



ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΤΝΑΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

ΣΤΡΑΤΟΣ ΠΑΠΑΔΟΥΔΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές

επιβλέπων

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Ν. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής

Οκτώβριος 2014
Αθήνα

Contents

1	Θεωρία βαθμωτού πεδίου	1
1.1	Φορμαλισμός	1
1.2	Διαδότες (συναρτήσεις Green)	3
1.3	Θεωρία βαθμωτού πεδίου σε πλέγμα (ομαλοποίηση)	3
1.3.1	Το πλέγμα $\mathbb{L}_\Omega(\ell)$, Λ	4
1.3.1.1	εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot \cdot \rangle$ στο πλέγμα	4
1.3.1.2	τελεστές παραγώγου στο πλέγμα	5
1.3.2	Συνοριακές συνθήκες πεπερασμένου πλέγματος	5
1.3.2.1	standard boundary conditions	5
1.3.2.2	periodic boundary conditions	6
1.3.2.3	helicoid boundary conditions	6
2	Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου	9
2.1	Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης	9
2.2	Κβαντική Χρωμοδυναμική	10
2.3	Σχετικιστικό αέριο Bose (φαινόμενο Silver-Blaze)	11
2.3.1	Μέθοδος μιγαδικής Langevin	12
2.3.2	Lefschetz thimbles	12
2.3.2.1	The thimble(s)	13
2.3.2.2	Εφαρμογή στη θεωρία πεδίου	14
2.3.3	Μέθοδος δυϊκής αναπαράστασης	14
2.3.3.1	Αναπαράσταση ροής	14
2.3.3.2	Αλγόριθμος worm	16
3	Δυναμική Langevin	19
3.1	Συνεχής δυναμική Langevin	19
3.1.1	$\phi \in \mathbb{R}^X$ και $S \in \mathbb{R}$	19
3.1.2	$\phi \in \mathbb{F}^X$ και $S \in \mathbb{R}$	20
3.1.2.1	Άλγεβρα βαθμωτών $\phi \in \mathbb{F}$	20
3.1.2.2	Εξίσωση Langevin	22
3.1.3	$\phi \in \mathbb{F}^X$ και $S \in \mathbb{G}$	23
3.2	Εξίσωση Fökker-Planck	24
3.2.1	Το σύμβολο Dirac της κατανομής	26
3.2.2	Εξαγωγή της εξίσωσης Fökker-Planck	27
3.2.3	Η κατάσταση ισορροπίας για $\tau \rightarrow \infty$ και το Feynman path integral	31
3.2.3.1	Ενδείξεις από εξίσωση Langevin	31
3.2.3.2	Στατική κατανομή Fökker-Planck	32
3.2.3.3	Θεωρία βαθμωτού πεδίου $\phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X$, θορύβου $\eta \in \mathbb{F}^X$ και δράσης $S[\phi] \in \mathbb{G}$	34
3.3	Διακριτή δυναμική Langevin	36
3.3.1	Μεταβλητό βήμα χρόνου Langevin ϵ_n	37
3.3.1.1	η μέση ολίσθηση $\epsilon^{-1}\mathcal{M}$	37
4	Σχετικιστικό αέριο Bose	39
4.1	Δυναμική Langevin στο σχετικιστικό αέριο Bose	39
4.1.1	Δράση S στο πλέγμα $\mathbb{L} \longleftarrow X$	39

Contents

4.1.2	Εξισώσεις Langevin του σχετικιστικού αερίου Bose	40
4.1.2.1	Συντελεστές ολίσθησης K_{ab}	41
4.1.2.2	Παρατηρήσιμα μεγέθη (n_a, ρ_a)	42
4.2	Εξομοίωση δυναμικής Langevin σχετικιστικού αερίου Bose	43
4.2.1	Initialization	43
4.2.2	Langevin evolution	44
4.2.3	Finalization	45
4.3	Αποτελέσματα	45
Source code		49
1	Main (<code>complex_langevin.F90</code>)	49
1.1	$\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ (<code>complex_langevin.simulation.F90</code>)	56
1.2	\mathbb{R}^4 (<code>complex_langevin.simulation.components.F90</code>)	59
2	Data structures (<code>complex_langevin.mod.F90</code>)	63

Πρόλογος

Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης στη χβαντική θεωρία πεδίου είναι υποπρόβλημα ενός γενικότερου προβλήματος στον στοχαστικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\mathcal{I} = \int_X f(x)\rho(x)dx, \quad (0.1)$$

όπου ρ είναι γνωστή και δεδομένη στους υπολογισμούς και αντιπροσωπεύει μια κατανομή πιθανότητας (μέτρο ολοκλήρωσης), πρόκειται δηλαδή για στατιστικά μεγέθη που υπολογίζουμε.

Η βάση του στοχαστικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων είναι η δειγματοληψία του χώρου ολοκλήρωσης X με μια Markovianή διαδικασία ώστε να οδηγηθούμε στην περιοχή μέγιστης συνεισφοράς στο ολοκλήρωμα και να μείνουμε εκεί σε ισορροπία. Συνήθως η πιθανοφανική πληροφορία για την Markovianή αυτή διαδικασία βρίσκεται στη ρ ή/και μέσα στην ολοκληρωτέα ποσότητα f , και εκεί είναι που αρχίζουν τα προβλήματα. Αν η ολοκληρωτέα ποσότητα περιέχει μιγαδικές φάσεις ή ελάσσονα πρόσημα, τότε η διαδικασία αυτή απτυγχάνει ή παίρνει απαγορευτικά πολύ χρόνο να συγκλίσει στη περιοχή ισορροπίας.

Η παρουσία φανταστικού μέρους στη δράση εισάγει μια τέτοια μιγαδική φάση στη συνάρτηση επιμερισμού (και κατ' επέκταση σε κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος), καθιστώντας αδύνατη της αποτελεσματική εξομίωση συστημάτων με μιγαδική δράση (β. κεφάλαιο 2).

Το πρόβλημα παρουσιάστηκε έντονα στην εξερεύνηση του διαγράμματος φάσεων της χβαντικής χρωμοδυναμικής (QCD phase diagram) στις περιοχές μεγάλης βαρυονικής πυκνότητας για πεπερασμένη θερμοκρασία, αλλά και όχι μόνο.

Όταν ακόμη και οι καλύτερες προσπάθειες κλασικής προσέγγισης στο πρόβλημα (standard reweighting) αποτυγχάνουν να δώσουν αποτέλεσμα, η αναζήτηση εναλλακτικών μεθόδων (εύρεσης αλυσίδας Markov) είναι αναπόφευκτη, και για την ακρίβεια επίκαιρη την τελευταία δεκαετία (μια λίστα μεθόδων που ερευνώνται μέχρι σήμερα δίνεται στην ενότητα 2.2).

Στο παρών paper, προσπαθούμε να διερευνήσουμε την εφαρμογή της μεθόδου μιγαδικής Langevin, που ερευνάται από GERT AARTS et al. [5, 6, 7, 10], σε toy models της χβαντικής θεωρίας πεδίου, αναμένοντας να δούμε και να συγκρίνουμε αποτελέσματα με τη βιβλιογραφία σχετικά με το διάγραμμα φάσης τέτοιων μοντέλων.

Το μοντέλο που μελετάται είναι μια βαθμωτή θεωρία πεδίου με μιγαδική δράση η οποία περιγράφει το σχετικιστικό αέριο Bose. Στην μελέτη αυτού, ομαλοποιούμε τη θεωρία σε πλέγμα συγκεκριμένης πλεγματοτικής σταθεράς (η οποία καθιστά μερικώς αδύνατη τη μελέτη ως προς τη θερμοκρασία β), και μελετάμε τη μετάβαση φάσης που παρουσιάζει στο σύστημα σε πεπερασμένο χημικό δυναμικό μ (Silver-Blaze φαινόμενο).

1 Θεωρία βαθμωτού πεδίου

1.1 Φορμαλισμός

Για κάθε πεδίο ϕ και ψ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο συνοπτικά ως

$$\langle \psi | \phi \rangle \equiv \int_X d^{\dim X} x \langle \psi | x \rangle \langle x | \phi \rangle, \quad (1.1.1)$$

όπου για κάθε πεδίο ϕ , η αναπαράσταση θέσης συμβολίζεται με $\phi(x) \equiv \langle x | \phi \rangle$. Ο συμβολισμός αυτός σέβεται τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου πεδίων $\langle \cdot | \cdot \rangle$ με πιο χαρακτηριστική από όλες την $\langle \phi | x \rangle \equiv \phi^\dagger(x)$.

Για κάθε ερμητιανό τελεστή πεδίων A ($A = A^\dagger$ ή $\langle \psi | A | \phi \rangle \equiv \langle \psi | A^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle$) έχει νόημα ο συμβολισμός

$$\langle \psi | A | \phi \rangle \equiv \int_X d^{\dim X} x \int_X d^{\dim X} y \langle \psi | y \rangle \langle y | A | x \rangle \langle x | \phi \rangle, \quad (1.1.2)$$

Παρόλη την ομοιότητα με το φορμαλισμό Dirac δε θα γράφουμε ποτέ μεμονομένα bra ή ket σύμβολα. Ο μετασχηματισμός Fourier εξακολουθεί και μπορεί να γράφεται

$$\langle p | \phi \rangle = \int_X d^{\dim X} x \langle p | x \rangle \langle x | \phi \rangle, \quad (1.1.3)$$

όπου $\langle x | p \rangle \equiv \exp(ip_\alpha x_\alpha)$ είναι ο πυρήνας μετασχηματισμού Fourier.

Από ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (για παράδειγμα αυτή της συνέλιξης, όπου για $\langle x | \phi \psi \rangle = \langle x | \phi \rangle \langle x | \psi \rangle$, $\langle p | \phi \psi \rangle = \langle p | \phi \rangle * \langle p | \psi \rangle$) αναδεικνύεται πως το νόημα που δίνεται στο περιεχόμενο του συμβολισμού $\langle \cdot | \cdot \rangle$ εξαρτάται από την αναπαράσταση στην οποία αναγράφεται ή αναπτύσσεται όταν αυτή δεν περιλαμβάνεται.

Το σύμβολο της συνάρτησης δέλτα του Dirac προκύπτει με συνεπή τρόπο ως $\langle x | y \rangle \equiv \delta(x - y)$, αφού στην ορολογία τη συναρτησιακής ανάλυσης η δέλτα συνάρτηση είναι όντως η αναπαράσταση στη θέση της... θέσης,

$$\langle x | \phi \rangle \equiv \phi(x) = \int_X d^{\dim X} y \delta(x - y) \phi(y) \equiv \int_X d^{\dim X} x \langle x | y \rangle \langle y | \phi \rangle, \quad (1.1.4)$$

το οποίο είναι σε απόλυτη συμφωνία με τον υιοθετημένο φορμαλισμό.

Στην περίπτωση των πραγματικών πεδίων το εσωτερικό γινόμενο είναι τετριμμένο, επομένως το σύμβολο $\langle \cdot | \cdot \rangle$ μπορεί να επεκταθεί σε ένα γενικό σύμβολο $\langle \dots \rangle$ ολοκλήρωσης ως προς την επιθυμητή αναπαράσταση του περιεχομένου. Στην αναπαράσταση θέσης που χρησιμοποιείται αποκλειστικά εδώ, για κάθε O συνάρτηση πεδίων,

$$\langle O(\phi) \rangle \equiv \int_X d^{\dim X} x O(\phi(x)) \quad (1.1.5)$$

Γράφοντας $\langle \psi | \phi \rangle = \langle \psi^\dagger | \phi \rangle$ ο συμβολισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί σε τυχούσας άλγεβρας πεδία.

Εφίσταται προσοχή διότι δεν είναι όλα τα σύμβολα $\langle \dots \rangle$ αναλλοίωτα αναπαράστασης. Πιο συγκεκριμένα το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι αναλλοίωτο της αναπαράστασης όταν αυτή τελείται κατά (συζυγή) ζεύγη μεταβλητών.

Ο συμβολισμός $\langle \cdot \rangle$ όπως χρησιμοποιείται εδώ για τα πεδία δε πρέπει να συγχέεται με τα σύμβολα Dirac τα οποία χρησιμοποιούνται για τον χώρο των καταστάσεων της κβαντικής θεωρίας πεδίου, τα οποία για λόγους διαχωρισμού και ταυτόχρονης χρήσης, συμβολίζονται με $\langle \cdot | \cdot \rangle$.¹

¹Εάν δε χρησιμοποιούταν το ομογενοποιημένο σύμβολο $\langle \dots \rangle$ και μόνο το $\langle \cdot | \cdot \rangle$ σε ότι αφορά χωροχρονικά ολοκληρώματα, ο διαχωρισμός δε θα ήταν αναγκαίος, αφού ο συμβολισμός $\langle \dots \rangle$ θα ξέραμε εκ' των προτέρων ότι αντιστοιχεί σε διαδότη. Η χρήση του όμως τελικά σε χωροχρονικά ολοκληρώματα είναι ιδιαίτερα πρακτική στην παρουσίαση περίπλοκων αποτελεσμάτων και έτσι καταλήγουμε στη υιοθέτηση καινούριου συμβόλου για τις καταστάσεις, σε αντίθεση μερικώς με τη βιβλιογραφία στο σημείο αυτό.

continuum/thermodynamic limit _____ notation _____ lattice regularization

$\phi(x)$ $\langle x|\phi\rangle$ ϕ_x
 $\phi^\dagger(x)$ $\langle\phi|x\rangle$ ϕ_x^\dagger

hermitian

$\int d^N x \psi^\dagger(x)\phi(x)$ $\int d^N x = \langle\psi|x\rangle\langle x|\phi\rangle$ $\ell^N \sum_x \psi_x^\dagger \phi_x$

$A(x, y)$ $\langle x|A|y\rangle$ $\ell^{-N} A_{xy}$

$\int d^N z A(x, z)B(z, y)$ $\int d^N z \langle x|A|z\rangle\langle z|B|y\rangle = \langle y|A|B|x\rangle$ $\ell^{-N} \sum_z A_{xz}B_{zy}$

$\int d^N x \int d^N y \psi^\dagger(x)A(x, y)\phi(y)$ $\int d^N x \int d^N y \langle\psi|x\rangle\langle x|A|y\rangle\langle y|\phi\rangle = \langle\psi|A|\phi\rangle$ $\ell^N \sum_x \sum_y \psi_x^\dagger A_{xy} \phi_y$

$\delta(x - y)$ $\langle x|y\rangle$ $\ell^{-N} \delta_{xy}$

$\phi \in \mathbb{R}$

$\int d^N x f(\phi(x))$ $f(\phi)$ $\ell^N \sum_x f(\phi_x)$

$\int d^N x \psi(x)\phi(x)$ $\langle\psi\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$ $\ell^N \sum_x \psi_x \phi_x$

$\int d^N x \int d^N y \psi(x)A(x, y)\phi(y)$ $\langle\langle\psi A\phi\rangle\rangle = \langle\psi|A|\phi\rangle$ $\ell^N \sum_x \sum_y \psi_x A_{xy} \phi_y$

$\int d^N x \int d^N y \psi(x)A(y, y)\phi(x)$ $\langle A\rangle\langle\psi\phi\rangle = \langle\langle A\rangle\psi\phi\rangle = \langle\psi\langle A\rangle\phi\rangle = \langle\psi\phi\langle A\rangle\rangle = \langle\psi\phi\rangle\langle A\rangle$

..... $\langle A\rangle\langle\psi|\phi\rangle = \langle\langle A\rangle\psi|\phi\rangle = \langle\psi\langle A\rangle|\phi\rangle = \langle\psi|\langle A\rangle\phi\rangle = \langle\psi|\phi\langle A\rangle\rangle = \langle\psi|\phi\rangle\langle A\rangle$ $\ell^N \sum_x \sum_y \psi_x A_{yy} \phi_x$

$\int d^N x \phi(x)A(x, x)\psi(x)$ $\langle\phi A\psi\rangle$ $\sum_x \psi_x A_{xx} \phi_x$

$\int d^N x A(x, y)\phi(y)$ $\langle A(x)\phi\rangle = \langle x|A|\phi\rangle$ $\sum_y A_{xy} \phi_y$

$\int d^N x A(x, x)$ $\langle A\rangle$ $\sum_x A_{xx}$

$\int d^N x \int d^N y A(x, y)B(y, x)$ $\langle\langle AB\rangle\rangle = \langle A||B\rangle$ $\sum_x \sum_y A_{xy}B_{yx}$

$\int d^N x \int d^N y A(x, x)B(y, y)$ $\langle A\langle B\rangle\rangle = \langle A\rangle\langle B\rangle = \langle\langle A\rangle B\rangle$ $\sum_x \sum_y A_{xx}B_{yy}$

$\int d^N x \int d^N y A(x, x)B(x, x)$ $\langle AB\rangle$ $\ell^{-N} \sum_x A_{xx}B_{xx}$

$\int d^N z A(x, z)B(z, y)$ $\langle A(x)B(y)\rangle = \langle x|A|B|y\rangle$ $\ell^{-N} \sum_z A_{xz}B_{zy}$

_____ $\frac{\partial}{\partial\tau} F[\phi(\tau)] = \frac{\partial}{\partial\tau} \left\langle \phi(\tau) \frac{\delta}{\delta\phi(\tau)} \right\rangle F[\phi(\tau)]$ _____

$\int d^N x \frac{\partial}{\partial\tau} \phi(x, \tau) \frac{\delta}{\delta\phi(x, \tau)} F[\phi(\tau)]$ $\left\langle \frac{\partial}{\partial\tau} \phi(\tau) \frac{\delta}{\delta\phi(\tau)} F[\phi(\tau)] \right\rangle$ $\ell^N \sum_x \frac{\partial}{\partial\tau} \phi_x(\tau) \frac{\delta}{\delta\phi_x(\tau)} F[\phi(\tau)]$

1.2 Διαδότες (συναρτήσεις Green)

Μια θεωρία (πραγματικού) βαθμωτού πεδίου ϕ μεταφρασμένη στον ευκλείδειο χωροχρόνο ορίζεται αποκλειστικά από τις συναρτήσεις συσχετισμού n σημείων (ή συναρτήσεις Green) $\langle \phi^\dagger(y_1) \cdots \phi^\dagger(y_m) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle$, οι οποίες υπολογίζονται μέσω του συναρτησιακού της δράσης

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \langle x_i | \phi \rangle \prod_{j=1}^m \langle \phi | y_j \rangle \right\rangle \equiv Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \prod_{i=1}^n \langle x_i | \phi \rangle \prod_{j=1}^m \langle \phi | y_j \rangle, \quad (1.2.1)$$

όπου

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \quad (1.2.2)$$

είναι η συνάρτηση επιμερισμού (ορολογία δανεισμένη από την αναλογία ευκλείδειας κβαντικής θεωρίας πεδίου με τη στατιστική μηχανική).² Η γραφή αυτή είναι καθαρά φορμαλιστική, καθώς ούτε η συνάρτηση επιμερισμού, ούτε οποιοδήποτε path integral γενικά δεν είναι καλά ορισμένο, αλλά μόνο ο συνδυασμός τους για την παραγωγή αναμενόμενων τιμών για το τυχόν μέγεθος \mathcal{O} είναι καλά ορισμένος,

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S[\phi]). \quad (1.2.3)$$

Για μια κλασική πηγή ξ ορίζεται η γεννήτρια συνάρτηση,

$$Z[\xi] \equiv \left\langle \exp \left(\frac{1}{2} (\langle \xi | \phi \rangle + \langle \phi | \xi \rangle) \right) \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{i!} \int_X d^{\dim X} x_i \frac{1}{j!} \int_X d^{\dim X} y_j \langle \xi | x_i \rangle \left\langle \prod_{i=1}^n \langle x_i | \phi \rangle \prod_{j=1}^m \langle \phi | y_j \rangle \right\rangle \langle y_j | \xi \rangle, \quad (1.2.4)$$

Εναλλακτικά οι συναρτήσεις Green μπορούν να γραφούν ως συναρτησιακές παράγωγοι της γεννήτριας κατανομής.

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \langle x_i | \phi \rangle \prod_{j=1}^m \langle \phi | y_j \rangle \right\rangle = \frac{\delta^{n+m}}{\prod_{j=1}^m \delta \langle y_j | \xi \rangle \prod_{i=1}^n \delta \langle \xi | x_i \rangle} Z[0] \equiv \prod_{j=1}^m \frac{\delta}{\delta \langle y_j | \xi \rangle} \prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta \langle \xi | x_i \rangle} Z[0]. \quad (1.2.5)$$

1.3 Θεωρία βαθμωτού πεδίου σε πλέγμα (ομαλοποίηση)

Η πλεγματοποίηση του (Ευκλείδειου) χωροχρόνου αποτελεί ένα μηχανισμό ομαλοποίησης μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου, προς πρότυπο μη διαταρακτικής επανακανονικοποίησης της εν' λόγω θεωρίας.

Δύο όρια του πλέγματος οδηγούν στην κλασική θεωρία:

όριο συνεχούς $\ell \rightarrow 0$

Στο όριο του συνεχούς, η θεωρία ορισμένη πάνω στο πλέγμα οφείλει να συγκλίνει στη θεωρία του συνεχούς που μελετάται, διαφορετικά δε πρόκειται εξ' ορισμού για ομαλοποίηση της εν' λόγω θεωρίας.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η πλεγματική ομαλοποίηση επιτρέπει το σαφή ορισμό του διαφορετικά φορμαλιστικού μέτρου ολοκλήρωσης διαδρομών,

$$\mathcal{D}\phi \dots \dots \dots \prod_x d\phi_x$$

θερμοδυναμικό όριο $\Omega \rightarrow \infty$

Στο θερμοδυναμικό όριο, η θεωρία ορισμένη πάνω στο πλέγμα απαλλάσσεται από τεχνητά φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους πλέγματος (finite size effects).

²Η συνάρτηση επιμερισμού στη κβαντική θεωρία πεδίου είναι συνάρτηση των παραμέτρων της δράσης.

1 Θεωρία βαθμωτού πεδίου

Το πεπερασμένο των διαστάσεων του πλέγματος επιτρέπει τον αριθμητικό υπολογισμό στοιχείων της θεωρίας (γεννήτρια συνάρτηση) και υπολογιστικό χειρισμό της θεωρίας καθαυτής μέσω εξομοιώσεων, με κόστος τα τεχνητά αυτά φαινόμενα, τα οποία αντιμετωπίζονται με βύθιση στο πεπερασμένο πλέγμα, προσεγγίζοντας το θερμοδυναμικό όριο. Τα φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους πλέγματος εξομαλύνονται για δεδομένο μέγεθος πλέγματος με κατάλληλη επιλογή συνοριακών συνθηκών.

1.3.1 Το πλέγμα $\mathbb{L}_\Omega(\ell)$, Λ

Ένα πεπερασμένο πλέγμα \mathbb{L} τετραγωνικής διάταξης διακριτοποίησης του ευκλείδειου χωροχρόνου X ορίζεται από μια πλεγματική σταθερά μήκους ℓ (διαστάσεων m^{-1}) η οποία αντιπροσωπεύει το μήκος των συνδέσμων των σημείων του πλέγματος, και το μέγεθός του το οποίο εκφράζεται από φυσικούς $(N_\mu)_{\mu=1}^{\dim X}$, όπου $\dim X$ είναι η διάσταση του χωροχρόνου X . Δηλαδή ο συνολικός αριθμός των σημείων του πλέγματος είναι

$$N = \prod_{\mu=1}^{\dim X} N_\mu. \quad (1.3.1)$$

Κατ' επέκταση οι διαστάσεις μήκους του πλέγματος δίνονται από τα μήκη $(L_\mu)_{\mu=1}^{\dim X}$ με $L_\mu = \ell N_\mu$, $\forall \mu \in \mathbb{N}_{\dim X}$. Τότε ορίζεται ο (διαστατικός) όγκος του πλέγματος

$$\Omega(= \beta V) = \prod_{\mu=1}^{\dim X} L_\mu = \ell N \quad (1.3.2)$$

Τυπικά το πλέγμα αποτελείται από τα σημεία του σαν σύνολο

$$\mathbb{L}_\Omega(\ell) \equiv \{x | n_\mu = \ell^{-1} x_\mu \in \mathbb{Z}_{N_\mu}, \forall \mu \in \mathbb{N}_{\dim X}\}, \quad (1.3.3)$$

και τους συνδέσμους των ως τοπολογία του πλέγματος,

$$\Lambda \equiv \{(xy) | \|x - y\| \leq \ell\} \subseteq \mathbb{L}_\Omega(\ell) \times \mathbb{L}_\Omega(\ell). \quad (1.3.4)$$

Η αναπαράσταση του τυχόντος πεδίου ϕ ως προς την πλεγματική θέση παραμένει $\langle x | \phi \rangle = \phi_n$ όπου τώρα $n \in \mathbb{L}$.

1.3.1.1 εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot | \cdot \rangle$ στο πλέγμα

Το εσωτερικό γινόμενο πεδίων γίνεται στο πλέγμα

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{L}} d^{\dim X} x \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle \longrightarrow \sum_n \ell^{\dim X} \phi_n^\dagger \psi_n = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle, \quad (1.3.5)$$

όπου $n = \ell^{-1} x$ οι ακέραιες συντεταγμένες του πλέγματος.

Το άθροισμα πάνω στις πλεγματικές θέσεις στο εξής αναπαρίσταται με ένα σύμβολο ολοκληρώματος

$$\int_X (d^{\dim \mathbb{L} x}) \longrightarrow \sum_n \ell^{\dim X} \equiv \int_{\mathbb{L}} (\ell^{\dim X} x), \quad (1.3.6)$$

το οποίο αναδεικνύει καλύτερα αυτό που αντιπροσωπεύει στο συνεχές-θερμοδυναμικό όριο. Η σταθερά όγκου $\ell^{\dim X}$ με την οποία κανονικά κάνουμε πράξεις στο διακριτό-πεπερασμένο άθροισμα της (1.3.6) αν ενσωματωθεί στα κατάλληλα σύμβολα επιτρέπει την αυτοσυνεπή χρήση του συμβόλου ολοκληρώματος, με τη σταθερά όγκου να είναι παρούσα, μαζί όμως με την μεταβλητή ολοκλήρωσης η οποία εν προκειμένω είναι η πλεγματική θέση x .

Συγκεκριμένα η συνάρτηση δέλτα δεν μεταφέρεται αδιάστατη στο πλέγμα, αλλά $\langle x | y \rangle \longrightarrow \ell^{-\dim X} \delta_{xy}$, έτσι ώστε να διατηρηθούν όλες οι ιδιότητες της στα ολοκληρώματα πλέγματος όπως θα ονομάζονται στο εξής τα αθροίσματα πλέγματος.

1.3.1.2 τελεστές παραγώγου στο πλέγμα

Παρατηρούμε πως η αναπαράσταση $\langle x|A|y\rangle$ τελεστή πεδίων A αποκτάει μορφή πίνακα στο πλέγμα και επομένως ο υπολογισμός διαδοτών στο πλέγμα ανάγεται σε αντιστροφή πινάκων που αντιπροσωπεύουν τους τελεστές που ανακύπτουν στις εξισώσεις κίνησης μιας θεωρίας πεδίου.

Παράγωγος πεδίου προς όλες τις κατευθύνσεις (πρόσθια \triangleright και οπίσθια \triangleleft παράγωγος):

$$\langle x|\triangleright_\mu\phi\rangle\equiv\ell^{-1}(\langle x+\ell\partial_\mu|\phi\rangle-\langle x|\phi\rangle)=\langle x|\ell^{-1}(\exp(+\ell\partial_\mu)-1)\phi\rangle, \quad (1.3.7)$$

$$\langle x|\triangleleft_\mu\phi\rangle\equiv\ell^{-1}(\langle x-\ell\partial_\mu|\phi\rangle-\langle x|\phi\rangle)=\langle x|\ell^{-1}(\exp(-\ell\partial_\mu)-1)\phi\rangle, \quad (1.3.8)$$

όπου ∂_μ συνιστά το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση που αντιπροσωπεύει ο δείκτης μ .³

Αναπτύσσοντας στην αναπαράσταση θέσης και αντικαθιστώντας από (1.3.7),

$$\langle\triangleright_\mu\phi|\psi\rangle=\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\triangleright_\mu\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle=\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\ell^{-1}\langle\phi|x+\ell\partial_\mu\rangle\langle x|\psi\rangle+\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\ell^{-1}\langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle. \quad (1.3.9)$$

Θεωρώντας πως η ολοκλήρωση κινείται περιοδικά στο πλέγμα είναι δυνατή η αλλαγή μεταβλητής $x\rightarrow x-\ell\partial_\mu$,

$$\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\ell^{-1}\langle\phi|x+\ell\partial_\mu\rangle\langle x|\psi\rangle=\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\phi|x\rangle\ell^{-1}\langle x-\ell\partial_\mu|\psi\rangle. \quad (1.3.10)$$

Αντικαθιστώντας,

$$\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\phi|x\rangle\ell^{-1}\langle x-\ell\partial_\mu|\psi\rangle-\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\phi|x\rangle\ell^{-1}\langle x|\psi\rangle=\int_{\mathbb{L}}\ell^{\dim X}x\langle\phi|x\rangle\langle x|\triangleleft_\mu\psi\rangle=\langle\phi|\triangleleft_\mu\psi\rangle, \quad (1.3.11)$$

δηλαδή $\langle\triangleright_\mu\phi|\psi\rangle=\langle\phi|\triangleleft_\mu\psi\rangle$.

Ορίζεται ο πλεγματικός τελεστής d' Alambert $\square\equiv\delta_{\mu\nu}\triangleleft_\mu\triangleright_\nu$, από όπου άμεσα προκύπτει πως $\langle\triangleright_\mu\phi|\triangleright_\mu\phi\rangle=\langle\phi|\square|\phi\rangle$. Η μορφή της δράσης του τελεστή \square στο ϕ είναι,

$$\begin{aligned} \langle x|\square\phi\rangle&=\langle x|\triangleleft_\mu\triangleright_\mu\phi\rangle=\ell^{-1}(\langle x-\ell\partial_\mu|\triangleright_\mu\psi\rangle-\langle x|\triangleright_\mu\psi\rangle)=\ell^{-1}(\ell^{-1}(\langle x|\phi\rangle-\langle x-\ell\partial_\mu|\phi\rangle)-\ell^{-1}(\langle x+\ell\partial_\mu|\phi\rangle-\langle x|\phi\rangle))= \\ &=\ell^{-2}\sum_{\mu=1}^{\dim\mathbb{L}}(2\langle x|\phi\rangle-\langle x+\ell\partial_\mu|\phi\rangle-\langle x-\ell\partial_\mu|\phi\rangle)=2\ell^{-2}\sum_{\mu=1}^{\dim\mathbb{L}}\langle x|(1-\cosh(\ell\partial_\mu))\phi\rangle. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

1.3.2 Συνοριακές συνθήκες πεπερασμένου πλέγματος

00	01	02	03	04
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

(a) συντεταγμένες

00	01	02	03	04
05	06	07	08	09
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

(b) θέσεις μνήμης

Table 1.3.1: δεικτοδότηση πλέγματος

Σε ότι ακολουθεί έχει γίνει διάκριση μεταξύ δύο τρόπων δεικτοδότησης της πλεγματικής θέσης (σχήμα 1.3.1): κανονική κατά συντεταγμένες (σχήμα 1.3.1a) και σειριακή κατά θέση αποθήκευσης στη μνήμη (σχήμα 1.3.1b).

1.3.2.1 standard boundary conditions

Κάθε πλεγματική θέση συνδέεται με τη γειτονική της σε κυβική διάταξη εκτός κι αν αυτή βρίσκεται στο σύνορο οπότε και απουσιάζει ο σύνδεσμος μη-παράλληλος στους συνδέσμους που οδηγούν σε γειτονικές συνοριακές πλεγματικές θέσεις. Είναι η πιο αυθόα επιλογή καθώς εισάγει σημαντικά σφάλματα πεπερασμένου πλέγματος.

Θα αναφερόμαστε στον προαναφερθέντα σύνδεσμο του συνόρου ως τον χαμένο σύνδεσμο, γιατί στις καθιερωμένες συνοριακές συνθήκες αυτός δεν υπάρχει εξ' ορισμού όμως σε άλλες επιλογές αυτός ανακτάται.

³Εδώ ήδη χρησιμοποιείται διαφορετικό σύμβολο για την διακριτή παράγωγο, επομένως υπάρχει ελευθερία χρήσης του συμβόλου ∂_μ της διαφορικής γεωμετρίας για το διανυσματικό πεδίο των συντεταγμένων του πλέγματος στη προκειμένη περίπτωση.

1.3.2.2 periodic boundary conditions

Κάθε συνοριακή πλεγματική θέση συνδέεται μέσω της τοπολογίας Λ με την πλεγματική θέση που βρίσκεται ακριβώς απέναντί της στο αντίθετο σύνορο στην κατεύθυνση του χαμένου συνδέσμου στις καθιερωμένες συνοριακές συνθήκες. Η τοπολογία ενός τέτοιου πλέγματος είναι τοροειδής. Όπως και φαίνεται στο σχήμα 1.3.2, βολική είναι η δεικτοδότηση σε συντεταγμένες x_μ , όπου η συνοριακή συνθήκη γίνεται

$$\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(x + nL_\mu \partial_\mu), \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.13)$$

00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44
00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44
00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44
00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44
00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04	00	01	02	03	04
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34	30	31	32	33	34
40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44	40	41	42	43	44

Table 1.3.2: περιοδικές συνοριακές συνθήκες

1.3.2.3 helicoid boundary conditions

Τροποποιούμε τις περιοδικές συνθήκες ώστε ο χαμένος σύνδεσμος να συνδέει κάθε συνοριακή πλεγματική θέση με αυτήν η οποία βρίσκεται απέναντί της, μόνο μετατοπισμένη κατά ένα «πλεγματικό βήμα» προς μια από τις άλλες κατευθύνσεις κατά μήκος του αντίθετου συνόρου.

Η τοπολογία είναι και πάλι τοροειδής αλλά με μετατόπιση στη μία κατεύθυνση, αλλάζοντας την από παραλληλόγραμμη σε ελικοειδή πάνω στον τόρο. (σχήμα 1.3.3)

Όπως είναι κατανοητό, εδώ βολική είναι η δεικτοδότηση σε θέσεις μνήμης, και η σχετική συνοριακή συνθήκη γίνεται

$$\mathbb{L}(\chi) = \mathbb{L}\left(\chi + \sum_n \partial_{\mu_n} \prod_{\mu=1}^{\mu_n} L_\mu\right), \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \forall (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \quad (1.3.14)$$

Δεν αλλάζει κάτι ουσιαστικό σε σχέση με τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες, εκτός του ότι είναι πιο αποδοτικές σε θέματα χρήσης μνήμης, αφού η τοπολογία του πλέγματος τότε υπολογίζεται δυναμικά και συνεχώς αντί να αποθηκευτεί μια φορά στη μνήμη. Αυτό σημαίνει πως γλιτώνουμε μνήμη, σε βάρος όμως υπολογιστικού χρόνου, μια αντιμετώπιση ιδιαίτερα γρήγορη όταν πρόκειται για αρκετά μεγάλα πλέγματα τα οποία δε μπορούν να συγκρατηθούν στη μνήμη.

