ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
& ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΜΠΣ «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

Γραμμικός και Ακέραιος προγραμματισμός

Διπλωματική εργασία

της φοιτήτριας

Κιλιτζιράκη Στέλλα

Επιβλέπων καθηγητής: Κολέτσος Ιωάννης
Επίκουρος καθηγητής

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ
Κοκκίνης Βασίλειος, Επίκουρος Καθηγητής
Κολέτσος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής
Τυχόπουλος Ευάγγελος, Επίκουρος Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Επιχειρησιακή έρευνα

1.1. Εισαγωγή 4
1.2. Η χρήση της επιχειρησιακής έρευνας 5
1.3. Βήματα της μοντελοποίησης 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Εισαγωγή στο γραμμικό προγραμματισμό

2.1. Εισαγωγή 11
2.2. Το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού 15
2.3. Γραφική επίλυση π.γ.π 19
2.4. Μέθοδος Simplex 24
2.5. Ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου Simplex 36
2.6. Τεχνητές μεταβλητές (Η Μ – Μέθοδος) 40
2.7. Το Δυϊκό πρόβλημα 44
2.8. Η Δυική μέθοδος Simplex 48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Εισαγωγή στον ακέραιο προγραμματισμό

3.1. Εισαγωγή 53
3.2. Το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού της μορφής 0-1 58
3.3. Επίλυση προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού με χρήση γραμμικού προγραμματισμού..... 68
3.4. Η μέθοδος της απαρίθμησης (enumeration)..... 70
3.5. Το πρόβλημα του σταθερού κόστους (The fixed – charge problem)..... 73
3.6. Η μέθοδος των διαδοχικών ορίων (branch and bound)..... 76

3.7. Ο αλγόριθμος των επιπέδων αποκοπής (Cutting Planes algorithm)..... 88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Επίλυση προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού

4.1. Παράδειγμα 1: επίλυση προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού με χρήση της μεθόδου Cutting Planes 96

4.2. Παράδειγμα 2: επίλυση προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού με χρήση της μεθόδου Branch and Bound 106

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Π.1. Excel επίλυσης παραδείγματος 1 115

Π.2. Excel επίλυσης παραδείγματος 2 120

Π.3. Λογισμικό επίλυσης προβλημάτων επιχειρησιακής έρευνας..... 125

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 127

Επιχειρησιακή Έρευνα
[Operations Research (O.R.)]

1.1 Εισαγωγή

Με την έλευση της βιομηχανικής επανάστασης, ο κόσμος γνώρισε μια αξιοσημείωτη ανάπτυξη στον χώρο των επιχειρήσεων. Αναπτύχθηκαν ραγδαία όσο στο μέγεθος τόσο και στην πολυπλοκότητα. Κομμάτι αυτής της αλλαγής ήταν η τεράστια αύξηση του καταμερισμού της εργασίας και ο κατακερματισμός των αρμοδιοτήτων διαχείρισης. Ωστόσο, επακόλουθο πρόβλημα αυτής της ανάπτυξης ήταν, ότι τα επιμέρους τμήματα των επιχειρήσεων προσπαθούσαν να εξελιχθούν σε σχετικά αυτόνομες αυτοκρατορίες με δικούς τους στόχους και προοπτικές αψηφώντας έτσι τους σκοπούς της συνολικής επιχείρησης. Αυτό που είναι ιδανικό για έναν τομέα μιας επιχείρησης συνήθως αποδεικνύεται επιζήμιο για κάποιον άλλο, με αποτέλεσμα να καταλήξουν να δουλεύουν για την ίδια επιχείρηση αλλά για διασταυρωμένους σκοπούς.

Ένα επίσης πρόβλημα ήταν και είναι, ακόμα και σήμερα, η δυσκολία να κατανείμουν σωστά τους διαθέσιμους πόρους στους διάφορους τομείς με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αποτελεσματική η επιχείρηση ως σύνολο.

Αυτού του είδους τα προβλήματα δημιούργησαν την ανάγκη να βρεθούν καλύτεροι τρόποι για την επίλυση τους δίνοντας έναυσμα για μια καινούργια επιστήμη, την Επιχειρησιακή Έρευνα (Operations Research).

Ωστόσο, το ξεκίνημα της επιχειρησιακής έρευνας τοποθετείται περίπου στα χρόνια του δεύτερου παγκόσμιου πόλεμου, όπου ομάδες επιστημόνων κλήθηκαν για να προσεγγίσουν επιστημονικά, προβλήματα τακτικής και στρατηγικής όπως τη βέλτιστη κατανομή των περιορισμένων εφοδίων στις διάφορες στρατιωτικές επιχειρήσεις. Η επιτυχία της επιχειρησιακής έρευνας

στην πολεμική προσπάθεια ώθησε το ενδιαφέρον να εφαρμοστεί τέτοιου είδους έρευνα και στη βιομηχανική επανάσταση που ακολούθησε του πολέμου. Η χρήση της επιχειρησιακής έρευνας εισήχθη σε ποικίλες επιχειρήσεις όπως την βιομηχανία, τις μεταφορές, την οικονομική διαχείριση, τον τομέα της υγείας, των τομέα των κατασκευών και διάφορους άλλους αποδεικνύοντας το εύρος της εφαρμογής της σε πληθώρα επιχειρήσεων.

Υπήρξαν δύο παράγοντες που βοήθησαν στην ταχύτατη ανάπτυξη της επιχειρησιακής έρευνας. Πρώτος σημαντικός παράγοντας ήταν η ουσιαστική πρόοδος που σημειώθηκε νωρίς στην βελτίωση των τεχνικών της επιχειρησιακής έρευνας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ότι πολλές τεχνικές - εργαλεία που χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα στην επιχειρησιακή έρευνα όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, ο δυναμικός προγραμματισμός και ο έλεγχος αποθεμάτων, που ήταν σχετικά καλά ανεπτυγμένες πριν το τέλος της δεκαετίας του 50. Δεύτερος σημαντικός παράγοντας που έδωσε αρκετή ώθηση στην ανάπτυξη του τομέα ήταν η επανάσταση των υπολογιστών. Οι επιστήμονες είχαν να αντιμετωπίσουν πολύπλοκα προβλήματα που απαιτούσαν πολλές και επίπονες αριθμητικές πράξεις. Η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών που μπορούσαν να εκτελούν υπολογισμούς χιλιάδες φορές ταχύτερα από ότι το ανθρώπινο χέρι έδωσε τρομερό πλεονέκτημα στην επιχειρησιακή έρευνα. Ακολούθως, βοήθησε και η μετέπειτα εξέλιξη των πανίσχυρων ατομικών υπολογιστών και των λογισμικών πακέτων που δημιουργήθηκαν πάνω σε τεχνικές τις επιχειρησιακής έρευνας καθιστώντας έτσι εύκολη την πρόσβαση σε αυτά από ένα μεγαλύτερο αριθμό ατόμων και επιχειρήσεων.

Πέρα από την συνεισφορά της στους διάφορους κλάδους της βιομηχανίας, η επιχειρησιακή έρευνα έδωσε ώθηση κ στην περαιτέρω ανάπτυξη διαφόρων κλάδων των μαθηματικών μέσω της προσπάθειας επίλυσης σύνθετων προβλημάτων. Σήμερα αποτελεί αυτοτελή κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών, με μεγάλο θεωρητικό κ πρακτικό ενδιαφέρον.

1.2 Χρήση της επιχειρησιακής έρευνας

Η Επιχειρησιακή έρευνα εφαρμόζεται σε προβλήματα που αφορούν την καθοδήγηση και των συντονισμό των δραστηριοτήτων μέσα σε ένα τομέα μίας επιχείρησης ή γενικότερα σε μία επιχείρηση ως σύνολο. Η φύση της επιχείρησης είναι ουσιαστικά ασήμαντη αφού όπως προαναφέρθηκε η επιχειρησιακή έρευνα εφαρμόστηκε από στρατιωτικές στρατηγικές έως τηλεπικοινωνίες, δημόσιες υπηρεσίες και αρκετές ακόμα επιχειρήσεις.

Αφού προσδιοριστεί το πρόβλημα, το κομμάτι της έρευνας ξεκινάει την προσεκτική παρατήρηση και διατύπωσή του, συμπεριλαμβάνοντας την συλλογή όλων των σχετικών δεδομένων. Έπεται η κατασκευή ενός επιστημονικού μοντέλου με σκοπό την απεικόνιση της έννοιας του αρχικού προβλήματος. Στο επόμενο βήμα, και υποθέτοντας ότι το παραχθέν μοντέλο είναι μία αρκετά ακριβής αναπαράσταση των βασικών χαρακτηριστικών του υπάρχοντος προβλήματος, πραγματοποιούνται κατάλληλα πειράματα για να το ελέγξουν ή και να το τροποποιήσουν εάν είναι απαραίτητο, φτάνοντας έτσι στη κατασκευή του τελικού μαθηματικού μοντέλου. Αυτή η διαδικασία κατά κάποιο τρόπο, συνεπάγεται την δημιουργική ενασχόληση με τις θεμελιώδης αρχές τις κάθε επιχείρησης.

Ακόμη ένα χαρακτηριστικό της επιχειρησιακής έρευνας είναι η οργανωτική δομή. Προσπαθεί να επιλύσει τη σύγκρουση συμφερόντων ανάμεσα στα συνθετικά μέρη μιας επιχείρησης, βοηθώντας έτσι την επιχείρηση στο σύνολο της. Αυτό δεν συνεπάγεται ότι για την επίλυση κάποιου προβλήματος δίνετε κατά βάση προτεραιότητα σε όλες τις πτυχές ενός οργανισμού αλλά ότι οι στόχοι που επιδιώκονται είναι συνεπής με αυτούς της επιχείρησης.

Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά της επιχειρησιακής έρευνας οδηγούν σε ακόμη ένα: είναι εμφανές ότι από κανένα μεμονωμένο άτομο δεν μπορεί να αναμένεται να είναι ειδικός σε όλες τις πτυχές τις επιχειρησιακής έρευνας. Ως εκ τούτου, κάθε ολοκληρωμένη μελέτη της επιχειρησιακής έρευνας σε κάποιο νέο πρόβλημα

απαιτεί μία ομάδα από άτομα που να έχουν διαφορετικές γνώσεις και υπόβαθρο. Έτσι, κάθε ομάδα επιχειρησιακής έρευνας πρέπει να περιλαμβάνει άτομα με γνώσεις μαθηματικών, στατιστικής, θεωρίας πιθανοτήτων, οικονομικών, διοίκησης επιχειρήσεων, πληροφορικής, μηχανικής και των τεχνικών της επιχειρησιακής έρευνας. Τα οφέλη της επιχειρησιακής έρευνας είναι σημαντικά.
Στόχος δεν είναι η πρόσκαιρη βελτίωση της υπάρχουσας κατάστασης αλλά να εξευρίσκει την καλύτερη πορεία δράσης.
Αποτέλεσμα αυτού είναι σαφώς τα οικονομικά οφέλη αλλά και άλλα οφέλη εξίσου σημαντικά για την μετέπειτα πορεία της επιχείρησης όπως οι βελτιωμένες υπηρεσίες προς τους πελάτες και η καλύτερη άσκηση του διαχειριστικού ελέγχου.

1.3 Βήματα της μοντελοποίησης

Οι μαθηματικές τεχνικές αποτελούν ένα βασικό κομμάτι για την επίλυση των προβλημάτων της επιχειρησιακής έρευνας, βρίσκονται όμως στο τέλος της μελέτης του προβλήματος.
Συχνά προαπαιτείται μία ολόκληρη διαδικασία - αλληλουχία φάσεων για κάθε πρόβλημα επιχειρησιακής έρευνας για να φτάσουμε στον κατάλληλο μαθηματικό τύπο και να προχωρήσουμε στην επίλυση του.
Συνοπτικά οι συνήθεις φάσεις μίας τέτοιας μελέτης είναι:

- *Ο καθορισμός του προβλήματος και η συλλογή των σχετικών δεδομένων.*

  Η πρώτη σειρά εργασιών περιλαμβάνει την μελέτη του σχετικού προβλήματος και την ανάπτυξη μίας καλά καθορισμένης μορφής. Αυτό περιλαμβάνει τον προσδιορισμό κατάλληλων στόχων, τους περιορισμούς σε αυτά που μπορούν να γίνουν, τις αλληλεξαρτήσεις που πιθανόν να υπάρχουν ανάμεσα στους διάφορους τομείς μίας επιχείρησης, το χρονικό περιθώριο για την λήψη αποφάσεων και πολλά άλλα. Η διαδικασία προσδιορισμού του προβλήματος είναι εξαιρετικά

σημαντική γιατί επηρεάζει το πόσο σχετικά θα είναι το συμπέρασμα με το αρχικό πρόβλημα.

- *Διατύπωση ενός μαθηματικού μοντέλου*

  Τα μαθηματικά μοντέλα ενός επιχειρησιακού προβλήματος είναι ένα σύστημα εξισώσεων και άλλων σχετικών μαθηματικών εκφράσεων που εκπροσωπούν το πρόβλημα.
  Έτσι, εάν υπάρχουν n ποσοτικές αποφάσεις που πρέπει να παρθούν παριστάνονται ως *μεταβλητές απόφασης*
  (έστω $x_1,x_2,\ldots,x_n$) των οποίων οι τιμές είναι και οι ζητούμενες.
  Έπειτα, η κατάλληλη μέτρηση της απόδοσης (πχ το κέρδος) εκφράζεται ως μία μαθηματική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης (πχ $P = 3x_1+x_2+\ldots+8x_n$). Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται *αντικειμενική συνάρτηση.* Οι όποιοι περιορισμοί των τιμών που μπορούν να πάρουν αυτές οι μεταβλητές απόφασης επίσης εκφράζονται με μαθηματικό τρόπο κυρίως με την βοήθεια εξισώσεων ή ανισοτήτων (πχ $x_1 + 3x_2 \leq 25$) και ονομάζονται *περιορισμοί.* Οι σταθερές στους περιορισμούς και στην αντικειμενική συνάρτηση ονομάζονται *παράμετροι* του μοντέλου. Τελικά το πρόβλημα υπόκειται στην επιλογή των κατάλληλων τιμών για τις μεταβλητές απόφασης έτσι ώστε αυτές να μεγιστοποιούν ή να ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση.

- *Ανάπτυξη υπολογιστικών αλγορίθμων όπου αυτό είναι απαραίτητο.*

- *Έλεγχος του μοντέλου και τροποποίηση του εάν αυτό απαιτείται.*

- *Εφαρμογή του μοντέλου*

1.4 Εφαρμογές Επιχειρησιακής Έρευνας σε υπάρχουσες επιχειρήσεις

Όπως προαναφέρθηκε η επιχειρησιακή έρευνα βρίσκει εφαρμογή σε αρκετούς τομείς όπως η βιομηχανία, οι μεταφορές, η αστική ανάπτυξη, το εμπόριο, η χρηματοδότηση, η υγεία, κ.λπ.. για τη βελτιστοποίηση των διαθέσιμων πόρων και των παροχών, κυρίως για οικονομικούς λόγους.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει μερικά παραδείγματα πραγματικής χρήσης της Επιχειρησιακής Έρευνας από διάφορες οργανώσεις και τα κέρδη ή / και την εξοικονόμηση πόρων που τελικά επιτεύχθηκε ως αποτέλεσμα.

Επιχείρηση	Εφαρμογή	Έτος	Ετήσια κέρδη
Texaco Inc.	Βελτιστοποίηση ανάμιξης συστατικών προκειμένου τα καύσιμα να συμμορφώνονται με τις απαιτήσεις ποιότητας.	1989	$30 εκατομμύρια
IBM	Ενσωμάτωση εθνικού δικτύου ανταλλακτικών για τη βελτίωση των υπηρεσιών υποστήριξης πελατών	1990	$20 εκατομμύρια κ ταχύτερη εξυπηρέτηση πελατών
American Airlines	Σχεδιασμός τιμολόγησης, υπεράριθμων κρατήσεων και συντονισμός πτήσεων	1992	$500 εκατομμύρια επιπλέον έξοδα
AT&T	Ανάπτυξη ηλεκτρονικού	1993	$750

Επιχείρηση	Εφαρμογή	Έτος	Ετήσια κέρδη
	συστήματος για το σχεδιασμό τηλεφωνικών κέντρων για την υποστήριξη πελατών		εκατομμύρια
Procter & Gamble	Επανασχεδιασμός του συστήματος παραγωγής και διανομής της Βόρειας Αμερικής για τη μείωση του κόστους και τη βελτίωση της παρεχόμενης ταχύτητας στην αγορά	1997	$200 εκατομμύρια
Hewlett-Packard	Επανασχεδιασμός του μεγέθους και της θέσης των αποθεμάτων ασφαλείας στη γραμμή παραγωγής εκτυπωτών που συμβαδίζουν με τη ζήτηση	1998	$280 εκατομμύρια

Γραμμικός προγραμματισμός [Linear Programming (L.P.)]

2.1 Εισαγωγή

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα μαθηματικών μοντέλων στην επιχειρησιακή έρευνα. Ένα ιδιαίτερα σημαντικό είδος είναι και το μοντέλο του *γραμμικού προγραμματισμού (linear programming).*

Ιστορική αναδρομή

- 1936 – Ο W.W. Leontief δημοσίευσε τις " Ποσοτικές σχέσεις εισόδου και εξόδου στα οικονομικά συστήματα των ΗΠΑ", το οποίο ήταν ένα γραμμικό μοντέλο χωρίς αντικειμενική συνάρτηση
- 1939 – Ο Kantoravich (Ρωσία) πράγματι διατύπωσε και έλυσε ένα πρόβλημα ΓΠ.
- 1941 – Ο Hitchcock θέτει το πρόβλημα της μεταφοράς (ειδική περίπτωση ΓΠ).
- 2ος Παγκόσμιος Πόλεμος – Οι συμμαχικές δυνάμεις διαμορφώνουν και λύνουν διάφορα προβλήματα ΓΠ που σχετίζονται με το στρατό.

Ο όρος «γραμμικός» σημαίνει ότι οι μαθηματικές συναρτήσεις που εμφανίζονται τόσο στην αντικειμενική συνάρτηση όσο και στους περιορισμούς υποχρεούνται να είναι γραμμικές συναρτήσεις ενώ ο όρος «προγραμματισμός» δεν αναφέρεται σε γλώσσα προγραμματισμού αλλά είναι συνώνυμο του σχεδιασμού. Η πιο κοινή εφαρμογή του περιλαμβάνει προβλήματα κατανομής περιορισμένων πόρων ανάμεσα σε ανταγωνιστικές δραστηριότητες με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο. Τα γραμμικά μοντέλα προγραμματισμού κατασκευάστηκαν για να επιλύσουν ποικίλα προβλήματα, όπως για παράδειγμα τη σύνθεση προϊόντων που μεγιστοποιούν το κέρδος ή την κατανομή των καλλιεργειών σε εκτάσεις που μεγιστοποιούν το συνολικό καθαρό κέρδος. Ο γραμμικός προγραμματισμός βρίσκει εφαρμογή και σε

διάφορα άλλα προβλήματα διαφόρων επιστημών που δεν έχουν και τόσο επιχειρηματικό χαρακτήρα. Χαρακτηριστικό πρόβλημα ιατρικής φύσεως που ανάγεται όμως σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να είναι ο σχεδιασμός ακτινοθεραπείας που επιτίθεται αποτελεσματικά σε έναν όγκο με παράλληλη ελαχιστοποίηση των ζημιών που πιθανόν να προκληθούν στους υγιείς ιστούς που τον περιβάλλουν.

Στην πραγματικότητα, οποιοδήποτε πρόβλημα του οποίου το μαθηματικό μοντέλο ταιριάζει με την πολύ γενική μορφή του γραμμικού μοντέλου προγραμματισμού είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Η πρώτη και πλέον σημαντική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού αναπτύχθηκε από τον George Bernard Dantzig τη δεκαετία του 1940 και ονομάζεται *μέθοδος Simplex*, βασικό εργαλείο μέχρι και σήμερα.

Παράδειγμα:

Μία βιομηχανική επιχείρηση κατασκευάζει τεσσάρων ειδών προϊόντα σε δικές της εγκαταστάσεις χρησιμοποιώντας τρείς τύπους μηχανής για την παραγωγή τους. Η διεύθυνση πωλήσεων όμως αποφασίζει να διακόψει την παραγωγή ενός εξ' αυτών των προϊόντων που δεν αποφέρει τα επιθυμητά κέρδη στην επιχείρηση. Έτσι, περισσεύει χρόνος παραγωγής ο οποίος θα μοιραστεί στα υπόλοιπα τρία προϊόντα των οποίων η παραγωγή θα συνεχιστεί. Η διαθέσιμη παραγωγική ικανότητα των μηχανών της επιχείρησης σε ώρες ανά εβδομάδα είναι:

Τύπος μηχανής	**Παραγωγική ικανότητα (Ώρες ανά εβδομάδα)**
Τύπος 1	200
Τύπος 2	100
Τύπος 3	50

Ο αριθμός των μηχανωρών που απαιτούνται για κάθε μονάδα από τα τρία προϊόντα είναι:

Τύπος μηχανής	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3
Τύπος 1	8	2	3
Τύπος 2	4	3	-
Τύπος 3	2	-	1

Το τμήμα πωλήσεων εκτιμάει ότι μπορούν να πωλούνται 30 μονάδες ανά εβδομάδα για το προϊόν 1, 20 μονάδες ανά εβδομάδα για το προϊόν 2 ενώ για το τρίτο οι ποσότητες που μπορούν να πωληθούν ξεπερνάνε τις ποσότητες που μπορούν να παραχθούν. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι 10, 12 και 8 ευρώ αντίστοιχα για τα προϊόντα 1, 2 και 3.

Με βάση τα δεδομένα της επιχείρησης, πρέπει να βρεθεί ένα κατάλληλο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για τον προσδιορισμό της ποσότητας κάθε προϊόντος που πρέπει να παράγει η επιχείρηση έτσι ώστε να έχει τα μέγιστα δυνατά κέρδη.

Κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου:

Σκοπός είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της επιχείρησης. Συμβολίζουμε με x_1, x_2, x_3 τους αριθμούς των μονάδων από τα προϊόντα 1,2 και 3 που παράγονται ανά εβδομάδα .Επομένως η αντικειμενική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση είναι:

$$f(x) = 10x_1 + 12x_2 + 8x_3$$

Η συνάρτηση αυτή όμως περιορίζεται από άλλες συνθήκες που διατυπώνονται στο πρόβλημα.

Ο πρώτος περιορισμός είναι ότι για τα προϊόντα 1,2 και 3 μπορούν να διατεθούν μόνο 200 ώρες από τον τύπο μηχανής 1.

Οι ώρες που θα εργάζεται η μηχανή 1 είναι:

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

που όμως δεν γίνεται να ξεπερνάνε τις 200 επομένως:

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200$$

Με όμοια σκέψη προκύπτουν και οι άλλοι 2 περιορισμοί:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_3 \leq 50$$

Επίσης, από το προϊόν 1 μπορούν να πωλούνται 30 μονάδες ανά εβδομάδα επομένως:

$$x_1 \leq 30$$

και από το προϊόν 2 μπορούν να πωλούνται 20 μονάδες ανά εβδομάδα άρα

$$x_2 \leq 20.$$

Επιπρόσθετα είναι φανερό ότι οι μεταβλητές αφού εκφράζουν μονάδες προϊόντος θα είναι μη αρνητικές.

$$x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0$$

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα παίρνει τελικά την μορφή

$$\max f(x) = 10x_1 + 12x_2 + 8x_3$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 8x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 200 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 100 \\ 2x_1 & & & + & X_3 & \leq & 50 \\ x_1 & & & & & \leq & 30 \\ & & X_2 & & & \leq & 20 \end{array}$$

και $x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0.$

2.2 Το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Η γενική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) είναι:

Να προσδιοριστούν οι τιμές των μεταβλητών $x_1,x_2,\ldots,x_n$ που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την γραμμική συνάρτηση:

$$f(x) = (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

και συγχρόνως ικανοποιούν:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}x_n & \leq & = , & \geq & b_1 \\
\alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{2n}x_n & \leq & = , & \geq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
\alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}x_n & \leq & = , & \geq & b_m
\end{array}$$

Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι ισχύει $x_1,x_2,\ldots,x_n \geq 0$.

όπου τα α_{ij} , b_i και c_j είναι γνωστές πραγματικές σταθερές.
(i = 1,2,...,m και j = 1,2,...,n)

Συνοπτικά μπορεί να γραφτεί και στη μορφή:

$$\max \text{ ή } \min z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j \leq , = , \geq b_i \ , \quad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \ , \ j = 1,\ldots,n$$

Σημειώνουμε ότι λόγω της ταυτότητας min f(x) = -max (-f(x)) που ισχύει για κάθε γραμμική συνάρτηση f(x), κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Η γραμμική συνάρτηση f(x) που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση (objective function). Οι παραπάνω γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις ονομάζονται συνθήκες ή περιορισμοί (constrains) του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Η περιοχή που ορίζουν αυτοί οι περιορισμοί ονομάζεται εφικτή περιοχή (feasible area) ενώ ως εφικτή λύση (feasible solution) ονομάζεται κάθε λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς. Άριστη λύση (optimal solution) είναι η εφικτή λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση σε ολόκληρη την εφικτή περιοχή. Οι συντελεστές c_j αναφέρονται και ως συντελεστές κέρδους (ή κόστους αντίστοιχα εάν αναφερόμαστε σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης) ενώ τα α_{ij} , b_i είναι οι παράμετροι (parameters) του προβλήματος.

Εάν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς, τότε το πρόβλημα μπορεί να γραφτεί συνοπτικά και σε μορφή πινάκων:

$$w = \max \vec{c}^T \vec{x}$$

$$A\vec{x} \leq , = , \geq \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

$$\text{όπου } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \ \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{και } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Πληθώρα πρακτικών προβλημάτων μπορούν να αναδιατυπωθούν ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, να εκφραστούν με

μαθηματικά μοντέλα και να επιλυθούν με διάφορες μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού.

Τα βασικά στοιχεία ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού

Για μια δεδομένη κατάσταση ενός προβλήματος, υπάρχουν ορισμένες βασικές συνθήκες – στοιχεία που συνθέτουν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

1. Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού προϋποθέτει ότι όλοι οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα. (Στην περίπτωση που μερικοί ή όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή των περιορισμών είναι τυχαίες μεταβλητές το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού.)

2. Γραμμικότητα (αναλογικότητα και προσθετικότητα): Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές x_j, $j = 1,...,n$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας, δηλαδή εάν y είναι μια συνάρτηση n μεταβλητών και α_j, $j = 1,...,n$ είναι σταθερές, πρέπει να ισχύει:

$$y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) = \alpha_1\, y(x_1) + \alpha_2\, y(x_2) + ... + \alpha_2\, y(x_2)$$

   Σε πολλές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει απόλυτα η προϋπόθεση της γραμμικότητας μπορεί να γίνει μια αρκετά καλή προσέγγιση με γραμμικές συναρτήσεις.

3. Περιορισμένοι πόροι: περιορισμένη ποσότητα εργασίας, υλικός εξοπλισμός και χρηματοδότηση.

4. Αντικειμενικός στόχος: αναφέρεται στο στόχο για βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση κέρδους ή ελαχιστοποίηση κόστους).

5. Ομογένεια: προϊόντα, εργάτες, μηχανές και παραγωγικότητα θεωρούνται ότι είναι πανομοιότυπα μεταξύ τους.

6. Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν η υπόθεση της διαιρετότητας δεν ισχύει υπάρχουν δύο ενδεχόμενα :
   a. Να αγνοηθεί η υπόθεση αυτή, να λυθεί το πρόβλημα με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, και οι τιμές των μεταβλητών να στρογγυλευθούν στην κοντινότερη ακέραια μονάδα. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες.
   b. Όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές (π.χ. 0 ή 1) όπως σε πολλά προβλήματα επενδύσεων τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές του ακέραιου προγραμματισμού.

2.3 Γραφική επίλυση

Όταν στην μαθηματική διατύπωση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν δύο μόνο μεταβλητές, και συνεπώς δύο διαστάσεις, τότε μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας γραφική επίλυση.

