y)/H)H^2) \sin(\pi x/L)L^2 \\ &+ 2\delta \varepsilon \pi^2 e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H)H^2 \sin(\pi x/L))e^{-T/(2\varepsilon) - t/(2\varepsilon)}) / (2\varepsilon H^2 L^2), \end{aligned}$$

and initial conditions

$$y_{10}(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H),$$

$$y_{20}(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H),$$

in a way to guarantee that the optimal solution triples  $(y_1, \mu_1, g_1)$ ,  $(y_2, \mu_2, g_2)$  of the above problem is given by

$$\begin{aligned} y_1(t, x_1, x_2) &= e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\ y_2(t, x_1, x_2) &= e^{-t/(2\varepsilon)} (\sin(\pi x_1/L))(\sin(\pi x_2/H)), \\ \mu_1(t, x_1, x_2) &= (e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon T}) \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H) \\ \mu_2(t, x_1, x_2) &= (e^{t/(2\varepsilon)} - e^{T/(2\varepsilon)}) \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\ g_1(t, x_1, x_2) &= \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( (e^{-3\varepsilon t - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) \sin((\pi x)/L) (e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H)^2 \right. \\ &\quad \left. \sin((\pi x)/L)^2 - \varepsilon e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)})) \right), \\ g_2(t, x_1, x_2) &= \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( a_1 \varepsilon e^{-t/(2\varepsilon)} \sin((\pi y)/H) \sin(\pi x/L) \right). \end{aligned}$$

We emphasize that we have limitations in control and specifically  $g_i \in [g_{ia}, g_{ib}]$ .

**Table 7.1:** Convergence Rates for the 2-d solution, with control constraints in the case of  $k = 0$ ,  $l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ) for the control, state and conjugate variable.

| Discretization    | Errors                           |                                  |                                      |
|-------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| $h = 2\tau$       | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.002357022$ | 0.0439518                        | 88.6349                          | 4.25156e-005                         |
| $h = 0.001178511$ | 0.0214931                        | 31.4208                          | 1.20440e-005                         |
| $h = 0.000589255$ | 0.0108039                        | 12.0744                          | 4.41810e-006                         |
| $h = 0.000294627$ | 0.0054238                        | 5.55306                          | 3.26909e-006                         |
| $h = 0.000147313$ | 0.0027193                        | 2.82740                          | 3.07129e-006                         |
| Rate              | 1.0036512                        | 1.24257                          | 0.947767750                          |

**Table 7.2:** Convergence Rates for the 2-d solution with control constraints in the case of  $k = 0$ ,  $l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ) for the control and conjugate variable.

| Discretization      | Error                            |                                  |                                      |
|---------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| $h = \tau^{1/2}/16$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ r\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = 0.00235702$    | 0.0448696                        | 96.2116                          | 4.3365e-005                          |
| $h = 0.00138889$    | 0.0216560                        | 25.3040                          | 1.2195e-005                          |
| $h = 0.00058925$    | 0.0109022                        | 11.1981                          | 4.4012e-006                          |
| $h = 0.00029462$    | 0.0054459                        | 5.71635                          | 3.1558e-006                          |
| Rate                | 1.0141566                        | 1.35768                          | 1.26015110                           |

**Example 2.** Here we concern unconstrained control function with forces

$$\begin{aligned}
 f_1(t, x_1, x_2) &= (e^{-3\varepsilon t - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) (-e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)} H^2 L^2 + e^{3\varepsilon t} \\
 &\quad + \pi^2 e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)} / H^2 + \pi^2 e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)} / L^2)), \\
 f_2(t, x_1, x_2) &= (e^{-\varepsilon t - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) (-e^{\varepsilon t} - 2\varepsilon^2 e^{t/(2\varepsilon)} \\
 &\quad + 2\pi^2 \delta \varepsilon e^{\varepsilon t} / H^2 + 2\pi^2 \delta \varepsilon e^{\varepsilon t} / L^2)) / (2\varepsilon),
 \end{aligned}$$

target functions

$$\begin{aligned}
 y_{1d}(t, x_1, x_2) &= 2 - \cos(\pi x/L) \sin(\pi y/H), \\
 y_{2d}(t, x_1, x_2) &= 2 - \sin(\pi x/L) \cos(\pi y/H),
 \end{aligned}$$

and initial conditions

$$\begin{aligned}
 y_{10}(x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\
 y_{20}(x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H),
 \end{aligned}$$

in a way to guarantee that the optimal solution triples  $(y_1, g_1)$ ,  $(y_2, g_2)$  are:

$$\begin{aligned}
 y_1(t, x_1, x_2) &= e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\
 y_2(t, x_1, x_2) &= e^{-t/(2\varepsilon)} (\sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H)), \\
 g_1(t, x_1, x_2) &= e^{-3\varepsilon t - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) (e^{t/(2\varepsilon)} \sin((\pi x_2)/H)^2 \sin((\pi x_1)/L)^2 \\
 &\quad - \varepsilon e^{2\varepsilon t + t/(2\varepsilon)}), \\
 g_2(t, x_1, x_2) &= a_1 \varepsilon e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L).
 \end{aligned}$$

This optimal control problem has solved as the examples in previous chapters with package software FreeFem++ too, see e.g. [64].

**Table 7.3:** Functional values and convergence Rates for the 2-d solution, without control constraints in the case of  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ) for the control and state variable.

| Discretization    | Error                            |                                      |              |
|-------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------|
| $h = 2\tau$       | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.002357022$ | 0.0544954                        | 4.74548e-005                         | 5.65672e-006 |
| $h = 0.001178511$ | 0.0219039                        | 1.02414e-005                         | 3.64340e-006 |
| $h = 0.000589255$ | 0.0107374                        | 2.60774e-006                         | 3.49583e-006 |
| $h = 0.000294627$ | 0.0054011                        | 7.16507e-007                         | 3.52582e-006 |
| $h = 0.000147313$ | 0.0027120                        | 2.46111e-007                         | 3.53950e-006 |
| Rate              | 1.0815777                        | 1.8972500000                         | -            |

**Table 7.4:** Functional values and convergence Rates for the 2-d solution, without control constraints in the case of  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ) for the control and state variable.

| Discretization      | Error                          |                                  |                                      |              |
|---------------------|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------|
| $h = \tau^{1/2}/22$ | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H_0^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.002357022$   | 6.28133e-005                   | 0.0544269                        | 4.73965e-005                         | 5.64252e-006 |
| $h = 0.001388890$   | 1.30951e-005                   | 0.0218849                        | 1.02321e-005                         | 3.63497e-006 |
| $h = 0.000589250$   | 3.27452e-006                   | 0.0108686                        | 2.63420e-006                         | 3.55844e-006 |
| $h = 0.000294627$   | 8.19355e-007                   | 0.0054478                        | 7.20667e-007                         | 3.55338e-006 |
| Rate                | 2.0868133333                   | 1.1068586                        | 2.0131000000                         | -            |

**Example 3.** In this example we have constrained control function in the interval  $[g_a, g_b]$  and with forces:

$$\begin{aligned}
 f_1(t, x_1, x_2) &= (e^{-3\epsilon t - t/(2\epsilon)}(e^{t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H)^3 H^2 \sin(\pi x/L)^3 L^2 - \epsilon e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)} \\
 &\quad \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 - e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 \\
 &\quad + e^{3\epsilon t} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 + \pi^2 e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) L^2 \\
 &\quad - \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( e^{-3\epsilon t} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) (\sin(\pi y/H)^2 \sin(\pi x/L)^2 - \epsilon e^{2\epsilon t}) \right) \\
 &\quad e^{3\epsilon t + t/(2\epsilon)} H^2 L^2 + \pi^2 e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) \Big) / (H^2 L^2), \\
 f_2(t, x_1, x_2) &= (e^{-\epsilon t - t/(2\epsilon)} (2a_1 \epsilon^2 e^{\epsilon t} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 - e^{\epsilon t} \sin(\pi y/H) \\
 &\quad H^2 \sin(\pi x/L) L^2 - 2\epsilon^2 e^{t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) L^2 + 2\pi^2 \delta \epsilon e^{\epsilon t} \\
 &\quad \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) L^2 - 2\epsilon \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( a_1 \epsilon e^{-t/(2\epsilon)} \sin(\pi y/H) \sin(\pi x/L) \right) \\
 &\quad e^{\epsilon t + t/(2\epsilon)} H^2 L^2 + 2\pi^2 \delta \epsilon e^{\epsilon t} \sin(\pi y/H) H^2 \sin(\pi x/L) \Big) / (2\epsilon H^2 L^2),
 \end{aligned}$$

