



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

# ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΟΧΛΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΣΗ ΥΔΑΤΟΠΤΩΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Ι. ΣΑΝΟΥΔΟΥ-ΔΡΑΜΑΛΙΩΤΗ

**Επιβλέπων:** Δημήτριος Παπαντώνης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2014



## Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συνέβαλαν άμεσα στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Δημήτρη Παπαντώνη για την επίβλεψη της διπλωματικής μου εργασίας και την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το θέμα που επέλεξα. Μου προσέφερε πάντα πρόθυμα τις γνώσεις, την εμπειρία του στην περιοχή των υδροδυναμικών μηχανών και η καθοδήγησή του ήταν πολύτιμη. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αν. καθηγητή κ. Ιωάννη Αναγνωστόπουλο για την διάθεσή του να ασχοληθεί με κάθε απορία που είχα. Θέλω να ευχαριστήσω στη συνέχεια τον καθηγητή Κ. Γιαννάκογλου για τη βοήθειά του με το πρόγραμμα βελτιστοποίησης EASY. Οφείλω ακόμα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο Δρ. Μάριο Χρυσοβέργη για το χρόνο που διέθεσε καθ' όλη τη διάρκεια της διπλωματικής μου συμβάλλοντας καθοριστικά στην ολοκλήρωσή της. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αδερφό μου και το συμφοιτητή μου Δημήτρη Τουλούπη για όλη τη βοήθειά τους.

Στη συνέχεια ευχαριστώ τους ανθρώπους κοντά στους οποίους έμαθα μηχανολογία, τους καθηγητές μου, αλλά και τους συμφοιτητές μου. Ιδιαίτερα πρέπει να ευχαριστήσω τους: Αναστάσιο Πέτρου, και Τρύφων Χριστόπουλο που ήταν δίπλα μου σε όλα τα φοιτητικά μου χρόνια.

Πέρα από τους ανθρώπους που συνέβαλαν άμεσα στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια. Θα ήθελα, λοιπόν, να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με εισήγαγαν στη μηχανολογία πολύ πριν από τη σχολή και βρίσκονται πάντα στο πλευρό μου, τον πατέρα μου, τη μητέρα μου και τον παππού μου. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το θείο μου και τη θεία μου γιατί αλλάζαν τον τρόπο που σκέφτομαι και ανοίξαν τους ορίζοντες μου. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλη την οικογένεια μου στην οποία οφείλω ότι μπορώ και κυνηγάω τα όνειρά μου.



## Περίληψη

Οι συνεχώς αυξανόμενες ενεργειακές απαιτήσεις καθιστούν επιτακτική την ανάγκη στροφής προς πηγές ενέργειας οι οποίες οι οποίες ως τώρα ήταν ανεικμετάλλευτες. Στην κατεύθυνση αυτή τα τελευταία χρόνια η τεχνολογία έχει στραφεί προς την εκμετάλλευση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας με το μεγαλύτερο ποσοστό αυτής να αποτελεί η υδροηλεκτρική ενέργεια. Παρόλα αυτά μόνο ένα μικρό ποσοστό της συνολικού διαθέσιμου υδροηλεκτρικού δυναμικού αξιοποιείται. Βασική αιτία αυτού αποτελεί το γεγονός ότι μεγάλο ποσοστό των υδατοπτώσεων αφορούν πολύ μικρό ύψος, οπότε η αξιοποίησή τους καθίσταται ασύμφορη. Στην κατεύθυνση αυτή γίνεται μελέτη ενός αποδοτικού τρόπου αξιοποίησης μικρών υδατοπτώσεων. Πιο συγκεκριμένα η μελέτη αυτή αφορά τον κοχλία του Αρχιμήδη, μια μηχανή η οποία χρησιμοποιείται εδώ και αιώνες για την άντληση υδάτων αλλά εξετάζεται η χρήση της για εκμετάλλευση υδατόπτωσης κατά την οποία παρουσιάζει υψηλό βαθμό απόδοσης ενώ το κόστος κατασκευής της είναι σημαντικά μικρότερο σε σχέση με αυτό ενός συμβατικού στροβίλου.

Στο μεγαλύτερο μέρος της διπλωματικής αυτής αναλύονται οι βασικές αρχές λειτουργίας του κοχλία του Αρχιμήδη κατά τη μετατροπή ενέργειας υδατόπτωσης σε κινητική και εντοπίζονται οι αιτίες που οδηγούν σε απώλεια ισχύος κατά την μετατροπή αυτή. Έτσι αναπτύσσεται μεθοδολογία υπολογισμού της παραγόμενης ισχύος και του βαθμού απόδοσης της διάταξης. Με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο του παραπάνω υπολογισμού δημιουργείται κώδικας, ο οποίος λαμβάνοντας σαν είσοδο γεωμετρικά και κινηματικά δεδομένα του κοχλία, υπολογίζει την παραγόμενη ισχύ και τις απώλειες της διάταξης.

Χρησιμοποιώντας τον κώδικα αυτό, και πρόγραμμα βελτιστοποίησης με χρήση εξελικτικών αλγορίθμων αναπτύσσεται τεχνική για την εύρεση των γεωμετρικών και κινηματικών χαρακτηριστικών του κοχλία που μεγιστοποιούν την απόδοση σε ορισμένες τιμές ύψους και παροχής υδατόπτωσης. Έτσι καταλήγει στο σχεδιασμό διάταξης βέλτιστων χαρακτηριστικών ανάλογα με τα δεδομένα της υδατόπτωσης. Η διάταξη αυτή διατηρεί υψηλό βαθμό απόδοσης (κοντά στον ονομαστικό) σε όλο το εύρος ισχύος της.

Με βάση αυτό παρουσιάζονται εφαρμογές της εν λόγω διάταξης που στόχο έχουν την εκμετάλλευση υδατοπτώσεων μικρού ύψους τόσο μικρών όσο και μεγάλων παροχών με αποδοτικό τρόπο. Πιο αναλυτικά στην περίπτωση των εγκαταστάσεων μικρών παροχών εξαιτίας της αποδοτικής λειτουργίας σε μεγάλο εύρος προτείνεται η χρήση τυποποιημένων διατάξεων υψηλής απόδοσης, οι οποίες με πολύ χαμηλό κόστος θα καθιστούν δυνατή την εκμετάλλευση μικρών υδατοπτώσεων. Από την άλλη στην περίπτωση μεγάλων παροχών εξετάζεται η εκμετάλλευση μικρού ύψους υδατόπτωσης σε ποταμούς χωρίς τη δημιουργία έργων εκτροπής με κατάλληλες διατάξεις και χρήση παράλληλων κοχλιών μέσα από τους οποίους περνάει το σύνολο της ροής του ποταμού.

## **Abstract**

Continuously rising energy demand has led to the search for energy sources that have remained as yet unexploited, particularly sustainable energy with hydropower being at the forefront. Nevertheless only a small percentage of the total available hydropower is being used, mainly because with existing technology only high-head hydro energy is economically efficient. This study therefore examines an efficient way of utilizing small-head hydropower. Specifically this thesis concerns the redirection of the usage of Archimedes' screw, a design which has been used for centuries for pumping, to hydropower energy transformation due to its high efficiency and low production cost.

The majority of this study concerns the basic function principles of Archimedes' screw during the transformation of low head hydroenergy to rotational kinetic energy and the main causes of energy loss during the transformation. Based on that, a theoretical method for calculating the output power and the efficiency of the device is developed as well as the corresponding computational program. The program, using geometric and kinematic data of the build, calculates the output power. This program, along with genetic algorithm optimization software, calculates the geometric and kinematic characteristics of the screw to result in maximum efficiency, given a certain head and flow rate requirement as input. These characteristics lead to the design of the optimal device. This device has high efficiency (close to nominal) on the greater part of its power range.

Due to that design, efficient applications are described for small heads for both low and high volume flow rates. In particular, in the case of low flow rates, based on its high efficiency in a great power range, use is made of off-the-shelf components which permit the economic use of such small heads due to their low unit cost. For high volume flow rates in rivers with at low heads, designs are developed which do not require the construction of by-pass channels but rather rely on the use of multiple screws in parallel through which the total flow of the river passes.



## Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	3
Περίληψη	5
Abstract	6
Περιεχόμενα	8
Πρόλογος	10
<b>1.Εισαγωγή</b>	13
1.1.Γεωμετρία του κοιλία του Αρχιμήδη	13
1.2.Υπολογισμός ισχύος διάταξης ορισμένης γεωμετρίας και ύψους υδατόπτωσης	16
1.3.Βέλτιστη λύση σε πρόβλημα ορισμένης παροχής και ύψους υδατόπτωσης	19
<b>2.Περιεχόμενος όγκος βήματος</b>	20
2.1.Θεωρητικός υπολογισμός περιεχόμενου όγκου ανά βήμα	21
2.1.1. Υπολογισμός όγκου με επιφάνεια νερού κάτω από το ύψος (z) του άξονα y και χωρίς επαφή με προηγούμενο βήμα χωρίς τομή με εσωτερικό κύλινδρο	22
2.1.2. Υπολογισμός όγκου με επιφάνεια νερού κάτω κάτω από το ύψος (z) του άξονα y και χωρίς επαφή με προηγούμενο βήμα με τομή με εσωτερικό κύλινδρο	25
2.1.3. Υπολογισμός όγκου με επιφάνεια νερού πάνω από το ύψος (z) του άξονα y και χωρίς επαφή με προηγούμενο βήμα	26
2.1.4. Υπολογισμός όγκου με επιφάνεια νερού με επαφή προηγούμενο βήμα	30
2.1.5. Σύνθετη Περίπτωση	31
2.2. Αριθμητική επίλυση υπολογισμού όγκου (υπολογιστική μέθοδος)	31
<b>3. Απώλειες υδροδυναμικής αντίστασης</b>	34
3.1. Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών υδροδυναμικής αντίστασης	34
3.1.1. Στρωτό οριακό στρώμα	35
3.1.2. Τυρβώδης ροή	35
3.2. Υπολογισμός απωλειών υδροδυναμικής αντίστασης σπείρας	36
3.2.1 Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών σπείρας	37
3.2.2 Αριθμητική επίλυση απωλειών αντίστασης σπείρας	44



3.3. Υπολογισμός απωλειών υδροδυναμικής αντίστασης εσωτερικού κυλίνδρου	45
3.3.1. Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών εσωτερικού κυλίνδρου	45
3.3.2 Αριθμητική επίλυση απωλειών εσωτερικού κυλίνδρου	51
<b>4.Υπολογισμών απωλειών διακένου</b>	<b>53</b>
4.1. Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών όγκου ρευστού σε διάκενο	54
4.2. Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών αντίστασης διακένου	59
4.3. Αριθμητική επίλυση απωλειών διακένου	61
<b>5. Βελτιστοποίηση γεωμετρικών χαρακτηριστικών κοχλία</b>	<b>62</b>
5.1.Σύνδεση λογισμικού με κώδικα υπολογισμού	63
5.2. Επίλυση Προβλήματος	65
5.3. Έλεγχος απόδοσης σε διαφορετικές τιμές της παροχής και ύψους	67
<b>6. Συμπεράσματα-Μελλοντικές Εφαρμογές- Εξέλιξη της μελέτης</b>	<b>71</b>
6.1.Συμπεράσματα	71
6.2.Μελλοντικές εφαρμογές	71
6.3.Εξέλιξη της μελέτης	72
<b>Παράρτημα Α</b>	<b>74</b>

## Πρόλογος

Ο κοχλίας του Αρχιμήδη ή ατέρμων κοχλίας, είναι μία συσκευή που αποτελείται από έναν κοχλία, μέσα σε ένα κύλινδρο διαμέτρου ίδιας με την εξωτερική διάμετρο του κοχλία. Κοχλίας είναι διάταξη που αποτελείται από κύλινδρο από τον οποίο εκτείνονται μία ή περισσότερες ελικοειδείς επιφάνειες με κοινό άξονα, αυτόν του εσωτερικού κυλίνδρου, ως μία εξωτερική διάμετρο. Ο κοχλίας του Αρχιμήδη βρίσκεται σε κλίση με το έδαφος και καθώς γυρίζει, ποσότητες ρευστού εγκλωβίζονται ανάμεσα σε διαδοχικά βήματα των ελικοειδών επιφανειών.

Η επαφή της κυλινδρικής επιφάνειας και του κοχλία δεν χρειάζεται να είναι υδατοστεγής καθώς λόγω του σχεδιασμού της διάταξης, το ρευστό που διαρρέει πηγαίνει στο χαμηλότερο τμήμα. Σε μερικούς σχεδιασμούς, ο κοχλίας είναι ενωμένος με το κυλινδρικό περίβλημα και περιστρέφονται μαζί, αντί να περιστρέφεται μόνο ο κοχλίας οπότε οι απώλειες όγκου ρευστού εξαιτίας του διακένου εκμηδενίζονται.

## Ιστορική αναδρομή

Η πρώτη χρήση του κοχλία εντοπίζεται τον 7<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ. στη Μεσοποταμία. Η διάταξη πιστεύεται ότι χρησιμοποιούνταν για την άντληση υδάτων από κανάλια για αρδευτικούς σκοπούς. Κατά την περιστροφή, δηλαδή, του κοχλία ο όγκος του νερού που εγκλωβιζόταν σε διαδοχικά βήματα του μεταφερόταν στην κορυφή της διάταξης. Στο χώρο αυτό μάλιστα γίνεται η πρώτη ιστορική αναφορά για χρήση του στους Ύρμαστους κήπους της Βαβυλώνας, από τον κλασικό συγγραφέα Στράβωνα. Οι διατάξεις που χρησιμοποιούνταν ήταν μπρούντζινες αντλίες-κοχλίες στις οποίες κοχλίας και κυλινδρικό περίβλημα περιστρέφονταν μαζί.

Βελτίωση της παραπάνω κατασκευής πέτυχε ο Αρχιμήδης. Αφορμή για αυτό του δόθηκε στον όταν επισκέφθηκε την Αίγυπτο μετά από πρόσκληση του Πτολεμαίου Β' του Φιλάδελφου. Εκεί εμπνεύστηκε τον κοχλία και τον κατασκεύασε στην προσάθειά του να βοηθήσει τους χωρικούς να αντλήσουν νερό από το Νείλο. Πολύ σύντομα η χρήση του κοχλία απλώθηκε σε όλη την Μεσόγειο, ακόμη και στην Εγγύς Ανατολή και διατηρήθηκε για πολλούς αιώνες χωρίς βελτιώσεις. Σε μερικές περιοχές μάλιστα της Βόρειας Αφρικής εξακολουθεί να χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα, όπως π.χ. στην Αίγυπτο. Για το λόγο αυτό η εφεύρεσή της αποδίδεται στον μεγάλο μαθηματικό.

Σήμερα εκτός από το να τροφοδοτεί κανάλια άρδευσης, ο κοχλίας του Αρχιμήδη, χρησιμοποιείται για άντληση νερού από ορυχεία ή από χαμηλές περιοχές που γεμίζουν με ανεπιθύμητο νερό. Πιο αναλυτικά η διάταξη χρησιμοποιείται για να αποστραγγίσει ξηρά που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο της θάλασσας (όπως στην Ολλανδία) αλλά και για τη δημιουργία πόλντερ (περιοχές που περιφράσσονται από θάλασσας και το νερό που περιλαμβάνεται αντλείται ώστε να χρησιμοποιηθεί η γη για γεωργία).

Είναι σαφές, από την άλλη, ότι οι μεταφορικοί κοχλίες που χρησιμεύουν ιδιαίτερα στη μεταφορά υλικών σε κόκκους, όπως κόκκοι πλαστικών για την χύτευση με έγχυση και η μεταφορά δημητριακών βασίζονται στην ίδια αρχή λειτουργίας. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα για τη μεταφορά υγρών και ως περιστροφικός τροφοδότης ή μεταβλητής ροής τροφοδότης για συγκεκριμένες ποσότητες υλικού. Η αρχή του κοχλία, μπορεί να βρεθεί σε ανυψωτήρες, όπως αυτοί που χρησιμοποιούνται από ιχθυοτροφεία για τα ψάρια, για την ασφαλή μεταφορά τους από λίμνες σε άλλη τοποθεσία, ώστε να μειωθεί όσο γίνεται η επαφή με αυτά.

Τέλος ο κοχλίας του Αρχιμήδη χρησιμοποιήθηκε το 2001, από τον Βρετανό μηχανικό John Burland, στην επιτυχή σταθεροποίηση του πύργου της Πίζας. Μικρές ποσότητες του υπεδάφους που μαλάκωσαν λόγω υπόγειων υδάτων, αφαιρέθηκαν κάτω από τη βόρεια πλευρά του πύργου και το βάρος του Πύργου διόρθωσε από μόνο του την κλίση.

### Λειτουργία του κοχλία για παραγωγή ενέργειας

Παρόλο που η διαδεδομένη χρήση του κοχλία είναι αυτή της άντλησης και μεταφοράς ρευστών είναι προφανές ότι η διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αντίστροφη λειτουργία. Είναι δηλαδή δυνατή η λειτουργία του κοχλία με τροφοδότηση του με ρευστό σε ορισμένο υδραυλικό ύψος και η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας του σε κινητική (περιστροφική) με την περιστροφή του κοχλία κατά την κάθοδο του ρευστού μέχρι την έξοδο της διάταξης .

Πιο αναλυτικά καθώς το ρευστό εισέρχεται στην κορυφή, πληρώνει μέρος του όγκου που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικά βήματα σπειρών του κοχλία. Το βάρος του ρευστού ωθεί τη ελικοειδή επιφάνεια σε περιστροφική κίνηση εξαιτίας της κλίσης της με παραγωγή κινητικού έργου. Η περιστροφική κίνηση αυτή βέβαια οδηγεί σε κάθοδο του ρευστού μέχρι το κάτω άκρο της διάταξης. Είναι προφανές ότι με αυτό τον τρόπο ο κοχλίας του Αρχιμήδη εκμεταλλεύεται τη δυναμική ενέργεια του ρευστού που βρίσκεται στο σημείο του άνω άκρου του μέχρι το σημείο του κάτω άκρου του.

Η μετατροπή αυτή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική παρουσιάζει, βέβαια, ορισμένες απώλειες. Αυτές εντοπίζονται κατά κύριο λόγο σε απώλειες υδροδυναμικής αντίστασης των περιστρεφόμενων επιφανειών του κοχλία και σε απώλειες όγκου ρευστού εξαιτίας του διακένου ανάμεσα στην εξωτερική διάμετρο του κοχλία και του εξωτερικού κυλίνδρου. Η δεύτερη κατηγορία απωλειών δεν υφίσταται βέβαια στην περίπτωση που ο κοχλίας είναι ενωμένος με τον εξωτερικό κύλινδρο και η διάταξη περιστρέφεται ολόκληρη αλλά αυτή η λύση σπάνια προτιμάται καθώς υπάρχει σημαντική αύξηση τόσο των απωλειών αντίστασης, αφού στον εξωτερικό κύλινδρο παρατηρούνται μεγαλύτερες υδροδυναμικές αντιστάσεις (μεγάλες ταχύτητες ρευστού αλλά και ροπή αντίστασης), όσο και των απωλειών έδρασης αφού το σύνολο του βάρους του ρευστού πρέπει να μεταφερθεί στις εδράσεις της διάταξης.

### Συμβολή διπλωματικής εργασίας

Η διπλωματική αυτή εργασία εντάσσεται στο πλαίσιο μελέτης της χρήσης της διάταξης του κοχλία του Αρχιμήδη για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας με εκμετάλλευση υδατόπτωσης. Αφορά στη μελέτη για τον υπολογισμό της παραγόμενης ισχύος από διάταξη κοχλία συγκεκριμένων γεωμετρικών και κινηματικών χαρακτηριστικών αλλά και το σχεδιασμό κοχλία με τα βέλτιστα γεωμετρικά και κινηματικά χαρακτηριστικά για τη μεγιστοποίηση της απόδοσης κατά τη μετατροπή έργου υδατόπτωσης. Τέλος ερευνάται η δυνατότητα και η σκοπιμότητα χρήσης της διάταξης για ηλεκτροπαραγωγή.

Το **κεφάλαιο 1** είναι εισαγωγικό. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές αρχές λειτουργίας του κοχλία κατά την μετατροπή δυναμικής ενέργειας σε κινητική, γίνεται γεωμετρική ανάλυση του κοχλία και παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού της παραγόμενης κατά την περιστροφή ισχύος και του βαθμού απόδοσης διάταξης με αναφορά των επιμέρους στοιχείων που είναι απαραίτητο να υπολογιστούν για το αποτέλεσμα αυτό. Τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται αναλυτικά στα κεφάλαια 2 έως 4

Στο **κεφάλαιο 2** πραγματοποιείται θεωρητικός υπολογισμός του όγκου που περιέχεται σε κάθε βήμα του κοχλία αλλά και αριθμητική προσέγγιση της λύσης.

Στο **κεφάλαιο 3** περιγράφονται οι θεωρητικές αρχές στις οποίες βασίζεται ο υπολογισμός των απωλειών υδροδυναμικών αντιστάσεων κάθε βήματος και υπολογίζεται η συνολική ροπή αντίστασης ενός βήματος ως άθροισμα των αντιστάσεων της σπείρας και του εσωτερικού κυλίνδρου.

Στο **κεφάλαιο 4** γίνεται υπολογισμός των απωλειών διακένου οι οποίες διαχωρίζονται στις απώλειες όγκου και υδροδυναμικής αντίστασης του.

Στο **κεφάλαιο 5** παρουσιάζεται η διαδικασία εύρεσης της βέλτιστης λύσης σε πρόβλημα δεδομένης υδατόπτωσης και παροχής όγκου ρευστού, καθώς και ο έλεγχος της λειτουργίας της λύσης αυτής σε αλλαγή του ύψους υδατόπτωσης και της παροχής. Παρουσιάζεται δηλαδή ο χάρτης λειτουργίας της μηχανής.

Στο **κεφάλαιο 6** παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της μελέτης, αναλύονται περιοχές εφαρμογής της διάταξης με σημαντικό ενδιαφέρον και αναφέρονται πιθανές προεκτάσεις της εν λόγω μελέτης με ερευνητικό ενδιαφέρον.

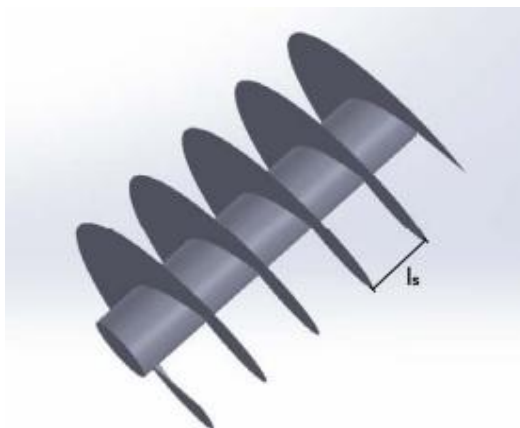
## 1.Εισαγωγή

Η λειτουργία του κοχλίου του Αρχιμήδη όπως εξετάζεται σε αυτή τη διπλωματική βασίζεται, όπως αναφέρθηκε, στην εκμετάλλευση καθόδου ορισμένης μάζας ρευστού μέσα από τη διάταξη. Καθώς δηλαδή η διάταξη περιστρέφεται συγκεκριμένος όγκος ρευστού εισέρχεται από το άνω άκρο της και γεμίζει, ανάλογα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης τον χώρο που περιέχεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικά βήματα της ελικοειδούς επιφάνειας του κοχλίου. Το ρευστό αυτό εξαιτίας του βάρους του ασκεί υδροστατική πίεση στα τοιχώματα της επιφάνειας του κοχλίου τα οποία εξαιτίας της γεωμετρίας τους αναγκάζονται σε περιστροφή. Αυτή η περιστροφή εξαιτίας του σπειροειδούς σχήματος της επιφάνειας της έλικας οδηγεί το ρευστό προς το κατώτατο τμήμα της διάταξης απ' όπου και εξέρχεται.

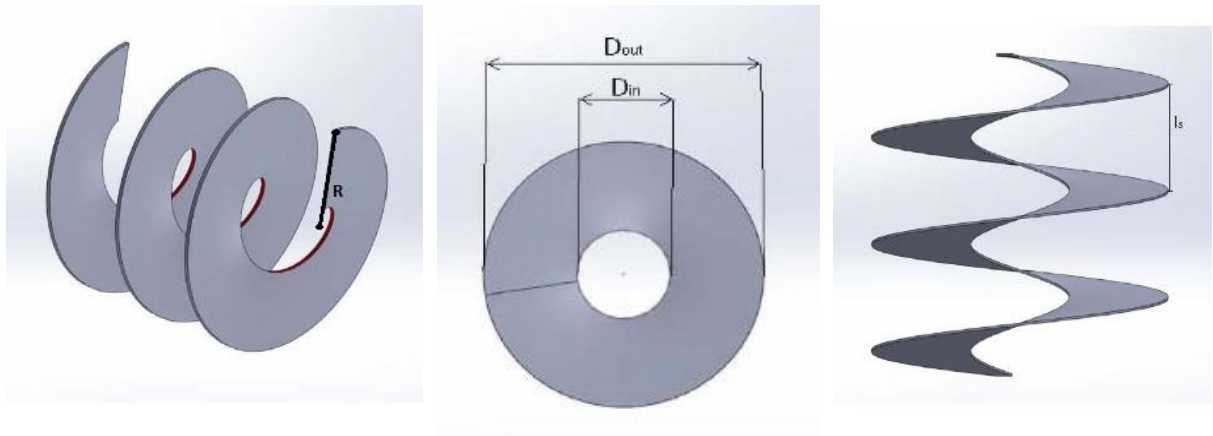
### 1.1.Γεωμετρία του κοχλίου του Αρχιμήδη

Η διάταξη αποτελείται, όπως αναφέρθηκε, από κοχλίο, ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό κύλινδρο. Ο κοχλίας αποτελείται από εσωτερικό κύλινδρο συγκεκριμένης διαμέτρου από την οποία εκτείνονται ελικοειδείς επιφάνειες (εφεξής σπείρα) μέχρι τη διάμετρο του εξωτερικού κυλίνδρου.

Στην απλούστερη περίπτωση, αυτή του κοχλίου μιας αρχής (σχήμα 1.1) υπάρχει μια σπείρα η οποία δημιουργεί βήματα ανάμεσα στα οποία εγκλωβίζεται ρευστό κατά την περιστροφή του. Προκειμένου να εγκλωβιστεί ρευστό προφανώς απαιτούνται περισσότερα του ενός βήματα. Η επιφάνεια αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται με περιστροφή ακτίνας (σχήμα 1.2.(α)), η οποία ξεκινά από συγκεκριμένο σημείο στον άξονα της σπείρας (και του εσωτερικού κυλίνδρου προφανώς) κατά  $\theta$  και ταυτόχρονη μετακίνηση του σημείου εκκίνησης κατά  $\frac{l_s \cdot \theta}{2\pi}$  όπου  $l_s$ , το βήμα της σπείρας. Αυτή η γεωμετρία έχει σα συνέπεια κάθε ακτίνα της σπείρας να είναι κάθετη στον άξονά της και αντίστοιχες ακτίνες σε διαδοχικά βήματα της σπείρας (διαφορά γωνίας ίση με  $2\pi$ ) να είναι παράλληλες με απόσταση  $l_s$ . Για την αναλυτική παράσταση της σπείρας μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτή αποτελείται από διαδοχικές ομοαξονικές έλικες διαφορετικής ακτίνας (σχήμα 1.2.(α)), κοινού βήματος και γωνίας με ακτίνα μεγαλύτερη ή ίση της εσωτερικής διαμέτρου και μικρότερη ή ίση της εξωτερικής (σχήμα 1.2.(β) και (γ)).



**Σχήμα 1.1.** Κοχλίας μιας αρχής βήματος  $l_s$ . Αποτελείται από σπείρα και κύλινδρο ο οποίος εφάπτεται στην εσωτερική ακτίνα της σπείρας.



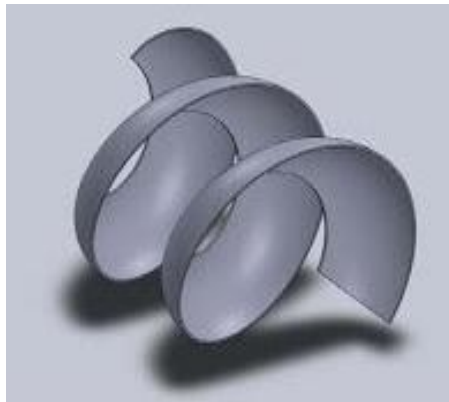
(α)

(β)

(γ)

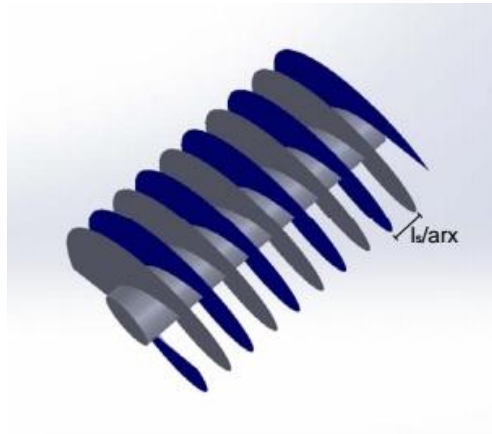
**Σχήμα 1.2.**(α),(β),(γ) Γεωμετρικά χαρακτηριστικά ελικοειδούς επιφάνειας (σπείρας) βήματος  $l_s$ , εσωτερικής διαμέτρου  $D_{in}$  και εξωτερικής διαμέτρου  $D_{out}$  σε τρεις όψεις. Στην όψη (α) διακρίνεται με κόκκινο χρώμα η εσωτερική έλικα της σπείρας αλλά και η γενέτειρα ακτίνα της σπείρας. Στην όψη (β) διακρίνεται η εσωτερική και εξωτερική διάμετρος ενώ στην όψη (γ) το βήμα της σπείρας.

Είναι προφανές ότι γίνεται να υπάρξει σπείρα διαφορετικής γεωμετρίας (σχήμα 1.3.), η οποία δεν παράγεται με περιστροφή ακτίνας αλλά με περιστροφή άλλης ευθείας ή καμπύλης. Η αναλυτική της παράσταση σαφώς διαφέρει αλλά δεν παύει να αποτελείται από διαδοχικές έλικες κοινού βήματος αλλά διαφορετικής γωνίας μεταξύ τους.



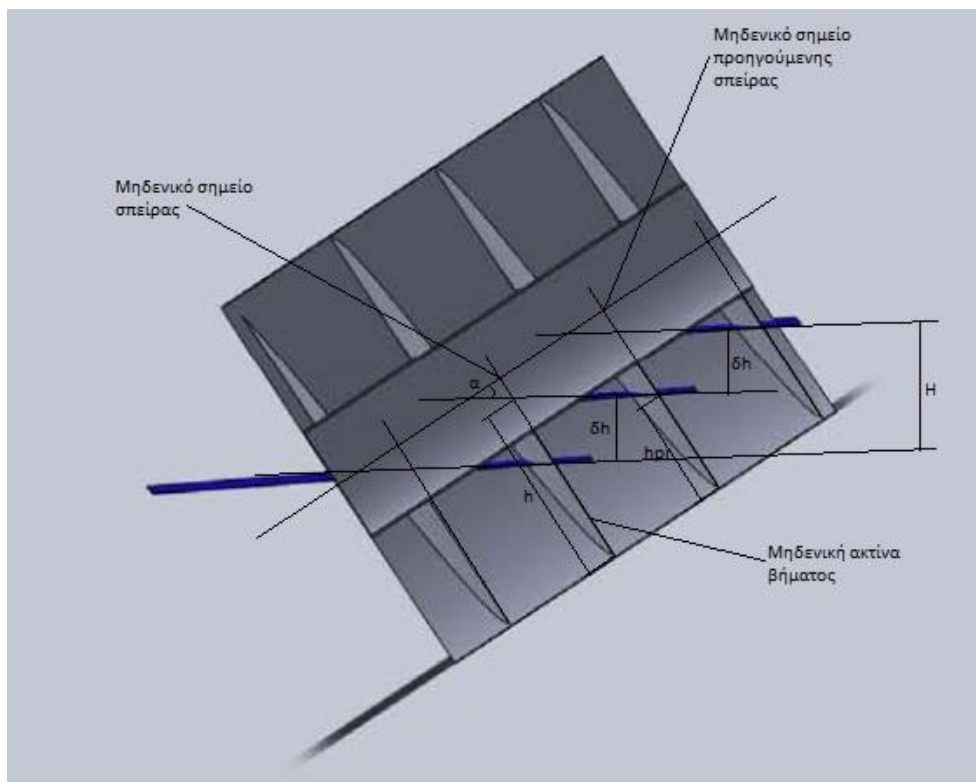
**Σχήμα 1.3.** Σπείρα με γενέτειρα καμπύλη σχήματος τεταρτοκυκλίου

Στην περίπτωση που ο κοχλίας αποτελείται από περισσότερες της μίας αρχής (σχήμα 1.4.) κάθε άλλη σπείρα θεωρείται όμοια με την αρχική μετατοπισμένη κατά  $\frac{l_s}{arx}$  προς τα δεξιά, όπου  $arx$ , ο αριθμός των αρχών του κοχλίου. Στην περίπτωση αυτή κατά την περιστροφή του κοχλίου συγκεκριμένος όγκος ρευστού εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικά βήματα. Τα βήματα αυτά που προφανώς ανήκουν σε σπείρες διαφορετικής αρχής και απέχουν μεταξύ τους  $\frac{l_s}{arx}$ . Σε κοχλία πολλαπλών αρχών η απόσταση αυτή θεωρείται βήμα της διάταξης. Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι σε κάθε περίπτωση το βήμα ισούται με  $\frac{l_s}{arx}$  καθώς ακόμα και στην περίπτωση μοναδικής αρχής ο τύπος επαληθεύεται.



**Σχήμα 1.4.** Κοιλίας δύο αρχών βήματος  $l/arx$ , όπου  $l$  το βήμα κάθε σπείρας. Η απόσταση δύο διαδοχικών βημάτων των σπειρών θεωρείται σε σπείρα πολλαπλών αρχών βήμα του κοιλία.

Κατά την περιγραφή ενός βήματος σπείρας, μηδενικό σημείο θεωρείται το σημείο στο οποίο η ακτίνα της σπείρας βρίσκεται σε επαφή με το κατώτατο σημείο του εξωτερικού κυλίνδρου. Με το τρόπο αυτό είναι εύκολο να περιγραφούν γεωμετρικά μεγέθη της διάταξης καθώς, η γωνία που σχηματίζει η στάθμη του ρευστού με την ακτίνα στο σημείο αυτό είναι συμπληρωματική με την κλίση της διάταξης (σχήμα 1.5). Είναι φανερό ότι προκειμένου να λειτουργεί η διάταξη είναι απαραίτητο να βρίσκεται υπό κλίση καθώς σε περίπτωση που ήταν κάθετη, το ρευστό θα έρρεε γύρω από τη σπείρα χωρίς να την περιστρέφει.