Παράδειγμα:

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης που προκύπτει από κάποιο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$\max z = 50x_1 + 30x_2$$

με περιορισμούς:

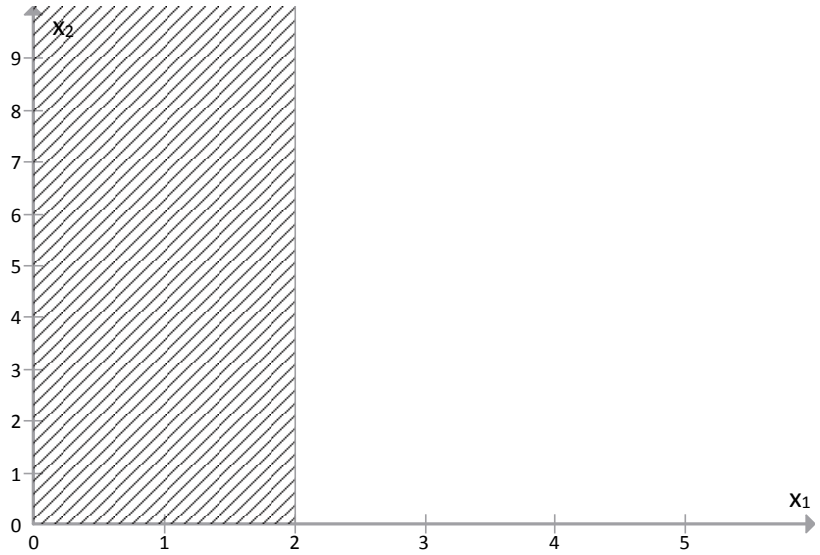
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\leq 13 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 19 \\ x_1 &\leq 2 \end{aligned}$$

και $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Εισάγουμε σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων με άξονες x_1 και x_2 και παρατηρούμε ότι κάθε σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο έχει συντεταγμένες x_1, $x_2 \geq 0$ επομένως ικανοποιεί τους περιορισμούς μη αρνητικότητας των μεταβλητών.

Συνεχίζοντας, βρίσκουμε το σύνολο των ζευγών (x_1,x_2) που ικανοποιούν τους περιορισμούς. Αυτό επιτυγχάνεται εφόσον σύρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα που περικλείουν την περιοχή των επιτρεπτών τιμών. Η σκιαγραφημένη περιοχή στο διάγραμμα 2.1 περικλείει όλες τις τιμές των (x_1,x_2) που επιτρέπονται από τους περιορισμούς $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ και $x_1 \leq 2$.

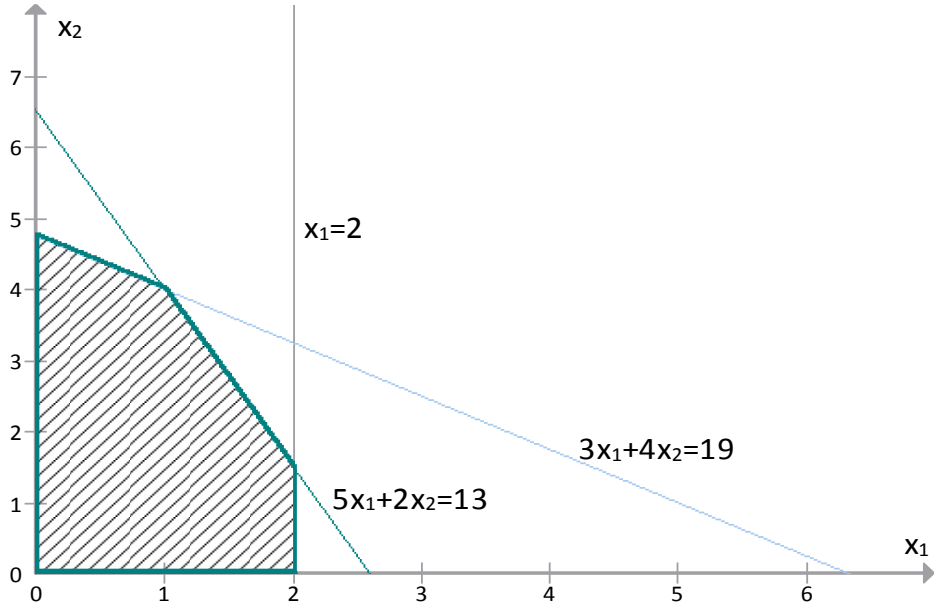
διάγραμμα 2.1



Χαράσσοντας και τους υπόλοιπους περιορισμούς

$$5x_1 + 2x_2 \leq 13$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 19$$

η γραμμοσκιασμένη περιοχή στο διάγραμμα 2.2 είναι αυτή που περιέχει όλες τις επιτρεπτές τιμές των (x_1,x_2). Αυτό το χωρίο των εφικτών λύσεων ονομάζεται εφικτή περιοχή του προβλήματος.

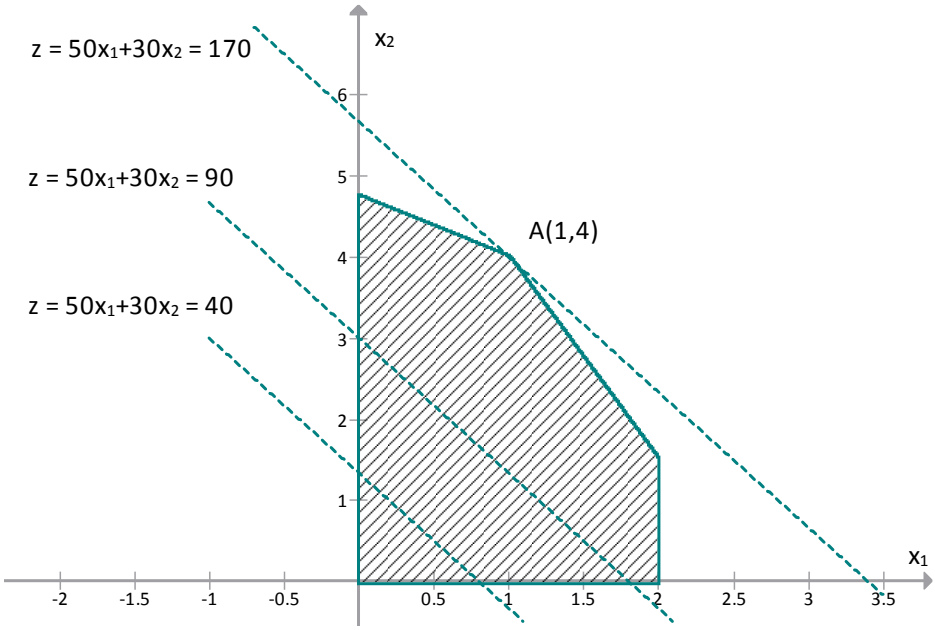


διάγραμμα 2.2

Για την επίλυση του προβλήματος όμως, θα πρέπει να βρούμε το σημείο ή τα σημεία εάν υπάρχουν, που μεγιστοποιούν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Για κάθε σταθερή τιμή της z, θεωρούμενης σαν παραμέτρου, η εξίσωση $z = 50x_1 + 30x_2$ είναι ευθεία. Για κάθε διαφορετική τιμή της z όμως λαμβάνουμε και μία διαφορετική ευθεία. Είναι γνωστό ότι όλες αυτές οι ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους, επειδή έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Σχεδιάζουμε λοιπόν τις ευθείες αυτές, για τις διάφορες τιμές του z, ψάχνοντας να βρούμε την ευθεία με την μεγαλύτερη τιμή της z που να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την εφικτή περιοχή. Οι παράλληλες ευθείες στο διάγραμμα 2.3 αντιπροσωπεύουν την αντικειμενική συνάρτηση για τρεις διαφορετικές τιμές του z. Είναι προφανές ότι η z_1 δεν είναι η μέγιστη τιμή της z διότι η ευθεία μπορεί να μετακινηθεί

προς τα πάνω και να υπάρχουν ακόμα κοινά σημεία της με την εφικτή περιοχή. Συνεχίζουμε, παίρνοντας ακόμα μεγαλύτερες τιμές για το z έως ότου φτάσουμε στην ευθεία που έχει ένα κοινό σημείο με το χωρίο των εφικτών λύσεων και δίνει την μεγαλύτερη τιμή στην z. Η ευθεία αυτή, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 2.3, περνάει από το σημείο A(1,4) και έτσι έχουμε z = 50*1 + 30*4 = 170 η οποία είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η z υπόψιν των περιορισμών.
Το σημείο A ονομάζεται άριστη ή βέλτιστη λύση.



διάγραμμα 2.3

Όμοια δουλεύουμε και σε περιπτώσεις ελαχιστοποίησης.

Βασικά στοιχεία που αφορούν τη λύση είναι:

- Η εφικτή περιοχή είναι πολύεδρο (στον R^n)

- Εάν η εφικτή περιοχή είναι φραγμένο σύνολο τότε η άριστη λύση επιτυγχάνεται σε μία κορυφή της εφικτής περιοχής.

- Εάν δύο ή περισσότερες κορυφές είναι άριστες λύσεις, τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι άριστη λύση

Υπάρχουν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού τα οποία ενδέχεται να μην έχουν μία βέλτιστη λύση αλλά άπειρες. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει παραπάνω από ένα ζεύγος συντεταγμένων (x_1,x_2) που να μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση. Η μέγιστη τιμή αυτή της z είναι μοναδική αλλά υπάρχει άπειρος αριθμός δυνατών λύσεων (διάγραμμα 2.4).

Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

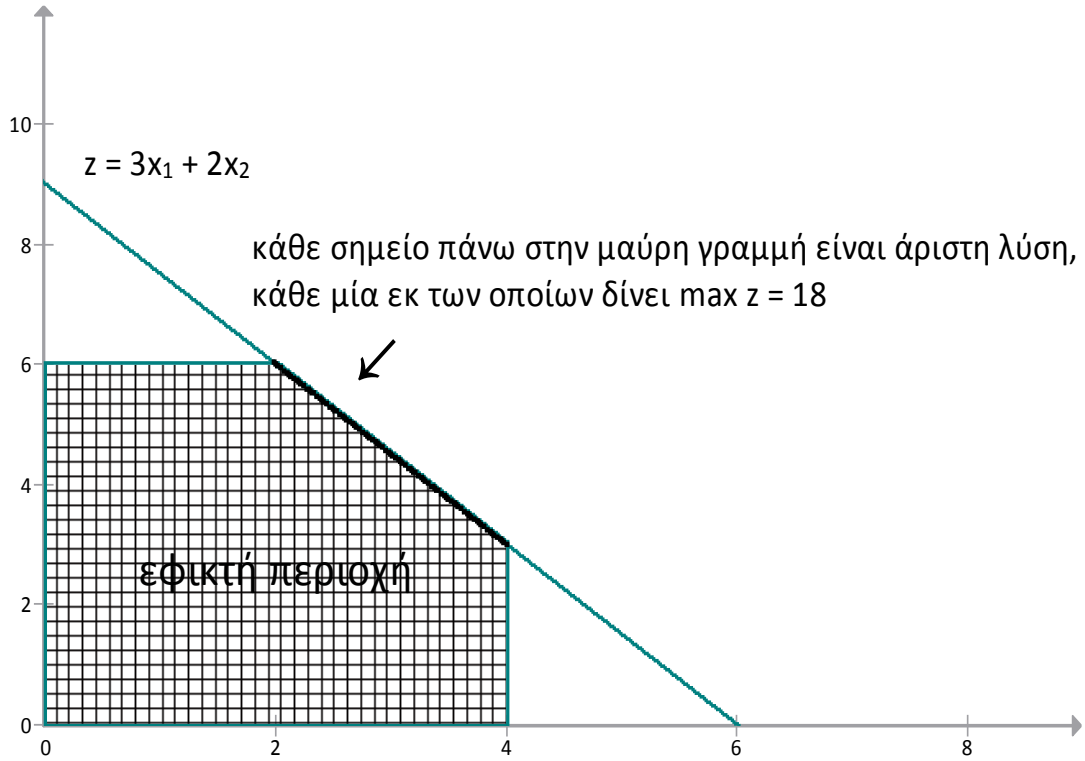
$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 36 \end{aligned}$$

όπου $x_1, x_2 \geq 0$

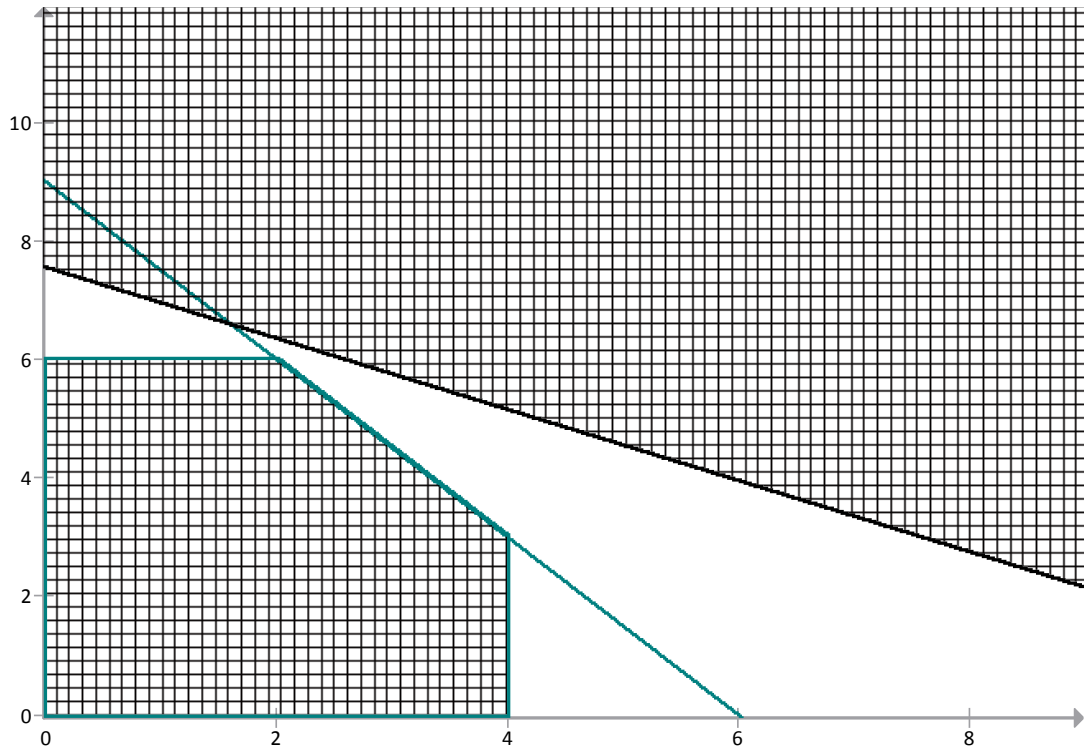
διάγραμμα 2.4



Επιπρόσθετα, υπάρχει και η περίπτωση της μη εύρεσης βέλτιστης λύσης. Αυτό συμβαίνει όταν δεν έχει καμία εφικτή λύση, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία που να επαληθεύουν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς.

Για παράδειγμα, εάν στο προηγούμενο πρόβλημα προσθέσουμε τον περιορισμό $3x_1 + 5x_2 \geq 40$, είναι αδύνατο να ικανοποιηθούν όλοι οι περιορισμοί μαζί. (διάγραμμα 2.5).

διάγραμμα 2.5



2.4 Μέθοδος Simplex

Η μέθοδος simplex είναι η γενική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Είναι μία συστηματική διαδικασία, ένας αλγόριθμος, που επαναλαμβάνεται μέχρι να βρεθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος simplex το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να είναι γραμμένο στην κανονική μορφή, δηλαδή να είναι της μορφής:

$$z = \min \text{ ή } \max \ \vec{c}^T \vec{x}$$
$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$\vec{x} \geq 0$$

Πρώτο βήμα είναι η μετατροπή των ανισοτήτων σε ισότητες. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή των χαλαρών μεταβλητών (slack variables) , ή αλλιώς βοηθητικών μεταβλητών. Η εισαγωγή αυτών των μεταβλητών δεν αλλάζει το χαρακτήρα των περιορισμών ή της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι μεταβλητές αυτές εισάγονται στην αντικειμενική συνάρτηση με μηδενικούς συντελεστές.

Παράδειγμα:

Έστω ο περιορισμός του προηγούμενου παραδείγματος,

$$x_1 \leq 2$$

Η χαλαρή μεταβλητή είναι η διαφορά των δύο μελών της ανισότητας:

$$x_3 = 2 - x_1$$

και αφού $x_1 \leq 2$ τότε $x_3 \geq 0$.

Έτσι, ο αρχικός περιορισμός $x_1 \leq 2$ μπορεί να γραφτεί ως

$$x_1 + x_3 = 2$$

με $x_1 \geq 0$ και $x_3 \geq 0$.

Εισάγοντας χαλαρές μεταβλητές σε όλες τις ανισότητες του προβλήματος, μπορούμε να το ξαναγράψουμε στην κανονική του μορφή:

$$\max z = 50x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad + x_3 \quad\quad\quad &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad &= 13 \\ 3x_1 + 4x_2 \quad\quad\quad\quad + x_5 &= 19 \end{aligned}$$

και $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$

Αφού το πρόβλημα μετατραπεί στην κανονική μορφή, ξεκινώντας από μία βασική δυνατή λύση, δηλαδή μία κορυφή του εφικτού συνόλου. Από την κορυφή αυτή μπορούμε κατά μήκος ακμών, να πάμε σε άλλες γειτονικές κορυφές. Κάποιες εξ' αυτών μας απομακρύνουν από την βέλτιστη, κάποιες άλλες όμως βαθμιαία την προσεγγίζουν. Η μέθοδος Simplex ουσιαστικά πραγματοποιεί άλματα από κορυφή σε κορυφή, όπου η αντικειμενική συνάρτηση έχει βελτιωμένη τιμή, μεγαλύτερη ή μικρότερη, ανάλογα με το αν έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό τη μετακίνηση κατά μήκος των ακμών του εφικτού συνόλου, φτάνουμε τελικά σε μία κορυφή, όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται.

Κάθε άλλη κορυφή δίνει χειρότερη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Η βέλτιστη λύση έχει βρεθεί και η διαδικασία της μεθόδου Simplex τερματίζεται.

Συνήθως για την αρχική βασική δυνατή λύση θεωρούμε τις χαλαρές μεταβλητές ως βασικές, ενώ θέτουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με μηδέν.

Οι μεταβλητές που αρχικά παίρνουν τιμές ίσες με το μηδέν ονομάζονται **μη βασικές μεταβλητές** (nonbasic variables) ενώ οι υπόλοιπες ονομάζονται **βασικές μεταβλητές** (basic variables). Αντίστοιχα η λύση που προκύπτει ονομάζεται **βασική λύση**, ενώ εάν όλες οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές τότε η λύση που προκύπτει ονομάζεται **βασική εφικτή λύση**.

Αντίθετα, **εκφυλισμένη βασική λύση** ονομάζεται κάθε βασική λύση που έχει μία ή περισσότερες βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν.

Αφού προσδιορίσουμε μία αρχική βασική δυνατή λύση, τότε με βάση τα δεδομένα του προβλήματος κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα – tableau της μεθόδου simplex, με τον ακόλουθο τρόπο:

- στην πρώτη στήλη c_b γράφονται οι συντελεστές που έχουν οι βασικές μεταβλητές $x_1,x_2,...,x_n$ στην αντικειμενική συνάρτηση.

- στην δεύτερη στήλη γράφονται οι βασικές μεταβλητές

- στις επόμενες n στήλες γράφονται οι συντελεστές όλων των μεταβλητών που περιέχονται στους περιορισμούς, ενώ

- στην τελευταία στήλη γράφονται οι γνωστοί όροι του διανύσματος b,

- στη πρώτη γραμμή γράφονται οι συντελεστές cπου έχουν όλες οι μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση,

- στη τελευταία γραμμή η οποία ονομάζεται και γραμμή σχετικού κόστους, γράφονται οι διαφορές $z_j – c_j$.

  Τα z_j δίνονται από την σχέση:

  $$z_j = \alpha_{1j}c_{b1} + \alpha_{2j}c_{b2} + ... \alpha_{mj}c_{bm} \qquad \text{όπου } j=1,...,n$$

- και στο τελευταίο κελί της τελευταίας στήλης γράφεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z.

Σημειώνεται ότι οι m στήλες των m βασικών μεταβλητών σχηματίζουν τον μοναδιαίο διάστασης m πίνακα.

Αρχικός πίνακας Simplex:

	c_j	c_1	c_2	...	c_m	...	c_n	
c_b	βασικές μετ/τές	x_1	x_2	...	x_m	...	x_n	γνωστοί όροι διαν/τος b
c_{b1}	x_1	α_{11}	α_{12}	...	α_{1m}	...	α_{1n}	b_1
c_{b2}	x_2	α_{21}	α_{22}	...	α_{2m}	...	α_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
c_{bm}	x_m	α_{m1}	α_{m2}	...	α_{mm}	...	α_{mn}	b_m
	z_j	z_1	z_2	...	z_m	...	z_n	Z
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_m - c_m$	...	$z_n - c_n$	

A. Πρόβλημα μεγιστοποίησης

i. Εάν $z_j - c_j \geq 0$ για κάθε j = 1,...,n, τότε η λύση που βρήκαμε είναι βέλτιστη και σταματάμε τον αλγόριθμο simplex.
   - αν ισχύει $z_j - c_j = 0$ για μία τουλάχιστον μη βασική μεταβλητή τότε έχουμε απειρία λύσεων.
   - αν ισχύει $z_j - c_j > 0$ για όλες τις μη βασικές μεταβλητές τότε η βέλτιστη λύση είναι και μοναδική.

ii. Εάν $z_j - c_j < 0$ για μία τουλάχιστον μεταβλητή x_j τότε η λύση που βρήκαμε δεν είναι η βέλτιστη και συνεχίζουμε τον αλγόριθμο simplex με την κατασκευή ενός καινούργιου πίνακα.

Εάν υπάρχει κάποιο k = 1,..,n τέτοιο ώστε $z_k - c_k < 0$, τότε μπαίνει στη βάση η μεταβλητή x_k που αντιστοιχεί στο στοιχείο αυτό.
Εάν υπάρχουν περισσότερα από ένα στοιχεία τέτοια ώστε

$z_j - c_j < 0$, τότε μπαίνει στη βάση η μεταβλητή που ανήκει στο μικρότερο αρνητικό στοιχείο.
Η στήλη στην οποία ανήκει η μεταβλητή x_k ονομάζεται στήλη οδηγός.

Εάν $\alpha_{ik} > 0$ για κάποιο i = 1,...,m τότε βγαίνει από την βάση η μεταβλητή x_r για την οποία ισχύει:

$$x_r = \min_{\alpha_{ik} > 0} \frac{b_i}{\alpha_{ik}} = \frac{b_r}{\alpha_{rk}}$$

Η γραμμή στην οποία ανήκει η μεταβλητή x_k που βγαίνει από τη βάση ονομάζεται γραμμή οδηγός και το στοιχείο α_{ik} με το οποίο διαιρούμε το b_i ονομάζεται στοιχείο οδηγός ή πιλότος.
Εάν $\alpha_{ik} \leq 0$ για όλα τα i, τότε δεν υπάρχει μη πεπερασμένη βέλτιστη λύση.

Αφού βρούμε τη μη βασική μεταβλητή η οποία μπαίνει στη βάση και τη βασική που βγαίνει από βάση κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα simplex ως εξής:

- διαιρούμε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στην γραμμή οδηγό με το στοιχείο οδηγό, και την καινούργια γραμμή που προκύπτει καταλαμβάνει στο πίνακα τη θέση που κατείχε η γραμμή οδηγός στον αρχικό πίνακα και έπειτα
- για να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες γραμμές του καινούργιου πίνακα πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της γραμμής που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα με το αντίστοιχο στοιχείο κάθε γραμμής που υπάρχει στη στήλη οδηγό στον αρχικό πίνακα και το γινόμενο που προκύπτει το αφαιρούμε από τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής του αρχικού πίνακα.

Στη συνέχεια, κάνουμε έλεγχο στις διαφορές $z_j - c_j$ που προκύπτουν στον νέο πίνακα και ελέγχουμε ποια από τις περιπτώσεις i) και ii) ισχύει. Έτσι είτε ο αλγόριθμος τελειώνει, είτε συνεχίζεται δημιουργώντας και επόμενο πίνακα simplex.

Παρατήρηση:

Επειδή στα περισσότερα πραγματικά προβλήματα οι αρνητικές τιμές των μεταβλητών αποφάσεων δεν έχουν σημασία στη διαμόρφωση του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού, συμπεριλαμβάνουμε στους περιορισμούς την υπόθεση μη αρνητικότητας. Υπάρχουν όμως εξαιρέσεις προβλημάτων, όπου κάποια από τις μεταβλητές μπορεί να είναι ορισμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπεται να λαμβάνει και αρνητικές τιμές. Η μέθοδος Simplex όμως απαιτεί όλες οι μεταβλητές να παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Για αυτό το λόγο, χρησιμοποιούμε τους κατάλληλους μετασχηματισμούς που αναφέρονται παρακάτω, ώστε σε όλες τις μεταβλητές του προβλήματος να ισχύει ο περιορισμός μη αρνητικότητας.

a. Εάν μία μεταβλητή απόφασης x_i μπορεί να πάρει ορισμένες αρνητικές τιμές δηλαδή

$$x_i \geq K_i$$

όπου K είναι μία αρνητική σταθερά, τότε ο περιορισμός μπορεί να μετατραπεί ως εξής:

$$x_i' = x_i - K_i$$

με $x_i' \geq 0$.

Τελικά, ο όρος $(x_i' + K_i)$ θα αντικαταστήσει την μεταβλητή x_i στο πρόβλημα και η x_i' να μην μπορεί να είναι αρνητική.

b. Εάν κάποια μεταβλητή απόφασης δεν έχει κάτω φράγμα στις αρνητικές τιμές που μπορεί να λάβει, την αντικαθιστούμε στο πρόβλημα με τη διαφορά δύο νέων μη αρνητικών μεταβλητών, δηλαδή:

$$x_i = x_i' - x_i''$$

όπου $x_i', x_i'' \geq 0$.

Επειδή οι x_i', x_i'' μπορεί να έχουν μόνο μη αρνητικές τιμές, η διαφορά τους μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή, θετική ή αρνητική.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\max z = 3x_1 + x_2 + 4x_3$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\le 20 \end{aligned}$$

όπου

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Χρησιμοποιώντας τις χαλαρές μεταβλητές x_4 και x_5 το πρόβλημα μετατρέπεται στην κανονική του μορφή:

$$\max z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \qquad &= 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \qquad + x_5 &= 20 \end{aligned}$$

όπου

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Δημιουργούμε τον αρχικό πίνακα simplex:

πίνακας 1

	c_j	3	1	4	0	0	
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_4	6	3	5	1	0	25
0	x_5	3	4	5	0	1	20
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	-3	-1	-4	0	0	

Τα z_j υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας τους συντελεστές των στηλών κάθε μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης που βρίσκονται στη βάση και παίρνοντας το άθροισμα τους. Δηλαδή:

$z_1 = 6 \times 0 + 3 \times 0 = 0$ $\quad$ $z_4 = 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0$

$z_2 = 3 \times 0 + 4 \times 0 = 0$ $\quad$ $z_5 = 0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$

$z_3 = 5 \times 0 + 5 \times 0 = 0$ $\quad$ $b_i = 25 \times 0 + 20 \times 0 = 0$

Για την γραμμή $z_j - c_j$ αφαιρούμε τα z_j από τα c_j επομένως έχουμε:

$z_1 - c_1 = 0\text{-}3 = -3$ $\quad$ $z_4 - c_4 = 0\text{-}0 = 0$

$z_2 - c_2 = 0\text{-}1 = -1$ $\quad$ $z_5 - c_5 = 0\text{-}0 = 0$

$z_3 - c_3 = 0\text{-}4 = -4$

Η αρχική βασική λύση είναι: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,0,25,20)$.

Αυτή η λύση δεν είναι βέλτιστη αφού ότι $z_j - c_j \leq 0$ για $j = 1,2,3$, επομένως συνεχίσουμε τον αλγόριθμο simplex με την κατασκευή ενός καινούργιου πίνακα.

Επειδή:

$$\min(z_1 - c_1, z_2 - c_2, z_3 - c_3) = \min(-3,-1,-4) = -4 = z_3 - c_3$$

η μεταβλητή που θα μπει στη βάση είναι η x_3. Άρα η στήλη x_3 είναι η στήλη οδηγός.

Για να βρούμε ποια μεταβλητή θα βγει από τη βάση ψάχνουμε το

$$\min\left\{\frac{b_i}{x_3}\right\} = \min\left\{\frac{25}{5}, \frac{20}{5}\right\} = \min\{5,4\} = 4$$

Επομένως η γραμμή x_5 είναι η γραμμή οδηγός και βγαίνει από την βάση. Το στοιχείο 5 είναι το στοιχείο οδηγός.

