



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ”
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ

Μοντελοποίηση της μη-γραμμικής εξωδοελαστικότητας πολυμερικών υλικών

Μεταπτυχιακή Εργασία

Αντώνιος Γ. Ζαχαράτος
Διπλωματούχος Μαθηματικός Εφαρμογών

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:
Ευαγγελία Κοντού-Δρούγκα

Αθήνα
Οκτώβριος 2014

*If we knew what it was we were doing,
it would not be called research, would it?*

Albert Einstein



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ”
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ

Μοντελοποίηση της μη-γραμμικής εξωδοελαστικότητας πολυμερικών υλικών

Μεταπτυχιακή Εργασία

Αντώνιος Γ. Ζαχαράτος
Διπλωματούχος Μαθηματικός Εφαρμογών

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:
Ευαγγελία Κοντού-Δρούγκα

Αθήνα
Οκτώβριος 2014

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	5
Περίληψη	7
Abstract.....	9

Κεφάλαιο 1

1.1 Γραμμική Ιξωδοελαστικότητα	13
1.2 Στοιχείο Maxwell	14
1.3 Στοιχείο Kelvin.....	16
1.4 Τριπαραμετρικό μοντέλο	18
1.5 Τετραπαραμετρικό μοντέλο Burgers	20
1.6 Μελέτη των μοντέλων σε ερπυσμό και χαλάρωση.....	21
1.6.1 Ερπυσμός.....	22
1.6.2 Χαλάρωση τάσης.....	26

Κεφάλαιο 2

2.1 Εισαγωγή.....	35
2.2 Η προσέγγιση του μηχανικού στη μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα.....	36
2.3 Η ρεολογική προσέγγιση.....	39
2.3.1 Ιστορική αναδρομή	39
2.3.2 Προσαρμογές της γραμμικής θεωρίας	40
2.3.3 Θεωρίες πολλαπλών ολοκληρωμάτων – Green και Rivlin, Pipkin και Rogers.....	41
2.3.4 Pipkin και Rogers.....	42
2.3.5 Σημερινή χρήση.....	43
2.4 Μοριακά μοντέλα (Molecular Models)	44
2.4.1 Το μοντέλο (Rouse Model)	44
2.5 Ερπυσμός και χαλάρωση ως Θερμικά Ενεργοποιούμενες Διαδικασίες	46
2.5.1 Η εξίσωση του Eyring	47

Κεφάλαιο 3

3.1 Εισαγωγή	51
3.2 Η Προσέγγιση του Khan	51
3.2.1 Το μοντέλο	51
3.2.2 Εφαρμογή του μοντέλου του Khan στο Adiprene L100	54
3.2.2.a Πείραμα χαλάρωσης τάσης	54
3.2.2.b Πείραμα μονοτονικής φόρτισης	56
3.2.2.c Πείραμα βηματικής χαλάρωσης	58
3.3 Εισαγωγή ενός διαφορετικού μη-γραμμικού μοντέλου	59
3.3.1 Το μοντέλο Eyring	59
3.3.2 Εφαρμογή του μοντέλου	61
3.3.2.a Πείραμα χαλάρωσης τάσης	61
3.3.2.b Πείραμα μονοτονικής φόρτισης	65
3.3.2.c Πείραμα βηματικής χαλάρωσης	69
3.3.2.d Κυκλική καταπόνηση	70
3.3.3 Συμπεράσματα.....	72

Κεφάλαιο 4

4.1 Εισαγωγή	77
4.2 Εφαρμογή του μοντέλου Eyring στην μονοτονική φόρτιση του HNBR soft.....	77
4.3 Εφαρμογή του μοντέλου Eyring στον ερπυσμό του HNBR soft.....	79
4.4 Εφαρμογή του μοντέλου Eyring στην χαλάρωση τάσης του HNBR soft.....	82
4.5 Συμπεράσματα	86

Κεφάλαιο 5

5.1 Συμπεράσματα	88
------------------------	----

Παράρτημα	91
Βιβλιογραφία	101

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο δεν θα ήθελα να παραλείψω να ευχαριστήσω κάποια άτομα τα οποία με βοήθησαν να φέρω εις πέρας αυτή την Μεταπτυχιακή εργασία. Η βοήθειά τους ήταν μία μεγάλη δύναμη για να συνεχίσω και να ολοκληρώσω το Μεταπτυχιακό μου πρόγραμμα.

Στους τρεις φίλους μου, διδάκτορες Βασίλη Μανωλόπουλο, Ιωάννη Δερνίκα και τον υποψήφιο διδάκτορα Άγγελο Πικράκη, οι οποίοι μου αφιέρωσαν αρκετό από τον χρόνο τους για να με κατευθύνουν και να με συμβουλεύσουν όποτε κι αν τους χρειάστηκα, ακόμα και για θέματα διαδικαστικά. Η εμπειρία τους και η γνώσεις που κατέχουν είναι για μένα ένας στόχος που κυνηγώντας τον μπορώ να γίνομαι καλύτερος. Ένα απλό ευχαριστώ δεν αρκεί για να δείξει την ευγνωμοσύνη μου προς το πρόσωπό τους, τους εύχομαι ολόψυχα κάθε επιτυχία και καλή σταδιοδρομία σε ό,τι κάνουν.

Δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ σε ένα πρόσωπο που τον τελευταίο καιρό με στήριξε και με ώθησε ώστε να συνεχίσω και να μην απογοητεύομαι από τις κακές στιγμές. Με βοήθησε σαν προπονητής να οργανωθώ και να πάω παρακάτω. Η καλή μου φίλη Λουίζα Ανδριανοπούλου ήταν το άτομο καταλύτης ώστε να μην ξεχνάω ποιος είναι ο στόχος μου. Την ευχαριστώ για την υπομονή της και για τη πίστη της σε μένα. Της εύχομαι να τα καταφέρει με επιτυχία σε ό,τι δύσκολο έχει σχεδιάσει στη ζωή της.

Τελευταίο, αλλά περισσότερο σημαντικό άφησα έναν άνθρωπο που ήταν για μένα μία αφορμή να ασχολήθω με ένα κομμάτι της Μηχανικής όχι μόνο ενδιαφέρον αλλά και άμεσα συνδεδεμένο με τις τεχνολογικές εξελίξεις. Ο λόγος φυσικά είναι για την υπεύθυνη αυτής της εργασίας, Καθηγήτρια του Τομέα Μηχανικής Ευαγγελία Κοντού-Δρούγκα. Η επιστημονική της γνώση, η πειραματική της εμπειρία, η αίσθηση της Μηχανικής, η υπομονή της αλλά και ο υπέροχος χαρακτήρας της είναι αυτά που χαρακτηρίζουν έναν πραγματικό Καθηγητή. Σας ευχαριστώ για όλα ολόψυχα.

Περίληψη

Η ιξωδοελαστικότητα ως ένα φαινόμενο εξαρτώμενο από τον χρόνο και για μεγάλες τιμές αυτού, δημιουργεί μερικά φυσικά προβλήματα μελέτης της συμπεριφοράς του υλικού στην επιστημονική περιοχή του Μηχανικού των Υλικών. Το κύριο πρόβλημα είναι η αδυναμία της διεξαγωγής ενός πειράματος το οποίο χρειάζεται αρκετούς μήνες για την ολοκλήρωσή του ώστε να μπορέσουμε να σκιαγραφήσουμε την συμπεριφορά του υλικού στο χρόνο.

Έτσι για να βρεθεί λύση σε αυτό το πρόβλημα ο Μηχανικός των Υλικών δημιουργεί μαθηματικά, γραμμικά ή μη, μοντέλα τα οποία προσομοιώνουν την συμπεριφορά του υλικού κατά την πάροδο του χρόνου με αρκετά καλή ακρίβεια. Σήμερα τέτοια μοντέλα δίνουν λύσεις σε περιπτώσεις κατασκευών όπου ο κατασκευαστής χρειάζεται να γνωρίζει την διάρκεια ζωής – αστοχίας υλικού για να προχωρήσει την μελέτη του σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα. Έτσι ο Μηχανικός των Υλικών με μία σειρά κατάλληλων πειραμάτων προσδιορίζει την συμπεριφορά του υλικού και μπορεί να δώσει με αξιοπιστία απαντήσεις για την αντοχή του υλικού στη πάροδο του χρόνου.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία μελέτη ενός τέτοιου μοντέλου περιγραφής της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς των πολυμερικών υλικών. Η μελέτη αυτή γίνεται με την προσομοίωση πειραμάτων από την βιβλιογραφία. Επίσης, γίνεται και μία σύγκριση με ένα μη γραμμικό ιξωδοελαστικό μοντέλο επίσης από τη βιβλιογραφία.

Η εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο περιγράφεται η θεωρία της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας μέσω μερικών πρότυπων γραμμικών ρεολογικών μοντέλων τα οποία λόγω της σχετικής μαθηματικής ευκολίας που παρουσιάζουν περιγράφουν την ιξωδοελαστικότητα αλλά γίνονται και μία βάση για την περαιτέρω μελέτη αυτής μέσω της μη-γραμμικότητας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η θεωρία της μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας, όπως αυτή επινοήθηκε και όπως εξελίσσεται κατά την πάροδο των χρόνων. Η μη-γραμμική ιξωδοελαστικότητα παρουσιάζει αρκετές μαθηματικές δυσκολίες, είναι όμως ο καταλληλότερος, μέχρι στιγμής, τρόπος για την περιγραφή της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται επίσης και η θεωρία της εξίσωσης για τον αποσβεστήρα του Eyring.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μία παρουσίαση-σύγκριση δύο μη-γραμμικών ιξωδοελαστικών μοντέλων. Τα μοντέλα αυτά προσομοιώνουν την συμπεριφορά ενός πολυμερούς σε μονοτονική φόρτιση, χαλάρωση αλλά και συνδυασμό με βηματικές φορτίσεις. Το ένα μοντέλο είναι έτοιμο από τη βιβλιογραφία και το άλλο επινοήθηκε για την εργασία αυτή. Τα πειράματα που χρησιμοποιήσαμε είναι επίσης από την βιβλιογραφία και έχουν γίνει για ένα πολυμερές που παρουσιάζει ιξωδοελαστική συμπεριφορά.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η εφαρμογή του μοντέλου σε πειράματα χαλάρωσης αλλά και ερπυσμού σε διαφορετικό υλικό. Τα πειράματα αυτά επίσης έχουν αντληθεί από την βιβλιογραφία. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η παρουσίαση της αποτελεσματικότητας του μοντέλου και σε πειράματα ερπυσμού. Το ενδιαφέρον παρουσιάζει το ότι δεν υπάρχουν πολλά μοντέλα στη βιβλιογραφία που να περιγράφουν τον ερπυσμό ενός ιξωδοελαστικού υλικού.

Συμπεράσματα και μία συζήτηση παρουσιάζεται στο τελευταίο κεφάλαιο, όπου γίνεται και μία σχετική αξιολόγηση των μοντέλων αλλά και μερικές ιδέες για μελλοντική έρευνα.

Στο τέλος ακολουθούν, ένα παράρτημα με μαθηματικό συμπλήρωμα, μία εικόνα των υπολογισμών και των πράξεων μέσω του κώδικα σε Mathematica καθώς και οι αναφορές από την βιβλιογραφία.

Abstract

Viscoelasticity is a time-dependent phenomenon and for large values of this, generates some physical problems in observing the behavior of the material. The main problem for the Material Engineer is the impossibility of conducting an experiment which takes several months to be completed so that we can sketch the behavior of the material through time.

Thus, finding a solution to this problem the Material Engineer creates mathematical, linear or not, models that simulates the behavior of the material over time with pretty good accuracy. In present day such models provide solutions in cases where construction contractor needs to know the lifetime – material failure to advance his study and all in a reasonable time. So the Engineer with an appropriate set of experiments should determines the behavior of the material and can give a reliable answer about the strength of the material in the course of time.

This thesis presents a study of such a model describing the viscoelastic behavior of polymeric materials. This study was done by simulating experiments from the literature. Also, becomes a comparison with a non-linear viscoelastic model also from the literature.

The thesis consists of five chapters. The first chapter describes the theory of linear viscoelasticity through some standard linear rheological models. These models not only, due to the relative ease of mathematics, describes viscoelasticity but also made a basis for further study of this through non-linearity.

The second chapter describes the theory of non-linear viscoelasticity as conceived and as it evolved over the years. The non-linear viscoelasticity presents several mathematical difficulties that are however best suited, until now, way to describe the viscoelastic behavior. This chapter presents also the theory of the equation for the Eyring's dashpot.

The third chapter is a presentation-comparison of two non-linear viscoelastic models. These models simulate the behavior of a polymer under monotonic loading, relaxation and a combination with step loading. One model is known from the literature and the other one was invented for this thesis. Experimental data collected from the literature and refers to a polymer presenting viscoelastic behavior.

The fourth chapter presents the application of the model in relaxation experiments and creep into a new material. These experiments also collected from the literature. The purpose of this chapter is to show the effectiveness of the model describing the behavior of the material under creep. The interest here is that there are not many models in the literature to describe the creep of a viscoelastic material.

Conclusions and a discussion presented in the last chapter, Here, we evaluate the models and give a few ideas for future research.

At the end, an annex with mathematical supplement, a view of calculations and operations through the code in Mathematica and references from the literature are presented.

1.1 Γραμμική Ιξωδοελαστικότητα

Η μηχανική των παραμορφώσιμων σωμάτων για πολλά χρόνια ήταν θεμελιωμένη στην θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας. Στην πράξη όμως τα βιομηχανικά υλικά παρουσίαζαν άλλες, λιγότερο προβλέψιμες ιδιότητες για τις οποίες η μελέτη της εν γένει ανελαστικής τους συμπεριφοράς ήταν αναγκαία. Στην προσέγγιση της ανελαστικότητας των υλικών κινείται η θεωρία της ιξωδοελαστικότητας, γραμμικής ή μη – γραμμικής.

Ιξωδοελαστικότητα είναι η ιδιότητα των υλικών να παρουσιάζουν τόσο ιξώδη όσο και ελαστικά χαρακτηριστικά, όταν υποβάλλονται σε παραμόρφωση. Ιξώδη υλικά, όπως ένα παχύρρευστο υγρό, που αντιστέκεται της διαμητρικής ροής και παραμόρφωσης γραμμικά με το χρόνο, όταν εφαρμόζεται τάση. Τα ελαστικά υλικά παραμορφώνονται όταν εφαρμόζεται τάση και επιστρέφουν στην αρχική τους κατάσταση αφού η τάση έχει αφαιρεθεί. Τα ιξωδοελαστικά υλικά παρουσιάζουν στοιχεία και από τις δύο αυτές ιδιότητες και έτσι εμφανίζουν μια συμπεριφορά εξαρτώμενη από τον χρόνο.

Σε ένα απόλυτα ελαστικό υλικό ο ορισμός των καταστατικών εξισώσεων προϋποθέτει ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές αλλά και ότι η σχέση τάσης παραμόρφωσης είναι γραμμική.

Η αρχή λοιπόν της γραμμικότητας μπορεί να επεκταθεί και σε ιξωδοελαστικά υλικά. Το θεμέλιο αυτής της επέκτασης είναι η Αρχή Υπέρθεσης του Boltzmann (Boltzmann's superposition principle), σύμφωνα με την οποία στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα όλες οι επιδράσεις είναι προσθετικές, όπως στην κλασσική ελαστικότητα, μόνο που στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα παίζει ρόλο σε ποια χρονική στιγμή μια επίδραση έλαβε χώρα. Η εφαρμογή τάσης μπορεί να προκαλέσει μια χρόνο-εξαρτώμενη παραμόρφωση, όμως μπορεί να υποτεθεί ότι κάθε αύξηση της τάσης δημιουργεί μια νέα ανεξάρτητη συνεισφορά.

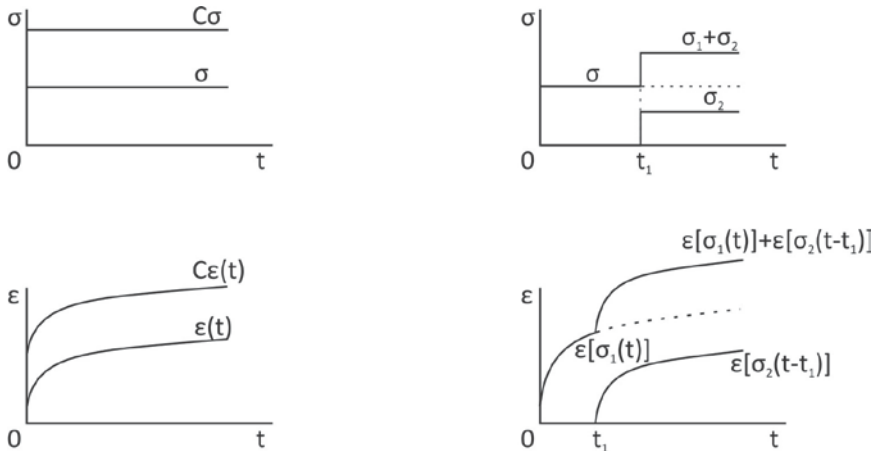
Ένα υλικό είναι γραμμικά ιξωδοελαστικό εάν η τάση είναι ανάλογη της παραμόρφωσης μια δεδομένη χρονική στιγμή και ισχύει η αρχή της γραμμικής υπέρθεσης. Αυτές οι δύο γραμμικές προϋποθέσεις εκφράζονται μαθηματικά σε δύο εξισώσεις:

$$\varepsilon[c\sigma(t)] = c\varepsilon[\sigma(t)]$$

$$\varepsilon[\sigma_1(t) + \sigma_2(t - t_1)] = \varepsilon[\sigma_1(t)] + \varepsilon[\sigma_2(t - t_1)]$$

Όπου ε είναι η παραμόρφωση εξόδου, σ η τάση εισόδου και c μια σταθερά. Η πρώτη εξίσωση δείχνει ότι η χρόνο-εξαρτημένη παραμόρφωση εξόδου λόγω τάσης εισόδου $c\sigma(t)$ είναι ίση με c φορές την παραμόρφωση εξόδου λόγω της τάσης εισόδου $\sigma(t)$. Η δεύτερη προϋπόθεση, δείχνει ότι η παραμόρφωση εξόδου λόγω του συνδυασμού δύο αυθαίρετων αλλά διαφορετικών τάσεων εισόδου εφαρμοζομένων σε διαφορετικές στιγμές, το $\varepsilon[\sigma_1(t)+\sigma_2(t-t_1)]$ είναι ίσο με το άθροισμα των παραμορφώσεων εξόδου που προέρχονται από την $\sigma_1(t)$ και $\sigma_2(t-t_1)$ δρώντας κάθε μια ξεχωριστά. Η δεύτερη ανάγκη συνήθως καλείται Αρχή υπέρθεσης του Boltzmann. Οι δύο αυτές προϋποθέσεις φαίνονται στο Σχήμα 1.1.

Παρακάτω σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον ερπυσμό και την χαλάρωση μέσω των βασικών στοιχείων Maxwell και Kelvin καθώς και τον συνδυασμό αυτών.



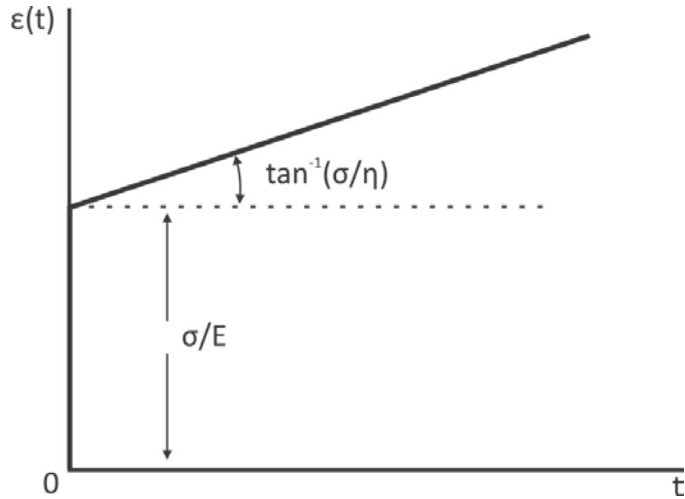
Σχήμα 1.1 Αρχή υπέρθεσης του Boltzmann

1.2 Στοιχείο Maxwell

Το στοιχείο Maxwell αποτελείται από την σύνδεση σε σειρά ενός γραμμικού ελατηρίου και ενός ιξώδους απορροφητήρα



Σχήμα 1.2 Στοιχείο Maxwell



Σχήμα 1.3 Καμπύλη ερπυσμού

Η εν σειρά σύνδεση προϋποθέτει ότι:

$$\sigma = \sigma_D = \sigma_s \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_D + \varepsilon_s \quad (1.2)$$

Οι δείκτες s και D σημαίνουν ελατήριο (spring) και απορροφητήρας (dashpot) αντίστοιχα.

Για το ελατήριο ισχύει (γραμμικότητα):

$$\sigma_s = \varepsilon_s E \quad (1.3)$$

Και για το απορροφητήρα – αποσβεστήρα:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_D}{\eta} \quad (1.4)$$

Από την παραγωγή της (1.3) ως προς το χρόνο προκύπτει:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_D \quad (1.5)$$

Προκύπτει λοιπόν με τον συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων η εξίσωση για το στοιχείο Maxwell:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_s}{E} + \frac{\sigma_D}{\eta} \quad (1.6)$$

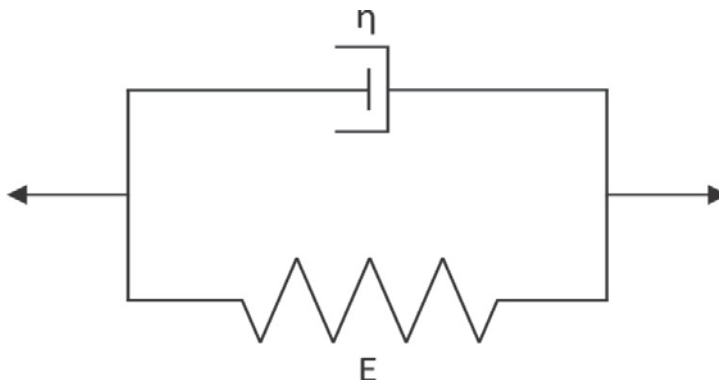
1.3 Στοιχείο Kelvin

Το στοιχείο Kelvin αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο συνδεδεμένο παράλληλα με έναν ιξώδη απορροφητήρα.

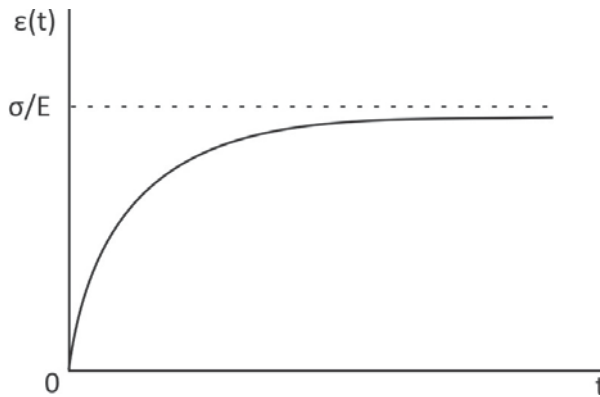
Η παράλληλη σύνδεση των στοιχείων μας δίνει :

$$\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_D \quad (1.7)$$

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_D \quad (1.8)$$



Σχήμα 1.4 Στοιχείο Kelvin



Σχήμα 1.5 Καμπύλη ερπυσμού

Με την χρήση των εξισώσεων (1.7) και (1.8) έχουμε:

$$\sigma = \varepsilon_s E + \eta \dot{\varepsilon}_D \quad (1.9)$$

Έτσι προκύπτει η ακόλουθη καταστατική εξίσωση για το στοιχείο Kelvin:

$$\sigma = \varepsilon E + \eta \dot{\varepsilon} \quad (1.10)$$

Όλα τα γραμμικά ιξωδοελαστικά μοντέλα αποτελούνται από τα προηγούμενα δύο μοντέλα (Maxwell, Kelvin). Το μοντέλο Maxwell περιγράφει με μία πρώτη προσέγγιση την χαλάρωση τάσης ενός ιξωδοελαστικού στερεού και το μοντέλο Kelvin περιγράφει τον ερπυσμό, κανένα όμως δεν είναι επαρκές για την περιγραφή της γενικής συμπεριφοράς ενός ιξωδοελαστικού στερεού, όπου είναι απαραίτητο να περιγραφεται και η χαλάρωση αλλά και ο ερπυσμός από το ίδιο μοντέλο.

Θεωρώντας την γενική γραμμική διαφορική εξίσωση η οποία αναπαριστά την γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά

$$\alpha_0 \sigma + \alpha_1 \frac{d\sigma}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \dots = b_0 \varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + b_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \dots \quad (1.11)$$

Προκύπτει ότι για να λάβουμε μία προσεγγιστική περιγραφή της χαλάρωσης της τάσης και του ερπυσμού, θα πρέπει τουλάχιστον οι δύο πρώτοι όροι σε κάθε πλευρά της εξίσωσης να διατηρηθούν. Έτσι η προηγούμενη εξίσωση θα γίνει:

$$a_0 \sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} = b_0 \varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1.12)$$

Η οποία θα είναι επαρκής για μία πρώτη προσέγγιση σε ερπυσμό ($d\sigma/dt = 0$) και σε χαλάρωση τάσης ($d\varepsilon/dt = 0$), δίνοντας μια εκθετική απόκριση και στις δύο περιπτώσεις.

Η γενική μορφή της σχέσης (1.12) είναι:

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad (1.13)$$

Όπου P και Q είναι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές και μπορούν να εκφραστούν με την ακόλουθη μορφή:

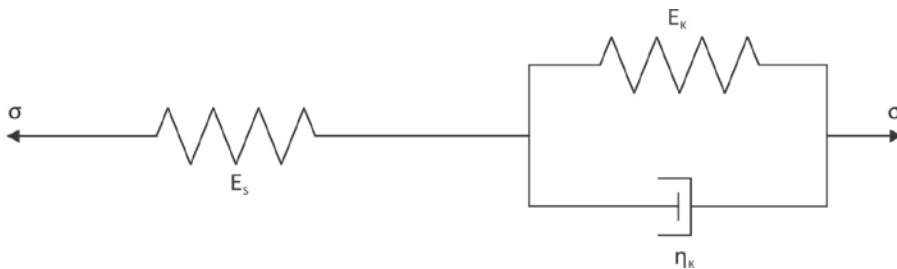
$$P = \sum_{j=0}^m p_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} = \sum_{j=0}^m p_j D^j \quad (1.14)$$

$$Q = \sum_{j=0}^m q_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} = \sum_{j=0}^m q_j D^j \quad (1.15)$$

Ακολουθεί η περιγραφή ενός τριπαραμετρικού και ενός τετραπαραμετρικού γραμμικού μοντέλου με τα οποία θα περιγράψουμε τον ερπυσμό αλλά και την χαλάρωση τάσης.

1.4 Τριπαραμετρικό μοντέλο

Το μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα είναι ένα τριπαραμετρικό μοντέλο το οποίο αποτελείται από ένα στοιχείο Kelvin συνδεδεμένο σε σειρά με ένα ελατήριο.



Σχήμα 1.4 Τριπαραμετρικό μοντέλο

Θα υπολογίσουμε την καταστατική εξίσωση του μοντέλου.