the same target function and initial conditions as Example 2 in a way to guarantee that the optimal solution pairs  $(y_1, g_1), (y_2, g_2)$  of the above problem is given by

$$\begin{aligned}
 y_1(t, x_1, x_2) &= e^{-\epsilon t} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\
 y_2(t, x_1, x_2) &= e^{-t/(2\epsilon)} (\sin(\pi x_1/L)) (\sin(\pi x_2/H)), \\
 g_1(t, x_1, x_2) &= \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( e^{-3\epsilon t - t/(2\epsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) (e^{t/(2\epsilon)} \sin(\pi x_2/H)^2 \right. \\
 &\quad \left. \sin(\pi x_1/L)^2 - \epsilon e^{2\epsilon t + t/(2\epsilon)}) \right), \\
 g_2(t, x_1, x_2) &= \mathcal{P}_{Q_{ad}} \left( a_1 \epsilon e^{-t/(2\epsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) \right).
 \end{aligned}$$



For this choice of data the corresponding errors for the state and the control variable for different meshes are shown in Tables 7.5 and 7.6.

**Table 7.5:** Rates of convergence for the 2d solution with  $k = 0$ ,  $l = 1$   $\tau = \mathcal{O}(h)$ .

| Discretization    | Error                            |                                      |              |
|-------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------|
|                   | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1_0(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = 0.002357022$ | 0.0544956                        | 5.26533e-005                         | 5.65673e-006 |
| $h = 0.001178511$ | 0.0219040                        | 1.20416e-005                         | 3.64340e-006 |
| $h = 0.000589255$ | 0.0107375                        | 3.21396e-006                         | 3.49583e-006 |
| $h = 0.000294620$ | 0.0054011                        | 1.06383e-006                         | 3.52583e-006 |
| $h = 0.000147310$ | 0.0027120                        | 3.96590e-007                         | 3.53950e-006 |
| Rate              | 1.0821677                        | 1.7631825000                         | -            |

**Table 7.6:** Rates of convergence for the 2d solution with  $k = 0$ ,  $l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ).

| Discretization      | Error                          |                                  |                                      |              |
|---------------------|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|--------------|
|                     | $\ e\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $\ e\ _{L^2[0,T;H^1_0(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ | $J(y, g)$    |
| $h = \tau^{1/2}/22$ |                                |                                  |                                      |              |
| $h = 0.002357022$   | 6.28160e-005                   | 0.0544271                        | 5.25886e-005                         | 5.64252e-006 |
| $h = 0.001388890$   | 1.30974e-005                   | 0.0218850                        | 1.20306e-005                         | 3.63497e-006 |
| $h = 0.000589250$   | 3.27688e-006                   | 0.0108686                        | 3.24638e-006                         | 3.55844e-006 |
| $h = 0.000294627$   | 8.21734e-007                   | 0.0054478                        | 1.06902e-006                         | 3.55339e-006 |
| Rate                | 2.0854400000                   | 1.1068586                        | 1.8734666666                         | -            |

**Example 4.** In this example the target function has very high values and “away” from the values of the state variable. We note that in this example the control is unconstrained. The forces on the right-hand side are:

$$\begin{aligned}
 f_1(t, x_1, x_2) &= -(-(\pi^2 e^{-\varepsilon t}) \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L))/H^2 + e^{-3\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H)^3 \sin(\pi x_1/L)^3 \\
 &\quad - \varepsilon e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) - e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) \\
 &\quad + e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_2/L), \\
 f_2(t, x_1, x_2) &= (\pi^2 \delta e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L))/H^2 - \varepsilon e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) \\
 &\quad + a_1 \varepsilon e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) - (e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L))/(2\varepsilon),
 \end{aligned}$$

target functions

$$\begin{aligned}
 y_{1d}(t, x_1, x_2) &= -\sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) e^{-\varepsilon T - 3\varepsilon t} (-\varepsilon H^2 L^2 e^{\varepsilon T + 2\varepsilon t} - 2H^2 L^2 e^{\varepsilon T + 2\varepsilon t} + \pi^2 L^2 e^{\varepsilon T + 2\varepsilon t} \\
 &\quad + \pi^2 H^2 e^{\varepsilon T + 2\varepsilon t} + 3 \sin(\pi x_2/H)^2 H^2 \sin(\pi x_1/L)^2 L^2 e^{\varepsilon T} \\
 &\quad - 3e^{\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H)^2 H^2 \sin(\pi x_1/L)^2 L^2 + e^{3\varepsilon t} H^2 L^2 - \pi^2 e^{3\varepsilon t} L^2 - \pi^2 e^{3\varepsilon t} H^2) / (H^2 L^2), \\
 y_{2d}(t, x_1, x_2) &= e^{-T/(2\varepsilon) - t/(2\varepsilon)} / (2\varepsilon H^2 L^2) (((2a_1 \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1) \sin(\pi x_2/H) H^2 \\
 &\quad - 2\pi^2 \delta \varepsilon \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) L^2 - 2\pi^2 \delta \varepsilon \sin(\pi x_2/H) H^2 \sin(\pi x_1/L)) e^{T/(2\varepsilon)} \\
 &\quad + (2\pi^2 \delta \varepsilon e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) - 2a_1 \varepsilon^2 e^{t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) H^2) \sin(\pi x_1/L) L^2 \\
 &\quad + 2\pi^2 \delta \varepsilon \exp(t/(2\varepsilon)) \sin(\pi x_2/H) H^2 \sin(\pi x_1/L)),
 \end{aligned}$$

and he same initial conditions as Example 2 in a way to guarantee that the optimal solution triples  $(y_1, \mu_1, g_1)$ ,  $(y_2, \mu_2, g_2)$  of the above problem is given by

$$\begin{aligned}
 y_1(t, x_1, x_2) &= e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_1/L) \sin(\pi x_2/H), \\
 y_2(t, x_1, x_2) &= e^{-t/(2\varepsilon)} (\sin(\pi x_1/L)) (\sin(\pi x_2/H)), \\
 \mu_1(t, x_1, x_2) &= (e^{\varepsilon T} - e^{\varepsilon t}) e^{-\varepsilon T - \varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L), \\
 \mu_2(t, x_1, x_2) &= (e^{T/(2\varepsilon)} - e^{t/(2\varepsilon)}) e^{-T/(2\varepsilon) - t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L), \\
 g_1(t, x_1, x_2) &= \pi^2 e^{-\varepsilon t} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) / L^2, \\
 g_2(t, x_1, x_2) &= \pi^2 \delta e^{-t/(2\varepsilon)} \sin(\pi x_2/H) \sin(\pi x_1/L) / L^2.
 \end{aligned}$$

For this choice of data the corresponding errors for the state and the control variable for different meshes are shown in Tables 7.7 and 7.8.