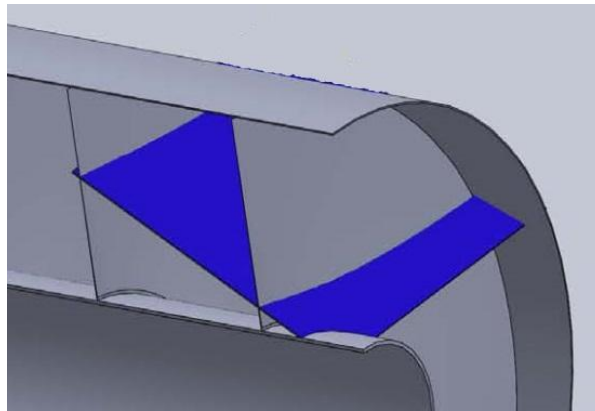


**Σχήμα 1.5.** Πλάγια τομή διάταξης κοιλία. Διακρίνονται γεωμετρικά στοιχεία της διάταξης όπως το ύψος του ρευστού στο βήμα ( $h$ ), το ύψος του ρευστού στην προηγούμενο βήμα ( $h_{pr}$ ), η κλίση  $\alpha$ , η συνολική υδατόπτωση  $H$  αλλά και η διαφορά στάθμης μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων  $\delta h$

Ο όγκος του ρευστού που περιέχεται σε ένα βήμα έχει συγκεκριμένο ύψος ρευστού  $h$  το οποίο για λόγους γεωμετρικού υπολογισμού που θα αναδειχθούν στη συνέχεια δεν υπολογίζεται από το κάτω άκρο της ακτίνας του

μηδενικού σημείου μέχρι την επιφάνεια, αλλά υπολογίζεται πάνω στη μηδενική ακτίνα μέχρι το σημείο που η στάθμη του ρευστού τέμνει την ακτίνα (ή την προέκτασή της) οπότε δεν αντιπροσωπεύει υδροστατικό ύψος. Το ύψος στάθμης του ρευστού σε κάθε βήμα εξαρτάται μόνο από τη θέση του άνω άκρου του κοχλία. Θεωρείται δηλαδή ότι το ύψος του ρευστού στο εσωτερικό της διάταξης είναι το ύψος της στάθμης του πρώτου βήματος (προφανώς πάνω στη μηδενική ακτίνα) τη στιγμή που εξαιτίας της περιστροφής του κοχλία παύει να εισέρχεται νερό σε αυτό. Στο σχήμα 1.5. φαίνεται η στάθμη του πρώτου βήματος τη στιγμή που παύει να εισέρχεται ρευστό σε αυτή.

Πρέπει εδώ να τονιστεί πως προκειμένου να μην ρέει το ρευστό γύρω από τη σπείρα είναι απαραίτητο τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης να είναι κατάλληλα ώστε η επιφάνεια του ρευστού να μην ξεπερνάει το άνω σημείο του εσωτερικού κυλίνδρου σε κανένα σημείο του βήματος (σχήμα 1.6).



**Σχήμα 1.6.** Διάταξη στην οποία η επιφάνεια του ρευστού ξεπερνάει τον εσωτερικό κύλινδρο. Παρατηρείται κυκλοφορία του ρευστού γύρω από τη σπείρα χωρίς την παραγωγή έργου.

## **1.2 Υπολογισμός ισχύος διάταξης ορισμένης γεωμετρίας και ύψους υδατόπτωσης**

Το πρόβλημα το οποίο καλούμαστε να επιλύσουμε είναι ο υπολογισμός της ισχύος που προσφέρει κοχλίας συγκεκριμένων γεωμετρικών χαρακτηριστικών για ορισμένο ύψος υδατόπτωσης. Οι προσεγγίσεις με τις οποίες μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα αυτό είναι δύο.

Σύμφωνα με την πρώτη αρκεί να υπολογιστεί η ροπή που ασκεί ο όγκος του ρευστού στο βήμα της σπείρας και από αυτή να αφαιρεθούν οι υδροδυναμικές αντιστάσεις του, ώστε πολλαπλασιάζοντας με το συνολικό αριθμό των βημάτων και τη γωνιακή ταχύτητα, και αφαιρώντας τις απώλειες εξαιτίας του διακένου να προκύψει η παραγόμενη ισχύς της διάταξης. Στη συνέχεια με υπολογισμό της παροχής όγκου της διάταξης είναι δυνατόν να υπολογιστεί η συνολική διαθέσιμη ισχύς. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι ο λόγος των δύο μεγεθών αποτελεί τον υδροδυναμικό βαθμό απόδοσης της διάταξης

Από την άλλη σύμφωνα με τη δεύτερη αντιμετώπιση το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί υπολογίζοντας την παραγόμενη ισχύ με αφαίρεση των απωλειών από τη συνολική διαθέσιμη. Πιο αναλυτικά, δηλαδή, υπολογίζοντας την παροχή όγκου της διάταξης γίνεται δυνατός ο υπολογισμός της συνολικής διαθέσιμης ισχύος. Αρκεί λοιπόν να υπολογιστούν οι απώλειες υδροδυναμικής αντίστασης που παρουσιάζονται σε κάθε βήμα και να πολλαπλασιαστούν με το συνολικό αριθμό των βημάτων και τη γωνιακή ταχύτητα ώστε αθροίζοντας με τις απώλειες εξαιτίας του διακένου να υπολογιστούν οι συνολικές απώλειες. Προφανώς ο βαθμός απόδοσης προκύπτει ως ο λόγος της διαφοράς της διαθέσιμης ισχύος με τις συνολικές απώλειες, προς τη διαθέσιμη ισχύ.



### Υπολογισμός αριθμού βημάτων

Είναι σαφές πως και στις δύο προσεγγίσεις της επίλυσης του προβλήματος είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του συνολικού αριθμού των βημάτων που απαιτούνται για την εκμετάλλευση του ύψους της υδατόπτωσης. Έτσι υπολογίζοντας την υψομετρική διαφορά των δύο στάθμεων που σχηματίζονται ανάμεσα δύο διαδοχικά βήματα είναι δυνατός ο υπολογισμός του αριθμού των βημάτων που απαιτούνται οπότε και ο υπολογισμός της παραγόμενης ισχύος της διάταξης. Για να υπολογιστεί η υψομετρική διαφορά των δύο στάθμεων ανάμεσα θεωρούμε πρόβλημα αντίστροφο από το πραγματικό (σχήμα 1.7.). Θεωρούμε δηλαδή οριζόντιο κοχλία και κεκλιμένη επιφάνεια νερού. Αρχικά να υπολογιστεί η απόσταση των δύο στάθμεων στο σημείο που τελειώνει το πρώτο βήμα και ξεκινά το προηγούμενο. Στο σημείο εκείνο η στάθμη  $h_{pr}$ , λύνοντας το διδιάστατο πρόβλημα, υπολογίζεται:

$$h_{pr} = \frac{l_s}{\arx} \cdot \tan(180 - \alpha) + h$$

όπου  $\alpha$  η κλίση της διάταξης και  $h$  το ύψος της στάθμης του ρευστού στο εσωτερικό της διάταξης. Οπότε η διαφορά στάθμης των δύο βημάτων υπολογίζεται τριγωνομετρικά από τη διαφορά των δύο υψών.

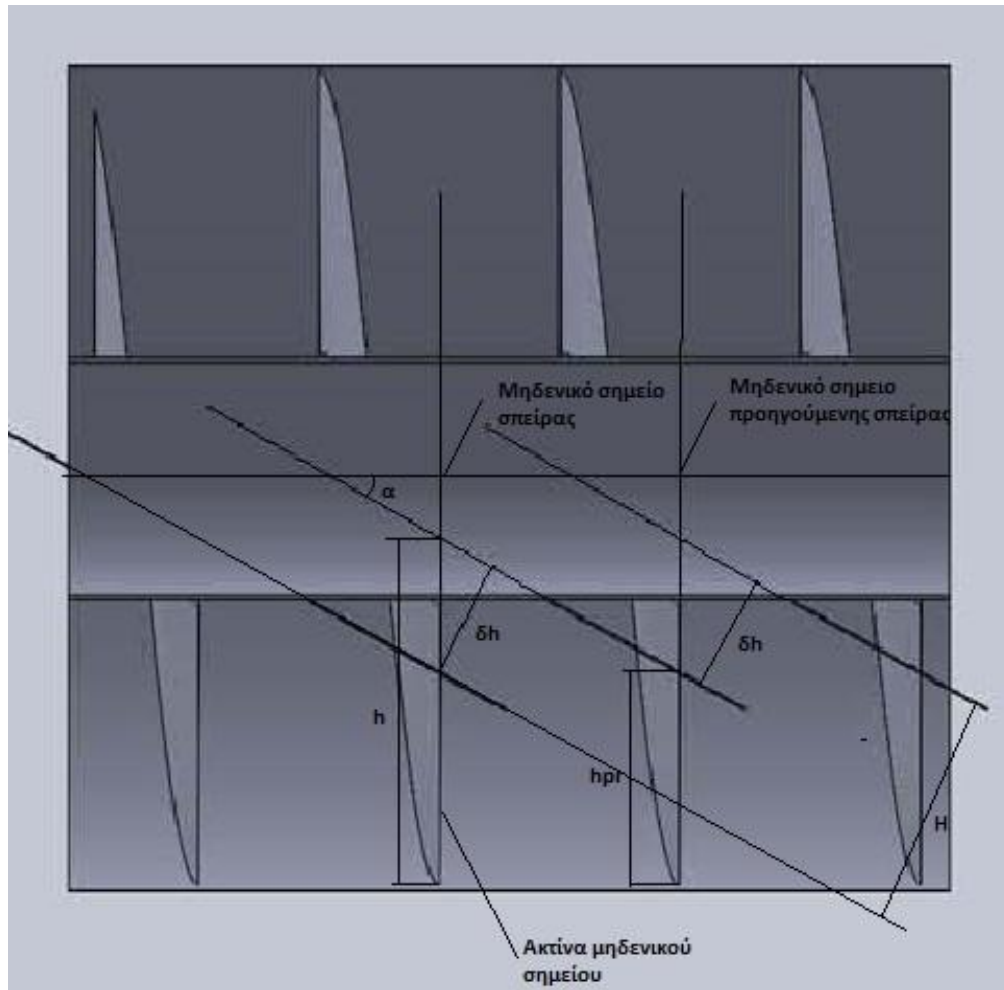
$$\delta h = (h - h_{pr}) \cdot \cos(\alpha) = -\frac{l_s}{\arx} \cdot \tan(180 - \alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Είναι προφανές ότι για την κάλυψη συνολικού ύψους υδατόπτωσης  $H$  τα βήματα που απαιτούνται είναι όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.5.:

$$N = \frac{H}{\delta h} + 1$$

Είναι φανερό πως παρόλο που αυτός ο αριθμός εκφράζει τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό βημάτων για την κάλυψη της υδατόπτωσης, κατά τον υπολογισμό των απωλειών ο παραπάνω αριθμός δεν είναι απολύτως ακριβής. Αυτό συμβαίνει γιατί ο πραγματικός αριθμός των βημάτων που κάθε φορά βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του ρευστού μεταβάλλεται και  $H/\delta h + 1$  είναι ο μέγιστος που προκύπτει (απαιτούμενος κατ' ελάχιστο). Από την άλλη, βέβαια, ο λόγος  $H/\delta h$  είναι λόγος ύψους, όχι λόγος απωλειών οπότε σε κάθε περίπτωση που το ύψος υδατόπτωσης  $H$  δεν αποτελεί ακριβές πολλαπλάσιο του  $\delta h$ , έχουμε, ελαφρώς, υποεκτίμηση των απωλειών.

Συνολικά λοιπόν, πετυχαίνοντας μεγάλη ακρίβεια στη λύση, η οποία αυξάνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η υπερεκτίμηση του αριθμού αντισταθμίζει την υποεκτίμηση των απωλειών που προκύπτει εξαιτίας του λόγου  $H/\delta h$  (λόγος υψών όχι απωλειών).



Σχήμα 1.6. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά κοχλία σε προβλήματος αντίστροφο από το πραγματικό

Τέλος, πριν το πρώτο βήμα του κοχλία και μετά το τελευταίο υπάρχουν επιφάνειες οι οποίες βρίσκονται σε επαφή με το ρευστό και συνεισφέρουν στις απώλειες υδροδυναμικής αντίστασης (σχήμα 1.5.). Οι επιφάνειες αυτές συνεισφέρουν συνολικά ένα βήμα. Οπότε ο αριθμός των βημάτων για τον υπολογισμό των απωλειών αντίστασης προκύπτει:

$$N = \frac{H}{\delta h} + 2$$

Είναι εύκολα αντιληπτό (τόσο από φυσικής όσο και μαθηματικής άποψης) πως όσο μεγαλύτερο είναι το ύψος υδατόπτωσης τόσο αυξάνεται ο βαθμός απόδοσης της διάταξης αφού προφανώς τα δύο επιπλέον βήματα που προστίθενται έχουν μικρότερη συνεισφορά.

#### Υπολογισμός απωλειών ισχύος εξαιτίας των απωλειών διακένου

Οι απώλειες ισχύος εξαιτίας των απωλειών όγκου του διακένου υπολογίζονται, τέλος, θεωρώντας πως ο όγκος του ρευστού που χάνεται εξαιτίας αυτών φτάνει στη χαμηλή στάθμη από την υψηλή χωρίς να γίνει μετατροπή της δυναμικής του ενέργειας σε κινητική. Έτσι η ανεκμετάλλευτη ισχύς είναι

$$Q_{\text{diak}} = V_{\text{diak}} \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

όπου  $V_{\text{διακ}}$  είναι η παροχή όγκου που χάνεται μέσω του διακένου,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $\Delta h$  το ύψος υδατόπτωσης.

#### Υπολογισμός παροχής όγκου της διάταξης

Η παροχή όγκου της διάταξης προκύπτει ως γινόμενο του περιεχόμενου όγκου ανά βήμα με τον αριθμό των βημάτων που 'αδειάζουν' (ή 'γεμίζουν') κάθε δευτερόλεπτο. Κάθε δευτερόλεπτο δηλαδή η διάταξη πραγματοποιεί  $\frac{\omega}{2\pi}$  περιστροφές. Σε κάθε περιστροφή αδειάζουν τόσα βήματα όσα ο αριθμός των αρχών. Άρα κατά συνέπεια η παροχή όγκου προκύπτει:

$$V = V_{\text{st}} \frac{\omega}{2\pi} \cdot \text{arx}$$

όπου  $V_{\text{st}}$  ο περιεχόμενος όγκος κάθε βήματος,  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα της διάταξης και  $\text{arx}$  ο αριθμός αρχών της διάταξης.

#### Υπολογισμός απωλειών ισχύος εξαιτίας υδροδυναμικών αντιστάσεων

Οι συνολικές απώλειες ισχύος εξαιτίας υδροδυναμικών αντιστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο της συνολικής ροπής των αντιστάσεων κάθε βήματος με τη γωνιακή ταχύτητα της διάταξης και τον αριθμό των βημάτων:

$$Q_{\text{dr}} = M_{\text{dr}} \cdot \omega \cdot N$$

όπου  $M_{\text{dr}}$  η συνολική ροπή των αντιστάσεων και  $N$  ο αριθμός των βημάτων της διάταξης.

#### Επίλυση του προβλήματος

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί η δεύτερη προσέγγιση καθώς απαιτεί των υπολογισμό λιγότερων παραμέτρων, αφού δεν απαιτεί τον υπολογισμό της ροπής κάθε βήματος. Αναλυτικότερα, όπως φάνηκε, είναι αναγκαίο για τον υπολογισμό της απόδοσης της διάταξης να υπολογιστεί:

- Ο περιεχόμενος όγκος σε κάθε βήμα.
- Η ροπή αντίστασης των υδροδυναμικών απωλειών σε κάθε βήμα
- Οι απώλειες διακένου.

Στα επόμενα κεφάλαια γίνεται αναλυτικά ο υπολογισμός καθενός από τα παρακάτω.

### **1.3.Σχεδιασμός βέλτιστης λύσης σε πρόβλημα ορισμένης παροχής και ύψους υδατόπτωσης**

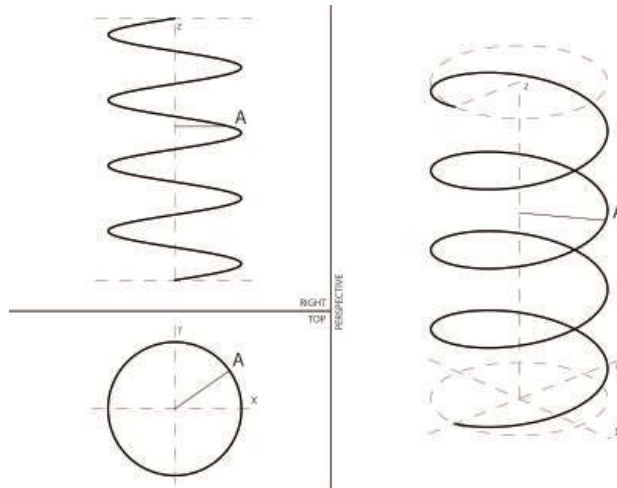
Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία υπολογισμού της απόδοσης, είναι δυνατόν να επιλυθεί το αντίστροφο πρόβλημα. Για δοθείσα, δηλαδή, παροχή και ύψος υδατόπτωσης να υπολογιστούν χαρακτηριστικά του κοχλίου εκείνα που βελτιστοποιούν την απόδοσή του. Αναλυτικότερα, είναι φανερό πως πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης των συνολικών απωλειών της διάταξης με περιορισμό την εξίσωση της παροχής όγκου με τη δοθείσα παροχή. Η επίλυση του προβλήματος αυτού θα επιδιωχθεί με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια θα ελεγχθεί η συμπεριφορά της βέλτιστης διάταξης σε μεταβολές του ύψους υδατόπτωσης (οπότε προφανώς και σε μεταβολές της παροχής όγκου) χωρίς μεταβολή της γεωμετρίας της διάταξης και της ταχύτητας περιστροφής.

## 2. Περιεχόμενος όγκος βήματος

### 2.1. Θεωρητικός υπολογισμός περιεχόμενου όγκου ανά βήμα

Αρχικά θα κάνουμε μία γεωμετρική περιγραφή του προβλήματος η οποία θα μας βοηθήσει στη υπολογιστική επίλυσή του. Προκειμένου να υπολογίσουμε τον όγκο θεωρούμε οριζόντια διάταξη κοχλία και κεκλιμένη επιφάνεια νερού (δηλαδή αντίθετα από το φυσικό πρόβλημα). Η διάταξη του κοχλία αποτελείται από δύο ομοαξονικές κυλινδρικές επιφάνειες διαμέτρου  $D_{in}$  και  $D_{out}$  και μία σπείρα εξωτερικής διαμέτρου  $D_{out}$  και εσωτερικής διαμέτρου  $D_{in}$ . Η σπείρα έχει σταθερό βήμα σε όλο της το μήκος και σε κάθε διάμετρο.

Η σπείρα της διάταξης μπορεί να περιγραφεί αλγεβρικά ως διαδοχικές έλικες με  $D_{in} < D < D_{out}$ .



Σχήμα 2.1. Γεωμετρία έλικας

Έλικα με διάμετρο  $D$  περιγράφεται παραμετρικά ως προς  $t$  με τις εξισώσεις:

$$x := \frac{D}{2} \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z := \frac{D}{2} \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y := \frac{l_s}{2\pi} \cdot t$$

Όπου  $l_s$  το βήμα της σπείρας και  $D$  η διάμετρός της. Η αρχική γωνία  $(-\pi/2)$  επιλέχθηκε προκειμένου να είναι εύκολη η παράσταση του ύψους στάθμης για  $t=0$  (μηδενικό σημείο).

Επιλύοντας προκύπτει η εξίσωση έλικας ως προς  $z$  συναρτήσει του  $y$ :

$$z := \frac{D}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)$$

Στη συνέχεια περιγράφουμε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης  $\alpha$ , το οποίο για  $y=0$  έχει  $z=h_{sur}$

$$z := y \tan(\alpha) - (h_{\text{sur.}}) \blacksquare$$

Προκειμένου να περιγράψουμε τη στάθμη του ρευστού μέσα στη διάταξη θεωρούμε επίπεδη επιφάνεια με κλίση  $(180-\alpha)$  και ύψος που υπολογίζεται στο  $z=0$  και αντιστοιχεί στο ύψος  $h$  που φτάνει το νερό στη σπείρα στο σημείο αυτό. Έτσι η εξίσωση της επιφάνειας του ρευστού προκύπτει:

$$z := y \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{D_{\text{out}}}{2} - h\right) \blacksquare$$

Αναζητούμε λοιπόν τα όρια ολοκλήρωσης έτσι ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός του όγκου που περιέχεται ανάμεσα σε βήμα της σπείρας ή σε δύο σπείρες με διαφορετικές αρχές και την επιφάνεια. Είναι σημαντικό εδώ να τονιστεί ότι εξαιτίας της πολυπλοκότητας του σχήματος ο όγκος διαχωρίζεται σε πολλούς διακριτούς όγκους ανάλογα με το ύψος της στάθμης, την κλίση της διάταξης και άλλα διαστασιολογικά χαρακτηριστικά της.

Προκειμένου να έχουμε μια βασική κατανόηση της γεωμετρικής μορφής του όγκου του νερού είναι σημαντικό να βρούμε τα σημεία τομής της επιφάνειας του νερού με την εξωτερική έλικα και το σημείο τομής της επιφάνειας με το κατώτερο σημείο του εξωτερικού κυλίνδρου. Αυτό το πετυχαίνουμε με την επίλυση των παρακάτω εξισώσεων ως προς  $y$ .

$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{\text{out}}}{2} - h\right) - \frac{D_{\text{out}}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

με επιλογή της κοντινότερης στο μηδέν αρνητικής λύσης  $y_1$  και της κοντινότερης στο μηδέν θετικής λύσης  $y_2$

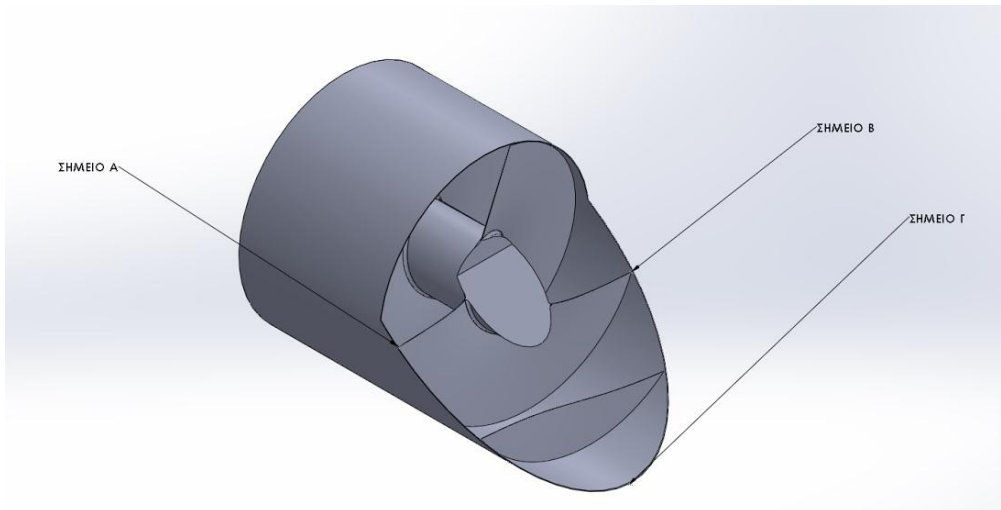
$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{\text{out}}}{2} - h\right) + \frac{D_{\text{out}}}{2} = 0$$

από την οποία προκύπτει το  $y_3$ .

Στο σχήμα 2.2 παρουσιάζονται τα σημεία Α, Β και Γ σε διάταξη τυχαίων διαστάσεων. Το σημείο Α αντιστοιχεί στο  $y=y_1$ , το σημείο Β στο  $y=y_2$  και το σημείο Γ στο  $y=y_3$ .

Πρέπει να τονιστεί εδώ πως η διάταξη λειτουργεί μόνο στην περίπτωση που δεν έχουμε περιστροφή του ρευστού γύρω από τη σπείρα του κοχλία και ο όγκος του ρευστού σε κάθε σπείρα είναι απομονωμένος. Για να επιτευχθεί αυτό εύκολα αποδεικνύεται πως η στάθμη του ρευστού δεν πρέπει να ξεπερνάει το ανώτατο σημείο του εσωτερικού κυλίνδρου. Ο έλεγχος γίνεται στο αρνητικό ακραίο σημείο του βήματος καθώς σε κάθε άλλο σημείο η στάθμη είναι χαμηλότερη. Άρα

$$-\frac{l_s}{2} \cdot \left[ \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{\text{out}}}{2} - h\right) \right] < \frac{D_{\text{in}}}{2}$$

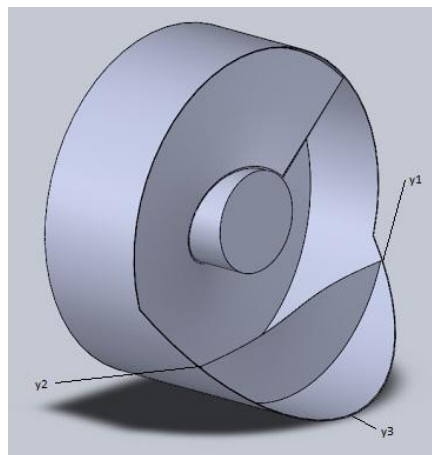


**Σχήμα 2.2.** Επιφάνεια ρευστού σε κοχλία. Η τομή αντιπροσωπεύει την επιφάνεια του ρευστού.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε αναλυτικά τον περιεχόμενο όγκο ρευστού ανάμεσα σε διαδοχικά βήματα με αναλυτικό τρόπο. Είναι εύκολο με τον τρόπο αυτό να γίνει κατανοητή η γεωμετρία της διάταξης σε κάθε περίπτωση γεωμετρίας.

**2.1.1 Περίπτωση 1<sup>η</sup>: Υπολογισμός όγκου με επιφάνεια νερού κάτω από το ύψος (z) του άξονα y και χωρίς επαφή με προηγούμενο βήμα χωρίς τομή με εσωτερικό κύλινδρο**

Στην απλούστερη περίπτωση που η στάθμη του νερού δεν το ύψος (z) του άξονα y, δεν έχει επαφή με το προηγούμενο βήμα της σπείρας, ή με σπείρα με διαφορετική αρχή και δεν τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο (σχήμα 2.3). Αριθμητικά αυτό εκφράζεται ως εξής: Το  $y_1$  να είναι μικρότερο του ενός τετάρτου του βήματος, το  $y_3$  μικρότερο του βήματος προς τον αριθμό των αρχών και η διαφορά της εξωτερικής ακτίνας με το ύψος του νερού μικρότερη της ακτίνας του εσωτερικού κυλίνδρου.



**Σχήμα 2.3** Επιφάνεια χωρίς επαφή με το προηγούμενο βήμα χωρίς τομή με εσωτερικό κύλινδρο.

Ο συνολικός όγκος αποτελεί άθροισμα τριών διαφορετικών όγκων.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον όγκο που περιέχεται ανάμεσα στην έλικα και τον εξωτερικό κύλινδρο ολοκληρώνουμε κατά x από τον εξωτερικό κύλινδρο έως τη σπείρα(υπολογίζοντας το x κάθε έλικας για κάθε y

και z), κατά z από την εξωτερική έλικα της σπείρας έως το επίπεδο της στάθμης και κατά y (οριζόντιος άξονας) από τα σημεία τομής της επιφάνειας του νερού με την εξωτερική έλικα της σπείρας.

Τα όρια ολοκλήρωσης κατά x ως προς y και z υπολογίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις έλικας που προκύπτουν με απαλοιφή του t στις εξισώσεις έλικας που περιεγράφηκαν παραπάνω :

$$x := r \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) \blacksquare$$

$$z := r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) \blacksquare$$

Έτσι με απαλοιφή του r προκύπτει το πρώτο όριο ολοκλήρωσης ως προς x, δηλαδή το τοίχωμα της σπείρας,

$$x := z \cdot \cot\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) \blacksquare$$

Το δεύτερο όριο ολοκλήρωσης ως προς x δηλαδή το τοίχωμα του εξωτερικού κυλίνδρου μπορεί να εκφραστεί ως προς z ως εξής:

$$x := -\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2} \blacksquare$$

Τα όρια ολοκλήρωσης κατά z προκύπτουν από την εξίσωση της εξωτερικής έλικας της σπείρας

$$z := \frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) \blacksquare$$

και την εξίσωση της επιφάνειας του νερού

$$z := y \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right) \blacksquare$$

Τέλος υπολογίζουμε τα όρια ολοκλήρωσης κατά y λύνοντας :

$$y \cdot \tan(180deg - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right) - \frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

και διαλέγοντας λύσεις στις κατάλληλες περιοχές προκύπτουν τα y<sub>1</sub> (κοντινότερη στο μηδέν αρνητική τιμή) και y<sub>2</sub> (κοντινότερη στο μηδέν θετική τιμή).

Έτσι υπολογίζουμε τον όγκο που περιλαμβάνεται με το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$V_1 := \int_{y_1}^{y_2} \int_{\frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)}^{y \cdot \tan(180\text{deg}-\alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)} \int_{-\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}}^{z \cdot \cot\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Για να υπολογίσουμε τον όγκο που περιλαμβάνεται κάτω από την εξωτερική έλικα της σπείρας και μετά το  $y=0$  (καθώς για  $y < 0$  όγκος αυτός είναι προφανώς μηδενικός) βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης.

Κατά  $x$  τα όρια ολοκλήρωσης είναι το τοίχωμα του εξωτερικού κυλίνδρου (αρνητικό και θετικό  $x$ ). Έτσι:

$$x := -\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}$$

το πρώτο και

$$x := \sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}$$

το δεύτερο

Κατά  $z$  τα όρια είναι ο εξωτερικός κύλινδρος και η εξωτερική έλικα της σπείρας. Έτσι προκύπτουν τα

$$z := \frac{-D_{out}}{2} \quad \text{και}$$

$$z := \frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)$$

Τέλος κατά  $y$  τα όρια είναι το μηδέν, καθώς για τιμές μικρότερες αυτής δε νοείται όγκος στα παραπάνω όρια, και το πάνω όριο του  $y$  όπως ορίστηκε στην προηγούμενη εξίσωση υπολογισμού τους.

Έτσι το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι:

$$V_2 := \int_0^{y_2} \int_{\frac{-D_{out}}{2}}^{\frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)} \int_{-\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}}^{\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Ο τρίτος όγκος ο οποίος απαρτίζει το συνολικό περιεχόμενο όγκο νερού περιλαμβάνεται κάτω από την επιφάνεια του νερού, μέσα στο τοίχωμα του κυλίνδρου, δεξιά του πάνω ορίου του  $y$  όπως ορίστηκε παραπάνω.

Υπολογίζουμε το κάτω όριο ολοκλήρωσης κατά  $y$  βρίσκοντας το σημείο τομής του κατώτερου σημείου εξωτερικού κυλίνδρου με την επιφάνεια. Λύνουμε:



$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) + \frac{D_{\text{out}}}{2} = 0$$

και προκύπτει το  $y_3$ .

Έτσι το ολοκλήρωμα υπολογισμού του όγκου γίνεται:

$$V_3 := \int_{y_2}^{y_3} \int_{\frac{-D_{\text{out}}}{2}}^{y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right)} \int_{-\sqrt{\left( \frac{D_{\text{out}}}{2} \right)^2 - z^2}}^{\sqrt{\left( \frac{D_{\text{out}}}{2} \right)^2 - z^2}} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Προφανώς ο συνολικός όγκος είναι το άθροισμα των επιμέρους όγκων.

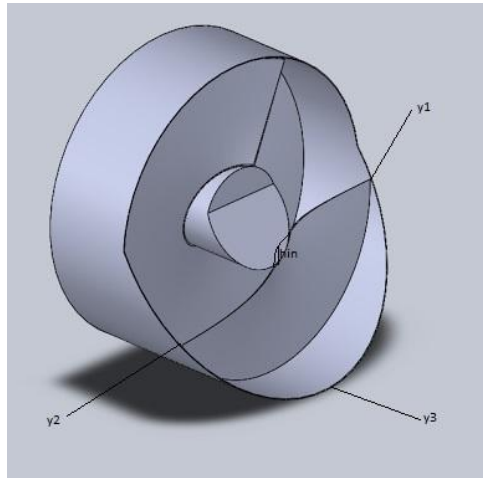
### **2.1.2 Περίπτωση 2': Υπολογισμός όγκου με επιφάνεια νερού κάτω κάτω από το ύψος (z) του άξονα y και χωρίς επαφή με προηγούμενο βήμα με τομή με εσωτερικό κύλινδρο**

Στην περίπτωση αυτή η στάθμη του νερού δεν υπερβαίνει το ύψος (z) του άξονα y, δεν έχει επαφή με το προηγούμενο βήμα της σπείρας, ή με σπείρα με διαφορετική αρχή αλλά τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο (σχήμα 2.4).

Αριθμητικά αυτό εκφράζεται ως εξής: Το  $y_1$  να είναι μικρότερο του ενός τετάρτου του βήματος, το  $y_3$  μικρότερο του βήματος προς τον αριθμό των αρχών και η διαφορά της εξωτερικής ακτίνας με το ύψος του νερού μεγαλύτερη της ακτίνας του εσωτερικού κυλίνδρου. (δηλαδή  $D_{\text{out}}/2 - h > D_{\text{in}}$ ).

Στην περίπτωση αυτή ακολουθείται η προαναφερθείσα μέθοδος αφαιρώντας τον όγκο που περιέχεται στον εσωτερικό σωλήνα, ο οποίος υπολογίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας την εσωτερική ακτίνα ( $D_{\text{in}}/2$ ) στη θέση της εξωτερικής ( $D_{\text{out}}/2$ ) εκτός από το ύψος στάθμης το οποίο υπολογίζεται με τον τύπο

$$h_{\text{in}} := h - \frac{(D_{\text{out}} - D_{\text{in}})}{2}$$



**Σχήμα 2.4.** Επιφάνεια χωρίς επαφή με το προηγούμενο βήμα σε τομή με εσωτερικό κύλινδρο κάτω από το ύψος του άξονα y.

### 2.1.3 Περίπτωση 3<sup>η</sup>: Υπολογισμός όγκου με επιφάνεια νερού πάνω από το ύψος (z) του άξονα y και χωρίς επαφή με προηγούμενο βήμα

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό του όγκου στην περίπτωση που η στάθμη του νερού υπερβαίνει το ύψος (z) του άξονα y και δεν έχει επαφή με το προηγούμενο βήμα της σπείρας, ή με σπείρα με διαφορετική αρχή.

Αριθμητικά αυτό εκφράζεται ως εξής: Το  $y_1$  είναι μεγαλύτερο του ενός τετάρτου του βήματος ( $y_1 > l_s/4$ ) και το  $y_3$  μικρότερο του βήματος προς τον αριθμό των αρχών ( $y_3 < l_s/\arx$ )

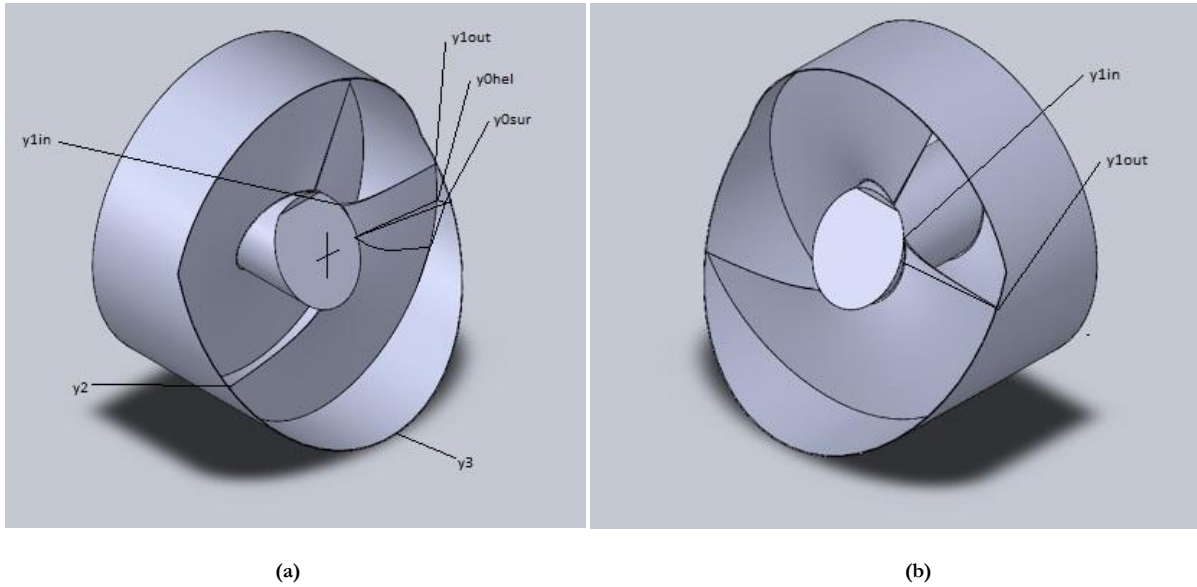
Είναι προφανές ότι προκειμένου να γίνει μια εκτίμηση της γεωμετρικής μορφής πρέπει να υπολογίσουμε ορισμένα σημεία του όγκου. Αναλυτικότερα πρέπει να γίνουν οι παρακάτω έλεγχοι.