Όπως φαίνεται από την συνδεσμολογία ισχύει:

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_K \quad (1.16)$$

$$\sigma = \sigma_s = \sigma_K \quad (1.17)$$

Όπου με δείκτη S αναφέρεται στο ελατήριο και Κ στο στοιχείο Kelvin

Για το ελατήριο ισχύει :

$$\sigma_s = \varepsilon_s E_s \quad (1.18)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace προκύπτει:

$$\bar{\sigma}(s) = E_s \bar{\varepsilon}_s(s) \quad (1.19)$$

Η παραπάνω σχέση μετά από τον μετασχηματισμό Laplace γίνεται:

$$\dot{\varepsilon}_K \frac{E_K}{\eta_K} \varepsilon_K = \frac{\sigma_K}{\eta_K} \quad (1.20)$$

Η παραπάνω σχέση μετά από τον μετασχηματισμό Laplace γίνεται:

$$\left(s + \frac{E_K}{\eta_K}\right) \bar{\varepsilon}_K(s) = \frac{\bar{\sigma}(s)}{\eta_K} \quad (1.21)$$

Από τη σχέση (1.16) με μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε:

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{\varepsilon}(s) + \bar{\varepsilon}_s(s) \quad (1.22)$$

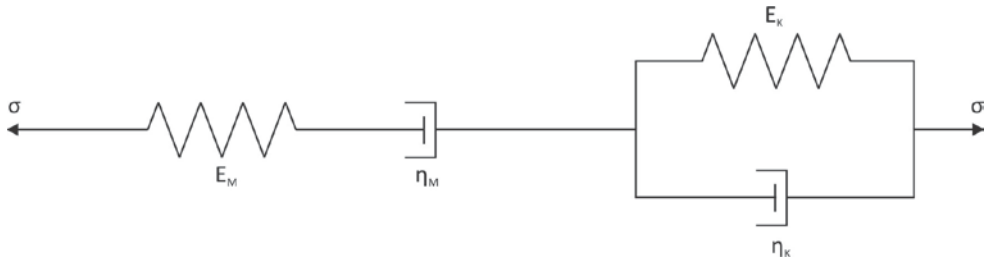
Η τελευταία σχέση μέσω των (1.19) και (1.20) μετά από αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace γράφεται:

$$\sigma + \frac{\eta_K}{E_s E_K} \dot{\sigma} = \frac{E_s E_K}{E_s + E_K} \varepsilon + \frac{E_s \eta_K}{E_s + E_K} \dot{\varepsilon} \quad (1.23)$$

Όπου η τελευταία σχέση αποτελεί και την καταστατική εξίσωση του μοντέλου.

1.5 Τετραπαραμετρικό μοντέλο Burgers

Το μοντέλο του σχήματος είναι ένα τετραπαραμετρικό μοντέλο (Burgers), στο οποίο ένα στοιχείο Kelvin είναι συνδεδεμένο με ένα στοιχείο Maxwell σε σειρά. Υπολογίζουμε καταρχήν την καταστατική εξίσωση μοντέλου. Οι Δείκτες M και K αντιστοιχούν στα στοιχεία Maxwell και Kelvin αντίστοιχα.



Σχήμα 1.5 Τετραπαραμετρικό μοντέλο Burgers

Η συνδεσμολογία των στοιχείων μας δίνει:

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_K \quad (1.24)$$

$$\sigma = \sigma_M = \sigma_K \quad (1.25)$$

Για το στοιχείο Maxwell έχουμε την καταστατική σχέση:

$$\dot{\varepsilon}_M = \frac{\dot{\sigma}_s}{E_M} + \frac{\sigma_D}{\eta_M} \quad (1.26)$$

Η οποία μέσω του μετασχηματισμού Laplace γίνεται:

$$s\bar{\varepsilon}_M(s) = \frac{s\bar{\sigma}(s)}{E_M} + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\eta_M} \rightarrow$$

$$\bar{\varepsilon}_M(s) = \frac{\bar{\sigma}(s)}{E_M} + \frac{\bar{\sigma}(s)}{s\eta_M} \quad (1.27)$$

Για το στοιχείο Kelvin έχουμε:

$$\sigma_K = \varepsilon_K E_K + \eta_K \dot{\varepsilon}_K \quad (1.28)$$

Η οποία, ομοίως, μέσω του μετασχηματισμού Laplace γίνεται:

$$\bar{\varepsilon}_K(s) = \frac{\bar{\sigma}(s)}{s\eta_K + E_K} \quad (1.29)$$

Η σχέση (1.24) μέσω του μετασχηματισμού Laplace γίνεται:

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{\varepsilon}_K(s) + \bar{\varepsilon}_M(s) \quad (1.30)$$

Άρα

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\bar{\sigma}(s)}{E_M} + \frac{\bar{\sigma}(s)}{s\eta_M} + \frac{\bar{\sigma}(s)}{s\eta_K + E_K} \quad (1.31)$$

Τελικώς με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει:

$$\sigma + \left(\frac{\eta_K}{E_K} + \frac{\eta_M}{E_M} + \frac{\eta_M}{E_K} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_M \eta_K}{E_M E_K} \ddot{\sigma} = \eta_M \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_M \eta_K}{E_K} \ddot{\varepsilon} \quad (1.32)$$

Όπου αυτή είναι και η καταστατική σχέση για το μοντέλο Burgers.

1.6 Μελέτη των μοντέλων σε ερπυσμό και χαλάρωση τάσης

Εδώ θα μελετήσουμε την συμπεριφορά των προηγούμενων μοντέλων σε ερπυσμό και χαλάρωση τάσης καθώς επίσης θα υπολογίσουμε το μέτρο ένδοσης και το μέτρο χαλάρωσης κάθε μοντέλου.

1.6.1 Ερπυσμός

Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την ακαριαία επιβολή τάσης σ_0 τη χρονική στιγμή $t=0$. Η τάση μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του χρόνου με την βοήθεια της συνάρτησης βήματος $u(t)$ (βλ. συνάρτηση Heaviside παράρτημα Α):

$$\sigma(t) = \sigma_0 u(t) \quad (1.33)$$

Μοντέλο Maxwell

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.6) στη σχέση (1.33) προκύπτει:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \frac{d}{dt} u(t) + \frac{\sigma_0}{\eta} u(t) \quad (1.34)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \delta(t) + \frac{\sigma_0}{\eta} u(t) \quad (1.35)$$

Όπου $\delta(t)$ η συνάρτηση δέλτα (Dirac).

Ολοκληρώνοντας τη προηγούμενη σχέση με όρια $t=0^-$ και θεωρώντας $\varepsilon(0^-)=0$ έχουμε:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} \right) u(t) \quad (1.36)$$

Στο σχήμα 1.2 αναλύοντας την καμπύλη ερπυσμού παρατηρούμε δύο περιοχές η μία είναι κατά την ακαριαία φόρτιση όπου το στοιχείο συμπεριφέρεται σαν ελαστικό στερεό με παραμόρφωση ίση με σ_0/E και προσεγγίζει την συμπεριφορά ιξώδους υγρού καθώς $t \rightarrow \infty$.

Μοντέλο Kelvin

Θα ενεργήσουμε ομοίως και για το στοιχείο Kelvin. Από την καταστατική του εξίσωση (2.0) αν εισάγουμε την (1.33) προκύπτει:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} u(t) \quad (1.37)$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση με όρια $t=0^-$ και θεωρώντας $\varepsilon(0^-)=0$ έχουμε:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \right) u(t) \quad (1.38)$$

Στο σχήμα 1.3 φαίνεται το διάγραμμα της παραπάνω σχέσης όπου ισχύει και πάλι ότι για $\varepsilon(0)=0$. Επίσης για $t \rightarrow \infty$ η συμπεριφορά του μοντέλου προσεγγίζει την συμπεριφορά ενός γραμμικού ελαστικού στερεού. Στην σχέση (1.38) παρατηρούμε ότι ο λόγος η/E έχει μονάδες χρόνου και έτσι η ποσότητα αυτή συμβολίζεται με τ και δηλώνει το χρόνο καθυστέρησης (retardation time).

Μέτρο ένδοσης

Στα προηγούμενα μοντέλα Maxwell, Kelvin παρατηρούμε πως στο πείραμα ερπυσμού η καταστατική σχέση γράφεται ως εξής:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) u(t) \quad (1.39)$$

Όπου $J(t)$ είναι μια χαρακτηριστική συνάρτηση του υλικού και ονομάζεται μέτρο ένδοσης. Από τις σχέσεις (3.6) και (3.8) προκύπτουν αντίστοιχα μέτρα ένδοσης για τα μοντέλα Maxwell και Kelvin:

$$J(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (1.40)$$

Maxwell

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \right) \quad (1.41)$$

Kelvin

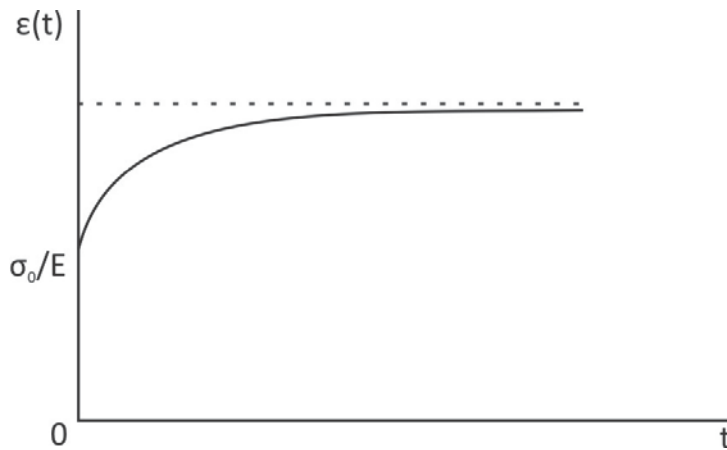
Τριπαραμετρικό μοντέλο

Με τρόπο παρόμοιο όπως στα προηγούμενα μοντέλα βρίσκουμε και για το τριπαραμετρικό μοντέλο το μέτρο ένδοσης:

$$J(t) = \left(\frac{1}{E_s} + \frac{1 - e^{-t \frac{E_K}{\eta_K}}}{E_K} \right) \quad (1.42)$$

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι η καμπύλη ερπυσμού για $t=0$, δηλαδή στην ακαριαία επιβολή τάσης, αποκτά ακαριαία παραμόρφωση ίση με σ_0/E_s ενώ για μεγάλες τιμές του χρόνου η παραμόρφωση τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή

$$\varepsilon(t \rightarrow \infty) = \frac{E_s + E_K}{E_s E_K} \sigma_0 \quad (1.43)$$



Σχήμα 1.6 Ερπυσμός με το τριπαραμετρικό μοντέλο

Μοντέλο Burgers

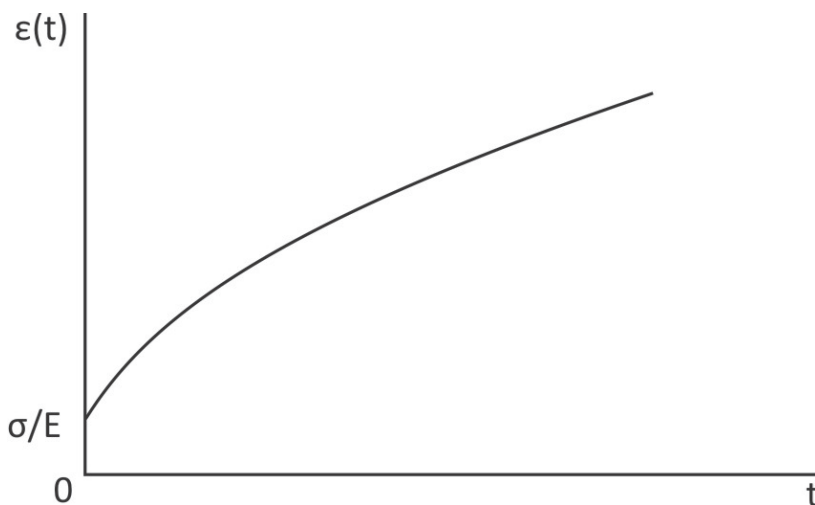
Η συμπεριφορά του μοντέλου Burgers στον ερπυσμό υπό σταθερή τάση σ_0 βρίσκεται λύνοντας την διαφορική καταστατική εξίσωση μέσω του μετασχηματισμού Laplace θέτοντας ύστερα $\sigma_s = \sigma_0/s$ και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) u(t) \quad (1.44)$$

Έτσι βρίσκουμε το μέτρο ένδοσης

$$J(t) = \frac{1}{E_M} + \frac{1}{\eta_M} t + \frac{1}{E_M} \left(1 - e^{-\left(\frac{E_K}{\eta_K}\right)t} \right) \quad (1.45)$$

Στο σχήμα 1.7 της καμπύλης ερπυσμού φαίνεται ότι το μοντέλο αυτό τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει πεπερασμένη παραμόρφωση ίση με σ_0/E_1 ενώ για $t \rightarrow \infty$ η παραμόρφωση αυξάνεται απεριόριστα σε αντίθεση με τα υπόλοιπα μοντέλα που λάμβανε μια σταθερή τιμή.



Σχήμα 1.7 Ερπυσμός με το μοντέλο Burgers

Παρατηρήσεις

Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να κάνουμε μερικές παρατηρήσεις σε σχέση με την απόκριση των τεσσάρων μοντέλων κατά τον ερπυσμό. Αρχικά, σε όλα τα μοντέλα κατά τις ακραίες τιμές του χρόνου οι παραμορφώσεις είναι ανεξάρτητες του ιξώδους. Δηλαδή οι παραμορφώσεις εξαρτώνται μόνο από τις σταθερές των ελατηρίων. Επιπρόσθετα, εξετάζοντας τα μοντέλα Kelvin και το τριπαραμετρικό, παρατηρούμε ότι για το πρώτο, για μεγάλες τιμές του χρόνου $t \rightarrow \infty$ η παραμόρφωση καταλήγει να είναι αντιστρόφως ανάλογη της σταθεράς του ελατηρίου, πράγμα που συμβαίνει και για το εν σειρά συνδεδεμένο ελατήριο του τριπαραμετρικού αλλά για $t \rightarrow 0$. Τέλος για το μοντέλο

Burgers για $t \rightarrow 0$ βλέπουμε ότι η παραμόρφωση είναι αντιστρόφως ανάλογη του πρώτου ελατηρίου. Αναλυτικά φαίνονται οι παραπάνω παρατηρήσεις στον πίνακα 1.1.

Χρονική στιγμή	Maxwell	Kelvin	Τριπαραμετρικό	Burgers
$t \rightarrow 0^-$	$\frac{\sigma_0}{E}$	0	$\frac{\sigma_0}{E_S}$	$\frac{\sigma_0}{E_M}$
$t \rightarrow \infty$	∞	$\frac{\sigma_0}{E}$	$\frac{E_S + E_K}{E_K E_S} \sigma_0$	∞

Πίνακας 1.1 Ακραίες τιμές της παραμόρφωσης σε κάθε μοντέλο για τον ερπυσμό

1.6.2 Χαλάρωση τάσης

Στη διαδικασία της χαλάρωσης επιβάλλεται ακαριαία παραμόρφωση ε_0 τη χρονική στιγμή $t=0$. Εδώ η παραμόρφωση παραμένει σταθερή και έτσι μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του χρόνου με την βοήθεια της συνάρτησης βήματος $u(t)$:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 u(t) \quad (1.46)$$

Μοντέλο Maxwell

Αρχικά για το στοιχείο Maxwell και με χρήση της σχέσης (4.4) στην καταστατική του μοντέλου προκύπτει:

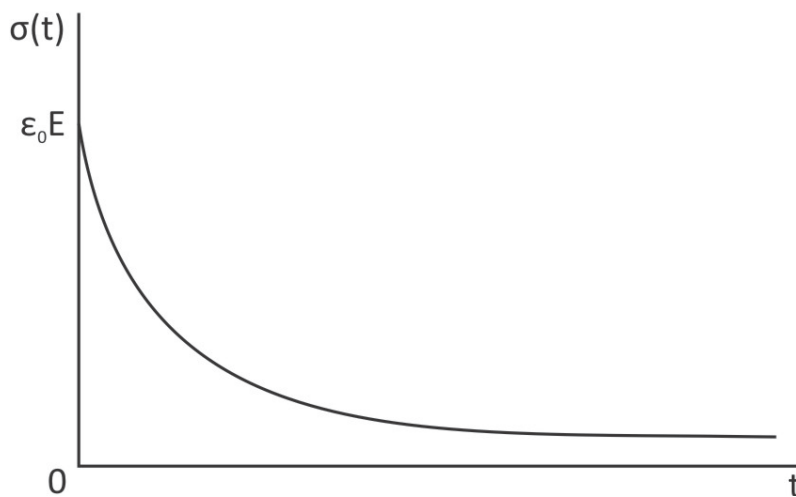
$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt} u(t) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \rightarrow$$

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta} \sigma = \varepsilon_0 E \delta(t) \quad (1.47)$$

Και με ολοκλήρωση προκύπτει:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} u(t) \quad (1.48)$$

Η σχέση (1.48) απεικονίζεται στο σχήμα (1.8) όπου προκύπτει ότι καθώς $t \rightarrow \infty$ η τάση από την αρχική της τιμή $\varepsilon_0 E$ τείνει στο μηδέν. Εδώ ο λόγος η/E ονομάζεται λόγος χαλάρωσης και αποτελεί επίσης σταθερά του υλικού.



Σχήμα 1.8 Χαλάρωση τάσης με το μοντέλο του Maxwell

Μοντέλο Kelvin

Στο στοιχείο Kelvin αντίστοιχα για το πείραμα χαλάρωσης από τη σχέση (1.46) στη σχέση (1.10) προκύπτει:

$$\sigma = \varepsilon_0 [\eta \delta(t) + E u(t)] \quad (1.49)$$

Η οποία μας δείχνει ότι μια αύξηση της ε_0 προκαλεί μια ακαριαία αύξηση της τάσης (λόγω της συνάρτησης δέλτα) και στη συνέχεια η τάση παραμένει σταθερή καθώς λείπει ο εκθετικός παράγοντας. Αυτή η συμπεριφορά του στοιχείου Kelvin η οποία δεν είναι ορθή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αυτά τα βασικά στοιχεία Maxwell, Kelvin δεν μπορούν να περιγράψουν επαρκώς την μακροσκοπική συμπεριφορά των πραγματικών υλικών.

Μέτρο χαλάρωσης

Με τρόπο ανάλογο όπως στο προσδιορισμό του μέτρου ένδοσης προσδιορίζουμε από το πείραμα χαλάρωσης το μέτρο της χαλάρωσης $Y(t)$:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) u(t) \quad (1.50)$$

Από τις σχέσεις (1.48) και (1.50) προκύπτουν αντίστοιχα τα μέτρα χαλάρωσης για το πρότυπο Maxwell:

$$Y(t) = E e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \quad (1.51)$$

Είναι προφανές ότι για κάθε συνδυασμό ελατηρίων απορροφητήρων μπορούν να υπολογιστούν και τα αντίστοιχα μέτρα ένδοσης και χαλάρωσης με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε παραπάνω. Οι συναρτήσεις του μέτρου ένδοσης και χαλάρωσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση της γενικής διαφορικής εξίσωσης (1.13).

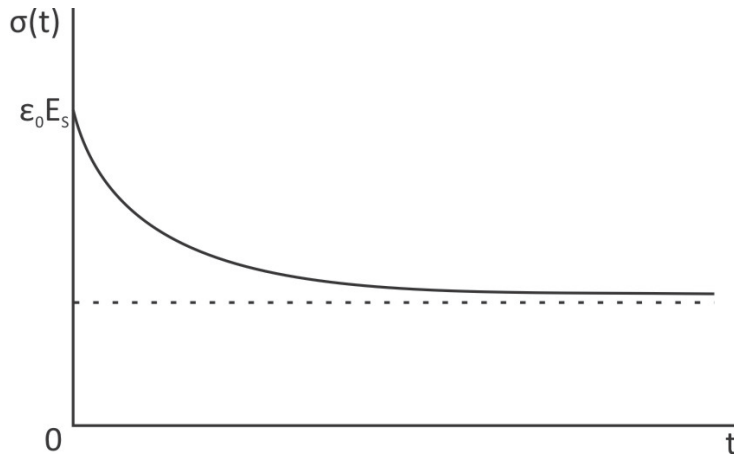
Τριπαραμετρικό μοντέλο

Όπως στον ερπυσμό για αυτό το μοντέλο έτσι και εδώ θα βρούμε το μέτρο χαλάρωσης

$$Y(t) = \frac{E_s \left(E_K + e^{-t \frac{(E_K + E_s)}{\eta_K}} \right)}{E_K + E_s} \quad (1.52)$$

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι η καμπύλη χαλάρωσης για $t=0$, δηλαδή στην ακαριαία επιβολή παραμόρφωσης, αποκτά ακαριαία τάση ίση με $\varepsilon_0 E_s$ ενώ για μεγάλες τιμές του χρόνου η παραμόρφωση τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = \varepsilon_0 \frac{E_K E_s}{E_s + E_K} \quad (1.53)$$



Σχήμα 1.9 Χαλάρωση τάσης με το τριπαραμετρικό μοντέλο

Μοντέλο Burgers

Στη διαδικασία της χαλάρωσης, επιβάλλουμε ακαριαία παραμόρφωση ε_0 τη χρονική στιγμή $t=0$. Η παραμόρφωση αυτή στη συνέχεια παραμένει σταθερή και μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του χρόνου σχέση (1.46).

Η εύρεση της τάσης συναρτήσεως του χρόνου, μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι όπως και πριν να ολοκληρώσουμε τη διαφορική εξίσωση και να βρούμε μία σχέση της μορφής:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) u(t) \quad (1.54)$$

Όπου $Y(t)$ η συνάρτηση χαλάρωσης.

Ο άλλος τρόπος είναι να βρούμε την $Y(t)$ έχοντας υπόψη τη σχέση:

$$s\bar{J}(s) = \frac{1}{s\bar{Y}(s)} \quad (1.55)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, αφού γνωρίζουμε ήδη τη συνάρτηση του μέτρου ένδοσης. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε φυσικά και με τους δύο τρόπους:

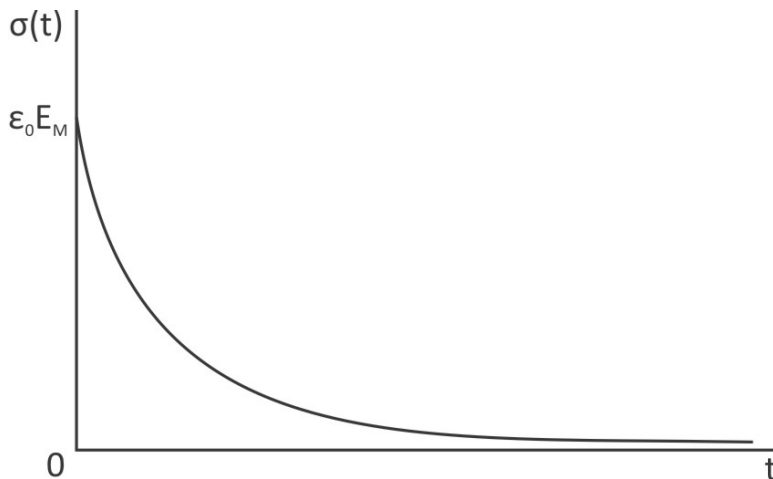
$$Y(t) = \frac{e^{-\frac{(A+B)t}{2\eta_1\eta_2}} E_1 \left(E_1\eta_1 - E_2\eta_2 + E_1\eta_2 - e^{-\frac{B}{\eta_1\eta_2}A + B} + e^{-\frac{B}{\eta_1\eta_2}B} \right)}{2B} \quad (1.56)$$

Όπου:

$$A = (E_1 - E_2)\eta_1 + E_1\eta_2 \quad (1.57)$$

$$B = \sqrt{-4E_1E_2\eta_1\eta_2 + ((E_1 + E_2)\eta_1 + E_1\eta_2)^2} \quad (1.58)$$

Στο σχήμα 1.10 της καμπύλης χαλάρωσης φαίνεται ότι το μοντέλο Burgers τη χρονική στιγμή $t=0$, δηλαδή στην ακαριαία επιβολή παραμόρφωσης, αποκτά πεπερασμένη τάση ίση με $\varepsilon_0 E_1$ ενώ για μεγάλο χρόνο η τάση μηδενίζεται.



Σχήμα 1.10 Χαλάρωση τάσης με το μοντέλο του Burgers

Παρατηρήσεις

Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να κάνουμε μερικές παρατηρήσεις σε σχέση με την απόκριση των τεσσάρων μοντέλων και κατά τη χαλάρωση τάσης. Αρχικά, εκτός του μοντέλου Kelvin στα υπόλοιπα 3 κατά τις ακραίες τιμές του χρόνου οι τάσεις είναι ανεξάρτητες του ιξώδους.

Δηλαδή οι τάσεις εξαρτώνται μόνο από τις σταθερές των ελατηρίων. Επίσης για $t \rightarrow 0$ παρατηρούμε ότι η τάση είναι ανάλογη μία σταθεράς ελατηρίου, στο τριπαραμετρικό είναι του ελατηρίου που είναι συνδεδεμένο σε σειρά και το ίδιο συμβαίνει και για το στοιχείο Burgers. Εξετάζοντας τα μοντέλα για μεγάλες τιμές του χρόνου $t \rightarrow \infty$ φαίνεται πως μέσω του μοντέλο Maxwell και Burgers η τάση καταλήγει να μηδενιστεί, ενώ μέσω του τριπαραμετρικού μοντέλου η τάση καταλήγει σε μία οριακή τιμή που και αυτή δεν εξαρτάται από ιξώδες του υλικού. Αναλυτικά φαίνονται οι παραπάνω παρατηρήσεις στον πίνακα 1.2.