**Table 7.7:** Rates of convergence for the 2d solution with  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ).

| Discretization  | Error                                |                                      |  |  |                                      |
|-----------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|--|--------------------------------------|
|                 | $\ e_{y_1}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{y_2}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{\mu_1}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{\mu_2}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = \tau$      |                                      |                                      |  |  |                                      |
| $h = 0.0023570$ | 0.07174                              | 0.0457565                            | 1.64568e-006                           | 0.017634                               | 9.29315                              |
| $h = 0.0013888$ | 0.02924                              | 0.0192318                            | 6.74248e-007                           | 0.007384                               | 1.96774                              |
| $h = 0.0005892$ | 0.01438                              | 0.0096866                            | 3.32127e-007                           | 0.003687                               | 0.50788                              |
| $h = 0.0002946$ | 0.00723                              | 0.0048361                            | 1.62793e-007                           | 0.001809                               | 0.14044                              |
| $h = 0.0001473$ | 0.00362                              | 0.0024077                            | 8.07215e-008                           | 0.000890                               | 0.04936                              |
| Rate            | 1.07636                              | 1.0620475                            | 1.086875                               | 1.07702                                | -                                    |

**Table 7.8:** Rates of convergence for the 2d solution with  $k = 0, l = 1$  ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ).

| Discretization      | Error                                |                                      |  |  |                                      |
|---------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|--|--------------------------------------|
|                     | $\ e_{y_1}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{y_2}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{\mu_1}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ e_{\mu_2}\ _{L^2[0,T;H^1(\Omega)]}$ | $\ g - g_h\ _{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ |
| $h = \tau^{1/2}/22$ |                                      |                                      |  |  |                                      |
| $h = 0.0023570$     | 0.071655                             | 0.044594                             | 1.97478e-006                           | 0.0225159                              | 9.087240                             |
| $h = 0.0013888$     | 0.029221                             | 0.019430                             | 6.69304e-007                           | 0.0074020                              | 1.985270                             |
| $h = 0.0005892$     | 0.014532                             | 0.009640                             | 3.21201e-007                           | 0.0035714                              | 0.506377                             |
| $h = 0.0002946$     | 0.007271                             | 0.004792                             | 1.58142e-007                           | 0.0017506                              | 0.139421                             |
| $h = 0.0001473$     | 0.003634                             | 0.002391                             | 7.92880e-008                           | 0.0008706                              | 0.049084                             |
| Rate                | 1.075285                             | 1.0552                               | 1.15961                                | 1.173165                               | -                                    |

**Remark 7.1.1.** It should be noted that in all examples in this chapter, the values for  $h$  are smaller than those of the examples in the previous chapters. This is because the experiment occurs in a more microscopic level, and particularly to the square with edge length 0.01. The time step values  $\tau$  is smaller too since we perform experiments with the choices  $\tau = \mathcal{O}(h)$ , and  $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ . This does not affect the number of space-time degrees of freedom in each grid, which is similar to previous chapters and also similar to the size of tables which is need to be stored in computer memory.

Nevertheless, the expected convergence rates for errors that are observed in  $L^2[0, T; H^1(\Omega)]$  are the same as those in the semilinear optimal control problem in Chapter 6. That's because this problem is also an equation system with semilinear term, see also the same rates in the work [24] (Fitzugh-Nagumo system without control). However in the last example, using more extreme target, extreme values for control and making a more detailed study on each variable, we observe much larger errors for control but it is noteworthy that we have again the expected convergence rates as shown in Tables 7.8 and 7.7.

**Remark 7.1.2.** Finally, note that, as expected, comparing the problems with control constraints with the corresponding unconstrained control problems we have similar error rates of convergence for state

---

*and conjugate variables but higher values for the control errors, as well as the minimization functional (see similar phenomena and examples in evolutionary Stokes problems with constrained control in Chapter 7).*



# LIST OF TABLES

---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4.1 | Rates of Convergence for the two-dimensional solution with $k = 0$ , $\tau = h^2/2$ smooth initial data and $y_d = 0.5$ . . . . .  | 215 |
| 4.2 | Convergence rates for the 2d solution with $k = 0$ , $\tau = h^2/2$ smooth initial data and $y_d = 0$ . . . . .  | 215 |
| 4.3 | Convergence rates for the 2d solution with $k = 0$ , $\tau = h^2/2$ smooth initial data and $y_d = 0.5 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)$ . . . . .  | 216 |
| 4.4 | Convergence rates for the 2-d solution with $k = 0$ , $\tau = h^2/2$ and nonsmooth initial data. . . . .   | 219 |
| 4.5 | Convergence rates for the 2-d solution with $k = 1$ , $l = 1$ , $\tau = \mathcal{O}(h^{3/4})$ , smooth initial data and $y_d = 0$ . . . . .  | 220 |
| 4.6 | Convergence rates for the 2-d solution with $k = 1$ , $l = 1$ , $\tau = \mathcal{O}(h^{1/2})$ , smooth initial data and $y_d = 0$ . . . . .  | 220 |
| 5.1 | Convergence Rates for the 2-d solution in the case of $k = 0$ , $l = 1$ ( $h = \tau$ ). . . . .  | 227 |
| 5.2 | Convergence Rates for the 2-d solution in the case of $k = 0$ , $l = 1$ ( $h^2 = \tau$ ). . . . .  | 228 |
| 5.3 | Convergence rate for the 2-d problem with $k = 0$ , $l = 1$ ( $h^2 = \tau$ ). . . . .  | 228 |
| 6.1 | Convergence rates with $k = 0$ and $\tau = h^2/8$ . . . . .  | 231 |
| 6.2 | Convergence rates with $k = 1$ and $\tau = h/16$ . . . . .   | 232 |
| 6.3 | Convergence rates with $k = 1$ and $\tau = h^{3/2}/10$ . . . . .   | 232 |
| 6.4 | Convergence rate with $k = 1$ and $\tau = h^2/8$ . . . . .   | 232 |
| 6.5 | Convergence rates with $k = 0$ and $\tau = h^2/8$ with discontinuity on initial data and on target function too. . . . .   | 234 |
| 6.6 | Convergence rates with $k = 0$ and $\tau = h^2/8$ with discontinuity on initial data and on target function, and weak control constraints. . . . .   | 235 |
| 6.7 | Convergence rate with $k = 0$ and $\tau = h^2/8$ , and discontinuity on initial data and strict control constraints. . . . .   | 235 |
| 7.1 | Convergence Rates for the 2-d solution, with control constraints in the case of $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ) for the control, state and conjugate variable. . . . .                 | 245 |
| 7.2 | Convergence Rates for the 2-d solution with control constraints in the case of $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ) for the control and conjugate variable. . . . .                       | 245 |
| 7.3 | Functional values and convergence Rates for the 2-d solution, without control constraints in the case of $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ) for the control and state variable. . . . .   | 246 |
| 7.4 | Functional values and convergence Rates for the 2-d solution, without control constraints in the case of $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ) for the control and state variable. . . . . | 246 |
| 7.5 | Rates of convergence for the 2d solution with $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ). . . . .   | 247 |
| 7.6 | Rates of convergence for the 2d solution with $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ). . . . .   | 247 |
| 7.7 | Rates of convergence for the 2d solution with $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h)$ ). . . . .   | 248 |
| 7.8 | Rates of convergence for the 2d solution with $k = 0$ , $l = 1$ ( $\tau = \mathcal{O}(h^2)$ ). . . . .   | 248 |



# LIST OF FIGURES

---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 4.1 | Errors for the state and control variable for $\tau = h^2/2$ . . . . .   | 216 |
| 4.2 | Norm for the control function $\ g(t)\ _{L^2(\Omega)}$ . . . . .   | 216 |
| 4.3 | Distance from target $\ y(t) - y_d(t)\ _{L^2(\Omega)}$ . a) Smooth data. b) Nonsmooth data - discontinuity. . . . .                  | 217 |
| 4.4 | Effects to the control $\ g(t)\ _{L^2(\Omega)}$ as regularization parameter $\alpha$ varies with fixed mesh $48 \times 48$ . . . . . | 217 |
| 4.5 | Effects to the numerical solution and target function distance $\ y(t) - y_d(t)\ _{L^2(\Omega)}$ as $\alpha$ varies. . . . .         | 218 |
| 4.6 | Instance of the state variable. . . . .  | 222 |
| 4.7 | Instance of the conjugate variable. . . . .  | 222 |
| 6.1 | State variable snapshot on mesh $12 \times 12$ and smooth initial data. . . . .  | 236 |
| 6.2 | State variable snapshot on mesh $24 \times 24$ and smooth initial data. . . . .  | 236 |
| 6.3 | State variable snapshot for rough initial data as the algorithm starts. . . . .  | 237 |
| 6.4 | State variable snapshot for rough initial data as the algorithm finishes. . . . .  | 237 |
| 6.5 | Conjugate variable snapshot for rough initial data. . . . .  | 238 |