Στον καινούργιο πίνακα οι βασικές μεταβλητές θα είναι η x_4 και η x_3. Διαιρούμε τη γραμμή οδηγό (x_5) με το στοιχείο οδηγό (5)

$$(3,4,5,0,1,20) : 5 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 0, \frac{1}{5}, 4\right)$$

και τη γραμμή που προκύπτει την βάζουμε στον νέο πίνακα στη θέση που είχε η γραμμή x_5 στον αρχικό πίνακα.

Η γραμμή x_4 υπολογίζεται ως εξής:

$$(6,3,5,1,0,25) - 5\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},1,0,\frac{1}{5},4\right) = (6,3,5,1,0,25) - (3,4,5,0,1,20)$$

$$= (3,-1,0,1,-1,5).$$

Με τον ίδιο τρόπο όπως στον αρχικό πίνακα υπολογίζουμε τα z_j:

$z_1 = 3 \times 0 + \frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5}$ $\qquad$ $z_4 = 1\times0 + 0\times4 = 0$

$z_2 = -1 \times 0 + \frac{4}{5} \times 4 = \frac{16}{5}$ $\qquad$ $z_5 = -1 \times 0 + \frac{1}{5} \times 4 = \frac{4}{5}$

$z_3 = 0\times0 + 1\times4 = 4$ $\qquad$ και $b_i = 5\times0 + 4\times4 = 16$

και τις διαφορές $z_j - c_j$:

$z_1 - c_1 = \frac{12}{5} - 3 = -\frac{3}{5}$ $\qquad$ $z_4 - c_4 = 0-0 = 0$

$z_2 - c_2 = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5}$ $\qquad$ $z_5 - c_5 = \frac{4}{5} - 0 = -\frac{4}{5}$

$z_3 - c_3 = 4 - 4 = 0$

Επομένως ο δεύτερος πίνακας είναι:

πίνακας 2

	c_j	3	1	4	0	0		
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
0	x_4	3	-1	0	1	-1	5	→
4	x_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	4	
	z_j	$\frac{12}{5}$	$\frac{16}{5}$	4	0	$\frac{4}{5}$	16	
	$z_j - c_j$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$		
		↑						

Παρατηρούμε ότι $z_1 - c_1 = -\frac{3}{5} \leq 0$.

Επομένως η λύση $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (0,0,4,5,0)$ δεν είναι η βέλτιστη. Επομένως συνεχίζουμε στην κατασκευή ενός καινούργιου πίνακα.

Επειδή $z_1 - c_1 = -\frac{3}{5}$ είναι η μόνη αρνητική διαφορά στο πίνακα, η μεταβλητή x_1 μπαίνει στη βάση.

Όμως

$$\min\left\{\frac{b_i}{x_1}\right\} = \min\left\{\frac{5}{3},\frac{4}{\frac{3}{5}}\right\} = \min\left\{\frac{5}{3},\frac{20}{3}\right\} = \frac{5}{3}$$

και επομένως από τη βάση βγαίνει η μεταβλητή x_4.Η γραμμή x_4 είναι η γραμμή οδηγός ενώ το στοιχείο 3 είναι το στοιχείο οδηγός. Συνεπώς στο καινούργιο πίνακα οι βασικές μεταβλητές θα είναι η x_1 και η x_3.

Διαιρούμε την γραμμή οδηγό (x_4) με το στοιχείο οδηγό, το 3,

$$(3,-1,0,1,-1,5) : 3 = \left(1,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

και τη νέα γραμμή που προκύπτει τη βάζουμε στο νέο πίνακα στη θέση που είχε η γραμμή x_4.

Η γραμμή x_3υπολογίζεται ως εξής:

$$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},1,0,\frac{1}{5},4\right) - \frac{3}{5}\left(1,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},1,0,\frac{1}{5},4\right) - \left(\frac{3}{5},-\frac{1}{5},0,\frac{1}{5},-1,1\right) = \left(0,1,1,-\frac{1}{5},\frac{2}{5},3\right)$$

Υπολογίζουμε τα z_j:

$z_1 = 3\times1 + 4\times0 = 3$

$z_2 = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 \times 1 = 3$

$z_4 = 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$

$z_5 = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}\times4 = \frac{3}{5}$

$z_3 = 3\times0 + 1\times4 = 4$ και $b_i = 3 \times \frac{5}{3} + 4 \times 3 = 17$

και τις διαφορές $z_j - c_j$:

$z_1 - c_1 = 3 - 3 = 0$ $z_4 - c_4 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$

$z_2 - c_2 = 3 - 1 = 2$ $z_5 - c_5 = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}$

$z_3 - c_3 = 4 - 4 = 0$

Επομένως ο τρίτος πίνακας της μεθόδου simplex είναι:

πίνακας 3

	c_j	3	1	4	0	0	
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
3	x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
4	x_3	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3
	z_j	3	3	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	17
	$z_j - c_j$	0	2	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	

Παρατηρούμε ότι $z_j - c_j \geq 0$ για όλα τα $j = 1,2,3,4,5$ επομένως η λύση: $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 0$

που βρήκαμε στον πίνακα 3 είναι η βέλτιστη λύση.

Τελικά, η μεγίστη τιμή που μπορεί να πάρει η αντικειμενική συνάρτηση z είναι:

$$\max z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 17$$

Β. Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

i. Εάν $z_j - c_j \leq 0$ για κάθε j=1,...,n, τότε η λύση που βρήκαμε είναι βέλτιστη και σταματάμε τον αλγόριθμο simplex.
   - αν ισχύει $z_j - c_j < 0$ για όλες τις μη βασικές μεταβλητές τότε η βέλτιστη λύση είναι και μοναδική.
   - αν ισχύει $z_j - c_j = 0$ για μία τουλάχιστον μη βασική μεταβλητή τότε έχουμε απειρία λύσεων.

ii. Εάν $z_j - c_j > 0$ για μία τουλάχιστον μεταβλητή x_j τότε η λύση που βρήκαμε δεν είναι η βέλτιστη και συνεχίζουμε τον αλγόριθμο simplex με την κατασκευή ενός καινούργιου πίνακα.

   Εάν υπάρχει κάποιο k = 1,..,n τέτοιο ώστε $z_k - c_k > 0$, τότε μπαίνει στη βάση η μεταβλητή x_k που αντιστοιχεί στο στοιχείο αυτό.
   Εάν υπάρχουν περισσότερα από ένα στοιχεία τέτοια ώστε $z_j - c_j > 0$, τότε μπαίνει στη βάση η μεταβλητή που ανήκει στο μεγαλύτερο θετικό στοιχείο.
   Έπειτα προσδιορίζουμε την μεταβλητή η οποία θα βγει από την βάση και κατασκευάζουμε έναν νέο πίνακα simplex ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως για την περίπτωση της μεγιστοποίησης.

2.5 Ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου Simplex

Στο προηγούμενο παράδειγμα δεν αναφέρθηκε κανένα πρόβλημα από θέμα επιλογών. Υπάρχουν όμως υποπεριπτώσεις της μεθόδου οι οποίες είναι:

1. **Εισερχόμενη βασική μεταβλητή**

Στο πρώτο επαναληπτικό βήμα επιλέγεται η μη βασική μεταβλητή με την μεγαλύτερη κατά απόλυτο τιμή του αρνητικού συντελεστή ως η εισερχόμενη βασική μεταβλητή.

Έστω υποθετικά ότι υπάρχουν δύο η περισσότερες μη βασικές μεταβλητές που έχουν την ίδια μεγαλύτερη κατά απόλυτο τιμή στους αρνητικούς συντελεστές τους.

Στην περίπτωση αυτή η επιλογή μεταξύ των υποψήφιων μεταβλητών γίνεται αυθαίρετα. Τελικά θα βρεθεί η άριστη λύση άσχετα από την επιλογή της μεταβλητής αλλά δεν υπάρχει κατάλληλη μέθοδος που να μπορεί να προβλέψει ποια επιλογή θα οδηγήσει σε αυτή την άριστη λύση γρηγορότερα.

2. **Εξερχόμενη βασική μεταβλητή**

Εάν σε δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές αντιστοιχεί το ίδιο μικρότερο πηλίκο σημαίνει ότι οποιαδήποτε από αυτές μπορεί να είναι η εξερχόμενη βασική μεταβλητή. Έχει μεγάλη σημασία για τους λόγους: Πρώτον, όλες οι βασικές μεταβλητές που ισοβαθμούν για εξερχόμενες φτάνουν στο μηδέν καθώς η εισερχόμενη βασική μεταβλητή αυξάνεται. Έτσι, εκείνες που δεν θα επιλεχτούν για να γίνουν η εξερχόμενη μεταβλητή θα έχουν την τιμή μηδέν στη νέα βασική εφικτή λύση. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται εκφυλισμένες βασικές μεταβλητές και η νέα λύση εκφυλισμένη. Δεύτερον, εάν μία από τις εκφυλισμένες βασικές μεταβλητές διατηρήσει την τιμή μηδέν μέχρι να επιλεχτεί εξερχόμενη βασική μεταβλητή σε επόμενη επανάληψη, η αντίστοιχη εισερχόμενη βασική μεταβλητή πρέπει και αυτή να παραμείνει μηδέν, επειδή δεν είναι δυνατό να αυξηθεί χωρίς να γίνει η εξερχόμενη μεταβλητή αρνητική και επομένως η τιμή του z δεν αλλάζει. Τέλος εάν η τιμή του z παραμένει η ίδια αντί να

αυξάνεται σε κάθε επανάληψη, τότε η μέθοδος πέφτει σε βρόγχο όπου επαναλαμβάνεται περιοδικά η ίδια αλληλουχία λύσεων. Εάν και τέτοιες περιπτώσεις είναι θεωρητικά δυνατές ωστόσο δεν συμβαίνουν συχνά σε πραγματικά προβλήματα.

3. Καμία εξερχόμενη βασική μεταβλητή

Κατά την εφαρμογή του επαναληπτικού βήματος μπορεί να μην υπάρχει υποψήφια εξερχόμενη βασική μεταβλητή. Αυτό συμβαίνει όταν η εισερχόμενη βασική μεταβλητή μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα χωρίς να δίνει αρνητικές τιμές σε καμία από τις βασικές μεταβλητές. Η ερμηνεία αυτής της περίπτωσης είναι ότι οι περιορισμοί δεν εμποδίζουν την αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό συμβαίνει όταν έχουν παραλειφθεί οι σχετικοί περιορισμοί ή όταν η διαμόρφωση τους είναι εσφαλμένη.

4. Εναλλακτικές άριστες λύσεις

Όταν ένα πρόβλημα έχει παραπάνω από μία άριστες λύσεις τότε τουλάχιστον μία από τις μη βασικές μεταβλητές έχει μηδέν στην τελική εξίσωση, έτσι αυξάνοντας κάθε τέτοια μεταβλητή δεν αλλάζει η τιμή του z. Οι άλλες άριστες λύσεις μπορούν να βρεθούν κάνοντας επιπλέον βήματα της μεθόδου simplex επιλέγοντας κάθε φορά σαν εισερχόμενη βασική μεταβλητή μια μη βασική μεταβλητή με συντελεστή μηδέν.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$z = \max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & & & \leq & 1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & \leq & 8 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Μετατρέπουμε το πρόβλημα στην κανονική μορφή:

$$z=\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 + 2x_4 + x_6 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ο αρχικός πίνακας simplex είναι ο

πίνακας 1

	c_j	-1	2	-3	0	0	0	
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
-1	x_1	1	-1	1	2	0	0	10
0	x_5	0	2	-1	0	1	0	1
0	x_6	0	1	0	2	0	1	8
	z_j	-1	1	-1	-2	0	0	-10
	$z_j - c_j$	0	-1	2	-2	0	0	

Παρατηρούμε ότι $z_2 - c_2 = -1 < 0$ και $z_4 - c_4 = -2 < 0$.Επιλέγουμε το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή επομένως η εισερχόμενη στήλη στον 2° πίνακα simplex είναι η x_4.

Η γραμμή x_6 είναι η εξερχόμενη αφού

$$\min\{b_i/x_4\} = \min\left\{\frac{10}{2}, \frac{8}{2}\right\} = \min\{5,4\} = 4$$

Επομένως ο επόμενος πίνακας simplex θα είναι:

πίνακας 2

	c_j	-1	2	-3	0	0	0	
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
-1	x_1	1	2	1	0	0	-1	2
0	x_5	0	2	-1	0	1	0	1
0	x_4	0	½	0	1	0	½	4
	z_j	-1	-2	-1	0	0	1	-2
	$z_j - c_j$	0	0	2	0	0	1	

Παρατηρούμε ότι $z_j - c_j \geq 0$ για j = 1,..,5 άρα έχουμε άριστη λύση την $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ με z = -2.
Όμως στον άριστο πίνακα η x_2 είναι μη βασική στήλη και βρήκαμε ότι $z_j - c_j = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η λύση που βρήκαμε δεν είναι η μοναδική άριστη λύση. Στην περίπτωση αυτή η x_2 θα γίνει η εισερχόμενη ενώ θα εξάγουμε οποιαδήποτε από τις x_1, x_5, x_4 και έτσι θα βρούμε μία ακόμα άριστη λύση. Συνεχίζοντας ομοίως συμπεραίνουμε ότι έχουμε πρόβλημα απείρων λύσεων. Λόγω θεωρήματος ισχύει ότι εάν δύο ή περισσότερες κορυφές είναι άριστες λύσεις τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι λύση δηλαδή εάν $κ_1$, $κ_2$ είναι λύσεις τότε και $κ = λκ_1 + (1-λ)κ_2$ με $0<λ<1$ είναι επίσης λύσεις.

2.6 Τεχνητές μεταβλητές – Η Μ - μέθοδος

Η μέθοδος Simplex απαιτεί για ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού να είναι στην κανονική μορφή και ο πίνακας Α να περιέχει τον μοναδιαίο, έτσι ώστε το b να δίνει μια αρχική βασική εφικτή λύση. Εάν ο Α δεν περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα δεν είναι πάντα εφικτό να τροποποιήσουμε το πρόβλημα ώστε να τον περιέχει. Η Μ-Μέθοδος με χρήση τεχνητών μη αρνητικών μεταβλητών μετατρέπει το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε ισοδύναμο πρόβλημα που περιέχει ο πίνακας του τον μοναδιαίο. Οι μεταβλητές αυτές δεν αντιπροσωπεύουν κάποιο πραγματικό μέγεθος του προβλήματος και πρέπει να μηδενίζονται. Για αυτό και κατά την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος προσπαθούμε σε κάθε επανάληψη να εξάγεται από τη βάση χωρίς να επανατοποθετείται μελλοντικά από μία τεχνητή μεταβλητή. Επιπρόσθετα, εισάγουμε τις τεχνητές μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση με συντελεστές που έχουν πολύ μεγάλες απόλυτες τιμές ούτως ώστε να αποτρέψουμε τις τυχόν επιπτώσεις που μπορεί να υπάρξουν πάνω στην άριστη λύση. Συνήθως σε προβλήματα μεγιστοποίησης ο συντελεστής των τεχνητών μεταβλητών είναι -Μ με Μ>0 ή +Μ εάν Μ<<0, ενώ σε προβλήματα ελαχιστοποίησης με Μ>0.

Τέλος, κάθε βασική τεχνητή στήλη που φεύγει δεν ξαναεμφανίζεται στους πίνακες της μεθόδου simplex.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max (2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_3 - 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{με } x_i \geq 0 \text{ , για κάθε } i = 1,...,4$$

Το πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή και γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\max \vec{c}^T \vec{x}$$
$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$\vec{x} \geq 0$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ και } b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Όπως φαίνεται, στον πίνακα των περιορισμών του προβλήματος δεν σχηματίζεται ο μοναδιαίος υποπίνακας $I_{3\times3}$, επομένως ο προσδιορισμός μίας αρχικής βασικής δυνατής λύσης δεν είναι εύκολος. Για αυτό εισάγουμε δύο τεχνητές μεταβλητές x_5 και x_6.

Το πρόβλημα έχει τώρα την μορφή:

$$\max (2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + Mx_5 + Mx_6)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ 2x_3 - 3x_4 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

με $x_i \geq 0$, για κάθε $i = 1,\ldots,6$ και $M << 0$

Ο αρχικός πίνακας της μεθόδου simplex είναι:

	c_j	2	-3	1	2	M	M	
c_b	βασικές μετ/τές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
2	x_1	1	2	1	2	0	0	8
M	x_5	0	1	1	1	1	0	6
M	x_6	0	0	2	-3	0	1	3
	z_j	2	4+M	2+3M	4-2M	M	M	16+9M
	$z_j - c_j$	0	7+M	1+3M	2-2M	0	0	

Παρατηρούμε ότι:

- 2-2M>0 γιατί M<<0
- 7+M >1 + 3M ή 6 >2M αφού M<<0

επομένως η μεταβλητή που μπαίνει στη βάση είναι η x_3.

Η γραμμή x_6 είναι η εξερχόμενη αφού

$$\min\{b_i/x_3\} = \min\left\{\frac{8}{1},\frac{6}{1},\frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2}.$$

πίνακας 2

	c_j	2	-3	1	2	M	M	
c_b	βασικές μετ/τές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
2	x_1	1	2	0	$\frac{7}{2}$	0		$\frac{13}{2}$
M	x_5	0	1	0	$\frac{5}{2}$	1		$\frac{9}{2}$
1	x_3	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0		$\frac{3}{2}$
	z_j	2	4+M	1	$\frac{11}{2}+\frac{5M}{2}$	M		$\frac{29}{2}+\frac{9M}{2}$
	$z_j - c_j$	0	7+M	0	$\frac{7}{2}+\frac{5M}{2}$	0		

Παρατηρούμε ότι:

- -3M/2 > 0 γιατί M<<0
- 7+M > (7+5M)/2 ή 7 > 3M αφού M<<0

επομένως η μεταβλητή που μπαίνει στη βάση είναι η x_4.

Η γραμμή x_5 είναι η εξερχόμενη αφού

$$\min\{b_i/x_4\} = \min\left\{\frac{13}{7},\frac{9}{7}\right\} = \frac{9}{7}.$$

πίνακας 3

	c_j	2	-3	1	2	M	M	
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
2	x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	0			$\frac{1}{5}$
2	x_4	0	$\frac{2}{5}$	0	1			$\frac{9}{5}$
1	x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	0			$\frac{21}{5}$
	z_j	2	$\frac{13}{5}$	1	2			$\frac{41}{5}$
	$z_j - c_j$	0	$\frac{28}{5}$	0	0			

Αφού $z_j - c_j \geq 0$ για κάθε $j = 1,\ldots,4$ έχουμε άριστη λύση την $\left(\frac{1}{5},0,\frac{21}{5},\frac{9}{5},0,0\right)$ για το πρόβλημα με τις τεχνητές μεταβλητές, επομένως η άριστη λύση του αρχικού είναι η $\left(\frac{1}{5},0,\frac{21}{5},\frac{9}{5}\right)$ με $\max = \frac{41}{5}$.

Σημειώνεται ότι εάν στην άριστη λύση υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές με θετική τιμή σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.

2.7 Το δυϊκό πρόβλημα

Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο καλείται πρωτεύων (Π), (primal), μπορεί να αντιστοιχηθεί ένα άλλο πρόβλημα το οποίο ονομάζεται δυϊκό (Δ), (dual). Η βέλτιστη δυνατή λύση του ενός εκ των δύο προβλημάτων, μας δίνει πληροφορίες για την βέλτιστη λύση και του άλλου. Επειδή αυτά τα δύο προβλήματα είναι στην πραγματικότητα συμπληρωματικά, γνωρίζοντας την λύση του ενός γνωρίζουμε και την λύση του άλλου. Στο γραμμικό προγραμματισμό κάθε πρόβλημα μεγιστοποίησης συνδέεται με ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης και το αντίθετο. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση παραγωγής και η συνάρτηση κόστους.

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$(\pm)\ \max z_x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
\alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}x_n & \leq & b_n
\end{array}$$

$$\text{με} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

Τότε το αντίστοιχο δυϊκό του παραπάνω προβλήματος είναι:

$$(\pm)\ \min z_w = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_nw_n$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_{11}w_1 & + & \alpha_{21}w_2 & + & \ldots & + & \alpha_{m1}w_m & \geq & c_1 \\
\alpha_{12}w_1 & + & \alpha_{22}w_2 & + & \ldots & + & \alpha_{m2}w_m & \geq & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{1n}w_1 & + & \alpha_{2n}w_2 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}w_m & \geq & c_m
\end{array}$$

$$\text{με} \quad w_1, w_2, \ldots, w_m \geq 0.$$

Τα δύο προβλήματα σε μορφή πινάκων γράφονται:

Πρωτεύον πρόβλημα:	Δυϊκό πρόβλημα:
$\max \vec{c}^T \vec{x}$	$\max \vec{b}^T \vec{w}$
$A\vec{x} = \vec{b}$	$A^T \vec{w} = \vec{c}$
$\vec{x} \geq 0$	$\vec{w} \geq 0$

Η μετατροπή από πρωτεύον σε δυαδικό γίνεται με τα παρακάτω βήματα:

Αρχικά, κάθε πρωτεύον πρόβλημα μεγιστοποίησης μετατρέπεται στο δυϊκό του σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης και το αντίθετο. Στη συνέχεια η φορά των ανισοτήτων των τεχνολογικών περιορισμών αντιστρέφεται ενώ οι περιορισμοί μη αρνητικότητας των μεταβλητών παραμένουν. Οι μεταβλητές απόφασης x_n αντικαθιστούνται από τις μεταβλητές απόφασης w_m του δυϊκού. Έπειτα, οι γραμμές των συντελεστών των περιορισμών του πρωτεύοντος μετατρέπονται σε στήλες των συντελεστών του δυϊκού προβλήματος. Η γραμμή των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος μετατρέπεται σε στήλη των σταθερών όρων των τεχνολογικών περιορισμών του δυϊκού. Τέλος, η στήλη των σταθερών όρων των τεχνολογικών περιορισμών του Π μετατρέπεται σε γραμμή των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης του Δ.

Παράδειγμα:

Έστω το πρόβλημα

$$\max z_x = 2x_1 + 3x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 9 \\ x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

με $x_1, x_2 \geq 0.$

Τότε δυϊκό έχει την μορφή:

$$\min z_w = 12w_1 + 4w_2 + 9w_3 + 6w_4$$

με περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4w_1 & + & w_2 & + & w_3 & & & \leq & 2 \\ -w_1 & - & w_2 & & & + & w_4 & \leq & 3 \end{array}$$

$$\text{και } w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0.$$

Αυτή η μετατροπή μας δίνει το πλεονέκτημα να διαλέξουμε και να επιλύσουμε το πρόβλημα με το μικρότερο υπολογιστικό κόστος. Το κόστος αυτό, συνδέεται άμεσα με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος ο οποίος καθορίζει την τάξη του πίνακα των βασικών διανυσμάτων – στηλών. Δηλαδή εάν στο πρωτεύων πρόβλημα ο αριθμός των περιορισμών είναι αρκετά μεγάλος τότε στο δυϊκό του ο αριθμός των περιορισμών θα είναι σχετικά μικρός επομένως συμφέρει υπολογιστικά να λυθεί το δυϊκό αντί του πρωτεύοντος. Όπως φαίνεται και στο παραπάνω παράδειγμα αντί του αρχικού προβλήματος που περιέχει 4 περιορισμούς και 2 μεταβλητές είναι προτιμότερο να λυθεί το δυϊκό το οποίο έχει 2 περιορισμούς και 4 μεταβλητές.

Οι κανόνες σχηματισμού του Δυϊκού προβλήματος ενός γενικού γραμμικού προβλήματος, που αφορούν τους περιορισμούς και τις μεταβλητές, βρίσκονται περιληπτικά στον πίνακα:

max		↔	**min**	
περιορισμός	=	↔	μεταβλητή	ελεύθερη
περιορισμός	≥	↔	μεταβλητή	≥ 0
περιορισμός	≤	↔	μεταβλητή	≤ 0
μεταβλητή	ελεύθερη	↔	περιορισμός	=
μεταβλητή	≥ 0	↔	περιορισμός	≤
μεταβλητή	≤ 0	↔	περιορισμός	≥

Σημαντικά θεωρήματα του δυϊσμού είναι:

Θεώρημα 1 : Το δυϊκό του δυϊκού ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι το πρωτεύον πρόβλημα.

Θεώρημα 2 : Εάν είτε το πρωτεύον είτε το δυαδικό πρόβλημα έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση, τότε και το άλλο έχει πεπερασμένη βέλτιστη δυνατή λύση και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συναρτήσεως των δύο προβλημάτων είναι η ίδια δηλαδή $\max z_x = \min z_w$.
Δηλαδή εάνF_x,F_w οι εφικτές περιοχές του Π και του Δ αντίστοιχα, και $\hat{x} \in F_x$ και $\hat{w} \in F_w$ με $c^T\hat{x} = b^T\hat{w}$ τότε τα $\hat{x}$ και $\hat{w}$ είναι άριστες λύσεις για το Π και Δ.

Θεώρημα 3 : Εάν ένα από τα δύο προβλήματα έχει μη πεπερασμένη λύση, τότε το άλλο έχει μη εφικτή λύση.
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή εάν το ένα από τα δύο προβλήματα δεν έχει δυνατή λύση δεν έπεται ότι το άλλο έχει λύση μη πεπερασμένη.

Θεώρημα 4 : Εάν στην άριστη λύση, μία μεταβλητή απόφασης του πρωτεύοντος προβλήματος έχει μη μηδενική τιμή, η αντίστοιχη μεταβλητή περιθωρίου του δυϊκού πρέπει να έχει βέλτιστη τιμή μηδέν.

Θεώρημα 5 : Εάν στην άριστη λύση, μία μεταβλητή περιθωρίου του πρωτεύοντος προβλήματος έχει μη μηδενική τιμή, η αντίστοιχη μεταβλητή απόφασης του δυϊκού πρέπει να έχει βέλτιστη τιμή μηδέν.

Θεώρημα 6 : Έστω F_x, F_w είναι οι εφικτές περιοχές του Π και του Δ αντίστοιχα. Τότε αν $x \in F_x \subseteq R^n$ και $w \in F_w \subseteq R^n \Rightarrow c^Tx \leq b^Tw$.

2.8 Η δυική μέθοδος simplex

Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που είναι σε ημικανονική μορφή. Αποτελείται από δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση βρίσκουμε μία βασική λύση του (Π) με $z_i - c_i \geq 0$, για όλα τα i, δηλαδή βρίσκουμε μία αρχική βασική εφικτή λύση του (Δ). Στη δεύτερη φάση διατηρώντας τις διαφορές $z_i - c_i$ μη αρνητικές, βρίσκουμε μία βασική λύση του (Π) με μη αρνητικές συντεταγμένες, δηλαδή εφικτή και πετυχαίνουμε αυτό βρίσκοντας την άριστη λύση του (Δ) για το οποίο έχουμε από την πρώτη φάση μία αρχική βασική εφικτή λύση. Η δυική μέθοδος simplex βασίζεται στη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυικού προβλήματος.

Αλγόριθμος:

Ξεκινώντας, δημιουργούμε ένα tableau simplex στο οποίο η αντίστοιχη βασική λύση δεν χρειάζεται να είναι και εφικτή κατ' ανάγκη.

Φάση Ι:

1. Εξετάζουμε τις διαφορές $z_k - c_k$.

- **a.** Εάν $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k, πάμε στη φάση ΙΙ.
- **b.** Εάν υπάρχει m τέτοιο ώστε $z_k - c_k < 0$ και $x_{ik} < 0$ για όλα τα i, τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις, ή είναι μη φραγμένο.
- **c.** Εάν δεν ισχύουν τα a. και b. τότε διαλέγουμε μία στήλη m με $z_k - c_k < 0$ και μετά ένα θετικό στοιχείο της, έστω $x_{ik} > 0$. Η στήλη i φεύγει από την βάση.

2. Η στήλη j γίνεται βασική βάση του κριτηρίου:

$$\left|\frac{z_j - c_j}{x_{ij}}\right| = \min \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_k \left\{ \left|\frac{z_k - c_k}{x_{ik}}\right| : z_k - c_k > 0, x_{ik} < 0 \right\} \\ \max\limits_k \left\{ \left|\frac{z_k - c_k}{x_{ik}}\right| : z_k - c_k < 0, x_{ik} > 0 \right\} \end{array} \right\}$$

3. Προχωράμε στον επόμενο πίνακα simplex κατά τα γνωστά.