Προκειμένου να υπάρχει περιστροφή του εσωτερικού τμήματος της διάταξης και όχι απλή κυκλοφορία του νερού περιστροφικά γύρω της πρέπει το υψηλότερο το σημείο τομής του εσωτερικού κυλίνδρου με την επιφάνεια του νερού έχει οριζόντια συντεταγμένη (κατά y) μικρότερη του  $-l_s/2$ , όπου  $l_s$  το βήμα της σπείρας. Δηλαδή:

$$\frac{-l_s}{2} \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) < \frac{D_{\text{in}}}{2}$$

Προκειμένου να γίνει ο υπολογισμός του συνολικού όγκου πρέπει να γίνει υπολογισμός οκτώ επιμέρους όγκων.

Τα όρια ολοκλήρωσης των όγκων κατά y παρουσιάζονται στο σχήμα 2.5.



**Σχήμα 2.5.** Επιφάνεια πάνω από το ύψος του άξονα z χωρίς επαφή με προηγούμενο βήμα. Σημεία ολοκλήρωσης κατά y

Για τον υπολογισμό του  $V_1$  ολοκληρώνουμε κατά x από την επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου μέχρι την επιφάνεια της σπείρας όπως περιγράφεται στις προηγούμενες περιπτώσεις. Κατά z ολοκληρώνουμε από την εξωτερική έλικα ως την επιφάνεια του νερού. Κατά y ολοκληρώνουμε από το πρώτο σημείο που η επιφάνεια του νερού τέμνει την εξωτερική έλικα ( $y_2$ ) έως το σημείο που η επιφάνεια του νερού περνάει πάνω από το μέσο του κυλίνδρου ( $y_{0sur}$ ).

Το σημείο  $y_2$  υπολογίζεται λύνοντας την εξίσωση:

$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{out}}{2} - h \right) - \frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left( \frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

ενώ το σημείο  $y_{0sur}$  υπολογίζεται λύνοντας την εξίσωση:

$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{out}}{2} - h \right) = 0$$

Έτσι ο όγκος  $V_1$  προκύπτει

$$V_1 := \int_{y_{0sur}}^{y_2} \int_{\frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)}^{y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)} \int_{-\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}}^{z \cdot \cot\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Ο όγκος  $V_2$  βρίσκεται αριστερά του  $V_1$  και κάτω από το μέσο των κυλίνδρων ( $z=0$ ). Ο λόγος που δεν υπολογίζουμε τον όγκο αυτό μαζί με τον όγκο που περιλαμβάνεται πάνω το ύψος (z) του άξονα y είναι γιατί ο άξονας y ταυτίζεται με τον άξονα της σπείρας πάνω στον οποίο το ολοκλήρωμα του όγκου είναι μη υπολογίσιμο αλλά και γιατί αντιστρέφονται τα όρια ολοκλήρωσης πάνω από το σημείο αυτό.

Τα όρια ολοκλήρωσης είναι κατά x το εξωτερικό τοίχωμα του κυλίνδρου και η σπείρα, κατά z η εξωτερική έλικα και το μέσο των κυλίνδρων ( $z=0$ ), και κατά y το σημείο τομής της επιφάνειας με το μέσο των κυλίνδρων και το σημείο τομής της εξωτερικής έλικας με το μέσο των κυλίνδρων ( $h_{0hel}=-l_s/4$ ).

Έτσι ο όγκος  $V_2$  υπολογίζεται

$$V_2 := \int_{y_{0hel}}^{y_{0sur}} \int_0^{\frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)} \int_{-\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}}^{z \cdot \cot\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Από αυτούς τους δύο όγκους που υπολογίστηκαν πρέπει να αφαιρεθούν οι όγκοι που περιλαμβάνονται στον εσωτερικό κύλινδρο και υπολογίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, οπότε προκύπτουν οι  $V_1'$  και  $V_2'$ .

Προχωρώντας στον υπολογισμό του όγκου υπολογίζουμε τους όγκους πάνω από το ύψος του άξονα της σπείρας και των κυλίνδρων ( $z=0$ )

Αυτός αποτελείται από τέσσερις επιμέρους όγκους.

Ο πρώτος από αυτούς εκτείνεται κατά x από τη σπείρα έως τον εσωτερικό κύλινδρο, κατά z από την εσωτερική έλικα έως την εξωτερική έλικα και κατά y από το αρνητικό σημείο τομής της έλικας με τη στάθμη του ρευστού ( $y_{1out}$ ) έως το σημείο που η στάθμη περνάει πάνω από τον άξονα y ( $y_{0hel}$ ).

Έτσι υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$V_3 := \int_{y_{1out}}^{y_{0hel}} \int_{\frac{D_{in}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)}^{\frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)} \int_{z \cdot \cot\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)}^{-\sqrt{\left(\frac{D_{in}}{2}\right)^2 - z^2}} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Ο δεύτερος από αυτούς εκτείνεται ακριβώς πάνω από τον πρώτο ως την επιφάνεια του νερού. Έτσι τα όρια διαμορφώνονται κατά x από τον εξωτερικό κύλινδρο έως τον εσωτερικό, κατά z από την εξωτερική έλικα μέχρι την επιφάνεια και κατά y από το αρνητικό σημείο τομής της έλικας με τη στάθμη του ρευστού ( $y_{1out}$ ) έως το σημείο που η στάθμη περνάει πάνω από τον άξονα y ( $y_{0sur}$ ).

Το σημείο τομής της εξωτερικής έλικας με τη στάθμη του ρευστού ( $y_{1out}$ ) υπολογίζεται επιλύοντας την εξίσωση:

$$y \cdot \tan(180deg - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right) - \frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Και ο όγκος προκύπτει

$$V_4 := \int_{y_{1out}}^{y_{0hel}} \int_{\frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)}^{y \cdot \tan(180deg-\alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)} \int_{-\sqrt{\left(\frac{D_{in}}{2}\right)^2 - z^2}}^{\sqrt{\left(\frac{D_{in}}{2}\right)^2 - z^2}} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Ο τρίτος όγκος περιλαμβάνει τα σημεία ανάμεσα στο σημείο τομής της επιφάνειας με την εξωτερική έλικα και το σημείο τομής της επιφάνειας με την εσωτερική έλικα. Οπότε κατά x εκτείνεται από τη σπείρα μέχρι τον εσωτερικό κύλινδρο, κατά z από την εσωτερική έλικα έως την επιφάνεια του νερού, και κατά y από το σημείο τομής της επιφάνειας με την εξωτερική έλικα έως το σημείο τομής της επιφάνειας με την εσωτερική έλικα.

Το σημείο τομής της εσωτερικής έλικας με τη στάθμη του ρευστού ( $y_{1out}$ ) υπολογίζεται επιλύοντας την εξίσωση:

$$y \cdot \tan(180deg - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right) - \frac{D_{in}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ενώ ο όγκος υπολογίζεται:

$$V_5 := \int_{y_{1in}}^{y_{1out}} \int_{\frac{D_{in}}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)}^{y \cdot \tan(180deg-\alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)} \int_{z \cdot \cot\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)}^{-\sqrt{\left(\frac{D_{in}}{2}\right)^2 - z^2}} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Τέλος πρέπει να περιληφθεί και ο όγκος δεξιά του αρνητικού σημείου τομής της επιφάνειας με την έλικα και αριστερά του σημείου που η επιφάνεια περνάει πάνω από τον άξονα y. Τα όρια αυτού είναι κατά x οι δύο κύλινδροι, κατά z, το ύψος του άξονα y ( $z=0$ ) και η επιφάνεια του ρευστού και κατά y το σημείο τομής της επιφάνειας με την έλικα ( $y_{0hel}$ ) και το σημείο που η επιφάνεια περνάει πάνω από τον άξονα y ( $y_{0sur}$ ). Οπότε ο όγκος γίνεται:

$$V_6 := \int_{y_{0hel}}^{y_{0sur}} \int_0^{y \cdot \tan(180deg-\alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)} \int_{-\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}}^{-\sqrt{\left(\frac{D_{in}}{2}\right)^2 - z^2}} 1 \, dx \, dz \, dy$$

Κάτω από τον άξονα y είναι εύκολο να εντοπιστούν δύο ακόμα όγκοι δεξιά του  $V_1$ . Ο πρώτος από αυτούς περιορίζεται κατά x από τον εξωτερικό κύλινδρο, κατά z ό το κατώτατο σημείο του εξωτερικού κυλίνδρου και την εξωτερική έλικα της σπείρας και κατά y από την αρχή των αξόνων και το σημείο τομής της εξωτερικής έλικας με την επιφάνεια. Έτσι ο όγκος γίνεται:

$$V_7 := \int_0^{y_2} \int_{-\frac{D_{out}}{2}}^{\frac{D_{out}}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right) \int_{-\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}}^{\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}} 1 \, dx dz dy$$

Ο δεύτερος έχει όρια κατά x τον εξωτερικό κύλινδρο, κατά z το κατώτατο σημείο του εξωτερικού κυλίνδρου και την επιφάνεια του νερού και κατά y το σημείο τομής της εξωτερικής έλικας με την επιφάνεια ( $y_2$ ) και το σημείο τομής της επιφάνειας με το κατώτατο σημείο του εξωτερικού κυλίνδρου ( $y_3$ ) το οποίο υπολογίζεται επιλύοντας την:

$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right) + \frac{D_{out}}{2} = 0$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$V_8 := \int_{y_2}^{y_3} \int_{-\frac{D_{out}}{2}}^{y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)} \int_{-\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}}^{\sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 - z^2}} 1 \, dx dz dy$$

Ο συνολικός όγκος αποτελεί προφανώς το άθροισμα των επιμέρους όγκων.

#### **2.1.4. Περίπτωση 4η: Υπολογισμός όγκου με επιφάνεια νερού με επαφή με προηγούμενο βήμα.**

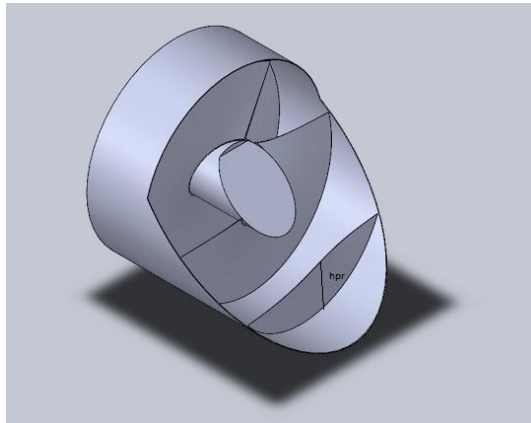
Στην περίπτωση αυτή το ρευστό βρίσκεται σε επαφή με προηγούμενο βήμα της ίδιας σπείρας ή με βήμα της επόμενης σπείρας με διαφορετική αρχή (σχήμα 2.6).

Αριθμητικά αυτό εκφράζεται ως εξής: Το  $y_3$  είναι μεγαλύτερο του βήματος προς τον αριθμό των αρχών ( $y_3 > l_s / \arx$ )

Ο όγκος του περιεχόμενου ρευστού υπολογίζεται αφαιρώντας από τον όγκο όπως υπολογίζεται στις προηγούμενες περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει επαφή με προηγούμενο βήμα, τον όγκο που περιέχεται στο προηγούμενο βήμα. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται με τις μεθόδους που προαναφέρθηκαν, ανάλογα με την περίπτωση στην οποία εμπίπτει, αλλάζοντας μόνο το ύψος της στάθμης του ρευστού και υπολογίζοντας το στο προηγούμενο βήμα της σπείρας (ή στο βήμα της σπείρας με διαφορετική αρχή). Προκειμένου να γίνει αυτό υπολογίζεται η απόσταση που βρίσκεται το προηγούμενο βήμα ( $l_s = l_s/1$ ) ή η απόσταση που βρίσκεται το αντίστοιχο σημείο ( $y=0$ ) της επόμενης σπείρας με διαφορετική αρχή. Στην απόσταση ενός βήματος μιας σπείρας σε διάταξη με πολλαπλές αρχές υπάρχουν σπείρες (υπολογίζοντας τα μοναδικά σημεία) όσες και οι αρχές οπότε κατά συνέπεια η απόσταση που βρίσκεται το αντίστοιχο σημείο της επόμενης σπείρας με διαφορετική αρχή είναι  $l_s / \arx$ . Το ύψος υπολογισμού λοιπόν είναι:

$$h_{pr} := h - \tan(\alpha) \cdot \frac{l_s}{\arx}$$

όπου  $\alpha$  η κλίση της διάταξης και  $\arctan$  ο αριθμός των αρχών της διάταξης.



**Σχήμα 2.6.** Επιφάνεια σε επαφή με το προηγούμενο βήμα.

### **2.1.5. Σύνθετη Περίπτωση**

Κάθε περίπτωση μπορεί να αναλυθεί και να υπολογιστεί με τις προηγούμενες μεθόδους ανάλογα με τις επιμέρους περιπτώσεις στις οποίες ανήκει. Έτσι κάθε φορά ο συνολικός όγκος αποτελεί το ή διαφορά άθροισμα των επιμέρους όγκων.

### **2.2. Αριθμητική επίλυση υπολογισμού όγκου (υπολογιστική μέθοδος)**

Γίνεται προφανές ότι ο παραπάνω θεωρητικός υπολογισμός είναι περίπλοκο να αναπτυχθεί σε κώδικα καθώς περιλαμβάνει πολλές διαφορετικές περιπτώσεις, με δύσκολους υπολογισμούς (τριπλών) ολοκληρωμάτων. Προκειμένου λοιπόν να γίνει ο υπολογισμός θα χρησιμοποιηθεί η παρακάτω υπολογιστική μέθοδος που αναπτύχθηκε.

Βασική της αρχή είναι η θεώρηση ενός βασικού όγκου ο οποίος αποτελείται από μικρότερους ίσους όγκους κάθε ένας από τους οποίους αναγνωρίζεται από τις συντεταγμένες του κέντρου του. Ανάλογα με τη θέση του κέντρου κάθε όγκων σε σχέση με τις επιφάνειες ελέγχου που αυτός αθροίζεται ή όχι στο συνολικό όγκο.

Το πρόβλημα του κοχλία θα αντιμετωπιστεί όπως στην αναλυτική μέθοδο θεωρώντας οριζόντιο κοχλία και κεκλιμένη επιφάνεια νερού (αντίστροφο από το πραγματικό)

Συγκεκριμένα στην περίπτωση του κοχλία θεωρούμε βασικό όγκο παραλληλεπίπεδο το οποίο εκτείνεται από  $-D_{out}/2$  έως  $D_{out}/2$  σε πλάτος και ύψος (άξονας  $x,z$ ), όπου  $D_{out}$  διάμετρος του εξωτερικού κυλίνδρου, προκειμένου να περιλαμβάνει το σύνολο του όγκου του κυλίνδρου. Το παραλληλεπίπεδο εκτείνεται σε μήκος (άξονας  $y$ ) από  $-l_s/2$ , δηλαδή την αρχή του βήματος, έως  $l_s/\arctan + l_s/2$ , δηλαδή το τέλος του αμέσως προηγούμενου βήματος, είτε της ίδιας σπείρας, για μία αρχή, είτε διαφορετικής, για περισσότερες. Το τέλος του επόμενου βήματος υπολογίζεται βρίσκοντας το μέσο του προηγούμενου βήματος (κατώτατο σημείο), το οποίο βρίσκεται στο  $l_s/\arctan$ , αυξημένο κατά  $l_s/2$ .

Συνεπώς χρησιμοποιώντας αυτά τα όρια είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε τον βασικό όγκο από ισόογκους κύβους, επιλέγοντας τη διάσταση πλευράς ανάλογα με την επιθυμητή ανάλυση. Η απόσταση δύο διαδοχικών κέντρων των κύβων, σε κάθε άξονα, είναι ίση με την διάσταση πλευράς. Για το λόγο αυτό η υλοποίηση σε κώδικα του παραπάνω επιτυγχάνεται με τρεις εμφωλευμένες επαναλήψεις, με όρια που καθορίστηκαν παραπάνω και βήμα αυτό της ανάλυσης.

Προκειμένου να υπολογιστεί ο συνολικός όγκος πρέπει να αθροιστούν οι κατάλληλοι στοιχειώδεις όγκοι. Ο έλεγχος των όγκων αυτών γίνεται με κατάλληλες επιφάνειες εκφρασμένες σε μορφή συναρτήσεων. Ακολουθεί η μαθηματική περιγραφή των επιφανειών αυτών.

- Εξωτερικός και εσωτερικός κύλινδρος

Ο εξωτερικός και εσωτερικός κύλινδρος περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις αντίστοιχα:

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{D_{\text{out}}}{2} \quad \text{και}$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{D_{\text{in}}}{2}$$

Είναι προφανές ότι προκειμένου να αθροιστεί κάποιο σημείο στο συνολικό όγκο πρέπει να βρίσκεται εντός του εξωτερικού κυλίνδρου εκτός του εσωτερικού. Άρα γίνεται ο αντίστοιχος έλεγχος προκειμένου να αθροιστεί ο όγκος ενός σημείου ή όχι στο συνολικό.

$$\frac{D_{\text{in}}}{2} < \sqrt{x_p^2 + z_p^2} < \frac{D_{\text{out}}}{2}$$

- Επιφάνεια ρευστού

Περιγράφεται από την εξίσωση

$$z := y \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{D_{\text{out}}}{2} - h\right) \blacksquare$$

οπότε γίνεται έλεγχος στα σημεία, με κατάλληλες συνθήκες, για το αν βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια ελέγχοντας την τιμή του z ώστε να είναι μικρότερη της παραπάνω εξίσωσης για το αντίστοιχο y.

- Επιφάνεια σπείρας.

Για να υπολογιστεί ο όγκος που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο βήματα σπειρών πρέπει αρχικά να εκφραστεί η συντεταγμένη κατά x κάθε σημείου των σπειρών. Λύνουμε συνεπώς την εξίσωση των σπειρών κατά y. Όπως αναπτύχθηκε και στη θεωρητική λύση:

$$z := r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2}\right)$$

Επιλύοντας λοιπόν ως προς y και αντικαθιστώντας την ακτίνα κάθε φορά με

$$r := x^2 + z^2 \blacksquare$$

προκύπτει η εξίσωση που δίνει το y κάθε σημείου της σπείρας για x μεγαλύτερο του μηδενός



$$y := \frac{l_s}{2\pi} \cdot \left[ \operatorname{asin} \left[ \frac{z}{\left( \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right)} \right] + \frac{\pi}{2} \right] \blacksquare$$

και για x μικρότερο του μηδενός

$$y := -\frac{l_s}{2\pi} \cdot \left[ \operatorname{asin} \left[ \frac{z}{\left( \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right)} \right] + \frac{\pi}{2} \right] \blacksquare$$

Εύκολα υπολογίζεται η εξίσωση της προηγούμενης σπείρας αθροίζοντας την απόσταση μεταξύ τους καθώς η μορφή τους είναι ίδια (απλή μετατόπιση προς τα θετικά). Έτσι η εξισώσεις τους είναι η εξής

$$y := \frac{l_s}{2\pi} \cdot \left[ \operatorname{asin} \left[ \frac{z}{\left( \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right)} \right] + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{l_s}{\operatorname{arx}} \blacksquare$$

και για x μικρότερο του μηδενός

$$y := -\frac{l_s}{2\pi} \cdot \left[ \operatorname{asin} \left[ \frac{z}{\left( \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right)} \right] + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{l_s}{\operatorname{arx}} \blacksquare$$

Έτσι ελέγχουμε τη θέση του κάθε σημείου με κατάλληλες συνθήκες, ώστε η τεταγμένη y είναι μεγαλύτερη από το y της πρώτης σπείρας, για τα ίδια x και z, και μικρότερη του y του προηγούμενου βήματος της σπείρας ή σπείρας με διαφορετική αρχή που βρίσκεται αμέσως μετά την πρώτη. Με τον τρόπο αυτό ελέγχουμε τα σημεία, ώστε να είναι ανάμεσα στα τοιχώματα μίας ή δύο σπειρών ανάλογα με τον αριθμό των αρχών. Προφανώς η συνθήκη ελέγχου αλλάζει ανάλογα με το αν η τεταγμένη x είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη του μηδενός.

Αφού γίνει ο έλεγχος του σημείου σε σχέση με τις παραπάνω επιφάνειες προστίθεται ή όχι στο συνολικό όγκο. Κάθε σημείο που προστίθεται συνεισφέρει σε όγκο όσο ο κύβος που αντιπροσωπεύει, δηλαδή κύβο πλευράς όσο η ανάλυση.

Το πρόγραμμα τερματίζεται όταν ελεγχθούν όλα τα σημεία του βασικού όγκου.

### 3. Απώλειες υδροδυναμικής αντίστασης

#### 3.1. Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών υδροδυναμικής αντίστασης

Κατά την περιστροφή του κοχλία παρουσιάζονται υδροδυναμικές απώλειες λόγω της επαφής του ρευστού με τις επιφάνειες του περιστρεφόμενου κοχλία. Επιφάνειες επαφής του ρευστού με τη διάταξη που παρουσιάζουν απώλειες, θεωρούνται ανάλογα με το ύψος του νερού και την κλίση της διάταξης, το τοίχωμα της σπείρας και το εξωτερικό τοίχωμα του εσωτερικού κυλίνδρου. Πρέπει να τονιστεί εδώ πως απώλειες παρατηρούνται και στις επιφάνειες επαφής του εξωτερικού σωλήνα, αλλά επειδή η ταχύτητα περιστροφής του κοχλία, και κατά συνέπεια η σχετική ταχύτητα του ρευστού σε σχέση με τα κινούμενα τοιχώματα, είναι πολλές φορές μεγαλύτερη από αυτή της κίνησης του ρευστού σε σχέση με τα ακίνητα τοιχώματα, οι υδροδυναμικές απώλειες του εξωτερικού κυλίνδρου θεωρούνται αμελητέες.

Εύκολα γίνεται αντιληπτό πως η σπείρα έχει επιφάνεια επαφής με το ρευστό σε κάθε περίπτωση, αυτή άλλωστε είναι και η αρχή λειτουργίας της διάταξης. Αντίθετα ο εσωτερικός κύλινδρος έρχεται σε επαφή με το ρευστό μόνο σε περίπτωση που η στάθμη του ρευστού είναι πάνω από το κατώτατο σημείο του εσωτερικού σωλήνα. Δηλαδή:

$$-\frac{D_{out}}{2} + h < -\frac{D_{in}}{2}$$

Προφανώς ισχύει ο περιορισμός της μη περιστροφής του ρευστού στη διάταξη προκειμένου να παραμένει λειτουργική.

Το πρόβλημα του υπολογισμού των απωλειών λόγω τριβής είναι σύνθετο και η επίλυσή του με αναλυτικό τρόπο σχεδόν αδύνατη. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να βασιστούμε σε κάποιο μοντέλο απωλειών το οποίο να δίνει τη δυνατότητα επίλυσης προφανώς κάνοντας σημαντικές απλοποιητικές παραδοχές, προκειμένου να ταιριάζει στην περίπτωση του κινούμενου κοχλία.

Ο υπολογισμός των απωλειών τριβών του κοχλία βασίζεται στο μοντέλο των απωλειών σε επίπεδη πλάκα, τόσο με ανάπτυξη οριακού στρώματος όσο και με ανάπτυξη τυρβώδους ροής (Μηχανική των ρευστών, Σωκράτης Τσαγκαράης, Αθήνα 2005) καθώς το πρόβλημα του κοχλία ταιριάζει στις απώλειες σε επιφάνεια έστω και αν αυτή θεωρηθεί στοιχειώδης. Έτσι θεωρούμε στοιχειώδεις επιφάνειες στα σημεία της σπείρας που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια του ρευστού, δηλαδή σε επαφή με το ρευστό και υπολογίζουμε τη διατμητική τάση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια της πλάκας. Σε σταθερή ακτίνα από το κέντρο του κοχλία η ταχύτητα του ρευστού σε σχέση με τον κοχλία είναι κοινή για όλα τα σημεία του που βρίσκονται σε επαφή με αυτό. Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε όλα τα σημεία που έχουν κοινή ταχύτητα ρευστού, σημεία πλάκας η οποία ξεκινάει στο σημείο που δημιουργείται οριακό στρώμα και τελειώνει στο σημείο που παύουν να παρατηρούνται υδροδυναμικές απώλειες. Οι τριβές του κοχλία στα σημεία που δε βρίσκονται σε επαφή με ρευστό θεωρούνται μηδενικές. Ξεκινάει να δημιουργείται οριακό στρώμα και τριβές με την επιφάνεια του κοχλία σε σημεία επαφής της επιφάνειας του ρευστού με αυτόν. Έτσι θεωρούμε κάποια από τα σημεία αυτά, σημεία πρόσπτωσης του ρευστού στην πλάκα.

Σύμφωνα με το μοντέλο ανάπτυξης διατμητικών τάσεων λόγω τριβών σε επίπεδη πλάκα, σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια του επιπέδου ανάλογα με τον αριθμό Reynolds που υπολογίζεται στο σημείο εκείνο, αναπτύσσεται είτε στρωτό οριακό στρώμα είτε τυρβώδης ροή. Συγκεκριμένα θα δεχθούμε, για την απλοποίηση του προβλήματος ότι για αριθμό Reynolds μεγαλύτερο του  $3 \cdot 10^3$  η ροή θεωρείται τυρβώδης ενώ για μικρότερο αυτού θεωρείται στρωτή. Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται για ρευστό σε επίπεδη πλάκα:

$$Re_x := \frac{U \cdot x}{\nu}$$

Όπου  $U$  η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο εκείνο σε σχέση με την πλάκα  $x$  η απόσταση του σημείου από το σημείο πρόσπτωσης του ρευστού στην πλάκα και  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού.

Αντίστοιχα σε κάθε σημείο του κοχλία  $U$  είναι η ταχύτητα του σημείου και  $x$  είναι το μήκος της καμπύλης που αποτελείται από το σύνολο των σημείων που έχουν την ίδια ταχύτητα με αυτό, με αρχή το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος και τέλος το ίδιο το σημείο, σε αντιστοιχία με την απόσταση από την ακμή πρόσπτωσης της επίπεδης πλάκας. Παρακάτω αναλύεται ο υπολογισμός της περίπτωσης του στρωτού οριακού στρώματος και της τυρβώδους ροής.

### **3.1.1. Στρωτό οριακό στρώμα**

Η περίπτωση του στρωτού οριακού στρώματος αναλύεται με τη θεωρία H. Blasius, η οποία θεωρεί μη συνεκτική ροή έξω από το οριακό στρώμα. Σύμφωνα με τη θεωρία Blasius η λύση του προβλήματος του οριακού στρώματος δίνεται ως συνάρτηση  $f$  μιας αδιάστατης μεταβλητής  $\eta$ . Η συνάρτηση αυτή επιλύεται αριθμητικά. Με βάση τη λύση αυτή η διατμητική τάση που αναπτύσσεται στην επιφάνεια της πλάκας δίνεται με τη βοήθεια της αδιάστατης έκφρασης

$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho \cdot \frac{U^2}{2}} = \frac{2 \cdot f''(0)}{\sqrt{Re_x}}$$

από την οποία λύνοντας ως προς  $\tau_w$  προκύπτει

$$\tau_w := \rho \cdot U^2 \cdot \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

με

$$Re_x := \frac{U \cdot x}{\nu}$$

Όπου  $U$  η ταχύτητα του ρευστού,  $\rho$  η πυκνότητά του και  $\nu$  η κινηματική του συνεκτικότητα. Η μεταβλητή  $x$  όπως αναφέρθηκε και παραπάνω εκφράζει την απόστασή του σημείου από το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος. Στο πρόβλημά του κοχλία, που δεν αφορά επίπεδη πλάκα η αντίστοιχη απόσταση εκφράζεται ως το μήκος της καμπύλης της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα με αρχή το σημείο πρόσπτωσης του ρευστού (δημιουργία οριακού στρώματος) έως το ίδιο το σημείο. Φανερά το σύνολο των σημείων που έχουν ίδια ταχύτητα βρίσκονται σε σταθερή απόσταση από το κέντρο του κοχλία.

Στη στοιχειώδη επιφάνεια το γινόμενο της διατμητικής τάσης με το στοιχειώδες εμβαδόν ισοδυναμεί με τη στοιχειώδη δύναμη αντίστασης.

### **3.1.2. Τυρβώδης ροή**

Στην περίπτωση της τυρβώδους ροής, η διατμητική τάση πάνω στην πλάκα προκύπτει από ημιεμπειρικές σχέσεις που προκύπτουν από την αναλογία της τυρβώδους ροής σε σωλήνες με την τυρβώδη ροή σε επίπεδη πλάκα όπως

διατυπώθηκε από τους L.Prandtl και Th.von Karman. Έτσι η διατμητική τάση προκύπτει συναρτήσει του πάχους του οριακού στρώματος:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho \cdot \frac{U^2}{2}} = 0.0444 \text{Re}_\delta^{-\frac{1}{4}}$$

με

$$\text{Re}_\delta := \frac{U \cdot \delta}{\nu}$$

όπου  $\delta$  το πάχος του οριακού στρώματος.

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει η εξίσωση διατμητικής τάσης σε επίπεδη πλάκα με τυρβώδη ροή συναρτήσει της απόστασης από το άκρο πρόσπτωσης της πλάκας:

$$\tau_w := 0.028 \rho \cdot U^2 \cdot \text{Re}_x^{-\frac{1}{5}}$$

όπου

$$\text{Re}_x := \frac{U \cdot x}{\nu}$$

Προφανώς  $U$  είναι η ταχύτητα του ρευστού,  $\rho$  η πυκνότητά του και  $\nu$  η κινηματική του συνεκτικότητα. Η μεταβλητή  $x$  εκφράζει ότι και στην περίπτωση του στρωτού οριακού στρώματος.

Γίνεται προφανές ότι όπως και στην περίπτωση του στρωτού οριακού στρώματος το γινόμενο της διατμητικής τάσης με το στοιχειώδες εμβαδόν ισοδυναμεί με τη στοιχειώδη δύναμη αντίστασης.

### **3.2. Υπολογισμός απωλειών υδροδυναμικής αντίστασης σπείρας**

Οι συνολικές υδροδυναμικές απώλειες χωρίζονται στις υδροδυναμικές απώλειες της σπείρας και του εσωτερικού κυλίνδρου.

Προκειμένου να υπολογιστεί η συνολική δύναμη αντίστασης εξαιτίας της επιφάνειας κάθε σπείρας πρέπει να υπολογιστεί η δύναμη αντίστασης κάθε στοιχειώδους επιφάνειας της. Κάθε στοιχειώδης επιφάνεια ανήκει σε κάποια στοιχειώδη πλάκα η οποία, όπως αναλύθηκε παραπάνω, απαρτίζεται από το σύνολο των σημείων που 'βλέπουν' κοινή ταχύτητα ρευστού, οπότε ο υπολογισμός της στοιχειώδους αντίστασης γίνεται αντίστοιχα. Στην περίπτωση της σπείρας προφανώς τα σημεία αυτά είναι τα σημεία με κοινή ακτίνα. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η διατμητική τάση εξαιτίας των τριβών μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση του σημείου σε σχέση με το σημείο έναρξης του οριακού στρώματος (το σημείο που ξεκινάει η στοιχειώδης πλάκα).

Για να γίνει ο υπολογισμός των απωλειών υδροδυναμικής αντίστασης της σπείρας είναι χρήσιμο να χρησιμοποιηθούν κυλινδρικές συντεταγμένες προκειμένου να γίνει πιο εύκολα η έκφραση των μεγεθών και της γεωμετρίας της διάταξης. Έτσι κάθε σημείο του χώρου περιγράφεται με τρεις συντεταγμένες  $\theta$ ,  $r$ ,  $y$ , όπου  $\theta$  η

γωνία του σημείου σε ακτίνια,  $r$  η απόστασή (ακτίνα) του από τον κεντρικό άξονα  $y$ , και  $y$  η τεταγμένη κατά τον άξονα  $y$ .

### 3.2.1 Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών σπείρας

#### Έλεγχος τυρβώδους-στρωτής ροής

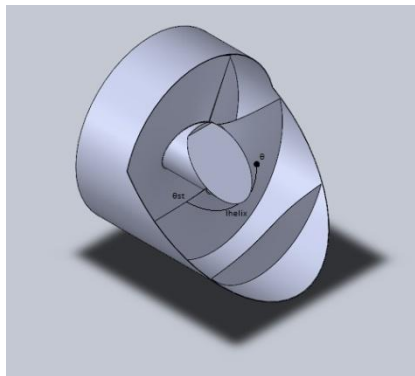
Πιο συγκεκριμένα στην επιφάνεια της σπείρας η διατμητική τάση εξαρτάται από την περίπτωση της ροής. Για το λόγο αυτό σε κάθε σημείο γίνεται έλεγχος του αριθμού Reynolds

$$Re_x := \frac{U \cdot x}{\nu}$$

Η γραμμική ταχύτητα  $U$  του ρευστού ως προς κάθε σημείο της σπείρας προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής ταχύτητας εξαιτίας περιστροφής της σπείρας και της οριζόντιας ταχύτητας του ρευστού. Κατά την περιστροφή της σπείρας ο όγκος του ρευστού μετατοπίζεται προς το κάτω άκρο της διάταξης οπότε κατά συνέπεια αποκτά ταχύτητα παράλληλη με τη διάταξη. Στο σύστημα που γίνεται η μελέτη (οριζόντια διάταξη) αυτή η ταχύτητα θεωρείται οριζόντια. Το μέτρο λοιπόν της ταχύτητας του ρευστού ως προς τη σπείρα είναι:

$$U := \omega \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2}$$

όπου  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα της διάταξης και  $r$  η ακτίνα του σημείου και  $l_s$  το βήμα της σπείρας.

