



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ Μηχανολογικών Κατασκευών & Αυτομάτου Ελέγχου

Εργαστήριο Δυναμικής και Κατασκευών

Διπλωματική Εργασία

**ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΚΑΜΨΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ
ΚΑΘΟΛΙΚΗΣ ΤΑΞΙΘΕΣΙΑΣ**

Ιάσωνας Μαρκάκης

Επιβλέπων Καθηγητής: Χ. Γ. Προβατίδης

ΑΘΗΝΑ 2014

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη Στατική και Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών, υπό συνθήκες κάμψης, που περιγράφονται από κανονικές ή μερικές διαφορικές εξισώσεις τέταρτης τάξης. Τέτοιες κατασκευές είναι οι δοκοί σε κάμψη καθώς επίσης και οι λεπτές πλάκες σε κάμψη. Διερευνάται η δυνατότητα εφαρμογής της μεθόδου *Καθολικής Ταξiθεσίας* (Global Collocation) για την αριθμητική επίλυση αυτών των προβλημάτων. Η μελέτη αποδεικνύει την ικανότητα της μεθόδου ταξiθεσίας να συγκλίνει πολύ γρήγορα προς την ακριβή λύση, τόσο στα στατικά (εύρεση βέλους κάμψης) όσο και στα δυναμικά προβλήματα (εύρεση ιδιοσυχνοτήτων).

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στην οικογένεια μου για την στήριξη που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια της φοίτησης μου...

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί συνεισφορά στις λεγόμενες Υπολογιστικές Μεθόδους της Μηχανικής και αναφέρεται στην αριθμητική επίλυση κανονικών και μερικών διαφορικών εξισώσεων τέταρτης τάξης που διέπουν την κάμψη δοκών και πλακών, αντίστοιχα. Επίσης γίνεται εκτεταμένη χρήση θεωρίας CAD (computer-aided-design) και ιδιαίτερα της έννοιας B-splines, η οποία επεκτείνεται μέχρι και την NURBS (βλ. τα περίφημα ισογεωμετρικά στοιχεία).

Η πρωτοτυπία της εργασίας είναι ότι αντί της εκτέλεσης χωρικών ολοκληρώσεων, τα μητρώα μάζας και στιβαρότητας (δυσκαμψίας) υπολογίζονται με τη μέθοδο της καθολικής ταξιθεσίας (global collocation), η οποία δεν απαιτεί καθόλου ολοκλήρωση, και ως εκ τούτου είναι πολύ ταχύτερη.

Η εργασία αυτή δεν θα είχε ολοκληρωθεί εάν δεν είχα την υποστήριξη του καθηγητή του Χριστόφορου Προβατίδη, ο οποίος είχε την καλοσύνη να μου εμπιστευτεί το πρωτότυπο αυτό θέμα, και τον οποίον ευχαριστώ ιδιαίτερα καθόσον υπήρξε διαρκής αρωγός σε κάθε δυσκολία μου.

Αθήνα, 2014

Ιάσωνας Μαρκάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	2
Πρόλογος	3
Περιεχόμενα.....	4
1 Εισαγωγή.....	6
1.1 Σκοπός Εργασίας.....	6
1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	6
1.3 Δομή Εργασίας.....	7
2 Μέθοδος ταξίθεσίας σε δοκούς.....	8
2.1 Ορισμός του προβλήματος.....	8
2.2 Αριθμητική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος	9
2.3 Παρεμβολή B-splines	9
2.4 Διαδικασία υπολογισμού	15
2.5 Πρώτη σημαντική παρατήρηση	19
2.6 Δεύτερη σημαντική παρατήρηση.....	20
2.7 Αριθμητικό Παράδειγμα σε Δοκό	20
2.7.1 Παράδειγμα 1: Δοκός πακτωμένη στο ένα άκρο με ομοιόμορφο φορτίο	
2.7.2 Παράδειγμα 2: Ιδιοταλαντώσεις δοκού πακτωμένης στο ένα άκρο	
3 Κάμψη λεπτών πλακών.....	24
3.1 Γενικά	24
3.2 Πανταχόθεν εδρασμένη πλάκα.....	28
3.3 Δυναμική ανάλυση.....	29
3.4 Εύρεση ιδιοσυχνοτήτων.....	33

4	Συμπεράσματα και Μελλοντική έρευνα	36
4.1	Συμπεράσματα	36
4.2	Μελλοντική Εργασία	36
	Βιβλιογραφία	37
	Παράρτημα Α: Κώδικας Στατικής Επίλυσης Δοκού	40
	Παράρτημα Β: Κώδικας εύρεσης Ιδιοτιμών Δοκού	43
	Παράρτημα Γ: Γλωσσάρι και σύμβολα	46
	Παράρτημα Δ: Περί Splines	47
	Βιβλιογραφία Παραρτήματος Δ	81

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Σκοπός Εργασίας

Μέχρι την στιγμή κατά την οποία μου ανετέθη η παρούσα διπλωματική εργασία, η τάση στις υπολογιστικές μεθόδους της Μηχανικής ήταν η χρήση των λεγόμενων *isogeometric methods*, κατά τις οποίες γίνεται χρήση παρεμβολής τύπου NURBS μέσα σε μεγάλα χωρία (*patches*) στα οποία υποδιαιρούμε την υπό ανάλυση κατασκευή. Η εν λόγω παρεμβολή αφορά τόσο στη γεωμετρία όσο και στην ίδια τη μεταβλητή u (π.χ. βέλος κάμψης). Ωστόσο, παρά τις υψηλές επιδόσεις της μεθόδου, ο χρόνος υπολογισμού των μητρώων είναι αρκετά μεγάλος (πολλές φορές μεγαλύτερος ακόμη και από τη συμβατική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την ίδια πυκνότητα πλέγματος), οπότε προκύπτει η ανάγκη για περαιτέρω βελτίωση της μεθόδου.

Σε αυτά τα πλαίσια, αντί της μέχρι σήμερα χρησιμοποιούμενης μεθόδου Galerkin/Ritz που απαιτεί αριθμητική *χωρική* ολοκλήρωση σε *ολόκληρο* το πεδίο ορισμού του χωρίου, θα γίνει μια πρώτη απόπειρα αντικατάστασης αυτής με τη μέθοδο της καθολικής ταξιθεσίας. Η τελευταία μέθοδος πλεονεκτεί διότι δεν απαιτεί **καθόλου χωρική ολοκλήρωση**. Συγκεκριμένα, κάθε στοιχείο των μητρώων στιβαρότητας ή μάζας υπολογίζεται από μια μόνο τιμή της καθολικής συνάρτησης σχήματος (*shape function*) ή παραγώγου αυτής, αντίστοιχα.

1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Σε συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας, ο προσδιορισμός συχνότητας από τη διαφορική εξίσωση είναι τόσο περίπλοκη που πρακτικά εν γένει δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά [1]. Ιστορικά, ο Λόρδος Rayleigh ήταν ο πρώτος που πρότεινε μια γενικευμένη ενεργειακή μέθοδο βασισμένη σε ένα αποδεκτό σχήμα των χαμηλότερων ιδιοσυχνοτήτων [2]. Πιο συγκεκριμένα, δέχθηκε μια λογική (*admissible*) συνάρτηση της παραμορφωμένης κατασκευής (π.χ. βέλους κάμψης) και στη συνέχεια εξίσωσε τη *μέγιστη δυναμική* με τη *μέγιστη κινητική ενέργεια*, και έτσι μπόρεσε να υπολογίσει αριθμητικά την πρώτη ιδιοσυχνότητα. Αργότερα, ο Ritz γενίκευσε αυτή τη διαδικασία σε περισσότερες από μία παραμέτρους, στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Η μεγαλύτερη αδυναμία της μεθόδου Rayleigh–Ritz είναι η δυσκολία της κατασκευής ενός συνόλου αποδεκτών (*admissible*) συναρτήσεων, ιδιαίτερα για μια ενιαία κατασκευή. Αυτή η δυσκολία μπορεί να υπερνικηθεί με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων [3], η οποία παρέχει ένα αυτόματο μέσο κατασκευής τέτοιων λειτουργιών. Εναλλακτικά, έχει προταθεί η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (BEM), με βάση τη λεγόμενη μεταβολική μέθοδο [4].

Ωστόσο, οι περισσότερες από τις γνωστές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων απαιτούν συχνά περισσότερους βαθμούς ελευθερίας (DOF) για καθορισμένη ακρίβεια από μια κλασική διαδικασία Ritz, προκαλώντας έτσι μια σημαντική καθυστέρηση στα σχεδιαστικά προβλήματα που απαιτούν επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς ιδιοτιμών κατά τη διάρκεια επαναλήψεων προς βελτιστοποίηση [5]. Δεδομένου ότι το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται αναλογικά με την κυβική (τρίτη) δύναμη της τάξης του προβλήματος (δηλαδή τη διάσταση των πινάκων), έχουν γίνει πολλές προσπάθειες προκειμένου να μειωθεί ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας. Μεταξύ αυτών, η μέθοδος «Coons-Patch Macroelement» (CPM) έχει επιδείξει μια εξαιρετική απόδοση σε προβλήματα δύο και τριών διαστάσεων [6-8], ειδικά όταν εφαρμόζεται σε συνδυασμό με την παρεμβολή Lagrange όπως έχει διεξοδικά αναλυθεί στην εργασία [9]. Ωστόσο, το παραγόμενο μητρώο δυσκαμψίας είναι πλήρες (fully populated) με αποτέλεσμα να απαιτείται επιπλέον υπολογιστική προσπάθεια.

Σε αυτό το πλαίσιο, και προκειμένου να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος εξαιτίας της χωρικής ολοκλήρωσης, έχει πρόσφατα προταθεί μια μέθοδος καθολικής ταξίθεσίας (global collocation method) για να αντικαταστήσει τη χρονοβόρο διαδικασία Galerkin / Ritz. Αρχικά η προαναφερθείσα μέθοδος εφαρμόστηκε σε μονοδιάστατα προβλήματα [10,11] και στη συνέχεια σε διδιάστατα προβλήματα που διέπονται από την εξίσωση Poisson [12] καθώς επίσης και σε προβλήματα επίπεδης ελαστικότητας [13]. Μέχρι στιγμής υπάρχει συσσωρευμένη εμπειρία στο Εργαστήριο Δυναμικής & Κατασκευών από δύο προγενέστερες διπλωματικές εργασίες [14,15].

1.3 Δομή Εργασίας

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη.

Στο **Κεφάλαιο 2** γίνεται μια λεπτομερέστερη εισαγωγή και ιδιαίτερα εξετάζουμε την κάμψη δοκών. Στο ίδιο κεφάλαιο δίνονται παραδείγματα στατικής και δυναμικής ανάλυσης δοκού σε κάμψη.

Στο **Κεφάλαιο 3** εξετάζουμε την κάμψη λεπτών πλακών και στο ίδιο κεφάλαιο δίνονται παραδείγματα στατικής και δυναμικής ανάλυσης πλακών.

Στο **Κεφάλαιο 4** παραθέτουμε τα γενικά συμπεράσματα καθώς και μερικές σκέψεις σχετικά με τη μελλοντική έρευνα.

Ακολουθεί δείγμα γραφής των κωδίκων που αναπτύξαμε.

Τέλος, σε ένα αναλυτικό **Παράρτημα**, παραθέτουμε την εξέλιξη της παρεμβολής B-splines μέχρι και την πλέον σύγχρονη μορφή τους, την NURBS.

Κεφάλαιο 2: Μέθοδος Ταξιθεσίας σε Δοκούς

2.1 Ορισμός του προβλήματος

Ως μηχανικοί, σχεδιαστές κατασκευών και εξαρτημάτων μηχανών, μας ενδιαφέρει να μπορούμε να γνωρίζουμε την απόκρισή τους σε συνθήκες στατικής και δυναμικής φόρτισης. Οι μεταβλητές του συστήματος που μας ενδιαφέρουν είναι τα βέλη κάμψης και οι αντίστοιχες στροφές που λέγονται **βαθμοί ελευθερίας**.

Σε αυτή τη μελέτη εξετάζουμε καταρχήν την κάμψη δοκών που διέπεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση κίνησης:

$$(EIw''')'' + f_z = \rho A \ddot{w}, \quad (2-1)$$

όπου $w(x,t)$ το βέλος κάμψης, EI η καμπτική δυσκαμψία, f_z το κατανεμημένο καμπτικό φορτίο, ρ η πυκνότητα μάζας και A η εγκάρσια διατομή. Υπενθυμίζεται ότι $(\)' = \partial/\partial x$ και $(\)^{\square} = \partial/\partial t$.

Τα ζητούμενα του προβλήματος είναι τα εξής.

Για τα **στατικά προβλήματα**, όπου οι οριακές συνθήκες (στήριξη) και η φόρτιση είναι δεδομένα, ζητείται ο υπολογισμός της χωρικής κατανομής της παραμόρφωσης $w(x)$ ή $w(x,y)$ για δοκούς ή πλάκες, αντίστοιχα.

Για τα **δυναμικά προβλήματα**, όπου επίσης οι οριακές συνθήκες (στήριξη) είναι δεδομένη και η φόρτιση είναι χωροχρονικά δεδομένη, ζητούνται:

A) Η εξαγωγή των ιδιοσυχνοτήτων.

B) Ο υπολογισμός της χωροχρονικής κατανομής της παραμόρφωσης $w(x,t)$ ή $w(x,y,t)$ για δοκούς ή πλάκες, αντίστοιχα.

Προφανώς, οι ιδιοσυχνότητες εξαρτώνται μόνον από τις οριακές συνθήκες καθώς επίσης και από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (ροπή αδρανείας, εγκάρσια διατομή, μήκος) και το υλικό (μέτρο ελαστικότητας, πυκνότητα). Αντίθετα, με δεδομένα τα προαναφερθέντα στοιχεία (γεωμετρικά χαρακτηριστικά και υλικό), η ταλάντωση της κατασκευής εξαρτάται από την φόρτιση.

2.2 Αριθμητική Μέθοδος Επίλυσης του προβλήματος

Όπως συμβαίνει σε όλες σχεδόν τις υπολογιστικές μεθόδους, η άγνωστη μεταβλητή αναλύεται σε μια σειρά στην οποία υπεισέρχονται χωρικές και χρονικές συναρτήσεις, όπως ακριβώς και στη γνωστή μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(x) \cdot a_i(t), \quad i=1, \dots, n, \quad (2-2)$$

Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο καθολικής ταξιοθεσίας, ικανοποιούμε την εξίσωση κίνησης (2-1) σε διακριτά σημεία του πεδίου ορισμού του προβλήματος $[0, L]$, δηλαδή στο εσωτερικό της δοκού, μήκους L :

$$\left(EI \cdot \sum_{j=1}^n N_{i,p}''(x) a_j(t) \right)'' + f_z = \rho A \cdot \sum_{j=1}^n N_{i,p}(x) \ddot{a}_j(t), \quad (2-3)$$

Το ζήτημα που ανακύπτει είναι ο πολυωνυμικός βαθμός της παρεμβολής των B-splines συναρτήσεων βάσης $N_{i,p}(x)$ με την οποία θα παρεμβάλλουμε το βέλος κάμψης. Προκειμένου να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό, παραθέτουμε βασικά στοιχεία του ορισμού της παρεμβολής B-splines.

2.3 Παρεμβολή B-splines

Η παρεμβολή B-splines αναφέρεται λεπτομερώς σε διάφορα βιβλία όπως π.χ. [16,17], στα οποία παρατίθενται αποδοτικές διαδικασίες αριθμητικού υπολογισμού αυτών των συναρτήσεων που συνήθως παριστάνονται με το σύμβολο $N_{i,p}(x)$.

Αναφορικά με την παρεμβολή (2-2), πρέπει να διευκρινίσουμε ότι το σημείο έναρξης για την κατασκευή των συναρτήσεων $N_{i,p}(x)$ είναι η επιλογή των *σημείων παρεμβολής* (breakpoints) και του τμηματικά πολυωνυμικού βαθμού, p . Ας δεχθούμε μ σημεία παρεμβολής της μεταβλητής w , τα οποία ορίζουν $(\mu-1)$ διαστήματα, και βαθμό πολυωνύμου έστω p . Όπως θα δείξουμε παρακάτω, **ο ελάχιστος βαθμός πολυωνύμου είναι $p = 5$.**

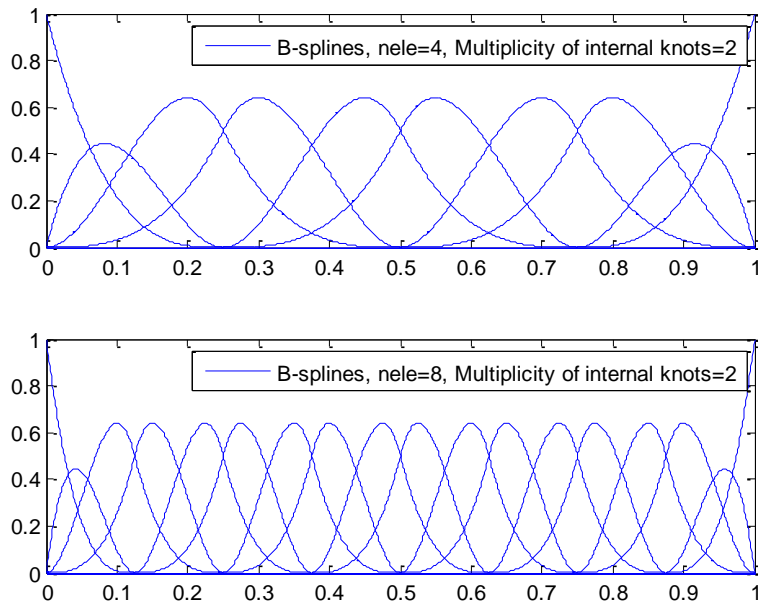
- (i) Οι μεταβλητές a_i που υπεισέρχονται στην εξ.(2-2) **δεν** συνδέονται άμεσα με κομβικές τιμές (εκείνων των σημείων παρεμβολής), εκτός από εκείνες τις δύο που αντιστοιχούν στα δύο άκρα του διαστήματος $[0, L]$.
- (ii) Η τιμή του πλήθους των n όρων εξαρτάται από την *πολλαπλότητα* που επιλέγεται για τους εσωτερικούς κόμβους (knots). Γενικά, όταν χρησιμοποιούμε απλούς κόμβους, δηλαδή μόνον έναν *κόμβο* (knot) ανά εσωτερικό *σημείο* (point) παρεμβολής, τότε η καμπύλη spline είναι C^{p-1} -συνεχής οπουδήποτε

(Σημ.: ένας «1» κόμβος ανά σημείο παρεμβολής συνεπάγεται αφαίρεση της μονάδας από το p , στον όρο C^{p-1} -continuity). Εάν όμως χρησιμοποιούμε «2» κόμβους ανά σημείο παρεμβολής τότε η συνέχεια στους επαναλαμβανόμενους κόμβους γίνεται C^{p-2} , εάν χρησιμοποιούμε «3» κόμβους ανά σημείο παρεμβολής τότε η συνέχεια στους επαναλαμβανόμενους κόμβους γίνεται C^{p-3} , κ.ο.κ. Γενικά, εάν χρησιμοποιούμε $(p-m)$ επαναλαμβανόμενους κόμβους (knots), τότε η καμπύλη spline είναι και πάλι C^{p-1} -συνεχής οπουδήποτε εκτός από τη θέση των επαναλαμβανόμενων κόμβων όπου είναι C^m -συνεχής. Εάν λοιπόν επιθυμούμε *συνέχεια τρίτης τάξης*, C^3 -continuity ($m=3$), τότε η πολλαπλότητα πρέπει να είναι ίση προς δύο ($p - m = 5 - 3 = 2$), οπότε το πλήθος των κόμβων ' n ' είναι διπλάσιος του πλήθους των σημείων παρεμβολής ($n = 2\mu$). Προφανώς, το πλήθος των κόμβων είναι ταυτόσημος με το πλήθος των συντελεστών στο ανάπτυγμα της εξ.(2-2) αλλά και με το πλήθος των λεγόμενων σημείων ελέγχου (control points).

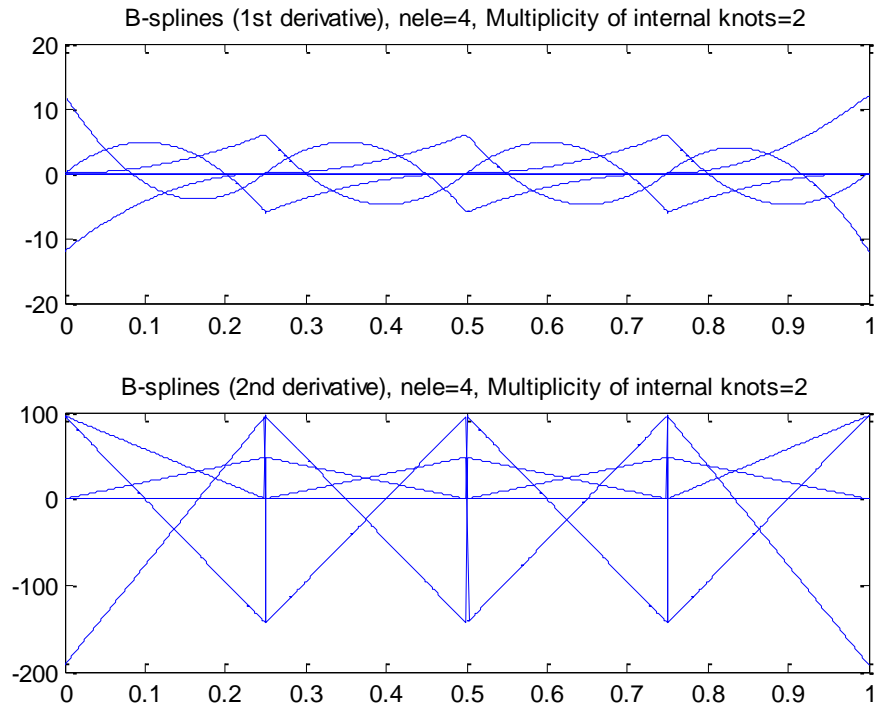
- (iii) Ως εκ τούτου (στην ειδική περίπτωση όπου $p = 5$), εάν επιλέξουμε δύο σημεία ταξισίας (collocation points) μέσα σε καθένα από τα προαναφερθέντα $(\mu-1)$ διαστήματα που ορίζονται από τα σημεία παρεμβολής, λαμβάνουμε τόσες εξισώσεις όσοι και οι άγνωστοι συντελεστές. Στην επίλυση του στατικού προβλήματος, η βέλτιστη επιλογή βρέθηκε ότι είναι **δύο** Gauss points στις γνωστές θέσεις-ρίζες των πολυωνύμων Legendre ($\xi = \pm 1/\sqrt{3}$), κατ' αντιστοιχία με προβλήματα δεύτερης τάξης στα οποία οι deBoor και Swartz [18] (σε ελλειπτικού τύπου προβλήματα). Προφανώς, για $p > 5$ τα συμπεράσματα τροποποιούνται καταλλήλως.

Για λόγους καλύτερης αντίληψης, στη συνέχεια παρουσιάζουμε διάφορες τυπικές συναρτήσεις βάσης, $N_{i,p}(x)$, στο διάστημα $[0,1]$.

Έτσι, τυπικές γραφικές παραστάσεις των $N_{i,p}(x)$ δείχνονται στο **Σχήμα 2-1**, όπου έχουν θεωρηθεί διπλοί κόμβοι (πολλαπλότητα = 2). Σημειώνεται ότι τόσο η πρώτη όσο και η τελευταία συναρτήσεις βάσης αντιστοιχούν στο βέλος κάμψης του αριστερού και του δεξιού άκρου, αντίστοιχα. Αυτές οι δύο ακραίες συναρτήσεις είναι ο ένας ο "καθρέφτης" του άλλου σε σχέση με το κέντρο του διαστήματος $[0, L]$, και ισούνται με τη μονάδα (μόνο στα δύο άκρα).

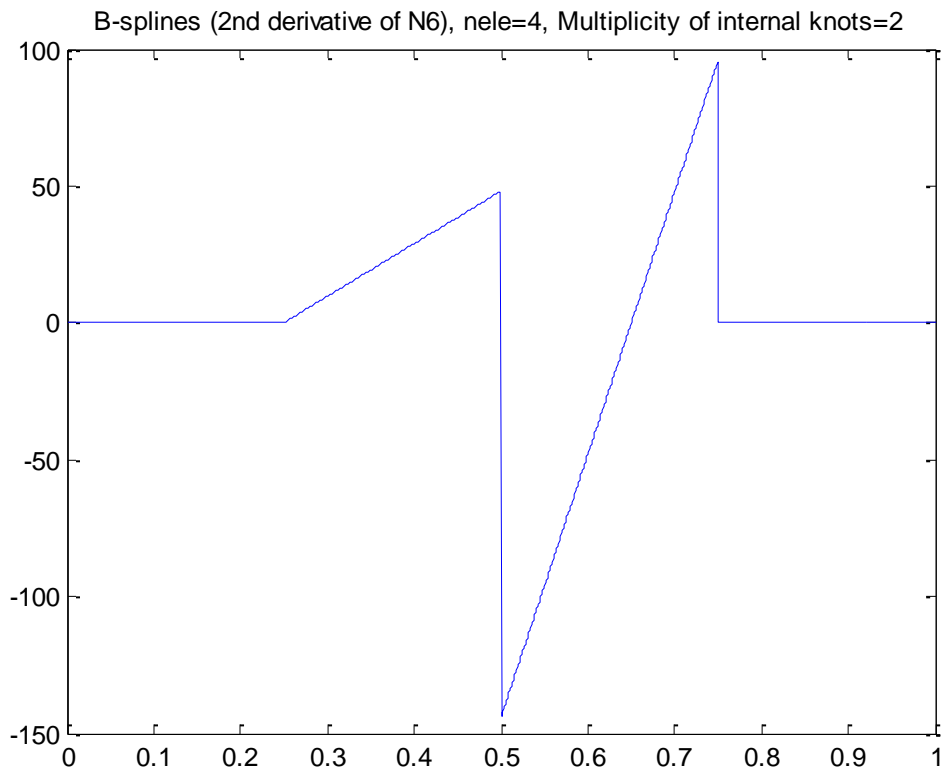


Σχήμα 2-1. Τμηματικά κυβικές συναρτήσεις βάσης στο διάστημα $[0,1]$. Στο πάνω και κάτω διάγραμμα έχουν ληφθεί 4 ίσα διαστήματα ($nele = 4$) και 8 διαστήματα ($nele = 8$), αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις τα εσωτερικά breakpoints θεωρούνται πολλαπλότητας ίσης προς δύο.



Σχήμα 2-2. Πρώτη και δεύτερη παράγωγοι των τμηματικά κυβικών συναρτήσεων βάσης του σχήματος 1 στο διάστημα $[0,1]$ για 4 ίσα διαστήματα ($nele = 4$).