# A

## APPENDIX

---

### Contents

---

**Appendix 1** Projections results.

**Appendix 2** Exponential interpolant.

**Appendix 3** Discrete characteristic



## A.1

 Projections

**Lemma A.1.1.** *Let  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , and  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  defined in Definitions 3.2.1 and 3.2.2 respectively. Then, for all  $v \in L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; L^2(\Omega)]$ . there exists constant  $C \geq 0$  independent of  $h, \tau$  such that*

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} \leq C(h^{l+1} \|v\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}).$$

*If in addition,  $k = 0, l = 1$ , and  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$  then there exists a constant  $C \geq 0$  independent of  $h, \tau$  such that*

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} &\leq C(h \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \tau^{1/2} (\|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \|v_t\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]})), \\ \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} &\leq C(\|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + (\tau/h^2) \|v_t\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]}). \end{aligned}$$

*Let  $k = 0, l = 1$ , and  $v \in L^2[0, T; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)]$ . Then there exists constant  $C \geq 0$  independent of  $h, \tau$  such that,*

$$\|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C(h \|v\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]} + \tau^{1/2} (\|v_t\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; H^2(\Omega)]})).$$

*Proof.* The first estimate is given in [32, Theorem 4.3, and Corollary 4.8]. For the second one, using [32, Theorem 4.3, Corollary 4.8], and the standard approximation properties of  $P_h$ , we obtain for every  $v \in L^2[t^{n-1}, t^n; H^{l+1}(\Omega)]$ , with  $(k+1)^{th}$  derivative with respect to time  $v^{(k+1)} \in L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]$ , the following estimates:

$$\begin{aligned} \|v - P_n^{loc} v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} &\leq C(\|v - P_n v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|P_n v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}) \\ &\leq C(h^l \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^{l+1}(\Omega)]} + (\tau^{k+1}/h) \|v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}). \end{aligned}$$

where at the last estimate we have used an inverse estimate. Therefore,

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} \leq C(h^l \|v\|_{L^2[0, T; H^{l+1}(\Omega)]} + \frac{\tau^{k+1}}{h} \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}).$$

which completes the second estimate. For the second estimate, for any  $t \in (t^{n-1}, t^n]$ , adding and subtracting appropriate terms, and using the definition of  $Q_h^{loc}$ , we obtain,

$$\|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega)]}^2 \leq \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v(t) - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(t^n) - Q_h v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt.$$

For the first term,

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C\tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v_t\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2) dt.$$

The second term can be approximated by triangle inequality, the approximation property  $\|v(t) - Q_h v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|v(t)\|_{H^1(\Omega)}$ , and the bound on  $\|v(t) - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}$ . we define  $e(t) = v(t^n) - v(t)$ , and note that  $(1/2) \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle e_t, e \rangle = -\langle v_t(t), v(t^n) - v(t) \rangle$ . Hence, integrating with respect to time in  $(s, t^n]$ , we obtain  $(1/2) (\|e(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) = \int_s^{t^n} -\langle v_t(t), v(t^n) - v(t) \rangle dt$ . Note that  $e(t^n) = 0$ , and hence we obtain after integration by parts in time,  $(1/2) \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\langle v(s), v(t^n) - v(s) \rangle - \int_s^{t^n} \langle v_t(t), v(t) \rangle dt$ . Thus, dropping positive terms, and using Young's inequality,  $(1/4) \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^{t^n} \|v_t\|_{H^1(\Omega)^*} \|v\|_{H^1(\Omega)} dt$ . Using the embedding  $L^2[s, t^n; H^1(\Omega)] \cap H^1[s, t^n; H^1(\Omega)^*] \subset L^\infty[s, t^n; L^2(\Omega)]$ , Hölder's inequality, and integrating in time from  $t^{n-1}$  to  $t^n$ , we

finally arrive to

$$(1/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C\tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v_t\|_{H^1(\Omega)^*}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2) ds.$$

For the third estimate, we first note that the generalized orthogonal projection  $Q_h : H^1(\Omega)^* \rightarrow U_h$  is stable in  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^*}$  norm. Indeed, for all  $v \in H^1(\Omega)^*$ ,  $w \in H^1(\Omega)$ , by the definition of projections  $Q_h$  and  $P_h$ ,

$$\begin{aligned} \|Q_h v\|_{H^1(\Omega)^*} &= \sup_{w \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle Q_h v, w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} \leq \sup_{w \in H^1(\Omega)} \left( \frac{|\langle Q_h v - v, w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} + \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} \right) \\ &\leq \sup_{w \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle Q_h v - v, w - P_h w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} + \|v\|_{H^1(\Omega)^*}, \end{aligned}$$

where at the last inequality we have used the fact that  $\langle Q_h v - v, P_h w \rangle = 0$ . Note also that by the definition of projection  $P_h$ , we deduce that  $\langle Q_h v - v, w - P_h w \rangle = \langle -v, w - P_h w \rangle$ . Hence, the  $H^1(\Omega)$  stability of the  $P_h$  projection implies,

$$\begin{aligned} \|Q_h v\|_{H^1(\Omega)^*} &\leq \sup_{w \in H^1(\Omega)} \frac{|\langle v, w - P_h w \rangle|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} + \|v\|_{H^1(\Omega)^*} \leq C \frac{\|v\|_{H^1(\Omega)^*} \|w - P_h w\|_{H^1(\Omega)}}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} + \|v\|_{H^1(\Omega)^*} \\ &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)^*}. \end{aligned}$$

Thus, the definition of  $Q_h^{loc}$  for  $k = 0$ ,  $l = 1$ , the inverse estimate  $\|Q_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq C/h \|Q_h v\|_{H^1(\Omega)^*}$ , and the stability of  $Q_h$  in  $H^1(\Omega)^*$  norm, imply

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} &= \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - Q_h v(t^n)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - Q_h v(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|Q_h v(t) - Q_h v(t^n)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \frac{C}{h^2} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|Q_h v(t) - Q_h v(t^n)\|_{H^1(\Omega)^*}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \frac{C}{h^2} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - v(t^n)\|_{H^1(\Omega)^*}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + \frac{C}{h^2} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^n - t) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v_t\|_{H^1(\Omega)^*}^2 ds dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)]} + C \frac{\tau}{h^2} \|v_t\|_{L^2[0, T; H^1(\Omega)^*]} \end{aligned}$$

for all  $v \in L^2[0, T; H^1(\Omega)] \cap H^1[0, T; H^1(\Omega)^*]$ , which completes the proof of the fourth estimate. The last estimate is standard, and can be derived similar to the second one, after noting that  $Q_h^{loc} \equiv P_h^{loc}$ , and  $\frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\langle \nabla v_t, \nabla v \rangle$  and

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|e(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\nabla e(t), \nabla e(t)) + \lambda(e(t), e(t))_\Gamma).$$

Hence, integrating with respect to time in  $(s, t^n]$ , using the product rule, and standard algebra we

obtain,

$$\begin{aligned} -(1/2)(\|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2) &= \int_s^{t^n} -(\nabla v_t(t), \nabla(v(t^n) - v(t)) + \langle e_t, e \rangle_\Gamma) dt \\ &= \int_s^{t^n} ((\nabla v_t(t), \nabla v(t)) + \langle v_t, v \rangle_\Gamma) dt + \int_s^{t^n} -(\nabla v_t(t), \nabla v(t^n)) - \langle v_t, v(t^n) \rangle_\Gamma dt. \end{aligned}$$

Note that we have used the fact that  $e(t^n) = 0$ . Therefore, integrating by parts (in space) the first integral on the right hand side, using the zero Robin condition, Hölder's inequality, and standard algebra, imply

$$\begin{aligned} (1/2)(\|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2) &= \int_s^{t^n} ((v_t, \Delta v) - \left\langle v_t, \frac{\partial v}{\partial n} \right\rangle_\Gamma - \langle v_t, v \rangle_\Gamma) dt + \|\nabla v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - (\nabla v(s), \nabla v(t^n)) + \langle v(s), v(t^n) \rangle_\Gamma - \|v(t^n)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq C\|v_t\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^2(\Omega)]} + \|\nabla v(s)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(t^n)\|_{L^2(\Omega)} + C\|v(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + C\|v(t^n)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq C(\|v_t\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]}^2 + \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; H^2(\Omega)]}^2 + \|\nabla v\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Gamma)]}). \end{aligned}$$