Χρονική στιγμή	Maxwell	Kelvin	Τριπαραμετρικό	Burgers
$t \rightarrow 0^-$	$\varepsilon_0 E$	-	$\varepsilon_0 E_S$	$\varepsilon_0 E_M$
$t \rightarrow \infty$	0	-	$\varepsilon_0 \frac{E_K E_S}{E_S + E_K}$	0

Πίνακας 1.2 Ακραίες τιμές της τάσης σε κάθε μοντέλο για την χαλάρωση

Συλλέγοντας όλες τις παραπάνω παρατηρήσεις για τον ερπυσμό και την χαλάρωση τάσης για τους δύο ακραίους χρόνους σε έναν πίνακα (πίνακας 1.3), παρατηρούμε ότι κατά τις οριακές στιγμές τόσο στον ερπυσμό όσο και στην χαλάρωση οι τιμές τις τάσεις ή της παραμόρφωσης είναι συγκριτικά αντίστροφες. Επί παραδείγματι για το μοντέλο Maxwell όπως και για το τριπαραμετρικό μοντέλο για $t \rightarrow 0$ η σταθερά είναι σ_0/E και σ_0/E_M . Ομοίως για το τριπαραμετρικό μοντέλο για $t \rightarrow \infty$ οι σταθερές έχουν προκύψει ως εξής:

$$\frac{E_S + E_K}{E_S E_K} \quad \text{χαλάρωση τάσης}$$

$$\frac{E_S E_K}{E_S + E_K} \quad \text{ερπυσμός}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η χαλάρωση είναι κατά κάποιον τρόπο το “αντίθετο” του ερπυσμού. Αυτό φαίνεται εξάλλου και από τη σχέση:

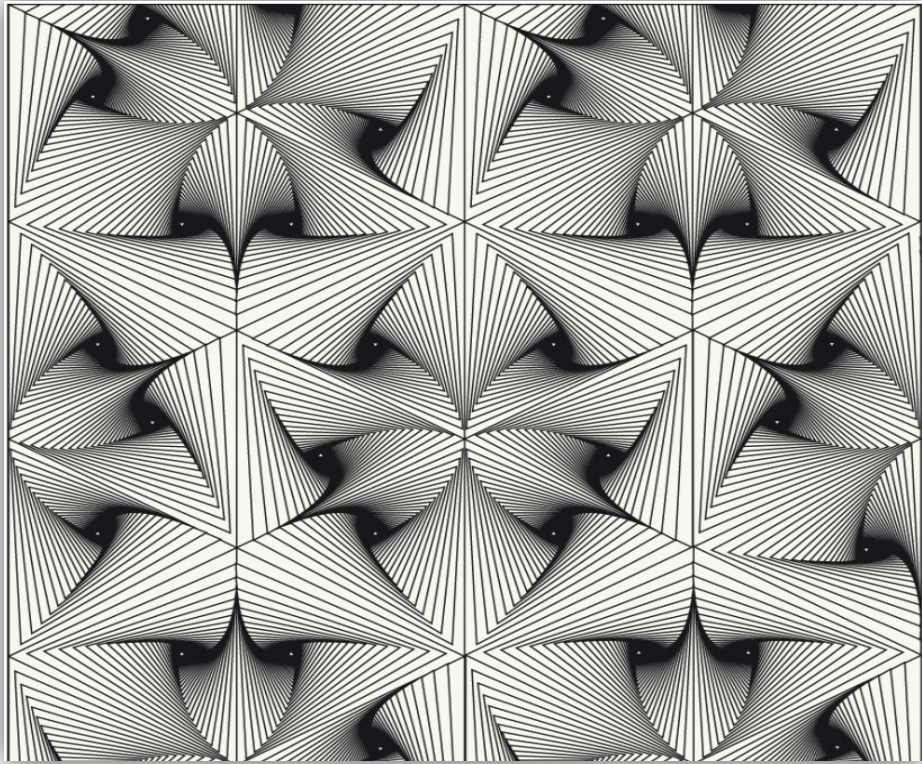
$$\int_0^1 Y(t)J(t - \tau)d\tau = t \quad (1.59)$$

Πείραμα	Χρονική στιγμή	Maxwell	Kelvin	Τριπαραμετρικό	Burgers
Ερπυσμός	$t \rightarrow 0^-$	$\frac{\sigma_0}{E}$	0	$\frac{\sigma_0}{E_S}$	$\frac{\sigma_0}{E_M}$
	$t \rightarrow \infty$	∞	$\frac{\sigma_0}{E}$	$\frac{E_S + E_K}{E_K E_S} \sigma_0$	∞
Χαλάρωση	$t \rightarrow 0^-$	$\varepsilon_0 E$	-	$\varepsilon_0 E_S$	$\varepsilon_0 E_M$
	$t \rightarrow \infty$	0	-	$\varepsilon_0 \frac{E_K E_S}{E_S + E_K}$	0

Πίνακας 1.3 Συγκεντρωτικός πίνακας για τις ακραίες τιμές της παραμόρφωσης για τον ερπυσμό και της τάσης για την χαλάρωση σε όλα τα μοντέλα

Κεφάλαιο 2^ο

Μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα



ασύμετρη γεωμετρικά συστροφή

Μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα

2.1 Εισαγωγή

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές των πλαστικών, αν και η ολική παραμόρφωση επανακτάται, η ιξωδοελαστική συμπεριφορά δεν πληροί τις προϋποθέσεις της γραμμικότητας που απαιτείται από την αρχή της επαλληλίας του Boltzmann. Αυτό μπορεί να συμβεί για διάφορους λόγους.

Εκ πρώτης, η αρχή αυτή περιορίζεται στη θεωρία μικρών παραμορφώσεων, κάτι που αλλάζει κατά την εξέλιξη της δοκιμής αφού παρουσιάζονται και μεγάλες παραμορφώσεις. Έτσι η αρχή της επαλληλίας δεν αναμένεται να είναι εφαρμόσιμη γενικά. Ο περιορισμός αυτός ισχύει ιδιαίτερα για τις μελέτες σε συνθετικές υφαντικές ίνες, όπου εκεί οι παραμορφώσεις είναι τουλάχιστον 10 % ή σε ελαστομερή, όπου οι παραμορφώσεις μπορεί να φτάνουν και το 100 %.

Δεύτερον, μπορεί να μην αποκτείται γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά ακόμα και αν τα πειράματα περιορίζονται σε μικρές παραμορφώσεις. Σε αυτό το πλαίσιο είναι σύνηθες να παρατηρείται γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά για μικρά χρονικά διαστήματα δεδομένης της τάσης αλλά όχι για μεγάλα χρονικά διαστήματα όπου είναι έντονη η μη γραμμικότητα.

Προς το παρόν δεν υπάρχει μια αναπαράσταση της μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας που να δίνει μία επαρκή περιγραφή της συμπεριφοράς του υλικού και να παρέχει μια εικόνα για την προέλευση αυτής της συμπεριφοράς από το εσωτερικό του. Αυτό είναι και ένα θέμα για το οποίο έχουν απόκλιση ο πειραματικός από τον θεωρητικό μελετητή.

Αντιμέτωπος με την μη γραμμικότητα ο πειραματικός κάνει μια σειρά από μετρήσεις, περιορισμένες στο σύνολο, τις οποίες ενσωματώνει εμπειρικά σε μία σειρά από εξισώσεις που σχετίζουν την τάση με την παραμόρφωση και τον χρόνο.

Παρόλο όμως που αυτές οι εξισώσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες συχνά δεν μπορούν να απεικονίσουν την φυσικότητα της μη γραμμικότητας, πράγμα που μπορεί να οδηγήσει σε παρερμηνείες και λάθη.

Ο θεωρητικός από την άλλη θα προσπαθήσει να δημιουργήσει μια καταστατική σχέση ενός πιο γενικού χαρακτήρα που καθορίζεται από χαρακτηριστικά όπως “βραχυπρόθεσμη” μνήμη του σώματος, συμμετρίες και τις αναλλοίωτες σταθερές του υλικού. Το μειονέκτημα εδώ όμως είναι ότι αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά γενική.

Καθώς το θέμα της μη γραμμικής συμπεριφοράς δεν μπορεί να δοθεί με μια προσέγγιση η οποία ικανοποιεί όλες αυτές τις απαιτήσεις, οι διάφορες προσπάθειες για να αντιμετωπιστεί αυτή η κατάσταση έχουν να κάνουν με τις παρακάτω τρεις προσεγγίσεις :

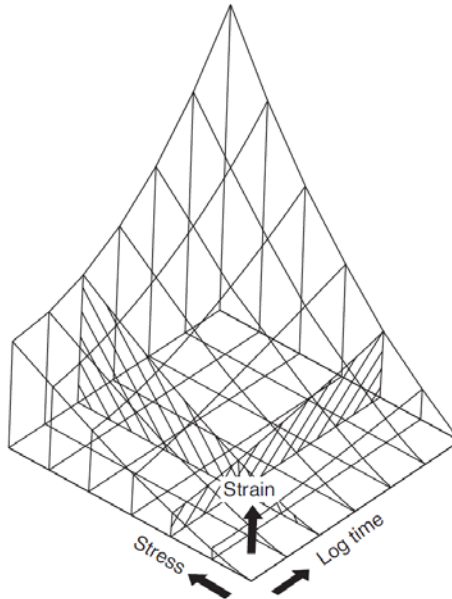
- Η μηχανική προσέγγιση. Ο σχεδιαστής μηχανικός απαιτεί την ικανότητα να προβλέπει τη συμπεριφορά του υλικού με όσο το δυνατόν λιγότερα πειράματα. Εμπειρικές σχέσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά είναι επαρκείς, και δεν χρειάζεται να έχουν καμία φυσική σημασία
- Η ρεολογική προσέγγιση. Έχουν γίνει προσπάθειες για να επεκταθούν οι περιγραφές της γραμμικής ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς σε μη-γραμμική συμπεριφορά. Μια γραμμή ανάπτυξης υπήρξε η διατήρηση της ικανότητας διαχωρισμού της τάσης, της παραμόρφωσης και του χρόνου στις συναρτησιακές αναπαραστάσεις ακολουθώντας την αυστηρή μηχανική του συνεχούς μέσου. Μια δεύτερη γραμμή ανάπτυξης έχει βασιστεί στην πολλαπλή ολοκλήρωση που οδηγεί σε σημαντική μαθηματική πολυπλοκότητα
- Η μοριακή προσέγγιση. Το αρχικό σημείο αυτής είναι η ενσωμάτωση στη θεωρία ενός μοντέλου, όπου ο ρυθμός εξέλιξης του φαινομένου εξαρτάται από την θερμοκρασία του υλικού όπως συμβαίνει με το ιξώδες. Αυτή η προσέγγιση έχει το ενδιαφέρον πιθανού προσδιορισμού μοριακών μηχανισμών που συνδέεται με την κατανόηση της δομής του υλικού. Παρά το γεγονός ότι μπορεί να υπάρχουν μειονεκτήματα σε σχέση με την επίσημη μαθηματική ανάπτυξη, αυτό μπορεί να αντισταθμιστεί εν μέρη με τα πλεονεκτήματα της ενσωμάτωσης, στη θεωρία, της μη γραμμικότητας αλλά και της εξάρτησης του φαινομένου από την θερμοκρασία.[4]

2.2 Η προσέγγιση του μηχανικού στη μη γραμμική ιξωδοελαστικότητα

Για ένα ιξωδοελαστικό υλικό η συμπεριφορά του κατά τον ερπυσμό είναι απόλυτα ορισμένη σε μια δεδομένη θερμοκρασία μετρώντας την απόκρισή του υπό σταθερή τάση κατά την πάροδο του χρόνου. Για ένα μη γραμμικό ιξωδοελαστικό υλικό, η συμπεριφορά του πρέπει να μελετηθεί λεπτομερώς για διάφορες τιμές της τάσης ως προς τον χρόνο. Επιπλέον επειδή η αρχή επαλληλίας του Boltzmann δεν ικανοποιείται πλέον πρέπει να εκπονηθούν μαθηματικά μοντέλα κατά την φόρτιση και αποφόρτιση του υλικού. Η συμπεριφορά οπουδήποτε μοντέλου δεν μπορεί να οριστεί από τα δεδομένα που λαμβάνονται από

ένα πείραμα ενός βήματος που δίνει μια καμπύλη ερπυσμού ή και από δύο όπου δίνει μία καμπύλη ερπυσμού και επαναφοράς.

Παρά αυτές τις δυσκολίες, ο μηχανικός ξεκινά με την σχέση μεταξύ τάσης-παραμόρφωσης και χρόνου που παρατηρείται κατά τον ερπυσμό υπό σταθερή τάση. Αυτό παράγει το σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1 Η σχέση της τάσης-παραμόρφωσης και χρόνου κατά τον ερπυσμό[4]

Ωστόσο ο Turner [4] έχει δείξει ότι όταν η τάση και η εξάρτησή της από τον χρόνο είναι σχεδόν διαχωρίσιμα ποσά, μπορούμε να παρεμβάλουμε καμπύλες ερπυσμού σε ενδιάμεσες τιμές τάσης από την γνώση δύο καμπυλών ερπυσμού, συνδυασμένο με την γνώση της σχέσης τάσης-παραμόρφωσης για μία τιμή του χρόνου. Οι τελευταίες αποκαλούνται ισόχρονες καμπύλες τάσης-παραμόρφωσης και παρουσιάζονται από τις κάθετες γραμμές στο σχήμα 2.1. Ωστόσο, αυτά τα στοιχεία δεν μπορούν να δώσουν γενικά ακριβή πρόβλεψη της μη γραμμικότητας. Όταν για παράδειγμα ο ρυθμός παραμόρφωσης μεταβάλλεται απότομα όπου μια ραγδαία αλλαγή στην τιμή της τάσης θα δημιουργηθεί στην καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης, αυτό δεν μπορεί να παρουσιαστεί στην ομαλή επιφάνεια του σχήματος 2.1.

Για να περιγραφεί η συμπεριφορά κατά τον ερπυσμό ενός υαλόδου ή σκληρού πολυμερούς υλικού όπου οι παραμορφώσεις είναι μικρές (~5%), σε αντίθεση με ελαστομερή όπου οι παραμορφώσεις είναι

μεγάλες (~100%), έχουν προταθεί μαθηματικά μοντέλα όπου γίνεται διαχωρισμός τάσης και χρόνου.

Ο Ραο και ο Marin[5,6] ακολούθησαν την προσέγγιση που προτάθηκε αρχικά από τον Marin[6] για τα μέταλλα, όπου η συνολική παραμόρφωση κατά τον ερπυσμού θεωρείται ότι αποτελείται από τρία ανεξάρτητα στοιχεία, μία ελαστική παραμόρφωση ε_1 , μία παροδικά ανακτήσιμη ιξωδοελαστική παραμόρφωση ε_2 και μία μόνιμα μή ανακτήσιμη πλαστική παραμόρφωση ε_3 . Υπό σταθερή τάση, η ελαστική παραμόρφωση δίνεται από:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} \quad (2.1)$$

όπου E είναι το μέτρο Young. Η ιξωδοελαστική παραμόρφωση ορίζεται ολοκληρώνοντας τη σχέση όπου ο στιγμιαίος ερπυσμός είναι συνάρτηση της τάσης και της ιξωδοελαστικής παραμόρφωσης:

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = f(\varepsilon_2, \sigma) \quad (2.2)$$

Η πλαστική παραμόρφωση βρίσκεται από την ολοκλήρωση της σχέσης όπου η πλαστική παραμόρφωση είναι συνάρτηση της τάσης και μόνο. Για λόγους απλότητας, οι μαθηματικές σχέσεις τόσο για την ιξωδοελαστικές όσο και για την πλαστικές παραμορφώσεις θεωρούνται απλές δυνάμεις της τάσης, και συνήθως οι ίδιες δυνάμεις υιοθετούνται. Η συνολική παραμόρφωση κατά τον ερπυσμό υπό σταθερή τάση προτείνεται να είναι:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K\sigma^n(1 - e^{-qt}) + B\sigma^n t \quad (2.3)$$

Όπου K, n, q και B σταθερές του υλικού.

Ο Findley[7] προσπάθησε να προσομοιώσει τον ερπυσμό πολλών πλαστικών και πλαστικών ελασμάτων σε αναλυτικές σχέσεις παρόμοιες με αυτές που προτείνονται για τα μέταλλα[8]. Διαπιστώθηκε ότι η παραμόρφωση κατά τον ερπυσμό ε_c στον χρόνο t μπορεί να σχετίζεται με μία σχέση της μορφής:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 + mt^n \quad (2.4)$$

Όπου ε_0 και m είναι συναρτήσεις της τάσης για ένα δεδομένο υλικό και n είναι η σταθερά του υλικού. Περαιτέρω εργασία αποκάλυψε πιθανές μορφές των συναρτήσεων των τάσεων:

$$\varepsilon_c(\sigma, t) = \varepsilon'_0 \sinh \frac{\sigma}{\sigma_\varepsilon} + m' t^n \sinh \frac{\sigma}{\sigma_m} \quad (2.5)$$

Όπου m' , σ_e και σ_m είναι οι σταθερές του υλικού. Αυτή η εξίσωση ήταν μία καλή προσομοίωση των δεδομένων ενός μονοβηματικού ερπυσμού και έτσι αναπαριστά την επιφάνεια τάσης-παραμόρφωσης και χρόνου του Turner, σχήμα 2.1. Έχει επίσης αποδειχθεί ότι ταιριάζει με ακρίβεια στα δεδομένα ερπυσμού σε υλικό σύνθετο από γραφίτη και εποξική κόλλα.

Οι εμπειρικές σχέσεις του Findley είναι πολύ χρήσιμες στους μηχανικούς για καταστάσεις ερπυσμού υπό σταθερή τάση όταν οι παράμετροι του υλικού είναι γνωστές.

Οι εμπειρικές σχέσεις που προτάθηκαν παραπάνω έχουν δύο βασικούς περιορισμούς:

1. Δεν παρέχουν μία γενική αναπαράσταση για τον ερπυσμό, την επαναφορά και την συμπεριφορά ενός υλικού υπό περίπλοκες συνθήκες φόρτισης.
2. Τα δεδομένα που αποκτούνται από τον ερπυσμό υπό αυτές τις προϋποθέσεις δεν μπορούν να συσχετιστούν απλά με την χαλάρωση αλλά και με δυναμικές φορτίσεις.

2.3 Η ρεολογική προσέγγιση

2.3.1 Ιστορική αναδρομή

Η ιστορία της μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας είναι πολύπλοκη. Από την μία πλευρά, είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν ακριβείς μαθηματικές προσεγγίσεις που να δίνουν πειστικά αποτελέσματα. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει ένα σαφές κίνητρο, λόγω της τεχνολογίας, να αναπτυχθούν μέθοδοι που θα δώσουν προβλέψεις με πρακτική αξία. Αυτή η ένταση μεταξύ πολυπλοκότητας και πρακτικότητας έχει προκαλέσει κάποιες ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις οι οποίες κυμαίνονται μεταξύ του άκρως τυπικού, μαθηματικά, και του πραγματικού.

Με την πάροδο των δεκαετιών, οι ειδικοί ασχολήθηκαν με την επιλογή διαφορετικών θεωριών και μοντέλων μερικά από τα οποία ουσιαστικά εξαφανίστηκαν ενώ άλλα διατηρούνται μέχρι και σήμερα. Αυτό έχει προκύψει λόγω της έκτασης των πειραματικών προγραμμάτων, που οι θεωρίες ζητούν, αλλά και από την ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων με την βοήθεια των οποίων πολλές προσεγγίσεις προσαρμόζονται αρκετά καλά. Έτσι, έχουμε την σχετική παραμέληση πολύπλοκων ολοκληρωτικών μοντέλων και την ανάπτυξη, στην πράξη,

μεθόδων που σχετίζονται με την εξάρτηση από τον ρυθμό της πλαστικότητας του υλικού.

Ο Wineman[9] επανεξετάζοντας το πεδίο της μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας αναφέρει ότι μία θεωρία με ιστορία 40 χρόνων έχει ελάχιστες μηχανικές εφαρμογές μέχρι και σήμερα. Οι Drapaca, Sivaloganathan και Tenti[10] έχουν παρουσιάσει μια ανασκόπηση στην οποία επισημαίνουν πως υπάρχει μια τεράστια ποικιλία θεωριών οι οποίες είναι διαφορετικές και φαινομενικά ασύνδετες.

2.3.2 Προσαρμογές της Γραμμικής Θεωρίας

Η διαφορική προσέγγιση της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας μπορεί να τροποποιηθεί για να περιγράψει τη μη-γραμμικότητα. Δύο ήταν οι κύριες προσπάθειες που χρησιμοποιούν αυτή την προσέγγιση και είχαν σημαντικό αντίκτυπο. Στην πρώτη, Ο Smith[11] γενικεύει την γραμμική θεωρία για μεγάλες παραμορφώσεις, χρησιμοποιώντας μία ανάλυση η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του μοντέλου του Maxwell. Σε αντίθεση η προσέγγιση των Kitagawa, Mori και Matsutani[12] όπου η διαφορική εξίσωση του πρότυπου γραμμικού υλικού υπήρξε η αφετηρία. Τελικά και οι δύο προσεγγίσεις συνεχίζουν να συνεισφέρουν σημαντικά.

Θεωρίες μη-γραμμικής ιξωδοελαστικότητας μπορούν να δημιουργηθούν επίσης από την γενίκευση της αρχής της επαλληλίας του Boltzmann. Ο Leaderman[13] ο οποίος εργαζόταν πάνω σε ίνες πολυμερούς, ήταν ο πρώτος που ακολούθησε αυτή την οδό, με συνεχιστές τους Findlay και Lai[14]. Η μη-γραμμικότητα εισάγεται στο ολοκλήρωμα του Boltzmann συμπεριλαμβάνοντας την εξάρτηση από την τάση ή την παραμόρφωση κατά την ολοκλήρωση. Το ολοκλήρωμα του Leaderman λαμβάνει την μορφή:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} f\{\sigma(\tau)\} d\tau \quad (2.6)$$

Όπου η παραμόρφωση εξαρτάται από την τάση στην πάροδο του χρόνου. Η f εδώ είναι μία συνάρτηση η οποία προσδιορίζεται πειραματικά για κάθε πολυμερές. Η μορφή του ολοκληρώματος φανερώνει την υπόθεση διαχωρισμού του χρόνου και της τάσης από το μέτρο ενδοτικότητας κατά τον ερπυσμό. Συγκεκριμένες μορφές του διαχωρισμού του μέτρου ενδοτικότητας (ομοίως της διαχωρισιμότητας του μέτρου χαλάρωσης σε συναρτήσεις παραμόρφωσης και χρόνου) ορίζουν διαφορετικά μοντέλα μονού ολοκληρώματος. Η πιο γενική μορφή είναι αυτή των Pipkin και Rogers[15]. Αυτές οι μορφές απλής ολοκλήρωσης μέχρι και σήμερα αναπτύσσονται και εφαρμόζονται.

Μπορούν δε να παρουσιαστούν ως μορφές της αρχής της μη-γραμμικής υπέρθεσης, σε αντίθεση με αυτή της γραμμικής υπέρθεσης του Boltzmann.

2.3.3 Θεωρίες πολλαπλών ολοκληρωμάτων – Green και Rivlin, Pipkin και Rogers.

Οι Green και Rivlin[16] έκαναν ελάχιστες φυσικές παραδοχές, σύμφωνα με τις οποίες:

1. Οι τάσεις είναι «αντικειμενικές», έτσι ώστε διαφορετικοί παρατηρητές να αντλούν παρόμοια αποτελέσματα
2. Η τάση εξαρτάται μόνο από το ιστορικό της παραμόρφωσης ή ισοδύναμα ότι η παραμόρφωση εξαρτάται μόνο από το ιστορικό της τάσης.

Παίρνοντας μια μαθηματική προσέγγιση της δεύτερης (2) υπόθεσης, έφτιαξαν μία σειρά Fretchet από πολλαπλά ολοκληρώματα για να την εκφράσουν. Στην περίπτωση της μίας διάστασης, για την παραμόρφωση ϵ σε χρόνο t υπό όρους του ιστορικού της τάσης η μορφή είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & \int_{-\infty}^t J_1(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t J_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \dot{\sigma}(\tau_1) \dot{\sigma}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t J_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \dot{\sigma}(\tau_1) \dot{\sigma}(\tau_2) \dot{\sigma}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Υπάρχει επίσης και μία ταυτόσημη μορφή αυτής της σειράς όπου η τάση είναι εξαρτώμενη από το ιστορικό της παραμοόρφωσης. Και στις δύο περιπτώσεις, ο πρώτος όρος είναι αναγνωρίσιμος ως το ολοκλήρωμα Boltzmann. Για να χρησιμοποιηθεί αυτή η θεωρία είναι απαραίτητο να αξιολογηθούν διάφορες συναρτήσεις J_i , οι συναρτήσεις πυρήνα οι οποίες είναι ουσιαστικές για τις παραμέτρους του υλικού, έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί η σειρά για να δωθεί ένα αξιόπιστο αποτέλεσμα, από άποψη ακρίβειας, για την πρόβλεψη της παραμόρφωσης ή της τάσης αντίστοιχα. Στα χρόνια που ακολούθησαν την πρόταση αυτής της θεωρίας υπήρξε μια σειρά από ειδικές εφαρμογές σε πολυμερή. Τα ζητήματα όμως που τέθηκαν υπό συζήτηση ήταν: το πόσα πειράματα χρειάζονται για να προσδιοριστεί το J_i , ποια η φυσική του σημασία, πόσο πρακτικό είναι να γίνει ο καθορισμός του με επαρκή ακρίβεια και η σύγκλιση της σειράς.

Η θεωρία των Green-Rivlin[16] καταλήγει ότι για την επαρκή αναπαράσταση του φαινομένου αρκούν μόνο ο πρώτος και ο τρίτος όρος της σχέσης (2.7). Αργότερα, ωστόσο, οι Hadley και Ward[17] εργάζονται στο πολυπροπυλένιο και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι σε γενικές γραμμές περισσότεροι όροι είναι απαραίτητοι από τη σχέση (2.7), ανάλογα με το επίπεδο φόρτισης αλλά και την διάρκεια φόρτισης.

Σχετικά με την πρακτικότητα του πολλαπλού ολοκληρώματος ο Turner[4] παρατήρησε ότι υπάρχουν σε γενικές γραμμές «μεγάλες δυσκολίες» ώστε να γίνει πειραματικά ο καθορισμός των συναρτήσεων του πυρήνα. Ο Lockett[18] ποσοτικοποίησε το μέγεθος ενός επαρκούς πειραματικού προγράμματος και κατέληξε στο συμπέρασμα πως, ακόμα και στην μονοδιάστατη περίπτωση, είναι γενικά πάρα πολύ μεγάλος. Σε τρεις διαστάσεις και θεωρώντας το υλικό ασυμπίεστο εκτιμάται ότι χρειάζονται 287 πειράματα για μια ικανοποιητική αναπαράσταση. Ο ίδιος σχολίασε ότι «αυτό αποδεικνύει την ματαιότητα των μαθηματικών θεωριών οι οποίες δεν εξετάζουν τις επακόλουθες απαιτήσεις σε πειράματα».

Ο Gradowczyk[19] έχει δείξει πως οι συναρτήσεις του πυρήνα είναι πολύ ευαίσθητες στο πειραματικό σφάλμα, το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο ο αριθμός των όρων στην αναπαράσταση αυξάνεται τόσο αυξάνεται το σφάλμα των όρων σε υψηλότερη τάξη. Έτσι υπάρχει ένα άνω όριο αριθμού όρων καθώς το όφελος της ακρίβειας αντισταθμίζεται με την αβεβαιότητα που συνοδεύει την τιμή των υψηλόβαθμων όρων.

2.3.4 Pipkin και Rogers

Ένα θέμα που τέθηκε υπό συζήτηση για την θεωρία των Green-Rivlin[16] ήταν η φυσική σημασία των όρων. Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα και έτσι θεωρείται πως έχει κάποια φυσική σημασία χωρίς να συνδέεται με συγκεκριμένους μηχανισμούς. Οι Yannas και Haskell[20] κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι, εκτός από τον πρώτο όρο, οι πυρήνες είχαν μια αντιστοιχία με παρατηρούμενες ποσότητες οι οποίες ήταν «είτε μηδενικές ή αλλιώς δεν μπορούσαν να διαπιστωθούν εύκολα».