Για την ίδια περίπτωση του σχήματος 2-1, η πρώτη και δεύτερη παράγωγος των τμηματικά κυβικών συναρτήσεων βάσης δείχνονται στο **Σχήμα 2-2**. Εκεί φαίνεται ότι ενώ η πρώτη παράγωγος είναι συνεχής συνάρτηση (άνω σχήμα), αντίθετα η δεύτερη παράγωγος (κάτω σχήμα) εμφανίζει ασυνέχεια (αυτό φαίνεται πολύ καλύτερα εάν χαράξουμε μεμονωμένα, μια-προς-μια, τις πιο πάνω δέκα συναρτήσεις βάσης, π.χ. η έκτη (από τις δέκα) συνάρτηση φαίνεται στο **Σχήμα 2-3**).



Σχήμα 2-3. Ασυνέχεια της δεύτερης παραγώγου της έκτης συνάρτησης βάσης του σχήματος 2-1 στο διάστημα $[0,1]$ για 4 ίσα διαστήματα ($n_{ele} = 4$).

Επομένως, κατά την αριθμητική επίλυση προβλημάτων δεύτερης τάξης (π.χ. μετάδοση θερμότητας: εξίσωση Laplace $d^2u/dx^2 = 0$) ήταν επαρκής η χρήση ενός τμηματικά κυβικού πολυωνύμου, δηλαδή ενός πολυωνύμου βαθμού όση η τάξη της ΔΕ (δεύτερης τάξης) αυξημένη κατά μία μονάδα. Συναρτήσεις σαν αυτές του σχήματος 1 και σχήματος 2 είναι κατάλληλες για προβλήματα δεύτερης τάξης (βλ. [19]), όπου είναι ικανοποιητική η συνέχεια π.χ. της θερμοκρασίας και της ροής θερμότητας (πρώτη παράγωγος), αλλά όχι για την κάμψη πλακών.

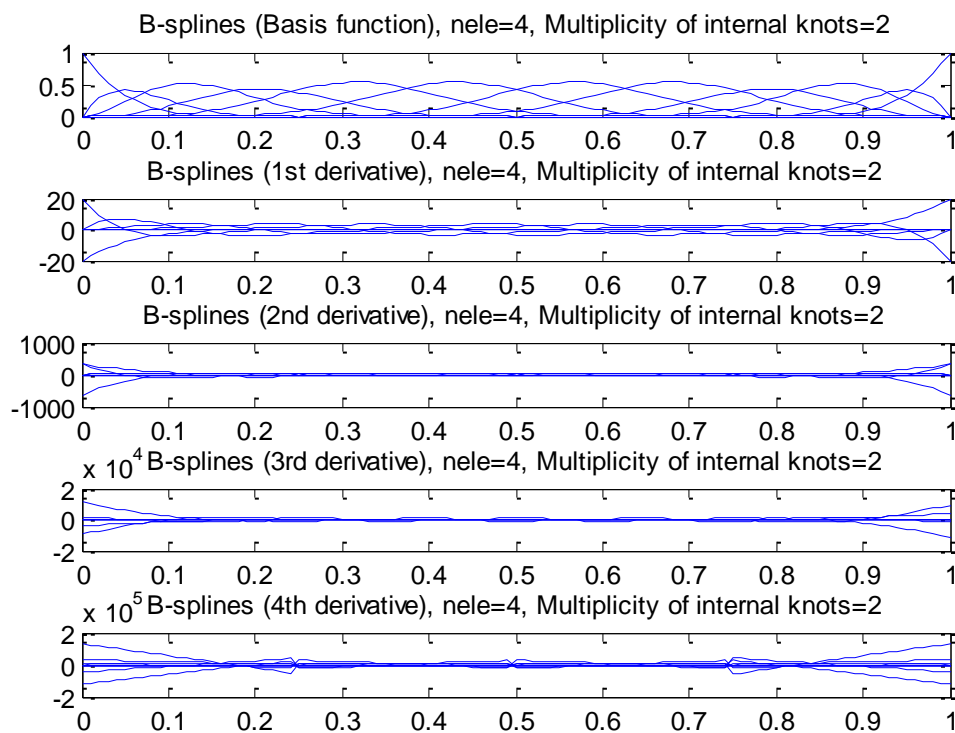
Άρα, εμείς που επιθυμούμε να επιλύσουμε μια ΔΕ τέταρτης τάξης, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τμηματικό πολυώνυμο τουλάχιστον πέμπτου βαθμού ($p = 5$). Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε την πολλαπλότητα των εσωτερικών κόμβων.

Αυτή προκύπτει από το είδος της συνέχειας που επιθυμούμε. Εάν λοιπόν μας ενδιαφέρει να έχουμε συνέχεια μέχρι και τις διαμητικές δυνάμεις:

$$Q = dM/dx = d(M - EIw'')/dx = -EI d^3w/dx^3, \quad (2-4)$$

τότε πρέπει να έχουμε συνέχεια τύπου C^3 . Επομένως, η πολλαπλότητα των εσωτερικών κόμβων θα είναι $p-3$, δηλαδή $5-3=2$. Εάν το πολυώνυμο θεωρηθεί έκτου, έβδομου κλπ βαθμού, η πολλαπλότητα γίνεται 3, 4 κλπ, αντίστοιχα.

Εάν χωρίσουμε το πεδίο ορισμού και πάλι σε 4 ίσα μέρη ($n_{ele} = 4$), για βαθμό πολυωνύμου $p = 5$ προκύπτουν 12 συναρτήσεις βάσης που δείχνονται στο **Σχήμα 2-4**, όπου παρατηρείται ασυνέχεια από την 4^η παράγωγο (συμπεριλαμβανομένης) και εφεξής.



Σχήμα 2-4. Συναρτήσεις βάσης και παράγωγοι αυτών στο διάστημα $[0,1]$, για τμηματικά πολυώνυμα 5^{ου} βαθμού σε τέσσερα ίσα υποδιαστήματα.

2.4 Διαδικασία υπολογισμού

Όπως ήδη αναφέραμε, η μέχρι στιγμής εμπειρία [19], είναι ότι για τμηματικά πολυώνυμα τρίτου βαθμού, σε m διαστήματα, η κανονική διαφορική εξίσωση ικανοποιείται σε $n = 2m$ σημεία Gauss στο εσωτερικό των υποδιαστημάτων, δηλαδή στις θέσεις:

$$x_{col} = \frac{(x_i + x_{i+1})}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(x_i - x_{i+1})}{2}, \quad i = 1, \dots, (m-1) \quad (2-5)$$

Αντίστοιχα με το παραπάνω, το πλήθος των σημείων Gauss ανά υποδιάστημα, υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε συνέχεια τύπου C^1 , δίνεται από τον **Πίνακα 2-1**.

Πίνακας 2-1: Πλήθος σημείων Gauss ανά υποδιάστημα συναρτήσεως πολυωνυμικού βαθμού, για συνέχεια τύπου C^1 .

Βαθμός πολυωνύμου (p)	Πλήθος σημείων Gauss (n_g)
3	2
4	3
5	4
6	5

Αντίστοιχα με το παραπάνω, το πλήθος των σημείων Gauss ανά υποδιάστημα, υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε συνέχεια τύπου C^2 , δίνεται από τον **Πίνακα 2-2**.

Πίνακας 2-2: Πλήθος σημείων Gauss ανά υποδιάστημα συναρτήσεως πολυωνυμικού βαθμού, για συνέχεια τύπου C^2 .

Βαθμός πολυωνύμου (p)	Πλήθος σημείων Gauss (n_g)
3	1
4	2
5	3
6	4

Οι δύο παραπάνω πίνακες περιελήφθηκαν περισσότερο για λόγους καλύτερης αντίληψης και πληρότητας παρά για την τελική εφαρμογή της μεθόδου. Για τις ανάγκες του συγκεκριμένου προβλήματος, όπου απαιτούμε συνέχεια τύπου C^3 , χρήσιμα αποτελέσματα δίνονται στον **Πίνακα 2-3**.

Πίνακας 2-3: Πλήθος σημείων Gauss ανά υποδιάστημα συναρτήσει πολυωνυμικού βαθμού, για συνέχεια τύπου C^3 .

Βαθμός πολυωνύμου (ρ)	Πλήθος σημείων Gauss (n_g)
4	1
5	2
6	3
7	4
...	...
ρ	$\rho - 3$

2.5 Πρώτη σημαντική παρατήρηση

Στα **στατικά** προβλήματα, ο τρόπος εργασίας αναφέρθηκε λεπτομερώς πιο πάνω. Ουσιαστικά, γράφουμε την εξίσωση ισορροπίας στα collocation points και στη συνέχεια ικανοποιούμε τις οριακές συνθήκες με επιπλέον εξισώσεις:

- Βέλος κάμψης στο αριστερό άκρο της δοκού (μηδενίζεται): $w(x=0) = 0$
- Γωνία στροφής στο αριστερό άκρο της δοκού (μηδενίζεται): $w'(x=0) = 0$
- Ροπή στο δεξί άκρο της δοκού (μηδενίζεται): $w''(x=L) = 0$
- Δύναμη διάτμησης στο δεξί άκρο της δοκού (μηδενίζεται): $w'''(x=L) = 0$

Στη συνέχεια θεωρούμε *ολόκληρο* το σύνολο αυτών των εξισώσεων, στο οποίο βεβαίως λαμβάνουμε υπόψη τις τιμές των βελών κάμψης και των ροπών στο σύνορο. Εάν, λ.χ. έχουμε θεωρήσει ένα υποδιάστημα ($n_{ele} = 1$) τότε μπορούμε να γράψουμε 2 εξισώσεις από την ταξιθεσία, οπότε εάν προσθέσουμε τις παραπάνω 4 εξισώσεις των οριακών συνθηκών προκύπτουν τελικά 6 εξισώσεις. Πράγματι, στην παρούσα εργασία επιλύσαμε ολόκληρο το σύστημα των 6 εξισώσεων από το οποίο προέκυψε η λύση:

$$sol = [0, 0, 0.0250, 0.0583, 0.0917, 0.1250]$$

Προφανώς, οι πρώτοι 2 συντελεστές είναι μηδενικοί διότι αντιστοιχούν στην πάκτωση, ενώ οι υπόλοιποι 4 είναι διάφοροι του μηδενός.

Αντίθετα, στα **δυναμικά** προβλήματα η κατάσταση είναι πολύ διαφορετική. Για ευκολία στη συζήτησή μας, θεωρούμε και πάλι την ανωτέρω περίπτωση $n_{ele} = 1$ και $\rho = 5$. Ικανοποιούμε την εξίσωση κίνησης στα 2 collocation points (προκύπτουν μητρώα διατάσεων 2×6), αλλά δεν είναι πλέον δυνατόν να προσαρτήσουμε τις 4 οριακές συνθήκες σε ένα ενιαίο σύνολο, διότι τότε δεν θα καταλήγαμε απευθείας σε ένα τετραγωνικό μητρώο μάζας διαστάσεων 2×2 και σε ένα επίσης τετραγωνικό μητρώο δυσκαμψίας διαστάσεων 2×2 .

Βέβαια, στην περίπτωση που όλες οι οριακές συνθήκες είναι μηδενικές (πάκτωση και στα δύο άκρα), τότε δεν προκύπτει δυσκολία, καθόσον μετά τη διαγραφή των 4 συντελεστών¹ τα τελικά μητρώα είναι τετραγωνικά, δηλαδή διαστάσεων 2×2. Να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι συγγραφείς ασχολούνται με το επονομαζόμενο Dirichlet problem, που προφανώς είναι ευκολότερο στην επίλυσή του.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, το ζήτημα αυτό αντιμετωπίστηκε ως εξής. Και πάλι για $nele = 1$ και $p = 5$, οι βαθμοί ελευθερίας προσαρτώνται στα 6 σημεία ελέγχου (εξ' αριστερών προς τα δεξιά: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 και a_6). Τροποποιούμε την αρίθμηση των βαθμών ελευθερίας, έτσι ώστε να δημιουργήσουμε δύο διανύσματα:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (2-6)$$

Είναι κατανοητό ότι το διάνυσμα \mathbf{a}_1 περιλαμβάνει τις “γνωστές” (ορθότερα τις **εξαρτημένες**) μεταβλητές, ενώ το \mathbf{a}_2 τις **ανεξάρτητες** μεταβλητές. Τούτο συμβαίνει διότι ο μηδενισμός ροπής και δύναμης στο δεξί άκρο δεν σημαίνει, κατ' ανάγκη, τον μηδενισμό των συντελεστών a_5 και a_6 .

Γράφοντας τις οριακές συνθήκες προκύπτει:

Αριστερό άκρο:

$$w(0) = 0 \Rightarrow N_{1p}(0) \cdot a_1 + N_{2p}(0) \cdot a_2 + N_{3p}(0) \cdot a_3 + N_{4p}(0) \cdot a_4 + N_{5p}(0) \cdot a_5 + N_{6p}(0) \cdot a_6 = 0$$

$$w'(0) = 0 \Rightarrow N'_{1p}(0) \cdot a_1 + N'_{2p}(0) \cdot a_2 + N'_{3p}(0) \cdot a_3 + N'_{4p}(0) \cdot a_4 + N'_{5p}(0) \cdot a_5 + N'_{6p}(0) \cdot a_6 = 0$$

Δεξί άκρο:

$$w(L) = 0 \Rightarrow N_{1p}(L) \cdot a_1 + N_{2p}(L) \cdot a_2 + N_{3p}(L) \cdot a_3 + N_{4p}(L) \cdot a_4 + N_{5p}(L) \cdot a_5 + N_{6p}(L) \cdot a_6 = 0$$

$$w'(L) = 0 \Rightarrow N'_{1p}(L) \cdot a_1 + N'_{2p}(L) \cdot a_2 + N'_{3p}(L) \cdot a_3 + N'_{4p}(L) \cdot a_4 + N'_{5p}(L) \cdot a_5 + N'_{6p}(L) \cdot a_6 = 0$$

¹ Ενώ ο μηδενισμός του βέλους συνεπάγεται τον μηδενισμό του αντίστοιχου συντελεστή (διότι η συνάρτηση βάσης είναι μονάδα, οπότε ο συντελεστής α ταυτίζεται με το βέλος \mathbf{w}) δεν έχει πλήρως διερευνηθεί εάν το ίδιο ισχύει και για τη μηδενική στροφή της πάκτωσης.

Το σύνολο των ανωτέρω τεσσάρων οριακών συνθηκών γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} N_{1p}(0) & N_{2p}(0) & N_{3p}(0) & N_{4p}(0) & N_{5p}(0) & N_{6p}(0) \\ N'_{1p}(0) & N'_{2p}(0) & N'_{3p}(0) & N'_{4p}(0) & N'_{5p}(0) & N'_{6p}(0) \\ N''_{1p}(L) & N''_{2p}(L) & N''_{3p}(L) & N''_{4p}(L) & N''_{5p}(L) & N''_{6p}(L) \\ N'''_{1p}(L) & N'''_{2p}(L) & N'''_{3p}(L) & N'''_{4p}(L) & N'''_{5p}(L) & N'''_{6p}(L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

Η σχέση (2-7) ορίζει τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των 6 σταθερών $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Γενικά, από αυτές τις 6 σταθερές, οι 2 πρέπει να θεωρηθούν σαν κυρίαρχες (πρωτεύουσες ή ανεξάρτητες) και οι υπόλοιπες 4 σαν δευτερεύουσες (εξαρτημένες). Ο τρόπος επιλογής έγκειται στην δυνατότητα αντιστροφής του γραμμικού συστήματος 4×4 που θα προκύψει όταν θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τους 2 συντελεστές συναρτήσεων των υπόλοιπων 2 συντελεστών. Είναι φανερό ότι εκείνοι οι συντελεστές που βρίσκονται στον πυρήνα (περί το κέντρο βάρους) του πεδίου ορισμού, δεν επηρεάζονται από τις οριακές συνθήκες και μπορούν να θεωρηθούν σαν πρωτεύουσες. Στην προκειμένη περίπτωση, οι «κεντρικές» μεταβλητές είναι οι a_3 και a_4 , ενώ οι εξαρτημένες είναι οι a_1 και a_2 που επηρεάζονται από το αριστερό άκρο, καθώς επίσης και a_5 και a_6 που επηρεάζονται από το δεξί άκρο.

Έτσι, η σχέση (2-7) γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} N_{1p}(0) & N_{2p}(0) & N_{3p}(0) & N_{4p}(0) & N_{5p}(0) & N_{6p}(0) \\ N'_{1p}(0) & N'_{2p}(0) & N'_{3p}(0) & N'_{4p}(0) & N'_{5p}(0) & N'_{6p}(0) \\ N''_{1p}(L) & N''_{2p}(L) & N''_{3p}(L) & N''_{4p}(L) & N''_{5p}(L) & N''_{6p}(L) \\ N'''_{1p}(L) & N'''_{2p}(L) & N'''_{3p}(L) & N'''_{4p}(L) & N'''_{5p}(L) & N'''_{6p}(L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

Αναδιατάσσοντας τις στήλες, η σχέση (2-8) γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} N_{1p}(0) & N_{2p}(0) & N_{5p}(0) & N_{6p}(0) & N_{3p}(0) & N_{4p}(0) \\ N'_{1p}(0) & N'_{2p}(0) & N'_{5p}(0) & N'_{6p}(0) & N'_{3p}(0) & N'_{4p}(0) \\ N''_{1p}(L) & N''_{2p}(L) & N''_{5p}(L) & N''_{6p}(L) & N''_{3p}(L) & N''_{4p}(L) \\ N'''_{1p}(L) & N'''_{2p}(L) & N'''_{5p}(L) & N'''_{6p}(L) & N'''_{3p}(L) & N'''_{4p}(L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Εάν ονομάσουμε \mathbf{A}_1 (διαστάσεων 4×4) και \mathbf{A}_2 (διαστάσεων 4×2) τα δύο τμήματα του μητρώου που εμφανίζεται στη σχέση (2-9), η τελευταία γράφεται:

$$[\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{0}] \quad (2-10)$$

Εκτελώντας τις μητρωϊκές πράξεις, η (2-10) γίνεται:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$$

ή τελικά:

$$\boxed{\mathbf{a}_1 = -(\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{a}_2} \quad (2-11)$$

Η σχέση (2-11) είναι πολύ σημαντική διότι συσχετίζει τους εξαρτημένους με τους ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας, και θα ληφθεί υπόψη μετά από λίγο.

Ας δούμε τώρα τις διαμορφούμενες εξισώσεις. Η ικανοποίηση της ΔΕ στα 4 σημεία ταξίθεσίας (collocation points, εξ' ου και ο ακόλουθος κάτω δείκτης "c" στα μητρώα) δίνει:

$$[\mathbf{M}_{c1} \quad \mathbf{M}_{c2}] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}_1 \\ \ddot{\mathbf{a}}_2 \end{bmatrix} + [\mathbf{K}_{c1} \quad \mathbf{K}_{c2}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{0}] \quad (2-12)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2-11) στη (2-12) η τελευταία δίνει:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{c1} \ddot{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{M}_{c2} \ddot{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{K}_{c1} \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_{c2} \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \mathbf{M}_{c1} \left[-(\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \right] + \mathbf{M}_{c2} \ddot{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{K}_{c1} \left[-(\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \right] + \mathbf{K}_{c2} \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \left[\mathbf{M}_{c2} - \mathbf{M}_{c1} \cdot (\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \right] \cdot \ddot{\mathbf{a}}_2 + \left[\mathbf{K}_{c2} - \mathbf{K}_{c1} \cdot (\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \right] \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2-13)$$

Έτσι, τα τελικά μητρώα με τα οποία διαμορφώνεται το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{M}_{final} &= \mathbf{M}_{c2} - \mathbf{M}_{c1} \cdot (\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{K}_{final} &= \mathbf{K}_{c2} - \mathbf{K}_{c1} \cdot (\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \end{aligned}} \quad (2-14)$$

2.6 Δεύτερη σημαντική παρατήρηση

Βλέπουμε ότι ενώ κατά την εφαρμογή της κλασσικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων διαγράφονται μόνο οι περιορισμένοι βαθμοί ελευθερίας (δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση $nele=1$, $p=5$, θα έμεναν 4 DOFs), στην καθολική ταξίθεσία είμαστε αναγκασμένοι να διαγράψουμε *επιπλέον* δύο ακόμη, και συγκεκριμένα εκείνους που αντιστοιχούν στο ελεύθερο άκρο. Ωστόσο, η διαγραφή δεν είναι «επί λέξει» διαγραφή (διότι τότε προκύπτουν άσχετα αποτελέσματα), αλλά σύμφωνα με τη σχέση απαλοιφής (2-14). Ειδικότερα τα μητρώα της (2-14) διαμορφώνονται με τις παρακάτω διαστάσεις:

$$\mathbf{M}_{final} = \mathbf{M}_{c2} - \mathbf{M}_{c1} \cdot \underbrace{(\mathbf{A}_1)^{-1}}_{4 \times 4} \cdot \mathbf{A}_2$$

2×2 2×2 2×4 4×4 4×2

Προφανώς, παρόλο που στα παραπάνω αναφερθήκαμε σε συγκεκριμένες τιμές, η παραπάνω αναλυτική περιγραφή είναι εφαρμόσιμη για οποιονδήποτε αριθμό υποδιαίρέσεων, $nele$, και για οποιονδήποτε βαθμό πολυωνύμου, p . Κατ' επέκταση, ο κώδικας MATLAB που προέκυψε είναι ενιαίος και τρέχει για οποιαδήποτε επιλογή των μεγεθών $nele$ και p .

2.7 Αριθμητικά Παραδείγματα σε Δοκούς

Η απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου ολικής ταξιθεσίας θα αξιολογηθεί σε δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις δοκιμής: μια στατική (που δείχνει την ποιότητα σύγκλισης) και μια δυναμική (εύρεση ιδιοσυχνοτήτων).

2.7.1 Πρόβλημα 1: Δοκός πακτωμένη στο ένα άκρο με ομοιόμορφο φορτίο

Το παράδειγμα αυτό είναι το πλέον κλασσικό και αφορά σε δοκό μήκους L , με λοιπά δεδομένα (E , A , I), που είναι πακτωμένη στο άκρο της $x = 0$, και δέχεται ομοιόμορφη φόρτιση f_z [N/m]. Η ακριβής σχέση που προσδιορίζει το βέλος κάμψης συναρτήσει της θέσης x , $0 < x < L$, είναι:

$$w_{exact}(x) = \frac{f_z L^4}{24EI} \cdot \left[3 - 4 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \left(1 - \frac{x}{L} \right)^4 \right] \equiv \frac{f_z L^4}{2EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right], \quad (2-15)$$

ενώ το μέγιστο βέλος είναι:

$$w_{max} = \frac{f_z L^4}{8EI}. \quad (2-16)$$

Η μεταβολή του σφάλματος υπολογισμού του μέγιστου βέλους, w_{max} , στη θέση $x = L$ δείχνεται στον **Πίνακα 2-4**.

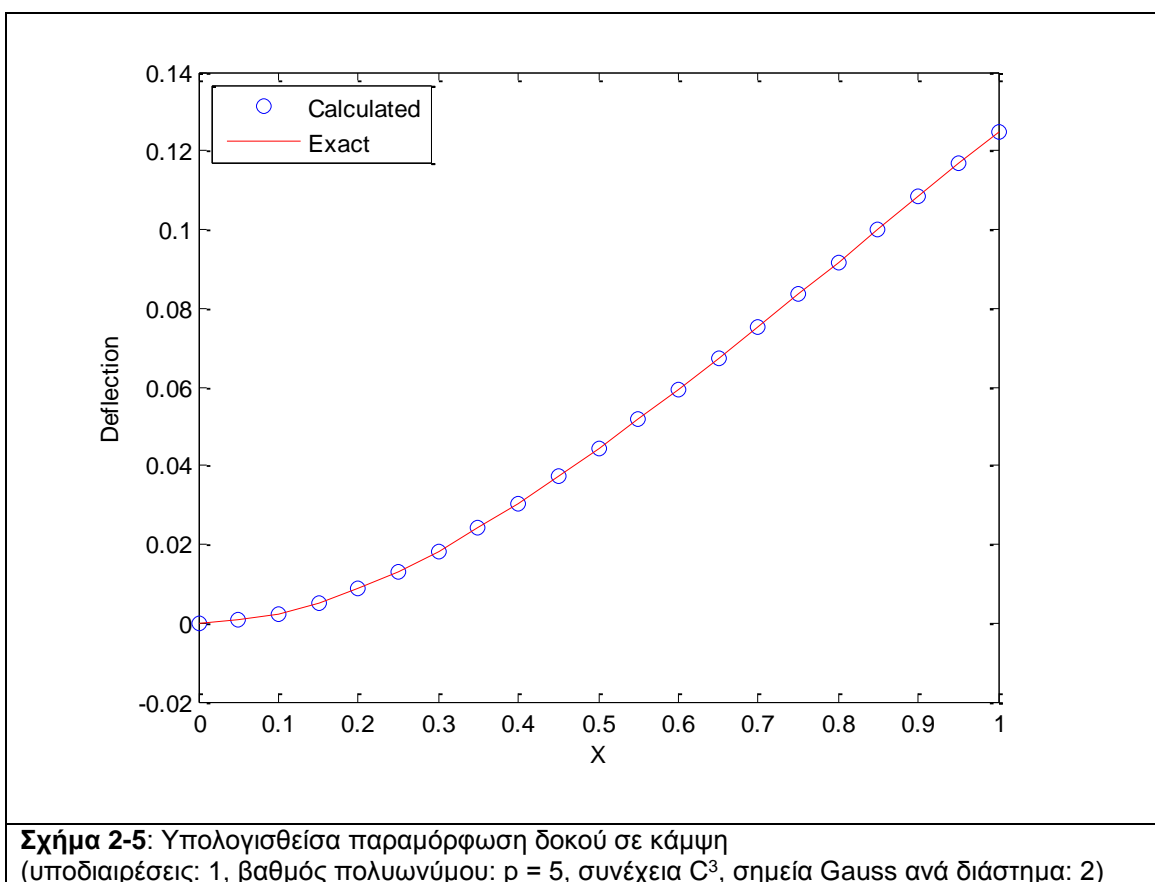
Πίνακας 2-4: Ποιότητα σύγκλισης μέγιστου βέλους κάμψης.