4. Πάμε στο βήμα 1.

Φάση ΙΙ:

1. Είναι $z_k - c_k \geq 0$, για κάθε k και έστω x_0 η αντίστοιχη βασική λύση.
   a. Εάν $x_{i0} \geq 0$ για όλα τα i, η x_0 είναι άριστη λύση.
   b. Εάν υπάρχει i τέτοιο ώστε $x_i < 0$ και $x_{ik} \geq 0$ για όλα τα k, τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.
   c. Εάν δεν ισχύουν τα a. και b. τότε για κάθε i με $x_{i0} < 0$ υπάρχει $x_{ik} < 0$. Διαλέγουμε ένα $x_{i0} < 0$, και η στήλη i φεύγει από την βάση.

2. Η στήλη j γίνεται βασική, βάση του κριτηρίου:

$$\left|\frac{z_j - c_j}{x_{ij}}\right| = \min\left\{\min_k \left\{\left|\frac{z_k - c_k}{x_{ik}}\right| : z_k - c_k > 0, x_{ik} < 0\right\}\right\}$$

3. Προχωράμε στον επόμενο πίνακα simplex κατά τα γνωστά.

4. Πάμε στο βήμα 1.

Παρατήρηση:

Το κριτήριο που χρησιμοποιήσαμε για την επιλογή της εισερχόμενης στήλης εφαρμόζεται με τον όρο ότι δεν υπάρχει k που αντιστοιχεί σε μη βασική στήλη. Δηλαδή $z_k - c_k = 0$, $x_{ik} \leq 0$. Σε αντίθετη περίπτωση διαλέγουμε κάποιο άλλο i, τέτοιο ώστε $x_{ir} > 0$. Εάν για όλα τα i με $x_{ir} > 0$ υπάρχει k: $z_k - c_k = 0$, $x_{ik} < 0$ τότε:
Αντικαθιστούμε το 0 του $z_k - c_k$ με αυθαίρετο μικρό $\varepsilon > 0$ και συνεχίζουμε κανονικά μέχρι να φτάσουμε στο τελικό tableau. Τότε θέτουμε $\varepsilon = 0$ και παίρνουμε την άριστη λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα:

$$\max z = 5x_1 - 4x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 6 \\ 3x_1 - 2x_2 &\le 24 \\ -2x_1 + 3x_2 &\le -4 \end{aligned}$$

$$\text{με } x_1, x_2 \ge 0.$$

Το πρόβλημα γράφεται σε ημικανονική μορφή:

$$\max z = 5x_1 - 4x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 &= 24 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 &= -4 \end{aligned}$$

$$\text{με } x_i \ge 0, \text{ για } i = 1,\ldots,5$$

Οι τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα των συντελεστών σχηματίζουν τον μοναδιαίο ο οποίος δίνει την αρχική βασική μη εφικτή λύση $x_0 = (0,0,6,24,-4)^T$.

Φάση Ι

αρχικό tableau:

	c_j	5	-4	0	0	0	
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	-1	1	0	0	6
0	x_4	3	-2	0	1	0	24
0	x_5	-2	3	0	0	1	-4
	$z_j - c_j$	-5	4	0	0	0	0

Είναι $z_1 - c_1 = -5 < 0$ και $x_{21} = 3 > 0$, άρα η στήλη 4 φεύγει από την βάση. Βάσει του κριτηρίου του βήματος 2:

$$\min \left\{ \left|\frac{-5}{3}\right| , \left|\frac{4}{-2}\right| \right\} = \left|\frac{-5}{3}\right|$$ άρα η στήλη 1 γίνεται βασική.

Το στοιχείο 3 είναι το στοιχείο οδηγός.

Στο δεύτερο tableau ισχύει $z_k - c_k \geq 0$ για όλα τα k, και επομένως τελειώνει η Φάση I και προχωράμε στη Φάση II.

Tableau 2:

	c_j	5	-4	0	0	0	
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	-2
5	x_1	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	8
0	x_5	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	12
	$z_j - c_j$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	40

Φάση II:

Επειδή $x_{10} = -2 < 0$, η στήλη 3 φεύγει από τη βάση.
Βάσει του κριτηρίου του βήματος 2

$$\min \left\{ \left|\frac{2/3}{-1/3}\right| , \left|\frac{5/3}{-1/3}\right| \right\} = \left|\frac{2/3}{-1/3}\right|$$, η στήλη 2 γίνεται βασική.

Στοιχείο οδηγός είναι το -1/3, επομένως το επόμενο tableau simplex είναι:

Tableau 3:

	c_j	5	-4	0	0	0	
c_b	βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
-4	x_2	0	1	-3	1	0	6
5	x_1						12
0	x_5						2
	$z_j - c_j$	0	0	2	1	0	36

Είναι $x_{i0} > 0$ για όλα τα i, και επομένως η λύση x = (12,6,0,0,2) είναι άριστη. Τελικά, max z = 36.

Ακέραιος προγραμματισμός [Integer Programming (I.P.)]

3.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού αποτελούν μία ειδική κατηγορία προβλημάτων που ανήκουν στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Στον γραμμικό προγραμματισμό ισχύει η παραδοχή διαιρετότητας, η οποία δίνει την δυνατότητα στις μεταβλητές να πάρουν και κλασματικές τιμές. Στα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού αυτή η παραδοχή δεν ισχύει, επομένως εξετάζονται προβλήματα στα οποία όλες ή κάποιες από τις μεταβλητές επιτρέπεται να πάρουν ακέραιες τιμές.

Το πρόβλημα:

$$\max \text{ ή } \min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \ \leq \ , = \ , \ \geq \ b_i \ , \quad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \ \geq \ 0 \ , \ j = 1,\ldots,n$$

$$x_j \text{ ακέραιος} \ , \ j = 1,\ldots,k \ \ (k \ \leq \ n)$$

είναι ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού (integer programming) .

Όταν k = n τότε κάθε μεταβλητή απόφασης πρέπει να πάρει ακέραια τιμή και το παραπάνω πρόβλημα είναι πρόβλημα αμιγούς ακέραιου προγραμματισμού, αλλιώς λέγεται πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού.

Ο τελευταίος περιορισμός είναι αυτός ο οποίος διακρίνει τα προβλήματα γ.π. από τα προβλήματα α.π.

Όπως ισχύει και στον γραμμικό προγραμματισμό, οι τομείς εφαρμογής του ακέραιου προγραμματισμού και η σημασία του είναι σημαντικότατη στη πράξη, αφού μεγάλος αριθμός από καθημερινά πρακτικά προβλήματα επιχειρησιακής έρευνας είναι προβλήματα που υπόκεινται σε προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα που εντάσσεται στην κατηγορία των προβλημάτων αυτών είναι η παραγωγή προϊόντων σε ακέραιες ποσότητες με σκοπό την μεγιστοποίηση του κέρδους. Η παραγωγή μη ακέραιου αριθμού ειδών δεν έχει καμία φυσική σημασία, για παράδειγμα η παραγωγή αυτοκινήτων.

Τομείς εφαρμογής του ακέραιου προγραμματισμού είναι:

- ο αριθμός των εργατών σε ένα εργοστάσιο παραγωγής,
- χρονικός προγραμματισμός εργασιών με περιορισμούς στα διατιθέμενα μέσα,
- ο προγραμματισμός των πληρωμάτων των αεροπλάνων (aircrew scheduling),
- ο προγραμματισμός μεταφορικών μέσων (vehicle scheduling and truck dispatching),
- προγραμματισμός επενδύσεων (capital budgeting) και διάφοροι άλλοι.

Προβλήματα που περιλαμβάνουν μεταβλητές οι οποίες είναι από τη φύση τους ποσοτικές και επιβάλλεται να λάβουν ακέραιες τιμές ονομάζονται *άμεσα ακέραια μοντέλα.*

Μια άλλη κατηγόρια είναι τα *κωδικοποιημένα (coded) ακέραια μοντέλα*, στα οποία οι μεταβλητές απόφασης περιγράφουν ένα αυστηρά περιορισμένο αριθμό δυνατοτήτων. Οι μεταβλητές περιγράφουν αποφάσεις του τύπου «ναι - όχι» ή «αληθές - ψευδές». Σ’ αυτά γίνεται χρήση δυαδικών (binary) μεταβλητών του τύπου 1 ή 0, όπου το 1 αντιπροσωπεύει την απόφαση τύπου «ναι» ενώ το 0 αντιπροσωπεύει τη μοναδική άλλη δυνατότητα «όχι».

Η τελευταία κατηγόρια περιλαμβάνει τα *μετασχηματισμένα (transformed) ακέραια μοντέλα*, στα οποία γίνεται χρήση τεχνητών

ακέραιων μεταβλητών. Η εισαγωγή τεχνητών δυαδικών μεταβλητών μετατρέπει ειδικές κατηγορίες προβλημάτων σε άμεσα επιλύσιμα προβλήματα, με κλασσικές μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού.

Επιπρόσθετα, σε μοντέλα ακέραιου προγραμματισμού μπορούν να διαμορφωθούν και τα προβλήματα συνδυαστικής. Ένα πρόβλημα συνδυαστικής συνίσταται στην εύρεση, μεταξύ ενός συνόλου συνδυασμών, εκείνον που βελτιστοποιεί μία αντικειμενική συνάρτηση. Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι:

το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητού σε n πόλεις, αφού περιλαμβάνει (n-1) δυνατές διαδρομές, δηλαδή συνδυασμούς

και το πρόβλημα της διάταξης n εργασιών σε k μηχανές, αφού περιλαμβάνει $(n!)^k$ δυνατές διατάξεις των εργασιών, δηλαδή δυνατούς συνδυασμούς.

Στην πράξη, τα προβλήματα α.π. είναι πιο περίπλοκα στην επίλυση τους σε σχέση με τα προβλήματα γ.π. Εάν και είναι γεγονός ότι οι ακέραιες λύσεις είναι πολύ λιγότερες από τις κλασματικές σε ένα χωρίο, $\mathbb{Z}_+^n \subset \mathbb{R}_+^n$, η εύρεση της βέλτιστης τιμής δεν είναι απλούστερη. Στα μοντέλα προγραμματισμού, οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι με συνεχείς παρά με διακεκριμένες τιμές.

Ένας φαινομενικά εύκολος τρόπος υπολογισμού της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού είναι η επίλυση του προβλήματος με τις γνωστές τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού και η αποκοπή ή η στρογγύλευση των μη ακέραιων λύσεων ώστε να ικανοποιούν την συνθήκη ακεραιότητας. Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί αποκοπή υπάρχει μεγάλη περίπτωση η λύση να είναι δυνατή αλλά όχι η βέλτιστη ενώ στην περίπτωση στρογγύλευσης η λύση να μην είναι δυνατή.

Παράδειγμα:

Έστω το π.α.π:

$$\max z = 42x_1 + 11x_2$$

υπό τους περιορισμούς:

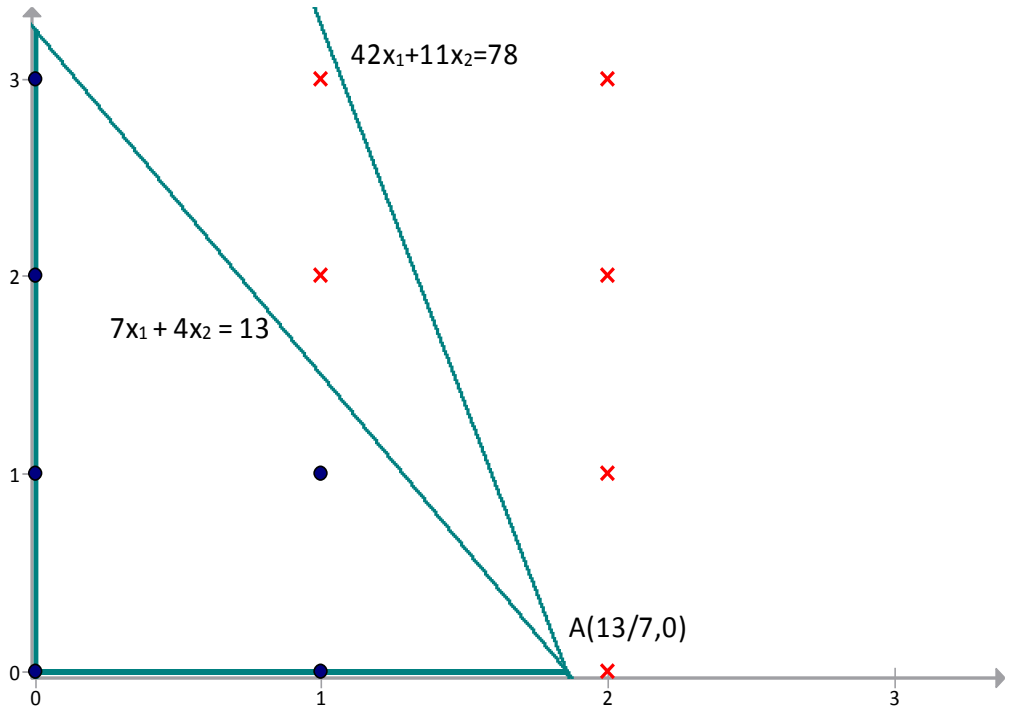
$$7x_1 + 4x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 ακέραιοι.

Λύνοντας το πρόβλημα γραφικά, η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = \frac{13}{7}$, $x_2 = 0$ με max z =78.

Η αποκοπή της λύσης μας δίνει $x_1' = 1$ και $x_2' = 0$. Η λύση αυτή είναι δυνατή αλλά δεν είναι η βέλτιστη. Αντίστοιχα, η στρογγύλευση της λύσης δίνει $x_1'' = 2$ και $x_2'' = 0$, σημείο το οποίο είναι εκτός της εφικτής περιοχής. Παρατηρώντας προσεκτικά τις δυνατές ακέραιες λύσεις που σημειώνονται στο διάγραμμα με μπλε κουκκίδες φαίνεται ότι η βέλτιστη λύση είναι η $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ με max z = 33.



Σε μεγαλύτερα προβλήματα, δεν είναι πάντα δυνατή η εύρεση όλων των δυνατών λύσεων του αρχικού προβλήματος, ενώ στην περίπτωση που κάτι τέτοιο είναι εφικτό δεν υπάρχει εύκολος τρόπος για να ελεγχθεί ποια από τις δυνατές λύσεις είναι και η βέλτιστη. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν και η αποκοπή ή η στρογγυλοποίηση μπορεί να είναι επιτυχής σε ορισμένες εφαρμογές, δεν είναι όμως γενικά ενδεδειγμένος τρόπος επίλυσης των προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού. Στις επόμενες παραγράφους παρατίθενται μερικές κατηγορίες προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού που λύνονται επιτυχώς με χρήση μεθόδων γραμμικού προγραμματισμού.

3.2 Το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού της μορφής 0-1 Δυαδικός ακέραιος προγραμματισμός (Binary Integer Programming) (BIP)

Ο ακέραιος προγραμματισμός βρίσκει εφαρμογή στον τομέα της επιχειρησιακής έρευνας που αφορά την διαδικασία λήψεως αποφάσεων. Οι εναλλακτικές επιλογές που παρέχονται σαν λύση του προβλήματος είναι της μορφής "ναι ή όχι". Για παράδειγμα, το αν μία επιχείρηση θα προβεί σε μία συγκεκριμένη αγορά, το αν θα εκτελεστεί μια επένδυση, το αν θα κατασκευαστεί ή όχι κάποιο έργο και διάφορα άλλα ζητήματα επιχειρησιακής έρευνας είναι δυνατόν να προσεγγιστούν με χρήση ακέραιου προγραμματισμού. Αυτές οι μεταβλητές απόφασης στην επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος μπορούν να πάρει δύο συγκεκριμένες τιμές, 1 και 0 αντίστοιχα, και ονομάζονται δυαδικές μεταβλητές.
Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι:

- Το **«Πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής »**

(The Shortest Path Problem)

που αφορά την εύρεση της συντομότερης διαδρομής ανάμεσα σε δύο δεδομένα κομβικά σημεία ενός δικτύου. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι για παράδειγμα η κατασκευή οδικού δικτύου που θα ενώνει δύο πόλεις. Στόχος αυτού του προβλήματος είναι, η αναζήτηση της βέλτιστης διαδρομής μεταξύ των 2 πόλεων, ούτως ώστε να κατασκευαστεί το οδικό δίκτυο με το μικρότερο δυνατό κόστος.

Ορίζουμε:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ εάν κατασκευαστεί τμήμα που θα ενώνει} \\ \quad \text{τους κόμβους i και j} \\ 0, \text{ εάν δεν κατασκευαστεί} \end{cases}$$

Η γενική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\min z = \sum_{j \in N_A} c_{Aj} x_{Aj} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in N_i} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N_B} c_{Bj} x_{Bj}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j \in N_A} x_{Aj} = \alpha$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} = \sum_{j \in N_i} x_{ji} \ , \quad i=1,\ldots,m$$

$$\sum_{j \in N_B} x_{jB} = \alpha$$

Όπου

- z είναι το συνολικό κόστος κατασκευής
- c_{ij} το κόστος σύνδεσης ανάμεσα στα κομβικά σημεία iκαι j
- N_A το σύνολο των κόμβων j που είναι άμεσα συνδεδεμένοι με τον αρχικό κόμβο A
- N_i το σύνολο των κόμβων j που είναι άμεσα συνδεδεμένοι με τον αρχικό κόμβο i
- N_B το σύνολο των κόμβων j που είναι άμεσα συνδεδεμένοι με τον αρχικό κόμβο B
- α η εισερχόμενη ροή από το δίκτυο = η εξερχόμενη ροή από το δίκτυο

- Το «**Πρόβλημα του Σακιδίου»**

(The knapsack problem)

Σε ένα πρόβλημα σακιδίου έχουμε n αντικείμενα. Κάθε ένα από αυτά, έχει μία συγκεκριμένη αξία c_i και ένα συγκεκριμένο βάρος α_i. Σκοπός είναι, να διαλέξουμε έναν μέγιστο αριθμό από αντικείμενα, χωρίς να παραβιάζεται η μέγιστη ποσότητα βάρους b που μπορεί να αντέξει το σακίδιο, μεγιστοποιώντας παράλληλα και την συνολική αξία των αντικειμένων.

Ορίζουμε

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ εάν το αντικείμενο i συμπεριλαμβάνεται στο σακίδιο} \\ 0, \text{ εάν όχι} \end{cases}$$

Η γενική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_i$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq b$$

Όπου

- z είναι το συνολική αξία των αντικειμένων
- c_i η αξία του αντικειμένου i
- α_i Το βάρος του αντικειμένου i
- b Το μέγιστο βάρος που μπορεί να αντέξει το σακίδιο

- **«Το πρόβλημα της ανάθεσης»**

(assignment)

Έστω ότι διαθέτουμε προσωπικό n ατόμων, A_1, A_2, ... , A_n, τα οποία πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την εκτέλεση m εργασιών, έστω B_1, B_2, ... , B_m όπου $n \geq m$. Κάθε εργασία απαιτεί ένα μόνο άτομο για την εκτέλεσή της ενώ σε κάθε άτομο μπορεί να ανατεθεί το πολύ μια εργασία.

Θεωρούμε r_{ij} με i=1,2,...,n και j=1,2,...,m την απόδοση (παραγωγικότητα, ταχύτητα κλπ) του ατόμου A_i στην εργασία B_j. Το πρόβλημα ανάθεσης (έργου) είναι το πώς θα κατανεμηθούν τα άτομα στις εργασίες ώστε να μεγιστοποιήσουμε τη συνολική απόδοση. Το πρόβλημα της ανάθεσης είναι κλασσικό πρόβλημα δυαδικού ακέραιου προγραμματισμού.

Ορίζουμε τις δυαδικές μεταβλητές x_{ij}:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν το άτομο i χρησιμοποιηθεί στην εργασία j} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνολική απόδοση δίνεται από τον τύπο:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}x_{ij}$$

Επιπλέον, σε κάθε άτομο μπορεί να ανατεθεί μία μόνο εργασία, επομένως:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \text{για κάθε } i = 1,\ldots,n$$

Επίσης, κάθε εργασία απαιτεί ένα μόνο άτομο για την διεκπεραίωση της, άρα:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{για κάθε } j = 1,\ldots,m$$

Τελικά, το πρόβλημα ανάθεσης παίρνει την μορφή προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}x_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,\ldots,m$$

όπου

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m$$

Δυαδικές μεταβλητές

Επιπρόσθετα, προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού λύνονται ευκολότερα εάν αντικαταστήσουμε τις ακέραιες μεταβλητές με δυαδικές, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό. Αυτό συμβαίνει γιατί οι αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων με δυαδικές μεταβλητές είναι πολύ πιο αποτελεσματικοί από αυτούς που προορίζονται για προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού, και γι' αυτό οι πρώτοι θα πρέπει να προτιμώνται, όπου αυτό είναι εφικτό. Για τον μετασχηματισμό αυτό, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να υπάρχει ένα άνω όριο, u, στην τιμή που μπορεί να πάρει η κάθε ακέραια μεταβλητή x.

Δηλαδή $0 \le x \le u$, και έστω N ακέραιος τέτοιος ώστε:

$$2^N \le u \le 2^{N+1} .$$

Τότε η δυαδική αναπαράσταση του x είναι:

$$x = \sum_{i=0}^{N} 2^i y_i \qquad (*)$$

όπου οι μεταβλητές y_i είναι δυαδικές μεταβλητές.
Αντικαθιστώντας αυτή την αναπαράσταση δυαδικών μεταβλητών για κάθε μία από τις αρχικές μεταβλητές, μετατρέπουμε όλο πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα που περιέχει αποκλειστικά δυαδικές μεταβλητές.
Η τελική τιμή που θα πάρει η x, καθορίζεται από την τιμή που θα πάρει η δυαδική μεταβλητή y_i και την σχέση (*).

παράδειγμα:

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού:

$$\max z = x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + 10x_2 \le 20$$

$$x_1 \le 2$$

όπου x_1, x_2 ακέραιοι και θετικοί

Να μετασχηματιστεί σε πρόβλημα δυαδικού προγραμματισμού.
Από τους περιορισμούς του αρχικού προβλήματος προκύπτει ότι

$$x_1 \leq 2 \text{ (περιορισμός 2)}$$

$$x_2 \leq 2 \text{ (περιορισμός 1)}$$

Επομένως,

$$x_1 = y_1 + 2y_2$$

$$\text{και } x_2 = y_3 + 2y_4 \text{ ,}$$

όπου y_1, y_2, y_3 και y_4 είναι δυαδικές μεταβλητές.

Στη συνέχεια, παίρνουμε το ακόλουθο δυαδικό πρόβλημα:

$$\max \ z = y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 10y_4$$

υπό τους περιορισμούς

$$y_1 + 2y_2 + 10y_3 + 20y_4 \leq 20$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$

όπου y_1, y_2, y_3 και y_4 είναι δυαδικές μεταβλητές.

Χρήση δυαδικών μεταβλητών για τη λήψη απόφασης μεταξύ δύο εναλλακτικών επιλογών (Either - Or Constraints)

Σημαντική χρήση των δυαδικών μεταβλητών είναι να επιλέξουμε μία απόφαση μεταξύ δύο εναλλακτικών, που θα πρέπει να ληφθεί στο πρόβλημα. Λύνοντας το πρόβλημα, η τιμή που θα πάρει η δυαδική μεταβλητή (0 ή 1) δείχνει ποια απόφαση θα πρέπει να επιλεγεί ώστε να βελτιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση.

Προκειμένου να καταδειχθεί η προσέγγιση σε τέτοιες καταστάσεις, υποθέτουμε ότι μία από τις απαιτήσεις του προβλήματος είναι ότι θα ισχύει ένας από τους παρακάτω περιορισμούς:

Είτε $8x_1 + 4x_2 \leq 15$

ή $5x_1 + 3x_2 \leq 9$

Τουλάχιστον μία από τις δύο ανισότητες πρέπει να ισχύουν, αλλά όχι απαραίτητα και οι δύο. Η απαίτηση αυτή πρέπει να αναδιατυπωθεί, ώστε να συμβαδίζει με τη μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, όπου όλοι οι περιορισμοί που αναφέρονται πρέπει να ισχύουν. Έστω M ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός. Οι παραπάνω περιορισμοί μπορούν να ξαναγραφτούν ως:

Είτε $8x_1 + 4x_2 \leq 15$

$5x_1 + 3x_2 \leq 9 + M$

ή $8x_1 + 4x_2 \leq 15 + M$

$5x_1 + 3x_2 \leq 9$

Η προσθήκη του αριθμού M στη δεξιά πλευρά των εν λόγω περιορισμών έχει ως αποτέλεσμα την κατάργησή τους, επειδή θα πληρούν αυτομάτως τις λύσεις που ικανοποιούν οι λοιποί περιορισμοί του προβλήματος. Η διατύπωση αυτή προϋποθέτει ότι το σύνολο των εφικτών λύσεων για το αρχικό πρόβλημα είναι ένα φραγμένο σύνολο και ότι το M είναι αρκετά μεγάλο ούτως ώστε δεν θα εξαλείψει οποιεσδήποτε εφικτές λύσεις. Η διατύπωση αυτή, είναι ισοδύναμη με το σύνολο των περιορισμών:

$8x_1 + 4x_2 \leq 15 + My$
$5x_1 + 3x_2 \leq 9 + M(1-y)$

όπου y είναι δυαδική μεταβλητή.
Επειδή η βοηθητική μεταβλητή y πρέπει να είναι είτε 0 ή 1, η διατύπωση αυτή εγγυάται ότι ένας μόνο από τους αρχικούς περιορισμούς πρέπει να ισχύει, ενώ ο άλλος θα εξαλειφθεί. Αυτό το νέο σύνολο των περιορισμών στη συνέχεια επισυνάπτεται στους υπόλοιπους περιορισμούς του προβλήματος με αποτέλεσμα να δώσει ένα δυαδικό ή μικτό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, ανάλογα με το αν οι μεταβλητές x_i είναι ακέραιες ή συνεχείς.

Άλλος τρόπος μετασχηματισμού του παραπάνω προβλήματος θα ήταν να εισάγαμε δύο ξεχωριστές δυαδικές μεταβλητές y_1 και y_2 αντίστοιχα, που θα αντιπροσώπευαν τις αποφάσεις “ναι ή όχι” . Τότε, θα προσθέταμε και τον περιορισμό $y_1 + y_2 = 1$ προκειμένου να αλληλοαναιρούνται.
Αυτή η μέθοδος εισαγωγής δυαδικών μεταβλητών ισχύει και για την γενική περίπτωση παρακάτω.

Κ από Ν περιορισμοί πρέπει να ισχύουν

Περιπτώσεις όπου το πρόβλημα περιλαμβάνει ένα σύνολο από Ν περιορισμούς, από τους οποίους μόνο Κ πρέπει να ισχύουν. Υποθέτουμε ότι Κ < Ν. Μέρος της διαδικασίας βελτιστοποίησης είναι να επιλέξει τον καλύτερο συνδυασμό Κ περιορισμών, με σκοπό την μέγιστη τιμή που μπορεί να φτάσει η αντικειμενική συνάρτηση. Οι Ν-Κ περιορισμοί που δεν επιλέγονται, στην πραγματικότητα εξαλείφονται από το πρόβλημα, αν και οι εφικτές λύσεις ενδέχεται τυχαία να εξακολουθούν να πληρούν ορισμένες από αυτές.
Στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε δύο περιορισμούς εκ των οποίων ο ένας μόνο έπρεπε να ισχύει, δηλαδή Ν = 2 και Κ = 1.

Το παρακάτω πρόβλημα περιέχει N πιθανούς περιορισμούς από τους οποίους K πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{array}{lcl} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & a_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & a_2 \\ \vdots & & \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & a_N \end{array}$$

Είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα:

$$\begin{array}{lcl} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & a_1 + My_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & a_2 + My_2 \\ \vdots & & \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & a_N + My_N \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = N - K$$

όπου y_i δυαδική μεταβλητή, για κάθε i = 1,...,N.