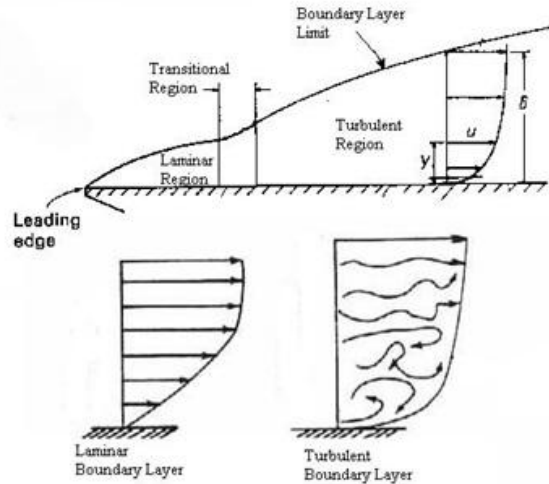


Σχήμα 3.1. Μήκος έλικας σπείρας

Το μήκος  $l_{helix}$  της καμπύλης των σημείων με ίδια ταχύτητα με αρχή το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος έως το σημείο στην επιφάνεια της σπείρας (σχήμα 3.1), ισούται με μήκος έλικας της σπείρας με αντίστοιχη αρχή και τέρμα. Έτσι υπολογίζεται εύκολα γεωμετρικά (υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές  $r \cdot (\theta_{st} - \theta)$  και  $l_s \cdot \frac{\theta_{st} - \theta}{2\pi}$ ):

$$x = l_{helix} = (\theta_{st} - \theta) \sqrt{r^2 + \frac{l_s^2}{(2\pi)^2}}$$

όπου  $\theta_{st}$  η γωνία του σημείου δημιουργίας του οριακού στρώματος,  $\theta$  η γωνία του σημείου,  $r$  η ακτίνα του σημείου και  $l_s$  το βήμα της σπείρας. Η γωνία του σημείου δημιουργίας του οριακού στρώματος υπολογίζεται για κάθε ακτίνα με τρόπο που παρουσιάζεται παρακάτω καθώς αποτελεί όριο ολοκλήρωσης.



Σχήμα 3.2. Μετάβαση από στρωτό σε τυρβώδες οριακό στρώμα

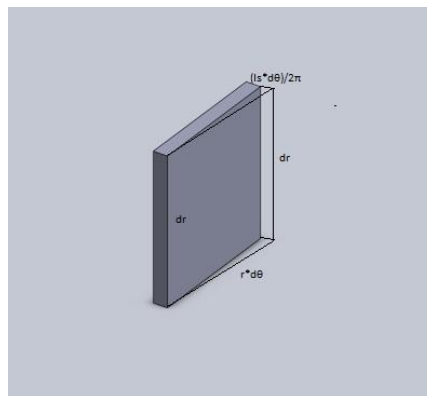
Ανάλογα με το αν ο  $Re_x$  είναι μεγαλύτερος ή όχι του 3000 η ροή είναι τυρβώδης ή στρωτή αντίστοιχα και υπολογίζεται σύμφωνα με τα παρακάτω.

### Υπολογισμός στρωτής ροής

Στην περίπτωση της στρωτής ροής, η διατμητική τάση υπολογίζεται με την εξίσωση

$$\tau_w := \rho \cdot U^2 \cdot \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

Οπότε προκειμένου να υπολογιστεί η συνολική αντίσταση τριβής μιας στοιχειώδους επιφάνειας αρκεί να υπολογιστεί το γινόμενο της διατμητικής τάσης με την επιφάνεια. Επειδή πρόκειται για κυλινδρική διάταξη που παράγει περιστροφικό έργο, θα υπολογιστεί η ροπή αντίστασης της στοιχειώδους επιφάνειας πολλαπλασιάζοντας με την αντίστοιχη ακτίνα.



**Σχήμα 3.3.** Εμβαδό στοιχειώδους επιφάνειας

Το εμβαδό στοιχειώδους επιφάνειας στη σπείρα είναι κατά  $r$  και  $\theta$  (σχήμα 3.3):

$$dA := \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot d\theta \cdot dr$$

Οπότε η στοιχειώδης ροπή αντίστασης που δημιουργείται από στρωτή ροή προκύπτει με συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων.

$$dM_{dr} = r \cdot \frac{\left[ \omega \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \right]^2}{2} \cdot \rho \cdot \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot d\theta \cdot dy$$

όπου  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα,  $r$  η ακτίνα του σημείου,  $l_s$  το βήμα της σπείρας,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού και  $Re_x$  ο αριθμός Reynolds όπως υπολογίστηκε παραπάνω.

#### Υπολογισμός τυρβώδους ροής

Η περίπτωση της τυρβώδους ροής μοιάζει στη μεθοδολογία υπολογισμού με αυτή της στρωτής με τη διαφορά ότι η διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_w := 0.028 \rho \cdot U^2 \cdot Re_x^{-\frac{1}{5}}$$

Η ροπή αντίστασης της στοιχειώδους επιφάνειας υπολογίζεται σε αυτήν την περίπτωση πολλαπλασιάζοντας τη διατμητική τάση με την επιφάνεια και την αντίστοιχη ακτίνα. Το εμβαδό της επιφάνειας υπολογίζεται

$$dA := \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot d\theta \cdot dr$$

οπότε η στοιχειώδης ροπή αντίστασης είναι

$$dM_r = 0.0286 \rho \cdot r \cdot \left[ \omega \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \right]^2 \cdot Re_x^{-\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot d\theta \cdot dr$$

όπου  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα,  $r$  η ακτίνα του σημείου,  $l_s$  το βήμα της σπείρας,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού και  $Re_x$  ο αριθμός Reynolds.

#### Όρια ολοκλήρωσης

Είναι φανερό ότι για να υπολογίσουμε τη συνολική ροπή εξαιτίας της υδροδυναμικής αντίστασης του ρευστού είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των ορίων ολοκλήρωσης ως προς  $r$  και  $\theta$ . Κατά συνέπεια πρέπει πρώτα να τεθούν τα φυσικά όρια υπολογισμού. Τα φυσικά όρια υπολογισμού έχουν γεωμετρική βάση. Το σύνολο της επιφάνειας της σπείρας η οποία παρουσιάζει ροπή αντίστασης κατά την κίνηση περιλαμβάνεται κάτω από την

επιφάνεια του ρευστού. Προφανώς δε γίνεται λόγος για τριβές στα σημεία στα οποία δεν υπάρχει επαφή με το ρευστό. Έτσι ο υπολογισμός των απωλειών έχει νόημα μόνο στα σημεία κάτω από αυτή. Από την άλλη δεν απαιτείται περαιτέρω εξήγηση γιατί συμπεριλαμβάνεται μόνο η επιφάνεια εντός του εξωτερικού κυλίνδρου και εκτός του εσωτερικού.

Επειδή όμως για τον υπολογισμό της αντίστασης απαιτούνται στοιχεία όπως το μήκος της έλικας που ξεκινάει από το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος, είναι απαραίτητο κατά τον καθορισμό των ορίων να καθοριστούν το σημείο αυτό και το σημείο πέρα από το οποίο παύει να υπάρχει ρευστό και οριακό στρώμα (οπότε αποτελούν σημεία στα οποία θεωρούμε ότι παύει να υπάρχει η πλάκα). Θεωρούμε ότι σε μία σπείρα τα σημεία στο οποία ξεκινά να δημιουργείται το οριακό στρώμα είναι τα σημεία κάθε έλικας, πάνω στην τομή με την επιφάνεια του ρευστού, τα οποία κατά την περιστροφή εξέρχονται από την επιφάνεια του ρευστού ενώ σε προηγούμενο χρόνο βρισκόταν κάτω από αυτή. Αυτό συμβαίνει γιατί στο πρόβλημα των απωλειών σε επίπεδη πλάκα η λύση δίνεται με θεώρηση ακίνητης πλάκας και κινούμενου ρευστού, οπότε κατά συνέπεια στο πρόβλημα του κοχλία που συμβαίνει το αντίθετο, η σχετική ταχύτητα του ρευστού είναι αντίθετη της ταχύτητας του κοχλία. Κατά συνέπεια τα σημεία τα οποία εξέρχονται από το ρευστό «βλέπουν» ταχύτητα ρευστού προς το εσωτερικό της πλάκας σε σχέση με αυτά. Αντίθετα γίνεται προφανές ότι τα σημεία της σπείρας, πάνω στην τομή με την επιφάνεια του ρευστού τα οποία εισέρχονται στο ρευστό ενώ αμέσως προηγουμένως βρισκόταν εκτός αυτού, θεωρούνται το τέλος της πλάκας κατά τον υπολογισμό των συνολικών απωλειών, καθώς βλέπουν ταχύτητα ρευστού από το εσωτερικό της πλάκας προς αυτά.

Συγκεκριμένα σε δεξιόστροφη σπείρα η οποία προκειμένου να λειτουργεί ο κοχλίας έχει αριστερόστροφη φορά κίνησης, τα σημεία στα οποία ξεκινά να δημιουργείται οριακό στρώμα βρίσκονται στην τομή της επιφάνειας του ρευστού με τη σπείρα στο δεξιό ημικύκλιο της σπείρας όπως φαίνεται από την κορυφή του κεκλιμένου κοχλία. Από την άλλη στο αριστερό ημικύκλιο βρίσκονται τα σημεία στα οποία παύει να υπολογίζεται η αντίσταση της πλάκας.

Αναλυτικότερα προκειμένου να βρούμε τα σημεία στα οποία ξεκινάει να δημιουργείται οριακό στρώμα και εκείνα στα οποία παύει να υπάρχει επαφή με το ρευστό, απαιτείται να γίνει υπολογισμός των σημείων τομής της επιφάνειας του ρευστού με την επιφάνεια της σπείρας. Το σύνολο των σημείων αυτών υπολογίζεται λύνοντας κατάλληλη εξίσωση των συναρτήσεων επιφάνειας ρευστού και σπείρας.

Όπως περιεγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο η εξίσωση της επιφάνειας του ρευστού είναι:

$$z := y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - (D_{\text{out}} - h)$$

Αντίστοιχα οι συντεταγμένες  $y$  και  $z$  της σπείρας περιγράφονται (με αρχική γωνία  $-\pi/2$  ώστε για  $\theta=0$  να μπορεί να υπολογιστεί το ύψος της επιφάνειας στη σπείρα) σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής :

$$y := \frac{r_s \cdot \theta^2}{2\pi}$$

και

$$z := r_s \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

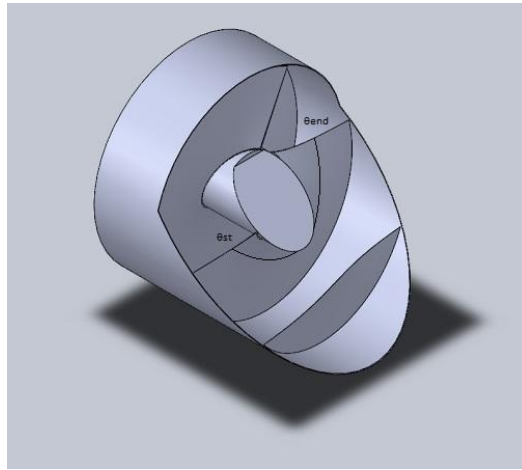
Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις της σπείρας στην εξίσωση επιφάνειας του νερού προκύπτει η εξίσωση:



$$r \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_s \cdot \theta}{2\pi} \tan(180\text{deg} - \alpha) + (D_{\text{out}} - h) = 0$$

η οποία δίνει τα σημεία τομής των επιφανειών.

Συγκεκριμένα από την παραπάνω εξίσωση προκύπτουν οι αντίστοιχες γωνίες  $\theta$  των σημείων τομής των δύο επιφανειών για κάθε ακτίνα στη σπείρα. Προφανώς για κάθε δοθείσα ακτίνα τα σημεία τομής ενός βήματος της σπείρας με την κεκλιμένη επιφάνεια θα είναι δυο, ένα εκ των οποίων παριστάνει το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος και το άλλο το σημείο πέρα από το οποίο παύει να υπάρχει ρευστό. Καθίσταται λοιπόν αναγκαίο να γίνει διάκριση των λύσεων της εξίσωσης στις αντίστοιχες κατηγορίες. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω ο διαχωρισμός γίνεται ανάλογα με το ποιο σημείο εισέρχεται στο νερό και ποιο εξέρχεται από αυτό.



Σχήμα 3.4. Όρια ολοκλήρωσης κατά  $\theta$  αριστερόστροφη σπείρα

Στη δεξιόστροφη σπείρα τα σημεία τα οποία εξέρχονται από το ρευστό εντοπίζονται στο δεξιό ημικύκλιο όπως φαίνεται από την κορυφή του κεκλιμένου κοχλία και κατά συνέπεια στις θετικές τιμές της γωνίας  $\theta$   $[0, \pi]$ . Οπότε οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης που εντοπίζονται στην περιοχή αυτή, αποτελούν τα σημεία δημιουργίας του οριακού στρώματος ( $\theta_{st}$ ). Αντίθετα το σύνολο των σημείων τα οποία εισέρχονται στο ρευστό βρίσκονται στην αρνητική περιοχή λύσεων του  $\theta$   $[-\pi, 0]$ , στην οποία κατά συνέπεια αναζητούμε τις αντίστοιχες λύσεις ( $\theta_{end}$ ) (σχήμα 3.4).

Οι παραπάνω λύσεις αποτελούν τα όρια ολοκλήρωσης κατά  $\theta$ .

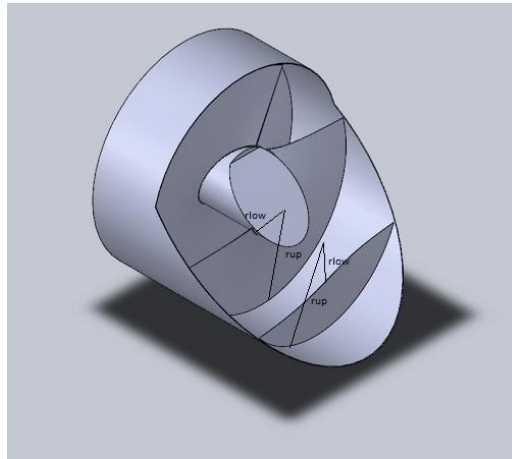
Ο υπολογισμός των ορίων ολοκλήρωσης κατά  $r$  βασίζεται στα γεωμετρικά όρια της ακτίνας των σημείων της σπείρας που βρίσκονται σε επαφή με το ρευστό. Έτσι εντοπίζονται δύο περιπτώσεις ανάλογα με το κάτω όριο του  $r$ . Στην πρώτη η επιφάνεια του ρευστού τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο, ενώ στη δεύτερη όχι. Ο έλεγχος για το αν τέμνει η επιφάνεια του νερού τον εσωτερικό κύλινδρο είναι

$$\frac{D_{\text{out}}}{2} - h < \frac{D_{\text{in}}}{2}$$

Στην περίπτωση που η επιφάνεια του ρευστού τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο ( $D_{\text{out}}/2 - h < D_{\text{in}}/2$ ) βγαίνει εύκολα το συμπέρασμα ότι τα σημεία βρίσκονται ανάμεσα στον εσωτερικό και τον εξωτερικό κύλινδρο. Κατά συνέπεια η ακτίνα των σημείων αυτών έχει άνω όριο ( $r_{\text{up}}$ ) την ακτίνα του εξωτερικού κυλίνδρου και κάτω όριο ( $r_{\text{low}}$ ) την ακτίνα του εσωτερικού αφού ο εσωτερικός κύλινδρος περιορίζει το ρευστό εξωτερικά του.

Στην περίπτωση όμως που η επιφάνεια του ρευστού δεν τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο ( $D_{out}/2-h > D_{in}/2$ ) το ρευστό δε βρίσκεται σε επαφή με αυτόν. Άνω όριο ολοκλήρωσης ( $r_{up}$ ) κατά την ακτίνα  $r$  είναι η ακτίνα του εξωτερικού κυλίνδρου αλλά κάτω όριο ολοκλήρωσης ( $r_{low}$ ) σε αυτή την περίπτωση θα αποτελεί η μικρότερη δυνατή ακτίνα σημείου της σπείρας κάτω από την επιφάνεια του ρευστού. Αυτή προκύπτει υπολογίζοντας τη διαφορά του ύψους του νερού από την ακτίνα του εξωτερικού κυλίνδρου στο  $\theta=0$ .

$$r_{low} := \frac{D_{out}}{2} - h$$



**Σχήμα 3.5.** Όρια ολοκλήρωσης κατά  $r$ . Στο βήμα φαίνεται η περίπτωση που τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο, ενώ στο προηγούμενο βήμα η περίπτωση που η επιφάνεια δεν τέμνει τον κύλινδρο.

### Υπολογισμός αντίστασης σπείρας

Συνδυάζοντας τα παραπάνω εύκολα προκύπτει ότι η συνολική αντίσταση ενός βήματος της σπείρας υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τις στοιχειώδεις αντιστάσεις ανάλογα με το αν η επιφάνεια τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο ως εξής:

- Στην περίπτωση που τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο με το ολοκλήρωμα:

$$M_{dr} := \int_{\frac{D_{in}}{2}}^{\frac{D_{out}}{2}} \int_{\theta_{end}}^{\theta_{st}} f_M(r, \theta) d\theta dr$$

Η συνάρτηση  $f_M(r, \theta)$  ανάλογα με τον αριθμό Reynolds του σημείου είναι:

$$f_M(r, \theta) = r \cdot \frac{\left[ \omega \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \right]^2 \cdot \rho}{2} \cdot \frac{0.664}{\sqrt{\frac{\omega \cdot \left[ r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2 \right] \cdot (\theta_{st} - \theta)}{v}}} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2}$$

για αριθμό  $Re_x$  μικρότερο του 3000

$$Re_x = \frac{\omega \cdot \left[ r^2 + \left( \frac{l_s}{2\pi} \right)^2 \right] \cdot (\theta_{st} - \theta)}{v}$$

και

$$f_M(r, \theta) = 0.0286\rho \cdot r \cdot \left[ \omega \cdot \sqrt{r^2 + \left( \frac{l_s}{2\pi} \right)^2} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\omega \cdot \left[ r^2 + \left( \frac{l_s}{2\pi} \right)^2 \right] \cdot (\theta_{st} - \theta)}{v} \right]^{-\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{r^2 + \left( \frac{l_s}{2\pi} \right)^2}$$

για αριθμό  $Re_x$  μεγαλύτερο του 3000

$$Re_x = \frac{\omega \cdot \left[ r^2 + \left( \frac{l_s}{2\pi} \right)^2 \right] \cdot (\theta_{st} - \theta)}{v}$$

Τα όρια  $\theta_{st}$  και  $\theta_{end}$  υπολογίζονται, όπως παρουσιάστηκε και παραπάνω με αναζήτηση της λύσης, στο αντίστοιχο  $r$ , της εξίσωσης:

$$r \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{l_s \cdot \theta}{2\pi} \tan(180\text{deg} - \alpha) + (D_{out} - h) = 0$$

Για το  $\theta_{st}$  με αναζήτηση της λύσης της εξίσωσης στο διάστημα  $[0, \pi]$ , ενώ για το  $\theta_{end}$  με αναζήτηση της λύσης στο διάστημα  $[-\pi, 0]$ .

- Στην περίπτωση που δεν τέμνει τον εσωτερικό κύλινδρο το ολοκλήρωμα γίνεται

$$M_{dr} := \int_{\frac{D_{out}}{2} - h}^{\frac{D_{out}}{2}} \int_{\theta_{end}}^{\theta_{st}} f_M(r, \theta) d\theta dr$$

Ο υπολογισμός των υπόλοιπων στοιχείων παραμένει όμοιος με την προηγούμενη περίπτωση.

#### Υπολογισμός αντίστασης προηγούμενου βήματος σπείρας / ή σπείρας διαφορετικής αρχής

Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να αναφερθούμε στον υπολογισμό της υδροδυναμικής αντίστασης του προηγούμενου βήματος της σπείρας ή σπείρας με διαφορετική αρχή, για διάταξη με πολλαπλές αρχές, κάθε φορά στην περίπτωση που βρίσκεται σε επαφή με το ρευστό.

Ο υπολογισμός αυτός γίνεται με τον τρόπο υπολογισμού της αντίστασης σπείρας όπως περιεγράφηκε παραπάνω, με μόνη αλλαγή το ύψος (h) της επιφάνειας του ρευστού στην αρχή των αξόνων ( $y=0, \theta=0$ ). Στη θέση αυτού χρησιμοποιείται το ύψος του ρευστού στην προηγούμενη σπείρα ( $h_{pr}$ ).

Για να υπολογιστεί το ύψος αυτό, αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε την απόσταση της προηγούμενης σπείρας. Η απόσταση δύο σπειρών (ή ενός βήματος σε περίπτωση μίας αρχής) ισούται με το μήκος ενός βήματος διαιρεμένο με τον αριθμό των διαφορετικών σπειρών, που περιέχονται σε ένα βήμα της σπείρας. Κατά συνέπεια δηλαδή διαιρεμένο με τον αριθμό των αρχών της διάταξης. Συγκεκριμένα η απόσταση είναι  $l_s / \arx$ , όπου  $\arx$  ο αριθμός των αρχών της διάταξης. Χρησιμοποιώντας αυτή την απόσταση είναι δυνατόν να υπολογιστεί τριγωνομετρικά η διαφορά ύψους της επιφάνειας με το ύψος της επιφάνειας στο αντίστοιχο σημείο ( $\theta=0$ ) της προηγούμενης σπείρας με τον τύπο:

$$dh = \frac{l_s}{\arx} \tan(180\text{deg} - \alpha)$$

Οπότε το ύψος ( $h_{pr}$ ) του ρευστού στο αντίστοιχο σημείο της προηγούμενης σπείρας προκύπτει με αφαίρεση της διαφοράς από το αρχικό ύψος (h).

$$h_{pr} := h - \frac{l_s}{\arx} \tan(180\text{deg} - \alpha)$$

Προφανώς στην περίπτωση που η διαφορά αυτή προκύψει αρνητική, η προηγούμενη σπείρα δε βρίσκεται σε επαφή με το ρευστό οπότε οι απώλειες είναι μηδενικές.

### **3.2.2 Αριθμητική επίλυση απωλειών αντίστασης σπείρας**

Με βάση την προηγούμενη θεωρητική επίλυση αναπτύχθηκε κώδικας για τον υπολογισμό των απωλειών αντίστασης της σπείρας. Ο κώδικας περιλαμβάνει τον υπολογισμό των απωλειών αντίστασης ενός βήματος της σπείρας και τον υπολογισμό των απωλειών αντίστασης εξαιτίας της επαφής του ρευστού με προηγούμενο βήμα της σπείρας ή με σπείρα διαφορετικής αρχής. Προφανώς η συνολική αντίσταση εξαιτίας της σπείρας ανά βήμα (ή ανά βήμα προς τον αριθμό των αρχών ( $l_s / \arx$ ) στην περίπτωση των πολλαπλών αρχών) υπολογίζεται αθροίζοντας τις επιμέρους υδροδυναμικές απώλειες.

Η διαδικασία υπολογισμού τόσο για την αντίσταση του βήματος της σπείρας όσο και για την αντίσταση της προηγούμενης σπείρας είναι κοινή με μόνη αλλαγή τα όρια ολοκλήρωσης. Κατά συνέπεια, ο κώδικας υπολογισμού της αντίστασης είναι κοινός, με μόνη αλλαγή το ύψος του ρευστού. Προφανώς αυτό υλοποιείται με τη χρήση κατάλληλης υπορουτίνας υπολογισμού των αντιστάσεων για κάθε ακτίνα και αριθμητική ολοκλήρωση αυτής της υπορουτίνας στα αντίστοιχα όρια του  $r$  κάθε φορά. Τα όρια της ακτίνας υπολογίζονται ανάλογα με το αν η επιφάνεια του ρευστού τέμνει ή όχι τον εσωτερικό κύλινδρο με κατάλληλο έλεγχο. Είναι προφανές πως η αντίσταση της προηγούμενης σπείρας υπολογίζεται και αθροίζεται στις συνολικές αντιστάσεις μόνο στην περίπτωση που υπάρχει επαφή της με το ρευστό.

Η υπορουτίνα υπολογισμού της αντίστασης υπολογίζει το σύνολο των αντιστάσεων σε κάθε ακτίνα της σπείρας ολοκληρώνοντας τις αντιστάσεις κάθε στοιχειώδους επιφάνειας ανάμεσα στα όρια της γωνίας  $\theta$ , για κάθε ακτίνα  $r$ . Τα όρια της γωνίας  $\theta$  υπολογίζονται με αριθμητική επίλυση κατάλληλης εξίσωσης. Η αντίσταση κάθε στοιχειώδους επιφάνειας προκύπτει ανάλογα με την περίπτωση της ροής τυρβώδους ή στρωτής χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις που προέκυψαν από το θεωρητικό υπολογισμό. Προφανώς σε κάθε σημείο πρέπει να ελεγχθεί αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης με υπολογισμό του αριθμού Reynolds.

Ο κώδικας χρησιμοποιεί σαν είσοδο τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κοχλίου, χαρακτηριστικά του ρευστού, τη γωνιακή ταχύτητα της διάταξης, την ανάλυση και το σφάλμα του υπολογισμού προκειμένου να υπολογιστούν αριθμητικά οι υδροδυναμικές απώλειες εξαιτίας της σπείρας. Η ανάλυση επηρεάζει τον αριθμό των υποδιαστημάτων της ολοκλήρωσης ενώ το σφάλμα επηρεάζει την ακρίβεια της λύσης στην εξίσωση υπολογισμού των ορίων. Τόσο κατά  $r$  όσο και κατά  $\theta$  η ολοκλήρωση γίνεται με τη μέθοδο Simpson 1/3 ώστε να επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια με μικρότερη ανάλυση (Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, Αθήνα 2003). Η μέθοδος αυτή, που προέρχεται από εξέλιξη της μεθόδου του τραπεζίου, υπολογίζει το περιεχόμενο εμβαδό παραβολής που διέρχεται από 3 σημεία της συνάρτησης υπολογισμού, δηλαδή κάθε δύο υποδιαστήματα, και το αθροίζει ώστε να προκύψει το συνολικό. Για την ολοκλήρωση είναι απαραίτητος ο καθορισμός συναρτήσεων διαμέρισης των διαστημάτων ολοκλήρωσης σε υποδιαστήματα. Συναρτήσεις δηλαδή που αντιστοιχούν τις τιμές των μετρητών  $i$  σε αντίστοιχα σημεία των διαστημάτων ολοκλήρωσης των  $r$  και  $\theta$  ώστε το  $i=0$  να αντιστοιχεί στο κάτω όριο ολοκλήρωσης και το  $i=n$  (όπου  $n$  ανάλυση) να αντιστοιχεί στο πάνω όριο.

Ο υπολογισμός των ορίων ολοκλήρωσης κατά  $\theta$ , από την άλλη, απαιτεί την εύρεση ριζών εξίσωσης σε κατάλληλα διαστήματα. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με υπορουτίνα υπολογισμού τους, η οποία βασίζεται στη μέθοδο διχοτόμησης διαστήματος (Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, Αθήνα 2003). Έτσι απαιτούνται δύο όρια (το διάστημα της ρίζας  $[0, \pi]$  ή  $[-\pi, 0]$ ) ανάμεσα στα οποία υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης, και ο αλγόριθμος με διαδοχικές διχοτομήσεις αναζητεί το διάστημα στα άκρα του οποίου έχει διαφορετικό πρόσημο η συνάρτηση προς επίλυση, μέχρι να είναι το διάστημα μικρότερο του σφάλματος.

### **3.3. Υπολογισμός απωλειών υδροδυναμικής αντίστασης εσωτερικού κυλίνδρου**

Πέρα από τις υδροδυναμικές απώλειες που οφείλονται στην επαφή του ρευστού με τη σπείρα της διάταξης, ο κοχλίας παρουσιάζει απώλειες και εξαιτίας της επαφής του ρευστού με τον εσωτερικό κύλινδρο. Όπως και στη μελέτη των απωλειών της σπείρας, έτσι και στην περίπτωση της μελέτης του εσωτερικού κυλίνδρου οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι κατάλληλες, και είναι απαραίτητο να υπολογιστεί η αντίσταση της στοιχειώδους επιφάνειας. Προφανώς και εδώ αυτή αποτελεί σημείο στοιχειώδους πλάκας η οποία αποτελείται από όλα τα σημεία που βλέπουν κοινή ταχύτητα ρευστού, δηλαδή τα σημεία με κοινή ακτίνα. Σαφώς η πλάκα ξεκινάει κάθε φορά στο σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος.

#### **3.3.1. Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών εσωτερικού κυλίνδρου**

Πιο συγκεκριμένα όπως και στην περίπτωση της σπείρας, έτσι και στις υδροδυναμικές απώλειες του εσωτερικού κυλίνδρου, η διατμητική τάση εξαρτάται από την περίπτωση της ροής. Για το λόγο αυτό σε κάθε σημείο γίνεται έλεγχος του αριθμού Reynolds.

$$Re_x := \frac{U \cdot x}{\nu}$$

Η γραμμική ταχύτητα  $U$  του ρευστού ως προς κάθε σημείο προκύπτει από την περιστροφική ταχύτητα της διάταξης:

Η γραμμική ταχύτητα  $U$  του ρευστού ως προς κάθε σημείο του κυλίνδρου προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής ταχύτητας εξαιτίας περιστροφής του κυλίνδρου και της οριζόντιας ταχύτητας του ρευστού. Κατά την περιστροφή της σπείρας ο όγκος του ρευστού μετατοπίζεται προς το κάτω άκρο της διάταξης οπότε κατά συνέπεια αποκτά ταχύτητα παράλληλη με τη διάταξη. Στο σύστημα που γίνεται η μελέτη (οριζόντια

διάταξη) αυτή η ταχύτητα θεωρείται οριζόντια. Το μέτρο λοιπόν της ταχύτητας του ρευστού ως προς τον κύλινδρο είναι:

$$U = \omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2}$$

όπου  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα της διάταξης και  $l_s$  το βήμα της σπείρας. Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με την περίπτωση της σπείρας η γραμμική ταχύτητα εδώ είναι κοινή για όλα τα σημεία.

Το μήκος  $x$  της καμπύλης των σημείων με ίδια ταχύτητα με αρχή το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος έως το σημείο στην επιφάνεια της σπείρας, ισούται με μήκος τόξου πάνω στον κύλινδρο, με αντίστοιχη αρχή και τέρμα:

$$x = l_{arc} = \frac{D_{in}}{2}(\theta_{st} - \theta)$$

όπου  $\theta_{st}$  η γωνία του σημείου δημιουργίας του οριακού στρώματος και  $\theta$  η γωνία του εκάστοτε σημείου. Η γωνία του σημείου δημιουργίας του οριακού στρώματος υπολογίζεται για κάθε  $y$  με τρόπο που παρουσιάζεται παρακάτω καθώς αποτελεί όριο ολοκλήρωσης.

Ανάλογα με το αν ο  $Re_x$  είναι μεγαλύτερος ή όχι του 3000 η ροή είναι τυρβώδης ή στρωτή αντίστοιχα και υπολογίζεται σύμφωνα με τα παρακάτω.

#### Υπολογισμός στρωτής ροής

Στην περίπτωση της στρωτής ροής, η διατμητική τάση υπολογίζεται με την εξίσωση

$$\tau_w := \rho \cdot U^2 \cdot \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

Οπότε προκειμένου να υπολογιστεί η συνολική αντίσταση τριβής μιας στοιχειώδους επιφάνειας αρκεί να υπολογιστεί το γινόμενο της διατμητικής τάσης με την επιφάνεια. Επειδή πρόκειται για κυλινδρική διάταξη, θα υπολογιστεί η ροπή αντίστασης της στοιχειώδους επιφάνειας πολλαπλασιάζοντας με την ακτίνα ( $D_{in}/2$ ).

Το εμβαδό στοιχειώδους επιφάνειας στον κύλινδρο είναι κατά  $y$  και  $\theta$ :

$$dA = \frac{D_{in}}{2} \cdot d\theta \cdot dy$$

Οπότε η στοιχειώδης ροπή αντίστασης που δημιουργείται από στρωτή ροή προκύπτει με συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων.

$$dM_{dr} = \frac{D_{in}^2}{4} \cdot \frac{\left[ \omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \right]^2}{2} \cdot \rho \cdot \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \cdot d\theta \cdot dy$$

όπου  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα,  $D_{in}$  η ακτίνα του εσωτερικού κυλίνδρου,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $l_s$  το βήμα της σπείρας και  $Re_x$  ο αριθμός Reynolds όπως υπολογίστηκε παραπάνω.

### Υπολογισμός τυρβώδους ροής

Η περίπτωση της τυρβώδους ροής μοιάζει στη μεθοδολογία υπολογισμού με αυτή της στρωτής με τη διαφορά ότι η διατμητική τάση στην επιφάνεια της πλάκας δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_w := 0.0286 \rho \cdot U^2 \cdot Re_x^{-\frac{1}{5}}$$

Η ροπή αντίστασης της στοιχειώδους επιφάνειας υπολογίζεται σε αυτήν την περίπτωση πολλαπλασιάζοντας τη διατμητική τάση με την επιφάνεια και την ακτίνα. Το εμβαδό της επιφάνειας υπολογίζεται και εδώ

$$dA = \frac{D_{in}}{2} \cdot d\theta \cdot dy$$

οπότε η στοιχειώδης ροπή αντίστασης είναι

$$dM_{dr} = \frac{D_{in}^2}{4} \cdot 0.0286 \rho \cdot \left[ \omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \right]^2 \cdot Re_x^{-\frac{1}{5}} \cdot d\theta \cdot dy$$

όπου  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα,  $D_{in}$  η διάμετρος του εσωτερικού κυλίνδρου,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού και  $Re_x$  ο αριθμός Reynolds.

### Όρια ολοκλήρωσης

Όπως και στην περίπτωση των αντιστάσεων της σπείρας προκειμένου να υπολογιστεί η συνολική ροπή εξαιτίας της υδροδυναμικής αντίστασης του ρευστού είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των ορίων ολοκλήρωσης κατά  $y$  και  $\theta$  τα οποία βασίζονται στα φυσικά (γεωμετρικά) όρια υπολογισμού. Το σύνολο της επιφάνειας του εσωτερικού κυλίνδρου η οποία παρουσιάζει ροπή αντίστασης κατά την κίνηση περιλαμβάνεται προφανώς κάτω από την επιφάνεια του ρευστού. Έτσι δε γίνεται λόγος για τριβές στα σημεία στα οποία δεν υπάρχει επαφή με το ρευστό. Έτσι ο υπολογισμός των απωλειών έχει νόημα μόνο στα σημεία κάτω από αυτή. Από την άλλη, η επιφάνεια επαφής του κυλίνδρου με το ρευστό περιορίζεται και από την επιφάνεια της σπείρας καθώς δεν υπάρχει ρευστό πίσω από αυτή σε κάθε βήμα, και μπροστά από αυτή σε προηγούμενο βήμα.

Πρέπει εδώ να τονιστεί πως για τον υπολογισμό της αντίστασης απαιτούνται στοιχεία όπως το μήκος του τόξου που ξεκινάει από το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος. Είναι απαραίτητο λοιπόν να καθοριστούν το σημείο έναρξης της δημιουργίας οριακού στρώματος και το σημείο πέρα από το οποίο παύει να υπάρχει ρευστό και οριακό στρώμα (οπότε αποτελούν σημεία στα οποία θεωρούμε ότι παύει να υπάρχει η πλάκα). Όπως και στον υπολογισμό της σπείρας τα σημεία στα οποία ξεκινά να δημιουργείται το οριακό στρώμα είναι τα σημεία του τόξου, πάνω στην τομή με την επιφάνεια του ρευστού, τα οποία κατά την περιστροφή εξέρχονται από την επιφάνεια του ρευστού ενώ σε προηγούμενο χρόνο βρισκόταν κάτω από αυτή. Όπως αναλύθηκε και παραπάνω, στο πρόβλημα των απωλειών σε επίπεδη πλάκα η λύση δίνεται με θεώρηση ακίνητης πλάκας και κινούμενου ρευστού, οπότε καθώς το πρόβλημα του κυλίνδρου είναι αντίστροφο, η σχετική ταχύτητα του ρευστού είναι αντίθετη της ταχύτητας του κοχλία. Κατά συνέπεια τα σημεία τα οποία εξέρχονται από το ρευστό «βλέπουν» ταχύτητα ρευστού προς το εσωτερικό της πλάκας σε σχέση με αυτά. Αντίθετα γίνεται προφανές ότι τα σημεία του

κυλίνδρου, πάνω στην τομή με την επιφάνεια του ρευστού τα οποία εισέρχονται στο ρευστό ενώ αμέσως προηγουμένως βρίσκονταν εκτός αυτού, θεωρούνται το τέλος της πλάκας κατά τον υπολογισμό των συνολικών απωλειών, καθώς βλέπουν ταχύτητα ρευστού από το εσωτερικό της πλάκας προς αυτά.

