



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ»

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ (2D)  
ΚΥΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΜΕ ΥΦΑΛΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ**

**Φλώρου Εύη**

**Επιβλέπων: Κ. Μέμος, Καθηγητής**

Αθήνα 2014



*Ευχαριστώ για τη συμβολή τους τον  
επιβλέποντα καθηγητή κ. Κωνσταντίνο  
Μέμο, τον υποψήφιο διδάκτορα κ.  
Αναστάσιο Μεταλληνό και τους  
υποψήφιους διδάκτορες κ. Μιχάλη  
Χονδρό και κ. Γιώργο Κλωνάρη.*



## Περιεχόμενα

---

Ορισμοί Συμβόλων .....	iii
Κατάλογος Σχημάτων – Πινάκων - Γραφημάτων .....	vii
Περίληψη .....	ix
Extended Abstract.....	xi
1. Εισαγωγή .....	1
1.1 Κατασκευές χαμηλής στέψης.....	1
1.2 Αριθμητική προσομοίωση.....	2
2. Μαθηματικά Μοντέλα Διάδοσης Κυματισμών .....	3
2.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο .....	3
2.1.1 Εισαγωγή .....	3
2.1.2 Βασικές Εξισώσεις .....	4
2.1.3 Συνάρτηση δυναμικού - Ροϊκή συνάρτηση .....	5
2.1.4 Εξίσωση Bernoulli.....	6
2.2 Θεωρίες Διάδοσης Κυματισμών .....	7
2.2.1 Γραμμική Θεωρία Airy.....	7
2.2.2 Εξίσωση Διασποράς .....	8
2.2.3 Θεωρία Stokes .....	10
2.2.4 Κυματισμοί πεπερασμένου ύψους σε ρηχά νερά .....	11
2.2.5 Θεωρία Ροϊκής Συνάρτησης.....	13
2.3 Μοντέλα διάδοσης κυματισμών τύπου Boussinesq.....	15
2.3.1 Εισαγωγικά στοιχεία.....	15
2.3.2 Εξέλιξη των μοντέλων Boussinesq.....	15
2.3.3 Το μοντέλο CM14 .....	18
2.3.4 Μοντέλα Boussinesq σε πορώδη πυθμένα .....	20
2.3.5 Εξίσωση Darcy - Forchheimer .....	21
2.3.6 Παραγωγή εξισώσεων Boussinesq σε πορώδες μέσο .....	23
3. Περιγραφή τροποποιημένου μοντέλου CM14.....	29
3.1 Βασικές εξισώσεις.....	29
3.2 Απορροφητικά όρια.....	31
3.3 Γένεση κυματισμών .....	32

3.4 Θραύση κυματισμών .....	33
3.5 Τριβή στον πυθμένα .....	34
3.6 Αριθμητικό σχήμα επίλυσης .....	35
3.7 Μείξη εντός του καννάβου.....	37
3.8 Προφίλ ταχυτήτων .....	38
4. Περιγραφή πειραματικών διατάξεων.....	39
4.1 Εισαγωγή.....	39
4.2 Πειραματική διάταξη .....	39
4.3 Μετρήσεις .....	43
5. Σύγκριση - Αποτελέσματα.....	45
5.1 Εφαρμογή του μοντέλου .....	45
5.2 Αποτελέσματα - Σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις .....	48
6. Συμπεράσματα - Προτάσεις.....	57
6.1 Σύνοψη .....	57
6.2 Συμπεράσματα .....	57
6.3 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.....	58
7. Βιβλιογραφία .....	61
Παράρτημα I.....	67
Α. Χρονοσειρές ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας - Κατασκευή narrow berm.....	67
Β. Χρονοσειρές ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας - Κατασκευή wide berm.....	73
Παράρτημα II - Όροι $\Lambda^{III}$ της εξίσωσης ορμής.....	79
Παράρτημα III - Κώδικας προγράμματος Fortran.....	81

## Ορισμοί Συμβόλων

---

### 1. Σύμβολα με ελληνικούς χαρακτήρες

- α: επιτάχυνση
- α: εύρος του κυματισμού
- $\alpha_1$ : συντελεστής αντίστασης για στρωτή ροή
- $\alpha_2$ : συντελεστής αντίστασης για τυρβώδη ροή
- α: εμπειρικός συντελεστής υλικού
- β: εμπειρικός συντελεστής υλικού
- β: συντελεστής διασποράς για τη ροή σε πορώδες μέσο
- $\beta_s$ : συντελεστής σχήματος πηγής
- γ: εμπειρικός συντελεστής υλικού που σχετίζεται με την πρόσθετη μάζα
- γ: συντελεστής διασποράς
- $\delta_b$ : συντελεστής μήκους ανάμιξης
- ε: διασπορά εύρους
- η: ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας
- θ: διεύθυνση διάδοσης κυματισμού
- Κ: συντελεστής γεωμετρικής διαπερατότητας
- κ: κυματαριθμός
- λ: πορώδες
- μ: δυναμικό ιξώδες
- μ: αδιάστατο ύψος κύματος
- μ: διασπορά συχνοτήτων
- μ: συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας
- ν: κινηματικό ιξώδες
- $\nu_e$ : τυρβώδης συνεκτικότητα
- ρ: πυκνότητα
- σ: διασπορά συχνοτήτων
- T: τανυστής των τάσεων
- Φ: συνάρτηση δυναμικού
- φ: πορώδες

$\Psi$ : ροϊκή συνάρτηση  
 $\Psi$ : συνάρτηση δυναμικού σε πορώδες μέσο  
 $\omega$ : γωνιακή συχνότητα

## 2. Σύμβολα με λατινικούς χαρακτήρες

$B$ : συντελεστής διασποράς  
 $B$ : παράμετρος θραύσης  
 $C$ : ταχύτητα φάσης  
 $C_s$ : αδιάστατη παράμετρος Smagorinsky  
 $C_0$ : ταχύτητα φάσης στα βαθιά  
 $C_g$ : ταχύτητα ομάδας  
 $cn(u)$ : ελλειπτική συνημιτονοειδής συνάρτηση  
 $c_m$ : συντελεστής πρόσθετης μάζας  
 $c_T$ : αδρανειακός συντελεστής  
 $D_s$ : εύρος συνάρτησης πηγής  
 $d_{50}$ : μέση διάμετρος υλικού  
 $F$ : δύναμη  
 $F(y,t)$ : συνάρτηση πηγής  
 $f_{cw}$ : συντελεστής τριβής πυθμένα  
 $f(t)$ : σταθερά Bernoulli  
 $fr$ : freeboard  
 $g$ : επιτάχυνση της βαρύτητας  
 $h$ : βάθος νερού  
 $h_b$ : βάθος νερού στον πυθμένα  
 $h_s$ : πάχος πορώδους μέσου  
 $H$ : ύψος κύματος  
 $L$ : μήκος κύματος  
 $L_0$ : μήκος κύματος στα βαθιά  
 $m$ : μάζα  
 $p$ : πίεση  
 $p_s$ : πίεση εντός πορώδους μέσου  
 $r$ : καμπυλότητα κύματος



$m(x)$ : συντελεστής απορρόφησης

$T$ : περίοδος

$T^*$ : χρονική διάρκεια ενός γεγονότος θραύσης

$t$ : χρόνος

$U_r$ : παράμετρος Ursell

$u$ : συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $x$

$\bar{u}$ : μέση ολοκληρωμένη στο βάθος ταχύτητα

$u_s$ : συνιστώσα της ταχύτητας εντός πορώδους μέσου κατά τη διεύθυνση  $x$

$v$ : συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $y$

$v_s$ : συνιστώσα της ταχύτητας εντός πορώδους μέσου κατά τη διεύθυνση  $y$

$w$ : συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση  $z$

$w_s$ : συνιστώσα της ταχύτητας εντός πορώδους μέσου κατά τη διεύθυνση  $z$



## ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχ. 2.1: Ομάδα κυμάτων (wave group) .....	9
Σχ. 2.2: Διασπειρόμενοι κυματισμοί: η ταχύτητα φάσης είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα ομάδας.....	9
Σχ. 2.3: Προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας όπως προκύπτουν από τις θεωρίες διάδοσης κυματισμών .....	13
Σχ. 2.4: Περιοχές ισχύος θεωριών διάδοσης κυματισμών.....	14
Σχ. 2.6: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου των Cruz et al. ....	23
Σχ. 3.1: Ορισμός μεταβλητών του μοντέλου .....	30
Σχ. 4.1: Κάτοψη δεξαμενής AAU.....	40
Σχ. 4.2: Κάτοψη πειραματικής διάταξης narrow berm διαστάσεις σε cm.....	41
Σχ. 4.3: Κάτοψη πειραματικής διάταξης wide berm διαστάσεις σε cm .....	41
Σχ. 4.4: Διατομή narrow berm διαστάσεις σε cm .....	42
Σχ. 4.5: Διατομή wide berm διαστάσεις σε cm.....	42
Σχ. 4.6: Τομή πειραματικής διάταξης διαστάσεις σε cm.....	43
Σχ. 5.1: Βαθυμετρία narrow berm .....	47
Σχ. 5.2: Βαθυμετρία wide berm .....	47
Σχ. 5.3: Χρονοσειρές ανύψωσης, narrow berm .....	50
Σχ. 5.4: Χρονοσειρές ανύψωσης, wide berm.....	52
Σχ. 5.5: Περιοχές θραύσης, narrow berm .....	53
Σχ. 5.6: Μέση ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας σε m, narrow berm.....	54
Σχ. 5.7: Πεδίο ταχυτήτων, narrow berm .....	54
Σχ. 5.8: Στροβιλότητα, narrow berm .....	55
Σχ. 5.9: Στιγμαία ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, narrow berm .....	55
Σχ. 5.10: Στιγμαία ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας σε 3D, narrow berm .....	56

## ΠΙΝΑΚΕΣ

Πιν. 2.1: Τιμές των αδιάστατων συντελεστών $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ .....	22
Πιν. 4.1: Χαρακτηριστικά υλικών .....	40
Πιν. 5.1: Παράμετροι επίλυσης.....	46



Οι παράκτιες περιοχές πολύ συχνά αντιμετωπίζουν προβλήματα διάβρωσης. Ταυτόχρονα η περιβαλλοντική τους υποβάθμιση λόγω της μεγάλης συγκέντρωσης πληθυσμού και δραστηριοτήτων γίνεται όλο και πιο έντονη. Οι σύγχρονοι μελετητές προσανατολίζονται σε πιο ήπιες παρεμβάσεις στις ευάλωτες αυτές ζώνες, χρησιμοποιώντας φιλικότερες προς το περιβάλλον κατασκευές. Οι κυματοθραύστες χαμηλής στέψης αποτελούν ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων παρεμβάσεων. Η απορρόφηση της κυματικής ενέργειας επιτυγχάνεται μέσω της θραύσης και της τριβής στο εσωτερικό της κατασκευής. Το κύριο πλεονέκτημά τους έναντι των συμβατικών κυματοθραυστών είναι ότι δεν υποβαθμίζουν την αισθητική του τοπίου καθώς δεν εμποδίζουν την οπτική επαφή με το θαλάσσιο ορίζοντα. Ο σχεδιασμός αυτών των έργων βασίζεται κυρίως σε εμπειρικές μεθόδους. Όμως η διάδοση κυματισμών στην περιοχή κυματοθραυστών οδηγεί σε ένα εξαιρετικά πολύπλοκο πεδίο ροής το οποίο δεν μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά ούτε εμπειρικά. Τα τελευταία χρόνια η όλο και αυξανόμενη διαθεσιμότητα υπολογιστικών πόρων έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για την προσομοίωση αυτών των φαινομένων.

Τα ομοιώματα τύπου Boussinesq είναι κατάλληλα για την προσομοίωση της κυματικής διάδοσης σε ενδιάμεσα και μικρά βάθη. Αυτό, σε συνδυασμό με το χαμηλό υπολογιστικό κόστος έναντι άλλων μοντέλων τα καθιστά ιδιαίτερα δημοφιλή για χρήση σε παράκτιες περιοχές. Όμως ο περιορισμός του βάθους δημιουργεί σημαντικό πρόβλημα στην πρακτική εφαρμογή, οδηγώντας πολλούς ερευνητές στην αναζήτηση βελτιωμένων μορφών των κλασσικών εξισώσεων Boussinesq σε μια προσπάθεια διεύρυνσης του πεδίου εφαρμογής τους.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε ένα μοντέλο Boussinesq υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς (Chondros and Memos, 2014). Οι βασικές εξισώσεις έχουν τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να περιλαμβάνουν την επίδραση από τη ροή στο εσωτερικό της κατασκευής (Cruz et al., 1997). Για την επαλήθευση του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια πειραμάτων στη δεξαμενή κυματισμών του πανεπιστημίου Aalborg (AAU) στα πλαίσια του προγράμματος DELOS (DELOS, 2002). Στο μοντέλο εντάχθηκε επιπλέον ένας αλγόριθμος υπολογισμού του κατακόρυφου προφίλ ταχυτήτων σε δύο διαστάσεις, ακολουθώντας τη μέθοδο που προτάθηκε και εφαρμόστηκε για μονοδιάστατο πεδίο από τους Metallinos and Memos (2012).



### **1. Introduction**

Low crested breakwaters have been widely used in the last few decades to protect coastal areas from erosion. Energy dissipation is achieved through wave-breaking and friction inside the structure. Their main advantage to conventional breakwaters is aesthetic. They also allow for circulation of water behind the structure so water quality does not decline. Wave transformation around permeable structures results in a very complicated wave field that cannot be predicted analytically nor empirically. In recent years mathematical models have been developed to model these effects.

Boussinesq type models are more appropriate for modeling wave propagation in coastal areas. Typical Boussinesq equations are limited by weak non-linearity and dispersivity and are thus restricted to shallow water. To overcome this weakness many researchers have developed extended equations by retaining higher order terms. In this study we employ a non-linear, fully dispersive Boussinesq-type model (Chondros and Memos, 2014). The basic equations have been modified to account for flow inside a porous layer following the approach of Cruz et al. (1997). Model results are compared to data collected from the wave basin experiments in Aalborg University of Denmark during the DELOS project (DELOS, 2002).

### **2. Numerical Model**

#### *2.1 Boussinesq equations*

A higher order fully dispersive Boussinesq - type model (Chondros and Memos, 2014) is used in conjunction with a nonlinear resistance equation to describe the flow inside the porous layer, following the approach of Cruz et al. (1997). The flow is assumed incompressible and irrotational in both layers. Definition of variables is shown in Fig. 2.1.

The mass conservation equation reads

$$\eta_t + \nabla[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{u}] + \varphi\nabla(h_s\mathbf{u}_s) = 0 \quad (2.1)$$

where  $\varphi$  is the porosity and  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_s$  the depth averaged velocity vectors in the free water and the porous layer respectively.

In the free water the flow is described by the extended equations of motion

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \nabla\eta + \frac{1}{2}\varepsilon\nabla(\mathbf{u})^2 + \mu^2(\Lambda_{20}^{\text{III}} + \varepsilon\Lambda_{21}^{\text{III}} + \varepsilon^2\Lambda_{22}^{\text{III}} + \varepsilon^3\Lambda_{23}^{\text{III}}) + \mu^4(\Lambda_{40}^{\text{III}} + \varepsilon\Lambda_{41}^{\text{III}}) \\ - \frac{\varphi}{2}h\nabla^2(h_s\mathbf{u}_{s_t}) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Definition of the terms  $\Lambda^{\text{III}}$  is given in the appendix. Equation (2.2) includes the improved coefficients derived by Chondros and Memos (2014) in order to improve the dispersion and shoaling characteristics up to second - order analysis. The new coefficients are a function of the water depth and match exactly the linear dispersion relation of Stokes waves.

Finally, the flow inside the porous medium is described by the Darcy - Forchheimer momentum equation

$$c_r\mathbf{u}_{s_t} + \mathbf{u}_s\nabla\mathbf{u}_s = -g\nabla\eta + \varphi\alpha_1\mathbf{u}_s + \varphi^2\alpha_2\mathbf{u}_s|\mathbf{u}_s| \quad (2.3)$$

The second term on the right hand side of equation (2.3) is called the Darcy term and the third term is called the Forchheimer term, accounting for laminar and turbulent flow resistance respectively.

The inertia coefficient  $c_r$  is given by

$$c_r = \frac{1+c_m}{\varphi} = \frac{1+\gamma\frac{1-\varphi}{\varphi}}{\varphi} \quad (2.4)$$

where  $c_m$  is the added mass coefficient. The added mass coefficient accounts for the additional momentum needed to accelerate a given amount of water when it is placed inside a porous layer. It is called added mass because it suggests that extra momentum can be balanced by considering a larger amount of water.

The porous resistance coefficients  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  can be calculated as follows

$$\alpha_1 = \frac{\nu}{K} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{C_f}{\sqrt{K}} \quad (2.5)$$

where  $K$  ( $\text{m}^2$ ) is the intrinsic permeability

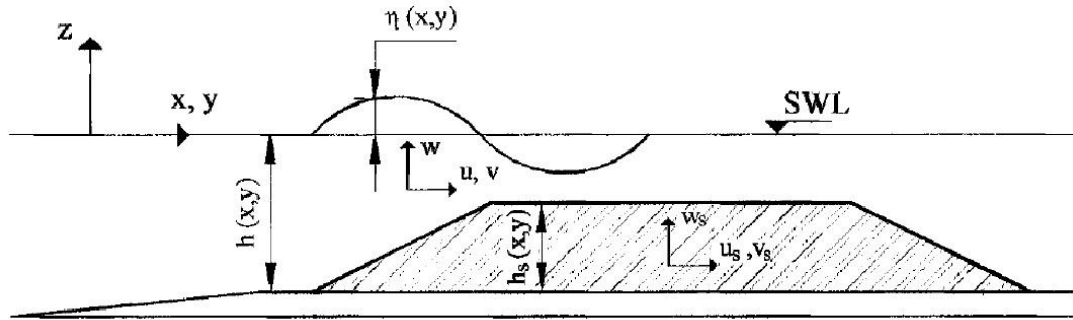
$$K = \frac{d_{50}^2\varphi^3}{\alpha(1-\varphi)^2} \quad (2.6)$$

and

$$C_f = \beta\frac{1-\varphi}{\varphi}\frac{\sqrt{K}}{d_{50}} \quad (2.7)$$



In the above relationships  $d_{50}$  is the mean size of the material,  $\nu$  the kinematic viscosity ( $1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) and  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  are empirical coefficients determined by experimental studies. For the present study the values 1000, 1.1 and 0.34 are chosen as recommended by Van Gent (1995). Equation (2.3) can also be derived directly from the Navier - Stokes equations of motion.



**Fig. 2.1:** Definition of variables [Metallinos, 2011]

## 2.2 Wave generation and boundary conditions

A source term is introduced inside the domain in order to generate the desired waves. This method has been suggested by Wei et al. (1999) and was modified by Memos et al. (2005) to comply with their set of equations. It is combined with damping layers to avoid any reflections from the boundaries. For regular waves with angular frequency  $\omega$  propagating in the  $x$  direction, the source function is given by

$$f_s(x, y, t) = F(y, t) \exp[-\beta_s (x - x_s)]^2 \quad (2.8)$$

where  $x_s$  is the central location of the source in the  $x$  direction,  $F(y, t)$  the source function for a source oriented parallel to the  $y$  and  $\beta_s$  a shape coefficient

$$\beta_s = \frac{80}{(\delta L)^2} \quad (2.9)$$

To avoid spurious noise around the source it is necessary to distribute the source function over a certain neighborhood of the central location. Setting  $\delta=0.3$  gives satisfactory results.

The source function is given by

$$F(y, t) = D_s \sin(\omega t) \quad (2.10)$$

and the amplitude of the source function

$$D_s = \frac{2\eta_0 \left[ 1 + B(kd)^2 \right] (\omega^2 + Bgk^4 d^3) \cos \theta}{\omega I_1 k \left[ 1 + \left( B + \frac{1}{3} \right) (kd)^2 \right]} \quad (2.11)$$

where  $\theta$  the angle between the propagation direction and the x axis and the parameter  $I_1$ .

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\beta_s}} \exp\left(-\frac{(k \cos \theta)^2}{4\beta_s}\right) \quad (2.12)$$

Wave energy arriving at the boundaries should not be reflected back in the domain. An approximate radiation condition is used in combination with a sponge layer following the approach of Wei and Kirby (1995).

### 2.3 Wave breaking and bottom friction

An eddy viscosity model described by Kennedy et al. (2000) is used to simulate wave breaking. Energy dissipation is taken into account by adding an extra term in the momentum equation.

$$R_{bx} = \frac{1}{h+\eta} \left\{ \left( v_e [(h+\eta)u]_x \right)_x + \frac{1}{2} \left( v_e [(h+\eta)u]_y + v_e [(h+\eta)v]_x \right)_y \right\} \quad (2.13)$$

$$R_{by} = \frac{1}{h+\eta} \left\{ \left( v_e [(h+\eta)v]_y \right)_y + \frac{1}{2} \left( v_e [(h+\eta)v]_x + v_e [(h+\eta)u]_y \right)_x \right\} \quad (2.14)$$

The eddy viscosity  $v_e$  is given by

$$v_e = B\delta_b^2 (h+\eta)\eta_t \quad (2.15)$$

where  $\delta_b$  is a mixing length coefficient and  $B$  varies smoothly from 0 to 1 as follows

$$B = \begin{cases} 1, & \eta_t \geq 2\eta_t^* \\ \frac{\eta_t}{\eta_t^*} - 1, & \eta_t^* < \eta_t \leq 2\eta_t^* \\ 0, & \eta_t \leq \eta_t^* \end{cases} \quad (2.16)$$

The parameter  $\eta_t^*$  defines the onset and cessation of breaking and reduces linearly with time during a breaking event

$$\eta_t^* = \begin{cases} \eta_t^{(F)}, & t \geq T^* \\ \eta_t^{(I)} + \frac{t-t_0}{T^*} (\eta_t^{(F)} - \eta_t^{(I)}), & 0 \leq t-t_0 < T^* \end{cases} \quad (2.17)$$

where  $T^*$  the transition time,  $t_0$  the time that breaking was initiated and  $t-t_0$  the age of the event. The parameters  $T^*$ ,  $\eta_t^{(I)}$  and  $\eta_t^{(F)}$  must be evaluated through calibration of the model.

The bottom shear stress can be approximated by the following quadratic law

$$\tau_b = \frac{1}{h + \eta} f_{cw} \mathbf{u} |\mathbf{u}| \quad (2.18)$$

where  $|\mathbf{u}| = \sqrt{u^2 + v^2}$  and  $f_{cw}$  the bottom friction factor.

## 2.4 Numerical Scheme

A higher order numerical scheme developed by Wei and Kirby (1995) is utilized to solve the governing equations. They discretized the first order spatial derivatives to fourth order accuracy and the dispersive terms to second order accuracy, thus eliminating the truncation error terms that would be of the same form as the dispersive terms. The fourth order Adams - Bashforth - Moulton predictor - corrector scheme is employed for time stepping. The corrector step is iterated until the error between two successive results reaches a required limit.

A Smagorinsky type subgrid model (Smagorinsky, 1963) is employed to account for the effects of unresolved small scale turbulent processes. As the grid size in Boussinesq models is usually smaller than the typical water depth, the horizontally distributed eddy viscosity resulting from such processes may become important and cause the current field to become chaotic (Chen et al., 1999). Subgrid models are used in other types of simulations (RANS, LES) in order to model turbulence. Here we simply use it to introduce artificial diffusion into the numerical scheme in order to achieve stability.

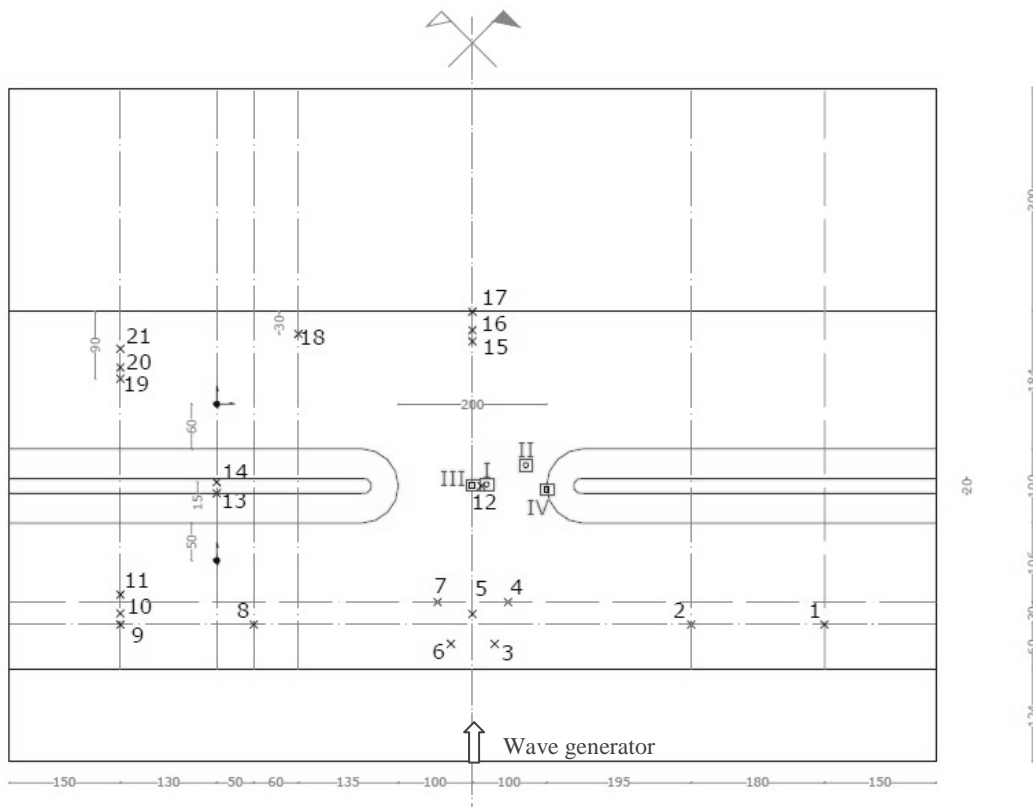
## 3. Experimental setup

The model was tested against the 3D hydrodynamic experiments performed in the wave basin of Aalborg University (AAU) in Denmark for the DELOS project (<http://www.delos.unibo.it>). The basin is 12m long and 18m wide. The seabed was made of concrete and the beach of quarry rock with mean size  $D_{n50}=1.5$  cm. The absorbing walls were made of crates filled with sea stones. Maximum water depth is approximately 0.5m.

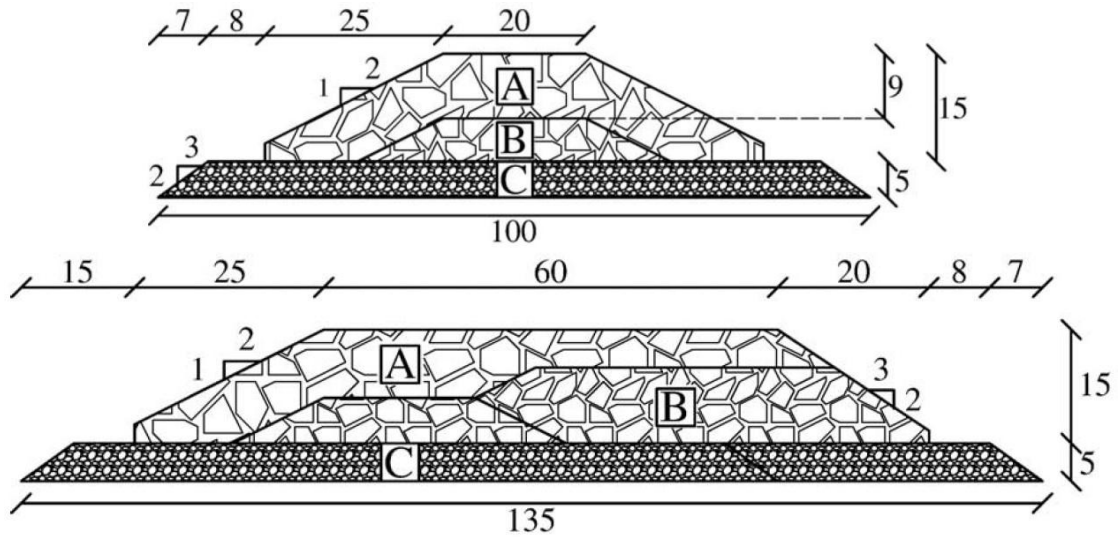
A narrow berm and a wide berm structure were tested. The breakwaters were made of quarry rock in scale approximately 1:20. The materials used are listed in Table 3.1. The layout is shown in Fig. 3.1 for narrow berm structure and the cross - sections in Fig. 3.2 The freeboard for submerged breakwater was -0.07m.

**Table 3.1:** Construction materials

Material type	D <sub>n50</sub> (cm)	
	Trunk	Roundhead
A	4.5	5.0
B	3.1	3.1
C	1.5	1.5



**Fig. 3.1:** Instrumented basin layout, narrow berm dimensions in cm  
[DELOS Internal Report D31]



**Fig. 3.2:** Cross-sections narrow berm (up), wide berm (down) dimensions in cm [Kramer et al., 2005]

#### 4. Model predictions and comparison with data

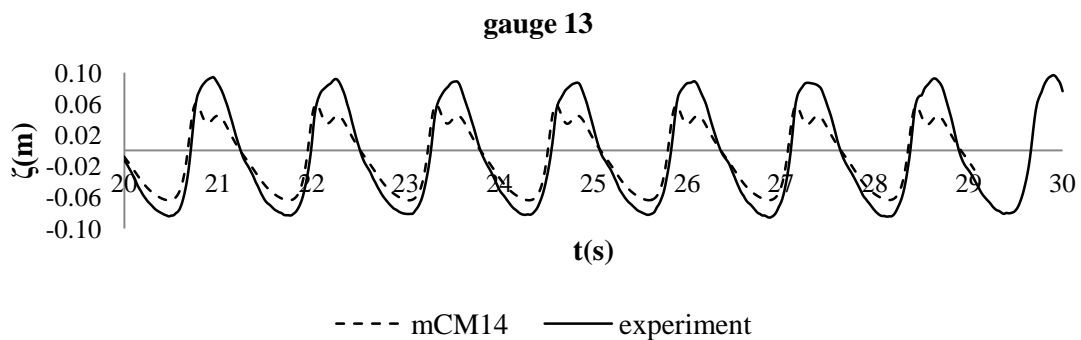
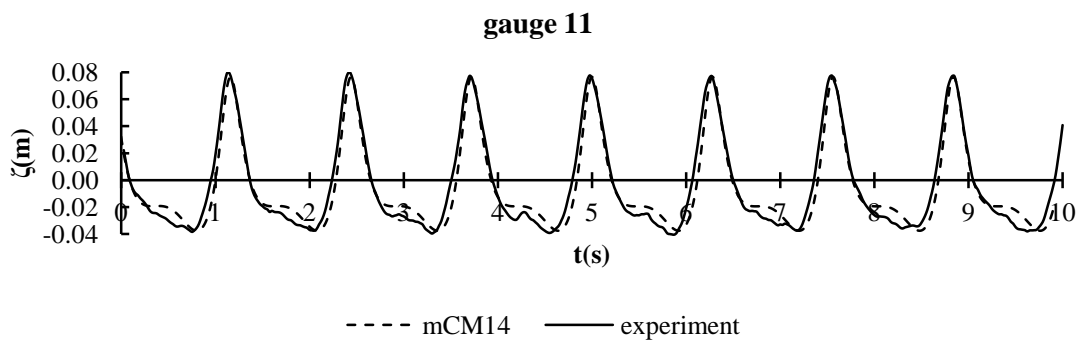
The model was applied to reproduce the experiment described above. The porosity of the structure and the mean size of the gravel were set equal to 0.49 and 3.5 cm respectively. The grid spacing was chosen 0.05m and the time step 0.1s. The main features are listed in Table 4.1.

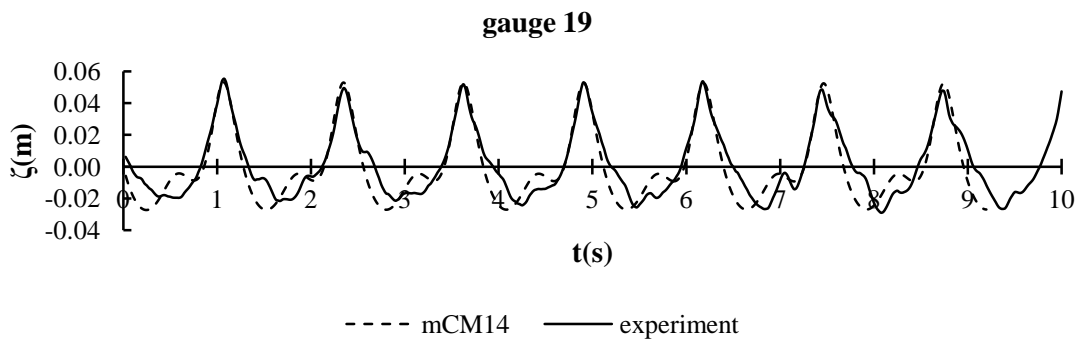
**Table 4.1:** Input data

Experiment number	20	38
Layout		
Type of structure	narrow	wide
Freeboard (m)	0.07	0.07
Water depth at wavemaker (m)	0.43(0.27)	0.43(0.27)
Water depth at structure (m)	0.27	0.27
Wave characteristics		
Wave type	regular	regular
Wave height in deep water (m)	0.1026	0.1026
Period (s)	1.28	1.28
Porous structure		
Porosity	0.49	0.49
$D_{n50}$ (m)	0.035	0.035
$\alpha$	1000	1000
$\beta$	1.1	1.1
$\gamma$	0.34	0.34

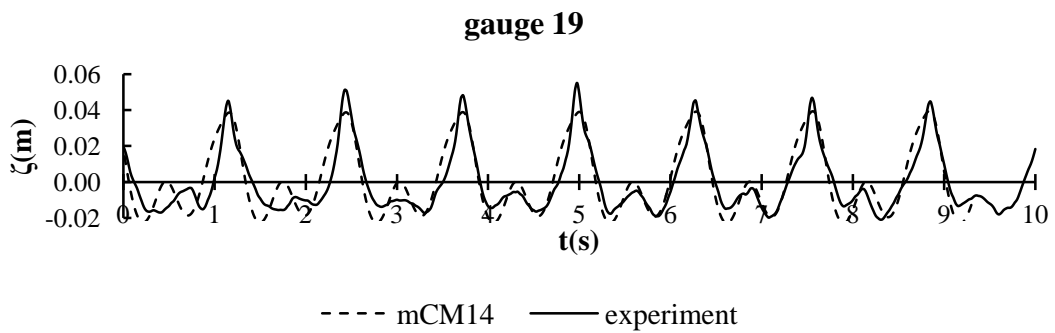
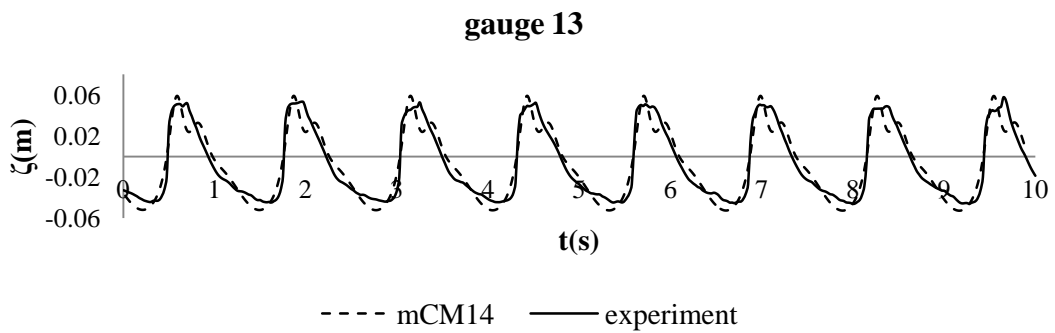
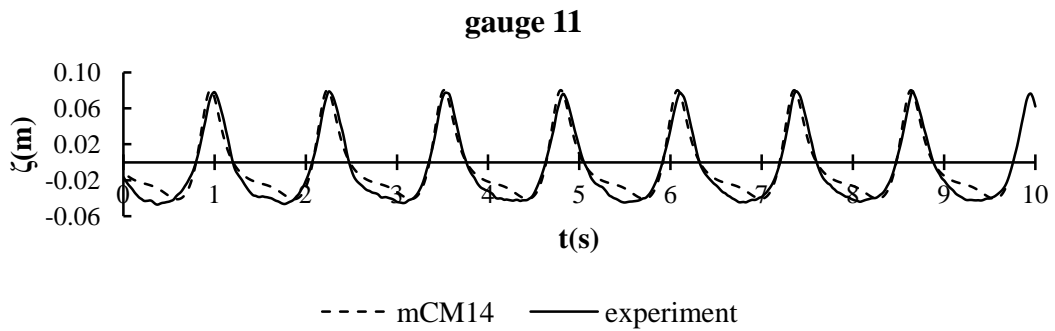
Figures 4.1 and 4.2 present a comparison of surface elevation time series between experimental data and model results for an incident wave with high nonlinearity ( $H/h=0.38$ ) and intermediate dispersivity ( $h/L_0=0.10$ ). Gauges 11 and 19 are located seaward and leeward of the breakwater respectively, while gauge 13 is located at the crown.

Comparison indicates that the model predicts the wave pattern quite accurately for both wide berm and narrow berm structure. Energy dissipation and the release of higher harmonics at the lee of the structure are well described. For narrow berm, the model slightly underestimates the wave height at gauge 13, an indication that wave breaking and energy dissipation began earlier in the model, although numerical error due to cell size could also be responsible. The phase relation between the stations is exactly reproduced, owing to the improved dispersion characteristics. It should be noted that the experiment represented rather extreme geometrical conditions as the ratio of wave height to freeboard is very large ( $H/fr \approx 1.5$ ).



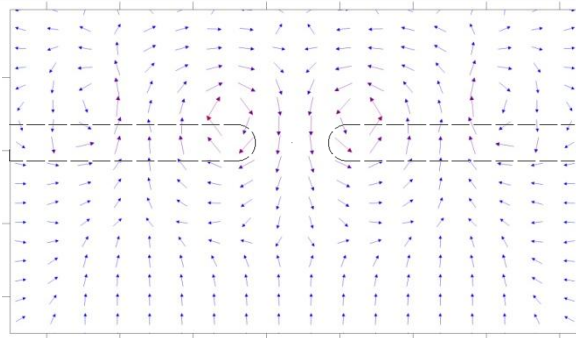


**Fig.4.1:** Elevation time-series, narrow berm

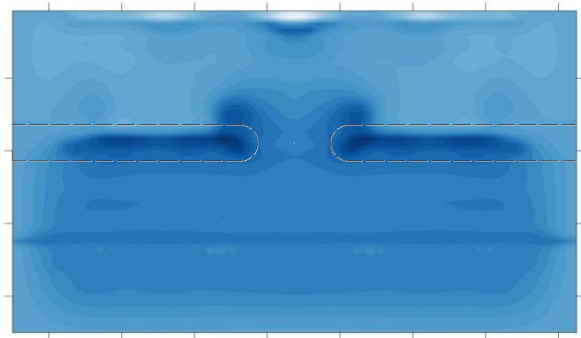


**Fig.4.2:** Elevation time-series, wide berm

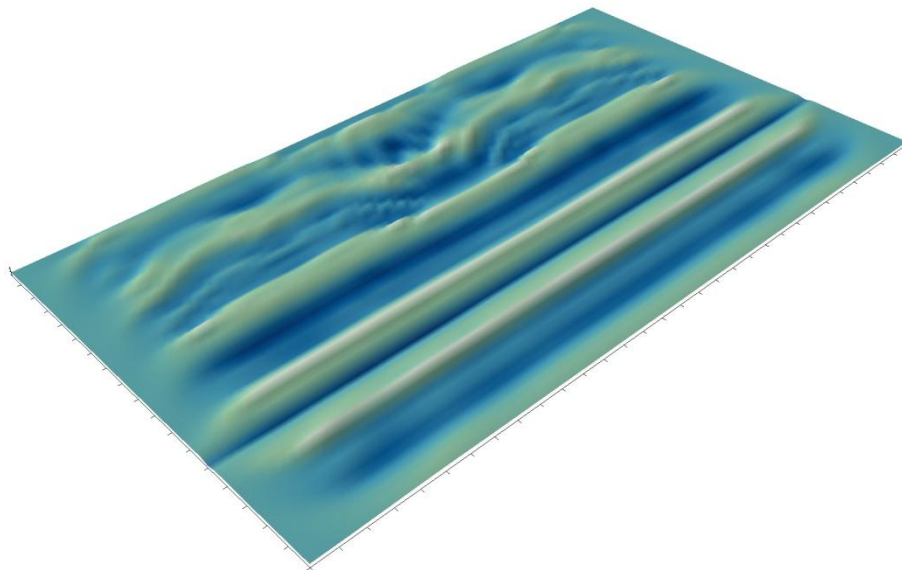
The velocity field is shown in figure 4.3. The difference in the breaking locations results in a longshore variation of the mean free surface elevation (Fig. 4.4), causing the formation of an offshore directed rip current. As a result, two vortices are created near the roundheads, as expected. Figure 4.5 shows the surface elevation at  $t=50s$ . As waves shoal they become steeper and asymmetrical. As they get past the breakwater, secondary crests appear due to the release of higher harmonics. The rip current causes the combined refraction and diffraction of arriving waves.



**Fig.4.3:** Velocity field



**Fig.4.4:** Wave setup



**Fig.4.5:** Surface elevation

## 5. Conclusions

A higher order Boussinesq - type model combined with a Darcy - Forchheimer resistance equation is used to simulate wave propagation over a permeable breakwater. A regular incident wave with high non-linearity and intermediate dispersivity is considered. Comparison of surface elevation time series shows very good agreement between model results and experimental data. It is strongly recommended that the model be tested with other experimental data and field measurements. Irregular waves and velocity time series should also be considered in a future study.



## 6. References

- [1] Avgeris, I., Karambas, Th., Prinos, P., Koutitas, Ch., Belloti, G., Briganti, R., Brocchini, M., 2004. DELOS Internal Report, "Flow Description (WP 2.1), Final Phase-Resolving Boussinesq- Type Models (D42)" (August 2004).
- [1] Avgeris, I., Karambas, T.V., Prinos, P. (2004). Boussinesq modeling of wave interaction with porous submerged breakwaters. Proc. 29th Int. Conf. Coastal Eng., Lisbon, Portugal, 604–616, J. McKee Smith, ed. World Scientific, Singapore.
- [2] Chen Q. et al., 1999. "Boussinesq modeling of a rip current system". Journal of geophysical research, vol.104, no.C9.
- [3] Chondros, M.K., Memos, C.D., 2014. "A 2DH nonlinear Boussinesq-type wave model of improved dispersion, shoaling and wave generation characteristics". Coastal Eng., 91(2014): 99-122.
- [4] Cruz E.C., Isobe M., and Watanabe A., 1997. "Boussinesq equations for wave transformation on porous beds". Coastal Engineering, 24, 233-257.
- [5] Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. ,2000. "Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. I: 1D.", Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 126, No. 1, pp. 39-47.
- [6] Kramer, M., Zanuttigh, B., Baoxing, W., Van der Meer, J.W., Lamberti, A., Burcharth, H.F., 2003. Wave basin experiments. Internal report, DELOS deliverable D31, available from the Internet [www.delos.unibo.it](http://www.delos.unibo.it).
- [7] Kramer M. et al. , 2005. "Laboratory experiments on low-crested breakwaters". Coastal Engineering, 52.
- [8] Memos C.D., Karambas Th.V., Avgeris I., 2005. "Irregular wave transformation in the nearshore zone: experimental investigations and comparison with a higher order Boussinesq model". Ocean Engineering 32,1465-1485.
- [9] Metallinos A.S., 2011. "Πεδίο ταχυτήτων λόγω κυματισμών στο εσωτερικό ύφαλης κατασκευής". Μεταπτυχιακή Εργασία. Εργαστήριο Λιμενικών Έργων Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [10] Smagorinsky J., 1963. "General Circulation experiments with the primitive equations". Monthly Weather Review 91.
- [11] Van Gent M.R.A., 1995. "Wave Interaction with Permeable Coastal Structures". PhD Thesis, Delft University, Delft, The Netherlands.
- [12] Wei G., Kirby J.T., 1995. "Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations". Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering, 261.

## Appendix

The terms  $\Lambda^{\text{III}}$  of equation 2.2 are given as follows:

$$\Lambda_{20}^{\text{III}} = \left[ d^2 \left( \frac{1}{6} + \alpha_2 - \alpha_1 \right) \nabla (\nabla \cdot U_t) - d \left( \frac{1}{2} + \alpha_2 \right) \nabla (\nabla \cdot (hU_t)) \right. \\ \left. + d^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \nabla (\nabla^2 \eta) - d \alpha_2 \nabla (\nabla \cdot (h \nabla \zeta)) \right]$$

$$\Lambda_{21}^{\text{III}} = \left[ \frac{1}{2} d^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \nabla (\nabla^2 (U^2)) - \frac{1}{2} d \alpha_2 \nabla (\nabla \cdot (d \nabla (U^2))) - \zeta \Gamma_t \right. \\ \left. + \nabla \cdot (dU) \Gamma + \nabla (U \cdot (d\Gamma)) - \zeta \nabla \cdot (dU_t) + \frac{1}{2} (\nabla \cdot (dU))^2 \right]$$

$$\Lambda_{22}^{\text{III}} = \frac{1}{6} \zeta^2 \nabla (\nabla \cdot U_t) - \frac{1}{3} \zeta \nabla \cdot (dU) \nabla (\nabla \cdot U) + \nabla \cdot (\zeta U) \Gamma \\ + \nabla \left( -\zeta U \cdot \Gamma - \frac{1}{2} \zeta^2 \nabla \cdot U_t + \zeta (\nabla \cdot U) \nabla \cdot (dU) - \zeta U \cdot \nabla (\nabla \cdot (dU)) \right)$$

$$\Lambda_{23}^{\text{III}} = -\frac{1}{3} \zeta \nabla \cdot (\zeta U) \nabla (\nabla \cdot U) + \nabla \left( -\frac{1}{3} \zeta^2 U \cdot \nabla (\nabla \cdot U) + \frac{1}{2} \zeta^2 (\nabla \cdot U)^2 \right)$$

$$\Lambda_{40}^{\text{III}} = \left[ \beta_1 d^4 \nabla (\nabla^4 \zeta) + d^4 \left( \beta_1 + \frac{1}{3} \alpha_1 - \frac{1}{45} \right) \nabla (\nabla^2 (\nabla \cdot U_t)) + \beta_2 d^3 \nabla d \nabla^4 \zeta \right. \\ \left. + \left( \beta_2 + \frac{7}{3} \alpha_1 + \frac{2}{3} \alpha_2 - \frac{2}{9} \right) d^3 \nabla d \nabla^2 (\nabla \cdot U_t) \right] + O(\mu^2)$$

$$\Lambda_{41}^{\text{III}} = \left[ \frac{1}{45} d^3 \zeta \nabla (\nabla^2 (\nabla \cdot U_t)) + \alpha_1 d^3 \nabla (\nabla \cdot (\nabla \zeta \nabla \cdot U_t)) \right. \\ \left. + \left( \frac{2}{3} \alpha_1 - \frac{1}{9} \right) d^3 \nabla (\nabla \cdot (\zeta \nabla (\nabla \cdot U_t))) + \left( \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \alpha_1 \right) d^4 \nabla (\nabla \cdot (\nabla \cdot U (\nabla (\nabla \cdot U)))) \right. \\ \left. - \frac{1}{45} d^4 \nabla \cdot U \nabla (\nabla^2 (\nabla \cdot U)) + \frac{1}{18} d^4 \nabla (\nabla (\nabla \cdot U))^2 - \frac{1}{45} d^4 \nabla (U \cdot \nabla (\nabla^2 (\nabla \cdot U))) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \alpha_1 d^4 \nabla (\nabla^2 (U \cdot (\nabla (\nabla \cdot U)))) + \frac{1}{2} \beta_1 d^4 \nabla (\nabla^4 (U^2)) \right] + O(\mu)$$

where

$$\Gamma = \frac{1}{6} d \nabla (\nabla U) - \frac{1}{2} \nabla (\nabla (dU))$$

The new coefficients are given as:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{aligned} & (6\kappa(75 - 1115\kappa^2 + \kappa^4)\cosh(\kappa) - 9\kappa(-75 + 395\kappa^2 + \kappa^4)\cosh(3\kappa) + 10800\sinh(\kappa)^5 \\ & + \kappa(3(-375 - 185\kappa^2 + \kappa^4)\cosh(5\kappa) + 10\kappa(585 + 29\kappa^2)\sinh(\kappa) + \\ & 5\kappa(675 + 139\kappa^2)\sinh(3\kappa) + \kappa(1125 + 101\kappa^2)\sinh(5\kappa)) \end{aligned}}{\begin{aligned} & (60\kappa^2(2\kappa(-3 + 47\kappa^2)\cosh(\kappa) + 9\kappa(-1 + 5\kappa^2)\cosh(3\kappa) - 144\sinh(\kappa)^5 \\ & + \kappa(5(3 + \kappa^2)\cosh(5\kappa) - 3\kappa(26\sinh(\kappa) + 15\sinh(3\kappa) + 5\sinh(5\kappa)))) \end{aligned}}$$

$$\beta_1 = \frac{\begin{aligned} & (-18\kappa(15 - 155\kappa^2 + 33\kappa^4)\cosh(\kappa) + 27\kappa(-15 + 105\kappa^2 + 17\kappa^4)\cosh(3\kappa) \\ & - 6480\sinh(\kappa)^5 + \kappa(45(15 + 19\kappa^2 + 3\kappa^4)\cosh(5\kappa) - 2\kappa(2430 + 1020\kappa^2 + 13\kappa^4)\sinh(\kappa) \\ & - 5\kappa(270 + 426\kappa^2 + 31\kappa^4)\sinh(3\kappa) - \kappa(810 + 474\kappa^2 + 17\kappa^4)\sinh(5\kappa)) \end{aligned}}{\begin{aligned} & (180\kappa^4(2\kappa(-3 + 47\kappa^2)\cosh(\kappa) + 9\kappa(-1 + 5\kappa^2)\cosh(3\kappa) - 144\sinh(\kappa)^5 \\ & + \kappa(5(3 + \kappa^2)\cosh(5\kappa) - 3\kappa(26\sinh(\kappa) + 15\sinh(3\kappa) + 5\sinh(5\kappa)))) \end{aligned}}$$

$$\alpha_2 = \frac{\begin{aligned} & (2(-17010 + 175905\kappa^2 + 234867\kappa^4 + 299909\kappa^6 + 6696\kappa^8)\cosh(2\kappa) \\ & - 8(2430 + 40365\kappa^2 + 47949\kappa^4 + 12007\kappa^6 + 13854\kappa^8)\cosh(4\kappa) \\ & + 2(17010 - 79245\kappa^2 + 46023\kappa^4 + 262957\kappa^6 + 52462\kappa^8 + 15795\cosh(6\kappa) - 7290\cosh(8\kappa) \\ & + 1215\cosh(10\kappa)) + \kappa(-25920(48\cosh(\kappa) - 5\cosh(3\kappa)) + 5\cosh(5\kappa))\sinh(\kappa)^5 \\ & + \kappa((164565 - 120153\kappa^2 - 13103\kappa^4 - 10064\kappa^6)\cosh(6\kappa) \\ & + 6(-6165 - 9009\kappa^2 + 3493\kappa^4 + 430\kappa^6)\cosh(8\kappa) + (2025 - 3981\kappa^2 - 731\kappa^4) \\ & \cosh(10\kappa)\sinh(2\kappa) + 16\kappa(15525 + 5007\kappa^2 + 19267\kappa^4 + 2273\kappa^6)\sinh(4\kappa) \\ & + 2\kappa(-299295 - 61665\kappa^2 + 255139\kappa^4 + 19944\kappa^6) + \kappa(-58185 + 55737\kappa^2 + 30597\kappa^4 + 2576\kappa^6) \\ & \sinh(6\kappa) - 8\kappa(-8235 + 255\kappa^2 + 1379\kappa^4 + 17\kappa^6)\sinh(8\kappa) + 3\kappa(855 + 761\kappa^2 + 37\kappa^4)\sinh(10\kappa)) \end{aligned}}{960\kappa^2(-3\kappa\cosh(\kappa) + (3 + \kappa^2)\sinh(\kappa))(2\kappa + \sinh(2\kappa))^2(2\kappa(-3 + 47\kappa^2)\cosh(\kappa) + 9\kappa(-1 + 5\kappa^2)\cosh(3\kappa) - 144\sinh(\kappa)^5 + \kappa(5(3 + \kappa^2)\cosh(5\kappa) - 3\kappa(26\sinh(\kappa) + 15\sinh(3\kappa) + 5\sinh(5\kappa))))}$$



# 1. Εισαγωγή

---

## 1.1 Κατασκευές χαμηλής στέψης

Οι παράκτιες περιοχές συγκεντρώνουν το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού της γης και είναι οι πιο εντατικά αξιοποιήσιμες εκτάσεις από τους ανθρώπους, γεγονός που τις καθιστά ιδιαίτερα ευάλωτες από περιβαλλοντικής άποψης. Ταυτόχρονα πολλές από αυτές τις περιοχές απειλούνται από τη διάβρωση που προκαλείται από τα θαλάσσια ρεύματα, την παλίρροια, τη δράση των κυμάτων και του ανέμου και εντείνεται λόγω των κατασκευών και της αστικοποίησης των ακτών. Η ανάγκη για προστασία της παράκτιας ζώνης είναι προφανής και απασχολούσε ανέκαθεν πλήθος ερευνητών, λόγω της πολυπλοκότητας των φυσικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα σε αυτή.

Ο σχεδιασμός των έργων προστασίας αποτελεί πρόκληση για τους μελετητές, καθώς πλέον δεν αποσκοπεί αποκλειστικά στην αποτελεσματική αντιμετώπιση των φυσικών φαινομένων, αλλά επιπλέον στην ομαλή ένταξή τους στο παράκτιο περιβάλλον και την ελαχιστοποίηση των επιπτώσεών τους στα θαλάσσια οικοσυστήματα. Στην κατεύθυνση αυτή ερευνώνται ηπιότερες μορφές παρεμβάσεων έναντι των παραδοσιακών "σκληρών" κατασκευών. Μεταξύ αυτών, οι κατασκευές χαμηλής στέψης (low-crested structures, LCS), και ειδικότερα οι ύφαλοι κυματοθραύστες, που αποτελούν και το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

Οι κατασκευές αυτές υπερπηδούνται τακτικά από τους κυματισμούς, καθώς η στέψη τους βρίσκεται χαμηλότερα από την ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας, ενώ κατά τα άλλα μοιάζουν με τους συμβατικούς έξαλους κυματοθραύστες. Κατασκευάζονται συνήθως με λιθορριπές και ογκολίθους και έχουν ένα βαθμό διαπερατότητας. Η απορρόφηση της κυματικής ενέργειας γίνεται μέσω των μηχανισμών της θραύσης στην κεκλιμένη παρειά, της ανάκλασης και της τριβής στην επιφάνεια και στο εσωτερικό της κατασκευής. Το κύριο πλεονέκτημα μιας τέτοιας κατασκευής είναι ότι δεν περιορίζει την οπτική επαφή με το θαλάσσιο ορίζοντα. Επίσης επιτρέπει την κυκλοφορία - ανανέωση του νερού στην υπήνεμη πλευρά εμποδίζοντας έτσι την υποβάθμιση της ποιότητας του νερού, ενώ μπορεί να αποτελέσει ένα τεχνητό οικότοπο για τους θαλάσσιους οργανισμούς. Σημαντικό μειονέκτημα έναντι των συμβατικών κυματοθραυστών αποτελεί το μεγάλο ποσοστό κυματικής μετάδοσης. Οι ύφαλοι κυματοθραύστες είναι αναποτελεσματικοί σε περιοχές με μεγάλο εύρος παλίρροιας. Σε αυτή την περίπτωση κατασκευάζονται με μεγαλύτερο πλάτος στέψης και αποτελούν μια ξεχωριστή κατηγορία κατασκευών που ονομάζονται τεχνητοί ύφαλοι.