Για να αντιμετωπίσουν τις παραπάνω δυσκολίες της θεωρίας Green-Rivlin οι Pipkin και Rogers[15] εισήγαγαν μια εναλλακτική επέκταση της πολλαπλής ολοκλήρωσης. Η οποία παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\sigma(t) = & \int_{-\infty}^t d\varepsilon(\tau_1) R_1[\varepsilon(\tau_1), t - \tau_1] \\
& + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t d\varepsilon(\tau_1) d\varepsilon(\tau_2) R_2[\varepsilon(\tau_1), t - \tau_1; \varepsilon(\tau_2), t - \tau_2] \\
& + \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t d\varepsilon(\tau_1) d\varepsilon(\tau_2) d\varepsilon(\tau_3) R_3[\varepsilon(\tau_1), t - \tau_1; \varepsilon(\tau_2), t - \tau_2; \\
& \varepsilon(\tau_3), t - \tau_3] + \dots
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Για την τάση με όρους του ιστορικού της παραμόρφωσης. Οι συναρτήσεις του πυρήνα μπορούν να σχετιστούν με τα πειραματικά αποτελέσματα της χαλάρωσης. Στον πρώτο όρο, η ποσότητα $R_1(\varepsilon, t)$ είναι η τάση κατά την χαλάρωση υπό παραμόρφωση ε . Αυτός ο όρος περιέχει μη-γραμμική συμπεριφορά, σε αυτήν την έκφραση η συνάρτηση του πυρήνα δεν θεωρείται πλέον διαχωρίσιμη σε δύο συναρτήσεις παραμόρφωσης και χρόνου. Ο πρώτος όρος αναπαριστά μη-γραμμική υπέρθεση και αναπαράγει ακριβώς την πειραματική απόκριση του υλικού υπό μόνο-βηματική χαλάρωση. Δίνει επίσης μια προσεγγιστική πρόβλεψη για δοκιμή χαλάρωσης δύο βημάτων. Ο δεύτερος όρος αποτελεί την διόρθωση που χρειάζεται για να είναι αξιόπιστα τα αποτελέσματα αυτής της πρόβλεψης. Έτσι, καθώς η σειρά δομείται κάθε όρος που προστίθεται υποδηλώνει την πειραματικό πρόγραμμα που χρειάζεται για την εκτίμησή της. Με αυτό τον τρόπο, ενσωματώνεται μια φυσική ερμηνεία στη θεωρία και, δεδομένου ότι κάθε όρος είναι μη-γραμμικός, αναμένεται πως λιγότεροι όροι είναι απαραίτητοι απ'ότι με την προσέγγιση των Green-Rivlin. Οι περισσότερες εφαρμογές της θεωρίας Pipkin-Rogers[15] αφορούσαν την αξιολόγηση του πρώτου όρου, αλλά οι Mittal και Singh[21] έχουν εφαρμόσει την θεωρία μέχρι την δεύτερη τάξη για το nylon-6.

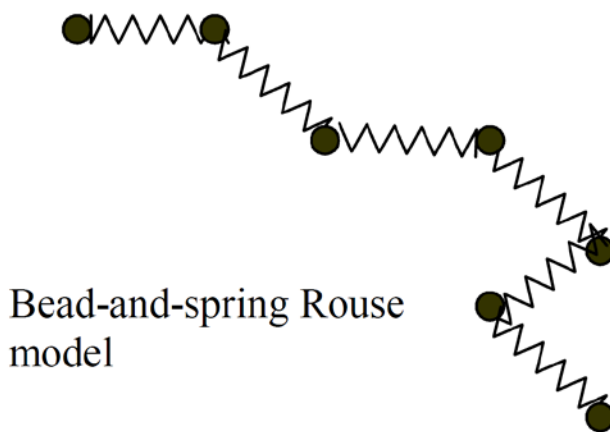
2.3.5 Σημερινή χρήση

Σήμερα είναι δυνατόν να συμπεριλαμβάνουμε αρκετά πολύπλοκες μη-γραμμικές θεωρίες σε στοιχεία πεπερασμένης ανάλυσης για εφαρμογές μηχανικής. Οι θεωρίες πολλαπλής ολοκλήρωσης δεν έχουν καμία επίδραση σε αυτόν τον τομέα, πιθανότατα λόγω των πειραματικών δυσκολιών που επιβάλουν αλλά και την πολυπλοκότητα των αριθμητικών συστημάτων που απαιτούνται για την εφαρμογή τους.

2.4. ΜΟΡΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ (MOLECULAR MODELS)

2.4.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ (ROUSE MODEL)

Ο Rouse (1953) ανέπτυξε μία μοριακή θεωρία για αραιά διαλύματα πολυμερών στην οποία τα πολυμερικά μακρομόρια μοντελοποιούνται σαν αλυσίδες από N Χουκιανά ελατήρια που συνδέουν σφαιρίδια χωρίς μάζα. (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2 Το μοντέλο του Rouse αποτελούμενο από σφαιρίδια ενωμένα με ελατήρια

Λόγω του ότι η δύναμη στο ελατήριο οφείλεται στην κίνηση Brown, η σταθερά του ελατηρίου είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας. Η κίνηση των σφαιριδίων δια μέσου του υγρού (διαλύτη) αντιπροσωπεύει την ιξώδη αντίσταση (viscous resistance), η οποία περιγράφεται διά μέσου ενός συντελεστή τριβής (friction coefficient), ζ . Έτσι, η ιξωδοελαστικότητα εμφανίζεται από την ελαστικότητα των Χουκιανών ελατηρίων και της τριβολογικής αντίστασης των σφαιριδίων. Η χαλάρωση διαφορετικών τμημάτων (segments) του μορίου αντιπροσωπεύει τους διαφορετικούς χρόνους χαλάρωσης π.χ. χαλάρωση ενός απλού τμήματος, πολλών τμημάτων μαζί όπως και ολοκλήρου του μορίου. Το τελευταίο δίνει τον μεγαλύτερο χρόνο χαλάρωσης ή τον χρόνο Rouse (longest relaxation or Rouse time). Το μοντέλο Rouse ισχύει μόνο για πολύ αραιά διαλύματα σε μεγάλους χρόνους (μικρές συχνότητες). Με άλλα λόγια, το μοντέλο δεν λαμβάνει υπ' όψιν την υδροδυναμική αλληλοεπίδραση μεταξύ των μορίων ("hydrodynamic interaction"), την επίδραση του πεπερασμένου όγκου του μορίου (excluded volume effects), την συμπεριφορά γυαλιού (glassy behavior) και την επίδραση των μοριακών περιελίξεων (molecular entanglement effects).

Μία τροποποίηση της θεωρίας Rouse προβλέπει ότι το μέτρο χαλάρωσης δίνεται από:

$$G(t) = \frac{\rho RT}{M} \sum_{p=1}^N e^{-t/\lambda_p} \quad (2.9)$$

και οι χρόνοι χαλάρωσης από:

$$\lambda_p = \frac{\alpha^2 P^2 \zeta}{6\pi^2 \rho^2 kT} \quad (2.10)$$

όπου:

α = είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος του μορίου (length characteristic of the molecule)

ζ = ο συντελεστής τριβής (translational friction coefficient)

P = ο βαθμός πολυμερισμού (degree of polymerization)

Ο μεγαλύτερος χρόνος χαλάρωσης (longest relaxation time) αντιστοιχεί στο $p=1$ (Rouse time).

Το ιξώδες δίνεται από:

$$\eta_0 = \frac{\zeta \rho \alpha^2 M N_0}{36 M_0^2} \quad (2.11)$$

όπου:

N_0 = ο αριθμός Avogadro

$M_0 = M/P$ = το μοριακό βάρος του μονομερούς (monomer molecular weight)

ρ = πυκνότητα (density)

Η εξίσωση (2.11) προβλέπει ότι το ιξώδες μηδενικού ρυθμού διάτμησης (zero-shear viscosity) αυξάνει γραμμικά με το μοριακό βάρος, κάτι που ισχύει για μοριακά βάρη μικρότερα από το κρίσιμο μοριακό βάρος για την επίδραση των περιελίξεων (critical molecular weight for entanglements), M_c .

Στην τελική ζώνη (terminal zone) (χαμηλές συχνότητες) η συμπεριφορά εξαρτάται από τον μεγαλύτερο χρόνο χαλάρωσης ($p=1$), και ο χρόνος Rouse είναι:

$$\lambda_R = \frac{6\eta_0 M}{\pi^2 \rho RT} = \frac{0.608\eta_0 M}{\rho RT} \quad (2.12)$$

Αυτός είναι ένας σημαντικός χρόνος διότι:

- Ο χρόνος που χρειάζεται για τις εσωτερικές τάσεις να χαλαρώσουν
- Ο χρόνος που χρειάζεται για να πάρουμε μόνιμη ροή σε σταθερή τάση
- Ο χρόνος για να πάρουμε πλήρη ελαστική ανάκτηση (recoil to be accomplished).

Οι γραμμικές ιξωδοελαστικές ιδιότητες που προβλέπονται από την θεωρία είναι:

$$G'(\omega) = \frac{\rho RT}{M} \sum_{p=1}^N \frac{\omega^2 \lambda_p^2}{(1 + \omega^2 \lambda_p^2)} \quad (2.13)$$

$$G''(\omega) = \frac{\rho RT}{M} \sum_{p=1}^N \frac{\omega \lambda_p}{(1 + \omega^2 \lambda_p^2)} \quad (2.14)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα δείχνει ότι η μόνιμη ενδοτικότητα (steady-state compliance) αυξάνει με το μοριακό βάρος για $M < MC$. Πειράματα για $M > MC$, δείχνουν ότι η μόνιμη ενδοτικότητα είναι ανεξάρτητη από το μοριακό βάρος και εξαρτάται μόνο από την κατανομή του (MWD).

Οι προβλέψεις του μοντέλου Rouse έχουν δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε κάποιο βαθμό σε σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις. Η πιο χαρακτηριστική πρόβλεψη του μοντέλου για συχνότητες στην περιοχή $1/\lambda_{p=1} \ll \omega \ll 1/\lambda_{p=N}$, G' και G'' είναι (Larson, 1988).

2.5 Ερπυσμός και χαλάρωση ως Θερμικά Ενεργοποιούμενες Διαδικασίες

Έχουμε δείξει σε προηγούμενο κεφάλαιο πως το βασικό γραμμικό στερεό, μοντέλο τριών στοιχείων ελατήριο και αποσβεστήρας, παρέχει μια πρώτη προσέγγιση της γραμμικής ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς. Ο Eyring και οι συνεργάτες του [22], θεώρησαν πως η παραμόρφωση του πολυμερούς ήταν μια διαδικασία θερμικά ενεργοποιημένου ρυθμού που περιλαμβάνει την κίνηση των μορίων της αλυσίδας πάνω από πιθανά

εμπόδια, και τροποποίησαν το τυπικό γραμμικό στερεό ώστε η κίνηση του αποσβεστήρα να διέπεται από την ενεργοποιημένη διαδικασία. Το μοντέλο, το οποίο αντιπροσωπεύει τώρα την μη-γραμμική ιξωδοελαστική συμπεριφορά, είναι χρήσιμο διότι οι παράμετροί του περιλαμβάνουν μία ενέργεια ενεργοποίησης των υποκείμενων μοριακών μηχανισμών. Αυτή η διαδικασία αποτελεί μία κοινή βάση για συζήτηση όσο αφορά την συμπεριφορά κατά τον ερπυσμό αλλά και την ενδοτικότητα.

2.5.1 Η εξίσωση του Eyring

Παρακάτω περιγράφεται η εφαρμογή της διαδικασίας του Eyring στη μηχανική συμπεριφορά και παρουσιάζεται πως αναπαράγει τα βασικά φαινόμενα της ιξωδοελαστικότητας, με εγγενή μη-γραμμικότητα. Η μακροσκοπική παραμόρφωση θεωρείται ότι είναι το αποτέλεσμα των βασικών διαδικασιών που είναι είτε διαμορικές (π.χ. ολίσθηση αλυσίδας) ή ενδομοριακή (π.χ. αλλαγή στη χωροδιάταξη της αλυσίδας), της οποίας η συχνότητα ν εξαρτάται από την ευκολία με την οποία ένα τμήμα της αλυσίδας μπορεί να ξεπεράσει ένα ενεργειακό φράγμα ύψους H . Σε περίπτωση απουσίας της τάσης, υπάρχει δυναμική ισορροπία, έτσι ώστε ένας ίσος αριθμός αλυσίδων να κινείται προς κάθε κατεύθυνση πάνω από το δυναμικό φράγμα με συχνότητα που δίνεται από την σχέση:

$$\nu = \nu_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right) \quad (2.15)$$

Στην παραπάνω εξίσωση περιγράφεται η συχνότητα ενός μοριακού γεγονότος και χρησιμοποιείται η σταθερά k διότι μας ενδιαφέρει ο απόλυτος αριθμός των μοριακών γεγονότων και όχι την συνολική επίδραση σε κάθε μόριο του υλικού.

Μια εφαρμοσμένη τάση σ υποτίθεται ότι παράγει γραμμικές μετατοπίσεις $\beta\sigma$ των ενεργειακών φραγμών κατά συμμετρικό τρόπο σχήμα (2.3), όπου το β έχει διαστάσεις όγκου. Η ροή προς την κατεύθυνση της εφαρμοσμένης τάσης δίνεται από:

$$\nu_1 = \nu_0 \exp\left[-\frac{(\Delta H - \beta\sigma)}{kT}\right] \quad (2.16)$$

Σε σύγκριση με την μικρότερη ροή προς την αντίθετη κατεύθυνση

$$\nu_2 = \nu_0 \exp\left[-\frac{(\Delta H + \beta\sigma)}{kT}\right] \quad (2.17)$$

Άρα η ροή προς τα εμπρός είναι:

$$v' = v_1 - v_2 = v_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{\beta\sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\beta\sigma}{kT}\right) \right] \quad (2.18)$$

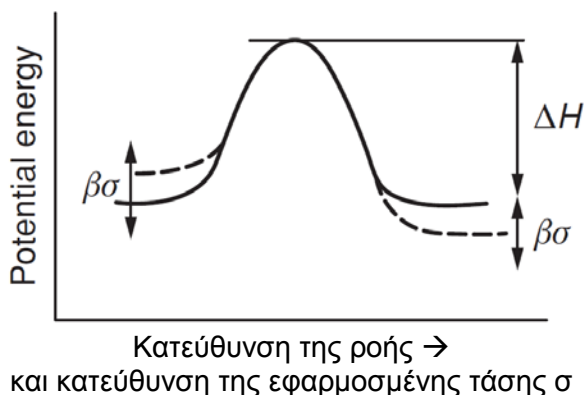
Παρατηρούμε εδώ πως η μορφή της διαφοράς των εκθετικών είναι το \sinh . Υποθέτωντας πως η καθαρή ροή προς τα εμπρός σχετίζεται άμεσα με τον ρυθμό μεταβολής της παραμόρφωσης έχουμε

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right) \sinh\left(\frac{V\sigma}{kT}\right) \quad (2.19)$$

Όπου $\dot{\varepsilon}_0$ είναι ένας σταθερός προ εκθετικός παράγοντας και V , το οποίο αντικαθιστά το β , ονομάζεται όγκος ενεργοποίησης για το μοριακό γεγονός.

Ο ρυθμός της παραμόρφωσης στην σχέση (2.19) ορίζει ένα «ενεργοποιημένο» ιξώδες, το οποίο στη συνέχεια ενσωματώνεται στον αποσβεστήρα του πρότυπου γραμμικού στερεού μοντέλο, και οδηγεί σε μια πιο πολύπλοκη σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης από εκείνη για το γραμμικό μοντέλο.

Τελικώς, οι περιορισμοί που αντιμετωπίζονται στα απλά ιξωδοελαστικά μοντέλα είναι γνωστοί και έχει γίνει δεκτό πως η ακριβής προσαρμογή των δεδομένων απαιτεί ένα φάσμα χρόνου υστέρησης ή χρόνου χαλάρωσης, έτσι ώστε να εξετάσουμε γιατί το μοντέλο ενεργοποιημένου αποσβεστήρα είναι επιτυχημένο. Παρά το γεγονός ότι οι καμπύλες του ερπυσμού είναι σιγμοειδείς, όταν χαράσσονται υπό λογαριθμική κλίμακα για μεγάλο χρονικό διάστημα μπορούμε να πούμε πως με μία καλή προσέγγιση είναι γραμμικές. Το μοντέλο προβλέπει ερπυσμό υπό την μορφή $\varepsilon = \alpha' + \beta' \log t$, η οποία είναι κατάλληλη για αυτή την κεντρική περιοχή.



Σχήμα 2.3 Το μοντέλο του Eyring για τον ερπυσμό

Κεφάλαιο 3^ο

Εφαρμογή μη γραμμικών μοντέλων σε ιξωδοελαστικό πολυμερές υλικό



*Nonlinearity Reconciliation
Yves Bouchard*

3.1 Εισαγωγή

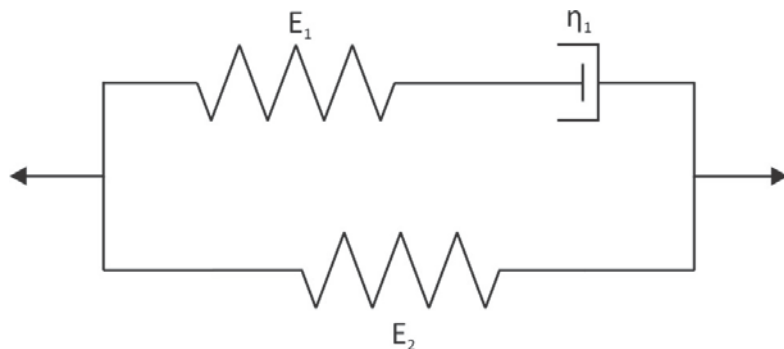
Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μία παρουσίαση-σύγκριση της εφαρμογής δύο μη γραμμικών ιξωδοελαστικών μοντέλων σε μια σειρά πειραμάτων που έγιναν στο πολυμερές Adiprene L100. Η σειρά πειραμάτων περιλαμβάνει:

- Μονότονη φόρτωση (θλίψη) υπό διαφορετικούς ρυθμούς παραμόρφωσης
- Χαλάρωση με διαφορετικό ποσοστό παραμόρφωσης (σε θλίψη)
- Κυκλική φόρτωση με χαλάρωση και αποφόρτωση στην αρχική μορφή του υλικού
- Βηματική χαλάρωση αλλάζοντας την παραμόρφωση με μονότονη φόρτωση

3.2 Η Προσέγγιση του Khan

3.2.1 Το μοντέλο

Ο Khan και οι συνεργάτες του[23] το 2006 θεώρησαν ένα πρότυπο μοντέλο το οποίο αποτελείται από ένα στοιχείο Maxwell συνδεδεμένο παράλληλα με ένα γραμμικό ελατήριο E_2 .



Σχήμα 3.1 Γραμμικό ρεολογικό μοντέλο Khan

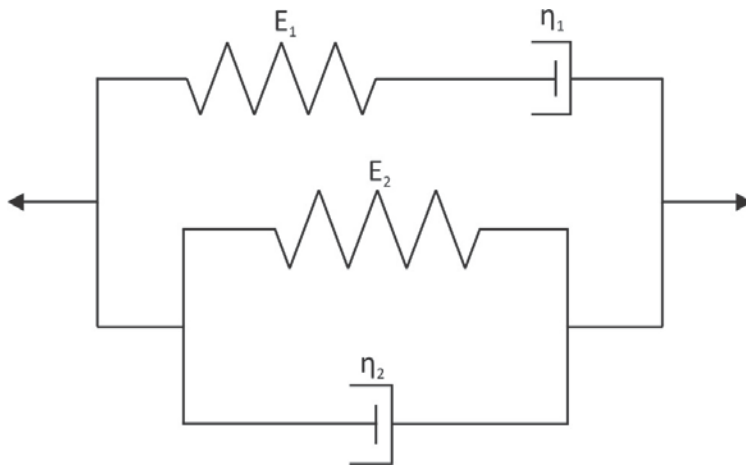
Το μοντέλο αυτό περιγράφεται από την σχέση:

$$\frac{\eta_1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = \frac{\eta}{E_1} (E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + E_2 \varepsilon \quad (3.1)$$

Όπου η , E_1 και E_2 είναι οι σταθερές του υλικού, σ και ε είναι η τάση και η παραμόρφωση του υλικού. Φαίνεται εδώ πως μόνο η παρούσα

τιμή της τάσης και της παραμόρφωσης παίζουν ρόλο στην συμπεριφορά του υλικού. Η ικανότητα αυτού του μοντέλου να προβλέψει μόνο ποιοτικά την συμπεριφορά ενός ιξωδοελαστικού υλικού κατά τον ερπυσμό, την χαλάρωση ή την μονότονη φόρτιση υπό διαφορετικό ρυθμό παραμόρφωσης ήταν και ο λόγος για τον οποίο ο Khan και οι συνεργάτες του τροποποίησαν αυτό το γραμμικό μοντέλο σε μη γραμμικό.

Στην τροποποιημένη μορφή του πρότυπου μοντέλου του υλικού γίνεται μία αλλαγή στη σύνδεση με το γραμμικό ελατήριο όπου τοποθετείται ένα στοιχείο Kelvin με την διαφορά ότι η σταθερά του ελατηρίου E_2 δεν είναι πλέον γραμμική.



Σχήμα 3.2 Τροποποιημένο μη γραμμικό μοντέλο του Khan

Το ελατήριο E_1 είναι σταθερά του υλικού η οποία εξαρτάται από την θερμοκρασία του χώρου που διεξάγεται το πείραμα. Το ελατήριο E_2 είναι ένα μη γραμμικό ελατήριο το οποίο εξαρτάται από την παραμόρφωση του υλικού αλλά και της υπάρχουσας θερμοκρασίας. Η εξίσωση που χρησιμοποιείται για το ιξώδες των δύο αποσβεστήρων υποτέθηκε ως μη σταθερή ποσότητα και εξαρτάται από τον ρυθμό παραμόρφωσης του υλικού και την θερμοκρασία είναι σχέση 3.2.

$$\eta(\dot{\epsilon}, T) = \left[\eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{\left(1 + (\alpha|\dot{\epsilon}|)^2 - \left(\frac{|\dot{\epsilon}|}{10^5}\right)^d\right)^b} \right] \left(\frac{T_r - T_{vf}}{T - T_{vf}}\right)^m \quad (3.2)$$

Όπου η_0 είναι το ιξώδες σε μηδενικό ρυθμό παραμόρφωσης (σταθερή παραμόρφωση) και η_∞ είναι η ασυμπτωτική τιμή του ιξώδους για ρυθμό παραμόρφωσης που τείνει στο άπειρο (κρουστική φόρτηση). Οι παράμετροι του υλικού a, d και b χρησιμεύουν για να ρυθμίζουν την αλλαγή στην γεωμετρία του υλικού κατά την αύξηση του ρυθμού παραμόρφωσης. Επίσης ο παρανομαστής δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές. Η παράμετρος m του υλικού ρυθμίζει την απόκριση του ιξώδους στην αλλαγή θερμοκρασίας. Σε σχέση με τις θερμοκρασίες, το T_{vf} είναι η θερμοκρασία Vogel-Fulcher η οποία συνήθως είναι η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης μειωμένη κατά 50K. Το T_g είναι η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης και T είναι η θερμοκρασία που διεξάγεται το πείραμα.

Η συμπεριφορά των δύο ελατηρίων E_1 και E_2 κατά την χαλάρωση παρουσιάζουν μία εξάρτηση από την παραμόρφωση. Έτσι, τα ελατήρια αυτά αποτελούν την απόκριση του υλικού κατά την φόρτηση και την χαλάρωση. Η μορφή τους είναι η εξής:

$$E_1 = c_1 \left(1 + \frac{T_r - T}{T_d} \right) \quad (3.3)$$

$$E_2 = c_2 |\varepsilon|^{n_2} \left(1 + \frac{T_r - T}{T_d} \right) \quad (3.4)$$

Όπου c_1 , c_2 και n_2 είναι παράμετροι του υλικού και το $|\varepsilon|$ είναι η απόλυτη παραμόρφωση. T_r , T_d και T είναι οι θερμοκρασίες δωματίου, αποσύνθεσης του πολυμερούς και η θερμοκρασία που διεξάγεται το πείραμα.

Η μονοδιάστατη καταστατική σχέση που περιγράφει το ρεολογικό σχήμα του παραπάνω μοντέλου, σχήμα 3.2, είναι:

$$\frac{c_1}{\eta_1} \sigma + \dot{\sigma} = c_1 \dot{\varepsilon} + \frac{c_1}{\eta_1} c_2 \varepsilon^{(n_2+1)} + \frac{\eta_1}{\eta_2} c_1 \dot{\varepsilon} + c_2 (n_2 + 1) \varepsilon^{n_2} \dot{\varepsilon} \quad (3.5)$$

Συνοπτικά η παραπάνω σχέση χαρακτηρίζει την παρατηρούμενη ιξωδοελαστική συμπεριφορά των «τυπικών» πολυμερών υπό πεπερασμένη φόρτηση. Οι συναρτησιακές εκφράσεις η_1 και η_2 είναι εξαρτώμενες από τον ρυθμό παραμόρφωσης και την θερμοκρασία, αυξάνονται όσο αυξάνεται και ο ρυθμός παραμόρφωσης και η θερμοκρασία.

Η απόκριση του πολυμερούς σε δοκιμή υπό σταθερή φόρτιση (σταθερός ρυθμός παραμόρφωσης) περιγράφεται από την σχέση που προκύπτει από την λύση της διαφορικής σχέσης 3.5. Η λύση αυτή παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\sigma = (\eta_1 + \eta_2)\dot{\epsilon}(1 - e^{-c_1\dot{\epsilon}/\eta_1}) + c_2\dot{\epsilon}^{(n_2+1)} \quad (3.6)$$

Στην ειδική περίπτωση της χαλάρωσης όπου ο ρυθμός παραμόρφωσης είναι μηδενικός η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\sigma = c_2\dot{\epsilon}_0^{(n_2+1)} + (\sigma_0 - c_2\dot{\epsilon}_0^{(n_2+1)})e^{-c_1t/\eta_1} \quad (3.7)$$

Σε αυτή την περίπτωση το ιξώδες από την σχέση 3.2 περιορίζεται σε μία τιμή $\eta(\dot{\epsilon}, T) = \eta_0$ για πείραμα που διεξάγεται σε θερμοκρασία δωματίου.

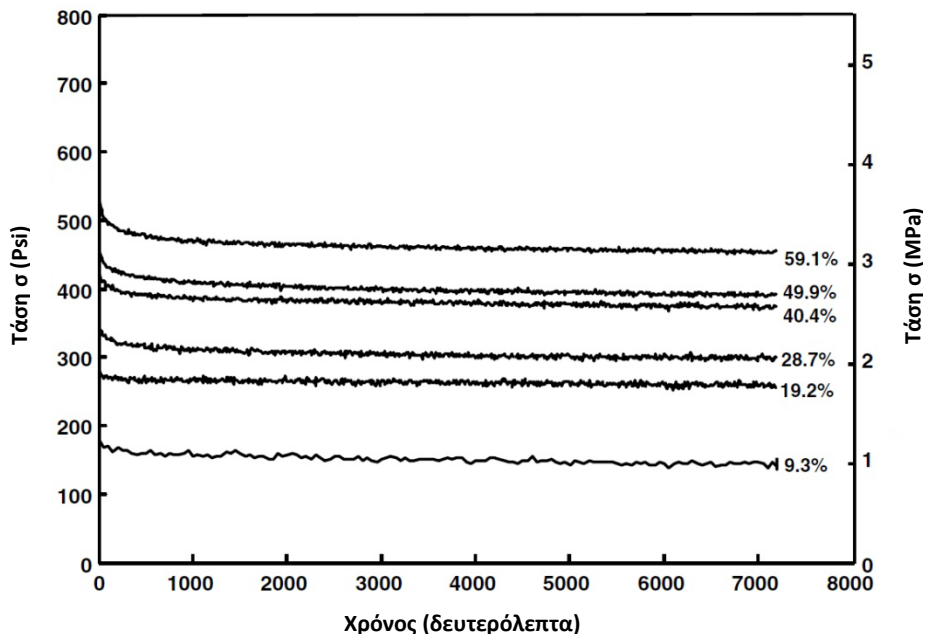
3.2.2 Εφαρμογή του μοντέλου του Khan στο Adiprene L100

3.2.2.a Πείραμα χαλάρωσης τάσης

Όπως είδαμε, η καταστατική εξίσωση για το παραπάνω μοντέλο εξαρτάται από τέσσερις παραμέτρους, οι οποίες ορίζονται από τις ιδιότητες του υλικού ώστε να περιγράψει την ιξωδοελαστική συμπεριφορά του κατά την χαλάρωση.