Πριν από τον υπολογισμό των σημείων αυτών όμως είναι αναγκαίο να υπολογιστούν τα όρια ολοκλήρωσης κατά  $y$ . Γίνεται κατανοητό πως το κατώτατο όριο ολοκλήρωσης ( $y_{low}$ ) κατά  $y$  είναι η τεταγμένη  $y$  του σημείου που η επιφάνεια του ρευστού τέμνει την εσωτερική έλικα της σπείρας (σχήμα 3.6. (α)). Υπολογίζεται με λύση της εξίσωσης:

$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{out}}{2} - h \right) - \frac{D_{in}}{2} \cdot \sin\left( \frac{2\pi}{l_s} \cdot y - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

στο διάστημα  $[-l_s/2, 0]$ . Το ανώτατο όριο ολοκλήρωσης ( $y_{up}$ ) από την άλλη εξαρτάται από το αν το ρευστό περιορίζεται από προηγούμενη σπείρα (προηγούμενο βήμα της σπείρας ή σπείρα με διαφορετική αρχή) (σχήμα 3.6.(β)). Προκειμένου να ελεγχθεί αυτό ελέγχουμε το σημείο που η στάθμη του ρευστού τέμνει το κατώτατο σημείο του κυλίνδρου λύνοντας την εξίσωση:

$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{out}}{2} - h \right) + \frac{D_{in}}{2} = 0$$

Σε περίπτωση που το σημείο τομής βρίσκεται πριν το μηδενικό σημείο της προηγούμενης σπείρας, άρα το  $y$  του σημείου είναι μικρότερο του  $l_s/\text{arx}$ , το ανώτατο όριο του  $y$  είναι η λύση της εξίσωσης. Σε περίπτωση όμως που το σημείο τομής είναι μετά το σημείο αυτό, τότε το ανώτατο όριο κατά  $y$  περιορίζεται από την προηγούμενη σπείρα και γίνεται το σημείο τομής με την εσωτερική έλικα της σπείρας. Υπολογίζεται με λύση της εξίσωσης (εξίσωση στάθμης νερού με ύψος εσωτερικής έλικας προηγούμενης σπείρας):

$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{out}}{2} - h \right) - \frac{D_{in}}{2} \cdot \sin\left[ \frac{2\pi}{l_s} \cdot \left( y - \frac{l_s}{\text{arx}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] = 0$$

στο διάστημα  $[l_s/\text{arx}, l_s/\text{arx} + l_s/2]$ , αφού ελέγχουμε το διάστημα μετά το μηδενικό σημείο της προηγούμενης σπείρας.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης κατά  $\theta$  είναι αναγκαίο να βρούμε τα σημεία στα οποία ξεκινάει να δημιουργείται οριακό στρώμα και εκείνα στα οποία παύει να υπάρχει επαφή με το ρευστό. Απαιτείται δηλαδή να γίνει υπολογισμός των σημείων τομής της επιφάνειας του ρευστού με τον εσωτερικό κύλινδρο αλλά και να υπολογιστούν τα σημεία της εσωτερικής έλικας της σπείρας καθώς σε πολλές περιπτώσεις, όπως φάνηκε παραπάνω, αυτά αποτελούν όριο ολοκλήρωσης.

Η εξίσωση της επιφάνειας του ρευστού είναι:

$$z := y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - (D_{out} - h)$$

Από την άλλη η εξίσωση του εσωτερικού κυλίνδρου είναι για κάθε  $y$ :

$$z = \frac{D_{in}}{2} \cdot \sin\left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

έτσι προκύπτει η εξίσωση



$$y \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) - \frac{D_{\text{in}}}{2} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

λύνοντας:

$$\theta = \text{asin}\left[ \frac{2y \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right)}{D_{\text{in}}} \right] + \frac{\pi}{2}$$

και

$$\theta = -\text{asin}\left[ \frac{2y \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right)}{D_{\text{in}}} \right] - \frac{\pi}{2}$$

Παρατηρούμε ότι έχει δύο λύσεις ως προς  $\theta$ , μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $[-\pi, 0]$  και  $[0, \pi]$ . Από την παραπάνω εξίσωση λοιπόν, προκύπτουν οι αντίστοιχες γωνίες  $\theta$  των σημείων τομής των δύο επιφανειών για κάθε  $y$  στα όρια ολοκλήρωσης.

Προφανώς μία από τις λύσεις παριστάνει το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος και η άλλη το σημείο πέρα από το οποίο παύει να υπάρχει ρευστό. Ο διαχωρισμός, όπως αναλύθηκε και παραπάνω γίνεται ανάλογα με το ποιο σημείο εισέρχεται στο νερό και ποιο εξέρχεται από αυτό (σχήμα 3.6.).

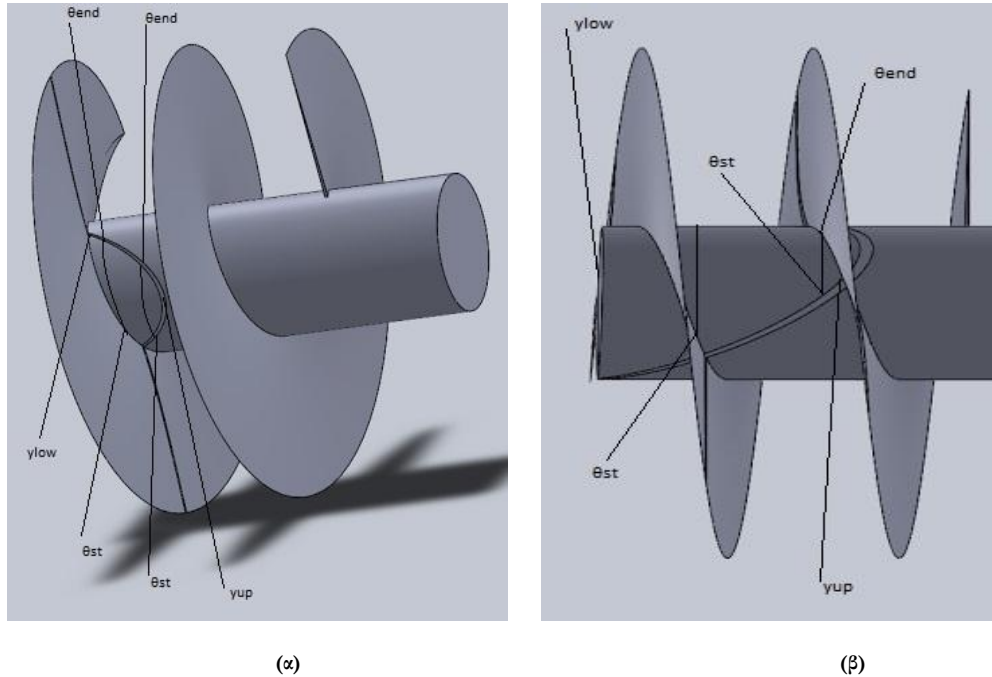
Στη αριστερόστροφη λειτουργία τα σημεία τα οποία εξέρχονται από το ρευστό εντοπίζονται στο δεξιό ημικύκλιο όπως φαίνεται από την κορυφή του κεκλιμένου κοχλία και κατά συνέπεια στις θετικές τιμές της γωνίας  $\theta$   $[0, \pi]$ . Οπότε οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης που εντοπίζονται στην περιοχή αυτή, αποτελούν τα σημεία δημιουργίας του οριακού στρώματος ( $\theta_{\text{st}}$ ). Αντίθετα το σύνολο των σημείων τα οποία εισέρχονται στο ρευστό βρίσκονται στην αρνητική περιοχή λύσεων του  $\theta$   $[-\pi, 0]$ , στην οποία κατά συνέπεια αναζητούμε τις αντίστοιχες λύσεις ( $\theta_{\text{end}}$ ).

Παρόλα αυτά δεν αποτελούν απαραίτητα και τα δύο σημεία αυτά όρια ολοκλήρωσης κατά  $\theta$ . Αυτό συμβαίνει γιατί όπως αναφέρθηκε και παραπάνω σε περίπτωση που το νερό περιορίζεται από τη σπείρα το όριο υπολογισμού είναι προφανώς το αντίστοιχο σημείο της εσωτερικής έλικας της σπείρας. Η γωνία αυτού υπολογίζεται από την εξίσωση της σπείρας για κάθε  $y$ :

$$\theta = \frac{2\pi}{l_s} \cdot y$$

Έτσι γίνεται κατανοητό γεωμετρικά πως πρέπει να γίνει έλεγχος για το αν η έλικα περιορίζει το ρευστό, δηλαδή αν το σημείο της έλικας βρίσκεται σε σημείο με μικρότερη γωνία ( $\theta$ ) από το σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος ( $\theta_{\text{st}}$ ). Στην περίπτωση αυτή σημείο δημιουργίας του οριακού στρώματος ορίζεται προφανώς το σημείο της εσωτερικής έλικας, οπότε άνω όριο ολοκλήρωσης, το αντίστοιχο  $\theta$  (σχήμα 3.6. (α)).

Επίσης πρέπει να γίνει έλεγχος που αφορά το αν το προηγούμενο βήμα της έλικας περιορίζει το ρευστό πριν το κάτω όριο της γωνίας  $\theta$ . Αν δηλαδή, το σημείο της εσωτερικής έλικας της σπείρας βρίσκεται σε σημείο με γωνία μεγαλύτερη του σημείου που παύει να υπάρχει οριακό στρώμα ( $\theta_{\text{end}}$ ). Στην περίπτωση αυτή ορίζεται σαν σημείο στο οποίο παύει να υπάρχει οριακό στρώμα το σημείο της έλικας και κάτω όριο ολοκλήρωσης το αντίστοιχο  $\theta$  (σχήμα 3.6. (β)).



**Σχήμα 3.6.** Επιφάνεια εσωτερικού κυλίνδρου κάτω από την επιφάνεια του ρευστού (άνοψη διάταξης). Στην περίπτωση (α) το ρευστό δεν περιορίζεται από την προηγούμενη σπείρα ενώ στην περίπτωση (β) περιορίζεται οδηγώντας σε περιορισμό του  $y_{up}$ . Σε κάθε περίπτωση παρουσιάζονται τα όρια του  $\theta$  ανάλογα με το αν περιορίζονται από τη σπείρα (στην περίπτωση (β) παρουσιάζεται περιορισμός από προηγούμενο βήμα).

### Υπολογισμός αντίστασης εσωτερικού κυλίνδρου

Συνδυάζοντας τα παραπάνω εύκολα προκύπτει ότι η συνολική αντίσταση του εσωτερικού κυλίνδρου της διάταξης υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τις στοιχειώδεις αντιστάσεις στα παραπάνω όρια. Έτσι το ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι

$$M_{dr} := \int_{y_{low}}^{y_{up}} \int_{\theta_{end}}^{\theta_{st}} f_M(r, \theta) d\theta dr$$

Τα όρια  $y_{up}$  και  $y_{low}$  υπολογίζονται ανάλογα με το αν η επιφάνεια τέμνει την προηγούμενη σπείρα σύμφωνα με την μεθοδολογία που παρουσιάστηκε.

Τα όρια  $\theta_{st}$  και  $\theta_{low}$  υπολογίζονται όπως παρουσιάστηκε παραπάνω και εξαρτώνται από το αν η έλικα περιορίζει το ρευστό πριν την επιφάνειά του.

Η συνάρτηση  $f_M(r, \theta)$  ανάλογα με τον αριθμό Reynolds του σημείου είναι:

$$f_M(y, \theta) = \frac{D_{in}^2}{4} \cdot \frac{\left[ \omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \right]^2 \cdot \rho}{2 \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot (\theta_{st} - \theta) \cdot D_{in}}{2\nu}}} \cdot \frac{0.664}{\sqrt{\frac{\omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot (\theta_{st} - \theta) \cdot D_{in}}{2\nu}}}$$

για αριθμό  $Re_x$  μικρότερο του 3000.

$$Re_x = \frac{\omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot (\theta_{st} - \theta) \cdot D_{in}}{2\nu}$$

και

$$f_M(y, \theta) = \frac{D_{in}^2}{4} \cdot 0.0286\rho \cdot \left[ \omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot (\theta_{st} - \theta) \cdot D_{in}}{2\nu} \right]^{-\frac{1}{5}}$$

για αριθμό  $Re_x$  μεγαλύτερο του 3000.

$$Re_x = \frac{\omega \cdot \sqrt{\frac{D_{in}^2}{4} + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot (\theta_{st} - \theta) \cdot D_{in}}{2\nu}$$

Η ολοκλήρωση αυτή δίνει τις συνολικές υδροδυναμικές απώλειες του εσωτερικού της σπείρας.

### **3.3.2 Αριθμητική επίλυση απωλειών εσωτερικού κυλίνδρου**

Είναι φανερό πως ο υπολογισμός των απωλειών αυτών είναι αναγκαίο να βασιστεί σε κώδικα καθώς απαιτείται ο έλεγχος πολλών περιπτώσεων που η διάσπασή τους σε απλούστερα ολοκληρώματα θα καθιστούσε τον υπολογισμό σχεδόν αδύνατο. Με βάση την προηγούμενη θεωρητική επίλυση αναπτύχθηκε κώδικας που περιλαμβάνει τον υπολογισμό των απωλειών αντίστασης.

Ο κώδικας αρχικά πραγματοποιεί έλεγχο για το αν το ρευστό βρίσκεται σε επαφή με τον εσωτερικό κύλινδρο προκειμένου να μηδενίσει τις απώλειες της αντίστασης του εσωτερικού κυλίνδρου σε περίπτωση απουσίας επαφής.

Στη συνέχεια γίνεται υπολογισμός του κάτω ορίου ολοκλήρωσης βρίσκοντας το σημείο τομής της επιφάνειας και της εσωτερικής έλικας. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό είναι αναγκαία η αριθμητική επίλυση κατάλληλης εξίσωσης, και για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η μέθοδος διχοτόμησης διαστήματος (Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, Αθήνα 2003) με αρχικό διάστημα το  $[-l_s/2, 0]$ .

Με κατάλληλο έλεγχο (που αναλύθηκε παραπάνω) διαπιστώνεται αν το ρευστό περιορίζεται από την προηγούμενη σπείρα έτσι ώστε να τεθεί το κάτω όριο ολοκλήρωσης κατά  $y$ . Σε περίπτωση που η εσωτερική έλικα της προηγούμενης σπείρας περιορίζει το ρευστό το κάτω όριο υπολογίζεται με αριθμητική επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης τομής της επιφάνειας του ρευστού και της εσωτερικής έλικας, με επανάληψη της μεθόδου της διχοτόμησης στο διάστημα  $[l_s/\arx, l_s/\arx + l_s/2]$ . Στην αντίθετη περίπτωση κάτω όριο ολοκλήρωσης ορίζεται το σημείο τομής του κατώτατου σημείου του κυλίνδρου και της επιφάνειας του ρευστού.

Για κάθε ένα από τα  $y$  ανάμεσα στα όρια υπολογίζεται, με κατάλληλη υπορουτίνα, το ολοκλήρωμα της αντίστασης κάθε τόξου, αφού πρώτα υπολογιστούν τα αντίστοιχα όρια. Για τον υπολογισμό των ορίων

πραγματοποιείται κατάλληλος έλεγχος σε σχέση με τη γωνία των σημείων της εσωτερικής έλικας της σπείρας. Με ολοκλήρωση των αντιστάσεων των τόξων για κάθε  $y$  υπολογίζεται η συνολική αντίσταση.

Η υπορουτίνα υπολογισμού της αντίστασης υπολογίζει το σύνολο των αντιστάσεων σε κάθε  $y$  του κυλίνδρου ολοκληρώνοντας τις αντιστάσεις κάθε στοιχειώδους επιφάνειας ανάμεσα στα όρια της γωνίας  $\theta$ , για κάθε  $y$ . Τα όρια της γωνίας  $\theta$  υπολογίζονται με κατάλληλη συνάρτηση που επιστρέφει τη γωνία  $\theta$  τομής των δύο επιφανειών (κυλίνδρου και ρευστού) για κάθε  $y$ . Στη συνέχεια ακολουθεί κατάλληλος έλεγχος ώστε να υπολογιστούν τα όρια ολοκλήρωσης (σημεία της έλικας) σε περίπτωση που το ρευστό περιορίζεται από τη σπείρα και δεν καλύπτει το σύνολο του σωλήνα ανάμεσα στα σημεία τομής. Ο έλεγχος αυτός μεταβάλλεται ανάλογα με το  $y$ . Έτσι για  $y < I_s/2$  ο έλεγχος αφορά το άνω όριο ολοκλήρωσης, ενώ για  $y > I_s/2$ , το κάτω όριο. Η αντίσταση κάθε στοιχειώδους επιφάνειας προκύπτει ανάλογα με την περίπτωση της ροής τυρβώδους ή στρωτής χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις που προέκυψαν από το θεωρητικό υπολογισμό. Προφανώς σε κάθε σημείο πρέπει να ελεγχθεί αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης με υπολογισμό του αριθμού Reynolds.

Ο κώδικας χρησιμοποιεί σαν είσοδο τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κοχλία, χαρακτηριστικά του ρευστού, τη γωνιακή ταχύτητα της διάταξης, την ανάλυση και το σφάλμα του υπολογισμού προκειμένου να υπολογιστούν αριθμητικά οι υδροδυναμικές απώλειες εξαιτίας της σπείρας. Η ανάλυση επηρεάζει τον αριθμό των υποδιαστημάτων της ολοκλήρωσης ενώ το σφάλμα επηρεάζει την ακρίβεια της λύσης στην εξίσωση υπολογισμού των ορίων. Τόσο κατά  $y$  όσο και κατά  $\theta$  η ολοκλήρωση γίνεται με τη μέθοδο Simpson 1/3 ώστε να επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια με μικρότερη ανάλυση (Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, Αθήνα 2003). Για την ολοκλήρωση είναι απαραίτητος ο καθορισμός συναρτήσεων διαμέρισης των διαστημάτων ολοκλήρωσης σε υποδιαστήματα. Συναρτήσεις δηλαδή που αντιστοιχούν τις τιμές των μετρητών  $i$  σε αντίστοιχα σημεία των διαστημάτων ολοκλήρωσης των  $y$  και  $\theta$  ώστε το  $i=0$  να αντιστοιχεί στο κάτω όριο ολοκλήρωσης και το  $i=n$  (όπου  $n$  ανάλυση) να αντιστοιχεί στο πάνω όριο.

#### 4.Υπολογισμών απωλειών διακένου

Η διάταξη λειτουργεί με σχετική κίνηση του κοχλίου σε σχέση με το ακίνητο εξωτερικό τοίχωμα της διάταξης. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό είναι προφανές ότι απαιτείται η απουσία επαφής ανάμεσα τους. Αυτό επιτυγχάνεται με δημιουργία κατάλληλης απόστασης ανάμεσα στη σπείρα και το τοίχωμα, το διάκενο. Κάθε βήμα της σπείρας δηλαδή απέχει κάποια απόσταση από το εξωτερικό τοίχωμα ανάλογα με τη θέση του. Αυτό συμβαίνει γιατί το ύψος του διακένου των βημάτων της σπείρας μεταβάλλεται εξαιτίας της κάμψης του κοχλίου της διάταξης. Στα βήματα, δηλαδή, τα οποία βρίσκονται κοντά στα σημεία έδρασης του κοχλίου της διάταξης, που το βέλος κάμψης είναι μικρό το ύψος μεγιστοποιείται έτσι ώστε να μην υπάρχει επαφή με το τοίχωμα στα σημεία στα οποία το βέλος κάμψης μεγιστοποιείται.

Το διάκενο αυτό επηρεάζει τις απώλειες ενέργειας της διάταξης καθώς σε αυτό ρέει ρευστό του οποίου η ενέργεια δεν είναι δυνατόν να εκμεταλλευτεί. Άρα είναι σημαντικό να γίνει υπολογισμός της παροχής του όγκου του ρευστού αυτού. Προκειμένου να εντοπιστούν οι απώλειες αυτές είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της σπείρας στα σημεία του διακένου. Ο υπολογισμός δηλαδή του ύψους και του μήκους του διακένου. Πρέπει να τονιστεί εδώ πως αύξηση του ύψους του διακένου αυξάνει τις απώλειες ρευστού, ενώ αύξηση του μήκους τις μειώνει και προφανώς προς αυτή την κατεύθυνση γίνεται η κατασκευή της διάταξης.

Παρόλο που το ύψος του διακένου μεταβάλλεται, όπως διαπιστώθηκε, κατά μήκος του κοχλίου, ανάλογα με το αντίστοιχο βέλος κάμψης, η συνολική ροή ρευστού, που χάνεται, μπορεί να υπολογιστεί για ένα μέσο ύψος και κατά συνέπεια να έχουμε μία πολύ καλή προσέγγιση. Αυτό συμβαίνει γιατί τα βήματα της σπείρας είναι διατεταγμένα, προφανώς, με γραμμικό τρόπο οπότε οι συνολικές απώλειες διακένου δεν αποτελούν άθροισμα των επιμέρους απωλειών κάθε βήματος, αλλά προσεγγίζονται από τις απώλειες ενός βήματος μέσου ύψους. Προφανώς το μέσο ύψος διακένου εξαρτάται από την ποιότητα της κατασκευής και κατεργασίας και κυμαίνεται από 5-15mm.

Από την άλλη εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το μήκος του διακένου εξαρτάται από το πάχος της σπείρας. Το πάχος αυτό είναι θέμα στατικής και δυναμικής αντοχής της σπείρας και ξεφεύγει από τα όρια της υδροδυναμικής μελέτης της διάταξης. Γίνεται πάντως προφανές ότι μπορεί να αυξηθεί το μήκος του διακένου, με αύξηση του πάχους της σπείρας κοντά στο διάκενο.

Ο υπολογισμός των απωλειών διακένου βασίζεται στη θεωρία των ροών σε σχισμές (Σημειώσεις Μηχανικής των ρευστών, Αθανασιάδης Ν., Τμήμα Μηχ. Μηχανικών, Αθήνα 1978) και σε στενώσεις (Μηχανική των ρευστών, Σωκράτης Τσαγκάρης, Αθήνα 2005). Πιο συγκεκριμένα στη διάταξη έχουμε ροή σε στένωση κάτω από διαφορά πίεσης με κινούμενη άνω επιφάνεια. Οπότε το πρόβλημα θα αναλυθεί σε δύο επιμέρους περιπτώσεις και οι στοιχειώδεις απώλειες αποτελούν το άθροισμά τους.

#### Άνω κάτω επιφάνειες ακίνητες με διαφορά πίεσης

Η ροή μέσα από το διάκενο (χωρίς θεώρηση κινούμενου κοχλίου) αναλύεται με τη χρήση της εξίσωσης Bernoulli :

$$\frac{u^2}{2} + U + \frac{P}{\rho} = \kappa$$

όπου  $\kappa$  σταθερό. Ερμηνεύοντας την παραπάνω εξίσωση και θεωρώντας ομοιόμορφη κατανομή ταχυτήτων σε κάθε στοιχειώδες διάκενο μπορεί να διατυπωθεί η εξίσωση της ταχύτητας του ρευστού σε κάθε σημείο του διακένου:

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{u^2}{2}$$

όπου  $\delta p$  η διαφορική πίεση στα 2 άκρα του διακένου και  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού. Παρόλα αυτά η εξίσωση αυτή προκειμένου να είναι ακριβής θα πρέπει να διορθωθεί με τη χρήση συντελεστή απωλειών  $C_d$ . Ο συντελεστής απωλειών εξαρτάται από τη μορφή της εισόδου και της εξόδου του διακένου και κυμαίνεται από 0.4 έως 0.8 (εδώ θεωρούμε συντελεστή απωλειών 0.7). Η ταχύτητα λοιπόν του ρευστού προκύπτει:

$$u = C_d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \delta p}{\rho}}$$

Οπότε η παροχή όγκου είναι το γινόμενο της επιφάνειας με την ταχύτητα του ρευστού:

$$V = C_d \cdot h_{\text{diak}} \cdot b \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \delta p}{\rho}}$$

όπου  $h_{\text{diak}}$  το ύψος του διακένου,  $\delta p$  η διαφορά πίεσης στα άκρα του,  $\rho$  η πυκνότητά του και  $b$  το πλάτος του διακένου. Παρατηρούμε ότι οι απώλειες αυξάνονται αναλογικά με την αύξηση του ύψους.

Άνω τοίχωμα κινούμενο με ταχύτητα  $V$ , κάτω τοίχωμα ακίνητο

Η περίπτωση αυτή αναλύεται με τη χρήση εξισώσεων στρωτής ροής σε διάκενο. Η κατανομή ταχυτήτων είναι αναλογική με μηδενική ταχύτητα πάνω στο ακίνητο τοίχωμα και ταχύτητα  $V$  πάνω στο κινούμενο. Η μέση ταχύτητα είναι  $V/2$ , οπότε η παροχή όγκου είναι:

$$V = b \cdot h_{\text{diak}} \cdot \frac{U}{2}$$

όπου  $V$  η ταχύτητα του κινούμενου τοιχώματος και  $h_{\text{diak}}$  το ύψος του διακένου

Πρέπει εδώ να τονιστεί πως εξαιτίας της ροής αυτής δημιουργείται διατμητική τάση στα τοιχώματα η οποία υπολογίζεται με τον τύπο:

$$\tau = \mu \cdot \frac{U}{h}$$

οπότε η αντίσταση σε στοιχειώδες μήκος είναι

$$F = \mu \cdot b \cdot L \cdot \frac{U}{h_{\text{diak}}}$$

#### **4.1. Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών όγκου ρευστού σε διάκενο**

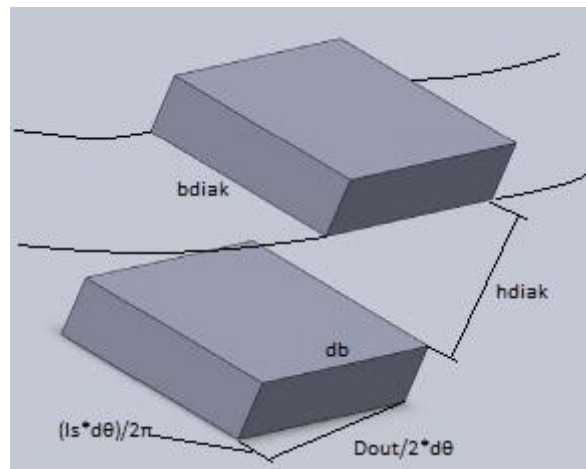
Συγκεκριμένα στην περίπτωση του κοχλίου προκειμένου να υπολογιστούν οι συνολικές απώλειες όγκου ρευστού σε διάκενο πρέπει να υπολογιστούν οι στοιχειώδεις απώλειες διακένου και να γίνει ολοκλήρωσή τους στο μήκος της εξωτερικής έλικας της σπείρας που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του ρευστού.

### Απώλειες όγκου ρευστού σε διάκενο εξαιτίας διαφοράς πίεσης

Στην περίπτωση των απωλειών εξαιτίας διαφοράς πίεσης, το στοιχειώδες μήκος της έλικας αντιπροσωπεύει το πλάτος του διακένου. Αντίστοιχα το πάχος της πλάκας της σπείρας αντιπροσωπεύει το μήκος του διακένου  $L$ . Προφανώς η διαφορά πίεσης ( $\delta p$ ) υπολογίζεται από την απόσταση του σημείου της εξωτερικής έλικας από την επιφάνεια του ρευστού.

Αναλυτικότερα το στοιχειώδες πλάτος υπολογίζεται από το στοιχειώδες μήκος της εξωτερικής έλικας ως προς  $\theta$  (σχήμα 4.1):

$$db := \sqrt{\left(\frac{D_{out}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot d\theta \quad ,$$



**Σχήμα 4.1.** Γεωμετρία στοιχειώδους διακένου στην εξωτερική έλικα για υπολογισμό απωλειών όγκου

Η διαφορά πίεσης  $\delta p$  εξαρτάται από το ύψος του ρευστού πάνω από το σημείο της έλικας αλλά και από το αν το σημείο βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του ρευστού της επόμενης σπείρας (επόμενο βήμα της σπείρας ή σπείρα με διαφορετική αρχή). Η διαφορά ύψους των δύο επιφανειών είναι δυνατόν να βρεθεί γεωμετρικά σε πρόβλημα αντίστροφο από το πραγματικό (δηλαδή οριζόντια διάταξη και επιφάνεια του ρευστού με κλίση για διευκόλυνση των υπολογισμών) υπολογίζοντας το γινόμενο της απόστασης κατά  $z$  της επιφάνειας του ρευστού της σπείρας στο μηδενικό σημείο της προηγούμενης σπείρας από την επιφάνεια του ρευστού της προηγούμενης σπείρας πάνω στο μηδενικό σημείο της με το συνημίτονο της κλίσης της διάταξης. Δηλαδή, αφού η επιφάνεια του ρευστού της προηγούμενης σπείρας πάνω στο μηδενικό σημείο της είναι προφανώς  $-D_{out}/2+h$  και η επιφάνεια του ρευστού της σπείρας στο μηδενικό σημείο της προηγούμενης σπείρας δίνεται από τον τύπο:

$$z = \frac{l_s}{\arctan} \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)$$

Η διαφορά ύψους των δύο επιφανειών υπολογίζεται:

$$\delta h = -\frac{l_s}{\arctan} \cdot \tan(180 - \alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Η απόσταση του κάθε σημείου της έλικας από την επιφάνεια του ρευστού ( $\delta z$ ) υπολογίζεται γεωμετρικά συναρτήσει του  $\theta$  (σχήμα 4.1). Αυτό γίνεται με υπολογισμό του γινομένου της απόστασης κατά  $z$  της επιφάνειας του ρευστού από το σημείο της έλικας, με το συνημίτονο της κλίσης της διάταξης. Έτσι, αφού για την εξωτερική έλικα ισχύει:

$$y(\theta) = \frac{l_s \cdot \theta}{2\pi}$$

και

$$z(\theta) = \frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

και για την επιφάνεια ισχύει

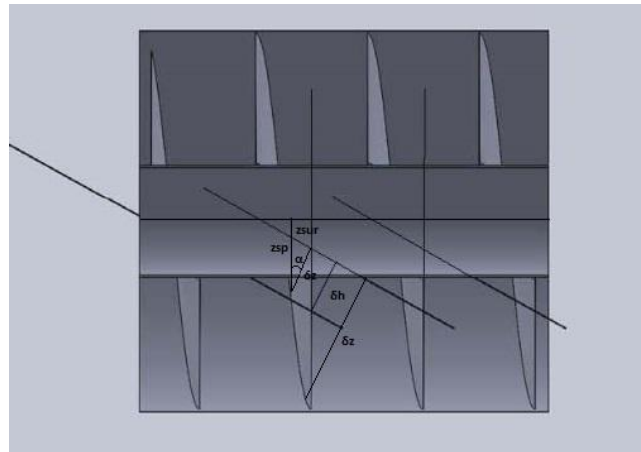
$$z(y) = y \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)$$

άρα

$$z(\theta) = \frac{l_s \cdot \theta}{2\pi} \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right)$$

προκύπτει ο τύπος:

$$\delta z(\theta) = \cos(\alpha) \cdot \left[ \frac{l_s \cdot \theta}{2\pi} \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left(\frac{D_{out}}{2} - h\right) - \frac{D_{out}}{2} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$



**Σχήμα 4.2.** Γεωμετρική απεικόνιση του υδραυλικού ύψους σε κάθε σημείο της εξωτερικής έλικας της σπείρας.

Στα σημεία της έλικας, δηλαδή, που βρίσκονται πάνω από την επιφάνεια του ρευστού του επόμενου βήματος, δηλαδή η απόσταση του σημείου από την επιφάνεια του ρευστού είναι μικρότερη της διαφοράς ύψους των δύο επιφανειών, η διαφορά πίεσης υπολογίζεται με το γινόμενο της απόστασης από την επιφάνεια του ρευστού με την πυκνότητα του ρευστού και την επιτάχυνση της βαρύτητας σύμφωνα με τον τύπο:



$$\delta p := \rho \cdot g \cdot \delta z$$

Στα σημεία, όμως, που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια της επόμενης σπείρας, η διαφορά πίεσης παραμένει σταθερή αφού η διαφορά ύψους ανάντι και κατάντι του ρευστού παραμένει σταθερή και ίση με  $\Delta h$ . Οπότε η διαφορά πίεσης είναι:

$$\delta p = \rho \cdot g \cdot \delta h$$

Σύμφωνα λοιπόν με όλα τα παραπάνω οι στοιχειώδεις απώλειες όγκου του διακένου προκύπτουν συναρτήσει του  $d\theta$ :

- Στην περίπτωση που το σημείο βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του ρευστού του επόμενου βήματος

$$dV = C_d \cdot h_{\text{diak}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \delta z} \cdot \sqrt{\left(\frac{D_{\text{out}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot d\theta$$

όπου  $h_{\text{diak}}$  το ύψος του διακένου και  $l_s$  το βήμα της σπείρας.

- Στην περίπτωση που το σημείο βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του ρευστού του επόμενου βήματος

$$dV = C_d \cdot h_{\text{diak}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \delta h} \cdot \sqrt{\left(\frac{D_{\text{out}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_s}{2\pi}\right)^2} \cdot d\theta$$

#### Απώλειες όγκου ρευστού σε διάκενο εξαιτίας της κίνησης της σπείρας

Στις απώλειες εξαιτίας της κίνησης της σπείρας το στοιχειώδες πλάτος  $b$  είναι το πλάτος που 'βλέπει' το ρευστό κατά την περιστροφική κίνηση του της εξωτερικής έλικας της διάταξης. Κάθε σημείο της εκτελεί κυκλική κίνηση οπότε το πλάτος που μας ενδιαφέρει είναι στη διάσταση κάθετη στη γραμμική ταχύτητα εξαιτίας περιστροφής. Το στοιχειώδες πλάτος υπολογίζεται μόνο στην οριζόντια διάσταση (στο αντίστροφο πρόβλημα):

$$db = \frac{l_s}{2\pi} \cdot d\theta$$

Η περιστροφική ταχύτητα της έλικας υπολογίζεται

$$U = \omega \cdot \frac{D_{\text{out}}}{2}$$

Οπότε οι στοιχειώδεις απώλειες όγκου προκύπτουν συναρτήσει του  $d\theta$ :

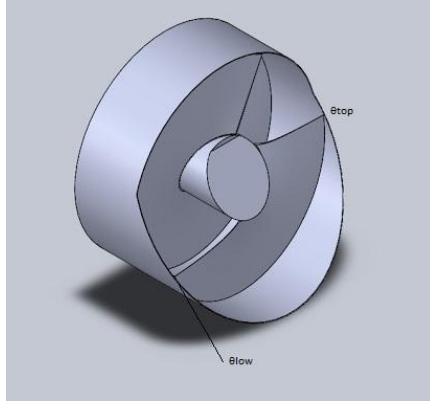
$$dV = h_{\text{diak}} \cdot \omega \cdot \frac{D_{\text{out}}}{4} \cdot \frac{l_s}{2\pi} \cdot d\theta$$

#### Όρια ολοκλήρωσης

Γίνεται προφανές ότι απώλειες διακένου υπάρχουν μόνο στα σημεία της έλικας τα οποία βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια του ρευστού (σχήμα 4.3.). Συνεπώς όρια ολοκλήρωσης κατά  $\theta$  αποτελούν οι γωνίες των σημείων τομής της επιφάνειας του νερού με την εξωτερική έλικα της σπείρας. Έτσι υπολογίζεται με επίλυση της εξίσωσης:

$$\frac{l_s \cdot \theta}{2\pi} \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) - \frac{D_{\text{out}}}{2} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Η λύση ( $\theta_{\text{low}}$ ) στο διάστημα  $[-\pi, 0]$  αποτελεί το κάτω όριο ολοκλήρωσης κατά  $\theta$  ενώ η λύση ( $\theta_{\text{top}}$ ) στο διάστημα  $[0, \pi]$  προφανώς το άνω όριο.