2 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου

2.1 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης

Έστω $S = S_0 - j\Gamma$ η μιγαδική δράση και \mathcal{O} μια παρατηρήσιμη ποσότητα. Παρατηρούμε ότι στη συνάρτηση επιμερισμού της θεωρίας,

$$\int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) = \int \mathcal{D}\phi |\exp(-S[\phi])| \exp(j\Gamma),$$

όπου $|\exp(-S[\phi])| = \exp(-S_0[\phi])$, υπάρχει ένας παράγοντας φάσης, για αυτό και η θεωρία της πραγματικής δράσης S_0 ονομάζεται phase-quenched, γιατί καταπίνει τη φάση του εντροπικού παράγοντα την οποία εισάγει το φανταστικό μέρος της δράσης, και ασχολείται μόνο με το μέτρο του. Λαμβάνοντας υπόψη το ολοκλήρωμα επιμερισμού του phase-quenched μοντέλου, αποκτάει νόημα η αναμενόμενη τιμή του φασικού εντροπικού παράγοντα $\exp(j\Gamma)$ στο phase-quenched μοντέλο,

$$\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi]) \exp(j\Gamma)}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi])}.$$

Έστω $\langle \mathcal{O} \rangle_0$ η αναμενόμενη τιμή της ποσότητας \mathcal{O} στο phase-quenched μοντέλο,

$$\langle \mathcal{O} \rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S_0[\phi])}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi])}.$$

Η αναμενόμενη τιμή $\langle \mathcal{O} \rangle$ του μεγέθους στο πλήρες μοντέλο μπορεί να προσεγγιστεί ως,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S[\phi])}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi])} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S_0[\phi]) \exp(j\Gamma)}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi]) \exp(j\Gamma)} = \frac{\langle \mathcal{O} \exp(j\Gamma) \rangle_0}{\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0}. \quad (2.1.1)$$

Η προσέγγιση αυτή παρουσιάζει δύο θεμελιώδη προβλήματα:

overlap problem

Η καθιερωμένη τεχνική δειγματοληψίας σε μια εξομοίωση Monte Carlo ενός συστήματος με δράση $S[\phi]$ γίνεται με πιθανότητα $\exp(-S[\phi])$ όταν η δράση είναι πραγματική (importance sampling), με σκοπό να συλλέγονται μετρήσεις με υψηλή συνεισφορά στη συνάρτηση επιμερισμού. Ένα σύννηθες πρόβλημα είναι ότι η περιοχή των configurations υψηλής συνεισφοράς στο ολοκλήρωμα επιμερισμού Z δεν ταυτίζεται ή είναι κοντά απαραίτητα στην περιοχή υψηλής συνεισφοράς στο σταθμισμένο ολοκλήρωμα $Z \langle \mathcal{O} \rangle$. Έτσι ακόμη και αν μπορούσαμε να δειγματοληπτήσουμε με βάρους $\exp(-S[\phi])$ θα είχε πρόβλημα το ολοκλήρωμα $Z \langle \mathcal{O} \rangle$. Όταν οι περιοχές μέγιστης συνεισφοράς στα ολοκληρώματα που εμπλέκονται στον

2 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου

αριθμητικό υπολογισμό της $\langle \mathcal{O} \rangle$ έχουν μικρή επικάλυψη, τότε η στατιστική των μετρήσεων είναι χαμηλή και απαιτείται σοβαρά πολλαπλάσιος χρόνος υπολογισμού της αναμενόμενης τιμής $\langle \mathcal{O} \rangle$ από ότι της συνάρτησης επιμερισμού.

Το πρόβλημα γίνεται εμφανές σε θεωρίες με μιγαδική δράση τόσο στον υπολογισμό της $\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0$ όσο και της $\langle \mathcal{O} \exp(j\Gamma) \rangle_0$.

sign problem

Ο υπολογισμός της $\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0$ είναι πολύ αργός [6, 12] λόγω του διακυμαντικού χαρακτήρα της υπολογιζόμενης ποσότητας, η οποία συμπεριφέρεται περιοδικά εν γένει λόγω του μιγαδικού εκθετικού.¹

Προσεγγίζοντας το θερμοδυναμικό όριο (για επαρκώς μεγάλα μεγέθη πλέγματος),

$$\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0 = \langle \exp(-j\Gamma) \rangle_0 = \frac{Z}{Z_0} \simeq \exp(-\Omega \Delta f),$$

όπου Z_0 είναι η συνάρτηση επιμερισμού της phase-quenched θεωρίας

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S_0[\phi]),$$

και Δf είναι εξ' ορισμού η διαφορά της πυκνότητας ελεύθερης ενέργειας μεταξύ πλήρους και phase-quenched θεωρίας.

Υπολογίζοντας το σχετικό σφάλμα από N μετρήσεις στη κανονική συλλογή,

$$\frac{\Delta \langle \exp(j\Gamma) \rangle_0}{\langle \exp(j\Gamma) \rangle_0} = \frac{\sqrt{\langle \exp(j\Gamma) \exp(-j\Gamma) \rangle_0 - \langle \exp(j\Gamma) \rangle_0 \langle \exp(-j\Gamma) \rangle_0}}{\sqrt{N} \langle \exp(j\Gamma) \rangle_0} \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(\Omega \Delta f).$$

συμπεραίνεται ότι για ικανοποιητική ακρίβεια στον υπολογισμό απαιτούνται περίπου τουλάχιστον

$$N \propto (\exp \Omega \Delta f)^2$$

ασυσχέτιστες μετρήσεις, το οποίο είναι απαγορευτικό για βάρθμιση του πλέγματος σε μια εξομοίωση υλοποιήσιμου χρόνου για το βασικό πλέγμα.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι αντιμετώπισης του προβλήματος του προσήμου στον στοχαστικό υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων, σε διάφορα contexts. Το γεγονός ότι το sign problem στη γενικότητα του ανήκει στα NP-hard problems σημαίνει πως δεν έχει γενική επίλυση σε πολυωνυμικό χρόνο, αυτό φυσικά όμως δεν αποκλείει επίλυση ειδικών προβλημάτων, και τελικά ένα σύνολο θεωριών να επιλύονται από ένα σύνολο αλληλο-επικαλυπτόμενων μεθόδων. Με αλληλο-επικάλυψη εννοούμε τουλάχιστον δύο προσεγγίσεις να εφαρμόζονται σε ένα δεδομένο πρόβλημα, και αυτό ισχύει στην προκειμένη για τις βαθμωτές θεωρίες με μιγαδική δράση και στην χρωμοδυναμική στο όριο μεγάλης βαρυονικής πυκνότητας, το οποίο αποτελεί και μεγάλης προτεραιότητας πρόβλημα προς επίλυση.

2.2 Κβαντική Χρωμοδυναμική

Ένα από τα κυριότερα προβλήματα είναι ο προσδιορισμός του χώρου φάσεων της χρωμοδυναμικής, συγκεκριμένα ως προς τη θερμοκρασία β και βαρυονική πυκνότητα (χημικό δυναμικό μ). Στις περιοχές με πεπερασμένη θερμοκρασία και πυκνότητα αναμένεται η φυσική να είναι ανεξάρτητη του χημικού δυναμικού (το φαινόμενο αυτό ονομάζεται Silver-Blaze), το οποίο δύναται να μελετηθεί με διάφορες μεθόδους. Από την άλλη, η περιοχή υψηλού χημικού δυναμικού παρουσιάζει

¹Για κάθε μιγαδική τυχαία μεταβλητή $x \in \mathbb{C}$ με αναμενόμενη τιμή $\langle x \rangle$, η διακύμανση είναι

$$\langle (x - \langle x \rangle)(x - \langle x \rangle)^\dagger \rangle = \langle xx^\dagger - x\langle x \rangle^\dagger - \langle x \rangle x^\dagger + \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger \rangle = \langle xx^\dagger \rangle - \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger - \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger + \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger = \langle xx^\dagger \rangle - \langle x \rangle \langle x \rangle^\dagger. \quad (2.1.2)$$

ιδιαίτερο ενδιαφέρον και παράλληλα αρκετές δυσκολίες, διότι το φανταστικό μέρος της δράσης γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό δυσχεραίνοντας τις εξομοιώσεις Monte Carlo στην περιοχή αυτήν.

Ακολουθεί μια βιβλιογραφική λίστα (όπως καταγράφεται στο [8]) με τις μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα στην προσπάθεια επίλυση του προβλήματος μιγαδικής δράσης στις διάφορες περιοχές του χώρου φάσεων, χωρίς η λίστα να είναι εξαντλημένη, καθώς πρόκειται για ένα πολύ ενεργό πεδίο έρευνας.

χαμηλή βαρυονική πυκνότητα

[15] μέθοδοι μέθοδοι επαναστάθμισης (modified reweighting)

[16, 17] μέθοδος του αναπτύγματος Taylor

[18, 19] μέθοδος φανταστικού χημικού δυναμικού μ

υψηλή βαρυονική πυκνότητα

[20, 21, 22] μέθοδος μιγαδικής δυναμικής Langevin (βλ. επίσης [5, 6, 7] καθώς και το υπόλοιπο της παρούσας εργασίας για λεπτομέρειες)

[8, 9] Lefschetz thimbles (stationary phase method)

[23] μέθοδοι αλγορίθμου worm (βλ. επίσης [13] καθώς και υποενότητα 2.3.3 για λεπτομέρειες και γενίκευση του αλγορίθμου worm σε εφαρμογή μεθόδων δυϊκής αναπαράστασης της δράσης)

[24, 25] ενεργές θεωρίες τριών διαστάσεων (effective 3D theories)

[26] μέθοδος ιστογράμματος (multihistogram)

[27, 28, 29, 30] μέθοδος παραγοντοποίησης (factorization) ή πυκνότητας καταστάσεων (density of states)

[31] μέθοδος γενικευμένου φανταστικού χημικού δυναμικού μ

[32] μέθοδος αναπτύγματος φυγώδους (fugacity expansion)

[33] μέθοδος διαστατικής ελάττωσης (dimensional reduction)

[34, 35] όριο μεγάλου N_c (αριθμού χρωμάτων)

2.3 Σχετικιστικό αέριο Bose (φαινόμενο Silver-Blaze)

Η ιδέα κλειδί είναι η εισαγωγή μιας νέας παραμέτρου τ η οποία εξυπηρετεί ως κάποιος χρόνος εξέλιξης του πεδίου ϕ (έστω βαθμωτή θεωρία πεδίου), και η οποία εισάγει μια δυναμική στο πεδίο ως γενίκευση της κλασική εξίσωσης κίνησης

$$\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] = 0, \quad (2.3.1)$$

θα έχει δηλαδή τη γενική μορφή

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \phi(\tau) = \mathcal{F}\left(\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi]\right). \quad (2.3.2)$$

Η αντίστοιχη κβαντική θεωρία πεδίου ορίζεται πλήρως από το βασικό Feynman path integral ή συνάρτηση επιμερισμού

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \quad (2.3.3)$$

όπου και κάθε κλασική εξίσωση μεταφράζεται σε εξίσωση αναμενόμενων τιμών. Η γνώση της συνάρτησης επιμερισμού Z καθορίζει και την αναμενόμενη τιμή κάθε παρατηρήσιμης ποσότητας \mathcal{O} ,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \mathcal{O}[\phi]. \quad (2.3.4)$$

2.3.1 Μέθοδος μιγαδικής Langevin

Η παραπάνω συλλογιστική αξιοποιείται από την μέθοδο της μιγαδικής δυναμικής Langevin στον υπολογισμό του (2.3.3) η οποία εισήχθη από τους Parigi και Wu [3] και αναπτύχθηκε αργότερα από Gert Aarts et. al. [6] για την επίλυση του sign problem στο μοντέλο του χβαντικού σχετικιστικού αερίου Bose [5].

Η δυναμική εξίσωση (2.3.2) αποκτά την μορφή μιας εξίσωσης Langevin

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi(\tau) = -\frac{\delta}{\delta \phi} S[\phi(\tau)] + \eta(\tau), \quad (2.3.5)$$

όπου η είναι ένα πεδίο θορύβου, η μορφή του δηλαδή δεν είναι συγκεκριμένη αλλά τυχαία στον χώρο των πεδίων με κατανομή που συγκεκριμένα επιλέγεται gaussianή,

$$\rho[\eta] = \rho_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{4} \int d\tau \langle \eta(\tau) | \eta(\tau) \rangle\right), \quad \rho_0 = \int \mathcal{D}\eta \exp\left(-\frac{1}{4} \int d\tau \langle \eta(\tau) | \eta(\tau) \rangle\right), \quad (2.3.6)$$

ή γενικότερα να έχει τις πρώτες συναρτήσεις συσχετισμού

$$\langle \eta(\tau) \rangle = 0 \text{ και } \langle \eta(\tau) \eta(\tau') \rangle = 2\delta(\tau - \tau'). \quad (2.3.7)$$

Η τυχαιότητα του θορύβου μεταφέρεται μέσω της στοχαστικής πια εξίσωσης Langevin (2.3.5) σε τυχαιότητα του πεδίου ϕ το οποίο αποτελεί λύση της εξίσωσης Langevin. Γενικότερα, οποιαδήποτε παρατηρήσιμη ποσότητα \mathcal{O} η οποία προκύπτει ως συναρτησιακό του πεδίου ϕ αποκτάει στοχαστικό χαρακτήρα και έχει νόημα η αναμενόμενη της τιμή πάνω στο ensemble του θορύβου

$$\langle \mathcal{O}(\tau) \rangle = \int \mathcal{D}\eta \rho[\eta] \mathcal{O}[\phi(\tau)], \quad \rho[\eta] = \exp\left(-\frac{1}{4} \langle \eta | \eta \rangle\right), \quad (2.3.8)$$

το οποίο μοιάζει επίσης με μία “συναγή” κβάντωσης του πεδίου ϕ , μόνο που υπάρχει η επιπλέον παράμετρος τ η οποία τώρα ονομάζεται χρόνος Langevin. Λόγω του ασυσχετισμού στο χρόνο του θορύβου, κάθε τ -slice της κατανομής έχει ακριβώς την ίδια μορφή. Σύμφωνα με την εικασία των Parigi και Wu, στο όριο $\tau \rightarrow \infty$ το πεδίο $\phi_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau)$ είναι το πεδίο της εκάστοτε χβαντικής θεωρίας βαθμωτού πεδίου που μελετάται, δηλαδή για κάθε παρατηρήσιμη ποσότητα \mathcal{O} ,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \mathcal{O}(\tau) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]) \mathcal{O}[\phi], \quad (2.3.9)$$

ανακτάται δηλαδή το Feynman path integral ως όριο μιας στοχαστικής διαδικασίας. Εφαρμοζόμενο στην επίλυση του αριθμητικού sign problem, υπάρχει η ελπίδα πως η εξίσωση Langevin (2.3.5), όταν ο χρόνος Langevin διακριτοποιηθεί $\tau = n\epsilon$ για βήμα χρόνου ϵ , παράγει με φυσικό τρόπο μια markovιανή αλυσίδα στον χώρο των ϕ , η οποία οδηγεί στη σημαντική περιοχή για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της συνάρτησης επιμερισμού και (αν δεν υποφέρουν από overlap problem) της αναμενόμενης τιμής της τυχούσας παρατηρήσιμης ποσότητας \mathcal{O} .

Μέχρι τώρα [5] φαίνεται πως στις εξομοιώσεις επιτυγχάνεται thermalization (στατική ισορροπία η οποία αντιστοιχεί στο θεωρητικό όριο $\tau \rightarrow \infty$), για κατάλληλη επιλογή του βήματος Langevin ϵ , και οι παρατηρήσιμες ποσότητες φαίνεται να αναδεικνύουν του φαινόμενο Silver-Blaze που είναι γνωστό ότι παρουσιάζει το σχετικιστικό αέριο Bose για κρίσιμο χημικό δυναμικό $\mu_c \simeq 1.15$. Η μελέτη της μεθόδου στο σχετικιστικό αέριο Bose αποτελεί ενισχυτική του [5] εργασία με σκοπό τον επαναφορμαλισμό του προβλήματος σε πιο βολικούς όρους, και επαλήθευση βάση κώδικα γραμμένου από την αρχή.

Για αυτοσυνέπεια του μηχανισμού Langevin στην περίπτωση μιγαδικών πεδίων, είναι αναγκαία η επέκταση των μιγαδικών πεδίων $\phi \in \mathbb{C}$ σε διπλομιγαδικά $\phi \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ (βλ. κεφάλαιο 3), το οποίο είναι ισοδύναμο με την εισαγωγή επιπλέον της i μιγαδικής μονάδας j , τέτοιας ώστε $ij = ji$.²

2.3.2 Lefschetz thimbles

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη θεωρία Morse και την επέκταση της στους μιγαδικούς από τους Picard και Lefschetz, και συνοψίζεται από τον εναλλακτικό τίτλο “μέθοδος σταθερής φάσης (stationary phase method)”. Η βασική ιδέα είναι να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα σε μια περιοχή του χώρου των ϕ τέτοια ώστε ο φασικός όρος του εντροπικού όρου να είναι σταθερός, και άρα να βγαίνει εκτός της ολοκλήρωσης.

²Η δομή των quaternion παράγεται με παρόμοιο τρόπο, μόνο που αυτήν τη φορά $ij + ji = 0$, το οποίο συνεπάγεται πως το αντίστοιχο γινόμενο (Hamilton) quaternion είναι μη-μεταθετικό σε αντίθεση με το διπλομιγαδικό.

2.3.2.1 The thimble(s)

Έστω το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}} dx g(x) \exp f(x), \quad (2.3.10)$$

όπου f και g είναι ολομορφικές συναρτήσεις στους μιγαδικούς $z \in \mathbb{C}$. Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα χαρακτηρίζεται από έντονη διακύμανση της ολοκληρωτέας ποσότητας η οποία οφείλεται στην παρουσία του όρου $\exp(i\Im f)$. Με βάση τη θεωρία Picard-Lefschetz, το ολοκλήρωμα \mathcal{I} υπολογίζεται ισοδύναμα σε κάθε καμπύλη $\gamma \subset \mathbb{C}$ η οποία διατηρεί την κλάση ομολογίας του ολοκληρώματος,

$$\mathcal{I} = \oint_{\gamma \subset \mathbb{C}} dz g(x) \exp f(x), \quad (2.3.11)$$

όταν το πραγματικό μέρος της δράσης f είναι φραγμένο, $\sup_{x \in \mathbb{C}} \Re f(x) < \infty$. Ειδικότερα αποδεικνύεται πως κατάλληλη επιλογή της γ είναι η καμπύλη μέγιστης κλίσης της $\Re f$ από κρίσιμο σημείο της, τέτοιο δηλαδή ώστε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} x_a = -\frac{\partial}{\partial x_a} \Re f(x) = -\varepsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial x_b} \Im f(x), \quad (2.3.12)$$

με αρχική συνθήκη $x_a(0) = \chi_a$ όπου χ είναι σαγματικό σημείο της f ,³

$$\frac{\partial}{\partial x_a} \Re f(\chi) = \varepsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial x_b} \Im f(x) = 0 \text{ ισοδύναμα } \sup_{x \in \mathbb{C}} \Re f(x) = \max_{x \in \mathbb{C}} \Re f(x) = \Re f(\chi) \text{ και} \quad (2.3.13)$$

$$\frac{1}{n!} \varepsilon_{(a_i)_{i=1}^n} \varepsilon_{(b_i)_{i=1}^n} \prod_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{a_i}} \frac{\partial}{\partial x_{b_i}} \Re f(\chi) = -\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_a(\chi) \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_1} f_a(\chi) \neq 0. \quad (2.3.14)$$

υποθέτοντας πως η $\Re f$ έχει μοναδικό ακρότατο στο χ και αντικαθιστώντας τη συνθήκη Cauchy-Riemann

$$\circ_{abc} \frac{\partial}{\partial x_b} f_c = 0, \quad (2.3.15)$$

όπου \circ είναι ο τανυστής γινομένου μιγαδικών, όταν αυτοί αναπαρίστανται στις συνιστώσες τους (βλ. υποποενότητα 3.1.2.1).

Παρατηρούμε πως για τον μετασχηματισμό του πεδίου ολοκλήρωσης, η κατά τα άλλα πραγματική μεταβλητή ολοκλήρωσης μιγαδοποιείται, $x \rightarrow x_0 + ix_1$.

Προκύπτει πως η $\Im f$ είναι σταθερή κατά μήκος της γ .

Πράγματι κατά μήκος της γ έχουμε μέγιστη πτώση της $\Re f$, επομένως η εφαπτομένη δίνεται από $\nabla \Re f$. Σε κάθε σημείο $x \in \gamma$, μία κατεύθυνση της ισοσταθμικής της $\Re f(x)$ δίνεται από συνιστώσες

$$\pm \varepsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial x_b} \Re f(x) = \mp \frac{\partial}{\partial x_a} \Im f(x), \quad (2.3.16)$$

επομένως ισοδύναμα από (2.3.12) παρατηρούμε πως η καμπύλη γ μέγιστης κλίσης της $\Re f$ αποτελεί ταυτόχρονα ισοσταθμική της $\Im f$.

Η θεωρία Picard-Lefschetz γενικεύεται και όταν τα ακρότατα της f είναι πολλαπλά. Η υπόθεση είναι η ίδια, πως δηλαδή για κάθε ακρότατο $\chi_\sigma \in \Sigma$, το πραγματικό μέρος της f είναι άνω-φραγμένο, $\Re f(\chi_\sigma) < \infty$, $\forall \sigma \in \Sigma$. Το σύνολο των καμπυλών (κύκλων της ομολογίας της f) γ_σ αποτελεί βάση του χώρου των κύκλων της ομολογίας της f πάνω στους οποίους μπορούμε να ολοκληρώσουμε.

³Η ορίζουσα ενός πίνακα A με στοιχεία A_{ab} είναι

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon_{(a_i)_{i=1}^n} \varepsilon_{(b_i)_{i=1}^n} \prod_{i=1}^n A_{a_i b_i}.$$

2 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου

Η θεωρία επίσης γενικεύεται και για πολυδιάστατο πεδίο x , όπου οι καμπύλες ολοκλήρωσης γ γίνονται ποια υπερεπιφάνειες \mathcal{J} (thimbles) πάνω στις οποίες $\Im f$ είναι σταθερή. Το ολοκλήρωμα που υπολογίζουμε είναι της μορφής

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}^{\dim X}} \prod_{i=1}^{\dim X} dx_i g(x) \exp f(x). \quad (2.3.17)$$

Στην περίπτωση πολλαπλών σαγματικών σημείων, η εν λόγω περιοχή ολοκλήρωσης δίνεται από ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των thimbles στα διάφορα σαγματικά σημεία,⁴

$$\mathcal{C} = \sum_{\sigma \in \Sigma} n_\sigma \mathcal{J}_\sigma, \quad n_\sigma \in \mathbb{Z}, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (2.3.18)$$

2.3.2.2 Εφαρμογή στη θεωρία πεδίου

Καταλαβαίνοντας πως η μέθοδος προορίζεται για εξομοίωση Monte Carlo, και έχοντας υπόψη ότι δουλεύουμε σε πλέγμα, η ανωτέρω γενίκευση στις πολλές διαστάσεις εφαρμόζεται κι εδώ, επιτρέποντας τον αφηρημένο συμβολισμό

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \exp(-S[\phi]), \quad (2.3.19)$$

όπου στην περίπτωση μας $g[\phi] \equiv \mathcal{O}[\phi]$ και $f[\phi] \equiv -S[\phi]$ κατ' αναλογία με τα προηγούμενα. Έτσι αποσπώμαστε από τα μιγαδικά πεδία $\phi \in \mathbb{C}^X$ και τα επεκτείνουμε σε διπλομιγαδικά $\phi \in (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^X$ (βλ. υποποσενότητα 3.1.2.1), μέσα στον οποίο χώρο βρίσκεται το thimble \mathcal{C} , το οποίο αποτελεί το νέο πεδίο ολοκλήρωσης κατά της θεωρία Picard-Lefschetz.

Στη γενική περίπτωση όμως υπάρχουν κάποια προβλήματα που εμποδίζουν την απευθείας εξομοίωση:

- Δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί markovιανή αλυσίδα η οποία να κινείται στο \mathcal{C} στην γενική περίπτωση. Εικάζεται πως αρκεί να κινηθούμε στο βασικό thimble \mathcal{J}_0 το οποίο ανήκει στο ολικό μέγιστο φ_0 της $\Re S$. [8]
- Η μέθοδος μέγιστης κλίσης περιλαμβάνει και τοπική γύρω από τα ακρότατα διαταρακτική ανάπτυξη της δράσης, το οποίο αναιρεί το σκοπό της εξομοίωσης Monte Carlo για μη-διαταρακτική θεωρία πεδίου και επομένως αγνοείται, αυξάνοντας την πολυπλοκότητα του υπολογισμού.
- Η απαλλαγή της εναλλασσόμενης φάσης δεν γίνεται δίχως artifacts. Πάνω στο thimble το στοιχείο όγκου $\mathcal{D}\phi$ λαμβάνει μια φάση το ίδιο, δηλαδή όπως και είναι φυσικό αυτό που επιτυγχάνεται είναι μεταφορά του προβλήματος από τη δράση στο μέτρο. Η παρουσία της παραμένουσας αυτής φάσης δεν είναι τόσο σοβαρή όσο η αρχική φάση στον εντροπικό παράγοντα, πάραυτα η πολυπλοκότητα του υπολογισμού είναι αρκετά μεγάλη ακόμη.
- Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της συνάρτησης επιμερισμού πάνω στο thimble \mathcal{J}_0 χρησιμοποιείται (!) δυναμική Langevin με τον θόρυβο σε κάθε βήμα κατάλληλα επιλεγμένο/επεξεργασμένο ώστε κατά την παραγωγή αλυσίδας configurations να παραμείνουμε πάνω στο thimble. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά μη τετριμμένη, και η θεωρητική της βάση είναι η παράλληλη μεταφορά κατά τη διαφορικο-γεωμετρική έννοια πάνω στη πολλαπλότητα που ονομάζουμε thimble.

Επί του παρόντος έχουν εξαχθεί αποτελέσματα συναφή με τα αποτελέσματα της μιγαδικής Langevin. [9] Οι δύο μέθοδοι παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες αλλά και ουσιώδεις διαφορές. (περισσότερες λεπτομέρειες: [10])

2.3.3 Μέθοδος δυϊκής αναπαράστασης

2.3.3.1 Αναπαράσταση ροής

Σε ότι ακολουθεί υιοθετείται προσωρινά φορμαλισμός \cdot_x αντί του $\langle x|\cdot\rangle$ για την εξάρτηση από τη (πλεγματική) θέση (βλ. σελ. 2). Συνεπώς εν προκειμένω η συνάρτηση επιμερισμού γράφεται

$$Z = \frac{1}{2\pi} \prod_x \int_{\mathbb{C}} d\phi_x e^{-S}, \quad (2.3.20)$$

⁴ Ακέραιος γραμμικός συνδυασμός, διότι σε βασικούς τοπολογικούς χώρους εμφανίζεται η ακέραια ομάδα \mathbb{Z} ως υποομάδα των ομάδων ομολογίας των, για κάθε "κύκλο" του τοπολογικού χώρου.

όπου η δράση S δίνεται από το χωροχρονικό ολοκλήρωμα της lagrangiaκής πυκνότητας \mathcal{L} ,

$$S = \sum_x \mathcal{L}_x, \quad (2.3.21)$$

οπότε και στην περίπτωση πεπερασμένου πλέγματος ο εντροπικός παράγοντας γίνεται

$$e^{-S} = \exp\left(-\sum_x \mathcal{L}_x\right) = \prod_x \exp(-\mathcal{L}_x) = \prod_x \sum_{n_x} \frac{1}{n_x!} (-1)^{n_x} (\mathcal{L}_x)^{n_x} = \sum_{(n)} (-1)^{\sum_x n_x} \prod_x \frac{1}{n_x!} (\mathcal{L}_x)^{n_x}, \quad (2.3.22)$$

όπου $(n) = (n_x)_{x \in \mathbb{L}}$ αντιπροσωπεύει το τυχόν configuration των n_x όπως φαίνεται και από την ισότητα αθροισμάτων

$$\prod_x \sum_{n_x} = \sum_{(n)} \prod_x. \quad (2.3.23)$$

Η (2.3.22) συνοψίζει γενικά την ιδέα της αναπαράστασης ροής (n) . Στη γενική μορφή δράσης \mathcal{L} δε φαίνεται κανένα φανερό πλεονέκτημα, ο σκοπός όμως για ειδικότερα προβλήματα είναι να εκφραστεί η συνάρτηση επιμερισμού ως ολοκλήρωμα ποια όχι των configurations πεδίου ϕ , αλλά των configurations n όπου και η δράση είναι απαλλαγμένη από το μιγαδικό μέρος.⁵ Η πιο απλή γενική μορφή δράσης η οποία να περιλαμβάνει μιγαδικό μέρος είναι η διγραμμική στο πεδίο

$$S = \sum_x \sum_{\bar{x}} \phi_x^\dagger A_{x\bar{x}} \phi_{\bar{x}} = \sum_x \sum_{\bar{x}} \phi_x^\dagger A_{(x\bar{x})} \phi_{\bar{x}} - \sum_x \sum_{\bar{x}} \phi_x^\dagger A_{[x\bar{x}]} \phi_{\bar{x}}, \quad (2.3.24)$$

όπου το πραγματικό και μιγαδικό μέρος διακρίνονται από το hermitiano $A_{(x\bar{x})}$ και το antihermitiano $A_{[x\bar{x}]}$ κομμάτι του $A_{x\bar{x}}$,

$$A_{x\bar{x}} = A_{(x\bar{x})} + A_{[x\bar{x}]} \text{ με } A_{(x\bar{x})} = \frac{1}{2}(A_{x\bar{x}} + A_{\bar{x}x}^\dagger) \text{ και } A_{[x\bar{x}]} = \frac{1}{2}(A_{x\bar{x}} - A_{\bar{x}x}^\dagger). \quad (2.3.25)$$

Οι ανάμεικτοι όροι δεν είναι σπάνιοι στο πραγματικό μέρος της δράσης επομένως το hermitiano κομμάτι λαμβάνεται διαγώνιο-ταυτοτικό $A_{(x\bar{x})} = A\delta_{x\bar{x}}$, το οποίο θα γενικεύσουμε σε οποιαδήποτε εξάρτηση $f(\phi_x^\dagger \phi_x)$, ώστε να συμπεριλαμβάνονται αυτο-αλληλεπιδράσεις του πεδίου ϕ ενώ επαναορίζουμε $A_{x\bar{x}} = A_{[x\bar{x}]}$ έτσι ώστε η τελική δράση πυκνότητα γράφεται

$$S = S_0 + S_1 = \sum_x f(\phi_x^\dagger \phi_x) + \sum_x \sum_{\bar{x}} \phi_x^\dagger A_{x\bar{x}} \phi_{\bar{x}}. \quad (2.3.26)$$

Τότε ο εντροπικός παράγοντας αναπτύσσεται περαιτέρω, προσθέτοντας βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχους ποια προς τα πεδία ϕ και ϕ^\dagger . Συγκεκριμένα, το φανταστικό μέρος (το οποίο και προκαλεί το πρόβλημα) αναπτύσσεται ως

$$\begin{aligned} e^{-S_1} &= e^{-\sum_x \sum_{\bar{x}} A_{x\bar{x}} \phi_x^\dagger \phi_{\bar{x}}} = \prod_x \prod_{\bar{x}} e^{-A_{x\bar{x}} \phi_x^\dagger \phi_{\bar{x}}} = \\ &= \prod_x \prod_{\bar{x}} \sum_{n_{x\bar{x}}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (\phi_x^\dagger)^{n_{x\bar{x}}} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} (\phi_{\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} = \sum_{(n)} \left(\prod_x \prod_{\bar{x}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} \right) \prod_x \left((\phi_x^\dagger)^{\sum_{\bar{x}} n_{x\bar{x}}} (\phi_x)^{\sum_{\bar{x}} n_{x\bar{x}}} \right), \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

όπου στο τελευταίο βήμα έγινε εναλλαγή των βουβών δεικτών x και \bar{x} , ενώ

$$e^{-S_0} = e^{-\sum_x f(\phi_x^\dagger \phi_x)} = \prod_x e^{-f(\phi_x^\dagger \phi_x)}. \quad (2.3.28)$$

Σε αυτήν την φάση οι τιμές του μιγαδικού πεδίου, αντί της καθιερωμένης ανάπτυξης σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\phi = \phi_0 + i\phi_1$, σε πολικές συντεταγμένες $\phi = \Phi \exp(i\varphi)$. Τότε η συνάρτηση επιμερισμού γίνεται

$$Z = \sum_{(n)} \left(\prod_x \prod_{\bar{x}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} \right) \prod_x \int_0^\infty d\Phi_x \Phi_x^{1+2\sum_{\bar{x}} n_{(x\bar{x})}} e^{-f(\Phi_x^2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{-i\phi 2\sum_{\bar{x}} n_{[x\bar{x}]}}. \quad (2.3.29)$$

⁵Είναι φανερό από τελευταίο σκεπτικό γιατί μια τέτοια μέθοδος (και αναπαράσταση) είναι δυνατή μόνο όταν βρισκόμαστε στο πεπερασμένο πλέγμα.

2 Το πρόβλημα της μιγαδικής δράσης σε θεωρίες πεδίου

Συμβολίζουμε με

$$\zeta_{(n)}(A) \equiv \left(\prod_x \prod_{\bar{x}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} \right) \quad (2.3.30)$$

τον παράγοντα ο οποίος εξαρτάται αποκλειστικά από τη μορφή του φανταστικού μέρους της δράσης, και

$$n_x \equiv 2 \sum_{\bar{x}} n_{(x\bar{x})} \text{ και } \bar{n}_x \equiv 2 \sum_{\bar{x}} n_{[x\bar{x}]}, \quad (2.3.31)$$

έτσι ώστε

$$Z = \sum_{(n)} \zeta_{(n)}(A) \prod_x \int_0^\infty d\Phi_x \Phi_x^{1+n_x} e^{-f(\Phi_x^2)} \prod_x \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi_x e^{-i\varphi_x \bar{n}_x}. \quad (2.3.32)$$

Τα ολοκληρώματα στα μέτρα μιγαδικών της μορφής

$$W(n) = \int_0^\infty d\Phi \Phi^{1+n} e^{-f(\Phi^2)} \quad (2.3.33)$$

υπολογίζονται οικονομικά αριθμητικά, ενώ τα ολοκληρώματα στη φάση μιγαδικών δίνουν συναρτήσεις δέλτα

$$\delta(\bar{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{-i\varphi \bar{n}} \quad (2.3.34)$$

έτσι ώστε η τελική μορφή της συνάρτησης επιμερισμού

$$Z = \sum_{(n)} \left(\prod_x \prod_{\bar{x}} \frac{1}{n_{x\bar{x}}!} (-A_{x\bar{x}})^{n_{x\bar{x}}} \right) \prod_x W \left(2 \sum_{\bar{x}} n_{(x\bar{x})} \right) \prod_{\bar{x}} \delta \left(2 \sum_x n_{[x\bar{x}]} \right) \quad (2.3.35)$$

να είναι απαλλαγμένη από την εξάρτηση του πεδίου και παραπλεύρως από το πρόβλημα μιγαδικής δράσης, αφού σε αυτήν την αναπαράσταση δεν υφίσταται παράγοντας φάσης στο άθροισμα (τώρα) της συνάρτησης επιμερισμού.

2.3.3.2 Αλγόριθμος worm

Η απαλλαγή από τον παράγοντα φάσης δεν έγινε χωρίς κόστος: το πεδίο άθροισμα στη συνάρτηση επιμερισμού περιέχει περιορισμούς που επιβάλλονται από τις συναρτήσεις δέλτα οι οποίες αντικατέστησαν το φασικό παράγοντα. Ως εκ τούτου κρίνεται σκόπιμο [13] να χρησιμοποιηθεί μια γενίκευση του αλγορίθμου worm των Προκοφьев-Свистунов [14] για το χειρισμό των περιορισμών του configuration space και παραγωγή κατάλληλης αλυσίδας configurations για τον υπολογισμό της συνάρτησης επιμερισμού, όταν το φανταστικό μέρος έχει την ακόμη ειδικότερη μορφή (σχετικιστικό αέριο Bose, βλ. κεφάλαιο 4)

$$S_1 = - \sum_x \sum_\nu (e^{\mu\delta_{\nu,4}} \phi_x^\dagger \phi_{x+\hat{\nu}} + e^{-\mu\delta_{\nu,4}} \phi_x \phi_{x+\hat{\nu}}^\dagger), \quad (2.3.36)$$

όπου $\hat{\nu} \equiv \partial_\nu$ είναι link προς πλησιέστερο γείτονα στην διεύθυνση ν με φορά που δηλώνεται από το πρόσημο που το συνοδεύει. Εν προκειμένω

$$Z = \sum_{(n)} \sum_{\bar{n}} \left(\prod_x \prod_\nu \frac{1}{(|k_{x,\nu}| + l_{x,\nu})! n_{x,\nu}!} \right) \times \\ \times \prod_x e^{\mu k_{x,4}} W \left(\sum_\nu (|k_{x,\nu}| + |k_{x-\hat{\nu},\nu}| + 2(l_{x,\nu} + l_{x-\hat{\nu},\nu})) \right) \prod_x \delta \left(\sum_\nu (k_{x,\nu} - k_{x-\hat{\nu},\nu}) \right) \quad (2.3.37)$$

όπου $n_{x,\nu} - \bar{n}_{x,\nu} = k_{x,\nu}$ και $n_{x,\nu} + \bar{n}_{x,\nu} = |k_{x,\nu}| + 2l_{x,\nu}$. Στους βαθμούς l εφαρμόζεται απλά ένα Metropolis sweep, ενώ στους k βαθμούς, οι οποίοι δεσμεύονται από τις συναρτήσεις δέλτα, εφαρμόζονται πολλαπλά metropolis-like “flips” σε πρότυπο worm, ή “σουλχισμού”. Το σουλχίμι ξεκινάει από μια τυχαία θέση στο πλέγμα και διαγράφει μονοπάτι τυχαίου περιπατητή. Παρατηρούμε πως ο περιορισμός των k είναι περιορισμός μεταξύ πλησιέστερων γειτόνων, επομένως με κάθε update το σουλχίμι παραβιάζει τη συνθήκη της δέλτα στην αρχή και στο τέλος του. Το σουλχίμι συνεχίζει μέχρι να

2.3 Σχετικιστικό αέριο Bose (φαινόμενο Silver-Blaze)

συναντήσει την αρχή με τέτοιο τρόπο ώστε η συνθήκη της δέλτα να ικανοποιείται κατά μήκος του κλειστού μονοπατιού που διέγραψε.