Using a trace theorem to bound  $\|v\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; L^2(\Gamma)]} \leq C\|v\|_{L^\infty[t^{n-1}, t^n; H^1(\Omega)]}$  the embedding  $L^2[t^{n-1}, t^n; H^2(\Omega)] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega)] \subset L^\infty[0, T; H^1(\Omega)]$  and integrating once more from  $t^{n-1}$  to  $t^n$ , we finally arrive to

$$\frac{1}{4} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\nabla e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \leq C\tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^2(\Omega)}^2) ds.$$

which implies the desired estimate upon summation.  $\square$

**Lemma A.1.2.** *Let  $U_h \subset H^1(\Omega)$ , and  $P_h^{loc}, Q_h^{loc}$  defined in Definitions 3.2.35 and 3.2.36 respectively. Then, for all  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^{k+1}[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . there exists constant  $C$  independent of  $h, \tau$  such that*

$$\begin{aligned} \|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h^{l+1} \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}), \\ \|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(h^l \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + \tau^{k+1}/h \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]}), \end{aligned}$$

Let  $k = 0, l \geq 1$ , and  $v \in L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ . Then, there exists constant  $c$  independent of  $h, \tau$  such that,

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} \leq C(h\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]} + \tau^{1/2}(\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)]}).$$

Let  $k = 0, l \geq 1$ , and  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ . Then, there exists a constant  $C > 0$  independent of  $h, \tau$  such that

$$\begin{aligned} \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)]} &\leq C(h\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \tau^{1/2}\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]}), \\ \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(\|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + (\tau^{1/2}/h)(\|v_t\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)]}). \end{aligned}$$

*Proof.* The first estimate is given in [32, Theorem 4.3, and Corollary 4.8]. For the second one, using [32, Theorem 4.3, Corollary 4.8], and the standard approximation properties of  $P_h$ , we obtain for every  $v \in L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]$ , with  $(k+1)^{\text{th}}$  derivative with respect to time  $v^{(k+1)} \in L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{L}^2(\Omega)]$ , the following estimates:

$$\begin{aligned} \|v - P_n^{loc} v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^1(\Omega)]} &\leq C(\|v - P_h v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^1(\Omega)]} + \tau^{k+1} \|P_h v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^1(\Omega)]}) \\ &\leq C(h^l \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)]} + (\tau^{k+1}/h) \|v^{(k+1)}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; \mathbf{L}^2(\Omega)]}). \end{aligned}$$

where at the last estimate we have used an inverse estimate. Thus the second estimate is proved:

$$\|v - P_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C(h^l \|v\|_{L^2[0,T;H^{l+1}(\Omega)]} + \frac{\tau^{k+1}}{h} \|v^{(k+1)}\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}).$$

The third estimate is standard, and we omit the proof. The fourth estimate, follows by well known arguments after simple modifications to handle the divergence free nature of the projection. For completeness, we state the main arguments. For any  $t \in (t^{n-1}, t^n]$ , adding and subtracting appropriate terms, and using the definition of  $Q_h^{loc}$ , we obtain,

$$\|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}^2 \leq \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v(t) - v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(t^n) - Q_h v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt.$$

For the first term, we define  $e(t) = v(t^n) - v(t)$ , and note that  $(1/2) \frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle e_t, e \rangle = -\langle v_t(t), v(t^n) - v(t) \rangle$ . Hence, integrating with respect to time in  $(s, t^n]$ , we obtain  $(1/2) (\|e(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) = \int_s^{t^n} -\langle v_t(t), v(t^n) - v(t) \rangle dt$ . Note that  $e(t^n) = 0$ , and hence we obtain after integration by parts in time,  $(1/2) \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\langle v(s), v(t^n) - v(s) \rangle - \int_s^{t^n} \langle v_t(t), v(t) \rangle dt$ . Thus, dropping positive terms, and using Young's inequality,  $(1/4) \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^{t^n} \|v_t\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} dt$ . Using the embedding  $L^2[s, t^n; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[s, t^n; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)] \subset L^\infty[s, t^n; L^2(\Omega)]$ , Hölder's inequality, and integrating in time from  $t^{n-1}$  to  $t^n$ , we finally arrive to

$$(1/4) \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|e(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C\tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v_t\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2 + \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2) ds,$$

which implies the desired estimate for the first term. The second term, can be proven similarly using triangle inequality, and the approximation property

$$\sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v(t^n) - Q_h v(t^n)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt \leq \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\|v(t^n) - v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(t) - Q_h v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) dt,$$

where the last term can be bounded by  $\|v(t) - Q_h v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ , (note that  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)]$ ). For the last estimate, we will use the previous estimate. We first note that the generalized orthogonal  $Q_h : \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$  is stable  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}$  norm, see e.g. [69], for all  $v \in \mathbf{V}^{-1}(\Omega)$ . Indeed, for all  $v \in \mathbf{V}^{-1}(\Omega)$ ,  $w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , by the definition of projections  $Q_h$  and  $P_h$ ,

$$\begin{aligned} \|Q_h v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} &= \sup_{w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{|\langle Q_h v, w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \leq \sup_{w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \left( \frac{|\langle Q_h v - v, w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \right) \\ &\leq \sup_{w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{|\langle Q_h v - v, w - P_h w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \|v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}, \end{aligned}$$

where at the last inequality we have used the fact that  $\langle Q_h v - v, P_h w \rangle = 0$ . Note also that by the definition of projection  $P_h$ , we deduce that  $\langle Q_h v - v, w - P_h w \rangle = \langle -v, w - P_h w \rangle$ . Hence, the  $H^1(\Omega)$  stability of the  $P_h$  projection in  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  norm for any  $v \in V(\Omega)$ , implies,

$$\begin{aligned} \|Q_h v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} &\leq \sup_{w \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{|\langle v, w - P_h w \rangle|}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \frac{\|v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|w - P_h w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}{\|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \|v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Thus, the definition of  $Q_h^{loc}$  for  $k = 0$ ,  $l \geq 1$ , the inverse estimate  $\|Q_h v\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \leq C/h \|Q_h v\|_{L^2(\Omega)}$ ,

imply

$$\begin{aligned}
 \|v - Q_h^{loc} v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} &= \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - Q_h v(t^n)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &= \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - Q_h v(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|Q_h v(t) - Q_h v(t^n)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &\leq C \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \frac{C}{h} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|Q_h v(t) - Q_h v(t^n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &\leq C \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \frac{C}{h} \left( \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v(t) - v(t^n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &\leq C \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + \frac{C}{h} \left( \sum_{n=1}^N \tau \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|v_t\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2 + \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
 &\leq C \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]} + C \frac{\tau^{1/2}}{h} (\|v_t\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)]} + \|v\|_{L^2[0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)]}).
 \end{aligned}$$

for all  $v \in L^2[0, T; \mathbf{V}(\Omega)] \cap H^1[0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)]$ , which completes the proof of the fourth estimate.  $\square$

## A.2 The exponential interpolant

The polynomial interpolant of functions  $e^{-\rho(t-t^{n-1})}v$ , where  $v \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; V]$  and  $V$  is any linear space, is needed in the proof of the main stability estimate. Here, we quote the definition and the main results from [32].

**Definition A.2.1.** Let  $V$  be a linear space, and  $\rho > 0$  be given. If  $v = \sum_{i=0}^k r_i(t)v_i \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; V]$ , with  $r_i \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n]$  and  $v_i \in V$ , we define the exponential interpolant of  $v$  by

$$\bar{v} = \sum_{i=0}^k \bar{r}_i(t)v_i,$$

where  $\bar{r}_i \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n]$  is the approximation of  $r_i(t)e^{-\rho(t-t^{n-1})}$  satisfying  $r_i(t^{n-1}) = \bar{r}_i(t^{n-1})$  and

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} \bar{r}_i(t)q(t)dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} r_i(t)q(t)e^{-\rho(t-t^{n-1})}dt, \quad q \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n].$$

The following Lemma (see [32, Lemma 3.4]) asserts that the difference  $v - \bar{v}$  remains small in various norms.