Σχήμα 4.3. Όρια ολοκλήρωσης των απωλειών διακένου κατά  $\theta$ .

#### Υπολογισμός απωλειών όγκου διακένου

Οι συνολικές απώλειες όγκου διακένου υπολογίζονται με ολοκλήρωση των στοιχειωδών απωλειών κάθε σημείου στο μήκος της έλικας κάτω από την επιφάνεια του νερού. Αναλυτικά

$$V = \int_{\theta_{\text{low}}}^{\theta_{\text{top}}} f_L(\theta) d\theta$$

με

$$f_L = C_d \cdot h_{\text{diak}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[ \frac{l_s \cdot \theta}{2\pi} \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) - \frac{D_{\text{out}}}{2} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]} \cdot \sqrt{\left( \frac{D_{\text{out}}}{2} \right)^2 + \left( \frac{l_s}{2\pi} \right)^2} + h_{\text{diak}} \cdot \omega \cdot \frac{D_{\text{out}}}{4} \cdot \frac{l_s}{2\pi}$$

στα σημεία που βρίσκονται πάνω από τη στάθμη της επόμενης σπείρας οπότε ισχύει

$$\cos(\alpha) \cdot \left[ \frac{l_s \cdot \theta}{2\pi} \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) - \frac{D_{\text{out}}}{2} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right] < \frac{-l_s}{\arcsin} \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

ενώ

$$f_L = C_d \cdot h_{\text{diak}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left( \frac{-l_s}{\arcsin} \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) \cdot \cos(\alpha) \right)} \cdot \sqrt{\left( \frac{D_{\text{out}}}{2} \right)^2 + \left( \frac{l_s}{2\pi} \right)^2} + h_{\text{diak}} \cdot \omega \cdot \frac{D_{\text{out}}}{4} \cdot \frac{l_s}{2\pi}$$

στα σημεία που βρίσκονται κάτω από τη στάθμη της επόμενης σπείρας οπότε ισχύει

$$\cos(\alpha) \cdot \left[ \frac{l_s \cdot \theta}{2\pi} \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) - \frac{D_{\text{out}}}{2} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right] > \frac{-l_s}{\arcsin} \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

οπότε προκύπτουν οι συνολικές απώλειες όγκου εξαιτίας του διακένου.

#### 4.2. Θεωρητικός υπολογισμός απωλειών αντίστασης διακένου

Όπως διαπιστώθηκε και προηγουμένως η περιστροφική κίνηση του κοχλία δημιουργεί στην επιφάνεια του διακένου διατμητική τάση αντίθετη με τη φορά της κίνησης. Αυτή, παρόλο που η επιφάνεια του διακένου είναι μικρή, συνεισφέρει σημαντικά στις υδροδυναμικές αντιστάσεις του κοχλία καθώς βρίσκεται σε μεγάλη ακτίνα οπότε η γραμμική ταχύτητα και οι ροπές είναι σημαντικές. Ο υπολογισμός τους βασίζεται στην ολοκλήρωση των στοιχειωδών αντιστάσεων των επιφανειών κατά μήκος της έλικας του κοχλία που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια. Οι απώλειες αντίστασης του διακένου συνεισφέρουν (οπότε αθροίζονται) στις απώλειες υδροδυναμικής αντίστασης κάθε βήματος.

Προφανώς το στοιχειώδες πλάτος  $b$  είναι το πλάτος που 'βλέπει' το ρευστό κατά την περιστροφική κίνηση του της εξωτερικής έλικας της διάταξης. Κάθε σημείο της εκτελεί κυκλική κίνηση οπότε το πλάτος που μας ενδιαφέρει είναι στη διάσταση κάθετη στη γραμμική ταχύτητα εξαιτίας περιστροφής. Το στοιχειώδες πλάτος υπολογίζεται μόνο στην οριζόντια διάσταση (στο αντίστροφο πρόβλημα):

$$db = \frac{l_s}{2\pi} \cdot d\theta$$

Το μήκος  $L$  υπολογίζεται από το μήκος του στοιχειώδους παραλληλόγραμμου που σχηματίζεται και αντιστοιχεί στο ύψος  $db$ . Αυτό με βάση τη γεωμετρία του παραλληλογράμμου και το πάχος της πλάκας της σπείρας προκύπτει γεωμετρικά (σχήμα 4.4). Πιο συγκεκριμένα η εξωτερική έλικα σχηματίζει γωνία ανάλογα με το βήμα της. Αυτή υπολογίζεται:

$$\theta_{lsout} = \text{atan}\left(\frac{l_s}{\pi \cdot D_{out}}\right)$$

και αποτελεί τη γωνία του παραλληλογράμμου. Σε συνδυασμό λοιπόν με το πάχος της πλάκας, που αποτελεί το άλλο ύψος του παραλληλογράμμου, γίνεται δυνατόν να υπολογιστεί το μήκος. Αναλυτικότερα:

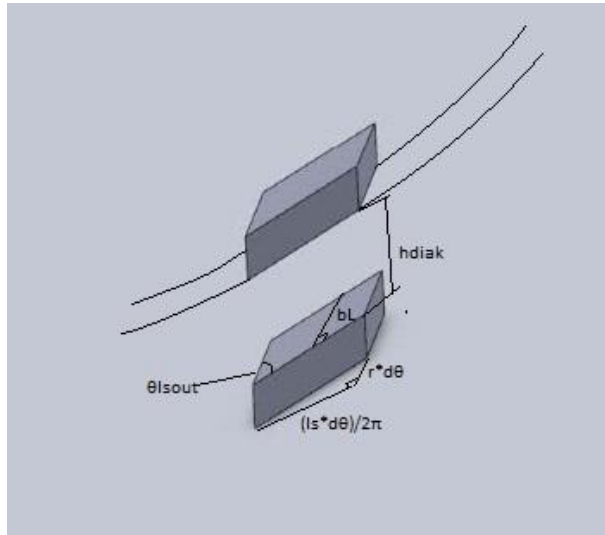
$$L = \frac{b_L}{\sin(\theta_{lsout})}$$

Η ταχύτητα στην εξωτερική έλικα είναι

$$U = \omega \cdot \frac{D_{out}}{2}$$

Οπότε κατά συνέπεια η στοιχειώδης δύναμη είναι:

$$dF = \mu \frac{l_s}{4\pi} \cdot \frac{b_L}{\sin\left(\text{atan}\left(\frac{l_s}{\pi \cdot D_{out}}\right)\right)} \cdot \frac{\omega \cdot D_{out}^2}{h_{diak}} \cdot d\theta$$



**Σχήμα 4.4.** Γεωμετρία στοιχειώδους εμβαδού για τον υπολογισμό της στοιχειώδους αντίστασης διακένου.

### Όρια ολοκλήρωσης

Προφανώς τα όρια ολοκλήρωσης κατά  $\theta$  για την ολοκλήρωση των στοιχειωδών αντιστάσεων, ταυτίζονται με αυτά της περίπτωσης των απωλειών όγκου εξαιτίας του διακένου (σχήμα 4.3). Συνεπώς όρια ολοκλήρωσης κατά  $\theta$  αποτελούν οι γωνίες των σημείων τομής της επιφάνειας του νερού με την εξωτερική έλικα της σπείρας. Έτσι υπολογίζονται με επίλυση της εξίσωσης:

$$\frac{l_s \cdot \theta}{2\pi} \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) - \frac{D_{\text{out}}}{2} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Η λύση ( $\theta_{\text{low}}$ ) στο διάστημα  $[-\pi, 0]$  αποτελεί το κάτω όριο ολοκλήρωσης κατά  $\theta$  ενώ η λύση ( $\theta_{\text{top}}$ ) στο διάστημα  $[0, \pi]$  προφανώς το άνω όριο.

### Υπολογισμός απωλειών αντίστασης διακένου

Οι συνολικές απώλειες όγκου διακένου υπολογίζονται με ολοκλήρωση των στοιχειωδών απωλειών κάθε σημείου στο μήκος της έλικας κάτω από την επιφάνεια του νερού. Αναλυτικά

$$V = \int_{\theta_{\text{low}}}^{\theta_{\text{top}}} f_D(\theta) d\theta$$

με

$$f_D = \mu \frac{l_s}{4\pi} \cdot \frac{b_L}{\sin\left(\text{atan}\left(\frac{l_s}{\pi \cdot D_{\text{out}}}\right)\right)} \cdot \frac{\omega \cdot D_{\text{out}}^2}{h_{\text{diak}}}$$

#### 4.3. Αριθμητική επίλυση απωλειών διακένου

Προκειμένου να υλοποιηθεί ο υπολογισμός των απωλειών διακένου είναι απαραίτητη η χρήση υπολογιστικών μεθόδων. Έτσι με βάση την προηγούμενη θεωρητική επίλυση αναπτύχθηκε κατάλληλος κώδικας υπολογισμού.

Αρχικά γίνεται υπολογισμός των ορίων ολοκλήρωσης βρίσκοντας τα σημεία τομής της επιφάνειας και της εξωτερικής έλικας. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιείται υπορουτίνα αριθμητικής επίλυσης, κατάλληλης εξίσωσης με τη μέθοδο της διχοτόμησης διαστήματος (Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, Αθήνα 2003). Η υπορουτίνα υπολογίζει τη λύση κατάλληλης συνάρτησης στα διαστήματα  $[-\pi/2, 0]$ , για κάτω όριο ολοκλήρωσης και  $[0, \pi/2]$ , για το άνω όριο ολοκλήρωσης.

Με ολοκλήρωση ανάμεσα σε αυτά των συναρτήσεων στοιχειωδών απωλειών όγκου αλλά και στοιχειωδών αντίστασης διακένου είναι δυνατός ο υπολογισμός των συνολικών απωλειών. Για τον υπολογισμό των στοιχειωδών απωλειών όγκου χρησιμοποιείται κατάλληλη συνάρτηση υπολογισμού. Καθώς η συνάρτηση υπολογισμού των απωλειών όγκου μεταβάλλεται, όπως παρουσιάστηκε και παραπάνω ανάλογα με το αν το σημείο της έλικας είναι πάνω από την επιφάνεια της επόμενης σπείρας απαιτείται αντίστοιχος έλεγχος. Προφανώς στον έλεγχο χρησιμοποιείται συνάρτηση υπολογισμού της απόστασης του σημείου από την επιφάνεια του ρευστού. Οι στοιχειώδεις απώλειες αντίστασης διακένου από την άλλη υπολογίζονται από αντίστοιχη συνάρτηση.

Καθώς οι στοιχειώδεις απώλειες ολοκληρώνονται ανάμεσα στα ίδια όρια κατά  $\theta$  ο κώδικας ολοκληρώνει και τις δύο συναρτήσεις ταυτόχρονα με τη μέθοδο Simpson 1/3 (Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Ι. Αναγνωστόπουλος, Γ. Μπεργελές, Αθήνα 2003), δημιουργώντας δύο αθροίσματα, για τις συνολικές απώλειες όγκου και τις συνολικές απώλειες αντίστασης αντίστοιχα.

Προφανώς υπάρχει κατάλληλη συνάρτηση αντιστοίχισης κάθε γωνίας  $\theta$  με το αντίστοιχο  $i$  της μεθόδου ολοκλήρωσης. Για  $i=0$  το  $\theta$  που αντιστοιχεί είναι το κάτω όριο υπολογισμού και για  $i=n$  προφανώς αντιστοιχεί το άνω όριο ολοκλήρωσης.

Ο κώδικας χρησιμοποιεί σαν είσοδο τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κοχλία, χαρακτηριστικά του ρευστού, τη γωνιακή ταχύτητα της διάταξης, την ανάλυση και το σφάλμα του υπολογισμού προκειμένου να υπολογιστούν αριθμητικά οι υδροδυναμικές απώλειες εξαιτίας της σπείρας. Η ανάλυση επηρεάζει τον αριθμό των υποδιαστημάτων της ολοκλήρωσης ενώ το σφάλμα επηρεάζει την ακρίβεια της λύσης στην εξίσωση υπολογισμού των ορίων. Ο κώδικας επιστρέφει σαν έξοδο την παροχή όγκου των απωλειών διακένου καθώς και τη ροπή υδροδυναμικής αντίστασης του διακένου κάθε βήματος.

## 5. Βελτιστοποίηση γεωμετρικών χαρακτηριστικών κοχλίας

Με βάση τους παραπάνω κώδικες υπολογισμού απωλειών όγκου και αντιστάσεων είναι προφανές ότι προκύπτει κώδικας ο οποίος υπολογίζει τις συνολικές απώλειες της διάταξης του κοχλίας για συγκεκριμένο υδραυλικό ύψος ρευστού χρησιμοποιώντας προφανώς σαν είσοδο τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης και την ταχύτητα περιστροφής του κοχλίας. Με την ίδια είσοδο ο κώδικας υπολογίζει επίσης την παροχή όγκου της διάταξης αλλά και το αν ο κοχλίας δεν παράγει έργο εξαιτίας της περιστροφής του νερού μέσα στη διάταξη. Σε πραγματικά προβλήματα το υδραυλικό ύψος του ρευστού και η παροχή όγκου προς εκμετάλλευση είναι δεδομένη οπότε έχει νόημα η αναζήτηση ενός συνδυασμού γεωμετρικών χαρακτηριστικών ο οποίος ελαχιστοποιεί τις απώλειες στις συγκεκριμένες συνθήκες.

Πρόκειται για πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός στόχου με περιορισμούς, η λύση του οποίου επιδιώκεται με χρήση κατάλληλου λογισμικού βελτιστοποίησης (εξελικτικού αλγορίθμου), Evolutionary Algorithm SYstem.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι βασίζονται στη θεωρία της γενετικής για την αναζήτηση της λύσης του προβλήματος. Έτσι διατηρούν έναν πληθυσμό κωδικοποιημένων πιθανών λύσεων και υπολογίζουν την αντικειμενική συνάρτηση για κάθε άτομο (λύση) του δημιουργούμενου πληθυσμού. Εξελίσσουν τον πληθυσμό εφαρμόζοντας γενετικές διαδικασίες που επηρεάζονται από την επίδοση:

- Διαδικασίες επιλογής
- Διαδικασίες αναπαραγωγής (διασταύρωση)
- Διαδικασίες μετάλλαξης

Δημιουργούν έτσι κάθε φορά νέο πληθυσμό που αντικαθιστά τον προηγούμενο με βάση την επίδοση επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία μέχρι να βρεθεί η λύση.

Ο γενετικός αλγόριθμος διαθέτει τρεις λειτουργίες:

α) Επιλογή: επιλέγει με κάποιο τρόπο τα «καταλληλότερα» μέλη του πληθυσμού.

β) Διασταύρωση: συνδυάζει τα στοιχεία δύο χρωμοσωμάτων γονέων για να δημιουργήσει δύο νέους απογόνους ανταλλάσσοντας αντίστοιχα κομμάτια από τους γονείς.

γ) Μετάλλαξη: αλλάζει αυθαίρετα ένα ή περισσότερα γονίδια ενός συγκεκριμένου χρωμοσώματος

Έτσι, ένας γενετικός αλγόριθμος αποτελείται από:

- Γενετική αναπαραγωγή
- Τρόπο δημιουργίας ενός αρχικού πληθυσμού
- Αντικειμενική συνάρτηση αξιολόγησης
- Γενετικούς τελεστές
- Τιμές για τις διάφορες παραμέτρους

Σαφώς ο κώδικας που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση αξιολόγησης η οποία συνδέεται με το λογισμικό του εξελικτικού αλγορίθμου. Η λύση που προκύπτει μετά το τρέξιμο του αλγορίθμου προφανώς αποτελεί αποτέλεσμα που πλησιάζει στις βέλτιστες τιμές.

## 5.1.Σύνδεση λογισμικού με κώδικα υπολογισμού

Επειδή πρόκειται για πρόβλημα ενός στόχου αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι έχουμε την τιμή 1 στο κελί «*Number of objectives*». Στη συνέχεια καταχωρούνται τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού καθώς και τα bits που δεσμεύουν για τη δυαδική κωδικοποίηση.

### Μεταβλητές Σχεδιασμού

Μεταβλητή σχεδιασμού στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρείται κάθε γεωμετρικό χαρακτηριστικό που μπορεί να επηρεάσει την απόδοση της διάταξης. Αυτά παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα σε συνδυασμό με τα όρια βελτιστοποίησης που επιλέχθηκαν (άνω και κάτω) είτε μετά από δοκιμές, είτε εξαιτίας κατασκευαστικών περιορισμών.

<b>Μεταβλητή</b>	<b>Άνω όριο</b>	<b>Κάτω όριο</b>
Βήμα σπείρας (mm)	700	2400
Κλίση διάταξης (deg)	20	55
Διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου (mm)	1000	2500
Διάμετρος εσωτερικού κυλίνδρου (mm)	300	1000
Ύψος ρευστού στο μηδενικό σημείο (mm)	300	1300
Ταχύτητα Περιστροφής κοχλίας (rev/min)	20	80
Αριθμός αρχών σπείρας	1	7

Το λογισμικό βελτιστοποίησης χρησιμοποιεί τιμές των μεταβλητών ανάμεσα στα παραπάνω όρια, υπολογίζοντας την αντικειμενική τους συνάρτηση. Προκειμένου να γίνει αυτό, παράγει αρχείο task.dat το οποίο πρέπει να διαβαστεί από τον κώδικα υπολογισμού και να υπολογίσει με βάση τις τιμές του, την αντικειμενική συνάρτηση αλλά και περιορισμούς ώστε αυτοί, να ελεγχθούν στη συνέχεια. Ο κώδικας αποθηκεύει τα αποτελέσματα στο αρχείο results.dat.

### Περιορισμοί σχεδιασμού

Σε κάθε πραγματικό πρόβλημα υφίσταται περιορισμοί, γεωμετρικοί, λειτουργικοί αλλά και περιορισμοί που τίθενται στα δεδομένα του προβλήματος. Οι περιορισμοί αυτοί πρέπει να εισαχθούν στο λογισμικό βελτιστοποίησης ώστε η λύση του προβλήματος να είναι υπαρκτή.

Οι περιορισμοί σχεδιασμού στο λογισμικό βελτιστοποίησης διατυπώνονται μόνο ανισωτικά ως άνω όριο τιμής συνάρτησης. Έτσι το πρόγραμμα ελέγχει κατάλληλες τιμές που προκύπτουν από τον κώδικα υπολογισμού, και σε περίπτωση που υπερβαίνουν τιμές που τίθενται στο λογισμικό βελτιστοποίησης, αυτό τις 'τιμωρεί' με σχεδόν άπειρη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση απορρίπτοντας, στην ουσία, τη λύση εκείνη. Γίνεται προφανές ότι καθίσταται απαραίτητη η διατύπωση οποιουδήποτε περιορισμού με τρόπο κατάλληλο (ως ανισωτικού) ώστε να γίνεται 'αντιληπτός' από το πρόγραμμα. Αυτό επιτυγχάνεται με τις εξής μετατροπές:

-Στην περίπτωση των ισοτικών περιορισμών, στους οποίους επιδιώκεται η εξίσωση μιας συνάρτησης με συγκεκριμένη τιμή, θεωρώντας σα συνάρτηση ελέγχου την απόλυτη τιμή της διαφοράς της συνάρτησης με την τιμή. Έτσι όταν η συνάρτηση ελέγχου γίνει μικρότερη ενός θετικού αριθμού  $\epsilon$  τον οποίο θέτουμε στους περιορισμούς, οι δύο τιμές θεωρούνται ίσες

-Στην περίπτωση του άνω ορίου προφανώς αρκεί να τεθεί η τιμή του περιορισμού στο λογισμικό βελτιστοποίησης, οπότε στην περίπτωση που αυτό ξεπεραστεί, η λύση απορρίπτεται.

-Ενώ στην περίπτωση του κάτω ορίου ελέγχεται η αντίθετη της συνάρτησης. Με τον τρόπο αυτό το κάτω όριο μετατρέπεται σε άνω.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι περιορισμοί που τίθενται είναι οι εξής:

-Εξίσωση παροχής όγκου ρευστού με  $1\text{m}^3/\text{s}$  σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος

-Έλεγχος για περιστροφή του ρευστού γύρω από τη σπείρα. Προκειμένου να μην υπάρχει περιστροφή του ρευστού γύρω από τη σπείρα θα πρέπει η στάθμη του να μην ξεπερνάει το ανώτατο σημείο του εσωτερικού κυλίνδρου. Αυτό ελέγχεται με την ανίσωση όπως διατυπώθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο

$$\frac{-I_s}{2} \cdot \tan(180\text{deg} - \alpha) - \left( \frac{D_{\text{out}}}{2} - h \right) < \frac{D_{\text{in}}}{2}$$

-Έλεγχος της εσωτερικής διαμέτρου ώστε να είναι μικρότερη της εξωτερικής και

Οι συναρτήσεις ελέγχου των παραπάνω περιορισμών είναι

Περιορισμός	Συνάρτηση Ελέγχου	Όριο Ελέγχου
$\text{Vol}=1\text{m}^3/\text{s}$	$\text{ABS}(\text{Volume}-1)$	0.005
No Cir	$I_s/2 \cdot \text{TAN}(3.1415-\alpha) - D_{\text{out}} + h - D_{\text{in}}/2$	-0.01
$D_{\text{out}} > D_{\text{in}}$	$D_{\text{in}} - D_{\text{out}}$	-0.01

#### Λήψη αποτελεσμάτων κώδικα υπολογισμού

Ο κώδικας αποθηκεύει τα αποτελέσματα σε αρχείο της μορφής results.dat. Προκειμένου όμως να επεξεργαστούν από το λογισμικό βελτιστοποίησης πρέπει να διαχωριστούν σε αποτελέσματα αντικειμενικής συνάρτησης και περιορισμών και να αποθηκευτούν σε αρχεία data.res και data.cns αντίστοιχα. Τα αρχεία αυτά αναγνωρίζει το λογισμικό.

Τα παραπάνω επιτυγχάνονται με τη δημιουργία κατάλληλου προγράμματος postprocessor.exe το οποίο λαμβάνει το αρχείο results.dat που προκύπτει από το πρόγραμμα υπολογισμού και δημιουργεί διαβάζοντας τις κατάλληλες σειρές τα αρχεία task.res και task.cns.

Τέλος καθίσταται αναγκαία η δημιουργία κατάλληλου αρχείου τύπου Batch το οποίο υπαγορεύει τον τρόπο εκτέλεσης των προγραμμάτων. Το αρχείο αυτό είναι της μορφής:

```
@echo off
erase results.dat
VathmApod.exe >nul
postprocessor.exe >nul
```

Η πρώτη γραμμή αποτρέπει την «ενοχληση» της οθόνης μας με το αποτέλεσμα των κλήσεων που ακολουθούν. Η δεύτερη γραμμή μήκινε για να σβήσει το προηγούμενο αρχείο results.dat που δημιούργησε το εκτελέσιμο VathmApod.exe, την προηγούμενη φορά που εκτελέστηκε. Έτσι, αν τώρα αποτύχει, να μην χρησιμοποιήσει λάθος (προηγούμενο) αρχείο αποτελεσμάτων και μπερδευτούν λύσεις και αποτελέσματα. Η σύνταξη κώδικας.exe>nul σημαίνει να χρησιμοποιηθεί ως τυπική έξοδος του προγράμματος τα προσωρινό αρχείο nul (το



οποίο σβήνεται με το τέλος της εντολής) ενώ κατά την εκτέλεσή της δεν εμφανίζει αποτελέσματα στην οθόνη του χρήστη. Δεν είναι απαραίτητη η διαγραφή των αρχείων task.res και task.cns η οποία γίνεται αυτόματα από το λογισμικό βελτιστοποίησης EASY.

Στο λογισμικό τέλος καταχωρείται το task.bat αρχείο στο tab 'Evaluation scripts', ώστε να εκτελέσει ο EASY τα προγράμματα με την κατάλληλη σειρά και να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα στα κατάλληλα αρχεία.

### Παράμετροι εξέλιξης του εξελικτικού αλγορίθμου

Προκειμένου να καταστεί δυνατή η αναζήτηση της λύσης της εξίσωσης πρέπει να δοθούν κατάλληλες τιμές στις ρυθμίσεις σύγκλισης. Έτσι αρχικά θα αναζητηθεί η λύση σε ένα μεγάλο εύρος με αργή σύγκλιση ώστε να εκτιμήσουμε την περιοχή στην οποία εντοπίζεται αυτή. Στη συνέχεια περιορίζουμε το εύρος των μεταβλητών σχεδιασμού στην περιοχή της λύσης κατάλληλα ώστε ο αλγόριθμος να συγκλίνει γρήγορα στην τιμή αυτή με ακρίβεια.

Έτσι αναλυτικότερα, αρχικά επιλέγουμε ευρεία όρια στις μεταβλητές σχεδιασμού. Στις γενικές παραμέτρους του λογισμικού επιλέγουμε 2 ή περισσότερα demes, ώστε να καταστεί δυνατός ο έλεγχος όλων των πιθανών λύσεων, απαλείφοντας την πιθανότητα να παραλειφθεί κάποια περιοχή λύσεων. Έτσι το λογισμικό βελτιστοποίησης επιλύει το πρόβλημα με τη μέθοδο Distributed Evolutionary Algorithm. Χρησιμοποιούμε υψηλό αριθμό Parents και σχετικά χαμηλό αριθμό children, ώστε ο αλγόριθμος να συγκλίνει γρηγορότερα στην κατάλληλη περιοχή. Τέλος επιλέγουμε σημαντική πιθανότητα μεταμόρφωσης ώστε ο αλγόριθμος να είναι αρκετά εξερευνητικός. Η αρχικοποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται με γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

Αφού εντοπίσουμε την περιοχή της λύσης μεταβάλλουμε τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού κατάλληλα ώστε να προχωρήσει ο υπολογισμός και η σύγκλιση του εξελικτικού αλγορίθμου στη λύση γρηγορότερα. Επιλέγουμε ένα Deme προκειμένου ο αλγόριθμος να συγκλίνει γρηγορότερα αλλά χρησιμοποιούμε χαμηλό αριθμό parents και υψηλό αριθμό children.

### 5.2. Επίλυση Προβλήματος

Με χρήση των παραπάνω παραμέτρων καθίσταται δυνατή η επίλυση του προβλήματος για συγκεκριμένα δεδομένα υδραυλικού ύψους ρευστού και παροχής όγκου. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε πρόβλημα με ύψος ρευστού 1m και παροχή όγκου  $1\text{m}^3/\text{s}$ . Μετά από ορισμένο αριθμό επαναλήψεων το πρόγραμμα καταλήγει στο εξής αποτέλεσμα.

<b>Χαρακτηριστικά βέλτιστου κοχλία (H=1m, Q=1m<sup>3</sup>/s)</b>	
Βήμα σπείρας (mm)	2292.375
Κλίση διάταξης (deg)	23.0303
Διάμετρος εξωτερικού κυλίνδρου (mm)	2032.3755
Διάμετρος εσωτερικού κυλίνδρου (mm)	611.1436
Ύψος ρευστού στο μηδενικό σημείο (mm)	806.256
Ταχύτητα Περιστροφής κοχλία (rev/min)	27.90934
Αριθμός αρχών σπείρας	3

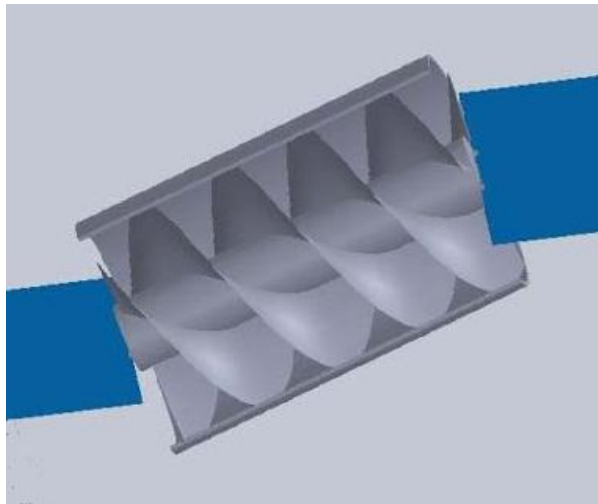
Οι συνολικές υδροδυναμικές απώλειες ισχύος κοχλία με τα παραπάνω χαρακτηριστικά υπολογίζονται σε  $P_{\text{loss}}=577\text{ W}$ . Είναι προφανές πως αφού πρόκειται για κοχλία βέλτιστων χαρακτηριστικών, οι απώλειες αυτές είναι οι ελάχιστες δυνατές. Οπότε ο αντίστοιχος βαθμός απόδοσης της διάταξης προκύπτει ως ο λόγος της παραγόμενης προς τη διαθέσιμη ισχύ της υδατόπτωσης σύμφωνα με τον τύπο

$$\eta_h = 1 - \frac{P_{\text{loss}}}{Q \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta h}$$

όπου  $Q$  η ονομαστική παροχή του κοχλίου,  $\Delta h$  το ονομαστικό ύψος υδατόπτωσης,  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού και  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Αυτός υπολογίζεται ίσος με  $\eta_h=0.941$ .

Η μορφή της διάταξης παρουσιάζεται στο σχήμα 5.1.



**Σχήμα 5.1.** Σχηματική παράσταση κοχλίου βέλτιστης απόδοσης για  $H=1\text{m}$  και  $Q=1\text{m}^3/\text{s}$

Γίνεται προφανές ότι αλλαγή κάθε παραμέτρου μεταβάλλει πλήθος χαρακτηριστικών της υδροδυναμικής του κοχλίου αλλά είναι εύκολο κανείς να παρατηρήσει βασικές σχέσεις εξάρτησης ορισμένων παραμέτρων με χαρακτηριστικά της ροής.

Παρατηρούμε ότι η ελαχιστοποίηση των απωλειών εξαρτάται έντονα από την περιστροφική ταχύτητα. Γίνεται προφανές ότι ο αλγόριθμος επιλύει το πρόβλημα ελαχιστοποιώντας την ταχύτητα αυτή στοχεύοντας στην επίτευξη της ζητούμενης παροχής μεταβάλλοντας τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κοχλίου.

Πιο αναλυτικά καθώς η ταχύτητα περιστροφής ελαττώνεται, το βήμα και η εξωτερική διάμετρος είναι απαραίτητο να αυξηθούν, προκειμένου κάθε βήμα να περιέχει μεγαλύτερο όγκο ρευστού επιτυγχάνοντας αργόστροφη λειτουργία. Προφανώς το βήμα δεν είναι δυνατόν να γίνει μεγαλύτερο του μήκους της διάταξης καθώς είναι απαραίτητο για τη λειτουργία της διάταξης να υπάρχει ολοκληρωμένο βήμα. Ταυτόχρονα, βέβαια, η αύξηση του βήματος οδηγεί σε αύξηση των απωλειών διακένου καθώς αυξάνεται εξαιτίας της διαφοράς ύψους στάθμης η διαφορική πίεση ανάμεσα στα διαδοχικά βήματα.

Αύξηση της κλίσης της διάταξης οδηγεί σε μείωση των απωλειών αντίστασης καθώς μειώνεται το μήκος της διάταξης οπότε και ο αριθμός των βημάτων αλλά σε αύξηση των απωλειών όγκου διακένου καθώς αυξάνεται η διαφορική πίεση στα διαδοχικά βήματα.

Αντίθετα αύξηση του αριθμού των αρχών οδηγεί σε αύξηση των απωλειών αντίστασης αλλά μείωση των απωλειών όγκου εξαιτίας του διακένου για τον ίδιο λόγο.

Τέλος αύξηση της εσωτερικής διαμέτρου οδηγεί σε δυνατότητα μεγαλύτερου ύψους, οπότε η πλήρωση του κοχλίου γίνεται σε μεγαλύτερο ποσοστό χωρίς να αυξάνεται ο αριθμός των αρχών ή να περιορίζεται το μήκος του βήματος οπότε περιορίζεται η διάμετρος του κοχλίου αλλά αυξάνει ταυτόχρονα και τις απώλειες αντίστασης του εσωτερικού σωλήνα και μειώνει τον περιεχόμενο όγκο ρευστού σε κάθε βήμα.

Ο αλγόριθμος επιδιώκει την εύρεση κατάλληλων παραμέτρων για την ελαχιστοποίηση των απωλειών της διάταξης.

### **5.3. Έλεγχος απόδοσης σε διαφορετικές τιμές της παροχής και ύψους**

Έχοντας υπολογίσει τη βέλτιστη λύση για τη συγκεκριμένη παροχή και ύψος νερού καταλήγουμε σε γεωμετρία κοχλίου η οποία ελαχιστοποιεί τις απώλειες. Είναι όμως σημαντικό σε αυτό το σημείο να γίνει έλεγχος της απόδοσης της διάταξης σε διαφορετικές τιμές παροχής και ύψους κοντά πάντα στο δοθέν σημείο του προβλήματος. Θεωρώντας ότι η διάταξη διαθέτει μείωση, και κατά συνέπεια ο αριθμός των στρωφών παραμένει σταθερός, αλλά και η γεωμετρία της διάταξης θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του κοχλίου στην αλλαγή αυτή.

Πιο αναλυτικά θεωρούμε ότι μεταβάλλεται το ύψος της στάθμης της άνω δεξαμενής, οπότε κατά συνέπεια και το ύψος του ρευστού στον κοχλίο, το οποίο οδηγεί σε αλλαγή της παροχής όγκου του ρευστού. Είναι σαφές ότι για μεγάλες αλλαγές του ύψους του ρευστού είναι απαραίτητο ο σχεδιασμός του κοχλίου να είναι κατάλληλος ώστε είτε το άνω άκρο να ανυψώνεται αλλάζοντας τη γωνία της διάταξης και σαφώς και το ύψος του ρευστού αφού σε διαφορετική περίπτωση το ρευστό θα περιστρεφόταν γύρω από τη σπείρα.

Είναι προφανές ότι επιλύουμε το πρόβλημα θεωρώντας σταθερές όλες τις μεταβλητές σχεδιασμού εκτός της στάθμης του ρευστού στο εσωτερικό του κοχλίου. Έτσι στην περίπτωση που η στάθμη του ρευστού είναι χαμηλότερη της ονομαστικής η παροχή όγκου είναι μικρότερη του  $1\text{m}^3/\text{s}$  ενώ στην περίπτωση που είναι υψηλότερη η παροχή όγκου είναι μεγαλύτερη. Σαφώς πέρα από την παροχή όγκου μεταβάλλονται και οι υδροδυναμικές απώλειες της διάταξης

Θα εξεταστεί η ενέργεια που παράγει ο κοχλίας στο νέο ύψος στάθμης, καθώς αλλάζει τόσο η παροχή όσο και το ύψος του ρευστού. Προφανώς πρέπει να εξεταστούν οι υδροδυναμικές απώλειες προκειμένου να υπολογίσουμε το νέο βαθμό απόδοσης της διάταξης. Είναι σημαντικό να τονιστεί πως στην περίπτωση στην οποία η στάθμη του ρευστού γίνεται μεγαλύτερη ο αριθμός των βημάτων και η κλίση του κοχλίου παραμένουν σταθερά οπότε δεν γίνεται εκμετάλλευση του επιπλέον ύψους υδατόπτωσης και κατά συνέπεια η παραγόμενη ισχύς θα υπολογιστεί με αφαίρεση των απωλειών από την ισχύ υδατόπτωσης του ονομαστικού ύψους υδατόπτωσης  $H$  (1m) και η διαθέσιμη ισχύς του νέου ύψους.