και M είναι ένας μεγάλος θετικός αριθμός. Σε κάθε δυαδική μεταβλητή y_i, i = 1,...,N εάν $y_i = 0$, τότε και $My_i = 0$ επομένως ο νέος περιορισμός είναι ο ίδιος με αυτόν του αρχικού προβλήματος.
Αντίθετα, εάν $y_i = 1$ τότε ο όρος My_i θα είναι μεγάλος, (και πάλι υποθέτοντας ότι η εφικτή περιοχή είναι φραγμένη) και κατά συνέπεια, ο νέος περιορισμός θα ικανοποιείται αυτόματα από την οποιαδήποτε λύση που θα ικανοποιεί τους υπόλοιπους νέους περιορισμούς. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την εξάλειψη του αρχικού περιορισμού i. Ως εκ τούτου, επειδή οι περιορισμοί των y_i βεβαιώνουν ότι K εξ' αυτών θα είναι ίσοι με 0 και οι υπόλοιποι N-K θα είναι ίσοι με 1,τότε K από τους αρχικούς περιορισμούς θα είναι αμετάβλητοι και οι υπόλοιποι N - K, στην πραγματικότητα, να εξαλειφθούν. Η επιλογή των K περιορισμών που θα παραμείνουν γίνεται με την εφαρμογή του κατάλληλου αλγορίθμου στο γενικό πρόβλημα, ώστε να βρεθεί η βέλτιστη λύση για όλες τις μεταβλητές συγχρόνως.

Χρήση δυαδικών μεταβλητών για τη διατύπωση επιβαλλόμενων (αναγκαστικών) περιορισμών μεταξύ αποφάσεων.

Πολύ συχνά σε προβλήματα βελτιστοποίησης είναι ότι ορισμένες αποφάσεις είναι εξαρτημένες. Υποθέτουμε ότι μια απόφαση Α μπορεί να ληφθεί μόνο αν μία άλλη απόφαση Β έχει επίσης ληφθεί. Προκειμένου να μοντελοποιηθεί ένα τέτοιο πρόβλημα, εισάγουμε τις δυαδικές μεταβλητές y_1, y_2, όπου

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{αν η απόφαση Α ληφθεί} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\text{και} \quad y_2 = \begin{cases} 1, & \text{αν η απόφαση Β ληφθεί} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Εάν y_1, y_2 είναι ίσες με 1 τότε και οι δύο αποφάσεις έχουν ληφθεί. Αλλιώς, αναγκαστικά, θα παίρνουν και οι δύο την τιμή 0, που σημαίνει ότι καμία από τις δύο δεν θα πραγματοποιηθεί.
Η εξάρτηση των δύο αποφάσεων μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας τον περιορισμό:

$$y_1 \leq y_2$$

Έτσι, αν $y_2 = 0$, η απόφαση Β δεν έχει ληφθεί, τότε αναγκαστικά και $y_1 = 0$, δηλαδή ούτε και η απόφαση Α δεν μπορεί να ληφθεί.

3.3 Επίλυση προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού με χρήση γραμμικού προγραμματισμού

Παραδείγματα προβλημάτων που εμπίπτουν στην κατηγορία προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού και επιλύονται επιτυχώς με χρήση γραμμικού προγραμματισμού είναι το «Πρόβλημα της Συντομότερης Διαδρομής» που προαναφέρθηκε. Επίσης, μία ακόμα γενική κατηγορία προβλημάτων που εάν επιλυθεί με μεθόδους του γραμμικού προγραμματισμού δίνει πάντα ακέραιες λύσεις είναι το **«Πρόβλημα της μεταφοράς (The transportation problem)».** Στα προβλήματα αυτά, υπάρχουν m πηγές ροής, οι οποίες παράγουν δεδομένη ποσότητα προϊόντος, με τελικό προορισμό n κόμβους. Το πιο συνηθισμένο πρόβλημα μεταφοράς είναι η μεταφορά του προϊόντος από εργοστάσια παραγωγής στις αποθήκες. Στόχος είναι η μεταφορά του προϊόντος με το μικρότερο δυνατό κόστος, ενώ το κόστος μεταφοράς ανάμεσα σε μία πηγή και ένα κόμβο θεωρείται γνωστό.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος μεταφοράς είναι:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq \alpha_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j$$

με $x_{ij} \geq 0$ και ακέραιο.

Όπου:

z	το συνολικό κόστος μεταφοράς
m	το κόστος μεταφοράς μίας μονάδας προϊόντος από την πηγή i προς τον κόμβο ζήτησης j (το οποίο είναι γνωστό)
n	η ποσότητα προϊόντος που μεταφέρεται από την

πηγή i προς τον κόμβο ζήτησης j

b_j η δυναμικότητα της πηγής i

c_{ij} η ζήτηση του κόμβου j

x_{ij} ο συνολικός αριθμός των πηγών του δικτύου

α_i ο συνολικός αριθμός των κόμβων ζήτησης

Τέλος, υπάρχουν προβλήματα τα οποία εάν διατυπωθούν ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και στην συνέχεια επιλυθούν είναι δυνατόν να προκύψουν ακέραιες λύσεις. Προβλήματα που είναι μεγάλου μεγέθους και παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία να στην επίλυση τους είναι δυνατόν να επιλυθούν με χρήση γραμμικού προγραμματισμού ακόμα και εάν δεν εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να εντοπίζεται μία καλή λύση, όχι όμως η βέλτιστη.

3.4 Η μέθοδος της απαρίθμησης Enumeration

Η μέθοδος απαρίθμησης βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα μικρού μεγέθους, δηλαδή με μικρό αριθμό μεταβλητών. Ο όρος απαρίθμηση αναφέρεται στην καταγραφή όλων των πιθανών εφικτών ακέραιων λύσεων ενός προβλήματος και στη συνέχεια τον εντοπισμό της βέλτιστης.

Παράδειγμα:

Έστω ότι το πρόβλημα είναι η κατασκευή ενός συγκεκριμένου αριθμού κτιρίων. Για την κατασκευή των κτιρίων αυτών διατίθενται διάφορα πιθανά οικόπεδα σε διάφορες τοποθεσίες, τα οποία είναι και διαφορετικού μεγέθους. Κάθε ένα από τα κτήρια έχει διαφορετικό κόστος κατασκευής, καθώς επίσης διαφορετικά θεωρούνται και τα κέρδη που θα επιφέρουν στην συνέχεια. Λόγω του περιορισμένου προσωπικού, θεωρείται ότι δεν είναι δυνατό να κατασκευάζονται ταυτόχρονα πάνω από δύο κτήρια, ενώ ο προϋπολογισμός του έργου δεν θα μπορεί να ξεπεράσει τα 7,5 εκατομμύρια ευρώ. Επίσης, η απόσταση μεταξύ των επιλεγμένων οικοπέδων πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ 10 χιλιόμετρα.

Αποστάσεις μεταξύ οικοπέδων σε χλμ:

οικόπεδο	1	2	3	4	5
1	0	12	11	17	20
2	12	0	10	23	10
3	11	10	0	5,5	6,5
4	17	23	5,5	0	4
5	20	10	6,5	4	0

Τα ζεύγη οικοπέδων (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (2,4) αποκλείονται ως πιθανές επιλογές αφού απέχουν περισσότερο από δέκα

χιλιόμετρα. Τα οικονομικά στοιχεία των οικοπέδων είναι:

οικόπεδο	κόστος κατασκευής (σε εκατομμύρια ευρώ)	καθαρά κέρδη (σε εκατομμύρια ευρώ)
1	1,89	0,22
2	1,745	0,225
3	3,4	0,35
4	3,87	0,33
5	4,405	0,435

Ο αντικειμενικός στόχος του προβλήματος είναι η μεγιστοποίηση του τελικού κέρδους που θα επιφέρει η κατασκευή των κτηρίων. Έστω η μεταβλητή x_iη οποία παίρνει τιμές

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ εάν κατασκευαστεί το κτήριο } i \\ 0, \text{ εάν δεν κατασκευαστεί} \end{cases} \qquad \text{όπου } i = 1,\dots,5$$

Βάση των δεδομένων του προβλήματος το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι:

$$\max z = 0.22x_1 + 0.255\, x_2 + 0.35\, x_3 + 0.33\, x_4 + 0.435\, x_5$$

υπό τους περιορισμούς:

$$1.89x_1 + 1.745x_2 + 3.4x_3 + 3.870x_4 + 4.405x_5 \le 7.5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 2$$
$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 + x_3 \le 1$$
$$x_1 + x_4 \le 1$$
$$x_1 + x_5 \le 1$$
$$x_2 + x_4 \le 1$$

Οι τελευταίοι πέντε περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι τελικά δεν θα επιλεχθούν κτήρια των οποίων η απόσταση είναι μεγαλύτερη των 10 χλμ.

Τελικά, τα πιθανά ζεύγη λύσεων είναι τα (2,3) , (2,5) , (3,4) , (3,5) , (4,5).

Είναι εύκολο λόγω της φύσης του προβλήματος να υπολογίσουμε για αυτές τις πιθανές λύσεις το κόστος κατασκευής

Πιθανές λύσεις	κόστος κατασκευής (σε εκατομμύρια ευρώ)
(2,3)	1,745 + 3,4 = 5,145
(2,5)	1,745 + 4,405 = 6,15
(3,4)	3,4 + 3,87 = 7,27
(3,5)	3,4 + 4,405 = 7,805
(4,5)	3,87 + 4,405 =8,275

Οι επιλογές (3,5) και (4,5) αποκλείονται γιατί το κόστος κατασκευής ξεπερνάει το συνολικό διαθέσιμο ποσό των 7,5 εκατομμυρίων ευρώ.

Πιθανές λύσεις	καθαρά κέρδη (σε εκατομμύρια ευρώ)
(2,3)	0,255 + 0,350 = 0,605
(2,5)	0,255 + 0,435 = 0,690
(3,4)	0,350 + 0,330 = 0,680

Τελικά, η βέλτιστη λύση είναι να κατασκευαστούν κτήρια στα οικόπεδα 2 και 5 τα οποία θα επιφέρουν και το μέγιστο κέρδος.

Η μέθοδος απαρίθμησης εφαρμόζεται γενικά σε προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού με λίγες μεταβλητές. Ωστόσο σε προβλήματα στα οποία ο αριθμός των μεταβλητών είναι μεγάλος, και συνεπώς και οι δυνατοί συνδυασμοί των λύσεων είναι αρκετοί, τότε είναι απαγορευτική η απαρίθμηση τους.

3.5 Το πρόβλημα του σταθερού κόστους
The fixed – charge problem

Στα τυπικά προβλήματα που αφορούν τον προγραμματισμό παραγωγής n προϊόντων σε κάποια επιχείρηση, το κόστος για την παραγωγή ενός προϊόντος j αποτελείται από ένα σταθερό κόστος k_j (set-up cost) το οποίο εμφανίζεται μόνο εάν το προϊόν παράγεται, ανεξάρτητα από την ποσότητα διάθεσης του αντίστοιχου πόρου και ένα κόστος c_j ανά μονάδα.

Έστω ότι ζητείται η τοποθέτηση παραγωγικών μονάδων μεταξύ m θέσεων. Θεωρείται ότι όλες οι μονάδες παράγουν ομοιογενή προϊόντα. Η μονάδα i έχει δυνατότητα παραγωγής a_i μονάδων και απαιτεί μια προσδιορισμένη επένδυση k_i. Τα προϊόντα διαβιβάζονται σε n αγοραστές, με τον j αγοραστή να απαιτεί b_j μονάδες. Αν c_{ij} είναι το κόστος παραγωγής της μονάδας i προς διαβιβασμό στον αγοραστή j, ζητούνται οι δυνατότητες των παραγωγικών μονάδων έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται η συνολική παραγωγή και το κόστος επενδύσεως.

Εάν x_{ij} είναι η μεταβλητή που δηλώνει το επίπεδο παραγωγής του προϊόντος i προς διάθεση στον πελάτη j, το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(x_{ij}\right)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \qquad \text{για κάθε } j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad \text{για κάθε } i = 1,2,\ldots,m$$

όπου το συνολικό κόστος παραγωγής $f_j(x_j)$ για το προϊόν j, δίνεται από τον τύπο:

$$f_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} k_j + c_{ij}x_{ij}, & \text{άν παραχθεί το προϊόν j } (x_{ij} \geq 0) \\ 0, & \text{άν όχι } (x_{ij} = 0) \end{cases}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση όμως, είναι μη γραμμική ως προς την μεταβλητή x_j, και μπορεί να μετατραπεί σε γραμμική, με την εισαγωγή ενός πρόσθετου περιορισμού.
Ορίζοντας μία δυαδική μεταβλητή y_j έτσι ώστε:

$$y_j = \begin{cases} 1, \text{ αν παραχθεί το προϊόν } j, \ (\sum_{j=1}^{n} x_j > 0) \\ 0, \text{ αν όχι} \end{cases}$$

Τότε, το πρόβλημα μορφοποιείται ως εξής:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + k_i y_i \right)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \qquad \text{για κάθε } j = 1,2,...,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i y_i \qquad \text{για κάθε } i = 1,2,...,m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$y_i = 0 \text{ ή } 1 \qquad \text{για κάθε } i = 1,2,...,m$$

Αν για ένα δεδομένο i είναι $x_{ij} > 0$, τότε το y_i τίθεται από τον αλγόριθμο ίσο με 1 και ο αντίστοιχος περιορισμός ικανότητας παραγωγής παραμένει αμετάβλητος. Αν όμως $x_{ij} = 0$ για όλα τα i , τότε τίθεται $y_i = 0$ ώστε να ελαχιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση.
Σε περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την παραγωγική ικανότητα a_i της μονάδας i, τίθεται ένας πολύ μεγάλος αριθμός M τέτοιος ώστε

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M y_i$$

Ο τελευταίος περιορισμός είναι αναγκαίος για να εξασφαλιστεί ότι αν $y_j = 0$ τότε και $x_j = 0$ και αντίθετα, αν $x_j > 0$ τότε και $y_j = 1$. Φυσικά, αν $x_j > 0$ τότε ο περιορισμός αυτός ισχύει πάντοτε, αφού ο αριθμός M είναι ένας πολύ μεγάλος πραγματικός αριθμός.

3.6 Η μέθοδος των διαδοχικών ορίων Branch and bound - B&B

Η μέθοδος των διαδοχικών ορίων μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα τόσο αμιγούς όσο και μικτού ακέραιου προγραμματισμού. Αρχικά επιλύουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με την μέθοδο simplex χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι περιορισμοί ακεραιότητας των μεταβλητών. Το πρόβλημα αυτό θα αναφέρεται στο εξής ως το χαλαρό πρόβλημα (LP relaxation) του αρχικού προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού. Εάν η λύση του προβλήματος είναι ακέραια, τότε το πρόβλημα έχει τελειώσει και η λύση αυτή είναι η βέλτιστη. Γενικά όμως αυτή η λύση δεν είναι ακέραια. Επιλέγοντας μία οποιαδήποτε μη ακέραια μεταβλητή x_i , δημιουργούμε δύο θυγατρικά προβλήματα με την εισαγωγή δύο συμπληρωματικών περιορισμών αντίστοιχα: $x_i \leq [x_i]$ και $x_i \geq [x_i] + 1$.

Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να διακλαδώσουμε μία μεταβλητή της οποίας η τιμή είναι $x_1 = 3,4$ τότε στα νέα υποπροβλήματα που θα δημιουργηθούν οι περιορισμοί που θα προστεθούν είναι $x_1 \leq 3$ και $x_1 \geq 4$. Εάν έχουμε πρόβλημα της μορφής 0-1, τότε οι περιορισμοί που θα προστεθούν στα υποπροβλήματα είναι $x_1 = 0$ και $x_1 = 1$ αντίστοιχα.

Η λύση του αρχικού προβλήματος με την μέθοδο simplex, οριοθετεί το ανώτατο όριο που μπορεί να πάρει η z στην άριστη λύση. Η τιμή αυτή της z θα μειώνεται διαρκώς όσο θα επιβάλλονται και άλλοι περιορισμοί κατά την διάρκεια επίλυσης του προβλήματος. Εάν ένα πρόβλημα είναι ενεργό, δηλαδή εάν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή που έχουμε πάρει μέχρι εκείνη την στιγμή από ένα άλλο υποπρόβλημα το οποίο δίνει ακέραια λύση, συνεχίζουμε την διαδικασία έως ότου όλα τα προβλήματα να καταστούν μη ενεργά. Ως μη ενεργά θεωρούνται τα προβλήματα όταν:

- όλες οι μεταβλητές στη λύση του είναι ακέραιες
- όταν είναι αδύνατο

- όταν η αντικειμενική συνάρτηση μας δίνει μικρότερη τιμή από αυτή που μας έχει δώσει ένα άλλο υποπρόβλημα με ακέραια λύση.

Ουσιαστικά, η μέθοδος αυτή, χρησιμοποιεί πολλές φορές εσωτερικά τον αλγόριθμο simplex για την λύση των υποπροβλημάτων. Κατά αυτόν τον τρόπο δημιουργείται μία λίστα από προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.
Σημειώνεται στην με την μέθοδο branch and bound μπορούν να επιλυθούν και προβλήματα μικτού ακέραιου προγραμματισμού. Οι μεταβλητές οι οποίες μπορεί να αποτελέσουν την βάση διακλάδωσης είναι αυτές που παίρνουν τις τιμές 0-1.
Όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές που δεν εξαναγκάζονται σε ορισμένες τιμές δεν συμμετέχουν στη διαδικασία διακλάδωσης, και η τιμή τους προκύπτει από την επίλυση του εκάστοτε υποπροβλήματος.

Παράδειγμα:

Έστω το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού:

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

όπου $x_1, x_2 \geq 0$ και ακέραιες.

Επιλύουμε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με την μέθοδο simplex χωρίς να λάβουμε υπόψη την ακεραιότητα των μεταβλητών.

Αρχικά, επιλύεται με μέθοδο simplex το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

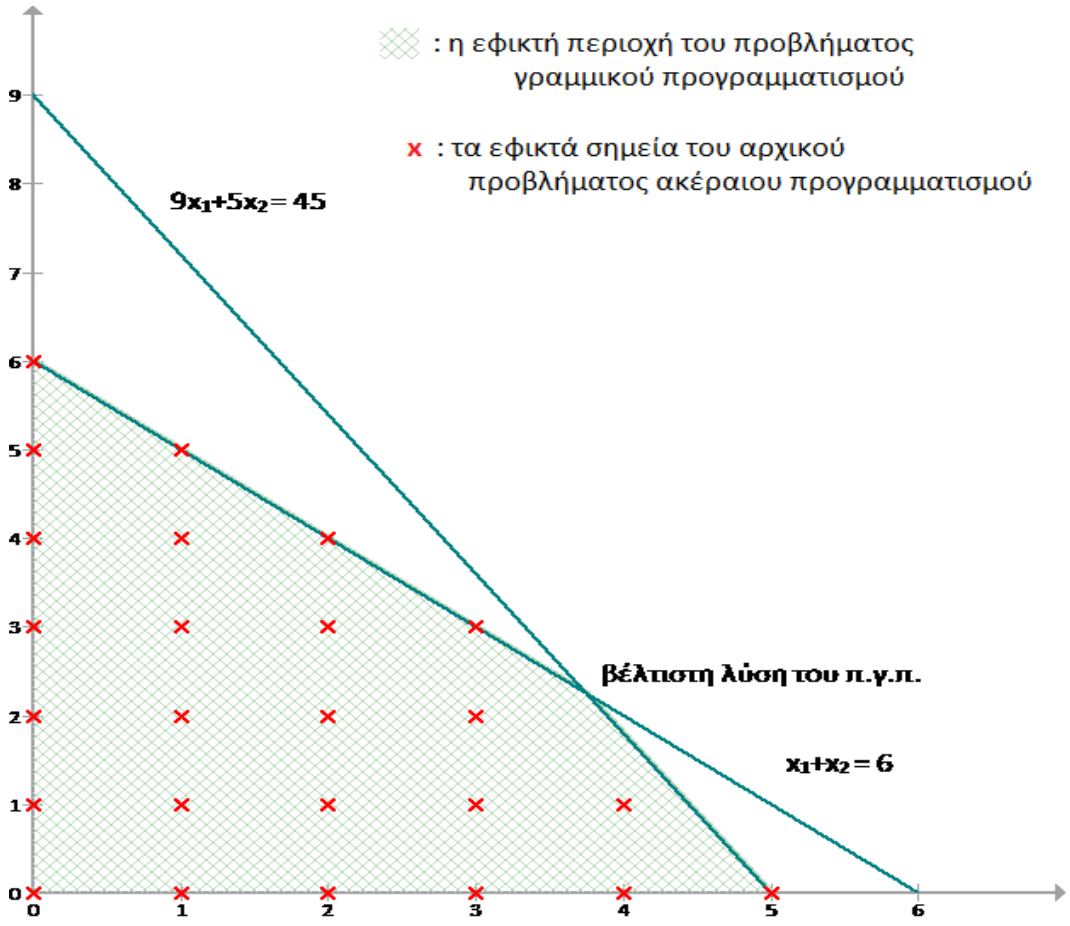
$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

όπου $x_1, x_2 \geq 0$.

Η λύση του είναι $x_1 = 15/4$, $x_2 = 9/4$ με $z = 165/4$.
Επειδή η λύση δεν είναι ακέραια, δεν είναι αποδεκτή ως λύση του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού. Επίσης, φαίνεται ότι στην ακέραια λύση του προβλήματος η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν θα μπορεί να υπερβεί την τιμή 41,25, δηλαδή θα είναι μικρότερη ή ίση από 41.
Η σκιαγραφημένη περιοχή είναι η εφικτή περιοχή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.



Συνεχίζοντας στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε την εφικτή περιοχή προσπαθώντας να εντοπίσουμε την λύση του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού.

Αυθαίρετα διαλέγουμε μία από τις μεταβλητές που υπόκεινται σε περιορισμό ακεραιότητας, έστω την x_1. Βλέποντας την λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού η x_1 πρέπει είτε να είναι είτε ≥ 4 είτε ≤ 3.

Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργούμε δύο υποπροβλήματα, τα (2α) και (2b), προσθέτοντας περιορισμούς που συμμετέχει η μεταβλητή x_1.

<u>Υποπρόβλημα (2α):</u>

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \end{aligned}$$

όπου $x_1, x_2 \geq 0.$

Το υποπρόβλημα (2α) μας δίνει την λύση $z = 41$, $x_1 = 4$ $x_2 = 1.8$.

<u>Υποπρόβλημα (2b):</u>

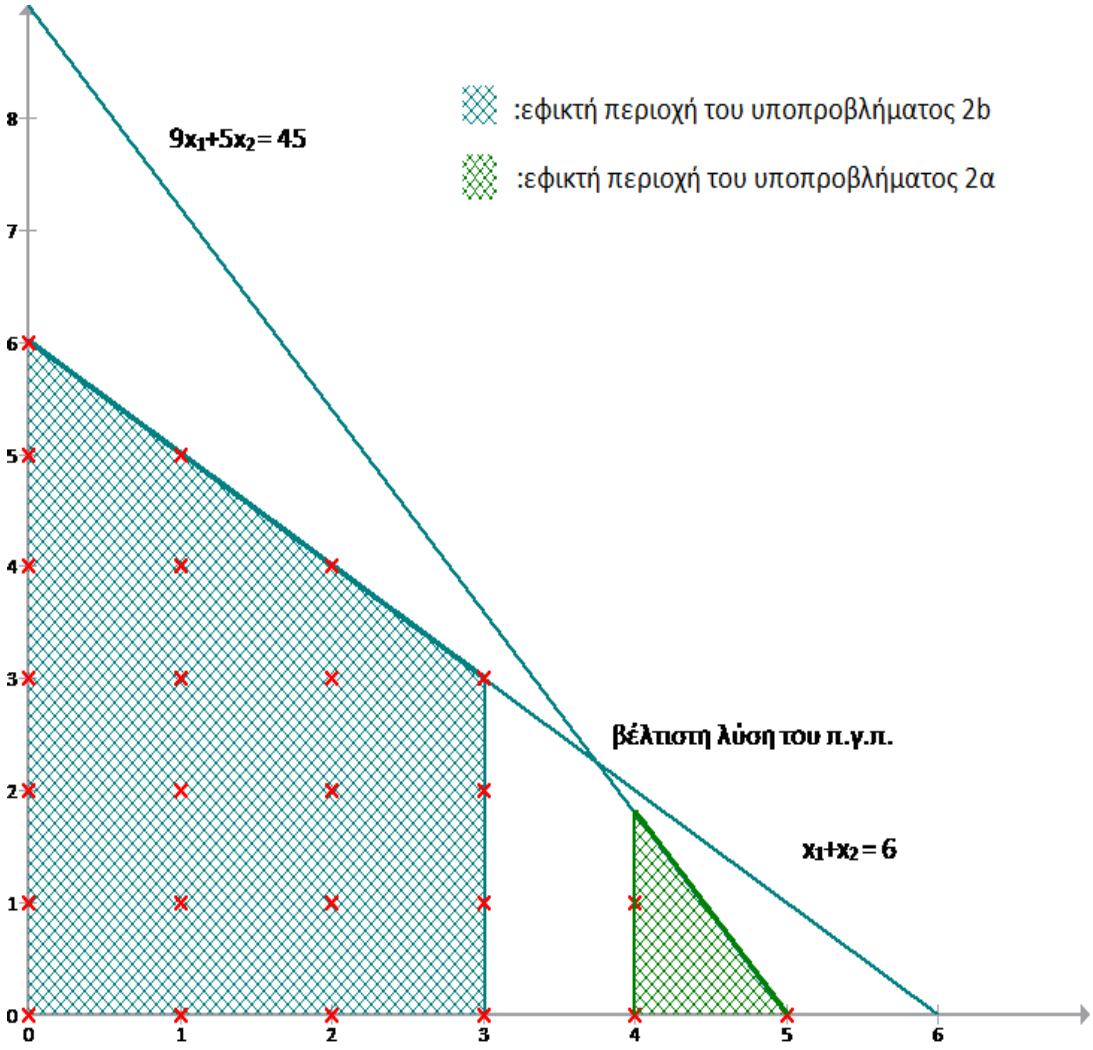
$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\leq 3 \end{aligned}$$

όπου $x_1, x_2 \geq 0.$

Το υποπρόβλημα (2b) μας δίνει την ακέραια λύση $z = 39$, $x_1 = 3$ και $x_2 = 3$. Αυτή η λύση είναι αποδεκτή ως λύση του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού αλλά μπορεί να μην είναι η βέλτιστη. Το υποπρόβλημα (2b) είναι πλέον μη ενεργό.



Παρατηρούμε ότι όλες οι εφικτές λύσεις του αρχικού προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού συμπεριλαμβάνονται είτε στην μία είτε στην άλλη εφικτή περιοχή των υποπροβλημάτων 2α,2b. Επίσης, οι εφικτές περιοχές δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο μεταξύ τους.

Μια απεικόνιση όλων των υποπροβλημάτων που έχουν δημιουργηθεί ονομάζεται δέντρο. Κάθε υποπρόβλημα θεωρείται ως κόμβος του δέντρου, και κάθε γραμμή που συνδέει δύο κόμβους του δέντρου ονομάζεται τόξο. Οι περιορισμοί που σχετίζονται με κάθε κόμβο του δέντρου είναι οι περιορισμοί για το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συν τους περιορισμούς που συνδέονται με τα τόξα που οδηγούν από το υποπρόβλημα 1 στον κόμβο.

βήμα 1^{ο} :

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$
υπό τους περιορισμούς
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\le 45 \end{aligned}$$
όπου $x_1, x_2 \ge 0$.

$x_1 \ge 4$ ↙ ↘ $x_1 \le 3$

βήμα 2^{ο} :

<u>Υποπρόβλημα (2α):</u>
$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$
υπό τους περιορισμούς
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\le 45 \\ x_1 &\ge 4 \end{aligned}$$
$x_1, x_2 \ge 0$.

λύση: $x_1=4$, $x_2=1.8$ με $z= 41$

<u>Υποπρόβλημα (2b):</u>
$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$
υπό τους περιορισμούς
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\le 45 \\ x_1 &\le 3 \end{aligned}$$
$x_1, x_2 \ge 0$.

λύση: $x_1=3$, $x_2=3$ με $z= 39$

Το πρόβλημα (2b) έχει ακέραια λύση, επομένως είναι λύση του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού. Οποιαδήποτε τέτοια λύση που θα εμφανιστεί κατά την διάρκεια λύσης του προβλήματος θεωρείται υποψήφια λύση του αρχικού προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού. Επίσης το $z = 39$ είναι ένα κατώτερο όριο για την τιμή της z, δηλαδή στην τελική λύση θα ισχύει $z \ge 39$.