Είναι αξιοσημείωτο πως η αλλαγή μεταβλητών από n και \bar{n} σε k και l έγινε για οικονομικούς λόγους περισσότερο, ώστε η συνθήκη δέλτα να περιέχει όσο το δυνατόν λιγότερα, και να απαιτείται λιγότερη χρήση worm υπολογισμών, όμως όπως γίνεται κατανοητό, η μέθοδος είναι υλοποιήσιμη και στη γενικότερη περίπτωση διγραμμικού φανταστικού μέρους της δράσης, ενδεχομένως με μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.

3 Δυναμική Langevin

3.1 Συνεχής δυναμική Langevin

3.1.1 $\phi \in \mathbb{R}^X$ και $S \in \mathbb{R}$

Έστω ότι διαπραγματευόμαστε μια θεωρία ενός πραγματικού πεδίου ϕ πραγματικής δράσης $S[\phi]$.

Οι ασύζευκτες εξισώσεις Langevin στην αναπαράσταση της θέσης παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi(\tau) \rangle = \langle x | K(\phi(\tau)) \rangle + \langle x | \eta(\tau) \rangle, \quad \langle x | K(\phi) \rangle \equiv -\frac{\delta}{\delta \langle \phi | x \rangle} S[\phi], \quad (3.1.1)$$

όπου $K(\phi)$ είναι ο όρος ολίσθησης (πεδίο, όχι συναρτησιακό) και η όρος θορύβου ο οποίος κανονικοποιείται ως

$$\langle \langle x | \eta(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x | \eta(\tau) \rangle \langle \eta(\tau') | x' \rangle \rangle = 2 \langle x | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.2)$$

Η τυπική απόκλιση της κατανομής πυκνότητας πιθανότητας του θορύβου είναι $\sqrt{2}$ από το *θεώρημα fluctuation-dissipation* [3] για τις μονάδες που χρησιμοποιούνται στη χβαντική θεωρία πεδίου (πλέγματος).

$$\rho[\eta] = \rho_0^{-1} \exp \left(- \int d\tau A[\eta(\tau)] \right), \quad \rho_0 = \int \mathcal{D}\eta \exp \left(- \frac{1}{4} \int d\tau A[\eta(\tau)] \right), \quad (3.1.3)$$

όπου

$$A[\eta] = \frac{1}{4} \langle \eta \eta \rangle \quad (3.1.4)$$

είναι η ελεύθερη (effective) «δράση» του θορύβου η έτσι ώστε η τυπική κατανομή του να είναι gaussianή.

Η εξίσωση (3.1.1) βασικά πρόκειται για πολλές εξισώσεις οι οποίες δεικτοδοτούνται από την εν λόγω αναπαράσταση του πεδίου, στην προκειμένη περίπτωση από τη θέση x . Είναι χρήσιμη πολλές φορές η γενική μορφή της εξίσωσης Langevin με τη εισαγωγή ενός πυρήνα $\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle$ ο οποίος συζεύγει τις εξισώσεις ως προς τη θέση,

$$\langle x | K(\phi) \rangle \equiv - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a | x' \rangle} S[\phi], \quad (3.1.5)$$

και ο οποίος είναι hermitianός και θετικά ορισμένος. $\langle x | x' \rangle$ είναι ειδικά ο ταυτοτικός πυρήνας, ενώ αυτό που βλέπουμε εδώ δε διαφέρει από την άλγεβρα πεπερασμένων γραμμικών συστημάτων, όπου οι πυρήνες οι οποίοι αφορούν το ίδιο σύστημα είναι «όμοιοι» μεταξύ τους.

Στην περίπτωση αυτή, το *θεώρημα fluctuation-dissipation* μας λέει πάλι πως

$$\langle \langle x | \eta(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x | \eta(\tau) \rangle \langle \eta(\tau') | x' \rangle \rangle = 2 \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.6)$$

Δεδομένης της δυναμικής Langevin για το πεδίο ϕ , πάμε να δούμε ποια είναι η δυναμική του πεδίου $\phi' = \alpha^{-1} \phi$.

Ανακλιμακώνοντας με παρόμοιο τρόπο το θόρυβο $\eta' = \alpha^{-1} \eta$ στις (3.1.1),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi'(\tau) \rangle = \langle x | K'(\phi'(\tau)) \rangle + \langle x | \eta'(\tau) \rangle, \quad K'[\phi'] = \alpha^{-1} K(\alpha \phi) = -\alpha^{-2} \frac{\delta}{\delta \phi'} S[\alpha \phi']. \quad (3.1.7)$$

Στην προκειμένη περίπτωση αναγνωρίζουμε τη παρουσία του μη τετριμμένου πυρήνα $\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle = \alpha^{-2} \langle x | x' \rangle$, δηλαδή η τυπική απόκλιση του θορύβου είναι πια $\sigma = \sqrt{2} \alpha^{-1}$, σε συνέπεια με την ανακλιμάκωση του θορύβου,

$$\langle \langle x | \eta'(\tau) \rangle \langle \eta'(\tau') | x' \rangle \rangle = \langle \langle x | \alpha^{-1} \eta(\tau) \rangle \langle \alpha^{-1} \eta(\tau') | x' \rangle \rangle = 2 \alpha^{-2} \langle x | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.8)$$

Βλέπουμε ότι το ανακλιμακώμενο πεδίο υπακούει σε υποτυπωδώς διαφορετική δυναμική, με αλλαγμένη ολίσθηση συγκεκριμένα και θόρυβο ο οποίος ενώ διατηρεί τη μορφή του στις εξισώσεις, κρύβει μια διαφορετική τυπική απόκλιση υπακούοντας το *θεώρημα fluctuation-dissipation*. Αυτή η ανάλυση θα μας χρειαστεί αμέσως, όταν αναπτύξουμε το γενικό μη-πραγματικό πεδίο ϕ σε πραγματικές συνιστώσες ϕ_a .

3 Δυναμική Langevin

3.1.2 $\phi \in \mathbb{F}^X$ και $S \in \mathbb{R}$

3.1.2.1 Άλγεβρα βαθμωτών $\phi \in \mathbb{F}$

Έστω ότι τα εν γένει μη-πραγματικά πεδία περιγράφονται από ένα σώμα $\mathbb{F} \simeq \mathbb{R}^f$, δηλαδή ότι το τυχόν πεδίο $\phi \in \mathbb{F}^X$ μπορεί να αναπτυχθεί σε $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = f + 1 \in \mathbb{N}$ το πλήθος πραγματικές συνιστώσες ως

$$\phi \equiv (\phi_a)_{a=0}^f \equiv (f) \sum_{a=0}^f f_a \phi_a, \quad (3.1.9)$$

όπου (f) είναι η κανονικοποίηση της ανάπτυξης σε συνιστώσες και $(f_a)_{a=1}^f$ μια βάση στοιχείων βασισμένη στο γεγονός ότι $\mathbb{F} \simeq \mathbb{R}^f$.¹ Θεωρούμε κατά σύμβαση πως $a \in \mathbb{N}$, δηλαδή η χαμηλότερη τιμή δείκτη είναι το 0.

γινόμενο \cdot στο \mathbb{F}

$\forall \phi, \psi \in \mathbb{F}$ το γινόμενο αυτών $\phi\psi \in \mathbb{F}$ αναπαριστάται στην αναπαράσταση δεικτών με τη βοήθεια του τανυστή γινομένου \circ , τέτοιο ώστε

$$(\phi\psi)_a \equiv (f) \circ_{abc} \phi_b \psi_c. \quad (3.1.10)$$

Ο τανυστής γινομένου μπορεί να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει γινόμενα περισσότερων στοιχείων στο \mathbb{F} ,

$$\left(\prod_{i=1}^n \phi_i \right)_a \equiv (f)^{n-1} \circ_{a(a_i)_{i=1}^n} \prod_{i=1}^n (\phi_i)_{a_i}, \quad (3.1.11)$$

όπου χάρη στην προσεταιριστική ιδιότητα του γινομένου, ο τανυστής γινομένου n στοιχείων του σώματος αποσυντίθεται ως

$$\circ_{a(a_i)_{i=1}^n} = \delta_{ab_0} \prod_{i=1}^{n-1} \circ_{b_{i-1} a_i b_i} \delta_{b_{n-1} a_n}. \quad (3.1.12)$$

Στο εξής θα αναφερόμαστε στους δείκτες $(a_i)_{i=1}^n$ του \circ ως δείκτες εισόδου και στον a ως δείκτη εξόδου για λόγο ότι οι συστέλλονται με του δείκτες των στοιχείων που εισάγονται στο γινόμενο (3.1.11) ενώ ο δε είναι ο δείκτης του αποτελέσματος του εν λόγω γινομένου.

Το γινόμενο στο \mathbb{F} εν γένει δεν είναι μεταθετικό, όταν είναι όμως, ο τανυστής γινομένου είναι συμμετρικός στους δείκτες εισόδου του, δηλαδή $\circ_{abc} = \circ_{a(bc)}$, ή και γενικότερα $\circ_{aa_1 \dots a_n} = \circ_{a(a_1 \dots a_n)}$.

Επιπλέον κάθε συστολή του τυχόντος τανυστή γινομένου $\circ_{aa_1 \dots a_n}$ (και κατά συνέπεια κάθε γινομένου αυτών), ισούται με αντίστοιχο τανυστή γινομένου μικρότερης τάξης το οποίο επάγεται από την απλούστερη περίπτωση της μίας συστολής: Για $i \in \mathbb{N}_n$,

$$\delta_{aa_i} \circ_{aa_1 \dots a_i \dots a_n} = \circ_{a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n}. \quad (3.1.13)$$

Ειδικές περιπτώσεις αποτελούν η $\circ_{ab} = \delta_{ab}$ η οποία αντιπροσωπεύει το γινόμενο ενός στοιχείου, και δίνει κατά συνέπεια το ίδιο το στοιχείο, και η $\circ_a = 1_a f$ η οποία αντιπροσωπεύει το γινόμενο κανενός στοιχείου, και δίνει κατά συνέπεια το ουδέτερο στοιχείο του εν λόγω γινομένου. Το βαθμωτό $\circ = f$ αντιπροσωπεύει την κανονικοποίηση του γινομένου. Αν για παράδειγμα στον ορισμό του γινομένου (3.1.10) η σταθερά ανάπτυξης ενσωματωθεί στον τανυστή γινομένου \circ_{abc} , τότε $\circ = (f)f$, θέτει δηλαδή τη βάση για όλους τους ανώτερους του τανυστές γινομένου.

μέτρο $|\cdot|$ στο \mathbb{F}

Το μέτρο ενός στοιχείου $\phi \in \mathbb{F}$ είναι καλά ορισμένο και συμβολίζεται με $|\phi| \in \mathbb{R}$,

$$|\phi|^2 \equiv (f)^2 \delta_{ab} \phi_a \phi_b. \quad (3.1.14)$$

Το μέτρο σέβεται το γινόμενο του \mathbb{F} ,

$$|\phi\psi| = |\phi||\psi|, \quad (3.1.15)$$

¹Κλασικό παράδειγμα είναι αυτό του $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, όπου $c_0 \equiv 1$ και $c_1 \equiv i$ με $(i) \equiv 1$ τις περισσότερες φορές.

αφού $|\phi\psi|^2 = (\mathbb{f})^2 \delta_{ab} (\mathbb{f}) \circ_{ace} \phi_c \psi_e (\mathbb{f}) \circ_{bdf} \phi_d \psi_f = (\mathbb{f})^2 \delta_{cd} \phi_c \phi_d (\mathbb{f})^2 \delta_{ef} \psi_e \psi_f = |\phi|^2 |\psi|^2$, με την προϋπόθεση όμως ότι

$$\delta_{ab} \circ_{ace} \circ_{bdf} = \delta_{cd} \delta_{ef}, \quad (3.1.16)$$

η οποία καθιστά το σώμα \mathbb{F} Clifford άλγεβρα.

συζυγία \cdot^\dagger στο \mathbb{F}

Χάρη στη διγραμμικότητα του γινομένου στοιχείων στο \mathbb{F} , υπάρχει μοναδικό συζυγές του ϕ στοιχείο ϕ^\dagger τέτοιο ώστε

$$|\phi|^2 = \phi^\dagger \phi = \phi \phi^\dagger. \quad (3.1.17)$$

Η συζυγία αναπαρίσταται με τη βοήθεια του τανυστή συζυγίας \diamond τέτοιο ώστε

$$(\phi^\dagger)_a \equiv \diamond_{ab} \phi_b. \quad (3.1.18)$$

Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $(\phi^\dagger)^\dagger = \phi$, δηλαδή $\diamond_{ab} \diamond_{bc} = \delta_{ac}$. Είναι ενδιαφέρον πως ο τανυστής συζυγίας δεν είναι απαραίτητα συμμετρικός στους δείκτες του.

Η συζυγία σέβεται το μη-μεταθετικό εν γένει γινόμενο, αντιστρέφοντας τη σειρά του γινομένου,

$$(\phi\psi)^\dagger = \psi^\dagger \phi^\dagger, \quad (3.1.19)$$

αφού $(\phi\psi)^\dagger \phi\psi = \psi^\dagger \phi^\dagger \phi\psi = |\phi|^2 \psi^\dagger \psi = |\phi|^2 |\psi|^2 = |\phi\psi|^2$.

Ισοδύναμα σε γραφή τανυστών $\diamond_{ab} \circ_{bcd} = \circ_{afe} \diamond_{fd} \diamond_{ec}$ και επαγωγικά από προσεταιριστική ιδιότητα γινομένου (3.1.12),

$$\diamond_{ab} \circ_{b(b_i)_{i=1}^n} = \circ_{a(a_i)_{i=n}^1} \prod_{i=n}^1 \diamond_{a_i b_i}. \quad (3.1.20)$$

εσωτερικό γινόμενο \cdot^\bullet στο \mathbb{F}

Το «εσωτερικό» γινόμενο στο \mathbb{F} των ϕ και ψ ορίζεται ως το $\psi^\dagger \phi$ και αναπαρίσταται με τη βοήθεια του τανυστή \bullet τέτοιο ώστε

$$(\psi^\dagger \phi)_a \equiv (\mathbb{f}) \bullet_{abc} \phi_b \psi_c = (\mathbb{f}) \circ_{adc} \diamond_{db} \psi_b \phi_c, \quad (3.1.21)$$

Γράφοντας την (3.1.21) σε μορφή αναλλοίωτη της επιλογής του (\mathbb{f}) για $\psi = \phi$,

$$(\mathbb{f})(\phi^\dagger \phi)_a = \bullet_{abc} (\mathbb{f}) \phi_b (\mathbb{f}) \phi_c. \quad (3.1.22)$$

Το $|\phi|^2 \in \mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτο της επιλογής ενώ είναι πραγματικός, δηλαδή μόνο η συνιστώσα 0 του $\phi^\dagger \phi$ επιβιώνει,

$$|\phi|^2 = (\phi^\dagger \phi)_0 = (\mathbb{f}) \bullet_{0bc} \phi_b \phi_c, \quad (3.1.23)$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\bullet_{0ab} \equiv \circ_{0db} \diamond_{da} = \circ_{0ad} \diamond_{db} = \delta_{ab}, \quad (3.1.24)$$

αφού $|\phi|^2 \equiv (\mathbb{f})^2 \delta_{bc} \phi_b \phi_c$ και $\phi^\dagger \phi = \phi \phi^\dagger$. \diamond είναι αντίστροφος του εαυτού του, οπότε η (3.1.24) συνεπάγεται ότι

$$\diamond_{ab} = \circ_{0ab} = \circ_{0(ab)}. \quad (3.1.25)$$

Επειδή $\phi^\dagger \phi = \phi \phi^\dagger$ μπορούμε να συμπεράνουμε γενικά πως

$$\bullet_{a(bc)} = 1_a \bullet_{0bc} = 1_a \delta_{bc}, \quad (3.1.26)$$

το οποίο αντικατοπτρίζει το γεγονός πως $\phi^\dagger \psi + \psi^\dagger \phi \in \mathbb{R}$. Το εσωτερικό γινόμενο όμως είναι πλήρες, δηλαδή $\forall \chi \in \mathbb{F} \exists \phi, \psi \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε $\chi = \phi^\dagger \psi$ οπότε και $\chi + \chi^\dagger \in \mathbb{R} \forall \chi \in \mathbb{F}$, ήτοι

$$\chi_a + \diamond_{ab} \chi_b = (\delta_{ab} + \diamond_{ab}) \chi_b = 2_a \chi_0. \quad (3.1.27)$$

3 Δυναμική Langevin

παράδειγμα: παράγωγος συναρτησιακού

Έστω ένα συναρτησιακό $s : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή $\forall \phi \in \mathbb{F}, s[\phi] \in \mathbb{R}$. Η παράγωγος του συναρτησιακού s με το ϕ είναι από μόνο του στοιχείο του \mathbb{F} , όπως και φαίνεται από την αυτοσυνεπή γραφή της σε συνιστώσες. Συγκεκριμένα έστω

$$k(\phi) = \frac{\delta}{\delta\phi} s[\phi], \quad (3.1.28)$$

οι συνιστώσες του οποίου γράφονται σε αναλλοίωτη μορφή ως προς τη σταθερά ανάπτυξης (f) ως

$$(\|f\|)k_a(\phi) = \frac{\delta}{\delta(\|f\|\phi_a)} s[\phi] \quad \text{ή} \quad k_a(\phi) = (\|f\|)^{-2} \frac{\delta}{\delta\phi_a} s[\phi]. \quad (3.1.29)$$

Σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται για ακόμη μία φορά πως η σταθερά ανάπτυξης (f) ανακύπτει σε μια σχέση βαθμωτών με μη τετριμμένο τρόπο (όπως και στο γινόμενο (3.1.10)).

3.1.2.2 Εξίσωση Langevin

Η μορφή της εξίσωσης Langevin για πραγματικά βαθμωτά πεδία δε κληροδοτείται αυτούσια στα μη-πραγματικά πεδία. Η αποσύζευξη των εξισώσεων φυσικά διατηρείται, οπότε περιοριζόμαστε στον ταυτοτικό πυρήνα $\langle x|K|x' \rangle = \langle x|x' \rangle$. Έστω ότι τελική μορφή της συνολικής εξίσωσης είναι

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x|\phi(\tau) \rangle = \omega \langle x|K(\phi(\tau)) \rangle + \sqrt{\omega} \langle x|\eta(\tau) \rangle, \quad K(\phi) \equiv -\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi], \quad (3.1.30)$$

$$\langle \langle x|\eta(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x|\eta(\tau) \rangle \langle \eta(\tau')|x' \rangle \rangle = 2\omega^{-1} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.31)$$

όπου η σταθερά ω μένει να προσδιοριστεί χάριν αυτοσυνέπειας με το γεγονός ότι μια θεωρία μη-πραγματικού βαθμωτού πεδίου ϕ είναι μια θεωρία πολλών ανεξάρτητων πραγματικών βαθμωτών πεδίων ϕ_a τα οποία αποτελούν τις συνιστώσες του, όπως γίνεται κατανοητό από την υποενότητα 3.1.2.1.

Αναπτύσσοντας την εξίσωση Langevin (3.1.30) σε συνιστώσες,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x|\phi_a(\tau) \rangle = \omega \langle x|K_a(\phi(\tau)) \rangle + \sqrt{\omega} \langle x|\eta_a(\tau) \rangle, \quad K_a(\phi) = -(\|f\|)^{-2} \frac{\delta}{\delta\phi_a} S[\phi], \quad (3.1.32)$$

$$\langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau')|x' \rangle \rangle = 2(\|f\|)^{-2} \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.1.33)$$

όπου $\alpha_{aa'}$ είναι δέλτα του Kronecker βαθμού μικρότερου της διάστασης του χώρου, δηλαδή $\alpha^2 \equiv \alpha_{aa} = \alpha_{aa'} \alpha_{a'a} \leq \delta_{aa} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.² Αναπτύσσουμε το θόρυβο σε συνιστώσες

$$2\omega^{-1} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau') = \langle \langle x|\eta(\tau) \rangle \langle \eta(\tau')|x' \rangle \rangle = (\|f\|)^2 \alpha_{aa'} \langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau')|x' \rangle \rangle. \quad (3.1.34)$$

οι οποίες υπακούουν στο θεώρημα fluctuation-dissipation των επιμέρους συνιστωσών εξισώσεων Langevin, δηλαδή

$$\langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau')|x' \rangle \rangle = 2(\|f\|)^{-2} \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau') \quad \text{ή} \quad 2\omega^{-1} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau') = 2\alpha_{aa} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (3.1.35)$$

συνεπάγεται ότι $\omega = \alpha^{-2}$.

Στη γενική περίπτωση όπου ο θόρυβος είναι ιστροπικός, $\alpha_{aa'} = \delta_{aa'}$ και $\omega^{-1} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Υπάρχουν περιπτώσεις όμως που κάποιες συνιστώσες του θορύβου μπορεί να είναι μηδενικές, η κρυμμένη μορφή του θορύβου δηλαδή επί της ουσίας καθρεφτίζεται τελικά σε επιπλέον παράγοντα στο συντελεστή ολίσθησης. Χωρίς τον συντελεστή ω , οδηγούμαστε σε εκφυλισμό της εξίσωσης σε πραγματική Langevin επί της ουσίας, αφού $\alpha_{aa} = 1$, δηλαδή μόνο μία από τις εξισώσεις Langevin είναι στην πραγματικότητα στοχαστική.

Εξισώσεις Langevin (συνιστώσες) για το πεδίο $\phi \in \mathbb{F}^X$ και πραγματική δράση $S \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x|\phi_a(\tau) \rangle = \alpha^{-2} \langle x|K_a(\phi(\tau)) \rangle + \alpha^{-1} \langle x|\eta_a(\tau) \rangle, \quad K_a(\phi) = -(\|f\|)^{-2} \frac{\delta}{\delta\phi_a} S[\phi], \quad (3.1.36)$$

$$\langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \langle x|\eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau')|x' \rangle \rangle = 2(\|f\|)^{-2} \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (3.1.37)$$

²Κάθε σώμα \mathbb{F} έχει διάσταση $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F} = 1$ ως προς τον εαυτό του και $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{F} = n \in \mathbb{N}$ για σώμα \mathbb{G} τέτοιο ώστε $\mathbb{F} \simeq \mathbb{G}^n$.

όπου $\alpha^2 \equiv \alpha_{aa} \leq \delta_{aa} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Οι εξισώσεις Langevin των συνιστωσών ϕ_a παίρνουν την απλούστερη μορφή με κατάλληλη επιλογή σταθεράς ανάπτυξης σε συνιστώσες, $(f) = \alpha^{-1}$. Η δράση (3.1.4) του θορύβου η γίνεται

$$A[\eta] = \frac{1}{4} \alpha^{-2} \langle \eta | \eta \rangle = \frac{1}{4} (f)^2 \alpha^{-2} \langle \alpha_{aa'} \eta_a \eta_{a'} \rangle = \frac{1}{4} \langle \alpha_{aa'} \eta_a \eta_{a'} \rangle \quad (3.1.38)$$

3.1.3 $\phi \in \mathbb{F}^X$ και $S \in \mathbb{G}$

Η περίπτωση της μη-πραγματικής δράσης είναι περίτεχνη για το λόγο πρωτίστως ότι καταστρέφει την αυτοσυνέπεια των εξισώσεων Langevin όπως γράφτηκαν μέχρι τώρα, αφού όλοι οι όροι ανήκουν στο σώμα \mathbb{F} , όλοι εκτός του όρου ολίσθησης ο οποίος για $S \in \mathbb{G}$,³

$$K(\phi) := -\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X \text{ ή } K_{ab}(\phi) \propto \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta\phi_{ac}} S_d[\phi]. \quad (3.1.39)$$

Ένα σώμα είναι πάντα και διανυσματικός χώρος ως προς τον εαυτό του, αλλά και ως υπόσωμά του $\mathbb{H} \leq \mathbb{F}$ μπορεί να είναι, όπως στη παρούσα δουλειά είναι το \mathbb{R} . Μάλιστα διαφέρει και η διάσταση του επαγόμενου διανυσματικού χώρου κάθε φορά, συγκεκριμένα

$$\dim_{\mathbb{H}}(\mathbb{F}) = \frac{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F})}{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})},$$

όπου $\mathbb{R} \leq \mathbb{F}$ και $\mathbb{R} \leq \mathbb{H}$ είναι (ελάχιστο) κοινό υπόσωμά των \mathbb{F} και \mathbb{H} πάνω στο οποίο βασίζονται και τα δύο.

$\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}$ είναι ο ταυστικός χώρος που συνάγεται από τους επιμέρους διανυσματικούς χώρους \mathbb{F} και \mathbb{G} , και διαφέρει ριζικά από το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{F} \times \mathbb{G}$, διαφορά η οποία εύκολα αναδεικνύεται από

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{G} \text{ ενώ } \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F} \times \mathbb{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{G}.$$

Η αυτοσυνέπεια επαναφέρεται με φυσικό τρόπο επεκτείνοντας το πεδίο από το \mathbb{F} στο $\mathbb{F} \times \mathbb{G}$, ή σε φορμαλισμό δεικτών, από ϕ_a σε ϕ_{ab} . Η σταθερά ανάπτυξης σε συνιστώσες γράφεται συνολικά $(fg) \equiv (f)(g)$. Η σταθερά αναλογίας στην (3.1.39) είναι πρωτίστως $(f)^{-2}$ από την ανάπτυξη σε δείκτες του \mathbb{F} , επί $(g)^{-2}$ και όχι $(g)^{-1}$ αφού $S \in \mathbb{G} \leq \mathbb{F} \otimes \mathbb{G}$ και επομένως αναδύεται ένας παράγοντας (g) κατά τη γραφή του γινομένου $\circ_{cbd}(\dots)$, ο οποίος όμως απορροφάται στην αναλλοίωτη γραφή της δράσης $(g)S$. Ο λόγος είναι ότι η κανονικοποίηση της δράσης αφορά τη φυσική και πρέπει να παραμείνει ή ίδια για το πραγματικό της μέρος μετά την επέκτασή.

Εξισώσεις Langevin (συνιστώσες) για το επεκταμένο πεδίο $\phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X$ και μη-πραγματική δράση $S \in \mathbb{G}$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_{ab}(\tau) \rangle = \gamma^{-2} \langle x | K_{ab}(\phi(\tau)) \rangle + \gamma^{-1} \langle x | \eta_{ab}(\tau) \rangle, \quad K_{ab}(\phi) := - (fg)^{-2} \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta\phi_{ac}} (g) S_d[\phi], \quad (3.1.40)$$

$$\langle \langle x | \eta_{ab}(\tau) \rangle \rangle = 0_{ab} \text{ και } \langle \langle x | \eta_{ab}(\tau) \rangle \langle \eta_{a'b'}(\tau') | x' \rangle \rangle = 2 (fg)^{-2} \gamma_{aba'b'} \langle x | x' \rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (3.1.41)$$

όπου $\gamma_{aba'b'} \equiv \alpha_{aa'} \beta_{bb'}$ και κατά συνέπεια $\gamma^2 \equiv \gamma_{abab} = \alpha_{aa} \beta_{bb} \leq \delta_{aa} \delta_{bb} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{G} \equiv \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})$.

Για $(f) = \alpha^{-1}$ και $(g) = \beta^{-1}$ ή $(fg) = (f)(g) = \alpha^{-1} \beta^{-1} = \gamma^{-1}$ (αφού $\gamma = \alpha\beta$), $\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle = \langle x | x' \rangle$, οι εξισώσεις Langevin (3.1.40) αποκτούν δηλαδή την απλούστερη δυνατή μορφή.

Το \mathbb{G} -κομμάτι του πεδίου ϕ στην εκάστοτε θεωρία δεν έχει φυσικό νόημα και ως εκ τούτου μπορεί να χρησιμοποιηθεί με οποιοδήποτε συμβατό με το \mathbb{F} -κομμάτι του πεδίου. Για παράδειγμα, το πιο σύνηθες στη βιβλιογραφία [5, 6, 7] είναι ο μηδενισμός του \mathbb{G} -θορύβου, δηλαδή οι συνιστώσες του θορύβου αναπαρίστανται ως $\eta_{ab} = \eta_a 1_b$ με

$$\langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau') | x' \rangle \rangle = 2 (fg)^{-2} \alpha_{aa'} \langle x | x' \rangle \delta(\tau - \tau') \quad (3.1.42)$$

³Στην περίπτωση ηλίθικου πάνω στο σώμα \mathbb{F} έχουμε

$$\frac{\phi}{\psi} = \frac{\psi^\dagger \phi}{|\psi|^2} \text{ ή } \left(\frac{\phi}{\psi} \right)_a = \bullet_{abc} \frac{\psi_b \phi_c}{\psi_d \psi_d} = \bullet_{abc} \frac{\phi_c}{\psi_b} \text{ όταν } \frac{\psi_b}{\psi_d} = \delta_{bd}.$$

3 Δυναμική Langevin

όπου εννοείται πως $\langle g \rangle = 1$ και άρα $\langle fg \rangle = \langle f \rangle$ το οποίο συνάγεται από το απλό γεγονός ότι ο \mathbb{G} -θόρυβος έχει μία συνιστώσα, και η σταθερά ανάπτυξης προεπιλέγεται με αυτήν την επιλογή. Έτσι γίνεται φανερό πως στην κατεύθυνση \mathbb{G} το πεδίο αναπτύσσεται στις συνιστώσες του χωρίς κανονικοποίηση. Οι εν λόγω συνιστώσες ϕ_{-b} αποτελούν φυσικά πεδία, μόνο το «πραγματικό» ϕ_{-0} εκ' των οποίων αφορά τη θεωρία υπό εξέταση, ενώ τα υπόλοιπα είναι βοηθητικά.

Οι εξισώσεις Langevin γράφονται τότε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_{ab}(\tau) \rangle = \alpha^{-2} \langle x | K_{ab}(\phi(\tau)) \rangle + \alpha^{-1} \langle x | \eta_a(\tau) \rangle 1_b, \quad K_{ab}(\phi) := -\langle f \rangle^{-2} \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}} S_d[\phi]. \quad (3.1.43)$$

Δεδομένης της τυχαιότητας του θορύβου, οι εξισώσεις Langevin σέβονται μια συμμετρία συζυγίας-parity [6]

$$\phi_{ab} \longrightarrow -\diamond_{ac} \diamond_{bd} \phi_{cd} \text{ με } K_{ab} \longrightarrow -\diamond_{ac} \diamond_{bd} K_{cd}, \quad (3.1.44)$$

η οποία μηδενίζει όλες τις συναρτήσεις Green δύο σημείων $\langle \langle \phi_{ab} \phi_{cd} \rangle \rangle$ εκτός από αυτές των οποίων τα συμμετέχοντα πεδία αλλάζουν ταυτόχρονα πρόσημο με τον εν λόγω μετασχηματισμό συμμετρίας δίνοντας [6]

$$\langle \langle \phi_{ab} \phi_{cd} \rangle \rangle \propto \delta_{ac} \delta_{bd} + \varepsilon_{ac} \varepsilon_{bd}. \quad (3.1.45)$$

3.2 Εξίσωση Fökker-Planck

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ή της υποβόσκουσας αλγεβρικής δομής και όπου κρίνεται απαραίτητο, οι αλγεβρικοί δείκτες θα παραλείπονται. Για το λόγο αυτό (και για λόγους re-usability) επανεισάγεται ο πυρήνας \mathcal{K} στην εξίσωση Langevin, ο οποίος είναι σημαντικό να θυμηθούμε πως είναι αναγκαία hermitianός και θετικά ορισμένος.

Εξίσωση Langevin για πεδία $\phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X$ και δράση $S \in \mathbb{G}$ με θόρυβο $\eta \in \mathbb{F}^X$ και πυρήνα $\mathcal{K} \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{F})^X$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle = \langle x | \eta_a(\tau) \rangle + \langle x | K_a(\phi(\tau)) \rangle, \quad \langle x | K_a(\phi) \rangle = - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a | x' \rangle} S[\phi] \quad (3.2.1)$$

$$\langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \rangle = 0 \text{ και } \langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau) | x' \rangle \rangle = 2\alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau') \quad (3.2.2)$$

Η λύση της εξίσωσης δεν είναι μοναδική, ανήκει κατά βάση σε μια κατανομή λύσεων, με «πυκνότητα πιθανότητας» $\langle \phi | \rho(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$, κατανομή η οποία παράγεται χάρη στο στοχαστικό μέρος της εξίσωσης: τον θόρυβο η . Κατά σύμβαση όταν πεδίο και χρόνος Langevin γράφονται ως ένα, αποτελεί λύση της εξίσωσης Langevin, και ειδικότερα το στιγμιότυπο $\phi(\tau)$ της εν λόγω λύσης, η οποία έχει επιπλέον μια κρυφή εξάρτηση *ίσων χρόνων* από τον θόρυβο $\eta(\tau)$. Αντιθέτως, η πυκνότητα ρ εξαρτάται από το χρόνο Langevin και τα πεδία explicitly, δίνοντας επιμέρους πυκνότητες πεδίων ίσου χρόνου (τ -slices).

Σε μία στοχαστική εξίσωση, το θέμα δεν είναι τόσο αν ένα συγκεκριμένο πεδίο ϕ είναι λύση ή όχι αλλά ποια είναι η πιθανότητα του να είναι λύση. Με λίγα λόγια όλος ο χώρος $(\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^{X \times \mathbb{R}}$ είναι ανοιχτός στην εξίσωση Langevin:

$\forall \phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^{X \times \mathbb{R}}, \exists \eta \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^{X \times \mathbb{R}}$ με κατανομή πιθανότητας που δίνεται από τη δράση

$$A[\eta(\tau)] = \frac{1}{4} \langle \eta(\tau) | \mathcal{K}^{-1} | \eta(\tau) \rangle = \frac{1}{4} \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a(\tau) \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'}(\tau) \rangle \rangle \quad (3.2.3)$$

τέτοιος ώστε ϕ είναι λύση της εξίσωσης Langevin με θόρυβο η , όπου \mathcal{K}^{-1} είναι ο αντίστροφος του \mathcal{K} ,

$$\langle x | \mathcal{K} | \mathcal{K}^{-1} | x' \rangle = \langle x | \mathcal{K}^{-1} | \mathcal{K} | x' \rangle = \langle x | x' \rangle \quad (3.2.4)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση γίνεται στην προκειμένη:

$$Z[\xi] \equiv \left\langle \exp \left(\frac{1}{2} (\langle \xi | \phi \rangle + \langle \phi | \xi \rangle) \right) \right\rangle = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(- \frac{1}{2} \langle \phi | \mathcal{K}^{-1} | \phi \rangle + \frac{1}{2} (\langle \xi | \phi \rangle + \langle \phi | \xi \rangle) \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle \right),$$

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle\right),$$

έτσι ώστε $Z[0] = 1$.

$$\begin{aligned} (\langle\xi|\mathcal{K} - \langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|(\phi) - \mathcal{K}|\xi\rangle) &= \langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle - \langle\xi|\mathcal{K}|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle - \langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\mathcal{K}|\xi\rangle + \langle\xi|\mathcal{K}|\mathcal{K}^{-1}|\mathcal{K}|\xi\rangle \\ &= \langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle - \langle\xi|\phi\rangle - \langle\phi|\xi\rangle + \langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle. \end{aligned}$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $\psi = \phi - \mathcal{K}\xi$, $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\psi$, έχουμε

$$-\frac{1}{2}\langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle + \frac{1}{2}(\langle\xi|\phi\rangle + \langle\phi|\xi\rangle) = -\frac{1}{2}\langle\psi|\mathcal{K}^{-1}|\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle.$$

Τελώντας την αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα της γεννήτριας συνάρτησης

$$\frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle + \frac{1}{2}(\langle\xi|\phi\rangle + \langle\phi|\xi\rangle)\right) = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\psi \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\psi|\mathcal{K}^{-1}|\psi\rangle\right) \exp\left(\frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle\right).$$

Όμως

$$Z_0 \equiv \int \mathcal{D}\psi \exp\left(-\frac{1}{2}\langle\psi|\mathcal{K}^{-1}|\psi\rangle\right),$$

επομένως

$$Z[\xi] = \exp\left(\frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle\right).$$

Οι συναρτήσεις Green ελεύθερων πεδίων γράφονται τότε ως συναρτησιακές παράγωγοι της γεννήτριας συνάρτησης (1.2.4),

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \langle x_i|\phi\rangle \langle\phi|x'_i\rangle \right\rangle = \prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta\langle x'_i|\xi\rangle} \frac{\delta}{\delta\langle\xi|x_i\rangle} Z[0],$$

με συγκεκριμένη δράση

$$S[\phi] = -\frac{1}{2}\langle\phi|\mathcal{K}^{-1}|\phi\rangle.$$

Η δράση A του θορύβου η είναι διαγώνια ως προς το χρόνο Langevin τ επομένως όλοι οι υπολογισμοί μπορούν να διαχωριστούν σε ίσους χρόνους, και ο χρόνος τ αγνοείται σε ότι ακολουθεί.