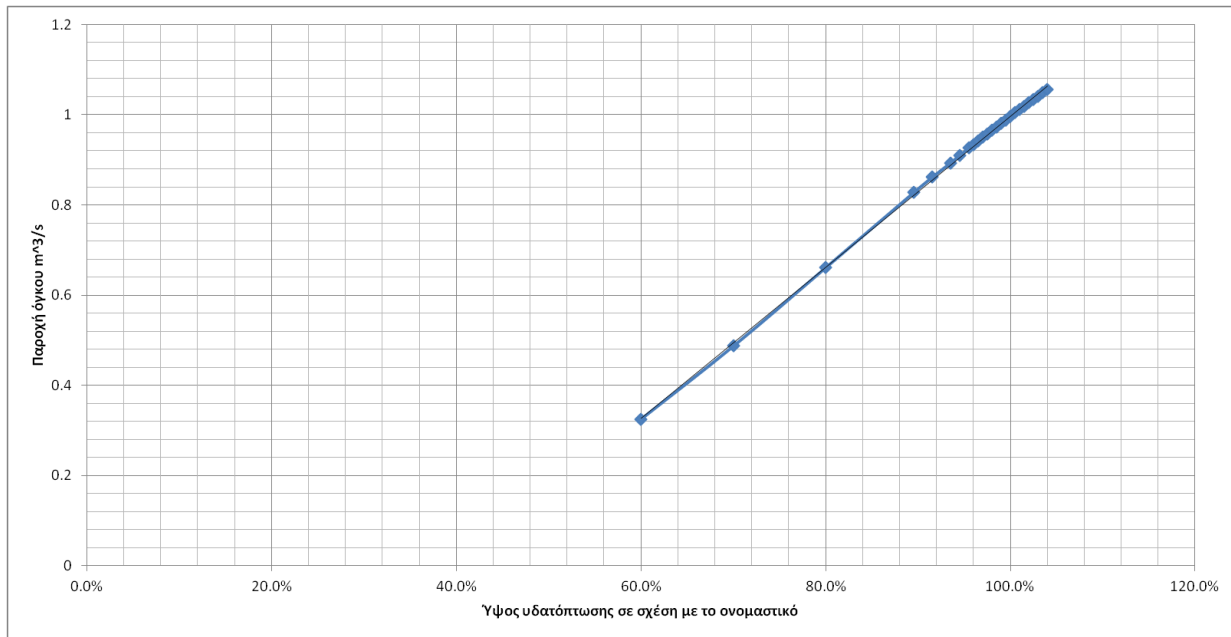
Η αλλαγή στο υδραυλικό ύψος του ρευστού οδηγεί σε αλλαγή στο ύψος του ρευστού στο εσωτερικό του κοχλίου. Πιο συγκεκριμένα με αλλαγή του υδραυλικού ύψους του ρευστού κατά  $\Delta H$  το ύψος  $h$  του ρευστού στο εσωτερικό του κοχλίου γίνεται:

$$h_{\text{new}} = h + \frac{\Delta H}{\cos(\alpha)}$$

Τρέχουμε το πρόγραμμα υπολογισμού με τα γεωμετρικά στοιχεία που υπολογίστηκαν, για τη βελτιστοποίηση της λύσης, χρησιμοποιώντας το νέο ύψος του ρευστού στο εσωτερικό του κοχλίου. Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι είναι απαραίτητος ο έλεγχος της διάταξης για λειτουργία καθώς σε περίπτωση που το ύψος του ρευστού αυξηθεί σημαντικά υπάρχει η περίπτωση κυκλοφορίας του στο εσωτερικό της διάταξης χωρίς την παραγωγή έργου. Επίσης σε περίπτωση πολύ χαμηλής στάθμης εύκολα αποδεικνύεται ότι εξαιτίας της κλίσης της διάταξης δεν

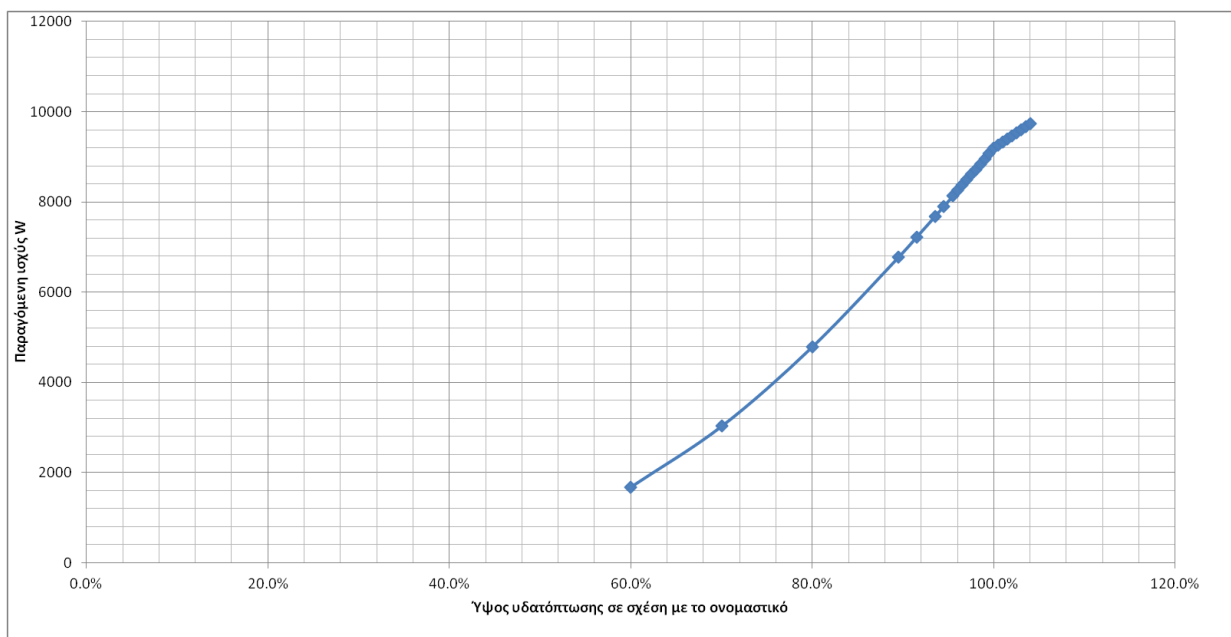
εισέρχεται ρευστό στον κοχλία οπότε παύει να λειτουργεί. Για το λόγο αυτό η στάθμη θα ελεγχθεί για πτώση έως 40% της ονομαστικής. Έτσι προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα :

Διάγραμμα παροχής όγκου συναρτήσει της μεταβολής του ύψους υδατόπτωσης σε σχέση με το ονομαστικό



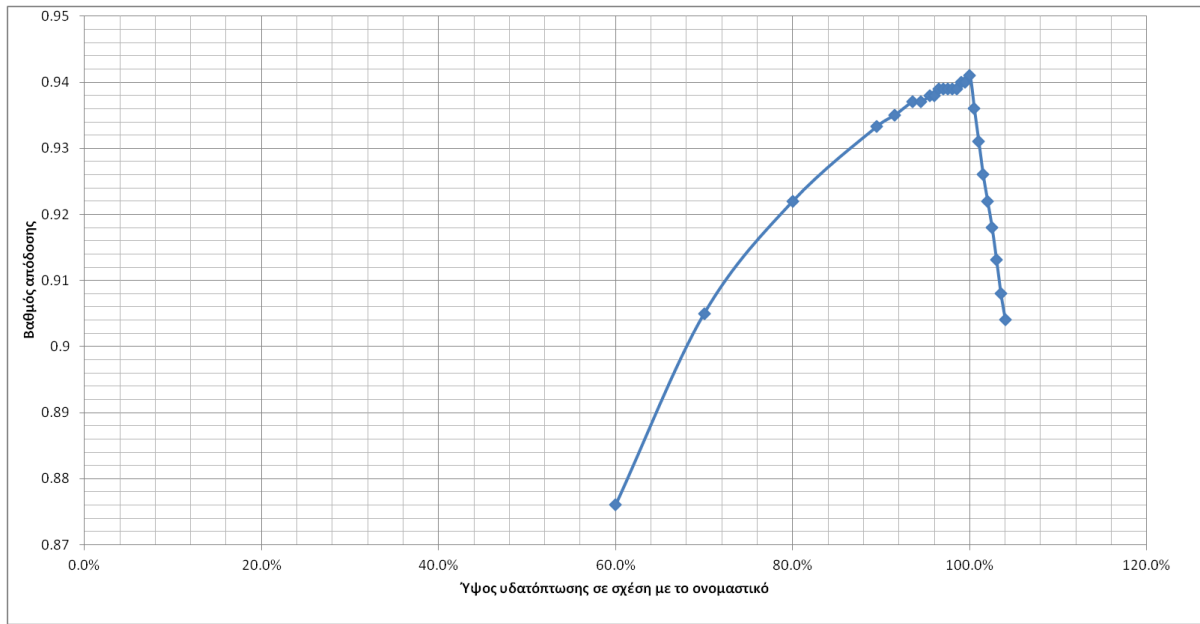
Από το διάγραμμα φαίνεται πως η μεταβολή της παροχής του όγκου συναρτήσει της μεταβολής του ύψους της στάθμης είναι σχεδόν γραμμική στην περιοχή τιμών που μελετάμε, γεγονός που ερμηνεύεται από τη γεωμετρία της διάταξης σε αυτές τις τιμές στάθμης.

Διάγραμμα παραγόμενης ισχύος συναρτήσει της μεταβολής του ύψους υδατόπτωσης σε σχέση με το ονομαστικό



Στο διάγραμμα της παραγόμενης ισχύος συναρτήσει της μεταβολής του ύψους υδατόπτωσης παρατηρείται μια σχετικά ομαλή μορφή καμπύλης παραγόμενης ισχύος με εξαίρεση το σημείο ονομαστικής λειτουργίας στο οποίο παρατηρείται μεταβολή της κλίσης του διαγράμματος. Αυτό συμβαίνει γιατί πέρα από το σημείο αυτό η διάταξη δεν εκμεταλλεύεται όλο το ύψος υδατόπτωσης του ρευστού αλλά μόνο το ονομαστικό ύψος για το οποίο σχεδιάστηκε. Έτσι ο βαθμός απόδοσης της μεταβάλλεται.

#### Διάγραμμα βαθμού απόδοσης διάταξης συναρτήσει του ύψους υδατόπτωσης σε σχέση με το ονομαστικό



Στο τελευταίο διάγραμμα παρουσιάζεται ο βαθμός απόδοσης της διάταξης συναρτήσει της μεταβολής του ύψους υδατόπτωσης. Όπως και στο προηγούμενο διάγραμμα μετά την ονομαστική παροχή παρατηρείται σημαντική πτώση της απόδοσης της διάταξης εξαιτίας της μη εκμετάλλευσης του συνολικού υδροστατικού ύψους. Είναι πάντως γεγονός πως ο βαθμός απόδοσης διατηρείται σε πολύ υψηλά επίπεδα σε όλο το εύρος του ύψους στάθμης που μελετάται.

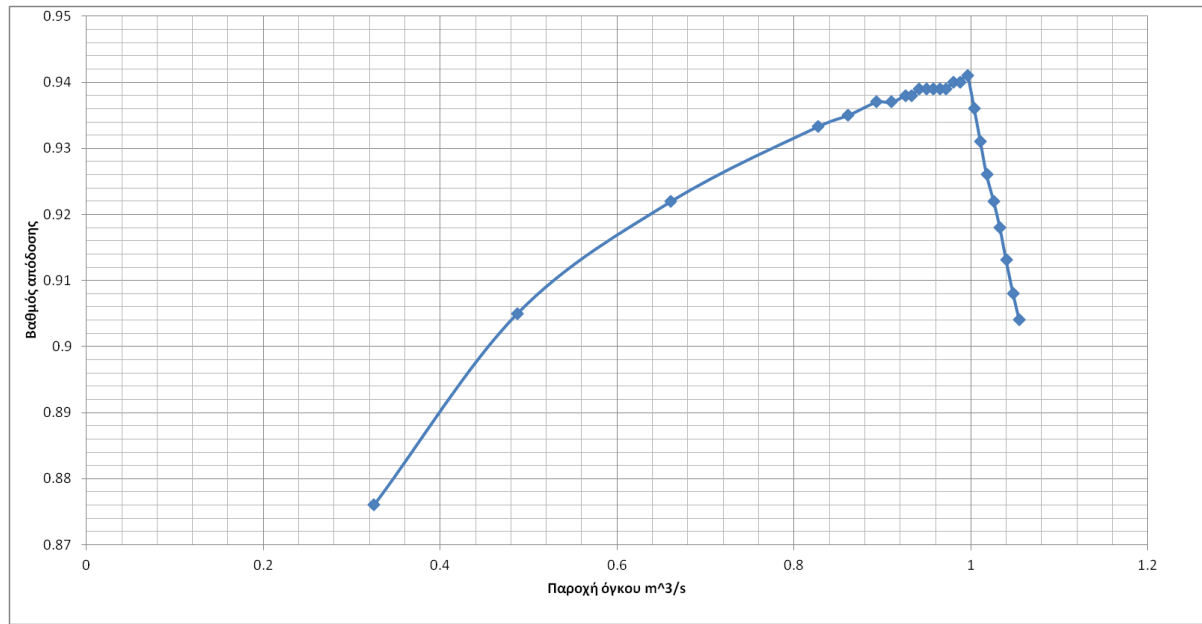
Είναι δυνατή η εκμετάλλευση του επιπλέον ύψους υδατόπτωσης με μεταβολή της κλίσης της διάταξης αλλά καθώς ο βαθμός απόδοσης παραμένει υψηλός ακόμα και χωρίς την εκμετάλλευση του επιπλέον ύψους και το κόστος της κατασκευής διάταξης με μεταβαλλόμενη κλίση είναι υψηλό τέτοιος σχεδιασμός δεν είναι αποδοτικός.

Με συνδυασμό των παραπάνω διαφραγμάτων προκύπτουν οι χάρτες λειτουργίας της μηχανής οι οποίοι παρουσιάζουν την παραγόμενη ισχύ, και το βαθμό απόδοσης διάταξης με ονομαστικά χαρακτηριστικά  $H=1\text{m}$  και  $Q=1\text{m}^3/\text{s}$  ανάλογα με την παροχή. Προφανώς τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και η ταχύτητα περιστροφής παραμένουν σταθερά.

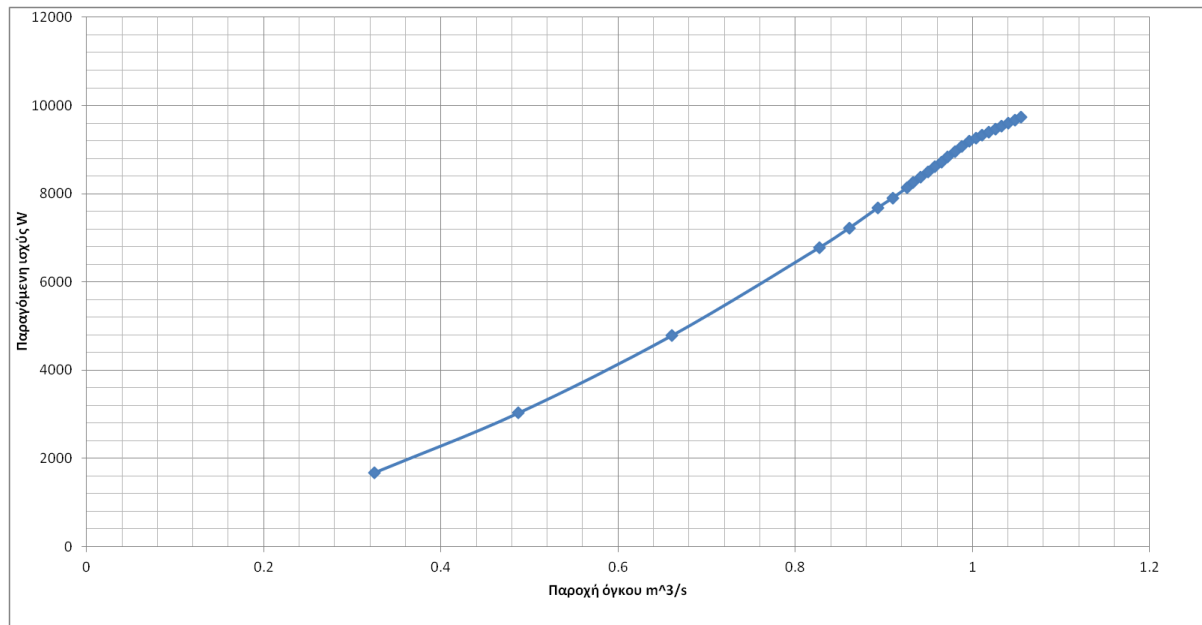
Από τα παρακάτω διαγράμματα συμπεραίνεται εύκολα πως ο βαθμός απόδοσης της διάταξης του κοχλία του Αρχιμήδη διατηρείται πολύ υψηλός για πολύ μεγάλο εύρος παροχής καθιστώντας περιττή την ανάγκη ρύθμισης της μηχανής ακόμα και σε έντονες αλλαγές των χαρακτηριστικών ροής.

## Χάρτης Λειτουργίας

### Διάγραμμα βαθμού απόδοσης διάταξης συναρτήσει της παροχής όγκου



### Διάγραμμα παραγόμενης ισχύος συναρτήσει της παροχής όγκου



## **6. Συμπεράσματα-Μελλοντικές Εφαρμογές- Εξέλιξη της μελέτης**

### **6.1.Συμπεράσματα**

Παρατηρούμε ότι ο βαθμός απόδοσης της διάταξης είναι υψηλός. Το μήκος παρόλα αυτά της διάταξης περιορίζεται από τεχνικούς περιορισμούς. Μεγάλο μήκος διάταξης οδηγεί προφανώς σε έντονη κάμψη και φορτία, τόσο στις εδράσεις όσο και στον κοχλία. Κατά συνέπεια το ύψος υδατόπτωσης στο οποίο μπορεί να γίνει εκμετάλλευση με μία διάταξη τύπου κοχλία του Αρχιμήδη περιορίζεται από το μήκος της διάταξης. Σαφώς, βέβαια, μπορεί να γίνει εκμετάλλευση οποιουδήποτε ύψους υδατόπτωσης με χρήση διαδοχικών διατάξεων. Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι εξαιτίας των απωλειών εισόδου και εξόδου με την αύξηση του ύψους υδατόπτωσης που εκμεταλλεύεται η διάταξη αυξάνεται ο βαθμός απόδοσης της.

Από τα διαγράμματα της διάταξης, ακόμα, γίνεται προφανές ότι ο βαθμός απόδοσης της παραμένει υψηλός και κοντά στον ονομαστικό για πολύ μεγάλο εύρος παροχής. Συγκεκριμένα η διάταξη διατηρεί βαθμό υδροδυναμικής απόδοσης μεγαλύτερο του 85% σε εύρος υδροστατικού ύψους από 60% έως το 105% του ονομαστικού. Το ύψος αυτό αντιστοιχεί σε παροχή 25% έως 105% της ονομαστικής παροχής. Οπότε για εύρος παροχής από το 25% ως το 105% της ονομαστικής η απόδοση παραμένει υψηλή. Το χαρακτηριστικό αυτό καθιστά τη διάταξη κατάλληλη για εκμετάλλευση υδατόπτωσης σε σημεία στα οποία η παροχή δεν είναι σταθερή.

Οι στροφές λειτουργίας της διάταξης είναι ιδιαίτερα χαμηλές, γεγονός που οδηγεί σε περιορισμένες φθορές στα κινητά μέρη και περιορισμένες ανάγκες συντήρησης. Από την άλλη όμως καθίσταται απαραίτητη η χρήση κατάλληλης διάταξης μετάδοσης προκειμένου να μπορεί να συνδεθεί με ασύγχρονη ή σύγχρονη γεννήτρια. Ο λόγος της αύξησης που απαιτείται είναι ιδιαίτερα μεγάλος, της τάξης του 10 ή 20, γεγονός που οδηγεί σε σημαντικές απώλειες μετάδοσης μειώνοντας έτσι κατά συνέπεια τον ολικό βαθμό απόδοσης της διάταξης.

### **6.2.Μελλοντικές εφαρμογές**

Οι συμβατικοί στρόβιλοι που χρησιμοποιούνται αυτή τη στιγμή απαιτούν σχεδιασμό ανάλογα με την κάθε εφαρμογή από τον οποίο εξαρτάται έντονα ο βαθμός απόδοσης. Κατά συνέπεια κατασκευάζονται για συγκεκριμένο ύψος υδατόπτωσης και παροχή κάθε φορά γεγονός που αυξάνει σημαντικά το κόστος τους ενώ απαιτούν σημαντικά έργα ταμείωσης και υδροληψίας. Επίσης ο βαθμός απόδοσης τους σε μικρά ύψη υδατόπτωσης είναι περιορισμένος. Έτσι οι συμβατικοί στρόβιλοι δεν ενδείκνυται για την εκμετάλλευση μικρών υδατοπτώσεων χαμηλής ισχύος καθώς το κόστος κατασκευής τους είναι δυσανάλογο της οικονομικής τους απόδοσης.

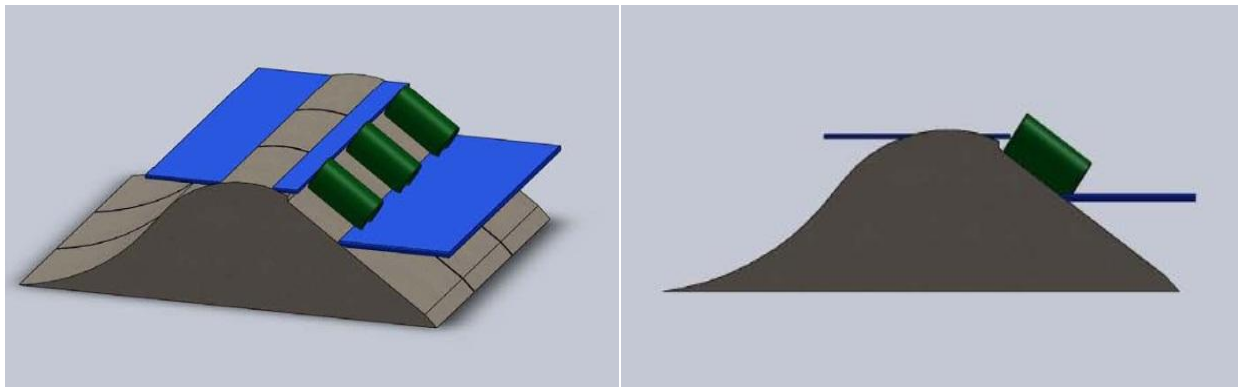
Από την άλλη ο κοχλίας του Αρχιμήδη προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα. Η απόδοση του σε χαμηλά ύψη έστω και με μεγάλες παροχές είναι πολύ υψηλή ενώ ταυτόχρονα η απόδοση αυτή διατηρείται σε μεγάλο εύρος παροχών. Από την άλλη το κόστος σχεδιασμού και κατασκευής του είναι πολλές φορές μικρότερο από αυτό ενός συμβατικού υδροστρόβιλου (εύκολη κατασκευή έλικας). Τέλος δεν απαιτεί καμία ρύθμιση ανεξάρτητα από την αλλαγή του ύψους υδατόπτωσης και παροχής γεγονός που εκμηδενίζει τα κόστη ελέγχου.

Συνολικά λοιπόν γίνεται προφανές ότι η λύση η οποία θα καταστήσει δυνατή την εγκατάσταση μικρών υδροηλεκτρικών είναι η τυποποίηση κοχλιών σε συγκεκριμένα μεγέθη τα οποία εξαιτίας της καλής απόδοσης της διάταξης σε μεγάλο εύρος ισχύος θα καλύπτουν αντίστοιχα εκτενές εύρος τιμών υδατόπτωσης και παροχής επιτυγχάνοντας με αυτό τον τρόπο εξαιρετικά χαμηλό κόστος παραγωγής. Οι ευέλικτες αυτές διατάξεις θα είναι δυνατόν να εγκαθίστανται σε μικρές υδατοπτώσεις χωρίς σημαντικά έργα υποδομής και εγκατάστασης, καθιστώντας αποτελεσματική την εκμετάλλευση τους με πολύ υψηλή οικονομική απόδοση. Οι τυποποιημένες

μάλιστα αυτές διατάξεις είναι δυνατόν να συνδυάζονται μεταξύ τους ώστε να καλύπτουν πολλές διαφορετικές περιπτώσεις υδατόπτωσης.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί πως με τη διάταξη του κοχλία του Αρχιμήδη καθίσταται δυνατή η εκμετάλλευση μεγάλων παροχών σε μικρά ύψη υδατόπτωσης χωρίς μεγάλα έργα εκτροπής. Με τη κατασκευή δηλαδή κατάλληλων ευέλικτων κατασκευών είναι δυνατό να δημιουργηθούν κομμάτι-κομμάτι μεγάλα φράγματα τα οποία εκμεταλλεύονται μικρή υδατόπτωση πολύ μεγάλης παροχής, την εκμετάλλευση δηλαδή ολόκληρου ποταμού. Πιο αναλυτικά δηλαδή είναι δυνατή η κατασκευή και διάταξη συστοιχίας από τσιμεντένιων κιβωτίων τα οποία στην κορυφή τους θα διαθέτουν, κάθε ένα, διάταξη κοχλία για εκμετάλλευση μικρής υδατόπτωσης. Οι τσιμεντένιες κατασκευές στοιχίζονται κάθετα στη ροή του ποταμού και εκτείνονται ανάμεσα στις δύο όχθες διαδοχικά σχηματίζοντας φράγμα. Είναι σημαντικό προφανώς να κατασκευαστούν κατάλληλα ώστε να ανθίστανται στη μικρή υδροστατική πίεση του νερού χωρίς να παρυσύρονται. Η κατασκευή έτσι γίνεται χωρίς έργα εκτροπής αλλά με σταδιακή κατασκευή του έργου έξω από το νερό και τοποθέτησή του κομμάτι κομμάτι στη συνέχεια μέχρι να καλυφθεί όλο το μήκος.

Επίσης απαιτούνται μικρές ή και καθόλου απαλλοτριώσεις εκτάσεων για τη δημιουργία τεχνητών λιμνών καθώς όλη η διάταξη εκμεταλλεύεται μικρή υδατόπτωση πάνω στη ροή του ποταμού. Σε λειτουργία το σύνολο της ροής ρέει πάνω από το φράγμα οπότε γίνεται εκμετάλλευση ολόκληρης της παροχής ρευστού χωρίς να επηρεάζεται η χλωρίδα και πανίδα της περιοχής καθώς η διάταξη είναι αργόστροφη και δεν αποκόπτει τον ποταμό. Φερτά υλικά μεταφέρονται μέσω αυτής καθώς και ψάρια εξαιτίας της χαμηλής ταχύτητάς της. Συνολικά λοιπόν αποτελεί οικονομικά αποδοτικό αλλά και φιλικό προς το περιβάλλον τρόπο για εκμετάλλευση μεγάλων ροών νερού.



**Σχήμα 6.1.** Σχηματική παράσταση εφαρμογής αξιοποίησης μεγάλων παροχών με συστοιχία διατάξεων

### **6.3.Εξέλιξη της μελέτης**

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής αναπτύχθηκαν αναλυτικές μέθοδοι υπολογισμού των τεχνικών χαρακτηριστικών του κοχλία το οποίο οδήγησε σε ανάπτυξη προγράμματος υπολογισμού τους. Με χρήση αυτού του προγράμματος έγινε δυνατή η βελτιστοποίηση γεωμετρικών χαρακτηριστικών κοχλία του Αρχιμήδη για εκμετάλλευση υδατόπτωσης με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Σε συνέχεια αυτής της διπλωματικής αυτής το αντικείμενο επιτρέπει προεκτάσεις στα εξής:

α) Μπορεί να διερευνηθεί το ακριβές μοντέλο υπολογισμού των απωλειών αντίστασης αλλά και διακένου. Στην περίπτωση των απωλειών αντίστασης βελτίωση της προσέγγισης του πραγματικού αποτελέσματος απαιτεί καλύτερο μοντέλο οριακού στρώματος από την ολοκλήρωση στοιχειωδών πλακών καθώς επίσης και την ανάλυση οριακών περιοχών όπως η περιοχές κοντά στην ένωση εσωτερικού και εξωτερικού κυλίνδρου αλλά και τα σημεία δημιουργίας και παύσης του οριακού στρώματος. Στην περίπτωση των απωλειών διακένου ρεαλιστικότερη



προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί με θεώρηση στρωτής ροής σε σημεία του διακένου με αντίστοιχα χαρακτηριστικά ροής αλλά και αναλυτικότερο μοντέλο τυρβώδους ροής από αυτό του προσαρμοσμένου Bernoulli.

β) Χώρος για ανάλυση υπάρχει επίσης στα σημεία εισόδου και εξόδου της διάταξης. Τα φαινόμενα εκεί δεν είναι μόνιμα αλλά ο αριθμός των βημάτων μεταβάλλεται με το χρόνο. Επίσης τα άκρα της σπείρας επηρεάζουν τις συνολικές απώλειες της σπείρας. Στην κατεύθυνση αυτή λοιπόν έχει αξία η περαιτέρω ανάλυση των σημείων αυτών.

γ) Σημαντικά αποτελέσματα μπορούν να επιτευχθούν με ανάλυση των παραπάνω σημείων με τη χρήση συστημάτων πεπερασμένων στοιχείων. Η ανάλυση αυτή θα προσέφερε αναλυτική λύση της επιφάνειας του ρευστού σε στρωτή και τυρβώδη ροή, αναλυτικότερο μοντέλο προσέγγισης των απωλειών αντίστασης και διακένου και επίλυση των μεταβατικών φαινομένων σε είσοδο και έξοδο.

δ) Στον τομέα της βελτιστοποίησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν νέα μοντέλα απωλειών αλλά και η μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία προσφέροντας ακριβέστερη επίλυση του προβλήματος βέλτιστης λύσης. Είναι επίσης χρήσιμο στο πρόβλημα βελτιστοποίησης να εισαχθούν απώλειες όπως αυτές της μετάδοσης, η αύξηση του λόγου της οποίας οδηγεί σε αύξηση των απωλειών αλλάζοντας τη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης προς την κατεύθυνση της αύξησης της περιστροφικής ταχύτητας.

ε) Μελέτη σπείρας διαφορετικής μορφής αποτελεί σημείο έρευνας για βελτίωση της απόδοσης ή άλλων χαρακτηριστικών του κοχλία όπως μείωση της διαμέτρου ή αύξηση του βήματος. Η διαφορετική μορφή σπείρας μπορεί να αφορά:

- Σπείρα διαφορετικής γενέτειρας από ακτίνα έλικας.
- Σπείρα της οποίας τα χαρακτηριστικά του βήματος μεταβάλλονται κατά μήκος της.
- Κοχλία του οποίου τα χαρακτηριστικά (εσωτερική εξωτερική διάμετρος και βήμα) μεταβάλλονται κατά μήκος του.

στ) Τέλος αξίζει αν γίνει μελέτη βελτιστοποίησης των γεωμετρικών και κινηματικών χαρακτηριστικών της σπείρας λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες κόστους έτσι ώστε η λύση που θα προκύψει να βελτιστοποιεί την οικονομική απόδοση και να αξιολογεί παραμέτρους τυποποίησης της διάταξης, προφανώς λαμβάνοντας υπόψη τους τεχνικούς περιορισμούς.

## Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο κώδικας υπολογισμού των απωλειών και της παροχής όγκου της διάταξης αναπτυγμένος σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran:

```
PROGRAM VATHMOS APODOSHS

  REAL::vimasp,gwnia,Dout,Din,hwater,total,er,ay,by,yun,yov,ldiat

  REAL::puk,vsun,gwntax,itemp,ntemp,arx,FTRIB,g,hdiak,bdiak,Nvima

  REAL::rev,klisi

!KATHORISMOS ANALUSHS (AKRIBEIA LUSHS)

!AKRIBEIA YPOLOGISMOU OGTKOY SE MM

  analusi=10

!AKRIBEIA OLOKLHRVSEWN

  n=1000

!SFALMA LYSHS EKSIWSEWN

  er=0.0001

!EISODOS GEWMETRIKWN DEDOMENWN

  OPEN (unit = 2, file ='task.dat')

!ARITHMOS METABLHTWN BELTISTOPOIHSHS(MONO SE PROBLHMATA BELTISTOPOIHSHS)

  READ(2,*)nmet

!MHKOS BHMATOS SE MM

  READ(2,*)vimasp

!KLISI DIATAKSHS SE DEG

  READ(2,*)klisi

!EKSWTERIKH DIAMETROS SE MM

  READ(2,*)Dout

!ESWTERIKH DIAMETROS SE MM

  READ(2,*)Din

!YPSOS REYSTOY STO MHDENIKO SHMEIO SE MM

  READ(2,*)h

!PERISTROFIKH TAXYTHTA DIATAKSIS SE REV/MIN

  READ(2,*)rev
```

```

!ARITHMOS ARXWN

      READ(2,*)arx

CLOSE (2)

!DEDOMENA DIAKENOY

!YPSOS DIAKENOY

      hdiak=5.

!PAXOS DIAKENOY

      bdiak=10.

!DEDOMENA YDATOPTWSHS

!YPSOS YDATOPTWSHS

      Dhwat=1000.

!PAROXH OMKOY YDATOPTWSHS (APAITEITAI MONO STO PROBLHMA BELTISTOPOIHSHS)

      Volreq=1.

!DEDOMENA REUSTOU

!PYKNOTHTA REYSTOY

      puk=1000.

!KINHMATIKH SYNEKTIKOTHTA REYSTOY

      vsun=0.000001004

!ALLA DEDOMENA

!EPITAXYNESH THS BARYHTAS

      g=9.81

!METATROPES

!METATROPH PERISTROFIKHS TAXYHTAS SE RAD/S

      gwntax=rev*2.*3.1415/60.

!METATROPH ARITHMOY ARXWN STON ANTISTOIXO AKERAIO(MONO STO PROBLHMA BELTISTOPOIHSHS)

      arx=arx-MOD(arx,1.)

!YPOLOGISMOS APAITOYMENOY ARITHMOY BHMATWN

      Nvima=Dhwat/(-vimasp/arx*TAN(3.1415-klisi*3.1415/180.)*COS(gwnia))+ 2.

!ROUTINA YPOLOGISMOY PAROXHS OMKOY (EISODOS SE MM, EKSODOS SE M^3/S)

CALL ARVOL (vimasp,klisi,Dout,Din,h,gwntax,arx,analusi,VOLUME)

```

!METATROPH DIASTASEWN SE M

vimasp=vimasp/1000.

Dout=Dout/1000.

Din=Din/1000.

h=h/1000.

hdiak=hdiak/1000.

bdiak=bdiak/1000.

Dhwat=Dhwat/1000.