**Lemma A.2.2.** Let  $V$  and  $Q$  be linear spaces and  $v \rightarrow \bar{v}$  be the map constructed in Definition A.2.1, for given  $\rho > 0$ . If  $L(\cdot, \cdot) : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  denotes a bilinear mapping and  $v \in \mathcal{P}_k[t^{n-1}, t^n; V]$  then

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} L(\bar{v}(t), q(t))dt = \int_{t^{n-1}}^{t^n} L(v(t), q(t))e^{-\rho(t-t^{n-1})}dt, \quad \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}[t^{n-1}, t^n; Q].$$

If  $(\cdot, \cdot)_V$  is a (semi) inner product on  $V$ , then there exists a constant  $C_k$  independent of  $\rho > 0$ , such that

$$\|v - \bar{v}\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]} \leq C_k \rho (t^n - t^{n-1}) \|v\|_{L^2[t^{n-1}, t^n; V]}.$$

### A.3 The discrete characteristic function

Note that the computation of the error at arbitrary times  $t \in [t^{n-1}, t^n]$  can be facilitated by substituting  $v_h = \chi_{[t^{n-1}, t)} y_h$  into the discrete equations. However, this choice is not available since  $\chi_{[t^{n-1}, t)} y_h$  is not a member of  $\mathcal{U}_h$ , unless  $t$  is actually a partition point. Therefore approximations of such functions need to be constructed. This is done in [31, Section 2.3]. For completeness we state the main results. The approximations are constructed on the interval  $[0, \tau]$ , where  $\tau = t^n - t^{n-1}$  and they are invariant under translations.

Let  $t \in (0, \tau)$ . We consider polynomials  $s \in \mathcal{P}_k(0, \tau)$ , and we denote the discrete approximation of  $\chi_{[0, t)} s$  by the polynomial  $\hat{s} \in \{\hat{s} \in \mathcal{P}_k(0, \tau), \hat{s}(0) = s(0)\}$  which satisfies

$$\int_0^\tau \hat{s} q = \int_0^t s q \quad \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}(0, \tau).$$

The motivation for the above construction stems from the elementary observation that for  $q = s'$  we obtain  $\int_0^\tau s' \hat{s} = \int_0^t s s' = \frac{1}{2}(s^2(t) - s^2(0))$ .

The construction can be extended to approximations of  $\chi_{[0, t)} v$  for  $v \in \mathcal{P}_k[0, \tau; V]$  where  $V$  is a linear space. The discrete approximation of  $\chi_{[0, t)} v$  in  $\mathcal{P}_k[0, \tau; V]$  is defined by  $\hat{v} = \sum_{i=0}^k \hat{s}_i(t) v_i$  and if  $V$  is a semi-inner product space then,

$$\hat{v}(0) = v(0), \quad \text{and} \quad \int_0^\tau (\hat{v}, w)_V = \int_0^t (v, w)_V \quad \forall w \in \mathcal{P}_{k-1}[0, \tau; V].$$

Finally, we quote the main result from [31].

**Proposition A.3.1.** *Suppose that  $V$  is a (semi) inner product space. Then the mapping  $\sum_{i=0}^k s_i(t) v_i \rightarrow \sum_{i=0}^k \hat{s}_i(t) v_i$  on  $\mathcal{P}_k[0, \tau; V]$  is continuous in  $\|\cdot\|_{L^2[0, \tau; V]}$ . In particular,*

$$\|\hat{v}\|_{L^2[0, \tau; V]} \leq C_k \|v\|_{L^2[0, \tau; V]}, \quad \|\hat{v} - \chi_{[0, t)} v\|_{L^2[0, \tau; V]} \leq C_k \|v\|_{L^2[0, \tau; V]},$$

where  $C_k$  is a constant depending on  $k$ .

*Proof.* See [31, Lemma 2.4]. □

**Remark A.3.2.** *Combining the above estimate with standard scaling arguments and the finite dimensionality of  $\mathcal{P}_k[0, \tau]$  we also obtain an estimate of the form*

$$\|\hat{v}\|_{L^\infty[0, \tau; L^2(\Omega)]} \leq C_k \|v\|_{L^\infty[0, \tau; L^2(\Omega)]}.$$



# BIBLIOGRAPHY

---

- [1] G. AKRIVIS AND C. MAKRIDAKIS, Galerkin time-stepping methods for nonlinear parabolic equations, *M2AN Math. Model. and Numer. Anal.*, **38** (2004), 261–289.
- [2] F. ABERGEL AND R. TEMAM, On some control problems in fluid mechanics, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **1**(1990), pp. 303–326.
- [3] G. ALLAIRE AND O. PANTZ, Structural optimization with FreeFem++, *Struct. Multidiscip. Optim.*, **32** (2006), 173–181.
- [4] W. ALT AND U. MACKENROTH, Convergence of Finite Element Approximations to State Constrained Convex Parabolic Boundary Control Problems, *SIAM J. on Control and Optim.*, **27**(4) (1989), pp. 718–736.
- [5] G. ALLAIRE AND O. PANTZ, Structural optimization with FreeFem++, *Struct. Multidiscip. Optim.*, **32** (2006), 173–181.
- [6] T. APEL AND T. FLAIG, Crank-Nicolson schemes for optimal control problems with evolution equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **50** (2012), pp. 1484–1512.
- [7] W. BARTHEL, C. JOHN AND F. TRÖLTZSCH, Optimal boundary control of a system of reaction diffusion equations, *ZAMM.*, **90**(12), (2010), pp. 966–982.
- [8] R.E. BANK AND R.F. SANTOS, Analysis of some moving space-time finite element methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, **30** (1993), pp. 1–18.
- [9] F. BEN BELGACEM, H. EL FEKIH, AND J.-P. RAYMOND, A penalized solving a parabolic equation with nonsmooth Dirichlet boundary *Asympt. Anal.*, **34** (2003), pp 121–136.
- [10] S. BRENNER AND L. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, 1996.
- [11] A. Borzi and R. Griesse, Distributed optimal control for lambda-omega systems, *J. Numer. Math.*, **14** (2006), 17–40.
- [12] E. Casas. An optimal control problem governed by the evolution Navier-Stokes equations. In S.S. Sritharan, editor, *Optimal Control of Viscous Flows*, Philadelphia, 1998. *Frontiers in Applied Mathematics*, SIAM.
- [13] E. CASAS, AND K. CHRYSAFINOS, A discontinuous Galerkin time stepping scheme for the velocity tracking problem, *SIAM. J. Numer. Anal.*, **50** (2012), pp. 2281–2306.
- [14] E. CASAS, AND K. CHRYSAFINOS, Error estimates for the discretization of the velocity tracking problem, *submitted, available at <http://www.math.ntua.gr/chrysafinos>*.
- [15] E. Casas and M. Mateos. Second order optimality conditions for semilinear elliptic control problems with finitely many state constraints. *SIAM J. on Control & Optim.*, 40(5):1431–1454, 2002.
- [16] E. Casas, M. Mateos, and J.-P. Raymond. Error estimates for the numerical approximation of a distributed control problem for the steady-state navier-stokes equations. *SIAM J. on Control & Optim.*, 46(3):952–982, 2007.
- [17] E. CASAS AND M. MATEOS, AND J.-P. RAYMOND, Penalization of dirichlet optimal control *ESAIM COCV*, **15** (2009), pp 782–809.
- [18] E. Casas, M. Mateos and F. Tröltzsch, Error estimates for the numerical approximation of boundary semilinear elliptic control problem, *Comput. Optim. and Appl.*, **31** (2005), 193–219.