Παρατηρούμε ότι το υποπρόβλημα (2α) δεν έχει ακέραια λύση, επομένως το χρησιμοποιούμε για να δημιουργήσουμε δύο νέα υποπροβλήματα. Χρησιμοποιούμε την κλασματική μεταβλητή x_2 στην άριστη λύση του προβλήματος 2α και δημιουργούμε την επόμενη "διακλάδωση". Επειδή $x_2 = 1.8$, δημιουργούμε τα δύο νέα υποπροβλήματα προσθέτοντας τους περιορισμούς $x_2 \le 1$ και $x_2 \ge 2$ αντίστοιχα. Δηλαδή:

πρόβλημα 3α : πρόβλημα 2α + τον περιορισμό $x_2 \le 1$ και
πρόβλημα 3b : πρόβλημα 2α + τον περιορισμό $x_2 \ge 2$.

πρόβλημα (3α):

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\le 45 \\ x_1 &\ge 4 \\ x_2 &\le 1 \end{aligned}$$

όπου $x_1, x_2 \ge 0.$

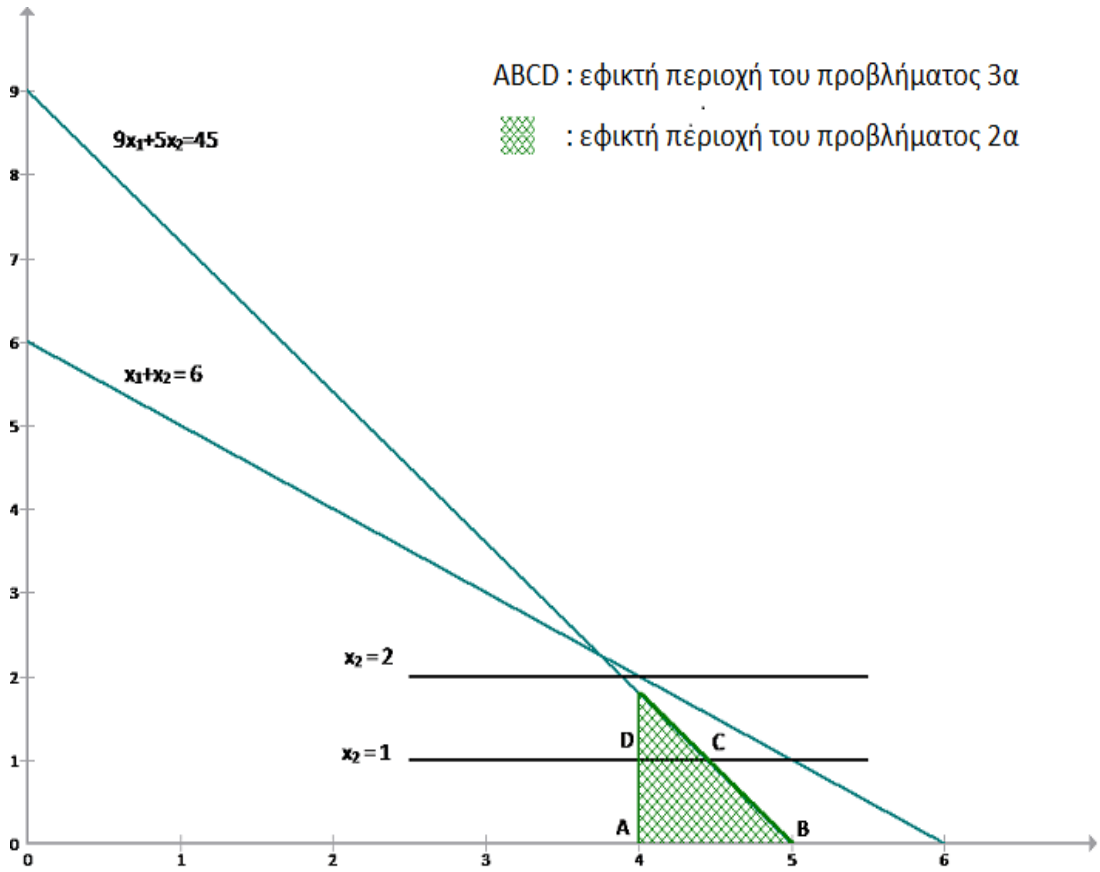
πρόβλημα (3b):

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\le 45 \\ x_1 &\ge 4 \\ x_2 &\ge 2 \end{aligned}$$

όπου $x_1, x_2 \ge 0.$



Το πρόβλημα 3b δεν έχει εφικτή περιοχή όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Επομένως είναι αδύνατο. Επιπλέον, στο διάγραμμα φαίνεται ότι η λύση του προβλήματος 3α είναι η κορυφή C, όπου $x_1 = 40/9$, $x_2 = 1$ με $z \approx 40.56$.

Το δέντρο που δημιουργείται από την πρόσθεση αυτών των προβλημάτων είναι:

βήμα 1° : πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$x_1 = 15/4$, $x_2 = 9/4$
με $z = 165/4$

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$
όπου $x_1, x_2 \geq 0$.

$x_1 \leq 3$ ↙ ↘ $x_1 \geq 4$

βήμα 2°:

<u>Υποπρόβλημα (2α):</u>
$x_1=4$, $x_2=1.8$ με $z= 41$

<u>Υποπρόβλημα (2b):</u>
$x_1=3$, $x_2=3$ με $z= 39$

$x_2 \leq 1$ ↙ ↘ $x_2 \geq 2$

βήμα 3°:

<u>Υποπρόβλημα (3α):</u>
$x_1 = 40/9$, $x_2 = 1$ με $z \approx 165/9$

<u>Υποπρόβλημα (3b):</u>
μη εφικτή περιοχή

Επειδή και η λύση του προβλήματος 3α δεν είναι αποδεκτή για το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού συνεχίζουμε την "διακλάδωση" στην μεταβλητή x_1 προσθέτοντας τους περιορισμούς $x_1 \geq 5$ και $x_1 \leq 4$. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε ακόμα δύο καινούργια προβλήματα:

πρόβλημα 4α : πρόβλημα 3α + τον περιορισμό $x_1 \leq 4$ και
πρόβλημα 4b : πρόβλημα 3α + τον περιορισμό $x_1 \geq 5$.

πρόβλημα (4α):

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 4 \end{aligned}$$

όπου $x_1, x_2 \geq 0.$

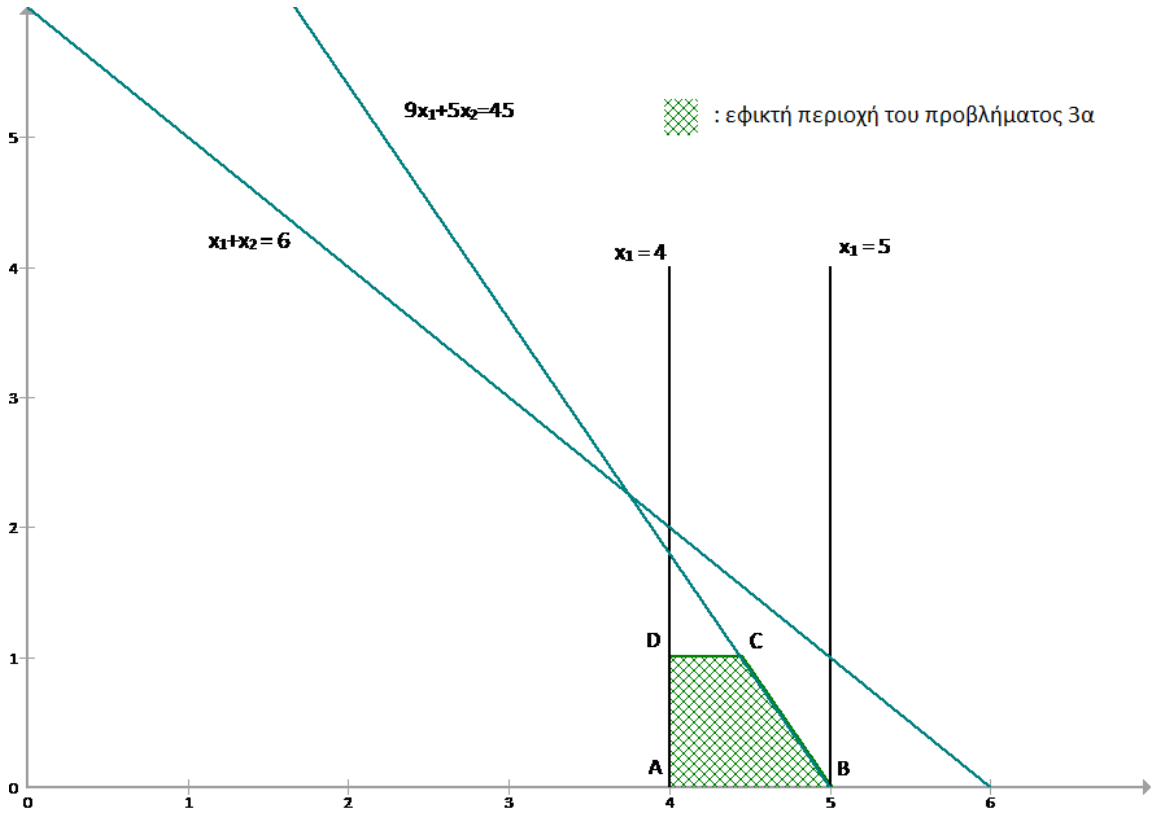
πρόβλημα (4b):

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 5 \end{aligned}$$

όπου $x_1, x_2 \geq 0.$



Η εφικτή περιοχή του προβλήματος 4α είναι το ευθύγραμμο τμήμα AD ενώ του προβλήματος 4b είναι το σημείο B. Τα προβλήματα 4α και 4b περιέχουν όλα τα ακέραια σημεία που περιλαμβάνονται στην εφικτή περιοχή του προβλήματος 3α.
Το δέντρο που δημιουργείται από την πρόσθεση όλων αυτών των λυμένων προβλημάτων είναι:

βήμα 1° :

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$
όπου $x_1, x_2 \geq 0$.

$x_1 \leq 3$ ↙ ↘ $x_1 \geq 4$

βήμα 2°:

<u>πρόβλημα (2α):</u>
$x_1=4$, $x_2=1.8$ με $z= 41$

<u>πρόβλημα (2b):</u>
$x_1=3$, $x_2=3$ με $z= 39$

$x_2 \leq 1$ ↙ ↘ $x_2 \geq 2$

βήμα 3°:

<u>πρόβλημα (3α):</u>
$x_1 = 40/9$, $x_2 = 1$ με $z \approx 165/9$

<u>πρόβλημα (3b):</u>
μη εφικτή περιοχή

$x_1 \leq 4$ ↙ ↘ $x_1 \geq 5$

βήμα 4°:

<u>πρόβλημα (4α):</u>
$x_1 = 4$ και $x_2 = 1$ με $z = 37$

<u>πρόβλημα (4b):</u>
$x_1 = 5$ και $x_2 = 0$ με $z = 40$

Στο παραπάνω διάγραμμα φαίνεται ότι η λύση του 4α είναι το σημείο D δηλαδή $x_1 = 4$ και $x_2 = 1$ με $z = 37$. Η λύση αυτή είναι ακέραια επομένως είναι μία εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού. Όμως είναι κατώτερη

λύση από αυτήν του προβλήματος 2b όπου z = 39. Επομένως απορρίπτεται. Το πρόβλημα 4α είναι πλέον μη ενεργό.
Εν συνεχεία, το πρόβλημα 4b έχει λύση το σημείο Β δηλαδή $x_1 = 5$ και $x_2 = 0$ με z = 40. Η λύση αυτή είναι η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού αφού είναι καλύτερη από τη λύση του προβλήματος 2b. Τελικά η βέλτιστη λύση είναι η λύση του προβλήματος 4b.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των διαδοχικών ορίων έχουμε σιωπηρά απαριθμήσει όλα τα σημεία στην εφικτή περιοχή του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού. Τελικά, όλα αυτά τα σημεία εκτός από την βέλτιστη λύση αποβάλλονται, και έτσι η διαδικασία της μεθόδου ολοκληρώνεται.

Παρατήρηση:

Έστω ότι οι περιορισμοί του προβλήματος ότι μπορούν να γραφτούν σε μορφή πινάκων ως Ax = b. Εάν η ορίζουσα κάθε τετραγωνικού υποπίνακα του A παίρνει τις τιμές +1,-1 ή 0 και τα στοιχεία του b είναι ακέραιοι αριθμοί, η λύση του προβλήματος χωρίς τον περιορισμό της ακεραιότητας των μεταβλητών θα μας δώσει βέλτιστη ακέραια λύση η οποία συνεπώς θα είναι και η βέλτιστη λύση του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού.

Αλγόριθμος της μεθόδου Branch and Bound

Βήμα 1:
Λύσε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτει από το αρχικό πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού χωρίς το περιορισμό ακεραιότητας των μεταβλητών. Εάν τα x_j είναι ακέραιοι αριθμοί, η λύση είναι η βέλτιστη και ο αλγόριθμος τερματίζει. Αλλιώς προχώρα στο Βήμα 2.

Βήμα 2:
Επέλεξε μία από τις μη ακέραιες μεταβλητές x_i. Έστω ότι

$$x_i = w_i + f_i$$

όπου w_i είναι ένας ακέραιος αριθμός και $0 < f_i < 1$.
Κάθε εφικτή ακέραια λύση πρέπει να ικανοποιεί είτε $x_i \leq w_i$ είτε $x_i \geq w_i + 1$.
Προσθέτουμε ξεχωριστά αυτές τις καινούργιες ανισώσεις στους περιορισμούς και λύσε τα δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτουν. Συνέχισε στο Βήμα 3.

Βήμα 3:
Για κάθε μία από τις λύσεις που βρέθηκαν στο Βήμα 2:
(a). Εάν η λύση που βρέθηκε είναι μία εφικτή ακέραια λύση τότε σύγκρινε την με την προηγούμενη εφικτή και κράτα τη μεγαλύτερη. Διάλεξε κάποια άλλη μη ακέραια μεταβλητή x_j , εάν υπάρχει, και επέστρεψε στο Βήμα 2.

(b). Εάν το νέο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που προέκυψε δεν έχει εφικτή λύση, διάλεξε κάποια άλλη μη ακέραια μεταβλητή x_j , εάν υπάρχει, και επέστρεψε στο Βήμα 2.

3.7 Αλγόριθμος των επιπέδων αποκοπής
The Cutting Plane algorithm

Μία άλλη τεχνική για την επίλυση προβλημάτων ακεραίου προγραμματισμού είναι ο αλγόριθμος των επιπέδων αποκοπής. Τα επίπεδα αποκοπής (cutting) είναι επιπλέον λειτουργικοί γραμμικοί περιορισμοί που εισάγονται στο διαμορφωμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Με την προσθήκη των κατάλληλων αυτών περιορισμών ο αλγόριθμος αποκοπής "κόβει" συστηματικά μέρος της εφικτής περιοχής για να εξαλείψει τις μη ακέραιες λύσεις χωρίς την εξάλειψη των εφικτών ακέραιων λύσεων.

Ξεκινώντας, επιλύουμε το πρόβλημα απορρίπτοντας τους περιορισμούς ακεραιότητας και λύνοντας με simplex το πρόβλημα που προκύπτει ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για να βρούμε μία βασική εφικτή λύση. Γεωμετρικά, αυτή η λύση είναι μία κορυφή από το κυρτό πολύεδρο που αποτελείται από όλα τα εφικτά σημεία. Εάν αυτή η κορυφή δεν είναι ακέραιο σημείο, τότε η μέθοδος βρίσκει ένα άλλο επίπεδο στο οποίο η κορυφή που έχουμε υπολογίσει είναι στη μία πλευρά και όλα τα εφικτά ακέραια σημεία στην άλλη. Αυτό έπειτα προστίθεται σαν επιπρόσθετος γραμμικός περιορισμός, για να αποκλείσει την κορυφή που βρήκαμε αρχικά, δημιουργώντας ένα καινούργιο τροποποιημένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια, λύνουμε το νέο πρόβλημα και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να βρεθεί μία ακέραια λύση.

Σε γενικές γραμμές, ο αριθμός των αποκοπών (cuts), είναι ανεξάρτητος από το μέγεθος του προβλήματος, υπό την έννοια ότι ένα πρόβλημα με μικρό αριθμό μεταβλητών και περιορισμών μπορεί να απαιτήσει περισσότερες αποκοπές από ένα μεγαλύτερο πρόβλημα.

Παράδειγμα:

Έστω το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού:

$$\max z = 7x_1 + 10x_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 \geq 0 &\text{ και ακέραιοι.} \end{aligned}$$

Αφαιρώντας τον περιορισμό ακεραιότητας των μεταβλητών και προσθέτοντας τις χαλαρές μεταβλητές x_4 και x_5, Επιλύουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με την μέθοδο simplex. Ο άριστος πίνακας είναι:

άριστο tableau:

βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	66,5

Η άριστη λύση είναι $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{9}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, με $z = 66{,}5$.

Ο αλγόριθμος των επιπέδων αποκοπής έχει αναπτυχθεί με βάση την υπόθεση ότι όλες οι μεταβλητές, συμπεριλαμβανομένων και των χαλαρών μεταβλητών, είναι ακέραιες. Το άριστο tableau της μεθόδου simplex μας δίνει τις εξισώσεις:

(1) $$z + \frac{63}{22}x_3 + \frac{31}{22}x_4 = 66.5$$

(2) $$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = \frac{7}{2}$$

(3) $$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = \frac{9}{2}$$

Οποιαδήποτε από αυτές τις τρεις εξισώσεις, αφού γραφτεί στην κατάλληλη μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί αρχικά για αποκοπή. Αρχικά, γράφουμε όλους τους μη ακέραιους συντελεστές των εξισώσεων σε μια ακέραια τιμή και μια κλασματική συνιστώσα, με την προϋπόθεση ότι η προκύπτουσα κλασματική συνιστώσα να είναι αυστηρά θετική.
Για παράδειγμα στην εξίσωση 1 ο συντελεστής 31/22 θα γίνει:

$$\frac{31}{22} = 1 + \frac{9}{22} \text{ και όχι } 2 - \frac{13}{22}$$

Επομένως, η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$z + (2 + \frac{19}{22})x_3 + (1 + \frac{9}{22})x_4 = (66 + \frac{1}{2})$$

Μετακινώντας όλους τους ακέραιους συντελεστές αριστερά και όλες τις κλασματικές συνιστώσες από την άλλο μέλος, παίρνουμε:

(1*) $$z + 2x_3 + 1x_4 - 66 = \frac{1}{2} - \frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4$$

Επειδή οι μεταβλητές x_3 και x_4 είναι μη αρνητικές, το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης πρέπει να ικανοποιεί:

$$-\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 \leq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} - \frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 \leq \frac{1}{2}$$

Επιπρόσθετα, το δεξιό μέλος της (1*) είναι ακέραιος αριθμός, άρα υποχρεωτικά και το αριστερό μέλος θα πρέπει να είναι ακέραιος. Δηλαδή,

$$\frac{1}{2} - \frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 \leq 0$$

Αυτή είναι ένα επιθυμητή αποκοπή (cut), και αποτελεί έναν απαραίτητο περιορισμό για να καταλήξουμε σε ακέραια λύση.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για την εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = \frac{7}{2} \qquad \text{ή}$$

$$x_2 + (0 + \frac{7}{22})x_3 + (0 + \frac{1}{22})x_4 = 3 + \frac{1}{2} \qquad \text{ή}$$

$$x_2 - 3 = - \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + \frac{1}{2}$$

επομένως, πρέπει:

(2*) $$- \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

για την εξίσωση (3):

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = \frac{9}{2} \qquad \text{ή}$$

$$x_1 + (-1 + \frac{21}{22})x_3 + (0 + \frac{3}{22})x_4 = 4 + \frac{1}{2} \qquad \text{ή}$$

$$x_1 - 1x_3 = - \frac{21}{22}x_3 - \frac{3}{22}x_4 + \frac{1}{2}$$

επομένως, πρέπει:

(3*) $$- \frac{21}{22}x_3 - \frac{3}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

Οποιοδήποτε από τις (1*),(2*) και (3*) μπορεί να χρησιμοποιηθεί αρχικά από τον αλγόριθμο αποκοπής. Ως εκ τούτου δεν είναι απαραίτητο να δημιουργήσουμε και τις τρεις αυτές εξισώσεις

στην αρχή. Διαλέγοντας αυθαίρετα την (2*), την επαναδιατυπώνουμε σε μορφή εξίσωσης:

cut 1 $$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + \frac{1}{2} + s_1 = 0 \quad \text{όπου } s_1 \geq 0$$

Αυτός ο περιορισμός προστίθεται ως δευτερεύων περιορισμός στο άριστο tableau της μεθόδου simplex ως εξής:

Βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	b_i
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$\frac{7}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	$\frac{9}{2}$
s_1	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	$-\frac{1}{2}$
Z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	0	66,5

Το παραπάνω tableau είναι βέλτιστο αλλά μη εφικτό. Εφαρμόζουμε τη δυική μέθοδο simplex και παίρνουμε το επόμενο tableau:

Βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	b_i
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{32}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$\frac{11}{7}$
Z	0	0	0	1	9	62

Η λύση που βρέθηκε δεν ικανοποιεί την συνθήκη ακεραιότητας αφού τα x_1 και x_3 δεν είναι ακέραιοι αριθμοί. Διαλέγοντας αυθαίρετα μία από τις εξισώσεις που μας δίνει το tableau επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με προηγουμένως. Έστω ο τρίτος περιορισμός:

$$x_1 + (0 + \frac{1}{7})x_4 + (-1 + \frac{6}{7})s_1 = 4 + \frac{4}{7}$$

$$x_1 - 1s_1 - 4 = -\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 + \frac{4}{7}$$

$$\text{άρα} \quad -\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 + \frac{4}{7} \leq 0$$

Καταλήγουμε:

cut 2 $$-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 + s_2 = -\frac{4}{7} \quad \text{όπου } s_2 \geq 0$$

βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b_i
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{32}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	0	$\frac{11}{7}$
s_2	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$
z	0	0	0	1	9	0	62

Εφαρμόζοντας και πάλι τη δυική μέθοδο simplex καταλήγουμε στο ακόλουθο tableau:

Βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b_i
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4
Z	0	0	0	0	3	7	58

Η άριστη λύση $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ με max z = 58 είναι ακέραια.

Επισημαίνεται ότι ο αλγόριθμος αποκοπής προϋποθέτει ότι όλες οι μεταβλητές που έχουν χρησιμοποιηθεί στο πρόβλημα, συμπεριλαμβανομένων των χαλαρών, είναι ακέραιοι αριθμοί.

Αλγόριθμος Αποκοπής:

Βήμα 1: Βρίσκουμε το βέλτιστο tableau για το χαλαρό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Εάν όλες οι μεταβλητές έχουν ακέραια τιμή στη βέλτιστη λύση τότε σταματάμε αφού ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού. Αλλιώς, προχωράμε στο βήμα 2.

Βήμα 2: Επιλέγουμε έναν περιορισμό από το άριστο tableau της μεθόδου simplex που βρήκαμε στο βήμα 1, του οποίου το δεξιό μέλος έχει κλασματικό μέλος κοντά στο ½. Ο περιορισμός αυτός θα χρησιμοποιηθεί για την αποκοπή (cut).

a. για τον περιορισμό του βήματος 2, γράφουμε κάθε συντελεστή των μεταβλητών στην μορφή [x] + f,
όπου $0 \leq f < 1$.

b. ξαναγράφουμε τον περιορισμό στη μορφή:
όλοι οι όροι με ακέραιους συντελεστές = όλοι οι όροι με κλασματικούς συντελεστές.
Η αποκοπή είναι:
όλοι οι όροι με κλασματικούς συντελεστές ≤ 0.

Βήμα 3: Χρησιμοποιώντας την δυική μέθοδο simplex για το χαλαρό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και τον περιορισμό που βρήκαμε στο βήμα 2b, βρίσκουμε μία βέλτιστη λύση. Εάν όλες οι μεταβλητές παίρνουν ακέραιες τιμές τότε έχουμε βρει την άριστη λύση για το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού. Αλλιώς, ξαναπηγαίνουμε στο βήμα 2.

Εφαρμογές – προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού

[ ]

4.1 Πρόβλημα 1:

Λύση Προβλήματος Ακέραιου Προγραμματισμού με χρήση της μεθόδου Cutting Planes

Εταιρία παραγωγής παιχνιδιών έχει αναπτύξει δύο νέα παιχνίδια για πιθανή ένταξη στη γραμμή παραγωγής για την επερχόμενη καλοκαιρινή περίοδο. Το κόστος για να ξεκινήσει το παιχνίδι 1 να παράγεται είναι 50 χιλιάδες ευρώ, ενώ για το παιχνίδι 2 είναι 80 χιλιάδες ευρώ. Η εταιρία διαθέτει δύο εργοστάσια στα οποία είναι δυνατόν να παράγονται και τα δύο είδη παιχνιδιών. Ωστόσο, για να αποφθεχθεί ο διπλασιασμός του κόστους εκκίνησης, μόνο το ένα από τα δύο εργοστάσια θα χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή των παιχνιδιών. Η επιλογή του εργοστασίου θα γίνει με βασικό κριτήριο τη μεγιστοποίηση του κέρδους από την πώληση των παιχνιδιών. Για διοικητικούς λόγους, το ίδιο εργοστάσιο θα χρησιμοποιηθεί και για τα δύο νέα παιχνίδια, αν και εφόσον θα παραχθούν και τα δύο. Το παιχνίδι 1 θα αποφέρει κέρδος από την πώληση του 10 ευρώ ανά τεμάχιο και μπορούν να παράγονται 50 τεμάχια την ώρα στο εργοστάσιο 1 και 40 τεμάχια την ώρα στο εργοστάσιο 2. Το παιχνίδι 2 θα αποφέρει κέρδος 15 ευρώ ανά τεμάχιο και υπάρχει η δυνατότητα να παράγονται 40 τεμάχια την ώρα στο εργοστάσιο 1 ή 25 τεμάχια την ώρα στο εργοστάσιο 2. Τα εργοστάσια 1 και 2, διαθέτουν 500 ώρες και 700 ώρες διαθέσιμο χρόνο παραγωγής αντίστοιχα, που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή αυτών των παιχνιδιών. Ως εκ τούτου, το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των τεμαχίων (εάν υπάρχουν) που θα παραχθούν για κάθε ένα από τα νέα

παιχνίδια με σκοπό την μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από την πώληση τους.
Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να διαλέξουμε τα προϊόντα, το εργοστάσιο και τον ρυθμό παραγωγής των επιλεγμένων προϊόντων, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε το ολικό κέρδος της εταιρίας.
Τα παραπάνω στοιχεία που δίνονται συνοψίζονται στον πίνακα:

	Παιχνίδι 1	**Παιχνίδι 2**	**διαθέσιμες ώρες παραγωγής**
Εργοστάσιο 1	50/h	40/h	500
Εργοστάσιο 2	40/h	25/h	700
κέρδος ανά τεμάχιο	10€	15€	

Ορίζουμε:

x_1 : τον αριθμό μονάδων που θα παραχθούν από το παιχνίδι 1
x_2 : τον αριθμό μονάδων που θα παραχθούν από το παιχνίδι 2

Επομένως, σκοπός είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους από τις πωλήσεις των παιχνιδιών. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι της μορφής:

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

την οποία και θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε.

Οι περιορισμοί του προβλήματος είναι:

$$\text{είτε} \quad \frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{40} \leq 500 \quad (\text{εφόσον επιλεγεί το εργοστάσιο 1})$$

$$\text{ή} \quad \frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{25} \leq 700 \quad (\text{εφόσον επιλεγεί το εργοστάσιο 2})$$

Όμως:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} -50.000 + 10x_1, & \text{αν } x_1 \geq 0 \\ 0 & , \text{ αν } x_1 = 0 \end{cases}$$

και

$$f_2(x_2) = \begin{cases} -80.000 + 15x_2, & \text{αν } x_2 \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } x_2 = 0 \end{cases}$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι της μορφής

$$f_i(x_i) = \begin{cases} -k_i + c_i x_i, & \text{αν } x_i \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } x_i = 0 \end{cases}$$

δηλαδή έχουμε πρόβλημα σταθερού κόστους.

Για να μοντελοποιήσουμε αυτό το πρόβλημα ως πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού, εισάγουμε μία μεταβλητή της μορφής 0-1 για κάθε συνάρτηση τέτοιας μορφής.