Συνήθως αυτό που συμβαίνει είναι ο ελεύθερος όρος \exp επιβιώνει πάντοτε στις διαφορίσεις και γίνεται μονάδα όταν $\xi = 0$.

$$\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle = \int_X d^{\dim X} x \int_X d^{\dim X} x' \langle\xi|x\rangle \langle x|\mathcal{K}|x'\rangle \langle x'|\xi\rangle.$$

Ως ενδιαμέσο βήμα υπολογισμού δείχνουμε κάτι το οποίο είναι ήδη γνωστό,

$$\langle\langle x|\eta\rangle\rangle = \frac{\delta}{\delta\langle\xi|x\rangle} Z[\xi] = \frac{\delta}{\delta\langle\xi|x\rangle} \exp\left(\frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle\right) = \frac{1}{2} \frac{\delta\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle}{\delta\langle\xi|x\rangle} \exp\left(\frac{1}{2}\langle\xi|\mathcal{K}|\xi\rangle\right).$$

Από τη στιγμή που \mathcal{K} hermitianός,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\delta \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle \xi | x \rangle} &= \int_X d^{\dim X} x' \int_X d^{\dim X} x'' \frac{\delta \langle \xi | x'' \rangle}{\delta \langle \xi | x \rangle} \langle x'' | \mathcal{K} | x' \rangle \langle x' | \xi \rangle \\ &= \int_X d^{\dim X} x' \int_X d^{\dim X} x'' \langle x | x'' \rangle \langle x'' | \mathcal{K} | x' \rangle \langle x' | \xi \rangle \\ &= \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \langle x' | \xi \rangle \\ &= \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle, \end{aligned}$$

επομένως

$$\langle \langle x | \eta \rangle \rangle = \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \exp\left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle\right) = 0 \text{ για } \xi = 0. \quad (3.2.5)$$

Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για τον υπολογισμό στη συνέχεια της συνάρτησης συσχετισμού του θορύβου

$$\begin{aligned} \langle \langle x | \eta \rangle \langle \eta | x' \rangle \rangle &= \frac{\delta}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \frac{\delta}{\delta \langle \xi | x \rangle} Z[\xi] = \frac{\delta}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \left(\langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \exp\left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle\right) \right) = \\ &= \frac{\delta \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \exp\left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle\right) + \frac{1}{2} \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \frac{\delta \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \exp\left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle\right). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας κατά παράγοντες,

$$\frac{\delta}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \left(\langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \exp\left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle\right) \right) = \frac{\delta \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \exp\left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle\right) + \frac{1}{2} \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \frac{\delta \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} \exp\left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle\right). \quad (3.2.6)$$

Ομοίως,

$$\frac{1}{2} \frac{\delta \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} = \langle \xi | \mathcal{K} | x' \rangle, \quad (3.2.7)$$

ενώ

$$\frac{\delta \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} = \int_X d^{\dim X} x'' \langle x | \mathcal{K} | x'' \rangle \frac{\delta \langle x'' | \xi \rangle}{\delta \langle x' | \xi \rangle} = \int_X d^{\dim X} x'' \langle x | \mathcal{K} | x'' \rangle \langle x'' | x' \rangle = \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle. \quad (3.2.8)$$

Αντικαθιστώντας,

$$\langle \langle x | \eta \rangle \langle \eta | x' \rangle \rangle = (\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle + \langle x | \mathcal{K} | \xi \rangle \langle \xi | \mathcal{K} | x' \rangle) \exp\left(\frac{1}{2} \langle \xi | \mathcal{K} | \xi \rangle\right) = \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \text{ για } \xi = 0. \quad (3.2.9)$$

3.2.1 Το σύμβολο Dirac της κατανομής

Η $\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$ μας λέει ποια είναι η πιθανότητα το πεδίο ϕ στη χρονική στιγμή τ να είναι στιγμιότυπο $\phi(\tau)$ λύσης της εξίσωσης Langevin (3.1.1) δεδομένου ότι ϕ_0 τη χρονική στιγμή τ_0 είναι στιγμιότυπο λύσης της εξίσωσης. Η εξάρτηση δηλαδή μιας λύσης $\phi(\tau)$ από την αρχική συνθήκη $\phi(\tau_0) = \phi_0$ είναι πιθανοφανική και όχι ντετερμινιστική λόγω της στοχαστικής φύσης της εξίσωσης.

Επειδή η εξίσωση Langevin είναι τοπική στο χρόνο τ , καθώς ο θόρυβος είναι ασυσχέτιστος για $\tau = \tau'$ από τη συνθήκη (3.1.2), η \wp είναι markovιανή, [2] δηλαδή

$$\langle \phi | \wp(\tau, \tau'') | \phi'' \rangle = \int \mathcal{D}\phi' \langle \phi | \wp(\tau, \tau') | \phi' \rangle \langle \phi' | \wp(\tau', \tau'') | \phi'' \rangle, \quad (3.2.10)$$

ή ισοδύναμα

$$\wp(\tau, \tau'') = \wp(\tau, \tau') \wp(\tau', \tau'') \quad (3.2.11)$$

το οποίο σημαίνει πως η \wp μπορεί να δομηθεί σε μικρά βήματα χρόνου, το οποίο θυμίζει πολύ τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζουμε άτυπα τα path integrals. Από (3.2.10) γίνεται κατανοητό πως ο συμβολισμός $\langle \dots \rangle$ εδώ συμπίπτει με αυτόν της αναμενόμενης τιμής, δηλαδή το path integral και όχι το ολοκλήρωμα ως προς το χωροχρόνο. Σε αυτό το context για παράδειγμα,

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \delta[\phi - \phi'], \quad (3.2.12)$$

όπου $\delta[\phi - \phi']$ είναι η (φορμαλιστικά) συναρτησιακή συνάρτηση δέλτα, δηλαδή $\forall \mathcal{O}$,

$$\int \mathcal{D}\phi \delta[\phi - \phi'] \mathcal{O}[\phi] = \mathcal{O}[\phi]. \quad (3.2.13)$$

Έτσι τα σύμβολα $|\cdot\rangle$ και $\langle \cdot|$ είναι όντως kets και bras. [2]

Η (3.2.10) μαζί με τη συμμετρία μετατόπισης στο χρόνο, ο τελεστής $\wp(\tau, \tau_0)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\wp(\tau, \tau_0) = \exp(-(\tau - \tau_0)H), \quad (3.2.14)$$

όπου ο τελεστής H ονομάζεται hamiltonιανή Fökker-Planck και η (3.2.14) ικανοποιεί την επονομαζόμενη εξίσωση Fökker-Planck με καθορισμένη αρχική συνθήκη,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \wp(\tau, \tau_0) = -H \wp(\tau, \tau_0), \quad \wp(\tau_0, \tau_0) = 1. \quad (3.2.15)$$

Η εύρεση της hamiltonιανής Fökker-Planck συνάδει με την εύρεση της εξίσωσης Fökker-Planck η οποία μεταφράζεται στο hamiltonιανό φορμαλισμό

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = - \int \mathcal{D}\phi' \langle \phi | H | \phi' \rangle \langle \phi' | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle, \quad \langle \phi | \wp(\tau_0, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \langle \phi | \phi_0 \rangle, \quad (3.2.16)$$

και αποτελεί αντικείμενο της ανάλυσης που ακολουθεί. Προσοχή εφίσταται στο γεγονός πως η hamiltonιανή H δεν είναι hermitianή, διαφορετικά στο δεξί μέλος της εξίσωσης Fökker-Planck θα είχαμε τον μεταθέτη $[H | \wp]$.

3.2.2 Εξαγωγή της εξίσωσης Fökker-Planck

Λόγω στοχαστικής φύσης του πεδίου παύει να έχει νόημα ο υπολογισμός οποιουδήποτε παρατηρήσιμου μεγέθους \mathcal{O} συναρτήσεως του πεδίου ϕ (όπως γίνεται στο όριο της κβαντικής θεωρίας πεδίου), και αποκτά νόημα η μέση τιμή του εν λόγω μεγέθους πάνω σε όλα τα πιθανά ϕ . Η κατανομή αυτή, η οποία ταυτίζεται με τη ζητούμενη $\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$ ορίζεται τότε $\forall \mathcal{O}$

$$\langle \mathcal{O}(\tau) \rangle \equiv \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \mathcal{O}[\phi(\tau)] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] \langle \phi_0 | \wp(\tau_0, \tau) | \phi \rangle, \quad (3.2.17)$$

ή εναλλακτικά

$$\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \langle \phi | \phi(\tau) \rangle, \quad (3.2.18)$$

όπου ο θόρυβος ως ασυσχέτιστος στον χρόνο Langevin λαμβάνεται στατικός στις αναμενόμενες τιμές,

$$\varrho[\eta] = \rho_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{4} \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle\right), \quad \varrho_0 = \int \mathcal{D}\eta \exp\left(-\frac{1}{4} \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle\right). \quad (3.2.19)$$

Τότε η κατανομή πιθανότητας $\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$ ικανοποιεί την εξίσωση Fökker-Planck,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\alpha_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \delta_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle, \quad (3.2.20)$$

ή ισοδύναμα

$$\langle \phi | H | \phi' \rangle = - \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\alpha_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \delta_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \phi' \rangle. \quad (3.2.21)$$

Παραγωγίζοντας $\langle \mathcal{O}(\tau) \rangle$ και εφαρμόζοντας κανόνα αλυσίδας του Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O}[\phi(\tau)] \rangle = \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_a(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_a(\tau)} \mathcal{O}(\tau) \right\rangle \right\rangle \quad (3.2.22)$$

3 Δυναμική Langevin

Για κάθε χρονική στιγμή τ και χάρη στον ασυσχετισμό $\langle \eta(\tau)\eta(\tau') \rangle \propto \delta(\tau - \tau')$, η επιμέρους κατανομή του θορύβου $\eta(\tau)$ είναι ταυτόσημη και της μορφής

$$\varrho[\eta] \equiv \varrho_0^{-1} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle \eta | \mathcal{K}^{-1} | \eta \rangle\right), \quad \varrho_0^{-1} \equiv \int \mathcal{D}\eta \exp\left(-\frac{1}{4}\langle \eta | \mathcal{K}^{-1} | \eta \rangle\right) \quad (3.2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O}(\tau) \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \mathcal{O}[\phi(\tau)] = \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{O}[\phi(\tau)] \equiv \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{O}(\tau) \right\rangle \right\rangle \quad (3.2.24)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση Langevin (3.1.1),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O}(\tau) \rangle = \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \eta_a(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \mathcal{O}(\tau) - \delta_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi_a(\tau)} S[\phi(\tau)] \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \right\rangle \mathcal{O}(\tau) \right\rangle. \quad (3.2.25)$$

$\forall \mathcal{O} : \mathbb{F}^X \rightarrow \mathbb{F}^X : \phi \mapsto \mathcal{O}(\phi)$,

$$\langle \alpha_{aa'} \langle \eta_a(\tau) \mathcal{O}_{a'}(\phi(\tau)) \rangle \rangle = 2 \left\langle \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta_a(\tau)} \left\langle \phi_{a''}(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a''}(\tau)} \right\rangle \mathcal{K} \mathcal{O}_{a'}(\phi(\tau)) \right\rangle \right\rangle \right\rangle. \quad (3.2.26)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας παραλείπεται ο χρόνος Langevin τ στη γενική ισχύ της αποδεικτέας σχέσης.

Εισάγοντας τον προβολικό τελεστή $\mathcal{K}^{-1}|x\rangle\langle x|\mathcal{K}$,

$$\langle \alpha_{aa'} \langle \eta_a \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle \rangle = \langle \alpha_{aa'} \langle \langle \langle \eta_a \mathcal{K}^{-1} \mathcal{K} \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle \rangle \rangle = \int \mathcal{D}\eta \int_X d^{\dim X} x \varrho[\eta] \langle \eta_a | \mathcal{K}^{-1} | x \rangle \alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle$$

αναδύεται ο όρος $\langle \eta_a | \mathcal{K}^{-1} | x \rangle \alpha_{aa'}$ ο οποίος μοιάζει με την συναρτησιακή παράγωγο της «δράσης» $\alpha_{aa'} \langle \langle \eta_a \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle$. Πράγματι,

$$\frac{\delta}{\delta \langle x | \eta_a \rangle} \varrho[\eta] = -\frac{1}{4} \alpha_{a'a'} \frac{\delta \langle \langle \eta_{a''} \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle}{\delta \langle x | \eta_a \rangle} \varrho[\eta] = -\frac{1}{2} \varrho[\eta] \langle \eta_a | \mathcal{K}^{-1} | x \rangle \alpha_{aa'}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{aa'} \langle \eta_a \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle \rangle &= -2 \int \mathcal{D}\eta \int_X d^{\dim X} x \frac{\delta}{\delta \langle x | \eta_a \rangle} \varrho[\eta] \alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | \mathcal{O}_{a'}(\phi) \rangle = \\ &= 2 \int \mathcal{D}\eta \varrho[\eta] \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta_a} \mathcal{K} \mathcal{O}_{a'}(\phi) \right\rangle \right\rangle = 2 \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta_a} \left\langle \phi_{a''} \frac{\delta}{\delta \phi_{a''}} \right\rangle \mathcal{K} \mathcal{O}_{a'}(\phi) \right\rangle \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Κάνοντας της αντικατάσταση

$$\mathcal{O}_a(\phi) = \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{O}[\phi] \quad (3.2.27)$$

στην (3.2.26), έχουμε

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \eta_a(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \mathcal{O}(\tau) \right\rangle &= 2 \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta_a(\tau)} \left\langle \phi_{a''}(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a''}(\tau)} \right\rangle \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \right\rangle \mathcal{O}[\phi(\tau)] \right\rangle \equiv \\ &\equiv 2 \langle \alpha_{aa'} \langle \langle \Phi_{aa''}(\tau, \tau) \Delta_{a'a''}(\tau, \tau) \rangle \rangle \mathcal{O}(\tau) \rangle \quad (3.2.28) \end{aligned}$$

όπου

$$\langle x | \Phi_{aa'}(\tau, \tau') | x' \rangle \equiv \frac{\delta}{\delta \langle x' | \eta_{a'}(\tau') \rangle} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle, \quad (3.2.29)$$

$$\langle x|\Delta_{aa'}(\tau, \tau')|x'\rangle \equiv \int_X d^{\dim X} x'' \frac{\delta}{\delta\langle x'|\phi_{a'}(\tau')\rangle} \langle x|\mathcal{K}|x''\rangle \frac{\delta}{\delta\langle \phi_a(\tau)|x''\rangle}. \quad (3.2.30)$$

Τελώνοντας την εξίσωση Langevin (3.2.1) με συναρτησιακή παράγωγο θορύβου η , η τυπική διαφορική εξίσωση που υπακούει η Φ είναι

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x|\Phi_{aa'}(\tau, \tau')|x'\rangle = \alpha_{aa'} \langle x|x'\rangle \delta(\tau - \tau') - \int_X d^{\dim X} x'' \langle x|\Delta_{aa''}(\tau, \tau')|x''\rangle S[\phi(\tau)] \langle x''|\Phi_{a''a'}(\tau, \tau')|x'\rangle. \quad (3.2.31)$$

Πράγματι, με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας ο όρος ολίσθησης γίνεται

$$\frac{\delta}{\delta\langle x'|\eta_{a'}\rangle} \frac{\delta}{\delta\langle \phi_a|x\rangle} S[\phi] = \int_X d^{\dim X} x'' \frac{\delta}{\delta\langle x''|\phi_{a''}\rangle} \frac{\delta}{\delta\langle \phi_a|x\rangle} S[\phi] \frac{\delta}{\delta\langle x'|\eta_{a'}\rangle} \langle x''|\phi_{a''}\rangle.$$

Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης που αντιστοιχεί στην (3.2.31) είναι της μορφής

$$\langle x|\Phi_{aa'}(\tau, \tau')|x'\rangle = \int_X d^{\dim X} x'' \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \langle x|\Delta_{aa''}(\tau'', \tau')|x''\rangle S[\phi(\tau'')]\right) \langle x''|\Phi_{a''a'}(\tau_0, \tau')|x'\rangle, \quad (3.2.32)$$

με αρχική συνθήκη η οποία προκύπτει από την επιλογή αρχικής συνθήκης για την εξίσωση Langevin,

$$\langle x|\Phi_{aa'}(\tau_0, \tau')|x'\rangle \equiv \frac{\delta}{\delta\langle x'|\eta_{a'}(\tau')\rangle} \langle x|\phi_a(\tau_0)\rangle. \quad (3.2.33)$$

Ξεχνώντας προς το παρόν την πλεγματοκή θέση και την άλγεβρα των πεδίων, δηλαδή $\delta_{aa'} \langle x|x'\rangle = 1$, η (3.2.31) γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') - \Delta(\tau, \tau') S[\phi(\tau)] \Phi(\tau, \tau'),$$

η γενική λύση στο ομογενές κομμάτι της οποίας γράφεται

$$\Phi(\tau, \tau') = \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \Phi(\tau_0, \tau'),$$

με αρχική συνθήκη $\Phi(\tau_0, \tau')$ η οποία καθορίζεται από την αρχική συνθήκη $\phi(\tau_0)$. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο Langevin

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, \tau') &= \frac{\partial}{\partial \tau} \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \Phi(\tau_0, \tau') = \\ &= \Delta(\tau, \tau') S[\phi(\tau)] \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right). \end{aligned}$$

Μια ειδική λύση της μη-ομογενούς ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών είναι για $\tau, \tau' > \tau_0$

$$\Phi(\tau, \tau') = \exp\left(-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \theta(\tau - \tau').$$

Έχοντας διατηρήσει τη σειρά γινομένων, με προσεκτική επαναφορά της άλγεβρας των πεδίων και της πλεγματοκής θέσης, προκύπτει η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης, η οποία γράφεται

$$\Phi(\tau, \tau') = \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \Phi(\tau_0, \tau') + \exp\left(-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' \Delta(\tau'', \tau') S[\phi(\tau'')]\right) \theta(\tau - \tau').$$

Για $\phi(\tau_0) = \eta(\tau_0)$, $\Phi(\tau_0, \tau') = \delta(\tau_0 - \tau')$ ή για $\phi(\tau_0) = 0$, $\Phi(\tau_0, \tau') = 0$ έχουμε την ειδική λύση μόνο.

3 Δυναμική Langevin

Η επιλογή της αρχικής συνθήκης γίνεται με γνώμονα την επιλογή αρχικής συνθήκης για το πεδίο ϕ . Μια συνήθης επιλογή (hot configuration) είναι

$$\phi(\tau_0) = \eta(\tau_0) \text{ οπότε } \langle x|\Phi_{aa'}(\tau_0, \tau')|x' \rangle = \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \delta(\tau_0 - \tau'). \quad (3.2.34)$$

Με την επιλογή αυτή, η λύση της (3.2.31) είναι

$$\langle x|\Phi_{aa'}(\tau, \tau')|x' \rangle = \int d^{\dim X} x'' \exp\left(-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' \langle x|\Delta_{aa''}(\tau'', \tau')|x'' \rangle S[\phi(\tau'')]\right) \alpha_{a''a'} \langle x''|x' \rangle \theta(\tau - \tau'). \quad (3.2.35)$$

Για $\tau = \tau' > \tau_0$, [2]

$$\langle x|\Phi_{aa'}(\tau, \tau)|x' \rangle = \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle \theta(0) \equiv \frac{1}{2} \alpha_{aa'} \langle x|x' \rangle. \quad (3.2.36)$$

Η ίδια λύση προκύπτει και με την επιλογή (cold configuration)

$$\phi(\tau_0) = 0 \text{ οπότε } \langle x|\Phi_{aa'}(\tau_0, \tau')|x' \rangle = 0. \quad (3.2.37)$$

Επομένως,

$$\left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \eta_a(\tau) \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \mathcal{O}(\tau) \right\rangle = \left\langle \alpha_{aa'} \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi_a(\tau)} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}(\tau)} \right\rangle \right\rangle \mathcal{O}(\tau) \right\rangle, \quad (3.2.38)$$

και έχουμε με αυτόν τον τρόπο συνάγει μια εξίσωση χρονικής εξέλιξης του $\langle \mathcal{O}(\tau) \rangle$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \mathcal{O}(\tau) \rangle = -\langle H^\dagger \mathcal{O}(\tau) \rangle, \quad (3.2.39)$$

όπου ορίζουμε τη δυϊκή hamiltonιανή

$$\langle \phi|H^\dagger|\phi' \rangle \equiv -\left\langle \left\langle \left(\frac{\delta}{\delta \phi_a} \alpha_{aa'} - \frac{\delta}{\delta \phi_a} S[\phi] \delta_{aa'} \right) \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} \right\rangle \right\rangle \langle \phi|\phi' \rangle. \quad (3.2.40)$$

Ορίζεται ο τελεστής ορμής

$$\pi_a = -i \frac{\delta}{\delta \phi_b} \text{ ή } \frac{\delta}{\delta \phi_a} = i\pi_b \text{ με } \frac{\delta}{\delta \phi_a} \frac{\delta}{\delta \phi_a} = -\pi_a \pi_a.$$

Η δυϊκή hamiltonιανή H^\dagger γράφεται τότε για πραγματικά πεδία ϕ με $k \equiv -(\delta/\delta\phi)S[\phi]$, όπου $\pi^\dagger = -\pi$,

$$\langle \phi|H^\dagger|\phi' \rangle = \langle \langle (\pi_a \alpha_{aa'} - i k_a \delta_{aa'}) \mathcal{K} \pi_{a'} \rangle \rangle \langle \phi|\phi' \rangle = -\langle \pi_a \alpha_{aa'} - i k_a \delta_{aa'} | \mathcal{K} | \pi_{a'} \rangle \langle \phi|\phi' \rangle,$$

ως συζυγό-μορφη της hamiltonιανής H

$$\langle \phi|H|\phi' \rangle = \langle \langle \pi_a \mathcal{K} (\alpha_{aa'} \pi_{a'} + i \delta_{aa'} k_{a'}) \rangle \rangle \langle \phi|\phi' \rangle = -\langle \pi_a | \mathcal{K} | \alpha_{aa'} \pi_{a'} + i \delta_{aa'} k_{a'} \rangle \langle \phi|\phi' \rangle,$$

το οποίο γίνεται ακριβές όταν $\alpha = 1$ δεδομένου ότι $k^\dagger = k$,

$$\langle \pi_a | \mathcal{K} | \pi_a + i k_a \rangle^\dagger = \langle \pi_a - i k_a | \mathcal{K} | \pi_a \rangle,$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί καταχρηστικά ο συμβολισμός $\langle \cdot | \cdot \rangle \equiv \langle \cdot^\dagger | \cdot \rangle$ ειδικά μόνο για τα μιγαδικά πεδία που εμφανίζονται ως συνιστώσες της ορμής εδώ, και για να φανεί η ιδιότητα της συζυγίας.

Αναπτύσσοντας την (3.2.39),

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi|\rho(\tau, \tau_0)|\phi_0 \rangle \mathcal{O}[\phi] = \int \mathcal{D}\phi \langle \phi|\rho(\tau, \tau_0)|\phi_0 \rangle \left\langle \left\langle \left(\frac{\delta}{\delta \phi_a} \alpha_{aa'} - \frac{\delta}{\delta \phi_a} S[\phi] \delta_{aa'} \right) \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} \right\rangle \right\rangle \mathcal{O}[\phi]. \quad (3.2.41)$$

και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες συνάγεται η εξίσωση Fökker-Planck (3.2.20).

Η ολοκληρωτέα ποσότητα στο δεξί μέλος της (3.2.41) είναι της μορφής

$$\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} - \wp \frac{\delta}{\delta\phi} S \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O}$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και αγνοώντας όρους που δίνουν ολικές παραγώγους στην τελική ολοκληρωτέα ποσότητα, μία φορά τον πρώτο όρο

$$\wp \frac{\delta}{\delta\phi} S \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} = \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} S \right) - \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} S \wp \right)$$

$$\int \mathcal{D}\phi \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} S \right) \right\rangle = 0,$$

και δύο φορές για το δεύτερο,

$$\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} = \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} \right) - \frac{\delta}{\delta\phi} \wp \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} = \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} - \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} \wp \right) + \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi} \wp$$

$$\int \mathcal{D}\phi \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\wp \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{O} - \mathcal{O} \frac{\delta}{\delta\phi} \wp \right) \right\rangle = 0,$$

συνεπάγεται ότι

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} \frac{\partial}{\partial\tau} \wp = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{\delta}{\delta\phi} S \right) \right\rangle \wp$$

$\forall \mathcal{O}$ παρατηρήσιμη ποσότητα. Επαναφέροντας τη δομή των πεδίων ϕ καταλήγουμε στην εξίσωση Fökker-Planck.

3.2.3 Η κατάσταση ισορροπίας για $\tau \rightarrow \infty$ και το Feynman path integral

Η εξαγωγή της εξίσωσης Fökker-Planck είναι από μόνη της εξαντλητική, και δεν έχουμε προχωρήσει ακόμη σε ενδεχόμενες λύσεις της. Ευτυχώς, το σημείο που χρειάζεται προσοχή είναι οι στατικές λύσεις της εξίσωσης Fökker-Planck, οι οποίες στατικές κατανομές $\langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle$ θα δούμε πως ταυτίζονται με το Feynman path integral.

3.2.3.1 Ενδείξεις από εξίσωση Langevin

Αν λάβουμε αναμενόμενες τιμές της (απλής) εξίσωσης Langevin, κατάσταση ισορροπίας σημαίνει

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\tau} x | \phi_a(\tau) \right\rangle = \left\langle x | \eta_a(\tau) - \int d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a(\tau) | x' \rangle} S[\phi(\tau)] \right\rangle = 0, \quad (3.2.42)$$

δηλαδή για ταυτοτικό πυρήνα $\langle x | \mathcal{K} | x' \rangle = \langle x | x' \rangle$,

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a(\tau) | x \rangle} S[\phi(\tau)] \right\rangle = 0. \quad (3.2.43)$$

Παρεμπιπτόντως

$$\frac{\delta}{\delta \langle \phi_a | x \rangle} S[\phi] = 0 \quad (3.2.44)$$

ισοδυναμεί με τις εξισώσεις κίνησης της κλασικής θεωρίας πεδίου δράσης $S[\phi]$, το οποίο αποτελεί μια ποιοτική ένδειξη του λόγου για τον οποίο προσεγγίζουμε την κβαντική θεωρία πεδίου (κατά ολοκλήρωμα Feynman) με την κατάσταση

3 Δυναμική Langevin

ισορροπίας της εξέλιξης Langevin. Αυτό που επιθυμούμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Langevin είναι να υπάρχει το όριο

$$\langle\langle x|\psi_a \rangle\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle\langle x|\phi_a(\tau) \rangle\rangle \quad (3.2.45)$$

στο οποίο το πεδίο ψ είναι στατικά πιθανοφανικό ως προς τον πλασματικό χρόνο Langevin τ .

3.2.3.2 Στατική κατανομή Fökker-Planck

Στο εξής θα παραλείπεται ο χρόνος τ_0 της αρχικής συνθήκης από το σύμβολο της Fökker-Planck $\langle\phi|\varphi(\tau, \tau_0)|\phi_0\rangle$, λόγω συμμετρίας μεταφοράς χρόνου της εξίσωσης Langevin η οποία επιτρέπει ορισμό των αρχικών συνθηκών για $\tau_0 = 0$ και ανεξαρτησίας των ορίων $\tau \rightarrow \infty$ ως προς το χρόνο αυτό, δηλαδή το σύμβολο ανάγεται σε $\langle\phi|\varphi(\tau)|\phi_0\rangle$.

Υποθέτοντας ότι το όριο

$$\varphi_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) \quad (3.2.46)$$

υπάρχει, αποτελεί όπως είναι φυσικό στατική λύση της εξίσωσης Fökker-Planck, ή χρησιμοποιώντας τη hamiltonιανή μορφή (3.2.16) της εξίσωσης,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_\infty |\phi_0\rangle = H \varphi_\infty |\phi_0\rangle, \quad (3.2.47)$$

γίνεται κατανοητό πως η $|0\rangle \equiv \varphi_\infty |\phi_0\rangle$ είναι δεξιά ιδιοκατάσταση του τελεστή της hamiltonιανής H με ιδιοτιμή 0, αφού η (3.2.47) είναι ανεπηρέαστη από την επιλογή αρχικών συνθηκών, γιατί βρισκόμαστε μακριά στο χρόνο Langevin σε ισορροπία και η διαδικασία είναι Markovιανή,

$$H|0\rangle = 0. \quad (3.2.48)$$

Η αναπαράσταση τη στατικής κατανομής είναι

$$\langle\phi|0\rangle = \langle\phi|\varphi_\infty|\phi_0\rangle \equiv \varphi_\infty[\phi]. \quad (3.2.49)$$

Η αναζήτηση αριστερής ιδιοκατάστασης της hamiltonιανής \mathcal{H} δίνεται από τη συζυγή εξίσωση Fökker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi^\dagger = -\varphi^\dagger H^\dagger = -(H\varphi)^\dagger, \quad (3.2.50)$$

τη δράση δηλαδή του τελεστή $H\varphi$ στα αριστερά στο σύμβολο

$$\langle\phi|H\varphi|\phi_0\rangle = \langle\phi|\varphi \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta \phi} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi} + \frac{\delta}{\delta \phi} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle |\phi_0\rangle = 0. \quad (3.2.51)$$

Βλέπουμε τότε πως $\langle 0| = \langle\phi|\varphi_\infty$ έτσι ώστε

$$\langle 0|H = 0. \quad (3.2.52)$$

Το αντίστοιχο πλάτος

$$\langle 0|\phi\rangle = \langle\phi|\varphi_\infty|\phi\rangle = 1, \quad (3.2.53)$$

ερμηνεύεται ως πιθανότητα 1 το ϕ να είναι λύση ισορροπίας, όταν η αρχική συνθήκη δίνεται στην ισορροπία και είναι ακριβώς ϕ , δηλαδή με τον τρόπο που ορίζεται η πιθανότητα $\langle\phi|\varphi_\infty|\phi'\rangle$ όπου το bra συνιστά τη ζητούμενη συνθήκη ενώ το ket τη δεδομένη, όταν αυτές συμπίπτουν εξ' ορισμού η πιθανότητα είναι 1.

Από αρχή διατήρησης της πιθανότητας

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\partial}{\partial \tau} \langle\phi|\varphi(\tau)|\phi_0\rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\phi' \langle\phi|H|\phi'\rangle \langle\phi'|\varphi(\tau)|\phi_0\rangle = 0, \quad \forall \varphi$$

προκύπτει ότι υπάρχει σταθερή αριστερή ιδιοκατάσταση $\langle 0|$ ιδιοτιμής 0 όντως υπάρχει αφού,

$$\int \mathcal{D}\phi \langle\phi|H|\phi'\rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \langle 0|\phi\rangle \langle\phi|H|\phi'\rangle = \langle 0|H|\phi'\rangle = 0, \quad \forall \phi' \quad (3.2.54)$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\langle 0|0\rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \langle 0|\phi\rangle \langle \phi|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi \rho_\infty[\phi] < \infty$$

το οποίο ισοδυναμεί με τον καλό ορισμό της στατικής κατανομής ή διαφορετικά την ύπαρξη της για τη δεδομένη στοχαστική εξέλιξη Langevin.

Έστω $|\eta\rangle$ η γενική (δεξιά) ιδιοκατάσταση της hamiltonιανής H με ιδιοτιμή E ,

$$H|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle.$$

Τότε από διατήρηση πιθανότητας (3.2.54)

$$\langle 0|H|\eta\rangle = \eta\langle 0|\eta\rangle = 0,$$

είτε $\eta = 0$ για το οποίο $|\eta\rangle = |0\rangle$, είτε $\langle 0|\eta\rangle = 0$, το οποίο δεν έρχεται σε αντίθεση με το αποτέλεσμα $\langle 0|\phi\rangle = 1$ το οποίο αφορά μόνο τα πεδία ϕ ενώ ο χώρος των καταστάσεων είναι ποια αυτών των κατανομών πάνω στα πεδία ϕ , τα οποία και αποτελούν βάση του νέου αυτού χώρου καταστάσεων.

Δεδομένου ότι $\langle \eta|\eta\rangle \geq 0$ και $\langle \eta|H|\eta\rangle \in \mathbb{F}$ εν γένει, από τη σχέση

$$\eta\langle \eta|\eta\rangle = \langle \eta|H|\eta\rangle,$$

προκύπτει ότι το πραγματικό μέρος η_0 του φάσματος της hamiltonιανής H είναι μη-αρνητικό, $\eta_0 \geq 0$ αν και μόνο αν το πραγματικό μέρος της hamiltonιανής είναι θετικά ορισμένο, δηλαδή $\langle \eta_0|H_0|\eta_0\rangle \geq 0$.

Όπως προαναφέρθηκε η ύπαρξη της στατικής κατανομής ισοδυναμεί με την ύπαρξη της ιδιοτιμής $\eta = 0$ στο φάσμα της hamiltonιανής H . Διαφορετικά, η αντίστοιχη στοχαστική εξέλιξη οδηγεί σε ασυμπτωτικά αποκλίνουσα εξέλιξη πεδίου.

Μεγάλη προσοχή εφίσταται τη (κατά)χρήση του συμβόλου $\langle \eta|H|\eta\rangle$, διότι ο τελεστής H δεν είναι εν γένει hermitianός (συμμετρικός), επομένως στο σύμβολο αυτό στα αριστερά δρα ο H^\dagger .

Το πραγματικό μέρος του φάσματος της hamiltonιανής Fökker-Planck είναι μη-αρνητικό, αφού

$$\langle \eta_0|H_0|\eta_0\rangle = \langle \eta_0|\langle\langle \alpha_{aa'}\pi_a \mathcal{K}\pi_{a'}\rangle\rangle|\eta_0\rangle = \langle\langle \alpha_{aa'}\varpi_a \mathcal{K}\varpi_{a'}\rangle\rangle\langle \eta_0|\eta_0\rangle \geq 0, \quad (3.2.55)$$

όπου $\pi_a|\eta\rangle = \varpi_a|\eta\rangle$, μιας και ο τελεστής συναρτησιακής παραγώγου μετατίθεται με το πραγματικό μέρος της hamiltonιανής (κινητικός όρος), έχει δηλαδή το ίδιο φάσμα, με $\varpi_a \in \mathbb{R}$ αφού κατά μετασχηματισμό Fourier,

$$\langle \varpi|\pi_a|\eta\rangle = \int \mathcal{D}\phi \langle \varpi|\phi\rangle \langle \phi|\pi_a|\eta_0\rangle, \quad (3.2.56)$$

όπου $\langle \varpi|\phi\rangle = \exp(-i\varpi_a\phi_a)$ ο πυρήνας μετασχηματισμού Fourier όπου $\varpi_a \in \mathbb{R}$ και

$$\langle \phi|\pi_a|\eta_0\rangle = -i\frac{\delta}{\delta\phi_a}\langle \phi|\eta_0\rangle \quad (3.2.57)$$

η αναπαράσταση του τελεστή π_a ως προς ϕ , οπότε με παραγοντική ολοκλήρωση

$$-i \int \mathcal{D}\phi \exp(-i\varpi_a\phi_a) \frac{\delta}{\delta\phi_a} \langle \phi|\eta_0\rangle = i \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi_a} \exp(-i\varpi_a\phi_a) \langle \phi|\eta_0\rangle = \varpi_a \int \mathcal{D}\phi \exp(-i\varpi_a\phi_a) \langle \phi|\eta_0\rangle, \quad (3.2.58)$$

και συνεπώς

$$\langle \varpi|\pi_a|\eta_0\rangle = \varpi_a \int \mathcal{D}\phi \langle \varpi|\phi\rangle \langle \phi|\eta_0\rangle = \varpi_a \langle \varpi|\eta\rangle, \quad (3.2.59)$$

όπως και ήταν αναμενόμενο, πέραν αυτού όμως διαφαίνεται και το γεγονός ότι το φάσμα του τελεστή της ορμής είναι όντως πραγματικό.