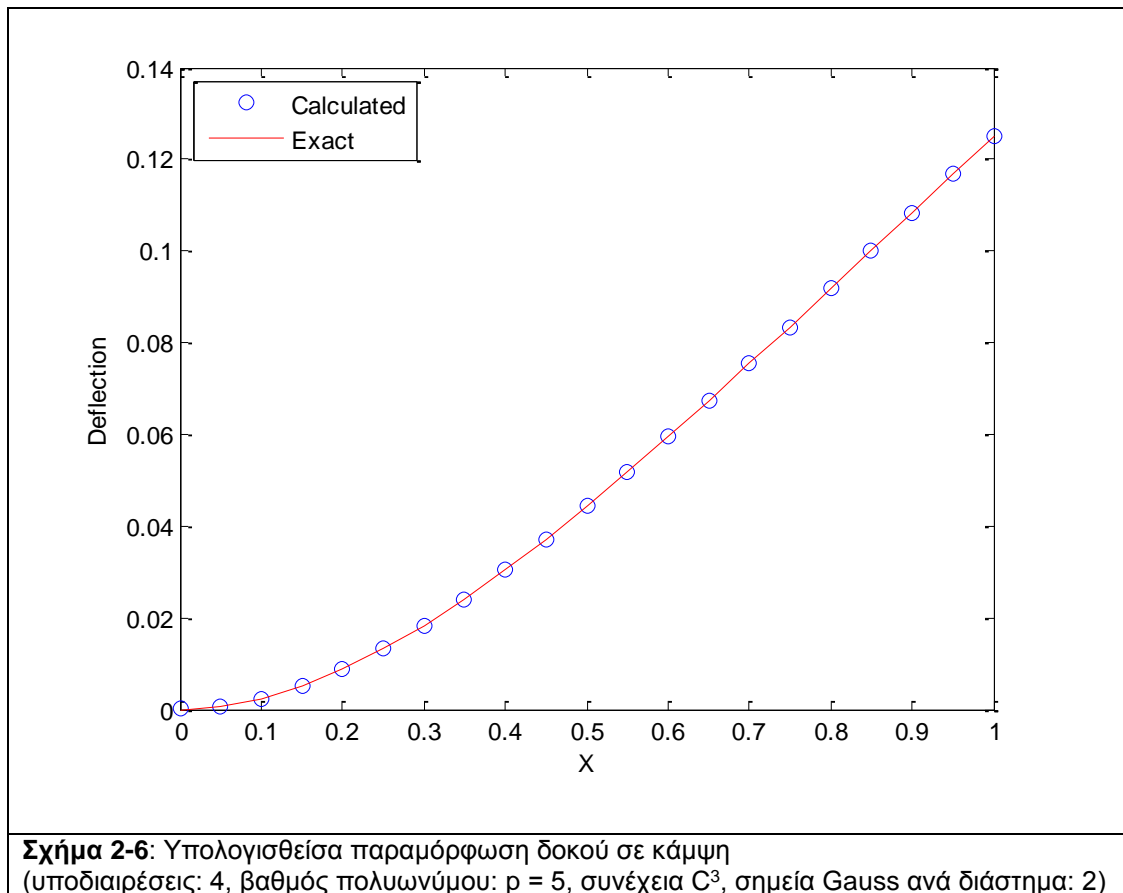
Πλήθος υποδιαίρεσεων (n)	Σφάλμα (%)
1	4.44089e-014
2	-5.61773e-012
3	-1.56319e-011
4	-1.04183e-010
5	-6.26166e-011
6	-6.49480e-011
7	1.66711e-010
8	-3.58913e-010

Παρατηρούμε ότι ακόμη και με μια μόνο υποδιαίρεση, δηλαδή μόνο με την ικανοποίηση της διαφορικής εξίσωσης μόνο σε δύο σημεία ταξιθεσίας (!), το αριθμητικό αποτέλεσμα είναι εξαιρετικά καλό. Αυτό βέβαια ήταν αναμενόμενο διότι έχουμε λάβει βαθμό πολυωνύμου $p = 5$, ενώ η θεωρητική λύση είναι πολυώνυμο τέταρτου βαθμού (με ελλείποντα τον σταθερό όρο καθώς και τον όρο πρώτου βαθμού).

Βέβαια, δημιουργείται η εντύπωση ότι η σύγκλιση δεν επιτυγχάνεται με μονοτονικό τρόπο και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η απόλυτη ακρίβεια επιτυγχάνεται ήδη με ένα διάστημα ενώ οι υπόλοιπες διαφορές οφείλονται στην ακρίβεια υπολογισμών (σφάλματα αποκοπής) του MATLAB (δεν πηγαίνει ποτέ σε ακρίβεια κάτω από 10^{-14}).

Επιλέγοντας την περίπτωση μιας και τεσσάρων υποδιαίρεσεις του μήκους της, το **Σχήμα 2-5** και το **Σχήμα 2-6** δείχνουν εξαιρετική ακρίβεια, όχι μόνο στο άκρο (πρβλ. Πίνακα 4) αλλά και κατά μήκος ολόκληρης της δοκού.





2.7.2 Πρόβλημα 2: Ιδιοταλαντώσεις δοκού πακτωμένης στο ένα άκρο

Δοκός μήκους L πακτώνεται στη θέση $x = 0$ και υποβάλλεται σε ελεύθερη. Οι ακριβείς ιδιοτιμές δίνονται από τις σχέσεις:

$$\omega_i^2 = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 \cdot \left(\frac{EI}{\rho A}\right) \quad (2-17)$$

Όπου, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία [20], οι ακριβείς τιμές της παραμέτρου λ δίνονται από τον **Πίνακα 2-5**:

Πίνακας 2-5: Ακριβείς τιμές της παραμέτρου λ_i

Τάξη ιδιομορφής (i)	λ_i
1	1.87510407
2	4.69409113
3	7.85475744
4	10.99554073
5	14.13716839

Σε αυτή την περίπτωση, η ακρίβεια των υπολογισμών εξαρτάται από το πλήθος των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζουμε τη δοκό. Πιο συγκεκριμένα, η δοκός χωρίζεται διαδοχικά σε 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 και 8 υποδιαστήματα και τα αντίστοιχα αποτελέσματα δίνονται στον **Πίνακα 2-6**, για βαθμό πολυωνύμου $p = 5$.

Πίνακας 2-6: Υπολογισθείσες ιδιοτιμές (ω^2 [s⁻²]) μονόπακτης δοκού ($p = 5$)

Α/Α ιδιομορφής	ΣΦΑΛΜΑ (%)							
	Πλήθος υποδιαστημάτων (nele)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.42	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	187.77	-1.61	0.17	0.09	0.04	0.02	0.01	0.01
3	-	47.70	-2.53	0.33	0.26	0.15	0.09	0.06
4	-	152.51	34.83	-3.15	0.43	0.44	0.29	0.19
5	-	-	47.64	29.92	-3.58	0.47	0.60	0.45

Αντίστοιχα αποτελέσματα για βαθμό τμηματικών πολυωνύμων $p = 6$ παρουσιάζονται στον **Πίνακα 2-7**, ενώ για $p = 7$ παρουσιάζονται στον **Πίνακα 2-8**.

Πίνακας 2-7: Υπολογισθείσες ιδιοτιμές (ω^2 [s⁻²]) μονόπακτης δοκού ($p = 6$)

Α/Α ιδιομορφής	ΣΦΑΛΜΑ (%)							
	Πλήθος υποδιαστημάτων (nele)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	-5.92	0.32	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	343.89	-1.72	0.53	0.06	0.02	0.01	0.00	0.00
4	-	-6.78	-1.15	0.66	0.11	0.03	0.01	0.01
5	-	93.28	-0.64	-0.95	0.76	0.15	0.06	0.02

Πίνακας 2-8: Υπολογισθείσες ιδιοτιμές (ω^2 [s⁻²]) μονόπακτης δοκού ($p = 7$)

Α/Α ιδιομορφής	ΣΦΑΛΜΑ (%)							
	Πλήθος υποδιαστημάτων (nele)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	1.52	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	-11.62	0.33	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	620.80	3.15	0.19	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
5	-	-5.41	0.67	0.14	-0.01	0.00	0.00	0.00

Μερικό συμπέρασμα: Το σύνολο των παραπάνω αποτελεσμάτων δείχνει ότι η σύγκλιση είναι ταχύτατη, ιδιαίτερα όσο αυξάνεται ο βαθμός p του τμηματικού πολυωνύμου.

Κεφάλαιο 3: Κάμψη λεπτών πλακών

3.1 Γενικά

Επεκτείνοντας τη θεωρία των δοκών, δεχόμαστε ότι το βέλος κάμψης παρεμβάλλεται στο εσωτερικό της πλάκας από μια ενιαία έκφραση, στην οποία υπεισέρχονται χωρικές και χρονικές συναρτήσεις, όπως ακριβώς και στη γνωστή μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [N_{i,p}(x) \cdot N_{j,q}(y)] \cdot a_{ij}(t), \quad i=1,\dots,n, \quad j=1,\dots,m, \quad (3-1)$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι χωρικές συναρτήσεις σχήματος είναι καρτεσιανά γινόμενα των αντίστοιχων μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης, $N_{i,p}$, ανά κατεύθυνση.

Γενικά, δεν είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιείται ο ίδιος ακριβώς πολυωνυμικός βαθμός σε κάθε κατεύθυνση (p και q). Ωστόσο, επειδή στην διπλωματική μας εργασία εξετάστηκαν μόνο τετραγωνικές πλάκες, οι υπολογισμοί έχουν γίνει για κοινό βαθμό πολυωνύμου ($p = q$), χωρίς όμως αυτό να αλλοιώνει τη γενική εφαρμογή της μεθόδου. Επεκτείνοντας τα συμπεράσματα της κάμψης πλακών, ο ελάχιστος αποδεκτός βαθμός είναι $p = 5$, δηλαδή η τάξη της ΔΕ (=4) αυξημένη κατά μία μονάδα.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την κάμψη πλακών που διέπεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση κίνησης:

$$\boxed{D\nabla^4 w(x,y,t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = q(x,y,t)} \quad (3-2)$$

Τα ζητούμενα του προβλήματος είναι τα εξής.

Για τα **στατικά προβλήματα**, όπου οι οριακές συνθήκες (στήριξη) και η φόρτιση είναι δεδομένα, ζητείται ο υπολογισμός της χωρικής κατανομής της παραμόρφωσης $w(x)$ ή $w(x,y)$ για δοκούς ή πλάκες, αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο καθολικής ταξιθεσίας, η εξίσωση κίνησης πλάκας σε κάμψη, σχέση (3-2) ικανοποιείται σε διακριτά σημεία του πεδίου ορισμού του προβλήματος $[0, a] \times [0, b]$, δηλαδή στο εσωτερικό της πλάκας, διαστάσεων $a \times b$.

$$D \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (3-3)$$

Το στατικό πρόβλημα περιορίζεται στο εξής:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (3-4)$$

Όπου

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (3-5)$$

είναι η επονομαζόμενη *καμπτική δυσκαμψία/στιβαρότητα* (flexural rigidity).

Εισάγοντας τη σχέση (3-1) στην (3-4), για το στατικό πρόβλημα λαμβάνουμε:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial^4 N_{i,p}(x)}{\partial x^4} \cdot N_{i,q}(y) + 2 \frac{\partial^2 N_{i,p}(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_{i,q}(y)}{\partial y^2} + N_{i,p}(x) \frac{\partial^4 N_{i,q}(y)}{\partial y^4} \right] \cdot a_i(t) = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (3-6)$$

Όπως και στην περίπτωση της δοκού, εισάγουμε τα σημεία ταξιθεσίας στις θέσεις των γνωστών σημείων Gauss. Συγκεκριμένα, εφόσον η ροπή κάμψης και η διατμητική δύναμη είναι δεύτερη και τρίτη παράγωγοι του βέλους κάμψης, αντίστοιχα:

$$EIw'' = -M, \quad \text{και} \quad Q = dM/dx = -EIw''',$$

είναι επαρκές να θεωρήσουμε συνέχεια της παραγώγου μέχρι και τρίτης τάξης (C^3 -continuity). Με αυτό το δεδομένο, μπορεί ναδειχθεί ότι για δοσμένο βαθμό πολυωνύμου, p , το πλήθος των σημείων ταξιθεσίας ανά χωρίο είναι $n_g = p - 3$.

Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε την πλάκα σαν ένα ενιαίο χωρίο (χωρίς καμμία υποδιαίρεση) και ορίσουμε τον βαθμό του πολυωνύμου ίσον προς 5 (δηλ. $p=5$), τότε κατά μήκος μιας γραμμής παράλληλης προς τον άξονα x (π.χ. στην ακμή της βάσης) το πλήθος των κόμβων (πλήθος στοιχείων του κομβο-διανύσματος: knot vector) είναι:

$$m = 2 \times (p+1) = 2 \times (5+1) = 12.$$

Επομένως το συνολικό πλήθος των σημείων ελέγχου ανά κατεύθυνση είναι:

$$n = m - (p+1) = 12 - (5+1) = 6$$

Άρα το συνολικό πλήθος των σημείων ελέγχου για ολόκληρη την πλάκα είναι $6 \times 6 = 36$, εκ των οποίων τα $4 \times (6-1) = 20$ ανήκουν στο σύνορο και τα υπόλοιπα $36 - 20 = 16$ στο εσωτερικό της πλάκας. Προφανώς, σε κάθε σημείο ελέγχου, στη θέση (i,j) , αντιστοιχεί και ένας βαθμός ελευθερίας, a_{ij} .

Για πλάκα πανταχόθεν εδρασμένη, σε καθένα από τα παραπάνω 20 συνοριακά σημεία ελέγχου επιβάλλουμε τη συνθήκη $W=0$. Η συνθήκη αυτή μηδενίζει τους συντελεστές που αντιστοιχούν σε αυτούς τους 20 συνοριακούς βαθμούς ελευθερίας. Έτσι, απομένουν $36 - 20 = 16$ άγνωστοι βαθμοί ελευθερίας, ο προσδιορισμός των οποίων απαιτεί τη διαμόρφωση 16 εξισώσεων.

Όπως έχουμε αναφέρει προηγούμενα, η ικανοποίηση της ΔΕ πρέπει να γίνει σε ένα κατάλληλο πλήθος σημείων ταξιθεσίας, το οποίο στην περίπτωση μας είναι $2 \times 2 = 4$ εσωτερικά σημεία στις θέσεις:

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad y = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b}{2} = \frac{b}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Έτσι, απομένουν $16 - 4 = 12$ εξισώσεις μέχρις ότου από τις 4 καταλήξουμε στις 16. Αυτές προφανώς θα προέλθουν από τις υπόλοιπες οριακές συνθήκες που είναι η συνθήκη της άρθρωσης, δηλαδή της μηδενικής ροπής στήριξης. Εάν στις τέσσερις εφαρμόσουμε τη συμμετρική συνθήκη $M_{xy} = 0$, τότε απομένουν $16 - 4 - 4 = 8$ εξισώσεις.

Εάν διαιρέσουμε τον αριθμό 8 δια του πλήθους 4 των πλευρών, τότε προκύπτει η ανάγκη θεώρησης $8 : 4 = 2$ συνθηκών μηδενισμού της καμπτικής ροπής $M_n = 0$ ($n = \text{normal vector}$, κάθετα στην εκάστοτε πλευρά). Παρόλο, λοιπόν, που σε κάθε πλευρά υπάρχουν 6 σημεία ελέγχου, ωστόσο φαίνεται να είναι επαρκές να μηδενίσουμε τη ροπή ($M_n = 0$) σε δύο σημεία, δηλαδή σε τόσα όσο είναι το πλήθος των σημείων ολοκλήρωσης ανά κατεύθυνση. Με άλλα λόγια, λαμβάνουμε την ορθή προβολή των ανωτέρω αναφερθέντων 2×2 σημείων Gauss πάνω στις πλευρές του τετραγώνου, και έτσι προκύπτουν $4 \times 2 = 8$ σημεία, πλήρως συμμετρικών.

Επεκτείνοντας τα παραπάνω, προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος:

- 1) Ορίζω τον βαθμό p του πολυωνύμου παρεμβολής.
- 2) Ορίζω το πλήθος των υποδιαιρέσεων ανά κατεύθυνση (n_{ele}) της αρχικής πλάκας.
- 3) Το πλήθος σημείων ταξιθεσίας ανά κατεύθυνση ισούται με $n_g = p - 3$.
- 4) Κατασκευάζω τα σημεία ταξιθεσίας και ικανοποιώ σε αυτά τη Διαφορική Εξίσωση.
- 5) Ικανοποιώ την ομογενή οριακή συνθήκη στήριξης, $W=0$, σε όλα τα σημεία ελέγχου του συνόρου.
- 6) Ικανοποιώ τη συνθήκη ($M_n = 0$) στις προβολές των σημείων ταξιθεσίας πάνω στις πλευρές του τετραγώνου.
- 7) Ικανοποιώ τη συνθήκη ($M_{xy} = 0$) στις τέσσερις κορυφές του τετραγώνου.
- 8) Διαγράφω τις στήλες που αντιστοιχούν στα σημεία ελέγχου του συνόρου.
- 9) Επιλύω το σύστημα των εξισώσεων, όπως αυτό προκύπτει μετά την παραπάνω διαγραφή.
- 10) Με βάση τους γνωστούς πλέον συντελεστές a_{ij} , εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα της σχέσης (4-1) και, έτσι, υπολογίζουμε το βέλος κάμψης και τις στροφές σε οποιοδήποτε σημείο επιθυμούμε (καταρχήν στις θέσεις των σημείων ελέγχου).

3.2 Πανταχόθεν εδρασμένη πλάκα

Στο εδάφιο αυτό μελετάμε την αριθμητική επίδοση της προτεινόμενης μεθόδου σε μια τετραγωνική πλάκα πανταχόθεν εδρασμένη (SSSS: simply-supported) με ομοιόμορφο φορτίο, στην οποία η ακριβής τιμή του βέλους δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση [21]:

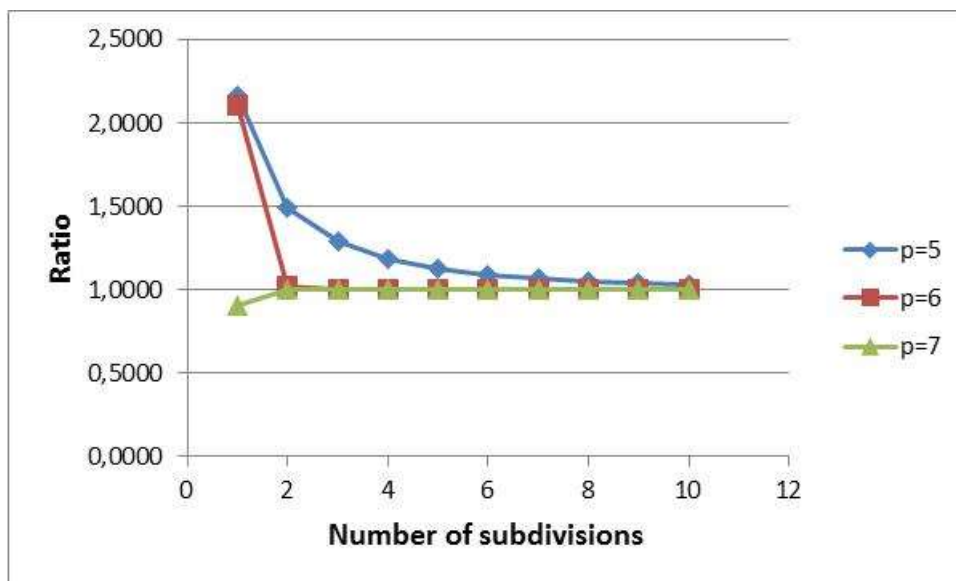
$$w_{exact,max} = 0.00406 \frac{pa^4}{D}, \quad (3-7)$$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται υπό τη μορφή του λόγου (ratio):

$$ratio = \frac{w_{calculated}}{w_{exact,max}}, \quad (3-8)$$

όπου $w_{calculated}$ η υπολογισθείσα τιμή με βάση την μέθοδο της καθολικής ταξιθεσίας.

Μεταβάλλοντας τον βαθμό του πολυωνύμου, p , ο ρυθμός σύγκλισης φαίνεται στο **Σχήμα 3-1**. Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση του λόγου προς τη μονάδα είναι εξαιρετικά γρήγορη, ιδιαίτερα όταν ο βαθμός του πολυωνύμου είναι $p \geq 6$.



Σχήμα 3-1: Ποιότητα σύγκλισης της υπολογιζόμενης στατικής λύσης υπό μορφή λόγου του μέγιστου βέλους στο κέντρο της πλάκας προς την ακριβή τιμή αυτού [εξ.(3-8)].

3.3 Δυναμική ανάλυση

Η διαδικασία υπολογισμού των ιδιοσυχνοτήτων είναι αντίστοιχη εκείνης που εφαρμόστηκε στις δοκούς σε κάμψη, με δυσκολία όμως στην εφαρμογή των οριακών συνθηκών. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την εξ.(3-2) στην οποία θέτουμε μηδενικά εξωτερικά φορτία, δηλαδή $q(x, y, t) = 0$, οπότε γίνεται:

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3-9)$$

Εισάγοντας τη σχέση (3-1) στην (3-9) προκύπτει:

$$D\nabla^4 \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [N_{i,p}(x) \cdot N_{j,q}(y)] \cdot a_{ij}(t) \right\} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [N_{i,p}(x) \cdot N_{j,q}(y)] \cdot a_{ij}(t) \right\} = 0 \quad (3-10)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3-10) στα σημεία ταξίθεσίας (collocation points), (x_c, y_c) , προκύπτει η γνωστή σχέση:

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{a}}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{a}\} = \mathbf{0}, \quad (3-11)$$

όπου οι όροι των μητρώων μάζας και στιβαρότητας δίνονται από τις σχέσεις:

$$[\mathbf{M}]_{cJ} = \rho h [N_{i,p}(x_c) \cdot N_{j,q}(y_c)], \quad (3-12)$$

και

$$[\mathbf{K}]_{cJ} = \rho h \cdot \nabla^4 [N_{i,p}(x_c) \cdot N_{j,q}(y_c)], \quad (3-13)$$

Στις σχέσεις (3-12) και (3-13) έχουμε θεωρήσει ότι η J -στή στήλη των δύο μητρώων αντιστοιχεί στον κόμβο (i, j) του πλέγματος των σημείων ελέγχου.

Εάν το πλήθος αυτών είναι n_x και n_y στις κατευθύνσεις x και y , αντίστοιχα, και η αρίθμηση ξεκινήσει από το κάτω αριστερά σημείο και αυξάνεται προς τη κατεύθυνση x , τότε προφανώς:

$$J = (j-1) \cdot n_x + i, \quad i = 1, \dots, n_x, \quad j = 1, \dots, n_y \quad (3-14)$$

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι τα μητρώα \mathbf{M} και \mathbf{K} δεν είναι ακόμη τετραγωνικής μορφής (όπως είναι εξασφαλισμένο στα συμβατικά πεπερασμένα στοιχεία), δηλαδή έχουν εν γένει περισσότερες στήλες από το πλήθος των γραμμών. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα collocation point, ενώ κάθε στήλη αντιστοιχεί σε ένα βαθμό ελευθερίας που προσαρτάται σε ένα σημείο ελέγχου (control point). Ακόμη και εάν διαλέγαμε τα collocation points να ταυτίζονται ή έστω σε ίσο πλήθος με τα εσωτερικά control points θα υπήρχε το ζήτημα χειρισμού αυτών που βρίσκονται πάνω στο σύνορο της πλάκας.

Σε ότι αφορά στους βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στη συνθήκη $W=0$ δεν υπάρχει ιδιαίτερη δυσκολία. Εάν γράψω τη συνθήκη αυτή σε όλα τα σημεία του συνόρου, θα προκύψει ότι όλοι οι συντελεστές που συνδέονται με αυτούς είναι *μηδενικοί*. Αυτό σημαίνει ότι ολόκληρες οι αντίστοιχες στήλες αμφοτέρων των μητρώων \mathbf{M} και \mathbf{K} διαγράφονται. Έτσι, απομένουν μόνον οι βαθμοί ελευθερίας που συνδέονται με τα εσωτερικά σημεία ελέγχου. Όμως, και πάλι όλοι αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους διότι πρέπει να ικανοποιούν και τις υπόλοιπες συνθήκες που συνίστανται στο γεγονός ότι η πλάκα είναι πανταχόθεν εδρασμένη, δηλαδή έχει μηδενικές ροπές κατά μήκος του συνόρου της.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στα **στατικά** προβλήματα, ο τρόπος εργασίας αναφέρθηκε λεπτομερώς πιο πάνω. Ουσιαστικά, γράφουμε την εξίσωση ισορροπίας στα collocation points και στη συνέχεια ικανοποιούμε τις οριακές συνθήκες με επιπλέον εξισώσεις. Στη συνέχεια θεωρούμε *ολόκληρο* το σύνολο αυτών των εξισώσεων, στο οποίο βεβαίως λαμβάνουμε υπόψη τις τιμές των βελών κάμψης και των ροπών στο σύνορο.

Έτσι, εάν θεωρήσουμε ολόκληρη την πλάκα σαν ένα κελί ($n_{ele} = 1$), και τον βαθμό του πολυωνύμου ίσον με $p = 5$, θα έχουμε 4 collocation points αλλά το τελικό σύνολο των εξισώσεων θα είναι 16, εκ των οποίων οι 4 συντελεστές είναι ίσοι με το μηδέν. Με άλλα λόγια, παρόλο που έχουμε ικανοποιήσει τη διαφορική εξίσωση σε 4 σημεία, εν τούτοις προκύπτουν 12 μη μηδενικοί συντελεστές. Προφανώς, κάποιοι από αυτούς «αντιστοιχούν» στις μη μηδενικές γωνίες στροφής του συνόρου.

Αντίθετα, στα **δυναμικά** προβλήματα η κατάσταση είναι διαφορετική. Ναι μεν ικανοποιούμε την εξίσωση κίνησης στα collocation points, αλλά δεν είναι δυνατόν να προσαρτήσουμε τις οριακές συνθήκες σε ένα ενιαίο σύνολο, διότι τότε δεν θα καταλήγαμε απευθείας σε ένα τετραγωνικό μητρώο μάζας και σε ένα επίσης τετραγωνικό μητρώο δυσκαμψίας. Βέβαια, στην περίπτωση που όλες οι οριακές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε δεν προκύπτει δυσκολία, καθόσον μετά τη διαγραφή τα τελικά μητρώα είναι τετραγωνικά. Να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι συγγραφείς ασχολούνται με το επονομαζόμενο Dirichlet problem, που προφανώς είναι ευκολότερο στην επίλυσή του.