## 1.2 Αριθμητική προσομοίωση

Είναι προφανές ότι η δυνατότητα μαθηματικής προσομοίωσης της κυματικής διάδοσης γύρω και μέσα από μια ύφαλη κατασκευή αποτελεί το πλέον αποτελεσματικό εργαλείο για τη σωστή μελέτη και διαστασιολόγηση του έργου. Καθώς η τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών εξελίσσεται, παρέχοντας όλο και περισσότερες υπολογιστικές δυνατότητες, τα μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν τη ροή ρευστών αποκτούν όλο και πιο ευρεία εφαρμογή σε τομείς όπως η αεροναυπηγική, η μετεωρολογία, η μηχανολογία και, εν προκειμένω, η θαλάσσια υδροδυναμική. Πλήθος ερευνητών απασχολείται στην ανάπτυξη νέων μοντέλων και τεχνικών για την προσομοίωση όλο και πιο πολύπλοκων προβλημάτων με όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια.

Πολλοί τύποι μοντέλων έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της διάδοσης θαλάσσιων κυματισμών, καθένας με διαφορετικές δυνατότητες και περιορισμούς. Η επιλογή εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος προς επίλυση, την απαιτούμενη ακρίβεια και τους διαθέσιμους πόρους. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε ένα μοντέλο τύπου Boussinesq υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς (Chondros and Memos, 2014) σε συνδυασμό με μία εξίσωση αντίστασης Darcy - Forchheimer για την περιγραφή της ροής εντός πορώδους μέσου, ακολουθώντας την προσέγγιση των Cruz et al.. (1997).

Για την επαλήθευση του μοντέλου έγινε σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τις πειραματικές μετρήσεις στη δεξάμενη κυμάτων του πανεπιστημίου Aalborg (AAU) στη Δανία. Τα πειράματα αυτά διεξήχθησαν στα πλαίσια του ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος DELOS (<http://www.delos.unibo.it>). Αντικείμενο του προγράμματος ήταν η μελέτη των υδροδυναμικών, μορφολογικών και περιβαλλοντικών επιπτώσεων των κατασκευών χαμηλής στέψης, με στόχο να προσφέρει μεθόδους και εργαλεία για τον ορθό σχεδιασμό τέτοιων έργων ώστε να προωθηθεί η εφαρμογή τους στον ευρωπαϊκό χώρο.



**Εικ.1.1:** Παραδείγματα ύφαλων κυματοθραυστών: Pellestrina, Venice, Italy (αριστερά) [[www.mosevenezia.eu](http://www.mosevenezia.eu)], Rockley Beach, Barbados (δεξιά)

## 2. Μαθηματικά Μοντέλα Διάδοσης Κυματισμών

---

### 2.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

#### 2.1.1 Εισαγωγή

Οι θαλάσσιοι κυματισμοί είναι ένα σύνθετο φαινόμενο με στοχαστικό χαρακτήρα, όπως μπορεί κανείς να αντιληφθεί παρατηρώντας τη θάλασσα. Αν όμως αναλύσουμε μια καταγραφή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά τη διάρκεια ενός κυματικού γεγονότος, θα διαπιστώσουμε ότι προσεγγίζεται ικανοποιητικά ως υπέρθεση πολλών μονοχρωματικών κυμάτων διαφορετικού μήκους και εύρους. Η υπόθεση αυτή επιτρέπει τη χρήση της ανάλυσης Fourier και φασματικών τεχνικών για την περιγραφή των κυματισμών.

Τρεις κύριες παράμετροι αρκούν για να περιγράψουν ένα κύμα, το ύψος κύματος  $H$ , το μήκος κύματος  $L$  και το βάθος του νερού  $h$  στο οποίο διαδίδεται. Όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του κυματικού πεδίου μπορούν θεωρητικά να υπολογιστούν από αυτά τα τρία στοιχεία. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει άμεσα, κυρίως επειδή η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας αποτελεί ταυτόχρονα όριο του πεδίου και άγνωστο του προβλήματος. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί προσεγγιστικά μοντέλα, αναλυτικά και αριθμητικά. Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου για κάθε περίπτωση εξαρτάται από χωρικές και χρονικές παραμέτρους όπως οι ακόλουθες.

- η διασπορά εύρους  $\varepsilon = \frac{H}{h}$
- η διασπορά συχνότητας  $\sigma = \frac{h}{L}$
- η καμπυλότητα του κύματος  $r = \frac{H}{L}$

Η πρώτη μαθηματική θεωρία διάδοσης θαλάσσιων κυματισμών διατυπώθηκε από τον Airy το 1841 και ονομάζεται γραμμική θεωρία ή θεωρία κυματισμών απειροστού ύψους ή θεωρία Airy. Βασίστηκε στην υπόθεση ότι η ελεύθερη επιφάνεια μπορεί να περιγραφεί από ένα απλό ημιτονοειδές κύμα μικρού ύψους  $H$  με σταθερή περίοδο. Η θεωρία αυτή παραμένει μέχρι σήμερα η πιο διαδεδομένη καθώς είναι απλή, παρέχει ικανοποιητική ακρίβεια σε πλήθος εφαρμογών και, ως γραμμική, υπόκειται στην αρχή της επαλληλίας. Επίσης αποτελεί τη βάση για αρκετές μη γραμμικές θεωρίες.

### 2.1.2 Βασικές Εξισώσεις

Σε ένα πραγματικό ρευστό ισχύει η αρχή διατήρησης της μάζας. Επομένως αν θεωρήσουμε το ισοζύγιο μάζας σε έναν πολύ μικρό όγκο ρευστού  $dV$  προκύπτει η εξίσωση διατήρησης της μάζας ή εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

η οποία είναι ακριβής.

Η μεταβολή της πυκνότητας του ρευστού, που εκφράζεται από τον πρώτο όρο, σχετίζεται με την αλλαγή στην πίεση καθώς το ρευστό διέρχεται από τον όγκο  $dV$ . Στην περίπτωση του νερού η μεταβολή αυτή, η συμπιεστότητα, είναι πολύ μικρή οπότε σε εφαρμογές όπως η μελέτη θαλάσσιων κυματισμών μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Η εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό γίνεται

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ή απλά} \quad \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα ρευστό σωματίδιο το επιταχύνουν σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Το πεδίο ροής περιγράφεται από την εξίσωση κίνησης ή εξίσωση διατήρησης της ορμής (Navier - Stokes)

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad (2.3)$$

όπου

$\rho$ : η πυκνότητα του ρευστού

$\mathbf{u}$ : το διάνυσμα της ταχύτητας

$p$ : η πίεση

$\mathbf{T}$ : ο τανυστής των τάσεων (δυνάμεις που ασκούνται στην επιφάνεια του ρευστού)

$\mathbf{f}$ : οι δυνάμεις που ασκούνται στον όγκο του ρευστού (βαρύτητα, Coriolis...)

Αν υποθέσουμε ότι η τάση είναι ανάλογη του ρυθμού παραμόρφωσης ή ισοδύναμα της κλίσης του πεδίου ταχυτήτων  $\boldsymbol{\tau} = \mu \nabla \mathbf{u}$ , σύμφωνα με την παραδοχή Νευτώνειου ρευστού, έχουμε

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.4)$$

όπου

$\mu$ : ο συντελεστής εσωτερικής τριβής ή δυναμικό ιξώδες ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ )

Διαιρώντας το συντελεστή  $\mu$  με την πυκνότητα του ρευστού προκύπτει το κινηματικό

ιξώδες  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )



Για την απλούστερη περίπτωση ιδεατών ρευστών, τα οποία έχουν μηδενικό συντελεστή ιξώδους και άρα δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις μεταξύ των μορίων τους ή στις επαφές με στερεά όρια, καταλήγουμε στην εξίσωση Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2.5)$$

Η παραδοχή αυτή είναι αρκετά καλή για θαλάσσιους κυματισμούς, γιατί η επίδραση του ιξώδους στη ροή γίνεται σημαντική μόνο σε λεπτά οριακά στρώματα στην επιφάνεια και στον πυθμένα και, επειδή τα κύματα ταξιδεύουν πολύ πιο γρήγορα από το ίδιο το νερό, οι στροβιλισμοί στα οριακά αυτά στρώματα δε μεταφέρονται με το κύμα.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes στη γενική τους μορφή είναι μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις και περιγράφουν ακριβώς και με κάθε λεπτομέρεια οποιοδήποτε πεδίο ροής, όσο τυρβώδες και αν είναι. Χρησιμοποιούνται σε πλήθος εφαρμογών της φυσικής και έχουν εξαιρετικό ενδιαφέρον από μαθηματικής άποψης, καθώς δεν έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν αναλυτικές λύσεις στις τρεις διαστάσεις (<http://www.claymath.org/millennium-problems>). Η άμεση αριθμητική τους επίλυση (Direct Numerical Simulation - DNS) για τυρβώδη ροή είναι εξαιρετικά δύσκολη και απαιτεί πολύ λεπτομερή διακριτοποίηση λόγω του τεράστιου όγκου πληροφοριών που περιέχονται στο πεδίο ταχυτήτων και των πολλών διαφορετικών κλιμάκων που εμπλέκονται. Αυτό καθιστά τους υπολογιστικούς χρόνους απαγορευτικούς για τα σημερινά δεδομένα και έχει οδηγήσει στην αναζήτηση έμμεσων μεθόδων μοντελοποίησης της τύρβης (π.χ. μοντέλα τύπου RANS, LES,...).

### 2.1.3 Συνάρτηση δυναμικού - Ροϊκή συνάρτηση

Γνωρίζουμε από το διαφορικό λογισμό των διανυσματικών πεδίων ότι αν ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν,  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ , τότε το διάνυσμα  $\mathbf{u}$  είναι η κλίση κάποιας ποσότητας, υπάρχει δηλαδή κάποιο βαθμωτό πεδίο  $\Phi$  ώστε το  $\mathbf{u}$  να είναι ίσο με την κλίση του  $\Phi$ ,  $\mathbf{u} = \nabla \Phi$ . Στην περίπτωση της ροής ασυμπίεστου ρευστού η συνάρτηση  $\Phi$  είναι το δυναμικό του πεδίου των ταχυτήτων. Από την εξίσωση συνέχειας οδηγούμαστε στην εξίσωση Laplace

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \nabla \nabla \Phi = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.6)$$

η οποία είναι ελλειπτικής μορφής. Ο τελεστής  $\nabla^2$  ονομάζεται τελεστής Laplace.

Η παραδοχή ότι το πεδίο ταχυτήτων είναι αστρόβιλο αποτελεί μια προσέγγιση η οποία εύκολα καταρρίπτεται αν κανείς παρατηρήσει την επιφάνεια της θάλασσας στην περιοχή της θραύσης κυματισμών. Δεν ισχύει επίσης κοντά σε στερεά όρια, όπου η τριβή δημιουργεί ένα οριακό στρώμα με έντονους στροβιλισμούς. Ωστόσο, για συνήθεις πρακτικές εφαρμογές, το πεδίο ταχυτήτων στο μεγαλύτερο μέρος του νερού μπορεί να θεωρηθεί αστρόβιλο.

Η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  ορίζεται σε δισδιάστατο πεδίο ροής ασυμπίεστων ρευστών ώστε

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi$$

και είναι σταθερή κατά μήκος μιας γραμμής ροής. Η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται εκ ταυτότητας αφού  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0$ .

Η ροϊκή συνάρτηση και η συνάρτηση δυναμικού εκφράζουν το ρυθμό ροής μεταξύ δύο σημείων, η πρώτη στη διεύθυνση των γραμμών ροής και η δεύτερη στη διεύθυνση των ισοδυναμικών γραμμών. Οι γραμμές αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους αφού  $\nabla \Phi \nabla \Psi = 0$ .

Για αστρόβιλη ροή ισχύει

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow -\nabla^2 \Psi = 0 \quad (2.7)$$

οπότε καταλήγουμε και πάλι στην εξίσωση Laplace. Επιλύοντας είτε ως προς  $\Phi$  είτε ως προς  $\Psi$  μπορούμε να προσδιορίσουμε άμεσα το πεδίο ταχυτήτων. Η εξίσωση Laplace έχει το μεγάλο πλεονέκτημα ότι είναι γραμμική.

#### 2.1.4 Εξίσωση Bernoulli

Η εξίσωση Bernoulli προκύπτει από την ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler για την περίπτωση αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού και δίνει τη σχέση μεταξύ της πίεσης και του πεδίου των ταχυτήτων. Γράφεται ως

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (2.8a)$$

όπου  $f(t)$  η σταθερά Bernoulli, που μπορεί να απαλειφθεί απορροφώντας τη στο δυναμικό  $\Phi$ .

Ισοδύναμα

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (2.8b)$$

## 2.2 Θεωρίες Διάδοσης Κυματισμών

### 2.2.1 Γραμμική Θεωρία Airy

Η θεωρία κυματισμών απειροστού ύψους ή θεωρία Airy ισχύει όταν το ύψος κύματος είναι πολύ μικρό σε σχέση με το βάθος του νερού ( $H/h$ ) και με το μήκος κύματος ( $H/L$ ), ενώ για την παράμετρο  $h/L$  δεν υπάρχει περιορισμός. Επιπλέον το νερό θεωρείται ιδεατό ασυμπιέστο ρευστό και ο πυθμένας οριζόντιος.

Με την παραδοχή ασυμπιέστου ρευστού και αστρόβιλης ροής, οι κυματισμοί μπορούν να περιγραφούν από το δυναμικό του πεδίου ταχυτήτων το οποίο προσδιορίζεται από την επίλυση της εξίσωσης Laplace σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Θεωρούμε τη ροή σε δύο διαστάσεις.

Για να ορίζεται η διεπιφάνεια μεταξύ νερού και στερεών ορίων ή αέρα η ροή δεν πρέπει να τη διασχίζει. Αυτό εκφράζεται από τις κινηματικές οριακές συνθήκες

στον πυθμένα

$$u \frac{dh}{dx} + w = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dh}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{για } z = -h(x) \quad (2.9)$$

και στην ελεύθερη επιφάνεια

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \text{για } z = \eta(x, t) \quad (2.10)$$

Η ελεύθερη επιφάνεια πρέπει να αποκρίνεται στις αλλαγές της πίεσης ώστε η κατανομή της πίεσης να παραμένει ομοιόμορφη (Dean, 1991). Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli (εξ.2.8) στην ελεύθερη επιφάνεια με την παραδοχή ότι τα κύματα είναι ελεύθερα, δηλαδή δεν επηρεάζονται από τις αλλαγές της πίεσης. Έτσι ο όρος της πίεσης είναι σταθερός και συνήθως λαμβάνεται ίσος με το μηδέν (ατμοσφαιρική πίεση). Προκύπτει η δυναμική οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας.

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz = f(t)$$

ή

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + gz = f(t), \quad \text{για } z = \eta(x, t) \quad (2.11)$$

Οι εξισώσεις 2.10 και 2.11 είναι μη γραμμικές. Γραμμικοποιούνται παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο  $z = 0$  και θεωρώντας ότι η ανύψωση είναι αρκετά μικρή. Η λύση που προκύπτει είναι αρμονική ως προς το χρόνο και την οριζόντια απόσταση και δίνεται από τη σχέση

$$\Phi = -\frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \omega t) \quad (2.12)$$

Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι της μορφής

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (2.13)$$

### 2.2.2 Εξίσωση Διασποράς

Αντικαθιστώντας τις λύσεις (2.12) και (2.13) στην κινηματική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας (2.10) προσδιορίζεται η σχέση μεταξύ του κυματαριθμού

$$k = \frac{2\pi}{L} \text{ και της γωνιακής συχνότητας } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (2.14a)$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση διασποράς και εκφράζει το διαχωρισμό των κυμάτων καθώς κάθε συχνότητα διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα φάσης.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $C = \frac{L}{T}$  προκύπτουν διάφορες μορφές της εξίσωσης διασποράς

$$C^2 = \frac{L^2}{T^2} = \frac{g}{k} \tanh kh \quad (2.14b)$$

$$L = \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh kh = L_0 \tanh kh \text{ (στα βαθιά } \tanh kh \rightarrow 1 \text{ άρα } L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}) \quad (2.14c)$$

$$C = \frac{L_0}{T} \tanh kh = C_0 \tanh kh \quad (2.14d)$$

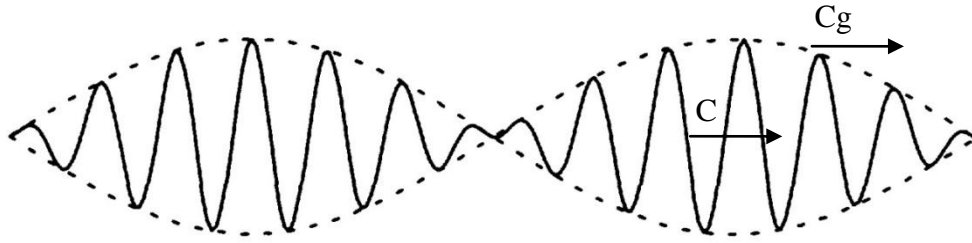
Εξετάζουμε την εξίσωση διασποράς στις οριακές περιπτώσεις των βαθιών και ρηχών νερών. Στα βαθιά  $h/L \rightarrow \infty$  επομένως  $\tanh kh \rightarrow 1$  και η εξίσωση 2.14b γίνεται

$$C = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{\omega} \quad (2.15)$$

Στα ρηχά  $h/L \rightarrow 0$  επομένως  $\tanh kh \rightarrow kh$  και η εξίσωση 2.14b γίνεται

$$C = \sqrt{gh} \quad (2.16)$$

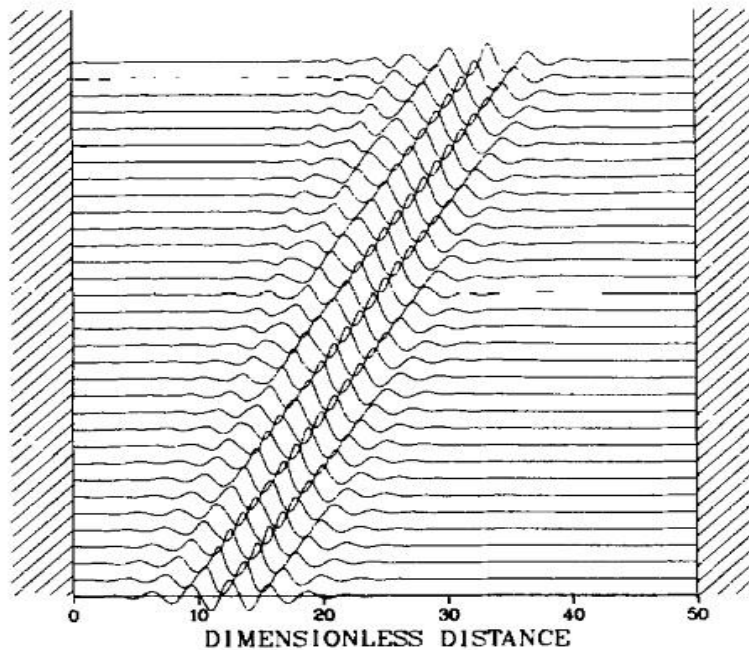
Παρατηρούμε ότι στα βαθιά νερά η ταχύτητα φάσης των κυματισμών εξαρτάται από τη συχνότητα, άρα οι κυματισμοί στα βαθιά είναι διασπειρόμενοι και οι πιο μακροί διαδίδονται γρηγορότερα. Αντίθετα στα ρηχά νερά η ταχύτητα φάσης εξαρτάται μόνο από το βάθος του νερού και επομένως οι κυματισμοί δε διασπείρονται.



**Σχ. 2.1:** Ομάδα κυμάτων (wave group) [Dingemans 1997]

Αν υποθέσουμε τώρα μια ομάδα κυμάτων που αποτελείται από την υπέρθεση δύο (ή και περισσότερων) κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες και κυματαριθμούς (βλ. Σχ. 2.1), μπορούμε να υπολογίσουμε (Dean, 1991) ότι η ταχύτητα διάδοσης της περιβάλλουσας των κυμάτων, ή ταχύτητα ομάδας, είναι διαφορετική από την ταχύτητα φάσης, λόγω της διασποράς συχνοτήτων. Η ταχύτητα ομάδας (group velocity) είναι επίσης η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η κυματική ενέργεια. Η ενέργεια είναι ανάλογη του ύψους κύματος, επομένως αν ταξίδευε με την ταχύτητα φάσης δεν θα μπορούσε να "περάσει" από τους κόμβους μηδενικής ανύψωσης (Dean, 1991). Η ταχύτητα ομάδας είναι  $C_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$  και από την εξίσωση διασποράς (2.14a) έχουμε για μικρό  $\Delta k$

$$\begin{aligned} \omega^2 = gk \tanh kh &\Rightarrow 2\omega \frac{d\omega}{dk} = g \tanh kh + gk \cosh^{-2} kh = \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow C_g = \frac{d\omega}{dk} &= \frac{C}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = Cn \end{aligned} \quad (2.17)$$



**Σχ. 2.2:** Διασπειρόμενοι κυματισμοί: η ταχύτητα φάσης είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα ομάδας [Witting 1984]

Στα βαθιά  $\frac{2kh}{\sinh 2kh} \rightarrow 0$  άρα  $n = \frac{1}{2}$  και  $C_g = \frac{1}{2}C$ , ενώ στα ρηχά  $\sinh 2kh \rightarrow 2kh$  άρα  $n = 1$  και  $C_g = C$  όπως ήταν αναμενόμενο, αφού στα ρηχά οι κυματισμοί δε διασπείρονται.

### 2.2.3 Θεωρία Stokes

Στη θεωρία του Stokes η λύση αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως προς μια μικρή αδιάστατη παράμετρο  $\mu = ka$ , όπου  $a = H/2$  το εύρος του κυματισμού.

$$\Phi = \Phi_1 + \mu\Phi_2 + \mu^2\Phi_3 + \dots \quad (2.18)$$

Η θεωρία Stokes 1ης τάξης που προκύπτει αν κρατήσουμε μόνο τον πρώτο όρο ταυτίζεται με τη γραμμική θεωρία του Airy ( $ka = O(0)$ ), ενώ αντίστοιχα προκύπτουν οι θεωρίες 2ης τάξης, 3ης τάξης, κ.ο.κ. Τα κύματα Stokes μοιάζουν με ημιτονοειδή καμπύλη αλλά έχουν οξύτερες κορυφές και πεπλατυσμένες κοιλίες. Λαμβάνεται υπόψη η μεταφορά ενέργειας καθώς οι τροχιές των μορίων είναι ανοιχτές, σε αντίθεση με τη θεωρία Airy.

Για να συγκλίνει η δυναμοσειρά πρέπει οι διαδοχικοί όροι να έχουν λόγο  $R$  μικρότερο του ένα. Το κριτήριο ικανοποιείται στα βαθιά, όμως δημιουργεί σοβαρούς περιορισμούς στα ρηχά νερά, όπου οι όροι ανώτερης τάξης γίνονται σημαντικοί. Αν πάρουμε για παράδειγμα τη λύση 2ης τάξης προκύπτει για τα ρηχά νερά

$$R = \frac{3}{8} \frac{ka}{k^3 h^3} = \frac{3}{64\pi^2} \frac{L^2 H}{h^3} \ll 1 \quad (2.19)$$

δηλαδή  $ka < \frac{8(kh)^3}{3} \Rightarrow a/h \approx 0.26$ , ενώ στη θραύση ο λόγος αυτός είναι περίπου

0.4. Στην πραγματικότητα το κριτήριο πρέπει να γίνει ακόμα πιο αυστηρό (Dean, 1991) γιατί για μεγάλα κύματα οι όροι ανώτερης τάξης δημιουργούν μια δευτερεύουσα κορυφή στην κοιλία του κύματος. Επομένως η θεωρία Stokes είναι καταλληλότερη στα βαθιά και ενδιάμεσου βάθους νερά ενώ στα ρηχά πρέπει να εφαρμόζεται με επιφύλαξη.

Η γραμμική εξίσωση διασποράς (2.14) ισχύει και για τη θεωρία Stokes 2ης τάξης. Στις μη γραμμικές θεωρίες ανώτερης τάξης η εξίσωση διασποράς περιλαμβάνει τον όρο  $ka$  που εκφράζει τη διασπορά εύρους. Η διασπορά εύρους είναι ένα μη γραμμικό φαινόμενο κατά το οποίο η ταχύτητα φάσης εξαρτάται από το ύψος του κύματος. Γίνεται αισθητό όταν η καμπυλότητα του κύματος αρχίζει να μεγαλώνει. Ο όρος  $\frac{L^2 H}{h^3}$  στην εξίσωση (2.19) ονομάζεται παράμετρος Ursell

$$Ur = \frac{L^2 H}{h^3} = \frac{H}{h} \left( \frac{h}{L} \right)^{-2} = \frac{\varepsilon}{\sigma^2} \quad (2.20)$$

και εκφράζει τη σχέση μεταξύ της διασποράς εύρους και της διασποράς συχνότητας. Όταν ο αριθμός  $Ur$  είναι μικρός μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γραμμική θεωρία διασπειρόμενων κυματισμών, ενώ όταν είναι μεγάλος κυριαρχεί η μη γραμμικότητα και η ροή περιγράφεται από τις εξισώσεις ρηχών υδάτων

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u_0] = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Όμως οι μη γραμμικοί μη διασπειρόμενοι κυματισμοί δεν μπορούν να διατηρήσουν μια μόνιμη μορφή και οι παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιούνται μόνο για μικρές αποστάσεις. Για να υπάρχει μόνιμη λύση για τη διάδοση κυματισμών σε ρηχά νερά πρέπει η όξυνση των κορυφών που προκαλείται από τη μη γραμμικότητα να εξισορροπείται από την επίδραση της διασποράς (Dingemans, 1997), δηλαδή  $Ur = O(1)$ . Η ύπαρξη τέτοιων κυμάτων διαπιστώθηκε για πρώτη φορά το 1834 από τον Russel, στα πειράματα του οποίου βασίστηκαν ο Boussinesq και οι Korteweg και DeVries για να αναπτύξουν τις θεωρίες τους.

#### 2.2.4 Κυματισμοί πεπερασμένου ύψους σε ρηχά νερά

Στα πολύ ρηχά νερά το κυματικό προφίλ κατά Stokes είναι ανάπτυγμα ως προς την παράμετρο Ursell, που ορίζεται ως ο λόγος  $a/\beta$  με  $\alpha = a/h$  και  $\beta = h^2/L^2$ . Αυτό προϋποθέτει  $Ur \ll 1$  ή  $\alpha \ll \beta$  που, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, στα ρηχά νερά ισχύει μόνο για πολύ μικρό ύψος κύματος. Επομένως πρέπει να ακολουθηθεί διαφορετική διαδικασία για την περίπτωση αυτή.

Υποθέτοντας κατ' αρχάς ότι το κύμα διαδίδεται με αναλλοίωτη μορφή αναζητούμε μια λύση που να δίνει σταθερή ταχύτητα φάσης  $C$ . Καταλήγουμε στην εξίσωση Korteweg - De Vries σε αδιάστατη μορφή (Dean, 1991)

$$\frac{1}{3} \frac{d^3 \Pi}{dX^3} + \frac{3\alpha \Pi}{\beta} \frac{d\Pi}{dX} + \frac{d\Pi}{dX} \left( \frac{ga}{\beta C^2 \alpha} - \frac{1}{\beta} \right) = 0 \quad (2.23)$$

όπου  $\Pi = \eta/a$  και  $X = x/L$ .

Η λύση που προκύπτει μετά από γραμμικοποίηση της εξίσωσης (2.23) είναι

$$\Pi = \cos 2\pi X \quad (2.24)$$

και η αντίστοιχη έκφραση για την ταχύτητα φάσης

$$C \approx \sqrt{gh} \left( 1 - \frac{2\pi^2\beta}{3} \right) \quad (2.25)$$

Η λύση αυτή μπορεί να θεωρηθεί αντίστοιχη της θεωρίας κύματος απειροστού ύψους αφού η ταχύτητα φάσης (2.25) είναι ίση με τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος της εξίσωσης διασποράς για ρηχά νερά (2.16).

Μια λύση της εξίσωσης (2.21) δίνεται από τη θεωρία μοναχικού κύματος και διατυπώθηκε από τον Boussinesq (1872). Το μοναχικό κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα και έχει άπειρο μήκος. Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι πάντα μεγαλύτερη από το μηδέν, δηλαδή δεν υπάρχει κοιλία. Στην πράξη η θεωρία αυτή χρησιμοποιείται για την περιγραφή πολύ μακρών κυματισμών.

$$\eta = \alpha \operatorname{sech}^2 \left( \frac{3}{4} \frac{\alpha}{h^3} \right)^{\frac{1}{2}} x \quad (2.26)$$

$$C = \sqrt{g(H+h)} \quad (2.27)$$

Μια δεύτερη λύση της εξίσωσης (2.21) δόθηκε από τους Korteweg and De Vries (1895) και ονομάστηκε θεωρία cnoidal επειδή το κυματικό προφίλ εκφράζεται ως προς ένα Ιακωβιανό ελλειπτικό ολοκλήρωμα  $\operatorname{cn}(u)$ . Η θεωρία αυτή επιτρέπει την ύπαρξη περιοδικών λύσεων.

$$\eta = \alpha \operatorname{cn}^2 \left( x \sqrt{\frac{3\alpha}{4h^3k^2}} \right) \quad (2.28)$$

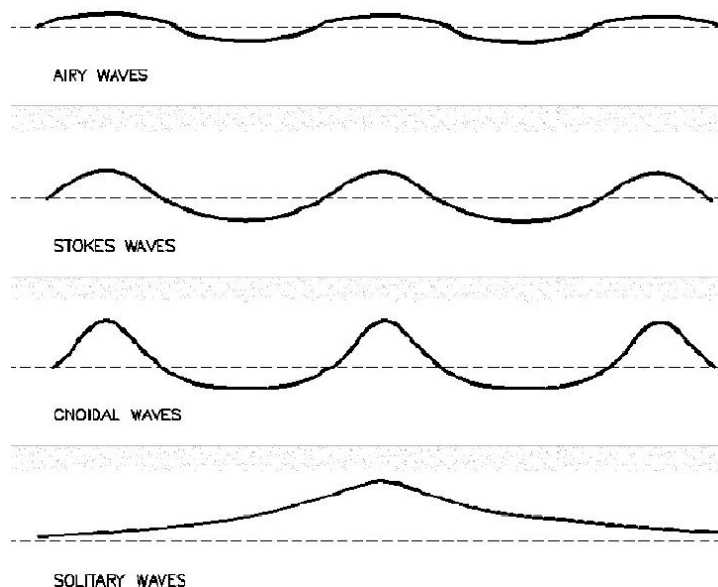
$$C = \frac{\sqrt{gh}}{\left[ 1 + \frac{a}{h} \left( \frac{1}{k^2} - 2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.29)$$

$$\text{όπου } k = \frac{1}{(1+S)^{\frac{1}{2}}}, \quad S = 1 - F \frac{\beta}{\alpha}, \quad F = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{ga}{\alpha C^2} \right)$$



Η γραμμική θεωρία ημιτονοειδούς κύματος και το μοναχικό κύμα αποτελούν οριακές περιπτώσεις των κυμάτων Cnoidal, ώστε η θεωρία Cnoidal καλύπτει όλο το εύρος μεταξύ βαθιών ( $k \rightarrow 0$ ) και ρηχών ( $k \rightarrow 1$ ) νερών αντίστοιχα.

Η εξίσωση KdV περιγράφει τη διάδοση κυματισμών προς μια κατεύθυνση και επομένως αδυνατεί να περιγράψει φαινόμενα όπως π.χ. η ανάκλαση. Αποτελεί υποπερίπτωση των εξισώσεων Boussinesq που παρουσιάζονται σε επόμενη ενότητα και περιγράφουν τη διάδοση κυματισμών σε οποιαδήποτε διεύθυνση.



**Σχ. 2.3:** Προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας όπως προκύπτουν από τις θεωρίες διάδοσης κυματισμών [Μεταλληνός 2011]

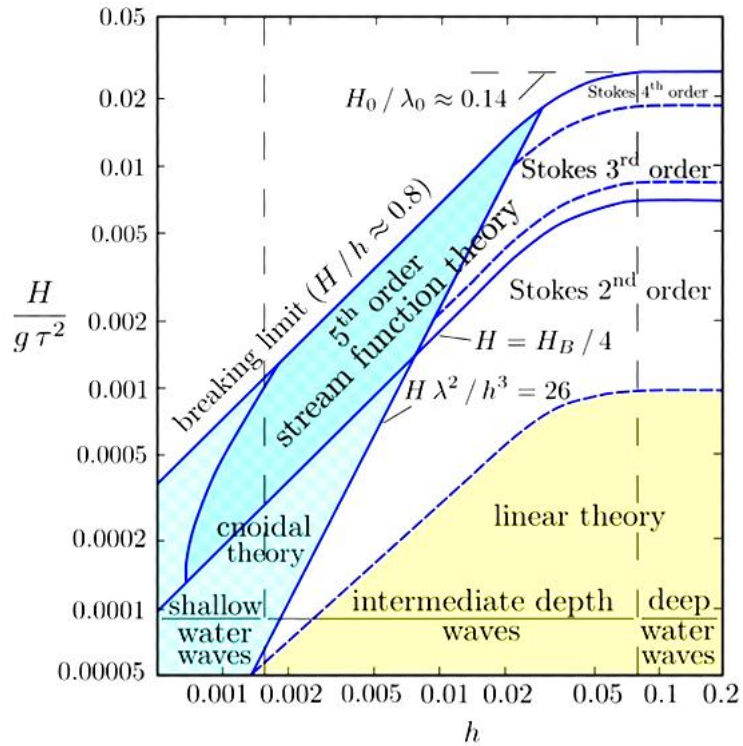
### 2.2.5 Θεωρία Ροϊκής Συνάρτησης

Ο Dean (1965), βασιζόμενος στη ροϊκή συνάρτηση, ανέπτυξε αυτή τη θεωρία σαν μια απλούστερη εναλλακτική στις θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης, ώστε να γίνει ευκολότερη η μοντελοποίηση σε  $H/Y$ . Το πρόβλημα εκφράζεται σε σύστημα αναφοράς κινούμενο με ταχύτητα  $C$  και ανάγεται έτσι σε μόνιμο. Κατ' αναλογία με τη θεωρία Stokes  $N$  τάξης έχουμε

$$\psi(x, z) = Cz + \sum_{n=1}^N X(n) \sinh(nk(h+z)) \cos nkx \quad (2.30)$$

Η εξίσωση Laplace και οι οριακές συνθήκες μετατρέπονται σε όρους  $\psi$ . Η κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια ικανοποιείται εκ ταυτότητος αφού η ελεύθερη επιφάνεια ταυτίζεται με μια γραμμή ροής. Η δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια ικανοποιείται μόνο προσεγγιστικά, με επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία επιλέγονται τα  $X(n)$  ώστε να προσεγγισθεί η σταθερά Bernoulli,  $f(t)$ .

Οι περιοχές ισχύος των θεωριών που αναλύθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο φαίνονται εποπτικά στο Σχ. 2.4 που ακολουθεί.



**Σχ. 2.4:** Περιοχές ισχύος θεωριών διάδοσης κυματισμών [LeMéhauté, 1976]

## 2.3 Μοντέλα διάδοσης κυματισμών τύπου Boussinesq

### 2.3.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Οι εξισώσεις Boussinesq διατυπώθηκαν για πρώτη φορά από τον Joseph Valentin Boussinesq το 1872. Από τότε πολλοί μελετητές έχουν παρουσιάσει διάφορες παραλλαγές των αρχικών εξισώσεων σε μια διαρκή προσπάθεια διεύρυνσης του πεδίου εφαρμογής τους. Τα μοντέλα τύπου Boussinesq είναι εξαιρετικά δημοφιλή λόγω της ακρίβειας στην πρόβλεψη των κυματικών χαρακτηριστικών και του χαμηλού υπολογιστικού κόστους σε σχέση με άλλες τεχνικές.

Η βασική ιδέα είναι η απαλοιφή της κατακόρυφης συνιστώσας από τις εξισώσεις, διατηρώντας όμως κάποια επιρροή της κατακόρυφης επιτάχυνσης. Αυτό επιτυγχάνεται με την υπόθεση ομοιόμορφης κατά βάθος κατανομής της οριζόντιας ταχύτητας που οδηγεί σε γραμμική κατανομή της κατακόρυφης ταχύτητας (Madsen et al., 1991). Έτσι το πρόβλημα από τρισδιάστατο μετατρέπεται σε δισδιάστατο. Διαφορετικές μορφές των εξισώσεων μπορούν να προκύψουν με διαφορετική επιλογή της μεταβλητής της οριζόντιας ταχύτητας:

- ταχύτητα στη στάθμη ηρεμίας
- ταχύτητα στον πυθμένα
- μέση ταχύτητα (ολοκληρωμένη στο βάθος)
- ταχύτητα σε τυχαίο βάθος

Δύο παράμετροι παίζουν ρόλο στη διαμόρφωση του πεδίου ορισμού των εξισώσεων Boussinesq, η διασπορά  $\sigma = \frac{h}{L}$  και η μη γραμμικότητα  $\varepsilon = \frac{H}{h}$ . Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, η θεωρία του Boussinesq ισχύει όταν ο λόγος  $Ur = \frac{\varepsilon}{\sigma^2} = O(1)$  και  $\sigma \ll 1$ .

### 2.3.2 Εξέλιξη των μοντέλων Boussinesq

Στην αρχική τους μορφή οι εξισώσεις Boussinesq περιλαμβάνουν τις χαμηλότερες τάξεις μη γραμμικότητας και διασποράς. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ισχύουν για σχετικά μακρούς κυματισμούς μικρού εύρους. Οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής του Boussinesq σε μια διάσταση δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u_0] = \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial t} \quad (2.32)$$

Οι όροι στο δεξιό μέλος των εξισώσεων (2.31) και (2.32) εκφράζουν τη διασπορά συχνότητας. Αν αμεληθούν αυτοί οι όροι καταλήγουμε στις κλασικές εξισώσεις

ρηγών υδάτων (εξ. 2.21 και 2.22). Ο Boussinesq έγραψε τις εξισώσεις του για οριζόντιο πυθμένα και αργότερα οι Mei και LeMéhauté (1966) τις επέκτειναν σε κεκλιμένο πυθμένα.

Ο Peregrine (1967) παρουσίασε εξισώσεις αντίστοιχες με αυτές του Boussinesq σε τρεις διαστάσεις, χρησιμοποιώντας μια τεχνική αναπτυγμάτων που προτάθηκε από τον Friedrichs (1948) και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Keller (1948). Οι εξισώσεις του Peregrine αφορούν κυματισμούς μικρού ύψους, περιλαμβάνουν όμως και μη γραμμικούς όρους. Αναφέρονται συνήθως ως κλασικές καθώς αποτέλεσαν τη βάση πάνω στην οποία στηρίχθηκαν πολλές μεταγενέστερες εργασίες. Σε όρους μέσης ταχύτητας έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\eta_t + \nabla \left[ (h + \eta)u \right] = 0 \quad (2.33)$$

$$u_t + u \nabla u + g \nabla \eta = \frac{h}{2} \nabla \left[ \nabla (hu_t) \right] - \frac{h^2}{6} \nabla (\nabla u_t) \quad (2.34)$$

Η αδυναμία των κλασικών εξισώσεων Boussinesq είναι ότι η εφαρμογή τους περιορίζεται στα ρηγά νερά όπου η διασπορά δεν είναι τόσο έντονη. Για να είναι το σφάλμα στην ταχύτητα φάσης μικρότερο από 5% το βάθος του νερού πρέπει να είναι μικρότερο από το ένα πέμπτο του μήκους κύματος στα βαθιά,  $L_0$  (McCowan, 1987). Αυτό οδήγησε τους μεταγενέστερους ερευνητές στην αναζήτηση λύσεων με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς, με στόχο να προσεγγίζεται όσο το δυνατόν καλύτερα η ακριβής εξίσωση διασποράς της γραμμικής θεωρίας.

Σε αυτή την κατεύθυνση ο Witting (1984) χρησιμοποίησε ανάπτυγμα Taylor για την ταχύτητα και αντιστόιχισε την εξίσωση διασποράς που προέκυψε με μια προσέγγιση Padé της ακριβούς εξίσωσης διασποράς από τη γραμμική θεωρία. Οι συντελεστές του αναπτύγματος επιλέχθηκαν ώστε να δίνουν βέλτιστα χαρακτηριστικά διασποράς. Κατάφερε, διατηρώντας όρους διασποράς μέχρι και τέταρτης τάξης να λάβει ακριβή αποτελέσματα για βαθιά και ρηγά νερά. Ωστόσο οι εξισώσεις του Witting αναφέρονται σε μία διάσταση και οριζόντιο πυθμένα και η γενίκευσή τους σε δύο διαστάσεις δεν είναι δυνατή.

Οι Madsen et al. (1991) μελέτησαν τα χαρακτηριστικά διασποράς διάφορων εκδοχών των εξισώσεων Boussinesq, εξάγοντας γραμμικές σχέσεις διασποράς και συγκρίνοντάς τις με αυτή της γραμμικής θεωρίας Airy. Οι σχέσεις αυτές είναι της μορφής

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1 + Bk^2h^2}{1 + \left( B + \frac{1}{3} \right) k^2h^2} \quad (2.35)$$

για την ταχύτητα φάσης ενώ αντίστοιχη σχέση προτείνεται και για την ταχύτητα ομάδας. Για  $B = 0$  καταλήγουμε στις κλασικές εξισώσεις Boussinesq. Οι συγγραφείς βασίστηκαν στην τεχνική που χρησιμοποιήθηκε από τον Witting (1984) και εισήγαγαν στην εξίσωση ορμής ένα πρόσθετο όρο τρίτης τάξης που προκύπτει από

την εξίσωση μακρών κυμάτων. Ο όρος αυτός βελτιώνει τα χαρακτηριστικά διασποράς στα βαθιά νερά, ενώ στα ρηχά τείνει στο μηδέν οπότε μπορεί να προστεθεί στις εξισώσεις Boussinesq χωρίς να επηρεάζει την ακρίβεια. Ο συντελεστής B του επιπλέον όρου επιλέγεται ώστε να δίνει την καλύτερη προσέγγιση της γραμμικής εξίσωσης διασποράς. Οι εξισώσεις αυτές υποθέτουν σταθερό βάθος νερού. Οι Madsen και Sorensen (1992) τις επέκτειναν σε ελαφρά κεκλιμένο πυθμένα, διατηρώντας παραγώγους πρώτης τάξης του βάθους. Κατέληξαν ότι η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου B είναι 1/15, όμοια με την τιμή που προέκυψε από την τεχνική Padé του Witting.

Ο Nwogu (1993) ακολούθησε τη μέθοδο των Yoon και Liu (1989) και χρησιμοποιώντας την ταχύτητα σε τυχαίο βάθος κατέληξε σε ένα νέο σετ εξισώσεων για κεκλιμένο πυθμένα. Το βάθος αποτελεί ελεύθερη παράμετρο που επιλέγεται ώστε η αντίστοιχη εξίσωση διασποράς να ταιριάζει με την προσέγγιση Padé της γραμμικής θεωρίας. Εν τέλει οι εξισώσεις του Nwogu έχουν ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά διασποράς με αυτές των Madsen et al., παρότι η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν διαφορετική. Παρά τη βελτίωση ως προς την εξίσωση διασποράς, οι εξισώσεις των Nwogu και Madsen et al. περιέχουν μόνο τους χαμηλότερης τάξης όρους μη γραμμικότητας, επομένως δεν μπορούν να περιγράψουν μη γραμμικά φαινόμενα στα βαθιά νερά ( $h/L_0 > 0.3$ , Nwogu, 1993). Επίσης οι εξισώσεις αυτές είναι ακρίβειας δεύτερης τάξης ως προς τις κατανομές πίεσης και ταχύτητας και άρα δεν βελτιώθηκαν σε σχέση με τις κλασικές εξισώσεις.

Οι Wei et al. (1995) επέκτειναν τις εξισώσεις του Nwogu σε πλήρως μη γραμμικές. Για την επίλυση χρησιμοποίησαν ένα αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών πιο ακριβές από το σχήμα Crank-Nicholson που χρησιμοποίησε ο Nwogu. Η διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων πρώτης τάξης γίνεται με ακρίβεια τέταρτης τάξης, ενώ οι όροι διασποράς διακριτοποιούνται με ακρίβεια δεύτερης τάξης. Έτσι εξαλείφονται τα σφάλματα αποκοπής που είναι της ίδιας μορφής με τους όρους διασποράς. Για την επίλυση εφαρμόζεται το αριθμητικό σχήμα πρόβλεψης διόρθωσης Adams - Bashforth - Moulton. Το σχήμα αυτό χρησιμοποιήθηκε στο μοντέλο της παρούσας εργασίας και αναλύεται στην παράγραφο 3.6.

Οι Beji και Nadaoka (1996) παρουσίασαν ένα σύστημα εξισώσεων με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς αντικαθιστώντας κάποιους από τους όρους δεύτερης τάξης με ισοδύναμους που προκύπτουν από τις εξισώσεις πρώτης τάξης. Οι Schäffer και Madsen (1995) βελτίωσαν τις εξισώσεις των Madsen και Sorensen (1992) καταργώντας τον περιορισμό της ήπιας κλίσης πυθμένα. Επίσης, βασιζόμενοι στην εργασία του Nwogu, δημιούργησαν ένα νέο σετ εξισώσεων με βελτιώσεις όσον αφορά τα χαρακτηριστικά διασποράς και μη γραμμικότητας. Ο Zou (1999) παρουσίασε πιο πολύπλοκες εκφράσεις υψηλότερης ακρίβειας.

Σε πιο πρόσφατες μελέτες αναπτύχθηκαν μοντέλα υψηλής μη γραμμικότητας και διασποράς με αποτέλεσμα σήμερα να έχει πρακτικά εξαλειφθεί ο περιορισμός του βάθους. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες των Madsen και Schäffer (1998), Agnon et al. (1999), Gobbi et al. (2000), Madsen et al. (2002, 2003, 2006), Bingham και

Agnon (2005). Επίσης ο Li (2008) πρότεινε ένα μοντέλο που συνδυάζει την εξίσωση ήπιας κλίσης για γραμμικούς κυματισμούς στα βαθιά νερά με τα μοντέλα Boussinesq για μη γραμμικά φαινόμενα στα ρηγά.

### 2.3.3 Το μοντέλο CM14

Οι Chondros and Memos (2014) όρισαν νέους συντελεστές διασποράς και ρήχωσης για τις εξισώσεις των Madsen and Schäffer (1998) προκειμένου να βελτιώσουν τα χαρακτηριστικά διασποράς. Οι νέοι συντελεστές μεταβάλλονται σε συνάρτηση με την ποσότητα  $kd$  σε αντίθεση με όλες τις προηγούμενες εργασίες όπου θεωρούνταν σταθεροί. Οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής γράφονται ως εξής

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot ((d + \varepsilon \zeta) \mathbf{U}) = 0 \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon \nabla (\mathbf{U}^2) + \mu^2 (\Lambda_{20}^{\text{III}} + \varepsilon \Lambda_{21}^{\text{III}} + \varepsilon^2 \Lambda_{22}^{\text{III}} + \varepsilon^3 \Lambda_{23}^{\text{III}}) \\ + \mu^4 (\Lambda_{40}^{\text{III}} + \varepsilon \Lambda_{41}^{\text{III}}) + \mathcal{O}(\mu^6, \varepsilon^2 \mu^4) = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

όπου  $d$  το βάθος,  $\zeta$  η ανύψωση,  $\mu$  η παράμετρος διασποράς και  $\varepsilon$  η παράμετρος μη γραμμικότητας. Οι όροι  $\Lambda^{\text{III}}$  δίνονται στο παράρτημα II. Οι Madsen and Schäffer (1998) επέλεξαν τους συντελεστές  $(\alpha_1, \beta_1)$  ώστε η γραμμική σχέση διασποράς να συγκλίνει σε αυτή του γραμμικού κύματος Stokes. Ομοίως υπολόγισαν τους συντελεστές  $(\alpha_2, \beta_2)$  ώστε να βελτιστοποιούνται τα χαρακτηριστικά ρήχωσης.

Οι Chondros and Memos (2014) υπολόγισαν τους συντελεστές  $(\alpha_1, \beta_1)$  από ένα σύστημα εξισώσεων που προκύπτει εξισώνοντας τη σχέση διασποράς πρώτης τάξης και το εύρος της δεύτερης αρμονικής με τις αντίστοιχες σχέσεις της θεωρίας Stokes.

$$\alpha_1 = \frac{\left( 6\kappa(75 - 1115\kappa^2 + \kappa^4) \cos h(\kappa) - 9\kappa(-75 + 395\kappa^2 + \kappa^4) \cos h(3\kappa) + 10800 \sin h(\kappa)^5 \right. \\ \left. + \kappa(3(-375 - 185\kappa^2 + \kappa^4) \cos h(5\kappa) + 10\kappa(585 + 29\kappa^2) \sin h(\kappa) + \right. \\ \left. 5\kappa(675 + 139\kappa^2) \sin h(3\kappa) + \kappa(1125 + 101\kappa^2) \sin h(5\kappa) \right)}{\left( 60\kappa^2(2\kappa(-3 + 47\kappa^2) \cos h(\kappa) + 9\kappa(-1 + 5\kappa^2) \cos h(3\kappa) - 144 \sin h(\kappa)^5 \right. \\ \left. + \kappa(5(3 + \kappa^2) \cos h(5\kappa) - 3\kappa(26 \sin h(\kappa) + 15 \sin h(3\kappa) + 5 \sin h(5\kappa))) \right)} \quad (2.38)$$

$$\beta_1 = \frac{\begin{aligned} &(-18\kappa(15-155\kappa^2+33\kappa^4)\cosh(\kappa)+27\kappa(-15+105\kappa^2+17\kappa^4)\cosh(3\kappa) \\ &-6480\sin h(\kappa)^5+\kappa(45(15+19\kappa^2+3\kappa^4)\cosh(5\kappa)-2\kappa(2430+1020\kappa^2+13\kappa^4)\sin h(\kappa) \\ &-5\kappa(270+426\kappa^2+31\kappa^4)\sin h(3\kappa)-\kappa(810+474\kappa^2+17\kappa^4)\sin h(5\kappa)) \end{aligned}}{\begin{aligned} &(180\kappa^4(2\kappa(-3+47\kappa^2)\cosh(\kappa)+9\kappa(-1+5\kappa^2)\cosh(3\kappa)-144\sin h(\kappa)^5 \\ &+\kappa(5(3+\kappa^2)\cosh(5\kappa)-3\kappa(26\sin h(\kappa)+15\sin h(3\kappa)+5\sin h(5\kappa)))) \end{aligned}} \quad (2.39)$$

Με τον τρόπο αυτό τα χαρακτηριστικά διασποράς του μοντέλου αναπαράγουν ακριβώς τις θεωρητικές τιμές της ταχύτητας φάσης για κάθε  $kd$ .

Οι συντελεστές  $(\alpha_2, \beta_2)$  υπολογίζονται βελτιστοποιώντας τα χαρακτηριστικά ρήγωσης ώστε να προσεγγίζουν τη θεωρία Stokes, με τη χρήση της κλίσης γραμμικής ρήγωσης που ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{A_x}{A} = -\frac{d_x}{d} \gamma_0 \quad (2.40)$$

Η εξίσωση περιλαμβάνει δύο αγνώστους οπότε επιλέγεται να τεθεί ο συντελεστής  $\beta_2$  ίσος με μηδέν. Έτσι προκύπτει

$$a_2 = \frac{\begin{aligned} &(2(-17010+175905\kappa^2+234867\kappa^4+299909\kappa^6+6696\kappa^8)\cosh(2\kappa) \\ &-8(2430+40365\kappa^2+47949\kappa^4+12007\kappa^6+13854\kappa^8)\cosh(4\kappa) \\ &+2(17010-79245\kappa^2+46023\kappa^4+262957\kappa^6+52462\kappa^8+15795\cosh(6\kappa)-7290\cosh(8\kappa) \\ &+1215\cosh(10\kappa))+\kappa(-25920(48\cosh(\kappa)-5\cosh(3\kappa))+5\cosh(5\kappa))\sinh \kappa^5 \\ &+\kappa((164565-120153\kappa^2-13103\kappa^4-10064\kappa^6)\cosh(6\kappa) \\ &+6(-6165-9009\kappa^2+3493\kappa^4+430\kappa^6)\cosh(8\kappa)+(2025-3981\kappa^2-731\kappa^4) \\ &\cosh(10\kappa)\sinh(2\kappa)+16\kappa(15525+5007\kappa^2+19267\kappa^4+2273\kappa^6)\sinh(4\kappa) \\ &+2\kappa(-299295-61665\kappa^2+255139\kappa^4+19944\kappa^6)+\kappa(-58185+55737\kappa^2+30597\kappa^4+2576\kappa^6) \\ &\sinh(6\kappa)-8\kappa(-8235+255\kappa^2+1379\kappa^4+17\kappa^6)\sinh(8\kappa)+3\kappa(855+761\kappa^2+37\kappa^4)\sinh(10\kappa)) \end{aligned}}{960\kappa^2(-3\kappa\cosh(\kappa)+(3+\kappa^2)\sinh(\kappa))(2\kappa+\sinh(2\kappa))^2(2\kappa(-3+47\kappa^2)\cosh(\kappa)+9\kappa(-1+5\kappa^2)\cosh(3\kappa)-144\sinh \kappa^5+\kappa(5(3+\kappa^2)\cosh(5\kappa)-3\kappa(26\sinh(\kappa)+15\sinh(3\kappa)+5\sinh(5\kappa))))} \quad (2.41)$$

Επειδή στη θεωρία δεύτερης τάξης η σχέση διασποράς, το ύψος και το μήκος κύματος δεν αλλάζουν σε σχέση με τη γραμμική θεωρία, οι νέοι συντελεστές ρήγωσης και διασποράς είναι συμβατοί μεταξύ τους.

#### 2.3.4 Μοντέλα Boussinesq σε πορώδη πυθμένα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν μοντέλα Boussinesq που περιγράφουν τη διάδοση κυματισμών σε αδιαπέρατο πυθμένα. Πολλές φορές όμως η παραδοχή αυτή απέχει πολύ από την πραγματικότητα και πρέπει κανείς να λάβει υπόψη τη διαπερατότητα του πυθμένα ώστε να πάρει αξιόπιστα αποτελέσματα. Μια ενδιαφέρουσα για τους μηχανικούς εφαρμογή της διάδοσης κυματισμών σε πορώδες μέσο αποτελούν οι διαπερατοί βυθισμένοι κυματοθραύστες. Στην περιοχή ενός ύφαλου κυματοθραύστη ο συνδυασμός των φαινομένων ρήχωσης, θραύσης, ανάκλασης από την παρειά της κατασκευής, περίθλασης στα ακρομώλια και απόσβεσης στο εσωτερικό της κατασκευής δημιουργεί ένα πολύπλοκο πεδίο ροής το οποίο δεν μπορεί να προσομοιωθεί ακριβώς με αναλυτικές ή εμπειρικές μεθόδους.

Αρκετοί μελετητές έχουν αναπτύξει μοντέλα που περιγράφουν κυματική διάδοση σε πορώδες μέσο. Οι Sollitt και Cross (1972) γραμμικοποίησαν την εξίσωση ροής σε διαπερατούς κυματοθραύστες και κατέληξαν σε μια αναλυτική λύση για τον υπολογισμό των συντελεστών ανάκλασης και μετάδοσης. Οι Gu και Wang (1991) επέκτειναν την ανάλυση των Sollitt και Cross και οι Losada et al. (1996) παρουσίασαν ένα αριθμητικό μοντέλο για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης κανονικών κυματισμών με ύφαλους κυματοθραύστες. Ο Van Gent (1995) ανέπτυξε ένα μονοδιάστατο μοντέλο βασισμένο στις εξισώσεις ρηγών υδάτων και ένα δισδιάστατο βασισμένο στις εξισώσεις RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes).

Οι Rojanakamthorn et al. (1990) βασίστηκαν στην παραδοχή ήπιας κλίσης και κατέληξαν σε μία δισδιάστατη ελλειπτική εξίσωση ανάλογη της εξίσωσης ήπιας κλίσης για αδιαπέρατο πυθμένα. Το μοντέλο τους όμως βασίζεται στη γραμμική θεωρία και δεν είναι ακριβές στην περιοχή του κυματοθραύστη, όπου η μη γραμμικότητα δεν μπορεί να αμεληθεί. Οι Isobe et al. (1991) και Cruz et al. (1992) ενσωμάτωσαν εξισώσεις ροής εντός πορώδους μέσου σε μονοδιάστατο μοντέλο τύπου Boussinesq. Το μοντέλο τους όμως περιλαμβάνει χαμηλής τάξης όρους διασποράς και δεν περιγράφει το φαινόμενο αποσύνθεσης των κυμάτων πίσω από την κατασκευή.