- [19] E. Casas and J.-P. Raymond, Error estimates for the numerical approximation of Dirichlet boundary control for semilinear elliptic equation, *SIAM J. Control and Optim.*, **45** (2006), 1586–1611.
- [20] K. Chrysafinos, Discontinuous Galerkin approximations for distributed optimal control problems constrained by parabolic PDE's, *Int. J. Numer. Anal. and Mod.*, **4** (2007), 690–712.
- [21] K. Chrysafinos, Analysis and finite element approximations for distributed optimal control problems for implicit parabolic equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **231** (2009), 327–348.
- [22] K. Chrysafinos, Convergence of discontinuous Galerkin approximations of an optimal control problem associated to semilinear parabolic PDE's, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, **44** (2010), 189–206.
- [23] K. Chrysafinos, Convergence of discontinuous time-stepping schemes for a Robin boundary control problem under minimal regularity assumptions, *Int. J. Numer. Anal. and Model.*, **10(3)** (2013), pp.: 673-696.
- [24] K. CHRYSAFINOS, S. FILOPOULOS AND TH. PAPATHANASIOU, Error estimates for FitzHugh-Nagumo parameter dependent reaction-diffusion system, *ESAIM M2AN.*, **47** (2013), p. 281-304.
- [25] K. CHRYSAFINOS, M.D. GUNZBURGER AND L.S. HOU, Semidiscrete approximations of optimal Robin boundary control problems constrained by semilinear parabolic PDE, *J. Math. Anal. Appl.*, **323** (2006), pp. 891-912.
- [26] K. CHRYSAFINOS, AND L.S. HOU, Error estimates for semidiscrete finite element approximations for linear and semilinear parabolic equations under minimal regularity assumptions, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40** (2002), pp. 282-306.
- [27] K. CHRYSAFINOS AND E. KARATZAS, Symmetric error estimates for discontinuous Galerkin approximations for an optimal control problem associated to semilinear parabolic PDEs, *Disc. and Contin. Dynam. Syst. - Ser. B*, **17** (2012), pp.: 1473 - 1506.
- [28] K. CHRYSAFINOS AND E. KARATZAS, Discontinuous Galerkin time-stepping schemes for Robin boundary control problems constrained to parabolic PDEs, *IFAC Workshop on Control of Systems Governed by PDEs*, (2013).
- [29] K. CHRYSAFINOS AND E. KARATZAS, Symmetric error estimates for discontinuous Galerkin time-stepping schemes for optimal control problems constrained to evolutionary Stokes equations, *Computational Optimization and Applications*, DOI:10.1007/s10589-014-9695-3 (2014).
- [30] K. CHRYSAFINOS AND E. KARATZAS, Error estimates for discontinuous Galerkin time-stepping schemes for Robin boundary control problems constrained to parabolic pdes', *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **52(6)** (2014), pp.: 2837–2862.
- [31] K. CHRYSAFINOS AND N.J. WALKINGTON, Error estimates for the discontinuous Galerkin methods for parabolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **44** (No 1) (2006), pp 349-366.
- [32] K. Chrysafinos and N. J. Walkington, Discontinuous Galerkin approximations of the Stokes and Navier-Stokes equations, *Math. Comp.*, **79** (2010), 2135–2167.
- [33] K. Chrysafinos and N. J. Walkington, Lagrangian and moving mesh methods for the convection diffusion equation, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, **42** (2008), 25–55.
- [34] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Reprint of the 1978 original, *Classics in Applied Math.*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [35] P. CONSTANTIN, *Navier-Stokes equations*, The University of Chicago press, Chicago, 1988
- [36] K. DECKLNICK, AND M. HINZE, Error estimates in space and time for tracking type control of the instationary Stokes system, *Inter. Ser. Numer. Math.*, **143** (2002), pp 87-103.

- [37] K. Deckelnick and M. Hinze, Semidiscretization and error estimates for distributed control of the instationary Navier-Stokes equations, *Numer. Math.*, **97** (2004), 297–320.
- [38] K. Deckelnick and M. Hinze, Variational discretization of parabolic control problems in the presence of pointwise state constraints, *J. Comput. Math.*, **29** (2011), 1–15.
- [39] J.-C. DE LOS REYES, AND K. KUNISCH, A semi-smooth Newton method for control constrained boundary control of the Navie-Stokes equtions, *Nonl. Anal.*, **62** (2005), pp. 1289-1316.
- [40] V. DHAMO AND F. TRÖLTZSCH, Some aspects of reachability for parabolic boundary control problems with control constraints, *Computational Optimization and Applications.*, **50** ( 2011), pp. 75-110.
- [41] J. DOUGLAS JR. AND T.F. RUSSEL, Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedure, *SIAM J. Numer. Anal.*, **19** (1982), pp. 871-885.
- [42] T. F. Dupont and Y. Liu, Symmetric error estimates for moving mesh Galerkin methods for advection-diffusion equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40** (2002), 914–927.
- [43] L. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, **19**, AMS, Providence, RI, 1998.
- [44] K. Eriksson and C. Johnson, Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **28** (1991), 43–77.
- [45] K. Eriksson and C. Johnson, Adaptive finite element methods for parabolic problems. II. Optimal error estimates in  $L_\infty(L^2)$  and  $L_\infty(L_\infty)$ , *SIAM J. Numer. Anal.*, **32** (1995), 706–740.
- [46] K. Eriksson and C. Johnson, Adaptive finite element methods for parabolic problems IV, Nonlinear problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **32** (1995), 1729–1749.
- [47] K. Eriksson, C. Johnson and V. Thomée, Time discretization of parabolic problems by the discontinuous Galerkin method, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **19** (1985), 611–643.
- [48] D. Estep and S. Larsson, The discontinuous Galerkin method for semilinear parabolic problems, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **27** (1993), 35–54.
- [49] R. Falk, Approximation of a class of otimal control problems with order of convergence estimates, *J. Math. Anal. Appl.*, **44** (1973), 28–47.
- [50] A. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications*, Translations of Mathematical Monographs, **187**, AMS, Providence, RI, 2000.
- [51] P. GRISVARD, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston, 1985.
- [52] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics, **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [53] W. Gong, M. Hinze and Z. Zhou, A priori error analysis for finite element approximation of parabolic optimal control problems with pointwise control, submitted. Available from: <http://preprint.math.uni-hamburg.de/public/papers/hbam/hbam2011-07.pdf>.
- [54] W. GONG AND N. YAN, A posteriori error estimates for boundary control problems governed by parabolic partial differential equations, *J. of Comp. Math.*, **27** (2009), pp. 68-88.
- [55] R. GRIESSE AND S. VOLKWEIN, A primal-dual active set strategy for optimal boundary control of a nonlinear reaction-diffusion system, *SIAM J. on Control and Optim.*, **44** (2) (2005), pp. 467-494.
- [56] M. D. Gunzburger, *Perspectives in Flow Control and Optimization*, Advances in Design and Control, **5**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2003.

- [57] M.D.GUNZBURGER AND L.S.HOU, Treating inhomogeneous essential boundary conditions in finite element methods and the calculation of boundary stresses, *SIAM J.Numer. Anal.*, **29** (2), (1992) pp. 390-424.
- [58] M.D. GUNZBURGER, L.S. HOU AND T. SVOBODNY, Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationary Navier-Stokes equations with Dirichlet controls, *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.*, **25** (1991), pp. 711-748.
- [59] M.D. GUNZBURGER AND S. MANSERVISI, The velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with bounded distributed control, *SIAM J.Control and Optim.* **37** 2000, pp. 1913-1945.
- [60] M.D. GUNZBURGER AND S. MANSERVISI, Analysis and approximation of the velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with distributed control, *SIAM J. Numer. Anal.*,**37** 2000, pp. 1481-1512.
- [61] M.D. GUNZBURGER AND S. MANSERVISI, The velocity tracking problem for Navier-Stokes flow with boundary control, *SIAM J. on Control and Optim.*, **39** (2000), pp. 594-634.
- [62] M.D. GUNZBURGER, H.-C. LEE, AND J. LEE, Error estimates of stochastic optimal Neumann boundary control problems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **49** (2011), pp. 1532-1552.
- [63] F. Hecht, New development in freefem++, *Journal of Numerical Mathematics*, **20** (2012), 251-265.
- [64] F. Hecht, FreeFem++, Third edition, Version 3.13, 2013. Available from: <http://www.freefem.org/ff++>.
- [65] M. Hinze, A variational discretization concept in control constrained optimization: The linear-quadratic case, *Comput. Optim. Appl.*, **30** (2005), 45-61.
- [66] M. Hinze and K. Kunisch, Second order methods for optimal control of time-dependent fluid flow, *SIAM J. Control and Optim.*, **40** (2001), 925-946.
- [67] M.HINZE AND K.KUNISCH, Second order methods for boundary control of the instationary Navier-Stokes system, *ZAMMZ. Angew. Math. Mech.*, **84** (2004), pp. 171-187.
- [68] M. HINZE, R. PINNAU, M. ULBRICH AND S. ULBRICH, *Optimization with PDE constraints*, MMTA 23, Springer,2009.
- [69] L.S. HOU, Error estimates for semidiscrete finite element approximation of the evolutionary Stokes equations under minimal regularity assumptions, *J. Scient. Comput.*, **16** (2001), pp 287-317.
- [70] L.S. HOU AND S. RAVINDRAN, A penalized Neumann control approach for solving an optimal Dirichlet control problem for the Navier-Stokes equations, *SIAM J. Control Optim.*, **36** (1998), pp. 1795-1814.
- [71] L.S. HOU AND W. ZHU, Error estimates under minimal regularity for single step finite element approximations of parabolic partial differential equations, *Int. J. Numer. Anal. and Model.*, **3** (2006), pp 504-524.
- [72] K. Ito and K. Kunisch, *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*, *Advances in Design and Control*, **15**, SIAM, Philadelphia, PA, 2008.
- [73] C. JOHNSON, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [74] E. Karatzas, *Hyperbolic pde's and Aeroacoustic survey in automotive industry (in Greek)*, Msc dissertation, University of Patras - Department of Mathematics, [www.math.ntua.gr/~karmakis](http://www.math.ntua.gr/~karmakis) (2001).