Τα πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται προκύπτουν από μία σειρά πειραμάτων χαλάρωσης κατά την οποία γίνονται έξι διαφορετικές δοκιμές με διαφορετική αρχική παραμόρφωση.

Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζονται έξι καμπύλες χαλάρωσης με διαφορετική αρχική παραμόρφωση, $\epsilon_0 \approx 10\%, 20\%, 30\%, 40\%, 50\%$ και 60% .



Σχήμα 3.3 Συγκεντρωτικό διάγραμμα πειραμάτων χαλάρωσης υπό έξι διαφορετικών σταθερών παραμορφώσεων στο Adiprene L100

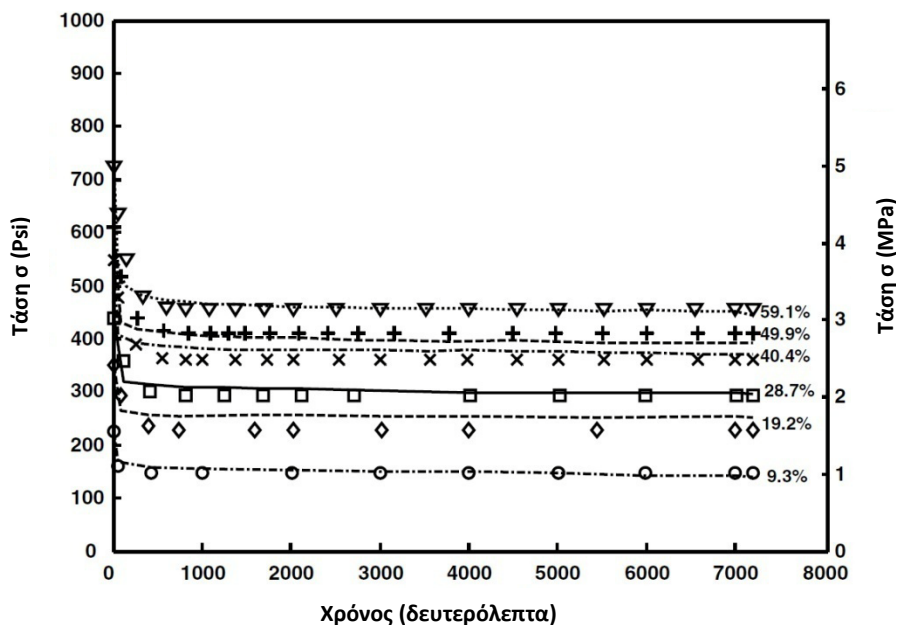
Για την προσομοίωση της χαλάρωσης η καταστατική εξίσωση του μοντέλου (σχέση 3.7) χρειάζεται τον υπολογισμό τεσσάρων παραμέτρων του υλικού οι οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί

Παράμετροι υλικού			
c_1	c_2	n_2	η_1
1143 psi	630 psi	-0.385	155.263 psi s

Πίνακας 3.1 Παράμετροι υλικού υπολογιζόμενοι για την προσομοίωση της χαλάρωσης με το μοντέλο του Khan

Οι παράμετροι αυτοί υπολογίστηκαν από τον Khan και τους συνεργάτες του με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Είναι φανερό το πόσο απλοποιείται το μοντέλο σε περίπτωση που έχουμε πείραμα χαλάρωσης δηλαδή ο ρυθμός παραμόρφωσης $\dot{\epsilon} = 0$.

Η εφαρμογή της καταστατικής σχέσης 3.7 δίνει σαν αποτέλεσμα το παρακάτω διάγραμμα στο σχήμα 3.4



Σχήμα 3.4 Συγκεντρωτικό διάγραμμα προσομοίωσης της χαλάρωσης του Adiprene L100 με το μοντέλο του Khan

Στο σχήμα 3.4 παρουσιάζονται με γραμμές τα πειραματικά δεδομένα και με σύμβολα τα θεωρητικά αποτελέσματα από την καταστατική εξίσωση του Khan.

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι ποιοτικά αλλά και αριθμητικά το μοντέλο παρουσιάζει μια πολύ καλή προσομοίωση της χαλάρωσης του υλικού. Να σημειωθεί επίσης πως για κάθε περίπτωση οι σταθερές του υλικού όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο πίνακα 3.1 παρέμειναν ίδιες.

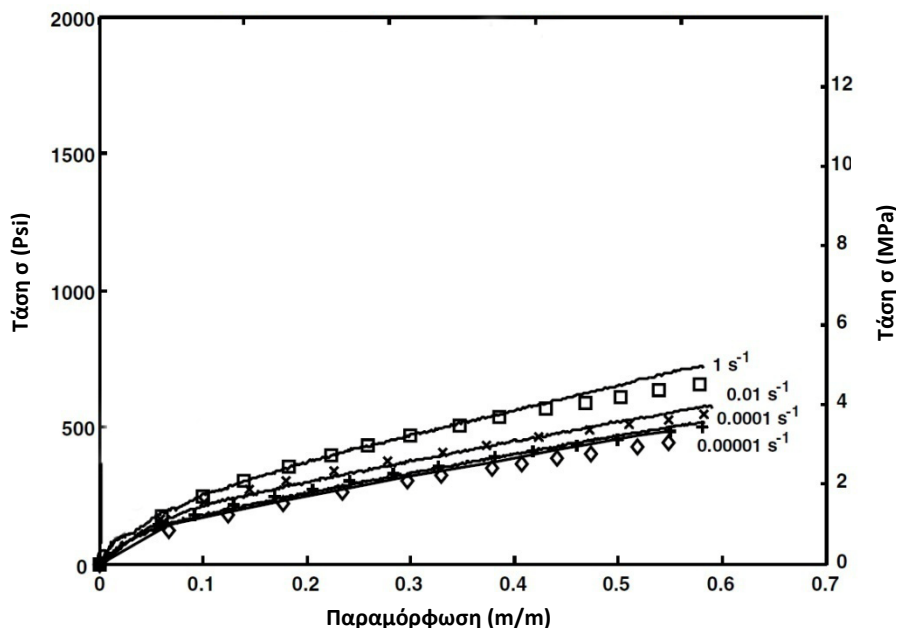
3.2.2.b Πείραμα μονοτονικής φόρτισης

Όπως φαίνεται από τη καταστατική σχέση 3.6 για μονοτονική φόρτιση, χρειάζεται και ο υπολογισμός ακόμα πέντε παραμέτρων του υλικού. Αυτές είναι οι $\eta_{\infty}, \eta_0, a, d$ και b οι οποίες από τις οποίες υπολογίζεται το ιξώδες σε κάθε αποσβεστήρα, αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται ο υπολογισμός δέκα επιπλέον παραμέτρων, οι οποίοι υπολογίζονται αριθμητικά. Παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Παράμετροι υλικού				
$\eta_{(0)1}$	$\eta_{(\infty)1}$	α_1	d_1	b_1
155263 psi s	3.42 psi s	3790	2	0.414
$\eta_{(0)2}$	$\eta_{(\infty)2}$	α_2	d_2	b_2
151160 psi s	10.73 psi s	1411	2	0.907

Πίνακας 3.2 Παράμετροι υλικού υπολογιζόμενοι για την προσομοίωση της μονοτονικής φόρτισης με το μοντέλο του Khan

Η εφαρμογή του μοντέλου σε μονοτονική φόρτιση που παρουσιάζεται στο σχήμα 3.5 γίνεται σε πειραματικά δεδομένα φορτήσεων υπό διαφορετικό ρυθμό παραμόρφωσης $\dot{\epsilon} = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-2}$ και 10^0 .



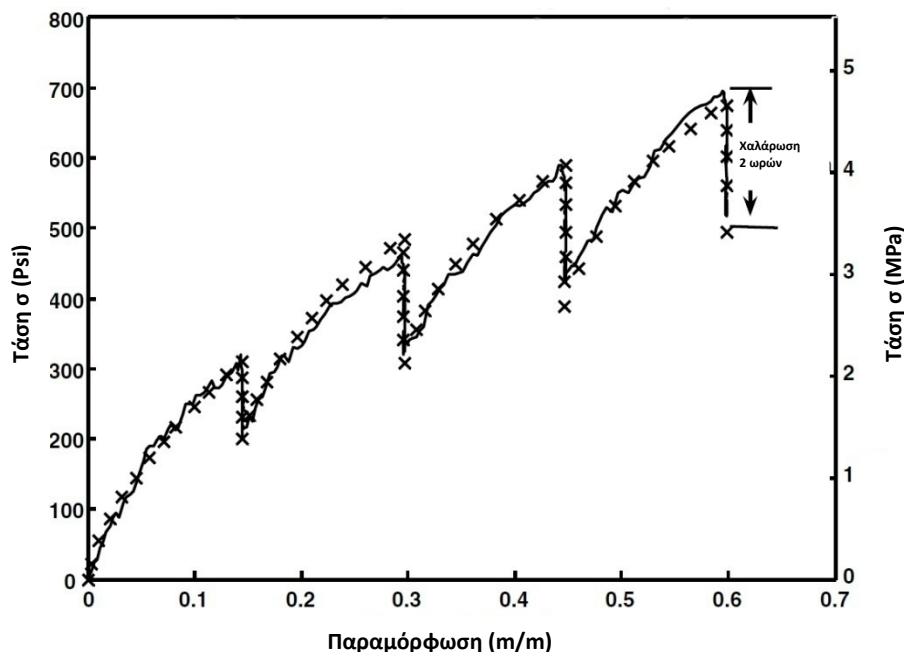
Σχήμα 3.5 Συγκεντρωτικό διάγραμμα μονοτονικής φόρτισης με την προσομοίωση από το μοντέλο του Khan

Ομοίως και εδώ με σύμβολα παρουσιάζονται τα θεωρητικά αποτελέσματα και με γραμμές τα πειραματικά. Μια πρώτη παρατήρηση και εδώ είναι πως η σχέση 3.6 παρουσιάζει μία καλή προσέγγιση του υλικού σε μονοτονική θλίψη με την διαφορά ότι σε αυτή τη περίπτωση χρειάστηκαν περισσότερες από δέκα παράμετροι – σταθερές του υλικού. Σημείωση, όπως φαίνεται και από τις παραπάνω σχέσεις, για ευκολία η τιμή της παραμόρφωσης υπολογίζεται πάντα θετική.

3.2.2.c Πείραμα βηματικής χαλάρωσης

Εδώ παρουσιάζεται μια ακόμα προσπάθεια από τον Khan και τους συνεργάτες του να εφαρμόσουν το μοντέλο σε μια πιο σύνθετη φόρτωση όπου διαδοχικές χαλαρώσεις τάσης γίνονται υπό διαφορετική αρχική παραμόρφωση με την βοήθεια ενδιάμεσων μονοτονικών φορτίσεων. Είναι, θα μπορούσαμε να πούμε, μια εφαρμογή και των δύο ειδικών καταστατικών σχέσεων, σχέση 3.6, σχέση 3.7 στο ίδιο πείραμα.

Οι παράμετροι σε αυτό το πείραμα έχουν οριστεί από τα προηγούμενως οπότε και χρησιμοποιούνται οι ίδιες με αποτέλεσμα τα διαγράμματα στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 3.6 Διάγραμμα βηματικής χαλάρωσης μαζί με την προσομοίωση του μοντέλου Khan στο Adiprene L100

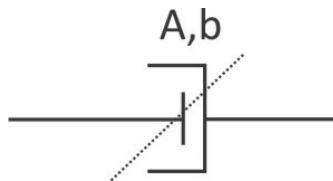
3.3 Εισαγωγή ενός διαφορετικού μη-γραμμικού μοντέλου

3.3.1 Το μοντέλο Eyring

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε ένα μοντέλο το οποίο περιέχει τον αποσβεστήρα του Eyring το οποίο και θα αναφερόμαστε σε αυτό ως μοντέλο Eyring. Θα γίνει μία προσπάθεια εφαρμόσουμε τα πειράματα τα οποία έχουμε από την εργασία του Khan[23] στο μοντέλο το οποίο δημιουργήσαμε.

Η εξίσωση η οποία περιγράφει τον ρυθμό παραμόρφωσης στον αποσβεστήρα του Eyring δίνεται από την σχέση 3.8

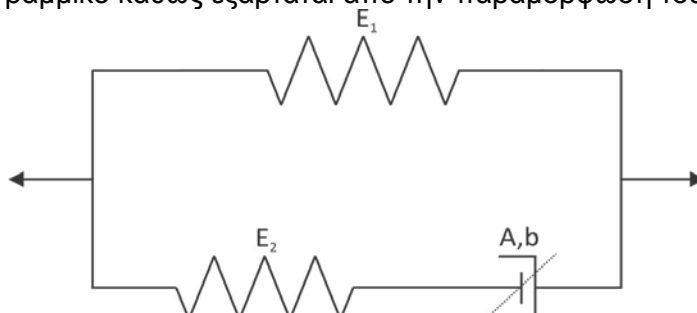
$$\dot{\epsilon} = A \sinh[b(\sigma - \epsilon E_1)] \quad (3.8)$$



Σχήμα 3.7 Ο μη γραμμικός αποσβεστήρας του Eyring

Όπου A, b είναι ένας σταθερός προεκθετικός παράγοντας και b είναι ο όγκος ενεργοποίησης του ιξώδους αντίστοιχα. Υπολογίστηκαν με αριθμητική μέθοδο όπως και οι υπόλοιπες παράμετροι που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Το ρεολογικό μοντέλο που δημιουργήσαμε και παρουσιάζουμε σε αυτή την εργασία αποτελείται από ένα μη γραμμικό ελατήριο E_1 συνδεδεμένο σε σειρά με ένα στοιχείο Kelvin, αποτελούμενο από τον αποσβεστήρα του Eyring και ένα γραμμικό ελατήριο E_2 . Το ελατήριο E_1 είναι μη γραμμικό καθώς εξαρτάται από την παραμόρφωση του υλικού.



Σχήμα 3.8 Ρεολογικό μοντέλο Eyring

Το μη γραμμικό ελατήριο E_1 έχει την ιδιότητα να εξαρτάται από την παραμόρφωση του υλικού και δίνεται από την σχέση

$$E_1(t) = n_1 \varepsilon(t)^{-n_2} \quad (3.9)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό πως η εξάρτηση του ελατηρίου από την παραμόρφωση συνεπάγεται την εξάρτησή του από τον χρόνο. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε πως το μοντέλο παρουσιάζει μία σταθερά E_1 η οποία μεταβάλλεται κατά την εξέλιξη της παραμόρφωσης χρονικά. Η φυσική σημασία αυτού είναι ότι το ελατήριο «σκληραίνει» όσο μεγαλώνει η παραμόρφωση. Το τελευταίο μας οδηγεί στο ότι υπάρχει και η παράγωγος της «σταθεράς του ελατηρίου», δίνεται από την σχέση.

$$\dot{E}_1 = -n_1 n_2 \dot{\varepsilon}(t) \varepsilon(t)^{-(n_2+1)} \quad (3.10)$$

Όπου n_1 και n_2 είναι παράμετροι που υπολογίζονται για το κάθε υλικό ομοίως με αριθμητική μέθοδο.

Το παραπάνω ρεολογικό μοντέλο Eyring, σχήμα 3.8, περιγράφεται από την καταστατική σχέση:

$$\dot{\sigma} = \varepsilon \dot{E}_1 + \dot{\varepsilon}(E_1 + E_2) - A E_2 \sinh[b(\sigma - \varepsilon E_1)] \quad (3.11)$$

Στην παραπάνω σχέση παρατηρούμε μερικές ιδιαιτερότητες. Αρχικά η σχέση περιέχει τον ρυθμό τάσης και παραμόρφωσης καθώς λόγω της μη γραμμικότητας του αποσβεστήρα δεν μπορούμε να πάρουμε μια αναλυτική λύση η οποία να περιέχει μόνο την τάση και την παραμόρφωση και όχι τις παραγώγους αυτών ως προς τον χρόνο. Έτσι για τον υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων χρησιμοποιήσαμε αριθμητική βηματική μέθοδο.

Η παραπάνω σχέση τροποποιείται για την περίπτωση της χαλάρωσης τάσης όπου ο ρυθμός παραμόρφωσης είναι μηδενικός, άρα η σχέση 3.11 απλοποιείται στην παρακάτω:

$$\dot{\sigma} = -A E_2 \sinh[b(\sigma - \varepsilon E_1)] \quad (3.12)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι πέντε παράμετροι – σταθερές του υλικού όπως αυτές υπολογίστηκαν για το Adiprene L100.

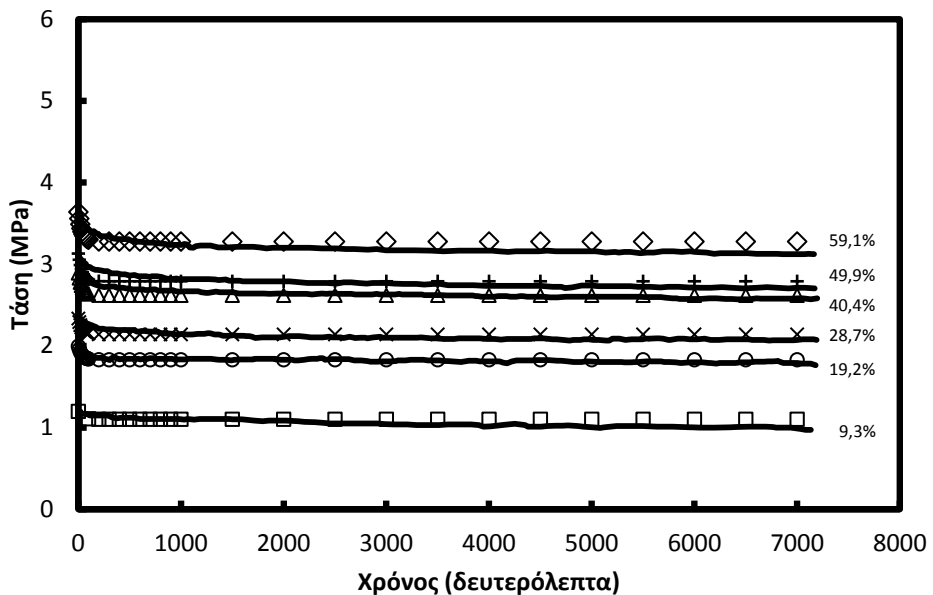
Παράμετροι υλικού				
n_1	n_2	E_2	A	b
4.47 MPa	0.41	3.5 MPa	$10^{-0.8}$	0.05 m ³ /J

Πίνακας 3.3 Παράμετροι υλικού για το Adiprene L100

3.3.2 Εφαρμογή του μοντέλου

3.3.2.a Πείραμα χαλάρωσης τάσης

Μία πρώτη προσπάθεια έγινε για την προσομοίωση του παραπάνω πειράματος χαλάρωσης (σχήμα 3.3) όπου χρησιμοποιήθηκε η καταστατική σχέση 3.12



Σχήμα 3.9 Συγκενρωτικό διάγραμμα προσομοίωσης με το μοντέλου Eyring την χαλάρωση του Adiprene L100

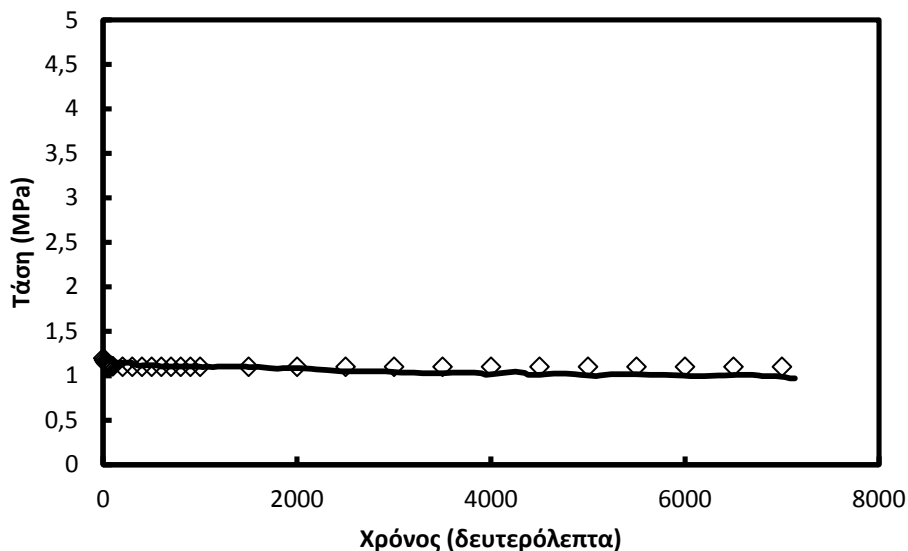
Να σημειώσουμε πως με γραμμές είναι τα πειραματικά δεδομένα όπως αυτά υπολογίστηκαν από την εργασία του Khan ενώ με σύμβολα είναι τα θεωρητικά αποτελέσματα όπως αυτά προέκυψαν από την εφαρμογή της καταστατικής σχέσης 3.12. Επιπροσθέτως να σημειωθεί πως ο υπολογισμός των τάσεων εδώ έγινε με κώδικα στο Mathematica μέσω του οποίου με βηματική συνάρτηση υπολογίζεται κάθε χρονική στιγμή η τάση και προστίθενται στην προηγούμενη τιμή της.

Ακολουθεί ένα μικρό κομμάτι από τον κώδικα στο Mathematica

```
...  
relax=N[Table[{t=dt i,  
dstress=- (E2 a) Sinh[b1 (stress-e0 E1)];  
  
stress=stress+dstress dt;  
  
stress},{i,1,imax}]];  
...
```

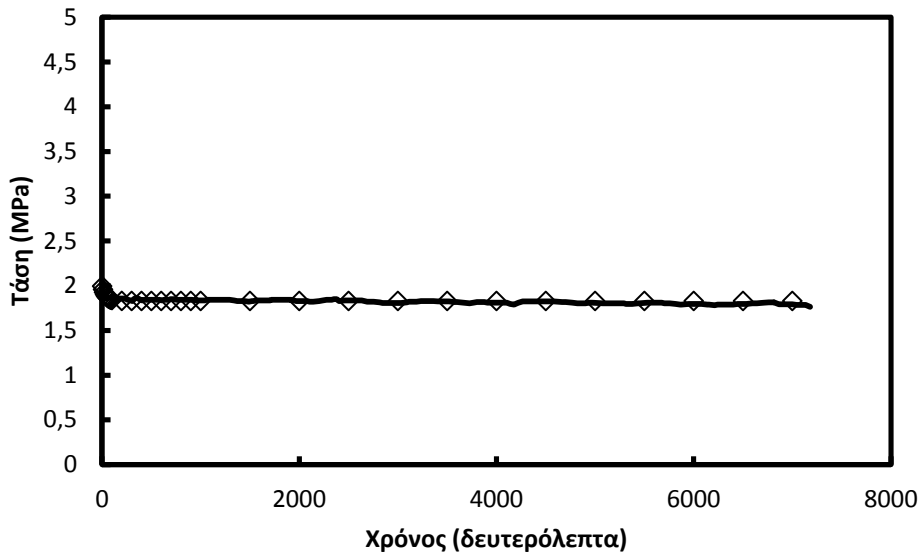
Ακολουθούν αναλυτικά διαγράμματα για κάθε τιμή παραμόρφωσης από το παραπάνω (σχήμα 3.9) πείραμα χαλάρωσης

- Για σταθερή παραμόρφωση $\epsilon = 9,3\%$



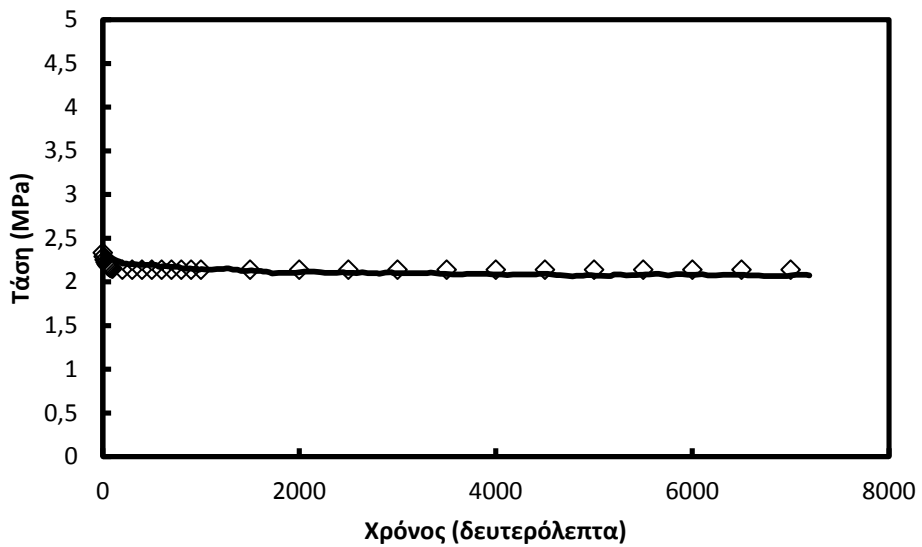
Σχήμα 3.10 Προσομοίωση χαλάρωσης με το μοντέλο του Eyring με $\epsilon = 9,3\%$

- Για σταθερή παραμόρφωση $\epsilon = 19,2\%$



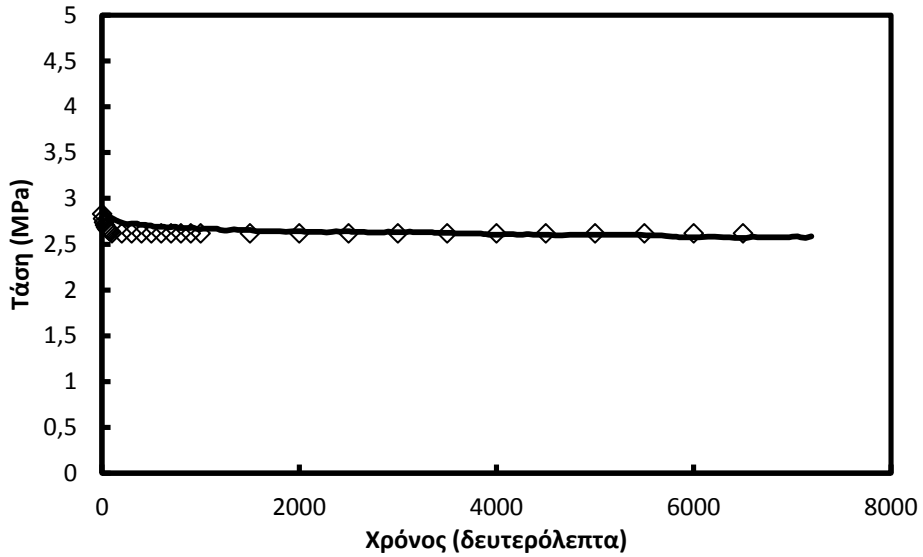
Σχήμα 3.11 Προσομοίωση χαλάρωσης με το μοντέλο του Eyring με $\epsilon = 19,2\%$