Οι Cruz et al. (1997) παρουσίασαν ένα δισδιάστατο σύστημα εξισώσεων Boussinesq για διάδοση κυματισμών σε πορώδη πυθμένα τυχαίου ύψους που εδράζεται σε αδιαπέρατο πυθμένα. Το μοντέλο περιλαμβάνει τους κυρίαρχους όρους μη γραμμικότητας. Τα χαρακτηριστικά διασποράς έχουν βελτιωθεί με την προσθήκη επιπλέον όρων στις εξισώσεις ορμής, ακολουθώντας την προσέγγιση των Madsen et al. (1991). Στην προσέγγιση των Cruz et al. βασίστηκαν οι Avgeris et al. (2004) οι οποίοι εισήγαγαν μια ολοκληρωμένη στο βάθος εξίσωση Darcy - Forchheimer σε ένα μοντέλο Boussinesq. Οι Liu και Wen (1997) παρουσίασαν ένα μη γραμμικό μοντέλο Boussinesq μέτριας διασποράς εισάγοντας εξισώσεις ροής σε πορώδες μέσο. Πλήρως μη γραμμικά μοντέλα αναπτύχθηκαν επίσης από τους Hsiao et al. (2002), Chen et al. (2006), Losada et al. (2008).



### 2.3.5 Εξίσωση Darcy - Forchheimer

Η μόνιμη στρωτή ροή ασυμπίεστου ρευστού σε ομοιογενές πορώδες μέσο περιγράφεται από το νόμο του Darcy (1856)

$$u = -\frac{K}{\rho g}(\nabla p + \rho g) \quad (2.42)$$

Ο συντελεστής γεωμετρικής διαπερατότητας  $K$  ( $m^2$ ) δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{g d_{50}^2 \phi^3}{\alpha \nu (1-\phi)^2} \quad (2.43)$$

όπου  $d_{50}$  η μέση διάμετρος του υλικού,  $\phi$  το πορώδες  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες ( $1.0 \cdot 10^{-6} m^2/s$ ) και  $\alpha$  ένας εμπειρικός συντελεστής. Ο Forchheimer (1901) πρότεινε την ενσωμάτωση ενός δεύτερου όρου ο οποίος περιγράφει τη συνεισφορά της τύρβης και της συναγωγής μεγάλης κλίμακας. Η Polubarinova Kochina (1952) πρόσθεσε έναν αδρανειακό όρο για την περιγραφή μη μόνιμης ροής. Η σχέση που προκύπτει είναι η εξής (Van Gent, 1995, Sollitt και Cross, 1972)

$$-\frac{1}{\rho g}(\nabla p + \rho g) = a_1 u + a_2 |u|u + c_r \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.44)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος είναι ο όρος Darcy που περιγράφει τη στρωτή ροή, ο δεύτερος είναι ο όρος Forchheimer για την τυρβώδη συνεισφορά και ο τρίτος όρος αφορά τη μη μόνιμη ροή. Όταν η συναγωγή σε μεγάλη κλίμακα (large scale convective transport) είναι σημαντική πρέπει να προστεθεί επιπλέον ένας όρος συναγωγής. Τελικά η εξίσωση γράφεται (Van Gent, 1995)

$$-\frac{1}{\rho g}(\nabla p + \rho g) = a_1 u + a_2 |u|u + c_r \frac{\partial u}{\partial t} + du \nabla u \quad (2.45)$$

όπου  $d = 1/\phi^2 g$ .

Οι συντελεστές αντίστασης  $a_1$ ,  $a_2$  και ο αδρανειακός συντελεστής  $c_r$  δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$a_1 = \frac{1}{K} \quad (2.46)$$

$$a_2 = \frac{C_f}{\sqrt{K}} = \beta \frac{1-\phi}{g d_{50} \phi^3} \quad (2.47)$$

$$c_r = \frac{1+c_m}{\phi g} = \frac{1+\gamma \frac{1-\phi}{\phi}}{\phi g} \quad (2.48)$$

όπου  $\beta$  εμπειρικός συντελεστής,  $c_m$  ο συντελεστής πρόσθετης μάζας και  $\gamma$  εμπειρικός συντελεστής που σχετίζεται με την πρόσθετη μάζα. Με το συντελεστή πρόσθετης μάζας λαμβάνουμε υπόψη την πρόσθετη ορμή που χρειάζεται για να επιταχυνθεί ένας

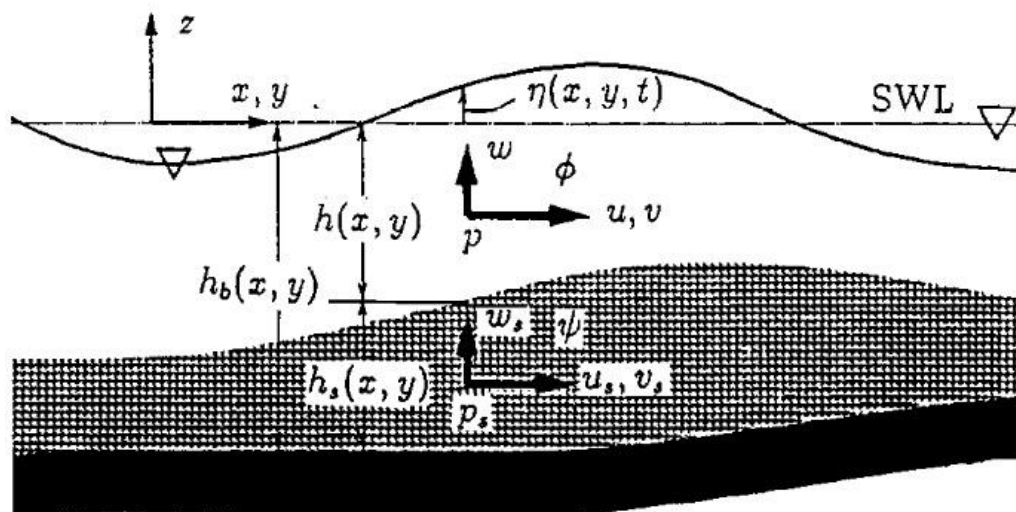
όγκος νερού όταν βρίσκεται μέσα σε πορώδες μέσο, μεταφράζοντάς τη σε επιπλέον μάζα νερού που επιταχύνεται. Οι εμπειρικοί συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  εξαρτώνται από το υλικό. Ενδεικτικά δίνονται στον Πίν. 2.1. τιμές που προέκυψαν από τα πειράματα του Van Gent (1995). Η εξίσωση Darcy - Forchheimer μπορεί να προκύψει και από την εξίσωση Navier - Stokes με τη χρήση κατάλληλων τεχνικών.

**Πιν. 2.1:** Τιμές των αδιάστατων συντελεστών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  [Van Gent, 1995]

Υλικό	$D_{50}$	$\phi$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Ακανόνιστο λιθοσύντριμμα	0.0610	0.442	1791	0.55	0.41
Ημισφαιρικό "	0.0487	0.454	0	0.88	0.42
Σφαιρικό "	0.0488	0.393	1066	0.29	0.32
Ακανόνιστο "	0.0202	0.449	1662	1.07	0.33
Ακανόνιστο "	0.0310	0.388	1007	0.63	0.30
Σφαίρες	0.0460	0.476	2070	0.69	0.27

### 2.3.6 Παραγωγή εξισώσεων Boussinesq σε πορώδες μέσο

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται συνοπτικά η διαδικασία που ακολούθησαν οι Cruz et al. (1997) για την παραγωγή εξισώσεων Boussinesq σε πορώδη πυθμένα. Με παρόμοιο τρόπο αναπτύχθηκε το μοντέλο Boussinesq που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.



Σχ. 2.6: Σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου των Cruz et al. [Cruz et al. 1997]

Η ροή θεωρείται παντού ασυμπίεστη και αστρόβιλη. Οι εξισώσεις συνέχειας είναι για το νερό

$$\nabla U = 0$$

(2.49) και για το πορώδες μέσο

$$\nabla(\phi U_s) = 0 \Rightarrow \nabla U_s = 0 \quad (2.50)$$

όπου το πορώδες  $\phi$  θεωρείται ομοιόμορφο, και οι εξισώσεις ορμής αντίστοιχα

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla(p + \rho g z) = 0 \quad (2.51)$$

και

$$c_r \frac{dU_s}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla(p + \rho g z) + a_1 U_s + a_2 |U_s| U_s = 0 \quad (2.52)$$

όπου  $U = (u, v, w)$  και  $U_s = (u_s, v_s, w_s)$ . Η τελευταία εξίσωση είναι η εξίσωση Darcy - Forchheimer που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Η κινηματική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια και στον αδιαπέρατο πυθμένα γράφεται αντίστοιχα

$$w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \mathbf{u} \nabla \eta = 0 \quad , \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.53)$$

$$\mathbf{u}_s \nabla h_b + w_s = 0 \quad , \quad z = -h_b(x, y) \quad (2.54)$$

όπου  $\mathbf{u} = (u, v)$  και  $\mathbf{u}_s = (u_s, v_s)$ , και η δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια

$$p = 0 \quad , \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.55)$$

Ο ρυθμός ροής μάζας κάθετα στην διεπιφάνεια πρέπει να είναι ίδιος στις δύο στρώσεις

$$(\rho \mathbf{U})_n = (\rho \varphi \mathbf{U}_s)_n \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} \nabla h + w = \varphi (\mathbf{u}_s \nabla h + w_s) \quad , \quad z = -h(x, y) \quad (2.56)$$

και οι πιέσεις εκατέρωθεν της διεπιφάνειας πρέπει να είναι ίσες

$$p = p_s \quad , \quad z = -h(x, y) \quad (2.57)$$

Τέλος θεωρούμε ένα λεπτό οριακό στρώμα στη διεπιφάνεια, ώστε να εξισορροπούνται οι εφαπτόμενες σε αυτή ταχύτητες χωρίς να επηρεάζεται η ροή.

Οι μεταβλητές αδιαστατοποιούνται ως εξής

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l} & y' &= \frac{y}{l} & z' &= \frac{z}{h_0} \\ h' &= \frac{h}{h_0} & h_b' &= \frac{h_b}{h_0} & \eta' &= \frac{\eta}{a} \\ t' &= \frac{t \sqrt{g h_0}}{l} & (\Phi', \Psi') &= \frac{(\Phi, \Psi)}{a \sqrt{g h_0}} \frac{l}{h_0} \end{aligned}$$

όπου  $a$  ένα εύρος κύματος,  $h_0$  ένα βάθος νερού,  $l$  ένα μήκος κύματος,  $\Phi$  και  $\Psi$  οι συναρτήσεις δυναμικού με  $\mathbf{U} = \nabla \Phi$  και  $\mathbf{U}_s = \nabla \Psi$ . Εισάγοντας τις συναρτήσεις δυναμικού έχουμε σε αδιάστατη μορφή τις εξισώσεις Laplace

$$\sigma^2 \nabla^2 \Phi + \Phi_{zz} = 0 \quad , \quad -h < z < \eta \quad (2.58)$$

$$\sigma^2 \nabla^2 \Psi + \Psi_{zz} = 0 \quad , \quad -h_b < z < -h \quad (2.59)$$

και τις οριακές συνθήκες (2.53)-(2.57)

$$\sigma^2 (\Phi_t + \eta) + \varepsilon \frac{1}{2} [\sigma^2 (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + \Phi_z^2] = 0 \quad , \quad z = \varepsilon \eta \quad (2.60)$$

$$\sigma^2 (\eta_t + \varepsilon \nabla \Phi \nabla \eta) = \Phi_z \quad , \quad z = \varepsilon \eta \quad (2.61)$$

$$\Psi_z = -\sigma^2 \nabla \Psi \nabla h_b \quad , \quad z = -h_b \quad (2.62)$$

$$\Phi_z + \sigma^2 \nabla \Phi \nabla h = \lambda (\Psi_z + \sigma^2 \nabla \Psi \nabla h) \quad , \quad z = -h \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} & \sigma^2 (c_r \Psi_t + a_3 \Psi) + \varepsilon \frac{1}{2} c_r \left[ \sigma^2 (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) + \Psi_z^2 \right] \\ & = \sigma^2 \Phi_t + \varepsilon \frac{1}{2} \left[ \sigma^2 (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + \Phi_z^2 \right] \quad , \quad z = -h \end{aligned} \quad (2.64)$$

όπου  $a_3 = a_1 + a_2 |U_s|$  ,  $\varepsilon = \frac{a}{h_0}$  η παράμετρος μη γραμμικότητας,  $\sigma = \frac{h_0}{l}$  η παράμετρος διασποράς. Το πορώδες  $\varphi$  συμβολίζεται στο εξής με  $\lambda$  για να μη συγχέεται με το δυναμικό.

Θεωρούμε ότι τα δυναμικά ακολουθούν τυχαία κατανομή στην οριζόντια διεύθυνση και αναπτύσσουμε σε δυναμοσειρά στην κατακόρυφη διεύθυνση

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [z + h_b(x, y)]^n \psi_n(x, y, t) \quad (2.65)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [z + h(x, y)]^n \varphi_n(x, y, t) \quad (2.66)$$

Από τις σχέσεις (2.59) και (2.65) έχουμε

$$(n+1)(n+2)r_b^2 \psi_{n+2} + (n+1)\sigma^2 [2\nabla h_b \nabla \psi_{n+1} + \nabla^2 h_b \psi_{n+1}] + \sigma^2 \nabla^2 \psi_n = 0 \quad (2.67)$$

$$r_b^2 = 1 + \sigma^2 (\nabla h_b)^2 \quad (2.68)$$

και από τις (2.58) και (2.66)

$$(n+1)(n+2)\varphi_{n+2} + (n+1)\sigma^2 [2\nabla h \nabla \varphi_{n+1} + \nabla^2 h \varphi_{n+1}] + \sigma^2 \nabla^2 \varphi_n = 0 \quad (2.69)$$

Από την οριακή συνθήκη στον πυθμένα (2.62) και τη σχέση (2.65)

$$\psi_1 = -\frac{\sigma^2 \nabla h_b \nabla \psi_0}{r_b^2} \quad (2.70)$$

Με γνωστό το  $\psi_1$  μπορούμε από τη σχέση (2.67) να υπολογίσουμε τα  $\psi_2, \psi_3, \dots$ . Κρατώντας τους όρους μέχρι  $O(\sigma^4)$  προκύπτει από την (2.65)

$$\Psi = \psi_0 - \frac{\sigma^2}{2} \left[ 2(z + h_b) \nabla h_b \nabla \psi_0 + (z + h_b)^2 \nabla^2 \psi_0 \right] + O(\sigma^4) \quad (2.71)$$

Από την οριακή συνθήκη (2.63) στη διεπιφάνεια και τη (2.70) προκύπτει το  $\varphi_1$

$$\varphi_1 = -\frac{\sigma^2 [\nabla h \nabla \varphi_0 + \nabla (h_s \nabla \psi_0)]}{1 + (\sigma \nabla h)^2} \quad (2.72)$$

και από τις (2.69), (2.71) και (2.66) όμοια με πριν

$$\Phi = \varphi_0 - \frac{\sigma^2}{2} \left\{ 2(z + h) [\nabla h \nabla \varphi_0 + \lambda \nabla (h_s \nabla \psi_0)] + (z + h)^2 \nabla^2 \varphi_0 \right\} + O(\sigma^4) \quad (2.73)$$

Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τις μέσες κατά βάθος ταχύτητες στη διατύπωση των εξισώσεων Boussinesq καθώς η εξίσωση συνέχειας που προκύπτει έτσι είναι ακριβής.

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{h + \varepsilon\eta} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \nabla \varphi dz \quad (2.74)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_s = \frac{1}{h_b - h} \int_{-h_b}^{-h} \nabla \psi dz \quad (2.75)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (2.71) και (2.73) στις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι ταχύτητες  $\mathbf{u}_0 = \nabla \varphi_0$  και  $\mathbf{u}_{s0} = \nabla \psi_0$ . Τέλος μέσω των οριακών συνθηκών (2.60) και (2.64) καταλήγουμε στις εξισώσεις ορμής

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \varepsilon \bar{\mathbf{u}} \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \eta + \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \frac{h^2}{3} \nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t) - h \nabla [\nabla (h \bar{\mathbf{u}}_t)] - \lambda h \nabla [\nabla (h_s \bar{\mathbf{u}}_{st})] \right\} \quad (2.76)$$

$$= O(\varepsilon \sigma^2, \sigma^4)$$

$$c_r (\bar{\mathbf{u}}_{st} + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}_s \nabla \bar{\mathbf{u}}_s) + \nabla \eta + a \bar{\mathbf{u}}_s + \frac{\sigma^2}{2} \left( c_r \frac{\partial}{\partial t} + a \right)$$

$$\left[ -\frac{2}{3} h_s^2 \nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_s) - h_s \nabla (\nabla h_b \bar{\mathbf{u}}_s) + h_s \nabla (h - h_s) \nabla \bar{\mathbf{u}}_s + 2 \nabla h \nabla h_b \bar{\mathbf{u}}_s \right] \quad (2.77)$$

$$- \frac{\sigma^2}{2} \nabla [\nabla (h^2 \bar{\mathbf{u}}_t) + 2 \lambda h \nabla (h_s \bar{\mathbf{u}}_s)] = O(\varepsilon \sigma^2, \sigma^4)$$

και μέσω της (2.61) στην εξίσωση συνέχειας

$$\eta_t + \nabla [(h + \varepsilon\eta) \bar{\mathbf{u}}] + \lambda \nabla (h_s \bar{\mathbf{u}}_s) = 0 \quad (2.78)$$

Για πολύ μακρά κύματα όπου  $\sigma^2 \rightarrow 0$  οι παραπάνω εξισώσεις μετασχηματίζονται στις μη γραμμικές εξισώσεις μακρών κυμάτων για πορώδη πυθμένα. Αν αφαιρέσουμε το διαπερατό στρώμα ( $h_s = 0$ ) παίρνουμε τις εξισώσεις του Peregrine (1967) για αδιαπέρατο πυθμένα.

Για τη βελτίωση των χαρακτηριστικών διασποράς των παραπάνω εξισώσεων εφαρμόστηκε η μέθοδος των Madsen et al. (1991). Γράφουμε την εξίσωση (2.76) σε φυσικές μεταβλητές και αναλύουμε το δεύτερο όρο διασποράς

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \bar{\mathbf{u}} \nabla \bar{\mathbf{u}} + g \nabla \eta + \frac{h^2}{6} \nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t) - \frac{h}{2} \nabla h \nabla \bar{\mathbf{u}}_t - \frac{h}{2} \nabla (\nabla h \bar{\mathbf{u}}_t) \quad (2.79)$$

$$- \lambda \frac{h}{2} \nabla [\nabla (h_s \bar{\mathbf{u}}_{st})] = 0$$

Από την εξίσωση ορμής στη χαμηλότερη τάξη

$$\bar{\mathbf{u}}_t + g \nabla \eta = O(\varepsilon, \sigma^2, \dots) \quad (2.80)$$

παίρνουμε μια προσέγγιση των όρων διασποράς που περιέχουν την ταχύτητα  $\bar{\mathbf{u}}$

$$h^2 \nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t) \approx h^2 \nabla [\nabla (-g \nabla \eta)] \quad (2.81)$$

$$h \nabla h \nabla \bar{\mathbf{u}}_t \approx h \nabla h \nabla (-g \nabla \eta) \quad (2.82)$$

$$h \nabla (\nabla h \bar{\mathbf{u}}_t) \approx h \nabla (-g \nabla h \nabla \eta) \quad (2.83)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (2.81) - (2.83) με ένα μικρό συντελεστή  $-\gamma$  προκύπτουν οι εξισώσεις

$$-\gamma \left[ h^2 \nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t) + g h^2 \nabla (\nabla^2 \eta) \right] = 0 \quad (2.84)$$

$$-\gamma \left( h \nabla h \nabla \bar{\mathbf{u}}_t + g h \nabla h \nabla^2 \eta \right) = 0 \quad (2.85)$$

$$-\gamma \left[ h \nabla (\nabla h \bar{\mathbf{u}}_t) + g h \nabla (\nabla h \nabla \eta) \right] = 0 \quad (2.86)$$

τις οποίες μπορούμε να προσθέσουμε στην εξίσωση (2.79). Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε και για την εξίσωση (2.77) και (πολλαπλασιάζοντας με μικρό αριθμό  $-\beta$ ) καταλήγουμε στις νέες εξισώσεις ορμής με βελτιωμένα χαρακτηριστικά διασποράς

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \bar{\mathbf{u}} \nabla \bar{\mathbf{u}} + g \nabla \eta + \frac{h^2}{6} \nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_t) - \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) h \nabla [\nabla (h \bar{\mathbf{u}}_t)] \quad (2.87)$$

$$- \gamma g h \nabla [\nabla (h \nabla \eta)] - \lambda \frac{h}{2} \nabla [\nabla (h_s \bar{\mathbf{u}}_s)] = 0$$

$$c_r (\bar{\mathbf{u}}_{st} + \bar{\mathbf{u}}_s \nabla \bar{\mathbf{u}}_s) + g \nabla \eta + a_3 \bar{\mathbf{u}}_s + \frac{1}{2} \left( c_r \frac{\partial}{\partial t} + a_3 \right) \left[ -\frac{2}{3} h_s^2 \nabla (\nabla \bar{\mathbf{u}}_s) - h_s \nabla (\nabla h_b \bar{\mathbf{u}}_s) \right. \\ \left. + h_s \nabla (h - h_s) \nabla \bar{\mathbf{u}}_s + 2 \nabla h \nabla h_b \bar{\mathbf{u}}_s \right] - \frac{1}{2} \nabla [\nabla (h^2 \bar{\mathbf{u}}_t)] - (1 + \beta) \lambda \nabla [h \nabla (h_s \bar{\mathbf{u}}_s)] \quad (2.88)$$

$$- \frac{\beta g}{c_r} \lambda \nabla [h \nabla (h_s \nabla \eta)] - \frac{\beta a_3}{c_r} \lambda \nabla [h \nabla (h_s \bar{\mathbf{u}}_s)] = 0$$

Η εξίσωση συνέχειας παραμένει ως έχει και δίνεται σε φυσικές μεταβλητές από τη σχέση

$$\eta_t + \nabla [(h + \eta) \bar{\mathbf{u}}] + \lambda \nabla (h_s \bar{\mathbf{u}}_s) = 0 \quad (2.89)$$

Η γραμμική εξίσωση διασποράς των νέων εξισώσεων συγκρίνεται με την ακριβή εξίσωση που προκύπτει από την επίλυση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων (2.58) - (2.64) για μηδενική κλίση πυθμένα και πορώδους μέσου. Οι τιμές των συντελεστών  $\beta$  και  $\gamma$  που προτείνονται από τους συγγραφείς είναι 1/15 και 1/18 αντίστοιχα.





### 3. Περιγραφή τροποποιημένου μοντέλου CM14

---

#### 3.1 Βασικές εξισώσεις

Το μοντέλο Boussinesq που χρησιμοποιήθηκε αναπτύχθηκε από τους Chondros και Memos (2014) και διαμορφώθηκε κατάλληλα για τους σκοπούς της παρούσας μελέτης. Η επέκταση για ροή σε πορώδη πυθμένα έγινε ακολουθώντας την προσέγγιση των Cruz et al. (1997). Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν την κυματική διάδοση παρουσία διαπερατού πυθμένα είναι οι ακόλουθες.

Εξίσωση συνέχειας

$$\eta_t + \nabla[(h + \varepsilon\eta)\mathbf{u}] + \varphi\nabla(h_s\mathbf{u}_s) = 0 \quad (3.1)$$

Εξίσωση ορμής για τη ροή έξω από το πορώδες μέσο

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \nabla\eta + \frac{1}{2}\varepsilon\nabla(\mathbf{u})^2 + \mu^2(\Lambda_{20}^{\text{III}} + \varepsilon\Lambda_{21}^{\text{III}} + \varepsilon^2\Lambda_{22}^{\text{III}} + \varepsilon^3\Lambda_{23}^{\text{III}}) + \mu^4(\Lambda_{40}^{\text{III}} + \varepsilon\Lambda_{41}^{\text{III}}) \\ - \frac{\varphi}{2}h\nabla^2(h_s\mathbf{u}_s) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Οι όροι  $\Lambda^{\text{III}}$  δίνονται στο παράρτημα II. Η εξίσωση 3.2 περιλαμβάνει τους βελτιωμένους συντελεστές διασποράς και ρήχωσης όπως παρουσιάστηκαν από τους Chondros και Memos (2014). Οι νέοι συντελεστές είναι συνάρτηση του βάθους και υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.38), (2.39) και (2.41).

Εξίσωση Darcy - Forchheimer για τη ροή εντός του πορώδους μέσου

$$c_r\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s\nabla\mathbf{u}_s = -g\nabla\eta + \varphi\alpha_1\mathbf{u}_s + \varphi^2\alpha_2\mathbf{u}_s|\mathbf{u}_s| \quad (3.3)$$

όπου ο συντελεστής αδράνειας

$$c_r = \frac{1 + c_m}{\varphi} = \frac{1 + \gamma\frac{1-\varphi}{\varphi}}{\varphi} \quad (3.4)$$

οι συντελεστές αντίστασης

$$\alpha_1 = \frac{\nu}{K} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{C_f}{\sqrt{K}} \quad (3.5)$$

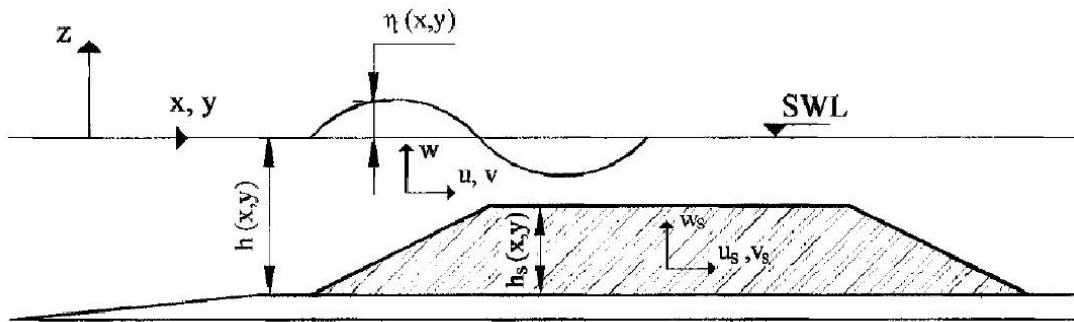
η γεωμετρική διαπερατότητα

$$K = \frac{d_{50}^2\varphi^3}{\alpha(1-\varphi)^2} \quad (3.6)$$

και ο συντελεστής  $C_f$

$$C_f = \beta \frac{1-\phi}{\phi} \frac{\sqrt{K}}{d_{50}} \quad (3.7)$$

Περισσότερες λεπτομέρειες για την εξίσωση Darcy - Forchheimer δίνονται στην παράγραφο 2.3.4.



**Σχ. 3.1:** Ορισμός μεταβλητών του μοντέλου [Μεταλληνός, 2011]

### 3.2 Απορροφητικά όρια

Η διαχείριση των απορροφητικών ορίων στα αριθμητικά μοντέλα είναι αρκετά δύσκολη καθώς η ενέργεια που φτάνει σε αυτά από το υπολογιστικό πεδίο θα πρέπει να απορροφάται πλήρως. Η πιο συνηθισμένη συνθήκη που χρησιμοποιείται είναι η συνθήκη ελεύθερης ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$\eta_t + c \cos \theta \eta_x = 0 \quad (3.8)$$

όπου  $c$  η ταχύτητα φάσης και  $\theta$  η διεύθυνση διάδοσης κοντά στο όριο. Στη γενική όμως περίπτωση διασπειρόμενων κυματισμών σε δισδιάστατο πεδίο δεν υπάρχει μία μοναδική ταχύτητα φάσης και η γωνία  $\theta$  δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Η λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε την ταχύτητα φάσης των μακρών κυμάτων  $c = \sqrt{gh}$  και μία προσεγγιστική συνθήκη ακτινοβολίας (Wei and Kirby, 1995), η οποία όταν η διεύθυνση διάδοσης είναι κοντά στον άξονα  $x$  γράφεται

$$\eta_{tt} + c \eta_{xt} - \frac{c^2}{2} \eta_{yy} = 0 \quad (3.9)$$

Η σχέση (3.9) δεν είναι ακριβής και εισάγει ανακλάσεις στο υπολογιστικό πεδίο. Οι ανακλάσεις αποσβένονται με τη χρήση μιας στοιβάδας απορρόφησης (sponge layer). Η ανύψωση  $\eta$  και οι ταχύτητες  $u$  και  $v$  διαιρούνται με το συντελεστή απορρόφησης  $m$  ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$m(x) = 1 + dks(i, j) = 1 + 0.25 f(x) \quad (3.10)$$

με

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x - x_s}{x_m - x_s}\right)^2 - 1}{\exp(1) - 1} \quad (3.11)$$

όπου  $x_m$  η αρχή και  $x_s$  το πέρας της στοιβάδας απορρόφησης. Αντίστοιχες σχέσεις γράφονται και για τη διεύθυνση  $y$ . Οι Wei και Kirby (1995) προτείνουν το πάχος της στοιβάδας απορρόφησης να λαμβάνεται δύο με τρεις φορές το μήκος κύματος. Αριθμητικές προσομοιώσεις έχουν δείξει ότι ο συνδυασμός της συνθήκης ακτινοβολίας με απορροφητικό στρώμα είναι πιο αποτελεσματικός από ότι κάθε μια από αυτές τις μεθόδους ξεχωριστά (Wei and Kirby, 1995).

### 3.3 Γένεση κυματισμών

Εφαρμόζεται η μέθοδος συνάρτησης πηγής που πρότειναν οι Wei et al. (1999) βασιζόμενοι στις εξισώσεις του Nwogu (1993), όπως τροποποιήθηκε από τους Memos et al. (2005) για να είναι συμβατή με τις εξισώσεις του παρόντος μοντέλου. Η μέθοδος συνδυάζεται με την τοποθέτηση στοιβάδων απορρόφησης στα όρια του υπολογιστικού πεδίου για την αποφυγή ανακλάσεων. Για κανονικούς κυματισμούς γωνιακής συχνότητας  $\omega$  που διαδίδονται κατά τον άξονα  $x$  η συνάρτηση πηγής γράφεται

$$f_s(x, y, t) = F(y, t) \exp[-\beta_s(x - x_s)]^2 \quad (3.12)$$

όπου  $x_s$  είναι το κέντρο της πηγής στη διεύθυνση  $x$ ,  $F(y, t)$  η συνάρτηση της πηγής για πηγή παράλληλη στον άξονα  $y$  και  $\beta_s$  ο συντελεστής σχήματος της πηγής με

$$\beta_s = \frac{80}{(\delta L)^2} \quad (3.13)$$

Για να αποφύγουμε την εμφάνιση θορύβου γύρω από την πηγή πρέπει η συνάρτηση πηγής να κατανέμεται σε ένα εύρος γύρω από το κέντρο. Η επιλογή  $\delta = 0.3$  δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Η συνάρτηση πηγής δίνεται από τη σχέση

$$F(y, t) = D_s \sin(\omega t) \quad (3.14)$$

και το εύρος της συνάρτησης πηγής

$$D_s = \frac{2\eta_0 [1 + B(kd)^2] (\omega^2 + Bgk^4 d^3) \cos \theta}{\omega I_1 k \left[ 1 + \left( B + \frac{1}{3} \right) (kd)^2 \right]} \quad (3.15)$$

όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης διάδοσης και του άξονα  $x$ ,  $B=1/15$  και η παράμετρος  $I_1$

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\beta_s}} \exp\left(-\frac{(k \cos \theta)^2}{4\beta_s}\right) \quad (3.16)$$

Η συνάρτηση πηγής  $f_s(x, y, t)$  τελικά προστίθεται στην εξίσωση συνέχειας.

### 3.4 Θραύση κυματισμών

Τα μοντέλα Boussinesq αδυνατούν να προσομοιώσουν την απώλεια ενέργειας λόγω θραύσης των κυματισμών, αδυναμία η οποία καλύπτεται με την εισαγωγή υπομοντέλων θραύσης. Αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την ανάπτυξη τέτοιων μεθόδων, μεταξύ άλλων οι Schaffer et al. (1993), Madsen et al. (1997), Svendsen et al. (1996), Kennedy et al. (2000), δημιουργώντας διάφορους τύπους μοντέλων τα οποία μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, τα μοντέλα θραύσης κυλίνδρου και τα μοντέλα τυρβώδους συνεκτικότητας. Εμείς θα αναφερθούμε στο μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας, όπως περιγράφεται από τους Kennedy et al. (2000).

Η απώλεια ενέργειας λόγω της θραύσης περιγράφεται από έναν όρο ο οποίος προστίθεται στην εξίσωση ορμής

$$R_{bx} = \frac{1}{h+\eta} \left\{ \left( v_e [(h+\eta)u]_x \right)_x + \frac{1}{2} \left( v_e [(h+\eta)u]_y + v_e [(h+\eta)v]_x \right)_y \right\} \quad (3.17)$$

$$R_{by} = \frac{1}{h+\eta} \left\{ \left( v_e [(h+\eta)v]_y \right)_y + \frac{1}{2} \left( v_e [(h+\eta)v]_x + v_e [(h+\eta)u]_y \right)_x \right\} \quad (3.18)$$

Η τυρβώδης συνεκτικότητα  $v_e$  μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση και το χρόνο και είναι εντοπισμένη στο μέτωπο του θραυόμενου κύματος, όπως άλλωστε συμβαίνει στη φύση. Δίνεται από τη σχέση

$$v_e = B\delta_b^2 (h+\eta)\eta_t \quad (3.19)$$

Ο συντελεστής μήκους ανάμιξης  $\delta_b$  παίρνει τιμές 1.2 - 1.8 (Chen et al., 1999). Γενικά οι υπολογισμοί δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητοι σε αυτή την παράμετρο. Η παράμετρος  $B$  παίρνει τιμές από 0 μέχρι 1 και πρέπει να μεταβάλλεται ομαλά για την αποφυγή αστάθειας από μια απότομη έναρξη της θραύσης.

$$B = \begin{cases} 1, & \eta_t \geq 2\eta_t^* \\ \frac{\eta_t}{\eta_t^*} - 1, & \eta_t^* < \eta_t \leq 2\eta_t^* \\ 0, & \eta_t \leq \eta_t^* \end{cases} \quad (3.20)$$

Η θραύση ξεκινάει όταν η ποσότητα  $\eta_t$  ξεπεράσει μια αρχική τιμή  $\eta_t^*$ . Όμως από τη στιγμή που θα ξεκινήσει, συνεχίζεται ακόμα και αν το  $\eta_t$  γίνει μικρότερο από αυτή την αρχική τιμή. Αυτό εκφράζεται με τη μείωση της ποσότητας  $\eta_t^*$  κατά τη διάρκεια ενός γεγονότος θραύσης. Απουσία άλλων δεδομένων η μείωση γίνεται με μια απλή γραμμική σχέση ως εξής

$$\eta_t^* = \begin{cases} \eta_t^{(F)}, & t \geq T^* \\ \eta_t^{(I)} + \frac{t-t_0}{T^*}(\eta_t^{(F)} - \eta_t^{(I)}), & 0 \leq t-t_0 < T^* \end{cases} \quad (3.21)$$

όπου  $T^*$  η διάρκεια του γεγονότος,  $t_0$  ο χρόνος έναρξης της θραύσης και  $t - t_0$  η ηλικία του γεγονότος θραύσης. Οι παράμετροι αυτές προκύπτουν μετά από βαθμονόμηση του εκάστοτε μοντέλου. Ενδεικτικές τιμές δίνονται για το χρόνο  $T^* = 5\sqrt{h/g}$ , για την παράμετρο  $\eta_t^{(F)} = 0.15\sqrt{gh}$  και για την  $\eta_t^{(I)}$  από  $0.35\sqrt{gh}$  για ακτές με ύφαλα εμπόδια και τάφρους μέχρι  $0.65\sqrt{gh}$  για πυθμένα με σταθερή κλίση.

Ο υπολογισμός της ηλικίας του γεγονότος  $t - t_0$  είναι απλός για μονοδιάστατο μοντέλο, ενώ σε δισδιάστατο πεδίο απαιτείται επιπλέον ο προσδιορισμός της κατεύθυνσης του κύματος. Από τη συνθήκη ελεύθερης ακτινοβολίας του Sommerfeld έχουμε (Chen et al., 2000).

$$c = -\frac{\eta_t}{\eta_x^2 + \eta_y^2} \nabla \eta \quad (3.22)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\eta_y}{\eta_x} \right) \quad (3.23)$$

Το κριτήριο (3.20) αποτελεί μαθηματική σύμβαση και όχι φυσική συνθήκη. Άλλωστε στα μοντέλα Boussinesq οι μορφές κυλίσεως και εκτινάξεως δεν μπορούν να προσομοιωθούν λόγω της παραδοχής αστρόβιλης ροής. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν και άλλα κριτήρια που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Το  $\eta_t^*$  έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ήδη γνωστό από την επίλυση των εξισώσεων και παρέχει επαρκή ευστάθεια σε σχέση με άλλα κριτήρια (Kennedy et al., 2000).

### 3.5 Τριβή στον πυθμένα

Η διατμητική τάση στον πυθμένα προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση τετραγωνικής μορφής

$$\tau_b = \frac{1}{h + \eta} f_{cw} \mathbf{u} |\mathbf{u}| \quad (3.24)$$

όπου  $|\mathbf{u}| = \sqrt{u^2 + v^2}$  και  $f_{cw}$  ο συντελεστής τριβής πυθμένα.

### 3.6 Αριθμητικό σχήμα επίλυσης

Εφαρμόστηκε το αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών που ανέπτυξαν οι Wei και Kirby (1995). Σκοπός τους ήταν η εξάλειψη των σφαλμάτων αποκοπής που είναι της ίδιας μορφής με τους όρους διασποράς του μοντέλου. Σε συνηθισμένους καννάβους τα σφάλματα αυτά μπορούν να πάρουν αρκετά μεγάλες τιμές και να εισάγουν ανακρίβειες στη λύση. Τα χαμηλότερης τάξης αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούνταν συνήθως σε τέτοιου τύπου εξισώσεις αντικαθιστούν τα σφάλματα αποκοπής στο αρχικό σχήμα (back substitution), ενσωματώνοντάς τα στη διασπορά του μοντέλου. Με τη μέθοδο των Wei και Kirby η διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων πρώτης τάξης γίνεται με ακρίβεια τέταρτης τάξης, ενώ οι όροι διασποράς διακριτοποιούνται με ακρίβεια δεύτερης τάξης. Έτσι εξασφαλίζεται ότι τα σφάλματα είναι μικρότερα από τους όρους κάθε τάξης που περιέχεται στις εξισώσεις. Για την επίλυση εφαρμόζεται ένα σύνθετο αριθμητικό σχήμα πρόβλεψης διόρθωσης (predictor - corrector scheme) που αποτελείται από το σχήμα τρίτης τάξης Adams-Bashforth (πρόβλεψης) και το τέταρτης τάξης Adams-Moulton (διόρθωσης). Παρακάτω παρουσιάζεται το σχήμα ενδεικτικά για την ανύψωση ενώ για τις ταχύτητες ακολουθείται η ίδια διαδικασία.

Για το σχήμα πρόβλεψης έχουμε

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{12} \left[ 23E_{i,j}^n - 16E_{i,j}^{n-1} + 5E_{i,j}^{n-2} \right] \quad (3.25)$$

όπου

$$E = \left[ (h + \eta)u \right]_x + \left[ (h + \eta)v \right]_y \quad (3.26)$$

Η ανύψωση υπολογίζεται απευθείας. Για τις ταχύτητες προκύπτουν τριδιαγώνιοι πίνακες οι οποίοι επιλύονται με τη μέθοδο Thomas. Κατόπιν εφαρμόζουμε το σχήμα διόρθωσης

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{24} \left[ 9E_{i,j}^{n+1} + 19E_{i,j}^n - 5E_{i,j}^{n-1} + E_{i,j}^{n-2} \right] \quad (3.27)$$

Το σχήμα διόρθωσης επαναλαμβάνεται μέχρι το σφάλμα μεταξύ δύο διαδοχικών προσεγγίσεων να γίνει μικρότερο από μια προκαθορισμένη τιμή.

Οι χωρικές παράγωγοι υπολογίζονται ως εξής

$$(w_x)_{i,j} = \frac{1}{12\Delta x} \left[ 8(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (w_{i+2,j} - w_{i-2,j}) \right] \quad (3.28)$$

$$(w_{xx})_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) \quad (3.29)$$

όπου  $w = u, v, \eta$ , και αντίστοιχα για τη διεύθυνση  $y$ , και οι χρονικές παράγωγοι για το σχήμα πρόβλεψης

$$(w_t)_{i,j}^n = \frac{1}{2\Delta t} (3w_{i,j}^n - 4w_{i,j}^{n-1} + w_{i,j}^{n-2}) + O(\Delta t^2) \quad (3.30)$$

$$(w_t)_{i,j}^{n-1} = \frac{1}{2\Delta t} (w_{i,j}^n - w_{i,j}^{n-2}) + O(\Delta t^2) \quad (3.31)$$

$$(w_t)_{i,j}^{n-2} = -\frac{1}{2\Delta t} (3w_{i,j}^{n-2} - 4w_{i,j}^{n-1} + w_{i,j}^n) + O(\Delta t^2) \quad (3.32)$$

και για το σχήμα διόρθωσης

$$(w_t)_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} (11w_{i,j}^{n+1} - 18w_{i,j}^n + 9w_{i,j}^{n-1} - 2w_{i,j}^{n-2}) + O(\Delta t^3) \quad (3.33)$$

$$(w_t)_{i,j}^n = \frac{1}{6\Delta t} (2w_{i,j}^{n+1} + 3w_{i,j}^n - 6w_{i,j}^{n-1} + w_{i,j}^{n-2}) + O(\Delta t^3) \quad (3.34)$$

$$(w_t)_{i,j}^{n-1} = -\frac{1}{6\Delta t} (2w_{i,j}^{n-2} + 3w_{i,j}^{n-1} - 6w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n+1}) + O(\Delta t^3) \quad (3.35)$$

$$(w_t)_{i,j}^{n-2} = -\frac{1}{6\Delta t} (11w_{i,j}^{n-2} - 18w_{i,j}^{n-1} + 9w_{i,j}^n - 2w_{i,j}^{n+1}) + O(\Delta t^3) \quad (3.36)$$

όπου  $w = u, v$



### 3.7 Μείξη εντός του καννάβου

Η απόσβεση ενέργειας λόγω της θραύσης λαμβάνεται υπόψη μέσω της εισαγωγής στο μοντέλο ενός όρου τυρβώδους συνεκτικότητας, όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.4. Ωστόσο, απόσβεση ενέργειας συμβαίνει και σαν αποτέλεσμα των διαδικασιών μείξης που λαμβάνουν χώρα σε κλίμακα μικρότερη από αυτή της διακριτοποίησης (subgrid turbulent mixing). Σε μια συνηθισμένη προσομοίωση επιφανειακών κυματισμών, το τυπικό βάθος είναι μεγαλύτερο από το μέγεθος των κελιών του καννάβου με αποτέλεσμα η οριζόντια κατανομή της τυρβώδους συνεκτικότητας που προκύπτει από τις διαδικασίες ανάμειξης εντός των κελιών να επηρεάζει σημαντικά το πεδίο ταχυτήτων. Αν η επίδραση αυτή δε ληφθεί υπόψη το πεδίο ταχυτήτων που δημιουργείται μπορεί να είναι χαοτικό (Chen et al., 1999). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε ένα απλό μοντέλο υποπλέγματος (subgrid model) τύπου Smagorinsky (Smagorinsky, 1963). Τέτοιου είδους μοντέλα χρησιμοποιούνται σε άλλου είδους προσομοιώσεις (RANS, LES) για τη μοντελοποίηση της τύρβης. Εδώ μας ενδιαφέρει απλά να εισάγουμε τεχνητή διάχυση ώστε να επιτύχουμε την ευστάθεια του μοντέλου. Προσθέτουμε στην εξίσωση ορμής έναν όρο αντίστοιχο με αυτό της θραύσης

$$E_x = \frac{1}{h+\eta} \left\{ \left[ \mu \left( (h+\eta) u \right)_x \right]_x + \frac{1}{2} \mu \left[ \left( (h+\eta) u \right)_y + \left( (h+\eta) v \right)_x \right]_x \right\} \quad (3.37)$$

$$E_y = \frac{1}{h+\eta} \left\{ \left[ \mu \left( (h+\eta) v \right)_y \right]_y + \frac{1}{2} \mu \left[ \left( (h+\eta) u \right)_y + \left( (h+\eta) v \right)_x \right]_x \right\} \quad (3.38)$$

Ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας  $\mu$  δίνεται από τη σχέση

$$\mu = (C_s \Delta)^2 \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad (3.39)$$

όπου  $\Delta = (\Delta_1 \Delta_2)^{1/2}$  με  $\Delta_1 = 2\Delta x$ ,  $\Delta_2 = 2\Delta y$  και  $C_s$  μια αδιάστατη παράμετρος που συνήθως παίρνει τιμές από 0.2 έως 0.25.

Αμελώντας τις χωρικές παραγώγους του βάθους στις σχέσεις (3.37) και (3.38) έχουμε τελικά

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (3.40)$$

$$E_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (3.41)$$

### 3.8 Προφίλ ταχυτήτων

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος υπολογισμού του κατακόρυφου προφίλ ταχυτήτων, ο οποίος εντάχθηκε στο μοντέλο mCM14. Η μέθοδος προτάθηκε και εφαρμόστηκε για μονοδιάστατο πεδίο ταχυτήτων από τους Metallinos and Memos (2012) και επεκτάθηκε εδώ για διδιάστατο πεδίο. Χρησιμοποιούμε ένα εκθετικό προφίλ που προτείνεται από τον Dingemans (1997) για μη θραυόμενους, μη γραμμικούς κυματισμούς

$$u(z) = \bar{u} - \left[ \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 (h\bar{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right] - \left[ z \frac{\partial^2 (h\bar{u})}{\partial x^2} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right] \quad (3.42)$$

όπου  $\bar{u}$  η μέση στο βάθος ταχύτητα,  $h$  το συνολικό βάθος και  $z$  η απόσταση από τη στάθμη ηρεμίας.

Για να χρησιμοποιήσουμε το προφίλ αυτό στην περιοχή της κατασκευής πρέπει να υπολογίσουμε μια ενιαία μέση ταχύτητα, η οποία προκύπτει ως (Metallinos and Memos, 2012)

$$u_M^2 = \frac{u_s^2 h_s + u^2 d}{h} \quad (3.43)$$

όπου  $h_s$  το ύψος της κατασκευής,  $d$  το ύψος του νερού πάνω από την κατασκευή και  $h=d+h_s$  το συνολικό βάθος. Κατόπιν, ολοκληρώνοντας την κατανομή της  $u_M$  που προκύπτει από τη σχέση (3.42) στο  $h_s$  και στο  $d$  βρίσκουμε δύο νέες μέσες τιμές για τις ταχύτητες στο νερό και στο πορώδες μέσο αντίστοιχα,  $u_{s1}$  και  $u_1$ , οι οποίες διαφέρουν από αυτές που υπολογίζονται από το μοντέλο Boussinesq.

$$u_{s1} = \frac{1}{h_s} \int_{-h}^{-d} u_M(z) dz \quad , \quad u_1 = \frac{1}{d} \int_{-d}^0 u_M(z) dz \quad (3.44)$$

Πολλαπλασιάζοντας την κατανομή της ενιαίας μέσης ταχύτητας  $u_M$  με τους λόγους  $\alpha = \frac{u_s}{u_{s1}}$  και  $\beta = \frac{u}{u_1}$  προκύπτουν οι τελικές κατανομές στο πορώδες μέσο και στο νερό

$$u_s(z) = \alpha \left\{ u_M - \left[ \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 (hu_M)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 u_M}{\partial x^2} \right] - \left[ z \frac{\partial^2 (hu_M)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 u_M}{\partial x^2} \right] \right\} \quad (3.45)$$

$$u(z) = \beta \left\{ u_M - \left[ \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 (hu_M)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2 u_M}{\partial x^2} \right] - \left[ z \frac{\partial^2 (hu_M)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 u_M}{\partial x^2} \right] \right\} \quad (3.46)$$

Όμοια υπολογίζονται και οι κατανομές των ταχυτήτων  $v$  και  $v_s$  στην άλλη διεύθυνση.

## 4. Περιγραφή πειραματικών διατάξεων

---

### 4.1 Εισαγωγή

Για την επαλήθευση του μοντέλου έγινε σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τις πειραματικές μετρήσεις που διεξήχθησαν στα πλαίσια του ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος DELOS (DELOS, 2002). Το πρόγραμμα DELOS αποτελεί τη μοναδική ολοκληρωμένη έρευνα που αφορά κατασκευές χαμηλής στέψης (LCS) στην Ευρώπη. Στόχος του ήταν η συλλογή τεχνογνωσίας ώστε να παρέχει κάποιες κατευθυντήριες γραμμές για το σχεδιασμό τέτοιων έργων στον ευρωπαϊκό χώρο.

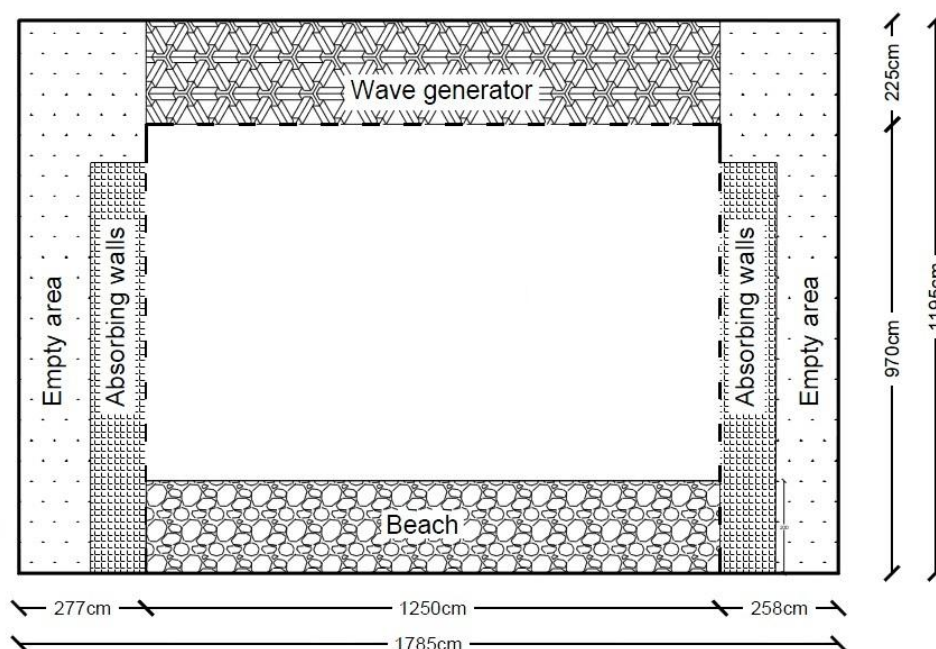
Τα δισδιάστατα πειράματα πραγματοποιήθηκαν στη δεξαμενή κυμάτων του πανεπιστημίου Aalborg (AAU) στη Δανία και χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το σκοπό του πειράματος

- πειράματα δομικής σταθερότητας της κατασκευής
- μελέτη υδροδυναμικού πεδίου
- κυματική μετάδοση

Στόχος των πειραμάτων υδροδυναμικής ήταν η μελέτη των ταχυτήτων γύρω από ύφαλους κυματοθραύστες και έξαλους κυματοθραύστες χαμηλής στέψης, ο προσδιορισμός των ανυψώσεων και της υπερπήδησης της κατασκευής και η συλλογή δεδομένων για τον έλεγχο και τη βαθμονόμηση αριθμητικών μοντέλων.

### 4.2 Πειραματική διάταξη

Η δεξαμενή έχει διαστάσεις 18 m x 12 m. Τα περύγια της κυματογεννήτριας (paddles) έχουν ύψος 0.7 m επομένως το μέγιστο βάθος νερού είναι περίπου 0.5 m. Το δάπεδο κατασκευάστηκε από σκυρόδεμα και η ακτή από πέτρες λατομείου μέσης διαμέτρου  $D_{n50} = 1.5$  cm. Τα απορροφητικά όρια αποτελούνται από πέτρες θαλάσσης μέσης διαμέτρου  $D_{n50}$  περίπου 5 cm τοποθετημένες μέσα σε κιβώτια διαστάσεων 1.21 m x 1.21 m x 0.7 m. Η κυματογεννήτρια έχει τη δυνατότητα να παράγει απλούς και σύνθετους κυματισμούς, δισδιάστατους και τρισδιάστατους, με μέγιστη περίοδο 3 s.

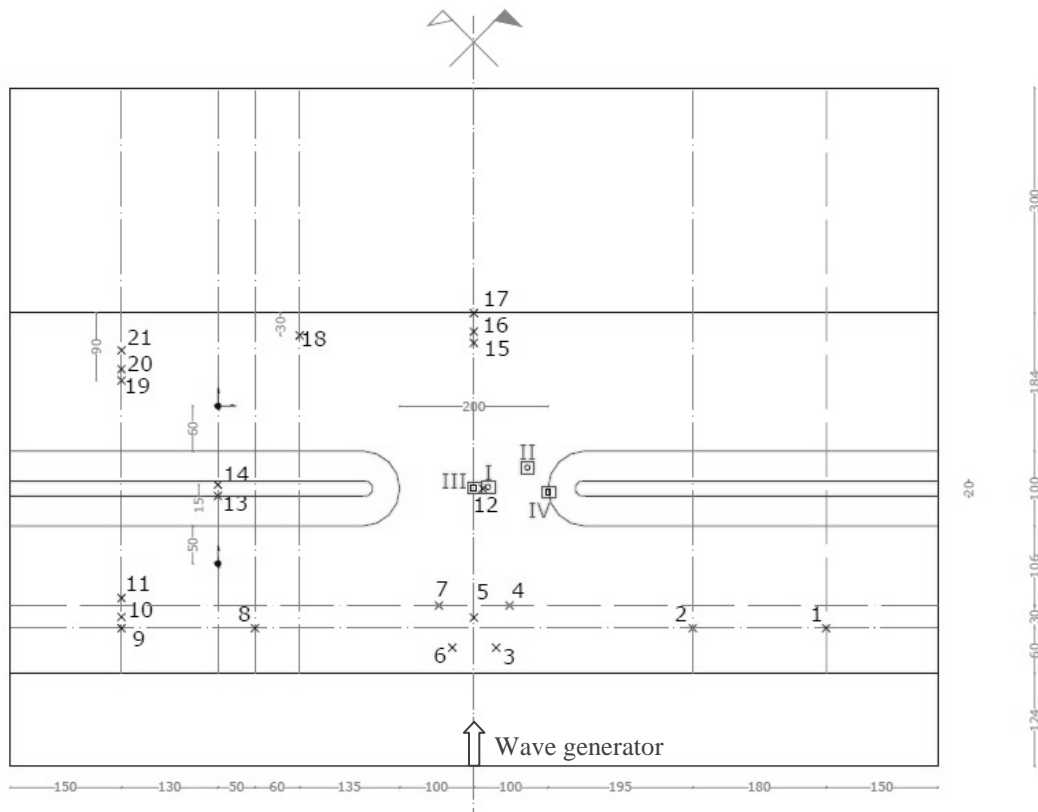


**Σχ. 4.1:** Κάτοψη δεξαμενής AAU [DELOS Internal Report D31]

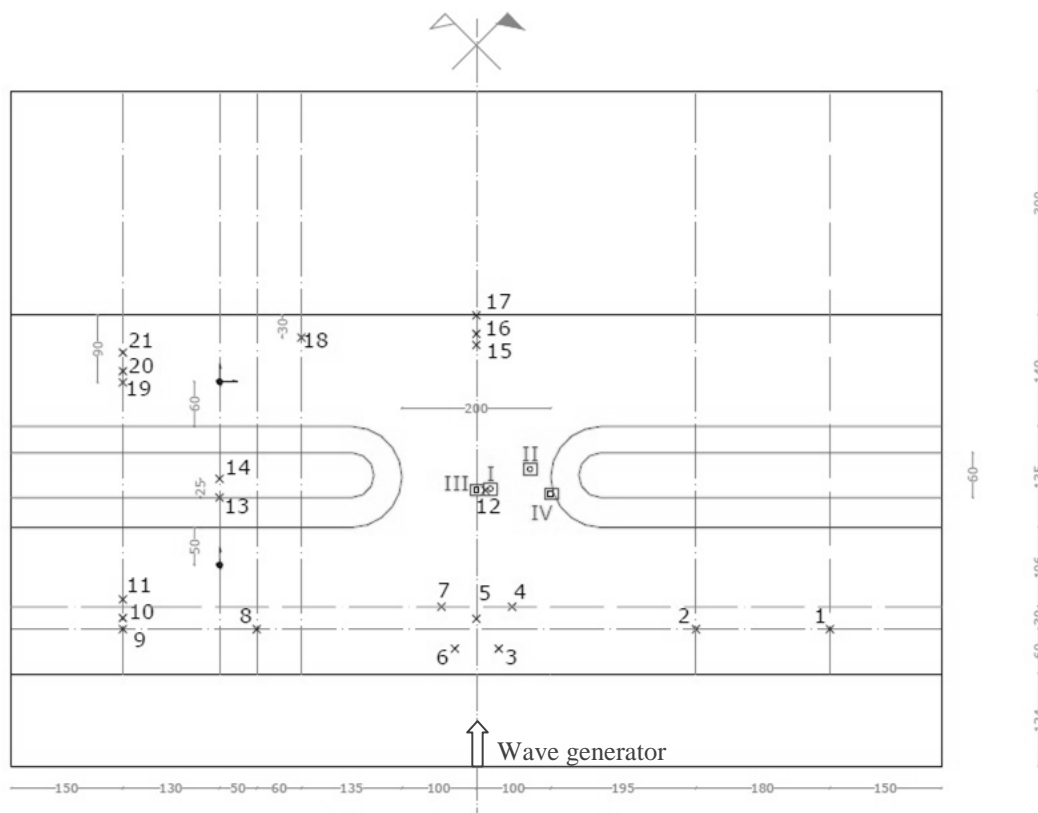
Εξετάστηκαν δύο διατάξεις σε κλίμακα 1:20. Η πρώτη (σχήματα 4.2 και 4.3) περιλαμβάνει δύο κυματοθραύστες παράλληλους προς την ακτή με ενδιάμεσο κενό. Στα πλευρικά όρια τοποθετήθηκαν οδηγοί από κόντρα πλακέ, από την κυματογεννήτρια μέχρι το ύψος της κατασκευής, ώστε να εξασφαλιστούν ομοιόμορφες συνθήκες σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη περιοχή. Στη δεύτερη υπάρχει ένας κυματοθραύστης με κλίση  $30^\circ$  προς την ακτή. Αριθμητική προσομοίωση έγινε μόνο για την πρώτη διάταξη. Σε κάθε διάταξη μελετήθηκαν δύο τύποι κυματοθραύστη, ένας με μικρό πλάτος στέγης (narrow berm) και ένας με μεγάλο πλάτος στέγης (wide berm). Για την κατασκευή τους χρησιμοποιήθηκαν πέτρες λατομείου. Οι διατομές τους φαίνονται στα σχήματα 4.4 και 4.5 αντίστοιχα και τα χαρακτηριστικά των υλικών κατασκευής στον πίνακα 4.1 Το βύθισμα της ύφαλης κατασκευής (freeboard) ήταν 7 cm, ενώ ελέγχθηκαν άλλες δύο περιπτώσεις, έξαλης κατασκευής και μηδενικού freeboard, με τις οποίες δε θα ασχοληθούμε.