Έστω y_1, y_2 βοηθητικές δυαδικές μεταβλητές, για τις οποίες ισχύει:

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{εάν θα παραχθεί το παιχνίδι 1 (δηλαδή } x_1 > 0) \\ 0, & \text{αλλιώς } (x_1 = 0) \end{cases}$$

και

$$y_2 = \begin{cases} 1, & \text{εάν θα παραχθεί το παιχνίδι 2 (δηλαδή } x_2 > 0) \\ 0, & \text{αλλιώς } (x_2 = 0) \end{cases}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

$$\max z = -50.000y_1 + 10x_1 - 80.000y_2 + 15x_2$$

Προκειμένου να εισάγουμε αυτές τις μεταβλητές στο πρόβλημα, θεωρούμε έναν μεγάλο θετικό αριθμό M, και προσθέτουμε τους περιορισμούς:

$$x_1 \leq M_1 y_1$$
$$x_2 \leq M_2 y_2$$
$$y_i = 0 \text{ ή } 1, \ i = 1,2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Οι περιορισμοί μη αρνητικότητας δίνουν ένα φραγμένο εφικτό πεδίο για τις μεταβλητές απόφασης. Ισχύει ότι $x_i \leq M$, για i =1,2 σε κάθε σημείο αυτής της περιοχής και μπορούμε να επιλέξουμε ένα τέτοιο M για τους πρόσθετους περιορισμούς.
Επομένως, όταν $y_1 = 1$, θα παραχθεί το παιχνίδι 1, και θα επιτρέπεται κάθε τιμή του x_1 στην εφικτή περιοχή, ενώ όταν $y_1 = 0$ θα ισχύει αναγκαστικά $x_1 = 0$.
Αντίστροφα, εάν $x_1 > 0$, συνεπάγεται ότι $y_1 = 1$.

Επίσης, θα πρέπει να παραχθεί αρκετή ποσότητα από το κάθε παιχνίδι ώστε να υπερκαλύψει το κόστος εκκίνησης. Επομένως προστίθενται στο πρόβλημα ακόμα δύο περιορισμοί:

είτε $10x_1 - 50.000 \geq 0$

ή $15x_2 - 80.000 \geq 0$

είναι ισοδύναμοι με τους περιορισμούς

$$10x_1 - 50.000 + M(1-y_1) \geq 0$$

και $$15x_2 - 80.000 + M(1-y_2) \geq 0$$

Για να ικανοποιηθεί ο περιορισμός ότι μόνο ένα από τα δύο εργοστάσια θα πρέπει να επιλεγεί για να παρασκευάσει τα νέα παιχνίδια εισάγουμε μία ακόμα βοηθητική δυαδική μεταβλητή:

$$y_3 = \begin{cases} 1, \text{ εάν ικανοποιηθεί ο περιορισμός } \dfrac{x_1}{40} + \dfrac{x_2}{25} \leq 700 \\ \qquad \text{(επιλογή του εργοστασίου 2)} \\ 0, \text{ εάν ικανοποιηθεί ο περιορισμός } \dfrac{x_1}{50} + \dfrac{x_2}{40} \leq 500 \\ \qquad \text{(επιλογή του εργοστασίου 1)} \end{cases}$$

Αυτή η ερμηνεία επιβάλλεται στο πρόβλημα διαμορφώνοντας τους περιορισμούς ως εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{40} + \dfrac{x_2}{25} \leq 700 + M(1 - y_3) \\ \dfrac{x_1}{50} + \dfrac{x_2}{40} \leq 500 + My_3 \end{cases}$$

Τελικά, μεταφέροντας όλες τις μεταβλητές στα αριστερά μέλη των περιορισμών και αφαιρώντας τους παρονομαστές προκύπτει το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού:

$$\max z = 10x_1 + 15x_2 - 50.000y_1 - 80.000y_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
4x_1 & + & 5x_2 & & & & & - & 200My_3 & \leq & 100.000 \\
5x_1 & + & 8x_2 & & & & & + & 200My_3 & \leq & 200(700 + M) \\
10x_1 & & & - & My_1 & & & & & \geq & 50.000 - M \\
15x_2 & & & & & - & My_2 & & & \geq & 80.000 - M \\
x_1 & & & - & My_1 & & & & & \leq & 0 \\
x_2 & & & & & - & My_2 & & & \leq & 0
\end{array}$$

$$\text{όπου} \quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ και ακέραιοι}$$
$$\text{και} \quad y_i = \{0,1\}, \quad i = 1,2,3$$

Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές (x_i, i = 3,...,8) :

$$\max z = 10x_1 + 15x_2 - 50.000y_1 - 80.000y_2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rrrrcr}
4x_1 & + 5x_2 & - 200My_3 & + x_3 & = & 100.000 \\
5x_1 & + 8x_2 & + 200My_3 & + x_4 & = & 200(700 + M) \\
10x_1 & - My_1 & - x_5 & & = & 50.000 - M \\
15x_2 & - My_2 & - x_6 & & = & 80.000 - M \\
x_1 & - My_1 & + x_7 & & = & 0 \\
x_2 & - My_2 & + x_8 & & = & 0
\end{array}$$

$$\text{όπου} \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad \text{και ακέραιοι}$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 3,...,8$$
$$y_i = \{0,1\}, \quad i = 1,2,3$$

Αρχικά, επιλύουμε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, με τη μέθοδο simplex, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν τους περιορισμούς ακεραιότητας τον μεταβλητών. Επιπρόσθετα, δίνουμε στο M τη τιμή 81.000.

Η λύση που προκύπτει είναι:
$x_1 = 0$ και $y_1 = 0$, $x_2 = 133.384,62$ και $y_2 = 1,65$, και $y_3 = 0,035$ με max z = 1.869.031,34 €
η οποία δεν είναι ακέραια, επομένως δεν είναι και αποδεκτή για το αρχικό πρόβλημα.
Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Branch and Bound και διαλέγοντας τυχαία μία από τις μεταβλητές, έστω την y_2, διακλαδώνουμε το χαλαρό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε δύο επιμέρους προβλήματα, προσθέτοντας σε κάθε ένα από αυτά τους περιορισμούς $y_2 = 0$ ή $y_2 = 1$ αντίστοιχα.
Σε μορφή δέντρου:

<u>αρχικό π.γ.π:</u>

$$\max z = 10x_1 + 15x_2 - 50.000y_1 - 80.000y_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$4x_1 + 5x_2 - 200My_3 \le 100.000$$
$$5x_1 + 8x_2 + 200My_3 \le 200(700 + M)$$
$$10x_1 - My_1 \ge 50.000 - M$$
$$15x_2 - My_2 \ge 80.000 - M$$
$$x_1 - My_1 \le 0$$
$$x_2 - My_2 \le 0$$

$y_2 = 0$ ↙ ↘ $y_2 = 1$

Βήμα 2:

πρόβλημα 2(α)	**πρόβλημα 2(b)**
αρχικό π.γ.π $y_2 = 0$	αρχικό π.γ.π $y_2 = 1$

Το πρόβλημα 2(α) δεν έχει εφικτή λύση. Το πρόβλημα 2(b) έχει λύση:

x_1 = 75.666,67, x_2 = 81.000, y_1 = 0,9342 y_2 = 1 και y_3 = 0,0375, με max z = 1.844.958,85. Όπως και η λύση του αρχικού π.γ.π., έτσι και η λύση του προβλήματος 2(b) δεν είναι αποδεκτή για το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού εφόσον δεν είναι ακέραια. Συνεχίζουμε διαλέγοντας τυχαία ακόμα μία μεταβλητή, έστω την y_1, και διακλαδώνουμε το πρόβλημα 2(b) σε δύο επιμέρους προβλήματα, προσθέτοντας σε κάθε ένα από αυτά τους περιορισμούς $y_1 = 0$ ή $y_1 = 1$ αντίστοιχα.

Σε μορφή δέντρου:

<u>αρχικό π.γ.π:</u>

$$\max z = 10x_1 + 15x_2 - 50.000y_1 - 80.000y_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$4x_1 + 5x_2 - 200My_3 \le 100.000$$
$$5x_1 + 8x_2 + 200My_3 \le 200(700 + M)$$
$$10x_1 - My_1 \ge 50.000 - M$$
$$15x_2 - My_2 \ge 80.000 - M$$
$$x_1 - My_1 \le 0$$
$$x_2 - My_2 \le 0$$

$y_2 = 0$ $\qquad$ $y_2 = 1$

Βήμα 2:

πρόβλημα 2(α)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 0$
μη εφικτό

πρόβλημα 2(b)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1$

$y_1 = 0$ $\qquad$ $y_1 = 0$

Βήμα 3:

πρόβλημα 3(α)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1,\ y_1 = 0$

πρόβλημα 3(b)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1,\ y_1 = 1$

Το πρόβλημα 3(α) έχει λύση την $x_1 = 0$, $x_2 = 81.000$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, και $y_3 = 0{,}0188$ με max z = 1.135.000.

Το πρόβλημα 3(b) έχει λύση την $x_1 = 75.666{,}67$, $x_2 = 81.000$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, και $y_3 = 0{,}0375$ με max z = 1.841.666,67.

Καμία από αυτές τις λύσεις δεν είναι ακέραια, επομένως διαλέγουμε τη μεταβλητή y_3 που δεν έχει ακέραια τιμή και για κάθε ένα από τα προβλήματα 3(α) και 3(b) θα δημιουργήσουμε δύο θυγατρικά.

Ξεκινώντας από το πρόβλημα 3(α) και προσθέτοντας τους περιορισμούς $y_3 = 0$ και $y_3 = 1$ δημιουργούμε 2 ακόμα προβλήματα, τα 4(α) και 4(b). Λύνουμε με τη μέθοδο Simplex και βρίσκουμε τα αποτελέσματα:

Το πρόβλημα 4(α) έχει λύση την: $x_1 = 0$, $x_2 = 20.000$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ και $y_3 = 0$ με max z = 220.000. Είναι η πρώτη ακέραια λύση που έχουμε βρει μέχρι στιγμής, επομένως την κρατάμε σαν πιθανή βέλτιστη λύση.

Το πρόβλημα 4(b) δεν έχει εφικτή λύση.

Συνεχίζοντας ομοίως, διακλαδώνοντας το πρόβλημα 3(b) παίρνουμε δύο ακόμα θυγατρικά προβλήματα όπου:

Το πρόβλημα 4(c) έχει ακέραια λύση $x_1 = 5.000$, $x_2 = 16.000$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ με max z = 160.000. Η λύση αυτή είναι εφικτή και ακέραια αλλά είναι κατώτερη της λύσης του 4(α), επομένως κρατάμε την λύση του 4(α) ως καλύτερη.

Το πρόβλημα 4(d) δεν έχει εφικτή λύση.

Το δέντρο παίρνει την μορφή:

αρχικό π.γ.π:

$$\max z = 10x_1 + 15x_2 - 50.000y_1 - 80.000y_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$4x_1 + 5x_2 - 200My_3 \le 100.000$$
$$5x_1 + 8x_2 + 200My_3 \le 200(700 + M)$$
$$10x_1 - My_1 \ge 50.000 - M$$
$$15x_2 - My_2 \ge 80.000 - M$$
$$x_1 - My_1 \le 0$$
$$x_2 - My_2 \le 0$$

$y_2 = 0$ $\qquad$ $y_2 = 1$

Βήμα 2:

πρόβλημα 2(α)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 0$
μη εφικτό

πρόβλημα 2(b)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1$

$y_1 = 0$ $\qquad$ $y_1 = 1$

Βήμα 3:

πρόβλημα 3(α)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1,\ y_1 = 0$

πρόβλημα 3(b)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1,\ y_1 = 1$

$y_3 = 0$ $\qquad$ $y_3 = 1$ $\qquad$ $y_3 = 0$ $\qquad$ $y_3 = 1$

Βήμα 4:

πρόβλημα 4(α)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1,\ y_1 = 0,$
και $y_3 = 0$
max z= 220.000

πρόβλημα 4(b)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1,\ y_1 = 0,$
και $y_3 = 1$
μη εφικτό

πρόβλημα 4(c)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1,\ y_1 = 1,$
και $y_3 = 0$
max z= 160.000

πρόβλημα 4(d)
αρχικό π.γ.π
$y_2 = 1,\ y_1 = 1,$
και $y_3 = 0$
μη εφικτό

Τελικά, η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι η $x_1 = 0$, $x_2 = 20.000$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ και $y_3 = 0$ με max z = 220.000.

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι δεν θα παραχθεί το παιχνίδι 1, το παιχνίδι 2 θα παραχθεί σε ποσότητα 220.000 τεμάχια, ενώ τελικά το εργοστάσιο 1 είναι αυτό όπου θα παραχθεί το παιχνίδι 2.

4.2 Πρόβλημα 2:

Λύση Προβλήματος Ακέραιου Προγραμματισμού με χρήση της μεθόδου Branch and Bound

Μια νέα διεθνής ταχεία αναπτυσσόμενη αεροπορική εταιρεία με έδρα της την Αθήνα, βρίσκεται στη διαδικασία να προσθέσει δύο νέες πόλεις στο πλάνο των προορισμών της. Συγκεκριμένα, θα προστεθεί ένα ημερήσιο δρομολόγιο από Αθήνα σε Λάρνακα με επιστροφή και ένα από Αθήνα σε Κάιρο με επιστροφή. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει άμεσα η εταιρία είναι τι είδους αεροσκάφος να δρομολογήσει σε καθένα από αυτούς τους δύο προορισμούς. Η εταιρία διαθέτει 5 αεροπλάνα με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στον πίνακα 1. Κάθε αεροσκάφος που θα πετάξει από την Αθήνα στο προορισμό του θα επιστρέψει εντός της ίδιας ημέρας. Οποιοσδήποτε συνδυασμός αεροσκαφών μπορεί να δρομολογηθεί σε κάθε μία από τις δύο διαδρομές.

Πίνακας 1:

			Λειτουργικό κόστος (σε χιλ. €)	
Τύπος αεροπλάνου	**Αριθμός διαθέσιμων αεροπλάνων**	**Χωρητικότητα επιβατών**	**Αθήνα - Λάρνακα και επιστροφή**	**Αθήνα - Κάιρο και επιστροφή**
A	1	320	108	132
B	4	250	90	100

Το τμήμα Έρευνας Αγοράς της εταιρίας έκανε μία προσεκτική μελέτη της ζήτησης εισιτηρίων στις συγκεκριμένες διαδρομές και τα αποτελέσματα φαίνονται στον δεύτερο πίνακα. Αυτές οι εκτιμήσεις αφορούν τη μέγιστη ζήτηση που μπορεί να προκύψει.

Πίνακας 2:

Διαδρομή	Ημερήσια ζήτηση (εκτίμηση)	Τιμή εισιτηρίου μονής διαδρομής (σε €)
Αθήνα- Λάρνακα	520	180
Λάρνακα -Αθήνα	440	170
Αθήνα- Κάιρο	290	340
Κάιρο -Αθήνα	265	315

Η εταιρία προσλαμβάνει μία ομάδα επιχειρησιακής έρευνας και αναμένει σε εύλογο χρονικό διάστημα:

α) Να μορφοποιηθεί το πρόβλημά σε πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού.

β) Να ορισθούν προσεκτικά και να εξηγηθούν οι μεταβλητές του προβλήματος.

γ) Να αναλυθούν οι περιορισμοί.

δ) Να λυθεί το πρόβλημα.

Ορισμός μεταβλητών:

Έστω x_{ij} ο αριθμός των αεροπλάνων τύπου i, i = 1,2 που θα χρησιμοποιήσει η εταιρία στον προορισμό j, j = 1,2.

		Προορισμός	
		Λάρνακα	Κάιρο
Τύπος αεροπλάνου	Α	x_{11}	x_{12}
	Β	x_{21}	x_{22}

Το πρόβλημα αποκτάει ιδιαίτερη δυσκολία και άρα και ενδιαφέρον, εάν η αεροπορική εταιρία μπορεί για κάθε προορισμό να αποφασίσει ελεύθερα εάν θα καλύψει τη συνολική

ζήτηση εισιτηρίων (με κίνδυνο να ταξιδεύουν αεροπλάνα με κενές θέσεις) ή όχι.

Ορίζουμε τις παρακάτω δυαδικές (0-1) μεταβλητές:

YAL: δυαδική (0-1) μεταβλητή, η οποία θα λαμβάνει την τιμή 1 αν αποφασιστεί να καλυφθεί πλήρως η ζήτηση από την Αθήνα στη Λάρνακα, ακόμα και αν υπάρχουν κενές θέσεις, και την τιμή 0 αλλιώς.

YLA: δυαδική (0-1) μεταβλητή, η οποία θα λαμβάνει την τιμή 1 αν αποφασιστεί να καλυφθεί πλήρως η ζήτηση από τη Λάρνακα στην Αθήνα, και την τιμή 0 αλλιώς.

YAC: δυαδική (0-1) μεταβλητή, η οποία θα λαμβάνει την τιμή 1 αν αποφασιστεί να καλυφθεί πλήρως η ζήτηση από την Αθήνα στο Κάιρο και την τιμή 0 αλλιώς.

YCA: δυαδική (0-1) μεταβλητή, η οποία θα λαμβάνει την τιμή 1 αν αποφασιστεί να καλυφθεί πλήρως η ζήτηση από το Κάιρο στην Αθήνα, και την τιμή 0 αλλιώς.

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\text{maxProfit} = {} & \text{YAL}\times 520\times 180 + (1\text{-YAL})\times(320x_{11}+250x_{21})\times 180+\\ & +\text{YLA}\times 440\times 170+(1\text{-YLA})\times(320x_{11}+250x_{21})\times 170+\\ & +\text{YAC}\times 290\times 340 + (1\text{-YAC})\times(320x_{12}+250x_{22})\times 340+\\ & +\text{YCA}\times 265\times 315+(1\text{-YCA})\times(320x_{12}+250x_{22})\times 315\\ & - 108x_{11} - 90x_{21} - 132x_{12} - 100x_{22}\end{aligned}$$

Υπό τους περιορισμούς:

Διαθεσιμότητα αεροσκαφών:

Διαθέτουμε ένα αεροπλάνο τύπου Α:

$$x_{11} + x_{12} \leq 1$$

Διαθέτουμε τέσσερα αεροπλάνα τύπου Β:

$$x_{21} + x_{22} \leq 4$$

Για υπολογιστικούς σκοπούς, θέτουμε στο M ένα μεγάλο θετικό αριθμό, π.χ. M = 10.000.

Περιορισμοί σχετικά με την κάλυψη της ζήτησης

Εάν αποφασιστεί να καλυφθεί η ζήτηση από Αθήνα προς Λάρνακα, πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 520 θέσεις διαθέσιμες, αλλιώς ο περιορισμός αυτός πρέπει αυτόματα να αγνοείται:

$$320x_{11} + 250x_{21} + M(1 - YAL) \geq 520$$

Εάν αποφασιστεί να καλυφθεί η ζήτηση από Λάρνακα προς Αθήνα, πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 440 θέσεις διαθέσιμες, αλλιώς ο περιορισμός αυτός πρέπει αυτόματα να αγνοείται:

$$320x_{11} + 250x_{21} + M(1 - YLA) \geq 440$$

Εάν αποφασιστεί να καλυφθεί η ζήτηση από Αθήνα προς Κάιρο, πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 290 θέσεις διαθέσιμες, αλλιώς ο περιορισμός αυτός πρέπει αυτόματα να αγνοείται:

$$320x_{12} + 250x_{22} + M(1 - YAC) \geq 290$$

Εάν αποφασιστεί να καλυφθεί η ζήτηση από Κάιρο προς Αθήνα, πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 265 θέσεις διαθέσιμες, αλλιώς ο περιορισμός αυτός πρέπει αυτόματα να αγνοείται:

$$320x_{12} + 250x_{22} + M(1 - YCA) \geq 265$$

Περιορισμοί σχετικά με την μη-κάλυψη της ζήτησης

Εάν αποφασιστεί να **μην** καλυφθεί η ζήτηση από Αθήνα προς Λάρνακα, πρέπει οι διαθέσιμες θέσεις να είναι λιγότερες από 520, αλλιώς ο περιορισμός αυτός πρέπει αυτόματα να αγνοείται:

$$320x_{11} + 250x_{21} - M\ YAL \leq 520$$

Εάν αποφασιστεί να **μην** καλυφθεί η ζήτηση από Λάρνακα προς Αθήνα, πρέπει οι διαθέσιμες θέσεις να είναι λιγότερες από 440, αλλιώς ο περιορισμός αυτός πρέπει αυτόματα να αγνοείται:

$$320x_{11} + 250x_{21} - M\ YAL \leq 440$$

Εάν αποφασιστεί να **μην** καλυφθεί η ζήτηση από Αθήνα προς Κάιρο, πρέπει οι διαθέσιμες θέσεις να είναι λιγότερες από 290, αλλιώς ο περιορισμός αυτός πρέπει αυτόματα να αγνοείται:

$$320x_{12} + 250x_{22} - M\ YAC \leq 290$$

Εάν αποφασιστεί να **μην** καλυφθεί η ζήτηση από Κάιρο προς Αθήνα, πρέπει οι διαθέσιμες θέσεις να είναι λιγότερες από 265, αλλιώς ο περιορισμός αυτός πρέπει αυτόματα να αγνοείται:

$$320x_{12} + 250x_{22} - M\ YCA \leq 265$$

x_{ij} ακέραιοι, (i = 1,2, j = 1,2)

YAL, YCA, YAC, YLA δυαδικές μεταβλητές

Περιορισμοί μη αρνητικότητας $x_{ij} \geq 0$, i = 1,2, j = 1,2

Το πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού τελικά διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{maxProfit} = {} & YAL\times520\times180 + (1\text{-}YAL)\times(320x_{11}+250x_{21})\times180+ \\ & +YLA\times440\times170+(1\text{-}YLA)\times(320x_{11}+250x_{21})\times170+ \\ & +YAC\times290\times340 + (1\text{-}YAC)\times(320x_{12}+250x_{22})\times340+ \\ & +YCA\times265\times315+(1\text{-}YCA)\times(320x_{12}+250x_{22})\times315 \\ & - 108x_{11} - 90x_{21} - 132x_{12} - 100x_{22} \end{aligned}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$- 320x_{11} - 250x_{21} + 10.000\ YAL \leq 9.480$$

$$- 320x_{11} - 250x_{21} + 10.000\ YLA \leq 9.560$$

$$- 320x_{12} - 250x_{22} + 10.000\ YAC \leq 9.710$$

$$- 320x_{12} - 250x_{22} + 10.000\ YCA \leq 9.735$$

$$320x_{11} + 250x_{21} - 10.000\ YAL \leq 520$$

$$320x_{11} + 250x_{21} - 10.000\ YLA \leq 440$$

$$320x_{12} + 250x_{22} - 10.000\ YAC \leq 290$$

$$320x_{12} + 250x_{22} - 10.000\ YCA \leq 265$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 1$$

$$X_{21} + X_{22} \leq 4$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ ακέραιοι, } (i = 1,2, \quad j = 1,2)$$

YAL, YCA, YAC, YLA δυαδικές μεταβλητές

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η : Εάν YAL = 0 τότε και YLA = 0

Δεδομένου ότι η αεροπορική εταιρία έχει βάση την Αθήνα εάν δεν εξυπηρετηθεί το δρομολόγιο Αθήνα – Λάρνακα τότε δεν είναι εφικτό να εξυπηρετηθεί το δρομολόγιο Λάρνακα – Αθήνα. Υποθέτουμε ότι YAC = 1, δηλαδή ότι θα εκτελεστεί το δρομολόγιο Αθήνα – Κάιρο και συνεπώς YCA = 1 αφού το αεροπλάνο θα πρέπει να επιστρέψει στη βάση του, δηλαδή στην Αθήνα.
Το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\text{maxProfit} = 290*340*YAC + 265*315*YCA – 132x_{12} – 100x_{22}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$- 320x_{12} - 250x_{22} + 10.000\ YAC \leq 9.710$$

$$- 320x_{12} - 250x_{22} + 10.000\ YCA \leq 9.735$$

$$320x_{12} + 250x_{22} – 10.000\ YAC \leq 290$$

$$320x_{12} + 250x_{22} – 10.000\ YCA \leq 265$$

$$x_{12} \leq 1$$

$$x_{22} \leq 4$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ ακέραιοι, } (i = 1,2, \quad j = 2)$$

YCA, YAC δυαδικές μεταβλητές

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα χωρίς τον περιορισμό ακεραιότητας των μεταβλητών x_{ij} και τον δυαδικών μεταβλητών δίνει λύση:

Θα χρησιμοποιηθούν ένα αεροπλάνο τύπου Α, 4 αεροπλάνα τύπου Β και οι μεταβλητές YAC = 1,103, YCA = 1,1055 οι οποίες δεν είναι αποδεκτές. Η αντικειμενική τιμή είναι 200.505,41€. Η τιμή της αντικειμενικής είναι κ η μέγιστη που μπορεί να πάρει το πρόβλημα.

Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό ότι οι μεταβλητές YCA, YAC είναι δυαδικές μεταβλητές παίρνουμε σαν λύση για το πρόβλημα:

YAC = 1, YCA = 1 και x_{22} = 1,16 με αντικειμενική τιμή 181.959,00€.

Είναι προφανές ότι ούτε αυτή η λύση είναι αποδεκτή.

Χρησιμοποιώντας το περιορισμό ακεραιότητας των μεταβλητών x_{ij} η λύση που προκύπτει είναι τελικά ότι θα εξυπηρετηθεί το δρομολόγιο Αθήνα – Κάιρο και αντίστροφα, και θα χρησιμοποιηθούν 2 αεροπλάνα τύπου Β χωρητικότητας 250 ατόμων. Τα κέρδη από τη τέλεση αυτού του δρομολογίου θα είναι 181.875€.

Περίπτωση 2η : Εάν YAC = 0 τότε και YCA = 0

Δεδομένου ότι η αεροπορική εταιρία έχει βάση την Αθήνα εάν δεν εξυπηρετηθεί το δρομολόγιο Αθήνα – Κάιρο τότε δεν είναι εφικτό να εξυπηρετηθεί το δρομολόγιο Κάιρο – Αθήνα. Υποθέτουμε ότι YAL = 1, δηλαδή ότι θα εκτελεστεί το δρομολόγιο Αθήνα – και συνεπώς YLA = 1 αφού το αεροπλάνο θα πρέπει να επιστρέψει στη βάση του, δηλαδή στην Αθήνα.

Το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\text{maxProfit} = 180*520*YAL + 170*440*YLA - 108x_{11} - 90x_{21}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$-320x_{11} - 250x_{21} + 10.000YAL \leq 9.480$$
$$-320x_{11} - 250x_{21} + 10.000YLA \leq 9.560$$
$$320x_{11} + 250x_{21} - 10.000YAL \leq 520$$
$$320x_{11} + 250x_{21} - 10.000YLA \leq 440$$
$$x_{11} \leq 1$$
$$X_{21} \leq 4$$
$$x_{ij} \geq 0, \text{ ακέραιοι}, (i = 1,2 \quad j = 1)$$

YAL, YLA δυαδικές μεταβλητές

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα χωρίς τον περιορισμό ακεραιότητας των μεταβλητών x_{ij} και τον δυαδικών μεταβλητών δίνει λύση:

Θα χρησιμοποιηθούν ένα αεροπλάνο τύπου Α, 4 αεροπλάνα τύπου Β και οι μεταβλητές YAL = 1,08, YLA = 1.088 οι οποίες δεν είναι αποδεκτές. Η αντικειμενική τιμή είναι 182.002,40€. Η τιμή της αντικειμενικής είναι κ η μέγιστη που μπορεί να πάρει το πρόβλημα.

Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό ότι οι μεταβλητές YLA, YAL είναι δυαδικές μεταβλητές παίρνουμε σαν λύση για το πρόβλημα:

YAL = 1, YLA = 1 και x_{11} = 1, x_{21} = 0.8 με αντικειμενική τιμή 168.220,00€. Είναι προφανές ότι ούτε αυτή η λύση είναι αποδεκτή.

Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό ακεραιότητας των μεταβλητών x_{ij} η λύση που προκύπτει είναι τελικά ότι θα εξυπηρετηθεί το δρομολόγιο Αθήνα – Λάρνακα και αντίστροφα, και θα χρησιμοποιηθεί 1 αεροπλάνο τύπου Α χωρητικότητας 320ατόμων και 1 αεροπλάνο τύπου Β χωρητικότητας 250 ατόμων. Τα κέρδη από τα δρομολόγια θα είναι 168.202,00€.

Περίπτωση 3η : Εάν YAC = 1 τότε και YCA = 1, & YAL = 1 τότε και YLA = 1

Δεδομένου ότι η αεροπορική εταιρία έχει βάση την Αθήνα εάν θα εξυπηρετηθεί το δρομολόγιο Αθήνα – Κάιρο τότε θα εξυπηρετηθεί και το δρομολόγιο Κάιρο – Αθήνα. Όμοια ισχύει και για το δρομολόγιο Αθήνα – Λάρνακα.