3 Δυναμική Langevin

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, η εξίσωση Fökker-Planck έχει στατική λύση ισορροπίας για $\tau \rightarrow \infty$ αν η τιμή 0 περιλαμβάνεται στο φάσμα τη hamiltonιανής Fökker-Planck.⁴ Συγκεκριμένα για πλήρη θόρυβο ($\alpha_{aa'} = \delta_{aa'}$), παρατηρείται πως στατική λύση υπάρχει και είναι της μορφής

$$\varrho_\infty[\phi] = \frac{\exp(-S[\phi])}{\int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi])}. \quad (3.2.60)$$

Πράγματι,

$$\frac{\delta}{\delta\phi} \varrho_\infty(\phi) = -\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \varrho_\infty(\phi),$$

και

$$\frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta}{\delta\phi} \varrho_\infty(\phi) = -\frac{\delta}{\delta\phi} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \varrho_\infty(\phi) \right),$$

οπότε και

$$\frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \right) \varrho_\infty(\phi) = 0.$$

Παρατηρούμε πως η παρουσία του πυρήνα \mathcal{K} δεν επηρεάζει την στατική λύση

Η στατική λύση (όταν υπάρχει) ϱ_∞ κανονικοποιείται (φορμαλιστικά)⁵ ως

$$\langle 0|0 \rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \varrho_\infty[\phi] = 1. \quad (3.2.61)$$

Οπότε βάση του ορισμού (3.2.17) η μέτρηση της μέσης τιμής μιας παρατηρήσιμης ποσότητας \mathcal{O} με ανεξάρτητες μετρήσεις σε ισορροπία στο στατιστικό σύνολο που παράγει ο θόρυβος στον χώρο των πεδίων ϕ μέσω της εξίσωσης Langevin (3.2.1) ισούται με την αναμενόμενη τιμή της ποσότητας στο φορμαλισμό ολοκληρωμάτων Feynman.

3.2.3.3 Θεωρία βαθμωτού πεδίου $\phi \in (\mathbb{F} \otimes \mathbb{G})^X$, θορύβου $\eta \in \mathbb{F}^X$ και δράσης $S[\phi] \in \mathbb{G}$

Ενδιαφέρον έχει η περίπτωση της επεκταμένης δράσης, ειδικά όταν ο θόρυβος επιλεχτεί «πραγματικός». Σε ότι ακολουθεί, θα συμβολίσουμε τις «πραγματικές συνιστώσες» $\cdot a_0 = \cdot a$.

Εξίσωση Langevin:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle x | \phi_{ab}(\tau) \rangle = \langle x | K_{ab}(\phi) \rangle + \langle x | \eta_a(\tau) \rangle 1_b, \quad \langle x | K_{ab}(\phi) \rangle = - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta \langle \phi_{ac} | x' \rangle} S_d[\phi], \quad (3.2.62)$$

$$\langle \langle x | \eta_{ab}(\tau) \rangle \langle \eta_{a'b'}(\tau) | x' \rangle \rangle = 2\gamma_{aba'b'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.2.63)$$

Στην περίπτωση λήψης πραγματικού θορύβου, $\gamma_{aba'b'} = \delta_{aa'} 1_b 1_{b'}$.

Εξίσωση Fökker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \langle \phi | \varrho(\tau) | \phi_0 \rangle = \left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi_a} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta\phi_a} + \bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta\phi_{ab}} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta\phi_{ac}} S_d[\phi] \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \varrho(\tau) | \phi_0 \rangle \quad (3.2.64)$$

⁴Μάλιστα, αν η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση είναι εκφυλισμένη, τότε υπάρχουν πολλαπλές διαφορετικές στατικές λύσεις, όπως συμβαίνει με την περίπτωση πολλών εξισώσεων Langevin (για παράδειγμα στην μιγαδική δυναμική Langevin) όταν κάποιες συνιστώσες θορύβου παραλείπονται, δηλαδή $\alpha_{aa} < \delta_{aa}$.

⁵Φορμαλιστικής, γιατί ο παρανομαστής δεν είναι καλά ορισμένος παρά μόνο όταν όλο αυτό το μη-καλά ορισμένο μέτρο ϱ εισαχθεί στο ολοκλήρωμα Feynman.

minimal working example: $\phi \in \mathbb{F}$ and $S \in \mathbb{R}$ with $\alpha_{aa} \leq \delta_{aa}$

Η εξίσωση Langevin γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle = \langle x | K_a(\phi) \rangle + \langle x | \eta_a(\tau) \rangle, \quad \langle x | K_a(\phi) \rangle = - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \frac{\delta}{\delta \langle \phi_a | x' \rangle} S[\phi], \quad (3.2.65)$$

$$\langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau) | x' \rangle \rangle = 2\alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau'). \quad (3.2.66)$$

όπου κάποιες συνιστώσες θορύβου είναι 0. Η αντίστοιχη εξίσωση Fökker-Planck γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \left\langle \left\langle \alpha_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) + (1 - \alpha)_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle \quad (3.2.67)$$

όπου $(1 - \alpha)_{aa'} = \delta_{aa'} - \alpha_{aa'}$ η συμπληρωματική αυτής του θορύβου δέλτα συνάρτηση. Στην παρούσα μορφή είναι εύκολο να δούμε πως η στατική λύση θα αποτελείται από δύο τμήματα,

$$\wp_{\infty}[\phi] \propto \exp(-\alpha \perp S[\phi]) \exp(-(1 - \alpha) \perp T[\phi]), \quad (3.2.68)$$

όπου το σύμβολο $\alpha \perp$ ορίζει ως προς ποια δέλτα τελείται η συστολή δεικτών, για παράδειγμα $\alpha \perp \langle \phi_a \phi_{a'} \rangle = \langle \alpha_{aa'} \phi_a \phi_{a'} \rangle$.

Είναι φανερό από τη μορφή της εξίσωσης (3.2.67) πως μόνο το $\alpha \perp$ -κομμάτι της δράσης εμφανίζεται στο καθιερωμένο εκθετικό του path integral, αφού ικανοποιεί τη στατική εξίσωση

$$\left\langle \left\langle \alpha_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle \exp(-S[\phi]) = 0, \quad (3.2.69)$$

ενώ το υπόλοιπο αποτελεί λύση της

$$\left\langle \left\langle (1 - \alpha)_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right\rangle \right\rangle \exp(-T[\phi]) = 0, \quad (3.2.70)$$

η οποία οδηγεί στην

$$\left\langle \left\langle (1 - \alpha)_{aa'} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi_a} \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] - \frac{\delta}{\delta \phi_a} T[\phi] \frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle = 0 \quad (3.2.71)$$

θα ολοκληρώσει την πλήρη στατική λύση της αντίστοιχης εξίσωσης Fökker-Planck η οποία εν γένει διαφέρει από το χαρακτηριστικό εκθετικό $\exp(-S[\phi])$ του καθιερωμένου path integral, γεγονός το οποίο μας υποδεικνύει πως για κάθε βαθμό ελευθερίας της θεωρίας που εξετάζουμε χρειάζεται να αντιστοιχίσουμε και ένα θόρυβο ώστε να ανακτήσουμε τη θεωρία στο όριο άπειρου χρόνου της εξέλιξης Langevin.

minimal working example: $\phi \in \mathbb{R}$ and $S \in \mathbb{G}$ (forcing $\phi \in \mathbb{G}$ with $\beta_{aa} \leq \delta_{aa}$)

Το γεγονός ότι η δράση είναι μη-πραγματική επιβάλλει με βάση την υποενότητα 3.1.3 την επέκταση του πεδίου σε $\phi \in \mathbb{G}$ με συνιστώσες ϕ_a . Η εξίσωση Langevin γίνεται τότε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle = \langle x | K_a(\phi) \rangle + \langle x | \eta_a(\tau) \rangle, \quad \langle x | K_a(\phi) \rangle = - \int_X d^{\dim X} x' \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \bullet_{abc} \frac{\delta}{\delta \langle \phi_b | x' \rangle} S_c[\phi], \quad (3.2.72)$$

$$\langle \langle x | \eta_a(\tau) \rangle \langle \eta_{a'}(\tau) | x' \rangle \rangle = 2\beta_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta(\tau - \tau'), \quad (3.2.73)$$

όπου κάποιες συνιστώσες θορύβου λαμβάνονται 0 με τη χρήση του συμβόλου β αντί του α σε συμφωνία με την υποενότητα 3.1.3, έτσι ώστε να φαίνεται πως οι βαθμοί ελευθερίας τους οποίου αντιπροσωπεύει ο δείκτης a είναι πλασματικοί (εκτός του 0) στην προκειμένη περίπτωση. Η αντίστοιχη εξίσωση Fökker-Planck γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle = \left\langle \left\langle \beta_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta \phi_{a'}} + \bullet_{a'bc} \frac{\delta}{\delta \phi_b} S_c[\phi] \right) + (1 - \beta)_{aa'} \frac{\delta}{\delta \phi_a} \mathcal{K} \bullet_{a'bc} \frac{\delta}{\delta \phi_b} S_c[\phi] \right\rangle \right\rangle \langle \phi | \wp(\tau, \tau_0) | \phi_0 \rangle. \quad (3.2.74)$$

Η λύση του πρώτου τμήματος της στατικής εξίσωσης γίνεται μη-τετράμηνη τώρα, είναι αυτή όμως η οποία αποτελεί την κατανομή πιθανότητας.

3 Δυναμική Langevin

Είναι γεγονός πως (χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.1.9)) η εκθετική απεικόνιση έχει νόημα στου μιγαδικούς ως

$$\exp \phi \equiv \exp \sum_a g_a \phi_a = \prod_a \exp(g_a \phi_a), \quad (3.2.75)$$

η οποία όμως δεν επιδέχεται ερμηνεία πιθανότητας, παρόλο που εξυπηρετεί στην κβάντωση της εν λόγω βαθμωτής θεωρίας. Οι αρχικές συνιστώσες S_c της S είναι αναλλοίωτα συναρτησιακά του $\phi \in \mathbb{R}$, επαναπροσδιορίζονται με επιπλέον εξαρτήσεις από τις υπόλοιπες συνιστώσες ϕ_a του $\phi \in \mathbb{G}$, όταν αυτό επεκταθεί. Υπό το πρίσμα αυτό και υποθέτοντας ότι το \mathbb{G} -γινόμενο είναι συμμετρικό βλέπουμε πως η $\exp(-S[\phi])$ είναι επίσης λύσης της εξίσωσης Fökker-Planck, αφού

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi} \exp(-S[\phi]) &\equiv \frac{\delta}{\delta\phi} \exp\left(-\sum_c g_c S_c[\phi]\right) \equiv \frac{\delta}{\delta\phi} \prod_c \exp(-g_c S_c[\phi]) = \\ &= \sum_c \frac{\delta}{\delta\phi} \exp(-g_c S_c[\phi]) \prod_{b \neq c} \exp(g_b S_b[\phi]) = -\sum_c g_c \frac{\delta}{\delta\phi} S_c[\phi] \prod_b \exp(-g_b S_b[\phi]) = -\frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \exp(-S[\phi]), \end{aligned} \quad (3.2.76)$$

το οποίο μας λέει πως η $\exp(-S[\phi])$ είναι στατική λύση της μιγαδικής εξίσωσης Fökker-Planck πριν την επέκταση του πεδίου ϕ ,

$$\left\langle \left\langle \frac{\delta}{\delta\phi} \mathcal{K} \left(\frac{\delta}{\delta\phi} + \frac{\delta}{\delta\phi} S[\phi] \right) \right\rangle \right\rangle \exp(-S[\phi]) = 0, \quad (3.2.77)$$

η οποία όπως και είναι επόμενο έχει τη μορφή της πραγματικής εξίσωσης Fökker-Planck εκτός του γεγονότος πως $S \in \mathbb{G}$.

3.3 Διακριτή δυναμική Langevin

Διακριτοποιώντας το χωροχρόνο σε πλέγμα σταθεράς ℓ καθιστά όλα τα πεδία ως διανύσματα, με σύνθετο δείκτη θέσης και άλγεβρας. Διακριτοποιώντας επιπλέον και το χρόνο Langevin $\tau = n\epsilon$ σταθερού βήματος ϵ , καθιστά όλο το μηχανισμό μια Markovιανή αλυσίδα, διαχειρίσιμη σε μια εξομοίωση Monte Carlo. Έχουμε τις εξής αντιστοιχίες:

$$\tau = n\epsilon$$

$$\begin{aligned} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle &\dots\dots\dots \langle x | \phi_a \rangle_n \\ \frac{\partial^N}{\partial \tau^N} \langle x | \phi_a(\tau) \rangle &\dots\dots\dots \sum_m \binom{n}{m} (-1)^m \epsilon^n \langle x | \phi_a \rangle_{n+m} \\ \int d\tau \langle \phi_a(\tau) | \phi_a(\tau) \rangle &\dots\dots\dots \sum_n \epsilon \langle \phi_a | \phi_a \rangle_n \\ \delta(\tau - \tau') &\dots\dots\dots \epsilon^{-1} \delta_{nn'} \end{aligned}$$

$\forall f$ συνάρτηση του χρόνου Langevin $\tau = n\epsilon$, ορίζεται

$$f_n = \frac{1}{\epsilon} \int_{\tau}^{\tau+\epsilon} d\tau f(\tau). \quad (3.3.1)$$

Συγκεκριμένα, επανορίζοντας τον θόρυβο ως $\bar{\eta} = \sqrt{\epsilon}\eta$,

$$\langle \langle x | \bar{\eta}_a \rangle_n \langle \bar{\eta}_{a'} | x' \rangle_{n'} \rangle = 2\alpha_{aa'} \langle x | \mathcal{K} | x' \rangle \delta_{nn'}. \quad (3.3.2)$$

Ο επανορισμός του θορύβου γίνεται ώστε να μην περιλαμβάνεται η σταθερά χρόνου Langevin ϵ στον ορισμό του θορύβου. Ο εκθέτης στην κατανομή του θορύβου γίνεται

$$\int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a(\tau) \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'}(\tau) \rangle \rangle = \sum_{n=n_0}^{\infty} \epsilon \langle \langle \alpha_{aa'} \eta_a \mathcal{K}^{-1} \eta_{a'} \rangle \rangle_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} \langle \langle \alpha_{aa'} \bar{\eta}_a \mathcal{K}^{-1} \bar{\eta}_{a'} \rangle \rangle_n \quad (3.3.3)$$

Συνεπώς η διακριτή εξίσωση Langevin γίνεται

$$\langle x|\phi_a\rangle_{n+1} = \langle x|\phi_a\rangle_n + \epsilon \langle x|\mathcal{K}|K_a(\phi_n)\rangle + \sqrt{\epsilon} \langle x|\bar{\eta}_a\rangle_n, \quad K_a(\phi) = -\nabla S(\phi), \quad (3.3.4)$$

όπου η συναρτησιακή παράγωγος στον όρο ολίσθησης μετατράπηκε σε απλή βαθμίδα λόγω το ότι το πεδίο (συνάρτηση) μετατράπηκε σε διάνυσμα στο πλέγμα. Το σύμβολο συστολής $\langle \cdot | \cdot \rangle$ εξαρτάται όπως είναι κατανοητό από τη πλεγματική σταθερά ℓ , και πιο συγκεκριμένα από το στοιχείο όγκου του πλέγματος $\ell^{\dim X}$, και είναι φυσικά απλά ένα άθροισμα πάνω στην πλεγματική θέση.

3.3.1 Μεταβλητό βήμα χρόνου Langevin ϵ_n

Όπως αναγράφεται και σε πρόσφατη σχετικά βιβλιογραφία [6], πολλές φορές η μέθοδος Langevin αποτυγχάνει να συγκλίνει για αρκετά μεγάλο χρονικό βήμα ϵ . Πολλές φορές το αναγκαίο μέγιστο βήμα είναι τόσο μικρό που καθιστά αδύνατο το σύστημα να ξεκολλήσει από το thermalization stage, καθώς χρειάζονται πάρα πολλά iterations τέτοιου μικρού χρονικού βήματος για να χτιστεί μια χρονική διαφορά. Μια μερική προσέγγιση προτείνεται [6] με τη χρήση προσαρμοστικού βήματος, ανάλογα με το πότε οι συντελεστές ολίσθησης (οι οποίοι επηρεάζουν ως επί το πλείστον το βήμα Langevin) έχουν την τάση να ξεφύγουν αποκλίνοντας. Έτσι, φροντίζοντας το γινόμενο ϵK να κρατηθεί σε λογικά όρια, ρυθμίζοντας κατάλληλα το ϵ , λύνεται το πρόβλημα της σύγκλισης, αλλά όχι της ευστάθειας, δηλαδή της εγκυρότητας του ορίου των observables μέσω των εξισώσεων Langevin με τις αληθινές expectation values.

Διακριτή μορφή των εξισώσεων Langevin για διακριτό χρόνο Langevin n , μεταβλητού βήματος ϵ_n :

$$\langle x|\phi_a\rangle_{n+1} = \langle x|\phi_a\rangle_n + \epsilon_n \langle x|\mathcal{K}|K_a(\phi_n)\rangle + \sqrt{\epsilon_n} \langle x|\eta_a\rangle_n, \quad K_a(\phi) = -\nabla S(\phi), \quad (3.3.5)$$

όπου το σχήμα διακριτοποίησης του χρόνου Langevin γίνεται

$$\tau = N\epsilon = \sum_{n=1}^N \epsilon_n, \quad (3.3.6)$$

όπου το βήμα χρόνου ϵ_n ρυθμίζεται σε κάθε βήμα Langevin έτσι ώστε να αντισταθμίσει μεγάλες τιμές στους όρους ολίσθησης,

$$\epsilon_n K_n = \mathcal{M}_n, \quad K_n = \|\Omega^{-1}|K(\phi_n)|^2\|_p. \quad (3.3.7)$$

$p \in \mathbb{N}$ είναι η τάξη της νόρμας που λαμβάνεται ειδικά για το K και διαφέρει από την καθιερωμένη νόρμα του εσωτερικού γινομένου $\|\cdot\| \equiv \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle} \equiv \|\cdot\|_1$ ($p = 1$), και

$$\|\cdot\|_p^p \equiv \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} |x| \cdot (x)|^{2p}. \quad (3.3.8)$$

$\epsilon^{-1}\mathcal{M}$ αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη τιμή του K , όπως αυτή εκτιμάται με την εκτιμήτρια που αποτελεί η εξομοίωση Langevin. Συνήθως τίθεται αυθαίρετα και συνολικά ως μια σταθερά, αφού ούτε η μέση τιμή του χρονικού βήματος ούτε και η αναμενόμενη τιμή της ολίσθησης είναι γνωστά εκ' των προτέρων, η ρύθμιση της οποίας εφιστά μέγιστη προσοχή, με σημαντικό ενδεχόμενο αποτυχίας κατά μη-κατάλληλη επιλογή.

Υπάρχει όμως εναλλακτική προσαρμογής του βήματος. Ξεκινά η εξομοίωση από ένα αρχικό βήμα ϵ_0 , με το οποίο τρέχει το πρώτο βήμα, συνεπώς ο πήγης τίθεται στην αρχή της εξομοίωσης. Η προσέγγιση αυτή είναι λίγο αδέξια για τον βασικό λόγο ότι η σύγκλιση της μεθόδου Langevin εξαρτάται πάρα πολύ από τις αρχικές συνθήκες, επομένως ο καθορισμός της σταθεράς \mathcal{M} βρίσκεται στο έλεος της συμπεριφορά της εξομοίωσης σε αυτό το πρώτο βήμα.

3.3.1.1 η μέση ολίσθηση $\epsilon^{-1}\mathcal{M}$

Το παραπάνω σχεπτικό όμως μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω. Πρωτίστως είναι γνωστό ότι για αρκετά μικρό ϵ , η μέθοδος συγκλίνει, έτσι ξεκινώντας με ένα αρχικά πολύ μικρό ϵ σχετικό με τις παραμέτρους της εξομοίωσης, είναι δυνατόν να

3 Δυναμική Langevin

τεθεί ένας καλό πήχης για το μεταβλητό βήμα. Ακόμη καλύτερα όμως, ο πήχης μπορεί να τεθεί στατιστικά από το μέσο όρο πολλών βημάτων ενός αρχικού και αρκετά μικρού (ή όχι απαραίτητα αυτήν τη φορά) ϵ_0 ,⁶

$$\langle K \rangle_N \equiv \sum_{n=1}^N f_n K_n, \quad f_n = \tau^{-1} \epsilon_n. \quad (3.3.9)$$

Η μορφή (3.3.9) είναι προσαρμοσμένη στο μεταβλητό βήμα χρόνου αποδίδοντας τα κατάλληλα βάρη (συχνότητες) στην εκτίμηση της μέσης τιμής ολίσθησης.⁷

Ας δούμε προσεκτικά πως συμπεριφέρεται η δυναμικά εκτιμώμενη αναμενόμενη τιμή της ολίσθησης: Έστω ότι ξεκινάμε από μια αρχική εκτίμηση $K_0 = \langle K \rangle_0 = 1$, με ένα σεβαστό ϵ_0 . Εξετάζουμε τι γίνεται στην περίπτωση που η εξομοίωση πάει να διαφύγει τελείως, έστω δηλαδή ότι από το πρώτο βήμα κιόλας $K_1 = 10^{10}$. Αυτομάτως με βάση όσα έχουμε πει, $\langle K \rangle_1 = 5 \cdot 10^9$, η αναμενόμενη τιμή δηλαδή έχει πάει στη μέση. Βλέπουμε πως αυτό αυξάνει πολύ σημαντικά τον πήχη, ρισκάροντας στο επόμενο βήμα να μην πάρουμε αρκετά μικρό ϵ_1 ώστε να αντιμετωπιστεί η διαφυγή στο άπειρο.

Υπάρχει όμως η δυνατότητα, αν ξεχάσουμε για λίγο την προέλευση της αναμενόμενης τιμής $\langle \cdot \rangle$ από τη συνεχή θεωρία πεδίου, να επιλέξουμε να πάρουμε την αρμονική αναμενόμενη τιμή $\langle \cdot \rangle$ της ολίσθησης,⁸

$$\langle \langle K \rangle \rangle_N \equiv \prod_{n=1}^N K_n^{f_n}, \quad f_n = \tau^{-1} \epsilon_n. \quad (3.3.10)$$

Από την τελευταία έκφραση φαίνεται ότι πρακτικά η αρμονική μέση τιμή είναι κανονική μέση τιμή στην τάξη μεγέθους. Στο παράδειγμα που προηγήθηκε, θα έχουμε $\langle \langle K \rangle \rangle_1 = 10^5$, στο μέσο των τάξεων μεγέθους δηλαδή. Όπως είναι κατανοητό, αυτό το κριτήριο αντιμετωπίζει πολύ πιο δραστικά τη διαφυγή της ολίσθησης με ρίσκο αυτή τη φορά να κολλήσει ίσως στην αρχή η εξομοίωση με απίστευτα μικρά βήματα ϵ , όμως η σύγκλιση ποια είναι σχεδόν εγγυημένη.

Επίσης η χρήση $\langle \langle K \rangle \rangle_0 = 1$ ως αρχική εκτίμηση είναι πιο διαισθητική: πέραν το γεγονός ότι το πρώτο ϵ που χρησιμοποιείται είναι το μέσο ϵ , όπως και είναι επιθυμητό, η τιμή 1 βρίσκεται στο «μέσο» του \mathbb{R}_+ με τον ίδιο τρόπο που το 0 βρίσκεται στο μέσο του \mathbb{R} όπως αυτό μεταφέρεται από την εκθετική απεικόνιση. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται κατανοητό πως στη μορφή ϵK του κριτηρίου, ο αρμονικός μέσος είναι πιο κατάλληλος από τον απλό μέσο.

⁶ $\forall N \in \mathbb{N}, \forall (0 \leq f_n \leq 1)_{n=1}^N$ συχνότητες απάντησης για $\forall (x_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ δείγμα,

$$\langle x \rangle_N = \sum_{n=1}^N f_n x_n = f_N x_N + \sum_{n=1}^{N-1} f_n x_n = f_N x_N + \langle x \rangle_{N-1} (1 - f_N).$$

⁷ Παρατηρούμε πως ενώ ο χρόνος Langevin (μπορεί ενδεχομένως να) έχει διαστάσεις, οι συχνότητες παραμένουν αδιάστατες, διασφαλίζοντας την αυτοσυνέπεια του αποτελέσματος.

⁸ $\forall N \in \mathbb{N}, \forall (0 \leq f_n \leq 1)_{n=1}^N$ συχνότητες απάντησης για $\forall (x_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ δείγμα,

$$\langle \langle x \rangle \rangle_N = \prod_{n=1}^N x_n^{f_n} = x_N^{f_N} \prod_{n=1}^{N-1} x_n^{f_n} = x_N^{f_N} \langle \langle x \rangle \rangle_{N-1}^{1-f_N}.$$

Η καταλληλότητα της επιλογής αυτής φαίνεται σε πολλά επίπεδα. Η κανονική μέση τιμή είναι φτιαγμένη για τιμές στο \mathbb{R} αφού το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το 0, ενώ στον πολλαπλασιασμό είναι το 1. Όμως $\alpha^0 = 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, και για την ακρίβεια η απεικόνιση \exp μας μεταφέρει από τη γνωστή μέση τιμή στην αρμονική,

$$\exp \langle x \rangle_N = \exp \sum_{n=1}^N f_n x_n = \prod_{n=1}^N (\exp x_n)^{f_n} = \langle \langle \exp x \rangle \rangle_N \quad \text{ή} \quad \log \langle \langle x \rangle \rangle_N = \log \prod_{n=1}^N x_n^{f_n} = \sum_{n=1}^N f_n \log x_n = \langle \log x \rangle_N.$$

4 Σχετικιστικό αέριο Bose

4.1 Δυναμική Langevin στο σχετικιστικό αέριο Bose

4.1.1 Δράση S στο πλέγμα $\mathbb{L} \leftarrow X$

Η δράση του σχετικιστικού αερίου Bose στο πλέγμα,

$$S[\phi] = \langle \phi | \square | \phi \rangle + (m^2 - \mu^2) \langle \phi | \phi \rangle + \lambda \langle \phi \phi | \phi \phi \rangle + \mathcal{J} \mu (\langle \phi | \triangleright_{\dim \mathbb{L}} \phi \rangle - \langle \triangleright_{\dim \mathbb{L}} \phi | \phi \rangle), \quad (4.1.1)$$

ανεπτυγμένη σε συνιστώσες είναι

$$S[\phi] = (\ell)^2 \langle \phi_a \square \phi_a \rangle + (m^2 - \mu^2) (\ell)^2 \langle \phi_a \phi_a \rangle + \lambda (\ell)^4 \langle \phi_b \phi_c \phi_b \phi_c \rangle + 2\mu (\ell)^2 \varepsilon_{bc} \mathcal{J} \langle \phi_b \triangleright_{\dim \mathbb{L}} \phi_c \rangle. \quad (4.1.2)$$

Ο τετραγωνικός όρος που εμφανίζεται στη δράση είναι εξ' ορισμού

$$\langle \phi_a \phi_a \rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_a (\phi_a(x))^2.$$

Ο κινητικός όρος είναι,

$$\begin{aligned} \langle \phi_a \square \phi_a \rangle &= \langle \triangleright_{\alpha} \phi_a \triangleright_{\alpha} \phi_a \rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \ell^{-2} \sum_a (\phi_a(x + \ell \partial_{\alpha}) - \phi_a(x))^2 \\ &= \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \ell^{-2} \sum_a ((\phi_a(x + \ell \partial_{\alpha}))^2 + (\phi_a(x))^2 - 2\phi_a(x)\phi_a(x + \ell \partial_{\alpha})) \\ &= 2 \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \ell^{-2} \sum_a ((\phi_a(x))^2 - \phi_a(x) \exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_a(x)) \\ &= 2\ell^{-2} \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_a \left((\phi_a(x))^2 \dim X - \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \phi_a(x) \exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_a(x) \right) \\ &= 2\ell^{-2} \left(\langle \phi_a \phi_a \rangle \dim X - \sum_{\alpha=1}^{\dim \mathbb{L}} \langle \phi_a \exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_a \rangle \right). \end{aligned}$$

Ο όρος αλληλεπίδρασης είναι,

$$\langle \phi_b \phi_b \phi_c \phi_c \rangle = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_b (\phi_b(x))^2 \sum_c (\phi_c(x))^2 = \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \sum_b \sum_c (\phi_b(x) \phi_c(x)) (\phi_b(x) \phi_c(x)) = \langle \phi_b \phi_c \phi_b \phi_c \rangle.$$

Τέλος ο όρος χημικού δυναμικού γίνεται,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{bc} \langle \phi_b \triangleright_{\dim \mathbb{L}} \phi_c \rangle &= \sum_b \sum_c \varepsilon_{bc} \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \phi_b(x) \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \delta_{\alpha \dim X} \triangleright_{\alpha} \phi_c(x) \\ &= \sum_b \sum_c \varepsilon_{bc} \int_{\mathbb{L}} \ell^{\dim X} x \phi_b(x) \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \ell^{-1} (\exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_c(x) - \phi_c(x)) \\ &= \ell^{-1} \varepsilon_{bc} \left(\sum_{\alpha=1}^{\dim X} \delta_{\alpha \dim X} \langle \phi_b \exp(\ell \partial_{\alpha}) \phi_c \rangle - \langle \phi_b \phi_c \rangle \right) \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τους όμοιους όρους στη δράση, και επεκτείνοντας όρο προς όρο, έχουμε του όρους

$$-2\ell^{-2}(\delta_{bc} - j\ell\mu\varepsilon_{bc}\delta_{\alpha \dim X})\langle\phi_b \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_c\rangle$$

$$-2\ell^{-2}\left(\frac{1}{2}(\ell\mu)^2\delta_{bc} + j\ell\mu\varepsilon_{bc}\right)\langle\phi_b\phi_c\rangle$$

Οι γραμμικοί παράγοντες των ανωτέρων όρων, αντικαθίστανται από αντίστοιχους παράγοντες βιθμίδας,

$$\ell^{-1}(\delta_{bc} \cosh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X}) - \varepsilon_{bc} \sinh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})) =$$

$$= \delta_{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})^{2n}}{(2n)!} - j\varepsilon_{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})^{2n+1}}{(2n+1)!} \simeq \ell^{-1}\delta_{bc} - \varepsilon_{bc}\mu\delta_{\alpha \dim X},$$

$$j\varepsilon_{bc} \sinh(\ell\mu) + \delta_{bc} \cosh(\ell\mu) - \delta_{bc} = j\varepsilon_{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell\mu)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \delta_{bc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ell\mu)^{2n}}{(2n)!} - \delta_{bc} \simeq \frac{1}{2}(\ell\mu)^2\delta_{bc} + \ell\mu\varepsilon_{bc}$$

Αγνοώντας την σταθερά ανάπτυξης (j), η δράση του σχετικιστικού αερίου Bose στο lattice είναι:

$$S[\phi] \equiv S_0[\phi] + jS_1[\phi] = (2\ell^{-2} \dim X + m^2)\langle\phi_a\phi_a\rangle + \lambda\langle\phi_b\phi_c\phi_b\phi_c\rangle -$$

$$- 2\ell^{-2} \sum_{\alpha=1}^{\dim X} ((\delta_{bc} \cosh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X}) - j\varepsilon_{bc} \sinh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X}))\langle\phi_b \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_c\rangle +$$

$$+ (j\varepsilon_{bc} \sinh(\ell\mu) + \delta_{bc} \cosh(\ell\mu) - \delta_{bc})\langle\phi_b\phi_c\rangle) \quad (4.1.3)$$

Στην πραγματικότητα όμως, χρησιμοποιείται μια ισοδύναμη στο συνεχές και θερμοδυναμικό όριο δράση του σχετικιστικού αερίου Bose με $\varkappa_{\dim X} = 2\ell^{-2} \dim X + m^2$,

$$S[\phi] = \varkappa_{\dim X} (\|\imath\|^2)\langle\phi_a\phi_a\rangle + \lambda(\|\imath\|^4)\langle\phi_b\phi_c\phi_b\phi_c\rangle$$

$$- 2\ell^{-2} \sum_{\alpha=1}^{\dim X-1} (\|\imath\|^2)\langle\phi_a \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_a\rangle - 2\ell^{-2} \sum_{\alpha=1}^{\dim X} (\cosh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})\delta_{bc} - j \sinh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})\varepsilon_{bc})(\|\imath\|^2)\langle\phi_b \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_c\rangle.$$

$$(4.1.4)$$

Ο πολλαπλασιασμός της μονάδας j με τυχόν μιγαδικό $\phi \in \mathbb{C}$ γράφεται σε φορμαλισμό δεικτών $(j\phi)_a = (\|\jmath\|)\varepsilon_{ab}\phi_b$.

Με την αντικατάσταση/ανάπτυξη $\phi_a \rightarrow \phi_{ab}$ και

$$\langle\phi_{a_1}\phi_{a_1}\dots\phi_{a_n}\phi_{a_n}\rangle \rightarrow \langle\phi_{a_1}\phi_{a_1}\dots\phi_{a_n}\phi_{a_n}\rangle_a = (\|\jmath\|)^{2n-1} \circ_{ab_1\dots b_n c_1\dots c_n} \langle\phi_{a_1 b_1}\phi_{a_1 c_1}\dots\phi_{a_n b_n}\phi_{a_n c_n}\rangle \quad (4.1.5)$$

συνάγεται η μορφή της δράσης $S \in \mathbb{G}$ στο επεκταμένο πεδίο $\phi \in (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^X$,

$$(\|\jmath\|)S_b[\phi] = \varkappa_{\dim X} (\|\imath\jmath\|^2) \circ_{bcd} \langle\phi_{ec}\phi_{ed}\rangle + \lambda(\|\imath\jmath\|^4) \circ_{bij} \circ_{icd} \circ_{jef} \langle\phi_{gc}\phi_{hd}\phi_{ge}\phi_{hf}\rangle$$

$$- 2\ell^{-2} (\|\imath\jmath\|^2) \sum_{\alpha=1}^{\dim X} ((\cosh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X}) + 1 - \delta_{\alpha \dim X})\delta_{bc}\delta_{fg} + \sinh(\ell\mu\delta_{\alpha \dim X})\varepsilon_{bc}\varepsilon_{fg}) \circ_{cde} \langle\phi_{fd} \exp(\ell\partial_\alpha)\phi_{ge}\rangle. \quad (4.1.6)$$

4.1.2 Εξισώσεις Langevin του σχετικιστικού αερίου Bose

Γίνεται η επιλογή $(\|\imath\|) = \alpha^{-1}$ και $(\|\jmath\|) = \beta^{-1}$ προς απλούστευση των εξισώσεων Langevin (συνιστώσες). Λαμβάνοντας «πραγματικό» (μη-επεκταμένο) θόρυβο, από (3.1.43) ήδη $\beta = 1$, ενώ $\alpha = \sqrt{2}$.