**Πιν. 4.1:** Χαρακτηριστικά υλικών

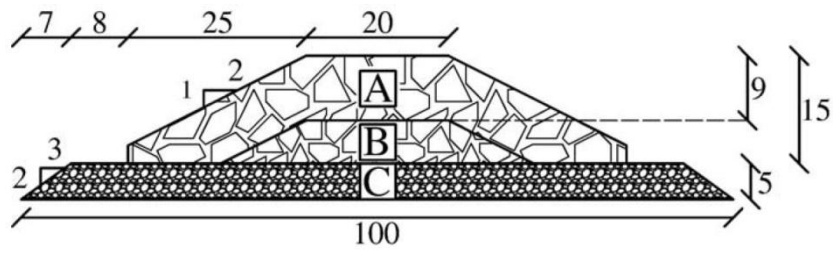
Τύπος υλικού	$D_{n50}$ (cm)	
	Κορμός	Ακρομώλιο
A	4.5	5.0
B	3.1	3.1
C	1.5	1.5



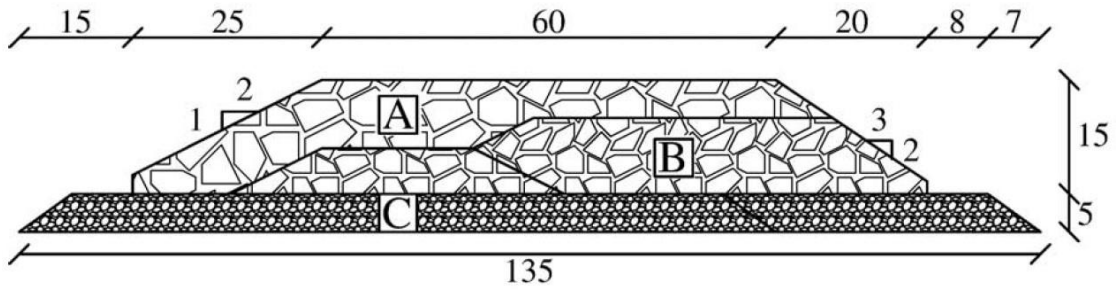
**Σχ. 4.2:** Κάτοψη πειραματικής διάταξης narrow berm διαστάσεις σε cm [DELOS Internal Report D31]



**Σχ. 4.3:** Κάτοψη πειραματικής διάταξης wide berm διαστάσεις σε cm [DELOS Internal Report D31]



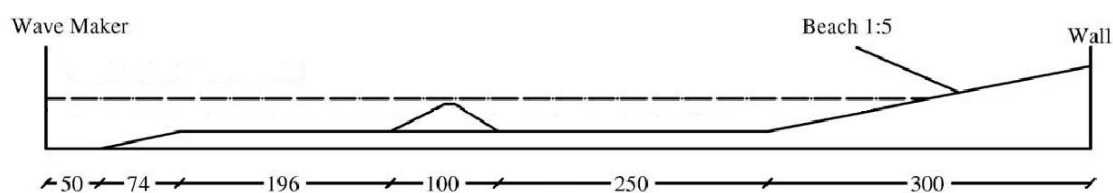
**Σγ. 4.4:** Διατομή narrow berm διαστάσεις σε cm [Kramer et al. , 2005]



**Σγ. 4.5:** Διατομή wide berm διαστάσεις σε cm [Kramer et al. , 2005]

### 4.3 Μετρήσεις

Τα σημεία στα οποία τοποθετήθηκαν τα όργανα μέτρησης φαίνονται στις κατόψεις (σχήματα 4.4 και 4.5). Με X φαίνονται οι κυματομετρητές για τη μέτρηση της ανύψωσης (1-21) τα F, B, III, IV είναι όργανα μέτρησης της στιγμιαίας ταχύτητας τύπου ADV (Acoustic Doppler Velocimeter) και τα I, II ρευματογράφοι τύπου ADVP (Acoustic Doppler Profiler) για τη μέτρηση της κατανομής της ταχύτητας ρευμάτων. Στα πειράματα με απλούς κυματισμούς, η συλλογή των δεδομένων ξεκινούσε δέκα λεπτά μετά την έναρξη του πειράματος και διαρκούσε δέκα λεπτά. Η συχνότητα καταγραφής ήταν 40 Hz, δηλαδή 24000 καταγραφές για κάθε πείραμα.



**Σχ. 4.6:** Τομή πειραματικής διάταξης διαστάσεις σε cm [Kramer et al. , 2005]



**Εικ. 4.1:** Πειραματική διάταξη [DELOS Integral Report D31]





## 5. Σύγκριση - Αποτελέσματα

---

### 5.1 Εφαρμογή του μοντέλου

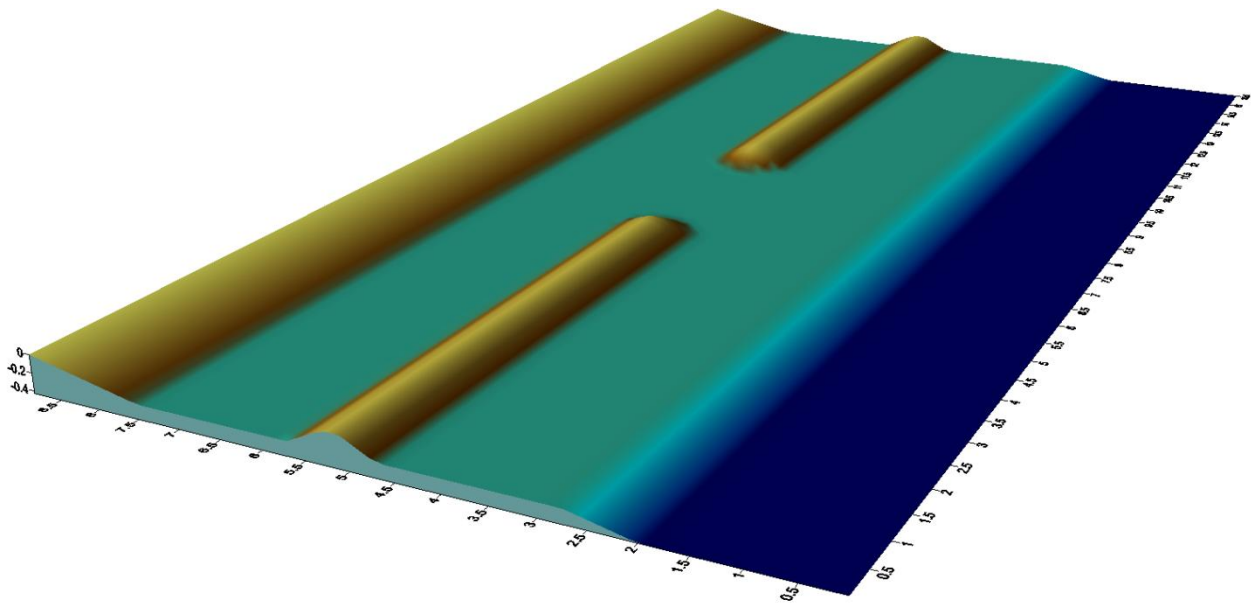
Έγινε επίλυση για δύο ύφαλους κυματοθραύστες με βύθισμα 0.07 m και πλάτος στέψης 0.2 m και 0.6 m. Οι διατομές τους φαίνονται στα σχήματα 4.4 και 4.5 του προηγούμενου κεφαλαίου. Τα χαρακτηριστικά του υπολογιστικού πεδίου, η βαθυμετρία και τα κυματικά χαρακτηριστικά επιλέχθηκαν ώστε να προσομοιώνουν αυτά του πειράματος.

Το πορώδες της κατασκευής ορίστηκε 0.49 και η μέση διάμετρος του υλικού 3.5 cm. Για τους συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$ , και  $\gamma$  του υλικού επιλέχθηκαν οι τιμές 1000, 1.1 και 0.34 όπως προτείνεται από τον Van Gent (1995). Το βάθος του νερού στην περιοχή της κατασκευής είναι 0.27 m και μπροστά από την κυματογεννήτρια 0.43 m. Η ακτή έχει κλίση 1:5. Η βαθυμετρία φαίνεται στα σχήματα 5.1 και 5.2 για την κατασκευή μικρού πλάτους στέψης και μεγάλου πλάτους στέψης αντίστοιχα. Για διευκόλυνση, το βάθος στο μοντέλο θεωρήθηκε ενιαίο από την κυματογεννήτρια μέχρι την κατασκευή και ίσο με 0.27 m. Το ύψος κύματος που εισήχθη στη συνάρτηση πηγής επιλέχθηκε ώστε ο παραγόμενος κυματισμός να ταυτίζεται με την πειραματική μέτρηση στους πρώτους σταθμούς.

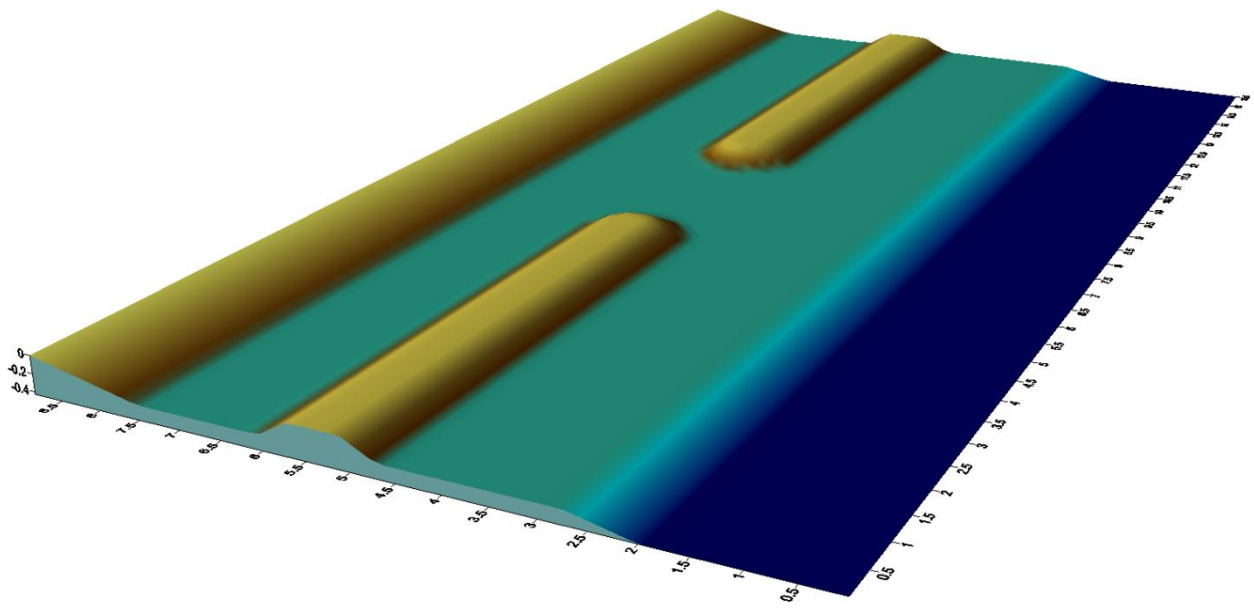
Προσομοιώθηκαν μόνο απλοί (μονοχρωματικοί) κυματισμοί, με περίοδο 1.28 s. Το χρονικό και χωρικό βήμα διακριτοποίησης ορίστηκαν 0.1 s και 0.05 m αντίστοιχα και επιλέχθηκαν ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος. Ο χρόνος που προσομοιώθηκε ήταν 50 s. Στον πίνακα 5.1 καταγράφονται οι τιμές των ελεύθερων παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση.

**Πιν. 5.1:** Παράμετροι επίλυσης

<b>Αριθμός πειράματος</b>	<b>20</b>	<b>38</b>
<b>Διάταξη</b>		
Τύπος κατασκευής	narrow	wide
Βύθισμα (freeboard) (m)	0.07	0.07
Βάθος νερού στην κυματογεννήτρια (m)	0.43 (0.27)	0.43 (0.27)
Βάθος νερού στην κατασκευή (m)	0.27	0.27
<b>Κυματικά χαρακτηριστικά</b>		
Τύπος κυματισμού	regular	regular
Υψος κύματος στα βαθιά (m)	0.1026	0.1026
Περίοδος (s)	1.28	1.28
<b>Υλικό κατασκευής</b>		
Πορώδες	0.49	0.49
Μέση διάμετρος (m)	0.035	0.035
$\alpha$	1000	1000
$\beta$	1.1	1.1
$\gamma$	0.34	0.34
<b>Διακριτοποίηση</b>		
dx (m)	0.05	0.05
dy (m)	0.05	0.05
dt (s)	0.01	0.01
<b>Συντελεστές θραύσης</b>		
$T^*$	$5\sqrt{h/g}$	$5\sqrt{h/g}$
$\eta_t^{(F)}$	$0.15\sqrt{gh}$	$0.15\sqrt{gh}$
$\eta_t^{(I)}$	$0.65\sqrt{gh}$	$0.65\sqrt{gh}$
$\delta_b$	1.2	1.2



**Σγ. 5.1:** Βαθυμετρία narrow berm



**Σγ. 5.2:** Βαθυμετρία wide berm

## 5.2 Αποτελέσματα - Σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις

Από την επίλυση των εξισώσεων Boussinesq προκύπτουν οι χρονοσειρές των ταχυτήτων και της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας σε κάθε κελί του υπολογιστικού πεδίου. Και στις δύο διατάξεις που προσομοιώθηκαν το κύμα είχε περίοδο 1.28 s και ύψος πριν την πρόσπτωση στην κατασκευή περίπου 0.10 m. Ο κυματισμός παρουσιάζει υψηλή μη γραμμικότητα,  $H / h \approx 0.38$  και μέτρια διασπορά,  $h / L_0 \approx 0.10$ .

Στα σχήματα 5.3 και 5.4 για την κατασκευή μικρού και μεγάλου πλάτους στέψης αντίστοιχα, παρουσιάζονται οι χρονοσειρές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας σε επιλεγμένα σημεία και γίνεται σύγκριση με τις αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις. Τα σημεία που επιλέχθηκαν είναι ο αισθητήρας 11 στην προσήνεμη πλευρά του κυματοθραύστη, οι αισθητήρες 18 και 19, στην υπήνεμη πλευρά, ο 13 στη στέψη του κυματοθραύστη, ο 12 ανάμεσα στα δύο ακρομώλια και ο 15 κοντά στην ακτή. Οι χρονοσειρές στα υπόλοιπα σημεία υπάρχουν στο παράρτημα I.

Η διαφορά φάσης μεταξύ των σταθμών αναπαράγεται με ακρίβεια επομένως το μοντέλο mCM14 περιγράφει αποτελεσματικά τη διασπορά συχνοτήτων.

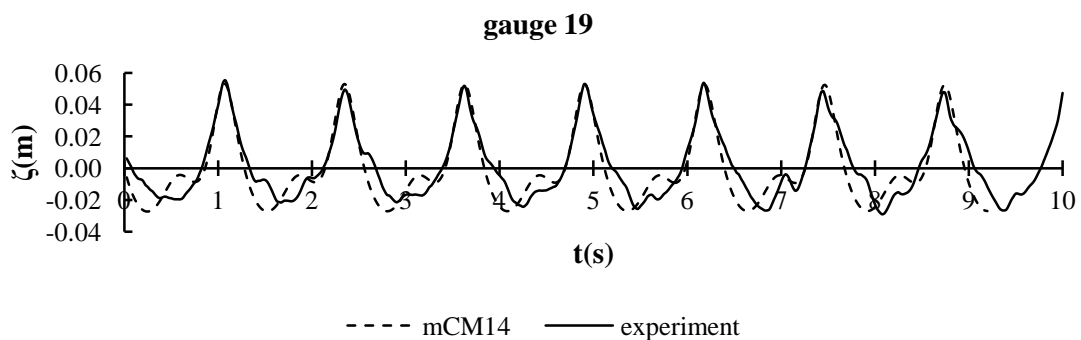
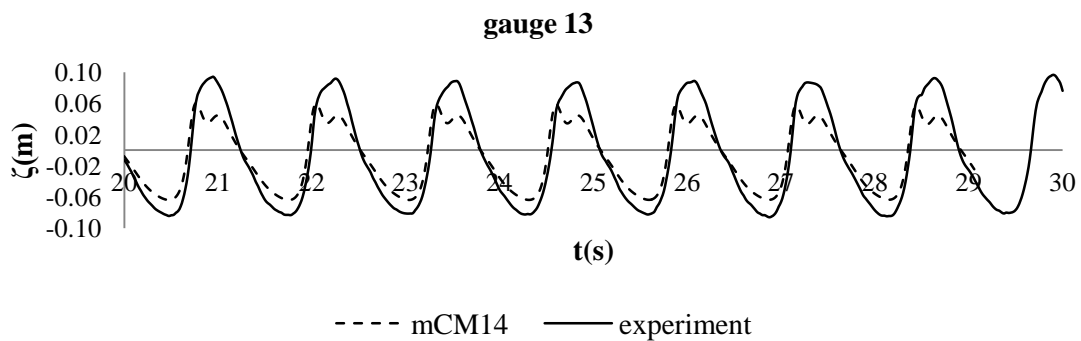
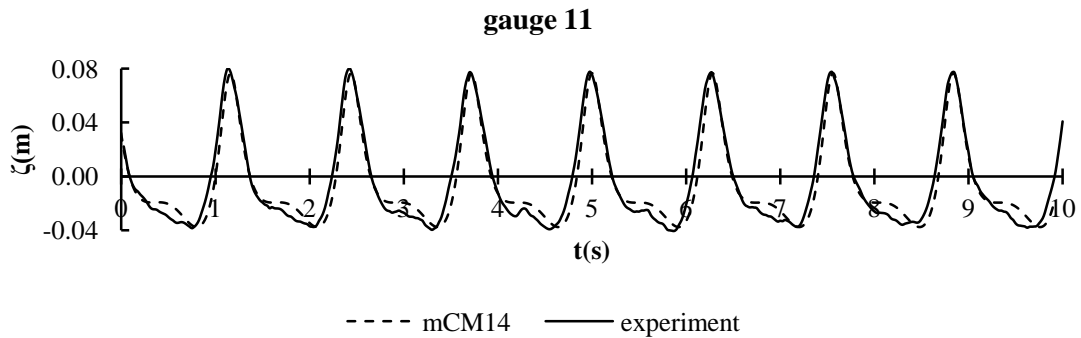
Στον αισθητήρα 11 τα αποτελέσματα είναι πολύ καλά, αποδεικνύοντας ότι το μοντέλο προβλέπει με ακρίβεια τη διάδοση του κυματισμού καθώς και την ανάκλαση από την κατασκευή. Η ανάκλαση εξαρτάται από το freeboard σε σχέση με το ύψος του προσπίπτοντος κυματισμού και από το πλάτος της κατασκευής σε σχέση με το μήκος κύματος (DELOS Internal Report D31, 2003). Προφανώς είναι μικρότερη για μεγαλύτερο πλάτος κατασκευής.

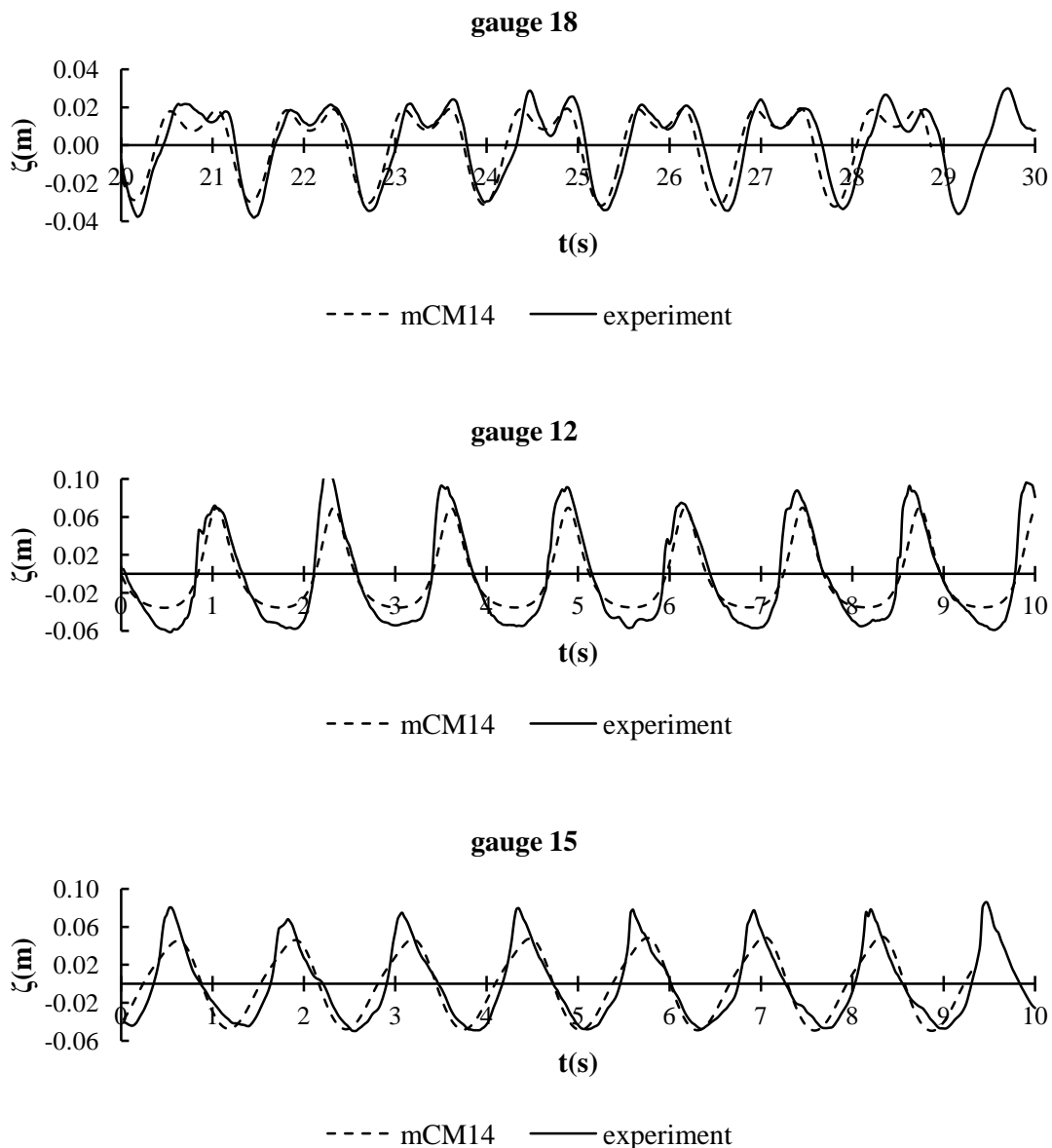
Στον αισθητήρα 13 φαίνονται τα αποτελέσματα της ρήξης και θραύσης του κυματισμού. Καθώς μειώνεται το βάθος του νερού, ελαττώνεται η ταχύτητα ομάδας που είναι ταυτόχρονα και η ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας (βλ. κεφ. 2.2.2), και το μήκος κύματος. Η διατήρηση σταθερής ροής ενέργειας (energy flux) επιβάλλει ανάλογη αύξηση του ύψους κύματος. Το κύμα γίνεται ασύμμετρο και όταν το ύψος υπερβεί μία οριακή τιμή επέρχεται η θραύση. Το μοντέλο φαίνεται να υποεκτιμάει το ύψος κύματος στην περίπτωση του κυματοθραύστη μικρού πλάτους, πιθανότατα επειδή η θραύση στο μοντέλο έχει ξεκινήσει νωρίτερα από ότι στο πείραμα. Ίσως όμως το σφάλμα να είναι αριθμητικό, λόγω του μεγέθους των κελιών του καννάβου σε σχέση με το πλάτος στέψης. Στην κατασκευή μεγάλου πλάτους έχουμε μείωση του ύψους στο σταθμό 13. Τα αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση συμφωνούν με τις πειραματικές μετρήσεις.

Το μοντέλο προβλέπει αρκετά καλά τη δημιουργία υψηλότερων αρμονικών πίσω από την κατασκευή, καθώς και την απόσβεση κυματικής ενέργειας, όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα στους αισθητήρες 18 και 19 και για τις δύο κατασκευές. Όπως ήταν αναμενόμενο η κυματική μετάδοση πίσω από την κατασκευή μεγάλου πλάτους είναι αρκετά μικρότερη (περίπου κατά 17%) σε σχέση με την κατασκευή μικρού

πλάτους. Γι' αυτό και οι narrow berm κυματοθραύστες χαμηλής στέψης κατασκευάζονται συνήθως έξαλοι, με στέψη λίγο πιο ψηλά από την στάθμη ηρεμίας.

Στο σταθμό 12 το μοντέλο υποτιμάει λίγο το εύρος του κύματος, ειδικά στην κατασκευή μικρού πλάτους. Σε αυτό το σημείο ο συνδυασμός περίθλασης, ανάκλασης από την κατασκευή, διάθλασης και ρήχωσης δημιουργούν ένα πολύπλοκο πεδίο ροής που θεωρούμε ότι οδηγεί σε αυτή την ανακρίβεια.





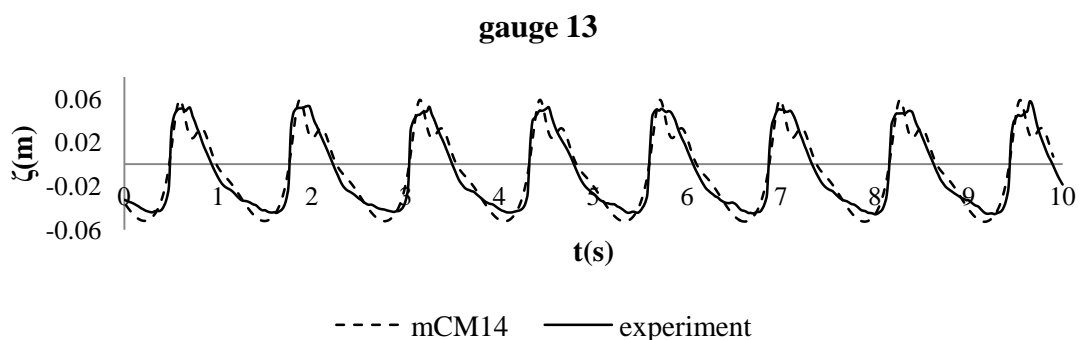
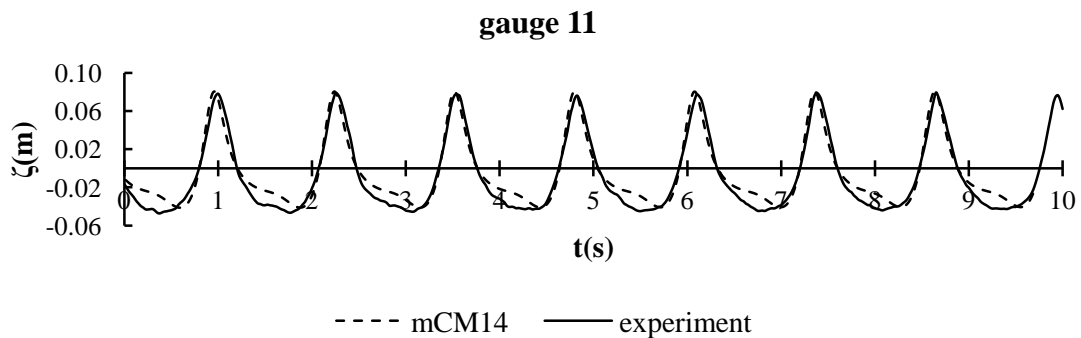
**Σχ. 5.3:** Χρονοσειρές ανύψωσης, narrow berm

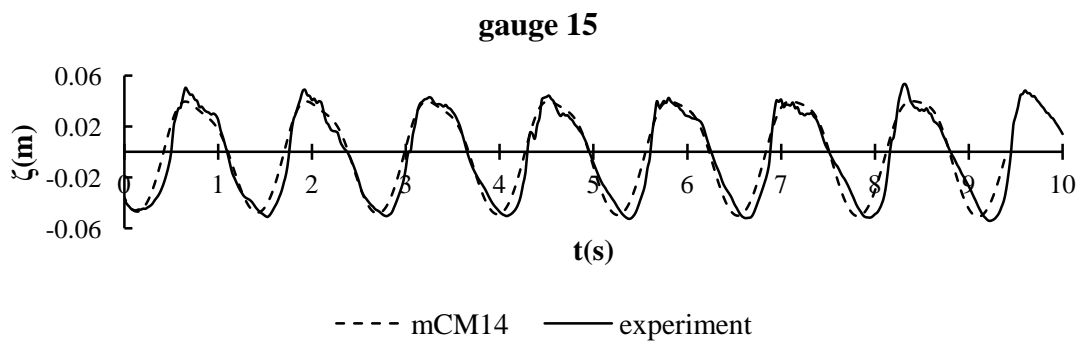
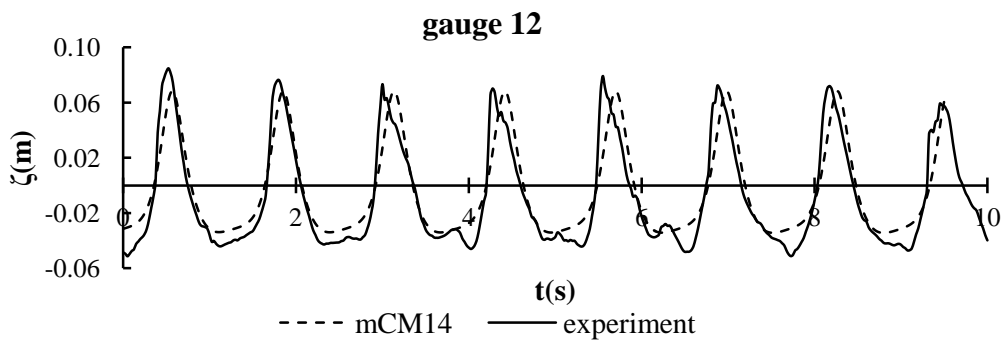
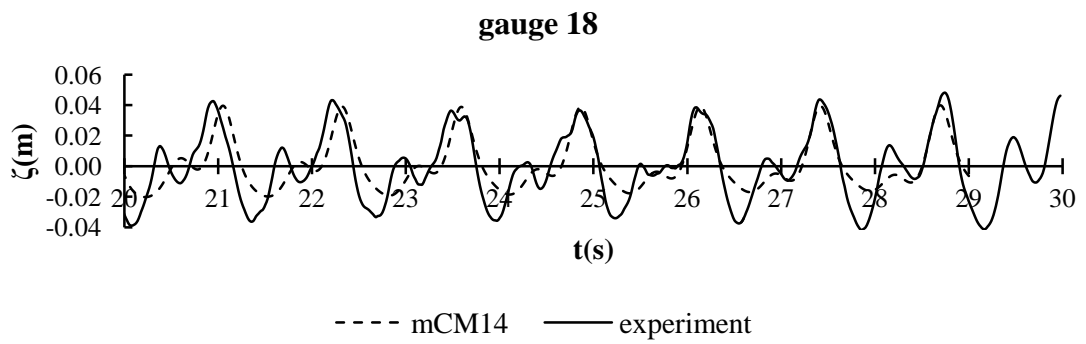
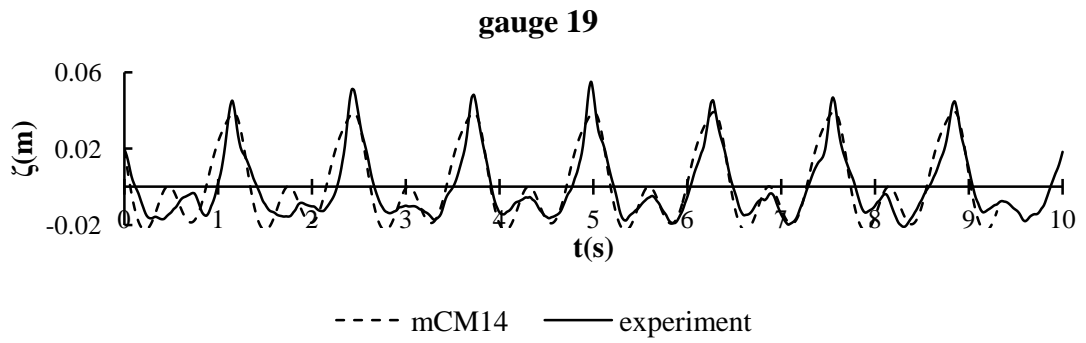
Τα αποτελέσματα είναι σε γενικές γραμμές ικανοποιητικά. Αξίζει να σημειωθεί ότι το freeboard ήταν μικρό τόσο σε σχέση με το βάθος του νερού όσο και με το ύψος του προσπίπτοντος κύματος ( $H / fr \approx 1.5$ ), οδηγώντας σε αρκετά ακραίες συνθήκες που δημιουργούν έντονες μη γραμμικότητες και δυσχεραίνουν τους υπολογισμούς. Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι επειδή το βάθος του νερού είναι μικρό και στην περιοχή της κυματογεννήτριας, το κύμα υφίσταται ρήγωση από τη στιγμή της γένεσής του.

Μια δυσκολία που παρουσιάστηκε κατά την προσομοίωση είναι η επιλογή των συντελεστών θραύσης, καθώς έχουμε θραύση κυματισμών τόσο στην κατασκευή, με

μεγάλη κλίση πρανών, όσο και στην ακτή που έχει μικρότερη κλίση. Οι περιοχές όπου γίνεται θραύση φαίνονται στο σχήμα 5.5.

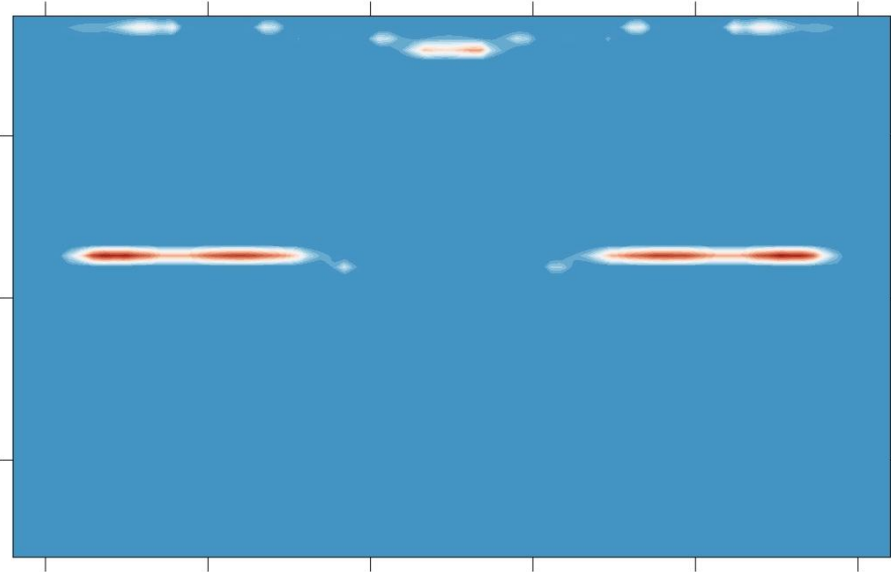
Ένας άλλος παράγοντας που προκαλεί ανακρίβεια είναι η διαφορά μεταξύ του φυσικού και του υπολογιστικού μοντέλου όσον αφορά τη μικροκλίμακα της κατασκευής. Η διαπερατότητα του υλικού μετράται στο εργαστήριο όμως στην πραγματική κατασκευή δεν είναι ενιαία, όπως θεωρούμε στο μοντέλο. Επίσης, το φυσικό μοντέλο αποτελείται από τρεις τύπους λίθων με διαφορετικό μέγεθος και ιδιότητες που προσδιορίζονται εργαστηριακά και παρουσιάζουν κάποιες χαρακτηριστικές τιμές και αποκλίσεις. Έτσι δεν είναι εύκολο να αποφανθούμε ποιες τιμές είναι καταλληλότερες για τους συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , οι οποίοι τελικά λαμβάνουν κάποιες τυπικές τιμές. Η διάμετρος του υλικού τίθεται επίσης κατά προσέγγιση, παίρνοντας μια μέση τιμή των χαρακτηριστικών διαμέτρων που δίνονται για το υλικό. Οι τιμές που επιλέχθηκαν δίνονται στον πίνακα 5.1.





**Σχ. 5.4:** Χρονοσειρές ανύψωσης, wide berm





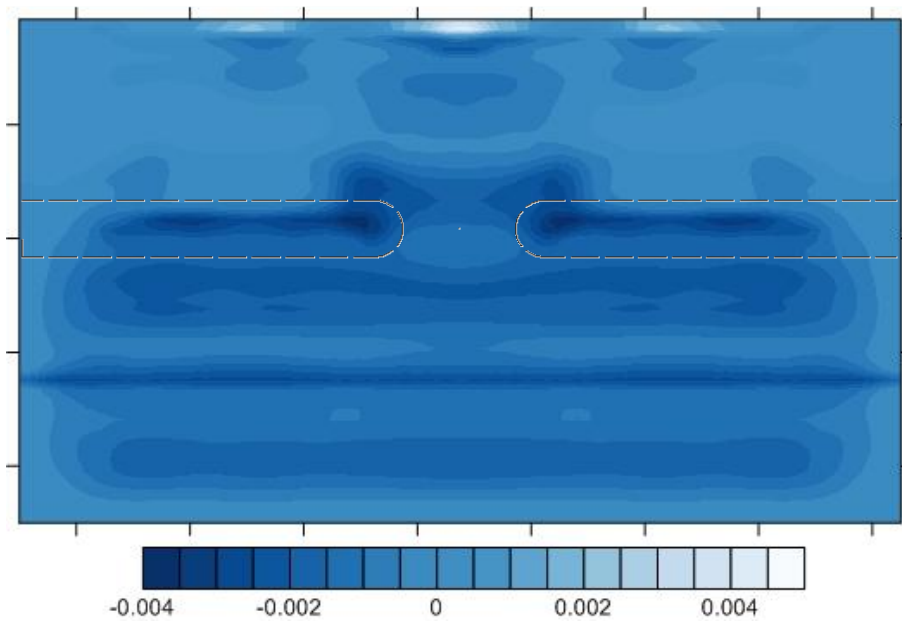
**Σχ. 5.5:** Περιοχές θραύσης, narrow berm

Το πεδίο ταχυτήτων που προέκυψε από την προσομοίωση έχει την αναμενόμενη μορφή (βλ. Σχ. 5.7). Οι διαφορετικές περιοχές θραύσης δημιουργούν διαφορά στην ανύψωση κατά μήκος της ακτής (βλ. Σχ. 5.6) οδηγώντας στη δημιουργία ενός ρεύματος (rip current) που διέρχεται μεταξύ των δύο ακρομωλίων με κατεύθυνση προς τα ανοιχτά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία δύο στροβίλων δίπλα στα ακρομώλια και την επακόλουθη ταπείνωση της μέσης στάθμης του νερού στο κέντρο τους, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6. Δύο δευτερεύοντες στρόβιλοι εμφανίζονται στην υπήνεμη πλευρά των κυματοθραυστών προς το κάθετο στην ακτή όριο. Στο σχήμα 5.8 φαίνεται η στροβιλότητα (vorticity) η οποία υπολογίστηκε ως

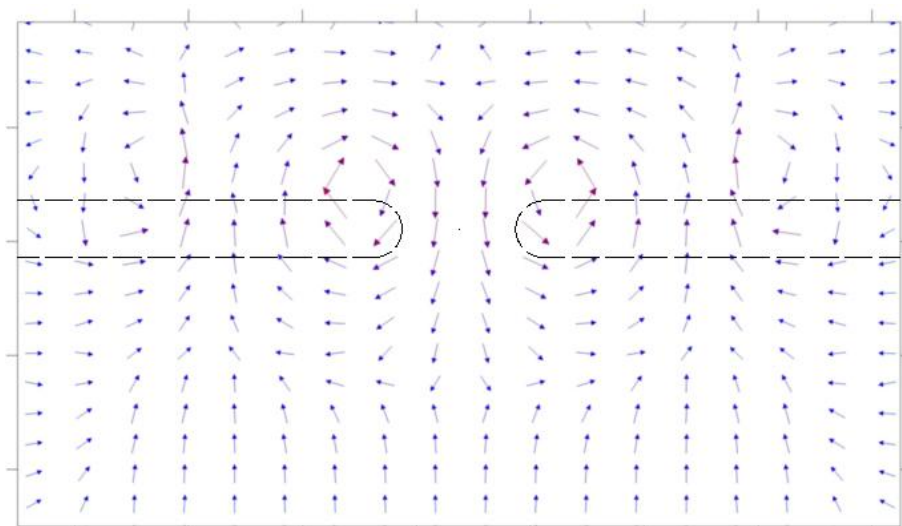
$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.1)$$

όπου  $u$  και  $v$  οι μέσες ταχύτητες.

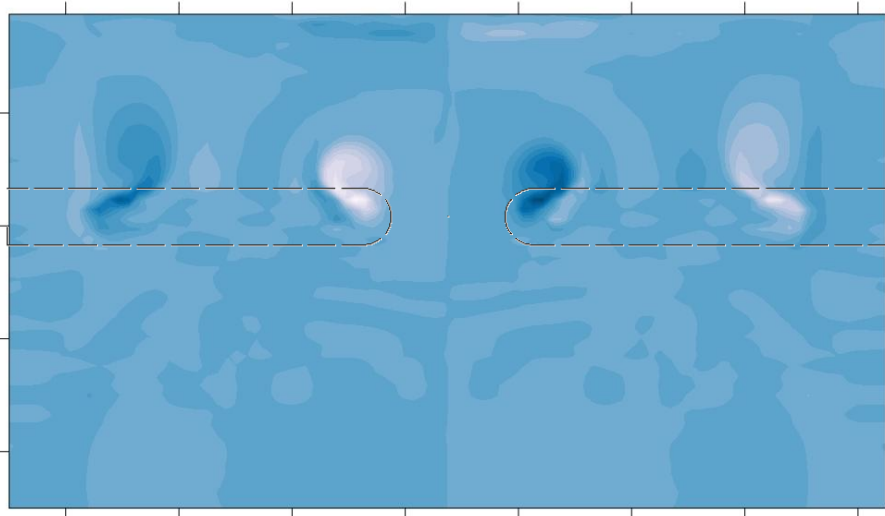
Η μέση ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας (wave setup) φαίνεται στο σχήμα 5.6 Παρατηρούμε ταπείνωση της στάθμης στη θέση του κυματοθραύστη λόγω της θραύσης και συγκέντρωση νερού στην υπήνεμη πλευρά. Ανάμεσα στα δύο ακρομώλια η στάθμη είναι πιο ψηλά από ότι στον κυματοθραύστη καθώς σε αυτό το σημείο δεν έχουμε θραύση. Η θραύση των κυματισμών που διέρχονται από το κενό γίνεται στην ακτή οδηγώντας σε μείωση του ύψους εκεί. Αυτή η διαφορά στην ανύψωση κατά μήκος της ακτής θεωρείται ότι προκαλεί το ρεύμα που περιγράφηκε προηγουμένως. Τέλος, είναι εμφανής η ταπείνωση της μέσης στάθμης στο κέντρο των στροβίλων.



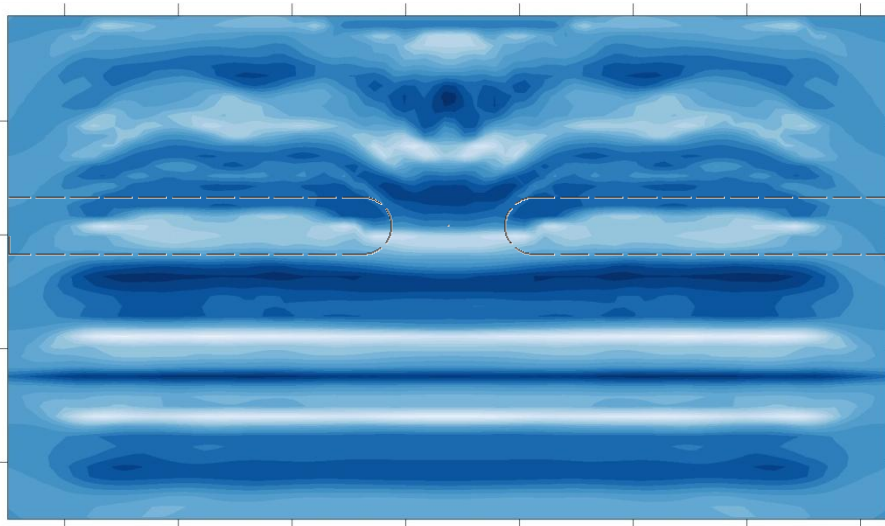
**Σχ. 5.6:** Μέση ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας σε m, narrow berm



**Σχ. 5.7:** Πεδίο ταχυτήτων, narrow berm

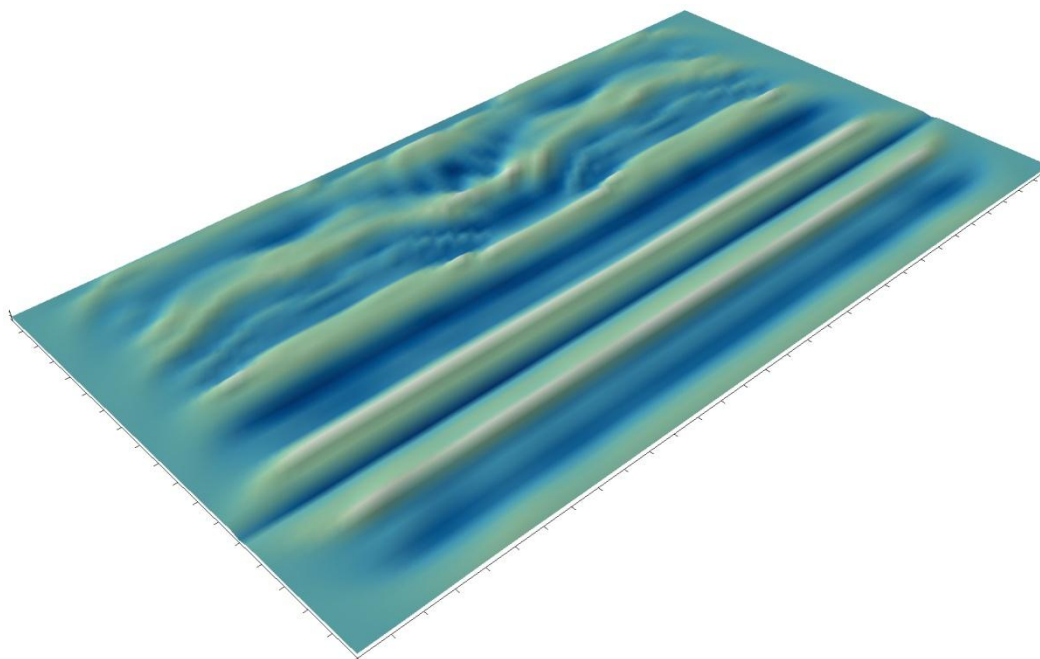


**Σχ. 5.8:** Στροβιλότητα, narrow berm



**Σχ. 5.9:** Στιγμαία ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, narrow berm

Στα σχήματα 5.9 και 5.10 φαίνεται η ανύψωση τη χρονική στιγμή  $t = 50$  s όπως προέκυψε από την προσομοίωση του πειράματος 20 (narrow berm). Είναι εμφανή τα αποτελέσματα της ρήξης και της θραύσης στα πρηνή του κυματοθραύστη. Το ύψος του κύματος μειώνεται πίσω από την κατασκευή και οι κορυφές είναι πιο απότομες. Δευτερεύουσες κορυφές εμφανίζονται λόγω της δημιουργίας υψηλότερων αρμονικών. Παρατηρούμε επίσης τη διάθλαση και περίθλαση του κυματισμού που προκαλείται από το ρεύμα μεταξύ των δύο ακρομωλίων.



**Σχ. 5.10:** Στιγμαία ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας σε 3D, narrow berm

## 6. Συμπεράσματα - Προτάσεις

---

### 6.1 Σύνοψη

Ένα σετ εξισώσεων Boussinesq υψηλής μη γραμμικότητας και πλήρους διασποράς (Chondros and Memos, 2014) χρησιμοποιήθηκε σε συνδυασμό με μία εξίσωση αντίστασης Darcy - Forchheimer για την προσομοίωση της διάδοσης κυματισμών σε παράκτια περιοχή παρουσία διαπερατής ύφαλής κατασκευής. Η γένεση των κυματισμών πραγματοποιείται με την εφαρμογή της μεθόδου συνάρτησης πηγής των Wei et al. (1999) όπως τροποποιήθηκε από τους Memos et al. (2005). Η μέθοδος αυτή συνδυάζεται με την τοποθέτηση απορροφητικών στοιβάδων σε όλα τα όρια του πεδίου. Το μοντέλο περιλαμβάνει ένα υπομοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας για την προσομοίωση της θραύσης. Για την επίλυση εφαρμόζεται το σύνθετο σχήμα πεπερασμένων διαφορών πρόβλεψης - διόρθωσης Adams - Bashforth - Moulton που ανέπτυξαν οι Wei και Kirby (1995). Στο μοντέλο εντάχθηκε επίσης ένας αλγόριθμος υπολογισμού του κατακόρυφου προφίλ ταχυτήτων σύμφωνα με τη μέθοδο που προτάθηκε από τους Metallinos and Memos (2012).

Για την επαλήθευση του μοντέλου έγινε σύγκριση με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από μετρήσεις στην πειραματική δεξαμενή του πανεπιστημίου Aalborg (AAU) που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια του προγράμματος DELOS (DELOS, 2002). Εξετάζονται δύο διατάξεις, μία με κυματοθραύστη μικρού πλάτους (narrow berm) και μία με κυματοθραύστη μεγάλου πλάτους (wide berm). Το βύθισμα της κατασκευής είναι και στις δύο περιπτώσεις 7 cm. Ο προσπίπτων κυματισμός είναι κανονικός (μονοχρωματικός), με περίοδο 1.28 s, και παρουσιάζει μέτρια διασπορά ( $h/L_0$ ) και υψηλή μη γραμμικότητα ( $H/h$ ).

### 6.2 Συμπεράσματα

- Έγινε σύγκριση των χρονοσειρών ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, όπως προέκυψαν από την αριθμητική επίλυση, με αυτές που μετρήθηκαν στην πειραματική δεξαμενή. Τα αποτελέσματα κρίνονται ικανοποιητικά καθώς στους περισσότερους σταθμούς η πρόβλεψη του μοντέλου συμφωνεί με τις πειραματικές μετρήσεις.
- Η διαφορά φάσης μεταξύ των σταθμών αναπαράγεται ακριβώς, αποδεικνύοντας την αποτελεσματικότητα του μοντέλου όσον αφορά την περιγραφή του φαινομένου της διασποράς.
- Η ανάκλαση από την κατασκευή και η κυματική μετάδοση στην υπήνεμη πλευρά υπολογίστηκαν με ικανοποιητική ακρίβεια.
- Η απόσβεση ενέργειας στην περίπτωση της κατασκευής wide berm είναι μεγαλύτερη, όπως ήταν αναμενόμενο, από την απόσβεση στην περίπτωση narrow berm κατασκευής.

- Το μοντέλο υποτιμάει ελαφρώς το ύψος κύματος στη στέψη της κατασκευής στην περίπτωση μικρού πλάτους στέψης. Αυτό αποδίδεται στην νωρίτερη έναρξη της θραύσης - μεγαλύτερη απόσβεση ενέργειας στο μοντέλο σε σχέση με το πείραμα. Πιθανώς όμως να οφείλεται και σε αριθμητικό σφάλμα, λόγω του πλάτους του κελιού σε σχέση με το πλάτος στέψης.
- Στο σταθμό 12 μεταξύ των δύο ακρομωλίων, ο συνδυασμός περίθλασης, ανάκλασης από την κατασκευή, διάθλασης και ρήχωσης δημιουργούν ένα πολύπλοκο πεδίο ροής που οδηγεί σε μια μικρή ανακρίβεια στον υπολογισμό του ύψους κύματος για την κατασκευή μικρού πλάτους.
- Η δημιουργία υψηλότερων αρμονικών πίσω από την κατασκευή περιγράφεται επαρκώς χάρη στους μη γραμμικούς όρους ανώτερης τάξης που έχουν συμπεριληφθεί.
- Το ύψος κύματος στο κενό μεταξύ των δύο κατασκευών είναι μεγαλύτερο από ότι πάνω από την κατασκευή, καθώς δεν υπάρχει θραύση σε εκείνο το σημείο.
- Παρατηρούμε μείωση της μέσης στάθμης στην περιοχή της κατασκευής λόγω της θραύσης και συγκέντρωση νερού πίσω από την κατασκευή. Οι κυματισμοί που διέρχονται από το κενό θραύονται στην ακτή, δημιουργώντας διαφορά στάθμης κατά μήκος της ακτής.
- Το πεδίο ταχυτήτων έχει την αναμενόμενη μορφή, με τη δημιουργία ρεύματος (rip current) εξερχόμενου από το άνοιγμα μεταξύ των δύο κυματοθραυστών και στροβίλων δίπλα στα ακρομώλια. Η διαφορά στάθμης κατά μήκος της ακτής θεωρείται ότι προκαλεί το ρεύμα αυτό.
- Το ρεύμα προκαλεί τη διάθλαση και περίθλαση του κυματισμού.
- Οι στρόβιλοι έχουν σαν αποτέλεσμα την ταπείνωση της στάθμης του νερού στο κέντρο τους.
- Το πείραμα αντιπροσωπεύει αρκετά ακραίες γεωμετρικές συνθήκες καθώς το προσπίπτον κύμα είναι πολύ υψηλό σε σχέση με το βύθισμα του κυματοθραύστη, δημιουργώντας έντονες μη γραμμικότητες. Το γεγονός αυτό καθώς και η απλουστευμένη αναπαράσταση της πραγματικής κατασκευής όσον αφορά τις ιδιότητες των υλικών, θεωρείται ότι προκαλούν τις ανακρίβειες που προκύπτουν από την επίλυση.