Στην απλούστερη περίπτωση ($n_{ele} = 1$, $p = 5$) χρειαζόμαστε $2 \times 2 = 4$ collocation points, ενώ το πλήθος των σημείων ελέγχου είναι $6 \times 6 = 36$. Μηδενίζοντας τους 20 συντελεστές που εξασφαλίζουν μηδενισμό του βέλους κάμψης σε ολόκληρο το σύνολο, παραμένουν $36 - 20 = 16$ βαθμοί ελευθερίας. Τότε τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας που αντιστοιχούν στα 4 collocation points θα είναι διαστάσεων 4×16 . Προκειμένου να καταλήξουμε σε τετραγωνικό μητρώα διαστάσεων 4×4 , πρέπει να απαλείψουμε τους 12 από τους 16 συντελεστές (βαθμούς ελευθερίας). Ακολουθώντας το πρότυπο που ακολουθήθηκε στην κάμψη της δοκού (βλ. Κεφάλαιο 2), επιλέγουμε σαν πρωτεύοντες βαθμούς ελευθερίας εκείνους που συνδέονται με τα πλέον $2 \times 2 = 4$ κεντρικότερα σημεία ελέγχου, δηλαδή αυτά που είναι πλησίον του κέντρου βάρους της πλάκας. Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε το διάνυσμα \mathbf{a}_2 των πρωτεύοντων βαθμών ελευθερίας ($\alpha_{15}, \alpha_{16}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$) που είναι οι πλέον κεντρικοί των σημείων ελέγχου, ενώ οι υπόλοιποι, \mathbf{a}_1 , είναι οι εξαρτημένοι.

Η μόνη διαφορά με τον προγραμματισμό της δοκού είναι ότι ενώ εκεί είχαμε θεωρήσει το διάνυσμα \mathbf{a}_1 , έτσι ώστε να περιλαμβάνει ακόμη και τους μηδενικούς, επειδή στην πλάκα οι περιορισμένοι βαθμοί είναι κατ' ελάχιστον 20, τα σημεία ελέγχου του συνόρου έχουν εξαιρεθεί από το διάνυσμα \mathbf{a}_1 .

Πάντως, εντελώς αντίστοιχα, τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας υπολογίζονται και πάλι από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{final} &= \mathbf{M}_{c2} - \mathbf{M}_{c1} \cdot (\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{K}_{final} &= \mathbf{K}_{c2} - \mathbf{K}_{c1} \cdot (\mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \end{aligned} \quad (3-15)$$

Στην απλούστερη περίπτωση ($n_{ele}=1$, $p=5$), οι διαστάσεις των συμμετεχόντων πινάκων είναι:

$$\mathbf{M}_{final} = \underbrace{\mathbf{M}_{c2}}_{4 \times 4} - \underbrace{\mathbf{M}_{c1}}_{4 \times 12} \cdot \underbrace{(\mathbf{A}_1)^{-1}}_{12 \times 12} \cdot \underbrace{\mathbf{A}_2}_{12 \times 4}$$

3.4 Εύρεση ιδιοσυχνοτήτων

Εξετάζουμε την επίδοση της μεθόδου σε μια τετραγωνική πλάκα, για την οποία τα ακριβή αποτελέσματα δίνονται από τον **Πίνακα 3-1**.

Πίνακας 3-1: Φυσικές συχνότητες τετραγωνικής πλάκας πλευράς a [Blevins].

λ_{ij}^2					
A/A ιδιοταλάντωσης (mode)					
1	2	3	4	5	6
19.74	49.35	49.35	78.96	98.70	98.70
(i=1, j=1)	(i=2, j=1)	(i=1, j=2)	(i=2, j=2)	(i=3, j=1)	(i=1, j=3)

Οι τιμές του Πίνακα 3-1 πρέπει να αντικατασταθούν στη σχέση:

$$f_{ij} [\text{Hz}] = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \left[\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2}; \quad i=1,2,3,\dots; \quad j=1,2,3,\dots, \quad (3-16)$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας, h το πάχος της πλάκας, ν ο λόγος Poisson, ρ η πυκνότητα μάζας, ενώ οι ακέραιοι i και j είναι οι αριθμοί ημι-κυμάτων (half-waves) στην mode shape στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα, και λ_{ij}^2 είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από τον λόγο μήκους προς πλάτος (a/b) των πλευρών (ο Πίνακας 3-1 αναφέρει μόνον την περίπτωσης τετραγωνικής πλάκας). Όπως αναφέρει ο Provatidis [22], οι τύποι του Blevins [23], αλλά και του ίδιου του Leissa [24] δίνουν μόνο δύο δεκαδικά και επιδέχονται βελτίωση. Διορθωτικοί συντελεστές έχουν παρουσιαστεί από τον Gorman [25] (για τετραγωνική πλάκα με λόγο Poisson 0,3). Ως εκ τούτου, οι ακριβείς τιμές που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα διπλωματική εργασία στηρίζονται στην ευρεθείσα αναλυτική έκφραση που ισχύει μόνο για αυτή την περίπτωση πανταχόθεν εδρασμένης δοκού: $\lambda_{ij}^2 = \pi^2 \left[i^2 + j^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]$, η οποία στην περίπτωση τετραγωνικού σχήματος ($a=b$) γίνεται:

$$\lambda_{ij}^2 = \pi^2 (i^2 + j^2) \quad (3-17)$$

Τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα δείχνονται στον **Πίνακα 3.2**.

Πίνακας 3-2: Θεωρητικές ιδιοσυχνότητες (f [Hz]) πανταχόθεν εδρασμένης πλάκας

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ακριβείς τιμές Ιδιοσυχνοτήτων [Hz]					
Mode-1	Mode-2	Mode-3	Mode-4	Mode-5	Mode-6
0.9507	2.3767	2.3767	3.8028	4.7534	4.7534

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται δύο διπλές ιδιοσυχνότητες με διαφορετικό όμως ιδιοδιάνυσμα.

Τα αποτελέσματα που λήφθηκαν για διάφορους βαθμούς πολυωνύμου και για αυξανόμενο πλήθος υποδιαίρεσεων παρουσιάζονται στους πίνακες που ακολουθούν. Αποτελέσματα για βαθμό τμηματικών πολυωνύμων $p = 5$ παρουσιάζονται στον **Πίνακα 3-3**.

Πίνακας 3-3: Υπολογισθείσες ιδιοσυχνότητες (f [Hz]) πανταχόθεν εδρασμένης πλάκας ($p = 5$)

A/A ιδιομορφής	ΣΦΑΛΜΑ (%)							
	Πλήθος υποδιαστημάτων (nele)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-20.40	-15.93	-11.08	-7.65	-5.44	-4.02	-3.08	-2.42
2	2.35	1.81	-4.27	-3.44	-2.70	-2.12	-1.70	-1.38
3	2.35	1.81	-4.27	-3.44	-2.70	-2.12	-1.70	-1.38
4	-2.29	0.54	-4.69	-4.06	-3.37	-2.79	-2.31	-1.92
5	-	6.72	6.44	-2.19	-2.08	-1.80	-1.53	-1.29
6	-	9.60	10.64	0.71	0.34	0.17	0.09	0.06

Αντίστοιχα αποτελέσματα για βαθμό τμηματικών πολυωνύμων $p = 6$ παρουσιάζονται στον **Πίνακα 3-4**, ενώ για $p = 7$ παρουσιάζονται στον **Πίνακα 3-5**.

Πίνακας 3-4: Υπολογισθείσες ιδιοσυχνότητες (f [Hz]) πανταχόθεν εδρασμένης πλάκας ($\rho = 6$)

Α/Α ιδιομορφής	ΣΦΑΛΜΑ (%)							
	Πλήθος υποδιαστημάτων (nele)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-28.25	-0.51	-0.04	-0.01	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
2	8.69	-1.66	-0.11	-0.02	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
3	8.69	-1.66	-0.11	-0.02	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
4	-5.74	-7.55	-0.80	-0.13	-0.03	-0.01	-0.00	-0.00
5	8.74	-0.41	-0.72	-0.02	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
6	9.02	1.15	-0.43	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00

Πίνακας 3-5: Υπολογισθείσες ιδιοσυχνότητες (f [Hz]) πανταχόθεν εδρασμένης πλάκας ($\rho = 7$)

Α/Α ιδιομορφής	ΣΦΑΛΜΑ (%)							
	Πλήθος υποδιαστημάτων (nele)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.16	-0.03	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
2	-0.50	0.00	-0.01	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
3	-0.50	0.00	-0.01	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
4	-16.71	-0.01	-0.03	-0.01	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
5	53.70	0.12	0.03	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
6	53.70	0.20	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Επομένως, όσο αυξάνεται ο βαθμός του πολυωνύμου τόσο ταχύτερη είναι η σύγκλιση. Ιδιαίτερα στην περίπτωση πολυωνύμου εβδόμου βαθμού, $\rho=7$, τα αποτελέσματα είναι εκπληκτικά ακριβή.

Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα & Μελλοντική Έρευνα

4.1 Συμπεράσματα

Η εργασία έδειξε με τρόπο ξεκάθαρο ότι η μέθοδος της καθολικής ταξιθεσίας, σε συνδυασμό με παρεμβολή B-splines, δουλεύει καλά και συγκλίνει γρήγορα προς την ακριβή λύση. Τα αποτελέσματα είναι εξίσου καλά τόσο σε στατικά όσο και σε δυναμικά προβλήματα. Γενικά, όσο αυξάνει βαθμός του πολυωνύμου τόσο βελτιώνεται η ποιότητα της σύγκλισης. Γενικότερα η μέθοδος της ταξιθεσίας, έστω και σε μικρά πεπερασμένα στοιχεία (χωρία), δεν έχει εφαρμοσθεί μέχρι σήμερα σε προβλήματα τέταρτης τάξης και αυτό ήταν η αιτία μακρού προβληματισμού για τον κατάλληλο βαθμό του πολυωνύμου, καθώς επίσης και το κατάλληλο πλήθος των σημείων ταξιθεσίας, έτσι ώστε να προκύπτει ίσος αριθμός εξισώσεων και αγνώστων.

4.2 Μελλοντική έρευνα

Προκειμένου να προταθεί η υιοθέτηση της μεθόδου έναντι άλλων απαιτείται περαιτέρω έρευνα, ως εξής:

- Σύγκριση με συμβατικά πεπερασμένα στοιχεία με τον ίδιο αριθμό υποδιαίρεσεων ή αγνώστων.
- Σύγκριση με διάφορα πακέτα πεπερασμένων στοιχείων, καθόσον οι πλάκες δεν είναι εντελώς τυποποιημένα στοιχεία και οι εμπορικοί κώδικες παρουσιάζουν σημαντική διαφορά στην συμπεριφορά τους.
- Μέτρηση του CPU-time.
- Εφαρμογή σε πιο πολύπλοκα σχήματα και διερεύνηση του τρόπου σύνδεσης των υποχωρίων στα οποία θα διαιρέσουμε την συνολική κατασκευή.
- Επανάληψη της ίδιας εργασίας με χρήση των περίφημων NURBS, τα οποία γενικεύουν την παρεμβολή B-splines.

Βιβλιογραφία

- [1] Den Hartog JP. *Mechanical Vibrations*. New York: Dover; 1985.
- [2] Rayleigh JWS. *The Theory of Sound*, Vols. 1 and 2. New York: Dover, (enlarged from 1894 edition); 1945.
- [3] Zienkiewicz OC. *The Finite Element Method*, 3rd edn. London: McGraw-Hill; 1977
- [4] Katsikadelis JT. A generalized Ritz method for partial differential equations in domains of arbitrary geometry using global shape functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2008;32:353-367.
- [5] Mote CD Jr. Local-global finite element. *Int. J. Numer. Eng.* 1971; 3:565-574.
- [6] Provatidis CG, Kanarachos AE. Performance of a macro-FEM approach using global interpolation (Coons') functions in axisymmetric potential problems. *Comput Struct* 2001;79:1769–1779.
- [7] Provatidis CG. Coons-patch macroelements in two dimensional eigenvalue and scalar wave propagation problems. *Comput Struct* 2004;82(4-5):383-395.
- [8] Provatidis CG. Three dimensional Coons macroelements: Application to eigenvalue and scalar wave propagation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2006;65:111-134.
- [9] Provatidis CG. Two-dimensional elastostatic analysis using Coons-Gordon interpolation. *Meccanica* 2012;47:951–967.
- [10] Provatidis CG. Free vibration analysis of elastic rods using global collocation. *Archive of Applied Mechanics* 2008;78(4):241-250.
- [11] Provatidis CG. Time- and frequency-domain analysis using lumped mass global collocation. *Archive of Applied Mechanics* 2008;78(4):909-920.
- [12] Provatidis CG. Integration-free Coons macroelements for the solution of 2D Poisson problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2009;77:536-557.

- [13] Provatidis CG, Ioannou KS. Static analysis of two-dimensional elastic structures using global collocation. *Archive of Applied Mechanics* 2010;80(4):389-400.
- [14] Ιωάννου Κλήμης. *Ελαστοστατική Ανάλυση 2-Δ Κατασκευών με τη Μέθοδο της Καθολικής Ταξιθεσίας*. Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Αθήνα, Μάρτιος 2008.
- [15] Φιλιππάτος Άγγελος. Εύρεση Ιδιοσυχνοτήτων Ακουστικών Κοιλοτήτων και Ελαστικών Κατασκευών με τη Μέθοδο της Καθολικής Ταξιθεσίας. Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Αθήνα, Οκτώβριος 2010.
- [14] Graff KF. *Wave Motion in Elastic Solids*. New York: Dover Publications Inc; 1975.
- [15] Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, 1st English edn (translated and revised from the German original). New York: InterScience Publishers; 1966.
- [16] Provatidis CG. Eigenanalysis of two-dimensional acoustic cavities using transfinite interpolation. *Journal of Algorithms & Computational Technology* 2009;3(4):477-502.
- [17] Filippatos A. Eigenvalue extraction for acoustic cavities and elastic structures using the global collocation method, Diploma Work (supervised by Prof. C. G. Provatidis), National Technical University of Athens, Athens, School of Mechanical Engineering (October 2010).
- [18] Carl de Boor and Blair Swartz, Collocation at Gaussian Points, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1973, Vol. 10, No. 4 : pp. 582-606.
- [19] C. G. Provatidis, S. K. Isidorou, Solution of One-dimensional Hyperbolic Problems Using Cubic B-Splines Collocation, *International Journal of Computer Science and Application(IJCSA)*, Vol. 1, issue 1, (August) 2012, pp. 12-18.
- [20] W. Weaver, Jr., S. P. Timoshenko, D. H. Young, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, NJ, 1990.
- [21] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *The Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1964.

- [22] Provatidis CG, Plate bending analysis using transfinite interpolation, *Proceedings 6th GRACM Congress on Computational Mechanics*, Thessaloniki, 19021 June 2008.
- [23] Blevins, R.D. (1979), "*Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*", Van Nostrand, New York.
- [24] Leissa, A.W. (1973), "The free vibration of rectangular plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31(2), pp. 257-293.
- [25] Gorman, D. J. (1978), "Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 57(3), pp. 437-447.

Παράρτημα Α

```

%-----GLOBAL COLLOCATION USING B-SPLINES
%     STATIC ANALYSIS under uniform load
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Copyright J. MARKAKIS & C. PROVATIDIS, Athens, 2013    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;
clc;
%-----
    global gi; global omed;
    [gi,omed] = pgau_rectangle;
%-----
%...DATA:
L = 1; % Length of beam
E = 1; % Young's modulus
I = 1; % Second moment of inertia
Fz= 1; % Distributed Load
%   | | | | | | | |
% /| V V V V V V V V (Fz)
% /|-----
% /|          L
%
nele=1;          % Number of segments
nodes = nele+1 ;
%
x = linspace(0,L,nele+1);
%
p = 5 ;          % Polynomial degree (Minimum Accepted Value = 5,
Max=23)
continuityCm = 3;
C = p-continuityCm; % C=Internal knot multiplicity (equals 'c' in text).
ngauss=C;
%
numknots=2*(p+1)+(nodes-2)*C;          %Number of knots
numcontrol=numknots-p-1                %Number of control points
%Check:
    disp('*** CHECK Number of CollocationPoints & Equations ***')
    val_left=nele*ngauss
    val_right=numcontrol-4
    disp('-----')
%...DEFINE THE 'KNOT-SEQUENCE' (KNOTS):
    knots=augknt(linspace(0,L,nodes),p+1,C); %knot sequence
%...DEFINE ALL INTEGRATION POINTS AND THEIR WEIGHTS IN A UNIQUE VECTOR:
    dx=L/nele;
%... X-axis:
    nc=0;
    for i=1:nele
        xm=dx/2+(i-1)*dx;
        for k=1:ngauss
            nc=nc+1;
            xint(nc) = xm+gi(k,ngauss)*dx/2;
            omex(nc) = omed(k,ngauss);
        end
    end
end
%
ncollocation = nc;
%
```



```

%---DEFINE THE VALUES AND DERIVATIVES AT THE ABOVE INTEGRATION POINTS:
% Not only the integration but also the ends should be included.
tau(1)=0;
tau(2:ngauss*nele+1)=xint(1:ngauss*nele);
tau(ngauss*nele+2)=L;
%... At GPTs, including the ends:
colmat1=spcol(knots,p+1,brk2knt(tau,p)); %All basis functions Nip
and (p-1) derivatives.
[i1,i2]=size(colmat1); %i2=number of control points.
Basis1 =colmat1(1:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis.
(4GPTSx10segments+2 = 42x13)
Dbasis1=colmat1(2:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis First
Derivatives. (4GPTSx10segments+2 = 42x13)
Dbasis2=colmat1(3:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis Second
Derivatives. (4GPTSx10segments+2 = 42x13)
Dbasis3=colmat1(4:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis Third
Derivatives. (4GPTSx10segments+2 = 42x13)
Dbasis4=colmat1(5:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis Third
Derivatives. (4GPTSx10segments+2 = 42x13)
% Fulfill ODE at Collocation Points:
for icol=1:ncollocation
    for j=1:numcontrol
        A(icol,j)=E*I*Dbasis4(icol+1,j);
    end
    rhs(icol)=Fz;
end
% Apply Boundary Conditions at Left End:
for j=1:numcontrol
    A(ncollocation+1,j)=Basis1(1,j) ; % Dirichlet B.C.: w=0
    A(ncollocation+2,j)=Dbasis1(1,j); % Neumann B.C. : w'=0
end
rhs(ncollocation+1)=0;
rhs(ncollocation+2)=0;
% Apply Boundary Conditions at Right End:
for j=1:numcontrol
    ipoint=ngauss*nele+2;
    A(ncollocation+3,j)=Dbasis2(ipoint,j) ; % Dirichlet B.C.: w=0
    A(ncollocation+4,j)=Dbasis3(ipoint,j); % Neumann B.C. : w'=0
end
rhs(ncollocation+3)=0;
rhs(ncollocation+4)=0;
% Solve Equations:
sol = A\rhs';
% Plot Calculated versus Exact Flexure:
Wmax_exact=(Fz*L)*L^3/8/E/I;
nseg=20;
dx=L/nseg;
%-----
--
% Find Basis Functions at the new equidistant points:
for i=1:(nseg+1)
    taunew(i)=(i-1)*dx;
end
colmat1new=spcol(knots,p+1,brk2knt(taunew,p));
[i1new,i2new]=size(colmat1new);
Basis1new =colmat1new(1:p:i1new,:);
Dbasis1new=colmat1new(2:p:i1new,:);
Dbasis2new=colmat1new(3:p:i1new,:);
Dbasis3new=colmat1new(4:p:i1new,:);
Dbasis4new=colmat1new(5:p:i1new,:);

```


Παράρτημα Β

```
%-----GLOBAL COLLOCATION USING B-SPLINES
%      EIGENVALUE ANALYSIS

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Copyright J. MARKAKIS & C. PROVATIDIS, Athens, 2013      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;
clc;
%-----
    global gi; global omed;
    [gi,omed] = pgau_rectangle;
%-----
--
%...DATA:
L = 1; % Length of beam
E = 1; % Young's modulus
I = 1; % Second moment of inertia
Fz= 1; % Distributed Load
%
length=L;
density=1;
Area=1;
%
% /|
% /|-----
% /|          L

%
nele = 1; % Number of segments (nele=4 is OK)
nodes = nele+1 ;
%
x = linspace(0,L,nele+1);
%
p = 5 ;          % Polynomial degree (Minimum Accepted Value = 5,
Max=23)
continuityCm = 3;
C = p-continuityCm; % C=Internal knot multiplicity (equals 'c' in text).
ngauss=C;
%
    numknots=2*(p+1)+(nodes-2)*C; %Number of knots, i.e. terms of knot
sequence.
    numcontrol=numknots-p-1          %Number of control points
%Check:
    disp('*** CHECK Number of CollocationPoints & Equations ***')
    val_left=nele*ngauss
    val_right=numcontrol-4
    disp('-----')
%...DEFINE THE 'KNOT-SEQUENCE' (KNOTS):
    knots=augknt(linspace(0,L,nodes),p+1,C); %knot sequence
%...DEFINE ALL INTEGRATION POINTS AND THEIR WEIGHTS IN A UNIQUE VECTOR:
    dx=L/nele;
%... X-axis:
    nc=0;
    for i=1:nele
        xm=dx/2+(i-1)*dx;
        for k=1:ngauss
```

```

        nc=nc+1;
        xint(nc) = xm+gi(k,ngauss)*dx/2;
        omex(nc) = omed(k,ngauss);
    end
end

%
ncollocation = nc;
%
%---DEFINE THE VALUES AND DERIVATIVES AT THE ABOVE INTEGRATION POINTS:
% Not only the integration but also the ends should be included.
tau(1)=0;
tau(2:ngauss*nele+1)=xint(1:ngauss*nele);
tau(ngauss*nele+2)=L;
%... At GPTs, including the ends:
colmat1=spcol(knots,p+1,brk2knt(tau,p)); %All basis functions Nip
and (p-1) derivatives.
[i1,i2]=size(colmat1); %i2=number of control points.
Basis1 =colmat1(1:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis.
(4GPTSx10segments+2 = 42x13)
Dbasis1=colmat1(2:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis First
Derivatives. (4GPTSx10segments+2 = 42x13)
Dbasis2=colmat1(3:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis Second
Derivatives. (4GPTSx10segments+2 = 42x13)
Dbasis3=colmat1(4:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis Third
Derivatives. (4GPTSx10segments+2 = 42x13)
Dbasis4=colmat1(5:p:i1,:); %Vector of B-splines Basis Third
Derivatives. (4GPTSx10segments+2 = 42x13)
% Fulfill ODE at Collocation Points:
for icol=1:ncollocation
    for j=1:numcontrol
        K(icol,j)=E*I*Dbasis4(icol+1,j);
        M(icol,j)=Basis1(icol+1,j);
    end
end
%
k=K;
m=M;
%Split matrices:
Mc1(:,1:2)=M(:,1:2); Mc1(:,3:4)=M(:,numcontrol-1:numcontrol);
Mc2(:,1:numcontrol-4)=M(:,3:numcontrol-2);
%
Kc1(:,1:2)=K(:,1:2); Kc1(:,3:4)=K(:,numcontrol-1:numcontrol);
Kc2(:,1:numcontrol-4)=K(:,3:numcontrol-2);
% Apply Boundary Conditions:
%CLAMPED BEAM (Left: zero flexure, zero slope, Right: zero Q(w''), zero
M(w''))
% (K,M)=8x12, we want to eliminate 4 DOFs
neq = numcontrol-4;
% Flexure at x=0:
A(1,1:numcontrol)=Basis1(1,1:numcontrol);
% Slope at x=0:
A(2,1:numcontrol)=Dbasis1(1,1:numcontrol);
% Shear force at x=L:
A(4,1:numcontrol)=Dbasis2(ncollocation+2,1:numcontrol);
% Moment at x=L:
A(3,1:numcontrol)=Dbasis3(ncollocation+2,1:numcontrol);
%---
A1(1:4,1:2)=A(1:4,1:2);
A1(1:4,3:4)=A(1:4,numcontrol-1:numcontrol);
A2(1:4,1:numcontrol-4)=A(1:4,3:numcontrol-2);
%

```

```

Mfinal=-Mc1*inv(A1)*A2 + Mc2;
Kfinal=-Kc1*inv(A1)*A2 + Kc2;
%
EigenCalc = sort(eig(Kfinal,Mfinal));
% break
%
-----
% C...EXACT EIGENVALUES:
% C
disp('')
disp('*** EXACT EIGENVALUES ***')
%...ONE END FIXED (CLAMPED), THE OTHER FREE:
for i=1:neq
    if(i==1)
        lamda=1.87510407;
    elseif(i==2)
        lamda=4.69409113;
    elseif(i==3)
        lamda=7.85475744;
    elseif(i==4)
        lamda=10.99554073;
    elseif(i==5)
        lamda=14.13716839;
    else
        lamda=(2*i-1)*pi/2;
    end
    eigexact(i)=(lamda^2/length^2)^2*(E*I/density/Area)
%correction
    fprintf('%5i    %12.8f\n',i,eigexact(i));
end
%
%DISPLAY THE CALCULATED VALUES VERSUS EXACT ONES:
disp(' ');
disp('*** COMPARE EIGENVALUES ***');
disp(' A/A    EXACT    CALCULATED    ERROR (%)');
for i=1:neq
    error(i)=(EigenCalc(i)-eigexact(i))/eigexact(i)*100;
    fprintf('%5i    %12.8f    %12.8f    %6.2f\n',...

i,eigexact(i),EigenCalc(i),error(i));
end
% END OF PROGRAM

```

Παράρτημα Γ

Σύμβολα και γλωσσάρι

Breakpoint = σημείο παρεμβολής
Control point = Σημείο ελέγχου
Knot = κόμβος (άσχετος από το Breakpoint)
Knot vector = κομβοδιάνυσμα
nele: Number of ELEments (αριθμός υποδιαστημάτων)
nodes = *nele*+1: number of NODES (ως τέτοιοι εννοούνται τα breakpoints)
p πολυωνυμικός βαθμός (degree of polynomial)
k τάξη πολυωνύμου (polynomial order)
n the number of control points - 1
m the number of knots - 1
U κομβοδιάνυσμα knot vector (knot sequence)
P σημεία ελέγχου (control points)

Παράρτημα Δ

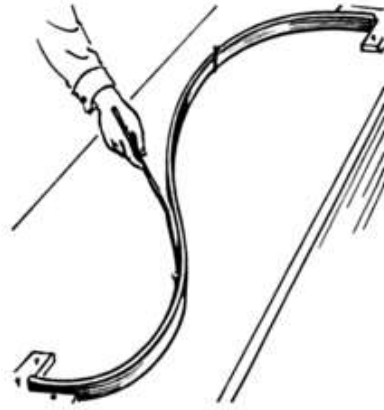
Περί Splines και συναφών συναρτήσεων της Υπολογιστικής Γεωμετρίας (CAD)

Δ.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα μαθηματικά, *spline* είναι μια ειδική συνάρτηση που ορίζεται τμηματικά από πολυώνυμα. Σε προβλήματα παρεμβολής, η *παρεμβολή spline* συνήθως προτιμάται από την πολυωνυμική παρεμβολή διότι οδηγεί σε παραπλήσια αποτελέσματα ακόμη και όταν χρησιμοποιούνται πολυώνυμα χαμηλού βαθμού, ενώ αποφεύγεται το φαινόμενο Runge που εμφανίζεται σε υψηλούς βαθμούς.