- Για σταθερή παραμόρφωση $\epsilon = 28,7\%$



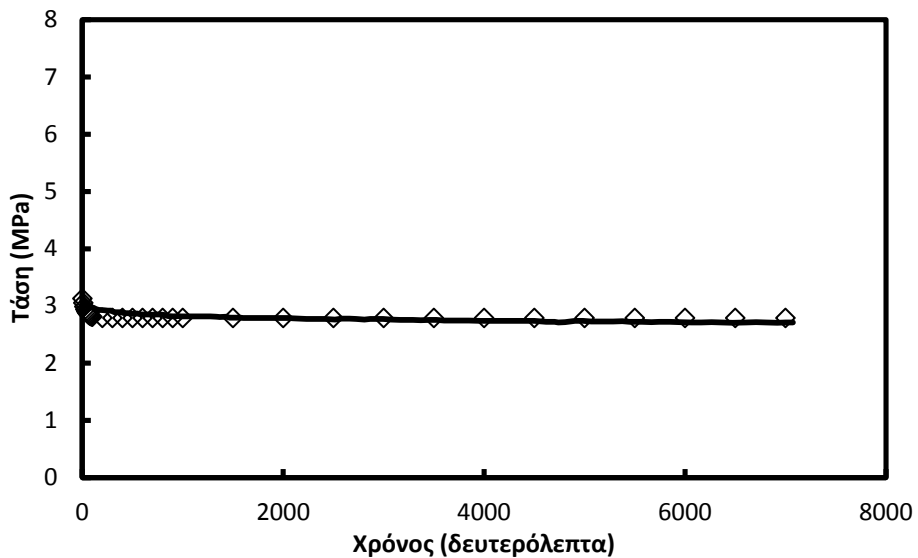
Σχήμα 3.12 Προσομοίωση χαλάρωσης με το μοντέλο του Eyring με $\epsilon = 28,7\%$

- Για σταθερή παραμόρφωση $\epsilon = 40,4\%$



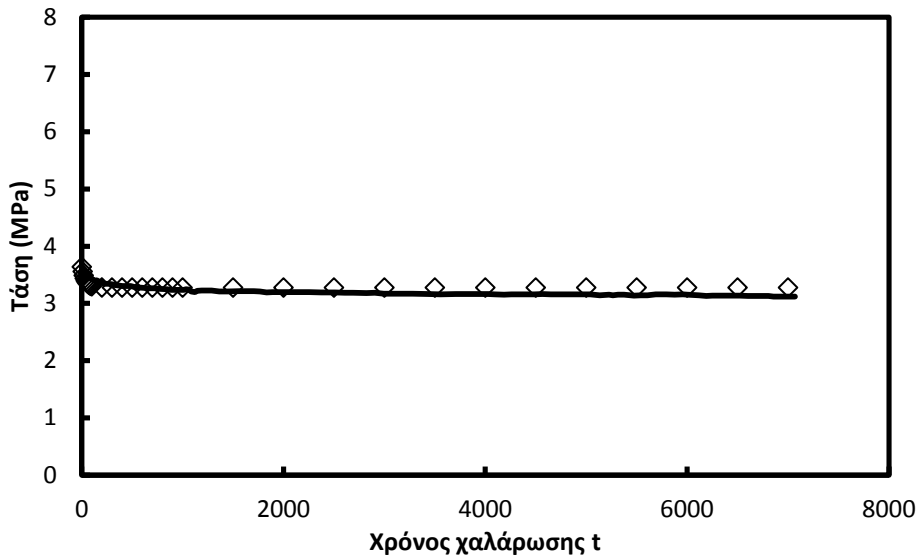
Σχήμα 3.13 Προσομοίωση χαλάρωσης με το μοντέλο του Eyring με $\epsilon = 40,4\%$

- Για σταθερή παραμόρφωση $\epsilon = 49,9\%$



Σχήμα 3.14 Προσομοίωση χαλάρωσης με το μοντέλο του Eyring με $\epsilon = 49,9\%$

- Για σταθερή παραμόρφωση $\epsilon = 59,1\%$

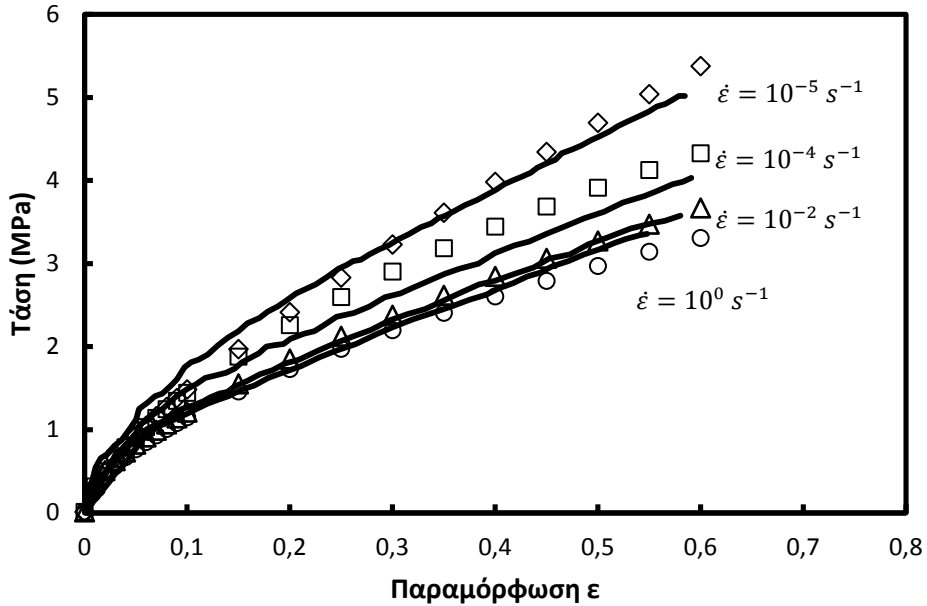


Σχήμα 3.15 Προσομοίωση χαλάρωσης με το μοντέλο του Eyring με $\epsilon = 59,1\%$

Ομοίως και εδώ στα γραφήματα, με γραμμές συμβολίζονται τα πειραματικά δεδομένα και με σύμβολα τα θεωρητικά δεδομένα. Παρατηρούμε πως για κάθε τιμή σταθερής παραμόρφωσης γίνεται μια προσομοίωση της χαλάρωσης με αρκετή ακρίβεια και με δεδομένο ότι οι παράμετροι είναι πέντε μόνο στο σύνολο.

3.3.2.b Πείραμα μονοτονικής φόρτισης

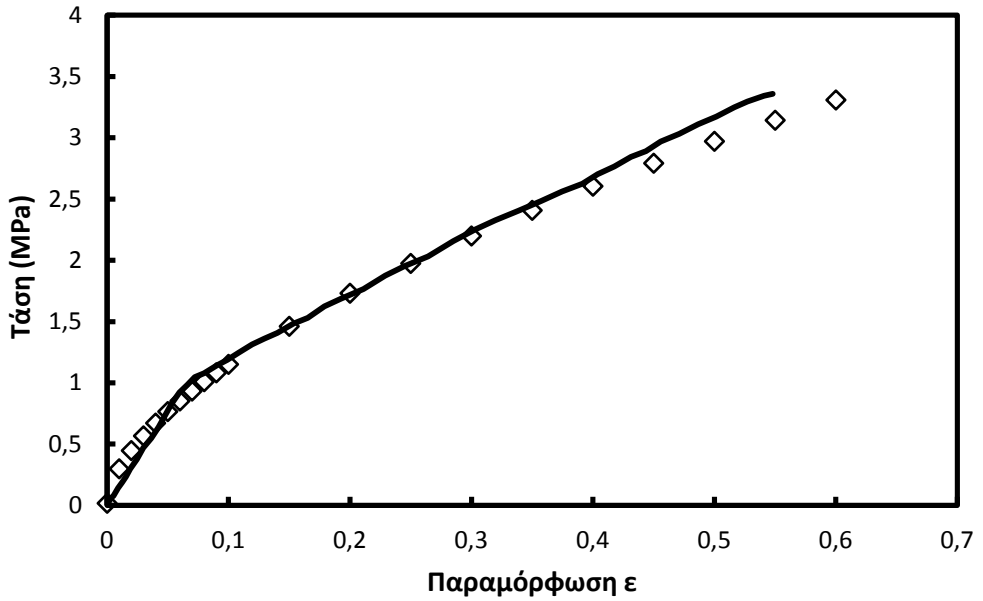
Στην παράγραφο αυτή θα γίνει παρουσίαση της μονοτονικής φόρτισης και της προσομοίωσης αυτής με το μοντέλο του Eyring. Το πρώτο γράφημα παρουσιάζει μια συνολική εικόνα με τέσσερις φορτίσεις υπό διαφορετικό ρυθμό παραμόρφωσης.



Σχήμα 3.16 Συγκεντρωτικό διάγραμμα μονοτονικής φόρτισης και προσομοίωση αυτού με το μοντέλο Eyring

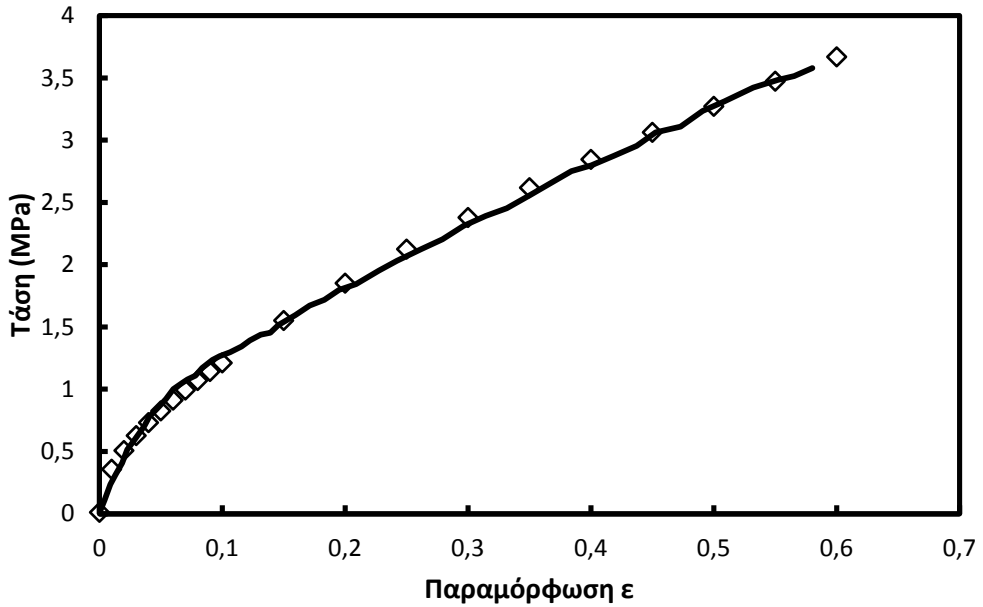
Ομοίως και εδώ οι γραμμές αντιπροσωπεύουν τα πειραματικά δεδομένα και τα σύμβολα τα θεωρητικά αποτελέσματα. Βλέπουμε και εδώ, όσο μας επιτρέπει η ακρίβεια του συγκεντρωτικού διαγράμματος, μια πολύ καλή προσέγγιση και στην μονοτονική φόρτιση. Ακολουθούν διαγράμματα μεμονωμένα για κάθε ρυθμό παραμόρφωσης τα οποία μας δίνουν μια ακριβέστερη εικόνα της προσομοίωσης του μοντέλου κατά την μονοτονική φόρτιση.

- Για ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-5} s^{-1}



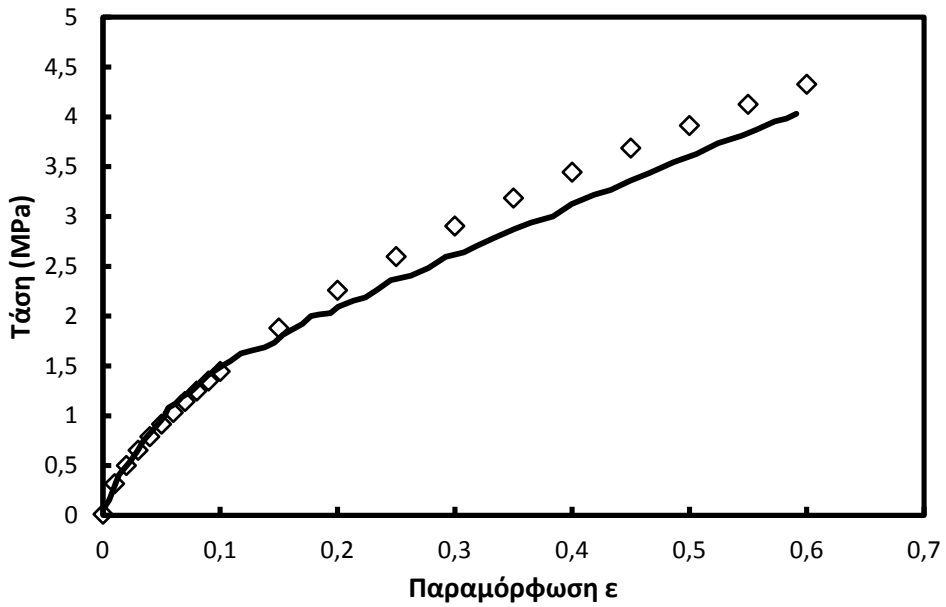
Σχήμα 3.17 Προσομοίωση μονοτονικής φόρτισης με το μοντέλο του Eyring με $\dot{\epsilon}=10^{-5} \text{ s}^{-1}$

- Για ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-4} s^{-1}



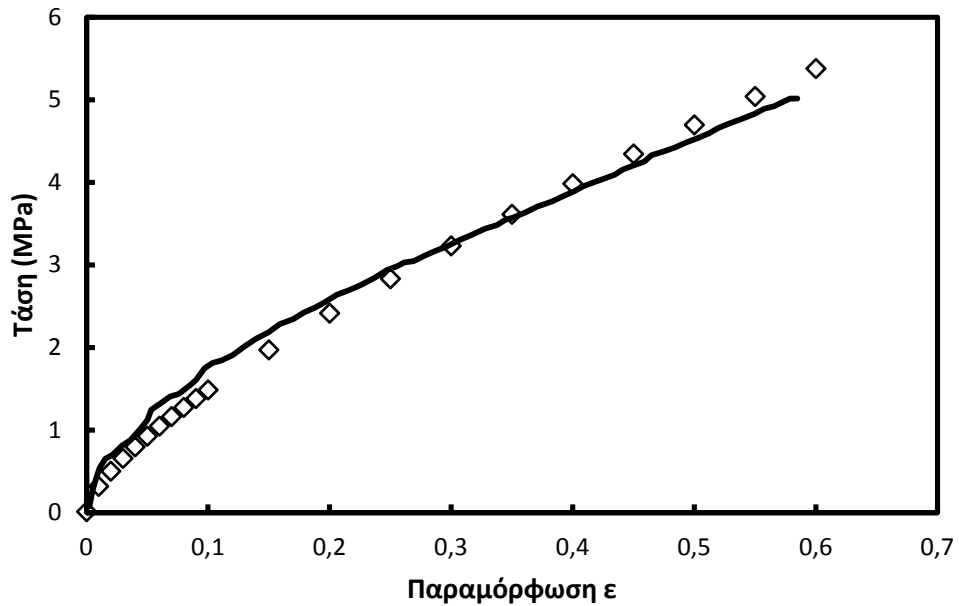
Σχήμα 3.18 Προσομοίωση μονοτονικής φόρτισης με το μοντέλο του Eyring με $\dot{\epsilon}=10^{-4} \text{ s}^{-1}$

- Για ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-2} s^{-1}



Σχήμα 3.19 Προσομοίωση μονοτονικής φόρτισης με το μοντέλο του Eyring με $\dot{\epsilon}=10^{-2} \text{ s}^{-1}$

- Για ρυθμό παραμόρφωσης 10^0 s^{-1}



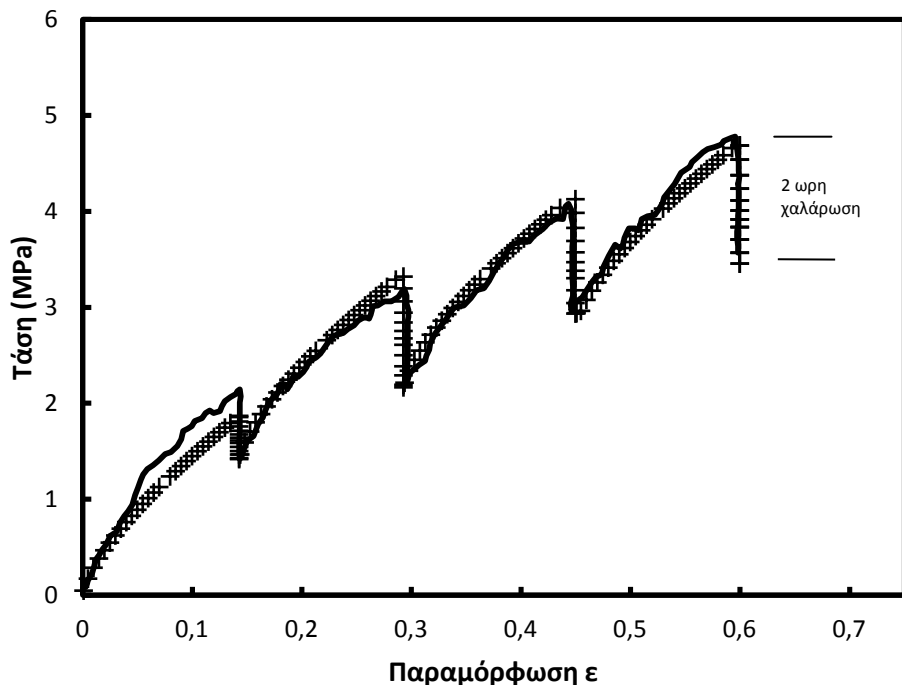
Σχήμα 3.19 Προσομοίωση μονοτονικής φόρτισης με το μοντέλο του Eyring με $\dot{\epsilon}=10^{-2} \text{ s}^{-1}$

Σε αυτά τα διαγράμματα φαίνεται καλύτερα η πολύ καλή ακρίβεια που επιτυγχάνεται με το μοντέλο του Eyring στη προσομοίωση της μονοτονικής φόρτισης του υλικού. Είναι δεδομένο ότι χρησιμοποιήσαμε τις ίδιες τιμές αλλά και τον ίδιο αριθμό παραμέτρων και σε αυτή τη περίπτωση όπως στη χαλάρωση, πράγμα το οποίο μας οδηγεί στη διαπίστωση πως το μοντέλο αυτό έχει δύο προτερήματα, ακρίβεια και ευκολία. Η ακρίβεια φαίνεται από τα διαγράμματα και η ευκολία λόγω του αριθμού των παραμέτρων που χρειάζεται να υπολογίσουμε.

Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε μία ακόμα προσομοίωση με το μοντέλο του Eyring σε βηματική χαλάρωση όπως κάναμε και με το μοντέλο του Khan σε προηγούμενη παράγραφο.

3.3.2.c Πείραμα βηματικής χαλάρωσης

Έχοντας υπολογίσει τις παραμέτρους στη μονοτονική φόρτιση και χαλάρωση για το μοντέλο του Eyring κάναμε μία ακόμα προσομοίωση που συνδυάζει και τους δύο τύπους φόρτισης. Αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 3.20 Διάγραμμα βηματικής χαλάρωσης και μονοτονικής φόρτισης με την προσομοίωση που επιτυγχάνεται με το μοντέλο του Eyring.

Η προσομοίωση που επιτυγχάνεται με το μοντέλο του Eyring σε αυτή την καταπόνηση, παρουσιάζει αρκετά μεγάλη ακρίβεια δεδομένου ότι η κάθε βηματική μονοτονική φόρτωση έχει αρχικές τιμές τις τελικές τιμές της τάσης και της παραμόρφωσης, όπως αυτές προκύπτουν στο τέλος (2 ώρες) χαλάρωσης. Το ίδιο συμβαίνει και στο σχήμα 3.6 όπου στην ίδια καταπόνηση γίνεται προσομοίωση από το μοντέλο του Khan.

Είναι φανερό πως το μοντέλο έχει την δυνατότητα να προβλέψει και να προσομοιώσει την συμπεριφορά του υλικού σε συνδυαστικές φορτίσεις. Για την προσομοίωση αυτή συνδυάζουμε τις δύο καταστατικές σχέσεις 3.11 και 3.12 με αριθμητική μέθοδο μέσω του Mathematica.

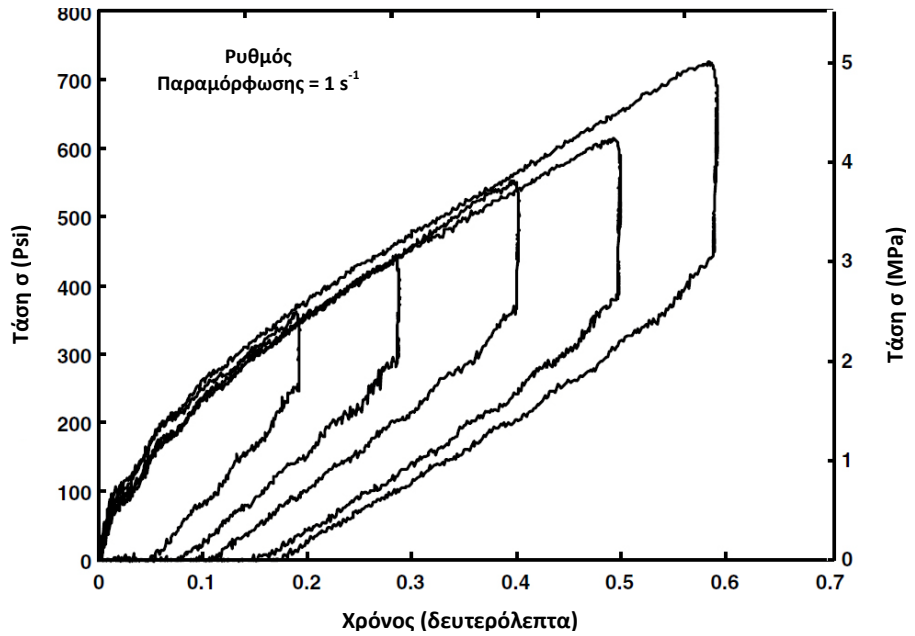
Ακολουθεί μία τελευταία προσομοίωση με το μοντέλο βηματική καταπόνηση.

3.3.2.d Κυκλική καταπόνηση

Στη παράγραφο αυτή μία ακόμα πολύπλοκη φόρτωση προσομοιώνεται με την βοήθεια του μοντέλου του Eyring. Η κυκλική αυτή καταπόνηση αποτελείται από τρία μέρη:

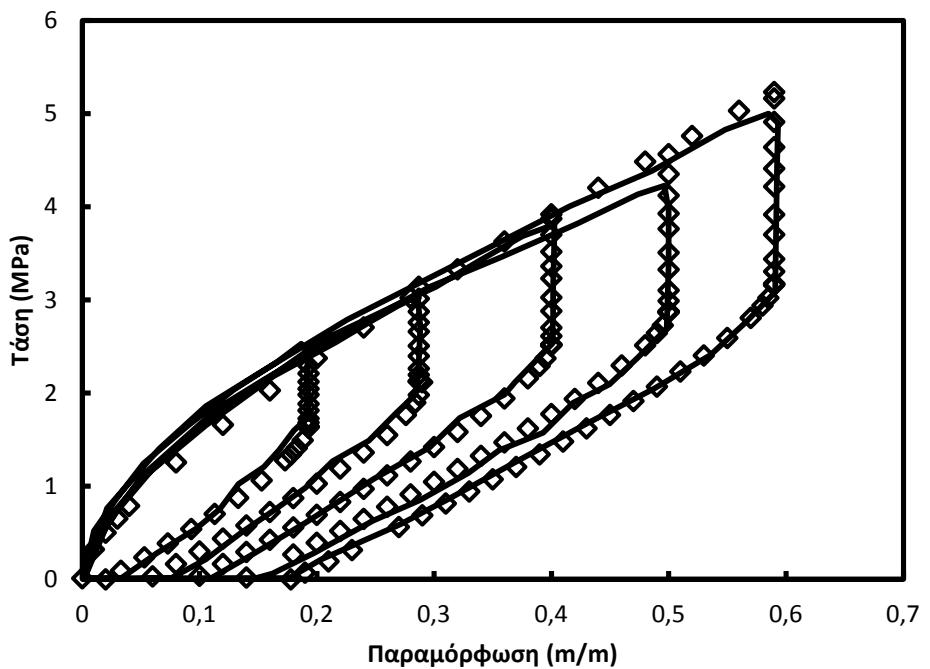
- Μονοτονική φόρτωση
- Χαλάρωση τάσης δύο ωρών
- Μονοτονική αποφόρτωση

Η καταπόνηση αποτελείται από τέσσερις κύκλους όπου στον καθένα η φόρτωση φτάνει μέχρι μία τιμή παραμόρφωσης ακολουθεί χαλάρωση τάσης δύο ωρών και στο τέλος κάθε χαλάρωσης ακολουθεί μονοτονική αποφόρτωση μέχρι το σημείο της μηδενικής παραμόρφωσης. Στην επόμενη μονοτονική φόρτωση η τιμή της παραμόρφωσης είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη. Το σχήμα που ακολουθεί είναι κατατοπιστικό για την «διαδρομή» του διαγράμματος κατά την καταπόνηση του υλικού.



Σχήμα 3.21 Διάγραμμα κυκλικής καταπόνησης

Η προσομοίωση του παραπάνω διαγράμματος παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3.22 Προσομοίωση κυκλικής φόρτισης με το μοντέλο Eyring

Όπως φαίνεται, η ακρίβεια και σε αυτή τη περίπτωση είναι αρκετά μεγάλη. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν και εδώ είναι ίδιες με αυτές των προηγούμενων παραγράφων. Η διαφορά είναι ότι εδώ οι παράμετροι στις βηματικές αποφορτίσεις είναι διαφορετικές. Αυτό έχει μία λογική καθώς και η συμπεριφορά του υλικού κατά την αποφόρτιση είναι διαφορετική μιας και δεν είναι εξαναγκασμένη όπως αυτή της φόρτισης.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται οι παράμετροι όπως αυτές υπολογίστηκαν για την αποφόρτιση του Adiprene L100.

Παράμετροι υλικού				
n_1	n_2	E_2	A	b
2.9 MPa	0.41	3.5 MPa	$10^{-0.8}$	$0.05 \text{ m}^3/\text{J}$

Πίνακας 3.4 Παράμετροι υλικού μετά τον υπολογισμό για την μονοτονική αποφόρτιση

Να σημειωθεί εδώ πως για την αποφόρτιση του υλικού χρειάστηκε μόνο η αλλαγή στη τιμή μίας μεταβλητής, του προεκθετικού παράγοντα στον υπολογισμό της σταθεράς του πρώτου ελατηρίου E_1 .

3.3.3 Συμπεράσματα

Ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού δεν είναι μόνο η παρουσίαση ενός μοντέλου το οποίο περιγράφει την ιξωδοελαστική συμπεριφορά ενός υλικού, αλλά και η συγκρισή του με ένα άλλο μοντέλο, αυτό του Khan, το οποίο ήδη έχει κάνει πολύ καλή προσομοίωση του Adiprene L100.

Οι διαφορές στην ακρίβεια των δύο μοντέλων είναι αμελητέες, δεδομένου όμως ότι το μοντέλο του Eyring χρειάζεται μόνο πέντε παραμέτρους του υλικού καθιστά το τελευταίο σίγουρα πιο αποτελεσματικό. Αυτό είναι φανερό και από τους πίνακες που ξαναπαρουσιάζουμε παρακάτω

Παράμετροι υλικού			
c_1	c_2	n_2	η_1
1143 psi	630 psi	-0.385	155.263 psi s

Πίνακας 3.1 Παράμετροι υλικού για το μοντέλο Khan κατά την χαλάρωση

Παράμετροι υλικού				
$\eta_{(0)1}$	$\eta_{(\infty)1}$	α_1	d_1	b_1
155263 psi s	3.42 psi s	3790	2	0.414
$\eta_{(0)2}$	$\eta_{(\infty)2}$	α_2	d_2	b_2
151160 psi s	10.73 psi s	1411	2	0.907

Πίνακας 3.2 Παράμετροι υλικού για το μοντέλο Khan κατά την μονοτονική φόρτιση.