### **6.3 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα**

- Στην εργασία αυτή, ελλείπει άλλων δεδομένων, εξετάζονται μόνο οι ανυψώσεις της ελεύθερης επιφάνειας. Προτείνεται να γίνει αντίστοιχη μελέτη για τις ταχύτητες εντός και εκτός της κατασκευής και επαλήθευση του προτεινόμενου προφίλ ταχυτήτων στην περιοχή της κατασκευής. Αντίστοιχη μελέτη έχει πραγματοποιηθεί για μονοδιάστατο πεδίο από τους Metallinos and Memos (2012).

- Διερεύνηση της επίδρασης της διαπερατότητας της κατασκευής στο πεδίο ροής και στην κυματική μετάδοση.
- Μελέτη σύνθετων κυματισμών. Στην παρούσα εργασία εξετάστηκαν μόνο απλοί κυματισμοί.
- Κρίνεται απαραίτητο να γίνει επαλήθευση του μοντέλου με άλλα διαστάτα πειράματα και με μετρήσεις σε πραγματικό πεδίο.
- Η γεωμετρία που εξετάστηκε δημιουργεί στροβίλους (βλ. Σχ. 5.7 και 5.8) οι οποίοι με τη σειρά τους επηρεάζουν τη ροή προκαλώντας διάθλαση και περίθλαση των κυματισμών. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να μελετηθεί με μοντέλα Boussinesq καθώς τα τελευταία λαμβάνουν υπόψη την αλληλεπίδραση των κυμάτων με τα ρεύματα.
- Ένα ενδιαφέρον αντικείμενο, που αφορά την περιβαλλοντική μελέτη διαπερατών κυματοθραυστών, είναι η δυνατότητα ανάπτυξης ζώης εντός του πορώδους σώματος της κατασκευής. Αυτό εξαρτάται από τις ταχύτητες και τις πιέσεις που αναπτύσσονται στους πόρους και απαιτεί μελέτη στη μικροκλίμακα της κατασκευής.





## 7. Βιβλιογραφία

---

### 7.1 Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

- [1] Agnon, Y., Madsen, P.A., Schäffer, H.A., 1999. "A new approach to high order Boussinesq models". In: *J. Fluid Mech.* 399, 319.
- [2] Avgeris, I., Karambas, Th., Prinos, P., Koutitas, Ch., Belloti, G., Briganti, R., Brocchini, M., 2004. DELOS Internal Report, "Flow Description (WP 2.1), Final Phase-Resolving Boussinesq- Type Models (D42)" (August 2004).
- [3] Avgeris, I., Karambas, T.V., Prinos, P. (2004). Boussinesq modeling of wave interaction with porous submerged breakwaters. *Proc. 29th Int. Conf. Coastal Eng., Lisbon, Portugal*, 604–616, J. McKee Smith, ed. World Scientific, Singapore.
- [4] Beji, S., Nadaoka, K., 1996. "A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth". *Ocean Engineering*, vol. 23, Issue 8, pp 691-704.
- [5] Bingham, H. B., Agnon, Y., 2005. "A Fourier–Boussinesq method for nonlinear water waves". In: *European Journal of Mechanics B/Fluids* 24 pp. 255–274.
- [6] Boussinesq, J., 1872. "Theory des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquid contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond". In: *Journal de Mathematiques Pures et Appliques Serie. 17*, 55-108.
- [7] Chen Q. et al., 1999. "Boussinesq modeling of a rip current system". *Journal of geophysical research*, vol.104, no.C9.
- [8] Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Kennedy, A.B., Chawla, A., 2000. "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. II: 2D". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 126, No. 1, pp 48-56.
- [9] Chen, Q. (2006). "Fully Nonlinear Boussinesq-Type Equations for Waves and Currents over Porous Beds." *J. Eng. Mech.*, 132(2), 220–230.
- [10] Chondros, M.K., Memos, C.D., 2014. "A 2DH nonlinear Boussinesq-type wave model of improved dispersion, shoaling and wave generation characteristics". *Coastal Eng.*, 91(2014): 99-122.
- [11] Cruz, E.C., Isobe, M. and Watanabe, A., 1992. "Nonlinear wave transformation over a submerged permeable breakwater". In: *Proc. 23rd Int. Conf. Coastal Eng.. Venice. ASCE*, pp. 1101-1 114.
- [12] Cruz E.C., Isobe M., and Watanabe A., 1997. "Boussinesq equations for wave transformation on porous beds". *Coastal Engineering*, 24, 233-257.

- [13] Darcy, H. (1856), "Les fontaines publiques de la ville de Dijon", Dalmont, Paris.
- [14] Dean R.G., Dalrymple R.A., 1991. "Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists". World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd.
- [15] Dingemans M.W. ,1997. "Water wave propagation over uneven bottoms: 2.Non linear wave propagation". Advanced Series on Ocean Engineering 13. World Scientific.
- [16] Forchheimer, P. (1901), "Formulae to describe porous flow", Communications on Hydraulic and Geotechnical Engineering, ISSN 0169-6548 No.92-2, Delft University of Technology and MAST-G6S-report.
- [17] Friedrichs, K.O., 1948. On the derivation of the shallow water theory. Appendix (pp.81-85) to The formation of breakers and bores, by J.J. Stoker, *Comm. on Applied Math.* 1(1) pp.1-87.
- [18] Gobbi, M.F., Kirby, J.T., Wei, G.E., 2000. "A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to  $O(kh)^4$ ". *Journal of Fluid Mechanics*, 405, pp 181-210.
- [19] Gu, Z. and Wang, H., 1991. Gravity waves over porous bottoms. *Coastal Eng.*, 15: 497-524.
- [20] Hsiao, S.C., Liu, P.L.F., Chen, Y. (2002). Nonlinear water waves propagating over a permeable bed. *Proc. R. Soc. London A.* 458(2022), 1291–1322.
- [21] Johnson H.K. et al., 2005. "Modelling of waves and currents around submerged breakwaters". *Coastal Engineering*, 52.
- [22] Karambas, T.V., 1999. "A unified model for periodic non linear dispersive wave in intermediate and shallow water". In: *Journal of Coastal Research*, Vol 15, No 1, pp. 128-139.
- [23] Karambas Th.V. and Koutitas C. (2002), Surf and swash zone morphology evolution induced by nonlinear waves, *J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, 128(3), 102-113.
- [24] Keller, J.B., 1948. "The solitary wave and periodic waves in shallow water". *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 1, Issue 4, pp 323-339.
- [25] Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. ,2000. "Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. I: 1D.", *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. 126, No. 1, pp. 39-47.
- [26] Kramer, M., Zanuttigh, B., Baoxing, W., Van der Meer, J.W., Lamberti, A., Burcharth, H.F., 2003. Wave basin experiments. Internal report, DELOS deliverable D31, available from the Internet [www.delos.unibo.it](http://www.delos.unibo.it).
- [27] Kramer M. et al. , 2005. "Laboratory experiments on low-crested breakwaters". *Coastal Engineering*, 52.

- [28] LeMéhauté, B. 1976. *Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*, Springer-Verlag, New York.
- [29] Li, B., 2008. "Wave equations for regular and irregular water wave propagation". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 134, No. 2, pp 121-142.
- [30] Liu, P.L.F., Wen, J. (1997). Nonlinear diffusive surface waves in porous media. *J. Fluid Mech.* 347(25), 119–139.
- [31] Losada I. J., Silva R. and Losada M. A., 1996. "3-D non-breaking regular wave interaction with submerged breakwaters", *Coastal Engineering Volume 28, Issues 1-4, Pages 229-248*.
- [32] Losada, I.J., Lara, J.L., Guanche, R., and Gonzalez-Ondina, J.M. (2008). Numerical analysis of wave overtopping of rubble mound breakwaters. *Coastal Eng.* 55(1), 47–62.
- [33] Madsen, P.A. and Sorensen, O.R., 1992. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2: a slowly-varying bathymetry". *Coastal Eng.*, 18: 183-205.
- [34] Madsen, LA., Murray, R. and Sorensen, O.R., 1991. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics". *Coastal Eng.*, 15: 371-388.
- [35] Madsen, P.A., Schäffer, H.A., 1998. Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 356, 3123–3184.
- [36] Madsen P.A., Bingham, H.B., Liu, H., 2002. "A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water". In: *J. Fluid Mech.* (2002), vol. 462, pp. 1-30.
- [37] Madsen, P.A., Bingham, H.B., Schäffer, H.A., 2003. "Boussinesq type formulations for fully nonlinear and extremely dispersive water waves: derivation and analysis". In: *Proc. R. Soc. Lond., A.* 459, 1075–1104.
- [38] Madsen, P.A., Fuhrman, D.R., Wang, B., 2006. "A Boussinesq-type method for fully nonlinear waves interacting with a rapidly varying bathymetry". *Coastal Engineering*, vol. 53, Issue 5-6, 487-504.
- [39] Mason P.J., 1994. "Large-eddy simulation: A critical review of the technique". *Q.J.R. Meteorol.Soc.*, 120, pp1-26.
- [40] McCowan, A.D., 1987. The range of application of Boussinesq type numerical short wave models. *Proc. 22nd IAHR Congr.*
- [41] Mei, C.C., LeMéhauté, B., 1966. "Note on the equations of long waves over an uneven bottom". In: *J. Geophys. Res.* 71 (2), 393-400

- [42] Memos C.D., Karambas Th.V., Avgeris I., 2005. "Irregular wave transformation in the nearshore zone: experimental investigations and comparison with a higher order Boussinesq model". *Ocean Engineering* 32,1465-1485.
- [43] Metallinos, A.S., Maria-Eirini A. Emmanouilidou, Memos, C.D., 2014. Wave-induced pore pressures in submerged rubblemound breakwaters simulated by a compound Boussinesq model, *J. Hydraulic Res.* 52(1), 24-35.
- [44] Metallinos, A.S., Memos, C.D., 2012. Wave-induced kinematics inside submerged porous structures, *J. Hydraulic Res.* 50(4), 388–394.
- [45] Nield D.A., 1991. "The limitations of the Brinkman-Forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface". *Int.J.Heat and Fluid Flow*, Vol. 12, No. 3.
- [46] Nwogu, O.. 1993. "Alternate form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation", *J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng.* ASCE, 119(6): 618-638.
- [47] Peregrine, D.H., 1967. Long waves on beaches. *J. Fluid Mech.*, 27(4): 815-827.
- [48] Polubarinova-Kochina, P. Ya. (1952), "Theory of groundwater movement", University Press, Princeton.
- [49] Pope S.B. "Turbulent flows". Cambridge University Press, 2000.
- [50] Prinos P., Avgeris I., Karambas Th. "Low-crested structures: Boussinesq modeling of waves propagation"
- [51] Rojanakamthom, S., Isobe, M. and Watanabe, A., 1990. Modeling of wave transformation on submerged breakwater. In: *Proc. 22nd Int. Conf. Coastal Eng.*, Delft, 1990. ASCB, pp. 1060-1073.
- [52] Sagaut P. "Large eddy simulation for incompressible flows. An introduction". Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [53] Smagorinsky J., 1963. "General Circulation experiments with the primitive equations". *Monthly Weather Review* 91.
- [54] Smagorinsky J., Syukuro M., Holloway J.L., 1965. "Numerical results from a nine - level general circulation model of the atmosphere". *Monthly Weather Review* 93.
- [55] Sollitt, C.K. and Cross, R.H., 1972. "Wave transmission through permeable breakwater". In: *Proc. 13th Int.Conf. Coastal Eng.*, Vancouver, B.C. ASCB, pp. 1827-1846.
- [56] Svendsen, I.A., Yu, K., Veeramony, J., 1996. "A Boussinesq breaking wave model with vorticity". *Proceedings of the 25th International Conference on Coastal Engineering*, pp 1192-1204, Orlando.
- [57] Van Gent M.R.A., 1995. "Wave Interaction with Permeable Coastal Structures". PhD Thesis, Delft University, Delft, The Netherlands.

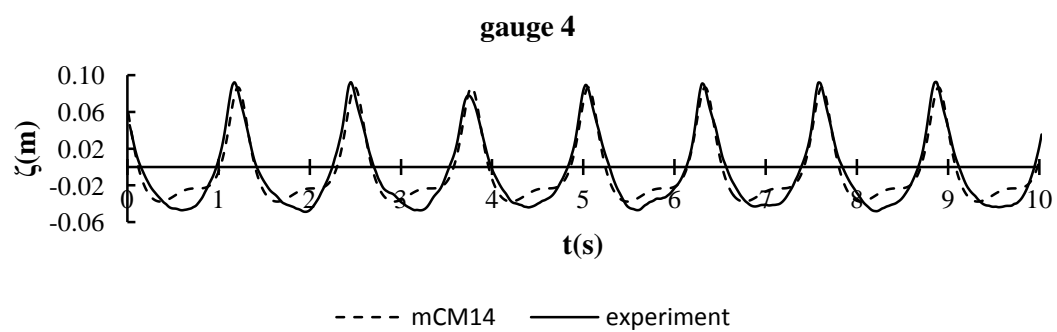
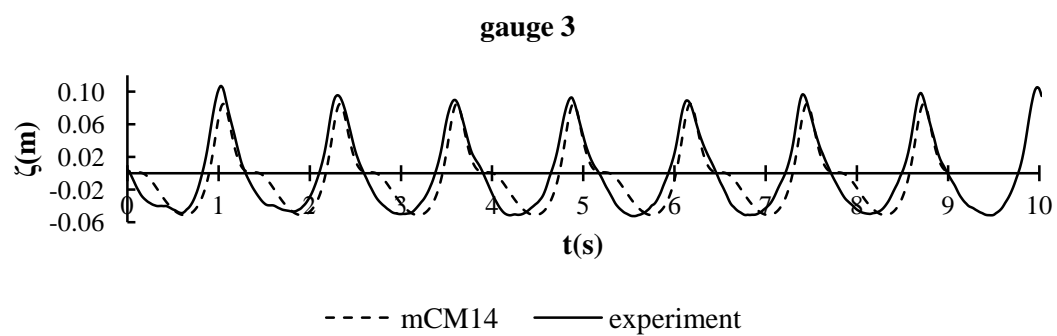
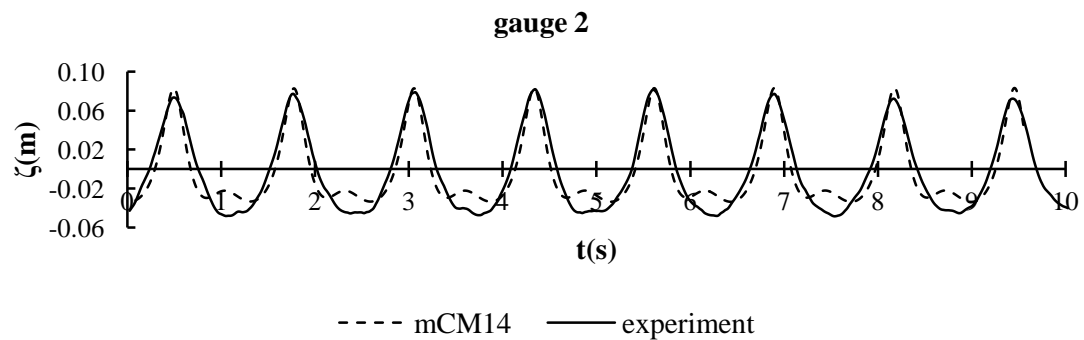
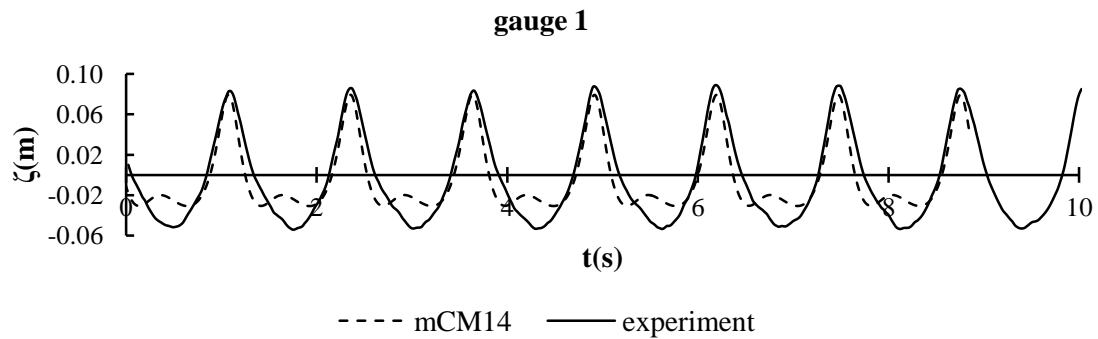
- [58] Wei G., Kirby J.T., 1995. "Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations". *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 261.
- [59] Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R., 1995. "A fully non-linear Boussinesq model for surface waves: Part I Highly non-linear unsteady waves". *Journal of Fluid Mechanics* 294, 71–92.
- [60] Witting. J.U., 1984. "A unified model for the evolution of nonlinear water waves". *J. Comp. Phys.*, 56: 203-236.
- [61] Zhan J.M., Li Y.S., Wai O.W.H., 2002. "Numerical modeling of multi-directional irregular waves incorporating 2-D numerical wave absorber and subgrid turbulence". *Ocean Engineering* 30.
- [62] Zou, Z.L., 1999. "Higher order Boussinesq equations". In: *Ocean Engineering*, 26, pp. 767-792.

## 7.2 Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

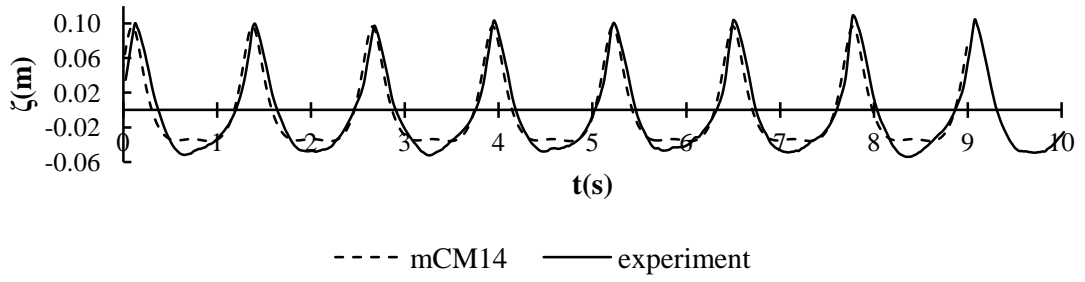
- [63] Κουτσουβέλα Δ., 2009. "Οι βυθισμένοι κυματοθραύστες ως ήπια μέθοδος προστασίας της ακτής από διάβρωση". Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Επιστημών της Θάλασσας, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Μυτιλήνη.
- [64] Μακρής Χ.Β., 2014. "Υπολογιστική προσομοίωση παράκτιων κυματικών διεργασιών με τη χρήση της σωματιδιακής μεθόδου Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)". Διδακτορική Διατριβή. Τομέας Υδραυλικής και Τεχνικής Περιβάλλοντος, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
- [65] Μέμος Κ.Δ., 2007. *Θαλάσσια Υδροδυναμική, πρόχειρες σημειώσεις*, Αθήνα.
- [66] Μεταλληνός Σ.Α., 2011. "Πεδίο ταχυτήτων λόγω κυματισμών στο εσωτερικό ύφαλης κατασκευής". Μεταπτυχιακή Εργασία. Εργαστήριο Λιμενικών Έργων Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [67] Φονιάς Ε.Ν., 2012. "Μελέτη θραύσης κυματισμών με μοντέλο Boussinesq σε δύο οριζόντιες διαστάσεις". Μεταπτυχιακή Εργασία. Εργαστήριο Λιμενικών Έργων Ε.Μ.Π., Αθήνα.



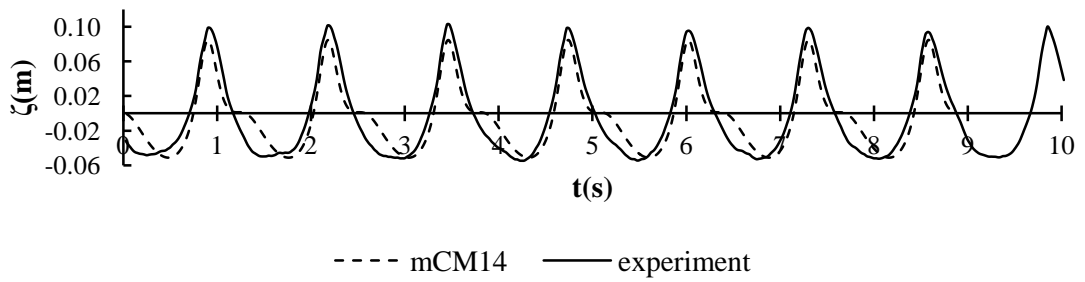
**A. Χρονοσειρές ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας - Κατασκευή narrow berm**



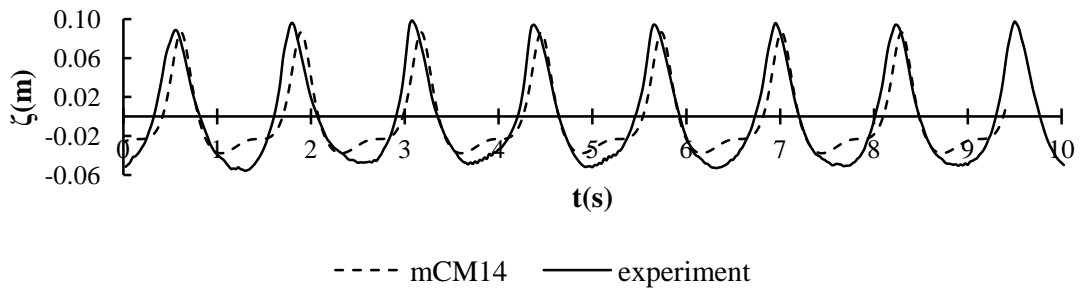
**gauge 5**



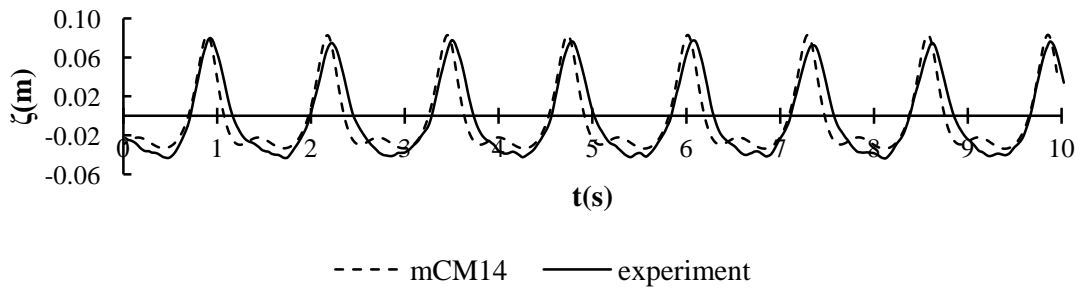
**gauge 6**



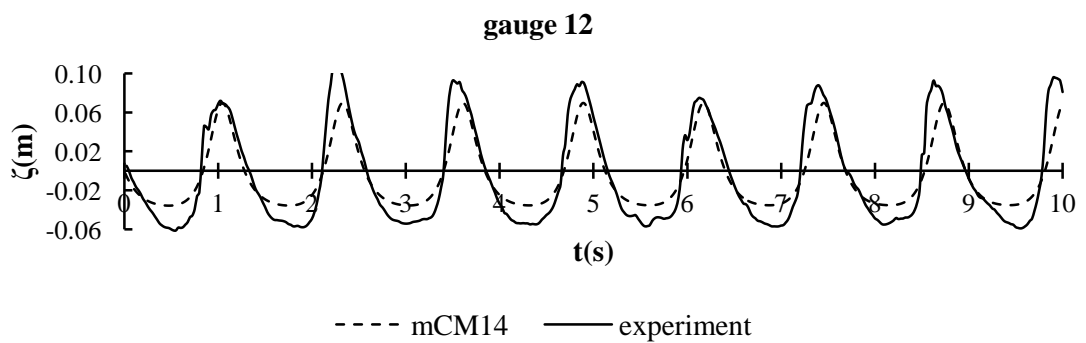
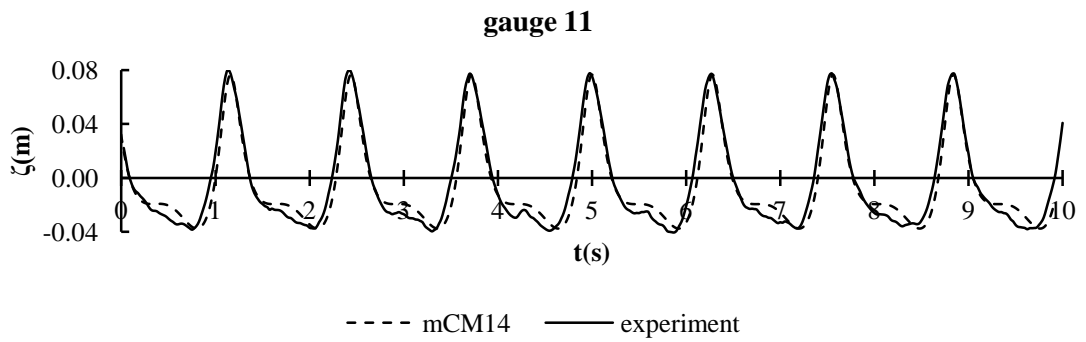
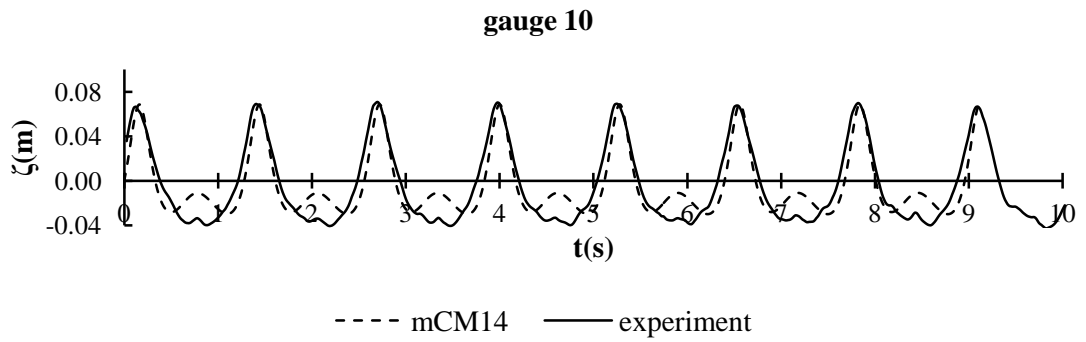
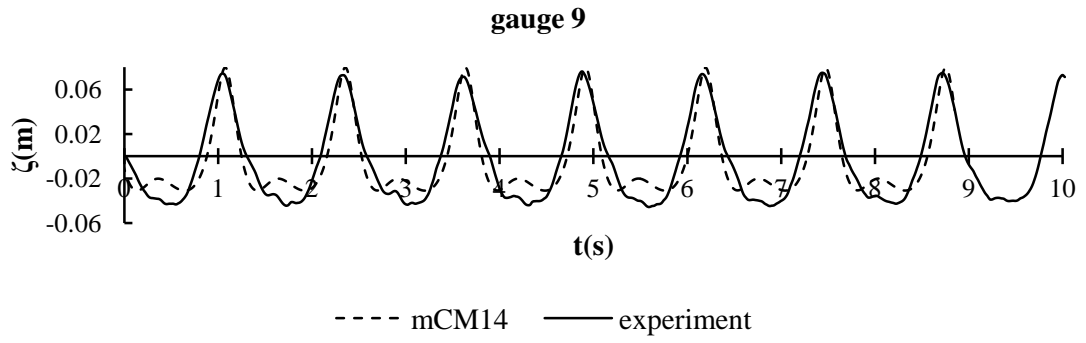
**gauge 7**

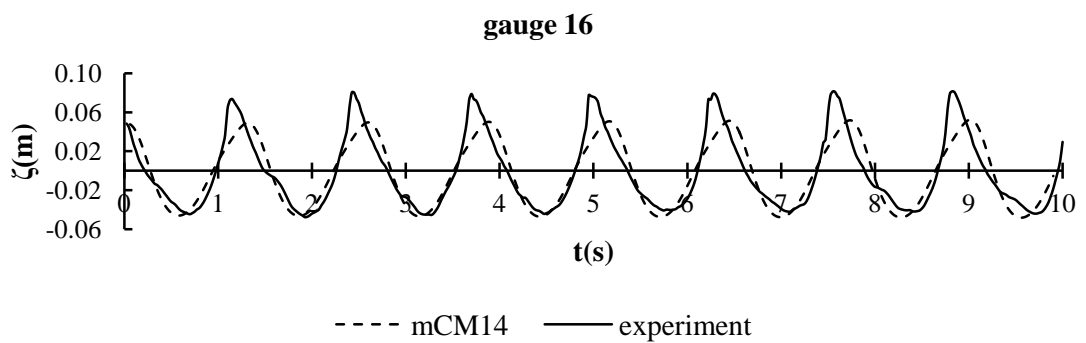
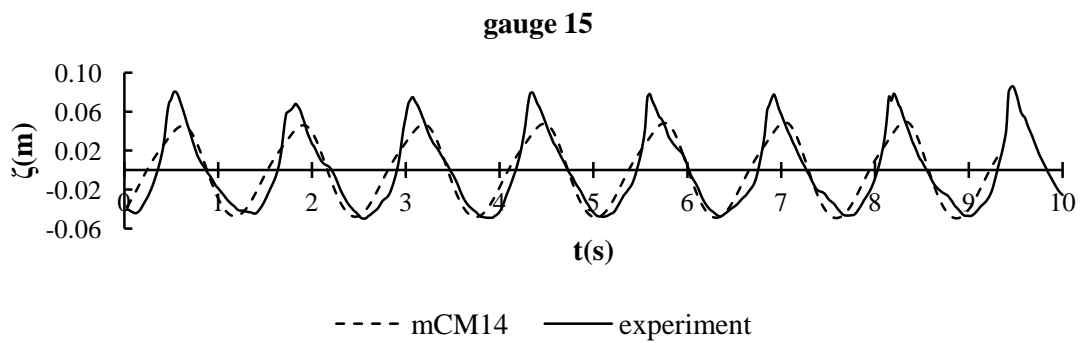
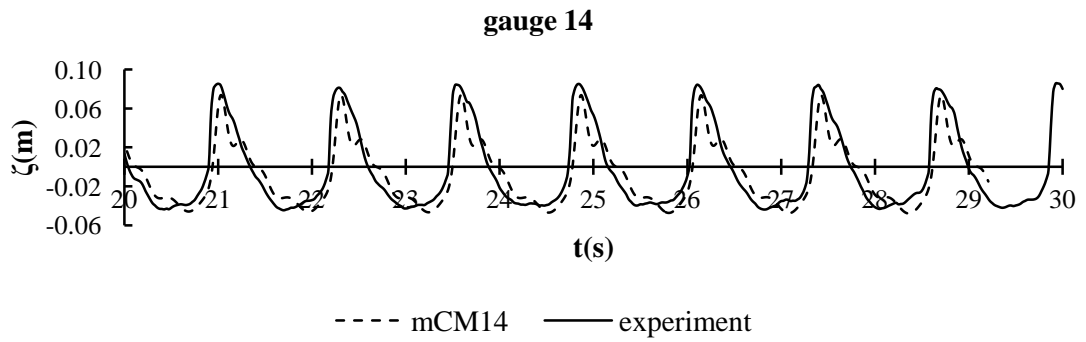
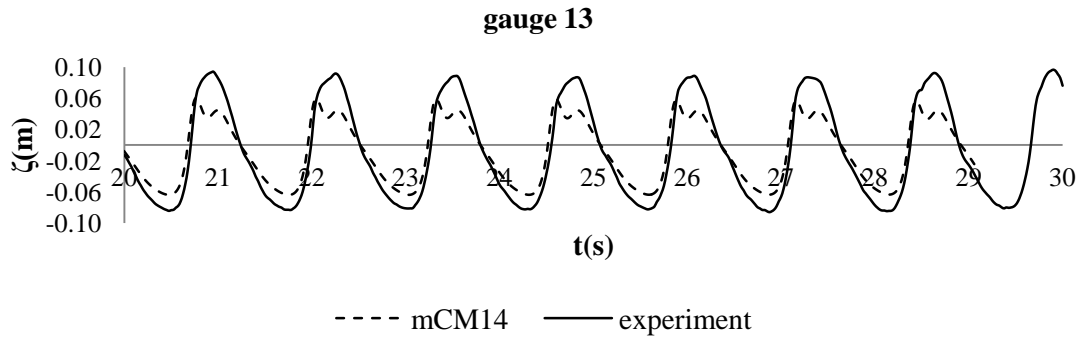


**gauge 8**

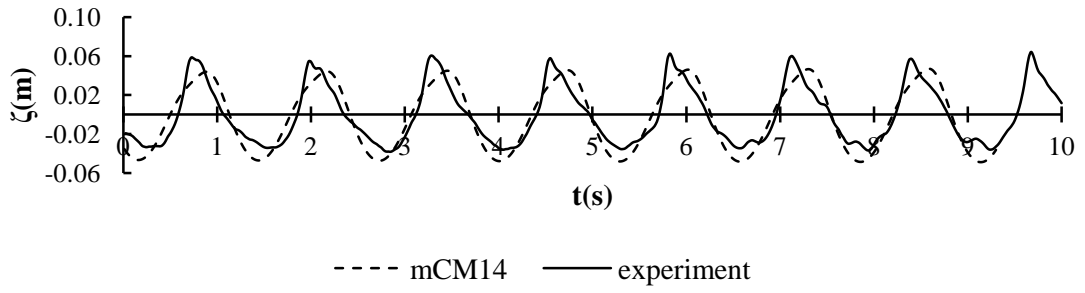




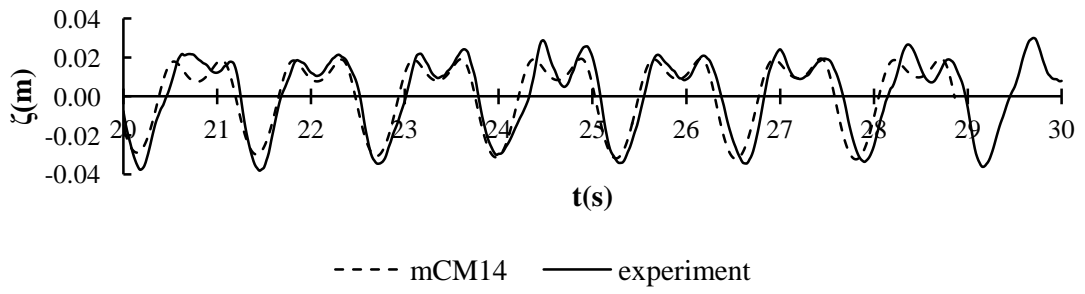




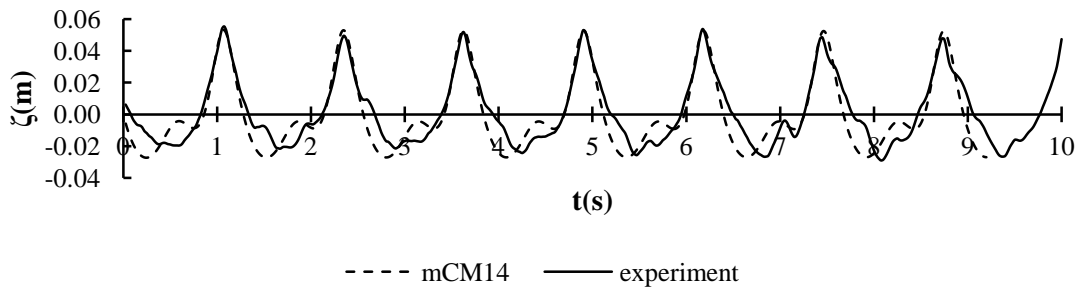
**gauge 17**



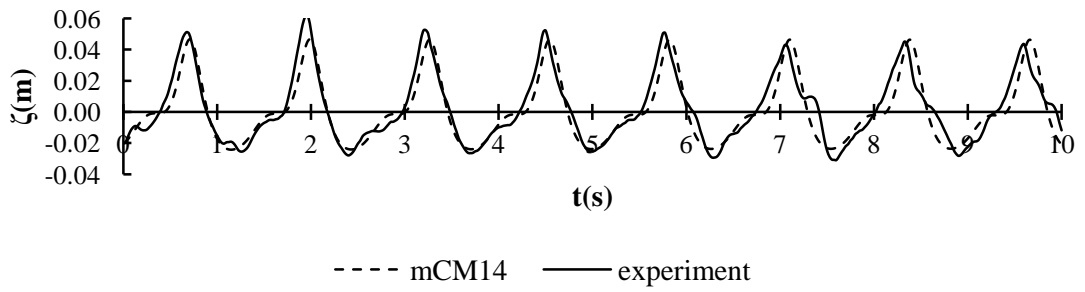
**gauge 18**

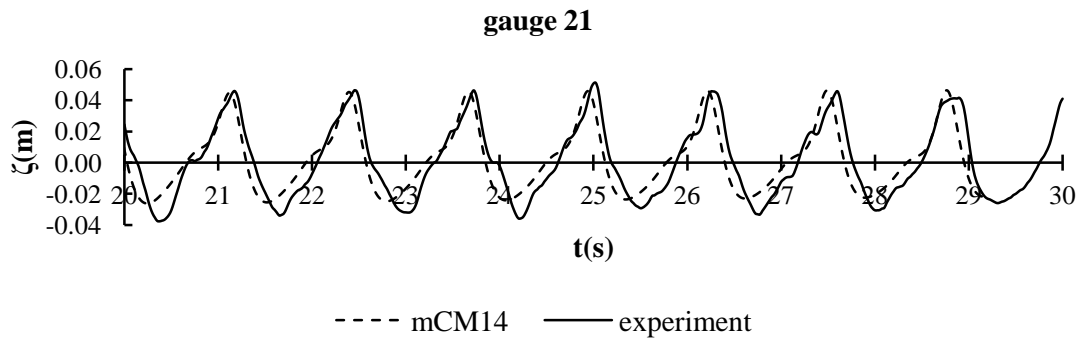


**gauge 19**

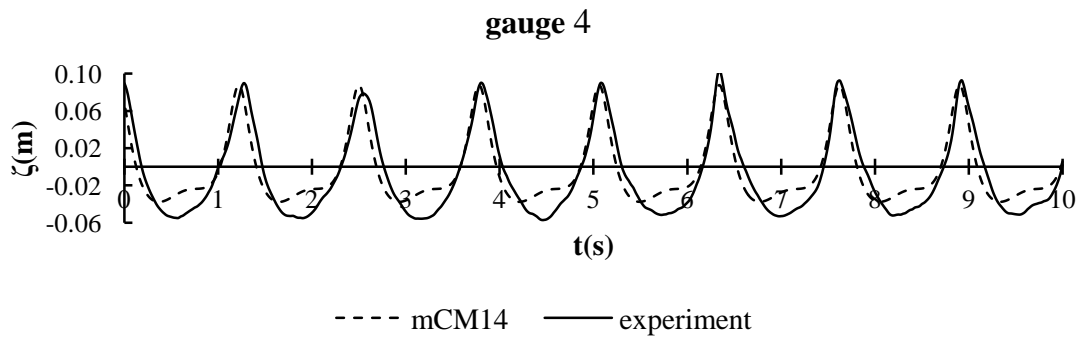
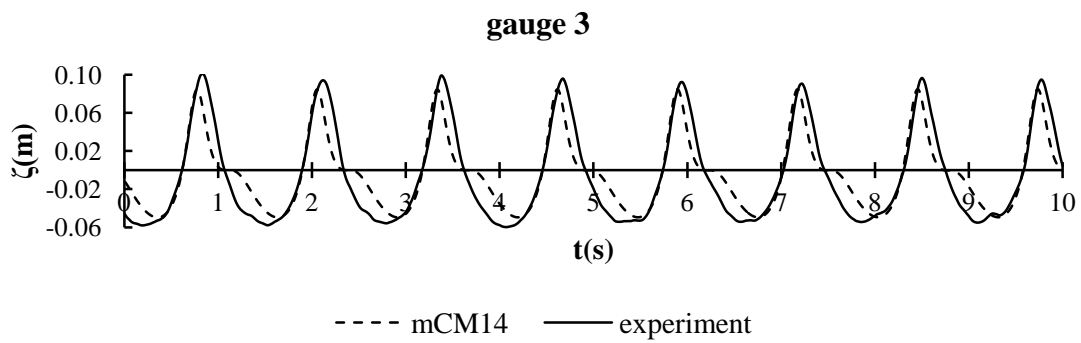
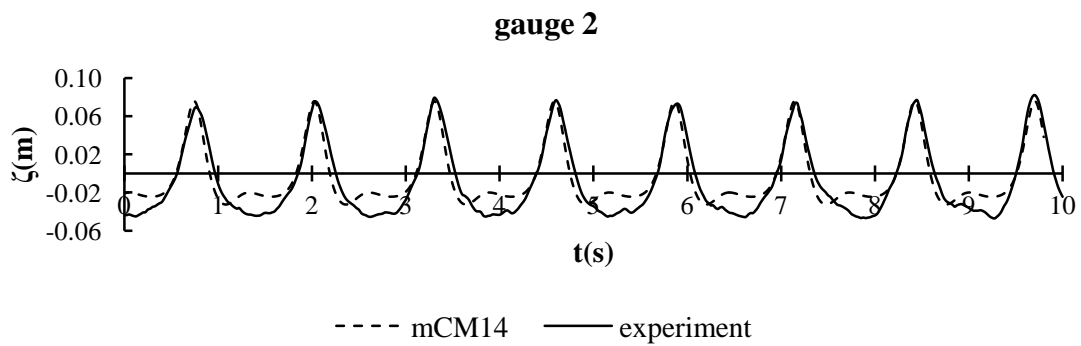
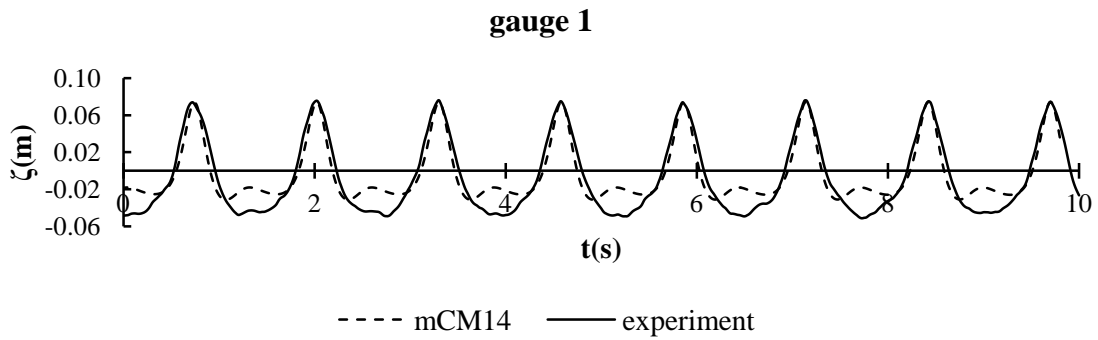


**gauge 20**

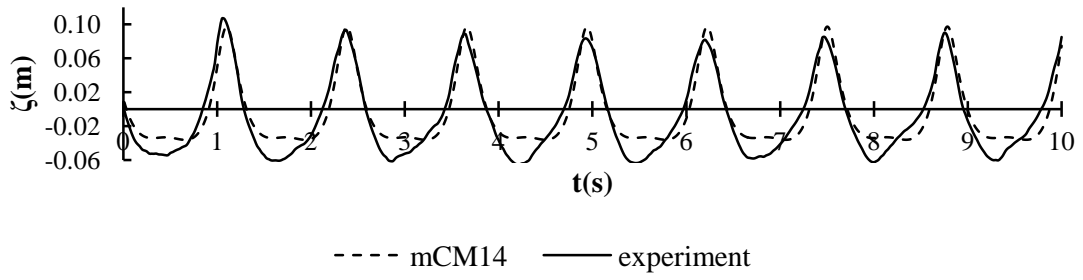




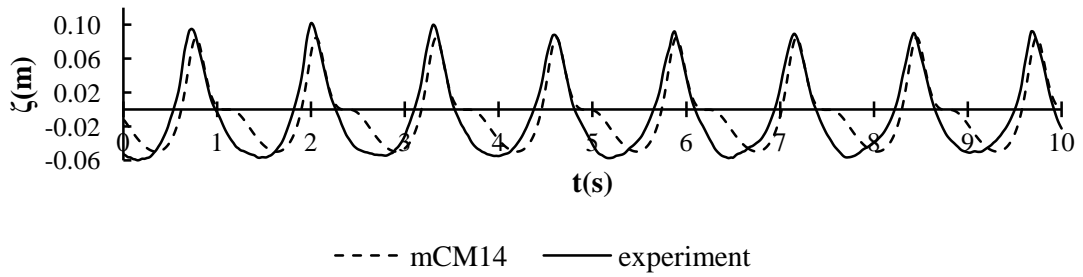
## B. Χρονοσειρές ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας - Κατασκευή wide berm



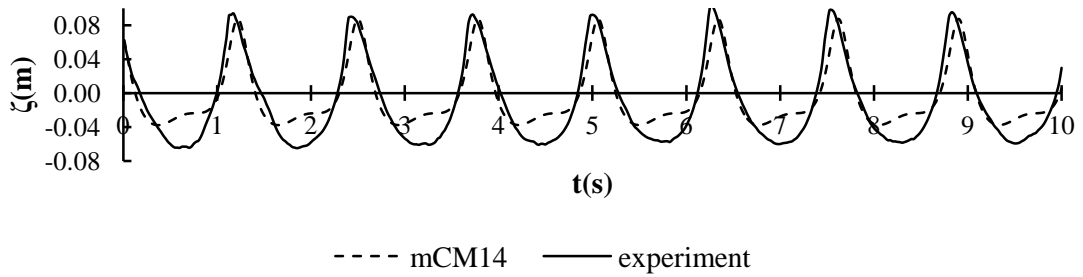
**gauge 5**



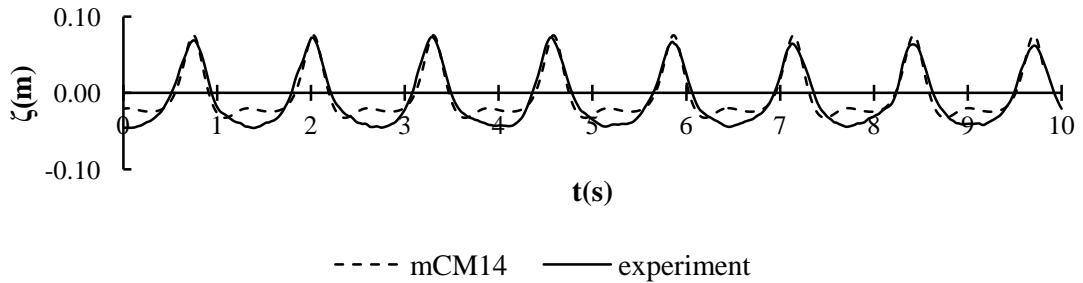
**gauge 6**



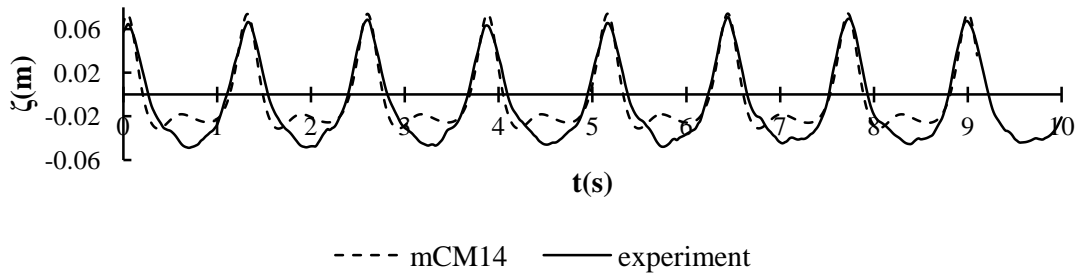
**gauge 7**



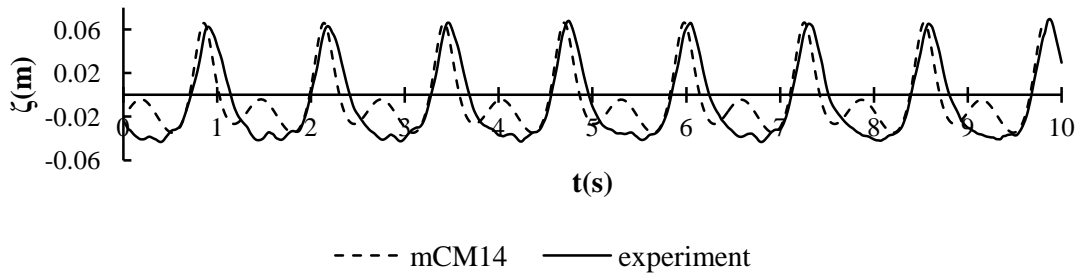
**gauge 8**



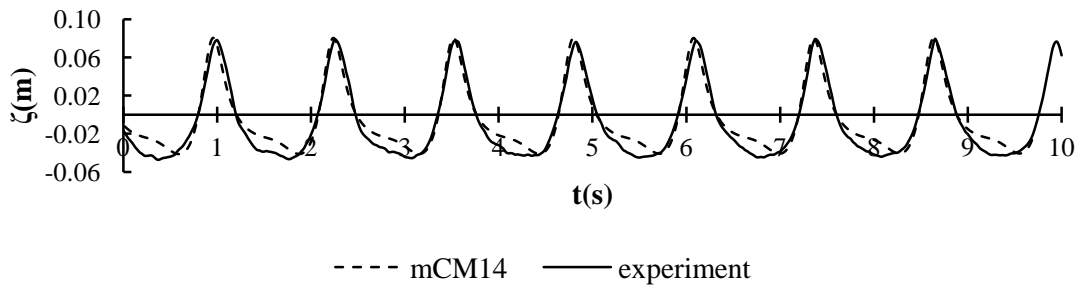
**gauge 9**



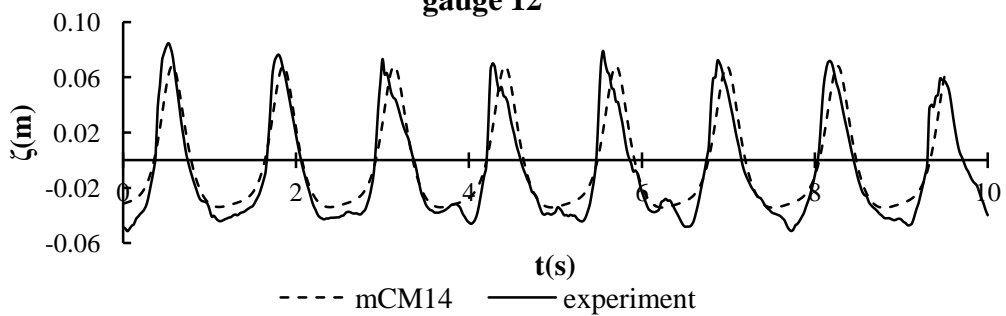
**gauge 10**



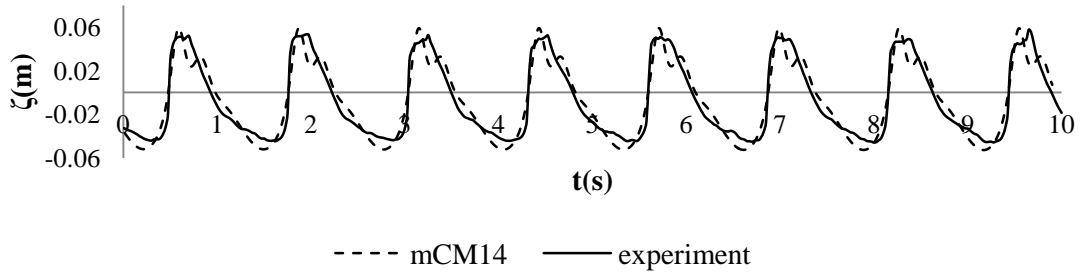
**gauge 11**



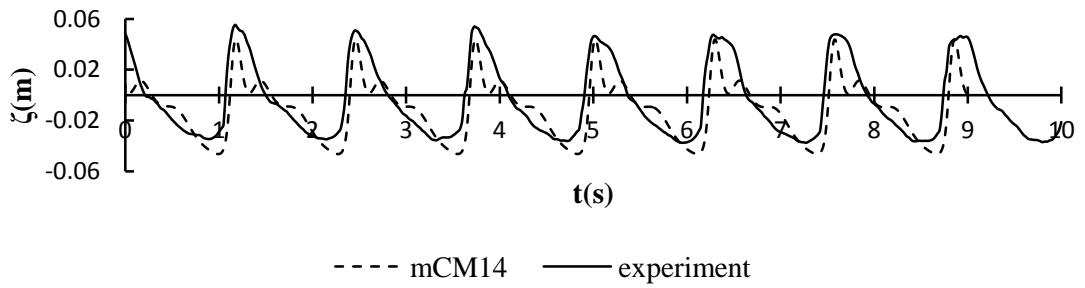
**gauge 12**



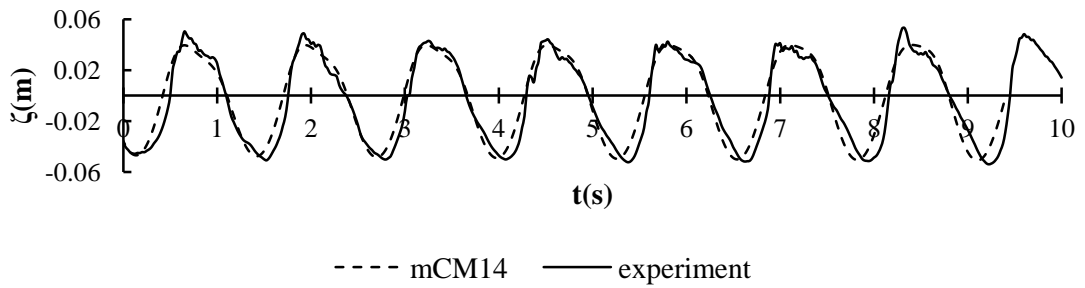
**gauge 13**



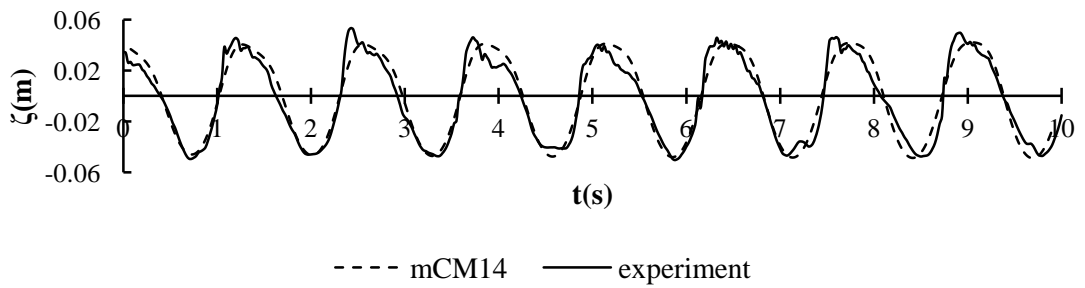
**gauge 14**



**gauge 15**

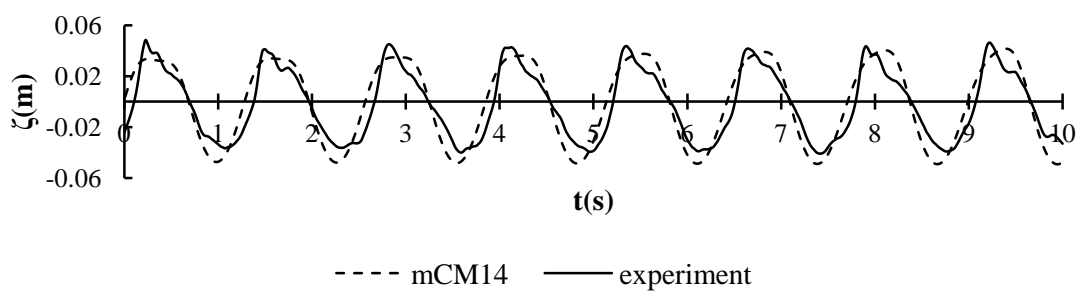


**gauge 16**

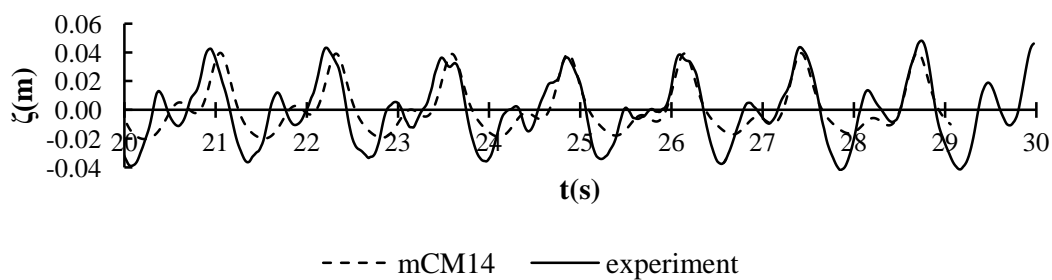




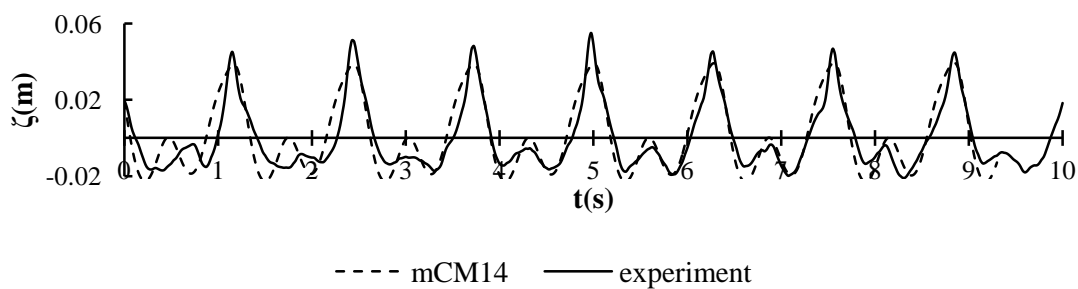
**gauge 17**



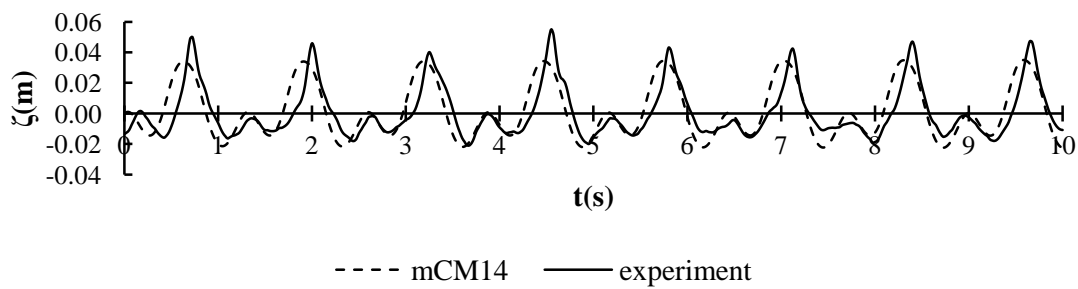
**gauge 18**



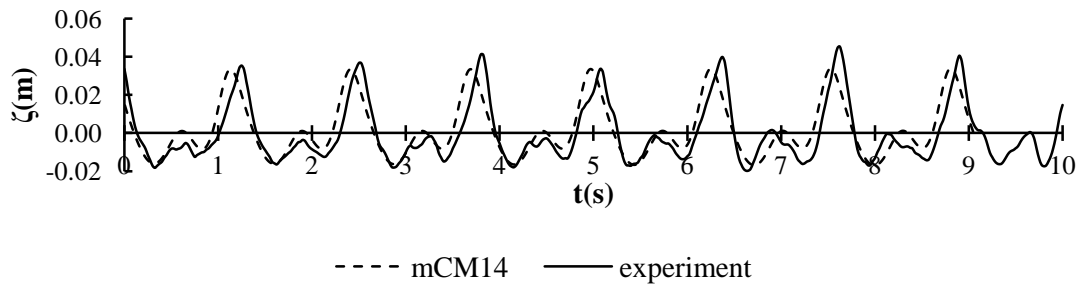
**gauge 19**



**gauge 20**



**gauge 21**



*Παράρτημα II - Όροι  $\Lambda^{\text{III}}$  της εξίσωσης ορμής*

---

Ακολουθούν οι όροι  $\Lambda^{\text{III}}$  της εξίσωσης 2.36:

$$\Lambda_{20}^{\text{III}} = \left[ d^2 \left( \frac{1}{6} + \alpha_2 - \alpha_1 \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}_t) - d \left( \frac{1}{2} + \alpha_2 \right) \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{hU}_t)) \right. \\ \left. + d^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \nabla (\nabla^2 \eta) - d \alpha_2 \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{h} \nabla \zeta)) \right]$$

$$\Lambda_{21}^{\text{III}} = \left[ \frac{1}{2} d^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \nabla (\nabla^2 (\mathbf{U}^2)) - \frac{1}{2} d \alpha_2 \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{d} \nabla (\mathbf{U}^2))) - \zeta \Gamma_t \right. \\ \left. + \nabla \cdot (\mathbf{dU}) \Gamma + \nabla (\mathbf{U} \cdot (\mathbf{d}\Gamma)) - \zeta \nabla \cdot (\mathbf{dU}_t) + \frac{1}{2} (\nabla \cdot (\mathbf{dU}))^2 \right]$$

$$\Lambda_{22}^{\text{III}} = \frac{1}{6} \zeta^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}_t) - \frac{1}{3} \zeta \nabla \cdot (\mathbf{dU}) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\zeta \mathbf{U}) \Gamma \\ + \nabla \left( -\zeta \mathbf{U} \cdot \Gamma - \frac{1}{2} \zeta^2 \nabla \cdot \mathbf{U}_t + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{U}) \nabla \cdot (\mathbf{dU}) - \zeta \mathbf{U} \cdot \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{dU})) \right)$$

$$\Lambda_{23}^{\text{III}} = -\frac{1}{3} \zeta \nabla \cdot (\zeta \mathbf{U}) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \nabla \left( -\frac{1}{3} \zeta^2 \mathbf{U} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \frac{1}{2} \zeta^2 (\nabla \cdot \mathbf{U})^2 \right)$$

$$\Lambda_{40}^{\text{III}} = \left[ \beta_1 d^4 \nabla (\nabla^4 \zeta) + d^4 \left( \beta_1 + \frac{1}{3} \alpha_1 - \frac{1}{45} \right) \nabla (\nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{U}_t)) + \beta_2 d^3 \nabla d \nabla^4 \zeta \right. \\ \left. + \left( \beta_2 + \frac{7}{3} \alpha_1 + \frac{2}{3} \alpha_2 - \frac{2}{9} \right) d^3 \nabla d \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{U}_t) \right] + \mathcal{O}(\mu^2)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{41}^{\text{III}} = & \left[ \frac{1}{45} d^3 \zeta \nabla (\nabla^2 (\nabla \cdot U_t)) + \alpha_1 d^3 \nabla (\nabla \cdot (\nabla \zeta \nabla \cdot U_t)) \right. \\
& + \left( \frac{2}{3} \alpha_1 - \frac{1}{9} \right) d^3 \nabla (\nabla \cdot (\zeta \nabla (\nabla \cdot U_t))) + \left( \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \alpha_1 \right) d^4 \nabla (\nabla \cdot (\nabla \cdot U (\nabla (\nabla \cdot U)))) \\
& - \frac{1}{45} d^4 \nabla \cdot U \nabla (\nabla^2 (\nabla \cdot U)) + \frac{1}{18} d^4 \nabla (\nabla (\nabla \cdot U))^2 - \frac{1}{45} d^4 \nabla (U \cdot \nabla (\nabla^2 (\nabla \cdot U))) \\
& \left. + \frac{1}{3} \alpha_1 d^4 \nabla (\nabla^2 (U \cdot (\nabla (\nabla \cdot U)))) + \frac{1}{2} \beta_1 d^4 \nabla (\nabla^4 (U^2)) \right] + O(\mu)
\end{aligned}$$

όπου

$$\Gamma = \frac{1}{6} d \nabla (\nabla U) - \frac{1}{2} \nabla (\nabla (dU))$$

## Παράρτημα III - Κώδικας προγράμματος Fortran

---

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
implicit integer*4 (i-n)
parameter (iim=500, jjm=500, kkm=10)

c      2D NONLINEAR DISPERSIVE BOUSSINESQ WAVES

      DIMENSION H(iim, jjm), d(iim, jjm), Z(iim, jjm), U(iim, jjm),
!ZB(iim, jjm), UNP(iim, jjm), UN(iim, jjm), ZN(iim, jjm), Hede(iim, jjm),
!DK(iim, jjm), VNP(iim, jjm), VN(iim, jjm), fscr(jjm), zs(iim, jjm),
!ZNP(iim, jjm), UB(iim, jjm), ZZ(iim, jjm), UU(iim, jjm), zin(iim, jjm),
!dks(iim, jjm), dd(iim, jjm), VB(iim, jjm), VV(iim, jjm), dddd(iim, jjm),
!He(iim, jjm), V(iim, jjm), itb(iim, jjm), ctb(iim, jjm), zt(iim, jjm),
!A(iim, jjm), B(iim, jjm), C(iim, jjm), G(iim, jjm), H11(iim, jjm),
!zmax(iim, jjm), zmin(iim, jjm), jsb(iim), akapa(iim, jjm), zm(iim, jj),
!alength(iim, jjm), diflen(iim, jjm), A1NEW(Iim, jjm), A2NEW(Iim,
!jjm), akapade(iim, jjm), USN(iim, jjm), VSN(iim, jjm), US1(iim, jjm),
!VS1(iim, jjm), USNP(iim, jjm), VSNP(iim, jjm), USO(iim, jjm), US(iim, jjm),
!USB(iim, jjm), VSO(iim, jjm), VS(iim, jjm), VSB(iim, jjm), hpr(iim, jjm),
!umm(iim, jjm), vmm(iim, jjm), vorticity(iim, jjm),
!dpr(iim, jjm), um(iim, jjm), vm(iim, jjm), uum1(iim, jjm), vvm1(iim, jjm),
!uum2(iim, jjm), vvm2(iim, jjm), ddl(iim, jjm), dd2(iim, jjm),
!usmn(iim, jjm), umn(iim, jjm), aus(iim, jjm), au(iim, jjm), vmn(iim, jjm),
!vsmn(iim, jjm), avs(iim, jjm), av(iim, jjm), umu(iim, jjm), vmv(iim, jjm),
!usfin(iim, jjm, kkm), ufin(iim, jjm, kkm), vath1(iim, jjm, kkm),
!vsfin(iim, jjm, kkm), vfin(iim, jjm, kkm), vath2(iim, jjm, kkm)
real*8 umz

c      *****
c      INPUT DATA
c      *****
      data DT,DX,DDD,TEND/0.01,0.05,0.27,50.0/
      data ga,pi/9.81,3.1415926/
      DY=DX
      im=350
      jm=237
      jst=110
      DATA Ho,PER,thita/0.10,1.28,0.0/
      nm=int(tend/dt)+1
      wf1=0.96
      wf2=(1.-wf1)/4.
      DATA JMS3,JMS4/154,181/
      cs=2.5
      del=2.*dx
      data d50/.0003/
      zo=.1*d50
      fc=0.03

c      *****
c      BREAKING PARAMETERS
c      *****
      cbrk=1.2
c      cbrk=2.5
c      cbrk=3.5
      itbrk=0.
      et1=0.65
      et2=0.15
      coeft=5.0
```

```

ddk=dx*0.05
do i=1,im
do j=1,jm
itb(i,j)=float(nm)
ctb(i,j)=0.35
end do
end do
c *****
c BATHYMETRY
c *****
open (unit=9,file='depth.dat')
do j=1,jm
do i=1,im
c d(i,j)=DDD
read (9,*) d(i,j)
end do
end do
close(9)

den=0.25*Ho

open (unit=51,file='hpr.dat')
do j=1,jm
do i=1,im
read (51,*) hpr(i,j)
c hpr(i,j)=0.0
end do
end do
close(51)

do i=1, im
do j=1,jm
if (d(i,j).lt.0.005) d(i,j)=0.005
end do
end do
c do i=1,im
c do j=1,jm
i=244
j=164
vath2(i,j,1)=-d(i,j)
vath1(i,j,1)=-hpr(i,j)
do k=2,10
vath2(i,j,k)=vath2(i,j,k-1)+d(i,j)/10.
vath1(i,j,k)=vath1(i,j,k-1)+hpr(i,j)/10.
enddo
c enddo
c enddo

c *****
c OUTPUT files
c *****
open (unit=4,file='length.dat')
open (unit=10,file='wgelev.dat')
open (unit=11,file='midelev.dat')
open (unit=12,file='alnew.dat')
open (unit=13,file='a2new.dat')
open (unit=41,file='taxythtes.dat')
open (unit=42,file='umm.dat')
open (unit=43,file='vmm.dat')
open (unit=44,file='vorticity.dat')
open (unit=45,file='tomh1.dat')

```

```

open (unit=46,file='tomh2.dat')
open (unit=47,file='setup.dat')
open (unit=48,file='hede.dat')
open (unit=71,file='thr1.dat')
open (unit=72,file='he.dat')
open (unit=21,file='zgauge.dat')
open (unit=5,file='thr2.dat')
open (unit=8,file='thr3.dat')

c *****
c POROUS PARAMETERS
c *****
data por,agamma/0.49,0.34/
data diam/0.035/
data ani,ao,bo/0.000001,1000,1.1/
aka=diam**2*por**3/(ao*(1-por)**2)
cf=bo*(1-por)*sqrt(aka)/(por*diam)
c cf=0.55
adr1=ani/aka
adr2=cf/sqrt(aka)
cr=(1+agamma*(1-por)/por)/por

c *****
c Initial conditions
c *****
do j=1,jm
do i=1,im
h(i,j)=d(i,j)
zin(i,j)=0.0
dks(i,j)=0.
dk(i,j)=0.
UN(i,j)=0.0
ub(i,j)=0.
u(i,j)=0.
vn(i,j)=0.0
vb(i,j)=0.
v(i,j)=0.
zn(i,j)=0.0
zb(i,j)=0.
z(i,j)=0.
UU(i,j)=0.
VV(i,j)=0.
ZZ(i,j)=0.
znp(i,j)=0.
unp(i,j)=0.
vnp(i,j)=0.
zmax(i,j)=0.
zmin(i,j)=0.
usb(i,j)=0.
us(i,j)=0.
uso(i,j)=0.
usnp(i,j)=0.
vsb(i,j)=0.
vs(i,j)=0.
vso(i,j)=0.
vsnp(i,j)=0.
zm(i,j)=0.
end do
end do

c *****

```

```

c      New coefficients
c      *****
      do j=1,jm
      do i=1,im
      aleno=ga*(per**2)/(2.*pi)
      alength(i,j)=aleno
21     alenp=alength(i,j)
      akapa(i,j)=2*pi/alenp
      akapade(i,j)=akapa(i,j)*d(i,j)
      alength(i,j) = aleno *tanh(akapade(i,j))
      difflen(i,j) = abs(alength(i,j) - alenp)
      if (difflen(i,j).gt.0.001) goto 21
      end do
      write (4,*) j, alength(155,j)
      end do
      close(4)
      do j=1,jm
      do i=1,im
      akapa(i,j)=2*pi/alength(i,j)
      akapade(i,j)=akapa(i,j)*d(i,j)
      end do
      end do

      do j=1,jm
      do i=1,im

      A1NEW(i,j)=(6*akapade(i,j)*(75-
1115*akapade(i,j)**2+akapade(i,j)
! **4)*COSH(akapade(i,j))-9*akapade(i,j)
!* (-75+395*akapade(i,j)**2+akapade(i,j)**4)
!*COSH(3*akapade(i,j))+10800*SINH(akapade(i,j))**5+akapade(i,j)*
!(3*(-375-185*akapade(i,j)**2+akapade(i,j)**4)
!*COSH(5*akapade(i,j))+10*akapade(i,j)*(585+29*akapade(i,j)**2)
!*SINH(akapade(i,j))+5*akapade(i,j)*(675+139*akapade(i,j)**2)
!*SINH(3*akapade(i,j))+akapade(i,j)*(1125+101*akapade(i,j)**2)
!*SINH(5*akapade(i,j))))/(60*(akapade(i,j)**2)*
!(2*akapade(i,j)*(-3+47*akapade(i,j)**2)*COSH(akapade(i,j))
!+9*akapade(i,j)*(-1+5*akapade(i,j)**2)*
!COSH(3*akapade(i,j))-144*SINH(akapade(i,j))**5+akapade(i,j)*
!(5*(3+akapade(i,j)**2)*COSH(5*akapade(i,j))-3*akapade(i,j)*
!(26*SINH(akapade(i,j))+15*SINH(3*akapade(i,j))
!+5*SINH(5*akapade(i,j))))))

      A2NEW(i,j)=(2*(-
17010+175905*akapade(i,j)**2+234867*akapade(i,j)
! **4+299909*akapade(i,j)**6+6696*akapade(i,j)**8)*
!Cosh(2*akapade(i,j))-8*(2430+40365*akapade(i,j)**2+47949
!*akapade(i,j)**4+12007*akapade(i,j)**6+13854*akapade(i,j)**8)
!*Cosh(4*akapade(i,j))+2*(17010-79245*akapade(i,j)**2+46023
!*akapade(i,j)**4+262957*akapade(i,j)**6+52462*akapade(i,j)**8+
!15795*Cosh(6*akapade(i,j))-7290*Cosh(8*akapade(i,j))+1215*
!Cosh(10*akapade(i,j)))+
!akapade(i,j)*(-25920*(48*Cosh(akapade(i,j)))-
5*Cosh(3*akapade(i,j))
!+5*Cosh(5*akapade(i,j)))*Sinh(akapade(i,j))**5+
!akapade(i,j)*(-(-164565 + 120153*akapade(i,j)**2 + 13103
!*akapade(i,j)**4+ 10064*akapade(i,j)**6)*Cosh(6*akapade(i,j)) +
!6*(-6165 - 9009*akapade(i,j)**2 + 3493*akapade(i,j)**4
!+ 430*akapade(i,j)**6)*Cosh(
!8*akapade(i,j)) + (2025 - 3981*akapade(i,j)**2
!- 731*akapade(i,j)**4)*Cosh(10*akapade(i,j)) +

```



```

!2*akapade(i,j)*(-299295 - 61665*akapade(i,j)**2 + 255139
!*akapade(i,j)**4 + 19944*akapade(i,j)**6)*Sinh(2*akapade(i,j))
! + 16*akapade(i,j)*(15525 + 5007*akapade(i,j)**2
!+ 19267*akapade(i,j)**4 + 2273*akapade(i,j)**6)*Sinh(
!4*akapade(i,j)) +akapade(i,j)*(-58185 + 55737*akapade(i,j)**2
!+ 30597*akapade(i,j)**4 + 2576*akapade(i,j)**6)*Sinh(
!6*akapade(i,j)) - 8*akapade(i,j)*(-8235 + 255*akapade(i,j)**2
!+ 1379*akapade(i,j)**4 + 17*akapade(i,j)**6)*Sinh(
!8*akapade(i,j)) + 3*akapade(i,j)*(855 + 761*akapade(i,j)**2
!+ 37*akapade(i,j)**4)*Sinh(
!10*akapade(i,j))))*0.5/(960*akapade(i,j)**2*(-3*akapade(i,j)
!*Cosh(akapade(i,j)) + (3 +akapade(i,j)**2)*Sinh(akapade(i,j)))
!(2*akapade(i,j) +
!Sinh(2*akapade(i,j)))**2*(2*akapade(i,j)*(-3
+
47*akapade(i,j)**2)
!*Cosh(akapade(i,j)) +
!9*akapade(i,j)*(-1 + 5*akapade(i,j)**2)*Cosh(3*akapade(i,j))-144
!*Sinh(akapade(i,j))**5 +
!akapade(i,j)*(5*(3 +akapade(i,j)**2)*Cosh(5*akapade(i,j)) -
!3*akapade(i,j)*(26*Sinh(akapade(i,j)) + 15*Sinh(3*akapade(i,j))
!+5*Sinh(5*akapade(i,j))))))

c      A1NEW(I,j)=1./15.
      A2NEW(I,j)=a1new(i,j)*0.5
c      A2NEW(I,j)=0.
      end do
      end do

      do j=1,jm
      write(12,326) (a1new(i,j),i=1,im)
      end do
      do j=1,jm
      write(13,326) (a2new(i,j),i=1,im)
      end do

326   format (800f7.4)
      close (12)
      close (13)

c      *****
c      Time Loop
c      *****
      ian=0
100   ian=ian+1
      ITER=0
      T=ian*DT
c      *****
c      MHKOS KYMATISMWN
c      *****
      pi2=2.*pi
      aleno=ga*(per**2)/pi2
c      alen=aleno
c      39alenp=alen
c      akapa=pi2/alenp
c      akd=akapa*ddd
c      alen=aleno *tanh(akd)
c      dlen=abs(alen - alenp)
c      if (dlen.gt.0.001) goto 39
      alen=alength(im/2,jst)

c      *****

```

```

c      Source Function
c      *****
      delta=.3
      wa=delta*alen/2.
      bta=80./((delta*alen)**2)
      ak1=pi2/alen
      AB=1./15.
      amp=Ho/2.
      w=pi2/per
      chis=jst*dy
      do j=2,jm-1
      chi=j*dy
      fscr(j)=exp(-bta*(chi-chis)**2)
      end do
      aky=ak1*cos(thita)
      AI1=sqrt(pi/bta)*exp(-aky**2./(4.*bta))
      adk=cos(thita)*2.*amp*(1+AB*(ak1*d(im/2,jst))**2.)*(W**2.+AB*ga*
!ak1**4.*d(im/2,jst)**3.)/(W*AI1*ak1*(1+(AB+1./3.)*(ak1*d(im/2,
!jst)**2.))
      do j=2,jm-1
      do i=2,im-1
      akx=ak1*sin(thita)
      z1=adk*sin(akx*j*dy-2.*pi*t/per)
      zin(i,j)=z1*fscr(j)*1.0
      end do
      end do

c      *****
c      FIRST APPROXIMATION
c      *****
c      PREDICTOR CONTINUITY
      DO J=2, JM-1
      DO I=2, IM-1
      H(i,j)=D(i,j)+ZB(i,j)
      if (d(i,j).lt.DEN) THEN
      HH=H(i,j)
      ELSE
      HH=d(i,j)
      END IF

      if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
      UNX=(-UN(i+2,j)+8*UN(i+1,j)-8*UNP(i-1,j)+UNP(i-2,j))/12./DX
      UBX=(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))/12./DX
      UX=(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))/12./DX
      UUX=(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))/12./DX
      ZNX=(-ZN(i+2,j)+8*ZN(i+1,j)-8*ZNP(i-1,j)+ZNP(i-2,j))/12./DX
      ZBX=(-ZB(i+2,j)+8*ZB(i+1,j)-8*ZB(i-1,j)+ZB(i-2,j))/12./DX
      ZX=(-Z(i+2,j)+8*Z(i+1,j)-8*Z(i-1,j)+Z(i-2,j))/12./DX
      ZZX=(-ZZ(i+2,j)+8*ZZ(i+1,j)-8*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-2,j))/12./DX
      DDX=(-d(i+2,j)+8*d(i+1,j)-8*d(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
      UU0=(23*UB(i,j)-16*U(i,j)+5*UU(i,j))/12.
      ZZ0=(23*ZB(i,j)-16*Z(i,j)+5*ZZ(i,j))/12.
      UU1X=(23*UBX-16*UX+5*UUX)/12.
      ZZ1X=(23*ZBX-16*ZX+5*ZZX)/12.
      ANLU=-DT*(DDX*UU0+D(i,j)*UU1X+ZZ1X*UU0+UU1X*ZZ0)
      else
      UNX=(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))/2./DX
      UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX
      UX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
      UUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
      ZNX=(ZN(i+1,j)-ZNP(i-1,j))/2./DX

```

```

ZBX=(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))/2./DX
ZX=(Z(i+1,j)-Z(i-1,j))/2./DX
ZZX=(ZZ(i+1,j)-ZZ(i-1,j))/2./DX
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
UU0=(23*UB(i,j)-16*U(i,j)+5*UU(i,j))/12.
ZZ0=(23*ZB(i,j)-16*Z(i,j)+5*ZZ(i,j))/12.
UU1X=(23*UBX-16*UX+5*UUX)/12.
ZZ1X=(23*ZBX-16*ZX+5*ZZX)/12.
ANLU=-DT*(DDX*UU0+D(i,j)*UU1X+ZZ1X*UU0+UU1X*ZZ0)
end if
if (J.ge.3.and.J.le.JM-2) then
VNY=(-VN(i,j+2)+8*VN(i,j+1)-8*VNP(i,j-1)+VNP(i,j-2))/12./DY
VBY=(-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2))/12./DY
VY=(-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2))/12./DY
VVY=(-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2))/12./DY
ZNY=(-ZN(i,j+2)+8*ZN(i,j+1)-8*ZNP(i,j-1)+ZNP(i,j-2))/12./DY
ZBY=(-ZB(i,j+2)+8*ZB(i,j+1)-8*ZB(i,j-1)+ZB(i,j-2))/12./DY
ZY=(-Z(i,j+2)+8*Z(i,j+1)-8*Z(i,j-1)+Z(i,j-2))/12./DY
ZZY=(-ZZ(i,j+2)+8*ZZ(i,j+1)-8*ZZ(i,j-1)+ZZ(i,j-2))/12./DY
DDY=(-d(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
VV0=(23*VB(i,j)-16*V(i,j)+5*VV(i,j))/12.
ZZ0=(23*ZB(i,j)-16*Z(i,j)+5*ZZ(i,j))/12.
VV1Y=(23*VBY-16*VY+5*VVY)/12.
ZZ1Y=(23*ZBY-16*ZY+5*ZZY)/12.
ANLV=-DT*(DDY*VV0+D(i,j)*VV1Y+ZZ1Y*VV0+VV1Y*ZZ0)
else
VNY=(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))/2./DY
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
ZNY=(ZN(i,j+1)-ZNP(i,j-1))/2./DY
ZBY=(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))/2./DY
ZY=(Z(i,j+1)-Z(i,j-1))/2./DY
ZZY=(ZZ(i,j+1)-ZZ(i,j-1))/2./DY
DDy=(D(i,j+1)-D(i,j-1))/2./DY
VV0=(23*VB(i,j)-16*V(i,j)+5*VV(i,j))/12.
ZZ0=(23*ZB(i,j)-16*Z(i,j)+5*ZZ(i,j))/12.
VV1Y=(23*VBY-16*VY+5*VVY)/12.
ZZ1Y=(23*ZBY-16*ZY+5*ZZY)/12.
ANLV=-DT*(DDY*VV0+D(i,j)*VV1Y+ZZ1Y*VV0+VV1Y*ZZ0)
end if
IF (j .gt. JMS3 .and. j .lt. JMS4) THEN
us1(i,j)=(23*usb(i,j)-16*us(i,j)+5*uso(i,j))/12.
vs1(i,j)=(23*vsb(i,j)-16*vs(i,j)+5*vso(i,j))/12.
usbx=(-usb(i+2,j)+8*usb(i+1,j)-8*usb(i-1,j)+usb(i-
2,j))/12.*DX)
usx=(-us(i+2,j)+8*us(i+1,j)-8*us(i-1,j)+us(i-2,j))/(12.*DX)
usox=(-uso(i+2,j)+8*uso(i+1,j)-8*uso(i-1,j)+uso(i-
2,j))/12.*DX)
us1x=(23*usbx-16*usx+5*usox)/12.
usby=(-usb(i,j+2)+8*usb(i,j+1)-8*usb(i,j-1)+usb(i,j-
2))/12.*DY)
usy=(-us(i,j+2)+8*us(i,j+1)-8*us(i,j-1)+us(i,j-2))/(12.*DY)
usoy=(-uso(i,j+2)+8*uso(i,j+1)-8*uso(i,j-1)+uso(i,j-
2))/12.*DY)
us1y=(23*usby-16*usy+5*usoy)/12.
vsbx=(-vsb(i+2,j)+8*vsb(i+1,j)-8*vsb(i-1,j)+vsb(i-
2,j))/12.*DX)
vsx=(-vs(i+2,j)+8*vs(i+1,j)-8*vs(i-1,j)+vs(i-2,j))/(12.*DX)
vsox=(-vso(i+2,j)+8*vso(i+1,j)-8*vso(i-1,j)+vso(i-
2,j))/12.*DX)

```

```

vs1x=(23*vsbx-16*vsx+5*vsox)/12.
vsby=(-vsb(i,j+2)+8*vsb(i,j+1)-8*vsb(i,j-1)+vsb(i,j-
2))/ (12.*DY)
vsy=(-vs(i,j+2)+8*vs(i,j+1)-8*vs(i,j-1)+vs(i,j-2))/ (12.*DY)
vsoy=(-vso(i,j+2)+8*vso(i,j+1)-8*vso(i,j-1)+vso(i,j-
2))/ (12.*DY)
vs1y=(23*vsby-16*vsy+5*vsoy)/12.
hprx=(-hpr(i+2,j)+8*hpr(i+1,j)-8*hpr(i-1,j)+hpr(i-
2,j))/ (12.*DX)
hpry=(-hpr(i,j+2)+8*hpr(i,j+1)-8*hpr(i,j-1)+hpr(i,j-
2))/ (12.*DY)
alphx=adr1*por+adr2*por**2*abs(us1(i,j))
alphy=adr1*por+adr2*por**2*abs(vs1(i,j))

IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
UsBSMX=-UsB(i+2,j)+8*UsB(i+1,j)-8*UsB(i-1,j)+UsB(i-2,j)
UsSMSX=-Us(i+2,j)+8*Us(i+1,j)-8*Us(i-1,j)+Us(i-2,j)
UsoSMX=-Uso(i+2,j)+8*Uso(i+1,j)-8*Uso(i-1,j)+Uso(i-2,j)
UsSMX=(DT/(12*DX))* (23*UsBSMX-16*UsSMSX+5*UsoSMX)/12.
ELSE
UsBSMX=UsB(i+1,j)-UsB(i-1,j)
UsSMSX=Us(i+1,j)-Us(i-1,j)
UsoSMX=Uso(i+1,j)-Uso(i-1,j)
UsSMX=(DT/(2*DX))* (23*UsBSMX-16*UsSMSX+5*UsoSMX)/12.
END IF
VsSMX=DT*vs1x

IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
UsBSMY=-UsB(i,j+2)+8*UsB(i,j+1)-8*UsB(i,j-1)+UsB(i,j-2)
UsSMSY=-Us(i,j+2)+8*Us(i,j+1)-8*Us(i,j-1)+Us(i,j-2)
UsoSMY=-Uso(i,j+2)+8*Uso(i,j+1)-8*Uso(i,j-1)+Uso(i,j-2)
UsSMY=(DT/(12*DX))* (23*UsBSMY-16*UsSMSY+5*UsoSMY)/12.
ELSE
UsBSMY=UsB(i,j+1)-UsB(i,j-1)
UsSMSY=Us(i,j+1)-Us(i,j-1)
UsoSMY=Uso(i,j+1)-Uso(i,j-1)
UsSMY=(DT/(2*DX))* (23*UsBSMY-16*UsSMSY+5*UsoSMY)/12.
END IF

DUsBX=DT*(UsB(i+1,j)-2*UsB(i,j)+UsB(i-1,j))/(DX**2)
DUsX=DT*(Us(i+1,j)-2*Us(i,j)+Us(i-1,j))/(DX**2)
DUsoX=DT*(Uso(i+1,j)-2*Uso(i,j)+Uso(i-1,j))/(DX**2)
Us2SMX=(23*DUsBX-16*DUsX+5*DUsoX)/12.
DVsx=DT*(Vs(i+1,j)-2*Vs(i,j)+Vs(i-1,j))/(DX**2)
DVsbx=DT*(VsB(i+1,j)-2*VsB(i,j)+VsB(i-1,j))/(DX**2)
DVsoX=DT*(Vso(i+1,j)-2*Vso(i,j)+Vso(i-1,j))/(DX**2)
Vs2SMX=(23*DVsbx-16*DVsx+5*DVsoX)/12.
Usbxy=((UsB(I+1,J+1)-UsB(I-1,J+1))-(UsB(I+1,J-1)-UsB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Usxy=((Us(I+1,J+1)-Us(I-1,J+1))-(Us(I+1,J-1)-Us(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Usoxy=((Uso(I+1,J+1)-Uso(I-1,J+1))-(Uso(I+1,J-1)-Uso(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
UsSMXY=DT*(23*UsBXY-16*UsXY+5*UsoXY)/12.
IF (ian .GT. 200) THEN
AM=(CS*DEL)**2*por*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*por*0.5*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**
! (-0.5)*(2*UsSMX*Us2SMX+2*VsSMX*Vs2SMX+(UsSMY+VsSMX)*(UsSMXY+Vs2SMX
!))
ELSE

```

```

AM=0.0
DMX=0.0
END IF
SMAG1=(2*DMX*UsSMX+2*AM*Us2SMX)*por
SMAG2=(DMX*(UsSMY+VsSMX)+AM*(UsSMXY+Vs2SMX))*por
SMAG=SMAG1+SMAG2
c
smag=0.0

usn(i,j)=usb(i,j)-dt/cr*(usl(i,j)*uslx+vs1(i,j)*usly)
! -dt/cr*(ga*ZZ1X+alphx*usl(i,j))+smag

IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
VsBSMX=-VsB(i+2,j)+8*VsB(i+1,j)-8*VsB(i-1,j)+VsB(i-2,j)
VsSMSX=-Vs(i+2,j)+8*Vs(i+1,j)-8*Vs(i-1,j)+Vs(i-2,j)
VsoSMX=-Vso(i+2,j)+8*Vso(i+1,j)-8*Vso(i-1,j)+Vso(i-2,j)
VsSMX=(DT/(12*DX))*(23*VsBSMX-16*VsSMSX+5*VsoSMX)/12.
ELSE
VsBSMX=VsB(i+1,j)-VsB(i-1,j)
VsSMSX=Vs(i+1,j)-Vs(i-1,j)
VsoSMX=Vso(i+1,j)-Vso(i-1,j)
VsSMX=(DT/(2*DX))*(23*VsBSMX-16*VsSMSX+5*VsoSMX)/12.
END IF
UsSMX=DT*uslx
UsSMY=DT*usly

IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
VsBSMY=-VsB(i,j+2)+8*VsB(i,j+1)-8*VsB(i,j-1)+VsB(i,j-2)
VsSMSY=-Vs(i,j+2)+8*Vs(i,j+1)-8*Vs(i,j-1)+Vs(i,j-2)
VsoSMY=-Vso(i,j+2)+8*Vso(i,j+1)-8*Vso(i,j-1)+Vso(i,j-2)
VsSMY=(DT/(12*DX))*(23*VsBSMY-16*VsSMSY+5*VsoSMY)/12.
ELSE
VsBSMY=VsB(i,j+1)-VsB(i,j-1)
VsSMSY=Vs(i,j+1)-V(i,j-1)
VsoSMY=Vso(i,j+1)-Vso(i,j-1)
VsSMY=(DT/(2*DX))*(23*VsBSMY-16*VsSMSY+5*VsoSMY)/12.
END IF

DUxX=DT*(Us(i+1,j)-2*Us(i,j)+Us(i-1,j))/(DX**2)
DUxBX=DT*(UsB(i+1,j)-2*UsB(i,j)+UsB(i-1,j))/(DX**2)
DUsoX=DT*(Uso(i+1,j)-2*Uso(i,j)+Uso(i-1,j))/(DX**2)
Us2SMX=(23*DUxBX-16*DUxX+5*DUsoX)/12.
DUyY=DT*(Us(i,j+1)-2*Us(i,j)+Us(i,j-1))/(DY**2)
DUyBY=DT*(UsB(i,j+1)-2*UsB(i,j)+UsB(i,j-1))/(DY**2)
DUsoY=DT*(Uso(i,j+1)-2*Uso(i,j)+Uso(i,j-1))/(DY**2)
Us2SMY=(23*DUyBY-16*DUyY+5*DUsoY)/12.
DVxX=DT*(Vs(i+1,j)-2*Vs(i,j)+Vs(i-1,j))/(DX**2)
DVxBX=DT*(VsB(i+1,j)-2*VsB(i,j)+VsB(i-1,j))/(DX**2)
DVsoX=DT*(Vso(i+1,j)-2*Vso(i,j)+Vso(i-1,j))/(DX**2)
Vs2SMX=(23*DVxBX-16*DVxX+5*DVsoX)/12.
DVyY=DT*(Vs(i,j+1)-2*Vs(i,j)+Vs(i,j-1))/(DY**2)
DVyBY=DT*(VsB(i,j+1)-2*VsB(i,j)+VsB(i,j-1))/(DY**2)
DVsoY=DT*(Vso(i,j+1)-2*Vso(i,j)+Vso(i,j-1))/(DY**2)
Vs2SMY=(23*DVyBY-16*DVyY+5*DVsoY)/12.
Usbxy=((UsB(I+1,J+1)-UsB(I-1,J+1))-(UsB(I+1,J-1)-UsB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Usxy=((Us(I+1,J+1)-Us(I-1,J+1))-(Us(I+1,J-1)-Us(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Usoxy=((Uso(I+1,J+1)-Uso(I-1,J+1))-(Uso(I+1,J-1)-Uso(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
UsSMXY=DT*(23*UsBXY-16*UsXY+5*UsoXY)/12.
Vsbxy=((VsB(I+1,J+1)-VsB(I-1,J+1))-(VsB(I+1,J-1)-VsB(I-1,J-1)))/

```

```

! 4./(DX**2)
Vsxy=((Vs(I+1,J+1)-Vs(I-1,J+1))-(Vs(I+1,J-1)-Vs(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vsoxy=((Vso(I+1,J+1)-Vso(I-1,J+1))-(Vso(I+1,J-1)-Vso(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
VsSMXY=DT*(23*VsBXY-16*VsXY+5*VsoXY)/12.

IF (ian .GT. 200) THEN
AM=(CS*DEL)**2*por*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*por*0.5*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**
! (-0.5)*(2*UsSMX*Us2SMX+2*VsSMX*Vs2SMX+(UsSMY+VsSMX)*(UsSMXY+Vs2SMX
!))
DMY=(CS*DEL)**2*por*0.5*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**
! (-0.5)*(2*UsSMX*UsSMXY+2*VsSMX*VsSMXY+(UsSMY+VsSMX)*(Us2SMY+VsSMXY
!))
ELSE
AM=0.
DMX=0.
DMY=0.
END IF
SMAG1=(2*DMY*VsSMY+2*AM*Vs2SMY)*por
SMAG2=(DMX*(UsSMY+VsSMX)+AM*(UsSMXY+Vs2SMX))*por
SMAG=SMAG1+SMAG2
c smag=0.0
vsn(i,j)=vsb(i,j)-dt/cr*(usl(i,j)*vs1x+vs1(i,j)*vs1y)
! -dt/cr*(ga*ZZ1Y+alphy*vs1(i,j))+smag
husxy=hprx*usl(i,j)+hpr(i,j)*(us1x+vs1y)+hpry*vs1(i,j)
ELSE
usn(i,j)=0.
vsn(i,j)=0.
husxy=0.0
END IF

AET=ANLU+ANLV+dt*zin(i,j)-dt*por*husxy
ZN(i,j)=(ZB(i,j)+AET)
END DO
END DO

do j=1,jm
zn(1,j)=zn(2,j)
zn(im,j)=zn(im-1,j)
end do
do i=1,im
zn(i,1)=zn(i,2)
zn(i,jm)=zn(i,jm-1)
end do
c PREDICTOR MOMENTUM X
DO J=2,JM-1
DO I=2,IM-1
alfa=-1./3.
bita=0.
gamma=1./15.
if (i.eq.2.or.i.eq.im-1) then
gamma=0.
else
gamma=1./15.
end if
H(i,j)=D(i,j)+ZNP(i,j)
if (d(i,j).gt.DEN) THEN
HH=D(i,j)
ELSE

```

```

HH=H(i,j)
END IF
c CTM=(alfa-gamma)*HH**2
CTM=(alfa-alnew(i,j))*HH**2
DD3X=CTM/dx**2.
A(i,j)=DD3X
B(i,j)=1.-2.*DD3X
C(i,j)=DD3X

IF (H(i,j).GT.zo) THEN
az=LOG(H(i,j)/ZO)-1
CB=(.4/az)**2
if (CB.gt.0.08) CB=.08
if (cb.lt.0.001) cb=.001
c   cb=.01
FRICT=DT*CB*U(i,j)*sqrt(U(i,j)**2+V(i,j)**2)/H(i,j)
c frict=0.0
ELSE
FRICT=0.
END IF

IF (I.EQ.2) THEN
Zxxx=(-3*ZB(5,j)+14.*ZB(4,j)-24.*ZB(3,j)+
! 18.*ZB(2,j)-5*ZB(1,j))/2./DX**3
GOTO 266
ELSE
END IF
IF (I.EQ.(IM-1)) THEN
Zxxx=(5.*ZB(im,j)-18.*ZB(im-1,j)+24.*ZB(im-2,j)-
! 14.*ZB(im-3,j)+3.*ZB(im-4,j))/2./DX**3
GOTO 266
ELSE
END IF
Zbxxx=(ZB(i+2,j)-2.*ZB(i+1,j)+2.*ZB(i-1,j)-ZB(i-2,j))
! /2./DX**3
Zlxxx=(Z(i+2,j)-2.*Z(i+1,j)+2.*Z(i-1,j)-Z(i-2,j))
! /2./DX**3
Zzxxx=(ZZ(i+2,j)-2.*ZZ(i+1,j)+2.*ZZ(i-1,j)-ZZ(i-2,j))
! /2./DX**3
Zxxx=(23*Zbxxx-16*Zlxxx+5.*Zzxxx)/12.
266 CONTINUE
Zbxyy=((ZB(i+1,j+1)-2.*ZB(i+1,j)+ZB(i+1,j-1))-
! (ZB(i-1,j+1)-2.*ZB(i-1,j)+ZB(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zlxyy=((Z(i+1,j+1)-2.*Z(i+1,j)+Z(i+1,j-1))-
! (Z(i-1,j+1)-2.*Z(i-1,j)+Z(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zzxyy=((ZZ(i+1,j+1)-2.*ZZ(i+1,j)+ZZ(i+1,j-1))-
! (ZZ(i-1,j+1)-2.*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zxyy=(23*Zbxyy-16*Zlxyy+5.*Zzxyy)/12.
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
UBXP=UB(i,j)*(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))
UXP=U(i,j)*(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))
UUXP=UU(i,j)*(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))
UUX=(DT/(12*DX))*(23*UBXP-16*UXP+5*UUXP)/12.
ZBXP=(-ZB(i+2,j)+8*ZB(i+1,j)-8*ZB(i-1,j)+ZB(i-2,j))
ZXP=(-Z(i+2,j)+8*Z(i+1,j)-8*Z(i-1,j)+Z(i-2,j))
ZZXP=(-ZZ(i+2,j)+8*ZZ(i+1,j)-8*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-2,j))
VAR2=ga*DT/(12*DX)*ZBXP
VAR3=ga*DT/(12*DX)*ZXP
VAR4=ga*DT/(12*DX)*ZZXP
VAR=(23*VAR2-16*VAR3+5*VAR4)/12.
DDX=(-D(i+2,j)+8*D(i+1,j)-8*D(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX

```

```

ELSE
UBXP=UB(i,j)*(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))
UXP=U(i,j)*(U(i+1,j)-U(i-1,j))
UUXP=UU(i,j)*(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))
UUX=(DT/(2*DX))*(23*UBXP-16*UXP+5*UUXP)/12.
VAR2=ga*DT/(2*DX)*(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))
VAR3=ga*DT/(2*DX)*(Z(i+1,j)-Z(i-1,j))
VAR4=ga*DT/(2*DX)*(ZZ(i+1,j)-ZZ(i-1,j))
VAR=(23*VAR2-16*VAR3+5*VAR4)/12.
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
END IF
ZKBX=(ZB(I+1,J)-2*ZB(I,J)+ZB(I-1,J))/(DX**2)
ZKPX=(Z(I+1,J)-2*Z(I,J)+Z(I-1,J))/(DX**2)
ZKPXX=(ZZ(I+1,J)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I-1,J))/(DX**2)
ZKXX=(23*ZKBX-16*ZKPX+5*ZKPXX)/12.
ZKBY=(ZB(I,J+1)-2*ZB(I,J)+ZB(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPYX=(ZZ(I,J+1)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I,J-1))/(DY**2)
ZKYY=(23*ZKBY-16*ZKPY+5*ZKPYX)/12.
ZKbxy=((ZB(I+1,J+1)-ZB(I-1,J+1))-(ZB(I+1,J-1)-ZB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZKxy=((Z(I+1,J+1)-Z(I-1,J+1))-(Z(I+1,J-1)-Z(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZZKxy=((ZZ(I+1,J+1)-ZZ(I-1,J+1))-(ZZ(I+1,J-1)-ZZ(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZKXY=(23*ZKbxy-16*ZKxy+5*ZZKxy)/12.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
UBYP=VB(i,j)*(-UB(i,j+2)+8*UB(i,j+1)-8*UB(i,j-1)+UB(i,j-2))
UYP=V(i,j)*(-U(i,j+2)+8*U(i,j+1)-8*U(i,j-1)+U(i,j-2))
UUYP=VV(i,j)*(-UU(i,j+2)+8*UU(i,j+1)-8*UU(i,j-1)+UU(i,j-2))
VUY=(DT/(12*DX))*(23*UBYP-16*UYP+5*UUYP)/12.
DDY=(-D(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
ELSE
UBYP=VB(i,j)*(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))
UYP=V(i,j)*(U(i,j+1)-U(i,j-1))
UUYP=VV(i,j)*(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))
VUY=(DT/(2*DX))*(23*UBYP-16*UYP+5*UUYP)/12.
DDY=(D(i,j+1)-D(I,J-1))/2./DY
END IF
Vbxy=((VB(I+1,J+1)-VB(I-1,J+1))-(VB(I+1,J-1)-VB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vxy=((V(I+1,J+1)-V(I-1,J+1))-(V(I+1,J-1)-V(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
VVxy=((VV(I+1,J+1)-VV(I-1,J+1))-(VV(I+1,J-1)-VV(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vbxyt=(3*Vbxy-4*Vxy+VVxy)/2.
Vlxyt=(Vbxy-VVxy)/2.
VVxyt=-(3*VVxy-4*Vxy+Vbxy)/2.
c Vxyt=(gamma-alfa)*HH**2*(23*Vbxyt-16*Vlxyt+5*VVxyt)/12.
Vxyt=(alnew(i,j)-alfa)*HH**2*(23*Vbxyt-16*Vlxyt+5*VVxyt)/12.
Vbx=(VB(I+1,J)-VB(I-1,J))/2./dx
Vx=(V(I+1,J)-V(I-1,J))/2./dx
VVx=(VV(I+1,J)-VV(I-1,J))/2./dx
Vby=(VB(I,J+1)-VB(I,J-1))/2./dx
Vy=(V(I,J+1)-V(I,J-1))/2./dx
VVy=(VV(I,J+1)-VV(I,J-1))/2./dx
Vbxt=(3*Vbx-4*Vx+VVx)/2.
Vlxt=(Vbx-VVx)/2.
VVxt=-(3*VVx-4*Vx+Vbx)/2.
Vbyt=(3*Vby-4*Vy+VVy)/2.
Vlyt=(Vby-VVy)/2.

```



```

VVyt=- (3*VVy-4*Vy+Vby) /2.
DUX=DT* (U (i+1, j) -2*U (i, j) +U (i-1, j)) / (DX**2)
DUBX=DT* (UB (i+1, j) -2*UB (i, j) +UB (i-1, j)) / (DX**2)
DUUX=DT* (UU (i+1, j) -2*UU (i, j) +UU (i-1, j)) / (DX**2)
DUY=DT* (U (i, j+1) -2*U (i, j) +U (i, j-1)) / (DY**2)
DUBY=DT* (UB (i, j+1) -2*UB (i, j) +UB (i, j-1)) / (DY**2)
DUUY=DT* (UU (i, j+1) -2*UU (i, j) +UU (i, j-1)) / (DY**2)
UBX=(UB (i+1, j) -UB (i-1, j)) /2./DX
UPX=(U (i+1, j) -U (i-1, j)) /2./DX
UUUX=(UU (i+1, j) -UU (i-1, j)) /2./DX
UBY=(UB (i, j+1) -UB (i, j-1)) /2./DY
UPY=(U (i, j+1) -U (i, j-1)) /2./DY
UUUY=(UU (i, j+1) -UU (i, j-1)) /2./DY
UX=(23*UBX-16*UPX+5*UUUX) /12.
UY=(23*UBY-16*UPY+5*UUUY) /12.
VBY=(VB (i, j+1) -VB (i, j-1)) /2./DY
VPY=(V (i, j+1) -V (i, j-1)) /2./DY
VVVY=(VV (i, j+1) -VV (i, j-1)) /2./DY
VBX=(VB (i+1, j) -VB (i-1, j)) /2./DX
VPX=(V (i+1, j) -V (i-1, j)) /2./DX
VVVX=(VV (i+1, j) -VV (i-1, j)) /2./DX
VY=(23*VBY-16*VPY+5*VVVY) /12.
VX=(23*VBX-16*VPX+5*VVVX) /12.
DKX=(DK (i+1, j) -DK (i-1, j)) /2./DX
DKY=(DK (i, j+1) -DK (i, j-1)) /2./DY
HX=(ZB (I+1, J) -ZB (I-1, J)) /2./DX
HY=(ZB (i, j+1) -ZB (i, j-1)) /2./DY
DISP1=DK (i, j) * (23*DUBX-16*DUX+5*DUUX) /12.
DISP2=DT*2.*DK (I, J) *HX*UX/HH
DISP3=DT*DK (I, J) *HY*UY/HH
DISP4=DT*DK (I, J) * (23*VBxy-16*Vxy+5*VVxy) /12.
DISP5=DT*DKX*HX* (23*UB (I, J) -16*U (I, J) +5*UU (I, J)) /12./HH
DISP6=DK (i, j) * (23*DUBY-16*DUY+5*DUUY) /12.
DISP7=DT*0.5*DK (I, J) *HX*VY/HH
DISP8=DT*0.5*DK (I, J) *HY*VX/HH
DISP9=DT*0.5*DKY*UY
DISP10=DT*DKX*UX
DISP11=DT*0.5*DKY*HY* (23*UB (I, J) -16*U (I, J) +5*UU (I, J)) /12./HH
DISP12=DT*0.5*DKY*HX* (23*VB (I, J) -16*V (I, J) +5*VV (I, J)) /12./HH
DISP13=DT*0.5*DKY*VX
DISPX=DISP1+DISP2+DISP3+DISP4+DISP5+DISP6+DISP7+DISP8+DISP9+DISP10
&+DISP11+DISP12+DISP13
IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
UBSMX=-UB (i+2, j) +8*UB (i+1, j) -8*UB (i-1, j) +UB (i-2, j)
USMSX=-U (i+2, j) +8*U (i+1, j) -8*U (i-1, j) +U (i-2, j)
UUSMX=-UU (i+2, j) +8*UU (i+1, j) -8*UU (i-1, j) +UU (i-2, j)
USMX=(DT/ (12*DX)) * (23*UBSMX-16*USMSX+5*UUSMX) /12.
ELSE
UBSMX=UB (i+1, j) -UB (i-1, j)
USMSX=U (i+1, j) -U (i-1, j)
UUSMX=UU (i+1, j) -UU (i-1, j)
USMX=(DT/ (2*DX)) * (23*UBSMX-16*USMSX+5*UUSMX) /12.
END IF
VSMX=DT* (23*VBX-16*VX+5*VVX) /12.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
UBSMY=-UB (i, j+2) +8*UB (i, j+1) -8*UB (i, j-1) +UB (i, j-2)
USMSY=-U (i, j+2) +8*U (i, j+1) -8*U (i, j-1) +U (i, j-2)
UUSMY=-UU (i, j+2) +8*UU (i, j+1) -8*UU (i, j-1) +UU (i, j-2)
USMY=(DT/ (12*DX)) * (23*UBSMY-16*USMSY+5*UUSMY) /12.
ELSE
UBSMY=UB (i, j+1) -UB (i, j-1)

```

```

USMSY=U(i,j+1)-U(i,j-1)
UUSMY=UU(i,j+1)-UU(i,j-1)
USMY=(DT/(2*DX))*(23*UBSMY-16*USMSY+5*UUSMY)/12.
END IF
U2SMX=(23*DUBX-16*DUX+5*DUUX)/12.
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
V2SMX=(23*DVBX-16*DVX+5*DVVX)/12.
Ubxxy=((UB(I+1,J+1)-UB(I-1,J+1))-(UB(I+1,J-1)-UB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Uxy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
UUXy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
USMXY=DT*(23*UBXY-16*UXY+5*UUXY)/12.
IF (ian .GT. 200) THEN
AM=(CS*DEL)**2*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*0.5*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**(-0.5)*
! (2*USMX*U2SMX+2*VSMX*V2SMX+(USMY+VSMX)*(USMXY+V2SMX))
ELSE
AM=0.0
DMX=0.0
END IF
SMAG1=2*DMX*USMX+2*AM*U2SMX
SMAG2=DMX*(USMY+VSMX)+AM*(USMXY+V2SMX)
SMAG=SMAG1+SMAG2

DPO=UB(i+1,j)-2*UB(i,j)+UB(i-1,j)
UXXT=CTM*DPO/(DX*DX)
c Z3x=DT*gamma*ga*HH**2*(Zxxx+Zxyy)
c ! +DT*gamma*ga*HH*DDX*(2*ZKXX+ZKYY)+DT*gamma*ga*HH*DDY*ZKXY
Z3x=DT*a1new(i,j)*ga*HH**2*(Zxxx+Zxyy)
! +DT*a2new(i,j)*ga*HH*DDX*(2*ZKXX+ZKYY)
! +DT*a2new(i,j)*ga*HH*DDY*ZKXY
Vyt=(23*Vbyt-16*V1yt+5*VVyt)/12.
Vxt=(23*Vbxt-16*V1xt+5*VVxt)/12.
UXT=(UBX-UPX)
c slpy=(.5+gamma)*HH*DDX*Vyt+(0.5+gamma)*HH*DDY*Vxt
c slpy=(.5+a2new(i,j))*HH*DDX*Vyt+(0.5+a2new(i,j))*HH*DDY*Vxt
c slpy=(.5)*HH*DDX*Vyt+(0.5)*HH*DDY*Vxt
c SLP=DDX*HH*UXT+2*gamma*DDX*HH*UXT+slpy
c SLP=DDX*HH*UXT+2*a2new(i,j)*DDX*HH*UXT+slpy
c SLP=DDX*HH*UXT+slpy
frs=dt*fc*ub(i,j)*sqrt(ub(i,j)**2+vb(i,j)**2)/HH
frst=dt*(2.*3.14/per)*dks(i,j)*ub(i,j)+frs
c frst=0.