Στις υποπεριοχές της επιστήμης των υπολογιστών (computer science) και συγκεκριμένα του Σχεδιασμού με χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή (H/Y) (computer-aided design) και των Γραφικών (computer graphics), ο όρος "spline" πιο συχνά αναφέρεται σε μια παραμετρική *καμπύλη* με χρήση τμηματικού πολυωνύμου. Σε αυτές τις υποπεριοχές τα Splines είναι δημοφιλείς καμπύλες εξαιτίας της απλότητάς στην κατασκευή τους, της ευκολίας και ακρίβειας επαλήθευσης, και της ικανότητάς τους να προσεγγίσουν περίπλοκα σχήματα μέσω προσαρμογής καμπύλης (curve fitting) και της δυνατότητας αλληλεπίδρασης κατά το σχεδιασμό των καμπυλών.

Ο όρος spline προέρχεται από εύκαμπτες συσκευές (spline devices), σαν αυτή του **Σχήματος 1**, που χρησιμοποιούνταν από κατασκευαστές πλοίων και τεχνικούς κατά τον σχεδιασμό ομαλών σχημάτων, πολύ προτού εφευρεθούν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές. Είναι γενικά παραδεκτό ότι η πρώτη μαθηματική αναφορά στα splines έγινε το 1946 στο άρθρο του Schoenberg [Scho46] όπου πιθανότατα για πρώτη φορά η λέξη "spline" σχετίζεται με λεία, τμηματικά πολυωνυμική προσέγγιση. Ωστόσο, οι ιδέες αυτές έχουν τις ρίζες τους στις ναυπηγικές και αεροναυπηγικές βιομηχανίες. Στον πρόλογο του βιβλίου [Bart87], ο Robin Forrest περιγράφει ως "lofting" μια τεχνική που χρησιμοποιούνταν από τη Βρετανική βιομηχανία αεροσκαφών κατά τη διάρκεια του Δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου για να κατασκευάσει οδηγούς (templates) αεροσκαφών περνώντας λεπτές ξύλινες ταινίες (που ονομάζονταν "splines") δια μέσου σημείων που κείτονταν στο δάπεδο μεγάλου σχεδιαστικού παταριού, μια τεχνική που είχαν δανεισθεί από τον σχεδιασμό του σκελετού πλοίων.



Σχήμα Δ-1: Το εργαλείο spline

Η χρήση των splines για τη μοντελοποίηση του αμαξώματος οχημάτων φαίνεται ότι είχε διάφορες ανεξάρτητες εκκινήσεις. Ιδιαίτερη αναγνώριση έχει ο de Casteljau στην Citroën, ο Pierre Bézier στην Renault, και ο Birkhoff [Birk90], Garabedian, και de Boor στην General Motors (βλ. [Birk65]), για τις εργασίες που έγιναν στην αρχή του της δεκαετίας 1960 ή τα τέλη της δεκαετίας του 1950. Τελικά δημοσιεύτηκε μόνο ένα από τα άρθρα του de Casteljau, και μάλιστα όχι πλήρως, το 1959. Η εργασία του De Boor στην General Motors οδήγησε σε πλήθος άρθρων που δημοσιεύτηκαν στην αρχή του 1960, συμπεριλαμβανομένου τμήματος της θεμελιώδους εργασίας επί των B-splines [Davi97].

Εργασίες έχουν γίνει επίσης στην αεροπορική βιομηχανία Pratt & Whitney Aircraft, από όπου οι Ahlberg, Nilson, και Walsh εξέδωσαν την πρώτη πραγματεία των splines υπό μορφή βιβλίου ([Ahlb67]). Μια πρόσθετη εργασία έγινε στην αποβάθρα David Taylor Model Basin ([Bethesda, Maryland](http://history.siam.org/birkhoff.htm)), από τον Feodor Theilheimer (<http://history.siam.org/birkhoff.htm>). Η εργασία στην εταιρία General Motors περιγράφεται όμορφα στο σύγγραμμα (Birkhoff, 1990) και (Young, 1997: [Youn97]). Ο Davis (1997) συνοψίζει τμήμα αυτού του υλικού [Davi97].

Παρόλο που ως φοιτητές του ΕΜΠ έχουμε διδαχθεί τη έννοια των splines στο μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης, θεωρούμε ότι οι γνώσεις αυτές απαιτούν συμπλήρωση καθόσον δεν καλύπτεται ο συσχετισμός των splines (Υπολογιστικής Γεωμετρία) με τις Υπολογιστικές Μεθόδους επί των οποίων την τελευταία δεκαετία διεξάγεται έντονη έρευνα ([Hudg05], [Cotr06]).

Πάντως, προκειμένου να εισαχθεί η έννοια της καμπύλης splines και να αποδειχθούν οι σημαντικές ιδιότητές της υπάρχουν πολλοί τρόποι, όπως των διαιρούμενων διαφορών (divided differences) των αποκομμένων δυνάμεων [Curr47; Scho46], της ανθοφορίας [Rams87], και της αναδρομικής σχέσης του deBoor, του Cox και του Mansfield [Cox72; DeBoor72; 78]. Στη συνέχεια, ανάλογα με τις ανάγκες, θα γίνεται χρήση της πλέον κατάλληλης μεθοδολογίας.

1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΜΕ SPLINES

Θεωρούμε το σύνολο που αποτελείται από τα ζεύγη σημείων $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ με $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ και επιδιώκουμε να παρεμβάλλουμε στα σημεία αυτά μια σύνθετη συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή μια συνάρτηση που δεν περιγράφεται από ενιαία μαθηματική έκφραση και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) σε κάθε διάστημα $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ με $i = 1, 2, \dots, n$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι ένα κυβικό πολυώνυμο.
- (ii) η $f(x)$ καθώς και οι πρώτη και δεύτερη παράγωγός της είναι συνεχείς στα δεδομένα σημεία.

Τα σημεία x_0, x_1, \dots, x_n ονομάζονται **σημεία παρεμβολής (breakpoints)**.

Η τελική, ομαλή, επιθυμητή, κυβική καμπύλη ονομάζεται κυβική splines. Οι splines μεγαλύτερου βαθμού χρησιμοποιούνται όταν οι παράγωγοι της τρίτης ή υψηλότερων τάξεων απαιτούνται επίσης να είναι συνεχείς σε κάθε ένα από τα δεδομένα σημεία. Για παράδειγμα, μια spline πέμπτου βαθμού έχει συνεχή τέταρτη παράγωγο. Οι splines άρτιου βαθμού δεν χρησιμοποιούνται συχνά, αφού έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που τις κάνουν λιγότερο κατάλληλες για την παρεμβολή γεωμετρικών καμπυλών CAD ή για την επίλυση κανονικών διαφορικών εξισώσεων.

Ο όρος spline προέρχεται από το εργαλείο, φτιαγμένο από λεπτό μέταλλο ή ξύλινη ταινία, το οποίο λόγω της ελαστικότητάς του είναι δυνατόν να περνάει από συγκεκριμένα σημεία που καθορίζονται από συγκεκριμένες συνθήκες. Η καμπύλη που λαμβάνουμε από μια φυσική spline (ο όρος θα εξηγηθεί αργότερα) έχει σαν χαρακτηριστικό ότι η μέση τετραγωνική καμπυλότητά της είναι ελάχιστη και με αυτή την έννοια, είναι η «ομαλότερη» καμπύλη που περνά μέσα από προκαθορισμένα σημεία.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, θέλουμε να δημιουργήσουμε μια κυβική spline $f(x)$ που να παρεμβάλλεται στα σημεία (x_i, y_i) με $i = 1, 2, \dots, n$ με τις εξής προϋποθέσεις:

- (i) Η $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 3 σε κάθε διάστημα $x_{i-1} \leq x \leq x_i$
- (ii) $f(x_i) = y_i$
- (iii) Η $f'(x)$ και η $f''(x)$ είναι συνεχείς στα σημεία x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

Στο πρώτο υποδιάστημα, $x_0 \leq x \leq x_1$, γνωρίζουμε ότι $f(x_0) = y_0$ και $f(x_1) = y_1$. Για να ορίσουμε ομοιόμορφα τους συντελεστές σε αυτό το διάστημα χρειάζονται δύο επιπλέον συνθήκες. Αν υποθέσουμε αρχικά ότι η $f'(x_0) = y'_0$ και η $f''(x_0) = y''_0$ ορίζονται στο x_0 , μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κυβικό πολυώνυμο στο πρώτο υποδιάστημα. Αφού γίνει αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε την $f'(x_1)$ και την $f''(x_1)$ από το πολυώνυμο και λόγω της συνέχειας αυτών λαμβάνουμε τελικά τέσσερις τιμές, $f(x_1)$, $f'(x_1)$, $f''(x_1)$ και $f(x_2) = y_2$ που προσδιορίζουν το κυβικό πολυώνυμο του δεύτερου υποδιαστήματος. Κατά τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται όλες οι splines στα υπόλοιπα διαστήματα μέχρι το τελευταίο δοσμένο σημείο.

Στο τυχαίο υποδιάστημα $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, η προαναφερθείσα διαδικασία οδηγεί στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & x_{i-1}^3 \\ 0 & 1 & 2x_{i-1} & 3x_{i-1}^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_{i-1} \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_{i-1}) \\ f'(x_{i-1}) \\ f''(x_{i-1}) \\ f(x_i) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

που επιλύεται αριθμητικά ως προς τους τέσσερις συντελεστές του κυβικού πολυωνύμου $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Όπως περιγράφηκε παραπάνω, μια spline δύναται να προσδιορισθεί χρησιμοποιώντας τις $(n+1)$ τιμές της συνάρτησης (y_i) και ακόμη δύο συνθήκες. Έτσι όμως προκύπτουν σφάλματα στρογγυλοποίησης και ακόμη είναι καλύτερα σε κάθε άκρο μιας spline να υπολογίζεται η τιμή μιας παραγώγου. Έτσι η μέθοδος που χρησιμοποιούμε, και δίνει την μεγαλύτερη ακρίβεια υπολογισμών, είναι η παρακάτω.

Ας θεωρήσουμε αρχικά μια spline σε ένα διάστημα μήκους $x_i - x_{i-1} = h$. Αφού η $f(x)$ είναι τρίτου βαθμού, η $f'(x)$ θα είναι δευτέρου και η $f''(x)$ πρώτου βαθμού, σε αυτό το διάστημα. Εάν $f''(x_{i-1}) = s_{i-1}$ και $f''(x_i) = s_i$, τότε η $f''(x)$ δίνεται σε κάθε σημείο του διαστήματος από την γραμμική εξίσωση παρεμβολής

$$f''(x) = \left(1 - \frac{x - x_{i-1}}{h}\right) s_{i-1} + \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right) s_i \equiv \frac{s_{i-1}(x_i - x) + s_i(x - x_{i-1})}{h} \quad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση δυο φορές λαμβάνουμε

$$f(x) = \frac{s_{i-1}(x_i - x)^3 + s_i(x - x_{i-1})^3}{6h} + c_1x + c_2$$

Οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται από τις τελικές συνθήκες $f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ και $f(x_i) = y_i$, οπότε τελικά έχουμε:

$$f(x) = \frac{s_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \frac{s_i(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left\{ \frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{s_{i-1}h_i}{6} \right\} (x_i - x) + \left\{ \frac{y_i}{h_i} - \frac{s_i h_i}{6} \right\} (x - x_{i-1}) \quad (3)$$

με την $f(x)$ να εκφράζει την κυβική συνάρτηση παρεμβολής (spline) στο διάστημα $x_{i-1} \leq x \leq x_i$.

Για να προσδιορίσουμε τις τιμές των s_i, s_{i-1} χρησιμοποιούμε τη συνέχεια των πρώτων παραγώγων στο τέλος κάθε spline. Παραγωγίζοντας την $f(x)$ ως προς x και θέτοντας $x = x_i$, παίρνουμε από τη σχέση (3):

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + \frac{s_i h_i}{3} + \frac{s_{i-1} h_i}{6} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (3) το i με το $i+1$ έχουμε τη συνάρτηση παρεμβολής του επόμενου διαστήματος $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Παραγωγίζοντας αυτήν και θέτοντας $x = x_i$ έχουμε:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{s_i h_{i+1}}{3} - \frac{s_{i+1} h_{i+1}}{6} \quad (5)$$

με $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$. Αφού η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x = x_i$, θα πρέπει βάση των (4) και (5) να ισχύει:

$$h_i s_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})s_i + h_{i+1}s_{i+1} = \frac{6(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h_i}, \quad i = 1, \dots, (n-1) \quad (6)$$

Για κάθε ένα από τα $(n-1)$ εσωτερικά δοθέντα σημεία x_1, x_2, \dots, x_{n-1} μπορούμε να έχουμε μια εξίσωση της μορφής (6) ενώ οι δύο εξισώσεις που υπολείπονται για τον προσδιορισμό όλων των συντελεστών του πολυωνύμου, είναι δυνατό να προκύψουν από τη σχέση $s_0 = s_n = 0$, από όπου και προκύπτουν οι λεγόμενες «φυσικές» splines με ελεύθερα άκρα. Ο όρος 'φυσικές' αντιστοιχεί στο φυσικό σχήμα που λαμβάνει ο ουδέτερος άξονας μιας εξειδανικευμένης δοκού όταν εξαναγκάζεται να καμφθεί έτσι ώστε να διέλθει από τα επιθυμητά σημεία με τρόπο που να μην αναπτύσσονται καμπτικές ροπές στα άκρα της (σύμφωνα με την εξίσωση ελαστικής γραμμής η καμπτική ροπή είναι ανάλογη της δεύτερης παραγώγου, s). Ωστόσο, στις ποσότητες (s_0, s_n) μπορούν να αποδοθούν ακόμη και μη-μηδενικές τιμές. Σε κάθε περίπτωση, η λύση προκύπτει από την επίλυση ενός αντίστοιχου γραμμικού συστήματος $(n+1)$ εξισώσεων, που εμφανίζει ισχυρή διαγώνιο. Εναλλακτικά, ενδέχεται να διαθέτουμε τις πρώτες παραγώγους στα δύο άκρα (y'_0, y'_n) αντί των δευτέρων παραγώγων (s_0, s_n) , οπότε οι δύο προαναφερθείσες υπολειπόμενες εξισώσεις προέρχονται από την εφαρμογή της (5) στα άκρα (x_0, x_n) .

2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ B-SPLINES

2.1 Εξασφάλιση συνέχειας δεύτερης τάξης

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε έναν ισοδύναμο ορισμό των παραπάνω splines στον οποίο υποεισέρχεται η βάση συναρτήσεων, $\hat{B}_i(x)$, στην οποία αναλύεται (σε σειρά) η παρεμβαλλόμενη συνάρτηση $f(x)$.

Θεωρούμε και πάλι το σύνολο που αποτελείται από τα ζεύγη σημείων $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Είδαμε ότι στην περίπτωση που γνωρίζουμε τρεις ποσότητες στο αριστερό άκρο, π.χ. (y_0, y'_0, y''_0) , μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κυβικό πολυώνυμο στο πρώτο υποδιάστημα, δηλαδή μπορούμε να υπολογίσουμε πλήρως τους τέσσερις συντελεστές a_0, a_1, a_2, a_3 του πολυωνύμου $p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, το οποίο προφανώς αποτελεί μικρό τμήμα της $f(x)$.

Αφού λοιπόν είναι πλήρως γνωστό το πρώτο τμηματικό πολυώνυμο, γνωρίζουμε και πάλι τα ίδια τρία μεγέθη (y_1, y_1', y_1'') στην αρχή του δεύτερου υποδιαστήματος οπότε με τον ίδιον ακριβώς τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε το δεύτερο τμηματικό πολυώνυμο $p_2(x)$. Λόγω της τριπλής συνέχειας (μηδενικής, πρώτης και δεύτερης τάξης: C^2 -continuity) στο σημείο (x_1, y_1) , ένας μόνον από τους τέσσερις συντελεστές του δεύτερου πολυωνύμου είναι ανεξάρτητη μεταβλητή. Με άλλα λόγια, διατρέχοντας το πεδίο ορισμού από αριστερά προς τα δεξιά, ο πλήρης καθορισμός της καμπύλης spline μέχρι και τη συμπλήρωση του δεύτερου διαστήματος απαιτεί πέντε ανεξάρτητους συντελεστές a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 .

Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό μέχρι και τη συμπλήρωση του n -στού διαστήματος ($(n-1)$ υποδιαστήματα μετά το πρώτο), καταλήγουμε στο γεγονός ότι ο πλήρης καθορισμός της καμπύλης spline απαιτεί $4+(n-1)$ τμηματικά πολυωνυμικούς συντελεστές. **Επομένως, το πλήθος αυτών των $n+3$ πολυωνυμικών συντελεστών ισούται με το πλήθος των $n+1$ κόμβων αυξημένων κατά δύο.**

Τα παραπάνω οδηγούν σε ένα νέο ορισμό της έννοιας των splines, η οποία εισήχθη στα μέσα της δεκαετίας του 1940 από τον μαθηματικό Schoenberg [Scho46], ο οποίος επεξηγείται στη συνέχεια. Εάν θεωρήσουμε ότι το πολυώνυμο $p_1(x)$ επεκτείνεται στο δεύτερο υποδιάστημα, τότε γενικά αυτό δεν διέρχεται από το σημείο (x_2, y_2) και έτσι προκύπτει ένα πολυώνυμο σφάλματος $q(x) = p_2(x) - p_1(x) \neq 0$. Προκειμένου να επιτύχουμε την επιθυμητή διόρθωση και να λάβουμε το ορθό πολυώνυμο στη μορφή $p_2(x) = p_1(x) + q(x)$, πρέπει να κατασκευάσουμε το πολυώνυμο $q(x)$ έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$q(x_1) = q'(x_1) = q''(x_1) = 0 \text{ (συνέχεια δεύτερης τάξης)} \quad (7)$$

και

$$q(x_2) = f(x_2) - p_1(x_2). \quad (8)$$

Προφανώς αυτό το πολυώνυμο είναι μοναδικό καθόσον είναι τρίτου βαθμού (ως διαφορά δύο πολυωνύμων τρίτου βαθμού) και ικανοποιεί τέσσερις συνθήκες. Ισχυρίζομαι ότι το μοναδικό αυτό πολυώνυμο είναι της μορφής $q(x) = b_1(x-x_1)^3, x_1 \leq x \leq x_2$. Πράγματι το εν λόγω πολυώνυμο ικανοποιεί προφανώς και τις τρεις ισότητες της (7) και επιπλέον, η σταθερά υπολογίζεται βάση της (8) μονοσήμαντα από τη σχέση $b_1(x_2-x_1)^3 = f(x_2) - p_1(x_2)$. Ως εκ τούτου, η καμπύλη spline εντός του δεύτερου υποδιαστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + b_1(x_2-x_1)^3, x_1 \leq x \leq x_2 \quad (9)$$

Προκειμένου να ενοποιήσουμε την έκφραση της σύνθετης συνάρτησης, εισάγουμε την έννοια του *κυβικού μονωνύμου αποκοπής* (truncated monomial), ως εξής:

$$\langle x - x_i \rangle_+^3 = \begin{cases} 0, & x \leq x_i \\ (x - x_i)^3, & x > x_i \end{cases} \quad (10)$$

Με βάση τον ορισμό (10), για τα δύο πρώτα υποδιαστήματα η καμπύλη spline (σύνθετη συνάρτηση) περιγράφεται ως:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + b_1 \langle x - x_1 \rangle_+^3, x_0 \leq x \leq x_2 \quad (11)$$

Ο παραπάνω συλλογισμός μπορεί να επεκταθεί στο τρίτο υποδιάστημα, όπου τώρα η θέση του $p_1(x)$ υπέχει το πολυώνυμο $p_2(x)$. Επομένως, προκειμένου το $p_2(x)$ να διέλθει από το σημείο (x_3, y_3) απαιτείται ένα διορθωτικό πολυώνυμο της μορφής $b_2 \langle x - x_2 \rangle_+^3, x_2 \leq x \leq x_3$, κ.ο.κ. Τελικά, η γενική έκφραση για τα n -το πλήθος υποδιαστήματα δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \langle x - x_j \rangle_+^3 \quad (11)$$

Είναι προφανές ότι η έκφραση (11) περιέχει $n+3$ όρους, όπως ακριβώς είχε αναπτυχθεί στην αρχή της παρουσίασης της καμπύλης splines στην παρούσα ενότητα, και εξασφαλίζει συνέχεια μέχρι και δεύτερης τάξης (C^2 -continuity).

Σημείωση: Μερικές φορές ο όρος a_3x^3 ενσωματώνεται στο άθροισμα $\sum_{j=0}^n b_j \langle x - x_j \rangle_+^3$,

οπότε ο συντελεστής b_0 αντιστοιχεί στο πρώτο υποδιάστημα και μάλιστα ταυτίζεται με τον συντελεστή a_3 .

Σε κάθε περίπτωση, οι προαναφερθείσες συναρτήσεις βάσης είναι οι ακόλουθες δύο ομάδες μονωνύμων:

$$\begin{cases} \hat{B}_0(x) = 1 \\ \hat{B}_1(x) = x \\ \hat{B}_2(x) = x^2 \\ \hat{B}_3(x) = x^3 \\ \hat{B}_4(x) = \langle x - x_1 \rangle_+^3 \\ \vdots \\ \hat{B}_{n+2}(x) = \langle x - x_{n-1} \rangle_+^3 \end{cases} \quad (12)$$

2.2 Εξασφάλιση συνέχειας πρώτης τάξης

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία εξασφαλίζεται η συνέχεια της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή των τμηματικών πολυωνύμων, μέχρι πρώτης τάξης. Πιο αναλυτικά, όχι μόνον η καμπύλη παρεμβολής διέρχεται από όλους τους κόμβους, αλλά έχει συνέχεια της πρώτης παραγώγου σε όλους τους ενδιάμεσους κόμβους. Διαφορετικά από την προηγούμενη περίπτωση της §2.1, σε κάθε κόμβο γνωρίζουμε τόσο την τιμή (x_i, y_i) της συνάρτησης όσο και την πρώτη της παράγωγο $(x_i, y'_i), i = 0, \dots, n$. Έτσι, στο πρώτο υποδιάστημα γνωρίζουμε την τιμή $y_0 = f(x_0)$ και την παράγωγο $y'_0 = f'(x_0)$ στο σημείο x_0 καθώς επίσης και τα αντίστοιχα μεγέθη (y_1, y'_1) στο σημείο x_1 , οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοναδικό πολυώνυμο τρίτου βαθμού $p_1(x)$ που να ικανοποιεί τις εν λόγω τέσσερις συνθήκες.

Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τα μεγέθη (y_1, y'_1) και (y_2, y'_2) , κατασκευάζουμε δεύτερο τμηματικό πολυώνυμο στο υποδιάστημα $x_1 \leq x \leq x_2$. Λόγω της συνέχειας (μηδενικής και πρώτης τάξης: C^1 -continuity) στο σημείο (x_1, y_1) , δύο μόνον από τους τέσσερις συντελεστές του δεύτερου πολυωνύμου είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Με άλλα λόγια, διατρέχοντας το πεδίο ορισμού από αριστερά προς τα δεξιά, ο πλήρης καθορισμός της καμπύλης spline μέχρι και τη συμπλήρωση του δεύτερου διαστήματος απαιτεί *έξι* ανεξάρτητους συντελεστές $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$. Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό μέχρι και τη συμπλήρωση του n -στού διαστήματος ($(n-1)$ υποδιαστήματα μετά το πρώτο), καταλήγουμε στο γεγονός ότι ο πλήρης καθορισμός της καμπύλης spline απαιτεί $4 + 2(n-1)$ τμηματικά πολυωνυμικούς συντελεστές. **Επομένως, το πλήθος αυτών των $2(n+1)$ πολυωνυμικών συντελεστών είναι διπλάσιο του πλήθους των $n+1$ κόμβων.**

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με την §2.1, εάν θεωρήσουμε ότι το πολυώνυμο $p_1(x)$ επεκτείνεται στο δεύτερο υποδιάστημα, τότε γενικά αυτό δεν διέρχεται από το σημείο (x_2, y_2) , ή/και δεν θα έχει την επιθυμητή παράγωγο, και έτσι προκύπτει ένα πολυώνυμο σφάλματος $q(x) = p_2(x) - p_1(x) \neq 0$. Προκειμένου να επιτύχουμε την επιθυμητή διόρθωση και να λάβουμε το ορθό πολυώνυμο στη μορφή $p_2(x) = p_1(x) + q(x)$, πρέπει να κατασκευάσουμε το πολυώνυμο $q(x)$ έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$q(x_1) = q'(x_1) = 0 \text{ (συνέχεια πρώτης τάξης)} \quad (13)$$

και

$$\left. \begin{aligned} q(x_2) &= f(x_2) - p_1(x_2) \\ q'(x_2) &= f'(x_2) - p_1'(x_2) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Προφανώς αυτό το πολυώνυμο είναι μοναδικό καθόσον είναι τρίτου βαθμού (ως διαφορά δύο πολυωνύμων τρίτου βαθμού) και ικανοποιεί τέσσερις συνθήκες. Ισχυρίζομαι ότι το μοναδικό αυτό πολυώνυμο είναι της μορφής $q(x) = b_1(x-x_1)^3 + c_1(x-x_1)^2, x_1 \leq x \leq x_2$. Πράγματι το εν λόγω πολυώνυμο ικανοποιεί προφανώς και τις δυο ισότητες της (13) και επιπλέον, η σταθερά υπολογίζεται βάση της (14) μονοσήμαντα από την επίλυση του γραμμικού συστήματος:

$$\left. \begin{aligned} b_1(x-x_1)^3 + c_1(x-x_1)^2 &= f(x_2) - p_1(x_2) \\ 3b_1(x-x_1)^2 + 2c_1(x-x_1) &= f'(x_2) - p_1'(x_2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Ως εκ τούτου, η καμπύλη spline εντός του δεύτερου υποδιαστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + b_1(x-x_1)^3 + c_1(x-x_1)^2, x_1 \leq x \leq x_2 \quad (16)$$

Προκειμένου να ενοποιήσουμε την έκφραση της σύνθετης συνάρτησης, σε συνέχεια της (10) εισάγουμε το *τετραγωνικό μονώνυμο αποκοπής*:

$$\langle x-x_i \rangle_+^2 = \begin{cases} 0, & x \leq x_i \\ (x-x_i)^2, & x > x_i \end{cases} \quad (17)$$

Με βάση τον ορισμό (17), για τα δύο πρώτα υποδιαστήματα η καμπύλη spline περιγράφεται με ενιαίο τρόπο ως:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + b_1 \langle x-x_1 \rangle_+^3 + c_1 \langle x-x_1 \rangle_+^2, x_0 \leq x \leq x_2 \quad (18)$$

Ο παραπάνω συλλογισμός μπορεί να επεκταθεί στο τρίτο υποδιάστημα, όπου τώρα τη θέση του $p_1(x)$ υπέχει το πολυώνυμο $p_2(x)$. Επομένως, προκειμένου το $p_2(x)$ να διέλθει από το σημείο (x_3, y_3) και να αποκτήσει τη δεδομένη παράγωγο απαιτείται ένα διορθωτικό πολυώνυμο της μορφής $b_2(x-x_2)^3 + c_2(x-x_2)^2, x_2 \leq x \leq x_3$, κ.ο.κ.