!ROUTINA YPOLOGISMOY APWLEIWN ANTISTASHS ESWTERIKOY KYLINDROY BHMATOS(EKSODOS SE NM)

CALL APWLEIESTRIBESWTSWL(vimasp,klisi,Dout,Din,h,puk,vsun,gwntax,arx,g,n,er,ftrib)

!ROUTINA YPOLOGISMOY APWLEIWN ANTISTASHS SPEIRAS BHMATOS(EKSODOS SE NM)

CALL APWLEIESTRIBSPEIR(vimasp,klisi,Dout,Din,h,puk,vsun,gwntax,arx,n,er,ftribsp)

!ROUTINA YPOLOGISMOY APWLEIWN ANTISTASHS KAI OGKOY DIAKENOY BHMATOS(EKSODOS ANTISTASHS SE NM KAI

OGKOY SE M<sup>3</sup>/S)

CALL APWLEIESDIAKENOU(vimasp,klisi,Dout,Din,h,puk,vsun,gwntax,arx,g,hdiak,bdiak,n,er,Vdiak,Ddiak)

!YPOLOGISMOS SYNOLIKWN APWLEIWN DIATAKSHS SE WATT

APWL=(ftrib+ ftribsp+ Ddiak)\*Nvima\*gwntax+ Vdiak\*puk\*g\*Dhwat

!EKSISWSH PAROXHS OGKOY ME PAROXH OGKOY DEDOMENWN YDATOPTWSHS(MONO SE PROBLHMA BELTISTOPOIHSHS)

VOLCON=ABS(VOLUME-Volreq)

!PERIORISMOS Dout>Din

DELTADCON=Din-Dout

!ELEGXOS LEITOURGHKOTHHTAS (PERISTROFH REYSTOY GYRW APO SPEIRA)

WATERCIR=zepif((-vimasp/2.),klisi,Dout,h)-Din/2.

!EKSODOS DEDOMENWN

OPEN (unit = 3, file ='results.dat')

WRITE (3,\*) APWL

WRITE(3,\*) VOLCON

WRITE(3,\*) DELTADCON

WRITE(3,\*) WATERCIR

```

CLOSE(3)

END

!ROUTINA YPOLOGISMOY APWLEIWN ANTISTASHS ESWTERIKOU KYLINDROY ENOS BHMATOS

!EISODOS:GEWMETRIKA DEDOMENA,DEDOMENA REYSTOY,AKRIBEIA OLOKLHRWSEWN,SFALMA LYSHS
EKSISWSEWN

!EKSODOS:ANTISTASH ESWTERIKOU KYLINDROY BHMATOS

SUBROUTINE APWLEIESTRIBESWTSWL(vimasp,klisi,Dout,Din,hwater,puk,vsun,gwntax,arx,g,n,er,ftrib)

REAL::vimasp,gwnia,Dout,Din,hwater,total,er,ay,by,yun,yov

REAL::puk,vsun,gwntax,itemp,ntemp,arx,ftrib,klisi,g

INTEGER::i,n

!METATROPH KLISHS SE RAD

      gwnia=klisi*3.1415/180.

!ELEGXOS EPAPHS REYSTOY ME ESWTERIKO KYLINDRO

IF(hwater.LE.(Dout/2.-Din/2.))THEN

!MHDENISMOS ANTISTASHS SE PERIPTWSH MH EPAPHS

      ftrib=0.

ELSE

!YPOLOGISMOOS ORIWN OLOKLHRWSHS KATA Y

!YPOLOGISMOS KATW ORIOY

!EYRESH SHMEIOU TOMHS ESWTERIKHS ELIKAS SPEIRAS ME EPIFANEIA NEROY STO [-vimasp/2,0]

      ay=-vimasp/2.

      by=0.

CALL YSPWATERSUR(ay,by,er,yun,Din,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

!YPOLOGISMOS ANW ORIOY

!ELEGXOS PERIORISMOY TOY REYSTOY STON ESWTERIKO KYLINDRO APO TO PROHGOYMENO BHMA

IF((-Din/2.).GE.vimasp/arx*TAN(3.1415-gwnia)-(Dout/2.-hwater))THEN

!YPOLOGISMOS TOMHS EPIFANEIAS ME ESWTERIKO KYLINDRO (SE PERIPTWSH MH PERIORISMOY)

      yov=(Dout/2.-hwater-Din/2.)/TAN(3.1415-gwnia)

ELSE

!EYRESH SHMEIOU TOMHS ESWTERIKHS ELIKAS SPEIRAS PROHGOYMELOY BHMATOS ME EPIFANEIA NEROY

      ay=vimasp/arx

```

```

        by=vimasp/arx+ vimasp/2.

CALL YPRSPWATERSUR(ay,by,er,yov,Din,vimasp,gwnia,Dout,hwater,arx)

ENDIF

!OLOKLHRWSH STOIXEIWDWN ANTISTASEWN KYLINDROY (DIPLO OLOKLHRWMA)

!EKSWTERIKO OLOKLHRWMA

!OLOKLHRWSH SYNARTHSHS ESWTOLOKLIN STO yi, METHODOS SIMPSON 1/3

        total=0.

        itemp=0.

        ntemp=n

DO 100 i=1,n-1,2

        itemp=i

        ntemp=n

        total=total+ 4.*ESWTOLOKLIN(Din,yi(itemp,yun,yov,ntemp),vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,n,puk,vsun,arx)

100  ENDDO

DO 200 i=2,n-2,2

        itemp=i

        ntemp=n

        total=total+ 2.*ESWTOLOKLIN(Din,yi(itemp,yun,yov,ntemp),vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,n,puk,vsun,arx)

200  ENDDO

        ftrib=(yov-yun)/ntemp*total/3.

ENDIF

END

!SYNARTHSH DIAMERISHS yi SE n DIASTHMATA

FUNCTION yi(i,yun,yov,n)

REAL::i,n,yun,yov

        yi=yun+ i/n*(yov-yun)

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOY ESWTERIKOY OLOKLHRWMATOS

FUNCTION ESWTOLOKLIN(Din,y,vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,n,puk,vsun,arx)

REAL::vimasp,gwnia,Dout,Din,hwater,total,arx,y

```

```

REAL::puk,vsun,gwntax,itemp,ntemp,wun,wov,mhkstr

INTEGER::i,n

!YPOLOGISMOS ANW KAI KATW ORIOU YPOLOGISMOY KATA THETA

      wun=-ftomh(y,Din,gwnia,Dout,hwater)

      wov=ftomh(y,Din,gwnia,Dout,hwater)

!ELEGXOS GIA PERIORISMO TOY REYSTOY PANW STON ESWTERIKO KYLINDRO APO TH SPEIRA

IF (wov.GT.2.*3.1415/vimasp*y)THEN

      wov=2.*3.1415/vimasp*y

ENDIF

IF (wun.LT.2.*3.1415/vimasp*(y-vimasp/arx))THEN

      wun=2.*3.1415/vimasp*(y-vimasp/arx)

ENDIF

!ESWTERIKO OLOKLHRWMA

!OLOKLHRWSH SYNARTHSHS eswtsunin STO theta, METHODOS SIMPSON 1/3

      itemp=0.

      ntemp=n

      total=0.

      total=eswtsunin(gwntax,puk,vsun,Din/2.,vimasp,theta(ntemp,wov,wun,ntemp),wov)

DO 300 i=1,n-1,2

      itemp=i

      ntemp=n

      total=total+ 4.*eswtsunin(gwntax,puk,vsun,Din/2.,vimasp,theta(itemp,wov,wun,ntemp),wov)

300  ENDDO

DO 400 i=2,n-2,2

      itemp=i

      ntemp=n

      total=total+ 2.*eswtsunin(gwntax,puk,vsun,Din/2.,vimasp,theta(itemp,wov,wun,ntemp),wov)

400  ENDDO

      ESWTOLOKLIN=(wov-wun)/ntemp*total/3.

END

```

```

!SYNARTHSH DIAMERISHS theta SE n DIASTHMATA

FUNCTION theta(i,wov,wun,n)

  REAL::wov,wun,i,n

    theta=wov-i/n*(wov-wun)

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOY STOIXEIWDOYS ANTISTASHS PANW STON ESWTERIKO KYLINDRO

FUNCTION eswtsunin(gwntax,puk,vsun,r,vimasp,theta,wov)

  REAL::gwntax,puk,vsun,r,vimasp,theta,wun,mhkstr

!UPOLOGISMOS MHKOUS ORIAKOU STRWMATOS

    mhkstr=(wov-theta)*r

!ELEGXOS ARITHMOY REYNOLDS GIA TYRBWDH H STRWTH ROH

IF ((gwntax*SQRT(r**2.+ (vimasp/2./3.1415)**2.)*mhkstr/vsun).LE.(3.*(10.**3.)))THEN

  !YPOLOGISMOS STOIXEIWDOYS ANTISTASHS STRWTHS ROHS

    eswtsunin=0.664*r**2.*(gwntax*SQRT(r**2.+ (vimasp/2./3.1415)**2.))**2.*puk/SQRT(ABS(gwntax*SQRT
(r**2.+ (vimasp/2./3.1415)**2.)*mhkstr/vsun))/2.

  ELSE

    !YPOLOGISMOS STOIXEIWDOYS ANTISTASHS TYRBWDOYS ROHS

    eswtsunin=0.0286*r**2.*puk*(gwntax*SQRT(r**2.+ (vimasp/2./3.1415)**2.))**2.*(gwntax*SQRT(r**2.
+ (vimasp/2./3.1415)**2.)*mhkstr/vsun)**(-1./5.)

  ENDIF

END

!ROUTINA YPOLOGISMOY SHMEIOY TOMHS ESWTERIKHS ELIKAS ME EPIFANEIA REYSTOY (TREXON BHMA)

SUBROUTINE YSPWATERSUR(a,b,er,yr,Din,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

  REAL::a,b,er,vimasp,gwnia,Din,hwater,yr,ea,Dout,arx

!ROUTIINA DIXOTOMHSHS

DO 500

  yr=(a+ b)/2.

  ea=ABS(yr-a)

!ELEGXOS SFALMATOS

IF(ea.LE.er)THEN

```



```

RETURN

ENDIF

!UPOLOGISMOS GINOMENOU MESOU KAI KATW ORIOU

term=yfunct(yr,Din,vimasp,gwnia,Dout,hwater)*yfunct(a,Din,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

!EPANAPROSDIORISMOS ORIWN DIXOTOMHSHS

IF(term.GT.0.)THEN

    a=yr

ELSEIF(term.LT.0.)THEN

    b=yr

ELSE

    ea=0.

RETURN

ENDIF

500 ENDDO

END

!ROUTINA YPOLOGISMOY SHMEIOY TOMHS ESWTERIKHS ELIKAS ME EPIFANEIA REYSTOY (PROHGOYMENO
BHMA)

SUBROUTINE YPRSPWATERSUR(a,b,er,yr,Din,vimasp,gwnia,Dout,hwater,arx)

REAL::a,b,er,vimasp,gwnia,Din,hwater,yr,ea,Dout,arx

!ROUTINA DIXOTOMHSHS

DO 600

    yr=(a+ b)/2.

    ea=ABS(yr-a)

!ELEGXOS SFALMATOS

IF(ea.LE.er)THEN

    RETURN

ENDIF

!UPOLOGISMOS GINOMENOU MESOU KAI KATW ORIOU

    term=yprfunct(yr,Din,vimasp,gwnia,Dout,hwater,arx)*yprfunct(a,Din,vimasp,gwnia,Dout,hwater,arx)

!EPANAPROSDIORISMOS ORIWN DIXOTOMHSHS

IF(term.GT.0.)THEN

```

```

        a=yr
ELSEIF(term.LT.0.)THEN
        b=yr
ELSE
        ea=0.
RETURN
ENDIF
600 ENDDO
END
!SUNARTHSH UPOLOGISMOU THS TOMHS EPIFANEIAS REYSTOY ME ESWTERIKO KYLINDRO
!(LYSH WS PROS y)
FUNCTION ftomh(y,Din,gwnia,Dout,hwater)
REAL::y,Din,gwnia,Dout,hwater
ftomh=ASIN((y*TAN(3.1415-gwnia)-(Dout/2.-hwater))/(Din/2.))+ 3.1415/2.
END
!SYNARTHSH GIA TON YPOLOGISMO TOY y THS TOMHS THS ESWTERIKHS ELIKAS THS SPEIRAS
!ME THN EPIFANEIA TOY REYSTOY
FUNCTION yfunct(y,Din,vimasp,gwnia,D,hwater)
REAL:: Din,y,vimasp,gwnia,D,hwater
yfunct=Din/2.*SIN(2.*3.1415*y/vimasp-3.1415/2.)- TAN(3.1415-gwnia)*y+ (D/2.-hwater)
END
!SYNARTHSH GIA TON YPOLOGISMO TOY y THS TOMHS THS ESWTERIKHS ELIKAS TOY PROHGOYMENOU
!BHMATOS THS SPEIRAS ME THN EPIFANEIA TOY REYSTOY
FUNCTION yprfunct(y,Din,vimasp,gwnia,D,hwater,arx)
REAL:: Din,y,vimasp,gwnia,D,hwater,arx
yprfunct=Din/2.*SIN(2.*3.1415*(y-vimasp/arx)/vimasp-3.1415/2.)-TAN(3.1415-gwnia)*y+ (D/2.-hwater)
END
!ROYTINA YPOLOGISMOY TWN APWLEIWN ANTISTASHS THS SPEIRAS ENOS BHMATOS
!EISODOS:GEWMETRIKA DEDOMENA,DEDOMENA REYSTOY,AKRIBEIA OLOKLHRWSEWN,SFALMA LYSHS
EKSISWSEWN
!EKSODOS:ANTISTASH SPEIRAS BHMATOS

```

```

SUBROUTINE APWLEIESTRIBSPEIR(vimasp,klisi,Dout,Din,hwater,puk,vsun,gwntax,arx,n,er,ftribsp)

REAL::vimasp,gwnia,Dout,Din,hwater,xr,FTRI,FTRIBEP,ftribsp,arx

REAL::puk,vsun,gwntax,itemp,ntemp,rup,rl,hwaterep,total,klisi

INTEGER::i,n

!METATROPH KLISHS SE RAD

    gwnia=klisi*3.1415/180.

!YPOLOGISMOS YPSOYS REYSTOY STO PROHGOYMENO BHMA

    hwaterep=hwater+ (vimasp/arx)*TAN(3.1415-gwnia)

!YPOLOGISMOS APWLEIWN SPEIRAS BHMATOS

!OLOKLHRWSH STOIXEIWDWN ANTISTASEWN SPEIRAS BHMATOS (DIPLO OLOKLHRWMA)

!EKSWTERIKO OLOKLHRWMA

!OLOKLHRWSH SYNARTHSHS ESWTOLOKL STO r, METHODOS SIMPSON 1/3

    ntemp=n

    total=0.

    total=ESWTOLOKL(r(0.,Din,Dout,ntemp,hwater),vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,n,puk,vsun)+
+   ESWTOLOKL(r(ntemp,Din,Dout,ntemp,hwater),vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,n,puk,vsun)

DO 100 i=1,n-1,2

    itemp=i

    ntemp=n

    total=total+ 4.*ESWTOLOKL(r(itemp,Din,Dout,ntemp,hwater),vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,n,puk,vsun)

100  ENDDO

DO 200 i=2,n-2,2

    itemp=i

    ntemp=n

    total=total+ 2.*ESWTOLOKL(r(itemp,Din,Dout,ntemp,hwater),vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,n,puk,vsun)

200  ENDDO

    itemp=0.

!YPOLOGISMOS ORIWN OLOKLHRWSHS KATA r

    rup=r(ntemp,Din,Dout,ntemp,hwater)

    rl=r(itemp,Din,Dout,ntemp,hwater)

```

```

!YPOLOGISMOS OLOKLHRWMATOS

      FTRIB=(rup-rl)/ntemp*total/3.

!YPOLOGISMOS APWLEIWN SPEIRAS PROHGOYMENYOY BHMATOS

      FTRIBEP=0.

!ELEGXOS EPAFHS REYSTOY ME TO PROHGOYMENOY BHMA

IF(hwaterep.GT.0.)THEN

!OLOKLHRWSH STOIXEIWDWN ANTISTASEWN SPEIRAS PROHGOYMENYOY BHMATOS (DIPLO OLOKLHRWMA)

!EKSWTERIKO OLOKLHRWMA

!OLOKLHRWSH SYNARTHSHS ESWTOLOKL STO r, METHODOS SIMPSON 1/3

      total=0.

      total=ESWTOLOKL(r(0.,Din,Dout,n,hwaterep),vimagp,gwnia,Dout,hwaterep,gwntax,n,puk,vsun)
+   + ESWTOLOKL(r(n,Din,Dout,n,hwaterep),vimagp,gwnia,Dout,hwaterep,gwntax,n,puk,vsun)

DO 300 i=1,n-1,2

      itemp=i

      ntemp=n

      total=total+ 4.*ESWTOLOKL(r(itemp,Din,Dout,ntemp,hwaterep),vimagp,gwnia,Dout,hwaterep,gwntax,n,puk,vsun)
300  ENDDO

DO 400 i=2,n-2,2

      itemp=i

      ntemp=n

      total=total+ 2.*ESWTOLOKL(r(itemp,Din,Dout,ntemp,hwaterep),vimagp,gwnia,Dout,hwaterep,gwntax,n,puk,vsun)
400  ENDDO

      itemp=0.

!YPOLOGISMOS ORIWN OLOKLHRWSHS KATA r

      rup=r(ntemp,Din,Dout,ntemp,hwaterep)

      rl=r(itemp,Din,Dout,ntemp,hwaterep)

!YPOLOGISMOS APWLEIWN PROGOYMENYOY BHMATOS

      FTRIBEP=(rup-rl)/ntemp*total/3.

ENDIF

!YPOLOGISMOS SYNOLIKWN APWLEIWN SPEIRAS

```

```

    ftribsp=FTRIB+ FTRIBEP

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOY ORIWN r KAI DIAMERISHS SE n DIASTHMATA
FUNCTION r(i,Din,Dout,n,h)

    REAL::Din,Dout,i,n,h

!ELEGXOS YPSOYS GIA TO AN H EPIFANEIA TOY REYSTOY PERNAEI PANW APO TON ESWTERIKO KYLINDRO
IF((Dout/2.-h).LE.(Din/2.))THEN

!SE PERIPTWSH POY PERNAEI PANW APO TON ESWTERIKO KYLINDRO

    r=Din/2.+ i/n*(Dout/2.-Din/2.)

ELSE

!SE PERIPTWSH POY PERNAEI PANW APO TON ESWTERIKO KYLINDRO

    r=(Dout/2.-h)+ i/n*h

ENDIF

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOY ESWTERIKOY OLOKLHRWMATOS
FUNCTION ESWTOLOKL(r,vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,n,puk,vsun)

    REAL::r,vimasp,gwnia,Dout,hwater,gwntax,puk,vsun,total,er,a,b,c

    REAL::wun,wov,itemp,ntemp,mhkstr

    INTEGER::i,n

        a=-3.1415

        b=0.

        c=3.1415

        er=0.0001

!YPOLOGISMOS ORIWN OLOKLHRWSHS KATA theta ME EYRESH TWN SHMEIWN TOMHS THS SPEIRA ME THN

!EPIFANEIA TOY REYSTOY

CALL SPWATERSUR(a,b,er,wun,r,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

CALL SPWATERSUR(b,c,er,wov,r,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

!ESWTERIKO OLOKLHRWMA

!OLOKLHRWSH SYNARTHSHS eswtsun STO theta, METHODOS SIMPSON 1/3

    ntemp=n

```

```

DO 500 i=1,n-1,2
    itemp=i
    ntemp=n
    total=total+ 4.*eswtsun(gwntax,puk,vsun,r,vimasp,theta(itemp,wov,wun,ntemp),wov)
500 ENDDO

DO 600 i=2,n-2,2
    itemp=i
    ntemp=n
    total=total+ 2.*eswtsun(gwntax,puk,vsun,r,vimasp,theta(itemp,wov,wun,ntemp),wov)
600 ENDDO

ESWTOLOKL=(wov-wun)/ntemp*total/3.

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOY TWN STOIXEIWDWN APWLEIWN ANTISTASHS SPEIRAS
FUNCTION eswtsun(gwntax,puk,vsun,r,vimasp,theta,wov)
    REAL::gwntax,puk,vsun,r,vimasp,theta,wov,mhkstr
    !ELEGXOS ARITHMOY REYNOLDS GIA TYRBWDH H STRWTH ROH
    IF ((gwntax*(wov-theta)*curve(r,vimasp)**2./vsun).LE.(3.*10.**3.))THEN
        !YPOLOGISMOS STOIXEIWDOYS ANTISTASHS STRWTHS ROHS
        eswtsun=0.664*r*(gwntax*curve(r,vimasp))**2.*puk*curve(r,vimasp)/SQRT(gwntax*(wov-
theta)*curve(r,vimasp)**2./vsun)/2.
    ELSE
        !YPOLOGISMOS STOIXEIWDOYS ANTISTASHS TYRBWDOYS ROHS
        eswtsun=0.0286*r*puk*(gwntax*curve(r,vimasp))**2.*curve(r,vimasp)*(gwntax*(wov-
theta)*curve(r,vimasp)**2./vsun)**(-1./5.)
    ENDIF
END

!SYNARTHSH STOIXEIWDOYS MHKOYS PANW STHN KAMPYLH
FUNCTION curve(r,vimasp)
    REAL::r,vimasp
    curve=SQRT(r**2+ (vimasp/2./3.1415)**2)
END

```

```

!ROUTINA UPOLOGISMOU TOMHS EPIFANEIAS NEROU ME THN EPIFANEIA THS SPEIRAS GIA KATHE AKTINA
SUBROUTINE SPWATERSUR(a,b,er,xr,r,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

    REAL::r,a,b,er,vimasp,gwnia,Dout,hwater,xr,ea

!ROUTIINA DIXOTOMHSHS
DO
    xr=(a+ b)/2.

    ea=ABS(xr-a)

!ELEGXOS SFALMATOS

    IF(ea.LE.er)THEN

        RETURN

    ENDIF

!UPOLOGISMOS GINOMENOU MESOU KAI KATW ORIOU

    term=Func(xr,r,vimasp,gwnia,Dout,hwater)*Func(a,r,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

!EPANAPROSDIORISMOS ORIWN DIXOTOMHSHS

    IF(term.GT.0.)THEN

        a=xr

    ELSEIF(term.LT.0.)THEN

        b=xr

    ELSE

        ea=0.

    RETURN

    ENDIF

ENDDO

END

!SUNARTHSH UPOLOGISMOU TOY theta TOY SHMEIOY TOMHS THS SPEIRAS KAI THS EPIFANEIAS TOY
REYSTOY

FUNCTION Func(x,r,vimasp,gwnia,D,hwater)

    REAL:: x,r,vimasp,gwnia,D,hwater

    Func=r*SIN(x-3.1415/2.)-vimasp/(2.*3.1415)*TAN(3.1415-gwnia)*x+ (D/2.-hwater)

END

!ROYTINA YPOLOGISMOY TWN APWLEIWN ANTISTASHS KAI OGKOY TOY DIAKENOY

```

!EISODOS:GEWMETRIKA DEDOMENA,DEDOMENA REYSTOY,AKRIBEIA OLOKLHRWSEWN,SFALMA LYSHS  
EKSIWSEWN

!EKSODOS:APWLEIES ANTISTASHS KAI OGKOY TOY DIAKENOY

SUBROUTINE APWLEIESDIAKENOU

(vimasp,klisi,Dout,Din,hwater,puk,vsun,gwntax,arx,g,hdiak,bdiak,n,er,Vdiak,Ddiak)

REAL::vimasp,gwnia,Dout,Din,hwater,total,er,ay,by,yun,yov,klisi

REAL::puk,vsun,gwntax,itemp,ntemp,arx,FTRIB,g,hdiak,bdiak,mi

REAL::Vdiak,Ddiak

INTEGER::i,n

!METATROPH KLISHS SE RAD

gwnia=klisi\*3.1415/180.

!YPOLOGISMOS DYNAMIKHS SYNEKLIKOTHTAS REYSTOY

mi=vsun\*puk

!YPOLOGISMOS ORIWN OLOKLHRWSHS

!EYRESH SHMEIOY theta SHMEIOY TOMHS EPIFANEIAS EKSWTERIKHS ELIKAS SPEIRAS

!ANW ORIO STO DIASTHMA [0,PI/2]

a=0.

b=3.1415

CALL EXSPWATERSUR(a,b,er,thetap,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

!KATW ORIO STO DIASTHMA [-PI/2,0]

a=-3.1415

b=0.

CALL EXSPWATERSUR(a,b,er,thetalow,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

!DIPLH OLOKLHRWSH STOIXEIWDWN APWLEIWN OGKOY DIAKENOY (total1) KAI ANTISTASEWN  
DIAKENOY(total2)

!OLOKLHRWSH SYNARTHSHS ESWTOLOKL STO theta, METHODOS SIMPSON 1/3

ntemp=n

total1=0.

total2=0.

total1=ESWTOLOKLDI(thetad



```

(0.,thet atop,thetalow,ntemp),Dout,vimasp,gwnia,hdiak,puk,g,bdiak,mi,hwater,arx,gwntax)

+ + ESWTOLOKLDI(thetad
(ntemp,thet atop,thetalow,ntemp),Dout,vimasp,gwnia,hdiak,puk,g,bdiak,mi,hwater,arx,gwntax)

total2=ESWTOLOKLANTDI(mi,vimasp,bdiak,Dout,gwntax,hdiak)+ ESWTOLOKLANTDI
(mi,vimasp,bdiak,Dout,gwntax,hdiak)

DO 100 i=1,n-1,2

    itemp=i

    ntemp=n

    total1=total1+ 4.*ESWTOLOKLDI(thetad
(itemp,thet atop,thetalow,ntemp),Dout,vimasp,gwnia,hdiak,puk,g,bdiak,mi,hwater,arx,gwntax)

    total2=total2+ 4.*ESWTOLOKLANTDI(mi,vimasp,bdiak,Dout,gwntax,hdiak)
100 ENDDO

DO 200 i=2,n-2,2

    itemp=i

    ntemp=n

    total1=total1+ 2.*ESWTOLOKLDI(thetad
(itemp,thet atop,thetalow,ntemp),Dout,vimasp,gwnia,hdiak,puk,g,bdiak,mi,hwater,arx,gwntax)

    total2=total2+ 2.*ESWTOLOKLANTDI(mi,vimasp,bdiak,Dout,gwntax,hdiak)
200 ENDDO

!APWLEIES OGKOY DIAKENOY

Vdiak=(thet atop-thetalow)/ntemp*total1/3.

!APWLEIES ANTISTASHS DIAKENOY

Ddiak=(thet atop-thetalow)/ntemp*total2/3.

END

!SYNARTHSH DIAMERISHS theta SE n DIASTHMATA

FUNCTION thetad(i,thet atop,thetalow,n)

REAL::wov,wun,i,n

    thetad=thetalow+ i/n*(thet atop-thetalow)

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOY STOIXEIWDWN APWLEIWN OGKOY EKSAITIAS TOY DIAKENOY

FUNCTION ESWTOLOKLDI(th,Dout,vimasp,gwnia,hdiak,puk,g,bdiak,mi,hwater,arx,gwntax)

REAL::th,Dout,vimasp,gwnia,hdiak,puk,g,bdiak,mi,hwater,arx,gwntax

```

```

!ELEGXOS GIA TO AN TO SHMEIO BRISKETAI KATW APO TH STATHMH THS EPOMENHS SPEIRAS

IF(DZETA(vimasp,th,gwnia,Dout,hwater).LE.(-vimasp/arx*TAN(3.1415-gwnia)*COS(gwnia)))THEN

    ESWTOLOKLDI=SQRT(Dout**2./4.+ vimasp**2./(2.*3.1415)**2.)*hdiak*0.7*SQRT(ABS(2.*g*DZETA
(vimasp,th,gwnia,Dout,hwater)))+ hdiak*gwntax*Dout/4.*vimasp/2./3.1415

ELSE

    ESWTOLOKLDI=SQRT(Dout**2./4.+ vimasp**2./(2.*3.1415)**2.)*hdiak*0.7*SQRT(ABS(2.*g*
(-vimasp/arx*TAN(3.1415-gwnia)*COS(gwnia)))+ hdiak*gwntax*Dout/4.*vimasp/2./3.1415

ENDIF

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOY STOIXEIWDWN APWLEIWN ASTISTASHS EKSAITIA TOY DIAKENOY

FUNCTION ESWTOLOKLANTDI(mi,vimasp,bdiak,Dout,gwntax,hdiak)

    REAL::mi,vimasp,bdiak,Dout,gwntax,hdiak

    ESWTOLOKLANTDI=mi*vimasp/4./3.1415*bdiak/(SIN(ATAN(vimasp/3.1415/Dout)))*gwntax*Dout**2./hdiak

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOY THS APOSTASHS TOY SHMEIOY APO TH STATHMH TOY REYSTOY

FUNCTION DZETA(vimasp,th,gwnia,Dout,hwater)

    REAL::vimasp,th,gwnia,Dout,hwater

    DZETA=(vimasp*th/2./3.1415*TAN(3.1415-gwnia)-(Dout/2.-hwater)-Dout/2.*SIN(th-3.1415/2.))*COS(gwnia)

END

!ROYTINA YPOLOGISMOY TOY SHMEIOY TOMHS THS EKSWTERIKHS ELIKAS ME THN EPIFANEIA TOY
REYSTOY

SUBROUTINE EXSPWATERSUR(a,b,er,xr,vimasp,gwnia,Dout,hwater)

    REAL::r,a,b,er,vimasp,gwnia,Dout,hwater,xr,ea

!ROUTIINA DIXOTOMHSHS

DO

    xr=(a+ b)/2.

    ea=ABS(xr-a)

!ELEGXOS SFALMATOS

IF(ea.LE.er)THEN

    RETURN

ENDIF

```

```

!UPOLOGISMOS GINOMENOU MESOU KAI KATW ORIOU

      term=Functdiak(xr,vimasp,gwnia,Dout,hwater)*Functdiak(a,vimasp,gwnia,Dout,hwater)
!EPANAPROSDIORISMOS ORIWN DIXOTOMHSHS

IF(term.GT.0.)THEN

      a=xr

ELSEIF(term.LT.0.)THEN

      b=xr

ELSE

      ea=0.

      RETURN

ENDIF

ENDDO

END

!SYNARTHSH YPOLOGISMOPOY TOY SHMEIOY TOMHS EKSWTERIKHS ELIKAS KAI THS EPIFANEIAS TOY
REYSTOY

FUNCTION Functdiak(x,vimasp,gwnia,D,hwater)

      REAL:: x,vimasp,gwnia,D,hwater

      Functdiak=D/2.*SIN(x-3.1415/2.)-vimasp/(2.*3.1415)*TAN(3.1415-gwnia)*x+ (D/2.-hwater)

END

!ROYTINA YPOLOGISMOY PAROXHS OGKOY

!EISODOS:GEWMETRIKA DEDOMENA,AKRIBEIA YPOLOGISMOY OGKOY

!EKSODOS:ANTISTASH SPEIRAS BHMATOS

SUBROUTINE ARVOL (vimasp,klisi,Dout,Din,h,gwntax,arx,analusi,VOLUME)

      REAL::Dout,Din,arx

      REAL::volume,xt,yt,zt,h,klisi,vimasp

      INTEGER::xlimup,xlimdn,ylimup,ylimdn,zlimup,zlimdn,analusi,x,y,z

!METATROPH KLISHS SE RAD

      gwnia=klisi*3.1415/180.

!ARXIKOPOIHSH OGKOU

      VOLUME=0.

!ORIA OGKOU ELEGXOU

```

```

xlimup=Dout/2.

xlimdn=-Dout/2.

ylimup=(vimasp/arx)+ vimasp/2.

ylimdn=-vimasp/2.

zlimup=Din/2.

zlimdn=-Dout/2.

!ELEGXOS OGTKOU ANA SHMEIO

DO 100 y=ylimdn,ylimup,analusi

DO 200 x=xlimdn,xlimup,analusi

DO 300 z=zlimdn,zlimup,analusi

!METAFORA SYNTETAGMENWN SHMEIOU SE REAL METABLHTES ELEGXOU

    xt=x

    yt=y

    zt=z

!ELEGXOS SHMEIWN ME X<0

IF(xt.LE.0.)THEN

!EKSWTERIKOS KAI ESWTERIKOS KULINDROS

    IF (cyl(xt,zt).LE.Dout/2..AND.cyl(xt,zt).GE.Din/2.)THEN

!KATW APO THN EPIFANEIA TOU NEROU

    IF(zt.LE.zepif(yt,klisi,Dout,h))THEN

!MPROSTA APO TH SPEIRA

    IF(yt.GE.yspu(xt,zt,vimasp)) THEN

!PISW APO TH METATOPISMENH SPEIRA

    IF(yt.LT.yprspu(xt,zt,vimasp,arx))THEN

!PROSTHESH TOU OGTKOU ENOS SHMEIOU STO SUNOLIKO OGTKO

    VOLUME=VOLUME+ (analusi**3)

ENDIF

ENDIF

ENDIF

ENDIF

```

```

!ELEGXOS SHMEIWN ME X>0

ELSE

IF(cyl(xt,zt).LE.Dout/2.AND.cyl(xt,zt).GE.Din/2)THEN

  IF(zt.LE.zepif(yt,klisi,Dout,h))THEN

    IF(yt.GE.yspo(xt,zt,vimasp))THEN

      IF(yt.LT.yprspo(xt,zt,vimasp,arx))THEN

        VOLUME=VOLUME+ (analusi**3)

      ENDIF

    ENDIF

  ENDIF

ENDIF

ENDIF

300 CONTINUE

200 CONTINUE

100 CONTINUE

!METATROPH OGKOU SE M^3

  VOLUME=VOLUME/1000000000.

!YPOLOGISMOS PAROXHS OGKOY

  VOLUME=VOLUME*gwntax/2./3.1415*arx

END

!SYNARTHSEIS YPOLOGISMOU ORIWN ELEGXOY

!EPIFANEIA NEROU

FUNCTION zepif(y,klisi,Dout,h)

  REAL:: y,klisi,h,Dout

  zepif= y*TAN(3.14-klisi*3.14/180.)-(Dout/2.-h)

END

!KULINDROI (ESWTERIKOS EKSWTERIKOS)

FUNCTION cyl(x,z)

  REAL:: x,z

  cyl=SQRT(x**2+ z**2)

```

END

!Y SPEIRAS ARISTEROSTROFHS X<0

FUNCTION yspu(x,z,vima)

REAL:: x,z,vima

yspu=(ASIN(z/(SQRT(z\*\*2.+ x\*\*2.)))+ 3.14/2.)\*(-vima)/(2.\*3.14)

END

!Y SPEIRAS ARISTEROSTROFHS X>0

FUNCTION yspo(x,z,vima)

REAL:: x,z,vima

yspo=(ASIN(z/(SQRT(z\*\*2.+ x\*\*2.)))+ 3.14/2.)\*(vima)/(2.\*3.14)

END

!Y SPEIRAS ARISTEROSTROFHS METATOPISMENHS ANALOGA ME TON ARITHMO TWN ARXWN X<0

FUNCTION yprspu(x,z,vima,arx)

REAL:: x,z,vima,arx

yprspu=(ASIN(z/(SQRT(z\*\*2.+ x\*\*2.)))+ 3.14/2.)\*(-vima)/(2.\*3.14)+ vima/arx

END

!Y SPEIRAS ARISTEROSTROFHS METATOPISMENHS ANALOGA ME TON ARITHMO TWN ARXWN X>0

FUNCTION yprspo(x,z,vima,arx)

REAL:: x,z,vima,arx

yprspo=(ASIN(z/(SQRT(z\*\*2.+ x\*\*2.)))+ 3.14/2.)\*(vima)/(2.\*3.14)+ vima/arx

END