4.1.2.1 Συντελεστές ολίσθησης K_{ab}

Η πλεγματική δράση γράφεται

$$S_d[\phi] = \frac{1}{2} \varkappa_{\dim X} \circ_{def} \langle \phi_{ge} \phi_{gf} \rangle + \frac{1}{4} \lambda \circ_{defgh} \langle \phi_{ie} \phi_{jf} \phi_{ig} \phi_{jh} \rangle - \sum_{\alpha=1}^{\dim X} (\cosh(\ell \mu \delta_\alpha \dim X) \delta_{de} \circ_{efg} \delta_{hi} + \sinh(\ell \mu \delta_\alpha \dim X) \varepsilon_{de} \circ_{efg} \varepsilon_{hi}) \langle \phi_{hf} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{ig} \rangle. \quad (4.1.7)$$

Από τη γενική μορφή (3.1.43) των εξισώσεων Langevin για διπλομιγαδικό βαθμωτό πεδίο, συνάγονται οι συντελεστές ολίσθησης

$$K_{ab}(\phi(x)) \equiv -\bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} S_d[\phi] = -\varkappa_{\dim X} \phi_{ab}(x) - \lambda \circ_{bcde} \phi_{ac}(x) \phi_{fd}(x) \phi_{fe}(x) + \ell^{-2} \sum_{\alpha=1}^{\dim X} (\cosh(\mu \delta_\alpha \dim X) \cosh(\ell \partial_\alpha) \delta_{ac} \delta_{bd} \phi_{cd}(x) + \sinh(\mu \delta_\alpha \dim X) \sinh(\ell \partial_\alpha) \varepsilon_{ac} \varepsilon_{bd} \phi_{cd}(x)), \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } 2 \cosh(\ell \partial_\mu) \phi(x) &= \exp(+\ell \partial_\mu) \phi(x) + \exp(-\ell \partial_\mu) \phi(x) = \phi(x + \ell \partial_\mu) + \phi(x - \ell \partial_\mu), \\ \text{και } 2 \sinh(\ell \partial_\mu) \phi(x) &= \exp(+\ell \partial_\mu) \phi(x) - \exp(-\ell \partial_\mu) \phi(x) = \phi(x + \ell \partial_\mu) - \phi(x - \ell \partial_\mu). \end{aligned}$$

$$K_{ab}(\phi(x)) = -\bullet_{bcd} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} S_d[\phi], \quad \bullet_{bcd} = \circ_{cdb}$$

Γενικά για το τυχόν συναρτησιακό της μορφής $\langle \phi_{a_1} \cdots \phi_{a_n} \rangle$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \left\langle \prod_{i=1}^n \phi_{a_i} \right\rangle &= \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \int_X d^{\dim X} y \prod_{i=1}^n \phi_{a_i}(y) = \int_X d^{\dim X} y \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \prod_{i=1}^n \phi_{a_i}(y) = \\ &= \int_X d^{\dim X} y \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \phi_{a_i}(y) \prod_{j \neq i} \phi_{a_j}(y) = \int_X d^{\dim X} y \sum_{i=1}^n \delta_{aa_i} \delta(x-y) \prod_{j \neq i} \phi_{a_j}(y) = \sum_{i=1}^n \delta_{aa_i} \prod_{j \neq i} \phi_{a_j}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet_{bcd} \circ_{def} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} \langle \phi_{ge} \phi_{gf} \rangle &= 2\phi_{ab}(x), \\ &= \circ_{cbd} \circ_{def} (\delta_{ag} \delta_{ce} \phi_{gf}(x) + \delta_{ag} \delta_{cf} \phi_{ge}(x)) \\ &= \circ_{cbd} \circ_{def} (\delta_{ce} \phi_{af}(x) + \delta_{cf} \phi_{ae}(x)) \\ &= \circ_{cbd} \circ_{dcf} \phi_{af}(x) + \circ_{cbd} \circ_{dec} \phi_{ae}(x) \\ &= \delta_{bf} \phi_{af}(x) + \delta_{be} \phi_{ae}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet_{bcd} \circ_{defgh} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} \langle \phi_{ie} \phi_{jf} \phi_{ig} \phi_{jh} \rangle &= 4 \circ_{bcde} \phi_{ac}(x) \phi_{fd}(x) \phi_{fe}(x), \\ &= \circ_{cbd} \circ_{defgh} (\delta_{ai} \delta_{ce} \phi_{jf}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{jh}(x) + \delta_{aj} \delta_{cf} \phi_{ie}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{jh}(x) \\ &\quad + \delta_{ai} \delta_{cg} \phi_{ie}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{jh}(x) + \delta_{aj} \delta_{ch} \phi_{ie}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{ig}(x)) \\ &= \circ_{cbd} \circ_{defgh} (\delta_{ce} \phi_{jf}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{jh}(x) + \delta_{cf} \phi_{ie}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{ah}(x) \\ &\quad + \delta_{cg} \phi_{ae}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{jh}(x) + \delta_{ch} \phi_{ie}(x) \phi_{af}(x) \phi_{ig}(x)) \\ &= \circ_{cbd} \circ_{dcfgh} \phi_{jf}(x) \phi_{ag}(x) \phi_{jh}(x) + \circ_{cbd} \circ_{decgh} \phi_{ie}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{ah}(x) \\ &\quad + \circ_{cbd} \circ_{defch} \phi_{ae}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{jh}(x) + \circ_{cbd} \circ_{defgc} \phi_{ie}(x) \phi_{af}(x) \phi_{ig}(x) \\ &= \circ_{bfggh} \phi_{jf}(x) \phi_{ag}(x) \phi_{jh}(x) + \circ_{begh} \phi_{ie}(x) \phi_{ig}(x) \phi_{ah}(x) \\ &\quad + \circ_{befh} \phi_{ae}(x) \phi_{jf}(x) \phi_{jh}(x) + \circ_{befg} \phi_{ie}(x) \phi_{af}(x) \phi_{ig}(x). \end{aligned}$$

Ειδικότερα για μετατοπισμένους όρους της μορφής $\langle \phi_b \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_c \rangle$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \langle \phi_b \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_c \rangle &= \int_X d^{\dim X} y \left(\frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \phi_b(y) \phi_c(y + \ell \partial_\alpha) + \phi_b(y) \frac{\delta}{\delta \phi_a(x)} \phi_c(y + \ell \partial_\alpha) \right) = \\ &= \int_X d^{\dim X} y \left(\delta_{ab} \delta(x - y) \phi_c(y + \ell \partial_\alpha) + \phi_b(y) \delta_{ac} \delta(x - \ell \partial_\alpha - y) \right) = \delta_{ab} \phi_c(x + \ell \partial_\alpha) + \delta_{ac} \phi_b(x - \ell \partial_\alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet_{bcd} \delta_{de} \circ_{efg} \delta_{hi} \frac{\delta}{\delta \phi_{ac}(x)} \langle \phi_{hf} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{ig} \rangle &= 2 \cosh(\ell \partial_\mu) \delta_{ac} \delta_{bd} \phi_{cd}(x), \\ &= \circ_{cbd} \delta_{de} \circ_{efg} \delta_{hi} (\delta_{ah} \delta_{cf} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \delta_{ai} \delta_{cg} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu)) \\ &= \circ_{cbd} \delta_{de} \circ_{efg} (\delta_{ai} \delta_{cf} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \delta_{ah} \delta_{cg} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu)) \\ &= \circ_{cbd} \delta_{de} \circ_{ecg} \delta_{ai} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \circ_{cbd} \delta_{de} \circ_{efc} \delta_{ah} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu) \\ &= \delta_{ai} \delta_{bg} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \delta_{ah} \delta_{bf} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet_{bcd} \varepsilon_{de} \circ_{efg} \varepsilon_{hi} \frac{\delta}{\delta \langle x | \phi_{ac} \rangle} \langle \phi_{hf} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{ig} \rangle &= 2 \sinh(\ell \partial_\mu) \varepsilon_{ac} \varepsilon_{bd} \phi_{cd}(x), \\ &= \circ_{cbd} \varepsilon_{de} \circ_{efg} (\varepsilon_{hi} (\delta_{ah} \delta_{cf} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) + \delta_{ai} \delta_{cg} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu)) \\ &= \circ_{cbd} \varepsilon_{de} \circ_{efg} (\varepsilon_{ai} \delta_{cf} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) - \varepsilon_{ah} \delta_{cg} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu)) \\ &= \circ_{cbd} \varepsilon_{de} \circ_{ecg} \varepsilon_{ai} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) - \circ_{cbd} \varepsilon_{de} \circ_{efc} \varepsilon_{ah} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu) \\ &= \varepsilon_{ai} \varepsilon_{bg} \phi_{ig}(x + \ell \partial_\mu) - \varepsilon_{ah} \varepsilon_{bf} \phi_{hf}(x - \ell \partial_\mu). \end{aligned}$$

όπου $\circ_{cad} \varepsilon_{de} \circ_{ecb} = (\circ_{cad} \circ_{dce} = \delta_{ae}) \varepsilon_{eb} = \varepsilon_{ab}$ αφού ο εν λόγω ταυσιτής αντιπροσωπεύει τριπλό γινόμενο με την παρεμβολή μιγαδικής μονάδας στο ενδιάμεσο, ήτοι $\forall \phi, \chi, \psi \in \mathbb{C}, \psi(\iota(\chi\phi)) = \psi((\chi\phi))\iota$.

4.1.2.2 Παρατηρήσιμα μεγέθη (n_a, ρ_a)

Για κάθε εξωτερική παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$ της συνάρτησης επιμερισμού Z ,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log_e Z \equiv \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \alpha} Z = \left\langle -\frac{\partial}{\partial \alpha} S \right\rangle \equiv -\frac{\partial}{\partial \alpha} \langle S \rangle. \quad (4.1.9)$$

Πυκνότητα σωματιδίων:

$$\begin{aligned} \langle n_a \rangle &\equiv \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial (\ell \mu)} \log_e Z, \quad \Omega n_a := -\frac{\partial}{\partial (\ell \mu)} S_a = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \sinh(\ell \mu \delta_\alpha \dim X) \delta_{ab} \circ_{bcd} \delta_{ef} \langle \phi_{ec} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{fd} \rangle + \sum_{\alpha=1}^{\dim X} \cosh(\ell \mu \delta_\alpha \dim X) \varepsilon_{ab} \circ_{bcd} \varepsilon_{ef} \langle \phi_{ec} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{fd} \rangle \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

Πλάτος πεδίου:

$$\langle \rho_a \rangle \equiv \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial ((\ell m)^2)} \log_e Z, \quad \Omega \rho_a := \frac{\partial}{\partial ((\ell m)^2)} S_a = \frac{1}{2} \circ_{abc} \langle \phi_{db} \phi_{dc} \rangle \quad (4.1.11)$$

Η σχέση(3.1.45) ταυτοποιεί τις μη-μηδενικές συναρτήσεις συσχετισμού, αυτό όμως δε σημαίνει πως αυτές είναι και ίσες, όπως και ξεγελάει η παρουσία των δ και ε . Προς αποφυγή σύγχυσης, οι μη μηδενικές συνιστώσες των εν λόγω ταυσιτών θεωρούνται μη ίσες, ειδικά εν προκειμένω, ώστε να φαίνεται ποιοι όροι διαχωρίζονται και επιβιώνουν και ποιοι μηδενίζονται.

Για το πλάτος πεδίου τα πράγματα είναι εύκολα,

$$\circ_{abc} \langle \langle \phi_{db} \phi_{dc} \rangle \rangle \propto \circ_{abc} \delta_{dd} \delta_{bc} + \circ_{abc} \varepsilon_{dd} \varepsilon_{bc} \propto \mathbf{r}_{00} \delta_{00} \circ_{a00} + \mathbf{r}_{11} \delta_{11} \circ_{a11} = 1_a (\mathbf{r}_{00} - \mathbf{r}_{11}) \quad (4.1.12)$$

όπου \mathbf{r}_{bc} είναι οι επιμέρους σταθερές αναλογίας των $\langle \langle \phi_{db} \phi_{dc} \rangle \rangle$ από (3.1.45). Συνεπώς $\langle \rho_1 \rangle = 0$.

Στη σχέση (3.1.45) δε φαίνεται, όμως οι συναρτήσεις συσχετισμού δεν έχουνε κάποια ειδική εξάρτηση από κάποια αναπαράσταση, επομένως ότι είναι μη-μηδενικό, είναι και για μετατοπισμένα πεδία το ίδιο, όπως για παράδειγμα στον όρο που εμφανίζεται στη πυκνότητα,

$$\begin{aligned} \delta_{ab} \circ_{bcd} \delta_{ef} \langle \langle \phi_{ec} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{fd} \rangle \rangle \\ \propto \delta_{ab} \circ_{bcd} \delta_{ef} \delta_{ef} \delta_{cd} + \delta_{ab} \circ_{bcd} \delta_{ef} \varepsilon_{ef} \varepsilon_{cd} \propto +\delta_{ab} (\mathbf{n}_{00} \delta_{00} \circ_{b00} + \mathbf{n}_{11} \delta_{11} \circ_{b11}) = 1_a (\mathbf{n}_{00} - \mathbf{n}_{11}) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab} \circ_{bcd} \varepsilon_{ef} \langle \langle \phi_{ec} \exp(\ell \partial_\alpha) \phi_{fd} \rangle \rangle \\ \propto \varepsilon_{ab} \circ_{bcd} \varepsilon_{ef} \delta_{ef} \delta_{cd} + \varepsilon_{ab} \circ_{bcd} \varepsilon_{ef} \varepsilon_{ef} \varepsilon_{cd} \propto -\varepsilon_{ab} (\mathbf{n}'_{01} \varepsilon_{01} \circ_{b01} + \mathbf{n}'_{10} \varepsilon_{10} \circ_{b10}) = J_a (\mathbf{n}'_{01} - \mathbf{n}'_{10}) \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

όπου $\mathbf{n}'_{01} = \mathbf{n}'_{10}$ αφού $\langle \langle \phi_{a0} \phi_{a1} \rangle \rangle = \langle \langle \phi_{a1} \phi_{a0} \rangle \rangle$ και άρα $\langle n_1 \rangle = 0$.

Το συμπέρασμα [β] είναι πως παρ' όλη την επέκταση των πεδίων σε διπλομιγαδικά με παράλληλη επέκταση των παρατηρήσιμων μεγεθών σε μιγαδικά, οι αναμενόμενες τιμές των τελευταίων εξακολουθούν να είναι πραγματικές, σε συνέπεια με το φυσικό αποτέλεσμα που περιμέναμε (μετρησιμότητα φυσικού μεγέθους), γεγονός που καθιστά τη δυναμική Langevin φαινομενολογικά αυτοσυνεπή υποθάλπτοντα μηχανισμό κβάντωσης.

4.2 Εξομοίωση δυναμικής Langevin σχετικιστικού αερίου Bose

Ο αλγόριθμος εξομοίωσης της δυναμικής Langevin του σχετικιστικού αερίου Bose χωρίζεται σε τρία βασικά στάδια:

Initialization Σε αυτό το στάδιο χτίζεται το πλέγμα εξομοίωσης και τα απαραίτητα πεδία και βοηθητικές παράμετροι αρχικοποιούνται.

Langevin evolution Στο κύριο σώμα του προγράμματος, το σύστημα ανανεώνεται κατά το διακριτό πρότυπο δυναμικής Langevin ενώ παράλληλα και κατ' επιλογή υπολογίζονται διάφορες παρατηρήσιμες ποσότητες για μετέπειτα επεξεργασία.

Finalization Όταν ολοκληρωθεί η εξομοίωση, αποθηκεύουμε την κατάσταση του συστήματος για μετέπειτα εξομοίωση, ενώ γίνονται τελικοί υπολογισμοί πάνω στα δεδομένα παρατηρήσιμων μεγεθών.

Στην περιγραφή του αλγορίθμου που ακολουθεί, παραλείπονται τεχνικές λεπτομέρειες που αφορούν την ομαλή λειτουργία του προγράμματος, καθώς και οποιαδήποτε βοηθητική διαδικασία, αν αυτή κρίνεται εκτός εμβέλειας της φυσικής περιγραφής. Πέρα από τις μονάδες κβαντικής θεωρίας πεδίου όπου $c = \hbar = 1$, υποτίθεται επιπλέον πως η πλεγματοτική σταθερά $\ell = 1$.

4.2.1 Initialization

Με το διακόπτη status επιλέγεται αν θα ξεκινήσει νέα εξομοίωση ή θα συνεχιστεί μια παλαιότερη από το σημείο που η τελευταία τερμάτισε.

νέα εξομοίωση

Η εξομοίωση ξεκινά διαβάζοντας τις παραμέτρους του προβλήματος πρωτίστως, δηλαδή

- τη μάζα m του πεδίου που περιγράφει το αέριο,
- τη σύζευξη αυτό-αλληλεπίδρασης του πεδίου και
- το χημικό δυναμικό μ

4 Σχετικιστικό αέριο Bose

Ακολούθως όπως είναι επόμενο για πεπερασμένα υπολογιστικά συστήματα, διαβάζεται η προτιμητέα διάρκεια της εξομοίωσης σε βήματα¹ N και το μέγεθος βήματος Langevin ϵ στη κλίμακα που ορίζεται από τις σχετικές μονάδες όπως περιγράφονται παραπάνω.

Αφού αρχικοποιηθεί το σύστημα, ετοιμάζεται το έδαφος της εξομοίωσής του, δηλαδή κατασκευάζεται και αποθηκεύεται το πλέγμα \mathbb{L} ,² αντιστοιχίζοντας σε κάθε πλεγματική θέση μνήμης i :

- τις πλεγματικές θέσεις μνήμης των πλησιέστερων γειτόνων του,³ $j_{a\pm}(i)$
- τις (ευκλείδεια) χωροχρονικές συντεταγμένες του,⁴ $x_\alpha(i)$, έχοντας υπόψη $\ell = 1$

Να πούμε εδώ πως η αναπαράσταση που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του πλέγματος, και κατά συνέπεια της εξομοίωσης ολόκληρης, είναι αυτή της θέσης.

Τέλος, για νέα εξομοίωση, το πεδίο αρχικοποιείται με ένα φυσιολογικό για τη φόρμα των εξισώσεων Langevin: συμβολίζοντας πάντα με $|\eta\rangle$ ένα θορυβημένο πεδίου διαφορετικό κατ' ανάγκη χωρίς καμία σημασία σε ποιο βήμα βρίσκεται η εξομοίωση, $|\phi\rangle_0 := |\eta\rangle$, επιλογή η οποία σε όρους στατιστική φυσικής θα μπορούσε να αντιστοιχηθεί σε «hot» κατάσταση του συστήματος. Μια διαφορετική επιλογή θα μπορούσε να είναι η «cold» κατάσταση $|\phi\rangle_0 := 0$.

Σε αυτήν την φάση, η εξομοίωση είναι έτοιμη να ξεκινήσει και να δώσει το πρώτο ανανεωμένο κατά Langevin πεδίο $|\phi\rangle_1$.

παλαιά εξομοίωση

Η μόνη διαφορά με τη νέα εξομοίωση είναι ότι αρχική συνθήκη του πεδίου αποτελεί η τελευταία κατάσταση του συστήματος την τελευταία φορά που έτρεξε ίδιου τύπου εξομοίωση (ταυτόσημες παράμετροι και πλέγμα), $|\phi\rangle_0 := |\phi\rangle_N$, ώστε να συνεχίσει η εξομοίωση σαν να μην έχει σταματήσει ποτέ. Χρήσιμο σε περίπτωση για παράδειγμα που διαπιστώσουμε ότι το σύστημα δε «θερμοποιήθηκε» ακόμη⁵ και χρειάζεται να τρέξει κι άλλο.

μεταβλητό βήμα χρόνου Langevin ϵ

Όπως φαίνεται από τους ορισμούς (3.3.9) ή (3.3.10), ο χρόνος που εισάγεται στο πρόγραμμα, σε περίπτωση που επιλεγεί μεταβλητό βήμα, ερμηνεύεται ως μέσο $\bar{\epsilon}$ και ταυτόχρονα αρχικό ϵ_0 βήμα της εξομοίωσης, το οποίο καθιστά απαραίτητη και την αρχικοποίηση της νόρμας των συντελεστών ολίσθησης γύρω από μια «μαντεψιά», η πιο φυσιολογική εκ των οποίων είναι ο φυσικός μέσος της αρμονικής μέσης τιμής, $K_0 = 1$.⁶ Σε περίπτωση συνέχισης παλαιότερης εξομοίωσης, η νόρμα αρχικοποιείται με βάση την τελευταία εκτιμώμενη μέση τιμή, $K_0 = \langle K \rangle_N$, ενώ συνεχίζεται η εκτίμησή της και στη συνέχεια.

4.2.2 Langevin evolution

Δεδομένων των παραμέτρων του συστήματος, όπως διαβάστηκαν στο πρώτο στάδιο, μπορεί να κατασκευαστεί η εξίσωση Langevin όρο προς όρο, δίνοντας με βάση το πεδίο $|\phi\rangle_n$ το επόμενο πεδίο $|\phi\rangle_{n+1}$ σύμφωνα με (??). Αν το βήμα της εξομοίωσης είναι σταθερό, πριν ολοκληρωθεί το βήμα, υπολογίζεται η δράση και διάφορα παρατηρήσιμα μεγέθη, όπως η πυκνότητα του αερίου, n , και η νόρμα τετράγωνο του πεδίου, ρ , τα οποία χρησιμοποιούνται αργότερα για την αξιολόγηση του αποτελέσματος της εξομοίωσης.⁷

Η υλοποίηση της εξομοίωσης παίρνει δύο παράλληλες μορφές, ανάλογα με την επιλογή λογισμού των πεδίων:

- σε 4 πραγματικές συνιστώσες $\phi_{ab} := \gamma^{-1}(\phi_{00} + i\phi_{10} + j\phi_{01} + ij\phi_{11})$, $\gamma = \sqrt{2}$ που αναπαριστούν το διπλομιγαδικό πεδίο

¹ είτε πρόκειται για μεταβλητό βήμα, είτε για σταθερό

² Το μέγεθος του πλέγματος είναι hardcoded στο πρόγραμμα.

³ ±γιατί οι πλησιέστεροι γείτονες span αμφίπλευρα προς κάθε ανεξάρτητη διεύθυνση

⁴ το οποίο κατ' επέκταση ορίζει και τις χωροχρονικές συντεταγμένες των πλησιέστερων γειτόνων, όπως φαίνεται ότι χρειάζονται για παράδειγμα στους συντελεστές ολίσθησης (??)

⁵ να έχει φτάσει δηλαδή στην περιοχή του χώρου των καταστάσεων όπου υπάρχει μεγαλύτερη συνεισφορά στη στατιστική

⁶ Για την κανονική μέση τιμή θα ήτανε $K_0 = 0$, τιμή προβληματική τόσο για καθαρά μη αρνητικές ποσότητες (οριακή) όσο και για το κριτήριο μεταβλητού βήματος (3.3.6), ενθαρρύνοντας για μία ακόμη φορά την επιλογή της αρμονικής μέσης τιμής.

⁷ Η μέτρηση παρατηρήσιμων έχει νόημα και στην περίπτωση του μεταβλητού βήματος, μόνο όμως για παρακολούθηση της εξομοίωσης και όχι για εξαγωγή στατιστικών μεγεθών, καθώς στην τελευταία περίπτωση θα χρειαζότανε συντελεστές βάρους για κάθε μέτρηση. Όχι ότι δε μπορεί να γίνει, αλλά το μεταβλητό βήμα εξυπηρετεί την θερμοποίηση του συστήματος και μόνο ούτως ή άλλως, και μάλιστα μόνο το αρχικό στάδιο, στο οποίο και υπάρχει κίνδυνος απόκλισης της εξομοίωσης.

- σε 2 μιγαδικές συνιστώσες, κάθε μία εκ' των οποίων αναπαριστά ένα φυσιολογικό μιγαδικό πεδίο, όπως πριν την επέκταση σε διπλομιγαδικούς, δηλαδή γίνεται ανάπτυξη ως προς τον δεύτερο δείκτη και γράφεται $\phi_{_b} := \beta^{-1}(\phi_{_0} + j\phi_{_1})$, $\beta = 1$

Στην τελευταία γραφή, επιλέχθηκε η απόκρυψη δεικτών να γίνει φανερή με τη χρήση κενής θέσης $_$, ώστε να είναι ξεκάθαρο ως προς ποια μιγαδική μονάδα αναπτύσσουμε κάθε φορά

\mathbb{R}^4 (4 πραγματικές συνιστώσες)

ανάπτυξη σε πραγματικές συνιστώσες:

$$\phi_{ab} := \gamma^{-1}(\phi_{00} + i\phi_{10} + j\phi_{01} + ij\phi_{11}) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(\phi_{00} + i\phi_{10}) + j\alpha^{-1}(\phi_{01} + i\phi_{11})), \alpha = \sqrt{2} \text{ και } \beta = 1, \gamma = \alpha\beta \quad (4.2.1)$$

Όπως γίνεται κατανοητό με αυτόν τον τρόπο λογισμού, τα πάντα γίνονται σε συνιστώσες και έτσι η κανονικοποίηση δε φαίνεται παρά μόνο στις αναλλοίωτες ποσότητες, όπως η νόρμα και διάφορες ποσότητες οι οποίες μπορούν και εκφράζονται σε αφηρημένη μορφή.⁸

$\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ (2 j-μιγαδικές συνιστώσες)

ανάπτυξη ως προς επιμέρους μιγαδικές μονάδες:

$$\phi_{a_} := \alpha^{-1}(\phi_{0_} + i\phi_{1_}) \text{ και } \phi_{_b} := \beta^{-1}(\phi_{_0} + j\phi_{_1}) \quad (4.2.2)$$

μετάβαση από την μία ανάπτυξη στην άλλη:

$$\phi_{0_} = \alpha\beta^{-1}(\Re\phi_{_0} + j\Re\phi_{_1}) \text{ ή } \phi_{_0} = \alpha^{-1}\beta(\Re\phi_{0_} + j\Re\phi_{1_}) \quad (4.2.3)$$

$$\phi_{1_} = \alpha\beta^{-1}(\Im\phi_{_0} + j\Im\phi_{_1}) \text{ ή } \phi_{_1} = \alpha^{-1}\beta(\Im\phi_{0_} + j\Im\phi_{1_}) \quad (4.2.4)$$

4.2.3 Finalization

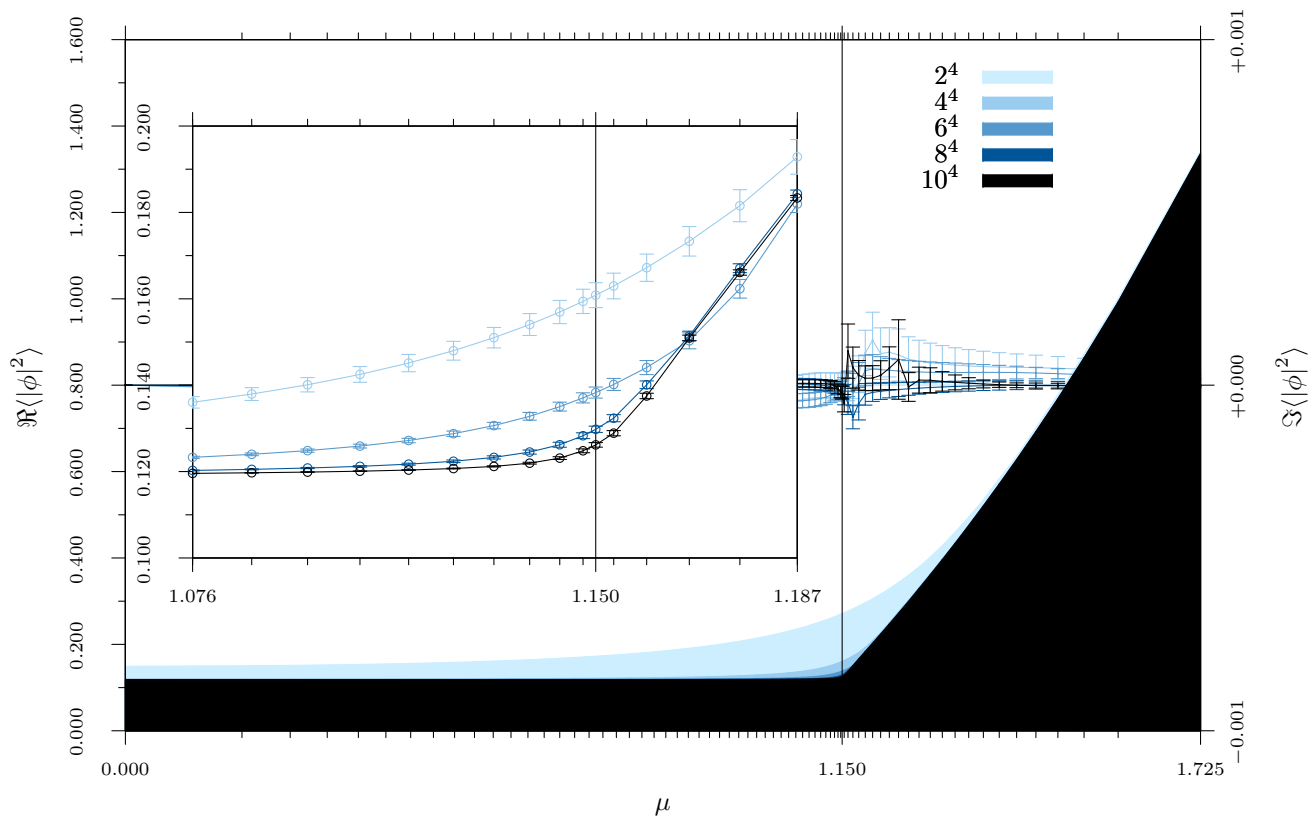
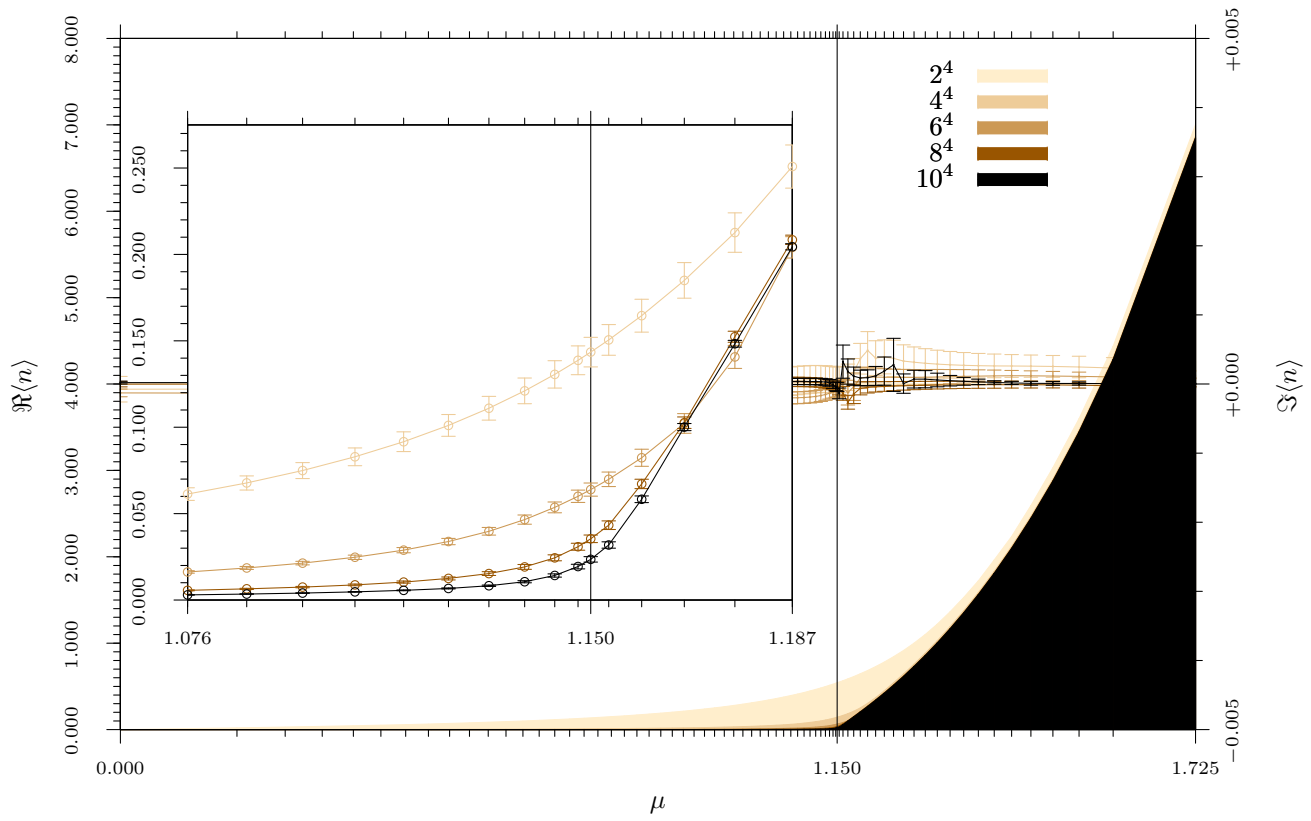
Το τελευταίο βήμα έχει γίνει και το τελευταίο πεδίο $|\phi\rangle_N$ αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση/συνέχεια. Τέλος, υπολογίζονται μέσες τιμές και σφάλματα των παρατηρήσιμων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο jack-knife για την αποφυγή του μερικού αυτοσυσχετισμού των μετρήσεων.

4.3 Αποτελέσματα

Το σχετικιστικό αέριο Bose εμφανίζει το φαινόμενο Silver Blaze όπως αναδεικνύεται στα [5, 9, 13]. Ειδικότερα σε αυτό το paper αναπαράγουμε τα αποτελέσματα του [5] σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια/ανάλυση γύρω από το αναμενόμενο κρίσιμο σημείο του φαινομένου, και τα αποτελέσματα φαίνεται να συμφωνούν με το [5] και να αναπαράγουν γενικά το διάγραμμα φάσης του σχετικιστικού αερίου Bose. Προσοχή στα φαινόμενα πεπερασμένης διάστασης του πλέγματος, όπου είναι εκπληκτικό πως, παρόλη την τεράστια εξομάλυνση που υφίσταται, το ελάχιστο πλέγμα 2^4 εξακολουθεί να αναδεικνύει το φαινόμενο!

⁸Στον αφηρημένο λογισμό δεικτών που παρουσιάστηκε εδώ, οι σταθερές κανονικοποίησης έχουν ενσωματωθεί στους τανυστές των πράξεων, διατηρώντας της αυτοσυνέπεια του φορμαλισμού και καθιστώντας εύκολη την εξαγωγή των σωστών ανεπτυγμένων μορφών.

4 Σχετιστικό αέριο Bose



Επίλογος

Συμπεράσματα

Έγινε μελέτη του διαγράμματος φάσης του σχετικιστικού αερίου Bose ως προς το χημικό δυναμικό μ σε σύγκριση με το [5], και παρατηρήσαμε πως ανακύπτει το φαινόμενο Silver-Blaze στην αναμενόμενη περιοχή, συγκρίνοντας το με τα [5, 9, 13].

Ο αρχικός στόχος ήταν να γίνει αναλυτική διερεύνηση του χώρου των φάσεων του σχετικιστικού αερίου Bose:

- ως προς φυσικές παραμέτρους:
 - έγινε βήμιση ως προς το χωροχρονικό όγκο Ω , έχει ενδιαφέρον όμως να γίνει διαφορική μελέτη ως προς τη
 - θερμοκρασία β
 - χωρικό όγκο V
- ως προς τεχνητές παραμέτρους:
 - βήμα χρόνου Langevin ϵ

Ο στόχος αυτός δεν εκπληρώθηκε στην πληρότητά του, επομένως η καινούρια πληροφορία σε σχέση με το [5] είναι το πυκνότερο διάγραμμα φάσης το οποίο αναδεικνύει με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τόσο στο φαινόμενο Silver-Blaze όσο και τη λεπτομερή δομή της φάσης μετά το κρίσιμο σημείο $\mu_{\text{critical}} = 1.15$.

Προοπτικές

Καθώς την ανάπτυξη της μεθόδου για εφαρμογή στο καθιερωμένο πρότυπο (QCD problems) έχουν αναλάβει οι Gert Aarts et al. λίγο νόημα έχει η συνέχιση του παραπάνω προγράμματος στο σχετικιστικό αέριο. Ανταυτού, η εξερεύνηση του εύρους εφαρμογής της μεθόδου και της ισχύος της σε ποιο περίπλοκες θεωρίες έχει καίριο ενδιαφέρον καθώς υπεισέρχονται όλα τα χαρακτηριστικά της κβαντικής θεωρίας πεδίου, και είναι άγνωστο γενικά ακόμη πως θα εφαρμόζεται η μέθοδος σε τέτοιες περιπτώσεις. Επί του παρόντος εχρεμεί η εφαρμογή της μεθόδου σε matrix models της θεωρίας χορδών, όπου επίσης εμφανίζεται το πρόβλημα μιγαδικής δράσης και το οποίο επί του παρόντος αντιμετωπίζεται με διάφορες άλλες μεθόδους όπως αυτή της παραγοντοποίησης [27].

Πέραν το πρακτικού κομματιού επίλυσης προβλημάτων μιγαδική δράσης με εφαρμογή της μεθόδου Langevin, εχρεμεί και το θεωρητικό κομμάτι της μαθηματικής εγκυρότητας της μεθόδου. Μια πρώτη προσπάθεια έγινε εδώ (ειδικά κατά την εξαγωγή της εξίσωσης Fokker-Planck), όμως έχουν γίνει αρκετές φορμαλιστικές παραδοχές. Για παράδειγμα η παρουσία του όρου θορύβου όπως είναι γραμμένη στην εξίσωση Langevin

$$\frac{dx}{d\tau}(\tau) = f(x(\tau)) + \eta(\tau) \quad (3.1)$$

δεν έχει νόημα. Πρόκειται στην ουσία για ένα μέτρο Wiener dw , και η διαδικασία Langevin γράφεται ακριβέστερα

$$dx(\tau) = f(x(\tau))d\tau + dw(\tau). \quad (3.2)$$

Η θεμελίωση της διαδικασίας Langevin απαιτεί ορισμό και ρύθμιση του μέτρου dw με συγκεκριμένο τρόπο. Κάποια εισαγωγή για το θέμα του μέτρου Wiener και του Ito calculus γίνεται στο [3].

Υπάρχει μια δουλειά [11] των Gert Aarts et al. πάνω στο θέμα της μαθηματικής εγκυρότητας της μεθόδου και των ορίων της, μένει όμως να διερευνηθεί τι άλλο υπάρχει, και να γίνει μελέτη στα κενά της βιβλιογραφίας στο θέμα.