Όπως φαίνεται λοιπόν και από τους προηγούμενους πίνακες, το μοντέλο Khan χρειάζεται δέκα (10) παραμέτρους υλικού για να μπορέσει να περιγράψει μία μονοτονική φόρτιση και τέσσερις για χαλάρωση. Σε περίπτωση όμως συνδυασμού αυτών των δύο ειδών καταπόνησης θα χρειαστεί και τις δέκα, όπως συμβαίνει άλλωστε και στο πείραμα με την βηματική χαλάρωση.

Ας δούμε όμως πόσους παραμέτρους χρειάζεται το μοντέλο Eyring για την προσομοίωση και των τεσσάρων παραπάνω καταπονήσεων.

Παράμετροι υλικού

n_{1a}	n_{1b}	n_2	E_2	A	b
4.47 MPa	2.9 Mpa	0.41	3.5 MPa	$10^{-0.8}$	0.05 m ³ /J

Πίνακας 3.5 Παράμετροι υλικού για μοντέλο Eyring κατά την μονοτονική φόρτιση, αποφόρτιση και χαλάρωση του Adiprene L100

Βλέπουμε λοιπόν πως για όλα τα πειράματα που έγινε προσομοίωση και από το μοντέλο του Khan χρειάζονται μόνο πέντε παράμετροι. Ενώ για να προσομοιώσουμε και την αποφόρτιση του υλικού χρειάστηκε, όπως ήταν αναμενόμενο, να αλλάξουμε την τιμή μόνο μία τιμή αυτή της n_{1b} και να πάρουμε ακόμα μία, αρκετά ακριβή, προσομοίωση της καταπόνησης.

Επίσης για το τελευταίο πείραμα, της παραγράφου 3.3.2 d, ο Khan δεν έκανε κάποια προσομοίωση με το μοντέλου του. Αυτό μπορεί να οφείλεται στον μεγάλο αριθμό των παραμέτρων που θα έπρεπε να υπολογιστούν για αυτό το είδος της παραμόρφωσης.

Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι τόσο δύσκολο με το μοντέλο του Eyring λόγω της ευκολίας του υπολογισμού των σταθερών του υλικού.

Κεφάλαιο 4^ο

Εφαρμογή του μοντέλου Eyring σε ερπυσμό και χαλάρωση ελαστομερούς



*Unknown Destination
Yves Bouchard*

Εφαρμογή του μοντέλου Eyring σε ερπυσμό και χαλάρωση ελαστομερούς

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο κάνουμε ακόμα μία εφαρμογή του μοντέλου Eyring σε πειράματα ερπυσμού και χαλάρωσης που έγιναν στο υλικό *Hydrogenated Nitrile Butadiene Rubber (HNBR)*. Τα πειράματα και τα αποτελέσματα αυτών εισήχθησαν από την εργασία του Khan[24] και των συνεργατών του. Το υλικό αυτό επιλέχθηκε διότι παρουσιάζει ιξωδοελαστική συμπεριφορά χωρίς να παρουσιάζει πλαστικότητα.

Ακολουθεί η προσομοίωση της συμπεριφοράς του υλικού κατά την μονοτονική φόρτιση σε θερμοκρασία δωματίου.

4.2 Εφαρμογή του μοντέλου Eyring στην μονοτονική φόρτιση του HNBR soft

Αρχικά έγινε μία προσομοίωση της συμπεριφοράς του υλικού κατά την μονοτονική φόρτιση με την οποία προσδιορίσαμε και τις παραμέτρους του υλικού που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

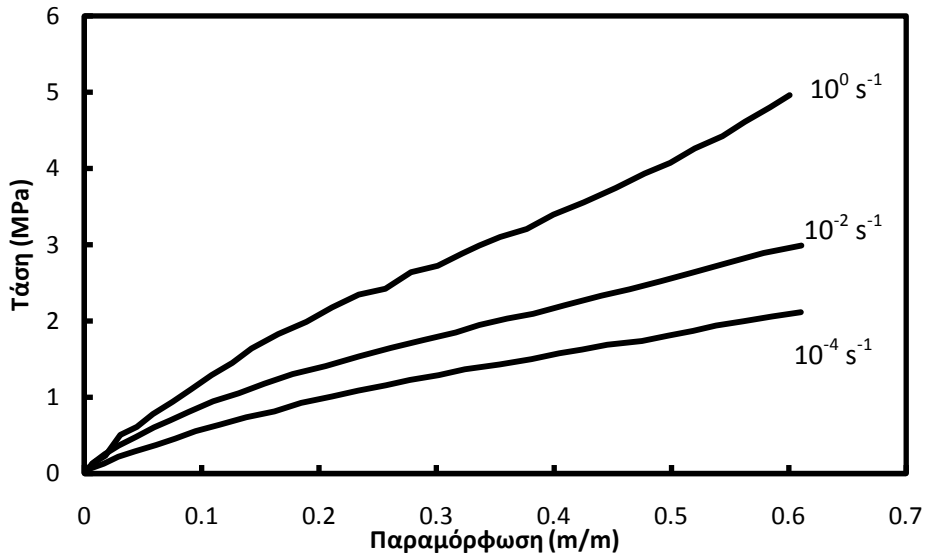
Παράμετροι υλικού				
n_1	n_2	E_2	A	b
3.2 MPa	0.2	0.5 MPa	$10^{-0.01}$	0.03 m ³ /J

Πίνακας 4.1 Παράμετροι υλικού όπως αυτοί υπολογίστηκαν για το HNBR

Τα πειράματα μονοτονικής φόρτισης έγιναν υπό τρεις διαφορετικούς ρυθμούς παραμόρφωσης $\dot{\epsilon}_1 = 10^{-4} s^{-1}$, $\dot{\epsilon}_2 = 10^{-2} s^{-1}$, $\dot{\epsilon}_3 = 10^0 s^{-1}$ στο υλικό HNBR soft και παρουσιάζονται στο συγκεντρωτικό διάγραμμα στο παρακάτω σχήμα.

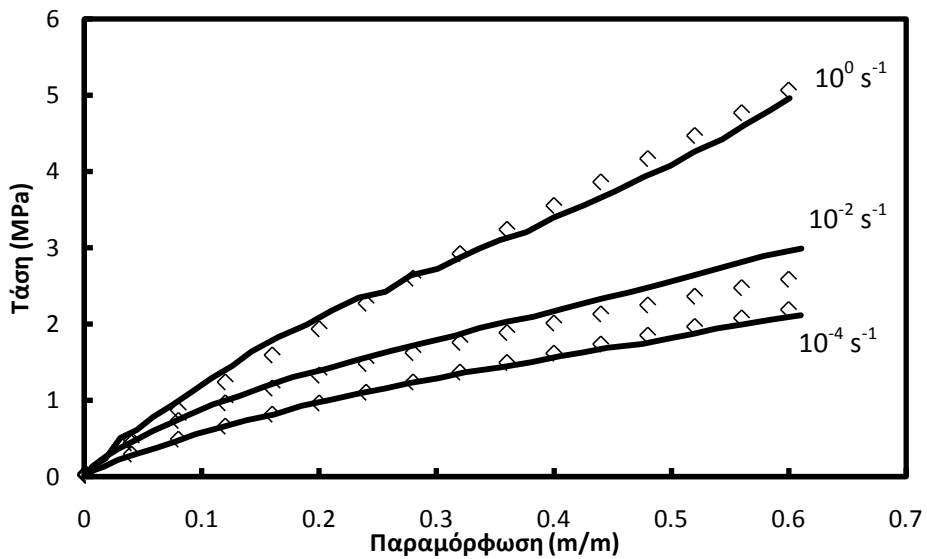
Φαίνεται και εδώ πως ο ρυθμός παραμόρφωσης επηρεάζει την ελαστικότητα του υλικού. Αυτό φαίνεται λόγω της αύξησης της κλίσης κάθε καμπύλης όσο ελαττώνεται ο ρυθμός παραμόρφωσης.

Εφαρμογή του μοντέλου Eyring σε ερπυσμό και χαλάρωση ελαστομερούς



Σχήμα 4.1 Πείραμα μονοτονικής φόρτισης (θλίψης) υπό τρεις διαφορετικούς ρυθμούς παραμόρφωσης

Ακολουθεί η προσομοίωση των παραπάνω πειραματικών δεδομένων με το μοντέλο Eyring



Σχήμα 4.2 Προσομοίωση του πειράματος μονοτονικής φόρτιση με το μοντέλο Eyring

Ομοίως και εδώ με γραμμές συμβολίζουμε τα πειραματικά δεδομένα και με σύμβολα τα θεωρητικά όπως προέκυψαν από την καταστατική σχέση για το μοντέλο του Eyring (βλ. κεφάλαιο 3)

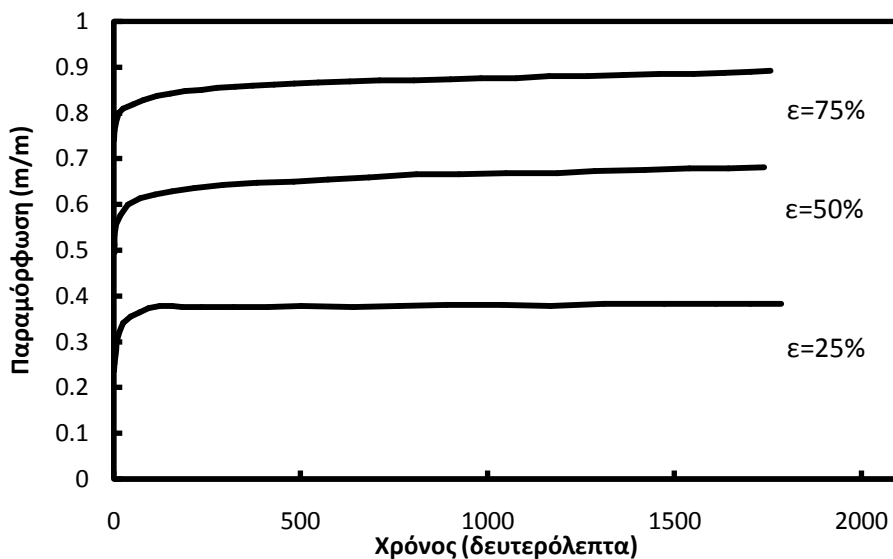
Φαίνεται πως το μοντέλο Eyring παρουσιάζει και σε αυτό το ιξωδοελαστικό υλικό μια πολύ καλή ακρίβεια στη προσομοίωση της μονοτονικής φόρτισης.

Ακολουθεί η προσομοίωση της συμπεριφοράς του υλικού σε ερπυσμό.

4.3 Εφαρμογή του μοντέλου Eyring στον ερπυσμό του HNBR soft.

Η καταπόνηση του υλικού κατά τον ερπυσμό έγινε με τρεις διαφορετικούς ρυθμούς παραμόρφωσης. Οι ρυθμοί παραμόρφωσης φυσικά δεν παρουσιάζονται κατά την διάρκεια του ερπυσμού αλλά την πολύ μικρή χρονική στιγμή όπου το υλικό αποκτά την αρχική του τάση – παραμόρφωση ώστε να αρχίσει ο ερπυσμός υπό σταθερή πλέον παραμόρφωση.

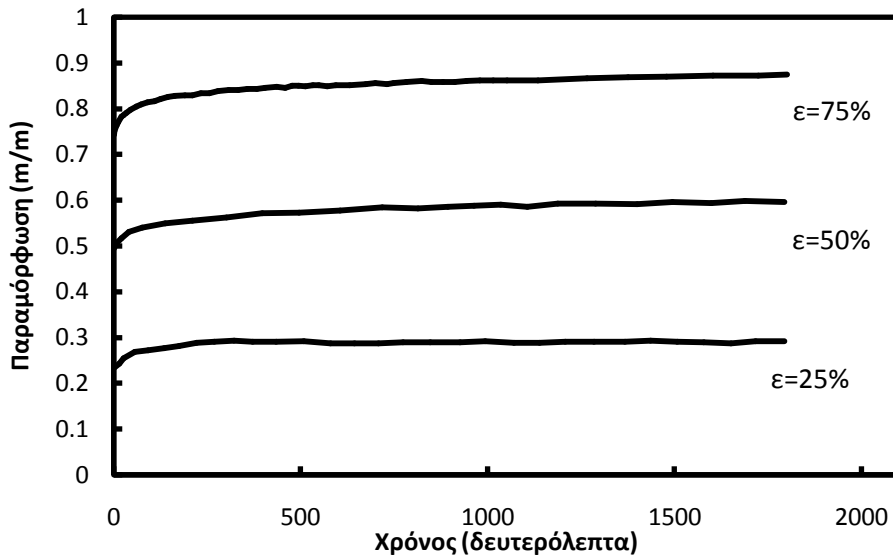
Στα παρακάτω σχήματα γίνεται σαφές το πως διενεργήθηκαν τα πειράματα.



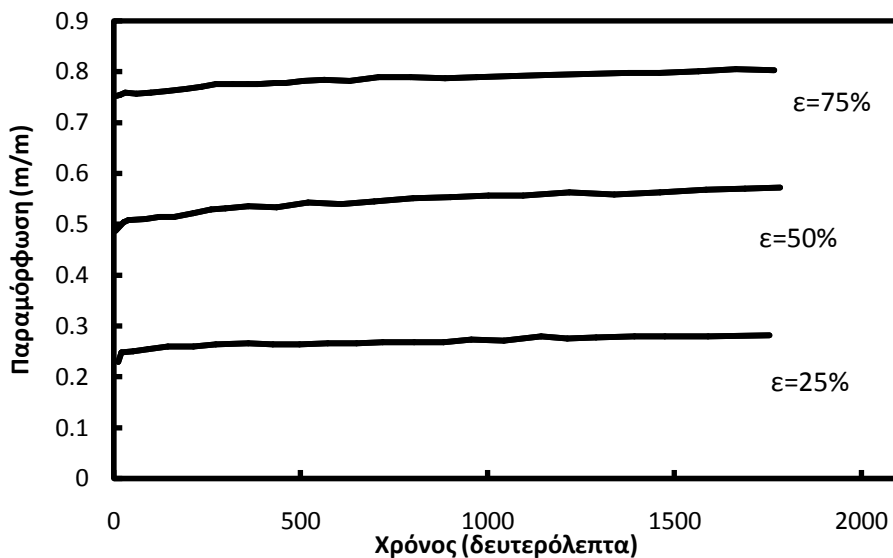
Σχήμα 4.3 Διάγραμμα ερπυσμού με αρχική παραμόρφωση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^0 s^{-1}

Όπως φαίνεται λοιπόν ο ερπυσμός γίνεται από τρία διαφορετικά αρχικά ύψη-παραμορφώσεις (75%,50%,25%).

Ομοίως παρουσιάζονται και τα πειράματα ερπυσμού για ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-2} και 10^{-4} s^{-1} .

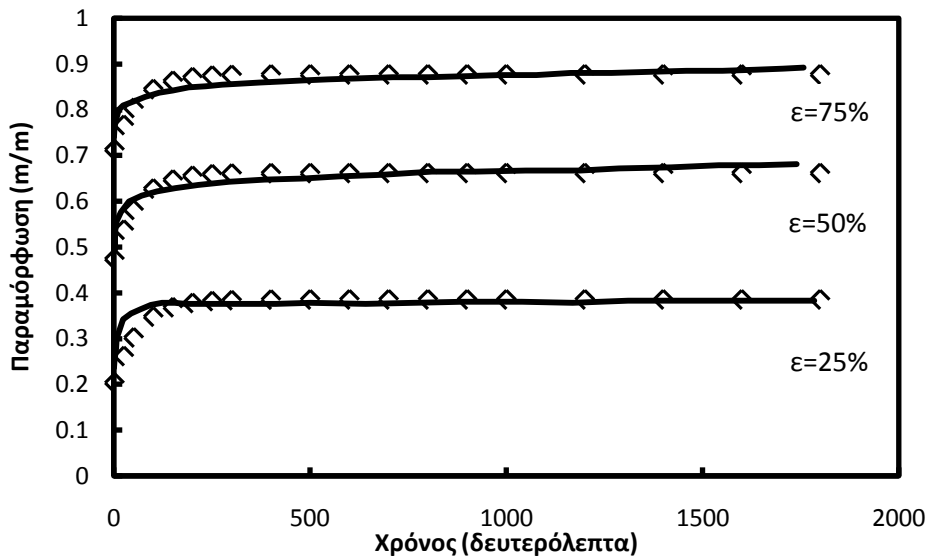


Σχήμα 4.4 Διάγραμμα ερπυσμού με αρχική παραμόρφωση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-2} s^{-1}

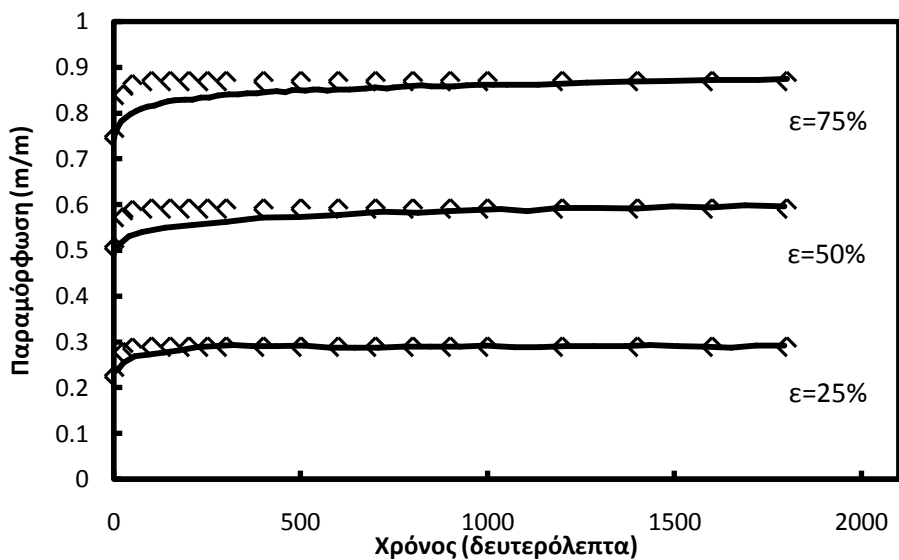


Σχήμα 4.5 Διάγραμμα ερπυσμού με αρχική παραμόρφωση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-4} s^{-1}

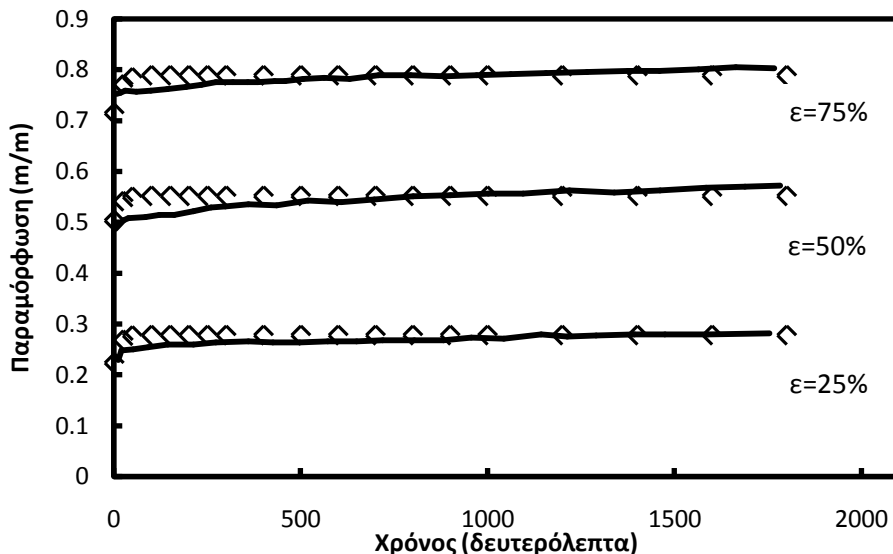
Ακολουθούν οι προσομοιώσεις των προηγούμενων πειραμάτων ερπυσμού με το μοντέλο Eyring



Σχήμα 4.6 Διάγραμμα προσομοίωσης ερπυσμού με αρχική παραμόρφωση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^0 s^{-1}



Σχήμα 4.7 Διάγραμμα προσομοίωσης ερπυσμού με αρχική παραμόρφωση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-2} s^{-1}



Σχήμα 4.8 Διάγραμμα προσομοίωσης ερπυσμού με αρχική παραμόρφωση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-4} s^{-1}

Είναι φανερό πως για την ίδια αρχική παραμόρφωση έχουμε διαφορετική τιμή τάσης ανάλογα με τον ρυθμό παραμόρφωσης. Έτσι για να λάβουμε εκτός από την αρχική τιμή της παραμόρφωσης και την αντίστοιχη της τάσης χρησιμοποιούμε το διάγραμμα μονοτονικής φόρτισης και βρίσκουμε από εκεί τις τιμές.

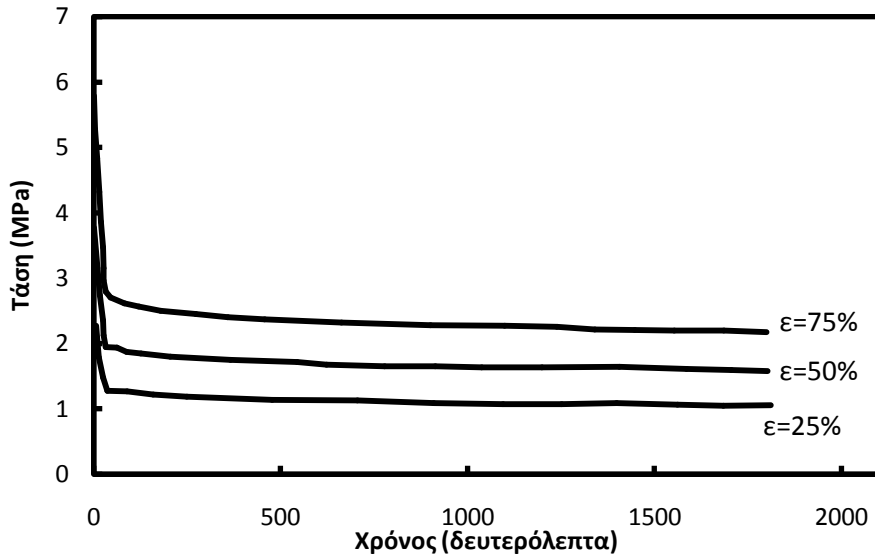
Όπως φαίνεται έχουμε μία πολύ καλή ακρίβεια στη προσομοίωση του ερπυσμού ιδίως για μεγάλες τιμές του χρόνου. Ο πρωτογενής ερπυσμός παρουσιάζει διαφοροποιήσεις τις οποίες θα συζητήσουμε στα τελικά συμπεράσματα αυτού του κεφαλαίου. Το σημαντικό είναι πως ο προσδιορισμός των σταθερών που περιγράφουν το υλικό από μία σειρά μονοτονικών φορτίσεων μπορεί να μας δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα και στον ερπυσμό.

Όπως θα φανεί και στην επόμενη παράγραφο οι παράμετροι αυτές λειτουργούν πολύ καλά και στην χαλάρωση του ίδιου υλικού.

4.4 Εφαρμογή του μοντέλου Eyring στην χαλάρωση τάσης του HNBR soft.

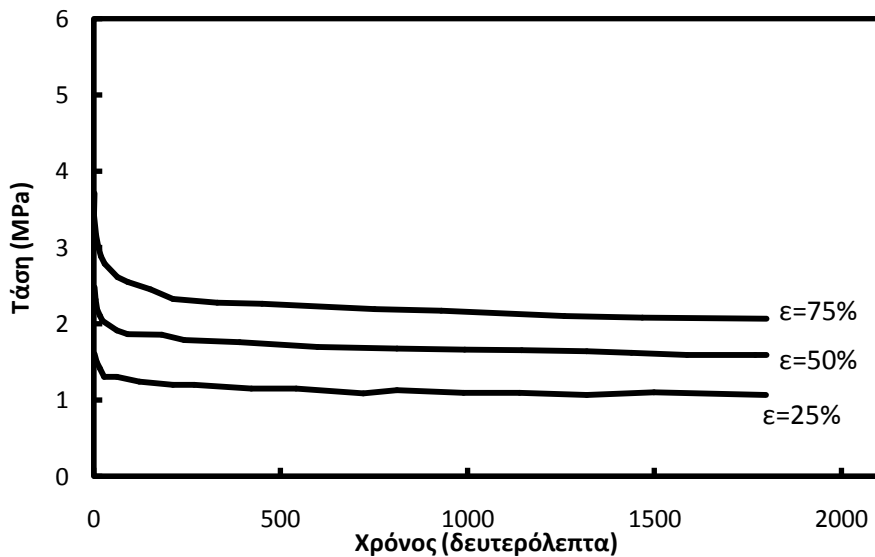
Ομοίως με τα πειράματα ερπυσμού αυτού του υλικού έτσι και με την χαλάρωση, τα πειράματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες κάθε μία υπό διαφορετικό ρυθμό παραμόρφωσης. Τα πειράματα παρουσιάζονται παρακάτω

- Χαλάρωση από ρυθμό παραμόρφωσης 10^0 s^{-1}

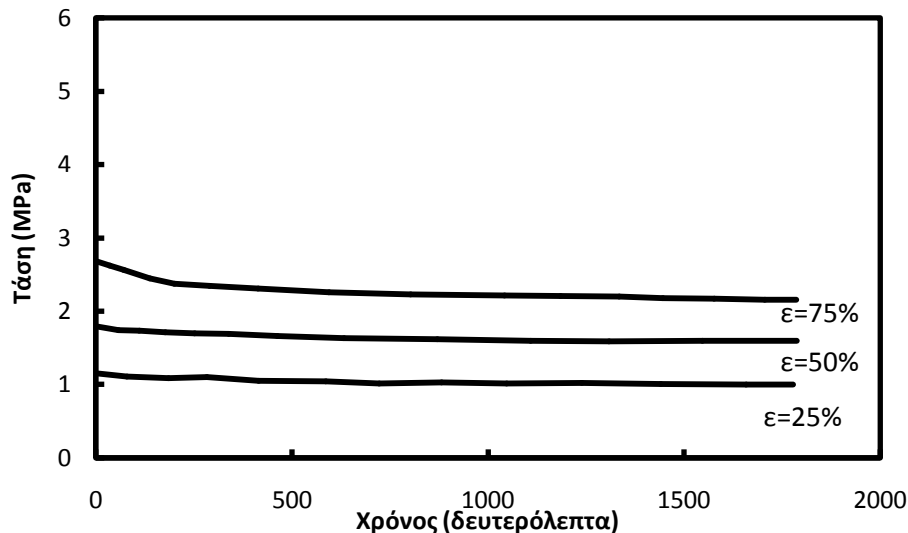


Σχήμα 4.9 Διάγραμμα χαλάρωσης με αρχική τάση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^0 s^{-1}

- Χαλάρωση από ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-2} s^{-1}



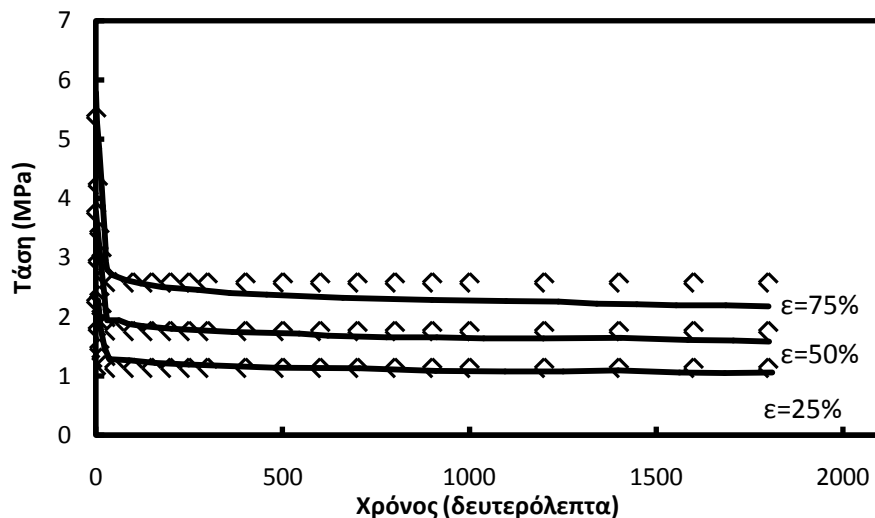
Σχήμα 4.10 Διάγραμμα χαλάρωσης με αρχική τάση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-2} s^{-1}