Το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

MaxProfit = 180*520*YAL + 170*440*YLA 290*340*YAC + 265*315*YCA – $132x_{12}$ – $100x_{22}$ – $108x_{11}$ – $90x_{21}$

υπό τους περιορισμούς:

$-320x_{11} - 250x_{21} + 10.000YAL \leq 9.480$

$-320x_{11} - 250x_{21} + 10.000YLA \leq 9.560$

$$- 320x_{12} - 250x_{22} + 10.000\ YAC \leq 9.710$$

$$- 320x_{12} - 250x_{22} + 10.000\ YCA \leq 9.735$$

$$320x_{11} + 250x_{21} - 10.000YAL \leq 520$$

$$320x_{11} + 250x_{21} - 10.000YLA \leq 440$$

$$320x_{12} + 250x_{22} - 10.000\ YAC \leq 290$$

$$320x_{12} + 250x_{22} - 10.000\ YCA \leq 265$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 1$$

$$X_{21} + X_{22} \leq 4$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ ακέραιοι, } (i = 1,2 \quad j = 1,2)$$

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα χωρίς τους περιορισμούς ακεραιότητας και δυαδικότητας παίρνουμε την λύση $x_{11} = 0$, $x_{21} =0$, $x_{12} = 1$, $x_{22} = 4$, YAL = 0,948, YLA = 0,956, YAC = 1,103 και YCA = 1,1055 η οποία δεν είναι αποδεκτή. Η τιμή της αντικειμενικής είναι 360.747,01€ και είναι η μέγιστη που μπορεί να πάρει το πρόβλημα.

Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό ότι οι μεταβλητές YLA, YAL, YAC, YCA είναι δυαδικές μεταβλητές παίρνουμε σαν λύση για το πρόβλημα: YLA= YAL= YAC= YCA=1, $x_{11} = 1$, $x_{21} =0.8$, $x_{12} = 0$, $x_{22} = 1.16$ με αντικειμενική τιμή 350.179,00€. Η λύση αυτή δεν είναι αποδεκτή.

Τελικά, χρησιμοποιώντας τον περιορισμό xij ≥ 0, ακέραιοι, (i = 1,2 j = 1,2) το πρόβλημα έχει αποδεκτή λύση.

Θα πραγματοποιηθούν και τα δύο δρομολόγια. Για το δρομολόγιο Αθήνα – Λάρνακα θα χρησιμοποιηθούν 3 αεροπλάνα τύπου Β, 250 θέσεων, ενώ για Κάιρο ένα αεροπλάνο τύπου Α, 320 θέσεων. Τα κέρδη από αυτά τα δρομολόγια θα είναι 350.073,00€.

Συνοψίζοντας όλες τις πιθανές περιπτώσεις είναι συμφέρον για την εταιρία να πραγματοποιήσει και τα δύο διαφορετικά δρομολόγια προς Κάιρο και Λάρνακα, αφού θα κερδίζει περίπου 350χιλιάδες ευρώ.

Παράρτημα
[Appendix]

Π.1. Excel επίλυσης παραδείγματος 1

αρχικό π.γ.π.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Παράδειγμα 1ο: Επίλυση με τη μέθοδο Cutting Planes									
2	Δεδομένα (input data):									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	1.869.031,3390			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	100.000	≤	100.000	$4x_1 + 5x_2 - 16.200.000y_3 \leq 100.000$
10		5	8	0	0	16.200.000	1.634.000	≤	1.634.000	$5x_1 + 8x_2 + 16.200.000y_3 \leq 1.634.000$
11		10	0	-81.000	0	0	0	≥	-31.000	$10x_1 - 81.000y_1 \geq -31.000$
12		0	15	0	-81.000	0	1.867.385	≥	-1.000	$15x_2 - 81.000y_2 \geq -1.000$
13		1	0	-81.000	0	0	0	≤	0	$x_1 - 81.000y_1 \leq 0$
14		0	1	0	-81.000	0	0	≤	0	$x_2 - 81.000y_2 \leq 0$
15										
16	Αποτελέσματα (output results):									
17		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
18	Λύση	0,0000	133.384,6154	0,0000	1,6467	0,0350				

Πρόβλημα 2(a):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	πρόβλημα 2(a)									
2	Δεδομένα (input data)									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	1.869.031,3390			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	100.000	≤	100.000	4x1 + 5x2 - 16.200.000y3 ≤ 100.000
10		5	8	0	0	16.200.000	1.634.000	≤	1.634.000	5x1 + 8x2 + 16.200.000y3 ≤ 1.634.000
11		10	0	-81.000	0	0	0	≥	-31.000	10x1 - 81.000y1 ≥ -31.000
12		0	15	0	-81.000	0	1.867.385	≥	-1.000	15x2 - 81.000y2 ≥ -1.000
13		1	0	-81.000	0	0	0	≤	0	x1 - 81.000y1 ≤ 0
14		0	1	0	-81.000	0	0	≤	0	x2 - 81.000y2 ≤ 0
15		0	0	0	1	0	1,646723647	=	0	y2 = 0
16										
17	Αποτελέσματα (output results)									
18		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
19	Λύση	0,0000	133.384,6154	0,0000	1,6467	0,0350				

Πρόβλημα 2(b):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	πρόβλημα 2(b)									
2	Δεδομένα (input data)									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	1.844.958,8477			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	100.000	≤	100.000	4x1 + 5x2 - 16.200.000y3 ≤ 100.000
10		5	8	0	0	16.200.000	1.634.000	≤	1.634.000	5x1 + 8x2 + 16.200.000y3 ≤ 1.634.000
11		10	0	-81.000	0	0	681.000	≥	-31.000	10x1 - 81.000y1 ≥ -31.000
12		0	15	0	-81.000	0	1.134.000	≥	-1.000	15x2 - 81.000y2 ≥ -1.000
13		1	0	-81.000	0	0	0	≤	0	x1 - 81.000y1 ≤ 0
14		0	1	0	-81.000	0	0	≤	0	x2 - 81.000y2 ≤ 0
15		0	0	0	1	0	1	=	1	y2 = 1
16										
17	Αποτελέσματα (output results)									
18		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
19	Λύση	75.666,6667	81.000,0000	0,9342	1,0000	0,0375				

πρόβλημα 2(a) πρόβλημα 2(b)

Πρόβλημα 3(a):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	πρόβλημα 3(α)									
2	Δεδομένα (input data)									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	1.135.000,0000			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	100.000	≤	100.000	$4x_1 + 5x_2 - 16.200.000y_3 \leq 100.000$
10		5	8	0	0	16.200.000	953.000	≤	1.634.000	$5x_1 + 8x_2 + 16.200.000y_3 \leq 1.634.000$
11		10	0	-81.000	0	0	0	≥	-31.000	$10x_1 - 81.000y_1 \geq -31.000$
12		0	15	0	-81.000	0	1.134.000	≥	-1.000	$15x_2 - 81.000y_2 \geq -1.000$
13		1	0	-81.000	0	0	0	≤	0	$x_1 - 81.000y_1 \leq 0$
14		0	1	0	-81.000	0	0	≤	0	$x_2 - 81.000y_2 \leq 0$
15		0	0	0	1	0	1	=	1	$y_2 = 1$
16		0	0	1	0	0	0,00000	=	0	$y_1 = 0$
17										
18	Αποτελέσματα (output results)									
19		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
20	Λύση	0,0000	81.000,0000	0,0000	1,0000	0,0188				

Πρόβλημα 3(b):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	πρόβλημα 3(b)									
2	Δεδομένα (input data)									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	1.841.666,6667			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	100.000	≤	100.000	$4x_1 + 5x_2 - 16.200.000y_3 \leq 100.000$
10		5	8	0	0	16.200.000	1.634.000	≤	1.634.000	$5x_1 + 8x_2 + 16.200.000y_3 \leq 1.634.000$
11		10	0	-81.000	0	0	675.667	≥	-31.000	$10x_1 - 81.000y_1 \geq -31.000$
12		0	15	0	-81.000	0	1.134.000	≥	-1.000	$15x_2 - 81.000y_2 \geq -1.000$
13		1	0	-81.000	0	0	-5.333	≤	0	$x_1 - 81.000y_1 \leq 0$
14		0	1	0	-81.000	0	0	≤	0	$x_2 - 81.000y_2 \leq 0$
15		0	0	0	1	0	1	=	1	$y_2 = 1$
16		0	0	1	0	0	1,00000	=	1	$y_1 = 1$
17										
18	Αποτελέσματα (output results)									
19		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
20	Λύση	75.666,6667	81.000,0000	1,0000	1,0000	0,0375				

Πρόβλημα 4(a):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	πρόβλημα 4(α)									
2	Δεδομένα (input data)									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	220.000,0000			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	100.000	≤	100.000	4x1 + 5x2 - 16.200.000y3 ≤ 100.000
10		5	8	0	0	16.200.000	160.000	≤	1.634.000	5x1 + 8x2 + 16.200.000y3 ≤ 1.634.000
11		10	0	-81.000	0	0	0	≥	-31.000	10x1 - 81.000y1 ≥ -31.000
12		0	15	0	-81.000	0	219.000	≥	-1.000	15x2 - 81.000y2 ≥ -1.000
13		1	0	-81.000	0	0	0	≤	0	x1 - 81.000y1 ≤ 0
14		0	1	0	-81.000	0	-61.000	≤	0	x2 - 81.000y2 ≤ 0
15		0	0	0	1	0	1	=	1	y2 = 1
16		0	0	1	0	0	0,00000	=	0	y1 = 0
17		0	0	0	0	1	0,00000	=	0	y3 = 0
18										
19	Αποτελέσματα (output results)									
20		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
21	Λύση	0,0000	20.000,0000	0,0000	1,0000	0,0000				

Πρόβλημα 4(b):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	πρόβλημα 4(b)									
2	Δεδομένα (input data)									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	0,0000			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	-1.564.667	≤	100.000	4x1 + 5x2 - 16.200.000y3 ≤ 100.000
10		5	8	0	0	16.200.000	1.634.000	≤	1.634.000	5x1 + 8x2 + 16.200.000y3 ≤ 1.634.000
11		10	0	-81.000	0	0	0	≥	-31.000	10x1 - 81.000y1 ≥ -31.000
12		0	15	0	-81.000	0	-1.000	≥	-1.000	15x2 - 81.000y2 ≥ -1.000
13		1	0	-81.000	0	0	0	≤	0	x1 - 81.000y1 ≤ 0
14		0	1	0	-81.000	0	-75.667	≤	0	x2 - 81.000y2 ≤ 0
15		0	0	0	1	0	1	=	1	y2 = 1
16		0	0	1	0	0	0,00000	=	0	y1 = 0
17		0	0	0	0	1	0,09823	=	1	y3 = 1
18										
19	Αποτελέσματα (output results)									
20		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
21	Λύση	0,0000	5.333,3333	0,0000	1,0000	0,0982				

Πρόβλημα 4(c):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	πρόβλημα 4(c)									
2	Δεδομένα (input data)									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	160.000,0000			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	100.000	≤	100.000	4x1 + 5x2 - 16.200.000y3 ≤ 100.000
10		5	8	0	0	16.200.000	153.000	≤	1.634.000	5x1 + 8x2 + 16.200.000y3 ≤ 1.634.000
11		10	0	-81.000	0	0	-31.000	≥	-31.000	10x1 - 81.000y1 ≥ -31.000
12		0	15	0	-81.000	0	159.000	≥	-1.000	15x2 - 81.000y2 ≥ -1.000
13		1	0	-81.000	0	0	-76.000	≤	0	x1 - 81.000y1 ≤ 0
14		0	1	0	-81.000	0	-65.000	≤	0	x2 - 81.000y2 ≤ 0
15		0	0	0	1	0	1	=	1	y2 = 1
16		0	0	1	0	0	1,00000	=	1	y1 = 1
17		0	0	0	0	1	0,00000	=	0	y3 = 0
18										
19	Αποτελέσματα (output results)									
20		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
21	Λύση	5.000,0000	16.000,0000	1,0000	1,0000	0,0000				

Πρόβλημα 4(d):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	πρόβλημα 4(d)									
2	Δεδομένα (input data)									
3		παιχνίδια		ποιο παιχνίδι		εργοστάσια				
4		1	2	1	2	1	σύνολο			
5	αντικειμενική συνάρτηση	10	15	-50.000	-80.000	0	0,0000			
6		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3				
7	περιορισμοί (constraints):									
8							σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		4	5	0	0	-16.200.000	-1.519.667	≤	100.000	4x1 + 5x2 - 16.200.000y3 ≤ 100.000
10		5	8	0	0	16.200.000	1.634.000	≤	1.634.000	5x1 + 8x2 + 16.200.000y3 ≤ 1.634.000
11		10	0	-81.000	0	0	-31.000	≥	-31.000	10x1 - 81.000y1 ≥ -31.000
12		0	15	0	-81.000	0	-1.000	≥	-1.000	15x2 - 81.000y2 ≥ -1.000
13		1	0	-81.000	0	0	-76.000	≤	0	x1 - 81.000y1 ≤ 0
14		0	1	0	-81.000	0	-75.667	≤	0	x2 - 81.000y2 ≤ 0
15		0	0	0	1	0	1	=	1	y2 = 1
16		0	0	1	0	0	1,00000	=	1	y1 = 1
17		0	0	0	0	1	0,09669	=	1	y3 = 1
18										
19	Αποτελέσματα (output results)									
20		παιχνίδι 1 (ποσότητα)	παιχνίδι 2 (ποσότητα)	εάν παραχθει το παιχνίδι 1	εάν παραχθει το παιχνίδι 2	ποιο εργοστασιο θα χρησιμοποιηθεί				
21	Λύση	5.000,0000	5.333,3333	1,0000	1,0000	0,0967				

Π.2. Excel επίλυσης παραδείγματος

Περίπτωση 1η :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού										
2	περίπτωση 1η: YAL=0 τότε και YLA=0										
3	Δεδομένα (input data):										
4		X11	X21	X12	X22	YAC	YCA			Σύνολο	
5	αντικειμενική συνάρτηση			-132	-100	98.600	83.475			200.505,41	
6											
7	περιορισμοί (constrains):										
8								σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9											
10											
11				-320	-250	10000	0	9710	≤	9.710	
12				-320	-250	0	10000	9735	≤	9.735	
13				320	250	-10000	0	-9710	≤	290	
14				320	250	0	-10000	-9735	≤	265	
15											
16				1	0	0	0	1	≤	1	
17				0	1	0	0	4	≤	4	
18											
19	Αποτελέσματα (output results)										
20	Λύση:			1	4	1,103	1,1055				
21											

YAC & YCA είναι δυαδικές μεταβλητές:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού									
2	περίπτωση 1η: YAL=0 τότε και YLA=0									
3	Δεδομένα (input data):									
4		X11	X21	X12	X22	YAC	YCA			Σύνολο
5	αντικειμενική συνάρτηση			-132	-100	98.600	83.475			181.959,00
6										
7	περιορισμοί (constrains):									
8								σύνολο πόρων		όριο περιορισμών
9										
10										
11				-320	-250	10000	0	9710	≤	9.710
12				-320	-250	0	10000	9710	≤	9.735
13				320	250	-10000	0	-9710	≤	290
14				320	250	0	-10000	-9710	≤	265
15										
16				1	0	0	0	0	≤	1
17				0	1	0	0	1,16	≤	4
18										
19	Αποτελέσματα (output results)									
20	Λύση:			0	1,16	1	1			

& X_{12}, X_{22} ακέραιοι:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού									
2	περίπτωση 1η: YAL=0 τότε και YLA=0									
3	Δεδομένα (input data):									
4		X_{11}	X_{21}	X_{12}	X_{22}	YAC	YCA			**Σύνολο**
5	**αντικειμενική συνάρτηση**			-132	-100	98.600	83.475			181.875,00
6										
7	περιορισμοί (constrains):									
8								σύνολο πόρων		όριο περιορισμών
9										
10										
11				-320	-250	10000	0	9500	≤	9.710
12				-320	-250	0	10000	9500	≤	9.735
13				320	250	-10000	0	-9500	≤	290
14				320	250	0	-10000	-9500	≤	265
15										
16				1	0	0	0	0	≤	1
17				0	1	0	0	2	≤	4
18										
19	Αποτελέσματα (output results)									
20	**Λύση:**			0	2	1	1			
21										

Περίπτωση $2^η$:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού							
2	περίπτωση 2η: YAC=0 τότε και YCA=0							
3	Δεδομένα (input data):							
4		X_{11}	X_{21}	YAL	YLA			**Σύνολο**
5	**αντικειμενική συνάρτηση**	-108	-90	93.600	74.800			182.002,40
6								
7	περιορισμοί (constrains):							
8						σύνολο πόρων		όριο περιορισμών
9								
10		-320	-250	10.000	0	9.480	≤	9.480
11		-320	-250	0	10.000	9.560	≤	9.560
12		320	250	-10.000	0	-9.480	≤	520
13		320	250	0	-10.000	-9.560	≤	440
14								
15		1	0	0	0	1	≤	1
16		0	1	0	0	4	≤	4
17								
18								
19	Αποτελέσματα (output results)							
20	**Λύση:**	1	4	1,08	1,088			
21								

YAL & YLA είναι δυαδικές μεταβλητές:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού**							
2	περίπτωση 2η: YAC=0 τότε και YCA=0							
3	Δεδομένα (input data):							
4		X_{11}	X_{21}	YAL	YLA			**Σύνολο**
5	**αντικειμενική συνάρτηση**	-108	-90	93.600	74.800			168.220,00
6								
7	περιορισμοί (constrains):							
8						σύνολο πόρων		όριο περιορισμών
9								
10		-320	-250	10.000	0	9.480	≤	9.480
11		-320	-250	0	10.000	9.480	≤	9.560
12		320	250	-10.000	0	-9.480	≤	520
13		320	250	0	-10.000	-9.480	≤	440
14								
15		1	0	0	0	1	≤	1
16		0	1	0	0	1	≤	4
17								
18								
19	Αποτελέσματα (output results)							
20	**Λύση:**	1	0,8	1	1			
21								

& X_{11}, X_{21} ακέραιοι:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού**							
2	περίπτωση 2η: YAC=0 τότε και YCA=0							
3	Δεδομένα (input data):							
4		X_{11}	X_{21}	YAL	YLA			**Σύνολο**
5	**αντικειμενική συνάρτηση**	-108	-90	93.600	74.800			168.202,00
6								
7	περιορισμοί (constrains):							
8						σύνολο πόρων		όριο περιορισμών
9								
10		-320	-250	10.000	0	9.430	≤	9.480
11		-320	-250	0	10.000	9.430	≤	9.560
12		320	250	-10.000	0	-9.430	≤	520
13		320	250	0	-10.000	-9.430	≤	440
14								
15		1	0	0	0	1	≤	1
16		0	1	0	0	1	≤	4
17								
18								
19	Αποτελέσματα (output results)							
20	**Λύση:**	1	1	1	1			
21								

Περίπτωση 3η :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού											
2	περίπτωση 3η: YAL = YLA = YAC = YCA = 1											
3	Δεδομένα (input data):											
4		X_{11}	X_{21}	X_{12}	X_{22}	YAL	YLA	YAC	YCA		**Σύνολο**	
5	**αντικειμενική συνάρτηση**	-108	-90	-132	-100	93.600	74.800	98.600	83.475		360.747,01	
6												
7	περιορισμοί (constrains):											
8										σύνολο πόρων		όριο περιορισμών
9		-320	-250	0	0	10.000	0	0		9480	≤	9.480
10		-320	-250	0	0	0	10.000	0	0	9560	≤	9.560
11		0	0	-320	-250	0	0	10.000	0	9710	≤	9.710
12		0	0	-320	-250	0	0	0	10.000	9735	≤	9.735
13		320	250	0	0	-10.000	0	0	0	-9480	≤	520
14		320	250	0	0	0	-10.000	0	0	-9560	≤	440
15		0	0	320	250	0	0	-10.000	0	-9710	≤	290
16		0	0	320	250	0	0	0	-10.000	-9735	≤	265
17		1	0	1	0	0	0	0	0	1	≤	1
18		0	1	0	1	0	0	0	0	4	≤	4
19	Αποτελέσματα (output results)											
20	**Λύση:**	0	0	1	4	0,948	0,956	1,103	1,1055			
21												

YAL, YLA, YAC, YCA =1

	A	B	C	D	E	F	Γραμμή τύπων	I	J	K	L
1	2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού										
2	περίπτωση 3η: YAL = YLA = YAC = YCA = 1										
3	Δεδομένα (input data):										
4		X_{11}	X_{21}	X_{12}	X_{22}	YAL	YLA	YAC	YCA		**Σύνολο**
5	**αντικειμενική συνάρτηση**	-108	-90	-132	-100	93.600	74.800	98.600	83.475		350.179,00
6											
7	περιορισμοί (constrains):										
8										σύνολο πόρων		όριο περιορισμών
9		-320	-250	0	0	10.000	0	0		9480	≤	9.480
10		-320	-250	0	0	0	10.000	0	0	9480	≤	9.560
11		0	0	-320	-250	0	0	10.000	0	9710	≤	9.710
12		0	0	-320	-250	0	0	0	10.000	9710	≤	9.735
13		320	250	0	0	-10.000	0	0	0	-9480	≤	520
14		320	250	0	0	0	-10.000	0	0	-9480	≤	440
15		0	0	320	250	0	0	-10.000	0	-9710	≤	290
16		0	0	320	250	0	0	0	-10.000	-9710	≤	265
17		1	0	1	0	0	0	0	0	1	≤	1
18		0	1	0	1	0	0	0	0	1,96	≤	4
19	Αποτελέσματα (output results)										
20	**Λύση:**	1	0,8	0	1,16	1	1	1	1		
21											

& X_{ij} ακέραιοι:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2ο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού												
2	περίπτωση 3η: YAL = YLA = YAC = YCA = 1												
3	Δεδομένα (input data):												
4		X_{11}	X_{21}	X_{12}	X_{22}	YAL	YLA	YAC	YCA		**Σύνολο**		
5	**αντικειμενική συνάρτηση**	-108	-90	-132	-100	93.600	74.800	98.600	83.475		350.073,00		
6													
7	περιορισμοί (constrains):												
8										σύνολο πόρων		όριο περιορισμών	
9		-320	-250	0	0	10.000	0	0		9250	≤	9.480	
10		-320	-250	0	0	0	10.000	0	0	9250	≤	9.560	
11		0	0	-320	-250	0	0	10.000	0	9680	≤	9.710	
12		0	0	-320	-250	0	0	0	10.000	9680	≤	9.735	
13		320	250	0	0	-10.000	0	0	0	-9250	≤	520	
14		320	250	0	0	0	-10.000	0	0	-9250	≤	440	
15		0	0	320	250	0	0	-10.000	0	-9680	≤	290	
16		0	0	320	250	0	0	0	-10.000	-9680	≤	265	
17		1	0	1	0	0	0	0	0	1	≤	1	
18		0	1	0	1	0	0	0	0	3	≤	4	
19	Αποτελέσματα (output results)												
20	**Λύση:**	0	3	1	0	1	1	1	1				
21													

Π.3. Λογισμικό επίλυσης προβλημάτων επιχειρησιακής έρευνας

Για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι διαθέσιμη μεγάλη ποικιλία λογισμικού, κατάλληλη όχι μόνο για μεγάλους υπολογιστές, αλλά και για προσωπικούς υπολογιστές. Φυσικά, η επίλυση πολύ μεγάλων προβλημάτων λόγω του μεγάλου όγκου μεταβλητών κ περιορισμών (π.χ. βελτιστοποίηση σχήματος σε διάφορες κατασκευές, μοντελοποίηση μετεωρολογικών συστημάτων για την πρόγνωση του καιρού, κ.α.) απαιτεί τη χρήση μεγάλων υπολογιστικών συστημάτων. Προβλήματα όπως της παρούσας εργασίας ή σαν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν μεσαίου μεγέθους επιχειρήσεις στην καθημερινότητα τους μπορούν με ευκολία να λυθούν με τα υπολογιστικά πακέτα που διαθέτουμε σε ένα απλό προσωπικό υπολογιστή. Μερικά από αυτά τα πακέτα είναι:

- **Excel solver:** το πρόγραμμα λογιστικών φύλλων Microsoft Excel ενσωματώνει ρουτίνα επίλυσης προτύπων γραμμικού προγραμματισμού. Η ρουτίνα χρησιμοποιεί το λογιστικό φύλλο του Microsoft Excel για την εισαγωγή δεδομένων από και προς αυτό.
- **Lingo:** είναι πρόγραμμα της Lindo systems Incorporation με επαγγελματικές δυνατότητες. Η εταιρία διαθέτει δοκιμαστική έκδοση, η οποία προσφέρεται δωρεάν από την ιστοσελίδα της εταιρίας www.lindo.com. Η συγκεκριμένη έκδοση έχει περιορισμό στο μέγιστο αριθμό
  συνεχών μεταβλητών (300), στο μέγιστο αριθμό περιορισμών (150), και στο μέγιστο αριθμό ακέραιων μεταβλητών (30).
- **Lindo: (Linear Interactive Discrete Optimizer)**
- **LibreOffice**
- Λογισμικό βελτιστοποίησης CPLEX with C++

Εκτός από τα παραπάνω προγράμματα, υπάρχουν διαδικτυακά ανοικτά προγράμματα (web – based) επίλυσης προβλημάτων επιχειρησιακής έρευνας. Μερικά από αυτά είναι:

- Easycalculation.com/operations-research

- http://www.cs.stedwards.edu/~wright/linprog/AnimaLP.html για γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.
- https://eng.ucmerced.edu/people/yzhang/projects/clientsidecl για γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Η λύση παρουσιάζει την εφικτή περιοχή, όλα τα εφικτά κ μη εφικτά σημεία, την αντικειμενική συνάρτηση κ το βέλτιστο σημείο.
- Phpsimplex.com
- Mathstools.com
- Wolframalpha.com

Βιβλιογραφία
[Bibliography]

1. “ Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα”, εκδόσεις Άρης Συμεών 2012 Κολέτσος Ιωάννης, Στογιαννης Δημήτριος, SBN 978-960-9400-42-8 Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 22 766 846
2. Introduction to Operations Research, F.S.Hillier – G.J. Lieberman, Εκδόσεις McGraw-Hill
3. Operations research Calculation handbook, Dennis Blumenfeld, 2009 Εκδόσεις CRC Press - Taylor & Francis Group
4. Operations research, Richard Bronson, Govindasami Naadimuthu, 1997 Εκδόσεις Schaum’s
5. Operations Research, 7th edition, Hamdy A. Taha, Pearson Education, Inc.
6. Integer and Combinatorial Optimization, G.L.Nemhauser, L.A.Wolsey, Canada 1999, John Wiley & Sons, Inc
7. Επιχειρησιακή Έρευνα , Δημήτρη Α. Ξηρόκωστα, Αθήνα 1989 σημειώσεις Ε.Μ.Π.
8. Ακέραιος και Συνδυαστικός προγραμματισμός, Δημήτρη Α. Ξηρόκωστα, Αθήνα 1989 σημειώσεις Ε.Μ.Π.
9. Επιχειρησιακή Έρευνα, Π.Κιόχος – Γ.Θάνος – Α.Κιόχος, Αθήνα 2002 Εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική
10. Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα, Δ.Φακίνου – Α.Οικονόμου , Αθήνα 2003, Εκδόσεις Συμμετρία
11. Επιχειρησιακή Έρευνα και βελτιστοποίηση για μηχανικούς, Μ.Γ. Καρλαυτής, Ν.Δ. Λαγαρός, Αθήνα 2010, Εκδόσεις Συμμετρία
12. Operations Research Applications and Algorithms, Wayne L Winston

13. Επιχειρησιακή έρευνα και βελτιστοποίηση για μηχανικούς , Καρλαύτης, Μ.Γ
14. Επιχειρησιακή έρευνα: θεωρία και προβλήματα, Bronson, Richard
15. Linear programming , Vasek Chvatal
16. Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα : λήψη αποφάσεων με εφαρμογή μαθηματικών μοντέλων, Φράγκος Χρήστος, Εκδόσεις Σταμούλης 2006
17. Methods and Applications of Linear Programming, Leon Cooper – David Steinberg, W.D. Saunders Company
18. http://aetos.it.teithe.gr/~vkostogl/files/Epixeirisiaki/Linear_programming_GR_teliko.pdf
19. Επιχειρησιακή Έρευνα – Εφαρμογές στη σημερινή επιχείρηση, Παντελής Υψηλάντης