Source code

1 Main (complex_langevin.F90)

```
1 ! Silver Blaze phenomenon on the Relativistic Bos Gas
2 ! Complex scalar field theory ( $\phi^2$ ,  $\phi^4$ ) at finite density
3 ! Monte Carlo using Complex Langevin Dynamics for the Phase Quenched Model
4 ! Periodic Boundary Conditions
5 ! Simulation authors
6 ! K. H. Anagnostopoulos NTUA 2014 konstant@mail.ntua.gr
7 ! S. Ch. Papadoudis NTUA 2014 spcom1024@gmail.com
8 ! Related work
9 ! 0810.2089v2: Can stochastic quantization evade the sign problem? - the relativistic Bose gas at finite chemical potential.
10 ! 0902.4686v2: Complex Langevin dynamics at finite chemical potential: mean field analysis in the relativistic Bose gas.
11 ! 0912.0617v2: Adaptive stepsize and instabilities in complex Langevin dynamics.
12 ! simulation main()
13 ! initialize the simulation
14 ! perform all the steps in the simulation
15 ! finalize the simulation by preparing data for next run
16 ! page size: #COLUMNS 132
17 ! #ROWS 1279
18 ! #CHARACTERS 48991
19 ! use these for debugging the simulation setup (avoids the simulation bulk, hence the weight of the whole simulation)
20 ! DEFINE lattice_check
21 ! DEFINE peripheral_check
22 ! use "periodic"/"helicooid"/"standard" boundary conditions (omit to use the standard boundary conditions)
23 # DEFINE periodic
24 ! DEFINE helicooid
25 ! use RANLUX instead of RANDOM_NUMBER for generating random numbers
26 # DEFINE random_luxury
27 ! use C++ style of programming by computing via complex components directly, avoiding the COMPLEX intrinsic of FORTRAN
28 # DEFINE components
29 # IF DEFINED(components)
30 # INCLUDE "complex_langevin.simulation.components.F90"
31 # ELSE
32 # INCLUDE "complex_langevin.simulation.F90"
33 # ENDF
34 ! header modules of simulation
35 ! INCLUDE "complex_langevin.mod.F90"
36 PROGRAM Langevin_Complex_Relativistic_Bose_Gas
37 # IF .NOT. DEFINED(lattice_check)
38 ! USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
39 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
40 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
41 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
42 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
43 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
44 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
45 USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
46 IMPLICIT NONE
47 ! INTEGER(8):: CPU_time
48 ! INTEGER(8):: CPU_time1
49 ! INTEGER(8):: CPU_time0
50 ! CHARACTER(4):: cols
51 ! CALL SYSTEM_CLOCK(COUNT=CPU_time0)
52 IF(NR/=0) THEN
53 WRITE(stderr,9999) '# compilation with L a multiple of \033[5;33m',L_,' \033[0m is nesecary'
54 ! GOTO 999
55 STOP 1
56 END IF !NR/=0
57 ! cols= #
58 ! 'cols'
59 ! CALL SYSTEM( 'tput cols > '// #
60 ! cols )
61 ! OPEN(UNIT=99,FILE=cols,DISPOSE='delete')
62 ! REWIND(UNIT=99)
63 ! READ(99,*) COLUMNS
64 ! CLOSE(UNIT=99)
65 CALL initialization ! initialize field configurations and problem parameters
66 # IF .NOT. DEFINED(peripheral_check)
67 CALL langevin_evolution ! perform langevin evolution on fields and measure physical properties and observables at the end
68 CALL finalization ! save final field configurations and close all units
69 # ENDF
70 ! CALL SYSTEM_CLOCK(COUNT=CPU_time1)
71 ! CPU_time #
72 ! =CPU_time1 #
73 ! -CPU_time0
74 ! 999 WRITE(stdout, *) CPU_time_
75 9999 FORMAT(A,IO,A)
76 # ELSE
77 ! USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
78 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
79 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
80 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
81 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
82 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
83 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
84 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
85 IMPLICIT NONE
86 CALL make_lattice
```

Source code

```

87     CALL make_nearest_neighbors
88     # ENDIF
89     END PROGRAM Langevin_Complex_Relativistic_Bose_Gas
90     ! LANGEVIN EVOLUTION
91     ! simulation is run for          tau total time
92     ! measuring observables every skip_tau steps
93     SUBROUTINE langevin_evolution
94     ! USE fields      ! contains and stores the fields configurations during a simulation
95     ! USE lattice    ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
96     ! USE langevin   ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
97     ! USE constants  ! contains mathematical constants used throughout
98     ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
99     ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
100    ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
101    ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
102    IMPLICIT NONE
103    ! OPEN(UNIT=stdout,ENCODING='UTF-8',CARRIAGECONTROL='fortran') ! prepare [stdout] for progress entry
104    DO WHILE(
105        < Nthe &
106        Ntau) ! run simulation until step count is through
107        = Nthe+1 ! count the Langevin evolution tries
108        the &
109        = the &
110        + dthe ! Langevin time progress
111        new_dthe 0
112        =new_dthe 0
113        + dthe ! Langevin time progress skipped
114        dK =0.000000000_16 ! reset drift term for next iteration
115        CALL langevin_evolution_step ! #####
116        ! CALL DATE_AND_TIME(VALUE=captains_log,ZONE=timezone) ! note time
117        SELECT CASE(P) ! act according to NORM specification
118        CASE(0)
119            dK &
120            =QSQRT(dK)/QEXT(dthe) ! norm-0 lattice drift order
121            CASE(1)
122            dK &
123            =QSQRT(dK)/QEXT(dthe) ! norm-2 lattice drift order
124            CASE DEFAULT
125            dK &
126            = (( dK /QEXT(dthe)) &
127                /QEXT(dthe))*NP ! norm-2k lattice drift order
128        END SELECT !CASE(P)
129        NK &
130        =QEXT(dthe) &
131        /QEXT( the) ! drift expectation value normalization factor
132        K= dK** NK &
133        *K ** (1.000000000_16-NK) ! drift harmonic-average over Langevin time
134        IF(status3/=0) THEN ! use variable Langevin time step
135            dthe &
136            =DBLE((K/ dK)*QEXT(dtau)) ! modified Langevin time step
137        END IF !status3/=0
138        IF(status2/=0) THEN ! do not pointlessly use CPU for jack-knife if no measurement is planned (thermalization stage)
139            IF(
140                Nthe &
141                -(( Nthe/skip_tau) &
142                    *skip_tau)==0) THEN ! measure every skipped time points only
143                skip_the &
144                =skip_the+ 1 ! advance observables memory index
145            CALL measure ! #####
146            new_the 0
147            =new_the 0
148            +new_dthe ! advance iteration timer
149            new_dthe= 0.000000000_8 ! reset measured iteration timer
150        END IF !
151        IF(
152            Nthe &
153            -(( Nthe/skip_tau) &
154                *skip_tau)==0)
155        END IF !status2/=0
156        WRITE(stdout,1000) '+', ' ',captains_log(1) ,0
157        ! ' ',captains_log(2) ,0
158        ! ' ',captains_log(3) ,0
159        ! ' ', timezone(1:3),0
160        ! ' ', timezone(4:5),0
161        ! ' ',captains_log(5) ,0
162        ! ' ',captains_log(6) ,0
163        ! ' ',captains_log(7) ,0
164        ! ' ',captains_log(8) ,0
165        ! ' ', dthe , ' ', ,0
166        ! ' ', the ,0
167        ! ' ', /DBLE(Nthe) , ' ',dtau ,0
168        ! ' ', the , ' ', tau ,0
169        ! ' ', dK ,0
170        ! ' ',K ,0
171        END DO !WHILE(
172        < Nthe
173        Ntau)
174    ! CLOSE(UNIT=stdout)
175    ! 1000 FURMAT(A ,0
176    ! A,I4,2(A, I2.2 ) ,0
177    ! 4A,3(A, I2.2 ) ,0
178    ! A, I3.3 ,0
179    ! 7(A, E9.3E3))
180    END SUBROUTINE langevin_evolution
181    ! update shared measurements and print them out
182    SUBROUTINE measure
183    ! USE fields      ! contains and stores the fields configurations during a simulation
184    ! USE lattice    ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
185    ! USE langevin   ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
186    ! USE constants  ! contains mathematical constants used throughout
187    ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
188    ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
189    ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
190    ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
191    IMPLICIT NONE
192    INTEGER(4):: step_the
193    ! INTEGER(4):: step_tau
194    REAL(8):: 000
195    REAL(8):: 001
196    REAL(8):: 010
197    REAL(8):: 011

```



```

194 # IF DEFINED(components)
195 !
196     REAL(8):: So0 ! component complexified field observables functions
197     REAL(8):: So1 ! real part of complexified field action
198     REAL(8):: No0 ! imaginary part of complexified field density
199     REAL(8):: No1 ! real part of complexified field density
200     REAL(8):: Mo0 ! imaginary part of complexified field density
201     REAL(8):: Mo1 ! real part of complexified field modulus square
202     REAL(8):: Mo2 ! imaginary part of complexified field modulus square
203     SD0= So0() ! real part of complexified field action
204     SD1= So1() ! imaginary part of complexified field action
205     ZD0=DCOS(- So1() ) ! complexified field action phasor cosine
206     ZD1=DSIN(- So1() ) ! complexified field action phasor sine
207     O00= No0() ! real part of complexified field density
208     O01= No1() ! imaginary part of complexified field density
209     O10= Mo0() ! real part of complexified field modulus square
210     O11= Mo1() ! imaginary part of complexified field modulus square
211 # ELSE
212 !
213     COMPLEX(8):: So_ ! complexified field observables functions
214     COMPLEX(8):: No_ ! complexified field density
215     COMPLEX(8):: Mo_ ! complexified field modulus square
216     SD0= DREAL(So_()) ! real part of complexified field action
217     SD1= DIMAG(So_()) ! imaginary part of complexified field action
218     ZD0=DCOS(-DIMAG(So_())) ! complexified field action phasor cosine
219     ZD1=DSIN(-DIMAG(So_())) ! complexified field action phasor sine
220     O00= DREAL(No_()) ! real part of complexified field density
221     O01= DIMAG(No_()) ! imaginary part of complexified field density
222     O10= DREAL(Mo_()) ! real part of complexified field modulus square
223     O11= DIMAG(Mo_()) ! imaginary part of complexified field modulus square
224 # ENDIF
225 IF( ZD0<-0.999_8 ) &
226     IF( ZD0>+0.999_8 ) &
227     IF( ZD0>+0.999_8 ) ! format upper bound of complexified field action phasor cosine
228     IF( ZD1<-0.999_8 ) &
229     IF( ZD1>+0.999_8 ) &
230     IF( ZD1>+0.999_8 ) ! format upper bound of complexified field action phasor sine
231 IF(status2/=0) THEN ! do not pointlessly use RAN for jack-knife if no measurement is planned (thermalization stage)
232     NDO(skip_the)=000*new_dthe !
233     / dtau theta !
234     / skip_tau ! real part of complexified field density
235     ND1(skip_the)=001*new_dthe !
236     / dtau theta !
237     / skip_tau ! imaginary part of complexified field density
238     MD0(skip_the)=010*new_dthe !
239     / dtau theta ! real part of complexified field modulus square
240     MD1(skip_the)=011*new_dthe !
241     / dtau theta ! imaginary part of complexified field modulus square
242     / skip_tau !
243     / skip_tau !
244     / skip_tau !
245 END IF ! status2/=0
246 IF( skip_the ) &
247     -(( skip_the )/(new_Nthe/jack_rank)) &
248     *((new_Nthe/jack_rank))==0) THEN &
249     WRITE(observ,1100) &
250     ' ',Nthe,&
251     ' ',the,&
252     ' ',SD0,&
253     ' ',SD1,&
254     ' ',ZD0,&
255     ' ',ZD1,&
256     ' ',O00,&
257     ' ',O01,&
258     ' ',O10,&
259     ' ',O11
260 END IF ! skip_the
261 ! -(( skip_the )/(new_Nthe/jack_rank))
262 ! *((new_Nthe/jack_rank))==0)
263 1100 FORMAT(A,I8,A,E14.8E3,SP,2(A,E10.3E3),2(A,F5.3),4(A,E17.10E3))
264 END SUBROUTINE measure
265 ! SIMULATION WRAPPING
266 ! simulation initialization
267 SUBROUTINE initialization
268 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
269 ! USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
270 USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
271 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
272 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
273 USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
274 USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
275 USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
276 IMPLICIT NONE
277 READ(*, *)
278 READ(*,3011)
279 status_ &
280 = status0 &
281 = -(status_/1000) &
282 = status1 &
283 = status0/100 &
284 = status0 &
285 = status1 &
286 = status0 &
287 = status1*100 &
288 = status2 &
289 = status0/10 &
290 = status0 &
291 = status0 &
292 = status2*10 &
293 = status3 &
294 = status0
295 READ(*,3011)
296 READ(*, *)
297 READ(*,3012)
298 m
299 =DBLE( m ) &
300 m2202_9D1010=DBLE(D1) &

```



```

408     END DO !
409     !
410     !
411     !
412     !
413     !
414     !
415     !
416     !
417     !
418     !
419     !
420     !
421     !
422     !
423     !
424     !
425     !
426     !
427     !
428     !
429     !
430     !
431     !
432     !
433     !
434     !
435     !
436     !
437     !
438     !
439     !
440     !
441     !
442     !
443     !
444     !
445     !
446     !
447     !
448     !
449     !
450     !
451     !
452     !
453     !
454     !
455     !
456     !
457     !
458     !
459     !
460     !
461     !
462     !
463     !
464     !
465     !
466     !
467     !
468     !
469     !
470     !
471     !
472     !
473     !
474     !
475     !
476     !
477     !
478     !
479     !
480     !
481     !
482     !
483     !
484     !
485     !
486     !
487     !
488     !
489     !
490     !
491     !
492     !
493     !
494     !
495     !
496     !
497     !
498     !
499     !
500     !
501     !
502     !
503     !
504     !
505     !
506     !
507     !
508     !
509     !
510     !
511     !
512     !
513     !
514     !

```

```

                                WHILE(jack_bins
                                -((jack_bins/2)
                                *2)=0)
                                jack_rank &
                                =5**jack_rank ! use 5-base bin size
                                jack_rank>jack_bins THEN ! do not exceed points with bins
                                jack_rank=jack_bins ! equalize if so
                                jack_rank>jack_bins
                                jack_bins=new_Nthe &
                                /jack_bins ! get the 2-divisor
                                jack_rank
                                =jack_rank*jack_bins ! and multiply to get the true bin limit
                                IF(status2/=0) THEN ! do not pointlessly use RAM for jack-knife if no measurement is planned (thermalization stage)
                                ALLOCATE(NDO(1:new_Nthe))
                                ALLOCATE(ND1(1:new_Nthe))
                                ALLOCATE(MDO(1:new_Nthe))
                                ALLOCATE(MD1(1:new_Nthe))
                                END IF !status2/=0
                                3000 FORMAT ( A
                                )
                                3001 FORMAT(2A
                                )
                                3002 FORMAT ( A,F23.7
                                )
                                3003 FORMAT ( A,F23.7 ,A,F9.7,A)
                                3004 FORMAT ( A,E28.7E3
                                )
                                3005 FORMAT ( A,I15
                                )
                                3006 FORMAT ( A,I15.3
                                )
                                3011 FORMAT( I15
                                )
                                3012 FORMAT( F23.7
                                )
                                3013 FORMAT( E28.7E3
                                )
                                3021 FORMAT(2A,
                                F9.7
                                )
                                3022 FORMAT(2
                                (I1,A,I3.3,A))
                                END SUBROUTINE initialization
                                !
                                simulation header
                                SUBROUTINE header(obse_u)
                                !
                                USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
                                USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
                                USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
                                USE constants ! contains mathematical constants used throughout
                                USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
                                USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
                                USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
                                USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
                                IMPLICIT NONE
                                INTEGER(4):: obse_u
                                WRITE(obse_u,3200)
                                WRITE(obse_u,3200)
                                WRITE(obse_u,3200) '% LATTICE SPECIFICATION #####',&
                                '#####'
                                !
                                IF(D1
                                #
                                -D1/2
                                #
                                *2==1) THEN
                                #
                                IF(L0
                                #
                                -L0/2
                                #
                                *2==0) THEN
                                #
                                IF(L1
                                #
                                -L1/2
                                #
                                *2==0) THEN
                                #
                                DO n=0, NQ-1 ,+1
                                DO i= (D1+1)/2, #
                                D1+1 ,+1
                                IF(n
                                #
                                -n/Qn(i)
                                #
                                *Qn(i)==0) THEN
                                WRITE(unit,3200)
                                CYCLE
                                END IF !n
                                -n/Qn(i)
                                *Qn(i)==0
                                EXIT
                                END DO !i= (D1+1)/2 ,+1
                                D1+1 ,+1
                                WRITE(unit,3200,ADVANCE='no') ' '
                                CYCLE
                                END IF !n
                                -n/Qn(i)
                                *Qn(i)==0
                                EXIT
                                END DO !i=1, (D1+1)/2 ,+1
                                WRITE(unit,3200,ADVANCE='no') '# '
                                END DO ! n=0, NQ-1 ,+1
                                DO i=1, (D1+1)/2 ,+1
                                WRITE(unit,3200)
                                END DO !i=1, (D1+1)/2 ,+1
                                IF !L1
                                -L1/2
                                *2==0
                                END IF !L0
                                -L0/2
                                *2==0) THEN
                                END IF !D1
                                -D1/2
                                *2==1
                                WRITE(obse_u,3200)
                                WRITE(obse_u,3201) '# ',D1+1,'-dimensional lattice, of dimensions: NL #',NL
                                WRITE(obse_u,3202) '#
                                N1 #',N1
                                WRITE(obse_u,3203) '#
                                NO #',NO
                                WRITE(obse_u,3200)
                                )
                                3201 FORMAT( A,I2,A,I<INT(LOG10(DBLE(NL)))+2>)
                                3202 FORMAT( A,I<INT(LOG10(DBLE(N1)))+2>)
                                3203 FORMAT( A,I<INT(LOG10(DBLE(NO)))+2>)
                                END SUBROUTINE header
                                !
                                simulation finalization

```

Source code

```

515 SUBROUTINE finalization
516 ! USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
517 ! USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
518 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
519 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
520 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
521 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
522 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
523 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
524 IMPLICIT NONE
525 CALL save_conf(config) ! save current complexified field configuration
526 CLOSE(UNIT=config)
527 IF(status2/=0) THEN ! do not pointlessly use RAM for jack-knife if no measurement is planned (thermalization stage)
528 NDO =NDO/( new_the &
529 / DBLE(new_Nthe)) ! real part of complexified field density
530 ND1 =ND1/( new_the &
531 / DBLE(new_Nthe)) ! imaginary part of complexified field density
532 MDO =MDO/( new_the &
533 / DBLE(new_Nthe)) ! real part of complexified field modulus square
534 MD1 =MD1/( new_the &
535 / DBLE(new_Nthe)) ! imaginary part of complexified field modulus square
536 CALL jackknife ! evaluate jackknifed observables and print results with errors in output file
537 DEALLOCATE(NDO)
538 DEALLOCATE(ND1)
539 DEALLOCATE(MDO)
540 DEALLOCATE(MD1)
541 END IF !status2/=0
542 CLOSE(UNIT=observ)
543 END SUBROUTINE finalization
544 ! jack-knife simulation post-processing
545 SUBROUTINE jackknife_
546 ! USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
547 ! USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
548 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
549 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
550 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
551 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
552 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
553 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
554 IMPLICIT NONE
555 REAL(8):: NDOo0 ! average real part of field density
556 REAL(8):: NDOo1 ! error of real part of field density
557 ! REAL(8):: NDOz0 ! average susceptibility of real part of field density
558 ! REAL(8):: NDOz1 ! error of susceptibility of real part of field density
559 REAL(8):: NDio0 ! average imaginary part of field density
560 REAL(8):: NDio1 ! error of imaginary part of field density
561 ! REAL(8):: NDiz0 ! average susceptibility of imaginary part of field density
562 ! REAL(8):: NDiz1 ! error of susceptibility of imaginary part of field density
563 REAL(8):: MDOo0 ! average real part of field modulus square
564 REAL(8):: MDOo1 ! error of real part of field modulus square
565 ! REAL(8):: MDOz0 ! average susceptibility of real part of field modulus square
566 ! REAL(8):: MDOz1 ! error of susceptibility of real part of field modulus square
567 REAL(8):: MDio0 ! average imaginary part of field modulus square
568 REAL(8):: MDio1 ! error of imaginary part of field modulus square
569 ! REAL(8):: MDiz0 ! average susceptibility of imaginary part of field modulus square
570 ! REAL(8):: MDiz1 ! error of susceptibility of imaginary part of field modulus square
571 WRITE(observ,3300) ''
572 WRITE(observ,3300) ''
573 WRITE(observ,3301) '# bins L mu NDO_0 +/- NDO_1 ND1_0 +/-',&
574 ' ND1_1 MD0_0 +/- MD0_1 MD1_0 +/- MD1_1'
575 WRITE(observ,3300) ''
576 DO WHILE(jack_bins<=jack_rank)
577 CALL jackknife(NDOo0, &
578 NDOo1, &
579 ! NDOz0, &
580 ! NDOz1, &
581 NDO ,jack_bins)
582 CALL jackknife(NDio0, &
583 NDio1, &
584 ! NDiz0, &
585 ! NDiz1, &
586 ND1 ,jack_bins)
587 CALL jackknife(MDOo0, &
588 MDOo1, &
589 ! MDOz0, &
590 ! MDOz1, &
591 MDO ,jack_bins)
592 CALL jackknife(MDio0, &
593 MDio1, &
594 ! MDiz0, &
595 ! MDiz1, &
596 MD1 ,jack_bins)
597 WRITE(observ,3302) 'o' , &
598 ' ,jack_bins,&
599 ',LO ,&
600 ',mu ,&
601 ',NDOo0, &
602 ',NDOo1, &
603 ',NDio0, &
604 ',NDio1, &
605 ',MDOo0, &
606 ',MDOo1, &
607 ',MDio0, &
608 ',MDio1
609 ! WRITE(observ,3302) 'x' ,&
610 ! ' ,jack_bins,&
611 ! ',LO ,&
612 ! ',mu ,&
613 ! ',NDOz0, &
614 ! ',NDOz1, &
615 ! ',MDiz0, &
616 ! ',MDiz1, &
617 ! ',MDOz0, &
618 ! ',MDOz1, &
619 ! ',MDiz0, &
620 ! ',MDiz1
621 ' ,jack_bins &

```

```

622                                     =5*jack_bins
623 END DO!                               WHILE(jack_bins<=jack_rank)
624 3300 FORMAT( A                               )
625 3301 FORMAT(2A                               )
626 3302 FORMAT(2A,I4,A,I3.3,A,F9.7,4(SP,A,E17.10E3,SS,A,E9.3E3))
627 END SUBROUTINE jackknife_
! complexified field configuration output
628 SUBROUTINE save_conf(conf_u)
629 SUBROUTINE save_conf(conf_u)
630 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
631 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
632 USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
633 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
634 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
635 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
636 USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
637 USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
638 IMPLICIT NONE
639 INTEGER:: conf_u
640 REWIND(conf_u)
641 DO i=0,D1,+1 ! header blank lines
642 WRITE(conf_u,2100)
643 END DO!i=0,D1,+1
644 DO n=1,NL,+1 ! write complexified field configuration to I/O files
645 # IF DEFINED(components)
646 WRITE(conf_u,2101,ADVANCE='no') ' ', phi00(n) ', ', phi10(n), &
647 ' ', phi01(n) ', ', phi11(n), &
648 ' ', n ', '
649 # ELSE
650 WRITE(conf_u,2101,ADVANCE='no') ' ',DREAL(phi_0(n)),', ',DIMAG(phi_0(n)),&
651 ' ',DREAL(phi_1(n)),', ',DIMAG(phi_1(n)),&
652 ' ', n ', '
653 # ENDF
654 DO i=D1,0,-1 ! print out spacetime coordinates along complexified field configuration entries
655 WRITE(conf_u,2102,ADVANCE='no') xNN_(i,n)
656 2102 FORMAT(I<INT(LOG10(DBLE(Lx(i))))+2>)
657 END DO!i=D1,0,-1
658 WRITE(conf_u,2100) ''
659 DO i=0,D1,+1 ! print out blank lines according to memory index coordinate wrapping
660 IF(n &
661 -(n /Ln(i+1)) &
662 *Ln(i+1))==0) THEN ! if x coordinate cycle is complete print blank line and check for the next coordinate cycle
663 WRITE(conf_u,2100) ''
664 CYCLE ! more lines to be skipped; check further
665 END IF!n
666 ! -(n /Ln(i+1))
667 ! *Ln(i+1))==0
668 EXIT ! enough lines skipped; exit
669 END DO!i=0,D1,+1
670 END DO!n=1,NL,+1
671 WRITE(conf_u,2100)
672 WRITE(conf_u,2100) 'SIMULATION KEY'
673 WRITE(conf_u,2100)
674 WRITE(conf_u,2111) dthe
675 WRITE(conf_u,2111) the
676 WRITE(conf_u,2112) Nthe
677 WRITE(conf_u,2100)
678 WRITE(conf_u,2111) dK
679 WRITE(conf_u,2111) K
680 ALLOCATE(seeds(0:Nseeds-1))
681 # IF DEFINED(random_luxury)
682 CALL RLUXT(seeds) ! throw out current RANLUX status key
683 # ELSE
684 CALL RANDOM_SEED(GET=seeds) ! save RANDOM_NUMBER status
685 # ENDIF
686 WRITE(conf_u,2100)
687 WRITE(conf_u,2100) 'RANDOM NUMBER KEY'
688 WRITE(conf_u,2100)
689 WRITE(conf_u,2112) seeds
690 DEALLOCATE(seeds)
691 2100 FORMAT( A)
692 2101 FORMAT(SP,4(A,E31.24E3),SS,A,I<INT(LOG10(DBLE(NL))))+2>,A)
693 2111 FORMAT(E82.10E3)
694 2112 FORMAT(I66)
695 END SUBROUTINE save_conf
! complexified field configuration input
696 SUBROUTINE read_conf(conf_u)
697 SUBROUTINE read_conf(conf_u)
698 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
699 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
700 USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
701 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
702 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
703 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
704 USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
705 USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
706 IMPLICIT NONE
707 ! reading blanks
708 CHARACTER(3)::A
709 CHARACTER(1)::B
710 CHARACTER(2)::C
711 CHARACTER(1)::D
712 ! temporary complexified field component placeholders
713 REAL(8)::phi00N
714 REAL(8)::phi01N
715 REAL(8)::phi10N
716 REAL(8)::phi11N
717 INTEGER:: conf_u
718 REWIND(conf_u) ! just in case it happens more than one time
719 DO i=0,D1,+1 ! read header blank lines
720 READ(conf_u, *)
721 END DO!i=0,D1,+1
722 DO n=1,NL,+1 ! read complexified field configuration from I file
723 # IF DEFINED(components)
724 READ(conf_u,2201) A, phi00N,&
725 B, phi10N,&
726 C, phi01N,&
727 D, phi11N
728 phi00(n)=phi00N

```

Source code

```

729                                     phi01(n)=phi01N
730                                     phi10(n)=phi10N
731                                     phi11(n)=phi11N
732 # ELSE
733 READ(conf_u,2201)                                     A,phi00N,B,phi10N,&
734                                                         C,phi01N,D,phi11N
735                                     phi_0(n)=DCMPLX( phi_00N, phi_10N)
736                                     phi_1(n)=DCMPLX( phi_01N, phi_11N)
737 #
738 ENDIF
739 DO i=0,D1,+1 ! print out blank lines according to memory index coordinate wrapping
740 IF(n
741 &
742 &
743 *Ln(i+1))=0 THEN ! if x coordinate cycle is complete print blank line and check for the next coordinate cycle
744 READ(conf_u, *)
745 CYCLE ! more lines to be skipped; check further
746 END IF !n
747 !
748 !
749 !
750 !
751 !
752 !
753 !
754 !
755 !
756 !
757 !
758 !
759 !
760 !
761 !
762 !
763 !
764 !
765 !
766 !
767 !
768 !
769 !
770 !
771 !
772 !
773 !
774 !
775 !
776 !
777 !
778 !
779 !
780 !
781 !
782 !
783 !
784 !
785 !
786 !
787 !
788 !
789 !
790 !
791 !
792 !
793 !
794 !
795 !
796 !
797 !
798 !
799 !
800 !
801 !
802 !
803 !
804 !
805 !
806 !
807 !
808 !

```

1.1 $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ (complex_langevin.simulation.F90)

```

1 ! Silver Blaze phenomenon on the Relativistic Bos Gas
2 ! Complex scalar field theory (phi^2, phi^4) at finite density
3 ! Monte Carlo using Complex Langevin Dynamics for the Phase Quenched Model
4 ! Periodic Boundary Conditions
5 ! Simulation authors
6 ! K. N. Anagnostopoulos NTUA 2014 konstant@mail.ntua.gr
7 ! S. Ch. Papadoudis NTUA 2014 spcom1024@gmail.com
8 ! Related work
9 ! 0810.2089v2: Can stochastic quantization evade the sign problem? - the relativistic Bose gas at finite chemical potential.
10 ! 0902.4686v2: Complex Langevin dynamics at finite chemical potential: mean field analysis in the relativistic Bose gas.
11 ! 0912.0617v2: Adaptive stepsize and instabilities in complex Langevin dynamics.
12 ! Subroutines updating the field and all observables on each simulation step.
13 ! Included is the stochastic part of the simulation.
14 ! 2 COMPLEX intrinsics to form a twin COMPLEX field (differing from quaternion)
15 ! page size: #COLUMNS 132
16 ! #ROWS 476
17 ! #CHARACTERS 16896
18 ! use RANLUX instead of RANDOM_NUMBER for generating random numbers
19 # DEFINE random_luxury
20 ! IF DEFINED(random_luxury)
21 ! INCLUDE "ranluz.F"

```


Source code

```

129 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
130 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
131 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
132 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
133 IMPLICIT NONE
134 COMPLEX(8)::COSH_mu
135 COMPLEX(8)::SINH_mu
136 COMPLEX(8):: dSo_
137 COMPLEX(8):: So_N
138 REAL(8)::phio0_phio0_phio0_phio0,phio0_phio0
139 COSH_mu=DCMPLX( DCGSH(mu),0.0000000000_8)
140 SINH_mu=DCMPLX(0.0000000000_8,-DSINH(mu) )
141 So_N= ( 0.0000000000_8, 0.0000000000_8)
142 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
143 phio0_phio0 = DREAL(phi_0(n))*DREAL(phi_0(n)) &
144 + DIMAG(phi_0(n))*DIMAG(phi_0(n)) &
145 phio0_phio0_phio0_phio0=phio0_phio0 &
146 *phio0_phio0
147 dSo_ = ( 0.0000000000_8, 0.0000000000_8)
148 DO CONCURRENT(i=D1:-1)
149 nN=xNNO(i,n);dSo_ =dSo_ - (DREAL(phi_0(n))*DREAL(phi_0(nN)) &
150 + DIMAG(phi_0(n))*DIMAG(phi_0(nN))) &
151 END DO ! CONCURRENT(i=D1:-1)
152 nN=xNNO(0,n);dSo_ =dSo_ - (DREAL(phi_0(n))*DREAL(phi_0(nN)) &
153 + DIMAG(phi_0(n))*DIMAG(phi_0(nN))) *COSH_mu &
154 - (DREAL(phi_0(n))*DIMAG(phi_0(nN)) &
155 - DIMAG(phi_0(n))*DREAL(phi_0(nN))) *SINH_mu &
156 + ( 0.5000000000_8 &
157 *lambda*phio0_phio0_phio0_phio0+phio0_phio0*m2202_9D1010)*0.5000000000_8
158 END DO ! CONCURRENT(n=1:NL:+1)
159 So_ = So_N
160 END FUNCTION So_
161 ! measure Re<n> /NL
162 ! measure Im<n> /NL
163 COMPLEX(8) FUNCTION No_()
164 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
165 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
166 USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
167 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
168 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
169 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
170 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
171 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
172 IMPLICIT NONE
173 COMPLEX(8)::COSH_mu
174 COMPLEX(8)::SINH_mu
175 COMPLEX(8):: dNo_
176 COMPLEX(8):: No_N
177 COMPLEX(8):: phi0_
178 COMPLEX(8):: phi1_
179 COSH_mu=DCMPLX(0.0000000000_8,-DCOSH(mu) )
180 SINH_mu=DCMPLX( DSINH(mu),0.0000000000_8)
181 No_N= ( 0.0000000000_8, 0.0000000000_8)
182 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
183 dNo_ = ( 0.0000000000_8, 0.0000000000_8)
184 phi0_ =DCMPLX(DREAL(phi_0(n)),DREAL(phi_1(n)))
185 phi1_ =DCMPLX(DIMAG(phi_0(n)),DIMAG(phi_1(n)))
186 nN=xNNO(0,n);dNo_ =dNo_ + (phi0_ *DCMPLX(DREAL(phi_0(nN)),DREAL(phi_1(nN))) &
187 + phi1_ *DCMPLX(DIMAG(phi_0(nN)),DIMAG(phi_1(nN)))) *SINH_mu &
188 + (phi0_ *DCMPLX(DIMAG(phi_0(nN)),DIMAG(phi_1(nN))) &
189 - phi1_ *DCMPLX(DREAL(phi_0(nN)),DREAL(phi_1(nN)))) *COSH_mu
190 /DBLE(NL)
191 END DO ! CONCURRENT(n=1:NL:+1)
192 No_ = No_N
193 END FUNCTION No_
194 ! measure Re<|phi|^2>/NL
195 ! measure Im<|phi|^2>/NL
196 COMPLEX(8) FUNCTION Mo_()
197 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
198 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
199 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
200 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
201 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
202 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
203 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
204 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
205 IMPLICIT NONE
206 COMPLEX(8):: dMo_
207 COMPLEX(8):: Mo_N
208 COMPLEX(8):: phi0_
209 COMPLEX(8):: phi1_
210 Mo_N= ( 0.0000000000_8, 0.0000000000_8)
211 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
212 dMo_ = ( 0.0000000000_8, 0.0000000000_8)
213 phi0_ =DCMPLX(DREAL(phi_0(n)),DREAL(phi_1(n)))
214 phi1_ =DCMPLX(DIMAG(phi_0(n)),DIMAG(phi_1(n)))
215 dMo_ =dMo_ + phi0_ &
216 * phi0_ &
217 + phi1_ &
218 * phi1_ &
219 Mo_N= Mo_N+dMo_ *0.5000000000_8 /DBLE(NL)
220 END DO ! CONCURRENT(n=1:NL:+1)
221 Mo_ = Mo_N
222 END FUNCTION Mo_
223 ! COMPLEXIFIED FIELD CONFIGURATION
224 ! complexified field noise
225 ! DEFAULT: Gaussian distribution (as in Gert Aarts)
226 SUBROUTINE generate_noise(noise_)
227 ! USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
228 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
229 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
230 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
231 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
232 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
233 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
234 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
235 IMPLICIT NONE