Τελικά, η γενική έκφραση για τα n -το πλήθος υποδιαστήματα δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \langle x-x_j \rangle_+^3 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \langle x-x_j \rangle_+^2 \quad (19)$$

Είναι προφανές ότι η έκφραση (19) περιέχει $2n+2$ όρους, όπως ακριβώς είχε αναπτυχθεί στην αρχή της παρουσίασης της καμπύλης splines στην παρούσα ενότητα, και εξασφαλίζει συνέχεια μέχρι πρώτης τάξης (C^1 -continuity).

Τελικά, οι συναρτήσεις βάσης είναι οι εξής τρεις ομάδες μονωνύμων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_0(x) = 1 \\ \hat{B}_1(x) = x \\ \hat{B}_2(x) = x^2 \\ \hat{B}_3(x) = x^3 \\ \hat{B}_4(x) = \langle x - x_1 \rangle_+^3 \\ \vdots \\ \hat{B}_{n+2}(x) = \langle x - x_{n-1} \rangle_+^3 \\ \hat{B}_{n+3}(x) = \langle x - x_1 \rangle_+^2 \\ \vdots \\ \hat{B}_{2n+1}(x) = \langle x - x_{n-1} \rangle_+^2 \end{array} \right. \quad (20)$$

3. ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ B-SPLINES

3.1 Γενική περιγραφή

Εκτός από τον παραπάνω ορισμό των B-splines με βάση τα αποκομμένα μονώνυμα, το 1972 εντελώς ανεξάρτητα ο De Boor [DeBo72] και ο Cox [Cox72] εισήγαγαν αναδρομικές σχέσεις για τον αποδοτικό υπολογισμό της παρεμβαλλομένης συνάρτησης σε οποιαδήποτε θέση x . Την ίδια εποχή ο Bézier εισήγαγε την ομώνυμη καμπύλη του με βάση τα πολυώνυμα Bernstein, που αποτελεί μια πολύ ειδική (οριακή) περίπτωση των B-splines και χρησιμοποιείται ευρύτατα στην Υπολογιστική Γεωμετρία (Computer Aided Design: CAD). Λεπτομέρεις δίνονται στην §5.

Εντελώς συνοπτικά, τα προαναφερθέντα σημεία x_0, x_1, \dots, x_n ονομάζονται 'σημεία παρεμβολής' (breakpoints), αλλά αποκτούν δευτερεύοντα σημασία καθώς η νέα θεώρηση συνίσταται στην παραμετροποίηση της γεωμετρικής καμπύλης (δηλ. της συνάρτησης $f(x)$) με την εισαγωγή των σημείων ελέγχου (control points), P_i ($i = 0, \dots, n_p$), των οποίων το πλήθος ισούται με το πλήθος των πολυωνυμικών συντελεστών που αναφέρθηκαν στα παραπάνω εδάφια. Δεδομένων των $(n_p + 1)$ σημείων ελέγχου, για κάθε ανηγμένη συντεταγμένη, $u = x/L$ (όπου $L = x_n - x_0$: μήκος διαστήματος), η θέση του αντίστοιχου σημείου της παρεμβαλλόμενης συνάρτησης δίνεται από τη σχέση:

$$x(u) = \sum_{i=0}^{n_p} B_{i,n_p}(u) x_{P_i}, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (21)$$

όπου $B_{i,n_p}(u)$ είναι οι νέες βάσεις των B-splines. Δηλαδή η παρεμβολή των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου δίνει επακριβώς την συντεταγμένη του εν λόγω σημείου που έχει τη δεδομένη ανηγμένη συντεταγμένη, u .

Αντίθετα, εάν θεωρήσουμε τις τιμές μιας τυχαίας συνάρτησης $f(u)$ στα $(n_p + 1)$ σημεία ελέγχου, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση (21) ως έχει, δηλαδή:

$$f(u) \neq \sum_{i=0}^{n_p} B_{i,n_p}(u) f_i(u_{p_i}) \quad (22)$$

Αντίθετα, είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε κατάλληλους συντελεστές, λ_i , $i = 0, \dots, n_p$, με βάση τους οποίους μπορούμε να παρεμβάλουμε, με επαρκή ακρίβεια, την εν λόγω συνάρτηση, δηλαδή:

$$f(u) = \sum_{i=0}^{n_p} B_{i,n_p}(u) \lambda_i \quad (23)$$

Προφανώς, οι εν λόγω συντελεστές δεν συνδέονται άμεσα με τιμές της συνάρτησης $f(u)$ (για την ακρίβεια συνδέονται με κάποιες γειτονικές τιμές των σημείων ελέγχου), εκτός από τις δύο ακραίες τιμές για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= f_1 = f(u=0) \\ \lambda_n &= f_2 = f(u=1) \end{aligned} \quad (24)$$

Παρατήρηση: Η απευθείας ταξιοθεσία της (23) στα σημεία ελέγχου συνήθως εμφανίζει singularity, οπότε απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή (βλέπε σε επόμενη παράγραφο).

Στη γενική περίπτωση των $n+1$ κόμβων (x_0, x_1, \dots, x_n) , η νέα μεθοδολογία προϋποθέτει τη δημιουργία της λεγόμενης ακολουθίας κόμβων ή *κομβοδιανύσματος* (knot vector sequence), που γενικά αποτελείται από όρους $(m+1)$ και είναι της μορφής:

$$U = \{U_0, U_1, \dots, U_m\} \quad (25)$$

Εάν καθορισθεί ο πολυωνυμικός βαθμός της καμπύλης spline ίσος προς p , η γενική σχέση που συνδέει το πλήθος των σημείων του κομβοδιανύσματος με το πλήθος των σημείων ελέγχου είναι:

$$m = n_p + p + 1 \quad (26)$$

Στο παρόν πόνημα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, εκ των οποίων η πρώτη αφορά στην περίπτωση συνέχειας τύπου C^2 (μέχρι και τη δεύτερη παράγωγο) ενώ η δεύτερη στην περίπτωση συνέχειας τύπου C^1 (μέχρι και τη πρώτη παράγωγο).

1) Συνέχεια τύπου C²

Σε αυτή την περίπτωση το κομβοδιάνυσμα δίνεται ως:

$$U = \left\{ \underbrace{x_0, \dots, x_0}_{(p+1) \text{ όροι}}, x_1, \dots, x_{n-1}, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{(p+1) \text{ όροι}} \right\} \quad (27)$$

Προφανώς το πλήθος των όρων της (27) είναι $m+1 = 2(p+1) + (n-1) = n+2p+1$, οπότε $m = n+2p$. Τότε σύμφωνα με τη σχέση (26) θα έπρεπε να είναι $n_p = m - p - 1 = (n+2p) - p - 1 = n+p-1$. Πράγματι, εάν το τμηματικό πολυώνυμο παρεμβολής μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων παρεμβολής είναι κυβικό ($p=3$), τότε η προηγούμενη σχέση δίνει $n_p = n+3-1 = n+2$, το οποίο συμπέρασμα είναι γνωστό από προηγούμενα εδάφια.

2) Συνέχεια τύπου C¹

Σε αυτή την περίπτωση κατά την οποία επιθυμούμε συνέχεια μέχρι πρώτης τάξης, σε κάθε σημείο παρεμβολής (breakpoint) αντιστοιχούμε δύο κόμβους (knots), οπότε το κομβοδιάνυσμα δίνεται ως:

$$U = \left\{ \underbrace{x_0, \dots, x_0}_{(p+1) \text{ όροι}}, x_1, x_1, \dots, \underbrace{x_{n-1}, x_{n-1}}_{2 \text{ όροι}}, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{(p+1) \text{ όροι}} \right\} \quad (28)$$

οπότε το πλήθος των όρων της (28) είναι $m'+1 = 2(p+1) + 2(n-1) = 2n+2p$. Τότε σύμφωνα με τη σχέση (26) θα έπρεπε να είναι $n'_p = m' - p - 1 = (2n+2p-1) - p - 1 = 2n+p-2$. Πράγματι, εάν το τμηματικό πολυώνυμο παρεμβολής μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων παρεμβολής (breakpoints) είναι κυβικό ($p=3$), τότε η προηγούμενη σχέση δίνει $n''_p = 2n+3-2 = 2n+1$, δηλαδή το πλήθος των σημείων ελέγχου είναι ακριβώς διπλάσιο από εκείνο των σημείων παρεμβολής (breakpoints), το οποίο συμπέρασμα είναι γνωστό από το εδάφιο §2.1.

3.2 Συναρτήσεις βάσης

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να ορίσει κανείς τις συναρτήσεις βάσης των B-splines και να αποδείξει τις σημαντικές τους ιδιότητες. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο καθόσον αυτός είναι ο πλέον αποδοτικός για εφαρμογή σε ΗΥ.

Έστω $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ μια μη φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, λ.χ. $u_i \leq u_{i+1}$, $i=0, \dots, m-1$. Τα u_i ονομάζονται **κόμβοι (knots)**, και το U είναι το κομβοδιάνυσμα. Η i -στή συνάρτηση βάσης B-splines βαθμού p (τάξης $p+1$), που συμβολίζεται με $N_{i,p}(u)$, ορίζεται ως:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (29)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Να σημειωθεί ότι:

- η συνάρτηση $N_{i,0}(u)$ είναι μια βηματική συνάρτηση, ίση με το μηδέν παντού εκτός από από το ημι-ανοικτό διάστημα $u \in [u_i, u_{i+1})$.
- Εάν $p > 0$, τότε η $N_{i,p}(u)$ είναι γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων βάσης βαθμού $(p-1)$.
- Ο υπολογισμός ενός συνόλου βάσεων απαιτεί καθορισμό του κομβοδιανύσματος (knot vector), U , και του βαθμού, p .
- Η εξ(29) συμπεριλαμβάνει και το πηλίκο $0/0$ που ορίζεται ίσο προς το μηδέν.
- Οι συναρτήσεις $N_{i,p}(u)$ είναι τμηματικά πολυώνυμα, που ορίζονται σε ολόκληρο τον άξονα των πραγματικών τιμών. Γενικά, έχουν ενδιαφέρον μόνο στο υποδιάστημα $[u_0, u_m]$.
- Το ημι-ανοικτό διάστημα $[u_i, u_{i+1})$ ονομάζεται i -στό κομβοδιάστημα (knot span). Μπορεί να έχει μηδενικό μήκος, καθώς δεν απαιτείται οι κόμβοι (knots) να είναι διακριτοί.
- Όταν το κομβοδιάστημα είναι της μορφής $U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{(p+1) \text{ όροι}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{(p+1) \text{ όροι}} \right\}$, τότε αυτό δίνει τα πολυώνυμα Bernstein βαθμού p , που υπεισέρχονται στην καμπύλη Bézier.
- Ισχύει ότι $N_{i,p}(u) = 0$ εάν η μεταβλητή u είναι εκτός του διαστήματος $[u_i, u_{i+p+1})$ (ιδιότητα τοπικής στήριξης: **local support property**).
- Σε ένα δεδομένο knot span, $[u_j, u_{j+1})$, το πολύ $p+1$ από τις συναρτήσεις $N_{i,p}$ είναι διάφορες του μηδενός, συγκεκριμένα οι $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$.
- $N_{i,p}(u) \geq 0$ για όλα τα i, p , και u (nonnegativity). Αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή ως προς το p .
- Για ένα τυχαίο κομβοδιάστημα (knot span), $[u_i, u_{i+1})$, ισχύει $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1$ για όλα τα $u \in [u_i, u_{i+1})$ (**partition of unity**).
- Όλες οι παράγωγοι των $N_{i,p}(u)$ εμφανίζονται στο εσωτερικό ενός knot span (στο οποίο είναι πολυώνυμο). Σε έναν κόμβο (knot) η $N_{i,p}(u)$ είναι $p-k$ φορές διαφορίσιμη, όπου k είναι η **πολλαπλότητα** του κόμβου.
- Εκτός από την περίπτωση $p = 0$, η $N_{i,p}(u)$ λαμβάνει ακριβώς μια μέγιστη τιμή.

4. ΚΑΘΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ ΣΕ B-SPLINES

4.1 Γενική περιγραφή

Οι συναρτήσεις βάσης $N_{i,p}(u)$ της §3.2 δεν είναι κανονικοποιημένες ως προς τη μονάδα, δηλαδή είναι non-cardinal συναρτήσεις. Στην ενότητα αυτή θα αναδείξουμε τις κανονικοποιημένες συναρτήσεις μορφής ή σχήματος (shape functions) που συνδέονται κατευθείαν με την αντίστοιχη κομβική τιμή της παρεμβαλλόμενης συνάρτησης. Ο κύριος λόγος για την σχετική αναφορά είναι η εισαγωγή αυτών σε διαδικασίες επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο Galerkin/Ritz ή collocation.

Γενικότερα, η λύση της διαφορικής εξίσωσης εκφράζεται ως μια σειρά της μορφής:

$$f(u) = \sum_{j=0}^{n_p} B_j(u) \hat{a}_j = \begin{bmatrix} B_0(u) & \cdots & B_{n_p}(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n_p} \end{bmatrix} \quad (30)$$

όπου οι γνωστές συναρτήσεις βάσης, $B_j(u)$, δίνονται από μια των σχέσεων (12) ή (20) και \hat{a}_j είναι οι n_p -το-πλήθος άγνωστοι συντελεστές. Προκειμένου να εισάγουμε τις οριακές συνθήκες, είναι συμφέρον να μετατρέψουμε την (30) στη μορφή:

$$f(u) = \sum_{j=0}^{n_p} \phi_j(u) f_j \quad (31)$$

όπου f_j είναι η κομβική τιμή και $\phi_j(u)$ οι συναρτήσεις μορφής ή σχήματος.

Η γενική διαδικασία έχει ως εξής. Καταρχήν εφαρμόζουμε την (30) σε όλους τους κόμβους. Επιπλέον λαμβάνουμε την πρώτη ή δεύτερη παράγωγο αυτής στα δύο άκρα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της πρώτης παραγώγου σε αμφότερα τα άκρα, προκύπτει:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f(u_0) \\ \vdots \\ f(u_n) \\ f'(u_0) \\ f'(u_n) \end{Bmatrix}}_{\{f\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_0(u_0) & \cdots & B_{n_p}(u_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0(u_n) & \cdots & B_{n_p}(u_n) \\ B'_0(u_0) & \cdots & B'_{n_p}(u_0) \\ B'_0(u_n) & \cdots & B'_{n_p}(u_n) \end{bmatrix}}_{[A]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{a}_0 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n_p} \end{Bmatrix}}_{\{a\}} \Rightarrow \{\hat{a}\} = [A]^{-1} \{f\} \quad (32)$$

Εισάγοντας την (32) στην (30), η τελευταία γράφεται ως:

$$f(u) = \underbrace{\begin{bmatrix} B_0(u) & \cdots & B_{n_p}(u) \end{bmatrix}}_{1 \times n_p} \cdot \underbrace{[A]^{-1}}_{n_p \times n_p} \cdot \underbrace{\{f\}}_{n_p \times 1} = \begin{bmatrix} \phi_0(u) & \cdots & \phi_{n_p}(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ f_0' \\ f_n' \end{bmatrix} \quad (33)$$

Ο πολλαπλασιασμός του διανύσματος γραμμή επί το μητρώο $[A]^{-1}$, διαστάσεων $n_p \times n_p$, ορίζει ένα νέο διάνυσμα γραμμή διάστασης $1 \times n_p$, το οποίο αποτελείται από τις ζητούμενες συναρτήσεις μορφής. Τελικά, κάθε συνάρτηση μορφής προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $\begin{bmatrix} B_0(u) & \cdots & B_{n_p}(u) \end{bmatrix}$ επί την αντίστοιχη στήλη του $[A]^{-1}$.

4.2 Περίπτωση συνέχειας τύπου C²

Στην περίπτωση συνέχειας μέχρι δεύτερης τάξης, οι συναρτήσεις μορφής $\phi_i(u)$ εκτείνονται σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού. Σε κάθε εσωτερικό κόμβο αντιστοιχεί μια μόνο συνάρτηση μορφής, ενώ σε καθένα από τους δυο ακραίους κόμβους αντιστοιχούν δύο συναρτήσεις μορφής. Πιο συγκεκριμένα, το μητρώο $[A]$ προκύπτει από την εφαρμογή της (30) σε όλα τα $(n+1)$ -το-πλήθος σημείων παρεμβολής (breakpoints), ενώ όπως είδαμε νωρίτερα η διαφορά των δύο υπολειπόμενων σημείων ελέγχου (ή πολυωνυμικών συντελεστών) καλύπτεται από την εφαρμογή της πρώτης ή της δεύτερης παραγώγου (ή συνδυασμού αυτών) στα άκρα του διαστήματος. Έτσι προκύπτει τελικά ένα μητρώο $[A]$ διαστάσεων $n_p \times n_p = (n+3) \times (n+3)$, του οποίου υπολογίζουμε αριθμητικά το αντίστροφο μητρώο $[A]^{-1}$. Πιο συγκεκριμένα, το γινόμενο των μονωνύμων βάσης επί τις πρώτες $(n+1)$ στήλες του μητρώου $[A]^{-1}$ παράγουν τις $(n+1)$ συναρτήσεις μορφής που συνδέονται με τις τιμές της συνάρτησης στα breakpoints (αντιστοιχεί στην πρώτη αγκύλη στο δεξί μέλος της (34)), ενώ το ίδιο γινόμενο επί τις δύο τελευταίες στήλες του $[A]^{-1}$ παράγουν τις δύο πρόσθετες συναρτήσεις που συνδέονται με τις κλίσεις ($\lambda_{n+1} = f_0', \lambda_{n+2} = f_n'$) ή τις καμπυλότητες ($\lambda_{n+1} = f_0'', \lambda_{n+2} = f_n''$) ή κάποιον συνδυασμό αυτών (f_0', f_n'' ή f_0'', f_n'). Σε κάθε περίπτωση η γενική έκφραση με την οποία εκφράζεται η μεταβλητή δίνεται ως:

$$f(u) = \sum_{j=0}^{n+2} \phi_j(u) \lambda_j = \underbrace{\{\phi_0(u) f_0 + \dots + \phi_n(u) f_n\}}_{\text{at breakpoints}} + \underbrace{\{\phi_{n+1}(u) \lambda_{n+1} + \phi_{n+2}(u) \lambda_{n+2}\}}_{\text{at the ends}} \quad (34)$$

Δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις δείχνονται στο **Σχήμα 1** και **Σχήμα 2**, από όπου φαίνεται η δράση κάθε βαθμού ελευθερίας σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού.

4.2 Περίπτωση συνέχειας τύπου C¹

Στην περίπτωση συνέχειας μέχρι πρώτης τάξης, οι συναρτήσεις μορφής $\phi_i(u)$ δεν εκτείνονται πλέον σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού. Τώρα πλέον δεν υπάρχει διαφοροποίηση μεταξύ εσωτερικών και ακραίων βαθμών ελευθερίας καθόσον σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν δύο βαθμοί ελευθερίας.

Μια χαρακτηριστική περίπτωση δείχνεται στο **Σχήμα 3**, από όπου φαίνεται η δράση κάθε βαθμού ελευθερίας περιορίζεται μόνο στα αμέσως γειτονικά του υποδιαστήματα.

5. ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΒÉZIER

Μια καμπύλη Βέζιερ n -στού-βαθμού ορίζεται ως:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n_p} B_{i,n_p}(u) \mathbf{P}_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (5-1)$$

όπου n_p είναι το πλήθος των σημείων ελέγχου, P_0, P_1, \dots, P_{n_p} , ελαττωμένων κατά ένα.

Οι συναρτήσεις βάσης (blending functions), $\{B_{i,n_p}(u)\}$, είναι τα κλασσικά πολυώνυμα Bernstein n_p -στού-βαθμού και δίνονται ως:

$$B_{i,n_p}(u) = \frac{n_p!}{i!(n_p-i)!} u^i (1-u)^{n_p-i} \quad (5-2)$$

Οι γεωμετρικοί συντελεστές αυτής της μορφής, $\{\mathbf{P}_i\}$, ονομάζονται *σημεία ελέγχου*. Παρατηρείστε ότι αυτός ο ορισμός, Εξ.(5-1), απαιτεί όπως $u \in [0,1]$.

Στην εξαιρετικά ειδική περίπτωση κατά την οποία έχουμε τέσσερα σημεία ελέγχου, $n_p = 3$, οι συναρτήσεις βάσης γίνονται:

$$\begin{aligned} B_{0,3}(u) &= \frac{3!}{0!(3-0)!} u^0 (1-u)^{3-0} \equiv (1-u)^3 \\ B_{1,3}(u) &= \frac{3!}{1!(3-1)!} u^1 (1-u)^{3-1} \equiv 3u(1-u)^2 \\ B_{2,3}(u) &= \frac{3!}{2!(3-2)!} u^2 (1-u)^{3-2} \equiv 3u^2(1-u) \\ B_{3,3}(u) &= \frac{3!}{3!(3-3)!} u^3 (1-u)^{3-3} \equiv u^3 \end{aligned} \quad (5-3)$$

6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΩΝ B-SPLINES

6.1 ΔΥΟ ΑΚΡΑΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

6.1.1 Διατύπωση κατά Schoenberg

Έστω L το μήκος του διαστήματος $[0, L]$ του οποίου θεωρούμε μόνον τα άκρα $x_0 = 0$ και $x_1 = L$ (δύο κόμβοι: $n_{ele}=2$). Με βάση τη γενική διατύπωση των κυβικών splines του Schoenberg:

$$F(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \sum_{j=0}^{nodes-1} b_j \langle w - w_j \rangle_+^3 \quad (6-1)$$

στην προκειμένη περίπτωση των δύο κόμβων ($n_{nodes}=2$) η συνάρτηση εκφυλίζεται στην αμιγώς πολυωνυμική έκφραση:

$$F(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + b_0 w^3, \quad 0 \leq w \leq L \quad (6-2)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία του πεπερασμένου δοκού σε κάμψη, η εφαρμογή της (6-2) και της παραγώγου της

$$F'(w) = a_1 + 2a_2 w + 3b_0 w^2, \quad 0 \leq w \leq L \quad (\text{cubic B-splines}) \quad (6-3)$$

στους (ακραίους) κόμβους ($w = 0, w = L$) οδηγεί στη σχέση:

$$F(w) = N_1(w)F_1 + N_2(w)F_1' + N_3(w)F_2 + N_4(w)F_2' \quad (w = x/L) \quad (6-4)$$

όπου οι συναρτήσεις μορφής ταυτίζονται με τα γνωστά πολυώνυμα Hermite:

$$\begin{aligned} N_1(w) &= 1 - 3w^2 + 2w^3 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad N_1(0) = 1, \quad N_1(1) = 0 \\ N_2(w) &= w - 2w^2 + w^3 = \left[\left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]L, \quad N_2(0) = 0, \quad N_2(1) = 0 \\ N_3(w) &= 3w^2 - 2w^3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad N_3(0) = 0, \quad N_3(1) = 1 \\ N_4(w) &= -w^2 + w^3 = \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]L, \quad N_4(0) = 0, \quad N_4(1) = 0 \end{aligned} \quad (6-5)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο σταθερός όρος περιλαμβάνεται μόνο στο πολυώνυμο $N_1(w)$, ενώ ο γραμμικός όρος μόνον στο $N_2(w)$.

Η παραγωγή της Εξ.(6-5) οδηγεί στις σχέσεις:

$$\begin{aligned} N_1'(w) &= -6w + 6w^2, N_1''(w) = -6 + 12w \Rightarrow N_1'(0) = 0, N_1'(1) = 0, N_1''(0) = -6, N_1''(1) = 6 \\ N_2'(w) &= 1 - 4w + 3w^2, N_2''(w) = -4 + 6w \Rightarrow N_2'(0) = 1, N_2'(1) = 0, N_2''(0) = -4, N_2''(1) = 2 \\ N_3'(w) &= 6w - 6w^2, N_3''(w) = 6 - 12w \Rightarrow N_3'(0) = 0, N_3'(1) = 0, N_3''(0) = 6, N_3''(1) = -6 \\ N_4'(w) &= -2w + 3w^2, N_4''(w) = -2 + 6w \Rightarrow N_4'(0) = 0, N_4'(1) = 1, N_4''(0) = -2, N_4''(1) = 2 \end{aligned} \quad (6-6)$$

Παρατήρηση 1:

Θα δείξουμε την αδυναμία των φυσικών B-splines να παρεμβάλλουν τετραγωνικές και κυβικές συναρτήσεις, καταρχήν στην ειδική περίπτωση δύο σημείων παρεμβολής ($n \ell \ell = 1$). Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους συντελεστές της Εξ.(2) πρέπει να εισάγουμε τις καμπυλότητες στα δύο άκρα του διαστήματος, δηλαδή $\kappa = F''(w)$, $w = 0, 1$. Τότε η Εξ.(2) δίνει:

$$F'(w) = 0 + a_1 + 2a_2w + 3b_0w^2 \Rightarrow F''(w) = 0 + 0 + 2a_2 + 6b_0w \quad (6-7)$$

Εάν $\kappa = 0$ (φυσικό B-splines), από την Εξ.(6-7) προκύπτει ότι $a_2 = 0$ και $b_0 = 0$, οπότε η Εξ.(2) γίνεται:

$$F(w) = a_0 + a_1w \quad (6-8)$$

Με άλλα λόγια, η κυβική φυσική B-splines εκφυλίζεται στη γραμμική παρεμβολή.

Παρατήρηση 2:

Στη συνέχεια θα δείξουμε την αδυναμία των *φυσικών* B-splines να παρεμβάλλουν αμιγώς τετραγωνικές συναρτήσεις, για οποιονδήποτε αριθμό κόμβων. Πράγματι, η δεύτερη παράγωγος της Εξ.(6-1) δίνει πάντοτε:

$$F''(w) = 2a_2 + 6 \sum_{j=0}^{nodes-1} b_j \langle w - w_j \rangle_+ \quad (6-1a)$$

Οπότε η υπόθεση των *φυσικών* B-splines οδηγεί και πάλι σε μηδενισμό της σταθεράς a_2 , και επομένως ποτέ δεν μπορεί η συνάρτηση $F(w)$ να ταυτισθεί με τη πολλαπλάσιο του μονωνύμου x^2 .