IF (j .GT. JMS3 .AND. j .LT. JMS4) THEN
hprx=(-hpr(i+2,j)+8*hpr(i+1,j)-8*hpr(i-1,j)+hpr(i-
2,j))/(12.*DX)
hpry=(-hpr(i,j+2)+8*hpr(i,j+1)-8*hpr(i,j-1)+hpr(i,j-
2))/(12.*DY)
USBX=(-USB(I+2,J)+8*USB(I+1,J)-8*USB(I-1,J)+USB(I-
2,J))/(12.*DX)
USPX=(-US(I+2,J)+8*US(I+1,J)-8*US(I-1,J)+US(I-2,J))/(12.*DX)
USXT=USBX-USPX
USBXX=(USB(I+1,J)-2*USB(I,J)+USB(I-1,J))/(DX**2)
USPXX=(US(I+1,J)-2*US(I,J)+US(I-1,J))/(DX**2)
USXXT=USBXX-USPXX

```

```

      VSBX=(-VSB(I+2,J)+8*VSB(I+1,J)-8*VSB(I-1,J)+VSB(I-
2,J))/ (12.*DX)
      VSPX=(-VS(I+2,J)+8*VS(I+1,J)-8*VS(I-1,J)+VS(I-2,J))/ (12.*DX)
      VSXT=VSBX-VSPX
      VSBY=(-VSB(I,J+2)+8*VSB(I,J+1)-8*VSB(I,J-1)+VSB(I,J-
2))/ (12.*DY)
      VSPY=(-VS(I,J+2)+8*VS(I,J+1)-8*VS(I,J-1)+VS(I,J-2))/ (12.*DY)
      VSYT=VSBY-VSPY
      VSBXY=( (VSB(I+1,J+1)-VSB(I-1,J+1)) - (VSB(I+1,J-1)-VSB(I-1,J-1)) ) /
! 4./ (DX**2)
      VSXY=( (VS(I+1,J+1)-VS(I-1,J+1)) - (VS(I+1,J-1)-VS(I-1,J-1)) ) /
! 4./ (DX**2)
      VSXYT=VSBXY-VSXY
      port1=por*HH*hprx*USXT
      port2=0.5*por*HH*HPR(I,J) * (USXXT+VSXYT)
      port3=0.5*por*HH* (HPRX*VSYT+HPRY*VSXT)
      ELSE
      port1=0.
      port2=0.
      port3=0.
      END IF
c   if (ddx.gt.0.0.or.abs(ddx).lt.1) slp=0.
      DD(i,j)=UB(i,j)-UUX-VUY-VAR+UXXT+Vxyt+Z3x+SLP+DISPX-
!frst-frict+port1+port2+port3+smag
      END DO
      END DO
      do j=2,jm-1
      B(1,j)=1.
      C(1,j)=0.0
      DD(1,j)=UN(1,j)
      DD(1,j)=0.
      A(IM,j)=0.0
      B(IM,j)=1.0
      DD(IM,j)=UN(IM,j)
      DD(IM,j)=0.
      G(1,j)=C(1,j)/B(1,j)
      do I=2,im
      G(i,j)=C(i,j)/(B(i,j)-A(i,j)*G(i-1,j))
      end do
      H11(1,j)=DD(1,j)/B(1,j)
      do I=2,im
      H11(i,j)=(DD(i,j)-A(i,j)*H11(i-1,j))/(B(i,j)-A(i,j)*G(i-1,j))
      end do
      UN(im,j)=H11(im,j)
      do I=im-1,1,-1
      UN(i,j)=H11(i,j)-G(i,j)*UN(i+1,j)
      end do
      end do
      do i=2,im-1
      do j=2,jm-1
      H(i,j)=d(i,j)+zn(i,j)
      end do
      end do
      do j=1,jm
      un(1,j)=0.
      !UN(2,J)
      un(im,j)=0.
      !UN(IM-1,J)
      end do
      do i=1,im
      un(i,1)=un(i,2)

```

```

un(i,jm)=un(i,jm-1)
end do
c PREDICTOR MOMENTUM Y
DO I=2,IM-1
DO J=2,JM-1
alfa=-1./3.
bita=0.
gamma=1./15.
if (j.eq.2.or.j.eq.jm-1) then
gamma=0.
else
gamma=1./15.
end if
H(i,j)=D(i,j)+ZNP(i,j)
if (d(I,j).gt.DEN) THEN
HH=D(i,j)
ELSE
HH=H(i,j)
END IF
c CTM=(alfa-gamma)*HH**2
CTM=(alfa-alnew(i,j))*HH**2
DD3X=CTM/dx**2.
A(i,j)=DD3X
B(i,j)=1.-2.*DD3X
C(i,j)=DD3X
IF (H(i,j).GT.zo) THEN
az=LOG(H(i,j)/ZO)-1
CB=(.4/az)**2
if (CB.gt.0.08) CB=.08
if (cb.lt.0.001) cb=.001
c   cb=.01
FRICT=DT*CB*V(i,j)*sqrt(U(i,j)**2+V(i,j)**2)/H(i,j)
c frict=0.0
ELSE
FRICT=0.
END IF

IF (J.EQ.2) THEN
Zyyy=(-3*ZB(i,5)+14.*ZB(i,4)-24.*ZB(i,3)+
! 18.*ZB(i,2)-5*ZB(i,1))/2./DX**3
GOTO 267
ELSE
END IF
IF (J.EQ.(JM-1)) THEN
Zyyy=(5.*ZB(i,jm)-18.*ZB(i,jm-1)+24.*ZB(i,jm-2)-
! 14.*ZB(i,jm-3)+3.*ZB(i,jm-4))/2./DX**3
GOTO 267
ELSE
END IF
Zbyyy=(ZB(i,j+2)-2.*ZB(i,j+1)+2.*ZB(i,j-1)-ZB(i,j-2))
! /2./DX**3
Zlyyy=(Z(i,j+2)-2.*Z(i,j+1)+2.*Z(i,j-1)-Z(i,j-2))
! /2./DX**3
Zzyyy=(ZZ(i,j+2)-2.*ZZ(i,j+1)+2.*ZZ(i,j-1)-ZZ(i,j-2))
! /2./DX**3
Zyyy=(23*Zbyyy-16*Zlyyy+5.*Zzyyy)/12.
267 CONTINUE
Zbxxxy=((ZB(i+1,j+1)-2.*ZB(i,j+1)+ZB(i-1,j+1))-
! (ZB(i+1,j-1)-2.*ZB(i,j-1)+ZB(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zlxxxy=((Z(i+1,j+1)-2.*Z(i,j+1)+Z(i-1,j+1))-
! (Z(i+1,j-1)-2.*Z(i,j-1)+Z(i-1,j-1)))/2./DX**3

```

```

Zzxyy=((ZZ(i+1,j+1)-2.*ZZ(i,j+1)+ZZ(i-1,j+1))-
      ! (ZZ(i+1,j-1)-2.*ZZ(i,j-1)+ZZ(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zxxy=(23*Zbxyy-16*Zlxyy+5.*Zzxyy)/12.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
VBYP=VB(i,j)*(-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2))
VYP=V(i,j)*(-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2))
VVYP=VV(i,j)*(-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2))
VVY=(DT/(12*DX))* (23*VBYP-16*VYP+5*VVYP)/12.
ZBYP=(-ZB(i,j+2)+8*ZB(i,j+1)-8*ZB(i,j-1)+ZB(i,j-2))
ZYP=(-Z(i,j+2)+8*Z(i,j+1)-8*Z(i,j-1)+Z(i,j-2))
ZZYP=(-ZZ(i,j+2)+8*ZZ(i,j+1)-8*ZZ(i,j-1)+ZZ(i,j-2))
VAR2=ga*DT/(12*DX)*ZBYP
VAR3=ga*DT/(12*DX)*ZYP
VAR4=ga*DT/(12*DX)*ZZYP
VAR=(23*VAR2-16*VAR3+5*VAR4)/12.
DDY=(-D(i,j+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
ELSE
VBYP=VB(i,j)*(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))
VYP=V(i,j)*(V(i,j+1)-V(i,j-1))
VVYP=VV(i,j)*(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))
VVY=(DT/(2*DX))* (23*VBYP-16*VYP+5*VVYP)/12.
VAR2=ga*DT/(2*DX)*(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))
VAR3=ga*DT/(2*DX)*(Z(i,j+1)-Z(i,j-1))
VAR4=ga*DT/(2*DX)*(ZZ(i,j+1)-ZZ(i,j-1))
VAR=(23*VAR2-16*VAR3+5*VAR4)/12.
DDY=(D(i,j+1)-D(I,J-1))/2./DY
END IF
ZKBX=(ZB(I+1,J)-2*ZB(I,J)+ZB(I-1,J))/(DX**2)
ZKPX=(Z(I+1,J)-2*Z(I,J)+Z(I-1,J))/(DX**2)
ZKPXX=(ZZ(I+1,J)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I-1,J))/(DX**2)
ZKXX=(23*ZKBX-16*ZKPX+5*ZKPXX)/12.
ZKBY=(ZB(I,J+1)-2*ZB(I,J)+ZB(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPYy=(ZZ(I,J+1)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I,J-1))/(DY**2)
ZKYY=(23*ZKBY-16*ZKPY+5*ZKPYy)/12.
ZKbxy=((ZB(I+1,J+1)-ZB(I-1,J+1))-(ZB(I+1,J-1)-ZB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZKxy=((Z(I+1,J+1)-Z(I-1,J+1))-(Z(I+1,J-1)-Z(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZZKxy=((ZZ(I+1,J+1)-ZZ(I-1,J+1))-(ZZ(I+1,J-1)-ZZ(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZKXY=(23*ZKBXY-16*ZKXY+5*ZZKXY)/12.
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
VBXP=UB(i,j)*(-VB(i+2,j)+8*VB(i+1,j)-8*VB(i-1,j)+VB(i-2,j))
VXP=U(i,j)*(-V(i+2,j)+8*V(i+1,j)-8*V(i-1,j)+V(i-2,j))
VVXP=UU(i,j)*(-VV(i+2,j)+8*VV(i+1,j)-8*VV(i-1,j)+VV(i-2,j))
UVX=(DT/(12*DX))* (23*VBXP-16*VXP+5*VVXP)/12.
DDX=(-D(i+2,j)+8*D(i+1,j)-8*D(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
ELSE
VBXP=UB(i,j)*(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))
VXP=U(i,j)*(V(i+1,j)-V(i-1,j))
VVXP=UU(i,j)*(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))
UVX=(DT/(2*DX))* (23*VBXP-16*VXP+5*VVXP)/12.
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
END IF
Ubxy=((UB(I+1,J+1)-UB(I-1,J+1))-(UB(I+1,J-1)-UB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Uxy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
UUxy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)

```

```

Ubxyt=(3*Ubxy-4*Uxy+UUxy)/2.
U1xyt=(Ubxy-UUxy)/2.
UUxyt=-(3*UUxy-4*Uxy+Ubxy)/2.
c Uxyt=(gamma-alfa)*HH**2*(23*Ubxyt-16*U1xyt+5*UUxyt)/12.
Uxyt=(a1new(i,j)-alfa)*HH**2*(23*Ubxyt-16*U1xyt+5*UUxyt)/12.
Ubx=(UB(I+1,J)-UB(I-1,J))/2./dx
Ux=(U(I+1,J)-U(I-1,J))/2./dx
UUx=(UU(I+1,J)-UU(I-1,J))/2./dx
Uby=(UB(I,J+1)-UB(I,J-1))/2./dx
Uy=(U(I,J+1)-U(I,J-1))/2./dx
UUy=(UU(I,J+1)-UU(I,J-1))/2./dx
Ubxxt=(3*Ubx-4*Ux+UUx)/2.
U1xxt=(Ubx-UUx)/2.
UUxxt=-(3*UUx-4*Ux+Ubx)/2.
Ubyy=(3*Uby-4*Uy+UUy)/2.
U1yyt=(Uby-UUy)/2.
UUyyt=-(3*UUy-4*Uy+Uby)/2.
DVY=DT*(V(i,j+1)-2*V(i,j)+V(i,j-1))/(DY**2)
DVBY=DT*(VB(i,j+1)-2*VB(i,j)+VB(i,j-1))/(DY**2)
DVVY=DT*(VV(i,j+1)-2*VV(i,j)+VV(i,j-1))/(DY**2)
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VPY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
VBX=(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))/2./DX
VPX=(V(i+1,j)-V(i-1,j))/2./DX
VVVX=(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))/2./DX
VY=(23*VBY-16*VPY+5*VVVY)/12.
VX=(23*VBX-16*VPX+5*VVVX)/12.
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX
UPX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
UBY=(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))/2./DY
UPY=(U(i,j+1)-U(i,j-1))/2./DY
UUUY=(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))/2./DY
UX=(23*UBX-16*UPX+5*UUUX)/12.
UY=(23*UBY-16*UPY+5*UUUY)/12.
DKX=(DK(i+1,j)-DK(i-1,j))/2./DX
DKY=(DK(i,j+1)-DK(i,j-1))/2./DY
HY=(ZB(I,J+1)-ZB(I,J-1))/2./DY
HX=(ZB(I+1,J)-ZB(I-1,J))/2./DX
DISP1=DK(i,j)*(23*DVBY-16*DVY+5*DVVY)/12.
DISP2=DT*2.*DK(I,J)*HY*VY/HH
DISP3=DT*DK(I,J)*HX*VX/HH
DISP4=DT*DK(I,J)*(23*Ubxy-16*Uxy+5*UUxy)/12.
DISP5=DT*DKY*HY*(23*VB(I,J)-16*V(I,J)+5*VV(I,J))/12./HH
DISP6=DK(i,j)*(23*DVBX-16*DVX+5*DVVX)/12.
DISP7=DT*0.5*DK(I,J)*HY*UX/HH
DISP8=DT*0.5*DK(I,J)*HX*UY/HH
DISP9=DT*0.5*DKX*VX
DISP10=DT*DKY*VY
DISP11=DT*0.5*DKX*HX*(23*VB(I,J)-16*V(I,J)+5*VV(I,J))/12./HH
DISP12=DT*0.5*DKX*HY*(23*UB(I,J)-16*U(I,J)+5*UU(I,J))/12./HH
DISP13=DT*0.5*DKX*UY
DISPY=DISP1+DISP2+DISP3+DISP4+DISP5+DISP6+DISP7+DISP8
&+DISP9+DISP10+DISP11+DISP12+DISP13
IF(i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
VBSMX=-VB(i+2,j)+8*VB(i+1,j)-8*VB(i-1,j)+VB(i-2,j)
VSMSX=-V(i+2,j)+8*V(i+1,j)-8*V(i-1,j)+V(i-2,j)

```

```

VVSMX=-VV(i+2,j)+8*VV(i+1,j)-8*VV(i-1,j)+VV(i-2,j)
VSMX=(DT/(12*DX))*(23*VBSMX-16*VSMSX+5*VVSMX)/12.
ELSE
VBSMX=VB(i+1,j)-VB(i-1,j)
VSMSX=V(i+1,j)-V(i-1,j)
VVSMX=VV(i+1,j)-VV(i-1,j)
VSMX=(DT/(2*DX))*(23*VBSMX-16*VSMSX+5*VVSMX)/12.
END IF
USMX=DT*(23*UBX-16*UX+5*UUX)/12.
USMY=DT*(23*UBY-16*UY+5*UUY)/12.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
VBSMY=-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2)
VSMSY=-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2)
VVSMY=-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2)
VSMY=(DT/(12*DX))*(23*VBSMY-16*VSMSY+5*VVSMY)/12.
ELSE
VBSMY=VB(i,j+1)-VB(i,j-1)
VSMSY=V(i,j+1)-V(i,j-1)
VVSMY=VV(i,j+1)-VV(i,j-1)
VSMY=(DT/(2*DX))*(23*VBSMY-16*VSMSY+5*VVSMY)/12.
END IF
DUX=DT*(U(i+1,j)-2*U(i,j)+U(i-1,j))/(DX**2)
DUBX=DT*(UB(i+1,j)-2*UB(i,j)+UB(i-1,j))/(DX**2)
DUUX=DT*(UU(i+1,j)-2*UU(i,j)+UU(i-1,j))/(DX**2)
U2SMX=(23*DUBX-16*DUX+5*DUUX)/12.
DUY=DT*(U(i,j+1)-2*U(i,j)+U(i,j-1))/(DY**2)
DUBY=DT*(UB(i,j+1)-2*UB(i,j)+UB(i,j-1))/(DY**2)
DUUY=DT*(UU(i,j+1)-2*UU(i,j)+UU(i,j-1))/(DY**2)
U2SMY=(23*DUBY-16*DUY+5*DUUY)/12.
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
V2SMX=(23*DVBX-16*DVX+5*DVVX)/12.
V2SMY=(23*DVBY-16*DVY+5*DVVY)/12.
USMXY=DT*(23*UBXY-16*UXY+5*UUXY)/12.
Vbxy=((VB(I+1,J+1)-VB(I-1,J+1))-(VB(I+1,J-1)-VB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vxy=((V(I+1,J+1)-V(I-1,J+1))-(V(I+1,J-1)-V(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
VVxy=((VV(I+1,J+1)-VV(I-1,J+1))-(VV(I+1,J-1)-VV(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
VSMXY=DT*(23*VBXY-16*VXY+5*VVXY)/12.
IF (ian .GT. 200) THEN
AM=(CS*DEL)**2*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*0.5*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**(-0.5)*
!(2*USMX*U2SMX+2*VSMX*V2SMX+(USMY+VSMX)*(USMXY+V2SMX))
DMY=(CS*DEL)**2*0.5*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**(-0.5)*
!(2*USMX*USMXY+2*VSMX*VSMXY+(USMY+VSMX)*(U2SMY+VSMXY))
ELSE
AM=0.
DMX=0.
DMY=0.
END IF

SMAG1=2*DMY*VSMY+2*AM*V2SMY
SMAG2=DMX*(USMY+VSMX)+AM*(USMXY+V2SMX)
SMAG=SMAG1+SMAG2
DPO=VB(i,j+1)-2*VB(i,j)+VB(i,j-1)
VYYT=CTM*DPO/(DY*DY)
c Z3Y=DT*gamma*ga*HH**2*(ZYYY+Zxxy)
c ! +DT*gamma*ga*HH*DDY*(2*ZKYY+ZKXX)+DT*gamma*ga*HH*DDX*ZKXY

```

```

Z3Y=DT*a1new(i,j)*ga*HH**2*(ZYYY+Zxxy)
! +DT*a2new(i,j)*ga*HH*DDY*(2*ZKYY+ZKXX)
! +DT*a2new(i,j)*ga*HH*DDX*ZKXY
Uyt=(23*Ubyt-16*U1yt+5*UUyt)/12.
Uxt=(23*Ubx-16*U1xt+5*UUxt)/12.
VYT=(VBY-VPY)
c slpx=(.5+gamma)*HH*DDX*Uyt+(1+2*gamma)*HH*DDY*Uxt
slpx=(.5+a2new(i,j))*HH*DDX*Uyt+(1+2*a2new(i,j))*HH*DDY*Uxt
c slpx=(.5)*HH*DDX*Uyt+(1.)*HH*DDY*Uxt
c SLP=DDY*HH*VYT+2*gamma*DDY*HH*VYT+slpx
SLP=DDY*HH*VYT+2*a2new(i,j)*DDY*HH*VYT+slpx
c SLP=DDY*HH*VYT+slpx
frs=dt*fc*vb(i,j)*sqrt(ub(i,j)**2+vb(i,j)**2)/HH
frst=dt*(2.*3.14/per)*dks(i,j)*vb(i,j)+frs
c frst=0.
IF (j .GT. JMS3 .AND. j .LT. JMS4) THEN
hprx=(-hpr(i+2,j)+8*hpr(i+1,j)-8*hpr(i-1,j)+hpr(i-
2,j))/ (12.*DX)
hpry=(-hpr(i,j+2)+8*hpr(i,j+1)-8*hpr(i,j-1)+hpr(i,j-
2))/ (12.*DY)
USBX=(-USB(I+2,J)+8*USB(I+1,J)-8*USB(I-1,J)+USB(I-
2,J))/ (12.*DX)
USPX=(-US(I+2,J)+8*US(I+1,J)-8*US(I-1,J)+US(I-2,J))/ (12.*DX)
USXT=USBX-USPX
VSBYY=(VSB(I,J+1)-2*VSB(I,J)+VSB(I,J-1))/ (DY**2)
VSPYY=(VS(I,J+1)-2*VS(I,J)+VS(I,J-1))/ (DY**2)
VSYYT=VSBYY-VSPYY
USBY=(-USB(I,J+2)+8*USB(I,J+1)-8*USB(I,J-1)+USB(I,J-
2))/ (12.*DY)
USPY=(-US(I,J+2)+8*US(I,J+1)-8*US(I,J-1)+US(I,J-2))/ (12.*DY)
USYT=USBY-USPY
VSBY=(-VSB(I,J+2)+8*VSB(I,J+1)-8*VSB(I,J-1)+VSB(I,J-
2))/ (12.*DY)
VSPY=(-VS(I,J+2)+8*VS(I,J+1)-8*VS(I,J-1)+VS(I,J-2))/ (12.*DY)
VSYT=VSBY-VSPY
USBXY=((USB(I+1,J+1)-USB(I-1,J+1))- (USB(I+1,J-1)-USB(I-1,J-1)))/
! 4./ (DX**2)
USXY=((US(I+1,J+1)-US(I-1,J+1))- (US(I+1,J-1)-US(I-1,J-1)))/
! 4./ (DX**2)
USXYT=USBXY-USXY

port1=por*HH*hpry*VSYT
port2=0.5*por*HH*HPR(I,J)*(VSYT+USXYT)
port3=0.5*por*HH*(HPRY*USXT+HPRX*USYT)
ELSE
port1=0.
port2=0.
port3=0.
END IF
c if (ddy.gt.0.or.abs(ddy).lt.1) slp=0.
DD(I,J)=VB(I,J)-VVY-UVX-VAR+VYYT+Uxyt+Z3Y+SLP+DISPY-
! frst-frict+port1+port2+port3+SMAG
END DO
end do
do i=2,im-1
B(i,1)=1.
C(i,1)=0.0
DD(i,1)=VN(i,2)
DD(i,1)=0.
A(i,jm)=0.0
B(i,jm)=1.0

```



```

DD(i,jm)=VN(i,jm-1)
DD(i,jm)=0.
G(i,1)=C(i,1)/B(i,1)
do j=2,jm
G(i,j)=C(i,j)/(B(i,j)-A(i,j)*G(i,j-1))
end do
H11(i,1)=DD(i,1)/B(i,1)
do j=2,jm
H11(i,j)=(DD(i,j)-A(i,j)*H11(i,j-1))/(B(i,j)-A(i,j)*G(i,j-1))
end do
VN(i,jm)=H11(i,jm)
do j=jm-1,1,-1
VN(i,j)=H11(i,j)-G(i,j)*VN(i,j+1)
end do
end do
do i=2,im-1
do j=2,jm-1
H(i,j)=d(i,j)+zn(i,j)
end do
end do
do j=1,jm
vn(1,j)=vn(2,j)
vn(im,j)=vn(im-1,j)
end do
do i=1,im
vn(i,1)=0.0
vn(i,jm)=0.0
end do

c *****
c FINAL APPROXIMATION
c *****
c CORRECTOR CONTINUITY
430 CONTINUE
DO I=2,IM-1
DO J=2,JM-1
H(I,J)=D(I,J)+ZB(I,J)
if (d(I,J).gt.DEN) THEN
HH=D(I,J)
ELSE
HH=H(I,J)
END IF
dxdt=- (dx**2)/6.+ga*HH*(dt**2)/6.
CTC=bita*(HH**2)+dxdt
CTC=bita*(HH**2)
ORCON=1.+2.*CTC/(dx**2)
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
UNX=(-UN(i+2,j)+8*UN(i+1,j)-8*UNP(i-1,j)+UNP(i-2,j))/12./DX
UBX=(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))/12./DX
UX=(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))/12./DX
UUX=(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))/12./DX
ZNX=(-ZN(i+2,j)+8*ZN(i+1,j)-8*ZNP(i-1,j)+ZNP(i-2,j))/12./DX
ZBX=(-ZB(i+2,j)+8*ZB(i+1,j)-8*ZB(i-1,j)+ZB(i-2,j))/12./DX
ZX=(-Z(i+2,j)+8*Z(i+1,j)-8*Z(i-1,j)+Z(i-2,j))/12./DX
ZZX=(-ZZ(i+2,j)+8*ZZ(i+1,j)-8*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-2,j))/12./DX
DDX=(-d(i+2,j)+8*d(i+1,j)-8*d(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
UU0=(19*UB(i,j)+9*UNP(i,j)-5*U(i,j)+UU(i,j))/24.
ZZ0=(19*ZB(i,j)+9*ZNP(i,j)-5*Z(i,j)+ZZ(i,j))/24.
UU1X=(19*UBX+9*UNX-5*UX+UUX)/24.
ZZ1X=(19*ZBX+9*ZNX-5*ZX+ZZX)/24.
ANLU=-DT*(DDX*UU0+D(i,j)*UU1X+ZZ1X*UU0+UU1X*ZZ0)

```

```

else
UNX=(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))/2./DX
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX
UX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
ZNX=(ZN(i+1,j)-ZNP(i-1,j))/2./DX
ZBX=(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))/2./DX
ZX=(Z(i+1,j)-Z(i-1,j))/2./DX
ZZX=(ZZ(i+1,j)-ZZ(i-1,j))/2./DX
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
UU0=(19*UB(i,j)+9*UNP(i,j)-5*U(i,j)+UU(i,j))/24.
ZZ0=(19*ZB(i,j)+9*ZNP(i,j)-5*Z(i,j)+ZZ(i,j))/24.
UU1X=(19*UBX+9*UNX-5*UX+UUX)/24.
ZZ1X=(19*ZBX+9*ZNX-5*ZX+ZZX)/24.
ANLU=-DT*(DDX*UU0+D(i,j)*UU1X+ZZ1X*UU0+UU1X*ZZ0)
end if
if (j.ge.3.and.j.le.jm-2) then
VNY=(-VN(i,j+2)+8*VN(i,j+1)-8*VNP(i,j-1)+VNP(i,j-2))/12./DY
VBY=(-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2))/12./DY
VY=(-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2))/12./DY
VVY=(-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2))/12./DY
ZNY=(-ZN(i,j+2)+8*ZN(i,j+1)-8*ZNP(i,j-1)+ZNP(i,j-2))/12./DY
ZBY=(-ZB(i,j+2)+8*ZB(i,j+1)-8*ZB(i,j-1)+ZB(i,j-2))/12./DY
ZY=(-Z(i,j+2)+8*Z(i,j+1)-8*Z(i,j-1)+Z(i,j-2))/12./DY
ZZY=(-ZZ(i,j+2)+8*ZZ(i,j+1)-8*ZZ(i,j-1)+ZZ(i,j-2))/12./DY
DDY=(-D(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
VV0=(19*VB(i,j)+9*VNP(i,j)-5*V(i,j)+VV(i,j))/24.
ZZ0=(19*ZB(i,j)+9*ZNP(i,j)-5*Z(i,j)+ZZ(i,j))/24.
VV1Y=(19*VBY+9*VNY-5*VY+VVY)/24.
ZZ1Y=(19*ZBY+9*ZNY-5*ZY+ZZY)/24.
ANLV=-DT*(DDY*VV0+D(i,j)*VV1Y+ZZ1Y*VV0+VV1Y*ZZ0)
else
VNY=(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))/2./DY
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
ZNY=(ZN(i,j+1)-ZNP(i,j-1))/2./DY
ZBY=(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))/2./DY
ZY=(Z(i,j+1)-Z(i,j-1))/2./DY
ZZY=(ZZ(i,j+1)-ZZ(i,j-1))/2./DY
DDY=(D(i,j+1)-D(i,j-1))/2./DY
VV0=(19*VB(i,j)+9*VNP(i,j)-5*V(i,j)+VV(i,j))/24.
ZZ0=(19*ZB(i,j)+9*ZNP(i,j)-5*Z(i,j)+ZZ(i,j))/24.
VV1Y=(19*VBY+9*VNY-5*VY+VVY)/24.
ZZ1Y=(19*ZBY+9*ZNY-5*ZY+ZZY)/24.
ANLV=-DT*(DDY*VV0+D(i,j)*VV1Y+ZZ1Y*VV0+VV1Y*ZZ0)
end if

IF (j .gt. JMS3 .and. j .lt. JMS4) THEN
us1(i,j)=(19*usb(i,j)+9*usn(i,j)-5*us(i,j)+uso(i,j))/24.
vs1(i,j)=(19*vsb(i,j)+9*vsn(i,j)-5*vs(i,j)+vso(i,j))/24.
usnx=(-usn(i+2,j)+8*usn(i+1,j)-8*usnp(i-1,j)+usnp(i-
2,j))/12.*DX)
usbx=(-usb(i+2,j)+8*usb(i+1,j)-8*usb(i-1,j)+usb(i-
2,j))/12.*DX)
usx=(-us(i+2,j)+8*us(i+1,j)-8*us(i-1,j)+us(i-2,j))/12.*DX)
usox=(-uso(i+2,j)+8*uso(i+1,j)-8*uso(i-1,j)+uso(i-
2,j))/12.*DX)
us1x=(19*usbx+9*usnx-5*usx+usox)/24.
usny=(-usn(i,j+2)+8*usn(i,j+1)-8*usnp(i,j-1)+usnp(i,j-
2))/12.*DY)

```

```

        usby=(-usb(i,j+2)+8*usb(i,j+1)-8*usb(i,j-1)+usb(i,j-
2)))/(12.*DY)
        usy=(-us(i,j+2)+8*us(i,j+1)-8*us(i,j-1)+us(i,j-2))/(12.*DY)
        usoy=(-uso(i,j+2)+8*uso(i,j+1)-8*uso(i,j-1)+uso(i,j-
2)))/(12.*DY)
        usly=(19*usby+9*usny-5*usy+usoy)/24.
        vsnx=(-vsn(i+2,j)+8*vsn(i+1,j)-8*vsnp(i-1,j)+vsnp(i-
2,j))/(12.*DX)
        vsbx=(-vsb(i+2,j)+8*vsb(i+1,j)-8*vsb(i-1,j)+vsb(i-
2,j))/(12.*DX)
        vsx=(-vs(i+2,j)+8*vs(i+1,j)-8*vs(i-1,j)+vs(i-2,j))/(12.*DX)
        vsox=(-vso(i+2,j)+8*vso(i+1,j)-8*vso(i-1,j)+vso(i-
2,j))/(12.*DX)
        vslx=(19*vsbx+9*vsnx-5*vsx+vsox)/24.
        vsny=(-vsn(i,j+2)+8*vsn(i,j+1)-8*vsnp(i,j-1)+vsnp(i,j-
2)))/(12.*DY)
        vsby=(-vsb(i,j+2)+8*vsb(i,j+1)-8*vsb(i,j-1)+vsb(i,j-
2)))/(12.*DY)
        vsy=(-vs(i,j+2)+8*vs(i,j+1)-8*vs(i,j-1)+vs(i,j-2))/(12.*DY)
        vsoy=(-vso(i,j+2)+8*vso(i,j+1)-8*vso(i,j-1)+vso(i,j-
2)))/(12.*DY)
        vsly=(19*vsby+9*vsny-5*vsy+vsoy)/24.
        hprx=(-hpr(i+2,j)+8*hpr(i+1,j)-8*hpr(i-1,j)+hpr(i-
2,j))/(12.*DX)
        hpry=(-hpr(i,j+2)+8*hpr(i,j+1)-8*hpr(i,j-1)+hpr(i,j-
2)))/(12.*DY)
        alphx=adr1*por+adr2*por**2*abs(usl(i,j))
        alphy=adr1*por+adr2*por**2*abs(vsl(i,j))

        IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
        UsNSMX=(-UsN(i+2,j)+8*UsN(i+1,j)-8*UsNP(i-1,j)+UsNP(i-2,j))
        UsBSMX=(-UsB(i+2,j)+8*UsB(i+1,j)-8*UsB(i-1,j)+UsB(i-2,j))
        UsSMSX=(-Us(i+2,j)+8*Us(i+1,j)-8*Us(i-1,j)+Us(i-2,j))
        UsoSMX=(-Uso(i+2,j)+8*Uso(i+1,j)-8*Uso(i-1,j)+Uso(i-2,j))
        UsSMX=(DT/(12*DX))*(9*UsNSMX+19*UsBSMX-5*UsSMSX+UsoSMX)/24.
        ELSE
        UsNSMX=UsN(i+1,j)-UsNP(i-1,j)
        UsBSMX=UsB(i+1,j)-UsB(i-1,j)
        UsSMSX=Us(i+1,j)-Us(i-1,j)
        UsoSMX=Uso(i+1,j)-Uso(i-1,j)
        UsSMX=(DT/(2*DX))*(9*UsNSMX+19*UsBSMX-5*UsSMSX+UsoSMX)/24.
        END IF
        VsSMX=DT*(9*VsNX+19*VsBX-5*VsX+VsoX)/24.
        IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
        UsNSMY=(-UsN(i,j+2)+8*UsN(i,j+1)-8*UsNP(i,j-1)+UsNP(i,j-2))
        UsBSMY=(-UsB(i,j+2)+8*UsB(i,j+1)-8*UsB(i,j-1)+UsB(i,j-2))
        UsSMSY=(-Us(i,j+2)+8*Us(i,j+1)-8*Us(i,j-1)+Us(i,j-2))
        UsoSMY=(-Uso(i,j+2)+8*Uso(i,j+1)-8*Uso(i,j-1)+Uso(i,j-2))
        UsSMY=(DT/(12*DX))*(9*UsNSMY*19*UsBSMY-5*UsSMSY+UsoSMY)/24.
        ELSE
        UsNSMY=UsN(i,j+1)-UsNP(i,j-1)
        UsBSMY=UsB(i,j+1)-UsB(i,j-1)
        UsSMSY=Us(i,j+1)-Us(i,j-1)
        UsoSMY=Uso(i,j+1)-Uso(i,j-1)
        UsSMY=(DT/(2*DX))*(9*UsNSMY*19*UsBSMY-5*UsSMSY+UsoSMY)/24.
        END IF

        DUsNX=DT*(UsN(i+1,j)-2*UsN(i,j)+UsNP(i-1,j))/(DX**2)
        DUsX=DT*(Us(i+1,j)-2*Us(i,j)+Us(i-1,j))/(DX**2)
        DUsBX=DT*(UsB(i+1,j)-2*UsB(i,j)+UsB(i-1,j))/(DX**2)
        DUsOx=DT*(Uso(i+1,j)-2*Uso(i,j)+Uso(i-1,j))/(DX**2)

```

```

Us2SMX=(9*DU$NX+19*DU$BX-5*DU$X+DU$O$X)/24.
DV$NX=DT*(V$N(i+1,j)-2*V$N(i,j)+V$NP(i-1,j))/(DX**2)
DV$X=DT*(V$(i+1,j)-2*V$(i,j)+V$(i-1,j))/(DX**2)
DV$BX=DT*(V$B(i+1,j)-2*V$B(i,j)+V$B(i-1,j))/(DX**2)
DV$O$X=DT*(V$O$(i+1,j)-2*V$O$(i,j)+V$O$(i-1,j))/(DX**2)
Vs2SMX=(9*DV$NX+19*DV$BX-5*DV$X+DV$O$X)/24.
UsNxy=( (UsN(I+1,J+1)-UsN(I-1,J+1)) - (UsN(I+1,J-1)-UsN(I-1,J-1)) ) /
! 4./ (DX**2)
Usbxy=( (UsB(I+1,J+1)-UsB(I-1,J+1)) - (UsB(I+1,J-1)-UsB(I-1,J-1)) ) /
! 4./ (DX**2)
Usxy=( (Us(I+1,J+1)-Us(I-1,J+1)) - (Us(I+1,J-1)-Us(I-1,J-1)) ) /
! 4./ (DX**2)
Usoxy=( (UsO$(I+1,J+1)-UsO$(I-1,J+1)) - (UsO$(I+1,J-1)-UsO$(I-1,J-1)) ) /
! 4./ (DX**2)
UsSMXY=DT*(9*UsNXY+19*UsBXY-5*UsXY+UsO$XY)/24.
IF (ian .GT. 200) THEN
AM=(CS*DEL)**2*por*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*por*0.5*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**
! (-0.5)*(2*UsSMX*Us2SMX+2*VsSMX*Vs2SMX+(UsSMY+VsSMX)*(UsSMXY+Vs2SMX
!))
ELSE
AM=0.0
DMX=0.0
END IF

SMAG1=(2*DMX*UsSMX+2*AM*Us2SMX)*por
SMAG2=(DMX*(UsSMY+VsSMX)+AM*(UsSMXY+Vs2SMX))*por
SMAG=SMAG1+SMAG2
c smag=0.0
usnp(i,j)=usb(i,j)-dt/cr*(usl(i,j)*uslx+vs1(i,j)*usly)
! -dt/cr*(ga*ZZ1X+alphx*usl(i,j))+smag

IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
VsNSMX=-V$N(i+2,j)+8*V$N(i+1,j)-8*V$NP(i-1,j)+V$NP(i-2,j)
VsBSMX=-V$B(i+2,j)+8*V$B(i+1,j)-8*V$B(i-1,j)+V$B(i-2,j)
VsSMSX=-V$(i+2,j)+8*V$(i+1,j)-8*V$(i-1,j)+V$(i-2,j)
VsoSMX=-V$O$(i+2,j)+8*V$O$(i+1,j)-8*V$O$(i-1,j)+V$O$(i-2,j)
VsSMX=(DT/(12*DX))*(9*VsNSMX+19*VsBSMX-5*VsSMSX+VsoSMX)/24.
ELSE
VsNSMX=V$N(i+1,j)-V$NP(i-1,j)
VsBSMX=V$B(i+1,j)-V$B(i-1,j)
VsSMSX=V$(i+1,j)-V$(i-1,j)
VsoSMX=V$O$(i+1,j)-V$O$(i-1,j)
VsSMX=(DT/(2*DX))*(9*VsNSMX+19*VsBSMX-5*VsSMSX+VsoSMX)/24.
END IF

UsSMX=DT*(9*UsNX+19*UsBX-5*UsX+UsO$X)/24.
UsSMY=DT*(9*UsNY+19*UsBY-5*UsY+UsO$Y)/24.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
VsNSMY=-V$N(i,j+2)+8*V$N(i,j+1)-8*V$NP(i,j-1)+V$NP(i,j-2)
VsBSMY=-V$B(i,j+2)+8*V$B(i,j+1)-8*V$B(i,j-1)+V$B(i,j-2)
VsSMSY=-V$(i,j+2)+8*V$(i,j+1)-8*V$(i,j-1)+V$(i,j-2)
VsoSMY=-V$O$(i,j+2)+8*V$O$(i,j+1)-8*V$O$(i,j-1)+V$O$(i,j-2)
VsSMY=(DT/(12*DX))*(9*VsNSMY+19*VsBSMY-5*VsSMSY+VsoSMY)/24.
ELSE
VsNSMY=V$N(i,j+1)-V$NP(i,j-1)
VsBSMY=V$B(i,j+1)-V$B(i,j-1)
VsSMSY=V$(i,j+1)-V$(i,j-1)
VsoSMY=V$O$(i,j+1)-V$O$(i,j-1)
VsSMY=(DT/(2*DX))*(9*VsNSMY+19*VsBSMY-5*VsSMSY+VsoSMY)/24.
END IF

```

```

DUsnX=DT*(UsN(i+1,j)-2*UsN(i,j)+UsNP(i-1,j))/(DX**2)
DUsX=DT*(Us(i+1,j)-2*Us(i,j)+Us(i-1,j))/(DX**2)
DUsBX=DT*(UsB(i+1,j)-2*UsB(i,j)+UsB(i-1,j))/(DX**2)
DUsoX=DT*(Uso(i+1,j)-2*Uso(i,j)+Uso(i-1,j))/(DX**2)
Us2SMX=(9*DUsnX+19*DUsBX-5*DUsX+DUsoX)/24.
DUsnY=DT*(UsN(i,j+1)-2*UsN(i,j)+UsNP(i,j-1))/(DY**2)
DUsY=DT*(Us(i,j+1)-2*Us(i,j)+Us(i,j-1))/(DY**2)
DUsBY=DT*(UsB(i,j+1)-2*UsB(i,j)+UsB(i,j-1))/(DY**2)
DUsoY=DT*(Uso(i,j+1)-2*Uso(i,j)+Uso(i,j-1))/(DY**2)
Us2SMY=(9*DUsnY+19*DUsBY-5*DUsY+DUsoY)/24.
DVsnX=DT*(VsN(i+1,j)-2*VsN(i,j)+VsNP(i-1,j))/(DX**2)
DVsX=DT*(Vs(i+1,j)-2*Vs(i,j)+Vs(i-1,j))/(DX**2)
DVsBX=DT*(VsB(i+1,j)-2*VsB(i,j)+VsB(i-1,j))/(DX**2)
DVsoX=DT*(Vso(i+1,j)-2*Vso(i,j)+Vso(i-1,j))/(DX**2)
Vs2SMX=(9*DVsnX+19*DVsBX-5*DVsX+DVsoX)/24.
DVsnY=DT*(VsN(i,j+1)-2*VsN(i,j)+VsNP(i,j-1))/(DY**2)
DVsY=DT*(Vs(i,j+1)-2*Vs(i,j)+Vs(i,j-1))/(DY**2)
DVsBY=DT*(VsB(i,j+1)-2*VsB(i,j)+VsB(i,j-1))/(DY**2)
DVsoY=DT*(Vso(i,j+1)-2*Vso(i,j)+Vso(i,j-1))/(DY**2)
Vs2SMY=(9*DVsnY+19*DVsBY-5*DVsY+DVsoY)/24.

UsNxy=((UsN(I+1,J+1)-UsN(I-1,J+1))-(UsN(I+1,J-1)-UsN(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
UsBxy=((UsB(I+1,J+1)-UsB(I-1,J+1))-(UsB(I+1,J-1)-UsB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Usxy=((Us(I+1,J+1)-Us(I-1,J+1))-(Us(I+1,J-1)-Us(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Usoxy=((Uso(I+1,J+1)-Uso(I-1,J+1))-(Uso(I+1,J-1)-Uso(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
UsSMXY=DT*(9*UsNXY+19*UsBXY-5*UsXY+UsoXY)/24.
Vsnxy=((VsN(I+1,J+1)-VsN(I-1,J+1))-(VsN(I+1,J-1)-VsN(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vsbxy=((VsB(I+1,J+1)-VsB(I-1,J+1))-(VsB(I+1,J-1)-VsB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vsxy=((Vs(I+1,J+1)-Vs(I-1,J+1))-(Vs(I+1,J-1)-Vs(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vsoxy=((Vso(I+1,J+1)-Vso(I-1,J+1))-(Vso(I+1,J-1)-Vso(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
VsSMXY=DT*(9*VsnXY+19*VsbXY-5*VsXY+VsoXY)/24.
IF (ian .GT. 200) THEN
AM=(CS*DEL)**2*por*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*por*0.5*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**
! (-0.5)*(2*UsSMX*Us2SMX+2*VsSMX*Vs2SMX+(UsSMY+VsSMX)*(UsSMXY+Vs2SMX
!))
DMY=(CS*DEL)**2*por*0.5*(UsSMX**2+VsSMX**2+0.5*(UsSMY+VsSMX)**2)**
! (-0.5)*(2*UsSMX*UsSMXY+2*VsSMX*VsSMXY+(UsSMY+VsSMX)*(Us2SMY+VsSMXY
!))
ELSE
AM=0.0
DMX=0.0
DMY=0.0
END IF
SMAG1=(2*DMY*VsSMY+2*AM*Vs2SMY)*por
SMAG2=(DMX*(UsSMY+VsSMX)+AM*(UsSMXY+Vs2SMX))*por
SMAG=SMAG1+SMAG2
c smag=0.0
vsnp(i,j)=vsb(i,j)-dt/cr*(usl(i,j)*vs1x+vs1(i,j)*vs1y)
! -dt/cr*(ga*ZZ1Y+alphy*vs1(i,j))+smag
husxy=hprx*usl(i,j)+hpr(i,j)*(us1x+vs1y)+hpry*vs1(i,j)
ELSE

```

```

usnp(i,j)=0.
vsnp(i,j)=0.
husxy=0.0
END IF

AET=ANLU+ANLV+dt*zin(i,j)-dt*por*husxy
ZNP(i,j)=(ZB(i,j)+AET)/ORCON
H(i,j)=D(i,j)+ZNP(i,j)
END DO
end do

do j=1,jm
znp(1,j)=(48*znp(2,j)-36*znp(3,j)+16*znp(4,j)
! -3*znp(5,j))/25.
znp(1,j)=znp(2,j)
znp(im,j)=(48*znp(im-1,j)-36*znp(im-2,j)+16*znp(im-3,j)
! -3*znp(im-4,j))/25.
znp(im,j)=znp(im-1,j)
zn(1,j)=znp(1,j)
zn(im,j)=znp(im,j)
end do
do i=1,im
znp(i,1)=(48*znp(i,2)-36*znp(i,3)+16*znp(i,4)
! -3*znp(i,5))/25.
znp(i,jm)=znp(i,jm-1)
zn(i,1)=znp(i,1)
zn(i,jm)=znp(i,jm)
end do
c CORRECTOR MOMENTUM Y
DO I=2,IM-1
DO J=2,JM-1
H(i,j)=D(i,j)+ZB(i,j)
alfa=-1./3.
bita=0.
gamma=1./15.
if (j.eq.2.or.j.eq.jm-1) then
gamma=0.
else
gamma=1./15.
end if
if (d(i,j).gt.DEN) THEN
HH=d(i,j)
ELSE
HH=H(i,j)
END IF

IF (H(i,j).GT.zo) THEN
az=LOG(H(i,j)/ZO)-1
CB=(.4/az)**2
if (CB.gt.0.08) CB=.08
if (cb.lt.0.001) cb=.001
c cb=.01
FRICT=DT*CB*V(i,j)*sqrt(U(i,j)**2+V(i,j)**2)/H(i,j)
c frict=0.0
ELSE
FRICT=0.
END IF

IF (J.EQ.2) THEN
Zyyy=(-3*ZB(i,5)+14.*ZB(i,4)-24.*ZB(i,3)+
! 18.*ZB(i,2)-5*ZB(i,1))/2./DX**3

```

```

GOTO 767
ELSE
END IF
IF (j.EQ.(JM-1)) THEN
Zyyy=(5.*ZB(i,jm)-18.*ZB(i,jm-1)+24.*ZB(i,jm-2)-
! 14.*ZB(i,jm-3)+3.*ZB(i,jm-4))/2./DX**3
GOTO 767
ELSE
END IF
Zbyyy=(ZB(i,j+2)-2.*ZB(i,j+1)+2.*ZB(i,j-1)-ZB(i,j-2))
! /2./Dy**3
Znyyy=(ZNP(i,j+2)-2.*ZNP(i,j+1)+2.*ZNP(i,j-1)-ZNP(i,j-2))
! /2./Dy**3
Zlyyy=(Z(i,j+2)-2.*Z(i,j+1)+2.*Z(i,j-1)-Z(i,j-2))
! /2./Dy**3
Zzyyy=(ZZ(i,j+2)-2.*ZZ(i,j+1)+2.*ZZ(i,j-1)-ZZ(i,j-2))
! /2./Dy**3
Zyyy=(19*Zbyyy+9*Znyyy-5*Zlyyy+Zzyyy)/24.
767 CONTINUE
ZNxxy=((ZNP(i+1,j+1)-2.*ZNP(i,j+1)+ZNP(i-1,j+1))-
! (ZNP(i+1,j-1)-2.*ZNP(i,j-1)+ZNP(i-1,j-1)))/2./ (DX**3)
Zbxxy=((ZB(i+1,j+1)-2.*ZB(i,j+1)+ZB(i-1,j+1))-
! (ZB(i+1,j-1)-2.*ZB(i,j-1)+ZB(i-1,j-1)))/2./ (DX**3)
Zlxxy=((Z(i+1,j+1)-2.*Z(i,j+1)+Z(i-1,j+1))-
! (Z(i+1,j-1)-2.*Z(i,j-1)+Z(i-1,j-1)))/2./ (DX**3)
Zzxyy=((ZZ(i+1,j+1)-2.*ZZ(i,j+1)+ZZ(i-1,j+1))-
! (ZZ(i+1,j-1)-2.*ZZ(i,j-1)+ZZ(i-1,j-1)))/2./ (DX**3)
Zxxy=(19*Zbxxy+9*ZNxxy-5*Zlxxy+Zzxyy)/24.
c CTM=(alfa-gamma)*HH**2
CTM=(alfa-alnew(i,j))*HH**2
c ! -ga*HH*(DT**2)/6.0+(DX**2)/6.0
ORMX=1.-2*CTM/(DX**2)
c ! +2*DK(i,j)*DT/(DX**2)
if (j.ge.3.and.j.le.jm-2) then
VNYP=VN(i,j)*(-VN(i,j+2)+8*VN(i,j+1)-8*VNP(i,j-1)+VNP(i,j-2))
VBYP=VB(i,j)*(-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2))
VYP=V(i,j)*(-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2))
VVYP=VV(i,j)*(-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2))
VYV=(DT/(12*DY))* (9*VNYP+19*VBYP-5*VYP+VVYP)/24.
ZBYP=(-ZB(i,j+2)+8*ZB(i,j+1)-8*ZB(i,j-1)+ZB(i,j-2))
ZYP=(-Z(i,j+2)+8*Z(i,j+1)-8*Z(i,j-1)+Z(i,j-2))
ZZYP=(-ZZ(i,j+2)+8*ZZ(i,j+1)-8*ZZ(i,j-1)+ZZ(i,j-2))
ZNYP=(-ZNP(i,j+2)+8*ZNP(i,j+1)-8*ZNP(i,j-1)+ZNP(i,j-2))
VAR2=ga*DT/(12*DY)*ZBYP
VAR3=ga*DT/(12*DY)*ZYP
VAR4=ga*DT/(12*DY)*ZZYP
VAR1=ga*DT/(12*DY)*ZNYP
VAR=(9*VAR1+19*VAR2-5*VAR3+VAR4)/24.
DDY=(-D(I,J+2)+8*D(i,j+1)-8*D(I,J-1)+D(i,j-2))/12./DY
ELSE
VNYP=VN(i,j)*(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))
VBYP=VB(i,j)*(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))
VYP=V(i,j)*(V(i,j+1)-V(i,j-1))
VVYP=VV(i,j)*(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))
VYV=(DT/(2*DY))* (9*VNYP+19*VBYP-5*VYP+VVYP)/24.
VAR2=ga*DT/(2*DY)*(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))
VAR3=ga*DT/(2*DY)*(Z(i,j+1)-Z(i,j-1))
VAR4=ga*DT/(2*DY)*(ZZ(i,j+1)-ZZ(i,j-1))
VAR1=ga*DT/(2*DY)*(ZNP(i,j+1)-ZNP(i,j-1))
VAR=(9*VAR1+19*VAR2-5*VAR3+VAR4)/24.
DDY=(D(i,j+1)-D(I,J-1))/2./DY

```

```

END IF
ZKNX=(ZNP(I+1,J)-2*ZNP(I,J)+ZNP(I-1,J))/(DX**2)
ZKBX=(ZB(I+1,J)-2*ZB(I,J)+ZB(I-1,J))/(DX**2)
ZKPX=(Z(I+1,J)-2*Z(I,J)+Z(I-1,J))/(DX**2)
ZKPXX=(ZZ(I+1,J)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I-1,J))/(DX**2)
ZKXX=(9*ZKNX+19*ZKBX-5*ZKPX+ZKPXX)/24.
ZKNY=(ZNP(I,J+1)-2*ZNP(I,J)+ZNP(I,J-1))/(DY**2)
ZKBY=(ZB(I,J+1)-2*ZB(I,J)+ZB(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(ZZ(I,J+1)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I,J-1))/(DY**2)
ZKYY=(9*ZKNY+19*ZKBY-5*ZKPY+ZKPY)/24.
ZKNxy=((ZNP(I+1,J+1)-ZNP(I-1,J+1))-(ZNP(I+1,J-1)-ZNP(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZKbxy=((ZB(I+1,J+1)-ZB(I-1,J+1))-(ZB(I+1,J-1)-ZB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZKxy=((Z(I+1,J+1)-Z(I-1,J+1))-(Z(I+1,J-1)-Z(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZZKxy=((ZZ(I+1,J+1)-ZZ(I-1,J+1))-(ZZ(I+1,J-1)-ZZ(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
ZKXY=(9*ZKNXY+19*ZKBXY-5*ZKXY+ZZKXY)/24.
if (i.ge.3.and.i.le.im-2) then
VNXP=UN(i,j)*(-VN(i+2,j)+8*VN(i+1,j)-8*VNP(i-1,j)+VNP(i-2,j))
VBXP=UB(i,j)*(-VB(i+2,j)+8*VB(i+1,j)-8*VB(i-1,j)+VB(i-2,j))
VXP=U(i,j)*(-V(i+2,j)+8*V(i+1,j)-8*V(i-1,j)+V(i-2,j))
VVXP=UU(i,j)*(-VV(i+2,j)+8*VV(i+1,j)-8*VV(i-1,j)+VV(i-2,j))
UVX=(DT/(12*DX))* (9*VNXP+19*VBXP-5*VXP+VVXP)/24.
DDX=(-D(i+2,j)+8*D(i+1,j)-8*D(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
ELSE
VNXP=UN(i,j)*(VN(i+1,j)-VNP(i-1,j))
VBXP=UB(i,j)*(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))
VXP=U(i,j)*(V(i+1,j)-V(i-1,j))
VVXP=UU(i,j)*(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))
UVX=(DT/(2*DX))* (9*VNXP+19*VBXP-5*VXP+VVXP)/24.
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
END IF
DVNY=DT*(VN(i,j+1)-2*VN(i,j)+VNP(i,j-1))/(DY**2)
DVY=DT*(V(i,j+1)-2*V(i,j)+V(i,j-1))/(DY**2)
DVBY=DT*(VB(i,j+1)-2*VB(i,j)+VB(i,j-1))/(DY**2)
DVVY=DT*(VV(i,j+1)-2*VV(i,j)+VV(i,j-1))/(DY**2)
DVNX=DT*(VN(i+1,j)-2*VN(i,j)+VN(i-1,j))/(DX**2)
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
VNY=(VN(i,j+1)-VNP(i,j-1))/2./DY
VBY=(VB(i,j+1)-VB(i,j-1))/2./DY
VPY=(V(i,j+1)-V(i,j-1))/2./DY
VVVY=(VV(i,j+1)-VV(i,j-1))/2./DY
VNX=(VN(i+1,j)-VNP(i-1,j))/2./DX
VBX=(VB(i+1,j)-VB(i-1,j))/2./DX
VPX=(V(i+1,j)-V(i-1,j))/2./DX
VVVX=(VV(i+1,j)-VV(i-1,j))/2./DX
VY=(9*VNY+19*VBY-5*VPY+VVVY)/24.
VX=(9*VNX+19*VBX-5*VPX+VVVX)/24.
UNX=(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))/2./DX
UBX=(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))/2./DX
UPX=(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2./DX
UUUX=(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))/2./DX
UNY=(UN(i,j+1)-UNP(i,j-1))/2./DY
UBY=(UB(i,j+1)-UB(i,j-1))/2./DY
UPY=(U(i,j+1)-U(i,j-1))/2./DY
UUUY=(UU(i,j+1)-UU(i,j-1))/2./DY

```



```

UX=(9*UNX+19*UBX-5*UPX+UUUX)/24.
UY=(9*UNY+19*UBY-5*UPY+UUUY)/24.
DKX=(DK(i+1,j)-DK(i-1,j))/2./DX
DKY=(DK(i,j+1)-DK(i,j-1))/2./DY
HY=(ZB(I,J+1)-ZB(I,J-1))/2./DY
HX=(ZB(I+1,J)-ZB(I-1,J))/2./DX
DISP1=DK(i,j)*(9*DVNY+19*DVBY-5*DVY+DVVY)/24.
DISP2=DT*2.*DK(I,J)*HY*VY/HH
DISP3=DT*DK(I,J)*HX*VX/HH
DISP5=DT*DKY*HY*(9*VN(I,J)+19*VB(I,J)-5*V(I,J)+VV(I,J))/24./HH
DISP6=DK(i,j)*(9*DVNX+19*DVBX-5*DVX+DVVX)/24.
DISP7=DT*0.5*DK(I,J)*HY*UX/HH
DISP8=DT*0.5*DK(I,J)*HX*UY/HH
DISP9=DT*0.5*DKX*VX
DISP10=DT*DKY*VY
DISP11=DT*DKX*HX*(9*VN(I,J)+19*VB(I,J)-5*V(I,J)+VV(I,J))/48./HH
DISP12=DT*DKX*HY*(9*UN(I,J)+19*UB(I,J)-5*U(I,J)+UU(I,J))/48./HH
DISP13=DT*0.5*DKX*UY