```



```

190         =phio0_phio0*phio0_phio0 &
191         -phio1_phio1*phio1_phio1
192         dSo0 = 0.0000000000_8
193     DD CONCURRENT(i=D1:1:-1)
194         nN=xNNO(i,n);dSo0 =dSo0 - ( phi00(n) * phi00(nN) &
195         - phi01(n) * phi01(nN) &
196         + phi10(n) * phi10(nN) &
197         - phi11(n) * phi11(nN) )
198 END DD!CONCURRENT(i=D1:1:-1)
199         nN=xNNO(0,n);dSo0 =dSo0 - ( phi00(n) * phi00(nN) &
200         - phi01(n) * phi01(nN) &
201         + phi10(n) * phi10(nN) &
202         - phi11(n) * phi11(nN) ) *COSH_mu
203         dSo0 =dSo0 + ( phi00(n) * phi11(nN) &
204         + phi01(n) * phi10(nN) &
205         - phi10(n) * phi01(nN) &
206         - phi11(n) * phi00(nN) ) *SINH_mu
207         So0N= So0N+dSo0+ ( 0.5000000000_8 &
208         *lambda*phio0_phio0_phio0_phio0+phio0_phio0*m2202_9D1010)*0.5000000000_8
209 END DO!CONCURRENT(n=1:NL:+1)
210         So0 = So0N
211 END FUNCTION So0
212 ! measure Im(S) part of the action: Gamma=-So1
213 ! <e^{i*Gamma}> flux phase
214 REAL(8) FUNCTION So1()
215 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
216 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
217 USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
218 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
219 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
220 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
221 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
222 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
223 IMPLICIT NONE
224 REAL(8)::COSH_mu
225 REAL(8)::SINH_mu
226 REAL(8):: dSo1
227 REAL(8):: So1N
228 REAL(8):: phio0_phio0
229 REAL(8):: phio1_phio1
230 REAL(8)::phio1_phio1_phio1_phio1
231 COSH_mu= DCOSH(mu)
232 SINH_mu= DSINH(mu)
233 So1N= 0.0000000000_8
234 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
235         phio0_phio0 = phi00(n) * phi00(n) &
236         - phi01(n) * phi01(n) &
237         + phi10(n) * phi10(n) &
238         - phi11(n) * phi11(n)
239         phio1_phio1 = phi00(n) * phi01(n) &
240         + phi01(n) * phi00(n) &
241         + phi10(n) * phi11(n) &
242         + phi11(n) * phi10(n)
243         phio1_phio1_phio1_phio1 &
244         =phio0_phio0*phio1_phio1 &
245         +phio1_phio1*phio0_phio0
246         dSo1 = 0.0000000000_8
247     DD CONCURRENT(i=D1:1:-1)
248         nN=xNNO(i,n);dSo1 =dSo1 - ( phi00(n) * phi01(nN) &
249         + phi01(n) * phi00(nN) &
250         + phi10(n) * phi11(nN) &
251         + phi11(n) * phi10(nN) )
252 END DD!CONCURRENT(i=D1:1:-1)
253         nN=xNNO(0,n);dSo1 =dSo1 - ( phi00(n) * phi01(nN) &
254         + phi01(n) * phi00(nN) &
255         + phi10(n) * phi11(nN) &
256         - phi11(n) * phi10(nN) ) *COSH_mu
257         dSo1 =dSo1 - ( phi00(n) * phi10(nN) &
258         - phi01(n) * phi11(nN) &
259         - phi10(n) * phi00(nN) &
260         + phi11(n) * phi01(nN) ) *SINH_mu
261         So1N= So1N+dSo1+ ( 0.5000000000_8 &
262         *lambda*phio1_phio1_phio1_phio1+phio1_phio1*m2202_9D1010)*0.5000000000_8
263 END DO!CONCURRENT(n=1:NL:+1)
264         So1 = So1N
265 END FUNCTION So1
266 ! measure Re<n> /NL
267 REAL(8) FUNCTION No0()
268 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
269 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
270 USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
271 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
272 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
273 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
274 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
275 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
276 IMPLICIT NONE
277 REAL(8)::COSH_mu
278 REAL(8)::SINH_mu
279 REAL(8):: dNo0
280 REAL(8):: No0N
281 COSH_mu= DCOSH(mu)
282 SINH_mu= DSINH(mu)
283 No0N= 0.0000000000_8
284 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
285         dNo0 = 0.0000000000_8
286         nN=xNNO(0,n);dNo0 =dNo0 + ( phi00(n) * phi00(nN) &
287         - phi01(n) * phi01(nN) &
288         + phi10(n) * phi10(nN) &
289         - phi11(n) * phi11(nN) ) *SINH_mu
290         dNo0 =dNo0 + ( phi00(n) * phi11(nN) &
291         + phi01(n) * phi10(nN) &
292         - phi10(n) * phi01(nN) &
293         - phi11(n) * phi00(nN) ) *COSH_mu
294         No0N= No0N+dNo0 /DBLE(NL)
295 END DO!CONCURRENT(n=1:NL:+1)
296         No0 = No0N

```

Source code

```

297 END FUNCTION No0
298 ! measure Im<n> /NL
299 REAL(8) FUNCTION No1()
300 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
301 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
302 USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
303 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
304 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
305 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
306 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
307 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
308 IMPLICIT NONE
309 REAL(8)::COSH_mu
310 REAL(8)::SINH_mu
311 REAL(8):: dNo1
312 REAL(8):: No1N
313 COSH_mu= DCOSH(mu)
314 SINH_mu= DSINH(mu)
315 No1N= 0.0000000000_8
316 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
317 dNo1 = 0.0000000000_8
318 nN=xNNO(0,n);dNo1 =dNo1 + ( phi00(n) * phi01(nN) &
319 phi01(n) * phi00(nN) &
320 phi10(n) * phi11(nN) &
321 phi11(n) * phi10(nN) ) *SINH_mu
322 dNo1 =dNo1 - ( phi00(n) * phi10(nN) &
323 phi01(n) * phi11(nN) &
324 phi10(n) * phi00(nN) &
325 phi11(n) * phi01(nN) ) *COSH_mu
326 No1N= No1N+dNo1 /DBLE(NL)
327 END DO !CONCURRENT(n=1:NL:+1)
328 No1 = No1N
329 END FUNCTION No1
330 ! measure Re<|phi|^2>/NL
331 REAL(8) FUNCTION Mo0()
332 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
333 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
334 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
335 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
336 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
337 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
338 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
339 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
340 IMPLICIT NONE
341 REAL(8):: dMo0
342 REAL(8):: Mo0N
343 Mo0N= 0.0000000000_8
344 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
345 dMo0 = 0.0000000000_8
346 dMo0 =dMo0 + phi00(n) * phi00(n) &
347 phi01(n) * phi01(n) &
348 phi10(n) * phi10(n) &
349 phi11(n) * phi11(n)
350 Mo0N= Mo0N+dMo0 *0.5000000000_8 /DBLE(NL)
351 END DO !CONCURRENT(n=1:NL:+1)
352 Mo0 = Mo0N
353 END FUNCTION Mo0
354 ! measure Im<|phi|^2>/NL
355 REAL(8) FUNCTION Mo1()
356 USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
357 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
358 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
359 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
360 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
361 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
362 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
363 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
364 IMPLICIT NONE
365 REAL(8):: dMo1
366 REAL(8):: Mo1N
367 Mo1N= 0.0000000000_8
368 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
369 dMo1 = 0.0000000000_8
370 dMo1 =dMo1 + phi00(n) * phi01(n) &
371 phi01(n) * phi00(n) &
372 phi10(n) * phi11(n) &
373 phi11(n) * phi10(n)
374 Mo1N= Mo1N+dMo1 *0.5000000000_8 /DBLE(NL)
375 END DO !CONCURRENT(n=1:NL:+1)
376 Mo1 = Mo1N
377 END FUNCTION Mo1
378 ! COMPLEXIFIED FIELD CONFIGURATION
379 ! complexified field noise ( REAL part)
380 ! DEFAULT: Gaussian distribution (as in Gerl Aarts)
381 SUBROUTINE generate_noise0(noise0)
382 ! USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
383 ! USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
384 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
385 ! USE constants ! contains mathematical constants used throughout
386 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
387 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
388 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
389 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
390 IMPLICIT NONE
391 REAL(8),DIMENSION(0:NL):: noise0
392 REAL(8),DIMENSION(1:NL):: chi00N
393 REAL(8),DIMENSION(1:NL):: chi01N
394 noise0(0)=0.0000000000_8
395 # IF DEFINED(random_luxury)
396 CALL RANLUX(chi00N,NL) ! randomize input z1 for distribution
397 CALL RANLUX(chi01N,NL) ! randomize input z2 for distribution
398 # ELSE
399 CALL RANDOM_NUMBER(chi00N) ! randomize input z1 for distribution
400 CALL RANDOM_NUMBER(chi01N) ! randomize input z1 for distribution
401 # ENDDIF
402 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
403 noise0(n) &

```

```

404      =DSQRT( 2.0000000000_8 ) &
405      *DSQRT( -2.0000000000_8 *DLOG(chi00N(n)) ) &
406      * DCOS( 2.0000000000_8 *PI_8*chi01N(n))
407 END DO !CONCURRENT(n=1:NL:+1)
408 END SUBROUTINE generate_noise0
409 ! complexified field noise (IMAGINARY part)
410 ! DEFAULT: Gaussian distribution (as in Gert Aarts)
411 SUBROUTINE generate_noise1(noise1)
412 ! USE fields ! contains and stores the fields configurations during a simulation
413 USE lattice ! contains and stores the lattice coordinate structure as well as nearest neighbors data structures
414 ! USE langevin ! contains and stores all basic and common Langevin simulation parameters and physical quantities
415 USE constants ! contains mathematical constants used throughout
416 ! USE rho_function ! contains all functions necessary to estimate autocorrelation times
417 ! USE jack_function ! contains all functions necessary to measure with the jack-knife method
418 ! USE random_numbers ! contains and stores all random number generator variables and data
419 ! USE output_formatter ! contains parameters with regards to output geometry and layout
420 IMPLICIT NONE
421 REAL(8),DIMENSION(0:NL):: noise1
422 REAL(8),DIMENSION(1:NL):: chi01N
423 REAL(8),DIMENSION(1:NL):: chi11N
424 noise1(0)=0.0000000000_8
425 # IF DEFINED(random_luxury)
426 CALL RANLUX(chi01N,NL) ! randomize input z1 for distribution
427 CALL RANLUX(chi11N,NL) ! randomize input z2 for distribution
428 # ELSE
429 CALL RANDOM_NUMBER(chi01N) ! randomize input z1 for distribution
430 CALL RANDOM_NUMBER(chi11N) ! randomize input z1 for distribution
431 # ENDIF
432 DO CONCURRENT(n=1:NL:+1)
433      noise1(n) &
434      =DSQRT( 2.0000000000_8 ) &
435      *DSQRT( -2.0000000000_8 *DLOG(chi01N(n)) ) &
436      * DSIN( 2.0000000000_8 *PI_8*chi11N(n))
437 END DO !CONCURRENT(n=1:NL:+1)
438 END SUBROUTINE generate_noise1

```

2 Data structures (complex_langevin.mod.F90)

```

1 ! Silver Blaze phenomenon on the Relativistic Bos Gas
2 ! Complex scalar field theory (phi^2, phi^4) at finite density
3 ! Monte Carlo using Complex Langevin Dynamics for the Phase Quenched Model
4 ! Periodic Boundary Conditions
5 ! Simulation authors
6 ! K. F. Anagnostopoulos NTUA 2014 konstant@mail.ntua.gr
7 ! S. Ch. Papadoudis NTUA 2014 spcom1024@gmail.com
8 ! Related work
9 ! 0810.2089v2: Can stochastic quantization evade the sign problem? - the relativistic Bose gas at finite chemical potential.
10 ! 0902.4686v2: Complex Langevin dynamics at finite chemical potential: mean field analysis in the relativistic Bose gas.
11 ! 0912.0617v2: Adaptive stepsize and instabilities in complex Langevin dynamics.
12 ! Contains all modules utilized in the main simulation
13 ! Modules represent entities in the simulation armed with their properties like:
14 ! the complexified field armed with its implied normalization
15 ! the space-time lattice itself armed with its generation tools
16 ! a collection of observables armed with jackknife to harness results
17 ! an I/O terminal setup specifically for this simulation
18 ! simulation parameters bundle
19 ! random generator call parameter bundle
20 ! various mathematical constants bundle
21 ! page size: #COLUMNS 132
22 ! #ROWS 925
23 ! #CHARACTERS 26172
24 ! use "periodic"/"helicoid"/"standard" boundary conditions (omit to use the standard boundary conditions)
25 # DEFINE periodic
26 ! DEFINE helicoid
27 ! use RANLUX instead of RANDOM_NUMBER for generating random numbers
28 # DEFINE random_luxury
29 ! use C++ style of programming by computing via complex components directly, avoiding the COMPLEX intrinsic of FORTRAN
30 # DEFINE components
31 ! OUTPUT GEOMETRY AND LAYOUT
32 MODULE output_formatter
33 IMPLICIT NONE
34 SAVE
35 INTEGER(4),PARAMETER::stdin = 5 ! standard input
36 INTEGER(4),PARAMETER::stdout= 6 ! standard output
37 INTEGER(4),PARAMETER::stderr= 0 ! standard error
38 ! INTEGER(4),PARAMETER::loglog= 10 ! log entry
39 INTEGER(4),PARAMETER::observ= 11 ! physical observables
40 INTEGER(4),PARAMETER::config= 12 ! complexified field configurations
41 ! output formatting parameters and entries
42 ! INTEGER(4):: COLUMNS ! number of characters wide a line in active shell is
43 INTEGER(4),DIMENSION(1:8)::captains_log ! holds date and time entry with simulation parameters and progress
44 CHARACTER(5) ::timezone ! holds timezone of date and time entry separately for nice output format
45 ! filename formatting
46 CHARACTER(132):: basename ! base name returned by GETARG
47 CHARACTER(132):: pathname ! path name of working director based on simulation parameters
48 ! CHARACTER(132)::captains_log_entries ! log entries at measurement points file
49 CHARACTER(132)::physical_observables ! physical observables file
50 CHARACTER(132)::field_configurations ! complexified field configurations file
51 CONTAINS
52 ! output line horizontal filler
53 SUBROUTINE separator(header,l,color,fortran_carriagecontrol_character ,&
54 fortran_carriagecontrol,monospace)
55 IMPLICIT NONE
56 CHARACTER(*)::header ! string to be spanned
57 CHARACTER(*):: color ! color escape sequence
58 INTEGER(4)::l ! output geometry
59 INTEGER(4)::k ! line iterator
60 LOGICAL :: monospace ! used for block elements characters
61 LOGICAL :: fortran_carriagecontrol ! fortran carriage control
62 CHARACTER(1):: fortran_carriagecontrol_character ! fortran carriage control specifier
63 IF( monospace==.FALSE.) THEN ! modify effective output geometry
64 l=1/9 ! how many groups of blocks long the progressbar can be
65 l=1*7 ! how many blocks long the progressbar can be

```

Source code

```

66 END IF!
67 IF(
68 WRITE(stdout,2000,ADVANCE='no' ) fortran_carriagecontrol==.TRUE.) THEN ! print out fortran carriage control specifier
69 END IF!
70 IF(
71 IF(
72 WRITE(stdout,2000,ADVANCE='no' ) color
73 END IF!
74 END IF!
75 DO k=1,l ! fill line
76 WRITE(stdout,2000,ADVANCE='no' ) header
77 END DO!k=1,l
78 WRITE(stdout,2000
79 2000 FORMAT(A)
80 END SUBROUTINE separator
81 END MODULE output_formatter
82 ! MATHEMATICAL CONSTANTS
83 MODULE constants
84 IMPLICIT NONE
85 ! mathematical constants
86 REAL(8),PARAMETER::PI_8=DATAN2(0.0_8,-1.0_8)
87 END MODULE constants
88 ! SIMULATION PARAMETERS
89 MODULE langevin
90 IMPLICIT NONE
91 SAVE
92 ! Relativistic Bose Gas action parameters
93 REAL(8)::m ! field mass
94 REAL(8)::m2202_9D1010 ! Langragian kinetic term
95 REAL(8):: lambda ! field theory coupling constant
96 REAL(8):: mu ! chemical potential
97 ! Langevin simulation parameters
98 REAL( 8):: dthe ! Langevin evolution temporary variable time step
99 REAL( 8):: the ! Langevin evolution integrated time
100 INTEGER( 8):: Nthe ! Langevin time step number
101 INTEGER( 8):: skip_the ! Langevin time step number skip
102 ! REAL( 8)::new_dthe ! Langevin evolution skipped integrated time
103 ! REAL( 8)::new_the ! Langevin iteration integrated time
104 INTEGER( 8)::new_Nthe ! Langevin current time step number skips
105 REAL( 8):: dtau ! Langevin evolution average time step
106 REAL( 8):: tau ! Langevin evolution total integrated time
107 INTEGER( 8):: Ntau ! Langevin total number of time steps
108 INTEGER( 8):: skip_tau ! Langevin time step number skip step
109 REAL(16):: dK ! temporary drift operator
110 REAL(16):: K ! average drift operator
111 REAL(16):: NK ! average drift operator normalization
112 INTEGER(4)::jack_rank ! jack-knife processing bins level
113 INTEGER(4)::jack_bins ! jack-knife processing bins
114 ! Langevin simulation key
115 INTEGER(2)::status_
116 INTEGER(2)::status0 ! Langevin simulation status
117 INTEGER(1)::status1 ! _ : initialization status
118 INTEGER(1)::status2 ! _ : data processing switch
119 INTEGER(1)::status3 ! _ : Langevin time step type
120 ! 000: reset simulation running thermalization on static Langevin time step
121 ! 001: reset simulation running thermalization on dynamic Langevin time step
122 ! 010: reset simulation running data measuring on static Langevin time step
123 ! 011: reset simulation running data measuring on dynamic Langevin time step
124 ! 100: continue running thermalization from where left-off on static Langevin time step
125 ! 101: continue running thermalization from where left-off on dynamic Langevin time step
126 ! 110: continue running data measuring from where left-off on static Langevin time step
127 ! 111: continue running data measuring from where left-off on dynamic Langevin time step
128 END MODULE langevin
129 ! LATTICE SPECIFICATION
130 MODULE lattice
131 IMPLICIT NONE
132 INTEGER(4)::i
133 INTEGER(4)::j
134 ! INTEGER(4)::k
135 ! CHARACTER(*)::lattice
136 ! INTEGER(4),PARAMETER:: P=1
137 ! REAL(16),PARAMETER::NP=1.000000000_16
138 ! REAL(16),PARAMETER::NP=1.000000000_16/QEXT(P*2)
139 ! lattice parameters
140 ! INTEGER(4),PARAMETER:: D1=3 ! dimensionality of space (dimensionality of spacetime is D1+(D0=1)=D1+1)
141 ! INTEGER(4),PARAMETER:: L0 =02 ! lattice temporal dimension size
142 ! INTEGER(4),PARAMETER:: L1 =02 ! lattice spatial dimension size
143 ! INTEGER(4),PARAMETER:: L_ =02 ! lattice size divisor
144 ! INTEGER(4),PARAMETER::Q0=L0/L_ ! lattice temporal dimension size divided
145 ! INTEGER(4),PARAMETER::Q1=L1/L_ ! lattice spatial dimension size divided
146 ! INTEGER(4),PARAMETER::N0=L0 ! lattice temporal extent
147 ! INTEGER(4),PARAMETER::N1=L1 ** D1 ! lattice spatial volume
148 ! INTEGER(4),PARAMETER::NL=N1*N0 ! lattice volume
149 ! INTEGER(4),PARAMETER::NT= L_**(D1+1) ! desired OMP_NUM_THREADS()
150 ! INTEGER(4),PARAMETER::NQ=NL/NT ! iterations divided by desired OMP_NUM_THREADS()
151 ! INTEGER(4),PARAMETER::NB=NQ*NT ! main bulk of iterations
152 ! INTEGER(4),PARAMETER::NR=NL-NB ! remainder of iterations, leftover from worksharing distribution
153 INCLUDE 'complex_langevin.mod.H90' ! #####
154 SAVE
155 ! index variables and parameters
156 INTEGER(4),DIMENSION(0:D1 ) :: x ! lattice site z coordinate
157 INTEGER(4),DIMENSION(0:D1 ) :: xN ! lattice site of nearest neighbor in z coordinate
158 INTEGER(4),DIMENSION(0:D1 ) :: Lx ! lattice size in z coordinate
159 INTEGER(4) :: n ! lattice site memory index
160 INTEGER(4) :: nN ! lattice site memory index temporal
161 INTEGER(4),DIMENSION(0:D1+1) :: Ln ! lattice site memory index skip in z coordinate
162 ! lattice structure
163 INTEGER(4),DIMENSION(0:D1,0:NL) :: xNN ! lattice site coordinates
164 INTEGER(4),DIMENSION(0:D1,0:NL) :: xNNO ! lattice site coordinates of positive nearest neighbors
165 INTEGER(4),DIMENSION(0:D1,0:NL) :: xNN1 ! lattice site coordinates of negative nearest neighbors
166 CONTAINS
167 ! compute lattice site spacetime coordinates in arrays
168 ! (store z-components closer together)
169 SUBROUTINE make_lattice
170 IMPLICIT NONE
171 ! form lattice specifications for both coordinates and memory index
172 Lx( 0)=L0

```

```

173                               Ln( 0)=      1
174                               Ln( 1)=L0
175       DO i=1,D1,+1
176                               Lx(i )=      L1
177                               Ln(i+1)=L0+L1**i
178   END DO !i=D1,0,-1
179       DO i=D1,0,-1
180                               xNN_(i,0)=0 ! set lattice null site x coordinate to 0
181   END DO !i=D1,0,-1
182       DO n=1,NL,+1
183           nN=n ! store memory index for manipulation separately from DO iterator
184           DO i=D1,0,-1
185                               xNN_(i,n)=(nN-1)/Ln(i)+1 ! fish lattice site coordinates out of memory index
186                               nN=nN-Ln(i)*(xNN_(i,n) -1) ! remove i-th integer part to continue fishing
187   END DO !i=D1,0,-1
188   END DO !n=1,NL,+1
189   END SUBROUTINE make_lattice
190 ! compute nearest neighbors and store them in arrays
191 ! (store t-components closer together)
192 SUBROUTINE make_nearest_neighbors
193 USE output_formatter
194 IMPLICIT NONE
195 CHARACTER(132):: lattice
196 # IF DEFINED(periodic)
197     lattice=TRIM(pathname)//TRIM(basename)//'.periodic.lattice'
198 # ELIF DEFINED(helicoid)
199     lattice=TRIM(pathname)//TRIM(basename)//'.helicoid.lattice'
200 # ELSE
201     lattice=TRIM(pathname)//TRIM(basename)//'.lattice'
202 # ENDIF
203 OPEN(UNIT=44,FILE=lattice)
204 DO i=D1,0,-1
205     WRITE(44,4200 )
206   END DO !i=D1,0,-1
207   DO n=1,NL,+1
208       WRITE(44,4200,ADVANCE='no') ' '
209       WRITE(44,4201,ADVANCE='no') ' '
210       WRITE(44,4200,ADVANCE='no') ' '
211       DO i=D1,0,-1
212           WRITE(44,4202,ADVANCE='no') xNN_(i,n)
213 4202 FORMAT(I<INT(LOG10(DBLE(Lx(i))))+2>)
214   END DO !i=D1,0,-1
215       WRITE(44,4200,ADVANCE='no') ' '
216       DO i=D1,0,-1
217           WRITE(44,4200,ADVANCE='no') ' '
218 # IF .NOT. DEFINED(helicoid)
219                               xN(i)= &
220                               ((
221                               xNN_(i,n))/Lx(i)) &
222                               *Lx(i) &
223                               xNNO(i,n) &
224                               =n +Ln(i)*(1-xN(i)) &
225 # IF .NOT. DEFINED(periodic)
226     IF (
227         xNNO(i,n) &
228         =xNN_(i,0) &
229         Lx(i) <=xN(i) THEN
230     IF !
231     ELSE
232                               nN= &
233                               ((
234                               n +Ln(i))/NL) &
235                               *NL &
236                               xNNO(i,n) &
237                               =n +Ln(i)-nN &
238 # ENDIF
239     WRITE(44,4201,ADVANCE='no') xNNO(i,n)
240     WRITE(44,4200,ADVANCE='no') ' '
241     DO j=D1,0,-1
242         WRITE(44,4203,ADVANCE='no') xNN_(j, &
243         xNNO(i,n))
244 4203 FORMAT(I<INT(LOG10(DBLE(Lx(j))))+2>)
245   END DO !j=D1,0,-1
246   END DO !i=D1,0,-1
247       WRITE(44,4200,ADVANCE='no') ' '
248       DO i=D1,0,-1
249           WRITE(44,4200,ADVANCE='no') ' '
250 # IF .NOT. DEFINED(helicoid)
251                               xN(i)= &
252                               ((1+Lx(i)
253                               -xNN_(i,n))/Lx(i)) &
254                               *Lx(i) &
255                               xNN1(i,n) &
256                               =n -Ln(i)*(1-xN(i)) &
257 # IF .NOT. DEFINED(periodic)
258     IF (
259         xNN1(i,n) &
260         =xNN_(i,0) &
261         1 >=xN(i) THEN
262     IF !
263     ELSE
264                               nN= &
265                               (( NL &
266                               -n +Ln(i))/NL) &
267                               *NL &
268                               xNN1(i,n) &
269                               =n -Ln(i)+nN &
270 # ENDIF
271     WRITE(44,4201,ADVANCE='no') xNN1(i,n)
272     WRITE(44,4200,ADVANCE='no') ' '
273     DO j=D1,0,-1
274         WRITE(44,4204,ADVANCE='no') xNN_(j, &
275         xNN1(i,n))
276 4204 FORMAT(I<INT(LOG10(DBLE(Lx(j))))+2>)
277   END DO !j=D1,0,-1
278   END DO !i=D1,0,-1
279       WRITE(44,4200)

```



```

387     INTEGER(4)::i
388     INTEGER(4)::j
389     INTEGER(4)::          dat0
390     INTEGER(4)::          dat1
391     INTEGER(4)::          binw,ndat , jack
392     REAL(8),DIMENSION(:):: D( : )
393     REAL(8),ALLOCATABLE :: O( : )
394 !   REAL(8),ALLOCATABLE :: I( : )
395     REAL(8)                ::average_0
396 !   REAL(8)                ::average_I
397     REAL(8)                :: error_0
398 !   REAL(8)                :: error_I
399     ALLOCATE(O(0:jack-1))
400 !   ALLOCATE(I(0:jack-1))
401     O=0.0000_8
402 !   I=0.0000_8
403
404     dat0=LBOUND(D,DIM=1)
405     dat1=UBOUND(D,DIM=1)
406     ndat = SIZE(D,DIM=1)
407     binw=ndat / jack
408
409     IF( binw<1 ) THEN
410         CALL locerr('Jack-knife: binw<1')
411     END IF !
412     DO i=dat0,dat1
413         DO j=0,jack-1
414             IF(i/binw/=j) THEN
415                 O(j)=O(j)+ D(i)
416 !           X(j)=X(j)+(D(i)-O(j)) *
417 !           *(D(i)-O(j))
418             END IF !i/binw/=j
419         END DO !j=0, jack-1
420     END DO !i=dat0, dat1
421
422     O=          0          /(ndat-binw)
423     I=          I          /(ndat-binw)
424     average_0=  SUM( O ) / jack
425     average_I=  SUM( I ) / jack
426     error_0=SQRT(SUM((O-average_0) &
427                 * (O-average_0)))
428     error_I=SQRT(SUM((I-average_I) &
429                 * (I-average_I)))
430     DEALLOCATE(O)
431     DEALLOCATE(I)
432
433 END SUBROUTINE jackknife
434 ! local error message
435 SUBROUTINE locerr(errmes)
436     IMPLICIT NONE
437     CHARACTER(*)::errmes
438     WRITE(0, '(A,A)') TRIM(errmes), ' # ABORTING'
439     STOP 1
440 END SUBROUTINE locerr
441
442 END MODULE jack_function
443 ! AUTOCORRELATION FUNCTION
444 MODULE rho_function
445     IMPLICIT NONE
446     CONTAINS
447 ! unnormalized autocorrelation function @t
448 REAL(8) FUNCTION autocorrelation_function(x,ndat,t)
449     IMPLICIT NONE
450     INTEGER(4)::          n,ndat,t
451     REAL(8),ALLOCATABLE:: x( : )
452     REAL(8)                ::x_average_0 ! <x>_0
453     REAL(8)                ::x_average_t ! <x>_t
454     n=ndat-t
455     IF(n<1) THEN
456         CALL locerr('rho: n<1')
457     END IF !n<1
458     x_average_0 =SUM( x(0:n-1) )/n ! <x>_0
459     x_average_t =SUM( x(t:n-1+t) )/n ! <x>_t
460     autocorrelation_function=SUM(( x(0:n-1) -x_average_0) &
461                 * ( x(t:n-1+t) -x_average_t))/n ! <(x-<x>_0)(x-<x>_t)>
462     FUNCTION autocorrelation_function
463 ! local error message
464 SUBROUTINE locerr(errmes)
465     IMPLICIT NONE
466     CHARACTER(*)::errmes
467     WRITE(0, '(A,A)') TRIM(errmes), ' # ABORTING'
468     STOP 1
469 END SUBROUTINE locerr
470 END MODULE rho_function

```

simulation profile (complex_langevin.mod.H90)

```

1 ! Silver Blaze phenomenon on the Relativistic Bos Gas
2 ! Complex scalar field theory (phi^2, phi^4) at finite density
3 ! Monte Carlo using Complex Langevin Dynamics for the Phase Quenched Model
4 ! Periodic Boundary Conditions
5 ! Simulation authors
6 ! K. N. Anagnostopoulos NTUA 2014 konstant@mail.ntua.gr
7 ! S. Ch. Papadoudis NTUA 2014 spcom1024@gmail.com
8 ! Related work
9 ! 0810.2089v2: Can stochastic quantization evade the sign problem? - the relativistic Bose gas at finite chemical potential.
10 ! 0902.4686v2: Complex Langevin dynamics at finite chemical potential: mean field analysis in the relativistic Bose gas.
11 ! 0912.0617v2: Adaptive stepsize and instabilities in complex Langevin dynamics.
12 ! Contains all modules utilized in the main simulation
13 ! Modules represent entities in the simulation armed with their properties like:
14 ! the complexified field armed with its implied normalization
15 ! the space-time lattice itself armed with its generation tools
16 ! a collection of observables armed with jackknife to harness results
17 ! an I/O terminal setup specifically for this simulation
18 ! simulation parameters bundle
19 ! random generator call parameter bundle
20 ! various mathematical constants bundle
21 INTEGER(4),PARAMETER:: P=1
22 REAL(16),PARAMETER::NP=1.00000000_16

```

Source code

```
23 ! REAL(16),PARAMETER::NP=1.00000000_16/QEXT(P*2)
24 ! lattice parameters
25 INTEGER(4),PARAMETER:: D1=3 ! dimensionality of space (dimensionality of spacetime is D1+(D0=1)=D1+1)
26 INTEGER(4),PARAMETER:: LO =002 ! lattice temporal dimension size
27 INTEGER(4),PARAMETER:: L1 =002 ! lattice spatial dimension size
28 INTEGER(4),PARAMETER:: L_ = 2 ! lattice size divisor
29 INTEGER(4),PARAMETER:: Q0=L0/L_ ! lattice temporal dimension size divided
30 INTEGER(4),PARAMETER:: Q1=L1/L_ ! lattice spatial dimension size divided
31 INTEGER(4),PARAMETER:: N0=L0 ! lattice temporal extent
32 INTEGER(4),PARAMETER:: N1=L1 ** D1 ! lattice spatial volume
33 INTEGER(4),PARAMETER:: NL=N1*N0 ! lattice volume
34 INTEGER(4),PARAMETER:: NT= L_**(D1+1) ! desired OMP_NUM_THREADS()
35 INTEGER(4),PARAMETER:: NQ=NL/NT ! iterations divided by desired OMP_NUM_THREADS()
36 INTEGER(4),PARAMETER:: NB=NQ*NT ! main bulk of iterations
37 INTEGER(4),PARAMETER:: NR=NL-NB ! remainder of iterations, leftover from worksharing distribution
```

Bibliography

- [1] ISTVÁN MONTVAY, GERNOT MÜNSTER.
Quantum Fields on a Lattice.
Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
Cambridge University Press. (1994)
doi.org/10.1017/CBO9780511470783
- [2] JEAN ZINN-JUSTIN.
Quantum Field Theory and Critical Phenomena.
Clarendon Press, International Series of Monographs on Physics 113.
Oxford University Press, USA, forth edition. (2002)
- [3] POUL H. DAMGAARD, HELMUTH HÜFFEL.
Stochastic Quantization.
PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters) 152, Nos. 5 & 6 (1987) 227-398.
North-Holland, Amsterdam.
- [4] RYOGO KUBO.
The fluctuation-dissipation theorem.
1966 Rep. Prog. Phys. 29 255.
doi:10.1088/0034-4885/29/1/306/
- [5] GERT AARTS.
Can stochastic quantization evade the sign problem? – the relativistic Bose gas at finite chemical potential.
arXiv:0810.2089v2 [hep-lat] 12 March 2009
- [6] GERT AARTS.
Complex Langevin dynamics at finite chemical potential: mean field analysis in the relativistic Bose gas.
arXiv:0902.4686v2 [hep-lat] 5 May 2009
- [7] GERT AARTS, FRANK A. JAMES, ERHARD SEILER, ION-OLIMPIU STAMATESCU.
Adaptive stepsize and instabilities in complex Langevin dynamics.
arXiv:0912.0617v2 [hep-lat] 17 March 2010
- [8] MARCO CRISTOFORETTI, FRANCESCO DI RENZO, LUIGI SCORZATO.
High density QCD on a Lefschetz thimble?
arXiv:1205.3996v3 [hep-lat] 27 September 2012
- [9] MARCO CRISTOFORETTI, FRANCESCO DI RENZO, ABHISHEK MUKHERJEE, LUIGI SCORZATO.
Monte Carlo simulations on the Lefschetz thimble: taming the sign problem.
arXiv:1303.7204v2 [hep-lat] 14 November 2013
- [10] GERT AARTS.
Lefschetz thimbles and stochastic quantisation: Complex actions in the complex plane.
arXiv:1308.4811v1 [hep-lat] 22 August 2013
- [11] GERT AARTS, ERHARD SEILER, ION-OLIMPIU STAMATESCU.
The Complex Langevin method: When can it be trusted?
arXiv:0912.3360v2 [hep-lat] 17 March 2010
- [12] SHAILESH CHANDRASEKHARAN, UWE-JENS WIESE.
Meron-Cluster Solution of Fermion Sign Problems.
arXiv:cond-mat/9902128v2 [cond-mat.stat-mech] 11 October 1999

Bibliography

- [13] CHRISTOF CATTRINGER, THOMAS KLOIBER.
Lattice study of the Silver Blaze phenomenon for a charged scalar ϕ^4 field.
arXiv:1206.2954v2 [hep-lat] 12 December 2012
- [14] N. PROKOF'EV, B. SVISTUNOV.
Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 160601
- [15] Z. FODOR, S. KATZ.
Phys.Lett. B534, 87 (2002), hep-lat/0104001
- [16] C. ALLTON, S. EJIRI, S. HANDS, O. KACZMAREK, F. KARSCH, E. LAERMANN, C. SCHMIDT, L. SCORZATO.
Phys.Rev. D66, 074507 (2002), hep-lat/0204010
- [17] R. V. GAVAI AND S. GUPTA.
Phys.Rev. D68, 034506 (2003), hep-lat/0204010
- [18] P. DE FORCRAND, O. PHILIPSEN.
Nucl.Phys. B642, 290 (2002), hep-lat/0205016
- [19] M. D'ELIA, M.-P. LOMBARDO.
Phys.Rev. D67, 014505 (2003), hep-lat/0205016
- [20] J. R. KLAUDER, W. P. PETERSEN.
J.Stat.Phys. 39, 53 (1985)
- [21] G. AARTS, I.-O. STAMATESCU.
JHEP 0809, 018 (2008), arXiv:0807.1597 [hep-lat]
- [22] G. GURALNIK, C. PEHLEVAN.
Nucl.Phys. B822, 349 (2009), arXiv:0902.1503 [hep-lat]
- [23] S. CHANDRASEKHARAN.
Phys.Rev. D82, 025007 (2010), arXiv:0910.5736 [hep-lat]
- [24] J. LANGELAGE, S. LOTTINI, O. PHILIPSEN.
JHEP 1102, 057 (2011), arXiv:1010.0951 [hep-lat]
- [25] M. FROMM, J. LANGELAGE, S. LOTTINI, O. PHILIPSEN.
JHEP 1201, 042 (2012), arXiv:1111.4953 [hep-lat]
- [26] S. EJIRI.
Phys.Rev. D77, 014508 (2008), arXiv:0706.3549 [hep-lat]
- [27] K. ANAGNOSTOPOULOS, J. NISHIMURA.
Phys.Rev. D66, 106008 (2002), hep-th/0108041
- [28] J. AMBJORN, K. ANAGNOSTOPOULOS, J. NISHIMURA, J. VERBAARSCHOT.
JHEP 0210, 062 (2002), hep-lat/0208025
- [29] K. N. ANAGNOSTOPOULOS, T. AZUMA, J. NISHIMURA.
JHEP 1110, 126 (2011), arXiv:1108.1534 [hep-lat]
- [30] Z. FODOR, S. D. KATZ, C. SCHMIDT.
JHEP 0703, 121 (2007), hep-lat/0701022
- [31] V. AZCOITI, G. DI CARLO, A. GALANTE, V. LALIENA.
Nucl.Phys. B723, 77 (2005), hep-lat/0503010
- [32] J. DANZER, C. GATTRINGER.
Phys.Rev. D86, 014502 (2012), arXiv:1204.1020 [hep-lat]
- [33] K. NAGATA, S. MOTOKI, Y. NAKAGAWA, A. NAKAMURA, T. SAITO.
XQCD-J Collaboration (2012), arXiv:1204.1412 [hep-lat]
- [34] A. ARMONI, A. PATELLA.
Phys.Rev. D85, 125021 (2012), arXiv:1204.2405 [hep-th]

- [35] M. HANADA, Y. MATSUO, N. YAMAMOTO.
arXiv:1205.1030