Παρατήρηση 3:

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση κατά την οποία οι καμπυλότητες των δύο άκρων είναι διάφορες του μηδενός, οπότε με παραγωγή της Εξ.(3) λαμβάνουμε:

$$\left. \begin{aligned} F_1'' = F''(0) &= 2a_2 + 0 = \kappa_1 \\ F_2'' = F''(1) &= 2a_2 + 6b_0 = \kappa_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a_2 &= \frac{\kappa_1}{2} \\ b_0 &= \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{6} \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

Έτσι, η γνώση των τιμών (F_1, F_2) και των δεύτερων παραγώγων (F_1'', F_2'') στα δύο άκρα (δηλαδή, αντί των τιμών F_1, F_2 και των πρώτων παραγώγων F_1', F_2') ορίζουν και τους τέσσερις πολυωνυμικούς συντελεστές (a_0, a_1, a_2, b_0) .

Ακριβέστερα, για να τελειώνουμε με την Εξ.(6-9), με βάση την Εξ(2) στο σημείο $w=1$, βρίσκονται και οι υπόλοιποι συντελεστές (a_0, a_1) . Έτσι, οι σταθερές ευρίσκονται ως:

$$\begin{aligned} a_0 &= F_1 \\ a_1 &= (F_2 - F_1) - \frac{(2\kappa_1 + \kappa_2)}{6} \\ a_2 &= \frac{\kappa_1}{2} \\ b_0 &= \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{6} \end{aligned} \quad (6-10)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση όπου $\kappa_1 = 0$, ο τετραγωνικός όρος (w^2) μηδενίζεται. Επίσης, στην περίπτωση ίσων καμπυλοτήτων ($\kappa_2 = \kappa_1$), ο κυβικός όρος (w^3) επίσης μηδενίζεται.

Σημείωση: Για την ολοκλήρωση αυτού του κειμένου, δίνουμε επίσης την έκφραση που προέρχεται από τις τιμές της συνάρτησης (F_1, F_2) καθώς και των πρώτων παραγώγων, (F'_1, F'_2) . Σε αυτήν την περίπτωση, οι Εξ(2) και Εξ(3) οδηγούν στις:

$$\text{Εξ.}(2) \Rightarrow \begin{cases} F_1 = a_0 \\ F_2 = a_0 + a_1 + a_2 + b_0 \end{cases} \quad (6-11)$$

και

$$\text{Εξ.}(3) \Rightarrow \begin{cases} F'_1 = a_1 \\ F'_2 = a_1 + 2a_2 + 3b_0 \end{cases} \quad (6-12)$$

Οι σταθερές a_0 και a_1 υπολογίζονται αμέσως ($a_0 = F_1, a_1 = F'_1$), ενώ τακτοποιώντας τους υπόλοιπους όρους των Εξ(6-11) και Εξ(6-12) υπό μορφή γραμμικού συστήματος με αγνώστους (a_2, b_0) , λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} a_2 + b_0 &= (F_2 - F_1) - F'_1 \\ 2a_2 + 3b_0 &= F'_2 - F'_1 \end{aligned} \quad (6-13)$$

Εισάγοντας τις ορίζουσες:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \equiv 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} (F_2 - F_1 - F'_1) & 1 \\ (F'_2 - F'_1) & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & (F_2 - F_1 - F'_1) \\ 2 & (F'_2 - F'_1) \end{vmatrix} \quad (6-14)$$

Η λύση του συστήματος (6-13) είναι: $a_2 = \Delta_1/\Delta$ και $b_0 = \Delta_2/\Delta$, οπότε οι τελικές τιμές των σταθερών είναι:

$$\begin{aligned} a_0 &= F_1 \\ a_1 &= F'_1 \\ a_2 &= 3(F_2 - F_1) - (2F'_1 + F'_2) \\ b_0 &= 2(F_1 - F_2) + (F'_1 + F'_2) \end{aligned} \quad (6-15)$$

6.1.2 Διατύπωση κατά Bézier

Από μια διαφορετική σκοπιά, η παρεμβολή θα μπορούσε να γίνει με βάση το κομβοδιάνυσμα (knot vector) $U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$, στο οποίο υπάρχουν $m+1$ όροι (εν προκειμένω $m = 7$). Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε κυβική καμπύλη Bézier με $n_p = 3$, δηλαδή με τέσσερα σημεία ελέγχου και περιγράφεται από την (5-3). Προφανώς τότε επαληθεύεται η σχέση $m = n_p + p + 1$ ($7=3+3+1$).

Στην Εξ(5-3) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, ο σταθερός όρος περιέχεται μόνον στη συνάρτηση $B_{0,3}(u)$, ενώ ο γραμμικός όρος (u) περιέχεται σε αμφότερες τις $B_{0,3}(u)$ and $B_{1,3}(u)$. Επίσης, ο τετραγωνικός όρος (u^2) περιλαμβάνεται στις τρεις πρώτες συναρτήσεις βάσης ($B_{0,3}(u)$, $B_{1,3}(u)$ και $B_{2,3}(u)$) και τέλος ο κυβικός όρος (u^3) και στις τέσσερις συναρτήσεις βάσης. Με άλλα λόγια, οι (μή-κανονικοποιημένες) συναρτήσεις Bézier που δίνονται από τις Εξ.(5-3) είναι **ισοδύναμη** διατύπωση των (κανονικοποιημένων) πολυωνύμων Hermite (Eq.(5-5)).

Σε αυτή την ειδική περίπτωση, είναι επίσης ενδιαφέρον ότι στο ανάπτυγμα της σειράς συμμετέχουν αμφότεροι οι μεταφορικοί και περιστροφικοί βαθμοί ελευθερίας. Και τούτο συμβαίνει διότι οι ίδιες συναρτήσεις βάσης εμφανίζονται είτε το δικομβικό στοιχείο θεωρηθεί ότι έχει δύο κόμβους (knots) ανά εσωτερικό σημείο παρεμβολής (γεωμετρικό κόμβο) ή ένα κόμβο (knot), αφού έτσι και αλλιώς δεν υπάρχει κανένα εσωτερικό σημείο παρεμβολής (breakpoint).

$$\begin{aligned}
 B'_{0,3}(u) &= \left[(1-u)^3 \right]' = -3(1-u)^2 & \Rightarrow B''_{0,3}(u) &= 6(1-u) \\
 B'_{1,3}(u) &= \left[3u(1-u)^2 \right]' = 3(1-4u+3u^2) & \Rightarrow B''_{1,3}(u) &= 6(-2+3u) \\
 B'_{2,3}(u) &= \left[3u^2(1-u) \right]' = 3u(2-3u) & \Rightarrow B''_{2,3}(u) &= 6(1-3u) \\
 B'_{3,3}(u) &= \left[u^3 \right]' = 3u^2 & \Rightarrow B''_{3,3}(u) &= 6u
 \end{aligned} \tag{6-16}$$

Στα άκρα, η Εξ.(6-16) δίνει:

$$\begin{aligned}
 B'_{0,3}(0) &= -3, B'_{1,3}(0) = 3, B'_{2,3}(0) = 0, B'_{3,3}(0) = 0 \\
 B'_{0,3}(1) &= 0, B'_{1,3}(1) = 0, B'_{2,3}(1) = -3, B'_{3,3}(1) = 3
 \end{aligned} \tag{6-17}$$

και

$$\begin{aligned}
 B''_{0,3}(0) &= 6, B''_{1,3}(0) = -12, B''_{2,3}(0) = 6, B''_{3,3}(0) = 0 \\
 B''_{0,3}(1) &= 0, B''_{1,3}(1) = 6, B''_{2,3}(1) = -12, B''_{3,3}(1) = 6
 \end{aligned} \tag{6-18}$$

Παρατηρούμε ότι οι δεύτερες παράγωγοι των 'μεταφορικών' βαθμών ελευθερίας ($i = 0,3$) είναι τύπου $[0,1]$ (κανονικοποιημένες ως προς τη μονάδα), ενώ εκείνες που αντιστοιχούν στους περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας (κλίσεις, $i = 1,2$) είναι διάφορες του μηδενός.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Εν ολίγοις, η περίπτωση της Bézier τρίτου βαθμού [δηλαδή με δύο (2) ακραία σημεία παρεμβολής και τέσσερα σημεία ελέγχου: $n_p = 3$] περιλαμβάνει εξίσου καλά την απλή διατύπωση του Schoenberg με τέσσερις (4) πολυωνυμικούς όρους για την εύρεση των οποίων απαιτείται η γνώση δύο καμπυλοτήτων, όσον και την περίπτωση των 2 βαθμών ελευθερίας (DOF) ανά σημείο παρεμβολής. Έτσι και αλλιώς, για τον ‘απλό’ Schoenberg η καμπυλότητα (ή εναλλακτικά η κλίση) αποτελεί βαθμό ελευθερίας.

6.2 ΤΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ (ΔΥΟ ΑΚΡΑΙΑ, ΕΝΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ)

6.2.1 Διατύπωση κατά Schoenberg

Έστω L το μήκος του διαστήματος $[0, L]$ του οποίου θεωρούμε μόνον τα άκρα $x_0 = 0$ και $x_2 = L$ καθώς και το μέσον $x_1 = L/2$ (τρεις κόμβοι: $n_{ele} = 2$, $n_{odes} = 3$).

I. Ένας κόμβος ανά σημείο παρεμβολής (one knot per breakpoint)

Με βάση τη γενική διατύπωση των κυβικών splines του Schoenberg, και λαμβάνοντας έναν κόμβο ανά σημείο παρεμβολής (πολλαπλότητα ‘1’), προκύπτουν ευχερώς οι πέντε συναρτήσεις βάσεις υπό μορφή σύνθετων εκφράσεων σύμφωνα με τον Πίνακα 1.

Η διαδικασία έχει ως εξής. Για καθένα από τα τρία σημεία παρεμβολής γράφουμε το ανάπτυγμα σε σειρά πέντε όρων. Στα δύο άκρα γράφουμε είτε τις πρώτες ή τις δεύτερες παραγώγους του προαναφερθέντος αναπτύγματος. Στην περίπτωση της πρώτης παραγώγου προκύπτει:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & (1/2)^2 & (1/2)^3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & (1/2)^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3(1/2)^2 \end{bmatrix}}_{[A]} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f'_0 \\ f'_2 \end{bmatrix} \quad (6-19)$$

οπότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 12 & -3 & -3.5 & 0.5 \\ 10 & -16 & 6 & 3 & -1 \\ -16 & 32 & -16 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

και επομένως οι (σύνθετες) συναρτήσεις μορφής δίνονται υπό ενιαία μορφή ως:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & \langle u-0 \rangle_+^3 & \langle u-1/2 \rangle_+^3 \end{bmatrix}}_{1 \times 5} \cdot \underbrace{[A]^{-1}}_{5 \times 5} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 & \langle u-1/2 \rangle_+^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 12 & -3 & -3.5 & 0.5 \\ 10 & -16 & 6 & 3 & -1 \\ -16 & 32 & -16 & -4 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-9u^2+10u^3-16\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ 12u^2-16u^3+32\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ -3u^2+6u^3-16\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ u-3.5u^2+3u^3-4\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ 0.5u^2-u^3+4\langle u-1/2 \rangle_+^3 \end{bmatrix} \tag{6-20}
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, εάν στα δύο άκρα γράψουμε τις δεύτερες παραγώγους του προαναφερθέντος αναπτύγματος, τότε προκύπτει:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & (1/2)^2 & (1/2)^3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & (1/2)^3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}}_{[A]} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_0'' \\ f_2'' \end{bmatrix} \tag{6-21}$$

οπότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 3 & -0.5 & -7/48 & 1/48 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -01/24 & -1/12 \\ -4 & 8 & -4 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 3 & -0.5 & -0.1458 & 0.0208 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -0.4167 & -0.0833 \\ -4 & 8 & -4 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

και επομένως οι (σύνθετες) συναρτήσεις μορφής δίνονται υπό ενιαία μορφή ως:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & \langle u-0 \rangle_+^3 & \langle u-1/2 \rangle_+^3 \end{bmatrix}_{1 \times 5} \cdot \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{5 \times 5}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 & \langle u-1/2 \rangle_+^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 3 & -0.5 & -7/48 & 1/48 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1/24 & -1/12 \\ -4 & 8 & -4 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-5/2u+2u^3-4\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ 3u-4u^3+8\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ -1/2u+2u^3-4\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ 7/48u+1/2u^2-1/24u^3+1/2\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ 1/48u-1/12u^3+1/2\langle u-1/2 \rangle_+^3 \end{bmatrix} \tag{6-22}
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Συγκρίνοντας την Εξ(20) με την Εξ(22) βλέπουμε ότι κανονικοποιημένες συναρτήσεις μορφής που αντιστοιχούν στους τρεις πρώτους (μεταφορικούς) βαθμούς ελευθερίας δεν ταυτίζονται αλλά εξαρτώνται από την επιλογή του είδους των στροφικών βαθμών ελευθερίας (πρώτη ή δεύτερη παράγωγος).

II. Δύο κόμβοι ανά σημείο παρεμβολής (two knots per breakpoint): Πολλαπλότητα '2'

Σε αυτή την περίπτωση απαιτούνται έξι συντελεστές και **έξι σημεία ελέγχου** ($n_p = 5$). Αντίθετα προς τα παραπάνω, δεν υπάρχουν δύο αλλά μια και μοναδική διατύπωση, καθόσον σε κάθε σημείο παρεμβολής αντιστοιχούν το μέγεθος και η παράγωγός του.

Η διαδικασία έχει ως εξής. Για καθένα από τα τρία σημεία παρεμβολής γράφουμε το ανάπτυγμα της $f(u)$ σε σειρά έξι όρων. Στη συνέχεια, επίσης για καθένα από τα τρία σημεία παρεμβολής γράφουμε τις πρώτες παραγώγους, $f'(u)$, του προαναφερθέντος αναπτύγματος, οπότε προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f'_0 \\ f'_1 \\ f'_2 \end{bmatrix} \tag{6-23}$$

[A]

οπότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 16 & -16 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ -16 & 32 & -16 & -4 & 0 & 4 \\ -12 & 0 & 12 & -2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

και επομένως οι (σύνθετες) συναρτήσεις μορφής δίνονται υπό ενιαία μορφή ως:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 & \langle u-1/2 \rangle_+^3 & \langle u-1/2 \rangle_+^2 \end{bmatrix} \cdot [A]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 & \langle u-1/2 \rangle_+^3 & \langle u-1/2 \rangle_+^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 16 & -16 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ -16 & 32 & -16 & -4 & 0 & 4 \\ -12 & 0 & 12 & -2 & -8 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-12u^2+16u^3-16\langle u-1/2 \rangle_+^3-12\langle u-1/2 \rangle_+^2 \\ 12u^2-16u^3+32\langle u-1/2 \rangle_+^3 \\ -16\langle u-1/2 \rangle_+^3+12\langle u-1/2 \rangle_+^2 \\ u-4u^2+4u^3-4\langle u-1/2 \rangle_+^3-2\langle u-1/2 \rangle_+^2 \\ -2u^2+4u^3-8\langle u-1/2 \rangle_+^2 \\ 4\langle u-1/2 \rangle_+^3-2\langle u-1/2 \rangle_+^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6-24)$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στροφική συνάρτηση είναι η $u-4u^2+4u^3$, $0 \leq u \leq 1/2$. Αντίστοιχα, εάν συγκρίνουμε με την Εξ(6-5), $N_2(w) = w-2w^2+w^3$, και εφαρμόσουμε τον προφανή μετασχηματισμό $w=2u$ (καθόσον το piecewise Hermite polynomial που ορίζεται στο πρώτο υποδιάστημα, $0 \leq u \leq 1/2$, στο τοπικό του σύστημα ισχύει ότι: $0 \leq w \leq 1$), τότε ευχερώς προκύπτει ότι:

- 1) Η συνάρτηση $\phi_1(u) = 1-12u^2+16u^3$ μεταπίπτει ακριβώς στην $N_1(w) = 1-3w^2+2w^3$ της εξ(6-5).
- 2) Η συνάρτηση $\phi_2(u) = 12u^2-16u^3$ μεταπίπτει ακριβώς στην $N_3(w) = 3w^2-2w^3$ της εξ(6-5).
- 3) Η συνάρτηση $\phi_4(u) = u-4u^2+4u^3$ μεταπίπτει ακριβώς στην $\frac{1}{2}N_2(w) = w-2w^2+w^3$ της εξ(6-5).
- 4) Η συνάρτηση $\phi_5(u) = -2u^2+4u^3$ μεταπίπτει ακριβώς στην $2N_4(w) = -w^2+w^3$ της εξ(6-5).

Συμπέρασμα: Με άλλα λόγια, παρόλη τη μικρή διαφοροποίηση στους συντελεστές, στο πρώτο υποδιάστημα εμφανίζεται ουσιαστικά ένα τμηματικό πολυώνυμο Hermite!

6.2.2 Διατύπωση κατά B-splines (deBoor, Piegl & Tiller)

Στην περίπτωση δύο διαστημάτων παρεμβολής ($n_{ele} = 2$, τρία σημεία παρεμβολής και 5 σημεία ελέγχου: $n_p = 4$) και έναν κόμβο ανά σημείο παρεμβολής (one knot per breakpoint), μπορούμε να εφαρμόσουμε τις αναδρομικές σχέσεις (29) που παρουσιάζονται λεπτομερώς στο **Παράρτημα Α**. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον **Πίνακα 1**.

Πίνακας 1: Συναρτήσεις βάσης B-splines κατά Piegl & Tiller, $N_{i,p}(u)$, για $n_{ele} = 2$ (5 σημεία ελέγχου: $n_p = 4$) και ένα κόμβο ανά σημείο παρεμβολής (one knot per breakpoint).

Για $0 < u < \frac{1}{2}$	Για $\frac{1}{2} < u < 1$:
$N_{0,3}(u) = -8u^3 + 12u^2 - 6u + 1 = (1-2u)^3$	$N_{0,3}(u) = 0$
$N_{1,3}(u) = 14u^3 - 18u^2 + 6u$	$N_{1,3}(u) = -2u^3 + 6u^2 - 6u + 2$
$N_{2,3}(u) = -8u^3 + 6u^2$	$N_{2,3}(u) = 8u^3 - 18u^2 + 12u - 2 = 2(1-u)^2(4u-1)$
$N_{3,3}(u) = 2u^3$	$N_{3,3}(u) = -14u^3 + 24u^2 - 12u + 2$
$N_{4,3}(u) = 0$	$N_{4,3}(u) = 8u^3 - 12u^2 + 6u - 1 = (2u-1)^3$
$\sum_{i=0}^4 N_{i,3}(u) = 1$	$\sum_{i=0}^4 N_{i,3}(u) = 1$

Παρατηρούμε ότι και στα δύο υποδιαστήματα το άθροισμα των συναρτήσεων βάσης ισούται με τη μονάδα (ιδιότητα: partition of unity). Επίσης, σε κάθε υποδιάστημα μόνον τέσσερις από τις πέντε συναρτήσεις είναι διάφορες του μηδενός.

Ομοίως, για δύο διαστήματα παρεμβολής ($n_{ele} = 2$) (έξι σημεία ελέγχου: $n_p = 5$) και δύο κόμβους ανά σημείο παρεμβολής (two knots per breakpoint), οι έξι συναρτήσεις βάσεις υπό μορφή σύνθετων εκφράσεων παρουσιάζονται στον παρακάτω **Πίνακα 2**.

Πίνακας 2: Συναρτήσεις βάσης B-splines κατά Piegl & Tiller, $N_{i,p}(u)$, για $n_{ele} = 2$ (έξι σημεία ελέγχου: $n_p = 5$) και δύο κόμβους ανά σημείο παρεμβολής (two knots per node).

Για $0 < u < \frac{1}{2}$	Για $\frac{1}{2} < u < 1$
$N_{0,3}(u) = -8u^3 + 12u^2 - 6u + 1 = (1-2u)^3$	$N_{0,3}(u) = 0$
$N_{1,3}(u) = 24u^3 - 24u^2 + 6u$	$N_{1,3}(u) = 0$
$N_{2,3}(u) = -20u^3 + 12u^2$	$N_{2,3}(u) = -4u^3 + 12u^2 - 12u + 4$
$N_{3,3}(u) = 4u^3$	$N_{3,3}(u) = 20u^3 - 48u^2 + 36u - 8$
$N_{4,3}(u) = 0$	$N_{4,3}(u) = -24u^3 + 48u^2 - 30u + 6$
$N_{5,3}(u) = 0$	$N_{5,3}(u) = 8u^3 - 12u^2 + 6u - 1$
$\sum_{i=0}^5 N_{i,3}(u) = 1$	$\sum_{i=0}^5 N_{i,3}(u) = 1$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, παρατηρούμε ότι και στα δύο υποδιαστήματα το άθροισμα των συναρτήσεων βάσης ισούται με τη μονάδα (ιδιότητα: partition of unity). Επίσης, σε κάθε υποδιάστημα μόνον τέσσερις από τις έξι συναρτήσεις είναι διάφορες του μηδενός.

6.2 ΤΕΣΣΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ (ΔΥΟ ΑΚΡΑΙΑ, ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ)

6.2.1 Διατύπωση κατά Schoenberg

Έστω L το μήκος του διαστήματος $[0, L]$ του οποίου θεωρούμε τα άκρα $x_0 = 0$ και $x_3 = L$ καθώς και τα ενδιάμεσα σημεία παρεμβολής: $x_1 = L/3, x_2 = 2L/3$ (nele = 3, nodes = 4).

III. Ένας κόμβος ανά σημείο παρεμβολής (one knot per breakpoint): Πολλαπλότητα '1'

Με βάση τη γενική διατύπωση των κυβικών splines του Schoenberg, και λαμβάνοντας έναν κόμβο ανά σημείο παρεμβολής, προκύπτουν ευχερώς οι έξι συναρτήσεις μορφής εκ των οποίων οι τέσσερις αφορούν στις ίδιες τις τιμές της συνάρτησης ('μεταφορικοί' βαθμοί ελευθερίας) ενώ οι υπόλοιπες μπορεί να αναφέρονται είτε στις πρώτες ή στις δεύτερες παραγώγους της συνάρτησης στα δύο άκρα του διαστήματος.

Στην ειδική περίπτωση που μελετάμε, η παρεμβολή γίνεται:

$$B(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \sum_{i=1}^3 a_i (c_i)_+^3 \quad (6-25)$$

Η εφαρμογή τους σχέσης (6-25) τους τέσσερις κόμβους δίνει:

$$\begin{aligned} \hat{d}_1 = d_1 &= b_0 + b_1(0) + b_2(0)^2 + a_1(0) + a_2(0) + a_3(0) \\ \hat{d}_2 = d_2 &= b_0 + b_1(1/3) + b_2(1/3)^2 + a_1(1/3-0)^3 + a_2(0) + a_3(0) \\ \hat{d}_3 = d_3 &= b_0 + b_1(2/3) + b_2(2/3)^2 + a_1(2/3-0)^3 + a_2(2/3-1/3)^3 + a_3(0) \\ \hat{d}_4 = d_4 &= b_0 + b_1(1) + b_2(1)^2 + a_1(1-0)^3 + a_2(1-1/3)^3 + a_3(1-2/3)^3 \end{aligned} \quad (6-26)$$

Οι ανωτέρω 4 εξισώσεις είναι ανεπαρκείς για τον προσδιορισμό των 6 αγνώστων ($b_0, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3$). Επομένως, απαιτούνται ακόμη δύο εξισώσεις που προκύπτουν π.χ. από το μηδενισμό των δευτέρων παραγώγων στα άκρα του πεδίου ορισμού (μηδενική καμπτική ροπή).

Η πρώτη παράγωγος της (6-25) γίνεται:

$$B'(u) = b_1 + 2b_2 u + 3 \left[a_1 \langle u-0 \rangle_+^2 + a_2 \langle u-1/3 \rangle_+^2 + a_3 \langle u-2/3 \rangle_+^2 \right] \quad (6-26\alpha)$$

οπότε η δεύτερη παράγωγος, που μας ενδιαφέρει, γίνεται:

$$B''(u) = 2b_2 + 6 \left[a_1 \langle u-0 \rangle_+^1 + a_2 \langle u-1/3 \rangle_+^1 + a_3 \langle u-2/3 \rangle_+^1 \right] \quad (6-26\beta)$$

Επομένως για $w = 0$ και $w = 1$, από την (6-26β) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\hat{d}_5 = 0 &= B''(0) = 2b_2 = 0 \\ \hat{d}_6 = 0 &= B''(1) = 2b_2 + 6[a_1(1-0) + a_2(1-1/3) + a_3(1-2/3)] = 0\end{aligned}\quad (6-27)$$

Επομένως, το μητρώο είναι:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & (1/3)^2 & (1/3)^3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & (2/3)^2 & (2/3)^3 & (1/3)^3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & (2/3)^3 & (1/3)^3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

και το αντίστροφό του:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.8 & 4.8 & -1.2 & 0.2 & -0.0963 & -0.0037 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 7.2 & -16.2 & 10.8 & -1.8 & -0.6333 & 1/30 \\ -16.2 & 43.2 & -37.8 & 10.8 & 0.8 & -0.2 \\ 10.8 & -37.8 & 43.2 & -16.2 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3.8 & 4.8 & -1.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.2 & -16.2 & 10.8 & -1.8 \\ -16.2 & 43.2 & -37.8 & 10.8 \\ 10.8 & -37.8 & 43.2 & -16.2 \end{bmatrix}$$

Έτσι, οι συναρτήσεις μορφής γίνονται:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & \langle u-0 \rangle_+^3 & \langle u-1/3 \rangle_+^3 & \langle u-2/3 \rangle_+^3 \end{bmatrix}}_{1 \times 6} \cdot \underbrace{(\mathbf{B}_{11})}_{6 \times 4} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & \langle u-0 \rangle_+^3 & \langle u-1/3 \rangle_+^3 & \langle u-2/3 \rangle_+^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3.8 & 4.8 & -1.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.2 & -16.2 & 10.8 & -1.8 \\ -16.2 & 43.2 & -37.8 & 10.8 \\ 10.8 & -37.8 & 43.2 & -16.2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ή αναλυτικότερα:

Για το διάστημα $0 \leq u \leq 1/3$:

$$\phi_1(u) = 1 - 3.8u + 7.2u^3$$

$$\phi_2(u) = 4.8u - 16.2u^3$$

$$\phi_3(u) = -1.2u + 10.8u^3$$

$$\phi_4(u) = 0.2u - 1.8u^3$$

$$\phi_1(u) + \phi_2(u) + \phi_3(u) + \phi_4(u) \equiv 1$$

Για το διάστημα $1/3 \leq u \leq 2/3$:

$$\phi_1(u) = 1 - 3.8u + 7.2u^3 - 16.2(u - 1/3)^3$$

$$\phi_2(u) = 4.8u - 16.2u^3 + 43.2(u - 1/3)^3$$

$$\phi_3(u) = -1.2u + 10.8u^3 - 37.8(u - 1/3)^3$$

$$\phi_4(u) = 0.2u - 1.8u^3 + 10.8(u - 1/3)^3$$

$$\phi_1(u) + \phi_2(u) + \phi_3(u) + \phi_4(u) \equiv 1$$

Τέλος, για το διάστημα $2/3 \leq u \leq 1$:

$$\phi_1(u) = 1 - 3.8u + 7.2u^3 - 16.2(u - 1/3)^3 + 10.8(u - 2/3)^3$$

$$\phi_2(u) = 4.8u - 16.2u^3 + 43.2(u - 1/3)^3 - 37.8(u - 2/3)^3$$

$$\phi_3(u) = -1.2u + 10.8u^3 - 37.8(u - 1/3)^3 + 43.2(u - 2/3)^3$$

$$\phi_4(u) = 0.2u - 1.8u^3 + 10.8(u - 1/3)^3 - 16.2(u - 2/3)^3$$

$$\phi_1(u) + \phi_2(u) + \phi_3(u) + \phi_4(u) \equiv 1$$

Σημείωση: Προφανώς, εάν αντί του υπομητρώου \mathbf{B}_{11} χρησιμοποιούσαμε ολόκληρο το μητρώο \mathbf{A}^{-1} , τότε επιπλέον θα λαμβάναμε τις συναρτήσεις μορφής που αντιστοιχούν στις 'περιστροφικούς' βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή εκείνους που σχετίζονται με την δεύτερη παράγωγο (καμπυλότητα) των δύο άκρων.

7. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΞΥ GLOBAL CUBIC B-SPLINES ΚΑΙ ΜΑΚΡΟΣΤΟΙΧΕΙΩΝ BEZIER/NURBS

7.1 Υπενθύμιση της καμπύλης B-splines

Αναφορικά με τα B-splines, για δεδομένο πλήθος $(n+1)$ σημείων παρεμβολής (breakpoints), Q , και δεδομένο βαθμό, p , του nonrational B-spline, το πλήθος των στοιχείων του κομβοδιανύσματος (knot vector), U , είναι $m = n+p+1$. Εάν το πεδίο ορισμού είναι $[0,1]$, τα πρώτα $(p + 1)$ στοιχεία λαμβάνονται μηδενικά ($u_0 = \dots = u_p = 0$) και τα τελευταία ίσα με τη μονάδα ($u_{m-p} = \dots = u_m = 1$), ενώ τα ενδιάμεσα αντιστοιχούν με κατάλληλο τρόπο στα εσωτερικά σημεία παρεμβολής. Στην ειδική περίπτωση 'ευθύγραμμου' πεδίου ορισμού (ευθύγραμμη καμπύλη), οι τιμές u του κομβοδιανύσματος που αντιστοιχούν στα εσωτερικά σημεία παρεμβολής είναι μονοσήμαντα ορισμένες ενώ στην περίπτωση καμπύλης υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές επιλογές, όπως λ.χ. με βάση το μήκος των χορδών ή η λεγόμενη κεντρομόλος μέθοδος κλπ.

7.2. Καμπύλη Bézier

Στην ειδική περίπτωση της παραπάνω παραγράφου που λαμβάνουμε $p = n$, τότε δεν υπάρχουν εσωτερικοί κόμβοι (knots), και η καμπύλη NURBS εκφυλίζεται σε καμπύλη Bézier. Υπενθυμίζουμε ότι η καμπύλη Bézier εκφράζεται συναρτήσει των σημείων ελέγχου, P_i :

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (7-1)$$

με τη βοήθεια των πολυωνύμων Bernstein, $B_{i,n}(u)$, που δίνονται από τη σχέση:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n \quad (7-2)$$

Στην ειδική περίπτωση καμπύλης Bézier, είναι τετριμμένο να τονίσουμε ότι όχι μόνο δεν υπάρχουν εσωτερικοί κόμβοι, αλλά προφανώς ούτε και εσωτερικά σημεία παρεμβολής.

7.2.1 Καμπύλη Bézier 1^{ου} βαθμού ($p = 1$)

Όπως σε κάθε καμπύλη Bézier, χρησιμοποιούνται μόνο τα δύο ακραία σημεία παρεμβολής (breakpoints), $Q_0 (\bar{u}_0 = 0)$ και $Q_1 (\bar{u}_1 = 1)$. Στην περίπτωση $p = 1$, τα δύο αντίστοιχα πολυώνυμα Bernstein (βλ. σχέση (ii)) γίνονται $B_{0,1}(u) = 1-u$ και $B_{1,1}(u) = u$. Επειδή η σχέση (7-1) γράφεται ως $C(u) = (1-u)P_0 + uP_1$, είναι προφανές ότι τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου, P_0 και P_1 , ταυτίζονται με τα δύο (και μοναδικά) ακραία breakpoints, Q_0 και Q_1 , και μάλιστα οι δύο συναρτήσεις βάσης (πολυώνυμα Bernstein) ταυτίζονται με τις αντίστοιχες γραμμικές συναρτήσεις μορφής των μονοδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (π.χ. ράβδου σε εφελκυσμό).

7.2.2 Καμπύλη Bézier 2^{ου} βαθμού ($p = 2$)

Σε αυτή την περίπτωση ($p = 2$), τα τρία πολυώνυμα Bernstein (βλ. σχέση (7-2)) γίνονται $B_{0,2}(u) = (1-u)^2$, $B_{1,2}(u) = 2u(1-u)$ και $B_{2,2}(u) = u^2$, οπότε η σχέση (7-1) λαμβάνει την έκφραση $C(u) = (1-u)^2 \mathbf{P}_0 + 2u(1-u)\mathbf{P}_1 + u^2\mathbf{P}_2$. Θέτοντας στην προηγούμενη σχέση διαδοχικά $u=0$ και $u=1$, επαληθεύεται και πάλι ότι τα ακραία σημεία ελέγχου, \mathbf{P}_0 και \mathbf{P}_2 , ταυτίζονται με τα (δύο ακραία) σημεία παρεμβολής (breakpoints), Q_0 και Q_1 . Εφόσον η καμπύλη Q_0Q_1 είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, προφανώς θα υπάρχει ένας απλός γραμμικός συνδυασμός μεταξύ του u και του $C(u)$. Με άλλα λόγια, η τιμή $u=0$ θα αντιστοιχεί στην αρχή του διαστήματος, η τιμή $u = 1/4$ στο ένα τέταρτο του διαστήματος, η τιμή $u = 1/2$ στο μέσον, κ.ο.κ., και τέλος η τιμή $u=1$ στο πέρας του διαστήματος. Οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο επιλεγεί για την ικανοποίηση της προαναφερθείσας αναλογίας είναι ικανό να προσδιορίσει το άγνωστο σημείο ελέγχου, \mathbf{P}_1 . Για παράδειγμα, επιλέγοντας τυχαία τη θέση $u = 1/2$, αυτή πρέπει να αντιστοιχεί στο μέσον του ευθύγραμμου τμήματος, οπότε η σχέση (7-1) δίνει:

$$C(1/2) = \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \mathbf{P}_0 + 2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \mathbf{P}_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathbf{P}_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}}$$

δηλαδή, με άλλα λόγια, το ενδιάμεσο σημείο ελέγχου \mathbf{P}_1 ευρίσκεται στο μέσον του διαστήματος. Σημειώνεται ότι το γεγονός τούτο δεν έχει καμιά σχέση με εσωτερικά σημεία παρεμβολής, τα οποία έτσι και αλλιώς δεν υφίστανται στην παρούσα περίπτωση.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα προέκυπτε επιλέγοντας οποιοδήποτε άλλο σημείο εφαρμογής της σχέσης (7-1), όπως λ.χ. το σημείο $u = 1/4$ για το οποίο ισχύει:

$$C(1/4) = \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \mathbf{P}_0 + 2 \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \mathbf{P}_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathbf{P}_2 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{6}{16} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}}, \text{ ο.ε.δ.}$$

Προφανώς τούτο ισχύει καθόσον τα δύο (ακραία) σημεία παρεμβολής είναι ισότιμα και οι συναρτήσεις βάσης είναι συμμετρικές ως προς αυτά.

Ουσιαστικά το σημείο ελέγχου \mathbf{P}_1 στο μέσον του διαστήματος δίνει τη δυνατότητα καθορισμού μιας παραβολικής καμπύλης (δευτέρου βαθμού), η οποία είναι συμμετρικής μορφής ως προς το μέσον. Παρόλα ταύτα, *στο μέσον του διαστήματος δεν υπάρχει κόμβος (!)* αλλά μόνον σημείο ελέγχου που εξάλλου 'φέρει' (συνδέεται με) την αντίστοιχη συνάρτηση βάσης $B_{1,2}(u) = 2u(1-u)$.

7.2.3 Καμπύλη Bézier 3^{ου} βαθμού ($p = 3$)

Εάν τώρα ο πολυωνυμικός βαθμός είναι $p = 3$, το κομβοδιάγραμμα, U , είναι το ακόλουθο:

$U = \left\{ \underbrace{0, 0, 0, 0}_{p+1=4}, \underbrace{1, 1, 1, 1}_{p+1=4} \right\}$. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε μια κυβική καμπύλη Bézier,

οπότε οι συντεταγμένες $C(u) = \{x(u), y(u)\}$ δίνονται από τη σχέση:

$$C(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (7-3)$$

Η ύπαρξη τεσσάρων σημείων ελέγχου είναι συμβατή με τη γενική σχέση $m = n + p + 1$ όπου για $m = 7$ και $p = 3$ προκύπτει $n = 3$, δηλαδή τέσσερα σημεία όπως παραπάνω. Προφανώς, για $u = 0$ προκύπτει το σημείο P_0 στην αρχή της καμπύλης, και για $u = 1$, προκύπτει το σημείο P_3 στο πέρας αυτής. Στη γενική περίπτωση, τα δύο εσωτερικά σημεία ελέγχου, (P_1, P_2) , εξαρτώνται από την μορφή της καμπύλης.

Στην ειδική περίπτωση ενός *ευθύγραμμου* τμήματος κατά μήκος του οριζόντιου άξονα x , εφόσον οι συντεταγμένες αυτών, y , είναι μηδενικές, τότε προφανώς και οι τεταγμένες των σημείων ελέγχου θα μηδενίζονται, δηλαδή τα σημεία P_1 και P_2 θα κείνται επί της ίδιας ευθείας. Όπως και στην §7.2.2, η θέση των δύο εσωτερικών σημείων ελέγχου P_1 και P_2 θα προσδιορίζεται από την απαίτηση αναλογικής σχέσης μεταξύ του u και του $C(u)$. Προς τούτο, απαιτείται η επιλογή δύο *τυχαίων* σημείων επαλήθευσης στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$ και η κατάλληλη εφαρμογή της (7-1). Για παράδειγμα, επιλέγοντας τα σημεία $u = 1/3$ και $u = 2/3$, προκύπτει το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} (1-1/3)^3 P_0 + 3(1/3)(1-1/3)^2 P_1 + 3(1/3)^2(1-1/3) P_2 + (1/3)^3 P_3 &= 1/3 \\ (1-2/3)^3 P_0 + 3(2/3)(1-2/3)^2 P_1 + 3(2/3)^2(1-2/3) P_2 + (2/3)^3 P_3 &= 2/3 \end{aligned} \quad (7-4)$$

του οποίου η λύση είναι: $P_1 = (1/3, 0), P_2 = (2/3, 0)$. Επομένως, σε αυτή την ειδική περίπτωση τα σημεία ελέγχου (control points), P , **διαιρούν ομοιόμορφα** το διάστημα $[0,1]$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η παραπάνω λύση δεν είναι συμπτωματική, αλλά ισχύει για οποιαδήποτε άλλη επιλογή των σημείων επαλήθευσης. Πράγματι, εισάγοντας τις τιμές $P_1 = (1/3, 0), P_2 = (2/3, 0)$ στη σχέση (7-3), η τελευταία δίνει:

$$C(u) = (1-u)^3 0 + 3u(1-u)^2 \frac{1}{3} + 3u^2(1-u) \frac{2}{3} + u^3 1 \equiv u, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (7-5)$$

Εφόσον απεδείχθη ότι $C(u) \equiv u, \forall u \in [0,1]$, τότε έχει αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά είναι τα σημεία ελέγχου.

Εάν δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τα σημεία ελέγχου, είναι δυνατόν να τα προσδιορίσουμε χωρίς την επίλυση του παραπάνω γραμμικού συστήματος, ακολουθώντας την εξής πορεία.

Η σχέση $C(u) \equiv u, \forall u \in [0,1]$ γράφεται ισοδύναμα ως :

$$C(u) = 3u(1-u)^2 u_p + 3u^2(1-u)(1-u_p) + u^3 \equiv u, \quad \forall u \in [0,1] \quad (7-6)$$

καθόσον εάν το αριστερό σημείο ελέγχου θα ευρίσκεται στη θέση u_p τότε το δεξί θα είναι σε εντελώς συμμετρική θέση ως προς το μέσον του διαστήματος, $(1-u_p)$. Τούτο απορρέει από το συμμετρικό σχήμα που έχουν τα πολυώνυμα Bernstein.

Θέτοντας την τιμή $u_p = 1/3$ στη σχέση (7-6) και διατάσσοντας το προκύπτον κυβικό πολυώνυμο ως προς τις δυνάμεις του, λαμβάνουμε:

$$u^3(6u_p - 2) + u^2(-9u_p + 3) + u(3u_p - 1) \equiv 0, \quad \forall u \in [0,1], \quad (7-7)$$

Αφού το παραπάνω πολυώνυμο είναι ταυτοτικά ίσο προς το μηδέν, πρέπει καθένας από τους τέσσερις συντελεστές να είναι μηδενικός, συνθήκη από την οποία προκύπτει ότι $u_p = 1/3$, ο.ε.δ.

Σημείωση: Εάν δεν λάβουμε καθόλου υπόψη μας τη συμμετρική θέση των δύο σημείων ελέγχου, αλλά τις θεωρήσουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, u_{p_1}, u_{p_2} , τότε η αντίστοιχη σχέση της (7-6) γίνεται:

$$3u(1-u)^2 u_{p_1} + 3u^2(1-u)u_{p_2} + u^3 \equiv u, \quad (7-6a)$$

ενώ η αντίστοιχη της (7-7):

$$u^3(3u_{p_1} - 3u_{p_2} + 1) + u^2(-6u_{p_1} + 3u_{p_2}) + u(3u_{p_1} - 1) \equiv 0, \quad \forall u \in [0,1], \quad (7-7a)$$

από την οποία προκύπτει η λύση: $u_{p_1} = 1/3, u_{p_2} = 2/3$. Είναι άξιο παρατήρησης ότι οι τρεις εξισώσεις που αντιστοιχούν στον μηδενισμό των τριών όρων του κυβικού πολυωνύμου είναι γραμμικά εξαρτημένες. Ωστόσο, αυτές συναληθεύουν, δηλαδή η μοναδική λύση του συστήματος των δύο πρώτων εξισώσεων ($\det = -9 \neq 0$) ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση.

7.3 Παρεμβολή B-splines (nele = 2)

Εξετάζουμε την περίπτωση τριών σημείων παρεμβολής ($x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$) με πολλαπλότητα ίση προς τη μονάδα. Θα δείξουμε ότι από τα πέντε σημεία ελέγχου, τα τρία ταυτίζονται με τα σημεία παρεμβολής ενώ τα υπόλοιπα δύο υποδιαιρούν τα δύο υποδιαστήματα σε λόγο 1:3 μετρούμενο από τα άκρα.

Καταρχήν εφαρμόζουμε την παρεμβολή στο διάστημα $[0,1/2)$ εντός του οποίου δρουν μόνον οι τέσσερις πρώτες (από τις συνολικά πέντε) συναρτήσεις βάσης που επίσης περιγράφονται από ενιαία μορφή, οπότε ισχύει:

$$C(u) = (1-2u)^3 \underset{0}{\chi_{p_0}} + (14u^3 - 18u^2 + 6u)u_{p_1} + (-8u^3 + 6u^2)u_{p_2} + 2u^3 \underset{1}{u_{p_3}} \equiv u, \quad \forall u \in [0,1/2) \quad (7-8)$$

Διατάσσοντας το κυβικό πολυώνυμο που εμφανίζεται στην (7-8) ως προς τις κατιούσες δυνάμεις του u , προκύπτει:

$$u^3(14u_{P_1} - 8u_{P_2} + 2u_{P_3}) + u^2(-18u_{P_1} + 6u_{P_2}) + u(6u_{P_1} - 1) \equiv 0, \forall u \in [0, 1/2] \quad (7-9)$$

Οπότε τα σημεία ελέγχου προκύπτουν από τη λύση του γραμμικού συστήματος (μηδενισμός συντελεστών πολυωνύμου):

$$\left. \begin{aligned} 14u_{P_1} - 8u_{P_2} + 2u_{P_3} &= 0 \\ -18u_{P_1} + 6u_{P_2} + 0 \cdot u_{P_3} &= 0 \\ 6u_{P_1} + 0 \cdot u_{P_2} + 0 \cdot u_{P_3} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7-10)$$

που είναι η ακόλουθη:

$$u_{P_1} = 1/6, u_{P_2} = 1/2, u_{P_3} = 5/6 \quad (7-11)$$

Με άλλα λόγια:

- 1) το πρώτο σημείο ελέγχου ταυτίζεται με το πρώτο σημείο παρεμβολής
- 2) το δεύτερο σημείο ελέγχου χωρίζει το πρώτο υποδιάστημα σε λόγο 1:3 από αριστερά
- 3) το τρίτο σημείο ελέγχου ταυτίζεται με το δεύτερο σημείο παρεμβολής
- 4) το τέταρτο σημείο ελέγχου χωρίζει το δεύτερο υποδιάστημα σε λόγο 1:3 από δεξιά
- 5) το πέμπτο σημείο ελέγχου ταυτίζεται με το τρίτο σημείο παρεμβολής.

7.4 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: ΤΕΣΣΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ (ΔΥΟ ΑΚΡΑΙΑ, ΔΥΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΑ)

Βλέπουμε ότι ενώ η κυβική **καμπύλη Bézier** (σχέση (7-1)) είναι συνεχής συνάρτηση και δίνεται από *ενιαίο τύπο* σε ολόκληρο το διάστημα $[0, 1]$, η **κυβική B-splines** (3-6) απαιτεί *τμηματικό ορισμό*. Ας πάρουμε για παράδειγμα τις συναρτήσεις των τεσσάρων σημείων παρεμβολής ($n_{ele} = 3$), π.χ. στο διάστημα $0 \leq u = x/L \leq 1/3$.

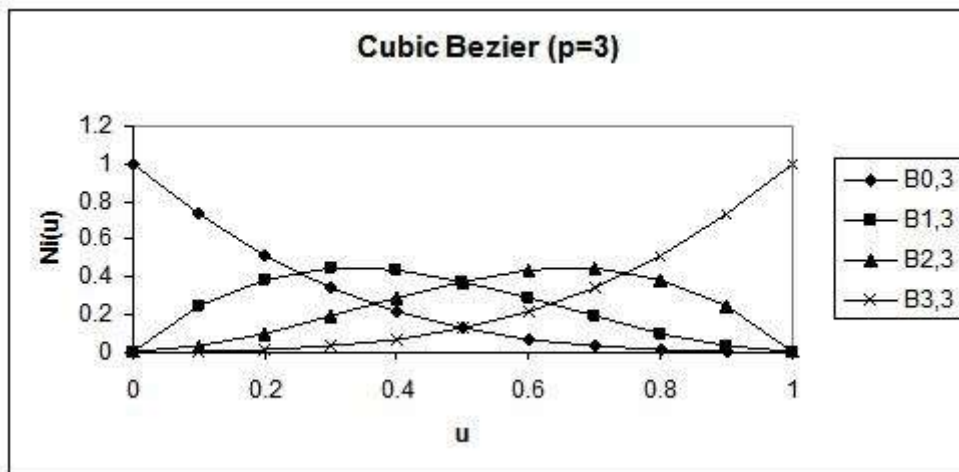
ΠΙΝΑΚΑΣ 7-1: Σύγκριση συναρτήσεων βάσης και μορφής		
Συνάρτηση	Cubic Bezier ($n = p = 3$) (συνάρτηση βάσης)	Cubic B-spline ($0 \leq u \leq 1/3$) (συνάρτηση μορφής)
$N_1(u)$	$B_{0,3}(u) = (1-u)^3$	$1 - 3.8u + 7.2u^3$
$N_2(u)$	$B_{1,3}(u) = 3u(1-u)^2$	$4.8u - 16.2u^3$
$N_3(u)$	$B_{2,3}(u) = 3u^2(1-u)$	$-1.2u + 10.8u^3$
$N_4(u)$	$B_{3,3}(u) = u^3$	$0.2u - 1.8u^3$
$\sum_{i=1}^4 N_i(u)$	1	1

Από τον παραπάνω **Πίνακα 7-1** βλέπουμε επομένως ότι οι συναρτήσεις $N_{i,p}(u)$ είναι συναρτήσεις **βάσης**, όπως ακριβώς υποδηλώνει και το όνομά τους, ενώ αντίθετα οι δικές μας είναι συναρτήσεις **μορφής**. Οι συναρτήσεις βάσης λαμβάνουν μοναδιαία τιμή μόνο για τους ακραίους κόμβους ($u = 0, 1$), ενώ για τους ενδιάμεσα σημεία ελέγχου έχουν **μέγιστη** (αλλά όχι μοναδιαία τιμή) σε αυτά.

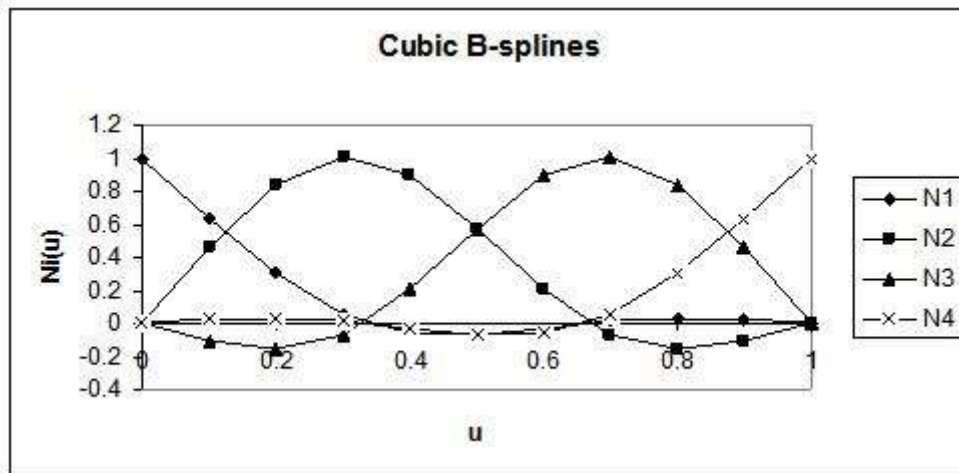
Μια συγκριτική αντιπαράθεση δίνεται στα **Σχήματα 7-3 & 7-4**, από όπου *δεν υπάρχει άμεση προφανής σχέση μεταξύ των δύο εναλλακτικών διατυπώσεων*.

Πιο συγκεκριμένα, και οι δύο διατυπώσεις είναι πολυωνυμικής μορφής μέχρι και τον τρίτο βαθμό αλλά το περίεργο είναι ότι στην διατύπωση cubic B-splines δεν εμφανίζεται ο όρος u^2 σε καμία από τις συναρτήσεις μορφής! Βέβαια, από μαθηματική άποψη, αυτό εξηγείται πλήρως βάσει της σχέσης (6-26β). Προφανώς, κάτι τέτοιο δεν θα συνέβαινε εάν αντί του φυσικού spline (μηδενική ροπή στα άκρα) λαμβανόταν μια άλλη αυθαίρετη τιμή.

Αντίθετα, στη διατύπωση Bézier εμφανίζονται κατά περίπτωση όλες οι δυνάμεις του u , και συγκεκριμένα, ο όρος u^2 εμφανίζεται στις συναρτήσεις βάσης $B_{0,3}(u)$, $B_{1,3}(u)$ και $B_{2,3}(u)$.



Σχήμα 7-3 Συναρτήσεις βάσης καμπύλης Bézier (πολυών. Bernstein) του Πίνακα 7-1.



Σχήμα 7-4 : Συναρτήσεις μορφής cubic B-splines (η περιοχή $0 < u < 1/3$ φαίνεται στον Πίνακα 7-1).

Βιβλιογραφία Παραρτήματος Δ

- [Ahlb67] Ahlberg, Nilson, and Walsh, *The Theory of Splines and Their Applications*, 1967.
- [Bart87] Bartels, Beatty, and Barsky, *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*, 1987.
- [Birk90] Birkhoff, Fluid dynamics, reactor computations, and surface representation, in: Steve Nash (ed.), *A History of Scientific Computation*, 1990.
- [Birk65] Birkhoff and de Boor, Piecewise polynomial interpolation and approximation, in: H. L. Garabedian (ed.), *Proc. General Motors Symposium of 1964*, pp. 164–190. Elsevier, New York and Amsterdam, 1965.
- [Cotr06] Cottrell JA, Reali A., Bazilevs Y, Hughes TJR, Isogeometric analysis of structural vibrations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195 (2006) 5257–5296.
- [Cox72] Cox, M.G., The numerical evaluation of B-splines, *Jour. Inst. Math. Applic.*, Vol. 10, pp. 134-149, 1972.
- [Curr47] Curry, H.B., and Schoenberg, I.J., On spline distributions and their limits: the Pólya distribution functions, Abstract 380t, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 53, p. 109, 1947.
- [Davi97] Davis, B-splines and Geometric design, *SIAM News*, vol. 29, no. 5, 1997.
- [DeBo72] De Boor, C., On calculating with B-splines, *Jour. Approx. Theory*, Vol. 6, pp. 50-62, 1972.
- [DeBo78] De Boor, C., *A Practical Guide to Splines*, New York: Springer-Verlag, 1978 (Revised Edition: 2001).
- [Ferg64] Ferguson, James C, *Multi-variable curve interpolation*, *J. ACM*, vol. 11, no. 2, pp. 221-228, Apr. 1964.
- [Hudg05] Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2005;194:4135-4195.
- [Piegl97] Piegl, L., and Tiller, W., *The NURBS Book*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.
- [Rams87] Ramshaw, L., Blossoming: A connect-the-dots- approach to splines, Report 19, Digital, Systems Research Center, Palo Alto, CA, 1987.
- [Scho46] Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, vol. 4, pp. 45–99 and 112–141, 1946.
- [Youn97] Young, Garrett Birkhoff and applied mathematics, *Notices of the AMS*, vol. 44, no. 11, pp. 1446–1449, 1997.