Σχήμα 4.11 Διάγραμμα χαλάρωσης με αρχική τάση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-4} s^{-1}

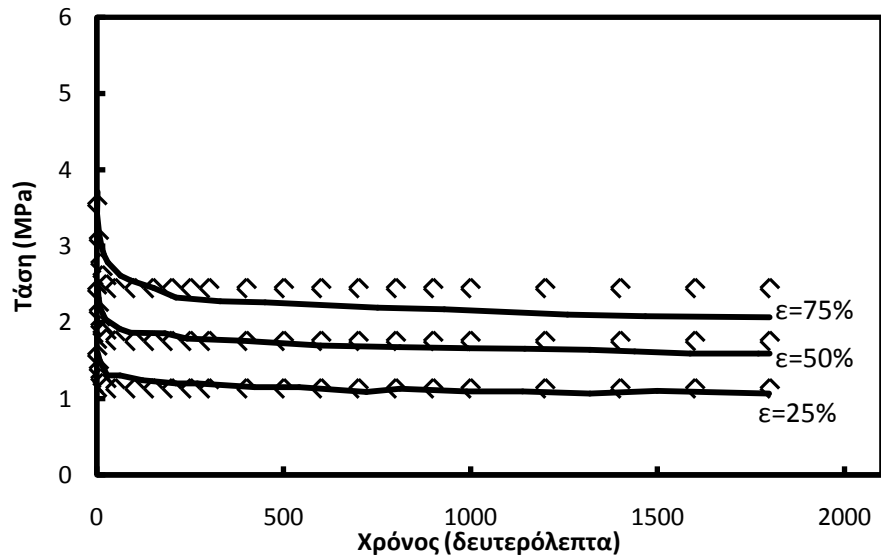
Ο διαχωρισμός τους ως προς τον ρυθμό παραμόρφωσης γίνεται διότι μέχρι να αποκτήσει την αρχική παραμόρφωση το υλικό εφαρμόζεται μονοτονική τάση με συγκεκριμένο ρυθμό παραμόρφωσης. Φαίνεται από το διάγραμμα πως για ρυθμούς παραμόρφωσης μικρότερους του 10^{-2} η έννοια της ακαριαίας παραμόρφωσης εκφυλίζεται, παρά όλα αυτά η προσομοίωση γίνεται και για τις τρεις περιπτώσεις και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω

- Για ρυθμό παραμόρφωσης 10^0 s^{-1}



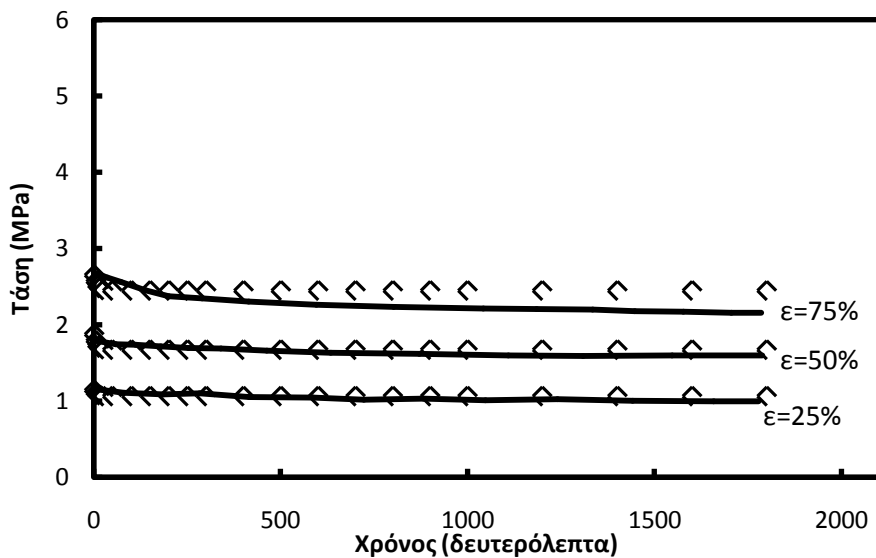
Σχήμα 4.12 Διάγραμμα χαλάρωσης με αρχική τάση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^0 s^{-1}

- Για ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-2} s^{-1}



Σχήμα 4.13 Διάγραμμα χαλάρωσης με αρχική τάση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-2} s^{-1}

- Για ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-4} s^{-1}



Σχήμα 4.13 Διάγραμμα χαλάρωσης με αρχική τάση αποκτούμενη με ρυθμό παραμόρφωσης 10^{-4} s^{-1}

Φαίνεται και ποιοτικά αλλά και αριθμητικά πόσο καλή είναι η ακρίβεια της προσομοίωσης του μοντέλου Eyring και στην χαλάρωση.

4.5 Συμπεράσματα

Να σημειώσουμε εδώ πως το μοντέλο χρειάστηκε μόνο πέντε παραμέτρους για το υλικού για να περιγράψει τρεις διαφορετικές καταπονήσεις οι οποίες διαφοροποιούνται σε τρεις κατηγορίες. Το μοντέλο με αναμενόμενες αποκλίσεις περιγράφει ικανοποιητικά την συμπεριφορά του υλικού στον ερπυσμό αλλά και στην χαλάρωση.

Στα πειράματα του ερπυσμού παρουσιάζεται μία απόκλιση κατά τον πρωτογενή ερπυσμό. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι η μη-γραμμική ιξωδοελαστικότητα του αποσβεστήρα του Eyring δεν μπορεί να περιγράψει μόνη της με μεγάλη ακρίβεια την συμπεριφορά του υλικού στον πρωτογενή ερπυσμό. Πιθανόν, αν εισάγουμε έναν ακόμα μη-γραμμικό ιξωδοελαστικό παράγοντα εκτός υπερβολικού ημιτόνου \sinh να είχαμε καλύτερη ακρίβεια σε αυτό το κομμάτι.

Σε κάθε περίπτωση όμως πρέπει να γίνει κατανοητό πως αυτό το μοντέλο με αυτή τη μη-γραμμική ιξωδοελαστικότητα και με τον προσδιορισμό πέντε μόνο παραμέτρων του υλικού προσομοιώνει ένα πλήθος από διαφορετικές δοκιμές με αξιοσημείωτη ακρίβεια αλλά και ευκολία.

Κεφάλαιο 5^ο

Συμπεράσματα



Elevating

Συμπεράσματα

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να καταλήξουμε σε μερικά συμπεράσματα που απαντούν σε ερωτήματα που δημιουργήθηκαν σε αυτή την εργασία.

Ποιος ο λόγος δημιουργίας ενός ακόμα μη-γραμμικού ιξωδοελαστικού μοντέλου τη στιγμή που υπάρχουν κάποια που περιγράφουν την ιξωδοελαστικότητα;

Τα μη-γραμμικά μοντέλα που υπάρχουν περιγράφουν την ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών με καλή ακρίβεια αλλά με τον προσδιορισμό αρκετών σταθερών του υλικού. Ο λόγος λοιπόν για την δημιουργία του μοντέλου Eyring είναι ότι το μοντέλο αυτό παρουσιάζει μια καλή μη-γραμμική συμπεριφορά χωρίς να χρειάζεται αρκετές παραμέτρους. Συγκεκριμένα με πέντε παραμέτρους σε αντίθεση με τις δέκα του μοντέλου Khan περιγράφει τις καταπονήσεις που περιγράφει και ο Khan με την ίδια ακρίβεια και σε μερικά σημεία ακόμα καλύτερη. Είναι λογικό πως ο μικρός αριθμός παραμέτρων καθιστά το μοντέλο πιο εύχρηστο και σε συνδυασμό με την πολύ καλή ακρίβεια που επιτυγχάνεται τελικώς πιο αποτελεσματικό.

Ποια είναι τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της ιξωδοελαστικότητας και ποια είναι η σημασία της ενιαίας περιγραφής τους;

Η μονοτονική φόρτιση, ο ερπυσμός και η χαλάρωση τάσης αποτελούν τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της ιξωδοελαστικότητας. Η σημασία της ενιαίας περιγραφής τους είναι τεράστια καθώς με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο μας σε ένα πλήθος υλικών και έτσι, όπως έχουμε αναφέρει και στον πρόλογο, να μπορέσουμε να περιγράψουμε την συμπεριφορά του υλικού αποτελεσματικά έτσι ώστε να μπορέσουμε να την προβλέψουμε κιάλας.

Τι επιτυγχάνεται σε αυτή την εργασία;

Στη παρούσα εργασία επιχειρείται η ενιαία περιγραφή των χαρακτηριστικών της ιξωδοελαστικότητας με αρκετή επιτυχία τη στιγμή που το θέμα αυτό δεν έχει πλήρως αντιμετωπιστεί. Η επιτυχία αυτού του μοντέλου είναι ότι καταφέρνει σε δύο διαφορετικά υλικά να προσομοιώσει την ιξωδοελαστική συμπεριφορά με αρκετή ακρίβεια ακόμα και σε καταπονήσεις που ο συγγραφέας της εκάστοτε εργασίας δεν επιχειρεί να προσομοιώσει. Αξίζει να σημειωθεί πως για το υλικό του 3^{ου} κεφαλαίου Adiprene L100 ο Khan και οι συνεργάτες του παρόλο το πλήθος των μεταβλητών που προσδιορίζει δεν μπορεί να προσομοιώσει την αποφόρτιση του υλικού, πράγμα το οποίο πετυχαίνουμε με το δικό μας μοντέλο και μάλιστα σε συνδυασμένη καταπόνηση με μονοτονική φόρτιση και χαλάρωση για διαφορετική παραμόρφωση κάθε φορά.

Τι μπορεί να γίνει σε μελλοντική μελέτη;

Η παρούσα εργασία προσφέρει κάποια νέα στοιχεία στην έρευνα όμως υπάρχουν πάντα περιθώρια βελτίωσης και νέες ιδέες. Όπως ίσως παρατηρήθηκε τα υλικά που χρησιμοποιήσαμε για μελέτη σε αυτή την εργασία παρουσίαζαν μόνο ιξωδοελαστική συμπεριφορά και καθόλου πλαστική. Αυτό έγινε σκόπιμα διότι το μοντέλο αυτό δεν λαμβάνει υπόψη την πλαστικότητα με αποτέλεσμα να μην μπορεί να περιγράψει ένα ιξωδοελαστοπλαστικό υλικό. Σε μία μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να ληφθεί υπόψη και θεωρία πλαστικότητας στο μοντέλο ώστε να περιγράψει και αυτά τα υλικά. Επίσης, πιθανώς η εισαγωγή ενός ακόμα μη-γραμμικού παράγοντα στο μοντέλο να μπορέσει να προσφέρει ακόμα μεγαλύτερη ακρίβεια στις προσομοιώσεις.

Παράρτημα



*Workshop at rest
Yves Bouchard*

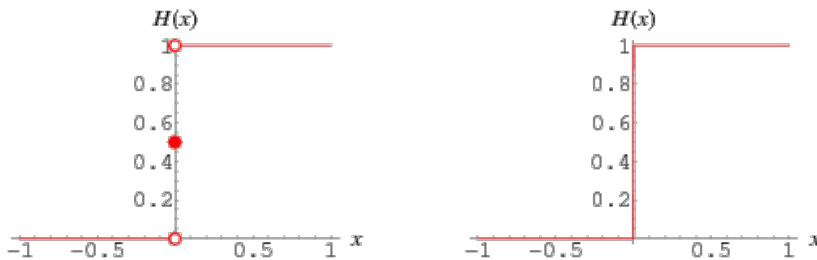
Μαθηματικό συμπλήρωμα

Η συνάρτηση Heaviside

Η συνάρτηση Heaviside (Heaviside Step Function) $H(x)$, η οποία πολλές φορές δηλώνεται και με $u(x)$, είναι μία ασυνεχής συνάρτηση γνωστή και ως συνάρτηση βήματος, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Τα γραφήματα παρακάτω δείχνουν την συνάρτηση όπως ορίζεται (αριστερό σχήμα) και πως θα έδειχνε η συνάρτηση μέσα από ένα ταλαντοσκόπιο (δεξί σχήμα)[25].



Η συνάρτηση Heaviside έχει διπλό ρόλο, τόσο σαν γενική συνάρτηση όσο και σαν συνάρτηση με κλάδους. Για την δεύτερη περίπτωση, η σύμβαση $H(0)=1$ χρησιμοποιείται αντί του $H(0)=1/2$. Η παράγωγος της συνάρτησης βήματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{dH}{dx} = \delta(x)$$

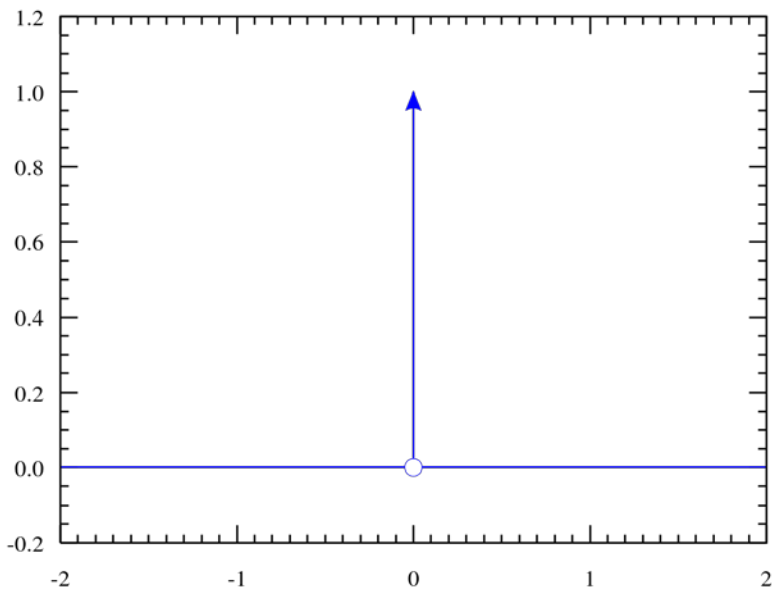
Όπου $\delta(x)$ η συνάρτηση Dirac ή αλλιώς κρουστική συνάρτηση

Η **κρουστική συνάρτηση** [26] είναι μαθηματική περιγραφή κάποιας ποσότητας η οποία μεταβάλλεται σαν να μετέχει σε φαινόμενο κρούσης. Η μεταβλητή αυτή ποσότητα, αν ήταν φυσική, θα είχε ελάχιστη διακύμανση σε όλη τη διάρκεια του χρόνου πριν την κρούση, τη στιγμή της κρούσης θα αυξανόταν ακαριαία στη μέγιστη τιμή και αμέσως μετά θα έπαιρνε σχεδόν αμέσως την ελάχιστη τιμή διακύμανσης και πάλι.

Η μαθηματική περιγραφή για την τιμή της κρουστικής παραμέτρου ενός τέτοιου φυσικού μοντέλου, που είναι πιο αυστηρή, περιγράφεται από ένα συναρτησιοειδές το οποίο οριακά έχει παντού την τιμή μηδέν εκτός από το σημείο αναφοράς στο οποίο η τιμή του γίνεται άπειρη (προς τα θετικά). Επιπλέον, το ολοκλήρωμα της κρουστικής συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού είναι 1. Η κρουστική συνάρτηση συμβολίζεται με δ . Η κρουστική συνάρτηση έχει τις ακόλουθες μαθηματικές ιδιότητες (οι οποίες ουσιαστικά την ορίζουν):

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$



Γραφική παράσταση της κρουστικής συνάρτησης $\delta(x)$ Dirac function

Κώδικας Mathematica

Εδώ παρουσιάζουμε μερικά από τα notebooks που χρησιμοποιήθηκαν στο Mathematica και αφορούν το **τρίτο κεφάλαιο**.

Κύριο μέρος κώδικα για την μονοτονική φόρτιση

```

CREATING CORRELATION DATA

Clear[stress1, strn, r, t, E1, dE1, dstress1]

n1=4.47;
n2=-0.41;
E2=3.5;
a=10^-0.8;
b1=0.05;
stress1=0;
dt=1;
r=0.00001;
strn=r*t;
E1=n1*strn^n2;
dE1=n1*n2*strn^(n2-1)*r;
imax1=0.6/r/dt;
load1=N[Table[{t=dt i,
  dstress1=strn*dE1+r *E2 (1+E1/E2)-(E2 a)Sinh[b1 (stress1-
r *t* e1)}];

  stress1=stress1+dstress1 dt;

stress1, strn}], {i, 1, imax1}]];

```

Κύριο μέρος κώδικα για την χαλάρωση τάσης

```

Clear[stress1, t, E1, dstress1]

n1=4.47;
n2=-0.41;
E2=3.5;
a=10^-0.8;
b1=0.05;
dt=1;
imax=8000/dt;

```

```
e0=0.093;
stress1=1.2;
E1=n1*e0^n2;
relax1=N[Table[{t=dt i,
  dstress1=- (E2 a)Sinh[b1 (stress1-e0 E1)];

  stress1=stress1+dstress1 dt;
  stress=stress1;

  stress},{i,1,imax}]];
```

Κύριο μέρος κώδικα για την βηματική χαλάρωση

```
w0=0;w1=0.143;w2=0.293;w3=0.45;w4=0.59;
n1=4.47;
n2=-0.41;
e2=3.5;
a=10^-0.8;
b1=0.05;
dt1=.001;r=1;

Clear[stress, strn, E1, dE1, dstress, t, load, relax]

stress=0;
strn=r*t;
E1=n1*strn^n2;
dE1=n1*n2*strn^(n2-1)*r;
load=N[Table[{t=dt1* i;
  dstress=strn*del+r *E2 (1+E1/E2)-(E2 a)Sinh[b1 (stress-r
*t* E1)];

  stress=stress+dstress*dt1;

  stress, strn},{i,1,w1/r/dt1}]];

load1=load;

stressrel1=load[[w1/r/dt1,1]];

Clear[stress, strn, E1, dE1, dstress, t, load, relax]

stress=stressrel1;
E1r=n1*w1^n2;
dtr=1;
e0=w1;
relax=N[Table[{t=dtr*i,
  dstress=- (E2 a)Sinh[b1 (stress-e0*E1r)];
```

```

    stress=stress+dstress* dtr;
    stress},{i,1,7200/dtr}]];

relax1=relax;

minstress=relax[[7200/dtr,2]];

Clear[stress, strn, E1, dE1, dstress, t, load, relax]

stress=0;
strn=r*t;
E1=n1*strn^n2;
dE1=n1*n2*strn^(n2-1)*r;
load=N[Table[{t=dtl* i;
    dstress=strn*dE1+r *E2 (1+E1/E2)-(E2 a)Sinh[b1 (stress-
strn* e1)]];

    stress=stress+dstress*dtl;
    strnOfs=w1+strn;
    stressOfs=stress+minstress;

    stressOfs, strnOfs},{i,1,(w2-w1)/r/dtl}]];

load2=load;

stressrell1=load[[w2-w1)/r/dtl,1]];

Clear[stress, strn, E1, dE1, dstress, t, load, relax]

stress=stressrell1;
E1r=n1*w2^n2;
e0=w2;
relax=N[Table[{t=dtr*i,
    dstress=- (E2 a)Sinh[b1 (stress-e0*E1r)];

    stress=stress+dstress* dtr;
    stress},{i,1,7200/dtr}]];

relax2=relax;

minstress=relax[[7200/dtr,2]];

```

Κύριο μέρος κώδικα για την κυκλική φόρτιση

```

Clear[stressMonoload1, strainMonoload, monoload, e1, t, deML1, d
stressMonoload1, relax, drelaxStress1, e0, relaxStress1, relaxS
tress, stressMonoUnload1, strainMonoUnload, tUn, deMU1, monoUnl
oad, dstressMonoUnload1, strn, stressMonoUnload, stressUn]

n1=4.323;n2=-0.41;
E2=3.5;a=10^-1.5;b1=0.03;
dt=.0001;r=1;imax=1930;

stressMonoload1=0;strainMonoload=r*t;E1=n1*strainMonoload^
n2;
deML1=n1*n2*strainMonoload^(n2-1)*r;

monoload=N[Table[{t=dt i,
dstressMonoload1=strainMonoload*deML1+r *E2 (1+E1/E2)-(E2
a)Sinh[b1 (stressMonoload1-r *t* E1)];

stressMonoload1=stressMonoload1+dstressMonoload1*dt;

strainMonoload=r*t;
stressMonoload=stressMonoload1;

stressMonoload, strainMonoload}], {i, 1, imax}]];

e0=monoload[[imax, 3]] ;relaxStress1=monoload[[imax, 2]];
E1=4.323*e0^(-0.41);dt=10;

relax=N[Table[{t=dt i,
drelaxStress1=- (E2 a)Sinh[b1 (relaxStress1-e0 E1)];

relaxStress1=relaxStress1+drelaxStress1*dt;

relaxStress=relaxStress1;

relaxStress}], {i, 1, 800}]];

n1=2.9;n2=-0.41;
E2=3.5;a=10^-1.5;b1=0.03;
dt=.0001;r=1;
stressMonoUnload1=0;r=1;strainMonoUnload=r*tUn;
E1=n1*strainMonoUnload^n2;
deMU1=n1*n2*strainMonoUnload^(n2-1)*r;dt=.0001;

monoUnload=N[Table[{tUn=dt i,

```

```

dstressMonoUnload1=strainMonoUnload*deMU1+r *E2
(1+E1/E2)-(E2 a)Sinh[b1 (stressMonoUnload1-r *tUn* E1)];

stressMonoUnload1=stressMonoUnload1-
dstressMonoUnload1*dt;

strainMonoUnload=r*tUn;
strn=e0-strainMonoUnload;
stressMonoUnload=stressMonoUnload1+relax[[800,2]];
stressUn:=If[stressMonoUnload<0,0,stressMonoUnload];

stressUn,strn},{i,1,imax}}];

```

Ακολουθεί ο κώδικας που αφορά τα αποτελέσματα στο τέταρτο κεφάλαιο

Κύριο μέρος κώδικα ερπυσμού

```

n1=3.2;
n2=-0.2;
E2=0.5;
a=10^-0.01;
b1=.03;
dt=1;

ClearAll[strn, stress, E1, dstrain]

strn=0.20 ;
stress=1.7;
E1=n1*strn^(n2);
imax=1800/dt;

creep1=N[Table[{t=dt i,
dstrain=(a*E2*Sinh[b1 (stress-
strn*E1)])/(n1*n2*strn^n2+E1+E2);

strn=strn+dstrain*dt;

stress,strn},{i,1,imax}}];

```

Οι κώδικες χαλάρωσης και μονοτονικής φόρτισης για αυτό το κεφάλαιο είναι όμοιοι με αυτούς του 3^{ου} κεφαλαίου όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Βιβλιογραφία

- [1] Κοντού Ε, Σπαθής Γ. (2001) *Ανελαστική συμπεριφορά των υλικών*
- [2] Μανωλοπουλος Β. (2006) *Εφαρμογή των ιξωδοελαστικών μοντέλων σε μικρές και μεγάλες παραμορφώσεις, Μεταπτυχιακή εργασία*
- [3] Ward, I.M. and Onat, E.T. (1963) *Non-linear mechanical behaviour of oriented polypropylene. J. Mech. Phys. Solids, 11, 217–219.*
- [4] Turner, S. (1966) *The strain response of plastics to complex stress histories. Polym. Eng. Sci., 6, 306.*
- [5] Pao, Y.H. and Marin, J. (1952) *Deflection and stresses in beams subjected to bending and creep. J. Appl. Mech., 19, 478.*
- [6] Pao, Y.H. and Marin, J. (1953) *An analytical theory of the creep deformation of materials. J. Appl. Mech., 20, 245..*
- [7] Findley, W.N. and Khosla, G. (1955) *Application of the superposition principle and theories of mechanical equation of state, strain, and time hardening to creep of plastics under changing loads. J. Appl. Phys., 26, 821.*
- [8] Marin, J. (1937) *Design of members subjected to creep at high temperatures. J. Appl. Mech. Trans. ASME, 59, A21.*
- [9] Wineman, A. (2009) *Nonlinear viscoelastic solids – a review. Mathematics and Mechanics of Solids, 14, 300–366.*
- [10] Drapaca, C.S., Sivaloganathan, S. and Tenti, G. (2007) *Nonlinear Constitutive Laws in Viscoelasticity. Mathematics and Mechanics of Solids, 12, 475–501.*
- [11] Smith, T.L. (1962) *Nonlinear viscoelastic response of amorphous elastomers to constant strain rates. Trans. Soc. Rheol., 6, 61.*
- [12] Kitagawa, M., Mori, T. and Matsutani, T. (1989) *Rate-dependent nonlinear constitutive equation of polypropylene. J. Polym. Sci. B, 27, 85.*

- [13] Leaderman, H. (1943) *Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials and Other High Polymers*, Textile Foundation, Washington, DC.
- [14] Findley, W.N. and Lai, J.S.Y. (1967) A modified superposition principle applied to creep of nonlinear viscoelastic material under abrupt changes in state of combined stress. *Trans. Soc. Rheol.*, 11, 361–381.
- [15] Pipkin, A.C. and Rogers, T.G. (1968) Non-linear integral representation for viscoelastic behaviour. *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 59–72.
- [16] Green, A.E. and Rivlin, R.S. (1957) The mechanics of non-linear materials with memory – Part I. *Arch. Ration Mech. Anal.*, 1, 1–21.
- [17] Hadley, D.W. and Ward, I.M. (1965) Non-linear creep and recovery behaviour of polypropylene fibres. *J. Mech. Phys. Solids*, 13, 397–411.
- [18] Lockett, F.J. (1965) Creep and stress-relaxation experiments for non-linear materials. *Int. J. Eng. Sci.*, 3, 59–75.
- [19] Gradowczyk, M.H. (1969) On the accuracy of the Green–Rivlin representation for viscoelastic materials. *Int. J. Solids Structures*, 5, 873–877.
- [20] Yannas, I.V. and Haskell, V.C. (1971) Utility of the Green–Rivlin theory in polymer mechanics. *J. Appl. Phys.*, 42(2), 610–613.
- [21] Mittal, R.K. and Singh, I.P. (1986) Time-dependent behavior of Nylon-6 under uniaxial and biaxial loadings at constant rate. *Polym. Eng. Sci.*, 26, 318–325.
- [22] Halsey, G., White, H.J. and Eyring, H. (1945) Mechanical properties of textiles, I. *Text Res. J.*, 15, 295.
- [23] Akhtar S. Khan, Oscar Lopez-Pamies, Rehan Kazmi. (2006) Thermo-mechanical large deformation response and constitutive modeling of viscoelastic polymers over a wide range of strain rates and temperatures, *International Journal of Plasticity* 22 (2006) 581–601.
- [24] Akhtar S. Khan, Muneer Baig, Syed Hamid, Hao Zhang. (2010) Thermo-mechanical large deformation responses of Hydrogenated Nitrile Butadiene Rubber (HNBR): Experimental results, *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010) 2653–2659

[25] <http://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html>

[26] http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function