DPO=VN(i,j+1)+VNP(i,j-1)-VB(i,j+1)+2*VB(i,j)-VB(i,j-1)
VYYT=CTM*DPO/(DY*DY)
UNxy=(UN(I+1,J+1)-UN(I-1,J+1))-(UN(I+1,J-1)-UN(I-1,J-1))
! /4./(DX**2)
UBxy=(UB(I+1,J+1)-UB(I-1,J+1))-(UB(I+1,J-1)-UB(I-1,J-1))
! 4./(DX**2)
Uxy=(U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1))
! 4./(DX**2)
UUxy=(UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1))
! 4./(DX**2)
UNxyt=(11*UNxy-18*UBxy+9*Uxy-2*UUxy)/6.
UBxyt=(2*UNxy+3*UBxy-6*Uxy+UUxy)/6.
U1xyt=-(2*UUxy+3*Uxy-6*UBxy+UNxy)/6.
UUxyt=-(11*UUxy-18*Uxy+9*UBxy-2*UNxy)/6.
c Uxyt=(gamma-alfa)*HH**2*(9*UNxyt+19*UBxyt-5*U1xyt+UUxyt)/24.
Uxyt=(alnew(i,j)-alfa)*HH**2*(9*UNxyt+19*UBxyt-5*U1xyt+UUxyt)/24.
Ubx=(UB(I+1,J)-UB(I-1,J))/2./dx
Ux=(U(I+1,J)-U(I-1,J))/2./dx
UUx=(UU(I+1,J)-UU(I-1,J))/2./dx
Uny=(UN(I,J+1)-UNP(I,J-1))/2./dx
Uby=(UB(I,J+1)-UB(I,J-1))/2./dx
Uy=(U(I,J+1)-U(I,J-1))/2./dx
UUy=(UU(I,J+1)-UU(I,J-1))/2./dx
Ubxxt=(3*Ubx-4*Ux+UUx)/2.
U1xt=(Ubx-UUx)/2.
UUxt=-(3*UUx-4*Ux+Ubx)/2.
Ubyyt=(3*Uby-4*Uy+UUy)/2.
U1yt=(Uby-UUy)/2.
UUyt=-(3*UUy-4*Uy+Uby)/2.
DISP4=DT*DK(I,J)*(9*UNxy+19*UBxy-5*Uxy+UUxy)/24.
DISPY=DISP1+DISP2+DISP3+DISP4+DISP5+DISP6+DISP7+DISP8
&+DISP9+DISP10+DISP11+DISP12+DISP13

IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
VNSMX=-VN(i+2,j)+8*VN(i+1,j)-8*VNP(i-1,j)+VNP(i-2,j)
VBSMX=-VB(i+2,j)+8*VB(i+1,j)-8*VB(i-1,j)+VB(i-2,j)
VSMSX=-V(i+2,j)+8*V(i+1,j)-8*V(i-1,j)+V(i-2,j)
VVSMX=-VV(i+2,j)+8*VV(i+1,j)-8*VV(i-1,j)+VV(i-2,j)
VSMX=(DT/(12*DX))*(9*VNSMX+19*VBSMX-5*VSMSX+VVSMX)/24.
ELSE
VNSMX=VN(i+1,j)-VNP(i-1,j)
VBSMX=VB(i+1,j)-VB(i-1,j)

```

```

VSMSX=V(i+1,j)-V(i-1,j)
VVSMX=VV(i+1,j)-VV(i-1,j)
VSMX=(DT/(2*DX))*(9*VNSMX+19*VBSMX-5*VSMSX+VVSMX)/24.
END IF
USMX=DT*(9*UNX+19*UBX-5*UX+UUX)/24.
USMY=DT*(9*UNY+19*UBY-5*UY+UUY)/24.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
VNSMY=-VN(i,j+2)+8*VN(i,j+1)-8*VNP(i,j-1)+VNP(i,j-2)
VBSMY=-VB(i,j+2)+8*VB(i,j+1)-8*VB(i,j-1)+VB(i,j-2)
VSMSY=-V(i,j+2)+8*V(i,j+1)-8*V(i,j-1)+V(i,j-2)
VVSMY=-VV(i,j+2)+8*VV(i,j+1)-8*VV(i,j-1)+VV(i,j-2)
VSMY=(DT/(12*DX))*(9*VNSMY+19*VBSMY-5*VSMSY+VVSMY)/24.
ELSE
VNSMY=VN(i,j+1)-VNP(i,j-1)
VBSMY=VB(i,j+1)-VB(i,j-1)
VSMSY=V(i,j+1)-V(i,j-1)
VVSMY=VV(i,j+1)-VV(i,j-1)
VSMY=(DT/(2*DX))*(9*VNSMY+19*VBSMY-5*VSMSY+VVSMY)/24.
END IF
DUNX=DT*(UN(i+1,j)-2*UN(i,j)+UNP(i-1,j))/(DX**2)
DUX=DT*(U(i+1,j)-2*U(i,j)+U(i-1,j))/(DX**2)
DUBX=DT*(UB(i+1,j)-2*UB(i,j)+UB(i-1,j))/(DX**2)
DUUX=DT*(UU(i+1,j)-2*UU(i,j)+UU(i-1,j))/(DX**2)
U2SMX=(9*DUNX+19*DUBX-5*DUX+DUUX)/24.
DUNY=DT*(UN(i,j+1)-2*UN(i,j)+UNP(i,j-1))/(DY**2)
DUY=DT*(U(i,j+1)-2*U(i,j)+U(i,j-1))/(DY**2)
DUBY=DT*(UB(i,j+1)-2*UB(i,j)+UB(i,j-1))/(DY**2)
DUUY=DT*(UU(i,j+1)-2*UU(i,j)+UU(i,j-1))/(DY**2)
U2SMY=(9*DUNY+19*DUBY-5*DUY+DUUY)/24.
DVNX=DT*(VN(i+1,j)-2*VN(i,j)+VNP(i-1,j))/(DX**2)
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
V2SMX=(9*DVNX+19*DVBX-5*DVX+DVVX)/24.
V2SMY=(9*DVNY+19*DVBY-5*DVY+DVVY)/24.
USMXY=DT*(9*UNXY+19*UBXY-5*UXY+UUXY)/24.
Vnxy=((VN(I+1,J+1)-VN(I-1,J+1))-(VN(I+1,J-1)-VN(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vbxy=((VB(I+1,J+1)-VB(I-1,J+1))-(VB(I+1,J-1)-VB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Vxy=((V(I+1,J+1)-V(I-1,J+1))-(V(I+1,J-1)-V(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
VVxy=((VV(I+1,J+1)-VV(I-1,J+1))-(VV(I+1,J-1)-VV(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)

VSMXY=DT*(9*VNXY+19*VBXY-5*VXY+VVXY)/24.
IF (ian .GT. 200) THEN
AM=(CS*DEL)**2*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*0.5*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**(-0.5)*
!(2*USMX*U2SMX+2*VSMX*V2SMX+(USMY+VSMX)*(USMXY+V2SMX))
DMY=(CS*DEL)**2*0.5*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**(-0.5)*
!(2*USMX*USMXY+2*VSMX*VSMXY+(USMY+VSMX)*(U2SMY+VSMXY))
ELSE
AM=0.0
DMX=0.0
DMY=0.0
END IF
SMAG1=2*DMY*VSMY+2*AM*V2SMY
SMAG2=DMX*(USMY+VSMX)+AM*(USMXY+V2SMX)
SMAG=SMAG1+SMAG2

```

```

c      Z3Y=DT*gamma*ga*HH**2*(ZYYY+Zxxy)
c      ! +DT*gamma*ga*HH*DDY*(2*ZKYY+ZKXX)+DT*gamma*ga*HH*DDX*ZKXY
Z3Y=DT*a1new(i,j)*ga*HH**2*(ZYYY+Zxxy)
! +DT*a2new(i,j)*ga*HH*DDY*(2*ZKYY+ZKXX)
!+DT*a2new(i,j)*ga*HH*DDX*ZKXY
VYT=(VNY-VBY)
Uyt=(23*Ubyt-16*U1yt+5*UUyt)/12.
Uxt=(23*Ubxt-16*U1xt+5*UUxt)/12.
c      slpx=(.5+gamma)*HH*DDX*Uyt+(1+2*gamma)*HH*DDY*Uxt
slpx=(.5+a2new(i,j))*HH*DDX*Uyt+(1+2*a2new(i,j))*HH*DDY*Uxt
c      slpx=(.5)*HH*DDX*Uyt+(1.)*HH*DDY*Uxt
c      SLP=DDY*HH*VYT+2*gamma*DDY*HH*VYT+slpx
SLP=DDY*HH*VYT+2*a2new(i,j)*DDY*HH*VYT+slpx
c      SLP=DDY*HH*VYT+slpx
frs=dt*fc*vb(i,j)*sqrt(ub(i,j)**2+vb(i,j)**2)/HH
frst=dt*(2.*3.14/per)*dks(i,j)*Vb(i,j)+frs
c      frst=0.
IF (j .GT. JMS3 .AND. j .LT. JMS4) THEN
hprx=(-hpr(i+2,j)+8*hpr(i+1,j)-8*hpr(i-1,j)+hpr(i-
2,j))/ (12.*DX)
hpry=(-hpr(i,j+2)+8*hpr(i,j+1)-8*hpr(i,j-1)+hpr(i,j-
2))/ (12.*DY)
USNX=(-USN(I+2,J)+8*USN(I+1,J)-8*USNP(I-1,J)+USNP(I-
2,J))/ (12.*DX)
USBX=(-USB(I+2,J)+8*USB(I+1,J)-8*USB(I-1,J)+USB(I-
2,J))/ (12.*DX)
USXT=USNX-USBX
VSNYY=(VSN(I,J+1)-2*VSN(I,J)+VSNP(I,J-1))/ (DY**2)
VSBYY=(VSB(I,J+1)-2*VSB(I,J)+VSB(I,J-1))/ (DY**2)
VSYYT=VSNYY-VSBYY
USNY=(-USN(I,J+2)+8*USN(I,J+1)-8*USNP(I,J-1)+USNP(I,J-2))/ (12.*DY)
USBY=(-USB(I,J+2)+8*USB(I,J+1)-8*USB(I,J-1)+USB(I,J-2))/ (12.*
DY)
USYT=USNY-USBY
VSNY=(-VSN(I,J+2)+8*VSN(I,J+1)-8*VSNP(I,J-1)+VSNP(I,J-2))/ (12.*DY)
VSBY=(-VSB(I,J+2)+8*VSB(I,J+1)-8*VSB(I,J-1)+VSB(I,J-2))/ (12.*DY)
VSYT=VSNY-VSBY
USNXY=((USN(I+1,J+1)-USN(I-1,J+1))- (USN(I+1,J-1)-USN(I-1,J-1)))/
! 4./ (DX**2)
USBXY=((USB(I+1,J+1)-USB(I-1,J+1))- (USB(I+1,J-1)-USB(I-1,J-1)))/
! 4./ (DX**2)
USXYT=USNXY-USBXY

port1=por*HH*hpry*VSYT
port2=0.5*por*HH*HPR(I,J)*(VSYYT+USXYT)
port3=0.5*por*HH*(HPRY*USXT+HPRX*USYT)
ELSE
port1=0.
port2=0.
port3=0.
END IF

VNP(i,j)=(VB(i,j)-VVY-UVX-VAR-VYYT+Uxyt+Z3Y+SLP+DISPY-
!frst-frict+port1+port2+port3+SMAG)/ORMX
END DO
END DO
do j=1,jm
vnp(1,j)=(48*vnp(2,j)-36*vnp(3,j)+16*vnp(4,j)
! -3*vnp(5,j))/25.
vnp(1,j)=vnp(2,j)
vnp(im,j)=(48*vnp(im-1,j)-36*vnp(im-2,j)+16*vnp(im-3,j)
! -3*vnp(im-4,j))/25.

```

```

vnp(im,j)=vnp(im-1,j)
vn(1,j)=vnp(1,j)
vn(im,j)=vnp(im,j)
end do
do i=1,im
vnp(i,1)=0.
vnp(i,jm)=0.
vn(i,1)=0.
vn(i,jm)=0.
end do
c CORRECTOR MOMENTUM X
DO I=2,IM-1
DO J=2,JM-1
H(i,j)=D(i,j)+ZB(i,j)
alfa=-1./3.
bita=0.
gamma=1./15.
if (i.eq.2.or.i.eq.im-1) then
gamma=0.
else
gamma=1./15.
end if
H(i,j)=D(i,j)+ZNP(i,j)
if (d(i,j).gt.DEN) THEN
HH=d(i,j)
ELSE
HH=H(i,j)
END IF

IF (H(i,j).GT.zo) THEN
az=LOG(H(i,j)/ZO)-1
CB=(.4/az)**2
if (CB.gt.0.08) CB=.08
if (cb.lt.0.001) cb=.001
c   cb=.01
FRICT=DT*CB*U(i,j)*sqrt(U(i,j)**2+V(i,j)**2)/H(i,j)
c   frict=0.
ELSE
FRICT=0.
END IF

IF (I.EQ.2) THEN
Zxxx=(-3*ZB(5,j)+14.*ZB(4,j)-24.*ZB(3,j)+
! 18.*ZB(2,j)-5*ZB(1,j))/2./DX**3
GOTO 766
ELSE
END IF
IF (I.EQ.(IM-1)) THEN
Zxxx=(5.*ZB(im,j)-18.*ZB(im-1,j)+24.*ZB(im-2,j)-
! 14.*ZB(im-3,j)+3.*ZB(im-4,j))/2./DX**3
GOTO 766
ELSE
END IF
Zbxxx=(ZB(i+2,j)-2.*ZB(i+1,j)+2.*ZB(i-1,j)-ZB(i-2,j))
! /2./DX**3
Znxxx=(ZNP(i+2,j)-2.*ZNP(i+1,j)+2.*ZNP(i-1,j)-ZNP(i-2,j))
! /2./DX**3
Zlxxx=(Z(i+2,j)-2.*Z(i+1,j)+2.*Z(i-1,j)-Z(i-2,j))
! /2./DX**3
Zzxxx=(ZZ(i+2,j)-2.*ZZ(i+1,j)+2.*ZZ(i-1,j)-ZZ(i-2,j))
! /2./DX**3

```

```

Zxxx=(19*Zbxxx+9*ZNxxx-5*Z1xxx+Zzxxx)/24.
766 CONTINUE
ZNxyy=((ZNP(i+1,j+1)-2.*ZNP(i+1,j)+ZNP(i+1,j-1))-
! (ZNP(i-1,j+1)-2.*ZNP(i-1,j)+ZNP(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zbxyy=((ZB(i+1,j+1)-2.*ZB(i+1,j)+ZB(i+1,j-1))-
! (ZB(i-1,j+1)-2.*ZB(i-1,j)+ZB(i-1,j-1)))/2./DX**3
Z1xyy=((Z(i+1,j+1)-2.*Z(i+1,j)+Z(i+1,j-1))-
! (Z(i-1,j+1)-2.*Z(i-1,j)+Z(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zzxyy=((ZZ(i+1,j+1)-2.*ZZ(i+1,j)+ZZ(i+1,j-1))-
! (ZZ(i-1,j+1)-2.*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-1,j-1)))/2./DX**3
Zxyy=(19*Zbxyy+9*ZNxyy-5.*Z1xyy+Zzxyy)/24.
c CTM=(alfa-gamma)*HH**2
CTM=(alfa-alnew(i,j))*HH**2
c ! -ga*HH*(DT**2)/6.0+(DX**2)/6.0
ORMX=1.-2*CTM/(DX**2)
c ! +2*DK(i,j)*DT/(DX**2)
IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
UNXP=UNP(i,j)*(-UN(i+2,j)+8*UN(i+1,j)-8*UNP(i-1,j)+UNP(i-2,j))
UBXP=UB(i,j)*(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))
UXP=U(i,j)*(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))
UUXP=UU(i,j)*(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))
UUX=(DT/(12*DX))* (9*UNXP+19*UBXP-5*UXP+UUXP)/24.
ZBXP=(-ZB(i+2,j)+8*ZB(i+1,j)-8*ZB(i-1,j)+ZB(i-2,j))
ZXP=(-Z(i+2,j)+8*Z(i+1,j)-8*Z(i-1,j)+Z(i-2,j))
ZZXP=(-ZZ(i+2,j)+8*ZZ(i+1,j)-8*ZZ(i-1,j)+ZZ(i-2,j))
ZNXP=(-ZNP(i+2,j)+8*ZNP(i+1,j)-8*ZNP(i-1,j)+ZNP(i-2,j))
VAR2=ga*DT/(12*DX)*ZBXP
VAR3=ga*DT/(12*DX)*ZXP
VAR4=ga*DT/(12*DX)*ZZXP
VAR1=ga*DT/(12*DX)*ZNXP
VAR=(9*VAR1+19*VAR2-5*VAR3+VAR4)/24.
DDX=(-D(i+2,j)+8*D(i+1,j)-8*D(i-1,j)+d(i-2,j))/12./DX
ELSE
UNXP=UN(i,j)*(UN(i+1,j)-UNP(i-1,j))
UBXP=UB(i,j)*(UB(i+1,j)-UB(i-1,j))
UXP=U(i,j)*(U(i+1,j)-U(i-1,j))
UUXP=UU(i,j)*(UU(i+1,j)-UU(i-1,j))
UUX=(DT/(2*DX))* (9*UNXP+19*UBXP-5*UXP+UUXP)/24.
VAR2=ga*DT/(2*DX)*(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))
VAR3=ga*DT/(2*DX)*(Z(i+1,j)-Z(i-1,j))
VAR4=ga*DT/(2*DX)*(ZZ(i+1,j)-ZZ(i-1,j))
VAR1=ga*DT/(2*DX)*(ZNP(i+1,j)-ZNP(i-1,j))
VAR=(9*VAR1+19*VAR2-5*VAR3+VAR4)/24.
DDX=(D(i+1,j)-D(i-1,j))/2./DX
END IF
ZKNX=(ZNP(I+1,J)-2*ZNP(I,J)+ZNP(I-1,J))/(DX**2)
ZKBX=(ZB(I+1,J)-2*ZB(I,J)+ZB(I-1,J))/(DX**2)
ZKPX=(Z(I+1,J)-2*Z(I,J)+Z(I-1,J))/(DX**2)
ZKPPX=(ZZ(I+1,J)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I-1,J))/(DX**2)
ZKXX=(9*ZKNX+19*ZKBX-5*ZKPX+ZKPPX)/24.
ZKNY=(ZNP(I,J+1)-2*ZNP(I,J)+ZNP(I,J-1))/(DY**2)
ZKBY=(ZB(I,J+1)-2*ZB(I,J)+ZB(I,J-1))/(DY**2)
ZKPY=(Z(I,J+1)-2*Z(I,J)+Z(I,J-1))/(DY**2)
ZKPPY=(ZZ(I,J+1)-2*ZZ(I,J)+ZZ(I,J-1))/(DY**2)
ZKYY=(9*ZKNY+19*ZKBY-5*ZKPY+ZKPPY)/24.
ZKNxy=((ZNP(I+1,J+1)-ZNP(I-1,J+1))- (ZNP(I+1,J-1)-ZNP(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKbxy=((ZB(I+1,J+1)-ZB(I-1,J+1))- (ZB(I+1,J-1)-ZB(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2
ZKxy=((Z(I+1,J+1)-Z(I-1,J+1))- (Z(I+1,J-1)-Z(I-1,J-1)))/
! 4./DX**2

```

```

ZZKxy=( (ZZ (I+1, J+1) -ZZ (I-1, J+1)) - (ZZ (I+1, J-1) -ZZ (I-1, J-1)) ) /
! 4./DX**2
ZKXY=(9*ZKNXY+19*ZKBXY-5*ZKXY+ZZKXY)/24.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
UNYP=VNP(i, j) * (-UN(i, j+2)+8*UN(i, j+1)-8*UNP(i, j-1)+UNP(i, j-2))
UBYP=VB(i, j) * (-UB(i, j+2)+8*UB(i, j+1)-8*UB(i, j-1)+UB(i, j-2))
UYP=V(i, j) * (-U(i, j+2)+8*U(i, j+1)-8*U(i, j-1)+U(i, j-2))
UUYP=VV(i, j) * (-UU(i, j+2)+8*UU(i, j+1)-8*UU(i, j-1)+UU(i, j-2))
VUY=(DT/(12*DY)) * (9*UNYP+19*UBYP-5*UYP+UUYP)/24.
DDY=(-D(I, J+2)+8*D(i, j+1)-8*D(I, J-1)+D(i, j-2))/12./DY
ELSE
UNYP=VNP(i, j) * (UN(i, j+1)-UNP(i, j-1))
UBYP=VB(i, j) * (UB(i, j+1)-UB(i, j-1))
UYP=V(i, j) * (U(i, j+1)-U(i, j-1))
UUYP=VV(i, j) * (UU(i, j+1)-UU(i, j-1))
VUY=(DT/(2*DY)) * (9*UNYP+19*UBYP-5*UYP+UUYP)/24.
DDY=(D(i, j+1)-D(I, J-1))/2./DY
END IF
DUNX=DT*(UN(i+1, j)-2*UN(i, j)+UNP(i-1, j))/(DX**2)
DUX=DT*(U(i+1, j)-2*U(i, j)+U(i-1, j))/(DX**2)
DUBX=DT*(UB(i+1, j)-2*UB(i, j)+UB(i-1, j))/(DX**2)
DUUX=DT*(UU(i+1, j)-2*UU(i, j)+UU(i-1, j))/(DX**2)
DUNY=DT*(UN(i, j+1)-2*UN(i, j)+UNP(i, j-1))/(DY**2)
DUY=DT*(U(i, j+1)-2*U(i, j)+U(i, j-1))/(DY**2)
DUBY=DT*(UB(i, j+1)-2*UB(i, j)+UB(i, j-1))/(DY**2)
DUUY=DT*(UU(i, j+1)-2*UU(i, j)+UU(i, j-1))/(DY**2)
UNX=(UN(i+1, j)-UNP(i-1, j))/2./DX
UBX=(UB(i+1, j)-UB(i-1, j))/2./DX
UPX=(U(i+1, j)-U(i-1, j))/2./DX
UUUX=(UU(i+1, j)-UU(i-1, j))/2./DX
UNY=(UN(i, j+1)-UNP(i, j-1))/2./DY
UBY=(UB(i, j+1)-UB(i, j-1))/2./DY
UPY=(U(i, j+1)-U(i, j-1))/2./DY
UUUY=(UU(i, j+1)-UU(i, j-1))/2./DY
UX=(9*UNX+19*UBX-5*UPX+UUUX)/24.
UY=(9*UNY+19*UBY-5*UPY+UUUY)/24.
VNY=(VN(i, j+1)-VNP(i, j-1))/2./DY
VBY=(VB(i, j+1)-VB(i, j-1))/2./DY
VPY=(V(i, j+1)-V(i, j-1))/2./DY
VVVY=(VV(i, j+1)-VV(i, j-1))/2./DY
VNX=(VN(i+1, j)-VNP(i-1, j))/2./DX
VBX=(VB(i+1, j)-VB(i-1, j))/2./DX
VPX=(V(i+1, j)-V(i-1, j))/2./DX
VVVX=(VV(i+1, j)-VV(i-1, j))/2./DX
VY=(9*VNY+19*VBY-5*VPY+VVVY)/24.
VX=(9*VNX+19*VBX-5*VPX+VVVX)/24.
DKX=(DK(i+1, j)-DK(i-1, j))/2./DX
DKY=(DK(i, j+1)-DK(i, j-1))/2./DY
HX=(ZB(I+1, J)-ZB(I-1, J))/2./DX
HY=(ZB(i, j+1)-ZB(i, j-1))/2./DY
IF (d(i, j).lt.DEN) THEN
DKX=(H(i+1, j)*DK(i+1, j)-H(i-1, j)*DK(i-1, j))/2./DX/H(i, j)
ELSE
DKX=(DK(i+1, j)-DK(i-1, j))/2./DX
END IF
DISP1=DK(i, j) * (9*DUNX+19*DUBX-5*DUX+DUUX)/24.
DISP2=DT*2.*DK(I, J)*HX*UX/HH
DISP3=DT*DK(I, J)*HY*UY/HH
DISP5=DT*DKX*HX*(9*UN(I, J)+19*UB(I, J)-5*U(I, J)+UU(I, J))/24./HH
DISP6=DK(i, j) * (9*DUNY+19*DUBY-5*DUY+DUUY)/24.
DISP7=DT*0.5*DK(I, J)*HX*VY/HH

```

```

DISP8=DT*0.5*DK(I,J)*HY*VX/HH
DISP9=DT*0.5*DKY*UY
DISP10=DT*DKX*UX
DISP11=DT*DKY*HY*(9*UN(I,J)+19*UB(I,J)-5*U(I,J)+UU(I,J))/48./HH
DISP12=DT*DKY*HX*(9*VN(I,J)+19*VB(I,J)-5*V(I,J)+VV(I,J))/48./HH
DISP13=DT*0.5*DKY*VX
DPO=UN(i+1,j)+UNP(i-1,j)-UB(i+1,j)+2*UB(i,j)-UB(i-1,j)
UXXT=CTM*DPO/(DX*DX)
VNxy=(VNP(I+1,J+1)-VNP(I-1,J+1))-(VNP(I+1,J-1)-VNP(I-1,J-1))/
! 4./DX**2
VBxy=(VB(I+1,J+1)-VB(I-1,J+1))-(VB(I+1,J-1)-VB(I-1,J-1))/
! 4./DX**2
Vxy=(V(I+1,J+1)-V(I-1,J+1))-(V(I+1,J-1)-V(I-1,J-1))/
! 4./DX**2
VVxy=(VV(I+1,J+1)-VV(I-1,J+1))-(VV(I+1,J-1)-VV(I-1,J-1))/
! 4./DX**2
VNxyt=(11*VNxy-18*VBxy+9*Vxy-2*VVxy)/6.
VBxyt=(2*VNxy+3*VBxy-6*Vxy+VVxy)/6.
Vlxyt=-(2*VVxy+3*Vxy-6*VBxy+VNxy)/6.
VVxyt=-(11*VVxy-18*Vxy+9*VBxy-2*VNxy)/6.
c Vxyt=(gamma-alfa)*HH**2*(9*VNxyt+19*VBxyt-5*Vlxyt+VVxyt)/24.
Vxyt=(alnew(i,j)-alfa)*HH**2*(9*VNxyt+19*VBxyt-
5*Vlxyt+VVxyt)/24.
VNx=(VN(I+1,J)-VNP(I-1,J))/2./dx
Vbx=(VB(I+1,J)-VB(I-1,J))/2./dx
Vx=(V(I+1,J)-V(I-1,J))/2./dx
VVx=(VV(I+1,J)-VV(I-1,J))/2./dx
Vby=(VB(I,J+1)-VB(I,J-1))/2./dx
Vy=(V(I,J+1)-V(I,J-1))/2./dx
VVy=(VV(I,J+1)-VV(I,J-1))/2./dx
Vbxt=(3*Vbx-4*Vx+VVx)/2.
Vlxt=(Vbx-VVx)/2.
VVxt=-(3*VVx-4*Vx+Vbx)/2.
Vbyt=(3*Vby-4*Vy+VVy)/2.
Vlyt=(Vby-VVy)/2.
VVyt=-(3*VVy-4*Vy+Vby)/2.
DISP4=DT*DK(I,J)*(9*VNxy+19*VBxy-5*Vxy+VVxy)/24.
DISPX=DISP1+DISP2+DISP3+DISP4+DISP5+DISP6+DISP7+DISP8+DISP9+
& DISP10+DISP11+DISP12+DISP13

IF (i.ge.3.and.i.le.im-2) THEN
UNSMX=(-UN(i+2,j)+8*UN(i+1,j)-8*UNP(i-1,j)+UNP(i-2,j))
UBSMX=(-UB(i+2,j)+8*UB(i+1,j)-8*UB(i-1,j)+UB(i-2,j))
USMSX=(-U(i+2,j)+8*U(i+1,j)-8*U(i-1,j)+U(i-2,j))
UUSMX=(-UU(i+2,j)+8*UU(i+1,j)-8*UU(i-1,j)+UU(i-2,j))
USMX=(DT/(12*DX))*(9*UNSMX+19*UBSMX-5*USMSX+UUSMX)/24.
ELSE
UNSMX=UN(i+1,j)-UNP(i-1,j)
UBSMX=UB(i+1,j)-UB(i-1,j)
USMSX=U(i+1,j)-U(i-1,j)
UUSMX=UU(i+1,j)-UU(i-1,j)
USMX=(DT/(2*DX))*(9*UNSMX+19*UBSMX-5*USMSX+UUSMX)/24.
END IF
VSMX=DT*(9*VNX+19*VBX-5*VX+VVX)/24.
IF (j.ge.3.and.j.le.jm-2) THEN
UNSMY=(-UN(i,j+2)+8*UN(i,j+1)-8*UNP(i,j-1)+UNP(i,j-2))
UBSMY=(-UB(i,j+2)+8*UB(i,j+1)-8*UB(i,j-1)+UB(i,j-2))
USMSY=(-U(i,j+2)+8*U(i,j+1)-8*U(i,j-1)+U(i,j-2))
UUSMY=(-UU(i,j+2)+8*UU(i,j+1)-8*UU(i,j-1)+UU(i,j-2))
USMY=(DT/(12*DX))*(9*UNSMY+19*UBSMY-5*USMSY+UUSMY)/24.
ELSE

```

```

UNSMY=UN(i,j+1)-UNP(i,j-1)
UBSMY=UB(i,j+1)-UB(i,j-1)
USMSY=U(i,j+1)-U(i,j-1)
UUSMY=UU(i,j+1)-UU(i,j-1)
USMY=(DT/(2*DX))*(9*UNSMY*19*UBSMY-5*USMSY+UUSMY)/24.
END IF
U2SMX=(9*DUNX+19*DUBX-5*DUX+DUUX)/24.
DVNX=DT*(VN(i+1,j)-2*VN(i,j)+VNP(i-1,j))/(DX**2)
DVX=DT*(V(i+1,j)-2*V(i,j)+V(i-1,j))/(DX**2)
DVBX=DT*(VB(i+1,j)-2*VB(i,j)+VB(i-1,j))/(DX**2)
DVVX=DT*(VV(i+1,j)-2*VV(i,j)+VV(i-1,j))/(DX**2)
V2SMX=(9*DVNX+19*DVBX-5*DVX+DVVX)/24.
UNxy=((UN(I+1,J+1)-UN(I-1,J+1))-(UN(I+1,J-1)-UN(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Uxy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
UUxy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Ubxxy=((UB(I+1,J+1)-UB(I-1,J+1))-(UB(I+1,J-1)-UB(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
Uxy=((U(I+1,J+1)-U(I-1,J+1))-(U(I+1,J-1)-U(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)
UUxy=((UU(I+1,J+1)-UU(I-1,J+1))-(UU(I+1,J-1)-UU(I-1,J-1)))/
! 4./(DX**2)

USMXY=DT*(9*UNXY+19*UBXY-5*UXY+UUXY)/24.
IF (ian .GT. 200) THEN
AM=(CS*DEL)**2*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**0.5
DMX=(CS*DEL)**2*0.5*(USMX**2+VSMX**2+0.5*(USMY+VSMX)**2)**(-0.5)*
! (2*USMX*U2SMX+2*VSMX*V2SMX+(USMY+VSMX)*(USMXY+V2SMX))
ELSE
AM=0.0
DMX=0.0
END IF
SMAG1=2*DMX*USMX+2*AM*U2SMX
SMAG2=DMX*(USMY+VSMX)+AM*(USMXY+V2SMX)
SMAG=SMAG1+SMAG2

c Z3x=DT*gamma*ga*HH**2*(Zxxx+Zxyy)
c ! +DT*gamma*ga*HH*DDX*(2*ZKXX+ZKYY)+DT*gamma*ga*HH*DDY*ZKXY
Z3x=DT*a1new(i,j)*ga*HH**2*(Zxxx+Zxyy)
! +DT*a2new(i,j)*ga*HH*DDX*(2*ZKXX+ZKYY)
! +DT*a2new(i,j)*ga*HH*DDY*ZKXY
Vyt=(23*Vbyr-16*V1yt+5*VVyt)/12.
Vxt=(23*Vbxt-16*V1xt+5*VVxt)/12.
UXT=(UNX-UBX)
c slpy=(.5+gamma)*HH*DDX*Vyt+(0.5+gamma)*HH*DDY*Vxt
slpy=(.5+a2new(i,j))*HH*DDX*Vyt+(0.5+a2new(i,j))*HH*DDY*Vxt
c slpy=(.5)*HH*DDX*Vyt+(0.5)*HH*DDY*Vxt
c SLP=DDX*HH*UXT+2*gamma*DDX*HH*UXT+slpy
SLP=DDX*HH*UXT+2*a2new(i,j)*DDX*HH*UXT+slpy
c SLP=DDX*HH*UXT+slpy
frs=dt*fc*ub(i,j)*sqrt(ub(i,j)**2+vb(i,j)**2)/HH
frst=dt*(2.*3.14/per)*dks(i,j)*ub(i,j)+frs
c frst=0.
IF (j .GT. JMS3 .AND. j .LT. JMS4) THEN
hprx=(-hpr(i+2,j)+8*hpr(i+1,j)-8*hpr(i-1,j)+hpr(i-
2,j))/ (12.*DX)
hpry=(-hpr(i,j+2)+8*hpr(i,j+1)-8*hpr(i,j-1)+hpr(i,j-
2))/ (12.*DY)

```



```

      USNX=(-USN(I+2,J)+8*USN(I+1,J)-8*USNP(I-1,J)+USNP(I-
2,J))/ (12.*DX)
      USBX=(-USB(I+2,J)+8*USB(I+1,J)-8*USB(I-1,J)+USB(I-
2,J))/ (12.*DX)
      USXT=USNX-USBX
      USNXX=(USN(I+1,J)-2*USN(I,J)+USNP(I-1,J))/ (DX**2)
      USBXX=(USB(I+1,J)-2*USB(I,J)+USB(I-1,J))/ (DX**2)
      USXXT=USNXX-USBXX
      VSNX=(-VSN(I+2,J)+8*VSN(I+1,J)-8*VSNP(I-1,J)+VSNP(I-
2,J))/ (12.*DX)
      VSBX=(-VSB(I+2,J)+8*VSB(I+1,J)-8*VSB(I-1,J)+VSB(I-
2,J))/ (12.*DX)
      VSXT=VSNX-VSBX
      VSNY=(-VSN(I,J+2)+8*VSN(I,J+1)-8*VSNP(I,J-1)+VSNP(I,J-
2))/ (12.*DY)
      VSBY=(-VSB(I,J+2)+8*VSB(I,J+1)-8*VSB(I,J-1)+VSB(I,J-
2))/ (12.*DY)
      VSYT=VSNY-VSBY
      VSNXY=((VSN(I+1,J+1)-VSN(I-1,J+1))- (VSN(I+1,J-1)-VSN(I-1,J-1)))/
! 4./ (DX**2)
      VSBXY=((VSB(I+1,J+1)-VSB(I-1,J+1))- (VSB(I+1,J-1)-VSB(I-1,J-1)))/
! 4./ (DX**2)
      VSXYT=VSNXY-VSBXY

      port1=por*HH*hprx*USXT
      port2=0.5*por*HH*HPR(I,J)*(USXXT+VSXYT)
      port3=0.5*por*HH*(HPRX*VSYT+HPRY*VSXT)
      ELSE
      port1=0.
      port2=0.
      port3=0.
      END IF

      UNP(i,j)=(UB(i,j)-UUX-VUY-VAR-UXXT+Vxyt+Z3x+SLP+DISPX-
!frst-frict+port1+port2+port3+SMAG)/ORMX
      END DO
      END DO

c *****
c final coditions for u velocities
c in computational domain's limits Y-axis
c *****
      do j=1,jm
      unp(1,j)=0.
      !UNP(2,J)
      unp(im,j)=0.
      !UNP(IM-1,J)
      un(1,j)=0.
      !UN(2,J)
      un(im,j)=0.
      !UN(IM-1,J)
      end do

c *****
c 5-points filtering for u velocities
c in boundaries of X-axis
c *****
      do i=1,im
      unp(i,1)=(48*unp(i,2)-36*unp(i,3)+16*unp(i,4)
! -3*unp(i,5))/25.
      unp(i,jm)=unp(i,jm-1)
      un(i,1)=unp(i,1)

```

```

un(i,jm)=unp(i,jm)
end do
DU=0.
DV=0.
DZ=0.
DZZ=0.0
DUU=0.0
DVV=0.0
DUS=0.0
DVS=0.0
DUSS=0.0
DVSS=0.0
do j=2,jm-1
DO I=2,IM-1
DU=DU+ABS(UN(i,j)-UNP(i,j))
DV=DV+ABS(VN(i,j)-VNP(i,j))
DZ=DZ+ABS(ZN(i,j)-ZNP(i,j))
DUS=DUS+ABS(USN(i,j)-USNP(i,j))
DVS=DVS+ABS(VSN(i,j)-VSNP(i,j))
DUU=DUU+abs(UNP(i,j))
DVV=DVV+abs(VNP(i,j))
DZZ=DZZ+abs(ZNP(i,j))
DUSS=DUSS+abs(USNP(I,J))
DVSS=DVSS+abs(VSNP(I,J))
END DO
end do
if (DUU.lt..001) DUU=1.
if (DVV.lt..001) DVV=1.
if (DZZ.lt..001) DZZ=1.
if (DUSS.lt..001) DUSS=1.
if (DVSS.lt..001) DVSS=1.
DUL=DU/DUU
DVL=DV/DVV
DZL=DZ/DZZ

IF (j .gt. jms3 .and. j .lt. jms4) THEN
  DUSL=DUS/DUSS
  DVSL=DVS/DVSS
  ELSE
  DUSL=0.
  DVSL=0.
  END IF

301 IF (DUL.GE.0.001.OR.DZL.GE.0.001.OR.DVL.GE.0.001
      !.OR.DUSL.GE.0.001.OR.DVSL.GE.0.001 ) THEN
ITER=ITER+1

if(iter.EQ.1.OR.ian.EQ.1) then
c *****
c BREAKING
c *****
  do i=2,im-1
  do j=2,jm-1
ZBXP=(ZB(i+1,j)-ZB(i-1,j))/2./DX
ZBYP=(ZB(i,j+1)-ZB(i,j-1))/2./DY
HH=D(i,j)+ZNP(i,j)
zt(i,j)=(znp(i,j)-z(i,j))/2./dt
etmp=max(0.00001,abs(zbxp))
angle=atan(zbyp/etmp)
atmp=45.0/180*pi
if(abs(angle).LE.atmp) then

```

```

iage=min(itb(i,j+1),itb(i,j-1))
iage=min(iage,itb(i,j))
if(iage.LT.nm)then
dp=max(ddk,d(i,j))
trnt=coeft*sqrt(abs(dp/ga))
et_tc=et1-(et1-et2)*float(ian-iage)*dt/trnt
ctb(i,j)=max(et_tc,et2)
else
ctb(i,j)=et1
endif
elseif(angle.GT.atmp)then
iage=min(itb(i+1,j+1),itb(i-1,j-1))
iage=min(iage,itb(i,j))
if(iage.LT.nm)then
dp=max(ddk,d(i,j))
trnt=coeft*sqrt(abs(dp/ga))
et_tc=et1-(et1-et2)*float(ian-iage)*dt/trnt
ctb(i,j)=max(et_tc,et2)
else
ctb(i,j)=et1
endif
elseif(angle.LT.-atmp)then
iage=min(itb(i+1,j-1),itb(i-1,j+1))
iage=min(iage,itb(i,j))
if(iage.LT.nm)then
dp=max(ddk,HH)
trnt=coeft*sqrt(abs(dp/ga))
et_tc=et1-(et1-et2)*float(ian-iage)*dt/trnt
ctb(i,j)=max(et_tc,et2)
else
ctb(i,j)=et1
endif
endif
enddo
enddo
endif
GOTO 300
ELSE
GOTO 350
ENDIF

300 continue
IF (ITER.GT.200) GOTO 350
do j=2,jm-1
DO I=2,IM-1
VN(i,j)=VNP(i,j)
UN(i,j)=UNP(i,j)
ZN(i,j)=ZNP(i,j)
USN(i,j)=USNP(I,J)
VSN(I,J)=VSNP(I,J)
END DO
end do
GOTO 430
350 CONTINUE
write (*,444) t,ITER,znp(im/2,jst),usnp(145,100),
! unsp(100,140)
444 format(f6.3,2x,I3,F15.10,F15.10,F15.10)
do i=1,im
do j=1,jm
dk(i,j)=0.
end do

```

```

end do
do i=2,im-1
do j=2,jm-1
HH=D(i,j)+Znp(i,j)
zt(i,j)=(znp(i,j)-z(i,j))/2./dt
dp=max(ddk,HH)
et_tc=ctb(i,j)*sqrt(abs(ga*dp))
tmp=zt(i,j)
if(tmp.LE.et_tc)then
cbr=0.
itb(i,j)=nm
else
cbr=min(1.0,(tmp/et_tc-1.0))
itbrk=1
itb(i,j)=min(itb(i,j),ian)
endif
if(znp(i,j)+d(i,j).LT.ddk)then
cbr=1.0
dp=max(ddk,abs(znp(i,j)))
endif
dk(i,j)=cbr*cbrk**2*dp*abs(zt(i,j))
enddo
enddo
do ijk=1,3
do i=2,im-1
do j=2,jm-1
dk(i,j)=.6*dk(i,j)+.10*dk(i+1,j)+.10*dk(i-1,j)+
& .10*dk(i,j+1)+.10*dk(i,j-1)
end do
end do
end do
c *****
c SPONGIA
c *****
idump1=50
idump2=im-50
do j=1,jm
do i=1,idump1-1
xmxs=i*dx-idump1*dx
xlmxs=idump1*dx
parx=(xmxs/xlmxs)**2
fdxp=exp(parx)-1
ena=1.
fdx=fdxp/(exp(ena)-1)
dks(i,j)=.25*fdx
rm=1.+dks(i,j)
unp(i,j)=unp(i,j)/rm
vnp(i,j)=vnp(i,j)/rm
znp(i,j)=znp(i,j)/rm
dks(i,j)=0.
end do
do i=idump2,im
xmxs=i*dx-idump2*dx
xlmxs=im*dx-idump2*dx
parx=(xmxs/xlmxs)**2
fdxp=exp(parx)-1
ena=1.
fdx=fdxp/(exp(ena)-1)
dks(i,j)=.25*fdx
rm=1.+dks(i,j)
unp(i,j)=unp(i,j)/rm

```

```

vnp(i,j)=vnp(i,j)/rm
znp(i,j)=znp(i,j)/rm
dks(i,j)=0.
end do
end do
jdump1=95
jdump2=jm-10
do i=1,im
do j=1,jdump1
ymys=j*dy-jdump1*dy
ylmys=jdump1*dy
pary=(ymys/ylmys)**2
fdyp=exp(pary)-1
ena=1.
fdy=fdyp/(exp(ena)-1)
dks(i,j)=.25*fdy
rm=1.+dks(i,j)
unp(i,j)=unp(i,j)/rm
vnp(i,j)=vnp(i,j)/rm
znp(i,j)=znp(i,j)/rm
dks(i,j)=0.
end do
c jdump2=jsb(i)
do j=jdump2,jm
ymys=j*dy-jdump2*dy
ylmys=jm*dy-jdump2*dy
pary=(ymys/ylmys)**2
fdyp=exp(pary)-1
ena=1.
fdy=fdyp/(exp(ena)-1)
dks(i,j)=.25*fdy
rm=1.+dks(i,j)
unp(i,j)=unp(i,j)/rm
vnp(i,j)=vnp(i,j)/rm
znp(i,j)=znp(i,j)/rm
dks(i,j)=0.
end do
end do
c *****
c SMOOTHING
c *****
c afl=.125
afl=.25
rps=afl*per/dt
irps=int(afl*per/dt)
dif=abs(ian/rps-int(ian/irps))
c IF (dif.lt.dt) THEN
do i=2, im-1
do j=2, jm-1
znp(i,j)=wf1*znp(i,j)+wf2*(znp(i,j+1)+znp(i,j-1)
! +znp(i+1,j)+znp(i-1,j))
unp(i,j)=wf1*unp(i,j)+wf2*(unp(i,j+1)+unp(i,j-1)
! +unp(i+1,j)+unp(i-1,j))
vnp(i,j)=wf1*vnp(i,j)+wf2*(vnp(i,j+1)+vnp(i,j-1)
! +vnp(i+1,j)+vnp(i-1,j))
end do
end do
c else
c end if
write(10,*) t,znp(im/2,jst)
write(11,*) t,znp(im/2,jm/2)

```

```

        write(21,126) t,znp(80,127),znp(116,127),znp(169,122),
        !znp(165,133),
!znp(175,130),znp(181,122),znp(185,133),znp(234,127),znp(270,127),
!znp(270,130),znp(270,135),znp(173,164),znp(244,162),znp(244,167),
!znp(175,203),znp(175,206),znp(175,211),znp(222,205),znp(270,193),
        !znp(270,196),znp(270,201)

c      *****
c      PALAIOSH
c      *****
        do J=1,JM
        DO I=1,IM
        ZZ(i,j)=Z(i,j)
        Z(i,j)=ZB(i,j)
        ZB(i,j)=ZNP(i,j)
        UU(i,j)=U(i,j)
        U(i,j)=UB(i,j)
        UB(i,j)=UNP(i,j)
c      UNP(I,J)=UN(I,J)
        VV(i,j)=V(i,j)
        V(i,j)=VB(i,j)
        VB(i,j)=VNP(i,j)
        USO(i,j)=US(i,j)
        US(i,j)=USB(i,j)
        USB(i,j)=USNP(i,j)
        VSO(i,j)=VS(i,j)
        VS(i,j)=VSB(i,j)
        VSB(i,j)=VSNP(i,j)
        end do
        end do
555 format(2f12.6)

c      *****
c      KATANOMH      TAXYTHTWN
c      *****

        do i=1,im
        do j=1,jm
UMU(I,J)=(UNP(I,J)*ABS(UNP(I,J))*D(I,J)+USNP(I,J)*ABS(USNP(I,J))
!*HPR(I,J))/DDD
        IF (UMU(I,J).GE.0.0) THEN
        UM(I,J)=SQRT(UMU(I,J))
        ELSE
        UM(I,J)=-SQRT(abs(UMU(I,J)))
        ENDIF
        enddo
        enddo
        do i=1,im
        do j=1,jm
VMV(I,J)=(VNP(I,J)*ABS(VNP(I,J))*D(I,J)+VSNP(I,J)*ABS(VSNP(I,J))
!*HPR(I,J))/DDD
        IF (VMV(I,J).GE.0.0) THEN
        VM(I,J)=SQRT(VMV(I,J))
        ELSE
        VM(I,J)=-SQRT(abs(VMV(I,J)))
        ENDIF
        enddo
        enddo
        do i=2,im-1
        do j=2,jm-1

```

```

UM(i,j)=wf1*UM(i,j)+wf2*(UM(i,j+1)+UM(i,j-1)+UM(i+1,j)+UM(i-1,j))
VM(i,j)=wf1*VM(i,j)+wf2*(VM(i,j+1)+VM(i,j-1)+VM(i+1,j)+VM(i-1,j))
end do
end do

do i=2,im-1
do j=2,jm-1
DD1(I,J)=0.
UUM1(I,J)=(UM(I+1,J)-UM(I-1,J))/(DX*2.)
VVM1(I,J)=(VM(I+1,J)-VM(I-1,J))/(DX*2.)
DD2(I,J)=0.
UUM2(I,J)=(UM(I+1,J)-2.*UM(I,J)+UM(I-1,J))/(DX**2.)
VVM2(I,J)=(VM(I+1,J)-2.*VM(I,J)+VM(I-1,J))/(DX**2.)
enddo
enddo

c u,porwdes meso
c do i=1,im
c do j=1,jm
I=244
J=164
a1=-ddd
a4=-d(i,j)
a2=(2.0*a1+a4)/3.0
a3=(a1+2.0*a4)/3.0
usmn(i,j)=(a4-a1)*(umz(um(i,j),ddd,dd2(i,j),uum2(i,j),dd1(i,
!j),uum1(i,j),a1)+3.0*umz(um(i,j),ddd,dd2(i,j),uum2(i,j),dd1(i,
!j),uum1(i,j),a2)+3.0*umz(um(i,j),ddd,dd2(i,j),uum2(i,j),dd1(i,
!j),uum1(i,j),a3)+umz(um(i,j),ddd,dd2(i,j),uum2(i,j),dd1(i,
!j),uum1(i,j),a4))/(8.0*hpr(i,j))
if (usmn(i,j).eq.0.) then
aus(i,j)=0.
else
aus(i,j)=usnp(i,j)/usmn(i,j)
endif
c u,nero

a1=-d(i,j)
a4=0.0
a2=(2.0*a1+a4)/3.0
a3=(a1+2.0*a4)/3.0
umn(i,j)=(a4-a1)*(umz(um(i,j),ddd,dd2(i,j),uum2(i,j),dd1(i,
!j),uum1(i,j),a1)+3.0*umz(um(i,j),ddd,dd2(i,j),uum2(i,j),dd1(i,
!j),uum1(i,j),a2)+3.0*umz(um(i,j),ddd,dd2(i,j),uum2(i,j),dd1(i,
!j),uum1(i,j),a3)+umz(um(i,j),ddd,dd2(i,j),uum2(i,j),dd1(i,
!j),uum1(i,j),a4))/(8.0*d(i,j))
if (umn(i,j).eq.0.) then
au(i,j)=0.
else
au(i,j)=unp(i,j)/umn(i,j)
endif

c v,porwdes meso
a1=-ddd
a4=-d(i,j)
a2=(2.0*a1+a4)/3.0
a3=(a1+2.0*a4)/3.0
vsmn(i,j)=(a4-a1)*(vmz(vm(i,j),ddd,dd2(i,j),vvm2(i,j),dd1(i,
!j),vvm1(i,j),a1)+3.0*vmz(vm(i,j),ddd,dd2(i,j),vvm2(i,j),dd1(i,
!j),vvm1(i,j),a2)+3.0*vmz(vm(i,j),ddd,dd2(i,j),vvm2(i,j),dd1(i,
!j),vvm1(i,j),a3)+vmz(vm(i,j),ddd,dd2(i,j),vvm2(i,j),dd1(i,

```

```

!j),vvm1(i,j),a4))/(8.0*hpr(i,j))
  if (vsmn(i,j).eq.0.) then
    avs(i,j)=0.
  else
    avs(i,j)=vsnp(i,j)/vsmn(i,j)
  endif

c   v,nero
    a1=-d(i,j)
    a4=0.0
    a2=(2.0*a1+a4)/3.0
    a3=(a1+2.0*a4)/3.0
    vmn(i,j)=(a4-a1)*(umz(vm(i,j),ddd,dd2(i,j),vvm2(i,j),ddl(i,
!j),vvm1(i,j),a1)+3.0*umz(vm(i,j),ddd,dd2(i,j),vvm2(i,j),ddl(i,
!j),vvm1(i,j),a2)+3.0*umz(vm(i,j),ddd,dd2(i,j),vvm2(i,j),ddl(i,
!j),vvm1(i,j),a3)+umz(vm(i,j),ddd,dd2(i,j),vvm2(i,j),ddl(i,
!j),vvm1(i,j),a4))/(8.0*d(i,j))
    if (vmn(i,j).eq.0.) then
      av(i,j)=0.
    else
      av(i,j)=vnp(i,j)/vmn(i,j)
    endif

c   ypologismos telikwn taxyhtwn (apo telikes katanomes)
    do k=1,10
      c   porwdes meso
      usfin(i,j,k)=aus(i,j)*umz(um(i,j),d(i,j),dd2(i,j),uum2(i,j),ddl(i,
!j),uum1(i,j),vath1(i,j,k))
      vsfin(i,j,k)=avs(i,j)*umz(vm(i,j),d(i,j),dd2(i,j),vvm2(i,j),ddl(i,
!j),vvm1(i,j),vath1(i,j,k))

c   nero
      ufin(i,j,k)=au(i,j)*umz(um(i,j),d(i,j),dd2(i,j),uum2(i,j),ddl(i,
!j),uum1(i,j),vath2(i,j,k))
      vfin(i,j,k)=av(i,j)*umz(vm(i,j),d(i,j),dd2(i,j),vvm2(i,j),ddl(i,
!j),vvm1(i,j),vath2(i,j,k))
    enddo

c   enddo
c   enddo

126  format (600f12.8)
      NPER=INT(PER/DT)

      i18t=int(18./dt)
      IF (ian.GE.i192t) THEN
      DO I=1,IM
      DO J=1,JM
      zs(i,j)=zs(i,j)+(zb(i,j))**2
      zs(i,j)=sqrt(abs(zs(i,j)))/(25*NPER))
      He(i,j)=2.*sqrt(2.)*zs(i,j)
      zm(i,j)=zm(i,j)+znp(i,j)
      umm(i,j)=umm(i,j)+unp(i,j)
      vmm(i,j)=vmm(i,j)+vnp(i,j)
      END DO
      END DO

      DO I=1,IM
      DO J=1,JM
      if(znp(i,j).gt.zmax(i,j)) then
      zmax(i,j)=znp(i,j)
      else
      end if

```



```

if(znp(i,j).lt.zmin(i,j)) then
zmin(i,j)=znp(i,j)
else
end if
Hede(i,j)=abs(zmax(i,j))+abs(zmin(i,j))
END DO
END DO
else
end if

i24t=int(24/dt)+1
IF (ian.EQ.i24t) THEN
open (unit=84,file='xwranyps24.dat')
do j=1,jm
do i=1,im
write(84,128) i*dx,j*dx,znp(i,j)
write (71,*) i,j,dk(i,j)
end do
enddo
else
end if

i2425t=int(24.25/dt)+1
IF (ian.EQ.i2425t) THEN
open (unit=85,file='xwranyps2425.dat')
do j=1,jm
do i=1,im
write(85,128) i*dx,j*dx,znp(i,j)
write (5,*) i,j,dk(i,j)
end do
enddo
else
end if

i245t=int(24.5/dt)+1
IF (ian.EQ.i245t) THEN
open (unit=86,file='xwranyps245.dat')
do j=1,jm
do i=1,im
write(86,128) i*dx,j*dx,znp(i,j)
write (8,*) i,j,dk(i,j)
end do
enddo
else
end if

i2475t=int(24.75/dt)+1
IF (ian.EQ.i2475t) THEN
open (unit=87,file='xwranyps2475.dat')
do j=1,jm
do i=1,im
write(87,128) i*dx,j*dx,znp(i,j)
end do
enddo
else
end if

i25t=int(25/dt)+1
IF (ian.EQ.i25t) THEN
open (unit=88,file='xwranyps25.dat')
do j=1,jm
do i=1,im
write(88,128) i*dx,j*dx,znp(i,j)
end do

```

```

        enddo
        else
        end if

128 format (800f12.5)

        IF(ian*dt.lt.TEND) GOTO 100
c      *****
c      END OF TIME LOOP
c      *****

        do i=1,im
        do j=1,jm
        He(i,j)=He(i,j)/0.0464
        Hede(i,j)=Hede(i,j)/0.0464
        zm(i,j)=zm(i,j)/(25*NPER)
        umm(i,j)=umm(i,j)/(25*NPER)
        vmm(i,j)=vmm(i,j)/(25*NPER)
        write (42,*) i*dx, j*dx, umm(i,j)
        write (43,*) i*dx, j*dx, vmm(i,j)
        write (47,*) i*dx, j*dx, zm(i,j)
        write (72,*) i*dx, j*dx, He(i,j)
        write (48,*) i*dx, j*dx, Hede(i,j)
        end do
        end do
        do i=3,im-2
        do j=3,jm-2
vorticity(i,j)=(8.*(vmm(i+1,j)-vmm(i-1,j))-(vmm(i+2,j)-vmm(i-2,j))
! -8.*(umm(i,j+1)-umm(i,j-1))+(umm(i,j+2)-umm(i,j-2)))/12.*dx
        write (44,*) i*dx, j*dx, vorticity(i,j)
        enddo
        enddo

        open (unit=75,file='xwranyps120.dat')
        do j=1,jm
        do i=1,im
        write(75,*) i*dx,j*dx,znp(i,j)
        end do
        write (45,*) j,zm(175,j)
        write (46,*) j,zm(244,j)
        enddo
        close (75)
123 format (800f12.5)

        open (unit=98,file='tomhi3.dat')
        open (unit=99,file='tomhi4.dat')
        do i=1,im
        write (98,*) i,zm(i,153)
        write (99,*) i,zm(i,193)
        enddo
        stop
        END

c      ypologismos katanomhs um kata dingemans
        real*8 function umz(umf,hf,hxxf,umxxf,hxf,umxf,zf)
        real*8 umf,hf,hxxf,umxxf,hxf,umxf,zf
        umz=umf-(0.5*hf*(hxxf*umf+umxxf*hf+2.0*hxf*umxf)-(1.0/6.0)*hf**2.0
! *umxxf)-(zf*(hxxf*umf+umxxf*hf+2.0*hxf*umxf)+0.5*zf**2.0*umxxf)
        return
        end

```