- [75] E. Karatzas, Analysis and approximations of optimal control evolutionary equations: Elementary theory, basic results (in Greek), Msc dissertation, National Technical University of Athens - Department of Mathematics, [www.math.ntua.gr/~karmakis](http://www.math.ntua.gr/~karmakis) (2009).
- [76] G. Knowles, Finite element approximation of parabolic time optimal control problems, *SIAM J. Control and Optim.*, **20** (1982), 414–427.
- [77] K.KUNISCH AND B.VEXLER, Constrained Dirichlet boundary control in  $L^2$  for a class of evolution equations, *SIAM J. on Control and Optim.*, **46** (5) (2007), pp. 1726–1753.
- [78] K.KUNISCH AND L. WANG, Time optimal controls of the linear Fitzhugh–Nagumo equation with pointwise control constraints, *SIAM J. of Mathem. Anal. and Appl.*, **395** (1) (2012), 114–130.
- [79] I. Lasiecka, Rietz-Galerkin approximation of the time optimal boundary control problem for parabolic systems with Dirichlet boundary conditions, *SIAM J. Control and Optim.*, **22** (1984), 477–500.
- [80] I. LASIECKA AND R. TRIGGIANI, Control theory for partial differential equations, Cambridge University press, 2000.
- [81] J.-L. Lions, Control Of Systems Governed By Partial Differential Equations, Springer, 1971.
- [82] J.-L. Lions, Some Aspects of the Control of Distributed Parameter Systems, Conference Board of the Mathematical Sciences, SIAM, 1972.
- [83] W.-B. Liu and N. Yan, A posteriori error estimates for optimal control problems governed by parabolic equations, *Numer. Math.*, **93** (2003), 497–521.
- [84] W.-B. Liu, H.-P. Ma, T. Tang and N. Yan, A posteriori error estimates for discontinuous Galerkin time-stepping method for optimal control problems governed by parabolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **42** (2004), 1032–1061.
- [85] Y. Liu, R. E. Bank, T. F. Dupont, S. Garcia and R. F. Santos, Symmetric error estimates for moving mesh mixed methods for advection-diffusion equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40** (2002), 2270–2291.
- [86] K. Malanowski, Convergence of approximations vs. regularity of solutions for convex, control-constrained optimal-control problems, *Appl. Math. Optim.*, **8** (1982), 69–95.
- [87] D. Meidner and B. Vexler, Adaptive space-time finite element methods for parabolic optimization problems, *SIAM J. Control and Optim.*, **46** (2007), 116–142.
- [88] D. MEIDNER AND B. VEXLER, A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems. Part I: Problems without control constraints, *SIAM J. Control and Optim.*, **47** (2008), pp. 1150–1177.
- [89] D. MEIDNER AND B. VEXLER, A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems. Part II: Problems with control constraints, *SIAM J. Control and Optim.*, **47** (2008), pp. 1301–1329.
- [90] D. Meidner and B. Vexler, A-priori error analysis of the Petrov-Galerkin Crank-Nicolson scheme for parabolic optimal control problems, *SIAM J. Control and Optim.*, preprint. Available from: <http://www-m1.ma.tum.de/bin/view/Lehrstuhl/BorisVexlerPublic>.
- [91] C. MEYER AND A. RÖSCH, Superconverge properties of optimal control problems, *SIAM J. Control and Optim.*, **43** (2004), pp. 353–376.
- [92] J. Necas, Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations, Springer Monographs in Mathematics, **5**, Springer-Verlag, Berlin, 2012.

- [93] P. Neittaanmäki and D. Tiba, Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms and Applications, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **179**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994.
- [94] I. NEITZEL AND B. VEXLER, A priori error estimates for space-time finite element discretization of semilinear parabolic optimal control problems, *Numer. Math.*, **120** (2012), pp. 345-386.
- [95] T. RICHTER, A. SPRINGER, AND B. VEXLER, Efficient numerical realization of Discontinuous Galerkin methods for temporal discretization of parabolic problems, *Numer. Math.*, **124** (2013), pp 151-182.
- [96] A. RÖSCH AND F. TRÖLTZSCH, Sufficient second-order optimality conditions for a parabolic optimal control problem with pointwise control-state constraints, *SIAM J. Control Optim.*, **42** (1) (2003), pp. 138-154.
- [97] A. Rösch, Error estimates for parabolic optimal control problems with control constraints, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, **23** (2004), 353–376.
- [98] R.E. SHOWALTER, Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations, AMS publications, Providence, RI 1997.
- [99] R.E. SHOWALTER, Hilbert space methods for partial differential equations, Pitman, 1979.
- [100] A. SPRINGER, AND B. VEXLER, Third order convergent time discretization for parabolic optimal control problems with control constraints, *Comput. Optim. and Appl.*, published online (2013).
- [101] S.S. Sritharan. *Optimal control of viscous flow*. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [102] R. TEMAM, Navier-Stokes equations, Amer. Math. Soc., Chelsea, Providence, RI, 2001.
- [103] R. TEMAM, Navier-Stokes equations, North Holland, 1979.
- [104] V. Thomée, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Springer Series in Computational Mathematics, **25**, Spinger-Verlag, Berlin, 1997.
- [105] D. TIBA AND F. TRÖLTZSCH, Error estimates for the discretization of the state constrained convex control problems, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **17** (1996), pp. 1005-1028.
- [106] F. Tröltzsch and D. Wachsmuth. Second-order sufficient optimality conditions for the optimal control of Navier-Stokes equations. *ESAIM: COCV*, 12:93–119, 2006.
- [107] F. Tröltzsch, Semidiscrete Ritz-Galerkin approximation of nonlinear parabolic boundary control problems, in “Optimal Control” (Freiburg, 1991), International Series of Numerical Mathematics, **111**, Birkhäuser, Basel, (1993), 57–68.
- [108] F. Tröltzsch, Semidiscrete Ritz-Galerkin approximation of nonlinear parabolic boundary control problems—strong convergence of optimal controls, *Appl. Math. Optim.*, **29** (1994), 309–329.
- [109] F. Tröltzsch, Optimal control of partial differential equations: Theory, methods and applications, Graduate Studies in Mathematics, **112**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [110] N. J. Walkington, Compactness properties of the DG and CG time stepping schemes for parabolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **47** (2010), 4680–4710.
- [111] R. Winther, Error estimates for a Galerkin approximation of a parabolic control problem, *Ann. Math. Pura Appl. (4)*, **117** (1978), 173–206.
- [112] R. Winther, Initial value methods for parabolic control problems, *Math. Comp.*, **34** (1980), 115–125.
- [113] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B. Nonlinear Monotone Operators, Springer-Verlag, New York, 1990.